

**ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ
ΚΑΙ
Η ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

Ιωάννης Αραχωβίτης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Πανεπιστημιόπολη, Αθήνα 15784
e-mail: iarahov@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η καθ'όλο το μήκος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης διδασκόμενη Γεωμετρία είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία με βαθμό αυστηρότητας ο οποίος είναι φυσικά αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Σ'όλα τα στάδια, αρωγός του εκπαιδευτικού είναι ο Η/Υ, ο οποίος όμως όπως επισημαίνεται, χρησιμοποιεί τεχνικές στηριζόμενες σε μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες γενικότερες στο Δημοτικό, παρά στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Σ'αυτά που ακολουθούν επιχειρείται μια σκιαγράφηση των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών αυτών, ώστε ο διδάσκων να γνωρίζει το στίγμα του στην πλεύση του αυτή ...εκτός χωρικών υδάτων.

Εισαγωγή

Επειδή τελευταία πολλοί αυτοαναγορεύονται ειδικοί σε αντικείμενα το υπόβαθρο των οποίων αγνοούν, σπεύδω να δηλώσω ότι δεν είμαι ειδικός περί τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές. Επειδή όμως, ως απλός χρήστης, έχω την υπόνοια ότι πίσω από τους Η/Υ κρύβονται κάποια Μαθηματικά, προσπαθώ ν' ανακαλύψω ποια, σε κάθε περίπτωση είναι αυτά τα Μαθηματικά. Αυτό το θεωρώ έκ των ών ούκ άνευ, ειδικά όταν πρόκειται να διδάξεις χρησιμοποιώντας τις ευκολίες ενός Η/Υ. Αλλιώς δεν είσαι συνειδητοποιημένος δάσκαλος αφού και συ ο ίδιος δεν ξέρεις πού πατάς, όπως δεν ξέρουν και αυτοί οι δύστυχοι που περιμένουν από σένα για να μάθουν. Και ο

δάσκαλος είναι ο τελευταίος που είναι ανεκτό να κοροϊδεύει την κοινωνία ολόκληρη.

Ας έρθουμε λοιπόν στη χρήση των Η/Υ για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας τόσο στο Δημοτικό, όσο και στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.

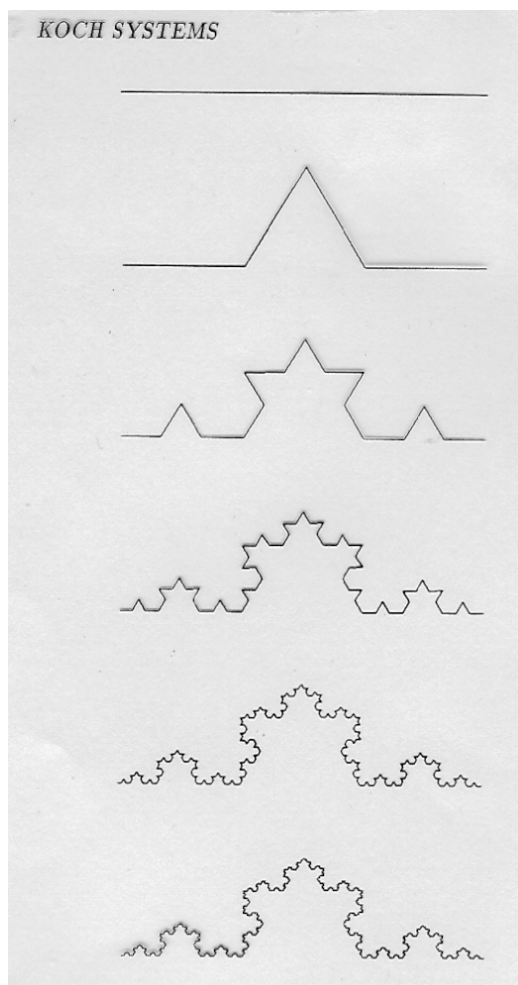
1. Στο Δημοτικό

Στο Δημοτικό ένα κατά κόρον χρησιμοποιούμενο λογισμικό είναι τα περίφημα Γραφικά της Χελώνας (Turtle Graphics) του Seymour Papert (βλ. [9], σ.376), που οδηγούνται από τον Η/Υ ο οποίος τρέχει τη γλώσσα Logo. Αυτά σχεδιάστηκαν αρχικά ως εκπαιδευτικό εργαλείο, ώστε να επιτρέπουν στο παιδί να εξερευνά τη Γεωμετρία σχεδιάζοντας με συγκεκριμένο απλό τρόπο τα διάφορα σχήματα και ανακαλύπτοντας τις ιδιότητές τους.

Τα Γραφικά της Χελώνας αποτελούν μια γραφική ερμηνεία (βλ.[9],σ.376) των L-Systems του βιολόγου Aristid Lindenmayer (βλ.[9],σ.355) την οποία εισήγαγε ο P.Prusinkiewicz (βλ.[9],σ.376 , επίσης βλ.[5]).Χρησιμοποιούνται σήμερα , παράλληλα με άλλες τεχνικές , για την κατασκευή Fractal καμπύλων , όπως π.χ. η καμπύλη και η Νιφάδα von Koch (βλ. και [0]). Γι' αυτήν σημειωτέον δεν υπάρχει αλγεβρικός τύπος που να ορίζει τη θέση των σημείων της καμπύλης (βλ.[11],σ.191) . Οπότε ελλείπει Αναλυτικής Γεωμετρίας μπορούμε να καταφύγουμε στη Γεωμετρία της Χελώνας των H.Abelson και A.A.diSessa (βλ.[4],σ.206).

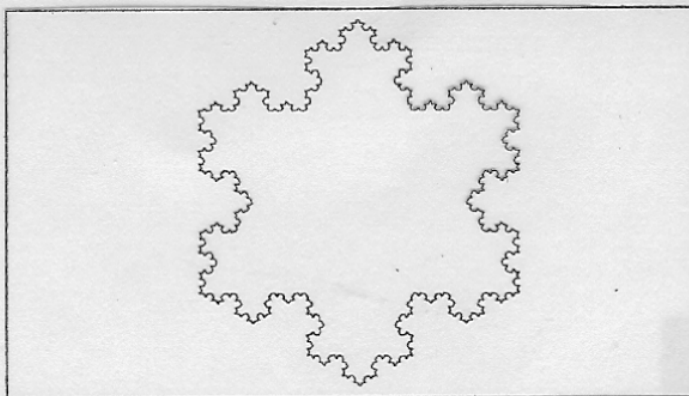
Μιά και αναφερθήκαμε στη Νιφάδα von Koch , να παρατηρήσουμε ότι αυτή μπορεί να προκύψει ως όριο μιάς *πραγόμενης* ακολουθίας συμπαγών συνόλων του *συστήματος von Koch* ($C ; S_1, S_2, \dots, S_n$), (βλ.[8],σ.385) και είναι -μαζί με το σύνολο Cantor , το τρίγωνο Sierpinski , την καμπύλη Peano κ.λ.π.- ένα από τα λεγόμενα «μαθηματικά τέρατα» που χρησιμοποιούνται ως αντιπαραδείγματα για να δείξουμε π.χ. ότι υπάρχουν καμπύλες που «γεμίζουν» ένα ολόκληρο τετράγωνο (Peano space-filling curve) καθώς και συνεχείς και πουθενά διαφορίσιμες καμπύλες (von Koch continuous and nowhere differentiable curve) .

Τα L-Systems σχετίζονται άμεσα με τις λεγόμενες Multiple Reduction Copy Machines (MRCM) που ταυτίζονται με τα Iterated Function Systems (IFS) (βλ.[9],σ.231 ,καθώς και [2],[5] κ.λπ.) και οι οποίες χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση εικόνων.



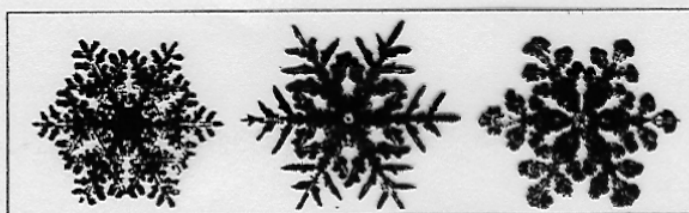
The Koch Snowflake

The outline of the Koch snowflake (also called Koch island) is composed of three congruent parts, each of which is a Koch curve



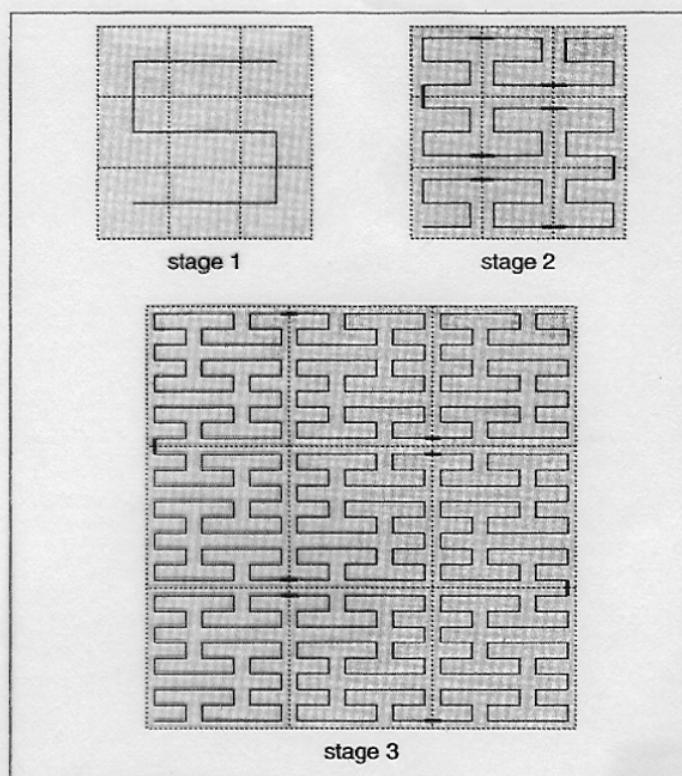
Some Natural Flakes

The Koch snowflake obviously has some similarities with real flakes, some of which are pictured here.



Another Space-Filling Peano Curve

The first stages of the space-filling S-curve. It is a collage of S- and Z-shaped curves.



Stage 3: $+ - + RF - LFL - FR + F + - LF + RFR + FL - F - LF + RFR + FL - + F + RF - LFL - FR + - F - + - LF + RFR + FL - F - + RF - LFL - FR + F + RF - LFL - FR + - F - LF + RFR + FL - + F + - LF + RFR + FL - F - + RF - LFL - FR + F + RF - LFL - FR + - F - LF + RFR + FL - + F + RF - LFL - FR + - +$.

Όλα τα παραπάνω εμπίπτουν σ' αυτό που καλείται Imaging , απ' όπου και προέρχονταν τα θέματα για τα οποία μας μίλησε ο καθηγητής Φωκάς , στο 18^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ στη Ρόδο , όσο και στη 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education, στην Αθήνα , όπου καταφαίνεται η σημασία του μετασχηματισμού Radon (βλ. και [12]) στην Υπολογιστική Τομογραφία (Computerized Tomography) του εγκεφάλου (και όχι μόνο) , καθώς και η συμβολή του I.M.Gel'fand πασίγνωστου από τη Θεωρία των Τοπολογικών Αλγεβρών (και όχι μόνο, ασφαλώς) , [6].

Μετά από αυτή την κάτοψη που πολύ πρόχειρα επιχειρήσαμε , ας έρθουμε πιο κοντά στην αργή Χελώνα η οποία όμως και πάλι αποδεικνύεται αποτελεσματική , όπως και στο μύθο του Αισώπου .

Ας θεωρήσουμε μια χελώνα που κάθετα σε μία σελίδα χαρτιού κοιτάζοντας προς μία ορισμένη κατεύθυνση. Η ουρά της χελώνας είναι λίγο βρόμικη. Έτσι , αφήνει ένα ίχνος στο χαρτί μόλις αρχίζει να κινείται. Υποθέτουμε ότι η χελώνα είναι καλά εκπαιδευμένη έτσι ώστε να καταλαβαίνει κάποιες οδηγίες που της δίνουμε από μακριά, υπό μορφή συμβόλων που είναι ορισμένα γράμματα του αλφαβήτου ,καθώς και τα πρόσημα + και - . Συγκεκριμένα:

F σημαίνει κινήσου εμπρός κατά ένα σταθερό βήμα l και χάραξε ένα ευθύγραμμο τμήμα από την παλιά στη νέα θέση σου.

f σημαίνει κάνε τα ίδια όπως παραπάνω χωρίς όμως να χαράξεις τίποτα (δηλαδή με σηκωμένη την ουρά σου) .

+ σημαίνει στρίψε αριστερά (αντίθετα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) κατά μία ορισμένη γωνία δ .

- σημαίνει στρίψε δεξιά (κατά την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) κατά μία ορισμένη γωνία δ .

Αν θέλουμε π.χ. η χελώνα να κινηθεί εμπρός ένα βήμα γράφοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους l , θα δώσουμε την εντολή F . Μετά για να στρίψει αριστερά κατά $\delta = 90^0$ και να γράψει πάλι ευθύγραμμο τμήμα μήκους l , θα δώσουμε +F. Για να σηκώσει την ουρά της και να κινηθεί εμπρός κατά l , δίνουμε f . Για να στρίψει δεξιά κατά $\delta = 90^0$ και να γράψει άλλο ένα βήμα l , δίνουμε -F , κ.ο.κ.

Παρά την απλότητά του , μπορούμε μ' αυτό τον τρόπο να επιτύχουμε πολύ σύνθετα σχήματα εκτός των απλών γεωμετρικών σχημάτων του Δημοτικού : τετράγωνο , ορθογώνιο , ρόμβος παραλληλόγραμμο , τραπέζιο κ.λ.π. Οι δυνατότητες αυτές καταγράφονται στην επόμενη σελίδα

(βλ.[9] ,σ.377) , όπου τώρα εξηγείται και η ακολουθία με την ένδειξη stage 3 της προηγούμενης σελίδας σχημάτων (βλ.[9], σ.390) στην καμπύλη Peano.

Για να δούμε τώρα ποιά Γεωμετρία ακολουθεί η χελώνα , βοηθώντας τα παιδιά του Δημοτικού στην πρώτη τους επαφή με την Ευκλείδεια Γεωμετρία παρατηρούμε ότι με λίγη τριγωνομετρία , εύκολα καταλήγουμε στην παρακάτω μαθηματική ερμηνεία των συμβόλων $F, f, +, -$:

Η τρέχουσα θέση της χελώνας περιγράφεται από ένα ζεύγος συντεταγμένων (x, y) και ο προσανατολισμός της από μία γωνία α .Αυτό δηλώνεται γράφοντας (x, y, α) . Οι εντολές $F, f, +, -$ τότε περιγράφονται αντίστοιχα από τις τριάδες

F, f	$(x + l \cos \alpha, y + l \sin \alpha, \alpha)$
$\pm$	$(x, y, \alpha \triangleq \delta)$

όπου l το μήκος του βήματος εμπρός και δ η γωνία που στρέφει αριστερά ή δεξιά. Πάντοτε αρχίζουμε απο τη θέση $(0, 0, 0)$, δηλαδή με τη χελώνα να κοιτάζει δεξιά.Επομένως , η αλλαγή θέσης (x', y', α') θα είναι

είτε	$(x', y', \alpha') = (x + l \cos \alpha, y + l \sin \alpha, \alpha)$
είτε	$(x', y', \alpha') = (x, y, \alpha \triangleq \delta)$

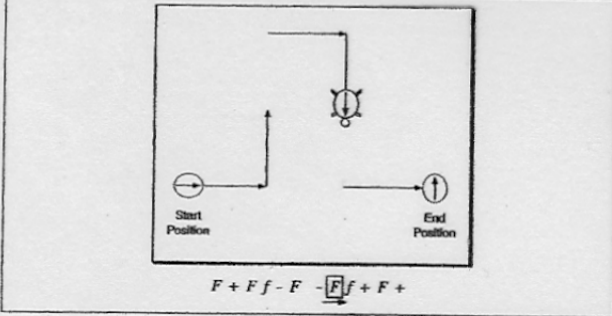
δηλαδή προκύπτουν οι μετασχηματισμοί :

$(x', y', \alpha') = (x, y, \alpha) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (l \cos \alpha, l \sin \alpha)$	(1)
$(x', y', \alpha') = (x, y, \alpha) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha \triangleq \delta)/\alpha \end{bmatrix}$	

οι οποίοι ουσιαστικά παριστάνουν στο επίπεδο μία μεταφορά κατά $(l \cos \alpha, l \sin \alpha)$ και μία στροφή περί το (x, y) κατά γωνία $\triangleq \delta$. Ανατρέχοντας στον πίνακα της επόμενης σελίδας σχημάτων , βλέπουμε οτι η οποιαδήποτε κίνηση της χελώνας προκύπτει ως σύνθεση των παραπάνω απεικονίσεων , οι οποίες είναι **συσχετισμένες (γραμμικές) απεικονίσεις**. Επομένως

βρισκόμαστε σε περιβάλλον **Γραμμικής Γεωμετρίας** απο την οποία , όπως όλοι όσοι έχουν διδαχθεί Γραμμική Γεωμετρία (βλ. [3]) γνωρίζουν , προκύπτει ως υποπροϊόν η Ευκλείδεια Γεωμετρία.(και όχι μόνον) .Μάλιστα αν καλέσουμε G την ομάδα η οποία παράγεται από τις (1), τότε η **Γεωμετρία της Χελώνας** είναι η **Γεωμετρία Klein** $(G, \mathbb{R}^2)$ δηλαδή όπου η ομάδα G δρά επί του $\mathbb{R}^2$.

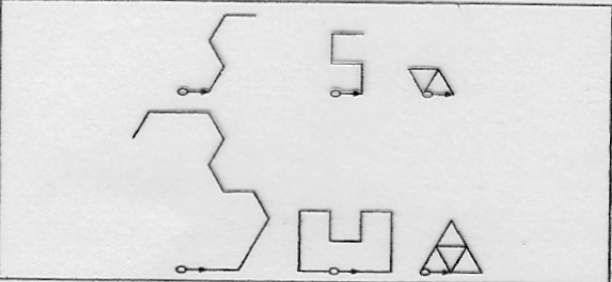
Συνεπώς, στο Δημοτικό Σχολείο διδάσκουμε Ευκλείδεια Γεωμετρία με τη βοήθεια μιας μη Ευκλείδειας μεθόδου , πολύ πιο σύγχρονης και γενικής, ακολουθώντας το πρόγραμμα του Erlangen.



$F + F f - F - [F] f + F +$

Turtle Interpretation

Turtle interpretation of a string of symbols. Initially the turtle is headed left to right. When the interpretation of all 12 symbols is completed the turtle will be headed up.

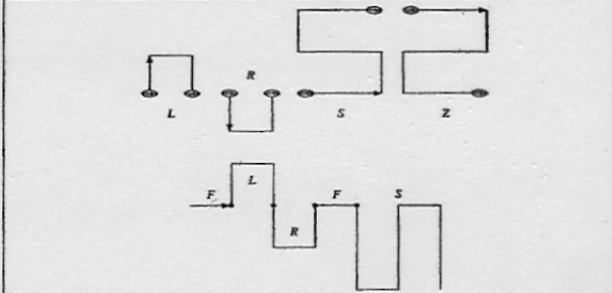


Two Strings — Three Angles

Graphical interpretation of two strings, $F + F + F - F - F$ (upper images) and $FF + FF + F + F - F - F + F + FF + F$ (lower images); and for three different angles δ : 60 degrees (left), 90 degrees (middle) and 120 degrees (right).

More Symbols

The symbols L , R , S and Z represent curves which are composed from the commands F , $+$ and $-$. The bottom curve is the result of the string $FLRF - S$.



symbol	interpretation
L	$+F - F - F +$
R	$-F + F + F -$
S	$FF + F + FF - F - FF$
Z	$FF - F - FF + F + FF$

Σχετικά με τα παραπάνω, ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο παρακάτω πίνακας (βλ. [10] , σ.26 επίσης [13]) Ευκλείδειας και Fractal Γεωμετρίας :

GEOMETRY	
Mathematical language to describe, relate, and manipulate shapes	
EUCLIDEAN	FRACTAL
• traditional (> 2000 yr) • based on characteristic size or scale • suits man made objects • described by formula	• modern monsters (~ 10 yr) • no specific size or scaling • appropriate for natural shapes • (recursive) algorithm

2. Στο Γυμνάσιο και το Λύκειο

Στο προηγούμενο Συνέδριο του Τομέα το μόνο που δεν έτυχε προσοχής και που άξιζε να προσεχθεί , ήταν αυτά τα οποία είπε ο καθηγητής Fort : Στη Γαλλία για να διορισθούν οι καθηγητές στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση απαιτείται η γνώση δύο τουλάχιστον Συστημάτων Αξιοματικής Θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας , για να μη ξέρει ο δάσκαλος όσα ακριβώς μαθαίνει και στο μαθητή του , όπως έλεγε και ο Klein.Εμείς , είτε από άγνοια για την ύπαρξη και άλλων τέτοιων Συστημάτων (βλ. [1]) , είτε από ... πατριωτισμό επιμένοντας ... Ελληνικά , διδάσκουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία με βάση μόνο το Σύστημα Ευκλείδη – Hilbert , έστω και αν αυτό δεν διατυπώνεται εκπεφρασμένα αλλά – πράγμα επικίνδυνο να οδηγήσει σε παρεξηγήσεις - υπονοώντας το .

Φυσικά και εδώ επιδιώκουμε τη χρήση H/Y για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και υπάρχουν πολλά και αξιόλογα λογισμικά (Cinderella , Derive , Sketch Pad , Mathematica Cabri κ.α.) για το σκοπό αυτό , που μπορεί να επιλέξει κανείς .Το θέμα όμως δεν είναι αυτό . Το ερώτημα είναι πόσο Ευκλείδεια είναι η γεωμετρία που μπορεί να κάνει ο H/Y ;

Η απάντηση είναι κατηγορηματικά : **καθόλου**.

Πράγματι , στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου η μία από τις δύο πρωταρχικές έννοιες είναι **η ευθεία** και το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος δίδεται από την **Ευκλείδεια απόσταση**

$$d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}.$$

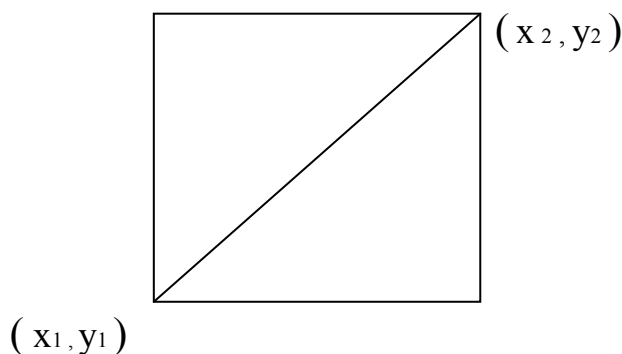
Αυτά και τα δύο ο H/Y τα αγνοεί :

Ολοι έχουμε παρατηρήσει ότι ο H/Y δεν μπορεί να τραβήξει μία ίσια γραμμή , εκτός αν είναι κατακόρυφη ή οριζόντια . Στις άλλες περιπτώσεις η “ευθεία” βγαίνει κλιμακωτή και επομένως ασυνεχής (πράγμα που σημαίνει ότι ο H/Y δεν τα πάει καλά ούτε με την τοπολογία) .Για το μειονέκτημα αυτό έχουμε πληρώσει χρήματα για καλλίτερη ανάλυση. Οσα όμως και να πληρώσουμε , η αναπηρία αυτή δεν μπορεί να εξαφανισθεί γιατί είναι συγγενής . Απλούστατα ο

H/Y εκ κατασκευής δεν χρησιμοποιεί Ευκλείδεια μετρική , αλλά ακολουθεί τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία (αφού δεν πληροί το αξίωμα SAS) του «Ταξιτζή» (βλ. [7]) στην οποία η απόσταση δύο σημείων δίδεται απο την απεικόνιση :

$$d_T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| ,$$

αφού η οθόνη του H/Y αποτελείται από ένα κάνναβο (grid) οι κορυφές του οποίου είναι τα pixels. Όπως λοιπόν ένας ταξιτζής δεν μπορεί να διασχίσει διαγώνια το τετράγωνο και να πάει από τη γωνία Πανεπιστημίου και Αμερικής , στη γωνία Βουκουρεστίου και Σταδίου αλλά είναι αναγκασμένος από Πανεπιστημίου να πάει Αμερικής, να στρίψει Σταδίου και να φθάσει στη Βουκουρεστίου, έτσι και ο H/Y υποχρεώνεται και αυτός να πάει γύρω – γύρω :



Συνεπώς , όπως στο Δημοτικό , έτσι και στο Γυμνάσιο και το Λύκειο διδάσκουμε Ευκλείδεια Γεωμετρία με μη ευκλείδεια μέσα.

Αυτά τα ολίγα , που όμως πιστεύω ότι είναι αρκετά , αφ' ενός για να διώξουν το φόβο που έχω διαγνώσει ότι υπάρχει σε πολλούς συναδέλφους της Μέσης Εκπαίδευσης ότι μπορεί να τους υποκαταστήσει ο H/Y , αφ' ετέρου να γεννήσουν έναν άλλο φόβο , μήπως ο H/Y εκτός του ότι μπορεί «να λέει ψέματα» οδηγώντας στο **χάος** , μπορεί να προκαλεί και μία λανθάνουσα σύγχυση στο παιδί , όταν βρίσκεται στα χέρια ενός ημιμαθή δασκαλου, σ' όλες τις βαθμίδες : πρώτη , δεύτερη και τρίτη .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [0] Αραχωβίτης , Ι . Εισαγωγή στη Χαοτική Δυναμική και στα Fractals (Κλασμοειδή).Παπασωτηρίου Αθήνα , 2002 .
- [1] Αραχωβίτης , Ι . «Ευκλείδειες Γεωμετρίες» .Πρακτικά 14^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας ΕΜΕ , σ.342-354 , Μυτιλήνη , 1997 .
- [3] Βασιλείου , Ε .-Αραχωβίτης , Ι . Σημειώσεις Γραμμικής Γεωμετρίας . Πανεπιστήμιο Αθηνών Αθήνα , 1992 .
- [4] Becker – Dörfler .Dynamical Systems and Fractals . Cambridge , 1989 .

- [5] Encarnação– Peitgen– Sakas– Englert (eds) . Fractal Geometry and Computer Graphics. Springer 1992 .
- [6] Fokas , A. S. «*Integrability ,Imaging of the Brain and Beyond*». 3rd Mediterranean Congress on Mathematics Education , p.35-52 , Athens , Greece , 3-5 Jan . 2003 .
- [7] Krause , E . F . Taxicab Geometry . Dover , 1986 .
- [8] Loustau , J .- Dillon , M .Linear Geometry with Computer Graphics . M.Dekker , 1993 .
- [9] Peitgen – Jürgens – Saupe . Chaos and Fractals . Springer , 1992 .
- [10] Peitgen – Saupe . Fractal Images . Springer , 1988 .
- [11] Pritchard , J . The Chaos Cookbook . Butterworth-Heineman , Sec. Ed. 1996 .
- [12] Sanz – Hinkle – Jain . Radon and Projection Transform-Based Computer Vision . Springer,1988.
- [13] Shapiro , L. S. Affine Analysis of Image Sequences . Cambridge , 1995 .

ABSTRACT

During the school – time both Primary and Secondary , Geometry is taught on the basis of its Euclidean foundation , the rigor being an increasing function of time . In all levels the new ruler and compass of the Euclidean Geometry is the computer . The techniques however it uses are entirely non-Euclidean. Therefore , in this note we are proposed to describe the non-Euclidean Geometries on which computer graphics are based. This is in order to help teachers safely navigate , since , according to Felix Klein , they have to know a little more than that they teach .