

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΕΛΛΑΔΑΣ ΚΑΙ ΚΥΠΡΟΥ

Αθανάσιος Γαγάτσης

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

T.K. 20537, 1678 Λευκωσία – Κύπρος

gagatsis@ucy.ac.cy

Ελένη Α. Σιαμαρή

Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Λεωφόρος Αμμοχώστου, Καλό Χωριό, T.K. 7643, Λάρνακα – Κύπρος

eshiamar@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ:

Η παρούσα εργασία μελετά τις στρατηγικές επίλυσης δύο προβλημάτων αναλογιών από τους μαθητές Γυμνασίου καθώς, επίσης, και τις αντιδράσεις τους στις αναπαραστάσεις που τους δόθηκαν σ' αυτά. Κάθε πρόβλημα περιλαμβάνει τέσσερα ερωτήματα εκ των οποίων μόνο τα δύο πρώτα έχουν να κάνουν με ανάλογα ποσά. Η συλλογή των δεδομένων της έρευνας έγινε από 646 μαθητές στην Ελλάδα και από 271 μαθητές στην Κύπρο που φοιτούσαν στην Β' και Γ' Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι αναπαραστάσεις δεν βοηθούν τους μαθητές κατά την επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων και κυρίως στο να απαντήσουν σωστά στα ερωτήματα που δεν έχουν να κάνουν με ανάλογα ποσά. Εξίσου σημαντικό εύρημα ήταν οι μέθοδοι που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά την επίλυση των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, ένα ποσοστό περίπου 40% των μαθητών της Ελλάδας προτίμησε την μέθοδο των τριών κατά την επίλυση, έναντι της μεθόδου των κλασματικών εξισώσεων ή της αναγωγής στη μονάδα ή άλλων μεθόδων. Μέσα από την ποιοτική ανάλυση φάνηκε πως όταν προηγηθεί συζήτηση από τον καθηγητή για το τι παριστάνει η κάθε αναπαράσταση, τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην ορθή αντιμετώπιση του προβλήματος.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αναπαραστάσεις είναι ένας τομέας πολυδιάστατα μελετημένος: είτε ως προς τον ορισμό (Palmer, 1977; Kaput, 1987 & Goldin, 1987), είτε ως προς τη διάκριση εσωτερικών – εξωτερικών αναπαραστάσεων (Lesh, Post & Behr, 1987), είτε ως προς μια θεωρία που να συνδέεται με τη δημιουργία τους (Von Glaserfeld, 1987; Christou et al., 2002; Gagatsis et al., 2002; Gagatsis & Christou, 2002).

Με το όρο “μετάφραση αναπαραστάσεων” εννοούμε τη ψυχολογική διαδικασία που λαμβάνει χώρα όταν μεταφερόμαστε από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, όπως για παράδειγμα από μια αλγεβρική εξίσωση σε γραφική παράσταση. Ο Lesh (1979), τονίζει το ρόλο των μεταφράσεων στη λύση προβλήματος. Για να γίνει η μετάφραση χρειάζονται δύο τουλάχιστον μορφές αναπαράστασης. Η πηγή – η αρχική αναπαράσταση πρέπει να ειπωθεί από την οπτική γωνία της δεύτερης. Με ποιο τρόπο και υπό ποια οπτική γωνία ο μαθητής “βλέπει” την αναπαράσταση είναι αποτέλεσμα διδασκαλίας, η έμφαση της οποίας δεν είναι στην αντιγραφή από το μαθητή του τι κάνει ο δάσκαλός του, αλλά στην επιτυχή οργάνωση της δικής του εμπειρίας (Von Glaserfeld, 1987).

Ο αριθμός των ερευνών γύρω από το θέμα των αναπαραστάσεων και το ρόλο τους στη μάθηση των μαθηματικών, είναι μεγάλος. Οι έρευνες αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται (Πίνακας 1).

Πίνακας 1

	Θεωρία των αναπαραστάσεων ή αναπαραστάσεις και θεωρία μάθησης
	Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλήματος
	Αναπαραστάσεις και ειδικές μαθηματικές έννοιες
	Αναπαραστάσεις και μεταφρασιμότητα μεταξύ τους

Στον πρώτο τομέα περιλαμβάνονται οι εργασίες που προτείνουν μια θεωρία αναπαράστασης (von Glaserfeld, 1987; Kaput, 1987; Roth & McGinn, 1998). Στο δεύτερο τομέα περιλαμβάνονται οι εργασίες που σχετίζουν τις εξωτερικές ή σημειωτικές αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλήματος (Seeger, 1998; Lesh, Behr & Post, 1987). Στον τρίτο τομέα κατατάσσονται οι εργασίες που επικεντρώνουν τη μελέτη των αναπαραστάσεων σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. (Markou & Gagatsis, 2002; 2003; Ioannou & Gagatsis, 2003). Τέλος, στον τέταρτο τομέα κατατάσσονται οι εργασίες που εξετάζουν τη μετάφραση από ένα πεδίο έκφρασης σε ένα άλλο. Αυτό το πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, δεν είναι πάντα φυσικό, αλλά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Ασβεστά, Γαγάτσης, 1995; Gagatsis, 1997; Duval, 1987; Janvier, 1987; Gagatsis & Michaelidou, 2002; Gagatsis, 2000).

Η έρευνά μας αφορά την επίλυση προβλημάτων αναλογίας, που παρουσιάζονται σε διάφορες μορφές αναπαράστασης, από μαθητές Γυμνασίων Ελλάδας και Κύπρου. Επομένως, η έρευνά μας έχει σχέση με τη δεύτερη και τέταρτη κατηγορία όπως τις έχουμε περιγράψει προηγούμενα.

2. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ

Η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών πρέπει να αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των σχεδιαζόμενων διδασκαλιών στα μαθηματικά. Η αποδοχή αυτής της αρχής συνιστά και την

αναγκαιότητα να δούμε, έστω και συνοπτικά, την ιστορική εξέλιξη της έννοιας της αναλογίας και να διαπιστώσουμε το θεμελιώδη χαρακτήρα της.

Στην αρχαία Αίγυπτο γινόταν χρήση σε μεγάλη κλίμακα των κλασμάτων και κατά συνέπεια των αναλογιών σε πρακτικά καθημερινά προβλήματα εξαιτίας του μη νομισματικού συστήματος συναλλαγής. Η μελέτη των προβλημάτων που περιέχονται στον πάπυρο του Ρηντ (Rhind papyrus), μας πείθει πως γινόταν χρήση των αναλογιών κατά την επίλυση των καθημερινών προβλημάτων μέσα από έναν πραγματικά εμπειρικό κόσμο. Διαπιστώνουμε, σήμερα, πως οι τρόποι επίλυσης που παρουσιάζονται στα αιγυπτιακά κείμενα δεν ταιριάζουν με το δικό μας τρόπο σκέψης, αλλά φανερώνουν ότι ο λαός αυτός ανέπτυξε, τουλάχιστον, ένα διαισθητικό τρόπο επίλυσης των προβλημάτων αναλογιών.

Στην αρχαία Βαβυλώνα κατά την ανακάλυψη πήλινων πλακών προέκυψε το συμπέρασμα ότι γνώριζαν εμπειρικά και πρακτικά τις αποστάσεις, τα ύψη και τα όμοια τρίγωνα.

Αδιαμφισβήτητο είναι το γεγονός πως στην αρχαία Ελλάδα πραγματοποιήθηκε η αφετηρία της μαθηματικής θεμελίωσης της έννοιας της αναλογίας από τον Ευκλείδη και τον Εύδοξο (Smith, 1953; Sanford, 1958; Kline, 1972; Fauvel και Gray, 1987; Fauvel, 1990, κτλ). Οι Έλληνες εφάρμοζαν, κυρίως, τη μέθοδο των αναλογιών και τη μέθοδο των εμβαδών κατά την επίλυση απλών εξισώσεων. Η αναλογία οριζόταν ως η ισότητα δυο λόγων και διακρινόταν σε αριθμητική, γεωμετρική και αρμονική. Τη χρησιμοποιούσαν κατά τη λύση προβλημάτων του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης της γωνίας.

Στους επόμενους αιώνες, η έννοια χρησιμοποιήθηκε από ανατολίτες έμπορους ως μέθοδος για να υπολογίζουν με ασφάλεια τις συναλλαγές τους. Η μέθοδος αυτή κατέληξε στη γνωστή "μέθοδο των τριών".

Όσον αφορά την προέλευση της μεθόδου αυτής υπάρχει σύγκρουση. Ο Smith (1953) αναφέρει ότι προέρχεται από τους Ινδουιστές. Ενώ ο Joseph (1990) πιστεύει ότι η μέθοδος των τριών εφαρμόστηκε πρώτα στην Κίνα και επικαλείται ως αποδεικτικό στοιχείο το σημαντικό κινέζικο κείμενο Chiu Chai από τον 1ο αιώνα μ.Χ. Η ονομασία "μέθοδος των τριών" δόθηκε από Άραβες και μεσαιωνικούς Λατίνους συγγραφείς. Παρόλο που η μέθοδος των τριών χρησιμοποιήθηκε ευρέως για μεγάλη χρονική περίοδο (Brahmagupta (7^{ος} αι.μ.Χ. και Fibonacci (1202), εντούτοις η σχέση ανάμεσα στη μέθοδο των τριών και την ισότητα λόγων και αναλογιών αγνοήθηκε μέχρι την Αναγέννηση.

3. ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Η έννοια της αναλογίας συναντάται σε πολλούς αρχαίους πολιτισμούς, οπότε εδώ συνίσταται η σπουδαιότητα της αναλογικότητας όπως επίσης και ο θεμελιώδης και ουσιαστικός της χαρακτήρας στην καθημερινή ζωή. Καταγράφονται επιγραμματικά πιο κάτω μερικές προηγούμενες ερευνητικές προσπάθειες και κάποιες θεωρητικές προσεγγίσεις που είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν.

Οι έρευνες στην αναλογία μπορεί να ταξινομηθούν σε 4 ομάδες:

➤ Θεωρίες ανάπτυξης της αναλογικής σκέψης

Ο Orton (1991) υποστηρίζει, πως η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας είναι ιδιαίτερα σημαντική όχι μόνο στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και σε αρκετές έννοιες και θέματα που βασίζονται στους λόγους και τις αναλογίες όπως η κλίση στις γραφικές αναπαραστάσεις στην Άλγεβρα, η τριγωνομετρία, η θεωρία πιθανοτήτων, οι νόμοι της Φυσικής και Χημείας.

Ο Piaget και οι συνεργάτες του (1958, 1970, 1975, 1977) ερεύνησαν την αναλογική σκέψη και θεωρούν ότι η ικανότητα για επιτυχημένη ενασχόληση με τα προβλήματα αναλογιών αποτελεί

ένδειξη του σταδίου αφηρημένων λειτουργιών (formal operational stage). Ο Piaget διακρίνει τρία βασικά στάδια αναλογικής σκέψης: (i) πρώιμο στάδιο στο οποίο η σκέψη χρησιμοποιεί ποιοτικές αντιστοιχίες και ταξινομήσεις, (ii) ενδιάμεσο στάδιο όπου χρησιμοποιούνται προσθετικοί συμψηφισμοί ή η λόγος 2:1, (iii) ανώτερο στάδιο όπου η αναλογική σκέψη εφαρμόζεται ανεξάρτητα από αριθμητικές αξίες, δεδομένα και λόγους.

Οι Singer and Resnick (1992) μελέτησαν τους τρόπους αναπαράστασης των αναλογιών και των κλασμάτων από τους μαθητές. Υποστηρίζουν πως «οι αναλογίες εκφραζόμενες σαν σχέσεις λόγων συνδέονται με τρεις βασικές ποσότητες, μία ολότητα και δυο μέρη, ενώ συγχρόνως μπορούν να αναπαρασταθούν με δύο διαφορετικά σχήματα: ένα σχήμα μέρος – ολότητα και ένα σχήμα μέρος – μέρος» (σ.231).

Ο Lo (1993) θεωρεί ότι η έννοια της αναλογίας δεν είναι κάτι που οι μαθητές έχουν ή στερούνται και πως οι δυσκολίες που υπάρχουν στην αντίληψη των αναλογιών ίσως να οφείλονται σε ακατάλληλη μέθοδο διδασκαλίας στην τάξη. Η αναλογική τους σκέψη των μαθητών σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την ικανότητα αναγνώρισης δομικής ομοιότητας ή συμμεταβολής και είναι αποτέλεσμα ατομικής προσαρμογής και αναδόμησης της υπάρχουσας γνώσης.

Γενικά αποδεκτό από την πλειάδα των ερευνών είναι η δυσκολία της κατανόησης της έννοιας της αναλογίας και αυτό συμπεραίνεται και από τους Tourniaire και Pulos (1985), όπου υποστηρίζουν πως η αναλογική σκέψη αναπτύσσεται με δύο αλληλοσχετιζόμενους τρόπους.

➤ Τύποι προβλημάτων αναλογιών

Οι Tourniaire and Pulos (1985) διακρίνουν 4 τύπους προβλημάτων αναλογίας: (α) προβλήματα της άγνωστης τιμής, (β) προβλήματα σύγκρισης, (γ) προβλήματα επεξήγησης, (δ) προβλήματα απάντησης. Κάθε ομάδα από τις πιο πάνω μπορεί να υποδιαιρεθεί σε 3 επιμέρους κατηγορίες προβλημάτων αναλογιών: φυσικά προβλήματα, προβλήματα λόγων και προβλήματα μειξέων.

➤ Παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών

-Το γενικό πλαίσιο των προβλημάτων επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές (Singer and Resnick, 1992; Kuchemann, 1989; Lamon, 1993). Οι μαθητές επηρεάζονται από το γενικό πλαίσιο του προβλήματος ανεξάρτητα αν το πρόβλημα σχετίζεται με καθημερινές εμπειρίες τους ή με πρακτικούς και εμπειρικούς τρόπους υπολογισμού ή εντελώς άγνωστο θέμα (Schliemann και Pereira 1990).

-Η διαισθητική αντίληψη και κατανόηση του μαθητή για το λόγο και την αναλογία επηρεάζουν την επίδοσή τους. Σε έρευνα του Hoyles (1994) και των Noss, Sutherland, ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα που απαιτούσαν πράξεις πολλαπλασιασμού, χωρίς να γίνεται αναφορά σε λόγο ή αναλογία. Το δοκίμιο περιλάμβανε ερωτήματα για δύο διαφορετικά πλαίσια προβλημάτων. Το ένα πλαίσιο αφορούσε την ανάμιξη μπογιών και το άλλο τη μεγέθυνση φωτογραφιών που έδειχναν μικρά χαλιά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές σε διαφορετικά πλαίσια προβλημάτων.

-Η αριθμητική δομή (Karplus, 1983), και το είδος του εμπλεκόμενου λόγου του προβλήματος (Hart, 1986), επηρεάζουν ουσιαστικά την επίδοση των μαθητών κατά την επίλυσή του.

➤ Διδασκαλία της έννοιας

Η Viet (1989) ερευνήσε τη συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση 5 προβλημάτων ανάλογων ποσών και 5 αντιστρόφως ανάλογων ποσών και τόνισε τους κινδύνους από την αυτοματοποίηση της επίλυσης λεκτικών προβλημάτων.

Ο Γαγάτσης (1992) επέκτεινε την εργασία της Viet και μελέτησε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές, της έκτης δημοτικού και πρώτης γυμνασίου, και τα λάθη τους κατά την επίλυση προβλημάτων ανάλογων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών. Ο μηχανικός τρόπος με τον οποίο διδάσκεται η έννοια της αναλογίας στο δημοτικό σχολείο, αργότερα ξεχνιέται και συνεπώς οι μαθητές γυμνασίου παρουσιάζουν δυσκολίες στην ενασχόλησή τους με τις αναλογίες.

Σε μια άλλη μελέτη οι Γαγάτσης κ.ά (1997) μελέτησαν τις στρατηγικές και τα λάθη των μαθητών γυμνασίου κατά την επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων. Χρησιμοποιήθηκαν τα δύο προβλήματα που αναφέρονται και στην παρούσα έρευνα. Παρατηρήθηκε ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών χρησιμοποιούν τη μέθοδο των τριών. Αυτό είναι παράξενο αν ληφθεί υπόψη ότι η μέθοδος των τριών δεν αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας ούτε στη δημοτική ούτε στη μέση εκπαίδευση.

4. Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

4(α). ΣΤΟΧΟΙ

I. Να μελετηθούν οι δυσκολίες των μαθητών Γυμνασίου Ελλάδας και Κύπρου σε μη συνηθισμένα προβλήματα αναλογίας. Μ' αυτό εννοούμε προβλήματα στα οποία μερικές ερωτήσεις άπτονται των ανάλογων ποσών, ενώ μερικές άλλες όχι.

II. Και στα δύο προβλήματα θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Έτσι, το 1^ο πρόβλημα προτείνει και ένα σχέδιο του βάζου απ' το οποίο λογικά θα μπορούσε ένας μαθητής να βγάλει το συμπέρασμα ότι πέρα από το ύψος των 12cm δηλαδή τα 120mm, τα ποσά δεν είναι ανάλογα και ενδεχομένως δεν μπορεί να βρει απάντηση στο 3^ο και 4^ο ερώτημα του προβλήματος. Το ίδιο ισχύει και στο 2^ο πρόβλημα όπου προτείνεται ένα σχεδιάγραμμα το οποίο υποδεικνύει ότι τα ποσά δεν είναι ανάλογα σε όλα τα ερωτήματα.

III. Να μελετηθούν οι μέθοδοι επίλυσης αυτών των δύο προβλημάτων από τα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα είναι παρατηρημένο ότι στην Ελλάδα πολλά παιδιά εφαρμόζουν την απλή μέθοδο των τριών και θα θέλαμε να εξετάσουμε αν ισχύει το ίδιο και για εδώ και σε ποιο βαθμό και σε τι έκταση ακολουθείται το ίδιο αυτό φαινόμενο από μαθητές γυμνασίων της Κύπρου.

4(β). ΔΕΙΓΜΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το δείγμα της έρευνας αποτελούσαν 646 Ελλαδίτες και 271 Κύπριοι μαθητές για τα δύο προβλήματα. Οι μαθητές φοιτούσαν στην Β' και Γ' γυμνασίου. Συμμετείχαν και μαθητές από 3 ελληνικά ιδιωτικά σχολεία.

Τα εμπλεκόμενα σχολεία ήταν από διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές έτσι ώστε να αντιπροσωπεύονται, κατά το δυνατόν, διάφορα κοινωνικά στρώματα ενδυναμώνοντας την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος και ως εκ τούτου την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

4(γ). ΜΕΘΟΔΟΣ

Χρησιμοποιήθηκαν τα 2 προβλήματα που εισηγήθηκαν οι Grenier and Gerente (1992).

Πρόβλημα 1: Το βάζο

Πρόβλημα 2: Ο Μοτοσικλετιστής

Η μεθοδολογία της έρευνάς μας ήταν τόσο ποσοτική όσο και ποιοτική. Πήραμε συνεντεύξεις από 2 μαθητές Γυμνασίου στην Ελλάδα και 3 μαθητές Γ' Γυμνασίου στην Κύπρο. Κρίθηκε αναγκαία και η ποιοτική έρευνα διότι δεν μπορούμε να αντιληφθούμε την ουσιαστική χρήση του διαγράμματος ή μη στους μαθητές κατά την ποσοτική έρευνα, δεν μπορούμε να πούμε με

σιγουριά αν το χρησιμοποιούν ή όχι. Ουσιαστικός στόχος, εδώ, είναι να υπάρξει μια επιπλέον πληροφορία, ένα παιγνίδι αναπαραστάσεων, χωρίς βέβαια να είμαστε σίγουροι πως αυτή η επιπλέον πληροφορία θα επισημανθεί από τα παιδιά.

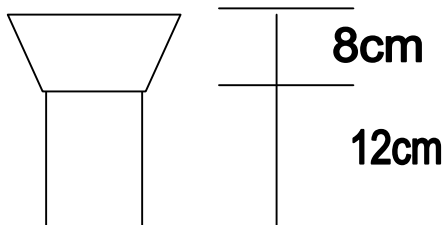
Και τα δύο προβλήματα προτείνουν μια κατάσταση αναλογίας στην οποία υπάρχει μια ομοιότητα. Τα δύο πρώτα ερωτήματα αντιστοιχούν σε ανάλογα ποσά, ενώ τα άλλα δύο ερωτήματα αντιστοιχούν σε μη ανάλογα ποσά. Και τα δύο προβλήματα προτείνουν μια συμπληρωματική μεταβλητή της αναλογίας ή μη του θέματος. Στον πρώτο πρόβλημα η αναλογία ή μη των ποσών μπορεί να φανεί κάνοντας έλεγχο στα δεδομένα του πίνακα που αυτό δεν γίνεται σχεδόν ποτέ. Γνωστή είναι η τάση των παιδιών να απαντούν σε προβλήματα που προτείνουν ψευδοαναλογική κατάσταση σαν να ήταν ανάλογα ποσά. Για παράδειγμα, «εάν το ύψος ενός δεκάχρονου αγοριού είναι 1μ. και 40εκ., τότε ποιο θα είναι το ύψος του όταν γίνει 20 χρονών; (Markovitz, Hershkowitz, Bruckheimer 1984, στο Verschaffel et al, 2000). Τα παιδιά έχοντας την τάση να βλέπουν όλες τις καταστάσεις ως αναλογικές σ' ένα τέτοιο ψευδοαναλογικό πρόβλημα δίνουν την απάντηση ότι το ύψος του αγοριού θα είναι 2,80μ. Επίσης, το πρώτο πρόβλημα προτείνει μια αναπαράσταση του βάζου ως δεύτερη μεταβλητή ελέγχου της αναλογικότητας ή μη.

Το δεύτερο πρόβλημα, επίσης, αντιστοιχεί σε ανάλογα και μη ανάλογα ποσά. Και εδώ η δεύτερη μεταβλητή ελέγχου είναι το σχεδιάγραμμα που ακριβώς δείχνει τρεις ευθύγραμμες διαδρομές που διαφέρουν μεταξύ τους, είναι ίσιος δρόμος, ανηφόρα, κατηφόρα. Σκοπός, εδώ, της συμπληρωματικής μεταβλητής είναι να υποδείξει στους μαθητές ότι συνολικά δεν είναι ανάλογα τα ποσά. Υπάρχουν τρία τμήματα αναλόγων ποσών και αυτό δίνεται από την έκφραση του προβλήματος ότι «η ταχύτητα είναι σταθερή για καθένα από τα τρία μέρη της διαδρομής» και αυτό τονίζεται από το σχεδιάγραμμα. Τα ερώτημα που προκύπτει είναι αν οι μαθητές κάνουν χρήση αυτής κρίσιμης πληροφορίας για την απάντηση στα ερωτήματα 3 και 4.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: «ΤΟ ΒΑΖΟ»

Χύνουμε νερό στο βάζο. Για κάθε ποσότητα νερού που χύνεται, μετράμε το ύψος του νερού στο βάζο. Τα αποτελέσματα σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Όγκος νερού σε ml	40	80	120	160	200	240	280	320
Ύψος νερού σε mm	27	54	81	108	132	150	160	165

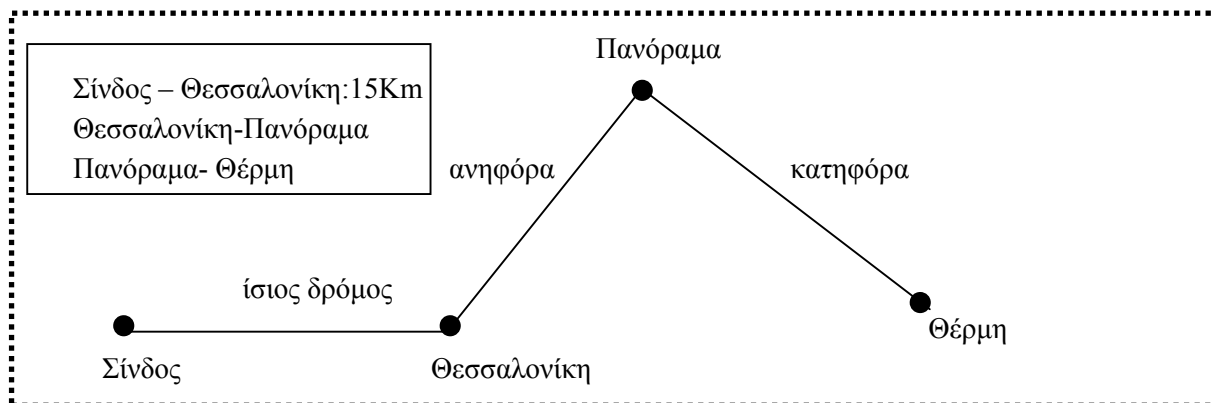


1. Μπορείτε να βρείτε το ύψος του νερού για έναν όγκο 50ml; Αν ναι, δώστε την απάντηση. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.
2. Μπορείτε να βρείτε το ύψος του νερού για έναν όγκο 148ml; Αν ναι, δώστε την απάντηση. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.
3. Μπορείτε να βρείτε το ύψος του νερού για έναν όγκο 260ml; Αν ναι, δώστε την απάντηση. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

4. Μπορείτε να βρείτε το ύψος του νερού για έναν όγκο 290ml; Αν ναι, δώστε την απάντηση. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2: «Ο ΜΟΤΟΣΙΚΛΕΤΙΣΤΗΣ»

Ο Μενέλαος ανεβαίνει στη μοτοσικλέτα του. Είναι στη Σίνδο και θέλει να πάει στη Θέρμη, που απέχει 28,4Km σε λιγότερο από $\frac{3}{4}$ της ώρας. Πρέπει να περάσει από τη Θεσσαλονίκη και στη συνέχεια από το Πανόραμα. Πατάει γκάζι συνεχώς στο τέρμα. Η μηχανή του θα αντέξει; Η ταχύτητα του είναι σταθερή για καθένα από τα τρία μέρη της διαδρομής του.



Μετά από 6 λεπτά διέτρεξε 4,5 Km.

Μετά από 22 λεπτά διέτρεξε 15,9 Km.

Μετά από 30 λεπτά διέτρεξε 19,5 Km.

Μετά από 40 λεπτά έφτασε στο Πανόραμα.

Ο Μενέλαος φτάνει στη Θέρμη μετά από 44 λεπτά. Το μοτέρ της μηχανής του άντεξε... Ουφ!!!

Ερωτήσεις

1. Τι απόσταση διέτρεξε σε 12 λεπτά;
2. Σε πόση ώρα έφτασε στη Θεσσαλονίκη;
3. Τι απόσταση διέτρεξε σε 36 λεπτά;
4. Τι απόσταση διέτρεξε μέχρι το Πανόραμα;

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5(α) Αποτελέσματα Ποσοτικής Ανάλυσης:

Οι μαθητές επιτυγχάνουν στα ερωτήματα που αφορούν αναλογίες, ενώ αποτυγχάνουν στα ερωτήματα που χρειάζεται να εξετάσουν την ύπαρξη αναλογιών (πρόβλημα 1) ή όταν το γενικό πλαίσιο του προβλήματος είναι πολύπλοκο (πρόβλημα 2). Αυτό αποτελεί μια ένδειξη ότι Ελλαδίτες και Κύπριοι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί την έννοια της αναλογίας, αλλά μόνο τη χρήση του αλγόριθμου. Δηλαδή, δεν υπάρχει η παρουσία της έννοιας, αλλά η παρουσία της διαδικασίας. Επίσης, είναι φανερό πως δεν χρησιμοποιούν τα σχήματα τους δίνονται για να οδηγηθούν στην ορθή επίλυση των προβλημάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2
Σωστές Απαντήσεις των Μαθητών

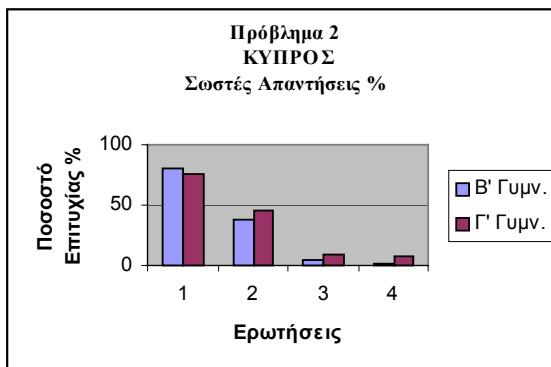
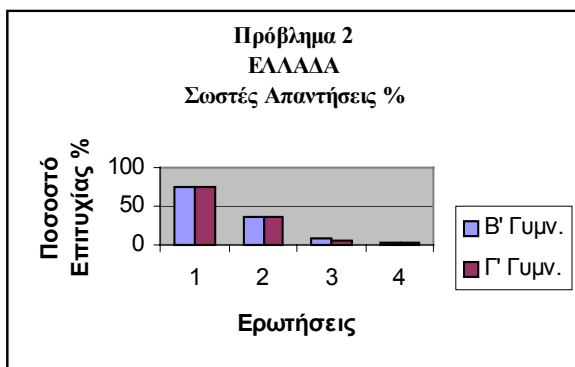
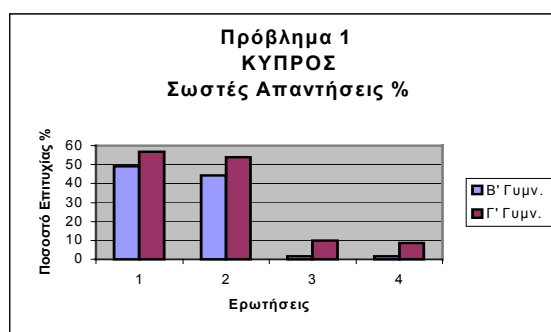
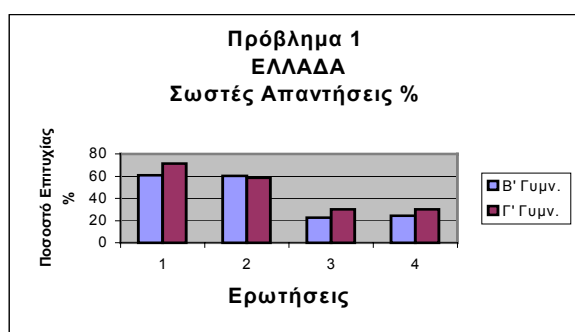
ΕΛΛΑΔΑ					
Πρόβλημα 1 «Το Βάζο»					
	ΜΑΘΗΤΕΣ	1	2	3	4
Β' Γυμν.	216	61,11	60,19	22,69	24,07
Γ' Γυμν.	430	71,4	58,37	30	30,23

ΚΥΠΡΟΣ					
Πρόβλημα 1 «Το Βάζο»					
	ΜΑΘΗΤΕΣ	1	2	3	4
Β' Γυμν.	122	49,18	44,27	1,64	1,64
Γ' Γυμν.	149	56,86	53,92	9,8	8,82

ΕΛΛΑΔΑ					
Πρόβλημα 2 «Ο Μοτοσικλετιστής»					
	ΜΑΘΗΤΕΣ	1	2	3	4
Β' Γυμν.	216	75,46	35,65	8,33	3,7
Γ' Γυμν.	430	73,95	36,74	4,88	3,02

ΚΥΠΡΟΣ					
Πρόβλημα 2 «Ο Μοτοσικλετιστής»					
	ΜΑΘΗΤΕΣ	1	2	3	4
Β' Γυμν.	122	80,32	37,35	4,92	1,54
Γ' Γυμν.	149	75,48	46,08	8,82	6,86

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 1
Σωστές Απαντήσεις των Μαθητών



Οι Ελλαδίτες μαθητές χρησιμοποιούν περισσότερο τη μέθοδο των τριών, ενώ οι Κύπριοι μαθητές χρησιμοποιούν κυρίως τις κλασματικές εξισώσεις.

Τα είδη των λαθών που εκδηλώνουν οι μαθητές αφορούν την αστόχαστη χρήση της αναλογίας. Η παρουσία λαθών στις πράξεις είναι πολύ μειωμένη γιατί στα προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν απλοί φυσικοί αριθμοί. Συνεπώς η μεταβλητή του αριθμητικού πλαισίου του προβλήματος επηρεάζει τις στρατηγικές και τα λάθη των μαθητών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 «ΤΟ ΒΑΖΟ»

ΕΛΛΑΔΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3
ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	36,57	30,56	9,33
Γ' Γυμν.	36,74	43,02	4,49

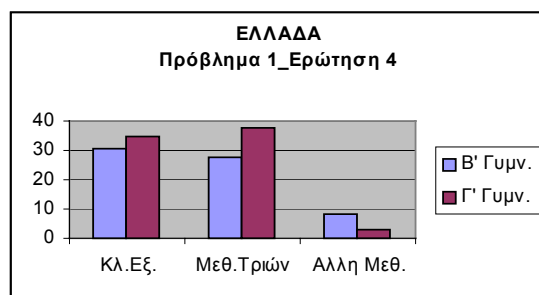
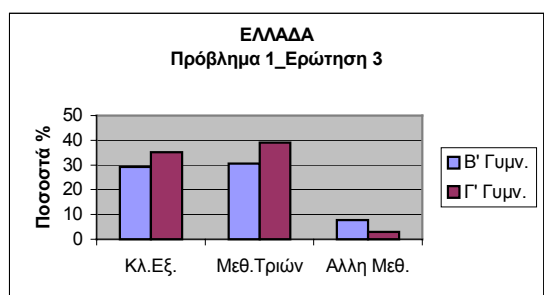
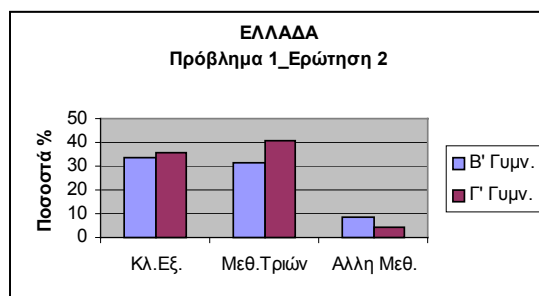
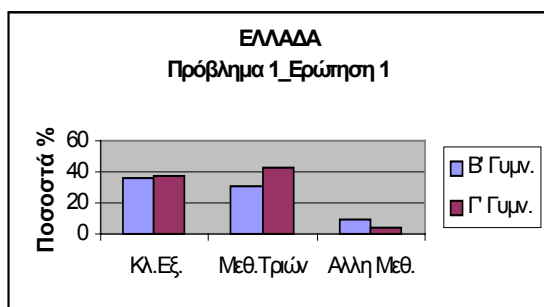
ΕΡΩΤΗΣΗ 3			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	29,17	30,56	7,87
Γ' Γυμν.	35,12	39,07	3,02

ΕΡΩΤΗΣΗ 2			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	33,8	31,48	8,33
Γ' Γυμν.	35,81	40,47	4,19

ΕΡΩΤΗΣΗ 4			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	30,56	27,78	8,33
Γ' Γυμν.	34,88	37,67	2,79

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 2

Μέθοδοι Επίλυσης



ΚΥΠΡΟΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ 4
ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

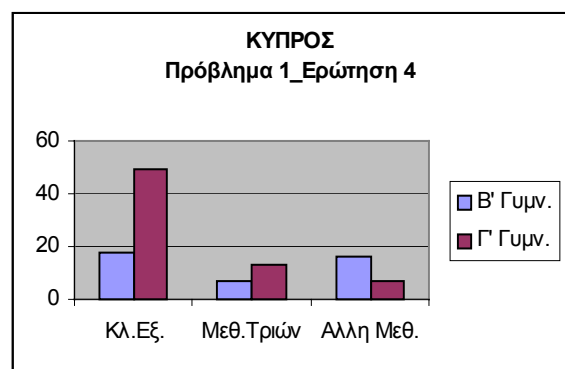
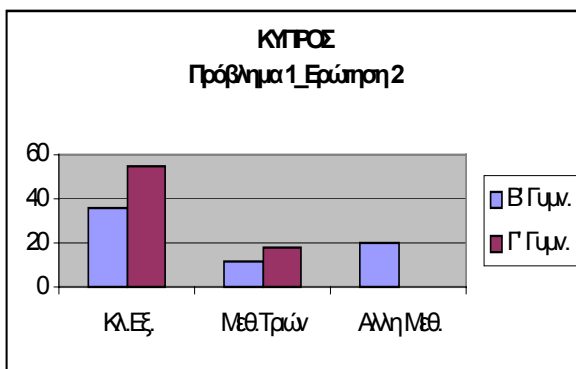
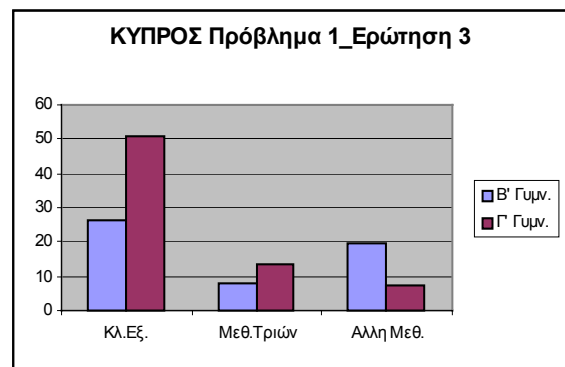
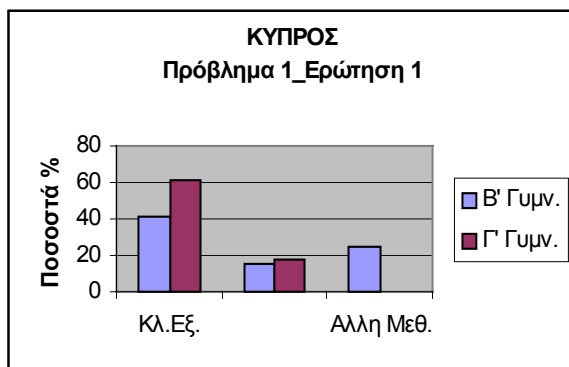
ΕΡΩΤΗΣΗ 1			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	40,99	14,75	24,59
Γ' Γυμν.	61,08	18,13	0

ΕΡΩΤΗΣΗ 3			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	26,23	8,2	19,67
Γ' Γυμν.	51	13,42	7,38

ΕΡΩΤΗΣΗ 2			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	36,07	11,48	19,67
Γ' Γυμν.	54,37	18,12	0

ΕΡΩΤΗΣΗ 4			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	18,03	6,56	16,39
Γ' Γυμν.	49	13,42	6,71

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 3
Μέθοδοι Επίλυσης



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 «Ο ΜΟΤΟΣΙΚΛΕΤΙΣΤΗΣ»

ΕΛΛΑΔΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ 5
ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	28,24	33,8	20,83
Γ' Γυμν.	18,6	29,53	34,88

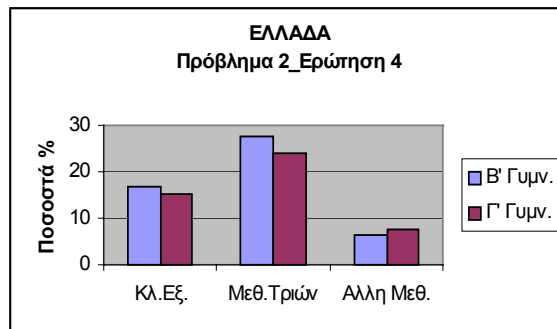
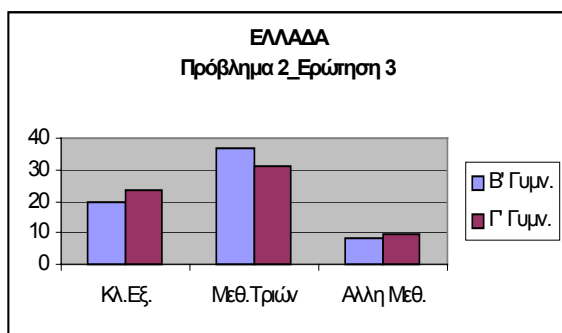
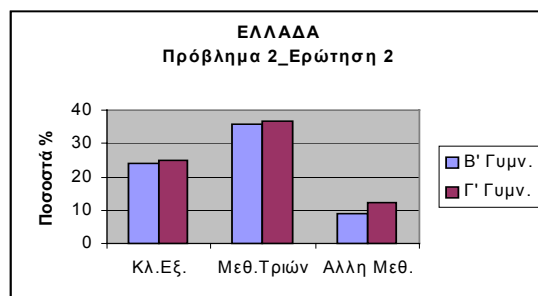
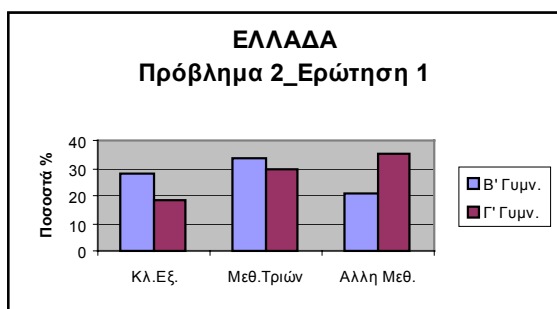
ΕΡΩΤΗΣΗ 3			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	19,44	37,04	8,33
Γ' Γυμν.	23,49	30,93	9,77

ΕΡΩΤΗΣΗ 2			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	24,07	35,65	8,8
Γ' Γυμν.	24,88	36,51	12,09

ΕΡΩΤΗΣΗ 4			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	16,67	27,78	6,48
Γ' Γυμν.	15,12	23,95	7,67

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 4

Μέθοδοι Επίλυσης



ΚΥΠΡΟΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ 6
ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

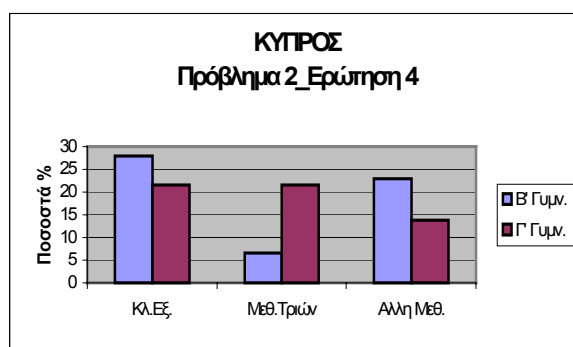
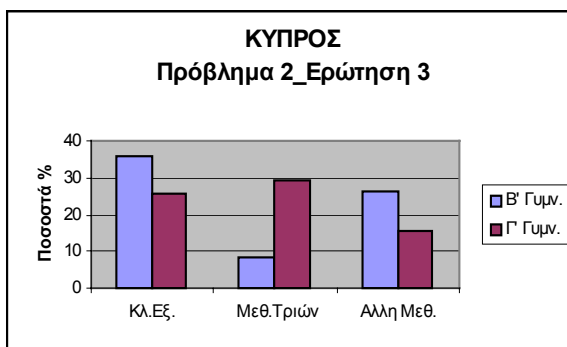
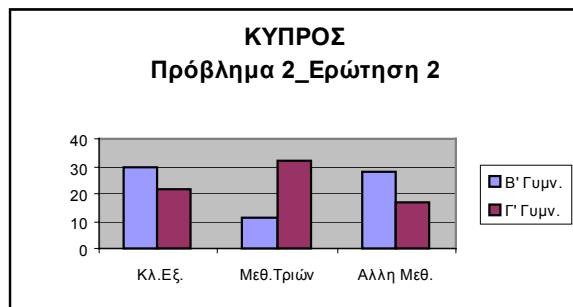
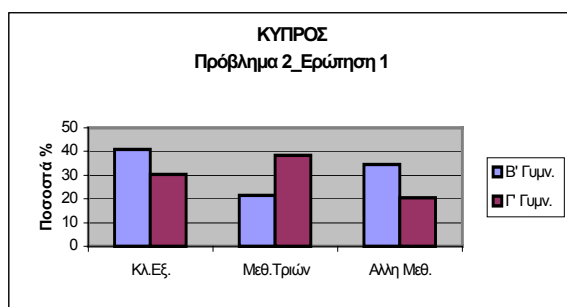
ΕΡΩΤΗΣΗ 1			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	40,98	21,31	34,42
Γ' Γυμν.	30,39	38,23	20,58

ΕΡΩΤΗΣΗ 2			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	29,51	11,58	27,87
Γ' Γυμν.	21,57	32,35	16,67

ΕΡΩΤΗΣΗ 3			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	36,07	8,2	26,23
Γ' Γυμν.	25,49	29,41	15,69

ΕΡΩΤΗΣΗ 4			
	Κλ.Εξ.	Μεθ.Τριών	Άλλη Μεθ.
Β' Γυμν.	27,87	6,56	22,95
Γ' Γυμν.	21,57	21,57	13,73

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 5
Μέθοδοι Επίλυσης



5(β) Αποτελέσματα Ποιοτικής Ανάλυσης:

Κατά την ποιοτική ανάλυση προέκυψαν σημαντικά στοιχεία που μας κάνουν να πιστεύουμε πως οι χρήσεις των αναπαραστάσεων σ' ένα πρόβλημα δυσκολεύει τους μαθητές στην αρχή, γιατί δεν καταλάβαιναν τη χρησιμότητα τους. Η δυσκολία αυτή μπόρεσε να ξεπεραστεί μετά από τη δική μας παρέμβαση και οδήγησε τους μαθητές στη ορθή επίλυση των προβλημάτων.

Στο πρόβλημα 1, ένας καλός μαθητής αναρωτήθηκε γιατί δίνεται το σχήμα του βάζου και υπέθεσε πως θα του χρησίμευε για να δει από ποιο σημείο και μετά θα χυθεί το νερό όταν συνεχίσουμε να προσθέτουμε. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν ισχύει μιας που το ύψος του

νερού που έχουμε ρίξει στο βάζο δεν υπερβαίνει τα 165mm. Η μετατροπή από cm σε mm δυσκόλεψε όλους τους μαθητές. Μια μαθήτρια αφού μελέτησε προσεκτικά τα δεδομένα του πίνακα, διαπίστωσε πως τα ποσά από ένα σημείο και μετά δεν αυξάνονται αναλογικά. Μόνο τότε ανέτρεξε στο σχήμα για να διαπιστώσει αυτή την ανωμαλία που υπάρχει μετά το ύψος των 12cm, στη συνέχεια έλυσε σωστά τα δύο πρώτα ερωτήματα και μετά σταμάτησε γιατί είδε πως δεν μπορούσε να τα λύσει. Της ήταν όμως δύσκολο να πιστέψει πως δεν υπήρχε κάποια απάντηση. Βλέπουμε εδώ την εμφάνιση του διδακτικού συμβολαίου, όπου οι μαθητές πιστεύουν πως σε όλα τα προβλήματα υπάρχει και μια λύση. Όταν μια άλλη μαθήτρια ρωτήθηκε γιατί εργάστηκε με τη μέθοδο του χιαστί, αποκρίθηκε: *«τα ποσά αυτά είναι ανάλογα, θυμάμαι αυτή τη μέθοδο από το μάθημα της Φυσικής»*.

Στο δεύτερο πρόβλημα, το σχήμα βοήθησε πιο πολύ τους μαθητές, όπως μας δήλωσαν. Όμως, και σε αυτό το πρόβλημα παρόλο που διαπίστωσαν πως υπάρχουν τρία διαφορετικά κομμάτια διαδρομών (ευθεία, ανηφόρα, κατηφόρα), εντούτοις η πλειοψηφία των παιδιών έλυσε με «χιαστί» γινόμενο και τα ερωτήματα 3 και 4 του προβλήματος που τα ποσά δεν ήταν αναλογικά. Μόνο μια μαθήτρια εργάστηκε σωστά και μας δήλωσε:

«τα δύο πρώτα ερωτήματα ήταν απλά και τα έλυσα γρήγορα με τη μέθοδο του «χιαστί». Το τρίτο ερώτημα ήταν περίπλοκο και με προβλημάτισε. Θα έκανα «χιαστί», αλλά με τη βοήθεια του σχήματος διαπίστωσα πως σταματούσε ο ίδιος δρόμος και άρχιζε η ανηφόρα, άρα τα ποσά δεν ήταν ανάλογα. Έτσι, εργάστηκα πρώτα με αφαίρεση και μετά έκανα «χιαστί»».

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών χρησιμοποιούν τη μέθοδο των τριών και για τα δύο προβλήματα. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν ληφθεί υπόψη ότι ο κανόνας των τριών δεν αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας ούτε στη δημοτική, ούτε στη μέση εκπαίδευση. Αυτή η μέθοδος προάγεται "ανεπίσημα" και εφαρμόζεται σε άλλα μαθήματα, όπως στη Φυσική, στη Χημεία. Αλλά και πάλι δεν δικαιολογείται το ψηλό αυτό ποσοστό μαθητών που χρησιμοποιούν τη μέθοδο των τριών. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί ένδειξη της φτωχής κατανόησης της αναλογίας, που έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή της στρατηγικής επίλυσης από τις κλασματικές εξισώσεις στη μέθοδο των τριών που φαίνεται να έχει απομνημονευτεί από τους μαθητές. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την ιστορική εξέλιξη του κανόνα των τριών, όπου για μεγάλη χρονική περίοδο η στρατηγική αυτή χρησιμοποιούνταν ως εμπορική μέθοδος βασισμένη σε απομνημονευμένους κανόνες, χωρίς να συνδέεται με την έννοια του λόγου.

Η χρήση της μεθόδου των τριών μπορεί να ερμηνευτεί από τη θεωρία του διδακτικού μετασχηματισμού, όπου εξετάζονται οι διαδικασίες μετασχηματισμού μιας επιστημονικής γνώσης σε διδακτική γνώση. Ένα παρόμοιο φαινόμενο που μπορεί να ερμηνεύσει τη χρήση της μεθόδου των τριών είναι ο μετασχηματισμός των διδακτικών μεθόδων. Όπως η βασική πηγή των διδακτικών αντικειμένων είναι η επιστημονική γνώση, έτσι η βασική πηγή των διδακτικών μεθόδων είναι τα διδακτικά εγχειρίδια και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το θέμα. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν πηγές πολιτισμικού τύπου που επηρεάζουν το διδακτικό περιεχόμενο καθώς και τις διδακτικές μεθόδους.

Οι επικρατέστερες στρατηγικές σε προηγούμενες έρευνες εμφανίζονται και στην παρούσα έρευνα υποδεικνύοντας πόσο βαθιά ριζωμένη είναι αυτή η μαθηματικό -

πολιτιστική γνώση στους μαθητές της ελληνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Συνεπώς αυτές οι πηγές πολιτιστικών στοιχείων είναι ισχυρότερες από όσο θα μπορούσε να πιστέψει κάποιος για την αλλαγή των διδακτικών μεθόδων και αυτό αποτελεί βασικό στοιχείο της παρούσας έρευνας, πέρα από την κατανόηση και την μάθηση προβλημάτων αναλογίας.

Πώς εξηγούνται οι μεγάλες διαφορές ανάμεσα στα ποσοστά των Ελλαδιτών και Κύπριων μαθητών που χρησιμοποιούν τη μέθοδο των τριών, παρόλο που έχουν κοινό πολιτισμό, γλώσσα και διδασκαλία που στηρίζεται σε παρόμοια βιβλία; Πιστεύουμε ότι μια συστηματική έρευνα των διδακτικών βιβλίων αλλά και των μεθόδων διδασκαλιών των δύο χωρών είναι αναγκαία για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα.

Η έρευνά δείχνει μια μεγαλύτερη αποτυχία στις μη αναλογικές καταστάσεις. Η αποτυχία αυτή υποδεικνύει ότι δεν είναι εύκολη η χρήση αναπαραστάσεων για την επίλυση των προβλημάτων. Από την άλλη πλευρά, όπως δείχνει και η ατομική εξέταση των καλών μαθητών όταν προηγηθεί συζήτηση από τον καθηγητή για το τι παριστάνει η κάθε αναπαράσταση τότε αυτό μπορεί να οδηγήσει στην ορθή αντιμετώπιση του προβλήματος. Η τελευταία παρατήρηση υποδεικνύει την αναγκαιότητα ομαδικής συζήτησης στην τάξη των αναπαραστάσεων, τη σκοπιμότητα και την αναγκαιότητα τους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Πιστεύουμε ότι μια διδακτική παρέμβαση στη χρήση, μελέτη και ερμηνεία αναπαραστάσεων που συνδέονται με λεκτικά προβλήματα θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές Γυμνασίου στην επίλυση προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- ✎ **Ασβεστά, Α., & Γαγάτσης, Α.** (1995). Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στο Α. Γαγάτσης (Ed.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- ✎ **Γαγάτσης, Α., & Καφίδας, Α.** (1995). Λάθη μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου σε προβλήματα αναλογιών. Στο Α. Γαγάτσης (Ed.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- ✎ **Christou, C., Gagatsis, A., & Zachariadis, T.** (2002). The Difficulty Level of Representations in Mathematical Relationships. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 39, 1.
- ✎ **Gagatsis, A.**, (1992), "The Usefulness and the Interest of Didactics of Mathematics for a Secondary Mathematics Teacher", *diastasi (Διάσταση)*, 3-4, Greek Mathematical Society, Central Makedonia Branch, Thessaloniki, pp. 76-91.
- ✎ **Gagatsis, A., Lambis, St.** (1997). The Originality of Students' solution: The case of proportion, In **A. Gagatsis, & Br. D' Amore** (Eds) *Didactics of Mathematics – Technology in Education* (pp.67-94). Thessaloniki.
- ✎ **Gagatsis, A.** (2000). Processi di traduzione ed il concetto di funzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, G.R.I.M. Dipartimento di Matematica di Palermo, 9, 1-24.
- ✎ **Gagatsis, A., & Pitta-Pandazi, D.** (2001). Difficoltà di apprendimento in aritmetica: Esame di un caso. *La matematica e la sua didattica*, 1, 57-74..
- ✎ **Gagatsis, A., & Michaelidou, E.** (2002). Le relazioni tra le diverse rappresentazioni del concetto di funzione e la comprensione del concetto stesso. Una ricerca riferita a gli studenti della scuola secondaria superiore. *La matematica e la sua didattica*, 4, 411-429.
- ✎ **Gagatsis, A., & Christou, C.** (2002). The structure of translations among representations in functions. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 39, 1.
- ✎ **Gagatsis, A., Elia, I., & Mougi, A.** (2002). The nature of multiple representations in developing mathematical relations. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 39, 1.
- ✎ **Glaserfeld, E. V.** (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- ✎ **Glaserfeld, E. V.** (1987). Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- ✎ **Goldin, G. A.** (1987). Levels of language in mathematics problem solving. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- ✎ **Grenier, D., Gerente, M.**, (1992), *Utilisation des Concepts didactiques pour me Analyse des Problemes de Proportionnalite in: Mathematiques chez les 11-16 Ans en France*, Commition Inter IREM Premier Cycle ICME-Quebec 92.
- ✎ **Hart, K., M., Brown, M., L., Kuchemann, D., E., Kerslake, D., Ruddock, G., McCartney, M.**, (1986), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray.
- ✎ **Hoyles, C.**, (1994), "Neglected Voices: Pupils' Mathematics in the National Curriculum" in *Didactics of Mathematics*, A. Gagatsis (Editor), Thessaloniki, Erasmus 2001.
- ✎ **Ioannou I., & Gagatsis, A.** (2003). Study on the role of representations in the understanding of vectors. In **A. Gagatsis, & S. Papastavridis** (Eds) *Proceedings of the third Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp.187-198). Athens: Greek Mathematical Society.
- ✎ **Janvier, C.** (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- ✎ **Kaput, J. J.** (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- ✎ **Karplus, R., Pulos, S., Stage, E.K.**, "Proportional Reasoning Of Early Adolescents' in Lesh, R., Landau, M., (1983), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Academic Press.
- ✎ **Kuchemann, D.**, Learning and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks, in Ernest, P., (1989), *Mathematics Teaching: The Stage of the Art*, The Falmer Press, 119-135.
- ✎ **Lamon, J. S.**, (1993), "Ratio and Proportion: Connecting content and Children's Thinking", *Journal For Research in Mathematics Education*, Vol 24, No 1, pp. 41-61.
- ✎ **Lesh, R., Post, T., & Behr, M.** (1987). Representations and translation among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

- ✎ **Lo, J-J.**, (1993), “Conceptual Bases of Young Children’s Solution Strategies of Missing Value Proportional Tasks”, *Psychology of Mathematics Education, Proceedings of Seventeenth PME International Conference*, pp. 162-177.
- ✎ **Markou, A., & Gagatsis, A.** (2002). Representations and learning of fractions. In **A. Rogerson** (Ed.) *INTERNATIONAL CONFERENCE: The Humanistic Renaissance in Mathematics Education* (pp 250-253). Palermo: The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- ✎ **Markou A., & Gagatsis, A.** (2003). Didactical contact and word problems: Influences and breach of contract in primary school pupils. In **A. Gagatsis, & S. Papastavridis** (Eds) *Proceedings of the third Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp.247-256). Athens: Greek Mathematical Society.
- ✎ **Orton, A.**, (1991), *Learning Mathematics*, Cassel, pp. 11-23.
- ✎ **Piaget, J., Inhelder, B.**, (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*, New York: Basic Books Inc.
- ✎ **Piaget, J.**, (1970). *The child’s conception of movement and speed*, London: Routledge Kegan Paul.
- ✎ **Piaget, J., Inhelder, B.**, (1975), *The origin of the idea of chance in children*, New York: Norton.
- ✎ **Piaget, J., Grize, J.B., Szeminska, A., Bang, V.**, (1977), *Epistemology and Psychology of functions*, Dordrecht, Holland: Reidel.
- ✎ **Pitta-Pandazi, D., & Gagatsis, A.** (2001). Exploring a high achiever’s and a low achiever’s strategies and images in early number arithmetic. *Early Child Development and Care*, 16 , 63-79.
- ✎ **Schliemann, D., Pereira, V.**, (1990), “Proportional Reasoning: From Shopping to Kitchens, Laboratories, and Hopefully Schools’, *International Group for the Psychology of Mathematics Education, Proceeding of Fourteenth PME Conference*, pp. 67-73.
- ✎ **Singer J., A., Resnick, B., L.**, (1992), “Representations of Proportional Relationships: Are Children Part- Part or Part – Whole Reasoners?”, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 23, No 3, pp. 231-246.
- ✎ **Tourniaire, F., Poulos, S.**, (1985), “Proportional Reasoning: A Review of the Literature”, *Educational Studies in Mathematics* 16, 181-204.
- ✎ **Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E.**, (2000), *Making Sense of World Problems*, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
- ✎ **Viet, U.**, “Pupils’ Strategies in Solving Word Problems Before and After Using the Teaching Unit on Proportions and Inverse Proportions’, in Bazzini, L., Steiner, H.G., (1989), *Proceedings of the First Italian – German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics*, Pavia, October 4-9, 1988, pp. 257-270.

ABSTRACT

This paper presents findings of a study concerning the use of multiple representations in solving problems related to proportionality. Each problem was consisted of four questions and only two of them had to do with proportionality. Data were collected from 1361 Greek secondary pupils and 689 Cypriot secondary pupils. The results revealed that the representations did not help students to solve these two problems and especially to reply correctly to the questions which did not have to do with proportionality. An important finding is concerned with the methods students decided to use in order to solve of these two problems. More specifically, 40% of Greek students decided to use the rule of three to solve these problems rather than the fraction equation or the unitary method or any other method. Analysis of qualitative data revealed that we can help students solve correctly these problems by encouraging them to use the graphical representations of the problems. Implications of findings for teaching Mathematics are also drawn.