

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ιλιάδα Ηλία*, Αριάδνη Χρυσάνθου** και Γιώργος Φιλίππου***

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Πανεπιστήμιο Κύπρου

T.K. 20537, 1678 Λευκωσία

Κύπρος

sepgii2@ucy.ac.cy*, a_chrysan@yahoo.com**, edphilip@ucy.ac.cy***

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εικόνα είναι εργαλείο που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση ως μέσο υποστήριξης της σκέψης, της επικοινωνίας και της μετάδοσης μαθηματικών ιδεών. Με αυτή την έννοια, η ικανότητα της εξεικόνισης θεωρείται χρήσιμη στη μάθηση των μαθηματικών γενικά, όπως και στην Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος (ΕΜΠ), ειδικότερα. Οι εικόνες των έργων ΕΜΠ μπορούν να ταξινομηθούν σε διακοσμητικές, αναπαραστατικές, οργανωτικές και πληροφοριακές, ανάλογα με τις λειτουργίες τους. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η εξέταση της συμβολής των κατηγοριών των εικόνων στην ΕΜΠ από μαθητές Στ' τάξης. Για τον έλεγχο των ερευνητικών ερωτημάτων χρησιμοποιήθηκε η ποιοτική προσέγγιση (με τη χρήση δοκιμίου, συνέντευξης και παρατήρησης) και συγκεκριμένα η εφαρμογή πειραμάτων επικοινωνίας μεταξύ ερευνητριών – μαθητών και μαθητών μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συμβολή της αναπαραστατικής, της πληροφοριακής και της οργανωτικής εικόνας ήταν πολύ σημαντική σε όλα σχεδόν τα στάδια ΕΜΠ, όχι όμως της διακοσμητικής. Ήταν εμφανής η συνέπεια και η σταθερότητα που χαρακτήριζε τις στρατηγικές των μαθητών ανεξάρτητα από τη λειτουργία της εικόνας στο πρόβλημα. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν την εικόνα χωρίς να παραγνωρίζουν την αναλυτική μέθοδο. Παρατηρήθηκε ότι ο ρόλος της εικόνας στην επικοινωνία ήταν συμπληρωματικός και υποστηρικτικός του γλωσσικού κώδικα για την αναπαραστατική και οργανωτική εικόνα, ανύπαρκτος για τη διακοσμητική και απαραίτητος για την πληροφοριακή. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η συμβολή της εικόνας στην ΕΜΠ εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στην εικόνα και στο πρόβλημα (λειτουργία εικόνας), τις προϋπάρχουσες γνώσεις και τις νοητικές ικανότητες των μαθητών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ

Ο Bruner (1961) θεωρεί ότι η μάθηση περνά από τρία στάδια: το χειριστικό, το εικονικό και το συμβολικό (enactive, ikonik and symbolic), θεωρεί δηλαδή ότι η εικόνα διαμεσολαβεί ανάμεσα στο πρακτικό και το θεωρητικό επίπεδο κατανόησης. Ιδιαίτερα στα μαθηματικά είναι καλά γνωστός ο ρόλος του σχήματος, του πίνακα και της γραφικής παράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, στην επικοινωνία και μετάδοση μαθηματικών ιδεών και φυσικά στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων στην ΕΜΠ είναι πολυσυζητημένο θέμα στις πρακτικές της μαθηματικής παιδείας, αφού η κατασκευή σχήματος ήταν πάντα όχημα μεταφοράς μαθηματικών ιδεών. Στα νεώτερα χρόνια έχει τονιστεί από τον Polya (1954) καθώς και από τα Standards (NCTM, 2000).

Αυτές οι απόψεις δεν υποβαθμίζουν τη σημασία του γλωσσικού κώδικα επικοινωνίας στις γνωστικές δραστηριότητες και την έμφαση που δίνει ο Vygotsky (1981) στην επίδραση της γλώσσας στη διαμόρφωση της σκέψης, της επικοινωνίας, στο «να κάνεις μαθηματικά» («doing mathematics») και φυσικά το ρόλο της ως μέσο διδασκαλίας και μάθησης. Ο ίδιος ωστόσο αναγνωρίζει και τη σημασία άλλων συμβολικών συστημάτων ή εργαλείων, όπως είναι τα σχεδιαγράμματα, οι εικόνες και τα αριθμητικά σύμβολα (στη Kieran, 2001). Γλώσσα και εικόνα είναι δύο διαφορετικοί τρόποι παρουσίασης, μετάδοσης και ανταλλαγής πληροφοριών και γνώσεων στα μαθηματικά, που παρουσιάζουν θεμελιώδεις διαφορές ως προς το περιεχόμενό τους, την πληροφοριακή τους δυναμική και τη χρησιμότητά τους (Schnotz, 2002).

Σε μερικές περιπτώσεις η χρήση εικόνας μπορεί να έχει αρνητικά αποτελέσματα, λόγω δυσκολιών που προκαλεί στους μαθητές. Δυσκολίες μπορεί να προκύψουν από παράγοντες όπως η αναντιστοιχία της εικόνας με τις ερμηνευτικές ικανότητες των μαθητών ή τις απαιτήσεις του ζητούμενου έργου, η πολυσημία των στοιχείων της, η ακαταλληλότητα της συνθετικής δομής της εικόνας που αφορά τη χωρική διάταξη των μερών της και η προβολή μόνο ορισμένων πτυχών της (Colin et al., 2002).

Παρά τις πιο πάνω επιφυλάξεις η σημασία της εξεικόνισης στην ΕΜΠ υποστηρίζεται από τα πορίσματα πρόσφατων μελετών, όπως των Booth & Thomas (2000) που επισημαίνουν ότι η ικανότητα να σχηματίζει κανείς εικόνες (images) μαθηματικών σχέσεων είναι αναγκαία για την αποτελεσματική ΕΜΠ. Η εξεικόνιση στα πλαίσια της ΕΜΠ σημαίνει την κατανόηση του προβλήματος με τη δημιουργία ή χρήση ενός διαγράμματος ή μιας εικόνας που βοηθά στην επίλυσή του. Η εξεικόνιση συμβάλλει στη διαδικασία μαθηματοποίησης, μια και αποτελεί ένα από τα ενδιάμεσα στάδια μετάβασης των μαθητών από την πραγματικότητα στο θεωρητικό μαθηματικό σχήμα. Οι Zazkis et al. (1996) ορίζουν την εξεικόνιση ως: *«μια πράξη με την οποία το άτομο δημιουργεί μια ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα σε μια εσωτερική νοητική δομή και σε ένα ερέθισμα που γίνεται αντιληπτό από τις αισθήσεις. Η σύνδεση είναι αμφίδρομη, με την έννοια ότι μπορεί να περιλαμβάνει οποιαδήποτε νοητική σχηματοποίηση αντικειμένων ή διαδικασιών που το άτομο συσχετίζει με αντικείμενα ή γεγονότα που προέρχονται από το περιβάλλον (εξωτερικά προς αυτόν), ενώ αντίστροφα μπορεί να περιλαμβάνει την κατασκευή, σε ένα (εξωτερικό) μέσο του περιβάλλοντος όπως χαρτί, πίνακα ή οθόνη του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, αντικειμένων ή γεγονότων που το άτομο ταυτίζει με αντικείμενα ή διαδικασίες στο μυαλό του»* (σ.441). Από πολλούς παιδαγωγούς επισημαίνεται ότι ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί με ένα ή περισσότερα μέσα που μπορεί να περιλαμβάνουν εξεικόνιση ή όχι (Lowrie, 2000). Μια άλλη προσέγγιση κατά την ΕΜΠ, είναι η αναλυτική που σύμφωνα με τους

Zazkis et al. (1996) είναι «οποιοσδήποτε νοητικός χειρισμός αντικειμένων και διαδικασιών με ή χωρίς τη βοήθεια των συμβόλων» (σ. 442). Ο συνδυασμός των δυο στρατηγικών συντελεί σε βελτίωση της επίδοσης στην ΕΜΠ.

Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη λειτουργική ταξινόμηση των εικόνων προς ΕΜΠ στο δημοτικό σχολείο, η οποία βασίστηκε σε έρευνα των Carney & Levin (2002) για τη χρήση των εικόνων κατά την επεξεργασία κειμένου και προβλέπει τις τέσσερις παρακάτω κατηγορίες:

- **Διακοσμητικές:** Δεν παρέχουν πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος.
- **Βοηθητικές-αναπαραστατικές:** Αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή του.
- **Βοηθητικές-οργανωτικές:** Βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι- δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα.
- **Πληροφοριακές:** Δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για να λυθεί το πρόβλημα. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα στηρίζεται στην εικόνα.

Οι εικόνες, ανάλογα με τη λειτουργία τους, είναι δυνατό να αποτελούν σημαντικό μέρος του συλλογισμού των μαθητών κατά την ΕΜΠ με τρεις διαφορετικούς τρόπους: Πρώτον, τα δεδομένα στα οποία βασίζεται ο μαθητής δίνονται, εικονικά και οι πληροφορίες που λαμβάνονται από την εικόνα αναπαρίστανται γλωσσικά, δεύτερον, η εικόνα μπορεί να είναι στενά συνδεδεμένη με το συλλογισμό, κατά τον οποίο ο μαθητής είτε χρησιμοποιεί μια εξωτερική εικόνα είτε οπτικοποιεί χωρίς τη χρήση εικόνας τα βήματα της διαδικασίας ΕΜΠ, και τρίτον, η εικόνα μπορεί να συμβάλει στην κατάληξη, στο συμπέρασμα του συλλογισμού του μαθητή και στην επικοινωνία των αποτελεσμάτων (Barwise & Etchemendy, 1991).

Μπορεί λοιπόν να υποτεθεί ότι η εικόνα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε καθένα από τα στάδια ΕΜΠ του Polya, τα οποία αναφέρονται στην κατανόηση του προβλήματος, στην κατάστρωση του σχεδίου επίλυσης, στην εκτέλεση του σχεδίου και στην αναδρομική διερεύνηση. Η ενεργητική αξιοποίηση των εικόνων κατά την ΕΜΠ μπορεί, επίσης, να οδηγήσει τους μαθητές σε γνωστικές συγκρούσεις, οι οποίες θεωρούνται «ωφέλιμες» στη μαθησιακή διαδικασία. Γενικότερα, στο μοντέλο απόκτησης των γνώσεων που βασίζεται στην ΕΜΠ, η αντίφαση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, γιατί μπορεί να λειτουργήσει, στο μέτρο που γίνεται αντιληπτή από το μαθητή, ως ένδειξη του λανθασμένου χαρακτήρα της λύσης που επεξεργάστηκε (π.χ. αποτέλεσμα παρερμηνείας ή παρανόησης) και να γίνει η αφετηρία μιας τροποποίησης των προηγούμενων γνώσεων. Σύμφωνα με τη Laborde (1987), οι αντιφάσεις αυτές χαρακτηρίζονται εσωτερικές-νοητικές για το μαθητή και συμβαίνουν ανάμεσα στο προσδοκώμενο και στο πραγματικό. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας επιχειρήθηκε η εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου αντιφάσεων σε σχέση με τη χρήση της εικόνας στην ΕΜΠ. Με άλλα λόγια, θεωρήθηκε ότι εσωτερικές αντιφάσεις παρουσιάζονται στο μαθητή όταν το κείμενο του προβλήματος οδηγεί σε διαφορετικό τρόπο εργασίας για την επίλυσή του από αυτή που οδηγεί η χρήση της εικόνας.

Σκοπός της εργασίας είναι να διερευνήσει το ρόλο της εικόνας με βάση την εκάστοτε λειτουργία της στην ΕΜΠ από μαθητές Στ' τάξης δημοτικού σχολείου στα πλαίσια ενός πειραματικού μοντέλου

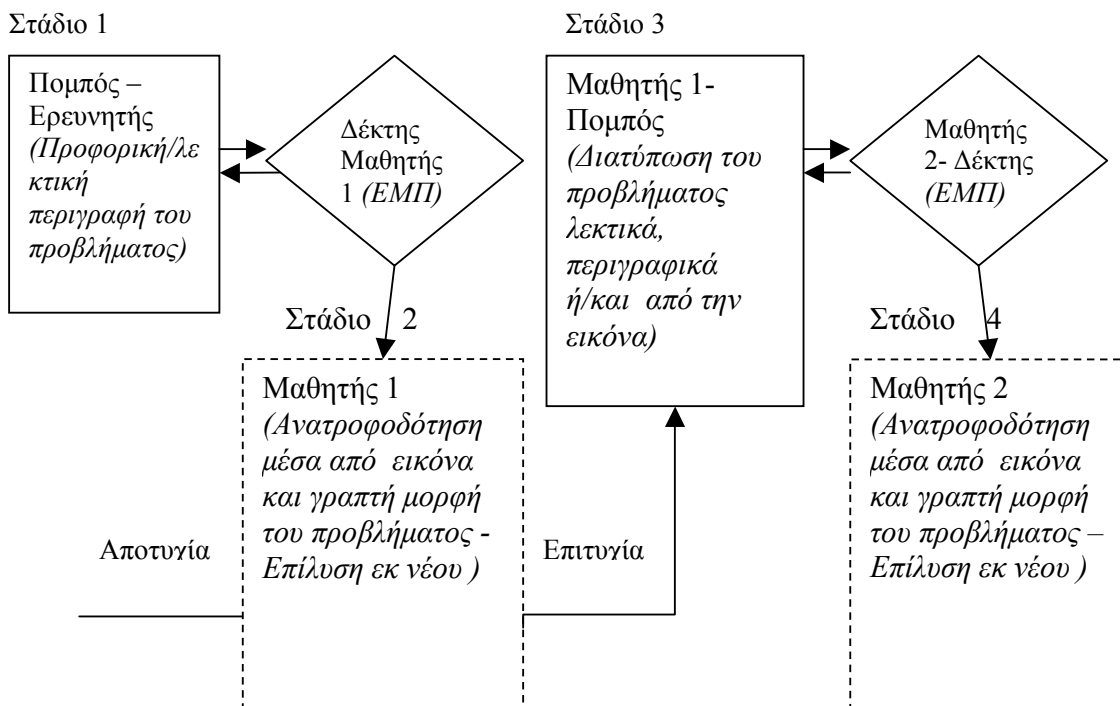
επικοινωνίας-αλληλεπίδρασης μεταξύ ερευνητριών-μαθητών και μαθητών μεταξύ τους. Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε είναι τα εξής:

1. Ποια είναι η επίδραση της κάθε κατηγορίας εικόνων (διακοσμητική, αναπαραστατική, οργανωτική και πληροφοριακή) στη συμπεριφορά των μαθητών κατά την ΕΜΠ;
2. Ποια/ες στρατηγική/ές χρησιμοποιούν οι μαθητές ως προς τη χρήση της κάθε κατηγορίας εικόνων (αναλυτική σκέψη ή εξεικόνιση ή συνδυασμός των δύο) για την ΕΜΠ;
3. Ποια είναι η επίδραση της κάθε κατηγορίας εικόνων στην επικοινωνία κατά την ΕΜΠ σε σχέση με τη χρήση του γλωσσικού κώδικα;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τη συλλογή των δεδομένων και τον έλεγχο των ερευνητικών ερωτημάτων καταλληλότερη θεωρήθηκε η ποιοτική προσέγγιση και συγκεκριμένα η εφαρμογή ενός μοντέλου επικοινωνίας που επιτρέπει την παρατήρηση του τρόπου εργασίας των μαθητών ως δεκτών ή ως πομπών. Έτσι μπορεί να διαπιστωθεί αν οι μαθητές λύνουν πραγματικά ή/και μεταδίδουν το πρόβλημα με ή χωρίς εικόνα. Σε αυτό το μοντέλο επικοινωνίας παρεμβαίνουν δύο μηχανισμοί που αναφέρονται στον πομπό και στο δέκτη των πληροφοριών. Πομπός είναι ο ερευνητής ή ένας μαθητής που περιγράφει λεκτικά το πρόβλημα και δέκτης ένας άλλος μαθητής που προσπαθεί να το λύσει με τη χρήση (ή μη) εικόνας. Στο Διάγραμμα 1 παρουσιάζεται η πορεία διεξαγωγής της επικοινωνίας.

Το μοντέλο διεξαγωγής του πειράματος επικοινωνίας



Διάγραμμα 1

Αναλυτικότερα, στα πλαίσια του μοντέλου επικοινωνίας ο ερευνητής περιγράφει λεκτικά το πρόβλημα στο μαθητή 1 έτσι ώστε ο τελευταίος να το λύσει σε αλληλεπίδραση με τον ερευνητή.

Ανεξάρτητα από την επιτυχία ΕΜΠ, δίνεται στο μαθητή 1 το πρόβλημα σε γραπτή μορφή με την εικόνα για ανατροφοδότηση (διορθωτική ή μη) και εκ νέου επίλυση έτσι ώστε να διαπιστωθεί τυχόν αλλαγή στη διαδικασία λύσης του προβλήματος με τη χρήση της εικόνας. Ακολούθως, ο μαθητής 1 γίνεται πομπός και εκφωνεί το πρόβλημα στο μαθητή 2 χωρίς να το έχει μπροστά του ανακαλώντας και επιλέγοντας πληροφορίες του προβλήματος με ή χωρίς την περιγραφή της εικόνας ή επί μέρους στοιχείων της. Ο μαθητής 2 προσπαθεί να λύσει το πρόβλημα σε αλληλεπίδραση με το μαθητή 1 και με παρεμβάσεις του ερευνητή (όποτε θεωρείται αναγκαίο). Τέλος, δίνεται το πρόβλημα σε γραπτή μορφή μαζί με την εικόνα και στο μαθητή 2 για εκ νέου επίλυσή του.

Υποκείμενα της εργασίας ήταν οκτώ μαθητές Στ' τάξης δημοτικού με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά, χωρισμένοι σε ζευγάρια. Η επιλογή μαθητών ίδιας επίδοσης είχε σκοπό να σταθεροποιήσει τον παράγοντα ικανότητα των μαθητών. Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στα τέσσερα πειράματα επικοινωνίας συμβολίζονται ως Α1 και Α2, Β1 και Β2, Γ1 και Γ2, Δ1 και Δ2. Οι αριθμοί 1 και 2 αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα τον πρώτο μαθητή που καλείται να λύσει το πρόβλημα στο πείραμα επικοινωνίας και να γίνει έπειτα πομπός και το δεύτερο μαθητή που έχει το ρόλο του δέκτη και του δεύτερου λύτη του προβλήματος.

Το δοκίμιο που χρησιμοποιήθηκε περιλάμβανε τέσσερα έργα, ένα για κάθε κατηγορία εικόνας. Χορηγήθηκε σταδιακά (ένα πρόβλημα κάθε φορά μαζί με την εικόνα) σε δύο μαθητές κατά τη διάρκεια του πειράματος επικοινωνίας. Για κάθε πρόβλημα καλούνταν οι μαθητές να εξηγήσουν τη διαδικασία λύσης που ακολούθησαν και να δηλώσουν με ποιο τρόπο τους βοήθησε η εικόνα. Η συνέντευξη περιλάμβανε ερωτήσεις για τον τρόπο σκέψης και χρήσης της εικόνας στην ΕΜΠ και η παρατήρηση αποσκοπούσε στην καταγραφή των αντιδράσεων, των δυσκολιών και της αλληλεπίδρασης των μαθητών στα πλαίσια της επικοινωνίας όταν είχαν το ρόλο είτε του δέκτη είτε του πομπού σε σχέση με τη χρήση της εικόνας για την κατανόηση και την ΕΜΠ.

Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι με τα οποία μπορούσαν να εκφράσουν και γραπτώς τον τρόπο λύσης του προβλήματος πριν ή/και μετά από την παρουσίαση της εικόνας, έτσι ώστε να δοθεί έμφαση όχι μόνο στην απάντηση αλλά και στη διαδικασία λύσης του προβλήματος κατά την ανάλυση των δεδομένων. Η όλη διαδικασία επικοινωνίας – αλληλεπίδρασης, η διάρκεια της οποίας ήταν περίπου 80 λεπτά σε κάθε πείραμα επικοινωνίας μαγνητοφωνήθηκε και απομαγνητοφωνήθηκε για τέσσερις δυάδες μαθητών.

Τα έργα, οι αντίστοιχες εικόνες και η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε

Η τελική επιλογή και μορφή των έργων και των εικόνων του δοκιμίου έγινε μετά από την πιλοτική εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου επικοινωνίας με τη χρήση οκτώ προβλημάτων και των αντίστοιχων εικόνων σε τρία ζευγάρια μαθητών. Τα έργα ήταν όμοια με αντίστοιχα που χρησιμοποιήθηκαν σε πρόσφατες έρευνες, των Misailidou & Williams (2002), Booth & Thomas (2000) και Olson (1998) και παρατίθενται πιο κάτω:

1. Η κυρία Γεωργία βάζει τους μαθητές της σε ομάδες των 5, με 3 κορίτσια σε κάθε ομάδα. Αν η τάξη της κυρίας Γεωργίας έχει 25 μαθητές, πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια είχε στην τάξη της;

Η εικόνα, που δινόταν, είχε διακοσμητικό ρόλο εφόσον παρουσίαζε ένα αγόρι και ένα κορίτσι.

2. Ένας γεωργός φύτεψε ένα δέντρο σε κάθε ένα από τα δύο άκρα ενός ευθύγραμμου μονοπατιού. Ακολούθως φύτεψε ένα δέντρο κάθε 2 m. Το μήκος του μονοπατιού είναι 10 m. Πόσα δέντρα φύτεψε συνολικά στο μονοπάτι;

Η εικόνα που συνόδευε το πρόβλημα παρουσίαζε ένα μονοπάτι με δύο δέντρα, ένα σε κάθε άκρο του. Η λειτουργία της εικόνας σ' αυτό το πρόβλημα είναι βοηθητική αναπαραστατική.

3. Την περασμένη βδομάδα κατασκήνωσαν σε ένα βουνό 10 κατασκηνωτές. Κάθε μέρα χρειάζονταν 8 ψωμάκια για να φάνε. Αυτή τη βδομάδα κατασκήνωσαν στο ίδιο βουνό 15 κατασκηνωτές. Πόσα ψωμάκια χρειάζονται την ημέρα;

Η εικόνα είχε οργανωτικό χαρακτήρα στις πληροφορίες του προβλήματος. Συγκεκριμένα, μια οριζόντια γραμμή διαχωρίζει τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος. Στο πάνω μέρος της γραμμής, αριστερά, υπήρχαν 10 κατασκηνωτές σε τρεις σειρές (από τέσσερις στις δύο πρώτες και δύο στην τρίτη σειρά) και 8 ψωμάκια στα δεξιά σε τρεις σειρές (από τρία στις δύο πρώτες σειρές και δύο στην τρίτη). Στο κάτω μέρος υπήρχαν 15 κατασκηνωτές σε τέσσερις σειρές (από τέσσερις στις τρεις πρώτες σειρές ενώ τρεις στην τέταρτη), ζητώντας δίπλα τα ψωμάκια που τους αναλογούσαν με ένα ερωτηματικό.

4. Υπολόγισε τη μάζα τριών αντικειμένων: πυραμίδα, σφαίρα και κύβο με βάση τις πληροφορίες που δίνονται στην εικόνα.

Στο τέταρτο πρόβλημα, η εικόνα ουσιαστικά περιείχε όλη την πληροφορία του προβλήματος αφού παρουσίαζε τρεις ζυγαριές: Στη μια υπήρχε μια πυραμίδα, ένας κύβος και μια σφαίρα και η ένδειξη της ζυγαριάς ήταν 23 κιλά, στην άλλη υπήρχαν δύο κύβοι και δύο σφαίρες και η ένδειξη ήταν 22 κιλά και στην τρίτη ζυγαριά υπήρχαν δύο πυραμίδες και μία σφαίρα και η ένδειξη της ήταν 28 κιλά.

Ως προς τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε πείραμα επικοινωνίας, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αρχικά το κάθε πρόβλημα μαζί με την περιγραφή της εικόνας διατυπώνονταν προφορικά από τον ερευνητή (πομπός) στον πρώτο μαθητή (δέκτης 1). Μετά την προσπάθεια του για επίλυση του προβλήματος, δινόταν το ίδιο πρόβλημα γραπτά μαζί με την εικόνα ώστε ο ίδιος μαθητής να το λύσει εκ νέου. Έπειτα ο τελευταίος περιέγραφε λεκτικά το πρόβλημα (με ή χωρίς τη χρήση στοιχείων της εικόνας) σε δεύτερο μαθητή (δέκτης 2), ο οποίος ακολουθούσε ανάλογη διαδικασία με τον πρώτο για να λύσει το πρόβλημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει συνοπτικά τα αποτελέσματα με βάση τις αντιδράσεις των οκτώ μαθητών στα πειράματα επικοινωνίας ως προς τη χρήση των δοσμένων εικόνων από κάθε κατηγορία ή εκείνων που έφτιαχναν οι ίδιοι κατά την επίλυση των προβλημάτων. Οι συμπεριφορές που περιλαμβάνονται στον πίνακα αποτελούν τα κριτήρια στα οποία βασίστηκε η εκτίμηση της συμβολής κάθε κατηγορίας εικόνας στην ΕΜΠ και στην επικοινωνία στα πλαίσια της ανάλυσης των δεδομένων της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, ως προς την ΕΜΠ εξετάστηκε αν οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ή όχι τη δοσμένη εικόνα για να λύσουν το πρόβλημα, αν κατασκεύαζαν το δικό τους σχέδιο, αν οδηγούνταν σε εσωτερικές αντιφάσεις με τη χρήση της εικόνας και σε ποιο/ποια στάδια ΕΜΠ εισήγαγαν και αξιοποιούσαν την εικόνα σε μεγαλύτερο βαθμό. Επιπλέον, εξετάστηκε ποια στρατηγική χρησιμοποιούσαν οι μαθητές για την ΕΜΠ σε σχέση με τη λειτουργία της εικόνας στο πρόβλημα. Ως

προς την επικοινωνία, διερευνήθηκε κατά πόσο οι μαθητές όταν είχαν το ρόλο του πομπού χρησιμοποιούσαν στοιχεία από την εικόνα στη λεκτική διατύπωση του προβλήματος.

Πίνακας 1: Συνοπτική Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Συμπεριφορές	Είδος εικόνας	Υποκείμενα							
		A1	A2	B1	B2	Γ1	Γ2	Δ1	Δ2
Αξιοποίηση η δοσμένης εικόνας	Διακοσμητική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Αναπαραστατική	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-
	Οργανωτική	✓	-	✓	✓	✓	✓	-	-
	Πληροφοριακή	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Δικό τους σχέδιο	Πρόβλημα 1	-	-	✓	-	-	-	-	✓
	Πρόβλημα 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-	✓
	Πρόβλημα 3	-	-	-	-	-	-	-	-
	Πρόβλημα 4	✓	-	-	-	✓	-	-	✓
Χρήση εικόνας Στάδια ΕΜΠ	Διακοσμητική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Αναπαραστατική	1-4	1-3	1-3	1-3	1-3	1-3	1-4	1-4
	Οργανωτική	1-3	-	1-3	1-3	1-3	1-3	-	-
	Πληροφοριακή	1-4	1	1-4	1-4	1-4	1-4	1-4	1
Δημιουργία εσωτερικών αντιφάσεων	Διακοσμητική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Αναπαραστατική	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓
	Οργανωτική	✓	-	✓	✓	✓	-	-	-
	Πληροφοριακή	✓	✓	-	-	-	-	✓	✓
Χρήση Εικόνας στην Επικοινωνία	Διακοσμητική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Αναπαραστατική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Οργανωτική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Πληροφοριακή	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-
Εξεיקόνιση	Διακοσμητική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Αναπαραστατική	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Οργανωτική	✓	-	✓	✓	✓	✓	-	-
	Πληροφοριακή	✓	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Αναλυτική προσέγγιση	Διακοσμητική	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Αναπαραστατική	-	-	-	-	-	-	-	-
	Οργανωτική	-	✓	-	-	✓	✓	✓	✓
	Πληροφοριακή	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

1-4=Στάδια ΕΜΠ (Polya): 1=κατανόηση, 2=κατάσχεση σχεδίου, 3=εκτέλεση σχεδίου, 4=αναδρομική διερεύνηση

Με βάση την ανάλυση των δεδομένων, είναι φανερό η διαφορετικότητα των συμπεριφορών των μαθητών ως προς την αξιοποίηση των εικόνων στην ΕΜΠ και τις μεθόδους προσέγγισης των προβλημάτων, την κατασκευή δικού τους σχεδίου και τη δημιουργία εσωτερικών αντιφάσεων. Ωστόσο, αρκετές συμπεριφορές των μαθητών από τις επιδράσεις της διακοσμητικής και της πληροφοριακής εικόνας παρουσιάζουν μεγάλη ομοιομορφία κατά την ΕΜΠ. Σταθερότητα μεταξύ των

μαθητών παρουσιάζεται και στη χρήση της εξεικόνισης κατά την ΕΜΠ με την αναπαραστατική εικόνα.

Αναλυτικότερα, ο ρόλος της **διακοσμητικής εικόνας** είναι ανύπαρκτος εφόσον κανένας μαθητής δεν τη χρησιμοποίησε, γεγονός που εκφράστηκε και ρητά από τα ίδια τα υποκείμενα. Αυτό οφείλεται στην ουδετερότητά της ως προς την πληροφοριακή της λειτουργία στο πρόβλημα. Όλα τα υποκείμενα εφάρμοσαν την αναλυτική προσέγγιση, εκτός από δύο που προχώρησαν με δική τους εξεικόνιση αφού έφτιαζαν (με δική τους πρωτοβουλία) δικά τους σχέδια. Αντίθετα με την εικόνα του προβλήματος τα σχέδια αυτά φάνηκε να έχουν βοηθητικό-οργανωτικό χαρακτήρα. Συγκεκριμένα, μια μαθήτρια έφτιαξε ένα σχέδιο με πέντε ομάδες σε σχήμα ορθογωνίου στο εσωτερικό των οποίων έγραψε τον αριθμό 3 για τα κορίτσια και τον αριθμό 2 για τα αγόρια. Χαρακτηριστική ήταν η δήλωσή της: *«Η εικόνα του προβλήματος δεν με βοήθησε καθόλου. Το δικό μου σχέδιο με βοήθησε περισσότερο. Σχεδιάζοντας τις ομάδες ήταν πιο εύκολο να βρω τα κορίτσια και τα αγόρια»*. Σε κανένα από τα τέσσερα στάδια του Polya δεν χρησιμοποιήθηκε η εικόνα.

Αντίθετα, ο ρόλος της **πληροφοριακής εικόνας** αποδείχθηκε καθοριστικός για την επίλυση του προβλήματος, αφού αξιοποιήθηκε από όλους τους μαθητές για το λόγο ότι η συγκεκριμένη εικόνα εμπεριέχει όλες τις πληροφορίες του προβλήματος. Η πληροφοριακή εικόνα χρησιμοποιήθηκε είτε μέσω της λεκτικής της περιγραφής είτε μέσω της οπτικής επαφής που είχαν οι μαθητές με αυτή. Μερικοί μαθητές, χρησιμοποίησαν τη στρατηγική δοκιμή και έλεγχο ενώ άλλοι εφάρμοσαν πιο συστηματικές προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας την εικόνα για την επίλυση του προβλήματος. Ενδεικτική είναι η εξήγηση ενός μαθητή που ακολούθησε ένα μεθοδικό τρόπο επίλυσης με τη χρήση της εικόνας: *«Με βοήθησε (η εικόνα) να βρω ότι ένας κύβος και μια σφαίρα είναι 11 κιλά. Αν βάλεις ακόμα ένα κύβο και μια σφαίρα κάνουν 22 κιλά. Στην πρώτη ζυγαριά ο κύβος και η σφαίρα είναι 11 κιλά άρα η πυραμίδα είναι 12. Και στην τρίτη ζυγαριά αφού οι πυραμίδες είναι 12 κιλά, $12 + 12 = 24$, άρα μένουν 4 κιλά που είναι η σφαίρα»*.

Από τους τρόπους λύσης των μαθητών έγινε φανερή η προτίμηση τους στην εφαρμογή κυρίως της εξεικόνισης στο πρόβλημα με την πληροφοριακή εικόνα (εκτός από ένα μαθητή που έλυσε το πρόβλημα με αναλυτική μέθοδο). Χαρακτηριστική ήταν η προσέγγιση του συγκεκριμένου μαθητή, ο οποίος ακούγοντας το πρόβλημα κατέγραψε μόνο την ένδειξη κάθε ζυγαριάς. Χρησιμοποίησε ακολούθως, τη στρατηγική δοκιμή και έλεγχο νοητικά χωρίς να καταγράφει οτιδήποτε για να το λύσει και έφτασε στη λύση με επιτυχία. Στην ερώτηση αν τον βοήθησε η εικόνα απάντησε ότι χρησιμοποίησε απλώς τα κιλά που έγραφε. Με άλλα λόγια η εικόνα χρησιμοποιήθηκε από το συγκεκριμένο μαθητή μόνο σε σχέση με την πληροφοριακή της δυναμική και όχι ως μέσο εξεικόνισης για την επίλυση του προβλήματος όπως στην περίπτωση των περισσότερων μαθητών.

Δύο υποκείμενα χρησιμοποίησαν την εικόνα μόνο στο στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, ενώ τα υπόλοιπα υποκείμενα την χρησιμοποίησαν και στα τέσσερα στάδια επίλυσης του Polya. Από αυτό συνάγεται ότι ο ρόλος της ήταν καθοριστικός ώστε να αντιληφθούν, να αναπαραστήσουν το πρόβλημα αλλά και να βρουν τρόπο λύσης. Επιπλέον, οδήγησε τους μαθητές που εφάρμοσαν τη στρατηγική δοκιμή και έλεγχο σε αλληπάλληλες εσωτερικές αντιφάσεις, ανάμεσα στους προτεινόμενους αριθμητικούς συνδυασμούς και αυτούς που πρέπει να ισχύουν. Παρόλο που το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν το μοναδικό έργο στο οποίο η χρήση της εικόνας ήταν απαραίτητη,

εντούτοις μερικοί από τους μαθητές δεν συνειδητοποιούσαν ότι στηρίζονταν στην εικόνα για να αρχίσουν τη διαδικασία επίλυσης και να οδηγηθούν στην επιτυχημένη έκβαση του προβλήματος.

Η **αναπαραστατική εικόνα** φαίνεται να αξιοποιείται επίσης σε μεγάλο βαθμό κατά την ΕΜΠ, γεγονός που ερμηνεύεται από τη χωρική δεξιότητα που προϋποθέτει η κατανόηση και η λύση του δεύτερου προβλήματος. Για το λόγο αυτό προκαλούσε συχνά νοητικές συγκρούσεις ανάμεσα στον αρχικό τρόπο σκέψης, χωρίς εξεικόνιση και στον τελικό, με εξεικόνιση. Η πιο συνηθισμένη από αυτές, προκύπτει ανάμεσα στην αρχική εφαρμογή ενός οικείου αλγόριθμου, $10:2=5$ για τον υπολογισμό των δέντρων στο δεύτερο πρόβλημα, και στην εικόνα (είτε τη δική τους είτε τη δοσμένη) που παραπέμπει στη χωρική διάταξη των δέντρων η οποία οδηγεί στην αρίθμησή τους.

Πιο συγκεκριμένα, ένας μαθητής (Α1) αφού έφτιαξε το ευθύγραμμο μονοπάτι με τα δέντρα στα άκρα του και αρίθμησε το μήκος του αρχίζοντας όμως από τη μονάδα, έδωσε την απάντηση 7 με την εξήγηση ότι: « Έκανα το ευθύγραμμο μονοπάτι, έβαλα ότι είναι 10 μέτρα και φύτεψα στα δύο άκρα δέντρα. Ύστερα σε κάθε δύο μέτρα που λέει ότι φύτεψε δέντρα θα κάνω $10/2 = 5$. Μετά φύτεψα 5 δέντρα και δύο που είναι στα άκρα 7». Ενώ αμέσως μετά άλλαξε γνώμη και δήλωσε: «Η μάλλον 5 που φύτεψε δέντρα γιατί όλα μαζί είναι 10 μέτρα, αν το κάνεις δια δύο είναι πέντε δέντρα». Ακολουθώντας βλέποντας τη δική του εικόνα προβληματίστηκε γιατί το μονοπάτι που έφτιαξε δεν ήταν 10 αλλά 9 μέτρα και αντιλήφθηκε ότι έπρεπε να αρχίσει να μετρά το μονοπάτι από το μηδέν και όχι από το ένα, καταλήγοντας στην απάντηση 6. Όταν ο μαθητής Α1 είχε το ρόλο του πομπού, περιγράφοντας το πρόβλημα άλλαξε τα δεδομένα χωρίς βέβαια να το συνειδητοποιήσει. Χαρακτηριστικά ανέφερε: «Στις άκρες του μονοπατιού φύτεψε δύο δέντρα, σε κάθε άκρη του. Κάθε δύο μέτρα φύτεψε ακόμα ένα δέντρο. Πόσα δέντρα φύτεψε ο γεωργός;» Βασισμένος στα λανθασμένα δεδομένα που χρησιμοποίησε ο δέκτης Α2, θεωρώντας ότι το μονοπάτι ήταν ορθογώνιο διπλασίασε τα δέντρα της μιας πλευράς. Με τη χορήγηση της εικόνας ο Α2 το έλυσε χωρίς δυσκολία. Στη συγκεκριμένη κατάσταση επικοινωνίας φάνηκε ότι η εικόνα διαδραμάτισε πολύ βοηθητικό ρόλο εφόσον λειτούργησε διορθωτικά ως προς τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος από τον Α1. Διευκόλυνε τη μεταξύ τους επικοινωνία οδηγώντας τον Α2 στην ορθή λύση, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος.

Κατά τη διαδικασία λύσης του προβλήματος αυτού το υποκείμενο Α1 όπως και άλλα δύο υποκείμενα χρησιμοποίησαν την εικόνα, σε όλα τα στάδια ΕΜΠ (Polya), δηλαδή στην κατανόηση του προβλήματος, στην κατάστρωση σχεδίου λύσης, στην εκτέλεση (ζωγραφίζοντας τα δέντρα στην εικόνα) και στον έλεγχο της ορθότητας της λύσης τους (διαπιστώνοντας ότι τα πέντε δέντρα, για παράδειγμα, δεν τοποθετούνται ανά δύο μέτρα στο μονοπάτι). Ο Α2 όπως και άλλα τέσσερα υποκείμενα χρησιμοποίησαν την εικόνα στα τρία πρώτα στάδια ΕΜΠ. Άρα όλοι οι μαθητές ακολούθησαν την προσέγγιση της εξεικόνισης και γι'αυτό δήλωσαν ότι η δοσμένη εικόνα ήταν ιδιαίτερα βοηθητική στην πορεία λύσης του προβλήματος (με μια μόνο εξαίρεση).

Η χρήση της **οργανωτικής εικόνας** φάνηκε να διαδραματίζει επίσης σημαντικό ρόλο στην ΕΜΠ. Τρεις μαθητές το έλυσαν χωρίς τη χρήση της εικόνας (με αναλυτική προσέγγιση), ενώ άλλοι κατάφεραν να οδηγηθούν στη λύση του προβλήματος με τη χρήση της εικόνας (με εξεικόνιση) και αναλυτικές μεθόδους σε συνδυασμό με τη βοήθεια της ερευνήτριας. Πιο συγκεκριμένα, πριν από την παρουσίαση και επεξεργασία της εικόνας και την υποβολή βοηθητικών ερωτήσεων οι περισσότεροι μαθητές ακολουθούσαν λανθασμένη πορεία εργασίας χρησιμοποιώντας κατά κύριο λόγο την πράξη της αφαίρεσης. Με την κατάλληλη όμως επεξεργασία της εικόνας κατέληγαν στην ορθή εφαρμογή

της αναλογίας. Η επεξεργασία αυτή περιλάμβανε «αναδιοργάνωση» της εικόνας, δηλαδή τον διαχωρισμό των κατασκευωτών σε δύο ομάδες, των 10-και-των 5 και την αντιστοίχισή τους με τις ομάδες των ψωμιών. Ενδεικτική είναι η εξήγηση ενός μαθητή: «Οι 10 κατασκευωτές θέλουν 8 ψωμάκια, άρα οι 10 από τους 15 θέλουν και αυτοί 8 ψωμάκια, μένουν 5 κατασκευωτές. Θα υπολογίσω ότι αφού οι 10 θέλουν 8, άρα οι 5 θέλουν το μισό, δηλαδή θέλουν 4». Για κάποιο μαθητή όμως η εικόνα λειτούργησε ως «εμπόδιο» πιθανόν λόγω της «αντίφασης» ανάμεσα στη διάταξη των κατασκευωτών στην εικόνα και σ' αυτή που σχημάτισε νοητικά ο μαθητής. Αναλυτικότερα, ο μαθητής αυτός κατέφυγε σε μοτίβο που επινόησε ο ίδιος και αφορούσε τη διάταξη όπως δίνεται στην εικόνα: 4 κατασκευωτές έχουν δίπλα τους 3 ψωμάκια, άρα $4-1 = 3$. Προχωρώντας σε γενίκευση του μοτίβου, προσπάθησε να το εφαρμόσει σε όλες τις σειρές των 15 κατασκευωτών, και έτσι οδηγήθηκε σε λανθασμένη λύση. Η οργανωτική εικόνα φάνηκε να χρησιμοποιείται στα τρία πρώτα στάδια επίλυσης του προβλήματος, κατανόηση, σχεδιασμός λύσης και εκτέλεση πράξης (εφαρμογή αναλογίας). Στις περισσότερες περιπτώσεις η οργανωτική εικόνα οδήγησε τους μαθητές σε εσωτερική αντίφαση (π.χ. από την αφαίρεση στην εφαρμογή της αναλογίας) γεγονός που λειτούργησε εποικοδομητικά στην επίλυση του προβλήματος.

Συνοψίζοντας, στις περισσότερες περιπτώσεις αξιοποίησης των εικόνων στην ΕΜΠ - εκτός της διακοσμητικής - η λειτουργία τους συνεισφέρει σε όλη την πορεία λύσης του προβλήματος. Επιπλέον, κατά την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων δημιουργήθηκαν γνωστικές αντιφάσεις πριν και μετά τη χρήση της εικόνας στα συγκεκριμένα υποκείμενα από την αναπαραστατική, οργανωτική και πληροφοριακή εικόνα. Η ανάγκη για περιγραφή της διακοσμητικής, αναπαραστατικής και οργανωτικής εικόνας φαίνεται να είναι ανύπαρκτη στην επικοινωνία μεταξύ των μαθητών. Αυτό διαφάνηκε από το γεγονός ότι οι μαθητές λειτουργώντας ως πομποί στην επικοινωνία διατύπωναν λεκτικά το πρόβλημα χωρίς να περιγράφουν ή να αναφέρουν στοιχεία από την εικόνα. Αντίθετα η συμβολή της περιγραφής της πληροφοριακής εικόνας φαίνεται να είναι καθολική και καθοριστική στον τομέα αυτό, πιθανότατα επειδή αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του προβλήματος. Ήταν το μοναδικό πρόβλημα στο οποίο όλοι οι μαθητές στο ρόλο του πομπού χρησιμοποίησαν στοιχεία από την εικόνα κατά τη λεκτική διατύπωση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Με βάση την ανάλυση των αποτελεσμάτων, η διαφορετικότητα που διακρίνεται στις συμπεριφορές και απαντήσεις των μαθητών σε σχέση με την εξεικόνιση στα πλαίσια της ΕΜΠ μπορεί να ερμηνευτεί από την αλληλεπίδραση που συντελείται ανάμεσα στο μαθητή και στο ερέθισμα, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η προβληματική κατάσταση ή/και η εικόνα (Bishop, 1989). Σύμφωνα με τον Bishop (1989) δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος να εκτελέσεις ένα συγκεκριμένο έργο, γιατί αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από κάθε άτομο διαφορετικά. Αυτή η διαφορετικότητα, εξαρτάται από τις προτιμήσεις του ατόμου, από τη χωρητικότητα και την ικανότητα της μνήμης του για εξεικόνιση και από την ικανότητά του να ανακαλεί, να δημιουργεί και να επιλέγει τις κατάλληλες εικόνες.

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα της έρευνας που αναφέρεται την επίδραση της κάθε κατηγορίας εικόνων στη συμπεριφορά των μαθητών κατά την ΕΜΠ, φάνηκε ότι η συνεισφορά της αναπαραστατικής, της πληροφοριακής και της οργανωτικής εικόνας (όχι όμως της διακοσμητικής) ήταν πολύ σημαντική σε όλα σχεδόν τα στάδια ΕΜΠ για τα περισσότερα υποκείμενα. Οι εικόνες αυτές οδήγησαν τους μαθητές σε εσωτερικές αντιφάσεις άλλοτε σε μεγαλύτερο και άλλοτε σε μικρότερο βαθμό, γεγονός που τους βοήθησε να φτάσουν στην ορθή λύση του προβλήματος. Η

διαπίστωση αυτή προέκυψε τόσο άτυπα από τις αντιδράσεις των μαθητών όσο και τυπικά από τις δηλώσεις τους.

Συγκεκριμένα, η διακοσμητική εικόνα διαπιστώθηκε ότι δεν ασκεί κανένα ουσιαστικό ρόλο στη συμπεριφορά των μαθητών κατά τη διαδικασία ΕΜΠ ή κατά την επικοινωνία μεταξύ τους (στα πλαίσια του ρόλου είτε του δέκτη είτε του πομπού). Όπως αναφέρουν οι Carney & Levin (2002), οι διακοσμητικές εικόνες προσδίδουν πιο ελκυστικό χαρακτήρα στο κείμενο, αλλά δεν ενισχύουν την κατανόηση, την ανάκληση πληροφοριών ή οποιαδήποτε εφαρμογή στο περιεχόμενο του κειμένου. Η ιδέα αυτή φάνηκε να ισχύει και κατά την ΕΜΠ, σύμφωνα με την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας.

Η αναπαραστατική εικόνα, αντίθετα, παρατηρήθηκε ότι είχε καθοριστικό ρόλο στην ΕΜΠ για τα περισσότερα υποκείμενα, δεδομένου ότι η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτούσε την κατανόηση της χωρικής διάταξης των στοιχείων του με τη βοήθεια της εξεικόνισης. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ο οπτικοχωρικός χαρακτήρας του προβλήματος «ανάγκασε» όλους σχεδόν τους μαθητές να προβούν σε κατασκευή του δικού τους σχεδίου πριν την παρουσίαση της εικόνας του, κάτι που στα άλλα προβλήματα συνέβηκε μόνο σε μεμονωμένες περιπτώσεις.

Σε σχέση με το πρόβλημα που περιλάμβανε την οργανωτική εικόνα, στις περισσότερες περιπτώσεις η εικόνα λειτούργησε ως «διευκολυντής» στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, οδηγώντας τους μαθητές σε εσωτερικές αντιφάσεις. Σε μια περίπτωση, ωστόσο, η διάταξη των στοιχείων της εικόνας προκάλεσε δυσκολία κατά την ΕΜΠ. Το εύρημα αυτό ερμηνεύεται από τους Colin et al.(2002), οι οποίοι αναφέρουν ότι η χωρική ταξινόμηση – διάταξη των στοιχείων μιας εικόνας οδηγεί συχνά τον αναγνώστη στην απόδοση ακατάλληλων νοημάτων.

Όσον αφορά την επίδραση της πληροφοριακής εικόνας στη συμπεριφορά των μαθητών κατά την ΕΜΠ, φαίνεται ότι ήταν θεμελιώδης, εφόσον εμπεριείχε όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Η χρήση της εικόνας διαπιστώθηκε ότι ήταν απαραίτητη και σχεδόν καθολική, παρόλο που υπήρχαν μερικοί μαθητές που δεν δέχτηκαν ή δεν αντιλήφθηκαν τη χρησιμότητά της. Μια ερμηνεία που μπορεί να δοθεί για τη στάση αυτή των μαθητών είναι ότι έδιναν περισσότερη έμφαση στο βοηθητικό ρόλο που είχε η εικόνα για να φτάσουν στη σωστή απάντηση. Ως αποτέλεσμα, δεν συνειδητοποιούσαν τη σημασία της πληροφορίας στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Αυτή η ιδέα πιθανόν να ενισχύθηκε από το γεγονός ότι η πρώτη επαφή των μαθητών με την εικόνα δεν ήταν οπτική αλλά λεκτική (μέσα από την περιγραφή του προβλήματος από τον πομπό), με αποτέλεσμα τα στοιχεία της εικόνας να είναι ήδη γνωστά και άρα η δεύτερη επαφή τους με την εικόνα στο δοκίμιο οπτικά να θεωρούνταν αχρείαστη.

Αναφορικά με τα στάδια ΕΜΠ, η οργανωτική και η αναπαραστατική εικόνα αξιοποιήθηκαν από τους μαθητές με συνέπεια στο μεγαλύτερο μέρος της πορείας ΕΜΠ. Ωστόσο, η συνεισφορά της πληροφοριακής εικόνας στα στάδια ΕΜΠ είχε σε κάποιες περιπτώσεις συνολικό και σε άλλες αποσπασματικό χαρακτήρα. Συγκεκριμένα, για τα υποκείμενα που δεν δέχτηκαν τη χρησιμότητά της, η πληροφοριακή εικόνα φάνηκε χρήσιμη μόνο σε σχέση με τις πληροφορίες που έδινε (για την κατανόηση δηλαδή του προβλήματος) και όχι σε σχέση με τα επόμενα στάδια (σχεδιασμό και εκτέλεση λύσης) εφόσον εφάρμοζαν κυρίως αναλυτικές προσεγγίσεις, ενώ για τα υπόλοιπα υποκείμενα η εικόνα αξιοποιήθηκε σε όλα τα στάδια ΕΜΠ. Ωστόσο, το γεγονός ότι ήταν η μοναδική εικόνα την οποία χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά τη λεκτική διατύπωση του προβλήματος όταν

είχαν το ρόλο του πομπού καταδεικνύει τη σημασία που απόδωσαν οι μαθητές έστω και μη συνειδητά στις πληροφορίες της εικόνας τόσο στην επικοινωνία όσο και στην επίλυση του προβλήματος.

Σε σχέση με το δεύτερο ερώτημα της έρευνας που αναφέρεται στις στρατηγικές των μαθητών, είναι φανερό η συνέπεια που χαρακτήριζε τις εμφάνσεις των μαθητών ως προς τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούσαν ώστε να λύσουν ένα πρόβλημα, ανεξάρτητα από τη λειτουργία της εικόνας σ' αυτό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί μια μαθήτρια που χρησιμοποιούσε συστηματικά αναλυτικές μεθόδους ΕΜΠ, η οποία ακόμα και στο πρόβλημα με την πληροφοριακή εικόνα δεν παρουσίασε κανένα στοιχείο εξεικόνισης στη λύση της. Η συμπεριφορά αυτή ερμηνεύεται από το γεγονός ότι πρόκειται για μια ιδιαίτερα χαρισματική μαθήτρια στα μαθηματικά με πολλές μαθηματικές γνώσεις, με αποτέλεσμα να είναι σε θέση να οικοδομεί νοητικά μοντέλα χωρίς εικονική υποστήριξη (Mayer, 1997). Οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούσαν την εξεικόνιση χωρίς να παραγνωρίζουν την εφαρμογή στοιχείων της αναλυτικής μεθόδου. Επομένως, οι στρατηγικές των μαθητών αποτελούσαν ουσιαστικά ένα συγκερασμό των δύο στρατηγικών με έμφαση σ' αυτή που ταίριαζε περισσότερο με τις ικανότητες και τα γνωστικά τους σχήματα. Η εξεικόνιση ενός προβλήματος στα πλαίσια της παρούσας έρευνας γινόταν με δύο τρόπους από τους μαθητές: είτε με την κατασκευή εικόνας από τους ίδιους, είτε με την ερμηνεία ή/και επεξεργασία της δοσμένης εικόνας στο πρόβλημα. Η εξεικόνιση στην οποία προέβαιναν οι μαθητές δεν ήταν άσκοπη αλλά λειτουργούσε καταλυτικά στη διαδικασία ΕΜΠ. Η διαφοροποίηση ανάμεσα στους μαθητές ως προς τη στρατηγική που εφαρμόζαν εντοπίστηκε και σε υποκείμενα της έρευνας των Cruz et al. (2001), σύμφωνα με τα ευρήματα των οποίων, μερικά υποκείμενα χρησιμοποιούσαν μια στρατηγική εξεικόνισης στην ΕΜΠ ενώ άλλα δεν χρειαζόταν να σχεδιάσουν λόγω της υψηλής ικανότητας εξεικόνισης που τους επέτρεπε να επεξεργαστούν ένα πρόβλημα στο μυαλό τους.

Ός προς το τρίτο ερώτημα της έρευνας, σε σχέση με την επικοινωνία ο κυρίαρχος κώδικας για τα υποκείμενα ήταν η γλώσσα. Ο ρόλος της εικόνας ήταν βοηθητικός, συμπληρωματικός και υποστηρικτικός, παρέχοντας διευκρινίσεις και αποσαφηνίσεις για το κείμενο και τη λεκτική του περιγραφή, με εξαίρεση τις περιπτώσεις του πρώτου και του τέταρτου προβλήματος, για αντίθετους λόγους: στο πρώτο πρόβλημα η εικόνα είχε διακοσμητικό χαρακτήρα ενώ στο τέταρτο πρόβλημα η εικόνα είχε πληροφοριακό χαρακτήρα και άρα ήταν αναπόσπαστο μέρος του προβλήματος. Οι μαθητές, όμως, δε φαίνεται να συμερίζονται την ίδια άποψη για τη συμβολή της εκάστοτε εικόνας στην ΕΜΠ εκτός από την περίπτωση της διακοσμητικής εικόνας (που η λειτουργία της ήταν σαφής). Ενδεικτικό αυτού αποτελεί η διαπίστωση ότι όταν οι μαθητές είχαν το ρόλο του πομπού δεν έκαναν αναφορά σε στοιχεία της εικόνας έστω κι αν τα χρησιμοποιούσαν για τη λύση του προβλήματος (με εξαίρεση την πληροφοριακή εικόνα). Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη διαπίστωση των Dreyfus & Eisenberg (1991), που επισημαίνουν ότι η άποψη, πως για την επικοινωνία μαθηματικών ιδεών πρέπει να χρησιμοποιούνται μη εικονικά πλαίσια έστω κι αν το μεγαλύτερο μέρος της σκέψης έχει συντελεστεί με εικονικές νοητικές αναπαραστάσεις, είναι αρκετά διαδεδομένη.

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δεν συνηγορούν υπέρ της αντικατάστασης των γλωσσικών μορφών αναπαράστασης με εικονικές, δεδομένου ότι κάθε είδος αναπαράστασης εξυπηρετεί ένα δικό του σκοπό και έχει τη θέση και το λειτουργικό του ρόλο στην ΕΜΠ. Φαίνεται ωστόσο, να προβάλλει

η ανάγκη αναθεώρησης του ρόλου της εικόνας στην ΕΜΠ, αφού σε γενικές γραμμές, διαπιστώθηκε ότι η αποτελεσματική ΕΜΠ με τη χρήση εικόνων εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στην εικόνα και στο πρόβλημα (λειτουργία εικόνας), στις προϋπάρχουσες γνώσεις και στις νοητικές ικανότητες (π.χ. εξεικόνιση) των μαθητών χωρίς βέβαια να αποκλείεται και η επίδραση άλλων παραγόντων.

Έτσι, τίθεται η ανάγκη οι εικόνες να επιλέγονται από τους εκπαιδευτικούς με βάση τη λειτουργία τους στη διαδικασία ΕΜΠ σε σχέση με το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Το ζήτημα της χρήσης των διακοσμητικών εικόνων θα πρέπει να προβληματίσει τους υπεύθυνους για την ανάπτυξη διδακτικού υλικού στα μαθηματικά, τους συγγραφείς βιβλίων και τους εκπαιδευτικούς ως προς τη σκοπιμότητα της συμπερίληψης διακοσμητικών εικόνων σε μαθηματικά προβλήματα.

Πέρα από τη λειτουργία των εικόνων στα μαθηματικά προβλήματα, κατά την επιλογή ή το σχεδιασμό τους από τον εκπαιδευτικό πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι προτιμήσεις των μαθητών σε σχέση με τη στρατηγική που εφαρμόζουν έτσι ώστε μέσα από την επίλυση των κατάλληλα επιλεγμένων προβλημάτων να αναπτύσσονται οι ικανότητες των μαθητών στη στρατηγική που υστερούν. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να ενθαρρύνει την ποικιλομορφία και τη διαφορετικότητα στην ΕΜΠ και στην εξεικόνιση και βέβαια να μη ξεχνά ότι και στην ΕΜΠ «μια εικόνα αξίζει περισσότερο από χίλιες λέξεις» όταν ο μαθητής είναι σε θέση να ερμηνεύσει, να επεξεργαστεί, να σχεδιάσει την εικόνα και να την αξιοποιήσει αποτελεσματικά με βάση τις απαιτήσεις του προβλήματος.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Barwise, J., & Etchemendy, J., (1991). Visualization Information and Valid Reasoning. In W.Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and Learning Mathematics*.(pp.9-24). USA: Mathematical Association of America.
- Bishop, A. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-15.
- Booth, D.L. R., & Thomas, O.J.M. (2000). Visualization in mathematics learning : Arithmetic problem – solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169-190.
- Bruner, J. (1961). *The Process of Education*. Harvard University Press.
- Carney, N.R., & Levin, R.J. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14 (1), 5-26.
- Colin, Ph., Chauvet, F., & Viennot, L. (2002). Reading images in optics: students' difficulties and teachers' views. *International Journal of Science Education*, 24(3), 313-332.
- Cruz, I., Presmeg, N., & MaGuemes, R. (2001). Reflections from two case studies of imagery and meaning in eighth grade mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 23(1), 1-16.
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1991). On the Reluctance to visualize in Mathematics. In W.Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and Learning Mathematics*.(pp.9-24). USA: Mathematical Association of America.
- Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 187-228.
- Laborde, C. (1987). Τάσεις της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών στη Γαλλία-Επεξηγήσεις στον τομέα της διδασκαλίας της Γεωμετρίας. *Διάσταση*, 2, 12-32.
- Lowrie, T. (2000). A case of an individual's reluctance to visualize. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 22(1), 17-26.

- Mayer, R. E. (1997). Multimedia Learning: Are we using the right questions? *Educational Psychology*, 32, 1-19.
- Misailidou, C., & Williams, J. (2002). Facilitating problem solving: Children argue their way to a multiplicative structure with the aid of selected cultural tools. In A. Rogerson (Ed), *Proceedings of the International Conference «The Humanistic Renaissance of Mathematics Education»*, pp. 269-272, Palermo, Italy.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Olson, J. (1998). Problem Solvers. *Teaching Children Mathematics*, 5(2), 104-107.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. New York: Princeton University Press.
- Schnotz, W. (2002). Towards an Integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101-120.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for research in Mathematics Education*, 27(4), 435-437.
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδάνος.

ABSTRACT

Pictures play an important role in the field of mathematics learning and instruction as an aid for supporting reflection and as a means of communication of mathematical ideas, as well. Consequently, the process of visualization (visual reasoning) is considered to be indispensable in mathematics learning and more specifically in mathematics problem solving (MPS). The pictures serve four functions in problem processing: decorative, representational, organizational and informative. We therefore attempted to investigate the effects of pictures based on their functions in MPS, by high achievement students of grade 6 in a communication setting. Students were asked to solve problems (initially without and eventually with the use of a picture) and describe the particular problems to another student who in turn attempted to find a solution to the specific task. A test was developed and the techniques of observation and interviews were conducted for gathering the qualitative data. It has been found that the contribution of the representational, organizational and informative picture was significant not only for understanding the problem (first step) but for the whole process of solution by the students. The use of these kinds of pictures led students to intrinsic contradictions that in turn helped them find acceptable solutions for the problems. During problem solving most students used mainly visualization enriched with acts of analytic reasoning. In regard to communication, all kinds of pictures except the decorative one were found to be useful and helpful. The present study suggests that the use of pictures in successful problem solving depends on the relationship between the picture and the task (function of picture), on students' background knowledge and mental abilities.