

Η ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΤΟΥΣ ΕΞΕΛΙΞΗ (ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ)

Π ΛΙΝΑΡΔΑΚΗΣ

Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Καθηγητής Αρσακείου

Περίληψη

Στόχος της ανακοίνωσης αυτής είναι :

Η σκιαγράφηση της σχέσης ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη των Τριγωνομετρικών εννοιών και του τρόπου που οι έννοιες αυτές παρουσιάζονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα και στα σχολικά βιβλία.

Η περιγραφή των εμποδίων που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση των Τριγωνομετρικών εννοιών και η επιστημολογική σχέση αυτών των εμποδίων με την ιστορική εξέλιξη των εννοιών αυτών.

Θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιστορικές στιγμές που έχουν επηρεάσει την εξέλιξη της Τριγωνομετρίας από τους Αιγυπτίους και τους Αρχαίους Έλληνες μέχρι σήμερα .Παράλληλα θα αποδείξουμε ότι αυτές οι ιστορικές στιγμές επηρεάζουν τον τρόπο που οι έννοιες αυτές παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία

Τέλος θα καταδείξουμε τα επιστημολογικά και διδακτικά εμπόδια που εμφανίζονται όταν κανείς διδάσκει Τριγωνομετρία στην Ελλάδα σήμερα.

Α ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο στόχος της εργασίας αυτής είναι να ερευνήσει την σχέση που διαμορφώνεται ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη των τριγωνομετρικών εννοιών και του τρόπου που αυτές παρουσιάζονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα και τα σχολικά βιβλία

Τα συμπεράσματα από αυτή την εργασία θα συμβάλλουν στη διερεύνηση των ερωτημάτων:

1. Υπάρχουν προβλήματα κατανόησης των τριγωνομετρικών εννοιών από πλευράς των μαθητών που να είναι αντίστοιχα με τις δυσκολίες που εμφανίστηκαν στην ιστορική τους εξέλιξη; (επιστημολογικά εμπόδια)

2. Υπάρχουν οι αναγκαίοι διδακτικοί μετασχηματισμοί στην παρουσίαση ώστε να μειωθούν αντίστοιχα προβλήματα; Και ποιοι άλλοι μετασχηματισμοί πρωτογενείς ή δευτερογενείς μπορούν να γίνουν για την βελτίωση της παρουσίασης;

Στο ισχύον Αναλυτικό πρόγραμμα για το Γυμνάσιο και το Λύκειο, οι τριγωνομετρικές έννοιες παρουσιάζονται στις Β' και Γ' Γυμνασίου και Α' και Β' Λυκείου. Επίσης, στην Γ' Λυκείου, στο πλαίσιο της Ανάλυσης, αντιμετωπίζονται πιο διεξοδικά οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις..

Β ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Είναι γνωστό ότι η επιστημολογία είναι ο επιστημονικός χώρος που μελετά τη συγκρότηση και εξέλιξη των επιστημονικών γνώσεων, τόσο όσον αφορά την ιστορική τους γέννηση όσο και τον τρόπο που αυτές αναδομούνται εξελισσόμενες κάτω από συγκεκριμένες ιστορικές και κοινωνικές συνθήκες.

Για την διδακτική των Μαθηματικών η μελέτη των διαφορετικών αντιλήψεων που δημιουργείται για μία μαθηματική έννοια (concepts) αποτελεί ουσιαστικό σημείο ερευνητικής ενασχόλησης. Η Michele Artigue στο Cahier de didactique no° 3 (1989) αναδεικνύει την σπουδαιότητα της επιστημολογικής θεμελίωσης (fondements epistemologiques) μίας έννοιας σε κάθε μελέτη της διδακτικής των Μαθηματικών, θέτοντας τρεις κατευθύνσεις:

- i. Την μελέτη της ιστορικής προέλευσης των μαθηματικών εννοιών και των ιστορικών συνθηκών.
- ii. Την εργασία που συσχετίζει την διαδικασία που αυτές δομήθηκαν και τον τρόπο που αυτές μαθαίνονται.
- iii. Την μελέτη της λειτουργίας των εννοιών αυτών στο καθαρά μαθηματικό πλαίσιο και τις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στις διαφορετικές αντιλήψεις αυτών των εννοιών.

Αυτές οι τρεις κατευθύνσεις εμφανίζονται και στο βιβλίο των Jean Pierre Astolfi και Michel Develay “la didactique des sciences experimentales” και ειδικά στο σημείο που έχει τον τίτλο “Epistemologie et questions didactiques” και στο οποίο γίνεται προσπάθεια να υπάρξει συσχέτιση ανάμεσα στην επιστημολογική προσέγγιση των Μαθηματικών εννοιών και του τρόπου που αυτές πρόκειται να διδαχθούν.

Παραθέτουμε από την ενδιαφέρουσα αυτή συσχέτιση το εξής:

«Στην ιστορία των επιστημών, η δημιουργία των επιστημονικών εννοιών δεν είναι γραμμική ούτε προϊόν μίας κάποιας έμπνευσης. Είναι τις περισσότερες φορές δεμένη με τους συγκεκριμένες κοινωνικές λειτουργίες και έρχεται να απαντήσει σε συγκεκριμένα, διαφόρων τύπου προβλήματα (επιστημονικά, φυσικά, κοινωνικά κ.λ.π.)».

Η διδασκαλία κατά συνέπεια των εννοιών αυτών μπορεί να μην είναι προσανατολισμένη στην ανάδειξη αυτών των συνθηκών στα μάτια των παιδιών. Έχουμε σκεφτεί, όμως, αν μπορούν να “γεννηθούν” ξανά αυτές οι έννοιες στη διάρκεια της διδασκαλίας μέσα από συγκεκριμένα προβλήματα; Δηλαδή αν μπορούν να επανατεθούν τά ίδια ερωτήματα που οδήγησαν στην γέννηση των εννοιών αυτών;

Είναι βέβαια σαφές ότι ο κάθε διδάσκων αναπτύσσει στην διδασκαλία του πρακτικές που συναρτώνται άμεσα με τις προσωπικές του αντιλήψεις για τα Μαθηματικά και που έχουν κατ’ αρχήν σχέση με την βασική του μόρφωση. Όμως η μεγάλη διαφορά του διδάσκοντα από άλλους εργαζόμενους (π.χ. έναν μηχανικό), είναι ότι η συνολική του συγκρότηση στις διαφορετικές διαστάσεις, επιστημονική - μορφωτική - πολιτιστική - κοινωνική κ.λ.π., παίζει ενεργό ρόλο στην αποτελεσματικότητα της εργασίας του. Για την διδακτική των Μαθηματικών λοιπόν η επιστημολογική συνιστώσα είναι σημαντική τόσο στην δημιουργία Αναλυτικών προγραμμάτων και την συγγραφή σχολικών βιβλίων όσο και στην καθημερινή παρουσία του διδάσκοντα στην σχολική αίθουσα.

Ένα σημαντικό λοιπόν ζήτημα για την έρευνα είναι το πως η ιστορική διάσταση μίας μαθηματικής έννοιας και η επιστημολογική της τεκμηρίωση ενυπάρχουν και εμφανίζονται στο αντικείμενο διδασκαλίας, δεδομένης της “**επιστημολογίας του διδάσκοντα**”. Ο Yves Chevallard τόσο στο άρθρο του «Les programmes et la transposition didactique» όσο και στο βιβλίο του που έγραψε μαζί με την Marie-Alberte Joshua “La transposition didactique” ασχολείται συγκεκριμένα με τους διδακτικούς μετασχηματισμούς που υφίστανται Μαθηματικές έννοιες ή και ολόκληρες ενότητες των Μαθηματικών από την επιστημονική τους διάσταση ή την ιστορική τους εξέλιξη ώστε να γίνουν αντικείμενο διδασκαλίας. Ο Yves Chevallard δίνει έμφαση σε αυτό που ακριβώς προαναφέραμε για τις “αναπαραστάσεις” που υπάρχουν στον διδάσκοντα και πόσο επηρεάζουν τους διδακτικούς μετασχηματισμούς που ο ίδιος ενσυνείδητα ή υποσυνείδητα επιχειρεί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Για μας είναι σημαντικό να ξεχωρίσουμε τους διδακτικούς μετασχηματισμούς σε δύο διαφορετικούς τύπους που σχηματικά θα αναφέρουμε ως πρωτογενείς και δευτερογενείς. Πρωτογενείς ονομάζουμε αυτούς που γίνονται από αυτούς που εκπονούν τα Αναλυτικά προγράμματα και συγγράφουν τα σχολικά βιβλία και δευτερογενείς αυτούς που επιλέγει ο διδάσκων έχοντας ως δεδομένους τους πρωτογενείς.

Γ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

Στηριζόμενοι στην Ιστορία των Μαθηματικών των C. 1)Bayer-Uta Merzbach καθώς και του 2)G. Loria θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες φάσεις της ιστορικής εξέλιξης των τριγωνομετρικών εννοιών, συγκρίνοντάς την με την παρουσίαση στο Αναλυτικό πρόγραμμα.

Γ.1.ΚΛΙΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

Σύμφωνα με τους (1) και (2), καθώς και τον Gillings στο “Mathematics in the time of the Pharaohs”, η έννοια της κλίσης μίας γωνίας, αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε $\epsilon\phi\omega$, $\omega \in (0, \pi/2)$, ήταν η πρώτη ιστορικά εμφανιζόμενη τριγωνομετρική έννοια στο πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind. Στο πρόβλημα αυτό εμφανίζεται η απαίτηση, κατά την κατασκευή, μίας πυραμίδας, της διατήρησης της ίδιας κλίσης στις έδρες της. Ίσως αυτό να οδήγησε τους Αιγυπτίους να εισάγουν μία έννοια αντίστοιχη με αυτήν της εφαπτομένης μίας γωνίας (ακριβέστερα της συνεφαπτομένης). Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν την λέξη “σεκτ” που περιέγραφε την οριζόντια απόσταση μίας πλάγιας ευθείας από τον κατακόρυφο άξονα για κάθε μονάδα μεταβολής του ύψους. Αυτό δηλαδή που χρησιμοποιούν οι αρχιτέκτονες σήμερα για να δώσουν την εσωτερική κλίση ενός υποστρώματος ή ενός βάρους. Το πρόβλημα αυτό εμπεριέχει, υπονοούμενα, στοιχεία της θεωρίας των ομοίων τριγώνων.

Η εμφάνιση ,δηλαδή, των τριγωνομετρικών αριθμών μίας οξείας γωνίας μεσω των λόγων των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο ανήκει η γωνία αυτή, ιστορικά προηγείται της συσχέτισης χορδών και τόξων ενός κύκλου. Στο Γυμνάσιο έχει επιλεγεί αυτός ο τρόπος ορισμού των τριγωνομετρικών εννοιών οξείας γωνίας.

Βέβαια στο Γυμνάσιο δεν έχει οριστεί η ομοιότητα των τριγώνων και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ελλειπή τεκμηρίωση της μονοσήμαντης διάστασης του ορισμού. Δεν εξηγείται ,δηλαδή, στον

μαθητή το γιατί είμαστε βέβαιοι ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μίας οξείας γωνίας είναι σταθεροί και ανεξάρτητοι από το ορθογώνιο στο οποίο ανήκει η ω

Επανερχόμενοι στο πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind, βλέπουμε ότι ο ορισμός του “σεκτ” αποτελεί την απάντηση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα των ανθρώπων της εποχής εκείνης. Αντίστοιχα κατασκευαστικά προβλήματα της σημερινής εποχής καθιστούν, για μία τουλάχιστον ομάδα ανθρώπων που ασχολείται με αυτά, τις αντιλήψεις για την έννοια της κλίσης συναφείς με εκείνες των Αιγυπτίων. Κατά την γνώμη μας, η επιλογή του ορισμού της εφαπτόμενης στην Β' Γυμνασίου με το παράδειγμα της κλίσης ενός δρόμου είναι επιτυχής ακριβώς διότι με απλό τρόπο απαντάει στο ίδιο ακριβώς ερώτημα που οδήγησε στην ιστορική γέννηση της έννοιας αυτής.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι θεωρούμε αυτή την αντιστοιχία ως νόμο ούτε καν ως κανόνα για την διδασκαλία των Μαθηματικών.

Οι τριγωνομετρικές έννοιες σήμερα έχουν διαφορετικές σημασίες σε διαφορετικά επίπεδα, αποτέλεσμα των διαφορετικών αναγκών και προσεγγίσεων στην ιστορική τους εξέλιξη. Αυτό καθιστά αδύνατη την γραμμική συσχέτιση της ιστορικής τους εξέλιξης και της διδασκαλίας τους.

Γ..ΧΟΡΔΕΣ ΚΑΙ ΤΟΞΑ ΚΥΚΛΟΥ

Μετά το πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind η σημαντικότερη φάση για τις τριγωνομετρικές έννοιες είναι η Ελληνιστική περίοδος (150 π.Χ.-160 μ.Χ. περίπου) και η ακμή της τριγωνομετρίας μέσω των Αστρονομικών μελετών.

Πριν όμως από αυτήν και ενώ ήταν σε πλήρη ακμή η Ευκλείδεια Γεωμετρία, συναντάμε γεωμετρικές προτάσεις που είναι συναφείς με γνωστές τριγωνομετρικές προτάσεις. Οι προτάσεις Π12 και 13 των στοιχείων του Ευκλείδη που είναι γνωστές ως επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε οξυγώνιο και αμβλυγώνιο τρίγωνο, είναι σαφές ότι εκφράζουν με γεωμετρική γλώσσα τον νόμο των συνημίτονων σε οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο τρίγωνο.

Αναφέρουμε ειδικά αυτό το παράδειγμα γιατί κατά τη γνώμη μας έχει σημαντικό διδακτικό ενδιαφέρον.

Στην σελίδα 37 του σχολικού βιβλίου της Β' Λυκείου παρουσιάζεται ο νόμος των συνημίτονων και η απόδειξή του, η οποία παρουσιάζεται με “οικονομικό” τρόπο (λόγω του ορθοκανονικού συστήματος δεν χρειάζεται διάκριση περιπτώσεων για το είδος της γωνίας Α) και κάνει χρήση του

διευρυμένου ορισμού (σελ. 159-160 του σχολικού βιβλίου της Α' Λυκείου) για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μίας οποιασδήποτε γωνίας. Παρότι δηλαδή ιστορικά ο νόμος αυτός σχετίζεται άμεσα με τα συγκεκριμένα θεωρήματα της γεωμετρίας, ο πρωτογενής διδακτικός μετασχηματισμός αφορά μία πιο "σύγχρονη" και πιο "οικονομική" παρουσίασή του.

Η διαφωνία μας έγκειται στο ότι τα συγκεκριμένα γεωμετρικά θεωρήματα τα έχει διδαχθεί ο μαθητής της Β' Λυκείου στο ίδιο περίπου χρονικό διάστημα, πράγμα που είναι διδακτικό πλεονέκτημα αναφορικά με την κατανόηση εννοιών και προτάσεων κάτω από διαφορετικά πλαίσια. Είναι χαρακτηριστικό ότι η εναλλακτική απόδειξη με βάση τα γεωμετρικά θεωρήματα, παρότι λιγότερο "οικονομική" (διάκριση σε οξυγώνιο-αμβλυγώνιο-ορθογώνιο τρίγωνο), προτιμάται από σημαντικό κομμάτι των μαθητών σε ανάλογη εξέταση.

Επανερχόμενοι στην ιστορική αναφορά, πρέπει να σημειώσουμε ότι πριν την Ελληνιστική περίοδο σημαντική παρουσία στην μετέπειτα εξέλιξη της Τριγωνομετρίας ήταν αυτή του Αρχιμήδη. Είναι γνωστό ότι ο Αρχιμήδης έδειξε την υπολογιστική του δεξιότητα και στην προσέγγιση του π , του λόγου δηλαδή του μήκους ενός κύκλου προς την διάμετρό του. Ίσως αυτό αποτελεί, μαζί με κάποιες προσπάθειες του Αρίσταρχου (310-230 π.Χ.) και του Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.), την αρχή για μία πιο σημαντική σχέση ανάμεσα στα τόξα και τις χορδές.

Στην σελίδα 152 της Ιστορίας των Μαθηματικών των (1), παρουσιάζεται μία απόδειξη που έκανε ο Αρχιμήδης, γνωστή ως το πρόβλημα της "σπασμένης" χορδής, που με την σημερινή γλώσσα της τριγωνομετρίας, πρόκειται για την απόδειξη του γνωστού τύπου $\eta\mu(\chi-\psi)=\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\psi-\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\psi$. Ο Πτολεμαίος στην Αλμαγέστη το επανέφερε μέσω του θεωρήματος εγγραγμένων τετραπλεύρων: $AB\cdot\Gamma\Delta+ΑΔ\cdot B\Gamma=ΑΓ\cdot B\Delta$. Η υπέρβαση των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας αποτελεί όπως καταλαβαίνουμε σημαντικό πρόβλημα τόσο από επιστημολογικά όσο και από διδακτική σκοπιά.

Τα διδακτικά προβλήματα που παρουσιάζονται έχουν σαφέστατα επιστημολογικό χαρακτήρα. Στην σελίδα 159-160 του σχολικού βιβλίου της Α' Λυκείου υπάρχει, με περιληπτικό τρόπο, η παρουσίαση των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας, όπως αυτός έχει παρουσιασθεί στο σχολικό βιβλίο της Γ' Γυμνασίου, και αυτό είναι που μας ενδιαφέρει στην μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε μία “ρήξη” του διδακτικού συμβολαίου “contract didactique” (Guy Brousseau RDM Vol 9 n°3).

Ο μαθητής κατανοεί τον ορισμό του ημίτονου μίας οξείας γωνίας σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, ως τον λόγο: απέναντι κάθετη πλευρά προς υποτείνουσα

Όταν θέλουμε να ορίσουμε το ημίτονο μίας μη οξείας γωνίας, ο μαθητής καλείται να αναδιοργανώσει τον εννοιολογικό χώρο μέσα στον οποίο έχει συγκροτήσει αρχικά τις έννοιες των τριγωνομετρικών αριθμών. Το καινούριο εποπτικό πλαίσιο είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα

αξόνων και το $\eta\mu\omega = \frac{\Psi}{\rho}$, όπου Ψ δεν είναι κατ’ ανάγκη μήκος αφού είναι η τεταγμένη του

σημείου M, και αυτό προβλέπεται να συμβεί στην Γ Γυμνασίου και να επαναληφθεί στο Λύκειο. Αυτή η υπέρβαση δημιουργεί εμπόδια και οδηγεί σε συγκεκριμένα λάθη. Ενδεικτικά αναφέρουμε εδώ ότι όταν στο τεστ ζητούσαμε την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της τριγωνομετρίας για οποιαδήποτε γωνία: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$, ένας σημαντικός αριθμός μαθητών έδινε την απάντηση σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Κατά τη γνώμη μας το **επιστημολογικό εμπόδιο** που σχετίζεται με τις δυσκολίες με τις οποίες περιγράψαμε αναδεικνύεται μέσα από την ιστορική τους διαδρομή: Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που υπερβαίνουν τις 90° σχετίζονται ιστορικά με όσα προαναφέραμε για την συσχέτιση χορδών και τόξων ενός κύκλου. Η ύπαρξη βέβαια του ορθοκανονικού συστήματος απλώς διευκολύνει τα πράγματα, αφού μέσω των συντεταγμένων απλοποιούνται οι ορισμοί και δίνεται η δυνατότητα να μιλάμε για οποιαδήποτε γωνία με προσανατολισμό. Η σύγκρουση στο αντιληπτικό επίπεδο οφείλεται στο ότι προσπαθούμε να δώσουμε την αίσθηση της συνέχειας σε δύο προσεγγίσεις που ιστορικά φαίνεται να μην έχουν συνεχή εξέλιξη.

Από την μία του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ως λόγο πλευρών ορθογωνίου τριγώνου που ιστορικά έχει τις ρίζες του στο πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind και στην κατασκευή των πυραμίδων μέσω της έννοιας της “κλίσης” και από την άλλη της συσχέτισης χορδών και τόξου ενός κύκλου που έχει τις ρίζες του στους Αρχαίους Έλληνες και μορφοποιείται από τον Πτολεμαίο στην Αλμαγέστη.

Κλείνοντας αυτή την σημαντική περίοδο της ιστορικής συγκρότησης της τριγωνομετρίας, πρέπει να αναφέρουμε ότι μετά τον Πτολεμαίο σημαντικές εργασίες έχουμε από τους Ινδούς και τους Άραβες.

Οι Ινδοί, σύμφωνα με τους (1), (2), ήταν αυτοί που εισήγαγαν τους πίνακες ημίτονων που αντικατέστησαν τους πίνακες χορδών των Ελλήνων. Θεωρείται ότι οι παλαιότεροι πίνακες ημίτονων που διασώζονται είναι αυτοί των Σιντάντας και της Αριαμπατίγια*.

Γ.3. Η ΕΠΟΧΗ ΤΟΥ EULER-ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γ.3.1. Η ΕΠΟΧΗ ΤΟΥ VIETE ΚΑΙ ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Πριν από τον Euler, σημαντική εποχή για την μορφοποίηση της σημερινής τριγωνομετρίας είναι τα μέσα του 16^{ου} αιώνα και το έργο του Viete. Εκείνη την εποχή, σε όλα τα μέρη της Ευρώπης εμφανίζονται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες, υπάρχει δηλαδή μία μετατόπιση της έμφασης από τους υπολογισμούς της επίλυσης τριγώνων στις αναλυτικές συναρτησιακές σχέσεις. Ο Viete αποδεικνύει διαφόρους τύπους προσθαφαίρεσης όπως π.χ. $\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \eta\mu\left(\frac{\chi + \psi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi - \psi}{2}\right)$ και μαζί με τις προηγούμενες εργασίες που αναφέραμε, συγκροτούν το γνωστό και “επικίνδυνο” για τους μαθητές τυπολόγιο της τριγωνομετρίας.

.

Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι αναδεικνύονται δύο σημεία που έχουν τόσο διδακτικό όσο και επιστημολογικό ενδιαφέρον:

1. Σε μία πρώτη ανάγνωση του βιβλίου παρατηρούμε μία ασάφεια από πλευράς των συγγραφέων αναφορικά με την δυνατότητα ή μη χρήσης τριγωνομετρικών πινάκων εκ μέρους των μαθητών. Παρατηρούμε ασκήσεις της μορφής (σελ. 15 1Α' Ομάδας): “Να υπολογίσετε χωρίς την χρήση υπολογιστών τσέπης (οι υπολογιστές τσέπης μπορούν να θεωρηθούν οι σύγχρονοι πίνακες του Πτολεμαίου και των μεταγενέστερων), την τιμή των παραστάσεων: Τον υπολογισμό δηλαδή με ακρίβεια, χωρίς πίνακες, των τριγωνομετρικών αριθμών κάποιων γωνιών.

* Σιντάντας είναι κύκλος έργων γύρω από την Αστρονομία των Ινδών Μαθηματικών περίπου 400 μ.Χ. Η Αριαμπατίγια είναι έργο του Ινδού Αριαμπάτα και για την Ινδική τριγωνομετρία έχει το βάρος της Αλμαγέστης.

Σε αντίθεση με αυτό στο ίδιο βιβλίο λίγο αργότερα στην σελίδα 36, στις εφαρμογές του νόμου του ημίτονου από την σχέση $\eta\mu A \approx 0,4255$ προκύπτει (προφανώς με την χρήση πινάκων) ότι

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα για τον μαθητή να μην είναι σαφές αν σε κάποιο επαναληπτικό διαγώνισμα ο αριθμός $\eta\mu 15^\circ$ οφείλει να γραφεί με άλλη μορφή και το αν αυτή η άλλη μορφή οφείλει να είναι “αυστηρή” ή κατά προσέγγιση μέσω πινάκων.

2. Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες λειτουργούν για τους περισσότερους μαθητές ως διδακτικό εργαλείο που πρέπει να αποστηθίσουν για να χρησιμοποιηθεί στις πράξεις. Οι προσπάθειες να αναδειχθεί η φυσική σημασία της χρήσης τους (εφαρμογή 5 σελ. 14), δεν βρίσκει διδακτική υπόσταση εφόσον, αφενός η μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων έπεται, αφετέρου δεν υπάρχει στις ασκήσεις κανένα αντίστοιχο πρόβλημα.

Τα δύο αυτά σημεία-παρατηρήσεις έχουν ίσως ιστορική προέλευση στα μέσα του 16^{ου} αιώνα και κυρίως το έργο του Viete.

Η ασάφεια μεταξύ ακριβούς υπολογισμού ενός τριγωνομετρικού αριθμού και χρήσης των τριγωνομετρικών πινάκων (με όλα τα προσεγγιστικά μειονεκτήματα), έχει ιστορικά και επιστημολογικά αίτια.

Η εμφάνιση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων σαφώς λειτούργησαν βελτιωτικά στην ακρίβεια υπολογισμών των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών όπως 15° , $22,5^\circ$ Όμως, η χρήση τους δεν ήταν πάντα ανεξάρτητη των τριγωνομετρικών πινάκων. Στην σελίδα 346 των (1), (2) δίνεται ένα παράδειγμα με το οποίο ο πολλαπλασιασμός των αριθμών 98.436 με το 79.253 ανάγεται στην εύρεση (μέσω των πινάκων) δύο γωνιών A, B με $\sin A = 0,98436$ και $\sin B = 0,79253$ και την

$$\text{χρήση της ταυτότητας } \sin A \cdot \sin B = \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένας διδακτικός μετασχηματισμός στις παραγράφους αυτές.

Βέβαια, και θέλουμε να το τονίσουμε αυτό, ο μετασχηματισμός αυτός είναι, ίσως, αναγκαίος. Η τριγωνομετρία τουλάχιστον μέχρι το 1000 μ.Χ. εξελίσσεται σχεδόν αποκλειστικά σε σχέση με τις Αστρονομικές μελέτες.

Στον αιώνα που διανύουμε και με έναν ανθρώπινο πολιτισμό που ανιχνεύει με τους σύγχρονους τρόπους το διάστημα είναι πραγματικά εξαιρετικά δύσκολο ένας μαθητής να θέσει στον εαυτό του τα στοιχειώδη ερωτήματα αγωνίας του Κοπέρνικου και του Πτολεμαίου.

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες, όπως προαναφέραμε, λειτουργούν καθαρά αλγεβρικά και ο μαθητής τις νιώθει αποκομμένες από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκαν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Όπως προαναφέραμε, θεωρούμε πολύ δύσκολο, ειδικά στο θέμα της Αστρονομίας να επανέλθουν στους μαθητές του σήμερα ερωτήματα που η ανθρωπότητα έχει προ καιρού απαντήσει.

Σε αντίθεση με αυτό που μόλις υποστηρίζαμε, υπάρχει μία έννοια που επιστημολογικά συνενώνει τις σκέψεις (έστω και με διαφορετική μορφή) και τις παρατηρήσεις του ανθρώπου τότε και τώρα: Η περιοδικότητα και τα περιοδικά φαινόμενα.

Γ.3.2. Ο EULER ΚΑΙ ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Για τους περισσότερους, ίσως όλους, ιστορικούς των μαθηματικών, οι βάσεις της σύγχρονης Ανάλυσης τίθενται στην *Introductio in analysin infinitorum* το 1748 από τον Euler. Η μελέτη αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο στα δεύτερα μισά του δεκάτου ογδόου αιώνα. Ανεξάρτητα με τις σημαντικές δουλειές στην Αναλυτική Γεωμετρία των Fermat και Descartes και του απειροστικά λογισμού των Newton, Leibniz το έργο αυτό του Euler θεμελιώνει την έννοια της συνάρτησης και την κάνει επίκεντρο αναφοράς για τα Μαθηματικά μετέπειτα. Τώρα πια το ημίτονο δεν ήταν πλέον ένα ευθύγραμμο τμήμα, ήταν απλώς ένας αριθμός.

Διαπιστώνουμε λοιπόν εδώ μία τεράστια επιστημολογική τομή, όπου η έκφραση $\eta\mu 3$ δεν διπλώνει τίποτε άλλο από την εικόνα του πραγματικού αριθμού 3 μέσω της συνάρτησης $f: f(x)=\eta\mu x, x\in\mathbb{R}$.

Η τομή που προαναφέραμε μαζί με την περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αποτελεί ένα σημείο που κατά την γνώμη μας, έχει διδακτικό ενδιαφέρον.

Η στρατηγική επιλογή των συγγραφέων του σχολικού βιβλίου, άρα και του Αναλυτικού προγράμματος, φαίνεται καθαρά στις σελίδες 209, 210, 211. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται “αυθαίρετα”: $\eta\mu\chi = \eta\mu(\chi\text{rad})$ με την αιτιολογία ότι πολλές εφαρμογές της τριγωνομετρίας εμπεριέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς πραγματικών αριθμών (π.χ. $\eta\mu\omega t$), επιφέροντας το εύλογο ερώτημα των μαθητών “πρώτα ανακαλύφθηκε η ταλάντωση και μετά το ημίτονο καθαρού αριθμού;”.

Ο μαθητής την κατάκτηση 1.700 χρόνων εξέλιξης της τριγωνομετρίας καλείται να την κατανοήσει σε 45 λεπτά. Σε ένα μήνα μέσα (αρχές Β' Λυκείου), το $\eta\mu\omega$ από λόγος πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, με το ω να είναι γωνία, έγινε ένας αφηρημένος αριθμός με το ω να είναι αριθμός όπως επίσης και στην Γ Γυμνασίου

. Τα προβλήματα που παρουσιάζονται οφείλονται σε δύο λόγους:

- i. Δεν υπάρχει σαφής επιλογή από τους εκπονούντες το αναλυτικό πρόγραμμα για το είδος των διδακτικών μετασχηματισμών που μπορούν να συγκροτήσουν μία διδακτική στρατηγική στη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- ii. Διαπιστώνουμε την έλλειψη μίας αντίληψης ενιαίας ως προς την επιστημολογική προσέγγιση της παρουσίας αυτής.

Όπως είπαμε και πριν, δεν είναι δυνατόν να αναζητάμε μία απόλυτα γραμμική σχέση μεταξύ ιστορικής εξέλιξης των εννοιών και τρόπου παρουσίασης τους στο σχολικό περιβάλλον.

Κατά τη γνώμη μας όμως οποιοδήποτε διδακτικοί μετασχηματισμοί (μιλάμε για τους πρωτογενείς), πρέπει να δημιουργούν τους όρους ενός “διδακτικού συμβολαίου” μεταξύ διδάσκοντα και διδασκόμενου χωρίς αντιφάσεις.

Στην κατεύθυνση αυτή θα μπορούσαμε να δούμε δύο διαφορετικές αλλά κατά τη γνώμη μας συνεπείς επιλογές:

- α) Την επιλογή της προσέγγισης που θεωρείται πιο κοντινή στην ιστορική εξέλιξη της τριγωνομετρίας. Όπως προαναφέραμε, ήδη από τους πρώτους πίνακες, το ημίτονο λειτουργούσε συναρτησιακά αφού παρακολουθούσαν τις μεταβολές του, μεταβαλλόμενων των γωνιών.

Στο προηγούμενο Αναλυτικό πρόγραμμα (πριν το 1987) οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις παρουσιάζονταν μέσω της κανονικής απεικόνισης του IR στον τριγωνομετρικό κύκλο. Δηλαδή, ο τριγωνομετρικός κύκλος θεωρείτο ένας διπλωμένος άξονας αριθμών και έτσι η απεικόνιση του x στο $ημx$ ήταν, κατά τη γνώμη μας, πιο ορατή στους μαθητές.

Αυτός ο τρόπος συνάδει, με τον συνολικό τρόπο που εξελίσσεται η παρουσίαση των τριγωνομετρικών εννοιών στο τωρινό Αναλυτικό πρόγραμμα. Στην σελίδα 193 του βιβλίου της Α' Λυκείου, παρουσιάζεται ο τριγωνομετρικός κύκλος με τις γωνίες εκφρασμένες σε μοίρες. Ενώ στην σελίδα 211, στην μελέτη της συνάρτησης $ημx$ χρησιμοποιείται ο τριγωνομετρικός κύκλος για να γίνει με εποπτικό τρόπο κατανοητή η μονοτονία της συνάρτησης αυτής. Αυτή λοιπόν η πρώτη επιλογή (ο ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω της κανονικής απεικόνισης του IR στον τριγωνομετρικό κύκλο), θα ήταν πιο συνεπής στον τρόπο που έχει επιλεγεί για παρουσίαση των τριγωνομετρικών εννοιών. Όπως θα δούμε, αυτή η επιλογή είναι συναφής με την άποψη μίας μερίδας Φυσικών να ορίζεται η αρμονική ταλάντωση ως η κίνηση που κάνει στον άξονα των ημίτονων η προβολή ενός σώματος που κινείται στον κύκλο με ομαλή κυκλική κίνηση.

β) Την επιλογή εξ' αρχής να οριστεί εισαγωγικά η τριγωνομετρία ως ο κλάδος των Μαθηματικών (σε σχολικό επίπεδο), που εκφράζει το μοντέλο της περιοδικότητας. Η έννοια της περιοδικότητας μέσω της Φυσικής μελετάται στο Γυμνάσιο χωρίς να συνδυαστεί με την Τριγωνομετρία (ουσιαστικά μέχρι την Β' Λυκείου). Ο μαθητής, τα περιοδικά φαινόμενα τα ζει καθημερινά. Η ημιτονοειδής καμπύλη θα μπορούσε να εκφράσει ως μοντέλο το καθημερινό φως (μέρα-βράδυ) ή ακόμα την σχέση ανάμεσα στις εποχές με τα ηλιοστάσια και τις ισημερίες.

Η επιλογή αυτή, ουσιαστικά, θα ήταν σε πλήρη αντιστοιχία με την ιστορική εξέλιξη, αλλά όχι ως προς την επιστημολογική θεμελίωση. Πιο συγκεκριμένα: όπως προαναφέραμε, η αγωνία των ανθρώπων στην αρχαιότητα να κατανοήσουν την φύση, την περιοδικότητα των φαινομένων, τις εκλείψεις κ.λ.π., οδήγησαν σε αστρονομικές μελέτες, με την γνωστή εξέλιξη για την τριγωνομετρία.

Αν θεωρήσουμε αυτή την παρατήρηση των περιοδικών φαινομένων ως το βασικό κοινό χαρακτηριστικό με το σήμερα, η δεύτερη συνεπής κατά τη γνώμη μας επιλογή θα ήταν η ακόλουθη:

1. Εισαγωγή του μοντέλου της ημιτονοειδούς συνάρτησης ως μοντέλο περιγραφής περιοδικών φαινομένων.

2. Αντιμετώπιση της μεταβολής των τόξων κατά την κίνηση της επιβατικής ακτίνας στον κύκλο ως περίπτωση περιοδικού φαινομένου.
3. Τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο και τις συντεταγμένες σημείων (όπως γίνεται και τώρα στην σελίδα 192 του βιβλίου της Α' Λυκείου).
4. Την αντιμετώπιση των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ως ειδική περίπτωση των προηγούμενων που καταλήγει να συσχετίζεται με τους συγκεκριμένους λόγους των πλευρών στο ορθογώνιο τρίγωνο.

Βιβλιογραφία

- Artigue, M. «Epistemologie et didactique». *Cahier de didactique*. No 3, IREM, Paris 7, 1989.
- Arsac, G. *La transposition didactique en mathématiques*. Cours de DEA .Univercité de Lyon, 1984.
- Bouveresse, J - Itard, J. - Sallé, E. *Histoire des Matématiques*. Librairie Larousse, Paris, 1977.
- Boyer, C.B. *Vietes's Use of Decimal Fractions*. *Mathematics Teacher*, No 55, 1962, pp. 123-127.
- Boyer, C.B et Merzbach U.C. *A History of Mathematics* (2nd edition) *Ελληνική έκδοση Πνευματικού*, 1997.
- Brousseau, G. «Les obstacles épistemologiques et les problèmes en Mathématiques». *R.DM.* vol 4 No 2, 1983.
- Chevallard, Y. «Les programmes et la transposition didactique: Illusions, contraintes et possibles». *Bulletin de l'APMEP*. No 352 Fev 1986. IREM d'Aix Marseille.
- Gillings, R. J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. MIT Press, Cambridge, 1972.
- Henry, M. *Didactique des Mathématiques*. IREM de Besançon, 1991.
- Loria, G. *Storia delle Matematiche*. *Ελληνική μετάφραση. Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*

Περίληψη στα Αγγλικά

The object of our presentation is:

1. *The relation between the historical evolution of trigonometrical notions and the way that these notions are presented in the analytical program and the schoolbooks in Greece.*

2. The obstacles that students have in understanding the trigonometrical notions and the epistemological connection of these obstacles with the historical evolution of the notions.

We will present the basic historical moments that have influenced the evolution of trigonometry from the Egyptians and the Greeks up to the present. At the same time we will show that these moments are in accordance with the general way that the notions are presented in the schoolbook. Finally we will present through very specific examples the epistemological didactic obstacles that appear when trying to teach trigonometry in Greece.