

ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΟΜΗΜΕΝΟ ΚΑΙ ΗΜΙ-ΔΟΜΗΜΕΝΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Νικόλας Μουσουλίδης, Γιώργος Φιλίππου, Κωνσταντίνος Χρίστου

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Τ.Θ 20537, Τ.Κ 1678, Λευκωσία Κύπρος

n.mousoulides@ucy.ac.cy, edphilip@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την έρευνα εξετάστηκε η ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος και πώς αυτή επηρεάζεται ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται. Επίσης εξετάστηκε η σχέση της με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Διερευνήθηκε η ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος από μαθητές της 6^{ης} τάξης δημοτικού σχολείου με δοκίμια που αναφέρονταν σε πέντε μορφές κατασκευής προβλήματος και που αντιπροσώπευαν δομημένο και ημι-δομημένο πλαίσιο κατασκευής προβλήματος. Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ενός δομικού μοντέλου εξίσωσης της ικανότητας κατασκευής προβλήματος. Οι μαθητές είχαν καλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα δοκίμια που αναφέρονταν σε δομημένο πλαίσιο. Επίσης φάνηκε ότι η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος.

1. Εισαγωγή

Η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος (ΚΜΠ) αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών και όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν σημαντικοί ερευνητές βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994). Σύμφωνα επίσης με το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989; NCTM, 1991) η επίλυση μαθηματικού προβλήματος πρέπει να αποτελέσει ένα από τους κύριους άξονες της διδασκαλίας των μαθηματικών. Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα, γιατί με αυτό τον τρόπο προάγεται η δημιουργικότητα, η διερεύνηση και αναπτύσσονται οι γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών (English and Halford, 1995; Lowrie, 1999).

Παρά τη σημασία της για την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών, η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος δεν έχει λάβει την απαραίτητη σημασία και εξακολουθεί να υπάρχει ανάγκη για συστηματική και διαχρονική έρευνα (Silver, 1994; Silver, 1996; Leung, 1996). Γνωρίζουμε ελάχιστα για την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού σε σχέση με την ικανότητα επίλυσης, σε σχέση με το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται, πώς διαφοροποιείται και ποια είναι η σχέση της με τη δημιουργικότητα.

Στην παρούσα μελέτη γίνεται διερεύνηση της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος και πώς αυτή διαφοροποιείται σε σχέση με το περιβάλλον στο οποίο πραγματοποιείται. Επίσης εξετάζεται η σχέση της με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος.

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

Με τον όρο κατασκευή μαθηματικού προβλήματος (ΚΜΠ) εννοούμε τη δημιουργία νέων ή την αναδόμηση υφισταμένων μαθηματικών προβλημάτων (Silver, 1994). Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους και να πάρει διαφορετικές μορφές (Leung, 1999). Η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος με αναδόμηση υφισταμένου προβλήματος, μπορεί να γίνει αλλάζοντας

στοιχεία του προβλήματος, όπως τους αριθμούς (ή και τη σχέση μεταξύ τους, μικρότερα-μεγαλύτερα), τη γεωμετρία (τα σχήματα, τις διαστάσεις, τον χώρο, τη συμμετρία), τις πράξεις (αλγεβρικές σχέσεις, πιθανότητες), τα αντικείμενα και τις συνθήκες που μελετούνται στο πρόβλημα, το περιεχόμενο και τις διαδικασίες του προβλήματος (Brown and Walter, 1990; Lowrie, 1999; Silver, 1994).

Ο Silver (1994), διαπιστώνει ότι η ΚΜΠ μπορεί να πραγματοποιηθεί πριν από την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, όπου οι μαθητές κατασκευάζουν δικά τους πρωτότυπα προβλήματα που βασίζονται στο πλαίσιο που δίνεται για την επίλυση προβλήματος, κατά τη διάρκεια της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, όπου οι μαθητές στην προσπάθειά τους να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα προσπαθούν να αλλάξουν τα ερωτήματα του προβλήματος, να αναδομήσουν το πρόβλημα, να ανακαλέσουν παρόμοια προβλήματα ή και να κατασκευάσουν παράλληλα προβλήματα που θα τους βοηθήσουν στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Τέλος η ΚΜΠ μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί μετά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Οι μαθητές έχοντας αποκτήσει κατάλληλες εμπειρίες από την επίλυση του προβλήματος, μπορούν να τις εφαρμόσουν σε διαφορετικό περιεχόμενο και συνθήκες (Silver et al., 1996).

Η Stoyanova (1995), διαχωρίζει την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος στα ακόλουθα πλαίσια: α. Μη δομημένο πλαίσιο ΚΜΠ, στο οποίο μπορούν να περιλαμβάνονται προβλήματα τα οποία κατασκευάζονται σε ελεύθερη βάση, χωρίς περιορισμούς (ή με γενικούς περιορισμούς). Τα προβλήματα αυτά μπορεί να κατασκευάζονται για να δοθούν σε ένα φίλο ή συμμαθητή. Το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν κάποιο άτομο υπόψη τους όταν κατασκευάζουν προβλήματα, ενισχύει τις προσπάθειές τους και τα προβλήματα που κατασκευάζονται είναι καλύτερα και πιο ολοκληρωμένα (Ellerton, 1986; Mamona-Downs, 1993). β. Ημι-Δομημένο πλαίσιο, όπου οι μαθητές κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα σε πλαίσιο που περιέχει αρκετές πληροφορίες. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να δίνεται με εικόνα, πίνακα, γραφική παράσταση, ιστορία ή ποίημα (Hashimoto, 1987; Winograd, 1991; Gonzales, 1998). γ. Δομημένο πλαίσιο ΚΜΠ. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν προβλήματα βασισμένα σε συγκεκριμένες μαθηματικές προτάσεις, εξισώσεις ή να αλλάξουν ένα υφιστάμενο πρόβλημα σε συγκεκριμένο πλαίσιο (Gonzales, 1998; English, 1998; Stoyanova and Ellerton, 1996).

Πολλοί ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών, έχουν αναφέρει ότι η εποικοδομητική εισαγωγή της κατασκευής μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών θα έχει θετική επίδραση στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Kilpatrick, 1987; Silver, 1996). Οι δραστηριότητες ΚΜΠ προσφέρουν στον εκπαιδευτικό μοναδική ευκαιρία να αντιληφθεί τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δομούν και κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες (Lowrie and Whitland, 2000). Με αυτό τον τρόπο η ΚΜΠ μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας των μαθηματικών για τον εκπαιδευτικό και οι δραστηριότητες ΚΜΠ να προσφέρουν στα παιδιά μια ευκαιρία ενεργητικής παρέμβασης στη διδασκαλία των μαθηματικών και έλεγχο στις μαθησιακές δραστηριότητες που πραγματοποιούνται στην τάξη (Lowrie, 1999).

Η ΚΜΠ από τους μαθητές μπορεί να προσφέρει ένα πλούσιο, ενδιαφέρον και εποικοδομητικό περιβάλλον για τη διδασκαλία των μαθηματικών (English et al., 1998). Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δημιουργήσουν, να εμπλακούν στη δυναμική των μαθηματικών και να αποκτήσουν ενεργητική συμμετοχή στην κατασκευή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Όταν οι μαθητές αρχίσουν να κατασκευάζουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα και δουν ότι τα προβλήματα αυτά γίνονται το επίκεντρο των μαθηματικών δραστηριοτήτων στην τάξη, τότε αναπτύσσουν θετική στάση για τα μαθηματικά (Silver, 1994).

Η ΚΜΠ αποτελεί σημαντική μορφή δημιουργικής δραστηριότητας (Getzels et al., 1976). Σε αντίστοιχες έρευνες αναφέρεται ότι η δημιουργικότητα συνδέεται τόσο με την κατασκευή όσο και με την επίλυση προβλήματος (Silver, 1997, Leung et al., 1997). Παρόλο που φαίνεται να υπάρχει μια ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ΚΜΠ και τη δημιουργικότητα, η φύση της σχέσης αυτής παραμένει αρκετά ασαφής (Silver, 1994; English, 1997; English, 1998). Φαίνεται όμως να υπάρχει μια πιο ξεκάθαρη σχέση ανάμεσα στην μαθηματική ικανότητα και την κατασκευή προβλήματος, με τους πιο ικανούς μαθητές να κατασκευάζουν με μεγαλύτερη ευκολία προβλήματα (Ellerton, 1986; Leung, 1997).

Μια από τις σημαντικότερες πτυχές της μελέτης της κατασκευής μαθηματικού προβλήματος αποτελεί η πιθανή συμβολή της στη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Silver, 1994). Όπως επισημαίνεται, πρέπει να διερευνηθεί κατά πόσο και σε πιο πλαίσιο η ΚΜΠ μπορεί να λειτουργήσει και ως μέσο για τη βελτίωση της ικανότητας ΕΜΠ των μαθητών. Ενώ πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι υπάρχει ισχυρή συσχέτιση μεταξύ ΚΜΠ και ΕΜΠ (Silver and Cai, 1996, Perez, 1986), υπάρχει μια έρευνα που δεν έδειξε σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Silver and Mamona, 1989).

Με βάση τις μορφές ΚΜΠ και το γενικότερο πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται, θα μπορούσαμε να διακρίνουμε την ικανότητα κατασκευής προβλήματος στις ακόλουθες μορφές πλαισίου: με μαθηματική πρόταση, με εξίσωση, με πίνακα, με εικόνα και με ιστορία. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ένα μοντέλο της ικανότητας ΚΜΠ με πέντε διακριτούς παράγοντες, τους παράγοντες ικανότητα ΚΜΠ με βάση μαθηματική πρόταση, εξίσωση, εικόνα, πίνακα και ιστορία. Λαμβάνοντας υπόψη το πλαίσιο των μορφών αυτών (δομημένο και ημι-δομημένο), θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι παράγοντες ικανότητας ΚΜΠ με βάση μαθηματική πρόταση και εξίσωση μπορούν να σχηματίσουν τον παράγοντα ικανότητα ΚΜΠ σε δομημένο περιβάλλον και οι παράγοντες ικανότητας ΚΜΠ με βάση εικόνα, πίνακα και ιστορία μπορούν να σχηματίσουν τον παράγοντα ικανότητα ΚΜΠ σε ημι-δομημένο περιβάλλον.

Πιο συγκεκριμένα η έρευνα προσπάθησε να απαντήσει τα ακόλουθα ερωτήματα: α. Η επίδοση των μαθητών στις πέντε μορφές κατασκευής μαθηματικού προβλήματος είναι διαφορετική; β. Η ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος εξαρτάται από το γενικότερο πλαίσιο στο οποίο δίνεται (δομημένο, ημι-δομημένο, αδόμητο περιβάλλον); γ. Υπάρχει ένα μοντέλο πέντε παραγόντων ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος και αν ναι, οι παράγοντες αυτοί μπορούν να σχηματίσουν γενικότερους παράγοντες; και δ. Η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος;

3. Μεθοδολογία

3.1 Δείγμα

Τα υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 143 μαθητές (79 αγόρια και 64 κορίτσια) έξι τμημάτων Στ' τάξης, δύο αστικών δημοτικών σχολείων της Λευκωσίας.

3.2 Σχεδιασμός-Μοντέλο μέτρησης

Για την πραγματοποίηση της έρευνας κατασκευάστηκαν πέντε δοκίμια (Δ1-Δ5) τα οποία αποτελούνταν από τέσσερα έργα (Δ2, Δ4, Δ5) ή πέντε έργα (Δ1, Δ3). Η κατασκευή τους βασίστηκε στη μελέτη αντίστοιχων έργων άλλων ερευνών, όπως αυτές παρουσιάζονται στη διεθνή βιβλιογραφία και αναφέρονται στην κατασκευή και επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Τα πέντε δοκίμια αντιστοιχούσαν στους πέντε παράγοντες κατασκευής μαθηματικού προβλήματος, όπως αυτοί έχουν καθοριστεί από τη μελέτη της βιβλιογραφίας.

Το πλαίσιο των έργων των δοκιμίων θεωρήθηκε δομημένο για τα δοκίμια που αναφέρονταν σε μαθηματική πρόταση (Δ1) και εξίσωση (Δ2) επειδή τα δεδομένα που δίνονταν ήταν περιορισμένα και ημι-δομημένο στα δοκίμια που αναφέρονταν σε εικόνα (Δ3), πίνακα (Δ4) και ιστορία (Δ5), όπου τα δεδομένα ήταν περισσότερα.

Στο πλαίσιο των πέντε δοκιμίων ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν προβλήματα δύο πράξεων (two step), αθροιστικής δομής (πρόσθεσης, αφαίρεσης). Οι μαθητές καλούνταν να κατασκευάσουν μαθηματικό πρόβλημα και να γράψουν και την αντίστοιχη εξίσωση. Αυτό αποσκοπούσε στο να βοηθήσει τους μαθητές να έχουν ξεκάθαρη δομή του προβλήματος που κατασκεύασαν και για να διαπιστωθεί κατά πόσον οι μαθητές κατανοούν πλήρως τη δομή του και ότι μπορούν να το μεταφέρουν σε συμβολική διατύπωση.

Για το δείγμα της έρευνας, ο δείκτης αξιοπιστίας του μοντέλου μέτρησης με βάση το δείκτη Cronbach's Alpha ήταν πολύ ψηλός (.894) (Browne and Cudeck, 1993).

Τα δοκίμια και οι οδηγίες που δόθηκαν στους μαθητές ήταν:

Στο Δ1(μαθηματική πρόταση) περιλαμβάνονταν μαθηματικές προτάσεις από τις οποίες απουσίαζε η ερώτηση και η εξίσωση. Δινόταν η απάντηση του έργου, για να βοηθηθούν οι μαθητές να κατασκευάσουν ευκολότερα το αντίστοιχο πρόβλημα και να αναγκαστούν να κατασκευάσουν πρόβλημα δύο πράξεων. Συμπλήρωσε την ερώτηση και την εξίσωση στο πρόβλημα: «Ο μικρός Χρήστος έχει στη συλλογή του 135 γραμματόσημα, ενώ η μικρή Ελένη έχει 15 γραμματόσημα περισσότερα από το Χρήστο. Απάντηση: 285 γραμματόσημα».

Στο Δ2 (εξίσωση) περιλαμβάνονταν εξισώσεις δύο πράξεων, πρόσθεσης και αφαίρεσης. Οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα με βάση τις εξισώσεις αυτές, χωρίς κανένα άλλο περιορισμό. «Κατασκεύασε μαθηματικό πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση: $2000 - (1200 + 345) = v$ ».

Στο Δ3 (εικόνα) παρουσιάζονταν στους μαθητές διάφορες εικόνες, οι οποίες παρουσίαζαν διάφορες πληροφορίες με διαφορετικές μορφές αναπαράστασης (εικονική, λεκτική). Οι μαθητές μπορούσαν να επιλέξουν τις πληροφορίες που θα χρησιμοποιούσαν. «Παρουσιάζεται η εικόνα ενός καταστήματος με ηλεκτρικά είδη και μια οικογένεια σκέφτεται ότι μπορεί να διαθέσει £1200. Κατασκευάστε πρόβλημα που να λύνεται με δύο αφαιρέσεις.»

Στο Δ4 (πίνακας) δίνονταν στους μαθητές πίνακες με διάφορα δεδομένα και ζητούνταν από αυτούς να χρησιμοποιήσουν από τους πίνακες όποια και όσα δεδομένα χρειάζονταν για να κατασκευάσουν πρόβλημα. «Στον πίνακα βλέπετε τις κάρτες ποδοσφαιριστών που έχουν μερικοί μαθητές. Κατασκευάστε πρόβλημα που να λύνεται με μια πρόσθεση και μια αφαίρεση».

Στο Δ5 (ιστορία) δίνονταν στους μαθητές δύο μεγάλες ιστορίες με πολλές πληροφορίες. «Βρισκόμαστε στο έτος 1492 μ.Χ. Ο Χριστόφορος Κολόμβος ετοιμάζει το μεγάλο ταξίδι. Στη Σάντα Μαρία φορτώνουν 250 kg παστό κρέας, 600 Kg αλεύρι... στο 3^ο καράβι, τη Νίνια, φορτώνουν 400 Kg περισσότερο κρέας από ότι στη Σάντα Μαρία...κατασκευάστε πρόβλημα που να λύνεται με δύο προσθέσεις.»

Για την αξιολόγηση των έργων των δοκιμίων της έρευνας έγινε κατηγοριοποίηση τους σε: α. σωστά προβλήματα με σωστή εξίσωση, β. λανθασμένα προβλήματα με λανθασμένη εξίσωση, γ. σωστά προβλήματα με λανθασμένη εξίσωση και δ. λανθασμένα προβλήματα με σωστή εξίσωση. Ως σωστά αξιολογήθηκαν τα προβλήματα που είχαν σωστή δομή και βασιζόνταν στα δεδομένα που δίνονταν στα πλαίσια των έργων. Αντιθέτως ως λανθασμένα αξιολογήθηκαν τα προβλήματα που χρησιμοποιούσαν λανθασμένα τα δεδομένα ή είχαν λιγότερες από τις ζητούμενες πράξεις.

Πριν από τις χορηγήσεις των δοκιμίων πραγματοποιήθηκαν δύο πιλοτικές χορηγήσεις. Ακολούθως έγινε επίσκεψη στα σχολεία από τους ερευνητές και πραγματοποιήθηκε 30λεπτη συζήτηση με τους μαθητές κάθε τμήματος που θα συμμετείχε στην έρευνα. Κατά τη διάρκεια της

συζήτησης ζητήθηκε από τα παιδιά να κατασκευάσουν προβλήματα δύο πράξεων με βάση εικόνα και εξίσωση που τους δόθηκε. Κατά τη διάρκεια χορήγησης των πέντε δοκιμών δεν έγινε διδασκαλία κατασκευής μαθηματικού προβλήματος στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

3.3 Διαδικασία

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας του μοντέλου των πέντε παραγόντων ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, με την οποία μπορούμε να ελέγξουμε την εγκυρότητα διάκρισης και σύγκλισης του μοντέλου μέτρησης. Για την αξιολόγηση της καταλληλότητας των μοντέλων που σχηματίστηκαν, χρησιμοποιήθηκαν το στατιστικό κριτήριο χ^2 και οι δείκτες καταλληλότητας CFI, GFI και RMSEA. Για τους δείκτες CFI και GFI, τιμές πάνω από .90 δηλώνουν καταλληλότητα του μοντέλου, ενώ ο δείκτης RMSEA δείχνει ικανοποιητική προσαρμογή του μοντέλου, όταν το ανώτατο όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης του δεν υπερβαίνει το .08 ((Browne & Cudeck, 1993).

4. Αποτελέσματα

Οι μαθητές αντιμετώπισαν με ενθουσιασμό τα δοκίμια και ανέφεραν ότι βρήκαν την κατασκευή προβλημάτων πιο ενδιαφέρουσα και πιο εύκολη διαδικασία από την επίλυση προβλημάτων. Ενδιαφέρον αποτελεί επίσης το γεγονός ότι μαθητές που είχαν χαρακτηριστεί από τους δασκάλους τους ως πολύ αδύνατοι μαθητές κατάφεραν να κατασκευάσουν αρκετά προβλήματα.

Οι μέσοι όροι των σωστών προβλημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές και οι τυπικές αποκλίσεις των απαντήσεων τους παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Φαίνεται ότι στα δοκίμια ΚΜΠ με βάση εικόνα, πίνακα και ιστορία, η μέση επίδοση των μαθητών ήταν πιο χαμηλή σε σχέση με την επίδοση τους στα δοκίμια ΚΜΠ με βάση μαθηματική πρόταση και εξίσωση. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τα πορίσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας, όπου αναφέρεται ότι η κατασκευή προβλημάτων που γίνονται σε πλαίσιο με πολλά δεδομένα (εικόνα, πίνακας και ιστορία) είναι πιο δύσκολη σε σχέση με την κατασκευή προβλημάτων που βασίζεται σε εξίσωση ή μαθηματική πρόταση (Fairbairn, 1993; English, 1998; Gonzales, 1998).

Η κατηγοριοποίηση των προβλημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές παρουσιάζεται στον Πίνακα 2. Τα ποσοστά σωστού προβλήματος με σωστή εξίσωση που κατασκεύασαν οι μαθητές στα δύο πρώτα δοκίμια είναι εμφανώς μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα ποσοστά στα επόμενα τρία δοκίμια. Αξίζει να σημειωθεί πώς σημαντικό ποσοστό μαθητών κατασκεύασε σωστά προβλήματα με τη χρήση και άλλων δεδομένων. Ειδικότερα στο τρίτο και πέμπτο δοκίμιο το ποσοστό των προβλημάτων αυτών ήταν 8,2% και 5,1%.

Η επίδοση των μαθητών, όπως αυτή δόθηκε από τους δασκάλους των τάξεων, χρησιμοποιήθηκε ως δείκτης της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος των μαθητών. Η μέση τιμή της επίδοσης των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, όπως αυτή δόθηκε ήταν 7,04 με τυπική απόκλιση 2,29 ($\bar{X}=7,04$, $T.A=2,29$). Με βάση την παραδοχή αυτή, κατασκευάστηκε ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης για πρόβλεψη της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος των μαθητών με βάση την ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Το γραμμικό παλινδρομικό μοντέλο που προέκυψε επεξηγεί 60% της διασποράς της ικανότητας ΚΜΠ ($R^2=.601$), σε επίπεδο σημαντικότητας $p<.001$. Το μοντέλο που προκύπτει από τη γραμμική παλινδρόμηση είναι:

$$\text{Ικανότητα ΚΜΠ} = .775 * \text{Ικανότητα ΕΜΠ} + 2,585$$

4.1 Δομικό Μοντέλο εξίσωσης 5 παραγόντων

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ενός μοντέλου πέντε παραγόντων της ικανότητας ΚΜΠ. Κατά τη διαδικασία πραγματοποίησης επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης για έλεγχο της καταλληλότητας του μοντέλου, διαφάνηκε ότι η διαδικασία δεν σύγκλινε. Για το λόγο αυτό κρίθηκε αναγκαία η απαλοιφή πέντε έργων από τα δοκίμια για τους ακόλουθους λόγους: α. Προβλήματα περιεχομένου. Από την ανάλυση περιεχομένου διαφάνηκε ότι το πλαίσιο των έργων αυτών, ο βαθμός δυσκολίας τους και οι ζητούμενες διαδικασίες ή πράξεις, επέβαλλαν τη σωστή απάντηση ή καθιστούσαν το έργο πολύ δύσκολο για να λυθεί, και β. Μη μονοσήμαντες φορτίσεις. Η ανάλυση του πίνακα συσχετίσεων των μεταβλητών έδειξε ότι τα έργα αυτά είχαν ψηλές συσχετίσεις και με έργα που σχημάτιζαν άλλους παράγοντες, δηλαδή είχαν σημαντικές φορτίσεις σε περισσότερους από ένα παράγοντες (Ho et al., 2000).

Μετά την απαλοιφή των έργων, επιβεβαιώθηκε ένα νέο μοντέλο πέντε παραγόντων ικανότητας ΚΜΠ. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4, οι δείκτες καταλληλότητας του μοντέλου είναι ικανοποιητικοί και το μοντέλο πέντε παραγόντων ικανότητας ΚΜΠ επαληθεύεται. Επίσης, οι φορτίσεις των παρατηρήσιμων μεταβλητών προς τους άδηλους παράγοντες 1^{ης} τάξης είναι ψηλές και επιβεβαιώνουν την ύπαρξη διακριτών μορφών ικανότητας ΚΜΠ.

Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων 1^{ης} τάξης ήταν ιδιαίτερα ψηλές και υποδηλώνουν πιθανή ύπαρξη παραγόντων 2^{ης} τάξης. Λαμβάνοντας υπόψη τις ψηλές συσχετίσεις μεταξύ του τρίτου, τέταρτου και πέμπτου παράγοντα και το γεγονός ότι έχουν κοινή ιδιότητα το ημι-δομημένο περιβάλλον και το χειρισμό πολλών δεδομένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σχηματίζουν ένα γενικότερο παράγοντα ικανότητας ΚΜΠ σε ημι-δομημένο περιβάλλον (Πίνακας 3). Αντίστοιχα οι πρώτοι δύο παράγοντες που έχουν κοινή ιδιότητα το δομημένο περιβάλλον και το χειρισμό λίγων δεδομένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σχηματίζουν ένα γενικότερο παράγοντα ικανότητας ΚΜΠ σε δομημένο περιβάλλον.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4, οι δείκτες καταλληλότητας του μοντέλου είναι πολύ ικανοποιητικοί και το μοντέλο δύο παραγόντων δευτέρας τάξης της ικανότητας ΚΜΠ επαληθεύεται. Οι φορτίσεις των παραγόντων 1^{ης} τάξης προς τους παράγοντες 2^{ης} τάξης είναι ιδιαίτερα ψηλές. Η ιδιαίτερα ψηλή συσχέτιση ανάμεσα στους δύο παράγοντες 2^{ης} τάξης υποδηλώνει την πιθανή ύπαρξη ανώτερου παράγοντα 3^{ης} τάξης ικανότητας ΚΜΠ. Όπως φαίνεται στον πίνακα 4, οι δείκτες καταλληλότητας ενός τέτοιου μοντέλου είναι πολύ ικανοποιητικοί και το μοντέλο ενός ανώτερου παράγοντα 3^{ης} τάξης της ικανότητας ΚΜΠ επαληθεύεται (Σχήμα 1).

5. Συμπεράσματα - Συζήτηση

Από τα αποτελέσματα της έρευνας μπορούν να εξαχθούν τέσσερα σημαντικά συμπεράσματα. α. Η ικανότητα των μαθητών στην ΚΜΠ μπορεί να διακριθεί στους πέντε παράγοντες ΚΜΠ, όπως αυτοί παρουσιάζονται μέσα από το μοντέλο πέντε παραγόντων ικανότητας ΚΜΠ. Από την περιγραφική ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας φάνηκε ότι η επίδοση των μαθητών στην ΚΜΠ ήταν διαφορετική ανάμεσα στις 5 μορφές ΚΜΠ που παρουσιάζονται στην έρευνα. Φάνηκε ότι οι μαθητές μπορούσαν να κατασκευάσουν με μεγαλύτερη ευκολία προβλήματα σε δοθείσα μαθηματική πρόταση όπου απουσίαζε η ερώτηση ή με βάση δοθείσα αριθμητική εξίσωση. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την αρχική υπόθεση της έρευνας. Ένας λόγος που μπορεί να εξηγήσει το αποτέλεσμα είναι το γεγονός ότι μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια οι μαθητές καλούνται να λύσουν παρόμοια προβλήματα, να χειριστούν και να κατασκευάσουν εξισώσεις.

Η έρευνα έδειξε ακόμη ότι η επίδοση των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων με βάση εικόνα, πίνακα και ιστορία ήταν χαμηλότερη από την επίδοση τους στην κατασκευή προβλήματος με βάση μαθηματική πρόταση, και εξίσωση. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τη διεθνή βιβλιογραφία, όπου έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην ΚΜΠ σε ημι-δομημένο πλαίσιο σε σχέση με ΚΜΠ σε δομημένο πλαίσιο. (Fairbairn, 1993; Stoyanova and Ellerton, 1996). Φάνηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να χειριστούν δεδομένα που παρουσιάζονται σε μεγάλες ιστορίες και εικόνες ενώ χαρακτηριστική είναι η δυσκολία που έχουν να χειριστούν δεδομένα που παρουσιάζονται σε πίνακα.

β. Η ικανότητα ΚΜΠ μπορεί να διακριθεί σε ικανότητα κατασκευής προβλήματος σε δομημένο και σε ημι-δομημένο περιβάλλον. Η ικανότητα ΚΜΠ σε δομημένο, ημι-δομημένο και ανοικτό περιβάλλον ΚΜΠ αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας και άλλων ερευνητών (Stoyanova, 1995; Ellerton, 1986). Η παρούσα εργασία και το δομικό μοντέλο εξίσωσης της ικανότητας ΚΜΠ δύο παραγόντων 2^{ης} τάξης που επιβεβαιώθηκε, μπορεί να αποτελέσει το θεωρητικό υπόβαθρο για περαιτέρω έρευνα σύγκρισης της ικανότητας ΚΜΠ στα περιβάλλοντα αυτά και σε σχέση με μη δομημένο περιβάλλον. Τα διδακτικά εγχειρίδια των μαθηματικών χρειάζεται να εμπλουτιστούν με δραστηριότητες ΚΜΠ σε ημι-δομημένο και σε αδόμητο περιβάλλον, έτσι ώστε να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα διαφόρων μορφών.

γ. Η ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος μπορεί να οριστεί ως μια γενική, αυτόνομη ικανότητα. Το δομικό μοντέλο εξίσωσης της ΚΜΠ με ανώτερο παράγοντα 3^{ης} τάξης κρίθηκε κατάλληλο και συνεπώς επιβεβαιώνεται η αρχική υπόθεση της έρευνας, ότι δηλαδή μπορεί να οριστεί μια γενική ικανότητα ΚΜΠ. Με δεδομένη την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος, θα πρέπει να αναπτυχθούν δραστηριότητες στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών που να καλλιεργούν και να προάγουν την ικανότητα αυτή. Η ικανότητα αυτή θα πρέπει να καλλιεργηθεί συστηματικά, από τη είσοδο των παιδιών στο σχολείο και ειδικότερα κατά τη μετάβαση τους στο γυμνάσιο, με μια μεγάλη ποικιλία δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

δ. Η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος. Στην παρούσα έρευνα, η επίδοση στην ΚΜΠ των μαθητών ορίστηκε με βάση τη βαθμολογία της επίδοσης των μαθητών για τα μαθηματικά, όπως αυτή δόθηκε από τους δασκάλους των τάξεων. Τα αποτελέσματα δίνουν μια ένδειξη ότι η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος θα μπορούσε να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος. Χρειάζεται όμως να γίνει περαιτέρω έρευνα για τη διερεύνηση της πρόβλεψης αυτής και της σχέσης ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Περαιτέρω έρευνα που θα βασίζεται και στα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας, μπορεί να βασιστεί στην χορήγηση αντίστοιχων δοκιμών πέντε μορφών με έργα για επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Έτσι θα γίνει επιβεβαίωση της υπόθεσης για γενική ικανότητα ΕΜΠ και τη σχέση της με την ΚΜΠ.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν την ανάγκη εισαγωγής ενός ολοκληρωμένου προγράμματος κατασκευής και επίλυσης μαθηματικού προβλήματος στα διδασκαλίας των μαθηματικών. Έτσι, σταδιακά η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος θα γίνει μια σημαντική μαθησιακή διαδικασία που θα συμβάλει ουσιαστικά στη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας και της κριτικής σκέψης των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing*, Lawrence Erlbaum, NJ.

- Browne, M. W., & Cudeck, R. (1993). Alternative ways of assessing model fit. In K. A. Bollen & J. S. Long (Eds.), *Testing structural equation models* (pp. 136–162). Newbury Park, CA: Sage.
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems – a new perspective on talented mathematicians, *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.
- English, L. D., Halford, G. S. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, (34), 183-217.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1) (83-106).
- English, L. D., Cudmore, D., & Tilley, D. (1998). Problem posing and critiquing: How it can happen in your classroom. *Mathematics Teaching in the Middle Schools*, 4-2, 124-129
- Fairbairn, M. D. (1993). Generating Story Problems. *Arithmetic Teacher*, 38(5), 23-26
- Gonzales, N. A. (1998). Problem Formulation: Insights From Student Generated Questions. *School Science and Mathematics*, 96 (3), 152-157.
- Ho, Z., Senturk, D., Lam, A., Zimmer J., Hong, S., Okamoto, Y., Chiu, S., Nakazawa, Y., Wang, C. (2000). The Affective and Cognitive Dimensions of Math Anxiety: A Cross-National Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 362-379.
- Kilpatrick, L. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A.H. Schoenfeld (Eds.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp. 123-147). Hilladate, NJ: Erlbaum.
- Leung S. K., & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 5-24.
- Lowrie, T. (1999). Posing problems and solving problems. *Australian Primary Mathematics Classroom* 4(4), 28-31.
- Lowrie, T., & Whitland, J. (2000). Problem posing as a tool for learning, planning and assessment in the primary school. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 247-254. Hiroshima, Japan.
- Mamona-Downs, J. (1993). On analyzing problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohada, K. Shigematsu, F.L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 41-47. Tsukuba, Japan.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Curriculum and evaluation standards for School mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Perez, J. A. (1986). Effects of student generated problems on problem solving performance (Doctoral dissertation, Columbia University, 1985). *Dissertation Abstracts International*. 46 (10), 2954.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 19-28.
- Silver, E. A. & Mamona, J. (1989). Problem posing by middle school mathematics teachers. In C. Maher, G. Goldin & R. Davis (Eds.), *Proceedings of the 11th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 263-269). New Brunswick, NJ.
- Silver, E.A., Kilpatrick, J. & Schlesinger, B. (1990): *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms*, The College Board, New York.
- Silver, E. A. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), 521-539.
- Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309.
- Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on Mathematical Education)*, 97(3), 75-80.
- Stoyanova, E. (1995). Developing a framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Paper presented at the 18th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Melbourne: MERGA.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΑ

Πίνακας 1

Αριθμός σωστών προβλημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές στα πέντε δοκίμια

	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5
Μέσος Όρος	4,23/5	3,32/4	3,41/5	3,01/4	2,66/4
Τυπική Απόκλιση	1,52	,95	1,51	1,34	1,37

Πίνακας 2

Συχνότητες και ποσοστά των διαφόρων ειδών προβλημάτων

	Δοκίμιο 1		Δοκίμιο 2		Δοκίμιο 3		Δοκίμιο 4		Δοκίμιο 5	
	N	Ποσ. %	N	Ποσ. %	N	Ποσ. %	N	Ποσ. %	N	Ποσ. %
Σωστό πρόβλημα – Σωστή εξίσωση	492	71,8	459	83,1	411	51,4	325	59,8	331	58,3
Λάθος πρόβλημα – Λάθος εξίσωση	119	17,3	93	16,8	204	28,8	123	22,6	180	31,6
Σωστό Πρόβλημα – Λάθος Εξίσωση	19	2,7	--	--	15	2,1	25	4,6	17	2,9
Λάθος πρόβλημα – Σωστή Εξίσωση	54	7,8	--	--	20	2,6	12	2,2	10	1,7
Σωστό πρόβλημα - Σωστή εξίσωση με άλλα δεδομένα	1	0,14	--	--	58	8,2	58	1,4	30	5,1

Πίνακας 3

Συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων 1^{ης} τάξης

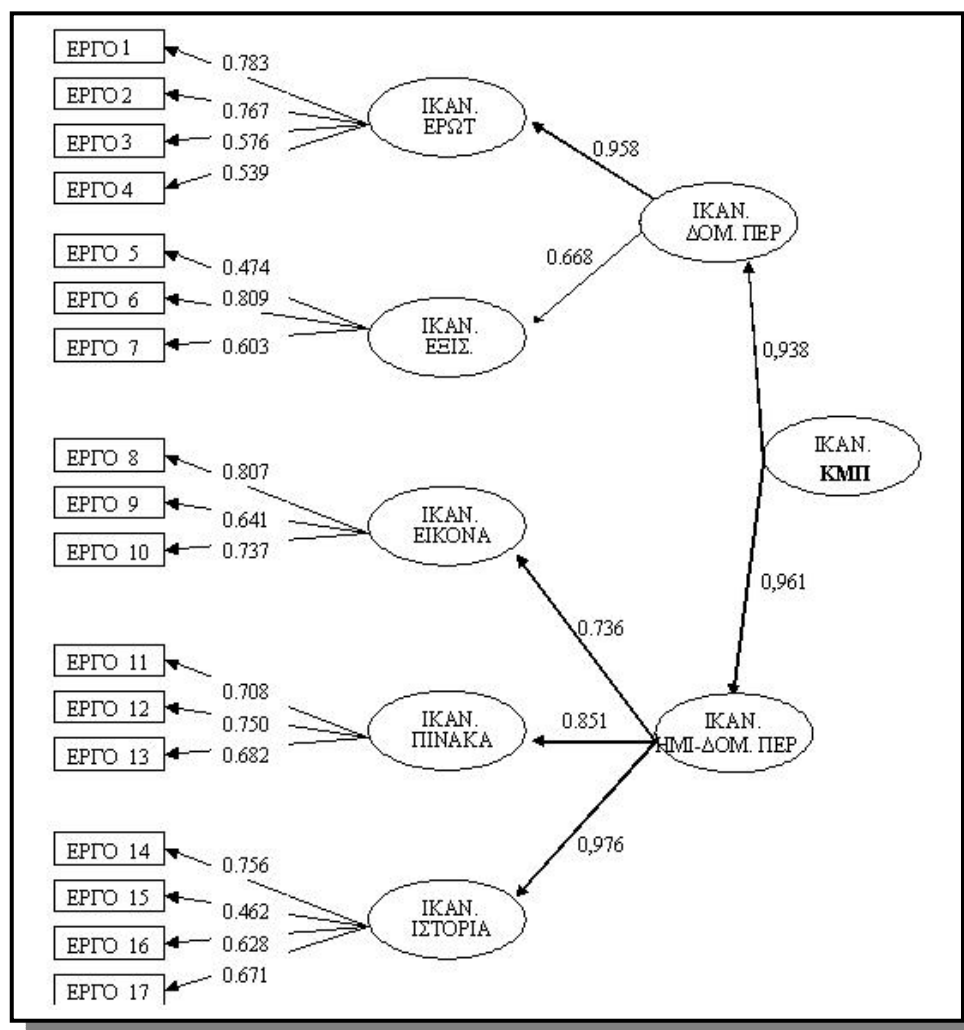
	Ικανότητα ΚΜΠ με Ερώτηση	Ικανότητα ΚΜΠ με Εξίσωση	Ικανότητα ΚΜΠ με Εικόνα	Ικανότητα ΚΜΠ με Πίνακα	Ικανότητα ΚΜΠ με Ιστορία
Ικανότητα ΚΜΠ με Ερώτηση	1	.642*	.716*	.699*	.852*
Ικανότητα ΚΜΠ με Εξίσωση	.642*	1	.461*	.486*	.616*
Ικανότητα ΚΜΠ με Εικόνα	.716*	.461*	1	.552*	.726*
Ικανότητα ΚΜΠ με Πίνακα	.699*	.486*	.552*	1	.920*
Ικανότητα ΚΜΠ με Ιστορία	.852*	.616*	.726*	.920*	1

* $p < .05$

Πίνακας 4

Δείκτες καταλληλότητας των μοντέλων με πέντε παράγοντες 1^{ης} τάξης, με δύο παράγοντες 2^{ης} τάξης και με ένα ανώτερο παράγοντα 3^{ης} τάξης

Δείκτες καταλληλότητας	Μοντέλο με παράγοντες 1 ^{ης} τάξης	Μοντέλο με παράγοντες 2 ^{ης} τάξης	Μοντέλο με ανώτερο παράγοντα 3 ^{ης} τάξης
χ^2 (df), p-value	104.922 (102), $p < .05$	112.329 (107), $p < .05$	112.328 (107), $p < .05$
CFI	.996	.993	.993
GFI	.910	.904	.904
RMSEA	.050	.051	.051



Σχήμα 1. Δομικό μοντέλο εξίσωσης της ικανότητας ΚΜΠ με ανώτερο παράγοντα 3^{ης} τάξης.

ABSTRACT

The purpose of this study was to examine the students' problem posing ability and how the framework of the problem posing affects this ability. One of the aims of this study was to examine the relation between problem posing and problem solving ability. Thus we investigate the ability of 6th grade students in posing problems in both structured and semi-structured frameworks. A major finding of the study was the confirmation of a five factor structured equation model of students' problem posing ability. Students perform better in tasks regarding to structured frameworks than in semi-structured frameworks. Moreover the problem solving ability can predict the problem posing ability.