

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ : ΑΝΤΑΝΑΚΛΑΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΜΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Βιργινία Στεργίου

Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Πατρών
Ολυμπιονίκη Μασούρη 9-11 Μαρούσι Αθήνα, τηλ: 210-8104030
e-mail: STERGIOUV@ATH.FORTHNET.GR

Τάσος Πατρώνης

Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Πατρών
Τηλ: 2610-997360
e-mail: gmelet @ math.upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή αναφέρεται στις διδακτικές προσεγγίσεις οι οποίες αφορούν στη χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων και γεωμετρικών μοντέλων και σκοπεύει σε μια εμπειρική εκτίμηση και αναστοχασμό της επικοινωνίας δασκάλου-μαθητή από την επίδραση μιας ανοικτής-διαγνωστικής διδασκαλίας (diagnostic- teaching) σε κλασσικά μαθηματικά προβλήματα.

Περιλαμβάνει επίσης παραδείγματα επίλυσης κλασσικών Μαθηματικών προβλημάτων στην τάξη μέσα από γεωμετρικές αναπαραστάσεις και αναλύει τις δυνατότητες που υπάρχουν καθώς και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι φοιτητές, αυριανοί δάσκαλοι των Μαθηματικών στην χρήση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων, ως μοντέλων στην επίλυση προβλημάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΣΥΖΗΤΗΣΗΣ

Η παρούσα εργασία αντανάκλα την εμπειρία από σχολικές τάξεις και από μια ευρύτερη έρευνα, η οποία γίνεται στο Τμήμα Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Πάτρας και αποβλέπει στην διαμόρφωση κάποιων διδακτικών προσεγγίσεων που έχουν ως στόχο να βοηθήσουν τους φοιτητές, μελλοντικούς δασκάλους των Μαθηματικών να επεξεργαστούν διδακτικά βασικές έννοιες της Άλγεβρας και της Ανάλυσης ώστε να είναι ευχάριστη και αποδοτική η διδασκαλία των εννοιών αυτών στους μαθητές. Η υλοποίηση μιας μοντέρνας διδακτικής μεθοδολογίας σχετίζεται με το μαθηματικό «background» των δασκάλων και των μαθητών καθώς και με την διαισθητική τους αντίληψη πάνω στα Μαθηματικά. Η επεξεργασία ενός θέματος στην τάξη εμφανίζει περιληπτικά τρία στάδια: 1) Στο πρώτο στάδιο παρουσιάζεται και κατανοείται το πρόβλημα θέτοντας διακεκριμένους στόχους. 2) Στο δεύτερο στάδιο γίνεται ανάλυση- συζήτηση και Μαθηματική προσέγγιση της λύσης. Στο στάδιο αυτό σημαντικό ρόλο παίζουν οι καθοδηγητικές ερωτήσεις από το μέρος του δασκάλου καθώς και ο τρόπος επεξεργασίας του θέματος. Εδώ είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε την διδακτική σημασία της τροποποίησης ενός κλασσικού μαθηματικού προβλήματος με χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων σε μαθητές καθώς και σε φοιτητές μελλοντικούς δασκάλους των Μαθηματικών. Επίσης να παρατηρήσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και τα λάθη που γίνονται ασυναίσθητα στη χρήση ακόμη και βασικών Μαθηματικών εννοιών. 3) Στο τρίτο στάδιο επιχειρείται η κατασκευή μιας αλγοριθμικής πορείας η οποία βήμα- βήμα πλαισιώνεται με τις υποδείξεις και επερωτήσεις του δασκάλου προς τους μαθητές. Μια παρόμοια πορεία προτείνει και ο G.Polya[1] στην περιοχή της επίλυσης προβλημάτων .

Ο H.Steinbring [2] προτείνει επίσης τρία βασικά στάδια για την επίλυση ενός προβλήματος και επισημαίνει ότι στο δεύτερο στάδιο κατά την μεταφορά από το εμπειρικό επίπεδο του προβλήματος στο επίπεδο του τυπικού ουσιαστικά υπολογισμού παρουσιάζονται στους μαθητές πολλές δυσκολίες. Εν μέρει οι δυσκολίες αυτές αφορούν στον τρόπο ή στην πορεία της

επεξεργασίας του προβλήματος. Οι μαθητές ακόμη και οι φοιτητές, δεν είναι σίγουροι αν πραγματικά πρέπει να εργαστούν στο εμπειρικό, το κατασκευαστικό ή το γεωμετρικό (συχνά αβέβαιο) γι' αυτούς επίπεδο.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δώσει κάποια εμπειρική εκτίμηση και αντανάκλαση (αναστοχασμού) της επικοινωνίας δασκάλου-μαθητή από την επίδραση μιας ανοικτής-διαγνωστικής διδασκαλίας (diagnostic- teaching) με χρήση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων και μοντέλων σε κλασσικά μαθηματικά προβλήματα. Η αξία μιας τέτοιας διδασκαλίας είναι μεγάλη από ερευνητικής πλευράς, αφού εντοπίζονται σημεία της διδακτικής ενότητας τα οποία φαινομενικά θεωρούνται ασήμαντα, αλλά που δίνουν πολύ σημαντικές παρατηρήσεις- εκτιμήσεις για τις αντιλήψεις των μαθητών.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΣΕ ΤΙ ΔΙΑΦΕΡΕΙ ΑΠΟ ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.

Ο Θ.Σκούρας σε σχετικό άρθρο[3] αναφέρεται στις δυνατότητες των αναπαραστάσεων γενικά τονίζοντας όμως και τους περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται αυτές, προκειμένου για ένα και το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Στο ίδιο άρθρο ο Θ.Σκούρας αναφέρεται στον R. Duval σχετικά με το ίδιο ζήτημα. Σύμφωνα με R. Duval «...κάθε αναπαράσταση δεν είναι γνωστικά πλήρης σε σχέση με αυτό που αναπαριστά, καθώς και οι αναπαραστάσεις σε διαφορετικά συστήματα δεν παρουσιάζουν τις ίδιες όψεις ενός θεωρητικού περιεχομένου»[4]. Για να εξηγήσει τον ισχυρισμό του ο R. Duval, δίνει ως παράδειγμα το μηδενικό διάνυσμα το οποίο, στο σύστημα της γραφικής αναπαράστασης των διανυσμάτων μέσω «βελών» δεν μπορεί να αναπαρασταθεί.(στο ίδιο σύστημα μπορούν να αναπαρασταθούν μόνο διανύσματα που έχουν μέχρι τρεις συντεταγμένες). Αντιθέτως αν θεωρήσουμε ως σύστημα αναπαράστασης το σύνολο των πινάκων τότε το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να γραφεί με τον πίνακα-στήλη $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ο R. Duval σημειώνει επίσης ότι η αναπαράσταση που γίνεται σε κάποιο σύστημα είναι ανάλογη με τις δυνατότητες του συστήματος. Παράδειγμα αυτού του ισχυρισμού θα μπορούσε να θεωρηθούν επίσης και οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Φαίνεται λοιπόν ότι οι διαδικασίες αναπαράστασης περιορίζονται ή μετασχηματίζονται όταν μεταβαίνουμε από σύστημα σε σύστημα.

Στην έννοια του γεωμετρικού μοντέλου έχουν αναφερθεί συστηματικά λίγοι ερευνητές παρόλο που η έννοια αυτή έχει χρησιμοποιηθεί από Μαθηματικούς, δασκάλους και μαθητές συνειδητά ακόμη και ασυναίσθητα. Ένας ορισμός σε ενορατικό και όχι αυστηρά τυπικό πλαίσιο δίνεται από τους Α.Γαγάτση και Τ.Πατρώνη σε σχετικό άρθρο [5] Συγκεκριμένα γράφουν τα εξής : «...Μια συλλογή G από στοιχεία, ή άλλα σχήματα στον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο, η οποία παριστάνει ένα σύστημα Σ αντικειμένων ή μια κατάσταση ή μια διαδικασία, είναι γεωμετρικό μοντέλο του Σ αν οι εγγενείς γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων της G που παρατηρούμε στα σημεία ή στις γραμμές κ.λ.π της συλλογής ανεξάρτητα από το Σ μας δίνουν όλες κάποια πληροφορία για το Σ , δηλαδή αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιότητες του Σ .(.....), δηλαδή η συλλογή G είναι γεωμετρικό μοντέλο αν υπάρχει απεικόνιση του συνόλου των ιδιοτήτων του Σ επί του συνόλου των εγγενών γεωμετρικών ιδιοτήτων της G ». Ως γεωμετρική αναπαράσταση υπό μια ευρεία έννοια θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση μιας σχέσης και κατά κάποιο τρόπο μια «οπτική» προσέγγιση αυτής που συμβαίνει, μερικές φορές να χρησιμοποιούν αυθόρμητα τα παιδιά. Ένα μοντέλο είναι ένας τρόπος αναπαράστασης αλλά μια αναπαράσταση δεν είναι μοντέλο. Οι Α.Γαγάτσης και Τ.Πατρώνης διακρίνουν ανάμεσα σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις και γεωμετρικά μοντέλα τονίζοντας ότι, είναι δυνατόν σε μια αναπαράσταση να υπάρχουν στοιχεία μη σχετιζόμενα με το αναπαριστώμενο αντικείμενο. Π.χ στα διαγράμματα Euler- Venn οι κύκλοι, τα σημεία τομής τους, τα κέντρα τους δεν σχετίζονται με τις αναπαριστώμενες έννοιες.

Στο ίδιο άρθρο δίνεται μια διαδικασία αναστοχασμού στους λύτες προβλημάτων, με τη βοήθεια της οποίας κρίνεται στη συνέχεια πότε η χρήση γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία είναι εποικοδομητική.

Η σύλληψη μιας έννοιας μέσα από ένα γεωμετρικό σχήμα είναι μια πρώτη μορφή διαισθητικής σκέψης. Η διαδικασία της σκέψης περνάει μέσα από την διαίσθηση και βαθμιαία εξελίσσεται έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να συλλαμβάνουν σαν μια ολότητα την απόδειξη ενός προβλήματος. Από την άλλη πλευρά η φύση των Μαθηματικών και η διαδικασία της κατανόησης των μαθηματικών προβλημάτων είναι αλληλένδετη με την χαρακτηριστική διαδικασία της παραγωγής συμπερασμάτων που οδηγεί στην ανάγκη της τυπικής απόδειξης. Η χρήση γεωμετρικών μοντέλων είναι ένα ενδιάμεσο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση καθώς παρέχει ένα καινούργιο πλαίσιο αντίληψης του προβλήματος από τον λύτη, που τον βγάζει από ένα καθαρά εμπειρικό πλαίσιο αντίληψης.

ΜΕΡΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑ

Η γεωμετρική αναπαράσταση και η χρήση γεωμετρικών μοντέλων έχει πάρα πολλές δυνατότητες, αφού αντανakλά τις ενορατικές διαδικασίες που συνδέονται με το μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκεται. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές και φοιτητές σε κάποιο κατάλληλο στάδιο της εξέλιξης της σκέψης τους ή της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος. Θα αναφερθούμε σε μερικά παραδείγματα με σκοπό να έχουμε μια σφαιρική άποψη για την χρήση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων και μοντέλων καθώς και για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν καλούνται να λύσουν με τη βοήθεια τέτοιων αναπαραστάσεων ένα μαθηματικό πρόβλημα.

1) Στην Ελληνογερμανική Σχολή στην Αθήνα σε 28 μαθητές της Γ' Γυμνασίου, οι οποίοι παρακολούθησαν προαιρετικά, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

«Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές έχουν την ιδιότητα η μια να είναι μεγαλύτερη από τη άλλη κατά τρία μέτρα, Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με δέκα τετραγωνικά μέτρα. Να βρεθούν οι πλευρές του». (βιβλίο Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου)

Η λύση του προβλήματος έγινε ως εξής: Έστω ότι η μια πλευρά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με χ . Τότε η άλλη πλευρά η οποία είναι μεγαλύτερη κατά τρία μέτρα θα είναι ίση με $(\chi+3)$. Εφόσον το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με δέκα τετραγωνικά μέτρα, θα ισχύει ότι:

$$\chi \cdot (\chi+3) = 10 \Leftrightarrow \chi^2 + 3 \cdot \chi = 10$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση αυτή λύνεται από τους μαθητές της τρίτης Γυμνασίου ως εξής:

$$\chi^2 + 3/2 \cdot 2 \cdot \chi + (3/2)^2 = 10 + (3/2)^2 \Leftrightarrow (\chi + 3/2)^2 = (7/2)^2$$

Είναι φανερό ότι οι μαθητές προσπαθούν να λύσουν την δευτεροβάθμια εξίσωση μετασχηματίζοντας την ταυτότητα η οποία είναι διδαγμένη. **Έχουν όμως τα παιδιά πραγματικά καταλάβει τι ακριβώς κάνουν;**

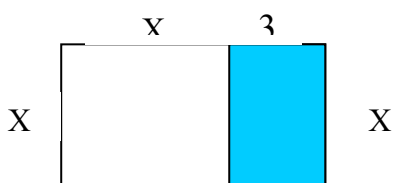
Στη συνέχεια δίνεται από τον καθηγητή η γεωμετρική ερμηνεία της λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\chi \cdot (\chi+3) = 10$ και ζητείται από τους μαθητές να σχολιάσουν τις δύο λύσεις. Η παρακάτω απόδειξη αποδίδεται όπως ακριβώς διδάχτηκε στην τάξη.

« Γεωμετρική ερμηνεία

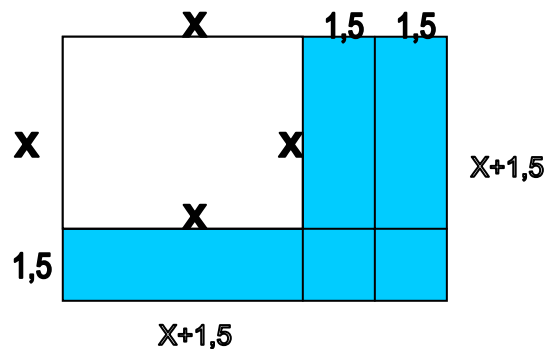
Προηγουμένως προσπαθήσαμε να μετασχηματίσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση

$\chi \cdot (\chi+3) = 10$ σε εξίσωση που το πρώτο μέλος της είναι τέλειο τετράγωνο. Στην πραγματικότητα προσπαθήσαμε να μετασχηματίσουμε το αρχικό ορθογώνιο σε τετράγωνο με πλευρά $\chi + 3/2$. Το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου θα είναι ίσο με $(7/2)^2$

Σχηματίζουμε αρχικά τετράγωνο με πλευρά χ και προσθέτουμε δίπλα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με



πλευρές χ και 3 έτσι ουσιαστικά δημιουργούμε το αρχικό ορθογώνιο με πλευρές χ και $\chi + 3$ το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με 10 τετραγωνικά εκατοστά. Στη συνέχεια εφόσον θέλουμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο πλευράς $(\chi + 3/2)$ βρίσκουμε το μέσο της πλευράς του γαλάζιου ορθογωνίου που είναι ίση με 3 και δημιουργούμε τετράγωνο πλευράς $(\chi + 1,5) = (\chi + 3/2)$



Αρκεί να δείξουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με $(\chi + 1,5)^2 = (7/2)^2$. Αν συμπληρώσουμε τώρα το προηγούμενο σχήμα θα παρατηρήσουμε ότι το τετράγωνο που ζητάμε αποτελείται από το τετράγωνο πλευράς χ , δύο ορθογώνια πλευράς χ και 1,5 και ένα τετράγωνο πλευράς 1,5. Επομένως το ζητούμενο τετράγωνο μετασχηματίζεται σε ορθογώνιο πλευρών χ και $\chi + 3$ που ως γνωστόν ισούται με 10 τ.ε. και ένα τετράγωνο που έχει πλευρά 1,5 εκατ και που έχει

εμβαδόν $(1,5)^2 = 9/4$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $10 + 9/4 = 49/4 = (7/2)^2$

Οι μαθητές ρωτήθηκαν ποια μέθοδο προτιμούν. Μερικές από τις απαντήσεις είναι οι ακόλουθες:

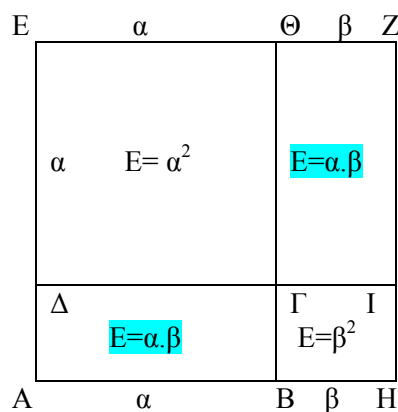
«Μια τέτοια λύση σαν την Γεωμετρική απέχει από τις καθιερωμένες Μαθηματικές λύσεις. Μπορεί να προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό το ενδιαφέρον της τάξης αντιμετωπίζοντάς το (το πρόβλημα), γιατί όχι, σαν ένα μαθηματικό παιχνίδι».

Ένας άλλος μαθητής απάντησε: **« Μου άρεσε η γεωμετρική κατασκευή αλλά η πρώτη (λύση) μου φαίνεται ευκολότερη. Είναι πιο γρήγορη και αν μάθεις την διαδικασία σε όλες τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις θα γίνεται το ίδιο. Η Γεωμετρία είναι κάπως.....δύσκολη».**

Και ένας τρίτος μαθητής είπε: **«Εγώ πρόσεξα ότι στην Γεωμετρική κατασκευή δεν χρειάζονται μαθηματικές γνώσεις . Μερικές έννοιες όπως το εμβαδόν και η διαγώνιος είναι μάλλον γνωστές. Αν καταλάβει κανείς τι ψάχνουμε τότε είναι πιο εύκολο να το αποδείξεις».**

2) Στους 30 μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου Αναβρύτων μετά από διδασκαλία των ταυτοτήτων, ζητήθηκε από τον καθηγητή να ερμηνεύσουν Γεωμετρικά την ταυτότητα :

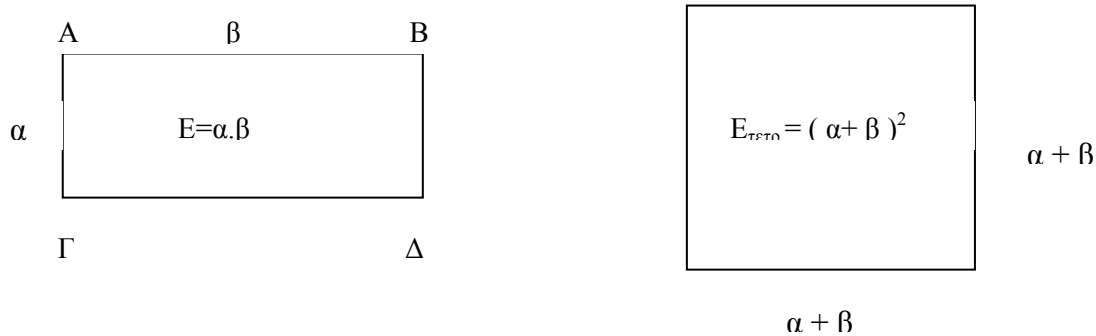
$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$, χωρίς όμως να δοθεί καμία υπόδειξη. Ένας μαθητής έδωσε την παρακάτω εξήγηση:



« Κατασκευάζω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΓΔ = α και ΑΔ = ΒΓ = β , Προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = α και την ΑΒ κατά τμήμα ΒΗ = β. Φέρνουμε παραλλήλους από τα σημεία Η και Ε προς τις ΑΕ και ΑΗ. Σχηματίζεται το τετράγωνο ΑΕΖΗ που έχει πλευρά α + β. Προεκτείνουμε την ΔΓ κατά β έτσι ώστε να τέμνει την ΗΖ στο σημείο Ι. Επίσης προεκτείνουμε την ΒΓ κατά α, έτσι ώστε να τέμνει την ΗΖ στο σημείο Θ. Όμως το $E_{AEZH} = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$ (1). Εάν γράψουμε το εμβαδόν του ως άθροισμα εμβαδών : $E_{AEZH} = E_{ABGD} + E_{BHIG} + E_{GIZO} + E_{ΔΓΘΕ} = a \cdot b + b^2 + a \cdot b + a^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ (2), γιατί ΑΒΓΔ =ορθογώνιο,

BHΓ = τετράγωνο, ΓΙΖΘ = ορθογώνιο, ΔΓΘΕ = τετράγωνο. Αφού (1) και (2) έχουν πρώτα μέλη ίσα άρα και τα δεύτερα μέλη θα είναι ίσα : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ».

Ένας άλλος μαθητής κατασκεύασε τα παρακάτω σχήματα και έκανε την ακόλουθη απόδειξη:



$$\ll \Pi_{\text{ορθ.}} = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

$$\Pi^2 = [2(\alpha + \beta)]^2$$

$$\Pi^2 = 2^2(\alpha + \beta)^2$$

$$\Pi^2 = 4(\alpha + \beta)^2$$

$$(2\alpha + 2\beta) \cdot (2\alpha + 2\beta) = 4(\alpha + \beta)^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 = [(2\alpha + 2\beta) \cdot (2\alpha + 2\beta)] / 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 = [4\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\alpha\beta + 4\beta^2] / 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 = 4(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2) / 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

Άρα η ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2$ παριστάνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει πλευρά $\alpha + \beta$ »

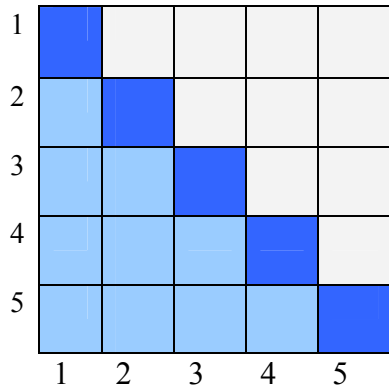
3) Σε μια τάξη τρίτης Γυμνασίου 25 μαθητών δόθηκε το τριώνυμο $x^2 + 2x + 1$ για παραγοντοποίηση και οι περισσότεροι μαθητές άρχισαν να εφαρμόζουν μηχανικά την διαδικασία παραγοντοποίησης που ήξεραν. Ελάχιστοι μαθητές είδαν ότι αυτό ήταν το ανάπτυγμα του $(x+1)^2$.

Η γεωμετρική ερμηνεία των ταυτοτήτων, η επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης όπως επίσης και η γεωμετρική αναπαράσταση του αθροίσματος. $S_n = 1+2+3 \dots + n$, για $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι παραδείγματα γεωμετρικών αναπαραστάσεων στην τάξη των μαθηματικών. Το ίδιο συμβαίνει και με τις γραφικές παραστάσεις για την μελέτη συνάρτησης ή ακόμη και με τα διαγράμματα Euler-Venn για την διδασκαλία της Συνολοθεωρίας. Σ' αυτήν όμως την τελευταία περίπτωση δεν βοηθήθηκαν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών αλλά δημιουργήθηκαν ακόμη μεγαλύτερα προβλήματα, όπως αναφέρεται στο άρθρο του G. Brousseau [6].

4) Το επόμενο πρόβλημα δόθηκε σε 20 παιδιά Ε' Δημοτικού ως εξής: « Να βρεθεί ο αριθμός χειραψιών ανάμεσα σε n ανθρώπους όταν ο καθένας κάνει μια χειραψία μόνο με οποιονδήποτε άλλο». [Από το άρθρο [7] των Jenny Billington και Pat Evans]. Στο άρθρο [7] και στο βιβλίο [8] των Τ. Πατρώνη- Δ. Σπανού, αναφέρεται ότι τα παιδιά με δική τους αναπαράσταση μέσα στην τάξη, χωρίς καμία παρέμβαση του δασκάλου, απάντησαν στο πρόβλημα θεωρώντας $n = 20$ (όσοι ήταν και οι μαθητές της τάξης τους). **Είναι όμως βέβαιο ότι αυτή η Γεωμετρική αναπαράσταση**

μπορεί να χρησιμεύσει στα παιδιά σαν μοντέλο για να βρουν ένα κανόνα για να υπολογίζουν το άθροισμα S_n χωρίς να κάνουν προσθέσεις;

5) Το παρακάτω πρόβλημα παρουσιάστηκε στη Στήλη του Μαθητή στον *Ευκλείδη Α*, τεύχος Σεπτ-Οκτ. 1987. Ο μαθητής έγραψε την ακόλουθη απόδειξη:



«Το πλήθος των τετραγώνων με σκούρο χρώμα ισούται με το άθροισμα $1+2+3+4+5$. Όλα τα τετράγωνα του μεγάλου τετραγώνου είναι n^2 (δηλαδή 5^2 υψώνουμε στο τετράγωνο τον μεγαλύτερο αριθμό, που εκφράζει και το πλήθος των τετραγώνων της μιας πλευράς). Αν από τον αριθμό αυτό αφαιρέσουμε τα τετράγωνα της διαγωνίου ($25-5$) (που το πλήθος τους ισούται με το πλήθος των τετραγώνων της μιας πλευράς) και διαιρέσουμε το υπόλοιπο δια δύο ($20:2$) βρίσκουμε το πλήθος των άσπρων τετραγώνων που είναι 10. Προσθέτουμε τα τετράγωνα της διαγωνίου ($10+5$) και βρίσκουμε έτσι και το άθροισμα $1+2+3+4+5=15$. Όλο αυτό το μπέρδεμα γράφεται με γενικούς αριθμούς ως εξής :

$$(n^2 - n) : 2 + n$$

6) Το ίδιο θέμα όπως παραπάνω παρουσιάστηκε από μια ομάδα 4 φοιτητριών δευτέρου έτους του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου της Πάτρας ως προτεινόμενη διδακτική μέθοδος ως εξής:

«Οι φυσικοί αριθμοί (....)είναι αριθμοί διακριτοί, δηλαδή μπορούμε για κάθε φυσικό αριθμό να βρούμε τον προηγούμενο και τον επόμενό του, οι οποίοι θα είναι επίσης φυσικοί αριθμοί. Εφόσον λοιπόν οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτοί μπορούμε με τη βοήθεια κουκίδων να τους συμβολίσουμε ως εξής:

1 → •
 2 → • •
 3 → • • •

 n → • • •.....•

Οι κουκίδες ισαπέχουν μεταξύ τους. Αυτό ισχύει πάντα

Με βάση τον συμβολισμό αυτό μπορούν να δημιουργηθούν ακολουθίες που οι όροι τους θα αποτελούνται από σχήματα και αριθμούς.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε με βάση τις ιδιότητες των Φυσικών αριθμών και με τη βοήθεια του συμβολισμού (κουκίδες) το άθροισμα $S_n = 1+2+3+...+n$, για $n=1,2,3,....$

Εδώ θα δουλέψουμε με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου.

Έστω ότι έχω το άθροισμα : $1+2+3$

Ακολουθώ τα εξής βήματα :

Παριστάνω διαδοχικά τους αριθμούς 1,2,3 με κουκίδες και προκύπτει το σχήμα:

•
 • •
 • • •

το οποίο αποτελεί ένα ορθογώνιο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 3(!)

-Συμπληρώνω το σχήμα με κουκίδες έτσι ώστε να σχηματιστεί τετράγωνο πλευράς 3 .

• ♦ ♦ ♦
 • • ♦ ♦ (βοηθητικές κουκίδες)
 • • • ♦
 • • • •

- ✓ Υπολογίζω το εμβαδόν του τετραγώνου : $3^2 = 9$
- ✓ Αφαιρώ από το εμβαδόν αυτό τη διαγώνιο : $9 - 3 = 6$
- ✓ Διαιρώ τη διαφορά αυτή δια δύο έτσι ώστε να κρατήσω το ένα από τα ίσα μέρη που έχουν σχηματιστεί $6 : 2 = 3$

Παρατηρώ ότι για να βρώ το ζητούμενο άθροισμα μου λείπουν οι κουκίδες της διαγωνίου. Επομένως προσθέτω στο προηγούμενο αποτέλεσμα. Άρα $3 + 3 = 6$ δηλαδή : $(3^2 - 3) : 2 + 3 = 6$.

Γενικεύω τη διαδικασία και έχω το άθροισμα : $1 + 2 + 3 + \dots + n$

- ✓ Παριστάνω διαδοχικά τους αριθμούς με κουκίδες.

• ♦ ♦ ♦.....♦
 • • ♦ ♦.....♦
 • • • ♦♦

 • • • • ••

βοηθητικές κουκίδες

Προκύπτει ισόπλευρο ορθογώνιο τρίγωνο πλευράς n (!)

- ✓ Συμπληρώνω το προηγούμενο σχήμα με βοηθητικές κουκίδες ώστε να προκύψει ένα τετράγωνο πλευράς n
- ✓ Υπολογίζω το εμβαδόν του τετραγώνου : $n \cdot n = n^2$
- ✓ Αφαιρώ από το εμβαδό αυτό τη διαγώνιο : $n^2 - n$
- ✓ Διαιρώ τη διαφορά αυτή δια δύο έτσι ώστε να κρατήσω το ένα από τα δύο ίσα μέρη που έχουν σχηματιστεί : $(n^2 - n) : 2$
- ✓ Για να προκύψει το ζητούμενο άθροισμα μου λείπουν οι κουκίδες της διαγωνίου, επομένως τις προσθέτω στο προηγούμενο αποτέλεσμα : $(n^2 - n) / 2 + n$

Άρα ο γενικός τύπος θα είναι : $(n^2 - n) / 2 + n$. Η απόδειξη αυτή είναι γεωμετρική.

Στη συνέχεια οι φοιτήτριες λύνουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας Μαθηματική Επαγωγή σημειώνοντας ότι χρησιμοποιούν την δεύτερη απόδειξη για να επιβεβαιώσουν τον τύπο.

Θα αναφέρουμε εν συντομία την «αλγεβρική», όπως οι ίδιες την χαρακτήρισαν, λύση.

$\ll S_n = 1 + 2 + 3 \dots + n = (n^2 - n) / 2 + n$, για $n = 1, 2, 3, \dots$

- ✓ $n = 1$, Ο τύπος ισχύει
- ✓ Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $k < n$ ισχύει $S_k = 1 + 2 + 3 \dots + k = (k^2 - k) / 2 + k$,
- ✓ Θα δείξω ότι ισχύει για $n = k + 1$ δηλαδή $1 + 2 + 3 \dots + k + (k + 1) = [(k + 1)^2 - (k + 1)] / 2 + (k + 1)$
- ✓ Πράγματι $1 + 2 + 3 \dots + k + (k + 1) = (k^2 - k) / 2 + k + (k + 1) = (k^2 - k + 2k) / 2 + (k + 1) = [(k^2 + 2k + 1) - (k + 1)] / 2 + (k + 1)$. Άρα ισχύει και αλγεβρικά.

Η παραπάνω απόδειξη είναι αποδεκτή αφού στηρίζεται στην αρχή της τέλει επαγωγής. ***Είναι όμως αυτό το ζητούμενο; Η μέθοδος της τέλει επαγωγής μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση του παραπάνω αθροίσματος;***

Τα σχόλια που έκανε η ίδια ομάδα φοιτητών για τις μεθόδους που χρησιμοποίησε ήταν τα ακόλουθα:

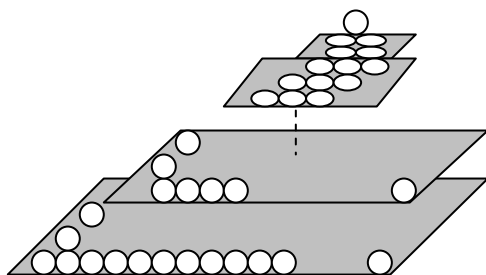
«Μέσα από την γεωμετρική μέθοδο ο μαθητής αντιμετωπίζει το μαθηματικό πρόβλημα επί της ουσίας. Σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να εξοικειώσει τον μαθητή με έναν άλλο τρόπο σκέψης πέρα από τα αλγεβρικά δεδομένα στα οποία ουσιαστικά θα περιοριζόταν ένα τέτοιο καθαρά αλγεβρικό πρόβλημα όπως η εύρεση του αθροίσματος των φυσικών αριθμών. Ο μαθητής επομένως αναπτύσσει την κρίση του και ανακαλύπτει νέες κατευθύνσεις στην προσέγγιση των διαφόρων Μαθηματικών προβλημάτων οι οποίες θα διέφευγαν αν παρέμενε

εγκλωβισμένος στο αναλυτικό πρότυπο . Παράλληλα μια τέτοια κατασκευαστική μέθοδος μπορεί να κεντρίσει το ενδιαφέρον ακόμα και των μαθητών που δείχνουν αρνητική διάθεση προς το μάθημα. Μπορεί ακόμη να αποτελέσει μια ευχάριστη και πρωτότυπη εμπειρία για όλη την τάξη ».

Οι φοιτητές μπορούν θαυμάσια να εκθειάσουν τις δυνατότητες της γεωμετρικής αναπαράστασης. Παρατηρούμε όμως ότι δεν είναι τόσο εύκολο γι' αυτούς να την εφαρμόσουν (!)

7) Μια άλλη ομάδα 3 φοιτητριών προσπάθησε να ερμηνεύσει Γεωμετρικά το άθροισμα:

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2$, $v = 1, 2, 3, \dots$ (Βλ. Σχετ. άρθρο[9] των Τ.Πατρώνη-Β. Στεργίου) χωρίς ιδιαίτερη παρέμβαση από το μέρος του καθηγητή. Οι φοιτήτριες εκφράσανε τον κάθε όρο του αθροίσματος με σφαίρες, που ανά όρο βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα έτσι ώστε να σχηματιστεί μια πυραμίδα της οποίας η βάση να αντιστοιχίζεται στο v -οστό όρο του αθροίσματος και περιέχει $v \cdot v = v^2$ σφαίρες.



Υπολόγισαν τον όγκο της πυραμίδας χρησιμοποιώντας τον τύπο του όγκου της πυραμίδας $V = 1/3 \cdot B \cdot h$ όπου B είναι η βάση της πυραμίδας σχήματος τετραγώνου πλευράς v άρα

$B = v^2$ και h είναι το ύψος της πυραμίδας που περιέχει v επίπεδα όσοι και οι όροι του αθροίσματος. Οπότε $V = 1/3 \cdot B \cdot h = 1/3 \cdot v^2 \cdot v = 1/3 v^3$.

Αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση όμως δεν οδήγησε σε ακριβή υπολογισμό του αθροίσματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν κάποιες απόψεις 15 φοιτητών του ίδιου Μαθηματικού Τμήματος που παρακολούθησαν την παρουσίαση.

Ένας φοιτητής συμφώνησε με την προηγούμενη γεωμετρική προσέγγιση και προχώρησε παραπέρα ως εξής: Χρησιμοποίησε τον τύπο του αθροίσματος S_2 και κάνοντας πράξεις βρήκε τα ακόλουθα: $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = v \cdot (v + 1) \cdot (2v + 1) / 6 = (2v^3 + v + 2v^2 + v) / 6 = (2v^3 + 3v^2 + v) / 6 = v^3/3 + v^2/2 + v/6$. Εξήγησε ότι ο πρώτος όρος $v^3/3$ είναι απείρως μεγαλύτερος από τον δεύτερο και τρίτο όρο όταν το v γίνεται πολύ μεγάλο γιατί σύμφωνα με τον ίδιο, το $v^3/3$ εκφράζει **όγκο**, το $v^2/2$ εκφράζει **εμβαδόν** ενώ το $v/6$ εκφράζει **μήκος**.

Ένας άλλος φοιτητής χρησιμοποίησε το λόγο: S_2 / V για να συγκρίνει το άθροισμα S_2 με τον όγκο γράφοντας την ακόλουθη σχέση: $S_2 / V = [v \cdot (v + 1) \cdot (2v + 1) / 6] : [1/3 v^3] = 1 + (3/2) \cdot (1/v) + (1/2) \cdot (1/v^2)$. Στη συνέχεια θέτει $v = 100$ και γράφει την σχέση: $S_2 / V = 1 + 0,015 + 0,0005 \rightarrow 1$ ενώ κάποιος άλλος χρησιμοποιεί το όριο $\lim_{v \rightarrow \infty} (1 + 3/2 + 1/2v^2) = 1 + 0 + 0 = 1$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιήσαμε στην εργασία μας δίνουν την δυνατότητα να μελετήσουμε τις αντιδράσεις των μαθητών και φοιτητών –μελλοντικών δασκάλων των Μαθηματικών στη χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων, καθώς και να παρατηρήσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι φοιτητές στην χρήση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων. Αξίζει να επισημάνουμε τα εξής σημεία:

α) Η δημιουργία –κατασκευή αντιλήψεων των Μαθηματικών εννοιών στους μαθητές του Γυμνασίου και σε μικρότερα ακόμη παιδιά γίνεται μέσα από ανάπτυξη συμπερασματικών

συλλογισμών όχι απαραίτητα βασισμένων μόνο στη διαίσθηση. Οι μαθητές δέχονται την γνώση που τους προσφέρεται στο σχολείο από τον δάσκαλο ενώ στο στάδιο ωρίμανσης της προσωπικότητάς τους αρχίζουν να προσδιορίζουν και να αναγνωρίζουν μόνοι τους τις μαθηματικές αρχές, αλλά και να ανακαλύπτουν ενδεχομένως κάποιες μαθηματικές αλήθειες. Αυτό ίσως εξηγεί την αντίδραση πολλών μαθητών και φοιτητών απέναντι στις προτεινόμενες θεωρητικές αποδείξεις και στην τυποποιημένη γνώση. Οι μαθητές και οι φοιτητές αυτοί θέλουν πρώτα να καταλάβουν, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιήσουν με κατανόηση αυτή τη μαθηματική γνώση στην λύση προβλημάτων.

Υπάρχουν όμως και πολλοί άλλοι μαθητές που δεν «*βλέπουν*» δυσκολίες. Χρησιμοποιούν κανόνες, ορισμούς, θεωρήματα χωρίς να αντιλαμβάνονται τι ακριβώς κάνουν. Η γρηγορότερη διαδικασία είναι γι' αυτούς η καλύτερη μέθοδος. Εδώ ο ρόλος του δασκάλου και η χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία της διδασκαλίας ενός Μαθηματικού θέματος μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο για την τροποποίηση της αντίληψης-νοοτροπίας των μαθητών και την δημιουργία γόνιμης Μαθηματικής σκέψης.

β) Ένα άλλο σημαντικό σημείο που προκύπτει από τα παραπάνω και το οποίο αξίζει να σημειωθεί είναι η δυσκολία των μαθητών και φοιτητών στην επιλογή κατάλληλου μοντέλου για την επίλυση ενός Μαθηματικού προβλήματος όπως αναφέρει και ο H.Steinbring στο άρθρο [2]. ***Τελικά στα παραδείγματα πιο πάνω οι φοιτητές χρησιμοποιούν το άθροισμα των κουκίδων (σφαιρών) ή το εμβαδόν (όγκο) τους;*** Και ακόμη τι προκάλεσε στο παράδειγμα (6) την έκφραση «*ορθογώνιο ισόπλευρο τρίγωνο;*» Είναι προφανές ότι δεν πρόκειται για ασυναίσθητο λάθος που προέκυψε στην ρύμη του λόγου αλλά η ίδια η δομή του προβλήματος δημιούργησε κάποια γνωστική σύγκρουση αφού ο αριθμός των κουκίδων αντιστοιχεί σε ισόπλευρο τρίγωνο αλλά ταυτόχρονα σχηματίζεται και ένα τετράγωνο. Ακόμη το Ευκλείδειο μήκος των πλευρών, όπως και τα μέτρα των γωνιών ενός τέτοιου τριγώνου είναι στοιχεία που δεν σχετίζονται υποχρεωτικά με το αναπαριστώμενο αντικείμενο, «έναν τρίγωνο αριθμό».

γ) Ένα τρίτο θέμα που προκύπτει από την παραπάνω έρευνα είναι κατά πόσο εύκολη θεωρείται για τους μαθητές η εφαρμογή γεωμετρικών αναπαραστάσεων, και αν επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικές αναπαραστάσεις ως μοντέλα για την επίλυση Μαθηματικών προβλημάτων. Και είναι βέβαιο ότι μια τέτοια διαδικασία απόδειξης μπορεί να χρησιμεύσει στα παιδιά για να βρουν ένα κανόνα γενίκευσης με τον οποίο να μπορούν να ερμηνεύουν ένα Μαθηματικό πρόβλημα; Πράγματι οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδυάσουν και να ενοποιήσουν τους διαφορετικούς τύπους των Μαθηματικών προβλημάτων ιδίως όταν τους παρουσιάζονται με διαφορετικό τρόπο από εκείνο που έχουν συνηθίσει. Οι αλλαγές όμως των διαδικασιών διδασκαλίας χαράζουν μια μοντέρνα διδακτική προοπτική η οποία ενθαρρύνει τους μαθητές στο να εξοικειωθούν με τις Μαθηματικές έννοιες παρ' όλες τις δυσκολίες που ξεπηδούν από αυτή.

δ) Τέλος από την παρουσίαση των φοιτητριών στο παράδειγμα (6) και ιδίως στη συζήτηση του παραδείγματος (7) προκύπτει η δυνατότητα ανάδυσης της έννοιας του απειροστού μέσα από μια διαισθητική προσέγγιση. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ιδιαίτερα στο σημείο της σύγκρισης ανάμεσα στα μέτρα διαφορετικών διαστάσεων (μήκος, εμβαδόν, όγκος) η γεωμετρική αναπαράσταση του αθροίσματος S_2 έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάδυση της έννοιας του απειροστού στους φοιτητές. (Μια άλλη σχετική προσέγγιση στο άρθρο [10] των Β.Στεργίου-Τ.Πατρώνη).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1]. G.Polya., 1990 *Πως να το λύσω*, εκδόσεις Καρδαμίτσα, επιμέλεια Τ. Πατρώνης)
- [2]. H.Steinbring., 1990 Problems in the Development of Mathematical Knowledge in the Classroom» Published in *Der Mathematik-unterricht* 36(3) 4-28
- [3]. Θ.Σκούρας., 1999, « Η Σύνδεση των αναπαραστάσεων στην πορεία διαμόρφωσης αφηρημένων εννοιών. Η περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$ », *Ενκλείδης Γ*, τεύχος 51.
- [4]. Δαγδιδέλης, Ε., Παυλοπούλου, Κ., Τρίγγα, Π., 1998. «Διδακτική: Μέθοδοι και Εφαρμογές», Εκδόσεις Ε.Μπένου.
- [5]. Α.Γαγάτσης- Τ.Πατρώνης., 1991 «Χρήση Γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία των Μαθηματικών» στο βιβλίο *Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών* Θεσ/κη ,εκδόσεις αδερφών Κυριακίδη.
- [6]. G.Brousseau., 1991, *Θεμέλια και μέθοδοι της διδακτικής των Μαθηματικών*, Ελληνική απόδοση στο βιβλίο *Θέματα διδακτικής Μαθηματικών* Επιμέλεια Α.Γαγάτση εκδόσεις Κυριακίδη Θεσ/κη.
- [7]. Jenny Billington και Pat Evans., 1987, “Levels of knowing-The handshake problem” *Mathematics Teaching* No 121 (1987)]
- [8]. Τ.Πατρώνης-Δ. Σπανός., 1996, *Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία* εκδόσεις Γ.Α.Πνευματικού.
- [9]. Τ.Πατρώνης-Β. Στεργίου., 2003, “ Transforming a classical issue: mathematics’ students understanding of polynomial approximation to the sum $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ for large values of n ” Πρακτικά 3rd *Mathematical Conference on Mathematical Education*.
- [10]. Β.Στεργίου-Τ.Πατρώνης ., 2002, “ Exploring a modern path to infinitesimals: mathematics students’ understanding of the concept of rate of convergence” *International Journal of mathematical Education in Science and Technology* Taylor & Francis Ltd vol.33, No.5, p.651-659.

ABSTRACT

This paper is referring to the didactical approaches, which are reported on the use of geometrical representations and geometrical models. The aim of this paper is to give an empirical estimation and reflection of the interaction between teacher and student through diagnostic teaching in classical mathematical issues.

It also contains some patterns of solutions of classical Mathematical issues in the classroom through geometrical representations and analyses the capabilities and difficulties which pupils and students face, students who will be tomorrow’s teachers of mathematics.