

ΜΙΑ ΕΙΚΟΝΑ ΑΞΙΖΕΙ ΧΙΛΙΕΣ ΛΕΞΕΙΣ...ΠΟΙΟ ΕΙΔΟΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΟΜΩΣ ΒΟΗΘΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ;

Ριάνα Θεοδούλου
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Αθανάσιος Γαγάτσης
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έρευνα αυτή προσπάθησε να εξετάσει το ρόλο της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από μαθητές Β' δημοτικού. Ειδικότερα, εξετάστηκε ο ρόλος τεσσάρων ειδών εικόνας που προτείνονται από την παρούσα εργασία με βάση τη λειτουργία τους στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: διακοσμητική, βοηθητική-αναπαραστατική, βοηθητική-οργανωτική, πληροφοριακή. Οι διακοσμητικές εικόνες δεν παρέχουν πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος, αλλά πρόκειται για καθαρά διακοσμητικά στοιχεία, οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα, οι βοηθητικές-οργανωτικές βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν κάτι, χωρίς να είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν στη λύση του προβλήματος και οι πληροφοριακές δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για τη λύση του προβλήματος. Ογδόντα πέντε μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν δύο δοκίμια από τα οποία το πρώτο περιλάμβανε οκτώ συνηθισμένα λεκτικά προβλήματα χωρίς την παρουσία εικόνας και το δεύτερο τα ίδια προβλήματα με την παρουσία εικόνας. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η παρουσία της διακοσμητικής και της πληροφοριακής εικόνας δεν επηρέασαν σημαντικά την επίδοση των μαθητών, σε αντίθεση με τις βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες οι οποίες είχαν στατιστικά σημαντική επίδραση. Οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες άλλοτε είχαν σημαντική επίδραση και άλλοτε όχι, ανάλογα με το είδος της πράξης που περιλαμβανόταν στο πρόβλημα. Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι ο χαρακτήρας του μετασχηματισμού, δηλαδή το είδος της πράξης (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση), υπερισχύει του είδους της εικόνας. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν επίσης ότι η χρήση της εικόνας από τα παιδιά γινόταν ασυνείδητα, καθώς πολλά παιδιά, ενώ χρησιμοποιούσαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα, αμφισβητούσαν τη χρησιμότητα της εικόνας δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησε στη λύση του προβλήματος.

1. Εισαγωγή

Οι εικόνες, και γενικότερα οι αναπαραστάσεις, διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στον τομέα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, καθώς τα σύγχρονα βιβλία και διδακτικά υλικά περιλαμβάνουν περισσότερες εικόνες, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, παρά ποτέ προηγουμένως (Schnotz, 2002; Carney & Levin, 2002). Η ιδέα της χρήσης εικονικών αναπαραστάσεων στην πρακτική των μαθηματικών δεν είναι βέβαια καινούρια, καθώς οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως τα διαγράμματα, οι γραφικές παραστάσεις και τα σχέδια θεωρούνταν ανέκαθεν απαραίτητα εργαλεία στο έργο των

μαθηματικών (Rival, 1987). Μεγάλοι μαθηματικοί παιδαγωγοί, όπως οι Hadamard (1945) και Poincare (1963), εισηγήθηκαν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων αποτελεί απαραίτητο στοιχείο στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και υποστήριξαν τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές στην επίλυση δικών τους προβλημάτων. Επιπρόσθετα, ο Polya (1945) εισηγήθηκε την στρατηγική «κάνε ένα σχέδιο» στο πλαίσιο των ευρηματικών στρατηγικών που πρότεινε για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Η χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος υποστηρίζεται τα τελευταία χρόνια και από τη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα. Το NCTM (2000) στα *Principles and Evaluation Standards for School Mathematics* ενθαρρύνει τη χρήση τέτοιων αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος στο δημοτικό και στο γυμνάσιο. Επιχειρήματα για τη χρήση των εικόνων προβάλλονται και από γνωστικούς ψυχολόγους (π.χ. Larkin & Simon, 1987), οι οποίοι υποστήριξαν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση μαθηματικού προβλήματος σε όλες τις φάσεις της συγκεκριμένης διαδικασίας.

Πού οφείλεται όμως η τόσο έντονη παρουσία αυτών των εικονικών αναπαραστάσεων; Δύο υποθέσεις μπορούν να γίνουν σε σχέση με το ερώτημα αυτό. Η πρώτη έχει να κάνει με θεωρίες μάθησης οι οποίες εμπλέκουν την έννοια των νοερών αναπαραστάσεων (Gagatsis et al, 1999; Gagatsis & Michaelidou, 2002). Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές, άτομα που διακρίνονται για την ποικιλία και τον πλούτο των νοερών αναπαραστάσεών τους έχουν αυξημένη ικανότητα κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών και επομένως της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Η δεύτερη, την οποία ερμηνεύουμε ως μια πρόχειρη ερμηνεία της προηγούμενης, δηλαδή των θεωριών μάθησης, είναι ότι κάθε εικόνα ή αναπαράσταση βοηθάει την κατανόηση. Επομένως, χρησιμοποιούμε συνεχώς εικόνες στα βιβλία των μαθηματικών γιατί σίγουρα αυξάνουν την «αναγνωσιμότητα» των μαθηματικών κειμένων, δηλαδή την ικανότητα άντλησης πληροφοριών από ένα μαθηματικό κείμενο ενός αναγνώστη.

Η εργασία μας τοποθετείται στο γενικότερο πλαίσιο της σχέσης των αναπαραστάσεων και της μάθησης των μαθηματικών. Όμως, ενώ η πρώτη παραπάνω άποψη μας βρίσκει σύμφωνους, διαφωνούμε με τη δεύτερη πιθανή υπόθεση της ανεξέλεγκτης χρήσης των εικόνων στα βιβλία των μαθηματικών. Μια εικόνα είναι πιθανόν μερικές φορές να επιβαρύνει τη διαδικασία επεξεργασίας πληροφοριών σ' ένα νεαρό αναγνώστη και άρα να δημιουργήσει εμπόδια στην κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών.

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι ένα από τα πιο σημαντικά θέματα έρευνας στη μαθηματική παιδεία. Παρά το γεγονός ότι στο ρόλο των αναπαραστάσεων γενικώς στη μάθηση έχουν γίνει πάρα πολλές έρευνες (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Confrey, & Smith, 1991; Gagatsis, & Christou, 2002; Dienes, 1964; Janvier, 1987; Lesh, Post, & Behr, 1987; Even, 1998), ειδικά για το ρόλο της εικόνας στη μάθηση των μαθηματικών δεν έχουν βρεθεί σημαντικά αποτελέσματα. Προηγούμενες έρευνες στην κατανόηση κειμένων και εικόνων επικεντρώθηκαν κυρίως στη μνημονική λειτουργία των εικόνων στα κείμενα (Schnotz, 2002). Το κύριο εύρημα αυτών των ερευνών είναι ότι ένας αναγνώστης θυμάται τις πληροφορίες ενός κειμένου καλύτερα όταν αυτό συνοδεύεται από εικόνες, παρά όταν δεν υπάρχουν καθόλου εικόνες (Carney & Levin, 2002). Ωστόσο, οι έρευνες αυτές επικεντρώθηκαν στα λογοτεχνικά κείμενα και δεν επεκτάθηκαν στα μαθηματικά κείμενα. Έτσι, παραμένει ακόμα ασαφές πώς οι εικονικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλήματος (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Η εργασία μας στοχεύει στο να δώσει μερικές πρώτες πληροφορίες στο θέμα αυτό, δηλαδή ποιο είδος εικόνας μπορεί να βοηθήσει στη επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Η έρευνα αυτή αφορά όλα τα σχολικά επίπεδα από το δημοτικό σχολείο έως το πανεπιστήμιο και αφορά διάφορα είδη εικονικών αναπαραστάσεων. Πράγματι, για να εξεταστεί η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μαθητών γυμνασίου, πρέπει να έχουμε πληροφορίες γι' αυτή την ικανότητα των μαθητών πριν έρθουν στο γυμνάσιο. Για το λόγο αυτό, αυτή η εργασία θεωρείται ένα πρώτο βήμα εξερεύνησης των ικανοτήτων των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και το ρόλο της εικόνας σ' αυτήν την επίλυση πριν από το πέρασμα από το δημοτικό στο γυμνάσιο. *Με άλλα λόγια, οι μαθητές δημοτικού σχολείου χρησιμοποιούν συνειδητά ή ασυνειδητά την εικόνα στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και με ποιους τρόπους;*

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1. Η λειτουργία της εικόνας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Οι εικόνες, όπως και τα μαθηματικά κείμενα, είναι από τα πιο συνηθισμένα είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο όρος εξωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς (σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα), οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν μια

συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα, ενώ ο όρος εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα (Dufour-Janvier et al., 1987).

Η χρήση ποικίλων εξωτερικών αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες σε συνδυασμό με τα κείμενα, χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών για την προώθηση της κατανόησης και της μάθησης μαθηματικών ιδεών. Σύμφωνα με τον Janvier (1987), τα περισσότερα σχολικά βιβλία σήμερα περιλαμβάνουν μια ποικιλία αναπαραστάσεων με σκοπό να προωθήσουν την κατανόηση.

Η κατανόηση από λεκτικές και εικονικές πληροφορίες έχει θεωρηθεί ως πιθανώς ευεργετική για τη μάθηση (Schnotz, 2002; Carney & Levin, 2002). Για παράδειγμα, οι Ainsworth, Wood & Bibby (1997) εισηγούνται ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες και να προάγουν βαθύτερη κατανόηση. Επιπλέον, μια δεύτερη αναπαράσταση μπορεί να ενισχύσει τη μετάφραση μιας πιο πολύπλοκης ή λιγότερο γνώριμης αναπαράστασης (Gagatsis & Michaelidou, 2002). Σύμφωνα με τους Ainsworth et al. (1997), συνδυάζοντας τις διάφορες αναπαραστάσεις οι μαθητές δεν περιορίζονται από τις αδυναμίες μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης.

2.2. Η λειτουργία της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Παρόλο που η χρήση της εικόνας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών θεωρείται σημαντική, δεν έχει παρατηρηθεί μέχρι σήμερα σημαντική ενασχόληση των ερευνητών με τη λειτουργία της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Μια προσπάθεια για μελέτη του ρόλου της εικόνας στην επεξεργασία των κειμένων γενικότερα έγινε από τους Carney και Levin (2002), οι οποίοι πρότειναν πέντε λειτουργίες της εικόνας στην επεξεργασία ενός κειμένου –διακοσμητική, αναπαραστατική, οργανωτική, μεταφραστική και μετασχηματιστική. Οι διακοσμητικές εικόνες απλά διακοσμούν τη σελίδα, έχοντας μικρή ή καθόλου σχέση με το περιεχόμενο του κειμένου. Οι αναπαραστατικές εικόνες αναπαριστούν μέρος ή ολόκληρο το περιεχόμενο του κειμένου και αποτελούν το πιο συνηθισμένο είδος εικονογράφησης ενώ οι οργανωτικές εικόνες παρέχουν ένα χρήσιμο δομικό πλαίσιο για την ανάκληση του περιεχομένου του κειμένου. Οι μεταφραστικές εικόνες βοηθούν τους αναγνώστες να ξεδιαλύνουν το νόημα σε δύσκολα κείμενα και, τέλος, οι μετασχηματιστικές εικόνες περιλαμβάνουν «μνημονικά

συστατικά» τα οποία είναι σχεδιασμένα για να ενισχύουν την απομνημόνευση των πληροφοριών του κειμένου.

Με βάση την ταξινόμηση των Carney και Levin (2002) για τη λειτουργία των εικόνων στα λογοτεχνικά κείμενα, στην παρούσα εργασία προτείνουμε μια αντίστοιχη ταξινόμηση για τη λειτουργία των εικόνων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, εισηγούμαστε ότι οι εικόνες έχουν τις εξής τέσσερις λειτουργίες στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: (α) *διακοσμητικές*, (β) *βοηθητικές-αναπαραστατικές*, (γ) *βοηθητικές-οργανωτικές* και (δ) *πληροφοριακές*.

Οι *διακοσμητικές* εικόνες δεν παρέχουν οποιεσδήποτε πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος, αλλά αποτελούν καθαρά διακοσμητικό στοιχείο. Για παράδειγμα, μια εικόνα ενός λεωφορείου σε ένα πρόβλημα που αφορά στον αριθμό των επιβατών που ανέβηκαν ή κατέβηκαν από το λεωφορείο σε διάφορες στάσεις έχει διακοσμητική λειτουργία, καθώς δε σχετίζεται με την επίλυση του προβλήματος. Οι *βοηθητικές-αναπαραστατικές* εικόνες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή του. Οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν από την εικόνα για να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος, αλλά μπορούν και να την αγνοήσουν και να λύσουν το πρόβλημα με δική τους στρατηγική. Οι *βοηθητικές-οργανωτικές* εικόνες βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι. Όπως και στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων, έτσι και οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα. Ένα παράδειγμα βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας που συνοδεύει το πρόβλημα «Έχω 12 μήλα και θέλω να τα μοιράσω εξίσου σε 4 πιάτα. Πόσα μήλα θα βάλω σε κάθε πιάτο;» είναι μια εικόνα με πιάτα που καθοδηγεί τους μαθητές να σχεδιάσουν τα μήλα στα πιάτα αυτά. Οι *πληροφοριακές* εικόνες δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για να λυθεί ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα δηλαδή στηρίζεται στην εικόνα η οποία είναι αναγκαίο στοιχείο για την επίλυσή του. Για παράδειγμα, η εικόνα της βιτρίνας ενός καταστήματος που παρουσιάζει τις τιμές των προϊόντων είναι απαραίτητη για να λυθεί ένα πρόβλημα σχετικά με την αγορά προϊόντων από το συγκεκριμένο κατάστημα.

2.3. Έρευνες για το ρόλο της εικόνας στην επίλυση προβλήματος

Πρόσφατες έρευνες προσπάθησαν να εξετάσουν το ρόλο συγκεκριμένων ειδών εικόνων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Μια πρώτη έρευνα από τους Γαγάτση

και Μάρκου (2002), προσπάθησε να εξετάσει κατά πόσο η ενσωμάτωση διακοσμητικών εικονικών αναπαραστάσεων σε ασυνήθιστα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα θα μπορούσε να οδηγήσει στην αλλαγή της συμπεριφοράς των μαθητών απέναντι στα προβλήματα αυτά. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η χρήση των διακοσμητικών εικονικών αναπαραστάσεων δεν έδειξε οποιαδήποτε αλλαγή στη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στα ασυνήθιστα λεκτικά προβλήματα, γεγονός που δείχνει ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν συμβάλλουν στη ρήξη των όρων του διδακτικού συμβολαίου. Οι μαθητές αγνόησαν ουσιαστικά την ύπαρξη εικόνων, ενώ την προσοχή τους προσέλκυαν τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος.

Μια δεύτερη έρευνα από τους Gagatsis et al. (1999), μελέτησε την επίδραση της χρήσης διαφόρων μορφών αναπαράστασης (συμβολική-αριθμητική, λεκτική, εικονική) στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης από παιδιά δημοτικού σχολείου. Οι εικονικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα ήταν πληροφοριακές. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η μετάφραση από τον ένα κώδικα αναπαράστασης στον άλλο είναι σχεδόν αυτόματη, ενώ υπάρχουν περιπτώσεις που η μετάφραση αυτή δημιουργεί δυσκολίες. Σύμφωνα με τους ερευνητές, το συμπέρασμα αυτό εισηγείται ότι τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες, που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν εγγυούνται πάντα την επιτυχή υπερπήδηση γνωστικών εμποδίων που μπορεί να έχουν αρκετά παιδιά. Γι' αυτό, οι Gagatsis et al, (1999) πρότειναν ως θέμα για έρευνα την ταξινόμηση των διαφόρων ειδών αναπαραστάσεων ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας που απαιτεί η μετάφρασή τους σε άλλο κώδικα.

Η παρούσα έρευνα προσπάθησε να εξετάσει το ρόλο κάθε ενός από τα τέσσερα είδη εικόνας, όπως αυτά προτείνονται πιο πάνω, στην επίλυση συνηθισμένων λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές Β' δημοτικού.

3. Η έρευνα

3.1. Σκοπός και ερευνητικές υποθέσεις

Βασικός σκοπός της έρευνας είναι να διερευνήσει το ρόλο της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από μαθητές μικρής σχολικής ηλικίας. Ειδικότερα εξετάζεται ποιο από τα τέσσερα είδη εικόνας (διακοσμητική, βοηθητική-οργανωτική, βοηθητική-αναπαραστατική, πληροφοριακή) μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση

προβλημάτων από τους μαθητές, καθώς και ποια είναι η συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στις εικόνες αυτές κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Οι υποθέσεις της έρευνας ήταν οι εξής:

1. Η παρουσία διακοσμητικής εικόνας σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος
2. Η παρουσία βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος
3. Η παρουσία βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος
4. Η παρουσία πληροφοριακής εικόνας δεν επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος
5. Η χρήση των εικόνων από τους μαθητές στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος γίνεται ασυνείδητα

3.2. Υποκείμενα της έρευνας

Τα υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 85 μαθητές Β' τάξης δημοτικού που φοιτούσαν σε τρία σχολεία (ένα αστικό και δύο αγροτικά) της επαρχίας Λευκωσίας και της επαρχίας Λάρνακας κατά τη σχολική χρονιά 2002-2003.

3.3. Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας – Μέσα συλλογής δεδομένων

Η έρευνα διεξάχθηκε σε δύο φάσεις. Σε μια πρώτη φάση, δόθηκε στους μαθητές ένα δοκίμιο (Δοκίμιο Α) το οποίο περιλάμβανε οκτώ συνηθισμένα λεκτικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνται καθημερινά στο σχολείο. Τα προβλήματα 2, 4 και 8 ήταν προβλήματα πρόσθεσης, τα προβλήματα 1 και 5 ήταν προβλήματα αφαίρεσης και τα προβλήματα 3, 6 και 7 ήταν προβλήματα διαίρεσης. Σε κάθε πρόβλημα του Δοκιμίου Α ζητούνταν από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν για να το λύσουν.

Σε μια δεύτερη φάση, δόθηκε στους μαθητές το Δοκίμιο Β, το οποίο περιλάμβανε ίδια προβλήματα με αυτά του Δοκιμίου Α, με τη διαφορά ότι αυτά συνοδεύονταν από εικόνες. Οι εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν στο Δοκίμιο Β εντάσσονταν στις τέσσερις κατηγορίες εικόνων που προτείνονται στην παρούσα εργασία με βάση τη λειτουργία τους στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος (διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές και πληροφοριακές). Σε κάθε πρόβλημα του Δοκιμίου Β

ζητούνταν από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν για να το λύσουν καθώς επίσης και να απαντήσουν στην ερώτηση κατά πόσο τους βοήθησε η εικόνα να λύσουν το πρόβλημα και με ποιο τρόπο.

Ειδικότερα, στα προβλήματα 1 και 8 χρησιμοποιήθηκαν διακοσμητικές εικόνες, δηλαδή εικόνες οι οποίες δεν παρέχουν οποιεσδήποτε πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος, αλλά αποτελούν καθαρά διακοσμητικό στοιχείο. Για παράδειγμα το πρόβλημα 1 («Αγόρασα ένα βιβλίο που έχει 25 σελίδες. Διάβασα τις 20. Πόσες σελίδες μου έμειναν ακόμα να διαβάσω;») συνοδεύτηκε από μια εικόνα ενός βιβλίου η οποία δεν περιλάμβανε οποιαδήποτε αριθμητική πληροφορία.

Στα προβλήματα 2 και 4 χρησιμοποιήθηκαν πληροφοριακές εικόνες, δηλαδή εικόνες που δίνουν πληροφορίες απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος. Για παράδειγμα, το πρόβλημα 4 («Αγόρασα ένα τετράδιο και μια πένα. Πόσα πρέπει να πληρώσει το παιδί;») μπορούσε να λυθεί μόνο με τη χρησιμοποίηση της εικόνας η οποία παρουσίαζε τη βιτρίνα ενός περιπτέρου με τις τιμές των διαφόρων προϊόντων.

Στα προβλήματα 5 και 7 χρησιμοποιήθηκαν βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες, δηλαδή εικόνες οι οποίες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή του. Για παράδειγμα στο πρόβλημα 7 («Η Στεφανία φύτεψε 10 δεντράκια. Τα έβαλε σε δύο σειρές. Πόσα δεντράκια φύτεψε η Στεφανία στην κάθε σειρά;») υπήρχε εικόνα η οποία αναπαριστούσε τη διάταξη των δέντρων σε σειρές. Οι μαθητές θα μπορούσαν είτε να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα από την εικόνα, χωρίς να κάνουν οποιαδήποτε αριθμητική πράξη, είτε να λύσουν το πρόβλημα με διαίρεση αγνοώντας την εικόνα.

Στα προβλήματα 3 και 6 χρησιμοποιήθηκε βοηθητική-οργανωτική εικόνα. Οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι, χωρίς να είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 3 («Η Στέφανη θέλει να βάλει 20 λουλούδια σε πέντε βάζα. Κάθε βάζο θα έχει τον ίδιο αριθμό λουλουδιών. Πόσα λουλούδια έβαλε σε κάθε βάζο;») υπήρχε εικόνα με 5 βάζα η οποία καθοδηγούσε τους μαθητές να σχεδιάσουν τα λουλούδια σε βάζα, ώστε να λύσουν το πρόβλημα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο μισό πειραματικό πληθυσμό δόθηκε πρώτα το Δοκίμιο Β και μετά το Δοκίμιο Α, ώστε να μην υπάρχει η πιθανότητα να επηρεαστεί η συμπεριφορά των μαθητών από τη σειρά χορήγησης των δοκιμίων. Επιπρόσθετα, τα δύο δοκίμια χορηγήθηκαν με διαφορά μιας εβδομάδας το ένα από το άλλο.

3.4. Μεταβλητές της έρευνας

Οι μεταβλητές της έρευνας ήταν οι εξής:

- P1: Πρόβλημα αφαίρεσης με διακοσμητική εικόνα
- P2: Πρόβλημα πρόσθεσης με πληροφοριακή εικόνα
- P3: Πρόβλημα διαίρεσης με βοηθητική - οργανωτική εικόνα
- P4: Πρόβλημα πρόσθεσης με πληροφοριακή εικόνα
- P5: Πρόβλημα αφαίρεσης με βοηθητική - αναπαραστατική εικόνα
- P6: Πρόβλημα διαίρεσης με βοηθητική – οργανωτική εικόνα
- P7: Πρόβλημα διαίρεσης με βοηθητική – αναπαραστατική εικόνα
- P8: Πρόβλημα πρόσθεσης με διακοσμητική εικόνα
- V1: Πρόβλημα αφαίρεσης ίδιο με P1 χωρίς εικόνα
- V2: Πρόβλημα πρόσθεσης ίδιο με P2 χωρίς εικόνα
- V3: Πρόβλημα διαίρεσης ίδιο με P3 χωρίς εικόνα
- V4: Πρόβλημα πρόσθεσης ίδιο με P4 χωρίς εικόνα
- V5: Πρόβλημα αφαίρεσης ίδιο με P5 χωρίς εικόνα
- V6: Πρόβλημα διαίρεσης ίδιο με P6 χωρίς εικόνα
- V7: Πρόβλημα διαίρεσης ίδιο με P7 χωρίς εικόνα
- V8: Πρόβλημα πρόσθεσης ίδιο με P8 χωρίς εικόνα

Οι μεταβλητές uspr1 έως uspr8 αφορούσαν στις απαντήσεις των μαθητών ότι η εικόνα τους βοήθησε για να λύσουν κάθε ένα από τα προβλήματα 1 έως 8 του Δοκιμίου B.

Κριτήρια βαθμολόγησης

Η επιτυχία στα έργα 1 μέχρι 8 βαθμολογήθηκε ως εξής: 0 = λανθασμένη απάντηση ή καμιά απάντηση, 0,5 = μερικώς ορθή απάντηση, 1 = ορθή απάντηση.

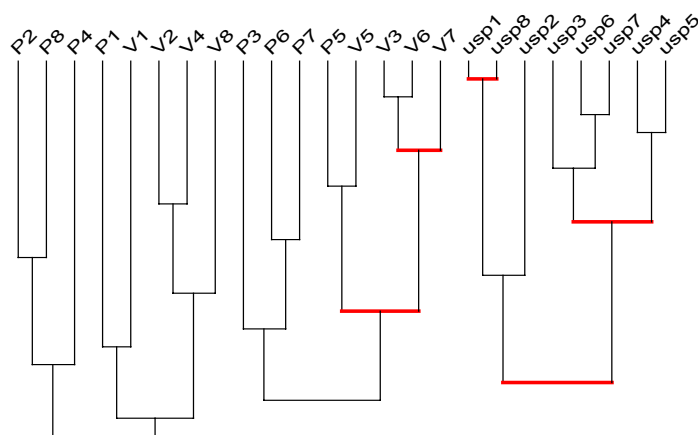
3.5. Στατιστικές τεχνικές

Για τη στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε η συνεπαγωγική μέθοδος του Gras και το στατιστικό πακέτο SPSS.

4. Αποτελέσματα

4.1. Σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα

Το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας (Διάγραμμα A1) παρουσιάζει τις ομαδοποιήσεις έργων με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους. Οι ομοιότητες με έντονο μαύρο είναι σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.



Διάγραμμα A1

Με βάση το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας σχηματίζονται τρεις ομάδες ομοιότητας. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές P2, P8, P4, P1, V1, V2, V4 και V8. Πρόκειται για μεταβλητές που αφορούν στα προβλήματα 1, 2, 4 και 8 τα οποία δόθηκαν με και χωρίς τη συνοδεία διακοσμητικής (προβλήματα 1, 8) και πληροφοριακής εικόνας (προβλήματα 2, 4). Στην πρώτη ομάδα παρατηρείται σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές P2, P8 και P4. Η σύνδεση αυτή είναι αναμενόμενη, καθώς οι μεταβλητές αφορούν σε προβλήματα πρόσθεσης με την παρουσία εικόνων. Οι μεταβλητές P1 και V1, που αφορούν σε πρόβλημα αφαίρεσης με διακοσμητική εικόνα, ομαδοποιούνται ξεχωριστά. Προκύπτει επίσης σημαντική σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές V2, V4 και V8. Η σύνδεση αυτή είναι αναμενόμενη καθώς οι μεταβλητές αυτές αφορούν σε προβλήματα πρόσθεσης χωρίς τη συνοδεία εικόνας.

Η δεύτερη ομάδα ομοιότητας περιλαμβάνει τις μεταβλητές P3, P6, P7, P5, V5, V6 και V7. Πρόκειται για μεταβλητές που αφορούν σε προβλήματα με ή χωρίς βοηθητικές-οργανωτικές (προβλήματα 3,6) και βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες (προβλήματα

5,7). Η σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές P3, P6 και P7 είναι αναμενόμενη καθώς οι συγκεκριμένες μεταβλητές αφορούν σε προβλήματα διαίρεσης. Όπως και στην πρώτη ομάδα ομοιότητας, έτσι και σ' αυτή την ομάδα, οι μεταβλητές που αφορούν σε πρόβλημα αφαίρεσης (P5, V5) ομαδοποιούνται ξεχωριστά. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα προβλήματα αφαίρεσης με διαφορετικό τρόπο από ότι τα προβλήματα πρόσθεσης και διαίρεσης. Επιπρόσθετα, παρατηρείται σημαντική σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές V3, V6 και V7. Η σύνδεση αυτή είναι αναμενόμενη καθώς οι μεταβλητές αυτές αφορούν σε προβλήματα διαίρεσης τα οποία δόθηκαν χωρίς τη συνοδεία εικόνων.

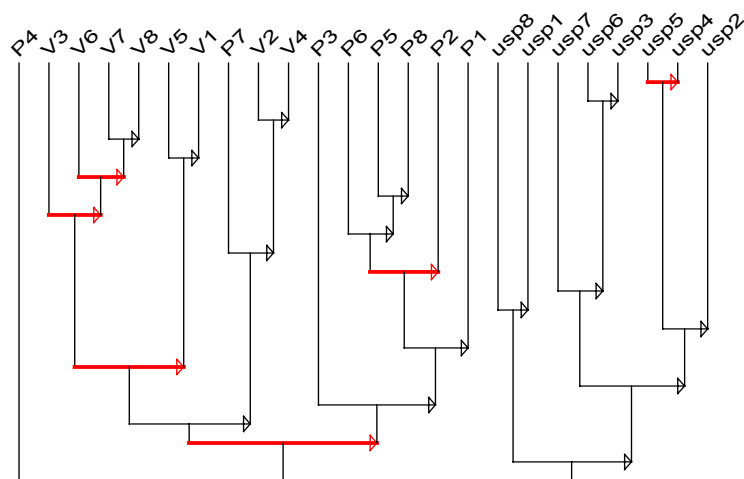
Μια σημαντική παρατήρηση που μπορεί να προκύψει από το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας είναι ότι ο χαρακτήρας του μετασχηματισμού (πρόσθεση, αφαίρεση, διαίρεση) συνεισφέρει περισσότερο στο σχηματισμό των ομάδων παρά το είδος της εικόνας.

Η τρίτη ομάδα ομοιότητας αφορά στις απαντήσεις των μαθητών ότι χρησιμοποίησαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα του Δοκιμίου Β (δοκίμιο με εικόνες). Όπως είναι φανερό από το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας, δεν υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στις δηλώσεις των παιδιών ότι χρησιμοποίησαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα και στην επιτυχία τους στην επίλυση των προβλημάτων αυτών. Μια ερμηνεία για το εύρημα αυτό είναι ότι οι απαντήσεις των παιδιών, λόγω της μικρής ηλικίας τους, συχνά δεν ήταν αντιπροσωπευτικές της συμπεριφοράς τους. Ενώ δηλαδή ορισμένα παιδιά χρησιμοποιούσαν την εικόνα για να λύσουν το πρόβλημα, δήλωναν ότι η εικόνα δεν τους βοήθησε και το αντίστροφο.

Στην τρίτη αυτή ομάδα παρατηρείται σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές uspr1, uspr8 και uspr2. Η σύνδεση αυτή είναι αναμενόμενη, καθώς τα προβλήματα P1, P2 και P8 είναι προβλήματα πρόσθεσης. Επιπρόσθετα, παρατηρείται ομοιότητα ανάμεσα στις μεταβλητές uspr3, uspr6 και uspr7. Η σύνδεση αυτή είναι επίσης αναμενόμενη, καθώς τα προβλήματα P3, P6 και P7 είναι προβλήματα διαίρεσης.

4.2. Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης

Το Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης (Διάγραμμα A2) παρουσιάζει τις συνεπαγωγές μεταξύ των μεταβλητών, με σειρά σημαντικότητας. Οι συνεπαγωγές με έντονο μαύρο είναι σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.



Hierarchical tree : C:\My Documents\Master math-riana\ΆάάΌόόό-ΆϊάϊέέέάδιΎιç\data-final.csv

Διάγραμμα A2

Σύμφωνα με το Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης, προκύπτουν τρεις ομάδες συνεπαγωγικών σχέσεων. Η πρώτη ομάδα αφορά στα προβλήματα χωρίς τη συνοδεία εικόνας, η δεύτερη ομάδα στα προβλήματα με εικόνες και η τρίτη ομάδα στις δηλώσεις των παιδιών ότι χρησιμοποίησαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα του Δοκιμίου B.

Σύμφωνα με το Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης, προκύπτει μια σημαντική συνεπαγωγική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές V3, V6 και V7. Η συνεπαγωγή αυτή δηλώνει ότι η επιτυχία στο πρόβλημα V3 (πρόβλημα διαίρεσης χωρίς εικόνα) συνεπάγεται την επιτυχία στα προβλήματα V6 και V7 που ήταν επίσης προβλήματα διαίρεσης χωρίς εικόνα. Επιπρόσθετα, προκύπτει η συνεπαγωγική σχέση (V5, V1) η οποία δηλώνει ότι η επιτυχία στο πρόβλημα V5, που ήταν πρόβλημα αφαίρεσης, συνεπάγεται την επιτυχία στο πρόβλημα V1 που ήταν επίσης πρόβλημα αφαίρεσης. Όπως είναι φανερό από το Δενδροδιάγραμμα Ιεράρχησης, η επιτυχία στα προβλήματα διαίρεσης (V3, V6, V7) συνεπάγεται την επιτυχία στα προβλήματα αφαίρεσης (V5, V1).

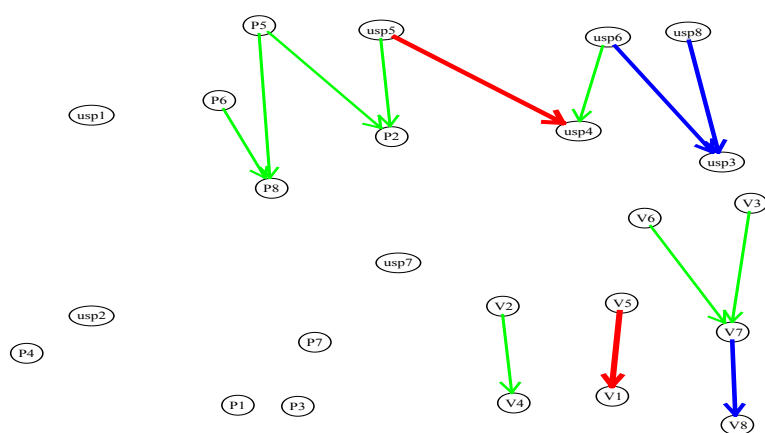
Από τη δεύτερη ομάδα συνεπαγωγικών σχέσεων, προκύπτει ότι τα προβλήματα διαίρεσης με βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες (P3, P6) ήταν τα δυσκολότερα για τους μαθητές, ενώ τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με πληροφοριακές εικόνες (P2) και διακοσμητικές εικόνες (P8, P1) ήταν τα ευκολότερα.

Η τρίτη ομάδα συνεπαγωγικών σχέσεων αφορά στις δηλώσεις των μαθητών ότι χρησιμοποίησαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα του Δοκιμίου B. Όπως φάνηκε και από το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας, η ομάδα αυτή δε συνδέεται καθόλου με τις δύο

προηγούμενες ομάδες, γεγονός που δείχνει ότι δήλωση των μαθητών ότι χρησιμοποίησαν την εικόνα δε συνεπάγεται την επιτυχία τους στα προβλήματα αυτά.

4.3. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα

Το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (διάγραμμα A3) δείχνει τις συνεπαγωγές που προέκυψαν ανάμεσα στα προβλήματα των δοκιμίων Α και Β. Οι συνεπαγωγές με έντονο μαύρο χρώμα είναι σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.



Graph : C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\chic 2.2.6\theodoulou.c89 95 90 85

Διάγραμμα A3

Στην περίπτωση των προβλημάτων χωρίς την παρουσία εικόνας, οι συνεπαγωγές που προκύπτουν είναι **ενδοσχισιακές**, δηλαδή αφορούν προβλήματα της ίδιας πράξης. Συγκεκριμένα, οι συνεπαγωγές ($V2 \rightarrow V4$, $V7 \rightarrow V8$) αφορούν προβλήματα πρόσθεσης, οι συνεπαγωγές ($V5 \rightarrow V1$) προβλήματα αφαίρεσης και οι συνεπαγωγές ($V3$, $V6 \rightarrow V7$) προβλήματα διαίρεσης.

Στην περίπτωση των προβλημάτων με εικόνες, οι συνεπαγωγικές σχέσεις που προκύπτουν ($P6 \rightarrow P8$, $P5 \rightarrow P8$, $P5 \rightarrow P2$) δεν έχουν να κάνουν τόσο με το είδος της εικόνας που υπήρχε στα προβλήματα, αλλά με το είδος της πράξης που απαιτούνταν για να λυθεί το κάθε πρόβλημα. Από τις συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στα έργα του Δοκιμίου Β προκύπτει ότι τα προβλήματα P8 και P2 που ήταν προβλήματα πρόσθεσης ήταν τα ευκολότερα για τους μαθητές, ενώ τα προβλήματα P6 και P5, που ήταν προβλήματα διαίρεσης και αφαίρεσης αντίστοιχα ήταν τα δυσκολότερα.

4.4. Σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στα προβλήματα με και χωρίς την παρουσία εικόνας

Βασικός στόχος της έρευνας ήταν να διερευνήσει ποιο είδος εικόνας μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές. Για το σκοπό αυτό, εξετάστηκε η επίδοση των μαθητών σε κάθε ζευγάρι προβλημάτων με και χωρίς τη συνοδεία εικόνας (π.χ. P1-V1, P2-V2) με τη χρήση του στατιστικού κριτηρίου t-test pairs. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τους μέσους όρους, τις τυπικές αποκλίσεις καθώς επίσης και τις τιμές που προέκυψαν από το στατιστικό κριτήριο t.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στα προβλήματα με εικόνα και χωρίς εικόνα

Είδος εικόνας	Έργο	Επίδοση μαθητών			
		X	SD	t	P
Διακοσμητική	P1	0,866	0,332	-1,741	0,086
	V1	0,940	0,239		
	P8	0,806	0,398	0,275	0,784
	V8	0,791	0,391		
Πληροφοριακή	P2	0,858	0,346	2,307	0,024
	V2	0,746	0,421		
	P4	0,746	0,373	-1,298	0,199
	V4	0,821	0,366		

Βοηθητική-αναπαραστατική	P5	0,799	0,380	2,254	0,028
	V5	0,687	0,434		
	P7	0,799	0,399	3,280	0,002*
	V7	0,604	0,481		
Βοηθητική-οργανωτική	P3	0,866	0,332	6,388	0,000*
	V3	0,507	0,439		
	P6	0,664	0,464	2,658	0,010*
	V6	0,530	0,451		

* $p \leq 0,01$

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1, στην περίπτωση των προβλημάτων στα οποία υπήρχε διακοσμητική εικόνα (προβλήματα 1 και 4) δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών. Στο πρώτο πρόβλημα ($t = -1,741$, $p = 0,086$) οι μαθητές είχαν μάλιστα μεγαλύτερη επιτυχία στο πρόβλημα χωρίς τη συνοδεία εικόνας, ενώ στο πρόβλημα 8 ($t = 0,275$, $p = 0,784$) οι μαθητές είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στο πρόβλημα με την εικόνα. Και στις δύο περιπτώσεις, ωστόσο, η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική.

Όσον αφορά στην επίδραση των πληροφοριακών εικόνων (προβλήματα 2 και 4), φαίνεται ότι αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Τόσο στο πρόβλημα 2 ($t = 2,307$, $p = 0,024$) όσο και στο πρόβλημα 4 ($t = -1,298$, $p = 0,199$) δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών όταν τα προβλήματα συνοδεύονταν από πληροφοριακή εικόνα. Στην περίπτωση του προβλήματος 4, οι μαθητές είχαν μικρότερη επιτυχία όταν το πρόβλημα συνοδευόταν από μια πληροφοριακή εικόνα παρά όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο λεκτικό του προβλήματος (V4).

Από τον Πίνακα 1 προκύπτει ότι η επίδραση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων ήταν διαφορετική ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Συγκεκριμένα, στο

πρόβλημα 5 που ήταν πρόβλημα αφαίρεσης, δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά όταν το πρόβλημα συνοδευόταν από βοηθητική-αναπαραστατική εικόνα ($t = 2,254$, $p = 0,028$). Αντίθετα, στο πρόβλημα 7 που ήταν πρόβλημα διαίρεσης ($t = 3,280$, $p = 0,002$) παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών όταν το πρόβλημα συνοδευόταν από εικόνα.

Όπως είναι φανερό από τον Πίνακα 1, οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες συνέβαλαν περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο είδος εικόνας στη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος καθώς, τόσο στην περίπτωση του προβλήματος 3 ($t = 6,388$, $p = 0,000$) όσο και στην περίπτωση του προβλήματος 6 ($t = 2,658$, $p = 0,010$) παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών, όταν τα προβλήματα συνοδεύονταν από βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες.

5. Συμπεράσματα

Βασικός στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσει το ρόλο της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Ειδικότερα, εξετάστηκε κατά πόσο τα διάφορα είδη εικόνας (διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές, πληροφοριακές) βοηθούν στην επίλυση συνηθισμένων λεκτικών προβλημάτων και ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα διάφορα είδη εικόνας.

Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται να επαληθεύεται η πρώτη υπόθεση της έρευνας ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Το γεγονός ότι δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών στη λύση προβλημάτων όταν σε αυτά προστέθηκε διακοσμητική εικόνα, συμφωνεί με τα ευρήματα των Γαγάτση και Μάρκου (2002) οι οποίοι σε έρευνά τους με ασυνήθιστα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα βρήκαν ότι η παρουσία εικονικών αναπαραστάσεων δεν επηρέασε τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων αυτών. Το εύρημα αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί με βάση των άποψη των Carney και Levin (2002) ότι οι διακοσμητικές εικόνες, παρά το γεγονός ότι προσδίδουν ένα ελκυστικό χαρακτήρα στο κείμενο, δεν ενισχύουν την κατανόηση ή την ανάκληση πληροφοριών από το κείμενο.

Όσον αφορά στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδρασή τους ήταν άλλοτε στατιστικά σημαντική και άλλοτε όχι. Συγκεκριμένα, στο ένα από τα δύο προβλήματα, που ήταν πρόβλημα διαίρεσης, οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν την εικόνα και είχαν καλύτερη επίδοση όταν το

πρόβλημα συνοδευόταν από αυτή την εικόνα, ενώ στο άλλο πρόβλημα, που ήταν πρόβλημα πρόσθεσης, οι περισσότεροι μαθητές αγνόησαν την εικόνα και δεν έδειξαν αλλαγή στη συμπεριφορά τους. Μια πιθανή ερμηνεία για το εύρημα αυτό είναι ότι οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος, με αποτέλεσμα άλλοτε να αγνοούνται από αυτούς και άλλοτε να χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων. Επιπρόσθετα, καθώς το πρόβλημα διαίρεσης ήταν δυσκολότερο από το πρόβλημα αφαίρεσης, είναι πιθανό οι μαθητές να στηρίχθηκαν περισσότερο στην εικόνα για να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα με αποτέλεσμα να έχουν μεγαλύτερη επιτυχία σε αυτό. Όπως άλλωστε αναφέρουν οι Carney και Levin (2002), όσο πιο δύσκολο είναι το κείμενο, τόσο πιο βοηθητικές είναι πιθανό να είναι οι εικόνες.

Από την άλλη, οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες φάνηκε να έχουν μια ξεκάθαρα θετική επίδραση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές. Το εύρημα αυτό, που επαληθεύει την τρίτη υπόθεση της έρευνας, δείχνει ότι οι εικόνες αυτού του είδους βοήθησαν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος και να οργανώσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να καταλήξουν στην ορθή λύση του προβλήματος.

Οι πληροφοριακές εικόνες, αν και από τη φύση τους είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος, δεν επηρέασαν θετικά τη συμπεριφορά των μαθητών σε σχέση με την επίδοσή τους όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα. Στο ένα από τα δύο προβλήματα με πληροφοριακή εικόνα, οι μαθητές είχαν χαμηλότερη επίδοση παρά όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα, χωρίς την παρουσία εικόνας. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη ότι η παρουσία των εικόνων, και των αναπαραστάσεων γενικότερα, δεν είναι πάντοτε βοηθητική για τα παιδιά καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί πρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας (Carney & Levin, 2002). Η χρήση των εικόνων, επομένως, θα πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή. Όπως άλλωστε υποστηρίζει ο Seeger (1998) πρέπει να εγκαταλειφθεί η αντίληψη με βάση την οποία η κατανόηση στα μαθηματικά θεμελιώνεται σε κάποια αντιληπτική εικόνα της οποίας το νόημα θεωρείται αυτονόητο.

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρόλο που όλοι οι μαθητές στηρίχθηκαν στις πληροφοριακές εικόνες για να λύσουν τα προβλήματα, αρκετοί μαθητές αμφισβήτησαν τη χρησιμότητα των εικόνων αυτών, δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησαν αρκετά στη λύση των προβλημάτων.

Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στα έργα με βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες και στα έργα με βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες. Μια πιθανή ερμηνεία για το εύρημα αυτό είναι ότι και τα δύο αυτά είδη εικόνας βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή του προβλήματος και να αναπαραστήσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να οδηγηθούν στην ορθή επίλυσή του. Παρόμοια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις διακοσμητικές και τις πληροφοριακές εικόνες. Ωστόσο, η ομαδοποίηση των διαφορετικών αυτών ειδών εικόνας οφείλεται περισσότερο στη μαθηματική τους δομή, καθώς στις ομαδοποιήσεις ο χαρακτήρας του μετασχηματισμού (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση) φάνηκε να υπερισχύει του είδους της εικόνας. Με άλλα λόγια, τα προβλήματα ομαδοποιήθηκαν περισσότερο με βάση το χαρακτήρα της πράξης, παρά με βάση το είδος της εικόνας που χρησιμοποιήθηκε. Το εύρημα ότι η μαθηματική δομή επηρεάζει περισσότερο από το είδος της εικόνας, θα μπορούσε να αποτελέσει βάση για περαιτέρω έρευνα η οποία να μελετήσει σε αντιπαράθεση το ρόλο της εικόνας και της μαθηματικής δομής στην επίλυση προβλήματος.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν επίσης ότι πολλά παιδιά, ενώ χρησιμοποιούσαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα, αμφισβητούσαν τη χρησιμότητα της εικόνας δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησε στην επίλυση προβλήματος. Το εύρημα αυτό, που πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές ήταν μικρής ηλικίας, δείχνει ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου δεν χρησιμοποιούν την εικόνα ενσυνείδητα, αλλά ασυνείδητα.

Η έρευνα αυτή, εγείρει ορισμένα ερωτήματα σε σχέση με το ρόλο των αναπαραστάσεων στην διδασκαλία των μαθηματικών στο γυμνάσιο.

(α) ο ρόλος των εικόνων για τους μαθητές γυμνασίου θα διέπεται από τα ίδια συμπεράσματα ή θα διαφοροποιείται εφόσον μάλιστα η χρήση εικόνων στα μαθηματικά του γυμνασίου δεν είναι τόσο έντονη όσο στα εγχειρίδια μαθηματικών του δημοτικού σχολείου;

(β) μπορεί να εξεταστεί μια παρόμοια ταξινόμηση, όχι εικόνων αυτή τη φορά, αλλά γραφικών παραστάσεων σε σχέση με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος στο γυμνάσιο; Μια πιθανή ταξινόμηση θα μπορούσε να ήταν η παρακάτω: *διακοσμητική* γραφική παράσταση (π.χ. το σχέδιο της διαδρομής ενός αμαξιού όπου εμπλέκονται ταχύτητες, αποστάσεις, χρόνοι, κ.τ.λ.), *βοηθητική-αναπαραστατική* (π.χ. δίνεται το σχέδιο ενός δοχείου που υποδεικνύει τη σχέση ή μη αναλογίας δεδομένων που παρουσιάζονται επίσης και με μορφή πίνακα και επομένως δεν είναι αναγκαία η χρησιμοποίησή της από τους μαθητές), *πληροφοριακή - αναπαραστατική* (π.χ. δίνεται η γραφική παράσταση

$\psi = \alpha\chi + \beta$ που συνδέει την τιμή μιας μονάδας με το συνολικό κόστος ενός προϊόντος ή το χρόνο με την ταχύτητα ενός κινητού, κ.τ.λ.).

Είναι δυνατό εναλλάσσοντας τα διάφορα είδη εικονικών (γραφικών αναπαραστάσεων) να πετύχουμε βελτίωση της επίδοσης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος; Είναι ένα ερώτημα το οποίο πιστεύουμε ότι χρειάζεται διερεύνηση με μαθητές γυμνασίου.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Ainsworth, S.E, Wood, D.J. & Bibby, P.A (1997). Evaluating Principles for Multi-Representational Learning Environments. 7th EARLI Conference. Athens.
2. Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.
3. Carney, R. N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14 (1), 101-120.
4. Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.
5. Dienes, Z. P. *The power of mathematics*. London: Hutchinson Educational.
6. Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
7. Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (MAA Notes 19, pp. 26-37). Washington DC: The Mathematical Association of America.
8. Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121.
9. Gagatsis, A., & Christou, C. (2002). The structure of translations among representations in functions. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 39, 1.
10. Gagatsis, A., & Michaelidou, E. (2002). Le relazioni tra le diverse rappresentazioni del concetto di funzione e la comprensione del concetto stesso. Una ricerca riferita a gli studenti della scuola secondaria superiore. *La matematica e la sua didattica*, 4, 411-429.
11. Γαγάτσης, Α., & Μάρκου, Α. (2002). Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών: Δύο όψεις του ίδιου φαινομένου; Στο Α. Γαγάτσης, Α. Κυριακίδης, Ν. Τσαγγαρίδου, Ε. Φτιάκα, & Μ. Κουτσούλης (Εκδ.) *Πρακτικά του Εβδομού Παγκύπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου: Η Εκπαιδευτική Έρευνα στην Εποχή της Παγκοσμιοποίησης*, Τόμος Β' (σσ.263-287). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
12. Gagatsis, A., Demetriou, A., Afantiti, T., Michaelidou, E., Panaoura, R., Siakalli, M., & Christoforides, M. (1999). L'influenza delle rappresentazioni semiotiche nella risoluzione de problemi additivi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 382-403.
13. Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of functions as an example. In C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
14. Larkin, J. H., and Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.
15. Lesh, R., Behr, M., Post, T. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
16. NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM.
17. Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

18. **Poincare, H.** (1963). *Mathematics and science: last essays*. New York, NY: Dover.
19. **Rival, (1987).** Picture puzzling: mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *The Sciences*, 27, 40-46.
20. **Seeger, F.** (1987). Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. In **von F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio** (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 308-343). Cambridge UP.
21. **Schnotz, W.** (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, 14 (1), 101-120.

ABSTRACT

In the present study, the role of picture in solving mathematical problems by second grade students is examined. In particular, the study proposed and examined the role of four kinds of pictures according to their function in mathematical problem solving: pictures used for decorative reasons, for auxiliary-representational reasons, for auxiliary-organizational reasons and for providing information. Decorative pictures provide no information to the students for the solution of the problem, but simply accompany the problem; auxiliary-representational pictures represent part or all of the problem content, but are not necessary to be used from pupils in order to solve the problem; auxiliary-organizational pictures help the students solve the problem by guiding them to organize the given statements of the problem –e.g. by drawing a picture that leads to the solution of the problem- and informational pictures provide information that is necessary in order to solve the problem – that is the problem is based on the picture. Eighty-five students completed two tests- the first one included eight standard one-step verbal problems while the second one included the same problems as the first test, accompanied by pictures. The results have shown that the presence of decorative and informational pictures had no significant effect on students' problem solving performance, whereas auxiliary-organizational pictures had a statistically significant positive effect. Auxiliary-representational pictures had a significant positive effect in some cases, according to the mathematical operations needed in order to solve the problem. It was found that the kind of mathematical operation needed in order to solve the problem had a more significant effect on students' problem solving than the kind of picture that accompanied the problem. Moreover, most of the times children tended to use the pictures in order to solve the problem but they claimed that the picture was not useful for solving it.