ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

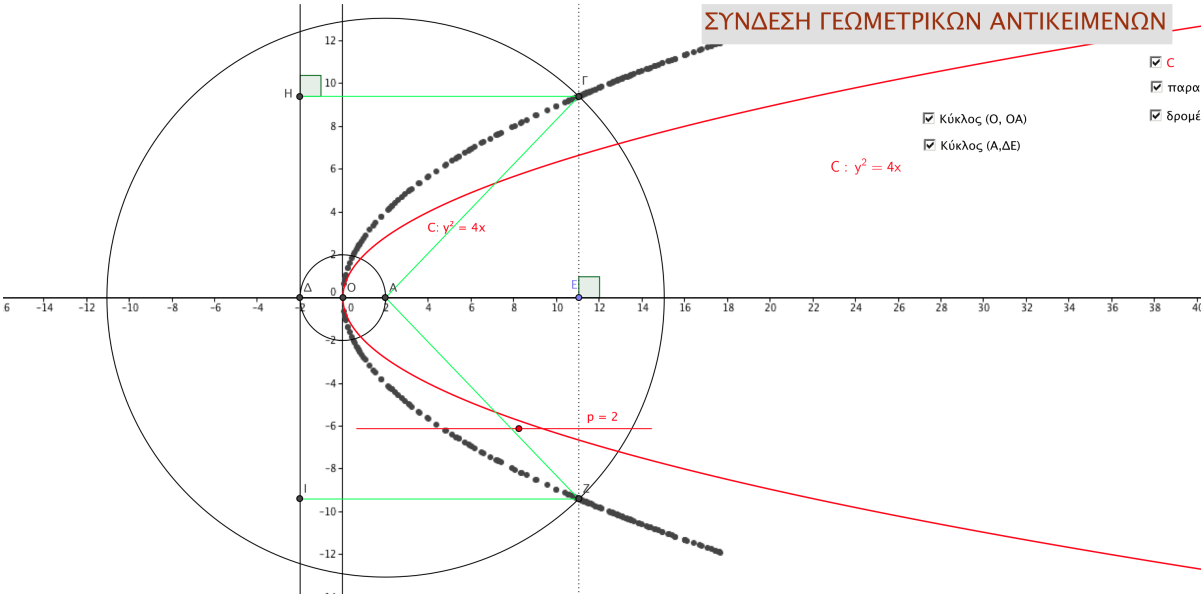
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διερεύνηση της σύνδεσης γεωμετρικών και συμβολικών αναπαραστάσεων της παραβολής με χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας



Ευθυμίου Γεωργία

Επιβλέπων καθηγητής: Ψυχάρης Γεώργιος

Αθήνα, Νοέμβριος 2013

Ευχαριστώ:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γιώργο Ψυχάρη που πρώτα απ΄όλα με βοήθησε μέσα από το μάθημά του στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα να έρθω σε ουσιαστική επαφή με τις νέες τεχνολογίες και έτσι να εμπνευστώ την ιδέα της παρούσας εργασίας και έπειτα με εμπιστεύτηκε για την πραγματοποίηση της.
- Την αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Δέσποινα Πόταρη και τον καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη που δέχθηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής και μου αφιέρωσαν και οι δύο ένα μέρος του πολύτιμου χρόνου τους λειτουργώντας υποστηρικτικά σε όλη την πορεία συγγραφής της παρούσας εργασίας.
- Τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	Σελ. 7
1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΕΩΣ ΣΗΜΕΡΑ	Σελ. 9
1.1. ΟΙ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ	Σελ. 9
1.2. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ	Σελ. 18
1.3. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	Σελ. 23
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	Σελ. 27
2.1. Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ	Σελ. 27
2.1.1. Εισαγωγή	Σελ. 27
2.1.2. Η συμβολή του Papert στη χρήση της τεχνολογίας στη μάθηση των μαθηματικών	Σελ. 29
2.2. Η ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	Σελ. 32
2.2.1. Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και κατασκευή της μαθηματικής γνώσης	Σελ. 32
2.2.2. Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και απόδειξη	Σελ. 34
2.2.3. Οι πρωτοτυπικές μορφές και το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας	Σελ. 36
2.2.4. Η σημειωτική διαμεσολάβηση και τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας	Σελ. 37

2.3. ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	Σελ. 38
2.3.1. Ορισμός αναπαράστασης – Εσωτερικές, Εξωτερικές αναπαραστάσεις	Σελ. 38
2.3.2. Δυσκολίες σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων	Σελ. 41
2.4. ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ	Σελ. 45
2.5 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ (CONCEPTUAL FIELDS)	Σελ. 49
2.5.1. Θεωρητικές προεκτάσεις	Σελ. 53
2.5.2. Γνωστική ανάπτυξη μέσα σε ένα εννοιολογικό πεδίο	Σελ. 54
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ	Σελ. 55
3.1. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ	Σελ. 55
3.2. ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ	Σελ. 56
3.3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ	Σελ. 57
3.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ	Σελ. 57
3.4.1. Δραστηριότητες παρέμβασης	Σελ. 58
3.5. ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	Σελ. 69
4. ΑΝΑΛΥΣΗ	Σελ. 70
4.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ	Σελ. 71
4.2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ p ΣΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ	Σελ. 76

$y^2 = 2px$	
4.2.1. Γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής	Σελ. 76
4.2.2. Σύνδεση του p με τη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$	Σελ. 84
4.3. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ α ΣΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = \alpha x^2$	Σελ. 87
5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	Σελ. 98
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι	Σελ.102
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ	Σελ.104
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ	Σελ.105
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	Σελ.106

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της εργασίας αποτελεί η νοηματοδότηση των γεωμετρικών και αλγεβρικών χαρακτηριστικών της παραβολής από μαθητές Β΄Λυκείου με τη βοήθεια του υπολογιστικού περιβάλλοντος geogebra που προσφέρει συνδεδεμένες γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αναζητώντας τη γεφύρωση της αλγεβρικής με τη γεωμετρική αναπαράσταση της παραβολής, εξετάζουμε κατά πόσο αποκτούν νόημα οι παράμετροι της παραβολής στο πλαίσιο αυτό. Μία πρώτη επαφή με τη διττή φύση της παραβολής επιτυγχάνεται στην ιστορική αναδρομή όπου καθίσταται σαφής η γεωμετρική αλλά και η αλγεβρική υπόσταση της παραβολής. Στην ανάλυση των δεδομένων, κομβικό ρόλο έπαιξε η θεωρία των εννοιολογικών πεδίων του Vergnaud, αφού η παραβολή είναι μία έννοια η οποία περικλείει πολλές διασυνδεδεμένες έννοιες, απαντάται σε διάφορες καταστάσεις και αντιμετωπίζεται με ποικίλα σχήματα. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι το δυναμικό περιβάλλον βοηθά σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές που είναι εξοικοιωμένοι με πρωταρχικές έννοιες στο πέρασμα από ένα είδος αναπαράστασης σε ένα άλλο. Στην περίπτωση των μαθητών στους οποίους πρωταρχικές έννοιες είναι συγκεχημένες, το δυναμικό περιβάλλον αποτελεί ένα πρώτης τάξεως εργαλείο τόσο για τον μαθητή όσο και για τον εκπαιδευτικό, μέσω του οποίου αναδύονται και άρα μπορούν να αντιμετωπιστούν πια, οι εν λόγω αδυναμίες.

Λέξεις κλειδιά: Παραβολή, δυναμικό περιβάλλον, εννοιολογικά πεδία, γεωμετρική και αλγεβρική αναπαράσταση

SUMMARY

The subject of this essay is the second grade of Lyceum pupils ‘ ability to give meaning to the geometrical and algebraic characteristics of parabola interacting with the dynamic environment of geogebra which provides connencted geometrical and algebraic representations. In particular, searching for the connection between algebraic and geometrical representation of parabola, we examine the issue in which extent are the parabola ΄s parameters given meaning

in this frame. The dual nature of parabola is presented for the first time in the historical review where the geometric as well as the algebraic substance of the object of parabola is indicated. In data analysis, very important role played the theory of Vergnaud 's conceptual fields as parabola is a concept which includes many other concepts, the concept 's meaning of parabola does not come from one situation only but from a variety of situations and we are handling with its concept via various schemes. Dynamic environment was proofed to be helpful in a great extent to pupils who were familiar with basic concepts as passing from one kind of representation to another. On the other hand, for the case of pupils that the basic concepts have not been clear yet, dynamic environment can be proofed to be very helpful for the pupil and for the teacher as well, as it can be the vehicle that will bring to light pupil' s weaknesses and so give the teacher and the pupil the opportunity to deal with these weaknesses.

Key words: Parabola, dynamic environment, conceptual fields, geometric and algebraic representation

1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΕΩΣ ΣΗΜΕΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μία σύντομη αναδρομή στην ιστορία της παραβολής από την αρχαιότητα έως σήμερα. Η ιστορική πορεία της παραβολής είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την πορεία και των υπόλοιπων κωνικών τομών και για τον λόγο αυτό σε όλο το κεφάλαιο γίνονται αναφορές και στις υπόλοιπες κωνικές τομές. Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η παρουσίαση των κεντρικών σημείων που καθόρισαν τη σημερινή μορφή της παραβολής, όπως είναι η ανάγκη που οδήγησε αρχικά στον ορισμό της παραβολής και η αρχική της μορφή, η συμβολή του Απολλώνιου στο πέρασμα της παραβολής από τη μορφή που είχε στην αρχαιότητα στη μορφή που την ξέρουμε εμείς σήμερα και φυσικά η ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας ως ανεξάρτητος κλάδος των μαθηματικών.

1.1. ΟΙ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Η ανακάλυψη των κωνικών τομών, ιστορικά, συνδέεται με τις σημαντικές και επίμονες προσπάθειες των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών να δώσουν λύση σε ένα εκ των τριών περίφημων « άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας»[1] αυτό του διπλασιασμού του κύβου και παρά το γεγονός ότι ο διπλασιασμός του κύβου με χρήση κανόνα και διαβήτη - όπως απαιτούσε το πρόβλημα – δεν κατέστη ποτέ δυνατός[2], οι προσπάθειες επίλυσής του από τους μαθηματικούς κάθε άλλο παρά άκαρπες μπορούν να χαρακτηριστούν όπως προκύπτει εκ του αποτελέσματος. Σίγουροι για την απαρχή του προβλήματος αυτού δεν μπορούμε να είμαστε, αν και κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί ότι δεδομένου του γεγονότος ότι οι Πυθαγόρειοι είχαν διαπιστώσει ότι θεωρώντας

[1] Τα άλλα δύο προβλήματα ήταν ο τετραγωνισμός του κύκλου και η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας. Κάποια βιβλία Ιστορίας Ελληνικών Μαθηματικών, περιλαμβάνουν στα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας και την κατασκευή κανονικών πολυγώνων.

[2] Η απόδειξη του αδυνάτου της επίλυσης του προβλήματος του διπλασιαασμού του κύβου με χρήση κανόνα και διαβήτη προκύπτει ουσιαστικά από τη θεωρία του Galois η οποία δημιουργήθηκε κατά τα έτη 1830 – 1832, έγινε όμως γνωστή μόλις το 1846.

τετράγωνο πλευράς α μπορούν πολύ εύκολα να κατασκευάσουν με κανόνα και διαβήτη ένα άλλο τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού, αυτό με πλευρά ίση με τη διαγώνιο του πρώτου, και εφόσον ασχολούνταν παράλληλα και με τη μελέτη στερεών, ήταν πολύ φυσικό να θέσουν ανάλογο πρόβλημα και για την περίπτωση του κύβου. Η ενασχόληση των γεωμετρών της αρχαιότητας με το εν λόγω πρόβλημα από τη μία αλλά και το ενδιαφέρον και άλλων ανθρώπων για τη λύση του προβλήματος αυτού από την άλλη, ήταν τέτοια που οδήγησε στη δημιουργία θρύλων σχετικών με την προέλευση του εν λόγω προβλήματος.

Ο Ευτόκιος (6ος αιώνας μ.Χ.), σχολιαστής των έργων του Αρχιμήδη, παραθέτει μια επιστολή του Ερατοσθένη προς τον βασιλιά Πτολεμαίο αλλά σύμφωνα με τον Van der Waerden, ο Wilamowitz έχει αποδείξει ότι η επιστολή αυτή δεν μπορεί να είναι γνήσια, πλην όμως δεν υπάρχει λόγος να αμφιβάλλουμε για το αξιόπιστο των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτή. Η επιστολή αρχίζει ως εξής:

Λέγεται ότι κάποιος αρχαίος τραγωδοποιός[3] *εισήγαγε στη σκηνή τον Μίνωα, ο οποίος είχε διατάξει να κατασκευασθεί τάφος για τον [γιο του] Γλαύκο και όταν αυτός πληροφορήθηκε ότι ο τάφος ήταν σε όλες του τις διαστάσεις εκατό πόδια είπε:*

« Μικρή παράγγειλες τη χωρητικότητα του βασιλικού τάφου· να διπλασιαστεί αυτή γρήγορα , αφού διπλασιαστεί κάθε πλευρά χωρίς, όμως, ο τάφος να χάσει το κομψό του σχήμα».

Φαινόταν δε ότι έκανε λάθος. Διότι, όταν διπλασιάζονται οι πλευρές, η μεν επιφάνεια τετραπλασιάζεται, ο δε όγκος οκταπλασιάζεται. Ζητήθηκε δε και από τους γεωμέτρες να βρουν με ποιον τρόπο ένα δεδομένο στερεό θα διπλασιαζόταν, χωρίς να χάνει το σχήμα του, και ονομαζόταν αυτό το πρόβλημα διπλασιασμός του κύβου. Διότι, υποθέτοντας ότι [το δεδομένο στερεό] ήταν κύβος, ζητούσαν να τον διπλασιάσουν. Ενώ δε όλοι επί πολύν χρόνον ήταν σε αμηχανία, πρώτος ο Ιπποκράτης ο Χίος επινόησε ότι αν βρεθούν δύο μέσες ανάλογοι σε συνεχή αναλογία, μεταξύ των ευθειών, εκ των οποίων η μία είναι διπλάσια της άλλης,

[3] Ο Μπρίκας, στην εισαγωγή του βιβλίου του " Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας ", αναφέρει ότι ένας τραγικός ποιητής, πιθανώς ο Ευριπίδης, έφερε στη σκηνή το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Πιθανώς, η σύνδεση του ονόματος του Ευριπίδη με το πρόβλημα αυτό να οφείλεται στη χρονική σύμπτωση της έντονης ενασχόλησης με το εν λόγω πρόβλημα με τον Ευριπίδη (485-406 π.Χ.).

τότε ο κύβος θα διπλασιαστεί. Αλλά [με την επινόηση αυτή] η αρχική αμηχανία περιέπεσε σε άλλη, όχι μικρότερη αμηχανία.

Λέγεται δε ακόμη ότι μετά πάροδο χρόνου μερικοί Δήλιοι, στους οποίους κάποιος χρησμός επέβαλε να διπλασιάσουν έναν από τους βωμούς τους , αφού περιέπεσαν στην ίδια αμηχανία, απέστειλαν εκπροσώπους και ζήτησαν από τους γεωμέτρες της Ακαδημίας του Πλάτωνος να λύσουν το πρόβλημα. Και αφού αυτοί επιδόθηκαν με ζήλο στην προσπάθεια να κατασκευάσουν δύο μέσες αναλόγους μεταξύ δύο δεδομένων [ευθειών], λέγεται ότι ο Αρχύτας ο Ταραντίνος έλυσε [το πρόβλημα]δια των ημικυλίνδρων και ο Εύδοξος διά των λεγομένων καμπύλων γραμμών.

Η δεύτερη όμως εκδοχή του μύθου, εξαιτίας της οποίας το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είναι γνωστό και ως «Δήλιο πρόβλημα», δημιουργεί μία χρονική αντίφαση: πώς είναι δυνατόν το πρόβλημα να προέκυψε από έναν χρησμό προς τους Δηλίους την εποχή που υπήρχε η Ακαδημία του Πλάτωνα η οποία ιδρύθηκε από τον ίδιο το 387 π.Χ. , την στιγμή που αποδεδειγμένως ιστορικά ο Ιπποκράτης ο Χίος (~ 470 – 410 π.Χ.) αλλά και άλλοι πριν από αυτόν ασχολήθηκαν με το ίδιο πρόβλημα; Την απάντηση στο ερώτημα αυτό έρχεται να μας δώσει ο Θέωνας ο Σμυρναίος μέσα από την πηγή της δεύτερης εκδοχής του μύθου:

Διότι στο βιβλίο του που επιγράφεται Πλατωνικός, ο Ερατοσθένης αφηγείται ότι, όταν ο θεός ανήγγειλε δια χρησμού στους Δηλίους ότι για να απαλλαγούν από το λοιμό έπρεπε να κατασκευάσουν βωμό διπλάσιο του ήδη υπάρχοντος, οι αρχιτέκτονες περιέπεσαν σε μεγάλη αμηχανία ζητώντας με ποιον τρόπο μπορεί να διπλασιαστεί ένα στερεό και πήγαν να ρωτήσουν τον Πλάτωνα σχετικά με αυτό. Αυτός τους απάντησε ότι ο θεός έδωσε αυτόν τον χρησμό στους Δηλίους, όχι επειδή είχε ανάγκη ενός διπλάσιου βωμού, αλλά για να κατακρίνει και να επιπλήξει τους Έλληνες επειδή αμελούν τα μαθηματικά και περιφρονούν τη γεωμετρία.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί το γεγονός ότι ο Πλάτων στην *Πολιτεία* (528B) εκφράζει παράπονα για την κατάσταση της στερεομετρίας παρά το γεγονός ότι οι σύγχρονές του εξελίξεις στο κομμάτι αυτό δεν δικαιολογούν κάτι τέτοιο· ο Van der Waerden, αναφερόμενος στη στάση του Πλάτωνα απέναντι στη στερεομετρία αναφέρει ότι ο Πλάτων θέλει μέσα από

αυτά τα σχόλια να ενεργήσει καθοδηγητικά για την Ακαδημία του, αναζητώντας μια πιο συστηματική καλλιέργεια της στερεομετρίας υπό την καθοδήγησή του. Στο σημείο όμως αυτό, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση του Van der Waerden σχετικά με το τι εννοούσε ο Πλάτων λέγοντας στερεομετρία· σύμφωνα λοιπόν με τον ολλανδό ιστορικό των μαθηματικών, βάσει του εν λόγω χωρίου της *Πολιτείας*, είμαστε αναγκασμένοι να υποθέσουμε ότι ο Πλάτωνας θεωρούσε την στερεομετρία με μια πιο περιορισμένη έννοια, αυτή που προκύπτει από τα λεγόμενα του Σωκράτη για « αύξηση των κύβων», δηλαδή την σχετική με το « Δήλιο πρόβλημα». Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξε ο Van der Waerden, αναλύοντας τα λεγόμενα του Γλαύκωνα, σύμφωνα με τα οποία " στην επιστήμη όμως αυτή [στερεομετρία] μου φαίνεται πως δεν έχουν ακόμη γίνει ανακαλύψεις" και καταλήγοντας στο ότι μετά την ανάπτυξη της θεωρίας των γραμμών και των επιπέδων που πραγματοποιείται στο ενδέκατο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, τη θεωρία της προοπτικής για την οποία είχαν γράψει βιβλία ο Αναξαγόρας και ο Δημόκριτος, τον όγκο της πυραμίδας που είχε βρει ο Δημόκριτος και άλλα επιτεύγματα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών σχετιζόμενα με το γνωστικό αντικείμενο που σύγχρονα ονομάζεται στερεομετρία, τα λεγόμενα του Γλαύκωνα είναι ακατανόητα. Όλα τα παραπάνω αποτελούν ένα ακόμα επιχείρημα υπέρ της άποψης ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ήταν ένα από τα προβλήματα που απασχόλησαν πολύ έντονα τον αρχαίο ελληνικό μαθηματικό κόσμο με αποτέλεσμα πολλοί να είναι εκείνοι που ασχολήθηκαν με την επίλυσή του: ο Ιπποκράτης ο Χίος (~ 470 – 410 π.Χ.), ο Αρχύτας ο Ταραντίνος (430-365 π.Χ), ο Εύδοξος (408 – 355 π.Χ), ο Μέναιχμος (~375- 325 π.Χ), ο Πλάτωνας (427-347 π.Χ), ο Ερατοσθένης (276-195 π.Χ), ο Νικομήδης (άκμασε γύρω στο 200 π.Χ), ο Απολλώνιος (270-186 π.Χ), ο Ήρωνας (~ 100 μ.Χ), ο Διοκλής (~ 100 μ.Χ), είναι οι πιο γνωστοί από αυτούς[4]. Πολλοί από αυτούς κατάφεραν να δώσουν λύση στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου – προφανώς όχι με την χρήση κανόνα και διαβήτη –

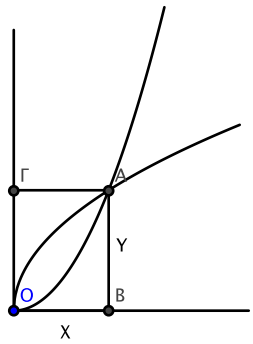
[4] Οι λύσεις του προβλήματος διπλασιασμού του κύβου καθώς και των άλλων δύο προβλημάτων της αρχαιότητας που προαναφέραμε, όπως αυτές επεξεργάσθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, διεσώθηκαν από συγγραφείς της ύστερης αρχαιότητας, όπως ο Πάππος στη *Μαθηματική συναγωγή* του και ο Ευτόκιος (πρώιμος 6ος μ.Χ. αιώνας) στα σχόλια του *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη.

αλλά εμείς θα ασχοληθούμε με τις λύσεις οι οποίες σχετίζονται με τις κωνικές τομές.

Ο Ιπποκράτης ο Χίος υπήρξε ο πρώτος γεωμέτρης, βάσει των ιστορικών στοιχείων που διαθέτουμε, ο οποίος ασχολήθηκε δημιουργικά με το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου. Η συμβολή του Ιπποκράτη, όπως αναφέρει ο Ευτόκιος, έγκειται στην αναγωγή του εν λόγω προβλήματος, στο ισοδύναμο πρόβλημα της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων x και y μεταξύ δύο δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων α και β,[5] έτσι ώστε να ισχύει: $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{\beta}$ (1).

Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι α είναι η ακμή του κύβου του οποίου θέλουμε να διπλασιάσουμε τον όγκο, τότε για β=2α, προκύπτει:
$x^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή ο μέσος ανάλογος x είναι η ακμή του ζητούμενου κύβου.

Στην παρατήρηση αυτή του Ιπποκράτη επέλεξε να εστιάσει ο Μέναιχμος [2], με τις προσπάθειες του αυτές να έχουν σαν αποτέλεσμα την άρρηκτη ιστορικά σύνδεση του ονόματός του με τη θεωρία των κωνικών τομών, με τη λύση της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων τμημάτων να περιγράφεται από τον βυζαντινό μαθηματικό και σχολιαστή Ευτόκιο στα σχόλια του στο έργο του Αρχιμήδη *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου*[6] και να έχει ως εξής:



[5] Η κατασκευή του μέσου αναλόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και β με κανόνα και διαβήτη ήταν γνωστή και παραθέτεται στο Παράρτημα Ι [1].

[6] Σελ. 78, γραμμή: 13t, το σχετικό τμήμα αρχίζει ως εξής:
«Ὡς Μέναιχμος.
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· δεῖ δὴ
τῶν Α, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ..»

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και έστω ΟΒ=x και ΑΒ=y. Από την (1) προκύπτει ότι $x^2 = \alpha y$, οπότε το Α βρίσκεται σε μία παραβολή με κορυφή το Ο και επίσης $y^2 = x\beta$, οπότε το Α βρίσκεται και σε μια δεύτερη παραβολή με κορυφή και πάλι το Ο. Συνεπώς, το Α μπορεί να προσδιοριστεί ως το σημείο τομής αυτών των δύο παραβολών. Εναλλακτικά, η (1) δίνει $xy = \alpha\beta$, σχέση η οποία σημαίνει ότι το Α μπορεί να βρίσκεται και σε μία υπερβολή.[7]

Εξαιρετικά σημαντικό τεκμήριο της πατρότητας των κωνικών τομών υπέρ του Μεναίχμου, αποτελεί ένα επίγραμμα του Ερατοσθένη το οποίο ήταν χαραγμένο σε μία μαρμάρινη πλάκα στο ναό του Πτολεμαίου στην Αλεξάνδρεια[8], γραμμένο εν μέρει σε λόγο πεζό και εν μέρει διατυπωμένο έντεχνα σε στίχους και σύμφωνα με την μετάφραση του Heath, όπως αυτή παραθέτεται από τον Van der Waerden [4]:

Εάν, ω αγαθέ, θέλεις να επιτύχεις κύβο διπλάσιο ενός μικρού ή θέλεις να μετασχηματίσεις με κομψό τρόπο κάθε άλλο στερεό σώμα[.....]ούτε να θέλεις να το βρεις τέμνοντας τον κώνο κατά τις τριάδες του Μεναίχμου [....].

Η ακριβής φράση του Ερατοσθένη είναι "μηδέ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας ", η ερμηνεία της οποίας έγειρε ερωτήματα σε πολλούς μελετητές των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και μεταξύ αυτών και του Knorr[9] ο οποίος διατυπώνει την αμφιβολία του κατά πόσο ο όρος τριάδες παραπέμπει στις τρεις κωνικές τομές, επιχειρηματολογώντας ότι στην κατασκευή δύο μέσων αναλόγων των τμημάτων α και β που παραθέσαμε, χρησιμοποιούνται είτε δύο παραβολές είτε μία παραβολή και μία υπερβολή και άρα θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει, σύμφωνα πάντα με τον Knorr, ότι η προτροπή του Ερατοσθένη θα

---

[7] Ο τρόπος με τον οποίο ο Μέναιχμος συνέδεσε τις κωνικές τομές με τις εξισώσεις των καμπυλών που χρησιμοποιεί στην επίλυση διπλασιασμού του κύβου δεν μας είναι γνωστός αλλά μία υποθετική ανακατασκευή του τρόπου εξαγωγής αυτών των εξισώσεων γίνεται από τον Heath στο βιβλίο του " *A History of Greek Mathematics"* και παραθέτεται στο Παράρτημα Ι [3] ενώ άλλη μία πιθανή ανακατασκευή του τρόπου εξαγωγής των συμπτωμάτων η οποία είναι συμβατή με τον ορισμό των κωνικών τομών ως τομών ορθών κώνων (ορθογωνίων, αμβλυγωνίων ή οξυγωνίων) με επίπεδο κάθετο σε μία γεννέτειρα,έχει προταθεί από τον E.J. Dijksterhius, *Archimedes,* μτφρ. C. Diksboorn, Princeton, N.J., 1987, σελ. 57-59.

[8] Ο Van der Waerden στο σημείο αυτό με υποσημείωση παραπέμπει τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται για περισσότερες λεπτομέρειες στο άρθρο του Wilamowitz: *U. von Wilamowitz-Moellendorff, "Ein Weihgeschenk des Eratosthenes", Gottinger Nachrichten,* Phi1. –hist. K1., 1894, σελ. 15-35.

[9] Σελ. 96 "*Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών»,* Γιάννης Χριστιανίδης , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

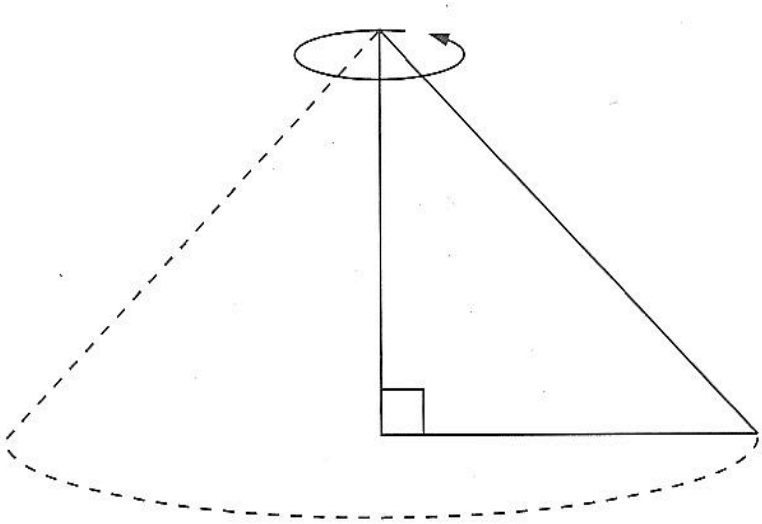
έπρεπε να είναι να αποφεύγονται οι "Μεναίχμειες δυάδες" και όχι οι "Μεναίχμειες τριάδες".

Ένα δεύτερο επιχείρημα του Knorr υπέρ της αμφισβήτησης της ανακάλυψης των κωνικών τομών από τον Μέναιχμο αποτελεί το γεγονός ότι σε μια τόσο πρώιμη περίοδο, όπως αυτή του Μεναίχμου, οι κωνικές τομές δεν θα πρέπει να αντιμετωπίζονταν ως καμπύλες που ανήκουν σε μια ενιαία κατηγορία και άρα η φράση «Μεναίχμειες τριάδες" υπό αυτό το πρίσμα εγείρει προβληματισμούς. Εν τω μεταξύ, εξακολουθεί ο Knorr, μόλις μια γενιά μετά από τον Μέναιχμο, προς τα τέλη δηλαδή του 4ου π.Χ. αιώνα, η θεωρία των κωνικών τομών είχε αναπτυχθεί σε τέτοιο βαθμό, ώστε να γράφονται ειδικές πραγματείες με αντικείμενο τη θεωρία αυτή, όπως αυτή του Αρισταίου του πρεσβύτερου (γύρω στο 330-320 π.Χ.) με τίτλο *Στερεοί τόποι* και αυτή του Ευκλείδη (γύρω στο 300 π.Χ.) με τίτλο *Κωνικά,* ενώ ο Αρχιμήδης σε αρκετά σημεία των έργων του παραπέμπει σε κάποια *Κωνικά στοιχεία* που πιθανόν ήταν έργο ή ομάδα έργων για τις κωνικές τομές – ενδεχόμενως να ήταν έργα του Αρισταίου και του Ευκλείδη.

Υπέρ της άποψης του Knorr, συνηγορεί το γεγονός ότι ο τρόπος με τον οποίο ο Μέναιχμος συνέλαβε την ιδέα δημιουργίας καμπυλών από την τομή ενός κώνου παραμένει άγνωστος, ενώ στην *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών* του *Heath*[10] διαβάζουμε ότι ο Δημόκριτος (~ 460-370 π.Χ.) είχε πράγματι αναφερθεί στην τομή ενός κώνου, παράλληλα και πολύ κοντά στη βάση του.

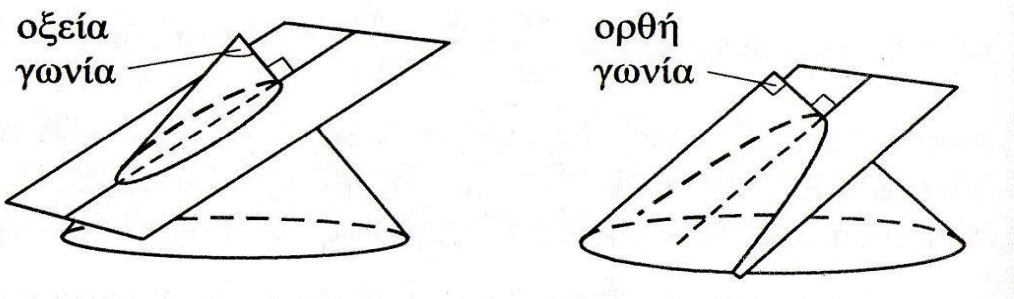
Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να τονιστεί ο τρόπος που οι αρχαίοι Έλληνες, οι σύγχρονοι του Μέναιχμου, και προφανώς και οι προγενέστεροι αυτού, όριζαν τον κώνο, όπως μαθαίνουμε από το 11ο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη· ο κώνος λοιπόν, οριζόταν, ως η επιφάνεια η οποία διαγράφεται κατά την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου ως προς μία από τις κάθετες πλευρές του [5], όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

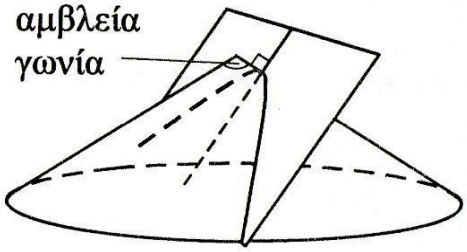
[10] Σελ. 149



Πηγή: Γιάννης Χριστιανίδης: *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ. 100.

και διακρίνονταν ανάλογα με το είδος της γωνίας της κορυφής σε τρεις κατηγορίες: στον οξυγώνιο, στον ορθογώνιο και στον αμβλυγώνιο κώνο. Η τομή τώρα του κώνου από ένα επίπεδο, προκειμένου να προκύψουν οι καμπύλες των κωνικών τομών, γινόταν πάντα με τρόπο ώστε το επίπεδο να τέμνει κάθετα έναν από τους γεννήτορες του κώνου με αποτέλεσμα το κάθε είδος κώνου να παράγει μόνο ένα είδος κωνικής τομής, δηλαδή ο οξυγώνιος την έλλειψη (οξυτομή), ο ορθογώνιος την παραβολή (ορθοτομή) και ο αμβλυγώνιος την υπερβολή (αμβλυτομή):





Ο Χριστιανίδης, στο βιβλίο του *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών* θίγει το θέμα του κατά πόσο στην πραγματικότητα οι τρεις καμπύλες που δηλώνονται με την ονομασία «κωνικές τομές», ανακαλύφτηκαν για πρώτη φορά ως τομές κώνου, αφού τελευταία έχει υποστηριχθεί η άποψη ότι οι τρεις αυτές καμπύλες ανακαλύφθηκαν αρχικά ως επίπεδες καμπύλες και αργότερα διαπιστώθηκε ότι αυτές μπορούν να προέλθουν από την τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο. Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η υποθετική, κατά σημείο κατασκευή, της παραβολής από τον W. R. Knorr[11], με αφορμή την εύρεση δύο μέσων αναλόγων, όπως αυτή παραθέτεται από τον Χριστιανίδη[12]:

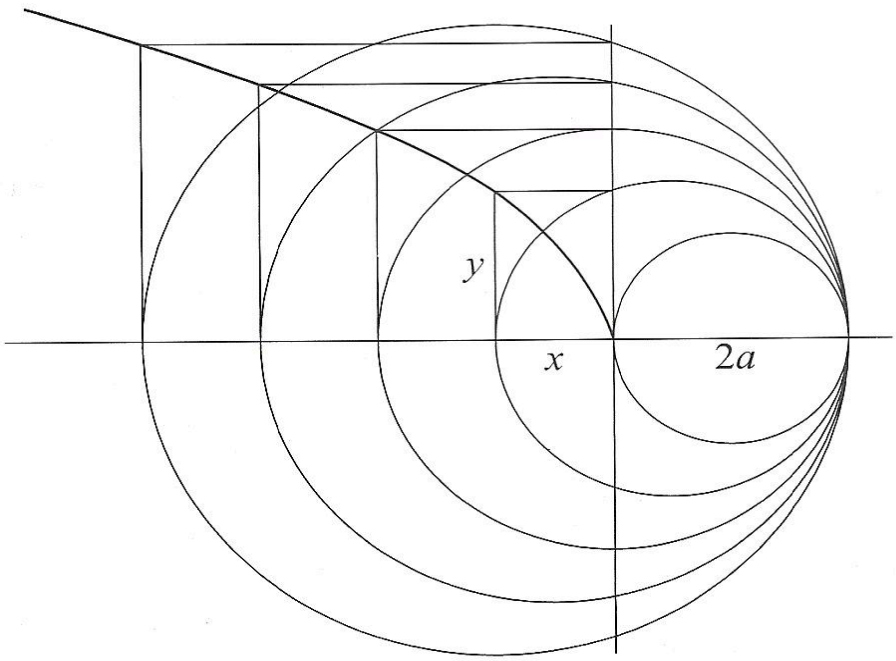
Έστω λοιπόν ότι ζητάμε να βρούμε δύο μέσες αναλόγους x και y μεταξύ των α και 2α, έτσι ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2\alpha}$, δηλαδή ζητάμε να κατασκευάσουμε μια καμπύλη, τα σημεία της οποίας θα ικανοποιούν τη συνθήκη $y^2=2\alpha x$ όπως προκύπτει από τη δεύτερη ισότητα. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει ως εξής: Τοποθετούμε το ευθύγραμμο τμήμα 2α και το προεκτείνουμε κατά x, δίνοντας διαδοχικά στο x, διάφορες τιμές. Αν x_1 είναι μια πρώτη τιμή του x, το y_1 προσδιορίζεται αν γράψουμε την ημιπεριφέρεια με διάμετρο $2\alpha+x_1$ και υψώσουμε την κάθετο στο σημείο που χωρίζει το 2α από το x_1[13] . Κατόπιν, κάνουμε μια παράλληλη μεταφορά του y_1, ώστε να τοποθετηθεί στην εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της διαμέτρου. Έστω τώρα x_2 μια δεύτερη τιμή του x· το y_2 προσδιορίζεται, όπως προηγουμένως, αν γράψουμε την ημιπεριφέρεια με διάμετρο $2\alpha+x_2$ και υψώσουμε την κάθετο στο σημείο που χωρίζει το 2α από το x_2. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία της παράλληλης μεταφοράς στην εφαπτομένη στο άκρο της διαμέτρου. Η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται συνεχώς, κατασκευάζοντας με τον τρόπο αυτό άπειρα σημεία, τα οποία σχηματίζουν, αν ενωθούν με συνεχή γραμμή, την παραβολή, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

---

[11] Knorr, W.R.: *The Ancient Tradition of Geometric Problems,* New York, Dover, 1993, σελ. 63-66. (Πρώτη έκδοση)

[12] Γιάννης Χριστιανίδης: *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ. 99

[13] Ουσιαστικά, βρίσκουμε τη μέση ανάλογο των τμημάτων 2α και x για την εκάστοτε τιμή του x, όπως έχουμε παραθέσει στο Παράρτημα (βλ. [1]).



Πηγή: Γιάννης Χριστιανίδης: *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ. 99.

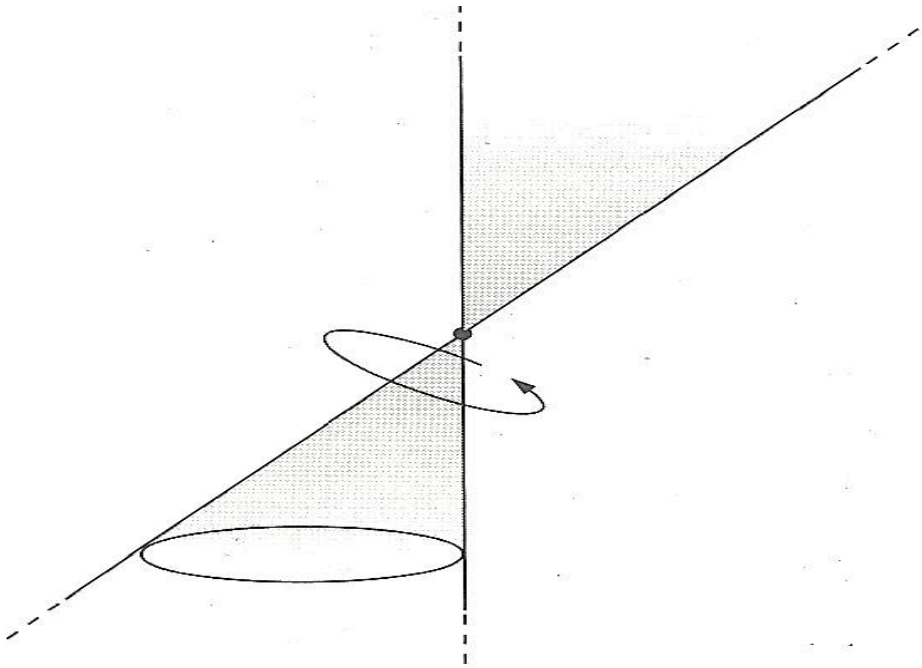
Με τον τρόπο αυτόν κατασκευής της παραβολής, δεν υπεισέρχεται πουθενά ο κώνος και η τομή του με κάποιο επίπεδο, ενώ αξιομνημόνευτη είναι η παρατήρηση του Χριστιανίδη ότι το προηγούμενο σχήμα θα μπορούσε να δημιουργήσει την εντύπωση ότι παριστάνει έναν κώνο, θεωρούμενο εκ των άνω, ο οποίος τεμνόμενος από ένα επίπεδο έχει σαν αποτέλεσμα τον σχηματισμό μιας καμπύλης στην επιφάνειά του, με αυτή την καμπύλη να είναι η παραβολή.

1.2. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

Ο Απολλώνιος μετασχημάτισε ριζικά την προγενέστερη θεωρία των κωνικών τομών με την καινοτομία του να συνίσταται στην παύση χρησιμοποίησης ορθού κώνου προκειμένου να παράξει τις εν λόγω καμπύλες καθώς και στην επιλογή εξαγωγής των συμπτωμάτων[14] τους βάσει των ιδιοτήτων τους – *ορισμός δια της ιδιότητος*- και όχι βάση του τρόπου γέννησής τους – *ορισμός δια της γενέσεως.* Ο Απολλώνιος λοιπόν, ορίζει τον κώνο – πλάγιος πλέον - ως την επιφάνεια εκείνη που σχηματίζεται όταν μία ευθεία γραμμή που διέρχεται από σταθερό σημείο περιστραφεί περί την περιφέρεια

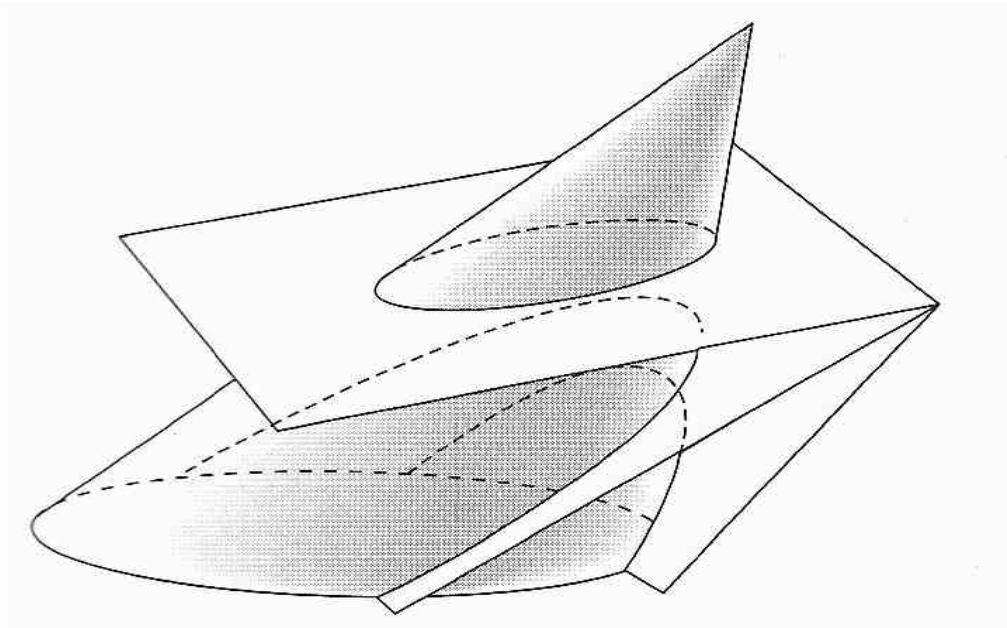
[14] Τα συμπτώματα είναι οι εξισώσεις των καμπυλών των κωνικών τομών.

ενός κύκλου που δεν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σημείο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Πηγή: Γιάννης Χριστιανίδης: *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ. 100.

Οι κωνικές τομές λοιπόν, παράγονται πλέον κατά την τομή ενός *πλάγιου* κώνου με ένα επίπεδο, με το είδος της κωνικής τομής που προκύπτει, να εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο το επίπεδο θα τμήσει τον κώνο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Πηγή: Γιάννης Χριστιανίδης: *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ. 100.

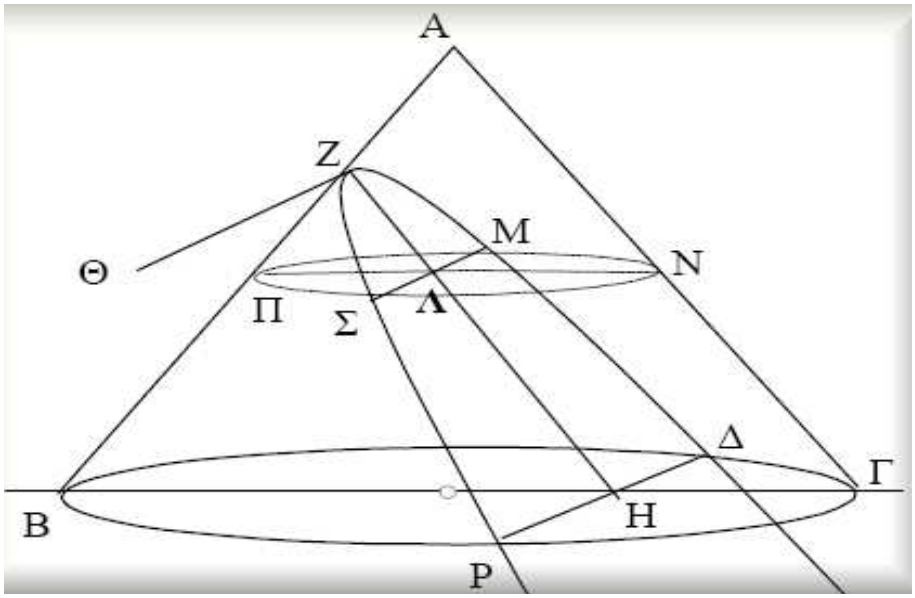
Από το σχήμα προκύπτει ότι όταν το επίπεδο τομής τέμνει όλες τις γενέτειρες του κώνου παίρνουμε την έλλειψη – εκτός και αν το επίπεδο είναι παράλληλο στη βάση του κώνου, οπότε και λαμβάνουμε κύκλο -, όταν το επίπεδο τομής είναι παράλληλο σε μία γενέτειρα του κώνου παίρνουμε την παραβολή ενώ όταν το επίπεδο τέμνει το υπόλοιπο μισό του διπλού κώνου τότε λαμβάνουμε την υπερβολή. Ο Απολλώνιος διατυπώνει τα «συμπτώματα» των κωνικών τομών με τρόπο πιο γενικό αφού οι εξισώσεις των κωνικών τομών δεν θεωρούνται πλέον ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων αλλά ως προς ένα πλαγιογώνιο σύστημα στο οποίο ο ένας άξονας είναι η διάμετρος της κωνικής και ο άλλος η εφαπτομένη της κωνικής στο άκρο της διαμέτρου.[15]

Η καινοτομία του Απολλώνιου σχετικά με την εξαγωγή των συμπτωμάτων μιας κωνικής τομής με χρήση των ιδιοτήτων της καμπύλης, παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία, μέσω της παρουσίασης εξαγωγής του «συμπτώματος» της παραβολής που είναι άλλωστε και η καμπύλη του κεντρικού μας ενδιαφέροντος:

ΠΡΟΤΑΣΗ (*Κωνικά,* βιβλίο α΄, Πρόταση 11, τόμος α΄, σελ. 230)

Έστω ένας κώνος (ορθός ή μη) με βάση τον κύκλο (διαμέτρου) ΒΓ και μια τομή του ΑΒΓ από επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κώνου. Θεωρούμε ένα επίπεδο (S) παράλληλο προς μια μόνο γενέτειρα του κώνου, έστω την ΑΓ, ώστε να τέμνει την ΒΓ κατά ευθεία ΔΡ κάθετη στην ΒΓ (δεν βλάπτεται η γενικότητα, γιατί για οποιοδήποτε επίπεδο τομής (S), μπορούμε να πάρουμε το αξονικό τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε η ΒΓ να είναι κάθετη στην ΔΡ). Το επίπεδο (S) ορίζεται από την κάθετη ΡΔ στη ΒΓ και από την ΗΖ, όπου ΗΖ//ΑΓ. Έτσι, ΖΗ είναι η τομή του επιπέδου τομής (S) με το επίπεδο ΑΒΓ και έστω ΔΖΡ η τομή του (S) με την επιφάνεια του κώνου.

[15] Διατυπωμένα σε μια σύγχρονη ορολογία.



Έστω τυχόν σημείο Μ της τομής ΔΖΡ και ΜΛ παράλληλη στην ΔΡ (στο επίπεδο τομής (S)). Από το σημείο Λ (και πάνω στο επίπεδο ΑΒΓ) φέρνουμε ευθεία ΠΛΝ παράλληλη στην ΒΓ, οπότε το επίπεδο των ΜΛ, ΠΜ είναι παράλληλο στην βάση του κώνου, άρα τέμνει τον κώνο κατά κύκλο διαμέτρου ΠΛΝ. Η ΜΛΣ είναι κάθετη στην ΠΝ εφόσον οι παράλληλες προς αυτές ΒΓ, ΔΡ είναι κάθετες. Άρα, το Λ είναι το μέσο της χορδής ΜΣ και από θεώρημα τεμνόμενων χορδών κύκλου έχουμε: $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΠΛ} \cdot \text{ΛΝ}$ (1)

Πάνω στο επίπεδο (S) ορίζουμε ένα τμήμα ΖΘ κάθετο στο ΖΗ, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΑ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}} \cdot \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} \qquad (2)$$

Αυτό είναι πάντα δυνατό αφού τα τμήματα ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ, ΖΑ είναι σταθερά και εξαρτώνται από τον κώνο και το επίπεδο τομής.

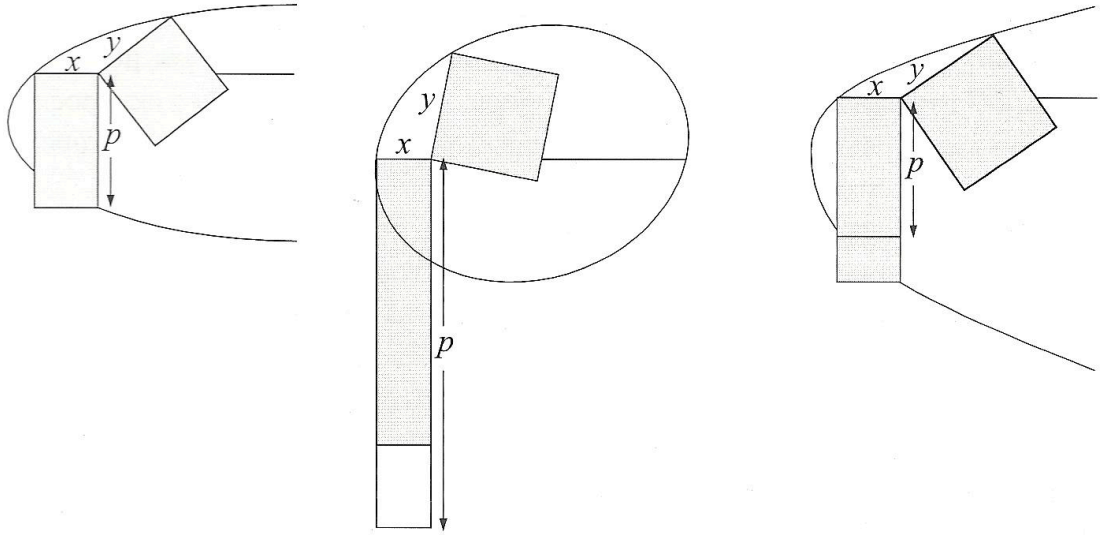
Από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΠΛ έχουμε $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΠΛ}}{\text{ΖΛ}}$.

Επίσης, από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΠΝ (ΖΛ//ΑΝ) έχουμε $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΠΝ}}{\text{ΠΑ}} = \frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΖΑ}}$,

οπότε από την (2) προκύπτει $\frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΑ}} = \frac{\text{ΠΛ} \cdot \text{ΛΝ}}{\text{ΖΛ} \cdot \text{ΖΑ}}$ ή ΘΖ·ΖΛ=ΠΛ·ΛΝ και λόγω της (1) παίρνουμε ΜΛ^2=ΖΘ·ΖΛ.

Η μετάφραση της παραπάνω πρότασης θα μπορούσε να γίνει, με χρήση σύγχρονης ορολογίας αναλυτικής γεωμετρίας, θεωρώντας ως σύστημα αξόνων τις ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΛ και ΖΛ (άρα αρχή

των αξόνων θα είναι το σημείο Λ) και πιο συγκεκριμένα θεωρώντας ως άξονα των τεταγμένων την ευθεία που ορίζεται από το ΜΛ και ως άξονα των τετμημένων την ευθεία που ορίζεται από το ΖΛ. Μεταφράζοντας λοιπόν την παραπάνω πρόταση, προκύπτει ότι η παραβολή αποτελείται από σημεία για τα οποία το τετράγωνο με πλευρά την τεταγμένη ισούται με το ορθογώνιο βάσης ίσης με την τετμημένη του σημείου και ύψος ίσο με μία παράμετρο, η οποία συμβολίζεται στην περίπτωση των κωνικών τομών με p και στην παραπάνω πρόταση είναι το τμήμα ΖΘ. Σε αυτήν άλλωστε την ιδιότητα οφείλει και η συγκεκριμένη καμπύλη την ονομασία της αφού το ορθογώνιο ισοδύναμου εμβαδού με αυτό του τετραγώνου *παραβάλλεται* στην διάμετρο της κωνικής τομής (αριστερό σχήμα):



Πηγή: Γιάννης Χριστιανίδης: *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ. 102.

Στην περίπτωση που το τετράγωνο της τεταγμένης των σημείων της κωνικής τομής είναι ίσο με ένα ορθογώνιο, η μία πλευρά του οποίου είναι η τετμημένη του εκάστοτε σημείου και η άλλη πλευρά είναι μικρότερη από το ευθύγραμμο τμήμα p (γραμμοσκιασμένο ορθογώνιο στο μεσαίο σχήμα), τότε έχουμε *έλλειψη*, ενώ αν το ορθογώνιο έχει τη μία πλευρά ίση με την τετμημένη του εκάστοτε σημείου και την άλλη πλευρά μεγαλύτερη από την παράμετρο p, τότε έχουμε *υπερβολή.* Τις ιδιότητες αυτές των κωνικών τομών χρησιμοποίησε ο Απολλώνιος προκειμένου να δώσει τα ονόματα αυτά, τα οποία προήλθαν από

μεταφορά της ορολογίας από την πυθαγόρεια παραβολή, έλλειψη και υπερβολή χωρίων [6]. Σημαντικό στο σημείο αυτό είναι να αναφέρουμε ότι η διευθετούσα καθώς και η εστία της παραβολής δεν αναφέρονται καθόλου στην πραγματεία του Απολλώνιου για τις κωνικές τομές[16]· εμφανίζονται όμως στον Πάππο[17]όπου η κωνική τομή είναι ο γεωμετρικός τόπος ενός σημείου τέτοιου, ώστε η απόστασή του από ένα σταθερό σημείο προς την απόστασή του από μια σταθερή ευθεία να σχηματίζουν δοσμένο λόγο[18] και η κωνική τομή να είναι παραβολή αν ο λόγος αυτός ισούται με τη μονάδα, έλλειψη αν είναι μικρότερος της μονάδας και υπερβολή αν είναι μεγαλύτερος.

1.3. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Χρειάστηκε να περάσουν πολλά χρόνια, ώσπου να φτάσουμε στην θεώρηση των κωνικών τομών με τον τρόπο που εμείς σήμερα γνωρίζουμε. Τα χρόνια αυτά δεν ήταν ότι χαρακτηρίζονταν από έλλειψη εργασιών πάνω στον συγκεκριμένο τομέα, απλά δεν είχε σημειωθεί σ' αυτά κάποια αξιομνημόνευτη πρόοδος ή αλλαγή, όπως δηλαδή συνέβη στην διάρκεια του 17ου αιώνα με την συμβολή των Fermat (1601-1665) και Descartes (1596-1650), οι οποίοι χαρακτηρίζονται «πατέρες της Αναλυτικής Γεωμετρίας».

Ο Fermat ασχολούμενος εντατικά με το έργο του Απολλώνιου «Περί επίπεδων τόπων», κάνοντας χρήση άλγεβρας, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όλοι οι γεωμετρικοί τόποι που περιγράφονται στο εν λόγω έργο μπορούν να εκφραστούν ως αλγεβρικές εξισώσεις δύο αγνώστων. Το αξιοσημείωτο είναι ότι ο Descartes ήταν σύγχρονος του Fermat, και εργαζόμενοι ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον έφτασαν και οι δύο στην ανακάλυψη της νέας αυτής μεθόδου ανάλυσης. Σύμφωνα με τον Carl B. Boyer[19], η ουσία της νέας ανακάλυψης από τον Descartes, όπως αυτή δημοσιεύτηκε το 1637, στο μαθηματικό του έργο με τίτλο «La Geometrie», έγκειται στο γεγονός ότι γενικά, μία εξίσωση δύο άγνωστων ποσοτήτων καθορίζει μία καμπύλη ως προς ένα σύστημα

---

[16] Οι ιδιότητες της εστίας και της διευθετούσας είναι οι γεωμετρικές εκείνες ιδιότητες των κωνικών τομών οι οποίες απασχολούν αποκλειστικά τα σύγχρονα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας – αν μη τι άλλο – εκπαίδευσης.

[17] Ο Πάππος δίνει την πρόταση ως λήμμα στο έργο του Ευκλείδη *Περί τόπων προς επιφανεία*.

[18] Ο λόγος αυτός ονομάζεται *εκκεντρότητα* της κωνικής τομής.

[19] Carl B. Boyer: *Historical Stages in the Definition of Curves*, National Mathematics Magazine, Vol. , No 6 (Mar., 1945).

συντεταγμένων σε ένα επίπεδο. Κατά τον Fermat, η εξίσωση είναι ακριβώς το χαρακτηριστικό της καμπύλης[20] που ορίζεται από αυτή, με αποτέλεσμα ο Fermat να δει σε αυτή την ανακάλυψη μία απεριόριστα μεγάλη ποικιλία καμπυλών. Ο Descartes ακολούθησε την αντίστροφη πορεία σκέψης σχετικά με την ανακάλυψη αυτή, συνδέοντας οποιαδήποτε καμπύλη του επιπέδου με μία εξίσωση δύο αγνώστων. Άλλωστε, το πεδίο της Αναλυτικής Γεωμετρίας αυτό καθ΄αυτό, χρησιμοποιήθηκε αρχικά εκτεταμένως στη μελέτη «παλαιών» καμπυλών, κυρίως των κωνικών, και όχι τόσο στην ανακάλυψη «νέων» καμπυλών.[21]

Η γεωμετρική αναπαράσταση του επιπέδου με τη μορφή που εμείς σήμερα γνωρίζουμε είναι έργο του Descartes, ο οποίος σύμφωνα με τον W.S. Anglin[22], στην επανεξέταση της γεωμετρίας ως μέρος της ολικής του επανεξέτασης τής μέχρι τότε αποδεκτής γνώσης, συνέδεσε όλες τις συνιστώσες ενός γεωμετρικού σχήματος με δύο ευθείες γραμμές, αυτές που εμείς σήμερα ονομάζουμε άξονα των x και άξονα των y. Τη σκυτάλη σε αυτή τη νέα θεώρηση των κωνικών τομών παραλαμβάνει ο L' Hospital (1661-1704), ο οποίος στο έργο του «Traite analytique des sections coniques» ορίζει την παραβολή μέσω της ιδιότητας εστίας - διευθετούσας και την έλλειψη και την υπερβολή μέσω της ιδιότητας των εστιών, φέρνοντας με τον τρόπο αυτόν τους ορισμούς και τις εξισώσεις των κωνικών τομών στη μορφή που εμείς χρησιμοποιούμε σήμερα.

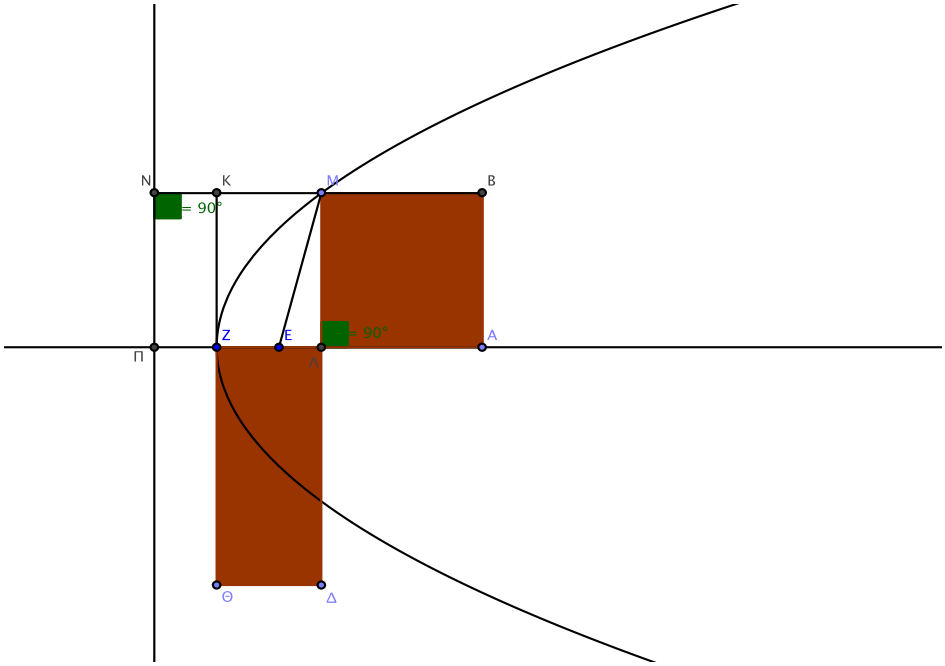
Στο σημείο αυτό, κρίνεται σκόπιμη μία σύνδεση των ιδιοτήτων της παραβολής που ήταν γνωστή στον Απολλώνιο και της ιδιότητας των σημείων της παραβολής να ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο, που ονομάζεται *εστία* και είθισται να συμβολίζεται με Ε και από μία σταθερή ευθεία που ονομάζεται *διευθετούσα* και συμβολίζεται με (δ):

---

[20] Ο όρος που χρησιμοποιεί ο Boyer είναι "specific property".

[21] Ο Fermat το 1636 έστρεψε την προσοχή του σε έναν απεριόριστο αριθμό καμπυλών του επιπέδου, γνωστές ως παραβολές και υπερβολές ανώτερου βαθμού.

[22] W.S. Anglin: *Mathematics: A Concise History and Philosophy,* New York, Springer –Verlag, 1994



Στο παραπάνω σχήμα, έχουμε την παραβολή και γραμμοσκιασμένα είναι τα δύο ισεμβαδικά σχήματα όπως προκύπτει από τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής. Συγκεκριμένα, έχουμε πάρει ένα τυχαίο σημείο Μ της παραβολής και έχουμε κατασκευάσει το τετράγωνο ΜΒΑΛ πλευράς ΜΛ ίσης με την τεταγμένη του σημείου Μ και το ορθογώνιο ΖΛΔΘ με τη μία πλευρά ΖΛ ίση με την τετμημένη του σημείου Μ και την άλλη πλευρά ΖΘ ίση με το μήκος p που χρειάζεται προκειμένου τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά. Ορίζουμε το σημείο Ε (*εστία*) πάνω στην ευθεία ΖΑ έτσι ώστε: ΖΕ= $\frac{ΖΘ}{4}$ και το σημείο Π έτσι ώστε ΖΕ=ΖΠ και από το Π φέρνουμε κάθετη στον άξονα ΖΑ της παραβολής (*διευθετούσα*).

Αρκεί να δείξουμε ότι:

ΜΕ=ΜΝ ⇔

$ΜΕ^2=ΜΝ^2$ (1)

Όμως, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΕΛ ισχύει: $ΜΕ^2=ΜΛ^2+ΕΛ^2$ (2)

Από το σχήμα φαίνεται ότι: $ΜΝ^2=(ΜΚ+ΚΝ)^2=ΜΚ^2+ΚΝ^2+2ΜΚ\cdot ΚΝ$ (3)

Η (1) λόγω των (2), (3) ισοδυναμεί:

$ΜΛ^2+ΕΛ^2= ΜΚ^2+ΚΝ^2+2ΜΚ·ΚΝ \Leftrightarrow$ [23]

$ΖΘ·ΖΛ+ΕΛ^2=ΖΛ^2+ΖΠ^2+2ΖΛ·ΠΖ \Leftrightarrow$

$ΖΘ·ΖΛ+(ΖΛ-ΠΖ)^2=ΖΛ^2+ΖΠ^2+2ΖΛ·ΠΖ \Leftrightarrow$

$ΖΘ·ΖΛ+ ΖΛ^2+ΖΠ^2-2ΖΛ·ΠΖ= ΖΛ^2+ΖΠ^2+2ΖΛ·ΠΖ \Leftrightarrow$

$ΖΘ·ΖΛ=4ΖΛ·ΠΖ$

Όμως $ΖΘ=4ΖΕ$ και άρα: $4ΖΕ·ΖΛ=4ΖΛ·ΠΖ$ (4)

και αφού $ΖΕ=ΠΖ$, η (4) ισχύει και άρα: $ΜΕ=ΜΝ$.

Άρα, αποδείξαμε ότι αν ένα σημείο ανήκει στην παραβολή, όπως αυτή έχει οριστεί από τον Απολλώνιο, τότε ισαπέχει από ένα σταθερό σημείο Ε και μία σταθερή ευθεία. Προφανώς, ισχύει και το αντίστροφο όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε χωρίς δυσκολία, αν δηλαδή $ΜΕ=ΜΝ$, τότε $ΜΛ^2=ΖΘ·ΖΛ$. Δείξαμε δηλαδή την ισοδυναμία των δύο ορισμών με την μοναδική παρατήρηση ότι ο Απολλώνιος θεωρούσε ως παράμετρο το τμήμα ΖΘ (έστω p) ενώ στα σύγχρονα μαθηματικά, ως παράμετρο ορίζουμε την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα, δηλαδή το μισό της παραμέτρου που όριζε ο Απολλώνιος. Θεωρώντας τώρα ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, όπου ο άξονας της παραβολής θα είναι ο οριζόντιος άξονας και η κάθετη σ' αυτόν που ορίζεται από τα σημεία Ζ και Κ θα είναι ο κάθετος άξονας και κατά συνέπεια αρχή των αξόνων θα είναι η κορυφή της παραβολής Ζ, προκύπτουν όλες οι γνωστές μας ιδιότητες της παραβολής.

[23] $ΜΛ^2=ΖΘ·ΖΛ$, από την Πρόταση του Απολλώνιου.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1. Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2.1.1. Εισαγωγή

Ο Merlin Donald (1991, στο Saffer & Kaput, 1999) υποστηρίζει ότι η ανθρώπινη νόηση κατά το πέρασμα των αιώνων ακολούθησε μια εξελικτική πορεία, στην οποία διακρίνει 4 στάδια:

α. Το πρωταρχικό στάδιο (πριν 3 εκατομμύρια χρόνια) χαρακτηρίζεται από την «επεισοδιακή» σκέψη, υπό την έννοια ότι η σκέψη βασίζεται στην ανάκληση αποσπασματικών γεγονότων του παρελθόντος, χωρίς τη δυνατότητα για συμβολική σκέψη. Μοιάζει με τη σκέψη των πιθήκων στην οποία, σύμφωνα με τον M.Donald, απουσιάζει οποιαδήποτε δυνατότητα συμβολικής αναπαράστασης γεγονότων.

β. Το δεύτερο στάδιο είναι η προγλωσσική περίοδος της ανθρώπινης νόησης όπου η επικοινωνία πραγματοποιείται μέσω νοημάτων, χειρονομιών και αναπαράστασης γεγονότων μέσα από μία διαδικασία μίμησης. Τον πολιτισμό αυτής της περιόδου ο M.Donald *τον ονομάζει «μιμητικό»*.

γ. Το τρίτο στάδιο εμφανίζεται με την ανάπτυξη της γλωσσικής ικανότητας του ανθρώπου (πριν 300.000 χρόνια) και επομένως της δυνατότητας του για συμβολική αναπαράσταση γεγονότων και αντικειμένων. Ο πολιτισμός της περιόδου αυτής χαρακτηρίζεται από την προφορική επικοινωνία και από το γεγονός ότι κύριο μέσο «αποθήκευσής του» ήταν η μνήμη. Ο M.Donald τον ονομάζει «μυθικό».

δ. Το τέταρτο στάδιο χαρακτηρίζεται από τη χρήση του γραπτού λόγου και της παραδειγματικής σκέψης. Τον πολιτισμό αυτού του σταδίου τον ονομάζει «θεωρητικό πολιτισμό» του οποίου η μετάδοση και η αποθήκευση βασίζεται στη γραφή η οποία παίζει το ρόλο της «εξωτερικής μνήμης» .

Οι Shaffer & Kaput (1998) προσθέτουν στη θεωρία του M. Donald ένα ακόμα στάδιο και προτείνουν ότι ο εικονικός πολιτισμός (virtual culture), ο οποίος βασίζεται στις υπολογιστικές δυνατότητες των νέων (και μελλοντικών) τεχνολογιών, είναι το επόμενο λογικό βήμα σε αυτήν την πορεία. Με βάση την παραπάνω άποψη, τα μαθηματικά, τα οποία είναι ένα από τα κατασκευάσματα του πολιτισμού μας, ακολουθούν την ίδια πορεία.

Η Colette Laborde (2007) εκφράζει την άποψη ότι είναι επιτακτική η ανάγκη εναρμονισμού του σχολικού περιβάλλοντος με το περιβάλλον στο οποίο ζούνε οι μαθητές αλλά και με το περιβάλλον στο οποίο θα κληθούν να ζήσουν ως εργαζόμενοι. Τα περιβάλλοντα αυτά διέπονται στη συντριπτική τους πλειοψηφία από την έντονη παρουσία της τεχνολογίας και το σχολείο δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να αγνοήσει τη νέα αυτή πραγματικότητα. Ένα σχολικό περιβάλλον το οποίο θα είναι οικείο με την πραγματικότητα που βιώνει ένας μαθητής έχει πολύ περισσότερες πιθανότητες να ληφθεί ως φιλικό από τον μαθητή ενώ χαρακτηριστική είναι η φράση του Parert ο οποίος 20 και πλέον χρόνια πριν αναφέρει ότι " *άνθρωποι οι οποίοι έχουν υπολογιστές στο σπίτι τους ή τους χρησιμοποιούν στη δουλειά τους, θα θέλουν να μπορούν να διδάξουν τα παιδιά τους να χρησιμοποιούν τις μηχανές"* εκφράζοντας έτσι την προαναφερθείσα πεποίθηση συμφωνίας του εξωτερικού κόσμου με τη διδασκαλία εν γένει.

Προς την κατεύθυνση αυτή, ιδιάζουσα σημασία αποκτά η διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς η τεχνολογία μπορεί όχι απλά να ενσωματωθεί αλλά και να φανεί εξαιρετικά χρήσιμη στη μάθηση των μαθηματικών λόγω του παράδοξου χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης (Duval, 1999). Σύμφωνα με τον Duval, δεν υπάρχει άλλος τρόπος απόκτησης πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα παρά μόνο μέσω *σημειωτικών αναπαραστάσεων*, κάτι που δεν ισχύει για τα άλλα πεδία γνώσης στα οποία οι *σημειωτικές αναπαραστάσεις* αποτελούν εικόνες ή περιγραφές φαινομένων του πραγματικού κόσμου, στα οποία φαινόμενα όμως έχουμε ούτως ή άλλως πρόσβαση χωρίς αναπαραστάσεις, κάτι που προφανώς δεν ισχύει στα μαθηματικά.

Παρόλα αυτά όμως τα μαθηματικά στο εκπαιδευτικό μας σύστημα εξακολουθούν να αντιμετωπίζονται ως μία θεωρητική γνώση η οποία διδάσκεται κυρίως μετωπικά και στόχο έχει την απομνημόνευση ορισμών, θεωρημάτων ακόμα και αποδείξεων και η οποία εκ των πραγμάτων διέπεται από έναν τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό ο οποίος δημιουργεί ένα επιπλέον εμπόδιο κατανόησης των εννοιών στους μαθητές, αφού εκτός από τις έννοιες αυτές καθ' αυτές έχουν να μάθουν και το πώς τις αναπαριστούμε. Μετά από όλα τα παραπάνω κρίνεται απολύτως κατανοητή η αρνητική στάση που υϊοθετείται απέναντι στα Μαθηματικά από μία μεγάλη μερίδα των μαθητών μας και

μάλιστα έχει αναγκάσει την επιστημονική κοινότητα σε δημιουργία όρου περιγραφής αυτού ακριβώς του φαινομένου που δεν είναι άλλη από τη « Μαθηματικοφοβία». Άλλωστε, ο Hardy στην *Απολογία ενός Μαθηματικού* αναφέρει ότι «*οι περισσότεροι φοβούνται τόσο πολύ το όνομα των Μαθηματικών ώστε είναι διατεθειμένοι, χωρίς να τους υποχρεώνει κανείς, να υπερβάλλουν τη μαθηματική τους ανοησία».*

Η γενικότερη παιδαγωγική τάση, όπως αυτή προκύπτει από την εξέλιξη της επιστήμης της Διδακτικής των Μαθηματικών, θέτει ως πρωτεύοντα στόχο την ενίσχυση της λογικομαθηματικής πτυχής της σκέψης και έκφρασης των μαθητών ως αναπόσπαστου μέρους της κουλτούρας τους έναντι της κατανόησης εννοιών που αναφέρονται ρητώς μέσα στο αναλυτικό πρόγραμμα του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου, προκειμένου να ανταποκρίνονται στις εξετάσεις του εκπαιδευτικού συστήματος. Η απαίτηση για ενίσχυση στους μαθητές ενός επιστημονικού, μαθηματικού τρόπου σκέψης τροφοδοτείται από τη συνεχώς αυξανόμενη θεώρηση της μαθηματικής σκέψης ως πολιτισμικό χαρακτηριστικό, όπως η έκφραση, η συλλογικότητα και η δημοκρατία. Η αξιοποίηση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας μπορεί να καλλιεργήσει με καινούριους αναβαθμισμένους τρόπους μια σειρά από πτυχές της μαθησιακής διαδικασίας των μαθηματικών οι οποίες στην εκπαιδευτική πράξη είναι υποβαθμισμένες παρότι οι επιστήμες της αγωγής μας δείχνουν όλο και πιο έντονα τα τελευταία εβδομήντα περίπου χρόνια ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικές και αποτελούν τον κορμό του τρόπου με τον οποίο μαθαίνουμε. Οι πτυχές αυτές είναι **η δράση, το βίωμα, ο πειραματισμός, η έρευνα-αναζήτηση, η αμφισβήτηση, η συνεργασία, η συμμετοχή σε μορφές συλλογικότητας, η δημιουργία νοημάτων** και φυσικά **η αναπαράσταση** (Κυνηγός 2011).

2.1.2 Η συμβολή του Papert στη χρήση της τεχνολογίας στη μάθηση των μαθηματικών

Πρόδρομος της θεωρητικής θεμελίωσης της μαθησιακής διαδικασίας των Μαθηματικών σε περιβάλλοντα όπου αξιοποιείται η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να θεωρηθεί ο Αμερικανός μαθηματικός και παιδαγωγός Saymour Papert του οποίου η θεωρία δομήθηκε με ξεκάθαρη επιρροή από τη θεωρία του Piaget αλλά και με εξίσου ξεκάθαρη διαφοροποίηση από αυτή. Θα πρέπει βέβαια να

σημειωθεί το γεγονός ότι η δομική (constructivist) θεώρηση της μάθησης, η οποία αποτελεί κεντρικό σημείο τόσο στη θεωρία του Piaget όσο και του Papert, διατυπώθηκε για πρώτη φορά πολύ πριν τον Piaget (π.χ. από τον Dewey, 1933), και σύμφωνα με αυτή, η μάθηση των μαθηματικών μπορεί να προσεγγιστεί ως μια διαδικασία που συμβαδίζει με την ανθρώπινη έκφραση, δηλαδή ως κάτι που ο άνθρωπος οικοδομεί (Κυνηγός, 2011).

Ο Piaget μελέτησε την αυξανόμενη ικανότητα των παιδιών να εξάγουν κανόνες μέσα από την εμπειρία τους και να "χτίσουν" γνωστικά αναλλοίωτα (cognitive invariants), στα οποία και έδινε πολύ μεγάλη σημασία αφού τα θεωρούσε ως μέσα ερμηνείας και οργάνωσης του κόσμου. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι δεδομένου ότι η θεωρία του επικεντρώθηκε σε όλα εκείνα τα πράγματα που κρίνονται απαραίτητα προκειμένου να διατηρηθεί η εσωτερική δομή και η οργάνωση του γνωστικού σχήματος, το ενδιαφέρον του ήταν ξεκάθαρα στραμμένο στον πόλο της αφομοίωσης (assimilation) αν αναλογιστούμε το προαναφερθέν δίπολο αφομοίωσης / συμμόρφωσης. Δίνοντας μεγάλη σημασία στον διαφορετικό τρόπο σκέψης των παιδιών στα διαφορετικά στάδια ανάπτυξης τους και περιγράφοντας την εξέλιξη αυτού του τρόπου σκέψης, ο Piaget παρέβλεψε τον ρόλο του πλαισίου (context), τις χρήσεις αλλά και τα μέσα που εμπλέκονται στη διαδικασία της ανθρώπινης μάθησης και ανάπτυξης. Το μειονέκτημα αυτό στη θεωρία του Piaget έρχεται να καλύψει η θεωρία του κονστρουξιονισμού (constructionism) του Papert.

Ο Papert ήθελε να περιγράψει τη **μάθηση** ως **δραστηριότητα που πηγάζει από τη διερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση,** προσέγγισε την εκμάθηση των μαθηματικών ως μια διαδικασία φυσιολογικής εξέλιξης της λογικομαθηματικής σκέψης, παραλληλίζοντάς την με την εκμάθηση της γλώσσας και τόνισε ότι μαθαίνουμε να μιλάμε και να σκεφτόμαστε λογικά πολύ πριν πάμε σχολείο, σε καταστάσεις όπου η μάθηση αυτή πραγματοποιείται καθώς αποκτούμε ικανότητες επιβίωσης και επικοινωνίας στο κοινωνικό και φυσικό μας περιβάλλον (Papert, 1980). Σύμφωνα με τον Κυνηγό, η θεωρία του Piaget βρήκε απολύτως σύμφωνο τον Papert, ο οποίος θεώρησε ως την πλέον σημαντική συνεισφορά του Piaget το γεγονός ότι είδε την ανθρώπινη σκέψη ως επηρεαζόμενη από την οργανική φύση του ανθρώπου και τον φυσικό και κοινωνικό του περίγυρο καθώς και το ότι διέκρινε την εξισορρόπηση

(equilibration), την αυτορύθμιση (self-regulation) και την αυτοεξέταση /αναστοχασμό (reflection) ως έμφυτες ανθρώπινες τάσεις. Στο πλαίσιο αυτό, ο Piaget θεώρησε την ανθρώπινη σκέψη ως μια περίπλοκη δομή από γνωστικά σχήματα (cognitive schemes), δηλαδή δομικούς γνωσιακούς λίθους βασισμένους στην εμπειρία και κάνει επίσης την πρώτη προσπάθεια περιγραφής του τρόπου εξέλιξης ή ανάπτυξης της δομής αυτής, προτείνοντας δύο τρόπους με τους οποίους αυτό συμβαίνει: την αφομοίωση (assimilation), όπου ένα καινούριο γνωστικό σχήμα εντάσσεται στην υπάρχουσα δομή και τη συμμόρφωση (accommodation) όπου, επειδή το νέο γνωστικό σχήμα έρχεται σε σύγκρουση με το υπάρχον, καλείται το άτομο να αναδιοργανώσει την υπάρχουσα γνωστική δομή με σκοπό να εντάξει σε αυτή τη νέα γνώση.

Σύμφωνα με την Ackermann (2001), ο Papert πρέσβευε την άποψη ότι η εξωτερίκευση και η έκφραση των ιδεών είναι το κλειδί της μάθησης. Η έκφραση των ιδεών είναι αυτή που τις καθιστά απτές και ικανές να μοιραστούν, με αποτέλεσμα το άτομο προκειμένου να επικοινωνήσει με τους άλλους να επιθυμεί τη σωστή μορφοποίηση αυτών των ιδεών. Ο κύκλος της αυτο-κατευθυνόμενης μάθησης είναι μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία κατά την οποία το άτομο που μαθαίνει, επινοεί για τον εαυτό του τα μέσα και τα εργαλεία τα οποία υποστηρίζουν την εξερεύνηση των πεδίων που άπτονται του ενδιαφέροντός του. Η θέση αυτή του Papert βρίσκεται σε αρμονία με τους περισσότερους ερευνητές του κοινωνικο-κονστρουκτιβισμού (socio-constructivism) – ανάμεσα τους και ο Vygotsky – οι οποίοι μελέτησαν την επιρροή των πολιτισμικών «κατασκευασμάτων»[24], όπως αυτό της γλώσσας, στην προσπάθεια του ατόμου να βγάλει προς τα έξω το καλύτερο δυνατόν από τις γνωστικές του δυνατότητες. Η διαφορά του Papert από τους κοινωνικο-κονστρουκτιβιστές έγκειται μεταξύ άλλων, σύμφωνα πάντα με την Ackermann, στα διαφορετικά είδη εξωτερικών βοηθημάτων ή μέσων εξωτερίκευσης που ο κάθε ερευνητής μελετάει, με τον Papert να επικεντρώνεται στα ψηφιακά μέσα και στις νέες τεχνολογίες που βασίζονται στους υπολογιστές.

Τόσο ο Piaget όσο και ο Papert ήταν κονστρουκτιβιστές (constructivists) υπό την έννοια ότι θεωρούσαν τα παιδιά ως τους «κατασκευαστές» των προσωπικών, δικών τους, γνωστικών εργαλείων καθώς και της δικής τους

[24] Με τον όρο "κατασκεύασμα" αποδίδεται ο όρος artifact (Κυνηγός 2011, σελ. 32).

πραγματικότητας – έτσι όπως αυτή εξωτερικεύεται από αυτά. Για αυτούς, τόσο η γνώση όσο και ο κόσμος εν γένει κατασκευάζονται και βρίσκονται σε μια διαδικασία συνεχούς ανακατασκευής μέσα από προσωπικές εμπειρίες ενώ η γνώση και ο κόσμος συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους υπό την έννοια ότι η ύπαρξη και η μορφή του ενός εξαρτάται από τον τρόπο κατασκευής του άλλου. Και για τους δύο ερευνητές, κομβικό σημείο αποτελούσε η διερεύνηση των διαδικασιών μέσα από τις οποίες οι άνθρωποι – και όχι μόνο οι μαθητές – καταφέρνουν ξεπερνώντας τις τρέχουσες απόψεις τους για τον κόσμο γύρω τους να κατασκευάσουν μία βαθύτερη κατανόηση για τον εαυτό τους και το περιβάλλον τους, μελετώντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες τα άτομα, κατά τη διαδικασία της μάθησης, είτε διατηρούν είτε αλλάζουν τις θεωρίες τους για ένα συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο μέσω της αλληλεπίδρασης με αυτό.

Η έρευνα του Papert επικεντρώνεται στο πώς η γνώση μορφοποιείται και μετασχηματίζεται μέσα σε συγκεκριμένα πλαίσια, εκφράζεται μέσω διαφορετικών μέσων και υπόκειται σε επεξεργασία στο μυαλό διαφορετικών ατόμων. Ενώ ο Piaget αρέσκεται στην περιγραφή της προέλευσης της εσωτερικής νοητικής σταθερότητας (internal mental stability), ο Papert ενδιαφέρεται για τη δυναμική που ενέχεται στην αλλαγή, το πόσο διαφορετικά σκέφτονται οι άνθρωποι όταν οι πεποιθήσεις τους καταρρέουν, όταν η εναλλακτική θέαση των πραγμάτων βουλιάζει, όταν η προσαρμογή και η επέκταση της τρέχουσας θεώρησης του κόσμου καθίσταται αναγκαία και το ευνοϊκότερο περιβάλλον προκειμένου να προκύψει αυτή η αλλαγή είναι το δυναμικό περιβάλλον που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες.

2.2. Η ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

2.2.1. Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και κατασκευή της μαθηματικής γνώσης

Οι L.Moreno-Armella, S.Hegedus, J.Kaput, (2008) υποστηρίζουν ότι οι συνθήκες γύρω μας επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουμε και αντιλαμβανόμαστε τα Μαθηματικά. Τα παλαιότερα πολιτισμικά πλαίσια ευνοούσαν μία στατική αντίληψη και προσέγγιση των Μαθηματικών μιας και τα διαθέσιμα εργαλεία, για εξάσκηση, ήταν το χαρτί και το μολύβι. Η ψηφιακή

τεχνολογία προσφέρει τη δυνατότητα του δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων, εισάγοντας την κίνηση σε αυτά και επομένως μία νέα οπτική για τη μαθηματική γνώση. Με βάση την παραπάνω προσέγγιση, η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη νέα τεχνολογία είναι μία δυνατότητα την οποία οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν, εφόσον η τεχνολογία από μόνη της επηρεάζει τον τρόπο θεώρησης της μαθηματικής γνώσης και στην ουσία είναι ένας επιπλέον τρόπος αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας (DGS) έχουν τα τελευταία χρόνια συγκεράσει λειτουργίες από τα περιβάλλοντα υπολογιστικής άλγεβρας (CAS) παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα δυναμικών συνδέσεων μεταξύ αλγεβρικών συμβολισμών και διαγραμμάτων, ενώ η δυνατότητα άμεσης ανατροφοδότησης του μαθητή που παρέχουν, ενθαρρύνει στη διαμόρφωση από τον τελευταίο εικασιών, η αλήθεια των οποίων ελέγχεται άμεσα από τον μαθητή με τη βοήθεια του περιβάλλοντος. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διατύπωση εικασιών είναι κομβικό σημείο στην πορεία της μαθησιακής διαδικασίας. Ο χειρισμός, από τους μαθητές, δυναμικών σχημάτων, έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να καθίστανται ικανοί να προβούν σε γεωμετρικές αιτιολογήσεις των εικασιών που έχουν προηγούμενα διατυπώσει. Οι μαθητές μπορούν μέσα από την παρατήρηση των αλλαγών που λαμβάνουν χώρα σε μία αναπαράσταση, όταν μεταβάλλονται άλλες συνδεδεμένες με αυτή αναπαραστάσεις, να διαπιστώσουν συνδέσεις και να προβούν μέσα από αυτές σε γενικεύσεις.

Το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας είναι συμβατό με τις δύο βασικές αρχές του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού:

- ☞ Η γνώση *κατασκευάζεται ενεργητικά* από το υποκείμενο και δε «συλλαμβάνεται» παθητικά από το περιβάλλον.
- ☞ Η γνώση είναι μία διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των *εμπειριών* και όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου ο όποιος είναι ανεξάρτητος από τον γνώστη (Von Glaserfeld, 1996).

Οι προηγούμενες αρχές μπορούν να υλοποιηθούν σε σημαντικό βαθμό με τη χρήση του περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας. Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και ειδικά το Geogebra δίνει τη δυνατότητα, μέσω των έτοιμων εργαλείων που προσφέρει και που είναι προσαρμοσμένα στους περιορισμούς και τις απαιτήσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά και της

Άλγεβρας, για κατασκευές γεωμετρικών αντικειμένων που διατηρούν τις μαθηματικές σχέσεις που τα διέπουν. Σε αυτό το περιβάλλον οι μαθητές μπορούν να εικάσουν και να γενικεύσουν κάνοντας ένα απλό κλικ σε συγκεκριμένα σημεία της κατασκευής, με το περιβάλλον να ξανασχεδιάζει δυναμικά και να ανανεώνει τις πληροφορίες στην οθόνη καθώς ο μαθητής σέρνει το ποντίκι (Moreno-Armella, Hegedus, Kaput, 2008). Με τον τρόπο αυτόν, ο μαθητής *δρα* πάνω στο μαθηματικό αντικείμενο εφόσον μπορεί να το μετασχηματίσει, να του αλλάξει θέση, να το μεγεθύνει, να αναιρέσει την προηγούμενη κατασκευή και επομένως να κάνει εικασίες τις οποίες μπορεί να επιβεβαιώσει αλλά και να απορρίψει μέσω ανατροφοδότησης του προγράμματος χωρίς δηλαδή να είναι αναγκαία η επιβεβαίωση ή απόρριψη από τον εκπαιδευτικό (Ainley et al, 2005). Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση ενεργητικά.

Σημαντικός είναι και ο ρόλος της οπτικοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση μιας και τα Μαθηματικά δε μαθαίνονται μόνο λεκτικά. Με τη χρήση του δυναμικού περιβάλλοντος και την απαίτηση οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα οπτικά ερεθίσματα που αυτό προσφέρει, αίρεται ως ένα βαθμό η μονομέρεια που παρατηρείται στη μαθηματική εκπαίδευση με την κυριαρχία της αλγεβρικής αιτιολόγησης σε σχέση με άλλες μορφές της, όπως γεωμετρική ή λεκτική. Η γεωμετρική- οπτική προσέγγιση είναι μεν δυσκολότερη από την αλγεβρική αλλά προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα στην προσπάθεια κατάκτησης της μαθηματικής γνώσης. Εν τάχει είναι ολιστική και επιτρέπει την αντιμετώπιση ενός προβλήματος συνολικά, με μία ματιά, σε αντίθεση με την αλγεβρική που είναι αναλυτική και ακολουθιακή και απαιτεί βήμα προς βήμα προσέγγιση.

2.2.2. Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και απόδειξη

Μία από τις ουσιαστικές διαφορές των κατασκευών στα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας σε σχέση με την ίδια δραστηριότητα σε χαρτί και με μολύβι, είναι ότι, στα περιβάλλοντα αυτά ισχύει σχεδόν ανεξαρτησία (quasi-independence) των σχημάτων από τον χρήστη υπό την έννοια ότι εάν μεταβληθεί ένα από τα στοιχεία του σχήματος, όταν αυτά έχουν κατασκευαστεί με τους όρους της ευκλείδειας γεωμετρίας αλλάζει ταυτόχρονα ολόκληρη η

κατασκευή, σε αντίθεση με το χαρτί και το μολύβι όπου οι μαθητές μπορούν να στρεβλώσουν την κατασκευή έτσι ώστε να ταιριάξει με αυτό πού αναμένουν (Laborde, 2005). Αυτή η δυνατότητα του περιβάλλοντος επηρεάζει την έννοια της απόδειξης. Στο πλαίσιο των στατικών μαθηματικών, η εγκυρότητα μιας απόδειξης βασίζεται στο κριτήριο του κανόνα και του διαβήτη ή της αλγεβρικής απόδειξης. Είναι όμως γνωστό ότι η αποδεικτική διαδικασία κυρίως στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας από την πλευρά των μαθητών τείνει να θεωρείται περιττή και χωρίς ουσιαστικό ρόλο στη μαθηματική αιτιολόγηση. Οι μαθητές, πολλές φορές δεν καταφέρνουν να εκτιμήσουν τη διαφορά μεταξύ εμπειρικής αιτιολόγησης και παραγωγικής αιτιολόγησης (Balacheff, 1988; Chazan, 1993; Finlow-Bates, 1994; Martin & Harel, 1989; Porteous, 1990; στο Hoyles & Jones, 1998). Για πολλούς μαθητές η απόδειξη δεν προσφέρει κάτι το ουσιαστικό, εφόσον για πολλούς φαίνεται προφανές, π.χ. κάποιος να αποδείξει ότι οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, εφόσον το βλέπει ήδη (Hanna and Jahnke, 1993; Tall, 1992; de Villiers, 1990 στο Hoyles & Jones, 1998). Από τη στιγμή όμως που η απόδειξη βρίσκεται στην καρδιά των Μαθηματικών είναι απαραίτητο να δημιουργηθούν καινοτόμες δραστηριότητες έτσι ώστε να δοθεί η δυνατότητα να δημιουργηθούν συνδέσεις μεταξύ εμπειρικής και παραγωγικής αιτιολόγησης (Hoyles &Jones, 1998). Το λογισμικό μπορεί να λειτουργήσει ως ένα πλαίσιο μέσα από το οποίο οι μαθητές θα μπορέσουν να συνδέσουν την εμπειρική αιτιολόγηση και την τυπική απόδειξη, μέσα από τη δυνατότητα που τους δίνεται να κάνουν δυναμικές κατασκευές οι οποίες έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τη δομή της κατασκευής, δηλαδή να είναι σχεδόν ανεξάρτητες από τον χρήστη, κάτι το οποίο δεν ήταν δυνατόν να συμβεί με χαρτί και με μολύβι. Η C. Laborde (2000) αναφέρει: «Χωρίς αμφιβολία το δυναμικό περιβάλλον είναι αυτό που ενθαρρύνει την αλληλεπίδραση μεταξύ κατασκευής και απόδειξης όταν ο μαθητής «πράττει» στον υπολογιστή και δικαιολογεί με θεωρητικά τυπικά επιχειρήματα» συμφωνώντας με τον Hoyles ο οποίος αναφέρει: «ο ρόλος του υπολογιστή είναι να κάνει τις κατασκευαστικές μεθόδους σαφείς και φανερές, να επιτρέψει τον στοχασμό πάνω στις ιδιότητες , να κάνει έλεγχο, να αποκτήσει άμεση ανατροφοδότηση και το σημαντικότερο να ενθαρρυνθεί μία … πειραματική ατμόσφαιρα την οποία ο δάσκαλος θα μπορέσει να εκμεταλλευθεί

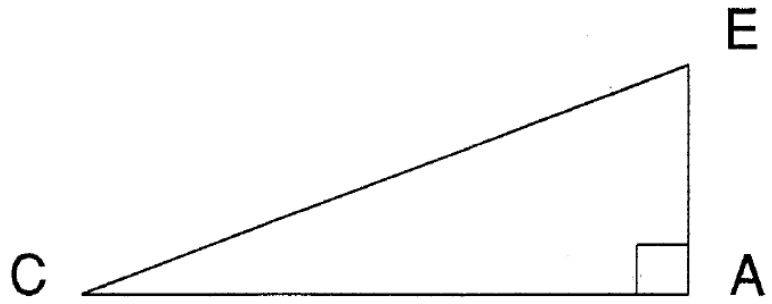
για να εισάγει τυπικές αποδείξεις με τρόπους που να συνταιριάζονται παρά να λειτουργούν συμπληρωματικά με τις κατασκευές των μαθητών».

2.2.3. Οι πρωτοτυπικές μορφές και το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας

Ως πρωτοτυπικές μορφές μίας κατηγορίας είναι τα μέλη της κατηγορίας που τείνουν να θεωρούνται πιο κεντρικά, με την έννοια ότι την αντιπροσωπεύουν καλύτερα σε σχέση με κάποια άλλα που θεωρούνται περιφερειακά με την έννοια ότι είναι λιγότερο αντιπροσωπευτικά. Η επίδραση αυτού του φαινομένου είναι πολύ σημαντική στην επίλυση προβλημάτων που προσεγγίζονται οπτικά (Presmeg, 1992). Οι πρωτοτυπικές μορφές γενικά δε λειτουργούν πάντοτε αρνητικά, όμως σε πάρα πολλές περιπτώσεις δημιουργούν εμπόδια στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Πχ. σε έρευνά της η Presmeg αναφέρει διάλογο μαθητή, ο οποίος ήθελε η ορθή γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου να είναι σχεδιασμένη στη δεξιά πλευρά της βάσης του τριγώνου για να ταιριάζει με την πρωτοτυπική μορφή που αυτός είχε σχηματίσει στο μυαλό του σε σχέση με τη μορφή του ορθογωνίου τριγώνου:

Crispin T: I see that I've got a triangle AEC [*drawing it*]. In the same plane I've got … EC going across … and that's 90 degrees. Let's draw it so that I can see what I'm doing.
Interviewer: It was alright as you had it.
CT: I just wanted to put my 90 degrees in this corner here.

(Presmeg, 1985, p. 168)



Οι προηγούμενες δυνατότητες του δυναμικού περιβάλλοντος επιτρέπουν στον μαθητή να δει τα ίδια σχήματα από διαφορετικές οπτικές με συνέπεια την αποτροπή της δημιουργίας παραπλανητικών πρωτοτυπικών μορφών σε σχέση με τη φύση των γεωμετρικών σχημάτων, εφόσον του δίνεται η δυνατότητα να

τα εντοπίσει και σε περιπτώσεις που βρίσκονται σε διαφορετικές από τη συνήθη τους θέση.

2.2.4. Η σημειωτική διαμεσολάβηση και τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

Η οπτική του Vygotsky ερμηνεύει τη διαμεσολαβητική δράση των εργαλείων στο σχηματισμό των εννοιών ως εξής: μέσα από τον τρόπο χρήσης ενός εργαλείου (tool), παράγονται τα σημεία (signs), τα οποία, μέσα από τη σύνθετη διαδικασία της εσωτερίκευσης που επιτυγχάνεται από την κοινωνική αλληλεπίδραση, μπορεί να σχηματίσουν καινούρια νοήματα. Με αυτόν τον τρόπο, ένα εργαλείο μπορεί να λειτουργήσει σαν *σημειωτικός διαμεσολαβητής.* Αρχικά λοιπόν, ένα εργαλείο, έχοντας εξωτερικό προσανατολισμό, χρησιμοποιείται με έναν συγκεκριμένο τρόπο για την εκτέλεση μίας εργασίας και έπειτα, μέσα από σημειωτικές διεργασίες υπό την καθοδήγηση ενός ειδικού όπως π.χ. του δασκάλου, μπορεί να καλλιεργηθεί μία διαδικασία εσωτερίκευσης η οποία θα παράξει ένα νέο *ψυχολογικό εργαλείο.* Το νέο αυτό εργαλείο είναι τώρα εσωτερικά προσανατολισμένο, πλήρως τροποποιημένο αλλά διατηρεί ακόμα κάποια χαρακτηριστικά του αρχικού εργαλείου. Η σύνθετη αυτή σημειωτική διαδικασία εξηγεί υπό ποία έννοια το αρχικό εργαλείο μπορεί να θεωρηθεί ως *όργανο σημειωτικής διαμεσολάβησης* (Falcade, Laborde, Mariotti, 2007).

Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και οι δυνατότητες που προσφέρουν όπως το σύρσιμο (dragging) και το εργαλείο ίχνος (trace tool) μπορούν να ερμηνευθούν μέσα από την οπτική του Vygotsky και την έννοια της *σημειωτικής διαμεσολάβησης.* Το εργαλείο που δίνει τη δυνατότητα για το σύρσιμο των αντικειμένων μπορεί να θεωρηθεί ως το σύμβολο που αναφέρεται στην ιδέα της παραβολής ως γεωμετρικός τόπος. Το εργαλείο ίχνος είναι το σύμβολο που αναφέρεται στη μαθηματική ιδέα της τροχιάς. Το προσωπικό νόημα αφορά στην ιδέα ότι το σύνολο από σημεία πληρεί κάθε φορά μία συγκεκριμένη ιδιότητα (Falcade, Laborde, Mariotti, 2007).

2.3. ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η φύση των Μαθηματικών εννοιών απασχόλησε σχεδόν όλους τους σημαντικούς φιλοσόφους που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της κατανόησης του κόσμου που μας περιβάλλει. Τα ειδικά χαρακτηριστικά τους, όπως η καθολικότητα, η αναγκαιότητα καθώς και η ανεξαρτησία τους από την εμπειρία οδήγησε φιλοσόφους όπως ο Πλάτωνας να τα χρησιμοποιήσει ως μοντέλο για να περιγράψει τον ιδεατό του κόσμο, τον Κόσμο των Ιδεών. Σε αυτό το ιστορικό σημείο τέθηκε για πρώτη φορά ίσως το ζήτημα της διχοτομίας των αναπαραστάσεων των Μαθηματικών εννοιών, σε «τέλειες εσωτερικές» και «ατελείς εξωτερικές» όπου οι δεύτερες αποτελούν το στήριγμα ώστε να αποκτήσουμε πρόσβαση στις πρώτες. Η προηγούμενη διχοτομία και η γεφύρωσή της απασχολεί έως και σήμερα τη Μαθηματική Κοινότητα και ιδιαιτέρως εκείνο το τμήμα της που ασχολείται με τη Διδακτική των Μαθηματικών.

2.3.1. Ορισμός αναπαράστασης – Εσωτερικές, Εξωτερικές αναπαραστάσεις

Η λέξη αναπαράσταση έχει διάφορες ερμηνείες, κυρίως λόγω των διαφορετικών θεωρητικών πλαισίων εντός των οποίων ορίζεται το περιεχόμενό της. Ο Kaput (1987) περιγράφει τις αναπαραστάσεις ως να αφορούν « δύο σχετικές αλλά λειτουργικά ξέχωρες οντότητες ... τον κόσμο των αναπαραστάσεων και τον αναπαριστώμενο κόσμο», και περιγράφει τέσσερις τύπους αναπαραστάσεων:

α. γνωστικό και αντιληπτικό, **β.** επεξηγηματικό που αφορά σε μοντέλα, **γ.** μαθηματικές αναπαραστάσεις και **δ.** εξωτερικές αναπαραστάσεις. Αργότερα (Kaput 1989) όταν αναφέρεται σε ένα αναπαραστατικό σύστημα εννοεί μία αντιστοιχία μεταξύ δύο συμβολικών συστημάτων (π.χ. εξισώσεων, γραφικών παραστάσεων και πίνακες τιμών) και χρησιμοποιεί εναλλάσσοντας τους όρους σύστημα αναπαράστασης και συμβολικό σύστημα. Σύμφωνα με τον ορισμό του J. Kaput (1987, σελ. 23, στο Γαγάτσης, κ.α., 2008, σελ.147) η έννοια της αναπαράστασης αποτελείται από πέντε ολότητες:

1. Την ολότητα που αναπαρίσταται.

2. Την ολότητα που αναπαριστά
3. Τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται.
4. Τις συγκεκριμένες πτυχές (στοιχεία) της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση.
5. Την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Ο Γαγάτσης (2008) θεωρεί ότι ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται ότι η αναπαράσταση είναι ένα νοητικό σύμβολο ή μία έννοια, που αντιπροσωπεύεται από ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο. Το υλικό σύμβολο της αναπαράστασης αποτελεί το *σημαίνον-signifier,* και η έννοια η οποία αναπαρίσταται με το σύμβολο αποτελεί το *σημαινόμενο-signified* (Κλαουδάτος, 1996).

Το γεγονός ότι ένα σύμβολο αντιστοιχεί σε μία έννοια στο νου οδηγεί σε μία διάκριση των αναπαραστάσεων (Κλαουδάτος, 1996) την οποία οι Lesh, Post & Behr (1987) χαρακτηρίζουν τεχνητή, παρόλα αυτά όμως προτείνεται από αρκετούς ερευνητές (De Loache et. Al, 1998, Goldin& Kaput, 1996, Janvier, 1987, Roth& McGinn, 1998, Seeger, 1998 στο Γαγάτσης, 2008). Σύμφωνα με την παραπάνω διάκριση, οι αναπαραστάσεις μπορούν να τοποθετηθούν σε δύο είδη:

α. στις *εξωτερικές* και **β.** στις *εσωτερικές*.

Ο όρος *εσωτερικές αναπαραστάσεις* αναφέρεται σε νοητικούς σχηματισμούς που οικοδομεί το άτομο για να αναπαραστήσει την πραγματικότητα, και οι οποίες δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Σε αυτού του είδους τις αναπαραστάσεις έχουμε πρόσβαση μόνο μέσω της παρατηρήσιμης συμπεριφοράς που εκδηλώνει το άτομο όταν αυτό εργάζεται. Ένας από τους κύριους ρόλους της διδασκαλίας είναι η δημιουργία νοητικών (εσωτερικών) αναπαραστάσεων. Βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου (Dufour-Janvier, et.al 1987, στο Γαγάτσης, 2000, σελ. 147).

Ο όρος *εξωτερικές αναπαραστάσεις* αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς – σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα- οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν μία συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα. Βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος (Dufour-Janvier, et.al 1987, στο Γαγάτσης, 2000, σελ 147). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν

το ερέθισμα για τις αισθήσεις, ώστε να δημιουργηθούν οι εσωτερικές-νοητικές αναπαραστάσεις.

Στο πεδίο των μαθηματικών οι Vinner& Herschowitz (1980), Tall & Vinner (1981) και Vinner (1983) για να περιγράψουν την ιδιαίτερη φύση των εσωτερικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας εισήγαγαν τον όρο *Εικόνα Έννοιας* (*Concept Image*) σε αντίθεση με τον *Ορισμό Έννοιας (Concept Definition).* Με τον όρο εικόνα έννοιας ονομάζουν τη γνωστική δομή που περιλαμβάνει όλες τις ιδιότητες και διαδικασίες που σχετίζει το άτομο με το όνομα της έννοιας (Tall & Vinner, 1981). Στόχος ήταν να καταδείξουν ότι η εσωτερική αναπαράσταση μίας έννοιας και ο τρόπος που τη χρησιμοποιούμε, πολλές φορές δεν συνάδει με τον επίσημο ορισμό της. Η εικόνα έννοιας, και κατά συνέπεια οι εσωτερικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας, είναι προσωπικές νοητικές κατασκευές που σχετίζονται με την έννοια. Για την οικοδόμηση μίας έννοιας στο νου του μαθητή είναι απαραίτητη η αλληλεπίδραση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων και επομένως ζητούμενο για τη διδασκαλία. Οι Goldin & Kaput (1996) και Kaput (1998) (στο Γαγάτσης, 2008) τονίζουν την παραπάνω αλληλεπίδραση και επισημαίνουν ότι η σχέση είναι αμφίδρομη.

Ο Janvier (1987, στο Gagatsis, Christou, Elia, 2004) ορίζει ως διαδικασία *μετάφρασης* όλες τις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται κατά τη διάρκεια της μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Το National Council of Teaching Mathematics (NCTM) αναγνωρίζει ότι η ευχέρεια του ατόμου να μεταφράζει μια μαθηματική έννοια ή ένα πρόβλημα από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, αποτελεί κρίσιμο παράγοντα ώστε το άτομο να κάνει και να μάθει μαθηματικά (NCTM, 2000). Ο κεντρικός ρόλος που παίζει η ικανότητα μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη ή αλλιώς η σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων μίας έννοιας στη μάθηση των μαθηματικών, φαίνεται και από το πλήθος ερευνών που αναφέρονται στην αναγκαιότητα και στις δυσκολίες σύνδεσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον Hitt (1998) ένας από τους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνάνε από τη μια αναπαράσταση στην άλλη χωρίς να πέφτουν σε

αντιφάσεις. Ο Archavi (2003), αναλύοντας τον ρόλο των οπτικών αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών, υποστηρίζει ότι η εγκαθίδρυση μίας ευέλικτης και επαρκούς σύνδεσης μεταξύ οπτικής (γραφικής) και αναλυτικής (αλγεβρικής) αναπαράστασης αποτελεί πολλές φορές τον πυρήνα για την κατανόηση αρκετών μαθηματικών εννοιών.

2.3.2. Δυσκολίες σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων

Η διδασκαλία της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας στο σύγχρονο σχολικό πρόγραμμα πραγματοποιείται με τέτοιο τρόπο, σαν να είναι δύο απολύτως διακριτά αντικείμενα. Η γέννηση και η εξέλιξη των δύο αυτών βασικών αντικειμένων των μαθηματικών όμως δε συνάδει με την παραπάνω παγιωμένη αντίληψη. Ο V.Katz (2007), στην ανάλυσή του για τα ιστορικά στάδια ανάπτυξης της Άλγεβρας, υποστηρίζει ότι η Γεωμετρία αποτέλεσε το πρωταρχικό στήριγμα για την εξέλιξη της Άλγεβρας. Ο Van der Waerden (2000) κάνει λόγο για τη γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων ελλήνων εφόσον στα πρώτα βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη οι αλγεβρικές έννοιες και αποδείξεις πραγματοποιούνταν δια μέσω της Γεωμετρίας. Σε κάθε περίπτωση, και μέχρι το 17ο αιώνα, τόσο η Γεωμετρία όσο και η Άλγεβρα διατηρούσαν την αυτονομία τους, με τη Γεωμετρία να αποτελεί το καλά θεμελιωμένο σύστημα στο οποίο βασίζονταν οι μαθηματικοί της εποχής για να νομιμοποιήσουν, μέσα από την γεωμετρική απόδειξη, κάθε σημαντική ανακάλυψη στα μαθηματικά, σε αντίθεση με την Άλγεβρα, η οποία λόγω της ανεπαρκούς ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού δεν είχε καταφέρει να θεμελιωθεί στο αντίστοιχο επίπεδο. Η ανάγκη των επιστημόνων του μεσαίωνα και της αναγέννησης να μελετήσουν την κίνηση και επομένως γενικές καμπύλες «επέβαλε» τη χρήση του καρτεσιανού επιπέδου. Το καρτεσιανό επίπεδο από τότε και έπειτα αποτέλεσε το βασικό αναπαραστασιακό πλαίσιο όπου πραγματοποιείται η ενοποίηση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία.

Οι κωνικές τομές είναι το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα, όπου ένας γεωμετρικός τόπος σημείων μέσα από την αναπαράστασή του στο καρτεσιανό επίπεδο, αποκτά αλγεβρική υπόσταση. Η κατανόηση των κωνικών τομών και ο χειρισμός προβλημάτων, τα οποία σχετίζονται με τις κωνικές τομές, από την πλευρά των μαθητών απαιτεί την κατανόηση των συνδέσεων που προσφέρει το

καρτεσιανό επίπεδο. Στην προκειμένη περίπτωση, η έννοια της παραβολής μπορεί με μία απλή στροφή των αξόνων να παριστάνει ή να μην παριστάνει συνάρτηση. Με άλλα λόγια κάποιες συναρτήσεις μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις κωνικών τομών, π.χ. η $y=2px^2$ ανάλογα με το ποια μεταβλητή θα θεωρηθεί εξαρτημένη μπορεί να παριστάνει ή όχι συνάρτηση. Η βιβλιογραφία έχει μελετήσει σε βάθος τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την προσπάθεια σύνδεσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Λόγω ακριβώς της συγγένειας των κωνικών τομών και των συναρτήσεων, θα αναφερθούμε στα προβλήματα σύνδεσης της αλγεβρικής και γεωμετρικής (γραφικής) αναπαράστασης της συνάρτησης.

Ο Knuth (2000), σε έρευνα που αφορούσε στην κατανόηση των συνδέσεων μεταξύ αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης γραμμικών εξισώσεων σε πρωτοετείς φοιτητές, διαπίστωσε ότι στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι απαντήσεις των φοιτητών βασίζονταν στην αλγεβρική αναπαράσταση, ακόμη και σε προβλήματα που η γραφική αναπαράσταση παρείχε ευκολότερο δρόμο προς τη λύση. Η στάση των φοιτητών υποδεικνύει ότι η γραφική αναπαράσταση αντιμετωπίζεται είτε σαν να είναι περιττή είτε σαν να έχει δευτερεύοντα ρόλο σε σχέση με την αλγεβρική, με τον ρόλο αυτόν να περιορίζεται στο να υποστηρίξει τις λύσεις που προκύπτουν αλγεβρικά. Τα ευρήματα είναι σε συμφωνία με αυτά των Yersuslamy & Schwartz (1993, στον Knuth, 2000) οι οποίοι επιβεβαιώνουν την τάση των μαθητών να θεωρούν τη γραφική αναπαράσταση περιττή. Η προσκόλληση των φοιτητών στην αλγεβρική αναπαράσταση δείχνει, σύμφωνα με τον Knuth (2000), ότι δεν έχουν αναπτύξει την ευελιξία που απαιτείται ώστε να μπορούν να επιλέγουν την κατάλληλη, κάθε φορά, αναπαράσταση διότι οι συνδέσεις που έχουν αναπτυχθεί είναι επιφανειακές. Πιθανές αιτίες αυτής της τάσης μπορεί να είναι ότι η διδασκαλία καλλιεργεί κυρίως την αλγεβρική προσέγγιση, εφόσον στους μαθητές δίνονται προβλήματα που συνήθως απαιτούν τη μετάφραση της αλγεβρικής αναπαράστασης (εξίσωση) στη γραφική αναπαράσταση (Leinhardt et al., 1990). Αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να μην μπορούν να 'διαβάσουν' τη γραφική παράσταση εφόσον αυτή «είναι χρήσιμη μόνο σε εκείνους που ξέρουν σε ποιο σημείο να εστιάσουν» (Larkin & Simon, 1987 στον Knuth, 2000).

Ο Eisenberg (1991) συμφωνεί ότι οι μαθητές προτιμούν να σκέφτονται με τον αναλυτικό τρόπο (μέσα από την επίλυση εξισώσεων) χωρίς να χρησιμοποιούν τα γραφήματα ως στήριγμα για τη λύση προβλημάτων, ακόμα και σε περιπτώσεις που η αναφορά στο γράφημα ή στο γεωμετρικό σχήμα είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος. Το γεγονός αυτό το αποδίδει σε ιστορικούς λόγους εφόσον, με την πάροδο των χρόνων, η μαθηματική πρακτική κατέληξε να δέχεται ως έγκυρες μόνο τις μαθηματικές προτάσεις που αποδεικνύονται αναλυτικά. Έτσι, η οπτική αναπαράσταση των αλγεβρικών εννοιών απέκτησε έναν δευτερεύοντα ρόλο στην Άλγεβρα και στα μαθηματικά εν γένει. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι η αριθμητικοποίηση των μαθηματικών και ο εξοβελισμός της οπτικοποίησης που επιβλήθηκε από τους Hilbert και Bourbaki παρήγαγε γενιές από «ημι-εγγράμματους» στα μαθηματικά. Διότι πολλές φορές, οι αναλυτικές αποδείξεις δεν μπορούν να αναδείξουν τις μεγάλες ιδέες που υποκρύπτονται σε αυτές. Ενώ μέσα από την οπτικοποίηση οι ιδέες αυτές μπορούν γίνουν πιο εμφανείς , ιδιαίτερα σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι βρίσκονται στη διαδικασία της οικοδόμησης μαθηματικών εννοιών. Άλλωστε και ο Hilbert, όπως ο ίδιος αναφέρει (Hadamard, 1945 στον Eisenberg, 1991), για να κάνει την απόδειξη του Θεωρήματος Jordan, ακουμπούσε νοητικά σε κάποιο διάγραμμα. Η κυριαρχία της αλγεβρικής προσέγγισης στα ανώτερα μαθηματικά, κυρίως μέσα στον 20ο αιώνα, σύμφωνα με τον Eisenberg (1991) επηρέασε και τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αφού οι καθηγητές των μαθηματικών δεν έχουν μάθει να χρησιμοποιούν τις οπτικές αναπαραστάσεις.

Η R.Even (1998) επιβεβαιώνει το γεγονός ότι η αλγεβρική προσέγγιση είναι κυρίαρχη, όταν οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα που απαιτούν σύνδεση μεταξύ αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης. Επιπλέον προτείνει τρεις παράγοντες που επηρεάζουν την παραπάνω σύνδεση:

α. τρόπος αντιμετώπισης της αλγεβρικής έννοιας από τους μαθητές

Οι αλγεβρικές έννοιες όπως συναρτήσεις ή και κωνικές τομές μπορούν να προσεγγιστούν είτε «κατά σημείο» (pointwise approach) είτε «σφαιρικά» (global approach). Μία αλγεβρική έννοια προσεγγίζεται *κατά σημείο* όταν το ενδιαφέρον εστιάζεται σε συγκεκριμένα σημεία είτε της γραφικής παράστασης

είτε διατεταγμένου ζεύγους π.χ. όταν από την εξίσωση μέσω αντικατάστασης τιμών στο x προκύπτουν τιμές οι οποίες τοποθετούνται στο καρτεσιανό επίπεδο. Αντίστοιχα, η έννοια προσεγγίζεται *σφαιρικά* όταν το πεδίο εστίασης του ενδιαφέροντος μετατοπίζεται στο σύνολο όλων των δυνατών σημείων που μπορούν να προκύψουν από έναν αναλυτικό τύπο ή μια γραφική παράσταση, π.χ. σφαιρική αντίληψη της έννοιας απαιτείται όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση μίας εξίσωσης ή να βρούμε τα μέγιστα η ελάχιστα μίας συνάρτησης.

Η R. Even (1998) παραθέτει έρευνες (Bell & Janvier, 1981, Janvier, 1978, Lovell, 1971, Monk, 1978, Even, 2000) που υποστηρίζουν ότι όταν ένας μαθητής επιλέγει τη σφαιρική προσέγγιση για να λύσει ένα πρόβλημα, υποδεικνύει ότι έχει καλύτερη κατανόηση των υφιστάμενων συνδέσεων μεταξύ αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης σε σύγκριση με την περίπτωση που ο μαθητής επιλέξει να προσεγγίσει το πρόβλημα κατά σημείο. Τα ευρήματα της έρευνας της Even συμφωνούν εν μέρει με την παραπάνω διαπίστωση, όμως αμφισβητείται η τάση για γενίκευση αυτής της θέσης διότι παρατήρησε ότι αφενός μεν υπήρχαν μαθητές που χρησιμοποίησαν σφαιρική προσέγγιση και δεν είχαν κατανοήσει το νόημα του γραφήματος και αφετέρου σε πολλές περιπτώσεις η κατά σημείο προσέγγιση ήταν πιο χρήσιμη από τη σφαιρική. Έτσι καταλήγει στο συμπέρασμα ότι συνδυασμός των δύο προσεγγίσεων είναι αυτός που διευκολύνει της λύση ενός προβλήματος, το οποίο απαιτεί την ευέλικτη χρήση αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης.

<u>*β. το πλαίσιο παρουσίασης του προβλήματος*</u>

Η Even διαπίστωσε, ότι εξαιτίας της δυσκολίας κάποιων φοιτητών να χειριστούν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, δεν μπορούσαν να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της ημ(x+1) ενώ τους δίνονταν η γραφική παράσταση της ημx. Παρόλο που η λύση του προβλήματος δεν απαιτούσε γνώσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων, για κάποιους φοιτητές η ύπαρξη και μόνο τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποπροσανατόλισε και εν τέλει αποτέλεσε εμπόδιο.

γ. υποκείμενες έννοιες

Η Even υποστηρίζει ότι η «ποιότητα κατανόησης των υποκείμενων εννοιών επηρεάζει την ικανότητα μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη». Φέρνει ως παράδειγμα, την κατανόηση της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών. Η έλλειψη κατανόησης της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών δυσκόλεψε του φοιτητές να αντιμετωπίσουν το ερώτημα σχετικά με τη γραφική παράσταση της $g(x) = \begin{cases} x, \alpha\nu \;\; x \;\; \rho\eta\tau o\varsigma \\ 0, \alpha\nu \; x \;\; \alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma \end{cases}$.

Οι Gagatsis et.al. (2003) σε έρευνα που σχετίζονταν με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης περιέγραψε το φαινόμενο της στεγανοποίησης (compartmentalizazion). Με τον όρο στεγανοποίηση ονομάζει την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας αποτελούν διαφορετικές οντότητες, και κατά συνέπεια να μην είναι σε θέση να μεταφράσουν τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται στην προσπάθεια των μαθητών να ανταπεξέλθουν σε προβλήματα που απαιτούν ευελιξία στην εναλλακτική χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων όπως στη περίπτωση της συνάρτησης και κατ' επέκταση των κωνικών τομών όπου είναι απαραίτητος ο συντονισμός της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης.

2.4. ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Η εισαγωγή και χρήση γραμμάτων από τον F. Vietta (1540-1603) για να συμβολίσει «γενικές ή ακαθόριστες ποσότητες» αποτέλεσε σύμφωνα με τον Cajory (1980) μία μνημειώδη καινοτομία για την ανάπτυξη της Άλγεβρας. Ο συμβολισμός μέσω της χρήσης γραμμάτων αντί αριθμών ή προτάσεων, αποτέλεσε ένα ισχυρό όπλο για την υπερπήδηση των εμποδίων που ενυπήρχαν στη ρητορική Άλγεβρα του Διόφαντου και των επιγόνων του. Η χρήση των γραμμάτων ως μαθηματικά σύμβολα έδωσε τη δυνατότητα να συμπυκνωθούν νοήματα και μακρόσυρτες διαδικασίες ώστε να είναι σε θέση ο ανθρώπινος νους

να τις χειριστεί. Τα "*προϊόντα"* της συμπύκνωσης συνήθως μετατρέπονται με μια αλλαγή οπτικής σε αντικείμενα της θεωρίας πάνω στα οποία εφαρμόζονται καινούριες διαδικασίες κ.ο.κ. Την ψυχολογική διαδικασία της συμπύκνωσης την περιέγραψε ο Piaget με τον όρο encapsulation. Η Sfard (1991) με τη σειρά της συνδυάζοντας τις απόψεις του Piaget με την ιστορική ανάπτυξη κάποιων βασικών αλγεβρικών εννοιών κατέληξε στο συμπέρασμα ότι από τη φύση τους οι αλγεβρικές έννοιες χαρακτηρίζονται από κάποιου είδους δυϊκότητα: οι μαθηματικές έννοιες προέκυψαν από τη συμπίεση διαδικασιών. Οι Gray & Tall (1994) υποστήριξαν ότι η δυϊκότητα αυτή εκφράζεται μέσα από το σύμβολο που χρησιμοποιείται για να αναπαρασταθεί ταυτόχρονα η διαδικασία και η έννοια. Η ικανότητα πλέον για τον χειρισμό των αλγεβρικών εννοιών (όπως π.χ. η έννοια του κλάσματος ή η έννοια της συνάρτησης) εξαρτάται από τη δυνατότητα του μαθητή να χρησιμοποιεί με ευελιξία την αμφισημία των συμβόλων.

Στο ίδιο πνεύμα η Bloedy-Vinner (2001) υποστήριξε ότι το νόημα των γραμμάτων σε μία αλγεβρική έκφραση (όπως π.χ. εξίσωση, ταυτότητα) εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται. Τα συμφραζόμενα του προβλήματος είναι αυτά που καθορίζουν τη σημασία των γραμμάτων. Σε πολλές περιπτώσεις η λύση ενός προβλήματος απαιτεί να ειδωθεί το ίδιο γράμμα με άλλο νόημα. Ο Kuchemann (1978, στου Weinberg, κ.α. 2004, 1981 στης Bloedy-Vinner) εντόπισε και κατέγραψε κάποιες από τις διαφορετικές ερμηνείες των γραμμάτων στη σχολική Άλγεβρα. Η Bloedy-Vinner χρησιμοποίησε τρεις από τις κατηγορίες του Kuchemann οι οποίες σχετίζονται με την έννοια της μεταβλητής και της παραμέτρου. Έτσι για να είναι σε θέση οι μαθητές να αντιμετωπίσουν με επιτυχία τα διάφορα αλγεβρικά προβλήματα πρέπει να μπορούν να αντιμετωπίσουν τα γράμματα:

α. ***ως ειδικούς αγνώστους***: το γράμμα έχει μία συγκεκριμένη άλλα άγνωστη τιμή. Η οπτική αυτή απαιτείται για την επίλυση εξισώσεων ή για την κατάστρωση εξισώσεων που θα επιλύσουν προβλήματα,

β. ως ***γενικευμένους αριθμούς***: το γράμμα μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές. Είναι οπτική που απαιτείται για την κατανόηση

των ταυτοτήτων ή προβλημάτων της μορφής Λ+Μ+Ν= Λ+Π+Ν, όπου κάθε γράμμα μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές, και

γ. ως ***μεταβλητές:*** είναι η οπτική που απαιτείται για την κατανόηση σχέσεων μεταξύ συνόλων από ακαθόριστες τιμές (όπως π.χ. στις συναρτήσεις). Σε αυτή την περίπτωση τα γράμματα αναπαριστούν το εύρος ακαθόριστων τιμών. Σύμφωνα με τον Kuchemann τα γράμματα αντιμετωπίζονται ως μεταβλητές όταν πρέπει να καθοριστεί μία σχέση μεταξύ σχέσεων.

Οι παραπάνω ερμηνείες των γραμμάτων συνιστούν για τον Kuchemann (1978, 1981) μία ιεραρχική δομή σε σχέση με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να χρησιμοποιήσουν τα γράμματα με τον κατάλληλο τρόπο. Ο Kuchemann βρήκε ότι οι περισσότεροι μαθητές ηλικίας 15 ετών μπορούσαν να λύσουν προβλήματα που απαιτούνταν να χρησιμοποιήσουν τα γράμματα ως αγνώστους, ενώ μόνο ένα μικρό ποσοστό επιτύγχανε σε προβλήματα που απαιτούσε την αντίληψη των γραμμάτων ως μεταβλητές. Οι Weinberg κ.α. συμφωνούν με την κατηγοριοποίηση του Kuchemann αλλά τα ευρήματά τους δεν στηρίζουν την υπόθεσή του περί ύπαρξης ιεραρχίας διότι αποδίδουν τα αυξημένα ποσοστά αποτυχίας στην έλλειψη εμπειρίας εκ μέρους των μαθητών.

Οι Ursini &Trigueros (2008) κάνουν τη δική τους κατηγοριοποίηση σχετικά με τη χρήση των γραμμάτων, όπως αυτή εμφανίζεται συχνότερα στη σχολική Άλγεβρα. Η κατηγοριοποίηση που κάνουν βρίσκεται σε αντιστοιχία με αυτή του Kuchemann, και αποτελείται από τρεις δομικές κατηγορίες:

α. Η αντίληψη της **μεταβλητής *ως άγνωστο***: συνήθως το γράμμα συμβολίζει μία άγνωστη ποσότητα ή αριθμό που πρέπει να βρεθεί μέσα από την επίλυση μίας εξίσωσης.

β. Η αντίληψη της **μεταβλητής ως *γενικευμένου αριθμού***: το γράμμα αντιπροσωπεύει μία ακαθόριστη ποσότητα η οποία μπορεί να πάρει μία οποιαδήποτε τιμή.

γ. Η αντίληψη **της μεταβλητής σε *συναρτησιακές σχέσεις*** (συσχετισμένες μεταβλητές): η περίπτωση της συμμεταβολής δύο μεταβλητών

με τη μία μεταβλητή να παίζει το ρόλο της ανεξάρτητης και η άλλη το ρόλο της εξαρτημένης μεταβλητής.

Μία επιπλέον χρήση των γραμμάτων, η οποία είναι διαφορετική από τις παραπάνω σημασίες και εντοπίζεται σε υψηλότερου επιπέδου σχολική άλγεβρα, είναι αυτή *της* ***παραμέτρου.*** Σύμφωνα με τη Bloedy-Vinner (2001) ο όρος παράμετρος έχει διπλή σημασία· αναφέρεται στα γράμματα που χρησιμοποιούνται:

α. για να καθοριστεί μία οικογένεια εξισώσεων ή συναρτήσεων και

β. για την αναπαράσταση παραμετρικών καμπυλών ή επιφανειών, π.χ. $x = 2t + 1$ και $y = 4t$ όπου η τιμή της παραμέτρου καθορίζει ένα σημείο της καμπύλης ή της επιφάνειας.

Στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση η έννοια της παραμέτρου χρησιμοποιείται κυρίως με την πρώτη σημασία. Η Blodey-Vinner (2001) θεωρεί ότι η παράμετρος είναι διαφορετικής φύσης από τη μεταβλητή ή τον άγνωστο. Ορίζει την παράμετρο ως εξής: *μία εξίσωση ή μία συνάρτηση με παράμετρο είναι μια (δεύτερης τάξης) συνάρτηση, όπου το όρισμα είναι η παράμετρος και οι αντίστοιχες τιμές είναι εξισώσεις ή συναρτήσεις (και τα υπόλοιπα γράμματα παραμένουν άγνωστοι ή μεταβλητές).*

Οι Ursini & Trigueros (2004) διαφωνούν με τη θέση της Bloedy-Vinner ότι η αντίληψη των γραμμάτων ως παράμετρο απαιτεί διαφορετική θέαση από αυτή της μεταβλητής ή του αγνώστου. Θεωρούν ότι η παράμετρος είναι ***ένας γενικός αριθμός αλλά δεύτερης τάξης*** *και χρησιμοποιείται όταν πρέπει να γενικεύσουμε γενικές προτάσεις πρώτης τάξης.* Με τον όρο γενικές προτάσεις πρώτης τάξης εννοούν αυτές που προέρχονται από γενικεύσεις προτάσεων που περιέχουν μόνο αριθμούς, π.χ. η γενική μέθοδος υπολογισμού της επιφάνειας τετραγώνου. Η παραμετρική αντίληψη των γραμμάτων εμφανίζεται όταν πρέπει να αναπαρασταθούν οικογένειες γενικών προτάσεων πρώτης τάξης, δηλαδή οικογένειες συναρτήσεων, οικογένειες εξισώσεων.

Η Bloedy-Vinner (2001) αποδίδει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα που εμπλέκουν παραμέτρους στους εξής παράγοντες:

α. στο πλαίσιο το οποίο καθορίζει το νόημα του γράμματος και στην απαιτούμενη εναλλαγή οπτικής μεταξύ μεταβλητής και παραμέτρου,

β. στη λογική πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει την έννοια της παραμέτρου και την αποδίδει αφενός μεν στο γεγονός ότι είναι δομές 2ης τάξης και αφετέρου δε ότι εμπλέκουν τη χρήση ποσοδεικτών. Π.χ. στην εξίσωση $m(x-5)=m+2x$ μπορεί να γίνει η εξής ανάγνωση: ***Για όλες*** *τις τιμές του m* ***υπάρχει*** *μία εξίσωση Ε.* Τα προβλήματα ανακύπτουν όταν οι μαθητές λόγω της ύπαρξης ποσοδεικτών δεν μπορούν να αντικαταστήσουν με τη σωστή σειρά κάθε γράμμα.

Οι Ursini &Trigueros (2004) συμφωνούν με τις θέσεις της Bloedy-Vinner σχετικά με την πηγή δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αλλά και οι φοιτητές. Θεωρούν ότι για την κατανόηση της έννοιας της παραμέτρου και τη διάκριση της από τα άλλα είδη μεταβλητών πρέπει οι φοιτητές να έχουν αναφορές (εμπειρίες) σε γενικεύσεις 2ης τάξης, ειδάλως εκλαμβάνουν την παράμετρο ως γενικό αριθμό. Οι αναφορές αυτές μπορούν να προκύψουν μέσα από οικείες καταστάσεις, είτε στο αλγεβρικό είτε στο γεωμετρικό πλαίσιο. Η έλλειψη κατάλληλων εμπειριών (αναφορών) σχετικά με την έννοια της παραμέτρου είναι η αιτία, σύμφωνα με τους Ursini &Trigueros, που οι φοιτητές δεν μπορούσαν να εξάγουν από μόνοι τους τα κατάλληλα συμπεράσματα ώστε να λύσουν τα προβλήματα, παρά προτιμούσαν να βασίζονται κυρίως σε απομνημονευμένους κανόνες και τεχνικές.

2.5 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ (CONCEPTUAL FIELDS)

Ο Gerard Vergnaud, συνδυάζοντας τις ιδέες άλλων επιστημόνων, όπως του Piaget και του Vygotsky καθώς και συγγραφέων όπως ο Russell, ο Tarski, ο de Saussure, οι Newell και Simon και ο Bruner, με έναν πρωτότυπο τρόπο και εμπλουτίζοντας τις ιδέες αυτές με κάποιους ορισμούς τους οποίους έκρινε απαραίτητους, διατύπωσε τη θεωρία των εννοιολογικών πεδίων. Ο Vergnaud (1996), διατύπωσε την άποψη ότι η θεωρία των εννοιολογικών πεδίων είναι μία θεωρία αναπαραστάσεων (theory of representation) και γνωστικής ανάπτυξης (cognitive development) που στοχεύει στην παροχή ενός γόνιμου και

κατανοητού πλαισίου μελέτης σύνθετων γνωστικών ικανοτήτων και δραστηριοτήτων καθώς και της ανάπτυξης αυτών μέσα από την εμπειρία και τη μάθηση.

Η θεωρία των εννοιολογικών πεδίων βασίζεται στην πεποίθηση ότι μία μεμονωμένη έννοια μπορεί να αφορά πολλές διαφορετικές καταστάσεις (situations) και μία κατάσταση μπορεί να αναλυθεί βάσει διαφόρων αλληλένδετων εννοιών. Η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής είχε ως κίνητρο τη δημιουργία ενός πλαισίου μελέτης της μαθηματικής εκπαίδευσης το οποίο θα ικανοποιεί την ανάγκη συνδέσεων μεταξύ καταστάσεων και σχημάτων, ρητών μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και θεωρημάτων και των εν δυνάμει αντιλήψεων και ικανοτήτων των μαθητών σχετιζόμενων με αυτές τις μαθηματικές έννοιες. Επίσης, θα ικανοποιεί την ανάγκη οργάνωσης της ιεραρχικής πολυπλοκότητας των γνωστικών δραστηριοτήτων σε μία διαχειρίσιμη ταξινόμηση, προκειμένου να μπορεί να περιγραφεί τόσο η ποικιλία των γνωστικών αυτών δραστηριοτήτων όσο και η ανάπτυξη των σχημάτων και των νοητικών διεργασιών που σχετίζονται με αυτές. Σημαντικό επίσης κίνητρο για την ανάπτυξη της εν λόγω θεωρίας αποτελεί η πρόθεση του Vergnaud, η θεωρία των εννοιολογικών πεδίων να χρησιμεύσει τόσο στην ερμηνεία της μακροπρόθεσμης ανάπτυξης των ικανοτήτων και των αντιλήψεων των μαθητών, όσο και στην ερμηνεία των νέων ικανοτήτων και αντιλήψεων που αναδύονται όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με νέες καταστάσεις.

Προκειμένου να δώσουμε τον ορισμό του εννοιολογικού πεδίου θα πρέπει προηγουμένως να δώσουμε τον ορισμό μίας έννοιας η οποία συνδέεται πολύ στενά με την έννοια του εννοιολογικού πεδίου, αυτής του σχήματος (scheme):

- *Σχήμα είναι ο αναλλοίωτος τρόπος οργάνωσης της συμπεριφοράς (δράσης) για την αντιμετώπιση μίας συγκεκριμένης κατηγορίας καταστάσεων.*

Το σχήμα αρχικά αποτελείται από κάποια λίγα *θεωρήματα-εν-δράσει (theorems–in-action)*, *έννοιες-εν-δράσει (concepts-in-action)* και κανόνες και αναδύεται όταν το άτομο καλείται να χειριστεί κάποιες συγκεκριμένες κατηγορίες καταστάσεων. Από αυτή την πρωταρχική δομή, ένα σχήμα αναπτύσσεται επεκτείνοντας το φάσμα εμβέλειάς του σε όλο και μεγαλύτερα σύνολα καταστάσεων και εμπλουτίζοντας το περιεχόμενό του.

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η έννοια του σχήματος θα πρέπει να δοθούν οι ορισμοί των θεωρημάτων-εν-δράσει και των εννοιών εν δράσει:

- *Θεώρημα-εν-δράσει (theorem-in-action)* είναι μία πρόταση την οποία το άτομο θεωρεί ότι ισχύει για ένα εύρος των μεταβλητών της κατάστασης.
- *Έννοιες-εν-δράσει (concepts-in-actions)* είναι κατηγορίες (αντικειμένων, ιδιοτήτων, σχέσεων, μετασχηματισμών, διαδικασιών, κλπ) που επιτρέπουν στο υποκείμενο να κατατμήσει τον πραγματικό κόσμο σε διακριτά στοιχεία και οπτικές, και να επιλέξει τις καταλληλότερες πληροφορίες ανάλογα με την εμπλεκόμενη κατάσταση και το σχετικό σχήμα.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει ότι ένα θεώρημα-εν-δράσει μπορεί και να είναι εσφαλμένο ενώ αυτό που επίσης ισχύει και είναι σημαντικό είναι ότι το πεδίο εγκυρότητας ενός θεωρήματος-εν-δράσει μπορεί να διαφέρει από αυτό του πραγματικού θεωρήματος. Σύμφωνα με τους Zazkis και Liljedahl (2002), τα θεωρήματα-εν-δράσει- είναι ενδεικτικά της γνώσης των μαθητών αφού περιγράφουν μαθηματικές σχέσεις, είτε σωστά είτε λανθασμένα και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές όταν οι τελευταίοι καλούνται να λύσουν ένα πρόβλημα.

Επίσης, για τις έννοιες-εν-δράσει, αυτό που πρέπει να δηλωθεί ρητά είναι ότι αυτές δεν είναι θεωρήματα - αν και είναι απολύτως απαραίτητες για την ύπαρξη των θεωρημάτων-εν-δράσει - και κατά συνέπεια δεν μπορούν να είναι αληθή ή ψευδή παρά μόνο σχετικά ή μη σχετικά.

Στην πορεία ορισμού όλων των όρων που σχετίζονται με αυτόν του *εννοιολογικού πεδίου*, ο Vergnaud δίνει έναν ακόμη ορισμό, αυτόν της έννοιας:

- *Έννοια (concept)* είναι η τριάδα (Κ, Σ, Α) συνόλων, όπου Κ είναι το σύνολο όλων των καταστάσεων που νοηματοδοτούν την έννοια, Σ είναι το σύνολο όλων των λειτουργικών σταθερών[25] που περιέχονται στα σχήματα τα οποία έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων και Α είναι το σύνολο των συμβολικών αναπαραστάσεων (π.χ. φυσική γλώσσα,

[25] Ο Vergnaud, με τον όρο λειτουργικές σταθερές (operational variants) εννοεί τα θεωρήματα–εν- δράσει και τις έννοιες-εν-δράσει (1996, σελ. 222).

διαγράμματα, γραφικές αναπαραστάσεις, άλγεβρα) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουμε τις εμπλεκόμενες σχέσεις, να τις επικοινωνήσουμε, και εντέλει να μας βοηθήσουν να τις κατακτήσουμε.

Στο σημείο πλέον αυτό, και εφόσον έχουμε πλέον παραθέσει όλους τους ορισμούς που χρειάζονται στον ορισμό του εννοιολογικού πεδίου, έτσι όπως αυτοί έχουν δοθεί από τον ίδιο τον θεμελιωτή της εν λόγω θεωρίας, είμαστε σε θέση να δώσουμε τον κεντρικό ορισμό:

- *Εννοιολογικό πεδίο (conceptual field)* είναι το σύνολο των καταστάσεων, των οποίων η κατάκτηση απαιτεί πολλές και διαφορετικές διασυνδεδεμένες έννοιες. Είναι, ταυτόχρονα, ένα σύνολο εννοιών, με διαφορετικές ιδιότητες, των οποίων το νόημα αναδύεται μέσα από την ποικιλία αυτών των καταστάσεων.

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι παρά το γεγονός ότι ο Vergnaud είναι πολύ προσεκτικός στον αυστηρό ορισμό της ορολογίας που χρησιμοποιεί προκειμένου να παρουσιάσει τη θεωρία του, ωστόσο υπάρχει ένας όρος του οποίου ο ορισμός εκκρεμεί και για τον λόγο αυτό υπόκειται σε διάφορες ερμηνείες. Ο όρος αυτός είναι η «κατάσταση (situation)» και όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τους άνωθεν ορισμούς είναι κομβικής σημασίας στον ορισμό του σχήματος, της έννοιας και προφανώς εν τέλει στον ίδιο τον ορισμό του εννοιολογικού πεδίου. Σε μία προσπάθεια να ερμηνεύσουμε τις προθέσεις του Vergnaud στη νοηματοδότηση του εν λόγω όρου, θα πρέπει να πούμε ότι ο ίδιος ο Vergnaud (1996) αναφέρει[26] ότι οι σύνθετες γνωστικές ικανότητες και δραστηριότητες, η μελέτη των οποίων αποτέλεσε τον στόχο της θεμελίωσης της θεωρίας των εννοιολογικών πεδίων, μπορεί να αφορούν τόσο συνήθεις καταστάσεις (routine situations) όσο και μη συνήθεις (nonroutine), με τις τελευταίες να απαιτούν έναν συνδυασμό προηγούμενων γνώσεων και ειδικά την κατασκευή ή ανακάλυψη νέας γνώσης. Σύμφωνα με τους Zazkis και Liljedahl (2002), η θεωρία του Vergnaud έχει εφαρμογή σε ένα ευρύτερο πλαίσιο καταστάσεων από αυτές που έχουμε συνηθίσει στη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα και σύμφωνα με τον Greer (1992), αφορούν κυρίως λεκτικά διατυπωμένα προβλήματα, κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να

[26] Σελ. 219.

ανταποκρίνονται στο ευρύτερο μαθηματικό – διαφορετικό κάθε φορά – πλαίσιο. Οι Zazkis και Liljedahl λοιπόν, κατατάσσουν τις καταστάσεις του Vergnaud, όχι μόνο σε τέτοιου είδους προβλήματα αλλά και σε καθαρά μαθηματικά προβλήματα και ερωτήσεις οι οποίες είναι «αφηρημένες (abstract)» καθώς επίσης και σε προβληματικές καταστάσεις οι οποίες δεν πηγάζουν από αυτό το πλαίσιο που στη Διδακτική των Μαθηματικών καλείται « πραγματικό πρόβλημα (real world problem)».

2.5.1. Θεωρητικές προεκτάσεις

Υπάρχουν δύο πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά της θεωρίας των εννοιολογικών πεδίων που καθιστούν τη θεωρία αυτή χρήσιμο εργαλείο σε ένα μεγάλο πλήθος ετερόκλητων ερευνών, τα οποία όμως δε διατυπώνονται ξεκάθαρα.

Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι ότι παρά το γεγονός ότι ο Vergnaud έχει επιλέξει να αναφερθεί μόνο στις προσθετικές δομές, στις πολλαπλασιαστικές δομές, στην βασική άλγεβρα (elementary algebra) και στους αριθμούς και τον χώρο (number and space), στα παραδείγματα αυτά αλλά και στα γραφόμενα του ίδιου του Vergnaud, υπάρχουν ισχυρές υποδείξεις ότι τα εννοιολογικά πεδία μπορούν να μελετηθούν όχι μόνο έξω από τα στοιχειώδη μαθηματικά, όπως αυτά δηλαδή που επέλεξε ο Vergnaud για τα παραδείγματά του αλλά ακόμα και έξω από τα μαθηματικά εν γένει.

Το δεύτερο και σημαντικότερο χαρακτηριστικό είναι ότι η θεωρία των εννοιολογικών πεδίων ξεκάθαρα αναγνωρίζει την ύπαρξη εδραιωμένης μαθηματικής γνώσης. Όταν η γνώση αυτή περιοριστεί σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ή έννοια, τότε περιγράφεται ως εννοιολογικό πεδίο, στο οποίο ενυπάρχουν έννοιες και σχέσεις. Επίσης, η θεωρία αυτή αναγνωρίζει του καθενός τη γνώση ως δικό του σχήμα το οποίο περιέχει στόχους, κανόνες δράσης, δυνατότητες εξαγωγής συμπερασμάτων και λειτουργικές σταθερές – όπως αυτές έχουν οριστεί παραπάνω. Το σχήμα αυτό είναι δυναμικό, αναπτύσσεται και αλλάζει με τον χρόνο, και στοχεύει στην επίτευξη ενός στόχου.

2.5.2. Γνωστική ανάπτυξη μέσα σε ένα εννοιολογικό πεδίο

Η ιδέα της «κατάστασης» διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στη θεωρία του Vergnaud αφού οι καταστάσεις λειτουργούν ως έναυσμα για τη δημιουργία και την ενίσχυση της γνωστικής ανάπτυξης. Όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με μία νέα κατάσταση χρησιμοποιούν τη γνώση τους έτσι όπως αυτή έχει διαμορφωθεί από την εμπειρία τους σε απλούστερες και πιο οικείες καταστάσεις και προσπαθούν να προσαρμόσουν τη γνώση αυτή στη νέα κατάσταση (Vergnaud, 1988, σελ.141, στους Zazkis και Liljedahl (2002), σελ. 97). Η περιγραφή αυτή σύμφωνα με τους Zazkis και Liljedahl προσομοιάζει με την αφομοίωση και τη συμμόρφωση του Piaget. Εάν τώρα η μάθηση λαμβάνει χώρα σε μεγάλη χρονική περίοδο τότε αυτή μπορεί να ειδωθεί ως γνωστική ανάπτυξη του ατόμου ενώ αν λαμβάνει χώρα σε μικρό χρονικό διάστημα τότε αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου σχήματος.

Οι Zazkis και Liljedahl καταλήγουν ότι η μάθηση μέσα σε ένα εννοιολογικό πεδίο μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους: (1) Ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει τις διαφορές σε δύο φαινομενικά παρόμοιες κατηγορίες καταστάσεων και άρα να χρησιμοποιήσει διαφορετικά θεωρήματα-εν-δράσει και να ακολουθήσει διαφορετική πορεία χειρισμού της κάθε κατάστασης. Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ότι στον μαθητή εγκαθίσταται ένα είδος ιεραρχίας, αφού μοιραία η μία κατάσταση θα ληφθεί ως απλούστερη της άλλης. (2) Ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει κοινή δομή μεταξύ δύο κατηγοριών καταστάσεων, οι οποίες μέχρι πρότινος εκλαμβάνονταν από αυτόν ως διαφορετικές και αυτό το γεγονός με τη σειρά του, μπορεί να οδηγήσει στην προσαρμογή δύο έως πρότινος χρησιμοποιούμενων διαφορετικών θεωρημάτων-εν-δράσει σε ένα γενικευμένο θεώρημα-εν-δράσει εφαρμόσιμο και στις δύο κατηγορίες καταστάσεων. Όταν λοιπόν οι καταστάσεις εκλαμβάνονται από έναν μαθητή ως να ανήκουν σε μία ενοποιημένη κατηγορία τότε ο μαθητής καταφεύγει στο ίδιο σχήμα. Επιπρόσθετα, η αναγνώριση της αναλλοίωτης δομής των καταστάσεων είναι πολύ πιθανόν να λειτουργήσει ως γέφυρα η οποία θα μεταφέρει τον μαθητή από ένα εννοιολογικό πεδίο σε ένα άλλο.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ο κατακερματισμός των γνωστικών πεδίων των Μαθηματικών, όπως αυτός της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, στο μυαλό των μαθητών, ο οποίος τροφοδοτείται από το αναλυτικό πρόγραμμα αλλά και από τον τρόπο που οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί χειριζόμαστε τη διάκριση των διαφορετικών γνωστικών περιοχών των Μαθηματικών, αποτελεί ένα πεδίο έρευνας με το οποίο ασχολείται η επιστήμη της Διδακτικής των Μαθηματικών μέσα από τους τρόπους σύνδεσης των πεδίων Άλγεβρας και Γεωμετρίας στη διδασκαλία. Η κατασκευή νοημάτων και η δόμηση μιας έννοιας υποβοηθείται από την θεώρηση της έννοιας αυτής σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, όπως φαίνεται από την εκτενή βιβλιογραφία που υπάρχει σχετικά με το θέμα αυτό και είναι προσανατολισμένη προς το παρόν στην περίπτωση της συνάρτησης. Η παρούσα έρευνα συνδυάζει στοιχεία design research (Cobb et al., 2003), εφόσον έχει ως κύριο χαρακτηριστικό την παρέμβαση, αλλά και στοιχεία case study (Yin, 2009), δεδομένου ότι η παρέμβαση γίνεται σε εξατομικευμένο επίπεδο προκειμένου να καταστεί εφικτή η κατανόηση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές κατέχουν τα διαφορετικά εννοιολογικά πεδία που εμπλέκονται στην παρέμβαση αυτή. Η προσπάθεια επικεντρώνεται στην αναγνώριση από τους μαθητές ύπαρξης διαύλου επικοινωνίας άλγεβρας – γεωμετρίας με αφορμή τη θεώρηση της παραβολής ως γεωμετρικού αντικειμένου με σαφείς γεωμετρικές ιδιότητες αλλά και ως αντικειμένου που φέρει αλγεβρικές ιδιότητες. Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής με τη βοήθεια του λογισμικού και στη συνέχεια, μεταφερόμενοι σε ένα άλλο πλαίσιο, αυτό της άλγεβρας, να νοηματοδοτήσουν την παραβολή ως γραφική παράσταση συνάρτησης. Δεδομένου όμως ότι η παραβολή διατηρεί για τους μαθητές και στο πλαίσιο της άλγεβρας τις γεωμετρικές της ιδιότητες, καθίσταται πλέον για αυτούς πιο εύκολα αντιληπτή η μορφή της γραφικής παράστασης της τετραγωνικής συνάρτησης.

Κεντρικός στόχος της έρευνας είναι η διερεύνηση του αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές νοηματοδοτούν τη σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών

χαρακτηριστικών της παραβολής. Προς την κατεύθυνση της επίτευξης του στόχου αυτού θέτουμε δύο επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα:

1. Αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές νοηματοδοτούν τον ρόλο της παραμέτρου p στη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$ μέσα στο γεωμετρικό πλαίσιο που διαμορφώνει το πεδίο της Αναλυτικής Γεωμετρίας;
2. Αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές νοηματοδοτούν τον ρόλο του α στη συνάρτηση $y = ax^2$ μέσα στο γεωμετρικό πλαίσιο;[27]

3.2. ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 6 μαθητές της Β΄Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης από δύο διαφορετικά σχολεία του Ζωγράφου των οποίων οι επιδόσεις στα σχολικά μαθηματικά είναι από καλές έως άριστες. Όταν έγινε η έρευνα, οι μαθητές είχαν ολοκληρώσει την ύλη της Β΄Λυκείου στα Μαθηματικά κατεύθυνσης και είχαν ήδη ξεκινήσει προετοιμασία για τις πανελλαδικές εξετάσεις. Η ολοκλήρωση της ύλης της Β΄ Λυκείου ήταν αναγκαία προϋπόθεση για την παρούσα έρευνα της οποίας στόχος ήταν η διερεύνηση της νοηματοδότησης της σύνδεσης γεωμετρικών και αλγεβρικών χαρακτηριστικών της παραβολής και όχι η διδασκαλία της παραβολής. Η έναρξη προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις συνεπάγεται ότι οι μαθητές θα είχαν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης όταν θα πραγματοποιούνταν η έρευνα και άρα το δεύτερο επιμέρους ερευνητικό ερώτημα θα μπορούσε να διερευνηθεί. Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν είχαν ξεκινήσει την ύλη της Γ΄ Λυκείου, την έννοια της συνάρτησης θα είχαν να τη συναντήσουν από την Α΄Λυκείου – με εξαίρεση μία μικρή αναφορά στις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις που γίνεται στο τέλος της Β΄ Λυκείου – και άρα το δεύτερο ερώτημα δεν θα είχε και ιδιαίτερη αξία.

---

[27] Το γεωμετρικό πλαίσιο που αναφέρεται στο δεύτερο ερώτημα μπορεί να αφορά είτε τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής όπως αυτές προκύπτουν από τον ορισμό της παραβολής ως αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, είτε την ισότητα εμβαδών ενός τετραγώνου με πλευρά μία από τις συντεταγμένες του κάθε σημείου της παραβολής και ενός ορθογωνίου με μία διάσταση την άλλη συντεταγμένη του σημείου.

Οι 6 αυτοί μαθητές αποτέλεσαν τις τρεις ομάδες στις οποίες πραγματοποιήθηκε η έρευνα: η πρώτη ομάδα ήταν η Δανάη και ο Παναγιώτης μαθητές Τεχνολογικής κατεύθυνσης, η δεύτερη ομάδα ο Άλκης και ο Γρηγόρης μαθητές Θετικής κατεύθυνσης και η τρίτη ομάδα ο Χρήστος και η Συμέλα μαθητές Θετικής κατεύθυνσης.

3.3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Στους μαθητές δόθηκε ένα φύλλο εργασίας, στη μία σελίδα του οποίου υπήρχαν τέσσερις ερωτήσεις που αφορούσαν την πρώτη δραστηριότητα και η άλλη σελίδα του οποίου ήταν κενή προκειμένου οι μαθητές να απαντήσουν στις ερωτήσεις που αφορούσαν τη δεύτερη δραστηριότητα και οι οποίες δεν αναγράφονταν στο φύλλο. Οι μαθητές επίσης είχαν μπροστά τους έναν υπολογιστή στον οποίο υπήρχαν τρία αρχεία Geogebra – ένα για την κάθε δραστηριότητα - έτσι ώστε αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και υπολογιστικής άλγεβρας να καταστούν σε θέση να απαντήσουν στις ερωτήσεις είτε του φύλλου εργασίας είτε αυτών που εμφανίζονταν πάνω στο αρχείο (δραστηριότητα 2) είτε αυτών που θέτονταν στους μαθητές από την ερευνήτρια.

3.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το λογισμικό Geogebra προσφέρει γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις συνδυάζοντας λειτουργίες λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (DGS) και συστημάτων υπολογιστικής άλγεβρας (CAS) επιτρέποντας έτσι τη γεφύρωση των μαθηματικών κλάδων της γεωμετρίας, της άλγεβρας, ακόμα και της ανάλυσης (Hohenwarter and Preiner, 2007). Το Geogebra μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τη μία στην οπτικοποίηση μαθηματικών εννοιών αλλά και στη δημιουργία διδακτικών εργαλείων και από την άλλη έχει τη δυνατότητα να ενισχύσει την ενεργή και μαθητοκεντρική διδασκαλία επιτρέποντας μαθηματικούς πειραματισμούς, διαδραστικές διερευνήσεις καθώς και την ερευνητική μάθηση (Preiner, 2008).

Η προσφορά του εν λόγω λογισμικού έγκειται στη δυνατότητα που αυτό παρέχει στον χρήστη να έχει ταυτόχρονα πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δυνατότητα ύπαρξης δύο παραθύρων αναπαράστασης, ένα άλγεβρας και ένα γεωμετρίας με το τελευταίο μάλιστα να

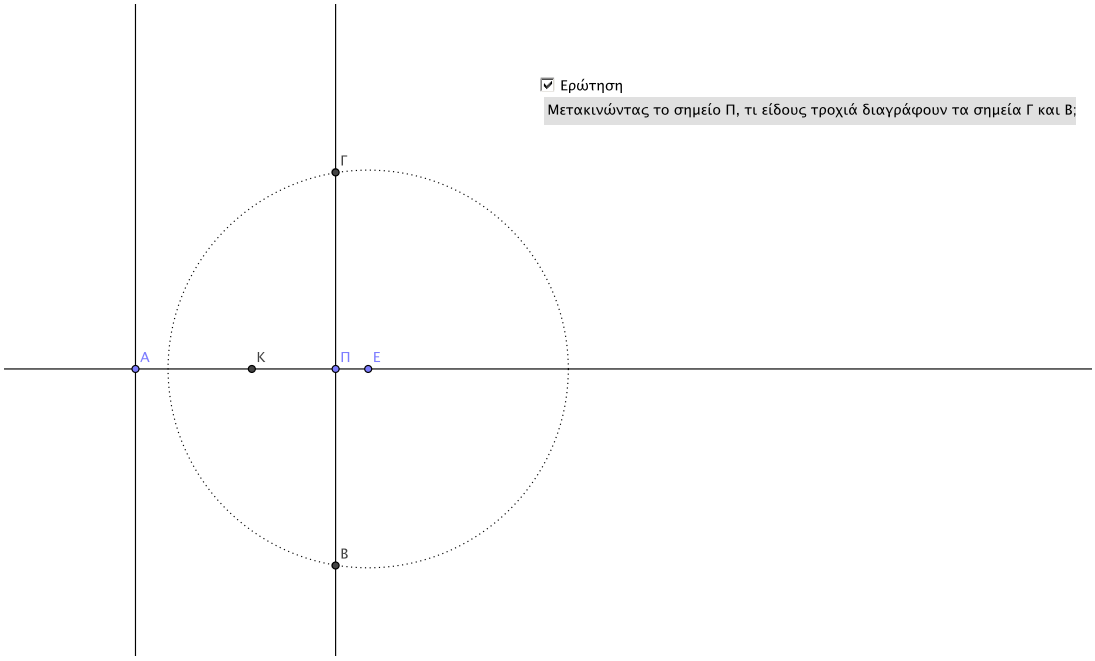
έχει τη δυνατότητα απεικόνισης ενός καρτεσιανού επιπέδου. Με τον τρόπο αυτό, ο μαθητής παρατηρεί τον τρόπο που επενεργούν οι αλλαγές στην γεωμετρική κατασκευή ενός αντικειμένου πάνω στην αλγεβρική του απεικόνιση. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα του περιβάλλοντος είναι ότι επιτρέπει στον μαθητή να επέμβει στο σχήμα, όπως θα έκανε με το μολύβι του, ενώ παράλληλα του δίνει τη δυνατότητα, παρατηρώντας τις αλλαγές που επέφερε η τυχούσα επέμβασή του να προχωρήσει σε συνδέσεις του προς μελέτη αντικειμένου με τις διάφορες συνιστώσες του, π.χ. στην περίπτωση της παραβολής, ο μαθητής μπορεί μεταβάλλοντας την παράμετρο p να παρατηρήσει τις αλλαγές που αυτή η μεταβολή επιφέρει στη μορφή της παραβολής ωθώντας με τον τρόπο αυτό τον μαθητή να κάνει ικασίες και επιβεβαιώνοντας τες ή απορρίπτοντας τες να κατανοήσει τον ρόλο της παραμέτρου στην παραβολή. Σημαντικό επίσης ρόλο παίζει το γεγονός, ότι το συγκεκριμένο λογισμικό έχει προβλέψει τη δυνατότητα εισαγωγής νέων εργαλείων ή απόκρυψης κάποιων που δίνονται από το πρόγραμμα, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να προσαρμόσει τις διάφορες δραστηριότητες ακριβώς στο σχέδιο μαθήματός του. Για παράδειγμα, στη συγκεκριμένη εργασία, κατασκευάστηκε το εργαλείο το οποίο δημιουργεί κάθετα ευθύγραμμα τμήματα από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία αυτή, αφού η ερευνήτρια θεώρησε πολύ πιθανόν κάποιοι μαθητές να θελήσουν να εξετάσουν το κατά πόσο ένα σημείο ανήκει στην παραβολή μέσω της σύγκρισης του μήκους του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από το εν λόγω σημείο προς τη διευθετούσα με την απόσταση του σημείου αυτού από την εστία της παραβολής.

3.4.1. Δραστηριότητες παρέμβασης

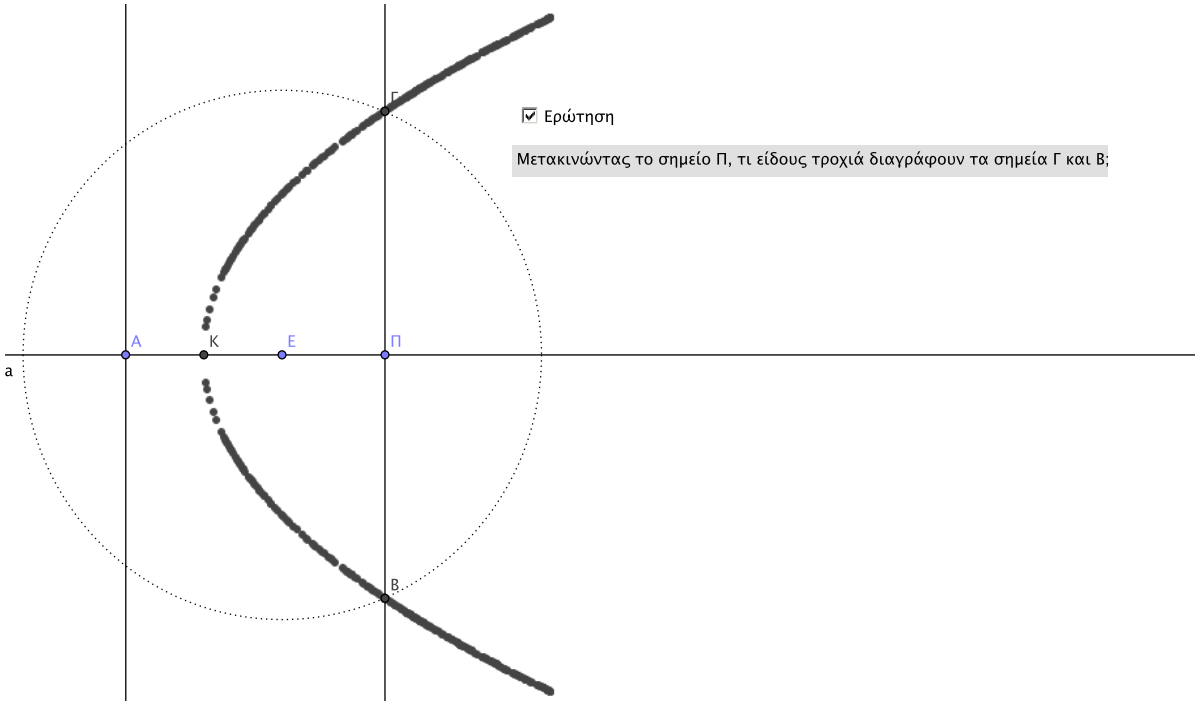
Εισαγωγική δραστηριότητα (ορισμός παραβολής)

Η πρώτη δραστηριότητα που δίνεται στους μαθητές έχει σκοπό να τους υπενθυμίσει τις βασικές ιδιότητες της παραβολής στις οποίες στηρίζεται και ο ορισμός της. Η κατασκευή που ακολουθεί είναι η προσαρμογή της παρουσίασης του τρόπου εύρεσης των σημείων μιας παραβολής C με γνωστή διευθετούσα και γνωστή εστία που έχει το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της κατεύθυνσης της Β΄Λυκείου (σελ. 89-90), στο δυναμικό περιβάλλον του Geogebra. Η δραστηριότητα αυτή κρίθηκε απαραίτητο να συμπεριληφθεί στην παρέμβαση

δεδομένου ότι από τη μία οι μαθητές είχαν διδαχθεί την παραβολή αρκετό διάστημα πριν γίνει η παρέμβαση – περίπου δύο μήνες νωρίτερα - και άρα θα έπρεπε να γίνει μία υπενθύμιση του μαθηματικού αντικειμένου το οποίο αποτελεί και τον κεντρικό πυρήνα της εργασίας και από την άλλη θα αποτελούσε μία καλή ευκαιρία εξοικείωσης των μαθητών με το δυναμικό περιβάλλον. Το ακόλουθο σχήμα είναι η εικόνα που βλέπουν οι μαθητές κατά την έναρξη της αρχικής δραστηριότητας και μετά την επιλογή εμφάνισης της ερώτησης που υπάρχει στο αρχείο με τη μορφή «Κουτιού επιλογής για την εμφάνιση/ απόκρυψη αντικειμένων»:



Οι μαθητές καλούνται, μετακινώντας το σημείο Π, να διαπιστώσουν ότι η τροχιά που διαγράφουν τα σημεία Β και Γ είναι παραβολή με την εικόνα που προκύπτει μετά την μετακίνηση του σημείου Π να είναι η ακόλουθη:

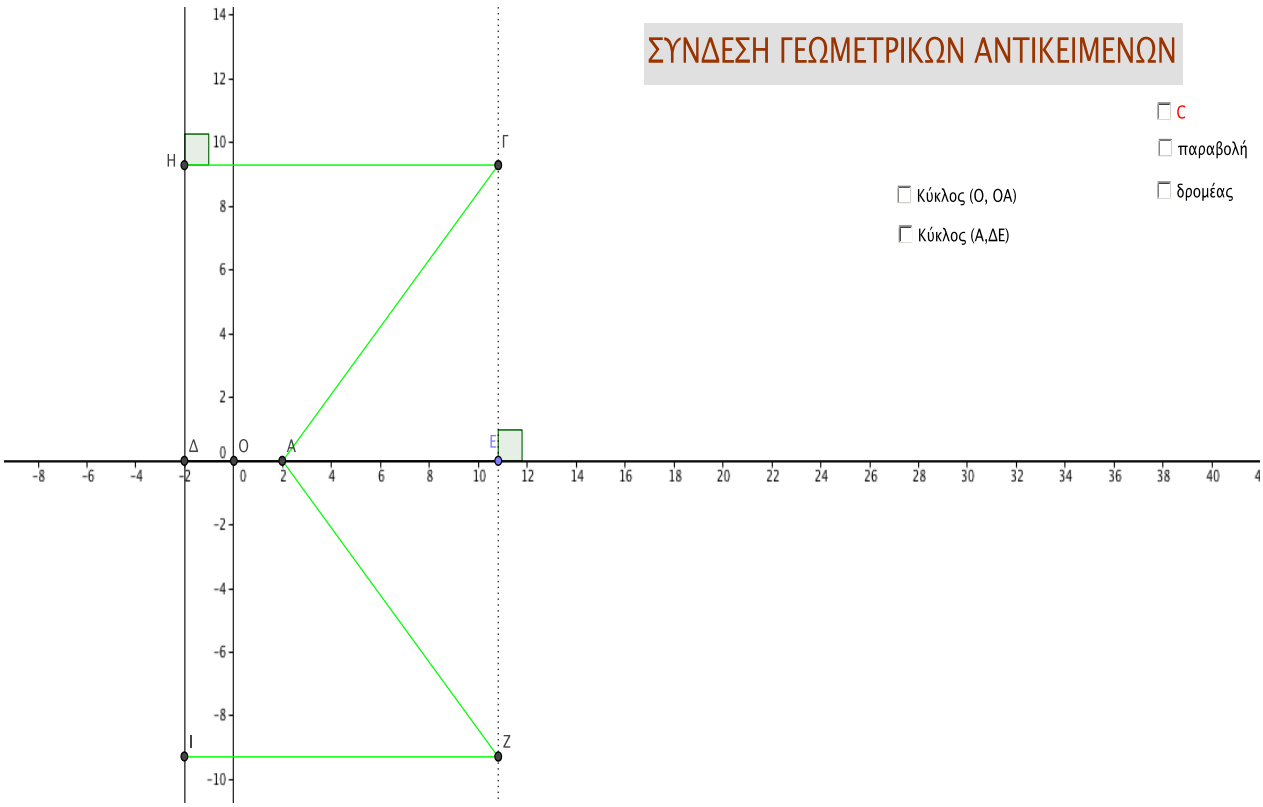


Η βεβαιότητα των μαθητών ότι το εν λόγω μαθηματικό αντικείμενο είναι όντως παραβολή αναμένεται να προκύψει από την ανάζητηση των μαθητών να διαπιστώσουν ότι οι αποστάσεις των σημείων Γ και Β από το σταθερό σημείο Ε, το οποίο θα ονομάζεται στο εξής εστία, και από την σταθερή ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ΠΕ και στο εξής θα ονομάζεται διευθετούσα, είναι ίσες. Η διαπίστωση αυτή θα πραγματοποιηθεί από τη χρήση των εργαλείων που τους παρέχει το πρόγραμμα και στην παρούσα δραστηριότητα έχει επιλεγεί από την ερευνήτρια να είναι το εργαλείο που μετράει μήκος και διατίθεται από το πρόγραμμα καθώς και ένα εργαλείο το οποίο κατασκευάστηκε και δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από σημείο σε ευθεία (το default του προγράμματος είναι η κατασκευή κάθετης ευθείας από σημείο σε ευθεία αλλά δεν είναι καθόλου βολικό στην προκειμένη περίπτωση αφού οι μαθητές θα πρέπει να μετρήσουν το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο Γ στη διευθετούσα). Στην εργαλειοθήκη εμφανίζονται ακόμη άλλα δύο εργαλεία: το εργαλείο «Μετακίνηση» που αφορά τη μετακίνηση αντικειμένων και καθιστά εφικτή τη μετακίνηση σημείων και το εργαλείο «Μετακίνηση της Προβολής Γραφικών» που είναι ένα εργαλείο το οποίο η εμπειρία από την ενασχόληση της ερευνήτριας με το δυναμικό περιβάλλον έχει αναδείξει ως

εξαιρετικά χρήσιμο και πιθανόν ανά πάσα στιγμή να προκύψει η ανάγκη χρήσης του. Η επιλογή της μη εμφάνισης αξόνων έχει γίνει προκειμένου οι μαθητές να αντιμετωπίσουν το μαθηματικό αντικείμενο που τους δίνεται, σε πρώτη φάση ως γεωμετρικό και έπειτα, εφόσον προκύψει ανάγκη στη φάση αυτή, να περάσουν και στην αλγεβρική του θεώρηση.

Πρώτη δραστηριότητα (διερεύνηση του ρόλου του p στη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$ με γνώμονα τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής)

Το αρχείο δραστηριότητα 1 που αναφέρεται στην πρώτη ερώτηση του φύλλου και δίνεται στους μαθητές παράλληλα με το φύλλο φαίνεται στο Σχήμα 1 που ακολουθεί:



Σχήμα 1

Έχει επιλεγεί να μην υπάρχει πλέγμα, αφού στη φάση αυτή, έμφαση επιθυμούμε να δοθεί στις γεωμετρικές και όχι στις αλγεβρικές ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων. Επίσης, έχουν αφαιρεθεί όλα τα εργαλεία εκτός από

τρία: το εργαλείο «Μετακίνηση», το εργαλείο «Απόσταση ή μήκος» και το εργαλείο «Μετακίνηση της Προβολής Γραφικών».

Στη δραστηριότητα αυτή έχει κατασκευαστεί ο κύκλος C_1 κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ όπου Α είναι ένα τυχαίο σημείο του άξονα xx΄ και ο κύκλος C_2 κέντρου Α και ακτίνας ΔΕ, όπου Δ είναι το σημείο τομής του C_1 με τον άξονα των x και Ε είναι ένα τυχαίο σημείο του οριζόντιου άξονα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το Α είναι το σημείο το οποίο θα αποτελέσει την εστία της παραβολής που θα προκύψει και εσκεμμένα επελέγει ο συμβολισμός Α αντί του Ε, όπως έχουν συνηθίσει οι μαθητές να συμβολίζουν της εστία, σε μία προσπάθεια να διερευνηθεί ο βαθμός σύνδεσης από τους μαθητές των μαθηματικών αντικειμένων με την επιλογή του τρόπου συμβολισμού τους. Προκειμένου το περιβάλλον να είναι πιο φιλικό προς τον χρήστη και ο μαθητής να μην έρχεται σε επαφή με πολλά διαφορετικά αντικείμενα απ΄ευθείας, επιλέχθηκε να μπουν κουμπιά εισαγωγής/ απόκρυψης για τους δύο κύκλους έτσι ώστε ο μαθητής να παρακολουθεί καλύτερα την πορεία κατασκευής της δραστηριότητας και να αντιλαμβάνεται σταδιακά τις διάφορες σχέσεις που συνδέουν τα γεωμετρικά αντικείμενα που του παρατίθενται. Στο σχήμα επιπλέον, έχουμε φέρει τις καθέτους από τα σημεία Δ και Ε στον άξονα xx΄ ενώ οι μαθητές βλέπουν επίσης τα τμήματα ΓΗ και ΖΙ τα οποία είναι κάθετα στις προαναφερθείσες καθέτους αντίστοιχα.

Η πρώτη ερώτηση του φύλλου εργασίας[28] στοχεύει στο να «αναγκάσει» τους μαθητές να ασχοληθούν με τις γεωμετρικές ιδιότητες που προκύπτουν από αυτήν την κατασκευή. Αφού οι μαθητές απαντήσουν ότι ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων υπάρχει μεταξύ των ΟΑ και ΟΔ (ακτίνες κύκλου C_1) καθώς και μεταξύ των τμημάτων ΔΕ, ΓΗ, ΖΙ, ΑΓ και ΑΖ (πιθανώς στο σημείο αυτό να χρειαστεί η παρέμβαση της ερευνήτριας προκειμένου να δουν την ισότητα των τμημάτων ΑΓ και ΑΖ με τα υπόλοιπα) θα επισημανθεί στους μαθητές ότι τα ίσα αυτά τμήματα αναπαρίστανται με το ίδιο χρώμα (πράσινο) για δική τους ευκολία. Η ερώτηση αυτή έχει δοθεί προκειμένου να αποτελέσει μία πολύ βασική βοήθεια (scafolding), στην κατανόηση από τους μαθητές του ρόλου της παραμέτρου p στη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$.

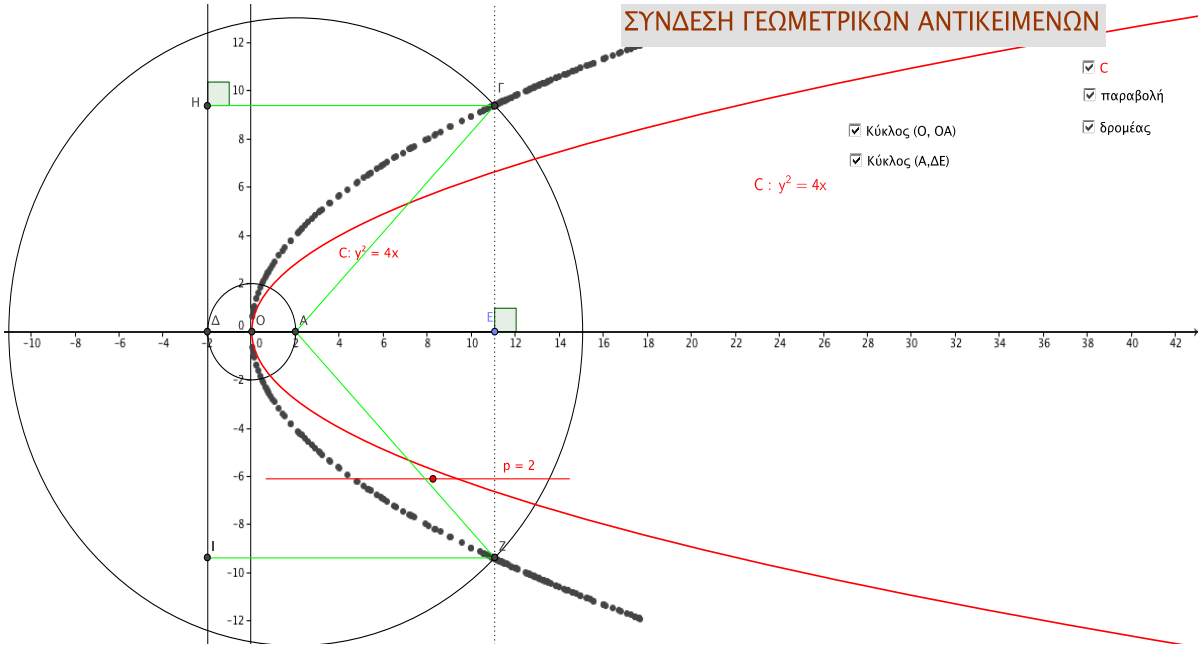
[28] Το φύλλο εργασίας παραθέτεται στο Παράρτημα ΙΙ.

Η δεύτερη ερώτηση του φύλλου έχει ως στόχο να κάνει τους μαθητές να σκεφτούν με έναν δυναμικό τρόπο και όχι στατικά, όπως έχουν συνηθίσει, συνειδητοποιώντας με τον τρόπο αυτό ότι όταν δύο αντικείμενα συνδέονται μεταξύ τους και το ένα μεταβάλλεται, μοιραία θα μεταβληθεί και το άλλο. Από τους μαθητές περιμένουμε να μας πουν ότι λόγω κατασκευής, κατά τη μετακίνηση του σημείου Α, τα σημεία Γ και Ζ αναγκαστικά θα συνεχίσουν να κινούνται πάνω στην κάθετη του άξονα xx' που διέρχεται από το Ε η οποία, δεδομένου ότι το Ε δεν μεταβάλλεται, παραμένει και αυτή σταθερή, όμως αφού το Α μεταβάλλεται, μεταβάλλεται και το Δ και άρα και η απόσταση ΔΕ και συνεπώς και οι ακτίνες ΑΓ και ΑΖ θα πρέπει να μεταβληθούν αναλόγως ώστε να διατηρηθεί η αρχική ισότητα. Με την ερώτηση αυτή επιζητείται η καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών σχέσεων με τις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές στην παρούσα δραστηριότητα καθώς και η εξοικείωση τους με το πρόγραμμα (αν η δραστηριότητα εφαρμοζόταν σε μαθητές οι οποίοι είναι εξοικειωμένοι με τις νέες τεχνολογίες όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών θα μπορούσε να εξεταστεί το ενδεχόμενο η συγκεκριμένη ερώτηση να παραλειφθεί - και για εξοικονόμηση χρόνου - στην προκείμενη περίπτωση όμως κρίνεται απαραίτητη). Κατά τη μετακίνηση του σημείου Ε, οι μαθητές αναμένουμε να σκεφτούν ότι πρόκειται για την ίδια περίπτωση με την εισαγωγική δραστηριότητα και μέσω της οπτικοποίησης του προβλήματος να σκεφτούν ότι τα σημεία Γ και Ζ θα κινούνται πάνω σε μία παραβολή.

Η ερώτηση 3 στοχεύει στην ερμηνεία από τους μαθητές του είδους της τροχιάς που διαγράφουν τα σημεία Γ και Ζ· το δυναμικό περιβάλλον του geogebra στο οποίο μπορούν να φαίνονται και οι συντεταγμένες των σημείων, τους δίνει τη δυνατότητα να παρατηρήσουν τη διαφορά στο ρυθμό μεταβολής των τετμημένων και των τεταγμένων των σημείων Γ και Ζ κατά τη μετακίνηση του σημείου Ε και μέσα από αυτή την παρατήρηση να συνάγουν το συμπέρασμα ότι τα σημεία Γ και Ζ δεν θα κινούνται πάνω σε μία ευθεία (εφόσον θα έχουν παρατηρήσει ότι ο ρυθμός μεταβολής των συντεταγμένων θα είναι διαφορετικός) και άρα υποχρεωτικά θα κινούνται πάνω σε μία καμπύλη. Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να γίνει μία παρέμβαση από την ερευνήτρια αν διαπιστωθεί ότι οι μαθητές παρουσιάζουν προβλήματα στην κατανόηση του συγκεκριμένου ερωτήματος και με τη βοήθεια του προγράμματος να ζητηθεί

από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία ευθεία στην οποία θα πάρουν ένα σημείο το οποίο θα κινείται κατά μήκος αυτής και να παρατηρήσουν ότι ο ρυθμός μεταβολής των συντεταγμένων του σημείου είναι σταθερός (πιθανόν να χρειαστεί να τονιστεί και η διαφορά του σταθερός από το ίδιος).

Η ερώτηση 4 στοχεύει τελικά στην κατανόηση από τους μαθητές του ρόλου του p στη μορφή της παραβολής. Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να δώσουν δύο συγκεκριμένες τιμές στο p και αφού παρατηρήσουν τι συμβαίνει και καταφέρουν να ερμηνεύσουν την παρατήρησή τους να περάσουν στη γενίκευση του ρόλου του p. Πρέπει να τονιστεί ότι η ερώτηση αυτή είναι κομβικής σημασίας για την πορεία όλης της δραστηριότητας αφού ένας από τους στόχους της έρευνας είναι η διερεύνηση του κατά πόσο η κατανόηση του ρόλου της παραμέτρου α στη συνάρτηση $y = \alpha x^2$ μπορεί να υποβοηθηθεί από τη σύνδεση του α της συνάρτησης με το p της παραβολής $y^2 = 2px$. Η εικόνα που έχουν οι μαθητές ενώ προχωράνε στην απάντηση της ερώτησης 4 έχει την εξής μορφή:



Σχήμα 2

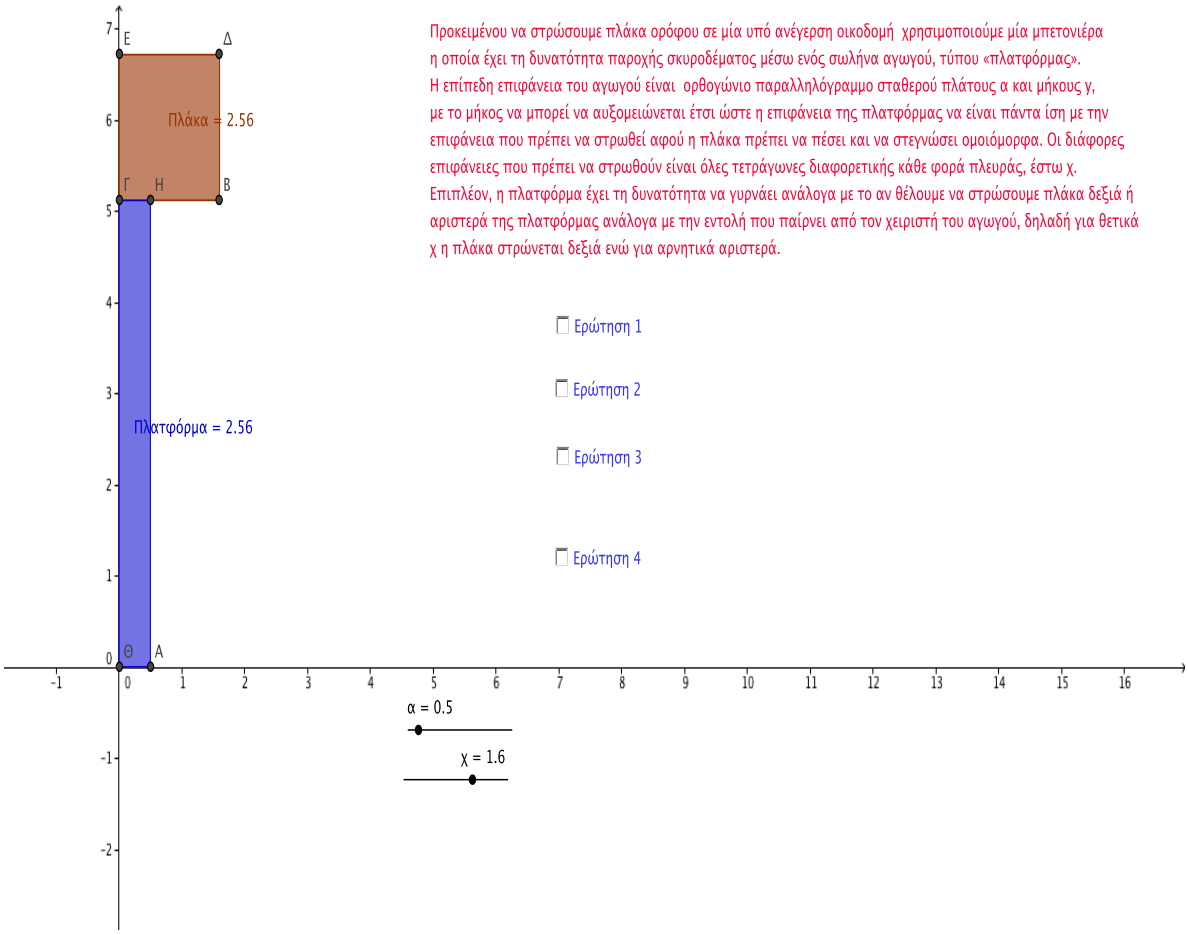
Σημαντικό κρίνεται στο σημείο αυτό να ζητηθεί από τους μαθητές είτε να βρουν τιμή του p ώστε η παραβολή C να συμπέσει με την καμπύλη που διαγράφουν τα ίχνη των σημείων Β και Γ είτε να σκεφτούν ποια θα πρέπει να είναι η κατάλληλη μετακίνηση σημείων ώστε τα ίχνη των Β και Γ να συμπέσουν

με την παραβολή C. Με τον τρόπο αυτόν, οι μαθητές αποκτούν μία εποπτική εικόνα της απειρίας των παραβολών που λαμβάνουμε από τη μετακίνηση της εστίας A καθώς και από τη μεταβολή του p.

Δεύτερη δραστηριότητα (αναγνώριση της γνωστής από το γυμνάσιο παραβολής της μορφής $y = \alpha x^2$ ως όμοιο αντικείμενο με την παραβολή που οι μαθητές μαθαίνουν στην αναλυτική γεωμετρία της Β΄Λυκείου)

Στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές έρχονται σε επαφή με ένα πραγματικό πρόβλημα – real world problem – το οποίο όμως έχει διατυπωθεί με τέτοιον τρόπο ώστε η μοντελοποίηση του να μην εμφανίζει προβλήματα και το οποίο να διέπεται ξεκάθαρα από την απαίτηση για ισότητα των δύο εμβαδών που είναι και η δεύτερη γεωμετρική ιδιότητα της παραβολής στην οποία θέλουμε να εστιάσουμε. Στους μαθητές δεν δίνεται φύλλο εργασίας με ερωτήσεις αλλά οι ερωτήσεις εμφανίζονται πάνω στην οθόνη του υπολογιστή. Η μορφή που έχει αρχικά το αρχείο του δυναμικού περιβάλλοντος της δραστηριότητας αυτής φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα[29]:

[29] Η εκφώνηση του προβλήματος παραθέτεται και στο Παράρτημα ΙΙΙ.



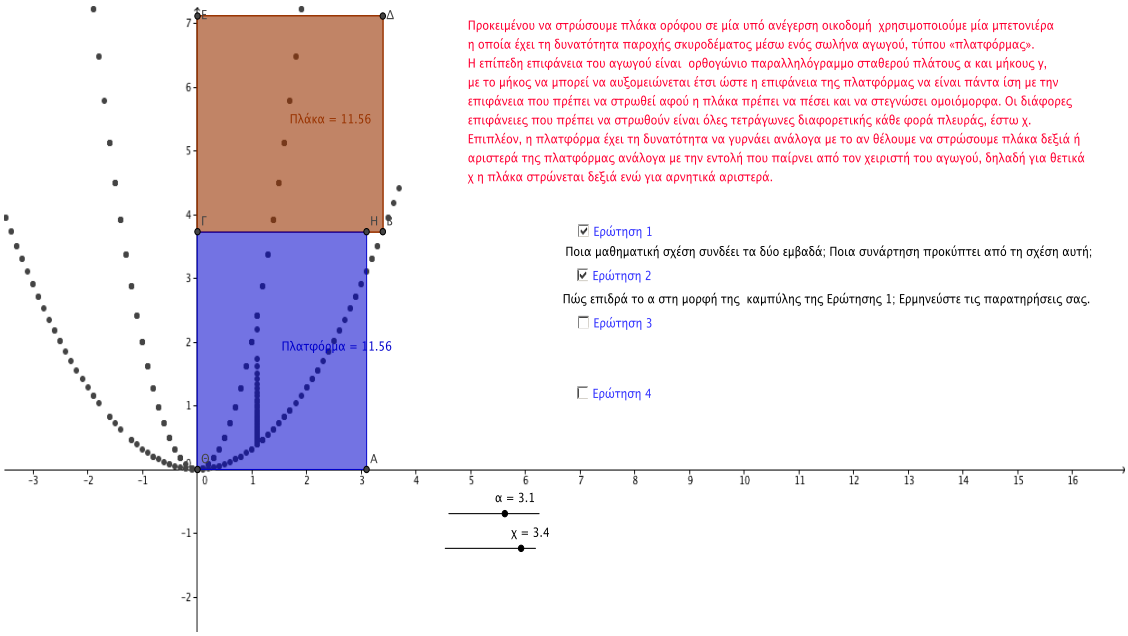
Σχήμα 3

Στην εργαλειοθήκη δίνονται συνολικά τρία εργαλεία: το εργαλείο «Μετακίνηση», το εργαλείο «Στροφή αντικειμένου γύρω από σημείο κατά γωνία» το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές αν θελήσουν να διαπιστώσουν ότι πράγματι οι καμπύλες των δραστηριοτήτων 1 και 2 είναι το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο και με τον τρόπο αυτόν να φτάσουν στο συμπέρασμα ότι η γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης διατηρεί τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής και το εργαλείο «Μετακίνηση της προβολής Γραφικών». Στη διατύπωση του προβλήματος αναφέρεται η δυνατότητα που έχει η πλατφόρμα να γυρνάει δεξιά ή αριστερά προκειμένου να έχουν νόημα για τους μαθητές οι αρνητικές τιμές του x στη συνάρτηση $y = \alpha x^2$.

Η πρώτη ερώτηση της δραστηριότητας αυτής στην οποία ζητείται η σχέση που συνδέει τα δύο εμβαδά καθώς και η συνάρτηση που προκύπτει από τη σχέση αυτή, δεν αναμένεται να δημιουργήσει κανένα πρόβλημα στους

μαθητές οι οποίοι θα δώσουν χωρίς δυσκολία τη σχέση $x^2 = ay$, όπου x είναι η πλευρά του τετραγώνου, α είναι το πλάτος και y είναι το μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Στα σχολικά μαθηματικά, στα οποία δίνεται ξεκάθαρα αλγεβρική και σχεδόν καθόλου γεωμετρική διάσταση των μαθηματικών αντικειμένων, η σχέση αυτή πολύ δύσκολα θα μπορούσε να οδηγήσει έναν μαθητή στη σκέψη της ισότητας δύο εμβαδών. Η συνέχεια της ερώτησης, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές καλούνται λύνοντας τη σχέση $x^2 = ay$ ως προς y, να βρουν ποια συνάρτηση προκύπτει, δίνεται προκειμένου αφενός οι μαθητές να οδηγηθούν στη σκέψη ότι το πλαίσιο άλλαξε και πλέον αναφερόμαστε σε συναρτήσεις και αφετέρου είναι απαραίτητη προκειμένου να ξεπεραστούν περιορισμοί του προγράμματος βάσει των οποίων η εισαγωγή της σχέσης $x^2 = ay$ δε δίνει γεωμετρική αναπαράσταση (η σχέση θα πρέπει να έχει λυθεί ως προς y).

Στη δεύτερη ερώτηση της δραστηριότητας αυτής, οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν την επίδραση του α στη μορφή της καμπύλης που εμφανίζεται στην οθόνη τους και έπειτα να ερμηνεύσουν την επίδραση αυτή. Ένα παράδειγμα της εικόνας που βλέπουν οι μαθητές για δύο διαφορετικές τιμές του α (α=0,5 και α=3,1) φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 4

Η ερμηνεία της επίδρασης του α αναμένεται να γίνει από τους μαθητές με χρήση της απαίτησης του προβλήματος για διαρκή ισότητα των δύο εμβαδών και άρα καθώς το α μεγαλώνει, προκειμένου τα δύο εμβαδά να είναι ίσα, θα πρέπει για το ίδιο x να προκύπτει μικρότερο y και άρα η καμπύλη να ανοίγει. Στην περίπτωση δηλαδή αυτή βρισκόμαστε σε πλήρη αντιστοιχία με τον ρόλο του p στην παραβολή της προηγούμενης δραστηριότητας.

Στην ερώτηση 3 ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν ότι οι καμπύλες των δραστηριοτήτων 1 και 2 είναι το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο και προφανώς προκειμένου να γίνει αυτό θα πρέπει οι μαθητές να αποδείξουν ότι η καμπύλη της δραστηριότητας 2 είναι μία παραβολή. Στο σημείο αυτό και προκειμένου να διευκολυνθούν οι αλγεβρικές πράξεις των μαθητών, η ερευνήτρια μπορεί να παρέμβει και να ζητήσει από τους μαθητές να αποδείξουν ότι η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ και όχι η $y = \frac{x^2}{\alpha}$ στην οποία έχουν καταλήξει από την ερώτηση 1, είναι μία παραβολή σύμφωνα με τον ορισμό που έχουν μάθει από τα σχολικά μαθηματικά. Θα πρέπει δηλαδή, προκειμένου οι μαθητές να θεωρηθεί ότι έχουν απαντήσει επιτυχώς στην ερώτηση αυτή, αφού θα έχουν θεωρήσει ένα τυχαίο σημείο που θα παίζει το ρόλο της εστίας και μία τυχαία ευθεία που θα παίζει το ρόλο της διευθετούσας καθώς και ένα τυχαίο σημείο της παραβολής (x, y), να καταλήξουν ότι η εστία και η διευθετούσα είναι σε κάθε περίπτωση σταθερές και ανεξάρτητες από τα x και y. Η αλλαγή της παραμέτρου της συνάρτησης από $\frac{1}{\alpha}$ σε α δεν αναμένεται να δημιουργήσει παρανοήσεις στους μαθητές. Στην τελευταία ερώτηση ζητάμε από τους μαθητές να κάνουν τη σύνδεση της επίδρασης του p στην παραβολή $y^2 = 2px$ και της επίδρασης του α στη συνάρτηση $y = \alpha x^2$.

Σε δεύτερο χρόνο ζητείται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν το ρόλο του α στη συνάρτηση $y = \alpha x^2$ προκειμένου να διαπιστωθεί αν η σύνδεση της εν λόγω συνάρτησης με το γεωμετρικό αντικείμενο της παραβολής και τις ιδιότητες της ή η θεώρηση της σχέσης αυτής ως έκφρασης ισότητας εμβαδών

βοήθησε τους μαθητές στην κατανόηση του ρόλου της παραμέτρου στην τετραγωνική συνάρτηση $y = \alpha x^2$.

3.5. ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τα προς ανάλυση δεδομένα προέκυψαν από δύο πηγές: αφενός από τις απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας και αφετέρου από την καταγραφή τόσο των λεγομένων των μαθητών όσο και των ενεργειών στις οποίες προέβησαν κατά την αλληλεπίδρασή τους με το δυναμικό περιβάλλον. Η καταγραφή αυτή έγινε με ψηφιακό μικρόφωνο το οποίο βρισκόταν μεταξύ των μαθητών αλλά και με βιντεοσκόπηση των μαθητών με κάμερα από την ερευνήτρια. Η λήψη του υλικού της κάμερας έγινε με τέτοιον τρόπο ώστε να μην φαίνονται τα πρόσωπα των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα αλλά να φαίνονται όσο το δυνατόν περισσότερο οι χειρονομίες τους αφού η μέχρι τώρα εμπειρία της ερευνήτριας συναινούσε υπέρ του γεγονότος ότι πολλοί μαθητές δυσκολευόμενοι να εκφραστούν με λόγια, ειδικά στις περιπτώσεις οπτικοποίησης, καταφεύγουν σε χρήση ποικίλων χειρονομιών.

Τα επεισόδια που παρουσιάζονται στην εργασία έχουν επιλεγεί με δύο γνώμονες. Από τη μία είναι επεισόδια που είτε αναδεικνύουν δυσκολίες των μαθητών σε έννοιες που σχετίζονται με αυτή της παραβολής είτε φανερώνουν μία σωστή προσέγγιση των μαθητών σε σχετικές με την παραβολή έννοιες οπότε βάσει της θεωρίας των εννοιολογικών πεδίων του Vergnaud θα αναμέναμε οι μαθητές αυτοί είτε να εμφανίσουν δυσκολίες στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου στη μορφή της παραβολής καθώς και στη σύνδεση αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης της παραβολής είτε να φτάσουν πιο εύκολα στις ζητούμενες συνδέσεις, αντίστοιχα. Τα επεισόδια που επιβεβαιώνουν αυτήν ακριβώς την ικασία έχουν συμπεριληφθεί στην ανάλυση. Από την άλλη παρουσιάζονται επεισόδια τα οποία αναδεικνύουν τη συμβολή του δυναμικού περιβάλλοντος στο να ξεπεράσουν οι μαθητές τις όποιες παρανοήσεις μέσω της αλληλεπίδρασης τους με το δυναμικό περιβάλλον εμπλεκόμενοι με τον τρόπο αυτό στην κατασκευή της γνώσης.

4. ΑΝΑΛΥΣΗ

4.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Η αρχική δραστηριότητα η οποία σχεδιάστηκε αποκλειστικά για να υπενθυμίσει στους μαθητές τον κορμό της έννοιας της παραβολής ανέδειξε σχήματα της παραβολής που διέφεραν πολύ από αυτά που ανέμενε η ερευνήτρια.

Παναγιώτης: Υπερβολή δεν είναι?

Ερευνήτρια: Υπερβολή;

Δανάη: Παραβολή.

Ερευνήτρια: Παραβολή γιατί? Υπερβολή γιατί; Μπορεί και υπερβολή και παραβολή.

Παναγιώτης: Για να είναι παραβολή δεν πρέπει να είναι το κέντρο δηλαδή η κορυφή πρέπει να είναι στην αρχή των αξόνων;

Ερευνήτρια: Έχεις άξονες?

Παναγιώτης: Όχι.

Ερευνήτρια: Δεν μπορείς να βάλεις όπου θέλεις;

Παναγιώτης: Ναι

Ερευνήτρια: Μπορεί και να μπορείς. Δηλαδή το πρόβλημα σου είναι ότι δεν υπάρχουν άξονες;

Παναγιώτης: Ναι.

Δανάη: Είναι μόνο απ΄τη μια μεριά.

Ερευνήτρια: Για την υπερβολή ποιο θα ήταν το πρόβλημα σου? Για την υπερβολή πού θα ήταν οι άξονες σου?

Παναγιώτης: Όπου να ‘ναι.

Ερευνήτρια: Αααααα, για την υπερβολή δε σε πειράζει?

Παναγιώτης: Όχι. Περνάει από ένα σημείο στην υπερβολή.

Ερευνήτρια: Ναι, μπορεί και να ‘χεις δίκιο δεν ξέρω. (*Η ερευνήτρια εμφανίζει τους άξονες*). Τώρα είναι καλύτερα? Για ξανακούνα το. (*Ο Παναγιώτης μετακινεί το σημείο Π*).

Παναγιώτης: Κομπλέ είμαστε.

Ερευνήτρια: Τώρα τι είναι;

Παναγιώτης: Παραβολή.

Ο Παναγιώτης καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αυτό που βλέπει στην οθόνη του υπολογιστή του είναι μία υπερβολή, με το θεώρημα-εν-δράσει που τον κάνει να διατυπώνει αυτή την άποψη να είναι το ότι η παραβολή πρέπει να έχει κορυφή στην αρχή των αξόνων. Η Δανάη από την άλλη, διατυπώνει την

άποψη ότι αυτό που βλέπει είναι παραβολή, χωρίς ούτε αυτή να προσφεύγει στον μαθηματικό ορισμό, κάνοντας χρήση του δικού της θεωρήματος-ενδράσει, σύμφωνα με το οποίο είναι παραβολή γιατί βρίσκεται *μόνο από τη μία μεριά* και προφανώς σκεπτόμενη ότι έχει συνηθίσει να βλέπει τους δύο κλάδους της υπερβολής εκατέρωθεν του άξονα των y απορρίπτει την ιδέα της υπερβολής και άρα θεωρεί ότι πρόκειται για παραβολή.

Για τον Άλκη και τον Γρηγόρη τα πράγματα είναι πολύ πιο δύσκολα αφού παρουσιάζουν μεγάλη δυσκολία να ξεπεράσουν τις πρωτοτυπικές μορφές της παραβολής και της υπερβολής που έχουν στο μυαλό τους. Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνεται όλη η πορεία σκέψης των μαθητών, δηλαδή το γιατί οι μαθητές θεωρούν ότι έχουν να κάνουν με υπερβολή (πρωτοτυπική μορφή), τη διαπίστωση από τους μαθητές ότι ο ορισμός της υπερβολής δεν μπορεί να ικανοποιείται στο συγκεκριμένο γεωμετρικό αντικείμενο (δεν μπορούν οι μαθητές να βρουν δύο εστίες), η τοποθέτηση του αντικειμένου σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τη βοήθεια του υπολογιστικού περιβάλλοντος και τελικά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για παραβολή και πάλι στηριζόμενοι αποκλειστικά στην πρωτοτυπική μορφή της παραβολής και χωρίς να αναζητήσουν την ικανοποίηση των απαιτήσεων του ορισμού.

Ερευνήτρια: Πείτε μου αν μπορείτε να βρείτε τι τροχιά διαγράφουν τα σημεία Γ και Β;
Γρηγόρης: Παραβολική.
[....]
Άλκης: Υπερβολή, εε;
Γρηγόρης: Υπερβολή είναι, εεεε;
Άλκης: Είναι έτσι, (*δείχνει με το χέρι του αυτό που βλέπει στην οθόνη αλλά εν τω μεταξύ το σημείο Π δεν το έχει μετακινήσει αρκετά αριστερά ώστε η καμπύλη να είναι συνεχής και αυτό που βλέπει είναι μόνο δύο κομμάτια της παραβολής σε κάποια απόσταση από την κορυφή Κ*) δεν ενώνονται ποτέ εκτός αν τα πάμε πολύ πολύ μακρυά. (*Μετακινεί το Π προς τα δεξιά*).
[.....](*Ο Άλκης μετακινεί το Π προς τα αριστερά και πλέον σχηματίζεται όλη η παραβολή).*
Γρηγόρης: Ναι, αυτή είναι μια παραβολή.
Άλκης: Υπερβολή.
Τα δύο παιδιά λένε ταυτόχρονα τις λέξεις υπερβολή και παραβολή.
Γρηγόρης: Ε υπερβολή και λέω παραβολή. Ωραία τώρα πρέπει να πούμε τι τροχιά διαγράφει;

Ερευνήτρια: Υπερβολή είναι;

Άλκης: Νομίζουμε.

Ερευνήτρια: Γιατί;

Άλκης: Γιατί? Γιατί έτσι έχουμε μάθει.

Ερευνήτρια: Τι είναι υπερβολή;

Άλκης: Υπερβολή τι είναι?

Ερευνήτρια: Ναι.

Άλκης: Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου...εεεεε...τα οποία έχουν...πες το πες το Γρηγόρη...

Γρηγόρης: Η διαφορά των....

Άλκης: Των αποστάσεων είναι

Γρηγόρης: Των αποστάσεων είναι, τώρα είναι οι δυο αποστάσεις

Άλκης: Είναι αυτές οι αποστάσεις μωρέ.. Αυτές. Α και Ε. Ε και Α. Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων είναι σταθερή.

Γρηγόρης: Και μικρότερη της ΕΕ.

[.....]

Ερευνήτρια: Ωραία. Και ποια άλλη απόσταση χρειάζεσαι;

Άλκης: Χρειαζόμαστε την άλλη εστία που η άλλη εστία δεν υπάρχει. Μια στιγμή...

[.....]

Ερευνήτρια: Θες να κάνεις κάτι; Θες να πατήσεις λίγο τους άξονες; Να σου εμφανιστούν οι άξονες; Ξανακάν΄το απ΄την αρχή αυτό που έκανες. (*Ο Άλκης κάνει αυτό που του λέει η ερευνήτρια*). Θες να μου πεις τώρα τι είναι αυτό; Είναι υπερβολή;

Άλκης: .... Μετατοπισμένη υπερβολή.

Ερευνήτρια: Γρηγόρη; Μπορεί και να είναι.

Γρηγόρης: Μετατοπισμένη υπερβολή; Ναι, άμα ήτανε παραβολή θα ήτανε..... μετατοπισ... παραβολή; Αλλά αυτή δεν είναι η μορφή της υπερβολής; Το σχήμα; Τι άλλο μπορεί να είναι;

Ερευνήτρια: Η παραβολή πώς θα ήτανε?

Γρηγόρης: Η παραβολή θα ήτανε...εκεί που είναι το Α θα ξεκίναγε τέλος πάντων.

Άλκης:Μια στιγμή, έλλειψη είναι εδώ έτσι (*δεν κάνει καμία ενέργεια στον υπολογιστή*) ωραία, έφυγε η έλλειψη. Ηηηηη παραβολή, δε νομίζω ότι είναι παραβολή.

Ερευνήτρια: Γιατί?

Άλκης: Γιατί έχει άλλο σχήμα.

Ερευνήτρια: Θες να μου πεις πώς είναι το σχήμα της παραβολής; Μπορεί και να είναι άλλο σχήμα όντως αλλά θες να μου πεις πώς είναι;

Άλκης: Θυμάσαι πώς είναι;

Γρηγόρης: Το σχήμα της παραβολής; Σαν της υπερβολής απλώς είναι στην αρχή των αξόνων, το... η... η κορυφή της.

Ερευνήτρια: Ενώ αυτό πού είναι η κορυφή της?

Άλκης: Δεν είναι πάνω από το..

Γρηγόρης: Ώπα το Α δεν ήτανε η αρχή; Ε τότε είναι παραβολή αυτό. Έβλεπα λάθος το Α τόση ώρα.

Άλκης: Όντως παραβολή είναι;

Γρηγόρης: Ναι αυτό είναι παραβολή τότε.

Και σ΄αυτή την ομάδα παιδιών παρατηρούμε το ίδιο με πριν φαινόμενο, δηλαδή μία πολύ ισχυρή πρωτοτυπική μορφή της παραβολής και της υπερβολής, σύμφωνα με την οποία η παραβολή έχει την κορυφή της στην αρχή των αξόνων ενώ οι κλάδοι της υπερβολής δεν τέμνουν τον κάθετο άξονα των y και η πρωτοτυπική αυτή μορφή διαμορφώνει τα θεωρήματα-εν-δράσει. Όμως στην περίπτωση του Άλκη και του Γρηγόρη, ακόμα και όταν εμφανίζουμε τους άξονες, τα παιδιά δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν το λάθος στο θεώρημα-εν-δράσει και να το αναθεωρήσουν.

Η τρίτη ομάδα παιδιών δεν εμφανίζει ιδιαίτερα προβλήματα στην εισαγωγική δραστηριότητα:

Συμέλα: Ωραία, βλέπουμε μια παραβολή. Φοβερά.

Ερευνήτρια: Πού το ξέρεις ότι είναι παραβολή;

Συμέλα: Μμμμμ, έτσι φαίνεται.

Ερευνήτρια: Από πού;

Συμέλα: Μήπως επειδή δε σχηματίζεται απ΄την άλλη μεριά;

[…..]

Χρήστος: Νομίζω επειδή έχει το Ε που είναι σταθερό, δεν έχει μετακινηθεί καθόλου είναι η εστία και επίσης και η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α είναι σταθερή άρα είναι η διευθετούσα;

Ερευνήτρια: Ωραία, αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε. Έχει κάτι εργαλεία πάνω οπότε μπορούμε να δούμε αν ισχύει αν είναι παραβολή ή όχι. Για να ‘ναι παραβολή τι θα πρέπει να ισχύει;

Συμέλα: Η απόσταση οποιουδήποτε σημείου της παραβολής να είναι ίση από την εστία και από τη διευθετούσα

Ερευνήτρια: Ωραία, για να δούμε λοιπόν.

Κάνουν τις μετρήσεις ΓΕ και ΓΑ.

Ερευνήτρια: Τι βγήκε;

Συμέλα: Μεγάλυτερη.

Ερευνήτρια:Γιατί;

Συμέλα:Αα, γιατί πρέπει να 'ναι απ' την ευθεία και όχι απ' το σημείο Α η απόσταση.
Η Συμέλα φέρνει το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα και κάνει τις μετρήσεις και προκύπτουν τα ευθύγραμμα τμήματα ίσα.

Παρά το γεγονός ότι η Συμέλα γνωρίζει ξεκάθαρα τον ορισμό της παραβολής, όταν πάει να ελέγξει αν είναι όντως παραβολή μετράει την απόσταση του σημείου Γ από το σημείο Α και όχι από την ευθεία που θεωρεί ότι παίζει τον ρόλο της διευθετούσας. Ακριβώς το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στις άλλες δύο ομάδες παιδιών, οι οποίες παρόλο που διατυπώνουν ξεκάθαρα και ορθά τον ορισμό της παραβολής, όταν χρησιμοποιούν το εργαλείο προκειμένου να διαπιστώσουν αν ικανοποιείται ο ορισμός της παραβολής δημιουργούνται συγχύσεις ως προς το ποια απόσταση πρέπει να μετρηθεί. Στο σημείο βέβαια αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η όποια σύγχυση ξεπερνιέται αποκλειστικά από συζήτηση των μαθητών μεταξύ τους χωρίς καμία παρέμβαση της ερευνήτριας, σε καμία ομάδα.

Με τη βοήθεια της εισαγωγικής δραστηριότητας διαπιστώθηκε ότι η έννοια της παραβολής δεν ήταν άρτια δομημένη για την ομάδα του Παναγιώτη και της Δανάης και αρκετά ελλιπής για την ομάδα του Άλκη και του Γρηγόρη. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι παρά το γεγονός ότι τα θεωρήματα-ενδράσει που οι μαθητές διατύπωσαν ήταν σωστά – και οι δύο ομάδες γνώριζαν πολύ καλά τον ορισμό του γεωμετρικού αντικειμένου της παραβολής – εν τούτοις αδυνατούσαν να αντιμετωπίσουν την κατάσταση στην οποία βρέθηκαν καταφεύγοντας μόνοι τους, χωρίς την προτροπή της ερευνήτριας- στη χρήση του ορισμού. Εν τω μεταξύ, η διασυνδεδεμένη έννοια του καρτεσιανού επιπέδου στον τρόπο που δομείται για τον μαθητή η έννοια της παραβολής είναι κομβικής σημασίας, με παρανοήσεις που αφορούν το καρτεσιανό επίπεδο να βλέπουμε ότι μεταφέρονται και μετουσιώνονται σε προβληματικές καταστάσεις που αφορούν το εννοιολογικό πεδίο της παραβολής, όπως άλλωστε προβλέπεται και από τον ορισμό του Vergnaud για το εννοιολογικό πεδίο.

Εν τούτοις, το υπολογιστικό περιβάλλον και ο τρόπος με τον οποίο αυτό επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, φαίνεται να συνέβαλε αποφασιστικά στην ανάδειξη πρώτα των παρανοήσεων που ναι μεν αφορούσαν διασυνδεδεμένες έννοιες αλλά κατά προφανή τρόπο είχαν αντίκτυπο και στον ορισμό της παραβολής και έπειτα στο να ξεπεράσουν οι

μαθητές της παρανοήσεις αυτές. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να μην έχουν αντιληφθεί ότι το καρτεσιανό επίπεδο είναι ένα εργαλείο που έχουμε στη φαρέτρα μας προκειμένου να μπορούμε καλύτερα να μελετήσουμε τα γεωμετρικά αντικείμενα, - το καλύτερα έγκειται στη χρήση άλγεβρας και στη σύνδεση που επιτυγχάνεται μέσω του καρτεσιανού επιπέδου μεταξύ αλγεβρικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων των αντικειμένων- και το οποίο χρησιμοποιείται κατά βούληση από εμάς αλλά αντιμετωπίζεται από τους μαθητές σαν κάτι που προϋπάρχει ανεξάρτητα της κατάστασης που καλούμαστε κάθε φορά να αντιμετωπίσουμε. Το υπολογιστικό περιβάλλον, με τη δυνατότητα που μας παρέχει να μπορούμε να επιλέξουμε αν θέλουμε να κάνουμε ή να μην κάνουμε χρήση των αλγεβρικών ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού αντικειμένου μέσω την επιλογής εμφάνισης ή απόκρυψης του ορθογωνίου συστήματος αξόνων συμβάλλει αναμφίβολα στην αναθεώρηση από τους μαθητές της προηγούμενης αντίληψής τους σχετικά με το καρτεσιανό επίπεδο.

Επιπρόσθετα, το πρόβλημα που θίχτηκε και νωρίτερα και αφορά στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν καταφεύγουν άμεσα στον έλεγχο του κατά πόσο ισχύουν οι απαιτήσεις του ορισμού αλλά προσπαθούν εποπτικά να δουν αν η αναπαράσταση που έχουν μπροστά τους ταιριάζει με αυτή της έννοιας της παραβολής που έχουν, έχει να κάνει με το γεγονός ότι η διδασκαλία εξακολουθεί στις μέρες μας να γίνεται με στατικά μέσα αφαιρώντας έτσι από τους μαθητές τη δυνατότητα να εμπλακούν ενεργά στη διαδικασία της μάθησης. Το ζήτημα αυτό αντιμετωπίζεται από το υπολογιστικό περιβάλλον με επιτυχία αφού οι μαθητές μέσω των εργαλείων που τους παρέχει το πρόγραμμα, μπορούν να διαπιστώσουν απο μόνοι τους αν πρόκειται ή όχι για παραβολή και κάνοντας ουσιαστική χρήση του ορισμού να τον εμπεδώσουν καλύτερα αντιλαμβανόμενοι και την αξία του- όχι μόνο της παραβολής αλλά την αξία ενός ορισμού εν γένει.

Σημαντικό για την ανάλυση της εργασίας είναι να τονιστεί ότι στην αρχική δραστηριότητα όλες οι ομάδες των μαθητών ήταν αρκετά διαστακτικές απέναντι στο περιβάλλον, χωρίς να δοκιμάζουν πράγματα και δίνοντας την αίσθηση ότι δεν θέλου –μάλλον «φοβούνται»- να κάνουν το υπολογιστικό περιβάλλον μέρος της διαδικασίας. Το αίσθημα αυτό των μαθητών αποδίδεται εκ των ουκ άνευ στη μη επαρκή εξοικείωσή τους όχι μόνο με το συγκεκριμένο περιβάλλον αλλά εν γένει με τέτοιου είδους μαθησιακές διαδικασίες.

4.2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ p ΣΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ $y^2 = 2px$

4.2.1 Γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής

Προκειμένου οι μαθητές να αντιληφθούν τον ρόλο του p στη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$, θα πρέπει αρχικά να αντιληφθούν όλες τις σχέσεις που συνδέουν τα γεωμετρικά αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη τους και αυτός είναι και ο στόχος της πρώτης φάσης της δραστηριότητας αυτής.

Ερευνήτρια :[….] Ποια από τα ευθύγραμμα τμήματα είναι μεταξύ τους ίσα;

Δανάη:Τα πράσινα.

Ερευνήτρια: Γιατί;

Παναγιώτης:Ακτίνες.

Δανάη:Γιατί είναι όλα ίδια.

Η Δανάη απαντάει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι μεταξύ τους ίσα γιατί είναι όλα ίδια, αναφερόμενη προφανώς στο γεγονός ότι όλα αναπαρίστανται με πράσινο χρώμα.

Παναγιώτης:Το ΑΓ είναι ακτίνα.... το ΓΗ.....

Ερευνήτρια.Το ΑΓ είναι ακτίνα. Ποιανού κύκλου?

Παναγιώτης: Του μεγάλου.

Ερευνήτρια: Δηλαδή πόσο είναι το ΑΓ?

Παναγιώτης: 3.95.

Ερευνήτρια: Εεεε... ναι, ο μεγάλος κύκλος τι ακτίνα έχει?

Παναγιώτης: ΑΓ δεν έχει ακτίνα;

Δανάη: ΔΕ.

Ερευνήτρια:Σωστά?

Παναγιώτης:Πού είναι το ΔΕ; (Η Δανάη του δείχνει με το χέρι της στην οθόνη του υπολογιστή το ΔΕ). Να μετρήσουμε το ΔΕ?

Και στα δύο προηγούμενα αποσπάσματα φαίνεται ότι η γεωμετρική κατασκευή δεν αποτελεί για τους μαθητές επαρκή λόγο εξαγωγής συμπερασμάτων και γι΄αυτό και δεν καταφεύγουν σε αυτή, σε πρώτο επίπεδο τουλάχιστον. Για τον μαθητή είναι αρκετό αυτό που βλέπει, όπως συμβαίνει με

τη Δανάη η οποία φαίνεται να πείθεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι πράσινα στο σχήμα είναι ίσα μόνο και μόνο επειδή μοιάζουν τα ίδια οπτικά. Ο Παναγιώτης πηγαίνει ένα βήμα παραπέρα και φαίνεται να ζητάει να πειστεί για την ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων μέσα από μετρήσεις. Ακριβώς αυτό υποδεικνύει και το ακόλουθο απόσπασμα:

Δανάη: Ωραία. Το ΓΗ με το ΔΕ και το ΙΖ, το ΓΕ με το ΗΔ.
Παναγιώτης: Γενικά όλα μεταξύ τους , γράψ' τα όλα με ένα ίσον.
Δανάη: Όχι δεν είναι όλα. Το ΓΕ με το ΗΔ είναι αυτά ίσα ήταν 11 κόμμα κάτι δεν είναι ίσο με το ΓΗ ας πούμε.
Παναγιώτης: Όχι, θέλω να γράψεις ΓΗ ίσον με ΓΑ ίσον με ΖΑ ίσον με ΖΙ ίσον με 13,81.

Στο παρακάτω απόσπασμα, φαίνεται ο Παναγιώτης να έχει προχωρήσει αρκετά αφού μπορεί πλέον να δει την ισότητα των ΑΓ και ΗΓ χωρίς να καταφεύγει σε μετρήσεις:

Ερευνήτρια: Παρεμπιπτόντως ποιανού κύκλου είναι η ΑΓ ακτίνα?
Παναγιώτης: Η ΑΓ?
Ερευνήτρια: Ναι
Παναγιώτης: Του μεγάλου.
Ερευνήτρια: Ποιανού?
Παναγιώτης: του Α κόμμα ΔΕ. Τσουυυ έλα μωρέεε!! Το ΔΕ είναι ίσο με το ΑΓ. Άρα και το ΗΓ που είναι παράλληλο με το ΔΕ είναι ίσα.
Δανάη: Το ' χασα, πάμε πάλι.
Παναγιώτης: Το ΔΕ που είναι ο κύκλος είναι ίσον με το ΑΓ, ακτίνες. Αντί να σου δίνει Α κόμμα ΑΓ σου δίνει Α κόμμα ΔΕ αυτά είναι ίσα. Και αυτό (δείχνει το ΔΕ) είναι ίσο με αυτό (δείχνει το ΓΗ). Παράλληλα.
Δανάη: Το ΔΕ δεν είναι ακτίνα όμως κάπου.
(*Ο Παναγιώτης της δείχνει το κείμενο που λέει Κύκλος (Α,ΔΕ)*).
Παναγιώτης: Του κύκλου.
Δανάη: Αααα είναι.
Παναγιώτης: Και σου λέω αντί να σου δίνει, αντί για ΔΕ να σου δίνει ΑΓ σου δίνει το ΔΕ.
Δανάη: Αααα ναι ωραία.
Παναγιώτης: Και επειδή είναι ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα είναι ίσα.

Η Δανάη δυσκολεύται να αντιληφθεί την ισότητα των ΑΓ και ΓΗ γιατί δεν μπορεί να δει τη ΔΕ ως ακτίνα του μεγάλου κύκλου – κάτι που μας προξενεί μάλλον εντύπωση δεδομένου ότι στο πρώτο απόσπασμα η Δανάη είναι αυτή που δηλώνει πρώτη ότι η ακτίνα του μεγάλου κύκλου είναι η ΔΕ. Προφανώς το θεώρημα-εν-δράσει της Δανάης συνδέει ξεκάθαρα την ακτίνα με δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα και όχι με το μήκος αυτού, ερχόμενο έτσι σε σύγκρουση με την παρούσα σύνδεση. Η Δανάη θα πρέπει να αναπροσαρμόσει το δεδομένο θεώρημα-εν-δράσει, επεκτείνοντας τον ορισμό της ακτίνας ώστε να περιλαμβάνει και τις ιδιότητες του ευθύγραμμου τμήματος (μήκος).

Συμέλα: Και θα αποδείξουμε ότι και το ΗΓ είναι ίσο με το ΑΓ υποθέτω τώρα.

Ερευνήτρια: Το ΗΓ ότι είναι ίσο με το ΑΓ;

Συμέλα: Ναι.

Ερευνήτρια: Δεν ξέρω, εσύ θα μου πεις.

Πολύ μεγάλη παύση (50΄΄)

Ερευνήτρια: Το ΑΓ τι είναι;

Συμέλα:Ακτίνα.

Ερευνήτρια:Ποιανού;

Συμέλα: Του μεγάλου κύκλου.

Μεγάλη παύση (25΄΄)

Ερευνήτρια:Τι είπαμε ότι είναι το ΑΓ;

Συμέλα:Ακτίνα!!

Ερευνήτρια:Μάλιστα...Ποιανού;

Χρήστος:Του μεγάλου κύκλου.

Ερευνήτρια:Ποιανού κύκλου δηλαδή;

Χρήστος:Του Α κόμμα ΔΕ.

Ερευνήτρια: Μάλιστα.

Συμέλα:Δε βοηθάτε.

Ερευνήτρια:Πολύ κιόλας.

Συμέλα: Οκ.

Παύση 25΄΄

Ερευνήτρια:Ο κύκλος Α κόμμα ΔΕ τι ακτίνα έχει;

Συμέλα: Σε μέτρα;

Ερευνήτρια: Πώς συμβολίζουμε έναν κύκλο; Το Α κόμμα ΔΕ τι σημαίνει;

Συμέλα: Α είναι το κέντρο και ΔΕ είναι η ακτίνα.

Ερευνήτρια:Αααα.

Παύση 10΄΄

Χρήστος: Άρα αφού το ΔΕ είναι ακτίνα, επειδή είπαμε οι ευθείες είναι κάθετες, το ΔΕ ισούται με το ΗΓ άρα και το ΗΓ είναι ακτίνα, όμως ακτίνα είναι και το ΑΓ. Άρα το ΑΓ είναι ίσο με το ΗΓ και ομοίως και το ΙΖ είναι ίσο με το ΑΖ.

Οι μαθητές της ομάδας του Χρήστου και της Συμέλας φαίνεται να φτάνουν με μεγαλύτερη ευκολία στην ισότητα των ΑΓ και ΗΓ, χωρίς εμφανείς παρανοήσεις.

Εντύπωση προκαλεί η ευκολία της ομάδας του Γρηγόρη και του Άλκη στην ανάδειξη της ισότητας αυτής δεδομένου ότι η ομάδα αυτή των μαθητών παρουσίασε σε πολλά σημεία της δραστηριότητας δυσκολίες στον εντοπισμό των γεωμετρικών ιδιοτήτων των διαφόρων αντικειμένων. Πιθανότατα οι προαναφερθείσες δυσκολίες να οφείλονται σε δυσκολίες των μαθητών με διασυνδεδεμένες έννοιες που τους εμποδίζουν όμως στη θεμελίωση άλλων εννοιών, ενώ στην παρούσα περίπτωση, δεδομένου ότι φαίνεται να υπάρχει άνεση και μαθηματική ορθότητα με το σχήμα της ακτίνας οι μαθητές εμφανίζονται να φτάνουν με χαρακτηριστική ευκολία στις επιθυμητές συνδέσεις:

Γρηγόρης: Ναι, ίσα είναι αφού το ΔΕ λέει ότι είναι ακτίνα του κύκλου (*δείχνει με το χέρι του την οθόνη του υπολογιστή στο κουμπί εμφάνισης/απόκρυψης του κύκλου)* και απ΄το σχήμα φαίνεται ότι το ΙΖ είναι ίσο με το ΔΕ (*δείχνει στο σχήμα στην οθόνη τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα)*.

Στο παράπανω απόσπασμα δεν φαίνεται ξεκάθαρα αν όντως ο Γρηγόρης έχει αντιληφθεί την εν λόγω ισότητα, τα γραφόμενά του ωστόσο στο φύλλο εργασίας δεν επιτρέπουν καμία αμφιβολία:

1. Επιλέγοντας τα κουμπιά εμφάνισης των κύκλων (Ο, ΟΑ) και (Α, ΔΕ) που εμφανίζονται στο αρχείο *δραστηριότητα 1*, μπορείτε να αιτιολογήσετε ποια από τα ευθύγραμμα τμήματα που φαίνονται στο σχήμα είναι μεταξύ τους ίσα;

Απ: ΑΓ = ΑΖ επειδή είναι ακτίνες του κύκλου (Α, ΔΕ)
ΗΓ = ΙΖ = ΔΕ (όπου ΔΕ ακτίνα του κύκλου (Α, ΔΕ)]
επειδή οι αποστάσεις παραλλήλων ευθειών είναι ίσες
Άρα όλα είναι ίσα μεταξύ τους. ΟΑ = ΟΑ γιατί είναι ακτίνες
του κύκλου (Ο, ΟΑ)

Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει τι ειπώθηκε στην αρχή της πρώτης δραστηριότητας από τους μαθητές της ομάδας αυτής:

Άλκης: εδώ λέει (*δείχνει το φύλλο εργασίας)* ότι όλα βασιζ είναι σχετικά με την παραβολή. Οπότε άμα φανταστούμε την παραβολή εδώ πέρα (*δείχνει τον άξονα yy΄ στο επίπεδο της οθόνης, δε σχηματίζει με το χέρι του την καμπύλη της παραβολής*) είναι εύκολο.

Γρηγόρης: Θα είναι το ΗΓ σίγουρα ίσο με το ΓΑ επειδή το Γ είναι τυχαίο σημείο της παραβολής και ισαπέχει από τη διευθετούσα (*δείχνει με το χέρι του την ΗΙ)*.

Άλκης:Το ξέρουμε ότι ισαπέχει.

Γρηγόρης: Αυτή είναι πάντως είναι σίγουρα εδώ η διευθετούσα γιατί είναι $-\frac{p}{2}$ (*δείχνει το -2 στο σημείο Δ)* και αυτό είναι $\left(\frac{p}{2},0\right)$ (*δείχνει το σημείο Α).*

Άλκης: Ωραία. Άρα Ζ εδώ πέρα, είναι και αυτό ένα τυχαίο σημείο της παραβολής (*εξακολουθούν στο σχήμα να μην έχουν πουθενά καμπύλη, όλα αυτά τα φαντάζονται!!)* Άρα λες ότι το, ποιο λες;

Ερευνήτρια: Σας είπα εγώ ότι έχετε παραβολή;

Άλκης: Εδώ λέει ότι έχει παραβολή (*δείχνει το φύλλο)*.

Γρηγόρης: Εδώ λέει ότι όλα είναι σχετικά με την παραβολή.

Ερευνήτρια: Κάποια στιγμή θα εμφανιστεί κάτι με την παραβολή. Εγώ θέλω να μου πείτε απ΄την κατασκευή, σε αυτή την κατασκευή που βλέπετε έτσι όπως είναι με τους κύκλους, όπως τη βλέπετε αν υπάρχουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Προκειμένου να καταλήξουν για τις ισότητες των ευθυγράμμων τμημάτων που τους ζητείται, οι μαθητές της ομάδας αυτής αναζητούν ένα πιο "ασφαλές" για αυτούς θεωρητικό πλαίσιο από αυτό της γεωμετρίας και καταφεύγουν στις ιδιότητες της παραβολής, προκειμένου να κάνουν χρήση θεωρημάτων και ιδιοτήτων και εν γένει να κινηθούν με έναν τρόπο που τους είναι πιο οικείος σε σχέση με αυτό που έχουν μάθει να κάνουν στην τάξη και συνήθως τους ζητείται από τους καθηγητές τους.

Αυτό ακριβώς το φαινόμενο παρατηρείται και στο ακόλουθο απόσπασμα όπου ο Παναγιώτης δεν εκμεταλλεύται τις γεωμετρικές ιδιότητες της κατασκευής που έχει προεκιμένου να καταλήξει σε συμπεράσματα αλλά αναζητεί την "ασφάλεια" γνωστών προτάσεων:

Ερευνήτρια:Το Α τι είναι τελικά;

Παναγιώτης: Ε;

Ερευνήτρια: Το Α τελικά τι είναι για την παραβολή σου;

Παναγιώτης: Τι είναι για την παραβολή μου; Η εστία;

Ερευνήτρια: Δεν ξέρω. Εσύ θα μου πεις. Είναι η εστία σου το Α;

Παναγιώτης: Όχι. Το p;

Ερευνήτρια:Ποιο p; Έχω p;

Παναγιώτης:Απ' τον τύπο.

Η εν γένει αδυναμία των μαθητών να δώσουν έμφαση και να αποδώσουν τον ρόλο που πρέπει στην γεωμετρική κατασκευή αποτυπώνεται ξεκάθαρα και στο ακόλουθο απόσπασμα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να σκεφτούν τι θα συμβεί στην κατασκευή όταν μετακινήσουν το σημείο Α:

Γρηγόρης: Το Α είναι εστία.

Ερευνήτρια: Άντε πάλι με την εστία.

Γρηγόρης: Οπότε θα δημιουργηθεί παραβολή από τα Γ και Ζ *(Χρησιμοποιεί τα χέρια του πολύ έντονα και δείχνει την παραβολή που θεωρεί ότι θα διαγράψουν τα Γ και Ζ)*.

Ερευνήτρια: Εε, αν μετακινήσεις το σημείο Α;

Γρηγόρης: Μμμ (*συγκαταβατικό όχι απορίας)*

Ερευνήτρια: Οκ, για κούνα το σημείο Α.... Άλκη (*Ο Άλκης μετακινεί το σημείο Α)*.

Γρηγόρης: Ωχχχ

Το παραπάνω απόσπασμα αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον αν αναλογιστούμε το γεγονός ότι οι δύο μαθητές γνωρίζουν τον ορισμό της παραβολής, αφού λίγα λεπτά πιο πριν τον έχουν διατυπώσει υποδειγματικά, πλην όμως φαίνεται να αναμένουν να πάρουν παραβολή μετακινώντας το Α το οποίο το έχουν αναγνωρίσει ως εστία της παραβολής. Πιθανολογώντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η σύγχυση αυτή θα μπορούσε να οφείλεται στην προσπάθεια του μαθητή να συσχετίσει αυτό που βλέπει με την προηγούμενη δραστηριότητα, κάτι που θα μπορούσαμε να το εντάξουμε στο ευρύτερο πλαίσιο «δισταγμού» του μαθητή να αποπειραθεί να διευρύνει τα υπάρχοντα σχήματα παρουσιάζοντας έτσι μία συνεχή προσπάθεια ένταξης νέων καταστάσεων στα υπάρχοντα σχήματα χωρίς τα τελευταία να υποστούν καμία μεταβολή. Σε αυτό βέβαια, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι σε τέτοιου τύπου μαθησιακές διαδικασίες, δηλαδή σε καταστάσεις οι οποίες προκαλούν συγκρούσεις με τα ήδη διαμορφωμένα από αυτούς γνωστικά σχήματα αναγκάζοντάς τους έτσι να τα

αναπροσαρμόσουν και φτάνοντας κάθε φορά σε ένα πιο εξελιγμένο και αναπροσαρμοσμένο σχήμα.

Αδυναμία χειρισμού των γεωμετρικών ιδιοτήτων που έχουν ανακαλύψει οι ίδιοι οι μαθητές φαίνεται και στο ακόλουθο απόσπασμα στο οποίο έχει ζητηθεί από τους μαθητές να σκεφτούν τι θα συμβεί μετακινώντας το σημείο Ε:

Γρηγόρης: Τώρα θα γίνει 100%, θα γίνει παραβολή.
Ερευνήτρια: Γιατί; Γιατί Γρηγόρη θα γίνει παραβολή τώρα 100%;
Γρηγόρης: Εεεε (παύση). Μπορούμε να μετρήσουμε αποστάσεις;

Όπως είδαμε και σε προηγούμενο απόσπασμα διαφορετικής ομάδας, οι μαθητές επιζητούν επιβεβαίωση των λεγομένων τους μέσα από μετρήσεις και όχι στα γεωμετρικά συμπεράσματα που έχουν καταλήξει. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι τα θεωρήματα-εν-δράσει που φαίνεται να επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές είναι μάλλον ορθά αλλά αποτυγχάνεται η σύνδεση γεωμτερικής και αλγεβρικής προσέγγισης.

Λίγο μετά το παραπάνω απόσπασμα:

Ο Άλκης μετακινεί το Ε.
Άλκης: Γιατί;; Παράξενο. Πού ξέρουμε ότι θα πάει έτσι; (*Το χέρι του διαγράφει την καμπύλη του ίχνους του σημείου Γ)*.
Γρηγόρης: Νάτο, νάτο, παραβολή.
Άλκης: Παραβολή! Μπράβο ρε Γκρέγκορυ!
[….]
Ερευνήτρια: Τι είναι;
Γρηγόρης: Παραβολή.
Ερευνήτρια: Γιατί;
Γρηγόρης: Γιατί το Γ ισαπέχει από το Α που είναι η εστία και από τη διευθετούσα.

Ενδιαφέρον μεγάλο παρουσιάζει η ερώτηση του Άλκη «πού το ξέρουμε ότι θα πάει έτσι;», στην οποία φαίνεται να αμφισβητεί αυτό που βλέπει. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι ο Άλκης στο σημείο αυτό δεν φαίνεται να είναι σε θέση να προσαρμόσει το σχήμα της παραβολής στις νέες καταστάσεις και έτσι, σαν μια πρώτη αντίδραση, επιλέγει να αμφισβητήσει τις ίδιες αυτές καταστάσεις. Εν συνεχεία, ο Γρηγόρης φαίνεται να κάνει ορθή χρήση του θεωρήματος-εν-δράσει σύμφωνα με το οποίο αποφαίνεται κατά πόσο ένα

γεωμετρικό αντικείμενο είναι παραβολή χωρίς βέβαια να μπορούμε να είμαστε σίγουροι από τον τρόπο που διατυπώνει την απάντησή του για το αν στηρίζει τα λεγόμενά του στις μετρήσεις ή καταφεύγει στις γεωμετρικές ιδιότητες.

Η ομάδα της Συμέλας και του Χρήστου φαίνεται να μην έχει ιδιαίτερες δυσκολίες κάνοντας ορθή χρήση των θεωρημάτων-εν-δράσει και αντιμετωπίζοντας κριτικά τις καταστάσεις με τις οποίες έρχεται αντιμέτωπη μέσω της αλληλεπίδρασης της με το περιβάλλον:

Ερευνήτρια: Πάμε τώρα να δούμε γιατί όταν μετακινούμε το σημείο Ε φαίνεται να γράφει παραβολή. [....]*Η Συμέλα χωρίς καμία υπόδειξη χρησιμοποιεί τα εργαλεία του προγράμματος και μετράει τα ευθύγραμμα τμήματα.*

Συμέλα: Είναι ίση η απόσταση από το Ε και από τη διευθετούσα (*έχει μετρήσει την απόσταση του Γ από το Η αλλά η απόσταση ΑΓ είναι γραμμένη ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΕ)*.

[....]

Χρήστος: Μισό. Είπε η απόσταση από το Ε και τη διευθ... όχι αφού έχουμε ότι το Δ... είναι ... οι ευθείες είναι παράλληλες άρα πάντα η απόσταση θα' ναι ίση άρα το ΔΕ θα'ταν ίσο με το ΗΓ δε χρειάζεται να μετρήσει την απόσταση.

Χρήστος: Να ρωτήσω κάτι;

Ερευνήτρια: Ό,τι θέλεις.

Χρήστος: Κανονικά η διευθετούσα δεν είναι x ίσον μείον p δε...εεε... ναι x ίσον μείον p δεύτερα και η εστία p δεύτερα κόμμα μηδέν. Εδώ όμως δε βλέπουμε ότι.... να 'ναι το ίδιο...

Ερευνήτρια: Ποια είναι η εστία σου;

Χρήστος: Η Ε δεν ααα είναι ααα σωστά είναι το Α μου η εστία εδώ. Νόμιζα ότι ήταν το Ε.

Και αυτή η ομάδα καταφεύγει στην επιβεβαίωση των υποθέσεων της μέσω μετρήσεων και όχι με τη βοήθεια των γεωμετρικών ιδιοτήτων αλλά φαίνεται να είναι σε θέση να προσαρμόζει τα υπάρχοντα σχήματα στις νέες καταστάσεις.

Στο παρακάτω απόσπασμα αναδεικνύεται μία παρανόηση των μαθητών η οποία είναι πολύ συχνή και σχετίζεται και αυτή άμεσα με τη στατική διδασκαλία της παραβολής. Ο Παναγιώτης έχει στο μυαλό του την ύπαρξη δύο παραβολών, μία με άξονα συμμετρίας τον x΄x και εστία στον θετικό ημιάξονα και μία με άξονα συμμετρίας τον x΄x πάλι αλλά με εστία στον αρνητικό ημιάξονα:

Ερευνήτρια: Πόσες παραβολές διαφορετικές μπορούμε να φτιάξουμε;

Δανάη: άμα κινήσουμε άλλα σημεία;

Ερευνήτρια: Ναι να κινήσουμε ό,τι θέλετε. Πόσα;

[…..]

Παναγιώτης: 2 δε θα φτιάξουμε; (Έχουν μετακινήσει το σημείο Α στον αρνητικό ημιάξονα xx΄.)

Στη συνέχεια όμως, και μέσω των δυνατοτήτων που παρέχει το περιβάλλον στους μαθητές - dragging - ο Παναγιώτης φαίνεται να επιτυγχάνει μία διεύρυνση του δικού του σχήματος της παραβολής:

Ερευνήτρια: […]Πόσες παραβολές μπορείς να γράψεις?

[….]

Παναγιώτης:Άπειρες.

Ερευνήτρια: Άπειρες. Γιατί;

Παναγιώτης: Ε;

Ερευνήτρια: Άπειρες. Γιατί άπειρες;

Παναγιώτης: Γιατί άπειρα είναι και τα σημεία.

Ερευνήτρια: Ποια σημεία;

Παναγιώτης: Του xx΄.

Το παραπάνω απόσπασμα θα πρέπει να μας βάλει σε σοβαρές σκέψεις αφού δεν είναι ποτέ δυνατόν να αναμένουμε από έναν μαθητή να αντιληφθεί επί της ουσίας τον ρόλο της παραμέτρου της παραβολής όταν για αυτόν δεν είναι ξεκάθαρη η ύπαρξη της οικογένειας των παραβολών -της οποίας το σύνολο προφανώς θα είναι ισοπληθικό με αυτό των πραγματικών αριθμών αφού πρόκειται για μία ένα προς ένα αντιστοιχία. Ενδιαφέρον βέβαια παρουσιάζει το πόσο τελικά απλό είναι να αποκατασταθεί η παρανόηση αυτή του μαθητή με τη βοήθεια του υπολογιστικού περιβάλλοντος και πιο συγκεκριμένα του εργαλείου του dragging που μας παρέχει.

4.2.2 Σύνδεση του p με τη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$

Η κατανόηση του ρόλου της παραμέτρου p στη μορφή της παραβολής $y^2 = 2px$ αναμένεται να γίνει μέσω της κατανόησης του ρόλου των σημείων Α και Ε στην κατασκευή μας. Στο παρακάτω απόσπασμα, οι μαθητές βλέπουν μόνο την κόκκινη παραβολή του Σχήματος 2 και όχι την μαύρη η οποία προκύπτει από τα ίχνη των σημείων Γ και Ζ κατά τη μετακίνηση του σημείου Ε.

Αυτό λοιπόν που ζητείται από τους μαθητές στο παρακάτω απόσπασμα είναι να φτιάξουν τη μαύρη παραβολή έτσι ώστε αυτή να πέφτει πάνω στην κόκκινη:

Ερευνήτρια: Για φέρτε το. Μπορείτε να μου πετύχετε, δηλαδή να μου γράψετε με το ίχνος των Γ και Ζ την παραβολή αυτή; (*Ξεκινάνε να μετακινούν το Α και μετά από λίγο χωρίς κανένα σχόλιο μετακινούν το Ε*).

Δανάη: Πρέπει να φέρεις το Α πιο πάνω, (*ο Παναγιώτης μετακινεί το σημείο Α*) να μετακινήσεις το Α για να πάνε τα Ζ και τα Γ πιο πάνω ώστε να πέσουν πάνω στο κόκκινο, ναι (*λέει ναι γιατί φαίνεται το σημείο Γ να έχει πέσει πάνω στην παραβολή*) και μετά θα κοκκινίσει το Ε.

Παναγιώτης: Δεν πρέπει να ξέρουμε όμως πότε ανήκουν;

Δανάη: Τι;;

Παναγιώτης: Σε ποιες συντεταγμένες ανήκουν... στην παραβολή.

Η Δανάη φαίνεται να έχει καταλάβει τον ρόλο των Α και Ε στην κατασκευή ενώ για τον Παναγιώτη είναι απαραίτητη η αλγεβρική επιβεβαίωση η οποία θα προέλθει μέσα από την διαπίστωση ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Ζ επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Φαίνεται ότι για τον Παναγιώτη το σχήμα της παραβολής δεν περιλαμβάνει τις γεωμετρικές ιδιότητές της αλλά είναι μάλλον αποκλειστικά αλγεβρικό αντικείμενο. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, θα αναμένονταν η Δανάη να προχωρήσει χωρίς πρόβλημα στη σύνδεση του ρόλου του p στη μορφή της παραβολής με τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής. Όμως, όπως φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα, η Δανάη επιχειρεί αρχικά να ερμηνεύσει αλγεβρικά τον ρόλο του p:

Δανάη: Άμα πάρουμε τον τύπο.... τη γενική μορφή τέλος πάντων, το y^2 π.χ. ίσον $2px$ και άμα λύσουμε ως προς x, ως προς p, θα βγει κλάσμα και θα λέμε πότε μεγαλώνει και πότε..... αυξάνεται. Να το γράψω καλύτερα κάπου;

[…..]

Ερευνήτρια: Να σου πω κάτι, όσο εδώ πέρα μειώνεται το p σου, τι κάνει το Α σου, ουσιαστικά;

Παναγιώτης: Μικραίνει.

Ερευνήτρια: Άρα, πώς εξηγείται αυτό με βάση αυτά που είδατε; Εδώ, στην κατασκευή σας.

Δανάη: Μικραίνει το ..... με τις αποστάσεις που κάναμε πριν;

[…..]

Δανάη: Γιατί αλλάζουμε τη θέση του Α.

Ερευνήτρια: Και τι γίνεται όταν αλλάζει η θέση του Α;

Δανάη: Αλλάζει η ακτίνα.

Ερευνήτρια: Η ακτίνα ποιανού;

Δανάη: Του μεγάλου κύκλου.

Ερευνήτρια: Σωστό. Και γιατί αλλάζει η ακτίνα του μεγάλου κύκλου;

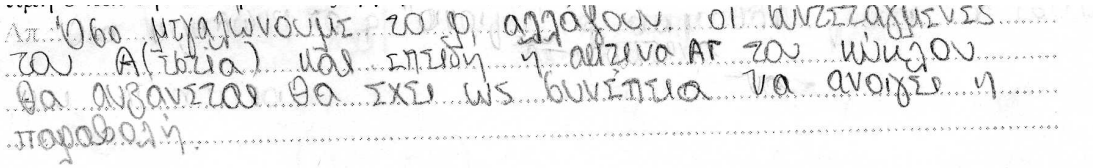
Παναγιώτης: Γιατί η ακτίνα είναι το ΑΓ.

[…..]

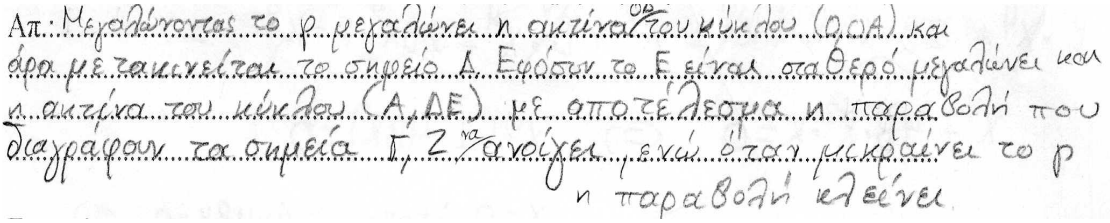
Ερευνήτρια: Γιατί ανοίγει η καμπύλη όσο μεγαλώνει το p;

Παναγιώτης: Επειδή το Α είναι η εστία και επειδή η ΑΓ είναι η ακτίνα του κύκλου.... άρα μεγαλώνει η ακτίνα.

Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι καθώς η δραστηριότητα προχωράει και οι μαθητές αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον, να καταφέρνουν να συνδέσουν το p με την ακτίνα του μεγάλου κύκλου και άρα να είναι σε θέση να κατανοήσουν τον ρόλο του p στη μορφή της παραβολής. Η απάντηση της Δανάης και του Παναγιώτη στην αντίστοιχη ερώτηση του φύλλου εργασίας έχει ως εξής:

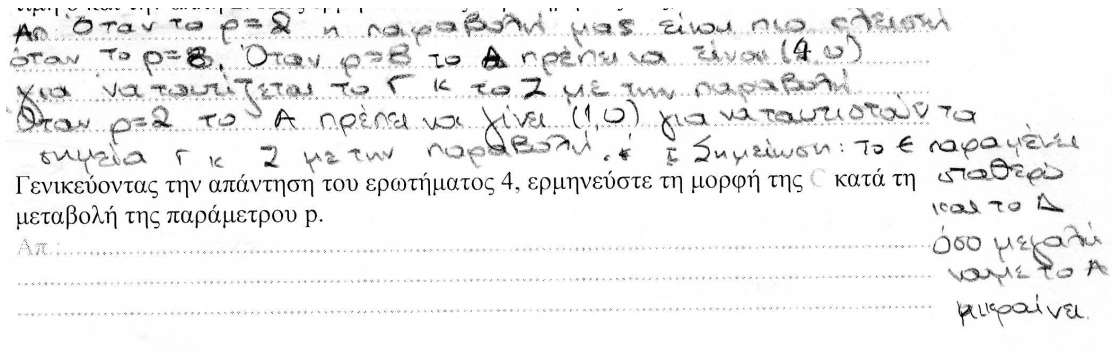

Απ: Όσο μεγαλώνουμε το p, αλλάζουν οι συντεταγμένες του Α(εστία) και επίσης η ακτίνα ΑΓ του κύκλου θα αυξανεται θα σχεί ως συνέπεια να ανοιχτεί η παραβολή

Η Συμέλα και ο Χρήστος φαίνεται να μην έχουν κανένα πρόβλημα στο να αντιληφθούν το πώς συνδέεται το p με τη μορφή της παραβολής, με τη βοήθεια της κατασκευής της δραστηριότητας όπως προκύπτει και από την απάντησή τους στο φύλλο εργασίας:


Απ: Μεγαλώνοντας το p μεγαλώνει η ακτίνα (ΟΔ) του κύκλου (ΟΔΑ) και άρα μετακινείται το σημείο Δ. Εφόσον το Ε είναι σταθερό μεγαλώνει και η ακτίνα του κύκλου (Α,ΔΕ) με αποτέλεσμα η παραβολή που διαγράφουν τα σημεία Γ, Ζ να ανοίγει, ενώ όταν μικραίνει το p η παραβολή κλείνει

Η ομάδα του Γρηγόρη και του Άλκη είχαν εμφανείς δυσκολίες στη σύνδεση του p με την γεωμετρική κατασκευή και έτσι η ερευνήτρια εξήγησε αναλυτικά στους μαθητές αυτούς την κατασκευή καθώς και τη λογική σύνδεσης

των διαφορετικών αντικειμένων. Η απάντηση της ομάδας αυτής στη σχετική ερώτηση του φύλλου εργασίας έχει ως εξής:


Απ: Όταν το p=2 η παραβολή μας είναι πιο σφιχτή
όταν το p=8. Όταν p=8 το Α πρέπει να είναι (4,0)
για να ταυτίζεται το Γ κ το Ζ με την παραβολή
Όταν p=2 το Α πρέπει να γίνει (1,0) για να ταυτιστούν τα
σημεία Γ κ Ζ με την παραβολή. Σ Σημείωση: Το Ε παραμένει σταθερό
και το Δ
όσο μεγαλώνει το Α
μικραίνει.

Γενικεύοντας την απάντηση του ερωτήματος 4, ερμηνεύστε τη μορφή της C κατά τη μεταβολή της παράμετρου p.

Από την απάντηση των μαθητών φαίνεται ξεκάθαρα η αδυναμία τους να συσχετίσουν το p με τις γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής. Εν τω μεταξύ, μετά το τέλος της πρώτης δραστηριότητας, ο Γρηγόρης διατυπώνει την απορία πώς συνδέονται οι δύο παραβολές του Σχήματος 2, εννοώντας προφανώς την κόκκινη παραβολή και τη μαύρη που έχει σχηματιστεί από τα ίχνη των Γ και Ζ κατά τη μετακίνηση του σημείου Ε:

Γρηγόρης: Δεν κατάλαβα απλώς πώς συνδέεται η μία παραβολή με την άλλη, αυτό.

Ερευνήτρια: Ποια είναι η άλλη;

Γρηγόρης: Δηλαδή εμείς μεταβάλλουμε το p αλλά την αρχική παραβολή, δεν.... δε μεταβάλλεται είναι σταθερή.

Ο Γρηγόρης δεν κατανοεί γιατί όταν μεταβάλλουμε τον δρομέα του p, η μόνη καμπύλη που αλλάζει μορφή είναι η κόκκινη και όχι η μαύρη. Η παρανόηση αυτή πιθανόν πηγάζει από την αδυναμία του Γρηγόρη να αντιληφθεί την έννοια της παραμέτρου p, δηλαδή το εννοιολογικό πεδίο του Γρηγόρη που αφορά την παράμετρο δεν είναι εμπλουτισμένο με αρκετές εμπειρίες και έτσι ο μαθητής αστοχεί να διακρίνει τη διαφορά των δύο αντικειμένων της δραστηριότητας: από τη μία η οικογένεια των παραβολών $y^2 = 2px$ με τον ρόλο του p να είναι η έκφραση της οικογένειας αυτής και από την άλλη μία συγκεκριμένη κάθε φορά παραβολή η οποία προκύπτει για συγκεκριμένη τιμή του p που εδώ εκφράζεται από τη θέση του σημείου Α.

4.3. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ α ΣΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = \alpha x^2$

Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να βρουν την επίδραση του α στη μορφή της καμπύλης $x^2 = \alpha y$ και αυτό που αναμέναμε να κάνουν οι μαθητές

ήταν να προσεγγίσουν τον ρόλο του α μέσα από την ισότητα των δύο εμβαδών των επίπεδων σχημάτων που εμφανιζόταν στην οθόνή τους. Αυτό όμως δεν ήταν τελικά αυτό που ίσχυσε για τις δύο από τις τρεις ομάδες οι οποίες, παρά το γεγονός ότι φάνηκαν να βλέπουν τον ρόλο του α μέσα από την προσέγγιση των εμβαδών, αυτό που επέλεξαν να γράψουν σαν απάντηση στο φύλλο εργασίας ήταν κάτι διαφορετικό:

Γρηγόρης: Όταν μικρύνουμε το α το y μεγαλώνει γι' αυτό ανοίγει, είναι απ΄τη συνάρτηση. Είναι αντιστρόφως ανάλογο του α απ' τη συνάρτηση, το y.

[…..]

Ερευνήτρια: Άρα το εμβαδόν της πλάκας

Άλκης: Μένει ίδιο

Ερευνήτρια: Όταν λοιπόν μεγαλώνει το α, τι θα κάνει το y;

Γρηγόρης: Θα μικρύνει

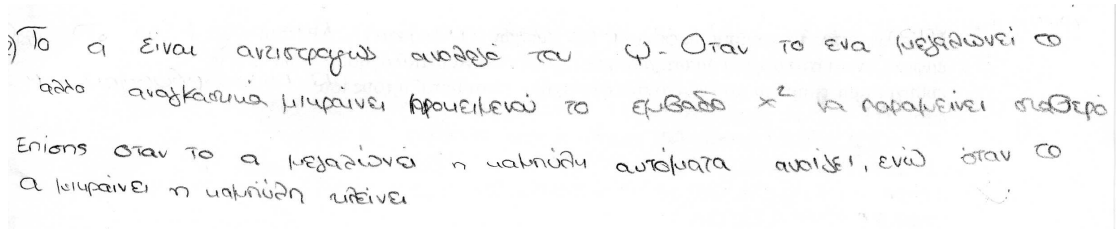
Ερευνήτρια: Μικραίνει

Γρηγόρης: Ναι, προκειμένου να μένει σταθερό το x.

Ερευνήτρια: Το x^2

Γρηγόρης:Το x^2 ναι, το εμβαδόν.

Η απάντηση της ομάδας του Γρηγόρη και του Άλκη στο φύλλο εργασίας στην ερώτηση αυτή ήταν η εξής:



Ερευνήτρια: Το α τι έκανε εδώ;

Συμέλα: Μεγάλωσε

Ερευνήτρια: Μεγάλωσε το α...

Συμέλα: Μεγάλωσε και η καμπύλη. Άνοιξε

Ερευνήτρια: Άνοιξε κι η καμπύλη, γιατί;

Συμέλα: Πολύ καλή ερώτηση

Παύση

Χρήστος: Λοιπόν, είπαμε μεγαλώνουμε το α, μεγαλώνει η καμπύλη. *Παύση*

Ερευνήτρια: Σκέψου το με τα εμβαδά σου, όπως είναι τα εμβαδά.

Συμέλα: Ωραία.

Παύση

Χρήστος: Αν θεωρήσουμε ότι ο πρώτος τύπος (*προφανώς εννοεί αυτόν που έχουν γράψει στο φύλλο εργασίας, δηλαδή τον* $x^2 = \alpha y$) παριστάνει μία παραβολή με α που είναι p.

Συμέλα: 2p

Χρήστος: Με το 2p που υποτίθεται είναι σταθερό είδαμε στην προηγούμενη άσκηση ότι μεγαλώνοντας το p μεγαλώνει η παραβολή, Άρα εφόσον εδώ μεγαλώσαμε το α μεγαλώνει... μεγαλώνει η καμπύλη που έχουμε εδώ.

Ερευνήτρια: Αυτό που λέει ο Χρήστος είναι προφανώς πολύ σωστό το είδαμε και πριν. Με τα εμβαδά; Τα δύο εμβαδά τι θα πρέπει να είναι συνεχώς μεταξύ τους;

Συμέλα –Χρήστος: Ίσα.

Ερευνήτρια: Το ότι μεγαλώνει το α

Χρήστος: Θα πρέπει να μικραίνει το x

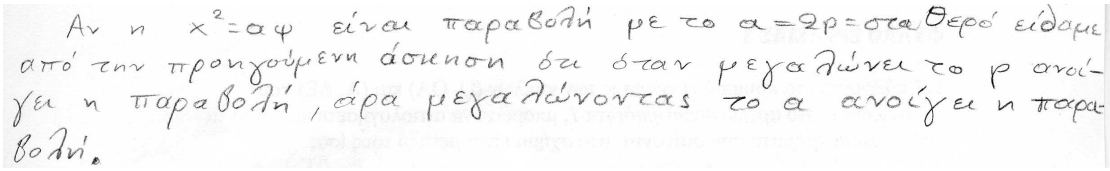
[….]

Χρήστος: Αα το x τετράγωνο είναι σταθερό. Θα μικραίνει το y.

Ερευνήτρια: Καταλαβαίνετε τι θα συμβαίνει;

Συμέλα - Χρήστος: Ναι

Η απάντηση της ομάδας αυτή στο φύλλο εργασίας είχε ως εξής:


Αν η $x^2=\alpha\varphi$ είναι παραβολή με το $\alpha=2p=$ σταθερό είδαμε από την προηγούμενη άσκηση ότι όταν μεγαλώνει το p ανοίγει η παραβολή, άρα μεγαλώνοντας το α ανοίγει η παραβολή.

Προφανώς η ερμηνεία με τα εμβαδά για τους μαθητές των ομάδων αυτών δεν ήταν ικανοποιητική, πιθανότατα επειδή η κατάσταση αυτή ήταν για τους μαθητές τελείως ξένη για το σχήμα της παραβολής και του ρόλου της παραμέτρου της, όπως ήταν διαμορφωμένα μέχρι τη στιγμή της παρέμβασης.

Μία άλλη πιθανή ερμηνεία του γεγονότος ότι οι μαθητές παρά την αναντίρρητη παρότρυνση της ερευνήτριας να δοθεί ερμηνεία βάσει των εμβαδών αυτοί κατέφυγαν στην προηγούμενη δραστηριότητα, είναι ότι κατανόησαν πλήρως τον ρόλο του p με τη βοήθεια της πρώτης δραστηριότητας και νιώθοντας καλυμμένοι και ικανοποιημένοι από αυτό δεν ένιωσαν την ανάγκη για περαιτέρω αναζήτηση.

Η ομάδα του Παναγιώτη και της Δανάης έδειξε να είναι σε θέση να αναπροσαρμόσει το σχήμα της παραβολής με τρόπο που να περιλαμβάνει την προσέγγιση των εμβαδών:

Ερευνήτρια: Οπότε Παναγιώτη τι περιμένεις να κάνει όταν αλλάζουμε το α;

Παναγιώτης: Μεταβάλλεται.

Ερευνήτρια: Ναι, εννοώ όσο μεγαλώνει το α...

Παναγιώτης: Κατάλαβα. Ανοίγει.

Ερευνήτρια: Ανοίγει, σωστά;

Παν. /Δανάη: Ναι

Ερευνήτρια:Γιατί ανοίγει;

Παναγιώτης: Γιατί μεγαλώνει το α.

Ερευνήτρια: Και όταν μεγαλώνει το α;

Δανάη: Ανοίγουμε την πλευρά του κάτω και για να είναι ισεμβαδικά θα πρέπει να αλλάζει.

Ερευνήτρια: Πώς θα πρέπει να αλλάζει;

Δ: Με τον..... ανάλογα, ξέρω 'γώ;

Παναγιώτης: Αυτό που εξηγήσαμε και πριν.

Ερευνήτρια: Πώς το εξηγήσαμε πριν; Αφού εδώ πέρα δεν έχουμε κύκλους τώρα.

Παναγιώτης: Ναι, όχι με κύκλους.

Ερευνήτρια: Έτσι όπως το λέει η Δανάη πώς σου φάνηκε;

Παναγιώτης: Σωστό.

Ερευνήτρια: Πρέπει να είναι τα εμβαδά μεταξύ τους?

Παναγιώτης /Δανάη: Ίσα.

Ερευνήτρια: Άρα το y τι θα κάνει όταν μεγαλώνει το α;

Δανάη: Θα μικραίνει.

Ερευνήτρια: Θα μικραίνει το y. Τι σημαίνει αυτό; πρακτικά? Ότι θα μικραίνει το y;

Παναγιώτης /Δανάη: Θα ανοίγει.

[…..]

Παναγιώτης: Οπότε .... επειδή το α έχει το ρόλο του p και έρχεται πιο κάτω με αποτέλεσμα να ανοίγει η καμπύλη.

[….]

Παναγιώτης: Επειδή το α.....

Παύση

Δανάη: Με βοηθάς λίγο;

Παναγιώτης: Ναι! Σκέφτομαι πώς να το διατυπώσουμε. Τι είναι.

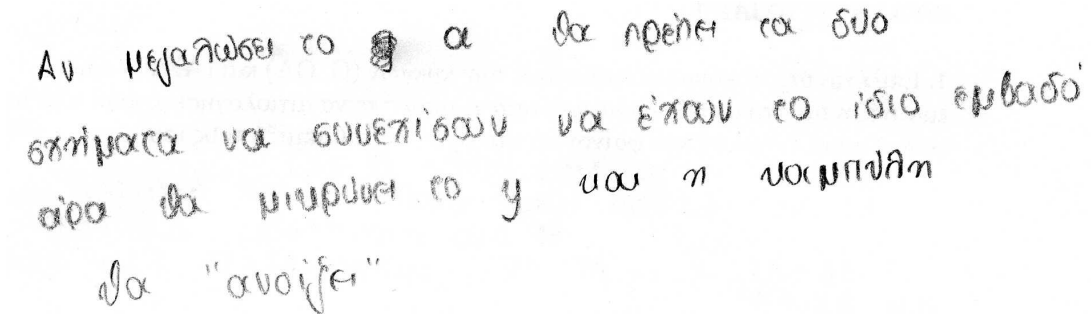
Δανάη: Και η καμπύλη που σχηματίζεται θα ανοίξει. Αυτό. Τέλος. Έλα, δεν πειράζει τώρα, καταλαβαινόμαστε.

Παναγιώτης: Και γράψε από κάτω α ίσον με 2p. Έτσι.

Δανάη: Όχι δεν θα το γράψω αυτό. Εεεε θα βάλω και εισαγωγικά.

Στο παραπάνω απόσπασμα παρατηρούμε ακόμη τον Παναγιώτη να κάνει αναφορά στο p και την Δανάη να επιλέγει να μην το συμπεριλάβει αυτό στην απάντησή τους, πιθανόν επειδή για τη Δανάη η προσέγγιση των εμβαδών της παρέχει επαρκή ερείσματα πάνω στα οποία θα δομήσει την ερμηνεία του ρόλου του α στη μορφή της καμπύλης που βλέπει στην οθόνη του υπολογιστή ενώ για τον Παναγιώτη κάτι τέτοιο ίσως να μην ισχύει.

Η απάντηση της ομάδας αυτής στο φύλλο εργασίας ήταν η εξής:


Αν μεγαλώσει το α θα πρέπει τα δύο σχήματα να συνεπίπτουν να έχουν το ίδιο εμβαδό άρα θα μιμείται το y και η καμπύλη θα "ανοίγει"

Η παράθεση του παρακάτω μεγάλου αποσπάσματος κρίνεται αναγκαία προκειμένου να αντιληφθούμε την επιτομή της θεωρίας του Vergnaud ότι οι διάφορες μαθηματικές έννοιες είναι διασυνδεδεμένες μα άλλες έννοιες. Στην προκειμένη περίπτωση, οι μαθητές θα ήταν σχεδόν αδύνατον να καταλήξουν από μόνοι τους, χωρίς την ουσιαστική παρέμβαση της ερευνήτριας, στην απόδειξη ότι η καμπύλη του σχήματος είναι παραβολή αφού δεν έχουν κατανοήσει τι ακριβώς συνιστά μαθηματική απόδειξη.

Ερευνήτρια: Εεεε, για να αποδείξουμε ότι είναι παραβολή.... τι θα πρέπει να ισχύει;

Παναγιώτης: Να ισαπέχουν πάλι;

Ερευνήτρια: Παναγιώτη;Να ισαπέχουν ποια;

Παναγιώτης: Τα σημεία.

Ερευνήτρια: Ποια σημεία;

Δανάη: Τα σημεία της παραβολής από ένα σταθερό σημείο και μία ευθεία. Απλά δεν έχουμε σταθερό...

Ερευνήτρια: Αποδείξτε το μου. Βρείτε το μου. Πρέπει να μου το βρείτε στη γενική περίπτωση. Πάρτε λοιπόν...

Δανάη: Άμα δεν πάρουμε τους τύπους γίνεται;

Ερευνήτρια: Ποιους τύπους;

Δανάη: Θα πάρουμε αυτό που ισχύει γενικά για την παραβολή και αυτό εκεί.

Ερευνήτρια: Τι ισχύει γενικά για την παραβολή;

Δανάη: $x^2 = 2py$.

Ερευνήτρια: Ναι.

Δανάη: Και να πάρουμε και αυτό εκεί και να πούμε ότι μοιάζουνε άρα..

Ερευνήτρια: Και να πούμε ότι μοιάζουνε....Ναι αυτό που λες ισχύει. Αλλά αυτή είναι απόδειξη;

Δανάη: Είναι διαπίστωση.

[....]

Παναγιώτης: Να βάλουμε καθαρούς αριθμούς.

Ερευνήτρια: Να βάλουμε καθαρούς αριθμούς.

Παναγιώτης: Λοιπόν. Το α δεν θα είναι ίσο με 2p;

Δανάη:Μα αυτό θέλει να κάνεις, να πεις ότι είναι.....

Παναγιώτης: Όχι περίμενε Αφού είναι παραβολή το α θα είναι με 2p. Ωραία. α με 2p. Άμα λύσουμε ως προς p θα είναι α δεύτερα.

Δανάη: Αυτό δεν πρέπει να αποδείξουμε βασικά; Ότι το α με 2p ίσον;

Παναγιώτης: Το α θα είναι 3/2. Εεεε το p θα είναι 3/2. Οπότε η διευθετούσα θα είναι μείον p δεύτερα.Άρα μείον...

Δανάη: Για μία τιμή που πήρε.

Παναγιώτης: Για αυτές τις τιμές που έχουμε πάρει. Άρα η διευθετούσα είναι μείον τρία τέταρτα.

Δανάη: Ναι; Και;

Ερευνήτρια: Εντάξει. Εδώ πέρα μπορείς άμα θέλεις να βάλεις το σημείο αυτό που λες, να βάλεις τη διευθετούσα και να πάρεις ένα σημείο και να δεις αν ισχύει. Μπορείς να το διαπιστώσεις έτσι;

Παναγιώτης: Μπορούμε;

Ερευνήτρια: Φυσικά μπορούμε. Θες να βάλεις σημείο; Βεβαίως.

Δανάη: Συγγνώμη όταν ζητάει για απόδειξη δεν πρέπει να το βάλουμε πιο γενικά γιατί άμα πάρω εγώ ένα σημείο μπορεί να τυχαίνει να ισχύει αυτό που λέει ας πούμε.

Ερευνήτρια: Φυσικά.

Δανάη: Ε άρα, τι, γιατί να το κάνουμε αυτό;

Ερευνήτρια: Για να του δείξω του Παναγιώτη αν έχει δίκιο σε αυτά που λέει. Είναι αρκετό αυτό; Δηλαδή άμα στο δείξω αυτό είσαι ευχαριστημένος, καλύπτεσαι;

Παναγιώτης: Όχι

Δανάη: Δεν κάνεις κάτι, απλά λες τη θεωρία τώρα και βάζεις αριθμούς.

Παναγιώτης: Χαίρω πολύ.

Στην περίπτωση του Άλκη, το πρόβλημα της απόδειξης εντοπίζεται στην έννοια του τυχαίου σημείου:

Ερευνήτρια: Τι σημείο πήρες της παραβολής;

Άλκης: Το Δ πήρα

Ερευνήτρια: Αααα, πήρες συγκεκριμένο σημείο;

Άλκης:Ναι

[....]

Ερευνήτρια: Το Μ υποτίθεται πως ήταν τυχαίο σημείο, τώρα το Δ τι είναι συγκεκριμένο;

Άλκης:Αλλά είναι πάνω στην παραβολή.

Ερευνήτρια:Να σου πω Άλκη. Αν το αποδείξεις για συγκεκριμένο σημείο, μετά πώς θα κάνεις τη γενίκευση; *Παύση* Ή θα πάρεις τυχαίο σημείο οπότε ό,τι έχεις αποδείξει σημαίνει ότι ισχύει για όλα τα σημεία της παραβολής ή άμα το πάρεις για το Δ σημαίνει ότι το έχεις αποδείξει μόνο για το Δ.

Άλκης:Άρα θα πάρω τυχαίο σημείο, έτσι;

Ερευνήτρια:Εεε μάλλον

Άλκης: Εννοώ να είναι έξω από την παραβολή.

Ερευνήτρια: Πώς πώς;

Άλκης: Να μην είναι πάνω στην παραβολή

Ερευνήτρια: Μα άμα δεν είναι πάνω στην παραβολή πώς θα αποδείξεις την ιδιότητα της παραβολής; Θα πάρεις ένα τυχαίο σημείο το οποίο τυχαίο

Άλκης:Πειράζει να είναι στην άλλη;

Ερευνήτρια:Ναι

Άλκης:Πειράζει;

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στη δεδομένη χρονική στιγμή και χωρίς κανέναν προφανή λόγο, ο Γρηγόρης έγραφε πάνω στο φύλλο εργασίας και ο Άλκης πήρε μία κόλλα χαρτί και άρχισε να συμπληρώνει μόνος του την απάντηση της ερώτησης αυτής. Μετά το παραπάνω απόσπασμα, ο Άλκης είδε τι έγραφε ο Γρηγόρης και η ερευνήτρια εξηγεί στον Άλκη την παρανόησή του προκειμένου να συνεχιστεί η δραστηριότητα αφού η κατανόηση της συγκεκριμένης απόδειξης αποτελούσε κομβικό σημείο για την αναπροσαρμογή του σχήματος της παραβολής.

Μία άλλη πηγή παρανοήσεων την οποία κλήθηκαν οι μαθητές να αντιμετωπίσουν προεκειμένου να φτάσουν στη δημιουργία ενός ολοκληρωμένου σχήματος της παραβολής, ήταν οι διαφορετικές, αλγεβρικά, μορφές της:

Ερευνήτρια:Ας πάμε λοιπόν πρώτα στη συνάρτηση $y = \alpha x^2$ και όχι στην $\frac{x^2}{\alpha}$ να αποδείξουμε σε αυτή την εστία και τη διευθετούσα και μετά θα κάνουμε αναγωγή στην άλλη, εντάξει;

Γρηγόρης: $y = \alpha x^2$; Αυτή δεν είναι παραβολή

Ερευνήτρια:Δεν είναι παραβολή η $y = \alpha x^2$; Γιατί;

Γρηγόρης: $y = \alpha x^2$; Έτσι είναι η παραβολή; Ο τύπος της παραβολής δεν είναι.... ώπα ένα λεπτό

Ερευνήτρια:Πες μου

Γρηγόρης:Δεν είναι $x^2 = py$ κάπως; Όχι, πώς πάει μωρέ; Κόλλησα τώρα στην εξίσωση.

Ερευνήτρια: [….]Τη συνάρτηση $y = ax^2$ την έχετε ξανακούσει? $y = ax^2$.

Παναγιώτης: Ναι παραβολή δεν είναι;

Ερευνήτρια: Δεν ξέρω, δεν είναι παραβολή; Εσείς θα μου πείτε. Είναι ή δεν είναι;

Παναγιώτης: Ναι, στα μαθηματικά, στην άλγεβρα.

Ερευνήτρια: Στα μαθηματικά, στην άλγεβρα. Αυτή τι μορφή θα έχει η $y = ax^2$;

Παναγιώτης: Ίδια.

Δανάη: Τώρα θα είναι δεξιά κι αριστερά, όχι πάνω κάτω.

Στο προηγούμενο απόσπασμα βλέπουμε τον Παναγιώτη να κάνει μία ξεκάθαρη διάκριση διαφορετικών μαθηματικών περιοχών με κάθε μία από αυτές να περιλαμβάνει και μία διαφορετική παραβολή! Κάτι αντίστοιχο παρατηρείται και στα λεγόμενα της Δανάης η οποία βλέπει μάλλον δύο διαφορετικές παραβολές, μία με άξονα συμμετρίας τον yy΄και μία με άξονα συμμετρίας τον xx΄. Η ανάδειξη αυτής ακριβώς της παρανόησης των μαθητών και μια πρώτη απόπειρα αποκατάστασης της μέσα από την επίτευξη της γεφύρωσης των μαθηματικών περιοχών της άλγεβρας και της γεωμετρίας αποτέλεσε τον βασικό σκοπό της εργασίας αυτής.

Η ομάδα της Συμέλλας και του Χρήστου προχώρησε στην απόδειξη ότι η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ είναι παραβολή χωρίς καμία δυσκολία. Εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι και οι τρεις ομάδες κατάφεραν τελικά να φτάσουν στη ζητούμενη απόδειξη με πολύ σωστούς αλγεβρικούς χειρισμούς δεδομένου ότι οι χειρισμοί αυτοί ήταν μάλλον απαιτητικοί. Ακόμα δηλαδή και οι μαθητές οι οποίοι παρουσίαζαν εμφανείς δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών- της γεωμετρικής φύσης τους- ήταν πολύ σωστοί στη χρήση της άλγεβρας.

Και οι τρεις ομάδες μαθητών φάνηκαν να είναι σε θέση να συνδυάσουν τον ρόλο του p της παραβολής $y^2 = 2px$ με τον ρόλο του α της παραβολής $y = \alpha x^2$ στη μορφή των αντίστοιχων παραβολών. Οι απαντήσεις και των τριών ομάδων στην αντίστοιχη ερώτηση έχουν ως εξής:

4) $y = ax^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a} y$

Άρα το $p = \frac{1}{a}$ οπότε θα ισχύει το αντίστροφο από τα προηγούμενα δηλ. όσο θα μεγαλώνει το p θα μειώνει η καμπύλη $\Leftrightarrow$ 1

4α

4) Το p με το α είναι αντίστοιχα μεγέθη και η σχέση του τα συνδέει και $p = \frac{1}{a}$

Από την συνάρτηση $x^2 = a\psi$ είναι παραβολή με το $\alpha = 2p =$ σταθερό και όπως στη δραστηριότητα 1 όταν αυξάναμε το p η καμπύλη άνοιγε και όταν το μειώναμε έκλεινε έτσι και το α επηρεάζει την παραβολή με τον ίδιο τρόπο στην δραστηριότητα 2 την παραβολή.

Προβληματική είναι η διατύπωση της ομάδας του Γρηγόρη και του Άλκη αλλά πιθανόν αυτό είναι θέμα μη επαρκούς ανάπτυξης της λεκτικής αναπαράστασης η οποία όμως δυσκολεύει την επίτευξη του ζητούμενου :

Ερευνήτρια: Εντάξει; Μπορείτε να μου εξηγήσετε μετά από όλα αυτά που έχουμε πει γιατί τελικά σ' αυτή τη συνάρτηση που είχαμε μάθει από την τρίτη γυμνασίου όταν το α μεγαλώνει η καμπύλη κλείνει και όταν το α μικραίνει η καμπύλη ανοίγει;

Άλκης: Ουσιαστικά είναι μια μορφή της παραβολής στην εστία του y τόνος y. Γιατί άμα κάνουμε x τετ...εεε έχουμε το y ίσον εεεε ποιο είπαμε; α επί x τετράγωνο. Άμα κάνουμε $x^2 = \frac{y}{\alpha}$, σωστά;

Ερευνήτρια: Δε μπορώ να σου πω, για προχώρα.

Άλκης: y προς α, εεε το α γίνεται 1 προς α. Και θα γίνει, ουσιαστικά το x τετράγωνο είναι αντιστρόφως ανάλογο με το α.

[….]

Γρηγόρης: Βασικά, είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη.

Άλκης: Όταν αυξάνει το p, μικραίνει το α κάπως έτσι γράψ' το.

Στην ομάδα του Γρηγόρη και του Άλκη, η ερευνήτρια δίνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x^2$ και στη συνέχεια ρωτάει τους μαθητές πώς αναμένουν να είναι η γραφική παράσταση της $y = 4x^2$:

Γρηγόρης: Πιο ανοιχτή.

Ερευνήτρια: Άλκη;

Γρηγόρης: Ω, ένα λεπτό. Όχι κοίτα, άμα το y είναι 2 φορές το x τετράγωνο, το x είναι σ' αυτό τον άξονα (*δείχνει με το χέρι του τον άξονα των x).* Τώρα θα κλείσει η καμπύλη γιατί το y είναι 4 φορές το x ενώ εδώ είναι 2 φορές το x^2 που σημαίνει ότι το x θα είναι ακόμα μικρότερο προκειμένου να είναι ανάλογο του y. Άρα θα κλείσει κι άλλο. Κι εδώ δεν είναι, είναι αυτή η μορφή που λέγαμε που 'ναι το α, που 'ναι p ίσον 1 προς α. Δηλαδή τώρα είναι το α το 4 δεν είναι το p.

Ο Γρηγόρης με την απάντησή του αυτή φαίνεται να εξακολουθεί να έχει ένα διττό σχήμα για την παραβολή, με το ένα σχήμα να αφορά την παραβολή με άξονα συμμετρίας τον xx΄ την οποία και έχει συνδέσει με το p και το άλλο σχήμα

να αφορά την παραβολή με άξονα συμμετρίας τον yy΄ και την οποία έχει συνδέσει με το α. Κατά τα άλλα, ο Γρηγόρης δίνει τελικά μία αλγεβρική ερμηνεία στον ρόλο της παραμέτρου στην τετραγωνική συνάρτηση.

Συμέλα: Επειδή όσο πιο μεγάλο είναι το α τόσο πιο μεγάλες είναι οι τιμές που παίρνει το y άρα αναγκάζεται να κλείσει η καμπύλη. Για πολύ μικρά x ας πούμε να έχει πολύ μεγάλα y.

Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι μάλλον το σχήμα της μαθήτριας που αφορά την τετραγωνική συνάρτηση περιελάμβανε ήδη μία ερμηνεία του ρόλου του α και πιθανόν δεν ένιωσε από τη δραστηριότητα αυτή καμία ανάγκη αναπροσαρμογής του ήδη υπάρχοντος σχήματος.

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην έρευνα αυτή έγινε προσπάθεια να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές καταφέρνουν να συγκεράσουν την αλγεβρική με τη γεωμετρική προσέγγιση στην κατανόηση του αντικειμένου της παραβολής. Βαρύνουσα σημασία δόθηκε στην καλλιέργεια γεωμετρικών ερεθισμάτων αφού η αλγεβρική προσέγγιση είναι αυτή που έχει υϊοθετηθεί από την εκπαιδευτική κοινότητα, έστω άτυπα. Σε πολλά σημεία της ανάλυσης έγινε χρήση της ορολογίας της σχετικής με τα εννοιολογικά πεδία του Vergnaud και αυτό γιατί η θεωρία αυτή μπορεί πρωτότυπα να χρησιμεύσει στη μελέτη μαθηματικών αντικειμένων που αποτελούν τόσο γεωμετρικά όσο και αλγεβρικά αντικείμενα όπως αυτό της παραβολής. Το εύρος της κατανόησης των μαθητών αποτυπώνεται από την ανάπτυξη των σχημάτων των σχετικών με μία συγκεκριμένη κατηγορία καταστάσεων.

Τα ευρήματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον ρόλο της παραμέτρου στην παραβολή και αυτό γιατί παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες με την γεωμετρική προσέγγιση του αντικειμένου. Οι μαθητές οι οποίοι από την αρχή εμφάνισαν δυσκολία χειρισμού των γεωμετρικών αντικειμένων, σε μικρό βαθμό φάνηκαν να αναπροσαρμόζουν τα υπάρχοντα σχήματα τους με τρόπο βοηθητικό για την κατανόηση της έννοιας της παραβολής. Η έννοια της παραμέτρου από την άλλη είναι πολύ σημαντική στην προσπάθεια αυτή· εφόσον ο μαθητής δεν κατέχει επαρκώς την έννοια της παραμέτρου είναι σχεδόν αδύνατον για αυτόν να κατανοήσει πλήρως την οικογένεια των παραβολών. Παρόλα αυτά οι περισσότεροι μαθητές φάνηκαν τελικά να κατανοούν τον ρόλο του p στην παραβολή $y^2 = 2px$ ενώ τον ρόλο του α στη συνάρτηση $y = \alpha x^2$ έκαστη των τριών ομάδων μαθητών επέλεξε να τον προσεγγίσει με διαφορετικό τρόπο: η μία ομάδα (Άλκης-Γρηγόρης) προσπάθησε να συνδέσει το α με το p, η άλλη ομάδα (Δανάη – Παναγιώτης) επέλεξε τα εμβαδά ενώ η τρίτη ομάδα είχε μία αλγεβρική ερμηνεία του ρόλου του α την οποία και δε φάνηκε να αναπροσαρμόζει.

Οι μαθητές της έρευνας παρουσίασαν μεγάλες ικανότητες στον αλγεβρικό χειρισμό όχι μόνο λόγω των ορθών τους αλγεβρικών απαντήσεων αλλά σε κάποιες περιπτώσεις και λόγω της σχετικής ευκολίας με την οποία προσέγγιζαν αλγεβρικά τις καταστάσεις παρά το γεγονός ότι οι στρατηγικές αυτές δεν στέφονταν στην πλειοψηφία τους με επιτυχία. Η μη επιτυχής έκβαση των στρατηγικών αυτών οφείλεται σε ένα μεγάλο βαθμό στη μη ικανότητα των μαθητών να γεφυρώσουν το πεδίο της άλγεβρας με αυτό της γεωμετρίας.

Το λογισμικό μέσα από τις δυνατότητες που παρείχε στους χρήστες επέτρεψε στους μαθητές να αναδιαμορφώσουν τα διάφορα σχήματα με άμεση παρατήρηση – το dragging συντέλεσε στην κατανόηση των μαθητών ύπαρξης άπειρων παραβολών εφόσον διαπιστώθηκε να είναι και άπειρες οι διαφορετικές εστίες - καθώς και να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους μέσα από το εργαλείο της μέτρησης, οδηγώντας και στην περίπτωση αυτή στην αναδιοργάνωση των υπάρχοντων σχημάτων.

Ιδιαίτερη έμφαση θα ήταν γόνιμο να δοθεί σε κάποια επεισόδια της δραστηριότητας στα οποία οι μαθητές εμφανίζονται να μιλούν για την παραβολή, για σημεία που ανήκουν σε αυτή και για ιδιότητες που αυτή αναμένουν να έχει, χωρίς να νιώθουν την ανάγκη να βλέπουν τη γεωμετρική της αναπαράσταση, απλά και μόνο σκεπτόμενοι την παραβολή! Το γεγονός αυτό αποτελεί απόρροια της στατικής διδασκαλίας και της πολύ φτωχής σε αναπαραστάσεις προσέγγιση μάθησης που χαρακτηρίζει το εκπαιδευτικό μας σύστημα και έχει ως αποτέλεσμα τη θεώρηση από μεγάλη μερίδα των μαθητών μας των μαθηματικών αντικειμένων που διαδάσκονται ως εντελώς θεωρητικά αντικείμενα προφανώς χωρίς καμία πρακτική σημασία. Το ερώτημα λοιπόν που εγείρεται είναι το κατά πόσο έχει νόημα να ξεκινάμε συζητήσεις σχετικές με τη σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο, τη στιγμή που μαθηματικά αντικείμενα τα οποία «προκαλούν» τον εκπαιδευτικό να «σπρώξει» τους μαθητές σε συνδέσεις που θα επιτρέψουν στον μαθητή να κατανοήσει σε βάθος το εν λόγω αντικείμενο και να διευρύνει με τον τρόπο αυτό την αντίληψη του σχετικά με αυτή καθ΄αυτή τη μαθηματική φύση επιλέγεται να διδάσκονται στους μαθητές μονοδιάστατα, μη λαμβάνοντας υπόψη μας τις δυνατότητες που μας παρέχουν οι νέες τεχνολογίες και επιλέγοντας να θυσιάσουμε την ουσία της μαθηματικής παιδείας στον βωμό της κάλυψης της ύλης.

Ένα πολύ σημαντικό εύρημα αποτελεί η ανάδειξη της τελείως διαφορετικής αποδοχής και διαχείρισης από τους μαθητές των ίδιων ακριβώς ερεθισμάτων. Για παράδειγμα, είδαμε ότι στην ίδια ομάδα παιδιών, η δραστηριότητα με τα εμβαδά παρακίνησε το ενδιαφέρον της Δανάης να αναζητήσει την ερμηνεία του ρόλου του p μέσα από τη δραστηριότητα που εκείνη τη στιγμή είχε μπροστά της –πιθανό βέβαια είναι και το ενδεχόμενο η μαθήτρια να μην θεώρησε ότι πρόκειται για το ίδιο με την προηγούμενη δραστηριότητα αντικείμενο- τη στιγμή που το άλλο μέλος της ομάδας επιδείκνυε μία έντονη τάση να ερμηνεύσει και στην περίπτωση αυτή τον ρόλο του p μέσω κύκλων, αναπαράσταση που αφορούσε την προηγούμενη δραστηριότητα. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι μία διδασκαλία η οποία δεν είναι στατική αλλά είναι πλούσια σε αναπαραστάσεις θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι έχει πολύ περισσότερες πιθανότητες να καλύψει τις ανάγκες όλων των μαθητών αφού με τον τρόπο αυτό αυξάνεται και η ποσότητα αλλά και το είδος των ερεθισμάτων που δίνονται στον μαθητή προκαλώντάς τον να εμπλακεί στη διαδικασία της μάθησης.

Ένα κομμάτι στην προηγηθείσα ανάλυση το οποίο χρήζει ιδιαίτερης μνείας αποτελεί το κομμάτι που αφορά στη μη επαρκή κατανόηση από τους μαθητές εννοιών όπως η μαθηματική απόδειξη και η έννοια του τυχαίου σημείου. Με μια γρήγορη ματιά θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι αυτές οι έννοιες δεν συνδέονται με τη χρήση νέων τεχνολογιών και οι παρανοήσεις που συνοδεύουν τις έννοιες αυτές δεν μπορούν και να λυθούν από τα περιβάλλοντα αυτά. Το αν μπορούν τελικά τα περιβάλλοντα να βοηθήσουν ουσιαστικά στην επίλυση παρανοήσεων πιο λεπτών μαθηματικών εννοιών οι οποίες δεν έχουν να κάνουν με αναπαραστάσεις όπως είναι αυτή του τυχαίου σημείου και της απόδειξης θα ήταν ενδιαφέρον να ερευνηθεί σε μελλοντικές εργασίες αλλά αυτό το οποίο ισχύει σίγουρα, έχει διαπιστωθεί από πολλές έρευνες και εμφανίζεται και στην παρούσα εργασία είναι το γεγονός ότι τέτοιου τύπου διδασκαλίες βοηθούν στην ανάδειξη των παρανοήσεων αυτών που αποτελεί αναμφισβήτητα το πρώτο και πιθανόν και το πιο ουσιαστικό βήμα στην πορεία διευθέτησής τους.

Όταν ζητάμε από τους μαθητές να μας δώσουν ορθές απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικές με έννοιες οι οποίες είναι αρκετά σύνθετες, όπως είναι η παραβολή, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας ποιες είναι οι προαπαιτούμενες

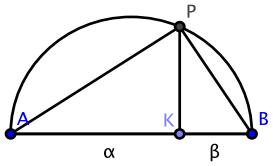
έννοιες, η μη γνώση ή έστω η μερική γνώση των οποίων καθιστά απαγορευτική για τον μαθητή την κατανόηση της ζητούμενης έννοιας. Το ζητούμενο στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι ο εκπαιδευτικός μέσα από μία ταξινόμηση καταστάσεων και ενός συνόλου εννοιών και θεωρημάτων να είναι σε θέση να παρατηρεί και να αξιολογεί τα πιο σημαντικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα καθώς οι μαθητές προοδευτικά κατακτούν τον έλεγχο αυτών των καταστάσεων (Vergnaud, 1996). Είναι πολύ σημαντικό ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει την υπάρξη μίας ιεραρχίας πολυπλοκότητας που ενυπάρχει μεταξύ των διαφόρων καταστάσεων, διαδικασιών και λεκτικών και συμβολικών αναπαραστάσεων. Δεν μπορούμε λοιπόν να περιμένουμε από έναν μαθητή να κατανοήσει πλήρως το γεωμετρικό αντικείμενο της παραβολής όταν εμφανίζει ακόμα παρανοήσεις σχετικά με την απόσταση σημείου από ευθεία.

Η παραδοσιακή διδασκαλία τέτοιου είδους αντικειμένων όπως είναι οι κωνικές τομές εν γένει, και πιο συγκεκριμένα η παραβολή, υστερεί στο ότι φαίνεται να μη λαμβάνει υπόψη τη διττή φύση – αλγεβρική και γεωμετρική - των αντικειμένων αυτών. Το αποτέλεσμα είναι η διδασκαλία να γίνεται βασιζόμενη σε μεμονωμένες καταστάσεις, είτε μόνο αλγεβρικές είτε μόνο γεωμετρικές.

Ο Vergnaud ήδη από το 1988 διατύπωνε την άποψη ότι μία μεμονωμένη έννοια δεν αναφέρεται σε έναν μόνο τύπο καταστάσεων καθώς επίσης και μία μεμονωμένη κατάσταση δεν μπορεί να αναλυθεί μόνο με μία έννοια. Λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη τη θέση του Vergnaud, οι δάσκαλοι των μαθηματικών – αν και όχι μόνο αυτοί αφού η θεωρία του Vergnaud έχει εφαρμογή σε όλα τα πεδία μάθησης – θα μπορούσαν να παρέχουν στους μαθητές τους ένα σύνολο ενδιαφέροντων δραστηριοτήτων και μαθηματικά γόνιμων καταστάσεων προκειμένου οι μαθητές να θεμελιώσουν τις γνώσεις τους και να αυξήσουν σε σημαντικό βαθμό τις μαθηματικές τους ικανότητες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

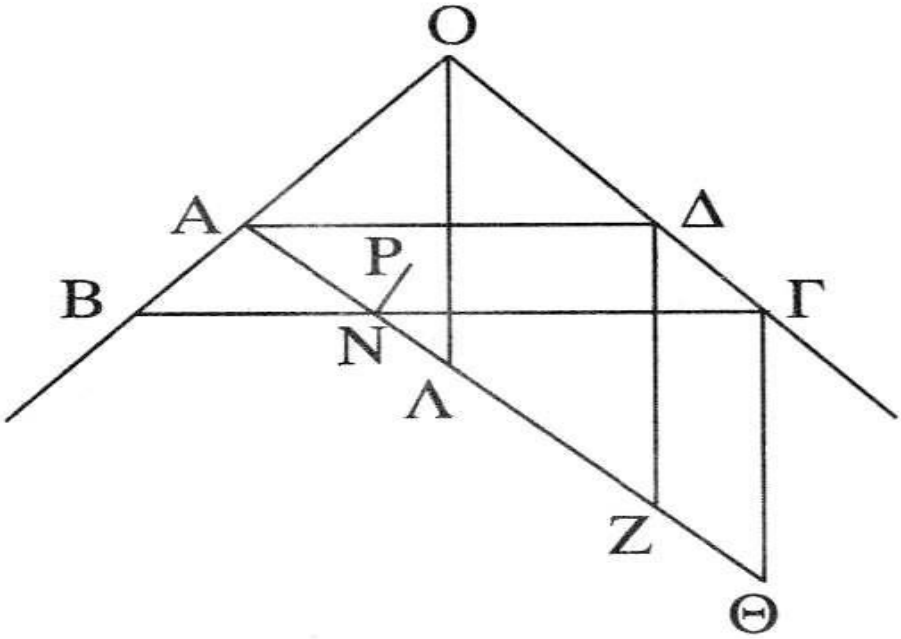
[1, σελ. 13] **Κατασκευή μέσου αναλόγου των ευθυγράμμων τμημάτων α=ΑΚ και β=ΚΒ.**



Παίρνω σε μία ευθεία το τμήμα ΑΒ = α+β, γράφω ημικύκλιο με διάμετρο την ΑΒ και φέρνω κάθετη από το σημείο Κ στο ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ρ. Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ορθογώνιο και άρα το ΡΚ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου και συνεπώς: $PK^2=AK\cdot KB$. Αν ονομάσουμε το ΡΚ , x , τότε: $x^2 = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta}$ και άρα το ΡΚ είναι το μέσο ανάλογο τμήμα των α και β.

[2, σελ. 13] *Μέναιχμος:* Έλληνας γεωμέτρης γεννημένος το 375 π.Χ. στην Προκόννησο της Προποντίδας, ήταν μαθητής του Ευδόξου και του Πλάτωνα. Ασχολήθηκε με την αστρονομία και προσπάθησε να τελειοποιήσει το σύστημα των ομόκεντρων σφαιρών του δασκάλου του Ευδόξου. Υπήρξε δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου και όταν αυτός του ζήτησε ευκολότερο τρόπο για την απόδειξη των θεωρημάτων της γεωμετρίας, απάντησε ότι δεν υπάρχει βασιλική οδός αλλά όλοι ακολουθούν αυτόν τον δρόμο για την απόδειξη της αλήθειας. Ο Μέναιχμος ήταν αδερφός του επίσης γνωστού γεωμέτρη Δεινόστρατου.

[3, σελ. 14] **Πιθανή διαδικασία εξαγωγής της εξίσωσης παραβολής από τον Μέναιχμο κατά Heath** (*Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών,* Τόμος ΙΙ, σελ. 151)



Έστω ότι το ΟΒΓ παριστάνει μια τομή ενός ορθογωνίου κώνου μέσω του άξονα ΟΛ και έστω μια τομή μέσω της ΑΘ (κάθετη προς τον γεννήτορα του κώνου ΟΑ) υπό ορθή γωνία ως προς το επίπεδο του σχήματος. Έστω Ρ ένα τυχαίο σημείο της

καμπύλης και Ν σημείο της ΑΘ, τέτοιο ώστε ΡΝ κάθετη στην ΑΘ. Φέρνουμε την ΒΓ έτσι ώστε να διέρχεται από το Ν και να είναι κάθετη στον άξονα του κώνου. Τότε, το Ρ ανήκει στην κυκλική τομή του κώνου με διάμετρο τη ΒΓ. Φέρνουμε την ΑΔ παράλληλη προς τη ΒΓ και τις ΔΖ, ΓΘ παράλληλες προς την ΟΛ και τέμνουσες την προέκταση της ΑΛ στα σημεία Ζ και Θ αντίστοιχα. Επομένως, η ΑΔ και η ΑΖ διχοτομούνται από την ΟΛ.
Έστω ΡΝ=y και ΑΝ=x, τότε:

$$y^2 = \text{PN}^2 = \text{BN} \cdot \text{N}\Gamma$$

Επειδή τα σημεία Β, Α, Γ ,Θ είναι ομοκυκλικά, έχουμε:

$$\text{BN} \cdot \text{N}\Gamma = \text{AN} \cdot \text{N}\Theta$$

$$\text{BN} \cdot \text{N}\Gamma = \text{AN} \cdot \text{AZ}$$

$$\text{BN} \cdot \text{N}\Gamma = \text{AN} \cdot 2\text{A}\Lambda$$

$$y^2 = \text{AN} \cdot 2\text{A}\Lambda$$

$$y^2 = 2\text{A}\Lambda \cdot x$$

όπου 2ΑΛ είναι η «παράμετρος» των πρωτευουσών τεταγμένων y.

[4, σελ. 14] Αφύπνιση της επιστήμης, σελ.188
[5, σελ. 15] *Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.* (Ε. Σ. Σταμάτη, *Ευκλείδου Στερεομετρία Στοιχείων Βιβλία XI, XII, XIII,* Τόμος IV, Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων, Αθήνα 1957).
(Μετάφραση: Γιάννης Χριστιανίδης, *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών,* σελ.100): « Κώνος είναι το περιληφθέν σχήμα, όταν ορθογώνιο τρίγωνο περιστραφεί γύρω από τη μία εκ των καθέτων πλευρών η οποία παραμένει ακίνητη και επανέλθει στη θέση από την οποία άρχισε να κινείται. Και εάν μεν η κάθετη που μένει ακίνητη είναι ίση προς την άλλη κάθετη, που εκτελεί την περιστροφή, ο κώνος θα είναι ορθογώνιος, εάν είναι μικρότερη, αμβλυγώνιος, εάν δε (είναι) μεγαλύτερη οξυγώνιος».
[6, σελ. 23] Ο Πρόκλος, στο σχόλιο του στην Πρόταση Ι.44 του Ευκλείδη, αναφέρει: *Αυτά λέγει ο Περιπατητικός Εύδημος, είναι ευρήματα της πυθαγορείου μούσας, δηλαδή η παραβολή των χωρίων (Παραβολή), η έλλειψή τους, (Έλλειψη) και η υπερβολή τους (Υπερβολή). Αργότερα αυτές οι ονομασίες μεταφέρθηκαν στις τρεις κωνικές τομές.* (B.L.Van der Waerden: Η αφύπνιση της επιστήμης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000, σελ.137).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Στόχος της πρώτης δραστηριότητας είναι η σύνδεση της γεωμετρικής απεικόνισης της παραβολής με την αλγεβρική της μορφή. Όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα της δραστηριότητας είναι σχετικά με την παραβολή.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

1. Επιλέγοντας τα κουμπιά εμφάνισης των κύκλων (Ο, ΟΑ) και (Α, ΔΕ) που εμφανίζονται στο αρχείο *δραστηριότητα 1*, μπορείτε να αιτιολογήσετε ποια από τα ευθύγραμμα τμήματα που φαίνονται στο σχήμα είναι μεταξύ τους ίσα;
Απ.:.....
.....
.....
.....
.....

2. Τι περιμένετε ότι θα συμβεί στα σημεία Γ και Ζ αν μετακινήσετε τα σημεία Α και Ε; Επαληθεύστε με τη βοήθεια του περιβάλλοντος τις προβλέψεις σας.
Απ.:.....
.....
.....

3. Ερμηνεύστε το είδος της τροχιάς που διαγράφουν τα σημεία Γ και Ζ κατά την μετακίνηση των σημείων Α και Ε.
Απ.:.....
.....
.....
.....
.....

4. Μετακινήστε το σημείο Α ώστε να έχει συντεταγμένες (2, 0) και εμφανίστε την καμπύλη C. Στη συνέχεια μετακινήστε τον δρομέα του p ώστε τη μία φορά να πάρει τιμή 8 και την άλλη 2. Πώς ερμηνεύετε τις παρατηρήσεις σας;
Απ.:.....
.....
.....
.....

Γενικεύοντας την απάντηση του ερωτήματος 4, ερμηνεύστε τη μορφή της C κατά τη μεταβολή της παράμετρου p.
Απ.:.....
.....
.....

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Προκειμένου να στρώσουμε πλάκα ορόφου σε μία υπό ανέγερση οικοδομή χρησιμοποιούμε μία μπετονιέρα η οποία έχει τη δυνατότητα παροχής σκυροδέματος μέσω ενός σωλήνα αγωγού, τύπου «πλατφόρμας». Η επίπεδη επιφάνεια του αγωγού είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σταθερού πλάτους α και μήκους y, με το μήκος να μπορεί να αυξομειώνεται έτσι ώστε η επιφάνεια της πλατφόρμας να είναι πάντα ίση με την επιφάνεια που πρέπει να στρωθεί αφού η πλάκα πρέπει να πέσει και να στεγνώσει ομοιόμορφα. Οι διάφορες επιφάνειες που πρέπει να στρωθούν είναι όλες τετράγωνες διαφορετικής κάθε φορά πλευράς, έστω x. Επιπλέον, η πλατφόρμα έχει τη δυνατότητα να γυρνάει ανάλογα με το αν θέλουμε να στρώσουμε πλάκα δεξιά ή αριστερά της πλατφόρμας ανάλογα με την εντολή που παίρνει από τον χειριστή του αγωγού, δηλαδή για θετικά x η πλάκα στρώνεται δεξιά ενώ για αρνητικά αριστερά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ

1. Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. *Future of learning group publication*, *5*(3), 438.

2. Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(3), 191-215.

3. Archavi, A. (2003)The role of visual representation in the learning of mathematics. Educational Studies of mathematics, 52, 215-241.

4. Bloedy- Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables inhigh school algebra, in Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. and Lins, R. (Eds.) *Perspectiveson school algebra.* Kluwer Academic Publishers, pp 177-189.

5. Cajory, F.(1980) History of mathematics. Chelsea publishing company New York, N.Y.

6. Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

7. Dewey, J., & Think, H. W. (1933). A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process. *DC Heath and Company, Boston*.

8. Donald, M. (1991). *Origins of the Modern Mind: Three Stages in the Evolution of Culture and Cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

9. Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*. Duval, R. (1999)

10. Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Springer Netherlands.

11. Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

12. Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 317-333.

13. Gagatsis, A, Christou,C.,Elia,A.,(2004) The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. *"Quaderni di Ricerca in Didattica", n14, 9-24*

14. Gagatsis, A., Elia, I., & Andreou, S. (2003). Representations and mathematics learning: Functions and number line. *Euclides γ*, *59*, 5-34.

15. Glasersfeld v. E.(1996) Aspects of Radical Constructivism. Ανακτημένο από την προσωπική ιστοσελίδα του E. v. Glasersfeldhttp://www.vonglasersfeld.com/191

16. Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.276-295). New York: Macmillan.

17. Hadamard, J. (1945). *The mathematician's mind: The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

18. Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. The Journal of Mathematical Behavior, 17, 123±134.

19. Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, *7*.

20. Hoyles, C and Jones, K. (1998), Proof in Dynamic Geometry Contexts. Ανακτημένο από το διαδίκτυο http://eprints.soton.ac.uk/41227/1/Hoyles_Jones_proof_DGS_1998.pdf

21. Hoyles, C. (1998). A culture of proving in school mathematics?. In *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (pp. 169-182). Springer US.

22.Judith Preiner, (2008) *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the case of Geogebra.* Dissertation in Mathematics Education, Faculty of Natural Sciences, University of Salzburg

23. Katz, V. J. (2007). Stages in the history of algebra with impications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 185-201.

24. Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 500-507.

25. Kucheman, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart, (Ed.),*Children's Understanding of mathematics*: *11-16* (pp.102-119). London: John Murray.

26. Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School,*7 (4), 23-26.

27. Laborde, C. (2000). *Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. Educational Studies in Mathematics, 44(1-2), 151-161.*

28. Laborde, C. (2005). *The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In Meaning in mathematics education (pp. 159-179). Springer US.*

29. Laborde, C. (2007). The role and uses of technologies in mathematics classrooms: Between challenge and modus vivendi. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *7*(1), 68-92.

30. Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive science*, *11*(1), 65-100.

31. Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, *60*(1), 1-64.

32. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Dordrecht: Kluwer. Σελ.121-128.

33. Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

34. NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

35. Presmeg N. (1992) Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationalityin high school mathematics.

36. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

37. Shaffer, D. W., & Kaput, J. J. (1998). Mathematics and virtual culture: An evolutionary perspective on technology and mathematics education.*Educational Studies in Mathematics*, *37*(2), 97-119.

38. Tall, D. & Gray, E. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education* , 26 (2), 115-141.

39. Tall, D. & Vinner, S.:(1981) Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12, σελ 151-169*

40. Trigueros,M. & Ursini, S. (2008). Structure Sense and the Use of Variable. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, A. Sepúlveda (Eds.) *Proceedings of*

the Joint Meeting PME 32 and PME-NA XXX (vol. 4, pp. 337-344). Morelia, México: PME & PME-NA.

41. Ursini &Trigueros (2004) . How do high school students interpret parameters in Algebra, Proceedings of the 28th conference of the International Group of Psychology of mathematics education Vol. 4 pp. 361-368

42. Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

43. Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. *Theories of mathematical learning*, 219-239.

44. Vinner, S. & Hershkowitz, R.:(1980) Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley CA, σελ 177–184.

45. Vinner, S.(1983). Concept definition, concept image and the notion of function. In3, 293-305

46. Weinberg, A., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Krill, D. E.,Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2004). Students' initial and developing conceptions of variables. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, San Diego, CA.*

47. Yin, R. K. (2009). Case Study Research: Design and Methods. Sage Publications, Thousand Oaks, 4th edition.

48. Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(1), 91-118.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Γαγάτσης, Α., Δεληγιάννη, Ε., Ηλία, Ι., Μονογυιού, Α. (2008). *Προβλημάτα μάθησης στα μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό από το Γυμνάσιο: Κλάσματα – Δεκαδικοί – Γεωμετρία.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών της Αγωγής.

2. Κλαουδάτος Ν.(2011). Σημειώσεις του μαθήματος Διδακτική των Μαθηματικών . στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος της «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Αθηνών.

3. Κυνηγός Χρόνης (2011). *Το μάθημα της διερεύνησης*. Εκδόσεις Τόπος

4. Μπρίκας, Μ. Α. *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητος.* Αθήνα, 1970.

5. Χριστιανίδης, Γ. *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.