ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα

Ιγγλέζου Αθανασία

Δ201129

Επιβλέπων καθηγητής: Διονύσιος Λάππας

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Διονύσιος Λάππας (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής, τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ	.....
2) Ιωάννης Θωμαΐδης	Δρ Διδακτικής Μαθηματικών, Σχολικός Σύμβουλος	.....
3) Παναγιώτης Σπύρου	Αναπληρωτής Καθηγητής, τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ	.....

Ευχαριστίες:

Θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στη τριμελή επιτροπή. Ευχαριστώ τον κ. Διονύσιο Λάππα για την τιμή που δέχτηκε να γίνει επιβλέπων καθηγητής μου καθώς και τη βοήθειά του στις διορθώσεις της εργασίας, τον κ. Ιωάννη Θωμαΐδη για την καθοδήγησή του, το υλικό που μου παρείχε και τις παρατηρήσεις του στην παρούσα εργασία, καθώς και τον κ. Παναγιώτη Σπύρου για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή μου.

Ευχαριστώ τη Διονυσία Μπακογιάννη για όλη της τη βοήθεια στο πέρασμά μας από το ΠΜΣ.

Ευχαριστώ και όλους τους υπόλοιπους καθηγητές του ΠΜΣ για τα εφόδια που μου πρόσφεραν αυτά τα χρόνια.

Ευχαριστώ τους φίλους μου για τη συμπαράσταση που έδειξαν σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας αυτή.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους φίλους μου που απέκτησα κατά τη διάρκεια του ΠΜΣ και με βοήθησαν πάρα πολύ όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, ευχαριστώ πάρα πολύ την οικογένειά μου, που πάντα είναι δίπλα μου και με στηρίζουν στις επιλογές μου.

Ιγγλέζου Αθανασία

Λαμία, 2014

Όταν ήμουν 11 χρονών άρχισα να διαβάζω τα Στοιχεία του Ευκλείδη... Αυτό ήταν ένα από τα μεγάλα γεγονότα στη ζωή μου, τόσο εκτυφλωτικό όσο και ο πρώτος έρωτας. Δεν είχα ποτέ φανταστεί ότι υπήρχε κάτι τόσο γοητευτικό στον κόσμο. – BERTRAND RUSSEL

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή……..6

Κεφάλαιο 1ο

Θεωρητικό Πλαίσιο – Μεθοδολογία

1.1 Ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης……10
1.2 Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών……..17
1.3 Μεθοδολογία και ερευνητικά ερωτήματα……25

Κεφάλαιο 2ο

Αναλυτικά προγράμματα και διδακτικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας της περιόδου 1950 – 2000

2.1 Ιστορική αναδρομή…….27

2.2 Χαρακτηριστικές όψεις των διδακτικών βιβλίων Ευκλείδειας Γεωμετρίας την περίοδο 1950-2000…….36

Κεφάλαιο 3ο

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που συνδέονται με κύριους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο

3.1 Η αξιωματική θεμελίωση στη σχολική Γεωμετρία ως διδακτικό πρόβλημα……52

3.2 Η αποδεικτική διαδικασία στη διδασκαλία της Γεωμετρίας……64

3.3 Αποτελέσματα ερευνών……71

Κεφάλαιο 4ο

Διδακτική ανάλυση ορισμένων δομικών στοιχείων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

4.1 Το γεωμετρικό σχήμα…….81

4.2 Η οπτικοποίηση στη Γεωμετρία…….84

4.3 Ο ρόλος της εικασίας στην αποδεικτική διαδικασία……87

Κεφάλαιο 5ο

Συμπεράσματα – Προτάσεις……92

Βιβλιογραφία……...98

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιστορική προσέγγιση στη μαθηματική παιδεία μιας χώρας σηματοδοτεί τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά του γενικότερου τρόπου σκέψης και της νοητικής συμπεριφοράς σ' ένα εθνικό περιβάλλον σε μια συγκεκριμένη ιστορική περίοδο. Η μαθηματική σκέψη συνδυάζεται με τις εκάστοτε εθνο-πολιτισμικές ιδιαιτερότητες και τις εξωτερικές επιδράσεις, έτσι οι γνωστικές αλλαγές στην μαθηματική παιδεία επιφέρουν μεταβολές των μαθηματικών περιεχομένων, αλλά και υπερβάσεις στο εννοιολογικό και μεθοδολογικό υπόβαθρο της μαθηματικής γνώσης. Η συνεισφορά της Γεωμετρίας στα Μαθηματικά είναι μερικές φορές τόσο μεγάλης θεμελιακής σημασίας, με αποτέλεσμα όχι μόνο την ανάπτυξη των Μαθηματικών πέρα από τα όρια της επιστήμης των αριθμών, αλλά και τα Ελληνικά Μαθηματικά να γίνουν ουσιαστικά Γεωμετρικά.

Στην Ελλάδα λέγοντας σχολική Γεωμετρία, εννοούμε κυρίως τη Θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία που διδάσκεται τα τελευταία 30 χρόνια στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Υπάρχουν βέβαια και κεφάλαια στα βιβλία των Γυμνασίων με γεωμετρικό περιεχόμενο καθώς και Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία στα βιβλία της Β' Λυκείου. Όμως η Θεωρητική Γεωμετρία που διδάσκεται στις δυο πρώτες τάξεις του Λυκείου είναι υποχρεωτικό μάθημα για το σύνολο των μαθητών και αποτελεί ένα ανεξάρτητο μάθημα Γεωμετρίας.

Η κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία υπήρξε για πολλά χρόνια ένα βασικό σχολικό μάθημα, καθώς συμβάλει στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης μέσω του συνδυασμού της εποπτείας των σχημάτων με την ανάγκη ανάπτυξης συλλογισμών. Για την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση αποτέλεσε σημαντική συνιστώσα εξυπηρετώντας μια εκπαιδευτική πολιτική, καθώς το μάθημα αποτελεί μια σύνδεση με τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό. Οι σκοποί διδασκαλίας σε συνδυασμό με τη διατήρηση της παράδοσης είχε ως αποτέλεσμα το μάθημα να έχει σταθερή μορφή μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1960. Βέβαια η Γεωμετρία που διδάχτηκε στα ελληνικά σχολεία δεν ήταν ποτέ η γεωμετρία των «Στοιχείων του Ευκλείδη» αλλά μια γεωμετρία τύπου Legendre, στην οποία θα αναφερθούμε αναλυτικότερα παρακάτω.

Πρόσφατες έρευνες και αναλύσεις, που έχουν δημοσιευτεί στην Ελλάδα προβάλλουν έναν έντονο προβληματισμό σχετικά με τη σχολική Γεωμετρία όπου διακρίνεται μια διάχυτη υποβάθμιση του μαθήματος. Σύμφωνα με διάφορες απόψεις ανθρώπων του χώρου της εκπαίδευσης το μάθημα της Γεωμετρίας φαίνεται να υποτιμείται πρώτα από τους μαθητές και ως συνέπεια έχει επηρεάσει και τους εκπαιδευτικούς. Η κατάσταση αυτή διαμορφώνεται εξαιτίας τριών παραγόντων, οι οποίοι χαρακτηρίζουν τη σχολική γεωμετρία:

(α) Οι διάφορες αντιλήψεις για τη μορφωτική αξία και τον παιδαγωγικό ρόλο της Θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως αυτές φανερώνονται άμεσα ή έμμεσα στα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία.

(β) Οι αντιδράσεις στις απόπειρες εκσυγχρονισμού του μαθήματος με κύριο επιχείρημα τη διατήρηση του Ελληνικού χαρακτήρα της γεωμετρίας.

(γ) Η καταλυτική επίδραση των εισαγωγικών εξετάσεων στα ΑΕΙ για την ανάπτυξη και την παρακμή του μαθήματος.

Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υπέστη πολλές αλλαγές με τις διάφορες μεταρρυθμίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης στο διεθνή χώρο, οι οποίες όπως ήταν φυσικό επηρέασαν και την Ελλάδα. Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε σχετικά με την ιστορική πορεία των μεταρρυθμίσεων διεθνώς και στο δεύτερο κεφάλαιο με την επίδραση που είχανε στην Ελλάδα.

Συγκεκριμένα, η μεγάλη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 1950 στις δυτικές χώρες με το σύνθημα «να φύγει ο Ευκλείδης», είχε ως αποτέλεσμα να αναμορφωθεί η σχολική γεωμετρία με την κατάργηση μεγάλου μέρους της παραδοσιακής ύλης (γεωμετρικοί τόποι, κατασκευές, στερεομετρία κτλ) και την εισαγωγή εννοιών από τα σύγχρονα Μαθηματικά. Στην Ελλάδα παρατηρείται, κατά τη διάρκεια της δικτατορίας, ριζική αλλαγή του περιεχομένου της σχολικής γεωμετρίας με τη σύνταξη νέων αναλυτικών προγραμμάτων το Σεπτέμβριο του 1968 και την έκδοση νέων βιβλίων.

Θεωρητικό υπόβαθρο αυτής της μεταρρύθμισης υπήρξε η θεωρία των σταδίων μάθησης του Piaget. Στο στάδιο της συγκεκριμένης λογικής σκέψης (6-11 ή 12 χρόνων) εφαρμόζεται η επαγωγική μέθοδος διδασκαλίας (από τα συγκεκριμένα στα αφηρημένα), ώστε τα παιδιά να μην εξαπατούνται από τα εμπειρικά δεδομένα και να κατευθύνεται η σκέψη τους προς ορισμένα γενικά συμπεράσματα. Στο στάδιο της καθαρής λογικής σκέψης (12-17 ή 18 χρόνων) μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αρχίζουν να εφαρμόζουν σταδιακά και με μέτρο την παραγωγική μέθοδο διδασκαλίας, κυρίως για να αντιληφθεί ο μαθητής τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να θεμελιωθεί αξιωματικά μια μαθηματική ενότητα, της οποίας το περιεχόμενο ήδη γνωρίζει (Βόσκογλου, 1986). Θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά στα στάδια του Piaget στην ενότητα 1.2, στη συνέχεια.

Στη θέση της Θεωρητικής Γεωμετρίας τύπου Legendre, που τόνιζε την εμπειρική προέλευση των αξιωμάτων και των βασικών γεωμετρικών εννοιών, εισάγεται η αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και ο φορμαλισμός της γεωμετρίας του Hilbert. Η νέα δομή του μαθήματος αποσυνδέει τις γεωμετρικές έννοιες από την εμπειρία και τις αισθήσεις και με μια υπερβολική διόγκωση του περιεχομένου, μεταθέτει την έναρξη της διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας από τη Γ’ Γυμνασίου. Βέβαια το νέο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου αποσύρθηκε εσπευσμένα ένα εξάμηνο μετά λόγω της αδυναμίας των ίδιων των εκπαιδευτικών να το κατανοήσουν (Θωμαΐδης, 1991, σελ. 33)

Στα μέσα της δεκαετίας του 1970 σημειώθηκε μια νέα τροπή στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας λόγω κυρίως εκπαιδευτικών αλλαγών, όπως ο διαχωρισμός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε Γυμνάσιο και Λύκειο καθώς και οι αλλαγές του συστήματος των εισαγωγικών εξετάσεων στα Α.Ε.Ι. Ο «εκσυγχρονισμός» της Γεωμετρίας στο Λύκειο είχε ως στόχους:

(α) Την κατανόηση του ρόλου των αξιωμάτων στη θεμελίωση και ανάπτυξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας και γενικότερα ενός μαθηματικού συστήματος.

(β) Εξοικείωση με την «αποδεικτική διαδικασία»

Όμως η εισαγωγή της Αναλυτικής και Διανυσματικής Γεωμετρίας στο Λύκειο και η διδασκαλία της Ανάλυσης στη Γ' Λυκείου είχε ως αποτέλεσμα να συρρικνωθεί σημαντικά η ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να περιοριστεί στην Α' και Β' Λυκείου. Έτσι ενώ το μάθημα διδασκόταν παραδοσιακά 3 ή 4 χρόνια και αποτελούσε εξεταζόμενο μάθημα στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι., θα έπρεπε να διδαχθεί σε 2 χρόνια σύμφωνα με τις νέες ρυθμίσεις χωρίς το «κίνητρο» που θα είχε αν αποτελούσε μάθημα στις εισαγωγικές εξετάσεις. Άρα ένα παραδοσιακό μάθημα παρατηρούμε ότι αλλάζει συνεχώς. Θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε στην παρούσα εργασία πως έφτασαν αυτές οι αλλαγές στην Ελλάδα και πως επηρέασαν στη μαθηματική εκπαίδευση.

Τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η αποδεικτική διαδικασία και η έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές. Στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών τα χαρακτηριστικά αυτά αποτελούν αντικείμενο μελέτης και έρευνας. Ένα μοντέλο στο οποίο στηρίχθηκαν αρκετές έρευνες για τα «ανώτερα επίπεδα γεωμετρική σκέψης» είναι η θεωρία των επιπέδων Van Hiele, στα οποία περιλαμβάνεται η αναγνώριση (εποπτικό), η ανάλυση (περιγραφικό), η διάταξη (αφηρημένο), ο παραγωγικός συλλογισμός και η αυστηρότητα (μεταμαθηματικό). Πολλές εμπειρικές έρευνες πραγματοποιήθηκαν σε διάφορες χώρες και έδειξαν ότι η παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αδυνατεί να οδηγήσει τους μαθητές στα ανώτερα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης.

Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν γεωμετρία στο Γυμνάσιο, σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, συρρικνώνουν τη διαδικασία ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης, αφού οι διαδικασίες επιχειρημάτων και παραγωγικών συλλογισμών έχουν αντικατασταθεί με μετρήσεις με χάρακες και με τη χρήση διαφανών χαρτιών. Ο πίνακας και οι ΤΠΕ (Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνίας) είναι σημαντικά διδακτικά εργαλεία για τη διδασκαλία των αποδείξεων. Βοηθούν όχι μόνο στην οπτική αναπαράσταση των γεωμετρικών σχημάτων αλλά και στην εμπειρική παρατήρηση των ιδιοτήτων τους. Οι εκπαιδευτικοί που δέχονται τις αποδείξεις μέσω της εμπειρίας, δηλαδή υποστηρίζουν ότι μέσω του πειραματισμού και της παρατήρησης επέρχεται η αποδεικτική διαδικασία, οργανώνουν μέσα στη τάξη δραστηριότητες και προσπαθούν να προωθήσουν την ανακαλυπτική διαδικασία της απόδειξης.

Στο Λύκειο η διδασκαλία του μαθήματος στηρίζεται στην αυστηρή διατύπωση των μαθηματικών επιχειρημάτων. Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας κυριαρχεί και οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι τα λάθη των μαθητών οφείλονται σε αδυναμία να κατανοήσουν τις μαθηματικές αποδείξεις. Οι τρόποι που συνήθως ακολουθούν για τη διδασκαλία των αποδείξεων είναι η αποστήθιση και η συστηματική επανάληψη των θεωρημάτων. Ο Freudenthal (1971) αναφέρει ότι η αποτυχία της παραδοσιακής διδασκαλίας του μαθήματος οφείλεται στο γεγονός ότι ο παραγωγικός συλλογισμός δεν μπορεί να επινοηθεί, αλλά να επιβληθεί στο μαθητή. Ο Skemp (1971) επισημαίνει ότι η παραδοσιακή διδασκαλία δίνει μόνο το τελικό αποτέλεσμα και δεν δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφτούν τις μαθηματικές ανακαλύψεις.

Η παρούσα εργασία θα ασχοληθεί όπως αναφέραμε και παραπάνω, στο 1^{ο} κεφάλαιο, αρχικά με την ιστορική πορεία των μεταρρυθμίσεων που πραγματοποιήθηκαν στο διεθνή χώρο αλλά και με μια ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από την πλευρά της Διδακτικής. Στο 2^{ο} κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια της χρονικής περιόδου 1950 έως σήμερα και πως οι μεταρρυθμίσεις τα επηρέασαν. Για να φανούν καλύτερα αυτές οι διαφορές θα αναλυθούν και θα σχολιαστούν οι αποδείξεις ενός συγκεκριμένου θεωρήματος: «*σε ισοσκελές τρίγωνο οι παρά τη βάση γωνίες του είναι ίσες*». Μέσα από αυτή την ανάλυση θα παρουσιαστούν οι διαφορετικοί τρόποι των αποδείξεων καθώς και η αξιωματική θεμελίωση που επικρατούσε την κάθε χρονική περίοδο.

Στο 3^{ο} κεφάλαιο θα ασχοληθούμε αναλυτικά με τα κύρια χαρακτηριστικά στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας την αξιωματική θεμελίωσή και την αποδεικτική διαδικασία. Θα παρουσιαστούν τα προβλήματα και οι δυσκολίες που προκαλούν στους μαθητές. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας δεν πραγματοποιήθηκε εμπειρική έρευνα καθώς έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές στον ελληνικό και στο διεθνή χώρο. Τα συμπεράσματα αυτών των ερευνών θα τα παρουσιάσουμε ώστε να αποκτήσουμε μια πιο πλήρη εικόνα της κατάστασης γύρω από το συγκεκριμένο μάθημα. Στο 4^{ο} κεφάλαιο θα αναφερθούμε στα επιμέρους στοιχεία της Γεωμετρίας, όπως είναι το γεωμετρικό σχήμα, η οπτικοποίηση στη γεωμετρία και η ανάπτυξη εικασιών τα οποία συνδέονται στενά με τη χρήση των ΤΠΕ. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι πολύ σημαντικά και άρρηκτα συνδεδεμένα με τη διδασκαλία του μαθήματος, όμως και αυτά προκαλούν παρανοήσεις και δυσκολίες στους μαθητές.

Τέλος, στο 5^{ο} κεφάλαιο, θα δώσουμε απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που θα θέσουμε στη συνέχεια. Επιδιώκουμε να εξετάσουμε τη σκοπιμότητα της αξιωματικής θεμελίωσης του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για τη σχολική τάξη και αν το μάθημα θα μπορεί να ακολουθήσει μια «γενετική» μέθοδο στηριζόμενη σε ανακαλυπτικές διαδικασίες. Η εισβολή των ΤΠΕ δημιουργεί νέα δεδομένα στο χώρο της εκπαίδευσης, και κατά συνέπεια επηρεάζει και τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος. Έτσι θα εξετάσουμε τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος σύμφωνα με τα νέα δεδομένα και θα δώσουμε κάποιες προτάσεις για τα ερωτήματά που θα θέσουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Θεωρητικό Πλαίσιο-Μεθοδολογία

1.1 Ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης

Στην παρούσα εργασία στοχεύουμε στην ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα. Σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης αυτής είναι τα αναλυτικά προγράμματα και πως αυτά επηρέασαν την εξέλιξη του μαθήματος. Σε αυτή την πρώτη φάση ενδιαφέρον παρουσιάζει να διαπιστώσουμε πως διαμορφώθηκαν τις προηγούμενες δεκαετίες τα προγράμματα όχι μόνο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αλλά στο γενικότερο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτές οι αλλαγές στο περιεχόμενο των προγραμμάτων αποτελούν συνέπεια του εκσυγχρονισμού της μαθηματικής παιδείας καθώς και της μαθηματικής επιστήμης σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Για να αναπτυχθεί ένα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών σε μία χώρα θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και κάποιες προϋποθέσεις όπως κοινωνικοοικονομικές, η κοινωνική κουλτούρα, οι κοινωνικογεωγραφικοί παράγοντες, το εκάστοτε εκπαιδευτικό σύστημα, η επαγγελματική κατάσταση και εκπαίδευση των καθηγητών καθώς και το σύστημα των εξετάσεων. Η διδακτική πλευρά των αναλυτικών προγραμμάτων στηρίζεται κυρίως σε ερευνητικές εργασίες πάνω στη παιδαγωγική, τη ψυχολογία και την κοινωνιολογία. Συνέπεια όλων αυτών είναι να διαμορφωθούν θεωρητικές τάσεις όπως:

1. Η μπηχεβιοριστική προσέγγιση, η οποία επηρεάστηκε από τη θεωρία του Skinner. Η διαδικασία μάθησης στηρίζεται στο πρότυπο ερέθισμα-αντίδραση και σύμφωνα με αυτό η κατασκευή ενός κατάλληλου προγράμματος.
2. Η προσέγγιση των «Νέων Μαθηματικών», η οποία στόχευε στις βασικές δομές των μαθηματικών μέσω μιας ομοιόμορφης γλώσσας ακρίβειας.
3. Η δομική προσέγγιση, η οποία αναφέρεται στη διαδικασία σχηματισμού εννοιών και κυρίως στη διαδικασία της απόκτησης της γνώσης από τον μαθητή και στηρίζεται στη θεωρία του Bruner.
4. Η διαμορφωτική προσέγγιση, είναι επηρεασμένη από τον Piaget και των συνεργατών του σχετικά με τη νοητική δομή του ατόμου και των αλληλεπειδράσεών του με το περιβάλλον.
5. Η ενοποιημένη διδακτική προσέγγιση, στηρίχτηκε στην ίδια γνωστική θεωρητική βάση με τη διαμορφωτική, αλλά δίνεται έμφαση σε προβλήματα περιεχομένου που αντιστοιχούν στην γνωστική ανάπτυξη και ανάγκες των μαθητών.

Επομένως για να καταλάβουμε πως αναπτύσσεται ένα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αρκεί να γνωρίζουμε την πορεία εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης. Η καλύτερη πηγή πληροφόρησης για αυτό είναι η Ιστορία. Μιλώντας για Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αναφερόμαστε στη μελέτη και διερεύνηση των συστημάτων και των προγραμμάτων της Μαθηματικής Εκπαίδευσης καθώς και όλων εκείνων των παραγόντων που επηρεάζουν τη διαδικασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Θέλοντας να δούμε πως είναι μια κατάσταση τώρα, η πρώτη μας δουλειά είναι να δούμε πως αντιμετώπιζαν στο παρελθόν το ζήτημα που μας ενδιαφέρει. Η ιστορία μπορεί να μας βοηθήσει στην παραγωγή μελλοντικής ιστορίας.

Η μαθηματική εκπαίδευση μέχρι το 1950

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η μέθοδος της διδασκαλίας των μαθηματικών ήταν να αναφέρεται ένας κανόνας, να δίνονται παραδείγματα και προβλήματα για λύση. Προς το μέσο του αιώνα η μεθοδολογία της διδασκαλίας των μαθηματικών άρχισε σιγά σιγά να ενσωματώνει αντιλήψεις και αρχές της κυρίαρχης ψυχολογικής θεωρίας της εποχής, όπου οι διανοητικές ικανότητες μπορούν να βελτιωθούν με τη συνεχή εξάσκηση και καλλιέργεια που πρόσφεραν κάποια μαθήματα.

Στα τέλη του αιώνα άρχισε να εμφανίζεται ένα σταθερό και διευρυμένο ενδιαφέρον πολλών ερευνητών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στη Γερμανία ο Klein το 1893 πρότεινε την αλλαγή των σχολικών μαθηματικών ως προς το περιεχόμενο και τη μεθοδολογία ώστε να διαφαίνεται η αντίληψη που είχαν για τα μαθηματικά οι επαγγελματίες μαθηματικοί. Πρότεινε μεγαλύτερη αυστηρότητα στα βιβλία και ενοποίηση της άλγεβρας με τη γεωμετρία μέσω της συνάρτησης. Στη Βρετανία επικρατούσε η άποψη να μην αναπτύσσονται τα μαθηματικά αυστηρά στα σχολεία, αλλά αργότερα σε εκείνους που θα ασχολούνται με για αυτά. Στην Αμερική ο Moore απέρριπτε την αξιωματική προσέγγιση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χαρακτηρίζοντάς την απαράδεκτη. Προς το τέλος του αιώνα άρχισαν επίσης να δημιουργούνται διάφορες επιστημονικές και επαγγελματικές ενώσεις, όπως αυτές της Αμερικής και της Αγγλίας. Αυτές οι ενώσεις διέδωσαν τις νέες ιδέες στη μαθηματική εκπαίδευση.

Ενώ κατά τον 19^{ο} αιώνα ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ήταν η προετοιμασία των μελλοντικών μαθηματικών, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα ο σκοπός εστιαζόταν στην εκπαίδευση μορφωμένων και ικανών πολιτών. Μετά τη θεωρία του Thorndike, της ψυχολογίας της συμπεριφοράς, οι παιδαγωγοί θεωρούν τα μαθηματικά σαν μάθημα που προσφέρει χρήσιμη γνώση και όχι ότι απευθύνονται σε λίγους. Σύμφωνα με αυτές τις κοινωνικές ανάγκες και απαιτήσεις έγιναν πολλές αλλαγές στα προγράμματα. Στις Η.Π.Α. το 1923 εντοπίστηκαν πολλές ελλείψεις στο περιεχόμενο και τη μέθοδο της διδασκαλίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο σκοπός της ήταν η κατανόηση και ο έλεγχος του περιβάλλοντός μας, η ανάπτυξη της σκέψης και δράσης που θα έκαναν αποτελεσματική τη ζωή του ατόμου.

Η εικόνα της μαθηματικής εκπαίδευσης όμως άρχισε να αλλάζει μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, δηλαδή μετά το 1950. Αν και υπήρχε μια αυξανόμενη δυσαρέσκεια ως προς τα μαθηματικά που διδάσκονταν στα σχολεία το πρώτο μισό του αιώνα, δεν υπήρχε μια ισχυρή μεταρρυθμιστική κίνηση για την αναδιοργάνωση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν έδιναν έμφαση στο πρακτικό και συγκεκριμένο και πολύ λίγες αλλαγές πραγματοποιήθηκαν στο περιεχόμενο. Η αριθμητική παρέμενε ακόμα ο πυρήνας του προγράμματος των μικρότερων τάξεων, ενώ η γεωμετρία, η τριγωνομετρία και η βασική άλγεβρα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Δηλαδή τα σύγχρονα μαθηματικά δεν αποτελούσαν περιεχόμενο των μαθηματικών στα σχολικά προγράμματα. Μετά τον πόλεμο, με τον ερχομό της ατομικής εποχής, δημιουργήθηκαν νέα πεδία ακαδημαϊκής και βιομηχανικής έρευνας όπου ήταν απαραίτητη η υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση. Τα μαθηματικά όμως που διδάσκονταν στα σχολεία μέχρι το 1950 ήταν απαρχαιωμένα. Οι νέες εξελίξεις και πρόοδοι που πραγματοποιήθηκαν στη μαθηματική επιστήμη, καθώς και οι κοινωνικοοικονομικές ανάγκες που εμφανίστηκαν, επηρέασαν τις κατευθύνσεις των νέων προγραμμάτων μετά το 1950 στην προ-πανεπιστημιακή εκπαίδευση των μαθηματικών.

Η μαθηματική εκπαίδευση μετά το 1950

Μετά το 1950 υπήρξαν τόσες πολλές μεταρρυθμιστικές αλλαγές σε παγκόσμιο επίπεδο που ξεπέρασαν όσες είχαν πραγματοποιηθεί συνολικά στο παρελθόν. Οι μεταρρυθμίσεις αυτές δεν πραγματοποιήθηκαν ταυτόχρονα σε όλες τις χώρες και δεν παρουσίαζαν τα ίδια χαρακτηριστικά. Η κάθε χώρα σύμφωνα με τις δικές της ιδιαιτερότητες προχώρησε με τους δικούς της ρυθμούς στις αλλαγές αυτές.

Το πρώτο κύμα των μεταρρυθμίσεων πραγματοποιήθηκε στις Η.Π.Α στις αρχές της δεκαετίας του 1950 με οδηγό τις προτάσεις των πανεπιστημιακών καθηγητών να εισαχθούν στα πανεπιστήμια και στα σχολικά προγράμματα μερικές νέες ιδέες της μαθηματικής επιστήμης του προηγούμενου αιώνα. Τα προγράμματα που δημιουργήθηκαν αναφέρονταν κυρίως σε μαθητές που θα ακολουθούσαν ακαδημαϊκές σπουδές με ενισχυμένα μαθηματικά. Η μεταρρύθμιση αυτή δεν απευθυνόταν στο μεγαλύτερο μέρος των μαθητών και αποδείχθηκε αναποτελεσματική, χωρίς να γίνει καμία ουσιαστική αλλαγή στα σχολικά μαθηματικά.

Το δεύτερο κύμα των μεταρρυθμίσεων πραγματοποιήθηκε στις δεκαετίες 1960 και 1970 στη διάρκεια των οποίων πραγματοποιήθηκαν οι μεγαλύτερες αλλαγές στα σχολικά μαθηματικά της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις περισσότερες χώρες του κόσμου. Τα μαθηματικά που προέκυψαν από αυτές τις αλλαγές επικράτησαν ως «Νέα Μαθηματικά». Μέσα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα η ιδέα των «Νέων Μαθηματικών» εξαπλώθηκε σε όλο σχεδόν τον κόσμο.

Στο συγκεκριμένο σημείο αξίζει να αναφερθούμε και στα αίτια που συντέλεσαν τη μεταρρύθμιση αυτή τη δεκαετία του 1960. Τα βασικότερα αίτια ήταν:

(α) Οι μεγάλες πρόοδοι της μαθηματικής επιστήμης τα τελευταία 100 χρόνια.

(β) Η αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο οι των μαθηματικοί έβλεπαν την επιστήμη τους μετά την ανάπτυξή τους τα τελευταία 150 χρόνια. Δείχνοντας ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην ακρίβεια των ορισμών, την προσεκτική χρήση της γλώσσας και την αξιωματική προσέγγιση της παρουσίασης των μαθηματικών.

(γ) Η εμφάνιση της συνολοθεωρίας μέσα από την εργασία των Bourbaki, δηλαδή μια τυπική, αφηρημένη και αυστηρή προσέγγιση στην οποία τονίζονται οι ακριβείς ορισμοί και η αξιωματική μέθοδο οργάνωσης.

(δ) Η εισαγωγή νέων μαθηματικών στα πανεπιστήμια με αφηρημένο περιεχόμενο και πιο αυστηρή παρουσίαση. Μέχρι το 1950 η διδασκαλία των πανεπιστημιακών μαθηματικών κατάφερε να φτάσει σε ένα επίπεδο συνεπές ως προς τη μοντέρνα μαθηματική έρευνα.

(ε) Η τεχνολογική ανάπτυξη που πραγματοποιήθηκε μετά τον β' παγκόσμιο πόλεμο έδωσε ώθηση για πρόοδο. Για να υπάρξει αυτή η τεχνολογική έκρηξη χρειάζονταν περισσότερα μαθηματικά. Τα σύγχρονα μαθηματικά είναι χρήσιμα σε πολλές περιοχές, όπως θεωρητική φυσική, ηλεκτρονικοί υπολογιστές, επιχειρησιακή έρευνα, διοίκηση επιχειρήσεων, κοινωνιολογία, γλωσσολογία, ιατρική.

Μια ακόμα αιτία για ώθηση της μεταρρύθμισης στάθηκε το γεγονός ότι κάποιες ηγέτιδες οικονομικά και πολιτισμικά χώρες πραγματοποίησαν αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό το γεγονός δημιούργησε μια ανησυχία και στις υπόλοιπες χώρες που δεν επιθυμούσαν φυσικά να μείνουν πίσω στη γενική εκπαιδευτική μεταρρύθμιση και ανάπτυξη.

Τα χαρακτηριστικά των μεταρρυθμίσεων

Οι αλλαγές ως προς το περιεχόμενο των μεταρρυθμίσεων της δεκαετίας του 1960 καθορίστηκαν στο συνέδριο του Royanmont και αποτέλεσαν τη βάση για όλη τη μεταρρύθμιση, όπως διατυπώθηκε από τους βασικούς συντελεστές του. Το περιεχόμενο της γεωμετρίας προκάλεσε τις περισσότερες διαμάχες και αντιπαραθέσεις, σχετικά με τον τρόπο που διδάσκονταν η Ευκλείδεια Γεωμετρία, χωρίς να υπάρχει αυστηρότητα έκφρασης και με το να υπάρχουν ψευτοαποδείξεις. Συμφωνήθηκε η τροποποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τελικά. Οι βασικές έννοιες θα διδάσκονταν διαισθητικά στις μικρές ηλικίες (11-14 χρονών) και στη συνέχεια θα παρουσιαζόταν το αξιωματικό σύστημα. Έτσι η Θεωρητική Γεωμετρία θα αναπτυσσόταν με τη χρήση των διανυσμάτων ή των πραγματικών αριθμών και στη συνέχεια αναμειγνύεται με την άλγεβρα μέσω της μελέτη των πινάκων, οριζουσών, γραφικών παραστάσεων, μιγαδικών αριθμών και πολικών συντεταγμένων. Όσον αφορά τη στερεομετρία, πραγματοποιήθηκε μείωση της ύλης της τυπικής στερεομετρίας στο σχολικό πρόγραμμα.

Η ύλη που παρουσιάστηκε στα προγράμματα σπουδών των περισσοτέρων χωρών ήταν η παρακάτω:

1. Στοιχειώδης συνολοθεωρία. Η γλώσσα των συνόλων, οι βασικές τους έννοιες και τα παράγωγά τους κυριάρχησαν στα μαθηματικά προγράμματα και αποτέλεσαν σημείο αναφοράς για την ανάπτυξή τους.
2. Εισαγωγικές έννοιες από τη μαθηματική λογική.
3. Θέματα από τη μοντέρνα Άλγεβρα. Εισήχθηκαν οι κύριες αλγεβρικές δομές, ομοιομορφισμοί, πίνακες, γραμμικά συστήματα, γραμμικοί μετασχηματισμοί.
4. Στοιχεία Ανάλυσης. Υπήρχαν βέβαια και στα παλαιότερα προγράμματα θέματα ανάλυσης, όμως ο τρόπος που διδάσκονταν δημιουργούσε πολλά κενά στους μαθητές, έτσι εκσυγχρονίστηκε η διδασκαλία της ανάλυσης.
5. Πιθανότητες και Στατιστική, τα οποία αποτέλεσαν κάτι νέο για τη μαθηματική εκπαίδευση.
6. Θέματα από τη μοντέρνα Γεωμετρία. Ομόφωνα συμφωνήθηκε η μείωση του χρόνου διδασκαλίας των Στοιχείων του Ευκλείδη, χωρίς όμως να καταλήξουν με τι θα αντικατασταθεί. Συμφώνησαν όμως στο να υπάρξουν αλγεβρικές και διανυσματικές μέθοδοι αντικαθιστώντας τις στατικές μεθόδους της παραδοσιακής διδασκαλίας. Οι μέθοδοι που προτάθηκαν ήταν της Γεωμετρίας μετασχηματισμών του Klein, η αυστηρή προσέγγιση κατά Hilbert της αξιωματικής γεωμετρίας και τα αξιωματικά συστήματα θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

Παρατηρήθηκε από όλα τα παραπάνω, λοιπόν, πως το μαθηματικό πρόγραμμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έγινε αυστηρό με έμφαση στην ακριβή διατύπωση των εννοιών έχοντας τη δομή ενός παραγωγικού συστήματος.

Εκτός από τις αλλαγές που έγιναν στο περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών, ένα από τα χαρακτηριστικά των μεταρρυθμίσεων ήταν και οι αλλαγές στις διδακτικές μεθόδους. Μετά το β' παγκόσμιο πόλεμο η ψυχολογία της μάθησης αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας και δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στον τρόπο που σχηματίζονται οι έννοιες από τους μαθητές. Έτσι οι εργασίες του Piaget επηρέασαν τις εκπαιδευτικές διαδικασίες, αλλά και οι εργασίες του Bruner, αργότερα, ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη της σκέψης και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων του μαθητή. Η κύρια μέθοδος διδασκαλίας προσπάθησε να απαλλαχτεί από την αποστήθιση και είχε σαν σκοπό την κατανόηση και όχι την απομνημόνευση κανόνων.

Η μεταρρύθμιση αυτή της δεκαετίας του 1960 προκάλεσε πολλές αντιδράσεις. Αρκετοί ήταν εκείνοι οι οποίοι διαφώνησαν με το μαθηματικό πρόγραμμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που σχεδιάστηκε από πανεπιστημιακούς μαθηματικούς χωρίς να αντιληφθούν ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιμετώπιζαν μεγάλη δυσκολία. Ένα ακόμα σημείο διαφωνίας ήταν η υπερβολική έμφαση στη δομή, η αυστηρότητα και ο φορμαλισμός του περιεχομένου των μαθηματικών. Η φιλοσοφία της ομάδας των Bourbaki, που επηρέασε τα σχολικά προγράμματα, αγνόησε το γεγονός ότι ο μαθητής δεν θα μπορέσει να κατανοήσει τις δομές των μαθηματικών πριν καλά καλά γνωρίσει τα μαθηματικά. Τα «Νέα Μαθηματικά» κατηγορήθηκαν για το συνολοθεωρητικό τρόπο σκέψης τους, για τον αφαιρετικό

χαρακτήρα των εννοιών, για την υπερφορτωμένη γλώσσα με σύμβολα και για την αυστηρότητα, η οποία από διδακτική άποψη είναι περιττή.

Τα νέα βιβλία της μεταρρύθμισης έδιναν έμφαση μόνο στην θεωρία και παρέλειπαν τις πρακτικές εφαρμογές και τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή και τις άλλες επιστήμες. Έτσι τα μαθηματικά απομονώνονταν από τις φυσικές επιστήμες. Ακόμα και τα νέα μαθήματα των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής δεν διδάσκονταν σύμφωνα με τη διδακτική έρευνα. Τα προγράμματα των «Νέων Μαθηματικών» απευθύνονταν κυρίως σε 'ταλαντούχους' μαθητές, αφού ο αφηρημένος τρόπος που παρουσιάζονταν οι έννοιες και ο αυστηρός φορμαλισμός αποδείχθηκαν ότι βρίσκονταν σε υψηλότερο επίπεδο από αυτό των μαθητών. Με τον τρόπο αυτό τα μαθηματικά προγράμματα δημιουργούσαν ένα ισχυρό υπόβαθρο σε αυτούς που θα συνέχιζαν για ακαδημαϊκή μόρφωση.

Οι παιδαγωγικές αρχές που διακηρύχτηκαν δεν εφαρμόστηκαν, δηλαδή η εφαρμογή των σύγχρονων αρχών της ψυχοπαιδαγωγικής και της διδασκαλίας που το παιδί θα ήταν συμμέτοχο στη διαδικασία της μάθησης, τελικά δεν εφαρμόστηκε. Όμως οι υπεύθυνοι στις επιτροπές για την αλλαγή των σχολικών μαθηματικών έδωσαν ιδιαίτερη βαρύτητα μόνο στην αλλαγή του περιεχομένου και όχι στις διδακτικές μεθόδους. Η διδακτική πρακτική έδειξε ότι η αρχή της επανανακάλυψης σπάνια εφαρμόστηκε και η διδασκαλία δεν παρουσίασε αλλαγές. Ένα όμως από τα μεγάλα ζητήματα ήταν η έλλειψη της σωστής προετοιμασίας των καθηγητών, αφού τα νέα προγράμματα περιλάμβαναν πλήθος μοντέρνων εννοιών που οι εκπαιδευτικοί δεν τα είχαν διδαχθεί ούτε καν στα πανεπιστήμιά τους. Απαραίτητη έγινε η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών όχι μόνο ως προς το περιεχόμενο, αλλά και ως προς τις μοντέρνες μεθόδους διδασκαλίας.

Το τρίτο κύμα των μεταρρυθμίσεων

Για όλους τους παραπάνω λόγους που αναφέρθηκαν επικράτησε δυσαρέσκεια σχετικά με τη μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών». Έτσι ξεκίνησε ένα αντιμεταρρυθμιστικό κύμα, το οποίο άρχισε να απομακρύνεται από τα «Νέα Μαθηματικά» της δεκαετίας του 1960 και το οποίο καθιερώθηκε ως «back to the Basics». Χαρακτηριστικό της κίνησης αυτής ήταν η εγκατάλειψη της συνολοθεωρητικής γλώσσας, στρέφοντας το ενδιαφέρον στις υπολογιστικές δεξιότητες που είχαν παραγκωνιστεί στην προηγούμενη μεταρρύθμιση. Εμφανίστηκε μια στροφή προς τη μαζική εκπαίδευση των μαθητών, δίνοντας έμφαση στα πρότυπα του συμπεριφορισμού σχετικά με την εμπειρία που αποκτά ο μαθητής μέσω της ανακαλυπτικής διαδικασίας. Τα βιβλία επομένως άρχισαν να αναθεωρούνται και η γεωμετρία έγινε λιγότερο αυστηρή.

Όλη αυτή η κατάσταση δημιούργησε αντιπαράθεση μεταξύ των «μοντέρνων» και «παραδοσιακών» μαθηματικών που εκφράστηκε μεταξύ διαφόρων αντιθέσεων όχι μόνο ως προς το περιεχόμενο, αλλά και ως προς τη διδασκαλία.

Το τέταρτο κύμα των μεταρρυθμίσεων

Η τελευταία αυτή μεταρρύθμιση εξελίχθηκε το 1980. Παρ' όλη την αλλαγή που έγινε με την κίνηση «back to the Basics» τα προβλήματα ως προς τις επιδόσεις των μαθητών δεν λύθηκαν σύμφωνα με διάφορες αναφορές που έγιναν. Αρκετοί ήταν εκείνοι που θεώρησαν ότι η διδασκαλία των μαθηματικών πια δεν συγκροτείται σε ένα σύνολο κοινών αποδεκτών κανόνων, αφού παρουσιάζονταν η άλγεβρα χωρίς δομή και η γεωμετρία χωρίς απόδειξη. Η μεταρρύθμιση αυτή κατευθύνθηκε από την εθνική ένωση μαθηματικών δασκάλων της Αμερικής και παρουσίαζε τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Στο επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών βρισκόταν η επίλυση προβλημάτων.
2. Οι στόχοι της διδασκαλία να διευρυνθούν πέρα από τις υπολογιστικές ικανότητες των μαθητών.
3. Τα προγράμματα των μαθηματικών να ενισχυθούν με χρήση των υπολογιστών σε όλες τις σχολικές βαθμίδες.
4. Έγινε προσπάθεια να σχεδιαστεί ένα πρόγραμμα που να δίνει επιλογές σε όλους τους μαθητές ώστε να ικανοποιηθούν οι ανάγκες της μαθηματικής κοινότητας.

Επομένως η καινούρια μεταρρύθμιση εστίασε στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και την αξιοποίηση της τεχνολογίας κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε ότι οι αλλαγές στα σχολικά μαθηματικά προήλθαν κυρίως λόγω της εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης, των κοινωνικών και οικονομικών απαιτήσεων και της τεχνολογικής ανάπτυξης. Η μαθηματική εκπαίδευση όμως εκτός από μαθηματική επιστήμη είναι η μετάδοση της γνώσης. Ο συνδυασμός αυτός εξαρτάται από τη ψυχοπαιδαγωγική, τη δομή της κοινωνίας και τη φύση του παιδιού, αλλά και των δασκάλων. Οπότε μια εκπαιδευτική μεταρρύθμιση λαμβάνει υπόψη τις αλληλεπιδράσεις των παραπάνω παραγόντων. Όλες αυτές οι αλλαγές βέβαια είχαν σαν αποτέλεσμα να εξελιχθεί η μαθηματική εκπαίδευση και να γίνουν προσπάθειες ώστε να συμβαδίσει με τις οικονομικές και κοινωνικές εξελίξεις της εποχής (Τουμάσης, 1987).

1.2 Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών

Η διδασκαλία και η μάθηση της Γεωμετρίας σ' όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια ένα αντικείμενο συστηματικής έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών. Από έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σε διάφορες χώρες, οι ερευνητές της Διδακτικής έδειξαν ότι στην παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ελάχιστοι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν την παραγωγική δομή του μαθήματος. Οι μαθητές δηλαδή δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον ρόλο των αξιωμάτων, των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων (Hershkowitz et al, 1990). Σύμφωνα με τις έρευνες αυτές η διδασκαλία πρέπει να αποδεσμευτεί από τις τυπικές-παραγωγικές όψεις της Γεωμετρίας και να προσανατολιστεί σ' ένα συνδυασμό των τελευταίων με τις εμπειρικές-επαγωγικές διαδικασίες που χαρακτηρίζουν την ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να εγκαταλείψουμε τη τεχνητή διάκριση ανάμεσα σε Πρακτική Γεωμετρία του Γυμνασίου και Θεωρητική Γεωμετρία του Λυκείου και να υιοθετήσουμε μια πιο ισορροπημένη ανάπτυξη των δύο όψεων του μαθήματος σ' όλο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Κατά τη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας παρατηρείται διάσταση μεταξύ της «γνώσης του δασκάλου» και της «γνώσης του μαθητή», ιδιαίτερα στις «αποδείξεις» που παράγουν οι μαθητές. Η διάσταση αυτή οδηγεί στο γενικό ζήτημα μεταξύ της «επιστημονικής» και της «σχολικής μαθηματικής γνώσης», μια περιοχή της Διδακτικής των Μαθηματικών που είναι γνωστή ως «θεωρία της διδακτικής μετατόπισης» και εγκαινιάστηκε από τον Y. Chevallard. Η θεωρία αυτή εξετάζει ζητήματα σχετικά με την επιλογή και την μετατροπή των μαθηματικών γνώσεων σε αντικείμενο διδασκαλίας, τη λειτουργία του εκπαιδευτικού συστήματος καθώς και την απόκλιση μεταξύ των Μαθηματικών του σχολείου και των Μαθηματικών της επιστήμης. Μια βασική συνιστώσα της διδακτικής μετατόπισης είναι η αντιμετώπιση της σύνταξης αναλυτικών προγραμμάτων με αντιφατικούς περιορισμούς προσπαθώντας να συμβιβαστεί η επιστημονική πληρότητα με τη γνώση σε περιορισμένο χρόνο.

Οπότε οι σχεδιαστές των αναλυτικών προγραμμάτων και οι συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων υιοθετούν «συμβιβαστικούς σχηματισμούς», δηλαδή σχολικές γνώσεις που εξυπηρετούν διδακτικούς στόχους και δίνουν μια εικόνα των μαθηματικών εννοιών. Τα αναλυτικά προγράμματα προσπαθούν να προσαρμόσουν τα σύγχρονα Μαθηματικά στα σχολικά δεδομένα, δηλαδή να συμβιβάσουν την αξιωματική θεμελίωση με τη διδακτική και παιδαγωγική θεμελίωση της σχολικής Γεωμετρίας. Βέβαια γεννιέται το ερώτημα αν η αξιωματική θεμελίωση και η αποδεικτική διαδικασία μπορούν να γίνουν κατανοητές από το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών.

Η διαχείριση του σχολικού χρόνου και η αξιολόγηση των μαθητών αναιρούν πολλούς από τους στόχους που έχει θέσει το εκπαιδευτικό σύστημα. Οι έρευνες της Διδακτικής έχουν δείξει ότι η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης δεν μπορεί να στοχεύει στο σύνολο των μαθητών του Λυκείου, αλλά μόνο σε μια μικρή μειοψηφία. Ακόμα οι έρευνες έχουν δείξει πως η αναζήτηση χαρακτηριστικών των σχημάτων και η διατύπωση των ορισμών προϋποθέτουν αναλυτική σκέψη και όχι απομνημόνευση. Επομένως για να γίνει κατανοητή η έννοια της απόδειξης χρειάζονται ριζικές αλλαγές στον τρόπο διδασκαλίας της Γεωμετρίας (Θωμαΐδης, 1996).

Οι βασικές προϋποθέσεις που λαμβάνονται υπ' όψιν για τη σύνταξη αναλυτικών προγραμμάτων και τη συγγραφή σχολικών βιβλίων είναι το τι πρέπει και τι μπορεί ο μαθητής να μάθει. Αν βασιστούμε στο «πρέπει» και αγνοήσουμε το «μπορεί» τότε αναφερόμαστε στην αυθεντία, ενώ αν επιλέξουμε το «μπορεί» υπάρχει κίνδυνος να αλλοιωθεί η μορφή και το περιεχόμενο του γνωστικού αντικειμένου. Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε κάποια από τα ερωτήματα που αναφέρονται σε αυτή τη διάκριση μεταξύ «πρέπει» και «μπορεί».

Μπορεί ένας μαθητής της Α' Λυκείου να κατανοήσει τόσο τη μορφή όσο και τη σκοπιμότητα των σημασιολογικών διαφοροποιήσεων που του επιβάλλει η Θεωρητική Γεωμετρία στα γνωστά του από το Γυμνάσιο γεωμετρικά στοιχεία;

Ο μαθητής που μόλις τελείωσε το Γυμνάσιο, καλείται να κάνει ένα τεράστιο άλμα, δηλαδή να προσδιορίσει τις γνωστές του θεμελιωμένες καταστάσεις σε ένα άλλο επίπεδο, στο αφηρημένο της μαθηματικής γλώσσας. Στο εισαγωγικό μέρος της Θεωρητικής Γεωμετρίας ο μαθητής δέχεται πληροφορίες που αδυνατεί να τις εντάξει ως φυσιολογικές στις υπάρχουσες νοητικές του δομές. Στα επόμενα κεφάλαια ο μαθητής μέσα από τις καταστάσεις αναγνωρίζει πως για την επιβεβαίωση των συμπερασμάτων του δεν αρκεί μόνο η διαίσθηση για να επαληθεύσει αλλά η απόδειξη. Τα θέματα που έχει να αντιμετωπίσει είναι πιο σύνθετα νοηματικά και πρακτικά και σχετίζονται περισσότερο με τις παλιότερες εμπειρίες του σε σχέση με το εισαγωγικό μέρος. Ενώ ο μαθητής επιδιώκει να εισαχθεί στο αφηρημένο επίπεδο της Γεωμετρίας παραμένει ακόμα προσκολλημένος στις αισθητηριακές τους αντιλήψεις, αυτές των σχημάτων. Έτσι προσπαθεί να διαμορφώνει κριτήρια με τα οποία διαχωρίζεται το αυτονόητο από αυτό που απαιτεί κάτι περισσότερο για τον προσδιορισμό του. Δηλαδή υπάρχει κάποιο κριτήριο με το οποίο αξιολογεί και διακρίνει το αυτονόητο από το μη αυτονόητο. Η προβληματική κατάσταση που μπορεί να δημιουργηθεί σχετικά με το αυτονόητο και το μη αυτονόητο έχει να κάνει με το ποιο είναι το νόημα να το αποδείξουμε αφού φαίνεται να ισχύει.

Ένα άλλο ερώτημα που μας απασχολεί είναι κατά πόσο επιτυγχάνεται ο αποκλεισμός της εποπτείας και της διαίσθησης από την επεξεργασία θεμάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας, δηλαδή η κάθε μας αναφορά πρέπει να αποδεικνύεται;

Σύμφωνα με τα γραπτά του νεοθετικιστή Schlick, που αναφέρει ο Μακρής (1995, σελ. 8), ο Ευκλείδης έδωσε στη Γεωμετρία την κλασσική της μορφή της οποίας

στηρίζεται σε ένα λογικά συνεπές σύστημα. Η λογική πρόταση που μια πρόταση να συνάγεται από τις άλλες μέσω της «απόδειξης». Οι αποδείξεις κατά τον Ευκλείδη δεν είναι καθαρά λογικές προτάσεις, αλλά παραγωγικές με αναφορές που στηρίζονται στο σχήμα, δηλαδή στην πραγματικότητα επικαλούνται την εμπειρία.

Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας καλλιεργεί τη φαντασία, την επινοητικότητα, την κρίση και τη λογική σκέψη, όπως κατά παράδοση αναφέρεται στα Προγράμματα Σπουδών;

Στα πλαίσια της διδασκαλίας του μαθήματος σήμερα η κύρια νοητική ικανότητα που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι αυτής της απομνημόνευσης, σύμφωνα με διαλόγους που παρατηρούνται μέσα στη τάξη. Αφού μέσω αυτών διαπιστώνουμε ότι για να γράψει κάποιος αρκεί να θυμάται τη θεωρία και τις ασκήσεις που ήδη έχει διδαχθεί, είτε στη τάξη είτε στο φροντιστήριο. Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές αντιμετωπίζουν το μάθημα με τον τρόπο αυτό. Οι ασκήσεις στο μεγαλύτερό τους μέρος είναι θεωρητικές-αποδεικτικές και αντιμετωπίζονται σύμφωνα με τα δεδομένα του λογικού συστήματος της Θεωρητικής Γεωμετρίας. Για τις ασκήσεις αυτές χρειάζεται συνεχής ανίχνευση και αξιολόγηση των ευρημάτων του εκάστοτε βήματος της άσκησης, και δεν αρκεί μόνο η επιμέλεια του μαθητή για να καταφέρει να τη φέρει σε πέρας. Έρχεται σε αντίθεση με τον τρόπο σκέψης και χειρισμού των ασκήσεων της Αναλυτικής Γεωμετρίας όπου χρησιμοποιεί τύπους και διαδικασίες που επιλέγει ώστε να οδηγηθεί στο αποτέλεσμα. Η Θεωρητική Γεωμετρία όμως δεν παρέχει τέτοιου είδους εργαλεία, αλλά απευθύνεται σε μαθητές που πέρα από την επιμέλεια διαθέτουν την ευρετική ικανότητα ώστε με ελάχιστα ή καθόλου στοιχεία να προσδιορίζουν κάποια πορεία για τη λύση του προβλήματος (Μακρής, 1995).

Τελικά γιατί διδάσκουμε τη Θεωρητική Γεωμετρία;

Με τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δίνουμε απόλυτη προτεραιότητα σε ορισμένους γενικούς παιδαγωγικούς σκοπούς όπως η καλλιέργεια και η ανάπτυξη της συγκροτημένης σκέψης καθώς και η μύηση στην επιστημονική μέθοδο μελέτης του κόσμου. Αυτοί οι σκοποί συνδέονται άμεσα με τα χαρακτηριστικά της Θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας που είναι η σαφήνεια στην έκθεση, η ολοκληρωτική απόδειξη κάθε υπόθεσης, η απόλυτη σαφήνεια σχημάτων και συλλογισμών. Στη Διδακτική των Μαθηματικών τα χαρακτηριστικά αυτά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναφέρονται συνήθως ως «ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης» και έχουν γίνει αντικείμενο συστηματικής ανάλυσης. Σε θεωρητικό επίπεδο, τόσο η θεωρία των σταδίων του Piaget όσο και η θεωρία των επιπέδων van Hiele περιγράφει μια επίπονη και ιεραρχικά εξελισσόμενη διαδικασία, που απαιτεί μακροχρόνια και προσεκτικά σχεδιασμένη διδασκαλία.

Κατά τον Piaget η γεωμετρική σκέψη και η μαθηματική σκέψη γενικότερα αναπτύσσονται ως προϊόν αλληλεπίδρασης και σχετίζονται με την ανακάλυψη και τη δημιουργία. Οι γεωμετρικές έννοιες που κατασκευάζουν βοηθούν στην αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον του. Γνωρίζουμε πως η Πιαζετική

προσέγγιση της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου γίνεται μέσα από την πορεία των τεσσάρων σταδίων: του αισθησιοκινητικού, του προεννοιολογικού, του σταδίου των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών και του σταδίου των τυπικών λογικών ενεργειών. Ο γεωμετρικός συλλογισμός κατά τον Piaget ακολουθεί διάφορα στάδια και αναπτυξιακή πορεία σε σχέση με το χρόνο και συνδέεται με τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης. Σε αντίθεση με τις αντιλήψεις που υποστηρίζουν ότι οι πτυχές της χωρικής κατανόησης είναι έμφυτες στον άνθρωπο, ο Piaget υποστηρίζει ότι τα νήπια γεννιούνται χωρίς τη γνώση του χώρου και την αποκτούν στην πορεία μέσω της εμπειρίας και του χειρισμού του περιβάλλοντός τους.

Σύμφωνα με έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στα ελληνικά σχολεία η διδασκαλία της Γεωμετρίας σε τάξεις του Λυκείου, οι ερευνητές κατέληξαν σε ορισμένα συμπεράσματα:

> «(α) Οι μαθητές αρκούνται στην οπτική αντίληψη (δηλαδή στηρίζονται στο σχήμα και όχι σε γεωμετρικές προτάσεις που συνδέονται με ζητούμενα το προβλήματος)
>
> (β) Οι δυνατότητες δράσης τους (μεθοδολογία) είναι σχετικά χαμηλές
>
> (γ) Οι δυνατότητες σωστής διατύπωσης και επικύρωσης αφορούν μικρό σχετικά μέρος από το σύνολο των μαθητών
>
> (δ) Συγχέουν έννοιες κατάλληλες για άλλο τύπο προβλημάτων που δεν λειτουργούν στη συγκεκριμένη περίπτωση και τις χρησιμοποιούν απλά και μόνο για να δώσουν μια απάντηση. Πρόκειται για το γνωστό φαινόμενο της ‘παράλογης’ μαθηματικής συμπεριφοράς, που επιζητά ‘πάση θυσία’ μια απάντηση…»

(Θωμαΐδης, 1998, σελ.121).

Πολλοί ξένοι ερευνητές επίσης συμφωνούν με τα παραπάνω ευρήματα σχετικά με την αποτυχία των μαθητών να κατακτήσουν τα ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης και κυρίως αυτά που σχετίζονται με την έννοια της απόδειξης (Clements & Battista, 1992).

Προβλήματα, βέβαια, ως το φαινόμενο της απλοϊκής-εμπειρικής προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης έχουν παρατηρηθεί και σε φοιτητές κολλεγίων, σύμφωνα με τις έρευνες του A. Schoenfeld. Οι φοιτητές είχαν παρακολουθήσει μαθήματα Θεωρητικής Γεωμετρίας στο Λύκειο και παρατηρήθηκε η αδυναμία τους να χρησιμοποιήσουν βασικές γεωμετρικές γνώσεις με συνεπή τρόπο, δηλαδή δεν μπορούσαν να δώσουν ικανοποιητικές αποδείξεις για γεωμετρικές προτάσεις, αλλά σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών έκαναν υποθέσεις για τα ζητούμενα σχήματα που στηρίζονταν στην εμπειρία και στη διαίσθηση, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα καθοδηγούμενοι από το χέρι ή το μάτι. Έτσι απέρριπταν σωστές λύσεις, ενώ λανθασμένες τις δέχονταν ως σωστές. Ο Schoenfeld (1986) υποστηρίζει πως αυτός ο εμπειρισμός αποδίδεται στην διδασκαλία της Γεωμετρίας, όπου

αναπτύσσει την ικανότητα στο γράψιμο αποδείξεων και στην εκτέλεση κατασκευών με στόχο τις εξετάσεις αγνοώντας τις μαθηματικές, παιδαγωγικές και επιστημολογικές συνιστώσες του μαθήματος. Τέτοιου είδους διδασκαλία οδήγησε στην επιτυχία των μαθητών στις εξετάσεις, αλλά και στην αποτυχία τους να συνδέσουν τη μαθηματική έννοια θεωρητικά και πρακτικά. Θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σε τέτοιου είδους έρευνες στο κεφάλαιο 3.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ευρήματα τίθεται σε αμφισβήτηση ο διαχωρισμός μεταξύ Πρακτικής Γεωμετρίας, που διδάσκεται στο Γυμνάσιο και της Θεωρητικής Γεωμετρίας του Λυκείου. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών οι μαθητές της Α' Λυκείου είναι ώριμοι να κατανοήσουν το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να μπορέσουν να κατανοήσουν το ρόλο των αξιωμάτων, τους ορισμούς των σχημάτων με τον ελάχιστο αριθμό ιδιοτήτων καθώς και τη σκοπιμότητα των αυστηρών αποδείξεων. Το κυρίαρχο καθήκον της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην παραγωγή αποδείξεων, δηλαδή από ένα σύνολο δεδομένων μέσω κατάλληλων συλλογισμών να καταλήξουν σε κάποια συμπεράσματα. Όμως σύμφωνα με τις έρευνες οι μαθητές αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν τις θεωρητικές γνώσεις τους σε συγκεκριμένες καταστάσεις, όπως γεωμετρικές κατασκευές.

Η επισκόπηση ερευνών που πραγματοποιήθηκε από τους Herschkowitz et al (1990) έδειξαν ότι η αποτυχία των μαθητών παρατηρείται κυρίως στην επινόηση αποδείξεων εκ νέου ($4^{ο}$ επίπεδο van Hiele) με τον παραγωγικό τρόπο οφείλεται σε δύο λόγους. Πρώτον ότι το λογικό σύστημα που διδάσκεται δίνει έτοιμο το τελικό αποτέλεσμα και δεν προκαλεί τους μαθητές να αναπτύξουν εκείνες τις διαδικασίες κατά τις οποίες γίνονται οι μαθηματικές ανακαλύψεις. Δεύτερον ο μαθητής δεν θεωρεί αναγκαία τη διαδικασία της απόδειξης. Για τη Γεωμετρία οι επαγωγικές, εμπειρικές ανακαλύψεις είναι αναγκαίες, γιατί εισάγουν τους μαθητές στο κλίμα ανακάλυψης, να μπορέσουν να δείξουν οι ίδιοι ότι η εικασία που υπέθεσαν μπορεί να αποδειχθεί καθώς επίσης ότι μέσω αυτής επέρχεται η κατανόηση και η παραγωγή μιας απόδειξης.

Το αναλυτικό πρόγραμμα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για την Ευκλείδεια Γεωμετρία προωθεί την ευρετική πορεία μιας απόδειξης μέσω ομαδικών δραστηριοτήτων των μαθητών που ευνοούν τη διατύπωση και την επαλήθευση των υποθέσεων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1998 α, ΥΠ.Ε.Π.Θ., 1999). Επομένως ο διαχωρισμός μεταξύ Πρακτικής Γεωμετρίας του Γυμνασίου και Θεωρητικής Γεωμετρίας του Λυκείου θα μπορούσε να παραχωρήσει τη θέση του σε μια ενιαία μέθοδο διδασκαλίας συνδυάζοντας τις πρακτικές εμπειρικές και τις θεωρητικές όψεις του μαθήματος. Στο πλαίσιο αυτό προτείνεται οι ασκήσεις σχεδίασης, μέτρησης και υπολογισμού που υπάρχουν στο Γυμνάσιο να συνδυαστούν με τη διατύπωση εικασιών και της αιτιολόγησής τους, ακόμα οι αποδεικτικές ασκήσεις του Λυκείου θα πρέπει να συνδυαστούν με τη σημασία της θεωρητικής μελέτης των σχημάτων και με τη μεθοδολογία των αποδείξεων (Θωμαΐδης, 2000).

Έχει εξακριβωθεί πως οι μαθητές έχουν μια αρνητική και συχνά αγχώδη στάση απέναντι στη Γεωμετρία και οι λόγοι είναι ο μεγάλος βαθμός αποστήθισης, η ελλιπής σύνδεση του μαθήματος με την καθημερινότητα καθώς και η έλλειψη εναλλακτικών προσεγγίσεων από τους εκπαιδευτικούς. Σε έρευνα της Δημητριάδου (2004) φάνηκε ότι οι διδακτικοί στόχοι της Γεωμετρίας δεν επιτυγχάνονται πάντοτε λόγω της μορφής των σχολικών βιβλίων , τον μεγάλο όγκο της ύλης καθώς και των ασυνεχειών τους στα πλαίσια της ύλης. Αυτή η κατάσταση έχει ως συνέπεια οι καθηγητές του Γυμνασίου συνήθως να μην ακολουθούν πιστά τα αναλυτικά προγράμματα και να δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα σε θέματα που οι ίδιοι κρίνουν σημαντικά μέσα από την εμπειρία τους. Ως αποτέλεσμα αυτών είναι να αφιερώνουν λιγότερο χρόνο για παράδειγμα στη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων, τη μελέτη των εισαγωγικών στοιχείων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των εννοιών. Όλη αυτή η κατάσταση δεν ενθαρρύνει τη μελέτη των εννοιών σε βάθος.

Δεν γνωρίζουμε με σιγουριά αν ο τρόπος διδασκαλίας του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βοηθάει στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, επειδή στην Ελλάδα έχουν γίνει λίγες έρευνες σε μικρά δείγματα που αφορούν τα επίπεδα Van Hiele. Πως κατανέμονται, όμως, οι μαθητές σε επίπεδα Van Hiele; Σύμφωνα με τη θεωρία των Van Hiele υπάρχουν 5 επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, τα οποία περιγράφονται ως εξής (Τζίφας, 2005, σελ. 22):

Επίπεδο 1^{ο} (αναγνώριση/recognition) : Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα ως ολότητα και όχι με τις ιδιότητές τους.

Επίπεδο 2^{ο} (ανάλυση/analysis) : Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους.

Επίπεδο 3^{ο} (διάταξη/order) : Οι μαθητές μπορούν να διατάξουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους και αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τον ρόλο του ορισμού. Μπορεί να ακολουθήσουν τον απλό παραγωγικό συλλογισμό, αλλά χωρίς να γίνεται κατανοητή η απόδειξη.

Επίπεδο 4^{ο} (παραγωγικός συλλογισμός/deduction) : Οι μαθητές κατανοούν τον παραγωγικό συλλογισμό και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης. Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών η ουσιαστική μελέτη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αρχίζει από αυτό το επίπεδο, το οποίο θεωρεί δεδομένο.

Επίπεδο 5^{ο} (αυστηρότητα/rigor) : Οι μαθητές κατανοούν την αυστηρότητα και μπορούν να πραγματοποιήσουν αφηρημένους παραγωγικούς συλλογισμούς. Το επίπεδο αυτό είναι αδύνατον να επιτευχθεί από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, διότι απαιτεί αφαιρετική ικανότητα και μάλιστα υψηλού επιπέδου.

Ο Van Hiele (1959) διατύπωσε ότι η γνωστική ανάπτυξη στη γεωμετρία μπορεί να επιταχυνθεί μέσω της κατάλληλης διδασκαλίας σε αντίθεση με τον Piaget. Τα γραπτά του Van Hiele υποδεικνύουν ότι η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο απαιτεί χρόνο, δηλαδή χρειάζεται περισσότερος χρόνος από μια διδακτική ώρα ή μια

σύντομη διδακτική ενότητα. Χρειάζονται αρκετές ώρες για να μπορέσουν οι μαθητές να μεταβούν από το ένα επίπεδο στο άλλο και οι ώρες αυτές είναι διαφορετικές, π.χ. χρειάζονται περισσότερες για να μεταβούν από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3, απ' ότι από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2. (Τζίφας, 2005).

Στη χώρα μας η διδασκαλία της Γεωμετρίας παραμένει παραδοσιακή χωρίς να λαμβάνει υπόψη τα επίπεδα Van Hiele. Οι δυσκολίες ως προς την κατανόησή της από τους μαθητές παραμένουν όχι μόνο στη χώρα μας αλλά και διεθνώς. Αρχικά το πρόβλημα εμφανίζεται στην τάξη της Γ' Γυμνασίου όπου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις αποδεικτικές διαδικασίες και γίνεται ακόμα πιο έντονο στην Α' Λυκείου όπου η Γεωμετρία γίνεται ανεξάρτητο μάθημα και θεμελιώνεται αξιωματικά. Οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να προτιμούν να ασχοληθούν με μια δύσκολη άσκηση στην Άλγεβρα παρά με μια άσκηση Γεωμετρίας ακόμα και εύκολη. Έτσι οι μαθητές δημιουργούν μια αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα και οι επιδόσεις τους είναι χαμηλές. Για αυτό το λόγο τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ιδιαίτερη κινητικότητα σε έρευνες γύρω από αυτό το θέμα, δηλαδή κατά πόσο αναπτύσσονται τα επίπεδα Van Hiele και πως βοηθάνε τη μετάβαση στο επόμενο επίπεδο την παραδοσιακή διδασκαλία (Πρίντεζης, 2006). Τέτοιες έρευνες θα παρουσιάσουμε αναλυτικότερα στην ενότητα 3.3.

Ένα από τα κύρια σημεία της διδασκαλίας της Γεωμετρία σύμφωνα με όσα προαναφέραμε είναι η έννοια της απόδειξης, πως μπορεί ο μαθητής να κατανοήσει την αναγκαιότητα της απόδειξης καθώς επίσης πόσο αυστηρή πρέπει να είναι η αποδεικτική διαδικασία; Η αυξανόμενη χρήση των υπολογιστών στα μαθηματικά με τη δημιουργία κατάλληλου λογισμικού, έχει επηρεάσει σημαντικά τη διδασκαλία της σχολικής γεωμετρίας. Σύμφωνα με τους Davis (1995), Oldknow (1995) παρατηρήθηκε από σχετική έρευνα ότι αναζωπυρώθηκε το ενδιαφέρον για την Ευκλείδεια Γεωμετρία που είχε σιγά σιγά αρχίσει να παρακμάζει.

Πριν μερικά χρόνια οι περισσότεροι καθηγητές προκειμένου να αναπαραστήσουν τα γεωμετρικά σχήματα και να καταφύγουν στις μετρήσεις αυτών χρησιμοποιούσαν χρονοβόρες διαδικασίες (διαφανή χαρτιά κ.ά.) που δεν ήταν πάντα ακριβείς. Ακόμα τα σχήματα που σχημάτιζαν ήταν στατικά με αποτέλεσμα να μπορούν δύσκολα να τα μετασχηματίσουν και να πειραματιστούν. Σήμερα χρησιμοποιούνται Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας (Τ.Π.Ε.) για την διευκόλυνση αυτών των καταστάσεων (Cabri-Geometry, Sketchpad, GeoGebra), τα προγράμματα αυτά σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να προσφέρουν ένα περιβάλλον επιπεδομετρίας. Αυτά παρέχουν τη δυνατότητα να σχεδιάζονται σχήματα με γλώσσα οικεία στο χρήστη ο οποίος μπορεί εύκολα να τα μετατρέψει.

Στα λογισμικά αυτά μπορεί κάποιος να κατασκευάσει ένα τρίγωνο, για παράδειγμα, και να το μετακινεί συνέχεια και ταυτόχρονα να παρατηρεί ότι τα ύψη του διέρχονται πάντα από το ίδιο σημείο. Επομένως μπορεί κάποιος ενώ μετακινεί κάποιο γεωμετρικό σχήμα να έχει τη δυνατότητα να παρατηρεί τις ιδιότητές του (Τουμάσης & Αρβανίτης, 2003).

Από παιδαγωγικής άποψης, με αυτόν τον τρόπο, το σημαντικότερο πλεονέκτημα που παρέχουν αυτά τα λογισμικά είναι ότι ενθαρρύνουν τον πειραματισμό και την ερευνητική προσέγγιση στη μελέτη της Γεωμετρίας. Έτσι οι μαθητές εξοικειώνονται από νωρίς στη τέχνη της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης, αφού τους δίνεται η δυνατότητα να αναπτύξουν εικασίες, να κάνουν εξερευνήσεις και να τις ελέγξουν στο τέλος με την κατασκευή αποδείξεων.

Βέβαια όλα αυτά τα πλεονεκτήματα που παρέχουν οι Τ.Π.Ε., μπορούν να αντικαταστήσουν τον ρόλο της απόδειξης;

Η εμφάνιση τους έχει ως συνέπεια να επαναπροσδιορίσουν τη διδασκαλία της απόδειξης. Η απόδειξη είναι καθοριστική για τη μαθηματική επιστήμη και η καλλιέργεια της έννοιας της κατέχει βασικό ρόλο στη διδασκαλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο De Villiers (1998) επισημαίνει πως η βασική λειτουργία της απόδειξης είναι η διαβεβαίωση-επιβεβαίωση της ορθότητας μιας γεωμετρικής πρότασης πέρα από κάθε αμφιβολία. Οι μαθητές τώρα πια έχουν τη δυνατότητα να παράγουν αναρίθμητα σχήματα γρήγορα και εύκολα αποκαλύπτοντας τις γεωμετρικές ιδιότητές τους, έτσι δεν τους δημιουργείται η ανάγκη για επιβεβαίωση αφού έχουν πειστεί για την αλήθεια μιας πρότασης ή την ορθότητα του ισχυρισμού.

Η πλειοψηφία των μαθηματικών και των δασκάλων που διδάσκουν μαθηματικά συμφωνούν στο γεγονός πως είναι αναγκαίο οι μαθητές να καταλάβουν αν η διερεύνηση και ο πειραματισμός συμβάλουν στον έλεγχο των εικασιών, ώστε να αναπτυχθούν οι αποδείξεις και αν όχι να τις αντικαταστήσουν. Η παρακίνηση των μαθητών να διαμορφώσουν αποδείξεις είναι πολύ σημαντική. Κανένα εκπαιδευτικό λογισμικό δεν μπορεί να προσφέρει τον ίδιο βαθμό βεβαιότητας με μια απόδειξη. Ο ρόλος του καθηγητή διαμορφώνεται προκειμένου μέσω των ερωτήσεων να κάνει τους μαθητές να διερευνήσουν για ποιο λόγο συμβαίνει το γεγονός που παρατηρούν μέσω του προγράμματος. Τους παρακινεί να δώσουν εξηγήσεις, δηλαδή και να προσπαθήσουν να παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους ως λογική συνέπεια άλλων γνωστών αποτελεσμάτων.

Με τη χρήση της τεχνολογίας δίνεται έμφαση σε κάποιες λειτουργίες των αποδείξεων που επισκιαζόταν από την παραδοσιακή επιβεβαίωση της αλήθειας και απευθύνονται στους μαθητές:

1. Να εξηγούν γιατί μια πρόταση είναι σωστή (επεξήγηση)
2. Να ανακαλύπτουν ή να επινοούν νέα αποτελέσματα (ανακάλυψη)
3. Να οργανώνουν τα αποτελέσματα σύμφωνα με την αξιωματική θεμελίωση (συστηματοποίηση)
4. Η αυτοεπιβεβαίωση από την κατανόηση μιας απόδειξης (διανοητική πρόκληση)
5. Να μπορούν να μεταφέρουν και να διαδίδουν τη μαθηματική γνώση (επικοινωνία).

Οι καθηγητές επομένως προσπαθήσουν να βρουν τρόπο ώστε να προβάλλουν τις εξερευνητικές, επεξηγηματικές, οργανωτικές και επικοινωνιακές λειτουργίες της απόδειξης. Παρέχοντας στους μαθητές κατάλληλες δραστηριότητες πειραματίζονται, εξερευνούν, ανακαλύπτουν και εξηγούν τα αποτελέσματα που εμφανίζονται μέσω των προγραμμάτων στην οθόνη του υπολογιστή τους, ελέγχοντας αν είναι αληθή.

1.3 Μεθοδολογία και ερευνητικά ερωτήματα

Μέσα από την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναλύσαμε παραπάνω το μάθημα της Γεωμετρίας στην Ελλάδα κατέχει κεντρική θέση. Όμως σήμερα η Ευκλείδειας Γεωμετρίας διδάσκεται μόνο σε δύο τάξεις την Α' και Β' Λυκείου, ενώ παλιότερα διδάσκονταν παραδοσιακά σε 3 ή 4 τάξεις και αποτελούσε και εξεταζόμενο μάθημα στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι.. Διάφορες αναλύσεις και έρευνες που έχουν δημοσιευθεί αποκαλύπτουν μια σταδιακή παρακμή του μαθήματος, παρ' όλο που το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο προσπάθησε να αντιμετωπίσει το πρόβλημα με αναθεωρήσεις ή αλλαγές των διδακτικών βιβλίων. Ένα ακόμα πρόβλημα που παρατηρείται είναι ότι ενώ αλλάζουν τα σχολικά βιβλία και τα αναλυτικά προγράμματα οι σύγχρονοι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αντιληφθούν τις αλλαγές αυτές, γιατί ακόμα και αν τις έχουν υπόψη τους, τους επηρεάζουν ελάχιστα. Οι αλλαγές αυτές δεν μπορούν να επικεντρώνονται μόνο στα αναλυτικά προγράμματα και τα διδακτικά εγχειρίδια αλλά να συνδυάζονται και με την κατάρτιση των εκπαιδευτικών.

Γεννιούνται κάποια ερωτήματα σχετικά με το πώς έγιναν αυτές οι αλλαγές στην Ελλάδα; Τι ίσχυε στα αναλυτικά προγράμματα και πως αυτά άλλαξαν; Ποιες είναι εκείνες οι επιρροές που προκάλεσαν αυτές τις αλλαγές;

Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που κατεξοχήν αποτελούσε παράδοση για τη μαθηματική εκπαίδευση της χώρας μας, εμφανίζεται να παραγκωνίζεται από τους μαθητές λόγω δυσκολιών που αντιμετωπίζουν απέναντι στο μάθημα. Οι αλλαγές που υπέστη τις τελευταίες δεκαετίες δεν φαίνεται να έχουν λύσει το πρόβλημα σύμφωνα με έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στη χώρα μας τα τελευταία χρόνια. Επιπλέον η εισβολή των Τ.Π.Ε. στο χώρο της εκπαίδευσης δημιουργεί προβληματισμό ως προς την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία προσπαθούμε να εντοπίσουμε με ποιόν τρόπο εξελίχθηκε το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα από το 1950 έως το 2000 και πως οι αλλαγές αυτές επηρέασαν τον τρόπο διδασκαλίας του.

Τα κύρια εργαλεία της ανάλυσης αυτής θα είναι η μελέτη των σχολικών βιβλίων του μαθήματος καθώς και τα αναλυτικά προγράμματα της περιόδου εκείνης, ώστε να καταλάβουμε πως η ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης επηρέασε και διαμόρφωσε το μάθημα έτσι όπως είναι σήμερα.

Καλούμαστε επομένως να απαντήσουμε στα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποια είναι η σημασία και η σκοπιμότητα μιας αξιωματικής θεμελίωσης της σχολικής Γεωμετρίας;
- Πρέπει να ακολουθεί η διδασκαλία μία «γενετική» μέθοδο που στηρίζεται σε διαδικασίες ανακάλυψης, διατύπωσης υποθέσεων και γενίκευσης ή θα δίνει έμφαση μόνο στην παραγωγική δομή του μαθήματος;
- Ποιες γνωστικές προϋποθέσεις απαιτούνται για την κατανόηση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;

Η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και η δημιουργία δικών τους αποδείξεων. Αυτό που προσπαθούμε να μελετήσουμε είναι πως τα κύρια χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η αξιωματική θεμελίωση και η αποδεικτική διαδικασία επηρεάστηκαν μέσα από τις πολλαπλές αλλαγές που έγιναν την περίοδο 1950 έως σήμερα. Απαντώντας στα συγκεκριμένα ερωτήματα προσπαθούμε να εξετάσουμε αν οι αλλαγές αυτές βελτίωσαν την κατάσταση στον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος ή δημιούργησαν περισσότερα εμπόδια στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές, καθώς και τι είναι αυτό που μπορεί να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση. Βέβαια όπως αναφέραμε και προηγουμένως η εισβολή της τεχνολογίας στην εκπαίδευση έχει επιφέρει και η ίδια αλλαγές στη διδασκαλία του μαθήματος. Επομένως σε ένα μάθημα παραδοσιακό, όπως είναι η Γεωμετρία με αυστηρή διατύπωση και αποδείξεις, μπορεί να διαμορφωθεί σύμφωνα με ένα σχήμα λιγότερο αυστηρό και δίνοντας έμφαση στη διαίσθηση; Και αν ναι ποιοι είναι οι κίνδυνοι που περικλείει;

Κεφάλαιο 2ο

Αναλυτικά προγράμματα και διδακτικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας της περιόδου 1950 – 2000

2.1 Ιστορική Αναδρομή

Ενδιαφέρον παρουσιάζει να προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε την εξέλιξη του μαθήματος της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα τις τελευταίες δεκαετίες. Βέβαια τα προγράμματα σπουδών που αναπτύχθηκαν στην χώρα μας δεν ανταποκρίνονται στις προδιαγραφές που παρουσιάσαμε στην αρχή του προηγούμενου κεφαλαίου. Όπως αναφέραμε και στην αρχή η Ελλάδα αποτελεί μια από τις ελάχιστες χώρες του κόσμου που εξακολουθεί ακόμα και σήμερα να διατηρεί ένα ανεξάρτητο μάθημα θεωρητικής Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση υποχρεωτικό για το σύνολο όλων των μαθητών που διδάσκεται στις δυο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Η ύλη του μαθήματος επεκτείνεται από τους ορισμούς και την αξιωματική θεμελίωση των βασικών γεωμετρικών εννοιών μέχρι τη μελέτη των σχημάτων. Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας εισάγεται στις αρχές του 19ου αιώνα μέσω του «Στοιχεία Γεωμετρίας» του Legendre (που πρωτοεκδόθηκαν το 1794).

Το βιβλίο αυτό έπαιξε πρωταγωνιστικό ρόλο στα σχολικά μαθηματικά του 19ου αιώνα και γράφηκε με την ιδέα να κάνει την αποδεικτική γεωμετρία πιο αυστηρή στηριζόμενη στη λογική συμπερασματολογία με την αξιοποίηση της αριθμητικής και της άλγεβρας. Το βιβλίο παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, όπως η κοινή αφετηρία με αναιτιολόγητους ορισμούς και αξιώματα. Η αριθμητικοποίηση αυτή των Μαθηματικών είχε ως αποτέλεσμα μια κριτική στάση στους παραδοσιακούς μαθηματικούς κλάδους, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη Γεωμετρία του Ευκλείδη και από την άλλη την αναμόρφωση της αξιωματικής σκέψης. Στο σχολικό επίπεδο η κριτική στάση απέναντι στον Ευκλείδη μετατράπηκε σε έντονη αντιπαράθεση από το 1870 και μετά (Δούβου, 1998, σελ. 16-17).

Η στροφή αυτή εναντίον της Γεωμετρίας του Ευκλείδη είχε σημαντικές επιπτώσεις στα σχολικά προγράμματα. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1960 πραγματοποιήθηκαν αλλαγές στο περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών, όπως παρουσιάστηκαν αναλυτικότερα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όπως προαναφέραμε οι αλλαγές αυτές καθορίστηκαν στο συνέδριο του Royaumont (1959), όπου τις περισσότερες αντιπαραθέσεις τις προκάλεσε το περιεχόμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Τελικά, συμφωνήθηκε πως η Ευκλείδεια Γεωμετρία θα έπρεπε να τροποποιηθεί σοβαρά. Οι βασικές έννοιες θα πρέπει να διδάσκονται διαισθητικά στους μαθητές ηλικίας 11-14 χρόνων και μετά από λίγους μήνες μελέτης θα

μπορούσε να τους παρουσιαστεί το αξιωματικό σύστημα. Στο συγκεκριμένο συνέδριο συμφωνήθηκε η περικοπή του χρόνου διδασκαλίας των «Στοιχείων» του Ευκλείδη αλλά δεν συμφωνήθηκε η ύλη διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Η Ελλάδα που συμμετείχε τότε ενεργά στο πρόγραμμα μεταρρύθμισης των σχολικών Μαθηματικών βρέθηκε αντιμέτωπη με μια ισχυρή πίεση για κατάργηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τα αναλυτικά προγράμματα και την αντικατάστασή της από σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες. Αυτή η κίνηση είναι γνωστή με το σύνθημα «Να φύγει ο Ευκλείδης». Η πίεση αυτή είχε ως αποτέλεσμα τη σύγκρουση μεταξύ του εκσυγχρονισμού της εκπαίδευσης και της τεχνολογικής ανάπτυξης από τη μία με την παραδοσιακή εκπαιδευτική πολιτική προβολή του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού από την άλλη με ένθερμους υποστηρικτές και οι δύο πλευρές. Η πρώτη προσπάθεια έγινε το 1961 όταν το Υπουργείο Παιδείας διόρισε μια επιτροπή για να εκσυγχρονίσει το περιεχόμενο και τη διδασκαλία του μαθήματος ακολουθώντας τις διεθνείς τάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η επιτροπή αυτή οργάνωσε μια σταδιακή αναμόρφωση της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αρχίζοντας με την 1η τάξη του εξατάξιου Γυμνασίου. Το 1962 δημιουργήθηκε ένα νέο πειραματικό βιβλίο για την 1η τάξη, όπου εφαρμόστηκε σε 10 πειραματικές τάξεις σε Αθήνα και Θεσσαλονίκη. Ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τη 2η και 3η τάξη του Γυμνασίου και σχεδιάστηκε μια παρόμοια διαδικασία για το Λύκειο η οποία τελικά δεν πραγματοποιήθηκε.

Η νέα μορφή του μαθήματος, που εμφανίστηκε με το αναλυτικό πρόγραμμα του 1968, συνδύαζε με ιδιαίτερη έμφαση την αυστηρή θεμελίωση τύπου Hilbert και τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, που εξέφραζαν τον εκσυγχρονισμό, με τη διατήρηση μιας εκτεταμένης παραδοσιακής ύλης που οι μεταρρυθμιστές επιδίωκαν να καταργήσουν (προβλήματα πάνω στη γεωμετρία των τριγώνων, τους γεωμετρικούς τόπους και τις γεωμετρικές κατασκευές) (Θωμαΐδης, 1996). Η αναμόρφωση αυτού του προγράμματος δημιούργησε οξύ πρόβλημα της επιμόρφωσης των καθηγητών καθώς οι καινούριες έννοιες και η διδακτική τους ήταν τελείως πρωτόγνωρες. Στην θέση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που τόνιζε την εμπειρική προέλευση των αξιωμάτων και των αρχικών γεωμετρικών εννοιών, εισάγεται ο φορμαλισμός της Γεωμετρίας του Hilbert. Επιπλέον, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας αρχίζει ένα έτος νωρίτερα, δηλαδή από την Γ' Γυμνασίου. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα ο στόχος του μαθήματος ήταν: «η διέγερση και η συνειδητοποίηση του a priori γεωμετρικού εφοδίου του ανθρωπίνου πνεύματος με βάσιν τα εκ της εμπειρίας προβαλλόμενα γεωμετρικά προβλήματα και ειδικώτερον ή ακριβής αντίληψις των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και των μεταξύ αυτών σχέσεων» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1969).

Η νέα μορφή του μαθήματος έχει ως βασικό χαρακτηριστικό την αυστηρότητα στη θεμελίωση σύμφωνα με τη σύγχρονη αξιωματική μέθοδο και την εισαγωγή πυκνού συμβολισμού. Οι αρχικές έννοιες, όπως σημείο, ευθεία και επίπεδο, εισάγονται ως αφηρημένοι όροι χωρίς αναφορά στην εμπειρία, με μοναδικό περιορισμό να ικανοποιούνται τα αξιώματα.

Το βιβλίο «Θεμέλια της Γεωμετρίας» του D. Hilbert πρωτοεκδόθηκε το 1899 και επηρέασε σημαντικά τα Μαθηματικά του 20^{ου} αιώνα. Αποτελεί, ακόμα, ορόσημο στην ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας γιατί αποτελεί μια από τις σπουδαιότερες υπερβάσεις της Ευκλείδειας αξιωματικής παράδοσης. Το συγκεκριμένο βιβλίο είχε και έχει μεγάλη απήχηση στη διεθνή κοινότητα των μαθηματικών. Τα Θεμέλια του Hilbert αποτέλεσαν την ενοποίηση των Μαθηματικών από τους γερμανούς αλγεβρίστες και τη γαλλική ομάδα των Bourbaki. Όταν το 1960 ξεκίνησε η μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών, η αξιωματική μέθοδος του Hilbert επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τη σχολική και πανεπιστημιακή μαθηματική παιδεία. Στις αρχές της επόμενης δεκαετίας η αξιωματοποίηση της Γεωμετρίας άρχισε να απασχολεί τη Διδακτική των Μαθηματικών, που σήμαινε πως προβλημάτισε γενικότερα τη μαθηματική εκπαίδευση.

Αυτός ο απόηχος των Θεμελίων του Hilbert στην ελληνική σχολική Γεωμετρία διατηρήθηκε για δύο περίπου δεκαετίες. Δεν έγινε όμως αποδεκτός από τους εκπαιδευτικούς της εποχής, οι οποίοι συνάντησαν μεγάλες δυσκολίες στην προσπάθειά τους να προσαρμοστούν στις νέες αντιλήψεις για τη σχολική Γεωμετρία. Σε αυτό το γεγονός ήρθε να προστεθεί και μια ακραία εθνικιστική απόρριψη της αξιωματικής θεμελίωσης του Hilbert, που την έβλεπαν σαν μια προσπάθεια κατάργησης της Ελληνικής (Ευκλείδειας) Γεωμετρίας και ίδρυση μιας νέας (Καστάνης, 1999, σελ.83). Στα τέλη της δεκαετίας του 1960 και στην αρχή της δεκαετίας του 1970 διακόπηκε η διδασκαλία του αξιωματικού συστήματος του Hilbert από τα ελληνικά πανεπιστήμια, δηλαδή απουσίαζε από τη μόρφωση των ελλήνων εκπαιδευτικών. Όλα αυτά δείχνουν την απουσία στέρεων μεταγνωστικών βάσεων στην ελληνική μαθηματική παιδεία που δεν αντιλαμβάνεται την εννοιολογική αλλαγή που επέφεραν τα Θεμέλια του Hilbert στη μαθηματική κουλτούρα. Προέκυψε, έτσι, μια αντίφαση μεταξύ του επιστημολογικού πλαισίου των σχολικών μαθηματικών και των εφοδίων των υποψηφίων εκπαιδευτικών. Γύρω στο 1985 τα Μοντέρνα Μαθηματικά («Νέα Μαθηματικά») απομακρύνθηκαν από τη σχολική παιδεία, ενώ στις πανεπιστημιακές σπουδές, το φυτώριο των μαθηματικών της εκπαίδευσης, από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 μέχρι και σήμερα κυριαρχούν οι ιδέες των Μοντέρνων Μαθηματικών. Με αποτέλεσμα να υπάρχει ασυμβατότητα μεταξύ των σχολικών και μεταγνωστικών Μαθηματικών, δηλαδή της γνώσης του μαθηματικού αντικειμένου μετά την πανεπιστημιακή εκπαίδευση συγκρίνοντας τες με τις σχολικές τους γνώσεις. Το γεγονός αυτό έχει επιπτώσεις στη διδακτική αποτελεσματικότητά τους.

Με τα αναλυτικά προγράμματα που ισχύουν στη χώρα μας τα τελευταία 30 χρόνια, η διδασκαλία στο Λύκειο είναι θεωρητική με την έννοια ότι κυριαρχείται από την αποδεικτική διαδικασία, «…Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και τις λογικές διεργασίες καθώς και στη μύηση της αποδεικτικής διαδικασίας…»(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1984) Βασικός στόχος είναι η εξοικείωση του μαθητή με τον τρόπο που αναπτύσσεται ένα μαθηματικό θέμα. Ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει το ρόλο των

αξιωμάτων και τη σημασία των θεμελιωδών νόμων, ώστε να αναπτύξει μια συλλογιστική πορεία. Έτσι δίνεται έμφαση στην αξιωματική θεμελίωση και την ανάπτυξη της θεωρίας.

Τα περισσότερα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας που εκδόθηκαν από το 1975 μέχρι το 1990 ακολούθησαν την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, αλλά απλοποιώντας την αυστηρή, φορμαλιστική θεμελίωση των βιβλίων του Ι. Ιωαννίδη το 1968. Στο αναλυτικό πρόγραμμα που εκδόθηκε το 1977 αναφέρονται οι γενικοί στόχοι των μαθηματικών και στη συνέχεια οι στόχοι συγκεκριμένα για το Γυμνάσιο:

> «(α) Να ασκήσει σε κάθε ευκαιρία το μαθητή στην αποσαφήνιση των εννοιών, στην αιτιολόγηση των ενεργειών, στην ανάλυση και «μαθηματικοποίηση» καταστάσεων.
>
> (β) Να εισαγάγει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης.
>
> (γ) Να φέρει σε επαφή το μαθητή με ποικίλα θέματα εφαρμοσμένων Μαθηματικών, ώστε να μπορέσει να ενταχθεί φυσιολογικά στο σύγχρονο κοινωνικό περιβάλλον.»(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1977)

Ενώ στο αναλυτικό πρόγραμμα του 1984 οι στόχοι του μαθήματος για την Α’ και Β’ Λυκείου διαμορφώνονται σύμφωνα με τις παιδαγωγικές απαιτήσεις της εποχής, όπως:

> «(β) Να μυήσει και να εξοικειώσει το μαθητή στη μέθοδο διδασκαλίας της μαθηματικής απόδειξης και να του αναπτύξει «μαθηματική σκέψη»
>
> (γ) Να ασκήσει το μαθητή ώστε να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή πρακτική.» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1984).

Με τη μείωση του αριθμού των αξιωμάτων και την εμπειρική προέλευση των αρχικών γεωμετρικών εννοιών διαμορφώθηκε ένα σύστημα θεμελίωσης για σχολική χρήση συνδυάζοντας στοιχεία από τον Ευκλείδη, τον Legendre και τον Hilbert. Από τα παραπάνω αποσπάσματα των αναλυτικών προγραμμάτων παρατηρούμε πως διαμορφώνονται οι στόχοι του μαθήματος. Τη δεκαετία του 1970 ακόμα και από τις τάξεις του Γυμνασίου ο μαθητής εισάγεται στην αποδεικτική διαδικασία ενώ λίγα χρόνια αργότερα το 1984 παρόμοιοι στόχοι αναφέρονται για το μάθημα στις δυο πρώτες τάξεις του Λυκείου.

Το 1990 υιοθετήθηκε το σύστημα Pogorelov που εισήγαγε ένα είδος «αριθμητικοποίησης» και θέτει ως βασική προϋπόθεση για την αξιωματική θεμελίωσή του το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το σύστημα Pogorelov χρησιμοποιεί μικρό αριθμό αξιωμάτων που αντανακλούν τις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών, με αυτό τον τρόπο συνδέονται οι γνώσεις των μαθητών που είχαν στο Γυμνάσιο με αυτές της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα αποκτήσουν στις πρώτες τάξεις του Λυκείου. Όλες οι απόπειρες για την κατάλληλη θεμελίωση της σχολικής Γεωμετρίας είχαν ως συνέπεια αλλεπάλληλες αλλαγές των διδακτικών βιβλίων, ώστε

να λυθούν τα προβλήματα διδασκαλίας και να υλοποιηθούν οι στόχοι των αναλυτικών προγραμμάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας εκτός από το ζήτημα της αξιωματικής θεμελίωσης παρουσίαζε και μια σειρά από χρόνια προβλήματα όπως η αδυναμία ολοκλήρωσης της ύλης και η κατάργηση στην πράξη της διδασκαλίας γεωμετρικών κατασκευών που αντανακλούσαν τις ελλείψεις των βασικών γεωμετρικών γνώσεων των τελειόφοιτων του Λυκείου. Όλα αυτά είχαν σαν αποτέλεσμα το 1995 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο να προχωρήσει στη σύνταξη νέου αναλυτικού προγράμματος και την προκήρυξη συγγραφής νέων διδακτικών βιβλίων. Η ριζική καινοτομία που εμφανίζεται αφορά την εγκατάλειψη της αξιωματικής θεμελίωσης της σχολικής Γεωμετρίας γεγονός που αποτελεί πραγματική ρήξη με την καθιερωμένη παράδοση και δίνει προτεραιότητα στις διδακτικές ανάγκες στα καθιερωμένα επιστημολογικά κριτήρια μιας μαθηματικής θεωρίας, δηλαδή υιοθετεί ορισμένα βασικά αποτελέσματα της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών. Η καινοτομία αυτή συνάντησε αρκετές αντιδράσεις από φορείς, όπως η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε. 1996, Θωμαΐδης, 1996).

Το βασικό επιστημολογικό γνώρισμα της παραδοσιακής Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η εμπειρική προέλευση των αρχικών εννοιών και αξιωμάτων σε αντίθεση με την τρέχουσα αντίληψη της αξιωματικής θεμελίωσης των Μαθηματικών. Ανάλογες με τη βαρύτητα που θα δοθεί στο θέμα της θεμελίωσης θα είναι και οι άμεσες συνέπειες στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η εγκατάλειψη της αξιωματικής θεμελίωσης και η έμφαση στην «αποδεικτική διαδικασία» απαιτούν μια επανεξέταση του προσανατολισμού της διδασκαλίας και έναν επαναπροσδιορισμό της έννοιας της «απόδειξης» στα σχολικά πλαίσια.

Σημαντικό σε αυτό το σημείο είναι να συνδεθούν όλα τα προηγούμενα που αναφέραμε για την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση κατά την περίοδο 1950-2000. Θα δώσουμε ένα «ιστορικό περίγραμμα» που περιλαμβάνει τις βασικές πηγές από τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία που αφορούν τη δευτεροβάθμια σχετικά με το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αυτήν την περίοδο.

Κατά την χρονική περίοδο **1950-1959**, την μεταπολεμική στο χώρο των μαθηματικών κυριαρχούν τα παραδοσιακά Μαθηματικά. Ισχύουν τα προπολεμικά αναλυτικά προγράμματα για τα εξατάξια κλασικά Γυμνάσια και τα Πρακτικά Λύκεια. Υπήρχε η Επιθεώρηση Μέσης Εκπαίδευσης που αρμοδιότητά της είναι η καθοδήγηση των εκπαιδευτικών και η επιμόρφωσή τους, που διεξάγεται στο Διδασκαλείο Μέσης Εκπαιδεύσεως που είχε ιδρυθεί από το 1910. Τα διδακτικά βιβλία αυτής της περιόδου είναι τα εξής:

1. Ν. Νικολάου: Πρακτική Γεωμετρία δια τας κατωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. 1949
2. Ν. Νικολάου: Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. 1950

Την περίοδο **1959-1967** πραγματοποιούνται εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις και εισάγονται τα Νέα Μαθηματικά στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το 1959 επιχειρείται μια αλλαγή προσανατολισμού προς την Τεχνική - Επαγγελματική εκπαίδευση και ψηφίζεται ο νόμος περί Τεχνικής και Επαγγελματικής εκπαιδεύσεως, οργανώσεως της Μέσης Παιδείας και Διοικήσεως της Παιδείας (Ν.3971/1959). Την διετία 1961-62 δημοσιεύονται νέα αναλυτικά προγράμματα για τις τρεις τελευταίες τάξεις των Γυμνασίων Πρακτικής Κατευθύνσεως. Το 1961 δημοσιεύεται ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα για την πρώτη βαθμίδα του Γυμνασίου και συγκροτείται η «Επιτροπή πειραματικής μελέτης και διδασκαλίας των Μαθηματικών εις την Μ. Εκπαίδευσιν», η οποία εισάγει τη μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών». Οι εξετάσεις διεξάγονται με ευθύνη του Υπουργείου Παιδείας. Το 1964 δημοσιεύεται νέο αναλυτικό πρόγραμμα για την Α' τάξη του Γυμνασίου και το 1966 δημοσιεύονται νέα αναλυτικά προγράμματα για τις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου και τις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Στο πλαίσιο της μεταρρύθμισης αυτής κυκλοφορούν την τριετία 1962-64 τρία βιβλία για την πειραματική διδασκαλία των Μαθηματικών στις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου και από το σχολικό έτος 1964-65 επιτρέπεται στις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου η ελεύθερη επιλογή και χρήση βιβλίων του εμπορίου που είχαν συγγραφεί σύμφωνα με τα νέα αναλυτικά προγράμματα. Σημαντική αλλαγή αποτελεί η διαίρεση του εξατάξιου Γυμνασίου σε δυο βαθμίδες, Γυμνάσιο και Λύκειο και καθιερώνεται το απολυτήριο της πρώτης βαθμίδας.

Η μαθηματική εκπαίδευση της περιόδου **1967-1974** χαρακτηρίζεται κυρίως από τις επιλογές της δικτατορίας στην εκπαίδευση και την πολιτική. Το 1967 η κυβέρνηση της δικτατορίας καταργεί το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, που είχε ιδρυθεί την προηγούμενη χρονική περίοδο και επαναφέρει το εξαετές Γυμνάσιο. Ακόμα καταργείται το Ακαδημαϊκό Απολυτήριο, ο οποίος θεσμός ξεκίνησε την προηγούμενη χρονική περίοδο, αλλά διατηρείται η διεξαγωγή των εισαγωγικών εξετάσεων για τα Α.Ε.Ι. με ευθύνη του Υπουργείου Παιδείας και ιδρύεται το Ανώτατο Εκπαιδευτικό Συμβούλιο. Τη διετία 1968-69 δημοσιεύονται νέα αναλυτικά προγράμματα για τις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου Θεωρητικής Κατεύθυνσης και τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου Θετικής Κατεύθυνσης, στα οποία παρατηρούνται έντονα στοιχεία «συμψηφισμού» ανάμεσα στα παραδοσιακά και τα μοντέρνα (νέα) Μαθηματικά. Το 1967 ανατυπώνονται με ορισμένες τροποποιήσεις και αρκετές περικοπές τα βιβλία που είχαν συγγραφεί για την πειραματική διδασκαλία των Μαθηματικών στις τρεις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου. Ακόμα οι ώρες διδασκαλίας του μαθήματος περιορίζονται στις 4 από 5-6 διδακτικές ώρες που ήταν τις προηγούμενες περιόδους. Συγγράφονται, με αναθέσεις από το Υπουργείο Παιδείας, τα εξής διδακτικά βιβλία:

1. Ι. Ιωαννίδης: Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Τόμος 2^{ος} (Γεωμετρία). 1968
2. Ι. Ιωαννίδης: Μαθηματικά Δ' Γυμνασίου (Θετικής Κατεύθυνσης) Τόμος 2^{ος} (Γεωμετρία). 1968
3. Ι. Πανάκη: Μαθηματικά Ε' Γυμνασίου (Θετικής Κατεύθυνσης) Τόμος 2^{ος} (Γεωμετρία). 1968

4. Γ. Γραφάκου, κ.α.: Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Αριθμητική και Άλγεβρα-Γεωμετρία. 1969
5. Π. Λαδόπουλου: Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας Ε'-ΣΤ' Γυμνασίου. 1969

Παράλληλα χρησιμοποιείται ως ελεύθερο βοήθημα και το βιβλίο του Ν. Βαρουχάκη: Συμπλήρωμα Γεωμετρίας δια την ΣΤ' Γυμνασίου και το βιβλίο του Ν. Νικολάου (Γεωμετρία και Τριγωνομετρία) στην Δ', Ε' και ΣΤ' Γυμνασίου Θεωρητικής Κατεύθυνσης.

Την μεταπολιτευτική περίοδο **1974-1986** λαμβάνονται νομοθετικές πρωτοβουλίες που επηρεάζουν την μαθηματική εκπαίδευση. Το 1975 ψηφίζεται ο νόμος για την κατάργηση του Ανώτατου Εκπαιδευτικού Συμβουλίου και ιδρύεται το Κέντρο Εκπαιδευτικών Μελετών και Επιμορφώσεως (Ν. 186/1975) και το 1976 ψηφίζεται νόμος για την οργάνωση και διοίκηση της Γενικής Εκπαίδευσης. Ακόμα επαναφέρεται η διαίρεση της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο Γυμνάσιο και Λύκειο και καθιερώνονται εισαγωγικές εξετάσεις από το πρώτο στο δεύτερο. Ακόμα εισάγεται το σύστημα των μαθημάτων κορμού και επιλογής στη Β' και Γ' Λυκείου και η διαδικασία των εξετάσεων για την πρόσβαση στη τριτοβάθμια εκπαίδευση αλλάζει. Το 1977 ψηφίζεται νόμος για την οργάνωση και διοίκηση της Τεχνικής και Επαγγελματικής Εκπαιδεύσεως. Την περίοδο 1977-1980 δημοσιεύονται νέα αναλυτικά προγράμματα για τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου και τις τρεις τάξεις του Λυκείου Γενικής Κατεύθυνσης, όπου επιχειρείται μια εισαγωγή των «Νέων Μαθηματικών», ακόμα καταργείται το Διδασκαλείο Μέσης Εκπαίδευσης και ιδρύονται οι Σχολές Επιμόρφωσης Λειτουργών Μέσης Εκπαίδευσης για τους εκπαιδευτικούς. Το 1982 καταργούνται οι εισαγωγικές εξετάσεις προς το Λύκειο και ψηφίζεται ο νόμος για την επιστημονική-παιδαγωγική καθοδήγηση και τη διοίκηση στη Γενική και τη Μέση Τεχνική-Επαγγελματική Εκπαίδευση καταργώντας το θεσμό του επιθεωρητή και εισάγεται ο θεσμός του σχολικού συμβούλου. Το1983 ψηφίζεται νόμος για την εισαγωγή σπουδαστών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, εισάγεται το σύστημα των Δεσμών στη Γ' Λυκείου και αλλάζει η διαδικασία των εξετάσεων. Το 1985 δημοσιεύονται αναλυτικά προγράμματα για τη Γ' Λυκείου, που αναφέρονται οι στόχοι του μαθήματος των Μαθηματικών και για το Λύκειο:

> «…Να εμπεδώσει και διευρύνει σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο. Να μυήσει και να εξοικειώσει το μαθητή στη μέθοδο της μαθηματικής αποδείξεως και να του αναπτύξει «μαθηματική σκέψη». Να ασκήσει το μαθητή ώστε να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή πρακτική. Να φέρει το μαθητή σε επαφή με ποικίλα θέματα εφαρμογών των μαθηματικών που συνδέονται με τις άλλες Επιστήμες και τη σύγχρονη πραγματικότητα…»(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1985).

Ψηφίζεται ο νόμος (Ν. 1566/1985) για τη δομή και τη λειτουργία της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και καταργείται το Κέντρο Εκπαιδευτικών Μελετών και Επιμόρφωσης και επανιδρύεται το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ακόμα ιδρύονται τα

Περιφερειακά Επιμορφωτικά Κέντρα και τα Ενιαία Πολυκλαδικά Λύκεια στα όποια διαφοροποιείται η διδασκαλία των Μαθηματικών. Την περίοδο αυτή εκδίδονται τα επόμενα διδακτικά βιβλία:

1. Χ. Παπανικολάου: Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ' Γυμνασίου και Δ', Ε' και ΣΤ' Γυμνασίου Θεωρητικής Κατευθύνσεως. 1975 (από το 1979 χρησιμοποιείται μόνο στη Β' Λυκείου)

Το βιβλίο αυτό πρωτοεκδόθηκε το 1975 και περιείχε σε 400 σελίδες την παραδοσιακή ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με σκοπό να διδαχθεί στη Γ' τάξη και στα τμήματα Θεωρητικής Κατεύθυνσης των Δ', Ε' και ΣΤ' τάξεων του εξατάξιου Γυμνασίου. Ύστερα από περιορισμούς της ύλης που οφείλονται σε αλλαγές του εκπαιδευτικού και εξεταστικού συστήματος, «μετασχηματίστηκε» σε βιβλίο της Β' Λυκείου με 100 σελίδες. Χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1985.

2. Γ. Βαβάλιαρου, Ε. Δαμίγου και Ν. Κουσέρα: Ευκλείδειος Γεωμετρία (ασκήσεις) 1983

Αυτό το βιβλίο χρησιμοποιήθηκε ως συνοδευτικό βιβλίο ασκήσεων του προηγουμένου (από το οποίο είχαν αφαιρεθεί ακόμα οι ασκήσεις), από το 1983 ως το 1985.

3. Σ. Κανέλλου: Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ',Ε' και ΣΤ' Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως. 1975

Χρησιμοποιήθηκε από το 1975 ως το 1978 στη Θετική Κατεύθυνση των Δ', Ε' και ΣΤ' τάξεων του εξατάξιου Γυμνασίου και αποτέλεσε τη συνέχεια του βιβλίου του Χ. Παπανικολάου που διδάσκονται στην Γ' Γυμνασίου.

4. Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Σκιαδά: Θεωρητική Γεωμετρία. Τεύχος 1^{ο}, Γ' Γυμνασίου. 1977

Το βιβλίο αυτό πρωτοεκδόθηκε το 1977 για την Γ' Γυμνασίου (αντικαθιστώντας το βιβλίο του Χ. Παπανικολάου) και μετά το διαχωρισμό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε Γυμνάσιο και Λύκειο αποτέλεσε βιβλίο της Α' Λυκείου. Χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1989.

5. Γ. Τσάγκα: Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας Γ' Λυκείου. Ύλη Επιλογής. 1979
6. Γ. Βαβάλιαρου, κ.α.: Ευκλείδειος Γεωμετρία Β' Λυκείου. Ασκήσεις και λύσεις των ασκήσεων. 1983 (συνοδεύει το βιβλίο του Χ. Παπανικολάου).
7. Ν. Βαρουχάκης, κ.α.: Μαθηματικά Ι Γ' Λυκείου. Αναλυτική Γεωμετρία (1^{ης} Δέσμης). 1983
8. Ν. Βαρουχάκης, Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Αλιμπινίση και Δ. Κοντογιάννη: Θεωρητική Γεωμετρία Β' Λυκείου. 1986

Εκδόθηκε το 1986 για να αντικαταστήσει το βιβλίο του Χ. Παπανικολάου στη Β' Λυκείου και αποτέλεσε τη συνέχεια του βιβλίου των Δ. Παπαμιχαήλ- Α. Σκιαδά της Α' Λυκείου. Ενώ όμως στο βιβλίο των Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Σκιαδά, η ανάπτυξη της θεωρίας στηρίζονταν στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, το νέο βιβλίο υιοθετούσε στοιχεία της αξιωματικής θεμελίωσης του Pogorelov, που αναφέραμε παραπάνω, και χρησιμοποιούσε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (που δεν είχαν διδαχθεί σε προηγούμενη τάξη). Χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1990.

Την περίοδο **1986-1997** δημοσιεύονται νέα αναλυτικά προγράμματα για το Γυμνάσιο και το Λύκειο με τα οποία γίνεται προσπάθεια να αποδεσμευτούν από τα «Νέα Μαθηματικά». Δεν μεταβάλλεται η διαδικασία των εξετάσεων για εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το 1995 ψηφίζεται ο νόμος για την ίδρυση του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας (Ν. 2327/1995) και δημοσιεύεται νέο αναλυτικό πρόγραμμα για την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Τα διδακτικά βιβλία της περιόδου αυτής είναι τα εξής:

1. Α. Αλιμπινίσης, Γ. Δημάκος, Θ. Εξαρχάκος, Δ. Κοντογιάννης και Γ. Τασσόπουλος: Γεωμετρία Α' Λυκείου. 1990

Εκδόθηκε το 1990, αντικαθιστώντας το βιβλίο των Δ. Παπαμιχαήλ- Α. Σκιαδά και χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1999 στην Α' Λυκείου. Βασική καινοτομία αποτελεί η χρήση του αξιωματικού συστήματος του Pogorelov και η μεταφορά της διδασκαλίας της ομοιότητας, πριν από τη διδασκαλία του κύκλου, στην Α' Λυκείου.

2. Α. Αλιμπινίσης, Γ. Δημάκος, Π. Δρακόπουλος, Α. Κυριαζής και Γ. Τασσόπουλος: Θεωρητική Γεωμετρία Β' Λυκείου.1991

Εκδόθηκε το 1991, αντικαθιστώντας το βιβλίο των Ν. Βαρουχάκη κ.α. και χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1999 στη Β' Λυκείου. Αυτό, και το προηγούμενο παρουσίασαν, για πρώτη φορά μετά το 1975, μια συνολική και ενιαία αντίληψη του μαθήματος της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα.

Από το **1997 έως σήμερα** τα σχολικά Μαθηματικά υφίστανται σημαντικές αλλαγές στο πλαίσιο μιας νέας εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης. Το 1997 ψηφίστηκαν νόμοι (Ν. 2525/1997) για το Ενιαίο Λύκειο, πρόσβασης των αποφοίτων του στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση και αξιολόγησης του εκπαιδευτικού έργου και ακόμα καθιερώθηκε ο θεσμός του Εθνικού απολυτηρίου και αλλάζει η διαδικασία των εξετάσεων για πρόσβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στο συγκεκριμένο νόμο αναφέρονται και οι στόχοι για το Ενιαίο Λύκειο:

> «…(α) Η παροχή γενικής παιδείας υψηλού επιπέδου, (β) η ανάπτυξη ικανοτήτων, της πρωτοβουλίας, της δημιουργικότητας και της κριτικής σκέψης των μαθητών, (γ) η προσφορά στους μαθητές των απαραίτητων γνώσεων και εφοδίων για τη συνέχιση των σπουδών τους στην επόμενη εκπαιδευτική βαθμίδα, (δ) η καλλιέργεια στους μαθητές δεξιοτήτων που θα τους διευκολύνουν την πρόσβαση, ύστερα από περαιτέρω εξειδίκευση ή κατάρτιση, στην αγορά εργασίας…»(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1998).

Επιπλέον από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο καταρτίζεται το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.) με το οποίο προσδιορίζονται οι στόχοι της διδασκαλίας από το Δημοτικό μέχρι και το Λύκειο και προδιαγράφονται τα πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύσσονται τα αναλυτικά προγράμματα. Ψηφίζονται ο νόμος (Ν. 2649/1998) για τη δευτεροβάθμια τεχνική-επαγγελματική εκπαίδευση και για την οργάνωση των περιφερειακών υπηρεσιών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Το 1998 προκηρύσσεται διαγωνισμός για τη συγγραφή βιβλίων Ευκλείδειας Γεωμετρίας για την Α' και Β' Λυκείου και Μαθηματικών για την Α' Γυμνασίου. Το 1999 δημοσιεύεται το νέο αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών που είχε εισηγηθεί το 1998 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Την περίοδο αυτή εκδίδονται, κατά χρονολογική περίοδο τα εξής διδακτικά βιβλία:

1. Γ. Θωμαΐδης, κ.α.: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. 1999
2. Γ. Θωμαΐδης, κ.α.: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. Βιβλίο του Καθηγητή. 1999
3. Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. 2001
4. Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. Βιβλίο του Καθηγητή. 2001

Το προηγούμενο «ιστορικό περίγραμμα», παρά το γεγονός ότι αφορά το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της περιόδου 1950-2000, και δεν αποτελεί την πλήρη βιβλιογραφική καταγραφή, δείχνει το εύρος των ερευνητικών προσεγγίσεων της πρόσφατης ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Άλλωστε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, από το 1974 έως το 2001 εκδόθηκαν 14 σχολικά βιβλία, σε αντίθεση με τα προηγούμενα χρόνια που είχαμε 7 μόνο βιβλία. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα τελευταία χρόνια υπήρξε έντονο ενδιαφέρον για τη συγγραφή και τη βελτίωση των σχολικών βιβλίων (Θωμαΐδης, 1996, σελ.75-76, Καστάνης & Θωμαΐδης, 2003, σελ.130-136).

2.2 Χαρακτηριστικές όψεις των διδακτικών βιβλίων Ευκλείδειας Γεωμετρία την περίοδο 1950-2000

Τα βιβλία που αναφέρθηκαν παραπάνω παρουσιάζουν αρκετές διαφορές μεταξύ τους όχι μόνο ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο αλλά και ως προς τη προσέγγιση της μαθηματικής γνώση. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μεσα από μια προσεκτική ανάγνωση των εισαγωγών ορισμένων βιβλίων κάθε εποχής διακρίνονται όψεις των αντίστοιχων κοινωνικών και πολιτικών αντιλήψεων. Βέβαια στην παρούσα εργασία

δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τις πολιτικοκοινωνικές αντιλήψεις της εκάστοτε περιόδου. Παραθέτουμε τέσσερα εισαγωγικά σημειώματα από τα βιβλία Γεωμετρίας, του Ν. Νικολάου (1953), του Ι. Ιωαννίδη (1968), Χ. Παπανικολάου (1975) και Η. Αργυρόπουλου κ.α. (2001), που υπάρχουν στην αρχή των σχολικών βιβλίων.

- Ν. Νικολάου, Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. Εν Αθήναις, Ο.Ε.Σ.Β. 1953

«Ποίαι ανάγκαι εγέννησαν την Γεωμετρία. Αφ' ότου οι άνθρωποι ησθάνθησαν την ανάγκην οικοδομημάτων χάριν ανετωτέρας διαμονής, αφ' ότου το αίσθημα της ιδιοκτησίας εδημιούργησε την ανάγκην οριοθεσίας, μετρήσεως και διαιρέσεως, η δημιουργία Γεωμετρίας κατέστη αναγκαία και αναπόφευκτος, τουλάχιστον υπό την πρωτόγονον και εντελώς πρακτικήν μορφήν.

Πληροφορίαι από την απωτάτην αρχαιότητα ενισχύουσι την άποψιν ταύτην. Ούτως ο Ηρόδοτος ($5^{ος}$ π.Χ. αιών.) αναφέρει τα εξής.

Οσάκις ο Νείλος εκάλυπτε μέρος των αγρών των Αιγυπτίων, ο Βασιλεύς απέστελλε τους μετρητάς, δια να κανονίζωσι τον πληρωτέον φόρον αναλόγως προς την υπολειφθείσαν έκτασιν του αγρού εκάστου. Κατ' άλλας μαρτυρίας οι μετρηταί ησχολούντο να ορίζωσιν εκ νέου τα όρια των αγρών των Αιγυπτίων μετά την αποχώρησιν των υδάτων του Νείλου.

Από την ανάγκη αυτήν, καθ' οιανδήποτε εκδοχήν εξεπήδησαν αι πρώται πρακτικαί γνώσεις της Γεωμετρίας.

Παρεμφερείς γνώσεις φαίνεται ότι είχον και οι Χαλδαίοι, ως αποδεικνύουσι τα σχέδια των ανασκαπτόμενων οικοδομημάτων και πολλά κείμενα ομιλούνται περί πωλήσεως οικοπέδων.

Αι πρακτικαί αύται γνώσεις άνευ εσωτερικής συνοχής απετέλουν τέχνην μάλλον ή επιστήμην. Πρώτοι δε οι αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι και Μαθηματικοί δια της φιλοσοφικής ιδιοφυΐας των ήρχισαν την εξέτασιν των σχημάτων καθ' εαυτά και ούτω βαθμηδόν διεμόρφωσαν την Γεωμετρίαν εις Επιστήμην.» (σελ. 9)

- Ι. Ιωαννίδη, Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου Τόμος $2^{ος}$ Αθήναι, Ο.Ε.Δ.Β. 1968

«Γεωμετρικός Χώρος-Αισθητός Χώρος. Πρέπει να δεχθώμεν ότι, μέχρι του Θαλού του Μιλησίου (639-548 π.Χ.) ο ανθρώπινος νους δεν είχεν απελευθερωθή από την εκ του αισθητού εποπτείαν. Η ταιαύτη εκ του αισθητού εποπτεία απετέλει, μέχρι της εποχής του την προϋπόθεσιν και την αιτίαν της δημιουργίας της Γεωμετρίας, την οποίαν ήσκουν οι Αιγύπτιοι και οι Ανατολικοί λαοί.

Ο Θαλής δια της εισαγωγής του «Απαγωγικού συλλογισμού» και της «Υποθέσεως», μετέφερε την αναζήτησιν της αλήθειας από την περιοχήν του «αισθητού» εις την περιοχήν του «νοητού». Η υπό του Θαλού θεμελιωθείσα αποδεικτική Επιστήμη,

τίποτε το κοινόν δεν έχει με την προ αυτού Γεωμετρίαν των Ανατολικών λαών, διαφέρει αυτής και κατά το περιεχόμενον και κατά τον σκοπόν.

Αι από του τέλους του παρελθόντος αιώνος επελθούσαι βελτιώσεις και τροποποιήσεις καθ' όσον αφορά την «παρουσίασιν» της Ελληνικής Γεωμετρίας, ουδέν σχεδόν προσθέτουν εις την δημιουργίαν του Θαλού, η οποία υπήρξεν απαλλαγή της ανθρώπιης σκέψεως από της εκ του αισθητού δεσποτείας.

Η εκ του αισθητού εποπτεία αντικαθίσταται δια του Θαλού υπό της Γεωμετρικής εποπτείας, και ο αισθητός Χώρος υπό του Γεωμετρικού Χώρου. Ούτω, η ευθεία του Γεωμετρικού Χώρου δεν είναι η «ευθεία γραμμή» της οποίας «λαμβάνομεν έννοιαν» θεωρούντες ένα νήμα τεταγμλενον.

Εν πρώτοις δεν είναι υλικόν αλλά νοητόν αντικείμενον, έννοια αφηρημένη, κατασκεύασμα του νου. Ή μπορεί ακόμη να μη έχη σχέσιν με την ευθύτητα την οποίαν της αποδίδομεν, όταν ζητούμεν να την ίδωμεν. Η έννοια της ευθείας του Γεωμετρικού Χώρου θα καθορισθή από τας ιδιότητας τας οποίας ημείς θα αποδώσωμεν εις αυτήν, θα δεχθώμεν ότι έχει.

Ο Γεωμετρικός Χώρος αποτελεί νοητικόν κατασκεύασμα όλως διάφορον του αισθητού Χώρου. Η Γεωμετρική ένεκα τούτου εποπτεία προώρισται να μας οδηγήση εις αλήθειας τας οποίας ουδέποτε θα ήτο δυνατόν να γνωρίσωμεν δια της εκ του αισθητού εποπτείας.» (σελ. 5)

- Χ. Παπανικολάου, Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ' Γυμνασίου και Δ', Ε', ΣΤ' Γυμνασίου Αθήναι Ο.Ε.Δ.Β. 1975

«Ιστορικό Σημείωμα: Γεωμετρία κατά τους αρχαίους είναι η τέχνη του μετράν την Γην (το έδαφος). Ο πατήρ της Ιστορίας Ηρόδος αναφέρει ότι η Γεωμετρία εδημιουργήθη εις την Αίγυπτον την εποχήν, κατά την οποίαν ο βασιλεύς Σέσωστρις διένειμεν εις κλήρους το έδαφος της Αιγύπτου και παρέστη ανάγκη να ανευρίσκη έκαστος Αιγύπτιος τον γεωργικόν κλήρον του, μετά εκάστην πλημμύραν του Νείλου.

Παρά ταύτα η αληθής πατρίς της Γεωμετρίας είναι η αρχαία Ελλάδα, διότι οι αρχαίοι πρόγονοί μας έδωσαν μεγάλην ώθησιν εις την σπουδήν της. Ως πρώτος θεμελιωτής της γεωμετρίας θεωρείται ο Θαλής ο Μιλήσιος (ΣΤ' αιών π.Χ.), ο οποίος δια του θεωρήματος των αναλόγων τμημάτων, των περιλαμβανομένων μεταξύ παραλλήλων ευθειών, υπελόγισε το ύψος αιγυπτιακής πυραμίδος, καταπλήξας τον βασιλέα της Αιγύπτου Άμασιν. Ο Θαλής ίδρυσε εις Μίλητον την Ιωνικήν Σχολήν και επλούτισεν τας γεωμετρικάς γνώσεις.

Η σπουδή της γεωμετρίας εξακολουθεί εις την μεγάλην Ελλάδα (κάτω Ιταλίαν) όπου ο εκ Σάμου Πυθαγόρας (580-500 π.Χ.) ίδρυσεν εις τον Κρότωνα την περίφημον Σχολήν του. Κατόπιν ο Ιπποκράτης ο Χίος (450 π.Χ.) εδημοσίευσε Στοιχεία Γεωμετρίας, θεωρείται δε ως ο πρώτος γράψας βιιβλίον γεωμετρίας.

Μετά ο φιλόσοφος Πλάτων (430-347 π.Χ.) επεξέτεινε την σπουδήν της γεωμετρίας, τόσην δε σημασίαν έδωσεν εις αυτήν, ώστε εις το άνω μέρος της θύρας της ιδρυθείσης υπ' αυτού εν Αθήναις Σχολής, της «Ακαδημίας», ανέγραψε το ρητόν: «μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω». Εις τον Πλάτωνα οφείλεται η εισαγωγή της αναλυτικής μεθόδου ερεύνης και η διδασκαλία των γεωμετρικών τόπων.

Κατόπιν οι τρεις μεγάλοι αρχαίοι συγγραφείς μαθηματικών βιβλίων Ευκλείδης (330-270 π.Χ.), Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) και Απολλώνιος (260-200 π.Χ.) συνετέλεσαν κατά πολύ εις την περαιτέρω ανάπτυξιν της γεωμετρίας, ιδίως ο Ευκλείδης με τα «Στοιχεία», σύγγραμμα αποτελούμενο από 13 βιβλία. Εις τον Ευκλείδην οφείλεται η εισαγωγή της μεθόδου της εις άτοπον επαγωγής, εις δε τον Αρχιμήδην οφείλονται αι πρώται έννοιαι των ορίων.

Ώθησιν επίσης έδωσαν εις την ανάπτυξιν των γεωμετρικών γνώσεων υπήρξε βραδυτάτη μέχρι της Αναγεννήσεως. Μετά την Αναγέννησιν ήρχισεν η αλματώδης πρόοδος της γεωμετρίας. Ο Καρτέσιος (Descartes 1596-1650) με τας ορθογωνίους συντεταγμένας ενός σημείου, δημιουργεί την αναλυτικήν γεωμετρίαν, ιδιαίτερον κλάδον των μαθηματικών και παρέσχε νέας μεθόδους ερεύνης. Αι νέαι αύται μέθοδοι και η κατά τον ΙΖ' αιώνα διατύπωσις της απειροστικής αναλύσεως, συντέλεσανεις την ανάπτυξιν της γεωμετρίας και προς άλλας κατευθύνσεις. Ούτω εδημιουργήθησαν και άλλοι κλάδοι της γεωμετρίας, όπως η διαφορική γεωμετρία, η παραστατική γεωμετρία, η προβολική γεωμετρία, η γεωμετρία της θέσεως κ.λ.π.» (σελ. 11)

- Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. 2001

«<u>Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας</u>

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσής όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στη Τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς.

Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μια νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου περί το 440 π.Χ., και τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλωνίου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17^{ο} αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17^{ου} αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18^{ο} αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μόνζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες

και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17^{ου} αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μόνζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19^{ου} αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπολυαϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετριών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρη-μάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19^{ου} αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεωμετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.» (σελ. 5-6).

Τα εισαγωγικά σημειώματα που παραθέσαμε παραπάνω φαίνεται ότι είναι επηρεασμένα από τις πολιτικές πεποιθήσεις και ίσως να διακρίνονται οι κοινωνικοπολιτικές αξίες της κάθε εποχής. Παρατηρούνται βέβαια και κάποιες ασάφειες και ιστορικές ανακρίβειες.

Αν εξετάσουμε τα τρία πρώτα κείμενα από διδακτικής πλευράς, θα διαπιστώσουμε ότι δεν εξυπηρετούν κάποιο ουσιαστικό στόχο, αφού δεν γίνεται κατανοητή η μετάβαση από την Πρακτική Γεωμετρία στη Θεωρητική Γεωμετρία, δεν εισάγεται κάποιος προβληματισμός ως προς το τι είναι «Γεωμετρία» ούτε δίνεται κάποιο έναυσμα για συζήτηση μέσα στην τάξη και δεν δημιουργείται η αναγκαιότητα στους μαθητές για νέα γνώση. Στο τέταρτο σημείωμα, όμως, προηγείται μια εισαγωγή για το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπου αναφέρονται οι έννοιες χώρος, επιφάνεια, γραμμές και σημεία. Ακόμα αναφέρει στο βιβλίο των Η. Αργυρόπουλου κ.ά. αναφέρεται ότι :

«..η μελέτη των ιδιοτήτων των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιήσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δεν γενικεύονται. Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο- οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούριο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.»

Παρατηρείται επομένως πως το νέο βιβλίο, που συγγράφηκε μετά από διαγωνισμό του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, ξεκινά διαχωρίζοντας τις απαιτήσεις που αναμένονται από τους μαθητές στη Θεωρητική Γεωμετρία, από την Πρακτική του Γυμνασίου. Στην εισαγωγή αυτή γίνεται και η αναφορά της έννοιας της απόδειξης και πως η Γεωμετρία θεμελιώνει τις ασύνδετες γνώσεις. Μέσα από αυτή τη διαδικασία δίνεται αφορμή για συζήτηση στην τάξη έτσι ώστε οι μαθητές σιγά σιγά να αντιληφθούν τον παραγωγικό συλλογισμό που ακολουθεί η Γεωμετρία. Στη συνέχεια της εισαγωγής αυτής αναφέρονται και εξηγούνται η σημασία των αξιωμάτων (και ποια είναι τα αξιώματα), θεωρημάτων και πορισμάτων καθώς και «.. Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.». Φαίνεται ότι μέσα από την αναφορά αυτή δημιουργείται η ανάγκη στους μαθητές για την «ανακάλυψη της αλήθειας» πίσω από τις προτάσεις και τα θεωρήματα, να τους μυήσει στην αποδεικτική διαδικασία.

Ακόμα το τέταρτο ιστορικό σημείωμα από τη μεριά της ιστορικής αλήθειας είναι σωστό και δεν παρατηρούνται ανακρίβειες. Παρουσιάζεται και η εξέλιξη της Ανάλυσης και πως αυτή επηρέασε την εξέλιξη της Γεωμετρίας, θέλοντας να τονίσει την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, αλλά γίνεται και νύξη για διάφορους κλάδους της Γεωμετρίας που είναι πιο σύγχρονοι.

Αν εστιάσουμε στις χρονολογίες που εκδόθηκαν τα συγκεκριμένα κείμενα, 1950 (Ν. Νικολάου), 1968 (Ι. Ιωαννίδη) και 1975 (Χ. Παπανικολάου) θα διαπιστώσουμε ότι τα τρία αυτά εισαγωγικά σημειώματα είναι επηρεασμένα από το εκάστοτε πολιτικό γίγνεσθαι της εποχής και ίσως να διαφαίνονται οι κοινωνικοπολιτικές αξίες και τάσεις. Το βιβλίο του Ν. Νικολάου (1953) γράφτηκε σε μια δύσκολη εποχή για την Ελλάδα, δηλαδή μετά τον 2^{ο} Παγκόσμιο Πόλεμο και τον Εμφύλιο Πόλεμο. Η εκτενής

αναφορά που υπάρχει για την ανακατανομή της γης, τη μέτρηση μετά από καταστροφές και την ανάλογη είσπραξη φόρων στην αρχαία Αίγυπτο με την εφαρμογή της πρακτικής γεωμετρίας, ενδεχομένως να αντανακλά την καταστροφή της Ελλάδας και την ανάγκη για επανασύστασή της, την ανάπτυξή της και να ξεπεραστεί το «πρακτικό» και να υπάρξει πρόοδος προς την επιστήμη, όπως και με τους αρχαίους. Το βιβλίο του Ι. Ιωαννίδη (1968) κυκλοφόρησε στην αρχή της στρατιωτικής δικτατορίας και η προωθούμενη τότε εκπαιδευτική πολιτική είχε ως στόχο μια πατριδοκεντρική αντίληψη για το Ελληνικό έθνος και το μεγαλείο των Αρχαίων Ελλήνων και την ανάδειξή τους, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν αντίστοιχα πρότυπα και ιδεώδη. Το βιβλίο του Χ. Παπανικολάου (1975) γράφτηκε ακριβώς μετά τη μεταπολίτευση και μέσα από το ιστορικό σημείωμα φαίνεται ένα πιο «ελεύθερο πνεύμα» παραθέτοντας μια εκτενέστερη ιστορική αναδρομή και μια πιο σφαιρική εικόνα της ιστορικής εξέλιξης της γεωμετρίας (Κοντού-Μουλαγιάννη, 2012). Στο βιβλίο των Η. Αργυρόπουλου κ.α., τέλος, γράφτηκε σε μια εποχή που δεν επικρατούσε κάποιο κρίσιμο ιστορικό γεγονός στη χώρα. Η ιστορική αναφορά που καταγράφεται είναι αρκετά εμπλουτισμένη σε σχέση με αυτή του βιβλίου του Παπανικολάου και αρκετά πιο σύγχρονη και πλήρης. Δημιουργεί μέσα από αυτή την εξιστόρηση την ανάγκη για εξέλιξη και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης στους μαθητές, καθώς οι απαιτήσεις της εποχής είναι πολλές και ο τομέας των μαθητικών εξελίσσεται συνεχώς.

Από τη διδακτέα ύλη, τη θεωρία και τις ασκήσεις των παραπάνω βιβλίων συμπεραίνουμε ότι στο βιβλίο του Ν. Νικολάου (1953) δεν εμφανίζεται η θεωρία μέσω ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων, όπως συνηθίζεται τα τελευταία χρόνια και δεν ακολουθεί την αξιωματική θεμελίωση με την τυπική διαδικασία. Δηλαδή δεν παρουσιάζονται τα θεωρήματα ως λογική σειρά που προκύπτει από τους ορισμούς, τα αξιώματα και τα προηγούμενα θεωρήματα ή προτάσεις αλλά παρατίθεται ένα σύνολο από προτάσεις και ασκήσεις που αντιστοιχούν σε αυτά. Στο βιβλίο του Ι. Ιωαννίδη (1968) παρουσιάζεται αυστηρά η θεωρία μέσω των αξιωμάτων του Hilbert, γεγονός που προκάλεσε δυσκολία στους μαθητές, σύμφωνα με αναφορές που παρουσιάστηκαν παραπάνω, δεν γίνεται εμφανής η αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε σύγκριση με το εισαγωγικό σημείωμα όπου γίνεται αναφορά στο μεγαλείο της Αρχαίας Ελλάδας. Ακόμα διαφοροποιείται από το βιβλίο του Νικολάου καθώς οι προτάσεις αναφέρονται πια ως θεωρήματα και στη συνέχεια αποδεικνύονται. Στο βιβλίο του Χ. Παπανικολάου (1975) γίνεται μια αναφορά στους ορισμούς και τα αιτήματα, εξηγεί τι είναι το θεώρημα και ποια είναι η αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα δημιουργίας της ανάγκης για νέα γνώση. Τέλος στο βιβλίο των Η. Αργυρόπουλου κ.α. (2001) γίνεται, επίσης, αναφορά των ορισμών και των αιτημάτων και στη συνέχεια ακολουθεί η ανάπτυξη θεωρημάτων και πορισμάτων που προκύπτουν από αυτά καθώς και οι αποδείξεις αυτών. Το αξιωματικό σύστημα δεν είναι τόσο αυστηρό όσο αυτό του βιβλίου του Ιωαννίδη και η αποδεικτική διαδικασία είναι και αυτή λιγότερο τυπική και μάλιστα δεν γίνονται οι αποδείξεις όλων των θεωρημάτων. Ακόμα οι ασκήσεις των κεφαλαίων εμπλουτίζονται και με Ερωτήσεις Κατανόησης, όπου περιλαμβάνονται ερωτήσεις

Σωστού-Λάθους και πολλαπλής επιλογής που αποτελούν την πρώτη επαφή των μαθητών με τη νέα γνώση. Έτσι ο μαθητής μέσα από μια σταδιακή πορεία αναπτύσσει τη νέα γνώση και οι ασκήσεις είναι κλιμακωτής δυσκολίας.

Όπως αναφέραμε και τα τέσσερα βιβλία εμφανίζουν διαφορές στον τρόπο που παρουσιάζουν τα θεωρήματα και τις αποδείξεις αυτών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει στο σημείο αυτό να αναλυθούν οι αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος και από τα τέσσερα βιβλία και να παρατηρηθούν οι διαφορές τους ως προς τη διατύπωση αλλά και την αποδεικτική διαδικασία τους. Το θεώρημα που επιλέξαμε να αναλύσουμε είναι: *Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.* Επιλέξαμε να ασχοληθούμε το συγκεκριμένο θεώρημα καθώς φαίνεται ότι έχουν δοθεί αρκετές και διαφορετικές αποδείξεις αυτού, αλλά έχει σχολιαστεί και από πανεπιστημιακούς ως προς τον τρόπο παρουσίασής του όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω.

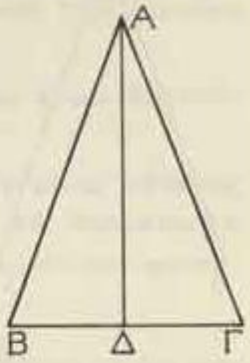
- Ν. Νικολάου, Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. Εν Αθήναις, Ο.Ε.Σ.Β. 1953 (σελ. 63)

§ 80. Νὰ συγκριθῶσιν αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 54).

Ἂν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουσιν ΑΒ = ΑΓ καὶ ΒΔ = ΔΓ καὶ τὴν ΑΔ κοινήν. Εἶναι ἄρα (§ 77) ταῦτα ἴσα καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. **Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.**



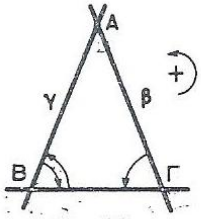
Σχ. 54

- Ι. Ιωαννίδη, Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου Τόμος 2ος Αθήναι, Ο.Ε.Δ.Β. 1968 (σελ.49)

90. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἤτοι: $\beta = \gamma \Leftrightarrow (ΒΓ, ΒΑ) = (ΓΑ, ΓΒ)$. Ἐθέσαμεν $ΑΒ = \gamma$, $ΑΓ = \beta$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\beta = \gamma$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ (Σχ. 90) ἔχομεν: $\gamma = \beta$, $\beta = \gamma$ καὶ $(ΑΒ, ΑΓ) = -(ΑΓ, ΑΒ)$. Ἑπομένως θὰ εἶναι (79): $(ΒΓ, ΒΑ) = -(ΓΒ, ΓΑ)$, ἤτοι $(ΒΓ, ΒΑ) = (ΓΑ, ΓΒ)$. Ἀντιστρόφως: ἔστω $(ΒΓ, ΒΑ) = (ΓΑ, ΓΒ)$.



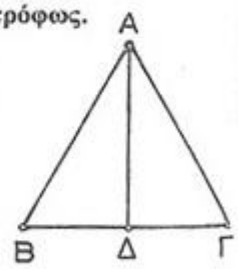
Σχ. 90

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ ἔχομεν $ΒΓ = ΓΒ$, $(ΒΓ, ΒΑ) = -(ΓΒ, ΓΑ)$ καὶ $(ΓΑ, ΓΒ) = -(ΒΓ, ΒΑ)$. Ἑπομένως θὰ εἶναι (80) $\beta = \gamma$.

- Χ. Παπανικολάου, Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ' Γυμνασίου και Δ', Ε', ΣΤ' Γυμνασίου Αθήναι Ο.Ε.Δ.Β. 1975 (σελ. 70)

111. Θεώρημα. Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΑΒ = ΑΓ, τότε αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ (σχ. 115). Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΑΓ, ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, ἑπομένως ὑπάρχει συμμετρία ὡς πρὸς τὴν ΑΔ. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των.



Σχ 115

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Συγκρίνομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν τὴν ΑΔ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας των $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ, ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

- Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. 2001 (σελ. 37)

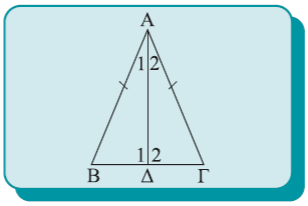
ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ (σχ.12).
Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12

Στο βιβλίο του Ν. Νικολάου η διατύπωση του θεωρήματος δεν διατυπώνεται ως πρόταση, αλλά σαν μια μορφή άσκησης. Ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν τις γωνίες της βάσης καθώς και να διαπιστωθεί ποια είναι η σχέση τους και όχι ότι είναι ίσες. Ένα θεώρημα σημαντικό που στα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτελούσε πρόταση στο συγκεκριμένο βιβλίο παρουσιάζεται ως άσκηση. Η διαδικασία της

απόδειξης είναι φέρνοντας τη διάμεσο του τριγώνου να γίνει σύγκριση τριγώνων που σχηματίζονται από τη διάμεσο. Στο τέλος της απόδειξης καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Στο βιβλίο του Ι. Ιωαννίδη, όπως αναφερθήκαμε και αρκετές φορές παραπάνω η αξιωματική θεμελίωση είναι πολύ πιο αυστηρή. Αρχικά αναφέρεται ποια ως θεώρημα σε αντίθεση με το βιβλίο του Νικολάου που είχε τη μορφή άσκησης και διατυπώνεται. Στη συνέχεια αναγράφεται η σχέση που ζητείται να αποδειχθεί και με σύμβολα πέρα από την αρχική γλωσσική διατύπωση. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να πούμε ότι αυτός ο τρόπος μας θυμίζει τον τρόπο που χρησιμοποιούσαν και οι αρχαίοι Έλληνες στις αποδείξεις τους κατά την Έκθεση (οι αποδείξεις των αρχαίων Ελλήνων όπως αναφέρονται και στα Στοιχεία είχαν τη μορφή: Διατύπωση, Έκθεση, Κατασκευή και Απόδειξη). Στη συνέχεια προχωρεί στην απόδειξη του θεωρήματος. Η απόδειξη που ακολουθεί είναι τελείως διαφορετική με αυτή στο βιβλίο του Νικολάου, γίνεται σύγκριση τριγώνου, με τον εαυτό του, όπου ορίζεται θετική φορά η αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού και για αυτό το λόγο εμφανίζεται στις ισότητες των γωνιών και το σύμβολο του πλην για να δείξει την αντίθετη φορά. Ακόμα παρατηρείται διαφορετικός συμβολισμός στις γωνίες όπου φαίνονται οι πλευρές που τις περικλείουν π.χ. (ΑΒ,ΑΓ) αναφέρεται για την γωνία Α ($\hat{A}$).

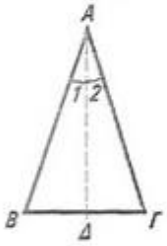
Στο βιβλίο του Χ. Παπανικολάου έχουμε αρχικά τη διατύπωση του θεωρήματος. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι διαφορετική, στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν φέρνει τη διάμεσο, αλλά την κάθετη από το Α στην πλευρά ΒΓ και χρησιμοποιεί την ιδιότητα της μεσοκαθέτου για να καταλήξει στη συμμετρία ως προς την ΑΔ και επομένως οι γωνίες είναι ίσες ως αποτέλεσμα της συμμετρίας αυτής. Βέβαια για την απόδειξη του αντιστρόφου χρησιμοποιεί τη σύγκριση των τριγώνων. Και σε αυτή την απόδειξη παρατηρείται ο συμβολισμός της γωνίας σε σχέση με τις πλευρές που την περιέχουν όπως είδαμε και στην απόδειξη του Ιωαννίδη. Το γεγονός ότι χρησιμοποιεί τη συμμετρία για την απόδειξη του θεωρήματος την ξεχωρίζει από όλες τις προηγούμενες.

Στο βιβλίο των Η. Αργυρόπουλου κ.α το θεώρημα αυτό εμφανίζεται ως πόρισμα του κριτηρίου ισότητας των τριγώνων (ΠΓΠ*) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα*. Η απόδειξη του πορίσματος γίνεται με τη βοήθεια της διχοτόμου σε αντίθεση με τις προηγούμενες που χρησιμοποιούσαν τη διάμεσο και την κάθετη. Βέβαια είναι πολύ σύντομη και με πιο απλό συμβολισμό όπως χωρίς τη χρήση του συμβόλου πλην που θέλει να δείξει την αντίθετη φορά του σχήματος από την αρχική υπόθεσή του. Στηρίζεται η απόδειξη στο κριτήριο ισότητας τριγώνων καθώς και ο συμβολισμός του είναι (ΠΓΠ) που χρησιμοποιείται από τους μαθητές στη Γεωμετρία του Γυμνασίου.

Παραθέτουμε ακόμα τις αποδείξεις που υπάρχουν στα βιβλία των Δ. Παπαμιχαήλ και Α. Σκιαδά (1977) καθώς και των Α. Αλιμπινίση κ.α. (1991)

- Δ. Παπαμιχαήλ- Α. Σκιαδά: Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου. 1986

ΘΕΩΡΗΜΑ : Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλ.. $\beta = \gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.



Απόδ. Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Αν φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ, έχουμε τριγΑΒΔ = τριγΑΓΔ (γιατί ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) και άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την πρόταση αυτή έχουμε αμέσως τα πορίσματα :

— **Στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες που πρόσκειται στη βάση του είναι ίσες.**

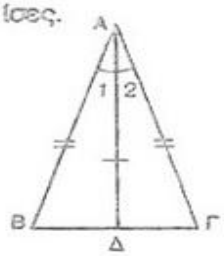
— **Σε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες του είναι ίσες.**

- Α. Αλιμπινίσης , Γ. Δημάκος, Θ. Εξαρχάκος, Δ. Κοντογιάννης, Γ. Τασσόπουλος: Θεωρητική Γεωμετρία Α' Ενιαίου Λυκείου. 1990

Θεώρημα 11

Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). (σχ. 27). Θεωρούμε τη διχοτόμο ΑΔ αυτού. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι ίσα, διότι ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ (κοινή πλευρά) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.



σχ. 27

Στην απόδειξη που υπάρχει στο βιβλίο των Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Σκιαδά, η διατύπωση του θεωρήματος γίνεται με μαθηματικούς συμβολισμούς και όχι μόνο λεκτικά όπως ήταν στα προηγούμενα βιβλία. Η διατύπωση αυτή με περισσότερους μαθηματικούς συμβολισμούς που χρησιμοποιείται είναι πιο εύκολη στους μαθητές που είναι συνηθισμένοι να γράφουν χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα απ' ότι λεκτικά. Η απόδειξη που παρουσιάζεται είναι στην ίδια μορφή με αυτή του Νικολάου, μόνο που φέρνει τη διχοτόμο από τη γωνία Α και όχι τη διάμεσο, ΑΔ. Εδώ ο συμβολισμός είναι διαφορετικός από αυτόν που εμφανίζεται στο βιβλίο του Ιωαννίδη όχι μόνο για τις γωνίες αλλά και των τριγώνων, δηλαδή συμβολίζονται ως τριγΑΒΔ. Μετά το τέλος της απόδειξης δίνονται και δύο πορίσματα που προκύπτουν από το θεώρημα αυτό. Η απόδειξη του θεωρήματος στο βιβλίο των Α. Αλιμπινίση κ.α. είναι ίδια σχεδόν με

αυτή που υπάρχει στο βιβλίο των Η. Αργυρόπουλου κ.α. χωρίς τη συντομογραφία του κριτηρίου της ισότητας των τριγώνων (ΠΓΠ).

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω τα τέσσερα σχολικά βιβλία παρουσιάζουν διαφορές ως προς τη διατύπωση, τη βοηθητική γραμμή που χρησιμοποιείται βασικό θεώρημα με το οποίο αποδεικνύεται, τον συμβολισμό και το επίπεδο της αυστηρότητας. Συγκεκριμένα σε όλα τα βιβλία εμφανίζεται ως θεώρημα εκτός του Νικολάου που διατυπώνεται ως άσκηση και στο τέλος ως κάποια μορφή πρότασης. Για τις αποδείξεις χρησιμοποιούνται αρκετές βοηθητικές γραμμές, στο βιβλίο του Νικολάου έχουμε τη διάμεσο, στου Παπανικολάου την κάθετη και των Παπαμιχαήλ & Σκιαδά, Αλιμπινίση κ.α. καθώς και στο Αργυρόπουλος κ.α. τη διχοτόμο. Σε όλα αυτά χρησιμοποιείται ως βοηθητικό θεώρημα το κριτήριο σύγκρισης τριγώνου και η βοηθητική γραμμή που φέρνουν συμβάλλει σε αυτή τη διαδικασία, εκτός από του Παπανικολάου που στόχο έχει να αποδειχθεί το ζητούμενο μέσω του θεωρήματος της συμμετρίας και όχι της σύγκρισης τριγώνου. Βέβαια σε καμία από τις παραπάνω αποδείξεις δεν αποδεικνύει πως η διάμεσο, η διχοτόμο ή η κάθετη από την κορυφή ενός τριγώνου είναι σίγουρο ότι τέμνεις την απέναντι πλευρά. Στην απόδειξη του Ιωαννίδη δεν χρησιμοποιείται καμία βοηθητική γραμμή για την απόδειξη με τη βοήθεια της σύγκρισης τριγώνου. Με τον τρόπο αυτό η συγκεκριμένη απόδειξη γίνεται πιο αυστηρή χωρίς να δημιουργεί αμφιβολίες ως προς την εγκυρότητά της. Επιπλέον όπως αναφέρθηκε παρουσιάζεται και πιο αυστηρός συμβολισμός, όχι μόνο ως προς τη μορφή των γωνιών ή του πλην που εμφανίζεται και στην απόδειξη του Παπανικολάου, αλλά και το γεγονός ότι υπάρχει προσανατολισμός που δείχνει τη φορά του πράγμα που δεν υπάρχει στου Παπανικολάου. Άρα η απόδειξη στο βιβλίο του Ιωαννίδη είναι θεμελιωμένη αυστηρά. Σχετικά με τους συμβολισμούς τα βιβλία των Αλιμπινίση κ.ά. και Αργυρόπουλου κ.ά. έχουν πιο εύκολο συμβολισμό με πιο σύντομες αποδείξεις και πιο εύκολο τρόπο απόδειξης χωρίς να χρειάζεται να είναι αυστηρές ως προς την παρουσίασή τους (δεν αποδεικνύεται ότι η διχοτόμος τέμνεις την απέναντι πλευρά) οπότε η αξιωματική θεμελίωση των βιβλίων αυτών φαίνεται να είναι λιγότερο αυστηρή.

Το 1977 ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Πατρών Ν. Αρτεμιάδης έδωσε μια σειρά ομιλιών σε θέματα Στοιχειώδους Γεωμετρίας στα πλαίσια αυτά σχολίασε και την απόδειξη του θεωρήματος: *Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες*. Θεωρούσε πως η απόδειξη που χρησιμοποιούνταν στην αρχαιότητα, δηλαδή αυτή που παραθέτει στο βιβλίο του ο Ιωαννίδης για το συγκεκριμένο θεώρημα ήταν πολύ καλή σε σχέση με αυτή που χρησιμοποιήθηκε αργότερα, δηλαδή αυτής με τη χρήση της διχοτόμου που χρησιμοποιείται στα βιβλία τα τελευταία χρόνια η οποία είναι αρκετά περίπλοκη και μια από τις χειρότερες αποδείξεις κατά τη γνώμη του (σελ. 48-49). Η δυσκολία εμφανίζεται στο γεγονός ότι διχοτομείται η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και έστω Δ το σημείο που τέμνει η διχοτόμος τη βάση του τριγώνου. Στο σημείο αυτό εντοπίζεται η αυθαιρεσία καθώς δεν έχει δειχθεί ότι η διχοτόμος τέμνει τη βάση και πως για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να αποδειχθεί το θεώρημα: *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Εάν το σημείο Δ ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας* $B\hat{A}\Gamma$*, τότε* $\overline{A\Delta} \cap \overline{B\Gamma} \neq \emptyset$. Το

θεώρημα αυτό βέβαια απουσιάζει από τα σχολικά βιβλία. Στη συνέχεια βέβαια δίνει έναν τρόπο απόδειξης του θεωρήματος, σύμφωνα με αυτή του Πάππου όπου δεν χρειάζεται να γίνει χρήση του παραπάνω θεωρήματος που παραλείπεται έτσι και αλλιώς από τα βιβλία (Αρτεμιάδης, 1977, σελ. 61-62).

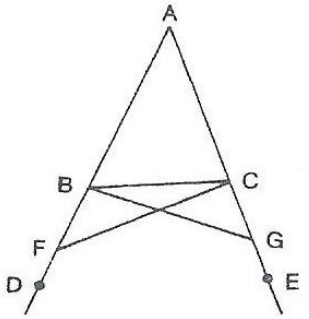
Θεώρημα 38. Δίνεται τό ΔABC. Ἐάν $AB \simeq AC \Rightarrow \angle B \simeq \angle C$ (Οἱ παρά τήν βάση γωνίες ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμες).

Ἀπόδειξη. (βλ. Κεφ. 3, § 3,3. Σημείωση πού ἀκολουθεῖ τό Θεώρ. 23).

Θεωροῦμε τήν 1:1 ἀντιστοιχία $ABC \longleftrightarrow ACB$. Ὡς πρός τήν ἀντιστοιχία αὐτή ἔχουμε $\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{AC}$, $\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{AB}$, $\angle A \longleftrightarrow \angle A$. Ἀπ' τό ΠΓΠ $\Rightarrow \Delta ABC \simeq \Delta ACB$. Ἀπ' τόν ὁρισμό τῆς ἰσοδυναμίας $\Rightarrow \angle B \simeq \angle C$ ■

Τό Θεωρ. 38 εἶναι τό περίφημο θεώρημα πού φέρει τήν ὀνομασία: pons asinorum (γέφυρα τῶν γαϊδάρων).

Ἡ ὀνομασία αὐτή ὀφείλεται στό παρακάτω σχῆμα πού βρίσκεται στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ πού ἔδωσε ὁ Εὐκλείδης καί ἡ ὁποία εἶναι μακροσκελής (παραπάνω ἀπό μιά τυπωμένη σελίδα).



Ἡ ἀπόδειξη πού δόθηκε παραπάνω οὐσιαστικά ὀφείλεται στό Πάππο, μολονότι ὁ Πάππος δέν διατύπωσε οὔτε μεταχειρίσθηκε τά ἀξιώματα ἰσοδυναμίας πού χρησιμοποιήθηκαν ἐδῶ. Τί ὅμως συνέβη; Ὄχι πρίν ἀπό πολλά χρόνια ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής εἶχε προγραμματισθεῖ γιά νά ἐξετάσει ἀποδείξεις θεωρημάτων τῆς γεωμετρίας. Ὅταν ὁ ὑπολογιστής τροφοδοτήθηκε μέ τό Θεώρημα-Pons asimorum ἔδωσε ὡς (καλύτερη) ἀπάντηση τήν ἀπόδειξη τοῦ Πάππου. Αὐτό λέγεται ὅτι ἐξέπληξε τούς προγραμματιστές. Ἡ ἐξήγηση πού δόθηκε γιά τήν ἀντίδραση αὐτή τοῦ ὑπολογιστή ἦταν

Μιά τό ἀξίωμα ΠΓΠ εἶχε ἤδη εἰσαχθεῖ στόν ὑπολογιστή ὑπό τή μορφή:

(1) A,B,C σημεῖα μή κείμενα ἐπ'εὐθείας
(2) D,E,F " " " " "
(3) $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$
(4) $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$
(5) $\angle ABC \simeq \angle DEF$

$\Rightarrow \overline{AC} \simeq \overline{DF}$

Συμπέρασμα. Κάθε ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι ἰσογώνιο.

Θεώρημα 39. (ΓΠΓ) (Γωνία-Πλευρά-Γωνία).

Δίνονται τά τρίγωνα ΔABC, ΔDEF καί ἡ 1:1 ἀντιστοιχία $ABC \longleftrightarrow DEF$. Ἐάν $\angle A \simeq \angle D$, $\angle C \simeq \angle F$, $\overline{AC} \simeq \overline{DF} \Rightarrow \Delta ABC \simeq \Delta DEF$.

Ἀπόδειξη

(1) Ἀπό τό Θεώρ. I-2 $\Rightarrow \exists B' \in \overrightarrow{DE}$ ἔτσι ὥστε $\overline{DB'} \simeq \overline{AB}$
(2) Ἀπ' τό ΠΓΠ $\Rightarrow \Delta ABC \simeq \Delta DB'F$.
(3) Ἄρα $\angle DFB \simeq \angle ACB$.
(4) Ἀπ'τό Θεώρ. 33 $\Rightarrow \overline{FB'} = \overline{FE}$.
(5) Ἄρα $B' = E$
(6) Ἀπ'τό (3) $\Rightarrow \Delta ABC \simeq \Delta DEF$ ∎

Συμπέρασμα (α) Ἄν δύο γωνίες ἑνός τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμες τότε οἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευρές εἶναι ἰσοδύναμες (b) Κάθε ἰσογώνιο τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο.

Παρατηρώντας την απόδειξη του θεωρήματος από τον Αρτεμιάδη συμπεραίνουμε πως η απόδειξή του είναι απόλυτα αυστηρή ως προς την θεμελίωσή της και δεν χρησιμοποιεί αυθαίρετες παραδοχές με βάση την εποπτεία του σχήματος. Όπως αναφέρεται και παραπάνω η απόδειξη αυτή είναι εκείνη του Πάππου και αυτή που εμφανίζεται και στο βιβλίου του Ιωαννίδη. Ο Αρτεμιάδης ως πανεπιστημιακός παρουσιάζει την απόδειξη πιο σύντομη αλλά χωρίς να χάσει την αυστηρότητά της και χωρίς να χρειαστεί να παραθέσει το επιπλέον θεώρημα για να αποδείξει ότι η διχοτόμος και η διάμεσος τέμνει την απέναντι πλευρά του τριγώνου που για να είναι η απόδειξη ολοκληρωμένη και χωρίς να δημιουργεί αμφιβολίες για την εγκυρότητάς της όπως χρειάζονται οι αποδείξεις των Νικολάου, Παπαμιχαήλ & Σκιαδά, Αλιμπινίση κ.ά., Αργυρόπουλος κ.ά.

Ανακεφαλαιώνοντας όλα τα παραπάνω που προηγήθηκαν στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρατηρούμε τον μεγάλο αριθμό βιβλίων Θεωρητικής Γεωμετρίας που είναι εντονότερο τη χρονική περίοδο 1975-2000 (14 βιβλία) σε αντίθεση με αυτή της 1950-1975 (7 βιβλία). Η συγγραφή τόσων πολλών βιβλίων είχε ως στόχο να βελτιώσουν την αυστηρή θεμελίωση του μαθήματος και να γίνουν πιο προσιτά στους μαθητές με λιγότερους ορισμούς και αξιώματα, υιοθετώντας περισσότερες αλγεβρικές μεθόδους. Όμως από τη σύγκριση των βιβλίων παραπάνω διαπιστώνεται ότι δεν δίνεται έμφαση στο τρόπο διδασκαλίας των μαθητών καθώς τα εισαγωγικά σημειώματα είναι ελλιπής χωρίς να δημιουργούν την ανάγκη της ανακάλυψης στους μαθητές. Σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία έγινε προσπάθεια να εμφανίζονται απλούστερες αλλά με την εμφάνιση αυθαιρεσιών ως προς τη μαθηματική εγκυρότητα. Οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν και η διατύπωση επίσης, όμως τα προβλήματα στην κατανόησή τους από τους μαθητές παρέμειναν με αποτέλεσμα να αδυνατούν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του μαθήματος όπως εμφανίζεται από έρευνες στο επόμενο κεφάλαιο πιο αναλυτικά.

Κεφάλαιο 3ο

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που συνδέονται με κύριους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο

3.1 Η αξιωματική θεμελίωση της σχολικής Γεωμετρίας ως διδακτικό πρόβλημα

Σύμφωνα με τους στόχους του Π.Ι. που αναφέραμε και στην 2.1 υποενότητα προηγουμένως, σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, αναφέρει ότι τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, την επιμονή τη δημιουργία φαντασίας, την πειθαρχημένη σκέψη και το κριτικό πνεύμα. Μέσω των μαθηματικών συλλαμβάνονται οι έννοιες των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους για την επίλυση προβλημάτων στην πραγματική ζωή. Αυτοί οι στόχοι μπορούν να επιτευχθούν μέσω της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που ο μαθητής εισάγεται στην αποδεικτική διαδικασία και την αξιωματική θεμελίωση ακολουθώντας λογική σειρά για να καταλήξει σε συμπεράσματα.

Η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας είχε ξεκινήσει από την Αρχαία Ελλάδα περίπου το 300 π.Χ. με τη συγγραφή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, αποτελώντας το πρώτο παράδειγμα πλήρους θεωρητικοποίησης ενός σώματος γνώσεων. Στη Γεωμετρία έπαιζε σημαντικό ρόλο η διαίσθηση, αλλά υπήρχε μια τάση περιορισμού της. Με την εμφάνιση των διαφορετικών γεωμετριών τον 19ο αιώνα και εξαιτίας του γεγονότος ότι η χωρική διαίσθηση προκαλούσε δυσπιστία, έγινε εμφανής η αναγκαιότητα να στηριχθεί η γεωμετρία σε ένα αυστηρά θεμελιωμένο λογικό σύστημα. Προκειμένου να διορθωθούν οι ατέλειες αυτές που υπήρχαν, οδηγηθήκαμε στην αξιωματική παρουσίαση της θεωρίας και με τον τρόπο αυτό ξεκίνησε η αξιωματικοποίηση των επιστημών.

Με τον όρο «αξιωματική μέθοδο» εννοούμε τη θεμελίωση μιας θεωρίας πάνω στα αξιώματα από τα οποία συνεπάγεται, μέσω μιας αυστηρής σειράς. Η αξιωματική θεμελίωση προέρχεται από την ανάγκη να αποδειχθούν όλες οι προτάσεις μιας θεωρίας, που για την απόδειξή τους στηρίζονται στις αποδείξεις άλλων προτάσεων και αυτό συνεχίζεται. Επειδή υπάρχει αυτό το αδιέξοδο και η διαδικασία αυτή δεν θα τελειώσει ποτέ θέτουμε ως αφετηρία κάποιους συγκεκριμένους ορισμούς και αξιώματα.

Έτσι ένα σύγχρονο αξιωματικό σύστημα για τη θεμελίωση μιας γεωμετρίας θα πρέπει να περιέχει τα εξής στοιχεία:

- Απροσδιόριστους όρους (μη οριζόμενες αρχικές έννοιες)
- Ορισμούς

- Αξιώματα
- Ένα λογικό σύστημα
- Θεωρήματα, Προτάσεις κ.τ.λ.

Ταυτόχρονα θα πρέπει το σύστημα να ικανοποιεί και κάποιες απαιτήσεις, τις εξής:

1. Να είναι συνεπές, δηλαδή να μην υπάρχουν αξιώματα ή θεωρήματα που αντιφάσκουν μεταξύ τους.
2. Να είναι ανεξάρτητο, δηλαδή κανένα αξίωμα να μην προκύπτει από άλλα αξιώματα.
3. Να είναι πλήρες, δηλαδή για κάθε πρόταση που μπορεί να διατυπωθεί με τους όρους και τα αξιώματα του συστήματος, να μπορούμε να συμπεράνουμε αν ισχύει ή όχι.

Αξίζει να παραθέσουμε σε αυτό το σημείο μια σύντομη ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης που συνέβαλε στην ανάπτυξη της αξιωματικής θεμελίωσης της γεωμετρίας. Δηλαδή πως η μαθηματική επιστήμη εξελίχθηκε και δημιούργησε την ανάγκη για την αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας μιας και η διαίσθηση προκαλούσε ασάφειες.

Τον 18^{ο} αιώνα επιχειρήθηκε να αποδειχθεί το αξίωμα των παραλλήλων και στα τέλη του ίδιου αιώνα και στις αρχές του επόμενου οι Euler και Gauss προσπάθησαν να αναπτύξουν την ανάλυση, δείχνοντας λιγότερο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία. Το γεγονός ότι η ανάλυση είχε εφαρμογές στη γεωμετρία οδήγησε το 1827 τον Gauss να δημοσιεύσει μια μελέτη πάνω στη θεωρία των επιφανειών με χρήση του διαφορικού λογισμού, αποδεικνύοντας μια σχέση μεταξύ της καμπυλότητας και του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου σε μια επιφάνεια, που έχει σχέση με το αξίωμα των παραλλήλων. Το 19^{ο} αιώνα οι υπερβολικές συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν για τη σύνδεση της ανάλυσης και της νέας γεωμετρίας. Τη δεκαετία του 1820 οι Lobachevsky και Bolyai δημοσίευσαν την εισαγωγή στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Το 1870 επιχειρήθηκε να καθοριστούν τα αξιώματα του φυσικού χώρο και αναπτύχθηκε η προβολική γεωμετρία. Το 1847 ο Christian Von Staudt σκιαγράφησε ένα αξιωματικό σύστημα για την προβολική γεωμετρία και το 1871 ο Felix Klein απέδειξε μια σχέση μεταξύ της προβολικής και της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας. Συμπεραίνουμε ότι τη δεκαετία του 1870 η γεωμετρία βρίσκεται στο κέντρο του επιστημονικού πεδίου με πολλές έρευνες πάνω σε αυτό, οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες είναι αποδεκτές και η προβολική γεωμετρία τραβάει την προσοχή των περισσότερων μαθηματικών της εποχής εκείνης.

Η ανάγκη για θεμελίωση της γεωμετρίας, όπως είχε γίνει με την Ανάλυση, γίνεται επιτακτική. Η πρώτη αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας έγινε από τον Moritz Pasch το 1882, όπου θέτει ότι το σύστημα πρέπει να είναι ανεξάρτητο και να λαμβάνονται υπόψη μόνο οι σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών εννοιών, οι οποίες καθιερώνονται από τις προτάσεις. Το 1889 ο Peano επιχείρησε μια νέα αξιωματική θεμελίωση των γεωμετριών με τη χρήση των απροσδιόριστων όρων και σχέσεων. Το 1899 το βιβλίο

του Hilbert “Grundlagen der Geometrie” αποτέλεσε σημαντικό σταθμό για την εξέλιξη των μαθηματικών καθώς η αξιωματική θεώρηση των μαθηματικών ασχολείται με τις σχέσεις παρά με τη φύση τους.

Στις αρχές της δεκαετίας 1920, ο Hilbert υπέβαλε μια πρόταση για τη θεμελίωση των κλασσικών μαθηματικών γνωστή και ως πρόγραμμα του Hilbert με στόχο να λυθεί το πρόβλημα της κρίσης των θεμελίων των Μαθηματικών. Το πρόγραμμα απαιτούσε να διαμορφωθούν όλες οι μαθηματικές θεωρίες με αξιωματική μορφή μαζί με μια απόδειξη ότι η αξιωματική είναι συνεπής. Συνεπές είναι ένα αξιωματικό σύστημα όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε μια πρόταση και ταυτόχρονα και την άρνησή της. Ο ίδιος θεωρεί πως για να αναπτυχθεί ένα επιστημονικό πεδίο είναι απαραίτητη η αξιωματική προσέγγιση. Με την αξιωματική προσέγγιση η θεωρία μπορεί να αναπτυχθεί χωρίς τη διαίσθηση και η ανάλυση των λογικών σχέσεων να γίνεται μεταξύ των βασικών όρων και αξιωμάτων.

Ο Hilbert θέτει ως προϋποθέσεις για να είναι αποδεκτό το αξιωματικό σύστημα να είναι ανεξάρτητο και πλήρες. Πλήρες λέγεται το αξιωματικό σύστημα αν η θεωρία που απορρέει από αυτό αποδεικνύει είτε την αλήθεια μια πρότασης, είτε την άρνησή της είτε και τα δύο. Τα αιτήματα πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή κανένα από τα αξιώματα δεν μπορεί να προκύψει σαν αποδείξιμη πρόταση από τα υπόλοιπα. Για τα αξιώματα της γεωμετρίας, η συνέπεια μπορεί να αποδειχθεί μέσα από την ερμηνεία του συστήματος στο πραγματικό επίπεδο, έτσι η συνέπεια της γεωμετρίας βασίζεται στη συνέπεια της ανάλυσης. Βέβαια η θεμελίωση της ανάλυσης απαιτεί αξιωματικοποίηση και απόδειξη συνέπειας.

Ο σκοπός του Hilbert ήταν οι μαθηματικές προτάσεις και αποδείξεις, που οδηγούν σε τύπους και παραγόμενες προτάσεις οι οποίες προκύπτουν από τα αξιώματα, να τυποποιηθούν σε ένα αξιωματικό σύστημα σύμφωνα με αυστηρούς κανόνες. Έτσι τα μαθηματικά «έγιναν ένας κατάλογος αποδείξιμων τύπων».

Η αξιωματική θεμελίωση της επίπεδης γεωμετρίας από τον Hilbert αποτέλεσε την προσπάθεια να κατασκευαστεί ένα αξιωματικό σύστημα από το οποίο να προκύπτει το σύστημα του Ευκλείδη και το 1899 δημοσιεύεται το βιβλίο του «Grundlagen der Geometrie». Η αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας θεωρεί ως πρωταρχικές έννοιες του συστήματος τις ακόλουθες απροσδιόριστες: σημείο, γραμμή (ευθεία), επίπεδο, κείται (επί), μεταξύ, ισότητα/σύμπτωση. Τα αξιώματά του χωρίζονται, ανάλογα με το ρόλο τους, στις εξής κατηγορίες:

- Αξιώματα σύνδεσης
- Αξιώματα διάταξης
- Αξιώματα ισότητας
- Αξίωμα της παραλληλίας
- Αξίωμα συνέχειας

Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert είναι διατυπωμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μη αναφέρεται κατ’ ανάγκην στον κόσμο της εμπειρίας, όπου ήταν προσανατολισμένη η

γεωμετρία του Ευκλείδη. Έτσι τα σημεία μπορούν να αναφέρονται στα σημεία της εμπειρίας, όπως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και στα στοιχεία ενός τυχαίου συνόλου. Το ίδιο συμβαίνει και στις ευθείες, ενώ η σχέση ενός σημείου και μιας ευθείας περιγράφεται από μια αφηρημένη μαθηματική σχέση. (Σπηλιοπούλου, 2010). Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η αξιωματικοποίηση της θεωρίας έχει ως συνέπεια την απομάκρυνση από την διαίσθηση και την εμφάνιση ως ένα λογικό σχήμα. Έτσι αγνοούμε τη σημασία των όρων και τα θεωρούμε ως στοιχεία, με όποιο όνομα και αν θέλουμε να τους δώσουμε, είναι αντικείμενα που ικανοποιούν τα αξιώματα. Σε σύγκριση με την αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη διαπιστώνουμε ότι έχουν κοινό τη λογική αφαίρεση, όμως στην θεωρία του Hilbert οι αρχικές έννοιες απελευθερώνονται από τη μοναδική τους ερμηνεία και συνδέονται μόνο με τις σχέσεις που είναι απαραίτητες. Ο Hilber στήριξε τη φορμαλιστική του αποδεικτική διαδικασία στη τυπική λογική, δηλαδή πρέπει να στηριχτούμε στο λογικό συμπέρασμα για την απόδειξή τους. Αυτό αποτελεί το πρώτο κομμάτι της αποδεικτικής διαδικασίας καθώς χωρίς τα αντικείμενα να χάσουν το όνομά τους ακολουθούν μια λογική διαδικασία από τις αρχικές έννοιες, τους ορισμούς και τα αξιώματα. (Δούβου, 1998).

Επομένως, ο θεμελιωτής της φορμαλιστικής θεωρίας υπήρξε ο Hilbert, που ασχολήθηκε με αυτή τη μελέτη των τυπικών, συμβολικών συστημάτων. Είναι ένα σύνολο από αφηρημένα συστήματα στα οποία οι όροι είναι απλά σύμβολα και οι προτάσεις είναι τύποι που περιέχουν τα σύμβολα αυτά. Αποτελεί την επιστήμη της τυπικής παραγωγής συμπερασμάτων από τα αξιώματα στα θεωρήματα και επιχειρήθηκε μια αξιωματική ανάπτυξη των μαθηματικών με μεγάλη σημασία στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη.

Το φιλοσοφικό ρεύμα που επηρέασε περισσότερο τη μαθηματική εκπαίδευση κατά το δεύτερο μισό του 20^{ου} αιώνα, είναι αυτό του φορμαλισμού. Οι φορμαλιστές διακρίνουν τη γεωμετρία σε δύο κατηγορίες, την γεωμετρία ως παραγωγική δομή ή αξιωματικό σύστημα και τη γεωμετρία ως μια περιγραφική επιστήμη. Για τον αποδεικτικό συλλογισμό η διαίσθηση και η φαντασία, αλλά και οι εικόνες και τα διαγράμματα έχουν μικρότερη προσφορά και επομένως τέτοιες μορφές μπορούν να περιοριστούν στα σχολικά συγγράμματα και στην τάξη. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη άποψη τα πραγματικά μαθηματικά ξεκινούν με την αποδεικτική διαδικασία. Η διαδικασία που ακολουθεί κάποιος για την κατασκευή της απόδειξης δεν σχετίζεται με τα πραγματικά μαθηματικά.

Η Παντελέων στα πλαίσια της Διπλωματικής της Εργασίας (2004), αναφέρει ότι ο φορμαλιστικός τρόπος σκέψης στα μαθηματικά έχει διεισδύσει στα σχολικά βιβλία με αποτέλεσμα να δίνεται έμφαση στην αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον συγκεκριμένο τρόπο πιστεύεται ότι αποφεύγεται η αποστήθιση των μαθητών, αφού η κάθε έννοια είναι αποτέλεσμα μιας λογικής διαδικασίας. Ο σημαντικότερος λόγος που συμβάλλει στην αποτυχία του συγκεκριμένου ισχυρισμού είναι η αδυναμία που παρουσιάζουν και οι ίδιοι οι μαθητές στην εξήγηση της λογικής διαδικασίας για την κατασκευή εννοιών και αξιωμάτων. Στον φορμαλισμό δεν

επιτρέπεται το λάθος, θεωρείται επικριτέο και αποτελεί σημάδι αποτυχίας για τον μαθητή, επομένως δεν έχει καμία παιδαγωγική αξία για την εξέλιξη της ανθρώπινης γνώσης.

Τον φορμαλισμό ως επιστημονική μέθοδο που είχε διεισδύσει στα σχολικά μαθηματικά τον διαδέχθηκε μια εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, το κίνημα των «Νέων Μαθηματικών», το οποίο δημιούργησε αδιέξοδα εξαιτίας του αφηρημένου συμβολισμού και της υπερβολικής αυστηρότητας. Αυτό έχει ως συνέπεια να μη δίνεται σημασία στην τήρηση των κανόνων και να δυσκολεύονται οι μαθητές να εκφράσουν τους προσωπικούς τους συλλογισμούς, χαρακτηριστικά είναι τα βιβλία του Νικολάου και Ιωαννίδη που δημιούργησαν διδακτικό αδιέξοδο και δυσκολίες στους μαθητές. Τα βιβλία αυτά τα σχολιάσαμε σε προηγούμενη υποενότητα.

Τέτοιου είδους αντιπαραθέσεις και αντιλήψεις υπήρχαν απέναντι στην Γεωμετρία, κυρίως μετά το σεμινάριο του Royaumont το 1959 με την μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» όπου εκτοπίζεται το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά χωρίς να υπάρχει κάποια λύση. Αναλυτικά σχετικά με τις αποφάσεις του συνεδρίου έχουμε αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια. Οι πιο φανατικοί υποστηριχτές υπέρ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υποστήριξαν την παιδαγωγική αξία της δηλαδή τη λογική των γεωμετρικών αποδείξεων. Οι αντίπαλοί τους παρουσίασαν ως αρνητικό την έλλειψη κατανόησης και την αποτυχία των μαθητών στα γεωμετρικά προβλήματα. Οι σκεπτικιστές βρίσκονταν σε μια ενδιάμεση κατάσταση όπου προτείνουν περιορισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά με αντικατάσταση με πιο σύγχρονους τρόπους. Εξαιτίας αυτής της κατάστασης η Διεθνής Επιτροπή για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (I.C.M.I.) προσπάθησε να συνθέσει τις διαφορετικές τάσεις που υπήρχαν και διατύπωσε τρεις εναλλακτικές λύσεις για τη διδασκαλία του μαθήματος:

«(α) Απορρίπτουμε την ιδέα ότι η Γεωμετρία πρέπει ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχολείο ως ένα σύστημα γνώσεων (παραγωγικά οργανωμένο ή όχι), όπου οι έννοιες και τα γεγονότα πρέπει να γίνουν γνωστά απλά και μόνο επειδή ανήκουν στο σύστημα. Αντίθετα, η Γεωμετρία και ο χώρος θεωρούνται ως πηγές άντλησης εξαιρετικών θεμάτων για την οργάνωση πολλαπλών δραστηριοτήτων σε διαφορετικά επίπεδα.

(β) Εξακολουθούμε να επιχειρούμε τη διδασκαλία ενός αξιωματικού ή ψευδοαξιωματικού μαθήματος σχολικής Γεωμετρίας, το οποίο στηρίζεται είτε σε «τροποποίηση» των «Στοιχείων» του Ευκλείδη (για παράδειγμα, αξιωματικής θεμελίωσης τύπου Pogorelov) είτε, π.χ., στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

(γ) Για ορισμένες ομάδες μαθητών, τουλάχιστον, παρουσιάζουμε «νησίδες» Γεωμετρίας, δηλαδή «τοπικά» παραγωγικά συστήματα μέσα στο πλαίσιο του γενικού αναλυτικού προγράμματος.» (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000, σελ. 13-14)

Αποφασίστηκε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία θα έπρεπε να τροποποιηθεί, ώστε οι βασικές έννοιες να διδάσκονται διαισθητικά στις πρώτες τάξεις, σε μαθητές 11-14 χρονών, και στη συνέχεια να παρουσιαστεί το σύστημα των αξιωμάτων. Βέβαια στο

συνέδριο του Royaumont δεν συμφωνήθηκε η ύλη της Γεωμετρίας, παρά μόνο ο περιορισμός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η εισαγωγή της αξιωματικοποίησης του Hilbert, όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο.

Στην Ελλάδα διδάσκεται το μάθημα σύμφωνα με τη δεύτερη εναλλακτική πρόταση για ιστορικούς και πολιτισμικούς λόγους. Μετά την πίεση για τα «Νέα Μαθηματικά» η Ευκλείδεια Γεωμετρία πήρε μια νέα μορφή, ώστε να διατηρηθεί όλη η παραδοσιακή ύλη, αλλά δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας (όπως στο βιβλίο του Ι. Ιωαννίδη για τη Γ' Γυμνασίου το 1968) και η επέκταση της ύλης με την εισαγωγή των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Σύμφωνα με τους Θωμαΐδη και Πούλο αυτές οι αλλαγές είναι οι αιτίες για την υποβάθμιση και παρακμή του μαθήματος αργότερα. (2000, σελ. 14)

Επομένως η πρώτη απόπειρα για την αλλαγή του περιεχομένου της Θεωρητικής Γεωμετρίας έρχεται το 1968, κατά τη διάρκεια της δικτατορίας. Η κλασική Γεωμετρία της εμπειρικής προέλευσης αντικαθίσταται από το φορμαλισμό της Γεωμετρίας του Hilbert και μάλιστα ξεκινάει από τη Γ' Γυμνασίου. Χαρακτηριστικό της αλλαγής αυτής είναι η αυστηρή θεμελίωση σύμφωνα με την αξιωματική μέθοδο. Το γεγονός αυτό δέχτηκε αρκετές κριτικές καθώς αρκετοί ήταν οι μαθηματικοί εκείνοι που πίστευαν ότι η αξιωματική θεμελίωση του Hilbert αντικαθιστούσε την Ελληνική Γεωμετρία, όπως αναφέραμε και προηγουμένως στην υποενότητα 2.1, αφού με αυτόν τον τρόπο σε καμία περίπτωση δεν αναπτύσσεται η κριτική σκέψη ενός 15χρονου μαθητή.

Μια προσπάθεια αντιμετώπισης αυτής της κατάστασης έγινε την επόμενη χρονιά με ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα, όπου περιορίστηκε σε κάποιο βαθμό η αυστηρότητα της θεμελίωσης στη σχολική Γεωμετρία. Ακόμα και σήμερα η θεμελίωση της Γεωμετρίας στηρίζεται στο αξιωματικό σύστημα του Hilbert. Τα τελευταία χρόνια στη χώρα μας διδάσκεται στις τάξεις του Λυκείου η Θεωρητική Γεωμετρία που στηρίζεται στην αποδεικτική διαδικασία και βασικός στόχος της είναι η ανάπτυξη ικανότητας για τη σύλληψη των εννοιών και των σχέσεών τους που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Έτσι δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην αξιωματική θεμελίωση με την παραγωγική διαδικασία και οι γνώσεις που έχει κατακτήσει ο μαθητής στο Γυμνάσιο παραγκωνίζονται τελείως. Όλη αυτή η θεμελίωση έχει ως συνέπεια ο μαθητής να μη κατανοεί το αφηρημένο σύστημα μιας και δεν μπορεί να επαληθεύσει τα συμπεράσματά του εποπτικά. Η μαθηματική εκπαίδευση προχωράει στο αφηρημένο με στήριγμα το συγκεκριμένο και το εποπτικό. Κάθε αφαίρεση που πραγματοποιείται συνδέεται άμεσα με την εμπειρία που έχει σχηματιστεί ήδη προηγουμένως. Με αυτό τον τρόπο αναπτύσσεται μια «λογική» που αξιοποιεί τη μαθηματική μεθοδολογία. Αυτή η λογική πηγάζει από την πραγματικότητα (εμπειρία) και συνδέεται με τη μαθηματική αγωγή (αφαίρεση) σε ένα σύστημα. Στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη Μέση Παιδεία έχει ως στόχο τη σύνδεση της εμπειρίας με την αφαίρεση.

Έρευνες που έχουν γίνει σε σχέση με την αξιωματική Γεωμετρία, τόσο της παραδοσιακής όσο και των πιο σύγχρονων, έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στο να κατανοήσουν τους ρόλους των αξιωμάτων και των θεωρημάτων (Δούβου, 1998). Στη συνέχεια του κεφαλαίου στην υποενότητα 3.3 θα αναφερθούμε περισσότερο σε τέτοιου είδους έρευνες. Σύμφωνα με τον Βόσκογλου (1986) υπήρχαν έντονες διαφωνίες ως προς τα αίτια της αποτυχίας των «Μοντέρνων Μαθηματικών». Ορισμένοι θεωρούν ότι οφείλεται στον τρόπο που διδάχθηκαν πρώτα οι θεμελιωμένες γενικεύσεις χωρίς να γνωρίζουν τι είναι αυτό που γενικεύεται. Με αποτέλεσμα όλο αυτό να στερεί από τους μαθητές την επανανακάλυψη και να μη γίνεται η σύνδεση με άλλες επιστήμες, δηλαδή οι μαθηματικές έννοιες παρουσιάζονται χωρίς να υπάρχει κάποιο κίνητρο. Άλλοι υποστηρίζουν ότι οφείλεται, η αποτυχία αυτή, στους διδάσκοντες, στη συμπύκνωση της ύλης, αφού παρέμεινε η ίδια σε μεγάλο μέρος με αυτή των παραδοσιακών μαθηματικών, αλλά και στα συγγράμματα, που δεν προέβλεπαν κάποιες παιδαγωγικές αρχές. Από όλα τα παραπάνω πιο σωστό είναι να δεχτούμε ότι η αποτυχία οφείλεται σε ένα συνδυασμό όλων αυτών (1986, σελ., 45).

Πολλοί μαθηματικοί την δεκαετία του ‘80 υποστήριξαν ότι η αφηρημένη αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας δεν μπορεί να ενταχθεί στα πλαίσια της μέσης εκπαίδευσης. Έτσι θεώρησαν ότι η Γεωμετρία του Ευκλείδη είναι καταλληλότερη από του Hilbert. Οι πολέμιοι αυτής της αντίληψης υποστήριζαν πως με τη Γεωμετρία του Ευκλείδη χάνεται η δομική ενότητα των θεωριών στο Λύκειο, που είναι η βασική αρχή των μοντέρνων μαθηματικών καθώς οι μαθητές θα έρχονται σε επαφή με μια πολυδιάσπαστη γεωμετρική γνώση. Αυτό είναι αποτέλεσμα της εμμονής στον Ευκλείδη, που παγιδεύει την ανανέωση και την εναρμόνιση της σχολικής μας γεωμετρίας μέσα στα σύγχρονα πλαίσια των σχολικών μαθηματικών.

Μια τέτοια διάσπαση παρατηρείται και στα ελληνικά πλαίσια κατά τη διάρκεια της δεκατετίας του ’80, όταν στην Α’ Λυκείου (Θεωρητική Γεωμετρία, των Αλιμπινίση, Δημάκου, Εξαρχάκου, Κοντογιάννη, Τασσόπουλου) ακολουθείται το αξιωματικό σύστημα του Hilbert. Στην Β’ Λυκείου (Θεωρητική Γεωμετρία, των Αλιμπινίση, Δημάκου, Δρακόπουλου, Κυριαζή, Τασσόπουλου) ακολουθεί μια διαφορετική οργάνωση που ταιριάζει περισσότερο με τις γεωμετρίες τύπου Legendre. Στη Γ’ Λυκείου (Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, των Ανδρεαδάκη, Κουσέρα, Μέτη, Παπασταυρίδη, Πολύζου, Σβέρκου) δίνεται έμφαση στην αναλυτική προσέγγιση. Στην παρούσα εργασία δεν θα ασχοληθούμε με τα βιβλία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, της οποίας η θεμελίωση στηρίζεται στους πραγματικούς αριθμούς, αλλά τα αναφέρουμε για αν τονίσουμε τη πολυδιάσπαστη γεωμετρική γνώση που επικρατούσε στα πλαίσια του σχολείου.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί και η σύγκριση τριών σχολικών συγγραμμάτων που διαφέρουν χρονικά λίγα χρόνια και συνυπήρχαν στις αρχές της δεκαετίας του 1980 για τις τάξεις Α’, Β’ και Γ’ Λυκείου:

- Θεωρητική Γεωμετρία των Παπαμιχαήλ Δ. και Σκιαδά Α.

- Ευκλείδεια Γεωμετρία του Παπανικολάου Χ.
- Μαθηματικά Ι., Γ' Λυκείου, Αναλυτική Γεωμετρία των Βαρουχάκη Ν., Αδαμόπουλου Λ. κ.α.

Το πρώτο βιβλίο, η Θεωρητική Γεωμετρία των Παπαμιχαήλ και Σκιαδά χρησιμοποιεί το αξιωματικό σύστημα του Hilbert ως προς την ανάπτυξη και την οργάνωση του περιεχομένου. Το δεύτερο βιβλίο του Παπανικολάου αποτελεί συνέχεια του πρώτου όχι μόνο χρονικά αλλά και από την άποψη της θεματολογίας του. Όμως παρουσιάζει επιστημολογικές διαφορές, καθώς αν το εξετάσουμε θα παρατηρήσουμε διαφορετικό τρόπο χρησιμοποίησης της ισότητας, δηλαδή στο πρώτο βιβλίο η ισότητα χρησιμοποιείται αξιωματικά ενώ στο δεύτερο ως ταύτιση με μετατόπιση. Όμως η μετατόπιση χρησιμοποιείται ενορατικά και όχι ως γεωμετρικός μετασχηματισμός, επομένως το βιβλίο που χρησιμοποιούνταν στη Β' Λυκείου (Παπανικολάου) διαφέρει επιστημολογικά από το βιβλίο της Α' Λυκείου (Παπαμιχαήλ) και μοιάζει περισσότερο με τις Γεωμετρίες τύπου Legendre. Έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενες υποενότητες τη δομή των Γεωμετριών τύπου Legendre. Διαφοροποιήσεις μεταξύ των βιβλίων αυτών αναφέραμε και στην υποενότητα 2.2, όπου μέσα από την απόδειξη ενός θεωρήματος εντοπίσαμε τις διαφοροποιήσεις στην αξιωματική θεμελίωση του κάθε βιβλίου. Το τρίτο βιβλίο αποτελεί βιβλίο Αναλυτικής Γεωμετρίας και χρησιμοποιεί ένα αναλυτικό τρόπο για την ανάπτυξη του περιεχομένου του και έτσι εφαρμόζονται δύο τάσεις, μια των μεθόδων με διανύσματα μέσω της Άλγεβρας και μια των συντεταγμένων μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Γίνεται φανερή, επομένως η διάσπαση της γεωμετρικής γνώσης στο Λύκειο, με αποτέλεσμα να έρχεται σε αντίθεση με τις αρχές των «Νέων Μαθηματικών» για μια ενότητα των θεωριών όπως προαναφέραμε και παραπάνω(Καστάνης, 1986, σελ. 14).

Εξαιτίας του Ευκλείδειου μοντέλου το μάθημα δεν μπορεί να συνδεθεί με άλλους κλάδους. Η αποδεικτική διαδικασία δεν μπορεί να περιορίζεται μόνο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά να προσφέρονται και άλλοι τρόποι σε άλλες κατευθύνσεις (διανύσματα, συντεταγμένες). Τα αξιωματικά συστήματα αδυνατούν να καλύψουν τις ανάγκες της Διδακτικής για τη γεωμετρία της μέσης εκπαίδευσης. Σημαντικό είναι βέβαια, πως από τον 19^{ο} αιώνα η αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας παρουσιάζει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος εκδόθηκαν αρκετά βιβλία τα οποία διαφοροποιούνται ως προς την αξιωματική θεμελίωση.

Για αυτό το λόγο και εξαιτίας της πολυδιάσπαστης γεωμετρικής γνώση που αναφέρθηκε παραπάνω, το 1995 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο αποφασίζει να συντάξει νέο αναλυτικό πρόγραμμα και να προχωρήσει στη συγγραφή νέου σχολικού βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι η καινοτομία που εμφανίζεται σχετικά με την εγκατάλειψη της αξιωματικής θεμελίωσης. Συγκεκριμένα αναφέρεται ότι:

> «Η αυστηρή αξιωματική θεμελίωση που χαρακτηρίζει τα διδακτικά βιβλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τις τελευταίες δεκαετίες δημιουργεί σοβαρές δυσχέρειες στη διδακτική πράξη. Ιδιαίτερα μάλιστα όταν δεν είναι προφανής

από την εποπτεία ή αναγκαιότητα που επιβάλλει την επιλογή των επιμέρους αξιωμάτων. Γι' αυτό σήμερα υπάρχει διεθνώς μια τάση εγκατάλειψης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως ενός "αξιωματικά δομημένου" συστήματος και δίνεται έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία και όχι στην άκριτη αυστηρή θεμελίωση» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο 1995, σελ. 1)

Σε σχέση με τη θέση αυτή του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου το διοικητικό συμβούλιο της Ε.Μ.Ε. συνέταξε μια επιστολή στην οποία εξέφραζε τη δυσαρέσκειά της ως προς αυτό (Ε.Μ.Ε., 1996):

«ΙΙ. Σε σχέση με τη θέση που υπάρχει στο εισαγωγικό σημείωμα (σελ. 1) του αναλυτικού προγράμματος. «Γι' αυτό σήμερα υπάρχει διεθνώς μια τάση εγκατάλειψης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως ενός «αξιωματικά δομημένου» συστήματος και δίνεται έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία και όχι στην άκριτη αυστηρή θεμελίωση», η επιτροπή της Ε.Μ.Ε. πιστεύει ότι δεν αφορά τη σημερινή διεθνή πραγματικότητα, αλλά την προ 20ετίας κατάσταση. Είναι πάγια θέση της Ε.Μ.Ε. το γεγονός ότι πρέπει να δοθεί έμφαση στη συστηματική καλλιέργεια της ικανότητας για την επίλυση προβλημάτων όπως και για την ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της αυτενέργειας των διδασκομένων, επομένως νιώθουμε ικανοποιημένοι που η άποψή μας αυτή είναι και άποψη της επιτροπής του Π.Ι.. Δυστυχώς δεν μπορούμε να κατανοήσουμε πως είναι δυνατόν. «Η απόδειξη μιας πρότασης πρέπει να υπακούει μόνο στους νόμους της Λογικής και να είναι αυτοδύναμη με την έννοια ότι θα στηρίζεται στις συνθήκες που περιλαμβάνονται στην υπόθεση και στις κύριες προτάσεις (αξιώματα, θεωρήματα κ.λ.π.) που έχουν προηγηθεί», χωρίς το αξιωματικό σύστημα να έχει παρουσιαστεί πλήρως.»

Στη συνέχεια η επιτροπή της Ε.Μ.Ε. συνεχίζει και για το ρόλο του μαθήματος της Γεωμετρίας:

«ΙΙΙ. Ο περιορισμός της διδακτέας ύλης (άρα και της αντίστοιχης θεωρίας) της Γεωμετρίας, όχι μόνο οδηγεί σε υποβάθμιση του ρόλου της Γεωμετρίας, όταν είναι γνωστό ότι στη διεθνή μαθηματική κοινότητα συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο, αλλά είναι βέβαιο ότι θα έχει σοβαρότατες συνέπειες στην όλη εκπαιδευτική πράξη, αφού είναι γνωστό ότι η Γεωμετρία είναι το κατεξοχήν μάθημα, που βοηθάει το μαθητή ν' αναπτύξει την ικανότητα κριτικής σκέψης και φαντασίας.»

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα που διαμορφώθηκε από την ομάδα εργασίας του Π.Ι. εισάγονται στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας οι ακόλουθες βασικές καινοτομίες:

- Υποβαθμίζεται ο ρόλος της αξιωματικής θεμελίωσης και προβάλλεται ιδιαίτερα η έννοια της απόδειξης, με ιδιαίτερη έμφαση στην αναλυτική-συνθετική μέθοδο, η οποία αναδεικνύει την ευρετική πορεία μιας απόδειξης.

- Επαναφέρεται η διδασκαλία ενός πεδίου εφαρμογής των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως είναι τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών.
- Εμπλουτίζεται η διδασκαλία με δραστηριότητες, δηλαδή η επίλυση προβλημάτων που υπερβαίνουν το επίπεδο των παραδοσιακών ασκήσεων και ενθαρρύνουν την ομαδική εργασία και την έρευνα των μαθητών μέσα στην τάξη.
- Συνιστάται η υποστήριξη της διδασκαλίας από εφαρμογές σε Τ.Π.Ε. μέσω δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας.

(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1997) (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2004) (Τζίφας, 2005, σελ. 14-15)

Ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών, Δ. Λάππας, ο οποίος είχε πάρει μέρος στην Επιτροπή Προγράμματος (1998), σχετικά με την «υποβάθμιση του ρόλου της αξιωματικής θεμελίωσης» αναφέρει πως στόχος τους ήταν να μην επιμείνουν οι καθηγητές στην αξιωματική θεμελίωση. Κατά τη γνώμη του η αξιωματική θεμελίωση επέρχεται στο πανεπιστήμιο μέσω της θεμελίωσης του Hilbert, οπότε στα πλαίσια της σχολικής Γεωμετρίας θα εμφανίζονται πιο «ελαφρά τα αξιώματα», δηλαδή θα προσπερνιόνται οι ορισμοί και τα αξιώματα και οι μαθητές θα έρχονται πιο γρήγορα σε επαφή με τις προτάσεις και τα θεωρήματα (Λάππας, 2013, προφορική επικοινωνία).

Ο Λάππας (2010), στα πλαίσια μιας σειράς διαλέξεων της ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. (Η Γεωμετρία και η Διδασκαλία της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση), αναφέρει πως το Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν καταγράφει απλά την ύλη αλλά έχει ρόλο curriculum, δηλαδή υπάρχει μια φιλοσοφία, ένα σκεπτικό της συγκεκριμένης επιλογής σαν μια μορφή έκθεσης που εντοπίζονται οι ιδιαιτερότητες με λεπτομερείς παρατηρήσεις, όχι μόνο ως προς το περιεχόμενο, αλλά και ως προς τη διδασκαλία. Στην υποενότητα 1.1 κάναμε μια αναφορά σχετικά με ποιες προϋποθέσεις απαιτούνται για την συγγραφή ενός αναλυτικού προγράμματος σπουδών. Αναφέρει πως κατά την εποχή των «Νέων Μαθηματικών» στην Ελλάδα το 1960, εισήχθηκε στην Α’ Γυμνασίου η συνολοθεωρία και στη Γ’ Γυμνασίου η αξιωματική θεμελίωση κατά Hilbert. Αρκετοί από τους σημερινούς εκπαιδευτικούς βιώσαν αυτή την κατάσταση, η οποία κράτησε μια δεκαετία, με αποτέλεσμα την αδυναμία επαρκούς διδασκαλίας καθώς είχαν πρόβλημα όχι μόνο οι μαθητές αλλά και οι γενιές μελλοντικών δασκάλων. Από τη δεκαετία του 1970 και αργότερα, στην Ευρώπη, τα αναλυτικά προγράμματα που άρχισαν να διαμορφώνονται συμπεριλάμβαναν τις προτάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στην Ελλάδα άρχισε να λαμβάνει χώρα αυτό το κίνημα στην δεκαετία του 1980 και με λιγότερη επιρροή για το Λύκειο καθώς αρκετοί παράγραφοι απευθύνονται σε «καθαρά» Μαθηματικά υψηλών απαιτήσεων.

Η Γεωμετρία σε σχέση με άλλα αντικείμενα κατέχει ευνοϊκότερη θέση εξαιτίας της ορολογίας και των εννοιών. Δεν χρησιμοποιείται επιτηδευμένη ορολογία, αλλά η καθημερινή ομιλία, χρησιμοποιούμε λέξεις όπως «ευθεία», «επίπεδο», «κύβος». Αυτό

που διαφοροποιεί τη γεωμετρία από τους υπόλοιπους κλάδους των Μαθηματικών είναι οι γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες είναι «πρώτης αναφοράς». Η συνάρτηση για παράδειγμα, δεν είναι έννοια πρώτης αναφοράς, όπως θα μπορούσε να είναι ο τρόπος συσχέτισης δύο ποσών. Για τη Θεωρητική Γεωμετρία απαιτούνται αυτές οι έννοιες πρώτης αναφοράς να κατακτηθούν από τους μαθητές μέσω της διαδικασίας της αφαίρεσης. Η χρήση οργάνων είναι κάτι που μεσολαβεί μεταξύ αφηρημένης σκέψης και πραγματικότητας. Οι μαθητές με άλλο τρόπο μπορούν να κατασκευάσουν ένα σχήμα στο Δημοτικό, με άλλο τρόπο στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Κατά τις δεκαετίες 1980 και 1990, μέσα στο γενικότερο κλίμα συρρίκνωσης της σχολικής Γεωμετρίας, υποβαθμίστηκε πλήρως η διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών. Οι γεωμετρικές κατασκευές όμως αποτελούν, ιστορικά και επιστημολογικά, το βασικό κίνητρο για την αξιωματική θεμελίωση και ανάπτυξη του θεωρητικού συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αποτέλεσμα όλης αυτής της κατάστασης είναι οι μαθητές να αδυνατούν να κατασκευάσουν σχήματα, αλλά και ο ίδιος ο εκπαιδευτικός να δυσκολεύεται να τους βοηθήσει.

Η Πρακτική Γεωμετρία έχει ως στόχο της την παγίωση κάποιων καταστάσεων, όπως η κατασκευή σχημάτων, οι μετρήσεις, η αναγνώριση ιδιοτήτων, οι οποίες στη Θεωρητική Γεωμετρία αναπτύσσονται σε ένα επόμενο στάδιο. Αν δεν επέλθει αυτή η παγίωση αλλά και το επόμενο στάδιο, δεν μπορεί να διδαχθεί η Γεωμετρία αξιωματικά. Η Πρακτική Γεωμετρία για αυτό το λόγο τείνει να μελετηθεί θεωρητικά μέσω διαμεσολαβήσεων και αναπαραστάσεων, δηλαδή μια πλήρη θεωρητική κατάσταση, χωρίς να μπορεί να εφαρμοστεί. Εδώ έχουμε την «κατασκευή» του σχήματος, ενώ στη Θεωρητική Γεωμετρία έχουμε την κατοχύρωσή του μέσα από τα αξιώματα, τα σχήματα για τα οποία αναφερόμαστε τώρα πια έχουν προέλθει μέσα από συγκεκριμένη διαδικασία. Για τη Θεωρητική Γεωμετρία τα αντικείμενα αποκτούν οντότητα μόνο αφού αποδειχθεί ότι υπάρχουν. Αυτό είναι ένα δύσκολο στάδιο και δεν είναι εύκολο να διδαχθεί στο σχολικό πλαίσιο. Είναι το πρώτο επιστημονικό πεδίο όπου τα αντικείμενα κατοχυρώνονται.

Από επιστημολογικό πλαίσιο αυτό αποτελεί τη «θεωρία» και είναι δύσκολο να αναπτυχθεί ικανοποιητικά από τους μαθητές ακόμα και του Λυκείου. Η γεωμετρία προσφέρει ένα μοναδικό πεδίο για την εισαγωγή της έννοιας της απόδειξης και για αυτό το λόγο αποτελεί μέρος του Αναλυτικού Προγράμματος. Η αιτιολόγηση αναπτύσσεται από πολύ νωρίς και αντικαθιστά την απόδειξη δημιουργώντας μια χαλαρότητα, αφού δεν ακολουθεί αξιώματα. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την επιχειρηματολογία, την οποία έχουν συναντήσει και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών προηγουμένως, όπως στην Άλγεβρα.

Η Γεωμετρία του Λυκείου συνδυάζει την εποπτεία με μια «ελαφριά» αξιωματική προσέγγιση, όπου η πρώτη θα υποχωρεί ώστε να ωφεληθεί η δεύτερη. Τα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας, αυτή ακριβώς την πορεία ακολουθούν, με την απουσία των διανυσμάτων και χωρίς να αναφέρεται η ομοιοθεσία και οι μετασχηματισμοί. Αυτό που προτείνεται από πολλούς καθηγητές της δευτεροβάθμιας, αλλά και του πανεπιστημιακού χώρου είναι να διδάσκεται η Γεωμετρία και στις τρεις τάξεις του

Λυκείου με στόχο να καλύπτεται και η ύλη της Στερεομετρίας που είναι απαραίτητη για τους σπουδαστές των θετικών επιστημών (Λάππας, 2010, σελ. 133-138).

Από το σχολικό έτος 2007-2008 εφαρμόζεται στο Γυμνάσιο το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, με την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία να παρουσιάζονται ως μια ενιαία γνωστική περιοχή, αφού πλέον η διδασκαλία τους γίνεται παράλληλα και υπάρχει μια συνοχή. Στόχος της συγγραφής των σχολικών εγχειριδίων είναι πρώτον η ύπαρξη αλληλεπίδρασης, αλληλοτροφοδότησης και διασύνδεσης των δύο αυτών θεματικών περιοχών και δεύτερον η ύπαρξη ένα είδος εναρμόνισης της ύλης των δύο αυτών ενοτήτων, ώστε να έχει εξασφαλιστεί η διδασκαλία των απαιτούμενων γνώσεων της μιας περιοχής από την άλλη. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η διδασκαλία των άρρητων μετά το πυθαγόρειο θεώρημα.

Στο Γυμνάσιο η διδασκαλία της Γεωμετρίας αποτελεί ένα είδος πρακτικής με λίγα στοιχεία θεωρητικής γεωμετρίας. Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα οι γεωμετρικές έννοιες δεν μπορούν να είναι αποκομμένες από το σύνολο των μαθηματικών γνώσεων που η συγκεκριμένη βαθμίδα εφοδιάζει τους μαθητές και για αυτό το γεγονός υποστηρίζεται πως η θεμελίωση αν ξεκινά από τη Γ' Γυμνασίου δεν μπορεί να εφαρμοστεί καθώς δεν συνάδει με το υπόβαθρο των μαθητών. Στο Λύκειο οι γνώσεις σταθεροποιούνται και παρουσιάζονται επιστημονικά τεκμηριωμένες πράγμα που τους εφοδιάζει με την ικανότητα να λειτουργούν σε έναν κόσμο που η επιστήμη τους παρέχει τα απαραίτητα εργαλεία.

Στην Α' Λυκείου ξεκινά να διδάσκεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία ως επιστήμη παρουσιάζοντας πρώτα τις έννοιες, τα αξιώματα και στη συνέχεια τα θεωρήματα. Στο Πρόγραμμα Σπουδών για το Λύκειο στη Γεωμετρία εμφανίζονται με προτεραιότητα οι διδακτικές ανάγκες για τα επιστημολογικά κριτήρια της μαθηματικής θεωρίας καθώς η αξιωματική θεμελίωση φαίνεται μέσα από έρευνες ότι δεν είναι κατανοητή για όλους τους μαθητές του Λυκείου, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω. Αρκετοί εκπαιδευτικοί προτείνουν να γίνει μια κατάλληλη διαχείριση του περιεχομένου της Γεωμετρίας χωρίς να χρησιμοποιείται η λογική της «αλγεβροποίησης», δηλαδή να μην αποτελεί ένα πεδίο εφαρμογής των αριθμητικών εννοιών. Για παράδειγμα στην ενότητα των γωνιών πρώτα πρέπει να γίνει κατανοητή η ισότητα και οι πράξεις γωνιών γεωμετρικά και μετά να φανεί ότι οι πράξεις αυτές μεταφέρονται στην έννοια του μέτρου γωνίας (Σκούρας, 2010, σελ. 162-165).

Η διαφοροποίηση στην μεθοδολογία μεταξύ της Πρακτικής και της Θεωρητικής Γεωμετρία εντοπίζεται στη χρήση της λογικής και του φορμαλισμού, ώστε να θεμελιωθούν οι γνώσεις μας και να ξεπεραστούν οι δυσκολίες που ενδέχεται να έχουν προκύψει από μετρήσεις ή αμφιλεγόμενης ορθότητας συμπεράσματα. Η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας δημιουργεί μια σειρά από αληθή αποτελέσματα, τα οποία δημιουργούν την αναγκαιότητα της ύπαρξής τους μέσα από μια λογική σειρά συμπερασμάτων που προκύπτει από προτάσεις που ήδη έχουν αποδειχθεί και στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν πρακτικά από τους μαθητές. Η σύγχρονη διδασκαλία της γεωμετρίας επικεντρώνεται στην έννοια της απόδειξης μέσα από την

λογική ακολουθία αγνοώντας την οπτικοποίηση, δηλαδή τη διαισθητική απεικόνιση των εννοιών που σχεδόν πάντα προηγείται και που χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη εικασιών.

3.2 Η αποδεικτική διαδικασία στη διδασκαλία της Γεωμετρίας

Η Θεωρητική Γεωμετρία χαρακτηρίζεται από δύο στοιχεία: την αξιωματική θεμελίωση και την αποδεικτική διαδικασία. Σχετικά με την αξιωματική θεμελίωση ασχοληθήκαμε στην προηγούμενη υποενότητα. Τα Μαθηματικά είναι ένα σύστημα γνώσεων που αποτελείται από αρχικές έννοιες και βασικές προτάσεις μαζί με τις λογικές τους συνέπειες. Οι λογικές συνέπειες προκύπτουν από τις αρχικές έννοιες και προτάσεις μέσω μιας διανοητικής επεξεργασίας που αποτελεί μέρος της θεωρίας. Οι λογικές συνέπειες αυτές είναι τα θεωρήματα, τα οποία είναι προτάσεις που χρειάζονται απόδειξη ως συμπέρασμα ενός λογικού συλλογισμού. Ένας συλλογισμός που δείχνει την αναγκαιότητα ενός θεωρήματος μέσα σε ένα θεωρητικό σύστημα είναι η απόδειξη. Η απόδειξη αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο για να εξασφαλιστεί η συνοχή ενός θεωρητικού συστήματος, αφού με αυτόν τον τρόπο οργανώνονται και συνδέονται τα διάφορα μέρη του συστήματος. Η χρήση της απόδειξης προϋποθέτει την ύπαρξη της αποδεικτέας αλήθειας, αλλιώς δεν θα γνωρίζαμε τι θέλουμε να αποδείξουμε. Το ερώτημα είναι πως θα φτάσουμε να σκεφτούμε ότι απαιτείται η ανακάλυψη των θεωρημάτων τα οποία να αποτελούν αναγκαίες συνέπειες μιας μαθηματικής δομής. Βέβαια δεν μπορεί να δοθεί μια συγκεκριμένη απάντηση σε αυτό το ερώτημα καθώς δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος κανόνας που να μας βοηθά να κατασκευάσουμε επιστημονικές αλήθειες. Παρ' όλο που μας είναι δύσκολο να δείξουμε πως θα φτάσουμε στην ανακάλυψη της αλήθειας δεν είναι δύσκολο να μεταδώσουμε την πεποίθηση για την αλήθεια που κατέχουμε. Με δύο τρόπους μπορούμε να το επιτύχουμε αυτό, με την επαλήθευση και την απόδειξη μέσα από τους νόμους της λογικής. Η επαλήθευση όμως σε ζητήματα της θεωρίας δεν βοηθάει ιδιαίτερα, αφού δεν μας εξηγεί για ποιο λόγο οι ισχυρισμοί μας είναι αληθείς, απλά μας επιβεβαιώνει οπτικά ότι αυτό είναι αληθινό. Η απόδειξη είναι αυτή που μας δείχνει την αλήθεια των ισχυρισμών της μαθηματικής επιστήμης. Όμως σε κάθε ισχυρισμό έχουμε την αμφιβολία αν συλλογιζόμαστε σωστά ή όχι, οι δύο μέθοδοι, της επαλήθευσης και της απόδειξης, αλληλοσυμπληρώνουν η μια την άλλη, εκεί που υπερέχει η μια υστερεί η άλλη.

Η μελέτη της φιλοσοφίας και της ιστορίας των μαθηματικών φέρνει στο φως την ύπαρξη δύο απόψεων για τον ρόλο και τον χαρακτήρα της απόδειξης (Hanna , 2000, σελ.6). Η μία άποψη υποστηρίζει τον εμπειρικό χαρακτήρα της απόδειξης, που

βασίζεται σε πληροφορίες και εξηγήσεις , οι οποίες προέρχονται από τις αισθήσεις. Ενώ η άλλη άποψη υποστηρίζει τον φορμαλιστικό χαρακτήρα της απόδειξης, όπου έχει σκοπό να πείσει για την αλήθεια των προτάσεων και των θεωρημάτων που διατυπώνονται με αυστηρούς κανόνες της μαθηματικής λογικής και της μαθηματικής γλώσσας. Η αντίφαση αυτή έγινε κρίσιμη κυρίως σε δύο διαφορετικές ιστορικές περιόδους, στην αρχαία Ελλάδα από τον 6ο έως τον 4ο αιώνα π.Χ. με την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών, που προκάλεσαν κρίση επειδή δεν μπορούν να αιτιολογηθούν εμπειρικά και την περίοδο από τον $17^{ο}$ έως τον $19^{ο}$ αιώνα.

Θα αναφέρουμε συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε περιόδου. Τον $6^{ο}$ – $5^{ο}$ αιώνα στην Ελλάδα η φιλοσοφία χαρακτηρίζεται από τα μαθηματικά που ακολουθούν τους κανόνες της λογικής. Οι πρώτες αποδεικτικές μέθοδοι εμφανίστηκαν από τους Πυθαγορείους και είναι διαισθητικές και εμπειρικές, με έμφαση στην οπτική αναπαράσταση. Η πρώτη ρήξη στο χώρο της απόδειξης και της αξιωματικής θεμελίωσης συνέβη την περίοδο μεταξύ του 4ου και 3ου αιώνα με την εμφάνιση των παραγωγικών και αξιωματικών μαθηματικών. Η φιλοσοφίας της Ελεατικής σχολής και του Πλάτωνα επηρέασαν αρκετά, καθώς οι μέθοδοι αποδείξεων χάνουν τον εμπειρικό τους χαρακτήρα και αποκτούν αυστηρότητα οι κανόνες της λογικής η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας. Η απόδειξη βασίζεται σε λογικούς κανόνες και όχι στην οπτική αναπαράσταση. Η εμφάνιση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη εκδηλώνει τον τρόπο σκέψης και το περιεχόμενο που χαρακτήριζαν τη μαθηματική επιστήμη της εποχής. Διαπιστώνεται ότι κυριαρχούν οι γεωμετρικές κατασκευές που εφαρμόζονται πρακτικά, αλλά εμφανίζεται και η θεωρητική διάσταση, οπότε έχουμε μια συνύπαρξη της εμπειρικής και της λογικοθεωρητικής.

Η δεύτερη ρήξη εμφανίστηκε πολλούς αιώνες αργότερα. Τον $17^{ο}$ αιώνα η απόδειξη γίνεται αποδεκτή και βασίζεται στα προφανή αποτελέσματα και τις αισθήσεις. Η ρήξη αυτή ξεκίνησε από τον Bolzano το 1817. Στη διάρκεια του $18^{ου}$-$19^{ου}$ αιώνα η άλγεβρα και η ανάλυση θεμελιώνονται με αυστηρές μεθόδους και κάνουν την εμφάνισή τους οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες (Υπερβολική, Ελλειπτική). Η στάση που επικρατούσε ήταν ότι η απόδειξη των γεωμετρικών θεωρημάτων δεν χρειάζονται αυστηρές διαδικασίες από τη στιγμή που τα αποτελέσματά τους ήταν προφανή. Τον $19^{ο}$ αιώνα όμως έχουμε την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert (1899) στην οποία δεν ισχύουν η οπτική αναπαράσταση και τα προφανή αποτελέσματα που βασίζονται στην εμπειρία. Στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα πολλοί ήταν εκείνοι οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι που ασχολήθηκαν με τη λογική και τα θεμέλια των Μαθηματικών και δημιουργήθηκαν οι σχολές των λογικιστών, των φορμαλιστών και των ενορατιστών ώστε να απελευθερωθεί η μαθηματική απόδειξη από την εμφάνιση των παραδόξων (Σπηλιοπούλου, 2010).

Ο τρόπος σκέψης που προβάλλουν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη έχει επηρεάσει και έχει αποτελέσει πρότυπο επιστημονικής σκέψης. Στην πορεία του χρόνου δεν ήταν λίγες οι περιπτώσεις που τα «Στοιχεία» προσαρμόστηκαν στο κλίμα της εποχής. Μια σημαντική αλλαγή για τη σχολική γεωμετρία ήταν τα «Στοιχεία Γεωμετρίας» του

Legendre το 1794 όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω στην 2.1 υποενότητα. Το βιβλίο αυτό ξεχώρισε επειδή παρουσίαζε μεγαλύτερη σαφήνεια, είχε ελκυστικότερο στυλ και διαπραγματευόταν καλύτερα σε σχέση με τον Ευκλείδη τη στερεομετρία. Η γεωμετρία του Legendre γράφτηκε με την ιδέα να κάνει την αποδεικτική γεωμετρία πιο αυστηρή από την πιο «πρακτική» των «Στοιχείων». Η αντίθεση που παρουσιάζει αυτή η γεωμετρία σε σχέση με του Ευκλείδη εκτός των άλλων είναι το γεγονός ότι η αποδεικτική διαδικασία στηρίζεται στη λογική συμπερασματολογία και επιχειρείται μια λογική αυστηρότητα με την αξιοποίηση της αριθμητικής και της άλγεβρας. Με το τελευταίο αυτό επέρχεται η αριθμητικοποίηση στα μαθηματικά, δηλαδή έχουμε την αυστηρή θεμελίωσή τους πάνω στη λογική βάση της αριθμητικής και της άλγεβρας με την απομάκρυνση της ενορατικής γεωμετρικής διαπραγμάτευσης. Μέχρι τα τέλη του 1950 η σχολική γεωμετρία στο διεθνή χώρο ήταν κάποια παραλλαγή της γεωμετρίας του Legendre.

Στη συνέχεια σημειώθηκαν δύο αλλαγές στο γεωμετρικό τρόπο σκέψης, η πρώτη με τα «Θεμέλια της Γεωμετρίας» το 1899 με τον Hilbert και η δεύτερη το διάστημα 1935-1955 από την ομάδα των Bourbaki όπως έχουμε αναφέρει αναλυτικά παραπάνω με τις αντίστοιχες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις που αναλύθηκαν στην υποενότητα 1.1. Τα χαρακτηριστικά που έκαναν τη γεωμετρία του Hilbert να ξεχωρίσει από αυτές του Ευκλείδη και του Legendre ήταν ότι έδωσε έμφαση στη σχέσεις των εννοιών, αλλά και το γεγονός ότι η θεωρία στηρίχτηκε σε αυστηρά καθορισμένες σχέσεις μεταξύ τους. Με τον τρόπο αυτό οι αρχικές έννοιες αποκτούν μεταβλητή σημασία και όχι μια μοναδική όπως ήταν στον Ευκλείδη και τον Legendre, δεν έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο αλλά υπάρχουν μόνο οι σχέσεις που τις συνδέουν μεταξύ τους. Το έργο του Hilbert ολοκληρώνεται με τον φορμαλισμό της αποδεικτικής διαδικασίας, δηλαδή με την αξιοποίηση των υποθέσεων μέσω της τυπικής λογικής. Η ομάδα των Bourbaki είχε ως θέσεις της, να κυριαρχήσει η αυστηρότητα και ο φορμαλισμός, να ενωθούν οι μαθηματικοί κλάδοι κάτω από τρεις βασικούς και να αλγεβροποιηθεί η γεωμετρία. Για αυτούς τους λόγους προτείνεται η Γραμμική Άλγεβρα ως πρότυπο για τη Γεωμετρία, η οποία συμβαδίζει με την κατάσταση της εποχής εκείνης. Από τα τέλη του 1950 η ομάδα των Bourbaki επηρέασαν τις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις όπως προαναφέραμε, που πραγματοποιήθηκαν μετέπειτα στα μαθηματικά.

Στην Ελλάδα τα 50 πρώτα χρόνια του σύγχρονου Ελληνικού κράτους επικράτησε η Γεωμετρία του Legendre και μέχρι το 1968 εμφανίστηκαν οι Γεωμετρίες των Χατζιδάκη, Μπαρμπαστάθη και Νικολαόυ που στηρίζονταν σε αυτόν τον τύπο. Στη συνέχεια οι Γεωμετρίες του Ιωαννίδη και των Παπαμιχαήλ και Σκιαδά χρησιμοποιούν στοιχεία της αξιωματικής θεμελίωσης του Hilbert. Το 1983 είχαμε τη Γεωμετρία του Βαρουχάκη και τέλος το 1999 των Θωμαΐδης κ.α και το 2001 Αργυρόπουλους κ.α. Οι Γεωμετρίες που χρησιμοποιήθηκαν στην Ελλάδα θυμίζουν περισσότερα τη Γεωμετρία Legendre ως προς τη θεματολογία και τη διάταξη του περιεχομένου καθώς χρησιμοποιούν ένα σύστημα συντεταγμένων με απαγωγική εξαγωγή συμπερασμάτων (Καστάνης, 1986).

Ένας σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι οι μαθητές να κατανοήσουν το ρόλο που κατέχει η απόδειξη. Η απόδειξη έχει αποκτήσει στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ενδιαφέρον ως προς τη διδακτική της υπόσταση και έτσι έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες γύρω από αυτή αλλά και πως αξιοποιείται με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας. Τέτοιου είδους έρευνες θα παρουσιάσουμε στην επόμενη υποενότητα. Έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αναπτυξιακή απόδειξη (developmental proof), δηλαδή την απόδειξη που προέρχεται κυρίως από την εμπειρία, που έχει αποκτήσει κάποιος. Η αναπτυξιακή απόδειξη έχει τρία γνωρίσματα:

(α) εμβαθύνει στην μαθηματική κατανόηση και τη φύση του ανθρώπινου συλλογισμού

(β) αναπτύσσεται βαθμιαία

(γ) παρέχει τον παραγωγικό «τρόπο σκέψης» στους μαθητές.

Για τη σχολική τάξη σημαντική είναι η προσοχή που δείχνουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των αποδείξεων. Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν τη δώσουν στον καθηγητή, κατά τη διάρκεια μιας αποδεικτικής διαδικασίας, δύσκολα γίνεται κατανοητή. Οι μαθηματικές αποδείξεις αποτελούν μια αλυσίδα συμπερασμάτων σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής και αποτελούν μια σειρά ιδεών και αρχών ώστε να κατανοηθεί η αλήθεια της. Επομένως ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν και να μελετούν τις μαθηματικές αποδείξεις ώστε να κατανοήσουν για ποιο λόγο οι μαθηματικές προτάσεις αυτές είναι αληθείς. Οι αποδείξεις είναι σημαντικές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθώς έχουν τη δυνατότητα να μεταδώσουν στους μαθητές σημαντικά μαθηματικά στοιχεία, όπως στρατηγικές επίλυσης και μεθόδους. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να στρέψουν την προσοχή των μαθητών ώστε να εκμεταλλευτούν με τον καλύτερο τρόπο τα στοιχεία της αποδεικτικής διαδικασίας (Καρδαμίτσης, 2010).

Το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για το Γυμνάσιο και το Λύκειο στην εισαγωγή του αναφέρει τους σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών που συνδέονται άμεσα με τη Θεωρητική Γεωμετρία: « Η διδακτέα ύλη να προσφέρεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιδιώκεται πρώτα απ' όλα η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή.» Αντίστοιχα και οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών αναφέρουν:

> « Να εισαχθούν οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία και να συνειδητοποιήσουν ότι αυτή αποτελεί χρήσιμο και άμεσο τρόπο για την επαλήθευση γενικών νόμων.
>
> Να μυηθούν και να εξοικειωθούν οι μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να καλλιεργηθεί η 'μαθηματική σκέψη'.

Να ασκηθούν οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή.»

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία δίνοντας έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία είναι ένας χώρος όπου μπορεί να καλλιεργηθεί η μαθηματική σκέψη και οι παιδαγωγικές συνέπειες αυτής. Το πρόγραμμα σπουδών που ισχύει για την Ευκλείδεια Γεωμετρία αναφέρει:

«Η ανάπτυξη της θεωρίας γίνεται παραγωγικά και έτσι δίνεται μια μοναδική ευκαιρία στον μαθητή να κατανοήσει την αποδεικτική διαδικασία και να ασκηθεί σε αυτή. Η φύση των προβλημάτων που διαπραγματεύεται απαντά στις σύγχρονες διδακτικές προκλήσεις, που απαιτούν δραστήριο ρόλο του μαθητή στην ανάπτυξη και κατάκτηση της γνώσης. Ειδικότερα, τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών (με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη), βοηθούν στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, όπως κριτικής διερευνητικής σκέψης, διατύπωσης εικασιών στην αναζήτηση της λύσης, διαδικασίες που μετατρέπουν το μαθητή σε ερευνητή.»

Έρευνες που έχουν γίνει τις τελευταίες δεκαετίες, όπως θα αναλύσουμε και στη συνέχεια, παρουσιάζουν ότι ένα μικρό μέρος των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιλαμβάνονται το ρόλο της αποδεικτικής διαδικασίας στα Μαθηματικά. Οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το φαινόμενο αυτό παρατηρείται ιδιαίτερα καθώς οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν μια αυστηρά ιεραρχημένη εμφάνιση ορισμών, ιδιοτήτων και αποδείξεων, προσπαθώντας να τις οργανώσουν σε ένα θεωρητικό σύστημα σύμφωνα με τη λογική συνέπεια των προτάσεων. Στις μικρότερες σχολικές τάξεις οι μαθητές ασκούνταν στο να επαληθεύουν τις προτάσεις αυτές μέσω της σχεδίασης και της μέτρησης, ενώ στο Λύκειο οι γεωμετρικές έννοιες και προτάσεις αποτελούν αλήθειες και μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας αναπαράγονται μηχανικά καθώς δεν δημιουργείται κάποιο κίνητρο στους μαθητές.

Μέσα στο κλίμα της διδασκαλίας των Μαθηματικών, που κυρίως είναι παραδοσιακό, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την απόδειξη, έχουν οδηγήσει σε νέες διδακτικές προσεγγίσεις που ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

- Εκείνες που μέσα στο παραδοσιακό πλαίσιο διδασκαλίας προτείνουν τη ριζική αναθεώρηση των μαθηματικών αποδείξεων που παρουσιάζονται στους μαθητές.
- Εκείνες που προτείνουν να μετασχηματιστεί η παραδοσιακή διδασκαλία ώστε η απόδειξη να εμφανίζεται ως το ανώτερο στάδιο συλλογικής δραστηριότητας και να έχει ως αντικείμενο τη διατύπωση και την επαλήθευση ή όχι των μαθηματικών εικασιών.

Σύμφωνα με τους στόχους του προγράμματος σπουδών που ισχύει τα τελευταία χρόνια ο καταλληλότερος τρόπος για να αντιληφθούν οι μαθητές την τυπική μαθηματική απόδειξη που θα συναντήσουν στο Λύκειο είναι να ασχοληθούν στο μάθημα των Μαθηματικών με ερευνητικές δραστηριότητες.

Όπως αναλύσαμε στην υποενότητα 2.2, ανάλογα με την εποχή και με το σύστημα της αξιωματικής θεμελίωσης που επικρατούσε παρατηρήσαμε τον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται το θεώρημα: *Οι παρά τη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες*. Η απόδειξη που διδάσκεται σήμερα στο βιβλίο των Η. Αργυρόπουλος κ.α. αποτελεί μια απόδειξη που στηρίζεται στη θεωρητική ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα στηρίζεται στην άμεση συνέπεια του πρώτου κριτηρίου ισότητας των τριγώνων. Η απόδειξη αυτή υποτίθεται ότι διαθέτει το διδακτικό πλεονέκτημα της απλότητας, αλλά όπως αναφέρθηκε και στην υποενότητα 2.2 από τον Αρτεμιάδη, αυτή εμφανίζει ένα μαθηματικό μειονέκτημα, τόσο σύμφωνα με τις κατασκευές των Στοιχείων του Ευκλείδη όσο και με τις αυστηρές απαιτήσεις των Θεμελίων του Hilbert. Τα μειονεκτήματα αυτά σχετίζονται σύμφωνα με τον Ευκλείδη στη δυνατότητα να κατασκευαστεί η διχοτόμος ΑΔ και για τον Hilbert αν μπορεί να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος της γωνία Α τέμνει την απέναντι πλευρά ΒΓ. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη απόδειξη κανένα από τα παραπάνω δύο μειονεκτήματα δεν μπορούν να ξεπεραστούν. Οι Ευκλείδης και Hilbert χρησιμοποιούν διαφορετική απόδειξη. Η απόδειξη του Hilbert είναι ίδια με αυτή του Πάππου όπου το ζητούμενο προκύπτει με τη σύγκριση του τριγώνου με τον εαυτό του. Η απόδειξη του Πάππου αποτελεί μια εναλλακτική της απόδειξης του Ευκλείδη, η οποία είναι πιο εκτενής. Περιλαμβάνει τις προεκτάσεις των ίσων πλευρών προς τη βάση του ισοσκελούς και τη λήψη ίσων τμημάτων πάνω σε αυτές και μέσω δύο διαδοχικών συγκρίσεων τριγώνων αποδεικνύεται το ζητούμενο, η ισότητα των γωνιών της βάσης ως διαφορές δύο αντίστοιχα ίσων γωνιών.

Όλα τα παραπάνω τα αναφέραμε όχι γιατί μας απασχολεί στη συγκεκριμένη υποενότητα η αυστηρότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται στο Λύκειο, αλλά το γεγονός κατά πόσο η αποδεικτική διαδικασία γίνεται αντικείμενο συζήτησης και ποιος είναι τελικά ο ρόλος της απόδειξης. Αντίστοιχα στην αρχαιότητα είχε προκαλέσει κριτική μεταξύ των Επικούριων φιλοσόφων και της Πλατωνικής σχολής (Θωμαΐδης, 2003, σελ. 7-8).

Η Αργύρη (2010) μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με την εκπόνηση της διπλωματικής της εργασίας αναφέρει ότι οι μαθητές έχουν την αντίληψη πως αν δεν έχουν αποδείξει ένα γεωμετρικό θεώρημα μέσα σε 5 ή 10 λεπτά, τότε δεν μπορούν να εντοπίσουν το ζητούμενο. Η πεποίθησή τους είναι ότι δεν διαθέτουν μαθηματικές δεξιότητες για την επίλυση του προβλήματος ή ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι ελλιπείς. Για τους μαθητές, την αποδεικτική διαδικασία την παρέχει ο εκπαιδευτικός ή το σχολικό βιβλίο και ότι οι ταλαντούχοι μαθητές μπορούν να την αναπτύξουν. Βέβαια οι πεποιθήσεις αυτές των μαθητών σχετικά με τα λάθη που κάνουν μπορούν να αποτελέσουν ευκαιρίες για μάθηση και να δημιουργήσουν ενδιαφέρον για την αποδεικτική διαδικασία ή την επίλυση προβλημάτων. Μέσα από αυτή τη διαδικασία του λάθους και τον επαναπροσδιορισμό της αποδεικτικής διαδικασίας μπορεί οι μαθητές να επιχειρήσουν διαφορετικές στρατηγικές και όχι να εγκαταλείψουν τις προσπάθειές τους στην πρώτη δυσκολία.

Οι πεποιθήσεις που έχουν οι μαθητές του Γυμνασίου, όταν λύνουν ένα πρόβλημα, έχουν να κάνουν με την εμπειρική φύση της γνώσης τους. Όταν λύνουν προβλήματα της γεωμετρίας οι μαθητές πειραματίζονται με τις υποθέσεις και με τις μεθοδολογίες στην προσπάθειά τους να βρουν τη λύση. Η αιτιολόγηση που χρησιμοποιούν βασίζεται στην αποτύπωση και την κατασκευή του γεωμετρικού αντικειμένου, δηλαδή στην εμπειρική προσέγγιση και αγνοούν τη λογική προσέγγιση της λύσης που συμβάλει στην ανάπτυξη των παραγωγικών αποδείξεων, ώστε να αιτιολογήσουν και να επαληθεύσουν τα αποτελέσματά τους.

Οι πεποιθήσεις που διαθέτει ο μαθητής καθορίζουν τις επιλογές προσέγγισης και στρατηγικής της αποδεικτικής διαδικασίας, ποιές τεχνικές θα ακολουθήσει, το χρόνο που θα αφιερώσει καθώς και πόσο θα ασχοληθεί με τη λύση. Δηλαδή καθορίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα ακολουθήσει προς τον παραγωγικό συλλογισμό. Οι πεποιθήσεις αυτές γύρω από τη φύση της μαθηματικής απόδειξης έχουν να κάνουν με το τι είναι μαθηματική απόδειξη στη γεωμετρία. Οπότε είναι καθοριστικές σχετικά με τον τρόπο που εμπλέκονται οι μαθητές με τα μαθηματικά. Ο ρόλος των πεποιθήσεων είναι επίσης καθοριστικός στον στόχο που έχει η εκπαίδευση και κυρίως στη διδασκαλία της γεωμετρίας, δηλαδή στην κατασκευή νέας γνώσης μέσω των αποδείξεων των θεωρημάτων.

Στην προηγούμενη υποενότητα αναφέραμε ότι για την εξέλιξη μιας επιστήμης, συγκεκριμένα για τη γεωμετρία, δεν αρκεί μόνο η διατύπωση κανόνων, προτάσεων και θεωρημάτων, αλλά η θεμελίωσή τους. Αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας. Για αυτό το λόγο παραπάνω αναφερθήκαμε στην ανάπτυξη του θεωρητικού πλαισίου γύρω από την αποδεικτική διαδικασία από την αρχαιότητα έως σήμερα. Το θεωρητικό πλαίσιο θα πρέπει να είναι απαλλαγμένο από την εμπειρία. Μόνο σε μεμονωμένες περιπτώσεις μια αφηρημένη οντότητα, όπως είναι τα μαθηματικά, δίνουν συμπεράσματα μέσα από την εμπειρική παρατήρηση. Για αυτό το λόγο και τα Στοιχεία του Ευκλείδη έπρεπε να απαλλαχθούν από την εμπειρία, τη διαίσθηση και τις υπονοούμενες υποθέσεις. Η θεμελίωση της γεωμετρίας πρέπει να στηρίζεται σε ένα μικρό αριθμό αξιωμάτων, που μπορούν να γίνουν αποδεκτά και όλες οι άλλες προτάσεις ή θεωρήματα που μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα μέσω του λογικού συλλογισμού. Τα αξιώματα καθορίζουν αν οι αφηρημένες γεωμετρικές οντότητες μπορούν να κατασκευαστούν από αυτά μέσω του αυστηρού συλλογισμού χωρίς την εξωτερική εμπειρία. Η απόδειξη και η ανακάλυψη απαιτούν τη δημιουργικότητα. Η κατασκευή μιας απόδειξης δεν είναι μια απλή και μηχανική διαδικασία, υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι για την κατασκευή μιας απόδειξης και δεν βασίζεται μόνο στη λογική, αλλά και στη φαντασία και την ευρηματικότητα.

Η παραδοσιακή άποψη είναι ότι «απόδειξη είναι μια τυπική και λογική πορεία συλλογισμού που αρχίζει με ένα σύνολο αξιωμάτων και κινείται μέσω των λογικών βημάτων προς ένα συμπέρασμα, με σκοπό να αποδειχθεί ένα θεώρημα» σύμφωνα με τον Griffiths (2000). Στη διδασκαλία της γεωμετρίας η απόδειξη είναι μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι ορθή στα αποδεκτά πλαίσια των

μαθηματικών. Η απόδειξη παράγεται «αναγωγικά» και όχι εμπειρικά, δηλαδή ότι η πρόταση είναι αληθής σε κάθε περίπτωση χωρίς καμία εξαίρεση. Μια πρόταση, χωρίς απόδειξη για την οποία πιστεύουμε ότι ισχύει, ονομάζεται εικασία (Αργυρή, 2010).

Σήμερα στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας το αναλυτικό πρόγραμμα θέτει ως βασικό στόχο του να πεισθούν οι μαθητές για την αναγκαιότητα των αποδείξεων στην αρχή και μετά από κάποιο διάστημα διδασκαλίας να περάσουν σε ένα ανώτερο επίπεδο. Αυτό σχετίζεται με τη κατανόηση και τον χειρισμό των αποδείξεων. Επομένως οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν τα ακόλουθα σχετικά με τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης:

1. Ένα θεώρημα δεν έχει εξαιρέσεις. Μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής για κάθε περίπτωση.
2. Ακόμη και οι προφανείς προτάσεις πρέπει να αποδεικνύονται. Επιπλέον, μια απόδειξη δεν μπορεί να στηρίζεται στα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου σχήματος.
3. Μια απόδειξη πρέπει να είναι γενική. Η ορθότητα μιας ή περισσοτέρων ειδικών περιπτώσεων δεν αρκεί για την απόδειξη μιας γενικής πρότασης. Ωστόσο, ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό για να καταρρίψει έναν ισχυρισμό.
4. Οι υποθέσεις ενός θεωρήματος πρέπει να είναι άμεσα κατανοητές και σαφώς διακεκριμένες από τα συμπεράσματα.
5. Η αντίστροφη πρόταση μιας ορθής πρότασης δεν είναι αναγκαία σωστή.
6. Σύνθετα σχήματα αποτελούνται από βασικά χαρακτηριστικά, η διατύπωση των οποίων μπορεί να διευκολύνει μία απόδειξη (Θωμαΐδης-Πούλος, 2000, σελ. 212).

3.3 Αποτελέσματα ερευνών

Πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα της Γεωμετρίας. Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε μια επισκόπηση των ερευνών που συνδυάζει ευρήματα από τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία, ώστε να διαμορφωθεί μια έγκυρη εικόνα για την κατάσταση στην Ελλάδα. Αναφέραμε ότι τα κύρια χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η αξιωματική θεμελίωση και η αποδεικτική διαδικασία, οι οποίες συνδέονται η μια με την άλλη, όπως παρατηρήσαμε. Σύμφωνα με τα τελευταία αναλυτικά προγράμματα, όπως εξετάσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, η αξιωματική θεμελίωση έχει υποβαθμιστεί στο πλαίσιο της διδασκαλίας και έμφαση δίνεται στην αποδεικτική διαδικασία. Στην προηγούμενη υποενότητα αναφερθήκαμε σε δύο επιστημολογικές ρήξεις στο χώρο των μαθηματικών σχετικά με τον εμπειρισμό και την αυστηρότητα του φορμαλισμού. Διάφορες έρευνες (Dreyfus & Hadas 1988, Rezende & Nasser 1994, Harel & Sowder

1996, Driscoll 1982) έχουν δείξει πως υπάρχουν δυσκολίες στην κατανόηση και την παραγωγή των αποδείξεων. Ένα πρόβλημα που υπάρχει, έχει να κάνει με τη σχέση του λόγου και της αισθητήριας αντίληψης, με την αλλαγή των γεωμετρικών αντικειμένων σε ιδεατά, όπως είχε γίνει με την επιρροή των Ελεατών και του Πλάτωνα σε σχέση με τους σοφιστές που βασίζονταν στις αισθήσεις. Η υπέρβαση αυτής της δυσκολίας, δηλαδή του προφανές μέσω του σχήματος, μπορεί να επιτευχθεί μέσω της απόδειξης, και είναι ένα από τα σημαντικά προβλήματα αυτό και για τους ίδιους τους μαθητές. Εμπόδιο, φυσικά, αποτελούν και οι διαφορετικές αντιλήψεις μεταξύ των καθηγητών και των μαθητών σχετικά με τη σημασία της απόδειξης. Για τους καθηγητές η απόδειξη είναι κυρίως να «πείθει» και συνδέεται με τον παραγωγικό συλλογισμό, ενώ για το μαθητή είναι να «διαφωτίζει», κάτι το βέβαιο για αυτούς, ώστε να πεισθούν ότι αυτό δεν είναι λάθος.

Μια, επιπλέον, δυσκολία από τη μεριά της διδακτικής που παρατηρείται κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας της Γεωμετρίας από το Γυμνάσιο στο Λύκειο έχει να κάνει με τον τρόπο που διδάσκονται οι αποδείξεις. Στο Γυμνάσιο οι μαθητές διδάσκονται τη διαισθητική αιτιολόγηση και κάποιες απλές αποδείξεις, και το βάρος της τυπικής απόδειξης πέφτει στη Γεωμετρία του Λυκείου. Όλο αυτό έχει ως συνέπεια την υποβάθμιση της αποδεικτικής διαδικασίας λόγω της πίεσης του μεγάλου όγκου της διδακτέας ύλης και των εισαγωγικών εξετάσεων στη τριτοβάθμια εκπαίδευση, καθώς η Γεωμετρία δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα και έτσι δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα. Οπότε αν και στόχος του αναλυτικού προγράμματος είναι να δοθεί έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία τελικά διαπιστώνουμε πως αυτό είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Η υποβάθμιση αυτή γίνεται αντιληπτή με την εξαίρεση πολλών αποδείξεων των θεωρημάτων από την διδακτέα ύλη, την επικράτηση της «ασκησιολογίας», αλλά και την επίδραση των φροντηστηρίων που προτρέπουν τους μαθητές να ασχοληθούν με μαθήματα που θα τους φανούν χρήσιμα στις εισαγωγικές εξετάσεις (Δημητριάδου, 2007)

Η έρευνα του Schoenfeld (1986) έδειξε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται σχετικά με τη φύση, το νόημα και τη δομή της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία εξαιτίας της αυστηρότητας στη γλώσσα και το συμβολισμό, ενώ αποδέχονται την οπτική αναπαράσταση ως απόδειξη. Όπως έχει ξανά αναφερθεί και παραπάνω οι μαθητές πείθονται για τα συμπεράσματα ενός γεωμετρικού θεωρήματος από το γεγονός ότι οι κατασκευές τους με χαρτί και μολύβι δείχνουν αληθείς. Αν όμως η εικόνα δεν φαίνεται αληθής «με το μάτι» τότε δεν θεωρούν την απόδειξη σωστή. Επομένως οι πεποιθήσεις των μαθητών έχουν να κάνουν με την εμπειρική φύση των επιχειρημάτων που επιβεβαιώνουν τις υποθέσεις των γεωμετρικών θεωρημάτων.

Οι Dreyfus et al. (1990) μέσω της ανασκόπησης ερευνών που έκαναν, ταξινομούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές σχετικά με την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας σε τρεις κατηγορίες:

- Οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη της απόδειξης
- Δεν αντιλαμβάνονται το στοιχείο του «λογικά αναπόφευκτου» της απόδειξης.

- Δυσκολεύονται να διατυπώσουν μια απόδειξη

Το 1998 οι Harel & Sowder σε έρευνα σε μαθητές του Ηνωμένου Βασιλείου, σχετικά με τη φύση της απόδειξης στη γεωμετρία, έδειξαν ότι :

(α) οι μαθητές, θεωρούν ότι με την απόδειξη επαληθεύουν τις δηλώσεις των θεωρημάτων

(β) θεωρούν την απόδειξη ως την εξήγηση των γεωμετρικών θεωρημάτων. Επιπρόσθετα διευκρινίζουν ότι η εξήγηση προορίζεται για να διασαφηνιστούν οι υποθέσεις και τα ζητούμενα των γεωμετρικών θεωρημάτων, αλλά και για να επικοινωνήσουν τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας στη σχολική τάξη

(γ) θεωρούν ότι ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

Από τη συγκεκριμένη έρευνα παρατηρήθηκαν και οι πεποιθήσεις των μαθητών ως προ την απόδειξη στη γεωμετρία:

(α) κάποιοι μαθητές για να επιβεβαιώσουν τις υποθέσεις τους σχετικά με κάποιο θεώρημα βασίζονται στις εμπειρίες τους και τις αισθήσεις τους και προσπαθούν να ισχυροποιήσουν την αιτιολόγησή τους μέσα από τις εμπειρικές τους θεωρήσεις για τα γεωμετρικά αντικείμενα. Ιδιαίτερη σημασία για αυτούς παίζει η οπτικοποίηση του γεωμετρικού σχήματος

(β) μόνο μια μειοψηφία μαθητών δίνει ιδιαίτερη σημασία στην αναλυτική παρουσίαση του μαθηματικού επιχειρήματος. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται οι αποδείξεις φανερώνει τους ισχυρισμούς μιας δήλωσης για τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού αντικειμένου. Για αυτούς η αποδεικτική διαδικασία παρουσιάζεται με λογική διάρθρωση και με αυστηρή μαθηματική γλώσσα και συμβολισμό.

(γ) αρκετοί πιστεύουν ότι η απόδειξη γίνεται αποδεκτή επειδή παρουσιάζεται από τον καθηγητή και το σχολικό εγχειρίδιο.

(δ) υπάρχουν και κάποιοι μαθητές οι οποίοι για τον έλεγχο μιας υπόθεσης εξετάζουν μια ειδική περίπτωση και από κάποια παραδείγματα που ισχύει η συγκεκριμένη υπόθεση, τη γενικεύουν.

Μια από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές είναι ότι δεν μπορούν να αντιληφθούν για ποιο λόγο μαθαίνουν την αποδεικτική διαδικασία, αλλά την θεωρούν δυσνόητη διαδικασία, η οποία επιβάλλεται μέσα από τη Γεωμετρία (Healy & Hoyles, 1998). Η παραπάνω διαπίστωση προέρχεται από την αδυναμία τους στην παραγωγή μαθηματικού συλλογισμού. Μια πλήρης κατανόηση του τρόπου μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι αδύνατη, χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού.

Στο 1.2 αναφερθήκαμε με λίγα λόγια στα επίπεδα Van Hiele σχετικά με τον γεωμετρικό τρόπο σκέψης των μαθητών. Το 1979-1982 πραγματοποιήθηκε μια έρευνα στο Σικάγο από τον καθηγητή Usiskin για να διαπιστώσει κάποια σχέση

μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας και των επιπέδων Van Hiele. Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν ότι τα επίπεδα Van Hiele εξηγούν γιατί πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν πρόβλημα μάθησης των αποδεικτικών διαδικασιών στα γεωμετρικά θεωρήματα. Το βασικό συμπέρασμα αυτής της έρευνας είναι ότι τα επίπεδα Van Hiele, που αντιστοιχίζονται στους μαθητές αποτελούν προγνώστες της απόδοσής τους. Έτσι αυτή η μελέτη προβάλει την ανάγκη για μια συστηματική διδασκαλία της γεωμετρίας στο Λύκειο, με στόχο την επιτυχία των μαθητών στην κατανόηση, την οργάνωση και την παρουσίαση των αποδείξεων. Στην Ελλάδα ο Ζάχος (2000) προσπάθησε να διερευνήσει την κατανομή των μαθητών στα τέσσερα επίπεδα καθώς και τις δυνατότητες των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας. Το δείγμα του ήταν μαθητές της Β' Λυκείου οι οποίοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο βασισμένο σε αυτό του καθηγητή Usiskin. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το 75% των μαθητών ήταν κάτω από το επίπεδο 4, στο οποίο σύμφωνα με τη θεωρία του Van Hiele είναι απαραίτητο να κατέχει ένας μαθητής ώστε να παρακολουθεί το μάθημα της Θεωρητικής Γεωμετρίας. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως είναι αναμενόμενο οι μαθητές να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη διδασκαλία των γεωμετρικών αποδείξεων της γεωμετρίας του Λυκείου σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας.

Η μελέτη των γραπτών επίσημων εξετάσεων αποτελεί μια συνήθη πρακτική στην έρευνα της Διδακτικής. Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον Θωμαΐδη (1998) σε εξετάσεις του 1997 σε 130 μαθητές της Α' Λυκείου. Τα γραπτά αυτά δίνουν μια καλή εικόνα για το επίπεδο της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης των μαθητών στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Για τη μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών (ποσοστό 70%) οι παραδοσιακές αρετές του μαθήματος, όπως είναι η σαφήνεια στην έκθεση, η ολοκληρωμένη απόδειξη κάθε υπόθεσης, η απόλυτη συνάφεια σχημάτων συλλογισμών. Για να γίνουν πιο κατανοητά τα συμπεράσματα της έρευνας θα εντάξουμε τα προηγούμενα μέσα στο πλαίσιο των επιπέδων Van Hiele, που αποτελεί το πιο διαδεδομένο θεωρητικό μοντέλο για τη μάθηση της Γεωμετρίας. Η πλειοψηφία των μαθητών ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της Θεωρητικής Γεωμετρίας δεν υπερβαίνει το $2^{ο}$ και $3^{ο}$ επίπεδο Van Hiele, ενώ σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα και το διδακτικό βιβλίο θα έπρεπε να βρίσκονται στο $4^{ο}$ επίπεδο. Το συμπέρασμα αυτό δείχνει τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ Πρακτικής Γεωμετρίας και Θεωρητικής καθώς και ότι επιβάλλεται ο σχεδιασμός της διδασκαλίας του μαθήματος για όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ακόμα η συγκεκριμένη έρευνα έδειξε τη τεράστια δυσκολία που παρουσιάζει η κατάκτηση από τους μαθητές της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης, ιδιαίτερα της συνθετικής μορφής που χαρακτηρίζει τις αποδείξεις των περισσότερων γεωμετρικών προτάσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες και συχνά αποδεικνύουν το αντίστροφο της πρότασης που τους ζητείται. Το 45% των μαθητών σε επίσημες προγραμματισμένες εξετάσεις αδυνατεί να αναπαράγει με σωστό τρόπο τις αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που αποτελούν τα 2/3 της διδακτέας ύλης του βιβλίου. Η πρόταση που επέρχεται από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι η διδασκαλία της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης ως ξεχωριστό κεφάλαιο. Η πρόταση του

ερευνητή από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι η διδασκαλία της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης να καθιερωθεί ως ξεχωριστό κεφάλαιο στα σχολικά βιβλία.

Σε άλλη έρευνα του Θωμαΐδη (2000), εξετάστηκε η ικανότητα των μαθητών να κατανοήσουν βασικές αρχές της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας και η παραγωγή δικών τους αποδείξεων στα πλαίσια μιας δραστηριότητας όπου ο ρόλος του καθηγητή περιοριζόταν και οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 27 μαθητές Α' Λυκείου. Το διδακτικό βιβλίο που ήταν σε χρήση την περίοδο 1998-99 (Αλιμπινίσης κ.ά., 1998) διαπραγματεύεται τα σχετικά με την παραλληλία των ευθειών στο 2^{ο} κεφάλαιο. Οι μαθητές είχαν διδαχθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή το 1^{ο} κεφάλαιο, που ασχολείται με την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και τις ιδιότητες ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών, ενώ από το 2^{ο} κεφάλαιο τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων και τις εφαρμογές τους, που είχαν διδαχθεί στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο και ασχολήθηκαν με την παραλληλία των ευθειών. Η δραστηριότητα που εφαρμόστηκε στόχευε στην ανάδειξη της σπουδαιότητας του 5^{ου} αιτήματος μέσα από μια σειρά ασκήσεων και με συζήτηση μέσω του καθηγητή. Οι μαθητές μέσα από αυτή τη διαδικασία κατανόησαν τη σημασία των αξιωμάτων και των αποδείξεων μέσα από έναν εμπειρικό τρόπο μη συμβατό με την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παρατηρήθηκε ότι όταν οι μαθητές παρακινούνται να δώσουν μια απόδειξη τότε χρησιμοποιούν βοηθητικές γραμμές και αναπτύσσουν συλλογισμούς ανεξάρτητα αν αυτοί δεν αποτελούν απόδειξη. Τα δεδομένα αυτά επιβεβαιώνουν κατ' αρχήν τα συμπεράσματα πολλών ερευνητών για τις εμπειρικές αντιλήψεις και τους άλλους εξω-μαθηματικούς παράγοντες που επηρεάζουν ισχυρά τη στάση των σπουδαστών απέναντι στις θεωρητικές μαθηματικές έννοιες (Fishbein & Kedem 1982, Schoenfeld 1986, Balacheff 1991). Δείχνουν τη δυσκολία που υπάρχει στην ανάπτυξη ενός θεωρητικού μαθηματικού συλλογισμού, όπως της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οπότε οι δυσκολίες των μαθητών με την έννοια της απόδειξης μπορούν να αναζητηθούν και στο πλαίσιο μέσα στο οποίο η έννοια αυτή διδάσκεται. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι χρειάζεται μια μετατόπιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε δραστηριότητες και επίλυση προβλημάτων, όπου αναδεικνύονται η ευρηματικότητα και η συνθετική ικανότητα των μαθητών.

Οι Selden και Selden (2003) έδειξαν ότι οι μαθητές όταν κατασκευάζουν μια απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος αντιλαμβάνονται με λανθασμένο τρόπο τη συντακτική και σημασιολογική γνώση της. Θεωρούν ότι η κατασκευή ξεκινά από το συμπέρασμα και λειτουργούν αντίστροφα χωρίς να καταλαβαίνουν τα χαρακτηριστικά μιας γεωμετρικής έννοιας χρησιμοποιώντας δύσκολους συμβολισμούς, γλωσσικούς και συμβολικούς, έτσι ώστε να καταλήξουν στο ζητούμενο.

Έρευνα για τα επίπεδα των μαθητών στα ελληνικά σχολεία πραγματοποίησε επίσης ο Τζίφας (2005), που βασίστηκε και αυτός στη θεωρία των επιπέδων Van Hiele και προσπάθησε να εντοπίσει τις δυσκολίες των μαθητών γύρω από τις αποδείξεις της γεωμετρίας καθώς και αν σημειώνεται πρόοδος στο επίπεδο από τη μια τάξη στην

άλλη. Το δείγμα αποτελείται από μαθητές Γ' Γυμνασίου, Α' και Β' Λυκείου. Και τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής δεν είναι ενθαρρυντικά σχετικά με το επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές των ελληνικών σχολείων. Διαπιστώθηκε πως οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 με ελαστικό κριτήριο κατά 61,8% και με αυστηρό κριτήριο 67,8% (το ελαστικό κριτήριο σημαίνει ότι οι μαθητές απάντησαν 3 στις 5 ερωτήσεις, ενώ το αυστηρό ότι απάντησαν σε 4 από 5 ερωτήσεις). Στην Α' Λυκείου τα ποσοστά είναι 47,8% με ελαστικό κριτήριο και 62,8% με αυστηρό, ενώ οι μαθητές της Β' Λυκείου βρίσκονται στα αντίστοιχα επίπεδα με ελαστικό κριτήριο 41,1% ή 53,4% με αυστηρό κριτήριο. Το 60,6% του συνόλου βρίσκονται στα επίπεδα 0 και 1 με αυστηρό κριτήριο, ενώ 48,6% με ελαστικό κριτήριο. Αυτό δείχνει ότι ένα μεγάλο ποσοστό αδυνατεί να κατανοήσει την Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως διδάσκεται στο Λύκειο και έτσι εξηγείται το γεγονός ότι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθηση των γεωμετρικών αποδείξεων. Σχετικά με την εξέλιξη των επιπέδων κατά τη μετάβαση σε μεγαλύτερες τάξης η έρευνα έδειξε ότι υπάρχει μετάβαση των επιπέδων Van Hiele προς τα πάνω, η διδασκαλία δηλαδή βελτιώνει το επίπεδο των μαθητών αν και δεν ανταποκρίνεται στο επίπεδό που θεωρητικά έπρεπε να βρίσκονται.

Οι παραπάνω έρευνες μας πληροφορούν την ύπαρξη συσχετισμού μεταξύ των επιπέδων Van Hiele και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία. Χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες συλλογισμού, καθώς οι μαθητές δεν βρίσκονται στο «κατάλληλο» επίπεδο οι μαθητές είναι δύσκολο να κατανοήσουν την έννοια της απόδειξης και τη διαδικασία της στα πλαίσια του μαθήματος της γεωμετρίας. Βέβαια υπάρχουν και παράγοντες που επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία. Μερίδιο ευθύνης για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία έχουν και οι εκπαιδευτικοί και κυρίως η διδασκαλία που εφαρμόζουν στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Η πρακτική της διδασκαλίας τους σχετίζεται με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται τις οδηγίες των εκπαιδευτικών προγραμμάτων και πως τις εφαρμόζουν στη σχολική τάξη. Επομένως οι πεποιθήσεις των μαθητών διαμορφώνονται και σύμφωνα με τις πεποιθήσεις των ίδιων των εκπαιδευτικών.

Η έρευνα των Τσαλαπάτη κ.α. (2005) που πραγματοποιήθηκε σε 10 τάξεις της Α' Λυκείου, έδειξε ότι η απόδοση των μαθητών στις αποδείξεις δεν ήταν καθόλου ικανοποιητική. Μπορούν να διακρίνουν μια σωστή από μια λανθασμένη απόδειξη, αλλά σίγουρα οι σωστές φορμαλιστικές αποδείξεις γίνονται αποδεκτές από πολύ μεγαλύτερο αριθμό μαθητών, σε σχέση με αυτούς που θα επιλέξουν μια σωστή μη φορμαλιστική απόδειξη. Η έρευνα των Καραγιαννίδου κ.α. (2005), που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της Α' και Β' Λυκείου έδειξε ότι οι μαθητές που πιστεύουν περισσότερο στη χρησιμότητα των μαθηματικών έχουν ορθότερη αντίληψη για το πότε μια απόδειξη είναι ορθή και πλήρης και αυτό συμβαδίζει και με τα αποτελέσματα αντίστοιχων ερευνών (Kloosterman & Stage, 1992). Άλλωστε οι μαθητές που αποκτούν «κατανόηση σε βάθος» των αποδείξεων είναι πιο εύκολο να μπορούν να διακρίνουν τη χρησιμότητα σε αυτό που μαθαίνουν όταν το καταλάβουν

καλύτερα. Τα αποτελέσματα επίσης δείχνουν ότι μια μεγάλη πλειοψηφία μαθητών θεωρεί ότι οι φορμαλιστικές αποδείξεις είναι αυτές που νομιμοποιούνται και τυγχάνουν μεγαλύτερης αποδοχής από τον δάσκαλο, αν και οι μισοί περίπου μαθητές θεωρούν πιο κατανοητές τις επεξηγηματικές αποδείξεις. Μια ερμηνεία για αυτό θα μπορούσε να είναι ότι επιλέγουν αποδείξεις των οποίων τους συλλογισμούς μπορούν οι ίδιοι να αξιολογήσουν.

Παρατηρείται επομένως, ότι οι δυσκολίες των μαθητών προέρχονται από τις πεποιθήσεις τους ότι για να μάθουν μια απόδειξη αρκεί να απομνημονεύσουν αυτά που διδάσκονται από τον εκπαιδευτικό ή το σχολικό εγχειρίδιο. Δεν είναι για τους ίδιους αναγκαίο να αποδείξουν κάτι το οποίο θεωρείται γνωστό και ισχύει. Δηλαδή πιστεύουν πως η προέλευση της γνώσης της απόδειξης είναι αυτά που έχουν διατυπωθεί από τον Ευκλείδη και βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια. Οπότε αντιλαμβανόμαστε ότι δεν διακρίνουν τους ιδιαίτερους ρόλους που διαδραματίζει το μάθημα της γεωμετρίας. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει διαισθητική κατανόηση των εννοιών και η ελλιπής χρήση των ορισμών δείχνει τις πεποιθήσεις των μαθητών στην απλοποίηση της γεωμετρίας και της απόδειξης. Με άλλα λόγια, αντιλαμβάνονται την απόδειξη μόνο ως μέσο επαλήθευσης και δε διακρίνουν τους ιδιαίτερους ρόλους που διαδραματίζει στο μάθημα της γεωμετρίας. Από την άλλη, η ανεπαρκής διαισθητική κατανόηση των εννοιών και η άγνοια ή η ελλιπής χρήση των ορισμών φανερώνει τις πεποιθήσεις των μαθητών για την «απλότητα της γνώσης» της γεωμετρίας και της απόδειξης. Ότι έχουν διδαχτεί σε προηγούμενα έτη σπουδών είναι για τους μαθητές ανεξάρτητες πληροφορίες που δεν έχουν ενοποιηθεί, προκειμένου να συνδέουν και να αναπαριστούν τα δεδομένα μίας ζητούμενης απόδειξης πρότασης με γνωστές ιδιότητες γεωμετρικών αντικειμένων και εννοιών. Η αρνητική στάση των μαθητών απέναντι στις αποδείξεις πηγάζει στο γεγονός ότι αδυνατούν να κατανοήσουν τον παραγωγικό συλλογισμό, αφού είναι αδύνατο να κατανοηθεί ο τρόπος μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας χωρίς τις δεξιότητες του μαθηματικού συλλογισμού (Αργυρή, 2010, σελ 66).

Βέβαια εκτός από έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές για τις δυσκολίες και το επίπεδο κατανόησής τους, αντίστοιχα έχουν πραγματοποιηθεί και σε εκπαιδευτικούς. Η Δημητριάδου (2004) πραγματοποίησε μια έρευνα με εκπαιδευτικούς γύρω από τα σχολικά βιβλία και τη διδακτέα ύλη του μαθήματος της Γεωμετρίας. Σχετικά με τα βιβλία του Γυμνασίου, θεωρούν ότι με τη συνύπαρξη, στο ίδιο βιβλίο, της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας δεν γίνεται φανερός ο σκοπός και οι στόχοι του μαθήματος και αποτέλεσμα έχει την υποβάθμισή του. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών, το 76% τάσσεται υπέρ της ανεξάρτητης διδασκαλίας των μαθημάτων με προσαρμογή των σχολικών βιβλίων. Σχετικά με την ύλη του μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι υπάρχει διαφορά της ύλης της Α’ σε σχέση με της Β’ ως προς τη δυσκολία και τον όγκο. Για την Γ’ θεωρούνται δυσανάλογα λίγες οι διδακτικές ώρες σε σχέση με τις έννοιες που πραγματεύονται καθώς ότι οι μαθητές τελειώνουν το Γυμνάσιο και οι γνώσεις τους είναι ανεπαρκείς για τις απαιτήσεις του Λυκείου. Όλη αυτή η κατάσταση δημιουργεί δυσκολία κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών στους

μαθητές με συνέπεια στο Λύκειο αυτό το πρόβλημα να εντείνεται στη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας που τότε έχουν να αντιμετωπίσουν και την αξιωματική θεμελίωση. Η ανεπάρκεια αυτή των γνώσεων των μαθητών συνδέεται άμεσα και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις έρευνες με τα επίπεδα Van Hiele. Καθώς οι μαθητές τελειώνουν το Γυμνάσιο χωρίς να βρίσκονται στο κατάλληλο επίπεδο 4 Van Hiele, αλλά σε ποιο χαμηλό με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολία στη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας.

Σχετικά με το σχολικό βιβλίο του Λυκείου οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι είναι ογκώδες καθώς και ότι υπάρχει πλήθος ασκήσεων που δεν είναι ομαδοποιημένες. Κατά την άποψή τους θεωρούν ότι δεν ανταποκρίνεται στα ενδιαφέροντα των μαθητών και ότι τους απωθεί. Σχετικά με την ύλη του βιβλίου του Λυκείου οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα θεωρούν ότι η ύλη της Α' είναι τεράστια και δυσκολεύονται να την ολοκληρώσουν λόγω έλλειψης χρόνου. Η ύλη της Β' Λυκείου καλύπτεται με μεγαλύτερη ευχέρεια, και ένας μικρός αριθμός εκπαιδευτικών προβληματίζεται για την έλλειψη διδασκαλίας της Στερεομετρίας. Θεωρούν ότι για να διευκολυνθεί η ύλη της Α' θα μπορούσαν να μεταφερθούν τα δύο πρώτα κεφάλαια στη Γ' Γυμνασίου ή τα δύο τελευταία στην Β' Λυκείου. Γενικά οι εκπαιδευτικοί προτείνουν τη συγγραφή νέων βιβλίων, διαφορετικών για κάθε τάξη με αναδιάταξη της ύλης και συντόμευσή της, περικόπτοντας μερικές δύσκολες αποδείξεις θεωρημάτων.

Από τη συγκεκριμένη έρευνα συμπεραίνουμε ότι οι διδακτικοί στόχοι για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας δεν επιτυγχάνονται εξαιτίας της μορφής των σχολικών βιβλίων, τις επικαλύψεις και τον μεγάλο όγκο της ύλης. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να αποφεύγουν τα δύσκολα και πολύπλοκα κατά τη γνώμη τους θέματα, δεν ακολουθούν πιστά το αναλυτικό πρόγραμμα αλλά δίνουν έμφαση σε θέματα που οι ίδιοι θεωρούν σημαντικά από την εμπειρία τους και τη διαίσθησή τους. Έτσι αναγκάζονται να περικόψουν θέματα όπως η σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων και η μελέτη εισαγωγικών στοιχείων που είναι απαραίτητα για την κατανόηση των εννοιών. Η μελέτη των εννοιών δεν πραγματοποιείται σε βάθος και το πρόβλημα μετατίθεται από τάξη σε τάξη και από βαθμίδα σε βαθμίδα (Δημητριάδου, 2004, σελ. 16-26).

Σε άλλη έρευνα της Δημητριάδου (2007) σχετικά με το ρόλο της απόδειξης και το χαρακτήρα των αποδεικτικών μεθόδων που ακολουθούν οι καθηγητές στα σχολικά μαθηματικά, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα. Αρχικά σχετικά με το ρόλο της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά, οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών εμφανίζουν πέντε ρόλους της απόδειξης:

1. Ανάπτυξη της λογικής - κριτικής σκέψης: Πολλές απαντήσεις έδειξαν την ισχυρή πεποίθηση στη δύναμη της απόδειξης ως ένα διδακτικό αντικείμενο. Σε ορισμένες περιπτώσεις η πεποίθηση αυτή αγγίζει τα όρια θαυμασμού ή λατρείας, που εκφράζεται με ενθουσιώδη σχόλια ενώ δε λείπουν και ιστορικές αναφορές στις Ελληνικές ρίζες της έννοιας.

2. Η κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών.
3. Πείθει το μαθητή: Μερικοί καθηγητές πιστεύουν ότι η δική τους επιστημολογία για το ρόλο της απόδειξης, δηλαδή να «πείθει» για την αλήθεια της πρότασης, είναι επίσης και η επιστημολογία των μαθητών τους.
4. Μέσο εξάσκησης για την επίλυση ασκήσεων και για επιτυχία στις εξετάσεις: Τέτοιου είδους απαντήσεις είναι ενδεικτικές του εξετασικοκεντρικού χαρακτήρα του εκπαιδευτικού μας συστήματος.
5. Τέλος πιστεύουν πως η απόδειξη είναι μια έννοια εφαρμόσιμη και απαραίτητη στη ζωή.

Τα αποτελέσματα, τώρα, που αφορούν το χαρακτήρα των αποδεικτικών μεθόδων στα σχολικά μαθηματικά έδειξαν μια διάσταση των απόψεων των καθηγητών μεταξύ της αντίληψης ότι κύρια λειτουργία της απόδειξης είναι η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και την αντίληψη ότι η υπερβολική χρήση των αποδείξεων δημιουργεί προβλήματα κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών. Οι καθηγητές που είναι περισσότερο δογματικοί, δηλαδή οι καθηγητές με δογματικές ιδέες γύρω από τη χρησιμότητα των αυστηρών αποδεικτικών μεθόδων στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, θεωρούν πως πρέπει να διδάσκονται όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων, ακόμα και οι προφανείς, γιατί με αυτόν τον τρόπο αναπτύσσεται η κριτική σκέψη. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται φανερή η δομή και η λογική των Μαθηματικών, η γενική ισχύς των θεωρημάτων και έτσι επέρχεται η καλύτερη κατανόηση και απομνημόνευση των θεωρημάτων. Αντίθετα οι εκπαιδευτικοί που είναι πιο προοδευτικοί, δηλαδή οι καθηγητές με λιγότερο απόλυτες ιδέες, οι οποίοι αναγνωρίζουν την αρνητική επίδραση της χρήσης πολλών και δύσκολων αποδείξεων και πως δεν χρειάζεται να διδάσκονται όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων, λόγω περιορισμών του διδακτικού χρόνου, λόγω του εξεταστικού συστήματος όπου οι μαθητές ενδιαφέρονται για άλλα μαθήματα, και ότι κάποιες αποδείξεις είναι δύσκολες και απαιτητικές δημιουργώντας τους προβλήματα.

Όλες οι παραπάνω έρευνες που παρουσιάσαμε μας δίνουν μια εικόνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές γύρω από την αποδεικτική διαδικασία αλλά και σε καθηγητές. Οι έρευνες μας πληροφορούν πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν με φόβο τις αποδείξεις και δυσκολεύονται να κατανοήσουν το συμβολισμό, τη γλώσσα και τον παραγωγικό συλλογισμό πάνω στον οποίο στηρίζονται οι αποδείξεις. Η κατάσταση που επικρατεί σχετικά με τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δυσαρεστεί και τους εκπαιδευτικούς καθώς θεωρούν ότι ο μεγάλος όγκος της ύλης και τα σχολικά βιβλία δεν βοηθούν στην αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών. Επιπλέον οι έρευνες σχετικά με τα επίπεδα Van Hiele δείχνουν ότι οι μαθητές ενώ θα έπρεπε να βρίσκονται στο επίπεδο 4 κατά τη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας, οι μαθητές τελικά βρίσκονται στα επίπεδα 2 ή 3. Επομένως ενώ το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών έχει ως στόχο την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και της αξιωματικής θεμελίωσης από τους μαθητές στο Λύκειο, παρατηρούμε ότι αδυνατούν να αντεπεξέρθουν σε ικανοποιητικό βαθμό. Οπότε οι έρευνες μας πληροφορούν ότι ο στόχος της αξιωματικής θεμελίωσης ενδεχομένως

δεν επιτυγχάνεται από το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών και δείχνουν μια γενικότερη εικόνα των δυσκολιών των μαθητών γύρω από τις αποδείξεις.

Κεφάλαιο 4ο

Διδακτική ανάλυση ορισμένων δομικών στοιχείων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Στην προηγούμενη υποενότητα κάναμε μια ανασκόπηση ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της Διδακτικής σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές γύρω από την αποδεικτική διαδικασία στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε ποια είναι εκείνα τα στοιχεία που προβληματίζουν και δυσκολεύουν τους μαθητές. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει και έρευνες σχετικά με τα δομικά στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρία όπως είναι η θεμελίωση, ορισμοί, σχήματα, αποδείξεις, κατασκευές, και πως αυτά γίνονται αντιληπτά από τους μαθητές καθώς και που εντοπίζονται οι δυσκολίες τους.

4.1 Το γεωμετρικό σχήμα

Ο Piaget αναφέρθηκε, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, στη γεωμετρική σκέψη των παιδιών που προωθείται μέσω της έννοιας του σχήματος. Θεωρεί πως καθώς αναπτύσσεται το παιδί διακρίνει πρώτα τις απλές δομές όπως οι ανοικτές και κλειστές γραμμές, τα σύνορα, στη συνέχεια τις σχέσεις ευθυγράμμισης, δηλαδή τη σύνδεση σημείων και πλευρικότητας, τον εντοπισμό πλευρών των σχημάτων, και τέλος τις αποστάσεις, τα μεγέθη και τις αναλογίες, δηλαδή τις ευκλείδειες σχέσεις. Ο Piaget διέκρινε δύο τύπους μαθηματικής σκέψης, ένα σχηματικό που αναφέρεται στη δυνατότητα οπτικής επαφής και επίδρασης στην σκέψη με βάση ακίνητα εικονικά δεδομένα τα οποία και αντιμετωπίζουμε ως μια ολότητα πλήρη και σαφή αλλά στερείται αυστηρότητας δηλαδή μιας οπτικής αντίληψης. Ο άλλος τύπος είναι ο λειτουργικός και σχετίζεται με νοητικούς χειρισμούς υπεράνω συνόλων χαρακτηριστικών.

Έρευνες των τελευταίων δεκαετιών στο χώρο της Γεωμετρίας σχετικά με την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος έδειξαν τη δυσκολία των μαθητών. Δηλαδή οι μαθητές φαίνεται να μη τους βοηθάει η ύπαρξη ενός σχήματος για την ορθή επίλυση του προβλήματος. Ο Duval (1999) σε αντίθεση με τη θεωρία των επιπέδων του Van Hiele αναπτύσσει τη θεωρία του μέσω της «γνωστικής προσέγγισης» του θέματος. Προσπαθεί να εντοπίσει τις γνωστικές διαδικασίες που υπάρχουν πίσω από τη γεωμετρική σκέψη. Για τον Duval η διδασκαλία της Γεωμετρίας δεν πρέπει να ξεκινάει από την αναγνώριση των σχημάτων γιατί η διαδικασία αυτή «καθηλώνει

τους μαθητές στην εικονική εξεικόνιση» και συνεχίζει λέγοντας «πως δεν μπορεί να μάθει και να κατανοήσει κανείς τη Γεωμετρία, όταν βλέπει τα σχήματα εικονικά». Διακρίνει λοιπόν τέσσερα είδη ή τύπους γνωστικής κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος την αντιληπτική κατανόηση, διαδικαστική κατανόηση, λεκτική κατανόηση και τέλος λειτουργική κατανόηση. Η αντιληπτική κατανόηση σχετίζεται με την αναγνώριση ενός σχήματος με την πρώτη ματιά. Η σειριακή κατανόηση με την αντίληψη του τρόπου δόμησης των επιμέρους στοιχείων που είναι απαραίτητα για την κατασκευή του. Η λεκτική κατανόηση που συνδέεται με την επεξεργασία του σχήματος σε ένα γενικότερο πλαίσιο κατανόησης μιας εκφώνησης. Η λειτουργική κατανόηση εκφράζεται μέσω του απαγωγικού συλλογισμού και σχετίζεται με τους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος. Στην εκπαίδευση στόχος είναι η σύνδεση μεταξύ της γνωστικής διαδικασίας αναπαράστασης του χώρου (εξεικόνιση), της κατασκευής και του συλλογισμού, αλλά συχνά παρατηρείται ότι αποκλείονται αυτές οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Πιθανόν να ευθύνεται το γεγονός ότι δεν υπάρχουν κατάλληλες δραστηριότητες σύνδεσης-αποσύνδεσης και μετασχηματισμού των σχημάτων. Ο μαθητής συνήθως στερείται ευρετικών διαδικασιών αναδιοργάνωσης των συστατικών μερών του σχήματος και περιορίζεται στην οπτική (εικονική) αντίληψή του, η οποία δεν μπορεί να δημιουργήσει από μόνη της έννοιες.

Τα σχήματα καθορίζουν από την αρχή την πορεία της γεωμετρικής σκέψης, αφού συνδέουν τις αφηρημένες έννοιες με την αισθητηριακή αντίληψη. Στη διδασκαλία παίζουν καθοριστικό ρόλο καθώς συνδέονται με την αιτιολόγηση και την παραγωγική σκέψη των μαθητών. Από τη μεριά της διδακτικής της γεωμετρίας και των στοιχειωδών εννοιών αυτής, δεν μπορούμε να φανταστούμε το μάθημα χωρίς την ύπαρξη διαγραμμάτων, εικονικών ή λογικών σχημάτων, γενικά εικονικών αναπαραστάσεων. Αυτή η πρακτική είναι η συνήθης εξαιτίας του γεγονότος ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν τους αφηρημένους συλλογισμούς σε τυπική γλώσσα χωρίς την ένδειξη ενός αντικειμένου αναφοράς που θα καλύπτει το κενό μεταξύ του φορμαλισμού και των άτυπων συλλογισμών. Το γεωμετρικό σχήμα ως μαθηματική έννοια είναι το κατεξοχήν αντικείμενο της γεωμετρίας, στο επίπεδο της διδακτικής τουλάχιστον. Το σχήμα και ο ρόλος του είναι βασικός για τις γνωστικές δεξιότητες όπως την κατηγοριοποίηση, την αναγνώριση και τη δημιουργία εικασιών από τους μαθητές.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία παρουσιάζει μια αδυναμία, δεν φαίνεται η πορεία που ακολουθείται από την παρατήρηση στη θεωρία. Ακόμα και αν η διάκριση αυτή εμφανίζεται και μέσα από το αναλυτικό πρόγραμμα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χωρίζοντας τη γεωμετρία της παρατήρησης, του Γυμνασίου, από τη γεωμετρία της απόδειξης, του Λυκείου, η σύγχυση για τους μαθητές παραμένει και θεωρούν την παρατήρηση ισοδύναμη της απόδειξης.

Στόχος του μαθήματος της Γεωμετρίας είναι η ανάπτυξη ικανότητας από το μαθητή να παρατηρεί και να ανακαλύπτει γεωμετρικές ιδιότητες ώστε να μπορεί να τις εξηγεί και να τις περιγράφει με λογικά επιχειρήματα. Για να μπορέσει ο μαθητής να κατακτήσει αυτό το στόχο θα περάσει από το στάδιο της παρατήρησης στοιχείων και

της σύνθεσης πολλαπλών συνιστωσών. Μια χρήσιμη λειτουργία του σχήματος είναι αυτής της σύνθεσης και της οργάνωσής τους ώστε να γίνουν κατανοητές. Αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του χώρου και των ιδιοτήτων του σχήματος. Η σύγχρονη πρακτική που ακολουθείται για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, είναι κυρίως επικεντρωμένη στην έννοια της απόδειξης αγνοώντας σχεδόν το πολύ σημαντικό επίπεδο της οπτικοποίησης που προηγείται και χρησιμεύει για τη διατύπωση εικασιών. Όμως η απομάκρυνση από το σχήμα παραμένει γεγονός. Πολλοί υποστηρίζουν πως οφείλεται στα λάθη εξαιτίας της διαισθητικής προσέγγισης των γεωμετρικών κατασκευών που φαίνονταν προφανή.

Στη σύγχρονη διδασκαλία ο ρόλος του σχήματος δημιουργεί προβληματισμό τόσο για τους μαθητές όσο και για τους καθηγητές. Οι καθηγητές προσπαθούν να προτρέψουν τους μαθητές τους να μη βασίζονται στο σχήμα απόλυτα, αλλά σε λογικές διαδικασίες τεκμηρίωσης των επιχειρημάτων τους όπου οι μαθητές δεν έχουν καμία εξοικείωση. Από την άλλη δεν μπορούν και να απορρίψουν το σχήμα αφού αποτελεί δομικό στοιχείο της γεωμετρικής σκέψης. Οπότε ο διπλός δρόμος χρήσης των σχημάτων δημιουργεί δυσκολίες στους μαθητές, αφού αδυνατούν να ελέγχουν τα δεδομένα που διαισθητικά ή οπτικά φαντάζουν προφανή. Με αποτέλεσμα να συμπεραίνουν εσφαλμένα στηριζόμενοι μόνο στο σχήμα

Ένας μαθηματικός συλλογισμός δεν αναφέρεται στις μαθηματικές οντότητες και αναπαραστάσεις ούτε ως αντικείμενα ούτε ως απλά σχέδια. Τα υλικά αντικείμενα αποτελούν ατελείς νοητικές οντότητες με τα οποία ασχολούνται οι μαθηματικοί και οι μαθητές. Στα γεωμετρικά αντικείμενα αποδίδονται έννοιες που δεν ανήκουν στο φυσικό και αισθητό κόσμο. Οι γεωμετρικές οντότητες με τις οποίες ασχολούμαστε δεν κατασκευάζονται στον πραγματικό κόσμο. Τα σημεία έχουν μηδενική διάσταση, οι γραμμές είναι μονοδιάστατες και τα επίπεδα δύο διαστάσεων δεν υπάρχουν στην εμπειρική μας πραγματικότητα αφού ο κόσμος μας αποτελείται από αντικείμενα τριών διαστάσεων. Κάθε γεωμετρικό αντικείμενο είναι νοητό κατασκεύασμα και δεν κατέχει υλική υπόσταση, όπως ο κύβος που είναι αντικείμενο του χώρου δεν ανήκει στην αισθητή πραγματικότητα, και οποιαδήποτε αναπαράστασή του στο χαρτί παραβιάζει τους μαθηματικούς ορισμούς. Επομένως κάθε αναπαράσταση προσεγγίζει αλλά δεν ταυτίζεται με το μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται.

Το σημαντικό είναι ότι οι γεωμετρικές απεικονίσεις σχεδίασης, τα σχήματα και η εννοιολογική φύση αυτών έχουν να κάνουν με ορισμούς. Οι ορισμοί αυτοί απαιτούν ακρίβεια ώστε να δώσουν μεγάλο πλήθος αποτελεσμάτων. Οι ιδιότητες των σχημάτων προκύπτουν από τη δυναμική του ορισμού και από τα πλαίσια του αξιωματικού θεμελιωμένου συστήματος. Έτσι ένα γεωμετρικό σχήμα έχει ένα εννοιολογικό υπόβαθρο. Για να μελετήσουμε ένα γεωμετρικό αντικείμενο το περιγράφουμε με βάση τις ιδιότητές του που το ξεχωρίζουν, αυτό όμως δεν αρκεί ώστε να είναι μονοσήμαντο. Μια εικόνα είναι μια οπτική εικόνα αφού έχει μια ιδιότητα που οι άλλες έννοιες δεν έχουν, δηλαδή σε ένα συγκεκριμένο σχήμα υπάρχουν νοητικές αναπαραστάσεις ιδιοτήτων του χώρου που μας βοηθούν να το διαχωρίσουμε από τα υπόλοιπα.

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας του ο Μιχελαράκης (2010) ασχολήθηκε με την έννοια του σχήματος και την κατανόησή του από τους μαθητές. Αναφέρει πως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την κατανόηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εστιάζονται στην αδυναμία τους να αντιληφθούν τις σχέσεις μεταξύ της θεωρίας και των σχηματικών διαγραμμάτων. Η ενασχόληση με τη Γεωμετρία συμβάλει θετικά για τη διευκρίνιση αυτών των σχέσεων, μέσα από την χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά τη διαδικασία ανάλυσης ενός προβλήματος που πραγματοποιείται, μέσω της διαισθητικής παρουσίασης των σχέσεων του.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το 2010 σε δείγμα 501 μαθητών Β' Λυκείου σχετικά με τη δομή της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος δύο διαστάσεων, με βάση τις τέσσερις διαστάσεις που προαναφέραμε, δηλαδή την αντιληπτική κατανόηση, λειτουργική κατανόηση, λειτουργική και ακολουθιακή κατανόηση, μέσα από 23 ερωτήσεις. Από τη στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στα έργα λειτουργικής σύλληψης, όπως οπτική τροποποίηση και αλλαγή θέσης. Καθώς επίσης και στα έργα ακολουθιακής προσέγγισης εξαιτίας του γεγονότος ότι οι κατασκευές είναι πλέον εκτός ύλης. Από τις ερωτήσεις της λειτουργικής κατανόησης προκύπτει ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές βλέπουν κυρίως «εικονικά» τα σχήματα.

Για τη διερεύνηση των γνωστικών εμποδίων που εμφανίζονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης καθώς και πως συνδέεται με τη χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων, δόθηκαν συγκεκριμένες ερωτήσεις που είχαν τη φύση εικόνας ή τη φύση αντικειμένου. Αυτές που είχαν τη φύση εικόνας η λεκτική τους διατύπωση δε συμβάδιζε με τη σχηματική παράσταση, ενώ αυτές που είχαν φύση αντικειμένου είχαν ταύτιση λεκτικής και σχηματικής παράστασης. Ακόμα από την έρευνα παρατηρήθηκε μια προσκόλληση των μαθητών στο να προσέχουν κυρίως το περίγραμμα και να αδυνατούν να προσεγγίσουν χωριστά κάθε τμήμα του σχήματος.

Οι μαθητές έχουν τη τάση να αντιλαμβάνονται συγκεκριμένα διαγράμματα ως πρότυπα και έτσι περιορίζουν τις συλλογές εικόνων για κάποιο αντικείμενο ή μια έννοια και δημιουργούν πρωτοτυπικές μορφές. Είναι γεγονός βέβαια ότι οι μαθητές ακόμα και αν έχουν ένα ευρύ φάσμα διακριτών αναπαραστάσεων προτιμούν τη χρήση πρωτοτυπικών μορφών λόγω τις εξοικείωσής τους με αυτά μέσα από τη διδασκαλία. Μια ακόμα αδυναμία των μαθητών είναι να «δουν» ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή να στρέψουν τη προσοχή τους από συγκεκριμένα μέρη ενός διαγράμματος στο σύνολο και αντίστροφα.

4.2 Η οπτικοποίηση στη Γεωμετρία

Στη διάρκεια επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος τα γνωρίσματα που χρησιμοποιούμε για την αντιμετώπισή του είναι αυτά που αποκαλύπτουν σε εμάς τις

λογικές σχέσεις που διέπουν το σχήμα του εν λόγου προβλήματος. Ο ασχολούμενος με τη γεωμετρία προσπαθεί να μελετήσει το κάθε σχήμα που παίρνει μέρος στη διαπραγμάτευση αυτή και να εντοπίσει τα χαρακτηριστικά του. Οι νοητικές διεργασίες μπορούν να ξεχωρίσουν αυτό που μπορούμε να ονομάζουμε έννοια του σχήματος ή το εννοιολογικό υπόβαθρο του σχήματος, από το σχήμα καθαυτό και τις όποιες ανομοιομορφίες ή ατέλειες να παρουσιάζει σε σχέση με τον αυστηρό μαθηματικό και λογικό ορισμό του. Μια αυστηρή διαδικασία για να τροποποιούμε το σχήμα ώστε να προσεγγίζει το ιδανικό. Σε εννοιολογικό επίπεδο μια τέτοια διαδικασία γίνεται αυτόματα, ώστε το διάγραμμα ή το σχήμα να αποτελεί ενεργό συστατικό μιας αυστηρής λογικής διαδικασίας δικαιολόγησης των ισχυρισμών.

Η Γεωμετρία ασχολείται με νοητικές οντότητες καθορισμένες από ορισμούς, τα γεωμετρικά σχήματα, όπως ο κύκλος, η ευθεία, το επίπεδο και πολλά άλλα. Τα αντικείμενα αυτά είναι αφηρημένες έννοιες και οπτικοποιούνται ώστε να γίνονται κατανοητά μέσω των αισθήσεων. Για παράδειγμα η σφαίρα είναι μια αφηρημένη ιδέα αλλά ταυτόχρονα και μια φορμαλιστικά ορισμένη οντότητα όπως κάθε έννοια. Η σφαίρα έχει σχηματικές ιδιότητες, όπως το δεδομένο σχήμα και η σταθερή καμπυλότητα. Το τέλειο σχήμα της σφαίρας και κάθε άλλου γεωμετρικού αντικειμένου δεν εντοπίζονται στον πραγματικό κόσμο παρά μόνο με προσεγγίσεις. Αυτή η συνύπαρξη μεταξύ των αφηρημένων ιδεών και των σχημάτων που εμφανίζεται στις γεωμετρικές οντότητες είναι το απεικονιστικό-αναπαραστασιακό συστατικό των οντοτήτων αυτών που δημιουργούν νέους τρόπους σκέψης. Οπότε τα γεωμετρικά σχήματα δεν ταυτίζονται με τις αντίστοιχες γεωμετρικές έννοιες αλλά ανήκουν στο πλαίσιο ανάπτυξης, επεξεργασίας και εξέλιξης αυτών.

Τα γεωμετρικά σχήματα δεν μπορούμε να θεωρούμε ότι ταυτίζονται με τις αντίστοιχες Γεωμετρικές Έννοιες αλλά εντάσσονται στο γενικότερο πλαίσιο ανάπτυξης, επεξεργασίας και εξέλιξης αυτών. Αυτές οι κατευθύνσεις που τα σχήματα μας παρέχουν θα μετατραπούν σε εικασίες και μέσα από τους λογικούς περιορισμούς να οδηγηθούν στην αυστηρή διατύπωση και τέλος στην απόδειξη. Άρα τα γεωμετρικά σχήματα δίνουν τροφή για σκέψη αλλά αδυνατούν από μόνα τους να παρέχουν βαθύτερα ζητήματα γνώσης λόγω μη ύπαρξης πλαισίου ελέγχου. Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα ακολουθεί παραδοσιακές μεθόδους, που δεν ευνοούν την ανάπτυξη των εικασιών, καθώς στηρίζεται σε φορμαλιστικές διαδικασίες στα πλαίσια της αξιωματικής θεμελίωσης. Η εικασία όμως είναι απαραίτητη τόσο στο σχολείο όσο και στην έρευνα. Μας δίνει μια πρώτη εντύπωση που θα ακολουθήσουμε και μας κατευθύνει σε κάποιο στόχο. Τελικό στόχο αποτελεί η διαδρομή μέσα από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανό να ισχύει η συγκεκριμένη εικασία Στη γεωμετρία οι εικονικές αναπαραστάσεις παίζουν κυρίαρχο ρόλο. Μέσα από αυτές μπορούμε να κατευθύνουμε τη νόησή μας, να εντοπίσουμε ισχυρισμούς και αποδείξεις τους και να καλύψουμε το κενό μεταξύ των αυστηρών λογικών συλλογισμών.

Ο διαχωρισμός των αναπαραστάσεων από τα ίδια τα αντικείμενα δεν αποτελεί αρνητικό στοιχείο για τη σημασία των αναπαραστάσεων. Δείχνει ότι δεν γίνεται να

αποφευχθεί η χρήση των σχημάτων στη διδασκαλία της γεωμετρίας, αλλά μπορεί να βοηθήσει και σε άλλους τομείς των μαθηματικών όπως η άλγεβρα. Όταν οι διάφορες μορφές αναπαραστάσεων αλληλοσυνδέονται το τελικό ζητούμενο είναι η ανάπτυξη του επιπέδου γνώσης των μαθητών. Το σημαντικό είναι να μπορέσει κάποιος να διακρίνει την έννοια μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Το ζήτημα που απασχολεί τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι αν η αναπαράσταση μπορεί να παίζει κεντρικό ρόλο ή τα αντικείμενα της γνώσης του ατόμου. Οι μαθηματικές έννοιες δεν προσεγγίζονται αποκλειστικά μόνο από τις αισθήσεις αλλά και με πιο αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο, σύμφωνα με τον οποίο είμαστε πιο σίγουροι για τα αποτέλεσμά μας. Με τον τρόπο αυτό δεν μπορούμε να παραπλανηθούμε ή να παρανοήσουμε καθώς καθοδηγούμαστε από ακρίβεια μέσα από λογικά βήματα. Το γεγονός αυτό ενδεχομένως να μας προσανατολίσει στον παραγωγικό συλλογισμό παραμερίζοντας μια οπτική ή αισθητική προσέγγιση (Νόκας, 2010).

Ο Duval (1999) υποστηρίζει ότι η οπτικοποίηση είναι η αναπαράσταση που μας επιτρέπει να διακρίνουμε και να αναγνωρίσουμε το αναπαριστώμενο αλλά και ότι δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς την οπτικοποίηση. Οι διάφορες θεωρίες γεωμετρικού συλλογισμού, κυρίως του Fischbein και Duval, δείχνουν ότι η οπτικοποίηση συνδέεται με τη διαισθητική προσέγγιση, αλλά εμπεριέχει την κατανόηση του αντικειμένου που προέρχεται από τη διαίσθηση αυτή. Οι Fujita, Jones & Yamamoto (2004) αναφέρουν ότι η γεωμετρική διαίσθηση περιλαμβάνει το χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων, την αναγνώριση των ιδιοτήτων για την επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Ο σημαντικός ρόλος της οπτικοποίησης στη μάθηση και τη διδασκαλία είναι ότι δίνει νόημα στις μαθηματικές έννοιες και τις σχέσεις μεταξύ τους, αποτελεί εργαλείο για τη διερεύνηση των μαθηματικών προβλημάτων και ενισχύει τη μαθηματική ανακάλυψη. Ο Fischbein (1993) υποστηρίζει ότι ο ρόλος μιας οπτικής εικόνας δεν είναι μόνο να οργανώνει τα δεδομένα σε δομές με νόημα, αλλά να καθοδηγεί την αναλυτική ανάπτυξη μιας μαθηματικής λύσης. Στο ίδιο πλαίσιο μπορεί να υποστηρίξει και να οπτικοποιήσει την φορμαλιστική γλώσσα των μαθηματικών, να γεφυρώσει το χάσμα ανάμεσα στις λογικές λύσεις και τη λανθασμένη κατά πολλούς διαίσθηση. Βέβαια αρκετοί ερευνητές (Barwise & Etchemendy, 1991) είναι αυτοί που υποστηρίζουν ότι ο ρόλος της οπτικοποίησης είναι αμφιλεγόμενος καθώς μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα ή να υποβαθμίσει τη σημασία της απόδειξης.

4.3 Ο ρόλος της εικασίας στην αποδεικτική διαδικασία

Για την εκμάθηση και διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η οπτικοποίηση αποτελεί μέσο απλής αναπαράστασης αλλά και βασικό στοιχείο της συλλογιστικής, της επίλυσης προβλημάτων και της απόδειξης. Οι δυσκολίες που υπάρχουν σχετικά με την διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχουν να κάνουν με το τι είναι νόμιμο

και αποδεκτό και τι όχι σχετικά με τις αποδείξεις καθώς συχνά ακούμε στη σχολική τάξη από τους μαθητές μας τη φράση «αυτό δεν είναι μαθηματικά». Με αυτό τον τρόπο υποβαθμίζεται η οπτικοποίηση ως μέρος της μαθηματικής πρακτικής. Η διαισθητική απόδειξη μιας ιδιότητας μέσω των εικόνων δεν εμποδίζει να λάβει μια τυπική μορφή σύμφωνα με τον παραγωγικό συλλογισμό και την αξιωματική δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αντιθέτως η διαισθητική προσέγγιση αποτελεί τη βάση για να στηριχθεί και να αναπτυχθεί μια αυστηρή απόδειξη.

Η σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη σχέση εικασίας και έγκυρου επιχειρήματος. Η εικασία μπορεί να δημιουργηθεί και χωρίς την παρουσία επιχειρηματολογίας, που προέρχεται από ένα σχήμα ή τη διαίσθηση. Η εικασία είναι μια δήλωση που συνδέεται με το σύνολο των εννοιών και ορισμών, όπου η δήλωση αυτή γίνεται αληθής με την κατασκευή επιχειρήματος που την ικανοποιεί. Μετατρέπεται σε ένα έγκυρο επιχείρημα όταν κάποιο θεώρημα αποδεικνύεται ώστε να το επαληθεύσει. Όταν μια δήλωση επικυρώνεται από μια θεωρία τότε η απόδειξη δομείται.

Η εικασία μέσω της οπτικοποίηση περιλαμβάνει την οργάνωση των δεδομένων όπου οι πληροφορίες παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της επιχειρηματολογίας και κατ' επέκταση της απόδειξης. Η Καρατρασόγλου (2011) πραγματοποίησε έρευνα σε μαθητές της Α' Λυκείου, σχετικά με τη διερεύνηση του γεωμετρικού συλλογισμού κατά το πέρασμα από την εικασία στην απόδειξη μέσω της οπτικοποίησης. Η παρούσα έρευνα ανέδειξε ότι η οπτικοποίηση είναι δυνατόν να ενισχύσει την κατανόηση, να βελτιώσει την απόδοση νοήματος και να επηρεάσει τη μορφή των επιχειρημάτων που οι μαθητές παρέχουν κατά την αποδεικτική διαδικασία, αφού προηγουμένως έχουν απολέσει τη βεβαιότητα της δεδομένης αλήθειας των γεωμετρικών ισχυρισμών.

Οι υπολογιστές έχουν αυξήσει σημαντικά τις δυνατότητες της οπτικής απεικόνισης και για το λόγο αυτό η ερευνητική κοινότητα έχει στραφεί στη συμβολή του δυναμικού περιβάλλοντος στις τυπικές αποδείξεις. Το δυναμικό περιβάλλον μπορεί να αναπτύξει τη γεωμετρική κατανόηση και τη διερεύνηση των σχημάτων με αποτέλεσμα η διαμόρφωση εικασιών να γίνεται πιο προσιτή στους μαθητές και να αποκτά νόημα. Η χρήση των υπολογιστών έχει ανοίξει νέα σύνορα στη διδασκαλία της γεωμετρίας καθώς οι μαθητές μπορούν να διευρύνουν την οπτική τους για την απόδειξη μέσω της επιχειρηματολογίας και στη συνέχεια σε μια τυπική απόδειξη. Αν οι μαθητές βρίσκονται σε ένα Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας (όπως είναι τα Cabri, Sketchpad, GeoGebra) μπορούν μέσω της λειτουργίας του «συρσίματος» (dragging) να έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν αρκετές περιπτώσεις και να διαπιστώσουν ότι μεταβάλλοντας ένα σημείο, μετατρέπεται το σχήμα. Η διαδικασία αυτή μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και να οδηγήσει στην ανάγκη για επιβεβαίωση μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας.

Επιπλέον οι ΤΠΕ είναι κατάλληλες για την εισαγωγή των μαθητών στη θεωρητική σκέψη, δηλαδή συνδέουν την έννοια της απόδειξης με την έννοια της 'Θεωρίας'(αυτό

που στα Μαθηματικά καλείται Θεώρημα) (Mariotti et al., 1997). Πειραματικές αποδείξεις (Mariotti, 1996) δείχνουν ότι με την χρήση χαρτί –μολύβι είναι πιο δύσκολο να αποκτηθεί η θεωρητική άποψη των γεωμετρικών ιδιοτήτων από ότι με την βοήθεια ενός λογισμικού. Όταν ένα σχέδιο παράγεται σε φύλλο χαρτιού, είναι φυσικό ότι για την επικύρωση της κατασκευής πρέπει να επικεντρωνόμαστε στην κατάρτιση του ίδιου του σχεδίου και σε μια άμεση αντίληψη. Ασάφεια μεταξύ σχεδίων, καθώς και των στοιχείων που αποτυπώνονται πάνω τους μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο. Η κατάρτισή των ίδιων σχεδίων σε ΤΠΕ δεν χαρακτηρίζονται από τέτοιες δυσκολίες, όποτε το ενδιαφέρον της μαθηματικής τάξης και της κοινότητας των μαθηματικών επικεντρώνεται στην κατασκευή της θεωρητικής πλευράς των γεωμετρικών αντικειμένων (Αργυρή, 2010, σελ. 113). Ακόμα οι μαθητές μπορούν να περάσουν από το «ειδικό» του συγκεκριμένου σχήματος στο «γενικό», το οποίο είναι το ζητούμενο στα μαθηματικά και το οποίο περιγράφεται από όλα τα σχήματα της οικογένειας που μπορούν να κατασκευαστούν με τη δυνατότητα του dragging. Από επιστημολογική άποψη, οι ΤΠΕ αποτελούν τη γέφυρα μεταξύ της εμπειρικής και της θεωρητικής διάστασης της γεωμετρίας (C. Laborde, C. Kynigow et all, 2006).

Σύμφωνα με κάποιες απόψεις οι μαθητές μέσω της διαδικασίας του «συρσίματος» μπορούν να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους. Αν οι μαθητές ανακαλύψουν αντιπαραδείγματα στις εικασίες τους κατά τη διάρκεια αυτής της δυναμικής διαδικασίας μπορούν να προσαρμόσουν την εικασία μέσω αυτών ή να ξεκινήσουν μια νέα εικασία. Όλη αυτή η διαδικασία της εξερεύνησης, της ανακάλυψης και του ελέγχου, μπορεί να οδηγήσει στην προσπάθεια να αποδείξουν αφαιρετικά, καθώς δύσκολα αισθάνονται την ανάγκη θεωρητικής απόδειξης. Μια αποτυχημένη προσπάθεια στην απόδειξη ή ένα σφάλμα οδηγεί το μαθητή πίσω στον εντοπισμό μιας εικασίας ώστε να τον βοηθήσει να τελειώσει την αποδεικτική διαδικασία. Το σύρσιμο βοηθάει στην ανάπτυξη εικασιών μέσω της εξερεύνησης των σχημάτων που επέρχεται από την μετακίνησή τους, την αναζήτησης των τρόπων με τους οποίους αλλάζουν μορφές και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να ανακαλύψουν τις αναλλοίωτες ιδιότητές τους. Η δυνατότητα του συρσίματος ανατροφοδοτεί την ανακάλυψη και έτσι υποστηρίζεται ο ρόλος των αποδείξεων ως «εξήγηση» των εικασιών ή των ιδιοτήτων.

Οι ΤΠΕ αναδεικνύουν τη γνωστική ανάγκη για την πορεία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Πρέπει να τονιστεί ότι ο πειραματισμός δεν οδηγεί στην ανακάλυψη μαθηματικών συμπερασμάτων, αλλά χρειάζεται ο παραγωγικός συλλογισμός ο οποίος μας οδηγεί σε νέα συμπεράσματα και νέες ανακαλύψεις. Στο πλαίσιο αυτό η απόδειξη συστηματοποιείται και συνδέει ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα με μια παραγωγική αλυσίδα εμφανίζοντας την ισχύ μιας μαθηματικής σχέσης. Η χρήση των ΤΠΕ τα τελευταία χρόνια έχει ενισχύσει τη σχέση μεταξύ πειραματισμού και απόδειξης. Ο πειραματισμός στα μαθηματικά περιλαμβάνει σημαντικές λειτουργίες σχετικά με την απόδειξη, όπως η υπόθεση, η επαλήθευση, η

σύγκριση, η κατανόηση και η παρουσίαση μιας γραφικής παράστασης (Καρδαμίτσης, 2010).

Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τη Καλογερία (2006) σχετικά με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών κάτω από την επίδραση των ΤΠΕ, σε εκπαιδευτικούς πριν και μετά την παρακολούθηση σεμιναρίου για τη χρήση των ΤΠΕ στη διδασκαλία του μαθήματος, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί αποδίδουν στην απόδειξη το ρόλο της επιβεβαίωσης μιας μαθηματικής πρότασης. Πιστεύουν ότι ο μαθητής μέσα από την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να κατανοήσει την παραγωγική διαδικασία και να μπορέσει να τη χρησιμοποιήσει αντίστοιχα για να εντάξει τη νέα γνώση στην προηγούμενη. Οι εκπαιδευτικοί προτιμούν τις αποδείξεις που χαρακτηρίζονται από αυστηρή δομή επιχειρημάτων με μαθηματική γλώσσα. Σχετικά με τις ΤΠΕ έχουν την αντίληψη πως αποτελούν εποπτικά μέσα όπου οι μαθητές μπορούν να δουν μια κατάσταση να εξελίσσεται μπροστά τους, δηλαδή η αξία που προσφέρουν είναι η οπτικοποίηση.

Σε άλλη έρευνα από τους Λεμονίδης και Αποστόλου (2011), σχετικά με τις συμπεριφορές μαθητών Γ' Γυμνασίου σε αποδείξεις προβλημάτων γεωμετρίας με το πρόγραμμα Geogebra , έδειξε ότι οι μαθητές, παρότι γνώριζαν μόνο την τυπική μαθηματική απόδειξη, στην συντριπτική τους πλειοψηφία δεν την επέλεξαν για να τεκμηριώσουν την αλήθεια της πρότασης του προβλήματος στην οποία κατέληξαν. Αντί αυτής προτίμησαν την εμπειρική απόδειξη που προσφέρει το «σύρσιμο» του Geogebra. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, πρώτον να φαίνεται ότι η χρήση του λογισμικού έχει ευρύ πεδίο ως εργαλείο απόδειξης γεωμετρικών προβλημάτων όπου η εμπειρική απόδειξη είναι το ζητούμενο. Δεύτερον υπάρχει «σοβαρός κίνδυνος» οι μαθητές να εγκαταλείψουν κάθε προσπάθεια να τεκμηριώσουν την αλήθεια της μαθηματικής τους πρότασης χρησιμοποιώντας την παραγωγική (τυπική μαθηματική) απόδειξη και να καταφύγουν στην εμπειρική, η οποία δεν είναι αποδεκτή από τους επαγγελματίες μαθηματικούς. Επομένως οι ΤΠΕ πιθανόν να μη βοηθάει στο πέρασμα από την εμπειρική στην παραγωγική απόδειξη που είναι το ζητούμενο στα μαθηματικά. Βέβαια η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές δεν βλέπουν το λογισμικό μόνο ως εργαλείο σχεδίασης γεωμετρικών σχημάτων αλλά και ως εργαλείο κατανόησης του μαθήματος της γεωμετρίας.

Τα διάφορα Προγράμματα Δυναμικής Γεωμετρίας διαθέτουν εντολές και εργαλεία γεωμετρικών κατασκευών και υπολογισμών που μεσολαβούν στην εκμάθηση της γεωμετρικής θεωρίας, αλλά και στις γεωμετρικές αποδείξεις. Οι δυνατότητες που παρέχουν τα Δυναμικά Λογισμικά μπορούν να βοηθήσουν στη μεσολάβηση της μετάβασης από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο. Η χρήση των Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας για την εκμάθηση των Μαθηματικών δεν μπορούν να δημιουργήσουν κατάλληλο περιβάλλον όπου οι μαθητές να εξοικειωθούν με τη «θεωρία» του μαθήματος. Υπάρχει όμως και ο κίνδυνος τα Περιβάλλοντα Δυναμική Γεωμετρίας να προσφέρουν οπτικές και ευρετικές δυνατότητες με αποτέλεσμα στους μαθητές να φαίνονται τόσο εύκολες οι μαθηματικές ιδιότητες και ενδεχομένως να μειώσουν την ανάγκη τους για επαλήθευση των εικασιών τους μέσω των αποδείξεων.

Βέβαια μια τέτοια δυνατότητα ανοίγει νέους δρόμους για την προσέγγιση της απόδειξης, δηλαδή να συμβάλλουν οι ΤΠΕ στην πρόοδο της κατανόησης από τους μαθητές του ρόλου της απόδειξης και της ανάγκης τους να κάνουν αποδείξεις.

Στα πλαίσια της διπλωματικής της εργασίας η Καρατρασόγλου (2011) σχετικά με το πώς βοηθάει η οπτικοποίηση στο πέρασμα από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη, συμπεραίνει πως μόνο η οπτική προσέγγιση δίνει στους μαθητές τη βεβαιότητα για την ορθότητα των ισχυρισμών τους και στη συνέχεια προσπαθούν να τεκμηριώσουν και θεωρητικά τα επιχειρήματά τους. Όμως συχνά η απόδειξη που παραθέτουν είναι σε μορφή συμπεράσματος, ως αποτέλεσμα των οπτικών παρατηρήσεών τους και δεν εμφανίζει γνωστική συνέχεια με την αρχική τους επιχειρηματολογία. Τα Δυναμικά Προγράμματα επιβεβαιώνουν τη φάση της εικασίας και δεν προσφέρουν νέα επιχειρήματα.

Τα τρία δομικά στοιχεία που αναλύθηκαν παραπάνω σε αυτό το κεφάλαιο, το σχήμα, η οπτικοποίηση και η εικασία στην αποδεικτική διαδικασία, δεν αποτελούν αυτοσκοπό της παρούσας εργασίας αλλά επηρεάζουν άμεσα τη διδασκαλία του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα. Στην προηγούμενη υποενότητα μέσα από την ανασκόπηση των ερευνών που παρουσιάστηκε εντοπίσαμε δυσκολίες των μαθητών απέναντι στο μάθημα της Γεωμετρίας. Εδώ εντοπίζουμε ότι το γεωμετρικό σχήμα δεν βοηθά πάντα στο να ξεπεραστούν τα εμπόδια, καθώς οι μαθητές δυσκολεύονται να εντοπίσουν τα συστατικά μέρη του σχήματος και περιορίζονται στην οπτική του αντίληψη ως ολότητα. Οι καθηγητές προσπαθούν να προτρέψουν τους μαθητές να βασίζονται λιγότερο στο σχήμα και περισσότερο στις λογικές διαδικασίες τεκμηρίωσης. Οι νοητικές οντότητες που υπάρχουν στη γεωμετρία οπτικοποιούνται μέσω των σχημάτων για να γίνουν κατανοητές μέσω των αισθήσεων. Στην Ελλάδα όμως η διδασκαλία της Γεωμετρίας στηρίζεται κυρίως στις φορμαλιστικές μεθόδους και λιγότερο στην ανάπτυξη εικασιών καθώς έτσι δεν μπορούμε να παραπλανηθούμε. Βέβαια η έρευνα της Καρατρασόγλου έδειξε ότι η οπτικοποίηση μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη επιχειρημάτων των μαθητών κατά την αποδεικτική διαδικασία, αφού πρώτα θα έχουν πεισθεί οπτικά για την αλήθεια της απόδειξης.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα συμπεράσματα των δύο τελευταίων κεφαλαίων, μέσα από τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί, μπορούμε να καταγράψουμε ένα κατάλογο με τις προϋποθέσεις που απαιτούνται ώστε οι μαθητές της Α’ Λυκείου να μυηθούν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία:

- Κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, των ιδιοτήτων του, για την ανάπτυξη των εικασιών τους.
- Εξοικείωση με το μαθηματικό συμβολισμό και την τυπική γλώσσα.
- Να πεισθούν για την προφάνεια των προτάσεων πριν προβούν στην αποδεικτική διαδικασία.

- Να κατανοήσουν ότι μέσω των αυστηρών μαθηματικών συλλογισμών ισχυροποιούνται οι υποθέσεις τους και γίνονται αποδεκτές οι αποδείξεις τους και όχι μέσω των αισθήσεων.
- Η ανάπτυξη του παραγωγικού συλλογισμού, όπου στηρίζεται η αποδεικτική διαδικασία.
- Να δοθεί έμφαση στην αναλυτική παρουσίαση του μαθηματικού επιχειρήματος από τους μαθητές.
- Η ανάπτυξη ευρετικότητας και συνθετικής ικανότητας από τους μαθητές βοηθά στην ανάπτυξη αποδείξεων.

Κεφάλαιο 5ο

Συμπεράσματα – Προτάσεις

Μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από το 1950 έως και το 2000. Σήμερα το γενικό κλίμα που επικρατεί απέναντι στο μάθημα έχει να κάνει με την απαξίωση και την υποβάθμισή του σχετικά με τη σημαντικότητά του. Από έρευνες που παρουσιάσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι οι πεποιθήσεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και για την απόδειξη επηρεάζουν τη στάση τους απέναντι στο μάθημα. Τα σχολικά βιβλία είναι ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν και διαμορφώνουν πεποιθήσεις στους μαθητές ανάλογα με τον τύπο της απόδειξης που παρουσιάζουν. Οι τρόποι με τους οποίους παρουσιάζονται οι αποδείξεις στα σχολικά εγχειρίδια ακολουθούν μια λογική σκέψη, η οποία δεν βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν ποια είναι η χρησιμότητα των θεωρημάτων που πρέπει να διδαχθούν. Όλο αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αδιαφορούν και να αντιμετωπίζουν με αρνητική στάση την αποδεικτική διαδικασία και κατ' επέκταση και το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επομένως, παρά το γεγονός ότι είναι ένα μάθημα που διδάσκεται παραδοσιακά στην Ελλάδα πολλά χρόνια και υπήρξε επί δεκαετίες εξεταζόμενο μάθημα για την εισαγωγή των μαθητών στη τριτοβάθμια εκπαίδευση, σήμερα αντιμετωπίζεται με αρνητικό τρόπο από τους μαθητές και φυσικά οι επιδόσεις τους δεν είναι ικανοποιητικές.

Με βάση λοιπό όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε στην αρχή, τα οποία ήταν τα εξής:

- Ποια είναι η σημασία και η σκοπιμότητα μιας αξιωματικής θεμελίωσης της σχολικής Γεωμετρίας;
- Πρέπει να ακολουθεί η διδασκαλία μια «γενετική» μέθοδο που στηρίζεται σε διαδικασίες ανακάλυψης, διατύπωσης υποθέσεων και γενίκευσης ή θα δίνει έμφαση μόνο στην παραγωγική δομή του μαθήματος;
- Ποιες γνωστικές προϋποθέσεις απαιτούνται για την κατανόηση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα η σημασία και η σκοπιμότητα της αξιωματικής θεμελίωσης συνδέονται με την αυστηρότητα που έχουν τα μαθηματικά και ο μαθηματικός τρόπος σκέψης μέσα στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Η αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας, μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που πραγματοποιήθηκε, φάνηκε να είναι σχετική και χρονικά μεταβαλλόμενη. Για αρκετές δεκαετίες εμφανίστηκαν αναλυτικά προγράμματα που είτε προωθούσαν την αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης είτε την απλούστευαν. Οι συνεχόμενες μεταβολές αυτές, όπως παρουσιάστηκαν,

γίνονταν για ιστορικούς και επιστημολογικούς λόγους καθώς και διδακτικούς. Από μαθηματικής σκοπιάς η αξιωματική θεμελίωση μαζί με την αυστηρή αποδεικτική διαδικασία είναι η ορθή διαδικασία. Όμως από τη σκοπιά της διδακτικής και με δεδομένο ότι αναφερόμαστε σε μαθητές ηλικίας 15-16 χρόνων, οι απαιτήσεις του μαθήματος είναι αρκετά υψηλές και η δυσκολία κατανόησής τους ιδιαίτερα μεγάλη.

Μπορούμε να καταλήξουμε επομένως στο συμπέρασμα πως είναι πολύ δύσκολη η αναζήτηση ενός ιδανικού αξιωματικού συστήματος για τη σχολική τάξη. Δηλαδή, ενδεχομένως είναι ανέφικτο να βρούμε ένα κατάλληλο σύστημα που να συνδυάζει τη μαθηματική ακρίβεια από τη μια μεριά και την ευκολία κατανόησης από την άλλη. Τουλάχιστον κανένα από τα προηγούμενα συστήματα δεν κατάφερε να το πετύχει αυτό και το ίδιο ισχύει και για το ισχύον σύστημα.

Οι συνεχείς εξελίξεις στο χώρο των ΤΠΕ έχουν επηρεάσει την εκπαίδευση όπως σχολιάσαμε και παραπάνω. Ίσως αυτή η επιρροή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση να δημιουργεί κατάλληλες συνθήκες ώστε να αναθεωρήσουμε τις αντιλήψεις μας περί αξιωματικής θεμελίωσης της σχολικής Γεωμετρίας. Με τη χρήση των λογισμικών κατά τη διδασκαλία είναι δύσκολο το μάθημα να εξελίσσεται σύμφωνα με την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση, καθώς οι ΤΠΕ προσφέρουν κατάλληλες συνθήκες για ανάπτυξη εικασιών μέσω της οπτικοποίησης. Αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συμβαδίσει με έναν τρόπο διδασκαλίας που θα στηρίζεται «καθαρά» στην αξιωματική θεμελίωση. Δηλαδή δημιουργείται η ανάγκη να επανεξεταστεί η αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης στη σχολική τάξη καθώς και πως μπορεί να γίνει η ομαλή ενσωμάτωση των ΤΠΕ. Βέβαια η χρήση των λογισμικών χρήζει μεγάλης προσοχής για να μην παραγκωνιστεί η τυπική αποδεικτική διαδικασία. Επομένως χρειάζεται ένας ομαλός συνδυασμός της αξιωματικής θεμελίωσης και των ΤΠΕ ώστε να μπορούν να συνυπάρχουν χωρίς να δημιουργούν σύγχυση στους μαθητές.

Μια πιθανή λύση για να εξυπηρετηθεί πιο αποτελεσματικά ο σκοπός της αξιωματικής θεμελίωσης στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, είναι να αξιοποιηθεί ουσιαστικά η ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία της. Μια εμπεριστατωμένη ιστορική εισαγωγή με κατάλληλες ιστορικές πηγές που μπορούν να ενσωματωθούν στο κορμό του μαθήματος έτσι ώστε να δημιουργηθούν ερωτήματα, προβληματισμοί, συζητήσεις μέσα στο πλαίσιο της τάξης. Μέσα από αυτή τη διαδικασία μπορεί να δοθεί χώρος για εξήγηση της αξιωματικής θεμελίωσης χρησιμοποιώντας π.χ. διαφορετικές αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος.

Τα συμπεράσματα και οι προτάσεις του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος έρχονται να δημιουργήσουν πρόσφορο έδαφος για να προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν η διδασκαλία πρέπει να ακολουθεί μια «γενετική» μέθοδο που θα στηρίζεται σε διαδικασίες ανακάλυψης και διατύπωσης υποθέσεων ή στην παραγωγική δομή του μαθήματος. Δηλαδή αν το μάθημα θα πρέπει να συνεχίσει να διδάσκεται παραδοσιακά δίνοντας έμφαση στην παραγωγική διαδικασία παρ' όλες τις συνέπειες που έχει στους μαθητές ή θα πρέπει να

αξιοποιηθούν και άλλα στοιχεία, όπως η οπτικοποίηση και η ανάπτυξη εικασιών, που οι έρευνες έχουν δείξει ότι βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές. Προσπαθούμε να δούμε αν μπορεί να υπάρξει μια τέτοια μέθοδος που να ξεφεύγει από την παραδοσιακή διδασκαλία δίνοντας προβάδισμα σε μια διαδικασία που μέσω της οπτικής παρατήρησης και του πειραματισμού να βοηθά στην καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών.

Η συνεχόμενη και αυξανόμενη τάση για την ένταξη των ΤΠΕ στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει ως αποτέλεσμα να εισαχθούν στοιχεία γενετικής προσέγγισης και μάλιστα ισχυρά. Τέτοια στοιχεία αναφέρθηκαν και αναπτύχθηκαν στο 4^{ο} κεφάλαιο, όπως η διερεύνηση των σχημάτων, η διατύπωση εικασιών καθώς και ο έλεγχος για την επαλήθευση ή την απόρριψής τους. Οι ΤΠΕ δημιουργούν κατάλληλο περιβάλλον για να δοθεί έμφαση σε αυτά τα στοιχεία και η χρήση τους κατά τη διάρκεια του μαθήματος βοηθά στον πειραματισμό των μαθητών με τις γεωμετρικές έννοιες. Έρευνες (Simon & Blume, 1996) έχουν δείξει ότι οι μαθητές που ανακαλύπτουν και διατυπώνουν μόνοι τους μια απόδειξη μέσα από την παρατήρησή και τον πειραματισμό με τις ΤΠΕ, μπορούν ευκολότερα να κατανοήσουν μια πρόταση από το να τη δουν αποδεδειγμένη από κάποιον άλλο. Η απόδειξη μέσα από δραστηριότητες των ΤΠΕ αποτελεί ανακάλυψη για τους μαθητές με αποτέλεσμα να καλλιεργείται η κριτική τους σκέψη. Οι ΤΠΕ επιδρούν στη μάθηση, την οργάνωση και την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας καθώς μπορούν να θέσουν κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε οι μαθητές να μεταβούν από τις εμπειρικές αιτιολογήσεις στην απόδειξη μέσω της παραγωγικής σκέψης.

Όμως τα στοιχεία αυτά δεν μπορούν να συμβιβαστούν εύκολα με τους παραδοσιακούς σκοπούς του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παραδοσιακά το μάθημα είχε ως στόχο την κατανόηση του τρόπου αξιωματικής θεμελίωσης και ανάπτυξης μιας μαθηματικής θεωρίας καθώς και τη μύηση στην αποδεικτική διαδικασία. Επομένως τα στοιχεία που προωθούν οι ΤΠΕ μέσω της ανακάλυψης, της ανάπτυξης εικασιών και τον έλεγχο επαλήθευσής τους έρχονται σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία του μαθήματος, καθώς προωθούν έναν άλλο τρόπο διδασκαλίας που δεν στηρίζεται αποκλειστικά σε αυστηρές τυπικές διαδικασίες. Οι διαδικασίες της ανακάλυψης, υπόθεσης και γενίκευσης βοηθούν να κατανοηθεί η αναγκαιότητα της αλήθειας των ισχυρισμών που διατυπώνουν οι μαθητές, όμως μόνο η αποδεικτική διαδικασία είναι εκείνη που πείθει για την αλήθεια τους μέσω λογικών βημάτων και συλλογισμών. Η «γενετική» αυτή μέθοδος μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στο να πεισθούν για την αλήθεια της πρότασης και να τους προτρέψει στην επαλήθευσή της μέσω της τυπικής μαθηματικής διαδικασίας. Όμως αυτό δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί πάντα καθώς οι μαθητές πείθονται μέσα από τις διαδικασίες των ΤΠΕ και μπορούν να τις γενικεύσουν χωρίς να καταφύγουν στην παραγωγική διαδικασία. Επομένως αυτό το γεγονός μπορεί να απομακρύνει τους μαθητές από την αυστηρή μαθηματική αποδεικτική διαδικασία, η οποία είναι η μόνη ορθή μέθοδος στο χώρο των μαθηματικών.

Θα πρέπει επομένως να επανεξεταστεί άμεσα το ζήτημα των γενικών σκοπών της διδασκαλίας του μαθήματος στο Λύκειο, καθώς παρατηρείται έντονο πρόβλημα όπως προαναφέραμε. Δηλαδή θα χρειαστεί να εξεταστεί αν θα διατηρηθεί η προτεραιότητα των παραδοσιακών σκοπών που έχει το μάθημα όλες αυτές τις δεκαετίες με την αξιωματική θεμελίωση και την αποδεικτική διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές και που έχει οδηγήσει το μάθημα στη σημερινή του κατάσταση. Μπορεί ενδεχομένως αυτοί οι παραδοσιακοί στόχοι να περιοριστούν και να δοθεί χώρος για μια μεγαλύτερη ένταξη των γενετικών μεθόδων διδασκαλίας, από αυτή που ήδη επιχειρείται σήμερα αξιοποιώντας και τις ΤΠΕ. Θα μπορούσαν να προσαρμοστούν οι αυστηρές διαδικασίες του μαθήματος και να δημιουργηθεί ένας νέος τρόπος διδασκαλίας που χρησιμοποιεί την ανακαλυπτική διαδικασία και τον πειραματισμό, για να ακολουθεί ο έλεγχος των εικασιών μέσω της παραγωγικής απόδειξης. Όμως όλο αυτό το εγχείρημα απαιτεί την οργάνωση της διδασκαλίας σε νέες βάσεις, με νέα σχολικά βιβλία και κατάλληλα αναλυτικά προγράμματα.

Μέσα από την ανασκόπηση των ερευνών που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια έγινε μια καταγραφή των απαιτούμενων γνώσεων και ικανοτήτων που πρέπει να έχουν οι μαθητές πριν ξεκινήσουν το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Με αυτόν τον τρόπο ερχόμαστε στο τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα.

Τα αποτελέσματα των ερευνών μας έδειξαν τους λόγους για τους οποίους οι περισσότεροι μαθητές της Α' Λυκείου δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα σύμφωνα με τις προβλέψεις της θεωρίας των Van Hiele οι μαθητές θα έπρεπε να κατέχουν ήδη το επίπεδο 3, ενώ οι έρευνες έδειξαν ότι βρίσκονται στο 1 ή στο 2. Το μεγαλύτερο πρόβλημα των μαθητών έχει να κάνει με την ανάπτυξη του παραγωγικού συλλογισμού και την αναλυτική παρουσίαση του μαθηματικού επιχειρήματος. Μένει βέβαια να δούμε αν η ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη διδασκαλία του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να συμβάλει στην κατάκτηση των γνωστικών προϋποθέσεων που απαιτούνται να έχουν οι μαθητές για να κατανοήσουν το μάθημα.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το ζήτημα θα πρέπει να στρέψουμε την προσοχή μας στις απαραίτητες γνώσεις που αποκτούν οι μαθητές τελειώνοντας την Γ' Γυμνασίου. Μια τέτοια προσπάθεια ξεκίνησε το 2002-2003 με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) σύμφωνα με τα οποία γράφτηκαν τα νέα βιβλία του Γυμνασίου το 2007. Σε αυτά εντάχθηκαν κάποιες τυπικές αποδείξεις από την Γ' Γυμνασίου, δηλαδή οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τον παραγωγικό τρόπο σκέψης από την Υποχρεωτική Εκπαίδευσή τους. Με αυτόν τον τρόπο έγινε μια προσπάθεια ώστε η μετάβαση από την Πρακτική Γεωμετρία στη Θεωρητική να γίνει με έναν πιο ομαλό τρόπο. Αν θέλουμε οι μαθητές να αποκτήσουν περισσότερη εξοικείωση με την τυπική αποδεικτική διαδικασία ίσως να βοηθήσει να «κατεβάσουμε» τον παραγωγικό συλλογισμό σε μικρότερες τάξεις. Πιθανότατα να συμβάλει σε αυτό το εγχείρημα αν οι μαθητές κατακτούσαν τις πρώτες γνώσεις των γεωμετρικών εννοιών στην Α' και

Β' Γυμνασίου ώστε να βρίσκονταν στο επίπεδο 2 Van Hiele και μετά την Γ' Γυμνασίου να είναι στο επίπεδο 3.

Μια άλλη σημαντική πρόταση για την βελτίωση αυτής της κατάστασης είναι η συνεχόμενη, συστηματική και ταυτόχρονη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν στην Γ' Γυμνασίου και στην Α' Λυκείου. Η διαδικασία αυτή θα βοηθήσει ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να ενημερώνονται για τους στόχους της διδασκαλίας καθώς και τα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν κατά την μετάβαση από τη μια βαθμίδα στην άλλη αναφορικά με το μάθημα της Γεωμετρίας. Με δεδομένο ότι η αποδεικτική διαδικασία δημιουργεί μεγάλα προβλήματα κατανόησης στους μαθητές, απαιτείται ο εκπαιδευτικός να έχει ισχυρό υπόβαθρο σχετικά με την έννοια της απόδειξης και του ρόλου της στα μαθηματικά και στην εκπαίδευση. Χρειάζεται εκτός από την ευρεία γνώση των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και διαφορετικούς τρόπους απόδειξης για την ίδια πρόταση, να γνωρίζει σε βάθος όλα εκείνα τα στοιχεία που συνδέονται με τη «γενετική» μέθοδο διδασκαλίας που αναφερθήκαμε παραπάνω. Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που συντονίζει μια διδασκαλία για την απόδειξη, επιλέγει τη μεθοδολογία, τον τρόπο κατασκευής και παρουσίασής της, επομένως έχει την ευθύνη για την κατανόηση του συλλογισμού της αποδεικτικής διαδικασίας.

Αυτό το ζήτημα επίσης πρέπει να τεθεί μέσα στο γενικότερο πλαίσιο της κατάρτισης των υποψήφιων εκπαιδευτικών στη διάρκεια των βασικών τους σπουδών. Δηλαδή θα μπορούσε να δοθεί έμφαση και στην ακαδημαϊκή προετοιμασία των υποψήφιων εκπαιδευτικών, ώστε να προετοιμάζονται καλύτερα γνωστικά και διδακτικά. Είναι γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποια κατηγορία μαθημάτων κατά τις πανεπιστημιακές σπουδές των υποψήφιων εκπαιδευτικών, που να αφιερώνεται στη διδασκαλία της απόδειξης ή στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Μόνο τα τελευταία τρία χρόνια στο Τμήμα Μαθηματικών Αθηνών προσφέρεται ως μάθημα επιλογής η Διδακτική της Γεωμετρίας, με μικρή συμμετοχή των φοιτητών, αλλά και το μάθημα της Πρακτικής Άσκησης. Επιπλέον εκτός από την ειδίκευση της Διδακτικής, που μπορούν να επιλέξουν οι προπτυχιακοί φοιτητές του Μαθηματικού Αθηνών, θα μπορούσε αντίστοιχα να υπάρχει σε όλα τα Τμήματα των Μαθηματικών της Ελλάδας και να είναι υποχρεωτική για τους αποφοίτους των τμημάτων που ενδιαφέρονται να ασχοληθούν με την εκπαίδευση. Στην περίπτωση που δεν έχουν λάβει οι υποψήφιοι την αντίστοιχη ειδικότητα, να υπάρξει υποχρεωτική επιμόρφωση ώστε να λάβουν τα απαραίτητα εφόδια σχετικά με τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Μπορούμε να συμπεράνουμε, επομένως, ότι η κατάλληλη ακαδημαϊκή προετοιμασία σε συνδυασμό με την εμπειρία, που μπορούν να αποκτήσουν κατά τη διδασκαλία, και με την συστηματική επιμόρφωση αποτελούν το βέλτιστο τρόπο για να προωθηθεί ο μαθηματικός συλλογισμός και η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και της αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτό μπορεί να αποτελέσει, βέβαια, πεδίο έρευνας με στόχο τη διερεύνηση του τρόπου που μπορεί να οργανωθεί η παιδαγωγική κατάρτιση των υποψήφιων εκπαιδευτικών, να γίνει μια συγκριτική μελέτη σχετικά με την επιμόρφωσή τους στις διάφορες χρονικές περιόδους. Στα πλαίσια αυτής της μελέτης

θα μπορούσε να διερευνηθεί και η διδασκαλία των Μαθηματικών στα Πρότυπα Πειραματικά Σχολεία και τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας ενδεχομένως να μπορούν να αξιοποιηθούν για το σχεδιασμό νέων επιμορφωτικών προγραμμάτων.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία είναι αναγκαίο να τονιστεί ότι το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι αυτό που εισάγει τους μαθητές στον λογικό τρόπο σκέψης μέσω της παραγωγικής διαδικασίας. Η σημασία του είναι μεγάλη και παραδοσιακά αποτέλεσε ένα από τα κύρια μαθήματα της ελληνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στις μέρες μας όμως έχει δημιουργηθεί ένα αρνητικό κλίμα απέναντί του από τους μαθητές, οι οποίοι δυσκολεύονται να το κατανοήσουν και να ανταπεξέρθουν στις απαιτήσεις τους. Ίσως είναι η κατάλληλη στιγμή να επανεξετάσουμε τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος ώστε να είναι πιο προσιτός στους μαθητές χωρίς όμως να υποβαθμιστούν τα κύρια χαρακτηριστικά του, αυτά της αξιωματικής θεμελίωσης και της αποδεικτικής διαδικασίας.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αργύρη Π. (2010). *Οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στην γεωμετρία*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Αρτεμιάδης Ν. (1977). *Στοιχειώδης Γεωμετρία από Ανώτερη σκοπιά*. Ε.Μ.Ε. , Αθήνα.

Βόσκογλου Μ. (1986). Στοιχεία από τη Διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ'*, τεύχος 11, σελ. 34-51.

Δημητριάδου Ε. (2004). Η διδασκαλία της Γεωμετρίας: Μερικές απόψεις εκπαιδευτικών σχετικά με τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου και Λυκείου, *Πρακτικά 21ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, Ε.Μ.Ε. [Επιμ.], σελ. 15-27, Τρίκαλα.

Δημητριάδου Ε. (2007). Απόψεις Μαθηματικών Λυκείου για τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *2ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Γλώσσα, Σκέψη και Πράξη στην Εκπαίδευση*, Ιωάννινα

http://ipeir.pde.sch.gr/educonf/2/09ThetikesEpistimes/dimitriadou/dimitriadou.pdf

ημερομηνία ανάκτησης 10/3/2013.

Δούβου Α. (1998). Το αξιωματικό σύστημα στη Γεωμετρία. *Διάσταση*, τεύχη 3-4, σελ. 3-23.

Ε.Μ.Ε. (1996). Παρατηρήσεις της επιτροπής της Ε.Μ.Ε. για την αξιολόγηση του αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας. *Ενημέρωση,* τεύχος 63, σελ. 10-11

Ζάχος, Ι. (2000). Αξιολόγηση του επιπέδου Γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β΄ τάξης του Λυκείου. *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών IV*, σελ.161-179, Gutenberg, Αθήνα.

Θωμαΐδης Γ. (1990). Ιστορικές παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας. *Ευκλείδης Γ'*, τόμος 7, τεύχος 25.

Θωμαΐδης Γ. (1991). Οι συντεταγμένες της σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 61, σελ. 27–38.

Θωμαΐδης Γ. (1996). Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 1, σελ.72-92.

Θωμαΐδης Γ. (1998). Μερικές όψεις της αποτυχίας στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Θεωρητικής Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [Επιμ.]. *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σελ. 119-127. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).

Θωμαΐδης Γ. (2000). Η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [Επιμ.]. *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σελ.127-136. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).

Θωμαΐδης Γ. (2003). Μαθηματική απόδειξη και κριτική σκέψη στη διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *Πρακτικά 2ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Α. Χασάπης, σελ. 147-158.

Θωμαΐδης Γ. , Καστάνης Ν. (2003). Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 130, σελ. 78-85 (1ο Μέρος).

Θωμαΐδης Γ. , Καστάνης Ν. (2003). Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 130, σελ. 78-85 (2ο Μέρος).

Θωμαΐδης Γ. , Πούλος Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Εκδόσεις Ζήτη. Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης Γ. , Σταφυλίδου Μ. (2005). Μια έρευνα για τις Προοπτικές και Δυνατότητες της Διαθεματικής Διδασκαλίας. *Πρακτικά 4ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* Τόμος 1, σελ. 185-197. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).

Καραγγιαννίδου Α., Μεταξάς Ν., Σελεβίστας Κ. (2005). Οι στάσεις των Μαθητών για την Απόδειξη, τη Χρησιμότητα των Μαθηματικών και το Ρόλο του Δασκάλου. *Πρακτικά 22ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας,* σελ. 277-287. Λαμία.

Καρατρασόγλου Α. (2011). *Το πέρασμα από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη στην Γεωμετρία: Ο Ρόλος της Οπτικοποίησης.* (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Καρδαμίτης Σ. (2010). *Η απόδειξη στα Μαθηματικά και σχετικές αντιλήψεις των Μαθηματικών Λυκείου,* (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήματος Μαθηματικών, Αθήνα.

Καστάνης Ν. (1986). «Να φύγει ο Ευκλείδης» - «Δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες» Μια ιστορικο-διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τεύχος 31, σελ. 3-18.

Καστάνης Ν. (1999). Η υποδοχή των Θεμελίων της Γεωμετρίας του Hilbert στην Ελλάδα. *Διάσταση*, τεύχη 1-2, σελ. 68-89.

Λάππας Δ. (2010). Αναλυτικά Προγράμματα με αναφορά στη Σχολική Γεωμετρία. *Η Γεωμετρία και η Διδακτικής της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Εκδόσεις Ζήτη, σελ.131-138, Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης Χ., Αποστόλου Χ. (2011). Συμπεριφορές μαθητών Γ' Γυμνασίου σε αποδείξεις προβλημάτων γεωμετρίας με το πρόγραμμα Geogebra. *Ευκλείδης Γ',* τεύχος 74, σελ. 179-195.

Μακρής Κ. Ν. (1995). Κάποια ερωτήματα στη Θεωρητική Γεωμετρία του Λυκείου. *Ευκλείδης Γ'*, τόμος 12, τεύχος 42, σελ. 1-14.

Μιχαλοπούλου Κ. (2012). *Τρόποι με τους οποίους η εικασία μπορεί να οδηγήσει στην απόδειξη μέσω εργαλείων δυναμικού χειρισμού*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Μιχελαράκης Ι. (2012). *Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος από μαθητές*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Μπιζιάνος Μ. (2011). *Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η Περίπτωση της Γεωμετρίας*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Νόκας Ε. (2010). *Σχήματα και Διαγράμματα. Ο ρόλος τους στη διαμόρφωση και κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Πρίντεζης Ι. (2006). *Η κατηγορική άποψη των επιπέδων Van Hiele και άλλες οικουμενικές μέθοδοι προσέγγισης των Μαθηματικών*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1995). *Σχέδιο Αναλυτικού Προγράμματος Ευκλείδειας Γεωμετρίας Αθήνα.*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998^{α}). *Πρόγραμμα Σπουδών Ευκλείδειας Γεωμετρίας.*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1997) *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004) *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1969) Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθητών των σχολείων Μέσης Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 223 τ. Β'.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1977) Περί ωρολογίου προγράμματος του Ημερησίου Γυμνασίου και αναλυτικού προγράμματος των Α' και Β' τάξεων αυτού, ΦΕΚ 270 τ. Α'.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1984) Τροποποίηση του αναλυτικού προγράμματος των σχολείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 146 τ. Α'.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1985) Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 170 τ. Α'.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998) Πρόγραμμα Σπουδών των μαθημάτων των Α' και Β' τάξεων του Ενιαίου Λυκείου για το σχολικό έτος 1998-99, ΦΕΚ 327 τ. Β'.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007) Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007-2008. Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. ΟΕΔΒ. Αθήνα.

Παντελέων Γ. Χ. (2004). *Η σημασία του λάθους στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Επιστήμης και στη Διδακτική*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Τζίφας Ν. (2005). *Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Επίπεδα Van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Τουμάσης Μπ. (1987). Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της δευτ/θμιας μαθηματικής .εκπαίδευσης, τα τελευταία 200 χρόνια. *Ευκλείδης Γ'*, τεύχος 16, σελ. 17-60.

Τουμάσης Μπ., Αρβανίτης Τ. (2003). *Διδασκαλία μαθηματικών με χρήση Η/Υ.* Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα. users.sch/toumasis/trikala.htm ημερομηνία ανάκτησης: 11/2012.

Τσαλαπάτη Ε., Κολέτσος Γ., Στεφανέας Π. (2005). Η απόδειξη στη διαδικασία της μάθησης. *Πρακτικά 22^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας,* σελ. 812-815. Λαμία

Σκούρας Αθ. (2010). Οι ακολουθούμενες πολιτικές σε σχέση με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. *Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη*

Σύγχρονη Εκπαίδευση. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 162-165, Θεσσαλονίκη

Σπηλιοπούλου Ε. Ι. (2010). *Σύγχρονες Θεμελιώσεις Επίπεδων Γεωμετριών και Διδακτικές Προεκτάσεις.* (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. (1999). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου.* Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας. Τεύχος δεύτερο. Αρ. Φύλλου 1342, 30 Ιουνίου 1999.

Hershkowitz R. et al. (1990). Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της Γεωμετρίας. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*. [Επιμ.] Πούλος Α., Θωμαΐδης Γ. Τεύχος 1, σελ. 93-132. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Σχολικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Αλιμπινίσης Α. , Δημάκου Γ. , Δρακόπουλου Π. , Κυριαζή Α. και Τασσόπουλου Γ. (1991). Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Αλιμπινίσης Α. , Δημάκου Γ. , Δρακόπουλου Π. , Κυριαζή Α. και Τασσόπουλου Γ. (1991). Θεωρητική Γεωμετρία Β' Λυκείου. Σελ. 42. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Αργυρόπουλος Η. , Βλάμος Π. , Κατσούλης Γ. , Μαρκάτης Σ. , Σίδερης Π. (2001). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Ιωαννίδης Ι. (1968). Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Τόμος 2ος (Γεωμετρία). Σελ. 49-50. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Κανέλλου Σ. (1975). Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ',Ε' και ΣΤ' Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Νικολάου Ν. (1950). Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Παπαμιχαήλ Δ. , Σκιαδά Α. (1977). Θεωρητική Γεωμετρία. Τεύχος 1ο, Γ' Γυμνασίου. Σελ. 61. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Παπανικολάου Χ. (1975). Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ' Γυμνασίου και Δ', Ε' και ΣΤ' Γυμνασίου Θεωρητικής Κατευθύνσεως. Σελ. 70-71. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Ξένη

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. A. Bishop et al [eds] *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*. Dordrecht: Kluwer. 175-192

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1991, February). Visual information and valid reasoning. In *Visualization in teaching and learning mathematics*, 9-24. Mathematical Association of America.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. Στο D. Grouws [ed] *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* 420-464. New York: Macmillan.

Davis, P. (1995). The rise, fall, and possible transfiguration of triangle Geometry. *American Mathematical Monthly*, 102(3), 204 – 214.

De Villiers, M. (1998). *An alternative approach to proof in dynamic geometry : some personal reflections.* In King and Schattschneider (Eds). Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research. Washington,D.C.: The Mathematical Association of America, 15-24.

Dreyfus T., Hadas N. (1988). Euclid May Stay-and Even Be Taught, *National Council of Teachers of Mathematics*, Year Book, USA, 47-58.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*: 85-109.

Driscoll M. (1982). The Path to Formal Proof. *Research Within Reach: Secondary School Mathematics-A Research-Guided Response to the Concerns of Educators, National Council of Teachers of Mathematics*. U.S.A., 152-166.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt & M. Santos [Eds.] *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I.* Mexico. 3-26.

Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162

Fischbein, E. & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. A. Vermandel [ed] *Proccedings of the 6th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*. Antwerp, 18-23 July 1982. University Instelling Antwerp. 128-131.

Freundenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413-435.

Fujita T. , Jones K. , Yamamoto S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching of Geometry. Paper presented to Topic Study Group 10 at the 10th International Congress on Mathematical Education. Conpenhagen, Denmark

Griffiths, M. (2000). Internet addiction-time to be taken seriously?. *Addiction Research & Theory*, *8*(5), 413-418.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Harel G., Sowder L. (1996). Classifying Processes of Proving. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3*. University of Valencia, Valencia, Spain, 59-65.

Harel, G. & Sowder, L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinksy (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III* (Vol. 7: 234-283). Providence, RI: AMS

Healy, L. & Hoyles, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics* (End of Award Report to ESRC). London: Institute of Education, University of London.

Hershkowitz, R. et al. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In: P. Nesher & G. Kilpatrick [eds.] *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 70-95. Cambrige: Cambridge University Press.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics 44* (1/2). 55-85.

Kloosterman, P. & Stage, F. K. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem-solving. *School Science and Mathematics, 92.* 109-115.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2009). A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level. *CERME 6–WORKING GROUP 5*, 686.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., and Rudolf Strasser, R., (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In, Eds. Gutiurrez, A., Boero, P.,. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future.* PME. Sense Publishers, pp. 237-273.

Mariotti, M. A. (1997) Justifying and Proving in Geometry: the Mediation of a Microworld. *Preuve Proof Prueda Web Newsletter*. November/December 1997.

Oldknow A. (1995). Computer aided research into triangle geometry. *The mathematical Gazette*, 79(485), 263-274.

Rezende J., Nasser L. (1994). Kinds of Argumentation used in Geometry. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Lisbon, Lisbon, Portugal, Vol.1, 66.

Simon, M. & Blume, G. (1996) Justification in the Mathematics Classroom: A Study of Prospective Elementary Teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*: 3-31.

Schoenfeld, A. (1986). On having and using geometric knowledge. J. Hiebert [ed] *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics.* Hillsdale NJ. 225-264.

Schoenfeld, A. H. (1989) Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(40): 338-355.

Selden, J. & Selden, A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics 29* (2): 123–151.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics.* Harmondsworth, UK: Penguin.

Thomaidis, Y. (1991). Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 37-43.

Vinner S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking Mathematics Education Library Volume 11.

Van Hiele P. (1959). "La pensée de l'enfant et la géométrie". Bulletin de l'Association des Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Public, 198, 199-205.

Van Hiele-Geldof, D. (1984). Last article written by Dina van Hiele-Geldofentitled: Didactics of geometry as learning process for adults. In D. Fays, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele*. Brooklyn: Brooklyn College. 215-233.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. New York: Academic Press