ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Προβλήματα κατά τη μετάβαση από το σχολείο στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Ειρήνη Κούβελα
Α.Μ. Δ201216

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	…….
2) Απόστολος Γιαννόπουλος	Καθηγητής	……..…
3) Ειρήνη Μπιζά	Λέκτορας	……..…

Σε όσους έζησαν την εμπειρία
της μετάβασης στο Τμήμα Μαθηματικών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για τη συνεργασία μας, τις εποικοδομητικές συμβουλές του, το χρόνο που μου αφιέρωσε και για την ευκαιρία που μου έδωσε να κάνω την ιδέα μου πράξη.

Τον κ. Απόστολο Γιαννόπουλο ο οποίος με βοήθησε μέσα από την εμπειρία του στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού Ι.

Την κ. Ειρήνη Μπιζά για τα πολύτιμα σχόλια και τις συμβουλές της, την υποστήριξη και την ενθάρρυνση όλο αυτό το διάστημα.

Τους φοιτητές που έλαβαν μέρος οικειοθελώς στην έρευνα αφιερώνοντας χρόνο από την καθημερινότητα τους.

Τους γονείς μου που μου έδωσαν την ευκαιρία να πραγματοποιήσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές και τους δικούς μου ανθρώπους που στέκονται πάντα δίπλα μου.

Όλους τους ενδιαφέροντες ανθρώπους που γνώρισα τα τελευταία δύο χρόνια στη διάρκεια του μεταπτυχιακού με τους οποίους μοιραστήκαμε όμορφες κι άλλοτε λιγότερο όμορφες στιγμές, μέσα από διαλέξεις, εργασίες, συνεργασίες, εξόδους, διακοπές κ.ά. με την ευχή ο κάθε ένας να ακολουθήσει το δρόμο που αγαπά.

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ – ABSTRACT 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο 11

ΒΙΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ 11

1.1 Μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση 11

1.2 Το περιεχόμενο και ο τρόπος προσέγγισης των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση 14

1.3 Παράγοντες που επηρεάζουν τη μετάβαση 15

1.4 Τα φαινόμενα «cooling-off» και «cooling-out» 21

1.5 Προτάσεις για τη διευκόλυνση της μετάβασης 22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο 29

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΙ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ 29

2.1 Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου 29

2.2 Απειροστικός Λογισμός Ι 34

2.3 Υποστήριξη πρωτοετών φοιτητών τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α. 39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο 42

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 42

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα 42

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα 42

3.3 Μέθοδος 42

3.4 Ερευνητικά εργαλεία 43

3.5 Συμμετέχοντες 44

3.6 Συλλογή δεδομένων 44

3.7 Τρόπος ανάλυσης δεδομένων 47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο 48
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 48
4.1 Δυσκολίες στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι κατά τη μετάβαση από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο 48
4.2 Βαθμός και τρόπος επίδρασης του ακαδημαϊκού και κοινωνικού πλαισίου κατά τη διάρκεια της μετάβασης 68
4.3 Κατηγοριοποίηση προβλημάτων ανά συμμετέχοντα 74
4.4 Διάκριση τρόπων αντιμετώπισης της μετάβασης 76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο 78
ΣΥΖΗΤΗΣΗ 78

ΑΝΑΦΟΡΕΣ 84

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ 88

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά στη διερεύνηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών κατά τη μετάβαση τους από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η εστίαση γίνεται σε φοιτητές που παρακολούθησαν το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι. Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης των φοιτητών οι οποίοι μελετήθηκαν σταδιακά από την αρχή μέχρι το τέλος του εξαμήνου μέσω ερωτηματολογίων και συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα της έρευνας αναδεικνύουν δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές σχετικές με το περιεχόμενο του μαθήματος και το κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο. Επιπλέον μέσα από τα αποτελέσματα της έρευνας επιχειρείται μια διάκριση κατηγοριών των τρόπων με τους οποίους οι συμμετέχοντες αντιμετωπίζουν τα προβλήματα που συναντούν στο Πανεπιστήμιο κατά τη διάρκεια της μετάβασης.

Λέξεις κλειδιά*: μετάβαση, δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τριτοβάθμια εκπαίδευση, Απειροστικός Λογισμός*

ABSTRACT

The present paper refers to the examination of the difficulties faced by first year undergraduate students of the Department of Mathematics of the National and Kapodistrian University of Athens during their transition from secondary to tertiary education. The focus is on students that have attended the course of Calculus. The research is a case study of the students who were investigated successively from the beginning until the end of the semester through questionnaires and interviews. The results of the research revealed difficulties faced by undergraduate students regarding the content of the module and the social and academic context. Additionally, the research suggests a categorization of the ways adopted by students for the tackling of the problems encountered in University during their transition.

Key words: *transition, secondary education, tertiary education, Calculus*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα στη μετάβαση από τα μαθηματικά του σχολείου στα μαθηματικά του πανεπιστημίου είναι ένα συχνό ζήτημα που παρουσιάζεται ανά τα εκπαιδευτικά συστήματα παγκοσμίως. Αρκετοί είναι οι ερευνητές που εντοπίζουν ένα κενό μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και αυτών του πανεπιστημίου (Luk, 2005˙ Kajander & Lovric, 2005˙ Brandell, Hemmi & Thunberg 2008˙ Winslow, 2013).

Οι μαθητές στο σχολείο μελετούν τα μαθηματικά με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που απαιτείται στο πανεπιστήμιο. Όπως αναφέρουν οι Clark και Lovric (2008) σε σχετική έρευνα τους, τα μαθήματα μαθηματικών που γίνονται στο πανεπιστήμιο εστιάζουν στην εννοιολογική κατανόηση ενώ τα μαθηματικά του σχολείου περιλαμβάνουν μια πιο διαδικαστική πτυχή. Η ανώτερη μαθηματική σκέψη που υιοθετείται στο πανεπιστήμιο απαιτεί οι φοιτητές να αναπτύσσουν κατάλληλες τεχνικές για την κατανόηση και την εφαρμογή εννοιών, ορισμών, θεωρημάτων και αποδείξεων (Hoffkamp, Schnieder & Paravicini, 2013). Συμπερασματικά οι πρωτοετείς φοιτητές αντιμετωπίζουν γνωστικές δυσκολίες όταν έρχονται στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Οι Hoyles, Newman, και Noss, (2001) αναγνωρίζουν σαν μια από τις κυριότερες δυσκολίες την έλλειψη μαθηματικής σκέψης, δηλαδή την ικανότητα να σκέφτονται αφαιρετικά και να κάνουν αποδείξεις.

Εκτός από τους παράγοντες που σχετίζονται με την ίδια τη μαθηματική γνώση, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες εξίσου σημαντικοί που επηρεάζουν τους φοιτητές όταν έρχονται στο πανεπιστήμιο. Αυτοί περιλαμβάνουν το ακαδημαϊκό περιβάλλον, τις συνήθειες στον τρόπο διαβάσματος, το κοινωνικό περιβάλλον και τη διδακτική ευχέρεια των καθηγητών όπως δηλώνει ο Pongboriboon (1992) σε ανάλογη έρευνα του σε πρωτοετείς φοιτητές του πανεπιστημίου Khon Kean στην Ταϋλάνδη. Η αλλαγή μεταξύ των δύο περιβαλλόντων και της διαφορετικής κουλτούρας που έχει το καθένα παίζει σημαντικό ρόλο στο πέρασμα από τη μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην άλλη (Cherif & Wideen, 1992).

Για τη γεφύρωση του κενού μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών βαθμίδων έχουν επιχειρηθεί διάφορες πρωτοβουλίες από τα εκπαιδευτικά ιδρύματα. Πολλά πανεπιστήμια οργανώνουν φροντιστηριακά μαθήματα και σεμινάρια, ομάδες μελέτης στις οποίες οι φοιτητές δουλεύουν μαζί με συμφοιτητές τους μεγαλύτερου έτους, όπου αναμένεται να υπάρχει βοήθεια και αλληλοϋποστήριξη. Μια άλλη πρωτοβουλία που πραγματοποιείται από το πανεπιστήμιο McMaster που βρίσκεται στο Οντάριο, είναι η παράδοση ενός εγχειριδίου στην αρχή του ακαδημαϊκού έτους μέσα στο οποίο οι φοιτητές μπορούν να βρουν χρήσιμες

πληροφορίες για το πώς λειτουργούν τα πράγματα στο νέο ίδρυμα και μια επανάληψη σε θεμελιώδη μαθηματικά θέματα που θα χρησιμοποιήσουν στα μαθήματα τους (Kajander & Lovric, 2005˙ Clark & Lovric, 2009˙ Pyke, 2012).

Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται να διερευνηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Μελετώνται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη διάρκεια παρακολούθησης του Απειροστικού Λογισμού Ι και ο βαθμός επιρροής του κοινωνικού και ακαδημαϊκού πλαισίου κατά τη μετάβαση μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων. Η εστίαση γίνεται σε φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος καθώς η φύση του αντικειμένου των μαθηματικών καθιστά αναγκαία τη βαθύτερη κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζονται. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που το κενό μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και των μαθηματικών που διδάσκονται στο Τμήμα Μαθηματικών είναι μεγαλύτερο σε σχέση με άλλα Τμήματα που διδάσκονται μαθηματικά. Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν πέντε και παρακολουθούσαν σε ένα από τα τέσσερα τμήματα του μαθήματος. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ερωτηματολογίων και συνεντεύξεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των τελευταίων ετών σχετικά με το ζήτημα της μετάβασης μεταξύ δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζονται τα μαθηματικά στην κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα, οι κυριότεροι παράγοντες που φαίνεται να επηρεάζουν τη μετάβαση, τα φαινόμενα «cooling-off» και «cooling-out» και τέλος οι πρωτοβουλίες που έχουν εφαρμοστεί από διάφορα πανεπιστήμια ως προς τη διευκόλυνση της μετάβασης. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το εκπαιδευτικό πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιήθηκε η έρευνα, ορισμένες πληροφορίες σχετικά με την επιτυχία των πρωτοετών φοιτητών στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι τα τελευταία τρία χρόνια και τέλος οι τρόποι υποστήριξης που παρέχει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών προκειμένου να διευκολυνθεί η μετάβαση των φοιτητών. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της έρευνας αναφέρεται αναλυτικά στο τρίτο κεφάλαιο. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται και σχολιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο. Αρχικά παρουσιάζονται οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι φοιτητές και ήταν σχετικές με το περιεχόμενο του μαθήματος, στη συνέχεια οι δυσκολίες που αφορούσαν στο κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο, έπειτα οι δυσκολίες αυτές κατηγοριοποιούνται σε έναν πίνακα ανά συμμετέχοντα. Τέλος, στο ίδιο κεφάλαιο, επιχειρείται μια διάκριση των τρόπων αντιμετώπισης της μετάβασης από τους συμμετέχοντες της έρευνας. Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση γύρω από τα αποτελέσματα της

έρευνας και σύγκριση αυτών με παλαιότερες έρευνες, συνοψίζονται τα κυριότερα σημεία της έρευνας, γίνεται αναφορά στη συμβολή της έρευνας και προτείνονται ιδέες για περαιτέρω μελέτες γύρω από τη ζήτημα της μετάβασης από το σχολείο στο πανεπιστήμιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό συζητείται το ζήτημα της μετάβασης από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση όπως έχει μελετηθεί τα τελευταία χρόνια μέσα από τη σχετική βιβλιογραφία και χωρίζεται σε πέντε επιμέρους ενότητες. Η πρώτη ενότητα αναφέρεται στη μετάβαση όπως έχει παρατηρηθεί σαν φαινόμενο μέσα από διάφορες έρευνες ανά τον κόσμο, στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζεται το περιεχόμενο και ο τρόπος προσέγγισης των μαθηματικών στο σχολείο και στο πανεπιστήμιο. Στην τρίτη ενότητα αναφέρονται οι παράγοντες που επηρεάζουν τη μετάβαση, η συγκεκριμένη ενότητα χωρίζεται σε δύο υπό ενότητες, γίνεται διαχωρισμός των παραγόντων σε αυτούς που αφορούν στη φύση των μαθηματικών και στην επίδραση που έχουν στη μετάβαση και στους κοινωνικό-πολιτισμικούς παράγοντες. Στην τέταρτη ενότητα παρουσιάζεται μια κατηγοριοποίηση των τρόπων με τους οποίους αντιμετώπισαν τη μετάβαση φοιτητές σε πανεπιστήμιο της Αγγλίας, όπως μελετήθηκαν από τους Daskalogianni και Simpson (2002). Τέλος, η πέμπτη ενότητα αναφέρεται στις πρωτοβουλίες που εφαρμόζουν διάφορα εκπαιδευτικά ιδρύματα για τη διευκόλυνση της μετάβασης μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων.

1.1 Μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Έχει παρατηρηθεί ότι υπάρχει ένα κενό μεταξύ των μαθηματικών που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση το οποίο παίρνει διαφορετικές μορφές και ποικίλει ανά τα εκπαιδευτικά συστήματα παγκοσμίως (Luk, 2007).

Σε μελέτη των Culpepper, Basilie, Ferguson, Lanning και Perkins (2010) αναφέρεται ότι το 50% των πρωτοετών φοιτητών που εισέρχονται στο πανεπιστήμιο αποτυγχάνουν ή χρειάζονται βοήθεια λόγω των χαμηλών τους επιδόσεων. Στην ίδια έρευνα αναφέρεται ότι πολλοί τελειόφοιτοι του λυκείου φαίνεται να μην είναι προετοιμασμένοι κατάλληλα για πανεπιστημιακού επιπέδου εργασία και δεν έχουν αναπτύξει τις «συνήθειες του νου». Παράλληλα η Varsavsky (2010) χαρακτηρίζει σαν παγκόσμιο φαινόμενο τη μείωση του αριθμού των αποφοίτων με μεγάλες μαθηματικές δεξιότητες τις τελευταίες δύο δεκαετίες. Ύστερα από έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σε διάφορες χώρες του κόσμου, όπως ΗΠΑ,

Ηνωμένο Βασίλειο, Ιρλανδία, Αυστραλία, Σουηδία και Κίνα φαίνεται να υπάρχει αύξηση του ασθενούς μαθηματικού υπόβαθρου των φοιτητών που εισέρχονται στο πανεπιστήμιο καθώς και των συνεπειών αυτού του φαινομένου. Συμπληρωματικά σε όλα αυτά οι Rylands και Coady σε σχετική μελέτη τους που πραγματοποίησαν στην Αυστραλία υποστηρίζουν ότι μόνο η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά στην τελευταία τάξη του σχολείου μπορεί να συσχετιστεί με την επιτυχία στα μαθηματικά του πρώτου έτους (Rylands & Coady, 2009).

Η μετάβαση από τα μαθηματικά του σχολείου στα μαθηματικά του πανεπιστημίου μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μείγμα πολλών διαφορετικών μεταβάσεων. Αυτές μπορεί να αφορούν στη μετάβαση από ένα ομοιογενές σε ένα ετερογενές περιβάλλον, κοινωνικές μεταβάσεις, από την προσωπική σχέση δασκάλου μαθητή στην πιο απρόσωπη, παιδαγωγικές μεταβάσεις, από τα περισσότερο πλαισιοθετημένα μαθηματικά στα λιγότερο, μεταβάσεις περιεχομένου κλπ. (Alcock & Simpson, 2002).

Οι Kajander και Lovric (2007) και Clark και Lovric (2008, 2009) χαρακτηρίζουν τη μετάβαση μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων σαν μια «μοντέρνα τελετή μετάβασης» δανειζόμενοι τον όρο από την επιστήμη της ανθρωπολογίας. Αυτή η τελετή αφορά σε αλλαγές που συμβαίνουν στη ζωή κάποιου και επηρεάζουν τις αποφάσεις του για το μέλλον. Κατά τη διάρκεια της μετάβασης σημαντικό ρόλο παίζουν η πανεπιστημιακή μαθηματική κοινότητα, η αλλαγή στο διδακτικό συμβόλαιο, η εισαγωγή πιο αφηρημένων εννοιών, ο συναισθηματικός κόσμος των φοιτητών κατά τη διάρκεια αυτών των αλλαγών, το μεγάλο χρονικό διάστημα που διαρκούν γενικότερα οι μεταβάσεις, και οι νέες αρμοδιότητες που αποκτούν οι φοιτητές και οι καθηγητές τους. Η επιτυχία της μετάβασης βασίζεται ως επί το πλείστον στην «υλικοτεχνική» βοήθεια που προσφέρεται από τις εμπλεκόμενες πλευρές (Kajander & Lovric, 2007˙ Selden, 2010).

Σύμφωνα με τους Clark και Lovric (2008, 2009) η χρονική διάρκεια της μετάβασης περιλαμβάνει τον τελευταίο χρόνο του σχολείου και το πρώτο έτος στο πανεπιστήμιο, συμπεριλαμβανομένου του διαστήματος μεταξύ του τέλους του σχολικού έτους και της αρχής του ακαδημαϊκού. Οι ίδιοι ερευνητές επιχειρούν το διαχωρισμό της μετάβασης σε τρία στάδια μέσα από τη μελέτη των οποίων αναλύουν τα προβλήματα και τα ζητήματα που προκύπτουν από αυτήν. Ορίζουν ως *διαχωρισμό* το πρώτο στάδιο, αυτό το στάδιο λαμβάνει χώρα όταν οι μαθητές είναι ακόμη στο σχολείο, και περιλαμβάνει την αναμονή της επικείμενης ζωής του πανεπιστημίου. Στο συγκεκριμένο στάδιο το άτομο καλείται να υιοθετήσει το νέο ρόλο που θα τον κάνει λειτουργικό στο πλαίσιο του πανεπιστημίου εγκαταλείποντας τις περισσότερες

πτυχές της ζωής του σαν μέλος μιας οικογένειας (κοινότητας). Το δεύτερο στάδιο είναι η *μέση φάση* και περιλαμβάνει το τελευταίο έτος του σχολείου, το χρονικό διάστημα μεταξύ σχολείου και πανεπιστημίου, και την αρχή του πρώτου έτους στο πανεπιστήμιο. Σε αυτό το στάδιο το άτομο το οποίο υπόκειται στη μετάβαση πετυχαίνει τις απαραίτητες αλλαγές με τη βοήθεια γεγονότων και δραστηριοτήτων που αποτελούν την τελετή μετάβασης. Το τρίτο και τελευταίο στάδιο είναι η *ενσωμάτωση* και περιλαμβάνει τον πρώτο χρόνο στο πανεπιστήμιο. Στο συγκεκριμένο στάδιο τα μέλη της νέας κοινότητας στην οποία εισέρχεται το άτομο το στηρίζουν προκειμένου να βρει τη θέση του σε αυτήν.

Η μετάβαση από τα μαθηματικά του σχολείου σε αυτά του πανεπιστημίου είναι από τις πιο σοβαρές που μπορεί να αντιμετωπίσει κάποιος καθώς και η πιο δύσκολη. Είναι μια φάση ανάμεσα στην ακολουθία των μεγάλων αλλαγών που μπορεί να βιώσει κάποιος κατά τη διάρκεια της ζωής του η οποία είναι δυνατόν να επηρεάσει τις αποφάσεις του για το μέλλον (Kajander & Lovric, 2007). Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές είναι αυτές που υποδεικνύουν την ύπαρξη του προβλήματος κατά τη διάρκεια της μετάβασης και αποτελούν κεντρικό σημείο στις σχετικές μελέτες (Gueudet, 2008).

Κατά τη μετακίνηση από το σχολείο στις προπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά παρατηρούνται αλλαγές στο διδακτικό συμβόλαιο (Brousseau, 1997). Το διδακτικό συμβόλαιο αναφέρεται στο σύνολο των συμπεριφορών που αναμένει ο μαθητής από το διδάσκοντα και αντίστοιχα ο διδάσκοντας από το μαθητή. Είναι ένα σύνολο κανόνων που προσδιορίζουν όσα οι συμμετέχοντες της διδακτικής σχέσης διαχειρίζονται και για τα οποία είναι υπόλογοι ο ένας απέναντι στον άλλον. Ξεκινώντας το πανεπιστήμιο οι φοιτητές συχνά αντιμετωπίζουν « μια δύσκολη μετάβαση, από μια θέση όπου οι έννοιες έχουν μια διαισθητική βάση θεμελιωμένη στην εμπειρία, σε μια όπου οι έννοιες προσδιορίζονται από τυπικούς ορισμούς και οι ιδιότητες τους ανακατασκευάζονται μέσα από λογικούς ορισμούς » (Tall, 1992, σελ.495). Επιπλέον έρχονται αντιμέτωποι με μια σημαντική αλλαγή, από την υπολογιστική προσέγγιση των μαθηματικών στην προσέγγιση που βασίζεται στην απόδειξη (Selden, 2010). Ο Beach (1999) αναφέρει ότι η μάθηση των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο γίνεται μια δραστηριότητα μέσα στην οποία λαμβάνει χώρα η «κατανόηση» . Υπάρχει λοιπόν μια «αναπτυξιακή αλλαγή» στη σχέση μεταξύ του ατόμου και της δραστηριότητας της μάθησης μαθηματικών (Hernandez-Martinez κ.ά., 2011).

Συμπληρωματικά με τις έρευνες που εστιάζουν στα προβλήματα που προκύπτουν κατά τη μετάβαση μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων και τους τρόπους αντιμετώπισης

τους οι Hernandez-Martinez κ.ά. (2011) υποστηρίζουν ότι η μετάβαση θα έπρεπε να αντιμετωπίζεται σαν μια ευκαιρία για την ανάπτυξη νέας ταυτότητας του ατόμου και όχι σαν εμπόδιο. Οι φοιτητές κατασκευάζουν τη νέα ταυτότητα τους καθώς ταξιδεύουν από το ένα στάδιο (σχολείο) στο άλλο (πανεπιστήμιο). Στοχαζόμενοι στα όσα πέρασαν και στις εμπειρίες τους αναφέρονται στα προβλήματα που αντιμετώπισαν σαν να ξεπεράστηκαν μέσω της τελετής μετάβασης κι αυτό λειτουργεί σαν μια επιβεβαίωση για το ποιοι είναι τώρα. Η έννοια του ατόμου που υπόκειται τη μετάβαση για τους συγγραφείς είναι μεταξύ του «ατόμου» που ήταν ο φοιτητής πριν τη μετάβαση και του «ατόμου» που τελικά έγινε με την ολοκλήρωση της μετάβασης. Από αυτή την οπτική η μετάβαση λειτουργεί σαν μια ευκαιρία για το άτομο που την πραγματοποιεί να γίνει κάποιος καινούριος.

1.2 Το περιεχόμενο και ο τρόπος προσέγγισης των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια και την τριτοβάθμια εκπαίδευση

Τα μαθηματικά στο σχολείο για πολλούς μαθητές και καθηγητές είναι περισσότερο αλγοριθμικά. Οι μαθητές διδάσκονται συγκεκριμένους κανόνες τους οποίους χρησιμοποιούν για την επίλυση ασκήσεων. Η εστίαση στα σχολικά βιβλία γίνεται σε περιορισμένου τύπου ασκήσεις που έχουν συνήθως αυστηρές μεθόδους επίλυσης. Επιπλέον υπάρχει φτωχή σύνδεση μεταξύ των θεμάτων. Συχνά οι ασκήσεις διαχωρίζονται σε απλούστερα υποερωτήματα και παρέχονται υποδείξεις προκειμένου να βοηθηθεί ο μαθητής, με αποτέλεσμα να εμποδίζεται η ανάπτυξη μαθηματικής αυτονομίας. Στο πανεπιστήμιο τα μαθηματικά αποκτούν άλλη υπόσταση. Είναι μια επιστήμη στην οποία παίζουν σημαντικό ρόλο οι ακριβείς ορισμοί, η αφαιρετική σκέψη και τα αυστηρά επιχειρήματα. Ο Praslon (2000) παρατηρεί ότι οι φοιτητές δεν είναι σε θέση να συνηθίσουν σε ένα είδος ασκήσεων μιας και νέα είδη ασκήσεων εμφανίζονται πολύ συχνά (Gueudet, 2008˙ Oikkonen, 2009˙ Selden, 2010).

Σύμφωνα με έρευνες των Clark και Lovric (2008, 2009) σε πανεπιστημιακά ιδρύματα του Καναδά, αναφέρεται ότι τα μαθηματικά του πανεπιστημίου εστιάζονται περισσότερο στην εννοιολογική κατανόηση. Περιλαμβάνουν πολλαπλές αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων, ανώτερη μαθηματική σκέψη, απόδειξη, αφαίρεση και αυστηρή μαθηματική γλώσσα Σε μελέτη των Breen, O' Shea και Pfeiffer σε εκπαιδευτικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ιρλανδία, οι ίδιοι οι φοιτητές φάνηκε να υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά του πανεπιστημίου είναι πολύ διαφορετικά σε σχέση με αυτά του σχολείου. Παρατήρησαν

μια αλλαγή στην έμφαση από τη διαδικαστική ευχέρεια στην εννοιολογική κατανόηση καθώς και μια μετακίνηση στην ανεξάρτητη μάθηση. Στα μαθηματικά του πανεπιστημίου δίνεται έμφαση στις συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών θεμάτων και υπάρχει αλλαγή στο στυλ διδασκαλίας (Breen κ.ά., 2013). Επιπλέον, σύμφωνα με τον Dreyfus (1999) στο σχολείο οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να παράγουν απλά αποτελέσματα ενώ στο πανεπιστήμιο φαίνεται να αποκτούν μεγαλύτερη ευθύνη προς τη διδαχθείσα γνώση. Έτσι ο ερευνητής υποστηρίζει ότι «…η κεντρική ερώτηση αλλάζει από το « Ποιο είναι το αποτέλεσμα; » στο « Είναι αλήθεια ότι; »…» (σελ. 106). Επίσης, όπως παρατηρεί η Douady (1992), η ευελιξία μεταξύ πλαισίων είναι άλλο ένα χαρακτηριστικό που απαιτείται στο πανεπιστήμιο (Gueudet, 2008).

Οι Alcock και Simpson (2002) σε σχετική έρευνα τους που πραγματοποιήθηκε στο Αγγλοσαξονικό εκπαιδευτικό σύστημα (Βρετανία και Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής), αναφέρουν ότι το σημαντικότερο στοιχείο που υπάρχει στα μαθηματικά του πανεπιστημίου και δεν υπάρχει στα μαθηματικά του σχολείου είναι η απόδειξη. Στο σχολείο οι όποιοι υπολογισμοί πραγματοποιούνται με συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα. Το ίδιο συμβαίνει και στο πανεπιστήμιο με τη διαφορά ότι οι φοιτητές πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζουν να εργάζονται με μια ολόκληρη κατηγορία αντικειμένων. Πιο συγκεκριμένα μπορεί να χρειάζεται να δείξουν ότι ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ανήκει σε μια κατηγορία.

Οι αποδείξεις που προσφέρονται στις διαλέξεις στο πανεπιστήμιο, σύμφωνα με έρευνα του Praslon (2000) σε πανεπιστήμιο της Γαλλίας, παίζουν ένα νέο ρόλο. Οικοδομούν την πανεπιστημιακή μαθηματική κουλτούρα, αφού επιδεικνύουν μεθόδους, καθώς και το τι απαιτεί αιτιολόγηση και τι όχι. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος λαμβάνουν χώρα διαφορετικού τύπου αποτελέσματα, μερικά από αυτά χρησιμεύουν σαν εργαλεία, ενώ άλλα μπορεί να λειτουργούν σαν ενδιάμεσα στάδια στη διαδρομή προς ένα σημαντικό θεώρημα κλπ. Τα παραπάνω είναι μια ένδειξη ότι τα γενικά χαρακτηριστικά του πανεπιστημιακού διδακτικού συμβολαίου διαφέρουν από αυτά του σχολικού (Gueudet, 2008).

1.3 Παράγοντες που επηρεάζουν τη μετάβαση

Οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το ζήτημα της μετάβασης από τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας στης τριτοβάθμιας εκπαίδευσης προσπάθησαν να εντοπίσουν ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν περισσότερο. Πολλοί αναφέρθηκαν σε παράγοντες που αφορούν

στη φύση του μαθήματος, σε επιστημολογικούς, γνωστικούς, πολιτισμικούς παράγοντες, στις συνήθειες διαβάσματος των φοιτητών αλλά και στο περιβάλλον μέσα στο οποίο δρουν.

Ο Moore (1994) κάνει λόγο για τρεις κύριες πηγές δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές και αφορούν στην:

- έννοια της κατανόησης
- μαθηματική γλώσσα και γραφή
- συγγραφή απόδειξης

Επίσης σχετικά με την τελευταία πηγή αναφέρει ότι οι αντιλήψεις των φοιτητών για τα μαθηματικά και την απόδειξη επηρεάζουν τη συγγραφή της απόδειξης.

Οι De Guzman, Hodgson, Robert και Villani (1998) επιχειρούν μια κατηγοριοποίηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές σε επιστημολογικές/γνωστικές, κοινωνιολογικές/πολιτισμικές και σε διδακτικές (Breen κ.ά., 2013). Οι Hoffkamp κ.ά. (2013) αναφέρονται σε τρεις λόγους για τους οποίους αποτυγχάνουν οι φοιτητές και αυτοί είναι οι ανεπαρκείς προαπαιτούμενες γνώσεις όταν εισέρχονται στο πανεπιστήμιο, η έλλειψη ικανότητας να εργάζονται αυτόνομα και η έλλειψη αυτοπειθαρχίας ώστε να προετοιμαστούν και να κάνουν επανάληψη για τις διαλέξεις αποτελεσματικά.

Σαν τους κυριότερους παράγοντες που επηρεάζουν τη μαθηματική επίδοση ο Pongboriboon (1992) επικαλείται την ικανότητα και το κίνητρο των φοιτητών. Τα αποτελέσματα της έρευνας του στο πανεπιστήμιο Khon Kaen της Ταϋλάνδης έδειξαν ότι πολλοί φοιτητές είχαν έλλειψη βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων ερχόμενοι στο πανεπιστήμιο, με συνέπεια οι μαθηματικές τους δεξιότητες στην αρχή του ακαδημαϊκού έτους να θεωρούνται ένας από τους βασικότερους παράγοντες που επηρεάζουν τη μετάβαση. Επιπλέον το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος φάνηκε ότι έπαιζε ρόλο καθώς οι φοιτητές χειρίζονταν τις μαθηματικές έννοιες με επιφανειακό τρόπο και δεν εμβάθυναν στην κατανόηση του περιεχομένου. Τα συγγράμματα στο πανεπιστήμιο παρείχαν πολύ απλές εξηγήσεις και η ύλη γενικότερα φαινόταν να μην συμβαδίζει με την πρότερη γνώση και εμπειρία τους μιας και βρισκόταν σε πολύ υψηλότερο επίπεδο εννοιολογικά. Οι καθηγητές κατά τη διάρκεια των διαλέξεων πίστευαν ότι οι φοιτητές ερχόμενοι στο πανεπιστήμιο είχαν γνώση της ύλης των μαθηματικών που είχαν διδαχθεί στο σχολείο κάτι που στην πραγματικότητα δεν συνέβαινε και δημιουργούσε κενά στη διδασκαλία. Ο ερευνητής παρατήρησε επίσης ότι οι συνήθειες διαβάσματος των φοιτητών επηρέασαν σε μεγάλο βαθμό τη μετάβαση τους. Οι φοιτητές δεν παρακολουθούσαν με συνέπεια τις διαλέξεις, δεν

αφιέρωναν επαρκή χρόνο στο διάβασμα τους και στην επίλυση ασκήσεων και λειτουργούσαν αυτόνομα κατά τη διάρκεια της μελέτης τους.

Η μεγάλη ποικιλία στο γνωστικό υπόβαθρο των φοιτητών που εισέρχονται στο πανεπιστήμιο, οι μη ξεκάθαρες απόψεις τους για τα μαθηματικά και το ρόλο τους στη μελλοντική τους καριέρα και ο φόβος του καινούριου είναι κάποια από τα σημεία που αναφέρουν οι Kajander και Lovric (2007) ότι επηρεάζουν τη μετάβαση. Τα αποτελέσματα της έρευνας τους έδειξαν ότι υπάρχει έλλειψη κατάλληλης τεχνικής γνώσης και υπολογιστικής επάρκειας καθώς και προβλήματα στη μαθηματική ωριμότητα των φοιτητών (πχ. σχηματισμός ενός λογικού επιχειρήματος). Σαν κυριότερα ζητήματα χαρακτηρίζουν και αυτοί το χρόνο τον οποίο αφιερώνουν οι φοιτητές για να κάνουν μαθηματικά, τον τρόπο μάθησης, από το πιο επιφανειακό του σχολείου στην εμβάθυνση του πανεπιστημίου και τέλος προσθέτουν τους ψυχολογικούς παράγοντες.

Ο Luk (2007) σε έρευνα που πραγματοποίησε στο Chinese University του Χογκ Κογκ αναφέρει πως μεγάλη σημασία έχουν και τα συστήματα με τα οποία αξιολογούνται οι φοιτητές στο πανεπιστήμιο αλλά και οι σχέσεις τους με τους συμφοιτητές και τους καθηγητές τους. Τη μη σύμπλευση σε επίπεδο προσδοκιών μεταξύ σχολείου και πανεπιστημίου αναγνωρίζουν σαν παράγοντα που επηρεάζει τη μετάβαση οι Culpepper κ.ά. (2010) ενώ παράλληλα προσθέτουν και κάποιους μη ακαδημαϊκούς παράγοντες, όπως κοινωνικές σχέσεις, οικονομικά ζητήματα, γνωστικό υπόβαθρο της οικογένειας καθώς και την υποστήριξη που λαμβάνουν οι φοιτητές από αυτήν.

Σε μελέτη των Hernandez-Martinez κ.ά. (2011) φανερώνεται ότι οι φοιτητές δεν είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι για να είναι αυτόνομοι σύμφωνα με δηλώσεις καθηγητών που συμμετείχαν στη συγκεκριμένη έρευνα. Στην ίδια έρευνα έγινε σχετική αναφορά από τους φοιτητές πως οι πιο σημαντικές πτυχές που φαίνεται να τους επηρεάζουν είναι οι κοινωνικές (αναφέρθηκε από 16 σε σύνολο 25 ερωτηθέντων). Επιπλέον χαρακτήρισαν τη μετάβαση σαν ένα σοκ στην αρχή του έτους κι αυτό γιατί περίμεναν τα μαθηματικά πολύ πιο διαφορετικά, αφήναν πίσω τους τα «εύκολα» πράγματα κι έρχονταν σε ένα πιο «δύσκολο», πιο «ώριμο» στάδιο μάθησης. Η δυσκολία έγκειται στο ότι πολλά από αυτά που διδάχθηκαν ήταν καινούρια κι έμοιαζαν ασύνδετα με ο, τι είχαν διδαχθεί ως τότε.

Μια πιο κοινωνική διάσταση στο σύνολο των παραγόντων που επηρεάζουν τη μετάβαση προσθέτει η έρευνα των Cherif και Wideen (1992). Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι το μεγαλύτερο ζήτημα με το οποίο έρχονται αντιμέτωποι οι φοιτητές είναι η αλλαγή

περιβάλλοντος. Η αλλαγή από την πιο δομημένη, γονικό – πειθαρχημένη ζωή στην πιο αυτόνομη ζωή του πανεπιστημίου. Παρατήρησαν ότι οι φοιτητές που ζουν μέσα στην πανεπιστημιούπολη είχαν καλύτερες επιδόσεις από αυτούς που μένουν εκτός. Αναφέρονται στη σχέση μεταξύ καθηγητών – φοιτητών, στο χρόνο που διαθέτουν οι πρώτοι για να επικοινωνήσουν με τους τελευταίους και κρίνουν απαραίτητο να κατανοηθούν οι πολιτισμικές νόρμες της ομάδας ώστε να γίνει ομαλότερη η μετάβαση. Επιπλέον κάνουν λόγο για μη επαρκή εκπαίδευση των καθηγητών να διδάσκουν σε μεγάλο πλήθος φοιτητών. Τέλος αναφέρονται στην έλλειψη κριτικής σκέψης από πλευράς των φοιτητών κάτι που επιβεβαιώνουν και οι καθηγητές του πανεπιστημίου.

Οι Brandell κ.ά. (2008) κάνουν λόγο για διαφορές στην αντίληψη γύρω από τη γνώση και τη μάθηση των μαθηματικών οι οποίες με τη σειρά τους παίζουν καθοριστικό ρόλο στη μετάβαση μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων. Συμπληρωματικά, σε μια προσπάθεια τους να καταγράψουν το σύνολο των αλλαγών που επηρεάζουν τη μετάβαση στα μαθηματικά της τριτοβάθμιας οι Clark και Lovric (2008, 2009) παραθέτουν τα ακόλουθα: αλλαγές στο διδακτικό στυλ και το στυλ μάθησης που απαιτούνται στα μαθηματικά του πανεπιστημίου, διαφορετικό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης και αύξηση του ποσοστού ανώτερης μαθηματικής σκέψης. Επιπλέον, χρήση αφηρημένων εννοιών, αφαιρετικός συλλογισμός, ακρίβεια στη μαθηματική γλώσσα, νέος ρόλος των αποδείξεων, προσωπικές αλλαγές που απαιτούν μια ρύθμιση των στρατηγικών μάθησης, πιο ανεξάρτητη ζωή και μελέτη. Τέλος, το μεγάλο μέγεθος της τάξης, το απαιτούμενο επίπεδο ωριμότητας, η έκθεση σε διαφορετικές κουλτούρες, ο βαθμός ανταγωνιστικότητας αλλά και το πέρασμα από την άτυπη στην τυπική γλώσσα και συλλογισμό. Σχετική αναφορά στο συλλογισμό γίνεται και από τους Alcock και Simpson (2002) οι οποίοι θεωρούν σαν μια από τις δυσκολίες της μετάβασης τις συγκεκριμένες στρατηγικές συλλογισμού που φέρουν οι φοιτητές από το σχολείο οι οποίες δεν είναι επαρκείς όταν εφαρμόζονται στα μαθηματικά του πανεπιστημίου. Παρόλα αυτά η Gueudet (2008) θεωρεί ότι η εστίαση δεν θα έπρεπε να γίνεται μόνο στον τρόπο με τον οποίο οργανώνεται η γνώση τους, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο είναι σε θέση να φτιάχνουν αποδείξεις, στον τρόπο με τον οποίο τις επικοινωνούν και γενικότερα υποστηρίζει και η ίδια την άποψη ότι η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιούν είναι ένας από τους κυριότερους παράγοντες μιας και μόνο μια μειοψηφία μαθητών είναι σε θέση να φτιάξουν σωστές αποδείξεις στο τέλος της σχολικής χρονιάς.

Παράγοντες που αφορούν στη φύση των μαθηματικών

Ο Luk (2007) υποστηρίζει πως η διαφορετική φύση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια και την τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι η αιτία που δημιουργείται το κενό μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει ως παράδειγμα το «περιβόητο» έψιλον – δέλτα κενό μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και του Απειροστικού Λογισμού, το οποίο είναι και αυτό που σηματοδοτεί τα διαφορετικά επίπεδα αυστηρότητας μεταξύ των δύο. Στους μαθηματικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη μετάβαση συγκαταλέγει την αυστηρή και αφαιρετική φύση των μαθηματικών και το δεινό φορμαλισμό τους. Η άποψη αυτή ενισχύεται και από τους Clark και Lovric (2008) οι οποίοι τονίζουν ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν ένα σοκ ερχόμενοι στο πανεπιστήμιο, το σοκ του περάσματος από την άτυπη στην τυπική γλώσσα και στο συλλογισμό. Επιπλέον, πολλοί από τους φοιτητές που μελέτησε σε σχετική έρευνα ο Moore (1994) παρουσίαζαν δυσκολίες στην κατανόηση των ορισμών γιατί όπως υποστήριζαν οι ίδιοι οι έννοιες ήταν αφηρημένες. Δεν ήταν σε θέση να δημιουργήσουν νοητικές εικόνες των εννοιών, και έτσι χωρίς μια άτυπη κατανόηση της έννοιας δεν μπορούσαν να καταλάβουν το γραπτό τύπο του ορισμού.

Σαν ένα άλμα από τα εμπειρικά στα αφηρημένα μαθηματικά και από τα μη τυπικά στα τυπικά χαρακτηρίζει σε έρευνα της η Nardi (1996) το κενό μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και του πανεπιστημίου. Προκειμένου να πετύχουν τη μετάβαση οι φοιτητές θα πρέπει να υιοθετήσουν έναν νέο τρόπο σκέψης και να λειτουργούν μαθηματικά. Οι περισσότεροι φοιτητές όταν έρχονται στο πανεπιστήμιο θεωρούν ότι τα μαθηματικά που θα αντιμετωπίσουν είναι μια επέκταση των μαθηματικών του σχολείου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην είναι προετοιμασμένοι για την αυστηρότητα και την ακρίβεια που απαιτούν τα μαθηματικά του πανεπιστημίου, και για την ανάγκη να κάνουν συνδέσεις και αφαιρέσεις (Hoyles, 2001).

Ο Oikkonen (2009) αναγνωρίζει πως η δυσκολία των φοιτητών έγκειται στις εννοιολογικές πτυχές των μαθηματικών και όχι στην έλλειψη ικανότητας τους να κάνουν υπολογισμούς. Προκειμένου να ισχυροποιήσει τη θέση του δίνει σαν παράδειγμα τους λόγους για τους οποίους οι φοιτητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό του ορίου. Αναφέρει ότι η έψιλον – σκέψη είναι δύσκολη και ότι η χρήση του ορισμού απαιτεί τη χρήση ανισοτήτων με έναν τρόπο που φαίνεται περίεργος για κάποιον που έρχεται από το σχολείο. Έτσι μια τέτοιου είδους αλλαγή στη σκέψη του φοιτητή αποτελεί μεγάλη πρόκληση για αυτόν. Η έννοια του ορίου είναι εκείνη που εκφράζει μια μετακίνηση σε ένα υψηλότερο

επίπεδο μαθηματικής σκέψης σύμφωνα με τον Cornu (1983), ο οποίος παρατήρησε ότι αυτή είναι η πρώτη μαθηματική έννοια που συναντούν οι φοιτητές για την οποία δεν χρειάζεται να κάνουν ευθείς μαθηματικούς υπολογισμούς (Tall, 1992).

Ο Tall (1991) δηλώνει ότι « η μετακίνηση από τη στοιχειώδη στην ανώτερη μαθηματική σκέψη περιλαμβάνει μια σημαντική μετάβαση: αυτήν από την περιγραφή στον ορισμό, από το πείθομαι στο αποδεικνύω με έναν λογικό τρόπο βασισμένο σε ορισμούς » (σελ. 20). Η μετάβαση ουσιαστικά είναι η μετακίνηση μεταξύ δύο τρόπων σκέψης. Οι Edwards, Dubinsky και Mc Donald (2005), ορίζουν την Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη (ΑΜΣ) σαν ένα φαινόμενο που εμφανίζεται όταν κάποιος φοιτητής Μαθηματικού Τμήματος αντιμετωπίζει για πρώτη φορά αφηρημένες έννοιες και επαγωγικές αποδείξεις, είναι εκείνη η σκέψη που « απαιτεί παραγωγικό και αυστηρό συλλογισμό για τις μαθηματικές έννοιες που δεν είναι ολοκληρωτικά προσιτές σε εμάς μέσα από τις πέντε αισθήσεις μας » (σελ. 16). Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι μερικές από τις δυσκολίες στη μετάβαση μπορεί να υπάρχουν εξαιτίας της ανάγκης για στροφή προς την ΑΜΣ (Gueudet, 2008).

Τα δύο σημαντικότερα συστατικά που αποδίδει ο Tall στην ΑΜΣ είναι οι ακριβείς μαθηματικοί ορισμοί και οι λογικές επαγωγές θεωρημάτων που βασίζονται σε αυτά. Η μετάβαση στην ΑΜΣ περιλαμβάνει τη μετακίνηση από μια θέση που οι έννοιες έχουν μια διαισθητική βάση θεμελιωμένη στην εμπειρία, σε μια άλλη θέση που προσδιορίζονται από τυπικούς ορισμούς και οι ιδιότητες τους ανα-κατασκευάζονται μέσα από λογικές επαγωγές. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετάβασης μέσα στο μυαλό του φοιτητή εξακολουθούν να υπάρχουν πρώιμες εμπειρίες γεγονός που μπορεί να δημιουργεί γνωστικές συγκρούσεις. Παρατηρείται λοιπόν μια ασυμφωνία μεταξύ των εννοιών όπως εννοούνται από τους μαθηματικούς και από τον τρόπο που ερμηνεύονται από τους φοιτητές (Tall, 1992).

Κοινωνικό-πολιτισμικοί παράγοντες

Πολλοί ερευνητές αναφέρονται στο ρόλο που παίζει το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο κατά τη διάρκεια της μετάβασης. Οι Brandell κ.ά. (2008) κάνουν λόγο για μια πολιτισμική διαφορά μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών βαθμίδων γύρω από την αντίληψη για τη μαθηματική σκέψη και τη μάθηση των μαθηματικών. Η Artigue (2004) σημειώνει ότι με την εισαγωγή των φοιτητών στο πανεπιστήμιο πραγματοποιείται μια μετάβαση μεταξύ δυο πολιτισμών (Gueudet, 2008).

Η σημασία της κοινότητας παίζει σημαντικό ρόλο για τους Clark και Lovric (2008), η οποία αποτελείται από γονείς, αδέλφια, συντρόφους, οικογένεια ή κοινωνική ομάδα. Καθοριστικός είναι και ο ρόλος των φίλων και συνομήλικων, των καθηγητών και στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες, της διοίκησης του πανεπιστημίου, των κέντρων υποστήριξης που διαθέτει το πανεπιστήμιο και οι διαφόρων ειδών οργανώσεων. Υποστηρίζουν ότι μια τελετή μετάβασης μπορεί να λάβει χώρα μόνο μέσα σε μια ξεκάθαρα ορισμένη κοινότητα. Αυτό που έχει πρωτεύουσα σημασία, προκειμένου να επιτευχθεί η μετάβαση, είναι να οικοδομηθεί μια λειτουργική κοινότητα, μέσα στην οποία θα ανατεθούν αρμοδιότητες σε κάθε μέλος, και θα υπάρχει η βεβαιότητα ότι όλοι είναι ενεργά μέλη αυτής της κοινότητας.

1.4 Τα φαινόμενα «cooling-off» και «cooling-out»

Σύμφωνα με ερευνητικό άρθρο των Daskalogianni και Simpson (2002) παρατηρούνται δύο φαινόμενα κατά τη διάρκεια μιας προβληματικής μετάβασης από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, το «cooling-off» και το «cooling-out». Οι ερευνητές μελέτησαν δώδεκα φοιτητές από την τελευταία χρονιά στο σχολείο μέχρι την πρώτη τους χρονιά σε ένα μεγάλο πανεπιστήμιο της Μεγάλης Βρετανίας. Από τους 12 φοιτητές παρατηρήθηκε ότι οι 6 φοιτητές ανήκουν στον τύπο «cooling off», οι 4 στον τύπο «cooling out» και οι 2 είχαν μια ομαλή μετάβαση.

Ο τύπος «Cooling-off» (ψύχρανση)

Το φαινόμενο «cooling-off» είναι η αναπτυσσόμενη απώλεια ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά. Οι φοιτητές οι οποίοι παρουσιάζουν τη συγκεκριμένη συμπεριφορά ξεκινούν με μια σχετικά θετική στάση προς τα μαθηματικά κατά τη διάρκεια των σχολικών τους χρόνων. Κατά την ενασχόληση τους με τα μαθηματικά συνήθως βασίζονται στην «ασφάλεια» μιας γνωστής μεθόδου ή στην καθοδήγηση του καθηγητή. Ερχόμενοι στο πανεπιστήμιο ανακαλύπτουν μια διαφορά μεταξύ των πεποιθήσεων που είχαν ως τότε για τη φύση των μαθηματικών και στον χαρακτήρα που έχουν τα μαθηματικά στο πανεπιστήμιο. Έτσι συχνά χάνουν το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά και αναπτύσσουν μια αρνητική στάση προς αυτά. Τα πρώτα σημάδια του φαινομένου εμφανίζονται την πρώτη εβδομάδα του μαθήματος και παρουσιάζουν την πιο έντονη έκφραση τους γύρω στην τέταρτη εβδομάδα. Ωστόσο οι φοιτητές στους οποίους εμφανίζεται το φαινόμενο «cooling-off» διαφέρουν από τους άλλους τύπους φοιτητών που μελετήθηκαν σε αυτή την έρευνα. Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός

ότι αφού έχουν φτάσει στο κορυφαίο σημείο της πορείας του φαινομένου σταδιακά καταφέρνουν να προσαρμοστούν στο νέο περιβάλλον. Η στάση τους γύρω από το μάθημα και τα μαθηματικά του πανεπιστημίου αρχίζει να αλλάζει και προσπαθούν να προσαρμοστούν στη νέα κατάσταση.

Ο τύπος «Cooling-out» (ψυχρότητα)

Ο συγκεκριμένος τύπος μοιάζει αρκετά με τον προηγούμενο, τουλάχιστον όταν οι μαθητές βρίσκονται ακόμη στο σχολικό περιβάλλον. Η στάση των μαθητών προς τα μαθηματικά είναι ιδιαίτερα θετική και απολαμβάνουν να ασχολούνται με αυτά. Η διαφορά βρίσκεται στην εστίαση της προσοχής τους. Αυτό που τους έλκει περισσότερο στα μαθηματικά είναι έμφαση στις σωστές απαντήσεις που αποκτούνται σε μικρό χρονικό διάστημα, βασίζονται στην καθοδήγηση του καθηγητή για την επίλυση ασκήσεων, δεν δουλεύουν ανεξάρτητα και αρκούνται στην εφαρμογή συγκεκριμένων τεχνικών. Συνήθως εξειδικεύονται μέσα από τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων, δεν αισθάνονται αυτοπεποίθηση και όταν φτάνουν σε κάποια σκέψη που μπορεί να τους οδηγεί στο αποτέλεσμα δεν μπορούν να το αιτιολογήσουν κάνοντας χρήση τυπικής μαθηματικής γλώσσας. Κατά συνέπεια οι πεποιθήσεις τους για τη φύση των μαθηματικών και τη φύση των ασκήσεων δεν είναι πια κατάλληλη για την προσαρμογή τους στα μαθηματικά του πανεπιστημίου. Το φαινόμενο κάνει την εμφάνιση τις πρώτες μέρες του εξαμήνου αλλά συνεχίζει ακόμη και μετά τη μέση του εξαμήνου με την ένταση του να παραμένει σε υψηλά επίπεδα. Η ένταση του φαινομένου και η επιμονή του είναι αυτά που διαφοροποιούν τη συμπεριφορά αυτών των φοιτητών από της προηγούμενης κατηγορίας. Οι φοιτητές στους οποίους εμφανίζεται αυτό το φαινόμενο μπλοκάρουν, δεν προσαρμόζονται στα μαθηματικά του πανεπιστημίου και νοιώθουν σε μεγάλο βαθμό ένα αίσθημα προσωπικής αποτυχίας.

Συμπερασματικά τα δύο φαινόμενα έχουν κοινό σημείο εκκίνησης αλλά διαφέρουν στον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές αντιμετωπίζουν τελικά τα μαθηματικά. Στο φαινόμενο «cooling-off» δυσκολεύονται αρχικά αλλά μπαίνουν στη διαδικασία να προσπαθήσουν ενώ στο «cooling-out» αφού συναντήσουν δυσκολίες απογοητεύονται και εγκαταλείπουν.

1.5 Προτάσεις για τη διευκόλυνση της μετάβασης

Προκειμένου να επιτευχθεί μια ομαλότερη μετάβαση έχουν προταθεί και εφαρμοστεί διάφορες πρωτοβουλίες από πολλά εκπαιδευτικά ιδρύματα παγκοσμίως. Ο Lovric (2005)

προτείνει την αξιοποίηση φοιτητών μεγαλύτερου έτους σαν βοηθούς καθηγητών όπως συμβαίνει στο πανεπιστήμιο McMaster. Το ίδιο αναφέρεται και σε μεταγενέστερη έρευνα του όπου στο Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου McMaster χρησιμοποιούνται προπτυχιακοί φοιτητές μεγαλύτερου έτους για τα φροντιστηριακά μαθήματα που γίνονται στους πρωτοετείς. Οι φοιτητές μεγαλύτερου έτους αποτελούν σημαντικό μέρος στην κοινότητα που εμπλέκεται στη μετάβαση. Μπορούν να μοιραστούν τις εμπειρίες τους και να προσφέρουν τις γνώσεις τους στους νέους φοιτητές. Το γεγονός ότι αυτοί οι φοιτητές έχουν ήδη περάσει από τη φάση της μετάβασης κι έχουν ζήσει αυτή την εμπειρία είναι δυνατόν να λειτουργήσει ευεργετικά για τους νέους φοιτητές (Selden, 2010). Επιπλέον για να πραγματοποιηθεί η μετάβαση οι φοιτητές που υπόκεινται σε αυτή είναι καλό να τοποθετούνται μαζί σε μια ομάδα. Βιώνοντας τους ίδιους φόβους και έχοντας κατά νου ότι πρέπει να περάσουν τις ίδιες δυσκολίες αναμένεται να αρχίσουν να σχηματίζουν δεσμούς και κατ' επέκταση να βοηθήσουν ο ένας τον άλλον (Clark & Lovric, 2008).

Μια άλλη πρωτοβουλία, που πραγματοποιείται από αρκετά πανεπιστήμια, είναι τα μαθήματα μετάβασης, ή γεφύρωσης, που έχουν ως σκοπό να διδάσκουν τους φοιτητές πώς να επικοινωνούν αποτελεσματικότερα στη γλώσσα των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα πώς να γράφουν τυπικές αποδείξεις (Moore, 1994). Προς αυτή την κατεύθυνση εργάστηκαν οι Hoffkamp κ.ά. (2013) οι οποίοι σχεδίασαν ένα μάθημα γεφύρωσης για φοιτητές πρώτου εξαμήνου για Τμήματα σχολών που είχαν μαθήματα μαθηματικών στο μεγαλύτερο μέρος του προγράμματος σπουδών αλλά και για φοιτητές που προορίζονταν για μελλοντικοί καθηγητές. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές έφτιαξαν ένα διδακτικό σενάριο προκειμένου να κατανοήσουν οι φοιτητές τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να αντιμετωπίζουν τις αποδείξεις στο πανεπιστήμιο. Ο σχεδιασμός του εν λόγω σεναρίου αποτελούνταν από τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση (Πληροφορίες) οι ερευνητές έδιναν πληροφορίες στους φοιτητές για τη λογική και για την απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Στο δεύτερο μέρος (Γνώση) δίνονταν στους φοιτητές το πρώτο μέρος μια άσκησης, δυο διαφορετικές αποδείξεις γύρω από το ίδιο ζήτημα και καλούνταν να τις αναλύσουν και να τις συγκρίνουν. Το τελευταίο μέρος (Μετα-γνώση) περιελάμβανε το δεύτερο μέρος της άσκησης, μια δραστηριότητα για σκέψη γύρω από την επιχειρηματολογία και απόδειξη από μια πιο φιλοσοφική σκοπιά.

Η Varsavsky (2010) υποστήριξε με τη σειρά της τα προγράμματα γεφύρωσης που στηρίζουν τη μετάβαση των φοιτητών από τη μελέτη των μαθηματικών του σχολείου σε αυτά του πανεπιστημίου. Θεωρεί ότι πρέπει να χρησιμοποιηθούν καινοτόμες και αποτελεσματικές μέθοδοι διδασκαλίας προκειμένου να γεφυρωθεί το πολιτισμικό κενό μεταξύ των δύο

βαθμίδων και τονίζει ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στον ψυχολογικό παράγοντα και στα επίπεδα αυτοπεποίθησης των φοιτητών (Varsavsky, 2010).

Παρόλα αυτά έχει εκφραστεί η άποψη ότι τα μαθήματα μετάβασης πολλές φορές δεν βοηθούν τους πραγματικά αδύναμους φοιτητές (Wood, 2001), για διάφορους λόγους, κάτι που δείχνει πως ένα μάθημα γεφύρωσης (όπως μια τελετή μετάβασης) πρέπει να είναι σχεδιασμένο για όλους κι όχι μόνο για μερικούς. Επιπλέον στις περιπτώσεις που η στρατηγική ενός συγκεκριμένου μαθήματος γεφύρωσης είναι επιτυχής σε ένα πανεπιστήμιο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ότι θα είναι το ίδιο επιτυχής όταν εφαρμοστεί σε ένα άλλο πανεπιστήμιο (Clark & Lovric, 2008, 2009).

Οι Brandell, κ.ά. (2008) θεωρούν ότι οι παραδοσιακές διαλέξεις πρέπει να αντικατασταθούν από τμήματα διδασκαλίας σε μικρότερες ομάδες οι οποίες θα ενσωματώνουν θεωρία και επίλυση προβλήματος. Υποστηρίζουν τη δημιουργία μικρών τμημάτων προετοιμασίας στα οποία θα γίνεται επανάληψη των μαθηματικών που έχουν διδαχθεί στο σχολείο ακριβώς πριν το πρώτο εξάμηνο. Αναφέρουν επιπλέον ότι τα Τμήματα των σχολών θα ήταν βοηθητικό να στέλνουν στους εν δυνάμει φοιτητές εισαγωγικό υλικό προκειμένου να κάνουν επανάληψη κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού πριν την είσοδο τους στο πανεπιστήμιο. Οι Eiselen, Strauss και Jonck (2007) προτείνουν το σχεδιασμό ενός διαγνωστικού τεστ που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αρχή του έτους μέσω του οποίου είναι δυνατόν να προβλέπεται η επιτυχία των φοιτητών στα μαθήματα του πρώτου εξαμήνου (Varsavsky, 2010).

Την έκθεση των πρωτοετών φοιτητών στην ακριβή μαθηματική γλώσσα και στον αυστηρό μαθηματικό συλλογισμό θεωρούν σαν πιο ευεργετική για τη μετάβαση τους οι Clark και Lovric (2008). Δεν αναγνωρίζουν σαν αρνητική πτυχή την ύπαρξη μεγάλου πλήθους τάξεων στο πανεπιστήμιο μιας και δεν υπάρχουν στοιχεία ότι μπορεί να παρουσιάζουν εμπόδιο στη μάθηση. Υποστηρίζουν ότι οι εν δυνάμει φοιτητές πρέπει να ενημερώνονται για τη μελλοντική τους ζωή σαν φοιτητές πανεπιστημίου από τη στιγμή που βρίσκονται στο σχολείο. Η μετάβαση παίρνει χρόνο και για να επιτευχθεί χρειάζεται προσπάθεια ώστε οι δραστηριότητες στην ένταξη να οικοδομηθούν σε όλες τις πτυχές της φοιτητικής ζωής, από διαλέξεις και φροντιστήρια μέχρι στα κοινωνικά γεγονότα και τον ελεύθερο χρόνο.

Μια άλλη πρωτοβουλία που προτείνουν οι ίδιοι ερευνητές και λαμβάνει χώρα στο πανεπιστήμιο McMaster είναι η πραγματοποίηση εισαγωγικών διαλέξεων στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού. Αξιοποιούνται περίπου επτά διαλέξεις ώστε να γίνει επανάληψη σε

βασικές έννοιες που έχουν ήδη διδαχθεί από το σχολείο και χρησιμοποιούνται στο μάθημα. Οι καθηγητές με τη σειρά τους παρέχουν σημειώσεις στην τάξη και είναι βέβαιοι ότι το υλικό καλύπτεται κατά τη διάρκεια των διαλέξεων. Βοηθητική θεωρείται και η παροχή επιπλέον ασκήσεων για επανάληψη. Παρόλα αυτά οι συγγραφείς αναφέρουν ότι η υπερβολική βοήθεια φαίνεται να μειώνει την αυτοπεποίθηση, είναι σημαντικό να δίνεται περισσότερη ευθύνη στους φοιτητές και τελικά όποιες μέθοδοι διδασκαλίας και αν έχουν επιλεγεί ή όποιοι τρόποι χρησιμοποιούνται για να αντιμετωπιστεί το πέρασμα από το σχολείο στο πανεπιστήμιο στο τέλος ο φοιτητής είναι εκείνος που θα διαπραγματευτεί τη μετάβαση.

Στο πλαίσιο της «τελετής μετάβασης» που αναφέρουν οι Clark και Lovric (2008) προκειμένου αυτή να είναι να επιτυχής, κρίνεται απαραίτητη μια προσομοίωση θανάτου και αναγέννησης. Πιο συγκεκριμένα συμπεριφορές, πεποιθήσεις και γνώση που ανήκουν στην «παλιά» ζωή πρέπει να εγκαταλειφθούν προκειμένου να ανοίξει δρόμος για νέες. Η ενσωμάτωση μιας διαδικασίας «ξε-μάθησης» είναι αναγκαίο συστατικό για ένα πετυχημένο πρόγραμμα μετάβασης, με την έννοια της εξασθένησης γνωστικών μοντέλων που υπάρχουν εξαιτίας παρανοήσεων των φοιτητών. Το άτομο χρειάζεται να νοιώθει άνετα στο νέο ρόλο του ως φοιτητής, να είναι σε θέση να εργαστεί προκειμένου να πετύχει τους στόχους του, να έχει πρόοδο, να υπάρχει υποστήριξη από το πανεπιστήμιο και από το περιβάλλον του και να απολαμβάνει τα μαθηματικά. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την επιτυχία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (κίνητρο, στυλ μάθησης, διδακτικά μοντέλα) ενδέχεται να χρειάζονται σημαντική τροποποίηση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Δεν φαίνεται να παίζει κάποιο ρόλο η επίδοση των μαθητών στο σχολείο στο αν η μετάβαση τους είναι ευκολότερη, ή διαφέρει σε χαρακτήρα. Το αν θα είναι ή όχι επιτυχής η μετάβαση είναι ανεξάρτητο από το ακαδημαϊκό ιστορικό του φοιτητή στο σχολείο (Clark & Lovric, 2009).

Ο Luk (2007) θεωρεί ότι προκειμένου να προταθούν τρόποι εξομάλυνσης για τη μετάβαση χρειάζεται να κατανοηθούν οι ψυχολογικοί παράγοντες που εμπλέκονται σε αυτήν, και πιο συγκεκριμένα να γίνει εστίαση στους ψυχολογικούς παράγοντες που προέρχονται από τη φύση της μαθηματικής σκέψης. Κρίνει επίσης αναγκαία τα εξής στοιχεία:

- διερεύνηση στις νοητικές διαδικασίες από τις οποίες οι φοιτητές μπορούν να καταλάβουν αφηρημένες έννοιες
- κατοχή της τυπικής γλώσσας
- αυστηρή επιχειρηματολογία

- καλό συναίσθημα για τα μαθηματικά αντικείμενα
- μαθηματική ωριμότητα

Κατανοώντας τη μαθηματική σκέψη επιτυγχάνεται ένα πρώτο βήμα στη γεφύρωση του κενού. Οι απαιτούμενες ενέργειες προκειμένου να ενισχυθεί η εγκαθίδρυση του μαθηματικού τρόπου σκέψης στους φοιτητές είναι να σχηματίζουν οι ίδιοι προβλήματα, να δουλεύουν με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους, να έχουν γεωμετρική διαίσθηση, να ελέγχουν τις λύσεις που βρίσκουν και να γενικεύουν. Προσπαθώντας να επιτευχθούν τα παραπάνω, στο πανεπιστήμιο του Χογκ Κογκ προσφέρονται φροντιστηριακά σεμινάρια για μικρές ομάδες συζητήσεων στα μαθήματα της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας, της Ανάλυσης και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Σε αυτά τα σεμινάρια προωθείται η αυτόνομη μελέτη, η καθαρή παρουσίαση των θεμάτων, η ενεργή διερώτηση γύρω από τα ζητήματα που τίθενται και η επίλυση προβλήματος (Luk, 2007).

Προκειμένου να γεφυρωθεί το κενό μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων υπάρχουν ερευνητές που υποστηρίζουν ότι αυτές πρέπει να έρθουν πιο κοντά. Μεταξύ αυτών είναι οι Cherif και Wideen (1992) οι οποίοι θεωρούν ότι θα έπρεπε να υπάρχει συνεργασία μεταξύ σχολείου – πανεπιστημίου, αλλά και ο Pyke (2012). Ο τελευταίος σε ερευνητικό του άρθρο κάνει λόγο για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να βοηθηθούν οι φοιτητές προκειμένου να μεταβούν από τα μαθηματικά του σχολείου στου πανεπιστημίου. Για να επιτευχθεί αυτό χρειάζεται να γίνουν προσπάθειες ώστε να προσεγγιστούν οι μαθητές του λυκείου, και οι καθηγητές τους να δώσουν την απαραίτητη σημασία στη μετάβαση παίρνοντας μέτρα βοήθειας για την προετοιμασία των μαθητών όσο αυτοί είναι ακόμη στο σχολείο (π.χ. αναπτύσσοντας τις συνήθειες διαβάσματος, της διαχείρισης του χρόνου τους κ.ά.). Το πανεπιστήμιο Simon Fraser στο Burnaby Mountain που βρίσκεται κοντά στο Vancouver στον Καναδά, πραγματοποιεί δύο πρωτοβουλίες προς αυτή την κατεύθυνση. Η πρώτη ονομάζεται «Πρέσβης των μαθηματικών» όπου φοιτητές πρώτου ή δεύτερου έτους επισκέπτονται μαθητές λυκείου για να συζητήσουν μαζί τους τις εντυπώσεις τους από το πανεπιστήμιο και να τους ενημερώσουν για τις διαφορές που έχουν εντοπίσει οι ίδιοι σε σχέση με το σχολείο. Η δεύτερη ονομάζεται «Γνώρισε και χαιρέτισε τα μαθηματικά». Σε αυτήν προσκαλούνται στο πανεπιστήμιο σχολικές τάξεις κατά τη διάρκεια του εξαμήνου προκειμένου να παρακολουθήσουν μαθήματα μαθηματικών πρώτου έτους. Σε αυτήν την περίπτωση οι μαθητές βλέπουν οι ίδιοι πώς γίνονται τα μαθήματα στο πανεπιστήμιο. Τους δίνεται η ευκαιρία να γνωρίσουν το τμήμα και τους φοιτητές κατά τη διάρκεια της επίσκεψης

τους. Παράλληλα με αυτές τις δραστηριότητες πραγματοποιείται κάθε χρόνο ένα συνέδριο μαθηματικής εκπαίδευσης «Αλλάζοντας την Κουλτούρα» που αποσκοπεί στη συνεργασία καθηγητών πανεπιστημίου και σχολείου.

Στο ίδιο πανεπιστήμιο εισαγωγικά μαθήματα μαθηματικών παρέχονται για τη διευκόλυνση των φοιτητών με διαφορετικό υπόβαθρο. Επίσης στο πρόγραμμα σπουδών ενσωματώθηκε ένα νέο μάθημα λογισμού, «Λογισμός με επανάληψη», το οποίο πραγματοποιείται παράλληλα με το κανονικό, περιλαμβάνει μια επιπλέον ώρα διάλεξης κάθε εβδομάδα και επιτρέπει στον καθηγητή να συμπεριλάβει επανάληψη βασικής Άλγεβρας μέσα στο υλικό του μαθήματος. Επιπλέον έχει σχεδιαστεί ένα διαγνωστικό τεστ για την εξακρίβωση της ευχέρειας των φοιτητών σε βασικές αλγεβρικές ικανότητες. Οι φοιτητές οι οποίοι κρίνεται ότι είναι αδύναμοι έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν «Συνεδρίες υποστήριξης Λογισμού», φροντιστήρια παράλληλα στα μαθήματα του Λογισμού. Τέλος στην προσπάθεια υποστήριξης των φοιτητών συγκαταλέγονται και τα «μαθηματικά εργαστήρια» στα οποία οι βοηθοί καθηγητών και/ ή οι καθηγητές απαντούν σε ερωτήσεις για το υλικό που γίνεται στην τάξη. Οι φοιτητές μπορούν να κανονίσουν την επίσκεψη τους όποτε κρίνουν ότι χρειάζονται βοήθεια και καλύπτονται συγκεκριμένες μαθηματικές τους ανάγκες. Έτσι δημιουργείται η αίσθηση της κοινότητας μεταξύ των φοιτητών, βοηθών και καθηγητών.

Ο Pyke (2012) δηλώνει πως για να ενισχυθεί η εμπειρία των φοιτητών στη μάθηση των μαθηματικών του πρώτου έτους χρειάζεται η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών για τη διαχείριση των μαθημάτων, η παραγωγή online αξιολογήσεων και πηγών, και ο εμπλουτισμός των διαλέξεων στην τάξη. Σύμφωνα με τα όσα πραγματοποιούνται στο πανεπιστήμιο Simon Fraser προτείνει σαν αποτελεσματική τη συχνή ανατροφοδότηση, συγκεκριμένα στο εν λόγω πανεπιστήμιο δίνονται κατά τη διάρκεια του εξαμήνου δυο 50λεπτα τεστ, τελικές εξετάσεις, online αξιολογήσεις και κουίζ εντός της τάξης. Προτείνει την ανάθεση εργασιών στους φοιτητές οι οποίες δεν χρειάζεται να παραδοθούν για αξιολόγηση.

Μια άλλη πρωτοβουλία που αξιοποιείται από το πανεπιστήμιο Simon Fraser είναι το «περιοδικό εργασίας» (homework journal). Με αυτό το περιοδικό ο κάθε φοιτητής μπορεί να οργανώνει το υλικό που έχει για κάθε μάθημα. Το περιοδικό αποτελείται από έναν πρόλογο που περιγράφει στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, τρόπους παρουσίασης των λύσεων, επιλεγμένες απαντήσεις σε προβλήματα, επαναληπτικά προβλήματα πριν από εξετάσεις, και μια κατηγοριοποίηση ερωτήσεων σε «ρουτίνας», «πρόκλησης χρόνου», «εννοιών και ορισμών», «ανακαλύψεων» και «ανώτερου επιπέδου κατανόησης» με σκοπό να γίνει

διευκρίνιση των διάφορων τύπων προβλημάτων που μπορεί να προκύψουν στο μάθημα. Το περιοδικό του φοιτητή βοηθάει επίσης τους καθηγητές και τους βοηθούς να αναγνωρίζουν δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο φοιτητής μιας και όταν ο φοιτητής ζητάει τη βοήθεια τους απαιτείται να παρουσιάζει το περιοδικό δείχνοντας ότι το διατηρεί.

Η χρήση της τεχνολογίας παίζει κυρίαρχο ρόλο στο συγκεκριμένο πανεπιστήμιο. Όλα τα μαθήματα είναι δυνατόν να είναι διαχειρίσιμα από τους φοιτητές online. Παρέχεται ένα ανοιχτό σύστημα διανομής εκπαιδευτικού περιεχομένου διαχείρισης και αξιολόγησης (LON-CAPA) για τη δημιουργία και τη διαχείριση των εργασιών των φοιτητών. Για παράδειγμα κάποιες φορές ο καθηγητής αναρτά μερικά προβλήματα πάνω στα οποία καλούνται να δουλέψουν οι φοιτητές μετά τη διάλεξη, τα ζητήματα που πραγματεύονται αυτά τα προβλήματα εισάγονται στην αμέσως επόμενη διάλεξη. Γίνονται επίσης εικονικές (video) διαλέξεις και χρησιμοποιούνται ευρέως μαθηματικά και αναλυτικά προγράμματα υπολογιστών, όπως το MAPLE και το GeoGebra. Προτείνεται επιπλέον η χρήση συστημάτων απάντησης στην τάξη, όπως τα clickers, για την αξιολόγηση των απαντήσεων των φοιτητών στις ερωτήσεις που θέτει ο καθηγητής κατά τη διάρκεια της διάλεξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΙ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται το περιεχόμενο του Απειροστικού Λογισμού που διδάσκεται στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου και του μαθήματος του Απειροστικού Λογισμού Ι. Γίνεται απλή αναφορά σε βασικές έννοιες (όριο, συνέχεια, παράγωγος) που υπάρχουν στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθημάτων στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες και στον τρόπο με τον οποίο αυτές παρουσιάζονται. Ωστόσο, δεν αναλύονται περαιτέρω καθώς ένας από τους στόχους της ενότητας είναι να παρουσιαστεί το εκπαιδευτικό πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιήθηκε η έρευνα. Έπεται μια παρουσίαση του αριθμού των πρωτοετών φοιτητών που εξετάστηκαν και πέρασαν το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι τα τελευταία τρία ακαδημαϊκά έτη. Ακολουθούν οι πρωτοβουλίες που αξιοποιούνται από το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών για την ομαλότερη ένταξη των φοιτητών στο περιβάλλον του πανεπιστήμιου.

2.1 Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Με τον όρο Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου αναφέρονται τα μαθηματικά που διδάσκονται στη Γ' τάξη του Ελληνικού Ενιαίου Λυκείου οι μαθητές που έχουν επιλέξει τη θετική ή την τεχνολογική κατεύθυνση. Το μάθημα διδάσκεται πέντε ώρες εβδομαδιαίως και για τη διδασκαλία του χρησιμοποιείται το σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη, Σ., Κατσαργύρη, Β., Μέτη, Σ., Μπρουχούτα, Κ., Παπασταυρίδη, Σ. και Πολύζου, Γ. . Το σχολικό εγχειρίδιο αποτελείται από δύο μέρη, το πρώτο μέρος αφορά στην Άλγεβρα και το δεύτερο στην Ανάλυση. Οι μαθητές εξετάζονται σε εθνικό επίπεδο στο κεφάλαιο των Μιγαδικών από το πρώτο μέρος ενώ από το δεύτερο στα κεφάλαια Όριο-συνέχεια συνάρτησης, Διαφορικός Λογισμός και Ολοκληρωτικός Λογισμός. Τα κεφάλαια της Ανάλυσης περιλαμβάνουν βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού όπως αυτές του ορίου, της συνέχειας και της παραγώγου με τις οποίες οι μαθητές έρχονται πρώτη φορά σε επαφή στην τελευταία τάξη του σχολείου.

Το περιεχόμενο των κεφαλαίων του σχολικού εγχειριδίου παρουσιάζεται στον πίνακα 2.1 :

1. Όριο - συνέχεια συνάρτησης	• Πραγματικοί Αριθμοί • Συναρτήσεις • Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση • Όριο συνάρτησης στο $x_0 \epsilon$ R • Ιδιότητες των ορίων • Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \epsilon$ R • Όριο συνάρτησης στο άπειρο • Συνέχεια συνάρτησης
2. Διαφορικός Λογισμός	• Η έννοια της παραγώγου • Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση • Κανόνες παραγώγισης • Ρυθμός μεταβολής • Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού • Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής • Τοπικά ακρότατα συνάρτησης • Κυρτότητα - σημεία καμπής συνάρτησης • Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital • Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης
3. Ολοκληρωτικός Λογισμός	• Αόριστο ολοκλήρωμα • Μέθοδοι ολοκλήρωσης • Διαφορικέ εξισώσεις • Ορισμένο ολοκλήρωμα • Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ • Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού • Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Πίνακας 2.1 : Περιεχόμενο κεφαλαίων Ανάλυσης, Γ' Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2003)

Η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 εισάγεται στο πρώτο κεφάλαιο του μέρους της Ανάλυσης όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1 :

Γενικά:

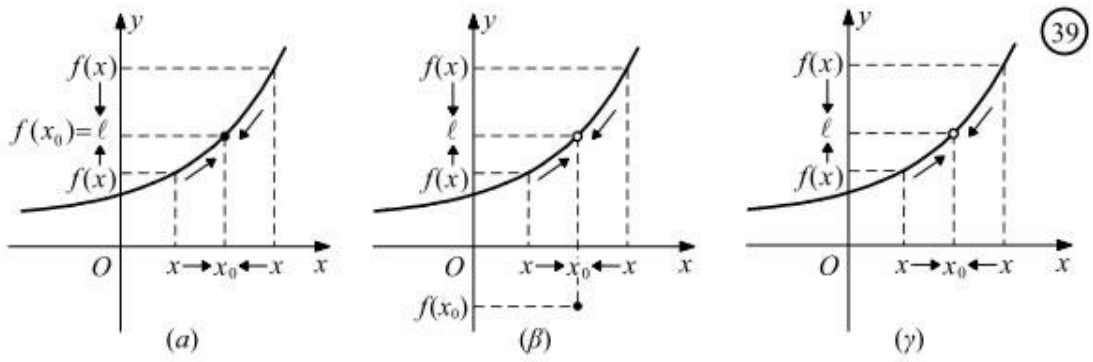
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ " ή

"το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ ".



Εικόνα 2.1: Εισαγωγή της έννοιας του ορίου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2003, σελ. 158)

Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι διαισθητική και αξιοποιείται η χρήση των γραφικών παραστάσεων, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1. Αυτό γίνεται γιατί η διδασκαλία του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό αλλά μια προετοιμασία για την εισαγωγή των εννοιών της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Ακολουθεί ο $\varepsilon - \delta$ ορισμός ο οποίος όμως δεν διδάσκεται. Με τον ίδιο τρόπο παρουσιάζονται τα μη πεπερασμένα όρια, τα πλευρικά όρια και το όριο συνάρτησης στο άπειρο. Τα παραδείγματα που δίνονται είναι αλγεβρικά και γραφικά και αφορούν κυρίως σε γνωστές συναρτήσεις. Υπάρχουν ορισμένες αποδείξεις, για το όριο της πολυωνυμικής, της ρητής και της συνάρτησης του ημιτόνου στο x_0 οι οποίες είναι

αλγεβρικές. Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις στην πλειονότητα τους είναι επίσης αλγεβρικού τύπου (Πετροπούλου, 2010˙ Οδηγίες για τον Εκπαιδευτικό, 2011).

Ορισμένοι από τους στόχους της συγκεκριμένης ενότητας είναι να μάθουν οι μαθητές να βρίσκουν το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 όταν δίνεται η γραφική της παράσταση, να γνωρίζουν τις ιδιότητες του ορίου και με τη βοήθεια τους να υπολογίζουν όρια απλών συναρτήσεων και να είναι σε θέση να υπολογίσουν τα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων στο άπειρο (Οδηγίες για τον Εκπαιδευτικό, 2011).

Η έννοια της συνέχειας ακολουθεί αυτήν του ορίου στην τρίτη και τελευταία ενότητα του ίδιου κεφαλαίου. Ο ορισμός που δίνεται για τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.2 :

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Εικόνα 2.2 : Ορισμός συνέχειας συνάρτησης (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2003, σελ. 188)

Η εισαγωγή και αυτής της έννοιας γίνεται εποπτικά με τη χρήση γραφικών παραστάσεων και στη συνέχεια δίνεται ο παραπάνω ορισμός (Εικόνα 2.2). Η πλειοψηφία των παραδειγμάτων που δίνονται είναι αλγεβρικού τύπου και αφορούν ως επί το πλείστον στον ορισμό της συνέχειας και σε πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις. Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις είναι επίσης αλγεβρικού τύπου κυρίως, παρόλα αυτά υπάρχουν ορισμένες ασκήσεις στις οποίες ο μαθητής χρειάζεται να σκεφτεί πάνω σε μια γραφική παράσταση (Πετροπούλου, 2010).

Η κατανόηση της έννοιας της συνέχειας της συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, η αναγνώριση της συνέχειας μιας συνάρτησης σε σημείο ή διάστημα από τη γραφική της παράσταση, η αναγνώριση των βασικών συνεχών συναρτήσεων και των βασικών θεωρημάτων (Bolzano, ενδιάμεσης τιμής, μέγιστης και ελάχιστης τιμής κ.ά.) είναι μερικοί από τους στόχους που τίθενται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της συγκεκριμένης έννοιας (Οδηγίες για τον Εκπαιδευτικό, 2011).

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια να επιτευχθεί ο κύριος στόχος της διδασκαλίας της Ανάλυσης ο οποίος είναι η χρήση της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης στις εφαρμογές. Στην παρούσα εργασία γίνεται περαιτέρω αναφορά μόνο στην παράγωγο καθώς μόνο αυτή χρησιμοποιείται στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι.

Η εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου επιχειρείται με τον ορισμό της εφαπτομένης μιας καμπύλης $y = f(x)$ σε ένα σημείο και της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η γεωμετρική σημασία της έννοιας (συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης) αλλά και η φυσική της σημασία (ρυθμός μεταβολής) (Οδηγίες για τον Εκπαιδευτικό, 2011) ενώ ακολουθεί ο τυπικός ορισμός της Εικόνας 2.3 :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με **$f'(x_0)$**. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Εικόνα 2.3 : Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2003, σελ. 213)

Γενικότερα οι ορισμοί στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται πρώτα διαισθητικά μέσω γραφικών παραστάσεων ή με το συνδυασμό αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων ενώ η τυπική τους μορφή έπεται (Πετροπούλου, 2010).

Ανάμεσα στους στόχους που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας είναι να γνωρίζουν οι μαθητές τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής, να αναγνωρίζουν τα σημεία της γραφικής παράστασης στα οποία ορίζεται η εφαπτομένη και να

είναι σε θέση να σχηματίσουν την εξίσωση της, η γνώση των θεωρημάτων Rolle, Μέσης τιμής και Fermat. Να γνωρίζουν επίσης τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων, να είναι σε θέση να βρίσκουν παραγώγους συναρτήσεων, να εφαρμόζουν τους κανόνες de L'Hospital κατά τον υπολογισμό των ορίων, να βρίσκουν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και να χαράσσουν τη γραφική παράσταση με τη βοήθεια των παραγώγων (Οδηγίες για τον Εκπαιδευτικό, 2011).

2.2 Απειροστικός Λογισμός Ι

Ο Απειροστικός Λογισμός Ι είναι ένα από τα δεκατέσσερα υποχρεωτικά μαθήματα του προγράμματος σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου της Αθήνας. Προσφέρεται στο πρώτο έτος σπουδών και στα δύο εξάμηνα (χειμερινό, εαρινό) κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους. Διδάσκεται έξι ώρες εβδομαδιαίως εκ των οποίων οι τέσσερις αποτελούν το κομμάτι της θεωρίας και οι υπόλοιπες το κομμάτι των ασκήσεων. Το μάθημα είναι σχεδιασμένο να γίνεται σε διαφορετικά τμήματα (τρία ή τέσσερα) με ισομερή κατανομή των φοιτητών ανά τμήμα. Εκτός από τους πρωτοετείς φοιτητές έχουν δικαίωμα στην παρακολούθηση του μαθήματος και όσοι δεν κατάφεραν να πετύχουν στις εξετάσεις του σε προηγούμενο εξάμηνο.

Στους φοιτητές που επιλέγουν το μάθημα προτείνεται η παρακάτω ενδεικτική βιβλιογραφία:

1) Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας: Απειροστικός Λογισμός Ι, Εκδόσεις Συμμετρία.

2) Λ. Τσίτσας: Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία.

3) M. Spivak: Calculus, Benjamin (Ελληνική μετάφραση με τίτλο: «Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός» από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης)

4) R. Courant and F. John: Introduction to Calculus and Analysis, Vol. I, Interscience.

5) G. H. Hardy: A Course in Pure Mathematics, Cambridge University Press.

6) S. Salas and E. Hille: Calculus, John Wiley.

7) R. Bartle and D. Sherbert: Introduction to Real Analysis, John Wiley.

Επιπλέον διατίθενται σημειώσεις καθηγητών του μαθήματος σε ηλεκτρονική μορφή. Πιο συγκεκριμένα για τη διευκόλυνση της μελέτης των φοιτητών υπάρχει στην ηλεκτρονική πλατφόρμα του πανεπιστημίου (e-class) ειδική καταχώρηση συνδέσμου για τον Απειροστικό Λογισμό Ι μέσω του οποίου μπορούν να προμηθεύονται υλικό σχετικό με το μάθημα. Το υλικό αυτό αποτελείται από σημειώσεις καθηγητών του μαθήματος, σημειώσεις φοιτητών από τις διαλέξεις του μαθήματος, ασκήσεις, υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων, παλιότερα θέματα εξετάσεων και κάποιες σημειώσεις ξένης βιβλιογραφίας.

Η ύλη του μαθήματος αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο, το οποίο προβλέπεται να διδάσκεται σε περίπου 3 εβδομάδες, αφορά στους πραγματικούς αριθμούς. Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών με χρονικό ορίζοντα διδασκαλίας περίπου 2,5 εβδομάδων. Το τρίτο κεφάλαιο είναι γύρω από τις συναρτήσεις και δαπανάται γύρω στη 1,5 εβδομάδα για να διδαχθεί. Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στη συνέχεια και το όριο συναρτήσεων και διδάσκεται σε περίπου 3 εβδομάδες. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η παράγωγος με προβλεπόμενο χρόνο διδασκαλίας σχεδόν τριών εβδομάδων.

Αναλυτικά τα κεφάλαια και οι ενότητες που διδάσκονται παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2 :

1. Πραγματικοί αριθμοί	• Αξιωματική θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών • Φυσικοί, Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί • Αξίωμα πληρότητας • Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας • Άρρητοι αριθμοί • Ακέραιο μέρος • Πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς • Κλασικές ανισότητες
2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών	• Συγκλίνουσες ακολουθίες • Μονότονες ακολουθίες • Κιβωτισμός διαστημάτων • Αναδρομικές ακολουθίες

3. Συναρτήσεις	• Βασικοί ορισμοί • Αλγεβρικές συναρτήσεις • Τριγωνομετρικές συναρτήσεις • Εκθετική συνάρτηση
4. Συνέχεια και όριο συναρτήσεων	• Συνέχεια. Η έννοια του ορίου συνάρτησης • Αρχή της μεταφοράς • Συνέχεια βασικών συναρτήσεων • Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά • Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών • Ύπαρξη μεγίστης και ελαχίστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά διαστήματα, Μονότονες συναρτήσεις • Συνεχείς και 1-1 συναρτήσεις • Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις • Λογαριθμική συνάρτηση
5. Παράγωγος	• Εισαγωγή: παραδείγματα από τη Γεωμετρία και τη Φυσική • Η έννοια της παραγώγου • Κανόνες παραγώγισης • Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων • Θεώρημα μέσης τιμής • Θεώρημα Darboux • Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης • Κριτήρια τοπικών ακροτάτων • Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής • Κανόνες de l'Hospital • Μελέτη συναρτήσεων

Πίνακας 2.2 : Περιεχόμενα Απειροστικού Λογισμού Ι

Οι ορισμοί που διδάσκονται στους φοιτητές για την έννοια της συνέχειας και του ορίου συνάρτησης φαίνονται στις εικόνες 2.4 και 2.5 :

Ορισμός 4.1.1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

Εικόνα 2.4 : Ορισμός συνέχειας συνάρτησης (Πρόχειρες σημειώσεις, 2009, σελ.73)

Ορισμός 4.4.1 (όριο συνάρτησης). Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 υπάρχει και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ αν:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Αν ένας τέτοιος αριθμός ℓ υπάρχει, τότε είναι μοναδικός (δείξτε το) και γράφουμε $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ή $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to x_0$.

Εικόνα 2.5 : Ορισμός ορίου συνάρτησης (Πρόχειρες σημειώσεις, 2009, σελ. 89)

Τα παραδείγματα που έπονται των ορισμών βασίζονται στη χρήση του $\varepsilon - \delta$ ορισμού και όλες οι προτάσεις και τα θεωρήματα δίνονται με τις τυπικές αποδείξεις τους. Ωστόσο δεν γίνεται ευρεία χρήση αναπαραστάσεων.

Η έννοια της παραγώγου γίνεται με την εισαγωγή του ορισμού της παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Ο τυπικός ορισμός που διδάσκεται παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.6 :

Ορισμός 5.1.1. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 αν υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Το όριο $f'(x_0)$ (αν υπάρχει) λέγεται **παράγωγος** της f στο x_0. Θέτοντας $h = x - x_0$ βλέπουμε ότι, ισοδύναμα,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

αν το τελευταίο όριο υπάρχει.

Εικόνα 2.6 : Ορισμός της παραγώγου (Πρόχειρες σημειώσεις, 2009, σελ. 107)

Όπως σε όλη την έκταση των σημειώσεων (αλλά και των συγγραμμάτων που προτείνονται) έτσι και σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται παραδείγματα που βασίζονται στον ορισμό και υπάρχουν τυπικές αποδείξεις σε προτάσεις, λήμματα και θεωρήματα.

Ο Απειροστικός Λογισμός Ι είναι από τα πρώτα μαθήματα με το οποίο έρχονται σε επαφή οι φοιτητές όταν ξεκινούν τις σπουδές τους στο Τμήμα Μαθηματικών. Στο συγκεκριμένο μάθημα διδάσκονται έννοιες οι οποίες αποτελούν τη βάση των υπόλοιπων μαθημάτων της Ανάλυσης. Ένας από τους κυριότερους στόχους της διδασκαλίας του Απειροστικού είναι να μάθουν οι φοιτητές αυτές τις βασικές έννοιες και να είναι σε θέση να τις κατανοήσουν σε βάθος. Επιπλέον, σκοπός της διδασκαλίας είναι να γίνεται φανερή η εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης που οδήγησε στο εκάστοτε αποτέλεσμα που μελετάται και να παρακινούνται οι φοιτητές να συμμετέχουν ενεργά σε αυτή την εξέλιξη.

Στη συνέχεια, στον Πίνακα 2.3, παρατίθενται ορισμένες πληροφορίες σχετικά με τους πρωτοετείς φοιτητές που εξετάστηκαν και πέτυχαν στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι τα τρία τελευταία ακαδημαϊκά έτη.

Ακαδημαϊκό έτος	Αριθμός εξεταζόμενων (εξεταστική Φεβρουαρίου)	Αριθμός επιτυχόντων (εξεταστική Φεβρουαρίου)	Αριθμός επιτυχόντων (επαναληπτική εξεταστική Ιουλίου)	Αριθμός επιτυχόντων (επαναληπτική εξεταστική Σεπτεμβρίου)	Συνολικός αριθμός επιτυχόντων
2011 – 2012	**196**	**79**	**9**	**8**	**98**
2012 – 2013	**191**	**75**	**13**	**27**	**115**
2013 – 2014	**184**	**56**	**27**	**-**	**-**

Πίνακας 2.3: Αριθμός επιτυχόντων στην εξέταση του Απειροστικού Λογισμού Ι

Η εκπόνηση της εργασίας πραγματοποιήθηκε πριν την επαναληπτική εξέταση του Σεπτεμβρίου για αυτό το λόγο δεν υπάρχουν σχετικές πληροφορίες για το ακαδημαϊκό έτος 2013 – 2014. Από τα δεδομένα του Πίνακα 2.3 φαίνεται ότι περίπου 200 φοιτητές επιλέγουν κάθε χρόνο τα τελευταία τρία ακαδημαϊκά έτη να εξεταστούν στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι κατά την εξεταστική περίοδο του Φεβρουαρίου. Από τους φοιτητές που εξετάστηκαν στο μάθημα στη συγκεκριμένη εξεταστική περίοδο, το έτος 2011 – 2012, το 40% πέτυχε στις εξετάσεις του μαθήματος, παρόμοιο ποσοστό 39%, πέτυχε και την επόμενη χρονιά 2012 – 2013. Ενώ το έτος 2013 – 2014 μόνο το 30% κατάφερε να περάσει το μάθημα στην πρώτη εξεταστική του έτους.

2.3 Υποστήριξη πρωτοετών φοιτητών Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Όπως στα διάφορα πανεπιστήμια ανά τον κόσμο όπου στους πρωτοετείς φοιτητές παρέχεται υποστήριξη από το ίδιο το ίδρυμα για τη διευκόλυνση της μετάβασης μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων, έτσι και στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών προσφέρεται αυτή η δυνατότητα. Προκειμένου να επιτευχθεί μια ομαλότερη ένταξη των

πρωτοετών φοιτητών στο νέο περιβάλλον εφαρμόζονται κάθε χρόνο από το Τμήμα οι ακόλουθες πρωτοβουλίες: ο θεσμός του συμβούλου καθηγητή, το μάθημα των Θεμελίων των Μαθηματικών και η παροχή φροντιστηριακών μαθημάτων.

Σύμβουλος καθηγητής

Το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κατά την εγγραφή των πρωτοετών φοιτητών ορίζει για κάθε φοιτητή ξεχωριστά ένα από τα μέλη του διδακτικού προσωπικού ως σύμβουλο του φοιτητή καθ' όλη τη διάρκεια φοίτησης. Ο εκάστοτε φοιτητής έχει τη δυνατότητα να έρθει σε επαφή με το σύμβουλο καθηγητή του προκειμένου να γνωριστούν και να μπορεί να τον συμβουλευτεί για οποιοδήποτε πρόβλημα προκύψει κατά τη διάρκεια της προσαρμογής του στο Τμήμα αλλά και αργότερα, για καθοδήγηση που ίσως αναζητήσει, ή κάποια απόφαση που πιθανώς θα χρειαστεί να λάβει κατά τη διάρκεια των σπουδών του. Ο θεσμός αυτός εφαρμόζεται περισσότερο από δέκα χρόνια ήδη και φέρνει σε μια πιο προσωπική επαφή τους φοιτητές με το διδακτικό προσωπικό του Τμήματός. Με αυτόν τον τρόπο τίθεται ως στόχος οι φοιτητές να αποβάλλουν το αίσθημα ότι εισέρχονται σε ένα πιο απρόσωπο περιβάλλον σε σχέση με αυτό που βρίσκονταν και να αποκτήσουν περισσότερη αυτοπεποίθηση έχοντας την υποστήριξη των καθηγητών τους.

Θεμέλια των Μαθηματικών

Το μάθημα των Θεμελίων των Μαθηματικών ενσωματώθηκε στο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών το ακαδημαϊκό έτος 2008 – 2009. Είναι μάθημα επιλογής της Θεωρητικής Κατεύθυνσης Μαθηματικών κι έχουν δικαίωμα να το παρακολουθήσουν μόνο φοιτητές που βρίσκονται στο πρώτο εξάμηνο σπουδών τους. Δημιουργείται μόνο ένα τμήμα ετησίως. Στο μάθημα γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία συνόλων, στις σχέσεις και στις συναρτήσεις κι επιπλέον παρουσιάζεται ο προτασιακός λογισμός και οι μιγαδικοί αριθμοί. Η αξιολόγηση των φοιτητών περιλαμβάνει γραπτές εξετάσεις στο τέλος του εξαμήνου.

Το περιεχόμενο των Θεμελίων των Μαθηματικών απαρτίζεται από τις παρακάτω ενότητες:

- Σύνολα – Σχέσεις – Συναρτήσεις
- Προτασιακός Λογισμός
- Φυσικοί αριθμοί: αξιώματα Peano, επαγωγή, αρχή ελαχίστου

- Πραγματικοί αριθμοί. Πληθάριθμοι, αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα
- Μιγαδικοί αριθμοί – πολυώνυμα – απαλοιφή Gauss

Το συγκεκριμένο μάθημα εντάχθηκε στο πρόγραμμα σπουδών προκειμένου οι νεοεισερχόμενοι φοιτητές να έχουν την ευκαιρία να θυμηθούν ή και να γνωρίσουν έννοιες που θα χρησιμοποιούν εκτενώς αργότερα. Έτσι έχουν τον απαραίτητο χρόνο να τις κατανοήσουν, να τις δουν αφηρημένα και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν και αλλού.

Φροντιστηριακά μαθήματα

Η πρωτοβουλία αυτή εφαρμόζεται τα τελευταία πέντε χρόνια. Φοιτητές από μεγαλύτερα έτη ή μεταπτυχιακοί φοιτητές του Τμήματος παρέχουν υποστηρικτικά μαθήματα σε πρωτοετείς φοιτητές. Στα φροντιστηριακά αυτά μαθήματα λύνονται ασκήσεις και συζητούνται απορίες των φοιτητών σε όλα τα υποχρεωτικά μαθήματα του πρώτου έτους. Το ακαδημαϊκό έτος 2013 – 2014 εντάχθηκε στο πλάνο του μαθήματος προς διδασκαλία ένα μέρος της Τριγωνομετρίας το οποίο είχε μείνει εκτός αναλυτικού προγράμματος στη Γ' Λυκείου.

Τα κυριότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές, όπως αναφέρθηκαν από φοιτητές που έχουν διδάξει σε αυτά τα μαθήματα, ήταν:

- Κατανόηση νέων εννοιών που εισάγονται στο πανεπιστήμιο
- Δυσκολία στην ενσωμάτωση ήδη γνωστών εννοιών από το σχολείο (π.χ. όριο, συνέχεια) στο πλαίσιο του πανεπιστημίου

Σε ιδιωτική συζήτηση με φοιτητή ο οποίος δίδασκε σε αυτά τα μαθήματα το ακαδημαϊκό έτος 2012 – 2013, εξέφρασε την άποψη ότι αυτά συμβάλλουν αισθητά στη βελτίωση της επίδοσης των πρωτοετών φοιτητών και θεωρείται ιδιαίτερα ευεργετικό το γεγονός ότι πραγματοποιούνται από μεγαλύτερους φοιτητές και όχι από καθηγητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΕΡΕΥΝΑ

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πέντε πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο πανεπιστήμιο στη διάρκεια παρακολούθησης του Απειροστικού Λογισμού Ι. Μέσω της ανάδειξης των δυσκολιών επιχειρείται να διερευνηθεί και ο βαθμός επίδρασης του κοινωνικού και ακαδημαϊκού πλαισίου κατά τη διάρκεια της μετάβασης.

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα

1^{ο} Ε.Ε.: Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο;

2^{ο} Ε.Ε.: Σε ποιο βαθμό και με ποιο τρόπο το κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο επηρεάζουν τη μετάβαση μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων;

3.3 Μέθοδος

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα Ιανουαρίου – Ιουνίου 2014. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η ποιοτική μελέτη περίπτωσης. Η συγκεκριμένη μέθοδος επέτρεψε τη μελέτη πέντε φοιτητών με διαφορετικό υπόβαθρο. Για τη μελέτη των φοιτητών χρησιμοποιήθηκαν τρία ερωτηματολόγια και τέσσερις συνεντεύξεις. Η επιλογή του δείγματος έγινε ύστερα από τη συμπλήρωση του πρώτου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Α) το οποίο μοιράστηκε σε ένα από τα τέσσερα τμήματα του Απειροστικού Λογισμού Ι στην έναρξη των μαθημάτων και απαντήθηκε από 58 άτομα. Οι πέντε φοιτητές που επιλέχθηκαν τελικά να συμμετέχουν στην έρευνα μελετήθηκαν ο κάθε ένας ξεχωριστά σε χώρο του πανεπιστημίου κατά τη διάρκεια τεσσάρων διαδοχικών συνεντεύξεων σε κάποιες από τις οποίες

συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο. Η πρώτη συνέντευξη έλαβε χώρα μεταξύ της έκτης και έβδομης εβδομάδας μαθημάτων, η δεύτερη πραγματοποιήθηκε την ενδέκατη εβδομάδα μαθημάτων, η τρίτη την τελευταία εβδομάδα μαθημάτων και η τελευταία στα μέσα του εαρινού εξαμήνου (η διάρκεια του χειμερινού εξαμήνου είναι 13 εβδομάδες). Οι συνεντεύξεις διαρκούσαν από 30 έως 45 λεπτά.

3.4 Ερευνητικά εργαλεία

Τα τρία ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας είχαν διαφορετική δομή. Το πρώτο ερωτηματολόγιο χωριζόταν σε δύο μέρη, το αρχικό μέρος περιείχε ερωτήσεις που αφορούσαν σε προσωπικά στοιχεία των φοιτητών (ηλικία, φύλο, τόπος διαμονής) και στην έως τότε σχέση τους με τα μαθηματικά (βαθμοί, προτιμήσεις – δυσκολίες σε συγκεκριμένες έννοιες). Το δεύτερο μέρος αποτελούνταν από τέσσερις ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου οι οποίες βασίζονταν κυρίως στην ύλη των μαθηματικών κατεύθυνσης της τρίτης λυκείου. Το μαθηματικό περιεχόμενο αφορούσε σε βασικές έννοιες που είχαν διδαχθεί στην τελευταία τάξη του Λυκείου, όπως την έννοια του ορίου, της συνέχειας και της παραγώγου. Επιπλέον το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε μια άσκηση στην οποία οι φοιτητές καλούνταν να σχηματίσουν την άρνηση δύο προτάσεων, μιας πρότασης από την καθημερινή ζωή και μιας μαθηματικής πρότασης.

Το δεύτερο (Παράρτημα Β) και το τρίτο ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Γ) συμπληρώθηκαν από τους πέντε φοιτητές που ήταν οι βασικοί συμμετέχοντες της έρευνας, αποτελούνταν αποκλειστικά από ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού Ι πάνω σε ύλη που είχαν διδαχθεί οι φοιτητές. Τα θέματα στα οποία αναφέρονταν οι ερωτήσεις αφορούσαν σε έννοιες στις οποίες βάσει ερευνητικών δεδομένων οι πρωτοετείς φοιτητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση τους. Το δεύτερο ερωτηματολόγιο απαρτίζονταν από τρεις ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου. Η πρώτη αφορούσε στην εύρεση ελαχίστων ανώτερων φραγμάτων, μεγίστων κατώτερων φραγμάτων και μεγίστων και ελαχίστων τιμών, η δεύτερη και η τρίτη στην έννοια της ακολουθίας και τη σύγκλισης αυτής. Το τρίτο ερωτηματολόγιο περιελάμβανε τέσσερις ερωτήσεις. Και οι τέσσερις περιείχαν μαθηματικό περιεχόμενο σχετικό με την έννοια του ορίου και την έννοια της συνέχειας.

3.5 Συμμετέχοντες

Οι πέντε φοιτητές που επελέγησαν για την ποιοτική έρευνα ήταν ο Πέτρος, η Ρέα, ο Μάριος, ο Μάρκος και η Λυδία. Τα ονόματα αυτά αποτελούν ψευδώνυμα των συμμετεχόντων για τις ανάγκες της έρευνας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια γενική περιγραφή για τον κάθε ένα.

Ο Πέτρος είναι 18 ετών, έχει μεγαλώσει και ζει στο νομό Αττικής. Στο σχολείο ακολούθησε την τεχνολογική κατεύθυνση, ο βαθμός του στα μαθηματικά στις εισαγωγικές εξετάσεις ήταν 17,5. Το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τον ίδιο όπως και για τους υπόλοιπους συμμετέχοντες, ήταν πρώτη επιλογή στη συμπλήρωση του μηχανογραφικού δελτίου. Ωστόσο ταλαντευόταν μεταξύ Παιδαγωγικού και Μαθηματικού Τμήματος αλλά κατέληξε στο δεύτερο μιας και θεώρησε ότι του θα του προσέφερε περισσότερες επαγγελματικές προοπτικές. Η Ρέα είναι και αυτή 18 ετών και ζει στο νομό Αττικής όπου και έχει μεγαλώσει. Στο σχολείο είχε επιλέξει την τεχνολογική κατεύθυνση και στις εξετάσεις ο βαθμός της στα μαθηματικά ήταν 16,2. Της άρεσαν τα μαθηματικά από το γυμνάσιο και είχε αποφασίσει ότι της ταιριάζει να είναι καθηγήτρια. Ο Μάριος είναι 18 ετών και ο τόπος μόνιμης κατοικίας του είναι στην επαρχία. Η κατεύθυνση που ακολούθησε στο σχολείο ήταν η θετική και ο βαθμός του στις εισαγωγικές εξετάσεις στα μαθηματικά ήταν 15,5. Η επιλογή του Μαθηματικού Τμήματος βασίστηκε στην επιθυμία του να μελετήσει τα μαθηματικά σαν αντικείμενο. Ο Μάρκος μεγάλωσε σε επαρχιακή πόλη της κεντρικής Ελλάδας και είναι 18 χρονών. Είχε επιλέξει και αυτός τη θετική κατεύθυνση στο σχολείο και ο βαθμός του στο μάθημα των μαθηματικών ήταν 13. Η επιλογή σχολής βασίστηκε στην προτίμηση του στο αντικείμενο των μαθηματικών και σε έναν ενδεχόμενο μελλοντικό συνδυασμό των μαθηματικών με τη μουσική με την οποία και ασχολείται. Τέλος η Λυδία, 18 ετών, ζει σε περιοχή της Αθήνας. Ακολούθησε τη θετική κατεύθυνση στο σχολείο και ο βαθμός της στα μαθηματικά ήταν 15. Η επιλογή σχολής προέκυψε εκτός από το ενδιαφέρον της για το αντικείμενο και από το γεγονός ότι τα Μαθηματικά σαν επιστήμη αποτελούν τη βάση για διαφορετικές διεξόδους επαγγελματικής αποκατάστασης.

3.6 Συλλογή δεδομένων

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών και χωρίστηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση μοιράστηκε

στους φοιτητές το πρώτο ερωτηματολόγιο του οποίου οι απαντήσεις χρησιμοποιήθηκαν για την επιλογή των συμμετεχόντων της έρευνας. Συμπληρώθηκε από 58 φοιτητές εκ των οποίων οι 18 ήταν γυναίκες και οι 40 άντρες. Από το σύνολο των φοιτητών που συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο οι δεκατέσσερις (2 γυναίκες, 12 άντρες) εκδήλωσαν ενδιαφέρον για περαιτέρω συμμετοχή στην έρευνα σε σχετική ερώτηση που υπήρχε στο τέλος του πρώτου μέρους (Παράρτημα Α). Η τελική επιλογή των ατόμων που έλαβαν μέρος στην έρευνα έγινε βάσει ορισμένων κριτηρίων. Τα κριτήρια αυτά βασίζονταν στις απαντήσεις των ερωτηματολογίων και αφορούσαν στο φύλο, έγινε επιλογή φοιτητών και των δύο φύλων, στην περιοχή από την οποία προέρχονταν κάθε συμμετέχοντας (Αττική, επαρχία), επιλέχθηκαν συμμετέχοντες και από την Αττική και από την επαρχία, στη σειρά προτίμησης του Μαθηματικού Τμήματος στο μηχανογραφικό τους δελτίο, όλοι οι συμμετέχοντες που επιλέχθηκαν είχαν το Μαθηματικό Τμήμα σαν πρώτη επιλογή τους, στους βαθμούς στο μάθημα των μαθηματικών στο σχολείο και τις πανελλήνιες εξετάσεις, όλοι οι φοιτητές είχαν υψηλή βαθμολογία στο μάθημα στο σχολείο αλλά υπήρχαν διαφοροποιήσεις στους βαθμούς στις εξετάσεις, και τέλος στις απαντήσεις στο μαθηματικό μέρος του ερωτηματολογίου. Προκειμένου να υπάρχει μια ποικιλομορφία στο δείγμα δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στις απαντήσεις που έδωσαν οι φοιτητές στο μαθηματικό μέρος. Επιλέχθηκαν άτομα που φάνηκε να έχουν δυσκολίες στην κατανόηση ορισμένων εννοιών αλλά και άτομα που έδιναν σωστές απαντήσεις. Το τελικό δείγμα αποτέλεσαν πέντε άτομα, τρεις άντρες και δύο γυναίκες. Στο τέλος της πρώτης φάση πραγματοποιήθηκε η πρώτη συνέντευξη των συμμετεχόντων κατά την οποία συζητήθηκε η έως τότε εμπειρία τους στο Τμήμα αλλά και οι απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο που είχε προηγηθεί.

Η δεύτερη φάση αποτελείτο από τρεις διαδοχικές συνεντεύξεις κατά τη διάρκεια του εξαμήνου. Οι δύο πρώτες συνεντεύξεις χωρίζονταν σε δύο μέρη. Η πρώτη από τις δύο πραγματοποιήθηκε μετά το τέλος της ενότητας των ακολουθιών και η δεύτερη μετά την ενότητα της συνέχειας συναρτήσεων. Η τελευταία συνέντευξη πραγματοποιήθηκε μετά το τέλος των εξετάσεων και αφορούσε στη συνολική αποτίμηση της εμπειρίας των φοιτητών σε σχέση με τον Απειροστικό Λογισμό Ι και τη μετάβαση τους από το περιβάλλον του σχολείου σε αυτό του πανεπιστημίου.

Η πρώτη συνέντευξη, η οποία πραγματοποιήθηκε μερικές μέρες μετά την παράδοση του πρώτου ερωτηματολογίου έγινε στους πέντε φοιτητές, ήταν ημι-δομημένη και οι ερωτήσεις βασίζονταν κυρίως στις απαντήσεις που είχαν δώσει. Απάντησαν σε ερωτήσεις σχετικά με το πώς έβλεπαν τα πράγματα ως νέα μέλη στην πανεπιστημιακή κοινότητα, για τη

σχέση τους με τα μαθηματικά γενικότερα και για τις απαντήσεις που έδωσαν στο ερωτηματολόγιο. Η δεύτερη και η τρίτη συνέντευξη ακολούθησαν την ίδια φόρμα. Ήταν ημι-δομημένες κάθε μια αποτελείτο από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος ο εκάστοτε φοιτητής συζητούσε με τον ερευνητή ζητήματα σχετικά με τη ζωή στο πανεπιστήμιο και το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι, που είχαν συμβεί ως τη στιγμή της συνέντευξης. Στο δεύτερο μέρος οι φοιτητές καλούνταν να απαντήσουν το ερωτηματολόγιο ασκήσεων Απειροστικού Λογισμού και στο τρίτο μέρος συζητούσαν με τον ερευνητή τις απαντήσεις που είχαν δώσει.

Όσον αφορά στην τελευταία συνέντευξη, τα χαρακτηριστικά που την προσδιόριζαν ήταν τα εξής: ήταν ημι-δομημένη, οι ερωτήσεις χωρίζονταν σε τρεις άξονες και ορισμένες από αυτές προέκυψαν μέσα από δηλώσεις των φοιτητών σε προηγούμενες συνεντεύξεις. Το πλαίσιο των ερωτήσεων κάθε άξονα δεν ήταν αυστηρά οριοθετημένο αλλά προσαρμόζονταν ανάλογα με τις απαντήσεις των συνεντευξιαζόμενων εστιάζοντας πάντα στην ανάδειξη στοιχείων που άπτονταν των ερευνητικών ερωτημάτων. Κάθε ένας από τους τρεις άξονες στους οποίους διακρίνονταν οι ερωτήσεις αφορούσε στα μαθηματικά του σχολείου σε σύγκριση με το μάθημα του Απειροστικού. Ο πρώτος άξονας αφορούσε σε ζητήματα γύρω από το περιεχόμενο του κάθε μαθήματος στην αντίστοιχη εκπαιδευτική βαθμίδα. Πιο συγκεκριμένα ορισμένες από τις ερωτήσεις σχετικές με το περιεχόμενο αναφέρονταν σε στοιχεία που περιείχε το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι που δεν υπήρχαν στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου και στον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές αντιμετώπισαν αυτά τα στοιχεία, για ομοιότητες και διαφορές που εντόπισαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος αλλά και για τον τρόπο διδασκαλίας. Στο δεύτερο άξονα τέθηκαν υπό συζήτηση οι συνθήκες κάτω από τις οποίες γινόταν κάθε μάθημα (περιβάλλον, εμπλεκόμενοι, σκοπός). Για παράδειγμα οι φοιτητές ερωτήθηκαν για τον τρόπο με τον οποίο τους επηρέαζε η διαφορά στο πλήθος ατόμων που παρακολουθούσαν το μάθημα στο πανεπιστήμιο και αντίστοιχα στο σχολείο ή για τις σχέσεις που ανέπτυξαν με συμφοιτητές και καθηγητές στο Τμήμα σε σύγκριση με τους συμμαθητές και καθηγητές στο σχολείο. Ο τελευταίος άξονας αναφέρονταν στο ρόλο που είχαν οι ίδιοι οι φοιτητές σε κάθε μια εκπαιδευτική βαθμίδα. Σε αυτό το μέρος σχολιάστηκαν κυρίως ζητήματα γύρω από την ελευθερία που υπάρχει στο πανεπιστήμιο και στον τρόπο με τον οποίο τους επηρέασε στην πορεία τους στο Τμήμα. Αυτοί οι τρεις άξονες χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να αναδειχθούν καλύτερα τα ζητήματα που αντιμετώπισε ο κάθε φοιτητής κατά τη μετάβαση του καθώς και για να γίνει μια πρώτη εκτίμηση σε τι μπορεί να οφείλονταν αυτά τα ζητήματα.

3.7 Τρόπος ανάλυσης δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας πραγματοποιήθηκε απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. Χρησιμοποιήθηκαν κάποιες πτυχές της μεθόδου της μικροανάλυσης και της ανοιχτής κωδικοποίησης (Strauss και Corbin, 1998). Συγκεκριμένα, όσον αφορά στη μέθοδο της μικροανάλυσης δόθηκε σημασία στις λεπτομέρειες και υπήρξε προσεκτική ακρόαση των συνεντευξιαζόμενων. Σε πρώτο επίπεδο ανάλυσης έγινε εντοπισμός των επεισοδίων αναλύοντας τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια και τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των συνεντεύξεων διατρέχοντας όλο το κείμενο και εστιάζοντας σε συγκεκριμένα αποσπάσματα που φανερώνονταν δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι φοιτητές. Σε δεύτερο επίπεδο αυτές κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με το αν αφορούσαν στο περιεχόμενο του μαθήματος ή στο ακαδημαϊκό και κοινωνικό περιβάλλον του νέου ιδρύματος. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, τις δυσκολίες και το είδος των δυσκολιών, επιχειρήθηκε μια νέα κατηγοριοποίηση σχετικά με τον τρόπο που αντιμετώπισε ο κάθε φοιτητής τις δυσκολίες που συνάντησε κατά τη διάρκεια της μετάβασης. Η μέθοδος της ανοιχτής κωδικοποίησης χρησιμοποιήθηκε για την πραγματοποίηση της κατηγοριοποίησης του δεύτερου επιπέδου της μικροανάλυσης. Τα δεδομένα εξετάστηκαν προσεκτικά γραμμή προς γραμμή και συγκρίθηκαν με σκοπό την ομαδοποίηση τους ανά είδος δυσκολίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας συνοψίζονται σε τέσσερις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων των ερωτηματολογίων και των συνεντεύξεων των φοιτητών σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι. Στη δεύτερη ενότητα καταγράφεται ο βαθμός και ο τρόπος επίδρασης του κοινωνικού και ακαδημαϊκού πλαισίου κατά τη διάρκεια της μετάβασης από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζεται ένας πίνακας στον οποίο κατηγοριοποιούνται οι δυσκολίες που συνάντησαν οι φοιτητές κατά τη μετάβαση ανάλογα με το είδος τους. Τέλος, η τέταρτη ενότητα περιλαμβάνει μια διάκριση κατηγοριών των τρόπων με τους οποίους οι φοιτητές αντιμετώπισαν τη μετάβαση όπως αυτοί αποτυπώνονται από τα δεδομένα της έρευνας.

4.1 Δυσκολίες στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι κατά τη μετάβαση από το σχολείο στο πανεπιστήμιο

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι πέντε φοιτητές οι οποίες σχετίζονται με τη φύση του μαθήματος του Απειροστικού Λογισμού Ι.

Πέτρος

Από την ανάλυση των δεδομένων φαίνεται ότι οι σημαντικότερες δυσκολίες που αντιμετώπισε ο Πέτρος κατά τη διαδικασία μάθησης του Απειροστικού Λογισμού Ι αφορούν κυρίως στο περιεχόμενο του μαθήματος και ειδικότερα σε έννοιες που εισάγονται στο πανεπιστήμιο και δεν υπήρχαν στα μαθηματικά του σχολείου (ελάχιστο ανώτερο και μέγιστο κατώτερο φράγμα, χρήση ποσοδεικτών κ.ά.).

Οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν από την ανάλυση των ερωτηματολογίων αφορούν εξ ολοκλήρου στο περιεχόμενο του μαθήματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις του στις ερωτήσεις του δεύτερου (Παράρτημα Β) και τρίτου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Γ). Πιο συγκεκριμένα στην Ερώτηση 1 του δεύτερου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β) που αφορούσε στην εύρεση ελάχιστων ανώτερων και μέγιστων κατώτερων

φραγμάτων, μέγιστων και ελάχιστων τιμών ενός συνόλου ο Πέτρος βρήκε εύκολα ένα άνω φράγμα το οποίο ισχυρίστηκε ότι είναι και το ελάχιστο χωρίς όμως να μπει στη διαδικασία να το αποδείξει. Παρατηρούμε έτσι ότι συγχέει την έννοια του φράγματος και του ελάχιστου άνω φράγματος. Αυτό φαίνεται και μέσα από τα λόγια του ίδιου στο παρακάτω απόσπασμα:

> Πέτρος: Αρχικά σκέφτηκα για το supremum, είπα ότι ο αριθμητής είναι πάντα μικρότερος από τον παρανομαστή και διαίρεσα την ανισότητα αυτή ($m + n > 2$) με $m + n$ και είδα ότι είναι μικρότερο του 1 για κάθε m, n ... Άρα αφού ισχύει για κάθε m, n είπα ότι το 1 είναι το supremum του A.

Επιπλέον στην προσπάθεια του να βρει το μέγιστο κάτω φράγμα αλλά και το μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο υποστήριξε πως αυτό δεν ήταν δυνατόν μιας και οι τιμές των m, n μεταβάλλονταν συνεχώς. Πιο συγκεκριμένα όπως δήλωσε:

> Πέτρος: Μεταβάλλεται και ο παρανομαστής και το σκέφτηκα έτσι, ότι είναι μεταβαλλόμενο μέγεθος και ο αριθμητής και ο παρανομαστής για αυτό δεν έχουν κάποιο μέγιστο στοιχείο και ομοίως για το minimum… Νομίζω για το infimum ισχύει το ίδιο και για το maximum και minimum, δηλαδή εφόσον μεταβάλλεται δεν μπορεί να υπάρχει.

Στη συνέχεια προσπαθώντας παραπάνω σκέφτηκε να δοκιμάσει διαφορετικές τιμές στα m, n προκειμένου να απαντήσει στην ερώτηση, επέλεξε να σταθεροποιήσει το ένα από τα δύο και παρατήρησε ότι όλες οι τιμές πλησιάζουν προς το 1. Δεν το θεώρησε απαραίτητο όμως να δοκιμάσει να σταθεροποιήσει τον άλλο δείκτη γιατί υποστήριξε ότι θα βγει το ίδιο αποτέλεσμα. Μετά από παρότρυνση του ερευνητή τελικά σταθεροποίησε και τον άλλον δείκτη. Παρότι είδε ότι οι τιμές πλέον πλησίαζαν προς το 0 έδωσε και πάλι την ίδια απάντηση:

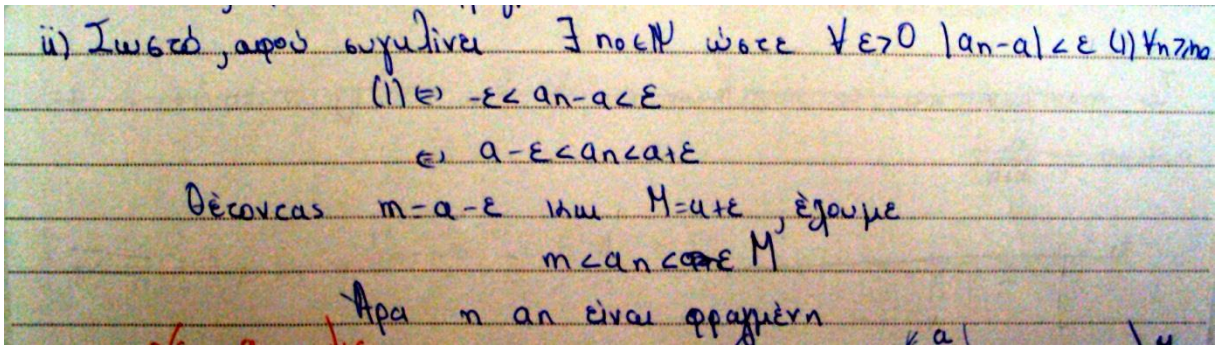
> Πέτρος: Δεν ξέρω, εγώ εδώ πέρα με το m πιστεύω ότι … δηλαδή εφόσον μεταβάλλεται ο αριθμητής και ο παρανομαστής δεν μπορώ να βγάλω κάποιο συμπέρασμα, έτσι πιστεύω τώρα.. ενώ εδώ με το n μπορώ να βγάλω κάποιο… δεν ξέρω…

Στην Ερώτηση 2 του ίδιου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β), η οποία αφορούσε στο όριο ακολουθίας, επικαλέστηκε τον ορισμό σύγκλισης ακολουθίας προκειμένου να ελέγξει ποια δήλωση είναι σωστή. Παρόλο που γνώριζε τον ορισμό δεν ήταν σε θέση να μεταφράσει

σωστά τα όσα έγραφε εφαρμόζοντας τον. Πιο συγκεκριμένα έγραψε $1{,}999 < \alpha_n < 2{,}001$ κι αιτιολόγησε ως εξής:

> Πέτρος: Για το (ii) έβαλα όπου ε το $0{,}01$ και μου βγήκε αυτή η σχέση και λέει ότι πάνω από $1{,}999$ μπορεί να βρίσκονται πεπερασμένοι όροι και είπα ότι είναι σωστό αφού πάνω από το $1{,}999$ η α_n θα είναι μεγαλύτερη από αυτό και μικρότερη από αυτό και μεταξύ … εδώ πέρα υπάρχουν πεπερασμένοι όροι, αυτό.

Στην τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου (Ερώτηση 3, Παράρτημα Β), η οποία αναφερόταν στις φραγμένες και συγκλίνουσες ακολουθίες, έδωσε ένα σωστό αντιπαράδειγμα για να δείξει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία δεν είναι συγκλίνουσα. Στην προσπάθεια του όμως να αποδείξει ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη επικαλέστηκε αρχικά τον ορισμό με λάθος τρόπο, θεώρησε σταθερό το ε και στη συνέχεια έγραψε μια λανθασμένη απόδειξη όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.1 που ακολουθεί:



Εικόνα 4.1

Στο τρίτο και τελευταίο ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Γ) ο Πέτρος φαίνεται πάλι να αντιμετωπίζει ορισμένες δυσκολίες σύμφωνα με τις απαντήσεις που δίνει στις ερωτήσεις. Στην Ερώτηση 1 η οποία ήταν σχετική με τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ καθώς το x τείνει στο 0, αρχικά υποστήριξε ότι δεν υπάρχει αφού δεν υπάρχει το όριο αριστερά του 0, παρόλα αυτά είπε πως μπορεί να υπολογιστεί το όριο από τα δεξιά:

> Πέτρος: …δεν υπάρχει το όριο καθώς για να υπάρχει πρέπει να ισχύει να υπάρχει και από τα αριστερά και από τα δεξιά, τα πλευρικά όρια και από τα αριστερά δεν υπάρχει άρα δεν θα υπάρχει όλο το όριο. Θα υπολογίσουμε μόνο το πλευρικό όριο μόνο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε σε αυτή την περίπτωση […] Θέλουμε

να κοιτάξουμε μόνο το δεξί δηλαδή το ένα πλευρικό, ε το ένα πλευρικό υπάρχει. Για να υπάρχει όμως το συνολικό όριο πρέπει να υπάρχει και το αριστερό.

Ύστερα από συζήτηση με τον ερευνητή αναθεώρησε την απάντηση του και δήλωσε ότι το σκέφτηκε καλύτερα και η συγκεκριμένη συνάρτηση ορίζεται στο $[0, +\infty)$ οπότε η μελέτη του ορίου έχει σημασία από το 0 και πάνω.

Στην Ερώτηση 2 (Παράρτημα Γ) προσπαθώντας να αιτιολογήσει την ορθότητα της δήλωσης 5 επικαλέστηκε την Αρχιμήδεια ιδιότητα, ωστόσο με λάθος τρόπο. Πιο συγκεκριμένα ανέφερε:

Πέτρος: Το 5 είπα ότι είναι σωστό γιατί από τον ορισμό πρέπει να υπάρχει πραγματικός δ ώστε να ισχύει το $0 < |x - 2| < \delta$ τότε να ισχύει $|f(x) - 3| < \varepsilon$ για κάθε ε αλλά από την Αρχιμήδεια ιδιότητα το $\varepsilon < \frac{1}{n}$ για θετικό ακέραιο n και ισχύει αυτό ...

Παρακάτω, στην Ερώτηση 3 του ίδιου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Γ), χαρακτήρισε τη δήλωση ως σωστή και σκέφτηκε πως αν αποδείκνυε ότι υπάρχει το όριο τότε θα υπήρχαν και τα πλευρικά όρια. Εργάστηκε λοιπόν ως εξής:

Πέτρος: Από τον ορισμό είπα ότι αφού υπάρχει τότε για… υπάρχει δ είπα θετικό ώστε να ισχύει το $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι απόλυτο..

Στο απόσπασμα αυτό εντοπίζονται δύο σημεία, αρχικά ενώ ήθελε να αποδείξει ότι υπάρχει το όριο το πήρε σαν δεδομένο και ύστερα διατύπωσε λάθος τον ορισμό του ορίου.

Τέλος, στην Ερώτηση 4 (Παράρτημα Γ) δίνονταν στους φοιτητές γραφήματα συναρτήσεων για μελέτη ως προς τη συνέχεια τους. Στο πρώτο γράφημα όπου η συνάρτηση οριζόταν σε ένωση διαστημάτων ο Πέτρος ισχυρίστηκε ότι δεν ήταν συνεχής μιας και «διακόπτεται η γραμμή». Ανέφερε συχνά ότι προσπαθεί να επικαλεστεί τον ορισμό για να δώσει μια σωστή απάντηση κι ότι θα του ήταν χρήσιμο αν σκεφτόταν κάποιο παράδειγμα. Στο τέλος άλλαξε γνώμη και είπε πως τελικά είναι συνεχής μιας και δεν υπάρχει σημείο εκτός πεδίου ορισμού όπου να μην είναι συνεχής. Στη συνέχεια προκειμένου να αιτιολογήσει την άποψη του ότι η δεύτερη συνάρτηση δεν ήταν συνεχής επικαλέστηκε τον ορισμό της ασυνέχειας όπως τον χαρακτηρίζει ο ίδιος:

Πέτρος: Αν επιλέξουμε, για κάθε $\delta > 0$, αν ισχύει ότι σε ένα σημείο x_0 ότι βρίσκεται μεταξύ, το $|x - x_0| < \delta$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα ε > 0 ώστε $|f(x) - f(x_0)|$ ότι είναι μεγαλύτερο ή ίσο του αριθμού αυτού που επιλέξαμε του θετικού…

Από την ανάλυση των δεδομένων των συνεντεύξεων γίνονται εμφανείς δυσκολίες σχετικές με το αντικείμενο του μαθήματος όπως τις ανέφερε ο ίδιος.

Κατά τη διάρκεια της πρώτης συνέντευξης ο Πέτρος ανέφερε ότι συνάντησε δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του ελάχιστου ανώτερου και του μέγιστου κατώτερου φράγματος καθώς ήταν μια έννοια άγνωστη ως τότε για εκείνον.

Ε: Τα supremum, infimum, πώς σου φαίνονται;

Π: Εντάξει, είναι καινούρια και αυτά, προσπαθώ να τα συνηθίσω.

Ε: Ναι, θέλω να πω σε δυσκολεύει;

Π: Στην αρχή ναι, αλλά τώρα κάθισα και τα διάβασα το Σαββατοκύριακο..

Το ίδιο επιβεβαίωσε και στη δεύτερη συνέντευξη χαρακτηρίζοντας το ελάχιστο ανώτερο και το μέγιστο κατώτερο φράγμα ως κάτι διαφορετικό σε σχέση με ό, τι είχε διδαχθεί στα μαθηματικά του σχολείου φέρνοντας σε αντιπαραβολή τις έννοιες της συνάρτησης και της συνέχειας, που ναι μεν του ήταν ήδη γνωστές απλά προσεγγίζονται με διαφορετικό τρόπο στο πανεπιστήμιο.

Ε: Τα φράγματα, οι ακολουθίες αυτά πώς σου φάνηκαν;

Π: Και οι ακολουθίες μου άρεσαν, εντάξει τα φράγματα ήταν λίγο διαφορετικά αλλά εντάξει μ' άρεσαν.

Ε: Διαφορετικά με ότι ήξερες μέχρι τώρα;

Π: Ναι, διαφορετικά, ενώ και οι ακολουθίες και οι συναρτήσεις μου αρέσουν πάρα πολύ, περισσότερο από τα φράγματα.

Ε: Τι σ' αρέσει περισσότερο που…

Π: Οι συναρτήσεις…

Ε: Σου φέρνει λίγο στο μυαλό αυτά που κάνατε στο σχολείο;

Π: Ναι, μέχρι στιγμής τα ίδια κάνουμε, απλώς τα προσεγγίζουμε με διαφορετικό τρόπο. Χωρίς τα όρια.

Ερωτηθείς σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισε στο περιεχόμενο του μαθήματος στην τρίτη συνέντευξη δήλωσε ότι του φάνηκε δύσκολη η απόδειξη του θεωρήματος

Bolzano. Επίσης ότι συνάντησε δυσκολίες στην κατανόηση της γραφικής αναπαράστασης των ορίων όπου δεν μπορούσε να καταλάβει με ποιο τρόπο επιλέγεται κάθε φορά το διάστημα γύρω από το εκάστοτε σημείο που μελετάται το όριο και πώς αυτό απεικονίζεται. Η χρήση των ποσοδεικτών του φάνηκε «περίεργη» όπως ανέφερε και είναι η ύπαρξη τους που κάνει τον Απειροστικό Λογισμό Ι να διαφέρει σε σχέση με τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου. Υποστήριξε ότι τόσο αυτός όσο και η πλειοψηφία των συμφοιτητών του ότι δεν το έχουν κατανοήσει σε βάθος αλλά έχουν μάθει να το εφαρμόζουν στις ασκήσεις.

> Πέτρος: Στην αρχή μου φάνηκε πάρα πολύ περίεργο γιατί μας έλεγε ξέρω 'γω παίρνουμε ένα ε τυχαίο και … στο σχολείο τα είχαμε όλα συγκεκριμένα τα πράγματα κι εδώ πέρα λες τώρα λένε ε σχετικά μικρό ε και αυτό ήταν δύσκολο… πιστεύω ότι αν καταλάβεις αυτό με τον ποσοδείκτη .. που ακόμη πιστεύω δεν το έχουμε καταλάβει, απλώς ξέρουμε να το χρησιμοποιούμε… Ξέρουμε πού να το χρησιμοποιούμε, δηλαδή μπορεί να σε βοηθήσει στις ασκήσεις απλώς είναι λίγο δύσκολο ακόμη να το καταλάβουμε.

Ωστόσο πρόσθεσε ότι δίνει μια «ακρίβεια» κάτι που στο σχολείο δεν υπήρχε αφού όπως λέει γίνονταν όλα «πιο επιφανειακά» αλλά είναι και το στοιχείο που κάνει το μάθημα πιο αφηρημένο. Τέλος ανέφερε ότι είναι αρκετά βοηθητικό να γίνεται η αναπαράσταση στο χαρτί.

Ρέα

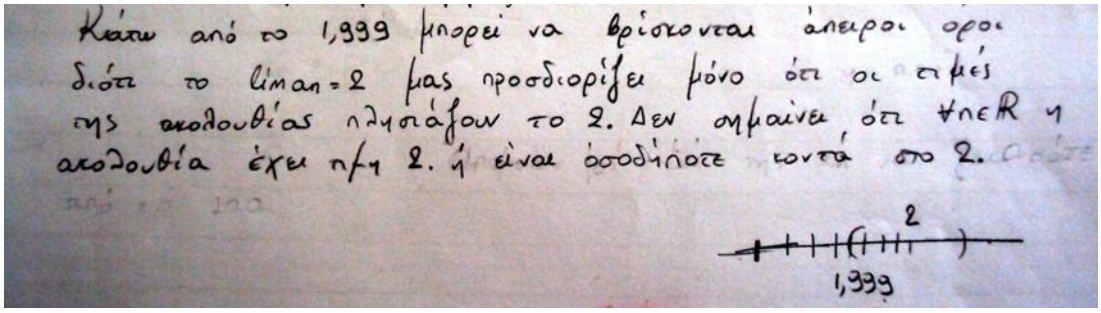
Ορισμένες από τις δυσκολίες που αντιμετώπισε η Ρέα σχετικά με το περιεχόμενο του μαθήματος γίνονται φανερές από τις απαντήσεις της στα ερωτηματολόγια.

Στην Ερώτηση 1 του δεύτερου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β) για τον υπολογισμό των ελάχιστων ανώτερων και μέγιστων κατώτερων φραγμάτων, αποφάσισε να δοκιμάσει διαφορετικές τιμές σε έναν από τους δύο δείκτες. Αρχικά δοκίμασε τιμές μόνο για το n και σταθεροποίησε το m όπου τελικά κατέληξε ότι το σύνολο θα είναι πάνω από το 0. Μέσα από τη συζήτηση αποφάσισε να αλλάξει τιμές και για το m και να σταθεροποιήσει το n, έτσι είδε ότι το σύνολο είναι κάτω από το 1. Θεώρησε ότι αυτά τα δύο είναι τα supremum, infimum αλλά δεν μπορούσε να σκεφτεί έναν τρόπο για να το αποδείξει τυπικά.

> Ρέα: Δεν μπορώ να σκεφτώ κάποιο τρόπο να το αποδείξω θα έλεγα ότι είτε αν το m είναι 0 το κλάσμα μου βγαίνει 1, αν αρχίσει το m και παίρνει τιμές όσο μικρό κι αν είναι ή όσο μεγάλο και να είναι το κλάσμα συνεχίζει να είναι μικρότερο ή

ίσο του 1, αφού εδώ θα έχω έναν αριθμό n δια $n+$ ό,τι μου βάλει το m οπότε ο παρανομαστής θα συνεχίσει να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή.

Στην Ερώτηση 2, του ίδιου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β), η οποία αφορούσε στο όριο ακολουθίας διάλεξε ως σωστή απάντηση τη δήλωση (i). Σαν αιτιολόγηση έγραψε όσα παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.2:



Εικόνα 4.2

Σε ερώτηση του ερευνητή σχετικά με την απάντηση της πρόσθεσε:

Ρ: Αιτιολόγησα με λόγια, λέω ότι κάτω από το 1,999 μπορεί να βρίσκονται άπειροι όροι γιατί το $lim\, a_n = 2$ μας προσδιορίζει μόνο ότι οι τιμές της ακολουθίας πλησιάζουν το 2, ότι δεν είναι ούτε συγκεκριμένα όλες οι τιμές της 2 αλλά ούτε θα είναι μικρότερ… όχι μεγαλύτερες του 1,999.

Ε: Σχηματικά μπορείς να μου το αναπαραστήσεις αυτό;

Ρ: Εε ας πούμε εδώ ότι είναι το 2, εδώ θα είναι το 1,999, ωραία, μπορεί μια τιμή της a_n να είναι εδώ μετά να πλησιάζει, να πλησιάζει ανάλογα με τις τιμές … ε δεν μπορώ να ξέρω πόσες τιμές θα είναι απέξω απλά θα ξέρω ότι θα πλησιάζουν προς το 2.

Ύστερα από συζήτηση γύρω από το τι λέει ο ορισμός του ορίου άλλαξε γνώμη και τελικά επέλεξε σαν σωστή απάντηση τη δήλωση (iii).

Στην τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου (Ερώτηση 3, Παράρτημα Β) διάλεξε σαν σωστή τη δήλωση (ii), ωστόσο δεν ήξερε πώς να αιτιολογήσει την απάντηση της και έτσι μέσα από τη συζήτηση με τον ερευνητή προέκυψε το παρακάτω απόσπασμα διαλόγου:

Ε: Τι σημαίνει τείνει στο α;

Ρ: Ότι το όριο της ακολουθίας είναι το α. Ότι κάθε όρος, διαδοχικός τέλοσπαντων πλησιάζει στο α.

Ε: Όλοι οι όροι;

Ρ: Ναι. Με τη σειρά. Αν..

Ε: Ωραία και; Αφού λοιπόν πλησιάζουν όλοι οι όροι όπως λες στο α, άρα δηλαδή συγκλίνει, μου εξηγείς αυτό, τι σημαίνει ότι συγκλίνει, τότε;

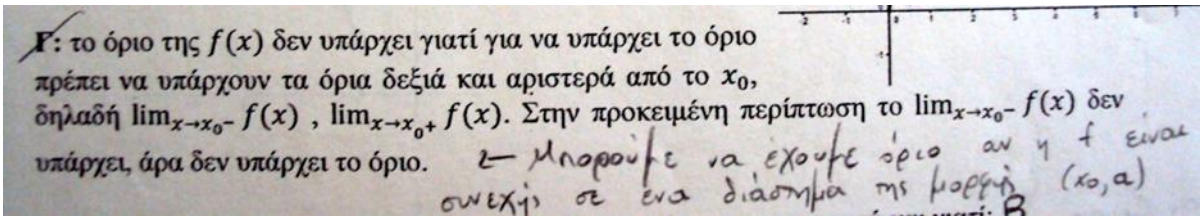
Ρ: Ότι θα βρίσκονται μέσα σε ένα.. δεν ξέρω γιατί. Μπορεί επειδή είναι όλοι να βρίσκονται μέσα σε ένα πεδίο γύρω από το α.

Ε: Ναι, κι αυτό πώς σου εξασφαλίζει ότι τελικά είναι και φραγμένη;

Ρ: Ε άμα βρίσκονται όλοι ανάμεσα εδώ πέρα, το οποίο μπορεί να είναι δυο αριθμοί, ε τότε είναι φραγμένη.

Στο τρίτο ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Γ) μέσα από τις απαντήσεις της Ρέας γίνονται εκ νέου φανερές δυσκολίες που αντιμετωπίζει στην κατανόηση εννοιών που συζητήθηκαν στο μάθημα.

Στην Ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου (Παράρτημα Γ) επιχειρώντας να εξηγήσει γιατί δεν είναι σωστή η δήλωση Γ έγραψε όσα φαίνονται στην Εικόνα 4.3:


Γ: το όριο της $f(x)$ δεν υπάρχει γιατί για να υπάρχει το όριο πρέπει να υπάρχουν τα όρια δεξιά και αριστερά από το x_0, δηλαδή $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Στην προκειμένη περίπτωση το $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ δεν υπάρχει, άρα δεν υπάρχει το όριο. ← Μπορούμε να έχουμε όριο αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, a)

Εικόνα 4.3

Αργότερα σχολίασε προφορικά ότι δεν είναι σωστή γιατί είναι δυνατόν να υπάρχει το όριο ακόμη κι αν υπάρχει μόνο το ένα πλευρικό όριο, είναι κάτι για το οποίο είναι σίγουρη και το θυμάται, αρκεί η f να είναι συνεχής σε ένα διάστημα στο x_0.

Στην Ερώτηση 2 (Παράρτημα Γ) επέλεξε ως σωστή την έκτη δήλωση και σχολίασε για εκείνα που θεωρούσε πως ήταν λάθος:

Ρέα: Στο 4, εκεί λίγο δυσκολεύομαι. Γιατί σκέφτομαι ότι δεν ξέρουμε αν η f είναι συνεχής οπότε δεν ήξερα αν θα μπορούσα να πω ότι το $f(2+h)-3$ είναι συνεχές για να ισχύει το όριο οπότε δεν είμαι πολύ σίγουρη.

Το ότι για να ελέγξει αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης σε ένα σημείο είναι απαραίτητη προϋπόθεση η συνάρτηση να είναι συνεχής σε αυτό το σημείο είναι κάτι που ανέφερε σε διάφορες φάσεις από την αρχή των συναντήσεων.

Σε σχέση με την πέμπτη δήλωση (Ερώτηση 2, Παράρτημα Γ) δήλωσε ότι δεν την κατανοεί καθόλου, « δεν μπορεί να μπει στο πνεύμα », δεν ήταν σε θέση να κατανοήσει την ύπαρξη του $\frac{1}{n}$ στην πρόταση, πιο συγκεκριμένα:

> Ρέα: Ε δεν είμαι.. δεν ξέρω τι λέει, δεν μπορώ να πιάσω το πνεύμα. Λέει .. τώρα.. δεν ξέρω, δεν ξέρω καθόλου. Γιατί το $\frac{1}{n}$ τι είναι; Μόνος του το έβγαλε. Δεν ξέρω πώς το έβγαλε αυτό.

Επιχειρώντας να εντοπίσει τις διαφορές μεταξύ των δύο δηλώσεων, προκειμένου να υποστηρίξει την αιτιολόγηση της, προσπάθησε να ανακαλέσει τον ορισμό τον οποίο τελικά δεν θυμόταν και υποστήριξε την επιλογή της λέγοντας απλά ότι της φάνηκε πιο οικείο.

Στην τελευταία ερώτηση του ίδιου ερωτηματολογίου (Ερώτηση 4, Παράρτημα Γ) για τη συνάρτηση του πρώτου γραφήματος υποστήριξε ότι δεν ήταν συνεχής γιατί υπήρχε ένα διάστημα οπού δεν ορίζεται καν. Παρατήρησε ότι είναι συνεχής στα υποδιαστήματα αλλά θεώρησε ότι αυτό δεν ήταν αρκετό για να πει ότι και στην ένωση είναι συνεχής. Προσπαθώντας να ισχυροποιήσει την άποψη της είπε:

> Ρέα: Α, λοιπόν το σκέφτηκα, εδώ αυτή η Α δεν είναι συνεχής, σε όλο το πεδίο ορισμού γιατί το … εκεί που ενώνονται τα δύο διαστήματα του πεδίου ορισμού τα πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν.

Σε σχετικό διάλογο με τον ερευνητή δήλωσε:

> Ρ: … εδώ υπάρχει κενό πώς να το κάνουμε;! Εδώ πέρα ανάμεσα.
> Ε: Μας ενδιαφέρει εμάς εκεί που υπάρχει το κενό;
> Ρ: Φυσικά! Δεν μπορεί να είναι συνεχής άμα υπάρχει κενό!

Για το τρίτο γράφημα της συνάρτησης έδωσε λάθος απάντηση και αιτιολόγηση. Θεώρησε ότι δεν ήταν συνεχής γιατί δεν συνέπιπταν τα πλευρικά όρια στο σημείο 2 και παρόλο που δεν άνηκε στο πεδίο ορισμού αυτό το σημείο θεώρησε πως έπρεπε να το λάβει υπόψη της γιατί βρισκόταν στην ένωση των διαστημάτων, « δεν λαμβάνονται υπόψη τα σημεία που βρίσκονται στα άκρα δεξιά και αριστερά » όπως είπε.

Από τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των συνεντεύξεων εντοπίστηκαν δυσκολίες που αντιμετώπισε η Ρέα κατά τη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι όπως τις ανέφερε η ίδια.

Το μάθημα του Απειροστικού της φαινόταν δύσκολο, ο τρόπος διδασκαλίας συνήθως που ακολουθούνταν ήταν «θεώρημα – απόδειξη» και σε κάποιους ορισμούς και σε κάποιες αποδείξεις ήταν δύσκολο να κατανοήσει πώς προέκυπταν ορισμένα πράγματα. Τη δυσκολία του μαθήματος την εντόπισε σε δύο σημεία, αρχικά στο πώς θα ξεκινούσε μια απόδειξη και τελικά αφού ολοκληρωνόταν η απόδειξη στο κατά πόσο είχε κατανοήσει το λόγο για τον οποίο κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα.

> Ρέα: Το δύσκολο είναι να το κάνεις και μόνος σου… αυτά τα οποία ξεκίνησα, όχι οι συνεπαγωγές πώς προχωράνε… […] Ε ναι, οι υποθέσεις είναι λίγο το πιο δύσκολο να τις βρεις αλλά… τώρα τι να σας πω; Σε κάποια σημεία υπάρχει και αυτό το πρόβλημα ότι από κάτι καταλήγουμε σε κάτι άλλο και δεν είναι τόσο εμφανές το γιατί.

Σχετικά με τις αποδείξεις δήλωσε επίσης πως υπήρχε μεγάλη διαφορά μεταξύ αυτών που διδάσκονται στο σχολείο, τις οποίες χαρακτήρισε σαν πιο απλές και κατανοητές, σε σχέση με αυτές που προσφέρονται στο πανεπιστήμιο που είναι πιο δύσκολες και προκειμένου να γίνουν κατανοητά ορισμένα πράγματα έκρινε αναγκαία την προϋπόθεση να υπάρχουν οι κατάλληλες βάσεις.

Στο επίπεδο δυσκολίας του Απειροστικού Λογισμού Ι αναφέρθηκε και σε επόμενη συνέντευξη όπου δήλωσε πως είναι « πολύ δύσκολος, δυσκολότερος από ότι στην αρχή ». Της είχαν δημιουργηθεί πλέον αρκετά κενά στην ύλη κι έχει χαθεί.

> Ε: Δύσκολα με ποια έννοια; Είναι δύσκολο να το καταλάβεις, δύσκολο να το εφαρμόσεις κάτι, να μπεις στο νόημα;
> Ρ: Να το καταλάβεις κυρίως, να καταλάβεις την απόδειξη, πώς το λέει, γιατί το λέει αυτό τώρα. Κυρίως αυτό να το καταλάβεις. Άμα το καταλάβεις μετά κατανοείς και γιατί το λέει και γιατί πρέπει να το κάνεις αυτό.

Το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ της δεύτερης και τρίτης συνέντευξης δεν ασχολήθηκε με τα μαθήματα, διάβασε ελάχιστα από τότε και μετά αποφάσισε να σταματήσει να ασχολείται. Διαβάζοντας μόνη της έμεινε πίσω στην ύλη κι έτσι δεν συνέχισε. Χαρακτήρισε το μάθημα σαν «βαρετό», «πολύ θεωρητικό» και «δύσκολο». Αυτός ήταν και ο

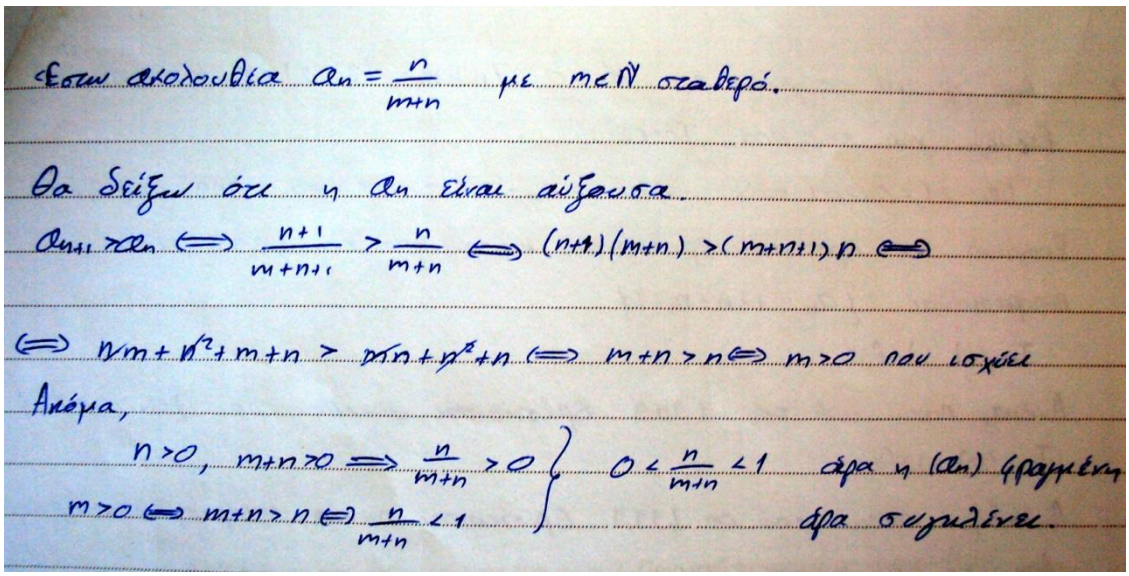
λόγος που προτίμησε να ασχοληθεί με κάποιο άλλο μάθημα που της κινούσε περισσότερο το ενδιαφέρον, όπως για παράδειγμα τη Γραμμική Άλγεβρα την οποία θεωρούσε και ευκολότερη σαν μάθημα.

Παρακολούθησε τις διαλέξεις του Απειροστικού Λογισμού Ι μέχρι πριν την ενότητα των παραγώγων. Υποστήριξε ότι το σημείο που τη δυσκόλεψε περισσότερο ήταν οι ακολουθίες. Δεν τις κατανόησε και αργότερα όταν προχώρησαν στα όρια της ήταν δύσκολο να παρακολουθήσει και μπερδευόταν. Παρόλη τη δυσκολία της στην ενότητα των ακολουθιών αυτό την έκανε να ασχοληθεί με αυτές και τελικά της άρεσαν. Η έννοια της συνέχειας όπως παρουσιάζεται στο πανεπιστήμιο της φάνηκε πολύ διαφορετική και πιο δύσκολη σε σχέση με το σχολείο. Η διαφορετικότητα έγκειται στον $\varepsilon - \delta$ ορισμό ο οποίος την μπέρδευε κι έτσι δεν ασχολήθηκε με αυτήν καθόλου.

Μάριος

Από την ανάλυση των απαντήσεων του δεύτερου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β) προέκυψαν ορισμένες δυσκολίες που φαίνεται πως αντιμετώπισε ο Μάριος σχετικά με το περιεχόμενο του μαθήματος.

Στην Ερώτηση 1 ο Μάριος ξεκίνησε φτιάχνοντας δύο ακολουθίες α_n και β_m όπου στην κάθε μια κράτησε αντίστοιχα κάποιο δείκτη σταθερό. Ήθελε να αποδείξει ότι η μια θα ήταν αύξουσα και θα συνέκλινε στο 1 άρα δεν θα υπήρχε κανένας όρος πάνω από το 1 και αντίστοιχα για την άλλη ότι θα ήταν φθίνουσα και θα συνέκλινε στο 0 όπως διακρίνεται στην Εικόνα 4.4:


Έστω ακολουθία $a_n = \frac{n}{m+n}$ με $m \in \mathbb{N}$ σταθερό.

Θα δείξω ότι η a_n είναι αύξουσα.

$a_{n+1} > a_n \iff \frac{n+1}{m+n+1} > \frac{n}{m+n} \iff (n+1)(m+n) > (m+n+1)n \iff$

$\iff \cancel{nm} + \cancel{n^2} + m + n > \cancel{nm} + \cancel{n^2} + n \iff m+n > n \iff m > 0$ που ισχύει

Ακόμα,

$n > 0,\ m+n > 0 \Rightarrow \frac{n}{m+n} > 0$

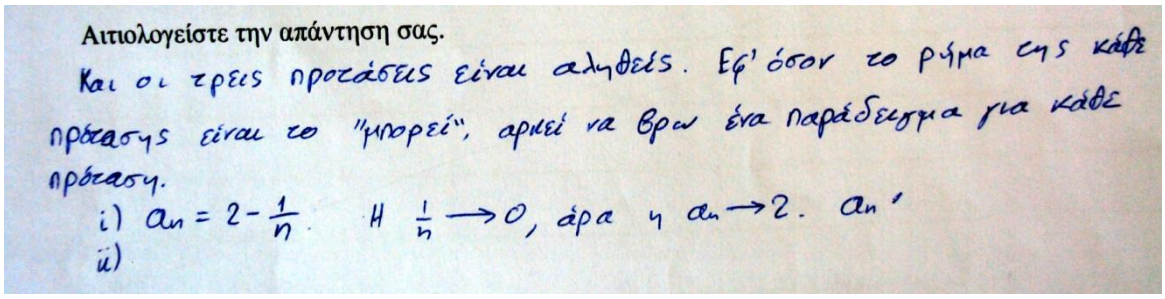
$m > 0 \iff m+n > n \iff \frac{n}{m+n} < 1$

$0 < \frac{n}{m+n} < 1$ άρα η (a_n) φραγμένη άρα συγκλίνει.

Εικόνα 4.4

Για την εύρεση των maximum και minimum υποστήριξε ότι υπάρχει απόδειξη σύμφωνα με την οποία όταν υπάρχουν τα supremum, infimum ταυτίζονται με αυτά άρα δεν χρειάστηκε να ασχοληθεί, μετά από συζήτηση αναδιατύπωσε αυτή του την άποψη. Προσπάθησε να δείξει με κάποιο τρόπο ότι το 0 και το 1 είναι τα supremum, infimum αλλά εκεί σταμάτησε. Κατάλαβε ότι έπρεπε να το είχε ελέγξει διαφορετικά αλλά δεν ήξερε με ποιο τρόπο. Πρόσθεσε ότι για τη συγκεκριμένη άσκηση, την οποία θυμόταν από το μάθημα, υπήρχε πιο εύκολος τρόπος να λυθεί, ωστόσο δεν ήξερε πόση ώρα θα του έπαιρνε να τον ανακαλέσει και θεώρησε καλύτερο αφού είχε μια δική του ιδέα να την αναπτύξει ακόμη κι αν ήταν πιο «ζόρικη» από κάποια άλλη που ήδη έχει υλοποιηθεί. Τελικά δεν βρήκε κάποιο τρόπο προκειμένου να δείξει ότι το 0 και το 1 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα αντίστοιχα.

Στην Ερώτηση 2 (Παράρτημα Β) ξεκίνησε από λάθος σκέψη αλλά το αναγνώρισε νωρίς και το διόρθωσε. Πιο συγκεκριμένα αρχικά είχε γράψει όσα παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.5:


Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

Και οι τρεις προτάσεις είναι αληθείς. Εφ' όσον το ρήμα της κάθε πρότασης είναι το "μπορεί", αρκεί να βρω ένα παράδειγμα για κάθε πρόταση.

i) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$. Η $\frac{1}{n} \to 0$, άρα η $a_n \to 2$. a_n

ii)

Εικόνα 4.5

Μετά την έλυσε «σχετικά εύκολα», όπως χαρακτήρισε ο ίδιος, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας.

Μέσα από τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των συνεντεύξεων προέκυψαν δυσκολίες σχετικές με τη φύση του μαθήματος όπως τις ανέφερε ο ίδιος. Για το Μάριο το επίπεδο δυσκολίας του μαθήματος ήταν « βατό, ούτε εύκολο, ούτε δυσνόητο σε βαθμό που να μη θέλει να το διαβάσει » όπως δήλωσε μέσα από τη συνέντευξη. Ο βαθμός δυσκολίας του θύμισε τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου ίσως όμως στο Πανεπιστήμιο το μάθημα γίνεται με πιο σωστό και κατανοητό ρυθμό από ότι γινόντουσαν τα μαθηματικά στο σχολείο.

Η πρώτη δυσκολία που αντιμετώπισε σε σχέση με το περιεχόμενο του μαθήματος ήταν η χρήση των ποσοδεικτών, την χαρακτήρισε σαν μια άλλη οπτική η οποία ήταν δύσκολο να κατανοηθεί αρχικά αλλά μετά ήταν αρκετά βοηθητική. Συνάντησε επίσης δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της επαγωγής, παρατήρησε όμως ότι με το πέρας του καιρού ο τρόπος σκέψης του βελτιώθηκε.

Επιπλέον δυσκολεύτηκε στην εκμάθηση αποδείξεων, δεν ήταν δυνατόν να τις μάθει απέξω όπως ανέφερε, έτσι ξόδευε χρόνο για να τις κατανοήσει και να τις γράφει γιατί διαφορετικά δεν μπορούσε να τις αναπαράγει κατευθείαν μόνος του, αλλά τελικά άξιζε τον κόπο, όπως είπε, γιατί όταν τελικά τις κατανοούσε αισθανόταν μια ικανοποίηση.

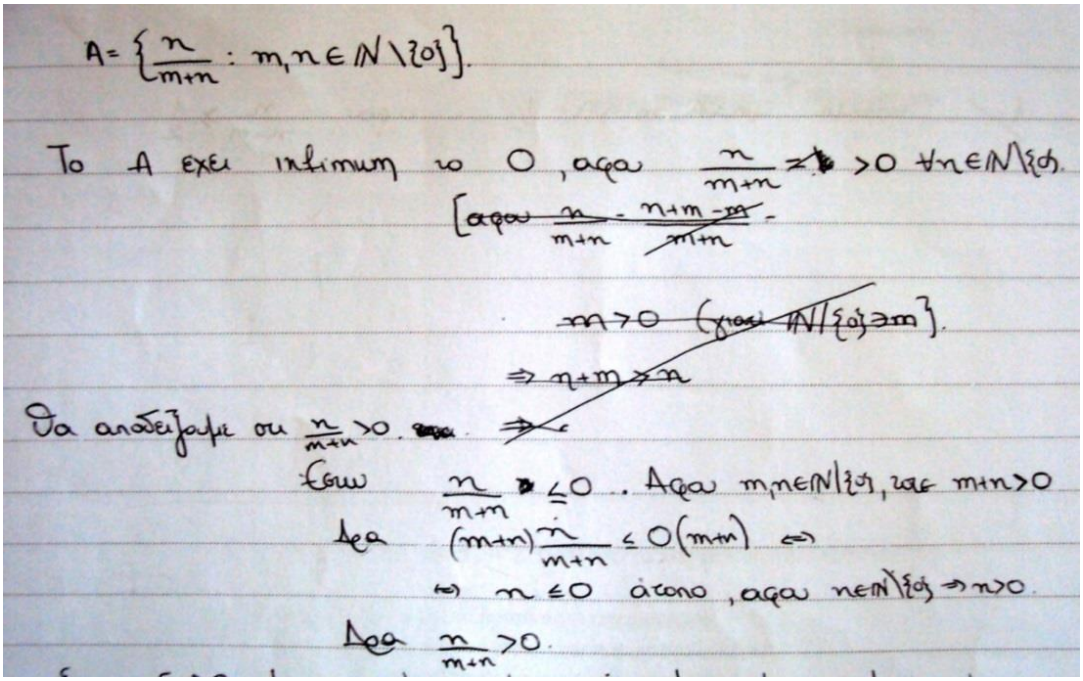
Το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι μπορεί να ήταν δυσκολότερο να το κατανοήσει, « φέρνει πιο πολύ σε γρίφο » κατά τα λεγόμενα του Μάριου αλλά αυτός είναι ο λόγος που το προτιμούσε σε σχέση με τη Γραμμική Άλγεβρα γιατί χρειαζόταν να δουλέψει πιο πολύ το μυαλό του:

> Μάριος: Για παράδειγμα στον Απειροστικό ζορίζεσαι να καταλάβεις ποια θα είναι η σχέση που θα έχουν τα δ με τα ε κλπ, τι είναι συνέχεια, τι το ένα τι το άλλο, στη Γραμμική είναι πιο πολύ πράξεις, είναι πιο πολύ Άλγεβρα, πιο πολύ υπολογισμοί.

Μάρκος

Δυσκολίες που αντιμετώπισε ο Μάρκος σχετικές με τη φύση του Απειροστικού Λογισμού Ι φάνηκε να αναδεικνύονται από την ανάλυση των δεδομένων των ερωτηματολογίων.

Στην Ερώτηση 1 του δεύτερου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β) ο Μάρκος αρχικά δοκίμασε μία τιμή μόνο στα m, n και βρήκε το $\frac{1}{2}$ οπότε και υπέθεσε ότι αυτό θα μπορούσε να είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου A. Έπειτα δοκίμασε κι άλλες τιμές και είδε πως πήγαιναν προς το 0 οπότε αναδιατύπωσε την πρώτη του δήλωση και κατέληξε πως αυτό ήταν το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου. Προκειμένου να το αποδείξει επιχείρησε να δείξει ότι το σύνολο είναι μεγαλύτερο του μηδενός όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.6:



$A = \left\{ \frac{n}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Το A έχει infimum το 0, αφού $\frac{n}{m+n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

[~~αφού $\frac{n}{m+n} = \frac{n+m-m}{m+n}$~~

~~$m > 0$ (γιατί $\mathbb{N} \setminus \{0\} \ni m$)~~.

~~$\Rightarrow n+m > n$~~

Θα αποδείξαμε ότι $\frac{n}{m+n} > 0$. ~~$\Rightarrow$~~

Έστω $\frac{n}{m+n} \leq 0$. Αφού $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τότε $m+n > 0$

Άρα $(m+n)\frac{n}{m+n} \leq 0(m+n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \leq 0$ άτοπο, αφού $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow n > 0$.

Άρα $\frac{n}{m+n} > 0$.

Εικόνα 4.6

Και παράλληλα αιτιολόγησε ως εξής:

> Μάρκος: Αλλά μετά αν βάλουμε για $n = 1$ και $m = 2$ το $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ οπότε τελικά σε αυτό που κατέληξα είναι ότι το infimum είναι το μηδέν γιατί, καλά δεν είναι στοιχείο του συνόλου αλλά δεν έχει σημασία, γιατί είπα εδώ πέρα θα αποδείξουμε ότι το $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n+m}}$ είναι μεγαλύτερο του μηδενός και θα πούμε ότι είναι μικρότερο ή ίσο και λέμε ότι αφού το m, n ανήκουν στους φυσικούς τότε θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός οπότε και το άθροισμα τους θα είναι και αυτό μεγαλύτερο του μηδενός οπότε πολλαπλασιάζοντας εδώ πέρα αυτή τη σχέση το $(\mathrm{n} + \mathrm{m}) * \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n+m}} \leq 0$ τότε θα είναι και το $n \leq 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε θέσει ότι το n αυτό ανήκει στους φυσικούς άρα είναι μεγαλύτερο του μηδενός. Τώρα μένει αυτό να δείξουμε ότι είναι το infimum γιατί αυτό είναι ένα κάτω φράγμα αλλά δεν ξέρουμε αν είναι το infimum.

Μετά από συζήτηση με τον ερευνητή δήλωσε ότι αυτή η απόδειξη θα μπορούσε να παραλειφθεί και δοκίμασε να σταθεροποιήσει τον ένα δείκτη και να αλλάξει τον άλλον. Έτσι είδε ότι οι τιμές φράσσονταν μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Δεν είχε όμως στο μυαλό του κάποια «πολύ ισχυρή» απόδειξη προκειμένου να αποδείξει ότι αυτά ήταν το ελάχιστο άνω

φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα. Παρόλα αυτά είχε διάφορες ιδέες και προσπάθησε να βρει έναν τρόπο:

> Μάρκος: Ας πούμε να υποθέσουμε, να βρούμε ένα άνω φράγμα, ένα άλλο άνω φράγμα, και να πάρουμε ένα.. από τον ορισμό τέλοσπαντων του φράγματος, να πάρουμε έναν πολύ μικρό αριθμό ο οποίος θα είναι ανάμεσα στο άνω φράγμα και στο 1 το supremum ας πούμε. Και να καταλήξουμε τέλοσπαντων σαν άτοπο και να ισχυριστούμε ότι το άλλο είναι το ελάχιστο και αφαιρώντας αυτό..

Δεν κατάφερε όμως τελικά να ολοκληρώσει την προσπάθεια του.

Στην Ερώτηση 2 του δεύτερου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β) απάντησε σωστά αλλά στην αιτιολόγηση του μπερδεύτηκε στη διατύπωση του ορισμού και έγραψε $n \leq n_0$, σε ερώτηση του ερευνητή όμως αναγνώρισε το λάθος του και αναδιατύπωσε.

> Μ: Όχι όχι εντάξει. Αυτό είναι ανάμεσα στο $0{,}001$ και στο $1{,}999$ οπότε λέμε ότι το α_n που θα είναι προς το 2 ας πούμε ότι είναι μεγαλύτερο του $1{,}999$ για κάθε $n > n_0$.
>
> Ε: Είχες μπερδευτεί και το έγραψες ανάποδα;
>
> Μ: Δεν ξέρω γιατί..
>
> Ε: Γιατί σημαίνει κάτι τελείως διαφορετικό.
>
> Μ: Ναι ναι σημαίνει όλα τα κάτω, άρα λέω επειδή είναι κάτω φραγμένο, τότε η άρνηση ουσιαστικά αυτού ότι δηλ. το α_n να είναι $\leq 1{,}999$ θα ισχύει για όλα μέχρι το $n_0 - 1$.

Στην Ερώτηση 2 του τρίτου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Γ) θεώρησε λάθος την πέμπτη δήλωση και αιτιολόγησε ως εξής:

> Μ: Αυτό είναι λάθος επειδή εδώ πέρα μας λέει ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει μοναδικός.. τέλοσπαντων το λάθος είναι νομίζω εδώ πέρα στον ακέραιο n. Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει μόνο αν λέγαμε ότι υπάρχει .. μάλλον όχι λάθος πήγα να πω ότι .. το λάθος είναι στο για κάθε, γιατί θα έπρεπε να λέμε ότι υπάρχει n ώστε να πούμε ότι με το … στο $f(x-3)$ ότι υπάρχει n ώστε για κάθε ε οπότε εκεί πέρα να βάλουμε στο παιχνίδι και το ε με κάποιο τρόπο.
>
> Ε: Άρα με το υπάρχει n σημαίνει ότι είναι ένα συγκεκριμένο n έτσι; Δεν μπορείς να πάρεις οποιοδήποτε, ότι είναι ένα συγκεκριμένο n ..

Μ: Το οποίο θα είναι μικρότερο από κάθε ε, κάπως έτσι. Δηλαδή αν πάρουμε.. από την Αρχιμήδεια ιδιότητα ας πούμε έχουμε ότι υπάρχει n ανήκει στους φυσικούς ώστε το $\frac{1}{n} < \varepsilon$ για κάθε ε. Αυτό λέμε ότι υπάρχει δεν.. δηλαδή αν πούμε ότι για κάθε n.. για κάθε n δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει κάθε ε.

Μέσα από τη συζήτηση με τον ερευνητή αναθεώρησε και αναδιατύπωσε τη δήλωση του.

Στην τελευταία ερώτηση του ίδιου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Γ) απάντησε σωστά για τα γραφήματα των συναρτήσεων. Στην αιτιολόγηση του για το γράφημα της τελευταίας συνάρτησης χρησιμοποίησε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας προκειμένου να αποδείξει ότι η συνάρτηση δεν ήταν συνεχής:

Μάρκος: Ε.. οπότε λέμε τώρα ότι για κάθε ε υπάρχει δ ....ναι τέλοσπαντων υπάρχει τέτοιο δ τέτοιο ώστε $f(x)$… το $f(x) = 4$ το $f(x_0) = 6$ ας πούμε άρα αυτό μας κάνει απόλυτο, μας κάνει 1,5 αλλά δεν έχουμε ότι κάθε ε θα είναι μικρότερο θα είναι μεγαλύτερο από το 1,5 γιατί το ε το μόνο που ξέρουμε είναι ότι είναι μεγαλύτερο του 0 δηλαδή θα μπορούσε να ήταν κι ένα… να είχαμε πάρει και ένα ε το 0,1 ας πούμε ε.. οπότε κάπως έτσι βλέπουμε ότι δεν είναι συνεχής στο 3.

Από την ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων κειμένων των συνεντεύξεων προέκυψαν κι άλλες δυσκολίες που αντιμετώπισε ο Μάρκος κατά τη διάρκεια της μάθησης του Απειροστικού Λογισμού Ι.

Το μάθημα στην αρχή το θεωρούσε αρκετά εύκολο μέχρι την ενότητα των ελάχιστων ανώτερων και μέγιστων κατώτερων φραγμάτων και των ακολουθιών. Αυτό δήλωσε ότι συνέβη γιατί σταμάτησε το συστηματικό διάβασμα που έκανε ως τότε κι άρχισαν να εισάγονται νέες έννοιες οπότε έχασε τα παλιότερα γεγονός που του δημιούργησε άγχος. Μετά από αυτό το περιστατικό το θεωρούσε πλέον σαν μάθημα μέτριας δυσκολίας. Το πιο δύσκολο για το Μάρκο ήταν όταν εισάγονταν νέες έννοιες π.χ. ποσοδείκτες:

Μάρκος: Ναι, αυτά ήταν κάπως μυστήρια, αν κι εντάξει δεν άργησα να μπω στη λογική τους αλλά παρόλα αυτά ακόμη κάπως με δυσκολεύουν, δηλ. είναι πράγματα τα οποία δεν είναι 1+1 κάνει 2 είναι κάπως πιο αφαιρετικό νομίζω κι αυτό λίγο μπερδεύει και ξεφεύγει κάπως από αυτά του σχολείου, το ότι έχουμε για παράδειγμα το όριο και το λύνουμε.

Δυσκολεύτηκε λίγο στην κατανόηση της έννοιας των επαγωγικών συνόλων γιατί του είχε δημιουργηθεί η αίσθηση ότι ισχύουν μόνο για τους φυσικούς αριθμούς λόγω του x και $x+1$, μετά όμως με την τριβή με το αντικείμενο του ήταν πιο ξεκάθαρο. Στην ενότητα των ελάχιστων ανώτερων και των μέγιστων κατώτερων φραγμάτων είχε παραλείψει κάποια σημεία στις σημειώσεις του κατά τη διάρκεια των διαλέξεων και αυτό τον δυσκόλεψε αργότερα στην κατανόηση του $\varepsilon - χαρακτηρισμού$ του φράγματος. Για την έννοια της συνέχειας σχολίασε ότι του είχε δημιουργηθεί η εντύπωση από το σχολείο ότι η συνεχής συνάρτηση είναι μια συνεχόμενη γραμμή κι έτσι στο πανεπιστήμιο δυσκολεύτηκε να κατανοήσει τη συνέχεια σε ένα σημείο. Ο $\varepsilon - \delta$ ορισμός της συνέχειας στην αρχή του φάνηκε πιο δύσκολος από αυτόν που μαθαίνονταν στο σχολείο. Στη συνέχεια αναθεώρησε την άποψη του, κατάλαβε πως δεν είναι έτσι και συμπλήρωσε ότι προσδίδει μια ελευθερία, είναι πιο γενικός, πιο ευρύς και αυστηρός.

Το μάθημα γενικότερα στην αρχή του εξαμήνου του φαινόταν ότι κυλούσε διαφορετικά από ότι στο σχολείο, σαν «θεώρημα – απόδειξη» και δυσκολευόταν να βρει το πραγματικό νόημα, αργότερα κατανόησε ότι ακολουθούσε ένα συγκεκριμένο τρόπο σκέψης. Αναφερόμενος σε έννοιες που ήταν ήδη γνωστές από το σχολείο δήλωσε ότι εντόπισε μια λογική που κρύβεται πίσω από αυτές. Στο σχολείο αυτό δεν ήταν εμφανές μιας και τα μαθηματικά χρησίμευαν περισσότερο σαν ένα εργαλείο για την επίλυση ασκήσεων. Τα μαθηματικά στο πανεπιστήμιο αντιμετωπίζονται σαν κάτι ελεύθερο και όχι στείρο και το Μαθηματικό σαν Τμήμα ήταν κάτι το διαφορετικό, μια νέα προσέγγιση που δεν είχε ιδέα ότι υπήρχε πριν έρθει.

Λυδία

Ορισμένες από τις δυσκολίες που συνάντησε η Λυδία στο περιεχόμενο του μαθήματος προέκυψαν από τα δεδομένα των απαντήσεων της στα ερωτηματολόγια.

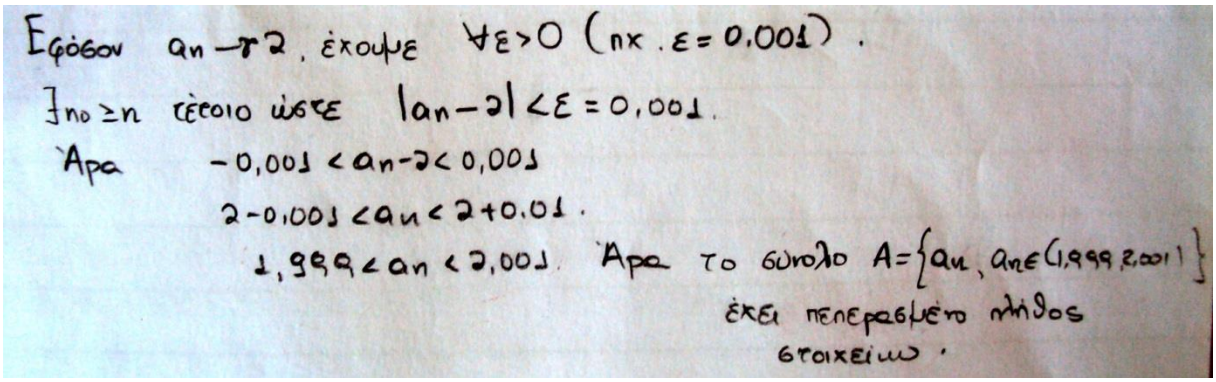
Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Β), στην Ερώτηση 2 η Λυδία βρήκε ότι το 1 είναι άνω φράγμα και προσπάθησε να βρει έναν τρόπο να το αποδείξει. Σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει την απαγωγή σε άτοπο χωρίς όμως να καταφέρει να καταλήξει σε κάποια απόδειξη:

> Λυδία: Το θέμα είναι πώς θα αποδείξω ότι είναι το ελάχιστο, εφόσον είναι άνω φράγμα το άλλο σημαίνει ότι το κλάσμα θα είναι μικρότερο από αυτό το φράγμα. Βασικά θα ισχύει ότι $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n+m}} < 1 < \beta$ ας πούμε αλλά αν πήγαινε με άτοπο και να

> έλεγα έστω ότι το 1 δεν είναι και έχω ένα άλλο και αποδείκνυα ότι δεν ισχύει αυτό.

Αργότερα σκέφτηκε πως αν έδειχνε ότι είναι η μέγιστη τιμή του συνόλου θα ήταν και το ελάχιστο άνω φράγμα. Σε ερώτηση του ερευνητή αν ισχύει πάντα αυτό απάντησε ότι δεν είναι πάντα απαραίτητο να ισχύει.

Στην Ερώτηση 2 του δεύτερου ερωτηματολογίου (Παράρτημα Β) επέλεξε σαν σωστή τη δήλωση (ii). Στην προσπάθεια της να αιτιολογήσει έκανε σωστή επιλογή του ε αλλά έγραψε $n_0 \geq n$ με αποτέλεσμα να θεωρήσει τα πεπερασμένα n και να οδηγηθεί σε λάθος συμπέρασμα. Επίσης έκανε λάθος και στο συμβολισμό του συνόλου A. Πιο συγκεκριμένα όσα έγραψε παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.7:


Εφόσον $a_n \to 2$, έχουμε $\forall \varepsilon > 0$ (πχ. $\varepsilon = 0{,}001$).
$\exists n_0 \geq n$ τέτοιο ώστε $|a_n - 2| < \varepsilon = 0{,}001$.
Άρα $-0{,}001 < a_n - 2 < 0{,}001$
$2 - 0{,}001 < a_n < 2 + 0{,}01$.
$1{,}999 < a_n < 2{,}001$. Άρα το σύνολο $A = \{a_n, a_n \in (1{,}999, 2{,}001)\}$
έχει πεπερασμένο πλήθος
στοιχείων.

Εικόνα 4.7

Και αιτιολόγησε:

> Λυδία: Λοιπόν λέω ότι εφόσον συγκλίνει στο 2, τότε για κάθε ε θα υπάρχει κάποιο $n_0 \geq n$ ώστε να ισχύει αυτό εδώ ότι το $|\alpha_n - 2| < \varepsilon$ κι αν πούμε ότι είναι 0,001 και το ανοίξουμε αυτό θα βγει ότι το α_n είναι ανάμεσα στο 1,999 και στο 2,001 που σημαίνει ότι το σύνολο που έχει τα α_n που είναι ανάμεσα σε αυτά τα δυο είναι πεπερασμένο και αυτά που είναι εκτός είναι άπειρα.

Από τη συζήτηση με τον ερευνητή σχετικά με την απάντηση που έδωσε φάνηκε πως η αιτιολόγηση της στηρίχτηκε σε παρανόηση που της έχει δημιουργηθεί. Η Λυδία υποστήριξε ότι εφόσον η ακολουθία φράσσεται από τιμές και από πάνω και από κάτω αυτό σημαίνει ότι οι όροι πάνω από το 1,999 θα είναι πεπερασμένοι. Πιο συγκεκριμένα:

Λ: Το έχουμε κάνει στη θεωρία νομίζω αυτό.

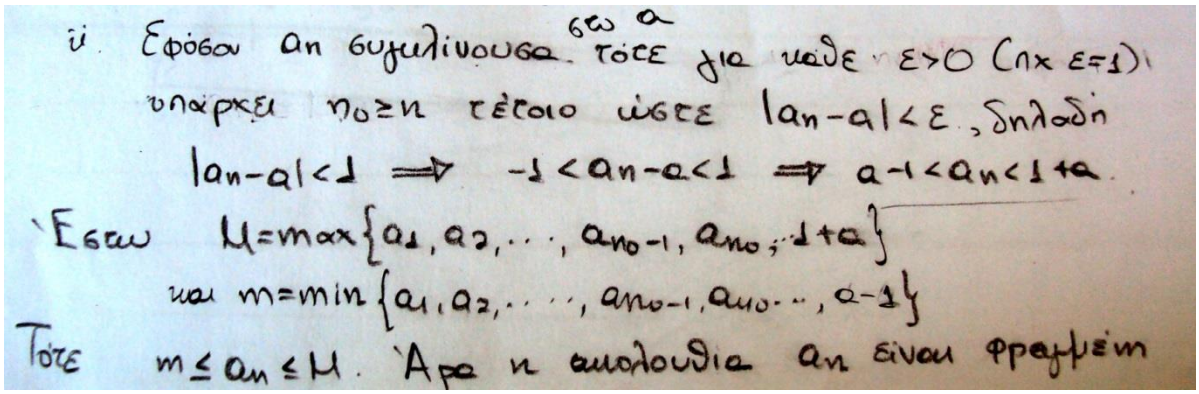
Ε: Εσύ πώς το σκέφτεσαι, άστο..

Λ: Εε μου φαίνεται λογικό γιατί έχω συγκεκριμένες ας πούμε ακολουθ.. συγκεκριμένο αριθμό ακολουθιών και το έχω ουσιαστικά περιορίσει και έχω πει είναι από εδώ μέχρι εδώ και προφανώς, ανάμεσα σε ένα.. δηλαδή έτσι το αντιλαμβάνομαι εγώ ..

Ε: Αυτό θέλω πώς το βλέπεις εσύ..

Λ: Σε ένα διάστημα κλειστό είναι με αρχή πώς να το πω με αρχή και τέλος δεν είναι από το … από αυτό μέχρι το $+\infty$, είναι συγκεκριμένος αριθμός των όρων.

Στην τρίτη ερώτηση του ίδιου ερωτηματολογίου (Ερώτηση 3, Παράρτημα Β) στην αιτιολόγηση της για τη δήλωση (ii) έκανε το ίδιο λάθος με την προηγούμενη απάντηση της στη διατύπωση του ορισμού, η απάντηση της παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.8:


ii. Εφόσον αν συγκλίνουσα στο α τότε για κάθε ε>0 (πχ ε=1) υπάρχει $n_0 \geq n$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$, δηλαδή
$|a_n - a| < 1 \Rightarrow -1 < a_n - a < 1 \Rightarrow a-1 < a_n < 1+a$.
Έστω $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, 1+a\}$
και $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, \dots, a-1\}$
Τότε $m \leq a_n \leq M$. Άρα η ακολουθία a_n είναι φραγμένη

Εικόνα 4.8

Και αιτιολόγησε:

Λυδία: Εε.. γιατί άμα.. παίρνοντας τον ορισμό της συγκλίνουσας, δηλαδή του ορίου, συγκλίνει στο α τότε.. Τότε υπάρχει $n_0 \geq n$ τέτοιο ώστε να ισχύει αυτό εδώ, αν πάρω $\varepsilon = 1$ και κάνω την ίδια διαδικασία θα προκύψει αυτό εδώ πέρα και μετά αν πάρω ως M τη μέγιστη τιμή και τον α_1, α_2 και την $1 + \alpha$ και m την ελάχιστη τιμή του α_1, α_1 και του $\alpha - 1$ τότε συμπεραίνουμε ότι η α_n θα είναι οπωσδήποτε ανάμεσα στο m και στο M άρα είναι φραγμένη.

Στη δεύτερη ερώτηση του τρίτου ερωτηματολογίου (Ερώτηση 2, Παράρτημα Γ) προσπάθησε να ανακαλέσει τον ορισμό της συνέχειας προκειμένου να αιτιολογήσει γιατί η

έκτη δήλωση είναι λάθος. Παρόλα αυτά δεν ήταν σίγουρη για τον ορισμό της συνέχειας, αν στη διατύπωση του περιέχεται η έκφραση « αν και μόνο αν », κι έτσι δεν μπόρεσε να ολοκληρώσει το σκεπτικό της.

Στην τρίτη ερώτηση του ερωτηματολογίου (Ερώτηση 3, Παράρτημα Γ) απάντησε ότι η δήλωση είναι λανθασμένη και αιτιολόγησε:

> Λυδία: Πιστεύω ότι είναι λάθος γιατί λέει ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης άρα εγώ ας πούμε.. αν πάρουμε για A ότι είναι το.. ή ένα υποσύνολο του A το $(-\infty, x_0)$ το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης αλλά δεν ορίζεται το πλευρικό όριο από τα δεξιά σε αυτό το σημείο.

Σε ερώτηση του ερευνητή για το ποιος είναι ο ορισμός του σημείου συσσώρευσης έδωσε την παρακάτω απάντηση:

> Λυδία: Ότι μπορώ να το προσεγγίσω, δηλαδή δεν θυμάμαι τον ορισμό ακριβώς αλλά θυμάμαι ότι.. καταρχάς έχει δοθεί ένα τέτοιο παρόμοιο παράδειγμα και ένα σημείο που δεν είναι συσσώρευσης είναι ας πούμε αν εδώ πέρα υπήρχε ένωση και το σύνολο.. το μονοσύνολο x_1 ας πούμε, μόνο του, αυτό.

Δυσκολίες που αντιμετώπισε η Λυδία κατά τη διαδικασία μάθησης του Απειροστικού Λογισμού Ι προκύπτουν και από την ανάλυση των δεδομένων των συνεντεύξεων.

Ο $\varepsilon - \delta$ ορισμός του ορίου τη δυσκόλεψε αλλά βοηθήθηκε αρκετά από τις αναπαραστάσεις. Δήλωσε πως η κατανόηση των αφηρημένων εννοιών είναι δύσκολη γιατί τέτοιου είδους έννοιες δεν υπάρχουν στην καθημερινή ζωή ώστε να γίνουν αντιληπτές. Η χρήση των ποσοδεικτών τη δυσκόλεψε αρκετά, ανέφερε ότι δεν μπορούσε να καταλάβει πως λειτουργεί το μικρότερο του ε. Το πιο δύσκολο για τη Λυδία είναι να καταλάβει κανείς τον τρόπο σκέψης του μαθήματος, το πώς πρέπει να σκέφτεσαι και τα νέα στοιχεία που εισάγονται. Παρόλα αυτά δήλωσε ότι της άρεσε ιδιαίτερα η διαδικασία που ακολουθείται πριν ξεκινήσει μια απόδειξη, για παράδειγμα η επιλογή ενός κατάλληλου ε παρόλο που τη δυσκόλευε.

Συνάντησε δυσκολίες στην κατανόηση του άπειρου συνόλου και των ελάχιστων ανώτερων και μέγιστων κατώτερων φραγμάτων γιατί είχε χάσει ορισμένα μαθήματα, στη συνέχεια όμως της φάνηκε ενδιαφέρον. Αυτό που τη δυσκόλεψε στα ελάχιστα ανώτερα και

μέγιστα κατώτερα φράγματα ήταν ο $\varepsilon - \chi\alpha\rho\alpha\kappa\tau\eta\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ γιατί δεν ήξερε πώς να τον εφαρμόσει.

Οι ασκήσεις τύπου σωστό – λάθος της φάνηκαν δύσκολες γιατί οι αντίστοιχες που γίνονταν στο σχολείο δεν χρειαζόταν αιτιολόγηση. Τη βοήθησε ωστόσο αρκετά το γεγονός ότι απαιτούσαν πλήρη αιτιολόγηση, γιατί πολλές φορές μπορεί να ήξερε πως πρέπει να αιτιολογήσει κάτι αλλά να μην ήταν σε θέση να το εκφράσει με το σωστό μαθηματικό τρόπο, έτσι της δινόταν η δυνατότητα να εξοικειωθεί.

Δεν της ήταν εύκολο να μαθαίνει τα θεωρήματα απέξω. Σχετικά με τις αποδείξεις των θεωρημάτων, τα σημεία τα οποία δεν κατανοούσε, τα ξανακοίταζε και προσπαθούσε να κάνει κάποιο σχήμα για να καταλάβει. Αναπαρήγαγε αποδείξεις μόνο αν την «έλκυε» ο τρόπος (που γίνεται η απόδειξη) και πίστευε ότι έχουν ενδιαφέρον.

Κατά τη διάρκεια των ασκήσεων που γίνονται στο μάθημα ασχολήθηκαν με την Τριγωνομετρία η οποία της φάνηκε δύσκολη. Θεωρούσε ότι στους περισσότερους φοιτητές δεν αρέσει η Τριγωνομετρία και δεν ήταν εξοικειωμένοι με αυτήν μιας και στο σχολείο διδάσκονται τα βασικά και ήταν εκτός διδακτέας ύλης οι περισσότερες αποδείξεις.

Για τη Λυδία ο Απειροστικός Λογισμός Ι ήταν το πιο δύσκολο μάθημα του εξαμήνου, αν όχι του έτους, της φαίνονταν όλα δύσκολα, ίσως γιατί ήταν το πρώτο μάθημα που δεν ήξερε πως λειτουργούν τα πράγματα. Το περιεχόμενο του το βρήκε ενδιαφέρον αν και δήλωσε πως προτιμάει τελικά τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ. Τον θεωρεί πιο δύσκολο γιατί εκεί μπαίνουν τα θεμέλια για όλους τους Απειροστικούς, οπότε μετά χρησιμοποιούνται θεωρήματα που έχουν ήδη μάθει κι αυτό δεν ήταν και τόσο δύσκολο.

4.2 Βαθμός και τρόπος επίδρασης του ακαδημαϊκού και κοινωνικού περιβάλλοντος κατά τη διάρκεια της μετάβασης

Κατά τη διάρκεια συλλογής των δεδομένων φάνηκε ότι προκύπτουν κι άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τη μετάβαση των φοιτητών οι οποίοι δεν αφορούν στο περιεχόμενο του μαθήματος κάθε αυτό αλλά στο ευρύτερο κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο στο οποίο εισέρχονται οι φοιτητές. Οι παράγοντες αυτοί επιδρούν με διάφορους τρόπους και σε αρκετά μεγάλο βαθμό στην ένταξη των φοιτητών στο χώρο του πανεπιστημίου.

Πέτρος

Ερχόμενος στο Τμήμα Μαθηματικών από το σχολείο ο Πέτρος δεν γνώριζε τι θα αντιμετωπίσει. Ανέφερε πως ο ίδιος αλλά και πολύ συμφοιτητές του αρχικά απογοητεύονται. Υποστήριξε αυτή την άποψη λέγοντας ότι « Τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά από ότι τα περιμένει κάποιος » κι αυτό συμβαίνει κυρίως γιατί υπήρχε η εντύπωση ότι τα μαθήματα που διδάσκονται στο Μαθηματικό θα ήταν σαν τα μαθηματικά του σχολείου. Το Πανεπιστήμιο για τον Πέτρο είναι πιο δύσκολο, πιο διαφορετικό και πιο απρόσωπο από το σχολείο. Το σημείο που εντόπισε ως πιο διαφορετικό είναι η ελευθερία κινήσεων που υπάρχει στο Πανεπιστήμιο και δεν υπήρχε στο σχολείο. Η ανεξαρτησία που αποκτούν οι φοιτητές μπορεί να λειτουργήσει αρνητικά για την επίδοση τους.

Ο Πέτρος ανέφερε ότι δυσκολεύτηκε τόσο πολύ που έφτασε σε σημείο να σκεφτεί να φύγει από το Τμήμα. Ο κύριος λόγος που συνάντησε δυσκολίες ήταν ότι λόγω της απουσίας ελέγχου και της ελευθερίας που υπάρχει στο πανεπιστήμιο δεν ασχολήθηκε όσο θα έπρεπε με τα μαθήματα. Αυτό θεωρούσε πως είναι ένα από τα μεγαλύτερα ζητήματα που μπορεί να αντιμετωπίσει ένας πρωτοετής φοιτητής. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει έλεγχος και οι φοιτητές είναι ανεξάρτητοι να αποφασίσουν για τους εαυτούς τους μπορεί να έχει αρνητικά αποτελέσματα, όπως παραίτηση από τα μαθήματα. Πιο συγκεκριμένα ανέφερε:

> Πέτρος: Όταν έρχεται η πρώτη εξεταστική καταλαβαίνεις ότι δεν μπορείς να ξεφύγεις και πάρα πολύ ε και από τότε δηλ. όταν άρχισε το διάβασμα της πρώτης εξεταστικής από τότε άρχισα να καταλαβαίνω τα πράγματα.

Κατά τη διάρκεια της τρίτης συνέντευξης ο Πέτρος αναφέρθηκε στον τρόπο με τον οποίο μελετούσε. Στην αρχή το διάβασμα του για το μάθημα βασιζόταν σε ό, τι γινόταν μέσα στην τάξη. Διάβαζε τη θεωρία, τις αποδείξεις και μετά τις ασκήσεις του βιβλίου. Στις αποδείξεις κοίταζε πρώτα τη μεθοδολογία που ακολουθούν και μετά επιχειρούσε να τις κάνει μόνος του. Τις αντιμετώπιζε σαν ασκήσεις και δήλωσε ότι δεν μπορούσε να τις αποστηθίσει. Αργότερα καθώς προχωρούσαν οι ενότητες κατάφερε να διαμορφώσει το δικό του τρόπο μελέτης. Μετά το τέλος του εξαμήνου κάνοντας μια προσωπική αποτίμηση στον τρόπο με τον οποίο διαχειρίστηκε το διάβασμα του ανέφερε στην τελευταία συνέντευξη πως θα άλλαζε τον τρόπο με τον οποίο διάβαζε αρχικά και θα αφιέρωνε περισσότερο χρόνο για τη μελέτη του μαθήματος.

Η διαφορετικότητα στον τρόπο διεξαγωγής του μαθήματος στο πανεπιστήμιο σε σχέση με το σχολείο ήταν σημείο αναφοράς για τον Πέτρο το οποίο σχολίασε κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Στον τρόπο διεξαγωγής περιλαμβάνεται ο τρόπος διδασκαλίας του μαθήματος, ο αριθμός των ατόμων που το παρακολουθούσαν και το περιεχόμενο που πραγματεύονταν στην κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα. Για τον Πέτρο το μάθημα που γινόταν το σχολείο ήταν πιο «μεθοδευμένο» (παράδοση θεωρίας, επίλυση ασκήσεων) ενώ το μάθημα στο πανεπιστήμιο διδάσκεται πιο λεπτομερώς και αναλυτικά. Στο τελευταίο εξηγούνται όλα πιο αναλυτικά και χρησιμοποιούνται αφηρημένες έννοιες με τις οποίες έρχονται για πρώτη φορά αντιμέτωποι οι φοιτητές. Επιπλέον στη σχολική τάξη υπήρχε ένας συγκεκριμένος αριθμός μαθητών που δεν ξεπερνούσε τους 25 ενώ στο αμφιθέατρο μπορεί να βρίσκονται μέχρι και 200 το πλήθος φοιτητές που παρακολουθούν τη διάλεξη.

Τέλος, χαρακτήρισε ως πιο απρόσωπη την κατάσταση στο πανεπιστήμιο και δήλωσε ότι δεν υπάρχει προσωπική επαφή μεταξύ καθηγητών φοιτητών κάτι που μπορεί να λειτουργήσει ως ανασταλτικός παράγοντας στην επίδοση των φοιτητών. Η σχέση μεταξύ καθηγητών και φοιτητών είναι εντελώς διαφορετική από τη σχέση καθηγητή – μαθητή που ίσχυε στο σχολείο.

Ρέα

Η Ρέα ανέφερε πως ένα από τα προβλήματα που αντιμετώπισε κατά την παρακολούθηση του μαθήματος ήταν στη διάρκεια της παράδοσης. Θεωρούσε ότι οι καθηγητές πολλές φορές δεν ήταν ξεκάθαροι σε αυτό που ήθελαν να πουν, πιο συγκεκριμένα:

> Ρέα: Ε, θέλουν να σου πουν έναν ορισμό, στον λένε τον ορισμό, ε θέλουμε να κάνουμε την απόδειξη, στη λένε την απόδειξη μετά πότε πάμε για άσκηση πότε πάμε σε άλλον ορισμό δεν το ξέρεις πρέπει να το ψιλό μαντέψεις.

Δήλωσε επίσης πως την ενοχλούσε το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά άτομα κατά τη διάρκεια των διαλέξεων και αυτό ήταν ένα από τα κυριότερα προβλήματα κατά τα λεγόμενα της, η κατάσταση στο αμφιθέατρο, όπου λόγω του μεγάλου πλήθους φοιτητών γινόταν φασαρία και δεν ήταν εύκολη η παρακολούθηση.

Από τα λεγόμενα της Ρέας, μέσα από τις συνεντεύξεις, φάνηκε ότι δεν ανέπτυξε τη σχέση της με το διδάσκοντα καθώς κατά τη διάρκεια του εξαμήνου όταν σταμάτησε να μελετάει γιατί το μάθημα της φαινόταν πολύ δύσκολο δεν προσπάθησε να τον προσεγγίσει προκειμένου να λύσει τις απορίες της. Ο λόγος, όπως υποστήριξε, ήταν ότι οι απορίες της

βασίζονταν σε ζητήματα που είχαν συζητηθεί ήδη στις διαλέξεις και πίστευε πως θα ήταν σαν να του ζητούσε να επαναλάβει τα ίδια πράγματα.

Μάριος

Ο Μάριος από την πρώτη κιόλας συνέντευξη δήλωσε ότι δεν μπορούσε να συντονιστεί γιατί δεν υπήρχε ένα ξεκάθαρο βιβλίο όπως στο σχολείο. Το πανεπιστήμιο του φάνηκε «χαοτικό», «πιο ελεύθερο» κι αναγκάστηκε να γίνει πιο ανεξάρτητος, κάτι το οποίο είναι καλό αλλά χρειάστηκε χρόνο μέχρι να συμβεί. Στο ίδιο ζήτημα αναφέρθηκε και σε μεταγενέστερη συνέντευξη όπου σχολίασε πόσο διαφορετικό του φαίνεται σε σχέση με το σχολείο το γεγονός ότι δεν υπήρχε συγκεκριμένο βιβλίο και ότι ο καθηγητής ήταν ελεύθερος στις κινήσεις του και κατ' επέκταση και οι φοιτητές έπρεπε να προσαρμόσουν τον τρόπο διαβάσματος τους κατάλληλα. Κάνει λόγο για την ανασφάλεια που του προκάλεσε στην αρχή αυτό το γεγονός, την οποία ξεπέρασε αργότερα. Ο λόγος που ένοιωσε ανασφαλής ήταν ότι δεν είχε τον «μπούσουλα» που είχε μάθει να έχει στο σχολείο, όπως ανέφερε συγκεκριμένα:

> Μάριος: αυτό είναι το βιβλίο, αυτά θα πέσουν, αυτά θα διαβάσω, αυτές είναι οι ασκήσεις κλπ.

Με το πέρασμα του χρόνου ένοιωσε πως έπρεπε να γίνει πιο ανεξάρτητος στο περιβάλλον του πανεπιστημίου προκειμένου να ανταπεξέλθει στις διαφορετικές απαιτήσεις. Επιπλέον χαρακτήρισε ως πολύ διαφορετικό σε σχέση με το σχολείο, τον τρόπο διαβάσματος, δεν υπήρχε το τυπικό μάθημα – ασκήσεις – εργασίες για το σπίτι. Στην αρχή προσπάθησε να φτιάξει δικές του σημειώσεις από όλες τις διαθέσιμες πηγές (βιβλία e-class, σημειώσεις καθηγητών, σημειώσεις μαθήματος, σύγγραμμα) αυτό όμως δεν στάθηκε δυνατό και τα παράτησε. Στην τελευταία συνέντευξη, σε ερώτηση γύρω από τον τρόπο μελέτης που υιοθέτησε κατά τη διάρκεια του εξαμήνου, ανέφερε πως αν είχε τη δυνατότητα να αλλάξει κάτι στον τρόπο διαβάσματος του αυτό θα ήταν να κρατούσε μόνο τις σημειώσεις του μαθήματος από την e-class και το σύγγραμμα, το οποίο θα μελετούσε περισσότερο. Με αυτό τον τρόπο θα είχε τη δυνατότητα να γράφει λιγότερα στο χαρτί αλλά να μαθαίνει περισσότερα.

Σε σχέση με τους συμφοιτητές του, εκτός από το γεγονός ότι ήταν αρκετοί και αυτό εμπόδισε στην παρακολούθηση του μαθήματος, παρατήρησε μια ανταγωνιστικότητα, μια προσπάθεια για αυτοπροβολή των ίδιων και προσέλκυση ενδιαφέροντος του διδάσκοντα. Κάτι τέτοιο δεν είχε παρατηρηθεί στο σχολείο καθώς όλοι ασχολούνταν με το διάβασμα για

τις τελικές εξετάσεις και δεν ενδιαφέρονταν για το αν τους συμπαθεί ή όχι ο καθηγητής. Το γεγονός αυτό τον εξέπληξε καθώς πριν έρθει στο πανεπιστήμιο πίστευε ότι θα ήταν ευκολότερο να κάνει φίλους, βρήκε όμως τα πράγματα λίγο πιο αποστασιοποιημένα σε σχέση με το σχολείο. Ανέφερε πως για κάποιους φοιτητές ήταν κυρίαρχο ζήτημα η αυτοπροβολή και δεν ενδιαφέρονταν να γνωρίσουν άλλα άτομα παρά μόνο να τους αποδείξουν ότι είναι καλύτεροι από τους υπόλοιπους. Παρόλο που δυσκολεύτηκε τελικά έκανε φιλίες με συμφοιτητές του. Το ζήτημα των σχέσεων με τους συμφοιτητές το έθιξε και κατά τη διάρκεια της συζήτησης σχετικά με την περίπτωση όπου λόγω ασθένειας μπορεί να έχανε κάποια μαθήματα, τότε δεν ήταν ιδιαίτερα εύκολο να αποκτήσει τις σημειώσεις του μαθήματος.

Σαν ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που συνάντησε ο Μάριος, χαρακτήρισε το χρόνο που δαπανούσε για να φτάσει στη σχολή αφού του στερούσε μετά χρόνο από το διάβασμα του εξαιτίας της κούρασης. Στα μέσα του εξαμήνου μετακόμισε στις εστίες του πανεπιστημίου και από τότε το διάβασμα του άρχισε να πηγαίνει καλά και στον Απειροστικό Λογισμό Ι αλλά και στα υπόλοιπα μαθήματα μιας και γλίτωσε το χρόνο της μεταφοράς από και προς το πανεπιστήμιο.

Ο Μάριος επέλεξε να παρακολουθεί πέντε μαθήματα στο πρώτο εξάμηνο. Αυτή η επιλογή του, του προξένησε δυσκολίες γιατί δεν ήταν δυνατόν να τα διαβάζει όλα ταυτόχρονα και όταν έμενε σε κάποια μαθήματα πίσω ήταν δύσκολο να αναπληρώσει το κενό. Αν είχε την ευκαιρία να αναθεωρούσε αυτή του την επιλογή θα άφηνε το μάθημα των Παιδαγωγικών. Όπως σχολίασε στην αρχή του εξαμήνου δεν είχε καταλάβει πόσα μπορούσε να διαλέξει.

Μάρκος

Η ελευθερία που συνάντησε ο Μάρκος στο πανεπιστήμιο του φάνηκε περίεργη. Η μετάβαση από το πιο «περιορισμένο» περιβάλλον του σχολείου στο πιο ελεύθερο του πανεπιστημίου κι αυτό σε συνάρτηση με την αλλαγή πόλης και τους νέους ρυθμούς που απέκτησε η ζωή του τον παραξένεψε. Φοβόταν πως το να είναι ελεύθερος θα σημαίνει ότι τα πράγματα είναι πιο απαιτητικά. Κατάφερε να «απεγκλωβιστεί» από αυτό το φόβο και αντιμετωπίζει πλέον θετικά το ζήτημα της ελευθερίας που παρέχεται.

Το Πανεπιστήμιο δημιουργεί τις συνθήκες για να είναι ο καθένας υπεύθυνος για τον εαυτό του κατά τη διάρκεια των σπουδών του, όπως υποστήριξε ο Μάρκος σε μια από τις συνεντεύξεις, κάτι που δεν γινόταν στο σχολείο καθώς ο ρυθμός του μαθήματος δινόταν

αποκλειστικά από τον καθηγητή. Η επικοινωνία με το διδάσκοντα κατά τη διάρκεια του μαθήματος στο πανεπιστήμιο ήταν δυσκολότερη από ότι στο σχολείο εξαιτίας της ύπαρξης πολλών ατόμων στο αμφιθέατρο.

Λυδία

Το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι φάνηκε πολύ διαφορετικό στη Λυδία γιατί μελετήθηκαν όλα από την αρχή, από τα πιο βασικά, και δεν είχε καμία σχέση με το μάθημα που γινόταν στο σχολείο όπου κυριαρχούσε κυρίως η αποστήθιση εννοιών. Υπήρχε μια εμβάθυνση ως προς τις έννοιες και μια προσπάθεια να κατανοηθεί η μαθηματική λογική, απαιτούνταν αιτιολόγηση στα ζητήματα που τίθενται, το αντίθετο δηλαδή από αυτό που γινόταν στο σχολείο όπου λυνόταν απλά ένα μεγάλο πλήθος ασκήσεων. Χαρακτήρισε το μάθημα ως «πιο επιστημονικό», είναι «πιο μαθηματικά» από αυτά που γίνονταν στο σχολείο.

Δεν έμεινε ιδιαίτερα ικανοποιημένη από τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος (4 ώρες θεωρία, 2 ώρες ασκήσεις). Ανέφερε πως θα ήταν καλύτερα να γίνονταν ταυτόχρονα θεωρία και ασκήσεις, στο ίδιο μάθημα, ώστε να γίνεται φανερό μέσω των ασκήσεων κατά πόσο έχει κατανοηθεί η θεωρία που διδάχτηκε.

Κατά τη διάρκεια της μελέτης της διάβαζε κυρίως από τις σημειώσεις που κρατούσε η ίδια στις διαλέξεις. Το βιβλίο δεν το χρησιμοποίησε αρκετά, μελετούσε επίσης ασκήσεις που είχαν γίνει κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Διάβαζε τα θεωρήματα και τις αποδείξεις αλλά χωρίς να τα μαθαίνει απέξω, κι αυτό το χαρακτήρισε ως το μεγαλύτερο λάθος της γιατί δεν της έμενε τίποτα στο τέλος. Αν μπορούσε να αλλάξει κάτι στον τρόπο διαβάσματος της αυτό θα ήταν να γράφει τις αποδείξεις και να δίνει σημασία στα σημεία που κολλάει. Επίσης θα έλυνε μεγαλύτερο αριθμό ασκήσεων και θα έδινε μεγαλύτερη σημασία στις ερωτήσεις κατανόησης.

Ένα από τα μεγαλύτερα ζητήματα που σχολίασε πως αντιμετώπισε στο πανεπιστήμιο η Λυδία, ήταν η κατάσταση που επικρατούσε στο αμφιθέατρο κατά τη διάρκεια των διαλέξεων, με το μεγάλο πλήθος φοιτητών που παρακολουθούσαν το μάθημα.

Σαν μεγάλο πρόβλημα ανέφερε επίσης το χρόνο που δαπανούσε για να έρθει στο Τμήμα, καθώς της κόστιζε χρόνο από το διάβασμα της, μιας και γυρνούσε κουρασμένη και δεν είχε διάθεση να μελετήσει. Λίγο πριν το τέλος του εξαμήνου σταμάτησε την τακτική παρακολούθηση γιατί ήθελε να διαβάσει και τα υπόλοιπα μαθήματα. Προσπάθησε να

αναπληρώσει τις χαμένες διαλέξεις του Απειροστικού Λογισμού διαβάζοντας σπίτι αλλά αυτό δεν ήταν δυνατόν.

Σχολίασε πως η εισαγωγή στο πανεπιστήμιο είναι εισαγωγή σε έναν τελείως διαφορετικό χώρο η οποία απαιτεί ψυχολογική προσαρμογή προκειμένου να αντιμετωπιστεί και ότι οι μεταβάσεις γενικότερα είναι δύσκολες. Πιο συγκεκριμένα:

> Λ: Εντάξει όταν κάποιος μπαίνει στο πανεπιστήμιο ξέρει ότι θα βρεθεί σε έναν ολότελα διαφορετικό χώρο με όλες τις έννοιες, οπότε προσαρμόζεται ψυχολογικά για να το αντιμετωπίσει. Εντάξει πιστεύω ότι καλό μου έκανε το γεγονός ότι βγήκα πέρα από το χώρο του σχολείου, πέρα από το περιβάλλον το κλειστό, της γειτονιάς, της περιοχής και συνάντησα ας πούμε παιδιά από όλη την Ελλάδα.. και πιστεύω ότι όλες οι μεταβάσεις είναι δύσκολες και λογικό είναι από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση να πας στην τριτοβάθμια, καταλαβαίνεις τη διαφορά, καταλαβαίνεις ότι αυτό που κάνεις πια είναι κάτι πιο σημαντικό.
> Ε: Σημαντικό με ποια έννοια;
> Λ: Ότι ουσιαστικά εκπαιδεύεσαι.. πηγαίνεις στο πανεπιστήμιο για να ασχοληθείς επιστημονικά με το αντικείμενο που σου αρέσει οπότε πιστεύω ότι καλό μας κάνει δεν .. αυτή η μετάβαση σε καλό θα μας βγει στο τέλος.

4.3 Κατηγοριοποίηση προβλημάτων ανά συμμετέχοντα

Στον Πίνακα 4.1 που παρουσιάζεται παρακάτω αποτυπώνεται μια κατηγοριοποίηση των κυριότερων προβλημάτων που αντιμετώπισε ο κάθε φοιτητής μεταβαίνοντας από το σχολείο στο Τμήμα Μαθηματικών.

Συμμετέχων	Δυσκολίες	
	Περιεχόμενο μαθήματος	**Κοινωνικό και Ακαδημαϊκό Πλαίσιο**
Πέτρος	Γενικές έννοιες Επίπεδο αφαίρεσης Προϋπάρχουσες παρανοήσεις	Πλήθος φοιτητών στο αμφιθέατρο Σχέση καθηγητή – φοιτητή Αυτονομία – Ανεξαρτησία Τρόπος σκέψης Τρόπος μελέτης
Ρέα	Γενικές έννοιες Επίπεδο αφαίρεσης Κατανόηση απόδειξης Συγγραφή απόδειξης Προϋπάρχουσες παρανοήσεις	Πλήθος φοιτητών στο αμφιθέατρο Τρόπος σκέψης Τρόπος διδασκαλίας
Μάριος	Γενικές έννοιες Επίπεδο αφαίρεσης	Απόσταση Πλήθος φοιτητών στο αμφιθέατρο Ανταγωνιστικότητα Αυτονομία – Ανεξαρτησία Επιλογή μαθημάτων Επιλογή συγγράμματος Τρόπος σκέψης
Μάρκος	Γενικές έννοιες Επίπεδο αφαίρεσης	Πλήθος φοιτητών στο αμφιθέατρο Νέος τρόπος ζωής Σχέση καθηγητή – φοιτητή Αυτονομία – Ανεξαρτησία Τρόπος σκέψης
Λυδία	Γενικές έννοιες Επίπεδο αφαίρεσης Ασκήσεις τύπου Σωστό – Λάθος	Απόσταση Πλήθος φοιτητών στο αμφιθέατρο Σχέση καθηγητή – φοιτητή Τρόπος σκέψης Τρόπος μελέτης Τρόπος διεξαγωγής μαθήματος

Πίνακας 4.1 : Κατηγοριοποίηση δυσκολιών

4.4 Διάκριση τρόπων αντιμετώπισης της μετάβασης

Από την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τα ερωτηματολόγια και τις συνεντεύξεις επιχειρείται μια διάκριση του τρόπου αντιμετώπισης της μετάβασης κάθε συμμετέχοντα. Φαίνεται να προκύπτουν τρεις διαφορετικές κατηγορίες όπου και οι τρεις έχουν κοινή αφετηρία αλλά διαφέρουν στην πορεία. Σε όλες τις κατηγορίες στους συμμετέχοντες αρέσουν πολύ τα μαθηματικά, είναι η πρώτη τους επιλογή να σπουδάσουν στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών και έρχονται με μεγάλη όρεξη από το σχολείο για να ασχοληθούν με τα μαθηματικά. Η διάκριση αυτή έρχεται να επιβεβαιώσει ως ένα σημείο τη μελέτη των Daskalogianni και Simpson (2002) και ίσως κατά μία έννοια αποτελεί μια επέκταση των φαινομένων που μελετώνται στην έρευνα τους καθώς στην παρούσα έρευνα λαμβάνονται υπόψη κι άλλοι παράγοντες όπως το κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο.

Κατηγορία 1

Το κύριο χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης κατηγορίας είναι ότι ο φοιτητής με το που έρχεται σε επαφή με το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι δυσκολεύεται. Οι δυσκολίες που συναντά επικεντρώνονται στη φύση του μαθήματος και δεν δίνεται ιδιαίτερη σημασία στα υπόλοιπα στοιχεία που χαρακτηρίζουν το νέο πλαίσιο του πανεπιστημίου. Ο φοιτητής δυσκολεύεται κυρίως στην κατανόηση εννοιών, στην κατανόηση και συγγραφή αποδείξεων, δεν είναι δυνατό να υιοθετήσει το νέο τρόπο σκέψης και τυχόν παρανοήσεις εννοιών που φέρει από το σχολείο ενισχύονται. Προσπαθεί να διαβάσει αλλά με ανεπιτυχή τρόπο. Παραιτείται οποιασδήποτε προσπάθειας ενασχόλησης με το μάθημα από ένα σημείο και ύστερα, δεν ζητάει τη βοήθεια του διδάσκοντα σε καμία φάση και τελικά δεν δίνει ούτε τις εξετάσεις του μαθήματος. Στην κατηγορία αυτή θα μπορούσε να ενταχθεί η Ρέα. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισε της δημιούργησαν αρνητική στάση για το μάθημα και κατ' επέκταση για την Ανάλυση. Αυτό φαίνεται μέσα από τα λεγόμενα της αφού όπως δήλωσε προτιμάει την Άλγεβρα από την Ανάλυση και επιπλέον στο επόμενο εξάμηνο δεν δήλωσε καν το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού ΙΙ.

Κατηγορία 2

Οι φοιτητές σε αυτή την κατηγορία αναγνωρίζουν εξαρχής τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ σχολείου και πανεπιστημίου οι οποίες τους επηρεάζουν αισθητά στην προσαρμογή τους. Οι διαφορές αυτές έχουν να κάνουν με το νέο του πανεπιστημίου, το περιεχόμενο του

μαθήματος, τον τρόπο διεξαγωγής του μαθήματος και τον τρόπο διαβάσματος. Οι φοιτητές έχουν τη διάθεση να προσπαθήσουν προκειμένου να προσαρμοστούν στο νέο περιβάλλον. Μελετούν αλλά το διάβασμα τους δεν είναι πάντα αποδοτικό, μπορεί να μαθαίνουν ορισμούς, θεωρήματα αλλά να μην τους έχουν κατανοήσει στην ουσία σε βάθος. Στη συγκεκριμένη κατηγορία θα μπορούσε να ενταχθεί ο Πέτρος ο οποίος επηρεασμένος από όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισε σκέφτηκε ακόμη και να αφήσει το Τμήμα Μαθηματικών. Παρόλα αυτά αποφάσισε να αναδιοργανώσει τον τρόπο διαβάσματος του και να συνεχίσει τις σπουδές του. Η προσπάθεια του απέδωσε αφού πέτυχε στις εξετάσεις του μαθήματος. Στην ίδια κατηγορία θα μπορούσε να συμπεριληφθεί και η Λυδία, η οποία φάνηκε πως δυσκολεύτηκε και από το περιεχόμενο του μαθήματος αλλά και στην προσαρμογή της στο νέο κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο. Η Λυδία έκανε προσπάθεια να προσαρμοστεί παρόλα αυτά οι δυσκολίες που αντιμετώπισε σχετικά με το περιεχόμενο του μαθήματος της δημιούργησαν ανασφάλεια και έτσι προτίμησε να εξεταστεί σε επόμενο εξάμηνο στο μάθημα.

Κατηγορία 3

Οι φοιτητές σε αυτή την κατηγορία παρουσιάζουν ορισμένα κοινά στοιχεία με την προηγούμενη. Αναγνωρίζουν αμέσως τις διαφορές μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων, και ως προς το μάθημα αλλά και ως προς το νέο περιβάλλον, και σε πρώτο επίπεδο τους επηρεάζουν. Ωστόσο οι δυσκολίες που συναντούν οι φοιτητές σε αυτή την κατηγορία γύρω από το περιεχόμενο του μαθήματος είναι πολύ λιγότερες από αυτές που σχετίζονται με το κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο. Φαίνεται να υιοθετούν το νέο τρόπο σκέψης και να κατανοούν τις νέες έννοιες σε βάθος. Οι δυσκολίες που τους απασχολούν αφορούν κυρίως σε ζητήματα σχετικά με την ανεξαρτησία και την αυτονομία που πρέπει να υιοθετηθεί στο πανεπιστήμιο. Επιπλέον μπορεί να τους επηρεάζουν θέματα όπως η συναναστροφή με τους συμφοιτητές και η ανταγωνιστικότητα. Σε αυτή την κατηγορία μπορούν να ενταχθούν ο Μάριος και ο Μάρκος. Παρόλη την επίδραση του κοινωνικού και ακαδημαϊκού παράγοντα και οι δύο τελικά φαίνεται να προσαρμόζονται και πετυχαίνουν στις εξετάσεις του μαθήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε αρχικά να διερευνηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο Πανεπιστήμιο και ύστερα ο βαθμός και ο τρόπος επίδρασης του κοινωνικού και ακαδημαϊκού πλαισίου κατά τη διάρκεια της μετάβασης μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων. Στην ενότητα αυτή συζητούνται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων συνθετικά και με αναφορά στα σχετικά βιβλιογραφικά δεδομένα προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα.

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν φάνηκε ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν διάφορες δυσκολίες κατά τη διαδικασία μάθησης του Απειροστικού Λογισμού Ι στη διάρκεια της μετάβασης τους μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων. Αρχικά οι δυσκολίες αυτές επικεντρώνονται στο περιεχόμενο του μαθήματος και κυρίως σε έννοιες που διδάσκονται για πρώτη φορά στο πανεπιστήμιο. Ορισμένες από τις έννοιες αυτές, όπως αναδείχθηκαν μέσα από τα δεδομένα της έρευνας, αφορούν στο ελάχιστο ανώτερο και μέγιστο κατώτερο φράγμα, στη σύγκλιση ακολουθίας, στη χρήση ποσοδεικτών, στην Αρχιμήδεια ιδιότητα, στην απόδειξη του θεωρήματος Bolzano, στην έννοια της επαγωγής και του άπειρου συνόλου.

Οι φοιτητές έκαναν λόγο και για έννοιες που τους δυσκολεύουν τις οποίες είχαν ήδη μάθει στο σχολείο αλλά στο πανεπιστήμιο παρουσιάζονται με διαφορετικό τρόπο. Όπως για παράδειγμα ο $\varepsilon - \delta$ ορισμός του ορίου και της συνέχειας. Ο Πέτρος δήλωσε πως κατά τη διαδικασία εύρεσης ορίου συνάρτησης με τη χρήση των ποσοδεικτών τον δυσκόλεψε η διαδικασία της γραφικής του αναπαράστασης. Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι σε πολλούς φοιτητές οι παρανοήσεις που τους είχαν δημιουργηθεί από το σχολείο γύρω από έννοιες της Ανάλυσης τους επηρέασαν στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι. Πιο συγκεκριμένα ο Μάρκος δήλωσε πως η παρανόηση που του είχε δημιουργηθεί σχετικά με την έννοια της συνέχειας στάθηκε εμπόδιο στην κατανόηση της ίδιας έννοιας στο πανεπιστήμιο. Παρόμοιο ζήτημα παρατηρήθηκε και στον Πέτρο ο οποίος έφερε την αντίληψη ότι αν δεν υπάρχει το ένα πλευρικό όριο δεν υπάρχει γενικά το όριο ή ότι αν διακόπτεται το γράφημα μιας συνάρτησης η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής. Το ίδιο συνέβη και με τη Ρέα, η οποία

φέροντας λανθασμένες αντιλήψεις από το σχολείο δυσκολεύτηκε στην κατανόηση της έννοιας του ορίου και της συνέχειας. Πιο συγκεκριμένα η Ρέα θεωρούσε ότι για να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο θα πρέπει η συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Επίσης είχε και αυτή λανθασμένη αντίληψη σχετικά με τη συνέχεια μιας συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση διακόπτεται.

Ασκήσεις που χρειάζονταν αιτιολόγηση ενώ στο σχολείο δεν ήταν απαραίτητη φάνηκαν δύσκολες στη Λυδία καθώς δεν είχε πάντα την ευχέρεια να εκφραστεί με τον κατάλληλο μαθηματικό τρόπο. Η Ρέα επίσης δήλωσε ότι δεν ήταν σε θέση να αποτυπώσει στο χαρτί με μαθηματικές εκφράσεις τη σκέψη της κι οποιαδήποτε ιδέα είχε για απόδειξη την έγραφε περιφραστικά. Ανέφερε επίσης πως η διαδικασία που ακολουθείται κατά την απόδειξη θεωρημάτων τη δυσκόλεψε σε δύο σημεία, αρχικά στον τρόπο με τον οποίο ξεκινάει η απόδειξη και ύστερα στη διαδικασία επιβεβαίωσης ότι το εξαγόμενο είναι όντως σωστό. Η εκμάθηση αποδείξεων ήταν ένα από τα σημεία που ανέφερε και ο Μάριος ότι τον απασχόλησαν κατά τη διάρκεια της μελέτης του.

Ο διαφορετικός τρόπος σκέψης που προϋποθέτει η μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι ήταν ένα από τα θέματα τα οποία έθιξαν οι συμμετέχοντες της έρευνας. Η Λυδία δήλωσε πως τη δυσκόλεψε ο νέος τρόπος σκέψης που ακολουθείται ειδικά στα νέα στοιχεία που εισάγονταν. Για το ίδιο ζήτημα έκανε λόγο και ο Μάρκος ο οποίος υποστήριξε ότι η διαφορετικότητα στον τρόπο με τον οποίο γινόταν το μάθημα ήταν ανασταλτικός παράγοντας για την παρακολούθηση του μέχρι να κατανοήσει ότι ακολουθείται ένας συγκεκριμένος τρόπος σκέψης.

Ένα άλλο σημείο στο οποίο στάθηκαν οι φοιτητές ήταν ο νέος τρόπος μελέτης που χρειάστηκε να υιοθετήσουν κατά τη διάρκεια παρακολούθησης του μαθήματος. Ο Πέτρος ανέφερε πως χρειάστηκε αρκετό χρόνο μέχρι να βρει τον πιο κατάλληλο και αποδοτικό τρόπο, το ίδιο δήλωσαν ο Μάριος και η Λυδία, η οποία θεωρεί ότι το γεγονός ότι δεν μπόρεσε να υιοθετήσει εύκολα έναν νέο τρόπο διαβάσματος συνέβαλλε στη δυσκολία που αντιμετώπισε στην εκμάθηση θεωρημάτων και των αποδείξεων τους.

Ορισμένοι από τους φοιτητές έκαναν λόγο για δυσκολίες που τους προξενούσε ο τρόπος διεξαγωγής του μαθήματος, όπως ο Πέτρος. Στο ίδιο ζήτημα αναφέρθηκε και η Ρέα η οποία έθιξε επιπλέον ότι της δημιούργησε πρόβλημα ο τρόπος διδασκαλίας του μαθήματος καθώς της είχε δημιουργηθεί η εντύπωση ότι το μάθημα ακολουθεί τη δομή «θεώρημα – απόδειξη» και της ήταν δύσκολο πολλά πράγματα να κατανοήσει πως προκύπτουν. Σχετικά

με τον τρόπο που γινόταν το μάθημα σχολίασε το γεγονός ότι πολλές φορές δεν της ήταν ξεκάθαρο από πλευράς του διδάσκοντα αν αυτό για το οποίο μιλούσε ήταν μια άσκηση, ορισμός ή κάτι άλλο. Επιπλέον για τη Λυδία ο τρόπος με τον οποίος ήταν σχεδιασμένο να διδάσκεται το μάθημα, τέσσερις ώρες θεωρία και δυο ώρες ασκήσεις, στάθηκε ως ένα βαθμό εμπόδιο στην κατανόηση του.

Η εισαγωγή σε ένα νέο άγνωστο περιβάλλον φαίνεται να επηρέασε τον Πέτρο κατά την παρακολούθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι. Η διαφορετικότητα στον τρόπο λειτουργίας μεταξύ του σχολείου και του πανεπιστημίου έπαιξε σημαντικό ρόλο για τον ίδιο αλλά και για τους υπόλοιπους συμμετέχοντες της έρευνας. Στο Μάριο δημιούργησε πρόβλημα το γεγονός ότι δεν υπήρχε ένα προκαθορισμένο βιβλίο από το ίδιο το Τμήμα και ότι κλήθηκε ο ίδιος να πάρει μια απόφαση σχετικά με το σύγγραμμα το οποίο θα μελετούσε. Παράλληλα και οι υπόλοιποι φοιτητές φάνηκε να χρειάζονται αρκετό χρόνο μέχρι να καταφέρουν να υιοθετήσουν έναν νέο τρόπο διαβάσματος κατάλληλο για τον καθένα.

Η Λυδία, ο Μάρκος και ο Πέτρος έκαναν λόγο και για την πιο απρόσωπη σχέση που υπήρχε πλέον μεταξύ καθηγητή – φοιτητή και το βαθμό στον οποίο αυτή επηρέασε την επίδοση τους ενώ ο Μάριος για τη σχέση ανταγωνισμού που υπήρχε πλέον μεταξύ των φοιτητών ενώ στο σχολείο δεν υπήρχε. Ο αριθμός των ατόμων που παρακολουθούσαν το μάθημα το Απειροστικού Λογισμού Ι σε σχέση με τον αριθμό των μαθητών που βρίσκονταν στην τάξη σχολιάζεται ως εμπόδιο κατά τη διάρκεια της παρακολούθησης του μαθήματος και από τους πέντε φοιτητές.

Κυρίαρχο ρόλο έπαιξε η ελευθερία που υπάρχει στο πανεπιστήμιο και το μεγάλο ποσοστό ανεξαρτησίας που αποκτούν πλέον οι φοιτητές καθώς είναι πλέον οι μόνοι υπεύθυνοι για την επίδοση τους. Στο πλαίσιο της ελευθερίας συμπεριλαμβάνεται και ο τρόπος ζωής που απέκτησαν φοιτητές οι οποίοι μετακόμισαν από τον τόπο μόνιμης κατοικίας τους για να σπουδάσουν όπως ο Μάριος και ο Μάρκος. Οι συγκεκριμένοι φοιτητές εκτός από την ελευθερία που είχαν να αντιμετωπίσουν στο πανεπιστήμιο χρειάστηκε να προσαρμοστούν και στο νέο τρόπο ζωής μακριά από την οικογένεια και το σπίτι τους.

Μελετώντας τα παραπάνω συγκριτικά με τα όσα αναφέρονται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση, προκύπτει ότι επιβεβαιώνονται όσα αναφέρονται στις έρευνες των Clark και Lovric (2008, 2009) σχετικά με το ρόλο που διαδραματίζουν η κοινότητα του πανεπιστημίου, η αλλαγή στο διδακτικό συμβόλαιο, η εισαγωγή αφηρημένων εννοιών, ο συναισθηματικός κόσμος των φοιτητών και οι νέες αρμοδιότητες που αποκτούν οι φοιτητές και οι καθηγητές

τους κατά τη διάρκεια της μετάβασης. Στις μελέτες των ίδιων ερευνητών γίνεται λόγος και για τις προσωπικές αλλαγές που απαιτούνται από πλευράς των φοιτητών γύρω από τον τρόπο διαβάσματος, όπως επιβεβαιώνει και ο Pongboriboon (1992) σε σχετική μελέτη του, αλλά και το νέο τρόπο ζωής που είναι πιο ανεξάρτητος κάτι που αναφέρεται από όλους τους συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας και φαίνεται να παίζει κυρίαρχο ρόλο. Σχετική αναφορά γίνεται και στο απαιτούμενο επίπεδο ωριμότητας από πλευράς φοιτητών κάτι που σχολιάζεται από το Μάρκο στη συγκεκριμένη έρευνα αλλά και για το βαθμό ανταγωνιστικότητας που είναι σημείο αναφοράς για το Μάριο.

Η άποψη ορισμένων πρωτοετών φοιτητών ότι τα μαθηματικά του πανεπιστημίου είναι μια επέκταση αυτών που διδάχθηκαν στο σχολείο αναφέρεται σε έρευνα της Nardi (1996) και σχολιάζεται και στην παρούσα έρευνα από τον Πέτρο. Η αλλαγή που παρατηρείται στην έρευνα της Selden (2010) από την υπολογιστική προσέγγιση των μαθηματικών στην προσέγγιση που βασίζεται στην απόδειξη φαίνεται να επηρεάζει τους συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας καθώς όλοι τους, άλλοι λιγότερο άλλοι περισσότερο, συναντούν δυσκολίες σε περιπτώσεις που τους ζητείται να αποδείξουν κάτι. Προς αυτή την κατεύθυνση επιβεβαιώνονται και οι αναφορές των Hoffkamp κ.ά. (2013) οι οποίοι κάνουν λόγο για έλλειψη συγκεκριμένων μαθηματικών τεχνικών που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη και την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών, ορισμών, θεωρημάτων και αποδείξεων. Επιπλέον σε όλους τους συμμετέχοντες της έρευνας, όχι όμως στον ίδιο βαθμό, φαίνεται να εντοπίζονται οι τρεις κύριες πηγές δυσκολιών όπως τις αναφέρει ο Moore (1994) σε σχετική του έρευνα (έννοια της κατανόησης, μαθηματική γλώσσα και γραφή, συγγραφή απόδειξης). Το « $\varepsilon - \delta$ κενό » όπως χαρακτηρίζει ο Luk (2007) το κενό μεταξύ μαθηματικών σχολείου και πανεπιστημίου με την εισαγωγή της χρήσης ποσοδεικτών στο πανεπιστήμιο φαίνεται να απασχολεί όλους τους φοιτητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Συμπληρωματικά η Λυδία αναφέρει ότι η εισαγωγή αφηρημένων εννοιών είναι που κάνει τόσο δύσκολο το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού, στοιχείο το οποίο αναφέρουν και οι φοιτητές που μελέτησε ο Moore (1994).

Το ζήτημα της απόστασης και του χρόνου που ξόδευαν για να φτάσουν οι φοιτητές στο Τμήμα σχολιάστηκε από τη Λυδία και το Μάριο, με τον τελευταίο να αναφέρει πόσο βελτιώθηκε η επίδοση του με τη μετακόμιση του στις εστίες του πανεπιστημίου, κάτι που επιβεβαιώνουν οι Cherif και Wideen (1992) μέσα από τη μελέτη τους οι οποίοι συμπέραναν ότι οι φοιτητές που ζουν εντός πανεπιστημιούπολης έχουν καλύτερες επιδόσεις. Το πλήθος των φοιτητών που παρακολουθούσαν το μάθημα αναφέρεται ως μια από τις αλλαγές που

αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο πανεπιστήμιο από τους Clark και Lovric (2008, 2009) κάτι που επιβεβαιώνεται από την παρούσα έρευνα καθώς όλοι οι συμμετέχοντες αναφέρθηκαν σε αυτό και στο βαθμό που τους επηρεάζει. Ο Μάρκος έκανε λόγο για την αλλαγή από την πιο πειθαρχημένη ζωή που ζούσε πριν περάσει στην αυτόνομη ζωή του πανεπιστημίου όπως αναφέρουν και οι Cherif και Wideen (1992) σε ανάλογη έρευνα.

Επιπλέον συσχετίζοντας τα παραπάνω με μια μελέτη της Nardi (1996) οι φοιτητές προκειμένου να πετύχουν τη μετάβαση πρέπει να υιοθετήσουν έναν νέο τρόπο σκέψης κάτι που αναγνωρίζουν οι συμμετέχοντες στη συγκεκριμένη έρευνα. Επίσης για το νέο τρόπο σκέψης που χρειάζεται να υιοθετηθεί και την εμβάθυνση προς τις έννοιες που στο σχολείο τις χειρίζονταν με επιφανειακό τρόπο και δεν εμβάθυναν στην κατανόηση του περιεχομένου κάνει αναφορά και ο Pongboriboon (1992) σε ανάλογη μελέτη του αλλά και οι Kajander και Lovric (2007) σε μια πιο πρόσφατη έρευνα τους. Οι Breen κ.ά. (2013) σχολιάζουν την αλλαγή στο στυλ διδασκαλίας όπως και οι συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας. Κάνουν λόγο για έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση καθώς και μια μετακίνηση στην ανεξάρτητη μάθηση το οποίο επιβεβαιώνεται από την πλειοψηφία των συμμετεχόντων. Οι Cherif και Wideen (1992) σε σχετική έρευνα τους κάνουν λόγο για το ρόλο που παίζει η σχέση μεταξύ καθηγητών – φοιτητών και το χρόνο που διαθέτουν οι πρώτοι για να επικοινωνήσουν με τους τελευταίους το οποίο σχολιάζουν τρεις εκ των φοιτητών που πήραν μέρος στην έρευνα. Επιπλέον, ορισμένες πτυχές των αποτελεσμάτων των ερευνών των Clark και Lovric (2008, 2009) σε σχέση με την πιο ανεξάρτητη ζωή και μελέτη που υιοθετείται στο πανεπιστήμιο, το απαιτούμενο επίπεδο ωριμότητας που χρειάζεται να αποκτήσουν πλέον οι φοιτητές, το μεγάλο μέγεθος της τάξης και το βαθμό ανταγωνιστικότητας μεταξύ συμφοιτητών επιβεβαιώνονται σε μεγάλο βαθμό από την έρευνα.

Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε γύρω από τα προβλήματα κατά τη διάρκεια της μετάβασης από το σχολείο στο πανεπιστήμιο φάνηκε ότι οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι πρωτοετείς φοιτητές αφορούν στο περιεχόμενο του μαθήματος που διδάσκεται στο πανεπιστήμιο, στην προκειμένη περίπτωση στον Απειροστικό Λογισμό Ι, και στο κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο. Η εισαγωγή αφηρημένων εννοιών και ο διαφορετικός τρόπος σκέψης που υπάρχει μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων παίζει καθοριστικό ρόλο στη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού Ι. Ο διαφορετικός τρόπος λειτουργίας μεταξύ σχολείου και πανεπιστήμιου συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην ενίσχυση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές κατά τη διάρκεια της μετάβασης τους. Επιπλέον η

ελευθερία που υπάρχει στο πανεπιστήμιο φαίνεται να τους επηρεάζει αρκετά καθώς χρειάστηκαν όλοι ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μέχρι να τη συνηθίσουν και να μπορέσουν να τη διαχειριστούν ως προς όφελος τους.

Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι πρωτοετείς φοιτητές κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με το αν αφορούσαν στο περιεχόμενο του μαθήματος, ή στο κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο (Πίνακας 4.1). Επιπλέον επιχειρήθηκε μια διάκριση κατηγοριών του τρόπου με τον οποίο οι φοιτητές αντιμετώπισαν τη μετάβαση ανάλογα με το είδος των δυσκολιών που συνάντησαν. Μέσα από αυτήν την κατηγοριοποίηση φάνηκε ότι οι φοιτητές που δυσκολεύονται περισσότερο με το περιεχόμενο του μαθήματος δεν αναφέρουν στον ίδιο βαθμό να τους απασχολούν προβλήματα σε σχέση με κοινωνικούς – ακαδημαϊκούς παράγοντες κι είναι αυτοί οι φοιτητές που δείχνουν μεγαλύτερα σημάδια δυσκολίας στην προσαρμογή τους στο Τμήμα. Σε αντίθεση με τους φοιτητές που δείχνουν να έχουν μια ευχέρεια στην κατανόηση του μαθήματος οι οποίοι κάνουν λόγο περισσότερο για προβλήματα που αφορούν στο κοινωνικό και ακαδημαϊκό πλαίσιο. Αυτοί οι φοιτητές ανάλογα με το βαθμό στον οποίο επηρεάζονται από τις δυσκολίες που συναντούν δείχνουν σημάδια προσπάθειας προσαρμογής στο νέο περιβάλλον, άλλοι λιγότερο άλλοι περισσότερο.

Σε κάθε περίπτωση όσα παρατηρήθηκαν μέσα από την έρευνα είναι ενδεικτικά και δεν αποτελούν γενίκευση καθώς αφορούν στους πέντε φοιτητές που μελετήθηκαν. Έτσι η συγκεκριμένη έρευνα δημιουργεί την ανάγκη για περαιτέρω μελέτη γύρω από το ζήτημα της μετάβασης από το σχολείο στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Εκτός από το μεγαλύτερο πλήθος συμμετεχόντων που θα μπορούσε να μελετηθεί προτείνεται να μελετηθούν συμμετέχοντες κατά τη διάρκεια φοίτησης στην τελευταία τάξη του σχολείου και στη συνέχεια σε όλο το πρώτο έτος στο πανεπιστήμιο. Έτσι θα είναι πιο εύκολα εφικτή η σύγκριση μεταξύ των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων με σκοπό να αναδειχθούν οι δυσκολίες και να βρεθούν τρόποι για την εξομάλυνση της μετάβασης μεταξύ μαθηματικών σχολείου και πανεπιστημίου. Επιπλέον προτείνεται η ταυτόχρονη μελέτη φοιτητών που παρακολουθούν διαφορετικά μαθήματα, όπως Απειροστικό Λογισμό και Γραμμική Άλγεβρα προκειμένου να γίνει φανερό εάν οι δυσκολίες που προκύπτουν σχετίζονται με το είδος του διδασκόμενου μαθήματος. Τέλος, θα μπορούσαν να μελετηθούν πρωτοετείς φοιτητές που αξιοποιούν τις πρωτοβουλίες στήριξης του Τμήματος και φοιτητές που δεν τις αξιοποιούν ώστε να γίνει αντιληπτό κατά πόσο αυτές συμβάλλουν ή όχι στη διευκόλυνση της μετάβασης.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Alcock, L., & Simpson, A. (2002). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the learning of the Mathematics, Vol. 22, No. 2*, 28-34.

Brandell, G., Hemmi, K., Thunberg H. (2008). The widening gap – a Swedish perspective. *Mathematics Education Research Journal, Volume 20, Issue 2, pp 38-56.*

Bartle, R. & Sherbert, D. (2000). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley.

Breen, S., O'Shea, A. & Pfeiffer, K. (2013). *The use of unfamiliar tasks in first year calculus courses to aid the transition from school to university mathematics.* Proceedings of CERME 8, Antalya, Turkey.

Cherif, A., and M. Wideen. 1992. "The Problems of Transition from High School to University Science*." Catalyst 36 (1).*

Clark, M. & Lovric, M. (2008). Suggestion for a Theoretical Model for Secondary-tertiary transition in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, Volume 20, No. 2, 25-37.*

Courant, R. & John, F. (1965). *Introduction to Calculus and Analysis*. Vol. I, Interscience.

Culpepper, S.A., Basilie, C., Ferguson, C.A., Lanning, J.A., Perkins, M.A. (2010). Understanding the transition between high school and college mathematics and science. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations, Volume 12, 157 – 167.*

Daskalogianni, K., Simpson, A. (2002). *'Cooling-off': The phenomenon of a problematic transition from school to university.* Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), Hersonissos, Crete, Greece.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38, 85–109.*

Ginsburg, H. (1981). The Clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1(1), 4–11.*

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67:237–254.*

Hardy, G. H. (1908). *A Course in Pure Mathematics*. Cambridge University Press.

Hernandez-Martinez, P., Williams, J., Black, L., Davis, P., Pampaka, M. & Wake, G. (2011). Students' views on their transition from school to college mathematics: rethinking 'transition' as an issue of identity. *Research in Mathematics Education, Vol. 13, No. 2, 119-130.*

Hoffkamp, A., Schnieder, L., & Paravicini, W. (2013). *Mathematical enculturation – argumentation and proof at the transition from school to university.* Proceedings of CERME 8, Antalya, Turkey.

Hoyles, C., Newman, K., Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2001, vol. 32, no. 6, 829-845.*

Kajander, A. & Lovric, M. (2007). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36:2-3, 149-160.*

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). Naturalistic inquiry. Beverly Hills, CA: Sage.

Luk, H.S. (2007). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 6:2-3, 161-174.*

Merriam, S. B. (1998). Qualitative research and case study applications in education. San Francisco: Jossey-Bass.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics 27*: 249-266. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Oikkonen, J., (2009). Ideas and results in teaching beginning maths students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 40, No. 1, 15, 127–138.*

Pampaka, M., Williams, J., Hutcheson, G. (2012). Measuring students' transition into university and its association with learning outcomes. *British Educational Research Journal, Vol. 38, No. 6, pp. 1041–1071.*

Pongboriboon, Y. (1992). *Transition from senior secondary to university mathematics: A case study*. Conference Proceedings, Hawkaid Conference Centre, University of Western Sydney.

Pyke, R. (2012). *Addressing first year university mathematics and the transition from high school at Simon Fraser University*. 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Rylands, L.J.& Coady, C. (2009). Performance of students with weak mathematics in first-year mathematics and science. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol. 40, No. 6, 741-753.*

Salas, S. L. & Hille, E. (1982). *Calculus: One and Several Variables, 4th ed*. New York: Wiley.

Selden, A. (2010). *Transitions and proof and proving at tertiary level.* Technical report, Tennessee Technological University.

Spivak, M. (1967), *Calculus*. Fourth Edition, Publish or Rerish, Inc.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). Basics Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. United States of America, California.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. Published in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning*, Macmillan, New York, 495–511.

Varsavsky, C. (2010). Chances of success in and engagement with mathematics for students who enter university with a weak mathematics background. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 41, No. 8, 1037–1049.*

Winsløw, C. (2013). *The transition from university to high school and the case of exponential functions.* Proceedings of CERME 8, Antalya, Turkey.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2003). *Μαθηματικά Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου. Θετική και Τεχνολογική κατεύθυνση.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Απειροστικός Λογισμός Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις (2009). Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών. http://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH130/1.%20%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CE%BA%CE%B1%CE%B9%20%CE%B1%CF%83%CE%BA%CE%AE%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CF%84%CE%BF%CF%85%20%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%BF%CF%82/2009-10%20%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%28%CE%91%CF%80.%20%CE%93%CE%B9%CE%B1%CE%BD%CE%BD%CF%8C%CF%80%CE%BF%CF%85%CE%BB%CE%BF%CF%82%29/AP1-2009.pdf

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1999). *Απειροστικός Λογισμός*. Τόμος Ι. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Οδηγίες για τον Εκπαιδευτικό (2011). Ψηφιακό Σχολείο. http://ebooks.edu.gr/2013/books-pdf.php?course=DSGL-C105

Πετροπούλου, Γ. (2010). *Η σημασία των εικονικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και τη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού.* Διπλωματική εργασία. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Petropoulou.Georgia.pdf

Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Ερωτηματολόγιο Α' Φάσης

Το παρόν ερωτηματολόγιο μοιράζεται στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Σκοπός της έρευνας είναι να μελετηθούν προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.. Τα δεδομένα από τη συλλογή των απαντήσεων του ερωτηματολογίου θα κρατηθούν ανώνυμα και σε καμία περίπτωση δεν θα επηρεάσουν στο βαθμό του μαθήματος.

Φύλο: Άντρας ☐ Γυναίκα ☐

Ηλικία: …….....

Μόνιμη Κατοικία: Ν. Αττικής ☐ Εκτός Ν. Αττικής ☐

Συγκεκριμένη περιοχή: ……..

Εξάμηνο φοίτησης: ……..

Για φοιτητές μεγαλύτερου του 1^{ου} εξαμήνου: Παρακολουθώ για πρώτη φορά το μάθημα: Ναι ☐ Όχι ☐

Κατεύθυνση που ακολούθησα στο λύκειο:

Θετική ☐ Τεχνολογική ☐

Το τμήμα Μαθηματικών ήταν η πρώτη μου επιλογή στο μηχανογραφικό δελτίο:

Ναι ☐ Όχι ☐

Το τμήμα Μαθηματικών ήταν μέσα στις πέντε πρώτες επιλογές μου στο μηχανογραφικό δελτίο:

Ναι ☐ Όχι ☐

Μέσος όρος βαθμών στο μάθημα των Μαθηματικών κατεύθυνσης στα τετράμηνα:

$B<10$ ☐ $10\leq B<15$ ☐ $15\leq B\leq 18$ ☐ $B>18$ ☐

Βαθμός στο μάθημα των Μαθηματικών κατεύθυνσης στις Πανελλήνιες:

$B<10$ ☐ $10\leq B<15$ ☐ $15\leq B\leq 18$ ☐ $B>18$ ☐

Υπήρχε κάποια βοήθεια στο μάθημα των Μαθηματικών:

Ναι ☐ Όχι ☐

Αν ναι, η βοήθεια αυτή ήταν:

Ενισχυτική διδασκαλία στο σχολείο ☐ Φροντιστήριο ☐ Ιδιαίτερα μαθήματα ☐ Άλλο …….

Τα κατάφερνα καλύτερα στην ενότητα των:

Μιγαδικών ☐ Ορίων ☐ Συνέχεια ☐ Παραγώγων ☐ Ολοκληρωμάτων ☐

Τα κατάφερνα καλύτερα σε ασκήσεις που η λύση τους αφορούσε σε:

Υπολογισμούς ☐ Αποδείξεις ☐ Άλλο ……...

Με δυσκόλευε περισσότερο η ενότητα των:

Μιγαδικών ☐ Ορίων ☐ Συνέχεια ☐ Παραγώγων ☐ Ολοκληρωμάτων ☐

Με δυσκόλευαν περισσότερο ασκήσεις που η λύση τους αφορούσε σε:

Υπολογισμούς ☐ Αποδείξεις ☐ Άλλο ☐ ……...

Θα ενδιαφερόμουν να συνεισφέρω μέσω της εμπειρίας μου στη μελέτη των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές κατά τη μετάβαση τους από το σχολείο στο τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.:

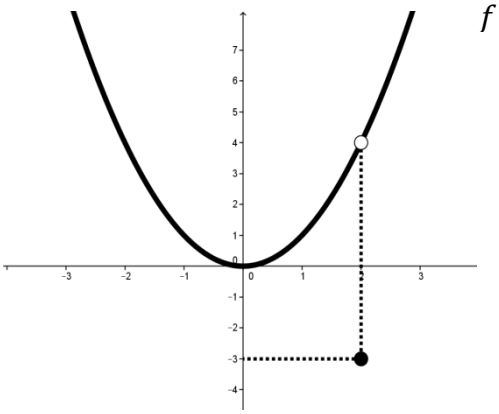
Ναι ☐ Όχι ☐

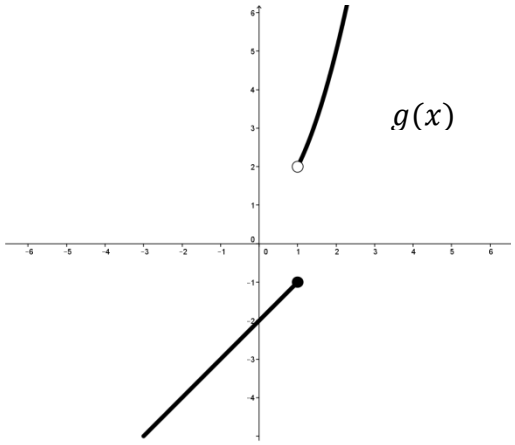
Αν ναι συμπληρώστε το email σας: ……

Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ερωτήσεις:

1.

Α. Δίνονται τα διαγράμματα δύο συναρτήσεων f και g. Εξετάστε, για την κάθε μια συνάρτηση, αν υπάρχει το όριο καθώς το x τείνει στο x_0 και αν υπάρχει ποιο είναι αυτό.





$x_0 = 2$ $x_0 = 1$

Β. Η $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}$ δεν ορίζεται για $x = 2$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστός:

α) το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει
β) το $\lim_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει
γ) επειδή $\lim_{x\to 2} (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0$ και $\lim_{x\to 2} (x - 2) = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε εάν το $\lim_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει ή όχι.

Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

2. Δίνεται ο ισχυρισμός:

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός x_0 στο (α,β) τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.

Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

3. Σχηματίστε την άρνηση των παρακάτω προτάσεων:

- Για κάθε φοιτητή στο Αμφιθέατρο 23 υπάρχει μία θέση για να καθίσει.

  ……

- Για κάθε θετικό αριθμό α υπάρχει θετικός αριθμός β ώστε $\beta^2 = \alpha$.

  ……....

4. Στο βιβλίο των Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ' Λυκείου δίνεται το παρακάτω θεώρημα με την απόδειξη του:

<u>Θεώρημα</u>: Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

<u>Απόδειξη</u>: Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Αιτιολογείστε γιατί ισχύουν οι ισότητες στην απόδειξη του θεωρήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

1^{ο} Ερωτηματολόγιο Β' Φάσης

1. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, infimum, maximum και minimum του συνόλου $A = \left\{\frac{n}{m+n} : m, n \in N\right\}$.

2. Έστω μια ακολουθία (a_n) με $\lim a_n = 2$. Ποιο από τα παρακάτω είναι αλήθεια;

   i. Κάτω από το 1,999 μπορεί να βρίσκονται άπειροι όροι.
   ii. Πάνω από το 1,999 μπορεί να βρίσκονται πεπερασμένοι όροι.
   iii. Κάτω από το 1,999 μπορεί να βρίσκονται πεπερασμένοι όροι.

   Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

3. Έστω μια ακολουθία (a_n). Ποιο από τα παρακάτω είναι αλήθεια;

   i. (a_n) φραγμένη $\Rightarrow$ (a_n) συγκλίνουσα
   ii. (a_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow$ (a_n) φραγμένη

   Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

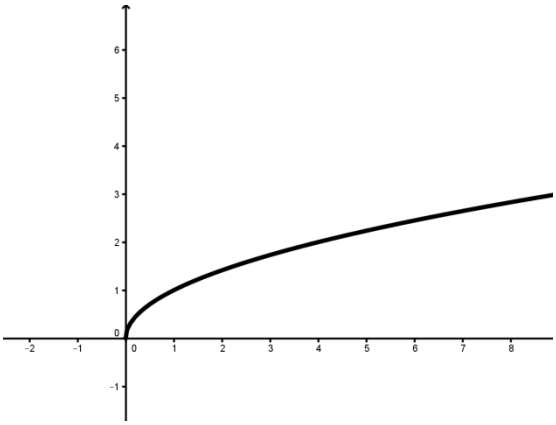
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

2ο Ερωτηματολόγιο Β' Φάσης

1. Σε μαθητές Γ' Λυκείου δόθηκε η παρακάτω άσκηση:

«Υπολογίστε το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο 0 και αιτιολογείστε την απάντηση σας.»

Τρεις μαθητές έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις:



Α: Το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο 0, είναι 0 γιατί $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\sqrt{0} = 0$.

Β: Το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο 0, είναι 0 γιατί εφόσον γνωρίζουμε ότι ορίζεται για κάθε $x \geq 0$ θα ισχύει $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$.

Γ: το όριο της $f(x)$ δεν υπάρχει γιατί για να υπάρχει το όριο πρέπει να υπάρχουν τα όρια δεξιά και αριστερά από το x_0, δηλαδή $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Στην προκειμένη περίπτωση το $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ δεν υπάρχει, άρα δεν υπάρχει το όριο.

Ποια από τις παραπάνω απαντήσεις θα λαμβάνατε υπόψη σας ως σωστή και γιατί;
Πώς θα εξηγούσατε στους μαθητές που δεν απάντησαν σωστά το λάθος τους;

2. Έστω μία συνάρτηση f με $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$. Ποια από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστή; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

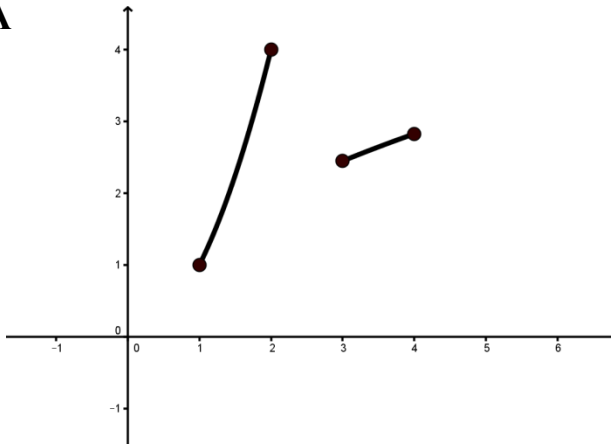
1. Η f είναι συνεχής στο $x = 2$.
2. Η f ορίζεται στο $x = 2$.
3. $f(2) = 3$
4. $\lim_{h\to 0} \{f(2+h) - 3\} = 0$
5. Για κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε αν $0 < |x-2| < \delta$, τότε $|f(x) - 3| < \frac{1}{n}$.
6. Για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$, υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε αν $|f(x) - 3| < \varepsilon$, τότε $0 < |x-2| < \delta$.

3. Έστω $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Τότε το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια και είναι ίσα.

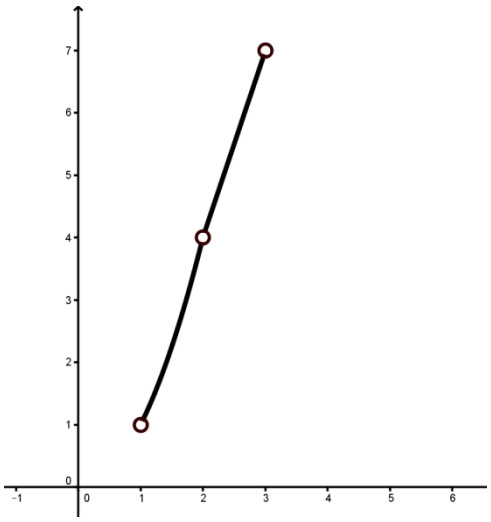
Είναι σωστή ή λάθος η παραπάνω δήλωση, αιτιολογείστε την απάντηση σας.

4. Σας δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις:

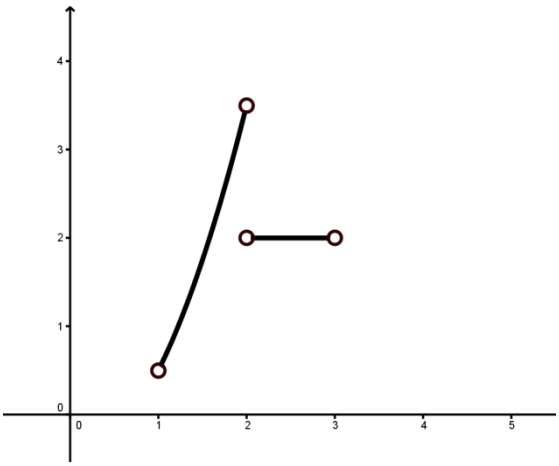
Α



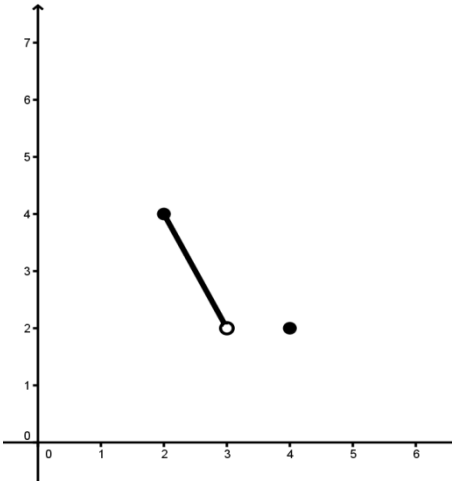
Β



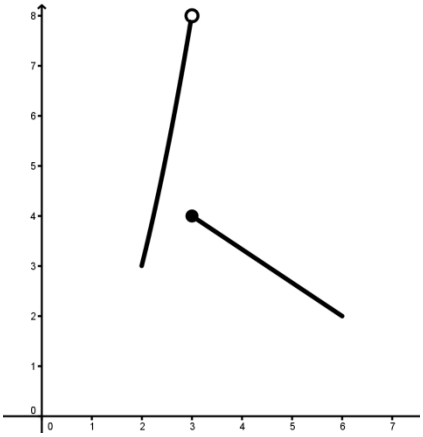
Γ



Δ



Ε



Ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς και ποιες όχι; Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας.