ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Άπειρες Διαδικασίες στους Πραγματικούς Αριθμούς»

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΝΙΤΣΟΤΟΛΗΣ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

Βασιλική Φαρμάκη

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό –Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……. από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Φαρμάκη Βασιλική (επιβλέπουσα καθηγήτρια)	Καθηγήτρια	……..
2) Παπαναστασίου Νικόλαος…….....	Αν. Καθηγητής	……
3) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος ……..	Καθηγητής	…….

«Η φιλοσοφία είναι γραμμένη σ' αυτό το τεράστιο βιβλίο που στέκει αιώνια ανοικτό μπροστά στα μάτια μας, εννοώ το σύμπαν, δεν μπορούμε όμως να το διαβάσουμε πριν μάθουμε τη γλώσσα και εξοικειωθούμε με τους χαρακτήρες με τους οποίους είναι γραμμένο. Είναι γραμμένο σε γλώσσα μαθηματική» (Galileo – Galilei, 1564-1642).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κ. Βασιλική Φαρμάκη για την πολύτιμη βοήθεια της κατά την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής
- Τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη και κ. Νικόλαο Παπαναστασίου
- Ευχαριστώ όλους τους καθηγητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακού Σπουδών για τις γνώσεις που μου προσέφεραν
- Την γραμματέα του Π.Μ.Σ κ. Διονυσία Μπακογιάννη για τις χρήσιμες συμβουλές της για την ολοκλήρωση των σπουδών μου
- Τους συμφοιτητές μου για την άψογη συνεργασία και πολύτιμη βοήθεια τους
- Τους μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα καθώς και τους συναδέλφους και Διευθυντές των σχολείων που υπηρέτησα στην διάρκεια των σπουδών μου
- Την οικογένεια μου για την βοήθεια της και στήριξή της.

Ιούνιος 2014

Βασίλειος Νιτσοτόλης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ……....7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: Ιστορική αναδρομή προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών και του ορίου μέσω απείρων διαδικασιών ……10

Εισαγωγή……10

1.1. Ιστορική αναδρομή προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών μέσω απείρων διαδικασιών …….....12

Οι αριθμοί στην αρχαιότητα……12

Οι πραγματικοί αριθμοί στα σύγχρονα Μαθηματικά……21

1.2. Ιστορική αναδρομή προς τον ορισμό του ορίου……24

Οριακές διαδικασίες στην αρχαιότητα……24

Μεσαίωνας το απειροστικό πνεύμα τον 16^{ο} & 17^{ο} αιώνα με την χρήση απειροστών και αδιαιρέτων και απόψεις για την κίνηση και την μεταβολή……29

Γεωμετρικές αντιλήψεις των Torricelli- Barrow……33

Αλγεβρικές αντιλήψεις των Fermat-Descartes-Wallis……34

Τα απειροστά του Cavalieri……37

Στοιχεία από την γέννηση του Απειροστικού Λογισμού: Τα απειροστά και οι ροές που χρησιμοποίησαν οι Newton-Leibniz……38

Αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού……42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: Αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών ……44

Εισαγωγή……44

2.1. Χαρακτηρισμός ρητών αριθμών μέσω δεκαδικού αναπτύγματος ……44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: Διδασκαλία των πραγματικών αριθμών και του ορίου……52

Εισαγωγή……52

3.1. Διδασκαλία των πραγματικών αριθμών……53

Διδασκαλία των πραγματικών αριθμών μέσα από τα σχολικά βιβλία……...57

3.2. Διδασκαλία του ορίου……70

Γνωσιακές θεωρίες κατανόησης μαθηματικών εννοιών……70

Το άπειρο……..……..…….……..74

Το συνεχές ……...…….....77

Σχηματισμός της εικόνας έννοιας (concept image)…….…….……...83

Κατανόηση της έννοιας του ορίου……...84

Η επίδραση της γλώσσας στην κατανόηση του ορίου……..…….……84

Μοντέλα κατανόησης του ορίου…….……...…….86

Εμπόδια κατανόησης: Επιστημολογικά εμπόδια……..……..87

Αντιλήψεις για την έννοια του ορίου...……...……92

Το όριο σαν διαδικασία και σαν αντικείμενο (procept)……..…..94

Διδασκαλία ορίου μέσα από τα σχολικά βιβλία…….……95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΕΡΕΥΝΑ……..……101

4.1 Στόχοι και μεθοδολογία της έρευνας……..……...……101

4.2 Ποσοτική ανάλυση……102

4.3 Ποιοτική ανάλυση…….119

Αντιλήψεις μαθητών για το όριο……...119

Ποιοτική ανάλυση ερωτηματολογίων μαθητών μέσω συνέντευξης……...121

4.4 Συμπεράσματα και προτάσεις για διδασκαλία…….134

Βιβλιογραφία……..142

Παράρτημα Α……..150

Παράρτημα Β……..152

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική παρουσιάζουμε τις άπειρες διαδικασίες στους πραγματικούς αριθμούς. Ποια προβλήματα αντιμετώπισε η κοινότητα των μαθηματικών προκειμένου να μπορέσει να ορίσει αυστηρά τους πραγματικούς αριθμούς και το όριο. Πως παρουσιάζονται οι αντίστοιχες έννοιες στα σχολικά βιβλία και πως οι μαθητές κατανοούν τις άπειρες διαδικασίες στους πραγματικούς αριθμούς.

Στην πορεία προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών η μαθηματική κοινότητα βρέθηκε αντιμέτωπη με τις άπειρες διαδικασίες που είχαν ως αποτέλεσμα να αλλάξουν την όλη ροή της μετέπειτα μαθηματικής σκέψης. Κάποιες τέτοιες στιγμές που τις ανέδειξαν ήταν στην αρχαιότητα η άπειρη ανθυφαίρεση των Πυθαγορείων με την ανακάλυψη των αρρήτων, τα παράδοξα του Ζήνωνα, η μέθοδος της εξάντλησης του Αρχιμήδη κ.α. Μέσω των παράδοξων αναδείχθηκαν οι αντικρουόμενες έννοιες της κίνησης και του χρόνου και κατ' επέκταση του διακριτού και του απείρου. Επίσης στον Μεσαίωνα αρχίζει και επικρατεί το απειροστικό πνεύμα του 16° - 17° αιώνα. Ακόμη γίνεται αποδεκτή η άποψη για χρήση απειροστών και αδιαιρέτων για την κίνηση και την μεταβολή. Θεωρούσαν εμβαδά και όγκους σαν αθροίσματα ενός απείρου αριθμού απειροστών στοιχείων της ίδιας διάστασης. Επίσης οι γεωμετρικές και οι αλγεβρικές αντιλήψεις για το όριο είχαν σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση και πάλι των άπειρων διαδικασιών.

Εξάλλου οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να χαρακτηριστούν στην αξιωματικοί τους θεμελίωση μέσω απείρων διαδικασιών, όπως του ελάχιστου άνω (αντ. κάτω) φράγματος (supremum, αντ. infimum) ή των απείρων τομών εγκιβωτισμένων διαστημάτων.

Στα σχολικά βιβλία οι αριθμοί δεν ορίζονται αλλά δίνονται οι διάφορες αναπαραστάσεις τους με αποτέλεσμα οι μαθητές να σχηματίζουν την εικόνα έννοιας αυτών σαν ορισμό. Άλλωστε δεν θα μπορούσε να διδαχθεί στα σχολικά μαθηματικά ο αυστηρός αξιωματικός ορισμός της κατασκευής των πραγματικών αριθμών. Δεν εκφράζονται σαν καινούργια μαθηματικά αντικείμενα που να προκύπτουν μέσα από δυναμικά άπειρες διαδικασίες έτσι ώστε ο πραγματικός αριθμός να δημιουργείται μέσα από ένα άπειρο άθροισμα σαν συνέπεια της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Το όριο συνήθως δίνεται μέσα από αναπαραστάσεις με δυναμικό χαρακτήρα προσέγγισης και μάλιστα πάντα μέσα από μονότονες συναρτήσεις.

Έτσι οι μαθητές σε ισότητες όπως η $1 + ½ + ¼ + \ldots = 2$ που περιέχουν ένα άπειρο άθροισμα δυσκολεύονται να αποδεχθούν ότι αυτό το άθροισμα είναι ίσο με το 2 αλλά το θεωρούν μικρότερο. Για να αποδεχθούν την παραπάνω την ισότητα θα πρέπει διαισθητικά να συλλάβουν το ενεργεία άπειρο. Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε πόση σημαντική σημασία έχει η έννοια του απείρου και των άπειρων διαδικασιών στην έννοια του πραγματικού αριθμού.

Σύμφωνα με τις γνωσιακές θεωρίες (Sfard, Dubinsky, Tall et all) για την κατανόηση αυτών των άπειρων διαδικασιών απαιτείται η δυνάμει και ενεργεία απειρία και μία ριζική αλλαγή στον τρόπο σκέψης μας. Αρχικά να δούμε την όλη διαδικασία ως ολοκληρωμένη (όλα τα βήματα να έχουν πραγματοποιηθεί) και έπειτα σαν μία ολότητα (στο αντικείμενο δηλαδή που αντιστοιχεί με την κατάσταση στο άπειρο ενσωματώνουμε το σύνολο της διαδικασίας σαν να έχουν πραγματοποιηθεί όλα τα βήματα σε μία μόνο στιγμή). Επίσης η δυναμική μεταφορά του απείρου των ενσώματων μαθηματικών (Lakoff-Nunez), (δηλ μία διαδικασία που συνεχίζεται επ' άπειρον μπορούμε να την κατανοούμε με μία εννοιολογική μεταφορά, σαν να έχει ένα τέλος και ένα έσχατο αποτέλεσμα) ενταγμένη μέσα σε ένα κατάλληλο πλαίσιο δραστηριοτήτων θα βοηθήσει τους μαθητές στη εννοιολογική κατανόηση των απείρων διαδικασιών. Έτσι προσπαθούμε να συνδέσουμε τις έννοιες του απείρου, του ορίου και του πραγματικού αριθμού.

Η διδασκαλία του ορίου και των πραγματικών αριθμών πρέπει να γίνονται με την παραδοχή και άλλων κατάλληλων αναπαραστάσεων (που να μην είναι ασυνεπής ως προς την έννοια του ορίου) πέρα από τις γεωμετρικές και αλγεβρικές, έτσι ώστε να παρέχουν το εννοιολογικό υπόβαθρο ότι τις άπειρες διαδικασίες μπορούμε να τις μελετήσουμε μέσα από το εργαλείο του απείρου. Η χρήση της προσέγγισης μέσα από αλγεβρικές πράξεις μπορεί να αναδείξουν και να αιτιολογήσουν ισότητες όπως η 0,999… = 1. Επίσης απαραίτητη είναι και η χρήση του άθροισματος της γεωμετρικής προόδου. Με τα παραπάνω οι μαθητές μπορούν να ενθυλακώσουν την άπειρη διαδικασία σε ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο επιτυγχάνοντας μία καλύτερη κατανόηση στις οριακές διαδικασίες.

Μέσα από την θεμελιώδη συνδυαστική αρχή του περιστερώνα μπορούμε να παρουσιάσουμε την μορφή του δεκαδικού κλάσματος των πραγματικών αριθμών. Στην παραπάνω αρχή μπορεί να στηριχθεί η απόδειξη και η κατανόηση της διάκρισης

ανάμεσα στους ρητούς και τους άρρητους, μία διάκριση μεταξύ περιοδικότητας και μη περιοδικότητας. Η αρχή του περιστερώνα μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών και στην ανάπτυξη του συνδυαστικού τρόπου σκέψης των μαθητών.

Κεφάλαιο 1^{ο}: Ιστορική αναδρομή προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών και του ορίου μέσω απείρων διαδικασιών

Εισαγωγή

Η θεμελίωση των αριθμών και της μαθηματικής επιστήμης ξεκίνησε από τους αρχαίους Έλληνες. Στην αρχαιότητα τόσο τα Βαβυλωνιακά όσο και τα Αιγυπτιακά μαθηματικά είχαν περισσότερο εμπειρικό χαρακτήρα παρά επιστημονικό.

Η σχολή των Πυθαγόρειων θεωρούσε ότι με τους αριθμούς ερμηνεύεται ο κόσμος με την βοήθεια των λόγων τους. Η πρώτη κρίση ήρθε με την ανακάλυψη της αρρητότητας από του Πυθαγόρειους, όταν δεν μπόρεσαν να βρουν ένα κοινό μέτρο που να καταμετράει την διαγώνιο και την πλευρά ενός τετραγώνου. Από την διαδικασία σύγκρισης δύο μεγεθών μπορεί να προκύψει η περίπτωση μη ύπαρξης κοινού μέτρου με αποτέλεσμα να αναδεικνύονται οι άπειρες διαδικασίες και οι άρρητοι αριθμοί. Τη λύση για να ξεπεραστεί αυτή η πρώιμη κρίση στα μαθηματικά, ήρθε να δώσει η θεωρία λόγων του Ευδόξου. Επίσης μία άλλη στιγμή που η μαθηματική κοινότητα της εποχής βρέθηκε αντιμέτωπη με τις άπειρες διαδικασίες ήταν με τα παράδοξα του Ζήνωνα. Οι άπειρες διαδικασίες ήταν παρούσες από τις πρώτες στιγμές της πορείας προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών της μαθηματικής επιστήμης.

Ύστερα από δύο χιλιετίες οι Πυθαγόρειοι δικαιώνονται όταν οι Dedekind, Weierstrass και Cauchy επιχείρησαν την αριθμητικοποίηση του λογισμού και την απαλλαγή του από τις γεωμετρικές αναλογίες. Η σημαντικότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών είχε σαν αποτέλεσμα την αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών στο τέλος του 19^{ου} αιώνα από τους Dedekind και Cantor.

Η έννοια του ορίου ξεκινάει και αυτή από την αρχαιότητα μέσα από την μέθοδο της εξάντλησης. Ο Αρχιμήδης όπως και άλλοι αρχαίοι Έλληνες έφθαναν διαισθητικά στο ζητούμενο αποτέλεσμα με μηχανικό τρόπο, δηλ χρησιμοποιώντας άπειρες διαδικασίες, απειροστά και όρια και μετά με την μέθοδο της εξάντλησης εύρισκαν την γεωμετρική απόδειξη.

Στον Μεσαίωνα αρχίζει και επικρατεί το απειροστικό πνεύμα τον 16^{ο} και 17^{ο} αιώνα. Γίνεται αποδεκτή η άποψη για την χρήση απειροστών και αδιαιρέτων για την

κίνηση και την μεταβολή. Στις αποδείξεις για την κίνηση οι Γαλιλαίος και Oresme κατέφυγαν στην χρήση απειροστών επειδή δεν είχαν την έννοια του ορίου. Ο Kepler θεωρούσε εμβαδά και όγκους σαν αθροίσματα ενός απείρου αριθμού απειροστών στοιχείων της ίδιας διάστασης. Στην συνέχεια ακολουθούν οι γεωμετρικές αντιλήψεις του ορίου των Torricelli- Barrow και οι αλγεβρικές των Fermat-Descartes-Wallis. Ο Barrow κάνει χρήση του «χαρακτηριστικού τριγώνου», ιδέα που χρησιμοποιήθηκε και από άλλους μαθηματικούς της εποχής. Ο Fermat παρατηρεί ότι η αύξηση μίας συνάρτησης γίνεται μηδαμινή σε μία περιοχή τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου αντίστοιχα, και δημιουργεί έναν αλγόριθμο εύρεσης ακρότατων μίας συνάρτησης. Ο Cavalieri ανέπτυξε τη μέθοδο των αδιαιρέτων για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Ο Wallis χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το σύμβολο ∞ για το άπειρο, τον συμβολισμό $(\sqrt[q]{x})^p$ για την παράσταση $x^{p/q}$ και προσπάθησε να αριθμητικοποιήσει την γεωμετρία.

Έπειτα έχουμε την γέννηση του Απειροστικού Λογισμού με τα απειροστά και τις ροές που χρησιμοποίησαν οι Newton-Leibniz. Επινόησαν ένα λογισμό εφοδιασμένο με τους κατάλληλους ορισμούς, συμβολισμούς, ορολογία και φανέρωσαν την αντίστροφη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην διαφόριση και την ολοκλήρωση συνάρτησης. Έτσι πέτυχαν να μετασχηματίσουν προβλήματα εμβαδού και όγκου που αντιμετωπίζονταν σαν προβλήματα άθροισης σε προβλήματα που τα έβρισκαν με αντιδιαφόριση. Ο Newton χρησιμοποίησε τρεις μεθόδους τα απειροστά, τις ροές οι οποίες θεωρούνται πάντα σε λόγο και ποτέ μόνες τους και τους πρώτους και έσχατους λόγους. Τα διαφορικά είναι για τον Leibniz όροι μίας ακολουθίας με άπειρο πλήθος απείρως μικρών όρων και το άθροισμα τους είναι μια απείρως μεγάλη μεταβλητή. Επίσης τα διαφορικά dx, dy τα θεωρεί μη μηδενικές, σταθερές ποσότητες αλλά αμελητέες ποσότητες σε σχέση με τις τιμές των x και y. Τα σύμβολα Σ, Δ που χρησιμοποιούνται για πεπερασμένα αθροίσματα και διάφορες, γίνονται ∫ και d όταν εφαρμόζονται σε άπειρες διαδικασίες αντίστοιχα.

Η αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού γίνεται από τους Cauchy και Weistrass μέσα από την πλήρη αριθμητικοποίηση του λογισμού. Ο Cauchy όρισε ως βασική έννοια του απειροστικού λογισμού το όριο, θεμελιώνοντας το πάνω στην αριθμητική και όχι σε γεωμετρική προσέγγιση όπως οι Newton και Leibniz. Ο Cauchy ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το ε για οσοδήποτε μικρή ποσότητα, και

θεώρησε ότι δύο μεταβλητές που είναι απεριόριστα μικρές και τείνουν στο μηδέν ο λόγος τους είναι δυνατόν να συγκλίνει σε άλλο όριο θετικό ή αρνητικό.

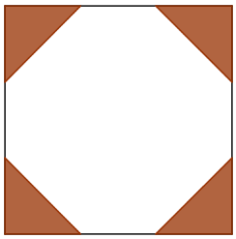
Το παράδοξο του Ζήνωνα που ασχολείται με σύγκλιση σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, τα αθροίσματα που υπολόγισαν ο Αρχιμήδης στον τετραγωνισμό παραβολής $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$, ο Swineshead $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$ και ο σχολαστικός Oresme $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})^n=a$, αποτέλεσαν σημαντικές εργασίες διότι έτσι άρχισε να γίνεται αποδοχή των άπειρων διαδικασιών στα μαθηματικά.

1.1. Ιστορική αναδρομή προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών μέσω απείρων διαδικασιών

Οι αριθμοί στην αρχαιότητα

Η ενασχόληση του ανθρώπου με την αριθμητική και την γεωμετρία εντοπίζεται στα βάθη των αιώνων στους λαούς που δημιούργησαν πολιτισμούς όπως είναι η Αίγυπτος, η Μεσοποταμία, η Κίνα και η Ινδία. Οι γνώσεις όσων ασχολούνταν την εποχή εκείνη με τα μαθηματικά περιορίζονταν σε γεωμετρικές γνώσεις και στηρίζονταν κατά κύριο λόγο σε εμπειρικές μεθόδους χωρίς ωστόσο ίχνος αποδεικτικής διαδικασίας όπως έγινε αργότερα στον Ελληνικό πολιτισμό.

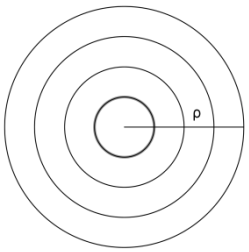
Από αιγυπτιακούς παπύρους είναι γνωστό ότι οι άνθρωποι μπορούσαν στα επίπεδα σχήματα να υπολογίζουν το εμβαδόν τριγώνου, ορθογωνίου, τραπεζίου και με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν κύκλου. Όσον αφορά τα στέρεα σχήματα μπορούσαν να υπολογίζουν τον όγκο κύβου, κυλίνδρου, κώνου και πυραμίδας. Αν και οι υπολογισμοί αυτοί είχαν εμπειρικό χαρακτήρα και για τον λόγο αυτό δεν γνωρίζουμε πώς προέκυψαν, η βασική τους όμως ιδέα ήταν ο τεμαχισμός του εμβαδού σε τρίγωνα και με διάφορες ανακατανομές να σχηματίζουν ορθογώνια που ήταν γνωστός ο υπολογισμός του εμβαδού τους. Μία βασική πηγή των αρχαίων Αιγυπτιακών Μαθηματικών είναι ο πάπυρος Rhind. Στο πρόβλημα 50 του παπύρου γίνεται προσεγγιστικός υπολογισμός του π, με μεγάλη ακρίβεια που προκύπτει από τον υπολογισμό του κυκλικού εμβαδού ενός χωραφιού διαμέτρου d, μέσω τριχοτόμησης της πλευράς του περιγεγραμμένου



Εικ.1

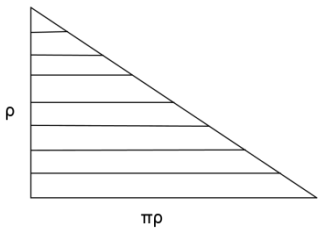
τετραγώνου (βλ Εικ.1) στον κυκλικό αγρό και αφαιρώντας τις τέσσερις γωνίες του. [Va],[Νε]

Οι Βαβυλώνιοι μας έδωσαν το αριθμητικό σύστημα θέσης (εξηκονταδικό) που επέτρεψε την σαφή αναπαράσταση των αριθμών, τόσο των ακέραιων όσο και των κλασμάτων, το οποίο και οδήγησε στην ανάπτυξη της άλγεβρας. Στο επίπεδο της αριθμητικής, προσέγγισαν σε ικανοποιητικό βαθμό την $\sqrt{2}$ καθώς ήταν σε θέση να υπολογίσουν το άθροισμα των n πρώτων τετραγώνων ($1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$). Στη γεωμετρία, υπολόγισαν τα εμβαδά ορθογωνίων τριγώνων, παραλληλογράμμων και τραπεζίων και τους όγκους πρισμάτων πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος. Για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε του κύκλου χρησιμοποίησαν τον τύπο $E = (c/2)(d/2)$, όπου c=περιφέρεια, d= διάμετρος κύκλου. [Γι]



Εικ.2

Προφανώς οι Βαβυλώνιοι, όπως και οι Κινέζοι που χρησιμοποίησαν τον προηγούμενο τύπο, διαίρεσαν τον κύκλο σε κυκλικούς τομείς και τους τοποθέτησαν «εναλλάξ» δίπλα-δίπλα σχηματίζοντας ένα νοητό ορθογώνιο. Άλλη ερμηνεία είναι αυτή που στηρίζεται σε Μεσαιωνικές αναφορές, και αναφέρει ότι θεωρούσαν ότι ο κύκλος κατασκευάζεται από λεπτές κλωστές (βλ Εικ.2) με απειροστά «πάχος». Η τομή του κύκλου από το κέντρο προς την περιφέρεια έχει ως αποτέλεσμα τον μετασχηματισμό του σε ορθογώνιο τρίγωνο με βάση την περιφέρεια και ύψος την ακτίνα του (βλ Εικ.3). [Κα]



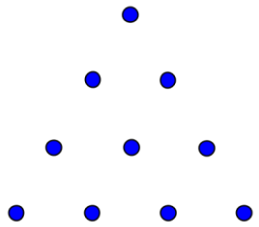
Εικ.3

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι τόσο τα αιγυπτιακά όσο και τα βαβυλωνιακά Μαθηματικά δεν ακολουθούν την διαδικασία της απόδειξης, όπως ακολούθησαν μετέπειτα οι Αρχαίοι Έλληνες και περιορίζονται στην απλή εφαρμογή εμπειρικών λύσεων σε πρακτικά προβλήματα. Αποτελούν ωστόσο την βάση για την μετέπειτα άνθιση και ανάπτυξη των μαθηματικών στην Αρχαία Ελλάδα.

Ο Θαλής θεωρείται ένας από τους «επτά σοφούς» της αρχαιότητας. Σχόλια και πληροφορίες για τα μαθηματικά του Θαλή έχουμε από τον Πρόκλο (σχολιαστή του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη). Σύμφωνα μ' αυτά στον Θαλή αποδίδονται οι παρακάτω προτάσεις: η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη,

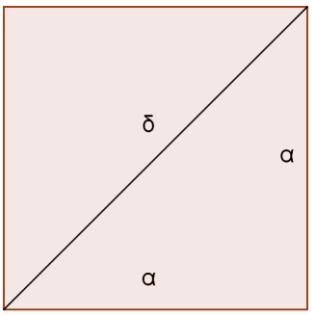
οι παρά τη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, οι γωνίες δύο τεμνόμενων ευθειών είναι ίσες και δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο γωνίες και μία πλευρά ίσες αντίστοιχα. Η τελευταία πρόταση χρησιμοποιήθηκε από τον Θαλή και για τον υπολογισμό από τη στεριά της απόστασης πλοίων που βρίσκονταν μέσα στη θάλασσα. Μέσω του Θαλή γίνεται η πρώτη προσπάθεια να θεμελιωθούν οι βάσεις της γεωμετρίας με χρήση της απόδειξης και μέσω αυτής να γίνεται η μετάβαση από τη μία πρόταση στην άλλη. Έτσι έχουμε μία μετάβαση από τα μαθηματικά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων που στηριζόταν σε εμπειρικές μεθόδους και μετρήσεις σε μια πιο αυστηρή θεμελίωση μέσω της απόδειξης. [Νε], [Νε2]

Οι Πυθαγόρειοι είδαν την δομή του σύμπαντος μέσα από τους αριθμούς. Θεωρούσαν ότι οι αριθμοί παράγονται από το άπειρο και το 1, αντίστοιχα μη ον και ον. Μέσω της διαδικασίας της εισπνοής του απείρου [Αν] δημιουργείται η δυάδα, η τριάδα κ.ο.κ. Έτσι υπάρχει μια συσχέτιση της δομής του σύμπαντος με τη δομή των φυσικών αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι μέσω της γνώσης των αριθμών και των αναλογιών τους έφθαναν στη θεϊκή και πνευματική τελειότητα. Ιδιαίτερο ρόλο κατείχε η τετράκτυς που την αποτελούσαν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Το άθροισμα 1+2+3+4= 10 ήταν ο αριθμός των σημείων που χρειάζεται για τη δημιουργία του σύμπαντος. Γεωμετρικά, η τετράκτυς παριστάνεται από το τέλειο τρίγωνο (βλ Εικ4). Επίσης οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν πολύ σημαντικούς τους τέλειους, τους φίλους αριθμούς όπως οι 284 και 220, και τους παραστατικούς αριθμούς που προκύπτουν από τα αθροίσματα των αριθμητικών προόδων όπως α) 1+2+3+…+n= 1/2n(n+1) (τρίγωνος αριθμός), β) 1+3+5+…+(2n-1)=n^2 (τετράγωνος αριθμός), γ) 2+4+6+…+2n= n(n+1) (ορθογώνιος αριθμός), δ) 1+4+7+…+(3n-2)=1/2n(3n-1) (πεντάγωνος αριθμός).[Va] Οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και τη φράση «αριθμόν είναι την ουσίαν των πάντων» (Μετά τα Φυσικά του Αριστοτέλη 987 9,13). Η ποιότητα και η ποσότητα των ανθρώπων και των πραγμάτων της ύλης καθορίζονταν από τους αριθμούς. Επίσης οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν και με τη Μουσική. Ίσως από τη Μουσική να ξεκίνησε η ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά, αναζητώντας την αρμονία στο άκουσμα δύο χορδών και το πώς συσχετίζονται τα μήκη των χορδών τους. Επομένως η γνώση του σύμπαντος άρα και των φυσικών φαινομένων στηριζόταν στη γνώση των μαθηματικών.



Εικ.4

Οι Πυθαγόρειοι παρίσταναν τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα με χαλίκια (διακριτό μέγεθος) και θεωρούσαν ότι όλα τα πράγματα αποτελούνταν από μονάδες. Από αυτές τις μονάδες, τα σημεία που ήταν αδιαίρετα και με διαστάσεις αποτελούνταν η ευθεία και κάθε ευθύγραμμο τμήμα. Αποτέλεσμα αυτού ήταν πάντα δύο ευθύγραμμα τμήματα να είναι σύμμετρα δηλαδή να υπάρχει ένα κοινό μέτρο που να τα καταμετράει. Ο ορισμός των σύμμετρων μεγεθών δίνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη (VII 2.1 που είναι ισοδύναμος με την Χ.5). Στην προσπάθεια τους οι Πυθαγόρειοι να επιλύσουν το πρόβλημα της κατασκευής τετραγώνου διπλάσιου εμβαδού από δοθέν τετραγώνου πλευράς α κλήθηκαν να επιλύσουν το πρόβλημα εύρεσης κοινού μέτρου μεταξύ της πλευράς και της διαγωνίου τετραγώνου (βλ Εικ.5). Τότε οι Πυθαγόρειοι βρέθηκαν αντιμέτωποι με την αρρητότητα. Δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ της πλευράς και της διαγωνίου ενός τετραγώνου. Ενώ γεωμετρικά μπορούμε να κατασκευάσουμε την διαγώνιο δ πλευράς α δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί χ και y τέτοιοι ώστε δ:α = χ:y. Η απόδειξη πρέπει να έγινε με την μέθοδο της ανθυφαίρεσης όπως επιβεβαιώνει κι η πρόταση Χ στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η ανθυφαίρεση στηρίζεται στη λογική ότι εάν έχω δύο αριθμούς ή δύο μεγέθη έσω A_1 και A_2 έτσι ώστε το A_2 να καταμετρά n φορές το A_1 και να περισσεύει το A_3, τότε λαμβάνουμε τη σχέση $A_1=n\ A_2+A_3$ (στη συνέχεια το A_2 με το A_3, δηλ $A_2=n_1A_3+A_4$ κ.ο.κ.). Εάν η παραπάνω διαδικασία λαμβάνει τέλος μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, το τελευταίο μέτρο είναι το κοινό μέτρο. Εάν όμως η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται στο άπειρο τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε εάν προσπαθήσουμε να βρούμε κοινό μέτρο στο κανονικό πεντάγωνο ανάμεσα στην πλευρά και τη διαγώνιο.[Γι], [Νε2]



Εικ.5

Η απόδειξη της αρρητότητας $\sqrt{2}$ ενδεχομένως να οφείλεται στον Ίπασσο τον Μεταπόντιο, ο οποίος βρέθηκε πνιγμένος στη θάλασσα αφού έβγαλε το μυστικό προς τα έξω.

Μετά την ανακάλυψη της αρρητότητας, η κοσμοθεωρία των Πυθαγορείων κλονίστηκε συθέμελα. Πλέον από τη διαδικασία της σύγκρισης δύο μεγεθών που δεν μπορούν να έχουν κοινό μέτρο, ανέδειξαν τις άπειρες διαδικασίες και τους άρρητους αριθμούς (μη εκφράσιμοι αριθμοί, άλογοι που δεν έχουν μαθηματικό λόγο).

Οι Πυθαγόρειοι αναγκάστηκαν να επανεξετάσουν την αρχική τους πεποίθηση ότι η γραμμή αποτελείται από σημεία-μονάδες που είχαν διαστάσεις. Πλέον οι γραμμές αποτελούνταν από σημεία που δεν είχαν διαστάσεις δηλαδή τα σημεία ήταν αδιάστατα. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται πλέον από άπειρα αδιάστατα σημεία, αλλιώς ένα πεπερασμένο πλήθος από σημεία χωρίς διαστάσεις δεν θα μπορούσε να αποτελεί ένα έκτακτο τμήμα. Επίσης κάθε χρονικό διάστημα κατ' αντιστοιχία αποτελείται από άπειρες χρονικές στιγμές. [Γι] Υπάρχει ακόμη η έννοια της αυτοομοιότητας ενός μεγέθους που είναι συνεχές και επ' άπειρο διαιρετέο. [Νε2]

Ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος στον διάλογο Θεαίτητος του Πλάτωνα στα 399 π.Χ. αφηγείται τον χειρισμό των άρρητων πλευρών ρητών τετραγώνων. Ο Θεόδωρος εμφανίζεται ως ο γέροντας του διαλόγου και ο Θεαίτητος ο νεαρός πρωταγωνιστής. Στη συνέχεια, ο Θεαίτητος ταξινόμησε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία παράγουν σύμμετρα τετράγωνα σε αυτά που είναι σύμμετρα και ασύμμετρα. Στον διάλογο αναφέρεται ότι ο Θεόδωρος απέδειξε ότι οι πλευρές των τετραγώνων που είχαν εμβαδόν τριών και πέντε (τετραγωνικών) ποδών δεν είναι σύμμετρες ως προς το μήκος με την μετρική μονάδα (ποδιαία). Συνέχισε να εξετάζει το ένα τετράγωνο μετά το άλλο και σταμάτησε σε αυτό που είχε εμβαδόν 17. Ο Θεόδωρος για την απόδειξη ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδά 3,5,…,17 είναι ασύμμετρες προς την πλευρά τετραγώνου εμβαδού 1 στηρίχθηκε στην πρόταση Χ2 του Ευκλείδη. Μέσω αυτής της διαδικασίας εάν τα μεγέθη είναι σύμμετρα βρίσκω τον ΜΚΔ εάν η διαδικασία δεν σταματάει τότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα. Όταν κάποιος εφαρμόζει ανθυφαίρεση σ' ένα ζεύγος ευθύγραμμων τμημάτων και μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων οδηγείται σ' ένα λόγο ο οποίος είναι ίδιος με τον λόγο του αρχικού ζευγαριού τότε μπορεί να συμπεραίνει ότι η διαδικασία δεν θα τελειώσει ποτέ. Αντίστοιχη μέθοδο με τους γνώμονες είχαν και οι Πυθαγόρειοι στην παραβολή χωρίων με έλλειψη ή με υπερβολή εργαλεία που είχε στην διάθεσή του και ο Θεόδωρος. [Va]

Ο Πλάτων θεωρούσε τα μαθηματικά σαν περιγραφή ενός μέρους της πραγματικότητας και όχι σαν εξιδανίκευση ορισμένων πλευρών του εμπειρικού κόσμου. Οι μόνες απόλυτα πραγματικές οντότητες είναι οι *Ιδέες* και ο άνθρωπος μπορεί να τις κατακτήσει άμεσα γνωστικά. Ο πλατωνικός κόσμος των Ιδεών είναι άχρονος, ακριβής και ανεξάρτητος από τον πιθανό γνώστη του. Είναι η φύση του

τέτοια που τον καθιστά εντελώς διαφορετικό από τον κόσμο των φαινομένων. Η γνώση του πλατωνικού κόσμου μπορεί να γίνει μόνο μέσω της νόησης σε αντίθεση με τον κόσμο των φαινομένων όπου μπορεί να γίνει μέσω της αισθητηριακής αντίληψης. Στη φιλοσοφία του Πλάτωνα, υπάρχουν διαχρονικά τα αιώνια αντικείμενα και ακούνε στο όνομα: «κύκλος», «ευθεία», «τρίγωνο», «δύο», «ένα» κ.τ.λ. αντικείμενα που είναι πλήρως καθορισμένα και ανεξάρτητα από τον τρόπο γνώσης τους. Ο Αριστοτέλης απορρίπτει τον Πλατωνικό κόσμο των Ιδεών. Κάθε εμπειρικό αντικείμενο αποτελείται από το υλικό υπόστρωμα και την μορφή του. Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αποτέλεσμα αφαιρετικής διαδικασίας. Η αριστοτελική άποψη για τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πιο κοντά σε μία σύγχρονη συνολοθεωρητική αντίληψη όπου μπορούν να ορισθούν σαν κλάσεις άλλων αντικειμένων. Το αριστοτελικό άπειρο έχει χαρακτήρα εντελώς διαφορετικό από αυτό που μπορεί να διατυπωθεί στα πλαίσια μίας πρωτοβάθμιας μαθηματικής θεωρίας. Το άπειρο δεν υπάρχει σε κάποιο Πλατωνικό κόσμο Ιδεών και η εξοικείωση μας με αυτό γίνεται μέσα από την ύπαρξη αντικειμένων και διαδικασιών που δεν μπορούν να εξαντληθούν. [Αν]

Επίσης δεν μπορούμε να το ξεπεράσουμε δεν είναι μέγεθος ούτε πλήθος είναι κάτι το αδιαίρετο. Ο Αριστοτέλης δεν αποδέχεται το πραγματικό άπειρο και κάνει δύο θεωρήσεις για αυτό, το εν ενεργεία και εν δυνάμει άπειρο. Τους φυσικούς αριθμούς ίσως δεν μπορούμε να τους συλλάβουμε συνολικά, αλλά μπορούμε αν μας δοθεί ένα πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών πάντα να βρούμε ένα μεγαλύτερο πλήθος, δηλ υπάρχουν δυνητικά άπειροι φυσικοί. [Γι]

Ο χρόνος σύμφωνα με τον Αριστοτέλη είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης της αλλαγής και γίνεται αντιληπτός μέσα από το τρίπτυχο «πριν, τώρα και μετά» και είναι δυνητικά άπειρος. Επίσης και η διαιρετότητα ήταν δυνητική αλλά δεν θα μπορούσε ποτέ να γίνει ενεργητική.

Ο Θεαίτητος (425- 369 π.Χ.) ήταν επίσης ένας άλλος μαθηματικός της αρχαιότητας που ασχολήθηκε με τα σύμμετρα και τα ασύμμετρα μεγέθη. Στον διάλογο του Πλάτωνα (147d- 148b) Θεαίτητος μέσω του διαλόγου με τον Σωκράτη (147d- 148b) αναδεικνύεται η ενασχόλησή του Θεαίτητου με του άρρητους. Αφού εξηγεί τι έχει ανακαλύψει για την αρρητότητα ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος και ότι έχει φτάσει μέχρι την $\sqrt{17}$ ή 17 τετραγωνικών ποδών εμβαδά τετραγώνων, ο Θεαίτητος χωρίζει τους αριθμούς σε δύο είδη. Σ' αυτούς που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό

ίσων με ίσα και τους παριστάνει με τετράγωνο και τους ονομάζει τετράγωνους ή ισόπλευρους και σε εκείνους που και προκύπτουν από πολλαπλασιασμό περισσότερων με λιγότερων ή και αντίστροφα και τους ονομάζει προμήκεις αριθμούς όπως το τρία και το πέντε. Στο τέλος του διαλόγου δίνεται ο ορισμός ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που παράγουν τετράγωνο με εμβαδόν ακέραιο αλλά όχι τετράγωνο είναι ασύμμετρα με τη μονάδα μήκους τους. Ανάλογη πρόταση δίνεται και για τους κυβικούς αριθμούς, τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία παράγουν κύβους με ακέραιο όγκο αλλά όχι κυβικό είναι ασύμμετρα προς τη μονάδα μέτρησης τους. Εάν έχουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα p *και* q που παράγουν εμβαδόν n και l αντίστοιχα, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των πλευρών τους δηλ $n:1 = p^2:q^2$ άρα $p^2 = nq^2$. Για την απόδειξη αυτού ο Θεαίτητος χρησιμοποίησε τις προτάσεις Χ5, Χ6 και Χ9 των Στοιχείων. Ο Θεαίτητος μέσα από τις προτάσεις Χ5, Χ6 και Χ9 κατάφερε να μετατρέψει το πρόβλημα της γεωμετρικής υπόθεσης της ασυμμετρίας σε αριθμητική ιδιότητα. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η αρχή του Χ βιβλίου είναι συνδεδεμένη με τα μαθηματικά του διαλόγου του Θεαίτητος. [Va]

Κατά την άποψη του Zenthen η μεγαλύτερη αξία του Θεαίτητου είναι ότι η σχέση $\mathrm{p}^2 = \mathrm{nq}^2$ ισχύει μόνο όταν ο n είναι τετράγωνος. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη ο Θεαίτητος έπρεπε να είχε ανακαλύψει και διάφορες προτάσεις των βιβλίων VII και VIII. Η αξία της συμβολής του Θεαίτητου είναι η μελέτη των ασύμμετρων ευθύγραμμων τμημάτων που παράγουν σύμμετρα τετράγωνα και η ταξινόμηση των ευθύγραμμων τμημάτων σε σύμμετρα «μήκη» και ασύμμετρες «πλευρές τετραγώνων». Από την πρόταση Χ9 διατύπωσε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για δύο τετράγωνα ώστε οι πλευρές να είναι μήκει σύμμετρες [Va]. Πλέον μπορούσε να απαντήσει ποιες πλευρές τετραγώνου είναι σύμμετρες προς τη μονάδα μήκους και να αντιμετωπίσει το πρόβλημα που ο Θεόδωρος είχε μπορέσει να αντιμετωπίσει για εμβαδά τετραγώνων από 3 έως 17 τετραγωνικούς πόδες.

Ο Εύδοξος (408- 355μ.Χ.) γεννήθηκε στην Κνίδο της Μικρά Ασίας, σπούδασε δίπλα στον πυθαγόρειο Αρχιμήδη Ταραντίνο και μετέβει στην Αθήνα όπου συνδέθηκε με τον Πλάτωνα. Θεωρείται μετά τον Αρχιμήδη η μεγαλύτερη μορφή από τους Μαθηματικούς της αρχαιότητας και ο μεγαλύτερος της κλασικής αρχαιότητας. Η θεωρία λόγων του Εύδοξου δεν έχει σωθεί αλλά αποτέλεσε τη βάση για τα βιβλία

V(κατά τρόπο magestralement σύμφωνα με τον N.Bourbaki) και VI των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Ο Εύδοξος χρησιμοποιεί το μέγεθος για να περιγράψει διάφορες ποσότητες όπως μήκος, εμβαδόν, όγκος. Στο V βιβλίο που περιέχει την θεωρία λόγων στον τρίτο ορισμό κάνει χρήση της έννοιας του λόγου χωρίς να εξηγεί τι είναι, μας λέει όμως τι είναι αναλογία (ένας ευφυής τρόπος όπου μας δείχνει πόσο δύσκολα μπορείς να ορίσεις ένα λόγο ενώ πιο εύκολα τον κατανοείς). [Γι]

Ο τέταρτος ορισμός του V βιβλίου μας αναφέρει ότι εάν έχουμε δύο ίδιες ποσότητες και η πρώτη είναι μικρότερη της δεύτερης τότε μπορεί να βρεθεί θετικός αριθμός n τέτοιος ώστε $nA > B$. Η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι γνωστή και ως αξίωμα της συνέχειας και έτσι αποκλείει το απείρως μεγάλο και το απείρως μικρό. Ενώ ο πέμπτος ορισμός είναι ουσιαστικά οι τομές Dedekind. Για δύο ζεύγη μεγεθών ίδιου τύπου Α, Β, Γ, Δ ισχύει $A:B = \Gamma:\Delta$ αν-ν για οποιουσδήποτε δύο φυσικούς αριθμούς μ και ν ισχύει μία ακριβώς από τις επόμενες σχέσεις:

i. $\mu A > \nu B \; \kappa\alpha\iota \; \mu\Gamma > \nu\Delta$

ii. $\mu A = \nu B \; \kappa\alpha\iota \; \mu\Gamma = \nu\Delta$

iii. $\mu A < \nu B \; \kappa\alpha\iota \; \mu\Gamma < \nu\Delta$

Ο Εύδοξος δεν μας λέει τι σημαίνει λόγος αλλά μας λέει πότε δύο λόγοι είναι ίσοι. Χωρίς να γνωρίζει το μέρος $A:B$ ορίζει το όλον $A:B = \Gamma:\Delta$.

Στην ίδια ιδέα του Εύδοξου στηρίζεται η πλήρωση των πραγματικών αριθμών όπως την έδωσε δεκαετία του 1870 ο Dedekind. Ο λόγος των ομοειδών μεγεθών που χρησιμοποίησε ο Εύδοξος δεν έχει διάσταση δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους μαθηματικούς να συγκρίνουν λόγους διαφορετικών μεγεθών και να αποδεικνύουν τα θεωρήματα για οποιαδήποτε μεγέθη σύμμετρα ή ασύμμετρα. [Γι]

Η θεωρία λόγων του Ευδόξου ήρθε για να δώσει την λύση μετά την κρίση που προέκυψε από την ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου. Ήταν η πρώτη κρίση στα μαθηματικά με εξαιρετικά αποτελέσματα για την περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών όπως συνέβη και σε άλλες στιγμές αργότερα δηλ με την Θεωρία συνόλων του Cantor, με την εισαγωγή του αξιώματος επιλογής και την

ύπαρξη μη μετρίσιμων κατά Lebesque υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών ή ακόμη και με το θεώρημα μη πληρότητας του Gödel.

Το έργο του Ευκλείδη τα «Στοιχεία» δεν είναι ένα δημιούργημα που περιλαμβάνει μόνο τις δικές του προτάσεις. Είναι ένα έργο που στηρίζεται στο σύνολο της προγενέστερης γνώσης των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών (από το 600 π.Χ. έως το 300 π.Χ.). Ο Ευκλείδης συγκέντρωσε και ταξινόμησε τα έργα των μαθηματικών και φιλοσόφων που είχαν προηγηθεί σε θέματα Γεωμετρίας και Θεωρίας Αριθμών. Έπειτα τα ενέταξε σε ένα καινούργιο σύστημα μαθηματικών που ο ίδιος δημιούργησε. Αποτελούνταν από ορισμούς, αιτήματα και κοινές έννοιες. Καθιέρωσε την διαδικασία απόδειξης όπου στηρίζεται στους ορισμούς, αιτήματα και κοινές έννοιες που έχουν ήδη αποδειχθεί, δηλαδή το πρώτο αξιωματικό μαθηματικό σύστημα. Κάθε πρόταση τοποθετείται σε κατάλληλο σημείο και ακολουθεί η επόμενη πρόταση με απόλυτη λογική σειρά. Ο τρόπος σκέψης και παρουσίασης όπως αυτός παρουσιάζεται στα Στοιχεία επηρέασε όλους τους μεταγενέστερους μαθηματικούς. Τα Στοιχεία αποτελούνταν από δεκατρία βιβλία που περιείχαν 121 ορισμούς, 5 αιτήματα, 9 έννοιες και 465 προτάσεις. [Νε2]

Το έργο του Ευκλείδη δεν περιορίζεται μόνο στη Γεωμετρία αλλά και στην Θεωρία Αριθμών και Θεωρία των Ασύμμετρων Μεγεθών με την ίδια δομή όπως και στην Γεωμετρία. Και σε αυτήν την περίπτωση επίσης συγκέντρωσε την γνώση που προϋπήρχε από τους προηγούμενους Έλληνες μαθηματικούς. Συμπεριλάμβανε στοιχεία της Θεωρίας Αριθμών των Πυθαγορείων, την Θεωρίας Αναλογιών του Εύδοξου, την Θεωρία Ασύμμετρων Μεγεθών του Θεαίτητου και τη Θεωρία των Αριθμών στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Όλα τα παραπάνω συμπεριλαμβάνονται στα βιβλία VII, VIII, IX, X γι' αυτό άλλωστε ονομάζονται και αριθμητικά βιβλία των Στοιχείων. Στα βιβλία VII, VIII και IX είναι η Θεωρία Αριθμών και στο X η Θεωρία Ασύμμετρων Μεγεθών.

Το VII βιβλίο περιλαμβάνει 23 ορισμούς όπου ο Ευκλείδης κατηγοριοποιεί τους αριθμούς σε άρτιους, περιττούς, άρτιες φορές άρτιους, άρτιες φορές περιττούς και περιττές φορές περιττούς αριθμούς. Επίσης, ορίζει τους πρώτους, τους σύνθετους, τους πρώτους μεταξύ τους, τους τετράγωνους, τους κύβους, τους επίπεδους, τους στέρεους, τους όμοιους επίπεδους και όμοιους στέρεους αριθμούς. Δίνεται ακόμη ορισμός για τον διαιρέτη, τον πολλαπλάσιο και τέλειο αριθμό.

Εισάγεται η ευκλείδεια διαίρεση μέσω του ευκλείδειου αλγόριθμου και οι τρόποι εύρεσης Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών.[Κ.Ε]

Το VIII βιβλίο αναφέρεται σε σειρές αριθμών συνεχείς αναλογίες, γεωμετρικές προόδους καθώς και σε όμοιους επίπεδους και στέρεους αριθμούς.[Κ.Ε]

Το IX βιβλίο ασχολείται με τους πρώτους και τους σχετικά πρώτους μεταξύ τους αριθμούς. Περιλαμβάνει δύο βασικά θεωρήματα της Θεωρίας Αριθμών (τις προτάσεις 14 και 20). Η πρόταση IX.14 είναι το θεμελιώδες θεώρημα της Θεωρίας Αριθμών. Από την πρόταση IX.35 μπορούμε να βρούμε το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου. [Κ.Ε]

Το X βιβλίο περιλαμβάνει την Θεωρία των Σύμμετρων και Ασύμμετρων Μεγεθών. Η X1 είναι στην ουσία η μέθοδος της εξάντλησης που αποδίδεται στον Εύδοξο και η X2 είναι η έννοια των ασύμμετρων μεγεθών. Επίσης στο X βιβλίο υπάρχει και η μέθοδος (X28, λήμμα 1) κατασκευής πυθαγορείων τριάδων καθώς και αρκετές προτάσεις για μέσους και άρρητους αριθμούς. [Κ.Ε]

Οι πραγματικοί αριθμοί στα σύγχρονα Μαθηματικά

Οι μαθηματικοί μέχρι τον 17^{ο} αιώνα χρησιμοποιούσαν τους άρρητους χωρίς ιδιαίτερη αποσαφήνισή τους. Έκαναν τον λογισμό των άρρητων όπως και με τους ρητούς. Θεωρούσαν ότι κάθε άρρητος αριθμός μπορεί να προσεγγιστεί όσο επιθυμούμε από τους ρητούς αριθμούς.

Ο απειροστικός λογισμός στηρίχθηκε στην έννοια των απειροστών του 17^{ου} και του 18^{ου} αιώνα. Τον 19^{ο} αιώνα άρχισε μία προσπάθεια αυστηρής θεμελίωσης του λογισμού. Πλέον κεντρική έννοια για τον λογισμό θεωρήθηκε η έννοια του ορίου (η οποία δεν είχε αποσαφηνιστεί ακριβώς) και βάση αυτής θα έπρεπε να οριστούν και οι υπόλοιπες βασικές έννοιες. Μία άποψη για το όριο ήταν το εάν μία μεταβλητή φτάνει στο όριο της, ο Cauchy δεν είχε περιορισμό ως προς αυτό ενώ ο D’ Allmbert ισχυριζόταν ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε στο όριο. Ο λογισμός των Newton-Leibniz στηριζόταν σε γεωμετρικό πλαίσιο ενώ οι Euler, Lagrange και Cauchy προσπάθησαν να αντικαταστήσουν αυτήν την στάση με τις αρχές της αριθμητικής.

Κάθε σημαντικό θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στηρίζεται στην πληρότητα των πραγματικών αριθμών. Η σημαντικότητα αυτού είχε γίνει κατανοητή

στους Dedekind και Cantor, με αποτέλεσμα την αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών στο τέλος του $19^{ου}$ αιώνα. [Νε]

Οι Dedekind και Weierstrass επιχείρησαν την αριθμητικοποίηση του λογισμού και την απαλλαγή του από τις γεωμετρικές αναλογίες. Επίσης, ο Bolzano είχε αναφερθεί ότι έπρεπε να απαλλαγεί ο λογισμός από τις αναφορές στην γεωμετρία. (γεγονός που συντέλεσε σε αυτή τη θέση ήταν και η αναπαράσταση των συναρτήσεων με άπειρες σειρές). Την αριθμητικοποίηση του Λογισμού πέτυχε ο Cauchy με τις αλγεβρικές διατυπώσεις και τις γεωμετρικές αιτιολογήσεις, έτσι ώστε να συστηματοποιηθεί μέσα σε ένα αυστηρό αριθμητικό σύστημα.

Ο Dedekind αναθεώρησε την συνέχεια των πραγματικών αριθμών αποφεύγοντας κάποια γεωμετρική αναφορά. Εισήγαγε την έννοια της τομής στο σύνολο $\mathbb{Q}$. Μία τομή Dedekind χωρίζει το $\mathbb{Q}$ σε δύο κλάσεις τις L και R για τις οποίες για οποιοδήποτε x, y με $x \in L$ και $y \in R$ ισχύει $x < y$.Υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός που αντιστοιχεί στην τομή (L,R). Αυτή η τομή έχει τις παρακάτω ιδιότητες: α) $L \neq \varnothing$, $R \neq \varnothing$ β) $\forall z \in \mathbb{Q}$, $z \in L$ ή $z \in R$, γ) $\nexists z \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $z \in L$ και $z \in R$, δ) Εάν $x \in L$ και $y \in R$ τότε $x < y$ και τέλος ε) Το L δεν έχει μέγιστο. Πλέον οι πραγματικοί αριθμοί είναι το σύνολο των τομών.

Για τον Dedekind η συνέχεια της ευθείας βασιζόταν στην αρχή ότι μόνο ένα σημείο μπορεί να χωρίσει την ευθεία σε δύο κλάσεις που να ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες έτσι θεμελιώνεται η συνέχεια των πραγματικών αριθμών χωρίς την βοήθεια κάποιου γεωμετρικού πλαισίου. [Γι]

Η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών γίνεται με τα παρακάτω αξιώματα:

<u>Αξίωμα 1</u>: Το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις (πρόσθεση που συμβολίζεται με +, και πολλαπλασιασμό που συμβολίζεται με *) αποτελεί αλγεβρικό σώμα. Το σύνολο ($\mathbb{R}$, + , *) είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (0 το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) μαζί με τον πολλαπλασιασμό ($\mathbb{R}^*$, *) είναι ομάδα.

<u>Αξίωμα 2</u>: Το σώμα των πραγματικών αριθμών έχει ένα τουλάχιστον μη μηδενικό στοιχείο.

Αξίωμα 3: Το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι γραμμικά διατεταγμένο.

Αξίωμα 4: Κάθε μη κενό υποσύνολο Μ του συνόλου $\mathbb{R}$ το οποίο είναι άνω φραγμένο έχει supremum στο $\mathbb{R}$ (αξίωμα της πληρότητας ή της συνέχειας).

Τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα αρκούν για να θεμελιώσουν πλήρως αξιωματικά το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα μπορούσαμε επίσης να διαφοροποιήσουμε το $4^{ο}$ αξίωμα ως εξής:

Αξίωμα 4.1: (αξίωμα Αρχιμήδους- Ευδόξου). Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $n > x$.

Αξίωμα 4,2,: Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ισχύει το κριτήριο σύγκλισης των ακολουθιών Cauchy.

(μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία Cauchy αν-ν υπάρχει πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε να ισχύει $(\alpha_\nu)\to \alpha$ δηλαδή η $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.)

Οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών είναι οι παρακάτω:

(Π_1) $\alpha + 0= \alpha \ \forall\alpha \in \mathbb{R}$

(Π_2) $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \exists$ $-\alpha$ τέτοιο ώστε $\alpha+(-\alpha)=0$

(Π_3) $\alpha+(\beta + \gamma)=(\alpha + \beta)+\gamma \ \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(Π_4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \ \forall\ \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$

(Π_5) $\exists\ 1\neq 0$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot 1= \alpha \ \forall\alpha \in \mathbb{R}$

(Π_6) $\forall\ \alpha\neq 0, \exists\ \alpha^{-1}$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$

(Π_7) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)=(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \ \ \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(Π_8) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \ \ \forall\ \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$

(Π_9) $\alpha \cdot (\beta + \gamma)=\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \ \ \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(Π_{10}) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$

(Π_{11}) $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει μία από τις $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$

(Π_{12}) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma \ \ \forall\ \gamma \in \mathbb{R}$

(Π_{13}) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

(Π_{14}) (Ιδιότητα πληρότητας των πραγματικών αριθμών) Αν το σύνολο Α είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών τότε το Α έχει supremum.

Η ιδιότητα Π_{14} είναι υπαρξιακή και προβλέπει την ύπαρξη πολλών πραγματικών αριθμών εν' τούτοις η ύπαρξη αυτών δεν προκύπτει από κάποια κατασκευαστική διαδικασία. [Νε]

(Ένα σύνολο με δύο πράξεις ($+, \cdot$) που ικανοποίει τις Π_1- Π_8 χωρίς την Π_6 είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος . Ένα σύνολο με δύο πράξεις ($+, \cdot$) που ικανοποίει τις Π_1- Π_8 λέγεται σώμα. Ένα σύνολο με δύο πράξεις ($+, \cdot$) και μία σχέση διάταξης < που ικανοποίει τις Π_1- Π_{13} λέγεται ολικά διατεταγμένο σώμα.)

Επίσης το Θεώρημα του Κιβωτισμού μας λέει ότι: αν ($[\alpha_\nu , \beta_\nu]$) είναι μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$, δηλαδή μία ακολουθία τέτοια ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $[\alpha_{\nu+1} , \beta_{\nu+1}] \subset [\alpha_\nu , \beta_\nu]$, και $\lim_{\nu\to\infty}(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0$, τότε υπάρχει μοναδικό $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\cap\ [\alpha_\nu , \beta_\nu] = \{c\}$.

1. 2. Ιστορική αναδρομή προς τον ορισμό του ορίου

<u>Οριακές διαδικασίες στην αρχαιότητα</u>

Ο Παρμενίδης (515- 440 π.Χ.) θεωρείται ο ιδρυτής της Ελεατικής σχολής, μαθητής του οποίου ήταν ο Ζήνωνας. Ο Παρμενίδης άσκησε κριτική στην θεωρία των Πυθαγορείων ότι δηλαδή κάθε μέγεθος αποτελείται από άπειρο πλήθος άλλων μεγεθών. Αντίθετα, υποστήριξε ότι υπήρχε ένα αναλλοίωτο «είναι» που δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερα μεγέθη. Εμφανίζεται επίσης ο Αναξαγόρας (500- 429 π.Χ.) ο Κλαζομενές. Ο Συμπλίκιος αναφέρει στη Φυσική του (64,17) ότι ο Αναξαγόρας θεωρεί ότι ένα μέγεθος όσο μικρό και αν είναι μπορεί να διαιρείται επ' άπειρον και να φθάνουμε συνέχεια σε πιο μικρό μέγεθος. Αντίστοιχα από ένα μεγάλο μέγεθος

μπορούμε να βρούμε ένα μεγαλύτερο και το πλήθος που καταμετρούν και τα δύο να είναι το ίδιο.

Ο Ζήνωνας ο Ελεάτης (495- 435 π.Χ) ήταν μαθητής του Παρμενίδη και αμφισβήτησε τους Πλουραλιστές. Αυτή η αμφισβήτηση του Ζήνωνα συνοδεύτηκε με τα επιχειρήματα γνωστά ως «παράδοξα του Ζήνωνα»:

1) Το πρώτο παράδοξο μας λέει ότι εάν ένας δρομέας διανύει κάθε φορά το μισό της απόστασης από ένα στάδιο, και κάθε επόμενη το υπόλοιπο μισό αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να μην μπορέσει ποτέ να φτάσει στο τέλος («παράδοξο της διχοτομίας»).

2) Ο ταχύπους Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ την βραδυπορούσα χελώνα που βρίσκεται που σε μία αρχική απόσταση από τον Αχιλλέα, γιατί κάθε φορά που ο Αχιλλέας θα φτάνει στο σημείο που ήταν η χελώνα αυτή θα έχει μετατοπιστεί σ' άλλο σημείο κ.ο.κ («παράδοξο του Αχιλλέα»)

3) Εάν ριχθεί ένα βέλος αυτό ταυτόχρονα είσταται και κινείται. («παράδοξο του βέλους»)

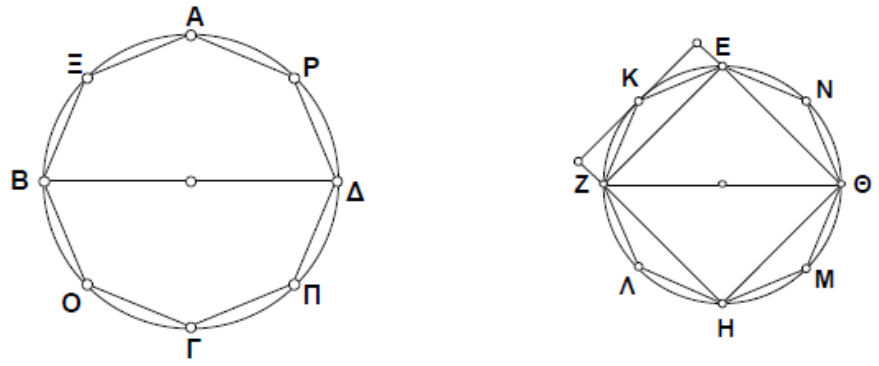
Το δεύτερο παράδοξο μπορεί να προκύψει από το πρώτο άρα είναι ισοδύναμο. Αυτό που διαπραγματεύεται ο Ζήνωνας στα δύο πρώτα παράδοξα είναι η αδυναμία πραγματοποίησης μιας άπειρης διαδικασίας σε πεπερασμένο χρόνο. Στο τρίτο παράδοξο διαπραγματεύεται το ερώτημα πως μία συνεχής κίνηση, όπως αυτή του βέλους μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδης καταστάσεις ακινησίας. [Αν], [Γι]

Τα παράδοξα του Ζήνωνα είχαν σαν αποτέλεσμα να αλλάξουν όλη τη ροή της μετέπειτα μαθηματικής σκέψης. Μέσω των παράδοξων αναδείχθηκαν οι αντικρουόμενες έννοιες της κίνησης και του χρόνου και κατ' επέκταση του διακριτού και του απείρου. Η μαθηματική κοινότητα της εποχής βρέθηκε αντιμέτωπη με τις άπειρες διαδικασίες. Τα προβλήματα που ανέκυψαν από τη χρήση του άπειρου είχαν σαν αποτέλεσμα η μαθηματική κοινότητα να εξαφανίσει το άπειρο και να κάνει χρήση μεγεθών που μπορούσαν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλα ή μικρά επιθυμούσαν. [Γι]

Τα παράδοξα του Ζήνωνα είχαν σαν αποτέλεσμα στη αρχαία Ελληνική σκέψη την απόρριψη της έννοιας του ορίου. Θεωρούνταν ως συμπληρωμένη και τελειωμένη μετά από ένα άπειρο αριθμό βημάτων διαδικασίας με αποτέλεσμα και οι αποδείξεις του Αρχιμήδη και Ευδόξου που ασχολούνται με όρια δεν την χρησιμοποίησαν κατά εκπεφρασμένο τρόπο αλλά χρησιμοποίησαν μια πεπερασμένου τύπου διπλή αντίφαση. Αυτή η νοοτροπία των αρχαίων Ελλήνων επηρέασε αρκετά τα μαθηματικά μέχρι περίπου τον 17° αιώνα ώσπου έγινε μία τάση για απαλλαγή από την αυστηρότητα των αρχαίων Ελλήνων από μεγάλους μαθηματικούς όπως οι Pascal, Fermat, Kepler, Γαλιλαίος και Cavalieri. [Νε]

Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.Χ.) θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας και όλων των εποχών και είναι μεταγενέστερος του Ευδόξου που έζησε περισσότερο από έναν αιώνα από την χρονική περίοδο που άκμαζε ο Εύδοξος. Ο Heath αναφέρει ότι τα έργα του Αρχιμήδη αποτελούν πρότυπα μαθηματικής γραφής. Στη συνέχεια θα κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση της «μεθόδου της εξάντλησης» του Αρχιμήδη.

Η αρχή της μεθόδου της εξάντλησης διατυπώνεται στη πρόταση Χ1 των Στοιχείων του Ευκλείδη. Η πρόταση μας λέει ότι «αν από δύο άνισα μεγέθη αφαιρέσω από το μεγαλύτερο ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από αυτό που θα προκύψει επίσης ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και επαναληφθεί αυτή η διαδικασία συνεχώς τότε θα μείνει ένα μέγεθος μικρότερο από το μικρότερο αρχικό μέγεθος». Εάν αυτό θέλουμε να το εκφράσουμε με πιο σύγχρονη ορολογία θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό μας αποδεικνύει ότι εάν έχω μια ακολουθία από θετικούς αριθμούς (α_ν) τέτοια ώστε να ισχύει $\alpha_{\nu+1} \leq \frac{1}{2}\,\alpha_\nu \;\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$ τότε ισχύει ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό $\varepsilon\ \exists\ \rho \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu \rho \;<\; \varepsilon$.



Εικ.6

Από τα στοιχεία του Ευκλείδη μπορούμε να συμπεραίνουμε ότι προσπάθησαν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί να υπολογίσουν εμβαδά καμπυλόγραμμων σχημάτων. Η πρόταση XII.2 στα Στοιχεία του Ευκλείδη μας λέει ότι «ο λόγος των τετραγώνων των διαμέτρων δύο κύκλων είναι όπως ο λόγος των εμβαδών τους». Για να αποδείξουμε αυτή την πρόταση υποθέτουμε ότι οι δύο κύκλοι δεν είναι ανάλογοι προς τα τετράγωνα των πλευρών τους και θεωρούμε ότι ο λόγος $ΒΔ^2$ προς το $ΖΘ^2$ είναι ίσος με τον λόγο του πρώτου κύκλου προς μία επιφάνεια Σ. Η επιφάνεια Σ μπορεί να θεωρηθεί είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη του δεύτερου κύκλου. Αρχικά θεωρούμε ότι έστω η επιφάνεια Σ είναι μικρότερη. Στην συνέχεια εγγράφουμε το τετράγωνο ΕΖΗΘ στον δεύτερο κύκλο (βλ Εικ.6). Το τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι μεγαλύτερο από το μισό του κύκλου όπου είναι εγγεγραμμένο διότι το περιγεγραμμένο τετράγωνο είναι ακριβώς διπλάσιο του εγγεγραμμένου, ενώ ο κύκλος είναι μικρότερος του περιγεγραμμένου τετραγώνου. Έπειτα διχοτομούμε τα τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ και ΘΕ. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ ,Μ, Ν να είναι τα μέσα των τόξων ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ και ΘΕ αντίστοιχα. Αποτέλεσμα αυτού είναι η κατασκευή του οκταγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Με αυτήν την λογική προκύπτει ότι το εκάστοτε από τα τρίγωνα που δημιουργούνται όπως το ΖΚΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου του κυκλικού τμήματος, αφού το διπλάσιο κάθε τριγώνου είναι μεγαλύτερο του κυκλικού τομέα. Αν συνεχιστεί αυτή η διαδικασία συνεχεία διχοτομώντας συνέχεια τα τόξα των εναπομεινάντων κυκλικών τμημάτων και λαμβάνοντας υπόψη την πρόταση Χ1, το άθροισμα αυτών γίνεται μικρότερο της διαφοράς μεταξύ του κύκλου ΕΖΗΘ και της επιφάνειας Σ. Έπειτα κατασκευάζουμε το εγγεγραμμένο πολύγωνο ΑΞΒΟΓΠΔΡ οπότε ο λόγος της διαμέτρου $ΒΔ^2$ προς την διάμετρο $ΖΘ^2$ είναι ίσος με τον λόγο του πολυγώνου του πρώτου προς το όμοιο πολύγωνο του άλλου κύκλου. Άρα προκύπτει:

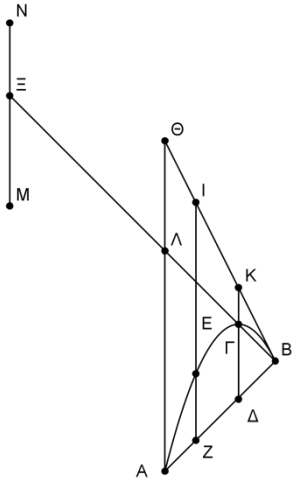
$\frac{(\kappa\upsilon\kappa\lambda o\varsigma\ AB\Gamma\Delta)}{\Sigma} = \frac{(1\ \pi o\lambda\acute{\upsilon}\gamma\omega\nu o)}{(2\ \pi o\lambda\acute{\upsilon}\gamma\omega\nu o)}$ και εναλλάσοντας τους μέσους όρους προκύπτει ότι

$\frac{(\pi\rho\acute{\omega}\tau o\varsigma\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)}{(\pi\rho\acute{\omega}\tau o\ \pi o\lambda\acute{\upsilon}\gamma\omega\nu o)} = \frac{\Sigma}{(\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau\epsilon\rho o\ \pi o\lambda\acute{\upsilon}\gamma\omega\nu o)}$,όμως ο πρώτος κύκλος είναι μεγαλύτερος του πρώτου πολυγώνου ενώ η επιφάνεια Σ είναι μικρότερη του δευτέρου άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Όμοια καταλήγουμε εάν εξετάσουμε την περίπτωση όπου η επιφάνεια Σ είναι μεγαλύτερη του δεύτερου κύκλου. Επομένως το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι ότι ο λόγος $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$ είναι ίσος με τον λόγο των επιφανειών των κύκλων. [Va]

Η γενικότερη διαδικασία της μεθόδου για τον υπολογισμό ενός εμβαδού Ε μπορεί να περιγραφεί σε τρία στάδια.

- Στο πρώτο στάδιο θεωρούμε τα εμβαδά A_ν των εγγεγραμμένων χωρίων και B_ν ν ∈ $\mathbb{N}^*$ των περιγεγραμμένων χωρίων από την επιφάνεια που θέλουμε να υπολογίσουμε.
- Στο δεύτερο στάδιο θεωρούμε εκ των προτέρων έναν αριθμό Γ τέτοιον ώστε $A_\nu \leq \Gamma \leq B_\nu$.
- Στο τρίτο στάδιο αυτής της μεθόδου είναι η απόδειξη ότι για κάθε ε>0 υπάρχει ν ∈ $\mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε να ισχύει $B_\nu - A_\nu < \varepsilon$. Η απόδειξη αυτή γίνεται με την βοήθεια της άτοπο απαγωγής. Θεωρούμε πρώτα ότι ισχύει Γ > Ε και στη συνέχεια ότι Γ < Ε. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο επομένως θα ισχύει Γ=Ε.

Ένα σημαντικό ερώτημα μένει είναι το πως υπολόγιζε αυτήν την εκ των προτέρων τιμή ο Αρχιμήδης του δευτέρου σταδίου; Αυτό το έκανε με μία λιγότερο αυστηρή μέθοδο αλλά περισσότερο δοκιμαστική. Είναι η μέθοδος η ευρετική όπου για τον υπολογισμό του εμβαδού π.χ. μίας παραβολής γίνεται με την μέθοδο της ισορροπίας. (βλ Εικ.7)



Εικ.7

Ο υπολογισμός των όγκων και των εμβαδών με αυτή την ευφυή μέθοδο του Αρχιμήδη γίνεται προάγγελος των ολοκληρωμάτων και της δημιουργίας ολόκληρου κλάδου των Μαθηματικών, του Ολοκληρωτικού Λογισμού . Επίσης ρίζες σε αυτήν την έννοια έχει και η έννοια του ορίου. Ο

Αρχιμήδης θεωρούσε δεδομένη την ύπαρξη του εμβαδού, προσπαθούσε να «εκτιμήσει» την τιμή του και στη συνέχεια με κατάλληλες προσεγγίσεις να το υπολογίσει χωρίς να δώσει μια πιο γενική και αφηρημένη διαδικασία. Ο Αρχιμήδης όπως και άλλοι αρχαίοι Έλληνες έφθαναν διαισθητικά στο ζητούμενο αποτέλεσμα με μηχανικό τρόπο, δηλ χρησιμοποιώντας άπειρες διαδικασίες, απειροστά και όρια και μετά με την μέθοδο της εξάντλησης εύρισκαν την γεωμετρική απόδειξη. Θα ήταν ιστορικό δίκαιο να αναφέρουμε ότι η μέθοδος της εξάντλησης (σαν μέθοδος υπολογισμού εμβαδών, μήκων και όγκων) αλληλοσυμπληρώνεται με την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Εύδοξο με τομές Dedekind. [Νε]

Στην εργασία του Κύκλου Μέτρησης ο Αρχιμήδης προσπαθεί να υπολογίσει τον αριθμό π, ή ισοδύναμα να υπολογίσει το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου ή το μήκος της ημιπεριφέρειας του μοναδιαίου κύκλου και βρίσκεται αντιμέτωπος με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Ο Αρχιμήδης με την βοήθεια αναγωγικών τύπων υπολογίζει μεταξύ των περιμέτρων εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών 2n-γώνων και περιμέτρων n-γώνων αντίστοιχα, διαδοχικές προσεγγίσεις του αριθμού π. Ανεξάρτητα το πόσο καλή ήταν η προσέγγιση του Αρχιμήδη σημασία έχει ότι οι προσεγγίσεις αυτές είναι αθροίσματα Riemann και ρητές προσεγγίσεις του άρρητου π που έχουν σχέση με την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών.

Μεσαίωνας και το απειροστικό πνεύμα του 16^{ο} & 17^{ο} αιώνα με την χρήση απειροστών και αδιαιρέτων, απόψεις για την κίνηση και την μεταβολή.

Μετά τον Αρχιμήδη υπήρξαν και άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί. Ο Απολλώνιος, μεταγενέστερος του Αρχιμήδη, ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές. Παράλληλα, αναπτύχθηκε και η τριγωνομετρία λόγω των αστρονομικών αναγκών και η Θεωρία Αριθμών με το έργο του Διόφαντου. Κατά τη διάρκεια της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας το ενδιαφέρον χάθηκε ,διασώθηκαν όμως στο Βυζάντιο, στην Περσία και στην Ινδία χειρόγραφα. Τόσο οι Άραβες όσο και οι Ινδοί δεν ασχολήθηκαν με τον απειροστικό λογισμό αλλά μετέφεραν όλη την απαιτούμενη γνώση και προετοίμασαν το έδαφος για να αναπτυχθεί η Άλγεβρα, το 9^{ο} μ.Χ με την επίλυση εξισώσεων. Ανάμεσα στον 11^{ο} και 12^{ο} αιώνα θα γίνουν οι περισσότερες μεταφράσεις των αρχαίων Ελλήνων στα λατινικά.

Τον 13^{ο} αιώνα οι σχολαστικοί συμφωνούσαν με τον Αριστοτέλη ότι δεν υπάρχει πραγματικό άπειρο, και ότι κάθε συνεχές είχε την ιδιότητα της επ' άπειρον διαίρεσής του. Το σημείο με την κίνηση του μπορούσε να δημιουργήσει την ευθεία, απόψεις που σταδιακά άρχισαν να αμφισβητούνται από τους Ockam και Ρίμινι. Τον 13^{ο} αλλά κυρίως τον 14^{ο} αιώνα οι μαθηματικοί μελέτησαν ποσοτικά τους νόμους της κίνησης. Η γεωμετρία των αρχαίων ήταν κυρίως στατική αλλά είχε και κάποια κινηματικά μοντέλα. Αρκετοί ερευνητές του κολλεγίου Merton της Οξφόρδης άρχισαν να αμφισβητούν τον Αριστοτέλη και να μελετούν την κίνηση από την μαθηματική σκοπιά. Πλέον, η κίνηση ανάγονταν σε μία σχέση διαστήματος χρόνου. Μοιραία δόθηκε έμφαση στις έννοιες του χρόνου, της ταχύτητας, της στιγμιαίας ταχύτητας και στην μελέτη των επιταχυνόμενων και ομαλών κινήσεων ώστε να αποδοθεί μία σχέση της ταχύτητας ως λόγο απόστασης χρόνου. Τώρα πια θεωρούσαν φαινόμενα όπως ταχύτητα, θερμότητα και πυκνότητα σαν ποιότητες ή μορφές που είχαν διάφορες εντάσεις. Η ένταση ήταν η αριθμητική απόδοση μίας σχέσης ανάμεσα στην ένταση μιας μορφής και σε μία αμετάβλητη μορφή που την ονόμαζαν έκταση όπως ήταν για παράδειγμα ο χρόνος. Οι ερευνητές του κολλεγίου Merton της Οξφόρδης (Heytesbury και Swineshead) στην προσπάθειά τους να ορίσουν την στιγμιαία ταχύτητα λόγω έλλειψης της έννοιας του ορίου, την όρισαν με βάση την ομοιόμορφή ταχύτητα (ομοιόμορφη ήταν η μεταβολή όταν ίσες αποστάσεις διανύονταν σε ίσα χρονικά διαστήματα) και απόδειξαν τον «κανόνα της μέσης ταχύτητας του Merton» (μία ομαλή επιταχυνόμενη η επιβραδυνόμενη κίνηση είναι ισοδύναμη όσον αφορά τα διανυθέντα διαστήματα με μία ομαλή κίνηση όπου η ταχύτητα είναι ίση σε όλη την διάρκεια της με την στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον της επιταχυνόμενης η επιβραδυνόμενης κίνησης. [Γι]

Επίσης, στην Γαλλία ένας σχολαστικός ασχολήθηκε με προβλήματα έντασης των μορφών, ο Nicole Oresme (1310-1382). Οι γραμμές στο γράφημα χρησιμοποιούνταν για να αναπαραστήσουν την σχέση και οι έννοιες του χρόνου, ταχύτητας, απόστασης και στιγμιαίας ταχύτητας σχετιζόταν πλέον με τη μελέτη των καμπύλων. Στις ευθύγραμμες συντεταγμένες η οριζόντια γραμμή αντιστοιχούσε στην έκταση της ποιότητας (συνήθως ο χρόνος) και στην κάθετη γραμμή αντιστοιχούσε η ένταση της ποιότητας της ταχύτητας, με αποτέλεσμα το συνολικό σχήμα να αναπαριστά την ολική απόσταση που έχει διανύσει το κινητό. Ο Oresme θεωρούσε

ότι σε ίσες εντάσεις αντιστοιχούν ίσες γραμμές και μία διπλάσια ένταση σε μία διπλάσια γραμμή.

Το παράδοξο του Ζήνωνα ασχολείται με την σύγκλιση της σειράς $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{\kappa}}+\cdots=1$, ο Αρχιμήδης στον Τετραγωνισμό Παραβολής υπολόγισε το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4^{n}}+\cdots=\frac{1}{3}$. Το 14° αιώνα ο Swineshead υπολόγισε το $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{n}{2^{n}}+\cdots=2$ και ο σχολαστικός Oresme τα αθροίσματα $\frac{\alpha}{\kappa}+\frac{\alpha}{\kappa}(1-\frac{1}{\kappa})+\cdots+\frac{\alpha}{\kappa}(1-\frac{1}{\kappa})^{n}+\cdots=\alpha$ που γενικεύει τον υπολογισμό του Αρχιμήδη. Όλα τα παραπάνω αποτέλεσαν σημαντικές εργασίες διότι έτσι άρχισε να γίνεται η αποδοχή των άπειρων διαδικασιών στα μαθηματικά. [Νε]

Ο Kepler ήταν από τους πρώτους μαθηματικούς που προσπάθησε να εγκαταλείψει την αποδεικτική μέθοδο των αρχαίων και να κάνει ελεύθερη την χρήση απειροστών. Μεταξύ άλλων ασχολήθηκε και με τους νόμους της κίνησης των πλανητών. Στην απόδειξη του δεύτερου νόμου του (το διάνυσμα από τον ήλιο στον πλανήτη, σαρώνει εμβαδόν ανάλογο προς το χρόνο) κάνει χρήση των απειροστών. Ο κύκλος θεωρούσε ότι αποτελούνταν από άπειρα τρίγωνα με κοινή κορυφή το κέντρο του και απείρως μικρές βάσεις. Επίσης, οι επιφάνειες ή οι όγκοι υπολογίζονται με την χρήση απείρων στοιχείων της ίδιας διάστασης. Οι γραμμές Θεωρούσε ότι ήταν αθροίσματα σημείων, οι επιφάνειες άθροισμα γραμμών και τα στέρεα άθροισμα επιφανειών. [Γι]

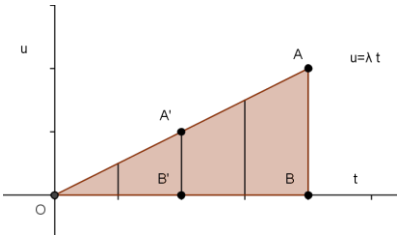
Τον 15° αιώνα από τη μετάφραση του «Κύκλων Μέτρησις» ο Viete συνειδητοποίησε την υπερβατική φύση του π και κατέληξε στον τύπο. $\frac{2}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$ Αυτό που προκύπτει από τον Μεσαίωνα είναι ότι η σύνδεση της μεθόδου της εξάντλησης με τον ορισμό των πραγματικών αριθμών είχε απολεσθεί με αποτέλεσμα να επανέρχονται πάλι αυτά τα ερωτήματα. Τον αριθμό π μπορούμε να τον θεωρήσουμε σαν πραγματικό αριθμό, σαν μήκος κυκλικού τόξου ή σαν εμβαδόν κύκλου. [Νε]

Ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που τόλμησε να ενώσει την κίνηση με τη στατική, συνδέοντας το χρόνο με το διάστημα, πράγμα που δεν έκαναν οι αρχαίοι. Κατέγραψε

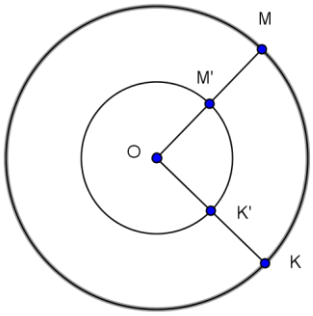
και τον νόμο της πτώσης «οι αποστάσεις που διανύει ένα σώμα υπό την επίδραση της βαρύτητας είναι ανάλογες του τετραγώνου του χρόνου τους». Έδωσε στην σύγχρονη επιστήμη τους πρώτους νόμους της και μπόρεσε να εκφράσει ποσοτικά την κίνηση με αριθμούς.

Θεωρούσε ότι ο κόσμος ήταν δομημένος με τα μαθηματικά και οι νόμοι ήταν δυνατόν να αποκαλυφθούν. Στο I1 ο Saggiatore γράφει: *"Η φιλοσοφία είναι γραμμένη σ' αυτό το τεράστιο βιβλίο που στέκει αιώνια ανοικτό μπροστά στα μάτια μας, εννοώ το σύμπαν, δεν μπορούμε όμως να το διαβάσουμε πριν μάθουμε τη γλώσσα και εξοικειωθούμε με τους χαρακτήρες με τους οποίους είναι γραμμένο. Είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα"* (Galileo – Galilei, 1564-1642).

Επίσης έδωσε μία εξήγηση της ομοιόμορφης κίνησης και θεώρησε ότι όταν η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας η απόσταση που διανύει το σώμα είναι ίση με το εμβαδόν ορθογωνίου με μήκος ίσο με το χρόνο και ύψος όσο η επιτάχυνση της βαρύτητας. Στο γράφημα το ορθογώνιο είναι το άθροισμα των καθέτων και κάθε μία από αυτές είναι ίση με την ταχύτητα, δηλαδή την απόσταση που διανύει στην μονάδα του χρόνου το σώμα. Στα ίδια αποτελέσματα κατέληξε και στην μελέτη που έκανε για την ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση.



Εικ.8



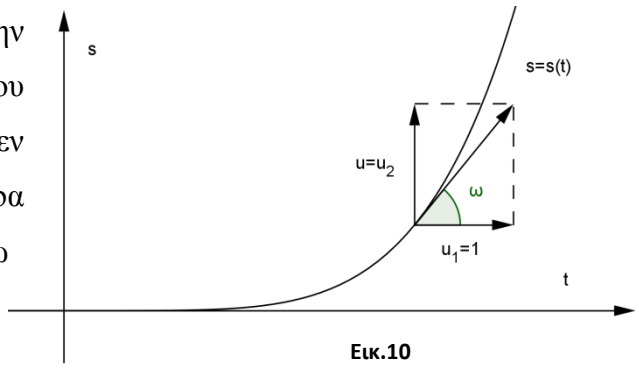
Εικ.9

Επίσης, και σε αυτήν την περίπτωση θεώρησε κάθε γραμμή σαν μία τοπική ταχύτητα σε μία χρονική στιγμή δηλαδή μία απειροστή απόσταση που διανύει το σώμα αν πολλαπλασιαστεί με ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Ο Γαλιλαίος θεώρησε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^t \lambda x dx$ πρέπει να ισούται με $1/2\lambda t^2$ και το εμβαδόν ενός τριγώνου ΟΑΒ πρέπει να είναι ίσο με το άπειρο άθροισμα των αδιαιρέτων Α΄Β΄(βλ Εικ.8). Στην εργασία του «Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για δύο νέες επιστήμες» για το άπειρο και τα αδιαίρετα ο Γαλιλαίος θεωρεί δύο ομόκεντρους κύκλους που ο εξωτερικός έχει διπλάσια διάμετρο από τον εσωτερικό. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για τις περιφέρειές τους. Σχηματίζει δύο ακτίνες ΟΚ και ΟΜ που τέμνουν τον εσωτερικό κύκλο στα σημεία Κ΄

και Μ΄ αντίστοιχα (βλ Εικ.9). Συμπεραίνει ότι οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο πλήθος σημείων παρόλο που ο μεγάλος έχει διπλάσια περιφέρεια. Επιπλέον, ένα άλλο παράδοξο ήταν η αντιστοιχία των αριθμών με τα τετράγωνά τους. Ο Γαλιλαίος θεωρούσε ότι είναι λάθος να εφαρμόζονται ιδιότητες των πεπερασμένων μεγεθών σε άπειρα μεγέθη και να συζητάμε για το άπειρο όπως στα πεπερασμένα και περιορισμένα. Οι αποδείξεις του Γαλιλαίου όπως και του Oresme στηρίχθηκαν στην υπόθεση ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ταχύτητα-χρόνου παριστάνει την απόσταση και επειδή δεν είχαν την έννοια του ορίου κατέφυγαν στην χρήση απειροστών. [Γι]

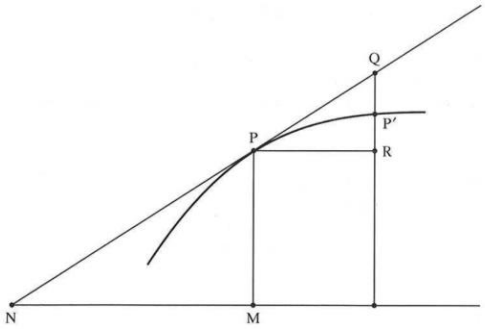
Γεωμετρικές αντιλήψεις των Torricelli- Barrow

Ο Torricelli ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησε την κινηματική για να υπολογίσει εμβαδά χωρίων καθώς και για την χάραξη εφαπτόμενης σε διάφορες καμπύλες. Θεώρησε την καμπύλη ως τροχιά ενός κινούμενου σωματιδίου που ήταν αποτέλεσμα δύο απλούστερων κινήσεων. Η συνισταμένη προέκυπτε με την μέθοδο του κανόνα του παραλληλογράμμου και προσδιόριζε την κατεύθυνση της εφαπτόμενης. Δηλαδή η εφαπτομένη ($\varepsilon\varphi\omega = \frac{u_2}{u_1} = u$, με $u_1 = 1$ $\kappa\alpha\iota$ $u_2 = u = t^n$) στο γράφημα απόσταση- χρόνου ισούται με την ταχύτητα του κινητού (βλ Εικ.10). Η μέθοδος του Torricelli περιείχε την έννοια της στιγμιαίας κατεύθυνσης που περιείχε την έννοια του ορίου, αλλά δεν κατάφερε να την προχωρήσει παραπέρα από ότι οι προγενέστεροί του λόγω έλλειψης αυστηρής θεμελίωσης της θεωρίας των αδιαιρέτων. [Γι]



Εικ.10

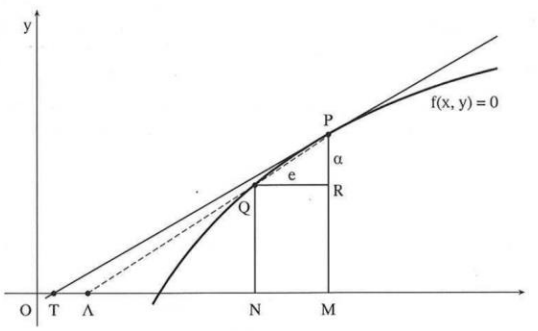
Ο Barrow ήταν καθηγητής στη Λουκασιανή έδρα των Μαθηματικών στο Cambridge. Υπήρξε οπαδός του Ευκλείδη και μαθητής του ήταν ο Newton. Ο λογισμός του στηρίχθηκε



Εικ.11

στην έννοια της συνεχούς μεταβολής. Κύριο χαρακτηριστικό στο έργο του είναι η χρήση του «διαφορικού» ή «χαρακτηριστικού τριγώνου» (βλ Εικ.11) , ιδέα που χρησιμοποιήθηκε και από άλλους μαθηματικούς της εποχής.

Το τρίγωνο PQR είναι όμοιο με το ΡΜΛ οπότε ισχύει $PR/QR = PM/M\Lambda$. Το τόξο PP΄ όταν είναι επαρκώς μικρό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ταυτίζεται με το τμήμα PQ της εφαπτομένης P (βλ Εικ.12). Αντίστοιχα στο τρίγωνο PP΄R η PP΄ θεωρείται και σαν τόξο αλλά και σαν τμήμα καμπύλης και είναι το «χαρακτηριστικό τρίγωνο». [Γι]



Εικ.12

Αλγεβρικές αντιλήψεις των Fermat-Descartes-Wallis

Ο Γάλλος μαθηματικός Fermat επινόησε και αυτός την αναλυτική γεωμετρία ανεξάρτητα από τον Καρτέσιο. Ξεκινούσε από μία αλγεβρική εξίσωση και αποδείκνυε τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του και αυτές του Kepler η αύξηση μίας συνάρτησης γίνεται μηδαμινή σε μία περιοχή τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου αντίστοιχα. Στην συνέχεια ο Fermat θα μετατρέψει αυτό το συμπέρασμα σε έναν αλγόριθμο εύρεσης ακρότατων μίας συνάρτησης. Η βασική ιδέα του είναι να αυξάνει κατά μία απειροελάχιστη ποσότητα ε την μεταβλητή και να αφήνει μετά από πράξεις αυτήν την αύξηση να μηδενίζεται (στην ουσία έβρισκε τη λύση της $f(x) = 0$).

Τα βήματα της μεθόδου εμφανίζονται παρακάτω: [Γι]

i. Αντικαθιστούμε το x με $x + \varepsilon$

ii. Τα $f(x)$ και $f(x + \varepsilon)$ θεωρούνται ίσα

iii. Οι κοινοί όροι από τα παραπάνω διαγράφονται

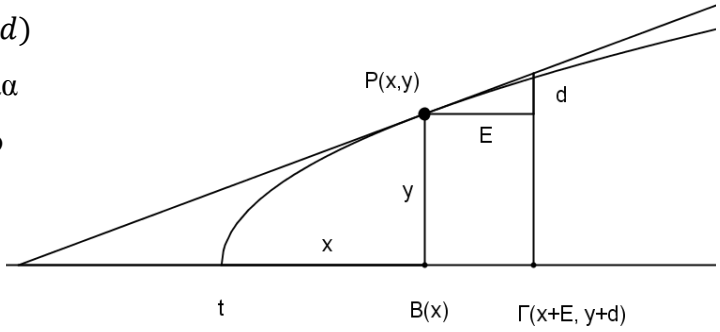
iv. Στη συνέχεια διαιρούμε με ε

v. Όσοι όροι περιέχουν ε διαγράφονται

vi. Το x ορίζεται από τη σχέση $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

Την ίδια διαδικασία χρησιμοποίησε ο Fermat και για την χάραξη εφαπτόμενης σε γνωστές καμπύλες όπως η παραβολή, η έλλειψη και η κυκλοειδής.

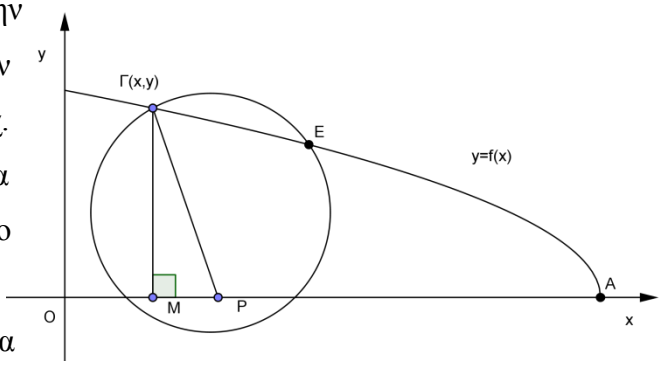
Για να βρει την εφαπτόμενη σε ένα σημείο $P(x,q)$ (βλ Εικ.13) αρκούσε να βρει την υποεφαπτομένη ΑΒ. Στην ουσία ο Fermat θεωρούσε ένα γειτονικό σημείο με συντεταγμένες $(x+E, y+d)$ που θα βρίσκεται στην ίδια κάθετο με το σημείο $(x+E, y+yE/t)$. Εφαρμόζει την εξίσωση της καμπύλης στο $f(x+E, y+yE/t)=0$ και στην συνέχεια βρίσκει μία έκφραση για το t που εκφράζει την υποεφαπτομένη. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εύρεση εφαπτομένης σχετίζεται με την μέθοδο εύρεσης ακρότατων. [Γι]



Εικ.13

Ο Καρτέσιος ήταν εκπρόσωπος μιας νέας τάσης που είχε αναπτυχθεί τον 17ο αιώνα σύμφωνα με την οποία η φύση μπορούσε να εξηγηθεί με βάση τη λογική. Μέσα από τις εργασίες του (όπως η πραγματεία του που έμεινε γνωστή ως «Μέθοδος»), αριθμητικοποιούνται τα μαθηματικά. Το α^2 πλέον δεν θεωρείται εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α αλλά ένας αριθμός πολλαπλασιασμένος με τον εαυτό του και με γεωμετρικό ισοδύναμο την παραβολή.

Μέσα από την τεχνική της εύρεσης της καθέτου μιας καμπύλης σε ένα σημείο που ήταν αλγεβρική απέφυγε την χρήση απείρως μικρών ποσοτήτων στην γεωμετρία. Π.χ. όταν ένας κύκλος τέμνει μία καμπύλη δημιουργούνται δύο σημεία τομής (βλ Εικ.14). Εάν αυτά τα σημεία αρχίζουν το ένα να προσεγγίζει το άλλο η διαφορά τους συνεχώς μειώνεται και όταν τα σημεία συμπέσουν το ένα πάνω στο άλλο, οι



Εικ.14

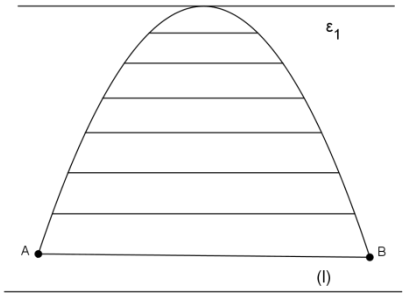
ρίζες θα είναι ίσες και ο κύκλος θα είναι εφαπτόμενος της καμπύλης. Στην περίπτωση που ο κύκλος γίνει εφαπτόμενος τότε η εξίσωση θα έχει μία διπλή ρίζα την x_o .[Γι]

Ο Wallis έκανε χρήση των συνηθισμένων τεχνικών της αριθμητικής για να αριθμητικοποιήσει την γεωμετρία και χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το σύμβολο ∞ για το άπειρο. Θεωρούσε ότι μία επίπεδη επιφάνεια αποτελούνταν από άπειρο αριθμό παραλληλογράμμων με απείρως μικρό ύψος. Επίσης έκανε χρήση και του ορίου αθροίσματος των ακέραιων δυνάμεων των φυσικών αριθμών στη μέθοδο αδιαιρέτων του Cavallieri μέσα από γεωμετρικές παρατηρήσεις.

Ο Wallis προσπάθησε να αποδείξει ότι: $\int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to\infty} \frac{0^k+1^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+\cdots+n^k}$, χρησιμοποιώντας μία ατελή μαθηματική επαγωγή και κατέληξε στην ισότητα $\lim_{n\to\infty} \frac{0^k+1^k+\cdots\ldots+n^k}{n^k+n^k+\cdots\ldots n^k} = \frac{1}{k+1}$ για όλες τις μη αρνητικές τιμές του κ. Στην συνέχεια προσπάθησε να κάνει επέκταση και για εκθέτες θετικούς ρητούς. Ισχυρίστηκε ότι για κάθε συνάρτηση g(x) για την οποία υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{g(0)^k+g(1)^k+\cdots+g(n)^k}{g(n)^k+g(n)^k+\cdots+g(n)^k}$ αντιστοιχεί και ένας δείκτης δ(g) που ορίζεται από την σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{g(0)^k+g(1)^k+\cdots+g(n)^k}{g(n)^k+g(n)^k+\cdots+g(n)^k} = \frac{1}{\delta(g)+1}$.Στην περίπτωση που η $g(x)$ είναι η x^k, τότε οι θετικές ακέραιες δυνάμεις της αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, και η αντίστοιχη ακολουθία των δεικτών της αριθμητική. Προφανώς το ίδιο θα ίσχυε και στην περίπτωση της γεωμετρικής προόδου $1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, (\sqrt[q]{x})^3, \ldots, (\sqrt[q]{x})^p, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x.$ Το μήκος του διαστήματος είναι l και τα q σημεία είναι οι όροι αριθμητικής προόδου, επομένως ο λόγος της θα είναι ίσος με $1/q$, έτσι $\delta(x^k) = \kappa$ άρα $\delta((\sqrt[q]{x})^p) = \frac{p}{q}$. Ο Wallis είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον συμβολισμό $(\sqrt[q]{x})^p$ για την παράσταση $x^{p/q}$. Ο Wallis στο Arithmetica έδωσε για το όριο συνάρτησης μια αριθμητική απόδοση. Το όριο είναι εκείνος ο αριθμός που προσεγγιζόταν από τη συνάρτηση με τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά τους να γίνεται μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα και τελικά αυτή η διαφορά εξαφανίζεται καθώς η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον. [Γι]

Τα απειροστά του Cavalieri

Ο Cavalieri μαθητής του Γαλιλαίου ανέπτυξε τη μέθοδο των αδιαιρέτων για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Κάθε αδιαίρετο με την κίνηση που παράγει το επόμενο συνεχές. Για παράδειγμα ένα σημείο κινούμενο παράγει μία γραμμή αντίστοιχα μία γραμμή παράγει μία επιφάνεια και μία επιφάνεια ένα στέρεο αποτελούμενη από παράλληλα αλλά ισαπέχοντα επίπεδα. Στην προσπάθεια του για τετραγωνισμό (εύρεση λόγου μεταξύ δύο επιφανειών που συνήθως η μία θα ήταν παραλληλόγραμμο) επινόησε την έννοια Omnes lines (όλων των γραμμών) ενός σχήματος. Η οποία δεν γίνονταν με την αποδόμηση του σχήματος αλλά με την έννοια της συνεχούς κίνησης. Τα αδιαίρετα του σχήματος (όλες οι μικρές γραμμές) είναι οι τομές που προκύπτουν καθώς δύο επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους και κάθετα στο αρχικό σχήμα κινούνται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η κίνηση του ενός προς το άλλο να συνεχιστεί μέχρι ότου οι γραμμές τους να συμπέσουν. Αυτό το σύνολο των τομών δηλ το σύνολο των γραμμών που είναι παράλληλες στην ευθεία οδηγό l το συμβολίζουμε με $O_F(l)$ (F είναι το σχήμα, βλ Εικ.15) Η θεώρηση αυτών των $O_F(l)$ σαν ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο ώθησε των Cavalieri να αποδείξει την θεωρία του Ευδόξου σε αυτά τα νέα αντικείμενα. Αντιμετώπισε πρόβλημα στον σχηματισμό του λόγου $O_F(l):O_G(l)$ και εάν έχει νόημα αυτός ο λόγος την στιγμή που όλες οι γραμμές είναι άπειρες. Στηριζόμενος όμως στον ορισμό 4 του V βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη θα προσπεράσει αυτόν τον προβληματισμό. [Γι]



Εικ.15

Για δύο επίπεδα σχήματα F και G ο Cavalieri ισχυρίστηκε ότι:

I. Εάν δύο σχήματα συμπίπτουν δηλαδή εάν $F \cong G$ τότε και $O_F(l) = O_G(l)$

II. Αν $F \cong G + H$ τότε $O_F(l) = O_G(l) + O_H(l)$

III. Αν $F > G$ τότε $O_F(l) > O_G(l)$

και διατύπωσε και το επόμενο θεώρημα γνωστό ως η αρχή του Cavalieri:

1) Εάν δύο επίπεδα σχήματα έχουν ίσα ύψη και περιέχονται ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες και τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων που αποκόπτονται από

ευθεία παράλληλη προς τις αρχικές έχουν σταθερό λόγο τότε τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα εμβαδά τους.

2) Εάν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη και οι τομές από επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις τους και σε ίσες αποστάσεις από αυτές είναι σε σταθερό λόγο, τότε και οι όγκοι θα βρίσκονται στον ίδιο λόγο.

Οι αρχές του Cavalieri σε σύγχρονη γλώσσα εκφράζουν την γραμμικότητα του ολοκληρώματος $\int \lambda f = \lambda \int f$, $\int (f+g) = \int f + \int g$.Επίσης κατάφερε να αποδείξει ότι $\int_0^{\alpha} x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$ για κ θετικό ακέραιο. [Νε]

<u>Στοιχεία από την γέννηση του Απειροστικού Λογισμού:Τα απειροστά και οι ροές που χρησιμοποίησαν οι Newton-Leibnitz.</u>

Ήδη από τον 17^{ο} αιώνα είχαν πλέον κατανοηθεί οι λογιστικές και γεωμετρικές σχέσεις ανάμεσα στα ακρότατα και τον μηδενισμό της εφαπτομένης. Δεν υπήρχε όμως το κατάλληλο πλαίσιο ορισμού. Αυτό όμως δεν άργησε να συμβεί την δεκαετία 1660-1670 οι Isaac Newton και Gottfried Leibniz θα θεμελιώσουν τον απειροστικό λογισμό. Επινόησαν τους κατάλληλους συμβολισμούς για να διαχειριστούν τις δύο βασικές έννοιες την παράγωγο και το ολοκλήρωμα και φανέρωσαν την αντίστροφη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην διαφόριση και την ολοκλήρωση συνάρτησης με την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος. [Γι], [Νε]

Ο Newton επέκτεινε το διωνυμικό ανάπτυγμα και στις περιπτώσεις που ο εκθέτης ήταν ρητός. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να τον βοηθήσει να εφαρμόσει τις διωνυμικές σειρές σε κάθε συνάρτηση. Μέσα από το Principia παρουσίασε τρεις μεθόδους για τον νέο λογισμό. Η πρώτη ήταν τα απειροστά, η δεύτερη οι ροές και η τρίτη οι πρώτοι και έσχατοι λόγοι (ροές).

Ο Newton θεωρούσε ότι οι μεταβλητές ποσότητες παράγονται από την συνεχή κίνηση σημείων. Οι επίπεδες καμπύλες για τον Newton θεωρούνταν μία κίνηση που αποτελούνταν από δύο επιμέρους κινήσεις, μία προς τον άξονα x και μία προς τον άξονα y. Οι ταχύτητες ως προς τις δύο συνιστώσες ο Newton τις ονόμασε ροές και τις συμβόλισε $\dot{x}$ και $\dot{y}$ αντίστοιχα. Επομένως η ταχύτητα ενός σημείου περιγράφεται από μια αναλυτική έκφραση που περιέχει τις ροές $\dot{x}$ και $\dot{y}$. Αντίστοιχα, το τόξο είναι το

ρέον της ταχύτητας και τα x και y είναι τα ρέοντα των ροών $\dot{x}$ και $\dot{y}$ του κινούμενου σωματιδίου. Το απείρως μικρό μήκος που αυξάνεται το ρέον σε αντίστοιχα απείρως μικρό χρόνο «ο» το ονόμασε «στιγμή του ρέοντος» και το συμβόλισε $\dot{x}$ο. Το ρέον όταν μια μεταβλητή δίνεται υπό την μορφή ροής το συμβόλισε με $\boxed{x}$ ή □x και αργότερα x'. Ο Newton επίσης έδωσε και μία σαφέστατη διατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος, δηλ εάν δοθεί μια σχέση μεταξύ ρεόντων βρίσκεται η σχέση μεταξύ των ροών τους και αντίστροφα. [Νε]

Θεωρούσε ότι για ένα μικρό χρονικό διάστημα «ο» η ταχύτητα του σώματος παραμένει σταθερή. Σ' αυτό το διάστημα το y γίνεται $y + \dot{y}\,o$ και το x σε $x + \dot{x}o$. Εφόσον το σωματίδιο παραμένει σε επαφή ισχύει η ισότητα $y + \dot{y}\,o$ = f($x + \dot{x}o$). Από την ισότητα ο Newton διέγραψε όσους όρους περιείχε το $\dot{x}o$ σε δυνάμεις μεγαλύτερες της μονάδας. Στην συνέχεια διαιρούσε με το $\dot{x}o$ και προέκυπτε ο λόγος $\dot{y}\,o$ / $\dot{x}o$. Οι στιγμές $\dot{x}o$ και $\dot{y}\,o$ μεταβάλλονται με το χρόνο «ο».Τον λόγο $\dot{y}\,o$ / $\dot{x}o$ τον ονομάζει έσχατο λόγο των μεταβολών και καθώς το «ο» πλησιάζει το μηδέν διαγράφονται όλοι οι όροι που το περιέχουν.[Γι] Έτσι στη γενικευμένη περίπτωση κατέληγε στη σχέση Σ (κ $\dot{x}/x$ +λ $\dot{y}$ / y) $a_{\kappa\lambda}\, x^{\kappa} y^{\kappa} = 0$ που συνδέει τις ροές $\dot{x}$ και $\dot{y}$ με τα ρέοντα x και y. Ο Newton θεωρούσε ότι οι στιγμές $\dot{x}o$ και $\dot{y}\,o$ δεν θα πρέπει να θεωρούνται μόνες αλλά πάντα ως πηλίκο $\dot{y}\,o$ / $\dot{x}o$. Ενώ ο λόγος $\dot{y}/\dot{x}$ λειτουργούσε άψογα σε πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν μπορούσε να υπολογιστεί πάντα και σε άλλες συναρτήσεις. Σε αυτή την περίπτωση ο Newton προσέγγιζε τις συναρτήσεις αυτές με άπειρες σειρές.

Για την εφαπτομένη ακολούθησε μεθόδους των Borrow και Fermat. Γι αυτήν την διαγραφή των απείρως μικρών ποσοτήτων ο Newton εισάγει την έννοια του ορίου ότι δηλαδή οι ροές θεωρούνται πάντα σε λόγο και ποτέ μόνες τους. Οι μαθηματικές ποσότητες για τον Newton δεν αποτελούνται από στιγμές ή μικρά μέρη αλλά από συνεχή κίνηση ενός σημείου. Οι γραμμές παράγονται από συνεχή κίνηση σημείου και όχι από απειροστά τμήματα το ίδιο και οι επιφάνειες παράγονται από συνεχή κίνηση γραμμών.

Ο Newton είχε επηρεαστεί από τις απειροστικές σκέψεις του 17^{ου} αιώνα γι' αυτό και δεν προσέγγισε τους λόγους αυτούς αριθμητικά. Ο λόγος των απειροστών μεγεθών του επέτρεπε να αντικαθιστά τα απειροστά μεγέθη με τον λόγο τους που ήταν πεπερασμένος αριθμός. [Boy.2] Ο Newton στο Principia αναφέρει ότι αυτός ο

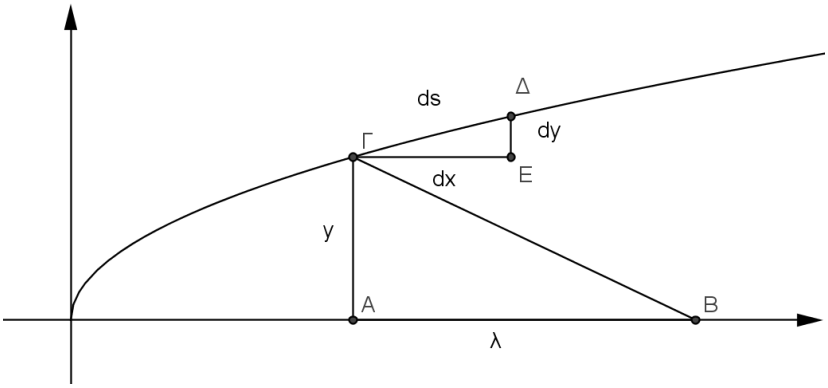
έσχατος λόγος είναι ο λόγος των ποσοτήτων όχι πριν εξαφανιστούν αλλά ούτε μετά, αλλά ακριβώς ο λόγος των τιμών τη στιγμή που εξαφανίζονται. Αυτόν τον λόγο ο Newton δεν τον ονομάζει όριο αλλά έσχατο λόγο των αλλαγών, η τιμή δηλαδή του λόγου αυτών των ποσοτήτων την στιγμή που εξαφανίζονται. Η φράση του Newton στο Principia ότι οι έσχατοι λόγοι τείνουν στο όριο «χωρίς ποτέ να το ξεπερνούν» μας δίνει την αίσθηση σύμφωνα με την J. Grabnier ότι η παράγωγος δεν μπορούσε να ταλαντώνεται γύρω από το όριό της. [Γι]

Παράλληλα με τον Newton την ίδια εποχή θα ανακαλύψει και ο γερμανός μαθηματικός Leibniz τον «απειροστικό λογισμό». Ο Leibniz χρησιμοποιεί το «χαρακτηριστικό τρίγωνο» για διάφορα προβλήματα ολοκλήρωσης και υπολογισμού μηκών.[Νε] Στην προσέγγιση μιας καμπύλης από ένα πολύγωνο οι συντεταγμένες των κορυφών του σχηματίζουν ακολουθίες (x_κ) και (y_κ). Συμβόλισε με dy την διαφορά τεταγμένων και με dx την διαφορά τετμημένων. Όταν το dx γίνει πολύ μικρό τότε οι πλευρές του πολυγώνου τείνουν να γίνουν εφαπτόμενες. Για τον Leibniz ένα καμπυλόγραμμο σχήμα πρέπει να θεωρείται το ίδιο με ένα πολύγωνο με απείρως πολλές πλευρές. Κατά τον Bos στον λογισμό Leibniz, μία μεταβλητή και μία ακολουθία απείρως κοντινών τιμών ταυτίζονται. Τα σύμβολα Σ, Δ που χρησιμοποιούνται για πεπερασμένα αθροίσματα και διάφορες, όταν εφαρμόζονται σε άπειρες διαδικασίες γίνονται $\int$ και d αντίστοιχα.

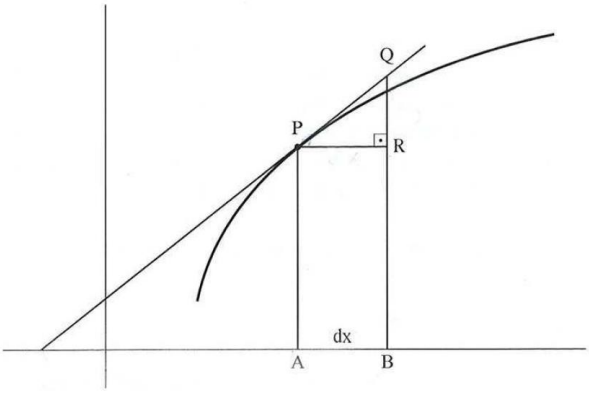
Για τον Leibniz διαφορικά είναι οι όροι μίας ακολουθίας με άπειρο πλήθος απείρως μικρών όρων. Αντίστοιχα το άθροισμα είναι μια απείρως μεγάλη μεταβλητή καθώς μια πεπερασμένη ακολουθία αθροισμάτων μετατρέπεται σε μία ακολουθία με άπειρο πλήθος απείρως μεγάλων όρων. Αυτό το άθροισμα απείρου πλήθους συμβολίζεται με $\int y$ και ισχύουν οι κανόνες $\int dy = y$ και $\mathrm{d}\int y = y$. [Γι]

Ο Leibniz διατύπωσε και κανόνες λογισμού για τα διαφορικά καταλήγοντας στους κανόνες $d(xy) = xdy + ydx$, $d(\frac{x}{y})= \frac{xdy-ydx}{x^2}$ και $d\left(\sqrt{y}\right) = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Από τα dy, dx προκύπτουν τα διαφορικά ανώτερης τάξης $d(d^{\kappa-1}y) = d^{\kappa}y$.

Επίσης την απείρως μικρή μεταβολή της x την θεωρεί αυθαίρετη ποσότητα, την ονομάζει διαφορά, την συμβολίζει με dx και ορίζει την dy από την σχέση dy / dx = y /υποεφαπτομένη (βλ Εικ.16). Αυτά τα διαφορικά dx, dy είναι μη μηδενικές, σταθερές ποσότητες αλλά αμελητέες ποσότητες σε σχέση με τις τιμές των x και y.Ο Leibniz για την εφαπτομένη έδωσε τον ορισμό ως τη γραμμή που ενώνει δύο απείρως γειτονικά σημεία σε μία καμπύλη. Από το σχήμα (βλ Εικ.17) καθώς το dx γίνεται όλο και πιο μικρό το Q πλησιάζει να γίνει σημείο της καμπύλης άρα το dy εκφράζει την απείρως μικρή μεταβολή της y και θα είναι ίση με QR άρα $\frac{dy}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$. Οι ποσότητες dy/dx είναι λόγος απειροστών μεταβολών. [Γι]



Εικ.16



Εικ.17

Η διαφόριση ήταν μία διαδικασία που δεν ενεργούσε σε αριθμούς αλλά σε μεταβλητές ποσότητες καμπύλων. Έτσι οι Newton - Leibniz πέτυχαν να μετασχηματίσουν προβλήματα εμβαδού, όγκου που μέχρι εκείνη τη στιγμή αντιμετωπίζονταν σαν προβλήματα άθροισης σε προβλήματα που τα έβρισκαν με αντιδιαφόριση. [Νε]

Αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού

Ο Cauchy έθεσε τις βάσεις για την αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού μέσα από το έργο του "Cours d' Analyse" του 1821. Ο Cauchy όρισε ως βασική έννοια του απειροστικού λογισμού το όριο και πάνω σε αυτό δόμησε τις υπόλοιπες βασικές έννοιες του λογισμού δηλαδή της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Ο Newton όπως και ο Leibniz είχαν δώσει μια γεωμετρική προσέγγιση στην έννοια του ορίου, ενώ ο Cauchy προσπάθησε να τη θεμελιώσει πάνω στην αριθμητική. Στο "Cours d' Analyse" ο Cauchy πρώτα δίνει τον ορισμό της μεταβλητής ως μία ποσότητα που μπορεί να πάρει διαφορετικές διαδοχικές ποσότητες και όρισε την συνάρτηση ως τις συσχετιζόμενες μεταβλητές που μεταβάλλονται κατά τέτοιον τρόπο που όταν δώσουμε τιμή σε μία από αυτές τότε να μπορούμε να ορίσουμε και να εκφράσουμε τις τιμές των άλλων μέσω αυτής, τότε η μεταβλητή ονομάζεται ανεξάρτητη και οι υπόλοιπες εξαρτημένες. Αποτέλεσμα των προηγουμένων ήταν να μπορέσει να δώσει τον ορισμό του ορίου ως την τιμή που οι διαδοχικές τιμές που αποδίδουμε σε μία μεταβλητή πλησιάζουν διαρκώς μια τιμή από την οποία διαφέρουν οσοδήποτε επιθυμούμε. Ακόμη έδωσε ορισμό για το απειροστό ως τις διαδοχικές τιμές μίας μεταβλητής που γίνονται οσοδήποτε μικρότερες από οποιαδήποτε ποσότητα και του ορισμού του απείρου ως τις διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής που γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε αριθμό αντίστοιχα. Ο Cauchy ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το ε για οσοδήποτε μικρή ποσότητα, όταν δεν μπορούσε να εφαρμόσει τα απειροστά. Επίσης έδωσε τον ορισμό της συνέχειας εφόσον διέθετε τον ορισμό του ορίου, η f είναι συνεχής στο [α, β] αν-ν η απόλυτη τιμή της διαφοράς $f(x+h)-f(x)$ τείνει στο μηδέν καθώς το h τείνει στο μηδέν, δηλ $\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)|=0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της. Επίσης όρισε συνεχή την f(x) σε ένα διάστημα ως προς την μεταβλητή x εάν μία απειροστή μεταβολή στην μεταβλητή x θα επιφέρει μια απειροστή μεταβολή στην f(x). Η γεωμετρική ερμηνεία της συνέχειας από τον Cauchy ήταν ότι οι συνεχείς συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά μέσω ευθειών ή καμπύλων. Με βάση τα παραπάνω ο Cauchy έδωσε και την απόδειξη για το θεώρημα μέσης τιμής. Αν f: [α, β]→ ℝ με f(α) < 0, f(β) > 0 τότε υπάρχει ξ ∈ [α, β] τέτοιο ώστε f(ξ)=0. Θεώρησε μία διάμεση του [α, β] σε n ίσα διαστήματα μήκους $\gamma=\frac{\beta-\alpha}{n}$.Αν υπήρχε ξ με f(ξ)=0 σε κάποιο υποδιάστημα η απόδειξη τελειώσει. Αν δεν υπήρχε τότε θεωρούσε ότι υπήρχαν δύο τιμές που διαφέρουν κατά n τέτοιες ώστε να έχουν

αρνητικό γινόμενο. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία στα διαστήματα $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{n}$, $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{n^2}$ κ.ο.κ. προκύπτουν δύο ακόλουθες. Μία αύξουσα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ έτσι ώστε f $(\alpha_i) < 0$ και μία φθίνουσα $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots$ με $f(\beta_i) > 0$. Οι δύο ακολουθίες πρέπει να συγκλίνουν στο ίδιο όριο που είναι το μηδέν εφόσον η f είναι συνεχής. Εδώ γίνεται πλέον αναγκαία η πληρότητα των πραγματικών αριθμών για να δικαιολογηθεί το παραπάνω. [Γι]

Τέλος, ο Cauchy έδωσε και τον ορισμό της παραγώγου. Το όνομα παράγωγος και τον συμβολισμό f΄(x) το πήρε από τον Lagrange. Αν μία απειροστή μεταβολή h στην μεταβλητή x επιφέρει μία απειροστή μεταβολή της f (x+h)- f(x), παρόλο που οι δύο μεταβλητές είναι απεριόριστα μικρές και τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν ο λόγος τους είναι δυνατόν να συγκλίνει σε άλλο όριο θετικό ή αρνητικό. Δηλαδή η συνάρτηση f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του [α,b] αν–ν για κάθε x ∈ [α,β] το πηλίκο $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ τείνει σε ένα όριο καθώς το h τείνει στο μηδέν. Το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι η τιμή της παραγώγου στο x. Αυτό έχει συγκεκριμένη τιμή για κάθε x αλλά μεταβάλλεται με αυτό.

Ο Weierstrass έδωσε τον αυστηρό ορισμό του ορίου που είναι «στατικός» χωρίς απειροστά σε σχέση με την «δυναμική» αντίληψη του ορισμού του Cauchy. Επίσης χρησιμοποίησε ανισοτικές σχέσεις και τους ποσοδείκτες ε, δ. «Για κάθε ε>0, ∃ δ>0 τέτοιο ώστε ∀ x του πεδίου ορισμού της f με $0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\chi\to\chi_0} f(x) = \alpha$»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: Αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών

Εισαγωγή

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην σπουδαιότητα της αρχής του περιστερώνα την πιο απλή και θεμελιώδης συνδυαστική αρχή, προκειμένου να αποδειχθεί και να κατανοηθεί η διάκριση ανάμεσα στους ρητούς και τους άρρητους. Θα την εφαρμόσουμε για να διακρίνουμε τους ρητούς από τους άρρητους μέσα από το δεκαδικό ανάπτυγμα, μία διάκριση μεταξύ περιοδικότητας και μη περιοδικότητας. Διδακτικά αυτά τα θέματα είναι ενδιαφέροντα και σημαντικά γιατί μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για δύο σκοπούς. Προφανώς για να καταλάβουν οι μαθητές τους πραγματικούς αριθμούς και την διαφορά των ρητών από τους άρρητους και από την άλλη να βοηθήσει στην ανάπτυξη του συνδυαστικού τρόπου σκέψης τους. [Fa]

Η αρχή του περιστερώνα (pigeonhole principle) αποδίδεται στον Dirichlet γύρω το 1834 και μας λέει ότι: Εάν m, n είναι φυσικοί αριθμοί με $\mathrm{m} > n$, F είναι ένα σύνολο με m στοιχεία και $\mathrm{F} = \mathrm{C}_1 \cup \mathrm{C}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{C}_\mathrm{n}$ τότε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots\ \mathrm{C}_\mathrm{n}$ πρέπει να περιλαμβάνει περισσότερα από ένα στοιχεία του F.

2.1. Χαρακτηρισμός των ρητών αριθμών μέσω δεκαδικού αναπτύγματος

<u>Ορισμός1</u>: Ως ακέραιο μέρος (integral part) ενός πραγματικού αριθμού x ορίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει τον x και τον γράφουμε ως [x].

Έτσι $[x] \in \mathbb{Z}\ \kappa\alpha\iota\ [x] \leq x \leq [x] + 1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$.

Επίσης ορίζουμε το κλασματικό μέρος (fractional part) του x ως $(x) = x - [x] \in [0,1)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα $\left[\frac{5}{2}\right] = 2, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2,\ \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Παρατηρήσεις α) Εάν $k \epsilon \mathbb{Z}$ και $k \leq x < k + 1$, τότε $[x] = k$.

β) $(x_1) = (x_2)$ για $x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}$ αν-ν $x_1 - x_2 \epsilon \mathbb{Z}$.

γ) x είναι ρητός αν-ν (x) είναι ρητός αριθμός

δ) x είναι άρρητος αν-ν (x) είναι άρρητος αριθμός

Ένας μαθητής γενικά θεωρεί ότι ένας ρητός αριθμός έχει πάντα ένα δεκαδικό ανάπτυγμα το οποίο είναι τελικά περιοδικό αλλά είναι βέβαιο ότι συνήθως δεν γνωρίζει το γιατί. Θα δώσουμε μία απόδειξη γι' αυτό στηριζόμενοι στην αρχή του περιστερώνα (pigeonhole principle) . Αυτή η αρχή εγκαθιστά μία περιοδικότητα στο δεκαδικό ανάπτυγμα και χρησιμοποιείται και σε πολλούς άλλους κλάδους των μαθηματικών. Η αντίστροφη εφαρμογή είναι ότι όταν ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός έχει περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα, βασιζόμενο σε ένα απλό επιχείρημα που εμπλέκει άπειρες σειρές. Έτσι το δεκαδικό ανάπτυγμα εισάγει μία διχοτόμηση ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς σύμφωνα με την οποία ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός εάν έχει τελικό περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα και άρρητος όταν δεν έχει. [Fa]

Αρχικά για να ορίζουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός πραγματικού αριθμού χρειαζόμαστε το παρακάτω θεώρημα. [Fa]

<u>Θεώρημα1</u>: Έστω x ένας πραγματικός αριθμός με $0 < x < 1$.Υπάρχει μοναδική ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $x_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \text{ και } 0 \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^{m-1}} \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη</u>: Αρχικά θα παρουσιάσουμε μια διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τους όρους της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Βήμα 1: Ορίζουμε $\alpha_1 = x$ το οποίο συνεπάγεται $x_1 = [10\alpha_1]$

Βήμα 2: Ορίζουμε $\alpha_2 = (10\alpha_1) = 10\alpha_1 - x_1$ το οποίο συνεπάγεται $x_2 = [10\alpha_2]$.

Γενικά για $n \in \mathbb{N}$.

Βήμα n+1: Ορίζουμε $\alpha_{n+1} = (10\alpha_n) = 10\alpha_n - x_n$ το οποίο συνεπάγεται $x_{n+1} = [10\alpha_{n+1}]$.

Η κατασκευή της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει τέσσερις επιθυμητές ιδιότητες.

Ιδιότητα 1: $x_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Προφανώς, $0 \leq a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον $0 \leq x = a_1 < 1$ και $0 \leq a_{n+1} = (10\alpha_n) < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι $0 \leq 10a_n < 10$ και συνεπάγεται $x_n = [10\alpha_n] \in \{0,1,2,\dots,9\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ιδιότητα 2: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$.

Επαγωγικά μπορεί να αποδειχθεί ότι $x = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, σύμφωνα με το βήμα2, $\alpha_2 = 10x - x_1$ και συνεπαγωγικά $x = \frac{x_1}{10} + \frac{a_2}{10}$. Σύμφωνα με το βήμα3, $\alpha_3 = 10\alpha_2 - x_2$, έτσι ώστε $\alpha_2 = \frac{x_2}{10} + \frac{a_3}{10}$ επομένως $x = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^2}$. Αναλογικά με επαγωγή μπορεί να αποδειχθεί ότι $x = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $0 \leq \frac{\alpha_{n+1}}{10^n} < \frac{1}{10^n}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{10^n} = 0$ επομένως $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$, εφόσον $x - (\frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}) = \frac{a_{n+1}}{10^n}$

Ιδιότητα 3: $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^{m-1}}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Για m=1 έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = x < 1$. Έστω $m > 1$ τότε $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = x - \frac{x_1}{10} - \cdots - \frac{x_{m-1}}{10^{m-1}} = \frac{a_{m-1}}{10^{m-1}} < \frac{1}{10^{m-1}}$.

Ιδιότητα 4: η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες 1,2 και 3 είναι μοναδική.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες 1, 2 και 3. Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έτσι είναι αδύνατον να ισχύει $x_n = 9$ για κάθε $n \geq m+1$ ή $y_n = 9$ για κάθε $n \geq m+1$.

Έστω $m = \min\{ n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$. Τότε $|x_m - y_m| \geq 1$ και $0 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{10^n}\right| = \left|\frac{x_m - y_m}{10^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{10^n}\right| \geq \frac{1}{10^m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{10^n} \geq \frac{1}{10^m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0$. Ως εκ τούτου, εφόσον $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{10^n} \leq \frac{1}{10^m}$ είτε $x_n = 9$, $y_n = 0$ για κάθε $n \geq m+1$ και $x_m = 0$, $y_m = 1$ ή $x_n = 0$, $y_n = 9$ για κάθε $n \geq m+1$ και $x_m = 1$, $y_m = 0$. Αυτό είναι αδύνατο, άτοπο ως εκ τούτου, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μοναδική.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός πραγματικού αριθμού με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος. [Fa]

Ορισμός2: Έστω x είναι ένας πραγματικός αριθμός και 0<x<1. Σύμφωνα με το Θεώρημα1, υπάρχει μία μοναδική ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{0,1,2,\dots,9\}$ τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$ και $0 \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^{m-1}}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αυτή η έκφραση του x συντομεύεται στην

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

η οποία ονομάζεται δεκαδικό ανάπτυγμα του x.

1) Λέμε ότι ο x είναι πεπερασμένος δεκαδικός εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n = 0$ για κάθε $n > n_0$. Τότε γράφουμε $x = 0, x_1 x_2 \dots x_{n_0}$.

2) Λέμε ότι ο x είναι περιοδικός δεκαδικός εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_{n_0+i+\lambda\mu} = x_{n_0+i}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$ και $i \in \{1,\dots,\mu\}$. Τότε γράφουμε $x = 0, x_1 x_2 \dots x_{n_0} \overline{x_{n_0+1} \dots x_{n_0+\mu}}$. Εάν η περίοδος ξεκινάει από την αρχή (n_0=0) τότε ο x είναι ένας καθαρός περιοδικός δεκαδικός και τότε γράφουμε $x = 0, \overline{x_1 \dots x_\mu}$.

Τώρα χρησιμοποιώντας την αρχή του περιστερώνα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τους ρητούς αριθμούς στο διάστημα (0,1) ως πεπερασμένους ή τελικά περιοδικούς δεκαδικούς.

Θεώρημα2: Έστω x ένας πραγματικός αριθμός και 0<x<1. Τότε ο x είναι ένας ρητός αριθμός αν-ν το δεκαδικό ανάπτυγμα του x είναι είτε πεπερασμένο ή τελικά περιοδικό.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο x είναι ένας ρητός αριθμός και 0<x<1. Έτσι, $x = \frac{s}{t}$, όπου $t \in \mathbb{N}$ και $s \in \{0,1,\dots,t-1\}$.Παρατηρούμε ότι $0 \leq (10x) = 10\frac{s}{t} - \left[10\frac{s}{t}\right] = \frac{s_1}{t} < 1$, όπου $s_1 = 10s - \left[10\frac{s}{t}\right] t \in \{0,1,\dots,t-1\}$. Έχοντας στο μυαλό μας αυτή την παρατήρηση μπορούμε να βρούμε τα ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος του x σύμφωνα με το Θεώρημα 1.

Βήμα 1: Ορίζουμε $0 < \alpha_1 = x = \frac{s}{t} < 1$ για $s = s_0 \in \{0,1,\dots,t-1\}$ και κατά συνέπεια $x_1 = \left[10\frac{s}{t}\right]$

Βήμα 2: Ορίζουμε $\alpha_2 = (10\alpha_1) = 10\frac{s}{t} - \left[10\frac{s}{t}\right] = \frac{s_1}{t}$ με $s_1 \epsilon \{0, 1, \dots, t-1\}$ και κατά συνέπεια $x_2 = \left[10\frac{s_1}{t}\right]$.

Βήμα 3: Ορίζουμε $\alpha_3 = (10\alpha_2) = 10\frac{s_1}{t} - \left[10\frac{s_1}{t}\right] = \frac{s_2}{t}$ με $s_2 \epsilon \{0, 1, \dots, t-1\}$ και κατά συνέπεια $x_3 = \left[10\frac{s_2}{t}\right]$.

Γενικά για $n \in \mathbb{N}$.

Βήμα n+1: Ορίζουμε $\alpha_{n+1} = (10\alpha_n) = 10\frac{s_{n-1}}{t} - \left[10\frac{s_{n-1}}{t}\right] = \frac{s_n}{t}$ με $s_n \epsilon \{0, 1, \dots, t-1\}$ και κατά συνέπεια $x_{n+1} = \left[10\frac{s_n}{t}\right]$.

Έχουμε $\{ s_n : n \in \mathbb{N}^* \} \subseteq \{0, 1, \dots, t-1\}$. Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε $n_1 < n_2$ και $s_{n_1} = s_{n_2}$.

Έστω $m = \min\{ n \in \mathbb{N} : s_n = s_{n_1}$ για $n_1 \in \mathbb{N}^*, n_1 < n\}$. Τότε $s_m = s_{m_1}$ για $m_1 \in \mathbb{N}^*$ και $m_1 < m$. Έστω $\mu = m - m_1$.

Εάν $s_{m_1} = 0$, τότε $m_1 > 0$ και $x = 0, x_1 x_2 \dots x_{m_1}$, επομένως ο x είναι πεπερασμένος δεκαδικός.

Εάν $s_{m_1} \neq 0$ για $m_1 \in \mathbb{N}^*$, τότε $x = 0, \overline{x_1 \dots x_\mu}$ σε περίπτωση που $m_1 = 0$ και $x = 0, x_1 x_2 \dots x_{m_1} \overline{x_{m_1+1} \dots x_{m_1+\mu}}$ σε περίπτωση που $m_1 \neq 0$, επομένως ο x είναι ένας τελικά περιοδικός δεκαδικός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο x είναι είτε πεπερασμένος ή τελικά περιοδικός δεκαδικός. Εάν $x = 0, x_1 \dots x_{n_0}$ είναι ένας πεπερασμένος δεκαδικός, προφανώς $x = \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}$ είναι ένας ρητός αριθμός. Εάν $x = 0, x_1 x_2 \dots x_{n_0} \overline{x_{n_0+1} \dots x_{n_0+\mu}}$ είναι ένας τελικά περιοδικός δεκαδικός, τότε ο x είναι ένας ρητός αριθμός, άρα $x = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\mu k}}\right) + \dots + \frac{x_{n_0+\mu}}{10^{n_0+\mu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\mu k}}\right) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{10^n} + \left(\frac{x_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \dots + \frac{x_{n_0+\mu}}{10^{n_0+\mu}}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\mu k}}\right) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{10^n} + \left(\frac{x_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \dots + \frac{x_{n_0+\mu}}{10^{n_0+\mu}}\right) \left(\frac{10^\mu}{10^\mu - 1}\right) = \frac{x_1 \dots x_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{x_{n_0+1} \dots x_{n_0+\mu}}{10^{n_0}} \left(\frac{10^\mu}{10^\mu - 1}\right) \in \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα1: Έστω $x = \frac{1}{7} = a_1$.Τότε $s_0 = 1$, $x_1 = [\frac{10}{7}] = 1$.

$a_2 = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7}$ και τότε $s_1 = 3$, $x_2 = [\frac{30}{7}] = 4$.

$a_3 = \frac{30}{7} - 4 = \frac{2}{7}$ και τότε $s_2 = 3$, $x_3 = [\frac{20}{7}] = 2$.

$a_4 = \frac{20}{7} - 2 = \frac{6}{7}$ και τότε $s_3 = 6$, $x_4 = [\frac{60}{7}] = 8$.

$a_5 = \frac{60}{7} - 8 = \frac{4}{7}$ και τότε $s_4 = 4$, $x_5 = [\frac{40}{7}] = 5$.

$a_6 = \frac{40}{7} - 5 = \frac{5}{7}$ και τότε $s_5 = 5$, $x_6 = [\frac{50}{7}] = 7$.

$a_7 = \frac{50}{7} - 7 = \frac{1}{7}$ και τότε $s_6 = 1$, $x_7 = [\frac{10}{7}] = 1$.

Άρα $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

Παράδειγμα1: Έστω $x = \frac{1}{6} = a_1$.Τότε $s_0 = 1$, $x_1 = [\frac{10}{6}] = 1$.

$a_2 = \frac{10}{6} - 1 = \frac{4}{6}$ και τότε $s_1 = 4$, $x_2 = [\frac{40}{6}] = 6$.

$a_3 = \frac{40}{6} - 6 = \frac{4}{6}$ και τότε $s_2 = 4$, $x_3 = [\frac{40}{6}] = 6$.

Άρα $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$.

Στην παρακάτω πρόταση θα χαρακτηρίσουμε τους ρητούς αριθμούς του διαστήματος (0,1) οι οποίοι συνδέονται με πεπερασμένους δεκαδικούς.

<u>Πρόταση1</u>: Το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός ρητού αριθμού 0<x<1 είναι πεπερασμένο αν-ν $x = \frac{s}{t}$, όπου $s, t \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και $t = 2^a 5^b$ με $a, b \in \mathbb{N}^*$.

<u>Απόδειξη</u> : Εάν $x = 0, x_1 x_2 \dots x_{n_0}$ είναι πεπερασμένος δεκαδικός, τότε $x = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_{n_0}}{10^{n_0}} = \frac{x_1 \dots x_{n_0}}{10^{n_0}} = \frac{s}{t}$, όπου $s, t \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και φυσικά ο t έχει τους πρώτους παράγοντες 2 ή 5 μόνο.

Αντίστροφα, έστω $x = \frac{s}{2^a 5^b}$ όπου $s, a, b \in \mathbb{N}^*$ και οι αριθμοί $s, 2^a 5^b$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Ορίζουμε $n_0 = \max\{a, b\}$. Τότε $10^{n_0} x$ είναι ένας ακέραιος και

$10^n x$ δεν είναι ακέραιος για $n \in \mathbb{N}$ με $n < n_0$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, ο $x = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}$ είναι ένα πεπερασμένος δεκαδικός.

Ως πόρισμα της παραπάνω πρότασης, θα δώσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα κάθε φυσικού αριθμού. Φυσικά το δεκαδικό ανάπτυγμα του 0 είναι 0.

<u>Πόρισμα1</u>: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο x μπορεί να εκφραστεί μοναδικά από το παρακάτω ανάπτυγμα $x = x_1 10^n + x_2 10^{n-1} + \cdots + x_n 10 + x_{n+1}$, όπου, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \{0,1,2,\dots,9\}$ με $x_1 \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Η παραπάνω έκφραση συμπτύσσεται στην $x = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$, την κοινή αναπαράσταση του x σε δεκαδική σημειογραφία.

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $10^n \leq x < 10^{n+1}$. Τότε $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10^{n+1}} < 1$ και έστω $\frac{x}{10^{n+1}} = \frac{s}{2^a 5^b}$ όπου $s, a, b \in \mathbb{N}^*$ και οι αριθμοί $s, 2^a 5^b$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Σύμφωνα με την Πρόταση1, $\frac{x}{10^{n+1}} = 0, x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ είναι ένας πεπερασμένος δεκαδικός και κατά συνέπεια $x = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$.

Τελικά, θα περιγράψουμε την δεκαδική έκφραση κάθε πραγματικού αριθμού και κατά συνέπεια το χαρακτηριστικό δεκαδικό ανάπτυγμα των ρητών αριθμών χρησιμοποιώντας, τον Ορισμό 1, το Θεώρημα 1, τον Ορισμό 2, το Θεώρημα 2 και το Πόρισμα 1.

<u>Ορισμός3</u>: Έστω $x \neq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και $|x|$ είναι η απόλυτη τιμή του x. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2, $|x| = [|x|] + (|x|)$, όπου $[|x|] \in \mathbb{N}^*$ και $0 \leq (|x|) < 1$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1, εάν $[|x|] \neq 0$ τότε $[|x|] = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ όπου $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \{0,1,2,\dots,9\}$ με $x_1 \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, τον Ορισμό 2 εάν $(|x|) \neq 0$ τότε $(|x|) = 0, y_1 y_2 \dots$

Στην περίπτωση που $x > 0$ και $x \neq [|x|]$, $x \neq (|x|)$ τότε το δεκαδικό ανάπτυγμα του x είναι: $x = x_1 x_2 \dots x_{n+1}, y_1 y_2 \dots$.

Στην περίπτωση που $x < 0$ και $x \neq -[|x|]$, $x \neq -(|x|)$ τότε το δεκαδικό ανάπτυγμα του x είναι: $x = -x_1 x_2 \dots x_{n+1}, y_1 y_2 \dots$.

Εάν $0 > x = -[|x|]$ τότε $x = -x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ και εάν $0 > x = -(|x|)$ τότε $x = -0, y_1 y_2 \dots$.

Θεώρημα3: Έστω x είναι ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ο x είναι ρητός αριθμός αν-ν ο $(|x|) = x - [|x|]$ είναι ρητός αριθμός και ισοδύναμα αν-ν ο $(|x|)$ είναι ίσος με 0 ή η δεκαδική έκφραση του x είναι είτε πεπερασμένη ή τελικά περιοδική.

Απόδειξη : Η απόδειξη απορρέει από το Θεώρημα 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Διδασκαλία των πραγματικών αριθμών και του ορίου

Εισαγωγή

Κατά την διδασκαλία μίας μαθηματικής έννοιας οι μαθητές σχηματίζουν, την εικόνα έννοιας συνήθως με τρόπους σκέψης που χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή που μπορεί να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό αυτής. Στα σχολικά μαθηματικά οι αριθμοί δεν ορίζονται, πως θα μπορούσε άλλωστε να γίνει μία αυστηρή θεμελίωση, με αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν μία εικόνα έννοιας για τους αριθμούς που περιλαμβάνει διάφορες αναπαραστάσεις. Η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στο σχολείο γίνονται με διαδοχικές επεκτάσεις στα διάφορα σύνολα αριθμών. Κάθε επέκταση επιλύει προβλήματα που δεν μπορούσαν να αντιμετωπισθούν πριν και το καινούργιο σύνολο αποκτά καινούργιες ιδιότητες. Η αρχική αντίληψη των μαθητών για τους αριθμούς ότι δηλ είναι διακριτοί και ισχύει η αρχή του επόμενου, περνάει άκριτα και στους πραγματικούς. Σε αυτούς πλέον δεν ορίζεται ο επόμενος όπως στους ακέραιους αλλά ο επόμενος προκύπτει από τη συνέχεια των αριθμών με αποτέλεσμα να έχουμε μία οσοδήποτε κοντινή προσέγγιση επιθυμούμε.

Επίσης στα σχολικά βιβλία απουσιάζει η έννοια του αριθμού σαν ενός άπειρου αθροίσματος όπως έγινε και στην ιστορική διαδρομή προς τον ορισμό και θεμελίωσης του. Εκτός ίσως από τον ορισμό της δύναμης ενός αριθμού με άρρητο εκθέτη. Η έννοια δίνεται κυρίως μέσα από ορισμούς και αναπαραστάσεις όπως για τους ρητούς ότι είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσματα και οι άρρητοι αυτοί που δεν μπορούν. Για την διάκριση των ρητών από τους άρρητους δεν χρησιμοποιείται για παράδειγμα η αρχή του περιστερώνα (pigeonhole principle) ώστε να επιτευχθεί η εννοιολογική διάκριση των πραγματικών αριθμών μέσα από το δεκαδικό τους ανάπτυγμα και να δικαιολογηθεί η μορφή των δεκαδικών αναπαραστάσεων τους.

Στην προσπάθεια απόκτησης νέας γνώσης από τους μαθητές, γίνεται ενσωμάτωση αυτής στην ήδη υπάρχουσα γνώση, με αποτέλεσμα να πρέπει να απορρίψουμε ή να τροποποιήσουμε την προϋπάρχουσα γνώση και για αυτό

δημιουργούνται επιστημολογικά εμπόδια (όπως π.χ. το όριο επιτυγχάνεται ή όχι;) τα οποία στα πλαίσια μίας αποδοτικής διδασκαλίας θα πρέπει να τα λάβουμε υπόψη.

Σύμφωνα με τις γνωσιακές θεωρίες μάθησης (Sfard, Dubinsky, Tall et all) όταν μία μαθηματική έννοια έχει δύο «μέρη» που μπορεί να σχετίζονται μεταξύ τους, τότε το ένα από αυτά είναι το λειτουργικό-αλγοριθμικό και το άλλο το συμβολικό-εννοιολογικό. Η λειτουργική προσέγγιση αναδεικνύει την διαδικασία και η δομική τα αντικείμενα. Η έννοια του απείρου είναι κεντρική τόσο στην έννοια του πραγματικού αριθμού όσο και του ορίου. Για την κατανόηση του απείρου, του ορίου όσο και του πραγματικού αριθμού είναι η ικανότητα να αντιληφθεί κανείς την ενεργεία απειρία, την ενθυλάκωση της παραπάνω διαδικασίας σε ένα αντικείμενο και την δυνάμει απειρία. Για την κατανόηση των άπειρων διαδικασιών απαραίτητες είναι οι έννοιες της διαίσθησης, της αντίληψης, του άπειρου και του συνεχές. Επίσης η κατανόηση των άπειρων διαδικασιών επηρεάζεται και από την γλώσσα που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός στην διδασκαλία του. Έτσι η χρήση των εκφράσεων «τείνει», «προσεγγίζει», «συγκλίνει» και «όριο» δεν χρησιμοποιούνται το ίδιο από τους μαθητές όπως στους μαθηματικούς.

Όλες οι διαδικασίες που συνεχίζονται επ' άπειρον μπορούμε να τις κατανοούμε με μία εννοιολογική μεταφορά, την βασική μεταφορά του απείρου (Lakoff - Nunez), σαν να έχουν ένα τέλος και ένα έσχατο αποτέλεσμα, θεωρώντας ότι έχουν ολοκληρωθεί μαζί μία μεταφορική τελική κατάσταση που την προσθέτουμε σε αυτήν και η οποία είναι μοναδική. Για να συλλάβουμε το ενεργεία άπειρο πρέπει να κάνουμε μία ριζική αλλαγή στον τρόπο σκέψης μας. Για αυτό και οι μαθητές χρησιμοποιούν πιο άνετα πεπερασμένους αλγόριθμους στην ανάλυση από ότι την άπειρη διαδικασία του απείρου. Αρχικά να δούμε την όλη διαδικασία ως ολοκληρωμένη και έπειτα σαν μία ολότητα. Έτσι πλέον στην διδασκαλία του ορίου, ο συμβολισμός $\lim_{x\to a} f(x) = l$ αντιπροσωπεύει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα ή μία διαδικασία προσέγγισης.

3.1. Διδασκαλία των πραγματικών αριθμών

Κατά την διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στο σχολείο γίνεται αρχικά μία επέκταση από τους φυσικούς αριθμούς στους ακέραιους ώστε να συμπεριληφθούν οι αρνητικοί. Το σύνολο των ακέραιων αντίστοιχα επεκτείνεται στο σύνολο των ρητών ως λόγοι ακεραίων. Οι άρρητοι στη συνέχεια ενώνονται με τους ρητούς και έτσι

προκύπτει το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο λόγος επέκτασης κάθε φορά του συνόλου των αριθμών είναι για να μπορέσουν να αντιμετωπισθούν νέα προβλήματα που δεν γινόταν με τα προϋπάρχοντα σύνολα αριθμών. Κάθε διεύρυνση έχει κάποιες από τις ιδιότητες του υποσυνόλου και κάποιες επιπλέον δικές του. Η παραπάνω διαδικασία που εφαρμόζεται στα σχολικά μαθηματικά καλύπτει και διάφορα γνωστικά προβλήματα σε σχέση με την έννοια του αριθμού αφού στα σχολικά μαθηματικά οι αριθμοί δεν ορίζονται. [Gi] Οι μαθητές έχουν μία εικόνα έννοιας για τους αριθμούς και αυτή λειτουργεί σαν ορισμός. Η εικόνα έννοιας που έχουν περιλαμβάνει διάφορες αναπαραστάσεις, όπως σημεία πάνω σε ευθεία, τους δεκαδικούς, τα κλάσματα, δεκαδικούς με άπειρα επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία και τους άρρητους σαν δεκαδικούς με άπειρα μη επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία. Αποτέλεσμα αυτών είναι η εικόνα έννοια του αριθμού για τους μαθητές να είναι το σύνολο όλων των δεκαδικών αριθμών.

Τα μικρά παιδιά μαθαίνουν να καταμετρούν τους αριθμούς [Vam2] με αποτέλεσμα πριν ακόμη διδαχθούν τους αριθμούς προϋπάρχει ένα πρότυπο για την κατανόηση του αριθμού που στηρίζεται στην μέτρηση. Σχηματίζουν έτσι μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των αντικειμένων και των αριθμών [Me] κατά τη διαδικασία της μέτρησης. Με βάση τα παραπάνω έχουμε το αποτέλεσμα στους μαθητές να αναπτύσσεται η πεποίθηση ότι οι αριθμοί είναι διακριτοί και πάντα υπάρχει ένας επόμενος μετά τον κάθε αριθμό και μία απόσταση ανάμεσα σε αυτούς. Επιπλέον η αρχική πεποίθηση [Vam2] των μαθητών για τον επόμενο ενισχύεται και από την ιδιότητα της διάταξης. Από την πρώτη επαφή των μαθητών με τα σχολικά μαθηματικά η έννοια του αριθμού που σχηματίζουν, τους βοηθάει στο να κατανοούν τις ιδιότητες των φυσικών όπως και των πράξεών τους. Μέσω της διαδικασίας του μετρήματος αναπτύσσεται η έννοια του επόμενου, με αποτέλεσμα ο μαθητής να βρίσκει έναν επόμενο άρα με την ίδια διαδικασία μπορεί να βρει άπειρους φυσικούς αριθμούς. Επίσης οι αριθμοί μπορούν να διαταχθούν μέσω της απαρίθμησης και η πρόσθεση και αφαίρεση είναι κατανοητές στο πλαίσιο του μετρήματος. Τον πολλαπλασιασμό τον αντιλαμβάνονται ως μία επαναλαμβανόμενη προσθετική δομή.

Βέβαια, αυτή η αρχική εικόνα για τους αριθμούς που ταυτίζεται με την εικόνα των φυσικών αποτελεί εμπόδιο στην διαδικασία κατανόησης των μαθητών όταν έρχονται σε επαφή με νέα είδη αριθμών. Στα νέα σύνολα αριθμών το πλαίσιο των φυσικών αριθμών πλέον δεν μπορεί να εφαρμοστεί π.χ. στην πρόσθεση ρητών με

κλασματική μορφή όπου προσθέτουν χωριστά αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή. Οι περισσότερες δυσκολίες [Vam2] για την μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς είναι οι εξής:

1. η διακριτικότητα των φυσικών δεν διατηρείται στους ρητούς
2. το σύνολο των ρητών έχει διττή αναπαράσταση είτε σαν κλάσματα είτε σαν δεκαδικές αναπαραστάσεις παραμένοντας το ίδιο αντικείμενο
3. οι ρητοί αριθμοί αποτελούν νέα αντικείμενα και οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν ένα υποσύνολο αυτών. Επίσης, η κατάλληλη προσοχή ανάμεσα στην σημασία των κλασματικών ή δεκαδικών αναπαραστάσεων

Τα παραπάνω γνωστικά εμπόδια οδηγούν τους μαθητές σε παρανοήσεις όσον αφορά την έννοια των ρητών αριθμών, κυρίως της πυκνότητας κάτι που δεν ισχύει στους ακέραιους. [Vam], [Me2] Η χρήση της αριθμογραμμής και η συνεχόμενη διαίρεση ενός διαστήματος με ρητά άκρα με την εύρεση του μέσου κ.ο.κ., όπου η έννοια του εν ενεργεία άπειρου προσεγγίζεται με δυναμικό τρόπο δεν βοηθά για την κατανόηση της πυκνότητας όπως ούτε. [Vam2] Η πυκνότητα έρχεται σε αντίθεση με την διακριτικότητα των ακέραιων έννοια απαραίτητη για την μετέπειτα κατανόηση των πραγματικών αριθμών και του ορίου.

Αυτό που θα βοηθήσει τους μαθητές σύμφωνα με τα παραπάνω είναι η εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται στην δομή της έννοιας του αριθμού. Όλες αυτές οι προϋποθέσεις που συνοδεύουν την έννοια με κυριότερη αλλαγή στον τρόπο σκέψης των μαθητών όπου πρέπει να διαφοροποιηθεί από τον τρόπο σκέψης των φυσικών και των ιδιοτήτων τους. Μια αλλαγή που προφανώς είναι μακροχρόνια και επίπονη. Στις εννοιολογικές αλλαγές υπάρχει περίπτωση να συμβούν και παρανοήσεις. Τέτοια φαινόμενα έχουμε όταν η βιωματική εμπειρία του ατόμου είναι ασύμβατη με την επιστημονική γνώση με αποτέλεσμα να δημιουργούνται συνθετικά μοντέλα ως μίγμα από τις υπάρχουσες πεποιθήσεις και την επιστημονική γνώση. [Gi] Επίσης, μία άλλη προσέγγιση είναι η μετακίνηση της διδασκαλίας ώστε να αναδεικνύει μία διαδικασία σαν ένα καινούργιο αντικείμενο π.χ. το κλάσμα εκτός από τη διαίρεση δύο αριθμών είναι και μία μαθηματική οντότητα δηλαδή ένα νέο αντικείμενο.

Απαραίτητη διεύρυνση για να συμπληρωθεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο των άρρητων αριθμών. Έννοια από την φύση της δύσκολη, με αποτέλεσμα να απαιτείται ιδιαίτερα διδακτική προσοχή για την διδασκαλία τους. Τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών δίνουν λίγη προσοχή στους άρρητους, το οποίο βέβαια είναι ένα δύσκολο διδακτικό εγχείρημα με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην έχουν τα μαθηματικά ως μία ολοκληρωμένη δομική σύλληψη. [Fi3] Οι δυσκολίες στηρίζονται στην σύνδεση της ασυμμετρίας με τους άρρητους αριθμούς που έρχεται σε αντίθεση με την βιωματική μας εμπειρία που έχουμε για τους αριθμούς, τη χρήση τους δηλαδή για την μέτρηση και απαρίθμηση. [Fi3]

Για την γνώση οποιουδήποτε μαθηματικής έννοιας άρα και των άρρητων είναι απαραίτητη προϋπόθεση η ανάπτυξη συνδέσεων ανάμεσα στους αλγόριθμους, τις διαισθήσεις και τις έννοιες. Οι πλειοψηφία των αντιλήψεων των μαθητών για την ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι αυτή των ρητών αριθμών ή των δεκαδικών ρητών δηλαδή με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων ως αριθμών που αναπαρίστανται πάνω στην αριθμογραμμή. Η επιμονή στην δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων δεν βοηθάει στην εννοιολογική τους κατανόηση. Πρέπει να εστιάσουμε στην γεωμετρική αναπαράσταση αυτών γιατί βοηθάει τους μαθητές να διακρίνουν τους άρρητους και την δεκαδική αναπαράσταση στην ενθυλάκωση της έννοιας του άρρητου αριθμού από διαδικασία σε αυτήν του αντικειμένου, γιατί οι μαθητές θα επικεντρωθούν στην αναπαράσταση του άρρητου αριθμού πάνω στην ευθεία σαν ένα αντικείμενο πλέον παρά σαν μία διαδικασία παραγωγής άπειρων δεκαδικών ψηφίων. [Za2]

Για να μπορέσει κανείς να κατανοήσει τη δομή των πραγματικών αριθμών θα πρέπει να ανακατασκευάσει ολικά την εικόνα που έχει για την έννοια των αριθμών. Αρχικά αφορά τη συνέχεια των αριθμών, η αρχική αντίληψη των μαθητών για τους αριθμούς είναι ότι είναι διακριτοί και ισχύει η αρχή του επόμενου. Πλέον, ο επόμενος δεν ορίζεται όπως ο επόμενος στους ακέραιους αλλά ο επόμενος ορίζεται από τη συνέχεια των αριθμών και είναι δυνατόν να έχουμε μία οσοδήποτε κοντινή προσέγγιση επιθυμούμε. Η έννοια της συνέχειας δεν στηρίζεται στο μοντέλο που προκαλείται από την κίνηση αλλά στηρίζεται στη συνέχεια των αριθμών, δηλαδή στο όριο. Τέλος η επιχειρηματολογία των μαθηματικών δεν στηρίζεται στην εποπτεία αλλά στην λογική. Οι έννοιες των πραγματικών αριθμών, η έννοια του ορίου, της συνέχειας καθώς και η πυκνότητα είναι σχέσεις που σχετίζονται άμεσα για την

κατασκευή της έννοιας του πραγματικού αριθμού τα οποία οφείλουν να ενοποιηθούν για την βαθύτερη κατανόηση της. [Me], [Me2] Άλλωστε, η πολυπλοκότητα της έννοιας και η μακροχρόνια δύσκολη ιστορική διαδρομή προς τον ορισμό των πραγματικών αριθμών καθιστά εξαιρετικά δύσκολη την κατανόησή της.

Διδασκαλία των πραγματικών αριθμών μέσα από τα σχολικά βιβλία

Οι άρρητοι στην Β΄ Γυμνασίου σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών διδάσκονται μετά την διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Παρουσιάζονται μέσα από διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις αποδίδοντας έτσι μία δυναμική ερμηνεία. Αρχικά γίνεται μία ιστορική αναφορά στους Πυθαγόρειους που ανακάλυψαν τους άρρητους αριθμούς και στην συνέχεια στον Εύδοξο που τους έβγαλε από την κρίση δημιουργήθηκε. Στο σημείο αυτό δεν αναφέρεται ότι οι Πυθαγόρειοι στην προσπάθεια τους να βρουν κοινό μέτρο ανάμεσα στην διαγώνιο και την πλευρά τετραγώνου ανακάλυψαν τους άρρητους, μέσα από την ανθυφαίρεση.

Αυτή η διαδικασία της προσπάθειας εύρεσης κοινού μέτρου θα μπορούσε να φέρει τους μαθητές για πρώτη φορά σε επαφή με τις άπειρες διαδικασίες όπως έγινε άλλωστε και ιστορικά με την μαθηματική κοινότητα. Μέσα από την άπειρη ανθυφαίρεση θα μπορούσε να παρουσιαστεί και η διαδικασία με την οποία παράγονται άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία. Το ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα (ως μονάδα μέτρησης) με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς τα δύο αυτά ευθύγραμμα τμήματα, πλευρά και διαγώνιο πρέπει να παρουσιαστεί ώστε να γίνει η σύνδεση της ασυμμετρίας με τους άρρητους αριθμούς. Αυτή η διάσταση έρχεται σε αντίθεση με την βιωματική μας εμπειρία που έχουμε για τους αριθμούς, τη χρήση τους δηλαδή για μέτρηση και απαρίθμηση.

Ο άρρητος δίνεται σαν ένας αριθμός x που εκφράζει την διαγώνιο ενός τετραγώνου πλευράς 1, που δεν μπορεί να γραφεί ούτε σαν κλάσμα αλλά ούτε σαν περιοδικός δεκαδικός αριθμός. Αυτός ο αριθμός ικανοποιεί την $x^2 = 2$ και μπορούμε μόνο να τον προσεγγίζουμε μέσα από μία διαδικασία δεκαδικής προσέγγισης όσο δεκαδικών ψηφίων επιθυμούμε, αφού τους άρρητους δεν μπορούμε να τους γράψουμε σαν δεκαδικούς με γνωστά ψηφία.

Η αναφορά ότι τους άρρητους αριθμούς μπορούμε να τους προσεγγίσουμε από τους υπολογιστές τσέπης μπορεί να επιφέρει μία αντίληψη για τους μαθητές ότι τα άπειρα μη περιοδικά ψηφία είναι μόνο αυτά που μπορεί να δείξει η οθόνη του υπολογιστή τσέπης. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι όταν η περίοδος των περιοδικών

δεκαδικών ψηφίων των αριθμών είναι μεγαλύτερη από αυτή που μπορεί να υποστηρίξει η οθόνη του υπολογιστή τσέπης να θωρούνται από τους μαθητές σαν άρρητοι, ενώ στην πραγματικότητα είναι δεκαδικοί.

Στη συνέχεια το βιβλίο σε μία λυμένη εφαρμογή αποδίδει και μία γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{2}$ πάνω στην ευθεία των αριθμών. Ο συνδυασμός της δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων και της γεωμετρικής βοηθάει στην εννοιολογική τους κατανόηση. Πετυχαίνεται η ενθυλάκωση της έννοιας του άρρητου αριθμού από διαδικασία σε αυτήν του αντικειμένου. Ο άρρητος αριθμός αναπαρίσταται πάνω στην ευθεία σαν ένα αντικείμενο παρά σαν μία διαδικασία παραγωγής άπειρων δεκαδικών ψηφίων. Τέλος οι πραγματικοί αριθμοί παρουσιάζονται και διευρύνονται μέσα από ορισμούς των διαφόρων συνόλων των αριθμών αρχίζοντας πρώτα από τους φυσικούς, τους ακέραιους, τους ρητούς και τέλος τους άρρητους. Γίνεται άτυπη συσχέτιση του μαθηματικού συνεχές σε σχέση με το γεωμετρικό και το φυσικό όπου πλέον όλα τα σύνολα των αριθμών καλύπτουν πλήρως την ευθεία των πραγματικών αριθμών κάνοντας μία αντιστοίχηση ανάμεσα σε κάθε σημείο της αριθμογραμμής και στους αριθμούς και αντίστροφα.

Παρακάτω παραθέτουμε αποσπάσματα από το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο των Π. Βλάμου, Π. Δρούτσα, Γ. Πρέσβη και Κ. Ρεκούμη, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

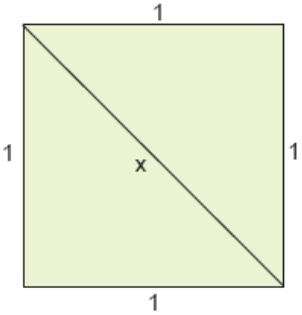
2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο.

Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο» $\sqrt{2}$.

Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.



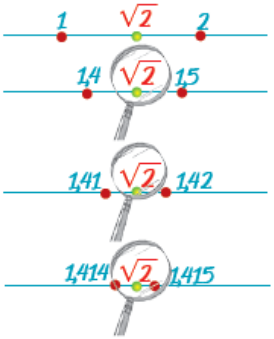
Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$.

Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, δηλαδή δεν είναι ρητός. Γι' αυτό λέγεται άρρητος.

Γενικά:

> Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.



Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.

Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$1 = 1^2 < 2 < 2^2 = 4$$
$$1{,}96 = 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$$
$$1{,}9881 = (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2 = 2{,}0164$$
$$1{,}9994 = (1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2 = 2{,}0022$$
$$1{,}99996 = (1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2 = 2{,}00024$$
$$1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 < 2 < (1{,}41422)^2 = 2{,}000018$$

.....

Άρα:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

.....

Επομένως, τον αριθμό $x = \sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε να προσεγγίσουμε τον $\sqrt{2}$ ως εξής:

Άρα:

Έχουμε:
με **προσέγγιση χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1{,}414$
με **προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1{,}4142$
με **προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1{,}41421$ κ.ο.κ.
Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$**.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$,... είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π.

Σχόλιο:

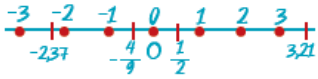
Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα [2] και [√], οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.

Πραγματικοί αριθμοί

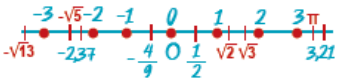
Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

- Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.
  Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).

- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.
  Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός.
  Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



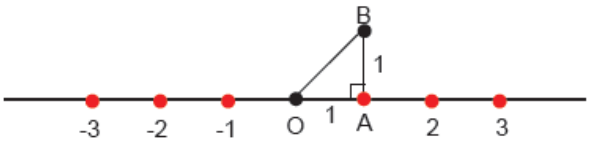
- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για τον λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

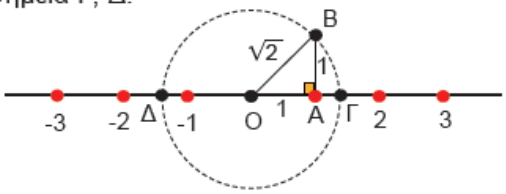
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Λύση: Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ στον άξονα μήκους 1.
Το τρίγωνο ΟΑΒ που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ή $OB = \sqrt{2}$. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ, Δ.





Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$.

Οι πραγματικοί αριθμοί στην Γ΄ Γυμνασίου δεν συμπληρώνονται με επιπλέον ορισμούς αλλά έχουν ένα επαναληπτικό χαρακτήρα από τις προηγούμενες τάξεις. Σαν ορισμός των πραγματικών αριθμών δίνονται όλες οι γνωστές αναπαραστάσεις που έχουν οι μαθητές για τους αριθμούς. Στην ουσία επικαλείται την εικόνα έννοιας που έχουν δημιουργήσει οι μαθητές για τους αριθμούς. Αυτές οι αναπαραστάσεις είναι τα κλάσματα, οι ακέραιοι, οι δεκαδικοί, οι ρίζες, οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία και οι άρρητοι όπως ο π. Παρουσιάζονται ως άρρητοι όχι μόνο οι γνωστοί όπως ο π ή ο $\sqrt{2}$ αλλά και ως αναπαράσταση αθροίσματος ενός ακεραίου και ενός άρρητου π.χ. ο $1+\sqrt{3}$ αλλά και ως κλάσματα με τον αριθμητή τους να είναι άρρητος π.χ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Η αναπαράσταση $\frac{\sqrt{5}}{3}$ μπορεί να δημιουργήσει εμπόδια στην κατανόηση της, γιατί ο ορισμός ότι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με όρους ακέραιους είναι ρητός, μπορεί να περάσει άκριτα και στην παραπάνω αναπαράσταση χωρίς να αντιληφθούν οι μαθητές ότι ο αριθμητής δεν είναι ακέραιος. Στην περίπτωση που αναλυθεί το παραπάνω κλάσμα σαν πολλαπλασιασμός ενός ρητού με έναν άρρητο ενδεχομένως να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν τον λόγο για τον οποίο είναι άρρητος. Στο βιβλίο δεν αναφέρεται κάποιο συμπέρασμα σχετικά με το αποτέλεσμα από τις πράξεις μεταξύ ρητών και άρρητων προκύπτει άρρητος αριθμός ώστε να μπορούν οι μαθητές να γενικεύουν σε ανάλογες αναπαραστάσεις που περιέχουν τέτοιου είδους πράξεων ότι το αποτέλεσμά τους είναι άρρητος αριθμός. Οι αναπαραστάσεις όπως η 6,101001000… δεν συνοδεύονται αντίστοιχα από τον λόγο για τον οποίο δεν προκύπτουν άπειρα περιοδικά δεκαδικά ψηφία, μία κανονικότητα που υπάρχει σ' αυτή που δεν αντιλαμβάνονται πάντοτε οι μαθητές.

Παρακάτω παραθέτουμε αποσπάσματα από το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο των Δ. Αργυράκη, Π. Βουργάνα, Κ. Μεντή, Σ.Τσικοπούλου και Μ. Χρυσοβέργη, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)

A Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

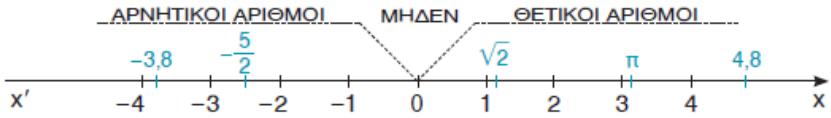
Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε στις προηγούμενες τάξεις.
Π.χ. $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}$, 7,34, $\sqrt{2}$, 3, π, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sqrt{4}$, –0,5, $1+\sqrt{3}$, 6,1010010001...
Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και ν ≠ 0.

$\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}=\frac{-5}{2}$, $7{,}34=\frac{734}{100}$, $3=\frac{3}{1}$, $\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$, $-0{,}5=\frac{-5}{10}$.

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

$\sqrt{2}$, π, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $1+\sqrt{3}$, 6,1010010001...



Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται μ' ένα σημείο πάνω σ' έναν άξονα.

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα.
Για παράδειγμα: $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|0| = 0$, $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Οι πραγματικοί αριθμοί στην Α΄ Λυκείου διδάσκονται σαν επανάληψη των προηγούμενων τάξεων του Γυμνασίου συμπληρώνοντας και διευρύνοντας τους ορισμούς των αριθμών. Για τους ρητούς συμπληρώνεται με τις δεκαδικές μορφές που μπορούν να πάρουν δηλ των δεκαδικών και περιοδικών δεκαδικών αριθμών. Δεν αναφέρεται η διαδικασία από την οποία προκύπτει ότι οι ρητοί έχουν αυτές τις μορφές. Θα μπορούσε σε αυτό το σημείο να αναφερθεί σαν εργαλείο για την παραπάνω αιτιολόγηση η αρχή του περιστερώνα ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν το πώς προκύπτει η επαναληψημότητα των άπειρων περιοδικών δεκαδικών ψηφίων φέρνοντας τους σε επαφή με τις άπειρες διαδικασίες.

Επίσης κατασκευάζονται και οι άρρητοι όπως ο $\sqrt{2}$ μέσα από το γεωμετρικό πλαίσιο όπως έγινε σε προηγούμενη τάξη και αποδεικνύεται ότι δεν είναι ρητός αλγεβρικά μέσω της ατόπου απαγωγής. Ο συνδυασμός της γεωμετρικής αναπαράστασης βοηθάει τους μαθητές όπως είδαμε στο θεωρητικό πλαίσιο να διακρίνουν τους άρρητους και την δεκαδική αναπαράσταση τους και η αναπαράσταση πάνω στην ευθεία στην ενθυλάκωση του άρρητου αριθμού σαν ένα αντικείμενο πλέον παρά σαν μία διαδικασία παραγωγής άπειρων δεκαδικών ψηφίων.

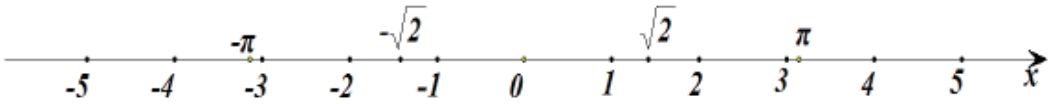
Η καινούργια μορφή αριθμών που μαθαίνουν οι μαθητές στην Α΄ Λυκείου είναι οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Ο ορισμός των δυνάμεων με ρητό εκθέτη προκύπτει σύμφωνα με το βιβλίο ως απαίτηση της διατήρησης των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες και στις καινούργιες δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Η θεώρηση αυτή ενδεχομένως είναι «απότομη». Ο πρώτος ο οποίος χρησιμοποίησε τον συμβολισμό $(\sqrt[q]{x})^p$ για την παράσταση $x^{p/q}$ όπως είδαμε και στην ιστορική αναδρομή ήταν ο Wallis. Στην Α΄ Λυκείου με το καινούργιο πρόγραμμα σπουδών διδάσκονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος που είναι απαραίτητες έννοιες για την μέθοδο του Wallis ώστε να γίνει χρήση της μεθόδου του για την παρουσίαση της έννοιας της δύναμης $x^{p/q}$, φέρνοντας τους μαθητές σε επαφή με τις άπειρες διαδικασίες στους πραγματικούς αριθμούς. Στην περίπτωση που η $g(x)$ είναι η x^k, τότε οι θετικές ακέραιες δυνάμεις της αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, και η αντίστοιχη ακολουθία των δεικτών της αριθμητική. Έτσι οι μαθητές θα μπορέσουν να συσχετίζουν την γεωμετρική πρόοδο $1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, (\sqrt[q]{x})^3, \dots, (\sqrt[q]{x})^p, \dots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x.$ με την ακολουθία των αντίστοιχων δεικτών δηλ τα q σημεία που είναι οι όροι αριθμητικής προόδου και τον λόγο της που είναι $1/q$ ώστε να καταλήξουν στο $\delta((\sqrt[q]{x})^p) = \frac{p}{q}$.

Παρακάτω παραθέτουμε αποσπάσματα από το σχολικό βιβλίο Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ (Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις)

Εισαγωγή

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**



Θυμίζουμε ότι:

- ✓ Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
- ✓ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα,

  $\frac{14}{5} = 2,8$, $\quad -\frac{9}{8} = -1,25$, $\quad \frac{60}{11} = 5,\overline{45}$, $\quad 2,25 = \frac{225}{100}$ και $2,\overline{32} = \frac{230}{99}$

  Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, κτλ., που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

2η Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στη συνέχεια, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, να παρασταθούν οι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

$$\kappa^2=2\lambda^2$$

που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 25) και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής $\kappa=2\mu$.
Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa^2=2\lambda^2$$

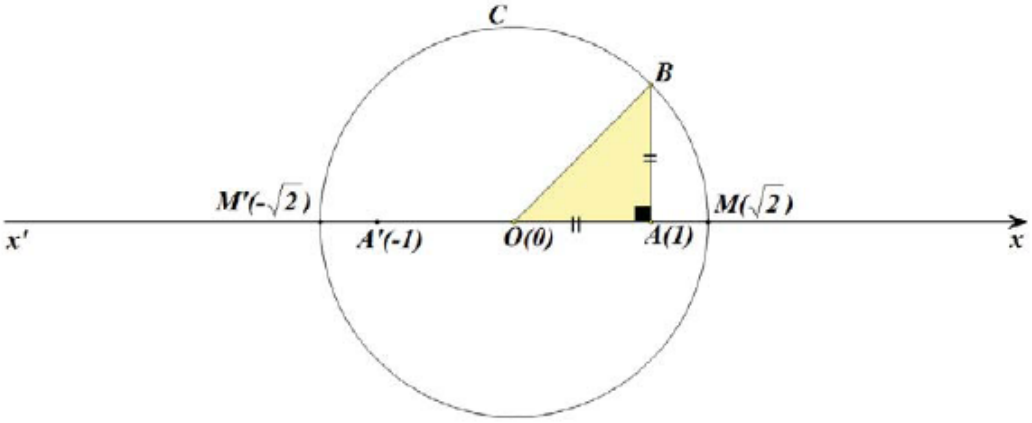
$$(2\mu)^2=2\lambda^2$$

$$4\mu^2=2\lambda^2$$

$$\lambda^2=2\mu^2$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ **δεν είναι ανάγωγο** (άτοπο).



Στο σημείο A του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα AB με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου OAB έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το O και ακτίνα $OB=\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία M και M' που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

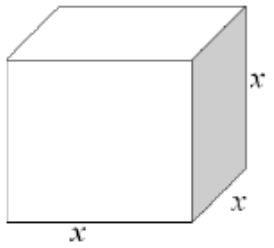
Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

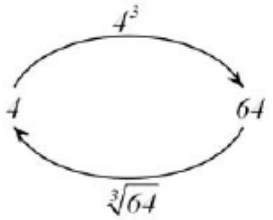
Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$.



Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.



Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$. Δηλαδή $\sqrt[3]{64} = 4$. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού.

Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για **κάθε θετικό ακέραιο ν**, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **ν-οστή ρίζα** ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u>[1] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \text{ και } \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}.$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$. Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$. Όμως, <u>δεν επιτρέπεται</u> να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $(\alpha^p)^q = a^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{2}{5}\cdot 5} = 3^2$. Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 3^2$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\boldsymbol{a > 0}$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $\mathbf{0}^{\frac{\mu}{\nu}} = \mathbf{0}$.

Για παράδειγμα:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \qquad \text{και} \qquad 27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}.$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα είναι:

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^7}.$$

Στην Β΄ Λυκείου διδάσκεται η δύναμη ενός θετικού πραγματικού αριθμού με άρρητο εκθέτη μέσα από διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις αποδίδοντας έτσι μία δυναμική ερμηνεία. Ορίζεται ως το όριο δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, συσχετίζοντας δύο ακολουθίες αριθμών. Τόσο της δεκαδικής προσέγγισης του άρρητου εκθέτη με ν δεκαδικά ψηφία όσο και της ακολουθίας δυνάμεων με αυτούς τους εκθέτες καθώς το ν αυξάνει τείνοντας στο $+\infty$. Είναι μία πρώτη, πρώιμη επαφή των μαθητών με την έννοια του ορίου χωρίς να έχει προηγηθεί ο ορισμός του. Στην συνέχεια το σχολικό βιβλίο δίνει έναν άτυπο ορισμό για το όριο: «Όταν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν ένα ορισμένο αριθμό, που λέγεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της ακολουθίας αυτής.». Σύμφωνα με το βιβλίο αυτός ο ορισμένος αριθμός είναι το όριο αλλά και ο αριθμός που προσεγγίζουν οι τιμές μέσα από μία άπειρη διαδικασία. Για μία άλλη φορά αναδεικνύονται οι άπειρες διαδικασίες στους αριθμούς που είναι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη. Σύμφωνα με την ιστορική αναδρομή που έχουμε κάνει μπορούμε να παραλληλίσουμε τον ορισμό του βιβλίου με την αιτία για την οποία αριθμητικοποιήθηκε ο λογισμός. Προκειμένου να ικανοποιείται το κριτήριο Cauchy για την σύγκλιση ακολουθιών είχε σαν αποτέλεσμα την ανάγκη της πληρότητας και της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών. Το βιβλίο εδώ χρησιμοποιεί θα λέγαμε το αντίστοιχο γεωμετρικό πλαίσιο που ίσχυε και στην εποχή του Cauchy ότι η ύπαρξη ενός αριθμού συνεπάγεται από την γεωμετρική εποπτεία της ευθεία των αριθμών, αλλά αυτό όμως μας το εξασφάλισε τελικά η πληρότητα. Βέβαια σε μαθητές Β΄ Λυκείου θα χαρακτηρίζαμε απαγορευτική έως αδύνατη την διδασκαλία της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών. Η πρώτη επαφή των μαθητών με την έννοια του ορίου που πάνω σε αυτή θα χτιστεί ο απειροστικός

λογισμός στην επόμενη τάξη γίνεται προφανώς με ένα τρόπο που δυσκολεύει τους μαθητές για περαιτέρω εννοιολογική της κατανόηση.

Παρακάτω παραθέτουμε αποσπάσματα από το σχολικό βιβλίο Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Γεννιέται τώρα το ερώτημα:
Μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις της μορφής α^x με x άρρητο, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό εκθέτη;
Μπορούμε για παράδειγμα να ορίσουμε την $3^{\sqrt{2}}$;

Όπως είδαμε (βιβλίο Β' Γυμνασίου σελ. 104) οι δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ κατά προσέγγιση ακέραιας μονάδας, δεκάτου, εκατοστού κτλ. είναι

1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213,.... (1)

Ας πάρουμε τώρα την ακολουθία αυτή των δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ και την αντίστοιχη ακολουθία των δυνάμεων του 3:

3^1, $3^{1,4}$, $3^{1,41}$, $3^{1,414}$, $3^{1,4142}$, $3^{1,41421}$, $3^{1,414213}$,... (2)

Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε ότι:

$$3^1 = 3$$
$$3^{1,4} \simeq 4,6555367$$
$$3^{1,41} \simeq 4,7069650$$
$$3^{1,414} \simeq 4,7276950$$
$$3^{1,4142} \simeq 4,7287339$$
$$3^{1,41421} \simeq 4,7287839$$
$$3^{1,414213} \simeq 4,7288015$$

Αν παρατηρήσουμε τους αριθμούς αυτούς μας δίνεται η εξής εντύπωση: Όταν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν ένα ορισμένο αριθμό, που λέγεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της ακολουθίας αυτής. Είναι επομένως λογικό να ορίσουμε τη δύναμη $3^{\sqrt{2}}$ ως την πιο πάνω οριακή τιμή. Έτσι με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων είναι $3^{\sqrt{2}} \cong 4,7288$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν α >0, x άρρητος και ρ_ν η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία, τότε καθώς το ν αυξάνει τείνοντας στο $+\infty$, οι όροι της ακολουθίας (α^{ρ_ν}) «προσεγγίζουν» έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό, τον οποίο στο εξής θα ονομάζουμε όριο της ακολουθίας (α^{ρ_ν}).

Το όριο αυτό συμβολίζεται με α^x και λέγεται **δύναμη του α με εκθέτη x**. Συμβολικά γράφουμε:

$$\alpha^x = \lim_{\nu \to \infty} \alpha^{\rho_\nu}$$

Επιπλέον, για κάθε x>0, ορίζουμε $0^x=0$.

Ο υπολογισμός δυνάμεων με άρρητο εκθέτη γίνεται με υπολογιστή τσέπης όπως στα παρακάτω παραδείγματα:

ΔΥΝΑΜΗ		ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ				ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$3^{\sqrt{2}}$	3	x^y	2	$\sqrt{x}$	=	4.728801
2^{π}	2	x^y		exp	=	8.824977

3.2. Διδασκαλία του ορίου

<u>Γνωσιακές θεωρίες κατανόησης μαθηματικών εννοιών</u>

Οι γνωσιακές θεωρίες κατανόησης μαθηματικών εννοιών διαπιστώνουν ότι όταν σε μία μαθηματική έννοια δύο «μέρη» σχετίζονται μεταξύ τους, τότε το ένα από αυτά είναι το λειτουργικό-αλγοριθμικό και το άλλο είναι το συμβολικό-εννοιολογικό μέρος του είναι βασικό στη διαχείριση υπολογισμών και συμβόλων.

Αυτές οι γνωσιακές θεωρίες για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών είναι:

1. Η θεωρία APOS του Dubinsky (1991) (Action- Object- Schema) (Δράση- Διαδικασία- Αντικείμενο- Σχήμα) που στηρίζεται στην πιαζετική θεωρία.

   Τα μαθηματικά αντικείμενα δομούνται με βάση το παραπάνω σχήμα. Στην αρχή του σχήματος συναντούμε μία δράση ή ενέργεια ως ένα νοητικό μετασχηματισμό αποτέλεσμα κάποιου εξωτερικού ερεθίσματος. Στην συνέχεια καθώς το άτομο αναστοχάζεται πάνω στις παραπάνω δράσεις ή ενέργειες του, αναπτύσσει εκούσιο έλεγχο πάνω σε αυτές. Αποτέλεσμα αυτού είναι η εσωτερίκευση της ενέργειας να μετατρέπεται σε διαδικασία. Οι διαδικασίες αυτές ενθυλακώνονται σε ένα καινούργιο νοητικό αντικείμενο ως νέες πλέον ολότητες. Τέλος οι ενέργειες ή δράσεις, οι διαδικασίες και τα αντικείμενα αποτελούν ένα καινούργιο συσχετιζόμενο δομικό στοιχείο (δίκτυο αλληλεπιδράσεων) το σχήμα και αποτελούν ένα καινούργιο αντικείμενο.

   Η διαδικασία τη ενθυλάκωσης είναι ιδιαίτερης σημασίας για τα μαθηματικά γιατί μόνο όταν μία διαδικασία έχει ενθυλακωθεί σε ένα αντικείμενο μπορεί να συμμετέχει και σε άλλες διαδικασίες. Οι παραπάνω διαδικασίες μαζί με τους γνωστικούς μηχανισμούς της εσωτερίκευσης και ενθυλάκωσης δεν μπορούν να μας πουν τι πραγματικά συμβαίνει στην σκέψη ενός ατόμου αλλά να μας περιγράψουν έναν πιθανό τρόπο σκέψης. [Du2]

2. Η θεωρία της αποστασιοποίησης της Sfard (1991).

   Η παραπάνω θεωρία προτείνει δύο τρόπους προσέγγισης για την ανάπτυξη μίας μαθηματικής έννοιας. Μία λειτουργική προσέγγιση που εστιάζει την διαδικασία και μία δομική εστιάζοντας τα αντικείμενα. Στην εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών μετά τον λειτουργική προσέγγιση μίας έννοιας ακολουθεί η δομική κατανόησή της. Τα αντίστοιχα επίπεδα ανάπτυξης μιας μαθημαικής έννοιας είναι η εσωτερίκευση, η συμπύκνωση και τέλος η υποστασιοποίηση όπου γίνεται η καλύτερη κατανόηση της έννοιας.

   Με την εσωτερίκευση πραγματοποιείται μία διαδικασία σε γνώριμα αντικείμενα. Στην συνέχεια με την συμπύκνωση γίνεται μία αλλαγή της διαδικασίας σε μία πιο αυτοπροσδιοροζόμενη δομή- οντότητα. Τέλος η νέα αυτή οντότητα μέσω της υποστασιοποίησης ενσωματώνει όλες τις ιδιότητες

και τα χαρακτηριστικά της σε ένα νέο αντικείμενο. Μόνο όταν ένας μαθητής πετυχαίνει την ενσωμάτωση μπορεί να πετύχει τον δομικό τρόπο σκέψης ενώ όταν περιορίζεται στα δύο πρώτα στάδια παραμένει στο λειτουργικό τρόπο.

Η ικανότητα να μπορεί να αντιμετωπίζει κάποιος έναν αριθμό, μία συνάρτηση η μία μαθηματική έννοια και σαν διαδικασία (λειτουργική προσέγγιση) αλλά και σαν αντικείμενο(δομική προσέγγιση) είναι απαραίτητη για την κατανόηση της.

3. Η θεωρία του precept (process & concept) των Gray & Tall (1994).

Σύμφωνα με τον Tall (2004) υπάρχουν τρείς αλληλεπιδραστικοί κόσμοι σκέψης για τα μαθηματικά. Είναι ο ενσαρκωμένος, ο διαδικασιοεννοιολογικός και ο τυπικός-αξιωματικός. Στον ενσαρκωμένο τρόπο σκέψης δημιουργούνται διαισθητικές αναπαραστάσεις για την σύλληψη των μαθηματικών εννοιών μέσω της χρήσης της φυσικής αντίληψης και νοητικού πειραματισμού. Στις συλλήψεις που έχουν δημιουργηθεί από τον παραπάνω κόσμο τα άτομα κάνουν διαδικαστικές δράσεις με την βοήθεια συμβόλων και ενθυλακώνονται ως έννοιες. Αποτέλεσμα αυτού είναι να μπορούμε να κάνουμε μετάβαση από τις διαδικασίες με τις οποίες κάνουμε μαθηματικά στις έννοιες με τις οποίες σκεφτόμαστε για τα μαθηματικά. Πλέον τα σύμβολα αντιπροσωπεύουν και τις διαδικασίας αλλά και τις έννοιες και αποκαλούνται procepts (διαδικασιοέννοια, σύνθετη λέξη παραγόμενη από τις λέξεις process και concept). Τέλος ο τυπικός- αξιωματικός τρόπος σκέψης αποτελεί και τον ανώτερο τρόπο χρησιμοποιεί τις τυπικές αποδείξεις, ορισμούς και πορίσματα προκειμένου να εκφράσουμε τις ιδιότητες των μαθηματικών εννοιών και με βάση αυτές να δημιουργήσουμε νέες προτάσεις και έννοιες.

Η θεωρία των ενσωματωμένων μαθηματικών των Lakoff & Nunez

Η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών στηρίζεται στις παρακάτω αρχές [Nu2]:

1) Η φύση των μαθηματικών δεν αφορά αποδείξεις, ορισμούς και αξιώματα αλλά ανθρώπινες ιδέες.

2) Αυτές οι ιδέες καθιστούν τα μαθηματικά ένα ανθρώπινο εγχείρημα και όχι μία πλατωνική οντότητα, γιατί αυτές οι ιδέες είναι θεμελιωμένες σε γνωσιακούς μηχανισμούς της καθημερινότητας.

3) Αποτέλεσμα αυτής της θεμελίωσης είναι ότι οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι αυθαίρετες ως αποτέλεσμα καθαρώς πολιτισμικών και κοινωνικών συμβάσεων.

4) Η εννοιολογική δομή των μαθηματικών μπορεί να μελετηθεί εμπειρικά μέσω επιστημονικών μεθόδων.

5) Η μεθοδολογία στηριζόμενη στην ενσώματη γνωσιακή επιστήμη (Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών) μπορεί να εξυπηρετήσει αυτό τον σκοπό.

Τις παραπάνω αρχές η θεωρία αυτή προσπαθεί να τις τεκμηριώσει στα νέα δεδομένα που εισάγει η γνωσιακή επιστήμη, τα οποία είναι [Nu2]:

1) Το ενσώματο του νου. Οι ανθρώπινες έννοιες και η ανθρώπινη λογική δομούνται πάνω στις καθημερινές εμπειρίες, στην φύση του εγκεφάλου μας και της δυναμικής των σωμάτων μας. Αυτό περιλαμβάνει και την μαθηματική λογική και τις μαθηματικές έννοιες.

2) Το γνωσιακό ασυνείδητο. Οι περισσότερες γνωσιακές διαδικασίες είναι ασυνείδητες. Δεν μπορούμε να κάνουμε μία ενδοσκόπηση ώστε να φθάσουμε απ' ευθείας στις κατώτερες επιπέδου γνωσιακές διαδικασίες και να κοιτάξουμε τα εννοιολογικά μας συστήματα. Αυτό περιλαμβάνει και την μαθηματική σκέψη.

3) Μεταφορική σκέψη. Καταλαβαίνουμε τις αφηρημένες έννοιες χρησιμοποιώντας την σαφή συμπερασματική δομή και τις μεθόδους που στηρίζονται στο αισθησιο-κινητικό σύστημα. Αυτή η γνωσιακή μεταφορά ονομάζεται εννοιολογική μεταφορά αφού χρησιμοποιούμε το σαφή για να κατανοήσουμε το αφηρημένο. Τέτοιο παράδειγμα έχουμε στην κατανόηση των αριθμών ως σημεία πάνω στην ευθεία ή το χώρο ως ένα σύνολο σημείων.

Οι εννοιολογικές μεταφορές αποτελούν βασικούς γνωσιακούς μηχανισμούς που μεταφέρουν με μία αντιστοίχηση την συμπερασματολογία από ένα πεδίο πηγής

σε ένα άλλο πεδίο στόχο. Μέσω αυτής μπορούμε να προσεγγίσουμε και να κατανοήσουμε αφηρημένες έννοιες μέσα από πιο σαφής και βιωματικές έννοιες. Για τα μαθηματικά οι Lakoff & Nunez (2000) αναφέρουν τους τρεις παρακάτω τύπους:

α) τις θεμελιωτικές μεταφορές, στις οποίες η κατανόηση των μαθηματικών ιδεών γίνεται μέσα από την καθημερινή βιωματική εμπειρία. Σε αυτές τις μεταφορές η περιοχή πηγής είναι έξω από τα μαθηματικά ενώ η περιοχή στόχου είναι.

β) τις επαναπροσδιοριστικές μεταφορές, οι οποίες είναι μεταφορές που θέτουν μία τεχνική κατανόηση αντικαθιστώντας τις συνήθεις έννοιες.

γ) τις συνδετικές μεταφορές, στις οποίες η μεταφορά γίνεται εντός των μαθηματικών αφού τόσο η περιοχή πηγής όσο και η περιοχή στόχου βρίσκονται στο χώρο των μαθηματικών. Έτσι μας επιτρέπουν να αντιληφθούμε μία περιοχή των μαθηματικών μέσω μίας άλλης.

Το άπειρο

Ο Fischbein (1994) θεωρεί ότι για να δεχτεί κανείς την ισότητα $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}=2$ πρέπει να έχει συλλάβει διαισθητικά το ενεργεία άπειρο, πράγμα το οποίο πολλοί μαθητές δεν το αντιλαμβάνονται με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι το όριο της ακολουθίας είναι μικρότερο από δύο. Επειδή το ανθρώπινο μυαλό σκέφτεται με πεπερασμένες διαδικασίες εξαιτίας της βιωματικής μας εμπειρίας η διαισθητική κατανόηση του απείρου είναι από την φύση της αντιφατική έννοια. [Fi3] Το ισοδύναμο της διαίσθησης του απείρου είναι το ανεξάντλητο. [Fi6]

Για την άρση αυτής της αντιφατικότητας έχουμε τη δυνάμει απειρία (οι διαδικασίες οι οποίες κάθε χρονική στιγμή είναι πεπερασμένες, αλλά συνεχίζονται χωρίς τέλος) [Fi6] και το ενεργεία άπειρο (η θεώρηση συνόλων απείρων στοιχείων σαν μία ολότητα). [Fi2] Η διαδικασία συνεχούς διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι δυναμική απειρία, αλλά η θεώρηση της ολότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών είναι ενεργεία άπειρο.

Το ενεργεία άπειρο είναι μια καθαρά λογική κατασκευή και όχι μία αποδεκτή διαισθητική που έγινε όμως αποδεκτό ως μαθηματική έννοια τον 19^{ο} αιώνα από τον Cantor. [Fi3]

Επομένως τόσο για την κατανόηση του απείρου όσο και του πραγματικού αριθμού απαιτείται η σύλληψη του ενεργεία απείρου δηλ τη ύπαρξη όλων των βημάτων μίας άπειρης διαδικασίας σαν μία ολότητα, την ίδια στιγμή που δεν μπορεί κανείς να πραγματοποιήσει όλα αυτά.

Οι Núñez & Lakoff (2005) θεωρούν ότι η ιδέα του ενεργεία απείρου είναι μεταφορική κάνοντας χρήση του έσχατου αποτελέσματος μιας διαδικασίας χωρίς τέλος. Αυτό η ιδέα ήταν που επέτρεψε και στην μαθηματική κοινότητα να αναπτύξει τον απειροστικό λογισμό. Όλες οι διαδικασίες που συνεχίζονται επ' άπειρον μπορούμε να τις κατανοούμε με μία εννοιολογική μεταφορά σαν διαδικασίες που να έχουν ένα τέλος και ένα έσχατο αποτέλεσμα. Αυτή τη μεταφορά την καλούν βασική μεταφορά του απείρου (ΒΜΑ). Κάθε άπειρη επαναληπτική διαδικασία μπορούμε πλέον να την θεωρήσουμε ότι έχει ολοκληρωθεί εάν θεωρήσουμε μία μεταφορική τελική κατάσταση που προσθέτουμε σε αυτήν και η οποία είναι μοναδική. Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνουμε ένα παραλληλισμό ανάμεσα στις πεπερασμένες διαδικασίες και τις άπειρες. Οι δύο διαδικασίες έχουν αρχική κατάσταση και κάθε επόμενη κατάσταση προκύπτει με σαφή τρόπο από την υπάρχουσα κατάσταση. Ο παραλληλισμός ολοκληρώνεται με την θεώρηση μίας τελικής κατάσταση της άπειρης διαδικασίας (δηλ της ΒΜΑ) που έπεται όλων των άπειρων ενδιάμεσων καταστάσεων, είναι μοναδική και δεν μπορεί να προκύψει άλλη κατάσταση μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας (βλ Πιν).

Οι Lakoff & Núñez (2000) ερμηνεύουν ότι μέσα από την γνωσιακή επιστήμη μπορεί να συνδεθεί η έννοια του απείρου, είναι κεντρική τόσο στην έννοια του πραγματικού αριθμού όσο και του ορίου. Το όριο προκύπτει από το ότι υπάρχουν άπειρες σειρές που τα αθροίσματά τους είναι πεπερασμένα. Οι πραγματικοί αριθμοί κατανοούνται με τη χρήση της έννοιας του απείρου, σε όρους δεκαδικών με άπειρα δεκαδικά ψηφία, απείρων ακολουθιών, σειρών και απείρων τομών διαστημάτων. Μέσω της βασικής μεταφοράς του απείρου μπορούν να χαρακτηριστούν οι πραγματικοί αριθμοί στην αξιωματική τους θεμελίωση, μέσω της πληρότητάς τους (supremum αντ. infimum) ή μέσω των άπειρων τομών εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Για παράδειγμα ο π μέσα από την δυνάμει απειρία δεν μπορεί να υπάρξει supremum, αλλά μέσα από το ενεργεία άπειρο μέσω της ΒΜΑ μπορεί να υπάρξει. Όταν συμπεριλάβουμε σε ένα διατεταγμένο σύνολο ρητών αριθμών τα αντίστοιχα supremum τότε ενσωματώνουμε στους ρητούς αριθμούς τους άρρητους. Αντίστοιχη

είναι και η κατασκευή με τις άπειρες τομές εγκιβωτισμένων διαστημάτων με ρητά άκρα εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Ακόμη και στην κατασκευή των πραγματικών αριθμών με τις τομές Dedekind γίνεται χρήση διαφόρων μεταφορών μία από αυτές είναι και η ΒΜΑ.

Πίνακας ΒΜΑ (Núñez & Lakoff ,2000)

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ		
Περιοχή πηγής: Ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες	→	Περιοχή στόχου: Επαναληπτικές διαδικασίες που συνεχίζουν στο άπειρο
Αρχική κατάσταση	→	Αρχική κατάσταση
Κατάσταση που προκύπτει ως αποτέλεσμα της αρχικής κατάστασης της διαδικασίας	→	Κατάσταση που προκύπτει ως αποτέλεσμα της αρχικής κατάστασης της διαδικασίας
Η διαδικασία: Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η επόμενη κατάσταση	→	Η διαδικασία: Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η επόμενη κατάσταση
Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα που προκύπτει μετά την νιοστή επανάληψη της διαδικασίας	→	Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα που προκύπτει μετά την νιοστή επανάληψη της διαδικασίας
Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας	→	Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας (βασική μεταφορά του απείρου)
Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης	→	Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης

Ο Dubinsky et all (2005) με βάση την APOS γνωσιακή θεωρία κάνουν την παρακάτω διάκριση στο δυνάμει και ενεργεία άπειρο για την σύλληψη της έννοια του απείρου:

-Η δυνάμει απειρία, η αντίληψη δηλαδή μιας απειρίας σαν μία διαδικασία που δομείται από ορισμένα αρχικά βήματα δράσεις και η επανάληψη αυτών στο άπειρο απαιτεί μια εσωτερίκευση αυτής της δράσης σε μία διαδικασία.

-Το ενεργεία άπειρο όπου είναι το νοητικό αντικείμενο που προκύπτει από την ενθυλάκωση της παραπάνω διαδικασίας σε ένα αντικείμενο.

Για να συλλάβουμε το ενεργεία άπειρο πρέπει να κάνουμε μία ριζική αλλαγή στον τρόπο σκέψης μας. Αρχικά να δούμε την όλη διαδικασία ως ολοκληρωμένη (όλα τα βήματα να έχουν πραγματοποιηθεί) και έπειτα σαν μία ολότητα (στο αντικείμενο δηλαδή που αντιστοιχεί με την κατάσταση στο άπειρο ενσωματώνουμε το σύνολο της διαδικασίας σαν να έχουν πραγματοποιηθεί όλα τα βήματα σε μία μόνο στιγμή). Η θεωρία APOS, το αντικείμενο ενθυλάκωσης μίας άπειρης διαδικασίας το θεωρεί ένα υπερβατολογικό αντικείμενο όταν δούμε την άπειρη διαδικασία σαν ολοκληρωμένη ολότητα.

Το συνεχές

Η πορεία της θεμελίωσης των μαθηματικών ήταν δύσκολη και οι αντιλήψεις για το συνεχές ήταν αντιφατικές τόσο από τα παράδοξα της Ελεατικής σχολής όσο και από τις φιλοσοφικές απόψεις του Αριστοτέλη. Η πρώτη εμφάνιση του συνεχούς εμφανίζεται στην Ελεατική σχολή με τον Παρμενίδη και τον μαθητή του Ζήνωνα. Σημαντική σχέση για το συνεχές έχει ο ορισμός και η θεώρηση της έννοιας του σημείου.

Σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους ο ορισμός του σημείου ήταν «σημείον εστί μονάς προσλαβούσα θέσιν» ,δηλαδή το σημείο είναι μία μονάδα που έλαβε θέση. Ο Αριστοτέλης στα Μεταφυσικά αναφέρει ότι ο Πλάτωνας δεν πίστευε στην έννοια του σημείου (το θεωρούσε μάλιστα γεωμετρικό δόγμα), αντίθετα πίστευε ότι αρχή της γεωμετρίας πρέπει να είναι η άτομος γραμμή. Ο Ευκλείδης αναφέρει «σημείον εστίν, ου μέρος ουδέν», δηλαδή σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος (αμερές), ορισμός που υπάρχει στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων. Ο Πρόκλος στο σχόλιά του [85, 1-96,25]

αναφέρει ότι το σημείο είναι τετραμερές, συμμετέχει παντού εμφανίζεται άπειρες φορές και είναι ο γεννήτορας όλων των διαστημάτων. Αποτελεί αυτοτελή ύπαρξη και είναι η «πρωτουργός αιτία» της απειρίας των νοητών. Ο Πλάτων στην Πολιτεία [51066-7] αναφέρει ότι το σημείο είναι το «ανυπόθετο» δηλαδή μία αρχή που δεν στηρίζει την ύπαρξή της σε άλλη αρχή αλλά αποτελεί η ίδια από μόνη της αρχή. Ο Hilbert (1995) στην αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας αναφέρει το σημείο σαν «ον» το οποίο βρίσκεται σε αμοιβαίες σχέσεις με τις λέξεις «κείνται», «μεταξύ».

Στην εποχή του Αριστοτέλη το συνεχές χαρακτηρίζεται από την άπειρη διαιρετότητα και ήταν «ως το άπειρον διαιρετόν συνεχές ον» (Αριστοτέλης, «Φυσική ακρόασις», 200b,20). Άμεσα συνδεδεμένο με την πραγματικότητα όπως και κάθε δομή πρέπει να ανταποκρίνεται στον φυσικό κόσμο. Εξάλλου η συνέχεια φαίνεται κάτι το απλό αφού προκύπτει άμεσα από την εποπτεία μας. Για τον Αριστοτέλη το σημείο, μία γραμμή και ένα επίπεδο δεν έχουν βάρος και δεν είναι σώματα (Αριστοτέλης, «περί ουρανού», (299α25-30), 299α30-34, 296α16-17).

Το άπειρο για τον Αριστοτέλη συναρτάται από αντικείμενα ή ολότητες αντικειμένων. Δηλαδή ιδιότητα είτε του μεγέθους του αντικειμένου είτε της πληθικότητας της συγκεκριμένης ολότητας αντικειμένων και από το ανθρώπινο όν. Το άπειρο δεν υπάρχει σε κάποιο Πλατωνικό κόσμο Ιδεών και η εξοικείωση μας με το άπειρο γίνεται μέσα από την ύπαρξη αντικειμένων και διαδικασιών που δεν μπορούν να εξαντληθούν. Αυτές οι διαδικασίες είναι η αθροιστική και η διαιρετική. Μέσα από την πρώτη μπορούμε να οδηγηθούμε στη θεώρηση αντικειμένων οσοδήποτε μεγάλων διαστάσεων π.χ. θεωρώντας ένα αντικείμενο μήκους ΑΒ μπορούμε δρώντας αθροιστικά να θεωρήσουμε και το μέγεθος νΑΒ. Για τον Αριστοτέλη είναι αδύνατη η θεώρηση αντικειμένων άπειρων διαστάσεων και οι άπειρες ολότητες αντικειμένων δεν αποτελούν τελειωμένα αντικείμενα σπουδής. Για παράδειγμα δρώντας αθροιστικά ξεκινώντας από το μήκος ΑΒ μπορούμε να παράγουμε τα μήκη 2ΑΒ, 3ΑΒ, …, nΑΒ,… χωρίς να θεωρήσουμε αυτή την διαδικασία τελειωμένη. Αυτή είναι μία δυνητική σπουδή του απείρου. Ακόμη και με τους αριθμούς 1,2,3,… μπορεί το αντικείμενο της σπουδής να είναι οι φυσικοί αριθμοί αλλά δεν μπορούμε να θεωρήσουμε σαν αντικείμενο σπουδής το ίδιο το σύνολο των φυσικών αριθμών. Αντίστοιχα μέσα από την δεύτερη διαδικασία, για τον Αριστοτέλη ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μπορεί να είναι απείρως διαιρετό. Έτσι δοθέντος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ μπορούμε να δημιουργήσουμε τα 1/2ΑΒ,

1/4AB,… Με την παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα το μέγεθος AB να τμηθεί σε άπειρο πλήθος κομματιών. Και εδώ αντίστοιχα οι συγκεκριμένες τμήσεις του μεγέθους AB είναι δυνητικές. Έτσι το μέγεθος AB είναι δυνητικά άπειρα διαιρετό με την έννοια ότι σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα οσοδήποτε μεγάλος πεπερασμένος αριθμός τμήσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί αλλά όχι άπειρος. Π.χ. ας θεωρήσουμε ένα διαιρετή ενός ευθύγραμμου τμήματος δηλαδή κάποιον που θα αφιερώσει όλη του την ζωή στην διαδικασία της επαναλαμβανόμενης διαίρεσης του ευθύγραμμου τμήματος. Επίσης μετά τον διαδέχεται ένας άλλος διαιρέτης της επόμενης γενιάς κ.ο.κ. Ο συνολικός αριθμός των τμήσεων που μπορεί να επιτευχτεί από οσονδήποτε πεπερασμένο μεγάλο αριθμό διαιρετών μπορεί να γίνει οσονδήποτε μεγάλος αλλά θα παραμείνει πάντα πεπερασμένος. Για την επίτευξη αυτής της άπειρης διαιρετότητας του ευθυγράμμου τμήματος AB απαιτείται μία άπειρη ολότητα συνεχομένων διαιρετών επομένως άπειρος χρόνος. [Αν]

Για τον Αριστοτέλη μπορούμε να εργασθούμε σε ένα ανεξάντλητο άπειρο σύμπαν χωρίς ποτέ να μπορέσουμε να αδράξουμε ένα άπειρο αντικείμενο, το άπειρο ενός τέτοιου σύμπαντος είναι ένα δυνητικό άπειρο. Το πραγματικό άπειρο σαν μαθηματικό αντικείμενο, αποτελεί αποτέλεσμα νοητικού άλματος όπου το προηγούμενο άπειρο σύμπαν αποτελεί αντικείμενο στα πλαίσια ενός νέου σύμπαντος. Αυτό το νοητικό άλμα της αντικειμενοποίησης του απείρου αποτελεί μία μη επιτρεπτή διαδικασία. Το άπειρο μπορεί να γίνει αντιληπτό μόνο σαν μία προσπάθεια ατέρμονης προσπέλασης ενός συστήματος που δεν μπορεί να γίνει το ίδιο με ολιστικό τρόπο αντικείμενο σπουδής στα πλαίσια ενός άλλου υπερσυστήματος. [Αν]

Μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα δεν είχαν κατασκευαστεί αριθμητικά οι πραγματικοί αριθμοί. Με τον όρο «συνεχές» εξέφραζαν το σημερινό σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο Dedekind θέλοντας να αναπτύξει την αριθμητική μόνη της κατασκεύασε νέους αριθμούς ώστε να εκφράσει την πληρότητα ή την συνέχεια της ευθείας γραμμής αριθμητικά. Χώρισε όλα τα σημεία της ευθείας σε δύο τάξεις ώστε κάθε σημείο της πρώτης τάξης να είναι μικρότερο από κάθε σημείο ως δεύτερης τάξης. Τότε ένα και μόνο ένα σημείο πετυχαίνει αυτόν τον καταμερισμό των σημείων σε δύο τάξεις, αυτό το σημείο είναι μία τομή Dedekind δηλαδή είναι πραγματικός αριθμός.

Το 1872 και ο Dedekind και ο Cantor εξέδωσαν τις εργασίες τους κατασκευής των πραγματικών αριθμών (ℝ) από τους ρητούς αριθμούς (ℚ) είτε με τη μέθοδο των τομών στην πρώτη περίπτωση είτε με τις ακολουθίες Cauchy στην δεύτερη. Τα σημεία μέσα σε μία μαθηματική θεωρία αντικαθίστανται από τις τομές (Dedekind) ή από τα όρια βασικών ακολουθιών Cauchy. Πλέον το μαθηματικό συνεχές είναι ένα σύνολο αντικειμένων με σχέσεις και ιδιότητες (διάταξης, πυκνότητας και πληρότητας).Το αξίωμα της πληρότητας είναι αυτό που διαχωρίζει τη δομή των πραγματικών από τη δομή των ρητών αριθμών (κάθε μη κενό φραγμένο από πάνω υποσύνολο στο ℝ έχει supremum).

Σύμφωνα με τον Núñez et all (1999) μπορούμε να προσεγγίσουμε την συνέχεια μέσω της ενσώματης γνωσιακής λειτουργίας με γνωσιακά περιεχόμενα, αντικείμενα και εννοιολογικές μεταφορές. Ακόμη και μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Newton και Leibniz χρησιμοποίησαν τον φυσικό διαισθητικό ορισμό για την συνέχεια, δηλ «ως μία διαδικασία που προχωράει χωρίς χάσματα και διακοπές ή ξαφνικές μεταβολές». Ο παραπάνω ορισμός περιλαμβάνει γνωσιακά περιεχόμενα όπως η κίνηση ,οι ροές , η χρονική μεταβολή και η πληρότητα. Σ' αντίθεση ο ορισμός του Cauchy περιέχει εντελώς διαφορετικά γνωσιακά περιεχόμενα. Αρνείται σιωπηλά την κίνηση, την ροή και την πληρότητα προσεγγίζοντας την με εντελώς στατικά, διακριτά και ατομιστικά στοιχεία.

Ο όρος «συνέχεια» στα σημερινά μαθηματικά χρησιμοποιείται για τρείς έννοιες: την φυσική συνέχεια (όπως στον διαισθητικό – άτυπο ορισμό) , την έλλειψη χασμάτων (αφορά τις γραμμές ως σύνολα σημείων) και την διατήρηση της εγγύτητας (για τις συναρτήσεις). Οι δύο τελευταίες έννοιες αφορούν τον αυστηρό ορισμό της συνέχειας των Cauchy-Weierstrass (Μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' έναν αριθμό α αν η f(x) ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το α, υπάρχει το όριο της f(x) στο α και $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Το όριο $f(x)$ στο α δηλ η δήλωση $\lim_{x\to a} f(x) = L$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < |x - a| < \delta$, τότε $|f(x) - L| < \varepsilon$, $f(x)$ ορισμένη σ' ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το α, εκτός ίσως στο ίδιο το α και L ένας πραγματικός αριθμός). Αυτός ο ορισμός επηρεάστηκε από το πνεύμα που επικρατούσε στους μαθηματικούς τον 19^{ο} αιώνα που ήταν η αριθμητικοποιήση της ανάλυσης, η συνολοθεωρητική θεμελίωση και ο φορμαλισμός. Αυτές οι αλληλοσυμπληρωματικές κινήσεις απαιτούσαν την αντίληψη των γραμμών,

των επιπέδων και των n-διάστατων χώρων ως σημειοσύνολα. Επίσης ο ορισμός των Cauchy-Weierstrass απαιτεί μία σειρά από γνωσιακά αντικείμενα και περιλαμβάνει εννοιολογικές μεταφορές όπως μία γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων , η φυσική συνέχεια είναι έλλειψη χασμάτων και η προσέγγιση ενός ορίου είναι η διατήρηση της εγγύτητας κοντά σε ένα σημείο. [Nu]

Ας δούμε τις παραπάνω εννοιολογικές μεταφορές:

- Μία Γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων

Για την αντίληψη μίας γραμμής υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι αντίληψης. Ο ολιστικός τρόπος είναι ότι η γραμμή είναι απολύτως συνεχής και δεν αποτελείται από διακριτά στοιχεία. Αποτέλεσμα αυτού είναι η ευθεία να θεωρείται μία οντότητα διακεκριμένη από τα σημεία, τα οποία είναι θέσεις πάνω σε αυτή. Δεύτερος τρόπος αντίληψης είναι ότι μία γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων, και τα σημεία δεν είναι θέσεις πάνω σε αυτήν, αλλά μάλλον οι οντότητες από τις οποίες αποτελείται. Η πρώτη προσέγγιση είναι ισοδύναμη με την φυσική συνέχεια ενώ η δεύτερη με τον ορισμό του Cauchy. Αυτή η διάκριση στην αντίληψη της γραμμής υπήρχε σε όλη την διάρκεια της ιστορίας των μαθηματικών. Καμία από τις δύο δεν είναι εσφαλμένη ή ορθή αλλά μας παρέχουν διαφορετική συμπερασματολογία και γνωσιακές ιδιότητες που πρέπει να λάβουμε υπόψη στην διαδικασία μάθησης και διδασκαλίας.

- Η φυσική συνέχεια είναι έλλειψη χασμάτων

Σύμφωνα με την διαίσθησή μας όταν κινούμαστε κατά μήκος μίας γραμμής που αποτελεί ένα φυσικό συνεχές, γίνεται μ’ ένα συνεχές τρόπο. Δηλαδή για την μετακίνηση από ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Β διερχόμαστε από όλα τα ενδιάμεσα σημεία-θέσεις χωρίς να αφήνουμε χάσματα ανάμεσα στο φυσικό τμήμα ΑΒ της γραμμής. Η μεταφορά που χρησιμοποιείται στον ορισμό των Cauchy-Weierstrass και θεωρεί τα σημεία ως συστατικά στοιχεία της ίδιας της γραμμής, μία τέτοια μεταφορική γραμμή δεν την θεωρεί ένα φυσικό συνεχές αλλά ένα σύνολο σημείων. Αποτέλεσμα είναι το σύνολο σημείων να είναι χωρίς χάσματα. Σε αυτό το εννοιολογικό πλαίσιο η μεταφορά «μία γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων» συνεπάγεται τη μεταφορά η «φυσική συνέχεια είναι έλλειψη χασμάτων». Αυτή η

προσέγγιση της γραμμής ως σύνολο σημείων δεν μπορεί γνωσιακά να είναι φυσικά συνεχής αλλά συνεχής χωρίς χάσματα.

- Η προσέγγιση ενός ορίου είναι η διατήρηση της εγγύτητας κοντά σ' ένα σημείο.

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας των Cauchy-Weierstrass δεν υπάρχει καμία κίνηση και προσέγγιση, κανένας χρόνος αλλά στατικά στοιχεία. Γίνεται απαίτηση της ύπαρξης ανοιχτών διαστημάτων των πραγματικών αριθμών. Αυτή η έλλειψη χασμάτων των ανοιχτών διαστημάτων των πραγματικών αριθμών είναι η μεταφορική εκδοχή των Cauchy-Weierstrass που αντικαθιστά την φυσική συνέχεια της διαισθητικής γραμμής του γεωμετρικού ορίου του Newton. Για να αποφευχθεί η κίνηση της προσέγγισης και να αριθμητικοποιηθεί, αυτή η ιδέα της f που πλησιάζει έναν αριθμό L καθώς το x πλησιάζει έναν αριθμό α, δηλ η διατήρηση της εγγύτητας κοντά σε ένα πραγματικό αριθμό, αντικαθίσταται από το ότι η f(x) είναι αυθαίρετα κοντά στο L όταν το x είναι αρκετά κοντά στο α. Ο εψιλοντικός ορισμός των Cauchy-Weierstrass μας παρέχει την μεταφορά, η προσέγγιση του ορίου είναι η διατήρηση της εγγύτητας κοντά σε ένα αριθμό. Έτσι χρησιμοποιούν εννοιολογικές απεικονίσεις (μεταφορές) που τους επιτρέπει να θεωρούν εκ νέου την γεωμετρία (ολιστικές γραμμές) μέσα από την αριθμητική (διακριτούς αριθμούς). Η ίδια μεταφορά που χρησιμοποιήθηκε στην προσέγγιση του ορίου χρησιμοποιείται και στην συνέχεια της διατήρησης της εγγύτητας. Αυτή η μεταφορά έχει δύο βήματα πρώτον σε ένα αυθαίρετο πραγματικό αριθμό και δεύτερον σε ένα διάστημα χωρίς χάσματα.

Πολλοί μαθητές στην διδασκαλία του εψιλοντικού ορισμού καταλήγουν στο ότι περιέχει την ουσία του τι είναι συνέχεια καθώς και ότι είναι ένας από τους ορισμούς που καθιστούν την αυστηρότητα στην αριθμητικοποιήση της ανάλυσης. Αυτό δεν ισχύει, ο εψιλοντικός ορισμός πετυχαίνει μία ακρίβεια στον ορισμό «αντίστοιχα» που εμφανίζεται στον δυναμικό ορισμό του ορίου, όπου οι τιμές της f(x) έρχονται «αντίστοιχα» πιο κοντά στο L όταν έρχονται πιο κοντά οι τιμές του x στο α. Επίσης η απαίτηση του ορισμού των Cauchy-Weierstrass να ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα η f(x), δηλ το διάστημα αυτό να είναι χωρίς χάσματα, επιτυγχάνοντας έτσι μεταφορικά αντιληπτή την συνέχεια στην πραγματική ευθεία, μία δηλ χωρίς χάσματα (« συνεχή») εισαγωγή τιμών του x στην συνάρτηση. Αυτό που πραγματικά μας παρουσιάζει ο ορισμός είναι ότι όταν ισχύουν αυτές οι

μεταφορές, που είδαμε (οι γραμμές γίνονται αντιληπτές σαν σύνολα πραγματικών αριθμών, η εισαγωγή των τιμών του x είναι χωρίς χάσματα, η συνάρτηση διατηρεί την εγγύτητα) τότε η απόδοση των τιμών της συνάρτησης είναι χωρίς χάσματα. Δηλ ο ορισμός των Cauchy-Weierstrass μας εγγυάται ότι μία χωρίς χάσματα εισαγωγή θα μας αποδώσει μία χωρίς χάσματα απόδοση τιμών. Επίσης με τον ορισμό αυτόν στα πλαίσια της αριθμητικοποίησης αντιμετωπίζονται όλες τις πρωτότυπες και παθολογικές καταστάσεις. [Nu]

Σχηματισμός της εικόνας έννοιας (concept image)

Οι ορισμοί που δίνουμε στα μαθηματικά δεν αφομοιώνονται πάντα από τους μαθητές. Η σκέψη και ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνουν οι μαθητές δεν ταυτίζεται πάντα με την λογική των μαθηματικών. Υπάρχει μία διάσταση στο πώς ο μαθητής συλλαμβάνει μία έννοια μέσω των γνωστικών διεργασιών και πώς αυτή η έννοια ορίζεται τυπικά.

Οι Tall & Vinner (1981) εισάγουν την εικόνα έννοιας (concept image) για να περιγράψουν την γνωστική δομή της έννοιας που μαθαίνει ο μαθητής που είναι το αποτέλεσμα της βιωματικής εμπειρίας του μαθητή μέσα από τα ερεθίσματα και την αλληλεπίδραση που δέχεται από το περιβάλλον. Η εικόνα έννοιας διαφέρει από άτομο σε άτομο καθώς το ίδιο το άτομο μπορεί να αντιδράσει διαφορετικά σε έναν όρο σε διαφορετικές περιπτώσεις.

Ο ορισμός της έννοιας (concept definition) που επίσης εισάγουν είναι ένας σχηματισμός λέξεων για να περιγράψει την έννοια. Ο συσχετισμός της εικόνας έννοιας και του ορισμού δεν είναι πάντα εγγυημένος κατά την διαδικασία μάθησης. Το υποκείμενο της μάθησης μπορεί να μεταβάλλει αυτόν τον ορισμό χρονικά αλλά να του αποδώσει και δική του ερμηνεία που να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε έναν «προσωπικό ορισμό της έννοιας».

Για να επέλθει γνωστική σύγκρουση πρέπει ταυτόχρονα να συνυπάρχουν διαφορετικές εικόνες έννοιας. Αυτή η σύγκρουση δεν είναι πάντα αντιληπτή από τον μαθητή. Αυτά τα τμήματα της εικόνας ή ορισμού έννοιας που συγκρούονται ονομάζονται δυνητικοί παράγοντες σύγκρουσης. Όταν ο μαθητής έρχεται σε γνωστική σύγκρουση από διαφορετικούς παράγοντες έχει σαν αποτέλεσμα να αποτύχει να επιλύσει ένα πρόβλημα με αποτέλεσμα σε αυτό το πλαίσιο να

αναθεωρήσει την εικόνα έννοιας που έχει σχέση με τον ορισμό έννοιας. Υπάρχει και η περίπτωση οι μαθητές να επιμένουν στη δική τους εικόνα έννοιας με αποτέλεσμα να θεωρούν περιττό τον ορισμό έννοιας.

Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση η διδασκαλία γίνεται με εισαγωγή του ορισμού έννοιας. [Vi] Αυτή η τακτική δεν σημαίνει ότι οι μαθητές θα κατακτήσουν την έννοια. Κατάκτηση τη έννοιας γίνεται όταν οι μαθητές είναι σε θέση να σχηματίζουν μόνοι τους την εικόνα έννοιας. Αυτό δεν συμβαίνει με την αποστήθιση του ορισμού της έννοιας. Η γνώση του ορισμού της έννοιας από τον μαθητή μπορεί να συνοδεύεται από παντελή έλλειψη εικόνας έννοιας, οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν τρόπους σκέψης που χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή. Επομένως πρέπει να γίνει μία μετάβαση από αυτόν τον καθημερινό τρόπο σκέψης στον πιο αυστηρό μαθηματικό, μία διαδικασία χρονοβόρα και διαφορετική σε κάθε άτομο. Η εισαγωγή μιας έννοιας πρέπει να γίνεται με διάφορα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα ώστε οι μαθητές να μπορούν να σχηματίσουν μία εικόνα έννοιας και εάν απευθυνόμαστε σε πιο προχωρημένο επίπεδο σπουδών στα μαθηματικά θα πρέπει οι μαθητές να μπορούν να χρησιμοποιούν τους αυστηρούς ορισμούς των μαθηματικών.

Κατανόηση της έννοιας του ορίου

Η επίδραση της γλώσσας στην κατανόηση του ορίου

Στην διδασκαλία για τη δημιουργία της εικόνας μίας έννοιας ο διδάσκων επηρεάζει τους μαθητές ανάλογα με τη γλώσσα που χρησιμοποιεί. Πρέπει να έχει πάντα υπόψη του ότι η γλώσσα που χρησιμοποιεί δεν χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο και από τους μαθητές αλλά αυτοί την αφομοιώνουν με βάση τις εμπειρίες τους.

Σύμφωνα με τον Monaghan (1991) σε έρευνα που έκανε σχετικά με την έννοια του ορίου κατέληξε ότι οι εκφράσεις «τείνει», «προσεγγίζει», «συγκλίνει» και «όριο» ενώ από τους μαθηματικούς χρησιμοποιούνται ισοδύναμα από τους μαθητές δεν συμβαίνει το ίδιο. Τα συμπεράσματα του για τις εκφράσεις ήταν οι ακόλουθες:

-Για το «όριο» χρησιμοποίησαν προτάσεις όπως το όριο ταχύτητας δηλαδή σαν ένα όριο που απαγορεύεται να υπερβούμε. Ένα τέτοιο όριο υποδηλώνει ένα φράγμα. Μία ακραία τιμή ή η τιμή μετά από νόμιμο εφικτό.

-Για την «προσεγγίζει» χρησιμοποίησαν μία δυναμική ερμηνεία. Εκφράσεις όπως το «αυτοκίνητο πλησιάζει τα φανάρια» δηλαδή μία κίνηση προς ένα τέρμα χωρίς απαραίτητα να το φτάνουμε.

-Για το «συγκλίνει» χρησιμοποίησαν εκφράσεις σχετικά με το πλησίασμα και γειτνίαση δύο αντικειμένων όπως «οι δρόμοι συγκλίνουν» πράγμα που δεν συνάδει με τις μαθηματικές εικόνες όπως της σύγκλισης σε έναν αριθμό.

-Για το «τείνει» χρησιμοποίησαν εκφράσεις από την προσωπική τους εμπειρία όπως «τείνει να πίνει πολύ».

Έτσι ενώ για τους μαθηματικούς οι παραπάνω εκφράσεις είναι αλληλοσυμπληρωματικές έννοιες οι μαθητές αποδίδουν διαφορετική ερμηνεία. Το «τείνει» και το «προσεγγίζει» θεωρούνται παρόμοιας σημασίας με ένα δυναμικό χαρακτήρα, ενώ το «συγκλίνει» προκαλεί σύγχυση με βάση την απόδοση που του δίνουν από την καθημερινότητα τους. Στην πλειοψηφία όμως το όριο αποδίδεται σαν ένα σύνορο.

Ο Cornu (1991) μελέτησε την ερμηνεία της έκφρασης «τείνει προς» καταλήγοντας στα παρακάτω:

— Πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του)

— Πλησιάζει χωρίς να φτάνει

— Πλησιάζει μέχρι σχεδόν να το φτάσει

— Μοιάζει

και για τις ερμηνείες της έκφρασης «όριο» (που συνήθως θεωρείται ένα απρόσιτο όριο) στα:

— Ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φτάσουμε

— Ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι δυνατόν να φτάσουμε

— Ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε χωρίς να το φτάνουμε

— Ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε και το φτάνουμε

— Ένα μέγιστο ή ελάχιστο

— Ένα ανώτερο ή κατώτερο όριο

— Ένα διάστημα

— Εκείνο που έρχεται αμέσως μετά από κάτι το οποίο έχουμε φτάσει

— Ένας περιορισμός ή απαγόρευση

— Ένα τέλος

Επίσης παρουσιάζει διασπορά η ερμηνεία των φράσεων «τείνει προς» και «όριο» από μαθητή σε μαθητή καθώς και στον ίδιο τον μαθητή από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή. Οι αυθόρμητες εικόνες που σχηματίζονται στους μαθητές παραμένουν ακόμη και σε ανώτερο επίπεδο των σπουδών τους με αποτέλεσμα πιθανώς να αποτελέσουν και δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης. [Cor2]

Μοντέλα κατανόησης του ορίου

Η Robert (1982) μελέτησε τα διάφορα πρότυπα που μπορεί να έχουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του ορίου μίας ακολουθίας. Στους μαθητές είχε δοθεί ο τυπικός ορισμός του ορίου, και τους ζητήθηκε να την περιγράψουν σαν να μην τους είχε δοθεί. Οι μαθητές είχαν την τάση να σχηματίζουν αντιλήψεις με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες σαν να μην γνώριζαν τον τυπικό ορισμό. Μερικές από τις αυθόρμητες αντιλήψεις που προέκυψαν ήταν: «οι τελικοί όροι είχαν την ίδια τιμή» και «οι τιμές δεν μπορούν να ξεπεράσουν το l».

Επίσης, προέκυψαν και άλλα μοντέλα όπως:

I. Μονοτονικά και δυναμικά μονοτονικά μοντέλα

-μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι μία αύξουσα (αντ. φθίνουσα) ακολουθία φραγμένη άνω (αντ. κάτω)

-μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι μία αύξουσα ακολουθία που πλησιάζει σε ένα όριο

II. Δυναμικά μοντέλα

-η α_n τείνει στο l

-η α_n πλησιάζει το l

-η απόσταση της α_n από το l γίνεται μικρή

-οι τιμές της ακολουθίας πλησιάζουν ανά αριθμό όλο και περισσότερο

III. Στατικά μοντέλα

-οι τιμές α_n βρίσκονται σε ένα διάστημα κοντά στο l

-τα α_n είναι συγκεντρωμένα γύρω από το l

IV. Μεικτά μοντέλα

-ένα μείγμα από τα παραπάνω

Γίνεται αντιληπτό ότι οι μαθητές δεν διαθέτουν μία εικόνα έννοιας για το όριο αλλά αρκετές και διαφορετικές που μπορούν να προκαλέσουν γνωστική σύγκρουση διότι συγκρούονται με τον τυπικό ορισμό του ορίου. Οι δυναμικές αντιλήψεις των μαθητών προέρχονται από τα μοντέλα διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται θεωρούν το όριο σαν μία προσέγγιση ή μία επ' άπειρον προσέγγιση.

Άλλα επικρατέστερα μοντέλα κατανόησης του ορίου είναι ως ένα αξεπέραστο φράγμα [Cor], ως άφθαστο [Sch] και ως κίνηση [Ta].

Εμπόδια κατανόησης -Επιστημολογικά εμπόδια

Στην προσπάθεια απόκτησης νέας γνώσης γίνεται ενσωμάτωση αυτής στην ήδη υπάρχουσα γνώση, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται εμπόδια. Σύμφωνα με τον Cornu (1991) τα εμπόδια διακρίνονται σε: α) γενετικά και ψυχολογικά, αποτελέσματα της ήδη υπάρχουσας βιωματικής εμπειρίας του εκάστοτε ατόμου, β) διδακτικά που αναπτύσσονται εξαιτίας της φύσης της διδασκαλίας και γ) επιστημολογικά που αναπτύσσονται εξαιτίας της ίδιας της φύσης των μαθηματικών.

Κατά τον σχεδιασμό μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη καθώς τα εμπόδια είναι αιτίες δημιουργίας γνωστικής σύγκρουσης και δυσκολίας στην κατάκτηση των εννοιών από τους μαθητές με αποτέλεσμα οι νέες μαθηματικές γνώσεις να περιορίζονται σε καθαρά φορμαλιστικό χαρακτήρα.

Τα επιστημολογικά εμπόδια ονομάστηκαν έτσι από τον Bachelor (1938). Είναι η αντίθεση που αντιμετωπίζουμε με την νέα προσλαμβάνουσα γνώση σε σχέση με την ήδη υπάρχουσα με αποτέλεσμα να πρέπει να απορρίψουμε ή να τροποποιήσουμε την προϋπάρχουσα. Ο Brausseau (1983) ορίζει ως επιστημολογικό εμπόδιο την αποτυχία λειτουργίας μιας γνώσης που λειτουργεί καλά σε ένα γνωστικό πεδίο να εφαρμοστεί σε ένα άλλο με αποτέλεσμα να δημιουργείται σύγκρουση. Και εδώ πρέπει η αρχική λανθασμένη γνώση ή να απορριφθεί ή να μετασχηματιστεί σε καινούργια και αποτελεσματική. Για να γίνει αυτή η διαδικασία πρέπει η αρχική γνώση να εκτεθεί σε ένα πλαίσιο εφαρμογής όπου θα αποδεικνύει την αναποτελεσματικότητά της.

Μέσα από την ιστορία εξέλιξης της έννοιας του ορίου μπορούμε να εντοπίσουμε την ύπαρξη επιστημολογικών εμποδίων. Σύμφωνα με τον Cornu (1991) εντοπίζονται τέσσερα είδη όπως παρουσιάζονται ακολούθως:

1. Αποτυχία σύνδεσης γεωμετρίας και αριθμών.

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν μπόρεσαν να αποσαφηνίσουν την έννοια του ορίου παρόλο που ασχολήθηκαν με προβλήματα που θα μπορούσαν να το πετύχουν. Ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 π.Χ.) απέδειξε ότι ο λόγος εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους, με την εγγραφή κανονικών πολυγώνων στους κύκλους και τη συνεχόμενη αύξηση των πλευρών τους. Σε κάθε αύξηση ο λόγος των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο των διαμέτρων τους άρα και στην «οριακή» θέση το ίδιο θα ισχύει και για τους κύκλους.

Παρόλο που η μέθοδος της εξάντλησης είναι πολύ κοντά στην έννοια του ορίου, στην ουσία είναι μία μέθοδος που μπορεί να εξάγει ένα αποτέλεσμα χωρίς να έλθει αντιμέτωπη με την έννοια του ορίου. Η χρήση της περιορίζεται στα γεωμετρικά μεγέθη και δεν γίνεται καμία μεταφορά στους αριθμούς με αποτέλεσμα την αποτυχία

σύνδεσης αυτών των διαφορετικών πλαισίων και την μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

2. Η έννοια του απείρως μεγάλου και απείρως μικρού

Κατά την διάρκεια της εξέλιξης της έννοιας του ορίου πάντα βρισκόμαστε αντιμέτωποι με την ύπαρξη απειροελάχιστων ποσοτήτων. Πώς είναι δυνατόν να έχουμε τόσο μικρές ποσότητες που είναι σχεδόν μηδενικές ενώ δεν είναι πραγματικά μηδενικές. Το ερώτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό είναι τι γίνεται την χρονική στιγμή που μία τέτοια απειροελάχιστη ποσότητα μηδενίζεται. Ο Newton ισχυρίστηκε την «ψυχή των εκλιπόντων ποσοτήτων» την στιγμή που εξαφανίζονται και έτσι υπολόγισε τον «έσχατο λόγο τους». Αντίστοιχα, ο Euler ισχυρίστηκε ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτές τις απειροελάχιστες ποσότητες και όταν απαιτηθεί να μηδενίζονται. Αντίθετα, ο D' Alembert ισχυρίστηκε ότι μία ποσότητα είτε είναι μηδέν είτε όχι και απέφυγε την χρήση τους στον απειροστικό λογισμό. Στο "Cours d' analyse" ο Cauchy χρησιμοποιεί τα απειροστά.

Αντίστοιχα στους μαθητές το ε στον ορισμό του ορίου προκαλεί προβληματισμό γιατί τον θεωρούν έναν αριθμό που δεν είναι μηδέν αλλά μικρότερο από οποιονδήποτε αριθμό, έτσι και την αναπαράσταση 0,999… την θεωρούν τον προτελευταίο αριθμό πριν το 1, ενώ στην πραγματικότητα είναι το 1.

3. Η μεταφυσική άποψη του ορίου

Η μεταφυσική άποψη του ορίου δημιουργεί εμπόδια στους μαθητές. Αποτέλεσμα αυτού είναι η κατανόηση της έννοιας του ορίου να προβληματίζει ιδίως όταν ο υπολογισμός του ορίου δεν είναι άμεσος, με τις γνωστές μεθόδους άλγεβρας και αριθμητικής.

Η έννοια του ορίου δυσκόλεψε και τους μαθηματικούς στο να την χρησιμοποιήσουν και στο παρελθόν επειδή είχε σαφώς σχέση με την μεταφυσική ή τη φιλοσοφία. Ο D' Alembert ισχυρίστηκε ότι κάποιος μπορεί να τα καταφέρει με τον Διαφορικό Λογισμό και χωρίς τη μεταφυσική του απείρου. Το ίδιο πίστευε και ο Lagrange και θεωρούσε ότι μπορούσε να κάνει αυστηρή τη χρήση των απειροελάχιστων. Στην συνέχεια όμως προσπάθησε να θεμελιώσει τον Απειροστικό Λογισμό στην άλγεβρα των άπειρων σειρών αφού θεώρησε ότι τα απειροστά του Leibniz δεν έχουν κάποια μεταφυσική ιδιότητα.

4. Επιτυγχάνεται ή όχι το όριο;

Αυτή η διαμάχη ήταν παρούσα σε όλη την ιστορική διαδρομή της έννοιας του ορίου. Ο Robins(1697-1751) ισχυρίστηκε πως ποτέ το όριο δεν μπορεί να επιτευχθεί, δίνουμε τον όρο έσχατο μέγεθος στο όριο το οποίο μπορούμε να προσεγγίζουμε όσο θέλουμε αλλά ποτέ να γίνει ίσο με αυτό. Ο Jurin(1658-1750) ισχυρίστηκε ότι ο έσχατος λόγος δύο ποσοτήτων είναι ο λόγος που επιτυγχάνεται τη στιγμή που οι ποσότητες εξουδετερώνονται . Ο D'Allembert θεωρούσε ότι μία ποσότητα δεν μπορεί να γίνει ίση με το όριό της. Το όριο δεν συμπίπτει ποτέ με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο αλλά πλησιάζει πάντα και διαφέρει από αυτό όσο εμείς επιθυμούμε.

Η Artique (1998) σημειώνει ότι διάφοροι ερευνητές συγκλίνουν στα παρακάτω επιστημολογικά εμπόδια για την έννοια του ορίου:

- Το νόημα του «ορίου» προκαλεί την αντίληψη ως ένα φυσικό φράγμα ή τη λήψη του τελευταίου όρου μίας διαδικασίας και που προσπαθεί να μετατρέψει την σύγκλιση σε μονότονη σύγκλιση.
- Η υπεργενίκευση των ιδιοτήτων των πεπερασμένων διαδικασιών στις άπειρες διαδικασίες με βάση την αρχή του συνεχούς όπως δόθηκε από τον Leibniz.
- Η κυριαρχία των γεωμετρικών μορφών στην διαδικασία του ορίου. Η εύρεση του ορίου χωρίς το αριθμητικό πλαίσιο να συνοδεύεται από το αντίστοιχο γεωμετρικό γίνεται δύσκολη .

Όλα αυτά τα επιστημολογικά εμπόδια ήταν αναγκαία στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου.

Η Sierpiska (1987) παρουσιάζει τα παρακάτω επιστημολογικά εμπόδια:

1. Το «Ευρετικού χαρακτήρα εμπόδιο»

Η μέθοδος εύρεση του ορίου είναι μία κίνηση προς το όριο που δεν σχετίζεται με κάποια μαθηματική διαδικασία με αποτέλεσμα να χάνει την αυστηρότητά της. Το αποτέλεσμα δημιουργείται από την συμπερασματολογία, την ατελή επαγωγή και την εποπτεία.

Ανάλογα με το είδος της εποπτείας που κάνουμε χρήση έχουμε:

I. Το «Στατικό ευρετικό εμπόδιο» όπου η εποπτεία που χρησιμοποιούμε δεν σχετίζεται με κίνηση. Η εύρεση ενός ορίου γίνεται με την εύρεση ενός αντικειμένου που μόνο με προσεγγίσεις γίνεται να το γνωρίσουμε. Σε αυτήν την περίπτωση απουσιάζει η έννοια του απείρου καθώς αφήνει μία στατική αντίληψη του υπολογισμού του ορίου με κάποια ικανοποιητική προσέγγιση.

II. Το «Κινητικό ευρετικό εμπόδιο» όπου η εποπτεία που χρησιμοποιούμε σχετίζεται με την ιδέα της κίνησης. Η εύρεση ενός ορίου γίνεται με την εύρεση ενός αντικειμένου καθώς κινούμαστε και προσεγγίζουμε το άπειρο. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε εμφάνιση του απείρου (δυνητικού) ενώ έχουμε και συσχέτιση με την έννοια του χρόνου.

Τα παραπάνω δύο είδη εμφανίζονται και σε αριθμητικά και γεωμετρικά πλαίσια. Στο γεωμετρικό πλαίσιο αναδεικνύεται η έλλειψη κατανόηση της έννοιας των πραγματικών αριθμών.

2. Το εμπόδιο που σχετίζεται με την αυστηρότητα.

Εμπόδια που οφείλουν την ύπαρξή τους είτε στην υπερβολική αυστηρότητα ή στην αυστηρότητα που είναι σε λάθος κατεύθυνση

I. Το «εμπόδιο τύπου Εύδοξου»

Καθώς εμπλεκόμαστε με τον εψιλοντικό ορισμό (Εύδοξος) του ορίου όπου αποδεικνύουμε σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και αριθμητικών παραστάσεων και ανισώσεων μας αφήνει την αίσθηση ότι πρόκειται για μία αυστηρή δύσκαμπτη διαδικασία η κίνηση προς το όριο.

II. Το «εμπόδιο τύπου Fermat»

Η κίνηση προς το όριο στηρίζεται σε μία αυστηρή μαθηματική διαδικασία που σχετίζεται με αριθμούς και μεταβλητές και στη συνέχεια την θεώρηση κάποιων αριθμητικών τιμών αμελητέες σε σχέση με άλλες.

Από το εμπόδιο Fermat οδηγούμαστε στην αναλυτική έκφραση της συνάρτησης. Και στις δύο περιπτώσεις εμποδίων οδηγούμαστε σε μία φορμαλιστική αντιμετώπιση των μαθηματικών με περίπλοκο χειρισμό συμβόλων και απουσία της έννοιας του απείρου.

Στα πλαίσια μίας αποδοτικής διδασκαλίας θα πρέπει αυτά τα επιστημολογικά εμπόδια να τα αναδείξουμε και να έρθουν σε επαφή με αυτά οι μαθητές.

Αντιλήψεις - Πεποιθήσεις για την έννοια του ορίου

Κατά την διδασκαλία μίας καινούργιας μαθηματικής έννοιας στην ουσία δεν γίνεται διδασκαλία εκ του μηδενός. Ο μαθητής που έρχεται σε επαφή με την νέα έννοια έχει ήδη αποκτημένες από την βιωματική του εποπτεία και εμπειρία εικόνες, ιδέες και διαισθήσεις για την έννοια. Αυτές οι αντιλήψεις που προϋπάρχουν πριν την τυπική διδασκαλία μίας έννοιας ονομάζονται σύμφωνα με τον Cornu (1983) αυθόρμητες αντιλήψεις. Οι μαθητές αυτές τις αυθόρμητες αντιλήψεις τροποποιούν για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις της νέας έννοιας.

Ο Cobb (1986) ορίζει ως πεποιθήσεις τις προσωπικές υποθέσεις που κάνει ένα άτομο σχετικά με την πραγματικότητα. Οι πεποιθήσεις χρονικά είναι πιο σταθερές διότι είναι απαλλαγμένες από συναισθήματα και έχουν έναν γνωστικό χαρακτήρα. [Mc] Σύμφωνα με τον Szydlik (2000) οι πεποιθήσεις των φοιτητών για την εννοιολογική βάση του ορίου (που είναι πεποιθήσεις για τις συναρτήσεις, το άπειρο και τους πραγματικούς αριθμούς) αποκαλούνται πεποιθήσεις περιεχομένου

Ο Williams (2001) θέλοντας να μελετήσει τις αντιλήψεις των φοιτητών για το όριο έκανε έρευνα σε φοιτητές όπου κλήθηκαν να απαντήσουν μέσα από την παρουσίαση κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Μια έρευνα προκειμένου ο Williams να μελετήσει σε βάθος αυτό που ο Cornu αποκάλεσε «αυθόρμητα πρότυπα των φοιτητών για το όριο» και πώς αυτά τα πρότυπα μπορούν να αλλάξουν. Τα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που χρησιμοποίησε είχαν σαν επιδίωξη να αναδείξει: 1) την ύπαρξη διαφόρων προτύπων ορίου, 2) να γίνει χρήση των κατάλληλων παραδειγμάτων που θα βοηθούσε στην αλλαγή κατανόησης του ορίου από τους μαθητές προς τον τυπικό ορισμό και 3) να τεκμηριώσει τους παράγοντες που εμπλέκονται σε μία τέτοια αλλαγή. Οι κυριότερες αντιλήψεις που κατέγραψε ήταν:

1. Το όριο είναι μία μορφή εκτίμησης μίας δεδομένης τιμής από μία συνάρτηση με ένα συγκεκριμένο σφάλμα. Δηλαδή ο συμβολισμός $x \to s$ δίνει ολοένα και καλύτερες εκτιμήσεις καθώς περιορίζουμε το x κοντά στο s και ολοένα

μικραίνουμε το δεδομένο σφάλμα, αλλά η συνάρτηση δεν θα φθάσει ποτέ το όριο του.

2. Το όριο είναι ένας αριθμός κοντά στο οποίο η συνάρτηση παίρνει τιμές αλλά ποτέ την τιμή του ορίου. Όταν έχουμε $\lim_{x \to s} f(x)$ μπορούμε να κάνουμε τις τιμές της συνάρτησης να πλησιάσουν όσο κοντά θέλουμε αλλά ποτέ δεν θα γίνει ίση με αυτά. Παρομοίως θα γίνει και με το x σε σχέση με το s. Το εάν η f(x) είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη του ορίου δεν έχει νόημα αρκεί να είναι κοντά σε αυτό. Εάν ποτέ η f(x) γίνει ίση με το όριο τότε δεν έχουμε όριο.

3. Το όριο είναι μέγιστο ή ελάχιστο μίας συνάρτησης καθώς το x τείνει σε έναν αριθμό. Στην προσέγγιση του σε αυτόν τον αριθμό οι τιμές της συνάρτησης φράσσονται από την αριθμητική τιμή του ορίου. Έτσι, το όριο αποτελεί έναν αριθμό που δεν μπορούν να ξεπεράσουν οι τιμές μιας συνάρτησης. Στην πράξη ποτέ οι τιμές της δεν φτάνουν στο όριο αλλά το πλησιάζουν πάρα πολύ.

4. Η f έχει όριο το l όταν x→s, εάν οι τιμές της f(x) καθώς το x παίρνει τιμές κοντά στο s η f(x) παίρνει τιμές κοντά στο 1. Για οποιοδήποτε διάστημα του 1 υπάρχει αντίστοιχα ένα διάστημα στο s έτσι ώστε όλες οι τιμές του x στο διάστημα x να αντιστοιχούν σε ένα διάστημα του 1.

5. Η έννοια του ορίου είναι η διαδικασία με την οποία όταν το x κινείται όλο και πιο κοντά σε έναν αριθμό s, τότε οι f(x) κινούνται αντίστοιχα κοντά προς το όριο αλλά δεν το φτάνουν.

6. Το όριο είναι εκείνος ο αριθμός που μία συνάρτηση κινείται όλο και πιο κοντά σε αυτόν. Είναι σαν να διανύουμε κάθε φορά την μισή απόσταση που έχουμε από έναν τοίχο και την επόμενη φορά την υπόλοιπη μισή κ.ο.κ πλησιάζοντας συνέχεια πιο πολύ στο τοίχο που είναι σαν το όριο. Επίσης εδώ η συνάρτηση δεν φτάνει το όριο.

7. Το όριο μέσω του ορισμού ε-δ είναι η ιδέα της εγγύτητας. Μπορούμε να κάνουμε την f(x) να πάει όσο κοντά θέλουμε στο όριο, αρκεί να κάνουμε την κατάλληλη επιλογή του x, αρκετά κοντά στο s, τόσο όσο να ικανοποιείται το πλησίασμα της f(x) στο όριο.

8. Ο υπολογισμός του ορίου δεν μπορεί να γίνει με την επιλογή σημείων κοντά σε έναν αριθμό. Αυτή η επιλογή θα αντιστοιχεί σε πεπερασμένο πλήθος σημείων. Στην πραγματικότητα μπορεί να βρούμε κάτι διαφορετικό εάν βρεθούμε πιο κοντά σε έναν αριθμό σε σχέση με αυτό που θα προκύψει από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Πρέπει να μπορούμε να πηγαίνουμε όσο κοντά θέλουμε σε ένα αριθμό και ταυτόχρονα η f(x) να μένει κοντά στο όριο, γι' αυτό χρειαζόμαστε τα θεωρήματα ορίου.

Στα συμπεράσματα που έβγαλε ο Williams (1991) από τις συνεντεύξεις με τους διάφορους μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνά του κατέληξε ότι οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν πρότυπα ορίων που τους βοηθάνε να επιλύουν τις ασκήσεις που αντιμετωπίζουν στα τεστ. Οι μαθητές δρουν με μία διαδικαστική και δυναμική άποψη όσον αφορά την έννοια του ορίου με το να υπολογίζουν τιμές της συνάρτησης κοντά στο σημείο που μας ενδιαφέρει. Η αφομοίωση του τυπικού ορισμού δεν είναι εύκολη υπόθεση για τους μαθητές δεδομένου των απόψεων των μαθητών για την μαθηματική αλήθεια, για τα πρότυπα υπολογισμού του ορίου, τις γραφικές παραστάσεις και την εκ των προτέρων ύπαρξη αυτών. Αποτέλεσμα αυτών είναι οι μαθητές να μην έχουν προσδοκίες ώστε να αφομοιώνουν τον τυπικό ορισμό της έννοιας του ορίου.

Ο φορμαλιστικός τρόπος διδασκαλίας μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργηθεί η αντίληψη στους μαθητές ότι η κατανόηση στα μαθηματικά δεν είναι απαραίτητη. [Sc] Ακολουθούμε τον κανόνα και οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως εάν έχει ή δεν έχει νόημα. Αποπλαισιώνουν την σημαντικότητα οι μαθητές ότι στα μαθηματικά δεν είναι απαραίτητη η λογική αλλά η απομνημόνευση κανόνων και η συμμόρφωση προς τις υποδείξεις του διδάσκοντα.

Το όριο σαν διαδικασία και σαν αντικείμενο (procept)

Οι Gray & Tall (1992) ορίζουν σαν procept ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει είτε μία διαδικασία είτε μία έννοια. Στην μαθηματική εκπαίδευση οι μαθητές έρχονται σε επαφή με procept από την αριθμητική, την άλγεβρα και την ανάλυση. Στην διδασκαλία του ορίου, το όριο είναι procept γιατί οι συμβολισμοί $\lim_{x\to a} f(x) = l$ αντιπροσωπεύουν ένα αριθμητικό αποτέλεσμα ή μία διαδικασία

προσέγγισης. Σύμφωνα με τους Tall et all (2000) η διαδικασία του ορίου είναι δυνητικά άπειρη. Τα procepts τόσο στην αριθμητική όσο και στην άλγεβρα εάν είναι γνωστές οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να υπολογιστούν με συγκεκριμένους αλγόριθμους. Στην ανάλυση τα procepts δεν λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο γιατί τα procepts του ορίου δεν έχουν έναν αλγόριθμο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις υπολογισμού του. Οι αλλαγές στην δομή του procepts δημιουργεί δυσκολίες στην μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα και ύστερα στην ανάλυση. Αποτέλεσμα αυτού είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν πιο άνετα πεπερασμένους αλγόριθμους στην ανάλυση από ότι την άπειρη διαδικασία του ορίου.

Διδασκαλία ορίου μέσα από τα σχολικά βιβλία

Το όριο στην Γ΄ Λυκείου διδάσκεται μέσα από αναπαραστάσεις μονότονων συναρτήσεων αποδίδοντας έτσι μία δυναμική ερμηνεία προσέγγισης. Οι δυναμικές αντιλήψεις των μαθητών για τις άπειρες διαδικασίες προέρχονται από τα μοντέλα διδασκαλίας όπου θεωρούν το όριο σαν μία προσέγγιση ή μίας επ' άπειρον προσέγγισης.

Αρχικά στα σχολικό βιβλίο γίνεται μία εισαγωγή με διάφορα ερωτήματα που τα μαθηματικά των αρχαίων και οι μέθοδοι τους δεν επαρκούσαν για να δώσουν απάντηση σε αυτά. Είναι ερωτήματα για τα οποία ιστορικά η μαθηματική κοινότητα εισήγαγε την έννοια του ορίου στην προσπάθεια της να τα επιλύσει. Μέσα από αυτά ανακύπτουν και οι γεωμετρικές αντιλήψεις που είχαν για το όριο όπως είδαμε στην ιστορική αναδρομή. Για την εύρεση της εφαπτομένης θα μπορούσε να γίνει στο σχολικό βιβλίο χρήση και του χαρακτηριστικού τριγώνου που χρησιμοποίησαν οι Barrow, Newton και Leibniz. Για την εύρεση της εφαπτομένης θα μπορούσε επίσης να γίνει χρήση και η κινηματική μέθοδος του Torricelli και για το ερώτημα του μικτόγραμμου χωριού η μέθοδος της εξάντλησης φέρνοντας τους μαθητές σε επαφή με τις άπειρες διαδικασίες. Οι γεωμετρικές μορφές διδασκαλίας του ορίου πρέπει να συνοδεύονται μαζί με τα αντίστοιχα αριθμητικά πλαίσια, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει στα σχολικά βιβλία.

Σύμφωνα με τις γνωσιακές θεωρίες μάθησης δεν αναδεικνύεται το λειτουργικό-αλγοριθμικό και το συμβολικό-εννοιολογικό μέρος της έννοιας του ορίου για να θεωρηθεί ως διαδικασία και αντικείμενο αντίστοιχα. Η έννοια του ορίου δεν παρουσιάζεται σαν procept, έτσι ώστε ο συμβολισμός $\lim_{x\to a} f(x) = l$ να αντιπροσωπεύει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα ή μία διαδικασία προσέγγισης.

Η αποκλειστική εστίαση στους μεθόδους εύρεσης του ορίου μπορεί να οδηγήσει σε μία φορμαλιστική αντιμετώπιση των μαθηματικών με περίπλοκο χειρισμό συμβόλων και απουσία της έννοιας του απείρου. Στο σχολικό βιβλίο δεν παρουσιάζεται το όριο σαν μία διαδικασία άπειρου αθροίσματος όπως η παράσταση $\lim_{\nu\to\infty}(2{,}9 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{10000} + \dots + \frac{9}{10^{\nu}})$. Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιούν τις άπειρες διαδικασίες του απείρου όπως και τους πεπερασμένους αλγόριθμους.

Επίσης η χρήση μονότονων συναρτήσεων στο σχολικό βιβλίο συχνά επιφέρει μία αντίληψη στους μαθητές για μία μονότονη μετάβαση της συνάρτησης στο όριο. Με αποτέλεσμα την δημιουργία εμποδίων στην κατανόηση από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Απουσιάζουν παραδείγματα συναρτήσεων όπως η $f(x) = x\,\eta\mu\,\frac{1}{x}$ και η μελέτη του ορίου της στο μηδέν.

Για το γνωστικό εμπόδιο που δημιουργείται στους μαθητές για το εάν φθάνει μία συνάρτηση στο όριο της όπως είδαμε και στην βιβλιογραφία δεν γίνεται κάποια αναφορά. Θα μπορούσε να γίνει χρήση του αντιπαραδείγματος της σταθερής συνάρτησης. Επίσης μία εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του ορίου σύμφωνα με την οποία, στο όριο σχεδόν όλες οι τιμές της περιοχής του x μεταφέρονται στην περιοχή του y σχεδόν όλες. Δηλαδή μόνο πεπερασμένου πλήθους τιμές δεν βρίσκονται στην περιοχή του ορίου. Από τις σχεδόν όλες τιμές που μεταφέρονται στην περιοχή του ορίου μπορεί αυτές να είναι ίσες με το όριο μπορεί και όχι. Για αυτό και η συνάρτηση $f(x) = (-1)^n$ δεν έχει όριο στο 1 και στο -1 αντίστοιχα, διότι άπειρες τιμές υπάρχουν σε αυτές τις περιοχές αλλά επίσης άπειρες τιμές της συνάρτησης υπάρχουν και εκτός αυτών των περιοχών.

Παρακάτω παραθέτουμε αποσπάσματα από το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών, Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Μέτη, Κ. Μπρουχούτα, Σ. Παπασταυρίδη, Γ.

Πολύζου, Ο.Ε.Δ.Β σχετικά με την έννοια του ορίου, το μη πεπερασμένο όριο στο x_0 και του ορίου συνάρτησης στο άπειρο.

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

— Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

— Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;

— Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου;

Στις παραγράφους που ακολουθούν, αρχικά προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου "διαισθητικά", στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και μερικές βάσικές ιδιότητές του και τέλος, εισάγουμε την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης.

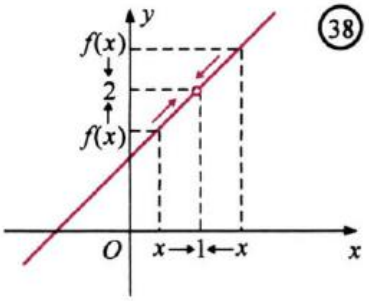
Η έννοια του ορίου

● Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και γράφεται

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \qquad x \neq 1.$$



38

Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = x+1$ με εξαίρεση το σημείο $A(1,2)$ (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x \neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2".

Γενικά:

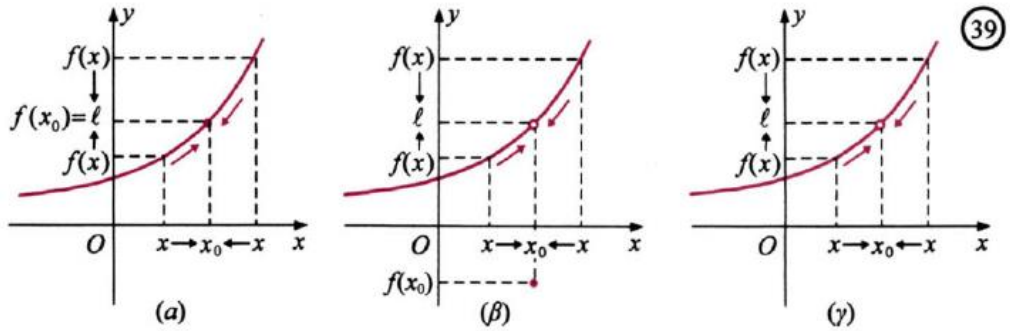
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή

"το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

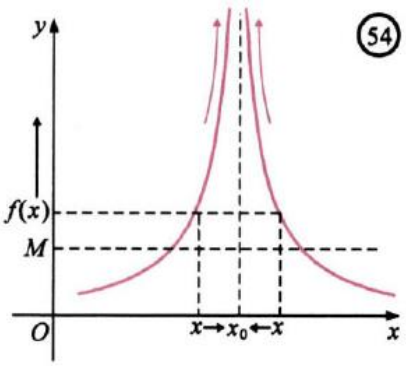
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

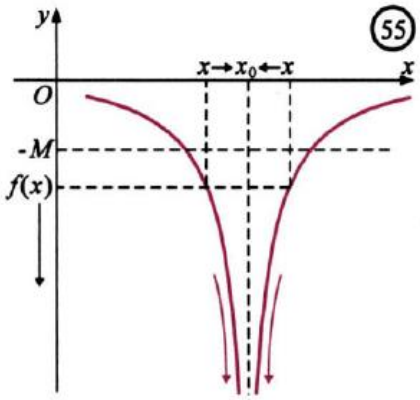
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty .$$



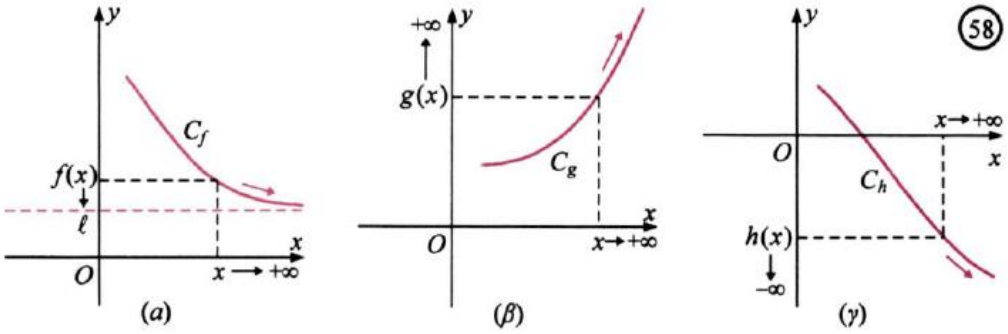
— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ $(M > 0)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty .$$



1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$.



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

— το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε

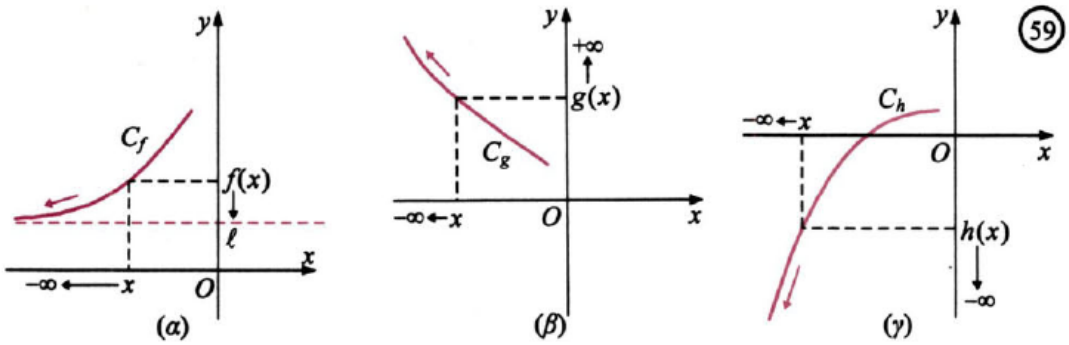
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

— το $h(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty .$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.
Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x\to-\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f,g,h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ $\qquad$ και $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : ΕΡΕΥΝΑ

4.1 Στόχοι και μεθοδολογία της έρευνας

Η έρευνα έγινε σε 70 μαθητές της Γ΄ Λυκείου του νομού Πιερίας από τους οποίους ήταν 37 αγόρια και 33 κορίτσια. Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν εφόσον είχαν διδαχθεί την έννοια του ορίου όπως ορίζει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Από τους μαθητές 18 ήταν Γενικής Παιδείας και 52 Κατεύθυνσης.

Πίν.1 Κατεύθυνση

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Γεν Παιδείας	18	25,7	25,7	25,7
	Κατεύθυνσης	52	74,3	74,3	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Το ερωτηματολόγιο περιείχε ερωτήσεις σύγκρισης μεταξύ δύο αριθμών που δίνονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Ανάπτυξης (ανοικτού τύπου) για τον ορισμό του ορίου, συμπλήρωσης σύντομης απάντησης για τον επόμενο και το πλήθος αριθμών στα διάφορα σύνολα των αριθμών (ακέραιους , ρητούς και πραγματικούς) και του πιο κοντινού σ' ένα πραγματικό αριθμό. Επίσης ερωτήσεις σωστού-λάθους και πολλαπλής επιλογής ανάμεσα σε αναπαραστάσεις άπειρων διαδικασιών. Τα αποτελέσματα της έρευνας επεξεργάσθηκαν με το στατιστικό πακέτο SPSS.

Οι στόχοι της έρευνας ήταν:

- πως γίνεται η σύγκριση μεταξύ αριθμών με πεπερασμένα και άπειρα δεκαδικά ψηφία

- πως μεταφέρεται η δομή των φυσικών αριθμών, δηλ του επόμενου στους πραγματικούς αριθμούς

- πως αντιμετωπίζουν οι μαθητές την εγγύτητα στους πραγματικούς αριθμούς με την βοήθεια του ορίου

- πως αντιμετωπίζουν οι μαθητές έναν αριθμό όταν έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις

- οι αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου

- η συμπεριφορά τους απέναντι σε προβλήματα που περιέχουν διαφορετικές αναπαραστάσεις του ορίου

- τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν έχουν να διαχειρισθούν άπειρες διαδικασίες

4.2 Ποσοτική Ανάλυση

Ερώτηση 1η

Σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις σύγκρισης δύο αριθμών και τα ερωτήματα της ερώτησης ήταν τα παρακάτω: Συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς(<,=,>): (Ο συμβολισμός **…** σημαίνει άπειρα δεκαδικά ψηφία)

α) 0,111 ____ 0,11 β) 0,111 ____ 0,11… γ) 0,03 ____ 0,0299…

δ) 5,838 ____ 5,8383 ε) 0,99 _____ 0,9 στ) 0,999… ____ 1

Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 72,9%, 55,7%, 11,4%, 75,7%, 81,4% και 21,4% αντίστοιχα.

Στο πρώτο ερώτημα (0,111 ___ 0,11)είναι αναμενόμενο το ποσοστό επιτυχίας 72,98% εφόσον έχουμε σύγκριση δύο αριθμών με πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία. Στο δεύτερο ερώτημα (0,111 ___ 0,11…)ο δεύτερος αριθμός έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που είναι ίσα με ένα (το ότι υπάρχει απειρία δεκαδικών ψηφίων αναφέρεται και στην εκφώνηση «οι τρείς τελείες σημαίνουν άπειρα δεκαδικά ψηφία», επίσης πριν συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο οι μαθητές διευκρινίστηκε και από τον εκπαιδευτικό η λειτουργία των τριών τελειών). Το χαμηλό ποσοστό επιτυχίας 55,7% ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι οι μαθητές μπερδεύουν τα άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν φαίνονται με αποτέλεσμα να μην τα λαμβάνουν υπόψη. Στο τρίτο ερώτημα (0,03 ___ 0,0299…)προκύπτει το πρόβλημα της αναπαράστασης ενός αριθμού με δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις για αυτό και το τεράστιο ποσοστό αποτυχίας 88,6% και η καθολική απάντηση των μαθητών ότι η αναπαράσταση του αριθμού με άπειρα δεκαδικά ψηφία 9 είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο αριθμό με μεγαλύτερο κατά μία δεκαδική τάξη αριθμό πριν τα άπειρα δεκαδικά 9. Προφανώς εδώ αναδεικνύεται το πρόβλημα της κατανόησης των μαθητών ότι οι αριθμοί μπορεί να προκύψουν από μία άπειρη διαδικασία και το αποτέλεσμα αυτό να αυτονομηθεί και έτσι να προκύψει μία άλλη αναπαράσταση του αριθμού. Στα τέταρτο ερώτημα (5,838 ____ 5,8383) προφανώς η σύγκριση μεταξύ δύο αριθμών με πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία οδηγεί σε αυτό το ποσοστό επιτυχίας 75,7%. Στο πέμπτο ερώτημα (0,99 ___ 0,9) που είναι όπως το προηγούμενο ζητείται η σύγκριση μεταξύ δύο αριθμών με διαφορετικό δεκαδικό μέρος και ίδιο ακέραιο με αποτέλεσμα το ποσοστό επιτυχίας 81,4%. Στο έκτο (0,999… ___ 1) και τελευταίο ερώτημα που έχει τα χαρακτηριστικά του τρίτου, συναντάμε μεγάλο ποσοστό αποτυχίας 78,6%.

Μέσα από τις συγκρίσεις ανακύπτει το πρόβλημα της ισότητας ενός αριθμού όταν αυτός δίνεται με δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις για αυτό και τα ποσοστά

επιτυχίας στα α), δ) και ε) με 72,9% , 75,7% και 81,4% αντίστοιχα (λόγο των πεπερασμένων δεκαδικών ψηφίων, η σύγκριση τέτοιων αριθμών είναι πιο οικεία αναπαράσταση σύγκρισης για τους μαθητές) και στα β), γ) και στ) αντίστοιχα μικρά ποσοστά επιτυχίας με 55,7%, 11,4% και 21,4%. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών καθώς κα τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών σε κάθε υποερώτημα.

Πιν.2 Ερώτηση 1α (0,111 ____ 0,11)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	<	19	27,1	27,1	27,1
	>	51	72,9	72,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.3 Ερώτηση 1α

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	19	27,1	27,1	27,1
	Σωστό	51	72,9	72,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.4 Ερώτηση 1β (0,111 ____ 0,11…)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	<	39	55,7	55,7	55,7
	=	15	21,4	21,4	77,1
	>	16	22,9	22,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.5 Ερώτηση 1β

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	31	44,3	44,3	44,3
	Σωστό	39	55,7	55,7	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.6 Ερώτηση 1γ (0,03 ____ 0,0299…)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	=	8	11,4	11,4	11,4
	>	62	88,6	88,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.7 Ερώτηση 1γ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	62	88,6	88,6	88,6
	Σωστό	8	11,4	11,4	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.8 Ερώτηση 1δ (5,838 ____ 5,8383)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	<	54	77,1	77,1	77,1
	=	2	2,9	2,9	80,0
	>	14	20,0	20,0	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.9 Ερώτηση 1δ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	17	24,3	24,3	24,3
	Σωστό	53	75,7	75,7	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.10 Ερώτηση 1ε (0,99 _____ 0,9)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	<	12	17,1	17,1	17,1
	=	1	1,4	1,4	18,6
	>	57	81,4	81,4	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.11 Ερώτηση 1ε

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	13	18,6	18,6	18,6
	Σωστό	57	81,4	81,4	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.12 Ερώτηση 1στ (0,999… ____ 1)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	<	54	77,1	77,1	77,1
	=	15	21,4	21,4	98,6
	>	1	1,4	1,4	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.13 Ερώτηση 1στ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	55	78,6	78,6	78,6
	Σωστό	15	21,4	21,4	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.14 αριθμός σωστών ερ_1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	5	7,1	7,1	7,1
	1,00	7	10,0	10,0	17,1
	2,00	8	11,4	11,4	28,6
	3,00	13	18,6	18,6	47,1
	4,00	27	38,6	38,6	85,7
	5,00	6	8,6	8,6	94,3
	6,00	4	5,7	5,7	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.15 Κατεύθυνση1 * αριθμός σωστών ερ_1 Crosstabulation

Count

		αριθμός_σωστών_ερ_1							Total
		,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	1	3	2	8	4	0	0	18
	Κατεύθυνσης	4	4	6	5	23	6	4	52
Total		5	7	8	13	27	6	4	70

<u>Ερώτηση 2η</u>

Σε αυτήν την ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν πόσοι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ άλλων δύο του ιδίου συνόλου αριθμού καθώς και να βρούνε τον επόμενο και τον πλησιέστερο αριθμό όπου βέβαια αυτό ορίζεται. Τα αντίστοιχα ερωτήματα ήταν τα παρακάτω και τα ποσοστά επιτυχίας 98,6%, 95,7%, 37,1%, 14,3%, 60,0% και 12,9% αντίστοιχα:

α) Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν ανάμεσα στο -2 και στο 2 ;

β) Ποίος από τους παραπάνω είναι επόμενος του -2 ;

γ) Πόσα κλάσματα (ρητοί αριθμοί) υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{5}{8}$ και στο $\frac{7}{8}$;

δ) Ποίο από όλα αυτά τα κλάσματα βρίσκονται ανάμεσα στα $\frac{5}{8}$ και $\frac{7}{8}$ είναι επόμενο του $\frac{5}{8}$;

ε) Πόσοι πραγματικοί βρίσκονται ανάμεσα στο 0,999 και το 1 ;

στ) Ποιος από τους παραπάνω είναι πιο κοντά στο 1 ;

Το ποσοστό επιτυχίας στο πρώτο υποερώτημα είναι 98,6%, αναμενόμενο λόγου της βιωματικής εμπειρίας που έχουν οι μαθητές από τους φυσικούς αριθμούς. Στο δεύτερο υποερώτημα μεταφέρετε και η έννοια του επόμενου αριθμού από τους φυσικούς για αυτό και έχουμε τόσο μεγάλο ποσοστό επιτυχίας 95,7%. Όσοι ενδεχόμενος απαντούν λάθος ίσως να οφείλεται στο ότι οι αριθμοί του ερωτήματος είναι ακέραιοι με αποτέλεσμα να μην θεωρούν σαν επόμενο τον αριθμό με την μικρότερη απόλυτη τιμή αλλά αυτόν με την μεγαλύτερη για αυτό και απαντούν το -3 για επόμενο του -2. Στο τρίτο υποερώτημα αναδεικνύεται η αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν ότι υπάρχουν διαφορετικές αναπαραστάσεις για τους ρητούς πέρα από τις κλασματικές. Υπάρχει και η δεκαδική αναπαράσταση τους που δεν λαμβάνουν υπόψη οι μαθητές για αυτό και το μεγάλο ποσοστό αποτυχίας 62,9%. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι περισσότεροι απαντούν ότι ανάμεσα στα δύο κλάσματα 5/8 και 7/8 υπάρχει το 6/8 μεταφέροντας την διακριτότητα των φυσικών αριθμών των αριθμητών και στους ρητούς. Από τα ερωτηματολόγια προκύπτει ότι δεν χρησιμοποίησαν ισοδύναμα κλάσματα με άλλους παρανομαστές ώστε να μπορέσουν να παρεμβάλλουν άλλα κλάσματα ανάμεσα στους δύο αριθμητές. Στο τέταρτο υποερώτημα ελέγχεται κατά πόσον μεταφέρεται η έντονη βιωματική εμπειρία από τους φυσικούς αριθμούς ατόφια και στους ρητούς αριθμούς. Από το ερωτηματολόγιο προκύπτει ότι επαληθεύεται αυτό που αναφέρεται και στην βιβλιογραφία δηλ το πόσο έντονη είναι αυτή η βιωματική σχέση και οι μαθητές με καθολικό ποσοστό(85,7% αποτυχίας) την περνάνε άκριτα και στο σύνολο των ρητών αριθμών. Στο πέμπτο ερώτημα ελέγχεται το πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Το ποσοστό επιτυχίας 60% είναι αρκετά μεγάλο όχι όμως όσο το ποσοστό του πρώτου υποερώτηματος. Στο έκτο ερώτημα εξετάζεται η εγγύτητα στους πραγματικούς αριθμούς και κατά πόσο και εδώ μεταφέρεται η διακριτότητα των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς. Το ποσοστό επιτυχίας 12,9% είναι αναμενόμενο λόγου του ερωτήματος. Οι μαθητές γα να μπορέσουν να απαντήσουν τέτοια ερωτήματα χρειάζονται να έχουν επιτύχει μία εννοιολογική αλλαγή του τρόπου με τον οποίο αντιμετωπίζουν τους πραγματικούς αριθμούς. Πλέον στους πραγματικούς αριθμούς έχουμε την έννοια της οσοδήποτε κοντινής προσέγγισης επιθυμούνε και όχι του πιο κοντινού. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών καθώς κα τα ποσοστά επιτυχίας τους σε κάθε υποερώτημα.

Πιν.16 Ερώτηση 2α

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	1	1,4	1,4	1,4
	Σωστό	69	98,6	98,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.17 Ερώτηση 2β

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	3	4,3	4,3	4,3
	Σωστό	67	95,7	95,7	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.18 Ερώτηση 2γ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	44	62,9	62,9	62,9
	Σωστό	26	37,1	37,1	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.19 Ερώτηση 2δ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	60	85,7	85,7	85,7
	Σωστό	10	14,3	14,3	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.20 Ερώτηση 2ε

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	28	40,0	40,0	40,0
	Σωστό	42	60,0	60,0	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.21 Ερώτηση 2στ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	61	87,1	87,1	87,1
	Σωστό	9	12,9	12,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.22 αριθμός σωστών ερ_2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	1	1,4	1,4	1,4
	1,00	2	2,9	2,9	4,3
	2,00	20	28,6	28,6	32,9
	3,00	22	31,4	31,4	64,3
	4,00	16	22,9	22,9	87,1
	5,00	3	4,3	4,3	91,4
	6,00	6	8,6	8,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.23 Κατεύθυνση1 * αριθμός σωστών ερ2 Crosstabulation

Count

		αριθμός_σωστών_ερ_2							Total
		,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	1	1	9	5	2	0	0	18
	Κατεύθυνσης	0	1	11	17	14	3	6	52
Total		1	2	20	22	16	3	6	70

Ερώτηση 3η

Σε αυτήν την ερώτηση οι μαθητές καλούνται να δώσουν τον ορισμό του ορίου και ταυτόχρονα να απαντήσουν μέσα από ερωτήσεις σωστού και λάθους. Τα ερωτήματα που κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές ήταν τα παρακάτω: Εάν ήσασταν καθηγητής πως θα δίνατε τον ορισμό της έννοιας του ορίου; Είναι σωστές (Σ) η λάθος (Λ) οι παρακάτω προτάσεις:

α) Το $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ σημαίνει ότι καθώς το x μεγαλώνει το f(x) πλησιάζει το l αλλά ποτέ δεν το φθάνει

β) Όταν μία συνάρτηση έχει $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ το l μπορούμε να το προσεγγίσουμε οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε καθώς προσεγγίζουμε το x_0 οσοδήποτε θέλουμε

γ) Όταν μία συνάρτηση έχει $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ το l είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της $f(x)$

Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών δεν περιλαμβάνεται ο ε-δ ορισμός του ορίου. Σωστή απάντηση από τους μαθητές θεωρείται οποιοδήποτε διαισθητική απάντηση. (η f(x) έχει όριο τον αριθμό l όταν x τείνει στο x_o, αν οι τιμές της f(x) προσεγγίζουν το l καθώς το x προσεγγίζει το x_o με οποιονδήποτε τρόπο). Αυτή η ερώτηση σκοπό έχει να αναδείξει τις πεποιθήσεις τους για το όριο. Υπάρχει μία σύγχυση για τον ορισμό του ορίου πολλοί μαθητές θεωρούν ότι η f(x) δεν μπορεί να φθάσει το όριο l αλλά μπορεί να το προσεγγίσει οσοδήποτε επιθυμούμε. Συνήθως χρησιμοποιούν τις έννοιες πολύ κοντά, προσεγγίζει και τείνει. Από την επεξεργασία προκύπτει ότι το 64,3% των μαθητών είχαν σωστή αντίληψη της έννοιας του ορίου, προτιμώντας την δυναμική προσέγγιση του ορίου. Το 35,7% απαντά λάθος. Στο δεύτερο μέρος της ερώτησης το πρώτο υποερώτημα αναδεικνύει το γνωστικό εμπόδιο και πεποίθηση που έχουν οι μαθητές με το εάν η συνάρτηση γίνεται ίση με το όριο. Εντύπωση παρουσιάζει ότι το 54,3% απαντάει σωστά. Το δεύτερο υποερώτημα αναφέρεται στην δυναμική προσέγγιση που μπορούμε να αποδώσουμε στον ορισμό του ορίου το 67,1% απαντάει σωστά δεδομένου ότι και αντίστοιχο ποσοστό δίνει σωστό ορισμό του ορίου. Στο τρίτο υποερώτημα εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές εμπλέκουν την μονοτονία με το όριο αναδεικνύοντας έτσι μία πεποίθηση των μαθητών για το όριο ότι είναι η μέγιστη ή η ελάχιστή τιμή που μπορεί να πάρει μία συνάρτηση και αποτελεί μια μορφή φράγματος. Το ποσοστό επιτυχίας σε αυτό το υποερώτημα είναι 70,0%. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών καθώς κα τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών σε κάθε υποερώτημα.

Πιν.24 Ερώτηση3 Ορισμός

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	25	35,7	35,7	35,7
	Σωστός	45	64,3	64,3	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.25 Ερώτηση 3α

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	32	45,7	45,7	45,7
	Σωστό	38	54,3	54,3	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.26 Ερώτηση 3β

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	23	32,9	32,9	32,9
	Σωστό	47	67,1	67,1	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.27 Ερώτηση 3γ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λάθος	21	30,0	30,0	30,0
	Σωστό	49	70,0	70,0	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.28 αριθμός σωστών ερ_3

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	4	5,7	5,7	5,7
	1,00	17	24,3	24,3	30,0
	2,00	30	42,9	42,9	72,9
	3,00	19	27,1	27,1	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.29 Κατεύθυνση1 * Ερώτηση 3α Crosstabulation

Count

		Ερώτηση_3α		Total
		Λάθος	Σωστό	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	8	10	18
	Κατεύθυνσης	24	28	52
Total		32	38	70

Πιν.30 Κατεύθυνση1 * Ερώτηση_3β Crosstabulation

Count

		Ερώτηση_3β		Total
		Λάθος	Σωστό	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	5	13	18
	Κατεύθυνσης	18	34	52
Total		23	47	70

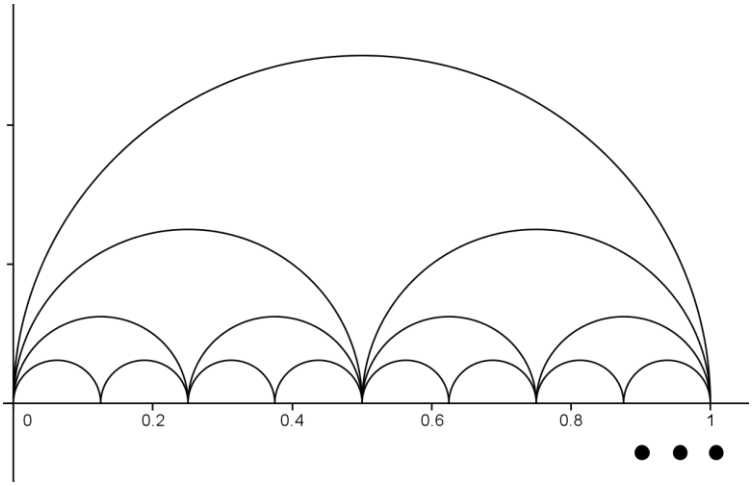
Πιν.31 Κατεύθυνση1 * Ερώτηση 3γ Crosstabulation

Count

		Ερώτηση_3γ		Total
		Λάθος	Σωστό	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	8	10	18
	Κατεύθυνσης	13	39	52
Total		21	49	70

<u>Ερώτηση 4η</u>

Σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αναπαριστούν άπειρες διαδικασίες. Τα ερωτήματα που κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές ήταν τα παρακάτω: Το αρχικό ημικύκλιο ακτίνας $\rho = 1/2$ το χωρίζουμε σε δύο νέα ημικύκλια ακτίνας $\rho = 1/4$.Με τον ίδιο τρόπο κάθε νέο ημικύκλιο το χωρίζουμε σε δύο νέα ημικύκλια κ.ο.κ. Συνεχίζοντας αυτή την διαδικασία δημιουργείται μία ακολουθία ν ημικυκλίων ακτίνας $\frac{1}{2^{\nu}}$. Καθώς $\nu \to \infty$ η συνολική περίμετρος των ημικυκλίων του κάθε όρου της ακολουθίας που δημιουργείται που τείνει; Το συνολικό εμβαδόν των ημικυκλίων που τείνει αντίστοιχα;



α) $\lim_{\nu\to\infty}$(συνολικής περιμέτρου των ημικυκλίων) =

□ □Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να τείνει το όριο □ π/2

□ 1(στο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος [0,1]) □ ∞

β) $\lim_{\nu\to\infty}$(συνολικού εμβαδού των ημικυκλίων) =

□ π □ □Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να τείνει το όριο

□ 0 □ ∞

Και τα δύο υποερωτήματα αφορούν άπειρες διαδικασίες. Στο πρώτο υποερώτημα ο κάθε όρος της ακολουθίας των ημικυκλίων που σχηματίζεται έχει σταθερό άθροισμα των περιμέτρων ημικυκλίων ίσο με π/2. Το αποτέλεσμα δεν ταυτίζεται με το διαισθητικό που είναι ο άξονας x΄x, δηλ το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος [0,1] το 1. Το 17,1% των μαθητών απάντησαν σωστά. Αναμενόμενο λόγο της δυσκολίας της έννοιας του ορίου που είναι μία άπειρη διαδικασία. Οι μαθητές δεν είναι συνηθισμένοι στη διδασκαλία τέτοιων ερωτημάτων. Το χαρακτηριστικό σε αυτό το υποερώτημα είναι το παράδοξο που μπορεί να δημιουργηθεί από αναπαραστάσεις με άπειρες διαδικασίες όταν το διαισθητικό αποτέλεσμα δεν ταυτίζεται με το πραγματικό αποτέλεσμα του ορίου. Εντύπωση παρουσιάζει ότι οι μαθητές δεν απαντούν την διαισθητική απάντηση που είναι 1 αλλά το άπειρο. Προφανώς μπερδεύουν ένα άπειρο άθροισμα και το άπειρο σαν αποτέλεσμα. Στο δεύτερο υποερώτημα το αποτέλεσμα του ολικού εμβαδού που περικλείεται ανάμεσα στα ημικύκλια και τον άξονα x΄x ταυτίζεται με το διαισθητικό. Για αυτό και είναι αυξημένο το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά στο 27,1%. Αυξημένο παρατηρείται και το ποσοστό όπως στο πρώτο υποερώτημα της επιλογής του απείρου. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών καθώς κα τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών σε κάθε υποερώτημα.

Πιν.32 Ερώτηση 4α

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Δεν υπάρχει όριο	6	8,6	8,6	8,6
	π/2	12	17,1	17,1	25,7
	1	17	24,3	24,3	50,0
	άπειρο	35	50,0	50,0	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.33 Ερώτηση 4β

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	π	6	8,6	8,6	8,6
	Δεν υπάρχει όριο	22	31,4	31,4	40,0
	0	19	27,1	27,1	67,1
	άπειρο	23	32,9	32,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.34 αριθμός σωστών ερ_4

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	40	57,1	57,1	57,1
	1,00	30	42,9	42,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.35 Κατεύθυνση1 * Ερώτηση 4α Crosstabulation

Count

		Ερώτηση_4α				Total
		Δεν υπάρχει όριο	π/2	1	άπειρο	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	4	4	2	8	18
	Κατεύθυνσης	2	8	15	27	52
Total		6	12	17	35	70

Πιν.36 Κατεύθυνση1 * Ερώτηση 4β Crosstabulation

Count

		Ερώτηση_4β				Total
		π	Δεν υπάρχει όριο	0	άπειρο	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	2	7	4	5	18
	Κατεύθυνσης	4	15	15	18	52
Total		6	22	19	23	70

Ερώτηση 5η

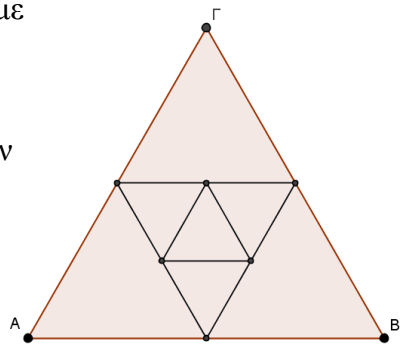
Σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν μία ερώτηση αναπαράστασης μίας άπειρης διαδικασίας, όπως είναι ο αριθμός των τριγώνων που μπορούν να δημιουργηθούν και το άθροισμα των περιμέτρων τους. Τα ερωτήματα που κλήθηκαν να απαντήσουν ήταν τα παρακάτω: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με α=1m .Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του και του τριγώνου που προκύπτει ενώνουμε πάλι τα μέσα των πλευρών του κ.ο.κ

α) Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε

□ άπειρα □ πεπερασμένο πλήθος

β) Το άθροισμα των περιμέτρων όλων αυτών των τριγώνων είναι:

□ άπειρο □ πεπερασμένος αριθμός



Το 51,4% απαντάει σωστά για το πρώτο ερώτημα ενώ μόλις το 52,9% απαντάει σωστά για το δεύτερο ερώτημα. Όσοι απαντούν λάθος στο πρώτο υποερώτημα προφανώς δεν έχουν συσχετίσει ότι η διαδικασία με την οποία παίρνουμε τα μέσα των τριγώνων και σχηματίζουμε νέα τρίγωνα μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρο. Στο δεύτερο υποερώτημα το ποσοστό αποτυχίας είναι αναμενόμενο γιατί απαιτεί βαθύτερη κατανόηση του απείρου. Και εδώ δυσκολεύονται οι μαθητές ν' απαντήσουν πως ένα άπειρο άθροισμα όπως το άθροισμα των περιμέτρων μπορεί να είναι πεπερασμένος αριθμός. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών καθώς κα τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών σε κάθε υποερώτημα.

Πιν.37 Ερώτηση 5α

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	άπειρα	36	51,4	51,4	51,4
	πεπερασμένα	34	48,6	48,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.38 Ερώτηση 5β

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	άπειρο	33	47,1	47,1	47,1
	πεπερασμένος	37	52,9	52,9	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.39 αριθμός σωστών ερ_5

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	7	10,0	10,0	10,0
	1,00	53	75,7	75,7	85,7
	2,00	10	14,3	14,3	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.40 Crosstab

Count

		Ερώτηση_5α		Total
		άπειρα	πεπερασμένα	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	7	11	18
	Κατεύθυνσης	29	23	52
Total		36	34	70

Πιν.41 Crosstab

Count

		Ερώτηση_5β		Total
		άπειρο	πεπερασμένος	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	7	11	18
	Κατεύθυνσης	26	26	52
Total		33	37	70

Ερώτηση 6η

Σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε μία ερώτηση που εξετάζει το πώς ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να προκύψει μέσα από μία άπειρη διαδικασία, έτσι ώστε να ισούνται οι δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού. Το ερώτημα που καλούνται να απαντήσουν οι μαθητές είναι το παρακάτω: Εάν πάρουμε τον αριθμό 2,9 και προσθέσουμε τα κλάσματα $\frac{9}{100}$, $\frac{9}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, $\frac{9}{10000}$ κ.ο.κ τότε η παράσταση $2{,}9 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{10000} + \ldots$ θα είναι ίση με: (δηλ το όριο $\lim_{\nu\to\infty}(2{,}9 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{10000} + \ldots + \frac{9}{10^{\nu}})$)

- 2,99999
- Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να τείνει το όριο
- 3
- ∞

Το 38,6% απαντάει σωστά αναμενόμενο λόγο της διαδικασίας του απείρου αθροίσματος. Όσοι απαντούν την πρώτη περίπτωση ενδεχομένως δεν έχουν αντιληφθεί ότι αυτή η διαδικασία του αθροίσματος παράγει άπειρα δεκαδικά ψηφία του 9. Το 27,1% απαντάει σε αυτή την επιλογή, ποσοστό υψηλό. Όσοι απαντούν σαν επιλογή το άπειρο προφανώς απαντούν με την λογική ότι ένα άπειρο άθροισμα έχει και άπειρο αποτέλεσμα. Το 15,7% απαντάει ότι δεν υπάρχει όριο. Προφανώς επηρεασμένο από την μορφή με την οποία δίνεται το όριο που δεν είναι συνηθισμένη αναπαράσταση για τους μαθητές σε σχέση με τα προβλήματα υπολογισμού ορίου που αντιμετωπίζουν. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών καθώς κα τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών σε κάθε υποερώτημα.

Πιν.42 Ερώτηση 6

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2,99999	19	27,1	27,1	27,1
	Δεν υπάρχει όριο	11	15,7	15,7	42,9
	3	27	38,6	38,6	81,4
	άπειρο	13	18,6	18,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

Πιν.43 Κατεύθυνση1 * Ερώτηση 6 Crosstabulation

Count

		Ερώτηση_6				Total
		2,99999	Δεν υπάρχει όριο	3	άπειρο	
Κατεύθυνση1	Γεν Παιδείας	8	3	2	5	18
	Κατεύθυνσης	11	8	25	8	52
Total		19	11	27	13	70

Στην συνέχεια παραθέτουμε τους συντελεστές συσχέτισης Pearson μεταξύ των αριθμών σωστών απαντήσεων των ερωτήσεων.

Πιν.44 Correlations

		αριθμός_σωστών_ερ_1	αριθμός_σωστών_ερ_2	αριθμός_σωστών_ερ_3	αριθμός_σωστών_ερ_4	αριθμός_σωστών_ερ_5
αριθμός_σωστών_ερ_1	Pearson Correlation	1	,385**	,176	,113	-,125
	Sig. (2-tailed)		,001	,146	,353	,302
	N	70	70	70	70	70
αριθμός_σωστών_ερ_2	Pearson Correlation	,385**	1	,195	,524**	-,080
	Sig. (2-tailed)	,001		,106	,000	,509
	N	70	70	70	70	70
αριθμός_σωστών_ερ_3	Pearson Correlation	,176	,195	1	,120	-,093
	Sig. (2-tailed)	,146	,106		,322	,444

	N	70	70	70	70	70
αριθμός_σωστών_ερ_4	Pearson Correlation	,113	,524**	,120	1	-,017
	Sig. (2-tailed)	,353	,000	,322		,890
	N	70	70	70	70	70
αριθμός_σωστών_ερ_5	Pearson Correlation	-,125	-,080	-,093	-,017	1
	Sig. (2-tailed)	,302	,509	,444	,890	
	N	70	70	70	70	70

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

4.3 Ποιοτική Ανάλυση

<u>Αντιλήψεις μαθητών για το όριο</u>

Δεδομένου της ποσοτικής ανάλυσης που έγινε στην προηγούμενη παράγραφο θα αναφερθούμε στις απαντήσεις των μαθητών που έδωσαν στο ερωτηματολόγιο, κυρίως σε αυτές που αφορούν τον ορισμό του ορίου όπου αποτυπώνονται οι περισσότερες από τις πεποιθήσεις των μαθητών για το όριο όπως αναφέρει και η βιβλιογραφία. Οι περισσότεροι ορισμοί που δίνουν οι μαθητές είναι της δυναμικής ερμηνείας του ορίου και οι πεποιθήσεις τους συμπίπτουν με αυτές που είδαμε στην βιβλιογραφίας. [Wi2], [Sc], [Cor2] Τα παραπάνω αποτυπώνονται στις απαντήσεις μαθητών όπως :

« Όριο είναι η τιμή που πλησιάζει να πάρει μία συνάρτηση όταν η μεταβλητή της συνάρτησης x πλησιάζει πάρα πολύ κοντά σε μία τιμή του x_o, αλλά δεν την παίρνει»

« Είναι η τιμή μιας μεταβλητής x μιας συνάρτησης που πλησιάζει σε μια τιμή x_o αλλά ποτέ δεν γίνεται ίση με αυτή»

« $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, ότι όσο το x κοντεύει προς το x_o , χωρίς να το φθάνει ποτέ, το f(x) κοντεύει χωρίς ποτέ να το φθάνει στο l»

«Όταν μία μεταβλητή τείνει σε μία άλλη μεταβλητή x_1 δηλαδή $\lim_{x \to x_1}$ τότε το x παίρνει τιμές κοντά στο x_1 χωρίς όμως να γίνει ίσο με x_1»

« όταν ένας αριθμός x προσεγγίζει έναν αριθμό l αλλά ποτέ δεν γίνεται ίσος με αυτόν»

« το $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ είναι ένας αριθμός που πλησιάζει το l αλλά ποτέ δεν γίνεται ίσο»

Επίσης επαληθεύεται όπως και στην βιβλιογραφία [Μο] ότι για την έκφραση «τείνει» οι μαθητές χρησιμοποιούν εκφράσεις από την προσωπική τους εμπειρία όπως «τείνει να πίνει πολύ» χωρίς να έχουν μαθηματικό νόημα. Ένας τέτοιος ορισμός είναι και ο παρακάτω:

« Όριο είναι το σημείο μέχρι το οποίο είναι κάποιος ελεύθερος να κάνει κάτι. Αν υπερβεί τα όρια οδηγείται σε λανθασμένες συμπεριφορές»

Επίσης άλλες ερμηνείες που αποδίδονται από την προσωπική τους εμπειρία είναι οι παρακάτω:

« Όπως τον έχει το σχολικό βιβλίο»

«Το όριο είναι μία αφηρημένη έννοια»

Επίσης ορισμός του ορίου στηριζόμενος στο μοντέλο του ορίου μέσω κίνησης αποδίδοντας μια δυναμική ερμηνεία προσέγγισης [Τα] αποτυπώνεται από τις παρακάτω απαντήσεις:

« Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_o τότε γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ και διαβάζουμε το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_o είναι l»

« Το $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, καθώς το x τείνει στο x_o, το l το προσεγγίζουμε κοντά σε οποιοδήποτε x_o»

« Το $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ σημαίνει ότι καθώς το x τείνει στο x_o τότε η f(x) τείνει στο l»

« Είναι η τιμή την οποία προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο η συνάρτηση όταν η μεταβλητή της συνάρτησης τείνει αυτή την τιμή»

«Το όριο μιας συνάρτησης f(x), $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ είναι η τιμή την οποία παίρνει η f(x) όταν το x προσεγγίζει τον αριθμό x_0»

« το $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ σημαίνει ότι καθώς πλησιάζουμε το x κοντά στο x_0 το f(x) τείνει να ισούται με το f(x_0)»

« όριο μίας συνάρτησης είναι η πλησιέστερη τιμή που μπορεί να πάρει όταν τείνει σε κάποιο x_0»

Επίσης άλλος ορισμός μαθητών ήταν ότι το όριο είναι μία έννοια παρεμβολής μεταξύ αριθμών:

« Το όριο είναι αυτό το σημείο το οποίο καθορίζει το όριο ανάμεσα στο πλήθος των αριθμών»

«όριο ουσιαστικά είναι μία διαδικασία για τον προσδιορισμό ενός σημείου μίας συνάρτησης βρίσκοντας τα κοντινότερα σημεία σε αυτό»

Άλλοι μαθητές μπερδεύονται μέσα από τον φορμαλισμό των ασκήσεων και όχι από την εννοιολογική κατανόηση αποδίδοντας σαν ορισμό τον παρακάτω που σχετίζεται με τους περιορισμούς που χρησιμοποιούνε στις ασκήσεις:

« Το όριο είναι οριακή τιμή μίας συνάρτησης σε έναν συγκεκριμένο αριθμό που είτε ορίζεται σε αυτόν είτε όχι»

« όριο μίας συνάρτησης f(x) είναι η πλησιέστερη στην τιμή που μπορεί να πάρει κοντά που την μηδενίζει χωρίς να παίρνει την τιμή της»

Ένας μαθητής έδωσε ορισμό με σημείο συσσώρευσης παρόλο που δεν διδάσκεται**: « Έστω f με πεδίο ορισμού A που τείνει στο R μιας συνάρτησης στο x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι limf στο σημείο x_0 είναι ίσο με τον πραγματικό αριθμό l»**

Επίσης κάποιοι μαθητές συσχετίζουν την μονοτονία με το όριο δίνοντας τον παρακάτω ορισμό :

« όριο της συνάρτησης f είναι όταν μία μεταβλητή x τείνει σε μία x_0 χωρίς η f να παίρνει την μέγιστη τιμή της»

Ποιοτική ΑνάλυσηΕρωτηματολογίων Μαθητών μέσω Συνεντεύξεων

Παρακάτω παραθέτουμε και αναλύουμε αποσπάσματα από τις απαντήσεις τριών μαθητών και τους διαλόγους ανάμεσα σε αυτούς και τον καθηγητή.

Μαθητής 1

Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Στην πρώτη ερώτηση στο τρίτο υποερώτημα ο μαθητής ισχυρίζεται ότι το 0,03 είναι μεγαλύτερο από το 0,2999… και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί πιστεύεις ότι το 0,03 είναι μεγαλύτερο από το 0,0299…»

Μαθητής1: «Γιατί έχει 999 δεκαδικά ψηφία»

Καθηγητής: «Πόσα τέτοια ψηφία έχει;»

Μαθητής1: «Άπειρα»

Καθηγητής: «Βρες τότε ένα ενδιάμεσο αριθμό»

Μαθητής1: «Δεν μπορώ να βρω…»

Καθηγητής: «Τότε πως είναι δυνατόν να είναι μικρότερος;»

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής δυσκολεύεται να κατανοήσει ότι οι δύο αναπαραστάσεις είναι ίσες, προφανώς λόγο το ότι δεν έχει αποσαφηνίσει την έννοια του απείρου και της πυκνότητας των αριθμών.

Στην συνέχεια η δεύτερη ερώτηση σχετίζεται με την έννοια του απείρου και της πυκνότητας των αριθμών. Στο πρώτο και δεύτερο υποερώτημα ο μαθητής απαντάει σωστά, λόγου της έντονης βιωματικής εμπειρίας που έχει με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Στο τρίτο υποερώτημα πόσα κλάσματα υπάρχουν ανάμεσα στα 5/8 και 7/8 ο ,μαθητής απαντάει **«Άπειρα»**. Στην ερώτηση του καθηγητή **«Γιατί ισχύει αυτό;»**, ο μαθητής απαντάει ότι **« Ο αριθμός 5/8 είναι ίσος με 0,625 και ο 7/8 ίσος με 0,875, και μεταξύ αυτών υπάρχουν άλλοι άπειροι αριθμοί μεταξύ τους»**. Ο μαθητής έχει αντιληφθεί ότι οι αριθμοί μπορούν να εκφράζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις και μπορεί να μεταβαίνει κάποιος από την μία αναπαράσταση στην άλλη. Στο επόμενο υποερώτημα αναγνωρίζει ότι ανάμεσα στο 0,999 και το 1 υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Στο υποερώτημα **« Ποιος από αυτούς είναι πιο κοντά στο 1;»** ισχυρίζεται ότι **«είναι ο 0,999…»** και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Μαθητής1: «Πιο κοντά είναι ο 0,9999…»

Καθηγητής: «Μα δεν είπαμε παραπάνω ότι ο 0,999… και ο 1 είναι ίσοι»

Μαθητής1: «Ναι μα δεν μπορεί να μην είναι ο πιο κοντινός , αφού δεν.., αν δεν είναι αυτός τότε … ποιος είναι;»

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής δεν έχει κατανοήσει πλήρως τη εγγύτητα στους πραγματικούς αριθμούς και δεν την έχει συσχετίσει με το όριο.

Στη τρίτη ερώτηση μας δίνει σωστά τον ορισμό του ορίου. « **Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 τότε γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ και διαβάζουμε το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 είναι l».** Στην ερώτηση του καθηγητή «**Τι εννοείς τείνει;**» απαντάει με το γνωστό γνωστικό εμπόδιο « **Τείνει… δεν θα φθάσει θα το προσεγγίσει όσο θέλουμε αλλά δεν θα το φθάσει ποτέ…**». Στο πρώτο υποερώτημα απαντάει λάθος και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Η f(x) δεν μπορεί να φθάσει το όριο της;»

Μαθητής1: «Όχι βέβαια, μπορεί να το προσεγγίσει όσο θέλει, αλλά ποτέ δεν θα το φθάσει θα είναι ή μεγαλύτερη ή μικρότερη αλλά ποτέ το ίδιο»

Καθηγητής: «Και πόσο κοντά θα φθάσει έτσι;»

Μαθητής1: «Είπαμε όσο θέλουμε άπειρα, απεριόριστα κοντά…»

Καθηγητής: «Όταν λες άπειρα τι εννοείς»

Μαθητής1: «Ε, … άπειρα»

Καθηγητής: «Δηλ , θα τελειώσει ποτέ;»

Μαθητής1: « Ε… ,δεν ξέρω, μάλλον ποτέ»

Καθηγητής: «Εάν πάρουμε την f(x)=c , τότε και τα άλλα x πέρα από το x_0 τι τιμή θα έχουν;»

Μαθητής1: «c; Δεν ξέρω…»

Καθηγητής: «c θα έχουν , το όριο όμως πόσο θα είναι;»

Μαθητής1: «Και αυτό c, αλλά τότε θα είναι ίσα, η f(x) θα φθάσει το c»

Από τα παραπάνω αναδεικνύεται το πόσο δυσκολεύει τους μαθητές το επιστημολογικό εμπόδιο που αναφέρεται και στην βιβλιογραφία κατά πόσο μία συνάρτηση φθάνει ή όχι το όριο της.

Στην τέταρτη ερώτηση εφόσον του ξαναδίνουμε διευκρινήσεις για τις τρείς τελείες στο πρώτο υποερώτημα ο μαθητής απαντάει ότι το όριο της συνολικής περιμέτρου των ημικυκλίων θα τείνει στο 1 δηλ στο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος [0,1]. Στην συνέχεια ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί τείνει στο 1;»

Μαθητής1:«Αφού καθώς συνεχίζονται οι διαιρέσεις τα ημικύκλια τείνουν να γίνουν ευθύγραμμα τμήματα. Η καμπύλη που είναι σαν συνεχιζόμενα ημικύκλια θα γίνει ευθεία, άρα θα είναι όσο το ευθύγραμμο τμήμα [0,1]»

Καθηγητής: «Εννοείς θα ταυτιστεί με το ευθύγραμμο τμήμα; Θα γίνει ένα με αυτό;»

Μαθητής1: «Ναι, ναι… θα πέσει ακριβώς πάνω του και θα είναι ακριβώς ίσα. Μα δεν το βλέπετε καθώς διαιρείται συνέχεια θα γίνει ίσο αφού και με το μάτι το βλέπουμε…»

Προφανώς εδώ ο μαθητής παρασύρεται από την φυσική εποπτεία της άπειρης διαδικασίας και δεν χρησιμοποιεί πιο σύνθετη ανάλυση και σύμφωνα με την διαίσθηση του απαντάει το 1. Στο δεύτερο υποερώτημα απαντάει **«μηδέν είναι το ολικό άθροισμα που υπάρχει ανάμεσα στα ημικύκλια και τον οριζόντιο άξονα»** προφανώς και εδώ η διαίσθηση οδηγεί τον μαθητή σε αυτήν την απάντηση μάλιστα συμπληρώνει **«εδώ σίγουρα είναι μηδέν, το βλέπω είμαι σίγουρος…»**

Στην πέμπτη ερώτηση αφού του ξαναδίνουμε επεξηγήσεις για την διαδικασία του σχηματισμού τρίγωνων ο μαθητής απαντάει στο πρώτο υποερώτημα ότι **«Μπορούν να σχηματιστούν άπειρα τρίγωνα»** στην ερώτηση μας εάν ποτέ θα τελειώσει αυτή η διαδικασία του σχηματισμού νέων τριγώνων απαντάει ότι **« Όχι, συνέχεια στο άπειρο»**. Στο δεύτερο υποερώτημα απαντάει ότι το άθροισμα των περιμέτρων των τριγώνων θα είναι άπειρο. Στην ερώτηση μας **«Γιατί να είναι άπειρο;»** ο μαθητής απαντάει **«Μα αφού θα είναι άπειρα τα τρίγωνα είναι δυνατόν το άθροισμα των περιμέτρων τους να είναι πεπερασμένος αριθμός; Αφού**

συνέχεια θα προσθέτεις τους περιμέτρους εφόσον είναι άπειρα τα τρίγωνα το άθροισμα τους είναι δυνατόν να μην είναι άπειρο; Έτσι δεν είναι….;». Προφανώς και σε αυτό το ερώτημα ο μαθητής δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι ένα άπειρο άθροισμα όπως αυτό των περιμέτρων των τριγώνων μπορεί να έχει πεπερασμένο αποτέλεσμα με αποτέλεσμα να απαντάει και εδώ σύμφωνα με την διαίσθηση ότι ένα άπειρο άθροισμα θα έχει αναγκαστικά και άπειρο αποτέλεσμα. Στην έκτη και τελευταία ερώτηση ο μαθητής απαντάει ότι το όριο της παράστασης είναι ίσο με 2,9999 και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος

Καθηγητής: «Πως κατέληξες σε αυτό το συμπέρασμα;»

Μαθητής1: «Αφού προσθέτω συνέχεια κλάσματα του 9 με μία δύναμη του 10 για παρανομαστή άρα συνέχεια θα προσθέτω δεκαδικά 9»

Καθηγητής: «Θα σταματήσεις να προσθέτεις τέτοια 9;»

Μαθητής1: «Ναι… ,ε… όχι αφού έχει $10^{ν}$ θα σταματήσει όταν πάρω ν εννιάρια»

Καθηγητής: «Και οι τρείς τελείες;»

Μαθητής1: «Ναι δεν θα σταματήσω να παίρνω εννίαρια»

Καθηγητής: «Στο πρώτο ερώτημα τι είπαμε για το 0,03 και το 0,299…;»

Μαθητής1: «Ναι… ,θα είναι ίσα»

Προφανώς και εδώ ο μαθητής δεν μπορεί να ενθυλακώσει τον αριθμό σε ένα νέο αντικείμενο που μπορεί να προκύψει από την άπειρη πρόσθεση και να μας δώσει το τρία σαν αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα είναι η αδυναμία των μαθητών να αντιληφτούν την έννοια του απείρου και να συσχετίζουν την έννοια του απείρου τόσο με το όριο όσο και με τους αριθμούς.

Μαθητής 2

Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Στην πρώτη ερώτηση στο δεύτερο υποερώτημα ο μαθητής απαντάει ότι οι αριθμοί είναι άνισοι και ότι ο αριθμός 1,111 είναι μεγαλύτερος από τον 1,11… και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί πιστεύεις ότι είναι μεγαλύτερος ο 1,111 από τον 1,11…»

Μαθητής2: «Γιατί έχει περισσότερα 1»

Καθηγητής: «Ναι αλλά τον 1,11… δεν μπορώ να τον γράψω και σαν 1,111111…..;»

Μαθητής2: «Ναι…, σωστά άρα τώρα είναι μεγαλύτερος »

Ο μαθητής οδηγείται στο να αναθεωρήσει την λαθεμένη του απάντηση. Στο τρίτο υποερώτημα ισχυρίζεται ότι το 0,03 είναι μεγαλύτερο από το 0,2999… και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί πιστεύεις ότι το 0,03 είναι μεγαλύτερο από το 0,0299…»

Μαθητής2: «Γιατί ο 0,0299… είναι μικρότερος…»

Καθηγητής: «Πόσο μικρότερος είναι δηλ;»

Μαθητής2: «Μισό λεπτό να κάνω την αφαίρεση 0,03-0,0299 ε,… είναι 0,01»

Καθηγητής: «Αν προσθέσεις όμως το 0,01 στο 0,0299…, τι θα βρεις; »

Μαθητής2: «Θα βρω 0,0399 άρα…, δεν γίνεται δεν μας δίνει το 3 αλλά μεγαλύτερο αριθμό»

Καθηγητής: «Άρα τότε πως είναι δυνατόν να είναι μικρότερος;»

Μαθητής2: «Ε τότε θα είναι ίσοι…, δεν μπορεί αφού το 0,0299… κάτι του λείπει για να γίνει 0,03 έτσι δεν είναι…;»

Καθηγητής: «Τι του λείπει;»

Μαθητής2: «Δεν ξέρω μάλλον δεν μπορώ να το βρω εγώ…»

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής δυσκολεύεται να κατανοήσει ότι οι δύο αναπαραστάσεις είναι ίσες, προφανώς για τους ίδιους λόγους όπως και ο πρώτος μαθητής δηλ του απείρου και της πυκνότητας των αριθμών.

Έχουμε σύγκριση αριθμών με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία. Στη ερώτηση **«τι υπάρχει μετά το 8του 5,838;»** ο μαθητής απαντάει **« τίποτα, σταματάνε εκεί τα ψηφία»** , στην συνέχει ο καθηγητής καλεί τον μαθητή να συμπληρώσει μερικά μηδενικά στο τέλος και να ελέγξει εάν μεταβάλλεται η αξία του αριθμού και ο μαθητής απαντάει «Όχι, ναι μετά μπορούν να υπάρχουν όσα μηδενικά θέλουμε..» άρα προφανώς μετά την καθοδήγηση του καθηγητή κατανοεί ότι στην δεκαδική αναπαράσταση μετά το τελευταίο μη μηδενικό δεκαδικό ψηφίο υπάρχουν άπειρα μηδενικά δεκαδικά ψηφία.

Στην συνέχεια στην δεύτερη ερώτηση στο τρίτο υποερώτημα, πόσα κλάσματα υπάρχουν ανάμεσα στα 5/8 και 7/8 ,ο μαθητής απαντάει **«Ένα»**. Στην ερώτηση του καθηγητή **«Γιατί ισχύει αυτό»**, ο μαθητής απαντάει ότι **« Το επόμενο κλάσμα μετά το 5/8 και πριν το 7/8 είναι το 6/8, γιατί δεν είναι υπάρχει κάποιο άλλο;»** ο καθηγητής καλεί τον μαθητή να μετατρέψει τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και του απευθύνει την ερώτηση **«Τώρα τι πιστεύεις; Είναι όντως το 6/8 το επόμενο;»**. Προφανώς ο μαθητής δεν έχει αντιληφθεί ότι οι αριθμοί μπορούν να εκφράζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις και μπορεί να μεταβαίνει κάποιος από την μία αναπαράσταση στην άλλη. Στο επόμενο υποερώτημα αναγνωρίζει ότι ανάμεσα στο 0,999 και το 1 υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Στο υποερώτημα **« Ποιος από αυτούς είναι πιο κοντά στο 1;»** ισχυρίζεται ότι **«Είναι ο 0,999»** και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Μαθητής2: «Πιο κοντά είναι ο 0,999»

Καθηγητής: «Γιατί να είναι αυτός; Δεν μπορείς να προσθέσεις και άλλα 9 στο τέλος; »

Μαθητής2: «Ναι, μα έτσι δεν θα σταματήσει αυτή η διαδικασία , αφού δεν.., συνέχεια θα προσθέτουμε και άλλα 9 …, ποιος θα είναι πιο κοντά;»

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής όπως και ο προηγούμενος δεν έχει κατανοήσει πλήρως τη εγγύτητα στους πραγματικούς αριθμούς και δεν την έχει συσχετίσει με αυτήν του όριο.

Στη τρίτη ερώτηση μας δίνει για ορισμό του ορίου το παρακάτω: **«όριο ουσιαστικά είναι μία διαδικασία για τον προσδιορισμό ενός σημείου μίας συνάρτησης βρίσκοντας τα κοντινότερα σημεία σε αυτό»** και στην ερώτηση του καθηγητή **«Όταν λες κοντινότερα τι εννοείς;»** ο μαθητής απαντάει με βάση την δυναμική προσέγγιση **«Όσο κοντά θέλουμε…»** και στην ερώτηση **«Πόσα είναι αυτά τα κοντινότερα σημεία;»** απαντάει **« Δεν ξέρω, μάλλον αρκετά… ίσως πάρα πολλά.. μάλλον δεν ξέρουμε»** δίνοντας και εδώ μία απάντηση που υπάρχει και στην βιβλιογραφία για την αντίληψη του ορίου για την συμπεριφορά ορισμένων σημείων κοντά στο σημείο που επιζητούμε το όριο.

Στο πρώτο υποερώτημα απαντάει λάθος και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Η f(x) δεν μπορεί να φθάσει το όριο της;»

Μαθητής2: «Όχι, μπορεί να την φθάσει πολύ κοντά αλλά θα είναι η μικρότερη ή μεγαλύτερη από το όριο»

Από τα παραπάνω αναδεικνύεται το πόσο δυσκολεύει τους μαθητές το επιστημολογικό εμπόδιο που αναφέρεται και στην βιβλιογραφία κατά πόσο μία συνάρτηση φθάνει ή όχι το όριο της. Στο επόμενο υποερώτημα απαντάει λάθος όπως επίσης και στο τρίτο υποερώτημα.

Στην τέταρτη ερώτηση ξαναδίνουμε στον μαθητή διευκρινήσεις για τις τρείς τελείες ότι η διαδικασία συνεχίζεται στο άπειρο. Στο πρώτο υποερώτημα ο μαθητής απαντάει το όριο της συνολικής περιμέτρου των ημικυκλίων θα τείνει στο 1 δηλ στο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος [0,1]. Στην συνέχεια ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί τείνει στο 1;»

Μαθητής2: «Γιατί τα ημικύκλια εάν συνεχίσουμε να κάνουμε διαιρέσεις κάποια στιγμή θα χαθούν και θα γίνουν όσο είναι το ευθύγραμμο τμήμα [0,1]»

Καθηγητής: «Πως μπορείς να είσαι τόσο σίγουρος για αυτό;»

Μαθητής2: «Φαίνεται από το σχήμα ότι αυτό θα γίνει ευθύγραμμο τμήμα»

Προφανώς εδώ ο μαθητής παρασύρεται από την φυσική εποπτεία της άπειρης διαδικασίας και δεν χρησιμοποιεί πιο σύνθετη ανάλυση και σύμφωνα με την

διαίσθηση του απαντάει το 1. Στο δεύτερο υποερώτημα απαντάει **«Μηδέν»** προφανώς και εδώ η διαίσθηση οδηγεί τον μαθητή σε αυτήν την απάντηση.

Στην πέμπτη ερώτηση αφού του ξαναδίνουμε επεξηγήσεις για την διαδικασία του σχηματισμού τρίγωνων ο μαθητής απαντάει στο πρώτο υποερώτημα ότι **«μπορούν να σχηματιστούν πεπερασμένα τρίγωνα»** στην ερώτηση μας **«Τι σε κάνει να πιστεύεις αυτό;»** ο μαθητής απαντάει **«Είναι πεπερασμένα γιατί εάν συνεχίσουμε συνέχεια να παίρνουμε ακόμη πιο μικρά τρίγωνα …ε μετά δεν θα χωράει να φτιάξουμε άλλα. Θα έχουμε εξαντλήσει όλο τον διαθέσιμο χώρο»**. Στην ερώτηση του καθηγητή **«Τι εννοείς δεν χωράει;»** ο μαθητής απαντάει **«Δεν μπορώ να φτιάξω άλλο τρίγωνο γιατί δεν χωράει στο κενό που θα μείνει. Ούτε τελεία δεν μπορείς να σχηματίσεις»** .Ο μαθητής εδώ έχει μία λάθος αντίληψη για την έννοια των σημείων και τις διαστάσεις που έχει το γεωμετρικό σημείο και παρασύρεται από την εποπτεία του ότι αφού δεν χωράει να σχηματίσει άλλο τρίγωνο άρα θα είναι πεπερασμένος και ο αριθμός των τριγώνων. Στο δεύτερο υποερώτημα απαντάει ότι το άθροισμα των περιμέτρων των τριγώνων θα είναι πεπερασμένο. Στην ερώτηση μας **«Γιατί να είναι πεπερασμένο;»** ο μαθητής απαντάει **«μα αφού θα είναι πεπερασμένα τα τρίγωνα λογικά τότε και η περίμετρος τους πεπερασμένος αριθμός δεν θα είναι;»** .

Στην έκτη και τελευταία ερώτηση ο μαθητής απαντάει ότι το όριο της παράστασης είναι ίσο με 2,9999 και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Πως κατέληξες σε αυτό το συμπέρασμα;»

Μαθητής2: «Άμα προσθέτω εννέα θα γίνει 2,99999»

Καθηγητής: «Γιατί μόνα πέντε εννέα θα προσθέσεις όσα είναι στο δεκαδικό μέρος; Δεν υπάρχουν άλλα εννέα;»

Μαθητής2: «Ναι αφού τόσα κλάσματα προσθέτω… ή κάποια άλλα ν εκεί που σταματάει ο παρανομαστής που έχει δύναμη με εκθέτη ν»

Καθηγητής: «Και οι τρείς τελείες ;»

Μαθητής2: «Ναι είπαμε ότι γίνεται συνέχεια.. στο άπειρο…»

Καθηγητής: «Στο πρώτο ερώτημα τι είπαμε για το 0,03 και το 0,299…;»

Μαθητής2: «Άρα θα είναι ίσα…;»

Προφανώς και εδώ ο μαθητής δεν μπορεί να αντιστοιχήσει ότι οι τρείς τελείες είναι μία διαδικασία που δεν σταματάει αλλά συνεχίζεται. Έχει μία αντίληψη της δυνάμει απειρίας, βλέποντας ότι είναι κάθε στιγμή πεπερασμένα πλήθος κλασμάτων μπορούμε να προσθέσουμε. Προφανώς και σε αυτό το ερώτημα ο μαθητής δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι μία άπειρη διαδικασία όπως το άθροισμα των κλασμάτων αποτελείται από άπειρα βήματα που δεν μπορούμε να έχουμε όλη την εποπτεία της διαδικασίας. Όπως και στα προηγούμενα ερώτηματα είναι η αδυναμία των μαθητών να αντιληφτούν την έννοια του απείρου.

Μαθητής 3

Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Στην πρώτη ερώτηση στο τρίτο υποερώτημα ο μαθητής ισχυρίζεται ότι το 0,03 είναι μεγαλύτερο από το 0,2999… και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί πιστεύεις ότι το 0,03 είναι μεγαλύτερο από το 0,0299…»

Μαθητής3: «Γιατί το 0,003 είναι όσο το 0,0299 και κάτι πολύ μικρό επιπλέον..»

Καθηγητής: «Μπορείς να μου προσδιορίσεις αυτό το κάτι πολύ μικρό;»

Μαθητής3: «Όχι με ακρίβεια… θα είναι μηδέν , πολλά μηδέν ένα»

Καθηγητής: «Πόσα πολλά μηδέν;»

Μαθητής3: «Δεν ξέρω πόσα είναι, πολλά πάντως…»

Καθηγητής: «Και εάν τον προσθέσεις είσαι σίγουρος ότι θα μας δώσει αποτέλεσμα τρία;»

Μαθητής3: «Μάλλον…»

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής δυσκολεύεται να κατανοήσει ότι οι δύο αναπαραστάσεις είναι ίσες, όπως και οι προηγούμενοι δύο μαθητές λόγου της έννοιας του απείρου και της πυκνότητας των αριθμών.

Στην δεύτερη ερώτηση που σχετίζεται με την έννοια του απείρου και της πυκνότητας των αριθμών, στο πρώτο και δεύτερο υποερώτημα ο μαθητής απαντάει σωστά, λόγου της έντονης βιωματικής εμπειρίας που έχουμε με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Στο τρίτο υποερώτημα πόσα κλάσματα υπάρχουν ανάμεσα στα 5/8 και 7/8 ο ,μαθητής απαντάει **«Ένα»**. Στην ερώτηση του καθηγητή **«Γιατί ισχύει αυτό»**, ο μαθητής απαντάει ότι **« Γιατί μεταξύ του 5 και του 7 υπάρχει το 6 άρα το κλάσμα που υπάρχει είναι το 6/8»** .Προφανώς ο μαθητής δεν έχει αντιληφθεί ότι οι αριθμοί μπορούν να εκφράζονται με διαφορετικές ισοδύναμες αναπαραστάσεις. Ο καθηγητής καλεί τον μαθητή να κάνει τι διαιρέσεις στα κλάσματα ώστε να τα μετατρέψει σε δεκαδικούς, και έτσι οδηγείται στην σωστή απάντηση. Στο επόμενο υποερώτημα αναγνωρίζει ότι ανάμεσα στο 0,999 και το 1 υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Στο υποερώτημα **« ποιος από αυτούς είναι πιο κοντά στο 1;»** ισχυρίζεται ότι **«είναι ο 0,999…»** και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Μαθητής3: «Πιο κοντά είναι ο 0,9999…»

Καθηγητής: «Μα δεν είπαμε παραπάνω ότι ο 0,999… και ο 1 είναι ίσοι»

Μαθητής3: «Τότε θα είναι αυτός που θα έχει ένα εννέα λιγότερο…»

Καθηγητής: «Υπάρχει αυτός; Μπορείς να τον υπολογίσεις; Που σταματάνε τα εννέα;»

Μαθητής3: «Υπάρχει απλά δεν μπορώ να τον βρω εγώ…»

Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής αντιμετωπίζει τις ίδιες δυσκολίες όπως και οι προηγούμενοι σχετικά με την εγγύτητα και τον συσχετισμό με το όριο.

Στη τρίτη ερώτηση μας δίνει για ορισμό του ορίου τον παρακάτω:

« το $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ σημαίνει ότι καθώς πλησιάζουμε το x κοντά στο x_o το f(x) τείνει να ισούται με το $f(x_o)$» και στη ερώτηση του καθηγητή όταν **«Λες τείνει τι εννοείς;»** ο μαθητής απαντάει με την γνωστή αντίληψη της προσέγγισης **«Πολύ κοντά, γύρω από αυτή αλλά όχι όσο αυτή…»**

Στο πρώτο υποερώτημα απαντάει λάθος και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Η f(x) δεν μπορεί να φθάσει το όριο της;»

Μαθητής3: «Όχι θα λείπει κάτι πάντα»

Καθηγητής: «Και πόσο θα είναι αυτό το κάτι που θα λείπει;»

Μαθητής3: «Κάτι το πολύ μικρό, απειροελάχιστο, ίσως και δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε αλλά κάτι θα λείπει…»

Καθηγητής: «Αυτό το πολύ μικρό που θα λείπει καθώς προσεγγίζεις το όριο θα είναι πάντα σταθερό;»

Μαθητής3: «Ναι, … πρέπει κάτι να λείπει γιατί αλλιώς θα γίνει ίση με το όριο »

Και σε αυτή την περίπτωση ακολουθεί διάλογος όπου ο καθηγητής φέρνει το παράδειγμα της σταθερής συνάρτησης. Για άλλη μία φορά αναδεικνύεται το πόσο δυσκολεύει τους μαθητές το επιστημολογικό εμπόδιο που αναφέρεται και στην βιβλιογραφία κατά πόσο μία συνάρτηση φθάνει ή όχι το όριο της.

Στην τέταρτη ερώτηση, εφόσον του ξαναδίνουμε διευκρινήσεις για τις τρείς τελείες ότι η διαδικασία συνεχίζεται στο άπειρο, στο πρώτο υποερώτημα ο μαθητής απαντάει ότι το όριο της συνολικής περιμέτρου των ημικυκλίων θα τείνει στο ∞. Στην συνέχεια ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Γιατί τείνει στο άπειρο;»

Μαθητής3: «Αφού συνέχεια θα διαιρείται το ημικύκλιο χωρίς να σταματήσει, η συνολική περίμετρος θα γίνει όσο η πλευρά δηλ το ευθύγραμμο τμήμα της βάσης, ε…»

Καθηγητής: «Δηλ το όριο της συνολικής περιμέτρου των ημικυκλίων, αφού τα ημικύκλια όπως λες θα διαιρούνται συνέχεια πόσο θα είναι;»

Μαθητής3: «Τα όριο θα γίνει άπειρο; … άπειρο δεν θα γίνει;»

Καθηγητής: «Στην αρχή είπες ότι θα γίνει όσο το ευθύγραμμο τμήμα. Εάν γίνει άπειρο τότε δεν θα έπρεπε να γίνει ευθεία αυτό το άθροισμα; Το ευθύγραμμο τμήμα όπως λες έχει πεπερασμένο μήκος»

Μαθητής3: «Όχι δεν γίνεται… άρα δεν μπορεί να είναι άπειρο…»

Προφανώς εδώ ο μαθητής παρασύρεται από το άπειρο άθροισμα και θεωρεί ότι θα έχει άπειρο αποτέλεσμα. Χρησιμοποιώντας την εποπτεία του φαίνεται να ταυτίζεται αυτό το άθροισμα με το 1, που είναι πεπερασμένο σ' αντίθεση με τον αρχικό του ισχυρισμό του ότι το άθροισμα γίνεται άπειρο.

Στην πέμπτη ερώτηση αφού του ξαναδίνουμε επεξηγήσεις για την διαδικασία του σχηματισμού τρίγωνων ο μαθητής απαντάει στο πρώτο υποερώτημα ότι **«Σχηματίζονται άπειρα τρίγωνα»**. Στην ερώτηση μας εάν ποτέ θα τελειώσει αυτή η διαδικασία του σχηματισμού νέων τριγώνων απαντάει ότι **« Ναι, όταν εξαντλήσουμε όλα τα σημεία»**. Προφανώς ο μαθητής έχει μία αίσθηση του ενεργεία απείρου ότι θα τελειώσει αυτή η διαδικασία όταν εξαντληθούν όλα τα σημεία. Στο δεύτερο υποερώτημα απαντάει ότι το άθροισμα των περιμέτρων των τριγώνων θα είναι πεπερασμένο. Στην ερώτηση μας **«Γιατί να είναι πεπερασμένο»** ο μαθητής απαντάει **«Μα αφού στο τέλος τα τρίγωνα που θα σχηματίζονται θα είναι τόσο μικρά που η περίμετρος τους θα είναι μηδέν άρα θα σταματήσει να αυξάνει από κάποια στιγμή το άθροισμα, γιατί θα προσθέτουμε συνέχεια μηδέν… έτσι δεν είναι….;»** . Ο μαθητής χρησιμοποιεί την διαίσθηση του για ένα άπειρο άθροισμα που μπορεί να έχει πεπερασμένο αποτέλεσμα λόγω του ότι τα ποσά που προσθέτουμε από κάποιο σημείο και μετά είναι πολύ μικρά μεγέθη με αποτέλεσμα να μην επηρεάζεται πλέον το πεπερασμένο άθροισμα του άπειρου αθροίσματος. Χρησιμοποιεί και το δυνάμει αλλά και το ενεργεία άπειρο.

Στην έκτη και τελευταία ερώτηση ο μαθητής απαντάει ότι το όριο της παράστασης είναι ίσο με ∞ και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Καθηγητής: «Πως κατέληξες σε αυτό το συμπέρασμα;»

Μαθητής3: «Αφού προσθέτω συνέχεια κλάσματα στο 2,9 τότε το άθροισμα θα γίνει άπειρο…»

Καθηγητής: «Ναι αλλά αυτά που προσθέτεις έχουν τόση μεγάλη αξία, ώστε το άθροισμα να είναι άπειρο; Όταν ο αριθμητής σε ένα κλάσμα είναι μικρότερος από τον παρανομαστή το κλάσμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το ένα; »

Μαθητής3: «Ναι… ,ε… θα είναι μικρότερο από την μονάδα…»

Καθηγητής: «Επομένως αυτά που θα προσθέτεις θα είναι της τάξης του μηδέν κόμμα κάτι; Πώς θα φθάσεις στο άπειρο;»

Μαθητής3: «Ναι αφού είναι άπειροι όροι αυτοί που θα προσθέσω…»

Καθηγητής: «Ναι θα είναι άπειροι αλλά συνέχεια θα είναι μηδέν κόμμα μηδέν … εννέα , δεν νομίζω να αυξάνεται τόσο το άθροισμα από αυτούς τους όρους ώστε να δικαιολογεί το άπειρο…»

Μαθητής3: «Ναι… ,θα είναι 2,999…»

Καθηγητής: «Τι είπαμε στο πρώτο ερώτημα;»

Μαθητής3: «Ναι… ,θα είναι ίσα…»

Προφανώς και εδώ ο μαθητής δεν αντιλαμβάνεται ότι το άπειρο άθροισμα μίας διαδικασίας μπορεί να δώσει πεπερασμένο αποτέλεσμα. Το άπειρο άθροισμα ταυτίζεται και με άπειρο αποτέλεσμα. Δεν μπορεί να ενθυλακώσει τον αριθμό σαν ένα νέο αντικείμενο που μπορεί να προκύψει από την άπειρη πρόσθεση. Όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα και των άλλων μαθητών είναι η αδυναμία των μαθητών να αντιληφτούν την έννοια του απείρου. Δεν συσχετίζουν τις έννοιες του απείρου, του ορίου με αυτήν των αριθμών.

4.4 Συμπεράσματα και προτάσεις για διδασκαλία

Με την παρούσα διπλωματική εργασία προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις άπειρες διαδικασίες στους πραγματικούς αριθμούς.

Από την ιστορική αναδρομή που κάναμε στην αρχή της διπλωματικής είδαμε ότι οι μαθηματικοί βρέθηκαν αντιμέτωποι από τις πρώτες στιγμές με τις άπειρες

διαδικασίες π.χ. με την ανακάλυψη της αρρητότητας από τους Πυθαγόρειους και με τα παράδοξα του Ζήνωνα.

Η σύλληψη της έννοιας του απείρου είναι απαραίτητη για τις άπειρες διαδικασίες και την έννοιας του αριθμού. Σύμφωνα με τις γνωσιακές θεωρίες μάθησης απαιτείται η ικανότητα αντίληψης του δυνάμει και ενεργεία απείρου. Επίσης σύμφωνα με την θεωρία των ενσώματων μαθηματικών για τις άπειρες διαδικασίες απαιτείται και μία εννοιολογικής μεταφορά η βασική μεταφοράς του απείρου (δηλ. οι διαδικασίες που συνεχίζονται επ' άπειρον μπορούμε να τις κατανοούμε με μία εννοιολογική μεταφορά σαν να έχουν ένα τέλος και ένα έσχατο αποτέλεσμα). Γι' αυτό πρέπει στην διδασκαλία μας να εντάξουμε τις εννοιολογικές μεταφορές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί για τους πραγματικούς αριθμούς. Για να συλλάβουν οι μαθητές το ενεργεία άπειρο πρέπει να τους βοηθήσουμε να κάνουν μία ριζική αλλαγή στον τρόπο σκέψης. Μέσα από τις δραστηριότητες με τις κατάλληλες αναπαραστάσεις να δουν την όλη άπειρη διαδικασία ως ολοκληρωμένη (όλα τα βήματα να έχουν πραγματοποιηθεί) και έπειτα σαν μία ολότητα (δηλαδή το αντικείμενο που συνδέεται με την κατάσταση στο άπειρο απεικονίζει το σύνολο της διαδικασίας σαν να έχουν πραγματοποιηθεί όλα τα βήματα σε μία μόνο στιγμή παρά σε μεμονωμένες).

Η εισαγωγή και ο συνδυασμός στη διδασκαλία μας της δυνάμει απειρίας, του ενεργεία απείρου και της δυναμικής μεταφοράς του απείρου θεωρούμε ότι μπορεί να βοηθήσει μέσα από ένα κατάλληλο πλαίσιο δραστηριοτήτων τους μαθητές. Αποτέλεσμα αυτού είναι η προσπάθεια σύνδεσης των εννοιών του απείρου, του ορίου και του πραγματικού αριθμού. Αντίστοιχες δυσκολίες αντιμετώπισε και η μαθηματική κοινότητα στην πορεία της προς τον ορισμό των αριθμών.

Πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη και τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές τους πραγματικούς αριθμούς. Ιδίως την έντονη βιωματική τους εμπειρία του επόμενου αριθμού που την χρησιμοποιούν στους ρητούς και τους πραγματικούς όπως στους φυσικούς. Έννοια που στους πραγματικούς σχετίζεται με το άπειρο, έτσι πλέον δεν έχουμε τον επόμενο αριθμό αλλά μία οσοδήποτε κοντινή προσέγγιση επιθυμούμε.

Η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών, είναι βασικής σημασίας για την περαιτέρω κατανόηση των εννοιών του απειροστικού λογισμού. Παρατηρήσαμε ότι η εικόνας της έννοιας των πραγματικών αριθμών έχει πολλές αναπαραστάσεις, αρκετές

δυσκολίες και δεν συνδέεται πάντα με τις άπειρες διαδικασίες Η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών και των απείρων διαδικασιών πέραν του γεωμετρικού πλαισίου που χρησιμοποιούμε πρέπει να συνοδεύεται και από μία βαθιά εννοιολογική αλλαγή στο τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι μαθητές αυτές τις έννοιες. Το μοντέλο διδασκαλίας θα πρέπει να γίνει πιο αριθμητικοποιημένο. Η διδασκαλία των άπειρων διαδικασιών πρέπει να γίνεται με την παραδοχή και άλλων αναπαραστάσεων πέρα από τις γεωμετρικές και αλγεβρικές, έτσι ώστε να παρέχουν το εννοιολογικό υπόβαθρο για να αντιληφθούν οι μαθητές ότι αθροίσματα άπειρων διαδικασιών μπορεί να έχουν πεπερασμένο αποτέλεσμα. Πρέπει να ενσωματώνουμε και την διαδικασία με την οποία μπορεί ένας αριθμός να προκύψει σαν αποτέλεσμα ενός άπειρου αθροίσματος δηλ ενός ορίου, π.χ. πολλοί μαθητές το 2,999… δεν αντιλαμβάνονται ότι είναι ίσο με 3 αλλά το θεωρούν μικρότερό του.

Στην καθημερινή διδακτική πράξη δεν δίνεται σημασία στην κατανόηση της έννοιας του ορίου μια και συνήθως περιορίζεται στον υπολογισμό του σε ασκήσεις ρουτίνας με αποτέλεσμα την επιφανειακή και επιπόλαια μάθηση. Ο περιορισμός στις μεθόδους εύρεσης του ορίου μπορεί να οδηγήσουν σε μία φορμαλιστική αντιμετώπιση των μαθηματικών με περίπλοκο χειρισμό συμβόλων και απουσία της έννοιας του απείρου. Οι δυναμικές αντιλήψεις των μαθητών για τις άπειρες διαδικασίες προέρχονται από τα μοντέλα διδασκαλίας όπου θεωρούν το όριο σαν μία προσέγγιση ή μίας επ’ άπειρον προσέγγισης. Όπως είδαμε και στο θεωρητικό πλαίσιο στην διδασκαλία του το ορίου πρέπει να αναδειχθεί ως procept, έτσι ο συμβολισμός $\lim_{x\to a} f(x) = l$ αντιπροσωπεύει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα ή μία διαδικασία προσέγγισης.

Από το ερωτηματολόγιο της έρευνας προέκυψαν πολλά από τα στοιχεία που υπάρχουν και στην βιβλιογραφία. Είδαμε ότι η έννοια της διακριτότητας του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι ισχυρή και μεταφέρεται στους πραγματικούς αριθμούς ακόμη και σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Παρατηρείται ακόμη ασυνέπεια ανάμεσα στο πλήθος των αριθμών που υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς, όταν δίνονται σε κλασματική μορφή. Ενδεχομένως να οφείλεται στην έλλειψη της συνολοθεωρητικής θεωρίας των αριθμών. Οι μαθητές δεν ανάγουν την διαδικασία παρεμβολής μεταξύ δύο ρητών σε άπειρη διαδικασία ώστε να προκύψει η απειρία αριθμών ανάμεσα σε αυτούς.

Ίσως καλή παρέμβαση θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση (Zachariades, 2007) ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας π.χ. ο αριθμητικός μέσος $(\alpha + \beta)/2$ άρα με την ίδια λογική άπειροι γιατί αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρο.

Επίσης από το ερωτηματολόγιο καταλήγουμε ότι οι διάφορες αναπαραστάσεις των αριθμών δεν φαίνεται να έχουν κατανοηθεί από τους μαθητές καθώς και ποια η σχέση ανάμεσα τους. Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην διάκριση ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών. Στις αναπαραστάσεις με απειρία ψηφίων στο δεκαδικό μέρος δεν μπορούν εύκολα να αποδειχθούν ότι π.χ. ο αριθμός 3 μπορεί να έχει και την αναπαράσταση 2,999… Όταν συγκρίνουν ρητούς αριθμούς δεν αλλάζουν πάντα την αναπαράστασή τους σε δεκαδική ή σε άλλη ισοδύναμη κλασματική, γι' αυτό και δεν μπορούν να αναγνωρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα μπορούμε να παρεμβάλουμε άπειρα άλλα. Η μετατροπή ενός ρητού από την δεκαδική του αναπαράσταση στην κλασματική ενδεχομένως να δυσκολεύει τους μαθητές ιδίως εάν είναι περιοδικό δεκαδικό κλάσμα.

Τώρα όσον αφορά την κατανόηση των άπειρων διαδικασιών από το ερωτηματολόγιο προκύπτει ότι πολλοί μαθητές έχουν αρκετές λαθεμένες αντιλήψεις που ταυτίζονται με τις πεποιθήσεις των μαθητών από την βιβλιογραφία. Μία χαρακτηριστική αυτών είναι ότι το όριο δεν φθάνει ποτέ την τιμή του. Επίσης υπάρχει και μία σύγχυση στην μονοτονία και στο όριο. Ακόμη προκύπτει και μία σημαντική δυσκολία στην διαίσθηση και στην αντίληψη που έχουν οι μαθητές για τις άπειρες διαδικασίες και τα αθροίσματα τους που μπορεί να είναι πεπερασμένο μέγεθος. Οι παραπάνω δυσκολίες είναι αναμενόμενες από την ίδια την φύση του ορίου, δυσκολίες που και η ίδια μαθηματική κοινότητα αντιμετώπισε στην πορεία εξέλιξης της έννοιας αυτής. Δυσκολία υπάρχει στους μαθητές να αποδειχθούν ότι το 2,999… είναι μία διαδικασία άπειρου αθροίσματος δηλ το όριο της ακολουθίας (2,9, 2,99 ,2,99 , 2,999 , …) και το 3 είναι το αποτέλεσμα αυτού του αθροίσματος. Ακόμη ο υπολογισμός του ορίου μίας συνάρτησης στο άπειρο ή το άπειρο σαν αποτέλεσμα υπολογισμού προκαλεί προβλήματα, αναμενόμενο δεδομένου ότι δεν έρχεται σε αποδοχή με τα βιώματα των μαθητών που είναι πεπερασμένες εμπειρίες.

Μερικές προτάσεις που μπορεί να μας βοηθήσουν στην διδασκαλία των άπειρων διαδικασιών στους πραγματικούς αριθμούς είναι η προσέγγιση της ανάδειξης της ισότητας δύο αριθμών με διαφορετικές αναπαραστάσεις μέσα από αλγεβρικές πράξεις, η χρήση του αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου, η χρήση της μορφής του δεκαδικού κλάσματος για την διάκριση των πραγματικών αριθμών με χρήση της αρχής του περιστερώνα και η χρήση αναπαραστάσεων άπειρων διαδικασιών.

Μέσα από αλγεβρικές πράξεις μπορούμε να δείξουμε π.χ. ότι ο αριθμός 2,999… είναι ακριβώς ίσος με τον αριθμό 3. Για να το πετύχουμε αυτό αρχικά θεωρούμε ότι ο αριθμός με αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά 9 είναι ίσος με μία μεταβλητή, δηλ θέτουμε $\kappa = 2{,}999 \ldots$ Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με 10 ώστε η υποδιαστολή να μεταφερθεί ανάμεσα στο πρώτο και δεύτερο 9 του δεκαδικού αναπτύγματος και έτσι προκύπτει $10\kappa = 29{,}99 \ldots$. Μετά αφαιρούμε την αρχική εξίσωση από την δεύτερη $9\kappa = 27$ με αποτέλεσμα στο πρώτο μέλος να έχουμε την μεταβλητή με συντελεστή 9 και στο δεύτερο μέλος να έχουν εξαφανιστεί τα αρχικά 9 του άπειρου δεκαδικού αναπτύγματος. Τέλος από την ισότητα $9\kappa = 27$ προκύπτει ότι ο αριθμός 9κ είναι ακέραιος, άρα $\kappa = 3$. Έτσι προκύπτει η ισότητα από δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού. Συνοψίζοντας την παραπάνω διαδικασία

$$\kappa = 2{,}999 \ldots$$

$$10\kappa = 29{,}99 \ldots$$

_____(αφαιρούμε κατά μέλη)

$$9\kappa = 27$$

$$\kappa = 3$$

Γενικότερα η αλγεβρική διαδικασία για να μετατρέψουμε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό σε κλασματική μορφή είναι η παρακάτω:

1) Έστω x ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός τον οποίο θέλουμε να μετατρέψουμε σε κλασματική αναπαράσταση

$$x = a, y_1 \ldots y_\mu \ldots$$

2) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $10^{\kappa+\lambda}$. Όπου λ (λ≠0) είναι το πλήθος των μη περιοδικών ψηφίων και κ είναι το πλήθος των ψηφίων της περιόδου

$$10^{\kappa+\lambda}x = 10^{\kappa+\lambda}(a, y_1 \dots y_\mu \dots)$$

3) Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με 10^{κ} και αφαιρούμε από την δεύτερη εξίσωση

$$10^{\kappa+\lambda}x - 10^{\kappa}x = 10^{\kappa+\lambda}(a, y_1 \dots y_\mu \dots) - 10^{\kappa}(a, y_1 \dots y_\mu \dots)$$

Σε περίπτωση που λ=0 (δηλαδή τα μη περιοδικά ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος είναι μηδέν) πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με 10^{κ} και από την εξίσωση που θα προκύψει αφαιρούμε την πρώτη εξίσωση

$$10^{\kappa}x - x = 10^{\kappa}(a, y_1 \dots y_\mu \dots) - (a, y_1 \dots y_\mu \dots)$$

4) Κάνουμε πράξεις στα δύο μέλη

5) Λύνουμε ως προς x και απλοποιούμε (αν χρειάζεται)

Π.χ. αν x=3,142857142857…, τότε

1.000.000 x = 3142857,142857142857…

Επομένως

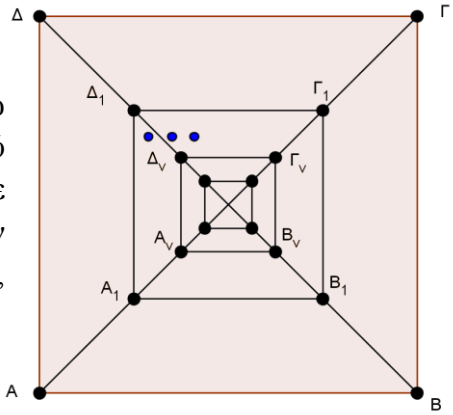
1.000.000 x – x =99999x=3142854

Άρα x= 3142854/999999=22/7

Από την μορφή που παίρνει το δεκαδικό κλάσμα ενός αριθμού α, τον οποίο παριστάνει, μπορούμε να συμπεραίνουμε εάν είναι ρητός ή άρρητος. Όταν ο αριθμός έχει μορφή πεπερασμένου δεκαδικού κλάσματος τότε ο α είναι ρητός π.χ. 4,629=$\frac{4629}{1000}$ ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Μόνο στην περίπτωση που ο παρανομαστής ενός ρητού αριθμού m/n είναι της μορφής $n = 2^k 5^\lambda$ (κ, λ ∈ ℕ ∪{0}) γράφεται ως πεπερασμένο δεκαδικό κλάσμα (όπως είδαμε και στο παραπάνω παράδειγμα με τον 22/7= 3,142857142857……..). Όταν όμως δεν έχει την μορφή του πεπερασμένου δεκαδικού κλάσματος, τότε ο ρητός m/n κατά την διαδικασία της διαίρεσης σύμφωνα

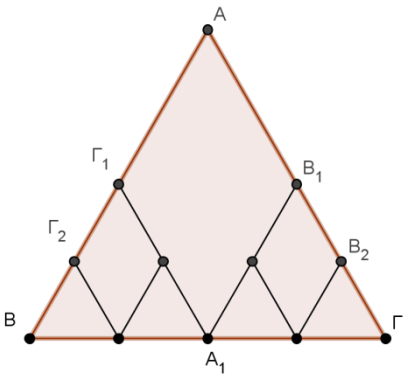
με την αρχή του περιστερώνα παίρνει μόνο τις τιμές 1,2,……n-1. Μετά την πρώτη επανάληψη κάποιου από τα παραπάνω υπόλοιπα ακολουθούν τα προηγούμενα με την ίδια σειρά. Έτσι μπορούμε να συμπεραίνουμε ότι κάθε ρητός αριθμός παριστάνεται ως περιοδικό δεκαδικό κλάσμα (όταν είναι πεπερασμένο δεκαδικό κλάσμα, ο αριθμός έχει περίοδο 0 ή 9). Το αντίστροφο, δηλ ότι κάθε περιοδικό δεκαδικό κλάσμα παριστάνει ρητό αριθμό αποδεικνύεται με την διαδικασία μετατροπής που είδαμε παραπάνω. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τους πραγματικούς αριθμούς σε ρητούς και άρρητους.

Η χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων (αναπαραστάσεων που να μην είναι ασυνεπής ως προς την έννοια του ορίου) μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στις οριακές διαδικασίες (βλ. Εικ.18) όπως με την παρακάτω αναπαράσταση (σημειώσεις μεταπτυχιακού Ζαχαριάδης,2009) **:** Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 1m και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Έστω A_1,B_1 ,$Γ_1$, $Δ_1$ τα μέσα των ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε το τετράγωνο $A_1B_1Γ_1Δ_1$. Έστω A_2 ,B_2 ,$Γ_2$,$Δ_2$ τα μέσα των $ΚA_1$, $ΚB_1$, $ΚΓ_1$, $ΚΔ_1$ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε το τετράγωνο $A_2B_2Γ_2Δ_2$ και γενικότερα $A_ν$, $B_ν$, $Γ_ν$, $Δ_ν$ τα μέσα των $ΚA_{ν-1}$, $ΚB_{ν-1}$, $ΚΓ_{ν-1}$, $ΚΔ_{ν-1}$ αντίστοιχα , Σχηματίζουμε το τετράγωνο $A_νB_νΓ_ν Δ_ν$, για κάθε ν=2,3,…. Δηλ κάθε τετράγωνο έχει κορυφές τα μέσα των αποστάσεων του Κ από της κορυφές του τετραγώνου που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο βήμα. Α) Ποία είναι η τομή των εσωτερικών τετραγώνων; Β) Υπολογίστε το εμβαδόν $E_ν$ των τετραγώνων $A_νB_νΓ_ν Δ_ν$, ν=1,2,… γ) Υπάρχει τετράγωνο που αυτό και το επόμενο του έχουν εμβαδόν μικρότερο από 10^{-300}; Εξετάστε την αντίστοιχη ερώτηση για τον αριθμό $10^{-10000000}$.



Εικ.18

Άλλη αναπαράσταση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (βλ. Εικ.19) είναι η παρακάτω: Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, A_1 μέσον της ΒΓ , $Γ_1$ μέσον της ΑΒ, B_1 μέσον της ΑΓ, $Γ_2$ μέσον της $BΓ_1$, B_2 μέσον της $B_1Γ$, A_2 μέσον της A_1B, A_3 μέσον της $A_1Γ$ κ.ο.κ. Θέτω $α_1$=ΑΒ+ΑΓ , $α_2$ = $BΓ_1$+$Γ_1A_1$+ A_1B_1 + $B_1Γ$. Η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρο. Η τιμή του όρου $α_ν$ όταν το ν αυξάνει απεριόριστα τείνει στο ΒΓ ή στο ΑΒ+ΑΓ;



Εικ.19

Η χρήση του άπειρου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου θα βοηθήσει τους μαθητές στις άπειρες διαδικασίες στους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι το άπειρο δεκαδικό μέρος με τα άπειρα δεκαδικά 9 ενός αριθμού π.χ το 2,99999… μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα του ακέραιου μέρους και του δεκαδικού 0,999…..,

2,9999…..= $2 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{10000} + \ldots$ οπότε σύμφωνα με τον τύπο αθροίσματος γεωμετρικής προόδου το δεκαδικό μέρος 0,99999… μπορεί να γραφεί $S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$ με α1 = $\frac{9}{10}$ και λ=$\frac{1}{10}$ με αποτέλεσμα 0,99999… = 1 άρα 2,99999… = 3.

Μέσα από τις παραπάνω δραστηριότητες οι μαθητές μπορούν να ενθυλακώσουν μία άπειρη διαδικασία σε ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο ώστε να τους βοηθήσει να επιτύχουν μία καλύτερη κατανόηση σύμφωνα και με τις γνωσιακές θεωρίες μάθησης. Η εισαγωγή στην διδασκαλία μας, της κατασκευής των πραγματικών αριθμών μέσα από άπειρες διαδικασίες μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στη κατανόηση και άλλων δυσκολότερων ζητημάτων και την εισαγωγή τους στην διδασκαλία όπως το παρακάτω. « Σχεδόν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι άρρητοι». Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί μπορεί να είναι σύνολα πυκνά, αλλά δεν είναι ισοπληθικοί, έτσι σχεδόν όλοι οι πραγματικοί είναι άρρητοι και αυτό γίνεται από την ύπαρξη του supremum (αξίωμα πληρότητας) που μας δίνει όλα τα όρια των ρητών. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε πάρει αυτομάτως όλο το $\mathbb{R}$ και έχουμε δημιουργήσει ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

- [Αν] Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Γ΄ Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.
- [Αρ] Αρτεμιάδης, Ν. (2000). Ιστορία των Μαθηματικών από τη σκοπιά του Μαθηματικού. Ακαδημία Αθηνών.
- [Βα] Βαμβακούση Ξ. (2006). Σημειώσεις της *Γνωστικής Ψυχολογίας*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών .
- [Βα2] Βαμβακούση Ξ. , Βοσνιάδου Σ. (2007). *Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα…. Όψεις της κατανόησης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς και το συμβολισμό τους*. Στο Χ. Σακονίδης, Δέσποινα Π. (Εκδ.) 2ο Συνέδριο ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.. Εκδόσεις Τυπωθήτω.
- [Βο] Βοσνιάδου Σ. (2004). Γνωσιακή Ψυχολογία. Ψυχολογικές Μελέτες και δοκίμια. Μετάφραση από τα Αγγλικά Κύρκος Χ. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.
- [Βο2] Βοσνιάδου, Σ.(1998). *Εισαγωγή στη Ψυχολογία*, εκδ. Gutenberg, Αθήνα.
- [Boy] C. Boyer & U. Merzbach : *Η Ιστορία των Μαθηματικών* (μετάφραση Β. Κουσουλάκου). Αθήνα, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός 1997.
- [Γα] Γαγάτσης, Α.- Μιχαηλίδου, Ε. – Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών,* Λευκωσία.
- [Γα2] Γαγάτσης, Α.,Ηλία,Ι., Ανδρέου, Σ. (2003). *Αναπαραστάσεις και Μάθηση των Μαθηματικών : Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή*. Ευκλείδης Γ΄ τεύχος 59, Ε.Μ.Ε.
- [Γα3] Γαγάτσης Α., Παναούρα Γ. (2000). *Ο ρόλος της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση έργων πρόσθεσης και αφαίρεσης*. Στο Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη, Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη έρευνα στις επιστήμες της αγωγής*. Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- [Γα4] Γαγάτσης, Α. & Σπύρου Π. (2000). *Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση*. Έκδοση συγγραφέων, Αθήνα.
- [Γι] Γιαννακούλιας, Ε., (2007). *Απειροστικός Λογισμός. Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.Χ έως και τον 19ο αιώνα*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

- [Δα] Δαφέρμος, Μ. (2002). *Η Πολιτισμική-Ιστορική θεωρία του Vygotsky*. Εκδόσεις Ατραπός, Αθήνα.
- [Du] Duval, R.(1987). *Ο Ρόλος της Ερμηνείας στη Μάθηση των Μαθηματικών.* Διάσταση.
- [Κ.Ε] *Ευκλείδεια «Στοιχεία»,* τόμοι Ι & ΙΙ *«Η Γεωμετρία του επιπέδου»* και τόμος ΙΙΙ *«Η Γεωμετρία του χώρου»*. Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης.
- [Ζα] Ζαχαριάδη Θ. (2010). Σημειώσεις της: *Διδακτικής του Απειροστικού Λογισμού*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ Αθήνα.
- [Θω] Θωμαΐδης, Γ.(1985), Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών, *Ευκλείδης* Γ, 13(Γ), 1-31.
- [Θω2] Θωμαΐδης, Γ. (1985α). Η διδασκαλία εννοιών της Ανάλυσης με οδηγό την Ιστορική εξέλιξη, *Ε.Μ.Ε* τεύχος 9.
- [Θω3] Θωμαΐδης, Γ. *(1990)*. Εξερευνώντας την ιστορία του αριθμού π (από το 3 1/7 του Αρχιμήδη στα 200.000.000 εκατομμύρια του Y.Kanada). *Διάσταση 1-2*, 17-*38.*
- [Κα] Καρυοφύλλης Χ (2002). Σημειώσεις του μαθήματος *Εισαγωγή στην Ανάλυση,* Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ
- [Κλ] Κλαουδάτος Ν. (2010). Σημειώσεις της *Διδακτικής των Μαθηματικών Ι*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.
- [Κλ2] Κλαουδάτος Ν. (2010). Συμπληρωματικές Σημειώσεις: *Οι βασικές αρχές της θεωρίας του Vygotsky: Η επικοινωνιακή προσέγγιση και η πλαισιοθετημένη μάθηση*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.
- [Κλ3] Κλαουδάτος Ν. (2010). Σημειώσεις: *Εισαγωγή στην Θεωρία της διδασκαλίας, και σημειώσεις της: Διδασκαλίας και Μάθησης των Μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.
- [Καλ] Καλδρυμίδου Μ., Μορόγλου Ε. (2006). *Αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου*, Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.

- [Καπ] Καπετανάς Ε., Ζαχαριάδης Θ. (2007). *Πεποιθήσεις και στάσεις των μαθητών του λυκείου για τη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών*, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών.
- [Κυ] Κυνηγός Χ., (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης*, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
- [Κω] Κωνσταντινίδης Μ. (1990). *Η. Eves, μεγάλες στιγμές των μαθηματικών*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- [Νε] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος & Ε. Γιαννακούλιας, (1999). *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- [Νε2] Νεγρεπόντης, Σ. (2010) Σημειώσεις του μαθήματος *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών,* Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ΕΚΠΑ Τμήμα Μαθηματικό
- [Σπ] Σπανδάγος, Ε., (2011). *Αρχιμήδους βίος και έργον*. Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.
- [Σπυ] Σπύρου, Π. (2009) *Επιστημολογίες για την Διδακτική των Μαθηματικών.* Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Μαθηματικό, Αθήνα.
- [Σπυ2] Σπύρου Π. (2010). Σημειώσεις του μαθήματος *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ΕΚΠΑ Τμήμα Μαθηματικό.
- [Φι] Φιλίππου Γ. & Χρίστου Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες στη μάθηση των μαθηματικών*, Εκδόσεις Ατραπός, Αθήνα.
- [Ρο] Ρουσόπουλος Γ. (1991). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Πρώτη έκδοση, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.
- [Ρο2] Ρουσόπουλος, Γ.(1999), *Μαθηματικός Ρεαλισμός.* Εκδόσεις Γράμματα, Αθήνα.
- [Hi] Hilbert D. (1995). Θεμέλια της γεωμετρίας. Εκδόσεις Τροχαλία. Αθήνα.
- [Va] Van der Waerden (2000). *Η αφύπνιση της επιστήμης*. (μετ. Χριστιανίδης, Γ) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Ξενόγλωσση

- [Ar] Artique, M. (1998). *Teaching and Learning Elementary Analysis : What can we learn from didactical research and curriculum evolution?* (First Mediterranean Conference on Mathematics 1997).
- [Boy2] Boyer, C. *The history of the Calculus and its conceptual development*, Dover, New York, 1969
- [Br] Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches in didactique des mathemaiques*, 4(2), 165-198.
- [Br2] Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherlandd & V. Warfield). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [Co] Cobb, P. (1986). *Contexts, goals, beliefs and leranings for the mathematics, for the learning of mathematics* 6, 2 FLM Publishing association, Montreal, Quebec, Canada.
- [Cor] Cornu, B. (1983).Quelques obstacies ; a l' apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4,236-268.
- [Cor2] Cornu, B. (1991). *Limits*. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 153-166.
- [Du] Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Ac ademic Publishers.
- [Du2] Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a&b). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis,. Educational Studies in Mathematics*, Part 158, 335–359. & Part 260, 253-266.
- [Fa] Farmaki, V., *Pigeonhole Principle and Irrational numbers*, Department of Mathematics, Athens University, Athens
- [Fi] Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- [Fi2] Fischbein, E. (1993) "The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity" in R.

Biehler, R. Scholz, R. Straser and B. Winkelmann (eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 231-245.

- [Fi3] Fischbein, E., (1994). *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*. In R. Biehler, R. Scholz, R. Straser, and B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 231–245.
- [Fi4] Fischbein, E. - Jehiam, R. - Cohen, D., (1995) The concept of irrational numbers in high school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, 29: 29-44.
- [Fi5] Fischbein, E. (1999) Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning, *Educational Studies in Mathematics*, 38: 11–50, 1999.
- [Fi6] Fischbein, E. (2001) Tacit models and infinity ,Educ. *Studies in Math*., 48, 309-329.
- [Fr] Frid, S.(1994) . *Three approaches to undergraduate calculus instruc-tion : Their nature and potential impact on students' language use and sources of conviction*. In Szydlik,-Jennifer-Earles (2000) *Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function*" (*Journal for Research in Mathematics Education* v 31 no3 May 2000. p. 258-276).
- [Gi] Giannakoulias, E. - Souyoul, A. - Zachariades, T. (2007). *Students Thinking About Fundamental Real Numbers Properties*, Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), Cyprus ERME, Department of Education, University of Cyprus.
- [Gr] Gray, E. M. & Tall, D. O. (1992). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. Mathematics Teaching, 142, 6-10
- [Gr2] Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25,2, 115-141.
- [He] Heath, T.L., 1956. *Euclid: The thirteen books of the Elements*, Dover publications INC. New York.

- [Ka] Katz, V. *A history of mathematics: An introduction*, Addison Wesley, Longman, New York 1998

- [La] Lakoff, G. & Núñez, R. E., (2000) *Where Mathematics come from. How the embodied minds brings mathematics into being*, New York. Basic Books.

- [Me] Merenluoto, K. – Lehtinen, E. (2002). *Conceptual Change in Mathematics: Understanding the Real Numbers Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice*, 233-257. M. Limón & L. Mason (Eds.), 2002 Kluwer Academic Publishers, Netherlands
- [Me2] Merenluoto, K. - Lehtinen, E.,(2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change, *Learning and Instruction 14*, 519–534.
- [Mo] Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.
- [Mc] McLeod, D. B.(1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualisatio*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.575-596). New York: Macmillan.
- [Nu] Núñez, R., Edwards, L., Matos, J. (1999). *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education*, Educational Studies in Mathematics39:45-65, 1999, Kluwer Academic Publishers.
- [Nu2] Núñez, R. (2000). *Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics*. Opening plenary address in Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol 1. 1, pp. 3–22. Hiroshima, Japan.
- [Nu3] Núñez, R. & Lakoff, G. (2005). *The Cognitive Foundations of Mathematics: The Role of Conceptual Metaphor*. In J. Campbell (ed.) *Handbook of Mathematical Cognition*. New York: Psychology Press.
- [Ro] Robert, A.(1982). L Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans Enseignement Supérieur, *Recherches en Didactique des Mathematiques*. vol. no 3, 307-341.
- [Sc] Schonfeld, A., H. (1989). Expolorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338-355.

- [Sch] Schwarzenberger, R. L.E & Tall, D. O. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

- [Sf] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- [Si] Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18 , 371-397.
- [Sz] Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.31, no 3, 258-76.
- [Ta] Tall, D. and Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169.
- [Ta2] Tall, D.& Thomas, M.& Davis, G.& Gray E, & Simpson A. (2000) What is the object of the encapsulation of a process?, *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2), 1-19, 223-241.
- [Ta3] Tall, D. (2004) Thinking Through Three Worlds of Mathematics, Proceedings of the 28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281-288.
- [Vam] Vamvakoussi, X. - Vosniadou, S., (2004) Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approatch ,Learning and Instruction 14 (2004) 453 - 467
- [Vam2] Vamvakoussi, X. - Vosniadou, S., (2007) *How many Numbers are there in a rational number interval? Constrains, syntetic models and the effect of the number line, Reframing the Conceptual Change Approach* in *Learning and Instruction* Copyright © 2007 by Elsevier Ltd.
- [Vi] Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics* in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 65-81.
- [Wi] Williams, S. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219-236.

- [Wi2] Williams, S. (2001). Predications of the limit concept: An Applica-tion of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 341-367
- [Za] Zazkis, R., Sirotic, N. (2004) Making Sense Of Irrational Numbers: Focusing On Representations Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 Vol 4 pp 497–504
- [Za2] Zazkis, R., Sirotic, N. (2005) *Locating irrational numbers on a number line*, Proceedings of the Conference for Psychology of Mathematics Education- North American chapter, Roanoke, VA

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα Α: Προτάσεις Ευκλείδη

Πρόταση VII 1: Δίνονται δύο άνισοι αριθμοί και ανθυφαιρούμε συνεχώς το μικρότερο από το μεγαλύτερο. Αν ο αριθμός που προκύπτει κάθε φορά δε μετρά ποτέ το προηγούμενο του, έως όταν εμφανισθεί η μονάδα, τότε οι αρχικοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Πρόταση VII 2: Αν δοθούν δύο αριθμοί που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο (δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης)

Πρόταση IX.14: Αν δίνονται κάποιοι πρώτοι αριθμοί, τότε ο ελάχιστος αριθμός που μετριέται από αυτούς, δε μετριέται από κανέναν άλλο πρώτο αριθμό.

Πρόταση IX.20: Αν δοθεί οποιοδήποτε πλήθος πρώτων αριθμών, τότε υπάρχουν πάντα περισσότεροι από αυτό το πλήθος.

Πρόταση IX.35: Αν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία και αφαιρεθεί από το δεύτερο και τον τελευταίο ο πρώτος αριθμός της συνεχούς αναλογίας, τότε ο λόγος των διαφορών που προκύπτουν είναι ίσος με το λόγο του πρώτου αριθμού της συνεχούς αναλογίας προς το άθροισμα όλων των δοσμένων αριθμών, εκτός του τελευταίου.

Πρόταση X.1: Έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή επαναληφθεί συνέχεια θα απομείνει μέγεθος μικρότερο του μικρότερου από τα δύο δοσμένα αρχικά μεγέθη.

Πρόταση X.2: Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δε μετρά το προηγούμενό του, τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Πρόταση X.5: Τα σύμμετρα μεγέθη έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με το λόγο δύο αριθμών (εννοείται φυσικών αριθμών).

Πρόταση X.6: Αν δύο μεγέθη έχουν λόγο ίσο με το λόγο δύο φυσικών αριθμών, τότε τα μεγέθη είναι σύμμετρα.

Πρόταση X.9: Τα τετράγωνα σύμμετρων ως προς το μήκος ευθυγράμμων τμημάτων έχουν λόγο μεταξύ τους, ίσο με το λόγο τετραγώνων (φυσικών) αριθμών, ενώ τα τετράγωνα που έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με το λόγο τετραγώνων (φυσικών) αριθμών, θα έχουν πλευρές ευθύγραμμα τμήματα σύμμετρα ως προς το μήκος.

Τα τετράγωνα ασύμμετρων ως προς το μήκος ευθυγράμμων τμημάτων δε σχηματίζουν λόγο ίσο με το λόγο τετραγώνων (φυσικών) αριθμών, ενώ τα τετράγωνα

που δεν έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με το λόγο τετραγώνων (φυσικών) αριθμών δε θα έχουν πλευρές ευθύγραμμα τμήματα σύμμετρα ως προς το μήκος.

Πρόταση Χ.28λήμμα 1: Να βρεθούν δύο τετράγωνοι αριθμοί, τέτοιοι ώστε και το άθροισμά τους να είναι τετράγωνος.

Πρόταση XII.2: Δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Ορισμοί V Βιβλίου:

Ορισμός 1: Ένα μέγεθος λέγεται μέρος ενός μεγαλύτερου μεγέθους αν μπορούμε να μετρήσουμε το δεύτερο μέγεθος με μονάδα μέτρησης το πρώτο.

Ορισμός 2: Αν ένα μέγεθος μπορεί να μετρηθεί από ένα μικρότερό του, τότε αυτό λέγεται πολλαπλάσιο του μικρότερού του.

Ορισμός 3: Αν δύο ομοειδή μεγέθη συγκριθούν μεταξύ τους, τότε υπάρχει πάντοτε μία σχέση που προκύπτει από την σύγκριση του ενός με το άλλο, η οποία λέγεται λόγος των δύο αυτών μεγεθών.

Ορισμός 4: Δύο μεγέθη λέμε ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν πολλαπλασιάζοντάς τα κατάλληλα μπορούμε να πετύχουμε ώστε το ένα να υπερέχει του άλλου.

Ορισμός 5: Τέσσερα μεγέθη λέμε ότι έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου σε σχέση με τα ίσες φορές πολλαπλάσια του δεύτερου και τέταρτου με οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό είναι μεγαλύτερα ή ίσα ή μικρότερα, όταν αυτά ληφθούν σε αντίστοιχη τάξη.

Παράρτημα Β :Ερωτηματολόγιο

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Κατεύθυνση: Φύλλο: Τάξη:

Ερώτηση 1η : Συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς(<,=,>):(Ο συμβολισμός **…** σημαίνει άπειρα δεκαδικά ψηφία)

α) 0,111 ____ 0,11 β) 0,111 ____ 0,11… γ) 0,03 ____ 0,0299…

δ) 5,838 ____ 5,8383 ε) 0,99 _____ 0,9 στ) 0,999… ____ 1

Ερώτηση 2η :

α) Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν ανάμεσα στο -2 και στο 2 ;

_____

β) Ποίος από τους παραπάνω είναι επόμενος του -2 ;

_____

γ) Πόσα κλάσματα (ρητοί αριθμοί) υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{5}{8}$ και στο $\frac{7}{8}$;

_____

δ) Ποίο από όλα αυτά τα κλάσματα βρίσκονται ανάμεσα στα $\frac{5}{8}$ και $\frac{7}{8}$ είναι επόμενο του $\frac{5}{8}$;

_____

ε) Πόσοι πραγματικοί βρίσκονται ανάμεσα στο 0,999 και το 1 ;

_____

στ) Ποιος από τους παραπάνω είναι πιο κοντά στο 1 ;

_____

Ερώτηση 3η : Εάν ήσασταν καθηγητής πως θα δίνατε τον ορισμό της έννοιας του ορίου;

_____

_____

_____

Είναι σωστές(Σ) η λάθος(Λ) οι παρακάτω προτάσεις:

α) Το $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ σημαίνει ότι καθώς το x μεγαλώνει το f(x) πλησιάζει το l αλλά ποτέ δεν το φθάνει Σ Λ

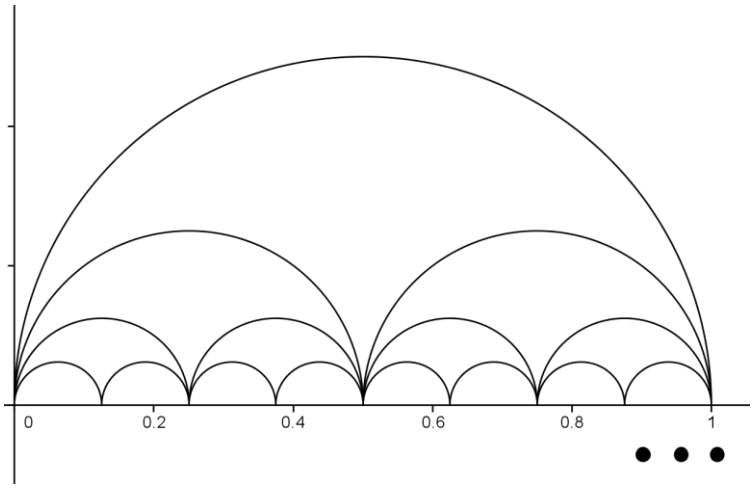
β) Όταν μία συνάρτηση έχει $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ το l μπορούμε να το προσεγγίσουμε οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε καθώς προσεγγίζουμε το x_0 οσοδήποτε θέλουμε

Σ Λ

γ) Όταν μία συνάρτηση έχει $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ το l είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της $f(x)$

Σ Λ

<u>Ερώτηση 4η</u> : Το αρχικό ημικύκλιο ακτίνας ρ =1/2 το χωρίζουμε σε δύο νέα ημικύκλια ακτίνας ρ $= 1/4$.Με τον ίδιο τρόπο κάθε φορά κάθε νέο ημικύκλιο το χωρίζουμε σε δύο νέα ημικύκλια κ.ο.κ. Συνεχίζοντας αυτή την διαδικασία δημιουργείται μία ακολουθία ν ημικυκλίων ακτίνας $\frac{1}{2^{\nu}}$. Καθώς $\nu \to \infty$ η συνολική περίμετρος των ημικυκλίων του κάθε όρου της ακολουθίας που δημιουργείται που τείνει; Το συνολικό εμβαδόν των ημικυκλίων που τείνει αντίστοιχα;



α) $\lim_{\nu\to\infty}($ συνολικής περιμέτρου των ημικυκλίων $) =$

☐ ☐Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να τείνει το όριο ☐ $\pi/2$

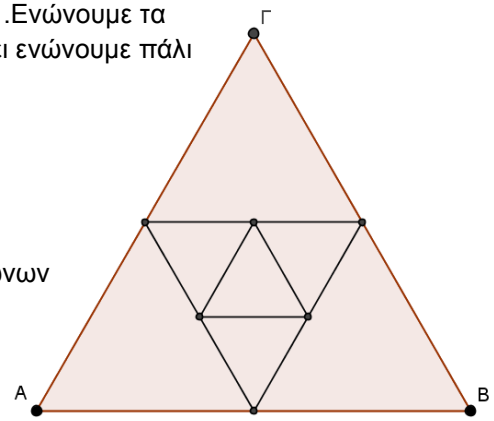
☐ 1(στο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος [0,1]) ☐ ∞

β) $\lim_{\nu\to\infty}($ συνολικού εμβαδού των ημικυκλίων $) =$

☐ π ☐ ☐Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να τείνει το όριο

☐ 0 ☐ ∞

<u>Ερώτηση 5η</u>: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με α=1m .Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του και του τριγώνου που προκύπτει ενώνουμε πάλι τα μέσα των πλευρών του κ.ο.κ



α) Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε

☐ άπειρα ☐ πεπερασμένο πλήθος

β) Το άθροισμα των περιμέτρων όλων αυτών των τριγώνων είναι:

☐ άπειρο ☐ πεπερασμένος αριθμός .

<u>Ερώτηση 6η</u>: Εάν πάρουμε τον αριθμό 2,9 και προσθέσουμε τα κλάσματα $\frac{9}{100}$, $\frac{9}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, $\frac{9}{10000}$ κ.ο.κ τότε η παράσταση 2,9 + $\frac{9}{100}$ + $\frac{9}{1000}$ + $\frac{9}{10000}$+ $\frac{9}{10000}$ + **…** θα είναι ίση με: **(**δηλ το όριο $\lim_{\nu\to\infty}(2{,}9 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{10000} + \dots + \frac{9}{10^{\nu}})$ **)**

- 2,99999
- Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που να τείνει το όριο
- 3
- ∞