ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική εργασία με τίτλο:

«Κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης ως συμμεταβολή από μαθητές της Α' Λυκείου με τη βοήθεια υπολογιστικών περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας»

ΟΡΦΑΝΑΚΗΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ
Α.Μ. Δ 201028

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΨΥΧΑΡΗΣ

ΑΘΗΝΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γεώργιος Ψυχάρης (επιβλέπων Καθηγητής)	Λέκτορας	…….
2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής	……..…
3) Δέσποινα Πόταρη	Αν. Καθηγήτρια	……..…

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Λέκτορα κ. Ψυχάρη Γεώργιο, για την καθοριστική συμβολή του στην παρούσα ερευνητική εργασία. Οι στοχευμένες παρατηρήσεις του, η πολύτιμη καθοδήγηση και το άριστο κλίμα συνεργασίας σε όλο το διάστημα εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, υπήρξαν σημαντικοί παράγοντες για την επιτυχή ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και την Αν. Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή.

Θα ήθελα ακόμη, να ευχαριστήσω τη γραμματέα του μεταπτυχιακού προγράμματος κ. Μπακογιάννη Διονυσία για την πολύτιμη βοήθεια της σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, που χωρίς αυτούς δεν θα είχε υλοποιηθεί, καθώς και τους συναδέλφους του 2^{ου} ΓΕΛ Ιλίου που με στήριξαν στην προσπάθεια αυτή.

Στην Ευτυχία για την στήριξη και την υπομονή της

Στο Γιώργο και τη Θεανώ

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 8
1.1 Ιστορική αναδρομή στην έννοια της συνάρτησης 8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 10
2.1 Η σημασία της έννοιας της συνάρτησης 10
2.2 Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης 12
2.2.1 Η συνάρτηση ως διαδικασία και αντικείμενο 12
2.2.2 Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής 14
2.2.3 Ο ρόλος του συμβολισμού 15
2.2.4 Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης 16
2.3 Η συνάρτηση ως συμμεταβολή 18
2.4 Η συνάρτηση ως συμμεταβολή στο αναλυτικό πρόγραμμα 22
ΚΕΦΑΛΙΟ 3: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 24
3.1 Ψηφιακά εργαλεία και κατανόηση μαθηματικών εννοιών 24
3.1.1 Η διαμεσολάβηση των ψηφιακών εργαλείων στη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών 24
3.1.2 Τα ψηφιακά εργαλεία ως όργανα σημειωτικής διαμεσολάβησης 27
3.2 Εικασία και απόδειξη με τη χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας 29
3.2.1 Το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας 29
3.2.2 Εικασία και απόδειξη στα μαθηματικά 30
3.2.3 Το περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ως πλαίσιο ανάπτυξης εικασιών 32
3.3 Η συνάρτηση σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας 36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 38
4.1 Ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα 38
4.2 Δραστηριότητες 38
4.2.1 $1^{η}$ δραστηριότητα: Συμμεταβολή μεγεθών στον κύκλο 40
4.2.2 $2^{η}$ Δραστηριότητα: Νοηματοδότηση των μεταβολών του εμβαδού του ορθογωνίου στο πλαίσιο της συμμεταβολής 46
4.3 Μέθοδος 53
4.4 Συμμετέχοντες – Συλλογή δεδομένων 54
4.5 Ανάλυση δεδομένων 56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 58
5.1 Κατηγοριοποίηση των νοημάτων της συνάρτησης ως συμμεταβολή 58
5.2 Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή 62
5.2.1 Νοηματοδότηση της μεταβολής και του αναλλοίωτου 63
5.2.2 Νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεταξύ μεγεθών 68
5.2.3 Νοηματοδότηση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής 71
5.2.4 Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή με αναφορά σε διαφορετικές αναπαραστάσεις 78
5.2.5 Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή με αποδεικτικές διαδικασίες 85
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 91
Βιβλιογραφία 95
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 100

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της διαδικασίας κατασκευής νοημάτων για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή από μαθητές της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και συγκεκριμένα στο περιβάλλον του λογισμικού Geometer Sketchpad. Το συγκεκριμένο λογισμικό παρέχει στον χρήστη εργαλεία τα οποία αναδεικνύουν τη συμμεταβολή μεγεθών ενός γεωμετρικού αντικειμένου, καθώς και την αποτύπωση των μεταβολών αυτών με πολλαπλές αναπαραστάσεις. Επίσης, μελετάται με ποιους τρόπους οι συγκεκριμένες δραστηριότητες και τα εργαλεία του λογισμικού διαμεσολαβούν τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Τα νοήματα για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή κατατάχτηκαν σε πέντε διαφορετικά επίπεδα τα οποία αναδεικνύουν ποιοτικές διαφορές σε αυτά που κατανοούν οι μαθητές. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η μοντελοποίηση σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας οδηγεί τους μαθητές να κατανοήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή μεγεθών και να μετακινηθούν από την παρατηρούμενη αλληλεξάρτηση στις τυπικές αποδεικτικές διαδικασίες.

Λέξεις κλειδιά: Συνάρτηση, μεταβολή, συμμεταβολή, δυναμική γεωμετρία

ABSTRACT

The main objective of this research is to investigate the process of construction of meanings for the function as a covariation by second grade students of the Senior High school in a dynamic geometry environment, using in particular the software environment of Geometer Sketchpad. The software provides the user with tools that reveal the covariation of sizes of a geometrical object, as well as the reflection of these changes through multiple representations. Furthermore, the ways in which these specific activities and software tools mediate the signification of the function as a covariation are studied. The meanings of the function as a covariation were classified into five different levels that reveal qualitative differences in what students apprehend. The results of this research show that modeling in a dynamic geometry environment leads students to understand the function as a covariation of sizes and move forward from the observed interdependence to standard evidentiary procedures.

Key words: Function, variation, covariation, dynamic geometry

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Ιστορική αναδρομή στην έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες των μαθηματικών αλλά και των περισσότερων επιστημονικών κλάδων (Dubinski & Harel, 1992). Εξελίχτηκε σταδιακά στη διάρκεια των αιώνων. Πολύ νωρίς οι Βαβυλώνιοι (γύρω στα 1800π.Χ) συνέταξαν και χρησιμοποίησαν για τις αστρονομικές τους παρατηρήσεις πίνακες, οι οποίοι τους βοήθησαν να διατυπώσουν τους πρώτους εμπειρικούς νόμους των πλανητών. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι τότε εμφανίζεται για πρώτη φορά η έννοια της συνάρτησης σε μορφή πινάκων και ο Bell (1940) αποδίδει στους Βαβυλώνιους μαθηματικούς το ένστικτο της συνάρτησης. Ο Boyer (1969) σημειώνει ότι υπήρχαν κάποια πρότυπα συναρτήσεων από την Αρχαία Ελλάδα με χρήση αναλογιών. Στις εργασίες του Αρχιμήδη προπαρασκευάζεται η έννοια, χωρίς όμως ιδιαίτερη αναφορά σε αυτήν. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι αρχαίοι Έλληνες ενδιαφέρονταν περισσότερο για τις μορφές των αντικειμένων παρά για τις μεταβολές τους.

Κατά την ελληνιστική περίοδο ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (128-168μΧ), που ασχολήθηκε πολύ με την αστρονομία, συνέταξε τριγωνομετρικούς πίνακες τους οποίους καταχώρησε στους 13 τόμους της Αλμαγέστης. Στους πίνακες αυτούς συσχετίζονται τα μήκη των χορδών με τα αντίστοιχα τόξα. Με άλλα λόγια, ένα μέγεθος (τόξο κύκλου) αντιστοιχίζεται με ένα άλλο μέγεθος (χορδές). Η αντίληψη αυτή προσεγγίζει σχεδόν την γενικότερη έννοια της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής. Ο Youschkevitch (1976) υποστηρίζει ότι αν η συνάρτηση μεταφράζεται ως αναλυτική έκφραση τότε οι Αρχαίοι δεν γνώριζαν συναρτήσεις. Αν όμως θεωρήσουμε τη συνάρτηση ως σχέση που αντιστοιχίζει τα στοιχεία ενός συνόλου σε στοιχεία ενός άλλου συνόλου, τότε αυτή είναι γνωστή από παλιά, από την εποχή της Αλμαγέστης και το μόνο που λείπει είναι το όνομα. Αξίζει ακόμη να σημειώσουμε ότι οι ιδέες της μεταβολής και της μεταβλητής ποσότητας δεν ήταν άγνωστες στους Αρχαίους Έλληνες. Μελετήθηκαν προβλήματα που αναφέρονται στην κίνηση, το συνεχές και το άπειρο από την εποχή του Ηράκλειτου και του Ζήνωνα, ενώ το μεγαλύτερο μέρος από τα «Φυσικά» του Αριστοτέλη αναφέρεται σε αυτά.

Τις ρίζες της έννοιας της συνάρτησης όπως τη γνωρίζουμε σήμερα πρέπει να τις αναζητήσουμε στον 14^{ο} αιώνα στις εργασίες του Γάλλου μαθηματικού Oresme (Κολέζα, 2006). Ο Oresme γύρω στα 1350 περιέγραφε τους νόμους της φύσης ως

μορφές εξάρτησης μιας ποσότητας σε σχέση με μια άλλη. Η άνθιση των μαθηματικών και φυσικών επιστημών στο 17ο αιώνα οδήγησε τους επιστήμονες στη μελέτη των μεταβολών και ιδιαίτερα αυτών που προκύπτουν από τις κινήσεις. Για να εκφραστούν με μαθηματική γλώσσα οι μεταβολές των μεγεθών που παρουσιάζονται στην εξέταση ενός φαινομένου, έγινε εισαγωγή στη μαθηματική επιστήμη της σπουδαίας έννοιας της μεταβλητής. Οι Γάλλοι μαθηματικοί P. Fermat(1601-1665) και R.Descartes (1596-1650) έκαναν ουσιαστική διάκριση μεταξύ σταθερών και μεταβλητών μεγεθών. Ο όρος "function' (από το λατινικό ρήμα fungor που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο «Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτόμενων ή περί συναρτήσεων» (Kleiner, 1989). Στο συγκεκριμένο έργο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μας καμπύλης, όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτόμενων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων, που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Ο Bernoulli έδωσε το 1718 τον επόμενο γενικό ορισμό :

«Συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους ορίζεται μια ποσότητα, που σχηματίζεται με οποιονδήποτε τρόπο απ' αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές».

Ο Euler το 1748 δίνει το εξής ορισμό στο έργο του «Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση»:

«Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συνθέτει με οποιοδήποτε τρόπο μια μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες» (Katz1993, σελ 512). Για τον Euler αναλυτική έκφραση σημαίνει μαθηματικός τύπος. Είναι ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε το σύμβολο « f » από το function και μίλησε για διάφορα είδη συναρτήσεων (αλγεβρικές, υπερβατικές). Αργότερα διατύπωσε έναν πιο αφηρημένο ορισμό:

«Μια ποσότητα είναι συνάρτηση όταν εξαρτιέται από μια άλλη ποσότητα με τέτοιο τρόπο ώστε εάν η τελευταία αλλάζει η πρώτη ποσότητα να υφίσταται αλλαγή από μόνη της» (Katz1993,σελ 515).

Ο Euler αντιλαμβανόταν τη συνάρτηση περισσότερο ως ένα αλγεβρικό τύπο παρά ως καμπύλη ή αντιστοιχία. Όπως αναφέρει ο Πατρώνης (1996) για τους μαθηματικούς του 18^{ου} αιώνα είναι ο τύπος που καθορίζει τη συνάρτηση.

Το 1829 ο Dirichlet (Kleiner, 1989, σελ. 291), προκειμένου να διατυπώσει

αυστηρά τα συμπεράσματα του, στην εργασία του «Επί της αναπαραστάσεως μιας αυθαίρετης συνάρτησης με σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων», οδηγείται στο να δώσει το γενικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης:

«Μια συνάρτηση ψ(χ) είναι δοσμένη αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα που δίνει μια συγκεκριμένη τιμή ψ σε κάθε χ σε κάποιο σύνολο σημείων. Δεν είναι αναγκαίο το ψ να υπόκειται στον ίδιο κανόνα που αφορά το χ μέσα σ' ολόκληρο το διάστημα» (Davis &Hersh 1981 σελ 257).

Περίπου εκατό χρόνια αργότερα το 1939, με την εμφάνιση της αφηρημένης άλγεβρας, οι Bourbaki γενίκευσαν τον ορισμό του Dirichlet και η συνάρτηση ορίστηκε ως μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων (Kleiner, 1989, σελ. 299). Ο ορισμός αυτός επίτρεψε να υπάρξει η συνάρτηση ως αυθύπαρκτο μαθηματικό αντικείμενο κάτι που δεν επέτρεπε ο αρχικός ορισμός (Κολέζα, 2006).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.1 Η σημασία της έννοιας της συνάρτησης

Οι συναρτήσεις είναι στενά συνδεδεμένες με την καθημερινή ζωή του ανθρώπου. Μεταβολές που εμφανίζονται στην κοινωνία, στην οικονομία, στη φύση εκφράζονται συναρτησιακά αφού συνδέουν με κάποιο τρόπο δύο ή περισσότερα μεγέθη, που η μεταβολή του ενός έχει σαν άμεση συνέπεια τη μεταβολή του άλλου (Γαγάτσης, 2001). Για παράδειγμα, η υγρασία είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας, η αρτηριακή πίεση ενός ατόμου είναι συνάρτηση της ηλικίας, η απόσταση που διανύει ένα κινητό είναι συνάρτηση του χρόνου και της ταχύτητας, το κέρδος μιας επιχείρησης είναι συνάρτηση της ποσότητας του παραγόμενου προϊόντος.

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης έχει κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, καθώς η διδασκαλία της άλγεβρας και της ανάλυσης στο Λύκειο έχει επίκεντρο την τελευταία δεκαετία τις συναρτήσεις (Πατρώνης και Σπανός, 1996). Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις αποτελούν τη ραχοκοκαλιά των σημερινών σχολικών μαθηματικών. Κατέχουν δε σημαντική θέση στο βιβλίο της Α΄ λυκείου, ενώ η διδακτέα ύλη στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ λυκείου αναφέρεται σχεδόν αποκλειστικά στις συναρτήσεις. Ο Γαγάτσης (2000), γράφει σχετικά: «Είναι γενικά παραδεκτό ανάμεσα στους μαθηματικούς παιδαγωγούς ότι η συνάρτηση είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα, το οποίο καλούνται να αντιμετωπίσουν τα παιδιά κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» (σελ. 605). Παράλληλα, η έννοια της

συνάρτησης είναι μια από τις κεντρικές έννοιες θεμελίωσης των μαθηματικών, για τα οποία αποτελεί σημαντική ενοποιητική έννοια (Meel, 1999, Wilson, 1991).

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στη διδασκαλία των μαθηματικών, αποτελεί τη βάση των σύγχρονων μαθηματικών και είναι απαραίτητη σε συναφείς περιοχές των διαφόρων επιστημών. Όπως αναφέρει ο Oehrtman (2000), μία ισχυρή κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι απαραίτητη για κάθε σπουδαστή που ελπίζει να κατανοήσει το λογισμό και μια κρίσιμη διαδρομή για την ανάπτυξη μελλοντικών επιστημόνων, μηχανικών και μαθηματικών.

Ενώ λοιπόν κατά γενική ομολογία η έννοια της συνάρτησης, κυρίως για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, είναι πολύ σημαντική και χωρίς αυτήν είναι αδύνατον να κατανοηθούν πολλά στοιχεία των μαθηματικών, οι μαθητές βρίσκουν πολλές δυσκολίες στην προσπάθεια κατανόησής της (Κουσίδης, 2002). Όπως επισημαίνει ο Γαγάτσης (2000), η συνάρτηση είναι μία έννοια με πολλές αναπαραστάσεις, αφού μπορεί να εκφραστεί με πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, αλγεβρική έκφραση και λεκτική έκφραση. Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας έτσι, ώστε οι διάφορες αναπαραστάσεις να αλληλοσυμπληρώνονται (Καλδρυμίδου και Οικονόμου, 1992). Ο Kerslake (1986, όπ. αναφ. στο Γαγάτσης, 2000) και οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992, όπ. αναφ. στον Γαγάτση, 2000), υποστηρίζουν σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών τους, ότι η μετάβαση από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές γυμνασίου και αποφοίτους λυκείου, όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής.

Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998), στο Ε.Π.Π.Σ επισημαίνει ότι στο Λύκειο, οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών θα πρέπει να εμπεδωθούν, να αναπτυχθούν και να επεκταθούν σε ένα πιο αφηρημένο πλαίσιο, σε σχέση με εκείνο του γυμνασίου. Αυτό σημαίνει ότι η ύλη των συναρτήσεων που διδάσκεται στους μαθητές της Α΄ λυκείου αποτελεί το συνδετικό κρίκο ανάμεσα στη γνώση, που έχει ήδη αποκτήσει ο μαθητής για τις συναρτήσεις στο Γυμνάσιο και την καινούργια που πρέπει να αφομοιώσει, προκειμένου να ολοκληρώσει τη γενική του μόρφωση στο θέμα αυτό αλλά και να αποκτήσει τις δεξιότητες που απαιτούνται για περαιτέρω σπουδές. Πιο συγκεκριμένα, οι γενικότεροι στόχοι που θέτει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο για την διδασκαλία των συναρτήσεων στην Α΄ λυκείου είναι:

- Η κατανόηση και η χρήση συναρτησιακών σχέσεων στην επίλυση προβλημάτων.
- Η ανάπτυξη δεξιοτήτων ανάγνωσης, χρήσης και κατασκευής γραφικών παραστάσεων.

- Η κατανόηση και χρήση εξισώσεων, αλγορίθμων, κανόνων και τύπων.
- Η κατανόηση και η χρήση εννοιών της Ανάλυσης.

Σύμφωνα με τον Αντωνιάδη κ. συν. (2001), οι παραπάνω στόχοι εμπεριέχονται στο θεωρητικό πλαίσιο βάσει του οποίου η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης προϋποθέτει δύο βασικές ικανότητες. Την ικανότητα αναγνώρισής της, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και την δεξιότητα της μετάβασης από το ένα σύστημα στο άλλο. Επομένως, όπως τονίζει ο Hitt (1998, όπ. αναφ. στον Γαγάτση, 2000), ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης αφορά την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις.

Σύμφωνα με το πρόγραμμα του μαθηματικού αλφαβητισμού του PISA (2005), ο «συναρτησιακός» τρόπος σκέψης, δηλαδή να σκέπτεται κανείς με τους όρους των σχέσεων και των συναρτήσεων, είναι ένας από τους θεμελιώδεις στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τέλος, ο Wilson (1991) υποστηρίζει ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, υπό το πρίσμα του κονστρουκτιβισμού, πρέπει να αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως ένα δυναμικό αντικείμενο στο οποίο εμπεριέχονται η αλγεβρική έκφραση, η δράση και η διαδικασία.

2.2 Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης

2.2.1 Η συνάρτηση ως διαδικασία και αντικείμενο

Πολλές μελέτες έδειξαν ότι η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι αρκετά πολύπλοκη. Μαθητές που σκέφτονται την συνάρτηση μόνο με συμβολικούς χειρισμούς και διαδικαστικές τεχνικές, αδυνατούν να καταλάβουν μια γενικότερη απεικόνιση ενός συνόλου από «τιμές εισόδου», σε ένα σύνολο από «τιμές εξόδου». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να υστερούν σε εννοιολογικές δομές για την μοντελοποίηση συναρτησιακών σχέσεων, στις οποίες η τιμή της συνάρτησης αλλάζει συνεχώς καθώς γίνονται συνεχείς αλλαγές στην τιμή εισόδου (Carlson,1998. Monk & Nemirovsky,1994. Thomson,1994a). Η έμφαση στον αριθμητικό ορισμό και η μικρή εμπειρία που έχουν οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη συναρτησιακή σχέση με την έννοια των ποσοτήτων, μπορεί να θεωρηθεί ως μια από τις πηγές των δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Coldenberg et al, 1992).

Από τις αρχές της δεκαετίας του 90 οι περισσότερες μελέτες, σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης, βασίστηκαν στη διάκριση μεταξύ των δύο σημαντικών όψεων που υιοθετούν οι μαθητές όταν χειρίζονται συναρτήσεις. Την όψη της διαδικασίας και την όψη του αντικειμένου (Sfard, 1991). Η όψη της διαδικασίας χαρακτηρίζεται από την εστίαση των μαθητών σε υπολογιστικές ενέργειες ακολουθώντας μια αλληλουχία ενεργειών. Από την άλλη μεριά, η όψη του αντικειμένου βασίζεται στην εσωτερίκευση της εξαρτημένης σχέσης μεταξύ των ζευγών εισόδου – εξόδου δύο ποσοτήτων ή μεγεθών (Briedenbach et al. 1992). Η Sfard (1991) υποστηρίζει ότι οι έννοιες γίνονται αντιληπτές αρχικά ως διαδικασία, για παράδειγμα μέσα από υπολογιστικές διαδικασίες, και στη συνέχεια κατανοούνται ως αντικείμενο.

Όπως αναφέρει ο Thompson (1994), από το 1930 η διατεταγμένου ζεύγους έννοια της συνάρτησης έχει ληφθεί ως ο "επίσημος" ορισμός της συνάρτησης. Και αυτό σε μεγάλο βαθμό επειδή μπορεί να λύσει πολλά προβλήματα που εισήχθηκαν ιστορικά από ανθρώπους σαν τον Fourier που επιθυμούσε να ορίσει συναρτήσεις μέσα από μια οριακή διαδικασία. Ωστόσο, ο συγκεκριμένος ορισμός έχει δεχθεί σκληρή κριτική για παιδαγωγικούς λόγους. Η προσέγγιση της έννοιας μέσα από αυτόν τον ορισμό κρίθηκε ακατάλληλη για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Eisenberg, 1991). Αυτός μπορεί να έχει νόημα μόνο για ανθρώπους που αναγνωρίζουν τα προβλήματα που λύνει, αλλά όχι για ένα μαθητή ο οποίος βρίσκεται σε αρχικά στάδια μάθησης της έννοιας.

Σύμφωνα με τον Thomson (1994) οι μαθητές συχνά καλούνται να χειριστούν αλγεβρικές εξισώσεις και να δώσουν απαντήσεις σε ειδικούς τύπους ερωτήσεων που αναφέρονται κυρίως σε διαδικασίες επίλυσής τους. Οι μαθητές εισάγονται πολύ σύντομα στον χειρισμό συμβόλων και στις αλγοριθμικές διαδικασίες για τη λύση προβλημάτων χωρίς να έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια της συνάρτησης ως αντικείμενο.

Προς την κατεύθυνση αυτή βοηθούν και τα μαθηματικά εγχειρίδια, τα οποία στο μεγαλύτερο μέρος τους αποτελούνται από ασκήσεις και προβλήματα που επαναλαμβάνουν τετριμμένες και ανούσιες διαδικασίες επίλυσης. Στην Ελλάδα, μετά την εφαρμογή του Ε.Π.Π.Σ, οι Κλαουδάτος και Παπασταυρίδης (1998), διατυπώνουν την άποψη ότι οι εφαρμογές και τα προβλήματα, που διαφοροποιούνται από τις παραδοσιακές ασκήσεις, ενσωματώθηκαν οργανωτικά στα βιβλία των μαθηματικών του Γενικού Λυκείου με τη μορφή της προσέγγισης των «νησίδων». Δηλαδή, το

σχολικό βιβλίο είναι οργανωμένο σε πολλά κεφάλαια, όπου η θεωρητική παρουσία των εννοιών διακόπτεται από «νησίδες» εφαρμογών. Παρά το γεγονός ότι αναπτύχθηκαν νέα προγράμματα σπουδών, τα βιβλία μαθηματικών του Λυκείου δεν άλλαξαν. Η μοναδική παρέμβαση έγινε στην αναδιάταξη της ύλης και το Υπουργείο Παιδείας συνέταξε οδηγό διαχείρισης της διδακτέας ύλης. Με το συγκεκριμένο οδηγό ουσιαστικά προτρέπει τους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν δραστηριότητες και να δοθούν συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2013). Με άλλα λόγια, η μετάβαση από τις υπολογιστικές διαδικασίες στην κατανόηση της συνάρτησης ως αντικείμενο δεν υποστηρίζεται σε ικανοποιητικό βαθμό από τα εγχειρίδια των μαθηματικών του Λυκείου και η όλη προσπάθεια ανατίθεται στον εκπαιδευτικό.

Αυτή η επιμονή στις διαδικασίες, χωρίς να συνοδεύεται από τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας, δεν βοηθά τους μαθητές να οικοδομήσουν το συναρτησιακό τρόπο σκέψης και κατά συνέπεια δεν επιτρέπουν την εννοιολογική ερμηνεία, αναγνώριση και χρήση της συνάρτησης σε διάφορες καταστάσεις. Όπως αναφέρει ο Carlson (1998), το 43% των μαθητών της Α τάξης ενός κολεγίου στην άλγεβρα προσπάθησαν να βρουν την τιμή $f(x+a)$ προσθέτοντας το a στο τέλος της έκφρασης του f, παρά να αντικαταστήσουν το $x+a$ στον τύπο της συνάρτησης. Όταν τους ζητήθηκε να δώσουν τις εξηγήσεις τους, πρόβαλλαν κάποιους μνημονικούς κανόνες ή διαδικασίες για να υποστηρίξουν τις απαντήσεις τους. Προφανώς αυτοί οι μαθητές δεν κατανόησαν το $x + a$ σαν μια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης.

2.2.2 Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής

Μια από τις ιδιαίτερες δυσκολίες για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης αφορά στην έννοια της ανεξάρτητης μεταβλητής (Lagrange, 2008). Ο Thomson (1994), χρησιμοποιώντας τα δομήματα εικόνα έννοιας (concept image) και ορισμός έννοιας (concept definition), που ανέπτυξαν οι Tall και Vinner (1981), έδωσε ένα παράδειγμα για να υποστηρίξει ότι ακόμα και οι φοιτητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις συναρτησιακές σχέσεις και να διακρίνουν το ρόλο των συμβόλων σε αυτές. Διατύπωσε τον τύπο του αθροίσματος $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ και ζήτησε από ένα φοιτητή να γράψει τον τύπο που δίνει το άθροισμα αυτό υπό μορφή συνάρτησης. Ο

φοιτητής έγραψε $f(x)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και κανένας από τους άλλους μαθητές δεν βρήκε κάτι λάθος σε αυτόν τον τύπο, που σημαίνει ότι αυτή ήταν η έννοια της συνάρτησης για όλους τους φοιτητές τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Εδώ λοιπόν η χρήση των συμβόλων εκ μέρους των φοιτητών, για την έκφραση μιας συναρτησιακής σχέσης, υποδεικνύει μια σιωπηρή θεώρηση της ως ένα περίγραμμα που αποτελείται από δύο διακριτά μέρη. Το πρώτο χρησιμοποιείται ως ετικέτα για το δεύτερο χωρίς καμία εννοιολογική σύνδεση των αντικειμένων που υπάρχουν στα δύο μέρη (Langrange, 2013).

Η Falcade et al (2007) αναφέρει ότι, σε πολλές έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με την έννοια της μεταβλητής, αναδεικνύεται η περιπλοκότητα της και η επίδραση συγκεκριμένων διδακτικών πρακτικών της άλγεβρας. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν την πολυπρόσωπη ιδέα της μεταβλητής και σκέφτονται την συναρτησιακή σχέση μεταξύ των μεταβλητών με όρους διακριτών τιμών.

2.2.3 Ο ρόλος του συμβολισμού

Σημαντική πηγή δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι και ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται κάθε φορά. Ο Slavit (1997) υποδεικνύει το σημαντικό ρόλο του συμβολισμού, τον οποίο αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε πολλές διαφορετικές φόρμες κατά την ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης. Για το λόγο αυτό προτείνει την αναγκαιότητα της διερεύνησης, εκ μέρους των μαθητών, των αλγεβρικών και συναρτησιακών ιδεών σε διαφορετικά πλαίσια. Ακόμη και αν οι μαθητές διαθέτουν τις βασικές ικανότητες του αλγεβρικού συμβολισμού, ο συντονισμός αυτών με την κατανόηση της διάρθρωσης του αλγεβρικού τύπου μιας συνάρτησης είναι σημαντικός, ιδιαίτερα όταν η συνάρτηση προέρχεται από ένα πρόβλημα. Οι περισσότεροι μαθητές αποτυγχάνουν σε αυτόν τον συσχετισμό (Langrange & Psycharis, 2013). Για παράδειγμα, ο Van der Kooij (2010) σημειώνει ότι σε ένα σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές είναι ικανοί να κάνουν υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την εξίσωση του εκκρεμούς $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, ενώ δεν δίνουν κανένα νόημα σε μια αφηρημένη εξίσωση όπως η $y=2\sqrt{x}$.

Μια άλλη παρερμηνεία του συμβολισμού είναι ότι η σταθερή συνάρτηση, όπως για παράδειγμα η $y=2$, δεν είναι συνάρτηση γιατί δεν μεταβάλλεται. Σε μια έρευνα,

μόνο το 7% της Α τάξης σε ένα κολέγιο της Αμερικής κατάφερε να δώσει ένα σωστό παράδειγμα συνάρτησης όπου όλες οι τιμές είναι ίσες μεταξύ τους, ενώ το 25% έδωσαν την $y = x$ σαν παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης (Carlson, 1998).

Ακόμη πιο προβληματική είναι η κατάσταση κατά την οποία οι μαθητές βλέπουν τη συνάρτηση σαν δύο εκφράσεις οι οποίες χωρίζονται από ένα ίσον (Thompson, 1994b). Αυτή η φτωχή κατανόηση των συναρτήσεων είναι ανεπαρκής βάση για μια πιο πλούσια κατανόηση των πιο προχωρημένων μαθηματικών.

Είναι συχνό επίσης το φαινόμενο οι μαθητές να δυσκολεύονται να ξεχωρίσουν μια αλγεβρικά ορισμένη συνάρτηση και μια εξίσωση (Carlson, 1998). Το σύμβολο της ισότητας προκαλεί δυσκολία στο να διαχωρίσουν πότε είναι μέσο ορισμού σχέσης ανάμεσα σε δύο μεταβαλλόμενες ποσότητες και πότε είναι μια κατάσταση ισότητας δύο εκφράσεων. Μια άλλη δυσκολία είναι ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι όλες οι συναρτήσεις ορίζονται από έναν μόνο τύπο. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές θεωρούν ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$ είναι δύο διαφορετικές συναρτήσεις.

2.2.4 Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Οι περισσότεροι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες στην αφαιρετική σκέψη. Για πολλούς, η ενασχόληση με καρτεσιανές γραφικές παραστάσεις και τις αλγεβρικές εκφράσεις δεν είναι ένα εύκολο έργο. Η διδασκαλία των συναρτήσεων είναι απαραίτητο να αρθρώνεται σε μια ισορροπία μεταξύ των τριών πιο σημαντικών μορφών, της αριθμητικής, της γραφικής και της αλγεβρικής (Ponte, 1992).

Όπως επισημαίνει ο Γαγάτσης (2000), η συνάρτηση είναι μία έννοια με πολλές αναπαραστάσεις, αφού μπορεί να εκφραστεί με πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, αλγεβρική έκφραση και λεκτική έκφραση. Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας έτσι, ώστε οι διάφορες αναπαραστάσεις να αλληλοσυμπληρώνονται. Ωστόσο, η μετάβαση από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές γυμνασίου και αποφοίτους λυκείου, όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Kerslake, 1986).

Σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus (1991) οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και προτιμούν να χειρίζονται τη συνάρτηση

μέσα από τον αλγεβρικό της τύπο. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και η Καλδρυμίδου (1998) η οποία επισημάνει ότι η αρνητική τάση των μαθητών, των φοιτητών αλλά και των εκπαιδευτικών, προς τις εικονικές αναπαραστάσεις και η προτίμηση τους σε προσεγγίσεις αλγεβρικού τύπου οφείλεται σε λόγους όπως:

- ✓ Γνωστικής φύσης, που αφορούν τη δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύσης της εικόνας ως τρόπου παράστασης πληροφοριών
- ✓ Επιστημολογικής φύσης, που αναφέρονται στην επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών
- ✓ Συναισθηματικής φύσης, που σχετίζονται με την αβεβαιότητα και το άγχος που αισθάνονται τα υποκείμενα όταν αντιμετωπίζουν γραφικές παραστάσεις.

Ο Thomson (1994a) υποστηρίζει ότι οι μαθητές έχουν δυσκολία στο να μεταφέρουν πληροφορίες μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων, ακόμη και σε απλές περιπτώσεις. Ο Ponte (1984) διαπίστωσε ότι μαθητές του Λυκείου θεωρούσαν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από διακριτά σημεία και δυσκολεύονταν να περιγράψουν τη συνάρτηση ως μεταβολή. Οι Dreyfus και Eisenberg (1986) διαπίστωσαν επίσης τη δυσκολία των μαθητών να συνδέσουν την αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης με τη γεωμετρική αναπαράσταση. Αρκετοί μαθητές δεν βλέπουν τη συμβολική και γραφική αναπαράσταση ως περιγραφές του ίδιου αντικειμένου (Eisenberg, 1991). Μάλλον, οι μαθητές βλέπουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ως ξεχωριστά αντικείμενα. Αυτή η αντίληψη δημιουργεί πρόβλημα στη γνωστική εξέλιξη των μαθητών και στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Lambertus, 2007).

Η Lambertus (2007), αναφέρει ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν την έννοια της συνάρτησης μόνο με μία αναπαράσταση αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες στο να χρησιμοποιήσουν τις ίδιες έννοιες με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Στην πράξη, οι μαθητές δεν μπορούν να κάνουν τη σύνδεση ότι η εξίσωση, ο πίνακας και η γραφική παράσταση επικοινωνούν την ίδια πληροφορία σε διαφορετικές φόρμες. Η συγκεκριμένη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να συνδέουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μεταξύ τους, οδηγεί στον μαθητή ο οποίος υποστηρίζει ότι ο κύκλος είναι συνάρτηση επειδή έχει ένα μαθηματικό όνομα ή μια συμβολική αναπαράσταση. Όμως, ο ίδιος μαθητής όταν δει τη γραφική παράσταση του κύκλου μπορεί να υποστηρίξει ότι δεν είναι συνάρτηση επειδή δεν περνάει το κριτήριο την

κατακόρυφης γραμμής (Lambertus, 2007).

2.3 Η συνάρτηση ως συμμεταβολή

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης υιοθετούν δύο βασικές οπτικές. Την οπτική της διαδικασίας και την οπτική του αντικειμένου. Αναπτύσσοντας περαιτέρω τη δυαδικότητα της διαδικασίας – αντικειμένου οι μαθηματικοί παιδαγωγοί πρότειναν, ότι κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να θεωρηθεί η μετακίνηση από την αρχική εστίαση στις δράσεις και τις διαδικασίες σε μια περισσότερο αντικειμενοστραφή όψη, η οποία χαρακτηρίζεται από σταδιακή επικέντρωση στη δομή, την ενσωμάτωση των ιδιοτήτων και την δημιουργία μαθηματικών αντικειμένων (Sfard, 1991).

Ο τρέχον πρότυπος ορισμός της συνάρτησης αναδεικνύει την αντιστοιχία πάνω από τη μεταβολή. Τα στοιχεία ενός συνόλου αντιστοιχούν σε στοιχεία ενός άλλου, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του πρώτου να αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου. Ο Kaput επεκτείνει την ανάλυση Clagett να ανιχνεύσει την εξέλιξη των σημερινών ιδεών της μεταβλητής και της μεταβλητότητας στον λογισμό, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η σημερινή στατική εικόνα της συνάρτησης κρύβει πολλά από τα πνευματικά επιτεύγματα που έδωσε έως ότου ανέλθει στις τρέχουσες αντιλήψεις μας (Thompson, 1994). Πολλές έρευνες αναφέρονται στις δυσκολίες των μαθητών να αναπαραστήσουν και να μοντελοποιήσουν ένα σύστημα το οποίο περιλαμβάνει δύο ποσότητες οι οποίες αλλάζουν ταυτόχρονα (Mejia, 2006). Ο Tall (1992) υποστηρίζει ότι αν και η εικόνα που έχουν οι σπουδαστές για τη συνάρτηση περιέχει την έννοια της αντιστοιχίας, την ιδέα του εργαλείου, την εξίσωση, τον τύπο και το γράφημα, δεν περιλαμβάνει την αντίληψη της μεταβολής δύο μεταβλητών σε συνδυασμό της μίας με την άλλη.

Σε αυτό το πνεύμα, από τα μέσα της δεκαετίας του ενενήντα, αναπτύχθηκε ένας ικανός αριθμός προσεγγίσεων για να περιγράψουν αντικειμενοστραφή οπτική της συνάρτησης, τονίζοντας την πτυχή της συμμεταβολής της συνάρτησης. Η προσέγγιση αυτή έχει τις ρίζες της στον Euler σύμφωνα με τον οποίο «όταν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν οι τελευταίες αλλάξουν, τότε αλλάζουν και οι πρώτες, τότε οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων ποσοτήτων» (Kleiner, 1989). Οι Confrey&Smith (1994) αντιλαμβάνονται και εξηγούν την έννοια της συμμεταβολής ως κίνηση ανάμεσα σε διαδοχικές τιμές

μιας μεταβλητής (y_n, y_{n+1}), οι οποίες συντονίζονται με την κίνηση ανάμεσα στις αντίστοιχες διαδοχικές τιμές μιας άλλης μεταβλητής (x_n, x_{n+1}). Οι Saldana & Thomson (1998) αναφέρουν ότι οι Coulomb & Berenson, βασιζόμενοι στις παραπάνω αντιλήψεις και τις ιδέες του Thomson, περιγράφουν τη συμμεταβολή ως μια έννοια η οποία εμπεριέχει τα παρακάτω:

- ✓ Την αναγνώριση δύο συνόλων στοιχείων
- ✓ Τον συντονισμό δύο τύπων δεδομένων μέσω των οποίων σχηματίζονται σχέσεις ανάμεσα στην αύξηση, τη μείωση και τις σταθερές σχέσεις.
- ✓ Τη σύνδεση των δύο τύπων δεδομένων για να εδραιωθούν σαφείς σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία των δύο συνόλων
- ✓ Τη γενίκευση της σύνδεσης για την πρόβλεψη άγνωστων τιμών δεδομένων

Κεντρικό στοιχείο της έννοιας της συμμεταβολής είναι ο συσχετισμός μεταξύ δυο μεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Οι Carlson et al (2002) ορίζουν τη λογική της συμμεταβολής ως εκείνες τις γνωστικές ενέργειες που εμπλέκονται κατά τον συσχετισμό δύο μεταβαλλόμενων ποσοτήτων, παρατηρώντας τους τρόπους με τους οποίους αλλάζει η μία σε σχέση με την άλλη.

Σύμφωνα με αρκετές μελέτες, οι σπουδαστές που διδάσκονται λογισμό αργούν να αναπτύξουν την ικανότητα να ερμηνεύουν διάφορους ρυθμούς μεταβολής πέρα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης (Carlson, 1998; Kaput, 1992; Monk, 1992; Monk & Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, 1996; Tall, 1992; Thompson, 1994a). Όπως αναφέρει ο Carlson (1998) αρκετά εμπειρικά δεδομένα δείχνουν ότι οι μαθητές έχουν πρόβλημα να συλλάβουν την ιδέα της συνάρτησης ως μια σχέση μεταξύ μεταβλητών. Οι Cotrill et al (1996) υποστηρίζουν ότι οι δυσκολίες των μαθητών να αντιληφθούν την έννοια του ορίου συνδέεται με τις ελλιπείς ικανότητες στη λογική της συμμεταβολής. Η Zandieh (2000) αναφέρει σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου, ότι η εικόνα της συνάρτησης ως συμμεταβολή των εισερχόμενων τιμών με τις εξερχόμενες τιμές είναι θεμελιακή.

Σύμφωνα με τον Tomson (1994), η κατανόηση της συμμεταβολής είναι μια αναπτυξιακή διαδικασία η οποία περιλαμβάνει:

- ✓ την κατασκευή νοητικής εικόνας της μεταβολής μιας ποσότητας,
- ✓ το συντονισμό των νοητικών εικόνων των μεταβολών δύο ποσοτήτων και

- ✓ την κατασκευή νοητικής εικόνας της ταυτόχρονης συμμεταβολής των αλλαγών δύο ποσοτήτων.

Οι Carlson et al (2002) παρουσίασαν ένα πλαίσιο της έννοιας της συμμεταβολής που περιγράφει πέντε νοητικές ενέργειες με τα αντίστοιχα πέντε επίπεδα κατανόησης της συμμεταβολής. Κάθε επίπεδο λογικής αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό επίπεδο συμπεριφοράς και ανάπτυξης. Οι νοητικές ενέργειες και τα επίπεδα συμπεριφοράς αναπτύσσονται στους πίνακες 1 και 2.

Νοητική ενέργεια (Mental action)	**Περιγραφή νοητικής ενέργειας**
Νοητική ενέργεια 1 (MA1)	Συσχετίζοντας (coordinating) την εξάρτηση της μιας μεταβλητής από την άλλη
Νοητική ενέργεια 2 (MA2)	Συσχετίζοντας την κατεύθυνση της αλλαγής της μιας μεταβλητής με αλλαγές στην άλλη
Νοητική ενέργεια 3 (MA3)	Συσχετίζοντας το ποσό της αλλαγής της μιας μεταβλητής με αλλαγές στην άλλη
Νοητική ενέργεια 4 (MA4)	Συσχετίζοντας το μέσο ρυθμό της αλλαγής της συνάρτησης με ομοιόμορφες αυξήσεις αλλαγής στην ανεξάρτητη μεταβλητή
Νοητική ενέργεια 5 (MA5)	Συσχετίζοντας το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης με συνεχείς αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Πίνακας 1: *Νοητικές ενέργειες του πλαισίου της συμμεταβολής*

Το πλαίσιο της συμμεταβολής περιέχει πέντε διακριτά επίπεδα ανάπτυξης. Η ικανότητα κάποιου μαθητή θα λέμε ότι έχει φτάσει σε κάποιο δεδομένο επίπεδο ανάπτυξης, όταν έχει την ικανότητα να υποστηρίζει τις νοητικές ενέργειες που αντιστοιχούν σ' αυτό το επίπεδο. Τα επίπεδα ανάπτυξης του πλαισίου της συμμεταβολής παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Επίπεδο 1 (Ε1). Συσχέτιση

Στο επίπεδο της συσχέτισης οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την

νοητική ενέργεια της συσχέτισης των αλλαγών της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη (ΜΑ1)
Επίπεδο 2 (Ε2). Κατεύθυνση Σε αυτό το επίπεδο οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από τις νοητικές ενέργειες της συσχέτισης της κατεύθυνσης των αλλαγών της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη. Οι νοητικές ενέργειες που αντιστοιχούν σε αυτό το επίπεδο είναι οι ΜΑ1 και ΜΑ2.
Επίπεδο 3 (Ε3). Ποιοτική συσχέτιση Οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από τη νοητική ενέργεια της συσχέτισης του ποσού των αλλαγών της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη. Οι νοητικές ενέργειες του εν λόγω επιπέδου είναι οι ΜΑ1, ΜΑ2 και ΜΑ3.
Επίπεδο 4 (Ε4). Μέσος ρυθμός Οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητική ενέργεια της συσχέτισης του μέσου ρυθμού των αλλαγών της συνάρτησης με ομοιόμορφες αλλαγές στην μεταβλητή εισόδου. Οι αντίστοιχες νοητικές ενέργειες είναι από ΜΑ1 έως και ΜΑ4.
Επίπεδο 5 (Ε5). Στιγμιαίος ρυθμός Εδώ οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από τη νοητική ενέργεια της συσχέτισης του στιγμιαίου ρυθμού των αλλαγών της συνάρτησης με τις αλλαγές στην μεταβλητή εισόδου. Στο επίπεδο αυτό γίνεται κατανοητό ότι ο στιγμιαίος ρυθμός της αλλαγής είναι αποτέλεσμα από όλο και μικρότερα διαστήματα του μέσου ρυθμού αλλαγής. Το σημείο καμπής είναι εκεί που αλλάζει ο ρυθμός μεταβολής. Οι αντίστοιχες νοητικές ενέργειες του επιπέδου είναι από ΜΑ1 έως και ΜΑ5.

Πίνακας 2: *Τα επίπεδα του πλαισίου της συμμεταβολής*

Το προτεινόμενο πλαίσιο συμμεταβολής προτείνει ένα αναλυτικό εργαλείο με το οποίο αποτιμούμε την κατανόηση της συμμεταβολής σε καλύτερο βαθμό από ότι στο παρελθόν. Επιπλέον, προτείνει μια δομή και μια γλώσσα για να ταξινομήσουμε τη σκέψη των μαθητών για τη συμμεταβολή κατά την ανταπόκριση ενός μαθητή σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά και για να περιγράψουμε γενικά τις ικανότητες του μαθητή στη λογική της συμμεταβολής (Carlson, et al, 2002).

2.4 Η συνάρτηση ως συμμεταβολή στο αναλυτικό πρόγραμμα

Σε όλο το εύρος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εμφανίζεται η έννοια της συνάρτησης με διάφορες μορφές. Από τη μελέτη των βιβλίων του Γυμνασίου προκύπτουν ορισμένα συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα, στο βιβλίο των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται με τη μορφή των ανάλογων ποσών και των αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Όπως αναφέρεται στις οδηγίες του Υ.ΠΑΙ.Θ (2012) «Οι έννοιες των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών έχουν διδαχθεί στο Δημοτικό. Το νέο για τους μαθητές στην Α΄ Γυμνασίου είναι η εμπλοκή των μεταβλητών, η συμμεταβολή (χωρίς να γίνεται λόγος για συνάρτηση) και η παράσταση σε σύστημα συντεταγμένων». Εδώ λοιπόν γίνεται λόγος για συμμεταβολή ποσοτήτων και είναι η μοναδική περίπτωση που δίνεται έμφαση σε αυτήν την έννοια.

Στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Π., et al, 2012) εμφανίζονται πλέον οι έννοιες της μεταβλητής x και της μεταβλητής y και δίνεται ο επόμενος ορισμός για την συνάρτηση «*…Με τη σχέση αυτή κάθε τιμή της μεταβλητής* x *αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής* y*. Μια τέτοια σχέση στα μαθηματικά λέγεται συνάρτηση*». Από τη Β΄ Γυμνασίου αρχίζει πλέον η διδασκαλία της συνάρτησης υπό το πρίσμα της αντιστοιχίας. Η οπτική αυτή κορυφώνεται στην Α΄ Λυκείου όπου πλέον δίνεται ο συνολοθεωρητκός ορισμός της συνάρτησης και οι μαθητές καλούνται να οικοδομήσουν την έννοια της συνάρτησης σε ένα αφηρημένο επίπεδο. Η κατάσταση αυτή γίνεται ακόμη πιο έντονη στην Β΄ και στην Γ΄ Λυκείου, όπου οι μαθητές πλέον ασχολούνται μόνο με την μεθοδολογική επίλυση ασκήσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εστίαση στο συμβολισμό και ελάχιστα έως καθόλου στην έννοια της συνάρτησης.

Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό, ότι η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης εξαντλείται στη χρήση του συνολοθωρητικού ορισμού. Βέβαια έχει γίνει προσπάθεια τα τελευταία χρόνια οι μαθητές να εξασκηθούν στις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης και να μεταβαίνουν από τη μία στην άλλη. Ωστόσο, δεν δίνεται η έμφαση που απαιτείται στο πως κατασκευάζουμε ή επιλέγουμε τις μεταβλητές, με ποιο τρόπο διαχωρίζουμε την εξαρτημένη από την ανεξάρτητη μεταβλητή, τι μεταβάλλεται και τι παραμένει αναλλοίωτο.

Η έννοια λοιπόν της συμμεταβολής ποσοτήτων ή μεγεθών, που χαρακτηρίζει την φύση της συνάρτησης, παραμερίζεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και

επικρατεί ο συνολοθεωρητικός ορισμός του διατεταγμένου ζεύγους. Αναδεικνύεται η αντιστοιχία πάνω από τη μεταβολή. Όμως, ο ορισμός αυτός, σύμφωνα με τις έρευνες που έχουμε αναφέρει ήδη, αποτελεί σημαντική αιτία για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

ΚΕΦΑΛΙΟ 3: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

3.1 Ψηφιακά εργαλεία και κατανόηση μαθηματικών εννοιών

3.1.1 Η διαμεσολάβηση των ψηφιακών εργαλείων στη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές δημιουργούν μαθηματικά νοήματα αποτελεί ένα πεδίο που έχει απασχολήσει τους ερευνητές. Μια από τις επικρατούσες απόψεις είναι ότι οι μαθητές νοηματοδοτούν τις μαθηματικές έννοιες με κατασκευαστικό τρόπο. Η άποψη αυτή εδράζεται στην θεωρία του κονστρουκτιβισμού (Constructivism), η οποία διατυπώθηκε απόν τον Piaget. Σύμφωνα με αυτήν η γνώση οικοδομείται από τους μαθητές όταν αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον και ερμηνεύουν τα ερεθίσματα μέσα από το πρίσμα των δικών τους εμπειριών. Έτσι, οικοδομούν τα δικά τους γνωστικά εργαλεία. Ο κονστρουκτιβισμός πρόσφερε ένα στέρεο πλαίσιο για να κατανοήσουμε τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές σκέφτονται και μαθαίνουν στα διάφορα στάδια της εξέλιξής τους.

Στην μετα-Πιαζετιανή εποχή, το κυρίαρχο μοντέλο ήταν αυτό της διάγνωσης των παρανοήσεων των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες και κατά την Πιαζετιανή παράδοση, η επινόηση γενικών διαγνωστικών μοντέλων με άξονα την ηλικιακή ωρίμανση (π.χ. Van Hiele, 1959). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο η διδακτική αντιμετωπίστηκε ως επιστήμη διάγνωσης και θεραπείας των παρανοήσεων αυτών και συνειρμικά ο μαθητής αντιμετωπιζόταν ως «ασθενής» ως προς τις έννοιες που δεν κατανοούσε (Hart, 1981). Η οπτική αυτή όμως είχε ορισμένα ριζικά προβλήματα για την κατανόηση της μαθησιακής διαδικασίας. Αντιμετώπιζε τα μαθηματικά ως αυθύπαρκτη οντότητα και δεν πρότεινε έτσι τρόπο να μελετηθούν οι έννοιες που οι ίδιοι οι μαθητές ανέπτυσσαν. Κατά τα μέσα της δεκαετίας του ’80 διατυπώθηκαν οι πρώτες θέσεις για τη δομική θεώρηση της διδακτικής των μαθηματικών και σηματοδότησαν την αυτονόμηση του χώρου (Freudenthal, 1983). Η θεώρηση αυτή έτυχε έντονης υποστήριξης από την κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών, κυρίως διότι έθεσε θέματα επιστημολογίας και προσέγγισης της μαθησιακής διαδικασίας μέσα από τις επιστήμες της αγωγής και όχι στενά της γνωστικής ψυχολογίας.

Η θεώρηση για τα μαθηματικά, που συμβαδίζει με τη δομική θεωρία μάθησης, προσδιορίζει το γνωστικό αυτό τομέα ως μια έκφανση του ανθρώπινου λογισμού, ως ένα πεδίο της ανθρώπινης διανόησης που από τη στιγμή που είναι ανθρώπινο κατασκεύασμα μπορεί να οδηγήσει σε λάθη. Απορρίπτει δηλαδή οποιαδήποτε

φαινομενολογική διάσταση και αδιαμφισβήτητη υπόσταση του αντικειμένου (diSessa, 1987). Η οπτική αυτή υποδηλώνει ότι τα μαθηματικά δεν έχουν υπόσταση ως φυσικό αντικείμενο, δεν βρίσκονται «κάπου εκεί έξω», ώστε να ευσταθεί ο ισχυρισμός ότι ο στόχος του μαθηματικού επιστήμονα είναι να τα καταλάβει και ότι εφόσον τα κατανόησε δεν μπορεί να υπάρξει αμφιβολία για την αποκτηθείσα γνώση. Αντίθετα, αποτελούν κατασκεύασμα του καθενός από μας και άρα αυτός που κάνει μαθηματικά είτε είναι μαθητικός επιστήμονας είτε μαθητής, κτίζει πάνω στη δική του θεωρία, κάνοντας συνεχώς λάθη, πισωγυρίσματα και διορθώσεις. Επομένως, η δομική θεώρηση των μαθηματικών βλέπει το μαθητή όπως ακριβώς και τον επιστήμονα των μαθηματικών. Ο μαθητής κατασκευάζει, δομεί έννοιες μέσα από μια διαδικασία εικασιών, υποθέσεων, ανταπόκρισης από το κοινωνικό και φυσικό περιβάλλον, διατύπωσης θεωρημάτων και αναθεώρησής τους, όταν η ορθότητά τους απορρίπτεται στην πράξη (Κολέζα, 2006).

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μαθησιακή διαδικασία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα βασισμένα σε εργαλεία σύγχρονης τεχνολογίας αρχίζουν με τις εργασίες του αμερικανού μαθηματικού και παιδαγωγού από το Media Lab του MIT, S. Papert (1980). Το βασικό χαρακτηριστικό της θεώρησης του Papert είναι η σχέση της με τη θεωρία του J. Piaget και η προσέγγιση που προσδίδεται στην αξιοποιήση της σύγχρονης τεχνολογίας, καθώς αυτή αντιμετωπίζεται ως πολιτισμικό εργαλείο. Ο S. Papert ανέπτυξε τη θεωρία του στα μέσα της δεκαετίας του 60 μετά από μια πενταετή περίπου επίσκεψή του στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης και τη συνεργασία του με τον Piaget . Ο Papert ήθελε να περιγράψει τη μάθηση ως δραστηριότητα που πηγάζει από τη διερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση. Προσέγγισε τη εκμάθηση των μαθηματικών ως μια διαδικασία φυσιολογικής εξέλιξης της λογικο-μαθηματικής σκέψης, παραλληλίζοντάς την με την εκμάθηση της γλώσσας. Τόνισε ότι μαθαίνουμε να μιλάμε και να σκεπτόμαστε λογικά πολύ πριν πάμε σχολείο, σε καταστάσεις, όπου η μάθηση αυτή πραγματοποιείται καθώς αποκτούμε ικανότητες επιβίωσης και επικοινωνίας στο κοινωνικό και φυσικό μας περιβάλλον (Papert, 1980).

Ο Papert διαφοροποιείται όμως σημαντικά από τον Piaget σχετικά με τη θεωρία του για τη γνωστική ωρίμανση του ανθρώπου, δηλαδή τα στάδια γνωσιακής εξέλιξης, που είναι ίσως το πιο γνωστό μέρος της θεωρίας του. Ο Papert ισχυρίστηκε ότι αυτό που δεν έχουν κάνει οι επιστήμες της αγωγής είναι να μελετήσουν το τι μπορεί να κάνει το παιδί. Υποστήριξε δηλαδή ότι ο Piaget επικεντρώθηκε στο να εξηγήσει τις

λογικές διεργασίες που δεν μπορεί να κάνει ο άνθρωπος στα διάφορα στάδια ωρίμανσης του. Αντίθετα, ο Papert ήταν πεπεισμένος ότι τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν με πολύ ανώτερους τρόπους από ο, τι υποστηρίζεται και ότι μπορούν να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα τα οποία να είναι πολύ πιο πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων (Papert, 1980). Με άλλα λόγια, εστιάζει στη μελέτη των μαθηματικών νοημάτων που δομούν τα παιδιά, δηλαδή τι καταλαβαίνουν, αντί για το τι παρανοούν και πώς η κατανόηση αυτή αναπτύσσεται, αντί για το ποιές παρανοήσεις διορθώνονται.

Οι απόψεις του Papert οδήγησαν στη θεωρία του Constructionism, που με απλά λόγια είναι η ιδέα του «μαθαίνω φτιάχνοντας». Η έννοια της κατασκευής αναφέρεται τόσο στην κατασκευή που εικονίζεται στην οθόνη του υπολογιστή όσο και στη γνώση που δομεί ο μαθητής και τα νοήματα που κατασκευάζει. Το πλαίσιο του Constructionism παρέχει ελευθερία στο μαθητή να πειραματιστεί, να δημιουργήσει τα δικά του νοήματα και μέσα από αυτήν την αλληλεπίδραση με τα εργαλεία να ισορροπήσει (Papert & Harel, 1991). Οι Papert και Harel (1991) βλέπουν τις μαθηματικές έννοιες ως χειροπιαστά αντικείμενα που μεσολαβούν για το πέρασμα από το φυσικό κόσμο, στον κόσμο των μαθηματικών νοημάτων τα οποία δημιουργούνται με την ενασχόληση του ατόμου με τα κατάλληλα εργαλεία.

Οι Hoyles και Noss (2009) προσπάθησαν να ερευνήσουν τη φύση της μαθηματικής γνώσης που αναπτύσσεται κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με ψηφιακά εργαλεία και πώς η γνώση αυτή σχετίζεται με την επίσημη μαθηματική γνώση. Δεχόμενοι το Constructionism ως τρόπο μάθησης για τα μαθηματικά θεωρούν σχεδόν αυτονόητη την ανάγκη εισαγωγής κατάλληλων εργαλείων προκειμένου να ενισχύσουμε την προσπάθεια των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων. Τα εργαλεία αυτά μπορούν να είναι στατικά ή να στηρίζονται στα επιτεύγματα της σύγχρονης τεχνολογίας. Τα ψηφιακά εργαλεία είναι καταλληλότερα για την κατασκευή μαθηματικών εννοιών. Βασικός λόγος είναι ο δυναμικός χειρισμός τους και η αλληλεπίδραση με τον μαθητή σε πραγματικό χρόνο. Όπως αναφέρουν οι Carter και Ferrucci (2003), οι μαθητές εξερευνούν τα προβλήματα σε μεγαλύτερο βάθος με μαθηματικό λογισμικό και πιστεύουν ότι τέτοιου είδους δραστηριότητες σε υπολογιστικά περιβάλλοντα τους βοηθούν να καταλάβουν και να εμπεδώσουν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες σε μια πληρέστερη μορφή. Ένα τέτοιο περιβάλλον, σύμφωνα με την Biza (2011), πρέπει να διευκολύνει τους μαθητές ώστε:

- ✓ Να έχουν τη δυνατότητα να μεταβαίνουν από το γεωμετρικό περιεχόμενο στο αναλυτικό και να τα συνδέουν μεταξύ τους.
- ✓ Να διερευνούν τις μαθηματικές ιδιότητες μεταξύ διαφορετικών παραστάσεων, που όμως συσχετίζονται μεταξύ τους.
- ✓ Να έχουν πρόσβαση σε διαφορετικές μαθηματικές πτυχές της ίδιας έννοιας.

Τι εννοούμε όμως όταν λέμε μαθηματική έννοια; Σ' αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικός ο τρόπος που προσδιόρισε την μαθηματική έννοια ο ψυχολόγος G. Vergnaud (1991). Υποστήριξε ότι δεν έχει νόημα η αντίληψη μιας μαθηματικής έννοιας σε απομόνωση. Νόημα έχει η θεώρησή της σε σχέση:

- ✓ με άλλες έννοιες που συνδέονται στενά μ' αυτήν,
- ✓ με μία ομάδα καταστάσεων στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και
- ✓ με μία ομάδα διαθέσιμων αναπαραστάσεών της.

Ο Vergnaud ονόμασε την τριάδα αυτή νοητικό πεδίο και υποστήριξε ότι στη διδακτική των μαθηματικών αυτός πρέπει να είναι ο τρόπος αναφοράς στις μαθηματικές έννοιες. Μετά από χρόνια, οι Balacheff και Gaudin (2002), συμπλήρωσαν την πρόταση του Vergnaud, προσθέτοντας μια τέταρτη πτυχή στον ορισμό του νοητικού πεδίου, μια δομή ελέγχου. Ουσιαστικά η δομή αυτή δηλώνει αυτό που απαιτείται, προκειμένου να γίνουν από τους μαθητές κρίσεις, επιλογές και να ληφθούν αποφάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Η δομή αυτή συνδυάζεται με τα συμπεράσματα που παράγουν οι μαθητές, τα οποία αφορούν σταθερές μέσα σε μια ομάδα σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται με αυτά.

3.1.2 Τα ψηφιακά εργαλεία ως όργανα σημειωτικής διαμεσολάβησης

Παρά το γεγονός ότι η δομή που προτείνει ο Vergnaud είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την εκμάθηση των μαθηματικών με ψηφιακά εργαλεία, δεν διατυπώθηκε με βάση το πλαίσιο αυτό. Ένα χρήσιμο πλαίσιο κατανόησης της δημιουργίας νομάτων, που πηγάζει από τις έρευνές της σε μαθησιακά περιβάλλοντα, που αξιοποιούν τα εργαλεία της ψηφιακής τεχνολογίας, διατυπώθηκε από την Mariotti (2002). Με βάση την έννοια της κοινωνικής διαμεσολάβησης του νοήματος (Vygotsky, 1978), η Mariotti εντάσσει τη δραστηριότητα αναπαράστασης με ψηφιακά εργαλεία στο παραδοσιακό ρεπερτόριο μέσων αναπαράστασης της ανθρώπινης νόησης, όπως αυτό της γραπτής και προφορικής γλώσσας.

Η Βιγκοτσιανή άποψη υποστηρίζει ότι υπάρχει μια διαλεκτική εξάρτηση μεταξύ των πρακτικών εργαλείων και των συμβολικών εργαλείων, σε αντίθεση με τις άλλες ψυχολογικές προσεγγίσεις οι οποίες τα ξεχωρίζουν (Falcade, Laborde & Mariotti, 2007). Τα εργαλεία έχουν μια διπλή λειτουργία. Από τη μια μεριά είναι εξωτερικά προσανατολισμένα και χρησιμεύουν ως αγωγός της ανθρώπινης επιρροής στο αντικείμενο της δραστηριότητας. Από την άλλη μεριά, είναι εσωτερικά προσανατολισμένα και στοχεύουν στον έλεγχο της δράσης.

Ο Vygotsky (1978) στην κατηγορία των διαμεσολαβητών τοποθετεί αυτά που ονομάζει εργαλεία (tools) και σημεία (signs) ή γενικότερα όργανα σημειωτικής διαμεσολάβησης (instruments of semiotic meditation). Αν και τα δύο είδη, εργαλεία και σημεία, παράγονται και χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο, διαφέρουν ως προς τη λειτουργία διαμεσολάβησης τους. Τα εργαλεία είναι εξωτερικά προσανατολισμένα ενώ τα σημεία είναι εσωτερικά προσανατολισμένα. Για τα σημεία χρησιμοποιείται και ο όρος ψυχολογικά εργαλεία (psychological tools). Όπως αναφέρει η Mariotti (2000) τα εργαλεία μπορούν να μετασχηματιστούν σε ψυχολογικά εργαλεία μέσω της διαδικασίας της εσωτερίκευσης. Κατά τη διαδικασία αυτή ένα εργαλείο μετατρέπεται σε ένα ψυχολογικό εργαλείο και παρέχει δυνατότητες να διαμορφωθούν νέες έννοιες και επομένως λειτουργεί ως σημειωτικός διαμεσολαβητής. Ένα παράδειγμα τέτοιας διαδικασίας εσωτερίκευσης είναι ο γεωμετρικός διαβήτης. Το συγκεκριμένο μεταλλικό εργαλείο δεν είναι μόνο ένα υλικό εργαλείο, αλλά έχει γίνει ένα νοητικό αντικείμενο, η χρήση του οποίου δίνει τη δυνατότητα διαμόρφωσης νέων εννοιών και μπορεί να αντικατασταθεί για παράδειγμα με την περιστροφή χεριών εκ μέρους των μαθητών (Mariotti, 2001).

Με βάση τα παραπάνω, η Βιγκοτσκιανή άποψη μπορεί να εξηγήσει την συνεισφορά της δράσης του εργαλείου διαμεσολάβησης στο σχηματισμό έννοιας. Σημεία που δημιουργούνται σε σχέση με τη χρήση ενός εργαλείου, μέσω της πολύπλοκης διαδικασίας εσωτερίκευσης που επιτυγχάνεται μετά από κοινωνική αλληλεπίδραση, μπορούν να διαμορφώσουν νέα νοήματα. Από την άποψη αυτή, ένα ειδικό εργαλείο μπορεί να λειτουργήσει ως σημειωτικός διαμεσολαβητής. Καταρχήν, ένα εργαλείο χρησιμοποιείται στην πράξη για την εκτέλεση συγκεκριμένων εργασιών. Στη συνέχεια, στο πλαίσιο σημειωτικών δραστηριοτήτων υπό την καθοδήγηση ενός ειδικού (για παράδειγμα, του δασκάλου) και με την άρθρωση των νέων νοημάτων που παράγονται από ενέργειες με το εργαλείο, μπορεί να προωθήσει μια διαδικασία εσωτερίκευσης παράγοντας ένα νέο ψυχολογικό εργαλείο. Το νέο

αυτό εργαλείο είναι εσωτερικά προσανατολισμένο, εντελώς μεταμορφωμένο, αλλά εξακολουθεί να διατηρεί ορισμένες πτυχές της καταγωγής του (Falcade et al., 2007).

3.2 Εικασία και απόδειξη με τη χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

3.2.1 Το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας

Ο όρος δυναμική γεωμετρία, αρχικά επινοήθηκε από τους Jackiw και Rasmussen, για να χαρακτηρίσει το βασικό χαρακτηριστικό που διακρίνει λογισμικά όπως το Geometer's Sketchpad και το Cabri Geometry II. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό είναι ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων που αποκαλείται σύρσιμο (dragging). Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στους χρήστες, αφού κάνουν μια κατασκευή, να κινήσουν ορισμένα στοιχεία του σχήματος ελεύθερα για να παρατηρήσουν άλλα στοιχεία του σχήματος πώς αποκρίνονται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές. Καθώς αυτά τα στοιχεία μεταβάλλονται το λογισμικό διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών. Μερικά από τα πιο γνωστά λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας (DGS) που έχουν αναπτυχθεί είναι το GSP (Geometer's Sketchpad) (Jackiw, 1991,2006), το Cabri II (Baulac, Bellemain & J. M. Laborde, 1992., 2006) και το Geogebra (2001-2008).

Το περιβάλλον εργασίας στα λογισμικά, GSP, Cabri II και Geogebra, προσομοιώνει κατά κάποιο τρόπο την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας και από αυτή την άποψη έχουν θεωρηθεί κατάλληλα εργαλεία για τη διδασκαλία της. Συγκεκριμένα, τα λογισμικά αυτά παρέχουν στον χρήστη ορισμένα αρχικά αντικείμενα, (π.χ. σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλο, τόξο, πολύγωνο) για να σχεδιάζει τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα. Παρέχουν επίσης βασικά γεωμετρικά εργαλεία (π.χ. σχεδίαση κάθετης/παράλληλης από σημείο σε ευθεία, σχεδίαση διχοτόμου γωνίας, σχεδίαση μεσοκαθέτου ευθ. τμήματος) με τα οποία μπορεί να σχεδιάζει σύνθετα σχήματα. Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας είναι εφοδιασμένα με εργαλεία μέτρησης (π.χ. μέτρηση απόστασης, μέτρηση εμβαδού, μέτρηση κλίσης ευθείας) με τα οποία μπορεί ο χρήστης να μετρά μέρη τους σχήματος και να παρατηρεί τις μεταβολές τους κατά το σύρσιμό του. Παρέχουν ακόμη εργαλεία μετασχηματισμών (π.χ. συμμετρίες, περιστροφή, ανάκλαση) για διάφορους μετασχηματισμούς σχημάτων καθώς και εργαλεία εμφάνισης των

γεωμετρικών αντικειμένων στην επιφάνεια εργασίας (π.χ. επιλογή χρώματος, πάχους γραμμών, απόκρυψης αντικειμένων), με τα οποία ο χρήστης διευκολύνεται στο να εστιάζει σε ορισμένες πτυχές του σχήματος που έχει κατασκευάσει.

Το κύριο χαρακτηριστικό των λογισμικών της δυναμικής γεωμετρίας είναι το γεγονός ότι επιτρέπουν στον χρήστη να μετασχηματίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα που σχεδιάζει, συνεχώς και σε πραγματικό χρόνο με τη βοήθεια του εργαλείου του συρσίματος. Για την περιγραφή της διάκρισης των λειτουργιών των αντικειμένων της δυναμικής γεωμετρίας, καθιερώθηκε ο όρος βαθμός ελευθερίας των αντικειμένων. Έτσι, αν ένα σημείο μπορεί να μετακινείται χωρίς καμία δέσμευση στην επιφάνεια εργασίας λέμε ότι έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Αν ένα σημείο έχει κατασκευαστεί να ανήκει σε ένα αντικείμενο, π. χ. σε μια ευθεία, λέμε ότι έχει ένα (1) βαθμό ελευθερίας. Τέλος, αν ένα σημείο έχει κατασκευαστεί ως τομή δύο γεωμετρικών αντικειμένων λέμε ότι έχει μηδές (0) βαθμούς ελευθερίας. Οι λειτουργίες ενός γεωμετρικού αντικειμένου Α με βαθμό ελευθερίας 0 ή 1 επιτρέπουν στον χρήστη να το μετακινεί ελεύθερα στο επίπεδο της επιφάνειας εργασίας συμπαρασύροντας και όσα άλλα αντικείμενα εξαρτώνται από αυτό, μεταβάλλοντας και τη δική τους θέση (ΕΑΙΤΥ, 2010). Η χρήση του εργαλείου του συρσίματος επιτρέπει στον χρήστη όχι μόνο να αναγνωρίσει τον συνδυασμό μεταξύ δυο αλληλένδετων κινήσεων (συμμεταβολή), αλλά επίσης και την εξάρτηση μεταξύ της κίνησης των βασικών και των κατασκευασμένων σημείων (Falcate et al, 2007).

Αυτή η δυνατότητα μετασχηματισμού και μεταβολής του αρχικού αντικειμένου δημιουργεί ένα μαθησιακό περιβάλλον, μέσα στο οποίο οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν παρατηρήσεις, να αναπτύξουν εικασίες και να επιχειρηματολογήσουν έως ότου φθάσουν στην τυπική μαθηματική απόδειξη.

3.2.2 Εικασία και απόδειξη στα μαθηματικά

Η απόδειξη βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών και οι έρευνες δείχνουν ότι είναι μια αόριστη έννοια για τους μαθητές που διδάσκονται μαθηματικά (Hoyles, 1998). Η απόδειξη δεν θεωρείται ως μέρος της λύσης ενός προβλήματος, αλλά ως μια δραστηριότητα που προστίθεται στο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον Freudenthal, τα προβλήματα των μαθητών με την απόδειξη δεν πρέπει να αποδοθούν στην επιβράδυνση της γνωστικής ανάπτυξης, αλλά μάλλον στο ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δουν τη λειτουργία της απόδειξης, δηλαδή την έννοια, το σκοπό και τη

χρησιμότητά της (de Villiers, 1999).

Ο Moore (1994) επισημαίνει ότι η μετάβαση στην απόδειξη είναι απότομη και έχει ως συνέπεια τη δημιουργία πηγής δυσκολιών για πολλούς μαθητές, ακόμη και για όσους έχουν κάνει ανώτερη δουλειά με ευκολία σε χαμηλότερου επιπέδου μαθήματα μαθηματικών. Ο Lambert (1990) υποστηρίζει ότι η κατανόηση της απόδειξης καθίσταται δύσκολη εξ αιτίας του τυπικού περιβάλλοντος της τάξης που το περιγράφει ως εξής: «Στην τάξη, ο δάσκαλος και το βιβλίο είναι η αρχή και τα μαθηματικά δεν είναι ένα θέμα που διερευνάται ή δημιουργείται. Η αλήθεια δίνεται στις εξηγήσεις του δασκάλου και τις απαντήσεις του βιβλίου. Δεν υπάρχει ευελιξία ανάμεσα σε εικασίες και επιχειρήματα για την εγκυρότητά τους».

Σημαντικός παράγοντας που επιτείνει τις δυσκολίες των μαθητών για την απόδειξη είναι και το μοντέλο διδασκαλίας που έχουν υιοθετήσει οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί. Οι μαθητές ακούν ορισμούς, θεωρήματα και θεωρητικές αποδείξεις προτάσεων συμμετέχοντες ως παθητικοί ακροατές σε μια τελετουργική σχεδόν διαδικασία. Αυτή η παραδοσιακή προσέγγιση για την απόδειξη έχει απογοητεύσει πολλούς φοιτητές και μαθητές (Battista & Clements, 1995), ενώ η Senk (1989) αναφέρει ότι η γεωμετρική απόδειξη συγκαταλέγεται ανάμεσα στα πιο δύσκολα και αντιπαθητικά θέματα των μαθηματικών για τους μαθητές του λυκείου στις ΗΠΑ.

Οι δυσκολίες των μαθητών για την απόδειξη οδήγησαν στο να επαναπροσδιοριστεί ο ρόλος της κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η απόδειξη δεν θεωρείται πλέον ως μια ακολουθία σκέψεων αυστηρά δομημένων, που υπακούουν στους κανόνες της μαθηματικής επιστήμης. Ο Volmik (1990) υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι μια μορφή λόγου, ένα μέσο επικοινωνίας μεταξύ αυτών που κάνουν μαθηματικά. Ο Schoenfeld (1994) αναφέρει ότι οι αποδείξεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ένα φυσικό μέρος των μαθηματικών, αν οι μαθητές συμμετείχαν σε μια μαθηματική κουλτούρα, όπου ο διάλογος θα ήταν σημαντικό μέρος της εμπλοκής με τα μαθηματικά.

Ο ρόλος λοιπόν της απόδειξης επαναπροσδιορίζεται και ακολουθείται μια τάση απομάκρυνσης από τις αυστηρές αποδείξεις. Προς την κατεύθυνση αυτή, μια εναλλακτική προσέγγιση είναι η παραγωγή εικασιών ως προοίμιο της τυπικής αφαιρετικής απόδειξης. Η τάση αυτή αποτυπώνεται και στο πρότυπο του NCTM (National Council of Teachers of Mthematics) το οποίο θεωρεί την πρακτική της εικασίας ως αναπόσπαστο μέρος της πορείας προς την τυπική απόδειξη. Η εικασία και η ανεπίσημη αιτιολόγηση πρέπει να προετοιμάζουν τους μαθητές για την πιο

αυστηρή πράξη της παραγωγικής απόδειξης.

Η εικασία μπορεί να παραχθεί και στο πλαίσιο της παραδοσιακής εκπαιδευτικής διαδικασίας. Αυτή όμως είναι μια στατική εικασία που παράγεται με χαρτί και μολύβι, απέναντι σε μια δυναμική εικασία που παράγεται σε περιβάλλον DGE (Baccaglini & Mariotti, 2010). Η Mariotti (2006), υποστηρίζει ότι η συμβολή του DGE στην αποδεικτική διαδικασία, που πρέπει να διατυπώσει ο μαθητής, είναι εμφανής κατά την εξερεύνηση ανοικτών προβλημάτων, δεδομένου ότι η διαδικασία περιλαμβάνει τη διατύπωση εικασιών. Η έρευνα έχει δείξει ότι ένα DGE μπορεί να προωθήσει την οικοδόμηση της σκέψης των μαθητών, πράγμα το οποίο μπορεί να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν τις γνωστικές δυσκολίες που καταγράφονται μεταξύ εικασίας και απόδειξης (Baccaglini & Mariotti, 2010).

3.2.3 Το περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ως πλαίσιο ανάπτυξης εικασιών

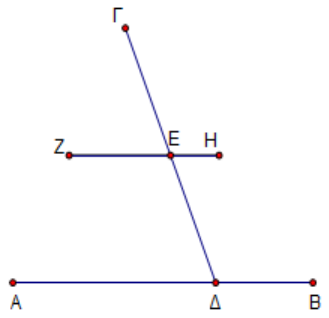
Αν δεχθούμε ότι η τυπική απόδειξη έχει κεντρικό ρόλο στα προγράμματα σπουδών, είναι αναγκαίο να σχεδιάσουμε και να αναπτύξουμε ένα πλαίσιο από καινοτόμες δραστηριότητες, οι οποίες καθιστούν ικανούς τους μαθητές να συνδέσουν την εμπειρική και την αφαιρετική σκέψη μέσω αυτών των δραστηριοτήτων. Η Hoyles (1998), υποστηρίζει ότι ένα τέτοιο πλαίσιο μπορούν να προσφέρουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές με τη χρήση ενός πακέτου δυναμικής γεωμετρίας, όπως το GSP. Ένα τέτοιο λογισμικό παρέχει την ευκαιρία σε αρκετούς μαθητές να εξετάσουν το «γιατί…», και επιπρόσθετα το «τι θα γινόταν αν…» και το «τι δεν θα γινόταν αν…» (Hoyles, 1998).

Οι Goldenberg και Cuoco (1998), επισημαίνουν ότι το δυναμικό και γεωμετρικό περιβάλλον του GSP αποτελεί ένα πλαίσιο που χαρακτηρίζει την προσέγγιση μας με την απόδειξη. Ο Olive (2000), αναφέρει ότι το GSP επιτρέπει στους μαθητές να υπερβαίνουν τα δικά τους σιωπηρά όρια της τάξης τους, χωρίς να έχουν την πρόθεση να το πράξουν, αλλά και χωρίς να επιζητούν οι ίδιοι κάτι τέτοιο, δημιουργώντας ένα είδος ανισορροπίας, την οποία πρέπει με κάποιο τρόπο να επιλύσουν. Σύμφωνα με τους Hoyles & Healy (1999), η εξερεύνηση γεωμετρικών ιδιοτήτων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας θα μπορούσε να παρακινήσει τους μαθητές να εξηγήσουν εμπειρικές εικασίες κατασκευάζοντας μια τυπική απόδειξη. Η ποιότητα της μαθηματικής ανάλυσης των μαθητών δείχνει ότι η χρήση λογισμικού

δυναμικής γεωμετρίας, το οποίο συνοδεύεται από κατάλληλες δραστηριότητες, μπορεί να παρέχει την ευκαιρία σε αρκετούς μαθητές να αναπτύξουν τη βάση για μια πληρέστερη εκτίμηση της φύσης και του σκοπού της μαθηματικής απόδειξης (Hoyles & Jones 1998).

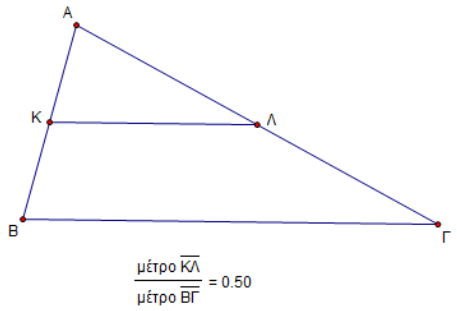
Η Resnick (1997) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά είναι μια «επιστήμη των μοτίβων». Ένα μαθηματικό μοτίβο αποτελεί μια νέα αμετάβλητη δομή που παρατηρείται όταν το μαθηματικό αντικείμενο υφίσταται αλλαγές ή μεταβολή (Leung, 2012). Ένα βασικό χαρακτηριστικό του DGE είναι η δυνατότητα της οπτικής αναπαράστασης γεωμετρικών αναλλοίωτων, μέσω της ταυτόχρονης μεταβολής, που προκαλείται με τις δραστηριότητες του συρσίματος.

Το σύρσιμο ενός μέρος ενός σχήματος συμπαρασύρει και τα υπόλοιπα μέρη του, διατηρώντας ωστόσο τις δεσμεύσεις με τις οποίες κατασκευάστηκαν. Για παράδειγμα στο σχήμα 1, το σημείο Δ μετακινείται στο σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το σημείο Γ είναι σταθερό, ενώ το σημείο Ε που είναι το μέσο του ΓΔ κινείται στο τμήμα ΖΗ . Το μέσο Ε του τμήματος ΓΔ ακολουθεί τις μεταβολές του Δ ενώ το ίχνος των διαδοχικών του θέσεων δηλώνει την δομή της εξαρτημένης κίνησής του. Αυτή η δομή είναι πηγή διατύπωσης εικασιών για την κίνηση του σημείου Ε και άρα για το σχήμα που γράφει, δηλαδή για τον γεωμετρικό τόπο του σημείου Ε.



Σχήμα 1: Σύρσιμο του σημείου Δ

Μια άλλη πηγή πληροφοριών για ανάπτυξη εικασιών και διατύπωση υποθέσεων συχνά προέρχεται από τις μετρήσεις μεταξύ των μεγεθών ενός σχήματος κατά τον μετασχηματισμό του. Για παράδειγμα, στο σχήμα 2 το τμήμα ΚΛ έχει σχεδιαστεί ώστε να διέρχεται από τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου.



Σχήμα 2: Αποτύπωση του λόγου μηκών

Έτσι σε κάθε μετασχηματισμό του τριγώνου ο χρήστης παρατηρεί ότι ο λόγος του μήκους του ΚΛ προς το μήκος του ΒΓ παραμένει σταθερός και ίσος με 0,5. Αυτή η κανονικότητα είναι η κρίσιμη πληροφορία για την κατασκευή και διατύπωση εικασιών και υποθέσεων που αφορούν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου.

Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας επικεντρώνεται καταρχήν, όχι στη διαδικασία της απόδειξης αλλά στην δυνατότητα που έχει το λογισμικό να βοηθήσει τους μαθητές να μεταβούν από το μερικό στο γενικό (Hoyles,1998) με τη διατύπωση υποθέσεων και εικασιών. Αναδύεται έτσι το ερώτημα, που συχνά απασχολεί όσους εκπαιδευτικούς εργάζονται στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, ποια είναι η σχέση που έχουν οι εικασίες και οι υποθέσεις που αναδύονται στο περιβάλλον αυτό με τα θεωρήματα και τη λογική θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας (αξιώματα, θεωρήματα και αποδείξεις). Στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, όταν μια γεωμετρική κατασκευή «περάσει» τη δοκιμή του συρσίματος (δημιουργία εικασιών και υποθέσεων), αναδύεται η ανάγκη να αιτιολογηθεί γιατί η συγκεκριμένη κατασκευή «δουλεύει». Αυτή η ανάγκη ενισχύεται ακόμα περισσότερο κατά τη διάρκεια της συλλογικής συζήτησης προκειμένου να εξηγηθεί γιατί και πώς λειτουργεί. Μια περαιτέρω μαθηματική νομιμοποίηση της κατασκευής αφορά τη διαδικασία της κατασκευής παρά το σχήμα που κατασκευάστηκε. Κάθε βήμα της κατασκευαστικής διαδικασίας αντιστοιχεί σε μια γεωμετρική ιδιότητα, και ολόκληρο το σύνολο των ιδιοτήτων που δίνονται από τη διαδικασία αποτελεί μια παρουσίαση της απόδειξης της ακριβούς κατασκευής. Δηλαδή, υπάρχει μια σταδιακή μετατόπιση της εστίασης από την περιγραφή των αποτελεσμάτων του συρσίματος στη περιγραφή της διαδικασίας της κατασκευής και, μέσω αυτής, η μετατόπιση κατευθύνεται στη θεωρητική γεωμετρία (Ε.Α.ΙΤΥ, 2010).

Το εργαλείο του συρσίματος αναδεικνύεται σε βασικό παράγοντα διατύπωσης εικασιών. Η εξερεύνηση των σχημάτων, η αναζήτηση μέσω της μετακίνησης τους των τρόπων με τους οποίους αλλάζουν ή δεν αλλάζουν οι μορφές τους, προσφέρουν ανατροφοδότηση στη φάση της ανακάλυψης και με αυτόν τον τρόπο δρουν υποστηρικτικά στην πορεία προς την τυπική απόδειξη (Arzarello et al, 2000). Οι μαθητές μέσω του συρσίματος στο δυναμικό περιβάλλον, μπορούν να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους. Αν ανακαλύψουν ένα αντιπαράδειγμα κατά τη διάρκεια της δυναμικής διαδικασίας, μπορούν αν προσαρμόσουν την εικασία τους ή να την απορρίψουν και να διατυπώσουν μία νέα. Αυτή η διαδικασία της εξερεύνησης,

της ανακάλυψης και του ελέγχου, οδηγεί τους μαθητές στον δρόμο της μαθηματικής απόδειξης. Στο στατικό περιβάλλον «χαρτί - μολύβι», η αφαιρετική διαδικασία της απόδειξης παράγεται κυρίως λόγω της ευφυΐας των υποκειμένων, ενώ στο δυναμικό περιβάλλον είναι η διαδικασία του συρσίματος που μπορεί να τη διαμεσολαβήσει (Arzarello et al, 1998).

Σε διάφορες έρευνες έχουν προσδιοριστεί οι διαφορετικοί τύποι συρσίματος, τους οποίους χρησιμοποιούν οι μαθητές, σύμφωνα με τους διαφορετικούς τους σκοπούς κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων (Arzarello et al, 1998b; Olivero, 1999; Arzarello, 2001). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν το ποντίκι ενώ λύνουν ένα πρόβλημα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, παρατηρήθηκαν οι ακόλουθες μορφές :

- ✓ *Wandering dragging* (σύρσιμο περιπλάνησης): Μετακινώντας με τυχαίο τρόπο τα βασικά σημεία πάνω στην οθόνη, χωρίς κάποιο πλάνο, ώστε να ανακαλύψουν ενδιαφέρουσες διαμορφώσεις ή κανονικότητες στα σχήματα.
- ✓ *Bound dragging* (κατευθυνόμενο σύρσιμο): Μετακινώντας ένα «ημι-συρόμενο» (semi-draggable) σημείο (είναι ήδη συνδεδεμένο με ένα αντικείμενο).
- ✓ *Guided dragging* (καθοδηγούμενο σύρσιμο): Σύροντας τα βασικά σημεία του σχήματος, ώστε να του δώσουν ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- ✓ *Dummy locus dragging* (σύρσιμο κρυφού ή τεχνητού (γεωμετρικού) τόπου): Μετακινώντας ένα βασικό σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί ένα μονοπάτι, ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν.
- ✓ *Line dragging* (σύρσιμο γραμμής): Σχεδιάζοντας νέα σημεία κατά μήκος μιας γραμμής ώστε να διατηρήσουν την κανονικότητα του σχήματος.
- ✓ *Linked dragging* (συνδεδεμένο σύρσιμο): Συνδέοντας ένα σημείο με ένα αντικείμενο και μετακινώντας το πάνω σε αυτό το αντικείμενο.
- ✓ *Dragging test*: Μετακινώντας συρόμενα ή ημι-συρόμενα σημεία, ώστε να δουν αν το σχέδιο διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες. Αν ναι, τότε το σχήμα περνάει τον έλεγχο. Αν όχι, το σχέδιο δεν κατασκευάσθηκε σύμφωνα με τις γεωμετρικές ιδιότητες που θέλατε να έχει.

Αυτό που παρατηρείται είναι ότι οι μαθητές αξιοποίησαν αυτές τις διαφορετικές μορφές, ώστε να επιτύχουν διαφορετικούς στόχους, όπως το να εξερευνήσουν, να εικάσουν, να επικυρώσουν, να αιτιολογήσουν. Για παράδειγμα, τα

wandering και guided dragging γενικά χρησιμοποιήθηκαν στη φάση της διερεύνησης, *το dummy locus dragging* χαρακτήρισε την κατασκευή μιας εικασίας και το *dragging test* χρησιμοποιήθηκε κυρίως για να ελέγξει την εικασία. Συνεπώς, η εξέταση του πώς οι μαθητές χρησιμοποίησαν το σύρσιμο παρείχε μια εικόνα των γνωστικών διεργασιών τους (Arzarello et al, 2002).

3.3 Η συνάρτηση σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας

Όπως ήδη αναφέραμε το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ερευνήσουν, να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν εικασίες για το μαθηματικό αντικείμενο με το οποίο αλληλεπιδρούν. Ο Slavit (1997) εισηγείται την ανάγκη να ερευνήσουν οι μαθητές τις αλγεβρικές και συναρτησιακές ιδέες σε διαφορετικά πλαίσια. Ένα τέτοιο πλαίσιο είναι το γεωμετρικό. Με άλλα λόγια, οι μαθητές εκκινώντας από ένα πρόβλημα γεωμετρικού περιεχομένου μπορούν να οδηγηθούν στην οικοδόμηση των βασικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης και να υιοθετήσουν σταδιακά το συναρτησιακό τρόπο σκέψης υπό το πρίσμα της συμμεταβολής ποσοτήτων ή μεγεθών.

Οι Mejia και Hurtado (2011), με βάση τα τυπικά προβλήματα της ανάλυσης και χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία τους ανέπτυξαν τα πρωτόκολλα που εφαρμόζουν οι μαθητές. Όπως υποστηρίζουν οι συγκεκριμένοι ερευνητές, τα πρωτόκολλα αυτά αποτελούνται από δύο ανεξάρτητα μέρη. Την αντίληψη για τη μεταβολή και την συμμεταβολή. Η αντίληψη της μεταβολής ξεκινά με ένα φυσικό ή γεωμετρικό σύστημα και στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές με το «σύρσιμο» ενός γεωμετρικού στοιχείου (συνήθως ενός σημείου) να μετασχηματίσουν το αντικείμενο και να το παρατηρήσουν σε διαφορετικά στιγμιότυπα. Οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σε δύο βασικά ερωτήματα: τι αλλάζει και τι δεν αλλάζει. Η διαδικασία αυτή τους παρέχει ένα σύνολο από σταθερές και μεταβλητές και τους οδηγεί πιθανόν στην κατανόηση του προβλήματος. Η συμμεταβολή πραγματώνεται σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μεταξύ δυο ποσοτήτων που μεταβάλλονται συγχρόνως. Οι δραστηριότητες σχεδιάζονται έτσι ώστε να οδηγούν προοδευτικά σε περισσότερο αφηρημένες αναπαραστάσεις. Από τη φραστική διατύπωση στο γράφημα, τον πίνακα και τελικά στο συναρτησιακό τύπο Mejia & Hurtado (2011).

Η Mackrell (2012) υποστηρίζει ότι ένα περιβάλλον μάθησης των αλγεβρικών αντικειμένων, όπως είναι οι συναρτήσεις, πρέπει να περιλαμβάνει τα εξής: την

δυνατότητα παροχής της εμπειρίας της γενικότητας, να εκφράζονται και να επικυρώνονται οι γενικεύσεις, την δυνατότητα χειρισμού και επεξεργασίας της γενίκευσης και την ενεργοποίηση της λογικής για την κατασκευή και ερμηνεία της γενικότητας. Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας όπως είναι το GSP, παρέχουν αυτές τις δυνατότητες. Για παράδειγμα, σε ένα γεωμετρικό αντικείμενο όπως ο κύκλος μπορούμε να μετρήσουμε την ακτίνα του, το εμβαδόν του και την περίμετρο του. Οι μετρήσεις αυτές αλλάζουν καθώς το μέγεθος του κύκλου αλλάζει, διαμεσολαβώντας την έννοια της μεταβολής και τελικά της μεταβλητής (Mackrell, 2012).

Η διαδικασία της ανακάλυψης της γενίκευσης θα μπορούσε να περιλαμβάνει τη λογική της δομής μιας κατάστασης ή την αναπαράσταση της σε ένα πίνακα ή ένα γράφημα με τη χρήση του GSP. Οι τρόποι με τους οποίους οι γεωμετρικές κατασκευές θα μπορούσαν να ενισχύσουν την επίγνωση εκ μέρους των μαθητών της εξάρτησης και της ανεξαρτησίας (Jones, 2000), της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης (Falcade et al, 2007) και τον τρόπο με τον οποίο τα γεωμετρικά αντικείμενα και οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να συνδεθούν (Laborde, 2010), δείχνουν ότι τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας πρέπει να παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτό το πεδίο.

Η Biza (2007) υποστηρίζει ότι για μια βαθύτερη κατανόηση του λογισμού, η διδασκαλία πρέπει να εστιάζει όχι μόνο στη χρήση των αλγεβρικών αναπαραστάσεων, αλλά επιπλέον πρέπει να λαμβάνει υπόψη της τις γεωμετρικές και διαισθητικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων. Η επιλογή μιας γεωμετρικής δραστηριότητας για τη διδασκαλία της μεταβολής σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, βοηθάει τους μαθητές να μπουν πολύ γρήγορα στο νόημα της, αφού αναφέρεται στο οικείο πλαίσιο της σχολικής γεωμετρίας (Lee, 2008).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα

Το γενικό ερώτημα που τίθεται στην παρούσα έρευνα, είναι αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της συνάρτησης, ως συμμεταβολής, όταν εργάζονται σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και χειρίζονται δυναμικά μεταβαλλόμενα και αλληλεξαρτώμενα μεγέθη. Οι μαθητές εργάζονται με οικεία σε αυτούς γεωμετρικά αντικείμενα που συμμεταβάλλονται. Ο κύριος στόχος είναι να διερευνήσουμε τους τρόπους με τους οποίους κατασκευάζουν νοήματα για τη συμμεταβολή μεταβαίνοντας από το γεωμετρικό πλαίσιο στη συναρτησιακή λογική. Εξάλλου, όπως αναφέρει η Biza (2007), ο Kaput (1994) υποστηρίζει ότι για μια βαθύτερη κατανόηση του λογισμού, οι διδάσκοντες πρέπει να εστιάσουν όχι μόνο στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις, αλλά επιπρόσθετα και στις γεωμετρικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων καθώς και στην μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

Πιο συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει να ερευνήσουμε σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας:

- ✓ αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την συνάρτηση ως συμμεταβολή μέσα από τη διερεύνηση γεωμετρικών προβλημάτων
- ✓ Ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων και λειτουργιών στις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής κατά τη διερεύνηση γεωμετρικών προβλημάτων.

4.2 Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν σε συμφωνία με όσα προτείνει η Falcate et al (2007), για το περίγραμμα της διδακτικής τροχιάς, το οποίο βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

- ✓ Η γεωμετρία αποτελεί ένα πεδίο των μαθηματικών που είναι οικείο στους περισσότερους μαθητές.
- ✓ Η δυνατότητα της συμμεταβολής γεωμετρικών μεγεθών με δυναμικό τρόπο αναδεικνύει το συναρτησιακό τρόπο σκέψης της συσχέτισης δύο μεταβλητών.
- ✓ Μια κρίσιμη πτυχή της έννοιας της συνάρτησης είναι η ιδέα της μεταβολής και της συμμεταβολής ποσοτήτων ή μεγεθών.

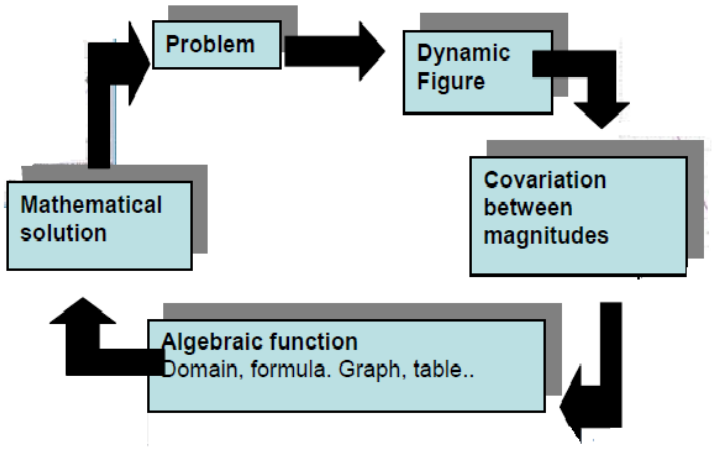
- ✓ Τα εργαλεία και τα αντικείμενα με τα οποία αλληλεπιδρούν οι μαθητές στο περιβάλλον του DGS, μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία που ανάγονται στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολής, σύμφωνα με την Βιγκοτσκιανή άποψη περί σημειωτικής διαμεσολάβησης.
- ✓ Η περιγραφή των αποτελεσμάτων της δράσης πάνω στα αντικείμενα με συναρτησιακό τρόπο οδηγεί στην ενοποίηση των μαθηματικών εννοιών.

Το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων δομείται σε τρία στάδια:

- ✓ Στο πρώτο στάδιο, η μεταβολή και η συμμεταβολή εισάγονται μέσω της εξερεύνησης και της δράσης πάνω στα γεωμετρικά αντικείμενα και την παρατήρηση των συνεπειών τους σε συγκεκριμένες εφαρμογές του DGS. Οι συγκεκριμένες εφαρμογές δίνονται έτοιμες στους μαθητές. Το περιεχόμενο των ερωτήσεων που υποστηρίζουν το στάδιο αυτό, περιστρέφεται γύρω από το τι μεταβάλλεται και τι μένει αναλλοίωτο. Οι δράσεις των μαθητών, καθώς και η συλλογική συζήτηση αναδεικνύουν τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές με τη χρήση των εργαλείων για τις έννοιες της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής και της μεταβολής γενικότερα. Τα σημαντικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στη φάση αυτή είναι το «σύρσιμο» και το «ίχνος» του μαθηματικού αντικειμένου στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή.
- ✓ Στο δεύτερο στάδιο, από τις γεωμετρικές έννοιες της μεταβολής και συμμεταβολής οι μαθητές οδηγούνται στην κατασκευή αλγεβρικών και συναρτησιακών νοημάτων. Η μέτρηση, η πινακοποίηση και η τροχιά της αποτύπωσης των σημείων στο επίπεδο εισάγει τους μαθητές στην διαχείριση και συσχέτιση ενός συνόλου τιμών εισόδου με ένα σύνολο τιμών εξόδου. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που επιτυγχάνονται άμεσα με τη βοήθεια των αντίστοιχων εργαλείων του λογισμικού, αναδεικνύουν τις διαφορετικές πτυχές της έννοιας της συνάρτησης.
- ✓ Στο τρίτο στάδιο, η χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων χρησιμοποιείται ως μέσο για την διατύπωση ισχυρών εικασιών, που στη συνέχεια μετατρέπονται σε ένα συναρτησιακό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε τη λύση του προβλήματος. Με άλλα λόγια, ζητείται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν με μαθηματικό τρόπο τα

συμπεράσματα των διαφορετικών αναπαραστάσεων και να αποδείξουν τις εικασίες τους με τυπική μαθηματική διαδικασία.

Σχηματικά μπορούμε να αποτυπώσουμε τον κύκλο της μοντελοποίησης ενός προβλήματος στο πλαίσιο της συμμεταβολής όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα και προτείνεται από τον Lagrange (2014). Στο πρώτο στάδιο προσπαθούμε να περάσουμε από το πρόβλημα, που στις δραστηριότητες μας είναι γεωμετρικό, στην εξερεύνηση μιας δυναμικής κατασκευής. Το δεύτερο στάδιο αντιστοιχεί στην έκφραση μιας εξάρτησης μεταξύ μεγεθών, περνώντας από τη συμμεταβολή μεταξύ μεγεθών σε μια αλγεβρική σχέση. Το τρίτο στάδιο αντιστοιχεί στην εξερεύνηση της συνάρτησης μέσα από μια μαθηματική λύση.



Σχήμα 3: Κύκλος μοντελοποίησης κατά Lagrange

4.2.1 1η δραστηριότητα: Συμμεταβολή μεγεθών στον κύκλο

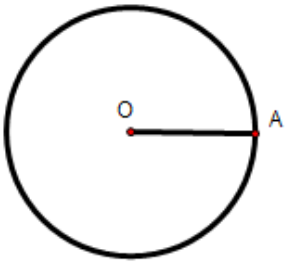
Η πρώτη δραστηριότητα σχετίζεται με τη σχέση ακτίνας και εμβαδού κύκλου που συνδέονται με τη γνωστή σχέση $E = \pi\rho^2$. Η συγκεκριμένη σχέση αναφέρεται και ως παράδειγμα συνάρτησης στην εισαγωγή του κεφαλαίου των συναρτήσεων στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει τους παρακάτω στόχους:

- ✓ Νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής ποσοτήτων. Αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι η συγκεκριμένη σχέση εκφράζει μια συνάρτηση;
- ✓ Επαναπροσδιορισμός των εννοιών ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Σε μία σχέση όπως αυτή που συνδέει το εμβαδόν με την ακτίνα και δεν

εμφανίζονται οι μεταβλητές x και y, πώς επιλέγουν οι μαθητές την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;

- ✓ Νοηματοδότηση της γραφικής παράστασης ως σημειακή ακολουθία σημείων και ως μαθηματικό αντικείμενο.

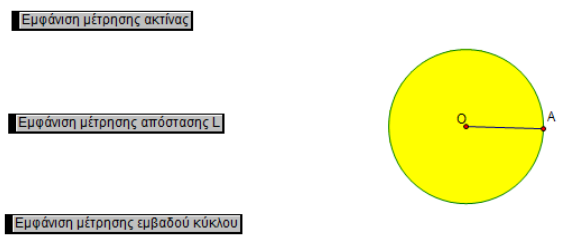
Οι μαθητές στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή βρίσκουν μια εφαρμογή στο GSP που αρχικά εμφανίζει ένα κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ (σχήμα 4). Επιπλέον, στους μαθητές δίνεται ένα φύλλο εργασίας το οποίο αποτελείται από επτά ερωτήσεις (Ε1 – Ε7). Οι ερωτήσεις καθοδηγούν τους μαθητές πώς να δραστηριοποιηθούν, να εξερευνήσουν και να διατυπώσουν τα συμπεράσματα τους. Το φύλλο εργασίας παρατίθεται στο παράρτημα.



Σχήμα 4: Κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ

Στην πρώτη ερώτηση (Ε1) ζητείται από τους μαθητές να σύρουν τα σημεία Α, Ο και τον ίδιο τον κύκλο και να καταγράψουν τι μεταβάλλεται και τι μένει αναλλοίωτο. Το εργαλείο του «Συρσίματος» προκαλεί μεταβολές στο γεωμετρικό αντικείμενο και αυτό που μας ενδιαφέρει είναι αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται αυτές τις μεταβολές. Επιπλέον, μας ενδιαφέρει να διερευνήσουμε κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι σε κάθε μεταβολή το σχήμα του κύκλου παραμένει σταθερό. Με άλλα λόγια, αν αναγνωρίζουν και σε ποιο βαθμό ότι οι μεταβολές μπορούν να παράγουν ένα αναλλοίωτο.

Στη συνέχεια οι μαθητές ανοίγουν την επόμενη σελίδα της εφαρμογής και εμφανίζεται η ακόλουθη εικόνα.



Σχήμα 5: Μετρήσεις βασικών στοιχείων του κύκλου

Αυτό που ζητείται τώρα (Ε2), είναι να εμφανίσουν τις μετρήσεις και σύροντας το σημείο Α να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματα της ερώτησης Ε1. Το εργαλείο της μέτρησης αναμένουμε να διαμεσολαβήσει τη συμβολική άλγεβρα αποδίδοντας τιμές σε γεωμετρικά αντικείμενα. Με τη μέτρηση οι μεταβολές που παρατηρήθηκαν στην ερώτηση Ε1 αποδίδονται με τιμές σε συγκεκριμένες ποσότητες που συμμεταβάλλονται.

Η επόμενη ερώτηση (Ε3) έχει στόχο να οδηγήσει τους μαθητές σε εικασίες για τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές ποσότητες μεταξύ τους. Το ερώτημα που τίθεται είναι:

«*Από τα μεγέθη που μεταβάλλονται ποιο κατά τη γνώμη σας προκαλεί τη μεταβολή του άλλου;*».

Αυτό που διερευνάται είναι αν οι μεταβολές που εμφανίζονται στην οθόνη του υπολογιστή εσωτερικεύονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Δηλαδή, αν οι μαθητές θεωρήσουν ότι η μεταβολή της ακτίνας οδηγεί στη μεταβολή της επιφάνειας ή αν θα μπορούσαν να εικάσουν και το αντίστροφο. Με το ερώτημα αυτό υπεισέρχεται η έννοια της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής και πως αυτές καθορίζονται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Ως προς τον τρόπο μεταβολής, που συνδέει τα μεγέθη ακτίνα και επιφάνεια, αναμένουμε από τους μαθητές να εικάσουν ότι «η αύξηση της ακτίνας έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της επιφάνειας του κύκλου». Όλες οι προηγούμενες ερωτήσεις στοχεύουν να αναδείξουν την εικόνα που έχουν κατασκευάσει οι μαθητές σχετικά με τις έννοιες της μεταβολής μεγεθών και τον τρόπο που συσχετίζουν αυτές τις μεταβολές.

Από την παραπάνω δραστηριότητα αναμένουμε οι μαθητές να αναγνωρίσουν τις ποσότητες και τα μεγέθη που μεταβάλλονται. Αυτό που μας ενδιαφέρει τώρα είναι να διερευνήσουμε αν είναι σε θέση να σκεφτούν με συναρτησιακό τρόπο γι' αυτές τις ποσότητες που συμμεταβάλλονται. Δηλαδή, αν έχουν την ικανότητα να νοηματοδοτήσουν τις έννοιες της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής στο συγκεκριμένο γεωμετρικό περιβάλλον. Η ερώτηση (Ε4) που καλούνται να απαντήσουν οι μαθητές διατυπώνεται ως εξής:

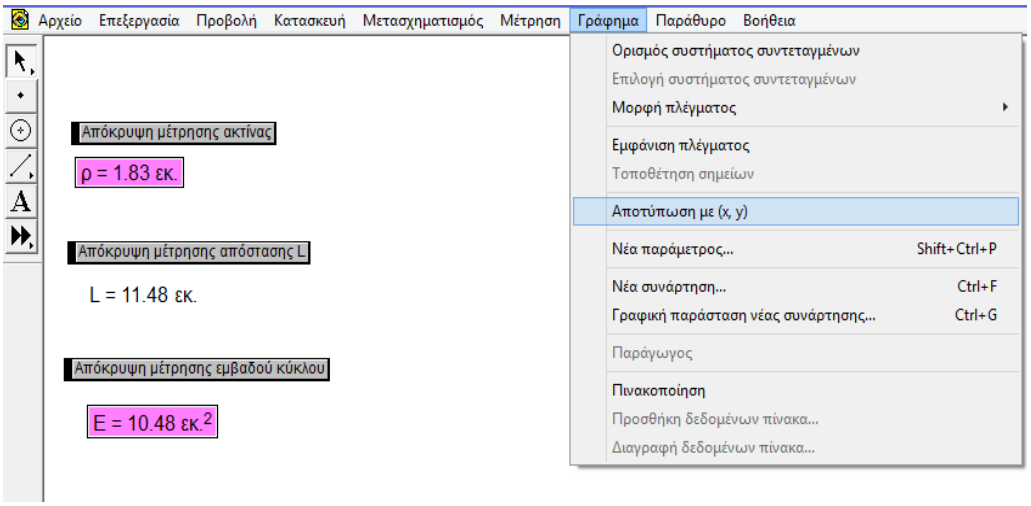
«*Πως χαρακτηρίζετε με όρους συναρτήσεων τα μεγέθη μήκος ακτίνας και εμβαδόν κύκλου;*».

Με το ερώτημα αυτό επιδιώκουμε να ανιχνεύσουμε, αν είναι σε θέση να εκφράσουν με το συναρτησιακό τρόπο σκέψης το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σε ποιο

μέγεθος και για πιο λόγο δίνουν το νόημα της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής;

Το επόμενο που μας ενδιαφέρει είναι η αποτύπωση των τιμών των μεταβλητών σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και τι εσωτερικεύουν οι μαθητές από την χάραξη της γραφικής παράστασης. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν την ερώτηση Ε5:

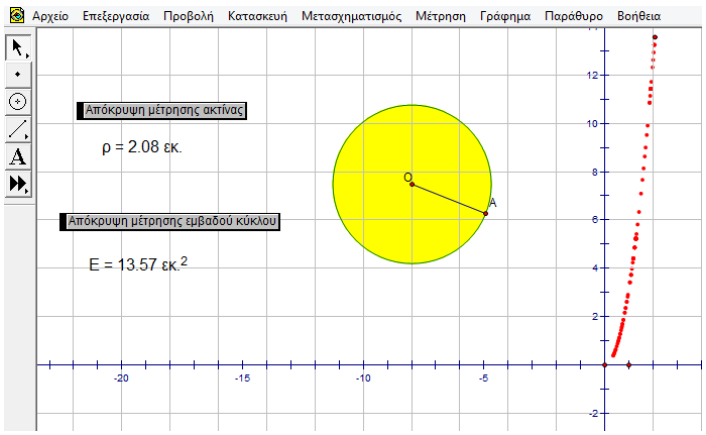
«*Αποτυπώστε το σημείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (ακτίνα κύκλου, εμβαδόν κύκλου). Στη συνέχεια με ενεργό το ίχνος του συγκεκριμένου σημείου και μετακινώντας το σημείο Α παρατηρείστε τη διαδρομή των ιχνών. Αναγνωρίζετε το είδος της καμπύλης και αν ναι σε πια γνωστή συνάρτηση θα μπορούσε να αντιστοιχεί; Ποιο μέγεθος μετράμε στον οριζόντιο άξονα και ποιο στον κατακόρυφο;*»



Σχήμα 6: αποτύπωση του ζεύγους (ρ, Ε) μέσω του (x, y) στο επίπεδο

Οι τιμές της ακτίνας και του εμβαδού αποτυπώνονται με τη μορφή του ζεύγους (x, y) όπως φαίνεται στο σχήμα 6. Η χρήση του εργαλείου «Αποτύπωση με (x, y)» αναμένουμε να διαμεσολαβήσει στους μαθητές το γεγονός ότι η συμμεταβολή των δύο μεγεθών αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος, το οποίο αποτυπώνεται σε ένα σημείο του επιπέδου. Στη συνέχεια με ενεργό το ίχνος του συγκεκριμένου σημείου και μετακινώντας το σημείο Α παρατηρούν τη διαδρομή των ιχνών. Το ερώτημα είναι αν μπορούν να αναγνωρίσουν το είδος της καμπύλης και να το αποδώσουν σε μια γνωστή τους συνάρτηση και αν αντιλαμβάνονται τι μετράμε στον οριζόντιο και τι στον κατακόρυφο άξονα. Βρισκόμαστε πλέον στη φάση που το αρχικό γεωμετρικό

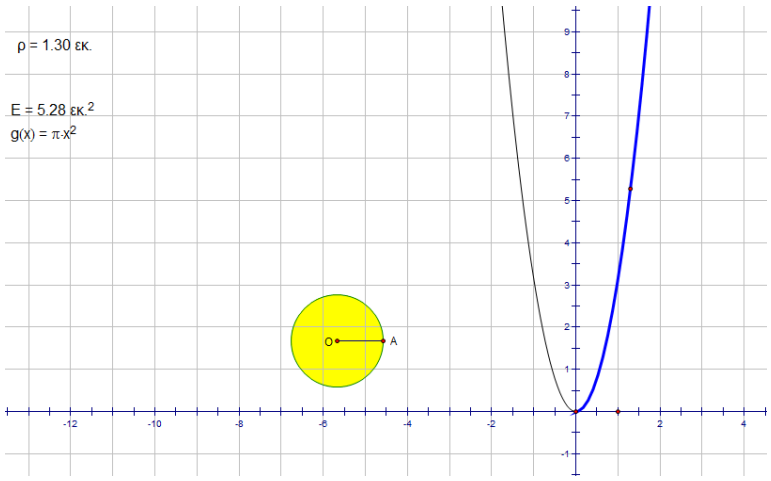
πρόβλημα έχει μεταφερθεί στη μελέτη μιας συνάρτησης. Οι μαθητές στην οθόνη του υπολογιστή τους βλέπουν την επόμενη εικόνα:



Σχήμα 7: Αποτύπωση της γραφικής παράστασης ως ακολουθία σημείων

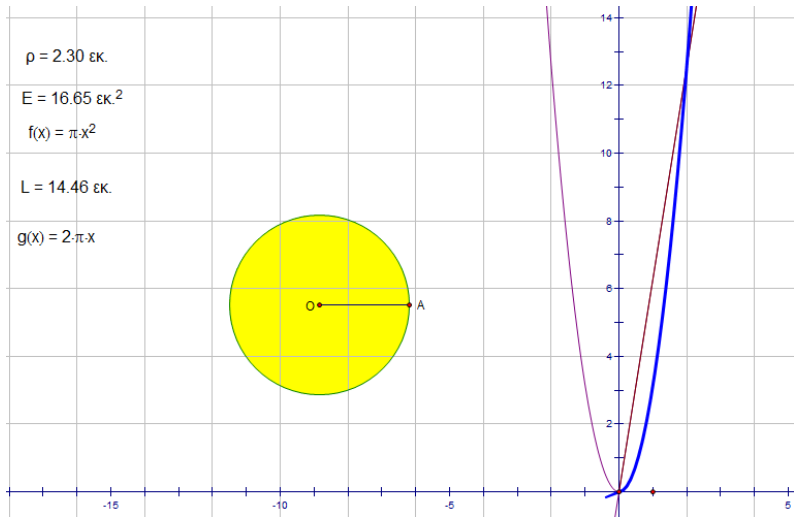
Η ταυτόχρονη εμφάνιση των ποσοτήτων «ακτίνα κύκλου» και «εμβαδόν κύκλου» με το σύστημα των συντεταγμένων αναμένεται να διαμεσολαβήσει τη συναρτησιακή σχέση τους αλλά και την αντιστοιχία της ανεξάρτητης μεταβλητής (μήκος ακτίνας) με τη μέτρηση στον οριζόντιο άξονα και της εξαρτημένης (εμβαδόν κύκλου) με τον κατακόρυφο άξονα. Με άλλα λόγια, εμφανίζεται με δυναμικό τρόπο η συμμεταβολή των μεγεθών ρ και Ε, η αντιστοιχία στο ζεύγος των μεταβλητών (x, y) και η αποτύπωση των μεταβολών με σημεία του επιπέδου.

Στη συνέχεια (ερώτηση Ε6) ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν με συναρτησιακό τύπο, δηλαδή με χρήση των μεταβλητών x, y, τη σχέση της ακτίνας με το εμβαδόν. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι αν μπορούν οι μαθητές να γράψουν τον τύπο $y = \pi x^2$. Η επιτυχής απάντηση δείχνει ότι οι μαθητές εσωτερικεύουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής και δεν επηρεάζονται πλέον από τα σύμβολα του γεωμετρικού τύπου. Αμέσως μετά, με το εργαλείο «Υπολογισμός» οι μαθητές αποτυπώνουν τον τύπο της συνάρτησης και κατασκευάζουν τη γραφική της παράσταση. Στην οθόνη εμφανίζεται η παρακάτω εικόνα:



Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \pi x^2$

Στο σημείο αυτό ζητάμε από τους μαθητές να εξηγήσουν γιατί η γραφική παράσταση είναι μόνο ένα μέρος της καμπύλης. Διερευνούμε με αυτόν τον τρόπο αν οι μαθητές νοηματοδοτούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τους περιορισμούς που το καθορίζουν. Στην επόμενη φάση, ερώτηση Ε7, ζητείται από τους μαθητές να επαναλάβουν την προηγούμενη διαδικασία με τα μεγέθη «ακτίνα» και «μήκος κύκλου». Μετά την αποτύπωση των σημείων οι μαθητές βλέπουν στην οθόνη του υπολογιστή την επόμενη εικόνα:



Σχήμα 9: Γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \pi x^2$ *και* $g(x) = 2\pi x$

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι και στις δύο περιπτώσεις μεταβάλλεται η ακτίνα και κατά συνέπεια το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου. Στο σημείο αυτό μας ενδιαφέρει να διερευνήσουμε, αν είναι σε θέση οι μαθητές να

εκτιμήσουν ποια μεταβολή είναι ποιο έντονη και να το εξηγήσουν. Με άλλα λόγια, αναμένουμε να διαπιστώσουν ότι όταν αυξάνει η ακτίνα, μεταβάλλονται ταυτόχρονα και το μήκος και το εμβαδόν, αλλά με διαφορετικό τρόπο. Επιπλέον, διερευνούμε πως εσωτερικεύουν το σημείο τομής των δύο γραφικών παραστάσεων. Το θέμα που αναδύεται εδώ είναι ότι ταυτίζεται η τιμή του μήκους του κύκλου με την τιμή του εμβαδού του κύκλου και άρα είναι ενδιαφέρον να δούμε τι νόημα αποδίδουν σε αυτό οι μαθητές.

4.2.2 2η Δραστηριότητα: Νοηματοδότηση των μεταβολών του εμβαδού του ορθογωνίου στο πλαίσιο της συμμεταβολής

Στη δεύτερη δραστηριότητα, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με το ακόλουθο ανοικτό πρόβλημα:

«*Από όλα τα ορθογώνια που έχουν σταθερή διαγώνιο, να βρείτε εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν*».

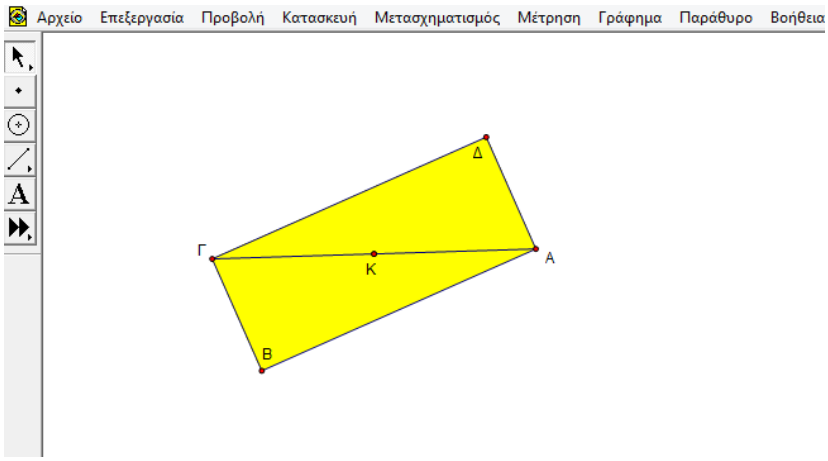
Το συγκεκριμένο πρόβλημα δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να συνδέσουν τη γεωμετρία με την άλγεβρα και να σκεφτούν με όρους συμμεταβολής ποσοτήτων. Η υλοποίηση της δραστηριότητας στηρίζεται και πάλι στη χρήση του λογισμικού GSP μέσω δομήματος το οποίο δίνεται έτοιμο στους μαθητές. Οι μαθητές έχουν στη διάθεση τους και ένα φύλλο εργασίας το οποίο αποτελείται από 14 ερωτήσεις, Ε1-Ε14, οι οποίες τους καθοδηγούν στην πορεία της υλοποίησης της δραστηριότητας.

Η εν λόγω δραστηριότητα έχει τους παρακάτω στόχους:

- ✓ Νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής ποσοτήτων σε γεωμετρικό περιβάλλον
- ✓ Επαναπροσδιορισμός των εννοιών ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
- ✓ Πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης
- ✓ Γενίκευση συμπερασμάτων.
- ✓ Μαθηματικός έλεγχος των συμπερασμάτων

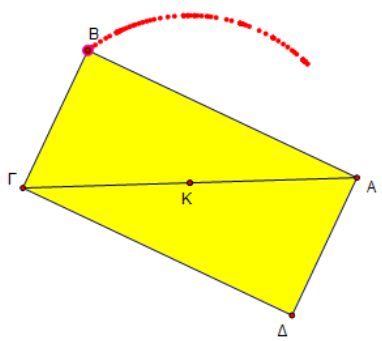
Περιγραφή δραστηριότητας

Σε κάθε υπολογιστή εργασίας υπάρχει μία εφαρμογή σε περιβάλλον GSP, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 10). Συγκεκριμένα, οι μαθητές έχουν μπροστά τους ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΑΓ έχει σταθερό μήκος, ενώ η κορυφή Β μπορεί να μετακινηθεί αλλάζοντας θέση.



Σχήμα 10: Ορθογώνιο με σταθερό μήκος για τη διαγώνιο ΑΓ

Στην πρώτη ερώτηση (Ε1) οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν την κορυφή Β και να εικάσουν αν αυτή κινείται σε κάποια συγκεκριμένη καμπύλη ή παίρνει τυχαίες θέσεις. Εδώ μέσω του συρσίματος (dragging) περιμένουμε από τους μαθητές να πειραματιστούν, να ανακαλύψουν και στο τέλος διατυπώσουν εικασίες για την κίνηση της κορυφής Β. Προκειμένου να έχουν μια πρώτη επιβεβαίωση σχετικά με την ορθότητα των σκέψεων τους, στην επόμενη ερώτηση (Ε2) με ενεργό το «ίχνος σημείου» κάνουν τον αντίστοιχο έλεγχο. Αναμένεται να αντιληφθούν ότι η κορυφή Β κινείται σε κύκλο με διάμετρο την ΑΓ (σχήμα 11). Στο σημείο αυτό ζητάμε από τους μαθητές να αναφέρουν τη μαθηματική πρόταση που νομιμοποιεί το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν, ερώτηση Ε3. Αναμένεται να διατυπώσουν την πρόταση: «Ο γ. τ. των σημείων του επιπέδου που βλέπουν ένα σταθερό ευθύγραμμο τμήμα υπό ορθή γωνία είναι κύκλος».



Σχήμα 11: Η κορυφή φαίνεται να κινείται σε κύκλο

Στην επόμενη ερώτηση Ε4, ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν κύκλο με διάμετρο ΑΓ και στη συνέχεια να μετακινήσουν την κορυφή Β και να καταγράψουν τα μεγέθη ή τις ποσότητες που μεταβάλλονται ή μένουν αναλλοίωτα.

Ε4: «*Κατασκευάστε τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΑΓ. Μετακινείστε την κορυφή Β και καταγράψτε τα μεγέθη ή ποσότητες που μεταβάλλονται και εκείνα που μένουν αναλλοίωτα*».

Με την ερώτηση αυτή επιχειρείται οι μαθητές να εμπλακούν με τον πειραματισμό και να ξεκινήσουν να κάνουν διατυπώσεις σχετικά με αυτά που παρατηρούν. Αυτό που αναμένουμε, είναι να εστιάσουν στις μεταβολές των διαστάσεων του ορθογωνίου και ίσως στο εμβαδόν του και την περίμετρο του. Ενδιαφέρον είναι, αν οι μαθητές αναφερθούν στο γεγονός ότι τετράπλευρο ΑΒΓΔ παραμένει ορθογώνιο παρά τις μεταβολές που υφίσταται.

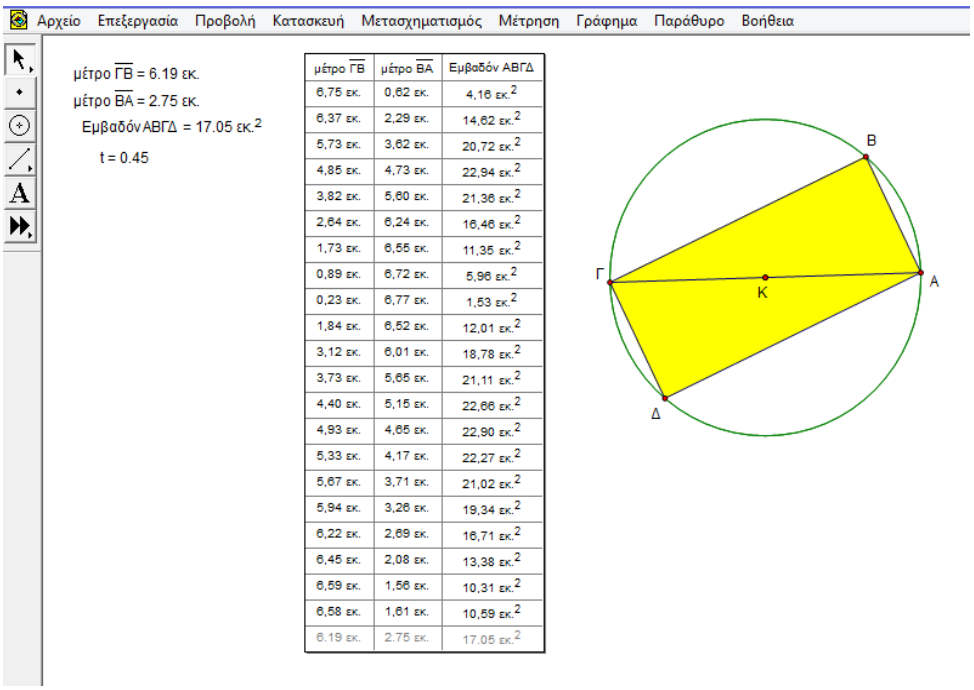
Στη συνέχεια με την εντολή της «μέτρησης» επιβεβαιώνουν ή απορρίπτουν τις εικασίες που διατύπωσαν

Ε5: «*Χρησιμοποιείστε την εντολή «μέτρηση» για τα μεγέθη που καταγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα. Επιβεβαιώνεται η προηγούμενη απάντησή σας;*»

Το εργαλείο της μέτρησης διαμεσολαβεί τις μεταβολές, που έχουν παρατηρήσει ήδη με το σύρσιμο οι μαθητές στο αντικείμενο, αποδίδοντας συγκεκριμένες τιμές σε κάθε διαφορετική θέση. Με την ερώτηση αυτή επιχειρείται να αντιληφθούν οι μαθητές ότι στα γεωμετρικά μεγέθη αποδίδονται πλέον αριθμητικές τιμές. Αναμένεται με αυτόν τον τρόπο να δώσουν στα γεωμετρικά μεγέθη την έννοια της μεταβλητής και να κάνουν τα πρώτα βήματα στο συναρτησιακό τρόπο σκέψης.

Το επόμενο που μας ενδιαφέρει είναι να πειραματιστούν και να διατυπώσουν εικασίες για τον τρόπο μεταβολής των μεγεθών που συμμεταβάλλονται. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει να δούμε σε ποιο μέγεθος αποδίδουν την έννοια της ανεξάρτητης μεταβλητής και σε ποιο ή ποια της εξαρτημένης μεταβλητής. Ακόμη μας ενδιαφέρει η αιτιολόγηση της επιλογής των μεταβλητών. Το αναμενόμενο είναι οι μαθητές να θεωρήσουν ότι μεταβάλλονται οι διαστάσεις του ορθογωνίου και αυτό έχει ως συνέπεια τη μεταβολή του εμβαδού του και της περιμέτρου του.

Οι μαθητές γνωρίζουν ότι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$ όπου α, β οι διαστάσεις του. Με το εργαλείο της «πινακοποίησης» κατασκευάζουν ένα πίνακα που περιέχει τις τιμές των α, β και E (σχήμα 12).



μέτρο ΓΒ	μέτρο ΒΑ	Εμβαδόν ΑΒΓΔ
6,75 εκ.	0,62 εκ.	4,16 εκ.^{2}
6,37 εκ.	2,29 εκ.	14,62 εκ.^{2}
5,73 εκ.	3,62 εκ.	20,72 εκ.^{2}
4,85 εκ.	4,73 εκ.	22,94 εκ.^{2}
3,82 εκ.	5,60 εκ.	21,36 εκ.^{2}
2,64 εκ.	6,24 εκ.	16,46 εκ.^{2}
1,73 εκ.	6,55 εκ.	11,35 εκ.^{2}
0,89 εκ.	6,72 εκ.	5,96 εκ.^{2}
0,23 εκ.	6,77 εκ.	1,53 εκ.^{2}
1,84 εκ.	6,52 εκ.	12,01 εκ.^{2}
3,12 εκ.	6,01 εκ.	18,78 εκ.^{2}
3,73 εκ.	5,65 εκ.	21,11 εκ.^{2}
4,40 εκ.	5,15 εκ.	22,66 εκ.^{2}
4,93 εκ.	4,65 εκ.	22,90 εκ.^{2}
5,33 εκ.	4,17 εκ.	22,27 εκ.^{2}
5,67 εκ.	3,71 εκ.	21,02 εκ.^{2}
5,94 εκ.	3,26 εκ.	19,34 εκ.^{2}
6,22 εκ.	2,69 εκ.	16,71 εκ.^{2}
6,45 εκ.	2,08 εκ.	13,38 εκ.^{2}
6,59 εκ.	1,56 εκ.	10,31 εκ.^{2}
6,58 εκ.	1,61 εκ.	10,59 εκ.^{2}
6.19 εκ.	2.75 εκ.	17.05 εκ.^{2}

Σχήμα 12: Πινακοποίηση των τιμών των διαστάσεων του ορθογωνίου

Με τον πίνακα τιμών αποδίδονται στις μεταβλητές συγκεκριμένες τιμές και οι μαθητές μπορούν να παρακολουθήσουν τις μεταβολές που υφίστανται. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι αν η σχέση $\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$ νοηματοδοτείται από τους μαθητές ως σχέση συνάρτησης ή όχι. Στο σημείο αυτό βρίσκεται και η σημαντική διαφορά με την 1^{η} δραστηριότητα. Στην πρώτη δραστηριότητα είχαμε δύο μεταβλητές, την ακτίνα και το εμβαδόν που εκφράζονται με τη συναρτησιακή σχέση $\mathrm{E} = \pi\rho^2$. Στη σχέση όμως $\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$ έχουμε τρεις ποσότητες που συμμεταβάλλονται και μας ενδιαφέρει να ερευνήσουμε το νόημα που αποδίδουν στα σύμβολα του συγκεκριμένου τύπου οι μαθητές. Αναμένεται με ενδιαφέρον, αν οι μαθητές θεωρήσουν ότι μια σχέση με τρεις ποσότητες που μεταβάλλονται, μπορεί να εκφράζει συνάρτηση. Εδώ πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι όλα τα παραδείγματα συναρτήσεων, που έχουν συναντήσει έως τώρα οι μαθητές, αναφέρονται σε συναρτήσεις με δύο μεταβλητές. Στον διάλογο που αναπτύσσεται είναι χρήσιμο ο ερευνητής να ρωτήσει τους μαθητές αν γνωρίζουν συνάρτηση με τρεις μεταβλητές. Η πιο πιθανή απάντηση εκ μέρους των μαθητών, με βάση όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω, είναι ότι δεν γνωρίζουν τέτοια μορφή συνάρτησης. Αν απαντήσουν καταφατικά ή αν δεχθούν οι μαθητές ότι μπορεί να υπάρξει τέτοια συνάρτηση, πρέπει να ερωτηθούν ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη

μεταβλητή. Οι ερωτήσεις αυτές δίνουν τη δυνατότητα όχι μόνο να διερευνήσουμε τις ιδέες των μαθητών, αλλά και να τους οδηγήσουμε προς την κατεύθυνση της ενοποίησης των δύο εκ των τριών μεταβλητών.

Η ερώτηση Ε8: «*Προτείνετε κάποιο τρόπο ώστε οι μεταβολές των δυο πλευρών του ορθογωνίου να εκφράζονται ενιαία*» στοχεύει να οδηγήσει τους μαθητές να συνδέσουν προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά τη συμμεταβολή των δύο πλευρών. Οι μαθητές πρέπει να βρουν ένα τρόπο να συσχετίσουν τις μεταβολές των δύο πλευρών του ορθογωνίου με ενιαίο τρόπο. Αυτό που αναμένουμε, είναι να χρησιμοποιήσουν καταρχήν το πυθαγόρειο θεώρημα, αφού η ορθή γωνία είναι σημαντικό στοιχείο του προβλήματος. Αναμένουμε λοιπόν οι μαθητές να προτείνουν τη σχέση

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 - \text{ΒΓ}^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒ} = \sqrt{\text{ΑΓ}^2 - \text{ΒΓ}^2}$$

Με βάση τη σχέση αυτή, το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφράζεται με τον τύπο:

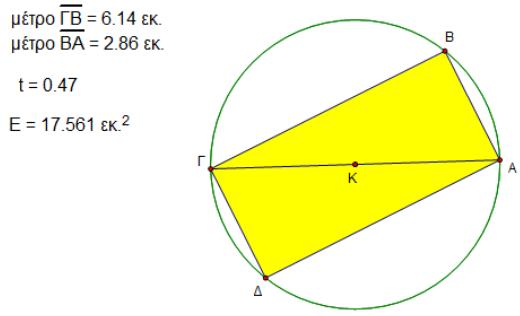
$$\text{Ε} = \text{ΒΓ} \cdot \sqrt{\text{ΑΓ}^2 - \text{ΒΓ}^2}$$

Έτσι, έχουμε πλέον έναν τύπο που έχει δύο μεταβλητές, το εμβαδόν Ε και το μήκος της πλευράς ΒΓ. Ωστόσο, για τους μαθητές της Α΄ Λυκείου, η συγκεκριμένη συναρτησιακή σχέση δεν είναι εύκολο να εξετασθεί ως προς το μέγιστο της και να αποδειχθεί αυτό με την άλγεβρα που γνωρίζουν. Για το λόγο αυτό, βοηθούμε τους μαθητές να σκεφτούν τη συσχέτιση των δύο διαστάσεων του ορθογωνίου με αφαιρετικό ή πολλαπλασιαστικό τρόπο μεταφέροντας το πρόβλημα στη σύγκριση μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Αναμένεται να διατυπώσουν σχέσεις της μορφής $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} + \kappa$ ή $\text{ΒΑ} = t \cdot \text{ΒΓ}$ ή $t = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}}$ και να επιλέξουν την κατάλληλη. Κρίνεται σκόπιμο, οι ερευνητές να προτείνουν στους μαθητές να κάνουν χρήση της πολλαπλασιαστικής σχέσης και να προχωρήσουν στα επόμενα ερωτήματα του φύλλου εργασίας. Στο σημείο αυτό δεν μας ενδιαφέρει να διερευνήσουμε πως σκέφτονται οι μαθητές να κάνουν την επιλογή τους ανάμεσα στην πολλαπλασιαστική και την αφαιρετική σχέση.

Στη συνέχεια ζητείται η δημιουργία πίνακα που στη μια στήλη να είναι η καινούργια μεταβλητή, έστω t, και στην άλλη το εμβαδόν, έστω Ε. Με το σύρσιμο της κορυφής Β ο πίνακας γεμίζει και εμφανίζονται σε δύο στήλες οι τιμές των δύο ποσοτήτων οι οποίες συμμεταβάλλονται. Το ερώτημα Ε9, που τίθεται τώρα είναι το εξής: «*Μπορεί να ισχυριστεί κάποιος ότι η συμμεταβολή των ποσοτήτων t και Ε εκφράζει συνάρτηση; Εξηγείστε γιατί εκφράζει ή γιατί δεν εκφράζει συνάρτηση*». Αυτό

που μας ενδιαφέρει είναι αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι έχουμε ένα σύνολο τιμών εισόδου και ένα σύνολο τιμών εξόδου που σχετίζονται με κάποιο τρόπο, που όμως προς στιγμή δεν μας είναι γνωστός. Στη συνέχεια επαναφέρουμε το ερώτημα για το ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή. Το ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν το ρόλο της μεταβλητής t, που είναι μια αφηρημένη μεταβλητή, μιας και δεν εκφράζει κάποιο μέρος του γεωμετρικού σχήματος. Η μεταβλητή αυτή κατασκευάστηκε προκειμένου να εκφραστούν ενιαία οι μεταβολές των διαστάσεων του ορθογωνίου.

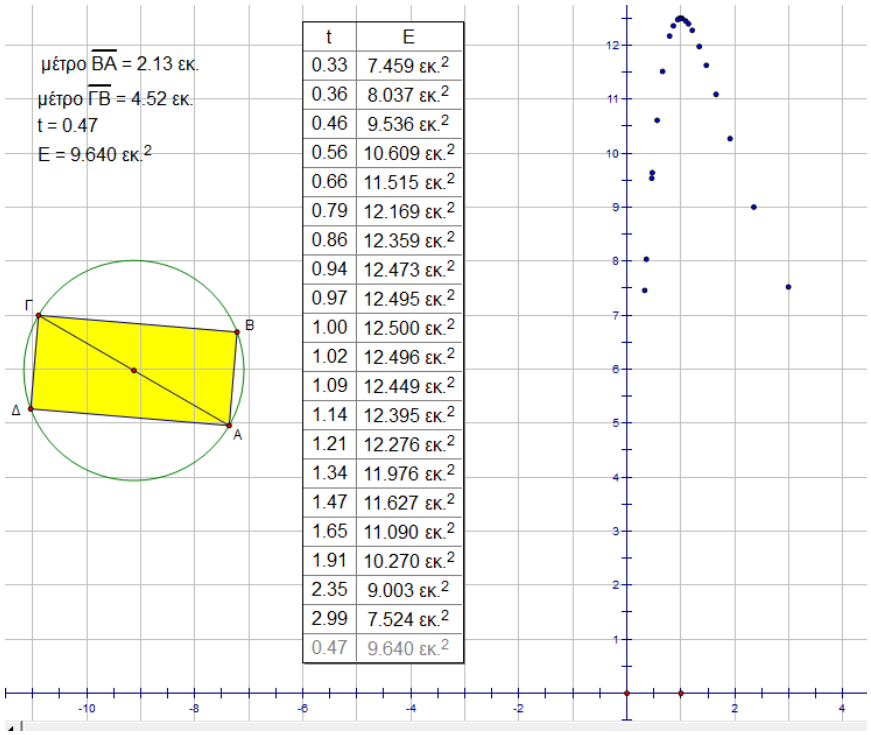
Οι μεταβολές που παρατηρούνται στον νέο πίνακα τιμών (t, E), αναμένεται να οδηγήσουν τους μαθητές στη διατύπωση εικασιών για τον τρόπο που μεταβάλλεται το εμβαδόν. Ακολουθεί η ερώτηση Ε11: «*Παρατηρείστε τις τιμές του προηγούμενου πίνακα και σημειώστε το είδος της μεταβολής του εμβαδού (αύξηση - ελάττωση). Βλέπετε κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων;*». Οι τιμές που εμφανίζονται στις δύο στήλες του πίνακα πρέπει να οδηγήσουν τους μαθητές στην παρατήρηση ότι όταν η μεταβλητή t πλησιάζει την τιμή 1, τότε το εμβαδόν φαίνεται να παίρνει τη μέγιστη τιμή του. Προκειμένου η εικασία να γίνει σχεδόν βέβαιη, οι μαθητές πειραματίζονται, γεμίζοντας τον πίνακα με διαφορετικό «βήμα» κάθε φορά. Ένα στιγμιότυπο της προηγούμενης διαδικασίας εμφανίζεται στην επόμενη εικόνα.



t	E
0.42	16.411 εκ.²
0.51	18.490 εκ.²
0.56	19.581 εκ.²
0.61	20.424 εκ.²
0.69	21.441 εκ.²
0.77	22.207 εκ.²
0.86	22.686 εκ.²
0.94	22.906 εκ.²
1.02	22.941 εκ.²
1.08	22.870 εκ.²
1.16	22.695 εκ.²
1.23	22.455 εκ.²
1.35	21.971 εκ.²
1.45	21.431 εκ.²
1.61	20.591 εκ.²
1.80	19.509 εκ.²
2.01	18.313 εκ.²
2.26	16.993 εκ.²
2.55	15.603 εκ.²
2.93	14.016 εκ.²
0.47	17.561 εκ.²

Σχήμα 13: Αποτύπωση τιμών εισόδου t και εξόδου Ε

Στη συνέχεια, γίνεται αποτύπωση των δεδομένων του πίνακα σε ορθοκανονικό σύστημα και ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν, αν αυτό που προκύπτει από τον πίνακα τιμών, διαπιστώνεται και γραφικά. Με την αποτύπωση των δεδομένων του πίνακα εμφανίζεται η επόμενη εικόνα στην οθόνη του υπολογιστή.



t	E
0.33	7.459 εκ.^{2}
0.36	8.037 εκ.^{2}
0.46	9.536 εκ.^{2}
0.56	10.609 εκ.^{2}
0.66	11.515 εκ.^{2}
0.79	12.169 εκ.^{2}
0.86	12.359 εκ.^{2}
0.94	12.473 εκ.^{2}
0.97	12.495 εκ.^{2}
1.00	12.500 εκ.^{2}
1.02	12.496 εκ.^{2}
1.09	12.449 εκ.^{2}
1.14	12.395 εκ.^{2}
1.21	12.276 εκ.^{2}
1.34	11.976 εκ.^{2}
1.47	11.627 εκ.^{2}
1.65	11.090 εκ.^{2}
1.91	10.270 εκ.^{2}
2.35	9.003 εκ.^{2}
2.99	7.524 εκ.^{2}
0.47	9.640 εκ.^{2}

Σχήμα 14: Αποτύπωση δεδομένων πίνακα

Σε αυτό το σημείο πλέον έχουμε με ένα δυναμικό τρόπο τη σύνδεση του αρχικού προβλήματος, του πίνακα τιμών και των αποτυπωμένων σημείων του επιπέδου. Η ταυτόχρονη παρατήρηση των μεταβολών στο γεωμετρικό σχήμα, τον πίνακα τιμών και στα σημεία που εμφανίζονται σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δρα με ενοποιητικό τρόπο στην οικοδόμηση εκ μέρους των μαθητών, μιας εικόνας για τη συνάρτηση πολύ πιο πλούσιας από τη στατική εικόνα που μπορεί να οικοδομηθεί σε ένα μη δυναμικό περιβάλλον. Οι μαθητές αναμένεται μάλλον με ευκολία να νοηματοδοτήσουν την έννοια της μέγιστης τιμής του εμβαδού και για πια τιμή της μεταβλητής t πραγματοποιείται.

Το ερώτημα σε αυτό το σημείο είναι αν το αλγεβρικό συμπέρασμα νοηματοδοτεί κάποια ερμηνεία στο πλαίσιο του προβλήματος. Για το λόγο αυτό ζητείται η διατύπωση ενός κανόνα που να αποδίδει σε γεωμετρική γλώσσα την εικασία που αναπτύχθηκε.

Έχοντας πλέον μεγάλο βαθμό βεβαιότητας για την εικασία που διατύπωσαν, η οποία επιτεύχθηκε με τη χρήση διαφορετικών εργαλείων του λογισμικού, οι μαθητές καλούνται να νομιμοποιήσουν ή αλλιώς να αποδείξουν ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο στην περίπτωση του τετραγώνου. Είναι ενδιαφέρον να διαπιστώσουμε, αν για την απόδειξη οι μαθητές ακολουθήσουν τη διαδρομή που αναδείχθηκε μέσα από τις διαδικασίες και τους πειραματισμούς στο περιβάλλον του DGS, ή θα ακολουθήσουν κάποια άλλη αυτόνομη αποδεικτική διαδικασία.

Η πορεία της διατύπωσης της εικασίας στο περιβάλλον του λογισμικού ανέδειξε τη νέα μεταβλητή $t = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}}$, που συντονίζει τη συμμεταβολή των διαστάσεων του ορθογωνίου. Αν θέσουμε $\text{ΑΓ} = c$, αφού η διαγώνιος ΑΓ παραμένει σταθερή, οι μαθητές πρέπει να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και να καταλήξουν στη σχέση $\text{Ε} = c^2 \frac{t}{1+t^2}$, που εκφράζει το εμβαδόν συναρτήσει της μεταβλητής t. Το ερώτημα είναι με ποιο τρόπο οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της παράστασης του 2ου μέλους με την κλασική άλγεβρα. Ο μετασχηματισμός της παράστασης $\text{Ε} = c^2 \frac{t}{1+t^2}$ στην ισοδύναμη της $\text{Ε} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2}$ μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να σκεφτούν να συγκρίνουν τις ποσότητες $2t$ και $1+t^2$. Η σύγκριση αυτή είναι οικεία γιατί γνωρίζουν τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ που ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Επομένως, $2t \leq 1+t^2 \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2} \leq 1$. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή του κλάσματος μπορεί να είναι η τιμή 1. Πράγματι, η ισότητα $\frac{2t}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow (1-t)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγιστοποιείται όταν $t = 1$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο.

4.3 Μέθοδος

Στο επίπεδο του σχεδιασμού, η έρευνα έχει κοινά στοιχεία με την έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) καθώς έχει έντονο το στοιχείο της παρέμβασης στη μαθησιακή διαδικασία με χρήση καινοτόμων εργαλείων και πολλαπλών αναπαραστάσεων. Όμως, δεν πραγματοποιείται σε πραγματικές σχολικές συνθήκες

γιατί η κύρια ερευνητική επιδίωξη ήταν να μελετηθεί σε βάθος η εξέλιξη των στρατηγικών των μαθητών καθώς και ο τρόπος ενσωμάτωσης των αποτελεσμάτων της χρήσης των εργαλείων στο μαθηματικό αντικείμενο, μακριά από τις δυσκολίες και την ένταση της σχολικής τάξης. Κάτω από αυτό το πρίσμα επιλέγουμε τη μελέτη περίπτωσης (case study, Yin, 2003) ως μέθοδο της έρευνας.

Επειδή κυρίαρχος στόχος της έρευνας είναι να μελετηθούν τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές σχετικά με την έννοια της συνάρτησης στο πλαίσιο συμμεταβολής ποσοτήτων ή μεγεθών, επιλέγεται ως μέθοδος ανάλυσης το κρίσιμο συμβάν. Κρίσιμο συμβάν είναι ένα περιστατικό που δείχνει μια σημαντική αλλαγή ή μια αλλαγή που οδηγεί σε αντιπαραβολή σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση. Ένα γνωστικό άλμα σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση προκαλεί ένα διαισθητικό λάθος, «ένα αξιοσημείωτο λάθος άλμα» (Powell et al, 2003). (πιο απλα)

Η μέθοδος που ακολουθείται είναι ανακαλυπτική έως καθοδηγούμενη ανακαλυπτική (Bruner, 1996). Η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία είναι αναγκαία για να ευνοηθούν από τα οφέλη της χρήση εργαλείων αυτής της μορφής και όχι των κλασικών στατικών μέσων. Ο ρόλος του ερευνητή έχει ως στόχο να οδηγήσει στην συνεργατική και βιωματική μάθηση μέσα στην ομάδα. Οι μαθητές αφήνονται να προσεγγίζουν το θέμα από την δική τους οπτική γωνία. Ως εκ τούτου, η μάθηση έρχεται ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των μαθητών κάθε ομάδας. Αυτή η αλληλεπίδραση λειτουργεί ως διαμεσολαβητής στην εσωτερίκευση των νοημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές. Ο ρόλος κάθε μαθητή στην ομάδα είναι, μέσω της συνεργατικότητας, να διατυπώσει εικασίες, να τις διερευνήσει, να τις επαληθεύσει και να επιλέξει την κατάλληλη λύση.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας δεν παρακολουθούν οι μαθητές τον ερευνητή αλλά ο ερευνητής τους μαθητές. Ο ρόλος του τελευταίου είναι να καθοδηγεί, να διορθώνει και να συμπληρώνει. Τα φύλλα εργασίας δομούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να οδηγούν τους μαθητές στην ανακάλυψη του ζητούμενου. Αν χρειασθεί μπορεί ο εκπαιδευτικός να παρέμβει στη διαδικασία με στόχο να συμβουλέψει τους μαθητές ώστε να φθάσουν στα σωστά συμπεράσματα.

4.4 Συμμετέχοντες – Συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν 6 μαθητές της Α΄ Λυκείου. Η ομάδα αποτελείται από τρία αγόρια και τρία κορίτσια. Οι επιδόσεις τους στα μαθηματικά κυμαίνονται από 16 έως 19 στην εικοσάβαθμη κλίμακα. Οι δύο μαθήτριες προσανατολίζονται στην

επιλογή θεωρητικής κατεύθυνσης, ενώ τα άλλα 4 μέλη της ομάδας προς την κατεύθυνση των θετικών σχολών. Όλοι οι μαθητές παρακολούθησαν μια ώρα εκμάθησης του λογισμικού GSP και τους δόθηκαν οδηγίες προκειμένου να ασχοληθούν και στο σπίτι τους με το λογισμικό. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των δύο ατόμων προκειμένου να υλοποιήσουν τις δραστηριότητες. Κρίνεται σκόπιμο να γίνει πιλοτική εφαρμογή των δραστηριοτήτων από τη μία ομάδα. Αυτό έχει στόχο να εντοπισθούν σημεία του φύλλου εργασίας στα οποία ίσως να γίνουν παρεμβάσεις, προκειμένου να υποστηριχθεί καλύτερα η στόχευση της έρευνας. Οι ομάδες της έρευνας χαρακτηρίζονται ως Α΄ ομάδα και Β΄ ομάδα. Στην ανάλυση που ακολουθεί, η ομάδα Α΄ αποτελείται από τους μαθητές Μ1 και Μ2, ενώ η ομάδα Β΄ από τους μαθητές Μ3 και Μ4.

Η διεξαγωγή της έρευνας έγινε στο εργαστήριο υπολογιστών του 2^{ου} ΓΕΛ Ιλίου. Οι μαθητές δουλεύουν ομαδοσυνεργατικά για να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας που τους δόθηκε, καθώς και στο χειρισμό του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η ομάδα Α΄ απασχολήθηκε για μια ώρα και 58 λεπτά, ενώ η ομάδα Β΄ απασχολήθηκε δύο ώρες και 30 λεπτά. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τη χρήση εργαλείων, που μας δίνουν τη δυνατότητα ταυτόχρονης καταγραφής ήχου και όσων λαμβάνουν χώρα στην οθόνη του υπολογιστή. Στη συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκε το cam studio recorder. Το πλεονέκτημα που έχει το συγκεκριμένο εργαλείο είναι ότι μας δίνει τη δυνατότητα της συσχέτισης αυτών που λένε οι μαθητές και τι κάνουν ταυτόχρονα στον υπολογιστή τους. Η βιντεοσκόπηση αποφεύχθηκε ως μη επιθυμητή εκ μέρους των μαθητών, αλλά και από τη διεύθυνση του σχολείου.

Οι μαθητές σε αυτό το χρονικό σημείο που διεξάγεται η έρευνα, έχουν διδαχθεί όλες τις βασικές έννοιες των συναρτήσεων και εργάζονται πλέον υπό το πρίσμα του συνολοθεωρητικού ορισμού της συνάρτησης. Επομένως, από ερευνητικής άποψης είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την εικόνα της έννοιας που έχουν οικοδομήσει για τη συνάρτηση. Με ποιο τρόπο αντιλαμβάνονται την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή; Μπορούν να αναγνωρίζουν το συναρτησιακό τρόπο σκέψης σε ένα περιβάλλον που δεν είναι άμεσα αλγεβρικό; Με άλλα λόγια σε κάθε κατάσταση που εμφανίζεται συμμεταβολή ποσοτήτων ή μεγεθών είναι ικανοί οι μαθητές να αναγνωρίσουν ιδιότητες της συνάρτησης;

4.5 Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας βασίζεται στο μοντέλο των Powell, Francisco και Maher (2003) οι οποίοι έχουν αναπτύξει μια πρόταση για την ανάλυση δεδομένων που έχουν προκύψει από βιντεοσκόπηση. Το μοντέλο που προτείνουν αποτελείται από επτά μη γραμμικές φάσεις που βρίσκονται σε αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα:

- ✓ Προσεκτική επισκόπηση των δεδομένων του βίντεο
- ✓ Περιγραφή των δεδομένων του βίντεο
- ✓ Προσδιορισμός των κρίσιμων συμβάντων
- ✓ Μεταγραφή
- ✓ Κωδικοποίηση
- ✓ Κατασκευή ιστορίας
- ✓ Σύνθεση της αφήγησης

Με βάση το παραπάνω μοντέλο, κατά την ανάλυση των δεδομένων ακούσαμε αρκετές φορές τις συνομιλίες που καταγράψαμε και έγινε πλήρης απομαγνητοφώνηση τους. Οι συνομιλίες αποτυπώθηκαν σε αρχείο Word για να είναι πιο εύκολο να απομονώσουμε τα σημεία που φανερώνουν την ύπαρξη κρίσιμου συμβάντος. Στη συνέχεια έγινε κάποια κωδικοποίηση των απαντήσεων, ώστε να συγκριθούν απαντήσεις παρόμοιων ερωτήσεων που υπάρχουν στις δύο δραστηριότητες που υλοποιούνται από τους μαθητές. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις το ηχητικό αρχείο δεν είναι αρκετό για να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα. Έτσι, ανατρέχουμε στο ιστορικό των κινήσεων που έχουν κάνει οι μαθητές στους υπολογιστές, αλλά και στα φύλλα εργασίας που συμπληρώνουν και στα οποία καταγράφονται οι απαντήσεις των ερωτημάτων.

Στην έρευνα αναζητούμε κρίσιμα συμβάντα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Ένα γεγονός χαρακτηρίζεται κρίσιμο όταν καταδεικνύει μια σημαντική αλλαγή, ή ένα εννοιολογικό άλμα σε σχέση με μια προηγούμενη κατάσταση (Kiczek, 2000), ή ένα διαισθητικό λάθος, ή μια μετάβαση που γίνεται κατά τρόπο «ενδιαφέροντα λανθασμένο» (Bruner, 1960, 1977). Ένα συμβάν είναι κρίσιμο σε σχέση με τις ιδιαίτερες ερευνητικές ερωτήσεις που ακολουθεί. Για παράδειγμα, η περίπτωση κατά την οποία οι μαθητές παρουσιάζουν μια μαθηματική εξήγηση ή ένα επιχείρημα μπορεί να είναι σημαντική σε σχέση με το ερευνητικό ερώτημα που ενδιαφέρεται για

τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν αποδείξεις ή αιτιολογίες με μαθηματικό τρόπο. Συνεπώς, η περίπτωση αυτή θεωρείται ως κρίσιμο συμβάν.

Κάτω από αυτό το πρίσμα, εστιάζουμε σε διαλόγους όπου οι μαθητές, με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού, έρχονται σε σύγκρουση με πρότερη γνώση που έχουν οικοδομήσει για την έννοια της συνάρτησης. Ιδιαίτερα, μας ενδιαφέρουν οι διάλογοι στους οποίους αναδεικνύονται οι αντιλήψεις των μαθητών για τη μεταβολή, το αναλλοίωτο και τις έννοιες εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην προσπάθεια τους να διαχειριστούν τη νέα κατάσταση, που προκύπτει με την εμπλοκή τους στις δραστηριότητες, κάνουν διατυπώσεις, εκφράζουν απόψεις ή επιχειρηματολογούν για το πώς οι μεταβολές ποσοτήτων σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο νοηματοδοτούν σχέσεις συναρτήσεων. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο επιλέγονται τα κρίσιμα συμβάντα τα οποία στηρίζουν την ανάλυση των ερευνητικών ερωτημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό καταγράφονται τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από τα δεδομένα της έρευνας, σύμφωνα με τη μέθοδο της ανάλυσης που έχει περιγραφεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Το παρόν κεφάλαιο δομείται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα γίνεται σύντομη περιγραφή της κατηγοριοποίησης των νοημάτων της συμμεταβολής, που προέκυψαν από τις ομάδες των μαθητών, μέσα από την διερεύνηση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην δεύτερη ενότητα, παρουσιάζεται η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Η νοηματοδότηση αυτή προέκυψε από την μελέτη ομάδων επεισοδίων τα οποία χαρακτηρίζουν κρίσιμα ζητήματα της κατανόησης των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή ποσοτήτων.

5.1 Κατηγοριοποίηση των νοημάτων της συνάρτησης ως συμμεταβολή

Η νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης στο πλαίσιο της συμμεταβολής βασίζεται στα επίπεδα τα οποία καθόρισαν οι Carlson et al (2002). Ωστόσο, η κατάταξη των πέντε νοητικών λειτουργιών προέκυψε από τις έρευνες του Carlson σε ομάδες φοιτητών. Οι μαθητές του Λυκείου και ιδιαίτερα της Α΄ τάξης, δεν είναι εξοικειωμένοι με τον μέσο ή τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα στην παρούσα έρευνα να δοθεί έμφαση σε ποιοτικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης και καθορίστηκαν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής, τα οποία ανταποκρίνονται στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών του Λυκείου. Τα κριτήρια κατανόησης της συμμεταβολής ιεραρχήθηκαν από το πιο απλό στο πιο σύνθετο λαμβάνοντας υπόψη:

- ✓ Τη διαισθητική αντίληψη της συμμεταβολής
- ✓ Την αλληλεξάρτηση των μεγεθών
- ✓ Τη χρήση μαθηματικών όρων
- ✓ Την χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων
- ✓ Τις αποδεικτικές διαδικασίες

Κάτω από αυτό το πρίσμα, διαμορφώνονται πέντε κατηγορίες νοημάτων που σηματοδοτούν πέντε διαφορετικά επίπεδα κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Τα επίπεδα αυτά είναι: νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά, νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεγεθών ή ποσοτήτων, νοηματοδότηση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, νοηματοδότηση της

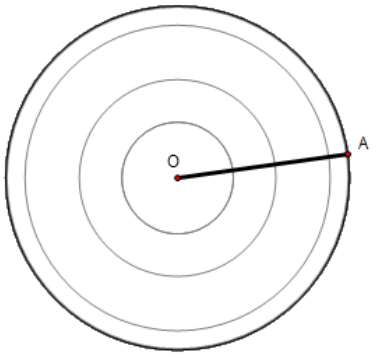
συμμεταβολής με συσχετισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων και νοηματοδότηση της συμμεταβολής με αποδεικτικές διαδικασίες. Πιο συγκεκριμένα:

Α. Επίπεδο 1: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά

Στο επίπεδο 1, οι μαθητές συνέδεαν τις μεταβολές ποσοτήτων διαισθητικά. Κατέγραφαν τις μεταβολές και αυτά που έμεναν αναλλοίωτα χωρίς να ενδιαφέρονται για την αλληλεξάρτησή τους, με βάση την εικόνα στο παράθυρο του λογισμικού.

Παράδειγμα:

Δραστηριότητα 1: Ανοίξτε την εφαρμογή «κύκλος_1» που εμφανίζεται στην επιφάνεια εργασίας. Σύρετε τα σημεία Α και Ο. Καταγράψτε τι μεταβάλλεται και τι μένει αναλλοίωτο.



Σχήμα 15: Μετακίνηση των σημείων Α και Ο στο παράθυρο του

Απάντηση (ομάδα 2)

Μεταβάλλεται και το εμβαδόν και το μήκος ... και η περίμετρος

Β. Επίπεδο 2: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής ως αλληλεξάρτηση μεγεθών

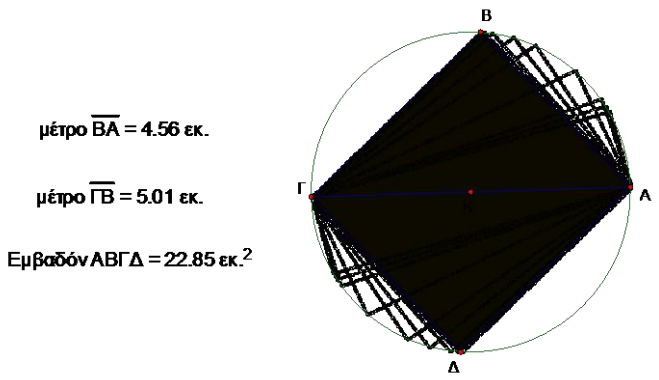
Στο επίπεδο 2, οι μαθητές αντιλαμβάνονταν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί αντίστοιχη μεταβολή στο άλλο μέγεθος.

Παράδειγμα:

Δραστηριότητα 2: Από τις ποσότητες (μεγέθη) που μεταβάλλονται ποια ποσότητα νομίζετε ότι προκαλεί τη μεταβολή της άλλης;

Απάντηση (ομάδα 1)

Οι πλευρές αλλάζουν και γι αυτό αλλάζει και το εμβαδόν του ορθογωνίου



Σχήμα 16: Αλληλεξάρτηση των μηκών των πλευρών και του εμβαδού του ορθογωνίου

Γ. Επίπεδο 3: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής με αλγεβρικό συμβολισμό

Στο επίπεδο 3, οι μαθητές απέδιδαν στα αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη την έννοια της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παράδειγμα:

Δραστηριότητα 1: Με όρους συναρτήσεων πως θα χαρακτηρίζατε τα μεγέθη «μήκος ακτίνας» και «εμβαδόν κύκλου»; (ομάδα 2)

Απάντηση

Κ: δεν αναγνωρίζουμε ότι η ακτίνα και το εμβαδόν είναι οι δύο μεταβλητές;

Μ4: δηλαδή το ένα είναι το x και το άλλο το y ; Κάπως έτσι;

Μ3: εξαρτώνται η μία από την άλλη, είναι ανάλογες

Μ4: όχι ακριβώς ανάλογες

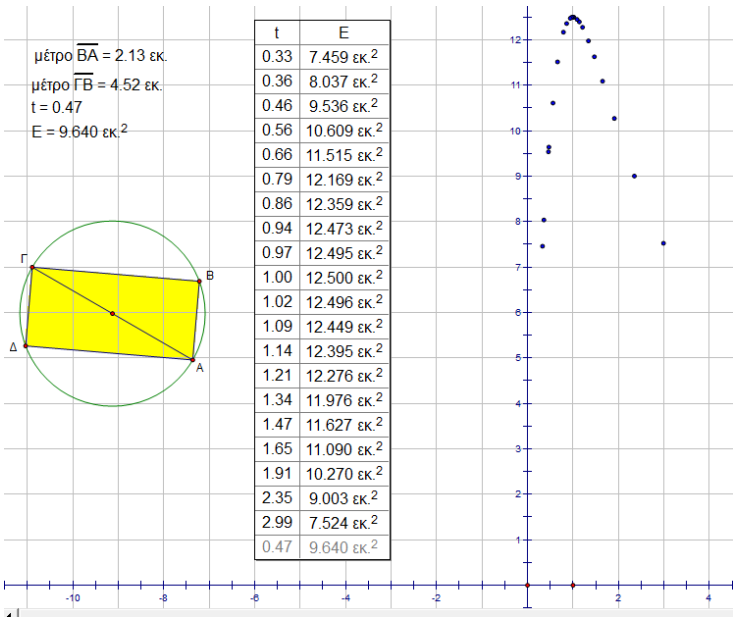
Μ3: έχει σχέση με τετμημένες και τεταγμένες;

Δ. Επίπεδο 4: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής με αναφορά σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Στο επίπεδο 4, οι μαθητές έκαναν περιγραφή της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Οι μαθητές παρατηρούσαν ταυτόχρονα τις μεταβολές στο γεωμετρικό σχήμα, τον πίνακα τιμών και στα σημεία που εμφανίζονταν στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, προσπαθώντας να συνδέσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μεταξύ τους.

Παράδειγμα:

Δραστηριότητα 2: Αποτυπώστε με το εργαλείο του ίχνους τις μεταβολές των μεγεθών t *και* E. *Παρατηρείστε τις μεταβολές του πίνακα και σημειώστε το είδος της μεταβολής. Διαφαίνεται κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών;*



t	E
0.33	7.459 εκ.²
0.36	8.037 εκ.²
0.46	9.536 εκ.²
0.56	10.609 εκ.²
0.66	11.515 εκ.²
0.79	12.169 εκ.²
0.86	12.359 εκ.²
0.94	12.473 εκ.²
0.97	12.495 εκ.²
1.00	12.500 εκ.²
1.02	12.496 εκ.²
1.09	12.449 εκ.²
1.14	12.395 εκ.²
1.21	12.276 εκ.²
1.34	11.976 εκ.²
1.47	11.627 εκ.²
1.65	11.090 εκ.²
1.91	10.270 εκ.²
2.35	9.003 εκ.²
2.99	7.524 εκ.²
0.47	9.640 εκ.²

Σχήμα 17: Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή με σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων

<u>Απάντηση</u>

Μ2: από τον πίνακα, όταν $t=1$ *το* E *γίνεται μέγιστο*

Μ1: και από τη γραφική παράσταση. Στον οριζόντιο μετράμε το t *και στον κατακόρυφο το* E. *Το πιο ψηλό σημείο είναι στο* $t=1$

Ε. Επίπεδο 5: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής με αποδεικτικές διαδικασίες

Στο επίπεδο 5, οι μαθητές αναγνώριζαν την αναγκαιότητα της μαθηματικής νομιμοποίησης όσων παρατήρησαν στα προηγούμενα επίπεδα, μέσα από αποδεικτικές διαδικασίες.

<u>Παράδειγμα:</u>

Δραστηριότητα 2: Όσα εκφράστηκαν στα ερωτήματα Ε9, Ε10, Ε11 και Ε12 είναι μαθηματικά αποδεκτά συμπεράσματα ή αποτελούν εικασίες; (ομάδα 2).

<u>Απάντηση</u> (με βάση το σχήμα 17)

Κ: βλέπουμε αυτόν τον πίνακα, αν πάμε και σε άλλες τιμές (με ενδιάμεσο γέμισμα) θα είχαμε την ίδια εικόνα;
Μ4: ναι το ίδιο γίνεται. Κ: είμαστε σίγουροι; Μ4: ναι, θα μπορούσαμε να το χωρίσουμε όταν το t πάει από το 0 έως το 1 και θα είναι αύξουσα και μετά… Ναι γιατί θα μπορούσαμε να την αποδείξουμε αυτήν την εικόνα.

5.2 Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε την μαθησιακή πορεία που ακολούθησαν οι ομάδες που συμμετείχαν στην έρευνα, προκειμένου να αντιληφθούν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή ποσοτήτων. Η ανάλυση εστιάζεται στο αν και με ποιο τρόπο οι μαθητές μπόρεσαν να οικοδομήσουν νοήματα συναρτήσεων σε ένα μη αλγεβρικό πλαίσιο, πειραματιζόμενοι στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του λογισμικού DGS, με προβλήματα γεωμετρικού περιεχομένου. Οι μαθητές, όπως ήδη αναφέραμε, χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Η ομάδα Α αποτελείται από τους μαθητές Μ1 και Μ2, ενώ η ομάδα Β από τους μαθητές Μ3 και Μ4.

Η ανάλυση περιλαμβάνει την εξέταση πέντε ομάδων επεισοδίων των διαλόγων των μαθητών. Η επιλογή των επεισοδίων προέκυψε από τη σύνθεση των νοημάτων των μαθητών στην προσπάθειά τους να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή σε κοινές θεματικές ενότητες. Οι συγκεκριμένες ενότητες περιλαμβάνουν κρίσιμα ζητήματα τα οποία αναδύθηκαν κατά τη μετάβαση από την αλληλεξάρτηση μεγεθών στη έννοια της συμμεταβολής. Καταρχήν, παρατηρήθηκε η αλληλεξάρτηση και η συμμεταβολή ή το αναλλοίωτο μεγεθών διαισθητικά. Στη συνέχεια, η εστίαση έγινε στην επιλογή της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής. Η εν λόγω ενότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική επειδή στο DGS δεν υπάρχουν άξονες εξ αρχής και ως εκ τούτου οι μαθητές πρέπει οι ίδιοι να καθορίσουν ποιο μέγεθος είναι ανεξάρτητο και ποιο εξηρτημένο. Ακολούθησε η παρατήρηση της κατεύθυνσης της συμμεταβολής, δηλαδή όταν αυξάνεται το ένα μέγεθος τι συμβαίνει με το άλλο. Η επόμενη θεματική ενότητα που παρατηρήθηκε ήταν η νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε πολλαπλές αναπαραστάσεις και η μεταξύ τους σύνδεση. Τέλος, παρατηρήθηκε αν τα διάφορα επίπεδα της συμμεταβολής ανέδειξαν την ανάγκη της αποδεικτικής διαδικασίας.

Σε κάθε ομάδα επεισοδίων εξετάζουμε ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων και λειτουργιών στις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως

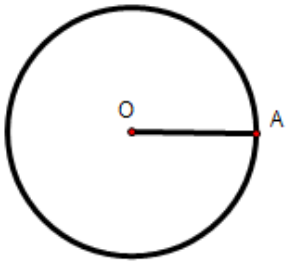
συμμεταβολής. Με άλλα λόγια, εξετάζουμε πως τα συγκεκριμένα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας διαμεσολαβούν την έννοια της συνάρτησης στους μαθητές στο πλαίσιο της συμμεταβολής. Επιπλέον, εξετάζουμε αν τους οδηγούν στην διατύπωση εικασιών και στη συνέχεια σε μία πορεία προς τη μαθηματική τυπική απόδειξη.

5.2.1 Νοηματοδότηση της μεταβολής και του αναλλοίωτου

Το κοινό χαρακτηριστικό των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας, όπως έχουμε αναφέρει, είναι ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων το «σύρσιμο» (dragging). Σε αυτήν την ομάδα επεισοδίων εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές, με τη χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου, δημιούργησαν νοήματα σχετικά με τα μεγέθη που μεταβάλλονται και εκείνα που μένουν αναλλοίωτα.

Επεισόδιο 1: Νοηματοδότηση της μεταβολής και του αναλλοίωτου με σύρσιμο περιπλάνησης

Στην 1η δραστηριότητα οι μαθητές μετακίνησαν με τυχαίο τρόπο τα βασικά σημεία Α και Ο πάνω στην οθόνη, χωρίς κάποιο πλάνο, ώστε να ανακαλύψουν ενδιαφέρουσες διαμορφώσεις ή κανονικότητες στα σχήματα (*Wandering dragging* - σύρσιμο περιπλάνησης). Οι μαθητές και των δύο ομάδων εύκολα αναγνώρισαν τις μεταβολές που έγιναν στην ακτίνα του κύκλου, το εμβαδόν του και την περίμετρό του. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί πρόκειται για τα στοιχεία τα οποία διαπραγματεύονται σε κάθε πρόβλημα το οποίο αναφέρεται στον κύκλο. Ωστόσο, δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν κάτι που παραμένει αναλλοίωτο. Παρά την επιμονή των ερευνητών και την παρότρυνση να παρατηρήσουν πιο προσεκτικά αυτό που συνέβαινε στην οθόνη του υπολογιστή, και οι δύο ομάδες «είδαν» το π ως κάτι που παραμένει σταθερό. Όμως, αυτό δεν ήταν αποτέλεσμα της δράσης πάνω στο αντικείμενο του πειραματισμού, αφού πουθενά δεν γίνεται αναφορά στον αριθμό π. Είναι προφανές, ότι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να παρατηρήσουν ότι το σχήμα του



Σχήμα 18: Μετακίνηση των σημείων Α και Ο

κύκλου παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, προκειμένου να δώσουν μια απάντηση στηρίχθηκαν στην εικόνα που έχουν κατασκευάσει για τον κύκλο. Στο πλαίσιο αυτό μαθητές γνωρίζουν ότι ο αριθμός π είναι μια σταθερή ποσότητα που συνδέεται με τον κύκλο. Στην Α ομάδα είχαμε τον παρακάτω διάλογο:

Κ: μένει κάτι αναλλοίωτο;

Μ1: το κέντρο (εννοεί όταν μετακινείται το σημείο Α)

Κ: κάτι άλλο;

Μ2: το π

Κ: παρά τις αλλαγές μένει κάτι σταθερό;

……..

Κ: κάποιο σχήμα που να παραμένει σταθερό;

Μ2: ο κύκλος

Παρόμοια ήταν και η συζήτηση στην ομάδα Β:

Κ: μένει κάτι άλλο σταθερό;

Μ3: το κέντρο του κύκλου (όταν μετακινείται το σημείο Α)

Κ: κάτι άλλο που να παραμένει σταθερό;

Μ3: πάντα παραμένει σταθερό το π

Μ4: υπάρχει αναλογία στα σημεία;

Κ: δεν βλέπετε κάτι άλλο;

Μ3: μάλλον όχι

Κ: το σχήμα;

Μ3: αα

Μ4: το σκεφτόμουνα αλλά δεν ήθελα να το πω

Κ: γιατί;

Μ4: από την αρχή παίρνουμε κύκλο μεταβάλλουμε την ακτίνα, πάντα θα παραμένει κύκλος.

Τα τελευταία λόγια της μαθήτριας αναδεικνύουν την εικόνα που έχει οικοδομήσει για τα γεωμετρικά σχήματα. Κάτι το οποίο ξεκινάει να είναι κύκλος, παραμένει κύκλος ακόμη και αν μεταβάλλουμε κάποιο στοιχείο του όπως η ακτίνα. Αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές έχουν μάθει να

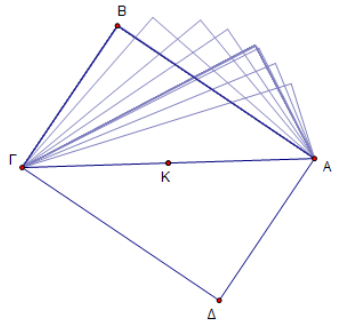
χειρίζονται τα σχήματα με χαρτί και μολύβι στην παραδοσιακή τάξη μαθηματικών. Για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος κατασκευάζεται ένα μοναδικό σχήμα. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές δεν μπαίνουν στον προβληματισμό για το τι θα συνέβαινε αν είχαμε κατασκευάσει ένα άλλο σχήμα. Ένα περιβάλλον όμως δυναμικής γεωμετρίας παρέχει στον μαθητή τη δυνατότητα να πειραματιστεί με πολλά διαφορετικά στιγμιότυπα του σχήματος και να ανακαλύψει ενδιαφέρουσες ιδιότητες της συμμεταβολής των διαφόρων μεγεθών. Γενικότερα, ένα τέτοιο περιβάλλον εισάγει τον μαθητή στον πειραματισμό, την παρατήρηση και εν τέλει στην ανακάλυψη.

Επεισόδιο 2: Νοηματοδότηση της μεταβολής και του αναλλοίωτου με σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου

Στη 2η δραστηριότητα το σύρσιμο είναι της μορφής Dummy locus dragging, σύρσιμο κρυφού ή τεχνητού (γεωμετρικού) τόπου. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί ένα μονοπάτι, ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν. Είναι χαρακτηριστικές οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση:

Ε: Μετακινήστε την κορυφή Β του ορθογωνίου. Κατά την κίνηση αυτή η κορυφή Β κινείται σε κάποια συγκεκριμένη καμπύλη ή παίρνει τυχαίες θέσεις;
Μ1: Δεν είμαι σίγουρος αν είναι κύκλος ή έλλειψη
Κ: την κίνηση του Β την είδες;
Μ1: Βασικά, εγώ νομίζω ότι δεν είναι κύκλος
Κ: Τι σε κάνει να το νομίζεις;
Μ1: Η γωνία Β δεν είναι σταθερή

Η δυνατότητα της αναπαράστασης πολλών διαφορετικών θέσεων της κορυφής Β (σχήμα 19), θέτει σε αμφισβήτηση, το αν η γωνία Β παραμένει ορθή ή υφίσταται κάποια μεταβολή. Ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα, η αλληλεπίδραση μεταξύ του χρήστη και



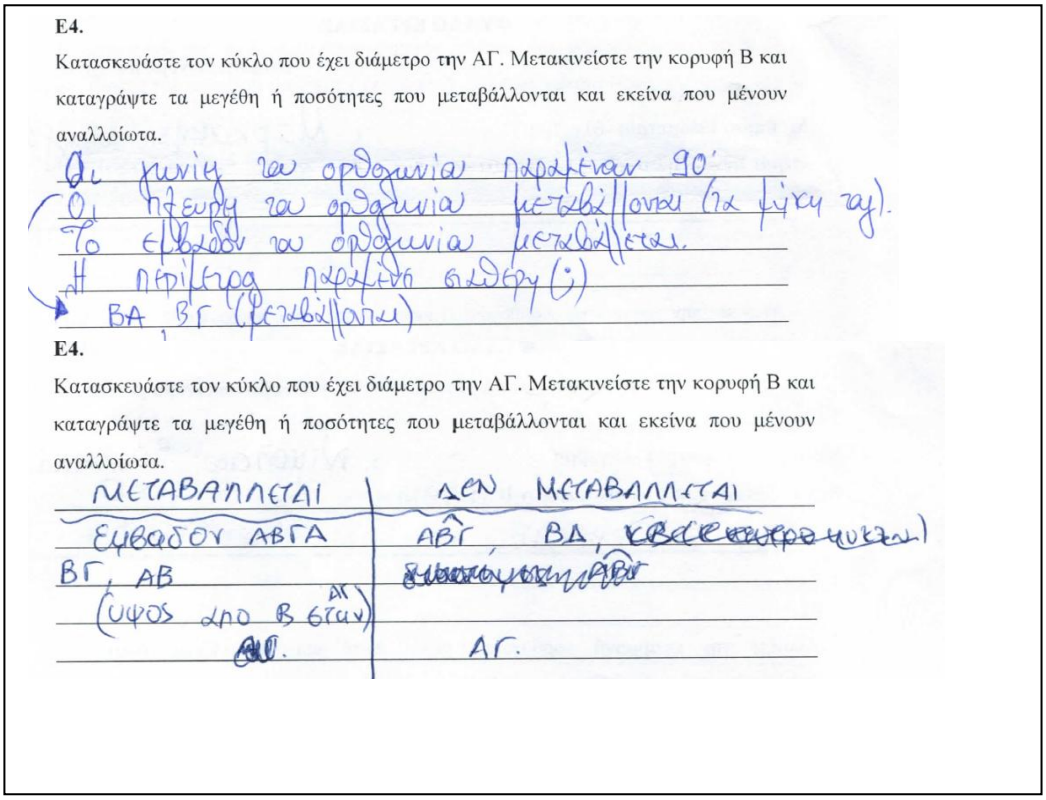
Σχήμα 19: διαδοχικές θέσεις της κορυφής Β

του εργαλείου οδηγεί στην οικοδόμηση μιας νέας εικόνας για το γεωμετρικό αντικείμενο. Επιπλέον, δίνει το έναυσμα για συζήτηση μέσα στην ομάδα και την διατύπωση επιχειρημάτων προκειμένου να στηρίξουν την άποψη τους.

M2: Δεν το έχουμε ονομάσει ορθογώνιο;
M2: Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι ορθογώνιο
M1: …και όποτε μετακινούμε το Β θα είναι πάντα ορθογώνιο;
M2: Εγώ νομίζω ναι.
K: Γιατί ναι;
M2: Γιατί αν δεν ήταν θα πήγαινε όπου ήθελε το σημείο. Ενώ τώρα που στρίβει, στρίβει και το υπόλοιπο σχήμα για να είναι ορθογώνιο.

Είναι φανερό ότι οι δύο μαθητές *M1 και M2* προσπαθούν να στηριχθούν στα δεδομένα της άσκησης για να δικαιολογήσουν το γεγονός ότι το σχήμα που προκύπτει είναι μόνιμα ορθογώνιο. Ο μαθητής Μ2 προχωράει λίγο παραπέρα τη σκέψη του, θεωρώντας ότι υπάρχει μια δέσμευση μεταξύ του σημείου και του υπόλοιπου σχήματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μετακινείται το σημείο Β, ωστόσο το τετράπλευρο να παραμένει ορθογώνιο. Στο σημείο αυτό έχει αρχίσει να εσωτερικεύει την έννοια του μαθηματικού μοτίβου. Με άλλα λόγια ο δυναμικός χειρισμός διαμεσολαβεί στον μαθητή τη συσχέτιση της δράσης στο αντικείμενο με την επίπτωση σε ένα άλλο γεωμετρικό αντικείμενο.

Οι μαθητές και στις δυο ομάδες, έχοντας την εμπειρία της 1^{ης} δραστηριότητας, αντιλαμβάνονται άμεσα τις ποσότητες που μεταβάλλονται και εκείνες που παραμένουν σταθερές, αν και για τις τελευταίες υπήρξε κάποιος προβληματισμός. Ενδεικτικές είναι οι απαντήσεις που αποτυπώθηκαν στο φύλλο εργασίας όπως φαίνεται από το επόμενο στιγμιότυπο.



Ε4.

Κατασκευάστε τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΑΓ. Μετακινείστε την κορυφή Β και καταγράψτε τα μεγέθη ή ποσότητες που μεταβάλλονται και εκείνα που μένουν αναλλοίωτα.

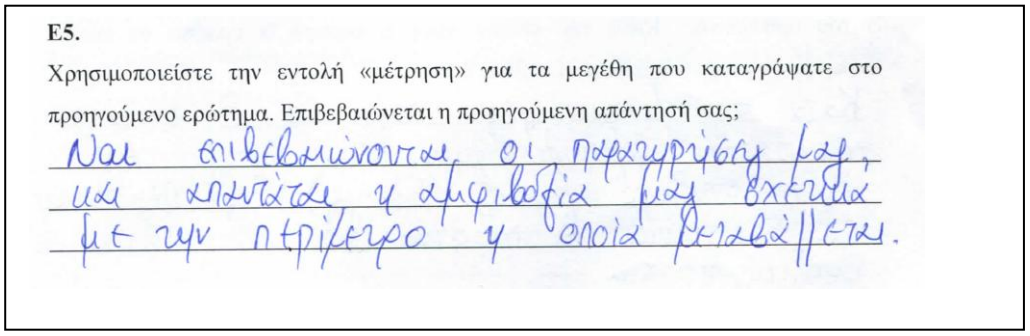
Οι γωνίες του ορθογωνίου παραμένουν 90°
Οι πλευρές του ορθογωνίου μεταβάλλονται (τα μήκη τους).
Το εμβαδόν του ορθογωνίου μεταβάλλεται.
Η περίμετρος παραμένει σταθερή (;)
ΒΑ, ΒΓ (μεταβάλλονται)

Ε4.

Κατασκευάστε τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΑΓ. Μετακινείστε την κορυφή Β και καταγράψτε τα μεγέθη ή ποσότητες που μεταβάλλονται και εκείνα που μένουν αναλλοίωτα.

ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ	ΔΕΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ
ΕΜΒΑΔΟΝ ΑΒΓΑ	ΑΒΓ, ΒΔ,
ΒΓ, ΑΒ	
(ΥΨΟΣ ΑΠΟ Β ΕΩΣ ΑΓ)	
	ΑΓ.

Ο μαθητής Μ1 όπως φαίνεται στις παραπάνω σημειώσεις δεν είναι βέβαιος τι συμβαίνει με την περίμετρο του ορθογωνίου. Παραμένει σταθερή ή αλλάζει; Ωστόσο, με την εντολή της «μέτρησης» λύνεται η απορία του.



Ε5.

Χρησιμοποιείστε την εντολή «μέτρηση» για τα μεγέθη που καταγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα. Επιβεβαιώνεται η προηγούμενη απάντησή σας;

Ναι επιβεβαιώνονται οι παρατηρήσεις μας, και καταλήξαμε η αμφιβολία μας σχετικά με την περίμετρο η οποία μεταβάλλεται.

Η προηγούμενη περίπτωση αναδεικνύει για άλλη μια φορά τον σημαντικό ρόλο του λογισμικού, μέσω του οποίου διαμεσολαβείται η συμπεριφορά ενός μεγέθους για το οποίο ο μαθητής δεν είναι σίγουρος αν μεταβάλλεται ή παραμένει αναλλοίωτο. Με τη χρήση του εργαλείου της μέτρησης ο μαθητής επιβεβαιώνει ή απορρίπτει το αποτέλεσμα της παρατήρησης του.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές έφτασαν σχετικά εύκολα στο επίπεδο 1 της συμμεταβολής. Αντιλήφθηκαν άμεσα τα μεγέθη τα οποία

μεταβάλλονται. Η συνεισφορά του εργαλείου του συρσίματος είτε στη μορφή της περιπλάνησης, είτε στη μορφή του κρυφού γεωμετρικού τόπου ήταν καθοριστική. Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην ανακάλυψη μεγεθών ή αντικειμένων που μένουν αναλλοίωτα. Εστίασαν στη μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του κύκλου κατά το σύρσιμο και δεν αντιλήφθηκαν ότι παρά τη μεταβολή του γεωμετρικού αντικειμένου οι ιδιότητες του σχήματος του κύκλου παραμένουν.

5.2.2 Νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεταξύ μεγεθών

Σε αυτήν την ομάδα επεισοδίων εξετάζεται αν και με ποιο τρόπο οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αλληλεξάρτηση και εν τέλει τη συμμεταβολή των διαφόρων μεγεθών τα οποία αλλάζουν μέσω του δυναμικού χειρισμού των εφαρμογών και των δύο δραστηριοτήτων. Όπως ήδη αναφέραμε η κατανόηση της συμμεταβολής είναι μια αναπτυξιακή διαδικασία η οποία περιλαμβάνει:

- ✓ την κατασκευή νοητικής εικόνας της μεταβολής μιας ποσότητας,
- ✓ το συντονισμό των νοητικών εικόνων των μεταβολών δύο ποσοτήτων και
- ✓ την κατασκευή νοητικής εικόνας της ταυτόχρονης συμμεταβολής των αλλαγών δύο ποσοτήτων.

<u>Επεισόδιο 1: Νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης με τη βοήθεια του εργαλείου της μέτρησης</u>

Οι μαθητές έχοντας ήδη καταγράψει τα μεγέθη και τις ποσότητες που μεταβάλλονται, κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση:
«*Από τα μεγέθη που μεταβάλλονται ποιο κατά τη γνώμη σας προκαλεί τη μεταβολή του άλλου;*». Στην 1η δραστηριότητα οι απαντήσεις ήταν άμεσες. Οι μαθητές θεώρησαν ότι η ακτίνα του κύκλου μεταβάλλεται και αυτό έχει ως συνέπεια τη μεταβολή του εμβαδού και της περιμέτρου του κύκλου. Οι διάλογοι είναι χαρακτηριστικοί και στις δύο ομάδες. Ομάδα Α:

Μ1: όσο μεγαλώνει η ακτίνα μεγαλώνει και το εμβαδόν και το μήκος του κύκλου *Κ: γιατί η ακτίνα; (εννοεί, προκαλεί αυτές τις μεταβολές)* *Μ2: όσο αυξάνεται η ακτίνα έχουμε μεγαλύτερη επιφάνεια στον κύκλο άρα και στο εμβαδόν και εξίσου μεγαλώνει το μήκος*

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να σκεφτούν ότι η μεταβολή θα μπορούσε να προκύψει με διαφορετικό τρόπο. Δεν είναι αποδεκτό στην εικόνα που έχουν οικοδομήσει για τον κύκλο και τα χαρακτηριστικά του, ότι η μεταβολή της επιφάνειας θα μπορούσε να προκαλέσει αλλαγές στις άλλες ποσότητες. Ακόμη και όταν ο ερευνητής οδηγεί τους μαθητές να σκεφτούν αυτή τη δυνατότητα, η αποδοχή εκ μέρους των μαθητών είναι συγκαταβατική. Η ομάδα Β φαίνεται να πηγαίνει λίγο πιο πέρα τη σκέψη της σε αυτό το σημείο και είναι περισσότερο θετική σε μια τέτοια προοπτική.

Μ3: η ακτίνα επηρεάζει και όλα τα άλλα και το είδος της μεταβολής είναι αναλογία, όχι δεν είναι ακριβώς αναλογία.
Κ: επομένως η ακτίνα επηρεάζει το εμβαδόν του κύκλου
Μ4: όχι το σκέφτομαι λίγο αντίθετα κάπως
Κ: δηλαδή;
Μ4: για την ακρίβεια νομίζω ότι, χωρίς να είμαι σίγουρη, αλλά το ένα προκαλεί τη μεταβολή του άλλου, όποιο και να είναι. Δηλαδή αν μεταβάλλουμε την περίμετρο θα μεταβληθεί η ακτίνα και συνάμα το εμβαδό… ουσιαστικά μόνο το εμβαδόν είναι αποτέλεσμα των άλλων δύο.
Κ: Μ3 εσύ τι λες;
Μ3: ναι ισχύει, δεν το είχα σκεφτεί
Μ4: … το εμβαδόν είναι το αποτέλεσμα της μεταβολής είτε της ακτίνας είτε της περιμέτρου
Κ: το να είναι το εμβαδόν υπαίτιο για τα άλλα δηλαδή δεν μας φαίνεται λογικό;
Μ3: είναι περίεργο να το σκεφτείς.. πιο εύκολο σου έρχεται να μεταβληθεί το σχήμα (εννοεί, το εμβαδόν και η περίμετρος εξ αιτίας της ακτίνας)

Οι μαθητές με τη βοήθεια του dragging αλλά και των μετρήσεων που έχουν κάνει στο περιβάλλον του λογισμικού, ανακάλυψαν άμεσα τα μεγέθη που μεταβάλλονται. Έτσι, έχουν ήδη κατασκευάσει τη νοητική εικόνα της μεταβολής των διαφόρων ποσοτήτων και άρα έχουν αρχίσει να αναπτύσσουν τη διαδικασία της συμμεταβολής (επίπεδο 1 και επίπεδο2). Επιπλέον, είναι σε θέση να συσχετίσουν τις μεταβολές αυτές. Η πρώτη προσπάθεια συσχέτισης, όπως αναμένεται, οδηγεί στην εικασία ότι η μεταβολή της ακτίνας είναι εκείνη που επηρεάζει τις άλλες δύο

ποσότητες, μήκος και εμβαδόν κύκλου. Ωστόσο, βλέπουμε να διατυπώνονται και δεύτερες σκέψεις από τα μέλη της ομάδας Β και να θεωρούν ότι μπορεί και το μήκος να είναι εκείνο, που θα προκαλέσει τις μεταβολές στην ακτίνα και στο εμβαδόν.

Η παραπάνω σκέψη είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των μαθητών με την εφαρμογή που χειρίζονται. Η ταυτόχρονη αποτύπωση πολλών διαφορετικών θέσεων του σχήματος και οι μετρήσεις, τους έδωσαν τη δυνατότητα να φθάσουν σε ένα τέτοιο συμπέρασμα. Όμως, δεν μπορούν να δεχθούν ακόμη ότι η μεταβολή του εμβαδού μπορεί να είναι η αιτία για την μεταβολή της ακτίνας και του μήκους του κύκλου. Η δυσκολία αυτή εδράζεται και στο γεγονός ότι η δράση μέσω του λογισμικού πάνω στην ακτίνα δημιούργησε το «ψυχολογικό εργαλείο» (Vygotsky, 1978) της μεταβαλλόμενης ακτίνας, οπότε με βάση αυτό οι μαθητές οικοδόμησαν τα νοήματα της αλληλεξάρτησης των μεταβαλλόμενων μεγεθών, θεωρώντας ότι η ακτίνα είναι η αιτία της μεταβολής.

Επεισόδιο 2: Νοηματοδότηση της κατεύθυνσης της αλληλεξάρτησης

Στην 2η δραστηριότητα οι μαθητές έχοντας ενσωματώσει σε κάποιο βαθμό όσα συζητήθηκαν έως τώρα, αντιλήφθηκαν άμεσα τις μεταβολές και τις σταθερές της εφαρμογής. Ωστόσο, στην ερώτηση «*Από τα μεγέθη που μεταβάλλονται ποιο ή ποια προκαλούν τη μεταβολή των άλλων*», απάντησαν ότι οι πλευρές αλλάζουν και γι αυτό αλλάζει και το εμβαδόν του ορθογωνίου. Μόνο μια μαθήτρια από την ομάδα Β΄ εκφράζει διαφορετική πρώτη σκέψη λέγοντας:

Μ4: αν αλλάξω το εμβαδόν ενός σχήματος τότε αλλάζουν τα μήκη των πλευρών του. Έχω ένα τρίγωνο που καταλαμβάνει 5 τ.μ. Αν θέλω να καταλάβει 10 τ.μ. αναγκαστικά θα αλλάξω τα μήκη των πλευρών του.
Μ3: αλληλοεξαρτώνται (εννοεί τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν)

Στην ομάδα Α΄ η αρχική άποψη ήταν ότι η μεταβολή των πλευρών προκαλεί τη μεταβολή του εμβαδού. Στην πορεία όμως ακούστηκαν και δεύτερες σκέψεις οι οποίες κατέληξαν στον παρακάτω διάλογο:

Μ1: δεν υπάρχει σωστή και λάθος απάντηση, γιατί η μεταβολή του ενός φέρνει οπωσδήποτε τη μεταβολή του άλλου.

M2: ναι, αυτό είπα και εγώ

M1: τώρα ποια μεταβολή θα γίνει πρώτη, εγώ πιστεύω ότι παράλληλα γίνονται

K: μπορούμε να εξάγουμε κάποιο τελικό συμπέρασμα;

M1: ότι τα μεγέθη αλληλοεξαρτώνται

Σε κάθε περίπτωση, οι μαθητές έχουν κάνει σημαντικά βήματα προκειμένου να νοηματοδοτήσουν την συνάρτηση ως συμμεταβολή μεγεθών. Έχουν καταγράψει ποσότητες που μεταβάλλονται, έχουν αναγνωρίσει τα στοιχεία δύο συνόλων που αλληλοεξαρτώνται και προσπαθούν να συντονίσουν τη σχέση των συνόλων αυτών. Η άποψη του M1 ότι «*δεν υπάρχει σωστή και λάθος απάντηση, γιατί η μεταβολή του ενός φέρνει οπωσδήποτε τη μεταβολή του άλλου*» είναι χαρακτηριστική και δείχνει την βαθύτερη κατανόηση που έχουν πλέον οι μαθητές για τη συμμεταβολή μεγεθών. Η απουσία της αλγεβρικής μοντελοποίησης στο περιβάλλον DGS οδήγησε άμεσα τους μαθητές, να μιλούν με όρους συμμεταβολής μεγεθών. Στην πραγματικότητα τους έχει απομακρύνει από τον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης και αναδεικνύει τη μεταβολή πάνω από την αντιστοιχία.

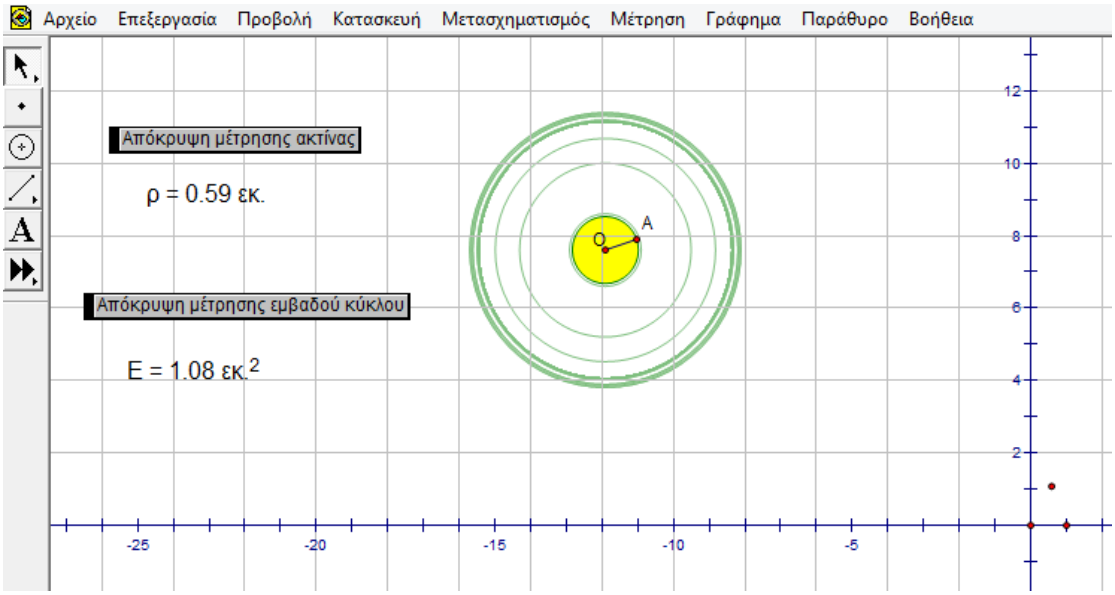
Από την περιγραφή των επεισοδίων είναι φανερό ότι οι μαθητές έχουν μετακινηθεί από την διαισθητική αντίληψη της συμμεταβολής στο αμέσως επόμενο επίπεδο, εκείνο του συσχετισμού των μεταβαλλόμενων μεγεθών. Από την απλή καταγραφή των μεγεθών που μεταβάλλονται ή μένουν αναλλοίωτα είναι σε θέση να νοηματοδοτήσουν τον τρόπο με τον οποίο τα μεγέθη αλληλοεξαρτώνται. Η χρήση του εργαλείου της μέτρησης του DGS και η δυναμική αποτύπωση των αποτελεσμάτων της μέτρησης στην οθόνη του υπολογιστή, οδήγησαν τους μαθητές να αναπτύξουν τον γόνιμο προβληματισμό που περιγράφεται στα δύο επεισόδια και να διατυπώσουν εικασίες για τη σχέση της αλληλεξάρτησης.

5.2.3 Νοηματοδότηση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής

Έως τώρα οι μαθητές έχουν ασχοληθεί μόνο με ποσότητες και μεγέθη που μεταβάλλονται ή παραμένουν σταθερά, πάντα όμως στο γεωμετρικό πλαίσιο. Η ακτίνα του κύκλου, το μήκος του και το εμβαδόν του αποτελούν συγκεκριμένα γεωμετρικά μεγέθη ($1^{η}$ δραστηριότητα). Όμοια και στην $2^{η}$ δραστηριότητα τα μεγέθη που μεταβάλλονται, παραμένουν μεγέθη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Δεν έχει επιχειρηθεί ακόμη να ξεφύγουν οι μαθητές από το γεωμετρικό πλαίσιο των δύο

προβλημάτων, να γενικεύσουν αυτές τις μεταβολές, να αναγνωρίσουν χαρακτηριστικά των συναρτήσεων και να μεταβούν στο αλγεβρικό πεδίο (επίπεδο 3).

Αυτό συμβαίνει με τις ερωτήσεις που κλήθηκαν να απαντήσουν στη συνέχεια. Στην ερώτηση Ε4 της 1ης δραστηριότητας ζητήθηκε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν τα μεγέθη «μήκος ακτίνας» και «εμβαδόν κύκλου» με όρους συναρτήσεων. Αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι οι ποσότητες που μεταβάλλονται εκφράζουν μεταβλητές που συνδέονται με κάποια σχέση μεταξύ τους; Και αν ναι, πώς επιλέγουν την εξαρτημένη και πως την ανεξάρτητη μεταβλητή; Με την μετακίνηση του σημείου Α εμφανίσθηκαν οι διαφορετικές θέσεις του κύκλου, ενώ παράλληλα οι μαθητές παρατηρούσαν τις αλλαγές στις τιμές των μεγεθών ρ και Ε.



Σχήμα 20: Παράθυρο μεταβολών του κύκλου και των μεγεθών ρ και Ε

<u>Επεισόδιο 1: Νοηματοδότηση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως μεταβλητές</u>

Από τη μελέτη των διαλόγων φάνηκε, να είναι καταρχήν δύσκολο για τους μαθητές να προχωρήσουν στο συναρτησιακό τρόπο σκέψης. Ιδιαίτερα τα μέλη της ομάδας Α΄ δυσκολεύτηκαν να αποδώσουν το νόημα της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής στα γεωμετρικά μεγέθη ακτίνα και εμβαδόν κύκλου αντίστοιχα. Χαρακτηριστικός ο διάλογος που ακολουθεί:

Κ: με όρους συναρτήσεων πως θα χαρακτηρίζατε τα μεγέθη «μήκος ακτίνας» και «εμβαδόν κύκλου»;

M1: δηλαδή $f(x)$ και τέτοια;

K: τι εννοείς;

M1: ποιο είναι το x και ποιο είναι το y

K: το x και το y για σένα τι είναι;

M1: άξονες στις συναρτήσεις

Από τον παραπάνω διάλογο είναι φανερό ότι ο μαθητής M1 έχει οικοδομήσει μια συγκεχυμένη εικόνα στη σκέψη του σχετικά με τις συναρτήσεις. Αξίζει να σημειωθεί, ότι μετά την ερώτηση παρεμβάλλεται αρκετός χρόνος, έως ότου πάρουμε την πρώτη απάντηση από τον M1, «*δηλαδή $f(x)$ και τέτοια*». Στην προσπάθεια να ερμηνεύσει αυτό που λέει, αναφέρει το x και το y, που τελικά όπως ισχυρίζεται γι αυτόν είναι άξονες. Ο μαθητής έχει εστιάσει στα σύμβολα και στην γραφική παράσταση σε σύστημα αξόνων, χωρίς να έχει κατανοήσει σε βάθος, τι εκφράζει καθένα από αυτά. Στο ίδιο πεδίο κινείται και η μαθήτρια M2 λέγοντας:

M2: πρέπει να φτιάξουμε μια συνάρτηση που y να είναι η ακτίνα; Όχι…

K: να σκέφτεστε ελεύθερα, δεν θέλω να μου πείτε το σωστό ντε και καλά.

M1: μήπως το μήκος ακτίνας είναι η τετμημένη και το εμβαδόν η τεταγμένη;

Εδώ αρχίζει η ομάδα να νοηματοδοτεί τα γεωμετρικά μεγέθη με όρους συναρτήσεων. Ωστόσο, δεν υπάρχει η παραμικρή αναφορά ούτε στην έννοια της μεταβλητής γενικά, ούτε στην έννοια ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής ειδικότερα. Αν και έχει προηγηθεί η συζήτηση σχετικά με τα μεγέθη που μεταβάλλονται, θα περίμενε κανείς να αναγνωρίσουν οι μαθητές αυτές τις έννοιες στις ποσότητες «μήκος ακτίνας» και «εμβαδόν κύκλου». Κάτι τέτοιο όμως δεν γίνεται. Τελικά, η ομάδα μετά από αρκετή καθοδήγηση νοηματοδοτεί τα δύο γεωμετρικά μεγέθη ως μεταβλητές και στη συνέχεια, πάλι με το απαραίτητο scaffolding εκ μέρους του καθηγητή, αντιλαμβάνεται ότι η ακτίνα του κύκλου είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το εμβαδόν η εξαρτημένη. Είναι χαρακτηριστικός ο διάλογος που διαμείφθηκε μεταξύ του καθηγητή και του M1:

K: είμαστε σε ένα καλό σημείο όπου βλέπετε την ακτίνα και το εμβαδόν ως μεταβλητές. Αυτά τα x και y έχουν κάποιο συγκεκριμένο ρόλο στις συναρτήσεις;

M1: το y εξαρτάται από το x. Το $f(x)$ δηλαδή είναι ίσο με το y, το λέμε αλλιώς.

K: και τι όνομα δίνουμε σε αυτές τις μεταβλητές;

M1: γραφικές παραστάσεις; K: όχι, η γραφική παράσταση είναι αποτύπωση σημείων.

...(επανέρχεται ο καθηγητής με νέα ερώτηση)

K: αφού το y εξαρτάται από το x (ερωτάται ο M1) πως θα την πούμε τη μεταβλητή y;

M1: εξαρτημένη. K: και άρα την x; M1: μη εξαρτημένη. K: με ένα όνομα; M1: ανεξάρτητη μεταβλητή.

<u>*Επεισόδιο 2*</u>

Στην ομάδα Β τα πράγματα είναι παρόμοια. Και εδώ οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να νοηματοδοτήσουν την ακτίνα ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το εμβαδόν ως εξαρτημένη. Αναδεικνύεται και πάλι η εστίαση στο συμβολισμό και στη χρήση των x, y σαν δύο γράμματα που εμφανίζονται στη συνάρτηση, αλλά χωρίς να γνωρίζουν σε βάθος τι ακριβώς εκφράζουν.

M4: ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση επειδή ένα y μπορεί να πάρει πολλές τιμές

Ενώ η ερώτηση αναφέρεται στη σχέση ακτίνας και εμβαδού, ο M4 βλέπει τον κύκλο σαν σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη και επικαλείται κάποιο κανόνα που θυμάται για τον χαρακτηρισμό μιας σχέσης ως συνάρτηση. Απέναντι σε αυτή τη δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν τις έννοιες της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, ο καθηγητής καθοδηγεί ακόμη περισσότερο τη διαδικασία λέγοντας:

K: δεν αναγνωρίζουμε ότι η ακτίνα και το εμβαδόν είναι οι δύο μεταβλητές;

M4: δηλαδή το ένα είναι το x και το άλλο το y; Κάπως έτσι;

M3: εξαρτώνται η μία από την άλλη, είναι ανάλογες

M4: όχι ακριβώς ανάλογες

M3: έχει σχέση με τετμημένες και τεταγμένες;

Βλέπουμε να επιμένουν και πάλι στο συμβολισμό x, y και στη συσχέτιση με το σύστημα συντεταγμένων. Αξιοπρόσεκτο είναι επίσης το γεγονός ότι κανείς μαθητής δεν χρησιμοποιεί τους όρους «ανεξάρτητη μεταβλητή» και «εξαρτημένη μεταβλητή». Η νοηματοδότηση γίνεται με συμβολικό τρόπο κάνοντας χρήση των γραμμάτων - συμβόλων x, y. Όπως παραδέχονται οι μαθητές, δυσκολεύτηκαν να νοηματοδοτήσουν ως μεταβλητές τα μεταβαλλόμενα μεγέθη και να τα συσχετίσουν με την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή, παρόλο που τους ήταν γνωστές σαν έννοιες.

Επεισόδιο 3: Νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης με τρεις μεταβλητές

Στη 2η δραστηριότητα τα πράγματα είναι πιο σύνθετα. Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$ περιέχει τρία μεγέθη τα οποία συμμεταβάλλονται, των οποίων τη μεταβολή έχουν ήδη μελετήσει οι μαθητές. Στις τρεις γεωμετρικές ποσότητες οι μαθητές, έχοντας την εμπειρία της 1ης δραστηριότητας, απέδωσαν άμεσα την έννοια της μεταβλητής. Στην ερώτηση αν ο τύπος $\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$ εκφράζει συνάρτηση, πήραμε τις εξής απαντήσεις:

M2: δεν πρέπει να είναι γιατί στη συνάρτηση έχουμε ένα x και ένα y, ενώ εδώ έχουμε $f(x)$, ένα x και ένα y

Η εικόνα που έχει οικοδομήσει ο συγκεκριμένος μαθητής για την έννοια της συνάρτησης μέσω του συνολοθεωρητικού ορισμού της, δεν του επιτρέπει να δεχτεί ότι η σχέση του εμβαδού θα μπορούσε να εκφράζει συνάρτηση. Ο ρόλος του συμβολισμού φαίνεται να είναι ακόμη ισχυρός και οδηγεί το μαθητή σε λανθασμένα συμπεράσματα. Ωστόσο, ο Μ4 φαίνεται να ξεπερνά αυτό το εμπόδιο όπως φαίνεται στον επόμενο διάλογο:

M4: είναι συνάρτηση… εγώ το σκέφτομαι γιατί για κάθε τιμή του $\alpha \cdot \beta$ να έχω μια τιμή για το Ε και όχι δύο και αυτό ικανοποιείται

Ο Μ4 βλέπει ότι το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ μπορεί να είναι μια ποσότητα και αυτό που μας ενδιαφέρει είναι αν για κάθε τιμή αυτής της ποσότητας παίρνω και μια τιμή για το

εμβαδόν. Είναι φανερό, ότι ο μαθητής προσπάθησε να ελέγξει αν ικανοποιείται ο μαθηματικός ορισμός που έχει μάθει, για το τι είναι συνάρτηση. Στην πραγματικότητα έχει κάνει το πρώτο βήμα για να εκφράσει ενιαία τη συμμεταβολή δύο μεγεθών, των διαστάσεων του ορθογωνίου. Συνεχίζοντας, αναρωτιέται:

M4: πόσων αγνώστων θα είναι η συνάρτηση;
K: πόσων αγνώστων;
M4: εγώ βλέπω δύο αγνώστους και δεν ξέρω να κάνω κάτι με δύο αγνώστους
K: τι θα κάνουμε με τους δύο αγνώστους;
……..
K: και με τις δύο μεταβλητές τι θα κάνουμε;
M4: να μην κάνουμε τίποτα, $f(x,y)$ *ή θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τη μια συναρτήσει της άλλης*

Ο M4 δεν αμφέβαλε ότι η συγκεκριμένη σχέση είναι συνάρτηση. Το πρόβλημα του ήταν ότι δεν ήξερε τι να κάνει με τις μεταβλητές, που τις ονομάζει αγνώστους, προφανώς συγχέοντας την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της εξίσωσης.

Επεισόδιο 4: Συσχέτιση δύο μεταβλητών με ενιαίο τρόπο

Το ερώτημα λοιπόν είναι αν μπορούν οι μαθητές να ανακαλύψουν κάποιο τρόπο έτσι, ώστε να αποδώσουν τη συμμεταβολή των δύο διαστάσεων του ορθογωνίου με ενιαίο τρόπο. Περιμέναμε ότι δύσκολα θα έφταναν σε κάποιο συμπέρασμα, ωστόσο διαψευστήκαμε. Στην ερώτηση «*Προτείνετε κάποιο τρόπο ώστε οι μεταβολές των δύο πλευρών του ορθογωνίου να εκφράζονται ενιαία*» ο M2 απάντησε:

M2: αν αλλάζει το ένα κατά x *το άλλο να αλλάζει κατά* $2x$*, ας πούμε.*
M1: ναι συμφωνώ
K: δεν μας ενδιαφέρει κατά πόσο θα αλλάζει, μας ενδιαφέρει αυτή η μεταβολή πως θα εκφρασθεί.

Ο μαθητής Μ2 ήδη με την πρώτη του απάντηση έχει μπει στην αφαιρετική διαδικασία του πολλαπλασιαστικού τρόπου έκφρασης της συμμεταβολής δύο ποσοτήτων. Μάλιστα, χωρίς χρονοτριβή το κάνει πιο συγκεκριμένο λέγοντας:

Μ2: ...ναι ότι άμα πούμε τη μια x *και την άλλη* y *τότε θα είναι* $x = z \cdot y$

Η εικόνα είναι παρόμοια και στην Β΄ ομάδα, ενώ ο Μ4 πρότεινε και τη διαφορά ως τρόπο για να εκφρασθούν ενιαία οι μεταβολές των δύο ποσοτήτων. Είναι φανερό ότι και οι δύο ομάδες πέτυχαν να δομήσουν τη νοητική εικόνα της ταυτόχρονης συμμεταβολής των αλλαγών σε δύο μεγέθη.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στην προσπάθεια τους να νοηματοδοτήσουν τις έννοιες της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής. Ενώ έφτασαν σχετικά εύκολα στο επίπεδο 1 και στο επίπεδο 2 της συμμεταβολής, δεν επέδειξαν την ίδια ικανότητα ώστε να μετακινηθούν στο επόμενο επίπεδο και να νοηματοδοτήσουν τα μεταβαλλόμενα μεγέθη ως μεταβλητές και να επιλέξουν την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή. οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι έννοιες ανεξάρτητη – εξαρτημένη μεταβλητή παραμένουν έννοιες, που δυσκολεύουν τους μαθητές. Η δυσκολία αυτή ίσως είναι αποτέλεσμα της έμφασης που δίνεται κατά τη διδασκαλία στο συμβολικό μέρος, με αποτέλεσμα να μην ασχολούνται με το πραγματικό το νόημα των μεταβλητών αυτών. Ενώ χειρίστηκαν δυναμικά τα διάφορα μεγέθη και στις δύο δραστηριότητες με τη βοήθεια του λογισμικού και στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίστηκαν όλες οι μεταβολές ταυτόχρονα, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν πολύ να κατασκευάσουν το νόημα της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής σε μη αλγεβρικό πλαίσιο. Η εστίαση στο συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης απομακρύνει τους μαθητές από τη φύση της, που είναι η συμμεταβολή ποσοτήτων.

Ο πειραματισμός με το λογισμικό διαμεσολάβησε σχετικά εύκολα την έννοια της συμμεταβολής στους μαθητές ως προς τα επίπεδα κατανόησης 1 και 2. Ωστόσο, δεν βοήθησε αρκετά τους μαθητές να κατανοήσουν ότι τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη είναι οι μεταβλητές του αλγεβρικού τρόπου έκφρασης και να φτάσουν έτσι στο επίπεδο 3 της συμμεταβολής. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το περιβάλλον του DGS είναι γεωμετρικό περιβάλλον, το οποίο δεν παρέχει δυνατότητες άμεσης μοντελοποίησης όπως συμβαίνει σε άλλα λογισμικά. Θεωρούμε όμως ότι αυτό που

εμφανίζεται ως αδυναμία, μπορεί να μετατραπεί σε πλεονέκτημα του λογισμικού, αφού η συσχέτιση των μεταβαλλόμενων μεγεθών με μεταβλητές οδηγεί σε βάθος κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Με άλλα λόγια, οδηγεί τους μαθητές, μέσα από τον πειραματισμό, να ανακαλύψουν τις μεταβολές, να τις νοηματοδοτήσουν ως μεταβλητές και να αποφασίσουν οι ίδιοι ποια θα είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξηρτημένη μεταβλητή.

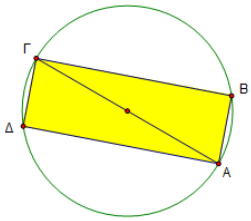
5.2.4 Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή με αναφορά σε διαφορετικές αναπαραστάσεις

Όπως έχουμε αναφέρει ήδη, η έννοια της συνάρτησης εμπεριέχει πολλές διαφορετικές εκφράσεις, που η μία συμπληρώνει την άλλη. Η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση της συνάρτησης στην άλλη αποτελεί βασικό κριτήριο, για το αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει και σε ποιο βαθμό την έννοια της συνάρτησης. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με τα νοήματα, που κατασκεύασαν οι μαθητές με αναφορά στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, υπό το πρίσμα της συμμεταβολής. Η ομάδα επεισοδίων που ακολουθεί αναδεικνύει το ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη νοηματοδότηση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, καθώς και τη μεταξύ τους σύνδεση η οποία οδηγεί στο επίπεδο 4 της συμμεταβολής.

Επεισόδιο 1: Ο ρόλος του πίνακα τιμών στον καθορισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής

Στην 2η δραστηριότητα ζητήσαμε από τους μαθητές να κάνουν πινακοποίηση των ποσοτήτων που μεταβάλλονται. Ο στόχος είναι να διερευνήσουμε αν και με ποιο τρόπο νοηματοδοτούν χαρακτηριστικά της συνάρτησης όταν έχουν ένα σύνολο τιμών εισόδου σε αντιστοιχία με ένα σύνολο τιμών εξόδου. Αφού έχουν εκφράσει τη συμμεταβολή των διαστάσεων του ορθογωνίου με μια νέα μεταβλητή την $t = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}}$, ζητήσαμε να δημιουργήσουν ένα πίνακα με στήλες την μεταβλητή t και το εμβαδόν Ε. Η αντίστοιχη ερώτηση είναι η Ε9 του φύλλου εργασίας. Ας δούμε ένα στιγμιότυπο από αυτά που εμφανίστηκαν στις οθόνες των υπολογιστών.

μέτρο $\overline{BA}$ = 1.64 εκ.
μέτρο $\overline{ΓB}$ = 4.72 εκ.
t = 0.35
E = 7.753 εκ.^{2}



t	E
0.33	7.459 εκ.^{2}
0.36	8.037 εκ.^{2}
0.46	9.536 εκ.^{2}
0.56	10.609 εκ.^{2}
0.66	11.515 εκ.^{2}
0.79	12.169 εκ.^{2}
0.86	12.359 εκ.^{2}
0.94	12.473 εκ.^{2}
0.97	12.495 εκ.^{2}
1.00	12.500 εκ.^{2}
1.02	12.496 εκ.^{2}
1.09	12.449 εκ.^{2}
1.14	12.395 εκ.^{2}
1.21	12.276 εκ.^{2}
1.34	11.976 εκ.^{2}
1.47	11.627 εκ.^{2}
1.65	11.090 εκ.^{2}
1.91	10.270 εκ.^{2}
2.35	9.003 εκ.^{2}
2.99	7.524 εκ.^{2}
0.35	7.753 εκ.^{2}

Σχήμα 21: Πινακοποίηση της συμμεταβολής των ποσοτήτων t και E

Οι μαθητές παρατηρούν τις τιμές του πίνακα και στο ερώτημα αν η συγκεκριμένη συμμεταβολή μεγεθών εκφράζει συνάρτηση, απάντησαν ως εξής:

M3: η συμμεταβολή αυτή είναι συνάρτηση γιατί κάθε μεταβολή της μιας μεταβλητής επιφέρει τη μεταβολή της τιμής της άλλης μεταβλητής
M4: έχω γράψει ότι είναι συνάρτηση μόνο από το t προς το εμβαδόν, επειδή για κάθε t έχω ένα μόνο εμβαδόν που προκύπτει.

Ο μαθητής M4 ερμήνευσε τον πίνακα τιμών του σχήματος 21 στηριζόμενος στον αλγεβρικό ορισμό της συνάρτησης. Ο μαθητής M3 μέσω των μεταβολών που εμφανίζονται στον πίνακα νοηματοδότησε τη συμμεταβολή των μεγεθών t και E, ως συνάρτηση. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό όταν πιο κάτω λέει τα εξής:

M3: εννοώ ότι αν βάλλουμε μια σταθερή τιμή στο ένα (στη μία μεταβλητή εννοεί), θα προκύψει σταθερή τιμή και για το άλλο. Αν αλλάξουμε την τιμή της μεταβλητής θα προκύψει άλλη σταθερή τιμή

Στη συνέχεια έγινε η παρακάτω ερώτηση από τον καθηγητή:

Κ: (απευθυνόμενος στον Μ3) εσύ είπες κάθε τιμή της μεταβλητής, αυτό το κάθε όμως ικανοποιείται εκεί (εννοεί στον πίνακα τιμών που βλέπουν οι μαθητές)

Μ3: υπάρχουν όρια

Κ: κάθε τιμή του t την έχετε στον πίνακα;

Μ3: όχι. Μ4: και τι σημαίνει αυτό, ότι αν δεν την έχουμε στον πίνακα δεν υπάρχει;

Κ: για θυμηθείτε πως ήταν το εργαλείο, κάθε πέντε δευτερόλεπτα γράφει και μία τιμή

Μ4: εγώ θα το βάλλω κάθε 0,001 δευτερόλεπτα

Κ: πάλι θα υπάρχει κενό ενδιάμεσα

Μ4: ναι και τι μας πειράζει αυτό; Κ: μας πειράζει;

Μ4: όχι, θα υποθέσουμε ότι γίνεται το ίδιο και στις άλλες ανάμεσα

Μ3: σαν να έχουμε διαφορετικό πεδίο ορισμού

Μ4: καλά, μπορούμε να πούμε ότι έχουμε διαφορετικό πεδίο ορισμού για συγκεκριμένες τιμές. Αλλά μπορούμε να πούμε ότι το ίδιο γίνεται και για αυτές που δεν έχουμε εξετάσει.

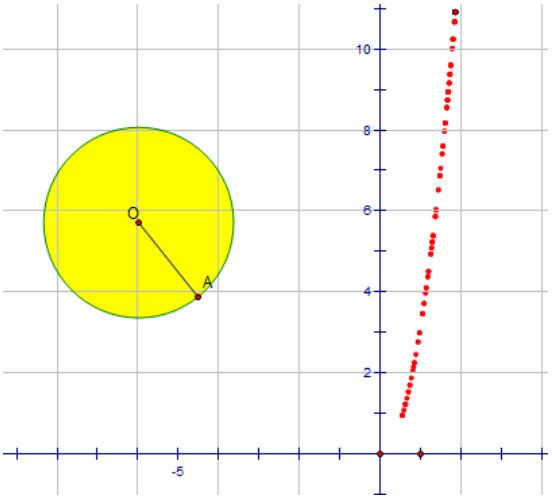
Κ: να το ισχυριστούμε. Μ4: ναι να το ισχυριστούμε.

Από τον παραπάνω διάλογο γίνεται φανερό ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων έχουν φτάσει σε ένα αρχικό σημείο συντονισμού των μεταβολών με συνεχείς αλλαγές στη μία μεταβλητή, η οποία επιτυγχάνεται με το γέμισμα του πίνακα με όλο και περισσότερες τιμές. Αντιλήφθηκαν δε, ότι κάθε φορά οι τιμές της μεταβλητής t ορίζουν και ένα διαφορετικό πεδίο ορισμού και στο τέλος διατύπωσαν την εικασία ότι έτσι θα συμπεριφέρονται και οι ενδιάμεσες τιμές, οπότε η συμμεταβολή των μεταβλητών t και Ε εκφράζει συνάρτηση.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε το σημαντικό ρόλο του λογισμικού στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής στο $3^{ο}$ επίπεδο. Το εργαλείο του γεμίσματος του πίνακα οδήγησε τους μαθητές να διατυπώσουν ισχυρή εικασία, σχεδόν βεβαιότητα, ότι αυτή η σχέση εκφράζει συνάρτηση τελικά. Επιβεβαιώνεται έτσι η άποψη που υποστηρίζουν τα ερευνητικά δεδομένα, τα οποία αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο. Ότι δηλαδή, τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας συνεισφέρουν σημαντικά στην διατύπωση εικασιών εκ μέρους των μαθητών.

Επεισόδιο 2: Ο ρόλος της γραφική παράσταση στον καθορισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής

Οι μαθητές στο σημείο αυτό έχουν ξεκαθαρίσει σε ικανοποιητικό βαθμό τι σημαίνει συμμεταβολή ποσοτήτων και πως επιλέγουμε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή. Το ενδιαφέρον της έρευνας στη συνέχεια εστιάστηκε στο πως οι μαθητές αντιλήφθηκαν και πως συσχέτισαν αυτές τις μεταβολές στο πλαίσιο της γραφικής παράστασης, είτε στη μορφή της ακολουθίας σημείων, είτε στη μορφή μιας συνεχούς καμπύλης. Έτσι, τους ζητήθηκε στην ερώτηση Ε5 της 1^{ης} δραστηριότητας να αποτυπώσουν το ζεύγος (ακτίνα κύκλου, εμβαδόν κύκλου) και στη συνέχεια με ενεργό το ίχνος του σημείου να μετακινήσουν το σημείο Α. Η αποτύπωση του ζεύγους με ένα σημείο του επιπέδου, με τη βοήθεια του λογισμικού, οδηγεί άμεσα τους μαθητές στη σύνδεση του αλγεβρικού διατεταγμένου ζεύγους με μια γεωμετρική εικόνα. Οι μαθητές έχουν κατασκευάσει στην οθόνη του υπολογιστή την επόμενη εικόνα.



Σχήμα 22: Αποτύπωση των μεταβολών με ακολουθία σημείων

Μετακινώντας το σημείο Α οι μαθητές βλέπουν τα διαφορετικά στιγμιότυπα της συμμεταβολής των δύο μεγεθών και εύκολα καταλήγουν στο συμπέρασμα για το είδος της καμπύλης.

Μ1: φαίνεται να είναι ευθεία, όχι κάνει μια καμπύλη προς τα πάνω
Κ: γιατί να είναι καμπύλη και να μην είναι ευθεία;
Μ2: γιατί το εμβαδόν είναι στο τετράγωνο.

Κ: ποια γνωστή συνάρτηση αναγνωρίζεις στην σχέση $\mathrm{E} = \pi \cdot \rho^2$

Μ1: την $a \cdot x^2$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι μαθητές έχουν συσχετίσει το τετράγωνο με καμπύλες γραμμές και όχι με ευθείες. Όμως, είναι εντυπωσιακό ότι πολύ εύκολα από τη γεωμετρική σχέση $\mathrm{E} = \pi \cdot \rho^2$ μεταβαίνουν στην αντίστοιχη συνάρτηση $y = a \cdot x^2$. Με άλλα λόγια ανέπτυξαν την ικανότητα της γενίκευσης, αφού από το συγκεκριμένο γεωμετρικό πλαίσιο έχουν μεταβεί στο συναρτησιακό τρόπο έκφρασης (επίπεδο 3).

Παρόμοια είναι η εικόνα και στην ομάδα Β΄. Εκεί όμως υπάρχει επιπλέον προβληματισμός για το τι μετράμε στον οριζόντιο και τι στον κατακόρυφο άξονα. Επηρεασμένοι ίσως από τη συζήτηση για τη συμμεταβολή ποσοτήτων, όπου οι ποσότητες αλληλοεξαρτώνται και άρα θα μπορούσε οποιαδήποτε να είναι ανεξάρτητη ή εξαρτημένη μεταβλητή, δεν υπάρχει βεβαιότητα για το τι μετράμε στον οριζόντιο και τι στον κατακόρυφο άξονα. Στο σημείο αυτό φαίνεται και η αξία του συγκεκριμένου λογισμικού. Η απουσία χαρακτηρισμού των αξόνων αναγκάζει τους μαθητές να ξανασκεφτούν τις έννοιες των μεταβλητών και να τις αντιστοιχίσουν στους άξονες.

Μ3: μάλλον στον κατακόρυφο θα είναι το εμβαδόν και στον οριζόντιο το ρ

Μ4: αφού θέσαμε ανεξάρτητη την ακτίνα γιατί να μην είναι αυτή στον κάθετο

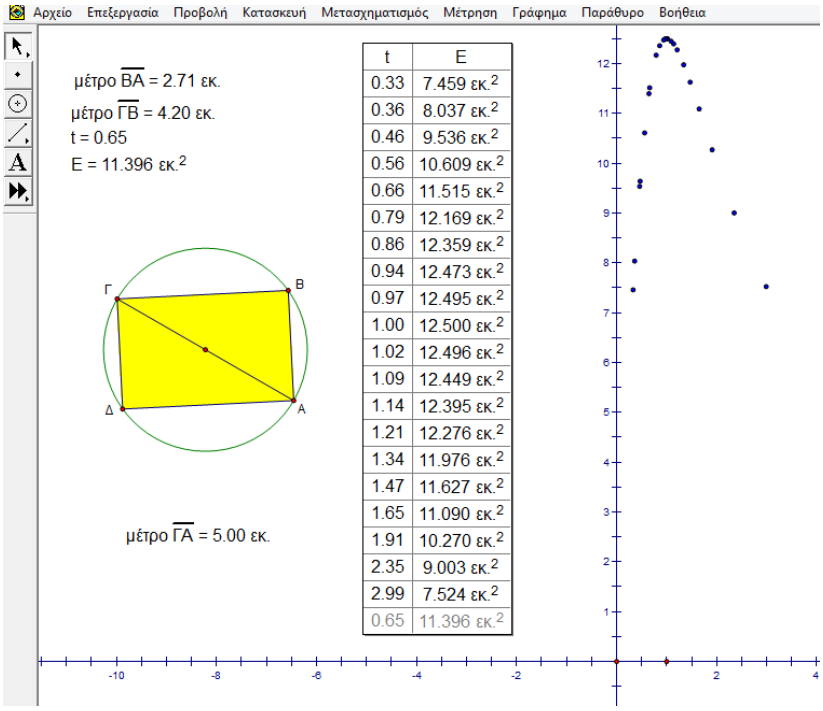
Μ3: το x *δεν είναι η ανεξάρτητη; Κ: ναι. Μ3: το* x *είναι κάτω στον οριζόντιο… θέλω να πω, πως το* y *θα είναι το Ε και το* x *θα είναι το ρ. Το σκέφτηκα κιόλας επειδή το Ε είναι πάντα μεγαλύτερο από το ρ και με τους αριθμούς εδώ πέρα, το* x *είναι πολύ μικρότερο από το* y.

Μέσα από τον προβληματισμό που αναπτύχθηκε, η ομάδα κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στον οριζόντιο άξονα μετράμε το ρ και στον κατακόρυφο το Ε και μάλιστα νοηματοδοτούν τα αντίστοιχα γεωμετρικά μεγέθη με τις μεταβλητές x και y (επίπεδο 3 συμμεταβολής). Ο μαθητής Μ3 παρατηρεί τις τιμές στον κατακόρυφο άξονα, τις συγκρίνει με τις αντίστοιχες του x και συμπεραίνει ότι στον κατακόρυφο μετράμε το Ε και στον οριζόντιο άξονα το ρ. Τα μέλη της ομάδας αγγίζουν το επίπεδο

4 συμμεταβολής, αφού συσχετίζουν τις τιμές του πίνακα με την απεικόνιση των σημείων στο επίπεδο.

Επεισόδιο 3: Σύνδεση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης

Στο τρίτο επεισόδιο, που προέρχεται από την δραστηριότητα 2, φαίνεται η δυναμική συσχέτιση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης μέσα από την προσπάθεια των μαθητών να εικάσουν την απάντηση στο βασικό ερώτημα που έχει τεθεί από την αρχή: «Σε ποια περίπτωση μεγιστοποιείται το εμβαδόν του ορθογωνίου». Οι μαθητές με το εργαλείο «αποτύπωση σημείου», έχουν αποτυπώσει το ζεύγος (t, E) σε ένα σημείο του επιπέδου. Στη συνέχεια, με ενεργό το ίχνος του συγκεκριμένου σημείου μετακίνησαν το σημείο Β και εμφανίσθηκε η παρακάτω εικόνα στην οθόνη του υπολογιστή.



Σχήμα 23: Σύνδεση σχήματος, πίνακα και γραφικής παράστασης

Από τη μελέτη των διαλόγων και των δύο ομάδων προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η ταυτόχρονη εμφάνιση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης οδήγησε τους μαθητές, να συνδέσουν τις δύο αναπαραστάσεις προκειμένου να απαντήσουν πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. Με αυτόν τον τρόπο πλησιάζουν το επίπεδο 4 της συμμεταβολής.

K: πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;

M1: όταν το t είναι ίσο με 1 το εμβαδόν γίνεται μέγιστο ίσο με 12,5

M2: πριν το 1 έχουμε 12,495 και μετά 12,496, οπότε μάλλον για $t=1$ είναι η μέγιστη τιμή

K: με βάση τη γραφική παράσταση δείξτε μου που είναι το μέγιστο

M1: αυτή η κορυφή (δείχνει το πιο ψηλό σημείο της καμπύλης)

Οι μαθητές της Α΄ ομάδας αφού παρατήρησαν τις μεταβολές των μεγεθών στον πίνακα τιμών, συμπέραναν ότι η μέγιστη τιμή για το εμβαδόν επιτυγχάνεται όταν η μεταβλητή t πάρει την τιμή 1. Επιπλέον, οι μαθητές συσχέτισαν τον πίνακα τιμών με την γραφική παράσταση και αντιστοίχισαν τη μέγιστη τιμή του εμβαδού στο υψηλότερο σημείο της. Αξίζει ακόμη να εστιάσουμε στην φράση του M1 «..οπότε μάλλον για $t=1$ είναι η μέγιστη τιμή». Με τη φράση αυτή ο M1 διατυπώνει εικασία για το ζητούμενο συμπέρασμα.

Με παρόμοιο τρόπο απάντησαν και οι μαθητές της Β΄ ομάδας στο συγκεκριμένο ερώτημα:

M3: όσο αυξάνεται το t μειώνεται το εμβαδόν

M4: όχι. Στην αρχή όσο αυξάνεται μέχρι να γίνει ο λόγος (εννοεί το λόγο των διαστάσεων που εκφράζεται με τη μεταβλητή t) 1, το εμβαδόν αυξάνεται και μετά το εμβαδόν μειώνεται μέχρι να πάει…

K: εκεί στο 1 φαίνεται να γίνεται μια αλλαγή.

M3: ναι, το βλέπουμε και από τη γραφική παράσταση.

Ο M3 και ο M4 κατέληξαν στο συμπέρασμα σχολιάζοντας το είδος της μεταβολής των δύο μεταβλητών (αύξηση – ελάττωση) και το επιβεβαίωσαν μέσω της γραφικής παράστασης. Με άλλα λόγια, συσχέτισαν τον πίνακα τιμών με τη γραφική παράσταση (επίπεδο συμμεταβολής 4), προκειμένου να καταλήξουν στο συμπέρασμά τους.

Με βάση τα όσα περιγράψαμε στα παραπάνω επεισόδια συμπεραίνουμε ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην νοηματοδότηση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Επιπλέον, οι μαθητές

χωρίς να τους ζητηθεί πήγαν ένα βήμα πιο πέρα νοηματοδοτώντας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης μέσω του πίνακα τιμών. Κάθε φορά που γέμιζε ο πίνακας οι μαθητές έβλεπαν μια συνάρτηση με διαφορετικό πεδίο ορισμού. Τέλος, οι μαθητές από την νοηματοδότηση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής μετακινήθηκαν ένα βήμα ακόμη, συνδέοντας τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης μεταξύ τους σε μια διαδικασία διατύπωσης εικασιών και ισχυρισμών.

Ο ρόλος των εργαλείων του λογισμικού, που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα παραπάνω επεισόδια, είναι καθοριστικός. Και οι δύο ομάδες έφτασαν εύκολα ή δύσκολα στο επίπεδο 3 της συμμεταβολής. Πειραματιζόμενοι με τα εργαλεία του λογισμικού, αντιλήφθηκαν ότι η αλληλεξάρτηση των μεγεθών που μελέτησαν και στις δύο δραστηριότητες, καθορίζουν μια διαφορετική συνάρτηση κάθε φορά, η οποία εκφράζεται με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η δυναμική μεταβολή του γεωμετρικού σχήματος και η ταυτόχρονη αποτύπωσή της σε πίνακα τιμών και σημεία του επιπέδου, οδήγησε τους μαθητές, να νοηματοδοτήσουν την έννοια της συνάρτησης με διαφορετικές αναπαραστάσεις, οι οποίες όμως συνδέονται μεταξύ τους και δεν αποτελούν κάποια ανεξάρτητα αντικείμενα. Η σύνδεση των μετρήσεων του πίνακα τιμών με τα σημεία της γραφικής παράστασης προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα για τη μέγιστη τιμή του εμβαδού αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της κατάκτησης του επόμενου επιπέδου της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

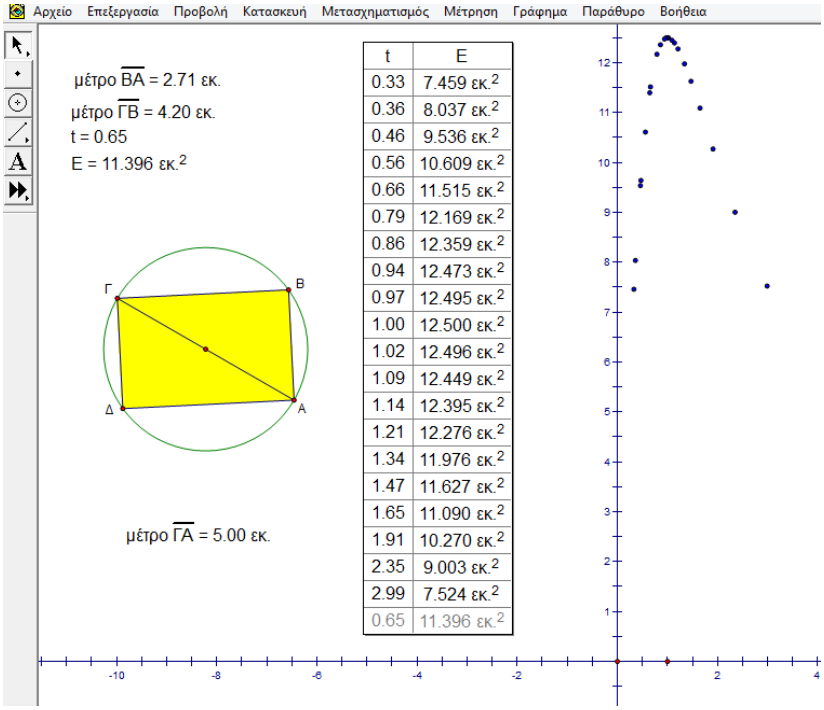
5.2.5 Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή με αποδεικτικές διαδικασίες

Όλες οι ομάδες επεισοδίων, που αναλύθηκαν έως τώρα, αναφέρονται στη νοηματοδότηση της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής, σε ένα πλαίσιο το οποίο μπορούμε να περιγράψουμε ως εξής: οι μαθητές με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων του DGS έδρασαν πάνω σε ένα διαφορετικό μαθηματικό αντικείμενο σε κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια, κατέγραψαν τα αποτελέσματά της δράσης αυτής και διατύπωσαν συμπεράσματα υπό μορφή εικασιών.

Το ερώτημα που έπρεπε να απαντηθεί πλέον, ήταν αν η χρήση του λογισμικού οδήγησε τους μαθητές καταρχήν, στην ανάγκη να επικυρώσουν με μαθηματικούς κανόνες τις εικασίες που διατύπωσαν και κατά δεύτερον, αν προχώρησαν σε κάποια απόδειξη (επίπεδο συμμεταβολής 5). Με άλλα λόγια, η εμπλοκή των μαθητών σε

δραστηριότητες πειραματισμού σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας γέννησε την ανάγκη της μαθηματικής απόδειξης στους μαθητές ή υποστήριξε μόνο τη διατύπωση εικασιών; Η ανάλυση των επεισοδίων που αναφέρονται στα προηγούμενα δείχνει ότι οι μαθητές έκαναν κάποια δειλά βήματα προς την κατεύθυνση των αποδεικτικών διαδικασιών.

Επεισόδιο 1: Η αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας



Σχήμα 24: Πίνακας τιμών και αποτύπωση των αντίστοιχων σημείων

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές μετακίνησαν το σημείο Β και εμφανίστηκε ο πίνακας τιμών και τα αντίστοιχα σημεία αποτυπωμένα σε σύστημα αξόνων. Ένα στιγμιότυπο της συγκεκριμένης διαδικασίας αντιστοιχεί στο σχήμα 24. Οι μαθητές ρωτήθηκαν, αν πάρουν άλλες τιμές για τον πίνακα, για παράδειγμα με το εργαλείο του γεμίσματος, θα έβλεπαν την ίδια εικόνα; Η ομάδα 2 απάντησε ως εξής:

Μ4: ναι το ίδιο γίνεται

Κ: είμαστε σίγουροι;

Μ4: ναι, θα μπορούσαμε να το χωρίσουμε όταν το t πάει από 0 έως 1 να είναι αύξουσα και μετα…

Κ: με βάση τον πίνακα που έχουμε μπροστά μας.

Μ4: ναι. Γιατί θα μπορούσαμε να την αποδείξουμε αυτήν την εικόνα.

Μ3: δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για όλες τις δυνατές τιμές.

Από το διάλογο γίνεται φανερό ότι και οι δύο μαθητές έχουν πεισθεί πως όσα έχουν κάνει μέχρι τώρα αποτελούν εικασίες. Αυτό οδήγησε τον Μ3 να πει ότι δεν είμαστε σίγουροι για όλες τις τιμές και τον Μ4, να ισχυρισθεί ότι η εικόνα που έβλεπε να εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή είναι η ίδια γιατί «μπορούμε να την αποδείξουμε αυτήν την εικόνα».

Αλλά και στην ομάδα Α΄ επικρατεί η ίδια αντίληψη:

Κ: πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;

Μ1: όταν το t *είναι ίσο με 1 το εμβαδόν γίνεται μέγιστο ίσο με 12,5*

Μ2: πριν το 1 έχουμε 12,495 και μετά 12,496, οπότε μάλλον για $t=1$ *είναι η μέγιστη τιμή*

Κ: γι αυτό είμαστε σίγουροι;

Μ2: όχι, γιατί η μέγιστη τιμή μπορεί να είναι πιο κάτω στο 1,001 ας πούμε

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε πως και οι δύο ομάδες έχουν αντιληφθεί ότι τα εργαλεία του λογισμικού τους οδήγησαν να διατυπώσουν κάποια συμπεράσματα, τα οποία όμως προκειμένου να γίνουν αποδεκτά απαιτείται η μαθηματική τους νομιμοποίηση ή αλλιώς η μαθηματική τους απόδειξη. Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας όχι μόνο διαμεσολαβεί κάποια χαρακτηριστικά ενός μαθηματικού αντικειμένου, στην περίπτωσή μας της συνάρτησης, αλλά δημιουργεί και τις προϋποθέσεις έτσι, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης.

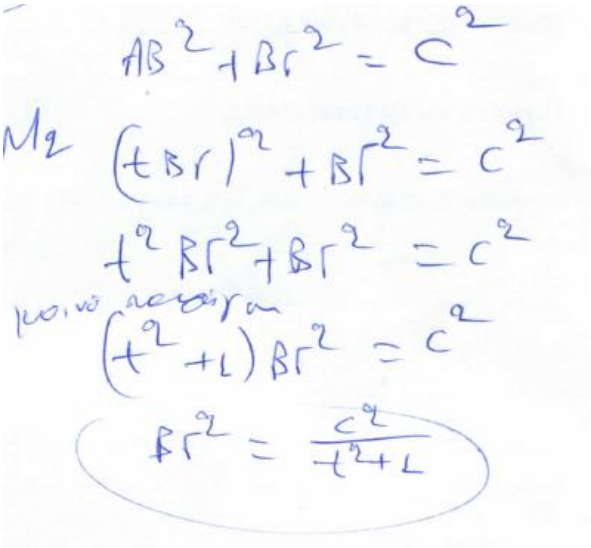
Επεισόδιο 2: Η πορεία προς την μαθηματική απόδειξη

Πριν από το επεισόδιο που περιγράφουμε παρακάτω και οι δύο ομάδες έφτασαν στο σημείο να γράψουν τον τύπο του εμβαδού στη μορφή $\mathrm{E}=t\cdot \mathrm{B\Gamma}^2$, αφού χρησιμοποίησαν την νέα μεταβλητή $t=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{B\Gamma}}$. Επιπλέον, έχουν ήδη αποφανθεί ότι η σχέση των μεταβλητών t και E εκφράζει συνάρτηση, στην οποία η ανεξάρτητη

μεταβλητή είναι το t και η εξαρτημένη το E. Παράλληλα, είχαν την δυνατότητα να παρατηρήσουν στην οθόνη του υπολογιστή τις μεταβολές όπως εμφανίζονται στην εικόνα του σχήματος 22. Ο στόχος ήταν η εύρεση του τύπου της συνάρτησης και η μαθηματική απόδειξη των εικασιών που διατύπωσαν οι μαθητές έως εκείνη τη στιγμή.

Κ: να εστιάσουμε στο γεγονός ότι έχουμε ένα ορθογώνιο στο σχήμα και η ΑΓ είναι σταθερή σε μήκος…. Πρέπει να συνδέσω την ΑΒ και την ΒΓ με την ΑΓ.
Μ1: πυθαγόρειο θεώρημα
Κ: πολύ ωραία λοιπόν

Στη συνέχεια οι μαθητές με τη βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος κατέληξαν στην σχέση $\mathrm{B\Gamma}^2 = \dfrac{c^2}{t^2+1}$, όπου c το σταθερό μέγεθος ΑΓ. Η προσπάθειά τους φαίνεται και στο επόμενο στιγμιότυπο από το φύλλο εργασίας.



Αμέσως μετά αντικατέστησαν στον τύπο του εμβαδού και κατέληξαν στην σχέση $\mathrm{E} = c^2 \cdot \dfrac{t}{t^2+1}$. Στο σημείο αυτό αξίζει να σχολιάσουμε το γεγονός, ότι οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τα επίπεδα συμμεταβολής από το 1 έως το 4 και πλησιάζουν στο επίπεδο 5. Μέσα από τους επόμενους διαλόγους φαίνεται η προσπάθεια των μαθητών να αποδείξουν ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\mathrm{E}(t) = c^2 \cdot \dfrac{t}{t^2+1}$ συμβαίνει όταν το $t = 1$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

Κ: αυτό είναι ο μαθηματικός τύπος της συνάρτησης,

M1: δηλαδή ο πίνακας και η γραφική παράσταση της συνάρτησης (πετάγεται ο M1)
M1: βρίσκονται από αυτόν τον τύπο
K: το ερώτημα είναι πότε αυτό θα γίνει μέγιστο (εννοεί το κλάσμα που εκφράζει τον τύπο της συνάρτησης)
M2: αν πάρουμε έστω;
K: τι εννοείς, έστω $t = 1$. *Επειδή το έχουμε δει από εκεί (εννοεί τον πίνακα τιμών)*
Ακούγονται γέλια από τον M2 και ο M1: και εγώ αυτό σκέφτηκα

Απόν τον παραπάνω διάλογο προκύπτει ότι οι μαθητές ακόμη δεν έχουν μπει στην πορεία της απόδειξης του ζητούμενου. Ωστόσο, ήδη βρίσκονται σε αποδεικτικές διαδικασίες, αφού με αυτό που πρότειναν χειρίζονται ένα μαθηματικό τύπο, αντικαθιστούν συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και επαληθεύουν το αποτέλεσμα συγκρίνοντάς το με εκείνο του πίνακα τιμών. Στην παρατήρηση του καθηγητή ότι το προηγούμενο είναι μια επαλήθευση αυτού που ζητάμε, Ο M2 απάντησε:

M2: αν βάλουμε ας πούμε τώρα αυτό (εννοεί t=1) και μετά ένα άλλο σημείο μετά το t.
K: ναι αλλά το σημείο μετά το σημείο θα υπάρχει και άλλο ενδιάμεσο σημείο, οπότε τι γίνεται με αυτό; M2: ναι σωστά. K: θέλουμε λοιπόν κάτι πιο γενικό

Ο M2 αντιλήφθηκε ότι η αντικατάσταση της ανεξάρτητης μεταβλητής με μια συγκεκριμένη τιμή και μετά με μια άλλη, δεν λύνει το πρόβλημα και επομένως χρειαζόμαστε κάποια άλλη διαδικασία. Έτσι, μετά από συζήτηση μεταξύ του καθηγητή και των μαθητών η σκέψη των μαθητών μπήκε στην πορεία της απόδειξης. Παρόμοιο είναι και το πλαίσιο των απαντήσεων της ομάδας Β΄. Η συγκεκριμένη κατάσταση χαρακτηρίζεται από τον παρακάτω διάλογο που διαμείφθηκε μεταξύ των μελών της Α΄ ομάδας:

M2: όταν ο παρονομαστής πάρει την μεγαλύτερη τιμή;
M1: όταν ο αριθμητής θα είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή;
K: μάλιστα, όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή
M2: ναι, όντως
K: μπορούμε να συγκρίνουμε αριθμητή και παρονομαστή;

M2: το t^2+1 *είναι μεγαλύτερο του* t

K: από πού το ξέρουμε

…….

M2: γνωρίζουμε ότι $(t+1)^2-2t$ *(εννοεί μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός)*

Συνοψίζοντας τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων, αποδέχτηκαν καταρχήν, την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης των εικασιών που διατύπωσαν, με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού. Αυτή η αποδοχή αποτελεί το πρώτο βήμα προκειμένου να εισέλθουν στην διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης. Πλησίασαν δηλαδή το επίπεδο 5 της συμμεταβολής. Συγκρίνοντας τις δύο ομάδες μεταξύ τους, η ομάδα Α΄ προχώρησε περισσότερο τη διαδικασία της απόδειξης, φτάνοντας στη σύγκριση μεταξύ των όρων του κλάσματος με τη βοήθεια της κατάλληλης αλγεβρικής ταυτότητας. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι έφτασε σε ικανοποιητικό βαθμό στο επίπεδο 5 της συμμεταβολής, σε αντίθεση με την ομάδα Β΄, η οποία περιορίστηκε στην αποδοχή της μαθηματικής απόδειξης. Τέλος, τα λόγια του Μ1 ότι ο μαθηματικός τύπος $\mathrm{E}=c^2\cdot\frac{t}{t^2+1}$ είναι «*ο πίνακας και η γραφική παράσταση της συνάρτησης»* δείχνει ότι οι μαθητές συνέδεσαν εκείνη τη στιγμή όλες τις διαφορετικές εκφράσεις της συνάρτησης.

Το λογισμικό DGS βοήθησε προς αυτήν την κατεύθυνση, υποστηρίζοντας τον δυναμικό χειρισμό του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα από τη μια μεριά την εμφάνιση μιας εικόνας που δεν αλλάζει, αφού οποιαδήποτε δράση οδηγούσε στο ίδιο συμπέρασμα για η μεγιστοποίηση του εμβαδού σε οποιαδήποτε αναπαράσταση. Από την άλλη, η δυνατότητα να αλλάζουν συνεχώς οι τιμές του πίνακα, δεν έδινε τη βεβαιότητα ότι το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο σε κάθε περίπτωση. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης ως το μόνο τρόπο για να βεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους. Το λογισμικό υποστήριξε την μετακίνηση των μαθητών από την εικασία και την επαλήθευση στις αποδεικτικές διαδιακασίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία με τη βοήθεια του λογισμικού Geometer's Sketchpad (DGS) και με την υλοποίηση δύο δραστηριοτήτων οι οποίες διαμορφώθηκαν κατάλληλα, μελετήσαμε τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τρεις ομάδες μαθητών της Α΄ Τάξης του Γενικού Λυκείου. Η μία ομάδα υλοποίησε τις δραστηριότητες πιλοτικά προκειμένου να υπάρξουν παρεμβάσεις στο σχεδιασμό τους, ώστε να υποστηρίξουν αποτελεσματικά τους στόχους της διαδικασίας της έρευνας. Μετά από μια ώρα εκμάθησης των βασικών εργαλείων του λογισμικού καταγράφηκε η ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες. Η έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολής νοηματοδοτήθηκε μέσα από την μοντελοποίηση γεωμετρικών προβλημάτων. Οι μαθητές ασχολήθηκαν με δύο γεωμετρικά προβλήματα τα οποία κλήθηκαν να τα νοηματοδοτήσουν με όρους συναρτήσεων.

Το πρώτο ερώτημα της έρευνας μας αφορά, στο αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές της Α΄ Τάξης του Γενικού Λυκείου κατασκευάζουν νοήματα για την συνάρτηση ως συμμεταβολή, μέσα από τη διερεύνηση γεωμετρικών προβλημάτων με τη βοήθεια του λογισμικού Geometer's Sketchpad. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αφορά στη συνεισφορά του λογισμικού Geometer's Sketchpad στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Στην φάση αυτή ερευνάται ο ρόλος και οι δυνατότητες του λογισμικού προς την κατεύθυνση αυτή.

Σε σχέση με το πρώτο ερώτημα, μελετήθηκαν τα νοήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια του πειραματισμού και της εμπλοκής τους με τις δραστηριότητες. Το νόημα της συμμεταβολής μελετήθηκε ποιοτικά ως προς το επίπεδο κατανόησης της συμμεταβολής από τους μαθητές, σε αντίθεση με προηγούμενες έρευνες που εστιάζονταν κυρίως σε ποσοτικά χαρακτηριστικά της σκέψης των φοιτητών. Τα επίπεδα κατανόησης της συμμεταβολής ιεραρχήθηκαν από το πιο απλό στο πιο σύνθετο λαμβάνοντας υπόψη: Τη διαισθητική αντίληψη της συμμεταβολής, την αλληλεξάρτηση των μεγεθών, τη χρήση μαθηματικών όρων, την χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και τις αποδεικτικές διαδικασίες

Κάτω από αυτό το πρίσμα, διαμορφώσαμε πέντε κατηγορίες νοημάτων που σηματοδοτούν πέντε διαφορετικά επίπεδα κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Τα επίπεδα αυτά είναι:

1. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά.
2. Νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεγεθών ή ποσοτήτων.

3. Νοηματοδότηση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
4. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής με συσχετισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων.
5. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής με αποδεικτικές διαδικασίες.

Από τη μελέτη των διαλόγων των μαθητών διακρίναμε πέντε ομάδες επεισοδίων για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Η πρώτη ομάδα αφορούσε στη νοηματοδότηση της διαισθητικής αντίληψης της συμμεταβολής και του αναλλοίωτου. Οι μαθητές αντιλήφθηκαν χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία τα μεγέθη τα οποία μεταβάλλονταν κατά την υλοποίηση την υλοποίηση των δραστηριοτήτων. Η συνεισφορά του εργαλείου του συρσίματος είτε στη μορφή της περιπλάνησης, είτε στη μορφή του κρυφού γεωμετρικού τόπου ήταν καθοριστική. Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην ανακάλυψη μεγεθών ή αντικειμένων που μένουν αναλλοίωτα. Η δεύτερη ομάδα επεισοδίων αφορούσε στην κατασκευή νοημάτων αλληλεξάρτησης μεταξύ των μεταβαλλόμενων μεγεθών. Από την ανάλυση των επεισοδίων γίνεται φανερό ότι οι μαθητές μετακινήθηκαν από την διαισθητική αντίληψη της συμμεταβολής στο αμέσως επόμενο επίπεδο, εκείνο του συσχετισμού των μεταβαλλόμενων μεγεθών. Από την απλή καταγραφή των μεγεθών που μεταβάλλονται ή μένουν αναλλοίωτα είναι σε θέση να νοηματοδοτήσουν τον τρόπο με τον οποίο τα μεγέθη αλληλοεξαρτώνται. Η τρίτη ομάδα επεισοδίων σχετίστηκε με τον καθορισμό της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Από την ανάλυση των επεισοδίων αναδείχτηκε το πρόβλημα του καθορισμού της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Οι μαθητές ενώ παρατηρούσαν τα μεγέθη που συμμεταβάλλονται, δυσκολεύονται να τα νοηματοδοτήσουν ως μεταβλητές και στη συνέχεια να καθορίσουν την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή. Η τέταρτη ομάδα επεισοδίων αφορούσε το ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων της συνάρτησης με τη βοήθεια του λογισμικού και τη σύνδεσή τους. Τέλος, η πέμπτη ομάδα επεισοδίων αφορούσε το ρόλο του λογισμικού στη διατύπωση εικασιών και τη διαπίστωση εκ μέρους των μαθητών της αναγκαιότητας της μαθηματικής απόδειξης. Η συνεισφορά του λογισμικού προς την κατεύθυνση αυτή ήταν σημαντική και βοήθησε τους μαθητές να σκεφτούν ότι οι αποδεικτικές διαδικασίες είναι απαραίτητες για τη μαθηματική νομιμοποίηση μιας εικασίας ή ενός ισχυρισμού και αποτελούν

μέρος του προβλήματος που επιλύεται κάθε φορά και όχι κάτι ξεχωριστό από το πρόβλημα ή μια ιδιομορφία των μαθηματικών.

Όσον αφορά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, η χρήση των εργαλείων του λογισμικού Geometer's Sketchpad οδήγησε τους μαθητές στον πειραματισμό, στην ανακάλυψη και στην διατύπωση εικασιών. Ο δυναμικός χειρισμός των μαθηματικών αντικειμένων και στις δύο δραστηριότητες ανέδειξε τις δυνατότητες του λογισμικού, στην προσπάθεια που έκαναν οι μαθητές προκειμένου να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή. Το εργαλείο του συρσίματος βοήθησε σημαντικά στην ανακάλυψη των μεγεθών που μεταβάλλονται. Η δράση πάνω στο γεωμετρικό αντικείμενο διαμεσολάβησε στους μαθητές την έννοια της μεταβολής που αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό της έννοιας της συνάρτησης. Η έμφαση στην μεταβολή και η συσχέτισή της με τη συνάρτηση οδήγησε τους μαθητές να δομήσουν την έννοια της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής μεγεθών και όχι ως μια αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων. Με το εργαλείο της μέτρησης οι μαθητές μπόρεσαν να διευκρινίσουν τη συμπεριφορά μαθηματικών αντικειμένων σε σχέση με το αν μεταβάλλονται ή παραμένουν αναλλοίωτα. Επιπλέον, βοήθησε στη διαμεσολάβηση της κατεύθυνσης της αλληλεξάρτησης των μεγεθών που συμμεταβάλλονται. Ωστόσο, η έλλειψη μοντελοποίησης στο περιβάλλον του λογισμικού δυσκόλεψε τους μαθητές στον καθορισμό της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Η ταυτόχρονη αναπαράσταση του γεωμετρικού αντικειμένου και η παρατήρηση των μεταβολών στον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση οδήγησε τους μαθητές στην μεταξύ τους σύνδεση. Τέλος, η έλλειψη μοντελοποίησης στο περιβάλλον του λογισμικού δυσκόλεψε τους μαθητές στον καθορισμό της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.

Σχετικά με την πορεία των ομάδων κατά την υλοποίηση των δραστηριοτήτων παρατηρήθηκε μια σταδιακή μετατόπιση από τα πιο απλά νοήματα στα πιο σύνθετα. Και οι δύο ομάδες αντιλήφθηκαν άμεσα με τη βοήθεια του λογισμικού τα μεγέθη που μεταβάλλονται, αλλά φάνηκε να δυσκολεύονται στην νοηματοδότηση των αναλλοίωτων που παράγονται μέσα από τη μεταβολή. Στη συνέχεια, νοηματοδότησαν με ευκολία την αλληλεξάρτηση των μεταβαλλόμενων μεγεθών και απάντησαν με επιτυχία στο ερώτημα για το ποιο μέγεθος προκαλεί τη μεταβολή του άλλου. Όσον αφορά στην κατασκευή νοημάτων για την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, εκεί παρουσιάστηκαν αρκετές δυσκολίες και στις δύο ομάδες. Μόνο μετά από σημαντική βοήθεια του ερευνητή κατάφεραν να νοηματοδοτήσουν τις δύο αυτές

έννοιες και να τις αποδώσουν σε συγκεκριμένα μεγέθη. Στο επόμενο επίπεδο οι μαθητές ασχολήθηκαν με τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση όπως αυτή αποτυπώθηκε με ακολουθία σημείων. Οι μαθητές και των δύο ομάδων έφτασαν στο σημείο της σύνδεσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού.

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε τη διαδρομή της σκέψης των μαθητών σχετικά με την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης. Στο θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάστηκαν τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με το αν τα υπολογιστικά περιβάλλοντα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης ή και να ανοίξουν δρόμους προς τις αποδεικτικές διαδικασίες. Από την ανάλυση των επεισοδίων που προηγήθηκε, αλλά και των υπολοίπων διαλόγων των μαθητών, βγαίνει αβίαστα το συμπέρασμα ότι και οι δύο ομάδες και στις δύο δραστηριότητες διατύπωναν εικασίες για τα ερωτήματα που τους θέταμε κάθε φορά. Όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο η ανάπτυξη και διατύπωση εικασιών θεωρείται ως προοίμιο της τυπικής αφαιρετικής απόδειξης και η τάση αυτή αποτυπώνεται στο πρότυπο του NCTM, το οποίο θεωρεί την πρακτική της εικασίας ως αναπόσπαστο μέρος της πορείας προς την τυπική απόδειξη. Υπό αυτήν την έννοια οι μαθητές με τη χρήση του DGS προσέγγισαν την τυπική απόδειξη. Ιδιαίτερα, η ομάδα Α΄ αφού κατασκεύασε τον τύπο της συνάρτησης οδηγήθηκε στην επαλήθευσή του με τη βοήθεια του λογισμικού και στη συνέχεια έφτασε πολύ κοντά στην ολοκλήρωση της μαθηματικής απόδειξης. Από το αποτέλεσμα της προσπάθειας των μαθητών φαίνεται ότι η $2^{η}$ δραστηριότητα ως προς το μέρος της αποδεικτικής διαδικασίας ήταν ιδιαίτερα δύσκολη και θα έπρεπε να επιλεγεί μια ευκολότερη δραστηριότητα.

Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί διερεύνηση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής με χρήση ποσοτικής έρευνας, με στόχο να διαπιστώσουμε αν τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας μπορούν να γενικευθούν. Τέλος, θα ήταν ενδιαφέρουσα η υλοποίηση έρευνας με κεντρικό ερώτημα τη σχέση της αποδεικτικής διαδικασίας και του περιβάλλοντος της δυναμικής γεωμετρίας.

Βιβλιογραφία

Arzarelo, F., Federica, O., Domingo, P., Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34, 3, 66-72.

Arzarello, F., & Paola, D. (2008). How to choose the independent variable? In *Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Morelia, Mexico*.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Biza, I., Diakoumopoylos, D., Souyoul, A., (2007). Teaching analysis in dynamic geometry environments. *Working group 9, in CERME 5.*

Bishop, S., & John, A. (2008). Teaching High School Students Parametric Functions Through Covariation.

Borba, M. C., & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 319-337.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education, New York*, 746-783.

Carlson, M. P., Thompson, P. W. (2005). *The reflexive relationship between individual cognition and classroom practices: A covariation framework and problem solving research informs calculus instruction*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Quebec.

Carlson, M., Jacobs, S., Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and study. *Journal for research in mayhematics education*,33, 352 – 378.

Carter, J. & Ferrucci, B. (2003). Using Dynamic Coordinate Geometry as a Tool for Investigating Functions in a Course for Prospective Elementary School Teachers. Από το δικτυακό τόπο *http://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001320 στις 23/3/2014.*

Carter, J., & Ferrucci, B. (2003). Using Dynamic Coordinate Geometry as a Tool for Investigating Functions in a Course for Prospective Elementary School Teachers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingedorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167 – 192.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America, Vol. 25*. Washington DC: MAA.

Falcade, R., Laborde, C., Mariotti, M-A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Education Stud Math*, 66, 317 – 333.

Fitzallen, N. (2012). Interpreting graphs: Students developing an understanding of covariation. In *35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 290-297).

Jacob, B., Lager, C., & Moon, K. Covariation and Functions: Developing Mathematical Knowledge for Teaching in Pre-service Secondary Teachers1.

Hazzan, O., Goldberg, E-P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 263-291.

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. *Proceedings of CERME 6, Lyon*.

Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. In *Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*.

Khairiree, K. Connecting Geometry, Algebra and Calculus with The Geometer's's Sketchpad (GSP): Thailand Perspective.

Krongthong, K., (2006). Connecting Geometry, Algebra and Calculus with The Geometer's's Sketchpad (GSP): Thailand Perspective. Από το δικτυακό τόπο *http://epatcm.any2any.us/EP/EP2005/2005P184/fullpaper.pdf* στις 25/3/2014.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 275-304.

Lagrange, J-B. (2010). A function perspective on the teaching of algebra: current challenges and the contribution of technology. *International journal for technology in Mathematics Education.*

Lagrange, J-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 243-255.

Lagrange, J-B., Psycharis, G. (2014). Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. *Technology, Knowledge and Learning, 18.*

Lambertus, A-J. (2007). Students' Understanding of the Function Concept: Concept Images and Concept Definitions. A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University in partial fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science. Από το δικτυακό τόπο http://repository.lib.ncsu.edu/ir/handle/1840 στις 10/01/2014.

Lee, A., Leung, A, (2008). Variational Tasks in Dynamic Geometry Environment. *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico .

Leung, A., (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *International journal Math Learning*, 13, 135-157.

Leung, A., (2012). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. *12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

Mackrell, K. (2011). Introducing algebra with interactive geometry software. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 691-701). Rzeszów, Poland.

Mejia, H., Hurtado, A. (2006). Geometrical optimization problems: a covariational approach. *Advanced mathematical thinking*, 2, 31-37.

Moore, K. C. (2010). The role of quantitative and covariational reasoning in developing precalculus students' images of angle measure and central concepts of trigonometry. In *Proceedings of the 13th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Oehrtman, M. (2004). Approximation as a foundation for understanding limit concepts. *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1*, pp. 95 – 102.

Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). Teaching proof in a dynamic geometry environment: what mediation?. *Proceedings of CIEAEM53: Mathematical Literacy in the digital Era*.

Ponte, J. P. D. (1992). The history of the concept of function and some educational implications.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 405-435.

Rolfes, T., Roth, J., & Schnotz, W. Improving the covariational thinking ability of secondary school students.

Ruthven, K. (2003). Linking algebraic and geometric reasoning with dynamic geometry software.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Smith, H. H. (2009). Teaching and learning function transformation. *Research Paper for Masters Degree. Arizona State University*.

Steketee, S. (2010, December). Variables and Functions: Using Geometry to Explore Important Concepts in Algebra. In *Electronic Proceedings, Fifteenth Asian Technology Conference in Mathematics*.

Steketee, S., & Rasmussen, S. Develop Students' Visualization and Understanding of Functions Through Geometry and Pictures with Sketchpad 5.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thomson, P., Byerley, C., Hatfield, N. (2013). A Conceptual Approach to Calculus Made Possible by Technology. *Computers in the Schools*, 30, 124–147.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education, IV* , Vol. 8, pp. 103-127.

Αντωνιάδης, Μ., Γαγάτσης, Α., Μακρίδης, Μ. (2001). Μαθηματικός αλφαβητισμός και η έννοια της συνάρτησης σε μελλοντικούς δασκάλους. *Πρακτικά 18ου Πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας,* 239-247.

Γαγάτσης, Α., Σιακαλλή, Μ. (2000). Chic: ένα στατιστικό πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων σε σχέση με τη διδακτική των μαθηματικών-εφαρμογή στις συναρτήσεις. *Πρακτικά 17ου Πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας,* 601-610.

Καλδρυμίδου, Μ., Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα χειρισμού γραφικών παραστάσεων αποφοίτων Λυκείου. *Τετράδια διδακτικής των μαθηματικών, 10-11,* 21-43.

Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ. (1997). *Θέματα διδακτικής μαθηματικών ΙΙΙ.* Τα μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός κόσμος:Πως θα συνδέσουμε θεωρία και πράξη. Αθήνα: Gutenberg.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας 1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε1. Ανοίξτε την εφαρμογή «κύκλος_1» που εμφανίζεται στην επιφάνεια εργασίας. Σύρετε τα σημεία Α και Ο. Καταγράψτε τι μεταβάλλεται και τι μένει αναλλοίωτο.

Ε2. Κάντε κλικ και εμφανίστε τις μετρήσεις. Μετακινείστε ξανά το σημείο Α και παρατηρείστε τις μεταβολές στις μετρήσεις που κάνατε. Επιβεβαιώνονται οι απαντήσεις που δώσατε στο Ε1;

Ε3. Από τα μεγέθη που μεταβάλλονται ποιο κατά τη γνώμη σας προκαλεί τη μεταβολή του άλλου; Πως θα χαρακτηρίζατε το είδος της μεταβολής (αύξηση – ελάττωση) μεταξύ των ποσοτήτων «ακτίνα κύκλου» και «επιφάνεια κύκλου»;

Ε4. Με όρους συναρτήσεων πως θα χαρακτηρίζατε τα μεγέθη «μήκος ακτίνας» και «εμβαδόν κύκλου»;

Ε5. Αποτυπώστε το σημείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (ακτίνα κύκλου, εμβαδόν κύκλου). Στη συνέχεια με ενεργό το ίχνος του συγκεκριμένου σημείου και μετακινώντας το σημείο Α παρατηρείστε τη διαδρομή των ιχνών. Αναγνωρίζετε το είδος της καμπύλης και αν ναι σε πια γνωστή συνάρτηση θα μπορούσε να αντιστοιχεί; Ποιο μέγεθος μετράμε στον οριζόντιο άξονα και ποιο στον κατακόρυφο;

Ε6. Εκφράστε με συναρτησιακό τύπο τη σχέση ακτίνας και εμβαδού. Με το εργαλείο «Υπολογισμός» ορίστε τη συνάρτηση και κατασκευάστε τη γραφική της παράσταση. Εξηγήστε γιατί η γραφική παράσταση που βρήκατε στο Ε5 είναι μέρος της γραφικής παράστασης που μόλις κατασκευάσατε.

Ε7. Επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία με τα μεγέθη «ακτίνα» και «μήκος κύκλου κύκλου». Ποιο είναι το νόημα της τομής των δύο γραφικών παραστάσεων;

Φύλλο εργασίας 2

Ε1. Ανοίξτε την εφαρμογή «ορθογώνιο1.gsp». Αυτό που εμφανίζεται είναι ένα ορθογώνιο στο οποίο η διαγώνιος ΑΓ έχει σταθερό μήκος. Μετακινήστε την κορυφή Β του ορθογωνίου. Κατά την κίνηση αυτή η κορυφή Β κινείται σε κάποια συγκεκριμένη καμπύλη ή παίρνει τυχαίες θέσεις;

_____

_____

_____

Ε2. Επιλέξτε «προβολή», στη συνέχεια «σχεδίαση ίχνους σημείου» και μετακινείστε ξανά την κορυφή Β. Τι παρατηρείτε σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τα ίχνη που αφήνει η κορυφή Β;

_____

_____

_____

Ε3. Μπορείτε να διατυπώσετε γνωστή μαθηματική πρόταση που να γενικεύει τις παρατηρήσεις σας;

_____

_____

_____

_____

Ε4. Κατασκευάστε τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΑΓ. Μετακινείστε την κορυφή Β και καταγράψτε τα μεγέθη ή ποσότητες που μεταβάλλονται και εκείνα που μένουν αναλλοίωτα.

_____

_____

_____

_____

_____

Ε5. Χρησιμοποιείστε την εντολή «μέτρηση» για τα μεγέθη που καταγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα. Επιβεβαιώνεται η προηγούμενη απάντησή σας;

Ε6. Από τις ποσότητες (μεγέθη) που μεταβάλλονται ποια ποσότητα νομίζετε ότι προκαλεί τη μεταβολή της άλλης;

Ε7. Επιλέξτε τις κάθετες πλευρές και το εμβαδόν και πινακοποιήστε τις τιμές τους μετακινώντας το σημείο Β. Γνωρίζετε κάποια σχέση που συνδέει τις τρεις αυτές ποσότητες; Είναι συνάρτηση αυτή η σχέση;

Ε8. Προτείνετε κάποιο τρόπο ώστε οι μεταβολές των δυο πλευρών του ορθογωνίου να εκφράζονται ενιαία.

Ε9. Δημιουργήστε ένα πίνακα που στη μια στήλη να είναι η καινούργια μεταβλητή, έστω t, και στην άλλη το εμβαδόν, έστω Ε. Γεμίστε τον πίνακα μετακινώντας και πάλι την κορυφή Β. Εμφανίζονται οι τιμές των δύο ποσοτήτων οι οποίες συμμεταβάλλονται. Μπορεί να ισχυριστεί κάποιος ότι αυτή η συμμεταβολή εκφράζει συνάρτηση; Εξηγείστε γιατί εκφράζει ή γιατί δεν εκφράζει συνάρτηση.

Ε10. Αν θεωρήσει κάποιος ότι εκφράζει συνάρτηση τότε ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή;

Ε11. Παρατηρείστε τις τιμές του προηγούμενου πίνακα και σημειώστε το είδος της μεταβολής του εμβαδού (αύξηση - ελάττωση). Βλέπετε κάποια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων;

Ε12. Προσπαθήστε να διατυπώσετε έναν κανόνα που να εκφράζει τη συμμεταβολή των δύο ποσοτήτων σε «γεωμετρική γλώσσα».

Ε13. Όσα εκφράστηκαν στα ερωτήματα Ε9, Ε10, Ε11 και Ε12 είναι μαθηματικά αποδεκτά συμπεράσματα ή αποτελούν εικασίες;

Ε 14. Προσπαθήστε να αποδείξετε την ορθότητα των εικασιών σας με τη μαθηματική θεωρία που γνωρίζετε.