ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα
Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αξιοποίηση της ιστορίας στη διδακτική των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση – Η περίπτωση του λογάριθμου

ΑΕΡΑΚΗΣ ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ

Α.Μ. Δ 201207

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Σ. Παπασταυρίδη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Σ. Παπασταυρίδη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ι. Θωμαΐδης	Δρ., Σχολ. Σύμβουλος

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

Τους καθηγητές κ. Σταύρο Παπασταυρίδη, κ. Διονύσιο Λάππα και κ.Ιωάννη Θωμαΐδη αφενός για την τιμή που μου έκαναν να επιβλέψουν αυτή τη διπλωματική εργασία και αφετέρου για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχαν. Ειδικότερα τον κ. Ιωάννη Θωμαΐδη για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε, την υπομονή του και την άριστη συνεργασία κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος για όλα αυτά που έμαθα από αυτούς.

Όλους τους συμφοιτητές μου για τη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών, για τις απόψεις που ανταλλάξαμε αλλά και για τη στήριξη που μου παρείχαν.

Όλους τους μαθητές και συναδέλφους μου Μαθηματικούς του 1^{ου} ΓΕΛ Αχαρνών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα.

Τον εξάδελφό μου Δημήτρη για την πολύτιμη βοήθεια του στην επεξεργασία κειμένου και στο σχεδιασμό της παρουσίασης.

Τέλος θέλω ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τη γυναίκα μου Βίκη για την αμέριστη κατανόηση και συμπαράσταση της καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών και να απολογηθώ τόσο από αυτή όσο και από τα παιδιά μου για το χρόνο και τις στιγμές που τους στέρησα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος 3

Περίληψη 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Εισαγωγή 7

1.2 Λόγοι για τους οποίους είναι χρήσιμο να ενσωματωθεί η ιστορία των Μαθηματικών (ΙΜ) στη μαθηματική εκπαίδευση (ΜΕ) 8

1.3 Αναφορές σχετικά με τη χρήση της ΙΜ στη ΜΕ 15

1.4 Ενστάσεις – Δυσκολίες για την ενσωμάτωση της ΙΜ στη ΜΕ 18

1.5 Αναφορές σχετικά με τις ενστάσεις και δυσκολίες της ένταξης της ΙΜ στη ΜΕ 20

1.6 Τρόποι με τους οποίους μπορεί να ενσωματωθεί η ΙΜ στη ΜΕ 22

1.7 Συμπεράσματα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση 26

1.8 Ανάγκη εμπειρικής έρευνας 29

1.9 Ερευνητικά ερωτήματα 29

1.10 Μεθοδολογία της έρευνας 30

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

2.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή 31

2.2 Κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο – Ανάγκη για απλούστευση αριθμητικών υπολογισμών 32

2.3 Μέθοδος της προσθαφαίρεσης 33

2.4 Η συνεισφορά των αλγεβριστών Stifel και Chuquet 34

2.5 Η συμβολή του John Napier 36

2.6 Σύνδεση του λογαρίθμου του Napier με τους σημερινούς αποκαλούμενους ως ‘φυσικούς’ ή ‘νεπέριους’ λογάριθμους 45

2.7 Η συμβολή των Henry Briggs, Adriaen Vlacq, Edmund Gunter 46

2.8 Η συμβολή του Jobst Burgi 49

2.9 Ομοιότητες – Διαφορές στις προσεγγίσεις Napier – Burgi 51

2.10 Η σημασία του αριθμού e 51

2.11 Η εμφάνιση των φυσικών λογαρίθμων 53

2.12 Η λογαριθμική συνάρτηση 54
2.13 Εφαρμογές λογαριθμικής συνάρτησης 55
2.14 Επίλογος – Αναγκαιότητα για μια διαφορετική προσέγγιση στη διδασκαλία των λογαρίθμων 56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ
3.1 Επιδιωκόμενοι στόχοι 59
3.2 Περιγραφή διδακτικής παρέμβασης 62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ
4.1 Διεξαγωγή της έρευνας 73
4.2 Υλοποίηση και Αποτελέσματα 1^{ης} φάσης της έρευνας (Γ΄ Λυκείου) 74
4.3 Υλοποίηση και Αποτελέσματα 2^{ης} φάσης της έρευνας (Β΄ Λυκείου) 80
4.4 Γενική αποτίμηση – Ανάγκη για περαιτέρω έρευνα 91

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 95
I. Φύλλο Εργασίας 97
II. Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου (συγκεντρωτικό) 103
III. Απαντήσεις μαθητών Γ΄ Λυκείου (αναλυτικά, ανά ερώτηση) 107
IV. Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου (συγκεντρωτικό) 135
V. Απαντήσεις μαθητών Β΄ Λυκείου (αναλυτικά, ανά ερώτηση) 139
VI. Συνέντευξη διδάσκοντα της Β΄ Λυκείου 165

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 169

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ως καθηγητής Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, συχνά έχω βρεθεί αντιμέτωπος με ερωτήματα μαθητών τύπου: γιατί κύριε τα μαθαίνουμε αυτά; που θα μας χρειαστούν αυτά στη ζωή μας; ποιοι και πότε τα ανακάλυψαν αυτά; Ερωτήματα που είχα και εγώ όταν ήμουν μαθητής και που ακόμα και τώρα δε νιώθω έτοιμος να απαντήσω ολοκληρωμένα σε κάθε περίπτωση.

Επίσης θεωρώ ότι αυτό που δεν κάνουμε ως εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τουλάχιστον στο βαθμό που πιστεύω ότι θα έπρεπε, είναι να εξηγούμε στους μαθητές μας τους λόγους για τους οποίους είναι απαραίτητο – χρήσιμο να ασχοληθούν με τα Μαθηματικά, την εφαρμογή τους στη καθημερινή ζωή μας ως απαραίτητο εργαλείο στη λύση πραγματικών προβλημάτων και ότι μια μαθηματική έννοια ιστορικά αναπτύχθηκε ακριβώς μέσα από την ανάγκη του ανθρώπου να επιλύσει προβλήματα, να βελτιώσει την καθημερινότητά του και να ερμηνεύσει τον κόσμο.

Στα παραπάνω ερωτήματα και προβληματισμούς πιστεύω ότι μπορεί να δώσει απαντήσεις η ίδια η ιστορία των Μαθηματικών μέσω της ένταξής της στη διδασκαλία τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, για λόγους που ελπίζω να αναπτύξω πειστικά στην παρούσα εργασία. Όσα όμως επιχειρήματα αναπτύξουμε υπέρ αυτής της ένταξης, όποιες αντιρρήσεις κατά αυτής καταφέρουμε να κάμψουμε και όποιους τρόπους προτείνουμε για να επιτευχθεί αυτή η ένταξη, θεωρώ ότι δε θα είναι αρκετά αν δε συνοδεύονται από μια εμπειρική έρευνα σε πραγματικές συνθήκες τάξης και ενταγμένα μέσα στο προβλεπόμενο πρόγραμμα σπουδών, που να αποδεικνύει έμπρακτα τα οφέλη της.

Απώτερος λοιπόν σκοπός αυτής της εργασίας δεν είναι η απλή καταγραφή επιχειρημάτων και απόψεων υπέρ της ένταξης της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών, (και φυσικά και των προβλημάτων που παρουσιάζει αυτή η διαδικασία), αλλά ο σχεδιασμός και υλοποίηση μιας διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας, του λογαρίθμου, σε πραγματικές συνθήκες τάξης, καθώς και μια εμπειρική έρευνα γύρω από το πώς αντιμετώπισαν οι μαθητές τη συγκεκριμένη παρέμβαση καταγράφοντας τα υπέρ και τα κατά που αυτοί εντόπισαν έναντι μιας παραδοσιακής διδασκαλίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ - ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

Στο 1^{ο} κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο και μέρος από το πλούσιο βιβλιογραφικό υλικό για την αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά και για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να ενταχθεί η ιστορική προσέγγιση στη διδακτική πράξη. Καταγράφονται επίσης και αντιρρήσεις για την ενσωμάτωση αυτή, ενώ το κεφάλαιο κλείνει παρουσιάζοντας τα δικά μου συμπεράσματα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, την αναγκαιότητα επιβεβαίωσης όλων αυτών από εμπειρικές έρευνες καθώς και την παρουσίαση των ερευνητικών ερωτημάτων πάνω στα οποία θα στηριχτεί η δική μου έρευνα.

Στο 2^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του λογαρίθμου, με αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές, τον ιστορικό περίγυρο της ανακάλυψης, τους λόγους που οδήγησαν στην ανάπτυξη της έννοιας με αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές, και τις εφαρμογές που αυτή βρίσκει σε άλλα πεδία των Μαθηματικών και στον περιβάλλοντα κόσμο. Επίσης εξηγούνται οι λόγοι για τους οποίους επιλέξαμε τη συγκεκριμένη Μαθηματική έννοια για να σχεδιάσουμε μια διδακτική παρέμβαση εμπνευσμένη από την ιστορία της, πάνω στην οποία θα στηρίξουμε την έρευνά μας .

Στο 3^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται ο σχεδιασμός μιας διδακτικής παρέμβασης που αφορά στην αξιοποίηση της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων στη διδασκαλία τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα στα πλαίσια του σημερινού προγράμματος σπουδών . Περιγράφονται αναλυτικά όλα τα στάδια της παρέμβασης αυτής καθώς και η χρονική διάρκεια καθενός από αυτά. Επίσης γίνεται ειδική αναφορά στους επιδιωκόμενους στόχους καθώς και στο πως αυτοί θα επιτευχθούν (τρόπος παρουσίασης, φύλλα εργασίας που θα χρησιμοποιηθούν, ερωτήματα που θα τεθούν κλπ).

Στο 4^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνα που πραγματοποιήσαμε. Παρουσιάζονται αναλυτικά οι σκοποί της έρευνάς μας, η μέθοδός μας, οι φάσεις από τις οποίες αποτελείται, τα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήσαμε, οι απαντήσεις που πήραμε από τους μαθητές και τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Επίσης γίνεται μια γενική αποτίμηση, παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα της έρευνας, προτείνονται κάποιες αλλαγές στο σχεδιασμό και βελτιώσεις στο τρόπο υλοποίησης της διδακτικής παρέμβασης και τονίζεται η ανάγκη για περαιτέρω εμπειρική έρευνα.

Τέλος στο παράρτημα παρουσιάζεται όλο το υποστηρικτικό υλικό της διδακτικής μας παρέμβασης, τα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήσαμε, καθώς και όλες οι απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτά, όπως ακριβώς διατυπώθηκαν από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} Θεωρητικό πλαίσιο

1.1 Εισαγωγή

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπως συνήθως και παραδοσιακά γίνεται, αδυνατεί τις περισσότερες φορές να εξηγήσει επαρκώς τους λόγους για τους οποίους διδάσκονται οι διάφορες μαθηματικές έννοιες, ποια εφαρμογή βρίσκουν στον περιβάλλοντα κόσμο, γιατί είναι χρήσιμο οι μαθητές να ασχοληθούν και να μάθουν τις έννοιες αυτές καθώς και ποιοι, πότε, γιατί και κάτω από ποιες συνθήκες τις ανακάλυψαν. Έτσι αναπόφευκτα οι μαθητές πολλές φορές διατυπώνουν απορίες του τύπου: 'γιατί τα μαθαίνουμε αυτά;', 'που θα μας χρειαστούν;' 'πως τα σκέφτηκαν αυτοί που τα ανακάλυψαν;', για τις οποίες φυσικά δεν παίρνουν απαντήσεις. Έτσι η διδασκαλία των Μαθηματικών καταλήγει να είναι μια διαδικασία, όπου οι μαθητές υποχρεούνται απλά να μάθουν γνώσεις που κάποια φωτεινά μυαλά, πέραν ιστορικής και κοινωνικής εμπειρίας, κάποια στιγμή και για κάποιους λόγους οραματίστηκαν. Η μάθηση αυτή δε συνιστά βέβαια βαθιά και σφαιρική κατανόηση, αλλά απλή απομνημόνευση τύπων, κανόνων, αλγορίθμων ενδεχομένως και μεθοδολογιών και τεχνασμάτων για την επίλυση ασκήσεων. (Δεν απαξιώνουμε την ανάγκη απομνημόνευσης ως ένα βαθμό. Πολλά πράγματα είναι εκ των πραγμάτων αναγκαίο να απομνημονεύουν. Π.χ. μαθαίνουμε να οδηγούμε αυτοκίνητο, χωρίς να απαιτείται να ξέρουμε την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού ή το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα. Όμως αυτού του είδους η γνώση δεν είναι το πιο σημαντικό). Συνεπώς στόχοι που προβλέπονται και από το πρόγραμμα σπουδών όπως η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και η ανάπτυξη ικανότητας επίλυσης προβλημάτων σπάνια επιτυγχάνονται.

Ένας από τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αντιμετωπιστούν τα παραπάνω, είναι η ενσωμάτωση στοιχείων από την ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Πολλές έρευνες και πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν τα οφέλη μιας τέτοιας ενσωμάτωσης, μερικά από τα οποία θα προσπαθήσω να παρουσιάσω παρακάτω. Τα οφέλη που αναμένονται από μια τέτοια ενσωμάτωση αφορούν τόσο τους μαθητές με την αύξηση του ενδιαφέροντος και τη βελτίωση της κατανόησης των εννοιών, όσο και τους καθηγητές των Μαθηματικών με τη συνειδητοποίηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών και τον εμπλουτισμό του ρεπερτορίου τους. Λέγοντας βελτίωση της κατανόησης δεν εννοούμε ότι απαραίτητα ο μαθητής θα έχει και καλύτερες επιδόσεις στις εξετάσεις, ειδικά στο είδος των θεμάτων που κυριαρχούν στις πανελλαδικές εξετάσεις και επηρεάζουν άμεσα το σύνολο του εκπαιδευτικού συστήματος. Η εννοιολογική εμβάθυνση όμως στα Μαθηματικά, ιδιαίτερα αν καλλιεργηθεί από μικρές ηλικίες, έχει καταλυτική επίδραση στην ανάπτυξη θετικών στάσεων οι οποίες προφανώς ευνοούν την επιδίωξη υψηλών επιδόσεων.

Με την ενσωμάτωση της ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκουμε τη σύνδεση κατά κάποιο τρόπο δύο μεγάλων επιστημονικών κλάδων. Εκτιμούμε το ρόλο που παίζουν τα Μαθηματικά στον πολιτισμό και την ιστορία της ανθρωπότητας. Κα-

ταλαβαίνουμε ενδεχομένως γιατί τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν έτσι και γιατί οι διάφορες μαθηματικές έννοιες ορίστηκαν με τον τρόπο που ορίστηκαν. Βέβαια, για κάποιες έννοιες είναι δύσκολο να εξηγηθούν ιστορικά και να γίνουν κατανοητές, λόγω έλλειψης χρόνου, τρόπου και δομής σχολικών βιβλίων, οπότε σε αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να γίνεται η απαραίτητη ορθολογική ανακατασκευή (reframing). Διευρύνουμε έτσι τον στόχο της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Από την άλλη μεριά μια τέτοια ενσωμάτωση μπορεί να βρει εμπόδια όπως ο όγκος της διδακτέας ύλης σε σχέση με τον πραγματικό διδακτικό χρόνο, το εξεταστικό σύστημα που εστιάζει σε θέματα που αποθαρρύνουν μια τέτοια ενσωμάτωση, τα αναλυτικά προγράμματα που δεν την υποστηρίζουν καθώς και τα σχολικά βιβλία που περιορίζονται σε λίγα ιστορικά σημειώματα, τα οποία είναι μεν χρήσιμα και περιεκτικά αλλά όχι αρκετά. Επίσης η ιστορία είναι μια επιστήμη τις αρχές και μεθόδους της οποίας δεν έχει διδαχθεί ο διδάσκων και εγκυμονεί ο κίνδυνος και τα μαθηματικά να μειώσουμε και ιστορία να μην κάνουμε. Θα παρουσιάσω παρακάτω κάποιες από τις δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθώς και αντιρρήσεις που έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς για την ενσωμάτωση αυτή.

Τα όποια όμως οφέλη συνεπάγεται η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους, δε θα μπορέσουν να αναδειχθούν αν η ενσωμάτωση αυτή δε γίνει με κατάλληλο τρόπο. Επίσης οι αντιρρήσεις που διατυπώνονται κατά της ενσωμάτωσης, μπορούν να καμφθούν μόνο αν αποδειχθεί αποτελεσματική στη διδακτική πράξη. Θα παρουσιάσω παρακάτω μια βιβλιογραφική ανασκόπηση για τους διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί αυτή η ενσωμάτωση ώστε αφενός να αναδειχτούν τα εν λόγω οφέλη και αφετέρου να ξεπεραστούν τυχόν δυσκολίες και επιφυλάξεις.

Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση συμπερασμάτων που προκύπτουν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, την ανάγκη για επιβεβαίωση όλων αυτών μέσα από μία εμπειρική έρευνα και την παρουσίαση των ερευνητικών ερωτημάτων πάνω στα οποία θα στηριχτεί αυτή η έρευνα.

1.2 Λόγοι για τους οποίους είναι χρήσιμο να ενσωματωθεί η ιστορία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

Μια σοβαρή προσπάθεια στη δημιουργία ενός συνεκτικού θεωρητικού πλαισίου για την καταγραφή και ταξινόμηση των επιχειρημάτων υπέρ της ένταξης της Ιστορίας των Μαθηματικών (ΙΜ) στη Μαθηματική Εκπαίδευση (ΜΕ), επιχειρείται στο συλλογικό τόμο της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Fauvel & van Maanen 2000). Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μια ολοκληρωμένη λίστα με επιχειρήματα για την ενσωμάτωση της ΙΜ στο ΜΕ (τα *whys*) και γενικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί αυτό να επιτευχθεί (τα *hows*) (Tzanakis & Arcavi, 2000, σ. 201-240). Τα whys αντιστοιχούν σε επιχειρήματα για τη χρήση της ΙΜ στη ΜΕ και τα hows αντιστοιχούν

σε μεθοδολογικές προσεγγίσεις που θα μπορούσε κανείς να ακολουθήσει. Στο ίδιο άρθρο αναφέρονται τα εξής :

> *Τα μαθηματικά θεωρούνται συχνά ως μια συλλογή από αξιώματα, θεωρήματα και αποδείξεις. Οργανώνονται και παρουσιάζονται ως μια τυπική επαγωγική δομή, η οποία προϋποθέτει, τουλάχιστον σιωπηρά, ότι η λογική σαφήνεια μιας τέτοιας παρουσίασης μπορεί να είναι επαρκής για την κατανόηση των μαθηματικών. Ολοένα και περισσότερο, όμως, αναγνωρίζεται ότι αυτή είναι μία μόνο πτυχή του τι συνιστά μαθηματική γνώση. Η διαδικασία του να κάνει κάποιος μαθηματικά είναι εξίσου σημαντική, ειδικά από διδακτική άποψη. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει τη χρήση ευρετικών μεθόδων, το να κάνεις λάθη, να έχεις αμφιβολίες και παρανοήσεις, και να ανατρέχεις στην ανάπτυξη και την κατανόηση του ενός θέματος. Για να μάθει κανείς μαθηματικά, δεν είναι απαραίτητο μόνο να γνωρίσει και να γίνει ικανός στο χειρισμό συμβόλων και τη λογική σύνταξη των θεωριών, και να συσσωρεύει γνώση των νέων αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται ως τελικά προϊόντα. Η διδασκαλία των μαθηματικών οφείλει να είναι μια πολύ πιο σύνθετη επιχείρηση από την απλή παράθεση των καλά οργανωμένων μαθηματικών εξελίξεων. Από αυτή την άποψη η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να παίξει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση.*

Τονίζουμε ότι είναι μεν αναγκαίο να είναι κανείς *«ικανός στο χειρισμό συμβόλων και τη λογική ανάπτυξη των θεωριών»*, αλλά αυτό αφενός δεν αρκεί και αφετέρου η γνώση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών αποτελεί μια πολύτιμη επιπλέον γνώση. Ο Jankvist (Tzanakis & Thomaidis, 2011), επανεξέτασε τα whys και τα hows. Έκανε μια διάκριση μεταξύ δύο ευρέων τρόπων για να εισαγάγει την ΙΜ στη ΜΕ και προσπάθησε να ταξινομήσει τα whys σύμφωνα με τη διάκριση αυτή. Σύμφωνα με την ορολογία του :

Α) Επιχειρήματα που αναφέρονται στην «Ιστορία ως εργαλείο» με έμφαση σε εσωτερικά θέματα στα Μαθηματικά (in-issues) που αφορά τη χρήση της ιστορίας ως ένα βοηθητικό μέσο στην εκμάθηση ή διδασκαλία των μαθηματικών, ως ένα κινητήριο ή συναισθηματικό εργαλείο, αλλά και ως ένα γνωστικό εργαλείο. Αφορά σε εσωτερικά θέματα των μαθηματικών δηλαδή σε θέματα που σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες, θεωρίες, κλάδους, τις μεθόδους, κ.τ.λ

Β) Επιχειρήματα που αναφέρονται στην « Ιστορία ως στόχο» με έμφαση σε μετά – ζητήματα στα Μαθηματικά (meta-issues), που θέτει και προτείνει απαντήσεις σε ερωτήματα σχετικά με την εξέλιξη και την ανάπτυξη των μαθηματικών, σχετικά με τους εσωτερικούς και εξωτερικούς λόγους που οδήγησαν στην εξέλιξη αυτή, αλλά και σχετικά με τις πολιτιστικές και κοινωνικές πτυχές των μαθηματικών και της ιστορίας τους (Jankvist 2009b§1.1). Με άλλα λόγια, αφορά την εκμάθηση για τα μεταζητήματα των μαθηματικών δηλαδή τα θέματα που αφορούν κοιτάζοντας το σύνολο των τομέων των μαθηματικών από ένα επίπεδο μετα-προοπτικής.

Παρουσιάζουμε παρακάτω το συνοπτικό αυτό κατάλογο με τα whys από τη μελέτη ICMI (Fauvel & van Maanen 2000, §7.2, 7.3) και Jankvist (2009c) εμπλουτισμένο με επιχειρήματα που αντλήθηκαν από σχετικό άρθρο των Tzanakis & Thomaidis (Cerme 7, 2011, σελ1654). Σε πολλές περιπτώσεις υιοθετούμε την απόδοση των όρων στα Ελληνικά του Μπιζμπιάνου (2011).

Α. Η εκμάθηση των Μαθηματικών

1. *Ιστορική εξέλιξη εναντίον 'ραφιναρισμένων' (polished) μαθηματικών.*

Τις περισσότερες φορές αν όχι πάντα, μια Μαθηματική ιδέα δεν παρουσιάζεται με τον τρόπο που ανακαλύφθηκε. Εμφανίζεται με αυστηρό και αξιωματικό τρόπο χωρίς να αναδεικνύονται οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψη αυτής της ιδέας, οι προσπάθειες που καταβλήθηκαν, τα λάθη και τα αδιέξοδα που παρουσιάστηκαν, μέχρι τελικά να πάρει την τελική μορφή της όπως αυτή παρουσιάζεται στα σχολικά βιβλία. Ωστόσο, η ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών δείχνει ότι η αυστηρά αξιωματική οργάνωση μιας Μαθηματικής έννοιας έρχεται μόνο αφότου αυτή έχει ωριμάσει, έτσι ώστε να καθίσταται αναγκαίο να δοθεί η εκ των υστέρων παρουσίαση της λογικής δομής της. Στο πλαίσιο αυτό η μελέτη των βασικών πτυχών της ιστορικής ανάπτυξης της μαθηματικής ιδέας και η ενσωμάτωση κάποιων από αυτές στη ΜΕ, μπορεί να αποκαλύψει και να παρουσιάσει στους μαθητές το νόημα και τη σημασία της ανακάλυψης αυτής της ιδέας και να τους βοηθήσει να αντιληφθούν καλύτερα έννοιες, μεθόδους, θεωρίες κ.λπ. Επίσης μπορεί να εμπνεύσει τους καθηγητές και να τους βοηθήσει στη διδασκαλία τους.
Βέβαια υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πραγματική ιστορία, διότι αυτή είναι πολύπλοκη και δεν υπάρχει χρόνος και τρόπος να την καταλάβουν οι μαθητές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα οι έννοιες του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος, που ενώ – για τις ανάγκες του εκπαιδευτικού μας συστήματος - διδάσκονται με τη σειρά που αναφέρθηκαν, εν τούτοις ιστορικά αναπτύχθηκαν με την αντίστροφη σειρά. Συνεπώς δεν είναι καθολικά αποδεκτό ότι χρησιμοποιώντας τη «γενετική προσέγγιση» θα έχουμε σίγουρα κέρδος στη διδασκαλία, αλλά σε πολλές περιπτώσεις είναι αναγκαίο να γίνεται η απαραίτητη ορθολογική ανακατασκευή (re-framing) και η επιλογή των ιστορικών στιγμών και στοιχείων που θα ενσωματωθούν στη διδασκαλία πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο προβληματισμού.

2. *Ιστορία ως πηγή πληροφοριών (re-source)*

Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί μια απέραντη δεξαμενή σχετικών ερωτημάτων – προβλημάτων, τα οποία αν ενσωματωθούν κατάλληλα στη ΜΕ μπορούν να κινητοποιήσουν και να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, να τους εμπλέξουν μέσω της σύνδεσης με σημερινές γνώσεις και να τους δείξουν μεθόδους προσέγγισης στη γνώση και προβλήματα του παρελθόντος.

3. *Ιστορία ως μια γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών κλάδων / τομέων*

Είναι γεγονός ότι τις περισσότερες φορές που αναπτύχθηκε μια μαθηματική ιδέα, αυτό έγινε με σκοπό να δοθούν απαντήσεις σε ερωτήματα και να επιλυθούν προβλήματα που προέκυψαν από άλλες επιστήμες ή τομείς της καθημερινής ζωής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα μπορούμε να αναφέρουμε τη συμβολή της Γεωμετρίας στην επίλυση

προβλημάτων σχετικά με το διαχωρισμό αγροτικών εκτάσεων, τη συμβολή της τριγωνομετρίας στη μέτρηση αποστάσεων, τη συμβολή των λογαρίθμων στην απλούστευση πολύπλοκων μαθηματικών πράξεων που εμφανίζονταν στη μελέτη αστρονομικών φαινομένων και πολλά άλλα. Μερικές από τις επιστήμες που σχετίζονται με την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών είναι η φυσική (π.χ. δυναμική, ταχύτητα, επιτάχυνση, η αρχή του Αρχιμήδη και η μη-Ευκλείδεια γεωμετρία και σχετικότητα, διάσπαση ραδιενεργών ουσιών), βιολογία (μοντέλα ανάπτυξης πληθυσμών), οικονομία (οικονομικά μοντέλα, συναλλάγματα, προβλήματα ανατοκισμού και χρεωλυσίων), γεωγραφία (μέτρηση ακτίνας της γης από τον Ερατοσθένη) και άλλες. Επίσης τα μαθηματικά σχετίζονται και με άλλους τομείς όπως η τέχνη (η προοπτική στη ζωγραφική, η χρήση μοτίβων), η αρχιτεκτονική (χρυσή τομή), η μουσική (μουσικά πειράματα Πυθαγόρα) αλλά και η φιλοσοφία (Πλάτωνας, Αριστοτέλης, σχολή Πυθαγορείων), θρησκεία (υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις για την ανάπτυξη της αριθμητικής και γεωμετρίας σε αρχαία τελετουργικά στην Αίγυπτο, Βαβυλώνα, την Ινδία, την Κίνα, και την Ελλάδα), θεολογία (τα ηθικά του Spinoza), πολιτική (Αμερικάνικη Διακήρυξη Ανεξαρτησίας) και κοινωνικούς σχολιαστές (Βολταίρος).

Σε αυτό το πλαίσιο η ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να αποσαφηνίσει στους μαθητές από πού και πώς προέκυψε ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών και να αναδείξει νέες πτυχές, θέματα και μεθόδους. Επιπλέον να αποκαλύψει τη σχέση και αλληλεπίδραση που έχουν τα μαθηματικά με άλλες επιστήμες και τομείς που δεν είναι πάντα ορατή με μια πρώτη ματιά και να δείξει οτι τα μαθηματικά δεν είναι απομονωμένα από δραστηριότητες της καθημερινής ζωής.

4. *Η γενικότερη εκπαιδευτική αξία της ιστορίας*

Με την ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν προσωπικές δεξιότητες που δεν συνδέονται κατ' ανάγκη με τα μαθηματικά, όπως ανάγνωση, γραφή, αναζήτηση πηγών, τεκμηρίωση, ανάλυση, και συζήτηση γύρω από τα μαθηματικά σε αντιδιαστολή με το απλά 'κάνω' μαθηματικά, δηλαδή μαθαίνω θεωρήματα και επιλύω ασκήσεις και προβλήματα.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν ένα σύνολο γενικών επιχειρημάτων υπέρ της ένταξης της ΙΜ στη ΜΕ. Στην ενότητα 1.4 θα δούμε ότι υπάρχουν και κάποιες ενστάσεις - επιφυλάξεις έναντι αυτών των επιχειρημάτων.

Β. Η φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας

1. *Το Περιεχόμενο των Μαθηματικών* :

Με την ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση οι μαθητές μπορούν να αντλήσουν ιδέες σε έννοιες, εικασίες και αποδείξεις, κοιτάζοντας από μια διαφορετική οπτική γωνία. Να εκτιμηθεί η αποτυχία ως μέρος της δημιουργίας των μαθηματικών και να γίνει ορατή η εξελικτική φύση των μαθηματικών. Οι μαθητές θα δουν και θα

μάθουν ότι λάθη, αβεβαιότητες, αμφιβολίες, διαισθητικά επιχειρήματα, αδιέξοδα, διαμάχες και εναλλακτικές προσεγγίσεις για την επίλυση προβλημάτων δεν είναι μόνο θεμιτά, αλλά και αναπόσπαστο μέρος της δημιουργίας και εξέλιξης των μαθηματικών. Μπορούν να γίνουν πιο ικανοί να κατανοήσουν γιατί εικασίες και αποδείξεις, οι οποίες είχαν προταθεί στο παρελθόν, δεν παρέχουν ικανοποιητικές απαντήσεις σε ήδη υφιστάμενα προβλήματα. Τέλος οι μαθητές μπορούν να ενθαρρυνθούν να διαμορφώσουν τα δικά τους ερωτήματα, να διατυπώσουν δικές τους εικασίες και να αναπτύξουν τους δικούς τους τρόπους απόδειξης.

2. Η Μορφή των Μαθηματικών :

Με την ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν παλαιές και σύγχρονες αντιλήψεις, ορολογίες, σύμβολα, υπολογιστικές μεθόδους, τρόπους έκφρασης και αναπαραστάσεις. Η ιστορία με το να φέρει το παλιό πιο κοντά στο καινούργιο, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τη λεκτική ή συμβολική γλώσσα μιας συγκεκριμένης περιόδου, να επαναξιολογήσουν το ρόλο της οπτικής, διαισθητικής και μη τυπικής προσέγγισης που έχει προταθεί στο παρελθόν και να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα ή τα μειονεκτήματα της σύγχρονης μορφής των μαθηματικών έναντι της παλιάς.

Γ. Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών

1. Προσδιορισμός κινήτρων

Με τη μελέτη ιστορικών παραδειγμάτων και την προσπάθεια ανασύνθεσης πτυχών της ιστορικής εξέλιξης, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αναγνωρίσουν και να μεταδώσουν στους μαθητές τους τα κίνητρα πίσω από την εισαγωγή της νέας μαθηματικής γνώσης. Με αυτόν το τρόπο θα καταφέρουν να κινήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών τους και να προετοιμάσουν κατάλληλα το έδαφος ώστε αυτοί να δεχθούν με πιο ομαλό τρόπο τις νέες μαθηματικές έννοιες. Όταν οι μαθητές κατανοήσουν τους λόγους για τους οποίους αναπτύχθηκε μια μαθηματική έννοια, θα είναι πιο λογικό και εύκολο για αυτούς να την αποδεχτούν.

2. *Η συνειδητοποίηση των δυσκολιών και των εμποδίων*

Μελετώντας την ιστορική εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ανακαλύψουν δυσκολίες, ή, ακόμη και εμπόδια, που εμφανίστηκαν στην ιστορία και μπορεί να επανεμφανιστούν στη τάξη. Επίσης, κατανοώντας ότι σε αυτή η εξέλιξη πραγματοποιήθηκε μέσα από απαντήσεις σε συγκεκριμένα ερωτήματα και προβλήματα που προϋποθέτουν μια μαθηματική ωριμότητα από μέρος του μαθητή, μπορούν να προσαρμόσουν κατάλληλα τη διδασκαλία τους ώστε αυτή να γίνει όσο το δυνατόν περισσότερο κατανοητή.

3. Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας 'κάνω μαθηματικά'

Εκπαιδευτικοί και μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε αυτό που λέμε 'κάνω μαθηματικά' αντιμετωπίζοντας ερωτήσεις και προβλήματα στο ιστορικό τους πλαίσιο. Με τον

τρόπο αυτό όχι μόνο εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους και τη μαθηματική τους παιδεία αλλά μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας.

4. *Εμπλουτισμός του διδακτικού ρεπερτορίου*

Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει πληθώρα παραδειγμάτων μέσω των οποίων δίνεται η δυνατότητα εναλλακτικής προσέγγισης ενός θέματος έτσι ώστε να βελτιωθεί η ικανότητα εξήγησης, προσέγγισης και κατανόησης συγκεκριμένων τμημάτων των μαθηματικών.

5. *Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων, αλλά εν τέλει σωστών μαθηματικών*

Οι εκπαιδευτικοί που εμπλέκονται με ένα γνωστό κομμάτι των μαθηματικών σε ένα ιστορικά βασισμένο πλαίσιο, μπορούν να αντιληφθούν πώς να εργάζονται με γνωστά μαθηματικά με ένα διαφορετικό (παλιό) τρόπο. Ως εκ τούτου μπορεί να αυξηθεί η ευαισθησία και η ανοχή τους έναντι μη συμβατικών ή ακόμη και λανθασμένων μαθηματικών, που ενδεχομένως θα αναπτύξουν οι μαθητές τους.

Δ. Η συναισθηματικά θετική προδιάθεση για τα μαθηματικά

1. *Η θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας*

Μέσω της ιστορίας των μαθηματικών, μπορεί να γίνει σαφές στους μαθητές ότι τα μαθηματικά είναι μια διαρκώς εξελισσόμενη ανθρώπινη δραστηριότητα που απαιτεί έντονη πνευματική προσπάθεια και που καθορίζεται από διάφορους παράγοντες, τόσο εγγενείς με τα ίδια μαθηματικά όσο και έξω από αυτά. Ειδικότερα, τα μαθηματικά δεν είναι ένα θεόσταλτο ολοκληρωμένο και τελειωμένο προϊόν, έτοιμο για παπαγαλία και μάθηση, αλλά μια ανθρώπινη επιχείρηση, ένα ταξίδι στην ανθρώπινη σκέψη και τον πειραματισμό. Μια προσπάθεια που μπορεί να ξεκίνησε από έναν ή από μια ομάδα μαθηματικών, προχώρησε ως ένα σημείο και ενδεχομένως σταμάτησε, για να έρθει μια άλλη ομάδα από άλλη εποχή ή και περιοχή να τη συνεχίσει κ.ο.κ μέχρι να πάρει την τελική ολοκληρωμένη μορφή της. Η προσπάθεια αυτή πολλές φορές απαιτούσε τη συνεργασία μαθηματικών ερευνητών και συχνά ήταν απαραίτητο ένας μαθηματικός να ταξιδέψει για πολύ μεγάλο διάστημα προκειμένου να συναντήσει κάποιον συνάδελφό του ώστε να ανταλλάξει απόψεις και να μοιραστεί τις ανακαλύψεις του. Όλα αυτά δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτά μέσω μιας παραδοσιακής διδασκαλίας αλλά μόνο μέσα από μία ιστορική μελέτη και έρευνα πρωτότυπων πηγών.

2. *Επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας*

Μελετώντας κανείς λεπτομερώς παρόμοια παραδείγματα του παρελθόντος, ενδεχομένως να μάθει ότι εξακολουθούν να υφίστανται ανοικτά προβλήματα και ιδέες, να θέτει ερωτήματα και να νιώθει ελεύθερος να προσπαθεί να αναπτύξει ένα δημιουργικό τρόπο σκέψης.

3. *Αποφυγή απογοήτευσης από αποτυχίες, λάθη, αβεβαιότητες ή παρανοήσεις.*

Μια μαθηματική ανακάλυψη είναι πολλές φορές μια προσπάθεια που κατέληξε σε αδιέξοδα, αναθεωρήσεις, νεκρές περιόδους, απογοητεύσεις, αμφιβολίες, λάθη, και όχι μια συνεχώς ανοδική πορεία προς την τελειότητα. Έτσι μπορεί να εκτιμηθούν οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν ακόμα και αυτοί που ανακάλυψαν τις μαθηματικές έννοιες που καλούνται τώρα να διδαχθούν οι μαθητές, ώστε οι τελευταίοι να μην αποθαρρύνονται και να μην απογοητεύονται από αντίστοιχες δυσκολίες, λάθη, παρερμηνείες και ασάφειες που ενδεχομένως συναντήσουν.

Ε. Η αναγνώριση των μαθηματικών ως μια πολιτιστική -ανθρώπινη προσπάθεια

1. *Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους*

Μέσα από την αναλυτική μελέτη των ιστορικών παραδειγμάτων, οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν ότι τα μαθηματικά υποκινούνται όχι μόνο από χρηστικούς λόγους, αλλά και από εσωτερικούς παράγοντες όπως αισθητικά κριτήρια, διανοητική περιέργεια, πρόκληση, ευχαρίστηση, ψυχαγωγικούς σκοπούς κ.λπ. Μέσα από την ιστορική μελέτη μπορεί αυτοί οι εσωτερικοί παράγοντες όχι μόνο να εντοπιστούν αλλά και να εκτιμηθεί ο ρόλος τους.

2. *Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων*

Η ιστορική μελέτη μπορεί να δώσει παραδείγματα για το πώς η εσωτερική ανάπτυξη των μαθηματικών, επηρεάζεται και καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό, από εξωτερικούς παράγοντες όπως κοινωνικούς, πολιτισμικούς, φιλοσοφικούς αλλά και θρησκευτικούς. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις η ανακάλυψη των ασύμμετρων αριθμών από τους Πυθαγορείους, η φιλοσοφία του Πλάτωνα και η σύνδεση με τη μαθηματική ανθυφαίρεση, οι απόψεις για την κίνηση των πλανητών και το γνωστό επεισόδιο με το Galileo κ.α. Επίσης παράγοντες όπως το εμπόριο και οι εμπορικές συναλλαγές, η ανάγκη βελτίωσης της ναυσιπλοΐας και η δημιουργία γεωγραφικών χαρτών για την επικράτηση στη θάλασσα και την εξερεύνηση νέων τόπων, αλλά και λόγοι που έχουν να κάνουν με τη δημιουργία μηχανών και όπλων μπορεί να δώσουν αφορμή και έναυσμα για ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Μέσα από την ιστορική μελέτη μπορεί αυτοί οι εξωτερικοί παράγοντες όχι μόνο να εντοπιστούν αλλά και να εκτιμηθεί ο ρόλος τους.

3. *Τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής και πολιτιστικής παράδοσης*

Τα μαθηματικά κατά κύριο λόγο θεωρούνται προϊόν ενός συγκεκριμένου (δυτικού) πολιτισμού. Μέσα από τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών, εκπαιδευτικοί και μαθητές έχουν την ευκαιρία να αντιληφθούν άλλες, λιγότερο γνωστές προσεγγίσεις για τα μαθηματικά που εμφανίστηκαν μέσα σε άλλους πολιτισμούς, και το ρόλο που διαδραμάτισαν αυτοί στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Να αναγνωριστεί ο ρόλος που

διαδραμάτισε ο κάθε πολιτισμός όχι μόνο στη δημιουργία των μαθηματικών αλλά και στη διάσωση και διάδοση σε άλλους πολιτισμούς και γενιές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά που η διάσωση πολλών από αυτά οφείλεται στη συμβολή των Αράβων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτές οι πολιτιστικές πτυχές μπορεί να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς στην καθημερινή τους εργασία με πολυεθνικούς πληθυσμούς στην τάξη, προκειμένου να αναπτυχθεί ο σεβασμός και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών και να κατανοηθεί ένα συγκεκριμένο κομμάτι των μαθηματικών μέσω προσεγγίσεων που ανήκουν σε διαφορετικές πολιτισμικές παραδόσεις. Ωστόσο από την άλλη πλευρά υπάρχει κίνδυνος να ενισχυθούν τοπικιστικές τάσεις, ενώ παράλληλα αντιλήψεις και αξίες των διδασκόντων, μπορούν να παίξουν αρνητικό ρόλο.

Τα προηγούμενα γενικά επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ΙΜ στη ΜΕ επαναλαμβάνονται και εξειδικεύονται σε μια τεράστια βιβλιογραφική βάση δεδομένων, από πολλούς συγγραφείς – ερευνητές από διαφορετικές χώρες και εκπαιδευτικά συστήματα. Παραμένει ανοιχτό όμως το ερώτημα κατά πόσο αυτά μπορούν να υλοποιηθούν σε μια σχολική τάξη. Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχουν αρκετές συστηματικές έρευνες στις οποίες να επιχειρείται ο έλεγχος όλων των παραπάνω επιδράσεων της ΙΜ μέσα στο περιβάλλον πραγματικών σχολικών τάξεων όπου η διδασκαλία επηρεάζεται από περιορισμούς που επιβάλλουν τα σχολικά εγχειρίδια, τα αναλυτικά προγράμματα και οι ανάγκες του εξεταστικού συστήματος.

1.3 Αναφορές σχετικά με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Πολλοί κορυφαίοι μαθηματικοί και δάσκαλοι έχουν εκφραστεί με διαφορετικούς τρόπους, λόγους και ιδέες για τη σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και την ιστορία τους. Παρουσιάζουμε έναν αριθμό σχετικών αναφορών όπως εμφανίζονται στην ICMI Μελέτη (Fauvel & van Maanen 2000, σ. 35-38), για να ενισχυθεί η άποψη υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ωστόσο, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι οι παρακάτω απόψεις διετυπώθησαν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και απευθύνονταν σε διαφορετικό κοινό, οπότε αφενός δεν μπορούμε να είμαστε πάντοτε βέβαιοι για την ακριβή σημασία τους μέσα στο σύγχρονο διδακτικό περιβάλλον και αφετέρου δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται ως καθολικές αλήθειες αλλά ως αφορμή για σκέψη και στοχασμό.

- Γαλλία 1790

Ο Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) κορυφαίος μαθηματικός στη Γαλλία στα χρόνια της Γαλλικής Επανάστασης, του ανετέθει να διδάξει μαθηματικά σε φοιτητές δασκάλους στην Ecole Normale. Το απόσπασμα αυτό έχει αντληθεί από τις διαλέξεις του σχετικά με τους λογαρίθμους :

> *'Since the calculation of logarithms is now a thing of the past, except in isolated instances, it may be thought that the details into which we have entered are devoid of value. We may, however, justly be curious to know the*

trying and tortuous paths which the great inventors have trodden, the different steps which they have taken to attain their goal, and the extent to which we are indebted to these veritable benefactors of the human race. Such knowledge, moreover, is not a matter of idle curiosity. It can afford us guidance in similar inquiries and sheds an increased light on the subjects with which we are employed.'

(Δεδομένου ότι ο υπολογισμός των λογαρίθμων είναι τώρα ένα ζήτημα του παρελθόντος, εκτός από μεμονωμένες περιπτώσεις, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι λεπτομέρειες στις οποίες έχουμε εισέλθει στερούνται αξίας. Μπορούμε, ωστόσο, δικαίως να είμαστε περίεργοι να μάθουμε τις δύσκολες και τις δαιδαλώδεις διαδρομές που οι μεγάλοι εφευρέτες ακολούθησαν, τα βήματα που έγιναν για την επίτευξη του στόχου τους, καθώς και το βαθμό στον οποίο είμαστε ευγνώμονες σε αυτούς τους πραγματικούς ευεργέτες της ανθρώπινης φυλής. Αυτή η γνώση, επιπλέον, δεν είναι μόνο θέμα περιέργειας. Μπορεί να μας δώσει οδηγίες σε παρόμοιες έρευνες και να ρίξει φως σε θέματα με τα οποία απασχολούμαστε.)

- Νορβηγία 1820

Ο Niels Henrik Abel (1802-1829), ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Νορβηγίας, έγραψε στο περιθώριο ενός από τα σημειωματάρια του το εξής:

'It appears to me that if one wants to make progress in mathematics one should study the masters.'

(Μου φαίνεται ότι αν κάποιος θέλει να κάνει πρόοδο στα μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τις αυθεντίες - δασκάλους (masters).)

- Αγγλία 1865

Ο Augustus De Morgan (1806-1871) στην εναρκτήρια ομιλία του ως πρώτος πρόεδρος της Μαθηματικής Εταιρείας του Λονδίνου, αναφέρει:

'I say that no art or science is a liberal art or a liberal science unless it be studied in connection with the mind of man in past times. It is astonishing how strangely mathematicians talk of the Mathematics, because they do not know the history of their subject. By asserting what they conceive to be facts they distort its history in this manner. There is in the idea of every one some particular sequence of propositions, which he has in his own mind, and he imagines that that sequence exists in history; that his own order is the historical order in which the propositions have successively been evolved. The mathematician needs to know what the course of invention has been in the different branches of Mathematics; he wants to see Newton bringing out and evolving the Binomial Theorem by suggestion of the higher theorem which Wallis had already given. If he be to have his own researches guided in the way which will best lead him to success, he must have seen the curious ways in which the lower proposition has constantly been evolved from the higher.'

(Καμία τέχνη ή επιστήμη δεν είναι μια ελεύθερη τέχνη ή μια ελεύθερη επιστήμη, εκτός αν μελετηθεί σε σχέση με προσωπικότητες του παρελθόντος. Είναι εκπληκτικό πόσο παράξενα μαθηματικοί μιλούν για τα μαθηματικά, επειδή δεν ξέρουν την ιστορία του αντικειμένου τους. Μεταφέροντας τα γεγονότα με τον τρόπο που τα έχουν συλλάβει στρεβλώνουν την ιστορία τους. Υπάρχει στο μυαλό καθενός κάποια συγκεκριμένη αλληλουχία γεγονότων και φαντάζεται ότι υπάρχει αυτή η αλληλουχία και στην ιστορία. Ο μαθηματικός πρέπει να γνωρίζει ποια είναι η πορεία της ανακάλυψης στους διάφορους κλάδους των μαθηματικών.)

- Ιταλία 1871

Ο Eugenio Beltrami (1835-1899), καθηγητής της μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια αναφέρει :

'Students should learn to study at an early stage the great works of the great masters instead of making their minds sterile through the everlasting exercises of college, which are of no use whatever, except to produce a new Arcadia where indolence is veiled under the form of useless activity.'

(Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν σε πρώιμο στάδιο να μελετούν *τα μεγάλα έργα των μεγάλων δασκάλων, αντί να γεμίζουν το μυαλό τους με στείρες ασκήσεις του κολεγίου, που δεν έχουν καμία χρησιμότητα.)*

- Αγγλία 1890

Ο JWL Glaisher (1848-1928) πρόεδρος της Βρετανικής Ένωση για την Πρόοδο της Επιστήμης, αναφέρει :

'In any treatise or higher text-book it is always desirable that references to the original memoirs should be given, and, if possible, short historic notices also. I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history.'

(Σε κάθε πραγματεία ή ανώτερου επιπέδου εγχειρίδιο είναι πάντα επιθυμητό να δίνονται αναφορές σε πρωτότυπα υπομνήματα (ή πρωτότυπες πηγές) και αν είναι δυνατόν, σύντομα ιστορικά σημειώματα. Είμαι βέβαιος ότι κανένα αντικείμενο δε χάνει περισσότερο από τα μαθηματικά όταν επιχειρείται με οποιοδήποτε τρόπο να διαχωριστεί από την ιστορία του.)

- Ηνωμένο Βασίλειο 1919

Σε μια έκθεση μαθηματικής επιτροπής αναφέρεται :

'Every boy ["(Throughout the report the word BOY is to be taken as referring to pupils of either sex)"] ought to know something of the more human and personal side of the subject he studies. [...] The history of mathematics will give us some help in framing our school syllabus, [...] Recommenda-

tion: That portraits of the great mathematicians should be hung in the mathematical classroom, and that reference to their lives and investigations should be frequently made by the teacher in his lessons, some explanation being given of the effect of mathematical discoveries on the progress of civilization.'

(Κάθε μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει κάτι από την πιο ανθρώπινη και προσωπική πλευρά του θέματος που μελετά. Πορτρέτα των μεγάλων μαθηματικών θα πρέπει να είναι κρεμασμένα στην τάξη, αναφορές στη ζωή τους και τις έρευνες τους θα πρέπει να γίνονται συχνά από το δάσκαλο και εξηγήσεις θα πρέπει να δίνονται σχετικά με την επίδραση των μαθηματικών ανακαλύψεων στην πρόοδο του πολιτισμού).

- Ηνωμένο Βασίλειο 1958

Από έκθεση του Βρετανικού Υπουργείου Παιδείας :

'The teacher who knows little of the history of Mathematics is apt to teach techniques in isolation, unrelated either to the problems and ideas which generated them or to the further developments which grew out of them. [...] A knowledge of the arguments and dissensions between great mathematicians might induce healthy skepticism and discussion in the classroom and lead to a firmer grasp of principles. [...] One of the most valuable assets which the teacher can acquire from a knowledge of the history of his subject is an appreciation of the influence of current traditions. [...] It is important to convey to the pupils the knowledge that much of what is taught today as a finished product was the result of centuries of groping or of spirited controversy. [...] Mathematics can be properly taught only against a background of its own history.'

(Η γνώση των συμφωνιών και διαφωνιών μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών θα μπορούσε να προκαλέσει υγιή σκεπτικισμό και συζήτηση στην τάξη και να οδηγήσει σε μια πιο σταθερή κατανόηση των αρχών. [...] Ένα από τα πιο πολύτιμα εργαλεία τα οποία ο δάσκαλος μπορεί να αποκτήσει από τη γνώση της ιστορίας είναι μια εκτίμηση της επίδρασης των σημερινών παραδόσεων. [.] Είναι σημαντικό να μεταφερθεί στους μαθητές η γνώση ότι πολλά από αυτά που διδάσκονται σήμερα ως τελικό προϊόν ήταν το αποτέλεσμα μακροχρόνιας αναζήτησης, προβληματισμού και έρευνας ή διανοητικής διαμάχης. [….] Τα μαθηματικά μπορούν να διδαχθούν σωστά μόνο με φόντο τη δική τους ιστορία.)

1.4 Ενστάσεις – Δυσκολίες για την ενσωμάτωση της ΙΜ στη ΜΕ

Εκτός όμως από τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, έχουν διατυπωθεί και ενστάσεις – δυσκολίες κατά αυτής της ένταξης. Θα παρουσιάσουμε παρακάτω μια λίστα με αυτές τις ενστάσεις όπως διατυπώθηκε από τους Tzanakis & Arcavi, (2000, σ. 202) και εμπλουτίστηκε αργότερα από τον Siu (2006), προσπαθώντας παράλληλα και μία σύνδεση με την αντίστοιχη λίστα επιχειρημάτων που δόθηκε στη προηγούμενη ενότητα.

- Ενστάσεις επιστημολογικής και μεθοδολογικής φύσης

Α) Για τη φύση των μαθηματικών

1. Αυτά δεν είναι μαθηματικά. Μαθαίνεις πρώτα το θέμα και μετά την ιστορία του. (αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α1,Α2,Γ1,Γ4)

2. Η πρόοδος στα μαθηματικά είναι να απλουστεύει δύσκολα προβλήματα, οπότε ποιος ο λόγος να κοιτάμε πίσω.
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α1,Β1,Γ1,Γ2,Δ3,Ε1)

3. Το τι πραγματικά συνέβη είναι κάπως ελικοειδές. Το να προσπαθείς να το προσεγγίσεις ιστορικά μπορεί να μπερδέψει παρά να διαφωτίσει.
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α1,Β1,Γ1,Γ5,Δ3)

Β) Για τις δυσκολίες που εμφανίζονται σε μια ιστορική προσέγγιση

1. Βοηθάει πραγματικά η μελέτη πρωτότυπων κειμένων που είναι πολύ δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία;
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α4,Β1,Β2)

2. Μπορεί να καλλιεργήσει πολιτιστικό σωβινισμό και τοπικιστικό εθνικισμό.
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Ε1)

3. Η κακή αίσθηση των μαθητών για το παρελθόν μπορεί να τους εμποδίσει να αντιληφθούν το ιστορικό πλαίσιο της μαθηματικής εξέλιξης χωρίς να τους παρέχει μια ευρύτερη παιδεία για τη γενική ιστορία. (αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α4)

- Ενστάσεις πρακτικής και διδακτικής φύσης

Α) Το υπόβαθρο και η στάση των εκπαιδευτικών

1. Έλλειψη διδακτικού χρόνου. Δεν υπάρχει πραγματικός χρόνος στην τάξη για μια τέτοια ενσωμάτωση. (αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α2)

2. Οι καθηγητές θα πρέπει να είναι καλά καταρτισμένοι στην ιστορία. Από τη στιγμή που δεν είναι επαγγελματίες ιστορικοί πώς μπορεί να είναι σίγουροι για την ακρίβεια των λεγομένων τους;
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α3,Ε2)

3. Υπάρχει έλλειψη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών σε αυτό το αντικείμενο.
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Γ2,Γ3,Γ4,Γ5)

4. Υπάρχει έλλειψη κατάλληλου διδακτικού υλικού.
(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α2,Γ4)
Β) Το υπόβαθρο και η στάση των μαθητών

1. Οι μαθητές το αντιμετωπίζουν σαν μάθημα ιστορίας το οποίο αντιπαθούν.

(αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α4)

2. Οι μαθητές το αντιμετωπίζουν το ίδιο βαρετά όπως και τα ίδια τα μαθηματικά. (αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α2,Β1)

3. Οι μαθητές δεν έχουν αρκετή γενική γνώση για τον πολιτισμό ώστε να το εκτιμήσουν. (αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Δ1,Ε2,Ε3)

Γ) Θέματα αξιολόγησης

1. Πώς μπορεί να τεθεί ερώτημα και να αξιολογηθεί σε ένα διαγώνισμα; (αντιστοιχεί στα επιχειρήματα Α2,Α3,Γ3)

2. Υπάρχουν εμπειρικά στοιχεία που να αποδεικνύουν ότι με τη χρήση της ιστορίας στην τάξη, οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα;

1.5 Αναφορές σχετικά με τις ενστάσεις και δυσκολίες κατά τη χρήση της ΙΜ στη ΜΕ

Παρουσιάζουμε παρακάτω ενστάσεις που έχουν διατυπωθεί από διάφορους ερευνητές όπως παρουσιάζονται στο '*Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom'* (Rosa, 2001).

1. Σε γενικές γραμμές, οι εκπαιδευτικοί έχουν ελάχιστη κατάρτιση και προετοιμασία από τη βασική εκπαίδευση για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Ως εκ τούτου, έχει υπάρξει μια διεθνής ανησυχία σχετικά με την εκπαίδευση τόσο πριν όσο και μετά την ανάληψη υπηρεσίας των καθηγητών μαθηματικών για την ιστορία των μαθηματικών και της ενσωμάτωσής της στην τάξη (Silva & Araújo, 2001, van Maanen, 1997). Ωστόσο, η επιμόρφωση μέσω των προγραμμάτων βασικής εκπαίδευσης σε όλο τον κόσμο, συνήθως δεν προσφέρει μαθήματα σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών ή, εάν το κάνει, συχνά παραμελεί εντελώς τη διδακτική αξία του. Επιπλέον, αυτά τα μαθήματα δεν απαιτούνται γενικά για την πιστοποίηση των εκπαιδευτικών (Fasanelli, 2000).

2. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη φύση των μαθηματικών καθώς και για τη διδασκαλία και τη μάθηση τους, επηρεάζουν την προθυμία τους να ενσωματώσουν την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Πράγματι, αν τα μαθηματικά θεωρούνται ως ένα σταθερό και ολοκληρωμένο σώμα της γνώσης, και αν η διδασκαλία των μαθηματικών θεωρείται ως μια διάδοση γνώσεων από τους δασκάλους στους μαθητές, τότε δεν υπάρχει σχεδόν χώρος για την ιστορία των μαθηματικών στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης.

3. Ακόμα ένας άλλος λόγος για τον οποίο η ιστορία των μαθηματικών δεν έχει ενσωματωθεί στα σχολικά μαθηματικά αφορά τους τρόπους με τους οποίους τα σχολικά εγχειρίδια συνήθως την αντιμετωπίζουν. Αυτά ως επί το πλείστον περιορίζονται σε μια συμπερίληψη (όχι ενσωμάτωση) λίγων ιστορικών σημειώ-

σεων (γενικές πληροφορίες, βιογραφίες και αξιοπερίεργα) στο τέλος κάθε κεφαλαίου (Carvalho da Silva, 1993 Fasanelli, 2000). Το γεγονός αυτό οδηγεί τους εκπαιδευτικούς να αντιμετωπίζουν την ιστορία των μαθηματικών ως μια γνώση που διαχωρίζεται από το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και ως ξένη προς την καθημερινή εργασία στην τάξη (Jahnke, Knoche, & Otte, 1996). Ως εκ τούτου, οι εκπαιδευτικοί αγνοούν τις συχνά 'ρηχές' συστάσεις σχετικά με την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στο επίσημο πρόγραμμα σπουδών (Fasanelli, 2000).

4. Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών για την ενθάρρυνση των μαθητών μπορεί να έχει μια μάλλον αρνητική επίδραση. Πράγματι, αν οι καθηγητές απλά παρουσιάζουν πτυχές της ιστορίας των μαθηματικών, αντί να τις ενοποιήσουν πραγματικά στο πεδίο της διδασκαλίας τους, τότε το πιο πιθανό αποτέλεσμα είναι να χαθεί το ενδιαφέρον των μαθητών για το θέμα (Θωμαΐδης, 1991).

5. Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία στην τάξη δεν είναι ένας εύκολος στόχος (π.χ., Costa, 1994 · Fauvel, 1990b · Fauvel, 1991). Οι προσωπικότητες των εκπαιδευτικών, ο ενθουσιασμός και η προθυμία να εγκαταλείψουν τις επαγγελματικές ζώνες άνεσης και την ασφάλειάς, μπορεί να καθορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα ενσωματώνουν την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους (Bidwell, 1993 · Costa, 1991 · Furinghetti, 1997 · Swafford, 1995).

6. Είναι γενικά αποδεκτό ότι τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές δεν έχουν τους κατάλληλους πόρους για να υποστηρίξουν μια πλήρη ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη των μαθηματικών (Carvalho da Silva, 2001b · Tzanakis & Arcavi, 2000). Ενώ είναι σχετικά εύκολο να βρεθούν πληροφορίες σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών, είτε σε έντυπη μορφή είτε στο διαδίκτυο, ωστόσο, οι πληροφορίες αυτές πρέπει να αξιολογούνται προσεκτικά για την ποιότητα και την αξιοπιστία τους, για την εγκυρότητα του συγγραφέα, την ακρίβεια, τη διασταύρωση με άλλες πηγές, την ποιότητα του κειμένου, την πληρότητα των πληροφοριών και την ευκολία της πλοήγησης (Nagaoka & Barrow-Green, 2000).

7. Υπάρχουν ορισμένοι κίνδυνοι από την άκριτη χρήση δευτερογενών πηγών σε μια ιστορικά εμπνευσμένη μαθηματική διδασκαλία (Arcavi et al., 1982). Για παράδειγμα, δευτερογενείς πηγές με ιστορικά στοιχεία έρχονται σε αντίθεση συχνά η μία με την άλλη (Gardiner, 1992 · Rogers, 1991), ενώ δεν είναι δύσκολο να βρεθούν ιστορικά βιβλία που είναι στην πραγματικότητα ιστορική μυθιστοριογραφία (Gardiner, 1992, σ. 144 · Katz, 1997 · Rogers, 1991) και οι συγγραφείς δεν έχουν κανένα ενδοιασμό στη στρέβλωση ιστορικών γεγονότων (Gardiner, 1992), ή στη προσθήκη εφευρημάτων (Freudenthal, 1982).

8. Οι δευτερογενείς πηγές μπορούν εύκολα να οδηγήσουν σε μια σειρά από μύθους και εικασίες που έχουν μηδαμινή υποστήριξη από ιστορικές μαρτυρίες (Gardner, 1991 · Heiede, 1996 · Grugnetti, 2000 · Rogers, 1991). Μια άλλη παγίδα αφορά την εσφαλμένη αντιμετώπιση του παρελθόντος με σύγχρονες προδιαγραφές (Rogers, 1991). Οι κίνδυνοι αυτοί μπορεί σημαντικά να ελαχιστοποιηθούν με την ταυτόχρονη χρήση πρωτότυπων και δευτερογενών πηγών και

άλλων ιστορικών αποδεικτικών στοιχείων. Οι αυθεντικές πηγές θα βοηθήσουν στην αποσαφήνιση και την επέκταση του τι μπορεί να βρεθεί σε δευτερογενείς πηγές, και μπορούν να θέσουν σε προοπτική κάποιες από τις ερμηνείες, ή και λανθασμένες αναπαραστάσεις που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία "(Gardiner, 1992 · Jahnke, 2000, σ. 293 · Rogers, 1991).

1.6 Τρόποι με τους οποίους μπορεί να ενσωματωθεί η ΙΜ στη ΜΕ

Οι τρόποι (*hows*) με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί η ενσωμάτωση της ΙΜ στη ΜΕ είναι οι διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις που θα μπορούσε κανείς να ακολουθήσει. Στο άρθρο των Tzanakis & Arcavi (2000), παρουσιάζεται ένας κατάλογος με τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να ενσωματωθεί η ΙΜ στη ΜΕ, ταξινομημένος σε τρεις βασικές κατηγορίες :

Α) Εκμάθηση της ΙΜ με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών.

Β) Εκμάθηση μαθηματικών, ακολουθώντας μια προσέγγιση διδασκαλίας και μάθησης εμπνευσμένη από την ιστορία.

Γ) Ανάπτυξη βαθύτερης επίγνωσης, τόσο των ίδιων των μαθηματικών όσο και του κοινωνικού και πολιτιστικού πλαισίου στα οποία αυτά αναπτύχθηκαν.

Παρακάτω εξετάζουμε κάθε μια από τις προηγούμενες κατηγορίες αναλυτικότερα.

Α. Εκμάθηση της ΙΜ με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών.

1. Απομονωμένα πραγματικά στοιχεία, όπως ονόματα, ημερομηνίες, διάσημα έργα και εκδηλώσεις, διαγράμματα χρόνου, βιογραφίες, μεγάλα προβλήματα και ερωτήματα, απόδοση προτεραιότητας, αντίγραφα κ.λπ. Αυτά τα στοιχεία μπορεί να εμφανίζονται ως ιστορικά αποσπάσματα, παρουσιάσεις, σχόλια και ερμηνείες εικόνων από βιβλία, αυθεντικές εικόνες ή φωτογραφίες κλπ.

2. Πλήρεις σειρές μαθημάτων ή βιβλία για την ιστορία των μαθηματικών. Αυτές μπορεί να είναι μια απλή συλλογή ιστορικών δεδομένων, ή μια ιστορία των εννοιολογικών εξελίξεων, ή κάτι μεταξύ αυτών των δύο.

   Και στις δύο περιπτώσεις, η έμφαση δίνεται περισσότερο στη παροχή της ιστορίας από ότι στη μάθηση των μαθηματικών. Υπό αυτή την έννοια η ιστορία λογίζεται ως ‘στόχος’ σύμφωνα με τη διάκριση του Jankvist.

Β. Εκμάθηση μαθηματικών, ακολουθώντας μια διδασκαλίας και μάθησης εμπνευσμένη από την ιστορία.

Αυτό ουσιαστικά μπορεί να χαρακτηριστεί μια γενετική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση. Δεν είναι ούτε αυστηρά επαγωγική ούτε αυστηρά ιστορική, αλλά βα-

σική θέση της είναι ότι ένα θέμα μελετάται μόνο αν υπάρχει το ανάλογο κίνητρο. Έτσι, ένα αντικείμενο (π.χ. μια νέα ιδέα ή θεωρία), πρέπει να θεωρηθεί ότι είναι αναγκαίο για την επίλυση ενός προβλήματος, έτσι ώστε οι ιδιότητες ή οι μέθοδοι που συνδέονται με αυτό, να αναγνωρίζονται από το μαθητή ως απαραίτητες στην περίπτωση που αυτός χρειαστεί να λύσει αντίστοιχα προβλήματα. Αυτός ο χαρακτήρας της αναγκαιότητας του θέματος αποτελεί το κεντρικό πυρήνα του νοήματος που πρέπει να αποδίδεται σε αυτό από το μαθητή. Από μια τέτοια άποψη, η ιστορική προσέγγιση προσφέρει ενδιαφέρουσες δυνατότητες για μια βαθιά και σφαιρική κατανόηση του θέματος, σύμφωνα με το ακόλουθο γενικό σχήμα :

1. Ακόμη και ο δάσκαλος που δεν είναι ιστορικός πρέπει να έχει αποκτήσει μια βασική γνώση της ιστορικής εξέλιξης του θέματος
2. Σε αυτή τη βάση, τα κρίσιμα βήματα αυτής της ιστορικής εξέλιξης, προσδιορίζονται ως οι βασικές ιδέες, τα ερωτήματα και τα προβλήματα που άνοιξαν νέες προοπτικές της έρευνας.
3. Αυτά τα κρίσιμα βήματα έχουν ανακατασκευαστεί, έτσι ώστε να καθίστανται διδακτικά κατάλληλα για χρήση στην τάξη.
4. Αυτά τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα δίνονται ως ακολουθίες ιστορικών προβλημάτων αυξανόμενου επιπέδου δυσκολίας, έτσι ώστε το καθένα να βασίζεται σε ορισμένα από τα προηγούμενά του. Η μορφή αυτών των προβλημάτων μπορεί να διαφέρει από απλές ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα, αλλά να θέτουν τις ερωτήσεις που πιθανώς θα πρέπει να αντιμετωπιστούν ως μέρος ενός συγκεκριμένου σχεδίου μελέτης ή συνεργασίας μαθητών.

Εδώ η έμφαση δίνεται πρωταρχικά στη μάθηση των μαθηματικών παρά της ιστορίας και υπό αυτή την έννοια η ιστορία λογίζεται ως ‘εργαλείο’ σύμφωνα με τη διάκριση του Jankvist. Παραθέτουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα αυτού του τύπου προσέγγισης, τα οποία διαφέρουν στον τύπο, το περιεχόμενο και τη μεθοδολογία, όπως αναφέρονται στο άρθρο των Tzanakis & Thomaidis (2012, σ. 247)

1. Διδακτικές ενότητες και μαθηματικά βιβλία που διαπνέονται από την ιστορία.
2. Μαθητές ερευνούν έργα βασισμένα σε αυθεντικά κείμενα.
3. Εργασίες βασισμένες σε πρωτότυπες πηγές, είτε σχεδιασμένες ως καθοδηγούμενα σύνολα ερωτήσεων για εισαγωγή σε ένα νέο θέμα, ένα σύνολο προβλημάτων ή θέματα για συζήτηση, είτε στη μορφή μιας συλλογής ασκήσεων, ανακατασκευασμένων προβλημάτων και παιχνιδιών για την εδραίωση ενός θέματος
4. Σχολιασμένα αποσπάσματα αυθεντικών κειμένων για εισαγωγή σε ένα θέμα που θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να αντιληφθεί καλύτερα τη μαθηματική έννοια, τόσο στη μοντέρνα όσο και στην αυθεντική της μορφή.
5. Ιστορικά πακέτα με τη μορφή συλλογής υλικού, έτοιμα για χρήση στην τάξη, στενά εστιασμένα σε ένα μικρό μαθηματικό θέμα και σε στενή σχέση με το αναλυτικό πρόγραμμα.
6. Περισσότερο εντοπισμένη και ιστορικά θεμελιωμένη διδασκαλία που αποσκοπεί στη μάθηση μέσα λάθη, εναλλακτικές αντιλήψεις, αλλαγή προοπτικής, αναθεωρήσεις, με σκοπό να υποστηρίξει τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος.
7. Αναφορές για το παρελθόν ή και πρόσφατες εξελίξεις σχετικά με παλιά θέματα και προβλήματα που παραμένουν άλυτα ή που ανακατασκευάστηκαν με πιο έξυ-

πνες λύσεις, για να φανερώσουν στους μαθητές τον εξελικτικό χαρακτήρα των μαθητών.

Γ. Ανάπτυξη βαθύτερης επίγνωσης, τόσο των ίδιων των μαθηματικών όσο και του κοινωνικού και πολιτιστικού πλαισίου στα οποία αυτά αναπτύχθηκαν.

Οι Tzanakis & Thomaidis (2012, σ. 247) στο ίδιο άρθρο τους αναφέρουν ότι με τον όρο 'επίγνωση' εννοούμε την ικανότητα να αναγνωρίζεται και να γίνεται αντιληπτός ο γενικός χαρακτήρας των μαθηματικών τόσο ως σώμα γνώσης όσο και ως ανθρώπινη δραστηριότητα, εκτιμώντας τη σημασία των μαθηματικών κάθ' αυτών αλλά και της σχέσης με άλλα επιστημονικά πεδία και τη κοινωνία γενικότερα. Υπό αυτή την έννοια η ιστορία λογίζεται ως 'στόχος' σύμφωνα με τη διάκριση του Jankvist και διακρίνεται σε δύο κατηγορίες, την 'εσωτερική' και την 'εξωτερική' φύση της μαθηματικής δραστηριότητας.

Γ1) Επίγνωση της εσωτερικής φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας

Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει ευκαιρίες για να αναπτυχθούν, να αναλυθούν και να τονιστούν σημαντικές πτυχές του προβλήματος 'κάνω μαθηματικά', όπως:

1. Ο ρόλος των γενικών εννοιολογικών πλαισίων και των συναφών κινήτρων, ερωτημάτων και προβλημάτων, τα οποία οδήγησαν στην εξέλιξη συγκεκριμένων μαθηματικών πεδίων.
2. Η εξελισσόμενη φύση των μαθηματικών, τόσο σε περιεχόμενο όσο και σε μορφή, σημειογραφία, ορολογία, υπολογιστικές μεθόδους, τρόπους έκφρασης και παραστάσεις, καθώς και μετα-μαθηματικές έννοιες όπως απόδειξη, αυστηρότητα και τεκμηρίωση, σε σύγκριση με τα μαθηματικά του σήμερα.
3. Ο ρόλος των αμφιβολιών, παραδόξων, αντιφάσεων, διαισθήσεων, ευρετικών μεθόδων - πειραματισμών και δυσκολιών κατά την εκμάθηση και την παραγωγή νέων μαθηματικών στο πλαίσιο των ειδικών ζητημάτων και προβλημάτων, καθώς και τα κίνητρα για γενίκευση, αφαίρεση και φορμαλισμό σε ένα τέτοιο πλαίσιο.

Γ2) Επίγνωση της εξωτερικής φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας

Τα μαθηματικά θεωρούνται συχνά ως ένας κλάδος που σε μεγάλο βαθμό έχει αποσυνδεθεί από κοινωνικές και πολιτιστικές ανησυχίες και επιρροές. Η ιστορία τους μπορεί να αντικρούσει μια τέτοια άποψη. Για παράδειγμα:

1. Πτυχές των μαθηματικών μπορεί να θεωρηθούν ως στενά συνδεδεμένες με φιλοσοφικά ερωτήματα και προβλήματα, τις τέχνες (μουσική, αρχιτεκτονική κ.λπ.), και άλλες ανθρωπιστικές επιστήμες.
2. Το κοινωνικό και πολιτιστικό περιβάλλον μπορεί να θεωρηθεί ότι επηρεάζει θετικά ή αρνητικά την ανάπτυξη ορισμένων μαθηματικών πεδίων.
3. Τα μαθηματικά είναι αναγνωρισμένα ως ένα αναπόσπαστο μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς και λειτουργίας των διαφόρων πολιτισμών ή εθνών.

4. Ρεύματα στη μαθηματική εκπαίδευση καθ' όλη την ιστορία της αντικατοπτρίζουν τάσεις και ανησυχίες στον πολιτισμό και την κοινωνία.

Τρόποι για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση συνεπάγονται σαφώς τη χρήση πηγών. Αυτές οι πηγές μπορούν γενικά να ταξινομηθούν σε τρεις τύπους:

1. Πρωτογενές υλικό (αποσπάσματα από αυθεντικά μαθηματικά κείμενα).
2. Υλικό δευτερεύουσας πηγής (σχολικά βιβλία με αφηγήσεις της ιστορίας, ερμηνείες, ανακατασκευές κλπ).
3. Διδακτικό υλικό.

Οι ιστορικοί των μαθηματικών ως επί το πλείστον ενδιαφέρονται για αποδείξεις που παρέχονται από πρωτογενείς πηγές, και συμβάλουν στην πρόοδο της γνώσης, γράφοντας δευτερογενείς πηγές. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών (σε όλα τα επίπεδα) μπορούν να επωφεληθούν τόσο από τις πρωτογενείς όσο (και ίσως περισσότερο από) τις δευτερογενείς πηγές. Με τον όρο διδακτικό υλικό, εννοούμε το σώμα της βιβλιογραφίας, η οποία προκύπτει από πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές με έμφαση σε μια προσέγγιση εμπνευσμένη από την ιστορία. Από τις τρεις κατηγορίες, το διδακτικό υλικό είναι αυτό που φαίνεται να λείπει.

Ο Jankvist (2009α §2.4, 2.6, 2009c §6,9),προσπάθησε να ταξινομήσει τα hows με βάση τρείς μορφές διδακτικής αξιοποίησης. Σύμφωνα με την ορολογία του και υιοθετώντας την απόδοση στα Ελληνικά του Μπισμπιάνου (2011) :

Α) *διαφωτιστικές προσεγγίσεις* (*illumination approaches*).
Η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στην τάξη ή τα βιβλία που χρησιμοποιούνται συμπληρώνονται με ιστορικές πληροφορίες ποικίλου μεγέθους και έμφασης.

Β) *προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων* (*modules approaches*)
Εισαγωγικές ενότητες αφιερωμένες στην ιστορία, που συχνά βασίζονται στη λεπτομερή μελέτη των συγκεκριμένων περιπτώσεων. Η ιστορία φαίνεται περισσότερο ή λιγότερο άμεσα.

Γ) *προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία* (*history-based approaches*)
Άμεσα εμπνευσμένη ή βασισμένη στην ΗΜ. Δεν ασχολείται με τη μελέτη της ΗΜ άμεσα, αλλά μάλλον έμμεσα. Η ιστορική εξέλιξη δεν είναι απαραίτητο να συζητηθεί ανοικτά, αλλά, συχνά καθορίζει τη σειρά και τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά θέματα παρουσιάζονται.

1.7 Συμπεράσματα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα από τη μελέτη της πλούσιας βιβλιογραφίας αναφορικά με τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, και των τρόπων με τον οποίο μπορεί αυτή να επιτευχθεί, αλλά και τα σχετικά αντεπιχειρήματα, σημειώνω τα εξής:

- Επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ενσωμάτωσης της ΙΜ στη ΜΕ :

1. Γίνεται προσπάθεια να εξηγηθούν οι λόγοι/προβλήματα που οδήγησαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών καθώς και η σύνδεση αυτών με άλλα θέματα, τομείς και επιστήμες.
2. Συμβάλλει στην κατανόηση των συνθηκών, του κλίματος και του κοινωνικοοικονομικού πλαισίου της εποχής μέσα στην οποία αναπτύχθηκαν οι μαθηματικές έννοιες.
3. Γίνεται αναφορά στα πρόσωπα που συντέλεσαν στην ανάπτυξη αυτή εστιάζοντας στην προσωπικότητά τους, τον τρόπο σκέψης τους, τις γνώσεις που είχαν, τα κίνητρά τους (εσωτερικά και εξωτερικά) αλλά και την επιρροή που είχε σε αυτούς το γενικότερο πολιτιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο κινούνταν.
4. Επιχειρείται να εντοπιστούν παράγοντες που εμπόδισαν, καθυστέρησαν ή κατεύθυναν την εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας που σχετίζονται με την κοινωνία, τον τρόπο σκέψης των ανθρώπων, τις πεποιθήσεις τους αλλά και τις φιλοσοφικές ή θρησκευτικές τους αντιλήψεις.
5. Ελπίζεται ότι θα αναδειχθεί ότι η τελική μορφή μιας μαθηματικής έννοιας, από την οποία συνήθως ξεκινάμε τη διδασκαλία της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οφείλεται σε μια συνεχή ανθρώπινη προσπάθεια που πολλές φορές κρατάει χρόνια ή και αιώνες. Δίνεται μια ιδέα ότι συμμετέχουν σε αυτή αρκετοί άνθρωποι που ο καθένας βάζει το δικό του λιθαράκι, άλλοτε η προσπάθεια αυτή γίνεται σε κλίμα συνεργασίας και άλλοτε σε κλίμα ανταγωνισμού και διαμάχης για την πατρότητα της ανακάλυψης. Είναι μια προσπάθεια που πολλές φορές καταλήγει σε λάθη ή αδιέξοδα, αλλάζει πολλές φορές μορφή μέχρι να αποκτήσει την τελική και αυστηρή της διατύπωση και σίγουρα δεν είναι κάτι που ορισμένα φωτεινά μυαλά κάποια στιγμή, εκ του μηδενός και χωρίς λόγο οραματίστηκαν.
6. Βοηθάει στην κατανόηση και αποδοχή της έννοιας αφού μέσω της ιστορικής εξέλιξης δεν εμφανίζεται ως αφηρημένη έννοια, αλλά μια έννοια που αναπτύχθηκε στη βάση επίλυσης πραγματικών προβλημάτων.
7. Προκαλεί το ενδιαφέρον και κινητοποιεί τους μαθητές να ασχοληθούν με αυτή την έννοια, αφού βρίσκει εφαρμογή στο περιβάλλον κόσμο.
8. Ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών να ασχοληθούν με τα μαθηματικά επειδή κάνει φανερό ότι:

   α) και αυτοί που τα ανακάλυψαν συναντήσανε δυσκολίες

   β) αυτό που καλείται να μάθει ο μαθητής σε λίγες διδακτικές ώρες, η ανθρωπότητα έκανε αρκετά χρόνια να το αποδεχτεί και να το αφομοιώσει

   γ) τα μαθηματικά δεν είναι για λίγα φωτισμένα μυαλά, αλλά για οποιονδήποτε θελήσει και αποφασίσει να κοπιάσει για να τα μάθει.
9. Εμπλουτίζει το διδακτικό ρεπερτόριο του εκπαιδευτικού παρέχοντας του πολύτιμο πρωτότυπο υλικό προς αξιοποίηση αλλά και χρήσιμες ιδέες και ερωτήματα για να εισάγει και να συνδέσει τις μαθηματικές έννοιες.
10. Πληροφορεί τον εκπαιδευτικό για δυσκολίες που ενδεχομένως συναντήσουν οι μαθητές του, αυξάνοντας το βαθμό επίγνωσης και κατανόησης των λαθών που μπορεί να γίνουν, προετοιμάζοντας έτσι τους κατάλληλους διδακτικούς χειρισμούς.

- Ενστάσεις - Δυσκολίες:

1. Ο εκπαιδευτικός που σκοπεύει να ενσωματώσει την ιστορία στη διδασκαλία του, θα πρέπει πρώτα να την έχει μελετήσει σε βάθος, διασταυρώνοντας τις πληροφορίες που συλλέγει και κάνοντας αναφορά και σε πρωτότυπες πηγές. Σε αντίθετη περίπτωση κινδυνεύει απλά να αναπαράγει πιθανά στερεότυπα, μύθους ή ανέκδοτα που κυκλοφορούν κυρίως στο διαδίκτυο και τα οποία απέχουν πολύ από την πραγματικότητα και οδηγούν σε παρερμηνείες και στρεβλώσεις. Βέβαια μια σε βάθος έρευνα των ιστορικών πηγών δεν είναι εφικτό να γίνεται από έναν διδάσκοντα για όλο το εύρος των μαθηματικών που καλείται να διδάξει. Στην πράξη αυτό που μπορεί να κάνει είναι να αναζητήσει στη βιβλιογραφία έτοιμες διδακτικές προτάσεις, τις οποίες θα προσαρμόσει ανάλογα στις συνθήκες της τάξης του.

2. Η ενσωμάτωση της ιστορίας, για να έχει ουσιαστικό ρόλο στη διδασκαλία μιας ενότητας, πρέπει να ξεφύγει από την απλή αναφορά γεγονότων, προσώπων, χρονολογιών και αποσπασματικών πληροφοριών και να εντρυφήσει στην ουσία και τους πραγματικούς λόγους που οδήγησαν στην ανάπτυξη μιας μαθηματικής έννοιας. Για να επιτευχθεί όμως κάτι τέτοιο θα πρέπει να υποστηρίζεται από το γενικότερο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών, αφού σε αντίθετη περίπτωση μπορεί να έχει κόστος σε διδακτικό χρόνο, με πιθανό αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να μην καταφέρει να ολοκληρώσει τη διδακτέα ύλη ή να μην καταφέρει να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις και τους στόχους που αυτό προβάλλει.

3. Το σημερινό εξεταστικό σύστημα και γενικά ο τρόπος αξιολόγησης των μαθηματικών, επικεντρώνεται σε μεθοδολογίες επίλυσης ασκήσεων και τεχνάσματα που απέχουν πολύ από την πραγματική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση προβλημάτων. Έτσι μια ιστορική προσέγγιση μπορεί να υποβαθμιστεί από τους μαθητές αφού θα θεωρηθεί έξω από το πνεύμα των εξετάσεων και άρα περιττό να ασχοληθούν με αυτή. Συνεπώς οποιαδήποτε προσπάθεια διαφοροποίησης της διδασκαλίας από την παραδοσιακή, η οποία είναι εστιασμένη στην απλή παρουσίαση μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση ασκήσεων, κινδυνεύει να προκαλέσει αντιδράσεις από γονείς και μαθητές.

- Τρόποι με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί :

1. Η ενσωμάτωση της ιστορίας άλλοτε μπορεί να προηγείται μιας ενότητας προετοιμάζοντας το έδαφος για την εισαγωγή των νέων εννοιών με έμφαση στους λόγους για τους οποίους αυτές αναπτύχθηκαν και άλλοτε ως επιστέγασμα μιας ενότητας με έμφαση στη διαφορά μαθηματικής προσέγγισης, επιστημονικών αντιλήψεων, διαφορετικού τρόπου συμβολισμού και ποικιλίας εφαρμογών, μεταξύ παρόντος και παρελθόντος.
2. Θα πρέπει να γίνεται αναφορά στα πραγματικά προβλήματα που οδήγησαν στην ανάγκη δημιουργίας των εν λόγω εννοιών. Χρήσιμο θα είναι να σχεδιαστούν κα-

τάλληλα φύλλα εργασίας που θα εμπλέκουν τους μαθητές σε αντίστοιχες καταστάσεις προς την κατεύθυνση αυτή.

3. Οπωσδήποτε θα πρέπει να περιγράφεται ο χρόνος, ο τόπος, οι βασικοί πρωταγωνιστές και το ύφος της εποχής στο οποίο αναπτύχθηκαν οι εν λόγω έννοιες, προκειμένου οι μαθητές να αντιληφθούν τον τρόπο σκέψης και τις αντιλήψεις των ανθρώπων της εποχής εκείνης, που πολλές φορές επηρεάζονταν από προκαταλήψεις, θρησκευτικές αντιλήψεις ή και πολιτικές επιρροές. Εδώ η ανάγνωση αποσπασμάτων από πρωτότυπα κείμενα και ιστορικές πηγές που εντάσσουν τη μαθηματική δραστηριότητα στο γενικότερο ιστορικό πλαίσιο, μπορεί να βοηθήσει στην κατεύθυνση αυτή.
4. Κρίνεται αναγκαίο να διευκρινιστεί η μαθηματική γνώση που κατείχαν οι δημιουργοί των εννοιών αυτών, με έμφαση κυρίως στο συμβολισμό που χρησιμοποιούσαν. Να μην υποτιμηθεί δηλαδή από τον εκπαιδευτικό ο ρόλος του συμβολισμού (ο οποίος μπορεί να διαφέρει από τον σύγχρονο) και να είναι από τα στοιχεία που πρέπει να ενσωματώσει στα πλαίσια της διδασκαλίας του. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί παρουσιάζοντας αν είναι δυνατόν αυθεντικά κείμενα και έργα στην πρωτότυπη μορφή τους.
5. Είναι σημαντικό να σκιαγραφηθούν οι βασικοί πρωταγωνιστές, με αναφορά στη ζωή και το έργο τους, κάτι που μπορεί να πραγματοποιηθεί μελετώντας και παρουσιάζοντας τη βιογραφία τους ή κείμενα σχολιαστών και μελετητών τους. Επίσης κρίνεται σκόπιμο να απομυθοποιηθούν τα πρόσωπα αυτά, στο βαθμό που αυτό θα βοηθήσει να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά μπορεί να τα εμπνεύστηκαν κάποια φωτισμένα μυαλά, τα οποία όμως ανήκουν σε κοινούς ανθρώπους. Επίσης ότι δεν απευθύνονται σε λίγους, αλλά σε οποιονδήποτε έχει την επιθυμία, την επιμονή και την υπομονή να ασχοληθεί με αυτά.
6. Η ιστορική αναφορά δεν θα πρέπει να επικεντρώνεται μόνο στους εμπνευστές και αρχικούς δημιουργούς των εννοιών αυτών, αλλά να περιγράφεται όλη η ιστορική διαδρομή από την αρχική μέχρι την τελική μορφή της, με αναφορά σε όλους όσους συνέβαλλαν στην προσπάθεια αυτή. Τα αδιέξοδα ή και τα λάθη στα οποία οδηγήθηκαν, τις νεκρές περιόδους και τη δυσκολία αφομοίωσης των εννοιών αυτών από τους σύγχρονούς τους, σε μια προσπάθεια να αντιληφθούν οι μαθητές ότι οι έννοιες που καλούνται να μάθουν σε λίγες διδακτικές ώρες η ανθρωπότητα έκανε δεκαετίες ή και αιώνες να αποδεχτεί και να αφομοιώσει.
7. Τέλος θεωρώ σημαντική τη σύνδεση των εννοιών με πραγματικές εφαρμογές του περιβάλλοντα κόσμου, κάτι που θα προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα απαντήσει σε πιθανά ερωτήματά τους «*γιατί επιτέλους τα μαθαίνουμε όλα αυτά;*» Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να περάσουμε στους μαθητές την ιδέα ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν με πρόθεση να βρίσκουν πρακτικές εφαρμογές, ούτε και ότι η σύνδεση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα ήταν το πρωταρχικό μέλημά τους.

1.8 Ανάγκη εμπειρικής έρευνας

Τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και οι τρόποι που προτείνονται για την επίτευξη της, ακόμα και όταν προέρχονται από καταξιωμένους επιστήμονες, δεν μπορεί παρά να παραμένουν σε θεωρητικό επίπεδο αν δεν υποστηρίζονται από αντίστοιχη εμπειρική έρευνα. Επίσης έχει σημασία ο τόπος και ο τρόπος πραγματοποίησης αυτής της έρευνας.

Λέγοντας ‘τόπο’ εννοούμε τη χώρα, την περιοχή ακόμα και σε πιο συγκεκριμένο σχολείο γίνεται η έρευνα, αφού δεν είναι σίγουρο ότι τα όποια αποτελέσματα προκύψουν από αυτή, θα μπορούν να γενικευτούν ευρύτερα. Οι πεποιθήσεις και οι στάσεις τόσο των μαθητών όσο και των καθηγητών, η σύνθεση και το περιβάλλον της τάξης, ο χαρακτήρας και η παράδοση του σχολείου, η ιδιοσυγκρασία των ανθρώπων της περιοχής σχετικά με τη σημασία που αποδίδουν στη μαθηματική εκπαίδευση, οι στόχοι που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα κάθε χώρας, το μέγεθος της διδακτέας ύλης αλλά και το εξεταστικό σύστημα είναι σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν τόσο την αποδοχή μιας τέτοιας ενσωμάτωσης όσο και τους τρόπους με τους οποίους αυτή μπορεί να επιτευχθεί.

Λέγοντας ‘τρόπο’ εννοούμε τη συνολική διαδικασία σχεδιασμού και υλοποίησης μιας τέτοιας έρευνας, αφού παράγοντες όπως: ποιο συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα θα αφορά, ποιες ερωτήσεις, ασκήσεις, προβλήματα ή αναφορές θα τη συνοδεύουν, ποιες πηγές ή άλλο ιστορικό υλικό χρησιμοποιηθεί, η προσωπικότητα του καθηγητή και η γενικότερη ικανότητα του να υποστηρίξει μια τέτοια ενσωμάτωση, ο τρόπος με τον οποίο θα γίνει η παρουσίαση αλλά και ο τρόπος με τον οποίο θα δουλέψουν οι μαθητές στην τάξη, επηρεάζουν τα όποια αποτελέσματα προκύψουν, καθιστώντας παράλληλα επιφυλακτική οποιαδήποτε εγκυρότητα και γενίκευση τους.

Για όλους αυτούς τους λόγους πιστεύεται ότι πρέπει να σχεδιαστούν συγκεκριμένες διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες και να υλοποιηθούν σε πραγματικές συνθήκες τάξης, ερευνώντας παράλληλα τα οφέλη αλλά και την απήχηση που αυτές είχαν στους μαθητές. Οι παρεμβάσεις αυτές μάλιστα πρέπει να υλοποιούνται σε διάφορα σχολεία ανά την επικράτεια και από διαφορετικούς κάθε φορά μαθηματικούς, αυξάνοντας έτσι το βαθμό αξιοπιστίας, εγκυρότητας και γενίκευσης.

1.9 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα πάνω στα οποία θα επιχειρήσει να δώσει απαντήσεις η παρούσα έρευνα είναι τα εξής:

1. Κατά πόσο μια ιστορική προσέγγιση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα στις ιδιαίτερες συνθήκες του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος το οποίο χαρακτηρίζεται από υπέρμετρο συγκεντρωτισμό (π.χ. ένα βιβλίο) και ισχυρή επίδραση των εξεταστικών διαδικασιών;

2. Τι απήχηση έχει στους μαθητές η νέα προσέγγιση μέσω της ιστορίας; Δηλαδή, με ποιο τρόπο προσλαμβάνονται από τους μαθητές τα επιχειρήματα για τις θετικές ή αρνητικές επιδράσεις που διατυπώνονται από έμπειρους μαθηματικούς και εκπαιδευτικούς και οι αντίστοιχες διδακτικές παρεμβάσεις;

3. Μπορεί μέσα από μία εμπειρική έρευνα να τεκμηριωθεί η μία ή η άλλη άποψη όσον αφορά τα επιχειρήματα (whys) αλλά και να φανεί κατά πόσο οι τρόποι (hows) που προτείνονται είναι πραγματικά εφαρμόσιμοι;

1.10 Μεθοδολογία της έρευνας

Η διεξαγωγή της έρευνας περιλαμβάνει τα εξής στάδια

1. Σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης που να αφορά μία συγκεκριμένη έννοια των Μαθηματικών (λογάριθμος), με βάση τα επιχειρήματα (whys) και τους τρόπους ενσωμάτωσης της ιστορίας (hows) όπως περιγράφηκαν παραπάνω, προσαρμοσμένες βέβαια στις ανάγκες του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και του αναλυτικού προγράμματος σπουδών.

2. Πραγματοποίηση της παρέμβασης αυτής σε πραγματικές συνθήκες τάξης, εννοώντας ότι δε θα επιλεγούν μαθητές που να τους αρέσουν περισσότερο τα μαθηματικά, δε θα αφιερωθεί περισσότερος διδακτικός χρόνος από αυτόν που συνήθως προβλέπεται και γενικά δε θα γίνει προσπάθεια βελτίωσης των συνθηκών μαθήματος με σκοπό να έχει θετικά αποτελέσματα η παρέμβαση αυτή.

3. Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αυτής της παρέμβασης με ερωτηματολόγια αλλά και συνεντεύξεις για να διαπιστωθεί κατά πόσο είχε θετικά αποτελέσματα στην κατανόηση της έννοιας ή μπέρδεψε και δημιούργησε παρερμηνείες. Αν αύξησε το ενδιαφέρον των μαθητών ή την αντιμετώπισαν το ίδιο ή περισσότερο αδιάφορα, άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο βλέπουν τα μαθηματικά (πως δημιουργούνται, ποια εφαρμογή έχουν, ποιες ερωτήσεις – ασκήσεις έχουν ενδιαφέρον) ή δεν είχε καμία διαφορά από πριν, δημιούργησε ενστάσεις ή βελτίωσε την εικόνα που έχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά. Επίσης να καταγραφούν οι δυσκολίες και τα προβλήματα που εμφανίστηκαν στο σχεδιασμό και υλοποίηση αυτής της διδακτικής παρέμβασης, το κατά πόσο μια τέτοια παρέμβαση ήταν και προσωπικά πιο ευχάριστη, αλλά και τις εντυπώσεις το διδάσκοντος, όπως αποτυπώθηκαν από τις αντιδράσεις των μαθητών, αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας αλλά και της διαφορετικής προσέγγισης της έναντι μιας παραδοσιακής διδασκαλίας.

Κεφάλαιο 2^{ο} Ιστορική Εξέλιξη Λογαρίθμων

2.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Ο Victor Katz στο βιβλίο του 'Ιστορία των μαθηματικών' (1998) αναφέρει δύο πιθανές αιτίες που οδήγησαν στην εφεύρεση της έννοιας του λογαρίθμου. Η πρώτη έχει να κάνει με ορισμένους τριγωνομετρικούς τύπους, που μετασχηματίζουν τον πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση ή αφαίρεση. Η μέθοδος αυτή της 'προσθαφαίρεσης' ήταν γνωστή στους αστρονόμους του 16^{ου} αιώνα, που τη χρησιμοποιούσαν στους υπολογισμούς τους που ήταν ιδιαίτερα επίπονοι, δεδομένου ότι τα νούμερα που υπεισέρχονταν στις μετρήσεις είχαν 7 ή 8 ψηφία, ενώ ελαχιστοποιούνταν και τα πιθανά λάθη. Η δεύτερη και πιο πιθανή αιτία βασίζεται στο έργο των αλγεβριστών Stifel και Chuquet που όπως θα δούμε παρακάτω, συσχέτισαν τους όρους μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο 2, αντιστοιχίζοντας την πρόσθεση των όρων της πρώτης με πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων όρων της δεύτερης. Και στις δύο περιπτώσεις η βασική ιδέα που οδήγησε στην έννοια του λογαρίθμου, είναι η μετατροπή του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση και απλοποίηση μέσω αυτής της διαδικασίας των αριθμητικών υπολογισμών.

Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα, δύο άνδρες που εργάστηκαν ανεξάρτητα, ο Σκωτσέζος John Napier και ο Ελβετός Jobst Burgi, δημιούργησαν πίνακες που μετέτρεπαν τον πολλαπλασιασμό δύο οποιονδήποτε αριθμών και όχι μόνο δυνάμεων του 2, σε πρόσθεση. Ο Napier δημοσίευσε πρώτος το έργο του, με συνέπεια να θεωρείται ο 'πατέρας' των λογαρίθμων, ενώ σε αυτόν οφείλεται και ο όρος 'λογάριθμος', που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός'. Στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της έννοιας του λογάριθμου συνέβαλλαν και άλλοι, όπως ο Henry Briggs (1561-1631) καθηγητής γεωμετρίας στο Κολέγιο Γκρέσχαμ του Λονδίνου, ο Ολλανδός βιβλιοπώλης και εκδότης Adriaen Vlacq (1600-1666), ο Edmund Gunter (1581-1626) καθηγητής αστρονομίας στο Κολέγιο Γκρέσχαμ, στη συνεισφορά των οποίων θα αναφερθούμε παρακάτω. Στη μετέπειτα εξέλιξη των λογαρίθμων συνέβαλλαν και άλλοι Μαθηματικοί όπως ο Nicolaus Mercator (1620-1687), ο Βέλγος Gregoire de St.Vincent (1638-1675) και φυσικά ο Ελβετός Leonard Euler (1707-1783) στους οποίους θα κάνουμε μια απλή αναφορά.

Η εφεύρεση των λογαρίθμων σημαδεύει μια μεγάλη στιγμή στα μαθηματικά, αφού μείωσε δραστικά τη δυσκολία και τον αριθμό των υπολογισμών. Οι λογάριθμοι απέκτησαν τέτοια σπουδαιότητα το 18^{ο} αιώνα, ώστε ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός Pierre-Simon de Laplace να δηλώσει ότι η επινόηση των λογαρίθμων συντομεύοντας τους κόπους διπλασίασε τη ζωή των αστρονόμων. Όπως αναφέρει ο΄Edwards στο βιβλίο του 'The Historical Development of the Calculus' (1979), μόλις ο Kepler έλαβε τους πίνακες του Napier, αμέσως τους συμπεριέλαβε στους υπολογισμούς του, με αποτέλεσμα να καταλήξει στο 3^{ο} νόμο του για την κίνηση των πλανητών. Αρκετοί προσπάθησαν να διαδώσουν τους λογαρίθμους στην υπόλοιπη Ευρώπη, όπως ο Johann

Kepler στην Γερμανία, ο Bonaventura Cavalieri στην Ιταλία και ο Edmund Wingate στη Γαλλία (Eves, 1989).

Με την ανάπτυξη βέβαια των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των υπολογιστών τσέπης, η χρήση των λογαρίθμων ως μέσο υπολογισμού μηδενίζεται. Κανείς πια δε χρειάζεται λογαριθμικούς πίνακες για να κάνει υπολογισμούς. Είναι χαρακτηριστικό αυτό που αναφέρει ο H.Wussing (1979), ότι τους υπολογισμούς που έκανε ο Napier σε 20 χρόνια, ένας σύγχρονος υπολογιστής μπορεί να κάνει σε 30 δευτερόλεπτα. Παρόλα αυτά όμως η χρήση και εφαρμογή των λογαρίθμων δε σταματά. Αντίθετα παραμένει ενεργή μέσω της λογαριθμικής συνάρτησης που παίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού και βρίσκει πάρα πολλές εφαρμογές τόσο γεωμετρικές όσο και στο περιβάλλοντα κόσμο, αφού εμφανίζεται κάθε φορά που προσπαθούμε να αντιστοιχίσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής που μεταβάλλεται με αργό ρυθμό (αριθμητικά),με τις τιμές μιας άλλης που μεταβάλλεται γρήγορα (γεωμετρικά).

2.2 Κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο – Ανάγκη για απλούστευση αριθμητικών υπολογισμών

Η ευρωπαϊκή οικονομία από το 14^{ο} αιώνα άρχισε να αλλάζει και αυτό επέδρασε και στα μαθηματικά. Στη διάρκεια του 16^{ου} αιώνα η βελτίωση των ναυπηγικών τεχνολογιών, η ανάπτυξη της Ναυσιπλοΐας και της Τοπογραφίας και η μεγαλύτερη ασφάλεια στις θαλάσσιες διόδους ειδικά προς την ανατολή, οδήγησαν στην αύξηση του εμπορίου και την άνοδο της κυκλοφορίας του χρήματος. Δημιουργείται έτσι η ανάγκη για ευχέρεια σε εκτέλεση πολύπλοκων αριθμητικών πράξεων λόγω εμπορικών συμφωνιών, τήρησης λογιστικών βιβλίων, υπολογισμού τόκων και μετατροπής συναλλάγματος.

Στον αντίποδα η ανυπαρξία συστηματικής διδασκαλίας της Αριθμητικής καθιστούσε τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση πράξεις δύσκολες. Να σημειώσουμε ότι το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, οι δεκαδικοί αριθμοί και οι μέθοδοι υπολογισμού πράξεων δεν είχαν ακόμα τη μορφή που ξέρουμε σήμερα. Τα ινδό-αραβικά ψηφία αν και δεν είναι απόλυτα σαφές πότε ακριβώς έρχονται στην Ευρώπη (ίσως να πρωτοεμφανίστηκαν στην Ισπανία το 10^{ο} αιώνα από τους Άραβες και σιγά σιγά να πέρασαν στην Ευρώπη) για να αντικαταστήσουν τους λατινικούς αριθμούς, διαχώρισαν τους λεγόμενους ‘αβακιστές’ που έκαναν υπολογισμούς με άβακες, από τους λεγόμενους ‘αλγοριστές’ που έκαναν τις πράξεις σε χαρτί, με τους τελευταίους να επικρατούν προς το 16^{ο} αιώνα με την ανάπτυξη φθηνών υλικών γραφής. Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται σε συστηματική βάση από τον Stevin το 1585 με το έργο ‘De Thiende’(Η δεκάτη). Αν και ο Rudolff τα χειριζόταν με άνεση 55 χρόνια νωρίτερα, η χρήση τους δεν είχε γενικευτεί. Ο Stevin αντιλήφθηκε τη σημασία τους ως μέσο απλοποίησης υπολογισμών, ενοποίησης των πολυπληθών υποδιαιρέσεων των διαφόρων μονάδων μέτρησης και διατύπωσε μεθοδικούς κανόνες για την εκτέλεση των 4 πράξεων ανάλογους με αυτούς των

ακεραίων. Ουσιαστικά, αν εξαιρέσουμε το συμβολισμό, είναι οι ίδιοι κανόνες που χρησιμοποιούμε και σήμερα για την εκτέλεση πράξεων με δεκαδικούς.

Στην Αστρονομία με τη δημοσίευση του έργου του Κοπέρνικου 'De revolutionibus orbium coelestium' (Περί περιφορών των ουράνιων σωμάτων 1543), άρχισε να πραγματοποιείται η μετάβαση από το γεωκεντρικό στο ηλιοκεντρικό σύστημα. Η μετάβαση αυτή οδήγησε στην ανάγκη για ακριβείς μετρήσεις και κατάρτιση νέων αστρονομικών πινάκων. Το δεύτερο μισό του 16^{ου} αιώνα χαρακτηρίζεται από τη συσσώρευση πλούσιου υλικού αστρονομικών παρατηρήσεων, πάνω στο οποίο στηρίχτηκε ο Kepler για τη διατύπωση των τριών νόμων της κίνησης των πλανητών.

Οι παραπάνω εξελίξεις στην Αστρονομία οδήγησαν και σε αντίστοιχες εξελίξεις στην Τριγωνομετρία, ειδικά τη σφαιρική, και τη δημιουργία αντίστοιχων τριγωνομετρικών πινάκων μεγάλης ακρίβειας. Η ανάγκη όμως αυτή για μεγάλη ακρίβεια, οδήγησε και σε πολύπλοκους υπολογισμούς πολυψήφιων αριθμών (πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις, εξαγωγή ριζών) καθώς και την αναζήτηση αντίστοιχων τεχνασμάτων για απλοποίησή τους. Ένα τέτοιο τέχνασμα έμεινε γνωστό με το όνομα 'προσθαφαίρεση'. Αν και αρχικά έγινε προσπάθεια η τεχνική της προσθαφαίρεσης να μείνει κρυφή, ώστε να αποτελεί προνόμιο αποκλειστικής χρήσης των αστρονόμων, γνώρισε πλατειά διάδοση και ήταν το σημαντικότερο βοηθητικό μέσο για την εκτέλεση πράξεων μέχρι την επικράτηση των λογαρίθμων.

2.3 Μέθοδος της προσθαφαίρεσης

Μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για να πολλαπλασιάσει κανείς δύο μεγάλους αριθμούς, ήταν η μέθοδος της 'προσθαφαίρεσης'. Τη χρησιμοποιούσαν οι αστρονόμοι του σημαντικότερου αστεροσκοπείου της εποχής, το Uraniborg στο νησί Hveen της Δανίας υπό την καθοδήγηση του Tycho Brahe (1546-1601). Με τον όρο αυτό εννοούμε ορισμένους τύπους τριγωνομετρίας που μετασχηματίζουν το πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση ή αφαίρεση. Συγκεκριμένα :

$$2\cdot\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{B}=\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}+B)+\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$
$$2\cdot\eta\mu\,\mathrm{A}\cdot\eta\mu\,\mathrm{B}=\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-B)-\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$
$$2\cdot\eta\mu\,\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{B}=\eta\mu(\mathrm{A}+B)+\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$
$$2\cdot\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{A}\cdot\eta\mu\,\mathrm{B}=\eta\mu(\mathrm{A}+B)-\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

Ας δούμε με ένα παράδειγμα πως μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών με τη χρήση του δεύτερου τύπου δηλαδή:

$$\eta\mu\,\mathrm{A}\cdot\eta\mu\,\mathrm{B}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-B)-\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{2}\quad(1)$$

Έστω ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε το 42262 με το 57358. Διαιρώντας καθέναν από αυτούς τους αριθμούς με 10^5 με σκοπό να γίνουν μικρότεροι του 1 και επομένως

να αντιστοιχούν σε ημίτονα γωνιών έχουμε 0.42262 και 0.57358 αντίστοιχα. Από τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε ότι $\eta\mu 25° \approx 0.42262$, $\eta\mu 35° \approx 0.57358$ επομένως θεωρούμε A=25° και B=35°. Με χρήση πάλι τριγωνομετρικών πινάκων, μιας αφαίρεσης και μιας διαίρεσης με το 2 το δεύτερο μέλος της (1) γίνεται 0.2424038765. Αν πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με 10^{10} για να διορθώσουμε την αρχική διαίρεση καθενός από τους αρχικούς αριθμούς με 10^5, βρίσκουμε 2424038765. Να σημειωθεί ότι το πραγματικό αποτέλεσμα του γινομένου 42262 με το 57358 είναι 2424063796, η απόκλιση του οποίου από αυτό που βρέθηκε με τη μέθοδο της προσθαφαίρεσης οφείλεται στην εκτίμηση των αντίστοιχων τιμών ημιτόνων και συνημιτόνων. Αν αναλογιστούμε όμως ότι οι αστρονόμοι της εποχής εκείνης, πολλαπλασίαζαν αριθμούς με 8 ψηφία, τα πλεονεκτήματα της μεθόδου ως προς τον απαιτούμενο χρόνο, κόπο και πιθανά λάθη ενός τυπικού πολλαπλασιασμού, υπερτερούν των μειονεκτημάτων λόγω μικρών σχετικά αποκλίσεων. Βέβαια με τη μέθοδο της προσθαφαίρεσης δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί γινόμενο πολλών παραγόντων, ούτε υπολογισμός δυνάμεων και εξαγωγή ριζικών. Επίσης η μέθοδος απαιτεί πρόσθεση τόξων, τα οποία ήταν γραμμένα σε εξηκονταδικό σύστημα, το οποίο ενδεχομένως να δημιουργούσε δυσκολίες. Συνεπώς ήταν αναγκαίο να αναζητηθεί άλλη μέθοδος απλούστευσης αριθμητικών πράξεων που να παρακάμπτει αυτές τις δυσκολίες.

Τις αναγωγές των βασικών πράξεων σε απλούστερες, είχαν επισημάνει και διατυπώσει πολλοί μαθηματικοί του $15^{ου}$ και $16^{ου}$ αιώνα, όπως ο Γάλλος N. Chuquet το 1484 και ο Γερμανός M. Stifel το 1544, μέσω αντιστοίχισης όρων αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων.

2.4 Η συνεισφορά των αλγεβριστών Stifel και Chuquet

Όπως αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Β΄ Λυκείου (Θωμαΐδης, 2012) η βασική μαθηματική ιδέα είναι η ένα προς ένα αντιστοιχία των όρων μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, όπως π.χ.:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	…

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το γινόμενο 2 όρων της γεωμετρικής (π.χ. 32·128 = 4096) βρίσκεται ακριβώς κάτω από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής (5 + 7 = 12). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται ουσιαστικά σε μια πρόσθεση. Πολύ εύκολα μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι η διαίρεση ανάγεται σε αφαίρεση, η ύψωση σε δύναμη σε απλό πολλαπλασιασμό με τον εκθέτη και η εξαγωγή ρίζας σε απλή διαίρεση με τον δείκτη. Π.χ.

4096 : 128 = 32 (12 - 7 = 5)

$16^3 = 4096$ (4·3 = 12)

$\sqrt[4]{4096} = 8$ (12:4 = 3)

Στο σημείο αυτό επισημαίνουμε τα εξής :

- Για να είναι το γινόμενο δύο τυχαίων όρων μιας γεωμετρικής προόδου επίσης όρος της προόδου, θα πρέπει ο $1^{ος}$ όρος της προόδου να είναι δύναμη του λόγου λ της προόδου.
- Για να είναι το άθροισμα δύο τυχαίων όρων μιας αριθμητικής προόδου επίσης όρος της προόδου, θα πρέπει ο $1^{ος}$ όρος της προόδου να είναι πολλαπλάσιο της διαφοράς ω της προόδου.
- Για να είναι εφικτή η αναγωγή του πολλαπλασιασμού δύο τυχαίων όρων της γεωμετρικής προόδου με την πρόσθεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου, οφείλει ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου να είναι το ίδιο πολλαπλάσιο της διαφοράς ω, με τον εκθέτη του λόγου λ στον $1^{ο}$ όρου της γεωμετρικής. Δηλαδή αν α_1 και ω ο $1^{ος}$ όρος και η διαφορά της αριθμητικής προόδου και β_1 και λ ο $1^{ος}$ όρος και ο λόγος της γεωμετρικής και ισχύει ότι $\alpha_1 = \kappa\,\omega$ θα πρέπει και $\beta_1 = \lambda^{\kappa}$.

Και οι 3 αυτές συνθήκες ικανοποιούνται αν π.χ. επιλέξουμε $1^{ο}$ όρο της γεωμετρικής το 1 και $1^{ο}$ όρο της αριθμητικής το 0 .

Αρχικά αυτή η ιδέα δε φαίνεται και τόσο εντυπωσιακή, αφού στην ουσία πρόκειται για ιδιότητες δυνάμεων. Καταλαβαίνει όμως κανείς τη σπουδαιότητά της αν αναλογιστεί ότι τον $16^{ο}$ αιώνα δεν υπήρχε κάποιος κοινά αποδεκτός συμβολισμός για τις δυνάμεις, ούτε είχαν διατυπωθεί με γενικότητα οι ιδιότητές τους. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι για αντί για μεταβλητή x χρησιμοποιούσαν το co (cosa = πράγμα) και για τις δυνάμεις τα σύμβολα ce (censo =τερτράγωνο) και cu (cubo = κύβος). Η συμβολική άλγεβρα αρχίζει τον 3ο αιώνα μ.Χ με το Διόφαντο ο οποίος πρώτος χρησιμοποίησε συντομογραφίες για τους διάφορους όρους. Η εξέλιξή της πραγματοποιήθηκε κυρίως τον $16^{ο}$ και $17^{ο}$ αιώνα με τη συμβολή αρκετών[1], για να πάρει την τελική μορφή με την οποία την ξέρουμε σήμερα με τη συμβολή του Rene Descartes (1596-1650).

Το πρόβλημα όμως που τέθηκε στους μαθηματικούς της εποχής εκείνης, ήταν ότι για να γενικευτεί αυτή η βασική ιδέα στο γινόμενο δύο οποιονδήποτε αριθμών και ειδικά αριθμών που εμφανίζονταν συχνά σε υπολογισμούς, όπως οι τιμές τριγωνομετρικών αριθμών, θα έπρεπε να κατασκευαστούν γεωμετρικές πρόοδοι αρκετά «πυκνές» (δηλαδή με λόγο λ πολύ κοντά στο 1), ώστε ανάμεσα στους όρους τους να μπορούν να παρεμβληθούν χωρίς σημαντικό σφάλμα αυτοί οι αριθμοί. Ταυτόχρονα οι όροι μιας τέτοιας γεωμετρικής προόδου θα έπρεπε να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους όρους μιας αριθμητικής προόδου. Η βασική αυτή ιδέα ώθησε τους John Napier και Jobst Burgi στη δημιουργία λογαριθμικών πινάκων, που στην ουσία αντιστοιχού-

[1] όπως: Luca Pacioli (1445-1517) , Nicolas Chuquet (1430-1487) , Christoff Rudolff (1520) , Michael Stifel (1487-1567), Robert Record (1510-1558), Gerolamo Cardano (1501-1576), Rafael Bombeli (1526-1572), Francois Viete (1540-1603), Simon Stevin (1548 – 1620), Thomas Harriot (1560-1621), Albert Girard (1595-1632).

σαν όρους τέτοιων προόδων. Στους πίνακες του Napier η γεωμετρική πρόοδος είχε λόγο $\lambda = 1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$, ενώ στου Burgi είχε λόγο

$\lambda = 1 + \frac{1}{10^4} = 1,0001$.

2.5 Η συμβολή του John Napier

Ο John Napier (1550-1617) γεννήθηκε και έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του, στο Merchiston Castle κοντά στο Εδιμβούργο της Σκωτίας. Ο Howard Eves (1989) αναφέρει ότι ο Napier αφιέρωσε το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου και της δραστηριότητάς του στις πολιτικές και θρησκευτικές διαμάχες της εποχής του. Ήταν αντικαθολικός (γεγονός απόλυτα φυσιολογικό για τον τυπικό Άγγλο-Σκωτσέζο προτεστάντη της εποχής) και το 1593 δημοσίευσε το βιβλίο '*A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John'*, στο οποίο ασκούσε δριμύ κριτική στην εκκλησία της Ρώμης και τον ίδιο τον Πάπα. Επίσης υπήρξε συγγραφέας βιβλίων επιστημονικής φαντασίας της εποχής του και είχε προβλέψει τη δημιουργία πολεμικών μηχανών όπως πυροβόλα, άρματα μάχης και υποβρύχια. Σε στιγμές ανάπαυσης διασκέδαζε με τη μελέτη μαθηματικών και επιστημών και τα μεγαλύτερα επιτεύγματά του ήταν: η επινόηση των λογαρίθμων, ένα έξυπνος κανόνας για την απομνημόνευση δέκα τύπων που χρησιμοποιούνται στην επίλυση ορθογωνικών σφαιρικών τριγώνων, δύο τριγωνομετρικοί τύποι γνωστοί ως αναλογίες του Napier χρήσιμοι στην επίλυση πλάγιων σφαιρικών τριγώνων και τα λεγόμενα κόκκαλα του Napier,δηλαδή μια συσκευή που χρησιμοποιείται για τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση και την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών.

Ο Victor Katz στο βιβλίο του 'Ιστορία των Μαθηματικών' (1998) αναφέρει ότι στον Napier κυρίως οφείλουμε την εισαγωγή του σύγχρονου συμβολισμού για τα δεκαδικά κλάσματα. Τη βασική ιδέα αρχικά ανέπτυξε ο Stevin, αλλά στο Napier οφείλεται ο διαχωρισμός των δεκαδικών ψηφίων με την υποδιαστολή. Η μεγαλύτερη όμως συνεισφορά του είναι αυτή που αφορά στην κατάρτιση των πρώτων λογαριθμικών πινάκων. Οι πίνακες αυτοί πρωτοεμφανίστηκαν το 1614 στο βιβλίο '*Mirifici logarithmorum canonis descriptio'* (Περιγραφή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων) (Katz, 1998), στο οποίο περιέχεται μια σύντομη εισαγωγή όπου επιδεικνύεται η χρήση των πινάκων. Στο έργο αυτό εξηγεί την αναγκαιότητα των λογαρίθμων, ως ένα μέσο για την απλούστευση του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της εξαγωγής τετραγωνικής και κυβικής ρίζας μεγάλων αριθμών, που απαιτεί πολύ χρόνο και οδηγεί σε πολλά λάθη (Smith, 2000). Ο Napier ενδιαφερόταν επίσης και για την αστρονομία στην οποία υπεισέρχονται μετρήσεις και απαιτούνται υπολογισμοί με αριθμούς που έχουν 7 ή 8 ψηφία, γεγονός που φανερώνει το ενδιαφέρον του να δημιουργήσει μια μέθοδο που να απλουστεύει αυτούς τους υπολογισμούς.

Το δεύτερο έργο του για τους λογαρίθμους όπου περιγράφει και τη θεωρία στην οποία στηρίζεται η κατάρτιση των πινάκων '*Mirifici logarithmorum canonis constructio'* (Κατασκευή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων) (Katz, 1998) εμφανίστηκε το 1619, δύο χρόνια μετά το θάνατό του. Σε αυτό εμφανίζεται η δημιουργική ιδέα του να χρησιμοποιήσει τη γεωμετρία για να καταρτίσει έναν πίνακα για τη βελτίωση της αριθμητικής. Η αρχική δηλαδή προσέγγιση του λογαρίθμου από τον Napier βασίζεται στην κινητική, και στην ταυτόχρονη κίνηση δύο σωμάτων σε δύο ευθείες και καμία σχέση δεν έχει με τη σύγχρονη μορφή του, όπου παρουσιάζεται ως εκθέτης δύναμης. Το κινητικό αυτό μοντέλο αποτελεί μια πρωτότυπη σύλληψη σε μια εποχή που δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί οι κανόνες της ευθύγραμμης μεταβαλλόμενης κίνησης.

Συγκεκριμένα ο Napier θεώρησε μία ευθεία και ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους r, αναπαριστώντας στην ευθεία τους όρους της αριθμητικής προόδου

0, b, 2b, 3b, ...

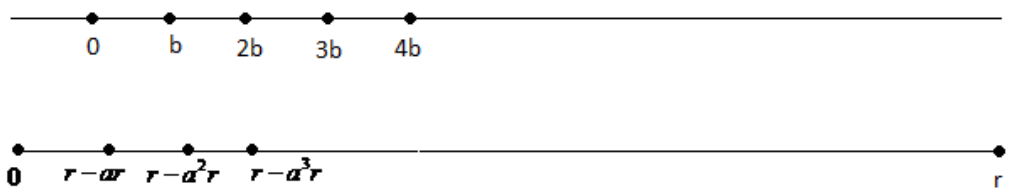
και στο ευθύγραμμο τμήμα τους όρους της ακολουθίας

$$0, r-ar, r-a^2r, r-a^3r, \ldots$$

οι αποστάσεις των οποίων από το δεξιό άκρο του ευθύγραμμου τμήματος είναι αντίστοιχα οι όροι της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

$$r, ar, a^2r, a^3r, \ldots$$

όπως φαίνεται στο σχήμα:



Στη συνέχεια ο Napier θεώρησε δύο σημεία Α και Β που κινούνται στην ευθεία και το ευθύγραμμο τμήμα αντίστοιχα, ξεκινώντας και τα δύο από το 0 με φορά προς τα δεξιά και με την ίδια αρχική ταχύτητα που είναι αριθμητικά ίση με την απόσταση r.

Το σημείο Α κινείται 'αριθμητικά' δηλαδή με σταθερή ταχύτητα και επομένως καλύπτει τα διαστήματα [0,b] , [b,2b] , [2b,3b],… σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Το σημείο Β κινείται 'γεωμετρικά' δηλαδή η ταχύτητά του μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε κα καλύπτει σε ίσα χρονικά διαστήματα καθένα από τα διαστήματα $[0, r-ar], [r-ar, r-a^2r], [r-a^2r, r-a^3r], \ldots$

Όπως επισημαίνει και ο Katz (1998), μελετώντας την κίνηση του σημείου Β παρατηρούμε :

1. Οι αποστάσεις που διανύει το σημείο Β κινούμενο στα αντίστοιχα διαστήματα $[0, r-ar], [r-ar, r-a^2r], [r-a^2r, r-a^3r], \ldots$ είναι
   $S_1 = r(1-a)$, $S_2 = ar(1-a)$, $S_3 = a^2r(1-a)$, $S_4 = a^3r(1-a)$
   και επομένως αποτελούν όρους μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με 1ο όρο $S_1 = r(1-a)$ και λόγο $a < 1$
2. Οι αποστάσεις του αριστερού άκρου κάθε ενός από τα διαστήματα $[0, r-ar], [r-ar, r-a^2r], [r-a^2r, r-a^3r], \ldots$ από το δεξί άκρο του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή από το r, είναι $d_1 = r$, $d_2 = ar$, $d_3 = a^2r$, $d_4 = a^3r$ που αποτελούν και αυτές όρους φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.
3. Για τους όρους των δύο παραπάνω γεωμετρικών προόδων παρατηρούμε ότι

   $S_1 = (1-a)\mathrm{d}_1$, $S_2 = (1-a)\mathrm{d}_2$, $S_3 = (1-a)\mathrm{d}_3$, $S_4 = (1-a)\mathrm{d}_4$ οπότε

   $\frac{d_1}{S_1} = \frac{d_2}{S_2} = \frac{d_3}{S_3} = \ldots = \frac{1}{1-a}$ και γενικά $\frac{d_\kappa}{S_\kappa} = \frac{d_\nu}{S_\nu}$

   Οπότε : $\frac{d_\kappa}{S_\kappa} = \frac{d_\nu}{S_\nu} \Rightarrow \frac{d_\kappa}{d_\nu} = \frac{S_\kappa}{S_\nu} \Rightarrow \frac{d_\kappa}{d_\nu} = \frac{S_\kappa}{S_\nu} = \frac{v_\kappa}{v_\nu} \Rightarrow \frac{v_\kappa}{d_\kappa} = \frac{v_\nu}{d_\nu}$ όπου

   v_κ, v_ν οι ταχύτητες του σημείου Β στα αντίστοιχα διαστήματα.

   Δηλαδή

   $\frac{v_1}{d_1} = \frac{v_2}{d_2} = \frac{v_3}{d_3} = \ldots = c \Rightarrow v_1 = c \cdot d_1$, $v_2 = c \cdot d_2$, $v_3 = c \cdot d_3$, ...

   που σημαίνει ότι το σημείο Β έχει σε κάθε διάστημα ταχύτητα που είναι ανάλογη της απόστασης του αριστερού άκρου του διαστήματος από το r .

   Δεδομένου όμως ότι η αρχική ταχύτητα του Β είναι ίση με r δηλαδή $v_1 = r$ και επειδή και $d_1 = r$ συμπεραίνουμε ότι c = 1 και επομένως $v_\kappa = d_\kappa$.

Συμπέρασμα : Το σημείο Β κινείται γεωμετρικά ισοδυναμεί με το ότι η ταχύτητά του σε κάθε διάστημα είναι ίση με την απόσταση του αριστερού άκρου του διαστήματος από το r.

Μελετώντας την κίνηση του σημείου Α παρατηρούμε ότι :

Το σημείο Α κινείται σε καθένα από τα διαστήματα [0,b] , [b,2b] , [2b,3b],… με σταθερή ταχύτητα ίση με r και οι αποστάσεις του αριστερού άκρου του κάθε διαστήματος από την αρχή 0, αποτελούν τους όρους της αριθμητικής προόδου 0,b,2b,3b,…

Αντιπαραβάλλοντας τις αποστάσεις του σημείου Α από την αρχή 0 με τις αποστάσεις του Β από το r, έχουμε μια αντιστοιχία όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου ανάλογη με αυτή των Stifel και Chuquet

0	b	2b	3b	4b
r	ar	a^2r	a^3r	a^4r

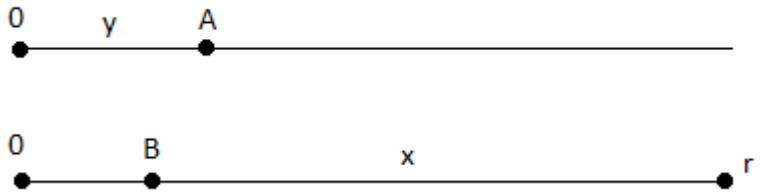
Παρατηρώντας την αντιστοιχία των συντελεστών του b στην αριθμητική πρόοδο και των εκθετών του a στη γεωμετρική, δεν θα μας φανεί παράξενος ο παρακάτω ορισμός του λογαρίθμου κατά Napier (Constructio, σ.19) :

> *The* **Logarithme** *therfore of any sine is a number very neerely expressing the line, which increased equally in the meane time, whiles the line of the whole sine decreased proportionally into that sine, both motions being equal-timed, and the beginning equally swift.*

Στο βιβλίο του Katz (2013, σ. 479), αναφέρεται ως εξής:

> *Ο λογάριθμος ενός δοθέντος ημιτόνου είναι εκείνος ο αριθμός που αυξάνεται καθ' όλη τη διάρκεια αριθμητικά με την ίδια ταχύτητα με την οποία η ακτίνα άρχισε να ελαττώνεται γεωμετρικά και στον ίδιο χρόνο στον οποίο η ακτίνα έχει ελαττωθεί στο δοθέν ημίτονο*[2].

Δηλαδή αν ένα σημείο κινούμενο σε μια ευθεία 'αριθμητικά' έχει διανύσει απόσταση y και ένα άλλο κινούμενο σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους r 'γεωμετρικά' απέχει από το δεξιό άκρο απόσταση x τότε το y είναι ο λογάριθμος του x, δηλαδή αν συμβολίσουμε με Nlog το λογάριθμο κατά Napier είναι Nlogx = y .



- Παρατηρήσεις στον ορισμό του Napier

1. Τον Napier ενδιέφεραν υπολογισμοί μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών και ιδιαίτερα ημιτόνων που υπεισέρχονται σε αστρονομικές μετρήσεις και επιλύσεις τριγώνων. Τα σημεία $0, r-ar, r-a^2r, \mathrm{r}-a^3r, \ldots$ αναπαριστούσαν ημίτονα ορισμένων γωνιών, το r το έθεσε ίσο με 10^7 διότι τόση ήταν η ακτίνα στον πίνακα ημιτόνων και το a έναν αριθμό κοντά στο 1 αλλά μικρότερο από αυτόν (Katz, 1998)

[2] Τόσο στην έκδοση του βιβλίου του Katz στην Αγγλική (1998), όσο και στην Ελληνική μετάφραση (2013), η λέξη που αναφέρεται είναι: 'number' / 'νούμερο'. Ωστόσο, πιστεύουμε πως η λέξη 'ημίτονο' αποδίδει καλύτερα το νόημα.

2. Στον ορισμό της γεωμετρικής κίνησης δίνεται ότι το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κάθε ένα διάστημα και μεταβάλλεται απότομα η ταχύτητά του καθώς μετέβαινε από το ένα διάστημα στο άλλο (Katz, 1998). Στον ορισμό ωστόσο του λογαρίθμου φαίνεται σαν η ταχύτητα του σημείου Β να μεταβάλλεται συνεχώς και αφήνεται να εννοηθεί ότι αναφέρεται σε στιγμιαία ταχύτητα και όχι μέση ταχύτητα. Σαν να γίνεται αναφορά σε στιγμιαία ταχύτητα χωρίς φυσικά να γίνεται χρήση του όρου. Αυτό βέβαια είναι λογικό αφού για τιμές του a πολύ κοντά στο 1 (ο Napier έθεσε $a = 1 - \frac{1}{10^7}$) τα διαστήματα $[0, r - ar], [r - ar, r - a^2 r], [r - a^2 r, \mathrm{r} - a^3 r], \ldots$ γίνονται απειροελάχιστα μικρά τείνοντας να εκφυλιστούν σε σημεία. Αν αυτή η θεώρηση είναι σωστή τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι πίσω από τον ορισμό του Napier κρύβεται η έννοια του ορίου.

3. Ο Napier φτάνει στον ορισμό του λογαρίθμου μελετώντας τη κίνηση δύο σημείων και αντιπαραβάλλοντας τις σχετικές τους θέσεις . Ορίζει το λογάριθμο αντιστοιχίζοντας ουσιαστικά την τιμή μιας μεταβλητής με την τιμή μιας άλλης. Στην ουσία στον ορισμό του λογαρίθμου κρύβεται με τη μορφή αντιστοίχισης η έννοια της συνάρτησης σε μια εποχή που ουδεμία αναφορά γίνεται στην έννοια αυτή.

4. Ο όρος ‘λογάριθμος’ που δημιούργησε ο Napier προκύπτει από τη σύνθεση των ελληνικών λέξεων ‘λόγος’ και ‘αριθμός’ και σημαίνει ο αριθμός που μετράει τους λόγους (Θωμαΐδης, 1986). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι την εποχή του Napier δεν είχε αναπτυχθεί ο συμβολισμός των δυνάμεων όπως των ξέρουμε τώρα. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι το x^3 γραφόταν x cubus. Συνεπώς οι όροι της γεωμετρικής προόδου του Napier δεν αποτυπώνονταν με τη σύγχρονη μορφή δυνάμεων, αλλά ως οι όροι μιας ακολουθίας που βρίσκονται σε συνεχή αναλογία. Για τους όρους λοιπόν της γεωμετρικής προόδου 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... έχουμε $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16}$. Συνεπώς για να φτάσουμε στον όρο 32 χρειάζεται να γράψουμε 5 λόγους , δηλαδή ο αριθμός των λόγων είναι 5 κατά αντιστοιχία με το $\log_2 32 = 5$. Πριν τον όρο λογάριθμο ο Napier χρησιμοποιούσε τον όρο ‘τεχνητός αριθμός’ (numerous artificialis) (Θωμαΐδης, 1986).

5. Από τον ορισμό του Napier προκύπτει άμεσα ότι Nlog r= 0. Ο ίδιος σημειώνει ότι παρόλο που θα μπορούσε να θέσει το λογάριθμο οποιουδήποτε αριθμού ίσου με 0, προτίμησε να το κάνει για το ημίτονο 90° (ολικό ημίτονο) προκειμένου οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις που υπεισέρχονται συχνότερα στους υπολογισμούς να μη δημιουργούν προβλήματα (Katz, 1998).

6. Παρατηρούμε ότι ο λογάριθμος ενός αριθμού κατά Napier αυξάνεται καθώς ο αριθμός μειώνεται, σε αντίθεση με το λογάριθμο όπως ορίζεται σήμερα. Αυτό

οφείλεται στο ότι αντιστοίχησε τους όρους μιας αύξουσας αριθμητικής προόδου με τους όρους μιας φθίνουσας γεωμετρικής. Αυτό σε συνδυασμό με ότι Nlog r= 0 είχε ως αποτέλεσμα οι λογάριθμοι όλων των ημιτόνων να είναι θετικοί σε αντίθεση με τις τιμές της σύγχρονης λογαριθμικής συνάρτησης $y = \ln x$ που είναι αρνητικοί όταν 0<x<1 (Κανδήλας, 2010). Γεγονός όμως απόλυτα φυσιολογικό δεδομένου ότι την εποχή του Napier οι αρνητικοί αριθμοί δεν ήταν κοινά αποδεκτοί.

7. Από τον ορισμό προκύπτει ότι αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε Nlogα - Nlogβ = Nlogγ -Nlogδ

Όπως σημειώνει ο Katz (2012, σ. 479) αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι λόγω της γεωμετρικής κίνησης του σημείου Β ο χρόνος που χρειάζεται για να μεταβεί το σημείο Β από το α στο β είναι ίσος με το χρόνο που χρειάζεται από το γ στο δ. Θα προσπαθήσουμε να το εξηγήσουμε περισσότερο. Τα σημεία α , β είναι όροι μιας γεωμετρικής προόδου και έστω ότι μεταξύ τους παρεμβάλλονται κ-1 άλλοι όροι. Δηλαδή το διάστημα [α.,β] χωρίζεται σε κ διαστήματα $[\alpha, \lambda_1], [\lambda_1, \lambda_2], [\lambda_3 . \lambda_4], ..., [\lambda_{\kappa-1}, \beta]$. Επειδή το σημείο Β διανύει καθένα από τα διαστήματα αυτά στον ίδιο χρόνο t συμπεραίνουμε ότι για να μεταβεί από το α στο β θα χρειαστεί χρόνο ίσο με κt.

Όμως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} = \mu \Rightarrow$ γ=αμ και δ=μβ και επειδή

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = ... = \frac{\lambda_{\kappa-1}}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha \cdot \mu}{\lambda_1 \cdot \mu} = \frac{\lambda_1 \cdot \mu}{\lambda_2 \cdot \mu} = \frac{\lambda_2 \cdot \mu}{\lambda_3 \cdot \mu} = ... = \frac{\lambda_{\kappa-1} \cdot \mu}{\beta \cdot \mu} \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\lambda_1 \cdot \mu} = \frac{\lambda_1 \cdot \mu}{\lambda_2 \cdot \mu} = \frac{\lambda_2 \cdot \mu}{\lambda_3 \cdot \mu} = ... = \frac{\lambda_{\kappa-1} \cdot \mu}{\delta} \Rightarrow$$

που σημαίνει ότι μεταξύ των γ , δ παρεμβάλλονται επίσης κ-1 το πλήθος όροι και επομένως ο χρόνος για να μεταβεί το σημείο Β από το γ στο δ είναι επίσης κt. (Στο ίδιο αποτέλεσμα φυσικά μπορούμε να φτάσουμε πολύ εύκολα με το σύγχρονο συμβολισμό των όρων γεωμετρικής προόδου και ιδιότητες δυνάμεων, αλλά προσπαθήσαμε να το δείξουμε χρησιμοποιώντας μόνο τα εργαλεία που είχε ο Napier στα χέρια του εκείνη την εποχή, που δεν ήταν άλλα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη και συγκεκριμένα η θεωρία λόγων αριθμών και μεγεθών).

Δεδομένου τώρα ότι το σημείο Α κινείται στην ευθεία με σταθερή ταχύτητα r συμπεραίνουμε ότι Nlogβ - Nlogα = rt = Nlogδ – Nlogγ.

Η ιδιότητα αυτή είναι κεντρική, διότι από αυτή μπορεί να προκύψουν όλες οι αντίστοιχες ιδιότητες που γνωρίζουμε για τους λογαρίθμους και είναι αυτή που μετατρέπει ουσιαστικά τη διαίρεση σε αφαίρεση, το πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση, την εξαγωγή ρίζας σε διαίρεση. Αν και όπως επισημαίνει ο Katz (1998)

τον Napier κυρίως τον ενδιέφερε αυτή η κεντρική ιδιότητα διότι οδηγεί στην εύρεση της τέταρτης αναλόγου μιας αναλογίας που εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα επίλυσης τριγώνου.

Το πόσο κεντρική είναι η ιδιότητα αυτή φαίνεται και στους παρακάτω εναλλακτικούς ορισμούς που έδωσε ο Napier για το λογάριθμο.

Στο '*Mirifici logarithmorum canonis descriptio'*, ο Napier έδωσε έναν δεύτερο ορισμό για τους λογαρίθμους ως ακολούθως: "*Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales servant differentiae*." *Οι λογάριθμοι είναι αριθμοί οι οποίοι αντιστοιχούν στους ανάλογους αριθμούς και έχουν ίσες διαφορές* (Κανδήλας , 2010).

Ο Napier δίνει έναν άλλο ορισμό το 1614 ως ακολούθως: '*Logarithmi dici poseunt numerorum proportionalium comites aequidifferentes*.' Οι λογάριθμοι μπορούν να ονομαστούν -ίσων διαφορών-'σύντροφοι' των ανάλογων αριθμών (Κανδήλας, 2010).

Είναι μάλλον προφανές ότι ο Napier κατασκεύασε τους λογαρίθμους για να ικανοποιείται αυτή η κεντρική ιδιότητα, θέλοντας με αυτόν τον τρόπο να μετατρέψει τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς σε αφαιρέσεις και προσθέσεις, χρησιμοποιώντας την παράλληλη κίνηση των δύο σημείων ως ένα θεωρητικό υπόβαθρο για την κατασκευή αυτή και φυσικά ουδεμία σχέση έχει η θεώρηση του λογαρίθμου με τη σύγχρονη ως εκθέτη δύναμης.

Για να βρει όμως εφαρμογή αυτή η βασική ιδέα και να μπορεί να μετατρέπεται σε πρόσθεση το γινόμενο δύο οποιονδήποτε αριθμών και ειδικά αριθμών που εμφανίζονταν συχνά σε υπολογισμούς, όπως οι τιμές τριγωνομετρικών αριθμών, θα έπρεπε να κατασκευαστούν γεωμετρικές πρόοδοι αρκετά «πυκνές» (δηλαδή με λόγο λ πολύ κοντά στο 1), ώστε ανάμεσα στους όρους τους να μπορούν να παρεμβληθούν χωρίς σημαντικό σφάλμα τέτοιοι αριθμοί .Ταυτόχρονα οι όροι μιας τέτοιας γεωμετρικής προόδου θα έπρεπε να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους όρους μιας αριθμητικής προόδου (Θωμαΐδης, 1986).

Ο Napier για τη δημιουργία του λογαριθμικού του πίνακα, πήρε τη γεωμετρική πρόοδο με $1^{ο}$ όρο το 10^7 και λόγο λ= $1-\frac{1}{10^7}=0,9999999$.

Αυτή περιγράφεται με τον αναδρομικό τύπο .

$\alpha_0=10^7$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu(1-\frac{1}{10^7})$ ν=0,1,2,… και έχει το γενικό τύπο $\alpha_\nu=\alpha_0(1-\frac{1}{10^7})^\nu$

Επειδή $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu(1-\frac{1}{10^7})=\alpha_\nu-\frac{\alpha_\nu}{10^7}$ στην ουσία για να βρει έναν όρο αφαιρεί από τον προηγούμενο το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του.

Η αντιστοιχία της γεωμετρικής και της αριθμητικής προόδου στην οποία στηρίζεται το σύστημα του Napier μπορεί να δοθεί κατά προσέγγιση ως εξής

$\alpha_\nu = 10^7 \cdot (1-\frac{1}{10^7})^\nu \quad \leftrightarrow \quad \nu = \beta_\nu$, όπου βέβαια το ν δεν είναι υποχρεωτικά φυσικός αριθμός – βλ. σ. 43 (Θωμαΐδης, 1986).

- Περιγραφή και κατασκευή πινάκων του Napier

Ο πίνακάς του Napier είναι πίνακας λογαρίθμων ημιτόνων. Αποτελείται από 7 στήλες. Στην $1^η$ είναι η τιμή ενός τόξου (ή γωνίας) και η $2^η$ το ημίτονό της. Η $7^η$ στήλη είναι η συμπληρωματική της γωνίας και η $6^η$ το ημίτονο της συμπληρωματικής της δηλαδή το συνημίτονο της γωνίας. Η $3^η$ στήλη είναι ο λογάριθμος του ημιτόνου και η $5^η$ ο λογάριθμος του συνημιτόνου. Η $4^η$ στήλη είναι η διαφορά των τιμών της αντίστοιχης $3^{ης}$ και $5^{ης}$ στήλης δηλαδή ο λογάριθμος της εφαπτομένης. Συνεπώς είχε όλα όσα χρειαζόταν για να επιλύσει ένα τρίγωνο σε κάθε περίπτωση.

Ο πίνακας λογαρίθμων του Napier αν και δε γνωρίζουμε πως ακριβώς καταρτίστηκε από τον κινηματικό ορισμό του (Katz, 1998), χρειάστηκε 20 χρόνια για να συμπληρωθεί και παρόλο που οι υπολογισμοί γίνονταν με το χέρι και με πολυψήφιους αριθμούς, τα λάθη ήταν ελάχιστα. Περισσότερες πληροφορίες για την κατάρτιση του πίνακα βρίσκουμε στο βιβλίο του Edwards (2013). Όπως περιγράφει ο Edwards, ο Napier για να συμπληρώσει τον $1^ο$ πίνακα του Constructio, ξεκίνησε από το 10.000.000 και για να βρει κάθε επόμενο όρο αφαιρεί από τον προηγούμενο το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του. Δηλαδή

10.000.000 -1 = 9.999.999
9.999.999 - 0,9999999 = 9.999.998,0000001
Συνεχίζοντας μέχρι τον $101^ο$ όρο 9.999.900,0004950

Είναι όμως προφανές ότι δε θα μπορούσε να συνεχίσει με αυτόν τον τρόπο, αφού θα απαιτούνταν 6.931.472 βήματα για φτάσει από το 10.000.000 στο 5.000.000 (δηλαδή από το ημ90° στο ημ30°).

Στο $2^ο$ πίνακα του Conrtuctio ξεκίνησε από το 10.000.000 και για να βρει κάθε επόμενο όρο αφαιρεί από τον προηγούμενο το ένα εκατοντάκις χιλιοστό του. Δηλαδή

10.000.000 -100 = 9.999.900
9.999.900 - 99,999 = 9.999.800,001
Συνεχίζοντας μέχρι τον $51^ο$ όρο 9.995.001,224804

Ούτε έτσι όμως θα μπορούσε να συνεχίσει, αφού θα απαιτούνταν 69.315 βήματα για να φτάσει από το 10.000.000 στο 5.000.000.

Αυτοί οι δύο πρώτοι πίνακες χρησιμοποιήθηκαν για να παρεμβληθούν τα κενά μεταξύ των καταχωρίσεων στον $3^ο$ πίνακά του, ο οποίος έχει 21 σειρές και 69 στήλες και όπου το στοιχείο στη μ γραμμή και στη ν στήλη είναι το

$$10^7 \cdot (1-\frac{1}{2000})^{\mu-1} \cdot (1-\frac{1}{100})^{\nu-1}$$

Δηλαδή κάθε σειρά στον παρακάτω πίνακα είναι μια γεωμετρική πρόοδος με 69 όρους και λόγο $(1-\frac{1}{100})$, ενώ κάθε στήλη είναι μια γεωμετρική πρόοδος με 21 όρους και λόγο $(1-\frac{1}{2000})$

	$1^{η}$ στήλη	$2^{η}$ στήλη		$69^{η}$ στήλη
$1^{η}$ σειρά	10000000.0000	9900000.0000		5048858.8900
$2^{η}$ σειρά	9995000.0000	9895050.0000		5046334.4605
$3^{η}$ σειρά	9990002.5000	9890102.4750		5043811.2932
$21^{η}$ σειρά	9900473.5780	9801468.8423		4998609.4034

Με αυτόν τον τρόπο ο Napier υπολόγισε 21· 69 = 1449 αριθμούς αντί για τους 6.900.000 περίπου που απαιτούνταν εξαρχής, ενώ οι δύο πρώτοι πίνακες χρησιμοποιήθηκαν για να γεμίσουν τα κενά ανάμεσα στις τιμές του πίνακα 3. Δηλαδή ο Napier υπολόγισε τους όρους της αρχικής γεωμετρικής προόδου με προσέγγιση.

Όπως αναφέραμε παραπάνω ο Napier σε κάθε όρο της γεωμετρικής προόδου αντιστοιχούσε το λογάριθμό του που ήταν κατά προσέγγιση η τάξη του όρου της προόδου. Δηλαδή οι λογάριθμοι των 100 πρώτων όρων της γεωμετρική προόδου θα ήταν οι αριθμοί 1,2,3,…,100. Δεδομένου όμως ότι ο Napier υπολόγισε τους όρους της γεωμετρικής προόδου με προσέγγιση, είναι φανερό ότι οι λογάριθμοι των 1449 αριθμών του $3^{ου}$ πίνακα δεν αντιστοιχούν σε ακέραιες τιμές του ν στον τύπο $\alpha_{\nu} = 10^{7} \cdot (1-\frac{1}{10^{7}})^{\nu}$

Ο Edwards σημειώνει ότι οι λογάριθμοι των αριθμών του $3^{ου}$ πίνακα θα μπορούσαν να βρεθούν με γραμμική παρεμβολή. Συγκεκριμένα ο λογάριθμος του στοιχείου που βρίσκεται στη μ γραμμή και ν στήλη θα είναι ο αριθμός *(μ* - 1) Nlog 9995000 + *(ν* - 1) Nlog 9900000 , όπου Nlog ο λογάριθμος κατά Napier, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τους λογάριθμους των 9995000 και 9900000. Αυτός είναι ο σκοπός του $1^{ου}$ και $2^{ου}$ πίνακα .

Μία άλλη ενδιαφέρουσα παρουσίαση για τον υπολογισμό των λογαρίθμων από τον Napier βρίσκουμε σε σχετική εργασία του Θωμαΐδη (1987). Σ΄ αυτή αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο για κάθε όρο της γεωμετρική προόδου υπολογίζονται με τη βοήθεια ανισοτικών σχέσεων κατάλληλα όρια ανάμεσα στα οποία θα βρίσκεται ο αντίστοιχος όρος της αριθμητικής. Στην περίπτωση μας οι ανισοτικές αυτές σχέσεις είναι οι $\frac{x_2 - x_1}{x_2} < \ln x_2 - \ln x_1 < \frac{x_2 - x_1}{x_1}$, $1-\frac{1}{x} < \ln x < x-1$

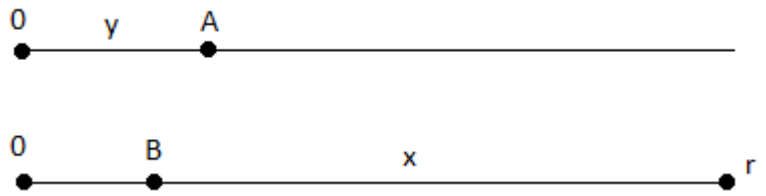
οι οποίες με σύγχρονο συμβολισμό αποδεικνύονται πολύ εύκολα με χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής, μπορούν όμως να προκύψουν και από τον κινηματικό ορισμό του Napier με χρήση γεωμετρικών μεθόδων.

2.6 Σύνδεση του λογαρίθμου του Napier με τους σημερινούς αποκαλούμενους ως 'φυσικούς' ή 'νεπέριους' λογάριθμους

Για να δείξουμε αυτή τη σύνδεση θα χρησιμοποιήσουμε γνώσεις απειροστικού λογισμού που φυσικά δεν υπήρχαν την εποχή του Napier. Ας θυμηθούμε πάλι τον ορισμό του λογαρίθμου κατά Napier .

Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Α ξεκίνησε από το 0 και κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα που είναι ίση με r όσο δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος στο οποίο κινείται το σημείο Β. Το σημείο Β ξεκίνησε από το 0 με αρχική ταχύτητα r προς τα δεξιά και η ταχύτητα διαρκώς ελαττώνεται ώστε να είναι πάντα ίση με την απόστασή του από το r.

Αν συμβολίσουμε με Nlog το λογάριθμο κατά Napier, τότε Nlogx = y.



Γνωρίζουμε όμως από τον απειροστικό λογισμό ότι η ταχύτητα ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο t. Συνεπώς από την κίνηση του Β έχουμε: $v_B = \frac{d(r-x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ και επειδή $v_B = x$ έχουμε τελικά ότι $\frac{dx}{dt} = -x$ από την οποία προκύπτει ότι $\ln x = -t + c$

Για t=0 και επειδή η αρχική ταχύτητα του Β είναι r έχουμε ότι $\ln r = c$ τελικά ότι

$$\ln x = -t + \ln r \Rightarrow t = \ln r - \ln x \Rightarrow t = \ln \frac{r}{x} \quad (1)$$

Από την κίνηση του σημείου Α με σταθερή ταχύτητα r έχουμε ότι

$$y = rt \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$y = r \ln \frac{r}{x}$$

και τελικά

$$N \log x = r \ln \frac{r}{x}$$

Αν θέσουμε το r = 1 τότε

$$N \log x = \ln \frac{1}{x} = -\ln x = \log_{\frac{1}{e}} x$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αν διαιρέσουμε τους όρους της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου του Napier με 10^7 τότε το σύστημα του Napier ισοδυναμεί ουσιαστικά με ένα λογαριθμικό σύστημα βάσης 1/e , ή αλλιώς οι λογάριθμοι του Napier είναι ουσιαστικά οι αντίθετοι των σημερινών 'φυσικών' ή 'νεπέριων' λογαρίθμων. Φυσικά ο Napier δεν γνώριζε τον αριθμό e ούτε τη σημασία του, αλλά περισσότερα για τον αριθμό e θα πούμε παρακάτω.

2.7 Η συμβολή των Henry Briggs ,AdriaenVlacq, Edmund Gunter

Ο Henry Briggs (1561-1631) ήταν καθηγητής γεωμετρίας στο Κολέγιο Γκρέσχαμ του Λονδίνου. Το 1615 επισκέφτηκε τον Napier, ένα χρόνο μετά τις δημοσιεύσεις του τελευταίου για τους λογαρίθμους, για να συζητήσουν γύρω από την εφεύρεσή του. Ο Eves (1989) περιγράφει το δύσκολο ταξίδι του Briggs από το Λονδίνο στο Εδιμβούργο με μια άμαξα με άλογα, μέσα σε ανώμαλους βρώμικους δρόμους και την αγωνία του Napier για το πότε αυτός θα φτάσει. Αυτά έχουν τη σημασία τους για να αντιληφθούμε ότι αυτό που σήμερα επιτυγχάνεται με ένα mail ή μια τηλεδιάσκεψη, την εποχή εκείνη για να επιτευχθεί απαιτούνταν πολύωρα ή και πολυήμερα ταξίδια και κάτω από δύσκολες συνθήκες. Εκεί συμφώνησαν ότι οι πίνακες θα ήταν πιο χρήσιμοι αν έθεταν το λογάριθμο του 1 ίσο με 0 και το λογάριθμο του 10 ίσο με 1. Έτσι γεννήθηκαν οι λογάριθμοι του Briggs ή οι κοινοί λογάριθμοι που διδάσκονται μέχρι σήμερα στα σχολεία.

Η επιλογή του να είναι log1=0 οδηγεί στις γνωστές ιδιότητες

logxy=logx + logy , logx/y =logx - logy, $\log x^{\nu} = \nu \log x$

Η επιλογή log10=1 διευκολύνει τους αριθμητικούς υπολογισμούς, επειδή το αριθμητικό μας σύστημα έχει βάση το 10. Έτσι αν ξέρουμε τους λογαρίθμους των αριθμών από το 1 μέχρι το 10 τότε μπορούμε να βρούμε τους λογαρίθμους οποιουδήποτε αριθμού, αφού κάθε αριθμός $\beta = \alpha \cdot 10^{\nu}$ με $1 \leq \alpha < 10$ οπότε $\log \beta = \log \alpha \cdot 10^{\nu} = \log \alpha + \log 10^{\nu} = \log \alpha + \nu$

Όπως αναφέρει ο Eves (1989), ο Briggs μόλις γύρισε στο Λονδίνο ξεκίνησε την κατασκευή τέτοιων λογαριθμικών πινάκων και το 1624 εξέδωσε το *'Arithmetica Logarithmica'* (Λογαριθμική Αριθμητική) που περιείχε τους λογαρίθμους από το 1 μέχρι το 20.000 και από το 90.000 μέχρι το 100.000 με 14 δεκαδικά ψηφία. Το κενό ανάμεσα στο 20.000 και 90.000 συμπλήρωσε αργότερα ο Ολλανδός βιβλιοπώλης και εκδότης AdriaenVlacq (1600-1666). Νωρίτερα ο Edmund Gunter (1581-1626) καθηγητής αστρονομίας στο Κολέγιο Γκρέσχαμ και συνάδελφος του Briggs είχε δημοσιεύσει έναν πίνακα κοινών λογαρίθμων των ημιτόνων και εφαπτομένων γωνιών ανά ένα πρώτο λεπτό με 7 δεκαδικά ψηφία. Ο Gunter ήταν αυτός που δημιούργησε και τις λέξεις cosine (συνημίτονο) και cotangent (συνεφαπτομένη).

Όπως αναφέρει ο Katz (1998), ο Briggs δεν μετέτρεψε τους λογαρίθμους του Napier σε κοινούς λογάριθμους με απλές αριθμητικές πράξεις, αλλά τους υπολόγισε από την αρχή. Ξεκίνησε με log10=1 και αφού υπολόγισε τις $\sqrt{10}$, $\sqrt{\sqrt{10}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$,... έφτασε μετά από 54 τέτοιους υπολογισμούς σε έναν αριθμό πολύ κοντά στο 1. Ο Katz (1998) σημειώνει ότι οι υπολογισμοί αυτοί γίνονταν με 30 δεκαδικά ψηφία και φυσικά όλοι αυτοί οι υπολογισμοί γίνονταν με το χέρι. Επειδή

$$\log\sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\log 10 = \frac{1}{2} \quad , \quad \log\sqrt{\sqrt{10}} = \log 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \quad ,... \quad \log 10^{\frac{1}{54}} = \frac{1}{54}$$

μπόρεσε να καταρτίσει έναν πίνακα λογαρίθμων για αριθμούς που ήταν κοντά ο ένας στον άλλο με τη βοήθεια των νόμων των λογαρίθμων.

- Ας δούμε αναλυτικά τη μέθοδο, γνωστή ως μέθοδο ρίζας, όπως περιγράφεται στο βιβλίο του Eves (1989, σ. 213).

Αρχικά φτιάχνουμε ένα πίνακα ριζών του 10. Έστω λοιπόν ότι

$10^{\frac{1}{2}} = 3{,}16228$ $\quad$ $10^{\frac{1}{4}} = 1{,}77828$ $\quad$ $10^{\frac{1}{8}} = 1{,}33352$

$10^{\frac{1}{16}} = 1{,}15478$ $\quad$ $10^{\frac{1}{32}} = 1{,}07461$ $\quad$ $10^{\frac{1}{64}} = 1{,}03663$

$10^{\frac{1}{128}} = 1{,}01815$ $\quad$ $10^{\frac{1}{256}} = 1{,}00904$ $\quad$ $10^{\frac{1}{512}} = 1{,}00451$

$10^{\frac{1}{1024}} = 1{,}00225$ $\quad$ $10^{\frac{1}{2048}} = 1{,}00112$ $\quad$ $10^{\frac{1}{4096}} = 1{,}00056$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το λογάριθμο ενός αριθμού N

Διαιρούμε το N με το μεγαλύτερο αριθμό της μορφής $10^{\frac{1}{K_1}}$ του πίνακα που δεν ξεπερνάει το N και έστω N_1 το πηλίκο. Τότε $N = 10^{\frac{1}{K_1}} \cdot N_1$.Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το N_1 και έστω ότι $N = 10^{\frac{1}{K_1}} \cdot 10^{\frac{1}{K_2}} N_2$.

Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρις ότου το πηλίκο N_v έχει πλησιάσει όσο κοντά στο 1 επιθυμούμε. Τότε θα έχουμε εκφράσει το N ως γινόμενο ριζών του 10 με όσο ικανοποιητική προσέγγιση θέλουμε. Αν λοιπόν έχουμε καταλήξει ότι

$N \square 10^{\frac{1}{K_1}} \cdot 10^{\frac{1}{K_2}} \cdot 10^{\frac{1}{K_2}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{1}{K_v}}$ τότε

$$\log N = \log(10^{\frac{1}{K_1}} \cdot 10^{\frac{1}{K_2}} \cdot 10^{\frac{1}{K_2}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{1}{K_v}}) = \log 10^{\frac{1}{K_1}} + \log 10^{\frac{1}{K_2}} + \log 10^{\frac{1}{K_2}} + \ldots + \log 10^{\frac{1}{K_v}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \ldots + \frac{1}{K_v}$$

Ας δούμε για παράδειγμα τον υπολογισμό του log5

Αρχικά διαιρούμε το 5 με το μεγαλύτερο αριθμό του πίνακα που δεν τον ξεπερνάει δηλαδή με το $10^{\frac{1}{2}} = 3{,}16228$ και βρίσκουμε 1,5811376602 . Συνεχίζουμε διαιρώντας τον 1,5811376602 με το μεγαλύτερο αριθμό του πίνακα που δεν τον ξεπερνάει δηλαδή με το $10^{\frac{1}{8}} = 1{,}33352$ και βρίσκουμε 1.1856872489 . Συνεχίζουμε διαιρώντας τον 1.1856872489με το μεγαλύτερο αριθμό του πίνακα που δεν τον ξεπερνάει δηλαδή με το $10^{\frac{1}{16}} = 1{,}15478$ και βρίσκουμε 1.0267646209. Συνεχίζουμε διαιρώντας τον 1.0267646209 με το μεγαλύτερο αριθμό του πίνακα που δεν τον ξεπερνάει δηλαδή με το $10^{\frac{1}{128}} = 1{,}01815$ και βρίσκουμε 1.0084610528. Συνεχίζουμε διαιρώντας τον 1.0084610528με το μεγαλύτερο αριθμό του πίνακα που δεν τον ξεπερνάει δηλαδή με το $10^{\frac{1}{512}} = 1{,}00451$ και βρίσκουμε 1.0039333136.Μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία και άλλο αν θέλουμε. Μέχρι τώρα λοιπόν έχουμε ότι

$5 \square 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{16}} \cdot 10^{\frac{1}{128}} \cdot 10^{\frac{1}{512}}$ οπότε $\log 5 \square \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} = 0{,}697265$

Με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή βρίσκουμε ότι log5=0,69897

Η απόκλιση οφείλεται στο ότι για λόγους οικονομίας δεν βρήκαμε πολύ ικανοποιητική προσέγγιση του 5 ως γινόμενο ριζών του 10. Όσο καλύτερη προσέγγιση του 5 βρούμε τόσο καλύτερη προσέγγιση θα έχουμε και για το log5.

- Μια άλλη ενδιαφέρουσα μέθοδο για υπολογισμό λογαρίθμων βρίσκουμε στο άρθρο του Rafael Villarreal – Calderon (2012, σ. 131).

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι ο λογάριθμος οποιουδήποτε αριθμού με ν ψηφία είναι μεταξύ του ν-1 και του ν . Πράγματι δεδομένου ότι ένας αριθμός Α με ν ψηφία βρίσκεται μεταξύ του $10^{\nu-1}$ και του 10^{ν} έχουμε ότι $10^{\nu-1} \le A < 10^{\nu} \Rightarrow \log 10^{\nu-1} \le \log A < \log 10^{\nu} \Rightarrow \nu - 1 \le \log A < \nu$

Ας δούμε πως με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να υπολογίσουμε το log2

$$2^{10} = 1024 \Rightarrow 3 < \log 1024 < 4 \Rightarrow 3 < \log 2^{10} < 4 \Rightarrow 3 < 10 \cdot \log 2 < 4 \Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.4$$
$$2^{20} = 1048576 \Rightarrow 6 < \log 1048576 < 7 \Rightarrow 3 < \log 2^{20} < 4 \Rightarrow 6 < 20 \cdot \log 2 < 7 \Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.35$$
$$2^{40} = 1.1 \cdot 10^{12} \Rightarrow 12 < \log 2^{40} < 13 \Rightarrow 12 < 40 \cdot \log 2 < 13 \Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.325$$
$$2^{60} = 1.2 \cdot 10^{18} \Rightarrow 18 < \log 2^{60} < 19 \Rightarrow 18 < 60 \cdot \log 2 < 19 \Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.3167$$
$$2^{80} = 1.1 \cdot 10^{24} \Rightarrow 24 < \log 2^{80} < 25 \Rightarrow 24 < 80 \cdot \log 2 < 25 \Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.3125$$
$$2^{100} = 1.3 \cdot 10^{30} \Rightarrow 30 < \log 2^{100} < 31 \Rightarrow 30 < 100 \cdot \log 2 < 31 \Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.31$$

και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου εγκλωβίσουμε το log2 σε όσο πιο μικρό διάστημα θέλουμε. Με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή βρίσκουμε ότι log2 = 0.30102

Δεν επιλέξαμε τυχαία να δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε το log2 και το log5, αφού αν κάποιος καταφέρει να υπολογίσει τους λογαρίθμους των πρώτων αριθμών μπορεί να υπολογίσει και τους λογαρίθμους οποιουδήποτε φυσικού αριθμού, αφού αυτός θα εκφράζεται ως γινόμενο πρώτων.

Ο Gunter επινόησε τον λογαριθμικό κανόνα, έναν κανόνα με διαβαθμίσεις στον οποίο οι αποστάσεις από το αριστερό άκρο της κλίμακας είναι ανάλογες των λογαρίθμων των αριθμών αυτών και εκτελούσε με μηχανικό τρόπο πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις προσθέτοντας και αφαιρώντας τμήματα της κλίμακας με τη χρήση διαβήτη.

2.8 Η συμβολή του Jobst Burgi

Όπως επισημαίνει ο Eves (1989, σ. 209), πολλές φορές έχει συμβεί να ασχολούνται την ίδια περίοδο και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο με την ίδια ιδέα αρκετοί μαθηματικοί. Αυτό αναδεικνύει ότι η ιστορία δεν προχώρησε επειδή κάποιος είχε μια ιδέα, αλλά επειδή αρκετοί είχαν παρεμφερείς ιδέες και πως η ιστορία κινείται προς ορισμένη κατεύθυνση με τη συμβολή αρκετών. Αυτό όμως συχνά έχει ως αποτέλεσμα, να δημιουργούνται διαμάχες για την πατρότητα μιας ανακάλυψης, με χαρακτηριστικά παραδείγματα την περίπτωση του απειροστικού λογισμού και τη διαμάχη μεταξύ Newton και Leibniz ή την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων $3^{ου}$ βαθμού με τη διαμάχη των Cardano και Tartaglia. Στην περίπτωση του λογαρίθμου όπως αναφέρει ο Eves (1989), ο μόνος σοβαρός αντίπαλος του Napier ήταν ο Ελβετός Jobst Burgi (1552-1632).

Ο Burgi ήταν ωρολογοποιός και σήμερα μια γραμμή παραγωγής διάσημων Ελβετικών ρολογιών φέρει το όνομά του. Ήταν επίσης κατασκευαστής αστρονομικών οργάνων και με τις ιδιότητες αυτές εργάστηκε στα μεγαλύτερα αστεροσκοπεία της εποχής του. Ο Burgi κατασκεύασε έναν πίνακα λογαρίθμων ανεξάρτητα από το Napier αλλά τον δημοσίευσε το 1620, δηλαδή 6 χρόνια μετά από τον Napier. Αν και προφανώς καθένας από αυτούς είχε συλλάβει την ιδέα πολύ πριν τη δημοσιεύσει, ωστόσο ο Napier πιστεύεται ότι είχε πρώτος την ιδέα και έτσι θεωρείται ο πατέρας της ανακάλυψης των λογαρίθμων. Η διαφορά στην προσέγγιση των δύο ανδρών είναι ότι του Napier ήταν γεωμετρική ενώ του Burgi αριθμητική.

Όπως σημειώνει ο Θωμαΐδης (2012), ο Burgi κατασκεύασε μια γεωμετρική πρόοδο σύμφωνα με την αναδρομική σχέση

$$\begin{cases} \alpha_0 = 100.000.000 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \dfrac{\alpha_\nu}{10.000} \end{cases} \quad (1)$$

Δηλαδή ο Bürgi ξεκινά από το 100.000.000 και υπολογίζει τον επόμενο κάθε όρου προσθέτοντας σ' αυτόν το ένα δεκάκις χιλιοστό του. Με τον τρόπο αυτό υπολόγισε, έναν προς ένα, περισσότερους από 23.000 όρους της προόδου. Από την (1), που γράφεται $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu(1 + 1/10^4)$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος αυτής της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = 1 + 1/10^4 = 1{,}0001$ και ο γενικός της όρος μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\alpha_\nu = \alpha_0 \cdot \lambda^\nu$ δηλαδή $\alpha_\nu = 10^8(1 + 1/10^4)^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Σ' αυτή την πρόοδο, ο Bürgi αντιστοίχισε την αριθμητική πρόοδο 0, 10, 20, 30, …, 230.270 με γενικό όρο $\beta_\nu = 10\nu$ Έτσι στους πίνακες του Bürgi υπάρχει η αντιστοιχία

$$\begin{array}{rcr} \alpha_0 = 100.000.000 & \leftrightarrow & 0 = \beta_0 \\ \alpha_1 = 100.010.000 & \leftrightarrow & 10 = \beta_1 \\ \alpha_2 = 100.020.001 & \leftrightarrow & 20 = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \alpha_\nu = 10^8(1 + 1/10^4)^\nu & \leftrightarrow & 10\nu = \beta_\nu \\ \alpha_{23027} = 999.999.779 & \leftrightarrow & 230.270 = \beta_{23027} \end{array}$$

Από τους πίνακες του Bürgi απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά στον όρο «λογάριθμος». Ο τίτλος του βιβλίου του ήταν «Πίνακες αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων» και οι όροι της αριθμητικής προόδου αναφέρονταν ως «κόκκινοι αριθμοί» από το χρώμα της μελάνης που είχαν εκτυπωθεί.

2.9 Ομοιότητες – Διαφορές στις προσεγγίσεις Napier – Burgi

1. Η προσέγγιση του Napier ήταν γεωμετρική ενώ του Burgi αριθμητική
2. Και οι δύο αντιστοίχησαν όρους αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου
3. Ο Napier αρχικά επέλεξε το $\log 10^7 = 0$ ενώ ο Bürgi επέλεξε το $\log 10^8=0$.
4. Οι λογάριθμοι στους πίνακές του Burgi ήταν ακέραιοι αριθμοί, ενώ του Napier όχι (πλ. σ. 43). Ακόμα περισσότερο, οι όροι των δύο σειρών θα μπορούσαν να αυξηθούν (στον Burgi η γ.π. είναι αύξουσα αλλά στον Napier είναι φθίνουσα) προς την ίδια κατεύθυνση ή προς αντίθετες κατευθύνσεις, ανάλογα με τη διάθεση ή την επιδίωξή τους. Δηλαδή, εάν m>n, μπορούμε να κατασκευάσουμε logm < logn ή logm > logn, δεν είχε γι'αυτούς καμία σημασία ότι και να επιλεγεί. Ο Napier επέλεξε την πρώτη εναλλακτική, ενώ ο Burgi τη δεύτερη. (Κανδήλας, 2010)
5. Και οι δύο δημιούργησαν πυκνές γεωμετρικές προόδους με λόγο πολύ κοντά στο 1, ο Napier λίγο μικρότερο του 1 και ο Burgi λίγο μεγαλύτερο
6. Και οι δύο είχαν σαν στόχο την απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών.
7. Ο Napier τους ονόμασε αρχικά τεχνητούς αριθμούς και έπειτα λογαρίθμους ενώ ο Burgi κόκκινους αριθμούς
8. Ο πίνακας λογαρίθμων του Napier είναι πίνακας λογαρίθμων ημιτόνων ενώ του Burgi δεν έχει άμεση σχέση με την Τριγωνομετρία.

2.10 Η σημασία του αριθμού e

Ο αριθμός e = 2,7 1828 1828 45 90 45 … ορίζεται ως $\lim_{\nu\to\infty}(1+\frac{1}{\nu})^{\frac{1}{\nu}}$

Το σύμβολο e χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον L. Euler το 1728, έναν αιώνα μετά την εμφάνιση των λογαρίθμων. Ποια όμως είναι η σχέση του με τους λογαρίθμους και γιατί οι λογάριθμοι με βάση το e ονομάζονται 'φυσικοί'; Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα, ανακατασκευάζοντας τους λογαρίθμους του Burgi και Napier με σύγχρονο συμβολισμό καθώς και μελετώντας την ιδιότητα που έχουν τα εμβαδά των ορθογωνίων κάτω από μια υπερβολή.

- Στο ιστορικό σημείωμα του Θωμαΐδη (2012, σ.187) βρίσκουμε τα εξής :

Η γεωμετρική πρόοδος του Bürgi $\alpha_\nu = 10^8(1 + 1/10^4)^\nu$ γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{\alpha_\nu}{10^8}=[(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}]^{\frac{\nu}{10^4}}=[(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}]^{\frac{10\nu}{10^5}}=[(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}]^{\frac{\beta_\nu}{10^5}}$$

Αν θέσουμε στην προηγούμενη $x = \frac{\alpha_\nu}{10^8}$ (1) και $y = \frac{\beta_\nu}{10^5}$ (2), τότε αυτή γίνεται $x=[(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}]^y$ (3) Παρατηρούμε όμως ότι είναι $(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}$ = 2,718145927… μια τιμή που συμπίπτει σε 4 δεκαδικά ψηφία μ' αυτήν του αριθμού e. Έτσι λοιπόν, η προηγούμενη ισότητα (3) μπορεί ν' αντικατασταθεί με ικανοποιητική ακρίβεια από την $x = e^y$, δηλαδή ισχύει $y = \ln x$ (4). Από τις ισότητες (1), (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι, αν

στο σύστημα του Bürgi, οι όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) διαιρεθούν με το 10^8 και οι όροι της αριθμητικής προόδου (β_ν) με το 10^5 (αυτές οι διαιρέσεις σημαίνουν απλώς μια μετακίνηση της υποδιαστολής κατά 8 και 5 θέσεις, αντίστοιχα, προς αριστερά), τότε :

το σύστημα προόδων του Bürgi ισοδυναμεί, με ικανοποιητική προσέγγιση, με το σημερινό σύστημα των φυσικών λογαρίθμων που έχουν βάση τον αριθμό e.

Σαν παράδειγμα ας πάρουμε από τους πίνακες του Bürgi τον 98° όρο της γεωμετρικής προόδου 100.984.768 και τον αντίστοιχο του της αριθμητικής 980. Διαιρώντας με το 10^8 και το 10^5 αντίστοιχα, βρίσκουμε 1,00984768 και 0,0098. Ένας σύγχρονος υπολογιστής τσέπης μας δίνει

$\ln(1{,}00984768) = 9{,}7995075 \times 10^{-3} = 0{,}0097995075 \approx 0.0098$

- Σε άρθρο του Θωμαΐδη (1986, σ. 1-30) βρίσκουμε τα εξής :

Ο Napier για τη δημιουργία του λογαριθμικού του πίνακα, πήρε τη γεωμετρική πρόοδο με 1° όρο το 10^7 και λόγο $\lambda=1-\frac{1}{10^7}=0{,}9999999$.

Περιγράφεται με τον αναδρομικό τύπο $\alpha_0=10^7$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu(1-\frac{1}{10^7})$ ν=0,1,2,…

και έχει το γενικό τύπο $\alpha_\nu=\alpha_0(1-\frac{1}{10^7})^\nu$

Στη γεωμετρική αυτή πρόοδο αντιστοίχησε την αριθμητική πρόοδο 0,1,2,3,…

$\alpha_\nu=10^7\cdot(1-\frac{1}{10^7})^\nu \leftrightarrow \nu=\beta_\nu$

Επειδή $\frac{\alpha_\nu}{10^7}=[(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}]^{\frac{\nu}{10^7}}$ αν θέσουμε x = $\frac{\alpha_\nu}{10^7}$ (1) και y = $\frac{\nu}{10^7}$ (2), τότε αυτή γίνεται $x=[(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}]^y$ (3) .

Όμως $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}=0{,}367879422$ η οποία τιμή συμπίπτει σε 8 ψηφία με το $\lim_{\nu\to\infty}(1-\frac{1}{\nu})^\nu=\frac{1}{e}=0{,}367879441$

Έτσι λοιπόν, η προηγούμενη ισότητα (3) μπορεί ν' αντικατασταθεί με ικανοποιητική ακρίβεια από την $x = (1/e)^y$, δηλαδή ισχύει y = -lnx (4). Από τις ισότητες (1), (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι, αν στο σύστημα του Napier, οι όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) διαιρεθούν με το 10^7 και οι όροι της αριθμητικής προόδου (β_ν) με το 10^7 (αυτές οι διαιρέσεις σημαίνουν απλώς μια μετακίνηση της υποδιαστολής κατά 7 θέσεις, αντίστοιχα, προς αριστερά), τότε :

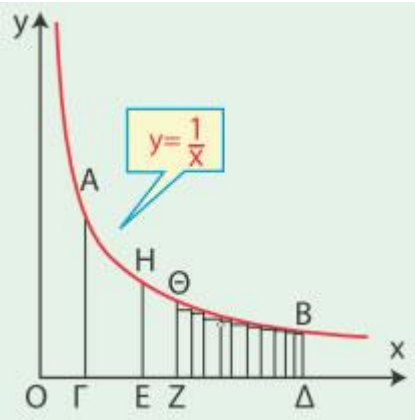
το σύστημα προόδων του Napier ισοδυναμεί, με ικανοποιητική προσέγγιση, με το σημερινό σύστημα των φυσικών λογαρίθμων που έχουν βάση τον αριθμό 1/e.

Συμπέρασμα :

Ο αριθμός e δεν επιλέγεται αυθαίρετα αλλά εμφανίζεται αναπόφευκτα όταν θελήσει κάποιος να κατασκευάσει μια πυκνή γεωμετρική πρόοδο (οπότε ο λόγος της θα είναι ένας αριθμός ελάχιστα μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας). Με την έννοια αυτή, ο αριθμός e «υπάρχει» στους πίνακες των Bürgi και Napier, οι οποίοι όμως δεν είχαν καμιά αντίληψη του ρόλου του. Αυτό αναδεικνύει το γεγονός (που έχει σαφείς διδακτικές προεκτάσεις) ότι μια μαθηματική ιδέα δεν έχει συγκεκριμένη χρονολογία γέννησης και πως οι μεγάλες ιδέες της επιστήμης έχουν μακρά και πολύπλοκη πορεία εξέλιξης.

2.11 Η εμφάνιση των φυσικών λογαρίθμων

Ενώ λοιπόν οι λογάριθμοι είχαν επινοηθεί, όπως είδαμε, αποκλειστικά για την απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών, γύρω στο 1650 διαπιστώθηκε μια απροσδόκητη εμφάνισή τους σε γεωμετρικά ζητήματα. Αφετηρία υπήρξε το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από ένα τόξο ΑΒ της υπερβολής y = 1/x τις παράλληλες από τα Α, Β προς τη μια ασύμπτωτη και από το τμήμα ΓΔ που ορίζουν οι παράλληλες στην άλλη ασύμπτωτη (δηλ. το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τραπεζίου ΑΒΔΓ στο παρακάτω σχήμα). (Θωμαΐδης, 2012)



Παρατηρήθηκε τότε ότι, αν το ΓΔ διαιρεθεί έτσι ώστε τα τμήματα ΟΓ, ΟΕ, ΟΖ, ΟΔ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ΑΗΕΓ) (ΗΘΖΕ), (ΘΒΔΖ) είναι ίσα μεταξύ τους και επομένως τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΑΘΖΓ), (ΑΒΔΓ) αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Ο τετραγωνισμός του χωρίου μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων της μελετήθηκε από τον Gregory St. Vincent στο Βιβλίο VII του έργου του '*Opus geometricum*', Αμβέρσα, 1647 (Κανδήλας, 2010). Η προσπάθεια αυτή του Gregory δεν ήταν τυχαία. Δεδομένου ότι οι προηγούμενοι από αυτόν είχαν ασχοληθεί με εμβαδά ευθυγράμμων και παραβολικών χωρίων, αυτός έκανε το αμέσως επόμενο πιο δύσκολο – που ήταν το υπερβολικό χωρίο. Αυτό αναδεικνύει το γεγονός ότι οι μεγάλες ιδέες δεν ανήκουν σε

άτομα, αλλά σε μια εποχή και είναι αποτέλεσμα μιας μεγάλης συνέχειας όπου ο ένας βασίζεται στον προηγούμενό του.
Ο Gregory, εξετάζοντας τις ιδιότητες των κωνικών τομών, αποδεικνύει μια πρόταση που δίνει για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, την λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής. Διατυπώνουμε την πρόταση του Gregory με ισοδύναμο τρόπο:

Πρόταση του Gregory

Για $0 < a < \beta$ θέτουμε $E_{\alpha,\beta}$ = το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του άξονα $x'x$, των ευθειών $x = a$, $x = \beta$ και της υπερβολής $y = 1/x$. Τότε για $\lambda > 0$ ισχύει
$E_{\alpha,\beta} = E_{\lambda a,\lambda\beta}$

Όπως παρατηρεί ο Θωμαΐδης (2012) υπάρχει η βασική αρχή ενός λογαριθμικού συστήματος, του οποίου όμως οι λογάριθμοι (όροι της αριθμητικής προόδου) έχουν εδώ μια προφανή **φυσική σημασία:** Εκφράζουν τα εμβαδά συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων. Πρώτος χρησιμοποίησε τον όρο «φυσικοί λογάριθμοι» το 1668 ο N. Mercator (1620-1687) και αυτοί είναι ακριβώς οι σημερινοί λογάριθμοι με βάση τον e, που συμβολίζονται διεθνώς με το σύμβολο In (από τα αρχικά των λέξεων logarithmus naturalis). Τη σχέση των φυσικών λογαρίθμων με το εμβαδόν χωρίου κάτω από μία υπερβολή 'υπενθυμίζει' ο γνωστός τύπος ολοκλήρωσης $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$

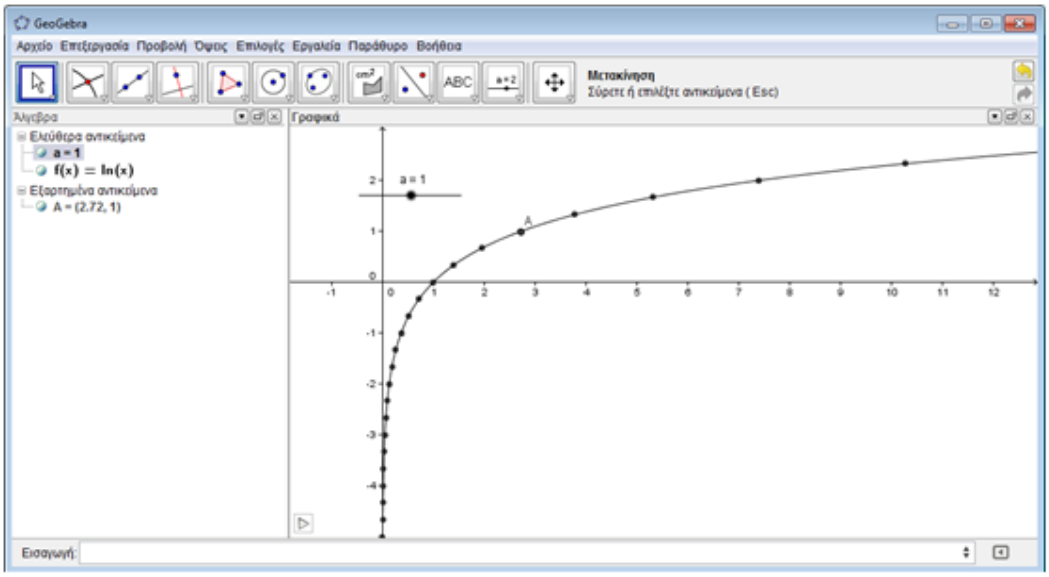
2.12 Η λογαριθμική συνάρτηση

Στη σημερινή εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η αρχική χρησιμότητα των λογαρίθμων ως ένα μέσο απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών έχει φυσικά εκμηδενιστεί. Αντίθετα όμως, είναι πολύ μεγάλη η χρησιμότητα της λογαριθμικής συνάρτησης σαν ένα μέσο μαθηματικής περιγραφής καταστάσεων του φυσικού κόσμου. Πρέπει μάλιστα να σημειώσουμε ότι πολλές από τις εφαρμογές της λογαριθμικής συνάρτησης στηρίζονται στην αρχική ιδέα της αντιστοιχίας μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου (Θωμαΐδης, 2012).

Συγκεκριμένα, όταν ένα μέγεθος μεταβάλλεται πολύ γρήγορα («γεωμετρικά») και ένα άλλο, που σχετίζεται μ' αυτό, πολύ αργά («αριθμητικά») τότε η μεταξύ τους σχέση μπορεί να εκφραστεί λογαριθμικά.

Με τη βοήθεια ενός προγράμματος Geogebra θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης ενώνοντας σημεία των οποίων οι τετμημένες αυξάνονται γεωμετρικά και οι τεταγμένες αριθμητικά.

1. Ορίζουμε παράμετρο a με τιμές από -50 μέχρι 50 με βήμα 0.1
2. Θεωρούμε το σημείο $A(e^a, a)$
3. Κάνουμε το σημείο A να έχει ίχνος ενεργό
4. Δίνουμε κίνηση στη παράμετρο a και καθώς το σημείο A κινείται αφήνει το ίχνος πάνω σε μια τροχιά
5. Επαληθεύουμε ότι η παραπάνω τροχιά είναι γραφική παράσταση της lnx



Στην προκειμένη περίπτωση σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση της lnx αντιστοιχίζοντας τους όρους της αριθμητικής προόδου 0,1,2,3,4,… με τους όρους της γεωμετρικής 1,e^2, e^3 , e^4 , … . Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση οποιαδήποτε λογαριθμικής συνάρτησης θέλουμε.

Αν αναλύσουμε την κίνηση του Α κατά τη τροχιά της γραφικής παράστασης σε δύο κινήσεις, μιας κατά μήκος του χχ΄ και μιας κατά μήκος του ψψ΄, έχουμε κάτι αντίστοιχο με τον κινηματικό ορισμό του Napier.

2.13 Εφαρμογές λογαριθμικής συνάρτησης

1. Ο νόμος των Weber-Fechner στη Ψυχολογία, που περιγράφει μαθηματικά τη σχέση ανάμεσα σ' ένα ερέθισμα και την αίσθηση που προκαλεί. Αν, για παράδειγμα, Ε είναι η ένταση ενός ήχου και Α η ένταση του ακουστικού αισθήματος που προκαλεί, τότε ισχύει A = k logE όπου k μια σταθερά, εξαρτωμένη από τη συχνότητα του ήχου και τον αποδέκτη του ερεθίσματος. Η σχέση αυτή προέκυψε ύστερα από πειράματα των Γερμανών επιστημόνων E.H. Weber (1795-1878) και G.T. Fechner (1801- 1887), που έδειξαν ότι, μια σειρά ερεθισμάτων (οπτικών, ακουστικών κ.λπ.) τα οποία μπορούν να μετρηθούν και αυξάνουν κατά γεωμετρική πρόοδο, προκαλούν μια σειρά αισθημάτων (αντιδράσεων) που αυξάνουν κατά αριθμητική πρόοδο. Στην προηγούμενη ισότητα στηρίζεται ο ορισμός των μονάδων ακουστότητας bel και decibel. (Θωμαΐδης, 2012)

2. Μια άλλη εντυπωσιακή, σύγχρονη εφαρμογή της λογαριθμικής συνάρτησης γίνεται στην Πληροφορική και συγκεκριμένα στη σχέση ανάμεσα στην ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει ένα σύμβολο και την πιθανότητα εμφάνισης του.
(Θωμαΐδης, 2012)

3. Είναι το "κλειδί" της εξίσωσης που εκφράζει την αναλογία πληθυσμιακής ανάπτυξης $A' = k\,A$ Για παράδειγμα, έχει παρατηρηθεί ότι πληθυσμοί εντόμων αυξάνουν με ρυθμό ανάλογο προς τον υπάρχοντα πληθυσμό ή ότι η μάζα των ραδιενεργών υλικών μειώνεται με ρυθμό ανάλογο προς την υπάρχουσα μάζα του υλικού ή ότι η θερμότητα διαδίδεται από ένα θερμότερο σώμα προς ένα ψυχρότερο με ρυθμό ανάλογο προς τη διαφορά θερμοκρασίας των δύο σωμάτων. Έτσι κατά την ιατροδικαστική έρευνα μιας ανθρωποκτονίας, μπορούμε να γνωρίζουμε πότε χρονικά επήλθε ο θάνατος. (Κανδήλας, 2010).

4. Ο ρυθμός διάσπασής ενός ραδιενεργού στοιχείου είναι κάθε στιγμή ανάλογος προς την ποσότητα του στοιχείου που είναι αδιάσπαστη μέχρι τη στιγμή αυτή, δηλαδή $Q'(\mathrm{t}) = \mathrm{c}\cdot \mathrm{Q}(\mathrm{t})$. Η σχέση αυτή οδηγεί στο νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(\mathrm{t}) = \mathrm{Q}_o \cdot e^{c\cdot t}$ που άλλοτε εκφράζει εκθετική αύξηση c>0 και άλλοτε εκφράζει εκθετική απόσβεση c<0. Αν t_o είναι η 'ημιζωή' ή χρόνος υποδιπλασιασμού μιας ραδιενεργής ουσίας δηλαδή $Q(\mathrm{t}_o) = \dfrac{\mathrm{Q}_o}{2}$ τότε $t_o = -\dfrac{\ln 2}{c}$.

   Αυτό βρίσκει εφαρμογή σε αρχαιολογικές έρευνες που συνήθως ενδιαφέρει ο προσδιορισμός της 'ηλικίας' που έχουν κόκκαλα ανθρώπων ή ζώων αλλά και άλλων αντικειμένων που βρίσκονται στις ανασκαφές. Αυτό επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας την ηλικία ξύλινων ή φυτικών υπολειμμάτων που βρέθηκαν θαμμένα στο ίδιο περίπου βάθος. Η μέθοδος προσδιορισμού βασίζεται στη διάσπαση του ραδιοάνθρακα που ανακάλυψε και ανέπτυξε ο Αμερικανός χημικός Willard Libby (1908-1980) και για την οποία του απονεμήθηκε το Nobel Χημείας το 1960. (Κανδήλας, 2010)

5. Ο Γάλλος μαθηματικός Legendre (1752-1833) διατύπωσε για 1η φορά το 1797 στο βιβλίο του 'Essai sur la Theorie des Nombres' την εικασία ότι η συνάρτηση $\Pi(x) = \dfrac{x}{\ln x - 1,08366}$ εκφράζει τον αριθμό των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του x . Σήμερα γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\Pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} = 1$ δηλαδή με άλλα λόγια ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του x για μεγάλες τιμές του x είναι περίπου x/lnx (Θωμαΐδης, 1986).

2.14 Επίλογος – Αναγκαιότητα για μια διαφορετική προσέγγιση στη διδασκαλία των λογαρίθμων

Η εφεύρεση των λογαρίθμων έγινε δεκτή με ενθουσιασμό σε ολόκληρη την Ευρώπη. Ιδιαίτερα για την αστρονομία ήταν η καταλληλότερη στιγμή για μια τέτοια ανακάλυψη (Eves, 1989). Οι λογαριθμικοί πίνακες και κανόνες, αποτελούσαν τις τότε συσκευές

για τη γρήγορη εκτέλεση πράξεων μεταξύ πολυψήφιων αριθμών μέχρι την ανάπτυξη των σημερινών υπολογιστών τσέπης. Σήμερα όμως κανείς δε χρειάζεται λογαριθμικούς πίνακες για να κάνει υπολογισμούς. Η διδασκαλία των λογαρίθμων ως μέσο υπολογισμού εξαφανίζεται από τα σχολεία, αξιόλογα εγχειρίδια μαθηματικών έπαψαν να περιέχουν λογαριθμικούς πίνακες και γενικά τα προϊόντα του Napier έχουν γίνει πια μουσειακά. (Eves, 1989) .

Με όσα αναφέραμε παραπάνω δεν καλύπτουμε φυσικά όλη την ιστορία των λογαρίθμων ούτε το σύνολο των Μαθηματικών που συνέβαλλαν στην ανάπτυξή τους ούτε και το πλήθος των εφαρμογών τους (για περισσότερα στοιχεία βλέπε - Κανδήλα, 2010). Άλλωστε σκοπός μας δεν ήταν να εξαντλήσουμε όλη την ιστορία των λογαρίθμων, ούτε να παρουσιάσουμε όλα τα στάδια εξέλιξής τους, αλλά να εστιάσουμε στα πρόσωπα και στα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόησή τους, στοιχεία απαραίτητα για να υποστηρίξουμε μια διδασκαλία των λογαρίθμων εμπνευσμένη από την ιστορία τους.

Κάτι τέτοιο θεωρούμε ότι είναι αναγκαίο διότι πιστεύουμε ότι η έννοια του λογαρίθμου με τον τρόπο με τον οποίο σήμερα διδάσκεται, δεν αναδεικνύονται οι λόγοι που οδήγησαν στην επινόηση του, γεγονός που αποδεικνύεται από την παρούσα έρευνα. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι με την πάροδο των χρόνων και τη βελτίωση του συμβολισμού της άλγεβρας, οι λογάριθμοι άρχισαν να θεωρούνται ως εκθέτες δύναμης και οι ιδιότητες τους να μην είναι τίποτα άλλο παρά ιδιότητες δυνάμεων. Η ανάδειξη των λογαρίθμων ως μέσο υπολογισμού χάνεται με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι λογαριθμικοί κανόνες παραμερίστηκαν από τους υπολογιστές τσέπης, οι λογαριθμικοί πίνακες δεν υπάρχουν πια στα σχολικά βιβλία, και η χρησιμότητά τους σε αυτά περιορίζεται στη λύση εκθετικών εξισώσεων. Έτσι όμως δεν αναδεικνύονται τα κίνητρα που οδήγησαν στη δημιουργία τους ούτε και ο αρχικός τρόπος προσέγγισης τους. Οι ιδιότητες των λογαρίθμων δεν εκτιμώνται ως εργαλείο αναγωγής πολύπλοκων πράξεων σε απλούστερες, αλλά ως εργαλείο για την επίλυση ασκήσεων (π.χ. λογαριθμικών εξισώσεων και ανισώσεων). Οι δεκαδικοί λογάριθμοι εμφανίζονται συχνότερα από τους άλλους, μάλιστα ονομάζονται και ‘κοινοί’, χωρίς όμως να διευκρινίζεται το γιατί. Οι λογάριθμοι με βάση το e, αποκαλούμενοι και ‘φυσικοί’ ή ‘νεπέριοι’ παίζουν ένα κεντρικό ρόλο, χωρίς να αποσαφηνίζονται ούτε η επιλογή του συγκεκριμένου αριθμού, ούτε και οι όροι ‘φυσικοί’ και ‘νεπέριοι’.

Αρκετά από αυτά επισημαίνονται στο ιστορικό σημείωμα που βρίσκεται στο σημερινό σχολικό βιβλίο, αλλά η αίσθηση που έχουμε και που επαληθεύεται και από την έρευνα που κάναμε, είναι πως είτε επειδή δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης, είτε διότι βρίσκεται μετά το πέρας του κεφαλαίου και όχι μέρος αυτού, είτε λόγω έλλειψης χρόνου αλλά ενδεχομένως και ελλιπών γνώσεων των καθηγητών των μαθηματικών γύρω από την ιστορία των λογαρίθμων, ουδεμία αναφορά γίνεται στον τρόπο που επινοήθηκαν και αναπτύχθηκαν.

Μια διαφορετική προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου εμπνευσμένη από την ιστορία τους, διαφωτίζοντας κάποια από τα σκοτεινά σημεία που αναφέραμε παραπάνω και μέσα στα πλαίσια βέβαια του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

3.1 Επιδιωκόμενοι στόχοι

Η διδακτική παρέμβαση που θα σχεδιάσουμε θα συνάδει με τους γενικότερους στόχους και πλαίσια που θέτει το σημερινό πρόγραμμα σπουδών, και θα είναι υλοποιήσιμη σε πραγματικές συνθήκες τάξης, μέσα στα χρονικά όρια στα οποία συνήθως καλείται ο καθηγητής Μαθηματικών του σχολείου να περιοριστεί. Συνεπώς πρέπει να σχεδιάσουμε μια διδακτική παρέμβαση που θα λαμβάνει υπόψη τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, τις γνώσεις για τους λογαρίθμους που πρέπει οι μαθητές να αποκτήσουν προκειμένου να ανταποκριθούν στις ανάγκες του εκπαιδευτικού συστήματος, αλλά και να φροντίσουμε για την ομαλή μετάβαση στην επόμενη ενότητα που θα ακολουθήσει δηλαδή τη λογαριθμική συνάρτηση. Επομένως θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια του λογαρίθμου όπως ακριβώς την ορίζει το σχολικό βιβλίο, να λύσουμε παραδείγματα και ασκήσεις ανάλογες με αυτές που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο και να επισημάνουμε εκείνα τα σημεία που θεωρούνται σημαντικά από τις προβλεπόμενες οδηγίες προς τον εκπαιδευτικό. Άρα η διδακτική μας παρέμβαση δε θα πρέπει να είναι μια παρένθεση στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Β΄ Λυκείου, αλλά μια συνέχεια αυτής που δε θα διαφέρει ως προς το περιεχόμενο παρά μόνο στην προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου και στον τρόπο παρουσίασης της.

Με τη διαφορετική αυτή προσέγγιση και παρουσίαση της έννοιας του λογαρίθμου επιδιώκουμε αφενός να '**διαφωτίσουμε**' τους μαθητές γύρω από κάποια σημεία που θεωρούμε σκοτεινά, όπως τους λόγους που οδήγησαν στη δημιουργία των λογαρίθμων, το πώς προσεγγίστηκε αρχικά η έννοια αυτή και την εφαρμογή που βρίσκουν οι λογάριθμοι στο φυσικό κόσμο, και αφετέρου να '**αποσαφηνιστούν**' κάποιοι όροι που χρησιμοποιούμε σήμερα όπως 'λογάριθμος', 'νεπέριοι' λογάριθμοι, 'φυσικοί' λογάριθμοι καθώς και ο ρόλος του αριθμού e. Παράλληλα να '**αποκαλύψουμε**' στους μαθητές το 'πότε', το 'ποιοί', το 'που' και το 'γιατί' ανακαλύφθηκαν οι λογάριθμοι, όχι μόνο για να εμπλουτίσουν τις ιστορικές τους γνώσεις και να αποκτήσουν σφαιρική μόρφωση, αλλά και για να μπορέσουν να συνδέσουν την έννοια του λογαρίθμου με το γενικότερο κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο της εποχής, τους λόγους και τα πραγματικά προβλήματα που οδήγησαν στην ανακάλυψή τους. Στοιχεία που θεωρούμε απαραίτητα γενικότερα στη διδασκαλία των Μαθηματικών, ώστε να μη θεωρούνται αυτά αποκομμένα από το φυσικό κόσμο και τις άλλες επιστήμες ούτε να αποτελούν στείρες γνώσεις χωρίς καμιά χρησιμότητα και εφαρμογή.

Εξειδικεύοντας τα παραπάνω, στόχος της διδακτικής παρέμβασης είναι μετά την ολοκλήρωσή της οι μαθητές να είναι σε θέση να απαντούν στα παρακάτω ερωτήματα (1-9) και να λύνουν τις παρακάτω ασκήσεις (10-12):

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη – εφεύρεση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

2. Από τον ορισμό του λογαρίθμου βλέπουμε ότι αυτός έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος 'λογά-

ριθμος’, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων ‘λόγος’ και ‘αριθμός’ και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση: *‘Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως ιδιότητες των λογαρίθμων, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών’*.

   $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$

   Γιατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου επισημαίνεται η αντιστοιχία των παραπάνω ιδιοτήτων των λογαρίθμων με τις ιδιότητες των δυνάμεων. Ποια πιστεύετε είναι αυτή η αντιστοιχία ;

5. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου αναφέρεται ότι: *‘Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί** λογάριθμοι’*. Γιατί πιστεύετε από όλους τους αριθμούς επιλέχθηκε το 10 να αποτελέσει τη βάση των λεγόμενων ‘κοινών’ λογαρίθμων και πως νομίζετε ότι συνέβαλλαν στην απλοποίηση των πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών;

6. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση: *‘Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$’*.

   Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = 2,71828...$

   Γιατί από όλους τους λογαρίθμους, αυτοί που έχουν βάση το e αποκαλούνται ‘φυσικοί’ ή ‘νεπέριοι’ και πως προέκυψαν οι όροι αυτοί;

7. Πότε περίπου νομίζετε ότι επινοήθηκαν οι λογάριθμοι και ποιοι ήταν οι βασικοί πρωταγωνιστές στην επινόησή τους;

8. Πως πιστεύετε το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο του 16^{ου} -17^{ου} αιώνα επηρέασε την εξέλιξη των μαθηματικών και την επινόηση των λογαρίθμων;

9. Ποιες εφαρμογές βρίσκουν οι λογάριθμοι στο φυσικό κόσμο;

10. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$\log_\alpha 1 =$ $\quad$ $\log_\alpha \alpha =$ $\quad$ $\log_\alpha \alpha^\chi =$ $\quad$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$

$\log_3 \frac{1}{9} =$ $\quad$ $\ln \sqrt{e} =$ $\quad$ $\log_{\sqrt{2}} .... = 4$ $\quad$ $\log_{....} 16 = 2$

$\log 0.001 =$ $\quad$ $\log .... = 3$ $\quad$ $\log \theta = \frac{\ln ...}{\ln ...}$ $\quad$ $\ln \theta = \frac{\log ...}{\log ...}$

11. Με βάση τις ιδιότητες λογαρίθμων να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

A. $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$

B. $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 =$

12. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και του παρακάτω πίνακα να βρείτε τον άγνωστο χ στη αναλογίας $\frac{469.894}{20.941} = \frac{10.807.562}{x}$

x	logx
469.894	5,672
20.941	4,321
10.807.562	7,034
481.643	5,683
583.246	5,766
478.924	5,680

Με τις ερωτήσεις 1-9 θεωρούμε ότι επιτυγχάνεται ο ‘διαφωτισμός’ σκοτεινών σημείων, η ‘αποσαφήνιση’ όρων και η ‘αποκάλυψη’ πρωταγωνιστών και κινήτρων που αναφέραμε παραπάνω, ενώ με τις ασκήσεις 10 - 12 ο μαθητής εξοικειώνεται με τον ορισμό του λογαρίθμου, τις ιδιότητες του και αποκτά το απαραίτητο υπόβαθρο που απαιτείται για να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της επόμενης ενότητας, δηλαδή να λύνει λογαριθμικές εξισώσεις, ανισώσεις και συστήματα. Ειδικά η άσκηση 12 θεωρούμε ότι αναδεικνύει το ρόλο του λογαρίθμου και των λογαριθμικών πινάκων στην απλούστευση υπολογισμών.

Ενδεχομένως να διατυπωθούν ενστάσεις για το επίπεδο των προτεινόμενων ασκήσεων, αλλά θεωρούμε ότι αν ένας μαθητής πραγματικά μπορεί να ανταποκριθεί σε αυτές δε θα έχει ουσιαστικό πρόβλημα στη μετέπειτα του εμπλοκή με λογαρίθμους. Η ενασχόληση με περισσότερες και πιο απαιτητικές ασκήσεις στα πλαίσια πάντα του μαθήματος στην τάξη, αφενός θα ήταν αντίθετη στη διαφορετική προσέγγιση που προτείνουμε και αφετέρου θα μας έβγαζε έξω από τα προβλεπόμενα χρονικά όρια. Δεν πιστεύουμε ότι με το να λύνει ένας καθηγητής στην τάξη πολλές και ασκήσεις, επιτυγχάνει απαραίτητα τη μεγαλύτερη κατανόηση από τους μαθητές του. Αντίθετα μπορεί να τους αποθαρρύνει και να τους απογοητεύσει. Σημασία για μας έχει η κατάλληλη επιλογή ασκήσεων με την οποία θα επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή κατανόηση. Από κει και πέρα φυσικά ένας μαθητής μπορεί μόνος του να ασχοληθεί και με περισσότερες και πιο απαιτητικές ασκήσεις, με την καθοδήγηση και υποστήριξη του καθηγητή του. Άλλωστε και στην επόμενη ενότητα θα κληθεί να το κάνει.

3.2 Περιγραφή διδακτικής παρέμβασης

Για τη διδακτική μας παρέμβαση αποφασίσαμε να διαθέσουμε 4 διδακτικές ώρες (45 λεπτά η κάθε μία). Θεωρούμε ότι είναι ένα λογικό χρονικό διάστημα που αφενός δεν ξεφεύγει από τα πλαίσια μέσα στα οποία περιορίζεται ο καθηγητής στο σχολείο και αφετέρου μας αρκεί για να θίξουμε τα σημεία που θέλουμε. Βέβαια τα χρονικά πλαίσια δε μπορεί να είναι απόλυτα αφού εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες όπως το γνωστικό επίπεδο των μαθητών της τάξης, ο βαθμός συγκέντρωσης και προσοχής τους, το κλίμα της τάξης, η ικανότητα του καθηγητή που θα την υλοποιήσει, ο υπάρχων τεχνολογικός εξοπλισμός και όποιοι άλλοι παράγοντες επηρεάζουν τη λειτουργία της τάξης. Οπότε διαφοροποιήσεις και προσαρμογές ως προς τα χρονικά πλαίσια μπορούν να υπάρξουν. Σε καμία περίπτωση όμως δε νομίζουμε ότι θα πρέπει να ξεπεραστούν οι 5 ώρες. Διευκρινίζουμε ότι η διδακτική παρέμβαση περιορίζεται στην παρουσίαση της έννοιας του λογαρίθμου και των ιδιοτήτων του καθώς και στην επίλυση ασκήσεων που σχετίζονται με αυτές. Δεν έχει ως στόχο την παρουσίαση της λογαριθμικής συνάρτησης ούτε την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων.

Η διδακτική μας παρέμβαση ενσωματώνει την ιστορία των λογαρίθμων (που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) στη διδασκαλία τους στα πρότυπα του Jankvist (βλ. ενότητα 1.2). Συγκεκριμένα οι 2 πρώτες ώρες χρησιμοποιούν την ιστορία ως ‘εργαλείο’ για το ‘διαφωτισμό’ σκοτεινών σημείων και ‘αποσαφήνιση’ όρων, ενώ στις άλλες 2 ώρες επιχειρείται η ‘αποκάλυψη’ κινήτρων και ο εμπλουτισμός ιστορικών στοιχείων έχοντας την ιστορία ως ‘στόχο’ και η παρουσίαση εφαρμογών και σύνδεσης μέσω αυτών της έννοιας του λογαρίθμου με τις άλλες επιστήμες και το φυσικό κόσμο.

Για τη διδακτική μας παρέμβαση θα χρησιμοποιήσουμε ένα φύλλο εργασίας (δίνεται στο παράρτημα), 4 παρουσιάσεις PowerPoint (μία για κάθε διδακτική ώρα) όπου θα τίθενται ερωτήματα προς συζήτηση και θα δίνονται κατόπιν οι σχετικές απαντήσεις, καθώς και ιστορικά στοιχεία και άλλο υποστηρικτικό υλικό. Θα χρησιμοποιηθεί επίσης διαδραστικός πίνακας στον οποίο όλα αυτά θα προβάλλονται. Η διδασκαλία δε θα είναι μετωπική όπου ο μαθητής θα είναι παθητικός δέκτης πληροφοριών, αλλά θα συμμετέχει ενεργά μέσω του φύλλου εργασίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη. Σκοπός μας είναι, στα πλαίσια του διαθέσιμου χρόνου και του ενδιαφέροντος των μα-

θητών, να δείξουμε πως προχωρούν τα Μαθηματικά και συγκεκριμένα, πως φτάσαμε στην επινόηση της έννοιας του λογαρίθμου, ακολουθώντας, αν είναι εφικτό τα ιστορικά βήματα εξέλιξης της. Περιγράφουμε παρακάτω αναλυτικά τα διάφορα στάδια τα οποία συγκροτούν τη διδακτική μας παρέμβαση, επισημαίνοντας τους επιμέρους στόχους αλλά και τα ερωτήματα που θα τίθενται, καθώς και τη χρονική διάρκεια καθενός.

$1^{ο}$ στάδιο $1^{ης}$ διδακτικής ώρας : διάρκεια 7 λεπτά

Οι μαθητές καλούνται να κάνουν χωρίς χρήση υπολογιστή τις παρακάτω πράξεις

$8.388.608 \cdot 131.072 =$ $\qquad$ $33.554.432 : 1.048.576 =$

$(4.194.304)^2 =$ $\qquad$ $\sqrt{67.108.864} =$

Στόχος είναι οι μαθητές να εμπλακούν με τις πολύπλοκες αυτές πράξεις όχι τόσο για να βρουν τα σωστά αποτελέσματα που άλλωστε δεν είναι εφικτό σε τόσο λίγο χρόνο, αλλά να συνειδητοποιήσουν τις δυσκολίες που παρουσιάζουν. Παράλληλα θα τους ζητηθεί να αναλογιστούν αν έχει πρακτική σημασία και σε ποιους τομείς της καθημερινής ζωής η ανάγκη υπολογισμού τόσο μεγάλων πράξεων καθώς και να αναρωτηθούν αν στο παρελθόν υπήρχαν τρόποι – τεχνάσματα απλοποίησης τέτοιων δύσκολων υπολογισμών. Μέσω των απαντήσεων αυτών των ερωτημάτων επιδιώκουμε να αποσαφηνίσουμε τους λόγους και τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων καθώς και ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν (ερώτημα 1).

$2^{ο}$ στάδιο $1^{ης}$ διδακτικής ώρας : διάρκεια 18 λεπτά

Δίνουμε στους μαθητές τον παρακάτω πίνακα όπου περιέχονται οι 14 πρώτοι όροι δύο προόδων. Στην $1^{η}$ γραμμή μιας αριθμητικής με $1^{ο}$ όρο το 0 και διαφορά 1 και στη $2^{η}$ μιας γεωμετρικής με $1^{ο}$ όρο 1 και λόγο 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	…

Τους ζητάμε παρατηρώντας τους αντίστοιχους όρους των δύο προόδων και τις παρακάτω πράξεις να βγάλουν κάποιο συμπέρασμα

$5 + 8 = 13$	$12 - 7 = 5$	$4 \cdot 3 = 12$	$12 : 4 = 3$
$32 \cdot 256 = 8192$	$4096 : 128 = 32$	$16^3 = 4096$	$\sqrt[4]{4096} = 8$

Ο στόχος εδώ είναι η αναγωγή του πολ/σμου σε πρόσθεση, της διαίρεσης σε αφαίρεση, της δύναμης σε πολ/σμο και της εξαγωγής ρίζας σε διαίρεση.

Στη συνέχεια δίνοντας τους τις παρακάτω πληροφορίες:

$8.388.608 = 2^{23}$, $131.072 = 2^{17}$, $33.554.432 = 2^{25}$

$1.048.576 = 2^{20}$, $4.194.304 = 2^{22}$, $67.108.864 = 2^{26}$

$1.099.511.627.776 = 2^{40}$, $17.592.186.044.416 = 2^{44}$

τους ζητάμε να ξαναεκτελέσουν τις προηγούμενες πράξεις

$8.388.608 \cdot 131.072 =$ $33.554.432 : 1.048.576 =$

$(4.194.304)^2 =$ $\sqrt{67.108.864} =$

Στόχος είναι να διαπιστώσουν πόσο πιο εύκολα μπορούν να γίνουν οι αρχικές πράξεις αν διαθέτουμε έναν πίνακα που να μας πληροφορεί με ποιο τρόπο μπορούν κάποιοι μεγάλοι αριθμοί να γραφτούν ως δύναμη με κοινή βάση.

Στη συνέχεια τους ζητάμε να σκεφτούν πως το προηγούμενο συμπέρασμα μπορεί να γενικευτεί για οποιουσδήποτε αριθμούς και όχι μόνο για δυνάμεις του 2. Στόχος του ερωτήματος αυτού είναι να αντιληφθούν την αναγκαιότητα δημιουργίας πυκνών γεωμετρικών προόδων δηλαδή με λόγο λ πολύ κοντά στο 1 ώστε να μπορούν να παρεμβληθούν μεταξύ των όρων της προόδου χωρίς μεγάλο σφάλμα όλοι οι αριθμοί.

Επίσης τους ζητάμε να αναρωτηθούν γιατί εμπλέξαμε τις δύο προόδους αφού η ιδέα πάνω στην οποία θα στηριχτούμε αφορά ιδιότητες δυνάμεων. Στόχος είναι να τους διαφωτίσουμε για το ρόλο του συμβολισμού στην άλγεβρα και ότι την εποχή που αναπτύχθηκαν οι λογάριθμοι δεν υπήρχε κοινός αποδεκτός συμβολισμός για τις δυνάμεις και τις ιδιότητές τους.

Στη συνέχεια θέτουμε το ακόλουθο ερώτημα: Αν θέσουμε τους όρους της γεωμετρικής προόδου σε συνεχή αναλογία δηλαδή

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \ldots$$

πόσοι λόγοι απαιτούνται μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά ο αριθμός 64 και τι παρατηρούν.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα θέσει τη βάση για να δικαιολογήσουμε αργότερα την προέλευση του όρου ‘λογάριθμος’.

$3^{ο}$ στάδιο $1^{ης}$ διδακτικής ώρας : διάρκεια 20 λεπτά

Δίνουμε στους μαθητές τον παρακάτω πίνακα όπου παρουσιάζονται οι πρώτοι όροι δύο προόδων. Στην $1^{η}$ γραμμή μιας αριθμητικής με $1^{ο}$ όρο το 0 και διαφορά 1 και στη $2^{η}$ μιας γεωμετρικής με $1^{ο}$ όρο 1 και λόγο α.

0	1	2	3	4	5		…		…		…
1	α	$α^2$	$α^3$		$α^5$	$α^6$	…	$α^{23}$	…	$α^{χ}$	…

Τους ζητάμε να συμπληρώσουν τα κενά κουτάκια στο παραπάνω πίνακα και να βγάλουν κάποιο συμπέρασμα.

Στόχος είναι να εμπεδωθεί ότι κάθε όρος της αριθμητικής προόδου ταυτίζεται με τον εκθέτη του λόγου α στον αντίστοιχο όρο της γεωμετρικής. Με αυτό τον τρόπο πιστεύουμε ότι θα δεχθούν με φυσικό τρόπο τον παρακάτω ορισμό του λογαρίθμου, όπως αυτός δίνεται στο σημερινό σχολικό βιβλίο.

Ορισμός

Έστω θ > 0 και α > 0 και α ≠ 1 .

Ορίζουμε λογάριθμο του θ με βάση α και συμβολίζουμε $\log_{\alpha}\theta$ τον αριθμό χ στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α για να μας δώσει θ. Δηλαδή $\log_{\alpha}\theta = \chi \Leftrightarrow \alpha^{\chi} = \theta$

Την ανάγκη για τους περιορισμούς που αφορούν στο α και στο θ, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι την επιβάλλουν οι λόγοι σύνδεσης με την έννοια της εκθετικής συνάρτησης η οποία ορίστηκε με βάση θετική και διάφορη του ένα και ότι δύναμη με βάση θετική και εκθέτη οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, είναι πάντα θετική.

Στη συνέχεια με βάση τον ορισμό αυτό και με τη βοήθεια των παραπάνω πινάκων τους ζητάμε να συμπληρώσουν τις παρακάτω ισότητες

$\log_{\alpha} 1 =$ $\quad \log_{\alpha}\alpha =$ $\quad \log_{\alpha}\alpha^2 =$ $\quad \log_{\alpha}\alpha^{\chi} =$ $\quad \alpha^{\log_{\alpha}\theta} =$

$\log_2 ... = 1$ $\quad \log_2 ... = 0$ $\quad \log_2 32 =$ $\quad \log_2 ..... = 13$ $\quad 2^{\log_2 4} =$

Στη συνέχεια με βάση τον ορισμό των λογαρίθμων και γνώσεις από τις δυνάμεις τους ζητάμε να συμπληρώσουν τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$\log_3 \frac{1}{3} =$ $\quad \log_5 \sqrt{5} =$ $\quad \log_4 ... = \frac{1}{2}$ $\quad \log_{\sqrt{2}} .... = 4$ $\quad \log_{....} 16 = 2$

$\log_{10} 0.001 =$ $\quad \log_{10} \sqrt[3]{100} =$ $\quad \log_{10} .... = -1$ $\quad \log_{10} .... = -\frac{1}{3}$

Στόχος είναι αφενός να εξοικειωθούν με τον ορισμό του λογαρίθμου και τις σχετικές υπολογιστικές διαδικασίες και αφετέρου να συνειδητοποιήσουν ότι με τον τρόπο που ορίστηκε ο λογάριθμος δεν είναι τίποτα άλλο παρά εκθέτης δύναμης.

Στο σημείο αυτό θα τους θέσουμε το ερώτημα πως προέκυψε ο όρος 'λογάριθμος' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο σε εκθέτη δύναμης. Στόχος είναι να αποσαφηνιστεί ο όρος 'λογάριθμος' (ερώτηση 2), να διευκρινιστεί ότι προκύπτει από τη σύνθεση των ελληνικών λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' δηλαδή ο αριθμός που μετράει τους λόγους (έχει προετοιμαστεί ήδη το έδαφος από το στάδιο 2) και να αναδειχθεί η αρχική σχέση των λογαρίθμων με τις προόδους.

Τέλος θα τονίσουμε το γεγονός ότι με τους λογάριθμους μπορούμε να συμβολίζουμε τις λύσεις εκθετικών εξισώσεων όπως π.χ. $2^x=5 \Leftrightarrow x=\log_2 5$.

Στο σημείο αυτό τελειώνει η 1η διδακτική ώρα. Θα ζητήσουμε από τους μαθητές να μελετήσουν στο σπίτι τους όσα παρουσιάστηκαν στην τάξη και να ασχοληθούν με τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που είναι αντίστοιχες με τα παραπάνω παραδείγματα.

1ο στάδιο 2ης διδακτικής ώρας : διάρκεια 10 λεπτά

Στο στάδιο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη επανάληψη των όσων είπαμε την 1η διδακτική ώρα, θα θυμίσουμε τον ορισμό και θα λύσουμε τυχόν απορίες στη θεωρία ή στις ασκήσεις που είχαν για το σπίτι.

2ο στάδιο 2ης διδακτικής ώρας : διάρκεια 20 λεπτά

Θα ζητήσουμε από τους μαθητές με βάση τον ορισμό του λογαρίθμου και τις ιδιότητες των δυνάμεων να συμπληρώσουν τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$\theta_1=\alpha^x$	$\theta_2=\alpha^y$	$\theta_1\cdot\theta_2=\alpha^x\cdot\alpha^y=$
$\log_\alpha\theta_1=$	$\log_\alpha\theta_2=$	$\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=$

Συμπέρασμα : $\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2=$ όπου $\theta_1,\theta_2>0$, $\alpha>0$, $\alpha\neq1$

$\theta_1 = \alpha^x$	$\theta_2 = \alpha^y$	$\theta_1 : \theta_2 = \alpha^x : \alpha^y =$
$\log_\alpha \theta_1 =$	$\log_\alpha \theta_2 =$	$\log_\alpha (\theta_1 : \theta_2) =$

Συμπέρασμα : $\log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2 =$ όπου $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$\theta = \alpha^x$	$\theta^\kappa = (\alpha^x)^\kappa =$
$\log_\alpha \theta =$	$\log_\alpha \theta^\kappa =$

Συμπέρασμα : $\log_\alpha \theta^\kappa =$ όπου $\theta > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\kappa \in \Re$

Στόχος είναι αφενός να παρουσιαστούν οι ιδιότητες των λογαρίθμων και η απόδειξη αυτών και αφετέρου να συνδεθούν οι ιδιότητες των λογαρίθμων με τις αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων (ερώτηση 4).

Στη συνέχεια θα τους ζητήσουμε να αναρωτηθούν γιατί είναι σημαντικές αυτές οι ιδιότητες. Σκοπός της ερώτησης είναι ότι μέσω αυτής θα αναδειχθεί ο ρόλος των λογαρίθμων στην αναγωγή του πολ/σμου σε πρόσθεση, της διαίρεσης σε αφαίρεση, της δύναμης σε πολ/σμο και της εξαγωγής ρίζας σε διαίρεση καθώς και της απλούστευσης μέσω αυτών των αριθμητικών υπολογισμών (ερώτηση 3).

Στη συνέχεια με βάση τις παραπάνω ισότητες γνωστές και ως ιδιότητες λογαρίθμων θα τους ζητήσουμε να υπολογίσουν τις παρακάτω παραστάσεις

$$\mathrm{A} = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\log_2 256 + 2\log_2 3 - \log_2 18 =$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 =$$

Με τις ασκήσεις αυτές θα αποκτήσουν μια εξοικείωση με τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

Επίσης με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και του παρακάτω πίνακα θα τους ζητηθεί να βρουν τον άγνωστο χ στην αναλογία

$$\frac{469.894}{20.941} = \frac{10.807.562}{x}$$

x	logx
469.894	5,672
20.941	4,321
10.807.562	7,034
481.643	5,683
583.246	5,766
478.924	5,680

Με την άσκηση αυτή θα αναδειχθεί ο ρόλος των λογαρίθμων και των λογαριθμικών πινάκων στην απλούστευση αριθμητικών υπολογισμών μεταξύ πολυψήφιων αριθμών.

3^{ο} στάδιο 2^{ης} διδακτικής ώρας : διάρκεια 15 λεπτά

Δίνουμε χωρίς απόδειξη (είναι εκτός διδακτέας ύλης τη στιγμή που γράφεται η παρούσα εργασία) στους μαθητές τον παρακάτω τύπο, γνωστό ως τύπο αλλαγής βάσης

$\log_\beta \theta = \dfrac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$ όπου $\theta > 0$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \neq 1$

διευκρινίζοντας ότι αντί για $\log_{10} \theta$ γράφουμε $\log \theta$ τους οποίους τους λέμε δεκαδικούς ή 'κοινούς' λογάριθμους και

ότι αντί για $\log_e \theta$ γράφουμε $\ln \theta$ τους οποίους τους λέμε 'φυσικούς' ή 'νεπέριους' λογάριθμους

και τους ζητάμε να συμπληρώσουν τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$$\log_\beta \theta = \frac{\log \ldots}{\log \ldots} \qquad \log_\beta \theta = \frac{\ln \ldots}{\ln \ldots}$$

$$\log \theta = \frac{\ln \ldots}{\ln \ldots} \qquad \ln \theta = \frac{\log \ldots}{\log \ldots}$$

Κατόπιν επισημαίνουμε τη σημασία του τύπου αλλαγής βάσης ως ένα μέσο υπολογισμού λογαρίθμου με οποιαδήποτε βάση αν γνωρίζουμε τους λογαρίθμους με μια συγκεκριμένη βάση π.χ. το 10 ή το e.

Στη συνέχεια αναδεικνύουμε τη χρησιμότητα των δεκαδικών ή κοινών λογαρίθμων στους υπολογισμούς, γεγονός που οφείλεται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε συνήθως (ερώτηση 5).

Τέλος διαφωτίζουμε τους μαθητές γύρω από την προέλευση των όρων φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι και κάνουμε μια νύξη για το ρόλο του αριθμού e, αναφέροντας απλά ότι εμφανίζεται με φυσικό τρόπο κάθε φορά που προσπαθούμε να φτιάξουμε μια πυκνή γεωμετρική πρόοδο δηλαδή με λόγο λ πολύ κοντά στο 1 και ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $f(x) = 1/x$ του οριζόντιου άξονα και των κατακόρυφων ευθειών $x=1$ και $x=e$ είναι ίσο με 1 (ερώτηση 6).

Εδώ τελειώνει η 2η διδακτική ώρα και ζητάμε από τους μαθητές να λύσουν για το επόμενο μάθημα ασκήσεις αντίστοιχες με αυτές που συζητήθηκαν στο μάθημα και που σκοπεύουν στην εμπέδωση και εξάσκηση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων.

1ο στάδιο 3ης διδακτικής ώρας : διάρκεια 15 λεπτά

Στο στάδιο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη επανάληψη των όσων είπαμε την 2η διδακτική ώρα, θα θυμίσουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων και θα λύσουμε τυχόν απορίες στη θεωρία ή στις ασκήσεις που είχαν για το σπίτι.

2ο στάδιο 3ης διδακτικής ώρας : διάρκεια 30 λεπτά

Στο στάδιο αυτό θα κάνουμε μια αναφορά στην ιστορική εξέλιξη των λογαρίθμων εστιάζοντας στους λόγους και τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψή τους, περιγράφοντας το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο της εποχής και την επίδραση που είχε στην ανάπτυξη των μαθηματικών και την επινόηση των λογαρίθμων. Επίσης θα σκιαγραφήσουμε τους βασικούς πρωταγωνιστές και τη συμβολή καθενός απ' αυτούς (ερωτήσεις 7,8). Επίσης θα προσπαθήσουμε να διαφωτίσουμε τους μαθητές για το τι μαθηματικά γνώριζαν οι μαθηματικοί εκείνης της εποχής και το συμβολισμό που χρησιμοποιούσαν, καθώς και για τις συνθήκες κάτω από τις οποίες δούλευαν και τις δυσκολίες που είχε η επικοινωνία και συνεργασία τους.

Εδώ τελειώνει η 3η διδακτική ώρα και θα ζητήσουμε απ' τους μαθητές να βρουν πληροφορίες για την εξέλιξη των λογαρίθμων και τους βασικούς πρωταγωνιστές, ακόμα και να μελετήσουν αυθεντικά κείμενα και πηγές.

$1^{ο}$ στάδιο $4^{ης}$ διδακτικής ώρας : διάρκεια 20 λεπτά

Θα αναφερθούμε ειδικότερα στον αριθμό e εξηγώντας στους μαθητές τη σημασία του, διευκρινίζοντας παράλληλα ότι αν και εμπεριέχεται κατά κάποιο τρόπο στους πίνακες των Napier και Burgi, αυτοί δεν έκαναν καμία αναφορά σε αυτόν ούτε είχαν επισημάνει το ρόλο του. Επίσης θα παρουσιάσουμε με ποιον τρόπο μπορούμε να φτάσουμε σε αυτόν από τους πίνακες των Napier και Burgi, αν χρησιμοποιήσουμε σύγχρονο συμβολισμό.

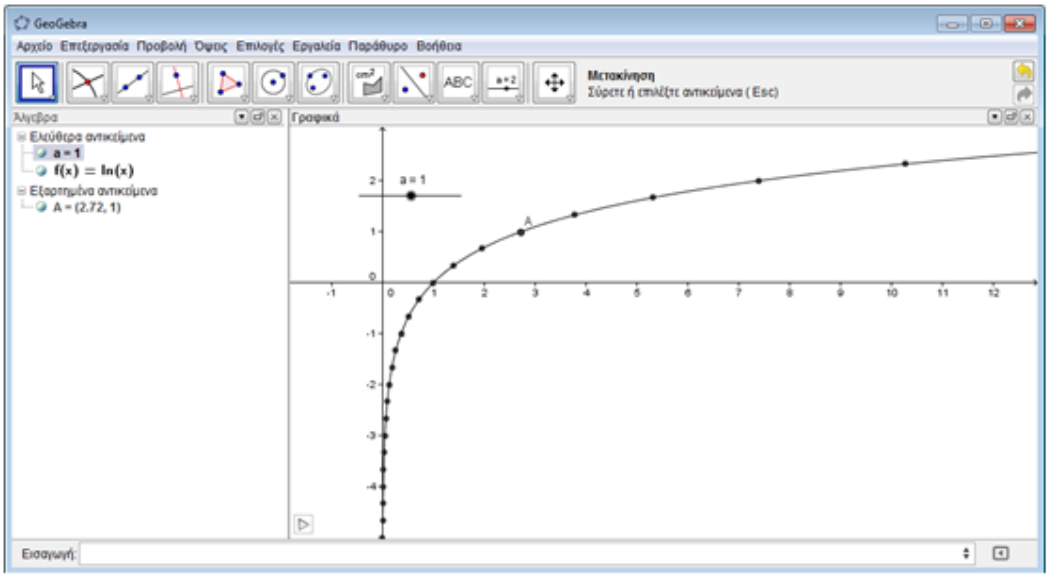
$2^{ο}$ στάδιο $4^{ης}$ διδακτικής ώρας : διάρκεια 10 λεπτά

Στο στάδιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις εφαρμογές που βρίσκουν οι λογάριθμοι στο φυσικό κόσμο, τη σύνδεσή τους με άλλες επιστήμες και θα επισημάνουμε το γεγονός ότι ενώ η αρχική τους χρήση στον υπολογισμό πολύπλοκων αριθμητικών πράξεων περιορίστηκε από την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, αυτοί παραμένουν σημαντικοί αφού εμφανίζονται απροσδόκητα κάθε φορά που προσπαθούμε να συνδέουμε τις τιμές ενός μεγέθους που μεταβάλλεται γρήγορα με ένα άλλο που μεταβάλλεται αργά. Έτσι ετοιμάζουμε το έδαφος και για την επόμενη ενότητα που είναι η λογαριθμική συνάρτηση.

$3^{ο}$ στάδιο $4^{ης}$ διδακτικής ώρας : διάρκεια 15 λεπτά

Με τη βοήθεια ενός προγράμματος Geogebra θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης ενώνοντας σημεία των οποίων οι τετμημένες αυξάνονται γεωμετρικά και οι τεταγμένες αριθμητικά.

1. Ορίζουμε παράμετρο a με τιμές από -50 μέχρι 50 με βήμα 0.1
2. Θεωρούμε το σημείο $A(e^a, a)$
3. Κάνουμε το σημείο A να έχει ίχνος ενεργό
4. Δίνουμε κίνηση στη παράμετρο a και καθώς το σημείο A κινείται αφήνει το ίχνος πάνω σε μια τροχιά
5. Επαληθεύουμε ότι η παραπάνω τροχιά είναι γραφική παράσταση της lnx



Στην προκειμένη περίπτωση σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση της lnx αντιστοιχίζοντας τους όρους της αριθμητικής προόδου 0,1,2,3,4,… με τους όρους της γεωμετρικής 1,e^2, e^3 , e^4 , … . Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση οποιαδήποτε λογαριθμικής συνάρτησης θέλουμε.

Με τον τρόπο αυτό αναδεικνύουμε αφενός τη σχέση των αντίστοιχων τιμών δύο προόδων με τη λογαριθμική συνάρτηση και αφετέρου τον κινηματικό ορισμό του Napier μέσω της ανάλυσης της κίνησης του Α κατά τη τροχιά της γραφικής παράστασης σε δύο κινήσεις, μιας κατά μήκος του χχ΄ και μιας κατά μήκος του ψψ.

Εδώ τελειώνει η $4^η$ και τελευταία διδακτική ώρα. Πιστεύουμε ότι με όσα θίξαμε οι μαθητές θα καταφέρουν να αποκτήσουν αφενός μια γενική εικόνα γύρω από τους λόγους που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων και ην εφαρμογή που αυτοί βρίσκουν στο φυσικό κόσμο και αφετέρου την απαραίτητη εξοικείωση με τον ορισμό και τις ιδιότητες των λογαρίθμων ώστε να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις τους εκπαιδευτικού συστήματος. Είναι στην κρίση του κάθε διδάσκοντα και κρίνοντας από το βαθμό κατανόησης των μαθητών του, να αφιερώσει άλλη μία διδακτική ώρα στη επίλυση απορριών και ασκήσεων. Θεωρούμε όμως απαραίτητο να μη θυσιαστούν οι ιστορικές αναφορές και τα άλλα στοιχεία που πιστεύουμε ότι διαφωτίζουν σκοτεινές πλευρές των λογαρίθμων στο βωμό άσκοπης και περιττής ασκησιολογίας.

Κεφάλαιο 4^{ο} ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1 Σχεδιασμός έρευνας

Η έρευνά μας πραγματοποιήθηκε σε μαθητές Β΄ και Γ΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Αχαρνών. Η επιλογή της συγκεκριμένης σχολικής μονάδας οφείλεται στο ότι αφενός είναι ο χώρος προσωπικής διδασκαλίας, γεγονός που διευκολύνει τις διαδικασίες οργάνωσης και διεξαγωγής της έρευνας, και αφετέρου επειδή αποτελεί ένα τυπικό σχολείο ως προς το γνωστικό επίπεδο του μαθητικού της δυναμικού, αλλά και τις προσδοκίες μαθητών και γονιών. Τα δεδομένα αυτά συμβάλλουν ώστε τα αποτελέσματα της έρευνας να είναι όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικά και γενικεύσιμα .

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Στη 1^{η} φάση αρχικά δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης (βλ. Παράρτημα, σ.101) που αφορούσε την έννοια του λογαρίθμου, την οποία είχαν διδαχθεί στη Β΄ Λυκείου και χειρίζονται με σχετική άνεση στην επίλυση ασκήσεων. Σκοπός αυτού του ερωτηματολογίου ήταν να ερευνηθούν οι αντιλήψεις τους γύρω από την έννοια του λογαρίθμου. Στη συνέχεια υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση στους ίδιους μαθητές αφενός για έλεγχο αν η σχεδιασμένη παρέμβαση που πραγματοποιείται στο προβλεπόμενο χρόνο και αφετέρου για τη διαπίστωση αν άλλαξαν οι αντιλήψεις τους μετά τη διδακτική παρέμβαση, δίνοντάς τους το ίδιο ερωτηματολόγιο. Η 1^{η} φάση δηλαδή είχε το ρόλο μιας πιλοτικής έρευνας εν όψει αυτής που θα πραγματοποιούσαμε σε μαθητές Β΄ Λυκείου.

Στη 2^{η} φάση και μετά την επεξεργασία των αποτελεσμάτων της 1^{ης} φάσης και τις απαραίτητες τροποποιήσεις, υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση στους μαθητές Β΄ (βλ. Παράρτημα, σ. 133) Λυκείου που είχαν διαφορετικό διδάσκοντα, και διδάχθηκαν πρώτη φορά τους λογάριθμους μέσω αυτής της παρέμβασης. Κατόπιν με χρήση ερωτηματολογίου ερευνήθηκε κατά πόσο οι στόχοι της διδακτικής παρέμβασης επετεύχθησαν. Επίσης ζητήθηκε από το συνάδελφο που διδάσκει στη συγκεκριμένη τάξη να παρακολουθήσει τη διδακτική παρέμβαση και κατόπιν να απαντήσει σε κάποια ερωτήματα με τη μορφή συνέντευξης.

Η σύνταξη του ερωτηματολογίου καθορίστηκε από τους σκοπούς της έρευνας, τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαμε θέσει (βλ. ενότητα 1.9) και τον τρόπο τον οποίο επιλέξαμε για να τα διερευνήσουμε. Επιλέξαμε να θέσουμε στους μαθητές ερωτήματα ανοικτού τύπου, που ερευνούσαν αφενός κατά πόσο οι ορισμοί, οι ιδιότητες και τα ιστορικά στοιχεία εμπεδώθηκαν και αφετέρου τις στάσεις και τις εντυπώσεις που προκάλεσε μια διδασκαλία διαφορετικού τύπου από τη συνηθισμένη.

Παρουσιάζουμε παρακάτω τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών στα ερωτηματολόγια της έρευνας. Όλες οι απαντήσεις των μαθητών καθώς και η συνέντευξη του διδάσκοντα της Β΄ Λυκείου δίνονται στο παράρτημα.

4.2 Υλοποίηση και Αποτελέσματα 1ης φάσης της έρευνας (Γ΄ Λυκείου)

Επιλέξαμε ένα τμήμα 17 μαθητών Θετικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, δηλαδή μαθητών που έχουν πολύ καλή σχέση με τα Μαθηματικά και υψηλούς στόχους ενόψει των Πανελλαδικών εξετάσεων, για να τους θέσουμε ερωτήσεις σχετικά με μία μαθηματική έννοια – το λογάριθμο- που διδάχθηκαν στη Β΄ Λυκείου και έλυσαν πολλές ασκήσεις πάνω σε αυτή. Οι ερωτήσεις που τους απευθύναμε δεν ήταν στο συνήθη πλαίσιο ασκήσεων, αλλά στόχευαν σε μια γενικότερη κατανόηση και γνώση της έννοιας του λογαρίθμου, και σε θέματα που άπτονται της ιστορικής της εξέλιξης.

Είναι μάλλον κοινώς αποδεκτό ότι σε μια παραδοσιακή και πιεσμένη χρονικά διδασκαλία λογαρίθμων στη Β΄ Λυκείου, έμφαση και απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήσεις σπάνια δίνονται. Επίσης, ενώ στο βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει ένα ιστορικό σημείωμα που δίνει απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα, δε δίνεται σε αυτό η δέουσα σημασία από μαθητές αλλά και καθηγητές, αφενός διότι βρίσκεται στο τέλος του κεφαλαίου των λογαρίθμων και αφετέρου διότι δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης. Η εκτίμηση αυτή φαίνεται να επιβεβαιώνεται από τις απαντήσεις των μαθητών.

Μετά από τη διδακτική παρέμβαση θέσαμε ακριβώς τα ίδια ερωτήματα στους μαθητές, και από τις απαντήσεις τους εκτιμάται οτι οι περισσότεροι από τους διδακτικούς στόχους επετεύχθησαν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό. Ενδεχομένως αν οι μαθητές είχαν και κάποιο υποστηρικτικό αντίστοιχο υλικό για να μελετήσουν και δεν αρκούνταν μόνο στα όσα είδαν και αφομοίωσαν από το μάθημα, τα αποτελέσματα να ήταν ακόμα καλύτερα. Βέβαια οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν διδαχθεί την έννοια του λογαρίθμου και είχαν εξασκηθεί πολύ πάνω σε αυτή, οπότε θα έχει ενδιαφέρον να δούμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης σε μαθητές της Β΄ Λυκείου που θα ακούσουν πρώτη φορά λογαρίθμους με αυτόν τον τρόπο.

Τέλος οι συγκεκριμένοι μαθητές ρωτήθηκαν μετά τη διδακτική να αξιολογήσουν μια τέτοια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία και εστιασμένη στην αποσαφήνιση εννοιών, κινήτρων και εφαρμογών, αν τους προκάλεσε το ενδιαφέρον και σε τι νομίζουν ότι υπερτερεί σε σχέση με μια παραδοσιακή διδασκαλία. Οι μαθητές εκτιμάται ότι ενθουσιάστηκαν διότι τους λύθηκαν αρκετές απορίες σχετικά με το πώς ανακαλύφθηκαν και που εφαρμόζονται, είδαν την έννοια του λογαρίθμου από μια άλλη οπτική, έμαθαν ενδιαφέρουσες πληροφορίες και ξέφυγαν από τη μονότονη επίλυση ασκήσεων. Το σύνολο των μαθητών θεωρεί ότι τέτοιου είδους προσεγγίσεις πρέπει να γίνονται στη διδασκαλία των μαθηματικών, χωρίς όμως να παραγνωρίζουν ότι πρέπει να διατίθεται και χρόνος για επίλυση ασκήσεων, κυρίως ενόψει εξετάσεων.

Ας δούμε όμως αναλυτικά τις ερωτήσεις και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Όλες οι απαντήσεις όπως ακριβώς δόθηκαν παρουσιάζονται στο παράρτημα.

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

Αποτελέσματα

Η πλειοψηφία των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση ή δεν είχε καμία πιθανή απάντηση να δώσει ή πίστευε ότι οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν προκειμένου να μπορούν να λύνονται εκθετικές εξισώσεις. Δύο μόνο έκαναν αναφορά για απλούστευση υπολογισμών χωρίς όμως να είναι σαφές τι ακριβώς εννοούν με τον όρο 'υπολογισμοί'. Μετά τη διδακτική παρέμβαση η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ότι ανακαλύφθηκαν προκειμένου να απλουστευθούν οι πράξεις μεταξύ μεγάλων αριθμών. Θεωρώ ότι ο στόχος της διδακτικής παρέμβασης για την αποσαφήνιση του λόγου προέλευσης των λογαρίθμων επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

2. Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α , ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε το αποτέλεσμα να είναι θ. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι ο λογάριθμος έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

Αποτελέσματα

Η πλειοψηφία των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση ή δεν είχε καμία πιθανή απάντηση να δώσει ή προσπαθούσε να ερμηνεύσει τον όρο ετυμολογικά. Η διδακτική παρέμβαση είχε ως στόχο να αποσαφηνίσει ότι οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν μέσα από την αντιστοίχιση όρων αριθμητική και γεωμετρικής προόδου, στόχος που επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό. Είχε όμως και στόχο να αποσαφηνίσει την προέλευση του όρου 'λογάριθμος' ως τον αριθμό που μετράει του λόγους σε μια αναπαράσταση των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σε συνεχή αναλογία, στόχος που από ότι φαίνεται δεν επετεύχθη. Αν και θεωρώ ότι τονίστηκε ρητά στο μάθημα, οι μαθητές ή δεν το αφομοίωσαν ή ίσως δεν το κατάλαβαν. Γενικά έχω την αίσθηση ότι η προσέγγιση του λογαρίθμου μέσα από την αντιστοίχιση δύο προόδων σαν να τους έβγαλε έξω από τα νερά τους. Σαν δηλαδή να τους γκρέμισε μια εικόνα που είχαν για το λογάριθμο, με αποτέλεσμα στο συγκεκριμένο κομμάτι της παρέμβασης να μην αφομοίωναν πλήρως ό,τι πληροφορία τους έδινα, λόγω αυτής της σύγχυσης.

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών'.

$\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$

Γιατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

Αποτελέσματα

Η πλειοψηφία των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση ή δεν γνώριζε ή πίστευε ότι είναι σημαντικές διότι βοηθούν στις πράξεις των λογαρίθμων ή τον υπολογισμό λογαρίθμων από άλλους γνωστούς, είτε για την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων. Η διδακτική παρέμβαση προσπάθησε να αποσαφηνίσει ότι με τις ιδιότητες αυτές ο πολ/σμος , η διαίρεση , η ύψωση σε δύναμη και η εξαγωγή ρίζας ανάγονται σε πρόσθεση , αφαίρεση , πολ/σμο και διαίρεση αντίστοιχα και έτσι απλουστεύονται οι πράξεις μέσω χρήσης λογαριθμικών πινάκων. Από τις απαντήσεις μετά την παρέμβαση θεωρώ ότι ο στόχος επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου επισημαίνεται η αντιστοιχία των παραπάνω ιδιοτήτων των λογαρίθμων με τις ιδιότητες των δυνάμεων. Ποια πιστεύετε είναι αυτή η αντιστοιχία ;

Αποτελέσματα

Φαίνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών αναγνώριζε την αντιστοιχία και πριν την παρέμβαση. Ωστόσο υπήρξαν και μαθητές που δεν αναγνώρισαν την αντιστοιχία ούτε και μετά την παρέμβαση γεγονός που αποδεικνύει ότι κάτι που εμείς ως εκπαιδευτικοί το θεωρούμε αυτονόητο ή εύκολο για τους μαθητές, δεν είναι. Η διδακτική παρέμβαση είχε ως στόχο να αποσαφηνίσει το ρόλο του λογάριθμου ως εκθέτη δύναμης και άρα ότι οι ιδιότητες των λογαρίθμων είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων. Άλλωστε οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των λογαρίθμων στηρίχθηκαν στις ιδιότητες των δυνάμεων. Θεωρώ ότι ο στόχος επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

5. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου αναφέρεται ότι : ‘Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί** λογάριθμοι’.

Γιατί πιστεύετε από όλους τους αριθμούς επιλέχθηκε το 10 να αποτελέσει τη βάση των λεγόμενων ‘κοινών’ λογαρίθμων και πως νομίζετε ότι συνέβαλλαν στην απλοποίηση των πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών;

Αποτελέσματα

Η πλειοψηφία των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση πίστευε ότι η επιλογή του 10 οφείλεται στο ότι γενικά οι πράξεις με το 10 και οι δυνάμεις του 10 είναι πολύ εύ-

κολες. Ενώ στην ουσία περί αυτού πρόκειται κανείς δεν το συσχέτισε με το ότι το 10 αποτελεί τη βάση του αριθμητικού μας συστήματος. Στη διδακτική παρέμβαση αυτό τονίστηκε ρητά και θεωρώ ότι από τις απαντήσεις τους μετά την παρέμβαση προκύπτει ότι ο στόχος αυτός επετεύχθη σε αρκετά μεγάλο βαθμό.

6. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$' .

   Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu\to\infty}(1+\frac{1}{\nu})^{\nu} = 2,71828...$

   Α) Μπορείτε να αναφέρετε ένα φαινόμενο που περιγράφεται με τη βοήθεια του αριθμού e.

   Β) Γιατί από όλους τους λογαρίθμους, αυτοί που έχουν βάση το e αποκαλούνται 'φυσικοί', τι θέλουμε να δηλώσουμε με το να τους αποκαλούμε 'φυσικούς' και ποιο το νόημα του συμβόλου ln ;

   Γ) Πως νομίζετε προέκυψε ο όρος 'νεπέριοι';

Αποτελέσματα

Από τις απαντήσεις των μαθητών πριν την διδακτική παρέμβαση φαίνεται ότι υπήρχε παντελής άγνοια για τη χρήση των όρων φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι και τη σημασία του αριθμού e. Στη διδακτική παρέμβαση έγινε προσπάθεια να αποσαφηνιστούν οι όροι αυτοί καθώς και ο ρόλος που έχει ο αριθμός e στους λογαρίθμους. Αναφορικά με τη χρήση του όρου νεπέριοι και του συμβόλου ln θεωρώ ότι ο διδακτικός στόχος επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό. Αναφορικά όμως με τη σημασία του αριθμού e και του όρου 'φυσικοί' λογάριθμοι παρόλο που κάποιοι μαθητές ανταποκρίθηκαν θετικά, θεωρώ ότι αυτός ο διδακτικός στόχος δεν επετεύχθη σε ικανοποιητικό βαθμό.

7. Πότε περίπου νομίζετε ανακαλύφθηκαν οι λογάριθμοι (ποιον αιώνα) και ποιοι ήταν οι βασικοί πρωταγωνιστές στην εφεύρεσή τους;

Αποτελέσματα

Οι μαθητές στην πλειοψηφία τους έδωσαν σωστές απαντήσεις αναφορικά με το πότε περίπου ανακαλύφθηκαν οι λογάριθμοι (χωρίς βέβαια να υπάρχουν και κάποιες πολύ άστοχες απαντήσεις) αλλά υπήρχε παντελής άγνοια για τους βασικούς πρωταγωνιστές. Στη διδακτική παρέμβαση τονίστηκαν οι βασικοί πρωταγωνιστές, η συμβολή του καθενός, η χρονική περίοδος και δόθηκαν και κάποιες πληροφορίες για το γενικότερο κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο της εποχής. Θεωρώ ότι ο διδακτικός στόχος να τοποθε-

τηθούν οι λογάριθμοι στο χρόνο και τον τόπο δημιουργίας τους επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

8. Γιατί νομίζετε διδάσκονται σήμερα στα σχολεία οι λογάριθμοι και μάλιστα σε ένα μάθημα γενικής παιδείας και ποια εφαρμογή βρίσκουν στο φυσικό κόσμο;

Αποτελέσματα

Το σύνολο των μαθητών δε γνώριζε εφαρμογές που βρίσκουν οι λογάριθμοι στο φυσικό κόσμο και κατ' επέκταση τους λόγους για τους οποίους αυτοί διδάσκονται σήμερα στα σχολεία σε ένα μάθημα γενικής παιδείας. Ακόμα και αυτοί που έδωσαν κάποιες απαντήσεις, αυτές ήταν γενικές ή περιορίζονταν στο ρόλο των λογαρίθμων στην επίλυση εκθετικών εξισώσεων. Στη διδακτική παρέμβαση επιχειρήθηκε να αποσαφηνιστούν οι λόγοι για τους οποίους διδάσκονται οι λογάριθμοι μέσω συγκεκριμένων εφαρμογών που βρίσκουν στο φυσικό κόσμο. Ωστόσο ο διδακτικός αυτός στόχος δεν επετεύχθη σε ικανοποιητικό βαθμό, γεγονός που ενδεχομένως οφείλεται σε λάθος σχεδιασμό ή λάθος διαχείρισης δικής μου ή στο μεγάλο όγκο πληροφοριών που δέχθηκαν σε σύντομο χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα να μην αφομοιωθούν όλες .

9. Σας δημιουργήθηκαν ποτέ κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα και αν ναι προσπαθήσατε να βρείτε απαντήσεις; Πιστεύετε ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών ή πρέπει απλά να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων;

Αποτελέσματα

Περίπου στους μισούς μαθητές δεν είχαν δημιουργηθεί κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα ενώ στους άλλους μισούς που δημιουργήθηκαν δεν απαντήθηκαν στα πλαίσια της διδασκαλίας, ούτε όμως και οι ίδιοι οι μαθητές αναζήτησαν απαντήσεις. Το σύνολο των μαθητών συμφωνεί ότι τέτοια ερωτήματα όχι μόνο πρέπει να τίθενται αλλά και να απαντώνται, διότι προκαλούν το ενδιαφέρον, αποσαφηνίζουν όρους, κίνητρα, εφαρμογές και οδηγούν σε πληρέστερη και σφαιρική κατανόηση των εννοιών. Αξιοσημείωτο είναι ότι την άποψη αυτή την είχαν πριν τη διδακτική παρέμβαση και άρα δεν οφείλεται σε αυτή, γεγονός που αποδεικνύει ότι η περιέργεια και το ενδιαφέρον υπάρχει στους μαθητές μας και ενδεχομένως με τον τρόπο με τον οποίο συνήθως διδάσκονται τα μαθηματικά απλά δεν προκαλούνται. Τέλος το γεγονός ότι στους μισούς μαθητές δε δημιουργήθηκαν τέτοια ερωτήματα, ενδεχομένως να είναι αποτέλεσμα της βαρύτητας που δίνουμε και εμείς οι εκπαιδευτικοί σε τέτοια ερωτήματα. Στο κατά πόσο δηλαδή έχουμε μάθει τους μαθητές μας να σκέφτονται και να θέτουν τέτοιου είδους ερωτήματα.

10. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει ένα ιστορικό σημείωμα που τα περισσότερα από τα παραπάνω ερωτήματα τα απαντάει. Αντιληφθήκατε την ύπαρξή του; Το διαβάσατε ποτέ έστω και από περιέργεια ή το θεωρήσατε περιττό αφού δεν αποτελούσε μέρος της διδακτέας – εξεταστέας ύλης; Αν ναι σας κίνησε το ενδιαφέρον ή όχι;

Αποτελέσματα

Οι περισσότεροι μαθητές αγνοούσαν την ύπαρξή του και δήλωσαν ότι αν την είχαν αντιληφθεί θα το διάβαζαν, διότι θεωρούν ότι θα βοηθούσε στην καλύτερη κατανόηση και τον εμπλουτισμό των γνώσεων. Αρκετοί μαθητές παρόλο που αντιλήφθηκαν την ύπαρξή του, δεν το διάβασαν διότι δεν αποτελούσε μέρος της εξεταστέας ύλης. Δύο μόνο μαθητές το διάβασαν με τον ένα να δηλώνει ότι είχε μεγάλο ενδιαφέρον. Αρκετοί μαθητές δήλωσαν ότι δεν τους παρακίνησε ή και ούτε τους ενημέρωσε ο καθηγητής τους. Οι απαντήσεις των μαθητών διατυπώθηκαν κυρίως πριν τη διδακτική παρέμβαση, χωρίς να διαφοροποιούνται μετά από αυτή και επομένως δεν επηρέασε τις απόψεις τους.

11. Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου, εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους, την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό. Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

Αποτελέσματα

Το σύνολο των μαθητών θεωρεί ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται σε μια διδασκαλία διότι βοηθούν στην βαθιά κατανόηση και την αποσαφήνιση εννοιών και κινήτρων, καθώς και τους λόγους για τους οποίους διδάσκονται οι εν λόγω έννοιες. Η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση φαίνεται να τους έλυσε αρκετές τέτοιου είδους απορίες, ενώ κανένας δεν εξέφρασε την άποψη ότι αυτά τα ιστορικά στοιχεία είναι περιττά και ότι δεν υπάρχει λόγος να τα μαθαίνουμε. Μάλιστα κάποιοι έθεσαν το θέμα στο γενικότερο σχεδιασμό του εκπαιδευτικού συστήματος και όχι απλά στην επιλογή του τρόπου διδασκαλίας από τον εκάστοτε καθηγητή.

12. Συγκρίνοντας μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων, με μια παραδοσιακή διδασκαλία που συνήθως ακολουθείται, μπορείτε να αναφέρετε τα σημεία που νομίζετε ότι υπερτερεί η μία της άλλης.

Αποτελέσματα

Το σύνολο των μαθητών θεωρεί ότι μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία υπερτερεί της παραδοσιακής, καθώς παρέχεται σφαιρικότερη γνώση, λύνονται απορίες γύρω από τους λόγους ύπαρξης και εφαρμογής των εννοιών και προκαλεί περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών αφού ξεφεύγει από τη στείρα γνώση που παρέχει η συνεχής επίλυση ασκήσεων. Ωστόσο αναγνωρίζεται ότι στην παραδοσιακή διδασκαλία υπάρχει περισσότερο χρόνος για εξάσκηση και επίλυση ασκήσεων, είναι πιο συγκεκριμένη και στοχευόμενη στις εξετάσεις.

13. Αναφέρετε αν και σε ποιο βαθμό η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολουθήσατε προκάλεσε το ενδιαφέρον σας, σας φάνηκε λιγότερο ή περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και άλλαξε έστω και λίγο την εικόνα που έχετε για τα μαθηματικά.

Αποτελέσματα

Η συγκεκριμένη διδασκαλία πιστεύω ότι προκάλεσε έντονα το ενδιαφέρον των μαθητών, γεγονός που φαίνεται τόσο από τις απαντήσεις τους, όσο και από τις αντιδράσεις τους κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, όπου σε μερικά σημεία πραγματικά έμεναν έκπληκτοι και εντυπωσιασμένοι. Δεδομένου ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές πάντα δείχνουν μεγάλη προσοχή και συμμετοχή στο μάθημα, δε μπορώ να συμπεράνω ότι η συγκεκριμένη παρέμβαση βελτίωσε το βαθμό προσοχής τους. Τέλος παρόλο που όπως πολύ σωστά επισήμαναν κάποιοι μαθητές, μία μόνο διδακτική παρέμβαση δεν αρκεί για να αλλάξει την ήδη διαμορφωμένη εικόνα για τα μαθηματικά, οι περισσότεροι θεωρούν ότι μια διδασκαλία που παρέχει σφαιρικότερες γνώσεις γύρω από μία έννοια και δεν εξαντλείται σε επίλυση ασκήσεων και επινόησης τεχνασμάτων, είναι πιο κατανοητή, πιο ελκυστική και ενδιαφέρουσα και μειώνει τα αισθήματα απογοήτευσης που προκαλούν δύσκολες ασκήσεις και προβλήματα.

4.3 Υλοποίηση και Αποτελέσματα 2^{ης} φάσης της έρευνας (Β΄Λυκείου)

Επιλέξαμε ένα τμήμα Β΄ Λυκείου 20 μαθητών, οι 11 από τους οποίους είχαν επιλέξει τη θετική κατεύθυνση και οι υπόλοιποι 9 τη θεωρητική. Η επιλογή του συγκεκριμένου τμήματος έγινε με κριτήριο ότι ήταν το 1^{ο} τμήμα που θα διδασκόταν το κεφάλαιο των λογαρίθμων. Το συγκεκριμένο τμήμα όπως και όλα τα τμήματα της Β΄ Λυκείου είχαν άλλο διδάσκοντα, οπότε τους περισσότερους μαθητές δεν τους γνώριζα παρά μόνο όσους είχα στην κατεύθυνση. Αυτό το γεγονός μπορεί να επηρέασε θετικά το ενδιαφέρον που έδειξαν, διότι αφενός ότι όταν έρχεσαι για 1^{η} φορά σε επαφή με έναν καινούργιο καθηγητή υπάρχει η περιέργεια να τον γνωρίσεις και αφετέρου η όποια αλλαγή γίνεται στον τρόπο διδασκαλίας και διαφέρει από αυτόν που έχεις συνηθίσει τους προηγούμενους μήνες είναι λογικό να προκαλέσει το ενδιαφέρον. Από την περιγραφή

του συναδέλφου πρόκειται για ένα τμήμα όπου οι μισοί περίπου μαθητές είναι αρκετά καλοί. Να τονίσουμε ότι συνήθως οι μαθητές που επιλέγουν τη θεωρητική κατεύθυνση έχουν μειωμένο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Παρόλα αυτά από τη συνέντευξη του συναδέλφου που παρακολούθησε τη διδακτική παρέμβαση προκύπτει ότι και αυτοί οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον και συμμετείχαν ενεργά στο μάθημα.

Η διδασκαλία των λογαρίθμων πραγματοποιήθηκε σε δύο δίωρα. Το $1^{ο}$ δίωρο πραγματοποιήθηκε τη $2^{η}$ και $3^{η}$ ώρα δηλαδή τις πιο αποδοτικές ώρες του 7ώρου, ενώ το $2^{ο}$ δίωρο την $6^{η}$ και την $7^{η}$ ώρα που οι μαθητές συνήθως είναι κουρασμένοι και δεν αφομοιώνουν το ίδιο καλά τις πληροφορίες που δέχονται. Οι μαθητές έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και στα 2 δίωρα, ενώ συμμετείχαν και μαθητές που κατά το δάσκαλό τους δε συμμετέχουν συνήθως. Στο $1^{ο}$ δίωρο δεν ολοκληρώθηκε το φύλλο εργασίας όπως είχε προγραμματιστεί (δεν ασχοληθήκαμε με την ερώτηση 10 και τον τύπο αλλαγής βάσης) και χρειαστήκαμε λίγο χρόνο από το $2^{ο}$ δίωρο. Το $2^{ο}$ δίωρο ολοκληρώθηκε όπως είχε προγραμματιστεί, αλλά προς το τέλος οι μαθητές φαίνονταν κουρασμένοι. Θεωρώ ότι η διδασκαλία άρεσε στους μαθητές διότι χρησιμοποιήθηκαν και άλλα μέσα όπως διαδραστικός πίνακας, powerpoint και φύλλο εργασίας, αλλά και ένα διαφορετικό στυλ μαθήματος από αυτό που είχαν συνηθίσει. Οι μαθητές όμως δεν αφομοίωσαν πλήρως όλες τις πληροφορίες που δέχθηκαν. Ίσως αυτό οφείλεται στο ότι δέχθηκαν πολλές πληροφορίες σε σύντομο χρονικό διάστημα και δεν πρόλαβαν να τις επεξεργαστούν και να τις αφομοιώσουν. Δυστυχώς δεν ήταν εφικτό να πραγματοποιηθεί η διδακτική παρέμβαση σε 4 διακριτές ώρες όπως είχε σχεδιαστεί και όχι σε 2 συνεχόμενα δίωρα. Το γεγονός αυτό θεωρούμε ότι επηρέασε τα αποτελέσματα της παρέμβασης διότι οι μαθητές δεν είχαν τη δυνατότητα να μελετούν παράλληλα στο σπίτι τους αυτά που μάθαιναν στο προηγούμενο μάθημα.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μετά την επεξεργασία των αποτελεσμάτων της $1^{ης}$ φάσης, διαφοροποιώντας κάπως τα ερωτηματολόγια και δίνοντας έμφαση και σε ερωτήματα που αφορούν το καθαρά υπολογιστικό κομμάτι των λογαρίθμων μιας και οι μαθητές της Β΄ Λυκείου σε αντίθεση με αυτούς της Γ΄ θα έρχονταν $1^{η}$ φορά με την έννοια αυτή και άρα μας ενδιέφερε να ερευνήσουμε το βαθμό εμπέδωσής της. Ας δούμε όμως αναλυτικά τις ερωτήσεις και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση, καθώς και τη συνέντευξη που πήραμε από το συνάδελφο που την παρακολούθησε. Όλες οι απαντήσεις όπως ακριβώς δόθηκαν παρουσιάζονται στο παράρτημα.

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

Αποτελέσματα

Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ότι ανακαλύφθηκαν προκειμένου να απλουστευθούν οι πράξεις μεταξύ μεγάλων αριθμών. Θεωρώ ότι ο στόχος της διδακτικής

παρέμβασης για την αποσαφήνιση του λόγου προέλευσης των λογαρίθμων επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

2. Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α , ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε το αποτέλεσμα να είναι θ. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι ο λογάριθμος έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

Αποτελέσματα

Η διδακτική παρέμβαση είχε ως στόχο να αποσαφηνίσει ότι οι λογάριθμοι δημιουργήθηκαν μέσα από την αντιστοίχιση όρων αριθμητική και γεωμετρικής προόδου και να αποσαφηνίσει την προέλευση του όρου 'λογάριθμος' ως τον αριθμό που μετράει του λόγους σε μια αναπαράσταση των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σε συνεχή αναλογία, στόχος που από ότι φαίνεται δεν επετεύχθη σε ικανοποιητικό βαθμό. Αν και θεωρώ ότι τονίστηκε ρητά στο μάθημα, οι μαθητές ή δεν το αφομοίωσαν ή ίσως δεν το κατάλαβαν. Είναι χαρακτηριστικό ότι μόνο οι 5 στους 20 φαίνεται να το συγκράτησαν, χωρίς να παρουσιάζεται κάποια ιδιαίτερη διαφορά μεταξύ των μαθητών των δύο κατευθύνσεων.

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών'.

   $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$

   Γιατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

Αποτελέσματα

Η διδακτική παρέμβαση προσπάθησε να αποσαφηνίσει ότι με τις ιδιότητες αυτές ο πολ/σμος, η διαίρεση, η ύψωση σε δύναμη και η εξαγωγή ρίζας ανάγονται σε πρόσθεση, αφαίρεση, πολ/σμο και διαίρεση αντίστοιχα και έτσι απλουστεύονται οι πράξεις μέσω χρήσης λογαριθμικών πινάκων. Οι μαθητές και των δύο κατευθύνσεων φαίνεται από τις απαντήσεις τους ότι το κατάλαβαν και το αφομοίωσαν. Θεωρώ ότι ο στόχος επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογά-

ριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$' .

Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu \to \infty}(1+\frac{1}{\nu})^{\nu} = 2,71828...$

Γιατί πιστεύετε ότι συνδέεται ο αριθμός e με τους λογαρίθμους και γιατί οι λογάριθμοι που έχουν βάση το e αποκαλούνται 'φυσικοί';

Αποτελέσματα

Στη διδακτική παρέμβαση έγινε προσπάθεια να αποσαφηνιστεί ο όρος 'φυσικοί λογάριθμοι' καθώς ο ρόλος που έχει ο αριθμός e στους λογαρίθμους. Ωστόσο τόσο οι μαθητές της θετικής όσο και της θεωρητικής δεν ανταποκρίθηκαν θετικά. Μόνο δύο μαθητές έδωσαν ικανοποιητικές απαντήσεις, χωρίς και αυτές να είναι πλήρεις. Θεωρώ ότι ο διδακτικός στόχος δεν επετεύχθη σε κανένα βαθμό.

5. Πως πιστεύετε το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο του $16^{ου}$ – $17^{ου}$ αιώνα επηρέασε την εξέλιξη των μαθηματικών και την επινόηση των λογαρίθμων;

Αποτελέσματα

Στη διδακτική παρέμβαση τονίστηκαν οι βασικοί πρωταγωνιστές, η συμβολή του καθενός, η χρονική περίοδος και δόθηκαν και κάποιες πληροφορίες για το γενικότερο κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο της εποχής με έμφαση στην ανάπτυξη του εμπορίου και τις εμπορικές συναλλαγές, αλλά και της αστρονομίας όπου υπεισέρχονταν μετρήσεις και απαιτούνταν πράξεις με πολλά δεκαδικά ψηφία. Θεωρώ ότι ο διδακτικός στόχος να συνδεθεί η δημιουργία των λογαρίθμων με το γενικότερο κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό.

6. Αναφέρετε κάποιες από τις σπουδαίες εφαρμογές της έννοιας του λογαρίθμου στο φυσικό κόσμο που καθιστά αναγκαία τη διδασκαλία του σε ένα μάθημα Γενικής Παιδείας.

Αποτελέσματα

Στη διδακτική παρέμβαση επιχειρήθηκε να αποσαφηνιστούν οι λόγοι για τους οποίους διδάσκονται οι λογάριθμοι μέσω συγκεκριμένων εφαρμογών που βρίσκουν σήμερα στο φυσικό κόσμο. Ωστόσο οι μαθητές ή απαντούσαν με βάση τις αρχικές εφαρμογές των λογαρίθμων ή έδιναν τις δικές τους εκτιμήσεις. Θεωρώ ότι ο διδακτικός αυτός στόχος δεν επετεύχθη σε ικανοποιητικό βαθμό.

7. Πιστεύετε ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών ή πρέπει απλά να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων;

Αποτελέσματα

Το σύνολο σχεδόν των μαθητών συμφωνεί ότι τέτοια ερωτήματα όχι μόνο πρέπει να τίθενται αλλά και να απαντώνται, διότι προκαλούν το ενδιαφέρον, αποσαφηνίζουν όρους – κίνητρα – εφαρμογές και οδηγούν σε πληρέστερη και σφαιρική κατανόηση των εννοιών . Αυτό αποδεικνύει ότι η περιέργεια και το ενδιαφέρον υπάρχει στους μαθητές μας και ενδεχομένως με τον τρόπο με τον οποίο συνήθως διδάσκονται τα μαθηματικά, απλά δεν προκαλούνται. Τέλος θεωρώ πολύ σημαντικό το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές δήλωσαν ότι με μια τέτοια προσέγγιση δίνεται η δυνατότητα και η ευκαιρία και σε μαθητές που δεν έχουν καλή σχέση με τα μαθηματικά να προσέξουν και να συμμετέχουν. Είναι πιθανό δηλαδή ότι η επίλυση δύσκολων και τεχνικών ασκήσεων να οδηγεί στην απογοήτευση και την αίσθηση ότι τα μαθηματικά είναι για κάποια φωτισμένα μυαλά, με αποτέλεσμα αρκετοί να εγκαταλείπουν την προσπάθεια, ενώ το να δίνεις έμφαση στην προσέγγιση της έννοιας, σε πιο απλά παραδείγματα και να θέτεις ερωτήματα γενικότερου προβληματισμού να δημιουργεί την αίσθηση ότι όλοι μπορεί να εκφέρουν άποψη και να συμμετέχουν σε έναν διάλογο.

8. Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι διαφωτίζουν τα παραπάνω ερωτήματα, οι ιστορικές πληροφορίες που δόθηκαν στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε, καθώς και το ιστορικό σημείωμα που βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου;

Αποτελέσματα

Η πλειοψηφία των μαθητών θεωρεί η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση σε συνδυασμό με το ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου φαίνεται να τους έλυσε αρκετές απορίες γύρω από την ιστορική εξέλιξη των λογαρίθμων, ενώ ελάχιστοι εξέφρασαν την άποψη ότι αυτά τα ιστορικά στοιχεία είναι περιττά και ότι δεν υπάρχει λόγος να τα μαθαίνουμε. Βέβαια από τις απαντήσεις τους στα προηγούμενα ερωτήματα αυτό δεν επαληθεύεται πλήρως. Ίσως το γεγονός αυτό να οφείλεται στο μεγάλο όγκο πληροφοριών που δέχθηκαν σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα χωρίς να έχουν αντίστοιχα τον απαιτούμενο χρόνο για να τις επεξεργαστούν και να τις αφομοιώσουν.

9. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$\log_\alpha 1 =$	$\log_\alpha \alpha =$	$\log_\alpha \alpha^\chi =$	$\alpha^{\log_\alpha \theta} =$
$\log_3 \frac{1}{9} =$	$\ln \sqrt{e} =$	$\log_{\sqrt{2}} .... = 4$	$\log_{....} 16 = 2$
$\log 0.001 =$	$\log .... = 3$	$\log \theta = \frac{\ln ...}{\ln ...}$	$\ln \theta = \frac{\log ...}{\log ...}$

Αποτελέσματα

Εδώ η διαφορά στις απαντήσεις των μαθητών της θετικής είναι σαφώς καλύτερες από αυτές της θεωρητικής. Οι μαθητές της θετικής ανταποκρίθηκαν σε πολύ μεγάλο βαθμό, χωρίς βέβαια να είναι σίγουρο ότι αυτό οφείλεται αποκλειστικά στη δική μου παρέμβαση, μιας και είναι πολύ πιθανό να έχουν ξανακούσει για λογαρίθμους σε κάποιο φροντιστήριο ή ιδιαίτερο μάθημα. Ενδιαφέρον έχουν όμως και οι απαντήσεις των μαθητών της θεωρητικής κατεύθυνσης, μιας και που μπορεί να μην ήταν όλες σωστές αλλά η γενική εικόνα δεν ήταν απογοητευτική. Η αίσθηση πάντως που έχω τόσο από τις απαντήσεις όσο και από τη κουβέντα κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης είναι ότι η δυσκολία που συνάντησαν δεν ήταν τόσο στην έννοια και ορισμό του λογαρίθμου όσο στις προαπαιτούμενες γνώσεις περί δυνάμεων.

10. Με βάση τις ιδιότητες λογαρίθμων να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4$$

$$B = \frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32$$

Αποτελέσματα

Τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με αυτά της ερώτησης 9.

11. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων λογαρίθμων και του παρακάτω πίνακα να βρείτε τον άγνωστο χ στη αναλογίας $\frac{469.894}{20.941} = \frac{10.807.562}{x}$

x	logx
469.894	5,672
20.941	4,321
10.807.562	7,034
481.643	5,683
583.246	5,766
478.924	5,680

Αποτελέσματα

Η συγκεκριμένη άσκηση αν και θεωρώ ότι είναι πολύ σημαντική διότι αφενός αναδεικνύει τη χρησιμότητα των λογαρίθμων και αφετέρου έχει αξία από ιστορική άποψη μιας και πραγματεύεται την εύρεση της τέταρτης αναλόγου που συνήθως εμφανιζόταν στα προβλήματα επίλυσης τριγώνου του Napier, δεν είναι από αυτές με τις οποίες πραγματεύονται συνήθως οι μαθητές σήμερα. Αν και λύθηκε μια παρόμοια κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, οι μαθητές δεν ανταποκρίθηκαν σε καθόλου ικανοποιητικό βαθμό, χωρίς να υπάρχει ιδιαίτερη διαφορά στους μαθητές των δύο κατευθύνσεων. Ακόμα και οι μαθητές της θετικής που φαίνεται να έχουν ευχέρεια στις ιδιότητες λογαρίθμων, δεν ανταποκρίθηκαν σε κάτι όχι πολύ απαιτητικό αλλά διαφορετικό από αυτό που μάλλον έχουν συνηθίσει.

12. Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου, εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους , την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό; Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

Αποτελέσματα

Το σύνολο σχεδόν των μαθητών θεωρεί ότι οι συγκεκριμένοι στόχοι επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό, εκφράζοντας την άποψη ότι κάτι αντίστοιχο θα πρέπει να γίνεται τόσο σε όλα τα κεφάλαια όσο και σε άλλα μαθήματα. Ελάχιστες ενστάσεις υπήρξαν που αφορούσαν το χρόνο που χάνεται από την επίλυση ασκήσεων και το γεγονός ότι οι συγκεκριμένες γνώσεις δεν εξετάζονται οπότε δεν έχει και νόημα να διδάσκονται.

13. Συγκρίνοντας μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων, με μια παραδοσιακή διδασκαλία που συνήθως ακολουθείται, μπορείτε να αναφέρετε τα σημεία που νομίζετε ότι υπερτερεί η μία της άλλης.

Αποτελέσματα

Οι μαθητές θεωρούν ότι η εμπνευσμένη από την ιστορία υπερτερεί στο ότι προκαλεί το ενδιαφέρον, προσελκύει τους μαθητές, δεν είναι βαρετή και μονότονη, δίνει απαντήσεις σε απορίες τύπου *'γιατί τα μαθαίνουμε αυτά;'*, αποσαφηνίζει έννοιες και όρους και βοηθάει στη καλύτερη και σφαιρικότερη κατανόηση. Η παραδοσιακή διδασκαλία είναι πιο σύντομη, εστιάζει στην επίλυση ασκήσεων και χρειάζεται λιγότερο χρόνο να πραγματοποιηθεί.

14. Αναφέρετε αν και σε ποιο βαθμό η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολουθήσατε προκάλεσε το ενδιαφέρον σας, σας φάνηκε λιγότερο ή περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και άλλαξε έστω και λίγο την εικόνα που έχετε για τα μαθηματικά . Αν ναι, αναφέρετε τους λόγους στους οποίους νομίζετε ότι οφείλεται.

Αποτελέσματα

Η συγκεκριμένη διδασκαλία στη πλειοψηφία των μαθητών φάνηκε ενδιαφέρουσα και ελκυστική χωρίς όμως να αλλάξει την εικόνα τους για τα μαθηματικά. Σε αυτό βέβαια συντέλεσαν πέρα από την ίδια τη διδασκαλία και άλλοι παράγοντες όπως η χρήση διαδραστικού πίνακα, η παρουσίαση του μαθήματος σε powerpoint, το φύλλο εργασίας που τους δόθηκε, το γεγονός ότι το μάθημα έγινε θέτοντάς τους κάποιους προβληματισμούς και κουβέντας πάνω σε αυτούς, δεν ήταν το τυπικό μάθημα όπου ο καθηγητής παρουσιάζει και ο μαθητής απλά ακούει και σημειώνει, καθώς και το γεγονός ότι δεν ήμουν ο καθηγητής που είχαν όλη τη χρονιά (εκτός από τους μαθητές της θετικής που τους είχα στην κατεύθυνση) αλλά ένα νέο πρόσωπο που αυτό από μόνο του δημιουργεί μια νέα δυναμική και ενδιαφέρον. Παρόλα αυτά θεωρώ ότι μια τέτοια διδασκαλία δίνει την ευκαιρία σε όλους τους μαθητές να συμμετέχουν και να νιώσουν ικανοί να εκφέρουν άποψη χωρίς να νιώθουν αποκλεισμένοι.

Συνέντευξη διδάσκοντα της Β΄ Λυκείου

Ο συγκεκριμένος καθηγητής είναι πολλά χρόνια στην εκπαίδευση και στο συγκεκριμένο σχολείο, διδάσκοντας σχεδόν κάθε χρόνο την Άλγεβρα Β΄ Λυκείου και έχει πολύ εμπειρία στο χώρο. Έχει πολύ καλή επαφή με τα παιδιά και πλήρη αντίληψη του τι συμβαίνει μέσα στην τάξη. Εμπιστεύομαι τόσο τη κρίση του όσο και τη γνώμη του.

Ερώτηση

Πως θα περιγράφατε το συγκεκριμένο τμήμα από άποψη μαθηματικής παιδείας συμμετοχής και επίδοσης;

Απάντηση

Είναι ένα μέτριο τμήμα (50% καλοί – 50% αδύναμοι).Συμμετέχουν κυρίως οι καλοί μαθητές στα μαθηματικά και κάποιοι από τους άλλους προσπαθούν. Υπάρχουν πολλές ελλείψεις ειδικά από τους αδύναμους.

Ερώτηση

Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου, εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους, την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό; Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

Απάντηση

Ναι σε βαθμό 90%. Το μάθημα έτσι πρέπει να γίνεται χωρίς πίεση ύλης και χρόνου. Προσωπικά έδινα κάποια ιστορικά σημεία αλλά γρήγορα και χωρίς να μένω αρκετά. Ελάχιστοι διάβαζαν το ιστορικό σημείωμα και κυρίως καλοί μαθητές.

Ερώτηση

Θα ενσωματώνατε κάποια από τα στοιχεία (ιστορικά ή άλλα) της διδασκαλίας που παρακολουθήσατε στη διδασκαλία των λογαρίθμων; Αναφέρατε ποια και γιατί.

Απάντηση

Ναι. Τα ιστορικά για την αποσαφήνιση του ιστορικού πλαισίου και τις εφαρμογές για να μάθουν οι μαθητές που εφαρμόζονται και γιατί τα μαθαίνει. Ο τρόπος που φτάσαμε στον ορισμό και ο τρόπος απόδειξης των ιδιοτήτων.

Ερώτηση

Τι παρατηρήσεις έχετε να κάνετε σχετικά με τη διδασκαλία που παρακολουθήσετε;

Απάντηση

1. Χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος μεταξύ ορισμού και ιδιοτήτων για καλύτερη εμπέδωση και αφομοίωση του ορισμού με περισσότερα παραδείγματα, όχι και τα δύο σε ένα δίωρο
2. Δεν εξηγήθηκαν για ποιο λόγο βάζουμε τους περιορισμούς.
3. Παρουσιάστηκε μια διαφορά στη συμμετοχή όπου και οι αδύναμοι συμμετείχαν. Το ενδιαφέρον και η συμμετοχή αυξήθηκε. Οι απαντήσεις που δίνονταν από τους καλούς σε αναλογία με τους αδύναμους είναι 3:1
4. Ίσως θα έπρεπε το $2^{ο}$ δίωρο (ιστορικό) να ήταν $1^{ο}$.
5. Μου άρεσε ο τρόπος προσέγγισης του λογαρίθμου μέσα από τις δύο προόδους και ο τρόπος απόδειξης των ιδιοτήτων.
6. Μου άρεσε το ιστορικό πλαίσιο.
7. Μου άρεσε που τονίστηκαν οι εφαρμογές.
8. Μου άρεσε που αποσαφηνίστηκε τι μαθηματικά γνώριζαν τότε.
9. Χρειάζονται άλλα βιβλία, άλλα αναλυτικά προγράμματα και άλλο πλαίσιο για να δουλέψουμε.

4.4 Γενική αποτίμηση – Ανάγκη για περαιτέρω εμπειρική έρευνα

Στην ενότητα αυτή διατυπώνουμε τα γενικά συμπεράσματα της έρευνας υπό μορφήν απαντήσεων στα τρία ερευνητικά ερωτήματα που είχαμε διατυπώσει στην ενότητα 1.9.

1. Κατά πόσο μια ιστορική προσέγγιση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα στις ιδιαίτερες συνθήκες του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος το οποίο χαρακτηρίζεται από υπέρμετρο συγκεντρωτισμό (π.χ. ένα βιβλίο) και ισχυρή επίδραση των εξεταστικών διαδικασιών;

Απάντηση

Τα αποτελέσματα της έρευνας μας δείχνουν ότι μια ιστορική προσέγγιση στη διδασκαλία και εκμάθηση των Μαθηματικών μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα στις ιδιαίτερες συνθήκες του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, αν και θεωρούμε ότι το ίδιο δεν υποστηρίζει ιδιαίτερα μια τέτοια προσέγγιση. Το γεγονός ότι η διδακτική παρέμβαση υλοποιήθηκε στην Γ΄ και Β΄ Λυκείου (δύο τάξεις που επηρεάζονται καταλυτικά από το αρνητικό κλίμα των Πανελλαδικών εξετάσεων) επιβεβαιώνει ότι αντίστοιχες παρεμβάσεις είναι απόλυτα εφικτές στις μικρότερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Απαιτείται βέβαια ανάληψη πρωτοβουλίας από τον ίδιο το διδάσκοντα, ο οποίος πρέπει να πειστεί για τα οφέλη μιας τέτοιας προσέγγισης, ώστε να εμπλουτίσει το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας (ορισμοί – αποδείξεις – ασκήσεις) και να τολμήσει το διαφορετικό. Το να εντάξει όμως στη διδασκαλία του ιστορικά στοιχεία και να βρει εφαρμογές που να αναδεικνύουν τη χρησιμότητα αυτών που θα διδάξει, δεν είναι καθόλου εύκολο. Πρέπει να ψάξει αρκετά και να μελετήσει αυθεντικές ή δευτερεύουσες πηγές πράγμα που απαιτεί χρόνο, κόπο και μεράκι, δεδομένου ότι δεν είναι έτοιμα συγκεντρωμένα κάπου και τις περισσότερες φορές πρέπει να συνδυάσει πληροφορίες από διάφορες πηγές ώστε να έχει έγκυρα στοιχεία και μια ολοκληρωμένη εικόνα. Ο διδάσκων λοιπόν εκτός από τις προσωπικές του αναζητήσεις, πρέπει να έχει την απαραίτητη υποστήριξη και ορισμένα κίνητρα για να το επιχειρήσει. Επίσης τα προγράμματα σπουδών, τα σχολικά βιβλία, οι διαθέσιμες διδακτικές ώρες και γενικότερα το εκπαιδευτικό σύστημα πρέπει να προσαρμοστούν κατάλληλα ώστε να υποστηρίξουν μια τέτοια προσπάθεια. Το ιστορικό σημείωμα που περιέχεται στο σημερινό σχολικό βιβλίο αν και είναι ενδιαφέρον, κατανοητό και αρκετά περιεκτικό, βρίσκεται μετά το πέρας του κεφαλαίου των λογαρίθμων με άλλο χρώμα σελίδας που δίνει την εντύπωση ότι αποτελεί ξεχωριστή ενότητα και φυσικά δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης. Το αποτέλεσμα είναι να μη δίνεται σε αυτό η δέουσα σημασία και προσοχή από τους μαθητές και διδάσκοντες. Θα ήταν προτιμότερο να είναι ενταγμένο μέσα στο κεφάλαιο των λογαρίθμων και ενδεχομένως να αποτελεί και μέρος της εξεταστέας ύλης. Θα μπορούσε επίσης να υπάρχει μια ηλεκτρονική βιβλιοθήκη εφοδιασμένη με ιστορικές πηγές στην οποία να είναι ελεύθερη η πρόσβαση ώστε να αντλούνται πλη-

ροφορίες πέραν αυτών που παρέχει το σχολικό βιβλίο. Τέλος το εξεταστικό σύστημα πρέπει να δίνει έμφαση σε θέματα που εστιάζουν στην κατανόηση των εννοιών και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και όχι αποκλειστικά σε μεθοδολογίες και τεχνάσματα για την επίλυση ασκήσεων. Έτσι δε θα χρειάζεται ο διδάσκων στην τάξη να αφιερώνει τόσο πολύ χρόνο στην επίλυση ασκήσεων, η οποία τις περισσότερες φορές εκφυλίζεται σε μια βαρετή διαδικασία που προκαλεί την απογοήτευση και την αποστροφή.

2. Τι απήχηση έχει στους μαθητές η νέα προσέγγιση μέσω της ιστορίας; Δηλαδή, με ποιο τρόπο προσλαμβάνονται από τους μαθητές τα επιχειρήματα για τις θετικές ή αρνητικές επιδράσεις που διατυπώνονται από έμπειρους μαθηματικούς και εκπαιδευτικούς και οι αντίστοιχες διδακτικές παρεμβάσεις;

Απάντηση

Θεωρούμε ότι η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήσαμε προκάλεσε το ενδιαφέρον των μαθητών, αυξάνοντας την προσοχή και τη συμμετοχή τους στο μάθημα. Έδωσε την ευκαιρία σε μαθητές που δεν είχαν καλή σχέση με τα μαθηματικά και συνήθως ήταν παθητικοί δέκτες, να συμμετέχουν ενεργά διατυπώνοντας απόψεις και θέτοντας ή και απαντώντας σε ερωτήματα. Η ενσωμάτωση της ιστορίας πιστεύουμε ότι βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του λογαρίθμου, διαφωτίζοντας κάποια σκοτεινά σημεία, αποσαφηνίζοντας όρους και κίνητρα, αναδεικνύοντας το ρόλο και την εφαρμογή τους και εμπλουτίζοντας τις γνώσεις τους. Όπως δείχνουν οι απαντήσεις τους στα ερωτηματολόγια, οι μαθητές δέχθηκαν με ενθουσιασμό αυτή τη διαφορετική προσέγγιση και συμφώνησαν ότι είναι σημαντικό να θίγονται και άλλα στοιχεία στο μάθημα πέρα από την επίλυση ασκήσεων. Ειδικά στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου προκάλεσε μεγάλη έκπληξη αυτή η διαφορετική προσέγγιση επειδή αφενός έθεσε ερωτήματα που δεν τους είχαν προβληματίσει στο παρελθόν και αφετέρου αποσαφηνίστηκαν όροι και θίχτηκαν σημεία που σπανίως θίγονται σε ένα παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι τα ερωτήματα αυτά έχουν στοιχεία που συμβάλλουν στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης, η οποία αποτελεί έναν κεντρικό σκοπό της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Αντίστοιχα φαινόμενα παρατηρήθηκαν στους μαθητές της Β΄ Λυκείου οι οποίοι στο σύνολό τους εκφράστηκαν θετικά αναγνωρίζοντας τα οφέλη που έχει μια τέτοια προσέγγιση.

3. Μπορεί μέσα από μία εμπειρική έρευνα να τεκμηριωθεί η μία ή η άλλη άποψη όσον αφορά τα επιχειρήματα (whys) αλλά και να φανεί κατά πόσο οι τρόποι (hows) που προτείνονται είναι πραγματικά εφαρμόσιμοι;

Απάντηση

Η εμπειρική μας έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσα σε πραγματικές συνθήκες διδασκαλίας και σε τάξεις που χαρακτηρίζονται από τις ιδιαίτερες συνθήκες του εκπαιδευτικού μας συστήματος. Με δεδομένους αυτούς τους περιορισμούς θεωρούμε ότι αναδείχθηκαν αρκετά από τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά και επαληθεύθηκε ότι αρκετοί από τους τρόπους που προτείνονται είναι πραγματικά εφαρμόσιμοι (π.χ. οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις (ετυμολογικές ερμηνείες, αιτιολόγηση αυθαίρετων επιλογών), οι προσεγγίσεις μέσω οριοθετημένων ενοτήτων (αξιοποίηση ιστορικού σημειώματος). Βέβαια τα συμπεράσματα αυτά προκύπτουν από μία μόνο διδακτική παρέμβαση που έγινε σε μια συγκεκριμένη σχολική μονάδα, ενταγμένη σε μια περιοχή με τις δικές της ιδιαιτερότητες αναφορικά με τη σημασία που δίνουν μαθητές και γονείς στη μαθηματική εκπαίδευση και όλα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που συγκροτούν το κλίμα της τάξης στην οποία πραγματοποιήθηκε. Επίσης το γνωστικό επίπεδο των μαθητών καθώς και η ικανότητα του διδάσκοντα να υποστηρίξει μια τέτοια διδακτική παρέμβαση σαφώς επηρεάζουν τα όποια αποτελέσματα. Επομένως τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα έρευνα δεν είναι απαραιτήτως αντιπροσωπευτικά και γενικεύσιμα. Συνεπώς είναι απαραίτητο να υπάρξουν περαιτέρω και πιο συστηματικές εμπειρικές έρευνες σε αυτήν την κατεύθυνση προκειμένου να συλλεχθούν δεδομένα και παρατηρήσεις που θα οδηγήσουν σε πιο ασφαλή και γενικεύσιμα συμπεράσματα. Επίσης είναι απαραίτητο να δούμε ποιοι στόχοι δεν επετεύχθησαν, να τους επανακαθορίσουμε ή και να επανασχεδιάσουμε τη διδακτική παρέμβαση. Η παρούσα έρευνα είναι μια συμβολή στην ενίσχυση των προσπαθειών που καταβάλλονται διεθνώς για μια ουσιαστική ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

I. Φύλλο Εργασίας
II. Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου (συγκεντρωτικό)
III. Απαντήσεις μαθητών Γ΄ Λυκείου (αναλυτικά, ανά ερώτηση)
IV. Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου (συγκεντρωτικό)
V. Απαντήσεις μαθητών Β΄ Λυκείου (αναλυτικά, ανά ερώτηση)
VI. Συνέντευξη διδάσκοντα της Β΄ Λυκείου

I. Φύλλο Εργασίας

1. Να γίνουν οι πράξεις

$8.388.608 \cdot 131.072 =$

$33.554.432 : 1.048.576 =$

$(4.194.304)^2 =$

$\sqrt{67.108.864} =$

2. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι 13 πρώτοι όροι δύο προόδων. Στην $1^{η}$ γραμμή μιας αριθμητικής με $1^{ο}$ όρο το 0 και διαφορά 1 και στη $2^{η}$ μιας γεωμετρικής με $1^{ο}$ όρο 1 και λόγο 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	…

Παρατηρώντας τους αντίστοιχους όρους των δύο προόδων και τις παρακάτω πράξεις μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα;

$5 + 8 = 13$	$12 - 7 = 5$	$4 \cdot 3 = 12$	$12 : 4 = 3$
$32 \cdot 256 = 8192$	$4096 : 128 = 32$	$16^3 = 4096$	$\sqrt[4]{4096} = 8$

Αν γνωρίζατε ότι : $8.388.608 = 2^{23}$, $131.072 = 2^{17}$, $33.554.432 = 2^{25}$

$1.048.576 = 2^{20}$, $4.194.304 = 2^{22}$, $67.108.864 = 2^{26}$,

$1.099.511.627.776 = 2^{40}$, $17.592.186.044.416 = 2^{44}$

μπορείτε να εκτελέσετε τις προηγούμενες πράξεις πιο εύκολα

$8.388.608 \cdot 131.072 =$ $33.554.432 : 1.048.576 =$

$(4.194.304)^2 =$ $\sqrt{67.108.864} =$

3. Αν θέσουμε τους όρους της γεωμετρικής προόδου σε συνεχή αναλογία έχουμε

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \ldots$$

Πόσοι λόγοι χρειάστηκαν μέχρι να εμφανιστεί για $1^{η}$ φορά ο αριθμός 64 ; Τι παρατηρείτε;

4. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι πρώτοι όροι δύο προόδων. Στην $1^η$ γραμμή μιας αριθμητικής με $1^ο$ όρο το 0 και διαφορά 1 και στη $2^η$ μιας γεωμετρικής με $1^ο$ όρο 1 και λόγο α.

0	1	2	3	4	5		…		…		…
1	α	$α^2$	$α^3$		$α^5$	$α^6$	…	$α^{23}$	…	$α^χ$	…

Συμπληρώστε τα κενά κουτάκια στο παραπάνω πίνακα. Τι συμπέρασμα προκύπτει ;

Ορισμός

Έστω θ > 0 και α > 0 και $α \neq 1$.

Ορίζουμε λογάριθμο του θ με βάση α και συμβολίζουμε $\log_\alpha \theta$ τον αριθμό χ στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α για να μας δώσει θ. Δηλαδή $\log_\alpha \theta = \chi \Leftrightarrow \alpha^\chi = \theta$

5. Με βάση τον ορισμό αυτό και με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες

$\log_\alpha 1 =$ $\log_\alpha \alpha =$ $\log_\alpha \alpha^2 =$ $\log_\alpha \alpha^\chi =$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$

6. Επίσης με τη βοήθεια του πίνακα στο ερώτημα 2 να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$\log_2 ... = 1$ $\log_2 ... = 0$ $\log_2 32 =$ $\log_2 ..... = 13$ $2^{\log_2 4} =$

7. Με βάση τον ορισμό των λογαρίθμων και τις γνώσεις από δυνάμεις να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$\log_3 \frac{1}{3} =$ $\log_5 \sqrt{5} =$ $\log_4 ... = \frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} .... = 4$ $\log_{....} 16 = 2$

$\log_{10} 0.001 =$ $\log_{10} \sqrt[3]{100} =$ $\log_{10} .... = -1$ $\log_{10} .... = -\frac{1}{3}$

8. Με βάση τον ορισμό του λογαρίθμου και ιδιότητες δυνάμεων να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$\theta_1 = \alpha^x$	$\theta_2 = \alpha^y$	$\theta_1 \cdot \theta_2 = \alpha^x \cdot \alpha^y =$
$\log_\alpha \theta_1 =$	$\log_\alpha \theta_2 =$	$\log_\alpha (\theta_1 \theta_2) =$

Συμπέρασμα : $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 =$ όπου $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$\theta_1 = \alpha^x$	$\theta_2 = \alpha^y$	$\theta_1 : \theta_2 = \alpha^x : \alpha^y =$
$\log_\alpha \theta_1 =$	$\log_\alpha \theta_2 =$	$\log_\alpha (\theta_1 : \theta_2) =$

Συμπέρασμα : $\log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2 =$ όπου $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$\theta = \alpha^x$	$\theta^\kappa = (\alpha^x)^\kappa =$
$\log_\alpha \theta =$	$\log_\alpha \theta^\kappa =$

Συμπέρασμα : $\log_\alpha \theta^\kappa =$ όπου $\theta > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\kappa \in \Re$

9. Με βάση τις παραπάνω ισότητες γνωστές και ως ιδιότητες δυνάμεων να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

C. $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$

D. $\frac{1}{2}\log_2 256 + 2\log_2 3 - \log_2 18 =$

E. $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32$

10. ν θεωρήσουμε γνωστό τον παρακάτω τύπο γνωστό ως τύπο αλλαγής βάσης

$$\log_{\beta}\theta = \frac{\log_{\alpha}\theta}{\log_{\alpha}\beta} \qquad \text{όπου} \quad \theta > 0\,,\ \alpha,\beta > 0\,,\ \alpha,\beta \neq 1$$

αντί για $\log_{10}\theta$ γράφουμε $\log\theta$ και

αντί για $\log_{e}\theta$ γράφουμε $\ln\theta$

να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$$\log_{\beta}\theta = \frac{\log\ldots}{\log\ldots} \qquad\qquad \log_{\beta}\theta = \frac{\ln\ldots}{\ln\ldots}$$

$$\log\theta = \frac{\ln\ldots}{\ln\ldots} \qquad\qquad \ln\theta = \frac{\log\ldots}{\log\ldots}$$

ΙΙ. Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου (Συγκεντρωτικό)

Ερωτηματολόγιο 1

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

2. Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α , ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε το αποτέλεσμα να είναι θ. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι ο λογάριθμος έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση: 'Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών'.

   $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$

   Γιατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου επισημαίνεται η αντιστοιχία των παραπάνω ιδιοτήτων των λογαρίθμων με τις ιδιότητες των δυνάμεων. Ποια πιστεύετε είναι αυτή η αντιστοιχία;

5. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου αναφέρεται ότι: 'Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί** λογάριθμοι'.
   Γιατί πιστεύετε από όλους τους αριθμούς επιλέχθηκε το 10 να αποτελέσει τη βάση των λεγόμενων 'κοινών' λογαρίθμων και πως νομίζετε ότι συνέβαλλαν στην απλοποίηση των πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών;

6. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$' .

   Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu \to \infty}(1 + \frac{1}{\nu})^{\nu} = 2,71828...$

Α) Μπορείτε να αναφέρετε ένα φαινόμενο που περιγράφεται με τη βοήθεια του αριθμού e.

Β) Γιατί από όλους τους λογαρίθμους, αυτοί που έχουν βάση το e αποκαλούνται 'φυσικοί', τι θέλουμε να δηλώσουμε με το να τους αποκαλούμε 'φυσικούς' και ποιο το νόημα του συμβόλου ln;

Γ) Πως νομίζετε προέκυψε ο όρος 'νεπέριοι';

7. Πότε περίπου νομίζετε ανακαλύφθηκαν οι λογάριθμοι (ποιον αιώνα) και ποιοι ήταν οι βασικοί πρωταγωνιστές στην εφεύρεσή τους;

8. Γιατί νομίζετε διδάσκονται σήμερα στα σχολεία οι λογάριθμοι και μάλιστα σε ένα μάθημα γενικής παιδείας και ποια εφαρμογή βρίσκουν στο φυσικό κόσμο;

9. Σας δημιουργήθηκαν ποτέ κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα και αν ναι προσπαθήσατε να βρείτε απαντήσεις; Πιστεύετε ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών ή πρέπει απλά να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων;

10. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει ένα ιστορικό σημείωμα που τα περισσότερα από τα παραπάνω ερωτήματα τα απαντάει. Αντιληφθήκατε την ύπαρξή του; Το διαβάσατε ποτέ έστω και από περιέργεια ή το θεωρήσατε περιττό αφού δεν αποτελούσε μέρος της διδακτέας – εξεταστέας ύλης; Αν ναι σας κίνησε το ενδιαφέρον ή όχι;

11. Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογάριθμο, εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους, την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό. Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

12. Συγκρίνοντας μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων, με μια παραδοσιακή διδασκαλία που συνήθως ακολουθείται, μπορείτε να αναφέρετε τα σημεία που νομίζετε ότι υπερτερεί η μία της άλλης.

13. Αναφέρετε αν και σε ποιο βαθμό η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολουθήσατε προκάλεσε το ενδιαφέρον σας, σας φάνηκε λιγότερο ή περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και άλλαξε έστω και λίγο την εικόνα που έχετε για τα μαθηματικά.

Ερωτηματολόγιο 2

1. Το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ τον χχ΄ και των κατακόρυφων ευθειών $\chi=\alpha$, $\chi=\beta$ με $0<\alpha<\beta$ είναι ίσο με $\ln\beta - \ln\alpha$. Γιατί άραγε να συνδέεται το εμβαδόν κάτω από μια υπερβολή με τους λογαρίθμους; (εκτός βέβαια από τη σύνδεση του εμβαδού κάτω από μια καμπύλη με τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων).

2. Μπορείτε να ερμηνεύσετε γραφικά την ανισότητα $\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$ όπου $0<\alpha<\beta$ με βάση και αυτά που αναφέρονται στην προηγούμενη ερώτηση; Κάντε το ίδιο και για την ανισότητα $\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1, \quad x>1$

3. Ποιο ρόλο μπορεί να παίζουν οι παραπάνω ανισότητες εκτός φυσικά από την εξάσκηση στο Θεώρημα Μέσης Τιμής;

4. Θα μπορούσαν τα παραπάνω να αποτελέσουν έναν εναλλακτικό τρόπο να ορίσουμε τους λογαρίθμους χωρίς να χάνουν τις ιδιότητες τους;

ΙΙΙ. Απαντήσεις ερωτηματολογίου μαθητών Γ΄ Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (αναλυτικά, ανά ερώτηση)

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Δεν ξέρω. Ίσως για να υπολογίσουμε τιμές κάποιων μεταβλητών τις οποίες δε μπορούσαμε να υπολογίσουμε με τις υπάρχοντες έννοιες	Οι λογάριθμοι εφευρέθηκαν για να βοηθήσουν στον υπολογισμό πολύπλοκων υπολογισμών καθώς εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν υπολογιστικά μηχανήματα
2	Ήταν η λύση για την πραγματοποίηση πράξεων που περιείχαν το e	Για να πραγματοποιηθούν πράξεις μεταξύ μεγάλων αριθμών με πολύ μεγαλύτερη ευκολία, ενσωματώνοντας τους σε αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους
3	Δεν γνωρίζω	Απλούστευση πράξεων
4	Δεν γνωρίζω	Τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων είναι για να μπορούμε να λύνουμε με τον πιο εύκολο δυνατό τρόπο ασκήσεις
5	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Μέσω των λογαρίθμων έγινε προσπάθεια υπολογισμού ημιτόνων πολύ μεγάλων γωνιών για να διευκολυνθούν οι αστρονόμοι σε υπολογισμούς αποστάσεων
6	Δεν ξέρω	Για να προσεγγίσουν αποτελέσματα πράξεων μεταξύ μεγάλων αριθμών
7	Τις πράξεις με τον αριθμό e που δεν μπορούσαν να υπολογιστούν με διαφορετικό τρόπο	Η ανακάλυψη – εφεύρεση των λογαρίθμων ήταν πολύ σημαντική καθώς βοήθησε στην επίλυση δύσκολων πράξεων και εξισώσεων, οι οποίες ήταν χρονοβόρες χωρίς τους λογαρίθμους
8	Οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν ώστε να μπορούν να υπολογίζονται δυνάμεις της μορφής $\alpha^{\log_{\alpha}\theta}$	

9 10	Πιθανώς ήθελαν να απλουστεύσουν αριθμούς υψωμένους σε μια μεγάλη δύναμη για να μπορούν να κάνουν ευκολότερα πράξεις Τις εκθετικές εξισώσεις $\log_{\alpha} c = \chi \quad \Rightarrow \quad \alpha^{\chi} = c$	Ο λόγος που οδήγησε στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν να μπορούν να κάνουν πράξεις με πολύ μεγάλους αριθμούς Η επίλυση δύσκολων μαθηματικών πράξεων
11	Ο λόγος που οδήγησε στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν η επίλυση δύσκολων μαθηματικών υπολογισμών	Οι λόγοι – κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν κυρίως η επίλυση δύσκολων πράξεων (πράξεις με πολύ μεγάλους αριθμούς)
12	Λογικά ανακαλύφθηκαν για την επίλυση διάφορων εξισώσεων οι οποίες λύνονται μόνο με τη χρήση των λογαρίθμων	Δεν απάντησε
13	Ο λόγος που οδήγησε τους επιστήμονες – μαθηματικούς στην εφεύρεση των λογαρίθμων πιστεύω ότι ήταν ένας νέος πιο σύντομος τρόπος υπολογισμού	Ο λόγος που οδήγησε στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν οι πιο εύκολες πράξεις. Με την εμφάνισή τους κάποιες δύσκολες πράξεις έγιναν εύκολες με τη χρήση τους
14	Δεν απάντησε	Ουσιαστικά οι λογάριθμοι εφευρέθηκαν για να απλουστεύσουν πολύπλοκες πράξεις
15	Οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν για την διερεύνηση των εκθετικών συναρτήσεων δηλαδή αυτών που έχουν τη μορφή θ^{α}	Οι λογάριθμοι βοήθησαν στις πράξεις μεταξύ ή μεγάλων ή πολύ μικρών αριθμών καθώς η ανάγκη αυτή υπήρχε στην αστρονομία, μια επιστήμη που άνθιζε εκείνη την περίοδο.
16	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε
17	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	Οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων είναι για τον υπολογισμό αποστάσεων για το διάστημα και τους πλανήτες. Ήρθαν να επιλύσουν το μαθηματικό πρόβλημα για τον υπολογισμό και τις πράξεις των αριθμών- αποστάσεων που έβρισκαν από τις παρατηρήσεις τους στη διαστημική μελέτη.

2. Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α , ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε το αποτέλεσμα να είναι θ. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι ο λογάριθμος έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Λογικά γιατί υπάρχει κάποιος λόγος που είναι καθοριστικός και αποτελεί ένα μέρος του ορισμού	Ο όρος λογάριθμος εκφράζει το λόγο μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου ο οποίος είναι ουσιαστικά ο τρόπος που προκύπτει ο λογάριθμος
2	Δεν γνωρίζω	Η λέξη λόγος χρησιμοποιείται με την έννοια του κλάσματος, καθώς οι αριθμοί α και β συσχετίζονταν σε μορφή κλάσματος
3	$\log_\alpha \theta = \chi \Rightarrow \alpha^\chi = \theta \Rightarrow \alpha^\chi = \alpha^\psi \Rightarrow \chi = \psi$ Εάν μπορούσαμε να γράψουμε το θ ως έναν αριθμό (συγκεκριμένα το α) υψωμένο σε κάποιον άλλο έχουμε $\theta=\alpha^\psi$. Πιθανόν δηλαδή να αναφέρεται ο όρος ορισμός σε πράξεις που προκύπτουν μετά, οπότε το χ δεν είναι πια εκθέτης	Επειδή εκφράζει λόγο αριθμών (από έναν άλλο ορισμό)
4	Δεν γνωρίζω	Διότι ο λόγος προκύπτει από μια σειρά αριθμών όπου μπορούμε να βρίσκουμε εύκολα το λογάριθμο που θέλουμε με βάση μια αριθμητική ακολουθία
5	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	Δεν γνωρίζω
6	Δεν ξέρω	Γιατί σε κάθε μεγάλο αριθμό αντιστοιχεί ένας μικρότερος
7	Δεν γνωρίζω	Παρόλο που ο λογάριθμος έχει το λόγο του εκθέτη μιας δύναμης, η ετυμολογία της λέξης δε σχετίζεται με αυτό. Αντίθετα, ο όρος λογάριθμος αποδίδεται στο γεγονός πως παλιότερα οι άνθρωποι είχαν εφεύρει κάποιους πίνακες με προόδους, οι οποίοι διευκόλυναν στις πράξεις, από τους οποίους προέκυπταν λόγοι. Έτσι, ο λογάριθμος είναι ο αριθμός που μετράει του λόγους

8	Δεν απάντησε	
9	Μπορεί ο ορισμός να παραπέμπει σε εκθέτη δύναμης αλλά για να ανακαλύψουν το λογάριθμο μπορεί να χρησιμοποίησαν έναν αριθμό και ο λόγος του θ με αυτόν να μας δίνει το log	Ο λογάριθμος προέκυψε από το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου και μιας αριθμητικής προόδου. Ο λόγος αυτός παραμένει σταθερός
10	Δεν γνωρίζω	Προκύπτει από τους λόγους διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου
11	Η λέξη 'λογάριθμος' συνδυάζει τη θεωρία με την πράξη, δηλαδή κάτι που λέγεται μπορεί να διατυπωθεί με αριθμούς	Η λέξη λογάριθμος φανερώνει πως ο αριθμός αυτός είναι ίσος με το λόγο της αριθμητικής με τη γεωμετρική πρόοδο
12	Δεν απάντησε	Ονομάζεται λογάριθμος διότι εκφράζει το λόγο ή την αναλογία ανάμεσα σε μια γεωμετρική και σε μια αριθμητική πρόοδο
13	Θα μπορούσε βέβαια να χαρακτηριστεί με διαφορετική λέξη αλλά πιστεύω ότι ονομάστηκε έτσι επειδή ίσως να εκφράζει έναν λόγο αυτός ο λογάριθμος δηλαδή με την έννοια του κλάσματος	Ονομάστηκε έτσι λόγο της φύσης του λογαρίθμου. Στην ουσία ο λογάριθμος αντιστοιχεί σε έναν λόγο με την έννοια του κλάσματος, μια αναλογία προόδων
14	Του αποδόθηκες ο όρος αυτός γιατί ήθελαν να βρουν μια μαθηματική διαδικασία όπου να μπορούν να λογαριάζουν έναν αριθμό	Δημιούργησαν δύο ακολουθίες, μια αριθμητική και μια γεωμετρική πρόοδο. Η αναλογία τους ήταν αποτέλεσμα ενός λογαρίθμου.
15	Δεν γνωρίζω	Η λέξη λόγος αφορά την αναλογία και πιο συγκεκριμένα και πιο συγκεκριμένα αυτή ανάμεσα σε μια γεωμετρική και μια αριθμητική πρόοδο που έχουν οριστεί για τη διευκόλυνση των πράξεων. Ο λόγος αυτός δείχνει το αριθμό δηλαδή το αποτέλεσμα
16	Έλειπε στο 1^{ο} ερωτηματολόγιο και στο 1^{ο} δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε

17	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Διότι ο λογάριθμος εκφράζει το λόγο της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, δηλαδή η αντιστοίχιση αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : ‘Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών’.

$\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$

Γιατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Γιατί με αυτές μπορούμε να έχουμε έναν άγνωστο στο λογάριθμο και όχι γινόμενο , πηλίκο ή εκθέτη	Οι ιδιότητες των λογαρίθμων είναι σημαντικές γιατί με αυτές μετατρέπουμε τον πολ/σμο σε πρόσθεση , το πηλίκο σε διαφορά κλπ.
2	Επιλύουν πολύ ευκολότερα εξισώσεις που εμπεριέχουν λογαρίθμους καθώς οι logx, logy πιθανότατα να αποτελούν γνωστούς αριθμούς	Διευκολύνονται οι πράξεις λογαρίθμων καθώς είναι εύκολο να υπολογιστούν οι αριθμοί logx , logy και όχι οι αριθμοί log(xy) , log(x/y) κλπ.
3	Διότι απλοποιούν (καθιστούν εύκολες) τις πράξεις με λογαρίθμους. Οι λογάριθμοι άλλωστε χρησιμοποιούνται και σε άλλα μαθήματα (ειδικά στη Χημεία και τη Φυσική)	Γιατί ανάγουν το γινόμενο και το πηλίκο σε απλούστερες πράξεις, δηλαδή πρόσθεση και αφαίρεση
4	Βοηθούν ώστε να λύνουμε ερωτήματα με πιο εύκολες πράξεις	Είναι σημαντικές γιατί κάνω πιο απλές πράξεις από τον πολ/σμο μεγάλων αριθμών ή και τη διαίρεση εξίσου σε προσθέσεις ή αντίστοιχα αφαιρέσεις
5	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Οι ιδιότητες θεωρούνται σημαντικές γιατί διευκολύνουν τους υπολογισμούς λογαρίθμων μεγάλων αριθμών
6	Δεν έχουν λόγο που είναι σημαντικές, είναι σαν τις ταυτότητες μας διευκολύνουν στις πράξεις	Δεν απάντησε
7	Οι ιδιότητες λογαρίθμων είναι πολύ σημαντικές καθώς βοηθούν στην επίλυση των εξισώσεων που περιέχουν λογαρίθμους οι οποίοι δεν είναι γνωστό πως υπολογίζονται	Οι ιδιότητες συμβάλλουν πολύπλευρα στην απλούστευση των πράξεων. Για παράδειγμα είναι πιο εύκολο και γρήγορο να προσθέσεις δύο λογαρίθμους από το να τους πολλαπλασιάσεις.

8	Θεωρούνται σημαντικές καθώς μέσω αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε το λογάριθμο οποιουδήποτε αριθμού εκφράζοντάς τον ως πράξη άλλων αριθμών	
9	Διευκολύνει τις πράξεις και μπορούμε να δημιουργήσουμε λογαρίθμους που γνωρίζουμε την τιμή τους	Γιατί μπορούμε πράξεις όπως τον πολ/σμο και τη διαίρεση να τις αναγάγουμε σε πρόσθεση και αφαίρεση
10	Για την απλούστευση των πράξεων με λογάριθμους	Για την αναγωγή των λογαρίθμων σε απλούστερους και τη διευκόλυνση στον υπολογισμό τους
11	Οι ιδιότητες αυτές θεωρούνται τόσο σημαντικές γιατί συνδυάζουν το γινόμενο με την πρόσθεση , το πηλίκο με την αφαίρεση και εκφράζει το λογάριθμο μιας δύναμης σαν τον αριθμό επί το λογάριθμο	Οι ιδιότητες αυτές θεωρούνται τόσο σημαντικές γιατί συνδυάζουν το γινόμενο με την πρόσθεση , το πηλίκο με την αφαίρεση και εκφράζουν τη δύναμη σαν γινόμενο
12	Οι ιδιότητες αυτές είναι σημαντικές διότι σε πολλές περιπτώσεις μας βοηθούν να υπολογίζουμε πιο εύκολα κάποιους λογαρίθμους	Διότι απλουστεύονται οι πράξεις ή ο υπολογισμός των λογαρίθμων αφού ο λογάριθμος ενός γινομένου, ενός πηλίκου και μιας δύναμης ανάγονται σε άθροισμα, διαφορά και γινόμενο αντίστοιχα, δηλαδή πιο απλές
13	Πιστεύω ότι αυτές οι ιδιότητες είναι αρκετά σημαντικές καθώς οι 'πράξεις' είναι οι βασικές για τον υπολογισμό μιας λογαριθμικής εξίσωσης και με την ύπαρξη τους άλλο ένα κεφάλαιο στα μαθηματικά ανοίγει καθώς δεν είναι πλέον θεωρία αλλά πράξη	Είναι σημαντικές καθώς πράξεις πρόσθεσης ή αφαίρεσης ανάγονται σε πολ/σμου και διαίρεσης αντίστοιχα πράγμα που καθιστά πιο εύκολο τον υπολογισμό
14	Δεν απάντησε	Θεωρούνται σημαντικές διότι ανάγουν έναν δύσκολο υπολογισμό σε άθροισμα ή διαφορά, κάτι το οποίο είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί
15	Οι ιδιότητες αυτές είναι σημαντικές καθώς διευκολύνουν τον υπολογισμό των λογαρίθμων. Συγκεκριμένα απλοποιούν τις παραστάσεις καθιστώντας δυνατό τον ξεχωριστό υπολογισμό των λογαρίθμων	Γιατί ανάγουν τις πράξεις του πολ/σμου, της διαίρεσης αλλά και τις δυνάμεις σε απλούστερες. Ο πολ/σμος γίνεται πρόσθεση, η διαίρεση αφαίρεση και η δύναμη εκφράζεται ως το λογάριθμο της βάσης επί τον εκθέτη
16	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε

17	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	Γιατί βοήθησαν στον υπολογισμό και στην αντιστοίχιση της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου επισημαίνεται η αντιστοιχία των παραπάνω ιδιοτήτων των λογαρίθμων με τις ιδιότητες των δυνάμεων. Ποια πιστεύετε είναι αυτή η αντιστοιχία ;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	log(xy) = logx + logy Σύμφωνα με τον ορισμό οι παραπάνω λογάριθμοι έχουν την ίδια βάση και στην περίπτωση των δυνάμεων όταν πολ/με δυνάμεις με την ίδια βάση $\alpha^x\alpha^y=\alpha^{x+y}$	Ένας λογάριθμος μπορεί να γραφεί και ως δύναμη όπου ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων
2	Όπως υπάρχουν ιδιότητες στου λογαρίθμους έτσι υπάρχουν και στις βάσεις. Ίσως να γίνεται αντιστοιχία διότι οι λογάριθμοι αποτελούν τον εκθέτη μιας δύναμης άρα οι ιδιότητες τους συνδέονται άμεσα με αυτές των δυνάμεων	$\log_\alpha \theta = \chi \Rightarrow \alpha^\chi = \theta$ άρα συνδέονται άμεσα
3	$\alpha^x\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\alpha^x:^y=\alpha^{x-y}$	Υπάρχει αντιστοίχιση (άσκηση φυλαδίου)
4	$\log x^k=k\log x$	Δε θυμάμαι
5	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	$\log(xy) = \log x + \log y$ $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$ $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$ $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$ $\log x^k = k \cdot \log x$ $(\alpha^x)^y = \alpha^{x \cdot y}$
6	Δεν ξέρω	Δεν απάντησε

7	Οι λογάριθμοι αντιστοιχίζονται με τις ιδιότητες των δυνάμεων μέσω των τύπων $\alpha^x\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\alpha^x:^y=\alpha^{x-y}$	Η αντιστοιχία των ιδιοτήτων των λογαρίθμων με τις ιδιότητες των δυνάμεων είναι άμεση. Οφείλεται στη σχέση $\log x^k = k\cdot\log x$ και επίσης στον ορισμό του λογαρίθμου
8	$x^\theta = \alpha^{\theta\log x}$	
9	Επειδή ο λογάριθμος σύμφωνα με τον ορισμό είναι μια εκθετική συνάρτηση θα ισχύουν οι ίδιοι περιορισμοί και ιδιότητες δυνάμεων	Σύμφωνα με τον ορισμό $\log_\alpha \theta = \chi \Rightarrow \alpha^\chi = \theta$ οπότε ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων καθώς μπορούμε το λογάριθμο να τον γράψουμε σε μορφή δύναμης
10	$\log(xy)=\log x+\log y$ $\alpha^x\cdot\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y$ $\alpha^x:\alpha^y=\alpha^{x-y}$ $\log x^k = k\cdot\log x$ $(\alpha^x)^y=\alpha^{x\cdot y}$	$\log(xy)=\log x+\log y$ $\alpha^x\cdot\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y$ $\alpha^x:\alpha^y=\alpha^{x-y}$ $\log x^k = k\cdot\log x$ $(\alpha^x)^y=\alpha^{x\cdot y}$
11	$\log(xy)=\log x+\log y$ $\alpha^x\cdot\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y$ $\alpha^x:\alpha^y=\alpha^{x-y}$	$\log(xy)=\log x+\log y$ $\alpha^x\cdot\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y$ $\alpha^x:\alpha^y=\alpha^{x-y}$ $\log x^k = k\cdot\log x$ $(\alpha^x)^y=\alpha^{x\cdot y}$
12	Οι ιδιότητες των λογαρίθμων ισχύουν όταν οι λογάριθμοι έχουν την ίδια βάση έτσι και οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν όταν έχουν την ίδια βάση	$\log(xy)=\log x+\log y$ $\alpha^x\cdot\alpha^y=\alpha^{x+y}$ αντιστοίχως και για τις άλλες ιδιότητες επειδή το logx εκφράζει τον εκθέτη οι ιδιότητες αντιστοιχούν με τους εκθέτες των δυνάμεων
13	$\log(xy)=\log x+\log y$ $\alpha^x\cdot\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y$ $\alpha^x:\alpha^y=\alpha^{x-y}$ $\log x^k = k\cdot\log x$ $(\alpha^x)^y=\alpha^{x\cdot y}$	Έχει να κάνει με τη φύση των λογαρίθμων. Ένας λογάριθμος από μια αριθμητική και μια γεωμετρική πρόοδο ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α με αποτέλεσμα να είναι θ. Επομένως υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των δύο προόδων
14	Μπορούμε να γράψουμε μια δύναμη σε μορφή λογάριθμου	Δεν απάντησε
15	Ο υπολογισμός των δυνάμεων γίνεται με ανάλογο τρόπο $\alpha^x\alpha^y=\alpha^{x+y}$ $\alpha^x:^y=\alpha^{x-y}$	Οι λογάριθμοι εκφράζουν τις ιδιότητες άρα και τις ιδιότητές του
16	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε

17	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Αντιστοιχία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου

5. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου αναφέρεται ότι : 'Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί** λογάριθμοι'.

   Γιατί πιστεύετε από όλους τους αριθμούς επιλέχθηκε το 10 να αποτελέσει τη βάση των λεγόμενων 'κοινών' λογαρίθμων και πως νομίζετε ότι συνέβαλλαν στην απλοποίηση των πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Γιατί οι λογάριθμοι με βάση το 10 έχουν κάποιες ιδιότητες με τις οποίες απλοποιούνται οι υπολογισμοί (λόγω των δυνάμεων του 10) και δεν τις θυμάμαι	Το 10 επιλέχθηκε έτσι ώστε να απλοποιούνται οι πράξεις . Αυτό συμβαίνει γιατί βοηθούν οι δυνάμεις του 10
2	Πιθανόν να ήταν απλούστερος ο υπολογισμός λογαρίθμων με βάση το 10. Συνέβαλλαν στην απλοποίηση των πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών καθώς εύκολα πολλοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με το 10 είτε σε μορφή δύναμης είτε σε δεκαδική μορφή	Γιατί είναι πολύ εύκολο όλοι οι αριθμοί να εκφραστούν σε μορφή λογαρίθμου με βάση το 10 και ως δυνάμεις του 10. Επίσης το 10 αποτελεί τη βασική μονάδα του αριθμητικού μας συστήματος
3	Ο υπολογισμός των δυνάμεων του 10 είναι πιο εύκολος	Γιατί αποτελεί τη βάση του αριθμητικού μας συστήματος. Συνέβαλλαν γιατί μετατρέπουν τον πολ/σμο και τη διαίρεση σε πρόσθεση και αφαίρεση
4	Δε γνωρίζω	Δε θυμάμαι
5	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Ο αριθμός 10 επιλέχθηκε γιατί καθιστά ευκολότερες τις πράξεις. Π.χ. log10=1 , log100=2 .Αυτό περιορίζει τους λογαρίθμους των αριθμών μεταξύ του 10 και του 100 σε τιμές από 1 έως 2. Με μικρότερες ή μεγαλύτερες βάσεις δε θα ήταν τόσο απλή η διαδικασία. Επίσης είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε δυνάμεις του 10
6	Διότι το 10 έχει πιο εύκολη βάση για πιο εύκολες πράξεις	Δεν απάντησε

7	Όταν οι λογάριθμοι έχουν βάση το 10 είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογιστούν, για αυτό και η πλειοψηφία των ασκήσεων περιέχει λογαρίθμους με βάση το 10 , έτσι ώστε να διευκολύνονται οι μαθητές	Οι λογάριθμοι με βάση το 10 είναι πιο εύκολο να προσεγγιστούν καθώς το αριθμητικό μας σύστημα είναι δεκαδικό, δηλαδή βασίζεται σε αυτόν τον αριθμό
8	Καθώς το 10 μπορεί να δώσει εύκολες πράξεις	
9	Πιθανώς οι λογάριθμοι που έχουν βάση το 10 μπορούν να απλουστευθούν περισσότερο σε σχέση με τους υπολοίπους. Το πώς δεν το γνωρίζουν	Γιατί μπορούμε όλους τους αριθμούς να τους μετατρέψουμε σε δυνάμεις του 10
10	Διότι οι δυνάμεις του 10 είναι πιο απλές στον υπολογισμό τους	Δεν απάντησε
11	Δεν απάντησε	Ο αριθμός 10 επιλέχθηκε να αποτελεί τη βάση των λογαρίθμων καθώς με τη βοήθειά του εκφράζονται οι άλλοι αριθμοί κι έτσι είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός άλλων λογαρίθμων
12	Επιλέχθηκε το 10 διότι γενικά είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε λογαρίθμους με βάση το 10	Χρησιμοποιούμε το 10 διότι οποιοδήποτε νούμερο μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των δυνάμεων του 10 και έτσι όταν λογαριθμούμε αυτόν τον αριθμό σύμφωνα με τις ιδιότητες λογαρίθμων οι βάσεις φεύγουν, που είναι το 10, και μένει ένα άθροισμα των εκθετών. Άρα το 10 απλουστεύει και διευκολύνει τον υπολογισμό των λογαρίθμων
13	Το 10 είναι ένας διψήφιος αριθμός. Ίσως επιλέχθηκε λόγω της απλότητάς του ως αριθμός και λόγω του συσχετισμού του με τα 0 και 1 των υπολογιστών	Το 10 επιλέχθηκε καθώς είναι πιο εύκολο να υπολογίσεις ποιος αριθμός εάν υψωθεί το 10 έτσι ώστε να κάνει κάποιον αριθμό χ, διότι οι δυνάμεις του 10 είναι πιο εύκολα υπολογίσιμες
14	Δεν απάντησε	Επιλέχθηκε το 10 γιατί ήταν πιο εύκολο να ανάγουμε έναν αριθμό σε δύναμη ή ρίζα του 10
15	Το 10 ως δύναμη απλοποιεί τους αριθμούς δηλαδή μπορούν όλοι οι αριθμοί να γραφτούν με τη μορφή 10^{ν}	Το 10 αποτελεί τη βάση του αριθμητικού μας συστήματος καθώς λέγεται δεκαδικό. Άρα είναι πιο χρήσιμη η επιλογή του 10 ως βασικό αριθμό για τους λογάριθμους
16	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε

17	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε

6. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : ‘Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$’ .

   Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu\to\infty}(1+\frac{1}{\nu})^{\nu} = 2,71828...$

   Α) Μπορείτε να αναφέρετε ένα φαινόμενο που περιγράφεται με τη βοήθεια του αριθμού e.

   Β) Γιατί από όλους τους λογαρίθμους, αυτοί που έχουν βάση το e αποκαλούνται ‘φυσικοί’, τι θέλουμε να δηλώσουμε με το να τους αποκαλούμε ‘φυσικούς’ και ποιο το νόημα του συμβόλου ln ;

   Γ) Πως νομίζετε προέκυψε ο όρος ‘νεπέριοι’;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Α) Δεν ξέρω Β) Δεν ξέρω Γ) Δεν το θυμάμαι αλλά το έχω ακούσει	Α) Στην ανάπτυξη ενός πληθυσμού , στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές Β) Ονομάζονται φυσικοί γιατί σε έναν συγκεκριμένο λόγο προκύπτει ως αποτέλεσμα το e. Το ln προκύπτει από τα αρχικά του logarithmus naturalis Γ) Από το Napier, όμως τιμητικά γιατί αυτός δεν υπολόγιζε λογαρίθμους όπως σήμερα
2	Α) Δε γνωρίζω Β) Αποκαλείται φυσικός διότι με αυτή τη μορφή συναντάται στη φύση. Το ln πολύ πιθανόν να προέρχεται από τη λέξη natural αντεστραμμένη. Γ) Δε γνωρίζω	Α) Στην καταμέτρηση βακτηριακών πληθυσμών Β) Γιατί προκύπτουν φυσικά κατά την προσπάθεια για κατασκευή μιας πυκνής γεωμετρικής προόδου, δηλαδή μιας γεωμετρικής προόδου όπου ο λόγος είναι πολύ κοντά στο 1 Το ln από το logarithmus naturalis Γ) Από τον άνθρωπο που τους μελέτησε τον Nepier

3	Α) Δεν ξέρω Β) Δεν απάντησε Γ) Δεν απάντησε	Το e εμφανίζεται αναπόφευκτα όταν κατασκευάσουμε μια πυκνή αριθμητική πρόοδο. Ο όρος 'νεπέριοι' προέκυψε προς τιμήν του Nepier, αλλά δεν είχε αντιληφθεί τη σημασία του e.Το χρησιμοποίησε για $1^{η}$ φορά ο Euler. Αποκαλούνται φυσικοί γιατί προκύπτουν με 'φυσικό' τρόπο από μια πρόοδο.
4	Α) Δε γνωρίζω Β) Δε γνωρίζω Γ) Δε γνωρίζω	Α) Το e είναι φυσικός αριθμός γιατί μπορούμε να παρουσιάσουμε μια γεωμετρική πρόοδο σε πολύ πυκνή μορφή Β) Δε γνωρίζω Γ) Ο όρος νεπέριοι προέκυψε από έναν μαθηματικό που ονομάζεται Napier ο οποίος μελετούσε πάνω στους λογαρίθμους
5	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Α) Όταν προσπαθούμε να βρούμε το ρυθμό αύξησης ενός πληθυσμού ο αριθμός e εμφανίζεται αναπόφευκτα μπροστά μας Β) Λόγω του ότι παρουσιάζεται ανεξάρτητα από το αν προσπαθούμε να τον εντοπίσουμε, ονομάζεται φυσικός. Ο Napier και ο Burgi είχαν βρει τον αριθμό e, αλλά δε συνειδητοποίησαν πως δεν ήταν τυχαία η εμφάνισή του. Γ) Ίσως να λέγονται νεπέριοι από τον Napier που είχε βρει μια τιμή πολύ κοντά στο 1/e
6	Α) Δεν γνωρίζω Β) Δεν γνωρίζω Γ) Μήπως από κάποιον που το λέγανε Νεπερο και τους ανακάλυψε	Προέκυψε από το όνομα ενός μαθηματικού του Ναπιερ
7	Α) Δεν γνωρίζω Β) Ίσως αποκαλείται φυσικός διότι σχετίζεται με τη φύση Γ) Δεν γνωρίζω	Β)Το ln έχει προέλθει από τις λέξεις logarithmus natuale Γ) Ο όρος νεπέριοι δόθηκε στους λογαρίθμους προς τιμήν του Σκωτσέζου Ναπιερ, ο οποίος είχε ασχοληθεί για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα της ζωής του με την ανακάλυψη και την εφαρμογή τους.
8	Δεν γνωρίζω	
9	Α) Μηχανή Carnot Β) Δεν ξέρω	Α) Μηχανή Carnot, συγκέντρωση μικροοργανισμών Β) Φυσικοί ονομάζονται γιατί το αποτέλεσμα είναι ένας

	Γ) Προέκυψε από κάποιον αριθμό δηλαδή το e	λόγος . Το ln είναι το logarithm natural Γ) Προέκυψε από τον Napier που τον ανακάλυψε μέσω των πειραμάτων του
10	Α) Οι φθίνουσες ταλαντώσεις Β) Το l από το log και το n από το natural ή το νεπέριος Γ) Κάποιος μαθηματικός ή φυσικός με όνομα που παραπέμπει σε αυτή τη λέξη όρισε τους λογαρίθμους ή τον αριθμό e	Α) Οι φθίνουσες ταλαντώσεις Β) Τους αποκαλούμε φυσικούς, διότι ο αριθμός e εμφανίζεται φυσικά στην προσπάθεια δημιουργίας πυκνών προόδων (λόγων που να προσεγγίζουν στο 1) Το l από το log και το n από το natural Οι λογάριθμοι με βάση το e ονομάστηκαν νεπέριοι προς τιμήν του Napier, που θεωρείται πατέρας των λογαρίθμων
11	Δεν απάντησε	Α) Η ανάπτυξη των βακτηρίων Β) Το νόημα του ln είναι από την ονομασία logarithmus naturalismus Γ) Ο όρος νεπέριοι προέκυψε από τον Napier
12	Α) Φθίνουσες ταλαντώσεις Β) Μάλλον το e μας βοηθάει στην επίλυση διάφορων προβλημάτων που έχουν άμεση σχέση με τη φύση Γ) Νεπέριοι ονομάζονται διότι ο πρώτος που ανακάλυψε το e ονομαζόταν κάπως έτσι	Α) Μηχανή Carnot Β) Λέγονται φυσικοί διότι αν ασχοληθούμε με οποιαδήποτε γεωμετρική και αριθμητική πρόοδο μέσω κάποιων πράξεων θα καταλήγουμε στο e. Το ln σημαίνει logarithmus natural Γ) Λέγονται νεπέριοι διότι κατά κάποιο τρόπο τους ανακάλυψε ο μαθηματικός Napier χωρίς να έχει ιδέα τι σημαίνουν
13	Α) Νομίζω ότι η γραφική παράσταση του e σχετίζεται με την αύξηση κάποιου ποσοστού στην οικονομία. Σίγουρα στην βιολογία στις καλλιέργειες των βακτηρίων Β) Ίσως αποκαλούνται φυσικοί λόγω της φύσης του αριθμού e καθώς αυτός ο αριθμός είναι 2,71828… και αν συνεχιστεί ίσως περιέχει όλους τους φυσικούς στην έκτασή του. Γ) Ο όρος νεπέριοι ίσως προέκυψε από τους Άραβες διότι όλοι γνωρίζουν πόσο επιτήδειοι ήταν οι Άραβες με τα μαθηματικά	Α) Η ανάπτυξη πληθυσμού βακτηρίων καθώς με το e περιγράφεται η εκθετική τους αύξηση Β) Το ln σημαίνει logarithmus naturalis Γ) Ο όρος προέκυψε από τον πατέρα των λογαρίθμων τον Napier

14	Α) Δεν γνωρίζω Β) Αποκαλούνται φυσικοί διότι ο αριθμός e εμφανίζεται παντού στη φύση . Το ln σημαίνει natural logarithm Γ) Ο όρος νεπέριοι προέκυψε από το Νεπερ ο οποίος εισήγαγε την έννοια του e	Α) Στα οικονομικά και γενικότερα ο e εμφανίζεται σε κάθε πρόοδο που το λ τείνει στο 1 Β) Το ln σημαίνει natural logarithm Γ) Ο όρος νεπέριοι προέκυψε από το Napier πατέρας των λογαρίθμων. Το σύμβολο e προέκυψε από τον Euler
15	Α) Δεν γνωρίζω Β) Ότι βοήθησαν να δώσουμε ερμηνεία σε φυσικά φαινόμενα Γ) Δεν γνωρίζω	Α) Η εκθετική μεταβολή πολλών μεγεθών γίνεται συναρτήσει του e.Για παράδειγμα η ανάλυση οστών από ανασκαφές για τη εύρεση της ηλικίας τους και η νεκροψία για την εξακρίβωση της ώρας θανάτου. Β) Το ln αντιστοιχεί στο logarithmus naturallis Γ) Εξαιτίας του Napier
16	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε
17	Έλειπε στο 1° ερωτηματολόγιο και στο 1° δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε

7. Πότε περίπου νομίζετε ανακαλύφθηκαν οι λογάριθμοι (ποιον αιώνα) και ποιοι ήταν οι βασικοί πρωταγωνιστές στην εφεύρεσή τους;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Δεν ξέρω λογικά σε μια εποχή που υπήρχε ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη και χρειάζονταν τους λογαρίθμους για πολύπλοκους υπολογισμούς	Τον 13ο αιώνα , ο Napier , ο Burgi
2	17° αιώνα	16° -17° αιώνα , Νέπιερ , Μπουργκί
3	Πιθανόν π.Χ	Briggs, Nepier και ένας ωρολογοποιός περίπου 15° – 16° αιώνα
4	Δεν γνωρίζω	Δεν γνωρίζω

5	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	$17^{ο}$ αιώνα , Napier , Burgi , Vlack
6	Δεν γνωρίζω	Δεν απάντησε
7	Θα έλεγα $15^{ο}$-$16^{ο}$ αιώνα διότι είναι γνωστό πως υπάρχουν από πολύ παλιότερα. Οι βασικοί πρωταγωνιστές στην εφεύρεσή τους ήταν άνθρωποι – ίσως και επιστήμονες- οι οποίοι ασχολούνταν με τα μαθηματικά και γενικά το οτιδήποτε περιείχε μαθηματικές πράξεις	Οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν μεταξύ $16^{ο}$ και $17^{ο}$ αιώνα. Οι βασικοί πρωταγωνιστές ήταν ο Napier από τη Σκωτία και ο Burgi από το Λονδίνο
8	Δεν γνωρίζω	
9	Το πιο πιθανό να ανακαλύφθηκαν στην Αρχαία Ελλάδα ή στην Αίγυπτο Πρωταγωνιστής : Πυθαγόρας	Ανακαλύφθηκαν το $13^{ο}$ αιώνα από το Napier και το Burgi
10	Το 17ο – 18ο από φυσικούς	$17^{ος}$ αιώνας Napier, Burgi , Briggs
11	Περίπου $16^{ο}$ αιώνα	$16^{ο}$ αιώνα Napier, Burgi, Vlack
12	16ο – 17ο αιώνα	$16^{ο}$ – $17^{ο}$ αιώνα , Napier , Burgi
13	17ο από επιστήμονες – μαθηματικούς ίσως και φυσικούς	$16^{ο}$ αιώνα ,Napier , Burgi
14	Δεν απάντησε	$16^{ο}$ – $17^{ο}$ αιώνα Napier, Burgi, Vlack
15	$18^{ο}$ αιώνα – Δεν γνωρίζω	$16^{ο}$ – $17^{ο}$ αιώνα , Napier , Burgi
16	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε
17	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	$17^{ο}$ αιώνα , Napier , Burgi

8. Γιατί νομίζετε διδάσκονται σήμερα στα σχολεία οι λογάριθμοι και μάλιστα σε ένα μάθημα γενικής παιδείας και ποια εφαρμογή βρίσκουν στο φυσικό κόσμο;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Θεωρώ ότι διδάσκονται στα σχολεία μόνο και μόνο για πρακτικούς λόγους και συνήθως για μαθηματικούς υπολογισμούς. Η εφαρμογή στο φυσικό κόσμο βρίσκεται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές κάτι το οποίο χρησιμοποιούν όλα τα άτομα ανεξάρτητα από κατεύθυνση	Οι λογάριθμοι διδάσκονται σήμερα στα σχολεία ανεξάρτητα από την κατεύθυνση γιατί οι απλοί υπολογισμοί βοηθούν όλο τον κόσμο
2	Ο αριθμός e είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για διάφορες πράξεις. Για αυτό το λόγο διδάσκονται στη γενική παιδεία. Συμβάλλουν και στον υπολογισμό ορίων μια έννοια που διέπει το φυσικό κόσμο	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
3	Χρησιμοποιείται στη Χημεία για τον ορισμό του pH,στη φυσική και την αστρονομία	Χρησιμοποιείται στην αστρονομία
4	Ίσως γιατί οι άνθρωποι το χρειάζονται για επιστημονικές μελέτες που κάνουν	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
5	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Η εφαρμογή τους στο φυσικό κόσμο είναι η διευκόλυνση υπολογισμών. Το ότι διδάσκονται στη γενική παιδεία ίσως εξηγείται από το ότι θεωρείται σημαντική για κάποιον
6	Δεν ξέρω	Δεν απάντησε
7	Είναι πολύ αξιόλογο το γεγονός πως οι λογάριθμοι διδάσκονται στα σχολεία. Ακόμη και αν δεν το έχουμε αντιληφθεί, υπάρχουν σε πολλούς τομείς της ζωής μας και το να γνωρίζουμε βασικά πράγματα για αυτούς και το πώς να υπολογίζουμε θεωρείται πολύ σημαντικό	Μια από τις βασικές εφαρμογές των λογαρίθμων σήμερα είναι στον τομέα της ψυχολογίας. Οι ψυχολόγοι μέσω των λογαρίθμων υπολογίζουν το ερέθισμα του ήχου.
8	Είναι απαραίτητη η συμβολή τους καθώς μέσω αυτών διευκολύνονται πολλές πράξεις ενώ παράλληλα βοηθούν στη χάραξη γραφικών παραστάσεων	

9	Διδάσκονται γιατί οι λογάριθμοι έχουν μεγάλη εφαρμογή σε επαγγέλματα που σχετίζονται με τους υπολογιστές και την τεχνολογία	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
10	Για την επίλυση δύσκολων εκθετικών εξισώσεων	Για την επίλυση δύσκολων εκθετικών εξισώσεων και εφαρμόζονται σε επιστήμες όπως η αστροφυσική
11	Οι λογάριθμοι διδάσκονται σήμερα τα σχολεία διότι αποτέλεσαν σημαντικό παράγοντα εξέλιξης και προόδου στο χώρο των Μαθηματικών αλλά και σε ευρύτερους τομείς της ζωής	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
12	Οι λογάριθμοι διδάσκονται στα σχολεία διότι στο Πανεπιστήμιο και στη ζωή μας θα έχουν πολλές εφαρμογές . Για παράδειγμα στην κατασκευή των κτηρίων ώστε να μπορούν να αντέχουν σε φυσικά φαινόμενα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
13	Διδάσκονται στα σχολεία καθώς δίνουν στο μαθητή έναν άλλον τρόπο σκέψης, μια άλλη οπτική που θα τον οδηγήσει να εξετάζει αλλιώς τα φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω του	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
14	Δεν απάντησε	Δεν απάντησε
15	Οι λογάριθμοι είναι άκρως σημαντικοί καθώς διευκολύνουν πολλές πράξεις και ειδικότερα εξισώσεις	Οι λογάριθμοι διδάσκονται καθώς είναι χρήσιμοι σε τύπους, συναρτήσεις και έκφραση σχέσεων μεταξύ μεγεθών
16	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Δεν απάντησε
17	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Δεν ξέρω

9. Σας δημιουργήθηκαν ποτέ κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα και αν ναι προσπαθήσατε να βρείτε απαντήσεις; Πιστεύετε ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών ή πρέπει απλά να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**

1	Όχι τέτοιες πληροφορίες πρέπει να δίνονται στο πλαίσιο ενός μαθήματος γιατί έτσι ο μαθητής κατανοεί τη χρησιμότητά που είχαν και έχουν αυτά που μαθαίνει. Αν αυτό δε συμβαίνει ο μαθητής τελικά δε θα θυμάται ούτε ορισμούς, αποδείξεις κλπ καθώς δε θα βρίσκει ενδιαφέρον το θέμα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
2	Σίγουρα γεννήθηκαν πολλές απορίες κατά τη μελέτη των λογαρίθμων, διότι αποτέλεσε για μας κάτι το πρωτόγνωρο. Ωστόσο λόγω κυρίως έλλειψης χρόνου, ποτέ δεν αναρωτηθήκαμε και δεν αναζητήσαμε τις απαντήσεις. Τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται καθώς τα μαθηματικά αποτελούν μια έννοια περίπλοκη, σ' αυτήν όμως έγκειται η γοητεία της. Έτσι με την εμβάθυνση οι μαθητές θα τα κατανοήσουν καλύτερα και θα τα αγαπήσουν	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
3	Ναι κατά την περίοδο που τα διδαχθήκαμε. Πιστεύω πως θα πρέπει να εξετάζουμε ολόπλευρα ένα φαινόμενο που διδασκόμαστε, διαφορετικά δεν έχει νόημα η τυποποιημένη γνώση εφόσον δεν αντιλαμβανόμαστε την χρήση του στη καθημερινή ζωή. Όταν όμως δε δίνεται έμφαση σε κάτι τέτοιο, τότε μαθαίνεις και εσύ να δέχεσαι τις γνώσεις χωρίς να ενδιαφέρεσαι για τη βαθύτερη κατανόησή της ύλης. (χάνεται δηλαδή σιγά - σιγά η 'περιέργεια')	Πρέπει να απαντώνται
4	Για να γίνει πιο δημιουργικό το μάθημα κυρίως πρέπει να ξέρουμε και την ιστορία αυτών των οποίων μαθαίνουμε, διότι καμιά φορά ένας σκέτος ορισμός δε βγάζει και πολύ νόημα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
5	Έλειπε στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο και στο $1^{ο}$ δίωρο της παρέμβασης	Δεν αναρωτήθηκα ποιοι τους ανακαλύψανε αλλά πάντα είχα την απορία για το λόγο που οι λογάριθμοι με βάση το e ονομάζονται νεπέριοι. Πιστεύω ότι κάποια μαθηματικά θεωρήματα ή κανόνες είναι απαραίτητο να διδάσκονται προτού διδαχθούμε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων για τη βαθύτερη κατανόηση

		των μαθηματικών
6	Δε μου δημιουργήθηκαν ποτέ κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα. Θα πρέπει να απαντώνται για να κινούν το ενδιαφέρον των μαθητών	Δε μου δημιουργήθηκαν ποτέ κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα, έτσι δεν έψαξα να βρω και απαντήσεις. Θα πρέπει να απαντώνται διότι κάνουν πιο ενδιαφέρον το μάθημα, διότι μόνο ασκήσεις και ορισμοί είναι βαρετά και συνηθισμένα για τα μαθηματικά
7	Η αλήθεια είναι πως δεν μου δημιουργήθηκαν αυτά τα ερωτήματα. Αυτό οφείλεται ίσως στο ότι δεν χρειαζόταν να τα μάθω διότι δεν εξετάζονταν με την ύλη, κάτι το οποίο δεν είναι και απόλυτα σωστό. Η γνώση πάνω σε κάποιο αντικείμενο πρέπει να είναι σφαιρική. Ο άνθρωπος πρέπει να μαθαίνει πολύπλευρα και όχι εξειδικευμένα, διότι αυτό χαρακτηρίζει τη μόρφωσή του. Δυστυχώς όμως το εκπαιδευτικό μας σύστημα δεν προωθεί κάτι τέτοιο άρα και οι μαθητές δεν το εφαρμόζουν.	Όχι δεν μου είχαν δημιουργηθεί ανάλογα ερωτήματα με τόση εξειδίκευση. Πιστεύω πως τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών, έτσι ώστε να αποκτούν εξοικείωση οι μαθητές και να έχουν καλύτερη απόδοση
8	Τα ερωτήματα αυτά δεν μου δημιουργήθηκαν ποτέ αλλά πιστεύω ότι πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια του μαθήματος	
9	Η αλήθεια είναι πως όχι δεν αναρωτήθηκα. Πάντως είναι καλό να γνωρίζεις πως δημιουργήθηκαν, πως προέκυψαν και γενικά ποια είναι η ιστορία τους, ώστε να τα κατανοήσεις καλύτερα και να αφομοιωθούν	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
10	Δεν αναρωτήθηκα ποτέ για κάποιο από τα παραπάνω ερωτήματα. Πιστεύω ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια του μαθήματος, ώστε ο μαθητής να αντιλαμβάνεται καλύτερα το μάθημα και να βρίσκει νόημα σε αυτό	Δε διαφοροποίησε την απάντησή της σε σχέση με πριν την παρέμβαση
11	Όχι δεν μου δημιουργήθηκαν ποτέ κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα. Βέβαια, θεωρώ πως τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος Μαθηματικών, καθώς έτσι δεν αρκούμαστε στην επίλυση ασκήσεων, αλλά αντιλαμβα-	Δε διαφοροποίησε την απάντησή της σε σχέση με πριν την παρέμβαση

	νόμαστε πληρέστερα το αντικείμενο μελέτης μας	
12	Δεν μου είχε δημιουργηθεί ποτέ καμιά απορία σχετικά με τους λογαρίθμους διότι δεν έχουμε ασχοληθεί αρκετά στο σχολείο και δεν έχω πολύ ασχοληθεί. Αλλά πιστεύω πως θα πρέπει να απαντάται οποιαδήποτε απορία σε σχέση με τους λογαρίθμους και σε οποιοδήποτε μάθημα διότι η παιδεία είναι ανθρωποκεντρική πάνω από όλα, διότι έτσι λύνονται απορίες, διευρύνονται οι ορίζοντες των μαθητών και έχουν περισσότερε γνώσεις	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
13	Ναι είχα απορία για την ιστορία των λογαρίθμων και το βρίσκω πολύ ενδιαφέρον να υπάρχει ένα τέτοιο ερωτηματολόγιο για τους μαθητές καθώς έτσι και επιμορφώνονται αλλά και ψυχαγωγούνται. Ναι ίσως να μην αρκούμαστε σε θεωρίες αλλά να γίνονται και αποδείξεις	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
14	Μου δημιουργήθηκαν (φέτος) αλλά λόγω έλλειψης χρέους σκόπευα να τις καλύψω αργότερα. Πιστεύω ότι ένα μάθημα δεν είναι μάθημα παιδείας και γνώσης αν αρκείται στη μετάδοση μόνο ορισμών και αποδείξεων. Δεν μπορούμε (εγώ προσωπικά τουλάχιστον) να μαθαίνω κάτι καινούργιο χωρίς να ξέρω και το γενικό πλαίσιο αυτού του αντικειμένου. Οπότε ναι θα ήταν ενδιαφέρον να γίνονται τέτοιες ιστορικές συζητήσεις περί μαθηματικών.	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
15	Τα ερωτήματα αυτά πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια του μαθήματος και ειδικότερα να τονίζεται η σημασία όσων διδασκόμαστε. Τις περισσότερες απαντήσεις και ειδικότερα αυτή που αφορά την ανακάλυψη των λογαρίθμων την είχαμε συζητήσει απλά δεν τη θυμάμαι	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
16	Έλειπε στο 1^{ο} ερωτηματολόγιο και στο 1^{ο} δίωρο της παρέμβασης	Τα μαθηματικά είναι το μοναδικό μάθημα στο οποίο δε μαθαίνουμε ονόματα και ημερομηνίες παρά μόνο θεωρήματα, ορισμούς και πράξεις. Έχω πολλά αναπά-

		ντητα σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών όπως για παράδειγμα ποιοι ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν για 1η φορά, πότε ξεκίνησε και ποιος να εφαρμόζει όλα αυτά που εμείς σήμερα μαθαίνουμε, χωρίς όμως να μπω στη διαδικασία να ψάξω μόνη μου.
17	Έλειπε στο 1ο ερωτηματολόγιο και στο 1ο δίωρο της παρέμβασης	Μου δημιουργήθηκαν σχεδόν όλα από τα παραπάνω ερωτήματα και προσπάθησα να βρω απαντήσεις, αλλά δεν βρήκα κάποιον να μου τα εξηγήσει καθώς στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών αρκούνται στους ορισμούς και αποδείξεις κλπ και στο πλαίσιο που έχει ορίσει το Υπουργείο Παιδείας. Φυσικά και πρέπει να απαντώνται τέτοια ερωτήματα και να μη δεχόμαστε ως μαθητές τη στεγνή γνώση και τελικά να γνωρίζουμε πράγματα χωρίς να ξέρουμε τη χρήση τους ή γιατί οδηγηθήκαμε στην ανακάλυψή τους και στο τέλος το μόνο που γνωρίζουμε είναι τύπους

10. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει ένα ιστορικό σημείωμα που τα περισσότερα από τα παραπάνω ερωτήματα τα απαντάει. Αντιληφθήκατε την ύπαρξή του; Το διαβάσατε ποτέ έστω και από περιέργεια ή το θεωρήσατε περιττό αφού δεν αποτελούσε μέρος της διδακτέας – εξεταστέας ύλης; Αν ναι σας κίνησε το ενδιαφέρον ή όχι;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Όχι δεν αντιλήφθηκα την ύπαρξή του. Δεν το διάβασα, όμως το είχα παρατηρήσει θα μου κινούσε το ενδιαφέρον και ίσως το διάβαζα.	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
2	Δεν γνώριζα καν ότι υπάρχει, καθώς ποτέ δε δόθηκε σημασία από κανέναν καθηγητή. Αν το είχα αντιληφθεί θα το είχα μελετήσει φευγαλέα για να κρατήσω όσες περισσότερες γνώσεις μπορώ, δηλαδή για εγκυκλοπαιδικούς λόγους	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
3	Δεν το διάβασα για το λόγο που αναφέρεται στην ερώτηση	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
4	Όχι δεν μπήκα ποτέ στη διαδικασία να το διαβάσω, κυρίως πιστεύω ότι διαβάζεις ότι σου λένε να διαβάσεις και αφού κανένας δε μου επέβαλλε ποτέ να το διαβάσω δε μπήκα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση

	ποτέ στη διαδικασία αυτή. Κανένας δε μου είπε ότι μπορεί να είναι ενδιαφέρον και αν θέλεις διάβασέ το.	
5	Έλειπε στο 1^{ο} ερωτηματολόγιο και στο 1^{ο} δίωρο της παρέμβασης	Αντιλήφθηκα την ύπαρξή του αλλά δεν το διάβασα. Ο λόγος που δεν το διάβασα δεν είχε να κάνει με τη διδακτέα ύλη
6	Δεν το διάβασα ποτέ, ασχολήθηκα μόνο με την εξεταστέα ύλη γιατί το φόρτο διαβάσματος ήταν πολύ μεγάλο.	Σοβαρά ποιος διαβάζει από τα βιβλία μαθηματικών ιστορικά σημειώματα ακόμα και αν απαντάει τα παραπάνω ερωτήματα. Αφού δεν είναι στη διδακτέα και εξεταστέα ύλη κανείς δεν ενδιαφέρεται να τα διαβάσει
7	Γενικότερα όλοι έχουμε την αντίληψη των ιστορικών σημειωμάτων, αλλά δεν ασχολούμαστε καθώς δεν εμπεριέχονται στην εξεταστέα ύλη. Εάν τα πράγματα ήταν λίγο διαφορετικά σίγουρα θα είχε πολύ νόημα να τα διαβάσουμε, αλλά με βάση τα δεδομένα της σημερινής εποχής, η γνώση αυτή δε θεωρείται απαραίτητο εφόδιο.	Δεν είχα αντιληφθεί την ύπαρξή του ιστορικού σημειώματος. Αυτό οφείλεται ξεκάθαρα στο ότι δεν αποτελούσε εξεταστέα ύλη
8	Ναι το έχω διαβάσει και πιστεύω πως παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον	
9	Δεν είχα ανοίξει το βιβλίο της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου και άρα δεν γνώριζα ότι είχε ιστορικό σημείωμα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
10	Δεν το διάβασα ποτέ. Δεν του έδωσα σημασία	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
11	Όχι δεν είχα αντιληφθεί την ύπαρξή του συγκεκριμένου σημειώματος, αλλά περιορίστηκα στις απαιτούμενες γνώσεις της Β΄ Λυκείου (διδακτέα ύλη). Όμως αντιλαμβάνομαι πως αυτό δεν είναι σωστό, αλλά έχουμε γίνει θύματα της συσσώρευσης ύλης και αρκούμαστε στα απαραίτητα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
12	Γενικά δε διαβάζω σχεδόν ποτέ κάποιο ιστορικό σημείωμα σε οποιοδήποτε βιβλίο, μόνο τώρα αυτή τη χρονιά έχω αρχίσει να τα διαβάζω. Δεν τα διάβαζα πιο πολύ διότι δεν αποτελούσε μέρος της διδακτέας ύλης αλλά γενικά θα πρέπει να τα λένε οι καθηγητές έστω	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση

	μόνο εγκυκλοπαιδικά	
13	Δεν αντιλήφθηκα την ύπαρξή του ποτέ, ούτε ήξερα ότι περιείχε απαντήσεις σε αυτό το θέμα. Και ναι ίσως να το παρέβλεψα λόγω της ρουτίνας των μαθημάτων, είναι και εκτός ύλης πράγμα που το καθιστά λίγο δύσκολο να το διαβάσει για έναν μαθητή που είναι θύμα του εξειδικευμένου σχολείου. Αλλά γενικά μου αρέσουν τέτοια περιεχόμενα.	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
14	Δεν αντιλήφθηκα την ύπαρξή του, αλλά αν το είχα προσέξει σίγουρα θα το διάβαζα. Δεν το θεωρούσα περιττό, άλλωστε και φέτος διαβάζω κάποια εκτός ύλης. Πιστεύω ότι ένας μαθητής πρέπει να διαβάζει τέτοιου είδους 'εκτός ύλης' παραθέματα –ιστορικά σημειώματα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
15	Το διάβασα. Γενικά διαβάζω τα ιστορικά σημειώματα καθώς βοηθούν στην κατανόηση όσων διδασκόμαστε και πιο συγκεκριμένα το λόγο, δηλαδή γιατί να είναι χρήσιμα στην καθημερινότητα	Δε διαφοροποίησε την απάντησή σε σχέση με πριν την παρέμβαση
16	Έλειπε στο 1^{ο} ερωτηματολόγιο και στο 1^{ο} δίωρο της παρέμβασης	Δε γνώριζα ότι υπάρχει κάτι τέτοιο στο σχολικό μου βιβλίο ίσως γιατί δεν το εξετάζομαι προκειμένου να πάρω έναν άχρηστο βαθμό, ενώ στην ουσία το ιστορικό σημείωμα ίσως αν το είχα προσέξει και το είχα διαβάσει να μου είχε τυπωθεί στη μνήμη και κάποια στιγμή θα μπορούσε κάπου να μου φανεί χρήσιμο. Όπως μπορείτε να δείτε και μόνος σας τα παραπάνω ερωτήματα που υποτίθεται θα έπρεπε να τα ξέρω γιατί κάποτε <u>έπρεπε</u> να εξεταστώ σε αυτά, μου είναι παντελώς άγνωστα
17	Έλειπε στο 1^{ο} ερωτηματολόγιο και στο 1^{ο} δίωρο της παρέμβασης	Όχι, αφού κανένας δεν μου κίνησε το ενδιαφέρον και οι ίδιοι οι καθηγητές μας απέτρεπαν από την ανάγνωσή του.

11. Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου , εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν

στην ανακάλυψη τους , την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό. Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

Μ	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Ναι γιατί με αυτόν τον τρόπο το θέμα γίνεται πιο ενδιαφέρον και ο μαθητής επιθυμεί να παρακολουθήσει γιατί μαθαίνει και το λόγο για τον οποίο διδάσκεται κάτι. Δεν αποστηθίζει απλά, αλλά κατανοεί σε βάθος.
2	Οι στόχοι αυτοί σίγουρα επετεύχθησαν. Το ορθό θα ήταν να τίθενται, αλλά θεωρώ πως δεν υπάρχει ο χρόνος αυτή η αναλυτική διδασκαλία να πραγματοποιείται σε όλα τα μαθήματα, αλλά ούτε και η διάθεση από αρκετούς καθηγητές.
3	Ναι σε μεγάλο βαθμό. Πράγματι χρειάζεται να τίθενται τέτοιοι στόχοι
4	Ναι μου κίνησε το ενδιαφέρον όχι τόσο η ιστορία όσο γιατί τα κάνουμε
5	Ναι πιστεύω ότι η παρουσίαση ήταν επιτυχής σε αρκετά υψηλό βαθμό και θεωρώ πως μια διδασκαλία χρειάζεται ιστορικές αναδρομές για να είναι επιτυχής.
6	Ναι επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό. Βεβαίως θα πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας διότι οξύνει το πνεύμα και την σκέψη και μαθητών και καθηγητών
7	Νομίζω ότι η διδασκαλία συνέβαλε αρκετά στην απόκτηση βασικών γνώσεων. Είναι σημαντικό όταν διδασκόμαστε κάτι στα μαθηματικά να γνωρίζουμε έστω βασικά στοιχεία από την ιστορία του, για να μη δημιουργούνται απορίες.
8	
9	Πιστεύω ότι καλύφθηκα από την παρουσίαση και κατάλαβα καλύτερα τους λογαρίθμους. Γι' αυτό πιστεύω ότι πρέπει να γίνεται ιστορική αναδρομή (παρόλο που το εκπαιδευτικό σύστημα δεν επιτρέπει τέτοιες πρωτοβουλίες)
10	Πιστεύω ότι αυτοί οι στόχοι επετεύχθησαν στο βαθμό που ένας μέσος μαθητής μπορεί να αντιληφθεί και να κατανοήσει τον τρόπο επινόησης των λογαρίθμων (αυτό το κομμάτι ήταν δύσκολο, καθώς και η συσχέτιση τους με τις αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους) Το δυσκολότερο από όλα πιστεύω υπήρξε η αποσαφήνιση των κινήτρων για τη δημιουργία τους, καθώς εγώ τους λογαρίθμους δεν τους έχω εφαρμόσει για παρόμοιους λόγους. Η επεξήγηση των όρων και εννοιών και η ιστορική αναφορά ήταν επιτυχής και ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Θεωρώ ότι πληροφορίες σαν και αυτές πρέπει να εντάσσονται στο διδακτικό πλαίσιο.
11	Θεωρώ πως αυτοί οι διδακτικοί επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό, αλλά πρέπει οπωσδήποτε να ενταχθούν στο διδακτικό πλαίσιο και να μην αποτελούν απλά μεμονωμένες προσπάθειες – πρωτο-

	βουλίες ορισμένων καθηγητών, ώστε η διδασκαλία αυτή να γίνεται προσχεδιασμένα και οργανωμένα
12	Πιστεύω πως μέσω αυτής της διδασκαλίας που παρακολουθήσαμε καταλάβαμε ακριβώς τι συμβολίζουν οι λογάριθμοι και το e και θεωρώ πως αυτό θα πρέπει να γίνεται σε κάθε μάθημα για οποιοδήποτε κεφάλαιο, διότι τώρα ουσιαστικά λαμβάνουμε στείρες γνώσεις χωρίς να ξέρουμε τι σημαίνουνε.
13	Ναι επετεύχθησαν καθώς καταλάβαμε πλήρως την έννοια του λογαρίθμου και δεν δράσαμε μηχανικά όπως σε κάποια άλλα θεωρήματα ή τύπους. Ναι πρέπει το σχολείο να παρέχει στους μαθητές τέτοιες διδακτικές ώρες καθώς αυτοί επιμορφώνονται και δεν είναι απλά αποδέκτες πληροφοριών
14	Αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό. Πιστεύω ότι μια διδασκαλία, για να μπορεί να αφομοιώνεται εύκολα από τους μαθητές πρέπει να συμπεριλαμβάνει τέτοιους στόχους. Το μάθημα γίνεται πιο κατανοητό, πολύ πιο ευχάριστο και μας βάζει σε μια διαδικασία σκέψης, η οποία είναι εποικοδομητική και μπορούμε να προσλάβουμε αρκετά. Πιστεύω ότι αν γνωρίζουμε αυτά στη Β΄ Λυκείου θα μπορούσαμε να κατανοήσουμε πιο εύκολα κάποια τεχνάσματα και μεθοδολογίες που εκτελούμε στις ασκήσεις μας.
15	Είναι άκρως σημαντικό να γνωρίζουμε το λόγο για τον οποίο ανακαλύφθηκε – επινοήθηκε κάτι διότι αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε γιατί το διδασκόμαστε και εμείς. Μετά την παρουσίαση κατανοούμε καλύτερα το λόγο ύπαρξης των λογαρίθμων.
16	Δεν απάντησε
17	Θεωρώ ότι επετεύχθησαν οι διδακτικοί στόχοι, επιτέλους κατάλαβα την ύπαρξή τους και γιατί πρέπει να τα μαθαίνω. Θεωρώ ότι είναι απαραίτητο τέτοιοι στόχοι να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας για να έχουμε πραγματική γνώση πάνω στο θέμα που μελετάμε και όχι μόνο τύπους.

12. Συγκρίνοντας μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων, με μια παραδοσιακή διδασκαλία που συνήθως ακολουθείται, μπορείτε να αναφέρετε τα σημεία που νομίζετε ότι υπερτερεί η μία της άλλης.

Μ	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Ιστορική : επεξήγηση, κατανόηση, λόγος διδασκαλίας, χρονοβόρα Παραδοσιακή : απομνημόνευση, απλή, πιο γρήγορη
2	Αρκετά καλύτερη είναι η διδασκαλία που είναι εμπνευσμένη από τη ιστορία. Προσφέρει περισσότερες γνώσεις. Το αντικείμενο γίνεται πιο κατανοητό διότι μελετάται βαθέως. Αναπτύσσεται η αγάπη των μαθητών για τα μαθηματικά ή για όποιο μάθημα διδάσκεται κατ' αυτό τον τρόπο.

3	Η 1η (πρωτότυπη) διδασκαλία προσφέρει απάντηση σε απορίες, συνδέει λογικά τη διδασκόμενη ύλη, την κατανοεί καλύτερα ο μαθητής και αντιλαμβάνεται τη σημασία του μαθήματος. Ωστόσο ξεφεύγει από την ύλη. Υπάρχει όφελος μόνο σε ζητήματα γνώσεων και όχι σε προετοιμασία εξετάσεων. Η 2η (συνήθης) διδασκαλία αποβλέπει στην προετοιμασία για τις εξετάσεις. Ωστόσο, γίνονται παρανοήσεις στην αντίληψη που υπάρχει για το μάθημα. Τα μαθηματικά είναι επιστήμη νόησης και όχι τυπολογίου (το 90% της ύλης είναι περίπου τυποποιημένο)
4	Δεν απάντησε
5	Ο συνδυασμός και των δύο είναι η καλύτερη μέθοδος διδασκαλίας. Δεν μπορώ να διακρίνω θετικά και αρνητικά των δύο μεθόδων καθώς τις θεωρώ εξίσου σημαντικές
6	Δεν απάντησε
7	Όταν υπάρχει διδασκαλία της ιστορίας ενός μαθηματικού φαινομένου, είναι φυσικό οι μαθητές να εξοικειώνονται περισσότερο και να έχουν καλύτερη αντίληψη του αντικειμένου. Η παραδοσιακή διδασκαλία είναι εξίσου καλή, αλλά αφήνει πολλά ερωτήματα στους μαθητές, οι οποίοι πολλές φορές δεν αντιλαμβάνονται πως υπάρχουν.
8	
9	Από τη μια αντιλαμβάνεσαι καλύτερα την έννοια του λογαρίθμου, γιατί υπάρχουν και που βοηθούν στην καθημερινότητά μας. Από την άλλη όμως παραγκωνίζονται αρκετές ασκήσεις οι οποίες μπορεί να πέσουν στις εξετάσεις και να μη μπορέσουν οι μαθητές να τις λύσουν.
10	Η διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία τραβά περισσότερο το ενδιαφέρον του μαθητή διότι ξεφεύγει από τη ρουτίνα των ασκήσεων και ο ίδιος μπορεί να διατυπώσει τη χρησιμότητά αυτών που μαθαίνει. Από την άλλη υπάρχει κίνδυνος ο μαθητής να μπερδευτεί.
11	Η διδασκαλία που είναι εμπνευσμένη από την ιστορία υπερτερεί της παραδοσιακής, καθώς γίνεται αντιληπτή η σημασία και η προέλευση ορισμένων εννοιών. Βέβαια, η παραδοσιακή διδασκαλία υπερτερεί στο ότι υπάρχει ορισμένο πλαίσιο διδασκαλίας, δηλαδή η γνώση είναι πιο συγκεκριμένη.
12	Αυτή η διδασκαλία υπερτερεί της παραδοσιακής, διότι σε αυτήν μάθαμε από πού έχουν προέλθει όλα αυτά και τι συμβολίζουν, ενώ στην παραδοσιακή απλά κάναμε πράξεις χωρίς να ξέρουμε τι σημαίνουν ή το ιστορικό τους υπόβαθρο.
13	Η μία υπερτερεί της άλλης από άποψη διατύπωσης και καθαρής εκπαίδευσης ανθρωπιστικής και όχι τεχνοκρατικής
14	Η παραδοσιακή διδασκαλία υπερτερεί της άλλης επειδή υπάρχει χρόνος για περισσότερες ασκήσεις σε αντίθεση με τη διδασκαλία ‘ιστορίας’ όπου λόγω συζήτησης δε μένει πολύ χρόνος για μια εκτενή πρακτική εφαρμογή. Παρ’ όλα αυτά, είναι πολύ καλύτερο να γνωρίζουμε την προέλευση των κινήσεων μας παρά να τα εφαρμόζουμε μηχανικά.

15	Η διδασκαλία που είναι εμπνευσμένη από την ιστορία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν πλήρως το λόγο ύπαρξης κάποιων εννοιών. Στην παραδοσιακή διδασκαλία γίνεται απλά επίλυση ασκήσεων που επίλυση ασκήσεων που υπερτονίζει τον χρησιμοθηρικό τρόπο της εκπαίδευσης.
16	Μια διδασκαλία από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων σαφώς είναι καλύτερη από μια παραδοσιακή διδασκαλία, διότι οι γνώσεις που σου προσφέρει είναι σφαιρικές και όχι κολλημένες σε ένα πρότυπο που είναι ανώφελο για τον όποιον μαθητή. Η προσωπική μου γνώμη είναι πως θα προτιμούσα να μαθαίνω κάτι γενικό παρά κάτι συγκεκριμένο (π.χ. επίλυση εξισώσεων, χωρίς να τις υποτιμώ, γιατί και αυτές έχουν το δικό τους ενδιαφέρον), αλλά δε θεωρώ πως είναι τόσο σημαντικές ΤΟΣΕΣ πράξεις μπροστά την πραγματική γνώση.
17	Η διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία υπερτερεί της άλλης, καθώς κινεί το ενδιαφέρον του μαθητή, επιλύει απορίες και επεξηγείται ο λόγος ύπαρξής και μάθησής τους.

13. Αναφέρετε αν και σε ποιο βαθμό η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολουθήσατε προκάλεσε το ενδιαφέρον σας, σας φάνηκε λιγότερο ή περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και άλλαξε έστω και λίγο την εικόνα που έχετε για τα μαθηματικά.

Μ	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	Θεωρώ πως σε αυτό το κομμάτι των μαθηματικών έχει αλλάξει η γνώμη μου γιατί το κατανοώ λίγο καλύτερα, αλλά γενικά στα μαθηματικά όχι, γιατί κάποια θέματα είναι κουραστικά και καθόλου ευκολονόητα.
2	Ήταν πολύ ενδιαφέρουσα και πρωτοποριακή, αν και θεωρώ πως ίσως δόθηκε υπερβολική σημασία στα ιστορικά στοιχεία. Αντιλήφθηκα την πολυπλοκότητα των μαθηματικών αλλά και την ευφυΐα που απαιτούν έτσι ώστε να γίνουν κατανοητά. Σίγουρα τα αγάπησα λίγο περισσότερο και με γοήτευσαν ακόμη πιο πολύ.
3	Προκάλεσε ενδιαφέρον, αφού αποκάλυψε την προέλευση της διδασκόμενης ύλης. Ένα τέτοιο μάθημα διευρύνει τους ορίζοντες και συμβάλλει στην ενεργοποίηση της σκέψης.
4	Ναι άλλαξε αλλά μόνο για τους λογαρίθμους. Θέλω να πω ότι υπάρχουν και άλλοι τομείς των μαθηματικών που δε βγάζουν νόημα.
5	Τη θεωρώ ενδιαφέρουσα ως μέθοδο διδασκαλίας, αλλά δεν μπορώ να πω ότι άλλαξε την εικόνα μου για τα μαθηματικά. Με έκανε να συνειδητοποιήσω ότι όλοι οι μαθηματικοί κανόνες είναι σημαντικοί
6	Προσωπικά η γνώμη μου για τα μαθηματικά είναι πως πάντα θα είναι δύσκολα ακόμα και για τη λύση διάφορων πράξεων αν κάναμε χρήση λογαρίθμων. Ό,τι και να βρεθεί να τα απλουστεύει πάντα κάτι δυσνόητο θα εμφανίζεται σαν το μυθικό τέρας όπου έκοβες το ένα κεφάλι και φύτρωνε άλλο.

7	Γενικότερα με εντυπωσιάζουν οι λογάριθμοι, αλλά πιστεύω ότι εάν είχα διδαχθεί από πέρσι περισσότερα πράγματα γι' αυτούς θα είχα καλύτερη αντίληψη και θα ήμουν πιο καλή.
8	
9	Η παρουσίαση ήταν ενδιαφέρουσα και έμαθα πράγματα που δεν ήξερα. Παρόλα αυτά με μία μόνο παρουσίαση δεν μπορείς να αλλάξεις τη γνώμη ενός μαθητή για ένα μάθημα.
10	Ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Κατάλαβα ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια στείρα επιστήμη που απλώς δυσκολεύει τη ζωή των μαθητών, αλλά έχει μια ιστορία όπως οι υπόλοιπες επιστήμες και έχει επιλύσει ποικίλα προβλήματα.
11	Η διδασκαλία των λογαρίθμων προκάλεσε το ενδιαφέρον μου και τη θεωρώ πιο ελκυστική ως τρόπο εκμάθησης. Το θετικό ήταν πως αντιλήφθηκα την προέλευση των λογαρίθμων και πως δεν είναι μόνο μέρος των ασκήσεων.
12	Πάντα πίστευα πως τα μαθηματικά είναι η πιο σημαντική και ενδιαφέρουσα επιστήμη διότι δεν έχει όρια, πάντα μπορείς να μάθεις κάτι καινούργιο και ότι όλα αυτά συνδέονται μεταξύ τους. Η διδασκαλία αυτή επιβεβαίωσε την άποψή μου για τα μαθηματικά.
13	Πραγματικά δεν είμαι καλός με τα μαθηματικά. Προσπαθούσα αλλά απογοητευόμουν και γι' αυτό είχα μια κακή εικόνα. Όμως τώρα άλλαξα γνώμη, είναι μια υπέροχη επιστήμη.
14	Μου προκάλεσε το ενδιαφέρον και συγκεκριμένα ενθουσιάστηκα γιατί κατάλαβα κάποια πράγματα που τα είχα μπερδεμένα στο μυαλό μου.
15	Τα περισσότερα από όσα ειπώθηκαν στην παρουσίαση είχαν ενδιαφέρον και με βοήθησαν να κατανοήσω τους λογαρίθμους παρά το γεγονός ότι τους έχω διδαχθεί. Άρα η διαδικασία αυτή είναι σημαντική και για τη Β΄ Λυκείου που διδάσκονται για πρώτη φορά. Άποψη για τα μαθηματικά έχω ήδη διαμορφώσει και η παρουσίαση απλά την ενίσχυσε.
16	Δεν απάντησε
17	Η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολούθησα μου προκάλεσε το ενδιαφέρον, μου φάνηκε περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και μου άλλαξε τόσο της εικόνα που είχα για τα μαθηματικά ώστε να ψάξω την ύπαρξη και άλλων στοιχείων και μεθόδων στα μαθηματικά.

IV. Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου (Συγκεντρωτικό)

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

2. Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α , ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε το αποτέλεσμα να είναι θ. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι ο λογάριθμος έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών'.

   $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$

   Γιατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : 'Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$' .

   Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu \to \infty}(1 + \frac{1}{\nu})^{\nu} = 2,71828...$

   Γιατί πιστεύετε ότι συνδέεται ο αριθμός e με τους λογαρίθμους και γιατί οι λογάριθμοι που έχουν βάση το e αποκαλούνται 'φυσικοί';

5. Πως πιστεύετε το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο του $16^{ου}$ -$17^{ου}$ αιώνα επηρέασε την εξέλιξη των μαθηματικών και την επινόηση των λογαρίθμων ;

6. Αναφέρετε κάποιες από τις σπουδαίες εφαρμογές της έννοιας του λογαρίθμου στο φυσικό κόσμο που καθιστά αναγκαία τη διδασκαλία του σε ένα μάθημα Γενικής Παιδείας.

7. Πιστεύετε ότι τέτοια ερωτήματα όπως τα παραπάνω πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών ή πρέπει απλά να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων;

8. Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι διαφωτίζουν τα παραπάνω ερωτήματα, οι ιστορικές πληροφορίες που δόθηκαν στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε καθώς και το ιστορικό σημείωμα που βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου ;
9. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$\log_\alpha 1 =$ $\qquad$ $\log_\alpha \alpha =$ $\qquad$ $\log_\alpha \alpha^\chi =$ $\qquad$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$

$\log_3 \frac{1}{9} =$ $\qquad$ $\ln \sqrt{e} =$ $\qquad$ $\log_{\sqrt{2}} .... = 4$ $\qquad$ $\log_{....} 16 = 2$

$\log 0.001 =$ $\qquad$ $\log .... = 3$ $\qquad$ $\log \theta = \frac{\ln ...}{\ln ...}$ $\qquad$ $\ln \theta = \frac{\log ...}{\log ...}$

10. Με βάση τις ιδιότητες λογαρίθμων να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

F. $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$

G. $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32$

11. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων λογαρίθμων και του παρακάτω πίνακα να βρείτε τον άγνωστο χ στη αναλογίας $\frac{469.894}{20.941} = \frac{10.807.562}{x}$

x	logx
469.894	5,672
20.941	4,321
10.807.562	7,034
481.643	5,683
583.246	5,766
478.924	5,680

12. Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου , εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους , την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό; Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

13. Συγκρίνοντας μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων, με μια παραδοσιακή διδασκαλία που συνήθως ακολουθείται, μπορείτε να αναφέρετε τα σημεία που νομίζετε ότι υπερτερεί η μία της άλλης.

14. Αναφέρετε αν και σε ποιο βαθμό γιατί η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολουθήσατε προκάλεσε το ενδιαφέρον σας, σας φάνηκε λιγότερο ή περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και άλλαξε έστω και λίγο την εικόνα που έχετε για τα μαθηματικά . Αν ναι, αναφέρετε τους λόγους στους οποίους νομίζετε ότι οφείλετε.

V. Απαντήσεις ερωτηματολογίου μαθητών Β΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας μετά τη διδακτική παρέμβαση (αναλυτικά, ανά ερώτηση)

Μαθητές Θετικής κατεύθυνσης : 1 -11	Μαθητές Θεωρητικής κατεύθυνσης : 12 -20
Μαθητές που έλλειπαν στο 1^{ο} δίωρο : 17	Μαθητές που έλλειπαν στο 2^{ο} δίωρο : 1 , 18

1. Ποιοι πιστεύετε ήταν οι λόγοι – τα κίνητρα που οδήγησαν στην επινόηση των λογαρίθμων; Ποια μαθηματική ανάγκη – ποιο μαθηματικό πρόβλημα ήρθαν να επιλύσουν;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Η εφεύρεση των λογαρίθμων οδήγησε στην απλούστευση κάποιων δύσκολων πράξεων. Αφού οι λογάριθμοι μετατρέπουν τις δύσκολες πράξεις (πολ/σμο, διαίρεση) σε απλούστερες (πρόσθεση, αφαίρεση). Το πρόβλημα αυτό υπήρχε κυρίως όταν οι άνθρωποι έπρεπε να μελετήσουν το διάστημα, άρα να ασχοληθούν με πράξεις αριθμών με πάρα πολλά ψηφία που ήταν χρονοβόρες.
2	Οι λόγοι ήταν για να μπορούν να μετρήσουν αποστάσεις στο διάστημα. Για να υπολογίσουν αριθμούς με πολύ μεγάλο αριθμό δεκαδικών ψηφίων
3	Οι λογάριθμοι βοήθησαν στη γρήγορη επίλυση περίπλοκων πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.
4	Πιστεύω ότι οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων είναι η δυσκολία στον υπολογισμό των πράξεων αλλά και η πολύωρη δουλειά κάποιου που θα καθόταν με το χέρι ώρες και μέρες για να βρει το αποτέλεσμα.
5	Επειδή ήθελαν να μετρήσουν αποστάσεις μεγάλες και ήθελαν να είναι ακριβείς με τις πράξεις αυτές. Οι πράξεις αυτές ήταν μεγάλων διαστάσεων και τους έπαιρνε πολύ χρόνο, οπότε ήθελαν να κάνουν απλούστερες αυτές τις πράξεις.
6	Οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν για να κάνουν πράξεις με αριθμούς που αποτελούνταν από πολλά ψηφία.
7	Οι άνθρωποι όταν ακόμα δεν είχαν ανακαλυφθεί οι υπολογιστές χρειαζόντουσαν μια μέθοδο για να λύνουν πράξεις με δύσκολους και πολυψήφιους αριθμούς, έτσι δημιούργησαν τους λογαρίθμους
8	Οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν για να υπολογίζονται με ακρίβεια σε ελάχιστο χρόνο πράξεις με 7-ψήφιους αριθμούς, που δίχως την ανακάλυψη αυτών ήταν δύσκολο να τις κάνουμε. Ένας από τους κυριότερους λόγους ήταν η μέτρηση των αποστάσεων στο διάστημα και στις τραπεζικές επιχειρήσεις.

9 10	Η κυριότερη ανάγκη που οδήγησε στην ανακάλυψη και στην εφεύρεση των λογαρίθμων ήταν το γεγονός ότι οι άνθρωποι ήθελαν μέσα από τους λογαρίθμους να κάνουν τις πολύπλοκες πράξεις όπως πολ/σμο και διαίρεση με πιο απλή μορφή, δηλαδή πρόσθεση και αφαίρεση. Στα αρχαία χρόνια οι πράξεις μεγάλων αριθμών έπαιρναν μέρες. Έτσι βρήκαν ένα σύστημα που ήταν οι λογάριθμοι για να γίνουν οι πράξεις πιο εύκολα και πιο γρήγορα.
11	Υπήρχε η ανάγκη για μαθηματικές πράξεις ανάμεσα σε 7φήφιους αριθμούς και αναγκάστηκαν να βρουν ένα πιο εύκολο και μη χρονοβόρο τρόπο για να τις υπολογίζουν
12	Οι λογάριθμοι δημιουργήθηκαν με σκοπό να διευκολύνουν τους μαθηματικούς στην επίλυση πράξεων με πολλά δεκαδικά ψηφία, καθώς πριν την ανακάλυψη τους οι πράξεις μεταξύ μεγάλων αριθμών ήταν πολύ χρονοβόρες.
13	Οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν για να λύσουν το πρόβλημα των πολύωρων πράξεων με πολλά ψηφία που υπήρχε μέχρι τότε. Οι πράξεις πλέον γίνονταν στο μισό χρόνο με το μισό κόπο.
14	Η ανάγκη πραγματοποίησης πράξεων με εξαιρετικά μεγάλους αριθμούς που χρειάζονταν πολύ μεγάλη ακρίβεια, όπως οι ακριβείς αποστάσεις πλανητών
15	Οι λογάριθμοι βοηθούν να λύσουμε κάποια προβλήματα ή να κάνουμε πράξεις με πολύ μεγάλους αριθμούς. Μπορούν να κάνουν τη ζωή μας πιο εύκολη σε σχέση με τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά στη ζωή μας είναι πολύ σημαντικά. Χωρίς αυτά θα ήταν πολύ φτωχή η ζωή μας. Με τα μαθηματικά μπορούμε να κάνουμε αστρονομικές μετρήσεις και πολλά άλλα.
16	Οι λόγοι και τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη- εφεύρεση των λογαρίθμων ήταν γιατί ήταν αναγκαίο με κάποιο τρόπο να γίνουν ευκολότερα οι μαθηματικές πράξεις που χρειάζονταν πολλά χρόνια να γίνουν
17	Οι λογάριθμοι δημιουργήθηκαν για να βοηθήσουν στις συναλλαγές καθώς δεν υπήρχαν ηλεκτρονικοί υπολογιστές
18	Φυσικά προβλήματα π.χ. μεγάλοι αριθμοί που υπάρχουν στο διάστημα, που χαρακτηρίζουν φυσικά φαινόμενα
19	Οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψη των λογαρίθμων ήταν διότι οι παλαιοί δεν μπορούσαν να κάνουν πράξεις με μεγάλους αριθμούς ή τους έπαιρνε πολύ χρόνο για να τους ολοκληρώσουν. Οι λογάριθμοι ήρθαν να επιλύσουν το πρόβλημα των μεγάλων πράξεων και να διευκολύνουν τους ανθρώπους οι οποίοι δούλευαν σε αντίστοιχες δουλείες.
20	Με την εφεύρεση των λογαρίθμων εξοικονομούσαν χρόνο και κόπο στον υπολογισμό πράξεων, καθώς οι πράξεις απλουστεύονταν.

2. Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α , ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε το αποτέλεσμα να είναι θ. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι ο λογάριθμος έχει το ρόλο του εκθέτη μιας δύναμης. Τότε για ποιο λόγο νομίζετε ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, μιας λέξης που προκύπτει από τη σύνθεση των λέξεων 'λόγος' και 'αριθμός' και όχι κάποιος άλλος που παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του εκθέτη δύναμης;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Δόθηκε στο λογάριθμο η ονομασία αυτή διότι εκφράζει την αναλογία ενός αριθμού με έναν άλλο
2	Γιατί πριν το λογάριθμο οι άνθρωποι μετρούσαν σε λόγους κάποια πράγματα (π.χ. α/β , γ/δ) και ο λογάριθμος εκφράζει την ποσότητα των λόγων.
3	Ονομάζονται λογάριθμοι καθώς ακολουθούν την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο έχοντας ένα σταθερό λόγο.
4	Αρχικά, η λέξη δύναμη δεν υπήρχε εκείνη την εποχή. Νομίζω ότι του αποδόθηκε ο όρος λογάριθμος, γιατί ουσιαστικά είναι ο λόγος δύο ή περισσοτέρων αριθμών. Πιστεύω ακόμη ότι του δόθηκε το συγκεκριμένο όνομα γιατί ο λόγος είναι κάτι που είναι εύκολο για κάθε άνθρωπο και τον βοηθά στην επικοινωνία όπως ο λογάριθμος που μας βοηθάει στην επίλυση δύσκολων πράξεων.
5	Γιατί μετρούσαν τους λόγους για να βρουν αυτόν τον εκθέτη
6	Ο λογάριθμος προκύπτει από τους αρχαίους γιατί αυτοί έκαναν πράξεις με κλάσματα όπου από εκεί προκύπτει ο λόγος και ο αριθμός και έτσι πήρε το όνομα λογάριθμος.
7	Η λέξη λογάριθμος προέρχεται από τις λέξεις 'λόγος' και 'αριθμός'. Οι άνθρωποι παλιά όταν ανακάλυψαν τους πρώτους λογάριθμους χρησιμοποιούσαν λέξεις για να τους εκφράζουν, έτσι πήραν από εκεί την ονομασία τους.
8	Επειδή πριν την ανακάλυψη των λογαρίθμων οι άνθρωποι μετρούσαν σε λόγους ορισμένα πράγματα όπως τα κλάσματα και επίσης οι λογάριθμοι εκφράζουν τις ποσότητες των λόγων.
9	Ο λογάριθμος ονομάστηκε έτσι γιατί μέσα από τους λόγους δηλαδή τα κλάσματα μπορούμε να εκφράσουμε ή και να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα αριθμών που ίσως να μην είχαμε σκεφτεί ή βρει αρχικά. Γενικότερα ανάμεσα στους λόγους (κλάσματα) και τον αριθμό υπάρχουν κάποιες ουσιαστικές σχέσεις.
10	Δεν ξέρω.
11	Η λέξη λογάριθμος είναι ο αριθμός που μετράει το λόγο. $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}$ Αριθμητική 0 1 2 3 4 5 6 Γεωμετρική 1 2 4 8 16 32 64

12	Αυτό συνέβη γιατί όταν ανακαλύφθηκε ο λογάριθμος δεν υπήρχαν οι δυνάμεις αλλά χρησιμοποιούνταν ένα σύστημα με λόγους σε αριθμητική και ένα άλλο σε γεωμετρική πρόοδο, επομένως από εκεί πήρε την ονομασία του
13	Διότι είναι ο αριθμός των λόγων α/β που χρησιμοποιούσαν παλαιότερα για να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.
14	Ονομάστηκε έτσι καθώς ουσιαστικά μετράμε τον αριθμό των λόγων (κλασμάτων) που πρέπει να γράψουμε για να εμφανιστεί ένας συγκεκριμένος αριθμός
15	Γιατί υπάρχουν αριθμοί και σύμβολα με τα οποία μπορούμε να λύσουμε έναν λογάριθμο. Π.χ ο λογάριθμος ενός αριθμού θ με βάση α ορίζεται ως ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψωθεί ο α ώστε να βγαίνει θ. Αυτός νομίζω είναι ο όρος λογάριθμος
16	Ο όρος λογάριθμος του αποδόθηκε διότι αποτελείται από συνεχείς ακολουθίες λόγων.
17	Δεν απάντησε
18	Επειδή παλιότερα δεν υπήρχε ο όρος λογάριθμος και για να γίνουν ανάλογες πράξεις έπρεπε να υπάρχει κάτι σαν σχέση σε μορφή λόγων/αναλογιών
19	Ο λογάριθμος βγαίνει από τις λέξεις λόγος και αριθμός. Ο λόγος επειδή οι αρχαίοι έλεγαν τις πράξεις με λόγια και ο αριθμός γιατί μετά τις αποτύπωναν με αριθμούς.
20	Η λέξη λογάριθμος συμβολίζει τον αριθμό των λόγων της αριθμητικής προόδου προς τη γεωμετρική .

3. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : ‘Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών’.

$\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$, $\log x^k = k \cdot \log x$ Γι

ατί νομίζετε ότι θεωρούνται τόσο σημαντικές;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Οι ιδιότητες αυτές είναι πολύ σημαντικές διότι βοηθούν στην απλούστευση πράξεων με αριθμούς πολλών ψηφίων. Για παράδειγμα ο πολ/σμος γίνεται πρόσθεση, η διαίρεση αφαίρεση κλπ
2	Θεωρούνται σημαντικές γιατί μας βοηθούν στην ευκολία των πράξεων και την επίλυση προβλημάτων με μεγάλους και δύσκολους αριθμούς.
3	Γιατί ενώνουν τις πράξεις πολ/σμου και διαίρεση με πρόσθεση και αφαίρεση αντίστοιχα. Ενώ με τη δύναμη και τον πολ/σμο απλουστεύουμε τη μορφή του λογαρίθμου.

4	Οι ιδιότητες των λογαρίθμων θεωρούνται τόσο σημαντικές γιατί μας βοηθούν να υπολογίζουμε πιο γρήγορα και εύκολα διάφορα πράξεις.
5	Γιατί μπόρεσαν να μετατρέψουν πράξεις ‘δύσκολες’ σε ‘εύκολες’
6	Θεωρούνται σημαντικές γιατί μπορούσαν να κάνουν πράξεις αρκετά μεγάλες εύκολα. Και κατάφερναν να μετατρέπουν τις αφαιρέσεις και τις προσθέσεις σε διαιρέσεις και πολ/σμούς
7	Δεν ξέρω.
8	Θεωρούνται τόσο σημαντικές διότι μας βοηθούν να κάνουμε πράξεις σε λογαρίθμους οι οποίοι δεν έχουν την ίδια βάση αλλά επίσης και στο γρήγορο και εύκολο υπολογισμό παραστάσεων που περιέχουν λογαρίθμους
9	Αυτές οι ιδιότητες είναι σημαντικές αφού με αυτόν τον τρόπο μπορούμε πιο πολύπλοκες πράξεις όπως είναι ο πολ/σμος η διαίρεση και η ύψωση σε δύναμη να τις αναγάγουμε σε πιο απλές όπως είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση.
10	Οι πράξεις γίνονται πιο απλές, δηλαδή ο πολ/σμος γίνεται πρόσθεση, η διαίρεση αφαίρεση, η δύναμη πολ/σμος.
11	Γιατί μετατρέπει τον πολ/σμό σε πρόσθεση, τη διαίρεση σε αφαίρεση, τη δύναμη σε πολ/σμο και τη ρίζα σε διαίρεση
12	Καθώς καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις των θετικών αριθμών.
13	Οι πράξεις γίνονται πιο απλές μετατρεπόμενες σε προσθέσεις αφαιρέσεις, πολ/σμους και διαιρέσεις αντίστοιχα
14	Γιατί απλοποιούν τις πράξεις των λογαρίθμων. Μπορούμε λοιπόν να μετατρέψουμε τον πολ/σμο σε πρόσθεση, τη διαίρεση σε αφαίρεση και τις δυνάμεις σε πολ/σμό αντίστοιχα
15	Δεν απάντησε
16	Οι ιδιότητες είναι σημαντικές διότι βοηθούν να υπολογίσουμε σωστά έναν λογάριθμο.
17	Είναι σημαντικές διότι μας βοηθούν στην επίλυση ενός λογαρίθμου
18	Διότι η κάθε πράξη γίνεται απλούστερη και διευκολύνεται η λύση της. Ο πολ/σμος γίνεται πρόσθεση, η διαίρεση αφαίρεση, και η δύναμη πολσμος και με τον τρόπο αυτό γίνονται με λιγότερη ταλαιπωρία
19	Είναι σημαντικές διότι μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε κάνοντας μεγάλες πράξεις.
20	Μετατρέπουν τον πολ/σμο σε πρόσθεση, τη διαίρεση σε αφαίρεση και τη δύναμη σε πολ/σμο.

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου υπάρχει η παρακάτω φράση : ‘Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι και συμβολίζονται με ln αντί $\log_e$’ .

   Θυμίζουμε $e = \lim_{\nu\to\infty}(1+\frac{1}{\nu})^{\nu} = 2,71828...$

   Γιατί πιστεύετε ότι συνδέεται ο αριθμός e με τους λογαρίθμους και γιατί οι λογάριθμοι που έχουν βάση το e αποκαλούνται ‘φυσικοί’;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Δεν απάντησε
2	Δεν απάντησε
3	Γιατί άμα κάνουμε ένα πυκνό με ν λίγο μεγαλύτερο ή λίγο μικρότερο του 1 από την παραπάνω σχέση παίρνουμε αριθμούς πολύ κοντά στο e. Καλούνται φυσικοί λόγω του παραπάνω φαινομένου.
4	Οι λογάριθμοι με βάση το e, αν και το e είναι νεπέριος αριθμός, λέγονται φυσικοί και συμβολίζονται με ln και όχι με $\log_e$. Ο αριθμός e συνδέεται με τους λογαρίθμους, επειδή από έρευνα που έκαναν κατέληγαν συνέχεια στο e.
5	Διότι ο λόγος της γεωμετρικής με την αριθμητική βγαίνει ο αριθμός e
6	Δεν απάντησε.
7	Τον αριθμό e το συναντάμε παντού γύρω μας και είναι ένας αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία, έτσι τον ονομάσαμε e, όπως ακριβώς δώσαμε και στου λογάριθμους το όνομά τους για να διευκολύνουμε τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων.
8	Δεν απάντησε.
9	Ο αριθμός e συνδέεται με τους λογάριθμους γιατί ο αριθμός 2,718828… μπορεί μέσω της χρήσης λογαρίθμων και μέσω του συνδυασμού μεταξύ αυτών να προκύψει με μια πολύ μικρή απόκλιση.
10	Δεν απάντησε.
11	Λέγεται φυσικός αριθμός γιατί αν πάρεις ένα αριθμό πολύ κοντά στο 1 (π.χ. 0,999999 ή 1,000001) και κάνεις $(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}$ τότε το αποτέλεσμα που θα βγάλεις είναι ο αριθμός e και ονομάζεται φυσικός γιατί το συναντάμε πάντοτε.

12	Δεν απάντησε
13	Οι λογάριθμοι που έχουν βάση το e αποκαλούνται φυσικοί από το naturale στο ln το n. Σχετίζονται με το e γιατί όταν γίνεται προσπάθεια δημιουργίας πίνακα λογαρίθμων με λόγο πολύ κοντά στο 1 κάποια στιγμή θα πέσω στο e που είναι το όριο
14	Μέσω του αριθμού e και των λογαρίθμων μπορεί να βρεθεί αριθμός που βρίσκεται πολύ στο 1 είτε είναι λίγο μικρότερος είτε λίγο μεγαλύτερος
15	Γιατί ο αριθμός e είναι πολύ σημαντικός στο να λύνουμε λογαρίθμους
16	Ο αριθμός e συνδέεται με τους λογαρίθμους διότι είναι ένας τρόπος να υπολογίσει κανείς ένα λογάριθμο. Οι λογάριθμοι με βάση το e αποκαλούνται φυσικοί γιατί ο αριθμός που προκύπτει είναι φυσικός.
17	Δεν απάντησε
18	Αποκαλούνται φυσικοί επειδή το e (η βάση τους) είναι ένας αριθμός που παραμένει πάντοτε σταθερός, σαν το π.
19	Δεν απάντησε
20	Ο αριθμός e συνδέεται με τους λογαρίθμους καθώς είναι ο κοντινότερος αριθμός στη μονάδα. Λέγεται φυσικός γιατί το συναντάς πάντα, εμφανίζεται χωρίς να το επιδιώξεις.

5. Πως πιστεύετε το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο του $16^{ου}$ – $17^{ου}$ αιώνα επηρέασε την εξέλιξη των μαθηματικών και την επινόηση των λογαρίθμων;

Μ	**Απαντήσεις πριν τη διδακτική παρέμβαση**
1	Δεν απάντησε
2	Επειδή τον $16^{ο}$ – $17^{ο}$ αιώνα είχε μόλις τελειώσει ο πόλεμος, η εποχή της Αναγέννησης είχε ξεκινήσει και το εμπόριο είχε ανοίξει, η επινόηση των λογαρίθμων ήταν αναγκαία.
3	Μείωσε κατά πολύ το χρόνο που απαιτείται για εκτέλεση περίπλοκων πράξεων, έτσι μειώθηκε και ο συνολικός χρόνος εργασίας χωρίς να αλλοιώνεται η ακρίβεια των πράξεων. Ακόμα επιτελούταν πολύ πιο γρήγορα ο υπολογισμός των φόρων.
4	Πιστεύω ότι ήταν ένας καταλυτικός παράγοντας για την εξέλιξη των μαθηματικών και την επινόηση των λογαρίθμων. Οι ανταλλαγές που γίνονταν ήταν δύσκολες γιατί διαφορετικό νόμισμα είχε η κάθε χώρα. Επιπλέον οι υπολογισμοί πράξεων με πολλά δεκαδικά ψηφία, έκανε τον άνθρωπο να σκεφτεί τρόπους, ώστε να εκτελεί τις πράξεις. Για αυτό ο λογάριθμος θεωρείται ως το κουμπιουτεράκι της εποχής.

5	Γιατί άνοιξαν τα σύνορα και είχαν αναπτυχθεί οι σχέσεις και το εμπόριο με τους άλλους λαούς της ανατολής.
6	Στον $16^{ο}$-$17^{ο}$ αιώνα όπου ήταν εποχές που το εμπόριο αναπτυσσόταν έπρεπε να έχουν ένα νόμισμα που θα μπορούσαν να ανταλλάσουν το εμπόριο μέσω αυτού του νομίσματος. Έτσι έπρεπε να εφεύρουν έναν τρόπο που θα τους διευκόλυνε στο να γίνεται το εμπόριο. Έτσι εξελίχθηκαν και τα μαθηματικά και η επινόηση των λογαρίθμων.
7	Πολλοί σπουδαίοι άνθρωποι το $16^{ο}$ -$17^{ο}$ αιώνα ασχολήθηκαν με το πρόβλημα των λογαρίθμων και έφτιαξαν διάφορους πίνακες που να βοηθούν, έπειτα και άλλοι συντέλεσαν στο να εξελιχθεί αυτή η έρευνα για τη λύση των λογαρίθμων και να φτάσαμε στο σημείο που είμαστε τώρα.
8	Επειδή το $16^{ο}$ – $17^{ο}$ αιώνα ο πόλεμος είχε μόλις τελειώσει, ένας νέος δρόμος της αναγέννησης άνοιξε για τις χώρες όπου οι θάλασσες άνοιξαν για το εμπόριο και συνεπώς για την εξέλιξη των τεχνών, επινόηση των μαθηματικών και την εξέλιξή τους.
9	Σε μια κοινωνία όπου η τεχνολογία δεν ήταν σχεδόν καθόλου αναπτυγμένη και που οι πιο πολύπλοκες εφαρμογές πάνω σε θέματα οικονομικά, μεταφορικά, επικοινωνιακά και εργατικά, πολλές φορές έπαιρναν πολλές μέρες είτε για να λυθούν είτε ακόμη και για να προσεγγιστούν μαθηματικά. Έτσι η ανάγκη αυτή των ατόμων που ασχολούνταν με την επίλυση τέτοιου είδους εφαρμογών τους οδήγησε στην επινόηση των λογαρίθμων, πράγμα το οποίο συνέβαλλε στην εξοικονόμηση του χρόνου.
10	Το $16^{ο}$ -$17^{ο}$ αιώνα αναπτύχθηκε η ναυτιλία άρα και το εμπόριο. Όμως επειδή τα νομίσματα κάθε χώρας δεν είχαν την ίδια αξία έπρεπε να δημιουργηθεί μια μαθηματική εξίσωση ώστε να ήξεραν την αξία των νομισμάτων.
11	Το $16^{ο}$ – $17^{ο}$ αιώνα και μετά τις σταυροφορίες αναπτύχθηκε πολύ το εμπόριο. Οι πολίτες πήγαιναν στην Ινδία και σε άλλες χώρες αγόραζαν προϊόντα και τα πούλαγαν στη χώρα τους. Έτσι υπήρχε η ανάγκη για πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις
12	Η συνεχής εξέλιξη της οικονομίας και των συναλλαγών απαιτούσε την επινόηση μιας νέας μορφής μαθηματικών που θα έκανε γρηγορότερα και ακριβέστερα πράξεις μεγάλων αριθμών.
13	Επέτρεψε τη ραγδαία ανάπτυξη της ναυτιλίας, οι μετρήσεις πλανητών γίνονταν πιο γρήγορα και με περισσότερη ακρίβεια, βοήθησε στη σφαιρική τριγωνομετρία
14	Η εξέλιξη των λογαρίθμων ήταν σχετικά αργή και αυτό λόγω των συνθηκών που επικρατούσαν εκείνη την εποχή (δυσκολία στη μεταφορά, έλλειψη άμεσης επικοινωνίας). Η επινόηση των λογαρίθμων απαιτούσε εξαιρετικά πολύ χρόνο εξαιτίας της τεχνολογίας που δεν ήταν τόσο ανεπτυγμένη
15	Οι άνθρωποι στα παλιά χρόνια έλυναν πολύ μεγάλες πράξεις μόνοι τους.
16	Ο τρόπος με τον οποίο το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο του $16^{ου}$ – $17^{ου}$ αιώνα επηρέασε την εξέλιξη των μαθηματικών και των λογαρίθμων ήταν ότι υπήρχαν κάποιοι μορφωμένοι άνθρωποι οι οποίοι ήθελαν να ασχοληθούν περισσότερο.

17	Οι δρόμοι του εμπορίου άνοιξαν προς την ανατολή και η μεταφορά διάφορων προϊόντων όπως μπαχαρικά αυξήθηκε. Οι άνθρωποι δημιούργησαν τους λογαρίθμους για τις συναλλαγές τους λόγω του ανεπτυγμένου εμπορίου.
18	Δεν απάντησε
19	Αυξήθηκε το εμπόριο και οι δουλειές οι οποίες έχουν να κάνουν με μαθηματικές πράξεις.
20	Η ανάπτυξη του εμπορίου μετά τις σταυροφορίες οδήγησαν τους επιστήμονες στην ανακάλυψη ενός συστήματος μέτρησης και ταξινόμησης ευκολότερου και απλούστερου που δεν θα τους έπαιρνε πολύ χρόνο. Λόγω των δυσκολιών που υπήρχαν στη διάδοση μιας είδησης έτυχε δύο επιστήμονες να ασχοληθούν με το ίδιο θέμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και να καταλήξουν σε συμπεράσματα ώστε ο ένας να συμπληρώνει τον άλλο. Τα οικονομικά προβλήματα επίσης δεν επέτρεπαν σε πολλούς ανθρώπους να ασχοληθούν με τέτοια θέματα καθώς έννοια τους ήταν η επιβίωση

6. Αναφέρετε κάποιες από τις σπουδαίες εφαρμογές της έννοιας του λογαρίθμου στο φυσικό κόσμο που καθιστά αναγκαία τη διδασκαλία του σε ένα μάθημα Γενικής Παιδείας

Μ	**Απαντήσεις**
1	Δεν απάντησε
2	Δεν απάντησε
3	Χρήση σε ιατροδικαστικές έρευνες, χρονολογική εξακρίβωση η οποία επιτελείται από τους αρχαιολόγους, ο υπολογισμός φόρων καθώς και η απλούστευση πολύπλοκων πράξεων.
4	Σπουδαίες εφαρμογές της έννοιας του λογαρίθμου γίνονται στη λογιστική και στις τράπεζες με τα τεράστια ποσά χρημάτων, στις οικοδομές με τον υπολογισμό κτιρίων.
5	Υπάρχουν εργασίες στις οποίες χρειάζεται να κάνει μεγάλες πράξεις και οι λογάριθμοι βοηθούν σε αυτό.
6	Αστρονομικές μετρήσεις, Μηχανολογία, Λογιστική, Τραπεζικές συναλλαγές.
7	Για έρευνες στο διάστημα (αποστάσεις πλανητών κλπ) , λογιστικές πράξεις
8	Δεν απάντησε.
9	Μέτρηση αποστάσεων ανάμεσα στη Γη και σε άλλους πλανήτες, ή ανάμεσα στη Γη και τη Σελήνη ή ανάμεσα στους πλανήτες γενικότερα, στο Χρηματιστήριο, σε οικονομικούς κλάδους μεγάλων επιχειρήσεων, στις τράπεζες και στις τραπεζικές συναλλαγές.

10	Τα Μαθηματικά, η Οικονομία, η Πληροφορική
11	Είναι αναγκαίο στους λογιστές.
12	Τραπεζικές συναλλαγές, λογιστικές μετρήσεις μεγάλων επιχειρήσεων
13	Οι μετατροπές συναλλάγματος, οι πράξεις με αριθμούς που έχουν πολλά ψηφία.
14	Στο μάθημα της Φυσικής μέσα από λογαρίθμους μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τύπους που εξηγούν φαινόμενα της καθημερινής μας ζωής
15	Δεν απάντησε
16	Οι σπουδαιότερες εφαρμογές της έννοιας του λογαρίθμου στο φυσικό κόσμο που καθιστά αναγκαία τη διδασκαλία του σε ένα μάθημα γενικής παιδείας είναι ότι ανάγει κάποιες πράξεις σε απλούστερες.
17	Δεν απάντησε
18	Δεν απάντησε
19	Δεν απάντησε
20	Στα λογιστικά, στους μηχανισμούς υπολογιστών

7. Πιστεύετε ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών ή πρέπει απλά να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς , αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Δεν απάντησε
2	Πιστεύω πως τα γιατί μας βοηθούν να κατανοήσουμε το μάθημα στο οποίο διδασκόμαστε, γιατί μαθαίνουμε γιατί το κάνουμε και σε τι μπορεί να μας βοηθήσει.
3	Πιστεύω ότι είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την προέλευση και τους λόγους δημιουργίας διάφορων τύπων. Αλλά από τη στιγμή που δεν εξεταζόμαστε πάνω σε ιστορικές μας γνώσεις στα μαθηματικά, θα ήταν προτιμότερο να αφιερώνουμε το χρόνο που απαιτείται για αυτά σε διάφορες ασκήσεις για καλύτερη εξάσκηση.
4	Πιστεύω ότι τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών, αφού επιλύουν το ερώτημα πολλών παιδιών: γιατί να τα μαθαίνουμε αυτά; σε τι μας χρησιμεύουν; Με αυτό τον τρόπο καταλαβαίνουμε το συλλογισμό των ανθρώπων εκείνων, αλλά και την απορία τη δική τους: κάποιος τρόπος θα υπάρχει και θα λύνεται πιο εύκολα.

5	Πρέπει γιατί πολλές φορές κινεί το ενδιαφέρον του μαθητή στο να παρακολουθεί καθώς και το μάθημα δεν είναι μονότονο
6	Το να μάθει ένας μαθητής να λύνει μόνο ασκήσεις και αποδείξεις και ορισμούς δεν είναι το καλύτερο γιατί δεν θα μπορεί να μαθαίνει ιστορικά γεγονότα και πως λειτουργούσαν εκείνη την εποχή οι άνθρωποι χωρίς τον υπολογιστή και με ποιον τρόπο το εύρισκαν αυτό.
7	Πιστεύω πως πρέπει να τίθενται και έπειτα να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος, γιατί βάζουν τα παιδιά σε σκέψεις και πράγματα που θα αναγκαζόντουσαν να μάθουν παπαγαλία, τα απαντούν μόνα τους, έτσι τα θυμούνται καλύτερα.
8	Πρέπει να απαντώνται σε πλαίσια μαθήματος μαθηματικών γιατί μας βοηθούν να κατανοήσουμε το μάθημα και να δείξουμε παραπάνω ενδιαφέρον σε αυτό. Στην πραγματικότητα όμως οι ώρες των μαθηματικών δεν αφήνουν περιθώρια στους καθηγητές να μας πουν ή να μας εξηγήσουν την ιστορική αναδρομή κάθε κεφαλαίου.
9	Ίσως μέσω αυτών των ερωτήσεων θα μπορούσαμε εμείς οι μαθητές να διευρύνουμε το πεδίο των γνώσεων μας. Μέσα στα πλαίσια του μαθήματος προβληματιζόμαστε πάνω σε αυτά και προσπαθούμε έχοντας κάποιες γνώσεις να τις διευρύνουμε και σκεφτούμε πως εμείς θα μπορούσαμε να αντιδράσουμε στην κάθε περίπτωση.
10	Πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών γιατί με αυτόν τον τρόπο βοηθάει το παιδί να κατανοήσει το μάθημα.
11	Πιστεύω πως θα πρέπει τέτοια ερωτήματα όπως τα παραπάνω να απαντώνται στα πλαίσια του μαθήματος γιατί έτσι μαθαίνουμε το πώς δημιουργήθηκαν όλα αυτά, μαθαίνουμε την ιστορία των μαθηματικών πράγμα που προκαλεί το ενδιαφέρον στο μαθητή και το μάθημα δεν είναι μονότονο. Επίσης μπορείς να μάθεις αρκετά νέα πράγματα και να σου λύσει απορίες.
12	Είναι απαραίτητο να απαντώνται τέτοια ερωτήματα καθώς για να γίνουν κατανοητοί οι ορισμοί, οι αποδείξεις κλπ πρέπει πρώτα να γίνει κατανοητός ο λόγος που δημιουργήθηκε καθετί
13	Κάνοντας το μάθημα των μαθηματικών πιο θεωρητικό επιτρέπεται και σε παιδιά (μαθητές) που αδυνατούν στο μάθημα να συμμετέχουν περισσότερο
14	Νομίζω πως τα μαθηματικά θα έπρεπε περισσότερο να ασχολούνται με αριθμούς, αποδείξεις λύσεις ασκήσεων παρά με τέτοιου είδους ερωτήματα, τα οποία δε σχετίζονται άμεσα με το μάθημα και δεν υποχρεούμαστε να τα ξέρουμε
15	Πιστεύω πως τέτοια ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών διότι έτσι μπορεί να αρκούμαστε μόνο σε ορισμούς, αποδείξεις και λύσεις ασκήσεων γιατί δε βοηθάνε πολύ να σκεφτόμαστε
16	Τα παραπάνω ερωτήματα πρέπει να απαντώνται στα πλαίσια ενός μαθήματος μαθηματικών γιατί είναι καλό να τα γνωρίζουμε.

17	Τα μαθηματικά είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρώπου και η χρήση τους είναι καθημερινή. Στο σχολείο μαθαίνουμε μαθηματικά ώστε να μας βοηθήσουν στη ζωή και στον τρόπο σκέψης. Καλό θα ήταν όμως να μαθαίνουμε και την προέλευσή τους και όχι μόνο τους τύπους και τις εφαρμογές.
18	Θα έπρεπε να δίνεται σημασία σε παραπάνω πληροφορίες ή και ιστορικά στοιχεία ώστε οι μαθητές να καταλάβουν τη σημασία του κεφαλαίου που διδάσκονται. Αυτό είτε θα τους κινήσεις το ενδιαφέρον ώστε να ασχοληθούν με το διδασκόμενο μάθημα είτε θα προσέχουν έστω και λίγο περισσότερο αφού ως τώρα θεωρούμε πως ό,τι διδασκόμαστε στα μαθηματικά και τη γεωμετρία δεν αποτελεί μέρος της ζωής εκτός αν ασχοληθείς με ανάλογες σχολές.
19	Πιστεύω ότι πρέπει να απαντώνται γιατί έτσι θα μαθαίνουμε πιο πολλά για την κάθε έννοια και για την κάθε εφεύρεση και ανακάλυψη των παλιών
20	Σήμερα, το μάθημα των μαθηματικών θεωρείται ένα καθαρά πρακτικό μάθημα, που βάση δίνεται μόνο στις πράξεις και αγνοούμε πλήρως το ιστορικό πλαίσιο. Θεωρώ πως όπως στην ιστορία μαθαίνουμε για τους ήρωες των πολέμων, έτσι και στα μαθηματικά θα έπρεπε να γίνει έστω και μικρή αναφορά στους ήρωες των αριθμών. Οι ορισμοί, οι αποδείξεις και οι λύσεις ασκήσεων δεν εμφυτεύονται στο μυαλό όλων των ανθρώπων από το δημιουργού μας. Έτσι θα πρέπει να μαθαίνουμε λίγα πράγματα και για τον τρόπο που ανακαλύφθηκαν, που βασίστηκαν και τι μας προσφέρουν στο κάτω-κάτω. Για αυτό η απάντησή μου είναι ΝΑΙ!

8. Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι διαφωτίζουν τα παραπάνω ερωτήματα, οι ιστορικές πληροφορίες που δόθηκαν στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε, καθώς και το ιστορικό σημείωμα που βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Σε αρκετά μεγάλο βαθμό διαφωτίζουν τα παραπάνω ερωτήματα διότι καταλαβαίνουμε πως προήλθαν και τι έκανε τους ανθρώπους τα παλιά χρόνια να εφεύρουν τους λογαρίθμους
2	Βοήθησε να καταλάβουμε το λόγο που δημιουργήθηκαν οι λογάριθμοι και τι μπορούμε να κάνουμε μ' αυτούς
3	Σε πολύ σημαντικό βαθμό, καθώς δεν πιστεύω πως θα είχα ποτέ την απορία (εγώ προσωπικά) να ψάξω και να βρω τους λόγους που δημιουργήθηκαν, ώρα καλή οι λογάριθμοι.
4	Τα παραπάνω ερωτήματα αλλά και το ιστορικό σημείωμα που βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο μας διαφωτίζουν σε μεγάλο βαθμό, αν και δε γίνεται αυτό σχεδόν καθόλου.
5	Βλέπουν οι μαθητές τη χρησιμότητα των μαθηματικών και την ανάπτυξη τους λόγο της ανάγκης που είχαν οι άνθρωποι
6	Σε μεγάλο βαθμό.

7	Τα παιδιά μέσα από τις πληροφορίες μαθαίνουν κάτι παραπάνω από τα βασικά και καταλαβαίνουν για ποιο λόγο είναι σημαντικό να μάθουν για τους λογαρίθμους και πόσο χρήσιμοι είναι πραγματικά, έτσι δείχνουν περισσότερο ενδιαφέρον για το μάθημα αφού πλέον ξέρουν την αξία του.
8	Θα μπορούσα να πω ότι όσο αναφορά την ιστορική αναδρομή των λογαρίθμων, η αναφορά αυτών που βρίσκονται στο βιβλίο θα την χαρακτήριζα ελλιπής ενώ στη διδασκαλία που παρακολούθησα όλα τα ερωτήματα που μου είχαν μείνει αναπάντητα μου απαντήθηκαν.
9	Μέσω των γνώσεων που αποκτήσαμε καταφέραμε να διευρύνουμε τις γνώσεις μας και να διαφωτιστούμε σε αρκετά μεγάλο βαθμό και για τις ιστορικές πληροφορίες αλλά και τις μαθηματικές
10	Γιατί πρέπει να γνωρίζουμε αυτά που μαθαίνουμε ποιος τα δημιούργησε, γιατί τα έκανε και για ποιο λόγο τα έφτιαξε.
11	Κάνουν το μάθημα ενδιαφέρον, μαθαίνουν την ιστορία των μαθηματικών, λύνουν απορίες στο μαθητή, μαθαίνουν καινούργια πράγματα
12	Σε μεγάλο βαθμό καθώς έγινε αντιληπτός ο λόγος – αιτία που δημιουργήθηκαν οι λογάριθμοι
13	Πιστεύω πως όταν μαθαίνεις την ιστορία πίσω από κάτι το οποίο διδάσκεσαι σου μένει πιο εύκολα στη μνήμη.
14	Δε θεωρώ πως μας παρέχουν κάποια γνώση που θα χρησιμοποιηθεί από εμάς, ή τουλάχιστον όχι από όλους εμάς καθώς το μάθημα είναι γενικής παιδείας και απευθύνεται σε όλους
15	Πιστεύω σε μεγάλο βαθμό γιατί αυτά που πληροφορηθήκαμε ήταν πολύ σωστά και έγκυρα και θα μας βοηθήσουν για το μέλλον
16	Σε αρκετά μεγάλο βαθμό διαφωτίζουν τα παραπάνω ερωτήματα και οι ιστορικές πληροφορίες διότι βοηθούν στην απόκτηση μιας καινούργιας γνώσης
17	Σε ένα αρκετά μεγάλο βαθμό.
18	Δεν είναι αρκετά περιεκτικά (μπορεί να τα είχαμε κοιτάξει στο μάθημα) αλλά περισσότερο αναφέρονται χρονολογικά στοιχεία
19	Πιστεύω ότι τα παιδιά μετά από αυτό θα έχουν μάθει περισσότερα πράγματα για τους λογαρίθμους περισσότερο ιστορικά
20	Παρουσιάζοντας το ιστορικό πλαίσιο των λογαρίθμων προφανώς έγινε αντιληπτή η σημασία μιας τέτοιας ανακάλυψης, ωστόσο ο βαθμός αφομοίωσης και επίλυσης των δύσκολων πράξεων δεν εξαφανίστηκε. Παραμένει ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί μόνο μέσα από διαρκή εξάσκηση.

9. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$\log_\alpha 1 =$ $\log_\alpha \alpha =$ $\log_\alpha \alpha^\chi =$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$

$\log_3 \frac{1}{9} =$ $\ln\sqrt{e} =$ $\log_{\sqrt{2}} .... = 4$ $\log_{....} 16 = 2$

$\log 0.001 =$ $\log .... = 3$ $\log\theta = \frac{\ln ...}{\ln ...}$ $\ln\theta = \frac{\log ...}{\log ...}$

Μ	**Απαντήσεις**
1	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$, $\log_3 \frac{1}{9} = -1$ $\ln\sqrt{e} =$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 100 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln ...}{\ln ...}$, $\ln\theta = \frac{\log ...}{\log ...}$
2	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 1000 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 0}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
3	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 1000 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
4	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 1000 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
5	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 1000 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
6	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \alpha$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ $\ln\sqrt{e} =$ $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 =$, $\log ... = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
7	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \log_\alpha \theta$, $\log_3 \frac{1}{9} = -3$ $\ln\sqrt{e} =$ $\log_{\sqrt{2}} 2 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 =$, $\log ... = 3$, $\log\theta = \frac{\ln}{\ln}$, $\ln\theta = \frac{\log}{\log}$

8	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=\theta$, $\log_3 \frac{1}{9}=-2$ $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} 4=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=-3$, $\log 1000=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 0}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
9	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=1$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=\theta$, $\log_3 \frac{1}{9}=-2$ $\ln\sqrt{e}=-\frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=-\frac{1}{3}$, $\log 1000=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln e}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
10	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=\log\theta$, $\log_3 \frac{1}{9}=-3$ $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}\ln e=1$ $\log_{\sqrt{2}} 4=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=10^4$, $\log 1000=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
11	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=\theta$, $\log_3 \frac{1}{9}=-2$ $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{2}} 4=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=-3$, $\log 1000=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
12	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=\alpha$, $\log_3 \frac{1}{9}=-3$ $\ln\sqrt{e}=$ $\log_{\sqrt{2}} 4=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=10^4$, $\log....=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
13	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=$, $\log_3 \frac{1}{9}=2$ $\ln\sqrt{e}=$ $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=4$, $\log....=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
14	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=$, $\log_3 \frac{1}{9}=-2$ $\ln\sqrt{e}=$ $\log_{\sqrt{2}} 4=4$, $\log_4 16=2$, $\log 0.001=$, $\log 1000=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
15	$\log_\alpha 1=0$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\alpha$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=\log\theta$, $\log_3 \frac{1}{9}=$ $\ln\sqrt{e}=$ $\log_{\sqrt{2}} 2=4$, $\log_8 16=2$, $\log 0.001=10$, $\log 3=3$, $\log\theta=\frac{\ln\theta}{\ln 10}$ $\ln\theta=\frac{\log\theta}{\log e}$
16	$\log_\alpha 1=\alpha$, $\log_\alpha \alpha=1$, $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta}=$, $\log_3 \frac{1}{9}=$ $\ln\sqrt{e}=$

	$\log_{\sqrt{2}} 2 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 =$, $\log .... = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln\theta}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log\theta}$
17	Δεν απάντησε
18	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \log\theta$, $\log_3 \frac{1}{9} =$ $\ln\sqrt{e} = e^{-2}$ $\log_{\sqrt{2}} 2 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 0{,}1 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
19	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} =$, $\log_3 \frac{1}{9} = -3$ $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_8 16 = 2$, $\log 0.001 = 10^4$, $\log ... = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln\theta}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$
20	$\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$, $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ $\ln\sqrt{e} = -2$ $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_4 16 = 2$, $\log 0.001 = -3$, $\log 1000 = 3$, $\log\theta = \frac{\ln\theta}{\ln 10}$, $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$

10. Με βάση τις ιδιότητες λογαρίθμων να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

A. $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$

B. $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32$

Μ	**Απαντήσεις μετά τη διδακτική παρέμβαση**
1	$3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 8 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$ $\log_{10} 8\cdot 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 40 - \log_{10} 4 = \log_{10} \frac{40}{4} = \log_{10} 10 = 1$
	$\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = 2^{-1}\log_{10} 25 + 3^{-1}\log_{10} 8 - 5^{-1}\log_{10} 32 = \log_{10} 25^{2^{-1}} + \log_{10} 8^{3^{-1}} - \log_{10} 32^{5^{-1}}$
2	$3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 8 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$ $\log_{10} 8\cdot 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 40 - \log_{10} 4 = \log_{10} \frac{40}{4} = \log_{10} 10 = 1$
	$\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = \log_{10}\sqrt{25} + \log_{10}\sqrt[3]{8} - \log_{10}\sqrt[5]{32} = \log_{10} 5 + \log_{10} 2 - \log_{10} 2 = \log_{10} 5$

3	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}\frac{8\cdot5}{4}\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
4	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}\frac{8\cdot5}{4}\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
5	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}\frac{8\cdot5}{4}\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
6	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=$ $\log_{10}8\cdot5-\log_{10}4=\log_{10}40-\log_{10}4=\log_{10}\frac{40}{4}=\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
7	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=$ $\log_{10}8\cdot5-\log_{10}4=\log_{10}40-\log_{10}4=\log_{10}\frac{40}{4}=\log_{10}10$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}25^{\frac{1}{2}}+\log_{10}8^{\frac{1}{3}}-\log_{10}32^{\frac{1}{5}}=$
8	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=$ $\log_{10}8\cdot5-\log_{10}4=\log_{10}40-\log_{10}4=\log_{10}\frac{40}{4}=\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
9	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=$ $\log_{10}8\cdot5-\log_{10}4=\log_{10}40-\log_{10}4=\log_{10}\frac{40}{4}=\log_{10}10=1$

	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
10	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=$ $\log_{10}8\cdot5-\log_{10}4=\log_{10}40-\log_{10}4=\log_{10}\frac{40}{4}=\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
11	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}\frac{8\cdot5}{4}=\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
12	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}\frac{8\cdot5}{4}=\log_{10}10=1$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
13	Δεν απάντησε
14	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}9$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$
15	Δεν το έλυσε
16	Δεν απάντησε
17	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}\frac{8\cdot5}{4}=\log_{10}10=1$
	Δεν το έλυσε
18	Δεν το έλυσε
19	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}9$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$

20	$3\log_{10}2+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}2^3+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}8+\log_{10}5-\log_{10}4=\log_{10}9$
	$\frac{1}{2}\log_{10}25+\frac{1}{3}\log_{10}8-\frac{1}{5}\log_{10}32=\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt[3]{8}-\log_{10}\sqrt[5]{32}=\log_{10}5+\log_{10}2-\log_{10}2=\log_{10}5$

11. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων λογαρίθμων και του παρακάτω πίνακα να βρείτε τον άγνωστο χ στη αναλογίας $\frac{469.894}{20.941}=\frac{10.807.562}{x}$

x	logx
469.894	5,672
20.941	4,321
10.807.562	7,034
481.643	5,683
583.246	5,766
478.924	5,680

Μ	**Απαντήσεις**
1	log469894 – log20941 = log807562 – logx $\Rightarrow$ 5,672 – 4,321 = 7,034 – logx $\Rightarrow$ logx = 5,680 $\Rightarrow$ x=478924
2	Δεν απάντησε
3	Δεν απάντησε
4	$\frac{\log 469.894}{\log 20.941}=\frac{\log 10.807.562}{\log x}\Rightarrow \log(469894-20941)=\frac{\log 10.807.562}{\log x}\Rightarrow$ $\log x=\frac{\log 10807562}{\log 448953}\Rightarrow \log x=\frac{7034}{\frac{5672}{4321}}\Rightarrow \log x=\frac{30393914}{5672}$
5	log469894 – log20941 = log807562 – logx $\Rightarrow$ 5,672 – 4,321 = 7,034 – logx $\Rightarrow$ logx = 5,683 $\Rightarrow$ x=481643
6	Δεν το έλυσε

7	Δεν το έλυσε
8	Δεν το έλυσε
9	Δεν το έλυσε
10	Δεν το έλυσε (θυμόταν τι περίπου να κάνει αλλά όχι σωστή διαδικασία)
11	$469894 \cdot \chi = 10807562 \cdot 20941 \Rightarrow \log(5,672 \cdot x) = \log(7,034 \cdot 4,321) \Rightarrow$ $5,672 + x = 7,034 + 4,321 \Rightarrow 5,672 + x = 11,355 \Rightarrow x = 5,723$
12	Δεν απάντησε
13	Δεν το έλυσε
14	Δεν απάντησε
15	Δεν το έλυσε
16	Δεν απάντησε
17	Δεν απάντησε
18	Δεν απάντησε
19	Δεν το έλυσε
20	Δεν το έλυσε

12. Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου , εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους , την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό; Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

Μ	**Απαντήσεις**
1	Ναι πιστεύω πως οι στόχοι επετεύχθησαν διότι ήρθαμε πιο ‘κοντά’ στην έννοια των λογαρίθμων και στους λόγους που οδήγησαν στην εφεύρεσή τους. Για αυτούς τους λόγους καθώς και χάρη στην ανάγκη να μάθουμε πολλά για την ιστορία θα έπρεπε να τίθενται τέτοιοι στόχοι στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας. Είναι λυπηρό να γνωρίζουμε να λύνουμε δύσκολα προβλήματα (μαθηματικών, φυσικής , χημείας κλπ) τόσα χρόνια και να μην ξέρουμε ούτε βασικά στοιχεία της ιστορίας τόσο των μαθηματικών όσο και διάφορων θεωρημάτων.

2	Οι στόχοι αυτοί πιστεύω πως επετεύχθησαν σε κάποιο βαθμό καθώς το να αναφέρεις πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας κάνει πιο ενδιαφέρον το μάθημα και θα το καταλάβουν περισσότεροι οπότε νομίζω πως τέτοιοι στόχοι πρέπει να τεθούν στο σχεδιασμό και την υλοποίηση μιας διδασκαλίας.
3	Οι στόχοι επετεύχθησαν από τη συγκεκριμένη διδασκαλία, αλλά θα αναγκαστώ να επαναλάβω αυτό που έγραψα και πριν, οι λόγοι και τα κίνητρα που οδήγησαν στην ανακάλυψη αποτελούν ιστορικά στοιχεία στα οποία όμως δεν εξεταζόμαστε και ουσιαστικά χάνουμε πολύτιμο χρόνο εξάσκησης
4	Πιστεύω ότι οι διδακτικοί αυτοί στόχοι επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό. Θεωρώ ότι κάτι αντίστοιχο πρέπει να γίνεται σε κάθε μάθημα, αφού ενημερώνεται ο μαθητής, βάζοντάς τον στο κλίμα της εποχής, μπορεί να συνειδητοποιήσει για ποιο λόγο ο άνθρωπος τα ανακάλυψε αυτό και για ποιο λόγο το μαθαίνουμε.
5	Δεν είναι σίγουρο αν επιτεύχθηκαν για όλους οι στόχοι όμως υπήρξε ενδιαφέρον και πρέπει να υπάρχουν τέτοιου είδους διδασκαλίες
6	Σίγουρα επετεύχθη σε μεγάλο βαθμό γιατί μέσα από την παρουσίαση κατάφερα να μάθω πολλά περισσότερα και να τα καταλάβω σε σχέση που μας τα παρέδιδαν σαν να ήταν ένα απλό μάθημα. Κατά τη γνώμη μου τέτοια πράγματα θα πρέπει να γίνονται το μάθημα γιατί έτσι καταφέρνεις και ελκύεις το μαθητή να προσέξει και να καταλάβει αρκετά παραπάνω.
7	Ναι γιατί το μάθημα γίνεται πιο ενδιαφέρον, τα παιδιά σκέφτονται μόνα τους και δεν τους δίνεται μασημένη τροφή. Επίσης καταλαβαίνουν την αξία του μαθήματος που διδάσκονται και δεν αδιαφορούν. Μαθαίνουν κάτι παραπάνω από τα βασικά και τους βοηθάει στον τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης του μαθήματος.
8	Αυτοί οι διδακτικοί στόχοι θα μπορούσαμε να πούμε ότι επετεύχθησαν σε πολύ μεγάλο βαθμό από ότι αναμενόταν. Δηλαδή η επεξήγηση των όρων αυτών, η αναφορά στην ιστορική αναδρομή τους βοήθησε τα παιδιά να προβληματιστούν σε αυτό το κεφάλαιο, να θέσουν ερωτήματα στον εαυτό τους και με αυτόν τον τρόπο να δείξουν ότι ενδιαφέρονται για το μάθημα. Πιστεύω ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας διότι βοηθούν τους μαθητές σε μεγάλο βαθμό.
9	Οι στόχοι αυτής της διδασκαλίας επετεύχθησαν αρκετά μεγάλο βαθμό, σε σχέση τουλάχιστον με τα προηγούμενα κεφάλαια της Άλγεβρας στα οποία δεν γινόταν καμία αναφορά πέρα από τους ορισμούς και τις ασκήσεις. Οι στόχοι αυτοί είναι πολύ βασικοί. Με αυτόν τον τρόπο το μάθημα γίνεται πιο ενδιαφέρον ακόμα και για τα άτομα που δεν έχουν ασχοληθεί ή δεν τους αρέσει το μάθημα των μαθηματικών.
10	Ναι επετεύχθησαν σε πολύ μεγάλο βαθμό γιατί ήταν ελκυστικό και πιστεύω πως αν ήταν όλα τα μαθήματα έτσι θα ήταν όλοι πιο ικανοποιημένοι.
11	Νομίζω πως αυτοί οι στόχοι επετεύχθησαν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό. Θα πρέπει να διδασκόμαστε την ιστορία των μαθηματικών, να ξέρουμε πως φτάσαμε ως εδώ και γιατί φτιάχτηκαν αυτοί οι τρόποι επίλυσης προβλημάτων.

12	Οι στόχοι επετεύχθησαν καθώς έγινε αντιληπτός όχι μόνο ο ορισμός αλλά και ολόκληρος ο μηχανισμός που δημιουργήθηκε και θα ήταν καλό να γινόταν μια τέτοια προσέγγιση και σε άλλους τομείς της διδασκαλίας
13	Ασφαλώς και θα πρέπει να τίθενται τέτοιοι στόχοι. Μπορεί να παίρνουν περισσότερο χρόνο από ότι μια τυπική διδασκαλία αλλά επιτρέπουν στο μαθητή να αφομοιώσει αυτό που διδάσκεται με όσο το δυνατόν λιγότερα κενά και απορίες
14	Δε θεωρώ πως αυτά που διδάχθηκαν έγιναν πλήρως κατανοητά από όλους. Είναι καλό να τίθενται τέτοιοι στόχοι που όμως δεν είναι αρκετά ρεαλιστικοί εξ αρχής
15	Συμφωνώ απόλυτα και αυτοί οι στόχοι επετεύχθησαν σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό. Αυτή η διδασκαλία πρέπει να τίθεται στο σχεδιασμό της και στην υλοποίηση της διότι έτσι είναι πολύ σωστή και επιτυχημένη διδασκαλία.. Η διδασκαλία σε όλα τα σχολεία πρέπει να γίνεται έτσι και συγκεκριμένα στα μαθηματικά γιατί μας βοηθάει να τα καταλάβουμε ευκολότερα και καλύτερα.
16	Οι διδακτικοί αυτοί στόχοι πιστεύω ότι επετεύχθησαν σε κάποιο βαθμό διότι ήταν κάτι το διαφορετικό και ενδιαφέρον κατά τη γνώμη μου. Τέτοιοι στόχοι πιστεύω ότι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας διότι γίνεται περισσότερο ενδιαφέρον το μάθημα.
17	Δεν απάντησε
18	Ναι με την πλήρη (από διάφορες οπτικές : ιστορική, η σημασία των λογαρίθμων) παρουσίαση των λογαρίθμων, μπορεί αρκετοί να αναλογίστηκαν αν μπορούν να δοκιμάσουν τη μέθοδο των παλαιότερων, να τη συγκρίνουν με όσα γνωρίζουμε εμείς σήμερα και έμειναν εντονότερα στη μνήμη όσα ήταν σημαντικό να γνωρίζουμε. Π.χ μπορεί να είχαμε ξαναδιδαχθεί τους λογαρίθμους αλλά μέσω της συσχέτισης νέου και παλιού να μας μείνει ο τρόπος εύρεσης τους και ο ορισμός τους
19	Πιστεύω πως αυτό που παρακολουθήσαμε μας βοήθησε να καταλάβουμε τι είναι λογάριθμος και την ιστορία τους. Είναι πολύ καλό αυτό να γίνεται και σε άλλα μαθήματα γιατί όταν τα βλέπουμε σε μια οθόνη και μας τα εξηγεί ένας άνθρωπος πιο καλά και μας τραβάει το ενδιαφέρον πιο πολύ έτσι ώστε να προσέξουμε
20	Με τη συγκεκριμένη παρουσίαση του μαθήματος καλύφθηκαν οι 3 παράγοντες εκμάθησης και κτήσης μιας γνώσης. Είδαμε, ακούσαμε και εφαρμόσαμε στην πράξη. Ένα τέτοιο μάθημα τίποτα άλλο παρά πετυχημένο θα μπορούσε να θεωρηθεί. Κατ' αυτόν τον τρόπο θεωρώ πως τέτοιοι στόχοι πρέπει να τεθούν από όλους και να κερδίσει την προσοχή και την κατανόηση ακόμα και των παιδιών που δεν έχουν ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά.

13. Συγκρίνοντας μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων, με μια παραδοσιακή διδασκαλία που συνήθως ακολουθείται, μπορείτε να αναφέρετε τα σημεία που νομίζετε ότι υπερτερεί η μία της άλλης.

Μ	Απαντήσεις
1	Λοιπόν, η διδασκαλία που είναι εμπνευσμένη από την ιστορία όπως αυτή των λογαρίθμων υπερτερεί της παραδοσιακής διδασκαλίας διότι καταλαβαίνουμε πως αναγκάστηκαν οι άνθρωποι να εφεύρουν το φαινόμενο κάθε περίστασης (εδώ λογάριθμοι) και με αυτόν τον τρόπο αντιλαμβανόμαστε τη λειτουργία τους στην (πράξη) πραγματικότητα και όχι απλά στις ασκήσεις Μαθηματικών. Συνοπτικά, δε μαθαίνουμε 'ξερά' ένα φαινόμενο αλλά αντιλαμβανόμαστε και στις τροποποιήσεις και τις αλλαγές που έχει υποστεί στο πέρασμα των αιώνων.
2	Με το να αναφέρει κάποιος στο μάθημά του γεγονότα από την ιστορία σε σχέση με το αντικείμενο που διδάσκεται κάνει το μάθημα διαφορετικό και πιο ενδιαφέρον. Από την άλλη με την παραδοσιακή διδασκαλία το μάθημα παραμένει ίδιο αλλά βέβαια χωρίς ενδιαφέρον.
3	Η παραδοσιακή διδασκαλία προσφέρει καλύτερη πρακτική εξάσκηση από την άλλη. Ενώ η άλλη με τα ιστορικά στοιχεία μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα το λόγο και τη χρήση του αντικειμένου που μαθαίνουμε.
4	Με την ιστορία πιστεύω ότι εμπνέει το μαθητή περισσότερο από την παραδοσιακή διδασκαλία. Επίσης θα είναι κάτι τελείως διαφορετικό από ότι έχει συνηθίσει ο μαθητής και θεωρώ ότι θα παρακολουθεί και με ενδιαφέρον το νέο τρόπο διδασκαλίας.
5	Η πρώτη δίνει ενδιαφέρον όμως μπορεί να μη δώσει βάση στα βασικά που πρέπει να μάθει. Η δεύτερη κάνει σχεδόν το αντίθετο.
6	Σίγουρα στόχος του σχολείου δεν είναι να μάθει να λύνει ασκήσεις και μόνο ή να μαθαίνει τύπους. Ένα από αυτά που προσπαθεί να πετύχει είναι να κάνει τους μαθητές μορφωμένους και ιστορικά. Η διδασκαλία που παρακολούθησα μου πρόσφερε πολλά παραπάνω γιατί έμαθα τον τρόπο σκέψης των προγόνων μου αλλά και το πώς εφευρέθηκαν αυτά που διδάσκομαι στο σχολείο.
7	Ένας τέτοιος τρόπος διδασκαλίας θα έτρωγε αρκετό χρόνο, ενώ ο κλασσικός είναι πιο γρήγορος. Βέβαια, ο κλασσικός τρόπος συνήθως είναι βαρετός και τα παιδιά στο τέλος δεν έχουν μάθει τίποτα, ενώ αυτός ο τρόπος βοηθάει τα παιδιά να δείξουν ενδιαφέρον.
8	Η μία με την υπερτερεί διότι μια παραδοσιακή διδασκαλία όταν διδάσκεται κατευθείαν ο καθηγητής αρχίζει και λέει στους μαθητές τους τύπους που εφαρμόζονται στις ασκήσεις με αποτέλεσμα τα παιδιά να κουραστούν και να μπερδεύουν το μυαλό τους, ενώ αυτή τη διδασκαλία που παρακολουθήσαμε με το κεφάλαιο στο οποίο αναλύσαμε όλους τους τομείς τα παιδιά διευκολύνθηκαν στην κατανόηση του μαθήματος
9	Σίγουρα μια διδασκαλία στην οποία πέρα από το καθορισμένο πλαίσιο του μαθήματος γίνεται αναφορά και σε κάποια ιστορικά γεγονότα όπως η προέλευση και οι στόχοι της ανακάλυψης, είναι πολύ πιο ενδιαφέρον και πιο ελκυστική από μια παραδοσιακή διδασκαλία ενός κεφαλαίου. Γνωρίζουμε στοιχεία του παρελθόντος και πρωταγωνιστές που νωρίτερα δε γνωρίζαμε. Έτσι αποκτούμε μια σφαιρική και πολύπλευρη μόρφωση που μας δίνει την αίσθηση πολλές φορές πως το μάθημα της Άλγεβρας και της Ιστορίας είναι μαθήματα που πρέπει να διδάσκονται σε όλους ανεξαιρέτως.

10	Η εμπνευσμένη διδασκαλία νομίζω ότι υπερτερεί σε όλα γιατί ήταν μια παρουσίαση και συγχρόνως μάθημα. Ήταν πιο καλή γιατί όλα τα κοιτάγαμε στον πίνακα και δεν τα διάβαζε μέσα από το βιβλίο και ήταν πιο εύκολο να θυμόμαστε τη θεωρία.
11	Η ιστορία υπερτερεί στο ενδιαφέρον για το μάθημα και στη γνώση των μαθηματικών.
12	Στην πρώτη περίπτωση δίνεται η δυνατότητα κατανόησης όχι μόνο της εφαρμογής αλλά της γένεσης και λειτουργίας μιας ανακάλυψης
13	Η ιστορική διδασκαλία επιτρέπει την καλύτερη αφομοίωση της διδακτέας ύλης από όλους τους μαθητές και ακόμα δίνει περισσότερες ευκαιρίες συμμετοχής σε πιο αδύναμους μαθητές.
14	Η πρώτη είναι πιο άμεση και πιο παραστατική. Μπορεί να βοηθήσει περισσότερο κάποιους μαθητές που ίσως δεν έχουν κλίση προς τέτοια μαθήματα.
15	Νομίζω ότι υπερτερεί η διδασκαλία που μας μιλά και ιστορία διότι μέσα από αυτή μαθαίνουμε και τη ρίζα των μαθηματικών
16	Τα σημεία στα οποία υπερτερεί η μία της άλλης είναι διότι σε μια παραδοσιακή διδασκαλία η γνώση είναι απαραίτητη ενώ στην εμπνευσμένη από την ιστορία διδασκαλία είναι ένας τρόπος να γνωρίσουμε την ιστορική προέλευση των λογαρίθμων.
17	Στη δημιουργία των λογαρίθμων υπήρχε ανάγκη να δημιουργηθούν και για αυτό η εκμάθησή τους ήταν πιο χρήσιμη και η εφαρμογή τους πιο πρακτική
18	Η διδασκαλία από την ιστορία υπερτερεί από μια παραδοσιακή διδασκαλία διότι προσελκύει το ενδιαφέρον και την προσοχή των μαθητών, το μάθημα γίνεται διαπροσωπικό και ο μαθητής μπορεί να προβληματιστεί- να συζητήσει με τον καθηγητή, αφού αυτό συμβαίνει και στο μάθημα της ιστορίας.
19	Η διδασκαλία από την ιστορία πιστεύω ότι είναι πιο ενδιαφέρουσα και μας βοηθάει να καταλάβουμε τα προβλήματα εκείνης της εποχής ενώ στην παραδοσιακή τα έχουμε όλα έτοιμα.
20	Δεν απάντησε.

14. Αναφέρετε αν και σε ποιο βαθμό η διδασκαλία των λογαρίθμων που παρακολουθήσατε προκάλεσε το ενδιαφέρον σας, σας φάνηκε λιγότερο ή περισσότερο ελκυστική από ότι συνήθως και άλλαξε έστω και λίγο την εικόνα που έχετε για τα μαθηματικά . Αν ναι, αναφέρετε τους λόγους στους οποίους νομίζετε ότι οφείλεται.

Μ	**Απαντήσεις**

1	Όπως προανέφερα, ήρθαμε ‘πιο κοντά’ στην ιστορία των Μαθηματικών και δεν ασχοληθήκαμε ‘ξερά’ με άλλο ένα θεώρημα και κλάδο των Μαθηματικών. Σίγουρα άλλαξε την άποψή μου για τα Μαθηματικά αλλά ακόμη περισσότερο για το κεφάλαιο αυτό.
2	Η διδασκαλία των λογαρίθμων μου προκάλεσε το ενδιαφέρον σε μεγάλο βαθμό. Περισσότερο ελκυστική ήταν όταν αναφέρθηκαν τα ιστορικά γεγονότα και λιγότερο όταν αναφέρθηκαν οι ορισμοί και οι πράξεις. Άλλαξε την εικόνα μου στα μαθηματικά γιατί με μια διδασκαλία εμπνευσμένη από την ιστορία το μάθημα αλλάζει προς το καλό και γίνεται πιο ενδιαφέρον.
3	Πιστεύω ότι ήταν πολύ πιο ενδιαφέρουσα από την κλασική, λόγω του ότι μαθαίνουμε κάποια πράγματα και στοιχεία τα οποία δε θα μαθαίναμε αλλιώς. Αυτή τη στιγμή ήταν ενδιαφέρον καθώς ήταν και διαδραστική αλλά σε βάθος χρόνου ίσως χανόταν σιγά σιγά το ενδιαφέρον καθώς θα οικειοποιούμασταν, άμα ήταν έτσι η διδασκαλία από το δημοτικό θα είχαμε το ίδιο ενδιαφέρον με την κλασσική.
4	Προσωπικά μου φάνηκε πολύ ενδιαφέρον και περισσότερο ελκυστικό το μάθημα, αφού συνήθως ο καθηγητής μπαίνει, παραδίδει το επόμενο μάθημα και εμείς απλώς το μαθαίνουμε χωρίς να γνωρίζουμε τη χρησιμότητά του.
5	Το διαφορετικό συχνά προσεγγίζει το άτομο , αυτό ακριβώς έγινε και με την παρουσίαση , υπήρχε ενδιαφέρον αλλά πόσο θα κρατήσει και κατά πόσο θα είναι αποτελεσματικό. Η εικόνα για τα μαθηματικά για μένα δεν έχει αλλάξει, απλά επιβεβαιώνεται πως τα μαθηματικά είναι κομμάτι της ζωής.
6	Η διδασκαλία που παρακολούθησα μου προκάλεσε το ενδιαφέρον γιατί ήταν κάτι πρωτόγνωρο που δεν είχε ξαναγίνει και έμαθα σημαντικά πράγματα.
7	Με αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας τα παιδιά δεν μαθαίνουν απλά παπαγαλία το μάθημα, αλλά καταλαβαίνουν τη σημασία του. Επίσης με τα ερωτήματα που τίθενται βάζουν το μυαλό τους να λειτουργήσει και δεν ακούν απλά ένα καθηγητή να μιλάει.
8	Η απάντηση δίνεται στις ερωτήσεις 12 , 13.
9	Η διδασκαλία αυτής της μορφής ήταν σαφώς περισσότερο ελκυστική από μια παραδοσιακή διδασκαλία. Ενημερωθήκαμε για τους προβληματισμούς που είχαν οι άνθρωποι εκείνη την εποχή καθώς και για τους τρόπους με τους οποίους επίλυαν τα προβλήματά τους ή κατέληγαν σε βάσιμα συμπεράσματα. Η συμμετοχή των μαθητών γίνεται πιο ενεργή ακόμη και τα παιδιά της Θεωρητικής αρχίζουν να βρίσκουν κάποιο ενδιαφέρον σε όλο το μάθημα και με αυτόν τον τρόπο παρακινούνται να δουλέψουν.
10	Ήταν ενδιαφέρον γιατί ήταν κάτι καινούργιο και δεν ήταν καθόλου βαρετό. Ήταν ελκυστικό και με χαρά παρακολουθούσες το μάθημα.
11	Προκάλεσε το ενδιαφέρον γιατί έμαθα γιατί φτιάχτηκαν οι λογάριθμοι, πότε φτιάχτηκαν, πως φτιάχτηκαν, έμαθα κάτι καινούργιο και μου έλυσε απορίες όπως γιατί ονομάστηκαν λογάριθμοι.
12	Προκάλεσε το ενδιαφέρον μου γιατί ήταν κάτι διαφορετικό από το συνηθισμένο μάθημα, επομένως

	ήταν και πιο ελκυστικό. Δεν άλλαξε ιδιαίτερα την εικόνα μου για τα μαθηματικά.
13	Ναι μου κέντρισε το ενδιαφέρον περισσότερο από μια τυπική διδασκαλία και με έκανε να προσέξω περισσότερο. Συνδύαζε τη χρήση υπολογιστή με τον πίνακα και προστέθηκαν εκτός από τύπους ενδιαφέροντα ιστορικά σημειώματα και πληροφορίες για οτιδήποτε διδάχθηκε.
14	Ενώ θεωρώ τα μαθηματικά εξαιρετικά δύσκολα, μετά τη διδασκαλία των λογαρίθμων μου φάνηκαν ακόμα πιο δύσκολα. Κάποια δεν τα κατανόησα πλήρως και με δυσκόλεψαν πολύ
15	Δε μου προκάλεσε ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Μου φαινόταν όπως και τα προηγούμενα μαθηματικά απλά ήταν μια άλλη εκδοχή μαθηματικών.
16	Οι λόγοι για τους οποίους η διδασκαλία των λογαρίθμων μου προκάλεσε το ενδιαφέρον ήταν γιατί παρακολούθησα κάτι που δεν ήταν συνηθισμένο και κατά τη γνώμη μου αυτή η παρακολούθηση άλλαξε λίγο την εικόνα που είχα για τα μαθηματικά
17	Δεν απάντησε
18	Η διδασκαλία των λογαρίθμων ήταν πιο ενδιαφέρουσα και περιεκτική, όμως επειδή τα 2 δίωρα ήταν συνεχόμενα μπορούσε να σε κουράσει ευκολότερα. Επίσης, ήταν πολλές νέες πληροφορίες ενώ δεν ήταν σίγουρος ο βαθμός εμπέδωσης των προηγούμενων. Δε θεωρώ πως άλλαξε την εικόνα που είχα για τα μαθηματικά, αφού γνωρίζαμε πως υπήρχε κάποια εξέλιξη και κάποια ιστορικά στοιχεία απλώς δεν τα γνωρίζαμε αυτά.
19	Η διδασκαλία αυτή με βοήθησε να καταλάβω κάποια πράγματα αν και δεν ήταν πολλές ώρες για να εκπληρώσει τα κενά των παιδιών. Πιστεύω ότι ήταν μια καλή παρουσίαση αν και δεν μου άλλαξε την εικόνα που έχω για τα μαθηματικά γιατί οι συγκεκριμένοι λογάριθμοι είναι δύσκολοι.
20	Βλέποντας και γνωρίζοντας τον κόσμο των μαθηματικών, την εξέλιξη στα βάθη των χρόνων, τη σπουδαιότητά τους και τη σημασία τους για την απλή καθημερινότητα, φυσικό είναι να κερδίσει το ενδιαφέρον του καθενός. Είναι ανούσιο και παράλογο να απορρίπτεις κάτι που δεν ξέρεις, αλλά δεν μας έχει δοθεί μέχρι τώρα η ευκαιρία να γνωρίσουμε τη σκέψη αυτών των πράξεων χωρίς τέλος που μας προσφέρουν τα μαθηματικά. Για αυτό μια τέτοια παρουσίαση είναι αν μη τι άλλο μια αφορμή για να συμπαθήσουμε αυτό το μάθημα.

VI.Συνέντευξη διδάσκοντα της Β΄ Λυκείου

Ο συγκεκριμένος καθηγητής είναι πολλά χρόνια στην εκπαίδευση και στο συγκεκριμένο σχολείο, διδάσκοντας σχεδόν κάθε χρόνο την Άλγεβρα Β΄ Λυκείου και έχει πολύ εμπειρία στο χώρο. Έχει πολύ καλή επαφή με τα παιδιά και πλήρη αντίληψη του τι συμβαίνει μέσα στην τάξη. Εμπιστεύομαι τόσο τη κρίση του όσο και τη γνώμη του.

Ερώτηση

Πως θα περιγράφατε το συγκεκριμένο τμήμα από άποψη μαθηματικής παιδείας συμμετοχής και επίδοσης;

Απάντηση

Είναι ένα μέτριο τμήμα (50% καλοί – 50% αδύναμοι).Συμμετέχουν κυρίως οι καλοί μαθητές στα μαθηματικά και κάποιοι από τους άλλους προσπαθούν. Υπάρχουν πολλές ελλείψεις ειδικά από τους αδύναμους.

Ερώτηση

Στη διδασκαλία που παρακολουθήσατε επιδιώχθηκε μια προσέγγιση της έννοιας του λογαρίθμου, εστιασμένη στην αποσαφήνιση των κινήτρων που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους, την επεξήγηση όρων και εννοιών, την εφαρμογή που βρίσκουν στο περιβάλλοντα κόσμο και μια αναφορά στους βασικούς πρωταγωνιστές και την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Πιστεύετε ότι αυτοί οι διδακτικοί στόχοι επετεύχθησαν και σε ποιο βαθμό; Θεωρείτε ότι τέτοιοι στόχοι πρέπει να τίθενται στο σχεδιασμό και υλοποίηση μιας διδασκαλίας;

Απάντηση

Ναι σε βαθμό 90%. Το μάθημα έτσι πρέπει να γίνεται χωρίς πίεση ύλης και χρόνου. Προσωπικά έδινα κάποια ιστορικά σημεία αλλά γρήγορα και χωρίς να μένω αρκετά. Ελάχιστοι διάβαζαν το ιστορικό σημείωμα και κυρίως καλοί μαθητές.

Ερώτηση

Θα ενσωματώνατε κάποια από τα στοιχεία (ιστορικά ή άλλα) της διδασκαλίας που παρακολουθήσατε στη διδασκαλία των λογαρίθμων; Αναφέρατε ποια και γιατί.

Απάντηση

Ναι. Τα ιστορικά για την αποσαφήνιση του ιστορικού πλαισίου και τις εφαρμογές για να μάθουν οι μαθητές που εφαρμόζονται και γιατί τα μαθαίνει. Ο τρόπος που φτάσαμε στον ορισμό και ο τρόπος απόδειξης των ιδιοτήτων.

Ερώτηση

Τι παρατηρήσεις έχετε να κάνετε σχετικά με τη διδασκαλία που παρακολουθήσετε;

Απάντηση

1. Χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος μεταξύ ορισμού και ιδιοτήτων για καλύτερη εμπέδωση και αφομοίωση του ορισμού με περισσότερα παραδείγματα, όχι και τα δύο σε ένα δίωρο
2. Δεν εξηγήθηκαν για ποιο λόγο βάζουμε τους περιορισμούς.
3. Παρουσιάστηκε μια διαφορά στη συμμετοχή όπου και οι αδύναμοι συμμετείχαν. Το ενδιαφέρον και η συμμετοχή αυξήθηκε. Οι απαντήσεις που δίνονταν από τους καλούς σε αναλογία με τους αδύναμους είναι 3:1
4. Ίσως θα έπρεπε το $2^{ο}$ δίωρο (ιστορικό) να ήταν $1^{ο}$.
5. Μου άρεσε ο τρόπος προσέγγισης του λογαρίθμου μέσα από τις δύο προόδους και ο τρόπος απόδειξης των ιδιοτήτων.
6. Μου άρεσε το ιστορικό πλαίσιο.
7. Μου άρεσε που τονίστηκαν οι εφαρμογές.
8. Μου άρεσε που αποσαφηνίστηκε τι μαθηματικά γνώριζαν τότε.
9. Χρειάζονται άλλα βιβλία, άλλα αναλυτικά προγράμματα και άλλο πλαίσιο για να δουλέψουμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βιβλία και άρθρα:

- Barbin E. et all, Integrating history: research perspectives, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, σ. 64-90, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Edwards, H. Jr., Napier's Wonderful Logarithms, in *The Historical Development of the Calculus*, σ. 142-169, Springer Study Edition, USA, 1979.
- Eves, H. (1989), *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών* τόμος Ι – έως το 1650 (μετάφραση Κωνσταντινίδης Μ. & Λιλής Ν.), (σύμβουλος Λάμπρου Μ.), (επ. Βουτσινά Π., Τρουφάκης Γ.), Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- Fasanelli F. et all, Quotations on the use of history of mathematics in mathematics teaching and learning, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6 σελ. 33-38, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Fasanelli F. et all, What part does history of mathematics currently occupy in national curricula?, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, σ. 2-29, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Fauvel, J., Revisiting the History of Logarithms, in Swetz F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B. & Katz V. (eds.), *Learn from the Masters*, σ.39-49, The Mathematical Association of America, USA, 1995.
- Fauvel J. & Maanen J.V., Introduction History in Mathematics Education, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, εισαγωγή – σ. xi-xviii, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Grugnetti L. & Rogers L., Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, σελ. 39-62, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Hagerty G.W., Smith S. & Goodwin D., Τα μοναδικά αποτελέσματα της Εισαγωγής της Ιστορίας των Μαθηματικών στο Μάθημα της Άλγεβρας, στο Β. Ε. Βισκαδουράκης (επ.), *Περιοδικό Το φ*, Τεύχος 6, σ. 95-104, Αθήνα, 2009.
- Haverhals N. & Roscoe M., The history of mathematics as a pedagogical tool, In: B. Sriraman (ed.) *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, σ. 139-155, I.A.P., Charlotte, 2012.
- Jahnke H.N., The use of original sources in the mathematics classroom, in J. Fauvel & I. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, σ. 291-299, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/ Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Jankvist U.T., A first attempt to identify and classify empirical studies on history in mathematics education, In: B. Sriraman (ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, σ. 295-316, I.A.P., Charlotte, 2012.

- Jankvist, U. T., A Categorization of the “Whys” and “Hows” of Using History in Mathematics Education, in *Educational Studies in Mathematics*, Volume 71, No. 3, 2009.
- Katz, V. (2013), *Ιστορία των Μαθηματικών – Μια εισαγωγή* (μετάφραση Κ Χατζηκυριάκου), (επ. Χριστιανίδης Γ.), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Katz, V., Napier’s Logarithms Adapted for Today’s Classroom, in Swetz F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B. & Katz V. (eds.), *Learn from the Masters*, σ.49-56, The Mathematical Association of America, USA, 1995.
- Katz V., Dorier J.-L., Bekken O. & Sierpinska A., The role of historical analysis in predicting and interpreting students difficulties in mathematics, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, σελ. 149-161, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/ London/Moscow, 2002.
- Kjeldsen T.H., Reflections on and benefits of uses of history in mathematics education exemplified by two types of student work in upper secondary school, In: B. Sriraman (ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* σ. 333-338, I.A.P., Charlotte, 2012.
- Kjeldsen, T. H., Uses of history in mathematics education: development of learning strategies and historical awareness, in *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, σ. 1640-1648,Cerme 7, 2011.
- Siu Man-Keung, The ABCD of Using History of Mathematics in the Undergraduate Classroom, in V. Katz (ed.), *Using History to Teach Mathematics An International Perspective*, Volume 51, σ. 3-8, The Mathematical Association of America, USA, 2000.
- Tzanakis C. & Arcavi A., Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey, in J. Fauvel & I. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, σελ. 201-240, Kluwer Academic Publishers, N.Y./Boston/Dordrecht/London/Moscow, 2002.
- Tzanakis C. & Thomaidis Y., Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education, In: B. Sriraman (ed.) *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, σ. 247-288, I.A.P., Charlotte 2012.
- Tzanakis C. & Thomaidis Y., CLASSIFYING THE ARGUMENTS & METHODOLOGICAL SCHEMES FOR INTEGRATING HISTORY IN MATHEMATICS EDUCATION, in *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, σ. 1650-1657, Cerme 7, 2011.
- Villarreal-Calderon R., Chopping Logs: A Look at the History and Uses of Logarithms, In: B. Sriraman (ed.) *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, σ. 131-138, I.A.P., Charlotte, 2012.

- Θωμαΐδης Ι., Ανάδυση και εξέλιξη των λογαριθμικών εννοιών, στο *Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών τεύχος 4,* Αθήνα, 1987.
- Θωμαΐδης Ι., Ιστορικό σημείωμα: Η βασική ιδέα των λογαρίθμων, στο Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, σ. 187-192 , ΙΤΥΕ-Διόφαντος, Αθήνα, 2012.
- Θωμαΐδης Ι., Προέλευση και Εφαρμογές της Θεωρίας στη Διδασκαλία των Μαθηματικών – Το παράδειγμα των λογάριθμων, στο *Ευκλείδης Γ*, τεύχος 13, σ.1-30, Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1986.

- Κανδήλας Χ., Ιστορική εξέλιξη και μελέτη των λογαρίθμων, (επιβλέπων Γιαννακούλιας Ε.), Διπλωματική, Πανεπιστήμιο Αθηνών & Κύπρου, Αθήνα, 2010.
- Μπιζμπιάνος, Μ., Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η Περίπτωση της Γεωμετρίας, (επιβλέπων Λάππας Δ.) Διπλωματική, Πανεπιστήμιο Αθηνών & Κύπρου, Αθήνα, 2011
- Πάσχος Θ., Μπορεί η ιστορία των Μαθηματικών να ενσωματωθεί στη διδακτική πρακτική;, στο Β. Ε. Βισκαδουράκης (επ.), *Περιοδικό Το φ,* Τεύχος 5, σ. 45-47, Αθήνα, 2008.

Διαδίκτυο:

- Furinghetti, F., On the role of the history of mathematics in mathematics education, ανακτήθηκε στις 2/10/2014 από http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/TSG_23_Report_BB_FF.pdf
- Panasuk, R. M. & Horton, L. B., Integrating History of Mathematics into Curriculum: What are the Chances and Constraints?, in International Electronic Journal of Mathematics Education – ΙΣΜΣ, Volume 7, No. 1, ανακτήθηκε στις 2/10/2014 από http://www.mathedujournal.com/dosyalar/IJEM_v7n1_1.pdf
- Rosa, A. (2001), Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom, Ανακτήθηκε στις 2/10/2014 από: http://www.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.pdf
- Shara J., Benefits from Integrating History of Mathematics into Teaching, Ανακτήθηκε στις 2/10/201 από http://users.sch.gr/afylakis/ME2013/ME2013JShara.pdf