ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗΣ ΕΣΤΙΑΣΗΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΕ ΑΠΛΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΛΙΟΛΙΟΥΣΗ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Ξένια Βαμβακούση

ΑΘΗΝΑ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Ξ. Βαμβακούση (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Ξ. Βαμβακούση (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Κ. Χρήστου	Επικ. Καθηγητή

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗΣ ΕΣΤΙΑΣΗΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΕ ΑΠΛΕΣ ΠΟΛΛΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια, μια ομάδα Φιλανδών ερευνητών μελέτησε κατά πόσο τα μικρά παιδιά έχουν την τάση να εστιάζουν αυθόρμητα στα χαρακτηριστικά μιας κατάστασης (Spontaneous Focusing on Numerosity, SFON). Τα ευρήματά τους δείχνουν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές ως προς το χαρακτηριστικό αυτό, οι οποίες προβλέπουν τη μαθηματική επίδοση των παιδιών και μακροπρόθεσμα. Έχουν γίνει προσπάθειες να επεκταθεί η έρευνα στην τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις (Spontaneous Focusing on (Quantitative) Relations, SFOR). Ένας περιορισμός στις μέχρι τώρα έρευνες είναι ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν δεν επέτρεπαν στα παιδιά να εστιάσουν στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, χωρίς προηγουμένως να έχουν επικεντρωθεί στο πλήθος. Στη συγκεκριμένη εργασία, πραγματοποιήθηκε μια εμπειρική μελέτη σε παιδιά μικρής ηλικίας με νέα έργα, τα οποία δεν υπόκεινται σε αυτόν τον περιορισμό.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές μου και μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, την κ. Ξένια Βαμβακούση, την κ. Δέσποινα Πόταρη και τον κ. Κωνσταντίνο Χρήστου. Ιδιαίτερα την κ. Ξένια Βαμβακούση για τον πολύτιμο χρόνο της, για τις εποικοδομητικές συμβουλές της, την αμέριστη βοήθειά της όποτε την χρειαζόμουν, την υπομονή της και το άριστο κλίμα συνεργασίας μας κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης ευχαριστώ τη Λίνα Βράκα, μεταπτυχιακή φοιτήτρια του τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τα στοιχεία της έρευνάς της που μου έδωσε, προκειμένου να μπορέσω να κάνω τη σύγκριση με τα δικά μου αποτελέσματα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως και να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου, Αναστασία και Παναγιώτη, οι οποίοι βρίσκονται πάντα δίπλα μου και στηρίζουν τις επιλογές μου, ώστε να κάνω τα όνειρα μου πραγματικότητα.
Τους ανθρώπους που βρίσκονται δίπλα μου και με στηρίζουν, συμβάλλοντας ο καθένας με τον τρόπο του στην επίτευξη αυτού του στόχου.

Στους γονείς μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Θεωρητικό πλαίσιο……σελ. 13

1.1 Προβλήματα και δυσκολίες στην εκμάθηση των ρητών αριθμών και το πρόβλημα της προκατάληψης των φυσικών αριθμών. Η σημασία της διδασκαλίας των ρητών αριθμών από την πρώιμη παιδική ηλικία…….σελ. 13

1.2 Πρώιμοι προγνωστικοί παράγοντες της επίδοσης των ρητών αριθμών: η αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (SFON) και η αυθόρμητη τάση εστίασης στις ποσοτικές σχέσεις (SFOR)…….....σελ. 18

1.3 Τι συμβαίνει όταν η αριθμητικότητα ανταγωνίζεται τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις…….σελ. 30

2. Μεθοδολογία της Έρευνας…….σελ. 33

2.1 Συμμετέχοντες…….....σελ. 33

2.2 Ερευνητικά έργα και υλικά……σελ. 33

2.3 Διαδικασία……σελ. 48

2.4 Αποτελέσματα……..σελ. 51

3. Σύγκριση επίδοσης παιδιών Α' Δημοτικού με τα παιδιά του Νηπιαγωγείου.....σελ. 58

4. Συζήτηση- Συμπεράσματα……σελ. 61

Βιβλιογραφία…….....σελ. 66

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Προβλήματα και δυσκολίες στην εκμάθηση των ρητών αριθμών και το πρόβλημα της προκατάληψης των φυσικών αριθμών. Η σημασία της διδασκαλίας των ρητών αριθμών από την πρώιμη παιδική ηλικία.

Η μάθηση και διδασκαλία των ρητών αριθμών είναι ένα σημαντικό θέμα που έχει απασχολήσει και συνεχίζει να απασχολεί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, γνωστικούς και αναπτυξιακούς ψυχολόγους, και, τελευταία, ακόμα και νευροεπιστήμονες. Ο Lesh και συνεργάτες (1988) αναφέρουν ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αποτελούν το «επιστέγασμα της αριθμητικής που μαθαίνουν τα παιδιά στο δημοτικό σχολείο… και τον ακρογωνιαίο λίθο, όλων όσων πρόκειται να ακολουθήσουν». Μ' αυτήν την έκφραση υποδηλώνεται η σημασία των ρητών αριθμών για τα σχολικά μαθηματικά και, συνακόλουθα, η ιδιαίτερη σημασία της κατανόησής τους από τους μαθητές, προκειμένου να είναι σε θέση να κατακτήσουν τα μαθηματικά νοήματα που διδάσκονται στη συνέχεια. Πέρα από τη σημασία τους στη σχολική ζωή, η κατανόηση των ρητών είναι σημαντική και για την μετέπειτα ακαδημαϊκή ζωή των μαθητών, ενώ είναι απαραίτητη και για τις ανάγκες της καθημερινής ζωής. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι μεγάλο μέρος του διδακτικού χρόνου επενδύεται στη διδασκαλία των ρητών, είναι αναμφισβήτητα τεκμηριωμένο ότι οι ρητοί δυσκολεύουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την πλειοψηφία των μαθητών, τόσο σε εννοιολογικό, όσο και σε διαδικαστικό επίπεδο (Moss, 2015).

Ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στις δυσκολίες που συναντώνται κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς, στους ρητούς αριθμούς, οι οποίες αφορούν όχι μόνο μικρά παιδιά, αλλά και ενήλικες. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, γνωστή ως natural number bias, φαίνεται πως επηρεάζει και αυξάνει τις δυσκολίες των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με τα κλάσματα (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012).

Πράγματι, έρευνες έχουν δείξει ότι υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της συλλογιστικής που αφορά τους φυσικούς αριθμούς και αυτής που αφορά τους ρητούς. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν την καταμέτρηση σε προβλήματα και καταστάσεις, οι οποίες παρόλο που αφορούν ρητούς αριθμούς, μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτήν την τεχνική για την επίλυσή τους (McMullen, 2014), ενώ από την άλλη πλευρά, όχι μόνο μαθητές, αλλά και ενήλικες, τείνουν να

χρησιμοποιούν την έννοια και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε προβλήματα που δεν αφορούν τους ρητούς αριθμούς (Vamvakoussi κ.ά., 2012, 2013).

Έτσι, παρατηρείται ένα πλήθος συστηματικών λαθών, ακριβώς στις περιπτώσεις που υπάρχουν διαφορές μεταξύ των φυσικών και των ρητών αριθμών. Τέτοια λάθη εμφανίζονται στη σύγκριση των ρητών, στις πράξεις μεταξύ ρητών και σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών. Για παράδειγμα, η πλειοψηφία των μαθητών έχουν την τάση να θεωρούν μεγαλύτερα τα κλάσματα με τον μεγαλύτερο παρονομαστή και μικρότερα εκείνα με τον μικρότερο παρονομαστή, σχέση δηλαδή που ισχύει στη διάταξη των φυσικών αριθμών. Επιπροσθέτως, δεν μπορούν να διακρίνουν το μεγαλύτερο μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών, για παράδειγμα θεωρούν πως το 0,4 είναι μικρότερο από το 0,37, γιατί το 4 είναι μικρότερο από το 37. Μια πολύ συχνή παρανόηση που έχουν τα παιδιά, είναι πως ο πολλαπλασιασμός προκαλεί πάντα αύξηση μιας ποσότητας, ενώ η διαίρεση οδηγεί πάντα σε μείωση.

Επιπλέον, έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να αντιληφθούν την πυκνή διάταξη των ρητών (McMullen, 2014). Έτσι, οι μαθητές συχνά θεωρούν πως δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του $\frac{4}{7}$ και του $\frac{5}{7}$, ούτε μεταξύ του 0,008 και του 0,009. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι οι φυσικοί αριθμοί έχουν μια καθορισμένη σειρά και πάντα υπάρχει ένας διαδοχικός όρος, προηγούμενος ή επόμενος. Αντίθετα, ανάμεσα σε δυο διαφορετικούς ρητούς υπάρχουν πάντα άπειροι αριθμοί και δοθέντος ενός ρητού είναι αδύνατον να καθοριστεί ο επόμενος ρητός αριθμός.

Συνεχίζοντας, μέσα από προηγούμενες έρευνες έχει γίνει φανερό ότι τόσο μαθητές, όσο και ενήλικες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την αναπαράσταση των ρητών αριθμών, ενώ εμφανής γίνεται η προκατάληψη του φυσικού αριθμού κατά την αναπαράσταση των κλασμάτων και των δεκαδικών. Πράγματι, οι μαθητές έχουν συνηθίσει να αναπαριστάνουν τους φυσικούς αριθμούς με ένα και μοναδικό σύμβολο (π.χ. 2=2). Αντίθετα, καθένας από τους ρητούς αριθμούς μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (π.χ. $0{,}2 = 0{,}20 = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} =$ κ.τ.λ...). Το παραπάνω χαρακτηριστικό δημιουργεί επιπλέον δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, οι μαθητές συχνά θεωρούν τους δύο όρους του κλάσματος, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, ως δύο ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς που δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους. Αντιθέτως, θα πρέπει να γίνει

κατανοητό ότι το κλάσμα εκφράζει μια σχέση μεταξύ αυτών των δύο όρων που το συνθέτουν (McMullen, 2014).

Συνοψίζοντας, έχει παρατηρηθεί ότι τα παιδιά απαντούν με μεγαλύτερη ταχύτητα και το ποσοστό ευστοχίας των απαντήσεών τους είναι μεγαλύτερο σε προβλήματα και ερωτήσεις, των οποίων η συλλογιστική και η αντιμετώπιση είναι βασισμένες στους φυσικούς αριθμούς. Από την άλλη μεριά, κάνουν περισσότερα λάθη ή χρειάζονται περισσότερο χρόνο προκειμένου να δώσουν σωστές απαντήσεις σε προβλήματα που είναι μη συμβατά με τον τρόπο σκέψης που έχουν συνηθίσει, προβλήματα δηλαδή που ξεφεύγουν από το πλαίσιο των φυσικών αριθμών (Vamvakoussi κ.ά., 2012).

Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι προκειμένου να γίνει αντιληπτή η έννοια των κλασμάτων, απαιτείται εννοιολογική αλλαγή σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς, καθώς οι πρώιμες εμπειρίες των παιδιών εκτός και εντός σχολείου καταλήγουν στη διαμόρφωση ενός συνεκτικού σώματος γνώσης για τον αριθμό, το οποίο βασίζεται σε αρχές και ιδιότητες που αφορούν μόνο τους φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Αρκετές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί και έχουν δείξει ότι τα παιδιά έχουν από μικρή ηλικία την ικανότητα να αντιμετωπίσουν καταστάσεις που περιέχουν απλές πολλαπλασιαστικές ή και αναλογικές σχέσεις. Ωστόσο, η επίδοσή τους σε σχετικά έργα φθίνει, όταν μαθαίνουν να καταμετρούν. Φαίνεται ότι σε περιπτώσεις που υπάρχουν διακριτές ποσότητες, αυτό που επιλέγουν τα παιδιά είναι η καταμέτρηση, είτε αυτή μπορεί να αποτελέσει λύση, είτε όχι (McMullen, 2014). Σχετικό παράδειγμα είναι τα έργα μοιρασιάς, στα οποία τα παιδιά φροντίζουν να πάρουν οι εμπλεκόμενοι το ίδιο πλήθος από κομμάτια, αμελώντας το σχετικό μέγεθος των κομματιών. Προς αυτήν την κατεύθυνση συμβάλλουν αρκετοί παράγοντες, κάποιοι από τους οποίους είναι και πολιτισμικοί. Πιο συγκεκριμένα, τόσο η γλώσσα (π.χ. η εκμάθηση της αριθμητικής ακολουθίας), όσο και οι εμπειρίες τις οποίες αποκτά το κάθε παιδί στην καθημερινότητά του (π.χ. απαρίθμηση με χρήση των δακτύλων), ευνοούν τη μάθηση σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς, ενώ οι πρώιμες εμπειρίες σχετικά με τους ρητούς αριθμούς είναι περιορισμένες (Greer, 2004, στο McMullen, 2014; Vamvakoussi, 2015). Με άλλα λόγια, οι πρώτες συστηματικές εμπειρίες με τους φυσικούς αριθμούς ενδέχεται να δρουν ως εμπόδιο στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των παιδιών που αφορούν τις (πολλαπλασιαστικές) σχέσεις, οι οποίες είναι στη βάση των ρητών αριθμών.

Πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη και διαιώνιση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού παίζει ο τρόπος με τον οποίο σχεδιάζεται η διδασκαλία των ρητών

αριθμών, πότε και με ποιον τρόπο οι ρητοί παρουσιάζονται και διδάσκονται στα παιδιά. Πράγματι, όπως επισημαίνουν οι Moss και Case (1999), δεν τονίζονται στα παιδιά οι διαφορές μεταξύ των φυσικών και των ρητών αριθμών, προκειμένου να τις προσέξουν και να τις κατανοήσουν, ώστε να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν με την ίδια ευκολία όποια από τις δύο κατηγορίες αριθμών χρειάζεται κάθε φορά. Επιπλέον, ελάχιστη προσοχή δίνεται από τους εκπαιδευτικούς, τόσο στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των αναπαραστάσεων των ρητών, όσο και στις ατομικές προσπάθειες που κάνει κάθε παιδί ξεχωριστά προκειμένου να κατανοήσει τους ρητούς αριθμούς γενικότερα. Σύμφωνα με τις μεθόδους διδασκαλίας που πραγματοποιούνται μέχρι και το παρόν, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη «διαδικαστική» γνώση των ρητών, δηλαδή στην εκμάθηση κανόνων και διαδικασιών που αφορούν τους ρητούς και λιγότερη στην εννοιολογική γνώση τους. Με άλλα λόγια, δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στον αλγεβρικό χειρισμό των αριθμών αυτών, μέσα από πράξεις και λιγότερη ως ελάχιστη, στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας τους, πράγμα που δημιουργεί πρόβλημα στην κατανόηση ιδιοτήτων των ρητών, όπως αυτή της πυκνής διάταξης.

Επιπλέον, ένας άλλος παράγοντας που ενισχύει την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, είναι το γεγονός ότι τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία μέχρι και τα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου διδάσκονται και μαθαίνουν μόνο τους φυσικούς αριθμούς. Πράγματι, σύμφωνα με τα προγράμματα σπουδών, η διδασκαλία των μη φυσικών αριθμών ξεκινάει πολύ αργότερα σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό έχει σαν συνέπεια τα παιδιά να έρχονται σε επαφή μόνο με τους φυσικούς αριθμούς για μεγάλο χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα να παγιώνονται οι γνώσεις που έχουν σχετικά μ' αυτούς και να αυξάνονται ολοένα και περισσότερο. Επιπρόσθετα, οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν τη βάση, πάνω στην οποία στηρίζεται η εισαγωγή στους ρητούς και η διδασκαλία τους. Πράγματι, ο συνήθης τρόπος εισαγωγής είναι μέσω του κλάσματος ως μέρος-όλου. Αν και ο τρόπος αυτός είναι συμβατός με την προϋπάρχουσα γνώση των παιδιών για τους φυσικούς και επιτρέπει τη χρήση στρατηγικών, όπως η καταμέτρηση, αποδεικνύεται μη ευνοϊκός μακροπρόθεσμα, καθώς οι κλασματικές μονάδες αντιμετωπίζονται ως διακριτές οντότητες. Τα δύο παραπάνω θέματα έρχονται να προστεθούν στη λίστα των αιτιών που κάνουν τόσο συνηθισμένη την προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

Σύμφωνα με όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μεγάλης σημασίας κρίνεται η προσπάθεια που πρέπει να πραγματοποιηθεί προκειμένου να μειωθεί το χάσμα μεταξύ φυσικών και μη φυσικών αριθμών. Η Vamvakoussi (2015) κάνει μια επισκόπηση των

τρόπων που έχουν προταθεί για το σκοπό αυτό. Για παράδειγμα, κάτι τέτοιο θα μπορούσε να γίνει με τον επαναπροσδιορισμό του τρόπου διδασκαλίας των φυσικών αριθμών, ξεκινώντας αρχικά από το ρόλο που παίζει η μονάδα στην απαρίθμηση, κάτι που αγνοείται συνήθως στη διδασκαλία και το οποίο είναι μια βαθιά σύνδεση μεταξύ των φυσικών και των ρητών. Παρόμοια, εκτός από τις διαφορές μεταξύ των φυσικών και μη φυσικών αριθμών, πρέπει να γίνονται σαφείς οι βαθιές και όχι οι επιφανειακές ομοιότητές τους. Για παράδειγμα, τα κλάσματα πρέπει να αντιμετωπίζονται σαν αριθμοί, οι οποίοι τοποθετούνται στον άξονα των αριθμών και χρησιμοποιούνται, όπως και οι φυσικοί στην καταμέτρηση. Σημαντικό θα ήταν, αντί οι φυσικοί να αποτελούν την βάση πάνω στην οποία στηρίζεται η διδασκαλία των ρητών αριθμών, να εντοπίζονται μόνο οι πτυχές τους που βοηθάνε στη διδασκαλία των μη φυσικών.

Τέλος, η διδασκαλία των ρητών αριθμών, θα μπορούσε να ξεκινήσει αρκετά νωρίτερα, καθώς τα παιδιά διαθέτουν πρώιμες ικανότητες που σχετίζονται με τους ρητούς, όπως η ανίχνευση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Αν αυτές ενισχύονταν μέσα από εργαλεία και συχνότερες δομημένες εμπειρίες, όπως για παράδειγμα τη γλώσσα, δηλαδή λέξεις και εκφράσεις που αφορούν τα κλάσματα, κάτι που συμβαίνει με τη διδασκαλία των φυσικών, τότε η κατανόησή τους ενδεχομένως θα ήταν ευκολότερη και η αντιμετώπισή τους θα ήταν πιο θετική από την πλευρά των παιδιών. Όσο πιο καθυστερημένα γίνεται όλη η παραπάνω διαδικασία, τόσο δυσκολότερη γίνεται η ενασχόληση των μαθητών με τους ρητούς.

Πέρα από το να εισαχθούν οι ρητοί νωρίτερα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, ένα σημαντικό θέμα είναι ο τρόπος με τον οποίο θα εισαχθούν. Η δίκαιη μοιρασιά ή ισο-διαμερισμός έχουν προταθεί ως πιθανές ιδέες. Ωστόσο, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, ιδιαίτερη σημασία έχουν οι σχέσεις, και ιδιαίτερα οι πολλαπλασιαστικές, μεταξύ ποσοτήτων.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, πολλές έρευνες έχουν δείξει πως τα παιδιά ήδη από τη βρεφική ηλικία και κατά τη διάρκεια της πρώιμης παιδικής ηλικίας τους, έχουν την ικανότητα να συγκρίνουν και να συσχετίζουν μεταξύ τους δύο ή περισσότερες ποσότητες. Όπως θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα, αυτές οι πρώιμες δυνατότητες των παιδιών έχει αποδειχθεί ότι έχουν άμεση σχέση με τη μετέπειτα ανάπτυξη της γνώσης και των δυνατοτήτων τους που αφορούν τους ρητούς αριθμούς.

1.2 Πρώιμοι προγνωστικοί παράγοντες της επίδοσης των ρητών αριθμών: η αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (SFON) και η αυθόρμητη τάση εστίασης στις ποσοτικές σχέσεις (SFOR).

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον για την ανίχνευση πρώιμων προγνωστικών παραγόντων της μαθηματικής επίδοσης των παιδιών γενικά, και στους ρητούς αριθμούς ειδικότερα (π.χ., Jordan κ.ά., 2013). Σε αυτούς τους παράγοντες συγκαταλέγονται οι αυθόρμητες τάσεις εστίασης στα μαθηματικά χαρακτηριστικά μιας κατάστασης και, πιο συγκεκριμένα, στην αριθμητικότητα (Spontaneous Focusing on Numerosity, SFON) και στις ποσοτικές σχέσεις (Spontaneous Focusing on Quantitative Relations, SFOR).

Είναι γνωστό ότι ένα μεγάλο μέρος καταστάσεων και συνθηκών, στις οποίες είναι απαραίτητη η χρήση των Μαθηματικών, συμβαίνει εκτός της τυπικής διδασκαλίας των Μαθηματικών, η οποία πραγματοποιείται στα σχολεία όλων των βαθμίδων, από το νηπιαγωγείο ως το πανεπιστήμιο. Στην καθημερινότητα των ανθρώπων, ένα πολύ μεγάλο μέρος της εφαρμογής μαθηματικών απαιτείται σε περιπτώσεις όπου οι μαθηματικές έννοιες, οι μαθηματικοί συμβολισμοί και γενικότερα τα νοήματα αυτής της επιστήμης δεν είναι διατυπωμένα με σαφήνεια, προκειμένου να γίνουν αμέσως αντιληπτά. Σ' αυτές τις μη τυπικές καταστάσεις, ο τρόπος με τον οποίο κάθε άνθρωπος αντιλαμβάνεται, αναγνωρίζει, αναπτύσσει και τελικά χρησιμοποιεί τις μαθηματικές δεξιότητες, πρέπει να γίνεται αυθόρμητα, χωρίς την καθοδήγηση από οποιονδήποτε εξωτερικό παράγοντα. Φαίνεται ότι τα άτομα που έχουν ισχυρότερη τάση να εστιάζουν αυθόρμητα στις μαθηματικές πτυχές μιας κατάστασης νιώθουν πιο σίγουροι με τον εαυτό τους όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν τέτοιες συνθήκες και έχουν καλύτερες επιδόσεις από τα άτομα που δεν έχουν την τάση αυτή (Ericsson, 2006).

Τα τελευταία χρόνια, μια σειρά μελετών έχουν διερευνήσει κατά πόσο τα παιδιά μικρής ηλικίας αξιοποιούν αυθόρμητα τις μαθηματικές ικανότητες που έχουν και κατά πόσο αυτό συνδέεται με τη μετέπειτα ανάπτυξη των μαθηματικών τους δεξιοτήτων (Hannula, 2005, Hannula & Lehtinen, 2005). Ο λόγος πίσω από αυτό το ερευνητικό ενδιαφέρον είναι ότι φαίνεται πως τα παιδιά αναπτύσσουν ένα μέρος από τις γνωστικές τους ικανότητες μέσα από τυπικές διαδικασίες εκμάθησης (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014), ενώ το υπόλοιπο μέρος το εξασκούν και το εξελίσσουν

μέσα από μη τυπικές, μη καθοδηγούμενες διαδικασίες, οι οποίες πραγματοποιούνται μέσα στην καθημερινότητά τους (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014).

Οι μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί έχουν δείξει ότι δεν έχουν όλα τα παιδιά την ίδια τάση να αναγνωρίζουν και να αξιοποιούν τις μαθηματικές πτυχές μη σαφώς διατυπωμένων μαθηματικών καταστάσεων. Σε άλλα παιδιά η παραπάνω τάση είναι ισχυρότερη και σε άλλα λιγότερο ισχυρή. Με άλλα λόγια, παρουσιάζονται ατομικές διαφορές ως προς το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, οι οποίες μπορεί να έχουν σημαντικές συνέπειες για την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων σε μεγαλύτερη ηλικία.

Οι Hannula και Lehtinen (2001, 2005) ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με την εκτεταμένη μελέτη μιας από τις τάσεις που επηρεάζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων των παιδιών. Πιο συγκεκριμένα, η έρευνά τους ασχολήθηκε με την αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (Spontaneous Focusing on Numerosity). Ως SFON ορίζεται η τάση ορισμένων παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης, χωρίς εξωτερική καθοδήγηση. Ένα σημαντικό ζήτημα στη συστηματική μελέτη των αυθόρμητων τάσεων εστίασης είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων έργων, έτσι ώστε να γίνεται διάκριση ανάμεσα στην ικανότητα του παιδιού να φέρει εις πέρας το έργο, και την τάση του να χρησιμοποιήσει αυτή την ικανότητα χωρίς να του ζητηθεί – με άλλα λόγια, να διαχωριστεί η ικανότητα, από την αυθόρμητη τάση χρήσης αυτής της ικανότητας. Συνήθως, οι έρευνες που αφορούν την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών εστιάζουν στο τι μπορεί να κάνει το παιδί και όχι στο αν εμφανίζει αυθόρμητα την τάση να το κάνει. Έτσι, οι περισσότερες από τις μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί έχουν βασιστεί κυρίως σε έργα, στα οποία είναι φανερή η μαθηματική τους φύση και το ερώτημα κάνει σαφές το υπό μελέτη αντικείμενο. Μ' αυτόν τον τρόπο, όπως υποστηρίζουν οι Hannula και συνεργάτες (2005), δεν μπορούν να γίνουν σαφείς ούτε οι ατομικές διαφορές που εμφανίζονται κατά την ανάπτυξη των συγκεκριμένων δυνατοτήτων, ούτε ο λόγος που οδήγησε σ' αυτές τις διαφορές.

Επομένως, προκειμένου να γίνουν πλήρως αντιληπτές και κατανοητές οι διαφορές που παρουσιάζονται κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων, πρέπει να διερευνηθούν οι αυθόρμητες τάσεις εστίασης της προσοχής των μαθητών, τόσο στην αναγνώριση, όσο και στη χρήση των μαθηματικών πτυχών σε προβλήματα και καταστάσεις, στις οποίες τα μαθηματικά νοήματα δεν είναι διατυπωμένα με σαφήνεια (Hannula, 2005).

Οι Hannula και Lehtinen (2005) στην πρώτη μελέτη που έκαναν εξέτασαν την τάση SFON και μελέτησαν κατά πόσο αυτή συσχετιζόταν με την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων αργότερα. Η έρευνα έγινε σε 39 παιδιά (18 κορίτσια, 21 αγόρια), των οποίων η μητρική γλώσσα ήταν η Φιλανδική. Ο μέσος όρος ηλικίας ήταν 3,6 χρονών όταν ξεκίνησε το πείραμα και εξετάστηκαν 3 φορές με διαφορά ενός έτους μεταξύ των κάθε δύο από αυτές.

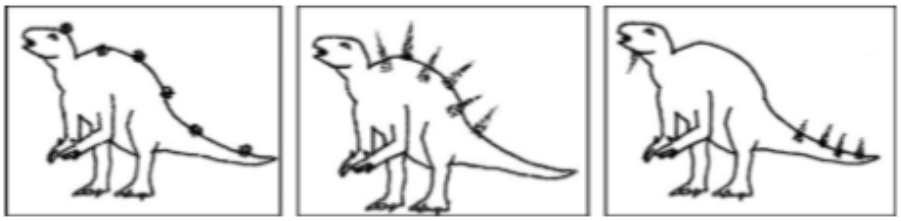
Το πείραμα που έλεγχε το SFON πραγματοποιήθηκε σε μια αίθουσα που ήταν οικεία για τα παιδιά, καθώς βρισκόταν στο χώρο του βρεφονηπιακού σταθμού. Πριν και κατά τη διεξαγωγή του πειράματος δεν δινόταν καμία πληροφορία στα παιδιά σχετικά με τη μαθηματική φύση του. Το εύρος των αριθμών που περιελάμβαναν τα έργα ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων διαχείρισης των παιδιών αυτής της ηλικίας. Σαν απαντήσεις SFON θεωρήθηκαν είτε αυτές στις οποίες τα παιδιά αναφέρονταν ρητά στην αριθμητικότητα (π.χ., χρησιμοποιούσαν αριθμούς είτε λεκτικά, είτε με τα δάχτυλα), είτε αυτές στις οποίες η συμπεριφορά των παιδιών καταδείκνυε ότι έλαβαν υπόψη τους την αριθμητικότητα (π.χ. έκαναν σχόλια που αφορούσαν είτε την καταμέτρηση, είτε την ποσότητα (π.χ. «τα μέτρησα λάθος») ή χρησιμοποίησαν εκφράσεις όπως «έδωσα τον ακριβή αριθμό τους). Τα έργα που αφορούσαν το SFON ήταν σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξάνεται το εύρος των αριθμών, καθώς τα παιδιά μεγάλωναν.

Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα ήταν έργα μίμησης που δόθηκαν σε παιδιά ηλικίας τεσσάρων, πέντε και έξι ετών, καθώς και ένα έργο κατασκευής και ένα έργο εύρεσης που δόθηκαν σε παιδιά που ήταν έξι ετών. Όλα τα παραπάνω έργα μελετούσαν την τάση SFON. Ωστόσο, υπήρχαν και δραστηριότητες, οι οποίες σχετίζονταν με τη γενικότερη μαθηματική επίδοση των παιδιών. Στόχος ήταν η μελέτη της αλληλεπίδρασης του SFON με τις μαθηματικές ικανότητες των μικρών παιδιών. Στη συγκεκριμένη εργασία, θα περιγράψουμε και θα αναλύσουμε ορισμένα έργα, που σχετίζονται με το SFON και στο τέλος θα αναφερθούμε στα αποτελέσματα που προέκυψαν από την έρευνα των Hannula και Lehtinen (2005).

Στο έργο μίμησης για τα παιδιά που ήταν τεσσάρων χρονών, τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ένα παιχνίδι παπαγάλος, ο οποίος μπορούσε να καταπιεί μούρα και ένα πιάτο με κόκκινα γυάλινα μούρα, καθένα από τα οποία είχε διάμετρο 2 εκατοστά. Ο παπαγάλος ήταν τοποθετημένος πάνω στο τραπέζι, μπροστά από το παιδί και το πιάτο βρισκόταν μπροστά από τον παπαγάλο. Ο πειραματιστής αρχικά παρουσίαζε τα υλικά στα παιδιά και στη συνέχεια τους παρότρυνε να παρατηρήσουν

προσεχτικά τι έκανε εκείνος, ώστε στη συνέχεια να κάνουν ακριβώς το ίδιο και αυτά. Ο πειραματιστής τοποθετούσε δύο μούρα, ένα κάθε φορά, στο στόμα του παπαγάλου, τα οποία εξαφανίζονταν και ένας ήχος ακουγόταν από το στομάχι του. Στη συνέχεια, το παιδί έπρεπε να κάνει αυτό που μόλις είχε δει. Όσα παιδιά έδωσαν στον παπαγάλο, στην πρώτη προσπάθεια, δύο μούρα, στη δεύτερη προσπάθεια έπρεπε να δώσουν τρία μούρα, ενώ τα υπόλοιπα ήταν πάλι αντιμέτωπα με δύο μούρα στη δεύτερη προσπάθεια. Στην τρίτη προσπάθεια, υπήρχε ένα μόνο μούρο για όλους.

Στο έργο κατασκευής για τα παιδιά που ήταν έξι χρονών, τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν εικόνες με δεινοσαύρους, σε χαρτί Α4 και τρεις σφραγίδες. Η μία σφραγίδα ήταν κυκλική, ενώ οι άλλες ήταν δύο διαφορετικές, σε σχήμα τριγώνου. Η πειραματίστρια και το παιδί είχαν μπροστά τους τις ίδιες φωτογραφίες με τους δεινοσαύρους. Η πρώτη έπαιρνε τη σφραγίδα και έκανε έξι αποτυπώματα-κύκλους στο δεινόσαυρο που είχε μπροστά της, ξεκινώντας από το κεφάλι του και στη συνέχεια τον αναποδογύριζε. Τότε ζητούσε από το παιδί να κάνει το δεινόσαυρο που είχε μπροστά του να μοιάζει με το δικό της. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβανόταν με εφτά τριγωνικές σφραγίδες στη δεύτερη προσπάθεια και πέντε σφραγίδες στην τρίτη προσπάθεια (βλ. Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Έργο κατασκευής από Hannula & Lehtinen, 2005, σελ. 242

Κατά την παρουσίαση όλων των έργων, δεν έγινε καμία αναφορά για τη μαθηματική φύση τους, από τους ερευνητές στα παιδιά, έτσι ώστε η ενδεχόμενη εστίαση στην αριθμητικότητα να είναι αυθόρμητη.

Σκοπός των Hannula και Lehtinen (2005) ήταν να μελετήσουν κατά πόσο τα παιδιά που έχουν την τάση να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης σε μικρή ηλικία, υπερτερούν στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων καθώς μεγαλώνουν. Ένας άλλος παράγοντας, για τον οποίο ενδιαφέρθηκαν και τον μελέτησαν, είναι κατά πόσο η σταθερότητα και η ένταση αυτής της τάσης σχετίζεται με τις μετέπειτα ικανότητες/δεξιότητες που αφορούν τα μαθηματικά.

Ξεκινώντας την έρευνά τους, είχαν στο μυαλό τους πως η αντιμετώπιση της αυθόρμητης τάσης εστίασης στην αριθμητικότητα (SFON) ως μια ξεχωριστή νοητική διεργασία και ο εντοπισμός ατομικών διαφορών ως προς αυτήν την τάση, θα τους βοηθούσε να κατανοήσουν περισσότερο την ανάπτυξη δεξιοτήτων των παιδιών που αφορούν τα Μαθηματικά. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη που πραγματοποίησαν, ήταν πολύ κοντά στις αρχικές προσδοκίες τους.

Με άλλα λόγια, διαπίστωσαν ότι πράγματι υπήρξαν αξιοσημείωτες ατομικές διαφορές κατά την αυθόρμητη εστίαση στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης, πράγμα που έγινε φανερό σε όλα τα μέσα που χρησιμοποίησαν.

Εδώ αξίζει να προστεθεί ότι στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και άλλες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σε όλον τον κόσμο σε παιδιά από τριών ετών μέχρι την ενηλικίωση, στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά εργαλεία και μέσα μέτρησης (McMullen, 2014).

Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι η τάση των παιδιών του νηπιαγωγείου να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης μπορεί να προβλέψει τη μετέπειτα ανάπτυξη των μαθηματικών τους ικανοτήτων, όπως έχει αναφερθεί αρκετές φορές μέχρι τώρα, δε συμβαίνει το ίδιο με άλλες ικανότητες/δεξιότητες των παιδιών, όπως η ικανότητα ανάγνωσης με κατανόηση. Αυτό υποδεικνύει ότι αυτή η τάση αυθόρμητης εστίασης αφορά μόνο το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών (Hannula & Lehtinen, 2005, Hannula κ.ά., 2010).

Μεγάλης σημασίας αποτελεί το γεγονός ότι ακόμα και τα παιδιά που δεν κατάφεραν να εστιάσουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα των έργων που κλήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα να αντιμετωπίσουν, μετά από καθοδήγηση που δόθηκε από τους πειραματιστές, ώστε η προσοχή τους να επικεντρωθεί στο μαθηματικό-αριθμητικό περιεχόμενο του προβλήματος, φάνηκε να τα καταφέρνουν.

Μέσα από την έρευνα των Hannula και Lehtinen, διαπιστώθηκε ότι υπήρξε αμοιβαία αλληλεπίδραση μεταξύ SFON και μαθηματικών δεξιοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε πως παιδιά που είχαν αναπτυγμένες μαθηματικές επιδεξιότητες στην ηλικία των τριάμισι ετών, εστίαζαν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης μισό χρόνο αργότερα και αυτό με τη σειρά του οδηγούσε στην περαιτέρω ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων ένα ή ακόμα και δύο χρόνια αργότερα. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι δεν μπορεί μόνο το SFON να αποτελέσει καλό οιωνό για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, αλλά και οι τελευταίες μπορούν να προβλέψουν την τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης.

Ωστόσο, οι περισσότερες μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί ασχολούνται με το κατά πόσο το SFON είναι αυτό που μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη τέτοιου είδους ικανοτήτων και όχι το αντίθετο. Ίσως, αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς μελέτης στο μέλλον.

Επιπλέον, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη έρευνα, αποδείχθηκε ότι ένας άλλος παράγοντας που συμβάλλει στην ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων των παιδιών μικρής ηλικίας, είναι η ένταση της τάσης που έχουν να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης. Με άλλα λόγια, φάνηκε ότι τα παιδιά που επαναλαμβανόμενα εστιάζουν στην αριθμητικότητα των έργων που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν, εμφάνιζαν πιο αναπτυγμένες τις δεξιότητες των μαθηματικών ένα ή ακόμα και ενάμιση χρόνο αργότερα. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά που σε ηλικία τριάμισι ετών μπορούσαν να μετρήσουν και αυτά που στην ίδια ηλικία είχαν την τάση να εστιάζουν στην αριθμητικότητα, σε ηλικία 5 ετών είχαν καλύτερες επιδόσεις σε μαθηματικές δραστηριότητες από εκείνα που δεν παρουσίασαν παρόμοια εικόνα μ'αυτήν. Επίσης, η έρευνα αυτή έδειξε ότι το SFON στην ηλικία των πέντε ετών σχετίζεται μόνο με το SFON σε μικρότερη ηλικία, ενώ οι επιδόσεις παιδιών ηλικίας έξι ετών σε καταστάσεις μαθηματικού περιεχομένου προβλέπονται τόσο από το SFON, όσο και από τις μαθηματικές ικανότητες που αυτά είχαν αναπτύξει σε ηλικία πέντε ετών.

Η συσχέτιση που φαίνεται να υπάρχει μεταξύ της τάσης αυθόρμητης εστίασης στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης και των μαθηματικών δυνατοτήτων των παιδιών δεν εξηγείται ούτε από τις διαφορές που αυτά παρουσιάζουν σε μη-λεκτικά τεστ ευφυίας (test IQ), ούτε από την κατανόηση ή μη, προφορικών οδηγιών που τους δίνονται, ούτε, τέλος, από την αδυναμία απαρίθμησης ή άλλων γνωστικών δεξιοτήτων που απαιτούνται προκειμένου να επιτύχουν την αυθόρμητη εστίαση στο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.

Μια πειραματική μελέτη που έγινε σε παιδιά προνηπιακής και νηπιακής ηλικίας έδειξε ότι η τάση SFON μπορεί να ενισχυθεί μέσω ειδικών παρεμβάσεων, πράγμα που οδηγεί παράλληλα και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων απαρίθμησης (McMullen, 2014). Η συγκεκριμένη μελέτη έδειξε ότι η τάση SFON, όπως αυτή μετρήθηκε κλινικά, είχε σχέση με την αυθόρμητη χρήση των αριθμών στην καθημερινή ζωή, ενισχύοντας ακόμα περισσότερο τον ισχυρισμό ότι η τάση αυθόρμητης εστίασης στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης είναι μια γενική τάση του παιδιού να αναγνωρίζει και να χρησιμοποιεί τους αριθμούς σε πολλές και διαφορετικές καταστάσεις.

Συνοψίζοντας, αξίζει να σημειωθεί πως μελέτες που πραγματοποιήθηκαν, έδειξαν ότι η τάση αυτή αποτελεί προγνωστικό δείκτη των μαθηματικών δεξιοτήτων (Hannula & Lehtinen, 2005, Hannula, Lepola, Lehtinen, 2010), μπορεί να ενισχυθεί μέσω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Hannula, Mattinen, & Lehtinen, 2005) και τέλος μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων. Οι Hannula και συνεργάτες εξηγούν αυτό το εύρημα υποστηρίζοντας ότι τα παιδιά που εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα στην καθημερινή ζωή έρχονται σε επαφή με αριθμητικά χαρακτηριστικά καθημερινών καταστάσεων, είναι σε μεγαλύτερη ετοιμότητα και επωφελούνται περισσότερο από τη διδασκαλία σε σχέση με άλλα παιδιά. Ενδεχομένως, τα παιδιά τα οποία έχουν τέτοιου είδους ερεθίσματα στην καθημερινότητά τους και την ευκαιρία να αλληλοεπιδρούν περισσότερο σχετικά με το περιβάλλον τους, αναπτύσσουν περισσότερο την τάση εστίασης στην αριθμητικότητα.

Πρόσφατα, το πεδίο έρευνας των αυθόρμητων τάσεων εστίασης επεκτάθηκε ώστε να συμπεριλάβει την τάση αυθόρμητης εστίασης σε ποσοτικές σχέσεις (Spontaneous Focusing on Quantitative Relations, SFOR). Τον όρο εισήγαγαν οι Mc Mullen και συνεργάτες, ορίζοντας τις ποσοτικές σχέσεις ως σχέσεις δύο ή περισσότερων αντικειμένων, συνόλων ή συμβόλων, οι οποίες μπορούν να ποσοτικοποιηθούν ως προς ένα ή περισσότερα μεγέθη (Mc Mullen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2014). Αναφέρουν ότι ως ποσοτικές μπορούν να θεωρηθούν, μεταξύ άλλων, οι προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ συνεχών η διακριτών ποσοτήτων ή ακόμα και αριθμών.

Μια βασική διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στο SFON και στο SFOR είναι ότι το SFON αφορά το χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου (την αριθμητικότητα μιας συλλογής/συνόλου), ενώ στο SFOR εμπλέκονται δύο (τουλάχιστον) αντικείμενα και η μεταξύ τους σχέση (-εις).

Πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά, ήδη από τη νηπιακή ηλικία, έρχονται αντιμέτωπα με ποσοτικές σχέσεις μέσα στην καθημερινότητά τους και έχουν κάποιες πρώιμες ικανότητες σχετικά με αυτές (McMullen, 2014). Αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη της γνώσης των ρητών, διευκολύνοντας τη διαδικασία, ωστόσο κάτι τέτοιο δε φαίνεται πως συμβαίνει. Μαθητές ή και ενήλικοι, μετά από χρόνια ενασχόλησής τους με τα κλάσματα, ακόμα και μέσα από τυπικές μαθηματικές καταστάσεις, δείχνουν να αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες όταν καλούνται να ασχοληθούν με ρητούς αριθμούς (Vamvakoussi κ.ά., 2012). Αξίζει να σημειωθεί πως τα παιδιά στο δημοτικό σχολείο παρουσιάζουν σημαντικές ατομικές

διαφορές κατά την ανάπτυξη της γνώσης τους σχετικά με τα κλάσματα (Jordan κ.ά., 2013, McMullen κ.ά.).

Όπως ήδη έχει αναφερθεί παραπάνω, είναι πολύ δύσκολο να δημιουργηθούν τα κατάλληλα έργα, προκειμένου να επιτευχθεί η τάση αυθόρμητης εστίασης στην αριθμητικότητα (Hannula, 2005, Hannula-Sormunen). Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τα έργα που θέλουν να μελετήσουν την τάση αυθόρμητης εστίασης στις ποσοτικές σχέσεις (SFOR). Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να μπορέσει να γίνει αντιληπτή κάποια από τις δύο τάσεις, θα πρέπει τα έργα να είναι σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ανταποκρίνονται στις δυνατότητες όλων των συμμετεχόντων, προκειμένου να μπορούν να εστιάσουν και τελικά να δώσουν απάντηση σχετικά με τις μαθηματικές πτυχές που εμφανίζονται στα δοσμένα έργα. Επιπλέον, τα έργα θα πρέπει να κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε τα μαθηματικά τους νοήματα να δίνονται στα παιδιά με τη μορφή παιχνιδιού και όχι με τη μορφή τυπικού προβλήματος προσανατολισμένου στη μαθηματική σκέψη και κατ' επέκταση αντιμετώπιση. Επίσης, θα πρέπει να υπάρχουν σ' αυτά, τόσο μαθηματικά, όσο και εξω-μαθηματικά χαρακτηριστικά, που θα μπορέσουν να λειτουργήσουν ως περισπασμός, ώστε το υπό μελέτη αντικείμενο να μην είναι το μοναδικό χαρακτηριστικό στο οποίο θα μπορούν να εστιάσουν την προσοχή τους τα παιδιά. Τέλος, κατά την παρουσίαση των έργων δε θα πρέπει να γίνεται καμία αναφορά από τους εκπαιδευτικούς σχετικά με τις αριθμητικές ή ποσοτικές πτυχές των εκάστοτε έργων. Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με την τάση αυθόρμητης εστίασης στην αριθμητικότητα βασίζονταν σε έργα των οποίων η μαθηματική φύση δεν ήταν φανερή (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014).

Όσες έρευνες έχουν ασχοληθεί με την τάση SFON (π.χ. Hannula & Lehtinen, 2005) κατάφεραν και διαχώρισαν τις περιπτώσεις εκείνες των παιδιών που αυθόρμητα εστίασαν στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης και εκείνες που κατάφεραν να εντοπίσουν την αριθμητικότητα, αφού προηγουμένως, όμως, τους είχε δοθεί καθοδήγηση προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ομοίως, στόχος της έρευνας που πραγματοποίησαν οι McMullen, Hannula & Lehtinen (2014) και την οποία θα περιγράψουμε αναλυτικότερα παρακάτω, ήταν να καταφέρουν να κάνουν τη διάκριση μεταξύ εκείνων των παιδιών που αυθόρμητα εστίασαν και χρησιμοποίησαν τις ποσοτικές σχέσεις και εκείνων που το πετύχαν αυτό, αφού προηγουμένως, όμως, είχαν καθοδηγηθεί ώστε να λειτουργήσουν μ' αυτόν τον τρόπο. Επιδίωξαν να εντοπίσουν αν υπάρχουν ατομικές διαφορές ως προς την τάση

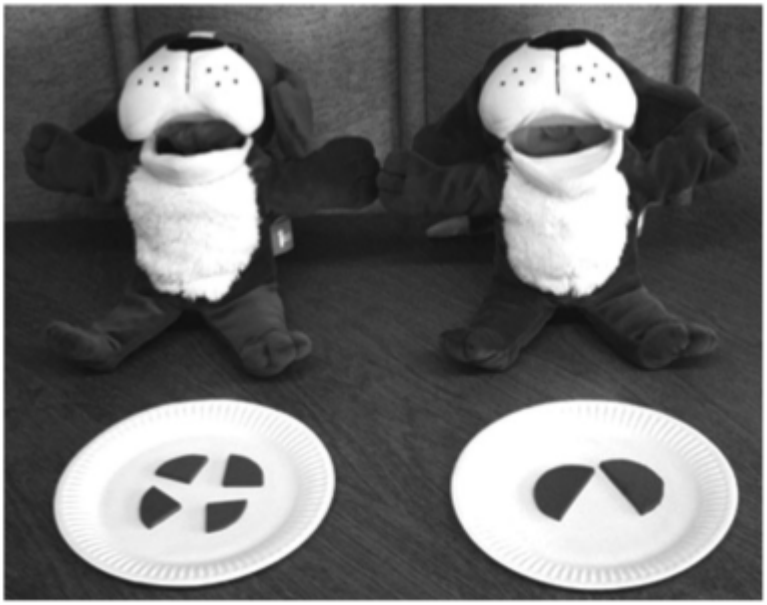
SFOR, ποια είναι η αιτία που τις δημιουργεί, αν αυτή η τάση συνδέεται με τις βασικές αριθμητικές δυνατότητες των παιδιών και αν οι μαθητές που έχουν την τάση να εστιάζουν αυθόρμητα στις ποσοτικές σχέσεις, στις πρώτες τάξεις του δημοτικού, συναντάνε λιγότερες δυσκολίες κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων, σε σχέση με εκείνους που δεν έχουν την ίδια τάση.

Οι συγκεκριμένοι ερευνητές πραγματοποίησαν δύο μελέτες, η μία εκ των οποίων πραγματοποιήθηκε σε 84 παιδιά, που ήταν μαθητές νηπιαγωγείου έως τρίτης τάξης, ενώ η δεύτερη μελέτη έγινε σε 25 μαθητές της τετάρτης τάξης, οι οποίοι συμμετείχαν σε άλλη έρευνα που είχαν πραγματοποιήσει οι McMullen κ.ά. τρία χρόνια νωρίτερα. Στην παρούσα εργασία θα περιγράψουμε την πρώτη από τις δύο παραπάνω μελέτες.

Πιο αναλυτικά, η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 84 μαθητές, 42 κορίτσια και 42 αγόρια, ενός σχολείου στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής. Η ηλικία τους κυμαινόταν από 5 έτη και 8 μήνες έως 9 έτη και 8 μήνες. Δεν είχαν κάποιο διαγνωσμένο νευρολογικό πρόβλημα, είτε πρόβλημα συγκέντρωσης ή εκμάθησης. Το πείραμα, το οποίο βιντεοσκοπήθηκε για όλα τα παιδιά, διήρκησε 25-40 λεπτά και έλαβε μέρος στο χώρο του σχολείου τους κατά την κανονική διάρκεια του σχολικού προγράμματος. Τόσο οι εκπαιδευτικοί, όσο και οι γονείς των μαθητών είχαν ενημερωθεί για τη μαθηματική φύση των έργων με τα οποία θα ασχολούνταν οι μαθητές και γνώριζαν ότι σκοπός τους ήταν να «μετρήσουν» τις δυνατότητες που έχουν τα παιδιά αναφορικά με τις ποσοτικές σχέσεις. Ωστόσο, τους είχε ζητηθεί να μην δώσουν καμία από τις παραπάνω πληροφορίες στα παιδιά. Τα έργα που δόθηκαν στους μαθητές ήταν δύο, σε καθένα από τα οποία τους ζητιόταν να κοιτάξουν προσεκτικά ό,τι έκαναν πρώτοι οι πειραματιστές και στη συνέχεια καλούνταν να ενεργήσουν όπως εκείνοι. Προκειμένου να εξεταστούν οι ατομικές διαφορές ως προς το χαρακτηριστικό της μελέτης, υπήρχαν τέσσερις προσπάθειες για κάθε έργο. Η σειρά τους ήταν η ίδια για όλα τα παιδιά και κατά τη διάρκειά τους δε δινόταν καμία πληροφορία από τους πειραματιστές σχετικά με την «απόδοσή» τους.

Στο πρώτο έργο, ο ερευνητής παρουσίαζε στα παιδιά δύο πανομοιότυπους λούτρινους σκύλους, τον Terry και τον Jerry (βλ. Εικόνα 2), οι οποίοι είχαν ύψος είκοσι εκατοστά και τρέφονταν με ψωμί φτιαγμένο από πλαστελίνη. Τους πληροφορούσε ότι οι δυο σκύλοι είναι δύο φίλοι που κάνουν πάντα ακριβώς τα ίδια πράγματα και έτσι και «τώρα θέλουν να φάνε το ίδιο μεζεδάκι». Αφού τους ενημέρωναν ότι άρεσε πολύ το ψωμί στα σκυλιά, τους παρουσίαζαν ένα ολόκληρο κομμάτι ψωμί και δύο πιάτα, τα οποία τοποθετούσαν πάνω στο τραπέζι, το ένα μπροστά τους και το άλλο μπροστά από

τα παιδιά. Τα πιάτα περιείχαν την ίδια ποσότητα ψωμιού και στο ίδιο χρώμα και σχήμα (κυκλικός δίσκος). Όμως, για παράδειγμα στην πρώτη προσπάθεια, μπροστά από το παιδί το ψωμί ήταν κομμένο σε τέσσερα ίσα μέρη, ενώ μπροστά από τον ερευνητή ήταν κομμένο σε δύο ίσα μέρη. Στην προσπάθεια αυτή, ο πειραματιστής έδινε ένα από τα δύο μισά στον ένα λούτρινο σκύλο, στη συνέχεια σταματούσε για ένα λεπτό, αναποδογύριζε το πιάτο που είχε μπροστά του, καλύπτοντας το κομμάτι που είχε περισσέψει και ζητούσε από το παιδί να δώσει στον Jerry, ακριβώς ότι είχε δώσει εκείνος στον Terry. Στο τέλος της προσπάθειας, ο ερευνητής έδιωχνε τα πιάτα από μπροστά τους, χωρίς να κάνει κανένα σχόλιο στο παιδί και προχωρούσαν στην επόμενη προσπάθεια.

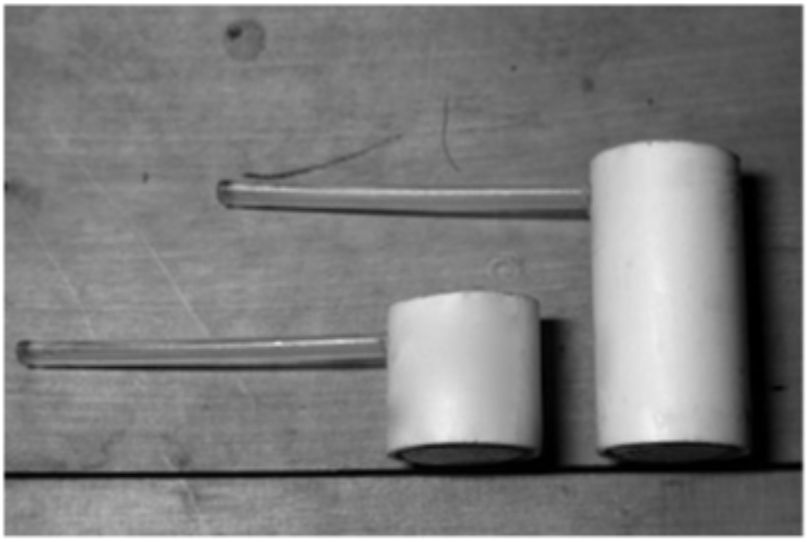


Εικόνα 2: Έργο μίμησης από McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014, σελ. 205

Στο επόμενο έργο, υπήρχαν δύο πανομοιότυπες λούτρινες μαϊμούδες, οι Glen και Gwen, ύψους είκοσι εκατοστών η καθεμία, οι οποίες τοποθετούνταν πάνω στο τραπέζι μπροστά από το παιδί και τον πειραματιστή. Υπήρχαν δύο διαφορετικά ζεύγη από κουτάλια, με τα οποία έτρωγαν ρύζι οι δύο μαϊμούδες. Στο πρώτο ζευγάρι, τα κουτάλια είχαν σχήμα κυλίνδρου, ήταν φτιαγμένα από πλαστικό και το μεγαλύτερο κουτάλι ήταν διπλάσιο από το μικρότερο (βλ. Εικόνα 3). Η διάμετρός του ήταν τρία εκατοστά, όπως και του μικρού, όμως το ύψος του ήταν έξι εκατοστά, ενώ το μικρό είχε ύψος τρία εκατοστά. Στο δεύτερο ζευγάρι, τα κουτάλια ήταν μεταλλικά πρίσματα σε σχήμα

ορθογωνίου. Το μεγαλύτερο από τα δύο κουτάλια ήταν τριπλάσιο από το μικρότερο. Πιο συγκεκριμένα, οι διαστάσεις του μικρού κουταλιού ήταν 2,5 εκ. x 2,5 εκ. x 2,66 εκ., ενώ του μεγάλου ήταν 2,5 εκ. x 2,5 εκ. x 8 εκ.

Ο ερευνητής ενημέρωνε τα παιδιά ότι οι δύο μαϊμούδες είχαν αδερφική σχέση και ήθελαν πάντα να τρώνε το ίδιο φαγητό. Τοποθετούσε πάνω στο τραπέζι, μπροστά από τις μαϊμούδες, δύο μεγάλα μπολ με ρύζι, τα οποία ήταν γεμάτα περίπου με τα δύο τρίτα της ποσότητας που χωρούσαν. Ανάμεσα στα λούτρινα ζώα και τα μπολ έβαζε δύο μικρότερα αδιαφανή μπολ. Τα πλαστικά κουτάλια ήταν τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ τους. Ο ερευνητής ενημέρωνε το παιδί ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν το συγκεκριμένο ζευγάρι και ότι οι κουταλιές θα πρέπει να είναι γεμάτες με ρύζι, γιατί έτσι θέλουν να τρώνε οι μαϊμούδες. Στην πρώτη προσπάθεια, το μικρότερο κουτάλι βρισκόταν στο μπολ με το ρύζι μπροστά από το παιδί, ενώ ο ερευνητής έπαιρνε το μεγαλύτερο κουτάλι και γέμιζε με ρύζι το άδειο μπολ, παροτρύνοντας το μαθητή να τον παρατηρήσει προσεκτικά προκειμένου να δώσει στην άλλη μαϊμού, ακριβώς το ίδιο με εκείνον. Όταν ολοκληρωνόταν αυτή η προσπάθεια, ο πειραματιστής, χωρίς να δώσει καμία πληροφορία και χωρίς να κάνει κανένα σχόλιο σχετικά με αυτό που μόλις είχε περατωθεί, απομάκρυνε το πρώτο ζευγάρι με τα πλαστικά κουτάλια και εμφάνιζε το δεύτερο ζευγάρι με τα μεταλλικά, προχωρώντας στην επόμενη προσπάθεια. Μετά το τέλος κάθε προσπάθειας, το παιδί δεν μπορούσε να δει ούτε πόσο ρύζι είχε βάλει εκείνο στο αδιαφανές μπολ, ούτε πόσο είχε τοποθετήσει ο ερευνητής.



Εικόνα 3: Έργο μίμησης από McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014, σελ. 205

Η παραπάνω μελέτη έδειξε πως υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα, χωρίς καθοδήγηση, σε τέτοιες σχέσεις, ενώ οι διαφορές αυτές σχετίστηκαν και με τις διαφορετικές ηλικίες των παιδιών. Γενικότερα, οι μαθητές στις απαντήσεις τους χρησιμοποίησαν τόσο μαθηματικές ιδέες, όπως είναι οι ποσοτικές σχέσεις και η αριθμητικότητα, όσο και μη μαθηματικές ιδέες.

Παρά το γεγονός ότι πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία αναπτύσσουν δεξιότητες οι οποίες σχετίζονται και με τις ποσοτικές σχέσεις, αποδεικνύεται ότι στην πράξη δεν τις χρησιμοποιούν αυθόρμητα με την ίδια ένταση και συχνότητα σε καταστάσεις στις οποίες δεν καθοδηγούνται, είτε από το ίδιο το πρόβλημα, είτε από κάποιον εξωτερικό παράγοντα, ώστε να πράξουν μ' αυτόν τον τρόπο (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014).

Επιπλέον, οι ατομικές διαφορές αυτές φαίνεται να έχουν επιπτώσεις στη μετέπειτα μαθησιακή πορεία των παιδιών στα μαθηματικά. Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, έχει αποδειχθεί πως υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης (Hannula & Lehtinen, 2005), οι οποίες σχετίζονται με την ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων τους σε μεγαλύτερη ηλικία. Οι ατομικές διαφορές που βρέθηκαν ότι υπάρχουν στην τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα στις ποσοτικές σχέσεις φαίνεται πως σχετίζονται με την ανάπτυξη της γνώσης και των ικανοτήτων τους που αφορούν τα κλάσματα (McMullen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2014). Πράγματι, τα παιδιά που εμφανίζονται να εστιάζουν αυθόρμητα στις ποσοτικές σχέσεις στην ηλικία των 6 ετών, εμφανίζουν και καλύτερη επίδοση στα κλάσματα, ιδιαίτερα σε έργα που εξετάζουν την εννοιολογική γνώση των κλασμάτων, 3 χρόνια αργότερα. Ένας λόγος που μπορεί να εξηγήσει το παραπάνω, είναι πως τα παιδιά που παρουσιάζουν ισχυρότερη την τάση SFOR, νιώθουν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση όταν χρησιμοποιούν τις ποσοτικές σχέσεις στην καθημερινότητά τους, έχουν περισσότερες ευκαιρίες τριβής με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις εκτός του σχολικού πλαισίου και, ενδεχομένως, εμφανίζουν μεγαλύτερη ετοιμότητα ώστε να επωφεληθούν από την τυπική διδασκαλία για τους ρητούς (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014).

Τέλος, μελέτες που έκαναν οι Hannula και συνεργάτες (2005) έδειξαν ότι η τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης που συναντάνε στην καθημερινή τους ζωή μπορεί να ενισχυθεί μέσα από κατάλληλες παρεμβάσεις και διδασκαλίες των εκπαιδευτικών τους. Με το ίδιο σκεπτικό, η διαμόρφωση κατάλληλων συνθηκών, μέσω των οποίων θα ενισχυθεί η τάση της

αυθόρμητης εστίασης των παιδιών στις ποσοτικές σχέσεις, θα μπορούσε να φανεί κάτι παραπάνω από ευεργετική κατά την εκμάθηση των κλασμάτων.

Συνοψίζοντας, παρόμοια με την αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα, φαίνεται να υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα στις ποσοτικές σχέσεις. Οι διαφορές αυτές σχετίζονται με μετέπειτα διαφορές στην κατανόηση των κλασμάτων. Σημειώνουμε ότι η μελέτη της τάσης αυτής έχει ενδιαφέρον τόσο ως βασική έρευνα, όσο και για τις ενδεχόμενες εκπαιδευτικές εφαρμογές, δεδομένου ότι η τάση αυτή θα μπορούσε να ενισχυθεί στη διδασκαλία.

1.3 Τι συμβαίνει όταν η αριθμητικότητα ανταγωνίζεται τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

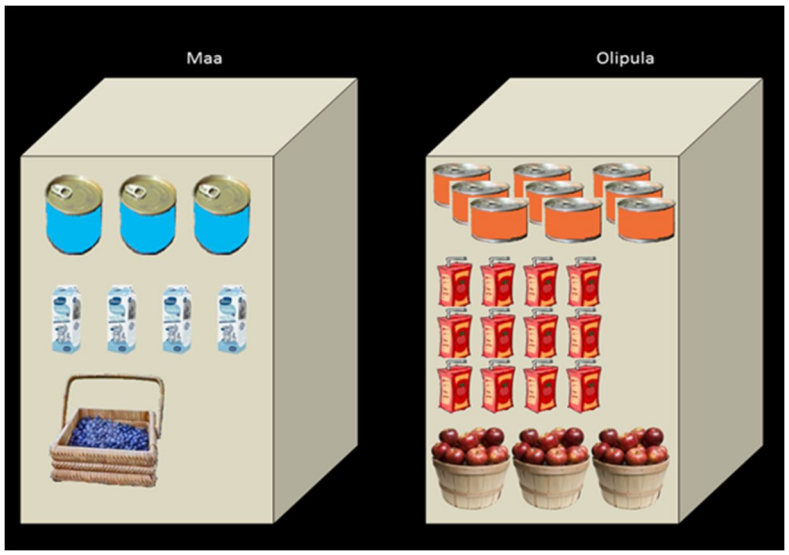
Η παρούσα έρευνα διερευνά την αυθόρμητη τάση εστίασης παιδιών της πρώτης σχολικής ηλικίας σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ συνεχών ποσοτήτων. Πρόκειται για μια ειδική περίπτωση του SFOR στην οποία εστιάζουμε για δύο λόγους: Ο πρώτος είναι ότι οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις σχετίζονται άμεσα με τους ρητούς αριθμούς, επομένως ενδεχόμενες ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη εστίαση σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις μπορεί να αποδειχθεί ισχυρότερος προβλεπτικός παράγοντας της μετέπειτα επίδοσης στους ρητούς (σε σχέση με την εστίαση π.χ. σε προσθετικές σχέσεις). Ο δεύτερος και σημαντικότερος για την παρούσα έρευνα, αφορά στους περιορισμούς που παρουσιάζουν τα έργα που χρησιμοποίησαν οι McMullen και συνεργάτες (π.χ. McMullen, 2014; McMullen, Hannula-Sormunen και Lehtinen, 2014), στα οποία η αριθμητικότητα ανταγωνίζεται τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Για παράδειγμα, στο πείραμα με τους λούτρινους σκύλους, το οποίο αναλύθηκε παραπάνω, μπροστά από τον ερευνητή το «μεζεδάκι» του σκύλου ήταν κομμένο σε δύο ίσα μέρη, ενώ μπροστά από το παιδί ήταν κομμένο σε τέσσερα ίσα μέρη. Πολλά παιδιά αυτής της ηλικίας θα εστίαζαν στο πλήθος των κομματιών, αγνοώντας το σχετικό τους μέγεθος (δηλαδή, θα φρόντιζαν ώστε οι δύο σκύλοι να πάρουν το ίδιο πλήθος από κομμάτια, ανεξάρτητα από το μέγεθός τους). Σε αυτή την περίπτωση, η εστίαση στην αριθμητικότητα οδηγεί σε αγνόηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης.

Επιπλέον, αν το παιδί επέλεγε, δύο από τα τέσσερα κομμάτια που είχε μπροστά του για να ταιριάξει με το μισό κομμάτι του ερευνητή, δεν είναι σαφές αν εστίασε σε

πολλαπλασιαστική ή προσθετική σχέση. Συγκεκριμένα, από την επιλογή του παιδιού, μπορούσε να γεννηθεί το εξής ερώτημα: το παιδί επέλεξε τα συγκεκριμένα κομμάτια επειδή εστίασε αυθόρμητα στην πολλαπλασιαστική σχέση, δηλαδή κατάλαβε ότι το ένα κομμάτι του ερευνητή είναι ίσο με το διπλάσιο κάθε κομματιού που έχει μπροστά του ή επειδή εστίασε στην προσθετική σχέση, δηλαδή θεώρησε ότι αν προσθέσει δύο κομμάτια δικά του, τότε θα έχει ένα του πειραματιστή;

Επίσης, σε άλλη έρευνα που αναφέρεται στο McMullen (2014), ο ερευνητής πραγματοποίησε πείραμα σε 263 μαθητές, χρησιμοποιώντας το έργο της «τηλεμεταφοράς». Το σενάριο ήταν ότι έχει κατασκευαστεί μια μηχανή τηλεμεταφοράς, αλλά δεν έχει τελειοποιηθεί ακόμα και τα αντικείμενα δε μεταφέρονται σωστά. Ο ερευνητής μοίραζε στους μαθητές μια εικόνα (βλ. Εικόνα 4 για ένα παράδειγμα) και τους ζητούσε να του περιγράψουν πώς άλλαξε η μηχανή τα αντικείμενα που απεικονίζονταν στην εικόνα. Στη συνέχεια τους ζητούσε να ζωγραφίσουν πως θα μεταφερόταν μια δεύτερη σειρά από αντικείμενα, βασιζόμενοι στην προηγούμενη δοκιμασία. Αξίζει να αναφερθεί ότι το έργο είχε σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν πολλά κριτήρια, στα οποία θα μπορούσαν τα παιδιά να εστιάσουν την προσοχή τους, όπως για παράδειγμα το σχήμα, το χρώμα, το ακριβές πλήθος και τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Ωστόσο, και σε αυτό το έργο δεν είναι ξεκάθαρος ο ρόλος της εστίασης στην αριθμητικότητα στις απαντήσεις των παιδιών. Για παράδειγμα, δεν μπορεί να αποκλειστεί το ενδεχόμενο ένα παιδί που ανάφερε την πολλαπλασιαστική σχέση στην απάντησή του, να χρειάστηκε να μετρήσει πρώτα τα αντικείμενα.

Συνοψίζοντας, με τα έργα που χρησιμοποίησαν οι McMullen και συνεργάτες δεν είναι δυνατόν να διαχωριστεί η αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα, από την αυθόρμητη τάσης εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ενώ είναι πιθανό η πρώτη τάση να ανταγωνίζεται τη δεύτερη.



Εικόνα 4: Έργο κατασκευής από McMullen, 2014 (αποκτήθηκε μετά από προσωπική επικοινωνία)

Στόχος της συγκεκριμένης έρευνας είναι η μελέτη και η εξέταση της τάσης που έχουν τα παιδιά μικρής ηλικίας να εστιάζουν αυθόρμητα στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Για το λόγο αυτό, λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, ο σχεδιασμός των έργων έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε η αριθμητικότητα να μην εμπλέκεται στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, προκειμένου να γίνεται φανερό από τις απαντήσεις των μαθητών σε ποιο χαρακτηριστικό εστιάζουν αυθόρμητα, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα σύγχυσης των δύο τάσεων, SFON και SFOR. Το βασικό ερευνητικό ερώτημα είναι κατά πόσο υπάρχουν ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, υπό αυτήν τη συνθήκη.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1 Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα Δημοτικό Σχολείο στην περιοχή των Θρακομακεδόνων. Συμμετείχαν 17 παιδιά που φοιτούσαν στην πρώτη τάξη (μέση ηλικία: 6,9 έτη), εκ των οποίων 12 ήταν αγόρια και 5 κορίτσια. Αξίζει να αναφερθεί πως ένα από τα κορίτσια επαναλάμβανε την πρώτη δημοτικού και ένα από τα αγόρια παρακολουθούσε το τμήμα ένταξης του σχολείου, κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Το σχολείο είναι δημόσιο και η μητρική γλώσσα των παιδιών είναι η ελληνική. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε σε μια αίθουσα του σχολείου, κατά τη διάρκεια του κανονικού προγράμματος των παιδιών.

2.2 Ερευνητικά έργα και υλικά

Σχεδιάστηκαν δύο έργα, με τέσσερις δοκιμές το καθένα. Το πρώτο έργο (E_1) αφορούσε σχέσεις μεταξύ μηκών (1:2, 1:4) και δινόταν στα παιδιά μέσω μιας ιστορίας. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχε ένας κεντρικός χαρακτήρας, ξωτικό ή νεράιδα, χρωματισμένα και τα δύο με πράσινο χρώμα (βλ. Εικόνα 5), η επιλογή του οποίου γινόταν από τα ίδια τα παιδιά (όλα τα αγόρια επέλεξαν το ξωτικό, ενώ όλα τα κορίτσια επέλεξαν τη νεράιδα). Η ιστορία έχει ως εξής: Κάθε χρόνο ο ήρωας αυτός φτιάχνει ένα μαγικό φίλτρο που κάνει τα δέντρα να βγάζουν καινούρια πράσινα φύλλα. Φέτος, όμως, ένας άτακτος νάνος του/της έκανε μια φάρσα: πήγε και ανακάτεψε τα πράγματα στο εργαστήριό του/της, με αποτέλεσμα το ξωτικό/ η νεράιδα να μην μπορεί να βρει τα συστατικά του μαγικού φίλτρου. Το μόνο που μπορεί να τον/την βοηθήσει είναι κάτι ασπρόμαυρες φωτογραφίες που υπάρχουν με τα ζητούμενα αντικείμενα από την προηγούμενη χρονιά. Τα παιδιά καλούνταν να εντοπίσουν το ζητούμενο αντικείμενο, σύμφωνα με την ασπρόμαυρη φωτογραφία.

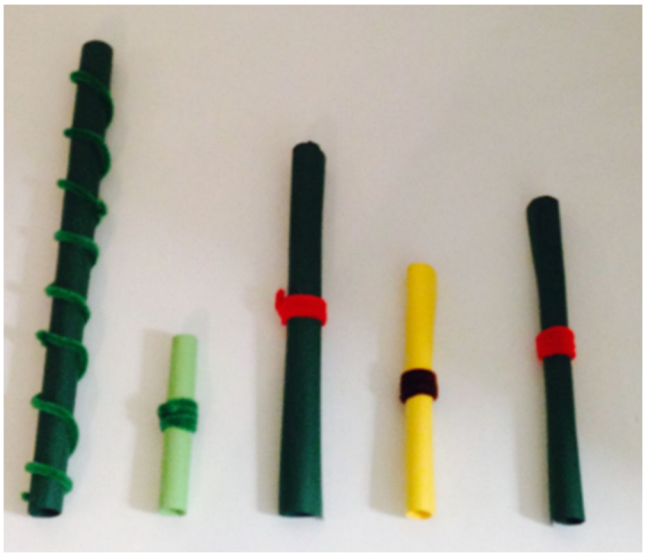
Εικόνα 5: Οι χαρακτήρες του Έργου 1.

Όσον αναφορά το δεύτερο έργο, αρχικά παρουσίαζα στα παιδιά μια φωτογραφία από ένα μόμπιλο με γεωμετρικά σχήματα (βλ. Εικόνα 14). Τους εξηγούσα αναλυτικά τι είναι αυτό που βλέπουν, τους έδειχνα τη μαύρη κουκκίδα από την οποία περνούσε ο σπάγκος και τους καθιστούσα σαφές ότι η κουκκίδα αυτή πρέπει να βρίσκεται στο πάνω μέρος, διευκρίνιση ιδιαίτερα σημαντική για την πρώτη και δεύτερη δοκιμή, στις οποίες εμπλεκόταν ο προσανατολισμός της ευθείας γραμμής. Στη συνέχεια τους ζητούσα να με βοηθήσουν να κατασκευάσω ένα τέτοιο μόμπιλο και το πείραμα ξεκινούσε.

Για την κάθε δοκιμή κατασκευάστηκαν πέντε αντικείμενα, ένα από τα οποία λειτουργούσε ως αντικείμενο αναφοράς. Στα υπόλοιπα αντικείμενα, οι δύο διαστάσεις ήταν σταθερές, ενώ η τρίτη (μήκος) μεταβαλλόταν σε σχέση με αυτήν του αντικειμένου αναφοράς (βλ. Εικόνα 6 για παράδειγμα). Στη συνέχεια τραβήχτηκαν ασπρόμαυρες φωτογραφίες του αντικειμένου αναφοράς και του ζητούμενου αντικειμένου, για κάθε δοκιμή (βλ. Εικόνες 10–13).

Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη δοκιμή *(Συνταγή)* (βλ. Εικόνα 6), το αντικείμενο αναφοράς ήταν το μαγικό ραβδί του χαρακτήρα. Το ζητούμενο αντικείμενο ήταν η συνταγή του φίλτρου σε σχέση 1:2 του ραβδιού. Αφού κατασκεύασα το ραβδί από σκούρο πράσινο χαρτί κανσόν, ύψους 36 εκατοστών, έβαλα γύρω – γύρω, σαν γιρλάντα, πράσινο συρματάκι πίπας. Στη συνέχεια έφτιαξα με χαρτί κανσόν τις τέσσερις συνταγές από τις οποίες έπρεπε να διαλέξει ο μαθητής. Η μία ήταν σκούρο

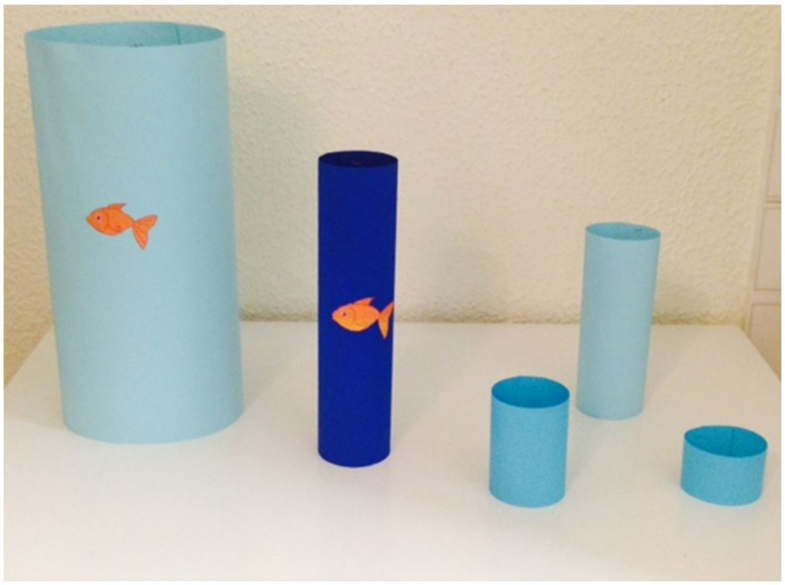
πράσινο, με κόκκινο συρματάκι, μήκους 24 εκατοστών, δηλαδή αντιστοιχούσε στα $\frac{2}{3}$ του ραβδιού. Η επόμενη ήταν πράσινο ανοιχτό με σκούρο πράσινο συρματάκι, μήκους 12 εκατοστών, δηλαδή αντιστοιχούσε στο $\frac{1}{3}$ του ραβδιού. Η τρίτη συνταγή ήταν ανοιχτό κίτρινο με καφέ συρματάκι, μήκους 18 εκατοστών, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ του ραβδιού. Η τέταρτη και τελευταία συνταγή ήταν στο ίδιο χρώμα με το αντικείμενο αναφοράς με κόκκινο, όμως, συρματάκι και αντιστοιχούσε στα $\frac{3}{4}$ του ραβδιού.



Εικόνα 6: Η 1η δοκιμή του Έργου 1.

Στη δεύτερη δοκιμή *(Νερό)* (βλ. Εικόνα 7), το αντικείμενο αναφοράς ήταν το δοχείο με νερό από την πηγή του δάσους. Το ζητούμενο αντικείμενο ήταν ένα ποτήρι με νερό πηγής σε σχέση 1:4 με το δοχείο αναφοράς. Αρχικά, έφτιαξα το μεγάλο δοχείο αναφοράς με γαλάζιο ανοιχτό κανσόν χαρτί, ύψους 32 εκατοστών και στη συνέχεια έκοψα και κόλλησα πάνω σ' αυτό ένα πορτοκαλί ψάρι. Έπειτα, κατασκεύασα, χρησιμοποιώντας χαρτί κανσόν, τα ποτήρια από τα οποία καλούνταν να διαλέξει το παιδί. Το ένα ήταν το ίδιο χρώμα με το δοχείο αναφοράς, αλλά είχε το μισό ύψος από αυτό, αντιστοιχούσε δηλαδή στο $\frac{1}{2}$ του αντικειμένου αναφοράς. Το επόμενο ήταν ένα μπλε ποτήρι με πορτοκαλί ψαράκι, ύψους 24 εκατοστών, το οποίο αντιστοιχούσε στα $\frac{2}{3}$ το δοχείου. Το τρίτο ποτήρι ήταν σκούρο γαλάζιο, χωρίς ψαράκι, ύψους 8

εκατοστών και αντιστοιχούσε στο $\frac{1}{4}$ του αντικειμένου αναφοράς. Το τέταρτο και τελευταίο ποτήρι που είχε την ίδια απόχρωση με το τρίτο και ύψος 4 εκατοστά, αντιστοιχούσε στο $\frac{1}{8}$ του μεγάλου δοχείου. Τόσο τα ποτήρια, όσο και το δοχείο αναφοράς ήταν κυλινδρικού σχήματος. Τα ποτήρια είχαν την ίδια ακτίνα βάσης, ενώ το αντικείμενο αναφοράς είχε μεγαλύτερη ακτίνα από εκείνα.



Εικόνα 7: Η 2η δοκιμή του Έργου 1.

Στην τρίτη δοκιμή *(Χυμός)* (βλ. Εικόνα 8), το αντικείμενο αναφοράς ήταν ένα δοχείο με χυμό αγριοκέρασο. Το ζητούμενο αντικείμενο ήταν ένα ποτήρι με χυμό σε σχέση 1:2 με το δοχείο αναφοράς. Αρχικά κατασκεύασα το μεγάλο δοχείο αναφοράς με κανσόν χαρτί σε απόχρωση σκούρο πράσινο, ύψους 24 εκατοστών και στη συνέχεια έκοψα και κόλλησα πάνω σ' αυτό δύο κόκκινα κεράσια. Έπειτα, έφτιαξα, χρησιμοποιώντας χαρτί κανσόν, τα ποτήρια από τα οποία καλούνταν να επιλέξει το παιδί. Το πρώτο ποτήρι ήταν κόκκινο και είχε ύψος 16 εκατοστά, αντιστοιχούσε, δηλαδή, στα $\frac{2}{3}$ του μεγάλου δοχείου. Το επόμενο ήταν ένα ποτήρι με κερασάκια, είχε το ίδιο χρώμα με το αντικείμενο αναφοράς και ύψος 6 εκατοστά, αντιστοιχούσε δηλαδή, στο $\frac{1}{4}$ του μεγάλου δοχείου. Το τρίτο ποτήρι ήταν καφέ και είχε το μισό ύψος από το δοχείο αναφοράς. Το τελευταίο ήταν ένα ποτήρι με κερασάκια, είχε το ίδιο

χρώμα με το μεγάλο δοχείο και ύψος 18 εκατοστά, δηλαδή αντιστοιχούσε στα $\frac{3}{4}$ του αντικειμένου αναφοράς. Όπως και στη δεύτερη δοκιμή, έτσι και στην τρίτη, τόσο τα ποτήρια, όσο και το δοχείο αναφοράς ήταν κυλινδρικού σχήματος. Τα ποτήρια είχαν την ίδια ακτίνα βάσης, ενώ το αντικείμενο αναφοράς είχε μεγαλύτερη ακτίνα από εκείνα.

Εικόνα 8: Η 3η δοκιμή του Έργου 1.

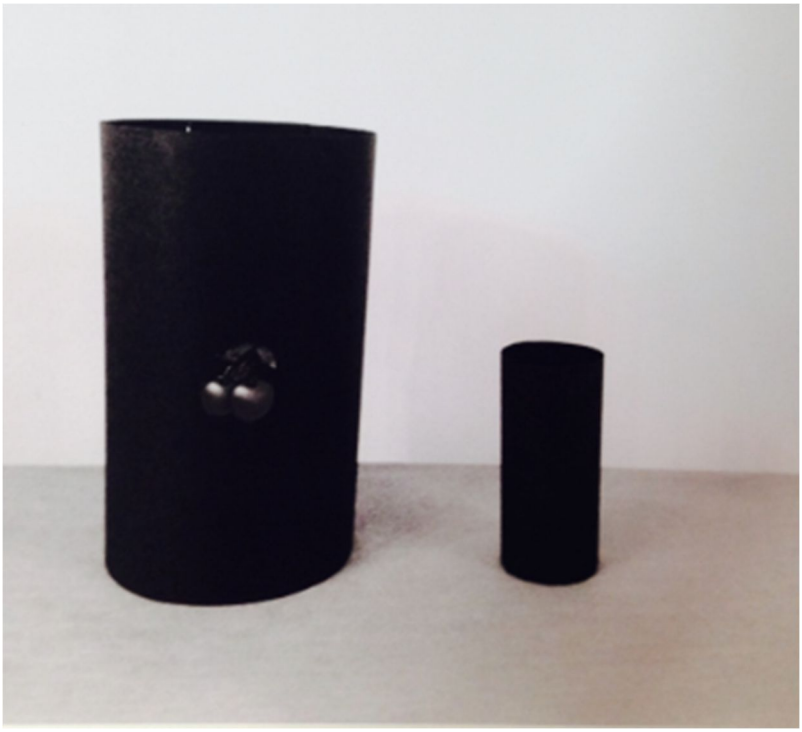
Τέλος, στην τέταρτη δοκιμή (βλ. Εικόνα 9), το αντικείμενο αναφοράς ήταν ένα κλαδί βελανιδιάς. Το ζητούμενο αντικείμενο ήταν ένα κομμάτι από ρίζα βελανιδιάς, σε σχέση 1:4 με το κλαδί αναφοράς. Ξεκινώντας, αξίζει να αναφερθεί ότι όλα τα αντικείμενα, κλαδί και ρίζες βελανιδιάς, είχαν το ίδιο πλάτος και άλλαζε μόνο το ύψος τους. Πιο συγκεκριμένα, για το κλαδί αναφοράς χρησιμοποίησα χαρτί κανσόν, σε σχήμα κυλίνδρου, ύψους 36 εκατοστών, το οποίο τύλιξα με σκούρο γκρι γκοφρέ χαρτί. Στη συνέχεια έκοψα και κόλλησα πάνω του, τέσσερα φύλλα κατασκευασμένα από σκούρο πράσινο χαρτί κανσόν. Έπειτα, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, κατασκεύασα μια ρίζα ύψους 18 εκατοστών, την οποία «έντυσα» με γκοφρέ χαρτί, ίδιου χρώματος με το κλαδί αναφοράς. Αυτή αντιστοιχούσε στο $\frac{1}{2}$ του αντικειμένου αναφοράς. Η επόμενη ρίζα είχε ύψος 24 εκατοστά, αντιστοιχούσε, δηλαδή, στα $\frac{2}{3}$ του κλαδιού αναφοράς και ήταν «ντυμένη» με γκοφρέ χαρτί χρώματος καφέ. Στην ίδια απόχρωση έφτιαξα μια ρίζα που αντιστοιχούσε στο $\frac{1}{9}$ του κλαδιού, είχε δηλαδή ύψος 4 εκατοστά. Η τελευταία

ρίζα, είχε ύψος 9 εκατοστά, αντιστοιχούσε δηλαδή στο $\frac{1}{4}$ του αντικειμένου αναφοράς και την είχα τυλίξει με γκοφρέ χαρτί χρώματος λαδί.

Εικόνα 9: Η 4η δοκιμή του Έργου 1.

Εικόνα 10: Ασπρόμαυρη φωτογραφία στη δοκιμή *Συνταγή*.

Εικόνα 11: Ασπρόμαυρη φωτογραφία στη δοκιμή *Νερό*.



Εικόνα 12: Ασπρόμαυρη φωτογραφία στη δοκιμή *Χυμός*.

Εικόνα 13: Ασπρόμαυρη φωτογραφία στη δοκιμή *Ρίζα.*

Το δεύτερο έργο αφορούσε σχέσεις μεταξύ επιφανειών (1:2, 1:4). Όπως και στο πρώτο έργο, έτσι και σ' αυτό, υπήρχαν συνολικά τέσσερις προσπάθειες για κάθε παιδί, σε καθεμία από τις οποίες τους ζητούσα να διαλέξουν μεταξύ διαφόρων σχημάτων, προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα μόμπιλο με γεωμετρικά σχήματα.

Εικόνα 14: Μόμπιλο με γεωμετρικά σχήματα

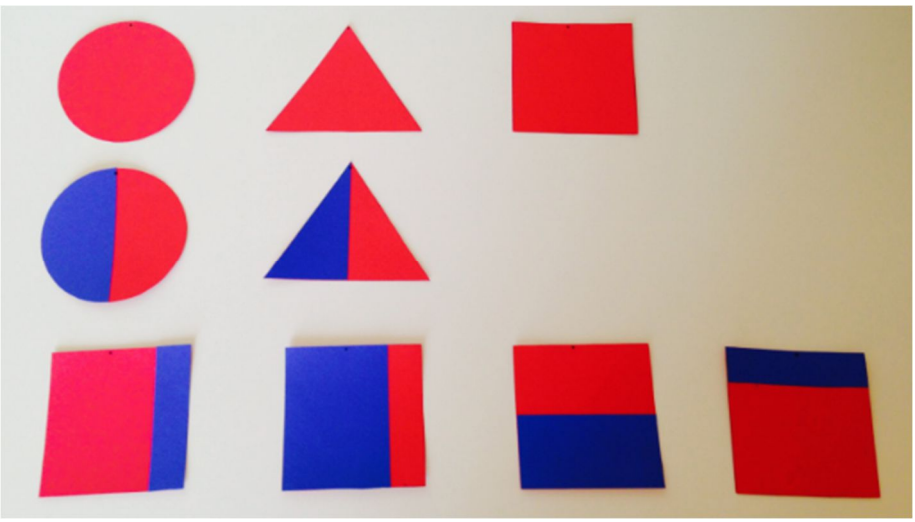
Όλα τα σχήματα στο δεύτερο έργο ήταν κατασκευασμένα από χαρτί κανσόν. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη δοκιμή (Εικόνα 15), στην πρώτη σειρά, υπήρχαν τρία διαφορετικά σχήματα, σε κόκκινο χρώμα όλα, ένας κύκλος ακτίνας 5,5 εκατοστών, ένα τρίγωνο με πλευρές 11,8 εκατοστά η καθεμία και βάση 12,7 εκατοστά και τέλος ένα τετράγωνο πλευράς 10 εκατοστών. Στη δεύτερη σειρά, στην πρώτη στήλη με τον κύκλο, η επιλογή γινόταν από μένα, ανάμεσα από τέσσερις διαφορετικούς κύκλους, ίδιας ακτίνας με τον κόκκινο, οι οποίοι όμως είχαν δύο χρώματα, κόκκινο και μπλε. Σε καθέναν από αυτούς ήταν διαφορετική η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια. Στον έναν από τους τέσσερις κύκλους ήταν εμφανώς μεγαλύτερη η μπλε επιφάνεια, στον άλλον η μπλε και η κόκκινη επιφάνεια ήταν ακριβώς ίσες, ενώ στους άλλους δύο η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη. Η διαφορά των δύο τελευταίων κύκλων ήταν η θέση που βρισκόταν η μπλε επιφάνεια, καθώς στον έναν ήταν στο δεξιό μέρος του κύκλου, ενώ στον άλλο στο κάτω μέρος του. Στη δεύτερη στήλη της ίδιας προσπάθειας, με το τρίγωνο, επέλεγα ανάμεσα από τέσσερα διαφορετικά τρίγωνα, ακριβώς ίδιων διαστάσεων με το αρχικό κόκκινο, τα οποία όμως είχαν δύο χρώματα, κόκκινο και μπλε. Σε καθένα από αυτά ήταν διαφορετική η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια. Ακολουθώντας την ίδια λογική με τον κύκλο, σε δύο από τα τέσσερα τρίγωνα η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη επιφάνεια και το μόνο που άλλαζε ήταν το μέρος που βρισκόταν κάθε φορά, καθώς στο ένα, το μπλε κομμάτι ήταν στο πάνω μέρος του τριγώνου, ενώ στο άλλο, ήταν στο δεξιό μέρος του. Στο ένα από τα υπόλοιπα δύο σχήματα, η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη, ενώ στο άλλο οι δύο επιφάνειες, μπλε και κόκκινη, ήταν ίσες. Στην τρίτη και τελευταία στήλη με το τετράγωνο, όπου η επιλογή του σχήματος γινόταν από τα παιδιά, αυτά είχαν να διαλέξουν ανάμεσα από τέσσερα τετράγωνα ίδιων διαστάσεων με το αρχικό κόκκινο, τα οποία, όμως, όπως και προηγουμένως, είχαν δύο χρώματα. Η διαφορά ήταν στη σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια. Όπως συνέβαινε και με τις άλλες δύο στήλες, έτσι και σ'αυτήν, σε δύο από τα τέσσερα σχήματα η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη και συγκεκριμένα, στο ένα σχήμα αυτή βρισκόταν στο πάνω μέρος του τετραγώνου, ενώ στο άλλο ήταν στο δεξιό μέρος του. Στο ένα από τα υπόλοιπα δύο σχήματα, η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη, ενώ στο άλλο, οι δύο επιφάνειες, μπλε και κόκκινη, ήταν ακριβώς ίσες. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις δύο πρώτες στήλες στα σχήματα, όπου οι δύο επιφάνειες ήταν ίσες, η γραμμή που τις χώριζε ήταν κάθετη, δηλαδή η μπλε επιφάνεια βρισκόταν στο αριστερό μέρος και η κόκκινη

στο δεξιό μέρος. Αντίθετα, στην τελευταία στήλη η ευθεία που χώριζε τις δύο επιφάνειες ήταν οριζόντια, δηλαδή η μπλε ήταν στο κάτω μέρος και η κόκκινη στο πάνω μέρος του τετραγώνου. Τέλος, τα σχήματα που επέλεξα σ' αυτήν την προσπάθεια στις δύο πρώτες στήλες, ήταν εκείνα στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια ήταν 1:2.

1η σειρά

2η σειρά

3η σειρά επιλογές



Εικόνα 15: Η 1η δοκιμή του Έργου 2.

Στη δεύτερη δοκιμή (Εικόνα 16), στην πρώτη σειρά υπήρχαν τρία σχήματα κόκκινου χρώματος όλα. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ένα εκ των οποίων είχε μήκος 12 εκατοστά και πλάτος 4 εκατοστά και το άλλο είχε μήκος 7 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά. Το τρίτο σχήμα ήταν ένα τετράγωνο πλευράς 10 εκατοστών. Στη δεύτερη σειρά, στην πρώτη στήλη με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους 12 εκατοστών, η επιλογή γινόταν από μένα ανάμεσα από τέσσερα παραλληλόγραμμα ίδιων διαστάσεων με το αρχικό κόκκινο, στα οποία άλλαζε η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα, σ' ένα από τα τέσσερα σχήματα η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη, σ' ένα από τα υπόλοιπα η μπλε επιφάνεια κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής, δηλαδή ήταν πολύ μικρότερη από την κόκκινη επιφάνεια, ενώ στα άλλα δύο σχήματα οι δύο επιφάνειες ήταν ίσες. Η διαφορά παρουσιαζόταν στο γεγονός ότι στο ένα από αυτά η μπλε επιφάνεια βρισκόταν στο δεξιό μέρος, ενώ στο άλλο ήταν στο αριστερό μέρος. Στη δεύτερη στήλη της ίδιας προσπάθειας με το ορθογώνιο

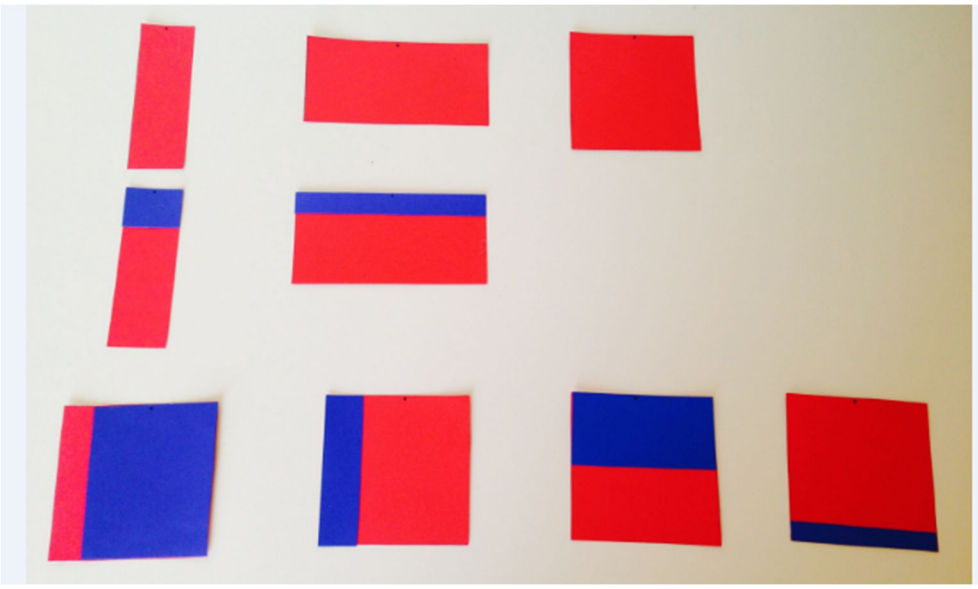
παραλληλόγραμμο μήκους 7 εκατοστών, επέλεγα ανάμεσα από τέσσερα παραλληλόγραμμα ίδιων διαστάσεων με το αρχικό κόκκινο, στα οποία άλλαζε η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική. Αναλυτικότερα, σ' ένα από τα τέσσερα ορθογώνια οι δύο επιφάνειες, μπλε και κόκκινη, ήταν ίσες, σ' ένα από τα υπόλοιπα η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη, ενώ στα άλλα δύο η μπλε ήταν μικρότερη από την κόκκινη επιφάνεια. Η διαφορά τους ήταν ότι σ' ένα από αυτά τα δύο παραλληλόγραμμα το μπλε κομμάτι βρισκόταν στο πάνω μέρος και κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής επιφάνειας, ενώ στο άλλο, το μπλε κομμάτι βρισκόταν στο κάτω μέρος του ορθογωνίου και κάλυπτε το $\frac{1}{8}$ της συνολικής επιφάνειας. Στην τρίτη και τελευταία στήλη με το τετράγωνο, η επιλογή του σχήματος γινόταν από τα παιδιά ανάμεσα από τέσσερα τετράγωνα ίδιων διαστάσεων με το αρχικό κόκκινο, στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική ήταν διαφορετική. Πιο συγκεκριμένα, σε δύο από αυτά η μπλε επιφάνεια ήταν πολύ μικρότερη από την κόκκινη. Η διαφορά αυτών των δύο ήταν ότι στο ένα, το μπλε κομμάτι βρισκόταν στο κάτω μέρος του τετραγώνου, ενώ στο άλλο η μπλε επιφάνεια βρισκόταν στο αριστερό μέρος του σχήματος και κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής επιφάνειας. Υπήρχε ένα σχήμα, στο οποίο οι δύο επιφάνειες ήταν ίσες, ενώ στο τελευταίο, η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις δύο πρώτες στήλες στα σχήματα, όπου η μπλε επιφάνεια που κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής, βρισκόταν στο πάνω μέρος του σχήματος, ενώ στην τελευταία στήλη η μπλε επιφάνεια που κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής, βρισκόταν στο αριστερό μέρος του τετραγώνου. Τέλος, σ' αυτήν την προσπάθεια, τα σχήματα που επέλεξα στις δύο πρώτες στήλες ήταν εκείνα, στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική ήταν 1:4.

1η σειρά

2η σειρά

3η σειρά

επιλογές



Εικόνα 16: Η 2η δοκιμή του Έργου 2.

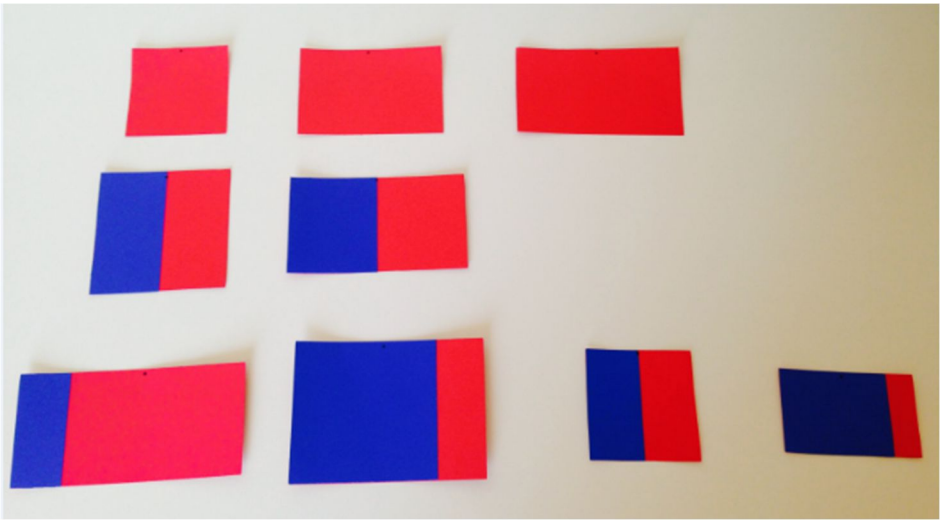
Στην τρίτη δοκιμή (Εικόνα 17), στην πρώτη σειρά υπήρχαν τρία σχήματα κόκκινου χρώματος. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ένα εκ των οποίων είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 12 εκατοστά και το άλλο είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά. Το τρίτο σχήμα ήταν ένα τετράγωνο πλευράς 8 εκατοστών. Στη δεύτερη σειρά, στην πρώτη στήλη με το τετράγωνο, η επιλογή γινόταν από μένα ανάμεσα από τέσσερα διαφορετικά σχήματα στα οποία οι διαφορές εντοπίζονταν τόσο στις διαστάσεις τους, όσο και στη σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχε ένα τετράγωνο πλευράς 6 εκατοστών, στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη και ένα τετράγωνο πλευράς 10 εκατοστών, στο οποίο οι δύο επιφάνειες, μπλε και κόκκινη, ήταν ίσες. Τα υπόλοιπα δύο σχήματα ήταν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ένα εκ των οποίων είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 12 εκατοστά, όπου η μπλε επιφάνεια ήταν πολύ μικρότερη από την κόκκινη και το άλλο είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά, στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν μεγαλύτερη από την κόκκινη. Στη δεύτερη στήλη, της ίδιας προσπάθειας, με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους 12 εκατοστών, επέλεγα ανάμεσα από τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα τετράγωνο. Αναλυτικότερα, το ένα ορθογώνιο είχε μήκος 6 εκατοστά και πλάτος 10 εκατοστά, στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη, το άλλο ορθογώνιο είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά, στο οποίο οι δύο επιφάνειες ήταν ίσες, ενώ το τρίτο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είχε μήκος 10

εκατοστά και πλάτος 12 εκατοστά, όπου η μπλε επιφάνεια ήταν μικρότερη από την κόκκινη. Τέλος, το τετράγωνο είχε πλευρά 10 εκατοστά και σ' αυτό η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη επιφάνεια. Στην τελευταία στήλη της συγκεκριμένης προσπάθειας, επέλεγαν τα παιδιά ανάμεσα από τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα τετράγωνο. Αναλυτικότερα, το ένα ορθογώνιο είχε μήκος 6 εκατοστά και πλάτος 10 εκατοστά, όπου η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη, το άλλο ορθογώνιο είχε μήκος 8 εκατοστά, πλάτος 16 εκατοστά και η μπλε επιφάνεια ήταν πολύ μικρότερη από την κόκκινη, ενώ το τρίτο ορθογώνιο είχε μήκος 10 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά. Σ' αυτό, το μεγαλύτερο μέρος κάλυπτε η μπλε επιφάνεια. Τέλος, στο τετράγωνο πλευράς 8 εκατοστών, οι δύο επιφάνειες, μπλε και κόκκινη, ήταν ίσες. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις δύο πρώτες στήλες, τα σχήματα που επέλεξα ήταν ίδιου σχήματος με το αρχικό κόκκινο, είχαν μόνο διαφορετικές διαστάσεις και ήταν εκείνα στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια ήταν 1:2. Ωστόσο, στην τρίτη στήλη, όπου επέλεγαν οι μαθητές, η υπό μελέτη σχέση βρισκόταν στο τετράγωνο και όχι σε κάποια από τα τρία ορθογώνια, δηλαδή σε διαφορετικό σχήμα από το αρχικό κόκκινο.

1η σειρά

2η σειρά

3η σειρά επιλογές



Εικόνα 17: Η 3η δοκιμή του Έργου 2.

Στην τελευταία δοκιμή του δεύτερου έργου (Εικόνα 18), στην πρώτη σειρά υπήρχαν τρία σχήματα κόκκινου χρώματος. Αναλυτικότερα, υπήρχε ένα τετράγωνο πλευράς 8 εκατοστών και δύο ορθογώνια, ένα μήκους 8 εκατοστών και πλάτους 14 εκατοστών και ένα άλλο μήκους 8 εκατοστών και πλάτους 12 εκατοστών. Στη δεύτερη

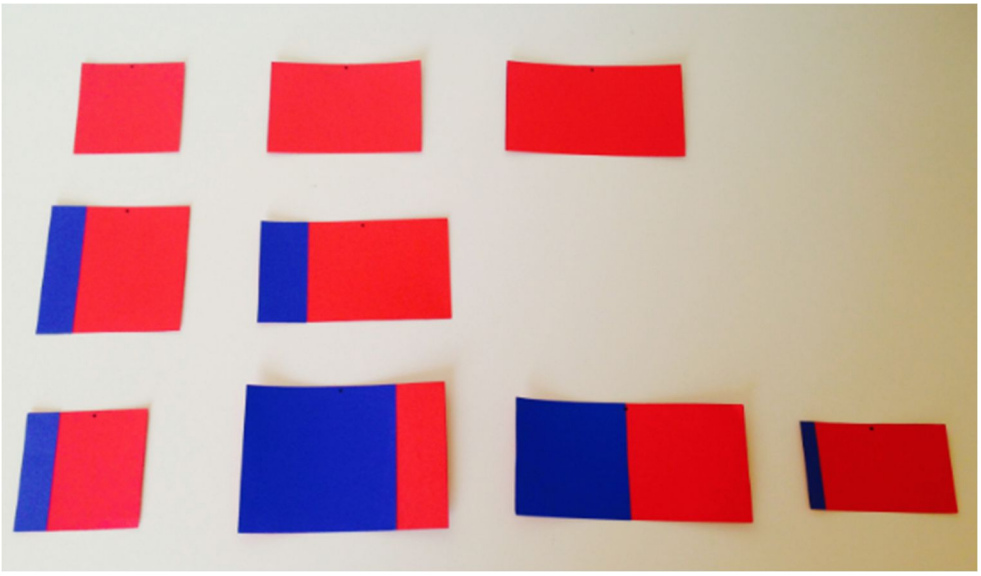
σειρά, στην πρώτη στήλη με το τετράγωνο, η επιλογή μου γινόταν ανάμεσα από τα εξής σχήματα: α) ένα τετράγωνο πλευράς 6 εκατοστών, στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν πολύ μεγαλύτερη από την κόκκινη επιφάνεια, β) ένα τετράγωνο πλευράς 10 εκατοστών, στο οποίο η μπλε επιφάνεια κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής επιφάνειας, δηλαδή ήταν πολύ μικρότερη από την κόκκινη, γ) ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους 8 εκατοστών και πλάτους 14 εκατοστών, στο οποίο οι δύο επιφάνειες ήταν ίσες και δ) ένα ορθογώνιο μήκους 8 εκατοστών και πλάτους 12 εκατοστών, όπου η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη. Στη δεύτερη στήλη, της ίδιας δοκιμής, με το ορθογώνιο πλάτους 12 εκατοστών, η επιλογή έγινε από μένα ανάμεσα από τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα τετράγωνο. Πιο αναλυτικά, το ένα ορθογώνιο είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά, όπου η μπλε επιφάνεια κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής επιφάνειας, δηλαδή ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη. Το άλλο ορθογώνιο είχε μήκος 10 εκατοστά και πλάτος 12 εκατοστά, στο οποίο η μπλε και η κόκκινη επιφάνεια ήταν ίσες, ενώ το τελευταίο ορθογώνιο είχε μήκος 6 εκατοστά και πλάτος 10 εκατοστά, όπου η μπλε επιφάνεια ήταν εμφανώς μεγαλύτερη από την κόκκινη. Τέλος, υπήρχε και το τετράγωνο πλευράς 10 εκατοστών, όπου η μπλε επιφάνεια ήταν πολύ μικρότερη από την κόκκινη επιφάνεια. Στην τρίτη και τελευταία στήλη, τα παιδιά είχαν να επιλέξουν ανάμεσα από τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα τετράγωνο. Πιο συγκεκριμένα, το ένα ορθογώνιο είχε μήκος 6 εκατοστά και πλάτος 10 εκατοστά, στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν κατά πολύ μικρότερη από την κόκκινη, το άλλο ορθογώνιο είχε μήκος 8 εκατοστά και πλάτος 16 εκατοστά, όπου οι δύο επιφάνειες ήταν ίσες και το τρίτο ορθογώνιο είχε μήκος 10 εκατοστά και πλάτος 14 εκατοστά, στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν πολύ μεγαλύτερη από την κόκκινη. Στο τετράγωνο πλευράς 8 εκατοστών, η μπλε επιφάνεια κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής επιφάνειας, δηλαδή ήταν εμφανώς μικρότερη από την κόκκινη. Ολοκληρώνοντας, αξίζει να αναφερθεί ότι όπως συνέβη και στην τρίτη δοκιμή του δεύτερου έργου, έτσι και σ' αυτήν, τα σχήματα που επέλεξα στις δύο πρώτες στήλες, ήταν ίδιου σχήματος με το αρχικό κόκκινο, είχαν διαφορετικές διαστάσεις από αυτά και ήταν εκείνα στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια ήταν 1:4. Αντίθετα, στην τρίτη στήλη, όπου επέλεγαν οι μαθητές, η υπό μελέτη σχέση βρισκόταν σε διαφορετικό σχήμα από το αρχικό δοθέν.

1η σειρά

2η σειρά

3η σειρά

επιλογές



Εικόνα 18: Η 4η δοκιμή του Έργου 2.

Ολοκληρώνοντας την περιγραφή των υλικών και των δύο έργων, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι το σενάριο της ιστορίας με το/τη ξωτικό/ νεράιδα , η κατασκευή των αντικειμένων από τα οποία κλήθηκαν να επιλέξουν τα παιδιά, ο ρόλος και τα χαρακτηριστικά τους, έγινε με τέτοιο τρόπο, προκειμένου η επιλογή των μαθητών να μπορεί γίνει και με διαφορετικά κριτήρια, εκτός της σχέσης που μελετάται μεταξύ αντικειμένου αναφοράς και ζητούμενου αντικειμένου. Πιο συγκεκριμένα, η συμφωνία ή μη του χρώματος των αντικειμένων με το αντικείμενο αναφοράς ήταν ένας παράγοντας που ελήφθη υπόψη κατά το σχεδιασμό των υλικών. Δηλαδή, σε όλες τις δοκιμασίες υπήρχαν τόσο αντικείμενα που είχαν το ίδιο χρώμα με το αντικείμενο αναφοράς, όσο και άλλα με διαφορετικό χρώμα. Σε καθεμία από τις τέσσερις δοκιμές του έργου αυτού, η «σωστή» επιλογή ήταν διαφορετικού χρώματος από το αντικείμενο αναφοράς. Επιπλέον, ο ρόλος των αντικειμένων ήταν ένας άλλος παράγοντας που ελήφθη υπόψη. Για παράδειγμα, οι ρίζες των δέντρων, συνήθως εμφανίζονται να έχουν καφέ χρώμα. Ωστόσο, η «σωστή» επιλογή στην τέταρτη δοκιμή που αφορούσε τις ρίζες βελανιδιάς ήταν άλλου χρώματος. Επίσης, στην τρίτη δοκιμή με το χυμό αγριοκέρασο, ο οποίος έχει κόκκινο χρώμα, το «σωστό» ποτήρι ήταν διαφορετικού χρώματος από το κόκκινο. Ολοκληρώνοντας, στη δεύτερη και τρίτη δοκιμή με το νερό της πηγής και το χυμό αγριοκέρασο αντίστοιχα, τόσο στα δοχεία αναφοράς, όσο και σε κάποια από τα αντικείμενα επιλογής, υπήρχαν σχέδια, όπως ψαράκια και κερασάκια. Τέτοιου είδους

σχέδια προσελκύουν τα παιδιά αυτής της ηλικίας και συνεπώς, υπάρχει η πιθανότητα να εστιάσουν την προσοχή τους σ' αυτό το χαρακτηριστικό.

Όπως και στο πρώτο έργο, έτσι και στο δεύτερο, η κατασκευή σχημάτων έγινε με τέτοιο τρόπο, προκειμένου να δημιουργηθούν παράγοντες, στους οποίους πιθανότατα να εστιάζουν την προσοχή τους οι μαθητές, εκτός της ζητούμενης σχέσης. Ειδικότερα, στην πρώτη δοκιμή στις δύο πρώτες στήλες, η νοητή ευθεία που χώριζε το σχήμα σε δύο μέρη ήταν κατακόρυφη και η μπλε επιφάνεια βρισκόταν στο αριστερό μέρος. Ωστόσο, στην τρίτη στήλη, όπου η επιλογή θα γινόταν από τους μαθητές, η νοητή ευθεία που χώριζε το σχήμα σε δύο ίσα μέρη, ήταν οριζόντια και η μπλε επιφάνεια βρισκόταν στο κάτω μέρος του τετραγώνου. Ομοίως, στη δεύτερη δοκιμή, στις δύο πρώτες στήλες η μπλε επιφάνεια που κάλυπτε το $\frac{1}{4}$ της συνολικής, βρισκόταν στο πάνω μέρος του σχήματος, ενώ στην τρίτη στήλη αυτή βρισκόταν στο αριστερό μέρος του τετραγώνου. Επιπλέον, στις δύο τελευταίες δοκιμές, τα σχήματα που θα επέλεγα ήταν τα ίδια με τα αντίστοιχα σχήματα της πρώτης σειράς (π.χ. αν το δοθέν κόκκινο ήταν τετράγωνο, τότε και αυτό που θα επέλεγα ήταν τετράγωνο), είχαν μεγαλύτερη επιφάνεια σε σχέση με τα αρχικά και το απόλυτο μέγεθος της μπλε επιφάνειας αύξανε από το πρώτο στο δεύτερο σχήμα της δεύτερης σειράς. Ωστόσο, τα σχήματα από τα οποία θα καλούνταν τα παιδιά να επιλέξουν σ' αυτές τις δύο δοκιμές, δεν είχαν κανένα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά, καθώς το σχήμα στο οποίο βρίσκεται η υπό μελέτη σχέση είναι τελείως διαφορετικό από το δοθέν κόκκινο της πρώτης σειράς.

2.3 Διαδικασία

Πριν ξεκινήσει η διαδικασία με τα παιδιά, είχαν ενημερωθεί οι γονείς, οπότε και η επιλογή των μαθητών έγινε έχοντας ως κριτήριο την σύμφωνη γνώμη των γονιών τους, η οποία δόθηκε εγγράφως. Όλη η διαδικασία διήρκησε τρεις ημέρες. Κατά τη διάρκεια του σχολικού προγράμματος επέλεγα ένα–ένα τα παιδιά, τα πήγαινα σε μία αίθουσα του σχολείου όπου πραγματοποιούσα το πείραμα, το οποίο βιντεοσκοπούσα. Η διάρκειά του ήταν 20–30 λεπτά. Δεν έγινε καμία αναφορά στα παιδιά για το μαθηματικό χαρακτήρα των έργων ούτε πριν, αλλά ούτε και κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Χαρακτηριστικά κατά τη μεταφορά μας από την σχολική τάξη στην

αίθουσα πραγματοποίησης του πειράματος, τους ανέφερα πως θα πάμε να παίξουμε για λίγη ώρα, προκειμένου να είναι πιο χαλαρά και καθόλου προδιαθετημένα για το τι θα ακολουθήσει.

Πριν από το πρώτο έργο, τους παρουσίαζα τους δύο χαρακτήρες, τους οποίους είχα ονομάσει Πίτερ Παν και Τίνκερμπελ, από τα αντίστοιχα καρτούν, ώστε να είναι πιο οικεία προς τα παιδιά και τους ζητούσα να επιλέξουν όποιον από τους δύο ήθελαν. Όλα τα αγόρια επέλεξαν τον Πίτερ Παν, ενώ όλα τα κορίτσια την Τίνκερμπελ. Οι δύο χαρακτήρες ήταν χρωματισμένοι με διάφορες αποχρώσεις του πράσινου. Στη συνέχεια ξεκινούσα την περιγραφή της ιστορίας που ανέφερα παραπάνω (βλ. 2.2) και ταυτόχρονα τοποθετούσα πάνω στο θρανίο , μπροστά από το παιδί, την ασπρόμαυρη φωτογραφία. Του έδειχνα κάθε φορά πάνω στη φωτογραφία ποιο είναι το αντικείμενο αναφοράς και ποιο το αντικείμενο που χρειαζόταν ο χαρακτήρας του έργου. Στη συνέχεια, έβαζα πάνω στο θρανίο όλες τις κατασκευές, δηλαδή και το αντικείμενο αναφοράς και τις υπόλοιπες τέσσερις κατασκευές της κάθε δοκιμής, λέγοντας πως ο άτακτος νάνος έφερε παραπάνω αντικείμενα από αυτά που χρειαζόταν ο χαρακτήρας μας. Στο τέλος της εξιστόρησης, ζητούσα από το κάθε παιδί να επιλέξει το αντικείμενο που πίστευε ότι έλειπε από το ξωτικό/νεράιδα, αφού προηγουμένως το παρότρυνα να κοιτάξει τη φωτογραφία που υπήρχε μπροστά του. Αφού το παιδί έκανε την επιλογή του, του ζητούσα να μου εξηγήσει γιατί διάλεξε το συγκεκριμένο αντικείμενο και όχι κάποιο άλλο. Όταν ολοκλήρωνε την απάντησή του, χωρίς να κάνω κανένα σχόλιο σχετικά με την πορεία του πειράματος και την «επίδοση» του μαθητή, προχωρούσαμε στην επόμενη προσπάθεια.

Μετά την ολοκλήρωση της ιστορίας του δεύτερου έργου, όπως αυτή αναφέρθηκε κατά την παρουσίαση των ερευνητικών έργων και υλικών, εμφάνιζα πάνω στο θρανίο, μπροστά από το παιδί, τα σχήματα της πρώτης σειράς. Τους εξηγούσα ότι για τις δύο πρώτες στήλες η επιλογή θα γινόταν από μένα, ανάμεσα από τέσσερις επιλογές που είχα για καθεμία στήλη. Τους παρότρυνα να προσέξουν τι επιλέγω, ώστε στη συνέχεια να διαλέξουν εκείνα, αυτό που ταιριάζει με το δικό μου. Όταν ολοκλήρωνα την προσπάθειά μου, τους ζητούσα να διαλέξουν αυτό που πίστευαν ότι ταίριαζε να μπει στην τρίτη στήλη, αφού προηγουμένως είχα τοποθετήσει πάνω στο θρανίο τις επιλογές που είχαν. Αφού διάλεγαν, τους ρωτούσα το λόγο που επέλεξαν το συγκεκριμένο σχήμα και όχι κάποιο άλλο, ζητούσα δηλαδή μια εξήγηση. Μετά την απάντησή τους, οποιαδήποτε και αν ήταν αυτή, προχωρούσαμε στην επόμενη προσπάθεια, χωρίς να γίνει κανένα σχόλιο από τη μεριά μου.

Μετά την ολοκλήρωση και των δύο έργων, τόσο στις δοκιμές του Έργου 1, όσο και σε εκείνες του Έργου 2, στις οποίες τα παιδιά δεν είχαν διαλέξει το «σωστό» αντικείμενο, καθοδήγησα την επιλογή τους, χρησιμοποιώντας ως κριτήριο την υπό μελέτη σχέση, με διαφορετικό τρόπο σε καθένα από τα δύο έργα. Πιο συγκεκριμένα, όσον αναφορά το Έργο 1, σε όσες δοκιμές το παιδί είχε κάνει «λάθος» επιλογή, του εμφάνιζα ξανά πάνω στο θρανίο την ασπρόμαυρη φωτογραφία, το αντικείμενο αναφοράς και τα αντικείμενα επιλογής. Στη συνέχεια, το παρότρυνα να προσέξει μέχρι που φτάνει στη φωτογραφία το «σωστό» αντικείμενο σε σχέση με το αντικείμενο αναφοράς και του επισήμανα ότι το τελευταίο είναι μεγαλύτερο στην πραγματικότητα από ότι φαίνεται στη φωτογραφία. Έπειτα, αφού του ζητούσα να μου δείξει μέχρι που πιστεύει ότι φτάνει το «σωστό» πραγματικό αντικείμενο σε σχέση με το πραγματικό αντικείμενο αναφοράς, διάλεγε, όποιο από τα τέσσερα αντικείμενα που είχε μπροστά του, πίστευε ότι φτάνει μέχρι εκεί που μου είχε δείξει προηγουμένως.

Όσον αναφορά το Έργο 2, η καθοδήγηση που έδινα στα παιδιά στην πρώτη και τρίτη δοκιμή, όπου η υπό μελέτη σχέση αφορούσε το $\frac{1}{2}$, δηλαδή το «μισό», ήταν διαφορετική από αυτήν που τους έδινα στη δεύτερη και τέταρτη δοκιμή, όπου η υπό μελέτη σχέση αφορούσε το $\frac{1}{4}$, δηλαδή το «τέταρτο». Πιο αναλυτικά, στις δοκιμές με το «μισό» ζητούσα από το παιδί να προσέξει πως είναι το κόκκινο και το μπλε, μόνο σε ένα από τα δύο σχήματα, όπου η επιλογή είχε γίνει από μένα προηγουμένως. Το παρότρυνα να εστιάσει την προσοχή του στο γεγονός ότι όσο μπλε, τόσο κόκκινο είχε το σχήμα. Στη συνέχεια, του ζητούσα να διαλέξει από τα τέσσερα αντικείμενα που είχε μπροστά του, εκείνο στο οποίο το μπλε και το κόκκινο χρώμα ήταν ακριβώς όπως στο προηγούμενο σχήμα, με το οποίο ασχολούμασταν. Στις δοκιμές με το «τέταρτο», όμοια με παραπάνω, ζητούσα από το παιδί να προσέξει πως είναι το κόκκινο και το μπλε, μόνο σε ένα από τα δύο σχήματα, τα οποία είχα επιλέξει εγώ προηγουμένως. Στη συνέχεια, έβαζα ένα κομμάτι σπάγκου στον κατάλληλο άξονα συμμετρίας του συγκεκριμένου σχήματος, χωρίζοντάς το στη μέση. Τότε, παρότρυνα το παιδί να προσέξει ότι το ένα κομμάτι του σχήματος είναι όλο κόκκινο, ενώ στο άλλο υπάρχει τόσο μπλε, όσο και κόκκινο. Τέλος, του ζητούσα να επιλέξει από τα τέσσερα σχήματα που είχε μπροστά του, εκείνο στο οποίο το μπλε και το κόκκινο ήταν ακριβώς όπως στο σχήμα με το οποίο ασχολούμασταν, γνωστοποιώντας του ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει το σπάγκο στον άξονα συμμετρίας, αν το επιθυμεί.

Με τις κατευθυνόμενες δοκιμές, ήθελα να ελέγξω κατά πόσο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις υπό μελέτη σχέσεις, εφόσον τους ζητηθεί.

2.4 Αποτελέσματα

Ως αποκρίσεις αυθόρμητης εστίασης στη σχέση (στο εξής, ΑΑΕΣ) θεωρήθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών που επέλεξαν το κατάλληλο αντικείμενο, ως προς τη σχέση που κάθε φορά μελετήθηκε, ή που στη συμπεριφορά τους ή στην εξήγηση που έδωσαν υπήρχαν ενδείξεις ότι εστίασαν στην υπό μελέτη σχέση. Για παράδειγμα, τόσο στην 3η, όσο και στην 4η δοκιμή του δεύτερου έργου, υπήρξαν δύο μαθητές, ένας στην καθεμία, οι οποίοι ενώ αρχικά είχαν διαλέξει το σχήμα, όπου φαινόταν η υπό μελέτη σχέση, τελικά άλλαξαν την επιλογή τους, λόγω διαφορετικού σχήματος από το αρχικό. Υπερίσχυσε, δηλαδή, στην τελική απάντησή τους, ο παράγοντας «σχήμα» και όχι η πολλαπλασιαστική σχέση.

Στον Πίνακα 1 εμφανίζονται οι ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Έργο	Δοκιμή (σχέση)	ΑΑΕΣ (N=17)
1 (Μαγικό Φίλτρο)	Συνταγή (1:2)	6 35,3%
	Νερό (1:4)	12 70,6%
	Χυμός (1:2)	10 58,8%
	Ρίζες (1:4)	12 70,6%
2 (Μόμπιλο)	Μόμπιλο 1 (1:2)	11 64,8%
	Μόμπιλο 2 (1:4)	4 23,5%
	Μόμπιλο 3 (1:2)	6 35,3%
	Μόμπιλο 4 (1:4)	6 35,3%

Πίνακας 1: Συχνότητα και ποσοστά ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Συνταγή		Νερό		Χυμός		Ρίζες	
2/3	2 11,8%	1/2	1 5,9%	2/3	4 23,5%	2/3	1 5,9%
1/3	9 52,9%	2/3	1 5,9%	1/4	1 5,9%	1/2	4 23,5%
3/4	–	1/8	3 17,6%	3/4	2 11,8%	1/9	–

Πίνακας 2: Συχνότητα και ποσοστά μη ΑΑΕΣ στο Έργο 1.

Κατηγορία	Ν	Παράδειγμα
Προσπάθεια αποτύπωσης της σχέσης	4 5,9%	1. Γιατί δεν είναι τόσο μικρή όσο η καφέ (1/9) και αυτή (1/4) είναι η αμέσως μεγαλύτερη.
Ίδιο μέγεθος	9 13,2%	2. Μοιάζουν και είναι και το ίδιο μέγεθος. 3. Γιατί είναι ίδια, ίδιο ύψος.
(Απόλυτο) Μέγεθος	10 14,7%	4. Είναι μικρό. 5. Είναι το μικρότερο.
Χρώμα	4 5,9%	6. Επειδή είναι πράσινη. *(το ραβδί ήταν πράσινο, οπότε επέλεξε την συνταγή που είχε ίδιο χρώμα με το ραβδί (2/3))*
Χωρίς κάποια πληροφορία	22 32,4%	7. Γιατί το δείχνει στην εικόνα. / Έτσι μοιάζει στη φωτογραφία.
Χωρίς καμία εξήγηση	15 22%	*(Αρνήθηκαν να πουν το οτιδήποτε – δεν ήθελαν να δώσουν καμία απάντηση)*
Δεν μπορούν να ταξινομη-θούν	4 5,9%	*(Απαντήσεις στις οποίες δεν έβγαινε νόημα κανένα από αυτά που έλεγαν)*
	68	

Πίνακας 3: Κατηγοριοποίηση των εξηγήσεων των παιδιών στο Έργο 1.

Με τη βοήθεια του Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι στη δοκιμή *Συνταγή* του Έργου 1, υπήρξαν οι λιγότερες ΑΑΕΣ και με διαφορά, σε σχέση με τις υπόλοιπες δοκιμές. Από τον Πίνακα 2, βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των παιδιών στη δοκιμή αυτή επέλεξε τη συνταγή με το μικρότερο μέγεθος και η συχνότερη εξήγηση που έδιναν αφορούσε το απόλυτο μέγεθος (π.χ. «είναι μικρό», «είναι το μικρότερο») (βλ. Πίνακα 3). Δηλαδή η συχνότερη μη ΑΕΕΣ στην 1^{η} δοκιμή αντιστοιχεί στο μικρότερο σε μήκος αντικείμενο.

Λιγότερες ήταν οι μη ΑΑΕΣ που αφορούσαν το αντικείμενο με το μεγαλύτερο μήκος, μόλις 2 παιδιά από τα 17 (βλ. Πίνακα 2), εκ των οποίων το ένα δεν έδωσε καμία εξήγηση για την επιλογή του, ενώ το άλλο στηρίχθηκε στο γεγονός ότι η μεγαλύτερη συνταγή ήταν πράσινη, δηλαδή η επιλογή έγινε λόγω χρώματος.

Στη δεύτερη δοκιμή *Νερό* του ίδιου έργου, οι ΑΑΕΣ κάλυψαν το συντριπτικό ποσοστό των απαντήσεων που έδωσαν τα παιδιά, ενώ η μη ΑΑΕΣ που αφορά το μικρότερο μέγεθος εμφανίζεται σε μεγαλύτερη συχνότητα σε σχέση με τις μη ΑΑΕΣ που αφορούν τόσο το μεγαλύτερο μέγεθος, όσο και το μισό του αντικειμένου αναφοράς, στα οποία τα ποσοστά ήταν ακριβώς τα ίδια (βλ. Πίνακα 2).

Στην τρίτη δοκιμή *Χυμός* του πρώτου έργου, οι ΑΑΕΣ κάλυψαν, όπως και στο νερό, το μεγαλύτερο ποσοστό των απαντήσεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες, 6 στους 17 μαθητές, επέλεξαν ένα από τα δύο αντικείμενα με το μεγάλο μέγεθος, ποσοστό πολύ μεγαλύτερο σε σχέση μ' αυτό που επέλεξε το μικρότερο σε μέγεθος αντικείμενο (βλ. Πίνακα 2). Εδώ οι απαντήσεις ποικίλλουν καθώς δύο από τα παιδιά αναφέρθηκαν στο χρώμα του ποτηριού, υποστηρίζοντας πως αφού το φρούτο είναι κόκκινο, πρέπει και το ποτήρι να έχει το ίδιο χρώμα. Ένας από τους μαθητές δεν ήξερε γιατί το επέλεξε, ενώ ο τέταρτος υποστήριξε πως το μέγεθός του είναι ίδιο με της φωτογραφίας και αυτός ήταν ο λόγος της επιλογής του. Τέλος, το αντικείμενο με το μεγαλύτερο μέγεθος επέλεξε μόλις το 11,8% των μαθητών, δίνοντας κάποια «άσχετη» απάντηση, όπως για παράδειγμα «έτσι μοιάζει στη φωτογραφία», προκειμένου να εξηγήσουν αυτήν την επιλογή που έκαναν.

Στην τέταρτη και τελευταία δοκιμή του πρώτου έργου, η οποία αφορούσε το κομμάτι ρίζας από βελανιδιά, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών έδωσε ΑΑΕΣ, ποσοστό που ανέρχεται στο 70,6% (βλ. Πίνακα 1). Οι εξηγήσεις που έδωσαν τα παιδιά για αυτήν την επιλογή τους, είτε αφορούν το μέγεθος, για παράδειγμα «μοιάζουν και είναι το ίδιο μέγεθος», είτε απλά έκαναν την επιλογή τους, χωρίς να θέλουν να δώσουν κάποια περαιτέρω πληροφορία γι' αυτήν, είτε επειδή απλά έτσι τους έμοιαζε σύμφωνα και με την φωτογραφία που είχαν μπροστά τους.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των 68 απαντήσεων που αφορούν το πρώτο έργο, σε 4 (5,9%) από αυτές γινόταν προσπάθεια, από τη μεριά των μαθητών, αποτύπωσης της σχέσης (π.χ. «γιατί δεν είναι τόσο μικρή, όσο η καφέ (με σχέση 1/9) και αυτή (με σχέση 1/4) είναι η αμέσως μεγαλύτερη»). Οι απαντήσεις αυτού του τύπου συνόδευαν τόσο ΑΑΕΣ, όσο και μη ΑΑΕΣ. Επίσης, σε 9 από τις απαντήσεις αναφερόταν το μέγεθος, (π.χ. «γιατί είναι ίδια, ίδιο ύψος»), οι οποίες συνόδευαν τόσο ΑΑΕΣ, όσο και

μη ΑΑΕΣ. Σε ορισμένες (10 στις 68, 14,7%) αναφερόταν το μέγεθος και συνόδευαν και ΑΑΕΣ και μη ΑΑΕΣ. Το μέγεθος αναφερόταν είτε ως χαρακτηριστικό του αντικειμένου (π.χ. «είναι μικρό»), είτε σε σύγκριση με τα άλλα αντικείμενα αναφοράς (π.χ. «είναι το μικρότερο»). Τέλος, σε 4 απαντήσεις (5,9%) αναφερόταν ρητά ως κριτήριο το χρώμα « επειδή είναι πράσινη όπως το κλαδί» και συνόδευαν κυρίως μη ΑΑΕΣ (μόνο 1 από τις 4 ήταν ΑΑΕΣ). Το υπόλοιπο 60,3% των εξηγήσεων, ποσοστό πολύ μεγάλο, ανήκε σε μία από τις επόμενες κατηγορίες: α) δεν έδινε κάποια πληροφορία (π.χ. «γιατί το δείχνει στην εικόνα», «έτσι μοιάζει στη φωτογραφία»),
β) δεν ήθελαν τα παιδιά να δώσουν κάποια εξήγηση για την απάντησή τους, γ) δεν μπορούσε να βγει νόημα από τις εξηγήσεις που έδιναν, οπότε δεν μπορούσαν να ταξινομηθούν σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες (βλ. Πίνακα 3).

Βάσει του διωνυμικού κριτήριου με παραμέτρους 4 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 3 ΑΑΕΣ είναι οριακά μη τυχαία (p=0,051), ενώ η επιλογή 4 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία (p=0,004). Από τα στοιχεία του Πίνακα 4 φαίνεται ότι 8 παιδιά (47%) έδωσαν τουλάχιστον 3 ΑΑΕΣ στο πρώτο έργο.

Πλήθος ΑΑΕΣ					
0	1	2	3	4	Σύνολο
1 5,9%	1 5,9%	7 41,1%	7 41,1%	1 5,9%	17 100%

Πίνακας 4: Συνολικό πλήθος ΑΑΕΣ στο Έργο 1.

Μόμπιλο 1		Μόμπιλο 2		Μόμπιλο 3		Μόμπιλο 4	
1/4*	1 5,9%	3/4	2 11,8%	1/4	5 29,4%	3/4	2 11,8%
3/4	4 23,5%	1/2	4 23,5%	3/4***	4***** 23,5%	1/2	7 41,1%
1/4**	0 0%	1/8	7 41,1%	3/4****	2 11,8%	1/8	2***** 11,8%

Πίνακας 5: Συχνότητα και ποσοστά μη ΑΑΕΣ στο Έργο 2.

* Μπλε επιφάνεια στη δεξιά πλευρά ** Μπλε επιφάνεια στο πάνω μέρος

*** Ορθογώνιο, μεγαλύτερο πλάτος από το αρχικό

**** Ορθογώνιο, μικρότερο πλάτος από το αρχικό

***** Ένα από τα παιδιά που έδωσαν τη συγκεκριμένη απάντηση, αρχικά είχαν δώσει SFOR απάντηση, αλλά λόγω διαφορετικού σχήματος άλλαξε την απάντησή του

Με τη βοήθεια του Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι στη δοκιμή *Μόμπιλο 1* του Έργου 2, υπήρξαν οι περισσότερες ΑΑΕΣ και με αρκετή διαφορά σε σχέση με τις υπόλοιπες δοκιμές. Στη συγκεκριμένη δοκιμή η συχνότερη μη ΑΑΕΣ ήταν το σχήμα με τη μπλε επιφάνεια στα αριστερά (3:4), ενώ ένα μόνο παιδί επέλεξε το σχήμα με την μπλε επιφάνεια στη δεξιά πλευρά (1:4) και κανένα το σχήμα με την μπλε επιφάνεια στο πάνω μέρος (1:4) (βλ. Πίνακα 5).

Στην δεύτερη δοκιμή *Μόμπιλο 2* του ίδιου έργου το ποσοστό των ΑΑΕΣ ήταν μόλις 23,5%, ποσοστό ίδιο με τις μη ΑΑΕΣ που αφορούσαν το σχήμα στο οποίο η μπλε επιφάνεια βρισκόταν στο πάνω μέρος (1:2). Επίσης, 7 από τα 17 παιδιά (41,1%) επέλεξαν το σχήμα με τη μικρότερη μπλε επιφάνεια, το οποίο αντιστοιχούσε στη σχέση 1:8. Τέλος, το μικρότερο ποσοστό (11,8%) επέλεξε το σχήμα στο οποίο η μπλε επιφάνεια κάλυπτε το μεγαλύτερο μέρος (3:4).

Στην τρίτη δοκιμή *Μόμπιλο 3* του δεύτερου έργου, οι ΑΑΕΣ κάλυψαν το μεγαλύτερο ποσοστό (35,3%) των απαντήσεων των παιδιών. Η συχνότερη μη ΑΑΕΣ, σε ποσοστό 29,4%, ήταν το αντικείμενο που είχε ίδιο σχήμα και ίδιο πλάτος με το αρχικό (1:4). Η αμέσως επόμενη, σε συχνότητα, μη ΑΑΕΣ ήταν το αντικείμενο ίδιου σχήματος, αλλά μεγαλύτερου πλάτους από το αρχικό, ενώ τελευταίο στην προτίμηση των μαθητών ήρθε το αντικείμενο που είχε ίδιο σχήμα με το αρχικό, αλλά μικρότερο πλάτος. Αξίζει να σημειωθεί πως στο συγκεκριμένο έργο, υπήρξε μαθητής, ο οποίος

ενώ στην αρχή είχε επιλέξει το αντικείμενο στο οποίο φαινόταν η υπό μελέτη σχέση (1:2), στη συνέχεια άλλαξε την επιλογή του, λόγω του διαφορετικού σχήματος, καθώς ήταν τετράγωνο και όχι ορθογώνιο, όπως το αρχικό.

Στην τέταρτη και τελευταία δοκιμή του δεύτερου έργου, στο *Μόμπιλο 4*, οι ΑΑΕΣ ήταν 6 στις 17, δηλαδή ποσοστό 35,3% (βλ. Πίνακα 1). Το μεγαλύτερο ποσοστό των απαντήσεων κάλυψε η μη ΑΑΕΣ, η οποία αφορούσε το αντικείμενο που είχε ίδιο σχήμα και ίδιο πλάτος με το αρχικό (1:2) (βλ. Πίνακα 5). Το αντικείμενο ίδιου σχήματος, αλλά μεγαλύτερου πλάτους (3:4) επέλεξε το 11,8% των παιδιών, ποσοστό ίδιο με αυτό που επέλεξαν το αντικείμενο που είχε το ίδιο σχήμα με το αρχικό, αλλά μικρότερο πλάτος (1:8) (βλ. Πίνακα 5). Όπως και νωρίτερα, αξίζει να σημειωθεί πως και σ' αυτήν την περίπτωση, ένας από τους δύο μαθητές, αρχικά είχε επιλέξει το αντικείμενο, στο οποίο φαίνεται η υπό μελέτη σχέση (1:4), αλλά στη συνέχεια άλλαξε γνώμη λόγω του διαφορετικού σχήματος, καθώς ήταν τετράγωνο και όχι ορθογώνιο όπως το αρχικό.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των 68 απαντήσεων που αφορούν το δεύτερο έργο, σύμφωνα με τον Πίνακα 6, σε 4 (5,9%) από αυτές γινόταν προσπάθεια, από τη μεριά των μαθητών, αποτύπωσης της σχέσης (π.χ. «είναι μισό κόκκινο, μισό μπλε»). Οι απαντήσεις αυτού του τύπου συνόδευαν τόσο ΑΑΕΣ, όσο και μη ΑΑΕΣ. Επίσης, 18 από τις εξηγήσεις (26,5%) αναφέρονταν στα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους (π.χ. «είναι ίδιο με το τετράγωνο από πάνω», «έχει ίδιο ύψος»), οι οποίες συνόδευαν και ΑΑΕΣ και μη ΑΑΕΣ. Το 7,3% των εξηγήσεων αφορούσαν την ποσότητα του μπλε (π.χ. «γιατί έχει το πιο λίγο μπλε», «γιατί είναι πιο πολύ μπλε»), οι οποίες συνόδευαν μόνο μη ΑΑΕΣ. Τέλος, μόνο 1 από τις 68 απαντήσεις είχε να κάνει με τον προσανατολισμό της μαύρης κουκκίδας, χαρακτηριστικό στο οποίο είχα αναφερθεί κατά την παρουσίαση του μόμπιλο στο δεύτερο έργο. Το υπόλοιπο 58,8% των εξηγήσεων, ποσοστό πολύ μεγάλο, ανήκε σε μία από τις επόμενες κατηγορίες: α) δεν έδινε κάποια πληροφορία (π.χ. «γιατί ταιριάζει με τα υπόλοιπα», «γιατί είναι ίδια»), β) δεν ήθελαν τα παιδιά να δώσουν κάποια εξήγηση για την απάντησή τους, γ) δεν μπορούσε να βγει νόημα από τις εξηγήσεις που έδιναν, οπότε δεν μπορούσαν να ταξινομηθούν σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες, δ) θεωρήθηκαν ως «άσχετες» απαντήσεις (π.χ. «γιατί είναι ωραίο», «γιατί μ' αρέσει»).

Κατηγορία	Ν	Παράδειγμα
Προσπάθεια αποτύπωσης της σχέσης	4 5,9%	1. Είναι μισό κόκκινο, μισό μπλε. 2. Γιατί είναι και τα δύο χρώματα ίσα.
Σχήμα/ Μέγεθος	18 26,5%	3. Γιατί είναι ίδιο με το τετράγωνο από πάνω.
Μικρή ποσότητα μπλε	2 2,9%	4. Γιατί έχει το πιο λίγο μπλε.
Χωρίς καμία πληροφορία	21 30,9%	5. Γιατί ταιριάζει με τα υπόλοιπα. 6. Γιατί είναι ίδια.
«Άσχετη» απάντηση	10 14,7%	7. Γιατί είναι ωραίο/ Γιατί μ' αρέσει.
Χωρίς καμία εξήγηση	7 10,3%	*(Αρνήθηκαν να πουν το οτιδήποτε – δεν ήθελαν να δώσουν καμία απάντηση)*
Τελίτσα	1 1,5%	8. Γιατί είναι πάνω η τελίτσα.
Μεγάλη ποσότητα μπλε	3 4,4%	9. Γιατί είναι πιο πολύ μπλε.
Δεν μπορούν να ταξινομη-θούν	2 2,9%	*(Απαντήσεις στις οποίες δεν έβγαινε νόημα κανένα από αυτά που έλεγαν)*
	68	

Πίνακας 6. Κατηγοριοποίηση των εξηγήσεων των παιδιών στο Έργο 2.

Βάσει του διωνυμικού κριτήριου με παραμέτρους 4 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 3 ΑΑΕΣ είναι οριακά μη τυχαία (p=0,051), ενώ η επιλογή 4 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία (p=0,004). Από τα στοιχεία του Πίνακα 7 φαίνεται ότι 5 παιδιά έδωσαν 3 ΑΑΕΣ στο δεύτερο έργο, ενώ κανένα παιδί δεν έδωσε 4 ΑΑΕΣ.

Πλήθος ΑΑΕΣ					
0	1	2	3	4	Σύνολο
2 11,8%	4 23,5%	6 35,3%	5 29,4%	0 0%	17 100%

Πίνακας 7: Συνολικό πλήθος ΑΑΕΣ στο Έργο 2.

Έργο		Πλήθος ΑΑΕΣ							
	0	1	2	3	4	5	6	7	Σύνολο
1	1 5,9%	1 5,9%	7 41,1%	7 41,1%	1 5,9%				17 100%
2	2 11,8%	4 23,5%	6 35,3%	5 29,4%	0 0%				17 100%
1&2	0 0%	1 5,9%	0 0%	4 23,5%	5 29,4%	5 29,4%	1 5,9%	1 5,9%	17 100%

Πίνακας 8: Συνολικό πλήθος ΑΑΕΣ ανά έργο και για τα 2 έργα συνδυαστικά.

Εξετάζοντας το πλήθος των ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές των δύο έργων συνολικά, από τον Πίνακα 8 φαίνεται ότι 7 παιδιά (41,1 %) έδωσαν τουλάχιστον 5 ΑΑΕΣ. Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 8 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 5 ή 6 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία (p=0,027 και p=0,004, αντίστοιχα). Από τα στοιχεία του Πίνακα 8 φαίνεται ότι 5 παιδιά έδωσαν 5 ΑΑΕΣ και στα δύο έργα μαζί και 1 παιδί έδωσε 6 ΑΑΕΣ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι 16 παιδιά (94,1%), σε τουλάχιστον 5 από τις 8 δοκιμές, απάντησαν λαμβάνοντας υπόψιν τους τις σχέσεις, είτε αυθόρμητα, είτε μετά την καθοδήγησή μου, πράγμα που σημαίνει ότι τα έργα ήταν μέσα στις δυνατότητές τους.

3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΠΑΙΔΙΩΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΤΟΥ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ

Το πείραμα που πραγματοποίησα σε παιδιά της Α' Δημοτικού και έχω αναλύσει παραπάνω, πραγματοποίησε και η Λίνα Βράκα, μεταπτυχιακή φοιτήτρια του Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, σε 15 παιδιά που φοιτούσαν σε ιδιωτικό νηπιαγωγείο των Ιωαννίνων (μέση ηλικία 5,7 έτη). Στόχος της ήταν να εξετάσει την αυθόρμητη τάση εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, σε ακόμα μικρότερα παιδιά. Σε συμφωνία τόσο με προηγούμενες έρευνες, όσο και με τη δική μου, η Λίνα Βράκα (2015) στην έρευνά της διαπίστωσε ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές ως προς το χαρακτηριστικό αυτό.

Οι δύο έρευνες, που πραγματοποιήθηκαν συνολικά σε 32 παιδιά του Νηπιαγωγείου και της Α' Τάξης, η περιγραφή τους και τα αποτελέσματά τους, τόσο για κάθε ομάδα

μαθητών ξεχωριστά, όσο και τα συγκριτικά αποτελέσματά τους, συνοψίζονται σε μια εργασία, η οποία θα τεθεί υπό κρίση στο συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ (Βαμβακούση, Βράκα, Λιολιούση, & McMullen, υπό κρίση).

Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι και στις δύο έρευνες, ως αποκρίσεις αυθόρμητης εστίασης στη σχέση (γνωστές πλέον ως ΑΑΕΣ), θεωρήθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών που επέλεξαν το κατάλληλο αντικείμενο ή που έδωσαν ενδείξεις στην εξήγησή και τη συμπεριφορά τους ότι παρατήρησαν την υπό μελέτη σχέση (Βαμβακούση κ.ά., υπό κρίση).

Παρακάτω παρατίθενται οι συγκριτικοί πίνακες, όπως αυτοί παρουσιάζονται στην εργασία για το Συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ.

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται οι ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Έργο	Δοκιμή (σχέση)	Νηπιαγωγείο (N=15)	1η Τάξη (N=17)
1 (Φίλτρο)	Συνταγή (1:2)	1 6,7%	6 35,3%
	Νερό (1:4)	12 80,0%	12 70,6%
	Χυμός (1:2)	10 66,7%	10 58,8%
	Ρίζες (1:4)	6 40,0%	12 70,6%
2 (Μόμπιλο)	Μόμπιλο 1 (1:2)	11 73,3%	11 64,8%
	Μόμπιλο 2 (1:4)	4 26,7%	4 23,5%
	Μόμπιλο 3 (1:2)	8 53,3%	8 47,1%
	Μόμπιλο 4 (1:4)	7 46,7%	6 35,3%

Πίνακας 9: Συχνότητα και ποσοστά ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Όσον αναφορά το Έργο 1, από τον Πίνακα 9 παρατηρούμε ότι η πρώτη δοκιμή *(Συνταγή)* απέσπασε τις λιγότερες ΑΑΕΣ, ιδιαίτερα από τα παιδιά του Νηπιαγωγείου, ενώ τις περισσότερες ΑΑΕΣ απέσπασε η δεύτερη δοκιμή *(Νερό)* για τα μικρότερα παιδιά, ενώ στα παιδιά της Α' Δημοτικού το ποσοστό των περισσότερων ΑΑΕΣ ήταν ίδιο στη δεύτερη και τέταρτη δοκιμή *(Ρίζες)*.

Το γεγονός ότι η πρώτη δοκιμή ακολουθούσε αμέσως μετά την παρουσίαση της ιστορίας με τους δύο χαρακτήρες, οι οποίοι ήταν ζωγραφισμένοι με πράσινο χρώμα,

ίσως εξηγεί το πολύ μικρό ποσοστό ΑΑΕΣ σ' αυτήν την δοκιμή. Από τις εξηγήσεις που έδωσαν, κυρίως τα παιδιά του Νηπιαγωγείου, φάνηκε ότι το πράσινο χρώμα επηρέασε σε μεγάλο βαθμό την επιλογή τους (π.χ. είναι πράσινο, όπως τα μαλλιά της νεράιδας, εργασία ΕΝΕΔΙΜ). Επίσης, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι καθώς το πείραμα εξελισσόταν και τα παιδιά συνήθιζαν τόσο τη διαδικασία, όσο και την πειραματίστρια, άρχιζαν να νιώθουν πιο άνετα, κάτι που ενδεχομένως επηρέασε σε θετικό βαθμό τις επιλογές τους. Αυτό δε συνέβη στην πρώτη δοκιμή, η οποία βρισκόταν στην αρχή του πειράματος, όπου τα παιδιά ίσως ένιωθαν πιο άβολα, κάτι που πιθανότατα συνέβαλε «αρνητικά» στην επιλογή τους.

Γενικότερα, παρατηρώντας τον Πίνακα 9 φαίνεται ότι δεν υπάρχουν συστηματικές διαφορές μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων στο Έργο 1.

Αντίθετα, σε όλες τις δοκιμές του Έργου 2, φαίνεται ότι στα παιδιά του Νηπιαγωγείου το ποσοστό των ΑΑΕΣ ήταν μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό των παιδιών της Α' τάξης. Οι διαφορές ελέγχθηκαν με το πιθανολογικό κριτήριο Fisher's exact test και δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές, για καμία δοκιμή των δύο έργων (εργασία ΕΝΕΔΙΜ).

Στον Πίνακα 10 φαίνεται η κατάταξη των παιδιών ανάλογα με το πλήθος των ΑΑΕΣ που έδωσαν, τόσο σε κάθε έργο ξεχωριστά, όσο και στα δύο έργα συνδυαστικά.

Έργο	Πλήθος ΑΑΕΣ							
	0	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
1	2 6,3%	5 15,6%	12 37,5%	12 37,5%	1 3,1%			32 100%
2	5 15,6%	8 25,0%	8 25,0%	9 28,1%	2 6,3%			32 100%
1&2	0 0%	2 6,3%	2 6,3%	7 21,9%	8 25,0%	9 28,1%	4 12,5%	32 100%

Πίνακας 10: Συνολικό πλήθος ΑΑΕΣ ανά έργο, και για τα 2 έργα συνδυαστικά

Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 4 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 3 ΑΑΕΣ είναι οριακά μη τυχαία (p=0,051), ενώ η επιλογή 4 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία (p=0,004). Από τον Πίνακα 2, γίνεται φανερό ότι 13 παιδιά (40,6%) έδωσαν τουλάχιστον 3 ΑΑΕΣ στο Έργο 1, ενώ 11 παιδιά (34,4%) έδωσαν το ίδιο πλήθος ΑΑΕΣ στο Έργο 2.

Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 8 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 5 ή 6 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία (p=0,027 και p=0,004, αντίστοιχα). Από τον Πίνακα 10 φαίνεται ότι 13 παιδιά (40,6%) έδωσαν τουλάχιστον 5 ΑΑΕΣ και στα δύο έργα συνολικά. Θέτοντας τον επιπλέον περιορισμό των τουλάχιστον δύο ΑΑΕΣ σε κάθε έργο ξεχωριστά, 11 παιδιά (34,4%) φάνηκε να εστιάζουν αυθόρμητα στις σχέσεις 1:2 και 1:4 στις 8 δοκιμές των δύο έργων συνολικά (εργασία ΕΝΕΔΙΜ).

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι το 90,6% των παιδιών και των δύο ερευνών, σε τουλάχιστον 5 από τις 8 δοκιμές, έδωσαν απαντήσεις, στις οποίες φάνηκε ότι εστίασαν στις σχέσεις, είτε αυθόρμητα, είτε μετά από καθοδήγηση. Αυτό δείχνει ότι τα έργα ήταν μέσα στις δυνατότητες των παιδιών και των δύο ηλικιακών ομάδων.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη συγκεκριμένη έρευνα σχεδιάστηκαν και δοκιμάστηκαν δύο έργα, προκειμένου να εξεταστεί κατά πόσο τα παιδιά μικρής ηλικίας έχουν την τάση να εστιάζουν αυθόρμητα σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Ο σχεδιασμός έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε τα παιδιά κατά την επιλογή τους, να μπορούν να εστιάσουν την προσοχή τους και σε διαφορετικά χαρακτηριστικά εκτός της υπό μελέτης σχέσης μεταξύ των αντικειμένων αναφοράς και των ζητούμενων αντικειμένων. Από τις εξηγήσεις που έδωσαν οι μαθητές, φάνηκε ότι ο στόχος αυτό στέφθηκε με επιτυχία, δηλαδή τα έργα είχαν τόσο μαθηματικά, όσο και εξω−μαθηματικά χαρακτηριστικά, τα οποία λειτούργησαν ως επαρκής περισπασμός. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο, από τις απαντήσεις των παιδιών, φάνηκε ότι η συμφωνία ή μη του χρώματος των αντικειμένων με το αντικείμενο αναφοράς, επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τις επιλογές τους. Για παράδειγμα, στην πρώτη δοκιμή υπήρξαν παιδιά που επέλεξαν την πράσινη συνταγή, επειδή είχε το ίδιο χρώμα με το ραβδί. Επίσης, ένας άλλος εξω−μαθηματικός παράγοντας, ο οποίος φάνηκε πως αποπροσανατόλισε τα παιδιά, σχετίζεται με το τι θεωρούν εκείνα αναμενόμενο σύμφωνα με τις εμπειρίες που έχουν αποκτήσει. Αυτό έγινε φανερό στην τρίτη δοκιμασία με το χυμό αγριοκέρασο, όπου υπήρξαν μαθητές, οι οποίοι επέλεξαν το κόκκινο ποτήρι, επειδή και το φρούτο ήταν κόκκινο.

Όσον αναφορά το δεύτερο έργο, το χαρακτηριστικό που λειτούργησε ως επαρκής περισπασμός, ήταν το διαφορετικό σχήμα που είχε το αντικείμενο στο οποίο βρισκόταν η υπό μελέτη σχέση, σε σύγκριση με το κόκκινο σχήμα που δινόταν στα παιδιά στην πρώτη σειρά. Υπήρξαν μαθητές, οι οποίοι ενώ αρχικά είχαν επιλέξει το «σωστό» αντικείμενο εστιάζοντας στη σχέση, στη συνέχεια επειδή παρατηρούσαν το διαφορετικό σχήμα, άλλαζαν αμέσως την επιλογή τους. Δηλαδή, το γεωμετρικό σχήμα λειτουργούσε ως ισχυρότερο κριτήριο για τα παιδιά από την υπό μελέτη σχέση.

Από την άλλη μεριά, κρίνοντας τις απαντήσεις των παιδιών σε όλες τις δοκιμές και στα δύο έργα, συνειδητοποίησα ότι, εκτός από τα παραπάνω χαρακτηριστικά που ανταποκρίθηκαν στο σκοπό, για τον οποίο σχεδιάστηκαν κατά αυτόν τον τρόπο, υπήρξαν και κάποια άλλα , τα οποία θα πρέπει να αναπροσαρμοστούν προκειμένου να χρησιμοποιηθούν τα έργα και στο μέλλον. Ειδικότερα, λαμβάνοντας υπόψιν και τις απαντήσεις των μικρότερων παιδιών (Βαμβακούση κ.ά., υπό κρίση), κρίνεται απαραίτητη η απόσυρση της έγχρωμης εικόνας του ξωτικού και της νεράιδας στο πρώτο έργο, καθώς όπως φάνηκε πολλά ήταν τα παιδιά που βασίστηκαν στο πράσινο χρώμα, είτε των μαλλιών, είτε του σώματος του χαρακτήρα και έκαναν την επιλογή τους έχοντας ως κριτήριο το χαρακτηριστικό αυτό. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι πολλά παιδιά στο πρώτο έργο επέλεξαν το μικρότερο αντικείμενο, θα ήταν χρήσιμο να υπάρχουν παραπάνω από μία επιλογές, οι οποίες να είναι μικρότερες σε μήκος από το ζητούμενο αντικείμενο. Παρομοίως, στο δεύτερο έργο, υπήρξαν μαθητές που επέλεξαν, είτε το αντικείμενο με τη μικρότερη ποσότητα μπλε, είτε εκείνο με τη μεγαλύτερη ποσότητα μπλε. Έχοντας το ίδιο σκεπτικό με προηγουμένως, θα ήταν χρήσιμο να υπάρχουν παραπάνω από μία επιλογές, στις οποίες η μπλε επιφάνεια να είναι τόσο μικρότερη, όσο και μεγαλύτερη από του ζητούμενου αντικειμένου.

Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί πως υπήρχε μαθητής, ο οποίος στο πρώτο έργο δεν έδωσε καμία ΑΑΕΣ, ενώ στο δεύτερο έργο έδωσε 3 ΑΑΕΣ από τις 4 δοκιμές που αντιμετώπισε και μαθητής που στο πρώτο έργο έδωσε 3 ΑΑΕΣ, ενώ στο δεύτερο δεν έδωσε καμία ΑΑΕΣ, καθώς το κύριο χαρακτηριστικό, στο οποίο εστίαζε την προσοχή του ήταν το σχήμα του αντικειμένου, αν δηλαδή ήταν ίδιο με το αρχικό ή όχι.

Λαμβάνοντας υπόψιν το παραπάνω, γίνεται κατανοητό ότι τα δύο έργα έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά, τα οποία προκαλούν και τη διαφορετική αντιμετώπιση των παιδιών. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο οι περισπασμοί δεν έχουν μαθηματικό χαρακτήρα, ενώ στο δεύτερο έργο οι περισπασμοί είναι μαθηματικού περιεχομένου. Από τις αντιδράσεις των παραπάνω παιδιών στα δύο έργα, γίνεται κατανοητό ότι για

κάποιους μαθητές οι περισπασμοί του πρώτου τύπου έχουν μεγαλύτερη επίδραση σε εκείνους και στις επιλογές τους, ενώ για κάποιους άλλους οι περισπασμοί που έχουν μαθηματικό χαρακτήρα δρουν ισχυρότερα. Καταλήγοντας, γίνεται σαφές ότι τα δύο έργα που χρησιμοποιήθηκαν έχουν διαφορές μεταξύ τους, ωστόσο σε κανένα από τα δύο δεν εμπλέκεται η αριθμητικότητα με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και κατά συνέπεια θεωρούνται κατάλληλα για τη μελέτη του χαρακτηριστικού που εξετάστηκε στη συγκεκριμένη εργασία.

Σε έρευνες που έκαναν Φιλανδοί μελετητές (Hannula & Lehtinen, 2005) και αφορούσαν την αυθόρμητη τάση εστίασης των παιδιών στην αριθμητικότητα (SFON), κατέληξαν ότι η τάση αυτή, η σταθερότητα και η έντασή της, σχετίζεται με τη μετέπειτα ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων/ δεξιοτήτων τους.

Επιπλέον, οι McMullen κ.ά., 2014, πραγματοποίησαν έρευνα, που μελετούσε την αυθόρμητη τάση εστίασης των παιδιών στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις (SFOR). Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι οι ατομικές διαφορές που υπάρχουν στην υπό μελέτη τάση, σχετίζονται με τη μετέπειτα ανάπτυξη της γνώσης και των ικανοτήτων των παιδιών που αφορούν τα κλάσματα.

Το μειονέκτημα των παραπάνω δύο ερευνών ήταν ότι στα έργα που κατασκεύασαν οι ερευνητές, οι δύο τάσεις SFON και SFOR, ήταν στενά συνδεδεμένες, καθώς η αριθμητικότητα εμπλεκόταν στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, δηλαδή τα έργα δεν επέτρεπαν την αποσύνδεση των δύο τάσεων. Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, ο σχεδιασμός των έργων στη συγκεκριμένη εργασία έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι δυνατή η ανεξάρτητη μελέτη της αυθόρμητης τάσης εστίασης παιδιών μικρής ηλικίας στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και ο εντοπισμός ή μη, ατομικών διαφορών στην τάση αυτή.

Σε πλήρη συμφωνία με τις προηγούμενες έρευνες (McMullen κ.ά., 2014), τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο έργο το 47,1% των παιδιών επέδειξαν συστηματικά το χαρακτηριστικό αυτό, ενώ στο δεύτερο έργο, το αντίστοιχο ποσοστό μειώθηκε στο 29,4% των μαθητών. Συνολικά και στις 8 δοκιμές των δύο έργων, το 41,1% των παιδιών φάνηκε ότι εστίασε αυθόρμητα στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ενώ υπήρξαν 5 μαθητές (29,4%), οι οποίοι έδωσαν το πολύ 3 ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές συνολικά.

Από την άλλη μεριά, όσον αναφορά το σύνολο των παιδιών των δύο ηλικιακών ομάδων, Νηπιαγωγείου και Δημοτικού, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι περίπου το ένα

τρίτο αυτών, εστίασε αυθόρμητα στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις 8 δοκιμές των δύο έργων, ενώ υπήρξαν 11 παιδιά (34,4%), τα οποία έδωσαν το πολύ 3 ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές (εργασία ΕΝΕΔΙΜ, 2015).

Μελετώντας τα αποτελέσματα, τόσο της παρούσας έρευνας, όσο και τα συγκριτικά αποτελέσματα των δύο ηλικιακών ομάδων, αξίζει να αναφέρουμε ότι τα παιδιά που έδωσαν το πολύ 3 ΑΑΕΣ, δεν εστίασαν αυθόρμητα στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, καθώς από τις εξηγήσεις που έδιναν, φάνηκε ότι εστίασαν συστηματικά την προσοχή τους σε διαφορετικά κριτήρια πέραν των υπό μελέτη σχέσεων. Για όλα τα υπόλοιπα παιδιά, δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά αν κάποιες φορές εστίασαν αυθόρμητα στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ενώ κάποιες άλλες όχι ή αν οι ΑΑΕΣ που έδωσαν ήταν τυχαίες.

Επίσης, σε αντίθεση με προηγούμενες έρευνες (McMullen κ.ά., 2014) τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν υπάρχουν συστηματικές διαφορές μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων. Από τα συγκριτικά αποτελέσματα (βλ. Πίνακα 9, σελ. 59), φαίνεται ότι τα παιδιά μικρότερης ηλικίας έδωσαν περισσότερες ΑΑΕΣ σε όλες τις δοκιμές του δεύτερου έργου, σε σχέση με τα μεγαλύτερα. Επιπλέον, τα νήπια στις απαντήσεις τους χρησιμοποίησαν εκφράσεις που αφορούσαν το μισό, κάτι που δεν παρατηρήθηκε στην πλειοψηφία των μαθητών της Α' Δημοτικού (Βαμβακούση κ.ά., υπό κρίση). Ένας παράγοντας που ενδεχομένως έπαιξε ρόλο στην επίδοση των νηπίων, ευνοώντας την σε σύγκριση με τα παιδιά του Δημοτικού, είναι ότι τα πρώτα λίγους μήνες πριν από το πείραμα είχαν διδαχθεί την έννοια του «μισού», μέσα από το μοντέλο του εμβαδού, ενώ τα δεύτερα δεν είχαν παρόμοιες εμπειρίες. Γενικότερα, διερευνώντας το μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών των δύο ηλικιακών ομάδων, διαπιστώθηκε ότι τα μικρότερα παιδιά ήταν ήδη εκτεθειμένα σε εμπειρίες σχετικές με τα κλάσματα, σε αντίθεση με τα μεγαλύτερα, των οποίων το επίπεδο ήταν αρκετά χαμηλό.

Αυτό δείχνει ότι οι εμπειρίες των μικρών παιδιών με απλά κλάσματα, όταν αυτές εμφανίζονται σε παρόμοιο μαθηματικό περιβάλλον, με αυτό στο οποίο τις είχαν πρωτοσυναντήσει, επηρεάζει σε θετικό βαθμό την αυθόρμητη τάση των παιδιών να εστιάζουν στις αντίστοιχες σχέσεις (Βαμβακούση κ.ά., 2015). Κάτι τέτοιο δηλώνει ότι η αυθόρμητη τάση εστίασης των παιδιών στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, μπορεί να ενισχυθεί τόσο στην προσχολική, όσο και στην πρωτοσχολική εκπαίδευση, μέσω ειδικών παρεμβάσεων, όπως συνέβη και με την τάση SFON, μέσω μιας πειραματικής έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε παιδιά προνηπιακής και νηπιακής ηλικίας (Hannula, Mattinen & Lehtinen, 2005).

Ειδικότερα, όσον αναφορά το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στα ελληνικά νηπιαγωγεία, αξίζει να αναφερθεί ότι αυτά δίνουν τη δυνατότητα αναφοράς σε σχέσεις όπως το «μισό», μέσα από διάφορες μαθηματικές έννοιες, για παράδειγμα τη διαίρεση ως «δίκαιη μοιρασιά», την καταμέτρηση, απλές πιθανολογικές έννοιες, άξονες συμμετρίες και επαναλαμβανόμενα πάττερνς. Εν τούτοις, τις περισσότερες φορές δεν παρατηρείται καμία προσπάθεια, από την μεριά των νηπιαγωγών, να εισάγουν την έννοια του κλάσματος, κατασκευάζοντας ιδανικές συνθήκες για κάτι τέτοιο. Σε όσες περιπτώσεις, τα παιδιά εκτέθηκαν σε εμπειρίες παρόμοιες με τις παραπάνω, φάνηκε πως αυτό βοήθησε στη μετέπειτα ενασχόλησή τους με τους ρητούς αριθμούς, πράγμα που επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα τόσο των ερευνών που αφορούν το SFON και τη σχέση αυτής της τάσης με τη μετέπειτα ανάπτυξη αριθμητικών δυνατοτήτων (Hannula & Lehtinen, 2005), όσο και των ερευνών που αφορούν το SFOR και τη σχέση αυτής της τάσης με τη μετέπειτα ανάπτυξη δυνατοτήτων που αφορούν τους μη φυσικούς αριθμούς (McMullen κ.ά., 2014). Δεδομένης της σχέσης που φαίνεται να υπάρχει μεταξύ της αυθόρμητης τάσης εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και της μετέπειτα επίδοσης των παιδιών στα κλάσματα (McMullen κ.ά., 2014) θα ήταν χρήσιμο να πραγματοποιηθεί περαιτέρω έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ολοκληρώνοντας, από τη στιγμή που υπάρχουν έργα που μελετάνε καθεμία από τις δυο τάσεις SFON και SFOR μεμονωμένα, θα ήταν χρήσιμο να εξεταστεί πως αναπτύσσονται αυτές οι δύο τάσεις ξεχωριστά και στην περίπτωση που αυτές συνδέονται μεταξύ τους, με ποιον τρόπο γίνεται αυτό. Με άλλα λόγια, τα άτομα που έχουν την τάση να εστιάζουν αυθόρμητα στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης (SFONers), έχουν την τάση να εστιάζουν αυθόρμητα και στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις (SFORers) ή το αντίστροφο; Το παραπάνω ερώτημα θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω έρευνας και μελέτης στο μέλλον.

Βιβλιογραφία

Ericsson, K. A. (2006). The influence of experience and deliberate practice on the development of superior expert performance. In KA Ericsson , N. Charness, PJ Feltovich, RR Hoffman (Eds.), *The Cambridge Handbook of Expertise and Expert Performance* (pp. 685-703). New York, NY: Cambridge University Press.

Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction*, *14*(5), 541–548.

Hannula, M. M. (2005). *Spontaneous Focusing on Numerosity in the development of early mathematical skills.* Doctoral Dissertation, University of Turku. Turku, Finland: Painosalama.

Hannula, M. M., & Lehtinen, E. (2001). Spontaneous tendency to focus on numerosities in the development of cardinality. In M. Panhuizen-Van Heuvel (Ed.), *Proceedings of 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, 113–120). Utrecht, The Neterlands: Freudenthal Institute.

Hannula, M. M., & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous Focusing on Numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction*, *15*(3), 237–256.

Hannula, M. M., Lepola, J., & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous Focusing on Numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(4), 394–406.

Hannula, M. M., Mattinen, A., & Lehtinen, E. (2005). Does social interaction influence 3-year-old children's tendency to focus on numerosity? A quasi-experimental study in day care. In L. Verschaffel, E. De Corte, G. Kanselaar, & M. Valcke (Eds.), *Powerful learning environments for promoting deep conceptual and strategic learning* (pp. 63-80). Leuven, Belgium: Leuven University Press.

Jordan, N., Hansen, N., Fuchs, L., Siegler, R., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*, 45–58.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Heibert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, 93–118.

McMullen, J. (2014). *Spontaneous Focusing on Quantitative Relations and the development of rational number conceptual knowledge*. Doctoral Dissertation, University of Turku. Turku, Finland: Painosalama.

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2014). Spontaneous Focusing on Quantitative Relations in the development of children's fraction knowledge. *Cognition and Instruction, 32,* 198–218

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344–355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions ? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*, 181–209.

Vamvakoussi X. (2015). Is the natural number bias immune to instruction? Προσκεκλημένη σε ομιλία, Centre for Instructional Psychology and Technology, KU Leuven, Belgium.

Βαμβακούση Ξ, Βράκα Λ., Λιολιούση Α. & McMullen, J. (υπό κρίση). Ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις μικρές ηλικίες. Υποβλήθηκε ως εργασία στο 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ελλήνων Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ).