ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Μαθηματική γλώσσα και φυσική γλώσσα στην τάξη των μαθηματικών

Παναγιώτης Ασημάκης
201135

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Παναγιώτης Σπύρου τ. Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα
Οκτώβριος, 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 16η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Στον πατέρα μου

που έφυγε πωρίς

&

στο γιο μου

που έρχεται σύντομα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές που αποτέλεσαν τη συμβουλευτική επιτροπή και συγκεκριμένα:

- Τον επιβλέποντα τ. αναπληρωτή καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη για την πολύτιμη βοήθειά του και τις υπέροχες συζητήσεις που πραγματοποιήσαμε, μέσω των οποίων κατέληξα στο θέμα της συγκεκριμένης Διπλωματικής.
- Την αναπληρώτρια καθηγήτρια Πόταρη Δέσποινα για την καθοδήγηση και τις συμβουλές της ως υπεύθυνη σπουδών μου, καθώς και για την τιμή που μου έκανε να είναι μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής και της εξεταστικής επιτροπής.
- Τον Λέκτορα Ψυχάρη Γεώργιο για την τιμή που μου έκανε να είναι μέλος της εξεταστικής επιτροπής.
- Τον Δρ. Μούτσιο – Ρέντζο Ανδρέα για την πολύτιμη βοήθειά του, την επιστημονική καθοδήγηση, την υπομονή και την συμπαράστασή του, χωρίς τον οποίο δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση αυτής της Διπλωματικής. Αν η εκπόνηση της Διπλωματικής παρομοιαζόταν με ένα καράβι σε φουσκοθαλασσιά, η υποστήριξή που μου παρείχε θα έμοιαζε με φάρο που σε οδηγεί στο λιμάνι.

Ευχαριστώ και όλους τους υπόλοιπους καθηγητές του ΠΜΣ για τα εφόδια που μου πρόσφεραν αυτά τα χρόνια των σπουδών μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Τάτση Κωνσταντίνο, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τη συνεισφορά του στον βιβλιογραφικό συντονισμό της παρούσας Διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ τους φίλους μου για τη συμπαράσταση που έδειξαν σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας καθώς και όσους απέκτησα κατά τη διάρκεια του ΠΜΣ και με βοήθησαν πάρα πολύ όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την μητέρα μου για την στήριξή της και την αγάπη της σε όλες τις δύσκολες στιγμές που περάσαμε,

καθώς και τη γυναίκα μου για την αγάπη, την υπομονή της, τη συμπαράστασή της και την στήριξή της όλα αυτά τα χρόνια που είμαστε μαζί και ιδιαίτερα για την εκπόνηση αυτής της Διπλωματικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή……..11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1……..14

1.1 Κοινωνική Σημειωτική……...14

1.2 Η γλώσσα ως κοινωνική σημειωτική ……17

1.3 Το μητρώο……..20

1.4 Ο ρόλος της γλώσσας……22

1.5 Η γλώσσα ως κοινωνική πρακτική……26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2……..29

2.1 Η γλώσσα των μαθηματικών……..29

2.2 Γλώσσα και μαθηματικά: πηγή σημειωτικών συστημάτων……..31

2.3 Το μαθηματικό μητρώο ……32

2.4 Μαθηματικός συμβολισμός και γλωσσική δομή……36

2.5 Λεξιλόγιο, συμβολισμός και λογικά μοτίβα……...37

2.6 Γλώσσα και μαθηματική κατανόηση……39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ……46

3.1 Η Επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά …….....46

3.2 Το σχήμα του Toulmin στην τάξη...……...49

3.3 Η επικοινωνία στην αίθουσα των Μαθηματικών……...56

3.4 Μαθηματικοί Διάλογοι……...60

3.5 Thinking Together……..63

3.6 Διαλογική Διδασκαλία……64

3.7 Talking Points……66

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4……..68

4.1 Έρευνες σε προβλήματα που σχετίζονται με τη φυσική γλώσσα και τρόποι αντιμετώπισης……...68

4.1.1 Σημασιολογική ρύπανση……...69

4.1.2 Προβλήματα στη γραφή των μαθηματικών……..72

4.1.3 Ανάγνωση και ερμηνεία μαθηματικών κειμένων……76

4.1.4 Λέξεις που χρησιμοποιούνται σε αριθμητικά προβλήματα..81

4.1.5 Λεκτικά προβλήματα……81

4.1.6 Προσωπικές αντωνυμίες……...83

4.1.7 Κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες και γλωσσικό μητρώο..88

4.2 Συμβολή των καθηγητών……90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ……94

5.1 Προσωπικές εμπειρίες – σκέψεις……...95

5.1.1 Επίσημες Φωνές……95

5.1.2 Πειράματα Σκέψης – Διδακτικά Επεισόδια……..97

5.1.2α 1^{ο} Διδακτικό Επεισόδιο.……101

5.1.2β 2^{ο} Διδακτικό Επεισόδιο.……103

5.1.2γ 3^{ο} Διδακτικό Επεισόδιο..……104

5.1.3 Γενίκευση……...……106

5.2 Συμπεράσματα – Συζήτηση ..……...107

Βιβλιογραφία…….……112

ΟΙ ΛΕΞΕΙΣ ΔΕΝ ΦΤΑΝΟΥΝ

Μου δώσανε όνομα για να έχω ε-αυτό
συνήθισα να φτιάχνω νοήματα
αντικείμενα, ε! να αυτό!
Έννοιες, το τρίγωνο!
Μετά τυφλώθηκα.
Πως τα λένε τα άλλα;
Εκείνα που είναι έγνοιες
Υποκείμενα ακατα-νόητα
Ζωές και ανάσες
Κι ο πόλεμος με τις λέξεις
που δεν ορίζονται
μήτε περιορίζονται
δεν είναι οι ίδιες, κάθε μέρα αλλάζουν
δεν είναι όντα του Παρμενίδη
αλλά του φωτιές του Ηράκλειτου
μήτε ακουμπιώνται
μήτε νοούνται
αλλά τρέχουν
διατρέχουν,
το κορμί, τις ματιές
τα αγγίγματα,
τις ελπίδες, τους φόβους.
Φτιάχνουν παραμύθια
γίνονται εικόνες
Τις βλέπουν πολλοί,
υποκείμενα
Αν ρωτηθούν είδαν άλλα
Φαινόμενα
Που δεν σώζονται
Και οι λέξεις συρφετός
Χωρίς ξεδίψασμα.

Τάκη Σπύρου

Εισαγωγή

Σύμφωνα με Maier, (1993) η γλώσσα που έχουν συνηθίσει οι μαθητές να επικοινωνούν και που τους επιτρέπει να κατανοούν ιδέες και πληροφορίες από άλλους ανθρώπους είναι η καθημερινή γλώσσα. Εντούτοις, η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο καθηγητής μέσα στην αίθουσα είναι ένα κράμα γλώσσας μαθηματικών (όπως αυτή ορίζεται από την Μαθηματική κοινότητα) και καθημερινής γλώσσας. Μερικά από τα χαρακτηριστικά της γλώσσας που χρησιμοποιεί ο καθηγητής κάνουν την κατανόηση πιο δύσκολη για τους μαθητές. Ο Maier αναφέρει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) *άγνωστο λεξιλόγιο*: τεχνικοί όροι που δεν υπάρχουν στην καθημερινή γλώσσα των μαθητών ή υπάρχουν με διαφορετική σημασία,

2) *γλωσσικές συμβάσεις που αλλάζουν*: αλλαγή των γλωσσικών συμβάσεων υπό την επίδραση των κανόνων χρήσης της τεχνικής γλώσσας,

3) *ανάμειξη των σημασιών*: η απόδοση από τους μαθητές νέων σημασιών σε όρους που στο μυαλό τους, έχουν ήδη το χαρακτήρα καλά στερεωμένων ιδεών από την καθημερινή επικοινωνία.

Μία άλλη σημαντική παράμετρος είναι η δυσχέρεια από την μεριά των μαθητών να κατασκευάσουν πλούσιες μαθηματικές ιδέες κάτι που αποτελεί για τον Maier θεμελιώδη συνθήκη για την κατανόηση της διδασκαλίας και των εξηγήσεων του δασκάλου. Αυτό οφείλεται, σύμφωνα με τον Maier

α) στο *ελάχιστο ενδιαφέρον για τη σημασία*,

β) στους *στενούς δεσμούς με τα οπτικά βοηθήματα*,

γ) στις *πολύ στενές (ή πολύ πλατιές) αντιλήψεις*,

δ) στην *παραβίαση της σαφήνειας και της συνοχής*.

Συγκεκριμένα αναφέρει πως, οι περισσότεροι γεωμετρικοί όροι χρησιμοποιούνται χωρίς καμία προσπάθεια να παρασχεθεί στο μυαλό του μαθητή μια επαρκής ιδέα της σημασίας τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να κατασκευάζουν μία ιδέα για

τη σημασία τους διαφορετική από αυτή του δασκάλου. Κάποιοι ενδεικτικοί τεχνικοί όροι στη Γεωμετρία είναι:

«ύψος», όπου οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν πως πρέπει να είναι παράλληλο στη δεξιά και αριστερή μεριά του φύλλου,

«πλευρά» όπου πολλοί μαθητές νομίζουν μια επιφάνεια αντί για γραμμή ή ακμή. Επιπλέον, οι μαθητές μπορεί να παρουσιάσουν δυσκολία στο να καταλάβουν τις οδηγίες του δασκάλου, όταν η σημασία με την οποία συνδέουν τους γεωμετρικούς όρους είναι στενότερη από αυτή του δασκάλου. Αυτό γίνεται εντονότερο όταν υπάρξουν διφορούμενες ή αντιφατικές οδηγίες. Η σαφήνεια παραβιάζεται στη γλώσσα του δασκάλου όταν χρησιμοποιούνται διαφορετικές λέξεις για την ίδια έννοια ή ίδια λέξη για διαφορετικές έννοιες. Η διδασκαλία μπορεί να γίνει διφορούμενη, όταν δεν δίνει όλες τις πληροφορίες που χρειάζεται ο μαθητής για πλήρη κατανόηση. Λέξεις στα μαθηματικά που έχουν διαφορετικές έννοιες μέσα στην καθημερινή γλώσσα προκαλούν, συχνά, σύγχυση τους μαθητές. Όπου οι λέξεις έχουν μαθηματικό και μη μαθηματικό νόημα οι μαθητές πρέπει να ξέρουν και τα δύο και να είναι σε θέση να ερμηνεύσουν την έννοια σωστά στο κατάλληλο πλαίσιο. Για παράδειγμα σε καθημερινή χρήση η λέξη "πίνακας" αναφέρεται στο είδος επίπλου ή στο διδακτικό εποπτικό μέσο. Στα μαθηματικά η έννοια είναι αρκετά διαφορετική. Πολλές από τις λέξεις που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά έχουν, λοιπόν, διαφορετική σημασία στον «πραγματικό κόσμο» και αρκετές λέξεις έχουν περισσότερες από μια σημασία. Το μαθηματικό λεξιλόγιο και τα μαθηματικά σύμβολα, εξαιτίας της πολυσημίας όπως, επίσης, και το μαθηματικό κείμενο είναι οι πλευρές της μαθηματικής γλώσσας που αναφέρονται, συχνότερα, ως πιθανές αιτίες δυσκολιών.

Ο Maier, (1993) αναφέρει: « *κατά τη γνώμη μου είναι επικίνδυνο λάθος να υποθέσουμε ότι λέξεις από την καθημερινή γλώσσα των μαθητών εξηγούν τις έννοιες ή μπορούν να κάνουν τη δημιουργία αντιλήψεων για αυτές τις έννοιες ευκολότερη. Αντίθετα, ο κίνδυνος από παρεμβολές αυξάνει σοβαρά ... πολλές από τις λέξεις της καθημερινής γλώσσας στερούνται μιας απαραίτητης γενικότητας… η δική μου λύση στο πρόβλημα είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικούς όρους όπως ακριβώς έχουν καθιερωθεί σαφώς από την αρχή, στα μαθηματικά αλλά να περιορίσουμε το πλήθος τους στο ελάχιστο δυνατό. Λέξεις που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνιμα και που δεν*

είναι αναγκαίες για την απλούστευση ης διδασκαλίας και των εξηγήσεων του δασκάλου και αντίστοιχα των απαντήσεων και περιγραφών των μαθητών δεν πρέπει να εισάγονται στην αίθουσα διδασκαλίας. Δεν πρέπει να αντικαθίστανται από άλλες λέξεις αλλά μάλλον να παραφράζονται ή να σκιαγραφούνται λεπτομερώς στην καθημερινή γλώσσα. Η τεχνική ορολογία δεν πρέπει να θεωρείται ως περιεχόμενο της μάθησης, ως αυτοσκοπός, στη μαθηματική παιδεία. Πρέπει να παραμείνει ένα μέσο για το σκοπό που είναι να εκφράζουμε ιδέες και να παρουσιάζουμε πληροφορίες.»

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να αναγνωρισθούν οι σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ καθημερινής και μαθηματικής γλώσσας, όπως αναδεικνύεται στην επιχειρηματολογία των μαθητών γυμνασίου, με στόχο την παιδαγωγική αξιοποίηση τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Κοινωνική Σημειωτική

Σύμφωνα με Morgan, (2006) τα τελευταία χρόνια, η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών έχει καταβάλει αυξημένη προσοχή στο κοινωνικό και γλωσσικό πλαίσιο και τη σημασία της γλώσσας ως το κύριο μέσο με το οποίο η διδασκαλία και η μάθηση λαμβάνει χώρα. Η «στροφή προς τη γλώσσα» έχει φέρει μαζί της αυξημένη προσοχή στη φύση της γλώσσας και άλλα σημειωτικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική δραστηριότητα και τους ρόλους που αυτά μπορούν να παίξουν στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών, αντλώντας από τη σημειωτική και από τις γλωσσικές θεωρίες και την εξέλιξη τους ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες των ερευνητών στον τομέα αυτό (βλέπε Anderson κ.ά., 2003, Duval, 2000, Sfard, 2000, και άρθρα σε αυτό το ειδικό θέμα, όπως αναφέρεται σε Morgan, 2006). Ταυτόχρονα, αυξημένος αριθμός εμπειρικών μελετών έχουν επικεντρωθεί σε δραστηριότητες λόγου στην τάξη, ειδικά στην αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλων και μαθητών (παραδείγματα μπορεί να δει κανείς σε Cobb κ.ά., 2000, στο ειδικό τεύχος του ESM edited by Kieran et al. , 2001 και Steinbring, 1998, όπως αναφέρεται σε Morgan, 2006).

Η Κοινωνική Σημειωτική, με βάση τις εργασίες του γλωσσολόγου Michael Halliday, υπογραμμίζει τους τρόπους με τους οποίους η γλώσσα λειτουργεί στην κατασκευή και την παρουσίαση της εμπειρίας μας και της κοινωνικής μας ταυτότητας και σχέσεων, (Morgan, 2006). Αποτελεί σύμφωνα με Chapman, (1993) μία σύγχρονη προσέγγιση για την κοινωνική παραγωγή νοήματος, βασίζεται στην επίσημη, καθιερωμένη σημειωτική, μια θεωρητική προσέγγιση της μελέτης των σημείων και των σημειολογικών συστημάτων. Η σημειωτική μπορεί επίσης να θεωρηθεί πιο γενικά ως η μελέτη του νοήματος, με κεντρικό ενδιαφέρον το πώς δημιουργούνται γενικά τα νοήματα. Η κοινωνική σημειωτική παίρνει αυτό το ενδιαφέρον προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Όπως υποδηλώνει ο όρος, εστιάζει στην κοινωνική αλληλεπίδραση: στο πώς οι άνθρωποι κατασκευάζουν συστήματα νοήματος, και όχι στα ίδια τα συστήματα. Η κοινωνική σημειωτική βλέπει το «νόημα» ως μια αεικίνητη διαδικασία, που δημιουργείται μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση.

Η κεντρική έννοια της κοινωνικής σημειωτικής είναι ότι όλα τα νοήματα κατασκευάζονται. Δεν υπάρχουν ως αντικείμενα ή συγκεκριμένα γεγονότα. Μάλλον, είναι κατασκευασμένα μέσω των σημειολογικών συστημάτων. Ένα σημείο είναι κάποιο φυσικό πράγμα που αντιπροσωπεύει, ή αναφέρεται σε κάτι άλλο. Μια ζωγραφική ή μία φωτογραφία είναι ένα εικονικό σύμβολο. Τα χρώματα και οι χειρονομίες μπορεί επίσης να είναι σημάδια. Μια λέξη, είτε μιλιέται είτε γράφεται, είναι ένα γλωσσικό σύμβολο. Έχει μια φυσική μορφή, είτε τον προφορικό ήχο ή τα γράμματα, και σχετίζεται με ορισμένες νοητικές έννοιες. Η φυσική μορφή του σημείου έχει ονομαστεί ως σημαίνον, και η έννοια στην οποία αναφέρεται, ως σημαινόμενο (de Saussure, 1974, αναφορά σε Chapman, 1993). Η σημασία, ή η παραγωγή νοήματος, είναι «η σχέση ενός σημείου ή ενός συστήματος σημείων με την αναφορική πραγματικότητα» (O'Sullivan κ.ά., 1983:215, αναφορά σε Chapman, 1993). Αυτό που απασχολεί την κοινωνική σημειωτική είναι η φύση της σχέσης του σημαίνον και του σημαινόμενου, δηλαδή τις πρακτικές, οι οποίες είναι οι διαδικασίες δημιουργίας νοήματος. Αυτή η σχέση δεν είναι αποκλειστικά γλωσσικής φύσεως. Περισσότερο είναι μια κοινωνική σχέση (Walkerdine, 1982, αναφορά σε Chapman, 1993). Οι σχέσεις νοήματος δεν μπορούν να κατανοηθούν έξω από τη χρήση τους στις κοινωνικές πρακτικές μιας κοινότητας (Lemke, 1987: 218, αναφορά σε Chapman, 1993).

Οι Marks και Mousley (1990), όπως αναφέρεται σε Chapman, (1993) επισημαίνουν ότι τα μαθηματικά είναι πλέον ευρέως αποδεκτά ως ένα σημειωτικό σύστημα. Σαφώς, τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα συμβόλων. Στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά αποτελούνται από πολλά συστήματα σημείων, με τα οποία οι άνθρωποι αποκτούν αίσθηση του κόσμου. Το σύμβολο 5 είναι ένα απλό παράδειγμα. Είναι ένα μαθηματικό σύμβολο. Στέκεται για κάποιο πράγμα. Αλλά το σημείο 5 από μόνο του δεν έχει κάποιο νόημα. Οι άνθρωποι κατασκευάζουν νοήματα για αυτό σύμφωνα με τις συμβάσεις των μαθηματικών. Το νόημά του είναι δυνατόν να προκύψει από καταμέτρηση ή διάταξη, ή μπορεί να είναι το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης, ή μια μέτρηση απόστασης. Διαφορετικές σημασίες θα μπορούσαν να υπάρξουν σχετικά με τον αριθμό 5, από διαφορετικούς ανθρώπους, ή από το ίδιο άτομο σε διαφορετικά πλαίσια. Το σημαντικό σημείο είναι ότι υπάρχουν κοινές έννοιες για κάθε διαφορετικό πλαίσιο. Αυτές οι κοινές έννοιες κατασκευάζονται και έχουν αναπτυχθεί

με κοινωνικές συμβάσεις, όπως μέσω διάταξης και μέτρησης, που αναγνωρίζονται ως τρόποι κατασκευής νοήματος.

Οι κοινές έννοιες των μαθηματικών περιλαμβάνουν μαθηματικές τεχνικές, δηλαδή, διαδικαστική γνώση, καθώς και εννοιολογική γνώση. Γνωρίζοντας πώς να εκτελούν ενέργειες με συγκεκριμένους τρόπους είναι ένα ισχυρό χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθηματικών του σχολείου. Πρότυποι γραπτοί αλγόριθμοι συχνά δίνουν το έναυσμα για μαθήματα μαθηματικών. Γνωρίζοντας πώς να «κάνει» διαίρεση, για παράδειγμα, σημαίνει πραγματικά ξέρει πώς να το κάνει με τον «σωστό» τρόπο. Η παραγοντοποίηση διωνυμικών εκφράσεων προϋποθέτει την εκτέλεση ενός σχεδίου δράσεων που είναι πιθανό να ασκείται και να επαναληφθεί πολλές φορές στην τάξη μαθηματικών. Η μέθοδος είναι εξίσου σημαντική με το αποτέλεσμα. Δράσεις όπως αυτές είναι τρόποι για να δοθεί νόημα στα μαθηματικά. Είναι σημειωτικές πρακτικές που έχουν νόημα στα μαθηματικά. Είναι επίσης ένα σημαντικό μέρος του τι απαρτίζουν επί του παρόντος τα σχολικά Μαθηματικά.

Για μια προοπτική κοινωνικής σημειωτικής σημαντικό στοιχείο αναφοράς είναι ότι η δημιουργία νοήματος εμφανίζεται σε κοινωνικά περιβάλλοντα και ότι η χρήση της γλώσσας είναι λειτουργική μέσα σε αυτό το πλαίσιο (Morgan, 2006). Το πλαίσιο στο οποίο η γλώσσα χρησιμοποιείται και στην οποία λαμβάνει χώρα η μάθηση έχει γίνει ένα σημαντικό θέμα των πρόσφατων εξελίξεων στις θεωρίες του λόγου, καθώς και στις θεωρίες της μάθησης, με πολλούς ερευνητές με βάση τις προοπτικές για μάθηση του Vygotsky. Η κατασκευή των μαθηματικών εννοιών συμβαίνει σε αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών ή μεταξύ των μαθητών και γνώσεις σχετικά με τις διαδικασίες της κατασκευής τους έχουν παρασχεθεί από τις αναλύσεις των εν λόγω αλληλεπιδράσεων με διάφορες προσεγγίσεις στο λόγο και τη σημειωτική (Kieran, 2001, Radford, 2000, Saenz-Ludlow, 2004, Sfard, 2001), όπως αναφέρεται σε Morgan, (2006). Το επίκεντρο αυτών των μελετών, κατά κύριο λόγο, ήταν γνωστικό, αφορά κατά κύριο λόγο την παρακολούθηση της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών μέσα από την αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων, αν και οι μελέτες των προσεγγίσεων στη μαθηματική επιχειρηματολογία (Zack & Graves, 2001), αρμοδιότητα για τη συμμετοχή σε συζήτηση στην τάξη (Forster & Taylor, 2003) και διαφορετικά μοτίβα της προσοχής σε λεκτικά προβλήματα (Barwell, 2003) έχουν ασχοληθεί με ένα ευρύτερο φάσμα των λειτουργιών λόγου (Morgan, 2006). Μια σημαντική συμβολή της κοινωνικής σημειωτικής είναι η αναγνώριση του

φάσματος των λειτουργιών που εκτελούνται με τη χρήση της γλώσσας και άλλων σημειωτικών πόρων. Κάθε παράδειγμα μαθηματικής επικοινωνίας συλλαμβάνεται έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει όχι μόνο τη σημασία των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων, αλλά και τις διαπροσωπικές σημασίες, τις στάσεις και τις πεποιθήσεις. Αυτό μας επιτρέπει να αντιμετωπίσουμε ένα ευρύ φάσμα θεμάτων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τα μαθηματικά της εκπαίδευσης και μας βοηθά να αποφύγουμε την αντιμετώπιση με τη γνωστική λειτουργία σε απομόνωση από άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Μια περαιτέρω συνεισφορά της κοινωνικής σημειωτικής είναι στην εννοιόλογηση του «πλαισίου». Η φύση του «πλαισίου» όπως έχει συγκεκριμενοποιηθεί στα είδη των μελετών που αναφέρονται παραπάνω τείνει να περιορίζεται στο άμεσο πλαίσιο της συγκεκριμένης τάξης ή ακόμη και το συγκεκριμένο επεισόδιο της δραστηριότητας που έχει μελετηθεί. Από την σκοπιά της κοινωνικής σημειωτικής, το «πλαίσιο» είναι ευρύτερο από αυτό, ενσωματώνοντας τη διάσταση του πολιτισμού έξω από την τάξη, όπως θα συζητηθεί παρακάτω. Αυτή η σύλληψη είναι συμβατή με τις προσεγγίσεις στο λόγο από την προοπτική του Φουκώ, ίσως οι πιο εξοικειωμένοι με τα μαθηματικά εκπαιδευτικοί από το έργο του Walkerdine (1988,1989), παρέχοντας επιπλέον μία σχετική γλωσσολογική θεωρία που επιτρέπει τη λεπτομερή ανάλυση των κειμένων που βρίσκονται σε πλαίσια τους, όπως αυτά που παράγονται από την Κριτική Ανάλυση Λόγου (Chouliaraki & Fairclough, 1999, Fairclough, 1995), όπως αναφέρεται σε Morgan, (2006).

1.2 Η γλώσσα ως κοινωνική σημειωτική

Στο πιο βασικό επίπεδο, η προοπτική της κοινωνικής σημειωτικής προϋποθέτει την αναγνώριση ότι η γλώσσα αποτελείται από «την ανταλλαγή των νοημάτων σε διαπροσωπικά πλαίσια του ενός ή του άλλου είδους» (Halliday, 1978, σελ. 2) και ότι αυτή η ανταλλαγή των νοημάτων είναι λειτουργική. Τα άτομα δεν μιλούν ή γράφουν απλά για να εξωτερικεύσουν τις προσωπικές τους αντιλήψεις, αλλά να για να επιτύχουν αποτελέσματα στον κοινωνικό τους κόσμο. Μελετώντας τη γλώσσα και τη χρήση της οφείλουμε να λάβουμε υπόψη (Morgan, 2006) τόσο την άμεση κατάσταση

στην οποία ανταλλάσσονται τα νοήματα (το πλαίσιο της κατάστασης) και τον ευρύτερο πολιτισμό στον οποίο έχουν ενσωματωθεί οι συμμετέχοντες (το πλαίσιο του πολιτισμού).

Το ***πλαίσιο της κατάστασης*** περιλαμβάνει τους στόχους της τρέχουσας δραστηριότητας, τους άλλους συμμετέχοντες, τα διαθέσιμα εργαλεία και άλλες πτυχές του άμεσου περιβάλλοντος. Κάθε κατάσταση δεν μπορεί να εξετάζεται μεμονωμένα, αλλά ως ένα παράδειγμα του τύπου κατάστασης ή της σημειωτικής δομής που σχηματίζεται από τις εξής μεταβλητές: πεδίο (***field***), πορεία (***tenor***) και λειτουργία (***mode***) (Morgan, 2006).

Το *πεδίο* μπορεί να θεωρηθεί όχι μόνο ως αντικείμενο αλλά και ως το θεσμικό πλαίσιο της δραστηριότητας στην οποία ένας ομιλητής και οι άλλοι συμμετέχοντες ασχολούνται.

Η *πορεία* περιλαμβάνει τις σχέσεις μεταξύ των συμμετεχόντων, και

η *λειτουργία* παραπέμπει στο κανάλι επικοινωνίας (π.χ. το γράψιμο ή η ομιλία) και άλλες πτυχές του ρόλου της γλώσσας στην κατάσταση.

Το ***πλαίσιο του πολιτισμού*** περιλαμβάνει τους ευρύτερους στόχους, τις αξίες, την ιστορία και την οργάνωση εννοιών που οι συμμετέχοντες κατέχουν από κοινού. Αυτή η διατύπωση του *πλαισίου του πολιτισμού* προτείνει μια ομοιομορφία του πολιτισμού τόσο μεταξύ όσο και εντός των συμμετεχόντων. Είναι σημαντικό, όμως, ότι η σκέψη και η δημιουργία νοήματος των ατόμων δεν είναι απλώς μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο, αλλά στην πραγματικότητα προκύπτει μέσα από την κοινωνική συμμετοχή στην ανταλλαγή νοημάτων.

Το πλαίσιο προβλέπει έτσι τη σημειωτική δομή εντός της οποίας η ανταλλαγή νοημάτων πραγματοποιείται (για παράδειγμα, τις έννοιες και τις αξίες των μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών και εκείνες που σχετίζονται με την αξιολόγηση σε εθνικό επίπεδο και στην τάξη), μελετάει έννοιες μέσα σε μια συγκεκριμένη κατάσταση αλλά απαιτεί επίσης και εργαλεία για την εξέταση της ίδιας της επικοινωνιακής ανταλλαγής - την γλώσσα. Υπάρχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά της γλωσσολογίας του Halliday: οι έννοιες του ***συστήματος*** και της ***λειτουργίας***. Μέσα σε μια δεδομένη κατάσταση, υπάρχει το δυναμικό που σχετίζεται με το είδος της κατάστασης, που αποτελείται από ένα σύστημα

σημασιολογικών επιλογών από τις οποίες επιλέγουν οι ομιλητές. Το σημασιολογικό σύστημα ή *μητρώο (register)* είναι μια υλοποίηση της σημειωτικής δομής του τύπου κατάστασης - το «σύστημα νοημάτων που αποτελεί την 'πραγματικότητα' του πολιτισμού» (Halliday, 1978, σελ. 123). Είναι δομημένο σύμφωνα με τις λειτουργίες ότι η γλώσσα (και άλλα συστήματα, όπως η αλγεβρική σημειογραφία, γραφικές παραστάσεις, κλπ.) χρησιμοποιείται για την κατάσταση. Η *ιδεατή* λειτουργία, δηλαδή, η έκφραση των νοημάτων που σχετίζονται με το περιεχόμενο της κατάστασης, τα αντικείμενα, τη δομή του συμμετέχοντα, δράσεις και λογικές σχέσεις μεταξύ αυτών, είναι η σημασιολογική υλοποίηση του πεδίου του λόγου. Η *διαπροσωπική* λειτουργία, η έκφραση των νοημάτων που σχετίζονται με τις σχέσεις μεταξύ των συμμετεχόντων και την ταυτότητα του ομιλητή, είναι η υλοποίηση του περιεχομένου της συζήτησης. Η λειτουργία *του κειμένου,* ο τρόπος με τον οποίο η ίδια η γλώσσα παίζει ένα ρόλο στο πλαίσιο της κατάστασης, είναι η συνειδητοποίηση του τρόπου του λόγου. Οι λειτουργίες αυτές αντιπροσωπεύονται σε κείμενα από διάφορα μέρη των λεξικό-γραμματικών συστημάτων. Η σχέση μεταξύ τύπου κατάστασης και σημασιολογικού συστήματος μας επιτρέπει, σε ένα πολύ γενικό και μη ντετερμινιστικό τρόπο, να προβλεφθούν σε αμφότερες τις κατευθύνσεις. Με άλλα λόγια, σε μια δεδομένη κατάσταση, μπορούμε να προβλέψουμε τα είδη των πραγμάτων που είναι πιθανόν να ειπωθούν από τους συμμετέχοντες και, αντιστρόφως, αν δοθεί ένα κείμενο, μπορούμε να προβλέψουμε τον τύπο της κατάστασης στην οποία είναι πιθανό να έχουν προκύψει.

1.3 Το Μητρώο

Συγκεκριμένα είδη δραστηριοτήτων απαιτούν συγκεκριμένα είδη γλώσσας. Πολύ συχνά, η φύση μιας δραστηριότητας μπορεί να προσδιοριστεί από το ύφος της εν χρήση γλώσσας. Υπό αυτή την έννοια η γλώσσα αντικατοπτρίζει τη δραστηριότητα. Την ίδια στιγμή, η γλώσσα μπορεί να βοηθήσει να δημιουργηθεί μια κατάσταση. Μια αλλαγή στο ύφος, στον τόνο ή το λεξιλόγιο μπορεί να σηματοδοτήσει ένα νέο είδος δραστηριότητας.

Η καταχώρηση του γλωσσικού όρου αναφέρεται στο συγκεκριμένο είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Ο Halliday χρησιμοποιεί τον όρο για να περιγράψει

«*ένα σύνολο εννοιών που είναι κατάλληλο για μια συγκεκριμένη λειτουργία της γλώσσας, μαζί με τις λέξεις και τις δομές που εκφράζουν αυτές τις έννοιες*» (1978:195).

Σύμφωνα με Chapman, (1993) η καταχώρηση των Μαθηματικών αποτελείται από συγκεκριμένες χρήσεις της γλώσσας για μαθηματικούς σκοπούς. Αυτό περιλαμβάνει τις λέξεις και τις δομές των μαθηματικών, τόσο προφορικές όσο και γραπτές, και τα νοήματα που εκφράζουν. Στην τάξη των μαθηματικών, υπάρχει μια σιωπηρή απαίτηση να χρησιμοποιείται η γλώσσα με συγκεκριμένους τρόπους. Οι καθηγητές εισαγάγουν και μοντελοποιούν «μαθηματικές» λέξεις και δομές της γλώσσας που είναι προνομιούχες έναντι άλλων μορφών της γλώσσας. Η μάθηση των μαθηματικών περιλαμβάνει την εκμάθηση του μητρώου του.

Το Μητρώο χαρακτηρίζεται με τρεις τρόπους: πεδίο, πορεία και λειτουργία (Halliday, 1978). Το πεδίο αναφέρεται στην κοινωνική δραστηριότητα που συμβαίνει, στην οποία η γλώσσα παίζει ένα ρόλο. Η πορεία περιγράφει τι κάνουν οι άνθρωποι, και περιλαμβάνει το θέμα και το περιεχόμενο. Αναφέρεται στους ρόλους και τις προσωπικές σχέσεις των συμμετεχόντων στη κοινωνική δραστηριότητα. Περιλαμβάνει έτσι δυναμική, κατάσταση, συναισθήματα και στάση. Η λειτουργία αναφέρεται στα μέσα επικοινωνίας, τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση καθώς και τον τρόπο που είναι οργανωμένη. Αυτό μπορεί να είναι προφορικά, γραπτά, ή χρησιμοποιώντας μια συμβολική μορφή εκπροσώπησης. Η απόκτηση μητρώου απαιτεί εγκατάσταση καθεμίας από αυτές τις τρεις πτυχές. Αυτό

σημαίνει ότι απαιτεί περισσότερο από την εκμάθηση των κατάλληλων λέξεων και δομών. Περιλαμβάνει, επίσης, να είναι σε θέση να προβλέψει το είδος της γλώσσας που είναι σκόπιμο στα πεδίο, πορεία και λειτουργία για ένα συγκεκριμένο πλαίσιο κατάστασης (Green, 1988 όπως αναφέρεται σε Chapman, 1993)

Ο Lemke προσεγγίζει την έννοια του πλαισίου κατάστασης από μια ιδιαίτερη οπτική γωνία. Δηλώνει ότι κάθε πλαίσιο κατάστασης έχει δύο πτυχές: μια πτυχή αλληλεπίδρασης και μια θεματική πτυχή:

..σε κάθε πράξη αποδίδεται μια έννοια στο πλαίσιο αλληλεπίδρασης και στο θεματικό πλαίσιο και συμβάλλει στη θεματική και αλληλεπιδραστική ανάπτυξη, έχοντας τη δύναμη να αλλάξει ριζικά, καθώς και να διατηρήσει τις αλληλεπιδράσεις και τις θεματικές καταστάσεις. (1982a:12)

Το Μητρώο, στη συνέχεια, μπορεί να χαρακτηριστεί με δύο τρόπους: με το θεματικό πλαίσιο, το οποίο ισοδυναμεί με το πεδίο, και με το πλαίσιο αλληλεπίδρασης, που ισοδυναμεί με τις συνδυασμένες κατηγορίες της πορείας και της λειτουργίας. Ο Lemke ισχυρίζεται ότι (αναφορά σε Chapman, 1993) :

«*αυτό που χαρακτηρίζει ένα συγκεκριμένο μητρώο είναι ο τρόπος που η δυναμική του νοήματος περιορίζεται εντός της δυναμικής του νοήματος «της πλήρους γλώσσας*»

(1982a: 32).

Αν η εξοικείωση με ένα συγκεκριμένο πλαίσιο κατάστασης μας επιτρέπει να προβλέψουμε χαρακτηριστικά από το μητρώο, τότε μπορούμε να πούμε ότι το μητρώο έχει ένα «δυναμικό νόημα». Υπάρχουν πιθανές χρήσεις της γλώσσας και πιθανές σημασίες για κάθε κατάσταση. Αυτές οι δυνατότητες είναι ενεργοποιημένες και περιορίζονται από το πλαίσιο της κατάστασης.

Περιγράφοντας το μητρώο στην τάξη των φυσικών επιστημών, ο Lemke αναφέρει:

Η αποτελεσματική γλώσσα της τάξης είναι η κοινή γλώσσα των μαθητών και των εκπαιδευτικών, ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο υβρίδιο της καθομιλουμένης, των συνήθων τρόπων ομιλίας μας, με τα μητρώα που οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν σε άλλους χώρους (στο βιβλίο ανάγνωσης, σε πανεπιστημιακές διαλέξεις, μιλώντας με τους συμμαθητές, κλπ). (1982b: 263)

Το μητρώο της τάξης των μαθηματικών περιλαμβάνει μια σειρά από διάφορα μητρώα που δραστηριοποιούνται σε διαφορετικά πλαίσια κατάστασης. Είναι σαφές ότι υπάρχει μητρώο «τυπικών» ή «τεχνικών» μαθηματικών. Υπάρχει επίσης το μητρώο της διδασκαλίας - τα διαφορετικά είδη της γλώσσας που χρησιμοποιούνται από το δάσκαλο στις διάφορες κοινωνικές εκδηλώσεις των μαθημάτων. Για παράδειγμα, η γλώσσα που χρησιμοποιείται από το δάσκαλο σε μία συζήτηση με όλη την τάξη ενδέχεται να διαφέρει από εκείνη που χρησιμοποιείται σε έναν διάλογο με ένα μαθητή, ή από ένα μονόλογο εισαγωγής μιας νέας έννοιας. Αυτά τα διάφορα είδη της γλώσσας στο μητρώο των σχολικών μαθηματικών θα είναι πιο μαθηματική ή λιγότερο μαθηματική, ανάλογα με τη φύση της δραστηριότητας. (Chapman, 1993)

1.4 Ο ρόλος της γλώσσας

Το πιο σημαντικό σύστημα συμβόλων είναι η ίδια η γλώσσα. Η γλώσσα έχει κεντρική θέση στις κοινωνιολογικές θεωρίες, γενικώς, επομένως και στο θεωρητικό σύστημα του Vygotsky.

Πιο συγκεκριμένα, για τον Vygotsky, η επικοινωνία είναι ένα πολιτισμικό γεγονός: αν υπάρχουν πολιτισμοί υπάρχουν λόγω της δυνατότητας επικοινωνίας και της δέσμευσης ή πρόνοιας για γνώση και αξίες από γενιά σε γενιά. Ταυτόχρονα, η γλώσσα είναι ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας, το οποίο συσχετίζεται με τη σκέψη.

Η πιο σημαντική ιδιομορφία του γραπτού λόγου είναι ο συνειδητός χαρακτήρας του, το γεγονός ότι σχεδιάζεται και βασίζεται σε ένα αυθαίρετο σύστημα συμβόλων. Η υιοθέτηση ενός αλφαβήτου είναι μια συνειδητή διαδικασία, ενώ οι αλλαγές στη προφορική γλώσσα, οι οποίες συντελούνται με την πάροδο του χρόνου μέσα στις κοινωνίες, παραμένουν ασυνείδητες. Επίσης, εσκεμμένη και συνειδητή είναι η υιοθέτηση, κάποιας τεχνικής σημειογραφίας , όπως για παράδειγμα, της μαθηματικής, η οποία είναι συχνά αντικείμενο διαλόγου. (Κλαουδάτος, 2011)

Ο Piaget και ο Vygotsky θεωρούν ότι ο ανθρώπινος νους φαίνεται να εξελίσσεται από την πρώιμη σκέψη και γλώσσα του παιδιού, στις αποπλαισιωμένες λογικές και επιστημονικές έννοιες όπου η γλώσσα έχει σημαντικό, αλλά διαφορετικό ρόλο, σύμφωνα με την κάθε θεωρία. Προκειμένου να πάρουμε απαντήσεις για το ρόλο της

γλώσσας στην καθημερινή διδακτική πρακτική στα πλαίσια της θεωρίας του Vygotsy, θα χρειαστούμε στοιχεία από τη θεωρία του Bruner για τον τρόπο πρόκτησης της γλώσσας καθώς και τις ακόλουθες δύο αρχές του Wittgenstein, (αναφορά σε Κλαουδάτο, 2011):

1. Το νόημα μιας λέξης βρίσκεται στη χρήση της.

Η γλώσσα θεωρείται περισσότερο ως δραστηριότητα, μια κοινωνική πρακτική, όπου τα νοήματα των φράσεων σημασιοδοτούνται από τον τρόπο που τις χρησιμοποιούμε.

2. Η καθημερινή γλώσσα είναι επαρκής.

Η δεύτερη αρχή σημαίνει ότι είναι καλύτερο κάποιος να προσπαθήσει να κατανοήσει τη γλώσσα π.χ. των μαθητών του, παρά να επισημάνει τα λογικά της σφάλματα και να απαιτήσει να διορθωθούν.
Στη θεωρία του Vygotsky οι διάφοροι τύποι αλληλεπίδρασης, όπου παράγονται τα νοήματα, έγιναν αντικείμενο έρευνας. Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι τύποι αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός αναπτυσσόμενου παιδιού και ενός ενήλικα, αλληλεπιδράσεις μεταξύ ενός μαθητευόμενου ή μιας ομάδας μαθητευόμενων και ενός δασκάλου.
Έτσι, η γλώσσα εξακολουθεί να έχει σημαντικό ρόλο, αλλά τώρα θεωρείται όχι ως σύστημα σημείων-συμβόλων, αλλά ως κοινωνική πρακτική. Πρόκειται, δηλαδή, για μια γλώσσα σε δράση ή η γλώσσα ως μέσο για επίτευξη γνωστικών, κοινωνικών, μαθησιακών και άλλων στόχων, είναι ένα όχημα για κάνουμε πράγματα με τους άλλους και για τους άλλους, επομένως έχει ένα διαπραγματευτικό χαρακτήρα.

Ο ρόλος που παίζει η γλώσσα στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έχει κάποια σημασία στην τρέχουσα βιβλιογραφία στην διδακτική των μαθηματικών. Στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών, αυτή η αυξημένη συνειδητοποίηση της ανάγκης να αντιστοιχήσουν τη σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και γλώσσας είναι αλάνθαστη.

Από η δεκαετία του 90 και έπειτα ένας μεγάλος αριθμός μελετών εμφανίστηκε. Όπως επισημαίνουν οι Cobb κ.ά. (1997): *«Η τάση στη διδακτική των μαθηματικών δίνει*

μεγάλη έμφαση στο ρόλο που μπορεί να παίξει η ομιλία στην τάξη, στην εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών» (σελ. 258). (αναφορά σε Boulet, 2007)

Μελέτες σχετικά με το ρόλο της γλώσσας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών επικεντρώνεται κυρίως στους μαθηματικούς διαλόγους. Μερικοί ασχολούνται με την ανάπτυξη μεθοδολογικών πλαισίων για την ανάλυση των μαθηματικών διαλόγων στην τάξη (Cobb κ.ά., 1997, Krussel, Springer & Edwards, 2004, Ryve, 2006, Sfard, 2001) ενώ άλλοι ασχολούνται με την ανάπτυξη προσεγγίσεων που αποσκοπούν στη διευκόλυνση της ανάγνωσης και της γραφής, των μαθηματικών (Barwell, Leung, Morgan & Street, 2002, Esty, 1992, Adams, 2003, Usiskin, 1996), (αναφορά σε Boulet, 2007).

Οι ερευνητές στην διδακτική των μαθηματικών συμφωνούν ότι η επικοινωνία είναι απαραίτητη για την εκμάθηση των μαθηματικών (Ryve, 2004).

Συγκεκριμένα, «*από τη σκοπιά της μάθησης των μαθηματικών, από τη διατύπωση των αρχών, τις έννοιες και τη λογική πίσω από τα βήματα της λύσης ενός συγκεκριμένου προβλήματος, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να ενισχύσουν και να εμβαθύνουν την κατανόηση τους σε υψηλότερου επιπέδου δομών γνώσης στο περιεχόμενο των μαθηματικών*" (Huang, Normandia & Greer, 2005, σελ.45) (αναφορά σε Boulet, 2007). Ωστόσο όπως επισημαίνει ο Ryve (2004), το θέμα δεν είναι αν τα μαθηματικά μαθαίνονται ή όχι μέσα από τη επικοινωνία, αλλά με τη δημιουργία των μέσων που θα καλλιεργήσουν μαθηματικά παραγωγικές ομιλίες. Ενώ οι ερευνητές καταπιάνονται με το ζήτημα του τι συνιστά παραγωγική ομιλία, είναι σημαντικό να αρχίσουμε να υποστηρίζουμε τους εκπαιδευτικούς στην συνειδητοποίηση των διαφόρων μορφών της μαθηματικής επικοινωνίας και πώς αυτές συμβάλλουν στη μάθηση των μαθητών τους (Barwell κ.ά., 2005, σελ. 145, όπως αναφέρεται σε Boulet, 2007). Οι Rubenstein and Thompson (2002) σύμφωνα με Boulet, (2007), υπογραμμίζουν ότι:

«*για να είμαστε πιο ενήμεροι, και ευαίσθητοι απέναντι σε θέματα απόκτησης της μαθηματικής γλώσσας και για να είμαστε πιο δημιουργικοί και επίμονοι στην εύρεση τρόπων που να υποστηρίξουν την μάθηση των παιδιών, οι καθηγητές πρέπει πρώτα να καταλάβουμε τις δυσκολίες των παιδιών στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας*» (σελ. 107).

Κατά συνέπεια, αν και ο στόχος ενός αλγορίθμου είναι να αυτοματοποιηθεί η διαδικασία, ώστε να μην απαιτείται σκέψη, οι μαθητές πρέπει πρώτα να μάθουν πώς αναπτύσσονται και πώς λειτουργούν, πριν συμμετάσχουν στην μαθηματική εξερεύνηση. Αυτό σημαίνει ότι μαζί με την εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες, είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιούν σαφή γλώσσα που να αποκαλύπτει το σκεπτικό πίσω από τις μαθηματικές διαδικασίες. (Boulet, 2007)

Η συμβολική φύση των μαθηματικών είναι ένα από τα πιο εμφανή χαρακτηριστικά των μαθηματικών (Pimm, 1987). Στο πλαίσιο της εκμάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, ο Pimm αναφέρει

"*... είναι σημαντικό να είναι σε θέση να διακρίνει κατά βούληση μεταξύ του σύμβολου και της έννοιας, μεταξύ του σημαίνοντος (το σύμβολο) και του σημαινόμενου (το αναφερόμενο)*" (σελ. 139).

Ουσιαστικά ο Pimm συμφωνεί με την οπτική του Mason's (1980) ότι τα σύμβολα λειτουργούν ως παράθυρα μέσω των οποίων έχουμε πρόσβαση στις μαθηματικές έννοιες. Ακόμη, πολύ συχνά οι δάσκαλοι εκφράζονται σημειογραφικά και όχι στις έννοιες που αναφέρονται όταν διαβάζουν ή μιλούν για τα μαθηματικά. Απευθυνόμενοι με σημειογραφία και όχι με τις ιδέες που αναφέρονται από τη σημειογραφία καθιστά τους μαθηματικούς διαλόγους επιφανειακούς και δίχως σύνδεση.

Σύμφωνα με Sfard and Kieran (2001):

"*Στην μαθηματική επικοινωνία, στην οποία δεν υπάρχουν τόσο οικεία ορατά αντικείμενα που πιθανό να αποτελούσαν τη βάση για μια εστιασμένη παρακολούθηση, οι άνθρωποι χρησιμοποιούν συμβολικά αντικείμενα ως αντικατάσταση. Ως επικοινωνιακοί μεσολαβητές, ωστόσο, τα συμβολικά υποκατάστατα δεν είναι τόσο αποτελεσματικά όσο τα γνωστά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή δράση*" (σελ. 72).

Επιπλέον, η γλώσσα που περιγράφει συμβολικές αναπαραστάσεις δεν είναι ασυνήθιστη στην τάξη των μαθηματικών. Στην πραγματικότητα, είναι τόσο συχνή ώστε οι εκπαιδευτικοί μπορεί να έχουν δυσκολία να την αφήσουν. Η ανάγνωση μαθηματικών κειμένων θα έπρεπε να είναι παρόμοια με την ανάγνωση συνήθων

κειμένων, δεδομένου ότι ο αναγνώστης πρέπει να υπερβεί τον κώδικα και να κατανοήσει την έννοια του κειμένου. Όταν η γλώσσα περιγράφει σύμβολα, ο δάσκαλος πρέπει να διδάξει κανόνες για να συντονίσει τη σύνδεση από τον ένα συμβολισμό σε άλλο ή από μια διαδικασία σε άλλη. Δεν είναι δυνατόν να συζητούμε για τη γλώσσα στην τάξη των μαθηματικών χωρίς να καταπιανόμαστε με ζητήματα του λεξιλογίου.

1.5 Η γλώσσα ως κοινωνική πρακτική

Ο Bruner εισήγαγε την έννοια της αλληλεπίδρασης (interaction) και με αυτόν τον τρόπο εστίασε την προσοχή του στα αποτελέσματα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ ενός ενηλίκου, ο οποίος ανήκει σε ένα πολιτιστικό πλαίσιο, και ενός παιδιού το οποίο μεγαλώνει. Τα αποτελέσματα είναι συγκεκριμένα πρότυπα (standards) επικοινωνίας σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Η ουσία των ιδεών του Bruner, κατά την Sierpinska, και αναφέρονται από τον Κλαουδάτο, (2011) είναι ως εξής:

Όταν το μικρό παιδί μαθαίνει την μητρική του γλώσσα, δε μαθαίνει να αντιστοιχεί λέξεις σε αντικείμενα, σε καταστάσεις ή σε ενέργειες. Το παιδί μαθαίνει μορφές κοινωνικής συμπεριφοράς σε διάφορες κοινωνικές καταστάσεις στις οποίες η γλώσσα έχει σημαντικό ρόλο: χαιρετισμός, πρόσκληση, παράκληση, προσφορά, αναζήτηση, διαφωνία, παίζοντας παιχνίδι, κτλ. Στην αρχή θα συμμετέχει σε μη αρθρωμένους ήχους και κυρίως σε χειρονομίες. Αλλά κάθε 'κατόρθωμα' του παιδιού προς την κατεύθυνση της άρθρωσης λόγου και σύνταξης θα συναντήσει μια σαφή επιδοκιμασία από τον ενήλικα, η οποία στέλνει το μήνυμα ότι αυτό είναι που θα αναμένεται στο εξής από το παιδί: Η νέα αυτή συμπεριφορά θα γίνει ένα νέο πρότυπο. Για παράδειγμα, ο Πέτρος έμαθε να λέει 'μπισκότα'. Όταν ζητήσει μπισκότα και πει 'μμμ', η μητέρα του αρνείται να του δώσει επιμένοντας να πει ο Πέτρος την κατάλληλη λέξη. Τα πρότυπα θα αλλάζουν καθώς ο Πέτρος θα κάνει και άλλα κατορθώματα και από κάποιο σημείο και μετά η μητέρα του δε θα δέχεται τίποτε άλλο εκτός από μια πλήρη πρόταση. (Κλαουδάτος, 2011)

Σύμφωνα με τον Bruner, η κατάκτηση της γλώσσας αρχίζει πριν το παιδί προφέρει τις πρώτες του λέξεις. Αρχίζει όταν η μητέρα και το παιδί δημιουργούν μια προβλέψιμη

μορφή αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιείται ως ένας μικρόκοσμος για επικοινωνία και την εγκατάσταση μια πραγματικότητας αμοιβαία αποδεκτής και κατανοητής. Οι διαπραγματεύσεις που συμβαίνουν σε τέτοιες μορφές συνιστούν την ευκαιρία διαμέσου της οποίας το παιδί κατακτά τη γραμματική, το πώς ομιλεί και το τι εννοεί καθώς και τον τρόπο που εκφράζει τις προθέσεις , τις ανάγκες, τις επιθυμίες του, κτλ.

Προκειμένου να αποκτήσει τις πρώτες του εμπειρίες με τη γλώσσα, το παιδί πρέπει να βρεθεί σε κοινωνικές σχέσεις τέτοιες ώστε να λειτουργούν σύμφωνα με τη χρήση της γλώσσας – να συνδέει τις κοινές επιδιώξεις, να κάνει εξειδικεύσεις και να εγκαθιστά προϋποθέσεις. Μια τέτοια κοινωνική σχέση θα ονομαστεί format. Η format είναι ένας μικρόκοσμος βασισμένος σε κανόνες στον οποίο ο ενήλικας και το παιδί κάνουν πράγματα για, και με, τον άλλο. Στην πιο γενική της μορφή η format είναι το εργαλείο για την τυποποίηση των ανθρώπινων αλληλεπιδράσεων. Μια format απαιτεί τυπικά μια πιθανή αλληλεπίδραση μεταξύ, τουλάχιστον δύο συμμετεχόντων. Πιθανή με την έννοια ότι οι αντιδράσεις κάθε συμμετέχοντα μπορεί να δειχθεί ότι εξαρτώνται από μια προηγούμενη αντίδραση του άλλου. Κάθε μέλος του ζεύγους έχει ένα στόχο και ένα σύνολο μέσων για την επίτευξή του, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες :

Πρώτον, οι διαδοχικές αντιδράσεις ενός συμμετέχοντος συνεισφέρουν προς την επίτευξη του στόχου και δεύτερον, υπάρχει μια διακριτή στάση στη σειρά των αντιδράσεων που δείχνει ότι ο τελικός στόχος έχει πραγματοποιηθεί. Οι στόχοι των συμμετεχόντων δεν είναι αναγκαίο να είναι ίδιοι. Απαιτείται μόνον οι συνθήκες τόσο των διαπροσωπικών όσο και των προσωπικών αντιδράσεων να έχουν εκπληρωθεί. Οι formats επομένως, οριζόμενες τυπικά με αυτήν την έννοια, αντιπροσωπεύουν μια απλή στιγμή ενός 'σεναρίου' ή, το ίδιο, ενός 'διαπραγματευτικού επεισοδίου'.

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζουμε τη θεωρία αυτή στη μάθηση των Μαθηματικών είναι ο ακόλουθος :

Πριν ο μαθητής γίνει ικανός να διατυπώσει έναν ορισμό ή ένα θεώρημα, εισάγεται σε έναν μικρόκοσμο αλληλεπιδράσεων, μερικές από τις οποίες προκαλούνται από τον δάσκαλο, αν και οι περαιτέρω μορφές τους εξαρτώνται από τις πρωτοβουλίες του μαθητή. Η μορφή των αλληλεπιδράσεων καθορίζει τα όρια και τους κανόνες για το τι θα πει ο μαθητής ή ο δάσκαλος , πως θα το πει και πότε. Ωστόσο όλοι αυτοί οι κανόνες έχουν ένα διαπραγματευτικό χαρακτήρα. Διαμορφώνονται διαμέσου κάποιων περισσότερο ή λιγότερο σαφών και άμεσων διαπραγματεύσεων ανάμεσα στον δάσκαλο και το μαθητή και μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Το μονοπάτι προς

τη μαθηματική σκέψη οδηγεί, διαμέσου νύξεων, στη μαθηματική διαπραγμάτευση, καθώς, σταδιακά, κατανοούμε ποίες είναι οι προθέσεις πίσω από συγκεκριμένες εκφράσεις, ποιες είναι οι κοινές προϋποθέσεις. Αυτά μαθαίνονται από την αλληλεπίδραση με εκείνους που νομιμοποιούνται να θέτουν τα πρότυπα (standards) της μαθηματικής διαπραγμάτευσης, οι οποίοι συνήθως είναι οι δάσκαλοι των Μαθηματικών. Ο μαθητής κάνει λάθη και τα διορθώνει σύμφωνα με τις υποδείξεις του δασκάλου, διαπραγματεύεται τον τρόπο του να λέει κάτι και τον τρόπο του να σκέφτεται ανταλλάσσοντας επιχειρήματα με το δάσκαλο και με άλλους μαθητές. Αλλά το κοινωνικό και το θεσμικό πλαίσιο αυτών των αλληλεπιδράσεων, το σχολείο, οι αρχές υπεράνω του δασκάλου κτλ., επιβάλλουν όρια τόσο στην διαπραγμάτευση όσο και στην επιχειρηματολογία.

Για παράδειγμα, σε μια τάξη των Μαθηματικών, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ο δάσκαλος διαμορφώνει, ή κατευθύνει, την ερμηνεία των μαθητών σε μια εικόνα που δείχνει τρία πουλιά να κάθονται σε ένα δέντρο ενώ δύο άλλα μόλις έχουν σηκωθεί και πετούν μακριά από το δέντρο, ερμηνεύοντας την εικόνα ως την πρόταση 5-2=3. Η ερμηνεία αυτή, προφανώς, δεν είναι η πιο λογική γι'αυτό και οι μαθητές διατυπώνουν διάφορες προτάσεις. Αλλά είναι αρκετό ένας ή δύο μαθητές να πουν κάτι 'κοντά' στην ερμηνεία αυτή και ο δάσκαλος θα την επαναλάβει δυνατά, θα την θέσει με κάποιο τρόπο μπροστά σε όλους ως ένα μοντέλο ερμηνείας, ένα πρότυπο για να το εφαρμόζουν και να το ακολουθούν. Ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές δημιουργείται μια δραστηριότητα διαμόρφωσης, η οποία εγκαθιστά τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει η εικόνα να γίνει κατανοητή καθώς και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα πρέπει, στο εξής, να συμπεριφέρονται σε παρόμοιες καταστάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Η γλώσσα των μαθηματικών

Συχνά έχει επισημανθεί ότι τα ίδια τα μαθηματικά είναι μία επίσημη γλώσσα και έχει διατυπωθεί η άποψη ότι θα έπρεπε να διδάσκεται ως τέτοια Aiken (1972), (αναφορά σε Austin & Howson, 1979). Παρόλο που τέτοιες δηλώσεις κατέχουν ένα βαθμό εγκυρότητας, φαίνεται να είναι κάπως επικίνδυνες και μπορεί να προκαλέσουν παρανοήσεις. Τα μαθηματικά σύμφωνα με Austin & Howson, (1979) δεν είναι μια γλώσσα -ένα μέσο επικοινωνίας - αλλά μια δραστηριότητα και ένα θησαυροφυλάκιο γνώσεων που αποκτήθηκαν κατά τη διάρκεια πολλών αιώνων. Οι διαφορές μεταξύ της επίσημης γλώσσας στην οποία οι καθηγητές παρουσιάζουν τα μαθηματικά και σε αυτή με την οποία σκέφτονται και μιλούν για το έργο τους, φαίνεται να είναι μεγαλύτερες από εκείνες που υπάρχουν συνήθως μεταξύ των μορφών γραπτής και προφορικής γλώσσας

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές σχέσεις που μπορούν να τονιστούν μεταξύ γλώσσας και μαθηματικών. Τέτοιες προτάσεις μπορεί συχνά να συναντηθούν υπό τον τίτλο " η γλώσσα των μαθηματικών", αν και αυτή η τελευταία φράση μπορεί να ερμηνευθεί με διαφορετικούς τρόπους. Αυτό σύμφωνα με τον Pimm, (1994) μπορεί να σημαίνει ποικιλοτρόπως:

1. την ομιλούμενη γλώσσα της τάξης των μαθηματικών (συμπεριλαμβανομένων των λεχθέντων τόσο του δασκάλου όσο και του μαθητή)

2. την χρήση συγκεκριμένων λέξεων για μαθηματικούς σκοπούς (συχνά αναφέρεται ως μαθηματικό μητρώο)

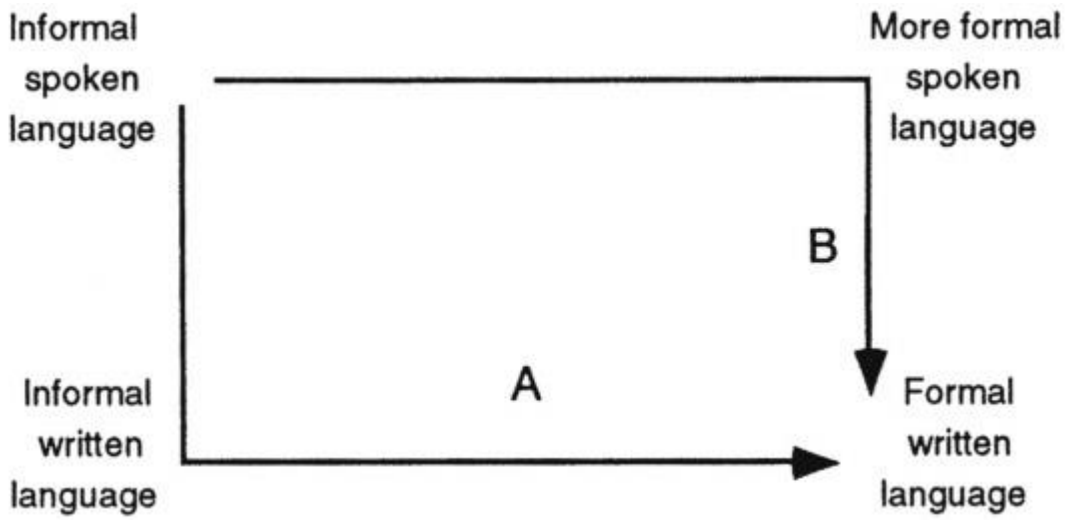
3. τη γλώσσα των κειμένων (συμβατικά λεκτικά προβλήματα ή εγχειρίδια, συμπεριλαμβανομένων γραφικού υλικού και άλλους τρόπους αναπαράστασης)

4. τη γλώσσα των γραπτών συμβολικών μορφών.

Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών περιλαμβάνει τις δραστηριότητες της ανάγνωσης, γραφής και συζήτησης.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η φράση «η γλώσσα των μαθηματικών» μπορεί να αναφέρεται επίσης στη γλώσσα που χρησιμοποιείται από ένα άτομο που κάνει μαθηματικά μόνο του ως μέσο αυτοβοήθειας (και ως εκ τούτου να περιλαμβάνει, π.χ., "εσωτερική ομιλία"), καθώς και τη γλώσσα που χρησιμοποιείται με σκοπό την επικοινωνία με άλλα άτομα. Η γλώσσα μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για τη δημιουργία όσο και για τον έλεγχο των νοητικών εικόνων στην υπηρεσία των μαθηματικών. Ο Douglas Barnes (1976) σχολίασε*: «Η επικοινωνία δεν είναι η μόνη λειτουργία της γλώσσας.»* (αναφορά σε Pimm, 1994). Και η καναδική λογοτεχνικός κριτικός Northrop Frye (1963), έχει γράψει: *«... η γλώσσα των μαθηματικών, η οποία είναι πραγματικά μία από τις γλώσσες της φαντασίας, μαζί με τη λογοτεχνία και τη μουσική.»* (αναφορά σε Pimm, 1994)

Σύμφωνα με Pimm, (1994) στη φυσική γλώσσα υπάρχουν συμβατικά δύο βασικοί δίαυλοι επικοινωνίας, η ομιλία και η γραφή. Μία δυσκολία που αντιμετωπίζουν όλοι οι καθηγητές των μαθηματικών είναι το πώς θα διευκολυνθεί η μετακίνηση των μαθητών τους από την κυρίως άτυπη ομιλούμενη γλώσσα, με την οποία είναι εξοικειωμένοι, στην επίσημη γραπτή γλώσσα, η οποία θεωρείται συχνά ως το σήμα κατατεθέν της μαθηματικής δραστηριότητας. Το παρακάτω διάγραμμα από τον Pimm, (1994) δείχνει δύο εναλλακτικές διαδρομές, και επισημαίνει διαφορετικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται στην εργασία με τους μαθητές στην αίθουσα.



Η διαδρομή Α ενθαρρύνει τους μαθητές να γράψουν τις άτυπες ρήσεις τους, οι οποίες στη συνέχεια οδηγούν στην αύξηση της επάρκειας του γραπτού (π.χ., από τη χρήση των αγκύλων ή άλλων γραπτών αναφορών για να συμβολίσουν παρόμοιες πληροφορίες με εκείνη που εκφράζεται προφορικά με έμφαση ή τονισμό). Η διαδρομή Β περιλαμβάνει εργασίες για τη διατύπωση και την αυτάρκεια του προφορικού λόγου πριν αρχίσει να γράφεται. Αυτό περιλαμβάνει συνήθως περιορισμούς που τοποθετούνται σχετικά με την επικοινωνιακή κατάσταση, προκειμένου να δοθεί έμφαση στην προσοχή στη γλώσσα που χρησιμοποιείται.

Οι μαθητές που μαθαίνουν μαθηματικά στο σχολείο εν μέρει προσπαθούν να αποκτήσουν επικοινωνιακή ικανότητα στην προφορική και στη γραπτή μαθηματική γλώσσα. Ο εκπαιδευτικός γλωσσολόγος Michael Stubbs (1980, σελ. 115), σύμφωνα με Pimm, (1994), ισχυρίζεται πως:

«μια γενική αρχή στη διδασκαλία κάθε είδους επικοινωνιακής ικανότητας, προφορικής ή γραπτής, είναι ότι η ομιλία, η ακοή, η γραφή ή η ανάγνωση θα πρέπει να έχουν κάποιο πραγματικό επικοινωνιακό σκοπό.»

2.2 Γλώσσα και μαθηματικά: πηγή σημειωτικών συστημάτων

Μια σημαντική πτυχή της κοινωνικής σημειωτικής για την κατανόηση του ρόλου της γλώσσας στα σχολικά μαθηματικά είναι ότι επιτρέπει την κατανόηση τόσο της γλώσσας και όσο και των μαθηματικών ως συστήματα πόρων: «συστήματα από πιθανούς τρόπους του νοήματος», (Chapman, 1993). Τα συστήματα πόρων σημειωτικής περιλαμβάνουν τι μπορεί να είπε ή να κάνει. Τι πραγματικά είπε ή κάνει είναι ένας σημειωτικός σχηματισμός. Η περιγραφή της Chapman, (1993) για την κοινωνική δράση όσον αφορά την Σημειωτική πόρων και Σημειωτική σχηματισμού γενικεύει από το μοντέλο του Halliday, (1978) για τη γλώσσα ως «δυναμική έννοια»:

Η γλώσσα θεωρείται ως κωδικοποίηση μιας «δυναμικής συμπεριφοράς» σε μια δυναμική «έννοια», δηλαδή, ως ένα μέσο έκφρασης τι ένας ανθρώπινος οργανισμός μπορεί «να κάνει», κατά την αλληλεπίδραση με άλλους ανθρώπινους οργανισμούς,

μετατρέποντας την σε αυτό που «μπορεί να σημαίνει». Αυτό που εννοεί είναι ότι το σημασιολογικό σύστημα, με τη σειρά του, κωδικοποιείται σε ότι αυτός «μπορεί να πει» (το λεξικό-γραμματικό σύστημα, ή γραμματική και λεξιλόγιο). (Halliday, 1978:21)

Με βάση την Chapman, (1993) η γλώσσα και μαθηματικά μπορούν και τα δύο να νοηθούν ως σημειωτικά συστήματα: συστήματα εννοιών και συστήματα για την κατασκευή των νοημάτων. Είναι επίσης δύο συστήματα πόρων για τη δημιουργία των νοημάτων. Ίσως είναι πιο εύκολο να δείτε τη γλώσσα με αυτόν τον τρόπο από ότι τα μαθηματικά. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν συνεχώς τη γλώσσα για να κατανοήσουν τις εμπειρίες τους. Στα σχολεία η γλώσσα χρησιμοποιείται ως εργαλείο με το οποίο πρόκειται να κατασκευαστεί το «περιεχόμενο» των διαφόρων θεμάτων. Τα μαθηματικά είναι επίσης ένα σύστημα πόρος. Είναι ένας πόρος για να κάνει τα νοήματα των άλλων σχολικών θεματικών περιοχών, όπως των επιστημών και των κοινωνικών σπουδών. Η γλώσσα χρησιμοποιείται για την κατασκευή και τη διανομή μαθηματικών νοημάτων, την ίδια στιγμή, υπάρχει ένα σύστημα από πιθανά μαθηματικά νοήματα. Υπάρχουν πράγματα που είναι δυνατό και ενδεδειγμένο να πω και αυτό έχει νόημα στις τάξεις των μαθηματικών. Τα σχολικά μαθηματικά αποτελούνται από αυτές τις δυνατότητες νοήματος. Οι θεματικοί σχηματισμοί σημειωτικών πόρων συστημάτων πραγματοποιούνται συχνότερα στη γλώσσα. Μπορεί επίσης να εκφραστούν σε μη-λεκτικές μαθηματικές παραστάσεις, όπως είναι συμβολική, σε μορφή πίνακα ή διαγραμμάτων, αλλά στην τάξη η λεκτική γλώσσα είναι η βασική διαδικασία για την κατασκευή κοινών μαθηματικών νοημάτων.

2.3 Το μαθηματικό μητρώο

Το λεξιλόγιο και η γραμματική που χρησιμοποιείται για να αντιπροσωπεύσει το σημασιολογικό σύστημα σε κείμενα που παράγονται σε μαθηματικές καταστάσεις - μαθηματικό μητρώο - έχει χαρακτηριστεί από τον ίδιο Halliday (1974) και εκπονήθηκε από Pimm (1987), εστιάζοντας κυρίως στα χαρακτηριστικά της μαθηματικής γλώσσας με κάποια προσοχή στην αριθμητική και αλγεβρική σημειογραφία. Ένα πρόβλημα με αυτόν τον χαρακτηρισμό, όπως ανέφερα και

παραπάνω, είναι το γεγονός ότι δεν έχει καταφέρει να λάβει υπόψη τις διαφορές στα πλαίσια εντός των οποίων η μαθηματική δραστηριότητα λαμβάνει χώρα. Δεν είναι μόνο οι μεγάλες διαφορές στους τύπους κατάστασης εντός της οποίας προκύπτουν τα μαθηματικά κείμενα, αλλά υπάρχουν και σημαντικές πολιτιστικές διαφορές μεταξύ εκείνων που συμμετέχουν στην ανταλλαγή των μαθηματικών εννοιών και ενδέχεται να υπάρχουν πολλαπλοί λόγοι παρουσίας σε μια δεδομένη κατάσταση (περισσότερες αίθουσες διδασκαλίας μαθηματικών θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως παραδείγματα σε αυτό το σημείο). Παρ 'όλα αυτά, η Morgan, (2006) προτείνει:

οι περισσότεροι από εμάς θα αισθάνονται αρκετά σίγουροι για τον προσδιορισμό εάν ένα δεδομένο κείμενο ή όχι, είτε από ένα ακαδημαϊκό περιοδικό ή τάξη, εάν είναι «μαθηματικό».

Η μεταφορά μιας *οικογένειας* μαθηματικών μητρώων, που χρησιμοποιείται από Chapman (1993) και λαμβάνει υπόψη την πολυπλοκότητα της επικοινωνίας στην τάξη, μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο τρόπο σκέψης σχετικά με αυτό το θέμα. Μπορούμε να αναγνωρίσουμε πολύ διαφορετικά κείμενα ως μαθηματικά, όχι επειδή προκύπτουν μέσα από καταστάσεις του ίδιου τύπου, αλλά λόγω των οικογενειακών ομοιοτήτων μεταξύ των καταστάσεων. (Morgan, 2006)

Σε αυτό το τμήμα περιγράφονται τα χαρακτηριστικά του μητρώου των σχολικών μαθηματικών και ειδικότερα μερικοί τρόποι με τους οποίους η γλώσσα γίνεται πιο μαθηματική. Το μητρώο των σχολικών μαθηματικών έχει ένα εξαιρετικά εξειδικευμένο λεξιλόγιο: οι λέξεις ιδιοποιούνται και επαναπροσδιορίζονται από την καθημερινή γλώσσα, όπως το μέσο, η οξεία και ο πίνακας και συγκεκριμένες λέξεις στον μαθηματικό τομέα, όπως η υποτείνουσα και ο ακέραιος. Η επανερμηνεία των υπαρχουσών λέξεων είναι ένα γνώρισμα των σχολικών μαθηματικών και των μαθηματικών γενικά. Το ρήμα δείξτε, για παράδειγμα, στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών γίνεται εντολή για απόδειξη ή αιτιολόγηση, παρά την καθημερινή ή μη-μαθηματική έννοια, για εμφάνιση ή επισήμανση. Η λέξη σύνολο, η οποία έχει ένα πλήθος από μη-μαθηματικές ερμηνείες, παίρνει συγκεκριμένες ιδιότητες στα μαθηματικά. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα χρήσης μαθηματικών από καθημερινές λέξεις, συμπεριλαμβανομένων των εξής, Chapman, (1993):

Result	prove	Establish	simplify	negative	solution
Identity	image	Relation	universal	chord	face
Index	multiple	Network	intersection	mean	mode
Operation	origin	Multiple	Plane	prime	range
Variable	rational	Product	Real	reciprocal	Closed

Οι λέξεις γίνονται ειδικές για τα μαθηματικά με ένα πλήθος από τρόπους. Όπως επισημαίνει ο Halliday (1978), τα αγγλικά μαθηματικά περιλαμβάνουν πολλές λέξεις που δανείστηκαν από άλλες γλώσσες. Το μητρώο των σχολικών μαθηματικών τείνει επίσης να δημιουργεί νέες λέξεις από τις λέξεις ή τμήματα λέξεων από άλλες γλώσσες. Η υποτείνουσα για παράδειγμα από τις ελληνικές λέξεις υπό και τείνειν. Φράσεις ή ομάδες λέξεων, επίσης μπορεί να αναγνωριστούν ως τεχνικοί όροι. Το μητρώο των σχολικών μαθηματικών έχει μια πληθώρα από αυτές τις φράσεις, και όπως αναφέρει η Chapman, (1993):

degree of freedom	identity mapping	cumulative frequency
frequency diagram	direct route	prime factor
multiplicative inverse	right angle	ordered pairs
highest common factor	rounding off	empty set
squarer oot	identity element	directed numbers

Τα παραδείγματα που παρέχονται παραπάνω είναι ενδεικτικές των λέξεων και φράσεων που ανήκουν στο μητρώο των μαθηματικών του σχολείου. Μπορούν επίσης να ταξινομηθούν στον υποκατάλογο των μαθηματικών. Τα σχολικά μαθηματικά περιλαμβάνουν ορισμένα θέματα ή τομείς μελέτης, όπως η αριθμητική, η άλγεβρα και η γεωμετρία, καθεμιά από τις οποίες διδάσκεται ως ξεχωριστό θέμα-αντικείμενο και έχει το δικό του μητρώο.

Η γλώσσα των σχολικών μαθηματικών περιλαμβάνει προφορικές και γραπτές μορφές. Καθώς η ομιλούμενη γλώσσα στην τάξη γίνεται πιο μαθηματική, συχνά έρχεται πιο κοντά στις γραπτές μορφές που συνήθως συναντάται στα εγχειρίδια των μαθηματικών. Η γραπτή μαθηματική γλώσσα περιλαμβάνει εξειδικευμένα συστήματα συμβόλων, που συνδυάζονται συχνά με τη λεκτική γλώσσα και δημιουργούν κάποιες εκφράσεις. Το δυνατό διάβασμα, αυτών των εκφράσεων περιλαμβάνεται ως μέρος της προφορικής γλώσσας στην τάξη των μαθηματικών. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι το να μιλάς μαθηματικά πολύ συχνά σημαίνει το να μιλάς σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά γλωσσικά μοτίβα των μαθηματικών εγχειριδίων. Είναι απαραίτητο επομένως να ληφθεί υπόψη αυτή η στενή σχέση μεταξύ της γραπτής και της προφορικής γλώσσας των μαθηματικών. (Chapman, 1993)

Ενώ ορισμένα χαρακτηριστικά των μαθηματικών μητρώων, όπως αυτές που περιγράφονται ανωτέρω, μπορούν να απομονωθούν και να προσδιοριστούν, η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην τάξη μαθηματικών δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σταθερό ή ευδιάκριτο σύνολο λέξεων. Μόνο οι λέξεις δεν μεταφέρουν τα νοήματα των μαθηματικών του σχολείου. Για να χειριστούν και να ελέγξουν το μητρώο των μαθηματικών του σχολείου, οι μαθητές πρέπει να κυριαρχήσουν στα πολύπλοκα συστήματα των εννοιολογικών σχέσεων, στους «τρόπους σκέψης» μέσα στο πλαίσιο της καθημερινής χρήσης.

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η Morgan, (2006):

Η έννοια του μητρώου, το σημασιολογικό σύστημα που συγκροτεί ένα συγκεκριμένο είδος της κατάστασης, χρησιμοποιείται επίσης μάλλον διαφορετικά για να δηλώσει τα διάφορα σημασιολογικά συστήματα που συνδέονται με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης. Έτσι, ο Duval (2000), διακρίνει μεταξύ διαφόρων μητρώων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά, θεωρώντας ξεχωριστά τη φυσική γλώσσα, τα γεωμετρικά σχήματα, τα αριθμητικά συστήματα και συμβολικούς ή αλγεβρικούς συμβολισμούς, και τις γραφικές παραστάσεις. Όπως υποστηρίζει ο Duval, οι δυνατότητες νοήματος αυτών των διάφορων μητρώων είναι διαφορετικές, δίνοντας αφορμή για πιθανές δυσκολίες για τους μαθητές, καθώς προσπαθούν να μετατρέψουν παραστάσεις από το ένα στο άλλο. Ωστόσο, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε το μητρώο με την ευρύτερη έννοια, που περιλαμβάνει μαθηματικά νοήματα που

πραγματοποιούνται μέσω όλων αυτών των συστημάτων και των συνδυασμών τους.

(σελ. 7)

2.4 Μαθηματικός συμβολισμός και γλωσσική δομή

Ο Μαθηματικός συμβολισμός, στην έως τώρα διεθνώς αποδεκτή μορφή, είναι μια συντομογραφία, το μεγαλύτερο μέρος της οποίας έχει επινοηθεί από ομιλητές λίγων στενά συγγενικών γλωσσών. Η χρήση αυτού του συμβολισμού αναλόγως μπορεί να προκαλέσει σημαντικές δυσκολίες σε εκείνους των οποίων η μητρική γλώσσα έχει διαφορετικές δομές. Έτσι Shimada μπορεί να γράψει ότι με βάση τους Austin & Howson, (1979)

"*στην Ιαπωνία η αλληλεπίδραση της γλώσσας και των μαθηματικών είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα, δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε το ίδιο μαθηματικό συμβολισμό με τον δικό σας, που αναπτύχθηκε σε μεγάλο βαθμό σε αρμονία με την ινδοευρωπαϊκή γλώσσα, σε έναν πολιτισμό που έχει μια γλώσσα με μια αρκετά διαφορετική σύνταξη*".

Αυτό το ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την Ιαπωνία πυροδότησε μια σειρά από έρευνες στη δεκαετία του 1960 από μια ομάδα με επικεφαλής τον Toda. Η αναγνώριση του αντίστοιχου προβλήματος τώρα συμβαίνει σε άλλες χώρες, όπου το εκπαιδευτικό σύστημα έχει επεκταθεί και περιλάμβανε τη διδασκαλία των μαθηματικών στο ιδιωματικό. Παραδείγματα ασυμφωνιών στο συμβολισμό και στη σειρά των λέξεων, για παράδειγμα, Amharic (που χρησιμοποιείται στην Αιθιοπία) και Sinhala μπορούν να βρεθούν στο Morris (1974), αναφορά σε Austin & Howson, (1979). Για άλλη μια φορά, ωστόσο, αυτά τα προβλήματα δεν περιορίζονται στην Αφρική και την Ασία. Στη διδασκαλία των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου η εισαγωγή στο συμβολισμό, όπως 8 - 2 = 6 μπορεί να προκαλέσει μεγάλες δυσκολίες. Γιατί να γράψω "2 από 8' με τον συγκεκριμένο τρόπο, και γιατί το σημάδι που στο 6 + 2 = 8 σήμαινε «κάνει» τώρα σημαίνει «φεύγει»;

Εδώ κάποιος μπορεί να σημειώσει τυχόν συγκρούσεις μεταξύ φυσικής γλώσσας και μαθηματικού συμβολισμού - μια σύγκρουση που θα επαναλαμβάνεται συνεχώς. Πόσο σύντομα θα έπρεπε κάποιος να μετακινηθεί από τη «φυσική» γλώσσα σε αυτήν που αντικατοπτρίζει τους μαθηματικούς συμβολισμούς που ο μαθητής θα πρέπει να

ακολουθήσει; Πώς γίνεται η καλύτερη μετάβαση; Τέτοια κρίσιμα ερωτήματα φαίνεται να έχουν λάβει ελάχιστη προσοχή. Όταν κάποιος κινείται στην άλγεβρα, πιο περίπλοκες καταστάσεις προκύπτουν. Η διάρθρωση των παρενθέσεων είναι το πρώτο από τις πολλές επιπλοκές που δεν υπάρχουν στην απλή γλώσσα. Όμως η αλγεβρική γλώσσα μπορεί να αντιμετωπιστεί αυτόνομα, ανεξάρτητα από το νόημα του περιεχομένου. Εδώ ο Freudenthal (1973) είναι σε συμφωνία με τον Thom (1973) ο οποίος ισχυρίστηκε ότι η άλγεβρα είναι πλούσια σε σύνταξη, αλλά αδύναμη στο «νόημα». (Austin & Howson, 1979).

Ο Skemp (1977) έχει δανειστεί από τη γλωσσολογία του Chomsky την ιδέα της «επιφάνειας» και «βαθιάς» δομής και να ληφθούν ως μαθηματικά ανάλογά τους, το «συμβολικό σύστημα των μαθηματικών» και «τα εννοιολογικά συστήματα των μαθηματικών». Και πάλι, αυτό προσφέρει μια ενδιαφέρουσα οπτική γωνία από την οποία μπορούν να εξεταστούν πολλά από τα προβλήματα μάθησης που προκύπτουν στα μαθηματικά. Κάποιος υποψιάζεται, ωστόσο, ότι μια ανεπάρκεια αυτού του μοντέλου είναι ότι παραλείπει ένα επίπεδο πολυπλοκότητας, κατά την οποία κάποιος θεωρεί την αντιστοιχία της συνηθισμένης γλώσσας και «του συμβολικού συστήματος». (Austin & Howson, 1979).

2.5 Λεξιλόγιο, συμβολισμός και λογικά μοτίβα

Το λεξιλόγιο των μαθηματικών είναι, όπως σημειώσαμε παραπάνω, πολύ εξειδικευμένο και φαίνεται να είναι δύσκολο να αφομοιωθεί σε σύγκριση με το λεξιλόγιο της καθημερινής γλώσσας. Έχει υποστηριχθεί ότι η επιπλέον προσπάθεια που απαιτείται για την απόκτηση γνώσης της μαθηματικής γλώσσας είναι ένας σημαντικός παράγοντας για την αποτροπή των παιδιών από το να επιδιώκουν τη μελέτη των μαθηματικών με ενθουσιασμό ή πέρα από το υποχρεωτικό στάδιο. Πολλοί μαθητές δεν επιτυγχάνουν αυτές τις γνώσεις και εγκαταλείπουν τις σπουδές τους λόγω της σύγχυσης και της αποστροφής από την πρωτόγνωρη εμπειρία που οι έννοιες έχουν ωθήσει επάνω σε τους.

Έτσι, για παράδειγμα, η λέξη «πολλαπλάσιο» έχει παρανοηθεί από την πλειοψηφία των μαθητών και όμοιες παρανοήσεις συνέβησαν σε σχέση με γεωμετρικούς όρους. Αυτό μπορεί να οφείλεται εν μέρει στο γεγονός ότι πολλοί από αυτούς τους όρους χρησιμοποιούνται και στην καθομιλουμένη ομιλία, όπως για παράδειγμα, το «όμοιες» στην προηγούμενη πρόταση. Ένας πολύ ακριβής γεωμετρικός ορισμός είναι απαραίτητος αν θέλουμε να γίνει διάκριση μεταξύ δύο ορθογώνιων, να πω αν είναι από μαθηματική άποψη «όμοια».

Μελέτη τέτοιων προβλημάτων θα μας οδηγήσει πίσω σε εξέταση του πώς οι μαθητές ανταποκρίνονται στις λέξεις αρχικά και πως μορφοποιούν έννοιες, στο σημείο στο οποίο εισάγεται ο τεχνικός όρος. Αυτό το πρόβλημα, θα πρέπει να τονιστεί πως δεν είναι κάτι που αφορά μόνο την πρωτοβάθμια, ή ακόμη και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Είναι, βέβαια, αλήθεια, το ότι τα παιδιά μαθαίνουν να χρησιμοποιούν μια λέξη όπως το «κίτρινο» μέσα από τη χρήση σε λεκτικό πλαίσιο και όχι μέσω ενός επίσημου ορισμού όπως «κίτρινο είναι το χρώμα του φωτός με μήκος κύματος 5500A. Εδώ, όμως, το παιδί μαθαίνει να χρησιμοποιεί τη λέξη «κίτρινο», σε μια κοινή αίσθηση, κατασκευάζοντας το δικό του εκτεταμένο ορισμό, με βάση την κοινή χρήση. Όμως, όπως είδαμε, πολλοί μαθηματικοί όροι είναι κοινές λέξεις που χρησιμοποιούνται από τους μαθηματικούς με μια ειδική, συχνά περιορισμένη μορφή. Υπάρχει κίνδυνος τότε ότι το παιδί που φθάνει στο δικό του ορισμό από την όσμωση να φτάσει σε εσφαλμένο. Επιπλέον, εάν η χρήση του, π.χ. «όμοιων», πλησιάζει αυτό που είναι πιο περιορισμένο μαθηματικά, τότε θα προκληθεί αντίφαση όταν το λαμβάνει υπόψη. Είναι μόνο όταν τις μεταδίδει όπου οι ασυνέπειες μπορεί να γίνουν εμφανείς. Πάρα πολύ συχνά αυτή η ασυνέπεια μπορεί να περάσει απαρατήρητη.

Η φροντίδα με την οποία εισάγονται, ορίζονται και εμπλέκονται οι όροι είναι, φυσικά, ζωτικής σημασίας για την κατανόηση του παιδιού. Προσοχή έχει δοθεί στον τρόπο με τον οποίο διφορούμενες έννοιες χρησιμοποιούνται στην επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών και έγινε μια προσπάθεια να απομονωθεί η ακριβής φύση των δυσκολιών που προκύπτουν από αυτές τις λέξεις με την ελπίδα ότι αυτό θα μπορούσε να διευκολύνει τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί. Έχουμε επιστήσει την προσοχή στις διαφορές που προκύπτουν μεταξύ της χρήσης των λέξεων στην καθημερινή και στη μαθηματική γλώσσα.

Αυτό που συχνά αποτυγχάνουμε να κάνουμε είναι να επωφεληθούμε από αυτά τα πρότυπα, όταν έχουμε εισαγάγει τα μαθηματικά πρότυπα. Ίσως με πιο στενή μελέτη των μοτίβων της καθημερινής ομιλίας και λαμβάνοντας αυτά υπόψη, μπορεί να διευκολύνουμε στη μάθηση της γλώσσας των μαθηματικών για τους μαθητές.

2.6 Γλώσσα και μαθηματική κατανόηση

Ανάμεσα στις γλωσσικές ποικιλίες συγκαταλέγονται και εκείνες που συνδέονται με τον καταμερισμό της κοινωνικής ή και της επαγγελματικής δραστηριότητας. Πρόκειται για ευδιάκριτες γλωσσικές ποικιλίες που δημιουργούνται από τις διάφορες επαγγελματικές ομάδες. Μια επαγγελματική ομάδα δηλαδή, για να εξυπηρετήσει τους επαγγελματικούς της σκοπούς, διαμορφώνει στο πλαίσιο της εθνικής γλώσσας τη δική της γλωσσική ποικιλία με ιδιότυπους όρους της ειδικότητάς της. Μερικοί ονομάζουν τις γλωσσικές αυτές ποικιλίες ειδικές γλώσσες. Έτσι έχουμε τις ειδικές γλώσσες των νομικών, των γιατρών, των μηχανικών, των ψαράδων, των ποδοσφαιριστών, των θεολόγων, των μαθηματικών, των χημικών κτλ., οι οποίες χαρακτηρίζονται κυρίως από λεξιλογικές διαφορές που οφείλονται είτε στη χρήση ειδικών όρων είτε στη χρήση καθημερινών λέξεων που φορτίζονται όμως κατά περίπτωση με ιδιαίτερο σημασιολογικό φορτίο. Η λέξη λ.χ. χολοκυστογραφία (σύνθετη από τις λέξεις χολή, κύστη και γράφω) αποτελεί όρο μόνο της ιατρικής επιστήμης και δηλώνει (γι' αυτό εξάλλου και κατασκευάστηκε) την ακτινογραφία της χοληδόχου κύστης. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με τη λέξη μέτρο την οποία συναντούμε και στην καθημερινή χρήση (μονάδα μέτρησης, σύγκρισης ποσών κτλ.) και στην ειδική γλωσσική ποικιλία ενός συγκεκριμένου φιλολογικού κλάδου, της μετρικής: μέτρο στίχου, μέτρο και ρυθμός κτλ. Με τέτοιες συνήθως λέξεις – όρους λειτουργούν οι ειδικές γλώσσες.

Αριθμητική Πρόοδος

«Αν προσέξουμε τους όρους της ακολουθίας 2, 5, 8, 11, 14, 17...», παρατηρούμε ότι κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, είναι άθροισμα του προηγούμενου όρου και του αριθμού 3. Έτσι π.χ. είναι 5 = 2 + 3, 8 = 5+ 3...

*Μια τέτοια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος** με λόγο 3.*

Το θέμα του κειμένου ανήκει στην επιστήμη των μαθηματικών, είναι γραμμένο στην ειδική γλωσσική τους ποικιλία και στόχο του έχει να διδάξει τι είναι αριθμητική πρόοδος. Και για να το πετύχει αυτό:

α) ακολουθεί μια λογική διαδικασία:

- παραθέτει μέσα σε υπόθεση λόγου μια ακολουθία αριθμών

  «2, 5, 8, 11, 14, 17»

- παρατηρεί και δείχνει στην απόδοση του λόγου τα κύρια γνωρίσματα της ακολουθίας

  «παρατηρούμε ότι... του αριθμού 3»

- διευκρινίζει την ακολουθία χρησιμοποιώντας παράδειγμα

  «5 = 2 + 3, 8 = 5 + 3, ...»

- ονομάζει /ορίζει την ακολουθία

  «Μια τέτοια... πρόοδος με λόγο 3»

β) χρησιμοποιεί:

- λέξεις που κυριολεκτούν

  «Αν προσέξουμε... θα παρατηρήσουμε...»

- μαθηματικούς όρους

  «άθροισμα, ακολουθία, αριθμός, λόγος»

- σημεία του μαθηματικού κώδικα (σύμβολα)

  «/ 2 /, / 4 /, / + /, / = /, / ./ κτλ.»

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μέσα από όλη αυτή τη διαδικασία ο συντάκτης του κειμένου μάς παρουσίασε με τρόπο λογικό, αποδεικτικό και διδακτικό μια μαθηματική αλήθεια: τι είναι αριθμητική πρόοδος. Μας έδειξε δηλαδή τις αντικειμενικές σχέσεις που έχουν τα πράγματα μεταξύ τους σε μια περιοχή των μαθηματικών. Και για να το πετύχει, χρησιμοποίησε τη γλώσσα έτσι που να φανερώνει με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια τις σχέσεις των πραγμάτων. Γι' αυτό και όλες οι λέξεις και οι προτάσεις είναι φορτισμένες με τα αναγκαία μόνο σημασιολογικά τους φορτία, ώστε να αποδίδουν με πιστότητα την αλήθεια. Τα νοηματικά τους περιγράμματα είναι συγκεκριμένα· δεν υπάρχει διάχυση νοηματική ή φόρτιση συγκινησιακή. Η γλώσσα είναι ανάλογη με τις απαιτήσεις των πραγμάτων: απρόσωπη, αχρωμάτιστη συναισθηματικά, αντικειμενική, με λογική στερεότητα και αποδεικτικότητα. Διαφορετικά δε θα ήταν κατάλληλη για την περίπτωση.

Η κριτική επίγνωση των πρακτικών λόγου, σε συνδυασμό με τη διαμεσολάβηση, μέσω του δάσκαλου, των άλλων προσφερόμενων δυνατοτήτων για μάθηση μέσα από στο περιβάλλον της τάξης, μπορεί να δώσει την ευκαιρία οι μαθητές να εμπλακούν σε μαθηματικές πρακτικές όπως την επίλυση προβλήματος, την επεξήγηση μαθηματικών ιδεών, την επιχειρηματολογία υπέρ ή κατά συγκεκριμένων λύσεων σε προβλήματα, και την αιτιολόγηση των μαθηματικών σκέψεων τους. (Bell & Pape, 2012).

Οι κοινωνικοπολιτιστικές προοπτικές για τη μάθηση αναγνωρίζουν το σημαντικό ρόλο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης μέσα σε ένα περιβάλλον μάθησης. Στο σχολείο, οι μαθητές πρέπει να μάθουν να εμπλέκονται σε ομιλίες τάξεων, οι οποίες συχνά έρχεται σε αντίθεση με την κοινωνική ομιλία που χρησιμοποιούν σε καθημερινή βάση. Επειδή πολλοί μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από την κοινωνική και αναλυτική «σκαλωσιά» που δίνει τη δυνατότητα να συμμετέχουν πλήρως στις δραστηριότητες στην τάξη, οι καθηγητές πρέπει να δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στη φύση της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στην τάξη (Bell & Pape, 2012).

Οι επιλογές του λόγου που κάνουν οι μαθητές και οι δάσκαλοι εξυπηρετούν τόσο τις κοινωνικές όσο και τις γνωστικές λειτουργίες και, συνεπώς, επηρεάζουν τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Η διάθεση των μαθητών ως προς την εκμάθηση των μαθηματικών και τα συναισθήματά τους ως προς την ικανότητα, διαμορφώνονται κατά τη συμμετοχή στο σύστημα δραστηριότητας της τάξης.

Οι αναπτυσσόμενες ικανότητες των μαθητών να συμμετάσχουν στη μαθηματική σκέψη (π.χ., διαθεσιμότητα προηγούμενης γνώση, διαθέσεις και συναισθήματα ικανότητας), με τη σειρά τους, συμβάλουν στις επακόλουθες αλληλεπιδράσεις, σε μια συγκεκριμένη τάξη. Αυτές οι προοπτικές δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να επανεξετάσουν τους τρόπους με τους οποίους αυτοί δημιουργούν (μέσω «σκαλωσιάς») ευκαιρίες μάθησης. Σε γενικές γραμμές, η «σκαλωσιά» αναφέρεται στους τρόπους όπου οι καθηγητές δημιουργούν το μαθησιακό περιβάλλον και αναλαμβάνουν δράση για να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν (κατασκευή, εμβάθυνση, σταθεροποίηση, και εμπέδωση της γνώσης). Οι σκαλωσιές μάθησης περιλαμβάνουν τη δημιουργία των φυσικών και κοινωνικών δομών για εμπλοκή, παρέχοντας προκλήσεις και ανταποκρινόμενη υποστήριξη και ανάπτυξη της εποικοδομητικής σκέψης (Anghileri 2006, όπως αναφέρεται σε Bell & Pape, 2012).

Οι Bell & Pape, (2012) υποστηρίζουν ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί το νόημα περιλαμβάνει αλληλεπιδράσεις στην τάξη και κοινές αναπαραστάσεις κατανόησης που μεσολαβούν στη συμμετοχή του ατόμου στην τάξη και παρέχουν την ικανότητα ενός ατόμου να φανταστεί και να δημιουργήσει νέους τρόπους ύπαρξης.

Οι συνδέσεις μεταξύ της γλώσσας μέσα στην αίθουσα (classroom language) και της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών είναι αν όχι αδύνατη, υπερβολικά δύσκολη. Η γλώσσα κατά μία ευρύτερη έννοια (η μαθηματική επικοινωνία μπορεί να λάβει χώρα μέσω ποικίλων μορφών) είναι ο μηχανισμός με τον οποίο τόσο οι καθηγητές, όσο και οι μαθητές προσπαθούν να εκφράσουν τις μαθηματικές τους κατανοήσεις μεταξύ τους στην αίθουσα.
Τα άτομα δομούν αντιλήψεις που διαφέρουν όχι μόνο του ενός από του άλλου, αλλά που είναι πιθανό να διαφέρουν επίσης από την έννοια που προορίζεται από τον δημιουργό της συγκεκριμένης επικοινωνίας. (Pierce & Fontaine, 2009).

Τα μέσα της μαθηματικής επικοινωνίας κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με Pierce & Fontaine, (2009) σε:

- Συνηθισμένη γλώσσα
- Συμβολική γλώσσα
- Οπτική αναπαράσταση

- Σιωπηλές αλλά κοινές παραδοχές
- Ημι-μαθηματική γλώσσα

Τα μαθηματικά έχουν ένα μοναδικό και ιδιαίτερο επικοινωνιακό πρόβλημα, ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται όταν μιλάς για τα Μαθηματικά διαφέρει σε σχέση με αυτή που χρησιμοποιείται όταν γράφεις Μαθηματικά.
Στο σχολικό περιβάλλον οι μαθητές εμπλέκονται σε πρακτικό-ακουστικές εμπειρίες. Οι μαθητές αποκτούν το νόημα μιας έννοιας και κατασκευάζουν τη δική τους ερμηνεία μέσω του συνδυασμού της προσωπικής εμπειρίας και της πολιτισμικής παράδοσης. Η πιο αυστηρή μορφή μαθηματικής γλώσσας που συνδέει την λεκτική με τη συμβολική μπορεί να δοθεί μόνο στο τελικό στάδιο της μάθησης. Πρέπει να δημιουργηθεί μία σύνδεση μεταξύ της σημασιολογίας (semantics) και της σημειωτικής (semiotics). Για πολλούς μαθητές η εικόνα μιας μαθηματικής έννοιας πάντα θα θεμελιώνεται από την καθημερινή γλώσσα που της έδωσε ζωή. Συνήθως η οσυνηθισμένη γλώσσα έρχεται πρώτη. (Pierce & Fontaine, 2009).

Τις περισσότερες φορές η αντικατάσταση καθημερινών εκφράσεων από συγκεκριμένη μαθηματική ορολογία γίνεται ομαλά χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα από την πλειονότητα των μαθητών. Αλλά αυτό που πρέπει να συγκρατήσουμε είναι ότι η μοναδική γνώση που μπορούμε να έχουμε για την κατανόηση των μαθητών είναι μέσω της δικής μας ερμηνείας που προκύπτει από την επικοινωνία τους με εμάς μέσω λέξεων ή συμβόλων.

Η ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης συμβαίνει μέσα από μια διαδικασία αναδίπλωσης παλαιότερων εικόνων για την κατασκευή νέων πιο ισχυρών ιδεών. (Pierce & Fontaine, 2009).

Προβλήματα εμφανίζονται όταν η γλώσσα των αρχικών εικόνων αναστέλλουν την ανάπτυξη της κατανόησης, το οποίο συμβαίνει όταν η κυρίαρχη καθημερινή γλώσσα μεταφέρει μία μερική και ατελή εικόνα της έννοιας. Η μετακίνηση από την καθημερινή στη μαθηματική γλώσσα γίνεται πιο προβληματική όταν εκ των υστέρων επιβάλλεται η χρήση συγκεκριμένου μαθηματικού λεξιλογίου (π.χ. η διαφορά δύο ποσοτήτων, η αφαίρεση κάποιων αντικειμένων από μία συλλογή '-').

Η μεταφορά από τη λεκτική στη συμβολική γλώσσα επίσης δημιουργεί προβλήματα (π.χ. αφαίρεσε 2 από 3)

Μία λεκτική μαθηματική απόδοση είναι μαθηματικά που αποδίδονται μέσω της γλώσσας και ως εκ τούτου μέσω των καθημερινών εμπειριών του ακροατή ή του αναγνώστη. Η συμβολική μορφή είναι κάτι περισσότερο. Ένα σύμβολο στα μαθηματικά έχει αφαιρετικό νόημα το οποίο κατά μία έννοια θεωρείται απόλυτο. Δεν έχει υποκειμενικότητα. Για έναν μαθηματικό η δύναμη του συμβόλου έγκειται στο γεγονός ότι είναι ξεκάθαρο και την ίδια στιγμή περιλαμβάνει μια σειρά από επεξηγηματικές εικόνες. Ο μαθηματικός συμβολισμός κατά μία έννοια είναι ανεξάρτητος από τις εμπειρίες του αναγνώστη και είναι ανοιχτός για ερμηνεία μόνο μέσω της χρήσης λεκτικής γλώσσας, η οποία συνδέει τα μαθηματικά με τις προηγούμενες κατανοήσεις του αναγνώστη. Σε αυτό το σημείο διαφαίνεται μία ρήξη μεταξύ της κατανόησης και του νοήματος. Η συμβολική αναπαράσταση έχει την πρόθεση να ενσωματώσει μαθηματικά νοήματα, αλλά πως οι μαθητές είναι σε θέση να γνωρίζουν ποιες εικόνες θέτονται σε ενέργεια από το συμβολισμό; Ένα άλλο πλεονέκτημα του συμβολισμού είναι η συντομία, αλλά και αυτή προκαλεί τεράστιες παρανοήσεις.

Δεν πρέπει να συγχέουμε την έλλειψη ικανότητας κάποιου να μιλάει σωστά μαθηματικά με την ικανότητα να κάνει ή να κατανοεί τα μαθηματικά.

Υπάρχει κίνδυνος ιδέες που δεν ειπώθηκαν αλλά υπονοήθηκαν να μην έχουν το ίδιο νόημα για τους συμμετέχοντες στη συζήτηση.

Η χρήση ψευδο-γλώσσας εμφανίζεται όταν η γλώσσα είναι πολύ εκλεπτυσμένη για τον αναγνώστη ή όταν η μεταφορική εικόνα λαμβάνεται κατά γράμμα. Πολλές φορές όταν οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες κάνουν χρήση τέτοιας γλώσσας η οποία παρόλο που δεν είναι μαθηματικά ορθή οδηγεί σε καλύτερη κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου.

Χρήσιμες είναι και οι παρακάτω προτάσεις των Pierce & Fontaine, (2009):

- Η ικανότητα να επιλύουν προβλήματα δεν σχετίζεται με τη γλώσσα που χρησιμοποιούν για να εκφράσουν τις κατανοήσεις τους
- Η δίχως συνοχή γλώσσα δεν σημαίνει απαραίτητα έλλειψη κατανόησης
- Οι εκπαιδευτικοί δεν πρέπει να βγάζουν συμπεράσματα από το τι λένε οι μαθητές μεταξύ τους όταν επιλύουν ένα πρόβλημα

- Η προσωπική πραγματικότητα του κάθε μαθητή μπορεί να αποκαλυφθεί σε εμάς μόνο μέσω της διαμεσολάβησης της γλώσσας και των υποτιθέμενων νοημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Η Επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά

Πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να ορίσουν τι αποτελεί επιχειρηματολογία στο πλαίσιο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης χωρίς όμως οι απόψεις να είναι απόλυτα συμβατές μεταξύ τους. Παρόλο που η επιχειρηματολογία είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής πρακτικής ωστόσο δεν μπορεί να αποδοθεί ενιαίος ορισμός. (Γιαννοπούλου, 2013). Η φύση της επιχειρηματολογίας, σύμφωνα με τον Toulmin, είναι ατελής αν εστιάσουμε μόνο στα τυπικά επαγωγικά βήματα. Θεωρεί ότι το άτομο πρέπει να αποκτήσει κατανόηση και των μεθόδων και των χαρακτηριστικών που οδήγησαν στο συγκεκριμένο συμπέρασμα. Επιπροσθέτως, ο Krummheuer (1995) ορίζει ότι η επιχειρηματολογία σε οποιαδήποτε κατάσταση πρέπει να περιέχει *"δηλώσεις που σχετίζονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο τρόπο και που με αυτόν τον τρόπο τελούνται συγκεκριμένες λειτουργίες οι οποίες βοηθούν στην αλληλεπιδραστική τους αποτελεσματικότητα"* (σελ. 247). Η επιχειρηματολογία αφορά την παραγωγή λόγου για ένα συγκεκριμένο ζήτημα ο οποίος βασίζεται σε λογικές συνδέσεις ή την παραγωγή διαλόγου που βασίζεται σε λογικές συνδέσεις. Η Pedemonte (2008) ορίζει την επιχειρηματολογία όταν αυτή νοείται σαν απόδειξη σαν "'ένα σύνολο λογικών αιτιολογήσεων που παρουσιάζονται σαν συμπεράσματα" (σελ. 387). Η Yackel (2001) σε σύμπνοια με τις απόψεις του Krummheuer ορίζει την συλλογική επιχειρηματολογία (collective argumentation) που αφορά την αλληλεπίδραση των ατόμων για την απόδειξη ενός ισχυρισμού.

Η Yackel (2001) διαχωρίζει την επεξήγηση (explanation) από την αιτιολόγηση (justification) και την επιχειρηματολογία. Η επεξήγηση και η αιτιολόγηση σύμφωνα με την Yackel τελούν διαφορετικές λειτουργίες και για αυτό νοούνται ξεχωριστά. Η επεξήγηση αφορά στοιχεία τα οποία παραθέτουν είτε οι εκπαιδευτικοί είτε οι μαθητές ώστε να συγκεκριμενοποιήσουν πτυχές της μαθηματικής σκέψης τους που δεν είναι άμεσα αντιληπτή από τα υπόλοιπα άτομα, ενώ η αιτιολόγηση "δίνεται σαν απάντηση σε προκλήσεις όταν υπάρχουν εμφανείς παραβιάσεις των κανονιστικών μαθηματικών δραστηριοτήτων" (Cobb et al., 1992 αναφορά στην Yackel, 2001).

Οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται κατά την επιχειρηματολογία στα μαθηματικά έχουν δύο χαρακτηριστικά:

α) το συντακτικό που αφορά την επιλογή των κατάλληλων λέξεων και τη μεταξύ τους σύνδεση και

β) το σημασιολογικό που αφορά το περιεχόμενό τους.

Η Knipping (2008) προτείνει μια κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων ανάλογα με το είδος των εγγυήσεών τους. Στα εννοιολογικά επιχειρήματα (conceptual arguments) υπάγονται τα επιχειρήματα των οποίων οι εγγυήσεις είναι μαθηματικές έννοιες, θεωρήματα ή σχέσεις, για αυτόν το λόγο μπορεί να κατηγοριοποιηθούν και ως παραγωγικά εννοιολογικά επιχειρήματα (deductive conceptual arguments). Ως οπτικά επιχειρήματα (visual arguments) νοούνται τα επιχειρήματα στα οποία η αναφορά σε σχήματα αποτελεί την εγγύηση του επιχειρήματος. Τα οπτικά επιχειρήματα διαχωρίζονται σε εμπειρικά οπτικά επιχειρήματα (empirical visual arguments) αν το σχήμα είναι συγκεκριμένο και οι σχέσεις παρατηρούνται μόνο σε αυτό και σε εννοιολογικά οπτικά επιχειρήματα (conceptual visual arguments) αν το σχήμα αποτελεί "αναπαράσταση μιας ιδέας" και το επιχείρημα που βασίζεται σε αυτό το σχήμα μπορεί να αιτιολογήσει ένα γενικό συμπέρασμα για όλα τα επιχειρήματα με τις ίδιες ιδιότητες.

Η επιχειρηματολογία χαρακτηρίζεται από τον Krummheuer (1995) σαν:

"κοινωνικό φαινόμενο, όπου συνεργαζόμενα άτομα (προσπαθούν να) ρυθμίζουν τις προθέσεις τους και τις ερμηνείες τους παρουσιάζοντας λεκτικά το σκεπτικό των πράξεών τους" (σελ. 29)

Ο χαρακτηρισμός αυτός της επιχειρηματολογίας είναι ιδανικός για τον τρόπο με τον οποίο μικρά παιδιά κατασκευάζουν τη γνώση τους στην αλληλεπίδρασή τους με συνομήλικα άτομα ή με ενήλικες, αλλά και παιδιά του δημοτικού στην αλληλεπίδρασή τους με συμμαθητές τους στη σχολική αίθουσα.

Η κύρια υπόθεση του Krummheuer, (2007) είναι ότι η εκμάθηση των μαθηματικών εξαρτάται από τη συμμετοχή των μαθητών σε διαδικασίες συλλογικής επιχειρηματολογίας. Όσον αφορά τον τομέα της έρευνας του ο Krummheuer, μιλάει για τις «καθημερινές καταστάσεις στην τάξη των μαθηματικών», που ορίζονται ως οι

αμοιβαία αναφερόμενες ενέργειες των συμμετεχόντων σε ένα κοινωνικό συμβάν σε μια τάξη μαθηματικών. Αυτές οι αμοιβαία αναφερόμενες ενέργειες δημιουργούν μια *διαδραστική αρένα.* Αυτή είναι η άμεση ζώνη προσαρμογής, δράσης, προγραμματισμού και εμπειρίας (Soeffner, 1989, σελ.12), για τους μαθητές και το δάσκαλο.

Η επιχειρηματολογία δεν είναι μόνο στόχος διδασκαλίας με την έννοια κάποιος να σχεδιάσει τη διδασκαλία των μαθηματικών με τρόπο που τελικά οι μαθητές να πετύχουν αυτόν τον στόχο και να είναι σε θέση να επιχειρηματολογούν σε ένα ανώτερο μαθηματικό επίπεδο: αυτή είναι η έννοια του «να μάθουν να επιχειρηματολογούν». Αν σκεφτούμε με όρους μιας αρένας αλληλεπίδρασης σε καθημερινές καταστάσεις στην τάξη μαθηματικών, η επιχειρηματολογία εμφανίζεται επίσης ως ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, αν και με διαφορετικό τρόπο: όσον αφορά την εκμάθηση των μαθηματικών κάποιος συνήθως υποθέτει πως η συμμετοχή σε επιχειρηματολογίες, οι οποίες φαίνεται να είναι μάλλον σαφείς και εξελιγμένες, είναι μια προϋπόθεση για τη δυνατότητα να μάθουν, όχι μόνο την επιθυμητή *έκβαση.* Με αυτή την έννοια, η μάθηση των μαθηματικών είναι *επιχειρηματολογική* μάθηση. Βασίζεται στη συμμετοχή των μαθητών σε « λογιστική πρακτική » "(Garfinkel, 1967, σελ. 1, αναφορά σε Krummheuer 2007) που είναι χρήσιμη, υποστηρικτική για μαθηματικές διαδικασίες μάθησης των μαθητών. Τέτοιες αρένες αλληλεπίδρασης μπορεί να εμφανίσουν βελτιωμένα επιχειρήματα, τα οποία επιτυγχάνονται από τους συμμετέχοντες. Φυσικά, η αρένα μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί με τέτοιο τρόπο που κανείς δύσκολα να μπορέσει να βρει επεξηγήσεις των στοιχείων ενός επιχειρήματος.

Όπως παρατηρούμε η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά δεν είναι απλή υπόθεση. Η φύση του αντικειμένου είναι τέτοια που την καθιστά πολύπλευρη και ιδιόμορφη. Για να αναπτύξει ένα άτομο ενασχολούμενο με τα μαθηματικά μαθηματική επιχειρηματολογία χρειάζεται εμπειρία η οποία αποκομίζεται από την αλληλεπίδραση με άλλα άτομα.

3.2 Το σχήμα Toulmin στην τάξη

Επιτρέψτε μου να έρθω στη διαδικασία της επιχειρηματολογίας. Πρώτα πρέπει να εισαχθεί σύντομα η προσέγγιση του Toulmin. Οι εισφορές για την αλληλεπίδραση των μεμονωμένων ατόμων που εξετάζεται ανεξάρτητα από την ατομική πρόθεσή τους σχετικά με τη λειτουργία τους μέσα σε ένα διαδραστικό επίτευγμα της επιχειρηματολογίας. Στη συνέχεια θα περιοριστώ στις τέσσερις κεντρικές κατηγορίες της επιχειρηματολογίας κατά την έννοια του Toulmin.

Αυτά είναι:

- δεδομένα
- συμπέρασμα
- εγγύηση
- υποστήριξη

Η γενική ιδέα του επιχειρήματος αποτελείται από τον εντοπισμό της προς απόδειξη δήλωσης πίσω σε αδιαμφισβήτητες δηλώσεις (δεδομένα). Ως εκ τούτου, η γραμμή αυτή μπορεί να αναφέρεται ως το συμπέρασμα του επιχειρήματος. Ένα τέτοιο συμπέρασμα απαιτεί νομιμοποίηση. Καταστάσεις οι οποίες συμβάλλουν στη νομιμοποιητική αντιπροσωπεύουν την εγγύηση. Οι δηλώσεις που αναφέρονται στη νομιμότητα της εγγύησης είναι μια άλλης ποιότητας. Ο Toulmin (1969) τις αποκαλεί «υποστηρίξεις». Αντιπροσωπεύουν αναμφισβήτητες βασικές πεποιθήσεις. Τα επιχειρήματα μπορεί να είναι δεμένα με τέτοιο τρόπο που ένα αποδεκτό συμπέρασμα μπορεί να λειτουργήσει και πάλι ως δεδομένα για ένα μεταγενέστερο νέο επιχείρημα.

Για να διαφοροποιηθούν οι δηλώσεις των ομιλητών σύμφωνα με την ευθύνη και την πρωτοτυπία τους, αναφερόμαστε στην πρόταση του Goffman, (1981) για την αποσύνθεση μιας φράσης στην ακόλουθη μερική λειτουργία:

- η συντακτική μορφή με ειδική επιλογή λέξεων και ειδική σύνθεση (η λειτουργία της διατύπωσης)
- η σχετικά με το περιεχόμενο (σημασιολογικό) συνεισφορά (λειτουργία του περιεχομένου).

Ένας ομιλητής δεν πρέπει απαραιτήτως να αναλάβει την ευθύνη και την πρωτοτυπία και για τις δύο λειτουργίες, αλλά μόνο για μία ή στην πραγματικότητα για καμία από αυτές. Επισήμως κανείς μπορεί να διακρίνει τέσσερις περιπτώσεις:

- Ένα άτομο που μιλάει είναι εντελώς (συντακτικά και σημασιολογικά) υπεύθυνο για την έκφραση του: ένας ομιλητής από αυτό το είδος που λέμε "author". Είναι το πρόσωπο που εκφράζει προφορικά τη δική του ιδέα με δικά του λόγια.
- Ένα άτομο που μιλάει δεν αναλαμβάνει την ευθύνη ούτε για την συντακτική μορφή, ούτε για τη σημασιολογική πλευρά της δήλωσής του. Ένα άτομο σε αυτή την κατάσταση που ονομάζουμε "relayer".
- Ένα άτομο που μιλάει παίρνει (σχεδόν) τον ίδιο σκεύασμα, μέρη εκ των προτέρων εκφράσεων και προσπαθεί από αυτά να εκφράσει την δική του νέα ιδέα. Καλούμε ένα άτομο σε αυτή την κατάσταση "ghostee". Χρησιμοποιεί τα λόγια κάποιου άλλου για να πει *κάτι διαφορετικό* από την έννοια που αποδίδεται στην έκφραση του αρχικού ομιλητή.
- Ένα άτομο που μιλάει παίρνει την ιδέα της προηγούμενης φράσης και προσπαθεί να την εκφράσει με δικά του λόγια. Καλούμε αυτή την περίπτωση "spokesman" Παραφράζει το περιεχόμενο της προηγούμενης δήλωσης με δικά του λόγια.

Οι μαθητές που μπορούν να συμβάλουν στην παραγωγή μιας εγγύησης σε μια κοινή διαδικασία επιχειρηματολογίας μαθαίνουν περισσότερα και καταλάβουν περισσότερα επί του θέματος από τους μαθητές οι οποίοι μπορούν να παράγουν μόνο τα δεδομένα ή το συμπέρασμα. Αλλά αυτό είναι μόνο η μία πλευρά του νομίσματος. Μπορούμε να περιγράψουμε μαθητές με την ιδιότητα του spokesman, ghostee, ή και τα δύο, ως μαθητές οι οποίοι έχουν ήδη εισέλθει σε μια πορεία προς μια πιο αυτόνομη δράση. Brandt (2004) χαρακτηρίζει spokesman ως ένα ρόλο που εξακολουθεί να είναι μάλλον προσανατολισμένος προς την ανάγκη για ασφάλεια στην "ανάκτηση του γνωστού ". Brandt, ωστόσο, βλέπει ghostee ως ρόλο στον οποίο ο μαθητής εμφανίζει μια σαφέστερη προσπάθεια για αυτονομία και διακρίνει τον εαυτό του ως "ψάχνοντας για το νέο" (σελ. 199). Δράσεις του spokesman, ghostees ή και τα δύο βελτιώνουν τις δυνατότητες μάθησης μέσα στην τάξη. Μέσω αυτών, οι ιδέες και οι συνθέσεις των μαθητών, ο δάσκαλος ή και τα δύο συνδέονται με το σχετικό μαθηματικό θέμα. Ενεργώντας στο καθεστώς του relayer μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο βήμα για τη

μαθητεία της εφαρμογής συγκεκριμένων μαθηματικών γνώσεων με λογικό τρόπο. Ενεργώντας στο καθεστώς του author και η παραγωγή ολόκληρου του πυρήνα του επιχειρήματος αυτόνομα θα μπορούσε να εκληφθεί ως ένδειξη ότι ο μαθητής δεν βρίσκεται στην κατάσταση της μάθησης κάτι νέου σε αυτό το θέμα. (Krummheuer, 2007)

Η λογιστική πρακτική και ο σχεδιασμός της παραγωγής καλύπτουν μία υπο-αρένα της καθημερινής κατάστασης στην τάξη των μαθηματικών που καθιστά δυνατή την κατανόηση των συνθηκών να καταστεί δυνατή η μάθηση για τους ενεργά συμμετέχοντες μαθητές με έναν ιδιαίτερο τρόπο. Κατά τη διαδικασία της συλλογικής επιχειρηματολογίας ένα επιχείρημα δημιουργείται, και ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στην παραγωγή του σε δύο σημεία:

- παράγει δηλώσεις που μπορούν να διατεθούν σε ορισμένες κατηγορίες, υπό την έννοια του Toulmin, και
- μέσα από αυτό, παίρνει ένα συγκεκριμένο ρόλο ομιλίας.

Το σύνολο του χώρου της αλληλεπίδρασης περιλαμβάνει επιπλέον διαστάσεις, όπως η θεματική ανάπτυξη, η αλληλεπίδραση δομής ή του αποδέκτη-σχεδιασμό των μη ενεργών μαθητών.

Το περιορισμένο σχήμα του Toulmin έχει χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει

α) την επιχειρηματολογία των μαθητών στα διαφορετικά επίπεδα μόρφωσης και σε διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα

β) την επιχειρηματολογία ολόκληρης της τάξης και

γ) την επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών.

Η επιχειρηματολογία, στα πλαίσια της καθημερινής ζωής, είναι εκείνο το γένος του λόγου το οποίο επιστρατεύει το άτομο ώστε να υποστηρίξει μια επίμαχη κρίση κάνοντας χρήση συλλογισμών αποτελούμενων από προτάσεις που δικαιολογούνται με τη χρήση επιπρόσθετων προτάσεων.

Όλοι οι συλλογισμοί και κατ' επέκταση τα επιχειρήματα και της Τυπικής και της Άτυπης Λογικής κατηγοριοποιούνται σε τρία είδη:

- Παραγωγικοί συλλογισμοί – επιχειρήματα (deduction) οι οποίοι είναι συλλογισμοί "από το γενικό στο ειδικό" ή "από το όλον στο μέρος" όπου η κατασκευή του συλλογισμού – ισχυρισμού ξεκινάει από μερικά δεδομένα και έναν κανόνα.
- Απαγωγικοί συλλογισμοί - επιχειρήματα (adbuction) οι οποίοι είναι συλλογισμοί " από το ειδικό στο γενικό" ή "από το μέρος στο όλον" όπου η κατασκευή του συλλογισμού – ισχυρισμού ξεκινάει από ένα γεγονός που έχει παρατηρηθεί.
- Επαγωγικοί συλλογισμοί – επιχειρήματα (induction) οι οποίοι είναι συλλογισμοί – ισχυρισμοί όπου η κατασκευή τους βασίζεται σε γενίκευση από συγκεκριμένα παρατηρημένα γεγονότα.

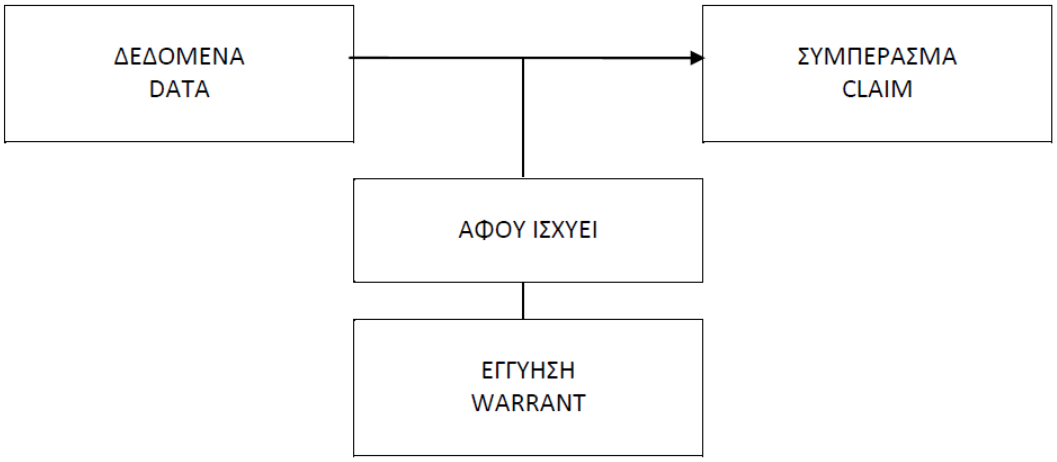
Ένα επιχείρημα, σύμφωνα με τον Toulmin, είναι σαν ένας "οργανισμός, έχει ανατομική δομή αλλά έχει και την λεπτότερη φυσιολογική δομή" (1958, σελ. 87). Για να ελεγχτεί η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος πρέπει να ελεγχτεί τόσο η ανατομική του δομή δηλαδή οι φάσεις που διέπουν κάθε επιχείρημα από την αρχική τοποθέτηση μέχρι το τελικό συμπέρασμα και αποτελούν τα κύρια όργανα του, όσο και η φυσιολογική του δομή κατά την οποία μελετάται η κανονική λειτουργία των επιμέρους στοιχείων που αποτελούν το επιχείρημα και των ρυθμιστικών μηχανισμών δηλαδή αν αυτά τα στοιχεία συνάδουν με το πλαίσιο στο οποίο συγκαταλέγεται το επιχείρημα.

Κατά την επιχειρηματολογία διαπραγματευόμαστε ένα αμφιλεγόμενο θέμα για το οποίο υπάρχει διάσταση απόψεων. Για να υφίσταται ένα επιχείρημα είναι αναγκαία η ύπαρξη δεδομένων – αποδεκτών στοιχείων (data) χωρίς την ύπαρξη αυτών δεν είναι δυνατή η κατάληξη σε συμπέρασμα ή ισχυρισμό (claim) του οποίου η αλήθεια τίθεται προς εξακρίβωση – υιοθεσία. Η υποστήριξη του ισχυρισμού υποθέτει a priori την παραβολή δεδομένων. Σύμφωνα με τον Toulmin τα δεδομένα πρέπει να απαντάνε στο ερώτημα «Τι στοιχεία διαθέτεις για να συνεχίσω?» («What have you got to go on?").

Η μετάβαση από τα δεδομένα στο συμπέρασμα απαιτεί την ύπαρξη μιας εγγυητικής μαρτυρίας ή εγγύησης (warrant). Η εγγύηση αυτή θα απαντά στο ερώτημα, σύμφωνα με τον Toulmin, «Πως είναι δυνατό από αυτά τα δεδομένα να καταλήξεις στο συμπέρασμα αυτό?» («How do you get there?»). Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα

δεν υποθέτει την παράθεση επιπροσθέτων πληροφοριών – δεδομένων αλλά την παράθεση των γενικών κανόνων , αρχών, αναφορών, αξιολογήσεων ή υποθετικών δηλώσεων, αποτελούν δηλαδή μια γενική εγγυητική αρχή που αποτελεί συνήθως κοινά αποδεκτή γνώση, η οποία καθιστά τη σύνδεση - γεφύρωση δυνατή και έγκυρη. Η φύση των εγγυήσεων είναι υπό αυτήν την έννοια επεξηγηματική και αιτιολογική ώστε να προσφέρει την απαραίτητη νομιμότητα στο επιχείρημα. Η διαφορά των εγγυήσεων με τα δεδομένα δεν είναι πάντα εμφανής ωστόσο οι λειτουργίες τους στο επιχείρημα είναι διακριτές. Οι διαφορές έγκεινται στα εξής: τα δεδομένα οφείλουν να είναι ρητά διατυπωμένα ενώ οι εγγυήσεις σε αρκετές περιπτώσεις είναι υπονοούμενες και άρρητες. Οι εγγυήσεις γενικά πιστοποιούν την ορθότητα όλων των επιχειρημάτων του ιδίου τύπου και είναι διατυπωμένες με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που είναι τα δεδομένα. Όπως αναφέρει και ο Toulmin η διαφορά είναι "στην πρώτη περίπτωση να μεταφέρει ένα κομμάτι πληροφορίας, στην άλλη να δώσει εξουσία σε ένα βήμα στην επιχειρηματολογία" (σελ. 91). Σε ένα επιχείρημα το ίδιο τμήμα της δήλωσης μπορεί να έχει διττή λειτουργία είτε σαν δεδομένο είτε σαν εγγύηση ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο χρησιμοποιείται και τον τρόπο που ερμηνεύεται από τους συνδιαλεγόμενους.

Σε αυτό το στάδιο έχουμε μια πρώτη μορφή ανάλυσης των επιχειρημάτων η οποία αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν "Περιορισμένο Σχήμα του Toulmin " ή "Απλό σχήμα του Toulmin " και η μορφή του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Γιαννοπούλου, 2013) :



Τα στοιχεία αυτά όμως δεν είναι αρκετά για να αναλύσουν όλα τα είδη των επιχειρημάτων. Για τον λόγο αυτό λαμβάνονται υπόψη επιπρόσθετα στοιχεία.

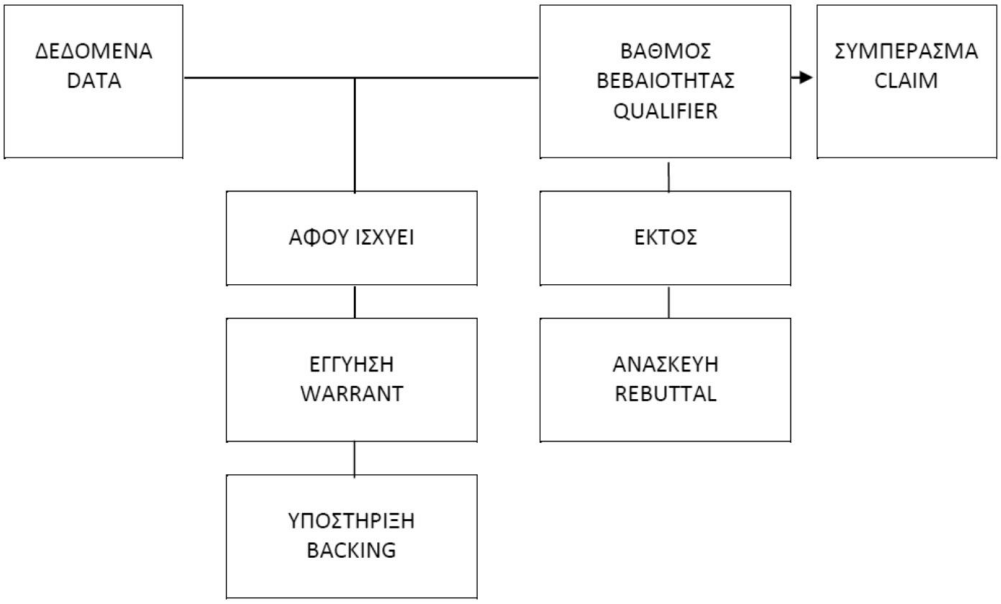
Οι εγγυήσεις, όπως είδαμε, μπορεί να είναι διαφορετικών ειδών και εξαρτώνται από το πεδίο στο οποίο ανήκει το επιχείρημα, αποτελούν δηλαδή field-dependent στοιχείο. Ανάλογα με το πεδίο που αυτά υπάγονται προσδίδουν και διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας-δύναμης στον ισχυρισμό του οποίου η αληθοτιμή ζητείται. Ορισμένες εγγυήσεις επιτρέπουν να γίνεται η αποδοχή του ισχυρισμού απερίφραστα και χωρίς καμία αμφιβολία βάση των διατιθέμενων δεδομένων. Αυτό το γεγονός επιτρέπει την χρήση φράσεων επιστημικής τροπικότητας όπως τα βεβαιωτικά επιρρήματα πρέπει, αναγκαία, κ.α.. Άλλες εγγυήσεις υποβάλλονται σε αμφισβήτηση λόγω πιθανών εξαιρέσεων ή ειδικών συνθηκών κάτω από τις οποίες ισχύουν οπότε σε αυτή τη περίπτωση η εξαγωγή του συμπεράσματος δεν είναι αναγκαία αλλά υπό περιορισμούς και για αυτό το λόγο γίνεται χρήση διστακτικών επιρρημάτων όπως πιθανόν, ενδέχεται, ίσως, κ.α.. Οι φράσεις αυτές επιστημικής τροπικότητας αναφέρονται από τον Toulmin ως ο βαθμός βεβαιότητας (qualifier).

Όταν ο ομιλητής προφέρει στοιχεία υπέρ ενός επιχειρήματος δεν είναι επαρκές απλά να παρατεθούν οι εγγυήσεις, απαιτείται η παράθεση των λόγων για τον οποίο οι συγκεκριμένες εγγυήσεις αιτιολογούν και επεξηγούν το συγκεκριμένο επιχείρημα. Υπάρχουν λοιπόν επιπρόσθετα στοιχεία, κατηγορικές δηλώσεις, στα οποία βασίζονται οι εγγυήσεις και προσφέρουν επιπρόσθετη υποστήριξη – διαβεβαίωση (backing) χωρίς την ύπαρξη της οποίας είναι δυνατό οι εγγυήσεις αυτές να υπόκεινται σε αμφισβήτηση. Το είδος της υποστήριξης που απαιτείται σε κάθε επιχείρημα εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο ανήκει το επιχείρημα, είναι δηλαδή όπως και οι εγγυήσεις field-dependent στοιχείο. Η υποστήριξη αυτή δεν αποτελεί αναγκαίο στοιχείο του επιχειρήματος καθώς πολλές φορές είναι αυτονόητη και υπόρρητη. Ωστόσο η υποστήριξη μπορεί να τεθεί και αυτή σε αμφισβήτηση ή όπως αναφέρει ο Toulmin να τεθεί το ερώτημα “Γιατί συμβαίνει-ισχύει αυτό?”, σε αυτή την περίπτωση ο ομιλητής οφείλει να προσφέρει επιπλέον υποστήριξη μέχρι να συγκλείσουν οι απόψεις των συνδιαλεγόμενων.

Για να είναι πλήρης αυτή η αιτιολόγηση απαιτείται να παρατίθεται και η ανασκευή ή αντίκρουση του επιχειρήματος (rebuttal). Δηλαδή αν υπάρχουν συγκεκριμένες προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν αυτά τα δεδομένα, αν υπάρχουν εξαιρέσεις σύμφωνα με τις οποίες η χρήση των συγκεκριμένων δεδομένων με την

προσθήκη των εγγυήσεων δεν οδηγούν στην εξαγωγή του συμπεράσματος του επιχειρήματος.

Η ανάλυση των επιχειρημάτων τώρα έχει την ακόλουθη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα γνωστή και ως "Το Σχήμα του Toulmin " ή "Το Μοντέλο επιχειρηματολογίας του Toulmin "(Γιαννοπούλου, 2013).



Η αξιοποίηση του σχήματος Toulmin στην τάξη των μαθηματικών έχει πραγματοποιηθεί από την Knipping (2001, 2003). Η συναρτησιακή ανάλυση των επιχειρημάτων που εκτίθενται στο μοντέλο Toulmin, αποδεικνύεται ότι είναι εξίσου εποικοδομητική στην έρευνα που παρουσιάζει η Knipping. Οι αναλύσεις των δηλώσεων από την άποψη της λειτουργίας τους μέσα σε ένα επιχείρημα, δηλαδή ως δεδομένα (D), συμπεράσματα (C), εγγύηση (W) και υποστήριξη (B), βοήθησε ιδιαίτερα, να κατηγοριοποιηθούν διακριτά επιχειρήματα σε αποδεικτικές ομιλίες σε συνήθεις καταστάσεις τάξεως.

Σύμφωνα με Knipping (2001, 2003), σε αποδεικτικές ομιλίες, τα επιχειρήματα και οι ιδέες προκύπτουν από μια ποικιλία προελεύσεων, όπως το νερό που αναβλύζει από πολλές πηγές. Εικασίες και διαφορετικά επιχειρήματα έχουν συζητηθεί δημοσίως. Τελικά ανασκευάζονται ψευδείς εικασίες, αλλά αποτιμώνται ως γόνιμες εν τω μεταξύ. Περισσότερες από μία αιτιολογήσεις μιας δήλωσης εκτιμώνται και ενθαρρύνονται από ανοικτού τύπου ή ασαφείς ερωτήσεις του δασκάλου. Η

ποικιλομορφία των αιτιολογιών χαρακτηρίζει μια δομή της επιχειρηματολογίας με παράλληλες ροές και δαιδαλώδης γραμμές. Όχι μόνο το συμπέρασμα του στόχου, αλλά και οι ενδιάμεσα δηλώσεις δικαιολογούνται με διάφορους τρόπους.

Οι αναλύσεις των αποδεικτικών ομιλιών πραγματοποιήθηκαν με βάση το μοντέλο Toulmin προκειμένου να διαχωριστούν διαφορετικές επιχειρηματολογικές ροές (δηλαδή τα βήματα της επιχειρηματολογίας, όπως περιγράφεται στο μοντέλο Toulmin) ως βάση για την περαιτέρω ανάλυση της δομής της επιχειρηματολογίας. Στις εργασίες της περιγράφονται δύο διαφορετικοί τύποι δομών επιχειρηματολογίας και περασμάτων. Τα παραδείγματα που δόθηκαν δείχνουν ότι οι αποδεικτικές ομιλίες διαφέρουν όχι μόνο στους τύπους των επιχειρημάτων που χρησιμοποιούνται, αλλά και στη δομή του λόγου και τα χωρία από ένα επιχείρημα σε ένα άλλο. Αυτό υπογραμμίζει την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα σχετικά με τις διαρθρώσεις της επιχειρηματολογίας.

3.3 Η επικοινωνία στην αίθουσα των Μαθηματικών

Το να κάνεις έρευνα με νέους τρόπους πάνω από όλα σημαίνει να είσαι προσεκτικός στη δραστηριότητα της μάθησης και όχι μόνο στα αποτελέσματα της. Στο σχολείο, η λεκτική επικοινωνία είναι η κύρια εκδήλωση αυτής της δραστηριότητας. Δεν υπάρχει αμφιβολία, ότι για ένα νέο ερευνητή, η μελέτη της μάθησης γίνεται μελέτη της επικοινωνίας στην τάξη. Αλλά η μεθοδολογία δεν είναι μόνο αυτό που διακυβεύεται σε αυτούς τους καιρούς της αλλαγής. Η συνειδητοποίηση της κεντρικής θέσης της επικοινωνίας έρχεται ως θεωρητικό, μεθοδολογικό και παιδαγωγικό πακέτο, με τις ρίζες του βαθιά στο γόνιμο έδαφος της κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης της ανθρώπινης νόησης. (Sfard, 2001)

Οι δεξιότητες με τις οποίες μαθαίνουμε από τη γέννησή μας, είναι αυτό που κάνει δυνατή επικοινωνία. Η νέα έρευνα απαιτεί να εμποδίσουμε αυτήν την αυθόρμητη ερμηνευτικά ώθηση και να υποστηρίξουμε τις νέες μας κατανοήσεις. Πρέπει κατά συνέπεια να ξεμάθουμε όσα έχουν γίνει η βάση της ικανότητάς μας για ενασχόληση, και να αποκτήσουμε το νόημα του ανθρώπινου περιβάλλοντος. Αυτό μπορεί να είναι από τις πιο δύσκολες εργασίες, και η μεγαλύτερη πρόκληση για το νέο ερευνητή.

Η Sfard, (2001) χαρακτηριστικά αναφέρει ότι:

Οι λέξεις είναι σαν δούρειοι ίπποι: μόλις τις αφήνουμε να εισέλθουν, αφήνουμε εν αγνοία μας έναν ολόκληρο στρατό εννοιών, ένα σύνολο από φιλοσοφικές απόψεις, να εισέλθουν επίσης. Το πρόβλημα αρχίζει όταν μια τέτοια εννοιολογική εισβολή είναι ακούσια και οι χρήστες των λέξεων παραμένουν ανυποψίαστοι από συνεπαγωγές και ερμηνείες, που άλλοι είναι πιθανόν να αποδίδουν στις λέξεις τους. Δεδομένου ότι οι δυνατότητες ερμηνείας είναι συνήθως περισσότερες από μία, κατάσταση όπως αυτή προκαλεί σύγχυση, αν όχι ασυνέπεια και αντιφάσεις. Αυτό είναι κάτι πολύ πιθανό να συμβεί όταν οι χρήστες των λέξεων δεν είναι ρητές ή σχετικές με τις έννοιες των λέξεων που χρησιμοποιούν, ή με τις σχέσεις μεταξύ τους.

Η σκέψη μπορεί να θεωρηθεί, όπως διαμορφώθηκε ως εικόνα διαπροσωπικής επικοινωνίας (που είναι κύρια φυλογενετική και οντογενετική), και ως ανίατα χωρισμένη από "τα μέσα επικοινωνίας", όπως η γλώσσα ή οποιοδήποτε άλλο συμβολικό σύστημα που χρησιμοποιείται ως ένα διαμεσολαβητικό εργαλείο.

Σύμφωνα με την Sfard, (2001), « *αντί να ψάχνουμε για απόλυτους ορισμούς, μπορούμε να προσπαθήσουμε να αποκτήσουμε μεγαλύτερη επίγνωση των κινδύνων που αντιμετωπίζουμε κατά την απουσία τους. Αντί να επιζητηθούν εγγυήσεις μιας ακίνδυνης χρήσης των λέξεων μπορούμε να προσπαθήσουμε να καταργήσουμε όσα εμπόδια είναι δυνατόν. Αντί να ρωτάμε ποιο είναι το νόημα μιας συγκεκριμένης λέξης, μπορούμε να ικανοποιήσουμε πολλές φορές τους εαυτούς μας με το να ανακαλύψουμε ποιο δεν είναι. Τέλος, όταν πρόκειται για εννοιολογικά διλήμματα, αντί να προσπαθούμε να τα επιλύσουμε μπορεί μερικές φορές να τα εξαφανίσουμε απλά με την εκκαθάριση της γλώσσας μας από παραπλανητικές αλληγορίες και κρυμμένες υποθέσεις.»*

Στην «ομαδική παρουσία» πάρα πολλών λεπτομερειών, υπάρχει μια μικρή ελπίδα για το είδος της κατανόησης που επιδιώκουν οι νέες ερευνητές. Ας προσέξουμε τους κινδύνους των αναλύσεων που προσπαθούμε να επιτύχουμε πάρα πολύ. Μήπως η απληστία μας για λεπτομέρεια μας ρίξει μακριά από τις μικρές ιδέες που έχουμε ήδη καταφέρει να επιτύχουμε, και μήπως οι αντιλήψεις μας χαθούν στην απελπιστική καταδίωξη του φαντάσματος της «πλήρης εικόνας» της μάθησης. (Sfard, 2001)

Οι Steinbring, Bussi & Sierpinska, (1998), αναφέρουν χαρακτηριστικά πως:

«*Οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά με μεγαλύτερη κατανόηση σε τάξεις στις οποίες επιτρέπεται να εξερευνούν, να διερευνούν, να αιτιολογούν, και να επικοινωνούν σχετικά με τις ιδέες τους*» (σελ. 169)

Εάν κάποιος δέχεται την ιδέα της μάθησης ως μια μύηση σε πρακτική, σε πολιτισμό ή διάλογο, τότε πρέπει να λάβει περισσότερο υπόψη τη γνωστική παράδοση για τη μάθηση. Είναι πλέον σαφές ότι δεν είναι αρκετό το να εξετάσουμε την «απόκτηση μαθηματικού περιεχομένου» – τον τρόπο που οι μαθητές βελτιώνουν τη διαχείριση μαθηματικών εννοιών και την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων – προκειμένου να καταλάβουμε την αλλαγή στην εκμάθηση.

Επίσης, πρέπει να μελετηθούν ορισμένες μορφές αλληλεπίδρασης και, γενικότερα, ορισμένοι μετα-διαλογικοί κανόνες που καθιστούν στους μαθηματικούς διαλόγους μοναδική ταυτότητα. Αυτά τα σημεία φαίνεται να συμφωνούνται στον τόμο αυτό (Language and Communication in the Mathematics Classroom) από την πλειοψηφία των συγγραφέων, είτε μιλούν για κοινωνικομαθηματικούς κανόνες και τις κανονικότητες στη συμπεριφορά, τα σχήματα αλληλεπίδρασης ή τις μορφές των επιχειρημάτων. Η μεγάλη πλειοψηφία αυτών των μετα-κανόνων μπορεί να μελετηθούν μόνο έμμεσα, και έτσι δεν υπάρχει εδώ κανένα νόημα να μιλάμε για μάθηση με κατανόηση, όπως παραδοσιακά ερμηνεύεται. Δεν πρόκειται να πω ότι η εκμάθηση των μετα-κανόνων εμφανίζεται χωρίς κατανόηση, κατά μηχανιστικό τρόπο. Ούτε πρόκειται να πω ότι ο μαθητής διατηρείται επίτηδες χωρίς τη δυνατότητα "κατασκευής νοήματος". Μάλλον, αυτό σημαίνει ότι θα ήταν χρήσιμο να προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τη μάθηση μέσω ενός φακού, εκτός από την σαφή ουσιαστική μάθηση/αποστήθιση μάθηση διχοτόμησης. Εναλλακτικά, εάν αυτή η διχοτόμηση πρόκειται να κρατηθεί ως βάση για μια χρήσιμη κατηγοριοποίηση, πρέπει να αναθεωρηθεί η ιδέα του νοήματος και της κατανόησης μαζί με όλα τα άλλα. Αν το κάνουμε αυτό, και αν είμαστε πιστοί στη νέα σύλληψη της μάθησης και της επικοινωνίας, τότε θα μπορέσουμε να επιτύχουμε μια επανεκτίμηση των παιδαγωγικών προσεγγίσεων που, αυτή τη στιγμή, φαίνεται να είναι πάρα πολύ σε συμφωνία. Μία από τις σιωπηρές συμφωνίες που πρέπει πρωτίστως να υποβληθούν σε κρίσιμη διερεύνηση είναι ότι μπορούμε να κάνουμε πάντα διάκριση μεταξύ της πραγματικής, ουσιαστικής μάθησης από τη μία πλευρά, και μιας μάθησης που δεν είναι παρά μια μηχανική απομίμηση "άδεια από περιεχόμενο"

Σύμφωνα με τους Steinbring, Bussi & Sierpinska, (1998)

"*η εκμάθηση των μαθηματικών γίνεται μια μύηση σε έναν πολύ ιδιαίτερο πολιτισμό στον οποίο αρκετά πράγματα θεωρούνται δεδομένα και πολλά πράγματα δεν μπορούν να διδαχθούν, ρητά και άμεσα*" (σελ. 342), ενώ

«*Οι μαθητές μαθαίνουν τις σιωπηρές συμβάσεις της εμφανή μαθηματικής επικοινωνίας, αλλά αυτές οι συμβάσεις είναι άσχετες από μαθηματικό-επιστημολογική άποψη*» (σελ. 343)

Οι Ellerton and Clements (1991) επέστησαν την προσοχή στο ευρύ φάσμα των κοινωνικών, γνωστικών, πολιτιστικών και γλωσσολογικών παραγόντων που σχετίζονται με την επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών. Θεωρούν ορισμένες πτυχές, συμπεριλαμβανομένου του τρόπου με τον οποίο η γλώσσα των εκπαιδευτικών επιδρά στην μάθηση των μαθηματικών. Η ανάλυση της γλώσσας που χρησιμοποιούνταν σε τάξεις μαθηματικών οδήγησε στο συμπέρασμα ότι είναι σημαντικό οι καθηγητές να εξασκούν τους μαθητές τους να διαβάζουν μαθηματικά. Όταν η γλώσσα διδασκαλίας είναι στα αγγλικά, οι μαθητές που μαθαίνουν αγγλικά ως πρόσθετη γλώσσα είναι πιθανό να παρουσιάσουν γλωσσικές δυσκολίες στα μαθηματικά. Όταν οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν τη γλώσσα των μαθηματικών, λόγω γλωσσικών εμποδίων, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να χρησιμοποιούν ποικίλες στρατηγικές για να βοηθήσουν στην απόκτηση της γλώσσας από τους μαθητές και να ενισχύσει τη μάθησή τους. Οι Brown, Cady & Taylor (2009) δείχνουν την φύση του προβλήματος μέσα από αυτό το παράδειγμα.

«βρείτε έναν αριθμό που μειώθηκε κατά 30 και είναι 4 φορές ο αντίθετός του». Για να κατανοήσει ένας μαθητής αυτό το πρόβλημα, ο δάσκαλος πρέπει να αφιερώσει χρόνο για να εξηγήσει το λεξιλόγιο και να σπάσει την πρόταση σε κατανοητά κομμάτια προτάσεων και λέξεων. *(Brown, Cady & Taylor, 2009)*

Όπως η Maggie Lampert τοποθετήθηκε μια φορά υπέροχα, είναι το είδος της διδασκαλίας, όπως "το να μαθαίνει κάποιος χορό" συνίσταται σε «μερικά λόγια, κάποια προβολή, και κάποια εξάσκηση [του δάσκαλου] με [τους μαθητές], μαζί με τακτικές πρόβες» (Lampert, 1990, σελ. 58), αναφορά σε Sfard, (2001).

3.4 Μαθηματικοί διάλογοι

Τα τελευταία χρόνια, σύμφωνα με τους Mercer & Sams (2006), οι ερευνητές έχουν δώσει μεγάλη σημασία στο ρόλο που παίζει η γλώσσα και η κοινωνική αλληλεπίδραση στη μάθηση των μαθηματικών (Barwell *κ.ά.*., 2005, Forman & van Oers, 1998, Hoyles & Forman, 1995, Monaghan, 1999, Sfard, 2000, Sfard & Kieran, 2001).

Οι Rabel & Wooldridge, (2013), εξέτασαν το κατά πόσο μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, η προώθηση των διερευνητικών συζητήσεων σε τάξη τετάρτης δημοτικού. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως παρόλο που όλοι οι μαθητές είχαν κάποιο κέρδος, αυτοί που ωφελήθηκαν περισσότερο ήταν οι μαθητές μέσου επιπέδου.

Είναι πλέον ευρύτατα αποδεκτό, πως ο διάλογος είναι απαραίτητος τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση των Μαθηματικών και η έρευνα σημειώνει πως η μαθηματική σκέψη αρχίζει να βελτιώνεται μέσω της ανεπίσημης χρήσης της μαθηματικής γλώσσας. Μία στρατηγικά δομημένη προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση του λεξιλογίου είναι απαραίτητη (DfEE 1999, 2), καθώς και ότι τα μαθηματικά έχουν διδαχθεί σωστά όταν τα παιδιά υποστηρίζουν το ένα το άλλο σε συλλογική εργασία και είναι χαρούμενα να μοιράζονται τις ιδέες τους και να εξηγούν τις μεθόδους και τα επιχειρήματά τους (DfES, 2006, 65). (αναφορά σε Rabel & Wooldridge, 2013).

Από τα προαναφερθέντα συνάγεται αβίαστα το συμπέρασμα πως ένας διάλογος υψηλής ποιότητας αναγνωρίζεται ως απαραίτητος για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, ωστόσο δεν γίνεται ξεκάθαρο το πώς μπορεί να επιτευχθεί, ιδιαίτερα η ισορροπία ανάμεσα σε χαλαρές μαθηματικές συνομιλίες και στη σωστή χρήση ενός αυστηρά μαθηματικού λεξιλογίου.

Ο Vygotsky (1978) σημείωσε πως η μάθηση είναι ένας συνδυασμός της προσωπικής ικανότητας και της δημιουργικής επικοινωνίας μεταξύ δασκάλου και μαθητή. Από την άλλη πλευρά για να επιτευχθεί η μάθηση θα πρέπει να δημιουργηθεί ένας κοινός χώρος επικοινωνίας κοινής γνώσης μέσα στην οποία συντελείται διαπραγμάτευση μέσω δραστηριοτήτων (IDZ), Mercer, (2000). Εάν επιτευχθεί η IDZ, οι μαθητές είναι

σε θέση να συμμετέχουν σε διαλόγους και να συνομιλούν εκμεταλλευόμενοι πλήρως τις δυνατότητές τους. Οι Mercer & Sams (2006), συνιστούν πως η συμμετοχή των μαθητών σε συνομιλίες όπου συζητούνται οι ιδέες του καθενός βελτιώνει τη μάθηση και την κατανόηση. Αυτές είναι οι διερευνητικές συζητήσεις καθώς η γνώση παρουσιάζεται δημόσια και οι σκέψεις είναι ορατές στη συζήτηση.

Υπάρχουν ωστόσο αρκετές δυσκολίες οι οποίες μπορεί να δράσουν ως τροχοπέδη στην επίτευξη αυτών των συζητήσεων στην αίθουσα. Συχνά οι μαθητές δημοτικού δεν είναι σε θέση να χτίσουν έναν εποικοδομητικό διάλογο όταν εργάζονται συλλογικά, με αποτέλεσμα να μην θεωρείται μία επιτυχής στρατηγική μάθησης. (Kutnick and Manson 2000, Williams 2008). Μία άλλη σημαντική δυσκολία είναι η έλλειψη επαρκούς εκπαίδευσης των δασκάλων στην ενθάρρυνση και στη διαχείριση συλλογικών συζητήσεων (Blatchford κ.ά., 1998). Δεν μπορούμε να αναμένουμε από τους μαθητές να συμμετέχουν σε ουσιαστικές συζητήσεις ή σε συλλογικές δραστηριότητες χωρίς καθοδήγηση. (αναφορά σε Rabel & Wooldridge, 2013).

Έχει υπάρξει επίσης κάποια συζήτηση στη βιβλιογραφία για το ρόλο της γλώσσας και την κοινωνική αλληλεπίδραση ειδικά τον τομέα της μαθηματικής κατανόησης. Για μερικούς, υπάρχει μια διαφορά μεταξύ των δύο στοιχείων του διαλόγου στην τάξη στο μαθηματικό πλαίσιο: δηλαδή η απόκτηση μαθηματικού μητρώου και η απόκτηση των δεξιοτήτων που είναι απαραίτητες για να συμμετάσχουν σε διάλογο για να διασφαλιστεί η ανάπτυξη της ορθής κατανόησης των μαθηματικών εννοιών (Barwell 2005, αναφορά σε Rabel & Wooldridge, 2013).

Στο σκέλος της εθνικής διδακτέας ύλης National Curriculum, έμφαση δίνεται στην ανάπτυξη των απαραίτητων δεξιοτήτων για "χρήση της ακριβής μαθηματικής γλώσσας και του λεξιλογίου για το χειρισμό δεδομένων". Προβλήθηκε ο ισχυρισμός ότι η έννοια της ασάφειας στα μαθηματικά είναι αντιφατική «πώς μπορούν τα μαθηματικά να συζητηθούν όταν... είναι όλα γραμμένα σε επίπεδο σχολείου» (Pimm 1987, 47).

Όταν η προσοχή εστιάζεται λιγότερο για την ορθότητα του μαθηματικού λόγου και περισσότερο στην εξερεύνηση εννοιών και ιδεών, η ασάφεια μπορεί πραγματικά να είναι ένας παραγωγικός τρόπος για να οικοδομήσουμε την κατανόηση των μαθηματικών αρχών, σε αντίθεση με την παραδοχή ότι απλά πρέπει να διδαχτούν ως δεδομένες αλήθειες (Street 2005, 140). Η συγκεκριμένη διδασκαλία έχει έναν ρόλο

να παίξει στη διδασκαλία των μαθηματικών – τόσο για να συνεισφέρει στο λεξιλόγιο και επειδή είναι προφανώς αβάσιμο, ότι τα παιδιά θα μπορούσαν να φθάσουν σε μαθηματικά συμπεράσματα αποκλειστικά μέσω της συζήτησης – αλλά οι διερευνητικές ομιλίες επίσης μπορούν επίσης να έχουν σημαντική αξία. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας φαίνεται να επιβεβαιώνει ότι η διερευνητική συζήτηση έχει σημαντικό ρόλο να παίξει στην καλύτερη μαθηματική κατανόηση.

Η Γλώσσα είναι κάτι περισσότερο από λόγια, τα μαθηματικά είναι κάτι περισσότερο από αριθμούς (Barwell 2005, 146) και, ακριβώς όπως κατά την εκμάθηση μιας γλώσσας, η ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης είναι μία κοινωνικά κατασκευασμένη δραστηριότητα. (Rabel & Wooldridge, 2013).

Στις τάξεις των μαθηματικών, ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει συχνά το ρόλο του κατόχου και διανομέα της γνώσης, και οι μαθητές τους αποδέκτες της γνώσης. Σε τέτοιες αίθουσες διδασκαλίας, ο λόγος αποτελείται κυρίως από απαγγελία, όπου ο δάσκαλος ελέγχει το περιεχόμενο και τις μορφές αλληλεπίδρασης και οι μαθητές αναμένεται να υπενθυμίζουν γνωστές πληροφορίες. Αυτή η αντίληψη της μάθησης τοποθετεί το δάσκαλο σε θέση εξουσίας που αρνείται το διαλογικό και παρεκβατικό χαρακτήρα της επικοινωνίας καθώς και τον μαθητικό οργανισμό στην κατασκευή της γνώσης. Αντίθετα, η διαλογική αλληλεπίδραση εμφανίζεται κατά την απουσία απαγγελίας, όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε μη γραπτές ανταλλαγές ιδεών (Nystrand κ.ά., 2003, όπως αναφέρεται σε Bell & Pape, 2012).

Η μονογλωσσική γλώσσα, όπως η από το δάσκαλο ελεγχόμενη απαγγελία, τυπική σε αίθουσες διδασκαλίας των μαθηματικών, δυνητικά περιορίζεται καθώς κατασκευάζει τα δικά του σύνολα κατανοήσεων που περιορίζουν τη φαντασία. Η διαφωνία μεταξύ των φωνών παρέχει αρένες για πρόκληση και αλλαγή στον τρόπο σκέψης. Ως εκ τούτου, η διαλογική αλληλεπίδραση, η οποία επιτρέπει τη διαφωνία και τη διαπραγμάτευση του νοήματος, θα μπορούσε να χρησιμεύσει για να επεκτείνει τις έννοιες της ικανότητας και να αυξήσουν τις ευκαιρίες μάθησης. Τα διαλογικά επεισόδια συμβαίνουν όταν οι συμμετέχοντες μέσα σε ομιλία τάξεων ανταλλάζουν ιδέες με μη «συνταγογραφούμενο» τρόπο, επεκτείνοντας ή τροποποιώντας τις εισφορές των άλλων. Χαρακτηρίζονται από ερωτήσεις μαθητών που εμπλέκονται και από απουσία απαγγελίας ερωτήσεις από το δάσκαλο, αν και οι ερωτήσεις τύπου απαγγελίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διατηρηθούν οι κινητήριες δυνάμεις

της συνομιλίας (Nystrand 1997, 2003). Οι Nystrand κ.ά. (2003) διαπίστωσαν ότι συγκεκριμένοι τύποι κινήσεων του δασκάλου και των μαθητών οδήγησε σε διαλογικά επεισόδια. Για παράδειγμα, αυθεντικές ερωτήσεις του δάσκαλου και η υιοθέτηση των σχόλιων των μαθητών υπηρέτησε ως προσφορά για διαλογική αλληλεπίδραση. Επιπλέον, όταν λαμβάνονται για συζήτηση, οι ερωτήσεις των μαθητών ήταν ιδιαίτερα ισχυρές εμπνεύσεις διαλογικών επεισοδίων. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν να διευκολυνθούν οι συζητήσεις ενώ οι μαθητές έκαναν ουσιαστικές συνεισφορές με τη μορφή παρατηρήσεων, εικασιών, και αιτιολόγησης. (Bell & Pape, 2012).

Αυθεντικές ερωτήσεις και πρόσληψη των σχολίων των μαθητών παρουσιάστηκαν με παρόμοια συχνότητα σε δύο κατηγορίες υψηλής και χαμηλής τροχιάς τάξεων (Nystrand κ.ά. 2003). Τα μοτίβα των αυθεντικών ερωτήσεων και η πρόσληψη ήταν λιγότερο πιθανό να συμβεί ως μια ακολουθία στις τάξεις της χαμηλής τροχιάς-, ωστόσο, και στις τάξεις της χαμηλής-τροχιάς, οι ερωτήσεις των μαθητών δεν ξεκίνησαν διαλογικά επεισόδια. Αυτά είναι τα σημαντικά ευρήματα που σχετίζονται με την παροχή ευκαιριών για μάθηση, ιδιαίτερα υπό το πρίσμα επίμονων μοτίβων χαμηλών μαθηματικά επιτεύξεων των οικονομικά ασθενέστερων μαθητών (Berends και Penaloza 2010, National Center for Education Statistics 2009). (Bell & Pape, 2012)

3.5 Thinking Together

Ένας κατάλληλος τρόπος διαχείρισης των προαναφερθέντων προβλημάτων είναι ίσως το ‘Thinking Together’ μέσω του οποίου δίνονται κανόνες διαλόγου και οδηγίες βελτίωσης των ικανοτήτων των μαθητών στη χρήσης της γλώσσας σαν ένα εργαλείο για αιτιολόγηση (Monaghan 2006). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα παιδιά μπορούν να ενεργοποιηθούν ώστε να χρησιμοποιούν τη συζήτηση πιο αποτελεσματικά ως μέσο για την αιτιολόγηση και ότι η ομιλία με βάση ομαδικές δραστηριότητες μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης και της επίλυσης προβλημάτων. Τα αποτελέσματα στηρίζουν την άποψη ότι ο καθηγητής των μαθηματικών μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της επίγνωσης και της χρήσης της γλώσσας σαν εργαλείο αιτιολόγησης (Mercer & Sams, 2006). Με αυτό

τον τρόπο εάν ένας δάσκαλος είναι σε θέση να υποστηρίξει τη βελτίωση της χρήσης της γλώσσας από τους μαθητές (scaffolding), μία τεχνική που θα μπορούσε να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε διαλόγους μεταξύ μαθητών είναι η (IRF) 'initiation – response – feedback' (Rabel & Wooldridge, 2013).

Συχνά υποστηρίζεται ότι όταν οι μαθητές εργάζονται και μιλάνε με άλλους, ενώ ασχολούνται με δραστηριότητες στα μαθηματικά είναι ευεργετικό για την μάθηση και την ανάπτυξη της μαθηματικής τους κατανόησης. Ωστόσο, έρευνες έχουν δείξει ότι παιδιά δημοτικού συχνά δεν λειτουργούν παραγωγικά σε ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες, με τον υπαινιγμό ότι δεν διαθέτουν τις απαραίτητες δεξιότητες για να διαχειριστούν την κοινή τους δραστηριότητα.

Οι Mercer, N., & Sams, C. (2006), κατέληξαν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Με το να παρέχεται στους μαθητές η κατάλληλη καθοδήγηση και εξάσκηση στη χρήση της γλώσσας με στόχο τη συλλογιστική, τους δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιούν τη γλώσσα πιο αποτελεσματικά ως εργαλείο ενασχόλησης σε ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες.
- Με τη βελτίωση της ποιότητας της γλώσσας που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν επιχειρηματολογούν σε ομάδες βελτιώνεται η προσωπική τους μάθηση και κατανόηση στα μαθηματικά
- Ο καθηγητής είναι σημαντικό πρότυπο και οδηγός για τη χρήση της γλώσσας από τους μαθητές

3.6 Διαλογική Διδασκαλία

Η «διαλογική διδασκαλία», όπως περιγράφεται από τον Alexander (2008α), είναι μία παιδαγωγική προσέγγιση, στηριγμένη σε συγκεκριμένες αρχές και μπορεί να παρασταθεί μέσω μιας σειράς στρατηγικών συζητήσεων (Mercer, Dawes & Staarman, 2009). Ο Alexander υποστηρίζει ότι αυτή η προσέγγιση, με έμφαση στην ενεργή, με επιρροή και διαρκή συμμετοχή των μαθητών σε συζητήσεις στην τάξη, θα επιτύχει το καλύτερο εκπαιδευτικό αποτέλεσμα. Βασικός δείκτης μιας διαλογικής

διδασκαλίας είναι ότι η συζήτηση στην τάξη θα πρέπει να έχει μια αθροιστική ποιότητα. Αυτό σημαίνει ότι η επικοινωνία μεταξύ των καθηγητών και των μαθητών θα πρέπει να συμβάλει στη συνεκτική, χρονική οργάνωση της εκπαιδευτικής εμπειρίας των μαθητών και, ως εκ τούτου στη βαθμιαία ανάπτυξη της κατανόησής τους. (Mercer, Dawes & Staarman, 2009)

Η διαλογική διδασκαλία περιλαμβάνει επίσης την ευαισθητοποίηση των μαθητών για την εκπαιδευτική δύναμη της ομιλίας, έτσι ώστε να αναπτύξουν μια μεταγνώση της χρησιμοποίησης της ομιλίας για μάθηση. Αυτό συγκλίνει με προηγούμενη εργασία σχετικά με την εκπαίδευση στις φυσικές επιστήμες, για το αν η ανάπτυξη της ευαισθητοποίησης των παιδιών και της επιδεξιότητας στη χρησιμοποίησή της ομιλίας ως ένα εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων, βοηθάει στη μάθηση και την ανάπτυξη της επιστημονικής τους γνώσης (Mercer κ.ά., 2004). Το αποτέλεσμα είναι ότι ένας αποτελεσματικός καθηγητής φυσικών επιστημών δεν θα ασχολείται μόνο βοηθώντας τα παιδιά να κατανοούν το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών της επιστήμης, αλλά θα βοηθήσει επίσης να καταλάβουν καλύτερα τις διαλογικές διεργασίες που εμπλέκονται στην μελέτη και την εξάσκηση της επιστήμης. Έτσι έρχεται σε συμφωνία με την πρόταση του Lemke (1990) ότι η εκπαίδευση στις φυσικές επιστήμες πρέπει να κάνει τους μαθητές επαΐοντες ομιλητές της επιστήμης «*η εκπαίδευση στις φυσικές επιστήμες πρέπει να κάνει τους μαθητές, άπταιστους και αντανακλαστικούς ομιλητές της επιστήμης*». (Mercer, Dawes & Staarman, 2009)

Η συζήτηση θεωρείται πιο διαλογική όταν αντιπροσωπεύει περισσότερο τις απόψεις των μαθητών και η συζήτηση περιλαμβάνει τις ιδέες τους και του δασκάλου. Έτσι μια ακολουθία στην οποία αρκετοί μαθητές εξήγησαν τις ιδέες τους για ένα φαινόμενο και συζήτησαν με το δάσκαλο και το υπόλοιπο της τάξης πώς αυτές οι ιδέες σχετίζονται με επιστημονικές γνώσεις θα κριθεί με αλληλεπιδραστικό/αναστοχαστικό τρόπο. Δεν υπάρχει καμία επίπτωση στο σχήμα των Mortimer και του Scott ότι κάθε ενιαίο είδος επικοινωνιακής προσέγγισης είναι εγγενώς ανώτερη. Το αποτέλεσμα είναι μάλλον ότι η ποιότητα της διδασκαλίας θα εξαρτηθεί από τη στρατηγική χρήση των διαδραστικών και διαλογικών προσεγγίσεων ενός δασκάλου σε διαφορετικά στάδια ενός μαθήματος ή σειρά μαθημάτων. (Mercer, Dawes & Staarman, 2009)

Μια παραδοχή στην οποία στηρίζεται η έρευνά των Mercer, Dawes & Staarman, (2009), που επίσης λαμβάνεται από τους Mortimer και Scott, είναι ότι η μελέτη της

επιστήμης περιλαμβάνει αναπόφευκτα την αντιπαράθεση καθημερινών και επιστημονικών ιδεών. Η ουσιαστική εκμάθηση της επιστήμης πρέπει να εμπεριέχει μετατόπιση των υπαρχουσών καθημερινών ιδεών των παιδιών προς μια πιο επιστημονική άποψη. Η συνεχή, δυναμική διαδικασία επικοινωνίας στην τάξη, κατά συνέπεια, παρέχει ένα μέσο για να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν, με την πάροδο του χρόνου, μια επιστημονική άποψη που να μπορούν να εφαρμόσουν για να εξηγήσουν μια σειρά φαινομένων.

Υπάρχει πολλή υποστήριξη από την έρευνα για τους εκπαιδευτικούς να δίνουν προσοχή στο πώς χρησιμοποιούν την ομιλία για να καθοδηγήσουν την κατανόηση των μαθητών, καθώς και για την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία αυτή. Εντούτοις, η έρευνα επίσης δείχνει ότι αυτό φαίνεται να έχει σχετικά μικρό αντίκτυπο στην ποιότητα των ομιλιών στην τάξη, όπου δεσπόζουν ακόμα συνήθως κλειστές ερωτήσεις, σύντομες απαντήσεις των μαθητών και λίγη άμεση προσοχή που δίνεται στη χρήση της ομιλίας για διδασκαλία και μάθηση. Με βάση τις συνεντεύξεις με βρετανούς νηπιαγωγούς, Fisher και Larkin (2008) προτείνουν ότι αυτό αντικατοπτρίζεται στις απόψεις των εκπαιδευτικών του τι μετράει ως «καλή» συζήτηση τάξης, όπου η χρήση της ομιλίας για να εξερευνήσουν ιδέες και για να βοηθήσουν στη μάθηση αναφέρονται λιγότερο σε σχέση με την τήρηση των κανόνων ευγένειας και «καλής γραμματικής». (Mercer, Dawes & Staarman, 2009).

3.7 Talking points

Σημαντικό κρίνεται το γεγονός, αν τα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παρέχουν σχετικές συμβουλές στους εκπαιδευτικούς σχετικά με το πώς να αναπτύξουν την πρακτική τους. Σε αυτό το έργο, προσπαθήσαμε να επινοήσουμε παιδαγωγικές δραστηριότητες, οι οποίες θα βοηθήσουν τους καθηγητές να υποκινήσουν και να αναπτύξουν χρήσιμο διάλογο με όλη την τάξη μεταξύ τους και των μαθητών. Παρέχουμε εδώ ένα παράδειγμα μιας δραστηριότητας, *Talking points*, η οποία συνδυάζει δύο από αυτούς τους στόχους και, όπως γνωρίζουμε (από Mercer, Dawes & Staarman, 2009), έχει βρεθεί χρήσιμη.

Η δραστηριότητα Talking points (Dawes 2008α, 2008b) είναι μια πηγή για τόνωση ομιλίας, ακοής, σκέψης και μάθησης. Είναι βασικά μια λίστα καταστάσεων που μπορεί να είναι σωστές, ή εντελώς λάθος. Δίνουν το έναυσμα για συζήτηση, προσφέροντας μια σειρά από ιδέες σχετικά με ένα θέμα που τα παιδιά καλούνται να εξετάσουν μαζί. Αξιολογώντας την αλήθεια αυτών των δηλώσεων διεγείρει τη σκέψη των παιδιών και κάνει ρητές τις γνώσεις και τις εμπειρίες τους, για να δικαιολογήσουν τις πεποιθήσεις τους, επιτρέπει στα παιδιά να συγκρίνουν τις αντιλήψεις τους. Ο δάσκαλος μπορεί να επίσης να μάθει για τα τρέχοντα επίπεδα κατανόησης των παιδιών από τα αποτελέσματα αυτών των συζητήσεων και να αποφασίσει για χρήσιμα σημεία για επακόλουθη συζήτηση με όλη την τάξη, περαιτέρω εξερεύνηση, δραστηριότητα, επίδειξη ή έρευνα. Μόλις είναι εξοικειωμένοι με αυτή την τεχνική, οι καθηγητές εύκολα μπορούν να δημιουργήσουν τα δικά τους θέματα συζήτησης ή να διδάξουν τα παιδιά πώς να το πράξουν. (Mercer, Dawes & Staarman, 2009)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Έρευνες σε προβλήματα που σχετίζονται με τη φυσική γλώσσα και τους τρόπους αντιμετώπισης τους

Η αναφορά του National Numeracy Review Report (2008) σε έρευνα που πραγματοποίησε υπό την ανάθεση του συμβουλίου των Αυστραλιανών κυβερνήσεων (COAG), επεσήμανε τη σημασία της γλώσσας στη μάθηση των μαθηματικών και πρότεινε:

Ότι η γλώσσα και ο αλφαβητισμός των μαθηματικών πρέπει να διδάσκονται ρητά από όλους τους καθηγητές των μαθηματικών με στόχο την αναγνώριση ότι η γλώσσα μπορεί να παρέχει ένα τρομερό εμπόδιο τόσο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όσο και στην παροχή πρόσβασης στους μαθητές σε στοιχεία αξιολόγησης με στόχο την εκμαίευση μαθηματικών αντιλήψεων.

Εντοπίστηκαν πολλά θέματα της γλώσσας και αλφαβητισμού:

- ειδικά σύμβολα και εκφράσεις της μαθηματικής γλώσσας
- η χρήση καθημερινών όρων που έχουν διαφορετική σημασία σε αίθουσες διδασκαλίας μαθηματικών
- γλωσσικοί παράγοντες στην επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων
- επικοινωνία στην τάξη μαθηματικών (COAG, 2008)

Για πολλούς μαθητές, τα μαθηματικά είναι σαν μία ξένη γλώσσα. Τα σύμβολα και οι εκφράσεις παρέχουν ένα τρομερό εμπόδιο στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. *(COAG, 2008)*

4.1.1 Σημασιολογική ρύπανση

Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι λέξεις στη καθημερινή γλώσσα μπορεί να επηρεάσει το πώς κατανοούνται οι ίδιες λέξεις σε επίσημα εκπαιδευτικά εγχειρίδια. Οι Mejía-Ramos & Inglis, (2011), αναφέρουν το συγκεκριμένο πρόβλημα ως σημασιολογική ρύπανση και ασχολούνται με το ρόλο που παίζει στο πως εμπλέκονται οι μαθητές σε διαδικασίες μάθησης και μαθηματικής απόδειξης. Η επιρροή της γλώσσας στη μάθηση αναγνωρίζεται ευρέως στη βιβλιογραφία. Είναι πλέον αποδεκτό ότι ο τρόπος με τον οποίο οι γλωσσικές δομές χρησιμοποιούνται στη καθημερινή γλώσσα μπορεί να διαφέρουν στο πως οι ίδιες γλωσσικές δομές χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Προσπαθώντας να αναλύσει αυτό το φαινόμενο ο Halliday (1975) χρησιμοποίησε τον όρο «μητρώο» ένα σύνολο εννοιών που είναι κατάλληλες σε μια συγκεκριμένη λειτουργία της γλώσσας, μαζί με τις λέξεις και τις δομές που εκφράζουν αυτές τις έννοιες. Ο Halliday συνέστησε πως το μαθηματικό μητρώο είναι σχετικά ασυνήθιστο για ένα τεχνικό μητρώο, με το ότι όταν ονοματοποιούνται νέα φαινόμενα, συχνά επανακαθορίζονται απλές λέξεις από τη φυσική γλώσσα αντί να επινοείται νέα τεχνική ορολογία. Αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με αυτό που αναφέρει ο Pimm (1987) ως σημασιολογική ρύπανση, όπου το νόημα, η χρήση ενός όρου από τη φυσική γλώσσα επηρεάζει το πώς ο όρος κατανοείται στο μαθηματικό μητρώο. Χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα παραδείγματα από τη βιβλιογραφία που αναφέρουν οι Mejía-Ramos & Inglis, (2011). Ο Monaghan (1991) βρήκε ότι το καθημερινό νόημα που έχουν οι λέξεις που συσχετίζονται με την έννοια του ορίου (τείνει, προσεγγίζει, κτλ) μπορεί να έχει αντίκτυπο στην εικόνα της έννοιας. Οι Tall & Vinner (1981) προσθέτουν πως το νόημα της λέξης συνέχεια επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές εμπλέκονται στην επίσημα μαθηματική έννοια της συνέχειας. Τέτοιου είδους δυσκολίες οφείλουν να ξεπεραστούν ώστε οι μαθητές να εμπλακούν με επιτυχία στο μαθηματικό μητρώο. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία οι μαθητές πρέπει να βοηθηθούν ώστε να οικειοποιηθούν την τεχνική γλώσσα του μητρώου των μαθηματικών σε δική τους ομιλία μέσα στην τάξη, Rowland (1999).

Από τα μέσα της δεκαετίας του 80 και ύστερα οι ερευνητές επεσήμαναν τρόπους με τους οποίους εμπλέκεται η γλώσσα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Σημαντική

επιρροή άσκησε και το μαθηματικό μητρώο του Halliday (1978), ο οποίος επεσήμανε ότι:

η καταμέτρηση, η μέτρηση, και άλλοι «καθημερινοί» τρόποι να κάνουμε μαθηματικά αξιοποιούν τη «καθημερινή» γλώσσα, αλλά τα είδη των μαθηματικών που οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν στο σχολείο χρησιμοποιούν τη γλώσσα με νέους τρόπους για να εξυπηρετήσουν νέες λειτουργίες. (Schleppegrell, 2007)

Μια περίληψη των κύριων γλωσσικών χαρακτηριστικών του μαθηματικού μητρώου είναι ενδεικτική από τις διαφορετικές πτυχές της γλώσσας που εμπλέκονται.

Χαρακτηριστικά γνωρίσματα του μητρώου στην τάξη μαθηματικών

Πολλαπλά Σημειωτικό Μητρώο

- *μαθηματική συμβολική γραφή*
- *προφορική γλώσσα*
- *γραπτή γλώσσα*
- *γραφήματα*

Γραμματικά μοντέλα

- *τεχνικό λεξιλόγιο*
- *φράσεις με πυκνά ουσιαστικά*
- *ρήματα είναι και έχει*
- *σύνδεσμοι με τεχνικό νόημα*
- *σιωπηρές λογικές σχέσεις.* (Schleppegrell, 2007)

Η αναφορά του Schleppegrell επισημαίνει έρευνες που τονίζουν το σημαντικό ρόλο που παίζουν οι δάσκαλοι στο να βοηθήσουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη γλώσσα αποτελεσματικά, καθώς και την ανάγκη για σαφή διδασκαλία της γλώσσας στα μαθηματικά. Για παράδειγμα ο O'Halloran (2000) προτείνει:

οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν προφορική γλώσσα για να αποσυμπιέσουν και να εξηγήσουν τα νοήματα στο συμβολισμό των μαθηματικών ως ένα τρόπο χρησιμοποιώντας την πολυ-σημειωτική φύση των μαθηματικών για να βοηθήσουν τους μαθητές να αντλήσουν από τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής νοήματος για την κατανόηση. Ρητά εστιάζοντας την προσοχή των μαθητών σε γλωσσικά χαρακτηριστικά μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να εξερευνήσουν και να αποσαφηνίσουν τις τεχνικές σημασίες.

Άλλες έρευνες που προσδιορίζονται από Schleppegrell δείχνουν ότι υπάρχουν διάφορες στρατηγικές που οι καθηγητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ώστε να υποστηρίξουν τη μετάβαση των μαθητών από την καθημερινή γλώσσα στο μαθηματικό μητρώο *...βοηθώντας τους μαθητές να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την τεχνική γλώσσα παρά την άτυπη γλώσσα όταν καθορίζουν και εξηγούν έννοιες, δουλεύοντας για να αναπτύξουν συνδέσεις μεταξύ των καθημερινών εννοιών των λέξεων και τις σημασίες τους στα μαθηματικά, ειδικά για τους ασαφείς όρους, ομώνυμες και παρόμοιες-ηχώντας λέξεις και αξιολογώντας ρητά την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν την τεχνική γλώσσα κατάλληλα. Ένας τρόπος να αξιολογηθεί η ικανότητα είναι με το να μιλούν οι μαθητές για τα μαθηματικά καθώς λύνουν προβλήματα, ενθαρρύνοντάς τους να αρθρώνουν μοτίβα και γενικεύσεις. (Adams, 2003).*

Το μαθηματικό μητρώο, περιλαμβάνει σύμβολα, εικόνες, λέξεις και αριθμούς και σε σχέση με τη φυσική γλώσσα είναι πιο επίσημο. Κάποιοι όροι συναντώνται αποκλειστικά στα μαθηματικά, άλλοι δανείζονται από την καθημερινή γλώσσα και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται με διαφορετικό νόημα. Επειδή χρησιμοποιείται με συγκεκριμένο τρόπο, το μαθηματικό μητρώο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκτός σχολικής τάξης. Κάποιες λέξεις όπως πίνακας, όριο, συνέχεια πρέπει να διδαχθούν ξανά στους μαθητές, ενώ άλλες όπως παραβολή, υποτείνουσα για πρώτη φορά. Οι μαθητές καλούνται σε μία συνεχή και ενεργή διαπραγμάτευση ανάμεσα στο μαθηματικό νόημα μιας λέξης και το καθημερινό νόημά της. Συμπερασματικά, το μαθηματικό μητρώο εάν δεν γίνει σαφές στους μαθητές μπορεί όντως να ακούγεται, να γίνεται αισθητό και να μοιάζει τόσο πολύ σαν μία ξένη γλώσσα. (Kotsopoulos, D. 2007).

Οι Mejía-Ramos & Inglis, (2011), αναφέρουν τα ακόλουθα τρία βήματα ώστε να κατανοηθεί η σημασιολογική ρύπανση που επηρεάζει την κατανόηση των μαθητών σε μία δεδομένη έννοια. Πρώτα πρέπει να αναλυθούν τα νοήματα και οι χρήσεις της έννοιας στη φυσική γλώσσα. Δεύτερον, πρέπει να ερευνηθεί πώς η έννοια είναι κατανοητή από τους μαθητές στα μαθηματικά κείμενα. Τέλος, πρέπει να υποστηρίξει το πως η χρήση της φυσικής γλώσσας για την έννοια και η κατανόηση της έννοιας στο μαθηματικό πλαίσιο από τους μαθητές αντιστοιχούν ώστε να προτείνουν μια αιτιώδης σχέση.

Η ανάλυση αυτή οδήγησε στο συμπέρασμα πως για να γίνουν ικανοί στα μαθηματικά*, οι μαθητές πρέπει να συμμετάσχουν σε μαθηματικές συζητήσεις μέσα στην τάξη. Αυτή η συμμετοχή, με τη σειρά της, θα επιτρέψει στους εκπαιδευτικούς να αντιληφθούν καλύτερα αν οι μαθητές κάνουν κατάλληλη εννοιολογική σύνδεση μεταξύ των λέξεων και των μαθηματικών εννοιών.* (Kotsopoulos, 2007).

4.1.2 Προβλήματα στη γραφή μαθηματικών

Με βάση τους Austin & Howson, (1979) *είναι όταν αρχίζεις να γράφεις και να διαβάζεις τα μαθηματικά όπου πολλές από τις δυσκολίες που είναι κοινές σε μαθηματικά γίνονται εμφανείς.*

Πολλές από τις δυσκολίες ανάγνωσης των μαθηματικών μπορούν να αποδοθούν σε απερισκεψίες και πρόχειρη γραφή από την πλευρά των συγγραφέων. Βιβλία που γράφονται για εκπαιδευτικούς του σχολείου συχνά τονίζουν τη δύναμη των μαθηματικών συμβολισμών και την υπεροχή πέρα από την κοινή γλώσσα. Πώς μπορούμε να συμβιβάσουμε αυτή τη συμβουλή με αυτή που δίνεται από τους συντάκτες της *American Mathematical Monthly* τους συντάκτες της: "Να θυμάστε ότι οι περισσότεροι άνθρωποι κατανοούν λέξεις πιο γρήγορα από ό, τι τους τύπους"; Εδώ, φυσικά, πρέπει να θυμόμαστε ότι με τη φράση «περισσότεροι άνθρωποι» οι συγγραφείς εννοούν απόφοιτους μαθηματικών, και όχι πολίτες ή μαθητές! (Austin & Howson, 1979).

Αλλά η χρήση των λέξεων για επικοινωνία με ακρίβεια, και με την έννοια του Thom «με νόημα», οι αφηρημένες έννοιες των μαθηματικών είναι ένα έργο δύσκολο, ίσως και αδύνατο.

Ο Vygotsky (1962) περιγράφει τις δυσκολίες που προκύπτουν όταν κάποιος προσπαθεί να μεταδώσει νόημα μέσω της γλώσσας και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι «απόλυτη ορθότητα επιτυγχάνεται μόνο πέρα από τη φυσική γλώσσα, στα μαθηματικά». Άλλη μια φορά έχουμε μια δήλωση σχετικά με τη μαθηματική γλώσσα η οποία κατέχει ένα βαθμό εγκυρότητας, αλλά που αγνοεί τους διάφορους τρόπους με τους οποίους η γλώσσα χρησιμοποιείται στα μαθηματικά. Η γλώσσα του, ας πούμε, τμήμα 117 στο Principia Mathematica , 'Greater and Less' επιτυγχάνει την ακρίβεια και ορθότητα στο οποίο η καθημερινή γλώσσα δεν μπορεί να φιλοδοξεί. Δυστυχώς, η ίδια μεταφέρει πολύ λίγο από το νόημα του μεγαλύτερος ή μικρότερος. Όπως επισημαίνει ο Thom (1973), ο μαθηματικός έχει να χειριστεί, και "να επικοινωνήσει τις διαισθήσεις του σε άλλους", με άλλα μέσα από ότι αυτό: ένα γεγονός το οποίο κατέχει επίσης σε χαμηλότερα επίπεδα από μαθηματική ικανότητα και προσπάθεια. (Austin & Howson, 1979).

Το κατά πόσο αυτή η διαδικασία της επικοινωνίας μπορεί να βοηθηθεί ή να παρεμποδιστεί από το γεγονός ότι πολλές από τις λέξεις που χρησιμοποιούνται από μαθηματική άποψη χρησιμοποιούνται επίσης στην καθημερινή ζωή δεν είναι σαφές. Κατά συνέπεια οι συντάκτες του ATM (1967) βλέπουν το γεγονός ότι "χρησιμοποιούμε γεωμετρικές μεταφορές για να εκφράσουμε συναισθήματα και συμπεριφορές.., φίλοι είναι κοντά μας. Μερικούς ανθρώπους τους κρατάμε σε απόσταση.... έναν έντιμο άνθρωπο λέμε ότι είναι ευθύς" ως χρήσιμα στοιχεία για την εγγύτητα των μαθηματικών στον πολιτισμό μας. Ο Freudenthal (1973), ωστόσο, υποστηρίζει ότι «η επιρροή της μαθηματικής γλώσσας στον ιδιωματισμό είναι σχεδόν ανύπαρκτη» και εφιστά την προσοχή μάλλον τις περιπτώσεις στις οποίες η μαθηματική της χρήση είναι εγγενώς διαφορετική. (Austin & Howson, 1979).

Ιδιαίτερα προβλήματα προκύπτουν από τη χρήση ποσοδεικτών. Στην καθημερινή γλώσσα, οι ποσοδείκτες είναι συχνά κρυμμένοι σε σαφή ή αόριστα άρθρα, σε λέξεις όπως «πάντα», «παντού» και «μερικές φορές», ή παραλείπονται εντελώς: «η έρευνα έχει δείξει ότι τα παιδιά. .. '. Η ποσοτικοποίηση βρίσκεται στο επίκεντρο των μαθηματικών και για να μεταδώσει την κατανόηση, και την ικανότητα χρήσης, οι

ποσοδείκτες, είτε συμβολικά είτε μέσω της γλώσσας, είναι ένας σημαντικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πώς κάποιος αναζητά αυτό και παρόμοιους στόχους δεν είναι προφανές. Ο Henkin (1972) πρότεινε "η εισαγωγή περιορισμένων γλωσσικών μοτίβων να είναι εμβολιασμένη με τη φυσική χρήση της γλώσσας σε συνδυασμό με ακριβείς μαθηματικές έννοιες". (Austin & Howson, 1979).

Οι μαθητές αρχίζουν, ως εκ τούτου, ακόμη και σε νεαρή ηλικία να εισάγονται σε μερικά από τα εξειδικευμένα γλωσσικά σχήματα που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Έτσι εκτός από τον έλεγχο, και την σταδιακή αύξηση, του μαθηματικού λεξιλογίου του παιδιού πραγματοποιείται μάθηση της σύνταξης των μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο θα υπάρξει μια σταδιακή, και σαφώς καθορισμένη εξέλιξη από τη φυσική γλώσσα στην επίσημη γλώσσα των μαθηματικών.

Μια κάπως διαφορετική προσέγγιση έχει προταθεί από Griffiths (1975), όπως αναφέρεται σε Austin & Howson, (1979). Υποστηρίζει την ανάγκη για τη δημιουργία μιας «γλώσσας της διδασκαλίας» που θα γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ φυσικής γλώσσας και των μαθηματικών. Η "γλώσσα της διδασκαλίας" θα περιλαμβάνει μεταξύ των συστατικών της μοντέλα και οι αριθμούς η οποία θα έχει για τους μαθητές «υψηλότερο βαθμό δομικής σταθερότητας». Φαίνεται ότι η απόδειξη δεν είναι μια έννοια που είναι δομικά σταθερή. Λίγοι μαθητές μπορούν να παράγουν μια απόδειξη σε σωστή σύνταξη, εκτός από μνήμης, και εάν η μνήμη είναι λανθασμένη, έτσι είναι και η σύνταξη. Από την άλλη πλευρά, αν το υλικό μεταφέρεται με ένα κατάλληλο μοντέλο, τότε αν ο μαθητής περιγράφει τι συμβαίνει στο μοντέλο είναι απίθανο να πάει πολύ στραβά με την κοινή λογική έννοια της απόδειξης... ". Η πρόωρη εισαγωγή της επίσημης γλώσσας μπορεί, επομένως, να είναι από μαθηματική άποψη αντιπαραγωγική.

Η πρόταση του Henkin της εισαγωγής ενός περιορισμένου αριθμού γλωσσικών μοτίβων, θέτει ένα άλλο ζήτημα που αντιμετωπίζει κάθε συντάκτης ενός μαθηματικού κειμένου. Σε ποιο βαθμό πρέπει ο αναγνώστης να προστατεύεται από εναλλακτικές εκφράσεις και όρους, ή ακόμη και μια ποικιλία γλωσσικών δομών; Ένα προφανές παράδειγμα, όταν γράφετε Αγγλικά κάποιος αντιμετωπίζει ποικίλες δομές προτάσεων και μοτίβων. Αλλά όταν γράφει μαθηματικά, φαίνεται σκόπιμο να διατηρήσει το ίδιο γλωσσικό μοτίβο όταν περιγράφει παρόμοιες καταστάσεις

μαθηματικών με την ελπίδα ότι θα κατευθύνει την προσοχή του αναγνώστη στην υποκείμενη ομοιότητα.

Στη συνέχεια υπάρχει ανάγκη να εξασφαλιστεί ότι με το να είμαστε υπερπροστατευτικοί δεν εμποδίζουμε τους μαθητές να αναπτύξουν την ευρωστία που απαιτείται προκειμένου να αντιμετωπίσουν επαρκώς τις ποικίλες γλωσσικές απαιτήσεις των μαθηματικών. Πράγματι, ο μαθητής μπορεί να χρειαστεί όχι μόνο να ασχοληθεί με άλλες γλωσσικές χρήσεις εντός των μαθηματικών, αλλά και να επικοινωνεί με τους επιστήμονες, των οποίων η γλωσσική χρήση μπορεί να διαφέρει σημαντικά.

Θα πρέπει επίσης να υπενθυμίσουμε ότι η επικοινωνία είναι αμφίδρομη και ότι εκτός από τον καθορισμό των προτύπων της ακρίβειας την οποία εμείς σαν καθηγητές τηρούμε, πρέπει επίσης να αποφασίζουμε σχετικά με τα επίπεδα της γλώσσας που αναμένουμε από τους μαθητές μας να χρησιμοποιούν. Κυρίως, πως αναμένουμε οι μαθητές μας να γράφουν τα μαθηματικά; Ο Sweet, (1972) όπως αναφέρεται από Austin & Howson, (1979) προτείνει ότι η κακή καταγραφή των μαθηματικών είναι χειρότερη από ό, τι αν δεν υπήρχε καθόλου καταγραφή - που οδηγεί σε μεγάλη σύγχυση και πιθανή απώλεια ενδιαφέροντος. Προτιμότερο είναι να μιλούν γύρω από ένα θέμα και να δίνουν με ταχυδακτυλουργικό τρόπο λεκτικές περιγραφές από το να προσπαθούν ανεπιτυχώς να αναπαράγουν μια επίσημη, απόκρυφη γλώσσα. Ένα παιδί, ιδίως, συχνά αγνοεί τις διακριτές μη-ιδιωματικές έννοιες των οικείων λέξεων. Η ευαισθητοποίηση θα έρθει μόνο μέσα από την αναγνώριση της λειτουργίας μιας λέξεως μέσα σε ένα ξεχωριστό πλαίσιο μαθηματικών αφαιρέσεων και καθημερινής γλώσσας, και έτσι η ευαισθητοποίηση μπορεί να συμβεί μόνο αν υπάρχει ένας ανεμπόδιστος πειραματισμός από το παιδί σε ποικίλα περιβάλλοντα.

Σε μια τέτοια περίπτωση ο δάσκαλος θα λειτουργήσει ως οδηγός, όχι ως ένα απομακρυσμένο μοντέλο μαθηματικής γλωσσικής τελειότητας. Εκτός από τις λέξεις που μοιράζονται με την καθομιλουμένη, τα μαθηματικά κατέχουν επίσης ένα εξειδικευμένο δικό τους λεξιλόγιο. Ο Wilmon (1971) διαπίστωσε ότι στα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης, περίπου 500 μαθηματικές λέξεις εισήχθησαν στα κείμενα που χρησιμοποιούνται από παιδιά που μπορεί να έχουν συνολικά ανάγνωση λεξιλογίου 4000 περίπου λέξεων. Επιπλέον, υπάρχει μια μεγάλη διαφορά μεταξύ του λεξιλογίου των κειμένων αριθμητικής και των γλωσσικών κειμένων (Earp, 1970a): «*η*

αριθμητική έχει την περισσότερο ευδιάκριτα τεχνική γλώσσα στο στοιχειώδες επίπεδο από ό, τι οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο στο σχολείο, με πιθανή εξαίρεση των φυσικών επιστημών. Έτσι δεν υπάρχει εναλλακτική λύση στην συνεπή, προγραμματισμένη και εμπεριστατωμένη διδασκαλία του λεξιλογίου». (αναφορά σε Austin & Howson, 1979).

Είναι σαφές, ωστόσο, ότι απλώς η διδασκαλία λέξεων σε μαθητές θα επιτύχει λίγα - πράγματι, αυτό μπορεί κάλλιστα να προκαλέσει ζημιά - εάν οι μαθητές έχουν λίγη γνώση της έννοιας ή του αντικειμένου που περιγράφεται. Είναι επίσης σημαντικό ότι οι εκπαιδευτικοί δεν πρέπει να μπερδεμένος από λέξεις, ιδιαίτερα των νέων.

4.1.3 Ανάγνωση και την ερμηνεία μαθηματικών κειμένων

Αρκετά συχνά οι μαθητές σχολιάζουν πως τα μαθηματικά μοιάζουν σαν ξένη γλώσσα. Χαρακτηριστικά η Kotsopoulos, D. (2007) αναφέρει την περίπτωση του Jacob ο οποίος λέει: «γνωρίζω πώς να το λύσω, αλλά η εκφώνηση με μπερδεύει. Δεν καταλαβαίνω όλες τις λέξεις που έχει η εκφώνηση.». Το μπέρδεμα υφίσταται κυρίως λόγω του ότι χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά όροι οι οποίοι δανείζονται από το καθημερινό λεξιλόγιο.

Zevenbergen (2001) συζήτησε τις μορφές που σχετίζονται με την ανάγνωση και ερμηνεία μαθηματικών κειμένων και προσδιόρισε κάποιες απαιτήσεις αλφαβητισμού:

- λέξεις που χρησιμοποιούνται με συγκεκριμένο μαθηματικό τρόπο και λέξεις που υπάρχουν στα μαθηματικά και, επίσης, στον κόσμο πέρα από το σχολείο
- χωρικής ορολογίας (για παράδειγμα, πάνω από, οριζόντια)
- η συνοπτική και ακριβή έκφραση στα μαθηματικά που μπορεί να συνεπάγεται σημαντική λεξική πυκνότητα
- λεκτικά προβλήματα που δημιουργούν πολυπλοκότητα μέσα από τη σημασιολογική δόμηση στις ερωτήσεις και όχι τα μαθηματικά.

Ένας τομέας της γλώσσας που δημιουργεί προβλήματα είναι η ασάφεια κάποιων λέξεων που έχουν διαφορετική σημασία εκτός σχολικού πλαισίου και μαθηματικών.

Οι λέξεις μπορεί να έχουν διαφορετικό νόημα αναλόγως σε ποιο πλαίσιο χρησιμοποιούνται. Μία λίστα που παρέχει ο Zevenbergen και μπορεί να γίνει κατανοητή η διαφορετική σημασία σε αγγλικό περιβάλλον μάθησης είναι η ακόλουθη:

angle	average	base	below	cardinal	change
common	degree	difference	face	figure	improper
leaves	left	make	mean	model	natural
odd	parallel	point	power	product	proper
rational	real	record	right	root	sign
similar	square	table	times	unit	volume

Μια πιο εξειδικευμένη λίστα είναι και αυτή των Adams, Thanagata & King (2005) σύμφωνα με τους οποίους, τα μαθηματικά δανείζονται κάποιες λέξεις από το καθημερινό λεξιλόγιο και προκαλείται στους μαθητές ασάφεια, καθώς διαφέρει το νόημα τους σε σχέση με αυτό που ήδη είναι εξοικειωμένοι:

Mathematical term	Everyday usage
angle	point of view
concrete	hard substance used in paving
figure	shape of an object
odd	strange
order	place a request
property	belonging to someone
rational	sane
volume	sound level

Ένα άλλο πρόβλημα που υφίσταται σε σχολικές αίθουσες που πραγματοποιείται το μάθημα στα αγγλικά, είναι όταν κάποιες λέξεις είναι ομόηχες με κάποιες άλλες και που έχουν προφανώς διαφορετική σημασία και νόημα. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω πίνακας των Adams, Thanagata & King (2005), που περιέχει λέξεις από το μαθηματικό μητρώο και ομόηχες τους από το καθημερινό λεξιλόγιο με τελείως διαφορετικό νόημα:

Mathematical term	Homophonic partner
arc	ark
chord	cord
mode	mowed
pi	pie
plane	plain
serial	cereal
sine	sign
sum	some

Ένας τρόπος διαχείρισης του συγκεκριμένου ζητήματος από τους ερευνητές είναι:

- πρέπει να παρέχεται στους μαθητές η ευκαιρία να βλέπουν, να ακούν, να μιλάνε και να γράφουν το μαθηματικό λεξιλόγιο
- οι μαθητές όλων των βαθμίδων χρειάζονται ευκαιρίες να ερμηνεύουν τους μαθηματικούς όρους με τρόπους που να έχουν νόημα για τους ίδιους
- να ενθαρρύνονται οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν οπτικά βοηθήματα και διαγράμματα με στόχο την κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας.

(Adams, Thanagata & King, 2005)

Έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με την ανάγνωση δείχνουν αποτελεσματικούς τρόπους διδασκαλίας του λεξιλογίου και μπορούν να αξιοποιηθούν ώστε να βελτιωθεί η ικανότητα των μαθητών ως προς τη χρήση και την

κατανόηση μαθηματικών όρων και ασαφών ή με πολλές ερμηνείες λέξεων. Οι Pierce & Fontaine (2009) χαρακτηριστικά αναφέρουν:

οι αρχές τις διδασκαλίας λεξιλογίου που συνιστάται για τα φιλολογικά μαθήματα μπορούν να εφαρμοστούν με επιτυχία στον τομέα των μαθηματικών. Η διδασκαλία του λεξιλογίου των μαθηματικών πρέπει να ακολουθήσει τις συστάσεις της Isabel Beck και των συνεργατών της (Beck, McKeown & Kucan, 2002), προσφέροντας φιλικούς ως προς τους μαθητές μαθηματικούς ορισμούς, ενθαρρύνοντας τη βαθιά επεξεργασία της σημασίας των λέξεων, παρέχοντας εκτεταμένες δυνατότητες να συναντήσουν λέξεις και εμπλουτίζοντας το λεκτικό περιβάλλον της τάξης των μαθηματικών.

Οι Pierce & Fontaine διαχωρίζουν τις λέξεις σε δύο κατηγορίες:

Τεχνικές λέξεις: όπως κλάσμα, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, λέξεις που έχουν ένα συγκεκριμένο μαθηματικό νόημα και μπορούν να διδαχθούν με ρητό τρόπο

Υπο-τεχνικές λέξεις: που έχουν μία κοινή ερμηνεία, αλλά και μία μαθηματική σημασία που πρέπει να διδαχθεί.

Ένα παράδειγμα της δεύτερης κατηγορίας με την οποία ασχολήθηκαν οι προαναφερθέντες ερευνητές είναι η λέξη αληθές, η οποία στην καθημερινή γλώσσα έχει τη σημασία του σωστού, του μη ψευδές, αλλά στα μαθηματικά σημαίνει ότι σε μία ισότητα το αριστερό μέλος είναι ίσο με το δεξί μέλος. Θέλοντας να δείξουν πως πρέπει να διδαχθεί η συγκεκριμένη λέξη, ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές παρουσιάζουν την ακόλουθη διδασκαλία:

Η δασκάλα ζητάει από τους μαθητές να αναφέρουν έναν δικό τους ορισμό με το τι σημαίνει η παραπάνω λέξη. Ύστερα από συζήτηση με όλη την τάξη, τα παιδιά συμφώνησαν πως αληθές είναι κάτι που όντως έχει συμβεί, ένα γεγονός, το αντίθετο του ψευδούς. Στη συνέχεια η δασκάλα υπενθύμισε στους μαθητές ότι οι περισσότερες λέξεις έχουν πολλές σημασίες ανάλογα με την κατάσταση που χρησιμοποιείται. Έπειτα δίνει τον μαθηματικό ορισμό και ζητάει από τους μαθητές να σκεφτούν ισότητες που το δεξί μέλος ισούται με το αριστερό. Αφού δώσουν οι μαθητές κάποια παραδείγματα στη συνέχεια γράφουν τον ορισμό καθώς και την καθημερινή του σημασία στο τετράδιο μαθηματικού λεξιλογίου, ενώ η δασκάλα καταγράφει στον λεξιλογικό μαθηματικό τοίχο.

Μία άλλη ενδιαφέρουσα μελέτη αφορά τη χρήση πρωτοκόλλου για να καταστήσει ικανούς τους μαθητές που δεν είναι ικανοί αναγνώστες να αντιμετωπίσουν λεκτικά προβλήματα Kabasakalian (2007). Το πρωτόκολλο εισάγεται στην έρευνα ως ένα βοηθητικό εργαλείο για λεκτικά προβλήματα και συνδέεται με τη χρήση του σαν εργαλείο για τους μαθητές. Υπάρχουν ενδείξεις πως ενώ οι μαθητές βρίσκουν τα λεκτικά προβλήματα ιδιαίτερα δύσκολα, τα σωστά δομημένα λεκτικά προβλήματα εμπεριέχουν ποικίλες μαθηματικές ιδέες και προσφέρουν την ευκαιρία οι μαθητές να ερευνήσουν πολλές μαθηματικές έννοιες και συνδέσεις μεταξύ τους.

Σε μαθήματα επαγγελματικής επιμόρφωσης δασκάλων αφού μοιράστηκε ένα μαθηματικό πρόβλημα στην ομάδα, δόθηκαν οι ακόλουθες οδηγίες:

1. Γράψτε τις δυσκολίες που πιστεύετε πως θα συναντήσουν οι μαθητές σε αυτό το πρόβλημα.

2. Τώρα γράψτε κάτι που αφορά το πρόβλημα, οτιδήποτε.

3. Συζήτηση για το νόημα του προβλήματος:

4. Πείτε την ιστορία του προβλήματος

5. Συνεργαστείτε με κάποιον για να λύσετε το πρόβλημα, καταγράψτε τις λύσεις ή σκέψεις σε ένα φύλλο χαρτί

6. Παρουσιάστε σε όλη την ομάδα τις στρατηγική και τη λύση.

Το πρωτόκολλο βοήθησε τους δασκάλους να δουν τα μαθηματικά όπως θα έκαναν ίσως και οι μαθητές τους. Kabasakalian (2007).

Παρέχει μια προσέγγιση για την επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά (problem solving) στους καθηγητές των μαθητών με μη ανεπτυγμένη την ικανότητα ανάγνωσης. Καθηγητές που μεταφέρουν το πρωτόκολλο, για χρήση των μαθητών τους θα δώσει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν σημαντικά τη σκέψη, την ανάγνωση, τις αναλυτικές και μαθηματικές ικανότητες – δεξιότητες που θα ενισχύσουν σημαντικά τις προοπτικές τους στη ζωή. (Kabasakalian, 2007).

4.1.4 Λέξεις που χρησιμοποιούνται σε αριθμητικά προβλήματα

Μία άλλη προβληματική κατάσταση είναι όταν για το ίδιο μαθηματικό φαινόμενο υπάρχουν παραπάνω από μία λέξεις που μπορούν να συναντήσουν οι μαθητές, κάτι που μπορεί να παρατηρηθεί σε προβλήματα που αφορούν τις τέσσερις πράξεις. Συγκεκριμένα ο Tout (1991) αναφέρει για την αφαίρεση τις εξής βασικές λέξεις που μπορεί να συναντήσει ένας μαθητής και να καταλάβει πως πρέπει να εκτελέσει αυτή την πράξη: από, μείων, βγάζω, αφαιρώ. Αλλά επιπλέον μπορεί να συναντήσει: ελαττώνω, διαφορά, λιγότερο, μειώνω και διάφορες εκφράσεις που ανάγονται στην αφαίρεση.

4.1.5 Λεκτικά προβλήματα

Η γλώσσα εμπλέκεται στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών με πολλούς τρόπους. Μια πτυχή ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι η χρήση λεκτικών προβλημάτων και ιδιαίτερα εργασίες που συνεπάγονται υψηλά επίπεδα χρήσης της γλώσσας. Ενδεικτική είναι η έρευνα που πραγματοποιήθηκε από Newman, (1977) και αφορά σε λάθη που πραγματοποίησαν μαθητές στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν λεκτικά προβλήματα. Τα λάθη κατηγοριοποιήθηκαν σε επτά περιπτώσεις σε σχέση με: *ανάγνωση, δεξιότητες κατανόησης, μετατροπή, επεξεργασία, κωδικοποίηση, απροσεξία και η έλλειψη κινήτρων.* Μεταγενέστερες έρευνες επαλήθευσαν τα συμπεράσματα (αναφορά σε COAG, 2008).

Στο συγκεκριμένο ζήτημα η συνεισφορά του Zevenbergen (2001), κρίνεται αναγκαία, ο οποίος διέκρινε τρεις περιπτώσεις ερωτήσεων που προκαλούν προβλήματα, παρόλο που η αριθμητική τους μπορεί να είναι απλή. Η δυσκολία έγκειται στη σημασιολογική δομή του προβλήματος.

- <u>Ερωτήσεις Αλλαγής:</u> εμπεριέχουν μία δυναμική αλλαγή κατά την οποία υπάρχει ένα συμβάν που αλλάζει την τιμή της ποσότητας *(π.χ. ο Γιώργος είχε 5 μήλα. Η Μαρία του έδωσε 2 μήλα. Πόσα μήλα έχει τώρα ο Γιώργος.)*

- Συνδυαστικές Ερωτήσεις: σχετίζονται με καταστάσεις που υπάρχουν δύο ποσά τα οποία θεωρούνται είτε ξεχωριστές οντότητες, είτε σε σχέση μεταξύ τους. *(π.χ. ο Γιώργος έχει 4 μήλα. Η Μαρία έχει 2 μήλα. Πόσα μήλα έχουν και οι δύο μαζί;)*

- Ερωτήσεις Σύγκρισης: εμπεριέχουν τη σύγκριση δύο ποσών και τη διαφορά τους *(π.χ. ο Γιώργος έχει 5 μήλα. Η Μαρία έχει 2 περισσότερα από το Γιώργο. Πόσα μήλα έχει ο Γιώργος;)*

Τα λεκτικά προβλήματα μπορούν να παρουσιάσουν δυσκολίες κατανόησης σε μαθητές που η μητρική γλώσσα διαφέρει σε σχέση με αυτή του προβλήματος.

Μια μελέτη που διερεύνησε τη φύση της γλωσσικής δυσκολίας σε λεκτικά προβλήματα στα μαθηματικά χρησιμοποίησε λειτουργικές διαδικασίες για να προσδιορίσει τα στοιχεία που ήταν ακόμα δυσκολότερα για μη αγγλόφωνους μαθητές σε σχέση με τους αγγλόφωνους ((Martiniello, 2008)

Η ανάλυση έδειξε ότι τα πιο σύνθετα γλωσσολογικά στοιχεία ήταν εκείνα που περιείχαν περίπλοκες γραμματικές δομές που είναι κεντρικής σημασίας για την κατανόηση, μαζί με ως επί το πλείστον χαμηλής συχνότητας, μη-μαθηματικών λεξιλογικών όρων η σημασία των οποίων είναι κεντρικής σημασίας για την κατανόηση και δεν θα μπορούσε να ερμηνευθεί από το πλαίσιο.

Χρησιμοποιήθηκαν πρωτόκολλα σκέψου φωναχτά σε μαθητές που η μητρική τους γλώσσα ήταν τα ισπανικά. Στις συνεντεύξεις οι μαθητές κλήθηκαν να διαβάσουν και να εξηγήσουν τι τους ζητούσε το πρόβλημα να κάνουν. Εξετάστηκαν τα γλωσσικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων που έδειξαν ότι προκαλούν δυσκολία. Κάποια από τα χαρακτηριστικά που συνδέονται με κατανόηση του κειμένου ήταν το λεξιλόγιο και το συντακτικό.

Τα χαρακτηριστικά του συντακτικού περιελάμβαναν:

- Πολλαπλές προτάσεις. Κείμενα με ενσωματωμένες επιρρηματικές και αναφορικές προτάσεις, οι οποίες είναι πιο δύσκολο να κατανοηθούν από άλλους τύπους προτάσεων.

- Μακρές δευτερεύουσες προτάσεις. Μεγάλες προτάσεις με ενσωματωμένες εμπρόθετες και δευτερεύουσες προτάσεις οδηγούν σε δυσκολίες κατανόησης.
- Περιορισμένη συντακτική διαφάνεια στο κείμενο, όπως η έλλειψη σαφής σχέσης μεταξύ των συντακτικών μερών.

(Martiniello,2008)

Αυτή η έρευνα συνεισφέρει τόσο στους καθηγητές, όσο και στους συγγραφείς προβλημάτων.

Επιβεβαιώνει πόσο σημαντικές είναι οι γλωσσικές δεξιότητες για την κατανόηση και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Έτσι, η διδασκαλία των μαθηματικών σε μη αγγλόφωνους μαθητές δεν μπορεί πλέον να θεωρηθεί χωριστή από τη διδασκαλία της γλώσσας. Έρευνα για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών έχει βρει κάποιες αντιφάσεις στον τρόπο που συλλαμβάνουν οι καθηγητές τη διδασκαλία (ως απαλλαγμένες από τη γλώσσα) και τα είδη των αξιολογήσεων που χρησιμοποιούν στις τάξεις τους (με μεγάλες γλωσσικές απαιτήσεις). Οι καθηγητές πρέπει να παρέχουν συνεχή γλωσσική υποστήριξη (scaffolding) σε μη-αγγλόφωνες μαθητές, ενώ οφείλουν να ευνοούν την ανάπτυξη των δεξιοτήτων τους στην κατασκευή νοήματος στα μαθηματικά.

(Martiniello, 2008)

4.1.6 Προσωπικές Αντωνυμίες

Στο πλαίσιο των μαθηματικών, οι αντωνυμίες χρησιμεύουν στο να κωδικοποιούν κάποιες λειτουργίες αλληλεπίδρασης της γλώσσας και του λόγου ειδικότερα. Αυτές οι διαστάσεις περιλαμβάνουν κοινωνική τοποθέτηση, διαπροσωπική σχέση ισχύος και επικοινωνία των γενικεύσεων. (Rowland, 1999)

«Εμείς - We»

Ο Pimm, (1987) (σελ. 69-70) επισημαίνει ότι ο δάσκαλος, χρησιμοποιώντας αντωνυμικό πληθυντικό, ενώνει τον εαυτό του με κάποιο άλλο πρόσωπο-(α) (που δεν

ονομάζονται), κάνοντας με αυτόν τον τρόπο αναφορά σε μία ανώνυμη Κοινότητα «εμπειρογνώμων» ώστε να παρέχει εξουσία για την επιβολή μιας συγκεκριμένης διδακτικής πρακτικής μέσα στην τάξη. Το αποτέλεσμα είναι να συνδέσει τον ομιλητή με μια επιλεγμένη και ισχυρή ομάδα, από την οποία σαφώς αποκλείεται το κοινό και να αποθαρρύνει και να απαξιώνει κάθε κατανόηση που το παιδί μπορεί να έχει για την κατάσταση. Του δάσκαλου το «εμείς» αναφέρεται σε κανόνες και διαδικασίες αμετάβλητου (ίσως αδιαπραγμάτευτου) είδους.

'Αυτό - It'

Ο Pimm, (1987) (σ. 22) επίσης παρατηρεί σχετικά με τον επιπολασμό των «μισοτελειωμένων και αόριστων δηλώσεων» στη αυθόρμητη ομιλία σχετικά με τα μαθηματικά, και δείχνει το σημείο εφιστώντας την προσοχή στη χρήση μιας άλλης αντωνυμίας σε μια ανταλλαγή (για διεύρυνση) μεταξύ δάσκαλου και μαθητή.

Teacher: [...I ***Its*** width is only a third as long as that one so - [...] how many of the smaller squares can you fill in? - nine, right.

Pupil: Is ***it*** that you square ***it*** - every time?

Ο Pimm, (1987) σχολιάζει την ασάφεια των αναφερόμενων «it», ιδιαίτερα στην ερώτηση του μαθητή. Προτείνει ότι λέγοντας «you square it», ο μαθητής κάνει μια γενίκευση. Παίρνει την «κρίσιμη έκφραση... every time» ως αποδεικτικό στοιχείο.

Σύμφωνα με Rowland, (1999) *η δική μου ανάλυση των μαθηματικών συνομιλιών έδειξε τη λειτουργία του «it» ως εννοιολογική μεταβλητή, ένα γλωσσικό δείκτη προς μια κοινή ιδέα, σε μια κατανοητή αλλά χωρίς όνομα μαθηματική αναφορά.*

' Εσύ - You'

Οι Brown και Gilman (1970) κάνουν λόγο για αντωνυμίες ως γλωσσικές συσκευές για να εκφράζουν τις κοινωνικές διακρίσεις, να μεταφέρουν μηνύματα εξουσίας ή αλληλεγγύης με τους άλλους, με πολύπλοκους κανόνες κατάστασης για τη χρήση τους. Σε Μαθηματικές συνομιλίες παιδιού-ενήλικα, όπου η σχέση ισχύος είναι ασύμμετρη, ο δάσκαλος συχνά χρησιμοποιεί «you» για το παιδί, ενώ το αντίθετο είναι σχετικά σπάνιο. Θα δείτε ότι αυτά τα ίδια δεδομένα υποδεικνύουν έντονα ότι η πλειοψηφία των περιπτώσεων «you» στην ομιλία των μαθηματικών από τα παιδιά

μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ενδεικτική των πραγμάτων που συμβαίνουν "κατά τις συνήθεις εκδηλώσεις" (Zandvoort, 1965, σ. 128). (αναφορά σε Rowland, 1999)

Τέτοια πράγματα είναι γενικότητες. Αυτή η παρατήρηση έχει σαφή παιδαγωγική σημασία: μιλώντας με δάσκαλο για τα μαθηματικά, ενός παιδιού το «you» είναι πιθανό να αναφέρεται σε κάτι και όχι σε κάποιον.

Pupil: Is it that you square it - every time?

Θυμηθείτε την παρατήρηση του Pimm ότι ένα δείκτης για το γεγονός ότι ο μαθητής προσφέρει μια γενίκευση είναι η έκφραση «every time». Και πάλι, η αντωνυμία «you» χρησιμεύει ως ένας αποτελεσματικός και μη τετριμμένος δείκτης ποιότητας της σκέψης. Η μετατόπιση της Susie από το «I» σε "you" σημαίνει την αναφορά σε μια μαθηματική γενίκευση. Σε γενικές γραμμές, διατηρεί «I» για τα συναισθήματα και τις πεποιθήσεις, ή των προσωπικών ενεργειών της, ενώ το «you» για δηλώνει ένα είδος της αποκόλλησης από την στρατηγική και υπολογιστικές μεθόδους. (Rowland, 1999)

Όταν οι αντωνυμίες έχουν αναπτυχθεί συμβατικά - αναφορά σε κάποιο αισθητό πρόσωπο ή στοιχείο - η πράξη της αναφοράς είναι συνήθως επιτυχής, το αναφερόμενο είναι σαφές και ξεκάθαρο. Παραδόξως, αυτό συμβαίνει σπάνια σε ένα διάλογο δάσκαλου-μαθητή σχετικά με τα μαθηματικά, όταν τα αναφερόμενα ορισμένων προσωπικών αντωνυμιών μπορεί να είναι άυλες ομάδες ή οντότητες, αλλά των οποίων το νόημα λαμβάνεται, ωστόσο, αποτελεσματικά ως κοινόχρηστο. Ο πιο καθολικά μαθηματικός παράγοντας είναι η σαφής σχέση μεταξύ αντωνυμίας και η διατύπωσης της γενικότητας. Η κατανόησή μας αυτού του ρόλου του αντωνυμιών σε μαθηματικές ομιλίες είναι μερική, αλλά αναδύεται ένα πλαίσιο ιδεών από την κοινωνιολογία, γλωσσολογία και μαθηματικά για να υποστηρίξει μια αξιολόγηση της λειτουργίας τους σε σχέση με τις ποικίλες προθέσεις των εκπαιδευτικών και των μαθητών.

Το «we» του δασκάλου ισχυρίζεται την εξουσία του ομιλητή και την υποχρέωση του ακροατή να είναι σύμφωνος με τις πρακτικές που είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της Κοινότητας των μαθητών, δίνοντας προτεραιότητα σε συμμόρφωση, πέρα από την κατανόηση. Η Μαθηματική εφευρετικότητα και πρωτοτυπία απειλούν την ασφάλεια

των αποδεκτών, κανονιστικά πρακτικών των οποίων ο δάσκαλος είναι «master» και διαχειριστής. (Rowland, 1999)

Askew (1993): *οι εκπαιδευτικοί έχουν την τάση να ακούνε τις εξηγήσεις των παιδιών για να δουν πόσο πολύ ταιριάζουν με τις δικές τους εξηγήσεις, αντί να θέλουν να ακούσουν πραγματικά τι έχουν να πουν.* (σελ. 22) Αυτές οι εξηγήσεις των δασκάλων τείνουν να λαμβάνονται και συμβατικά, το κοινό κτήμα της ομάδας παιδαγωγών. Για τον εντοπισμό με αυτή την ομάδα, οι καθηγητές έχουν μία ξεχωριστή προτίμηση για το «εμείς» και όχι «εσείς» σε διατυπώσεις γενικοτήτων. (Rowland, 1999)

Η ανάλυση της χρήσης αντωνυμιών σε μαθηματικό λόγο των αρχάριων χρηστών του μαθηματικού μητρώου αποκαλύπτει, αντιθέτως, μια πραγματική επιθυμία να επικοινωνούν ιδέες, παρά την περιορισμένη γνώση του μητρώου των μαθηματικών. Στο συγκεκριμένο, η δεικτική χρήση του «it» χρησιμεύει για να μπορέσουν οι μαθητές να αναφέρονται και να δείξουν μαθηματικές έννοιες και γενικεύσεις, που δεν έχουν (ή, για διάφορους λόγους, δεν μπορούν) ονομαστεί στο λόγο, η αντωνυμία «we» λειτουργεί ως ένας αποτελεσματικός δείκτης ποιότητας της σκέψης που αφορούν γενικότητα, η μετάβαση από το «i» σε «you» σημαίνει συνήθως την ανάπτυξη μιας μαθηματικής γενίκευσης. Η χρήση του «it» δίνει τη δυνατότητα ο μαθητής να πει αυτό που δεν μπορούσε να πει διαφορετικά, να επιστήσει την προσοχή σε μαθηματικές οντότητες των οποίων τα ονόματα δεν ξέρει.

Το «you» είναι ένας διαδεδομένος και αποτελεσματικός δείκτης σε γενικότητες σε μαθηματικούς λόγους. Αυτό είναι ίσως ιδιαίτερα αληθές σε συζήτηση των παιδιών με τους καθηγητές, ένα πλαίσιο στο οποίο τα παιδιά αναφέρουν σπάνια τους ενήλικες συμμετέχοντες ως «you». Η μετατόπιση από το «I» στο «you» για να χαρακτηρίσει μια τάση προς αποκόλληση του ομιλητή, είναι ένας σημαντικός γνωστικός δείκτης.

Η ταλάντωση μεταξύ πρώτου και δεύτερου προσώπου αντωνυμιών δηλώνει εναλλαγή μεταξύ δράσης και γνώσης, ενδεχομένως με αναφορά σε διαφορετικές διαδικασίες ή γενικεύσεις. Η αντίθεση μεταξύ I – you μπορεί να σχετίζεται με τη διάκριση αντικείμενου διαδικασίας (Sfard, 1991), το απόσπασμα που συνδέεται με τη ιδέα μιας μαθηματικής έννοιας ως ανεξάρτητο αντικείμενο της δράσης του ομιλητή που χαρακτηρίζεται από «you». (Rowland, 1999)

Η παιδαγωγική σημασία της χρήσης του «I» ή του «you» από το μαθητή μπορεί να είναι στην αναγνώριση της προ- ή μετα-αντικειμένου γνωστικής κατάστασης όσον αφορά την μαθηματική έννοια που συζητήθηκε. Υπάρχει πολύ μεγαλύτερη ασάφεια στη χρήση του «you» από το δάσκαλο δεδομένου ότι μπορεί να αναφέρεται είτε μαθητή (μετα-γλώσσα) ή αναφέρεται σε μια μαθηματική έννοια (αντικείμενο γλώσσα).

Η χρήση αντωνυμιών ενισχύει την ικανότητα των ομιλητών (ιδιαίτερα αρχάριους ομιλητές των μαθηματικών) να αναφέρονται σε πτυχές της μαθηματικής σκέψης τους.

Μέσα σε μια εξέταση του λόγου στην τάξη, η χρήση αντωνυμίας μπορεί να είμαι ενδεικτική του οργανισμού και της φωνής των συμμετεχόντων. Ο Wagner (2007), όπως αναφέρεται σε Bell & Pape, (2012), υποστήριξε ότι οι μαθητές πρέπει να συνηθίσουν περισσότερο να εκφράζουν τον οργανισμό τους στις τάξεις των μαθηματικών. Για να γίνει αυτό, οι καθηγητές πρέπει να εκφραστούν με τη μεγαλύτερη χρήση του εγώ (ενεργητική φωνή) και να δημιουργήσουν περιβάλλοντα που απαιτούν προσωπική πρωτοβουλία των μαθητών, με την ιδέα ότι θα αυξηθεί η προσωπική πρωτοβουλία έκφρασης, συμβάλλοντας σε ομιλία με ενδεχομένως μοναδικούς τρόπους. Όπως ο Wagner, σε μια μελέτη του λόγου κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, Oliveira (2010) (όπως αναφέρεται σε Bell & Pape, 2012) διαπίστωσε ότι η χρήση προσωπικής αντωνυμίας τοποθετεί τους συμμετέχοντες, όπως και όταν οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν το εμείς ως μια περιεκτική αντωνυμία που μειώνει τους έγκυρους ρόλους τους και θεσπίζει περιβάλλοντα συνεργασίας. Εναλλακτικά, μπορεί να συνηθίσουμε να αποστασιοποιούμε τους μαθητές από την αρχή, όταν αναφέρουμε ότι ανήκουμε σε ένα σώμα εμπειρογνωμόνων που δεν περιλαμβάνει τους μαθητές. Ομοίως, η χρήση του δασκάλου του εσύ κι εγώ, μπορεί να τοποθετήσει τους μαθητές ως εταίρους (π.χ., "δεν ξέρω. Θα ήθελα να ακούσω τη γνώμη σας») ή υφισταμένους (π.χ., "θέλω να κάνεις αυτό") στη μάθηση (Oliveira 2010). Ο Oliveira διαπίστωσε προβληματισμούς σχετικά με την κοινωνική διάσταση της έρευνας με βάση τη μάθηση, ιδιαίτερα τη χρήση προσωπικών αντωνυμιών, βοήθησε τους καθηγητές να κατανοήσουν πώς να καθιερώσουν λιγότερο έγκυρους ρόλους στην μεταξύ τους αλληλεπίδραση με τους μαθητές με χωρίς αποκλεισμούς ασυνάρτητες πρακτικές.

4.1.7 Κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες και γλωσσικό μητρώο

Η Lubienski (2000), (αναφορά σε Cramer, (2013)), επεσήμανε πως η στροφή της μαθηματικής εκπαίδευσης σε δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος (problem solving), δεν είχε τελικά τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Χαρακτηριστικά αναφέρει πως *ενώ προωθήθηκε η μάθηση τόσο για τους μαθητές που προέρχονταν από χαμηλό τόσο και από υψηλό κοινωνικό – οικονομικό υπόβαθρο, το ανοιχτού τύπου και πλαίσιο – ενσωματωμένο (context-embedded) υλικό μεγάλωσε την απόσταση μεταξύ των δύο ομάδων.* Οι μαθητές που είχαν χαμηλότερο κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο έδειξαν πιο αργή πρόοδο και αισθανόντουσαν συχνά ανασφαλείς για την αποδοχή των επιχειρημάτων τους. Τα επιχειρήματα που διατύπωναν ήταν συνδεδεμένα στενά με την εκφώνηση της δραστηριότητας, χωρίς να εστιάζουν στις μαθηματικές ιδέες. Εξέφραζαν την επιθυμία να είχαν περισσότερη υποστήριξη από τον καθηγητή.

Παρόμοια κατάσταση παρουσιάζεται και στη μαθηματική μοντελοποίηση, που ενώ επιτυγχάνεται σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και καθημερινών προβλημάτων και αναμένεται δημιουργία κινήτρου και γεφύρωση του κενού μεταξύ εκπαίδευσης και πραγματικότητας, ειδικά για μαθητές με χαμηλό κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο, εντούτοις οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιμετώπισαν προβλήματα στην προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων. (Leufer and Sertl, (2010), αναφορά σε Cramer, (2013))

Κατάλληλο πλαίσιο για την κατανόηση των προαναφερθέντων προβλημάτων, αποτελεί σύμφωνα με Cramer (2013), η οπτική του Bernstein (2003) όπου η κοινωνική τάξη του ομιλητή επηρεάζει το γλωσσικό μητρώο που μπορεί να χρησιμοποιήσει. Πραγματοποιεί διαχωρισμό μεταξύ περιορισμένου και εξελιγμένου κώδικα, ο οποίος χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένους τύπος συζητήσεων. Ο περιορισμένος κώδικας λαμβάνει χώρα σε καταστάσεις χωρικής και χρονικής εγγύτητας. Ο λόγος μπορεί να χαρακτηρισθεί ως οριζόντιος και εξαρτάται από το πλαίσιο όπου ομιλείται και ενώ μπορεί είναι να συνεκτικός σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, να είναι παράλογος σε διαφορετικά πλαίσια. Ο εξελιγμένος κώδικας, από την άλλη, χαρακτηρίζεται από την αναφορά σε αντικείμενα που δεν είναι αναγκαστικά απτά. Κάνει χρήση κάθετου λόγου, που χαρακτηρίζεται από ανεξαρτησία πλαισίου, συνοχή, καθώς και την ικανότητα να είναι αφηρημένος από συγκεκριμένα αντικείμενα. Ενώ ο περιορισμένος κώδικας εμφανίζεται σε όλες τις

κοινωνικές τάξεις, ο εξελιγμένος υποστηρίζεται αποκλειστικά από τις μέσες και ανώτερες τάξεις καθώς οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι από συζητήσεις στο σπίτι τους. Η οπτική του Bernstein εξηγεί τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές που προέρχονται από χαμηλές κοινωνικό – οικονομικές τάξεις, καθώς ο εξελιγμένος κώδικας απαιτείται συνήθως στο σχολικό περιβάλλον. Η χρήση καθημερινού πλαισίου σε μαθηματικές δραστηριότητες παρεμποδίζει την αναγνώριση του αναμενόμενου κάθετου λόγου. Αυτά τα προβλήματα των παιδιών από ένα χαμηλότερο κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο δεν έχουν αναλυθεί ακόμα με έμφαση στην επιχειρηματολογία. Η μαθηματική συλλογιστική απαιτεί πολλές διαδικασίες αφηρημένων γενικεύσεων. Αναμένεται ότι τα παιδιά με περιορισμένη πρόσβαση σε κάθετο λόγο θα αντιμετωπίζουν προβλήματα. Εν γένει η ακαδημαϊκή γλώσσα παρουσιάζει χαρακτηριστικά κάθετου λόγου, ενώ η καθημερινή ομιλία οριζόντιο λόγο.

Academic language	**Everyday speech**
Orientation towards written language	Oriented towards spoken language
Abstract, symbolic	Concrete, factual
Context-disembedded	Context-embedded
Generalizing	Specific
Can be technical and domain-specific	Unscientific, general
Linguistically concise	Linguistically diffuse
Precise	Imprecise
Impersonal (uses personal pronouns)	Personal (usually agents are explicit)
High degree of cohesion	Partially unstructured and loose
High lexical density	Low lexical density

Ο παραπάνω πίνακας Duarte (2011),παρουσιάζει μία σύγκριση των χαρακτηριστικών της ακαδημαϊκής γλώσσας και της καθημερινής ομιλίας και ανάμεσα σε αυτά είναι και η χρήση πιο εκλεπτυσμένων ρημάτων σε σχέση με απλά ρήματα με προθέματα, επιρρήματα και επίθετα. Η δυσκολία σε παιδιά που προέρχονται από χαμηλά κοινωνικοοικονομικές τάξεις είναι εμφανής. (αναφορά σε Cramer, (2013))

4.2 Συμβολή των καθηγητών

Οι πρόσφατες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στα μαθηματικά συνιστούν προσπάθειες για τη δημιουργία συνεργατικών και μαθητοκεντρικών περιβαλλόντων μάθησης, όπου οι μαθητές έχουν ευκαιρίες για ομιλία και για να κατασκευάσουν την κατανόησή τους, ως μέρος μιας κοινότητας εκπαιδευομένων. Η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες για να συμμετάσχουν στη μαθηματική έρευνα και την κατασκευή νοήματος μέσα από τον διάλογο. Ενώ υπήρξαν επιτυχίες για το σκοπό αυτό, παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας εξακολουθούν να κυριαρχούν στη μαθηματικής παιδεία ειδικά στο επίπεδο του γυμνασίου. Αυτό μπορεί να αποδοθεί, εν μέρει στο ρόλο των καθηγητών και την ικανότητά τους να οργανώσουν με επιτυχία και να διευκολύνουν τη συνεργασία των μαθητών, όπως ζητήθηκε από το μεταρρυθμιστικό κίνημα. (Wachira, Pourdavood & Skitzki, 2013).

Αναζητώντας τρόπους για την προώθηση του μαθηματικού διαλόγου, είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να μην αρκεστούν σε οποιοδήποτε είδος ομιλίας ή, αντίθετα, να είναι ικανοποιημένοι με ακριβώς ένα συγκεκριμένο είδος. Αν και αυτό φαίνεται να είναι κοινή λογική, δεν μπορεί να είναι εύκολο να προσδιοριστεί ποια ομιλία είναι ανακριβής και ποια είναι υπερβολικά περιοριστική. Σε μια προσπάθεια για απομάκρυνση ασαφειών και ενίσχυσης του μαθηματικού λεξιλογίου των μαθητών, κάποιοι καθηγητές μπορεί να προωθήσουν κατά καιρούς ακούσια μία γλώσσα που παίρνει τη "φυσικότητα" από την "φυσική γλώσσα". Εισάγοντας κανόνες, που τροποποιούν τη χρήση της φυσικής γλώσσας μπορεί να κάνει τα μαθηματικά να εμφανίζονται τεχνητά και να αποθαρρύνουν τους μαθητές από το να εμπλακούν σε μαθηματικούς διαλόγους. Είναι αναμφισβήτητο ότι η ομιλία για τα μαθηματικά μπορεί μερικές φορές να οδηγήσει σε ασάφειες. Ρωτώντας τους μαθητές ως προς το πώς θα μπορούσαν να είναι σαφέστεροι στη γλώσσα τους και όχι στην επιβολή ενός κανόνα που να τροποποιεί τη φυσική γλώσσα, θα οδηγούσε σε ενδιαφέρουσες συζητήσεις σχετικά με την αυστηρότητα των μαθηματικών και τον καλύτερο τρόπο να επικοινωνήσουν τις μαθηματικές πληροφορίες.

Το να μαθαίνεις ένα λεξιλόγιο απαιτεί ορισμούς. Σύμφωνα με Morgan, (2005) όπως αναφέρεται σε Boulet, (2007),

«*η επιλογή ενός συγκεκριμένου ορισμού παρουσιάζεται σε σχέση με τις γενικές αξίες της κοινότητας (διαφάνεια), αλλά και ως προσωπική ή συναφής με το θέμα, που σχετίζεται με 'τις επιδιωκόμενες εφαρμογές'*» (σελίδα 110).

Αυτό δεν σημαίνει ότι μία συγκεκριμένη αντίληψη αλλάζει ανάλογα με το πλαίσιο. Αυτό σημαίνει απλά ότι οι διαφορετικές προοπτικές ή περιγραφές της ίδιας έννοιας εξυπηρετούν διαφορετικούς σκοπούς σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Με βάση τη Boulet, (2007): "*η διδασκαλία του τεχνικού λεξιλογίου πρέπει να θεωρηθεί ως ένα παιδαγωγικό σημείο εκκίνησης για την εξερεύνηση εννοιών, δημιουργίας νοήματος και ανταλλαγής νοημάτων, και όχι ως ένα τελικό σημείο της μάθησης*" (Lung, 2005 σελίδα 134).

Η γλώσσα διαδραματίζει καίριο ρόλο στην τάξη των μαθηματικών. Στην πραγματικότητα, "*η άνεση σε αυτήν παρέχει πρόσβαση σε ολόκληρο τον κόσμο των μαθηματικών*" (Esty, 1992, σελίδα 32, αναφορά σε Boulet, 2007).

Μεγάλο μέρος της προσοχής σε μαθηματικούς διαλόγους πρέπει να εστιάζει στην ικανότητα των μαθητών να επικοινωνούν, να διευκρινίζουν και να δικαιολογούν τις ιδέες και τις διαδικασίες, National Council of Teachers of Mathematics, (1991). Ωστόσο, ο ρόλος του δασκάλου στην προώθηση παραγωγικών μαθηματικών διαλόγων στην τάξη είναι κεντρική. Εκτός του ότι ο ίδιος είναι υπεύθυνος για την δημιουργία των ευκαιριών ώστε οι μαθητές να συμμετάσχουν σε συζητήσεις, που αφορούν την εξερεύνηση, τη διαπραγμάτευση, και την ανταλλαγή γνώσεων, η χρήση της γλώσσας του εκπαιδευτικού στην τάξη των μαθηματικών χρησιμεύει ως ένα σημαντικό παράδειγμα της αποτελεσματικής επικοινωνίας.

Η ομιλούμενη γλώσσα είναι σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνη για προβλήματα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Στην πραγματικότητα, «*πάνω από όλα, οι καθηγητές πρέπει να έχουν επίγνωση της γλώσσας που χρησιμοποιούν κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και ότι το προτεινόμενο λεξιλόγιο... θα πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή*» (Raiker's (2002) σελίδα 59, αναφορά σε Boulet, 2007).

Αν και η ανάγκη για ομιλία τάξεων με νόημα είναι καθολικά αποδεκτή μεταξύ των ερευνητών της εκπαίδευσης, η εφαρμογή της δεν έχει επιτευχθεί (Kabasakalian, 2007), καθώς τα παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας κυριαρχούν ακόμα στο εκπαιδευτικό τοπίο, ειδικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Staples, 2007). Στις πιο

παραδοσιακές τάξεις μαθηματικών, η επικρατούσα ομιλία είναι μονοσήμαντη (Truxaw & DeFranco, 2007), σύμφωνα με την οποία η ομιλία του δασκάλου είναι σε μορφή ανάκρισης και η ανατροφοδότηση που χρησιμοποιείται για να μεταφέρουν πληροφορίες στους μαθητές, οδηγεί προς την άποψη του καθηγητή. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις διαλογικές συζητήσεις που προϋποθέτουν επικοινωνία του δούναι και λαβείν, στην οποία οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργά τις έννοιες (Knuth & Peressini, 2001, as cited in Truxaw & DeFranco, 2007, p. 268). Ο διάλογος στο πλαίσιο αυτό είναι με γνώμονα τον μαθητή, και ο δάσκαλος είναι πολυμήχανος όσον αφορά την αναγνώριση, όταν ο μαθητής έχει παρερμηνείες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ενθάρρυνση περαιτέρω σκέψης. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού μέσα στην ομιλία τάξεων για την προώθηση της πρέπει να βελτιωθεί και να τονίσει τη διευκόλυνση του μαθηματικού διαλόγου μεταξύ των μαθητών. Η αποτελεσματική εφαρμογή πρακτικών που βασίζονται στη μεταρρύθμιση απαιτεί ένα δάσκαλο που να έχει μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών, ένα δάσκαλος ο οποίος να γνωρίζει τις μαθηματικές έννοιες που οι μαθητές έχουν ανάγκη, γνωρίζει το πλαίσιο του δικτύου εννοιών, ξέρει τι πρέπει να είναι γνωστό από πριν, και τι θα προστεθεί αργότερα για να σχηματίσουν οι μαθητές μια σταθερή εννοιολογική δομή" (Skemp, 1987, όπως αναφέρεται σε Kabasakalian, 2007). Για να ενθαρύνουν οι καθηγητές των διάλογο πρέπει να δείξουν στους μαθητές ότι δίνουν περισσότερη σημασία στην κατανόηση των εννοιών και όχι στις σωστές απαντήσεις (Truxaw & DeFranco, 2007, όπως αναφέρεται σε Wachira, Pourdavood & Skitzki, 2013).

Ένας άλλος βασικός παράγοντας είναι ο τρόπος που επικοινωνούν οι καθηγητές τα μαθηματικά, κάτι που φαίνεται να επηρεάζεται από τα σχολικά τους χρόνια. « *Ο τρόπος που οι καθηγητές εξηγούν μαθηματικά εξαρτάται, σε μεγάλο βαθμό, από την εννοιολογική κατανόηση, που αποκτούν από τα μαθήματα στο Πανεπιστήμιο. Επιπλέον, διδάσκουν συχνά όπως εκείνοι διδάχθηκαν, μοντελοποιώντας τους εαυτούς τους, τόσο με τους καθηγητές του Πανεπιστημίου όσο και του σχολείου*»(Selden and Selden (1997) σελίδα 1, αναφορά σε Boulet, 2007).

Συνεπώς, δεν αρκεί να πεις στους καθηγητές να είναι πιο ευαίσθητοι στη γλώσσα που χρησιμοποιούν σε μαθηματικές συζητήσεις. Η αναφορά ειδικών περιπτώσεων της γλώσσας που χρησιμοποιούνται συνήθως στην τάξη των μαθηματικών βοηθά τους εκπαιδευτικούς να προσδιορίσουν σαφέστερα τι είδους γλώσσα μπορεί να αποτελέσει πηγή δυσκολιών και τους βοηθά να κατανοήσουν γιατί μια τέτοια γλώσσα πρέπει να

προσαρμοσθεί ώστε να έχει νόημα. Ο στόχος της παρουσίασης αυτών των παραδειγμάτων της γλώσσας που χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει μαθηματικές διαδικασίες, για ανάγνωση και για ερμηνεία των μαθηματικών συμβολισμών, για καθορισμό και κατανόηση μαθηματικών όρων, είναι να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς λόγους για εξέταση και προσαρμογή των πρακτικών τους.

Η έρευνά των Mercer, Dawes & Staarman, (2009) οδηγεί να πιστεύουμε ότι η αρχική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και η επαγγελματική τους ανάπτυξη θα πρέπει να περιλαμβάνει πιο συγκεκριμένες οδηγίες στην αποτελεσματική χρήση της ομιλίας για μάθηση. Έχουμε διαπιστώσει ότι ακόμη και δάσκαλοι που εκφράζουν ενδιαφέρον για διαλογική διδασκαλία μπορεί να χρειάζονται διαβεβαίωση ότι αυτός είναι, πράγματι, ένας αποτελεσματικός τρόπος για να βοηθήσει τη μάθηση των παιδιών και την κατανόηση της επιστήμης, και πρέπει να αναπτύξουν τη συνειδητοποίηση της φύσης και τη σημασία της δική τους συμμετοχής στη συζήτηση της τάξης. Η έρευνά μας υποστηρίζει την άποψη ότι καλύτερα κίνητρα και εμπλοκή βρίσκονται μεταξύ των παιδιών των οποίων οι απόψεις αναζητούνται και αποτιμώνται μέσω του διαλόγου. Τέλος, προτείνουμε ότι οι καθηγητές μπορούν να βοηθηθούν να αναπτύξουν μια πιο διαλογική παιδαγωγική με τη χρήση ορισμένων τεχνικών όπως *talking points*, που μπορεί να ενσωματωθεί σε μάθημα και να χρησιμοποιηθεί με τα παιδιά που ξέρουν ότι οι ιδέες και φωνές τους θα ακουστούν με σεβασμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μέχρι στιγμής στο 1ο Κεφάλαιο ορίσαμε την Κοινωνική Σημειωτική, η οποία εστιάζει στην κοινωνική αλληλεπίδραση με στόχο την κατασκευή νοήματος, τη συνδέσαμε με τη γλώσσα και είδαμε το ρόλο της γλώσσας στην κατασκευή και ανταλλαγή νοημάτων. Στο 2ο Κεφάλαιο ορίσαμε τη Μαθηματική Γλώσσα, ή αλλιώς τη Γλώσσα των Μαθηματικών, και είδαμε τη σχέση της με την καθημερινή γλώσσα, τη δομή της, το συμβολισμό της, το μητρώο της και το ρόλο που παίζει στη μάθηση των σχολικών Μαθηματικών. Επιπροσθέτως, στο 3ο Κεφάλαιο, προσπαθήσαμε να ορίσουμε την επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά και παρουσιάσαμε το σχήμα του Toulmin ως ένα μέσο ανάλυσής της. Εν συνεχεία, επισημάναμε τη σημασία της επικοινωνίας στην αίθουσα των μαθηματικών, καθώς και τη σπουδαιότητα των μαθηματικών διαλόγων ως αρωγό στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, αλλά και στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών γενικότερα. Αναφέραμε το είδος της διδασκαλίας που αναφέρεται βιβλιογραφικά ως διαλογική και είδαμε δύο εργαλεία δημιουργίας κατάλληλου κλίματος επικοινωνίας στην αίθουσα των μαθηματικών τα Thinking Together και Talking Points. Εν κατακλείδι, στο 4ο Κεφάλαιο, πραγματοποιήσαμε μία βιβλιογραφική ανασκόπηση ερευνών σε προβλήματα που σχετίζονται με τη φυσική και τη μαθηματική γλώσσα και κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

- Σημασιολογική ρύπανση
- Προβλήματα στη γραφή των μαθηματικών
- Ανάγνωση και ερμηνεία μαθηματικών κειμένων
- Λέξεις που χρησιμοποιούνται σε αριθμητικά προβλήματα
- Λεκτικά προβλήματα
- Προσωπικές αντωνυμίες
- Κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες και γλωσσικό μητρώο

Κλείσαμε το 4ο Κεφάλαιο, θέτοντας κάποιες βασικούς άξονες που οφείλουν να λάβουν υπόψη τους οι καθηγητές με στόχο την ευαισθητοποίησή τους σε γλωσσικά ζητήματα στην αίθουσα των μαθηματικών.

5.1 Προσωπικές Εμπειρίες – Σκέψεις

Τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά της γλώσσας καθημερινής και μαθηματικής δεν μπορούν να πείσουν κάποιον για την χρησιμότητά τους ή και την σπουδαιότητά τους στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Για αυτό το λόγο, θα προσπαθήσουμε σε δύο φάσεις να επισημάνουμε τη σημασία τους.

5.1.1 Επίσημες Φωνές

Σε πρώτη φάση θα αναφέρουμε επίσημες φωνές που επιβεβαιώνουν την αναγκαιότητά τους.

Σύμφωνα με το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ. σελ. 5) τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος με τον οποίο περιγράφονται όψεις του περιβάλλοντος κόσμου. Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να προσανατολίζεται προς το να προσφέρει στους μαθητές ένα πλήρη έλεγχο της γλώσσας των Μαθηματικών ως ένα μέσο επικοινωνίας. Για τους μαθητές αυτό σημαίνει:

- Να έχουν ένα πλήρες λεξιλόγιο μαθηματικών όρων και συμβόλων υπό τον έλεγχό τους.
- Να κατανοούν τη σύνταξη της μαθηματικής γλώσσας και να κάνουν σωστή χρήση αυτής της γλώσσας όταν συζητούν, συνθέτουν λύσεις ή διατυπώνουν ερωτήσεις.
- Να είναι ικανοί να διαβάζουν και να ερμηνεύουν μαθηματικά κείμενα που είναι διατυπωμένα σε προφορική, διαγραμματική ή συμβολική μορφή.
- Να διαθέτουν ικανότητα για μετάφραση από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική γλώσσα.
- Να συσχετίζουν πραγματικά αντικείμενα και καταστάσεις, εικόνες και διαγράμματα με μαθηματικές έννοιες και ιδέες.

(Ε.Π.Π.Σ., 1997)

Σύμφωνα με Pisa, (2007): *Αν θεωρήσουμε ότι τα Μαθηματικά είναι ένας κώδικας, όπως ακριβώς και η γλώσσα, τότε είναι απαραίτητο οι μαθητές να μάθουν τα βασικά συστατικά της γλώσσας των Μαθηματικών. Αυτά τα συστατικά συμπεριλαμβάνουν τις έννοιες και τα σύμβολα των Μαθηματικών, τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες που συνήθως διδάσκονται στα σχολεία. Επί πλέον οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν πώς αυτά τα συστατικά είναι δομημένα και πώς χρησιμοποιούνται. Όμως, ενδέχεται κάποιος να γνωρίζει αρκετά για τα συστατικά των Μαθηματικών, αλλά να αγνοεί τη δομή τους και τον τρόπο χρησιμοποίησής τους για τη λύση προβλημάτων.*

(σελ. 184)

Η τρέχουσα κίνηση μεταρρύθμισης στην διδακτική των μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο έργο του NCTM (1989-2000), που υποδηλώνει ότι οι μαθητές πρέπει να μάθουν μαθηματικά με κατανόηση, καθώς ασχολούνται με μαθηματικές διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένων, της επίλυσης προβλήματος, συλλογισμό και απόδειξη, επικοινωνία, συνδέσεις και αναπαράσταση. Περιγραφές αυτών των πέντε διαδικασιών περιγράφουν μία οπτική των μαθητών ως ενεργούς συμμετέχοντες στις τάξεις των μαθηματικών που είναι πλούσιες σε μαθηματικές ομιλίες. Η εμπλοκή στις μαθηματικές διαδικασίες υπόσχεται την ανάπτυξη της μαθηματικής επάρκειας που ορίζεται σε γενικές γραμμές να περιλαμβάνει πέντε άξονες — εννοιολογική κατανόηση, ευχέρεια στις διαδικασίες, στρατηγική ικανότητα, προσαρμοστική αιτιολόγηση και παραγωγική διάθεση — που είναι συνυφασμένοι και αναπτύσσονται ταυτόχρονα (Kilpatrick et al. 2001, αναφορά σε Bell & Pape, 2012).

Η Morgan γράφει: *ήμουν δυσαρεστημένη με την ποιότητα των γραπτών εργασιών που παρήγαγαν οι μαθητές μου. Ήταν συχνή η περίπτωση που η ποιότητα της δραστηριότητας που είχαν λάβει χώρα στην τάξη και οι παρατηρήσεις και ο συλλογισμός που ένας μαθητής είχε εμφανίσει σε μένα στη συζήτηση δεν εκπροσωπούνταν στη γραπτή έκθεση ή εκφράστηκαν τόσο κακώς που ήταν δύσκολη η κατανόηση τους.* (1998, σελ. 1)

Η αρχική ανησυχία μου στη μελέτη της γλώσσας των μαθηματικών κειμένων προέκυψε από τη συνειδητοποίηση ότι οι μαθητές εμφάνισαν δυσκολία να παράγουν γραπτά κείμενα τα οποία να αποδέχονται οι καθηγητές των μαθηματικών και που θα κρίνουν τη μαθηματική πραγματοποίησή τους με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ψάχνω, λοιπόν,

αν η περιγραφή των ιδιαίτερων μαθηματικών ειδών που κατέστη δυνατή από τη χρήση αυτών των γλωσσικών εργαλείων θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές και τους καθηγητές ώστε να βελτιωθεί αυτή η κατάσταση. (σελ. 9)

(αναφορά σε Pimm, 2004).

Ο λόγος, ή, πιο συχνά, η ομιλία, ήταν πάντα στο επίκεντρο της διδασκαλίας. Τους κανόνες που διέπουν την ομιλία τάξεων μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με το σκηνικό, το πλαίσιο ή το νόημα -ποιος μιλάει, τι συζητείται, και για ποιους λόγους- αλλά εξακολουθεί να ισχύει ότι ο λόγος είναι κεντρικό στοιχείο της διδασκαλίας και της μάθησης. Με ανυψούμενο το ρόλο του λόγου εντός έξι πρότυπων για τη διδασκαλία των μαθηματικών, το NCTM (1991) έδωσε μεγαλύτερη εξειδίκευση στον ρόλο που θα μπορούσαν να παίξουν οι εκπαιδευτικοί:

Θέτοντας ερωτήματα και εργασίες που προκαλούν, την έλκυση και την πρόκληση της σκέψης του κάθε μαθητή. Ακούγοντας προσεκτικά τις ιδέες του κάθε μαθητή. Ζητώντας από τους μαθητές να διευκρινίζουν και να δικαιολογούν τις ιδέες τους, προφορικά και γραπτά. Αποφασίζοντας τι θα ακολουθήσουν σε βάθος μεταξύ των ιδεών που οι μαθητές έχουν εμφανίσει κατά τη διάρκεια μιας συζήτησης. Αποφασίζοντας πότε και πώς να επισυνάψουν μαθηματική σημειογραφία και γλώσσα στις ιδέες των μαθητών. Πότε να παρέχουν πληροφορίες, πότε να διευκρινίσουν ένα θέμα, πότε να μοντελοποιήσουν, πότε να καθοδηγήσουν, και πότε να αφήσουν την πάλη ενός μαθητή με μια δυσκολία. Παρακολούθηση των μαθητών κατά τη συμμετοχή σε συζητήσεις και να αποφασίσουν πότε και πώς θα την ενθαρρύνουν κάθε μαθητή να συμμετάσχει (σελ. 35)

(αναφορά σε Imm & Stylianou, 2012)

5.1.2 Πειράματα σκέψης – Διδακτικά Επεισόδια

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε μερικά ενδεικτικά πειράματα σκέψης, «Thought Experiments», καθώς και κάποιων προσωπικών περιστατικών, τα οποία σε καμία περίπτωση δεν συνιστούν έρευνα, καθώς δεν κατέστη δυνατή η πραγματοποίηση έρευνας που να εξηγεί και να αποδεικνύει γιατί τα προαναφερθέντα κρίνονται σημαντικά στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Σε πρώτη φάση θα ορίσουμε τα πειράματα σκέψης. Σύμφωνα με Brown κ.ά. , (2014) τα πειράματα σκέψης είναι:

συσκευές της φαντασίας που χρησιμοποιούνται για να διερευνήσουν τη φύση των πραγμάτων. Χρησιμοποιούνται για διαφορετικούς λόγους σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών, ιστορίας, μαθηματικών, φιλοσοφίας... πρέπει να διακρίνονται από το να σκεφτόμαστε πειράματα, από το απλώς φαντάζονται οποιαδήποτε πείραμα που διεξάγεται έξω από τη φαντασία, και από ψυχολογικά πειράματα με σκέψεις. Με άλλα λόγια, αν και πολλοί ονομάζουν οποιαδήποτε μη-πραγματική ή υποθετική κατάσταση ένα πείραμα σκέψης, αυτό φαίνεται να περιλαμβάνει πολύ περισσότερα. Μου φαίνεται σωστό να απαιτήσουμε ότι μπορούν επίσης να απεικονιστούν (ή ίσως να μυριστούν, να δοκιμαστούν, να ακουστούν, να αγγιχθούν), θα πρέπει να υπάρχει κάτι πειραματικό για ένα νοητικό πείραμα. (σελ. 1)

Υπό αυτή την προοπτική, εστίασα, κατά τις διδασκαλίες που πραγματοποίησα τη φετινή χρονιά 2014 – 15, σε προβληματικές καταστάσεις που παρουσιάστηκαν στο μάθημα της Γεωμετρίας κυρίως στο Γυμνάσιο, αλλά και στο Λύκειο, Α΄ και Β΄ τάξη. Με τον όρο προβληματικές καταστάσεις εννοώ τις διδακτικές περιπτώσεις κατά τις οποίες οι μαθητές είτε δεν καταλάβαιναν τι τους ζητούσε ένα πρόβλημα, είτε λάθη που πραγματοποιούσαν κατά την επίλυσή του και θεωρούσα πως μπορεί να είχε σχέση με γλωσσικές παρερμηνείες. Τα μαθήματα πραγματοποιήθηκαν σε φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης που εργάζομαι τα τελευταία χρόνια, στα οποία το μεγαλύτερο μέρος τους έχουν μαθητοκεντρικό προσανατολισμό. Λόγω της φύσης και του διδακτικού χρόνου των μαθημάτων δεν εστίασα σε συγκεκριμένο τμήμα, αλλά σε περίπτωση που αναδυόταν ένα διδακτικό φαινόμενο που ταίριαζε με την έρευνά μου, κρατούσα σημειώσεις πεδίου. Τα μαθήματα γίνονταν με στόχο την επίτευξη διαλογικής διδασκαλίας και ευαισθητοποίηση από πλευράς μου ως προς τη χρήση της γλώσσας.

Από τα προαναφερθέντα και επηρεασμένος από την άποψη των Tatsis, & Koleza, (2002), Tatsis, (2007), Tatsis & Moutsios-Rentzos (2013) ότι οι περισσότερες έρευνες που αφορούν γλωσσικά προβλήματα στα μαθηματικά έχουν εστιάσει στο περιβάλλον της Άλγεβρας, ερχόμενος σε πλήρη συμφωνία μαζί τους θεώρησα αρκετά ενδιαφέρον να ασχοληθώ και εγώ με το περιβάλλον της Γεωμετρίας. Η Γεωμετρία έχει κάποια χαρακτηριστικά που τη διαφοροποιούν από τα άλλα μαθηματικά θέματα που διδάσκονται στα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το πιο σημαντικό είναι ο

ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων που εμπλέκονται. Αν και η άλγεβρα και η στατιστική χρησιμοποιούν μερικές οπτικές αναπαραστάσεις, στη γεωμετρία αυτές οι αναπαραστάσεις είναι μερικές φορές το ίδιο το αντικείμενο της διδασκαλίας. Το γεγονός αυτό καθιστά τη γεωμετρία, ένα από τα δύσκολα θέματα για μαθητές, δεδομένου ότι συσχετίζονται με σύνθετες διανοητικές διαδικασίες για τους μαθητές (Duval, 2006, σ. 108, όπως αναφέρεται σε Tatsis, 2007).

Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε τα διδακτικά επεισόδια που ακολουθούν με την αναστοχαστική διεργασία, η οποία σχετίζεται με το χώρο ανάμεσα στην εμπειρία, στην απορία και στη θεωρία, όπως αναφέρεται από τους Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, (2015). Η επιλογή αυτή κρίθηκε αναγκαία, καθώς:

Η εικόνα του πλέγματος έρευνας - μάθησης - διδασκαλίας είναι δυσδιάκριτη, όπως σε ένα χαλί θα πρέπει να το γυρίσεις ανάποδα για να διακρίνεις την πολυπλοκότητα των νημάτων και των χρωμάτων του. Αυτή η πολυπλοκότητα θα μπορούσε να περιγραφεί όχι από τα νήματα καθαυτά, αλλά από τις καταστάσεις που αναδύουν οι σχέσεις τους: την εμπειρία, την απορία και τη θεωρία. Η νοημοσύνη αυτών των καταστάσεων δεν περιορίζονται στη νοημοσύνη των πρωταγωνιστών, ούτε στη νοημοσύνη των μεταξύ τους αλληλεξαρτήσεων, βρίσκεται στη σύνδεση των παραπάνω μεταξύ τους στο πλαίσιο ενός συστήματος και στην αλληλεπίδραση του συστήματος με το περιβάλλον του. Αυτή η πολυπλοκότητα είναι το μεγάλο στοίχημα για την έρευνα, για τη μάθηση και για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας. Η εμπειρία μάς οδηγεί σε αναλογικές υποθέσεις αλλά και σε παγίδες. Η απορία μάς οδηγεί στην επιθυμία και την αναγκαιότητα της αναζήτησης. Η θεωρία μάς οδηγεί στην κατασκευή πιο ισχυρών νοητικών πραγματικοτήτων ικανών να περιλάβουν την εμπειρία και να συμπεριλάβουν την απορία. Η θεωρία, όμως, την επόμενη στιγμή λειτουργεί ως εμπειρία, έτοιμη να αναγάγει καθετί στην αδράνεια της αυταρέσκειάς της, ωσότου συγκρουστεί με την πραγματικότητα ενός νέου αδιεξόδου.

(σελ.395)

(Καλαβάσης & Μούτσιος – Ρέντζος, 2015)

Παρατηρούμε δηλαδή, πως σύμφωνα με αυτό το μοντέλο δεν υπάρχει μία γραμμική – ιεραρχική συσχέτιση μεταξύ της εμπειρίας, της απορίας και της θεωρίας, αλλά μία εναλλαγή στην προτεραιότητα και την ακολουθία. Θα μπορούσαμε σχηματικά να αποτυπώσουμε το παραπάνω μοντέλο μέσω ενός μη κατευθυντήριου κύκλου, ο οποίος χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει μια συνεχιζόμενη ακολουθία σταδίων,

εργασιών ή συμβάντων σε μια κυκλική ροή και κάθε σχήμα έχει το ίδιο επίπεδο σημασίας, ως εξής:

Μέσω της αναστοχαστικής οπτικής τολμάμε να νοηματοδοτούμε, να οργανώνουμε σε δομές, να ξανα-επισκεφτόμαστε το βίωμα, να αλλάζουμε οπτικές, να αναστοχαζόμαστε σε σκέψεις και δράσεις δικές μας αλλά και άλλων, να επαναεπινοούμε έννοιες στα κοινωνικο-πολιτισμικά μας πλαίσια δεσμευμένοι και απελευθερωμένοι ταυτόχρονα από τις πρώτες εμφανίσεις τους στις ανθρώπινες διαδρομές, να αποδεχόμαστε την πολλαπλότητα και την πολυπλοκότητα του νοητικού προϊόντος και της διαδικασίας της μάθησης, να διαχειριζόμαστε τη φαινομενική ασυμβατότητα των πολλαπλών όλων-μονάδων και του στατικού όλου-ένα. Χάρη στην πολύμορφη αυτή αναστοχαστική εμπλοκή, οδηγούμαστε να μαθαίνουμε ό, τι επιλέγουμε να μάθουμε. (σελ.34)

(Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015)

5.1.2α 1^{ο} Διδακτικό Επεισόδιο

Ένα πρώτο πρόβλημα που παρατήρησα, αρχική *εμπειρία*, είναι το γεγονός πως οι μαθητές μπερδεύουν την έννοια της κορυφής με αυτήν της γωνίας. Το επεισόδιο που θα αναφέρουμε πραγματοποιήθηκε σε μαθητές Β' Γυμνασίου κατά τη διάρκεια εκμάθησης της εγγεγραμμένης γωνίας (3.1 Μέρος Β' Σχολικό Βιβλίο Β' Γυμνασίου). Οι μαθητές έδειξαν ασάφεια κατά την επιχειρηματολογία τους για το πότε μία γωνία είναι εγγεγραμμένη, χρησιμοποιώντας τους όρους κορυφή και γωνία για να εκφράσουν όπως διαπιστώθηκε την έννοια της κορυφής. Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να επισημάνουμε πως με βάση τη *θεωρία* και οι δύο έννοιες προέρχονται από τη φυσική γλώσσα, επανακαθορίζονται και ονοματοποιούν νέα φαινόμενα κάτι που έρχεται σε πλήρη αντιστοιχία με Halliday, (1975). Αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με αυτό που αναφέρει ο Pimm (1987) ως σημασιολογική ρύπανση, όπου το νόημα, η χρήση ενός όρου από τη φυσική γλώσσα επηρεάζει το πώς ο όρος κατανοείται στο μαθηματικό μητρώο. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του φαινομένου αυτού ήταν ο σχεδιασμός ενός βουνού και ζητώντας από τους μαθητές να μου πουν πως ονομάζεται το ψηλότερο σημείο του. Εκφράστηκε δηλαδή η *απορία*, εάν θα μπορούσε να βοηθήσει την κατάσταση η σύνδεση του μαθηματικού, με του καθημερινού νοήματος της λέξης κορυφή, αφού διαπιστώθηκε πως οι μαθητές γνώριζαν την έννοια της γωνίας και δεν ήξεραν ποια είναι η κορυφή της. Αφού οι μαθητές ανέφεραν τη λέξη κορυφή, τους σχεδίασα δίπλα στο βουνό μία γωνία η οποία να έχει ίδια διάταξη με το βουνό και τους είπα πως ονομάζεται το «ψηλότερο» σημείο και ανέφεραν κορυφή. Στη συνέχεια για να μην προκληθούν παρερμηνείες τους «έστρεψα» τη γωνία και αφού την τοποθέτησα σε διαφορετικές θέσεις είπαμε πάλι πως το σημείο αυτό ονομάζεται κορυφή.

Παρόλο που το εγχείρημα στέφτηκε εντέλει με επιτυχία, καθώς όπως διαπιστώθηκε στο τέλος της χρονιάς οι μαθητές ήταν σε θέση να διακρίνουν τη διαφορά της κορυφής από τη γωνία της, υπήρξε η *απορία* η οποία μας οδήγησε στην επιθυμία να εξετάσουμε αν υπάρχει *θεωρία* που να μας οδηγούσε στην αντιμετώπιση του φαινομένου. Θεωρώ πως θα μπορούσα να είχα ακολουθήσει πιστότερα τις οδηγίες των Mejía-Ramos & Inglis, (2011), οι οποίοι αναφέρουν τα ακόλουθα τρία βήματα ώστε να κατανοηθεί η σημασιολογική ρύπανση που επηρεάζει την κατανόηση των μαθητών σε μία δεδομένη έννοια.

- ανάλυση του νοήματος και της χρήσης της έννοιας στη φυσική γλώσσα
- διερεύνηση του πώς η έννοια είναι κατανοητή από τους μαθητές στα μαθηματικά κείμενα.
- πως η χρήση της φυσικής γλώσσας για την έννοια και η κατανόηση της έννοιας στο μαθηματικό πλαίσιο από τους μαθητές αντιστοιχούν ώστε να προταθεί μια αιτιώδης σχέση.

Πιο συγκεκριμένα, με χρήση της νέας αυτής *θεωρίας*, θα μπορούσε ο εκπαιδευτικός, με τον εντοπισμό της λάθος κατανόησης των δύο αυτών εννοιών, να ρωτήσει τους μαθητές το νόημα και τη χρήση της λέξης κορυφής στη φυσική γλώσσα και να συζητήσουν μεταξύ τους. Παρατηρούμε λοιπόν μία επανανοηματοδότηση του διδακτικό – μαθησιακού φαινομένου, μιας και οδηγούμαστε σε νέα *εμπειρία.* Με αυτό τον τρόπο δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στους ίδιους τους μαθητές να αντιμετωπίσουν μόνοι τους την τρέχουσα δυσκολία και να τους διδάξει το πώς πρέπει να αντιμετωπίζουν και οι ίδιοι παρόμοιες καταστάσεις. Στη συνέχεια να προτείνει στους μαθητές να συζητήσουν για το νόημα των λέξεων στο μαθηματικό περιβάλλον και στο τέλος να δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να προτείνουν οι ίδιοι ένα μοντέλο σύνδεσης των δύο ερμηνειών (μοντέλο βουνού), ώστε να γίνει συσχέτιση της χρήσης της λέξης στη φυσική γλώσσα και η κατανόησή της στο μαθηματικό πλαίσιο από τους μαθητές. Οι μαθητές συμμετέχουν με την παραπάνω προσέγγιση σε μαθηματικές συζητήσεις μέσα στην τάξη και αυτή η συμμετοχή, με τη σειρά της, θα επιτρέψει στον εκπαιδευτικό να αντιληφθεί καλύτερα αν οι μαθητές κάνουν κατάλληλη εννοιολογική σύνδεση μεταξύ των λέξεων και των μαθηματικών εννοιών κάτι που έρχεται σε πλήρη συμφωνία με την άποψη της Kotsopoulos, (2007). Τέλος ο εκπαιδευτικός καλό είναι να δώσει στους μαθητές και τον μαθηματικό ορισμό των παραπάνω όρων και οι μαθητές να καταγράψουν τόσο τον καθημερινό, όσο και το μαθηματικό τους ορισμό, όπως πραγματοποιήθηκε σε έρευνα των Pierce & Fontaine (2009).

Από τα παραπάνω, γίνεται εμφανές το γεγονός πως η *θεωρία* προκαλεί σημαντικές αλλαγές τόσο στην *απορία*, όσο και στην *εμπειρία*, καθώς και το πώς νοηματοδοτείται το διδακτικό – μαθησιακό φαινόμενο. Ερχόμαστε δηλαδή σε πλήρη συμφωνία με τους Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, (2015) σύμφωνα με τους οποίους *η θεωρία μάς οδηγεί στην κατασκευή πιο ισχυρών νοητικών πραγματικοτήτων ικανών να περιλάβουν την εμπειρία και να συμπεριλάβουν την απορία.*

5.1.2β 2^{ο} Διδακτικό Επεισόδιο

Ένα άλλο πρόβλημα που παρατήρησα, αρχική *εμπειρία,* είναι ένα λάθος που πραγματοποιούν οι μαθητές Γ' Γυμνασίου αλλά και Α' ή Β' Λυκείου και αφορά τη διάμεσο και τη διχοτόμο ενός τριγώνου, οι οποίοι έχουν ήδη μάθει αυτές τις έννοιες. Ενώ οι όροι έχουν διδαχθεί (3.1 Μέρος Β' Σχολικό Βιβλίο Α' Γυμνασίου), όταν απαιτείται η χρήση τους κατά την επίλυση κάποιου γεωμετρικού προβλήματος, οι μαθητές επιχειρηματολογώντας συχνά συγχέουν τη διάμεσο με τη διχοτόμο. Το πείραμα σκέψης αφορά τάξη Γ' Γυμνασίου και ενότητα 1.1 στο Β' Μέρος και συγκεκριμένα στην ισότητα τριγώνων. Μία τακτική που ακολουθείται συχνά από τους εκπαιδευτικούς είναι να πουν οι ίδιοι τον ορισμό των δύο αυτών όρων ή στην καλύτερη περίπτωση να βάλουν ένα μαθητή που γνωρίζει τον ορισμό των δύο αυτών όρων να τους διατυπώσει, ώστε να τους θυμηθούν οι μαθητές. Δυστυχώς όμως συνήθως αυτή η τακτική ενώ δίνει στον εκπαιδευτικό την εντύπωση πως λύθηκε το πρόβλημα, πρακτικά το μετέθεσε για αργότερα.

Δημιουργήθηκε λοιπόν η *απορία,* που μας οδήγησε στην αναζήτηση, αν μία τακτική που θα μπορούσε να ακολουθηθεί και έρχεται σε συμφωνία με τη *θεωρία* των Pierce & Fontaine (2009) ως προς τη φιλολογική προσέγγιση στο πρόβλημα είναι η ανάλυση των δύο αυτών λέξεων, διχοτόμος (δίχα + τέμνω), ενώ διάμεσος (δια + μέσο). Υπενθυμίζουμε την ρύση των Pierce & Fontaine (2009):

«*οι αρχές τις διδασκαλίας λεξιλογίου που συνιστάται για τα φιλολογικά μαθήματα μπορούν να εφαρμοστούν με επιτυχία στον τομέα των μαθηματικών. Η διδασκαλία του λεξιλογίου των μαθηματικών πρέπει να ακολουθήσει τις συστάσεις της Isabel Beck και των συνεργατών της (Beck, McKeown & Kucan, 2002), προσφέροντας φιλικούς ως προς τους μαθητές μαθηματικούς ορισμούς, ενθαρρύνοντας τη βαθιά επεξεργασία της σημασίας των λέξεων, παρέχοντας εκτεταμένες δυνατότητες να συναντήσουν λέξεις και εμπλουτίζοντας το λεκτικό περιβάλλον της τάξης των μαθηματικών.*»

Καταλήγουμε έτσι στη νέα *θεωρία* προσέγγισης που έρχεται να συνδέσει δύο ξεχωριστά μαθήματα, αυτά των μαθηματικών με των αρχαίων ελληνικών. Ίσως με αυτό τον τρόπο οι μαθητές συνειδητοποιήσουν τον πλούτο της γλώσσας μας, αλλά και το γεγονός πως οι μαθηματικοί όροι στην πλειονότητά τους δεν είναι «ουρανοκατέβατοι», κάτι που είναι εμφανέστερο στην Αγγλική βιβλιογραφία (βλέπε

για παράδειγμα hypotenuse ή isosceles), αλλά έχουν άμεση σχέση με αυτό που περιγράφουν, νέα *απορία*. Παρατηρούμε πως όντως η θεωρία μάς οδηγεί στην κατασκευή πιο ισχυρών νοητικών πραγματικοτήτων ικανών να περιλάβουν την εμπειρία και να συμπεριλάβουν την απορία. Η θεωρία, όμως, την επόμενη στιγμή λειτουργεί ως εμπειρία, έτοιμη να αναγάγει καθετί στην αδράνεια της αυταρέσκειάς της, ωσότου συγκρουστεί με την πραγματικότητα ενός νέου αδιεξόδου. Να επισημάνω πως η ανάλυση της διχοτόμου μπορεί να προκαλέσει προβλήματα, καθώς αρκετοί μαθητές εστιάζοντας στο δίχα - τέμνει, δηλαδή κόβει στα δύο, θεωρούν ότι πραγματοποιείται στην πλευρά και όχι στη γωνία, αλλά υπενθυμίζοντάς τους το γεγονός πως η διχοτόμος αναφέρεται πάντοτε σε γωνία δείχνει να περιορίζει την παρερμηνεία.

5.1.2γ 3^{ο} Διδακτικό Επεισόδιο

Ένα άλλο φαινόμενο που παρατήρησα, αρχική *εμπειρία,* σε τάξεις Α' και Β' Λυκείου πάλι στη Γεωμετρία είναι ότι παρόλο που οι μαθητές είναι ικανοί να λύσουν ένα πρόβλημα, πολλές φορές δεν το επιτυγχάνουν γιατί δεν καταλαβαίνουν την εκφώνηση, ειδικά αν απουσιάζει το σχήμα του προβλήματος και χρειάζεται να το σχεδιάσουν μόνοι τους οι μαθητές. Το επεισόδιο που θα αναφέρουμε αφορά τάξη Β' Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα είναι μία άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας Β' Λυκείου και συγκεκριμένα η άσκηση εμπέδωσης στη σελίδα 203 η οποία αναφέρει:

Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

Παρόλο που οι μαθητές γνώριζαν την ύλη και έλυναν με άνεση προβλήματα της συγκεκριμένης ενότητας, δεν μπορούσαν να λύσουν τη συγκεκριμένη άσκηση. Ύστερα από συζήτηση μαζί τους, συνειδητοποίησα την λανθασμένη ερμηνεία που είχαν για το ρήμα διχοτομεί. Οι μαθητές θεωρούσαν εσφαλμένα πως το διχοτομεί σημαίνει ότι είναι διχοτόμος και ότι έπρεπε να αποδείξουν πως η κοινή χορδή είναι διχοτόμος της γωνίας που δημιουργείτο. Η παρέμβαση που πραγματοποίησα, με βάση

τη *θεωρία* που είδαμε και στο προαναφερθέν πείραμα σκέψης, ήταν να πραγματοποιήσουν ανάλυση του ρήματος διχοτομεί, σαν να ήταν γλωσσολογική άσκηση. Τους δόθηκε η ερμηνεία της λέξης δίχα και κατέληξαν ύστερα από συζήτηση μεταξύ τους στην ερμηνεία της λέξεως διχοτομεί, δηλαδή κόβει στα δύο. Στη συνέχεια τους ζήτησα να πραγματοποιήσουν συντακτική ανάλυση της εκφώνησης και συνειδητοποίησαν πως το πρόβλημα ζητούσε να δείξουν ότι η προέκταση της κοινής χορδής διέρχεται από το μέσο του κοινού εφαπτόμενου τμήματος. Ωστόσο σε συμφωνία με τον Maier, (1993), για περιορισμό των τεχνικών όρων στους άκρως απαραίτητους, θεωρώ πως η εκφώνηση θα μπορούσε να τεθεί ως εξής:

Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διέρχεται από το μέσο κάθε κοινού εξωτερικού εφαπτόμενου τμήματός τους.

Με αυτό τον τρόπο περιορίζονται λέξεις που όχι μόνο δεν είναι αναγκαίες, αλλά δημιουργούν προβλήματα στην κατανόηση των μαθητών (διχοτόμος – διχοτομεί).

Εν κατακλείδι παρατήρησα πως, τελική *εμπειρία*, ειδικά στη Γεωμετρία Α΄ Λυκείου, οι μαθητές ξεπερνούν τη δυσκολία στην κατανόηση ενός προβλήματος, πραγματοποιώντας συντακτική ανάλυση, η οποία τους βοηθάει και στο σωστό σχεδιασμό του σχήματος που είναι απαραίτητος για την επίλυση του προβλήματος. Συνήθως οι μαθητές διαβάζουν την εκφώνηση ενός προβλήματος ως μία πρόταση, αγνοώντας κόμματα και συνδέσμους.

5.1.3 Γενίκευση

Στα προηγούμενα επεισόδια, παρατηρούμε ότι είναι εμφανής η αλληλεπίδραση μεταξύ της καθημερινής και της μαθηματικής γλώσσας, όπως αναδεικνύεται στην επιχειρηματολογία των μαθητών γυμνασίου κυρίως ($1^{ο}$ και $2^{ο}$ επεισόδιο), αλλά και λυκείου ($3^{ο}$ επεισόδιο), και τις περισσότερες φορές οδηγεί σε δυσκολία στην κατανόηση και τη σωστή χρήση των μαθηματικών εννοιών.

Η έρευνα λοιπόν που πραγματοποιήθηκε, υπό την οπτική της αναστοχαστικής διεργασίας σε μαθησιακά – διδακτικά φαινόμενα, μέσω των *απορία – θεωρία – εμπειρία* των Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, (2015) είχε ως αφορμή, αρχική *απορία,* να εξετάσουμε την αλληλεπίδραση της φυσικής και της μαθηματικής γλώσσας κατά την επιχειρηματολογία μαθητών κυρίως Γυμνασίου. Με βάση την *εμπειρία* μας, επιλέξαμε κάποιες ενδεικτικές περιπτώσεις γεωμετρικών όρων, που φαινόταν να επαληθεύουν την αρχική *απορία* μας. Οι μαθητές στο $1^{ο}$ και στο $2^{ο}$ διδακτικό επεισόδιο χρησιμοποιούσαν την ίδια λέξη για την ίδια έννοια κατά την επιχειρηματολογία τους, ενώ στο $3^{ο}$ δεν μπορούσαν να επιλύσουν ένα πρόβλημα λόγω «άγνωστης» λέξης. Εκφράστηκε, λοιπόν η *απορία* μας που μας οδήγησε στην επιθυμία και αναγκαιότητα της αναζήτησης, αν είναι γενικότερο το φαινόμενο, θέλοντας να εξετάσουμε τις σχέσεις φυσικής και μαθηματικής γλώσσας. Με αυτό το σκοπό αποταθήκαμε στη *εμπειρία* των ερευνητών της διδακτικής (βλέπε 4.1 και 5.1.1), οι οποίοι μας έδωσαν ένα ευρύ φάσμα *θεωρίας*. Θέλοντας, λοιπόν, να το περιορίσουμε, είδαμε τη συσχέτιση της *θεωρίας* που προέκυψε, με τα διδακτικά επεισόδια που αναφέραμε και αφού αναγνωρίσαμε την προβληματική του κάθε επεισοδίου, ερμηνεύσαμε τα αποτελέσματα και αξιολογήσαμε την παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε σε κάθε επεισόδιο. Πιο συγκεκριμένα, αναγνωρίσαμε πως όντως υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ φυσικής και μαθηματικής γλώσσας κατά την επιχειρηματολογία των μαθητών, ερμηνεύσαμε την αλληλεπίδραση με βάση τις θεωρίες κυρίως των Halliday (1975), Pimm (1987) όσον αφορά κυρίως το μαθηματικό μητρώο και τη σημασιολογική ρύπανση που παρατηρείται και τέλος αξιολογήσαμε την αποτελεσματικότητα των παρεμβάσεων που πραγματοποιήθηκαν με βάση τον περιορισμό των τεχνικών όρων σε άκρως απαραίτητους Maier (1993), και τις διδακτικές παρεμβάσεις που πρότειναν οι Meja-Ramos & inglis (2011) και Pierce & Fontaine (2009). Είδαμε, λοιπόν πως η θεωρία επιφέρει αλλαγές τόσο στην

απορία, όσο και σε όλη την εμπειρία και μας οδηγεί σε μία προσωρινή κατάσταση, καθώς σύντομα μπορεί να οδηγηθούμε σε νέο αδιέξοδο.

Εκτός από την παρερμηνεία των λέξεων που προαναφέραμε στα παραπάνω παραδείγματα, παρατήρησα προβλήματα που έχουν σχέση με το συντακτικό των προτάσεων και εμφανίζονται τόσο στην Άλγεβρα όσο και στη Γεωμετρία. Για παράδειγμα:

'η συνάρτηση παρουσιάζει στο 5 ολικό ελάχιστο 3'

όταν ρώτησα τους μαθητές ποιο είναι το ελάχιστο της συνάρτησης, όλοι μου απάντησαν το 3. Το τμήμα ήταν θεωρητικής κατεύθυνσης (ανθρωπιστικών σπουδών), οπότε τους ζήτησα να πραγματοποιήσουν συντακτική ανάλυση της πρότασης και στη συνέχεια να απαντήσουν στο ερώτημά μου. Με έκπληξη μου ανέφεραν ότι δεν είχαν καταλάβει ποτέ τη σχέση που έχουν τα Μαθηματικά με τη Γλώσσα και νόμιζαν πως δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν κανόνες της Γλώσσας στα Μαθηματικά.

Εν κατακλείδι, κρίνεται αναγκαίο να επισημάνουμε το γεγονός πως και τα τρία διδακτικά επεισόδια που αναφέραμε παρατηρήθηκαν γλωσσικά προβλήματα σε μαθηματικές έννοιες που είχαν ήδη διδαχθεί σε παλαιότερα έτη – τάξεις. Ενδιαφέρον θα αποτελούσε η έρευνα του κατά πόσο θα ήταν αποτελεσματική η διδασκαλία των παραπάνω όρων σε αρχικό στάδιο (Α΄ Γυμνασίου) και ελέγχοντας μακροπρόθεσμα την αποτελεσματικότητά της.

5.2 Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι πρωτίστως οι μαθητές να μάθουν μαθηματικά. Ωστόσο η μάθηση διαμεσολαβείται μέσω της γλώσσας. Πράγματι, κάθε μέρος της μάθησης εξαρτάται και στηρίζεται στη γλώσσα από μία απορία έως την εξήγηση μιας έννοιας από τον καθηγητή και τέλος την καταγραφή της. Επιπροσθέτως στη διαδρομή από την απορία έως την επίλυσή της, υπάρχει μια εσωτερική διαδικασία από τον μαθητή, υποθέσεις, σκέψεις, κατανόηση, που και αυτή πραγματοποιείται μέσω της γλώσσας. Πολλοί εκπαιδευτικοί από την άλλη, θεωρούν εσφαλμένα ότι τα μαθηματικά δεν έχουν καμία σχέση με τη γλώσσα μιας και

στηρίζονται κυρίως σε σύμβολα. Αντίθετα η γλώσσα παίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά. Οι καθηγητές χρησιμοποιούν τη γλώσσα για να εξηγήσουν διαδικασίες και να αποσαφηνίσουν μαθηματικές έννοιες. Σύμφωνα με τους Bresser, Melanese & Sphar, (2008), οι μαθητές μπορούν να εμβαθύνουν την κατανόησή τους στα μαθηματικά, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα ώστε να επικοινωνήσουν, να εκφράσουν τις ιδέες τους, να σταθεροποιήσουν τη γνώση τους. Όταν μιλούν οι μαθητές για αυτά που σκέφτονται, βελτιώνουν την ικανότητά τους να αιτιολογούν λογικά. Τα ίδια τα μαθηματικά τώρα έχουν ένα εξειδικευμένο λεξιλόγιο το οποίο περιλαμβάνει και λέξεις που αντλούνται από την καθημερινή γλώσσα. Όταν λοιπόν ένας μαθητής διδαχθεί μία λέξη τι σημαίνει, για παράδειγμα πολύγωνο, δεν είναι και απαραίτητο πως μπορεί να συνθέσει και προτάσεις με αυτή τη λέξη. Και εδώ υπάρχει πρόβλημα, καθώς αν ένας μαθητής δεν είναι σε θέση να συντάξει προτάσεις με αυτή τη λέξη, δεν θα μπορέσει να επικοινωνήσει τις ιδέες του στην αίθουσα, με αποτέλεσμα ούτε ο καθηγητής να μπορέσει να καταλάβει αν ο μαθητής έχει δυσκολίες ή όχι.

Κατανοούμε μαθηματικές ιδέες μέσω συνδέσεων ανάμεσα σε γλώσσα, σύμβολα, εικόνες και καθημερινές καταστάσεις. Χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Perry and Dockett (2002: 101):

χωρίς επαρκή γλώσσα ώστε να επικοινωνήσουν τις ιδέες που αναπτύσσουν, τα παιδιά θα μειονεκτούν όταν αλληλεπιδρούν με τους συμμαθητές και τους δασκάλους τους και ως εκ τούτου η μαθηματική ανάπτυξή τους θα περιοριστεί σοβαρά.

(αναφορά σε Haylock, 2007)

Οι κύριες δυσκολίες που συναντώνται στα μαθηματικά και έχουμε δει έως τώρα έχουν σχέση με το λεξιλόγιο, τη σύνταξη, τη φυσική γλώσσα, λάθος ανάγνωση σε παρερμηνείες σε λεκτικά προβλήματα και την επικράτηση της δομής πάνω από το περιεχόμενο.

Λεξιλόγιο

- Τα μαθηματικά χρησιμοποιούν έναν αριθμό τεχνικών όρων που συνήθως δεν συναντώνται εκτός σχολικής αίθουσας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην εξασκούνται με αυτές τις λέξεις εκτός σχολείου και να μην βλέπουν τη χρήση τους σε άλλα πλαίσια. Αυτό

έχει ως αποτέλεσμα να ενισχύει την άποψη των μαθητών, πως τα μαθηματικά δεν έχουν σχέση με την καθημερινότητα.

- Υπάρχουν λέξεις που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα των μαθητών με διαφορετικό ή πιο συγκεκριμένο νόημα (π.χ. βρείτε τη διαφορά το 13 από το 8, η απάντηση προφανώς δεν είναι το ένα έχει 1 και το άλλο 2 ψηφία)

Συντακτικό

- Συχνά δημιουργείται πρόβλημα από τις προθέσεις σε μαθηματικές εκφράσεις (διαίρεσε το 200 δια του 10, διαίρεσε το 200 σε 10)
- Συντακτικές πολυπλοκότητες δημιουργούν πρόβλημα στην κατανόηση των μαθητών

Φυσική γλώσσα

Αν δοθεί στους μαθητές η εξής σχέση 25 – 12 = 13 και τη διαβάσουμε τυπικά θα πούμε 25 μείων 12 ισούται με 13. Εάν όμως περιέγραφε ένα πρόβλημα μπορεί να λέγαμε εάν έχω 25 ευρώ και ξοδέψω τα 12 θα μου μείνουν 13. Παρατηρούμε λοιπόν πως οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν συμβολική γραφή, μαθηματική γλώσσα και καθημερινή γλώσσα και να είναι σε θέση να μεταβαίνουν από τη μία στην άλλη.

Παρερμηνείες σε λεκτικά προβλήματα

Πολλές φορές οι μαθητές αναγνωρίζοντας κάποια λέξη μέσα σε μία πρόταση, θεωρούν πως κατάλαβαν πως θα αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα, για παράδειγμα η λέξη περισσότερο αντιστοιχεί σε πρόσθεση. Τι γίνεται όμως αν έχουν το παρακάτω πρόβλημα;

Ο Γιώργος έχει 18 κάρτες, που είναι 7 περισσότερες σε σχέση με αυτές που είχε την προηγούμενη εβδομάδα. Πόσες είχε την προηγούμενη εβδομάδα;

Η επικράτηση της δομής πάνω από το περιεχόμενο

Πολλές φορές το ζητούμενο ενός μαθηματικού προβλήματος μπορεί να απαντηθεί από την καθημερινότητα χωρίς χρήση μαθηματικών. Για παράδειγμα, ο Γιώργος έχει

μαζέψει 18 ευρώ και η τριλογία σε DVD Ο Άρχοντας των δαχτυλιδιών κοστίζει σε ένα κατάστημα 25 ευρώ. Μπορεί να αγοράσει τα dvd;

Μαθηματική απάντηση, όχι του λείπουν 7 ευρώ, καθημερινή απάντηση ναι στα Public έχουν 15.

Υπάρχουν πολλές στρατηγικές και δραστηριότητες μέσω των οποίων μπορεί ο καθηγητής να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν μία μαθηματική έννοια και να βελτιώσουν τη γλωσσική τους ικανότητα. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν πίνακες, γραφήματα, σχέδια, χειρονομίες, ή ακόμα και στρατηγικές που προέρχονται από τη γλώσσα, για παράδειγμα, (*αυτό είναι ένα ……., γιατί έχει……..*) και να δίνεται χρόνος για συζητήσεις στην αίθουσα και η ευκαιρία μέσω της ομιλίας να εκφράζουν οι μαθητές τις σκέψεις τους, ώστε να εξοικειώνονται με τη γλώσσα των μαθηματικών.

Οι Bresser, Melanese & Sphar, (2008), προτείνουν τις ακόλουθες στρατηγικές:

- Ενεργοποίηση προϋπάρχουσας γνώσης
- Ελάττωση του επιπέδου άγχους στην αίθουσα
- Χρήση sentence frames
- Δημιουργία τράπεζας λέξεων
- Χρόνος αναμονής για σκέψη
- Ερωτήσεις που απαιτούν εξηγήσεις
- Ερωτήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας
- Οπτικά βοηθήματα
- Χρήση οικείων προβλημάτων
- Χειρονομίες
- Αργή, καθαρή και περιορισμένη ομιλία του δασκάλου
- Χρήση συνώνυμων λέξεων αλλά με μέτρο
- Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία με έλεγχο αν συμμετέχουν όλοι

- Συζήτηση με όλη την τάξη

Οι εκπαιδευτικοί οφείλουμε να έχουμε επίγνωση του πως χρησιμοποιούμε τη γλώσσα για κατασκευή νοήματος στα μαθηματικά και πως ο τρόπος που χρησιμοποιούμε το μαθηματικό μητρώο μπορεί να περιορίσει τη συμμετοχή των μαθητών. Θέλει λοιπόν προσοχή στο στη διαχείριση και την εκμάθηση του μαθηματικού μητρώου. Προφανώς ένα μοντέλο μάθησης από ορισμούς δεν συνίσταται καθώς σύμφωνα με Sfard et al. (1998) (αναφορά σε Kotsopoulos, 2007) οι ορισμοί δεν είναι συντόμευση για το νόημα στα μαθηματικά. Σύμφωνα με Maier, (1993) πρέπει να χρησιμοποιούμε τεχνικούς όρους όπως έχουν καθιερωθεί στα Μαθηματικά, αλλά να περιορίσουμε το πλήθος τους στο ελάχιστο δυνατό. Η τεχνική ορολογία δεν πρέπει να θεωρείται ως περιεχόμενο της μάθησης, ως αυτοσκοπός, στη μαθηματική παιδεία. Η Kotsopoulos, (2007) προτείνει κατάλληλες ευκαιρίες μάθησης στις οποίες θα δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και να μπορούν να δουν μέσω της χρήσης γνωστών λέξεων από τη φυσική γλώσσα το μαθηματικό νόημα που κρύβεται. Οφείλει να αυξηθεί η επαγρύπνηση εκ μέρους των καθηγητών για το είδος των διαλόγων που πραγματοποιούνται μέσα στην αίθουσα και σε ποιο βαθμό γίνονται κατανοητοί από τους μαθητές. Τέλος κρίνεται αναγκαία περισσότερη επικοινωνία μέσα στην αίθουσα όσον αφορά τα γλωσσικά προβλήματα. Και όπως διερωτάται ο Maier, (1993):

Γιατί πρέπει ο δάσκαλος να προσπαθήσει να λύσει τα προβλήματα επικοινωνίας μόνος του;

Γιατί να μην τα μοιραστεί με τους μαθητές του και να προσπαθήσουν να τα λύσουν από κοινού;

Βιβλιογραφία

Adams, T. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, 58 (8), 219-234.

Adams, T.L., Thangata, F., & King, C.(2005). “Weigh” to go! Exploring mathematical language. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(9), 444-448.

Austin, J. L., & Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 10*(2), 161-197.

Bell, C. V., & Pape, S. J. (2012). Scaffolding students’ opportunities to learn mathematics through social interactions. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(4), 423-445.

Boulet, G. (2007). How does language impact the learning of mathematics? Let me count the ways. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1).

Bresser, R., Melanese, K., & Sphar, C. (2008). *Supporting English Language Learners in Math Class, Grades K-2*. Math Solutions.

Brown, C. L., Cady, J. A. & Taylor, P. M.(2009). Problem Solving and the English Language Learner. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 533-539.

Brown, James Robert and Fehige, Yiftach, (Fall 2014 Edition). Thought Experiments. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta (ed.). http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/thought-experiment.

Bruner, J. (1997). *Πράξεις νοήματος*. Ελληνικά Γράμματα.

Chapman, A. (1993). Language and learning in school mathematics: A social semiotic perspective. *Issues in educational research*, *3*(1), 35-46.

Cramer, J. C. (2013). Possible language barriers in processes of mathematical reasoning. In *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*.

Council of Australian Governments, (2008). *National Numeracy Review report*. Canberra: Common wealth of Australia. http://www.coag.gov.au/sites/default/files/national_numeracy_review.pdf

D’Amore, B., & Maier, H. (1999). Investigating teachers’work with pupils’textual eigenproductions. *Mathematics Education I. II*, 257.

Ellerton, N. F. & Clements, M.A. (1991). *Mathematics in language: A review of language factors in mathematics learning*. Geelong: Deakin University Press.

Goffman, E. (1981). Footing. In *Forms of talk. Ders*. Philadelphia: University of Philadelphia Press.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic*. London: Edward Arnold.

Haylock, D. (2007). *Key concepts in teaching primary mathematics*. Sage.

Imm, K., & Stylianou, D. A. (2012). Talking mathematically: An analysis of discourse communities. *The Journal of mathematical behavior*, *31*(1), 130-148.

Kabasakalian, R. (2007). Language and thought in mathematics staff development: A problem probing protocol. *Teachers College Record*, 109(4), 837-876.

Knipping, C. (2001, March). Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms. In *Developments in mathematics education in German-speaking countries: Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics, Ludwigsburg* (pp. 73-84).

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. In *Proceedings of the third congress of the european society for research in mathematics education. Bellaria, Italy, ERME*.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. ZDM Mathematics Education, 40(3), 427-441.

Kotsopoulos, D. (2007). Mathematics discourse: "It's like hearing a foreign language". *Mathematics Teacher*, 101 (4), 301-305.

Kosko, K. W. (2012). Geometry students' hedged statements and their self-regulation of mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 489-499.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In: P. Cobb & H. Bauershfeld (Eds.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 220-269.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. Journal of Mathematical Behavior, 26, pp. 60-82.

Maier H., 1993. Προβλήματα γλώσσας και επικοινωνίας στην αίθουσα διδασκαλίας των μαθηματικών. Α. Γαγάτσης, *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης, σσ. 222-237.

Martiniello, M. (2008). Language and the performance of English-language learners in math word problems. *Harvard Educational Review*, 78(2), 333-367.

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2011). Semantic contamination and mathematical proof: Can a non-proof prove?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(1), 19-29.

Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education*, *20*(6), 507-528.

Mercer, N., Dawes, L., & Staarman, J. K. (2009). Dialogic teaching in the primary science classroom. *Language and Education*, *23*(4), 353-369.

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research?. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 219-245.

Morgan, C. (2014). Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(2), 129-143.

O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359-388.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 40(3), 385-400.

Pierce, M. E. & Fontaine, L. M. (2009). Developing vocabulary instruction in mathematics. *The Reading Teacher*, 63(3), 239-243.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. London & New York: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1994). Mathematics classroom language form, function and force. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, *13*, 159.

Pimm, D. (2004, July). Discourse analysis and mathematics education: an anniversary of sorts. In *ICME-International Congress on Mathematical Education-Realizado de* (Vol. 4).

Pirie, S. E. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-stones. *Language and communication in the mathematics classroom*, 7-29.

Rabel, S., & Wooldridge, I. (2013). Exploratory talk in mathematics: what are the benefits?. *Education 3-13*, *41*(1), 15-22.

Rowland, T. (1999). Pronouns in mathematics talk: Power, vagueness and generalisation. *For the Learning of Mathematics*, 19-26.

Ryve, A. (2004). Can collaborative concept mapping create mathematically productive discourses? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 157-177.

Schleppegrell, M. J. (2007).The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & Writing Quarterly*, 23(2), 139-159.

Steinbring, H., Bussi, M. G. B., & Sierpinska, A. (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593; toll-free.

Sfard, A. (2001). Communicating to learn or learning to communicate. *Mathematics education in quest for new answers to old questions (book review). Zenralblatt fur Didiaktik Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *33*(1), 1-9.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, *8*(1), 42-76.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tatsis, K., & Koleza, E. (2002). Language as a communicative and interpretive tool in mathematical problem solving. In *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics Proceedings*.

Tatsis, K. (2007). Describing geometrical figures: A secondary school teaching experiment. *Proceedings of the Commission Internationale pour l" Étude et L" Amélioration de l" Enseignement des Mathématiques (CIEAEM 59): Mathematical Activity in Classroom Practice and as a Research Object in Didactics: Two Complementary Perspectives. Dobogókő, Hungary*, 189-193.

Tatsis, K., & Moutsios-Rentzos (2013). Pre-service teachers describe geometrical figures: The 'broken phone' revisited. In A.M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.) *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 37)*, Kiel, Germany, vol. 4, 265-272.

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tout, D. (1991). Language and maths. In B. Barr, B. & S. Helme. *Breaking the maths barrier – A kit for building staff development skills in adult numeracy*. Melbourne: Language Australia.

Vygotsky, L. 1978. Mind and society: The development of higher mental processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yackel, E. (2001, July). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In *PME CONFERENCE* (Vol. 1, pp. 1-9).

Zevenbergen, R. (2001). Mathematical literacy in the middle years. *Literacy Learning: the Middle Years*, 9(2), 21-28.

Wachira, P., Pourdavood, R. G., & Skitzki, R. (2013). Mathematics teacher's role in promoting classroom discourse. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 6648707*.

Βυγκότσκυ, Λ. (2008). *Σκέψη και Γλώσσα*. Γνώση.

Γιαννοπούλου Ε., 2013. Το αποδεικτικό σχήμα του Toulmin και η αξιοποίησή του στη Διδακτική των Μαθηματικών, Διπλωματική Εργασία.

Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών PISA, (2007). Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας. Αθήνα.

Καλαβάσης, Φ., & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2015). *Ανάμεσα στο μέρος και στο όλο. Αναστοχαστική οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Gutenberg.

Κλαουδάτος, Ν. (2011). 'Σημειώσεις του μαθήματος Δ1, Διδακτική των Μαθηματικών Ι'