ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η κατανόηση των μετασχηματισμών τριγωνομετρικών συναρτήσεων από μαθητές της Β΄ Λυκείου»

Δρακάκη Νικολίτσα

Επιβλέπων καθηγητής:

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 16η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή**

αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Θ. Ζαχαριάδης (Επιβλέπων καθηγητής)	Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρης	Λέκτορα
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπληρ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Θ. Ζαχαριάδης (Επιβλέπων καθηγητής)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπληρ. Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρης	Λέκτορα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές του, την άψογη συνεργασία και για το χρόνο που μου αφιέρωσε. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω ιδιαίτερα για την υποστήριξη που μου προσέφερε σε όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισα στο χρονικό διάστημα της εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Επίσης ευχαριστώ τον Λέκτορα κ. Ψυχάρη Γεώργιο για την καθοδήγηση που μου προσέφερε και την Αναπλ. Καθηγήτρια Πόταρη Δέσποινα που μου έκανε την τιμή να συμμετέχει στην τριμελή επιτροπή.

Θα ήθελα στη συνέχεια να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα αφιερώνοντας τον προσωπικό τους χρόνο.

Τέλος, θέλω να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και σε όλους αυτούς που στάθηκαν δίπλα μου, όλο αυτό το διάστημα βοηθώντας με να ξεπερνάω τις δυσκολίες και να ολοκληρώσω την παρούσα εργασία.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 5

Περίληψη 7

Κεφάλαιο 1: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Η πορεία σχηματισμού μιας έννοιας σύμφωνα με τη Sfard 9

1.2 Η διδασκαλία της τριγωνομετρίας και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την εκμάθηση της..... 11

1.3 Αναπαραστάσεις 12

1.3.1 Η έννοια της αναπαράστασης 12

1.3.2 Η αξία και ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη διδακτική των μαθηματικών.. 16

1.3.3 Αλληλεπίδραση μεταξύ των τύπων αναπαράστασης 18

1.3.4 Δυσκολίες των μαθητών στη διαχείριση των αναπαραστάσεων και στη μετάφραση από μια αναπαράσταση σε άλλη 20

1.4 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων - τα διδακτικά εμπόδια και τα οφέλη της διδασκαλίας τους 22

1.5 Η αξία χρήσης των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών 23

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

2.1 Η διδασκαλία της τριγωνομετρίας στο ελληνικό σχολείο 27

2.2 Η έννοια των μετασχηματισμών συνάρτησης και η ένταξή της στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών 29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικό ερώτημα 35

3.2 Πορεία παρέμβασης 36

3.3 Το πλαίσιο της έρευνας 36

3.3.1 Χώρος και χρόνος της έρευνας 36

3.3.2 Συμμετέχοντες 37

3.3.3 Προϋπάρχουσα γνώση..... 37

3.3.4 Ο ρόλος των μαθητών και της ερευνήτριας 38

3.4 Οι δραστηριότητες: περιγραφή και στόχοι 38

3.5 Συλλογή δεδομένων 43

3.5.1 Μέσα συλλογής δεδομένων 43

3.6 Ανάλυση δεδομένων 43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Ομάδα Α 45

4.1.1 Φύλλο εργασίας 1^{ο} – Μετασχηματισμοί συναρτήσεων 45

4.1.2 Φύλλο εργασίας 2^{ο} – μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων 60

4.2 Ομάδα Β 70

4.2.1 Φύλλο εργασίας 1^{ο} – μετασχηματισμοί συναρτήσεων 70

4.2.2 Φύλλο εργασίας 2^{ο} – μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων 83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ..... 91

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 96

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 101

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας από τους στόχους της διδακτικής των μαθηματικών είναι οι μαθητές να σχηματίζουν ολοκληρωμένες μαθηματικές έννοιες κατακτώντας τόσο τη λειτουργική όσο και τη δομική πλευρά τους. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, σχηματίζοντας οι μαθητές μια έννοια, σταματούν στην εκμάθηση της διαδικασίας, χωρία καμία περεταίρω εννοιολογική κατανόηση.

Η βαθύτερη κατανόηση μιας έννοιας ενισχύεται από τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεών της, αλλά και αντίστροφα, η ικανότητα ευέλικτου χειρισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων συνδέεται με υψηλότερο επίπεδο κατανόησης της έννοιας. Η έννοια των μετασχηματισμών ημιτονοειδών συναρτήσεων που ασχολείται η παρούσα εργασία, περιλαμβάνει την έννοια της μεταβολής η οποία γίνεται φανερή σε κάθε μορφή αναπαράστασης της συνάρτησης. Συνεπώς η αναγνώριση των μεταβολών που επέρχονται από κάθε μετασχηματισμό και η έκφρασή τους με διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις αποτελεί σημαντικό στόχο για τη δόμηση της έννοιας αυτής.

Η μετάβαση από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη μπορεί ιδιαίτερα να διευκολυνθεί από τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Η χρήση των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών είναι συνεχώς αυξανόμενη και πληθώρα ερευνών τονίζει τα θετικά της αποτελέσματα. Η δυνατότητα που δίνει στους μαθητές να μεταβάλλουν με δυναμικό τρόπο μεγέθη και σχήματα τους δίνει την ευκαιρία κατασκευής της γνώσης μέσω της παρατήρησης, διερεύνησης, δημιουργίας εικασιών και κατάληξης σε συμπεράσματα. Ο μαθητής δηλαδή μέσα από το «μαστόρεμα» καθίσταται ο ίδιος υπεύθυνος για τη γνώση που θα κατασκευάσει και δεν αποτελεί παθητικό δέκτη πληροφοριών από τον εκπαιδευτικό.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μελέτη του τρόπου που σχηματίζουν και κατανοούν μαθητές Β’ λυκείου στους μετασχηματισμούς των ημιτονοειδών συναρτήσεων, οι οποίοι εκτός από την κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση δέχονται επίσης μετασχηματισμούς που επηρεάζουν την περίοδο και το πλάτος των συναρτήσεων. Η δομή της εργασίας είναι η παρακάτω:

Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται η παρούσα εργασία. Παρουσιάζεται το θεωρία σύμφωνα με την οποία αναλύονται τα δεδομένα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε και γίνεται μελέτη της βιβλιογραφίας για την έννοια των αναπαραστάσεων, της τριγωνομετρίας, των μετασχηματισμών συναρτήσεων και για τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση του ελληνικού προγράμματος σπουδών με αντικείμενο την τριγωνομετρία και τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων.

Το τρίτο κεφάλαιο αφιερώθηκε στη μεθοδολογία. Περιγράφεται το ερευνητικό ερώτημα, το πλαίσιο της έρευνας και ο τρόπος που συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν τα δεδομένα της. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται η πορεία, ο χώρος και ο χρόνος που έγινε η έρευνα καθώς και τα χαρακτηριστικά των μαθητών που συμμετείχαν. Επεξηγούνται οι ρόλοι μαθητών και της ερευνήτριας και περιγράφονται αναλυτικά οι δραστηριότητες που επεξεργάστηκαν οι μαθητές καθώς και οι στόχοι της ερευνήτριας.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την ανάλυση των αποτελεσμάτων και στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παραθέτονται τα συμπεράσματα της έρευνας συσχετιζόμενα με τη βιβλιογραφία που αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να μελετήσει τον τρόπο που μαθητές Β’ λυκείου σχηματίζουν και κατανοούν την έννοια των μετασχηματισμών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στην έρευνα συμμετείχαν τέσσερεις μαθητές Β’ λυκείου χωρισμένοι σε δύο ομάδες. Οι μαθητές ασχολούμενοι με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες στο ψηφιακό εργαλείο GeoGebra διερεύνησαν τους τέσσερεις μετασχηματισμούς που δέχεται η συνάρτηση y=ημx με σκοπό την κατανόηση του ρόλου του καθενός και τον τρόπο που εμφανίζεται στη γραφική παράσταση και στην αλγεβρική εξίσωση καταλήγοντας στη γενική μορφή y=αημ(b(x+c))+k. Παράλληλα απαιτήθηκε η διερεύνηση των μεταβολών που προκαλούν οι μετασχηματισμοί στα χαρακτηριστικά της συνάρτησης όπως η περίοδος, η μονοτονία, τα ακρότατα, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών. Τέλος, προωθήθηκε η μετάβαση από τη γραφική στην αλγεβρική αναπαράσταση και αντίστροφα συναρτήσεων που συνδυάζουν περισσότερους από δύο διαφορετικούς μετασχηματισμούς. Τα δεδομένα της έρευνας αναλύθηκαν ακολουθώντας τη θεωρία της Sfard για τον σχηματισμό μιας αφηρημένης έννοιας. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές αναγνώρισαν τις μεταβολές που επιφέρουν οι μετασχηματισμοί στην y=ημx, με το καθέναν όμως από τους τέσσερεις μαθητές να κατακτά διαφορετικό επίπεδο κατανόησης των μετασχηματισμών αυτών.

Λέξεις κλειδιά: μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων, κατακόρυφη, οριζόντια μετατόπιση, πλάτος, περίοδος, αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση, GeoGebra

ABSTRACT

The purpose of this work is to study how 2nd Year High school Students form and understand the concept of the transformation of trigonometric functions. The research involved four 2nd Year High school students divided into two groups. Those involved students, with appropriately designed activities in the digital tool, GeoGebra, explored the four transformations the function y=sinx accepts, with the purpose of understanding each other's roles and, as shown in the graph and the algebraic equation, resulting in the general form y=sin(b(x+c))+k. At the same time it was required to investigate the changes caused by transformations in the characteristics of the function such as the period, the monotony, the extremities, the domain and the set of values. Finally, the transition from graphical to algebraic representation, and vice versa, was promoted for functions that combine more than two different transformations. The survey data was analyzed by following the theory of Sfard for forming an abstract concept. The results showed that students recognized the changes, made by transformations, to y=sinx but with each student getting a different level of understanding of these transformations.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο τρόπος μετάβασης ενός μαθητή από εννοιολογικές διαδικασίες σε αφηρημένα αντικείμενα έχει περιγραφεί σε διάφορες έρευνες. Μερικές από αυτές είναι η θεωρία των τριών κόσμων των μαθηματικών του Tall (2004), η θεωρία APOS (Dubinski, 1991) και η θεωρία της Sfard (1991). Η θεωρία των τριών κόσμων των μαθηματικών σύμφωνα με τον Tall (2004) περιλαμβάνει τον ενσώματο κόσμο (embodied), τον κόσμο των διεργασιών ή διαδικασιοεννοιλογικό (proceptual) και τον αξιωματικό κόσμο, ενώ σύμφωνα με τη θεωρία APOS διακρίνονται τα παρακάτω 5 επίπεδα τα οποία δίνουν και το όνομά τους στη θεωρία, Action (ενέργεια), Process (διαδικασία), Object (αντικείμενο) και Schema (σχήμα). Στην παρούσα εργασία σύμφωνα με τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, επιλέχθηκε για την ανάλυσή τους η θεωρία της Sfard (1991), η οποία περιγράφεται παρακάτω.

1.1 Η πορεία σχηματισμού μιας έννοιας σύμφωνα με τη Sfard

Το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίστηκε η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας είναι η θεωρία της Sfard (1991) που αναφέρεται στη σύλληψη μιας νέας αφηρημένης έννοιας. Μια έννοια σύμφωνα με τη Sfard (1991) προσεγγίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους: λειτουργικά δηλαδή σαν διαδικασία και δομικά, με τις δύο αυτές προσεγγίσεις να χαρακτηρίζονται ως συμπληρωματικές. Υποστηρίζει πως πάντα κατά το σχηματισμό της έννοιας προηγείται η λειτουργική προσέγγιση και στη συνέχεια επιτυγχάνεται η κατανόηση της δομής της.

Κατά το σχηματισμό μιας αφηρημένης έννοιας η Sfard (1991) προτείνει πως ο μαθητής ακολουθεί τρεις φάσεις ακριβώς με την επόμενη ιεραρχία: της εσωτερίκευσης, της συμπύκνωσης και τέλος της υποστασιοποίησης.

Στη φάση της εσωτερίκευσης (interiorization) ο μαθητής εκτελεί μαθηματικά κατώτερου επιπέδου. Εγκλιματίζεται με τις διαδικασίες και η προσέγγιση είναι καθαρά λειτουργική. Εκτελεί και κατανοεί τις αλγοριθμικές διαδικασίες, κάνει

παρατηρήσεις και βγάζει συμπεράσματα χωρίς να προσέχει λεπτομέρειες. Στην περίπτωση των μετασχηματισμών της ημιτονοειδούς συνάρτησης ο μαθητής βρίσκεται στη φάση της εσωτερίκευσης όταν χρησιμοποιεί το ψηφιακό εργαλείο για να μετακινεί τους δρομείς και εντοπίζει τις μεταβολές που επέρχονται στα γραφήματα για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών.

Η επόμενη φάση της συμπύκνωσης (condensation) κατακτάται όταν ο μαθητής αναφέρεται στη διαδικασία με την έννοια του ανάλογα με το τι θα ζητηθεί, θα αναμένεται το αντίστοιχο αποτέλεσμα χωρίς να χρειάζεται να ακολουθηθεί η αλγοριθμική διαδικασία ή να δοθούν εξηγήσεις και λεπτομέρειες. Ένα παράδειγμα πως ένας μαθητής έχει κατακτήσει τη φάση της συμπύκνωσης ασχολούμενος με τους μετασχηματισμούς ημιτονοειδών συναρτήσεων είναι η άμεση αντιστοίχιση της γραφικής παράστασης της μετατοπισμένης προς τα πάνω κατά 3 μονάδες της y=ημx με την αλγεβρική εξίσωση y=ημx+3, χωρίς να χρειάζεται πρώτα η παρατήρηση ότι οι τιμές της νέας συνάρτησης έχουν αυξηθεί κατά 3 από τις αντίστοιχες της y=ημx, ούτε στη συνέχεια η επιβεβαίωση της απάντησης από το λογισμικό.

Η τελευταία φάση κατασκευής μιας αφηρημένης έννοιας σύμφωνα με τη θεωρία της Sfard (1991) αυτή της υποστασιοποίησης (reification) προϋποθέτει κατανόηση της δομής της έννοιας. Η κατάκτηση της φάση της υποστασιοποίησης προϋποθέτει ποιοτική αλλαγή με τον μαθητή να «βλέπει» την έννοια από μια άλλη οπτική και να την κατανοεί πλέον σαν ολότητα. Ένα παράδειγμα κατάκτησης της τελευταίας φάσης για τους μετασχηματισμούς και συγκεκριμένα για αυτόν που επηρεάζει το πλάτος της ημιτονοειδούς συνάρτησης θα μπορούσε να είναι η κατανόηση πως η εξίσωση y=αημx περιγράφει το συγκεκριμένο μετασχηματισμό, η ικανότητα μετάβασης από τη γραφική στην αλγεβρική αναπαράσταση και αντίστροφα, η παρατήρηση και ερμηνεία των μεταβολών που επέρχονται στις ιδιότητες της συνάρτησης (μονοτονία ακρότατα και θέσεις ακροτάτων) και τέλος ικανότητα να αναγνωρίζει και να χειρίζεται με άνεση συναρτήσεις που έχουν δεχτεί μαζί με αυτόν και άλλους μετασχηματισμούς.

1.2 Η διδασκαλία της τριγωνομετρίας και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την εκμάθηση της.

Η τριγωνομετρία αποτελεί μαθηματικό αντικείμενο που η διδασκαλία της ξεκινά στο γυμνάσιο αλλά αποτελεί ένα από τα πρώτα βήματα για τον απειροστικό λογισμό και συνδέεται και με άλλους κλάδους όπως με την Νευτώνεια φυσική, την αρχιτεκτονική, την τοπογραφία και την μηχανική. (Weber 2008) Πέρα όμως από τη χρησιμότητα και την εφαρμογή της στις παραπάνω επιστήμες εμφανίζει χαρακτηριστικά που δυσκολεύουν τους μαθητές.

Ξεκινώντας από την πρώτη επαφή των μαθητών με την τριγωνομετρία η δυσκολία έγκειται στο γεγονός πως τους ζητείται να συσχετίζουν γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα) με σχέσεις αριθμών και να χειρίζονται το συμβολισμό που σχετίζεται με αυτές τις σχέσεις αριθμών.

Αρκετές δυσκολίες επίσης προκαλούνται από το γεγονός πως γενικότερα, η διδασκαλία των τριγωνομετρικών αριθμών συνδέεται πολύ συχνά από την εκμάθηση αλγόριθμων και διαδικασιών. (Weber, 2008) Με την εκμάθηση διαδικασιών εκφράζουν τη διαφωνία τους οι Hirsch, Weinhold και Nichols (1991) αναφέροντας πως η διδακτική της τριγωνομετρίας δεν θα πρέπει να συνδέεται με την απομνημόνευση διαδικασιών και απομονωμένων γεγονότων αλλά ο στόχος θα πρέπει να είναι η επίτευξη εννοιολογικής κατανόησης, σε πολλαπλές αναπαραστάσεις και συνδέσεις, στη μαθηματική μοντελοποίηση και την επίλυση προβλήματος. Σ’ αυτήν την κατεύθυνση είναι και οι Kendal και Stacey (1997) οι οποίοι υποστηρίζουν πως η εφαρμογή διαδικασιών για την παρουσίαση τριγωνομετρικών εννοιών δεν επιτρέπει ούτε την κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Ένα ακόμα ζήτημα που σύμφωνα με τους Backett & Tall (1991) δυσκολεύει ένα μεγάλο μέρος των μαθητών είναι η ικανότητα ταυτόχρονης αλγεβρικής, γεωμετρικής και γραφικής αιτιολόγησης που προϋποθέτει η εκμάθηση της τριγωνομετρίας.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι πως αποτελούν τις πρώτες συναρτήσεις που συναντούν οι μαθητές στις οποίες δεν μπορούν απ' ευθείας να βρίσκουν οποιαδήποτε τιμή τους (Weber 2008) αυξάνοντας τις δυσκολίες στους μαθητές. Για τον υπολογισμό λοιπόν, οποιασδήποτε τιμής κάποιου τριγωνομετρικού αριθμού γωνίας οι μαθητές πρέπει να επαναλαμβάνουν μια συγκεκριμένη διαδικασία (υπολογισμός λόγων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο έχει προσαρμοστεί η γωνία ή με τη χρήση τριγωνομετρικού κύκλου) ή μια σειρά σκέψεων χωρίς να εφαρμόσουν τη διαδικασία. Σύμφωνα όμως με έρευνες των Tall et al (2000) οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία στο να δίνουν απαντήσεις εφαρμόζοντας μόνο με τη σκέψη μια διαδικασία αν νωρίτερα, δεν έχουν τους έχει δοθεί η δυνατότητα να την εφαρμόσουν οι ίδιοι. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξε και έρευνα που διενέργησε ο Weber (2005) πως μαθητές που πρώτα εφάρμοσαν οι ίδιοι τη μέθοδο ήταν ικανοί στη συνέχεια να βγάζουν ορθά συμπεράσματα χωρίς να χρειάζεται να την ακολουθήσουν καταλήγοντας και αυτός στο συμπέρασμα, των Hirsch, Weinhold και Nichols (1991), πως δεν αρκεί μόνο η απομνημόνευση διαδικασιών και μεθόδων που οδηγούν στη σωστή επίλυση των ασκήσεων. Σημασία έχει η βαθύτερη και ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών με τους μαθητές να είναι ικανοί να εξηγήσουν γιατί αυτά που εφαρμόζουν είναι σωστά σύμφωνα με τα μαθηματικά και τις ιδιότητες που τα διέπουν. Τονίζει τέλος, πως από τον τρόπο διδασκαλίας της τριγωνομετρίας δεν προωθείται η κατανόηση αλλά κυρίως δίνεται βάση στις διαδικασίες που οδηγούν στην επίλυση των ζητημάτων.

1.3 Αναπαραστάσεις

1.3.1 Η έννοια της αναπαράστασης

Η έννοια της αναπαράστασης αποτελεί ένα βασικό εργαλείο της σύγχρονης διδακτικής και έχει άμεση σύνδεση με τα μαθηματικά. Αυτή η σύνδεσή της με την επιστήμη των μαθηματικών αποτελεί σύμφωνα με τον Kaput (1987), έναν από τους

λόγους που της δίνεται ιδιαίτερη έμφαση, τόσο στην έννοια της, όσο και στη σημασία των διαφόρων αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών.

Η έννοια της αναπαράστασης χρησιμοποιείται για την περιγραφή γενικότερα νοούμενων συστημάτων, όπως τα τεχνήματα της τεχνητής νοημοσύνης, ή δραστηριοτήτων διάφορων άλλων βιολογικών συστημάτων πέραν του ανθρώπου, (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000) και το σύνολο των αναπαραστάσεων οργανώνεται σύμφωνα με τους Goldin & Kaput (1996) σε δομικά, προσωπικά ή πολιτισμικά συστήματα, που αποτελούν τα συστήματα αναπαραστάσεων.

Οι Roth & McGinn (1998) υποστηρίζουν πως ο όρος αναπαράσταση μπορεί να δεχθεί πολλές διαφορετικές ερμηνείες. Μερικοί από τους ορισμούς που περιγράφουν την έννοια να είναι οι παρακάτω.

Σύμφωνα με τους Πατσιομίτου & Εμβαλιώτης, (2011) «η αναπαράσταση αποτελεί μια αντιστοίχιση, έναν μετασχηματισμό στοιχείων ή διαδικασιών του αντικειμένου που αναπαρίσταται με την οντότητα που προκύπτει ως αναπαράσταση, ως αποτέλεσμα της επεξεργασίας των πληροφοριών, του χειρισμού των εννοιών και των γλωσσικών σχημάτων που αναπτύσσονται από το υποκείμενο.» (σελ 251)

Για τους Perkins and Unger (1994), αναπαράσταση είναι «σύμβολα από οποιοδήποτε σύστημα συνόλων (τυπικές σημειογραφίες (notations), γλώσσα, απεικόνιση, κλπ) τα οποία εξυπηρετούν στο να δηλώσουν-δείξουν ή στο να επεξηγήσουν».

Η ερμηνεία που δίνουν οι Goldin & Janvier (1998) σελ 1 στους όρους *αναπαράσταση* και *σύστημα αναπαράστασης* μέσα από το πρίσμα των μαθηματικών είναι:

- Μια εξωτερική, δομημένη φυσική κατάσταση, ή δομημένο σύνολο καταστάσεων στο φυσικό περιβάλλον, το οποίο μπορεί να περιγραφεί από μαθηματική άποψη ή να θεωρηθεί ότι ενσωματώνει μαθηματικές ιδέες.
- Ένα γλωσσικό σύστημα, όπου ένα πρόβλημα τίθεται ή τα μαθηματικά συζητιούνται, με έμφαση στα συντακτικά και σημασιολογικά δομικά χαρακτηριστικά.

- Ένα αυστηρό μαθηματικό κατασκεύασμα, ή ένα σύστημα κατασκευασμάτων, τα οποία μπορούν να αναπαραστήσουν καταστάσεις μέσω συμβόλων ή μέσω ενός συστήματος συμβόλων υιοθετώντας συνήθως αξιώματα που προσαρμόζονται σε ακριβείς ορισμούς – συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών κατασκευασμάτων που μπορούν να αναπαραστήσουν πτυχές άλλων μαθηματικών κατασκευασμάτων.

- Μια εσωτερική, γνωστική διαμόρφωση, ή ένα σύνθετο σύστημα τέτοιων διαμορφώσεων, που προκύπτει από τη συμπεριφορά ή την ενδοσκόπηση που περιγράφει πτυχές των διαδικασιών της μαθηματικής σκέψης και επίλυσης προβλήματος.

Οι αναπαραστάσεις διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες τις εσωτερικές και τις εξωτερικές.

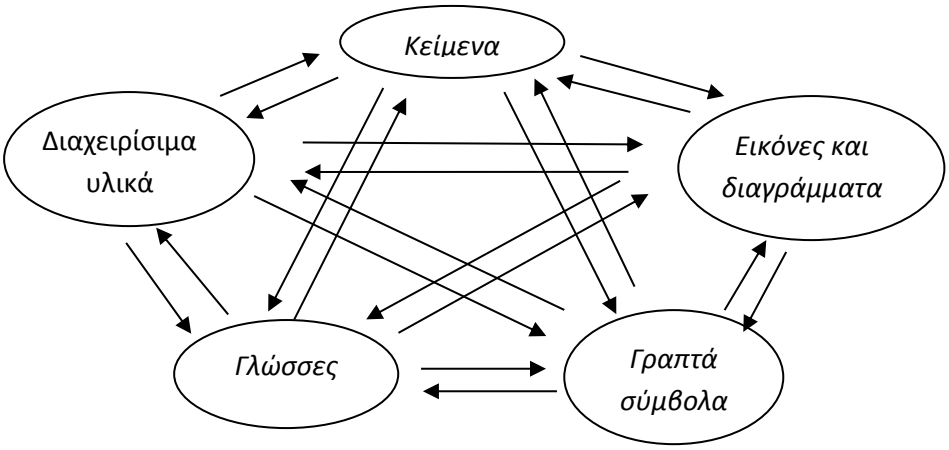
Εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι νοητικοί σχηματισμοί που δημιουργούνται από το υποκείμενο της μάθησης με σκοπό την αναπαράσταση της πραγματικότητας και συνήθως αποτελούν το στόχο των διδασκαλιών, με τον εντοπισμό τους να γίνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των εκπαιδευόμενων καθώς από τη φύση τους δεν είναι εύκολο άμεσα να παρατηρηθούν, (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000). Να σημειωθεί η άποψη των Janvier, Girardon & Morand (1993) πως προκύπτουν από αφαιρέσεις μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που δημιουργούνται από τις εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές. Από την άλλη μεριά, *εξωτερικές αναπαραστάσεις* χαρακτηρίζονται οι εξωτερικές δηλώσεις και εκδηλώσεις των υποκειμένων οι οποίες περιγράφουν τον τρόπο που κατανοούν τα υποκείμενα μια έννοια (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000) και τις αποτελούν οι αριθμοί, οι αλγεβρικές εξισώσεις, τα γραφήματα, οι πίνακες, τα σκίτσα, δηλαδή εκείνα που «δρουν σαν έναυσμα των αισθήσεων» και βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. (Pape & Tchoshanov, 2001)

Ένα παράδειγμα αναπαράστασης από τα μαθηματικά είναι οι αριθμοί, (λόγου χάρη ο αριθμός 10) με εξωτερικές αναπαραστάσεις του να είναι λεκτικά (δέκα) και αριθμητικά ο αριθμός (10), ενώ οι εσωτερική αναπαράσταση είναι πως αποτελεί

ένα σύνολο που περιέχει τόσα σε πλήθος αντικείμενα όσα περιγράφει ο αριθμός (10 αντικείμενα). (Pape & Tchoshanov, 2001)

Οι Σπύρου & Γαγάτσης (2000) περιγράφουν σύμφωνα με τους Lesh, Post & Behr, (1987) τα πέντε είδη συστημάτων που εντάσσονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες σχετίζονται με τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος. Τονίζουν πως η ομαδοποίηση έχει γίνει με κριτήριο τον τρόπο παραγωγής τους και όχι με τον τρόπο λειτουργίας τους μέσα σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα.

1. *Κείμενα* – που συνήθως προέρχονται από την καθημερινή ζωή στα οποία οργανώνεται η γνώση και μέσα από αυτά οι μαθητές μπορούν να βγάλουν συμπεράσματα που ίσως τα χρησιμοποιήσουν για την επίλυση προβλημάτων στα οποία ισχύουν διαφορετικές καταστάσεις.
2. *Αντικείμενα ή μοντέλα που μπορούν να χειριστούν οι μαθητές* – μερικά παραδείγματα είναι οι κύβοι της αριθμητικής, η αριθμητική γραμμή, οι ράβδοι κλασμάτων τα οποία δεν παρουσιάζουν κάποιο νόημα αυτά καθ' αυτά παρά σημασία έχουν οι σχέσεις που προκύπτουν από την ενασχόληση των μαθητών μαζί τους.
3. *Εικόνες και διαγράμματα* – αποτελούν στατικά - εικονικά μοντέλα που μπορούν να εσωτερικευθούν σαν νοητικές εικόνες από τους μαθητές.
4. *Γλώσσες* – στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και πιο εξειδικευμένες όπως είναι η μαθηματική λογική.
5. *Γραπτά σύμβολα* – τα οποία μπορεί να είναι εξειδικευμένα (για παράδειγμα τα σύμβολα της γλώσσας των συνόλων) είτε φράσεις της καθομιλουμένης. (σχήμα 1)



Σχήμα 1: τα πέντε είδη συστημάτων που εντάσσονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις κατά Lesh, Post & Behr (1987).

1.3.2 Η αξία και ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη διδακτική των μαθηματικών

Η αξία των αναπαραστάσεων στη διδακτική και ειδικότερα στη διδακτική των μαθηματικών είναι φανερή από την πληθώρα ερευνών που έχουν γίνει πάνω σε αυτό το θέμα. Ο σημαντικός ρόλος που έχει η χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία αλλά και στη μάθηση των εννοιών τονίζεται από το NCTM (2000), με την αξία των αναπαραστάσεων να δηλώνεται και από το γεγονός πως αναφέρει ότι από τη νηπιακή ακόμα ηλικία τα παιδιά θα πρέπει α) να δημιουργούν αναπαραστάσεις και να τις χρησιμοποιούν για να οργανώσουν, να καταγράψουν και να περιγράψουν τις ιδέες τους, β) να επιλέγουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις, να τις εφαρμόζουν αλλά και να τις μεταφράζουν σε κάποια άλλη αναπαράσταση προκειμένου να λύσουν κάποιο πρόβλημα και γ) να είναι ικανοί να τις χρησιμοποιούν ώστε να βγάζουν συμπεράσματα πάνω σε φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά θέματα.

Να σημειωθεί εδώ πως ο άνθρωπος έρχεται από ιδιαίτερα νωρίς σε επαφή με τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων και με τα σύμβολα, με πρώτη επαφή ως έμβρυο ακούγοντας τις ομιλίες ή τη μουσική από τον αμνιακό σάκο. Από τη στιγμή της γέννησης και ύστερα η επαφή με τα σύμβολα είναι διαρκής που με την πάροδο του χρόνου τα δίκτυα συμβόλων που εμπλέκεται γίνονται όλο και πιο πολύπλοκα. (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000)

Οι αναπαραστάσεις μπορούν να δεχτούν το ρόλο του εργαλείου κατανόησης καθώς οι ερευνητές υποστηρίζουν πως είναι ικανές να διευκολύνουν τους μαθητές. Αυτό συμβαίνει γιατί με τη χρήση των αναπαραστάσεων οι μαθητές μπορούν να μετατρέπουν τις ιδέες τους σε σύμβολα (Kaput, 1991), να αντιμετωπίζουν γνωστικά και διδακτικά εμπόδια (Goldin & Shteingold, 2001), να δημιουργούν νοητικές εικόνες μιας μαθηματικής έννοιας (Πατσιομίτου Εμβαλιώτης, 2011) αλλά και να βγάζουν ενδιάμεσα συμπεράσματα, ιδέες και διαπιστώσεις. Μια εξωτερική αναπαράσταση για παράδειγμα μπορεί να παρουσιάζει τις βασικές σχέσεις που εντοπίζονται στα δεδομένα, να φωτίζει κάποιο συγκεκριμένο σημείο και με αυτόν

τον τρόπο να αφήνει στο μαθητή το χώρο να ασχοληθεί με κάποια άλλη πτυχή του ζητήματος και να οργανώσει καλύτερα τη δουλεία του πάνω στο θέμα αυτό. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν τα γραφήματα ή οι εικόνες τα οποία δεν θα πρέπει να αναγνωρίζονται σαν τελικά αποτελέσματα αλλά ως εργαλεία για την παραγωγή γνώσης τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επεξηγήσουν ή να αιτιολογήσουν κάποια φαινόμενα (Pape & Tchoshanov, 2001)
Άλλος ρόλος που μπορεί να δοθεί στις αναπαραστάσεις είναι ως επικοινωνιακά εργαλεία καθώς συμβάλλουν τόσο στην επικοινωνία των ιδεών όσο και των μαθητών μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει πως αποτελούν ένα κοινωνικό περιβάλλον για την ανάπτυξη συζητήσεων για μαθηματικά αντικείμενα. (Zazkis & Liljedhl, 2004)

Πέρα όμως από την αξία της γενικότερης χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδακτική και στην εκπαιδευτική διαδικασία, πολύ σημαντική είναι και η εμπλοκή των μαθητών με πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας. Οι μαθητές δηλαδή να εκπαιδεύονται χρησιμοποιώντας πολλαπλές αναπαραστάσεις σε αντίστοιχα πολλαπλές καταστάσεις, να αναπτύσσουν τη δημιουργικότητά τους (εξωτερίκευση) αλλά και να εσωτερικεύουν τις ιδέες που προκύπτουν από τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, όλα αυτά μέσα στην κοινωνία της τάξης. (Pape, S, & Tchoshanov, 2001)

Μέσα στα οφέλη που έχουν οι μαθητές από την χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων πρώτη έρχεται η επίτευξη της εννοιολογικής κατανόησης των μαθηματικών εννοιών (Brender et al 1997, Πατσιομίτου Εμβαλιώτης, 2011, Even, 1998). Ο Even (1998) επισημαίνει πως για την κατάκτηση της εννοιολογικής κατανόησης πέρα από την ικανότητα αναπαράστασης της ίδιας έννοιας με διαφορετικούς τρόπους αναγκαία είναι και η αναγνώριση του προτιμότερου τύπου αναπαράστασης ανάλογα με αυτό που πραγματεύονται και με τα χαρακτηριστικά του κάθε τύπου αναπαράστασης. Με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, επίσης, καθίστανται ικανότεροι οι μαθητές να αντιμετωπίζουν τις διάφορες δραστηριότητες όπως είναι η επίλυση προβλημάτων (Greeno & Hall, 1997).

Η αναγκαιότητα της χρήσης περισσότερων της μιας αναπαράστασης γίνεται φανερή μέσα από έρευνα του Tchoshanov (1997) σε μαθητές λυκείου πάνω στην επίλυση

τριγωνομετρικών προβλημάτων και την απόδειξη. Η έρευνα είχε 3 ομάδες μαθητών: στην πρώτη («μόνο» - αλγεβρική) οι μαθητές διδάχτηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο δηλαδή μέσω μόνο της αλγεβρικής προσέγγισης των τριγωνομετρικών προβλημάτων και αποδείξεων, στη δεύτερη («μόνο» - γεωμετρική) οι μαθητές διδάχτηκαν μόνο μέσω της γεωμετρίας το ίδιο ζήτημα ενώ η τρίτη ομάδα διδάχτηκε με συνδυασμό της αλγεβρικής και γεωμετρικής προσέγγισης με ταυτόχρονη μετάφραση από τη μια στην άλλη μορφή αναπαράστασης. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν πως οι μαθητές της πρώτης ομάδας που προσέγγισαν μόνο αλγεβρικά τα προβλήματα ήταν «παγιδευμένοι» στη συγκεκριμένη αναπαράσταση χωρίς να μπορούν ν' ανταπεξέλθουν σε κάποια άλλη, οι μαθητές που προσέγγισαν μόνο γεωμετρικά προσπαθούσαν συνεχώς να αποφύγουν τις αλγεβρικές αναπαραστάσεις προτιμώντας τις γεωμετρικές (οπτικές) επιλύσεις των προβλημάτων. Οι μαθητές της τελευταίας ομάδας, που αντιμετώπισαν κατά τη διδασκαλία αλγεβρικά και γεωμετρικά τα προβλήματα ήταν ικανοί να μεταβαίνουν εύκολα από τη μία μορφή αναπαράστασης σε άλλη και διαπιστώθηκε πως κατανόησαν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες. Παρατηρήθηκε επίσης πως στην τελευταία ομάδα που οι μαθητές χρησιμοποιούσαν πολλαπλές αναπαραστάσεις αναπτύχθηκε περισσότερο η αλληλεπίδραση και η συνεργασία μεταξύ τους καθώς συζητούσαν και αντάλλαζαν τις ιδέες και τα συμπεράσματα τους χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις, αλλά ταυτόχρονα μάθαιναν από τον τρόπο που είχαν δουλέψει οι συμμαθητές τους. (Pape & Tchoshanov, 2001)

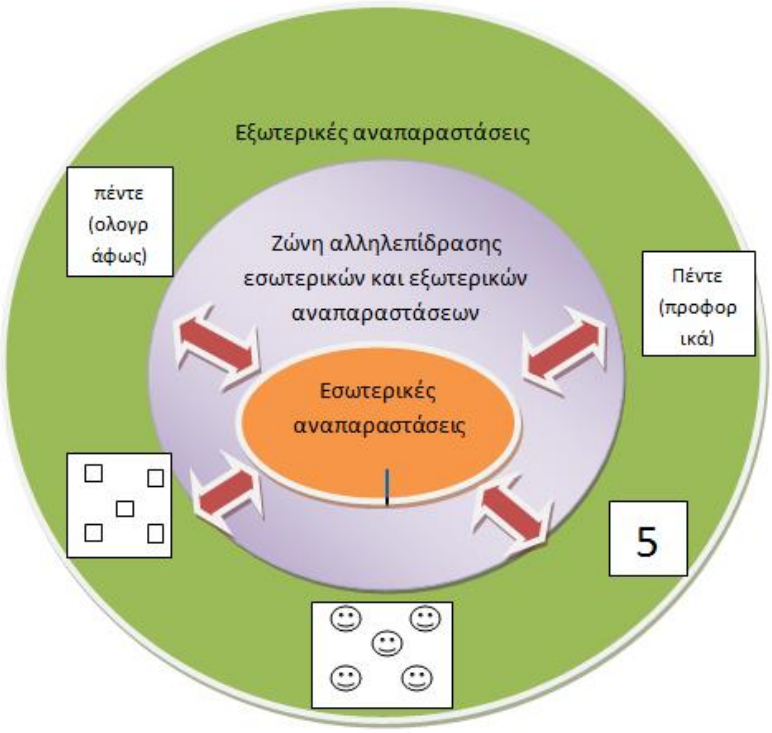
Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι οι μαθητές να αναπτύξουν ισχυρά και διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, δίνοντας παράλληλα ιδιαίτερη σημασία σε όλα τα είδη αναπαράστασης. (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000)

1.3.3 Αλληλεπίδραση μεταξύ των τύπων αναπαράστασης

Οι αναπαραστάσεις όπως αναφέρθηκε και παραπάνω κατηγοριοποιούνται και εμφανίζονται σε διαφορετικές μορφές. Κατά τη διαπραγμάτευση των μαθητών με τις αναπαραστάσεις δημιουργείται η ανάγκη διερεύνησης της σχέσης των

διαφορετικών μορφών και της έννοιας της μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη. Σύμφωνα με τον Janvier (1987) ο όρος «μετάφραση» περιγράφει τις ψυχολογικές διαδικασίες που εκτελούνται κατά τη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση σε μια άλλη όπως είναι από την αλγεβρική μορφή (εξίσωση) στη γραφική παράσταση.

Οι ερευνητές κατά κοινή ομολογία υποστηρίζουν πως τα δύο είδη αναπαράστασης επηρεάζουν αμοιβαία το ένα το άλλο (σχήμα 2) και εκφράζουν με διαφορετικό τρόπο την ίδια έννοια καθώς η κάθε νοητική αναπαράσταση ισοδυναμεί με αυτό ακριβώς που αναπαριστά (Pape & Tchoshanov, 2001, Michell 1994). Υπάρχει δηλαδή μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ των αναπαραστάσεων που περιγράφεται από τη διαδικασία εξωτερίκευσης πράξεων που προέρχονται από εσωτερικές δομές, αλλά και της εσωτερίκευσης εξωτερικών φυσικών δομών μέσα από τη διαδικασία της ερμηνείας (προτάσεων, εξισώσεων, γραφικών παραστάσεων) με τις αμφίδρομες αυτές αλληλεπιδράσεις εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων συχνά να συμβαίνουν ταυτόχρονα (Golden & Kaput 1996).



Σχήμα 2: Η σχέση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων κατά την ανάπτυξης κατανόησης της έννοιας της αρίθμησης (Pape & Tchoshanov, 2001, p119)

Η γνωστική ψυχολογία πάνω στο ζήτημα των αναπαραστάσεων συμφωνεί με την αλληλεπίδραση των εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων. Εξηγεί πως από τη μία, δεν υπάρχει σκέψη χωρίς ο νους να χρησιμοποιήσει κάποια (εξωτερική) αναπαράσταση και αντίστροφα, η συνδιαλλαγή του υποκειμένου με τον εξωτερικό κόσμο είναι αυτή που δημιουργεί τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000)

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω μια έννοια μπορεί να παρασταθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (αναπαραστάσεις) αλλά όπως υποστηρίζουν οι Καλδρυμίδου & Οικονόμου 1992, η καθεμιά φωτίζει κάποιες από τις πτυχές της έννοιας ενώ μεταξύ τους συμπληρώνουν η μια την άλλη.

1.3.4 Δυσκολίες των μαθητών στη διαχείριση των αναπαραστάσεων και στη μετάφραση από μια αναπαράσταση σε άλλη

Ο τρόπος που γίνονται αντιληπτές και ερμηνεύονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις διαφέρει από άνθρωπο σε άνθρωπο και αυτό οφείλεται στις διαφορετικές νοητικές αναπαραστάσεις που έχει οικοδομήσει από τις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες του. Το επιθυμητό αποτέλεσμα της μαθηματικής παιδείας είναι οι μαθητές να καταστούν ικανοί να διακρίνουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις, να τις συνδυάζουν και να τις εναλλάσσουν με κατάλληλο τρόπο ώστε να αντιμετωπίσουν το κάθε πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουν. (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000)

Οι Lesh, Post & Behr (1987) αναφέρουν πως για να θεωρηθεί αποτελεσματική η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας προϋποθέτει τις παρακάτω ικανότητες: α) αναγνώριση της έννοιας μέσα από διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, β) ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της στα συστήματα αναπαράστασης και γ) ικανότητα μετάφρασής της από ένα σύστημα σε άλλο. Ο Duval (2001) τονίζει πως για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι αναγκαία η χρήση τουλάχιστο δύο διαφορετικών πεδίων αναπαράστασης. Ο στόχος όμως του ευέλικτου

χειρισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων και της μετάβασης από τη μια στην άλλη δεν είναι εύκολος για όλους τους μαθητές. Σύμφωνα με το NCTM (2000) οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά να καταφέρουν να χειριστούν με άνεση αναπαραστατικές μορφές των μαθηματικών.

Σε έρευνες που διενέργησαν οι Ηλία & Γαγάτσης (1) (2004) σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου πάνω στις αναπαραστάσεις και την έννοια της συνάρτησης κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο όταν αυτό μεταφράζεται σε διαφορετικούς τύπους αναπαράστασης, κάτι που οφείλεται στην μη ολοκληρωμένη έννοια της συνάρτησης.

Επίσης, μέσα από την επισκόπηση προηγούμενων ερευνών πάνω στην επίδραση διαφορετικών πεδίων αναπαράστασης στην κατανόηση μαθηματικών αντικειμένων και στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, οι Ηλία & Γαγάτσης (1) (2004) αναγνωρίζουν σαν κοινό χαρακτηριστικό των αποτελεσμάτων των ερευνών την εμφάνιση του φαινομένου της στεγανοποίησης σε διαφορετικά είδη αναπαράστασης. Ο όρος της στεγανοποίησης δηλώνει την απουσία άρθρωσης μεταξύ διαφορετικών τύπων αναπαράστασης ενώ όλοι περιγράφουν ακριβώς την ίδια έννοια, η οποία όπως αναφέρουν «υποδηλώνει γνωστική δυσκολία στην επίτευξη ευέλικτης μετάβασης μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών αναπαραστάσεων». (σελ 159)

Οι αναπαραστάσεις λοιπόν, μπορεί να έχουν την ικανότητα να περιγράψουν την ίδια έννοια δίνοντας μας μια ολοκληρωμένη εικόνα της, αλλά οι μαθητές πάντα δεν καταφέρνουν να τις χειρίζονται αποτελεσματικά και με ευελιξία κατανοώντας την ισοδυναμία τους.

1.4 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων - τα διδακτικά εμπόδια και τα οφέλη της διδασκαλίας τους

Η διδασκαλία των συναρτήσεων συνοδεύεται σε κάθε τάξη από την ενασχόληση με τους μετασχηματισμούς τους. Η κατανόηση των μετασχηματισμών όμως δεν είναι εύκολη για τους μαθητές. (Einsenberg & Deyfus, 1994).

Οι Baker et al, (2001) αναφέρουν πως ακόμα και σε πιο απλές συναρτήσεις όπως είναι η γραμμική ή τετραγωνική, η αναγνώριση των μετασχηματισμών είναι μεν πιο εύκολη αλλά σίγουρα όχι χωρίς καμία δυσκολία. Επίσης παρατήρησαν πως η αναγνώριση και κατανόηση των οριζόντιων μετατοπίσεων είναι δυσκολότερη από των κατακόρυφων. Η εξήγηση που δίνουν στο φαινόμενο αυτό είναι ότι στις κατακόρυφες μετατοπίσεις επιδρούμε απ' ευθείας στις τιμές της συνάρτησης ενώ στις οριζόντιες, η αλλαγή γίνεται στην ανεξάρτητη μεταβλητή με το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού να εμφανίζεται αφού εφαρμοστεί ο κανόνας (συνάρτηση) στην νέα μεταβλητή. Οι Ninness et al, (2006) αναφερόμενοι στους οριζόντιους μετασχηματισμούς επισημαίνουν πως προσθέτοντας ή αφαιρώντας έναν θετικό αριθμό στο όρισμα, το γράφημα της συνάρτησης μετατοπίζεται αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την προσδοκία των μαθητών, προκαλώντας δυσκολία στην αναγνώριση γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που έχουν υποστεί οριζόντιους μετασχηματισμούς που είτε αυτοί παρουσιάζονται ανεξάρτητα ή σε συνδυασμό με κατακόρυφες μετατοπίσεις. Επίσης περιγράφουν πως δυσκολίες κατανόησης του μετασχηματισμού εμφανίζονται και στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο μέσα στο όρισμα, για παράδειγμα $\mathrm{f}(x) = \sqrt{-x+4}$.

Η δυσκολία των μαθητών με τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων σχετίζεται άμεσα με την έννοια της συνάρτησης. Η βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και συγκεκριμένα ως αντικείμενο, θεωρείται προαπαιτούμενο για την κατανόηση των μετασχηματισμών οπότε η μη κατάκτηση αυτού του επιπέδου κατανόησης της συνάρτησης έχει ως αποτέλεσμα τη μη επιτυχημένη κατανόηση των μετασχηματισμών. Ο λόγος που είναι τόσο σημαντική η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι πως σε κάθε μετασχηματισμό στο νέο γράφημα εμφανίζονται

αλλαγές στις ιδιότητες της συνάρτησης προ μετασχηματισμού οι οποίες πρέπει να εντοπίζονται για να αναγνωριστεί στη συνέχεια ο εκάστοτε μετασχηματισμός. (Baker et al, 2001).

Η επιτυχημένη κατανόηση των μετασχηματισμών συναρτήσεων μπορεί να μην είναι ιδιαίτερα εύκολη και να απαιτεί κάποιες συγκεκριμένες γνώσεις αλλά ωφελεί τους μαθητές. Κατ' αρχάς, η ενασχόληση με τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων οδηγεί στην καλύτερη κατανόηση των συναρτήσεων, (Baker et al, 2001). Οι Ninness et al, (2006), υποστηρίζουν επίσης πως μέσα από τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων οι μαθητές εξοικειώνονται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Όταν για παράδειγμα οι μαθητές μαθαίνουν να συσχετίζουν την εξίσωση μιας συνάρτησης με το γράφημά της μαθαίνουν να συσχετίζουν το σύνολο των σχέσεων που έχει η εξίσωση της συνάρτησης με το σύνολο των σχέσεων που υπάρχουν στο αντίστοιχο γράφημα της.

Οι Larson & Hostetler, (2001) αναφέρονται στα οφέλη των μετασχηματισμών στην κατανόηση των οικογενειών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα υποστηρίζουν πως όταν οι μαθητές δουν τους μετασχηματισμούς που γίνονται στην εξίσωση μιας συνάρτησης καθώς μεταβάλλονται οι τιμές κάποιων μεταβλητών, οδηγώντας στην αλλαγή κάποιων από τα χαρακτηριστικά της, τους βοηθά να κατανοήσουν τις συναρτήσεις ως οικογένειες αλλά και τις σχέσεις που τις συνδέουν.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων ακολουθούν την διδασκαλία των συναρτήσεων από τις πρώτες κιόλας τάξεις αλλά συνδέονται και με αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση τους. Τα οφέλη τους όμως τους καθιστούν απαραίτητους στην μαθηματική εκπαίδευση.

1.5 Η αξία χρήσης των ψηφιακών εργαλείων διδακτική των μαθηματικών

Τα τελευταία χρόνια όλο και πιο συχνή είναι η χρήση των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών με πολυάριθμες έρευνες να επιβεβαιώνουν τα οφέλη

που έχουν οι μαθητές από τη χρήση τους. Ένα από τα βασικότερα οφέλη που παρέχει η χρήση της τεχνολογίας στη διδακτική των μαθηματικών είναι πως επιτρέπει στους μαθητές τον πειραματισμό και τη διερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων, μέσα από διαφορετικές οπτικές και προοπτικές. (Santos, 2000) Σύμφωνα με τον Bruner (1990) όταν στους μαθητές δίνεται η ευκαιρία να πειραματιστούν με κάποιο μέσο προσομοίωσης η εκμάθηση είναι επακόλουθο της διερεύνησης, και οι μαθητές να επικεντρώνονται στη διαδικασία της αφομοίωσης και εγκατάστασης της γνώσης.

Η δυνατότητα πειραματισμού και διερεύνησης που δίνουν τα ψηφιακά εργαλεία τους μαθητές ενισχύουν την κατασκευή τους γνώσης. Σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό, η γνώση κατασκευάζεται από τον ίδιο το μαθητή και δεν μεταφέρεται με τον προφορικό είτε το γραπτό λόγο. Ο Papert (1972) επισημαίνει πως τα παιδιά πρέπει να βιώσουν την εμπειρία του «να κάνω μαθηματικά» για να μάθουν μαθηματικά. Συμφωνώντας με τα παραπάνω ο Κυνηγός (2011) αναφέρει πως τα ψηφιακά εργαλεία δίνουν τη δυνατότητα τους μαθητές να πάρουν το ρόλο του επιστήμονα που παρατηρεί, πειραματίζεται, διατυπώνει εικασίες και υποθέσεις και προκαλεί συνεχείς αλλαγές «μαστορεύοντας» μια κατασκευή. Στη δυνατότητα της «ενεργής μάθησης» που προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία αναφέρθηκε και ο Clements, (1989) υπογραμμίζοντας την ενεργοποίηση των διαφορετικών τρόπων σκέψεις στους μαθητές.

Το «μαστόρεμα» των μαθητών στα ψηφιακά εργαλεία περιλαμβάνει το δυναμικό χειρισμό των κατασκευών με τη χρήση εντολών που διαθέτουν όπως είναι το σύρσιμο (dragging). Το αποτέλεσμα του dragging είναι η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων βοηθώντας στην ερμηνεία συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων. Ο Κυνηγός (2011) επισημαίνει πως σχετικά με την ανάπτυξη των νοημάτων, ο κάθε μαθητής στο ίδιο ψηφιακό εργαλείο «μαστορεύει» με τον δικό του διαφορετικό τρόπο, και σχηματίσει τις δικιές του προσωπικές νοητικές αναπαραστάσεις. Μέσω του «μαστορέματος» οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία ερμηνείας των καταστάσεων που παρατηρούν αλλά και οδηγούνται στην εύρεση νέων στρατηγικών και τεχνικών για να αντιμετωπίσουν το ζητούμενο πρόβλημα. Αυτό

που πρέπει ακόμα να σημειωθεί είναι πως η χρήση των ψηφιακών εργαλείων προωθεί την ανάπτυξη των ρόλων που έχουν οι μαθητές και ο καθηγητής μέσα στην τάξη. (Santos, 2000)

Άλλο ένα χαρακτηριστικό των ψηφιακών εργαλείων είναι πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέσα οπτικοποίησης. Ο Rieber (1990) περιγράφει πως η εκπαιδευτική δραστηριότητα μπορεί να διευκολυνθεί από την τεχνολογία καθώς επιτρέπει την οπτικοποίηση των δυναμικών διαδικασιών οι οποίες είναι δύσκολο ή ακόμα και αδύνατο να οπτικοποιηθούν με άλλο μέσο. Με τη διαδικασία της μετακίνησης του σχήματος ή μέρος αυτού, ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να δοκιμάζει, να διορθώνει άμεσα τα λάθη του με το πάτημα τους μόνο κουμπιού αλλά και να καταλήγει σε έγκυρα συμπεράσματα ή σύμφωνα με τους Hoyles και Noss (1989) μέσα από τη διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων μπορούν να γίνουν οι κατάλληλες γενικεύσεις.

Επίσης, πλεονέκτημα της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων αποτελεί η δυνατότητα που δίνουν τους μαθητές να παρατηρούν και να συγκρίνουν πολλά διαφορετικά παραδείγματα περισσότερα κατά πολύ σε πλήθος από αυτά που θα σχεδίαζαν στα στατικά περιβάλλοντα και τα οποία πολύ πιθανό να μην ήταν τόσο ακριβή όσο αυτά που θα σχεδιαστούν στον υπολογιστή. Τέλος, η ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης μέσω των ψηφιακών εργαλείων γίνεται με τρόπο πρωτότυπο, κάτι που μπορεί να αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών στα μαθηματικά.

Σχετικά με τη διδασκαλία της τριγωνομετρίας και των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών, η χρήση των ψηφιακών εργαλείων μπορεί να βοηθήσει στην υπέρβαση των δυσκολιών που εμφανίζονται. Ο Boon (2005) από έρευνα που διενέργησε κατέληξε στο συμπέρασμα πως οι μαθητές διδασκόμενοι με παραδοσιακό τρόπο στην τάξη εμφανίζουν δυσκολίες να αναγνωρίσουν τους μετασχηματισμούς που έχουν υποστεί τριγωνομετρικές καμπύλες όταν αυτοί είναι περισσότεροι από δύο και πως δεν μπορούν να διαχωρίσουν και να σχεδιάσουν συνθέσεις μετασχηματισμών συστηματικά.

Σύμφωνα με τους Baker et al (2001) τα ψηφιακά εργαλεία χρησιμοποιούνται ως εργαλεία οπτικοποίησης για τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων με τους μαθητές να εξαρτώνται ισχυρά από αυτά. Αυτό γιατί τα εργαλεία, τους δίνουν τη δυνατότητα να σχεδιάζουν αντί για αυτούς τις γραφικές παραστάσεις από τις οποίες αναλύουν τις ιδιότητες των συναρτήσεων ακόμα και σε αρκετά απλές περιπτώσεις. Ο Park (1994) αναφερόμενος στην εκμάθηση της τριγωνομετρίας εξήγησε πως τα εργαλεία μπορούν να «φωτίσουν» τον τρόπο που ένα αριθμητικό αποτέλεσμα που προκύπτει συνδέεται με συγκεκριμένες συμβολικές αναπαραστάσεις μέσω μιας γραφικής προσέγγισης. Πρόσθεσε επίσης πως με τα ψηφιακά εργαλεία μπορεί να γίνει απεικόνιση διαδικαστικών σχέσεων και όχι των τελικών καταστάσεων και αποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

2.1 Η διδασκαλία της τριγωνομετρίας στο ελληνικό σχολείο

Η τριγωνομετρία αποτελεί ένα σημαντικό θέμα των μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο και κυρίως στο λύκειο. Από τα μέσα του γυμνασίου ως και την τελευταία τάξη του λυκείου με εξαίρεση την Α' λυκείου οι μαθητές γνωρίζουν σιγά σιγά τις πτυχές της τριγωνομετρίας.

Οι μαθητές έρχονται πρώτα σε επαφή με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξειών γωνιών στη Β' γυμνασίου, όπου μαθαίνουν τους ορισμούς τους ως λόγους αριθμών, συγκεκριμένα των μηκών των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων. Οι μαθητές κυρίως ασχολούνται με εφαρμογές με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στις οποίες προσαρμόζουν την οξεία ως γωνία ορθογωνίου τριγώνου γωνία και ακολουθούν διαδικασίες για να υπολογίζουν μήκη πλευρών ορθογωνίων τριγώνων. Στην Γ' γυμνασίου επεκτείνουν τις γνώσεις τους μαθαίνοντας να υπολογίζουν και να χειρίζονται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και αμβλειών γωνιών, προσαρμόζοντας τη γωνία στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων με τη μια πλευρά της να εφαρμόζεται πάνω στον Οχ ημιάξονα. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ορίζονται και πάλι σαν λόγοι αριθμών, συγκεκριμένα των συντεταγμένων τυχαίου σημείου πάνω στην πλευρά της γωνίας που δεν ταυτίζεται με τον θετικό οριζόντιο ημιάξονα και της απόστασης του σημείου από την αρχή Ο(0,0). Στη συνέχεια γίνεται λόγος για τη σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών γωνιών, οι δύο τριγωνομετρικές ταυτότητες $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και $εφω = \frac{ημω}{συνω}$, για συνω≠0 και τέλος αναφέρονται ο νόμος των ημιτόνων και ο νόμος των συνημιτόνων.

Η ενασχόληση των μαθητών με την τριγωνομετρία συνεχίζεται στην άλγεβρα Β' λυκείου που ύστερα από την υπενθύμιση των ορισμών των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας και της διαδικασίας υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών μικρότερων των 180°, επεκτείνεται η τελευταία μέθοδος για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας οποιουδήποτε μέτρου. Να

σημειωθεί πως στη Β' λυκείου γίνεται για πρώτη φορά αναφορά και δίνεται ο ορισμός της συνεφαπτομένης γωνίας. Στη συνέχεια γίνεται η παρουσίαση του τριγωνομετρικού κύκλου και του ακτινίου ως νέα μονάδα μέτρησης των γωνιών πέραν της 1 μοίρας. Συνεχίζοντας των εμπλουτισμό των γνώσεων από το γυμνάσιο δίνονται οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$ημ^2\omega + συν^2\omega = 1,\ \ εφω = \frac{ημω}{συνω}, \text{για συνω} \neq 0, σφω = \frac{συνω}{ημω}\ , για\ ημω \neq 0, \qquad εφω \cdot σφω = 1, \qquad συν^2\omega = \frac{1}{1+εφ^2\omega} \quad και \quad ημ^2\omega = \frac{εφ^2\omega}{1+εφ^2\omega}.$$

και τρόποι υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών μέσω της αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο.

Οι μαθητές αφού ασχοληθούν με την έννοια της περιοδικής συνάρτησης διδάσκονται τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κάνοντας χρήση του μοναδιαίου κύκλου, και τους παρουσιάζονται οι ιδιότητές τους. Καταλήγουν στις γραφικές παραστάσεις της f(x)=ρημ(ωx) μέσα από πίνακες τιμών συγκεκριμένων ημιτονοειδών εξισώσεων και περιγράφεται ο ρόλος των συντελεστών ρ και ω πως ο πρώτος επηρεάζει το πλάτος της συνάρτησης ενώ ο άλλος την περίοδο, της οποίας ο τύπος απλά αναφέρεται. Δίνεται επίσης σαν σχόλιο πως αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν και στις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις με εξίσωση f(x)=ρσυν(ωx). Στις εφαρμογές ζητούνται από τους μαθητές κατασκευή γραφικών παραστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη μορφή f(x)=ρημ(ωx)+k, f(x)=ρσυν(ωx)+k και f(x)=ρεφx, εύρεση εξισώσεων που περιγράφουν δεδομένες γραφικές παραστάσεις και πάλι μόνο στη μορφή f(x)=ρημ(ωx) και f(x)=ρσυν(ωx) χωρίς το συνδυασμό κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης και τέλος προβλήματα μοντελοποίησης στα οποία ζητούνται πέραν της κατασκευής γραφικών παραστάσεων, περίοδος, πλάτος και διαφορά μέγιστης με ελάχιστη τιμή.

Μετά την διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι μαθητές ασχολούνται με επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων ημx=α, συνx=α και εφx=α, τον προσδιορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών και διπλάσιας γωνίας τους μετασχηματισμούς τριγωνομετρικών παραστάσεων (γινομένου σε άθροισμα και το αντίστροφο), τη μελέτη των συναρτήσεων f(x)=ρημ(x+φ), f(x)=αημx

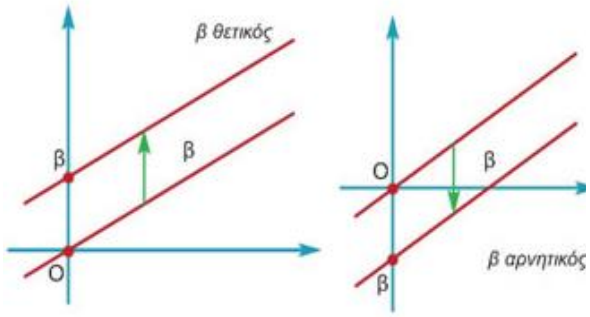
+ βσυνx και τέλος με τους νόμους των ημιτόνων και συνημιτόνων. Να σημειωθεί πως στην διδακτέα και εξεταστέα ύλη δεν περιλαμβάνονται οι μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων η μελέτη των συναρτήσεων f(x)=ρημ(x+φ), f(x)=αημx + βσυνx και οι νόμο των ημιτόνων και συνημιτόνων.

Τέλος, στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ' λυκείου μόνο οι μαθητές που έχουν επιλέξει θετική κατεύθυνση ασχολούνται με τριγωνομετρικά όρια, παραγώγιση και ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

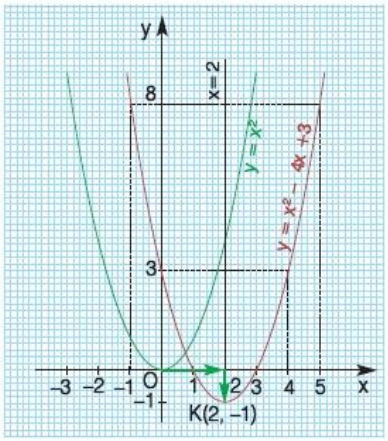
2.2 Η έννοια των μετασχηματισμών συνάρτησης και η ένταξή της στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών

Η πρόσθεση ή αφαίρεση όρων μέσα στις εξισώσεις των συναρτήσεων οδηγούν στην αλλαγή των γραφικών τους παραστάσεων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται μετασχηματισμός και σύμφωνα με τους Larson & Hostetler, (2001) το σύνολο τέτοιων τεχνικών αποτελούν τους μετασχηματισμούς γραφημάτων συναρτήσεων.

Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών η έννοια του μετασχηματισμού συνάρτησης εμφανίζεται για πρώτη φορά στη Β' γυμνασίου, κατά τη μελέτη της συνάρτησης y=αx+β. Στους μαθητές περιγράφεται ένα πρόβλημα της καθημερινής ζωής από το οποίο καταλήγουν στις σχέσεις y=0.9x και y=0.9x+10. Κατασκευάζονται οι γραφικές παραστάσεις και αναφέρεται πως στην γραφική παράσταση της y=0.9x+10 οι τεταγμένες των νέων σημείων είναι αυξημένες κατά 10 μονάδες σε σχέση με τις αντίστοιχες της συνάρτησης y=0.9x. Στο τέλος της εφαρμογής υπάρχει η παρακάτω εικόνα που περιγράφει γενικότερα τον μετασχηματισμό. (σχήμα 1)



Σχήμα 1. Ο μετασχηματισμός της y=αx καταλήγοντας στην y=αx+β ανάλογα με το πρόσημο του β. (Βλάμος κ.α 2007, σελ73)



Σχήμα 2. Σχηματική περιγραφή τη οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης της y=x². (Αργυράκης κ.α., σελ)

Επόμενη αναφορά στους μετασχηματισμούς γίνεται στην Γ' γυμνασίου κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις τετραγωνικές συναρτήσεις, $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Από τους μαθητές ζητείται η κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των $y=x^2-4x+3$ και $y=x^2$, εξηγώντας στη συνέχεια πως η $y=x^2-4x+3$ προκύπτει αν μετακινήσουμε την $y=x^2$ οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, σημειώνοντας τις μετατοπίσεις στο σχήμα. (Σχήμα 2)

Στις λυμένες εφαρμογές στην ίδια ενότητα, σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των $y=x^2-2$ και $y=(x-2)^2$ με σχόλιο κάτω από την καθεμιά, πως προκύπτουν και από κατακόρυφη και οριζόντια αντίστοιχα μετατόπιση της $y=x^2$. Να σημειωθεί πως στις ερωτήσεις κατανόησης ζητείται αντιστοίχιση των εξισώσεων με τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις μιας σειράς συναρτήσεων, όπου εμφανίζονται οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις της $y=x^2$.

Στην Α' λυκείου σε ξεχωριστή ενότητα, μετά την ενασχόληση των μαθητών με την έννοια της συνάρτησης (ορισμό, γραφική παράσταση, ιδιότητες όπως το Πεδίο Ορισμού) και την συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, γίνεται μελέτη της κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης συνάρτησης. Το σχολικό βιβλίο κατασκευάζει τη γραφική

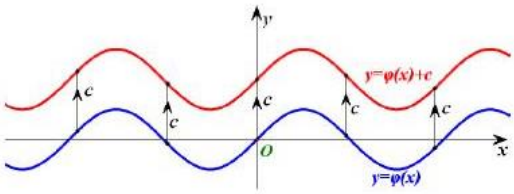
παράσταση της φ(x)=|x| και της f(x)=|x|+1, εξηγεί πως με κατακόρυφη μετατόπιση της φ(x) προς τα πάνω κατά μια μονάδα οι δύο γραφικές παραστάσεις θα συμπέσουν, γράφει f(x)=φ(x)+1 και πως «*για κάθε x∈ℝ το f(x) είναι κατά μια μονάδα μεγαλύτερο του φ(x)*» (σελ 168) και γενικεύει παραθέτοντας το παρακάτω:

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x) = \varphi(x) + c, \text{ όπου } c > 0,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα α')



Σχήμα α΄

(Ανδρεαδάκης κ.α.(1) ,2012 σελ 168)

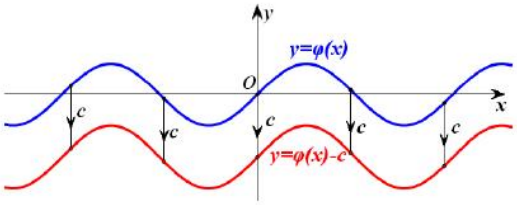
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω καταλήγει στα παρακάτω:

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x) = \varphi(x) - c, \text{ όπου } c > 0 ,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω** (Σχήμα β')



Σχήμα β΄

(Ανδρεαδάκης κ.α.(1), 2012 σελ 169-170)

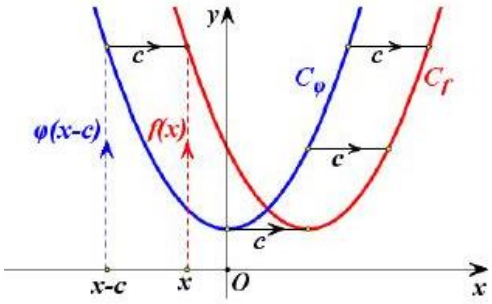
Έπειτα περιγράφεται με παρόμοιο τρόπο η οριζόντια μετατόπιση προς φ(x)=|x| προς τα δεξιά και προς τα αριστερά κατά μια μονάδα με τη γενίκευση των συμπερασμάτων για οποιαδήποτε συνάρτηση φ(x) να είναι η παρακάτω. (Ανδρεαδάκης, κ.α.. (1) 2012, σελ. 171)

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:

$$f(x) = \varphi(x - c), \text{ όπου } c > 0,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά** (Σχήμα γ').



Σχήμα γ΄

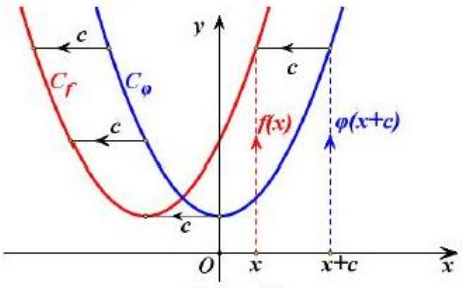
(Ανδρεαδάκης κ.α.,(1) 2012 Σελ 171)

Γενικα:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x) = \varphi(x + c), \text{ όπου } c > 0,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ').



Σχήμα δ΄

(Ανδρεαδάκης κ.α.,(1) (2012) σελ 172)

Τέλος, γίνεται λόγος για τη σύνθεση των δύο μετατοπίσεων, αναφέροντας πως «Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής: f(x)=φ(x$\pm$c)$\pm$d, με c, d>0. Δηλαδή αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης» (Ανδρεαδάκης κ.α.,(1) 2012 σελ 173)

Η τελευταία φορά που ασχολούνται οι μαθητές της Α' λυκείου με τις μετατοπίσεις είναι στη μελέτη της τετραγωνικής συνάρτησης. Γίνεται η αλλαγή της μορφής του τύπου f(x)=αx^2+βx+γ σε $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{|\Delta|}{4\alpha}$ παρουσιάζοντας τη γραφική της παράσταση ως το αποτέλεσμα δύο διαδοχικών μετατοπίσεων της γραφικής παράστασης της y=αx^2 μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης.

Στην Β' λυκείου στο σχολικό εγχειρίδιο, στο κεφάλαιο των ιδιοτήτων των συναρτήσεων υπάρχει ακριβώς η ίδια ενότητα με της Α' λυκείου για τις μετατοπίσεις.

Στη συνέχεια, στην ενότητα στην οποία μελετόνται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ζητούνται, στις ασκήσεις, γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων που μπορούν να κατασκευαστούν υστερα από κατακόρυφη μετατόπιση κάποιας βασικής τριγωνομετρικής συνάρτησης. Οι οριζόντιες μετατόπισεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων γίνεται ξεχωριστά, μελετώντας την συνάρτηση f(x)=ρημ(x+φ). Στους μαθητές δίνεται συγκεκριμένο παράδειγμα συνάρτησης αυτής της μορφής, $f(x) = 2\eta\mu(x + \frac{\pi}{4})$, και αναφέρεται πως προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της g(x)=2ημx κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα αριστερά. Σημειώνεται επίσης πως η περίοδος και τα ακρότατα της νέας συνάρτησης είναι ίδια με της g(x)=2ημx και πως ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ ονομάζεται διαφορά φάσεως των δύο καμπυλών. Γενικεύονται τέλος τα συμπεράσματα έχοντας *«τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=ρημ(x+φ), ρ>0 να προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=ρημx. Επομένως: Η συνάρτηση f(x)=ρημ(x+φ) είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με –ρ.»* (Ανδρεαδάκης (2), (2012) σελ 109)

Τέλος, κατά τη μελέτη της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης δίνονται συγκεκριμένα παραδείγματα συναρτήσεων της μορφής f(x)=e$^{(x+c)}$+k και g(x)=ln(x+c)+k, με c,k$\epsilon\mathbb{R}$ εξηγώντας πως η γραφική παράσταση προκύπτει από

οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις των $\varphi(x)=e^x$ και $z(x)=\ln x$ αντίστοιχα. (Ανδρεαδάκης κ.α. (2),2012)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικό ερώτημα

Η παρούσα εργασία έχει σαν αντικείμενο μελέτης τον τρόπο που αντιλαμβάνονται, και τις διαδικασίες που ακολουθούν, μαθητές Β' Λυκείου ώστε να σχηματίσουν την έννοια των μετασχηματισμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Εξετάζεται επίσης, το επίπεδο κατανόησης των μετασχηματισμών που κατακτούν οι μαθητές ύστερα από την ενασχόληση με τις σχεδιασμένες δραστηριότητες αλλά και η ικανότητα ευέλικτου χειρισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων που εμφανίζονται οι μετασχηματισμοί.

Καθώς όμως η έννοια του μετασχηματισμού συνάρτησης περιλαμβάνει την έννοια της μεταβολής, οι στατικές εικόνες πριν και μετά το μετασχηματισμό δεν μπορούν να προσφέρουν τα ίδια οφέλη με την παρατήρηση του μετασχηματισμού με δυναμικό τρόπο. Όπως αναφέρει ο Santos (2000) τα οπτικά μοντέλα που μελετώνται με τρόπο δυναμικό, καθώς κατασκευάζονται στην οθόνη του υπολογιστή δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να παρατηρήσουν την εξέλιξή τους και την πορεία της διαδικασίας, εξαλείφοντας τον περιορισμό της παρατήρησης του τελικού σταδίου. Ακολουθώντας λοιπόν την προηγούμενη άποψη οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν απαιτούσαν τη χρήση ψηφιακού εργαλείου και στην εργασία μελετάται κατά πόσο η χρήση του λογισμικού βοήθησε την κατανόηση και το σχηματισμό των μετασχηματισμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα το ερευνητικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το παρακάτω:

- Με ποιους τρόπους σχηματίζουν και κατανοούν οι μαθητές Β' λυκείου την έννοια των μετασχηματισμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και πώς προωθείται η κατανόηση τους με τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου.

Το παραπάνω ερώτημα μελετήθηκε μέσω της πραγματοποίησης μιας μελέτης περίπτωση με δύο ομάδες μαθητών που εργάστηκαν σε δύο δραστηριότητες. Σε

πρώτη φάση, οι μαθητές της καθεμιάς από τις δύο ομάδες συνεργάστηκαν και επεξεργάστηκαν τις δύο δραστηριότητες. Στη συνέχεια έγινε καταγραφή των διαλόγων των μαθητών και ακολούθησε η ανάλυσή τους για την εξαγωγή συμπερασμάτων δίνοντας απαντήσεις στο παραπάνω ερευνητικό ερώτημα.

3.2 Πορεία παρέμβασης

Η παρέμβαση αποτελείται από τα παρακάτω στάδια. Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την εξοικείωση με το λογισμικό με σκοπό την εκμάθηση βασικών ιδιοτήτων του και τη μελέτη των μετασχηματισμών που οδηγούν στην κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση συνάρτησης. Στο δεύτερο στάδιο επιχειρείται η εφαρμογή των κατακόρυφων και οριζόντιων μετασχηματισμών στην τριγωνομετρική συνάρτηση y=ημx. Το τρίτο στάδιο περιλαμβάνει την ενασχόληση με τους μετασχηματισμούς της ημιτονοειδούς που σχετίζονται με το πλάτος και την περίοδο της συνάρτησης. Στο τέταρτο στάδιο επιχειρείται ο συνδυασμός και η εφαρμογή των τεσσάρων μετασχηματισμών που μελετήθηκαν στα περασμένα στάδια στην ημιτονοειδή συνάρτηση και στο τελευταίο, οι μαθητές απαντούν ερωτήματα στα οποία απαιτείται ο συνδυασμός των συμπερασμάτων που είχαν καταλήξει και η χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων που μπορεί να εμφανιστεί μια ημιτονοειδής συνάρτηση που έχει υποστεί τους προηγούμενους μετασχηματισμούς.

3.3 Το πλαίσιο της έρευνας

3.3.1 Χώρος και χρόνος της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις αίθουσες διδασκαλίας κοινωνικού φροντιστηρίου που είχε δημιουργηθεί από κάποιο δήμο της Αθήνας με μαθητές της Β’ Λυκείου που παρακολουθούσαν μαθήματα στο συγκεκριμένο φροντιστήριο. Στην έρευνα συμμετείχαν δύο ομάδες των δύο ατόμων η καθεμιά και πραγματοποιήθηκαν δύο συναντήσεις με κάθε ομάδα, οι οποίες έγιναν εκτός των προγραμματισμένων ωρών

διδασκαλίας της Άλγεβρας του φροντιστηρίου. Οι συναντήσεις έγιναν στα τέλη Ιανουαρίου και αρχές Φεβρουαρίου με τη διάρκεια τους να είναι περίπου δύο διδακτικές ώρες έκαστη για κάθε ομάδα. Πριν την πραγματοποίηση της έρευνας υπήρξε συνεννόηση με τους υπεύθυνους του κοινωνικού φροντιστηρίου και η απαραίτητη άδεια διεξαγωγής της, η πρόσκληση και ενημέρωση των μαθητών για τη διαδικασία.

3.3.2 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν τέσσερεις μαθητές της Β' Λυκείου που παρακολουθούσαν μαθήματα στο συγκεκριμένο κοινωνικό φροντιστήριο. Την πρώτη ομάδα αποτελούσαν ο Μάνος (Μ) και ο Ραφαήλ (Ρ) οι οποίοι είχαν επιλέξει τεχνολογική κατεύθυνση ενώ τη δεύτερη η Χρύσα (Χ) και ο Δημήτρης (Δ), μαθητές της θεωρητικής κατεύθυνσης. Να σημειωθεί πως και τα ονόματα των τεσσάρων μαθητών αποτελούν ψευδώνυμα.

Η επιλογή των μαθητών έγινε με βάση την προσωπική τους επιθυμία να συμμετέχουν στην έρευνα, αφού τους παρουσιάστηκε η διαδικασία από την καθηγήτρια των μαθηματικών της Άλγεβρας. Ο χωρισμός των μαθητών στις ομάδες ήταν με κριτήριο την ομοιογένεια των ομάδων με σκοπό την ευκολότερη επικοινωνία και συνεργασία των μαθητών της ομάδας.

3.3.3 Προϋπάρχουσα γνώση

Την περίοδο που έγιναν οι συναντήσεις με τις ομάδες, όλοι οι μαθητές διδάσκονταν ο καθένας στο σχολείο του το κεφάλαιο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Ως εκ τούτου όλοι οι μαθητές είχαν διδαχτεί σε προηγούμενο κεφάλαιο τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις συνάρτησης. Σχετικά με την τριγωνομετρία, είχαν διδαχτεί σε προηγούμενες τάξεις τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξειών και αμβλειών γωνιών και τη φετινή σχολική χρονιά τον υπολογισμό μέσω αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε

γωνίας. Επίσης είχαν διδαχτεί περιοδικές συναρτήσεις και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις y=ρημωx, y=ρσυνωx και y=εφx. Να προστεθεί ότι και οι τέσσερεις μαθητές είχαν διδαχτεί τα παραπάνω με βάση το εκάστοτε σχολικό βιβλίο και δεν είχαν ποτέ εργαστεί με ψηφιακό εργαλείο.

3.3.4 Ο ρόλος των μαθητών και της ερευνήτριας

Στην αρχή της πρώτης συνάντησης με την καθεμιά από τις δύο ομάδες τους δόθηκε η οδηγία πως το φύλλο εργασίας σε κάθε συνάντηση θα είναι ένα και για τους δύο μαθητές που η συμπλήρωσή του θα πρέπει να είναι αποτέλεσμα συνεργασίας και κοινών αποφάσεων με τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου.

Ο ρόλος της ερευνήτριας ήταν κυρίως να εξηγεί τον τρόπο που θα χρησιμοποιούσαν οι μαθητές το εργαλείο. Αρκετές φορές επίσης χρειάστηκε να παρέχει υποστήριξη στους μαθητές θέτοντας βοηθητικές ερωτήσεις για να οργανώσουν τη σκέψη τους και να οδηγηθούν στα ζητούμενα συμπεράσματα. Τέλος, η ερευνήτρια πολλές φορές κατέφυγε σε ερωτήσεις όπως «πώς κατέληξες σε αυτό το συμπέρασμα;», «μπορείς να δώσεις μια ερμηνεία στην παρατήρησή σου;» με σκοπό να εκφραστούν αναλυτικότερα οι μαθητές και να γίνει φανερός ο τρόπος σκέψης τους.

3.4 Οι δραστηριότητες: περιγραφή και στόχοι

Οι ομάδες των μαθητών επεξεργάστηκαν δύο φύλλα εργασίας, τα οποία παρατίθενται στο παράρτημα της εργασίας, ένα σε κάθε συνάντηση. Στην πρώτη συνάντηση με την κάθε ομάδα δόθηκε το φύλλο εργασίας 1 το οποίο αποτελούνταν από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος αποτελούνταν από τις ερωτήσεις 1.1-1.3 στις οποίες οι μαθητές εργάζονταν με την συνάρτηση $y=x^3$ και τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της μέσω της επεξεργασίας του αρχείου «Δραστηριότητα Α» στο οποίο ήταν σχεδιασμένες οι συναρτήσεις $g(x)=x^3$, $f(x)=(x+c)^3+k$, χωρίς να εμφανίζεται η εξίσωση και οι δρομείς k και c. Οι κύριοι στόχοι των ερωτημάτων αυτών είναι η εξοικείωση των μαθητών με το ψηφιακό εργαλείο και η εισαγωγή

τους στις έννοιες των κατακόρυφων και οριζόντιων μετατοπίσεων συνάρτησης. Αναμένεται η εκμάθηση βασικών εντολών του εργαλείου, η διαδικασία της παρατήρησης των μεταβολών και η διερεύνηση των σχέσεων που υπάρχουν στις σχηματισμένες γραφικές παραστάσεις. Τελικός στόχος είναι η μετάφραση των συμπερασμάτων για τις μετατοπίσεις των γραφικών παραστάσεων στις αλγεβρικές εκφράσεις $y=x^3+k$ και $y=(x+c)^3$ για τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της $y=x^3$ αντίστοιχα αλλά και το σχηματισμό της $y=(x+c)^3+k$ που συνδυάζει τα δύο είδη μετατοπίσεων έχοντας κατανοήσει την ανεξαρτησία τους.

Το δεύτερο μέρος αποτελούνταν από την ερώτηση 1.4 η οποία είχε σαν στόχο οι μαθητές να συμπεράνουν πως τα συμπεράσματα και οι σχέσεις στις οποίες κατέληξαν για τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της $y=x^3$ γενικεύονται σε οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση. Ζητείται η κατασκευή των κατακόρυφων και οριζόντιων μετατοπίσεων συνάρτησης δικής τους επιλογής, με τη χρήση δρομέων στο ψηφιακό εργαλείο, αλλά και η αντιστοίχιση τους με τις αλγεβρικές εκφράσεις που τις περιγράφουν. Το ερώτημα ενισχύει την παρατήρηση, τη διερεύνηση μέσω του ψηφιακού εργαλείου, τη δημιουργία υποθέσεων και την επιβεβαίωση ή απόρριψή τους με την ευθύνη αποκλειστικά και μόνο των ίδιων των μαθητών.

Στο τρίτο μέρος του πρώτου φύλλου εργασίας (ερωτήσεις 1.5-1.6) γίνεται η εισαγωγή στην τριγωνομετρική συνάρτηση ημίτονο συζητώντας στην αρχή τα χαρακτηριστικά της (πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, γραφική παράσταση, περιοδικότητα, μονοτονία και ακρότατα) και στη συνέχεια δόθηκε στους μαθητές προς επεξεργασία το αρχείο με όνομα «Δραστηριότητα Β» στο οποίο ήταν σχεδιασμένες τα γραφήματα των $g(x)=ημx$, $h(x)=ημx+3$, $φ(x)=ημ(x-π/4)$ και $w(x)=ημ(x-π/4)+3$, χωρίς να είναι φανερές οι εξισώσεις. Στόχος ήταν η αναγνώριση πως οι $h(x)$, $φ(x)$ και $w(x)$ αποτελούν μετατοπίσεις της $g(x)$ και να ελεγχθεί η ικανότητα της ομάδας να εφαρμόσουν σχέσεις αντίστοιχες με αυτές που εντόπισαν στις μετατοπίσεις της $y=x^3$ στην $g(x)=ημx$. Το ερώτημα 1.6 προωθεί την λεπτομερέστερη παρατήρηση των γραφημάτων που δέχονται τους μετασχηματισμούς. Ζητείται από τους μαθητές να ελέγξουν τον τρόπο που οι μετασχηματισμοί επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά της ημιτονοειδούς συνάρτησης.

Με την ενασχόληση με το ερώτημα αυτό αναμένεται οι μαθητές να ξεπεράσουν το στάδιο της απλής παρατήρησης ότι η συνάρτηση μετατοπίστηκε πάνω – κάτω ή δεξιά – αριστερά, αλλά να αποκτήσουν μια ευρύτερη και ολοκληρωμένη αντίληψη των μετασχηματισμών.

Στη δεύτερη συνάντηση με την κάθε ομάδα δόθηκε το φύλλο εργασίας 2 το οποίο είχε σαν αντικείμενο τους μετασχηματισμούς της ημιτονοειδούς συνάρτησης και αποτελούνταν και αυτό από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος (ερωτήματα 2.1-2.2) οι μαθητές, χρησιμοποίησαν την εφαρμογή με όνομα «Δραστηριότητα Γ», στην οποία εμφανίζονταν δύο δρομείς α και b και οι γραφικές παραστάσεις των g(x)=ημx και f(x)=αημbx, ενώ δεν ήταν γνωστοί στους μαθητές οι παραπάνω τύποι. Το ερώτημα 2.1 αναφερόταν σε συναρτήσεις της μορφής y=αημx δηλαδή είχε σαν στόχο την κατασκευή της έννοιας του μετασχηματισμού που επηρεάζει το πλάτος της συνάρτησης. Στην αρχή ζητήθηκε η μετακίνηση του δρομέα α με σκοπό την εύρεση της μεταβολής που επιφέρουν οι διάφορες τιμές του α και ο εντοπισμός της τιμής που g(x)=f(x). Μέσα στις προσδοκίες μας ήταν η αναγνώριση της g(x)=ημx, ότι η f(x) αποτελεί μετασχηματισμό της g(x) οπότε είναι μια συνάρτηση που σχετίζεται με την g και τέλος πως f(x)=α·g(x). Δεν αναμένονταν δυσκολίες στον εντοπισμό πως ο μετασχηματισμός επιφέρει αλλαγή στα ακρότατα αλλά από την άλλη, δεν αναμενόταν να παρατηρηθεί γρήγορα πως για α<0 η μονοτονία διαφέρει από της y=ημx και ακόμα πιο δύσκολα να δοθεί ερμηνεία πως η μονοτονία αλλάζει καθώς για α<0 η συνάρτηση που προκύπτει είναι συμμετρική από την αντίστοιχη για α>0. Τελικό στόχο αποτελούσε ο σχηματισμός της αλγεβρικής έκφρασης y=αημx ο οποίος σημαντικό θα ήταν να σχηματιστεί ύστερα από την κατανόηση της σχέσης f(x)=α·g(x).

Στο ερώτημα 2.2 οι μαθητές διερευνούν το μετασχηματισμό που επηρεάζει την περίοδο της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Για την ανεξάρτητη διερεύνηση του συγκεκριμένου μετασχηματισμού ζητούνταν στην αρχή η τοποθέτηση της τιμής α=1 και η παρατήρηση του ρόλου του συντελεστή b στην y=ημbx. Αρχικοί στόχοι του ερωτήματος αποτελούν η αναγνώριση πως η τιμή b=1 οδηγεί στην ταύτιση των f και g πως οι διαφορετικές τιμές του b οδηγούν σε μεταβολή της περιόδου της

συνάρτησης f. Ύστερα από λεπτομερέστερη παρατήρηση ο στόχος είναι η εύρεση του τρόπου συσχέτισης του b με την περίοδο και το συμπέρασμα πως η περίοδος δίνεται από τη σχέση T=2π/b. Πολύ σημαντικό θα ήταν να γίνει κατανοητή η ισοδυναμία του b με το ω που σημειώνεται στο σχολικό βιβλίο και η αντιστοιχία της σχέσης T=2π/b με τη σχέση T=2π/ω. Για τον σχηματισμό της εξίσωσης y=ημbx θα πρέπει να γίνει αντιληπτό πως όταν x → bx τότε οι τιμές τις συνάρτησης επαναλαμβάνονται b φορές στο 2π γεγονός που δεν πιστεύεται πως είναι ιδιαίτερα εύκολο για τους μαθητές. Τέλος, η κατανόηση της ανεξαρτησίας των μεταβολών που επιφέρουν οι α και b και ο σχηματισμός της y=αημbx από τη στιγμή που θα έχει εντοπιστεί η y=ημbx δεν είναι δύσκολος στόχος.

Το επόμενο μέρος του δεύτερου φύλλου εργασίας αναφερόταν στις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της y=αημx και y=αημbx. Οι μαθητές συνεχίζουν να χρησιμοποιούν το αρχείο GeoGebra με όνομα «Δραστηριότητα Γ» που ζητείται η επιλογή των τιμών των α και b για να κατασκευαστεί η y=3ημx και η εύρεση των εξισώσεων των q(x) και h(x) οι οποίες αποτελούν κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της y=3ημx. Όμοια στη συνέχεια ζητούνται οι αντίστοιχες μετατοπίσεις της y=3ημ2x. Οι ερώτηση αυτή τέθηκε ώστε να μελετηθούν όλοι οι μετασχηματισμοί ταυτόχρονα και για να ελεγχθεί η ικανότητα εφαρμογής των σκέψεων και των διαδικασιών που εντοπίστηκαν κατά την συμπλήρωση του πρώτου φύλλου εργασίας για τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις σε πιο πολύπλοκες μορφές της ημιτονοειδούς. Η έκφραση των κατακόρυφων μετατοπίσεων και των δύο συναρτήσεων πιστεύεται πως μπορεί να επιτευχθεί εύκολα. Οι οριζόντιες μετατοπίσεις θα μπορούσαν να προκαλέσουν εμπόδια στους μαθητές και κυρίως στην περίπτωση που b=2.

Τα ερώτημα 2.4 στοχεύει στην έκφραση όλων των μετατοπίσεων στην αλγεβρική έκφραση και στην κατασκευή αυτής της συνάρτησης από τους ίδιους τους μαθητές στο λογισμικό αποτελώντας το τελικό αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσής τους με τις δραστηριότητες. Στόχο αποτελούν η κατανόηση και η κατασκευή της γενικής μορφής y=αημ(b(x+c))+k στον υπολογιστή στην οποία περιλαμβάνονται όλοι οι μετασχηματισμοί. Πιθανό η κατασκευή της μορφής αυτής να μην γίνει εύκολα αλλά

οι μαθητές που έχουν κατανοήσει πώς ο κάθε μετασχηματισμός επηρεάζει την αλγεβρική εξίσωση θα οδηγηθούν στον σωστό τύπο. Ένας τύπος που αναμένεται να δοθεί είναι ο y=αημ(bx+c)+k, ο οποίος μπορεί να γίνει αποδεκτός μόνο στη περίπτωση που είναι φανερό στους μαθητές ότι οι μονάδες οριζόντιας μετατόπισης ταυτίζονται με την τιμή του c/b και όχι του c όπως στα προηγούμενα ερωτήματα. Στη συνέχεια δίνονται τρεις αλγεβρικές εξισώσεις ημιτονοειδών συναρτήσεων και ζητείται ο εντοπισμός των τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές α, b, c και k. Το εμπόδιο που ίσως εμφανιστεί είναι στον εντοπισμό των τιμών του c, καθώς θα πρέπει πρώτα να μετασχηματιστούν οι εξισώσεις στη μορφή y=αημ(b(x+c))+k.

Το τελευταίο μέρος του δεύτερου φύλλου εργασίας περιλαμβάνει δύο ερωτήσεις (2.5, 2.6) οι οποίες έχουν σαν στόχο τον έλεγχο την ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη ημιτονοειδών συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα μετασχηματισμών της y=ημx. Συγκεκριμένα στο ερώτημα 2.5 δίνεται η εξίσωση y=0.5ημ3(x-π/4)-2 και ζητείται ο σχεδιασμός της στο καρτεσιανό επίπεδο και στο ερώτημα 2.6 ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία δίνεται η γραφική παράσταση και ζητείται η αλγεβρική σχέση που της αντιστοιχεί. Από τους μαθητές αναμένεται δυσκολευτούν περισσότερο με την ερώτηση 2.5 που ζητά τον σχεδιασμό. Η ιδανική πορεία σκέψης θα ήταν να σχεδιαστεί πρώτα η συνάρτηση y=0.5ημ3x και στη συνέχεια η οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπισή της. Ο προσδιορισμός τέλος της εξίσωσης που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση που ήταν σχεδιασμένη στην ερώτηση 2.6 αποτελεί διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθούσαν κατά την εύρεση των εξισώσεων που απεικονίζονταν στο λογισμικό κατά τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας. Οι διαφορές όμως είναι μεγάλες. Το λογισμικό τους εμφάνιζε τις τιμές των δρομέων και εντοπίζοντας τις γενικές μορφές των τύπων ήταν εύκολη η προσαρμογή. Οι μαθητές αναμένεται να αναζητούν τη βοήθεια του λογισμικού. Τέλος, αυτό που θα μπορούσε να επισημανθεί είναι η διπλή αντιμετώπιση του ερωτήματος. Ο πρώτος τρόπος είναι πως η συγκεκριμένη γραφική παράσταση έχει προκύψει από οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά π/2 και κατακόρυφα κατά 2 μονάδες της y=0.5ημx. Ο δεύτερος τρόπος είναι να σκεφτούν οι μαθητές πως αντίστοιχες μετατοπίσεις με την y=ημx μπορεί να δεχτεί και η y=συνx. Η δεδομένη γραφική παράσταση μπορεί να προκύψει και από κατακόρυφη μετατόπιση της

y=0.5συνx προς τα πάνω κατά 2 μονάδες. Ο δεύτερος τρόπος θα μπορούσε να γίνει η αφορμή για τον σχηματισμό της y=ασυν(b(x+c))+k αλλά και ευκαιρία να δουν οι μαθητές, μέσω μιας άλλης αναπαράστασης γιατί ισχύει η ισότητα συνx=ημ(x+π/2).

3.5 Συλλογή δεδομένων

3.5.1 Μέσα συλλογής δεδομένων

Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τρία διαφορετικά μέσα. Αυτά ήταν τα φύλλα εργασίας που συμπλήρωσαν οι ομάδες στις δύο συναντήσεις που έγιναν με την καθεμιά, η μαγνητοφωνημένη συζήτηση των μαθητών και το βίντεο με τις κινήσεις και τις εντολές των μαθητών στο λογισμικό που συλλέξαμε από τη χρήση του προγράμματος Hypercam 3.

3.6 Ανάλυση δεδομένων

Μετά την ολοκλήρωση των συναντήσεων με τις ομάδες ακολούθησε εκ νέου ακρόαση των συναντήσεων με τις ομάδες με ταυτόχρονη παρακολούθηση των κινήσεών τους στον υπολογιστή μέσω του Hypercam 3. Η ανάλυση των δεδομένων θα παρουσιαστεί ανά ομάδα. Θα περιγραφεί η πορεία που ακολούθησαν οι μαθητές της κάθε ομάδας και στις δύο συναντήσεις και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν συγκριτικά αποτελέσματα για τους τέσσερεις μαθητές πάνω στον τρόπο που δομούν τις έννοιες των μετασχηματισμών.

Κατά την περιγραφή του τρόπου που εργάζονταν οι μαθητές στις δύο συναντήσεις με τις ομάδες με βάση το ερευνητικό ερώτημα, εστιάσαμε κυρίως στον τρόπο σχηματισμού των μετασχηματισμών και στο πόσο ολοκληρωμένα σχημάτισε ο κάθε μαθητής τις νέες έννοιες σύμφωνα με τις φάσεις που η Sfard ορίζει για τον σχηματισμό μιας έννοιας. Παρατηρήθηκε επίσης ο ρόλος του λογισμικού αλλά και κατά πόσο οι μαθητές αξιοποίησαν τις δυνατότητες που τους προσφέρει. Τέλος

αντικείμενο μελέτης ήταν τα εμπόδια που συνάντησαν οι μαθητές, κατά πόσο τα ξεπέρασαν και αν η συνεργασία βοήθησε προς αυτή την κατεύθυνση.

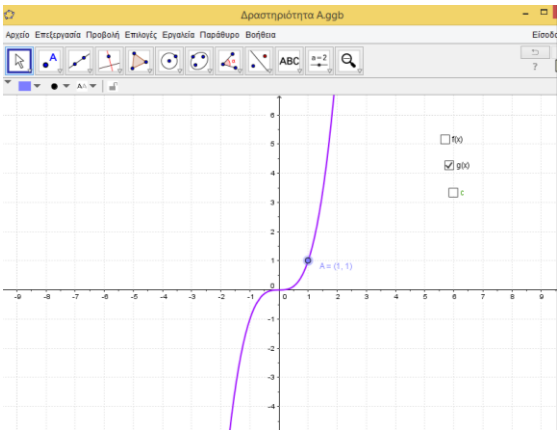
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η πορεία ενασχόλησης των ομάδων με τις δραστηριότητες και μελετάται ο τρόπος με τον οποίο σχημάτισε ο καθένας από τους μαθητές την έννοια των μετασχηματισμών συνάρτησης και πιο συγκεκριμένα της ημιτονοειδούς συνάρτησης.

4.1 Ομάδα Α

4.1.1 Φύλλο εργασίας 1^{ο} – Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

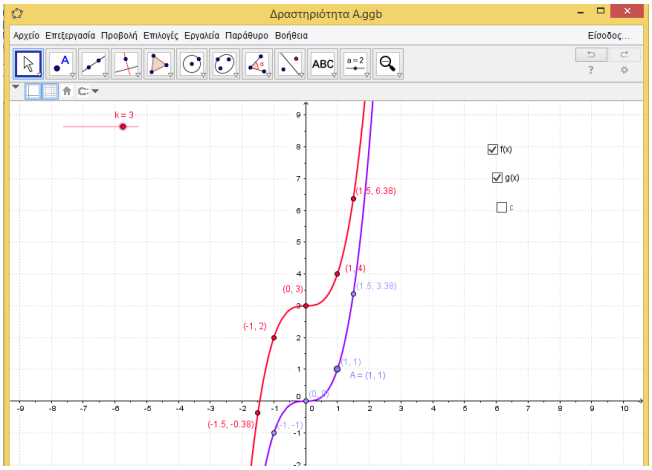
Στους μαθητές (Ραφαήλ (Ρ) και Μάνο (Μ)) δόθηκε το αρχείο GeoGebra με όνομα Δραστηριότητα Α (εικόνα 1) το οποίο θα επεξεργάζονταν στα πρώτα ερωτήματα του φύλλου εργασίας. Εκεί παρουσιάστηκαν κάποιες βασικές δυνατότητες του λογισμικού όπως η κατασκευή και μετακίνηση σημείου, η σμίκρυνση, μεγέθυνση και μετακίνηση της επιφάνειας εργασίας τις οποίες δοκίμασαν εκείνη τη στιγμή οι ίδιοι οι μαθητές. Οι υπόλοιπες οδηγίες δίνονταν κατά την πορεία της διερεύνησης για την καλύτερη απομνημόνευσή τους και για να μπορεί να γίνει άμεσα φανερή η χρήση τους. Τέτοιες οδηγίες ήταν για τον τρόπο γραφής στην γραμμή εισαγωγής, για την αλλαγή των ιδιοτήτων (χρώμα, στυλ κτλ) των γραφικών παραστάσεων και τη μετακίνηση και κατασκευή δρομέων. Τέλος, εξηγήθηκε στους μαθητές πως το φύλλο εργασίας ήταν ένα και για τους δυο και πως η συμπλήρωσή του θα ήταν αποτέλεσμα συνεργασίας και κοινών αποφάσεων.



Εικόνα 1

Οι μαθητές στο ερώτημα 1.1 με ιδιαίτερη άνεση χρησιμοποίησαν τις λειτουργίες του λογισμικού και συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών της συνάρτησης g(x) που εμφανιζόταν στην οθόνη του υπολογιστή μετακινώντας το τυχαίο σημείο πάνω στο γράφημα της. Χωρίς καμία επεξεργασία των σημείων που είχαν προσδιορίσει, αναγνώρισαν από τη μορφή του πως το συγκεκριμένο γράφημα είναι της $y=x^3$ και προχώρησαν στο ερώτημα 1.2. Να σημειωθεί πως από την πρώτη στιγμή η επικοινωνία τους ήταν αρκετά καλή, συνεργάζονταν ομαλά και χρησιμοποιούσαν το λογισμικό χωρίς να χρειάζεται οποιαδήποτε παρέμβαση που να τους το υπενθυμίζει.

Στο ερώτημα 1.2 α. από τους μαθητές ζητήθηκε να εμφανίσουν τη συνάρτηση f(x) η οποία αποτελεί την κατακόρυφη μετατόπιση της $g(x)=x^3$ εξαρτώμενη από τον δρομέα k. Αφού επεξηγήθηκε ο τρόπος λειτουργίας του δρομέα οι μαθητές ξεκίνησαν τις δοκιμές και τις μεταβολές στην τιμή του k, παρατηρώντας πως η νέα συνάρτηση μετακινείται κατακόρυφα εντοπίζοντας πως για k=0 επιτυγχάνεται η ταύτιση των f και g. (Εικόνα 2)



Εικόνα 2

Συνεχίζοντας οι μαθητές με το ερώτημα 1.2 β εισήγαγαν την τιμή k=3 και προσπάθησαν να εντοπίσουν τον τύπο της εμφανιζόμενης συνάρτησης. Από τους δύο μαθητές στην αρχή μόνον ο ένας κατάλαβε πως από τη στιγμή που η συνάρτηση f(x) αποτελεί μετακίνηση της $g(x)=x^3$ θα έχει τύπο που να «σχετίζεται»

με τον $y=x^3$. Ο άλλος μαθητής απέρριπτε κατηγορηματικά στην αρχή αυτή την ιδέα και πρότεινε επιλογή κάποιου διαφορετικού τύπου. Το σημαντικό όμως είναι πως έγινε χρήση και έλεγχος μέσω του λογισμικού. Δοκίμασαν άλλες αλγεβρικές μορφές τις οποίες και απέρριψαν ώσπου ο μαθητής που υποστήριζε πως πρέπει να δοκιμάσουν τύπο που να σχετίζεται με τον $y=x^3$ πληκτρολόγησε την $y=x^3/3$ είδε πώς μεταβλήθηκε και στη συνέχεια σκέφτηκε πως η πρόσθεση κάποιου σταθερού αριθμού θα οδηγήσει στην κατακόρυφη μετατόπιση της $y=x^3$. Παράλληλα με αυτή τη σκέψη όμως ήρθε και η παρατήρηση της γραφικής παράστασης πως έχει μετατοπιστεί κατά 3 μονάδες από την $y=x^3$, οπότε ο ζητούμενος αριθμός που θα έπρεπε να προστεθεί είναι ο 3. Δοκίμασε τον $y=x^3+3$ και τον επιβεβαίωσε.

Παρακάτω είναι το απόσπασμα της συνομιλίας των μαθητών για το ερώτημα 1.2 β

1. *Ρ: τι πρέπει να κάνουμε;*
2. *Μ: να βρούμε τον τύπο της νέας συνάρτησης.*
3. *Ρ: x^3 πρέπει να ναι. Να δοκιμάσουμε πάλι με το x^3 … τέτοιο…*
4. *Μ: Αυτό αποκλείεται. Δοκίμασε άλλη*
5. *Ρ: να δοκιμάσουμε άλλη λες; y=… όχι, x^2 δεν είναι σίγουρα. Όχι, δεν είναι…. (το δοκίμασε.) Πρέπει να είναι x^3 πάλι αλλά με δια ή επί. Κάτσε να δοκιμάσουμε πάλι. (Πληκτρολογεί την $y=x^3/3$ και βλέπει πως δεν είναι σωστό) Άλλη… . Αααα.. είναι + είναι τέτοιο, για να ανεβοκατεβαίνει...*
6. *Μ: μήπως ανεβαίνει με…*
7. *Ρ: αυτό πρέπει να ανεβαίνει τέτοιο, μια δύο τρείς μονάδες πάνω, πρέπει να είναι +3*
8. *Μ: Δώσε y=… y=x…*
9. *Ρ: κάτσε λίγο (ο Ρ πληκτρολογεί $y=x^3+3$)… +3… . Βγαίνει!!!*

Μέχρι αυτό το σημείο από τον τρόπο που ο Ραφαήλ υπολογίζει το +3 που πρέπει να προσθέσει (7) γίνεται φανερό πως δεν έχει συνδυάσει ότι η τιμή του k ταυτίζεται με τις μονάδες μετατόπισης. Όσον αφορά τον Μάνο μπορεί να πρότεινε, αρχικά, τελείως διαφορετικούς τύπους (4), όταν είδε την επαλήθευση της πρότασης του Ραφαήλ δείχνει να κατάλαβε πώς προέκυψε καθώς στο επόμενο ερώτημα 1.2 γ στο οποίο ζητείται η εύρεση της αλγεβρικής έκφρασης γραφημάτων για διάφορες τιμές του k (δικής τους επιλογής) εντόπιζε τους αλγεβρικούς τύπους μαζί με τον Ραφαήλ, τους δοκίμαζαν και τους επιβεβαίωναν.

Μέχρι αυτό το σημείο της διαπραγμάτευσης με το λογισμικό και τα φύλλα εργασίας και οι δύο μαθητές βρίσκονται στην πρώτη φάση, της εσωτερίκευσης, σχηματισμού

της έννοιας των μετασχηματισμών που οδηγούν σε κατακόρυφες μετατοπίσεις, σύμφωνα με την Sfard, καθώς εγκλιματίζονταν με τη διαδικασία προσπαθώντας να βρουν το μοτίβο, ακολουθώντας την ίδια πορεία: αλλαγή της τιμής του k, υπόθεση, δοκιμή και επιβεβαίωση. Να σημειωθεί εδώ πως από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές άρχισαν να βγάζουν συμπεράσματα, συμπληρώνοντας το ερώτημα 1.2 δ, τα οποία δηλώνουν μια ποιοτική αλλαγή η οποία κατέληξε στον προσδιορισμό του γενικού τύπου της κατακόρυφης μετατόπισης της $y=x^3$ (20). Συγκεκριμένα, συμπέραναν πως για θετικές τιμές του k η συνάρτηση μετακινούνταν προς τα πάνω ενώ για αρνητικές προς τα κάτω.

Ένα απόσπασμα της συνομιλίας των μαθητών ήταν το παρακάτω:

10. *Ρ: για θετικές τιμές του k αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης, δηλαδή μεγαλώνει*
11. *Μ: και στις αρνητικές μειώνεται*
12. *Ρ: και για αρνητικές μειώνεται*
13. *Ε: Ο τύπος;*
14. *Ρ: $f(x)=x^3\pm$… έναν αριθμό c ας πούμε*
15. *Ε: Ποιο είναι το c;*
16. *Ρ: c ας πούμε…*
17. *Ε: Βάλε συγκεκριμένα k. Αν το k το βάλεις θετικό, βαλ' το 5. Βαλ' το 5.*
18. *Ρ: Ε βγαίνει 5 τέλος πάντων το c. Το c παίρνει τιμές ανάλογα με το k, αν το k είναι αρνητικό τότε και το c είναι αρνητικό. Άρα η τιμή της συνάρτησης είναι $f(x)=x^3\pm k$;*
19. *Μ: Αυτό που έγραφες δοκίμασέ το*
20. *Ρ: $f(x)=x^3\pm k$*
21. *Μ: Ε δοκίμασέ το. Βαλ' το εδώ.*

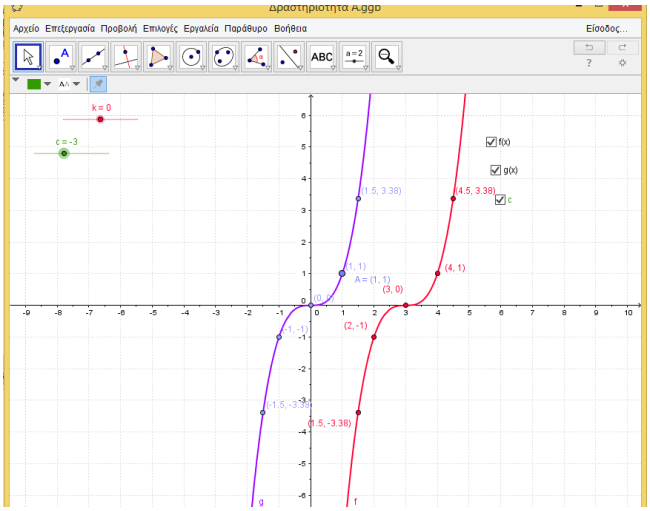
Το παραπάνω μπορεί να επιβεβαιώσει πως για την ώρα δεν έχει γίνει η σύνδεση της μεταβλητής k με το πόσο έχει μετατοπιστεί η $y=x^3$ καθώς ο Ραφαήλ χρησιμοποιεί άλλη μεταβλητή (14). Θα πρέπει επίσης να παρατηρηθεί πως εμφανίστηκε εμπόδιο για το πρόσημο της μεταβλητής k. Δεν ήταν άμεσα φανερό πως δεν χρειάζεται το $\pm$ k καθώς το $k\in R$ (18,20). Χρειάστηκαν ακόμα μερικές δοκιμές ώσπου ο Μάνος να εξηγήσει τα παρακάτω στον Ραφαήλ καταλήγοντας στον γενικό τύπο (24-27).

22. *Μ: εδώ στο κουτί θα βάλουμε..*
23. *Ρ: $y=x^3\pm k$*
24. *Μ: όχι γιατί και αν είναι αρνητικό θα βγει πλην στο τέλος.*
25. *Ρ: Α ναι ναι μας βγαίνει αρνητικό.*
26. *Μ: αν είναι +(-3) θα είναι -3*

27. P: α ναι ναι ναι σωστά

Ολοκληρώνοντας την ερώτηση 1.2 οι μαθητές έχουν μελετήσει τις κατακόρυφες μετατοπίσεις της $y=x^3$, έχουν καταλήξει σε συμπεράσματα τα οποία όμως δεν δηλώνουν αναγκαστικά ότι είναι σε θέση να τα γενικεύσουν για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις οποιασδήποτε συνάρτησης. Ακόμα δεν είναι φανερό αν έχουν κατακτήσει τη δεύτερη φάση, της συμπύκνωσης, σύμφωνα με τη Sfard, καθώς δεν παρατηρήθηκε αυτόματη αντιστοίχιση της μετατόπισης με την τιμή της μεταβλητής, τη γραφική παράσταση και την αλγεβρική έκφραση χωρίς την χρήση του λογισμικού για επιβεβαίωση ή απόρριψη των υποθέσεων.

Το ερώτημα 1.3 πραγματεύεται τις οριζόντιες μετατοπίσεις της $y=x^3$. Από τους μαθητές ζητήθηκε η ενεργοποίηση της μεταβλητής c και η διερεύνηση των μεταβολών που επέρχονται στη γραφική παράσταση της f(x) (η συνάρτηση που επηρεάζεται από τους δρομείς) εξαιτίας των διαφορετικών τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή c. Να σημειωθεί πως για διευκόλυνση των μαθητών ζητήθηκε η σταθεροποίηση της μεταβλητής k στο 0. (εικόνα 3)



Εικόνα 3

Οι μαθητές μετακίνησαν το δρομέα δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή c και άμεσα ο Μάνος διατύπωσε πως η μεταβλητή μετατοπίζει οριζόντια τη συνάρτηση f. Ο Ραφαήλ εξέφρασε με έκπληξη πως όταν το c γίνεται αρνητικό η συνάρτηση μετατοπίζεται προς τα δεξιά με το Μάνο να προσπαθεί να εντοπίσει μια αντιστοιχία

με την κατακόρυφη μετατόπιση πως όταν το k γινόταν αρνητικό πήγαινε προς τα κάτω. Συνεχίζοντας τις δοκιμές εντόπισαν πως η f(x) ταυτίζεται με την $g(x)=x^3$ για c=0 και κατέγραψαν τα συμπεράσματά τους.

Στο ερώτημα 1.3 β ζητείται η καταχώρηση του k=0 και c=3, η σύγκριση της νέας συνάρτησης f με την g, ο τύπος της και η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις. Ο Μάνος διάβασε την εκφώνηση και ο Ραφαήλ απάντησε πως η μετατόπιση ήταν οριζόντια προς τα αριστερά κατά 3 μονάδες με τον Μάνο να καταγράφει δείχνοντας να συμφωνεί. Όταν συζήτησαν για τον τύπο που θα έχει η f(x) ο Μάνος αναφέρει απευθείας πως θα τον εντοπίσουν ακολουθώντας την ίδια λογική με τις κατακόρυφες μετατοπίσεις λέγοντας «x^3 είναι πιστεύω εγώ» εννοώντας πως θα είναι μετασχηματισμός της x^3, προσθέτοντας πως θα πρέπει να προστεθεί το c αν είναι θετικό, χωρίς να εξηγεί τον τρόπο που θα το γράψουν. Ο Ραφαήλ κατάλαβε ότι ο Μάνος του πρότεινε την $y=x^3+3$ και του αναφέρει πως αυτό θα είναι σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση, εννοώντας την κατακόρυφη μετατόπιση. Αυτό αποτελεί στοιχείο πως ο Ραφαήλ έχει περάσει στην επόμενη, δεύτερη φάση κατά Sfard, αυτή της συμπύκνωσης, για την κατανόηση των κατακόρυφων μετατοπίσεων συνάρτησης, καθώς δεν χρειάστηκε να το δοκιμάσει για να επιβεβαιώσει τις υποψίες του αλλά ήξερε εξ' αρχής τι μεταβολές θα επιφέρει στη γραφική παράσταση ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός στην αλγεβρική έκφραση. Ο Μάνος όμως, όπως φάνηκε στην πορεία της συζήτησης, το είχε αυτό στο νου του. Προσπαθούσε να εισάγει με διαφορετικό τρόπο το c=3 στον τύπο χρησιμοποιώντας μια παρένθεση αλλά δεν μπορούσε να τον εντοπίσει. Πρότεινε ακόμα και τη χρήση αγκύλων αλλά δεν μπορούσε να δει πως ό,τι και αν πρότεινε ύστερα από απαλοιφή των παρενθέσεων κατέληγε πάλι στην $y=x^3+3$ γιατί δεν έγραφε το x+3 μέσα στο όρισμα. Αυτό που θα πρέπει να σημειωθεί είναι πως και οι δύο μαθητές προσπαθούσαν μόνο μέσω δοκιμών στο εργαλείο να βρουν τη θέση του «3» στον τύπο χωρίς να προσπαθούν ποιοτικά να καταλάβουν και να εντοπίσουν τι μεταβολές έχουν γίνει στη γραφική παράσταση και πώς αυτές πρέπει να επηρεάσουν τον αλγεβρικό τύπο, αν και έχουν στη διάθεσή τους κάποια σημεία πάνω στα γραφήματα. Κάποια στιγμή ο Μάνος έγραφε στο χαρτί ενώ ο Ραφαήλ δοκίμαζε τις δικές του σκέψεις στο εργαλείο και γίνεται ο παρακάτω διάλογος:

28. *Ρ: κάτσε νομίζω το βρήκα…. Έγραψα μείον, άρα πρέπει να είναι συν*
29. *Μ: μήπως να γράψουμε x+3 και όλο στην τρίτη;*
30. *Ρ: Όχι, $y=(x+3)^3$*
31. *Μ: ναι αυτό.*
32. *Ρ: ναι, εγώ έκανα το μείον μπας και βγει.*
33. *Μ: δοκίμασέ το*
34. *Ε: γιατί με μείον;*
35. *Ρ: γιατί με μείον νομίζω πάει δεξιά. Τα μπέρδεψα τώρα, πρέπει να πάει προς τα αριστερά, οπότε πρέπει να … κάτσε, κάτσε, το έχεις κάνει λάθος, πρέπει να… (γράφει ο Μάνος $y=(x+3)^3$) αυτό σκέφτηκα…*
36. *Μ: Να το!!!*

Από το παραπάνω απόσπασμα βλέπουμε πως ενώ από τη μια ίσως να έπαιξε κάποιο ρόλο η τύχη για την προσαρμογή του c=3 στον τύπο (28, 32), από την άλλη οι μαθητές λάμβαναν υπόψη τους ότι για θετικές τιμές του c το γράφημα μετακινούνταν προς τα αριστερά ενώ για αρνητικές δεξιά (35) κάνοντας φανερό το σημαντικό ρόλο του λογισμικού για την οπτικοποίηση και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Όσον αφορά τη σχέση της $g(x)=x^3$ και της $f(x)=(x+3)^3$ αν και ο στόχος του ερωτήματος ήταν να γράψουν f(x)=g(x+3) (για το συγκεκριμένο c=3), η συζήτηση οδήγησε τον Μάνο να διατυπώσει απευθείας τη γενική μορφή των οριζόντιων μετατοπίσεων συνάρτησης, f(x)=g(x+c). Συγκεκριμένα, ο Μάνος προέτρεψε τον Ραφαήλ να αλλάξει την τιμή του c και να προσπαθήσει να βρει τον τύπο της νέας συνάρτησης γιατί στην μεταξύ τους συζήτηση φάνηκε πως ο Ραφαήλ μπερδεύτηκε με τη μετακίνηση δεξιά – αριστερά και το αν θα πρέπει να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν γιατί και πάλι δεν παρατήρησε πως αρκεί η πρόσθεση της τιμής του πραγματικού αριθμού c. Κατά την συμπλήρωση όμως του φύλλου εργασίας (από τον Ραφαήλ, καθώς αυτός έγραφε εκείνη τη στιγμή) προέκυψε ακόμα μια παρανόηση από τον Ραφαήλ. Έγραψε $f(x)=g(x+c)^3$. Για τον Μάνο ήταν φανερό πως αυτό ήταν λάθος, τον διόρθωσε λέγοντας *«Μα αφού είναι από μόνο του $g(x)=x^3$. Πόσες δυνάμεις θα βάλουμε;»*

Από τα παραπάνω προκύπτει πως ο Μάνος έχει κάνει τις απαραίτητες νοητικές συνδέσεις για το ρόλο της μεταβλητής c που επηρεάζει τις οριζόντιες μετατοπίσεις της συνάρτησης $g(x)=x^3$ αλλά ίσως και γενικότερα μιας συνάρτησης. Σύμφωνα με τη

θεωρία της Sfard έχει ολοκληρώσει και τις δύο πρώτες φάσεις της εσωτερίκευσης και της συμπύκνωσης για την κατασκευή τα έννοιας των οριζόντιων μετατοπίσεων. Ο Ραφαήλ χρειάστηκε περισσότερες δοκιμές αλλά και τη βοήθεια του Μάνου για να συνδυάσει τα συμπεράσματα που κατέληξε μέσα από την παρατήρηση της συμπεριφοράς της συνάρτησης f(x) μεταβάλλοντας τις τιμές του δρομέα. Ο τρόπος όμως που αντιμετώπισε το ερώτημα 1.3γ, στο οποίο ζητούνταν οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων με δεδομένα τα k και c δηλώνει πως βρίσκεται σε παρόμοια φάση με τον Μάνο. Συγκεκριμένα, στο δεύτερο υποερώτημα που ζητείται ο τύπος της μετατοπισμένης συνάρτησης όταν k=0 και c=-1 αναφέρει «*Κάτσε να το βάλουμε με τη μια, μην κάνουμε τσάμπα δοκιμές.»* και στη συνέχεια εξηγεί στον Μάνο πως θα γράψουν $y=(x-1)^3$ καθώς *«Είναι πλην, πήγε προς τα δεξιά. Όταν είναι θετικό πάει προς τα αριστερά, όταν είναι αρνητικό πάει προς τα δεξιά.»*

Η τελευταία περίπτωση που ζητείται ο τύπος της συνάρτησης, για k=-1 και c=-3, συνδυάζει την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση της x^3. Ο Μάνος περιέγραψε πως η συνάρτηση έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα και οριζόντια και ο Ραφαήλ πρότεινε τον τύπο $y=(x-3)^3$ -1, τον επιβεβαίωσε με το εργαλείο και εξήγησε πως θα είναι -3 καθώς αν ήταν +3 θα πήγαινε αριστερά.

Τέλος, απευθείας ο Μάνος ανέφερε πως στο πλαίσιο για τον γενικό τύπο της συνάρτησης που εξαρτάται από τα k και c, πρέπει να γράψουν $y=(x+c)^3+k$. Ο Ραφαήλ λέει *«ναι $y=(x+c)^3+k$, γράψτο!»* και συνέχισαν στο επόμενο ερώτημα χωρίς καμία άλλη συζήτηση επ' αυτού.

Η ενασχόληση με το ερώτημα 1.4 οδηγούσε τους μαθητές στη μελέτη των κατακόρυφων και οριζόντιων μετατοπίσεων τυχαίας συνάρτησης. Ο Μάνος με τον Ραφαήλ ζήτησαν κάποιες διευκρινίσεις, αποφάσισαν να εισάγουν την $y=x^2$ (37) και είχαν τον παρακάτω διάλογο:

37. *Μ: γράψε $g(x)=x^2$. Προσαρμόστε τον τύπο, f(x), που καταλήξατε πως περιγράφει την κατακόρυφη και την οριζόντια μετατόπιση της $y=x^3$ στην δική σας καινούρια συνάρτηση.*
38. *Ρ: Κάτσε μην πας παρακάτω, Κάτσε να κάνουμε αυτό. …Προσαρμόστε τον τύπο… χμ… f(x)= (x+c)… (τον διακόπτει ο Μ)*
39. *Μ: Στο τετράγωνο συν k. Ωραία. Έλα να το δοκιμάσουμε*
40. *Ρ: Τι να γράψω; Να γράψω μια;*

41. *Ε: Σου λέει κατασκευάστε δύο δρομείς k και c λέει κλικ στο εικονίδιο του δρομέα, κλικ στην επιφάνεια, δώστε του όνομα c και k και εισάγετε τον τύπο στη γραμμή εντολών.*
42. *(Τα παιδιά κατασκευάζουν τους δρομείς)*
43. *Ρ: Ωραία, κάτσε να βάλουμε κάποιες τιμές. Για k=0 και για c=0…*
44. *Μ: τώρα συμπίπτουν. (οι f και g)*

Από την παραπάνω συνομιλία πολύ σημαντικό είναι ότι άμεσα ήταν σε θέση να κατασκευάσουν την $f(x)=(x+c)^2+k$ (38,39) δηλώνοντας πως κατανοούν πώς προσαρμόζονται οι μετασχηματισμοί σε μια τυχαία άλλη συνάρτηση, που μπορεί να έμοιαζε σε μορφή (και αυτή πολυωνυμική) αλλά τη στιγμή που έγιναν οι συναντήσεις με τις ομάδες οι μαθητές δεν είχαν στο οπλοστάσιο τους πολλά διαφορετικά είδη συναρτήσεων.

Ύστερα από την κατασκευή της νέας f(x) που μετατοπίζει τη δική τους συνάρτηση υπάρχουν μια σειρά από ερωτήματα τα οποία οδηγούν στη διερεύνησή της. Στο 1.4α δίνονταν συγκεκριμένες τιμές στα k και c και ζητούνταν ο τύπος και οι μετατοπίσεις που είχε υποστεί η συνάρτηση g(x) το οποίο ερώτημα οι μαθητές αντιμετώπισαν με ευκολία απαντώντας ορθά, με τον Ραφαήλ να δίνει επιπλέον εξηγήσεις «*αφού όταν το c είναι αρνητικό μετατοπίζεται προς τα δεξιά, θα βάλουμε -3 για να μετατοπιστεί τρεις θέσεις προς τα δεξιά και μια θέση, βασικά 1,5 κατακόρυφα προς τα κάτω αφού είναι αρνητικό το k. Οπότε για να κατασκευαστεί η f έχει μετατοπιστεί γράφε! Τρείς θέσεις προς τα δεξιά και – 1,5 προς τα κάτω.*» Στο 1.4β τα δεδομένα και τα ζητούμενα είναι αντίστροφα, δηλαδή ήταν δοσμένες οι μετατοπίσεις (οριζόντια και κατακόρυφη) και ζητούνταν ο τύπος που οδηγεί στις συγκεκριμένες μετατοπίσεις. Την απάντηση ανέλαβε να δώσει ο Ραφαήλ με την οποία ήταν σύμφωνος και ο Μάνος. Τέλος, στο 1.4γ που ήταν γνωστή η σχέση f(x)=g(x-6)+2 και ζητούνταν οι τιμές των k και c ο Μάνος αρχικά μετασχημάτισε την παραπάνω σχέση στην $y=(x-6)^2+2$ και στη συνέχεια ο Ραφαήλ ανέφερε «Οπότε το c είναι -6 και το k είναι 2».

Από τα παραπάνω προκύπτει πως οι δύο μαθητές έχουν κατακτήσει το λειτουργικό στάδιο και έχουν μεταβεί και σε μια ποιοτική κατανόηση, κατά την οποία μπορούν να δουν τις οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις ολοκληρωτικά με

διαφορετικούς τρόπους και μορφές τις οποίες μπορούν να συνδυάζουν και να μεταβαίνουν από τη μια στην άλλη με ευελιξία. Αναγνωρίζουν και ερμηνεύουν τους μετασχηματισμούς τόσο από την γραφική απεικόνιση όσο και από την αλγεβρική έκφραση, δεν χρειάζεται η διερεύνηση μέσω του εργαλείου και είναι σε θέση να εφαρμόζουν και να γενικεύουν τις ιδιότητες σε τυχαία συνάρτηση. Από τα παραπάνω προκύπτει οι μαθητές έχουν κατακτήσει την τρίτη και τελευταία φάση κατανόησης της Sfard, reification - υποστασιοποίηση, των οριζόντιων και κατακόρυφων μετατοπίσεων συνάρτησης, με μοναδικό σημείο που άφησαν ασχολίαστο να είναι ο λόγος που ο τύπος παίρνει αυτή τη μορφή στις οριζόντιες μετατοπίσεις.

Στη συνέχεια του φύλλου εργασίας οι μαθητές επεξεργάστηκαν τη συνάρτηση ημίτονο. Από τους μαθητές ζητήθηκαν βασικές ιδιότητες της συνάρτησης όπως Πεδίο Ορισμού, Σύνολο Τιμών, ύπαρξη ή όχι περιοδικότητας, διαστήματα μονοτονίας, ακρότατα και κατασκευή της γραφικής παράστασης. Οι μαθητές κατά την συμπλήρωση του Πεδίου Ορισμού και του Συνόλου Τιμών διαφώνησαν πολύ έντονα. Από τη μια ο Μάνος υποστήριζε ορθά πως το Πεδίο ορισμού είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί και το Σύνολο Τιμών είναι το διάστημα [-1, 1] (46, 48, 71, 73) ενώ από την άλλη ο Ραφαήλ επέμενε πως το Πεδίο Ορισμού είναι το [0,2π) (47, 52, 53, 69,) και το Σύνολο Τιμών να μην το προσδιορίζει στη συζήτηση. Ο Μάνος για αρκετή ώρα προσπάθησε να του εξηγήσει γιατί αυτό που πιστεύει είναι λάθος, (48, 50, 71) αλλά ο Ραφαήλ διαφωνούσε, αναφέροντας συνεχώς πως όταν μια γωνία έχει μέτρο μεγαλύτερο από 360° «χάνονται» οι περιστροφές και έτσι πάλι εξετάζουμε μέσα στο διάστημα [0, 2π). Ο Μάνος του εξηγούσε πως αυτό που έλεγε είναι το σύνολο τιμών (72-73) αλλά ο Ραφαήλ πεισματικά δεν τον πρόσεχε για να καταλάβει τι του λέει.

Το εμπόδιο που εμφανίζεται στον Ραφαήλ είναι στους ορισμούς του Πεδίου Ορισμού, του Συνόλου Τιμών και της περιόδου, δηλαδή προέρχεται από την έννοια της συνάρτησης. Υπολόγιζε σωστά τα ημίτονα των γωνιών που συζητούσαν αλλά δεν είχε ξεκάθαρο πως με τη διαδικασία που ακολουθούσε έβρισκε τιμές της συνάρτησης και πως τη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής μπορούν να πάρουν γωνίες ακόμα εκτός του διαστήματος [0, 2π). Επίσης, συμφωνούσε πως η

συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική αλλά δεν συνειδητοποιούσε πως στο διάστημα [0,2π) που πίστευε πως ορίζεται δεν εμφανίζει περιοδικότητα και συνάμα θεωρούσε πως η περίοδος είναι 2π. Από τα παραπάνω έχουμε σαν συμπέρασμα πως είχε μπερδέψει τις πληροφορίες από το μάθημα για τη συνάρτηση ημίτονο, με τον τρόπο υπολογισμού του ημιτόνου γωνιών με αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο και με τις έννοιες που συνοδεύουν τις συναρτήσεις (Π.Ο., Σ. Τ., Περιοδικότητα).

Παρακάτω παραθέτω κάποια τμήματα της συζήτησης των μαθητών:

45. *Ε: Ποιο είναι το Πεδίο ορισμού;*
46. *Μ: το R.*
47. *Ρ: όχι το R, είναι από το 0 μέχρι το 2π το πεδίο ορισμού*
48. *Μ: μα εδώ έχει και 5π/2*
49. *Ρ: άλλο τι το γράφει. Το γράφει για να μας παραπλανήσει!*
50. *Μ: Δεν υπάρχει κάτι τέτοιο. Να σου φέρω τις σημειώσεις να δεις;*
51. *Ε: Γιατί δεν σχεδιάζετε στο λογισμικό την y=ημx.*
52. *Ρ: Εγώ το θυμάμαι. Σήμερα το είπε η κυρία. 0 μέχρι 2π (τσακώνονταν!)*

…….

53. *Ρ: για τη μονοτονία τώρα, δεν θα κάνεις για το [0,2π); θα κάνεις [0,π/2) μετά [π/2,π) μετά για [π, 3π/2) και [3π/2,2π);*
54. *Μ: μα…*
55. *Ρ:Γιατί να μην καταλαβαίνει;*
56. *Ε: γιατί βρίσκουμε εκεί τη μονοτονία;*
57. *Ρ: Γιατί σ' αυτές τις τιμές είναι….*
58. *Ε: Τελικά είναι περιοδική συνάρτηση;*
59. *Μ: Είναι. φυσικά και είναι.*
60. *Ε: Ποιο πράγμα επαναλαμβάνεται;*
61. *Μ: Αυτή η κίνηση που ζωγραφίσαμε με μπλε και κόκκινο.*
62. *Ρ: Το κύμα*
63. *Ε: εγώ ένα βλέπω, πού επαναλαμβάνεται;*
64. *Μ: Να τα ξανακάνουμε. Φέρε το στυλό*
65. *Ρ: θέλω να ξέρω! Να επιμείνω ή όχι; είναι ή δεν είναι; (ρωτάει την Ε)*
66. *Μ: δεν είναι μην επιμένεις!*
67. *Ε: (προς τον Ρ) μας λες πως ορίζεται μόνο στο [0,2π) ή πως η περίοδος είναι [0, 2π);*
68. *Ρ: Ορίζεται μόνο στο [0,2π) η περίοδος είναι 2π.*

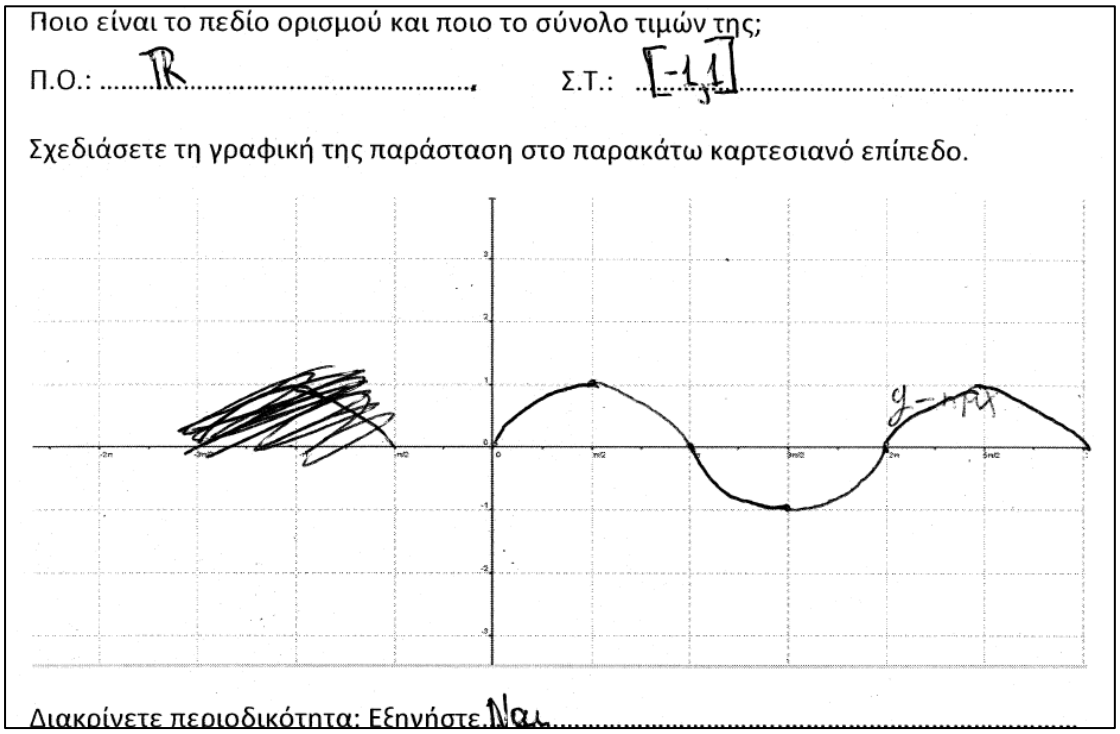
……..

69. *Ρ: Μα με τον κύκλο, είναι από το 0 μέχρι τις 360 μοίρες*
70. *Ε: μεγαλύτερη γωνία δεν μπορώ να έχω;*
71. *Μ: Τι είναι το πεδίο ορισμού, έξυπνε; Τι τιμές μπορεί να πάρει το x. Εδώ μπορείς να βάλεις μέχρι το 2π; Ό,τι θέλεις μπορείς να βάλεις εδώ.*
72. *Ρ: Ναι αλλά σε τιμές πάει από το ημίτονο χ, δεν έχει σημασία*
73. *Μ: Αυτό είναι το σύνολο τιμών…*
74. *Ρ: μετά το 2π το διαγράφουμε το 2π. Δεν το διαγράφουμε;*
75. *Μ: πας καλά;*
76. *Ρ: ωραία, πες πως βάζουμε το x πες αυτό. y=ημ372 αυτό δεν γράφεται και ίσον ημ(2π+12); Αυτό δεν φεύγει γιατί είναι μια ολόκληρη περιστροφή; Άρα κάνει ημ12, άρα εξετάζω στο [0,2π). Μπορούμε να το παραλείψουμε.*
77. *Μ: Δεν γράφουμε διαγώνισμα, παίρνω εγώ την ευθύνη!!! Μονοτονία! Τι γίνεται από το 0 ως το π/2;*
78. *Ρ: γιατί να το κάνουμε τώρα από το [0,2π);*

……..

79. *(ο Ρ συνεχίζει να επιμένει ο Μ γράφει μόνος του τη μονοτονία)*
80. *Μ: εδώ αυξάνεται…*
81. *Ε: στη μονοτονία τουλάχιστο συμφωνείτε;*
82. *Ρ: Ναι εδώ λέει πως είναι από 0 μέχρι 2π… (Ο Μ έχει γράψει σωστά τη μονοτονία στο φύλλο εργασίας)*
83. *Ε: από το –π/2 μέχρι το 0 η μονοτονία πως είναι; Εσύ λες ότι δεν υπάρχει, γιατί λες δεν ορίζεται στο [-2π,0).*
84. *Ρ: κάτσε γιατί με μπερδέψατε τώρα.*
85. *Ε: Από το -2π μέχρι το 0 λες δεν υπάρχει, μόνο από το 0 μέχρι το 2π ορίζεται η ημιτονοειδής.*
86. *Ρ: το –π/2 είναι απλώς η αρνητική φορά*
87. *Ε: ζητάω το ημίτονο αυτής της γωνίας. Λες ότι δεν υπάρχει. Δεν είναι τίποτα;*
88. *Ρ: Απλώς είναι η αρνητική φορά, δε είναι τίποτα…*

Το εντυπωσιακό όμως είναι πως ενώ έγινε όλη αυτή η συζήτηση με την άποψη του Μάνου για το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών να καταγράφεται στο φύλλο εργασίας, οι μαθητές δεν σχεδίασαν τη γραφική παράσταση σε όλο το R. (εικόνα 4)


Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της;

Π.Ο.: ℝ Σ.Τ.: [-1,1]

Σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο παρακάτω καρτεσιανό επίπεδο.

Διακρίνετε περιοδικότητα; Εξηγήστε. Ναι

Εικόνα 4 η γραφική παράσταση y=ημx από την ομάδα Α

Αυτό όμως που έχει τη μεγαλύτερη σημασία σε σχέση με τους μετασχηματισμούς της ημιτονοειδούς συνάρτησης, είναι πως τα εμπόδια που δημιουργούνταν από την έννοια της συνάρτησης γενικότερα αλλά και συγκεκριμένα εξαιτίας της συγκεκριμένης συνάρτησης ίσως είναι ικανά να επηρεάσουν της κατανόησης των μετασχηματισμών των τριγωνομετρικών και συγκεκριμένα της ημιτονοειδούς που επεξεργαζόμαστε εδώ.

Ύστερα από τη διαφωνία, ο Μάνος ανέλαβε τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας για την περιοδικότητα, τη μονοτονία και τα ακρότατα και προχώρησαν στο ερώτημα 1.5.

Το ερώτημα 1.5 πραγματεύεται τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της y=ημx. Οι μαθητές επεξεργάστηκαν το αρχείο GeoGebra «Δραστηριότητα Β», στο οποίο ήταν σχηματισμένη η συνάρτηση g(x)=ημx και τρεις ακόμα συναρτήσεις h(x), φ(x) και w(x) που αποτελούσαν κατακόρυφη, οριζόντια και συνδυασμό κατακόρυφης με οριζόντια μετατόπιση της ημιτονοειδούς αντίστοιχα, των οποίων οι αλγεβρικές εκφράσεις δεν ήταν γνωστές στους μαθητές.

Στο 1.5 α οι μαθητές εμφάνισαν την h(x) και απευθείας διατύπωσαν και κατέγραψαν, χωρίς να επαληθεύσουν, πως πρόκειται για την y=ημx+3 με το Μάνο, στη συνέχεια να συμπληρώνει μόνος του την απάντηση στο 1.5 β, πως η γενική μορφή των ημιτονοειδών συναρτήσεων που αποτελούν κατακόρυφη μετατόπιση της g(x)=ημx είναι η y=ημx+k. Προχωρώντας στο ερώτημα 1.5 γ εμφάνισαν τη συνάρτηση φ(x) και ο Μάνος ανέφερε πως πρόκειται για οριζόντια μετατόπιση της g(x)=ημx, λέγοντας χαρακτηριστικά *«έχει μετακινηθεί οριζόντια, την έχουν σπρώξει προς τα δεξιά»*. Ο Ραφαήλ αναγνώρισε πως η μετατόπιση είναι κατά 0.79 προς τα δεξιά το οποίο ύστερα από παρότρυνση, το αντιστοίχησε στο π/4, καταλήγοντας στον τύπο φ(x)=g(x-π/4). Ο Μάνος αποφάσισε πως χρειαζόταν να δοκιμάσουν την υπόθεση τους, γράφοντας y=ημ(x-π/4) επαληθεύοντας την υπόθεση τους. Στο υποερώτημα 1.5 δ που ζητήθηκε η γενική μορφή οριζόντιων μετατοπίσεων της g(x)=ημx ο Μάνος έγραψε μόνος του y=ημ(x+c) χωρίς να το συζητήσει με τον Ραφαήλ.

Συνεχίζοντας στο επόμενο υποερώτημα, 1.5 ε, ο Ραφαήλ διάβασε την εκφώνηση και απάντησε μόνος του και αυτός, με τον Μάριο να καταγράφει συμφωνώντας. Συγκεκριμένα, τα λόγια του ήταν: «*Ποιος είναι ο γενικός τύπος ημιτονοειδών συναρτήσεων που αποτελούν κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της g(x)=ημx; Λοιπόν γράψε y=ημ(x+c)+k.»* Η παραπάνω γενική μορφή ζητήθηκε από το φύλλο εργασίας να εισαχθεί στη γραμμή εντολών με ταυτόχρονη κατασκευή δρομέων, διαδικασία εύκολη για τους δύο μαθητές οι οποίοι πλέον χειρίζονταν με ιδιαίτερη ευκολία τις εντολές του λογισμικού. Για το υποερώτημα 1.5 στ, εμφάνισαν την w(x) της οποίας τον αλγεβρικό τύπο εντόπισαν συνδυάζοντας τα προηγούμενα συμπεράσματα τους αλλά και τη χρήση της συνάρτησης f(x)=ημ(x+c)+k που μόλις κατασκεύασαν. Αναλυτικότερα, ο ζητούμενος τύπος ήταν w(x)=ημ(x-π/4)+3, οι

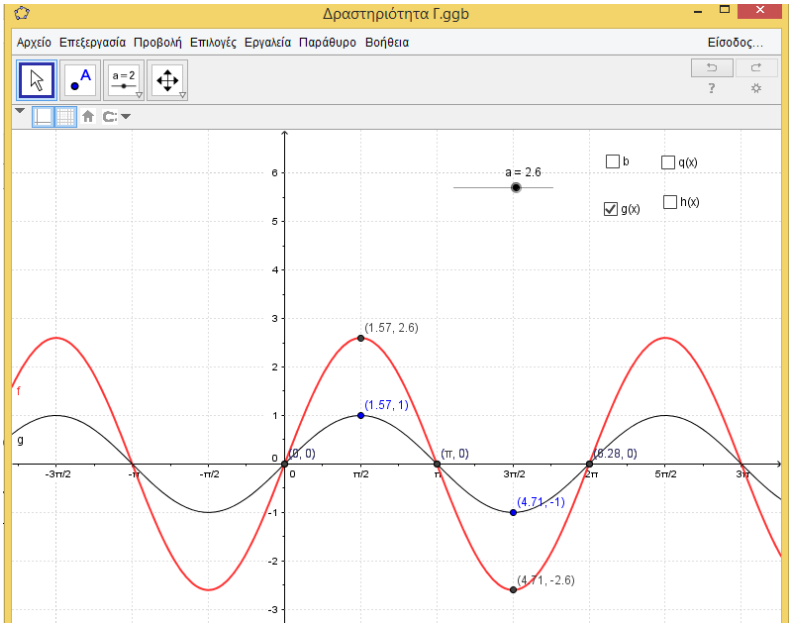
μαθητές αναγνώρισαν πως το k=+3 πριν τη μετακίνηση του δρομέα στην τιμή +3, ενώ για την τιμή του c μετακίνησαν τον αντίστοιχο δρομέα ώσπου να συμπέσουν οι δύο συναρτήσεις καταλήγοντας πως c=-0.8, το οποίο και το άφησαν -0.8 χωρίς να το γράψουν -π/4. Αντίστοιχα στο τελευταίο υποερώτημα 1.5 ζ σημείωσαν πως για την z(x)=ημ(x+π/2)-1, c=1.6 και k=-1 αλλάζοντας τις τιμές των δρομέων στη συνάρτηση που κατασκεύασαν. Παρατηρώντας εκεί πως δεν εντόπισαν τις τιμές των k και c απευθείας από τη μορφή του τύπου, αλλά μετακινώντας τους δρομείς, τους ζητήθηκε κατά πόσο είναι λογικές οι τιμές με βάση τις μετατοπίσεις που παρατήρησαν στο γράφημα σε σχέση με την y=ημx και με ευκολία ο Ραφαήλ εξήγησε τις μετατοπίσεις, χωρίς και πάλι να αναφέρει πως η μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1.6 είναι μετατόπιση κατά π/2.

Ολοκληρώνοντας το πρώτο φύλλο εργασίας με την ερώτηση 1.6, οι μαθητές ασχολήθηκαν με τις μεταβολές που επιφέρουν οι μεταβολές στις τιμές των k και c (δηλαδή οι κατακόρυφοι και οριζόντιοι μετασχηματισμοί) στην περίοδο, στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις θέσεις τους δίνοντας ορθές και πλήρεις απαντήσεις για καθένα από αυτά.

Συνοψίζοντας, οι μαθητές ακολούθησαν ένα προς ένα τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας με ταυτόχρονη χρήση και επεξεργασία των εφαρμογών στο λογισμικό, φτάνοντας σε ένα πολύ καλό επίπεδο στην κατανόηση της έννοιας των κατακόρυφων και οριζόντιων μετασχηματισμών συνάρτησης γενικότερα, αλλά και ειδικότερα της ημιτονοειδούς. Αξιοποιώντας τα οφέλη της χρήσης του λογισμικού έκαναν υποθέσεις, δοκιμές, επιβεβαίωσαν ή απέρριψαν οι ίδιοι τις εικασίες τους, έβγαλαν συμπεράσματα, μπήκαν στη διαδικασία να συζητήσουν, να εξηγήσουν, να συνδυάσουν και να ερμηνεύσουν τα δεδομένα και τις πληροφορίες. Είναι φανερό λοιπόν πως κατέκτησαν και την τελευταία φάση, αυτή της υποστασιοποίηση κατά Sfard και πως έχουν μια ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας των συγκεκριμένων μετασχηματισμών.

4.1.2 Φύλλο εργασίας 2^{ο} – μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι μαθητές συμπλήρωσαν το δεύτερο φύλλο εργασίας επεξεργαζόμενοι το αρχείου GeoGebra με όνομα «Δραστηριότητα Γ». Στην οθόνη του υπολογιστή έβλεπαν τη συνάρτηση g(x)=ημx (με το μπλε χρώμα) και την f(x) (με το κόκκινο χρώμα) η οποία επηρεαζόταν από τους δρομείς α και b. Για το ερώτημα 2.1 ήταν εμφανισμένος μόνο ο δρομέας α και στον κρυφό δρομέα b, είχε δοθεί η τιμή 1. (εικόνα 6)



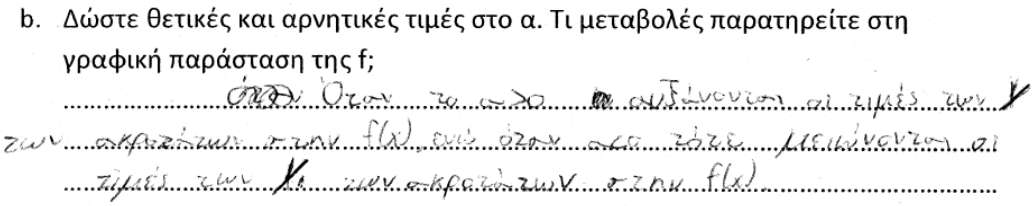
Εικόνα 6 «Δραστηριότητα Γ»

Οι μαθητές εξοικειωμένοι με τις εντολές του λογισμικού, έδωσαν στο α την τιμή 2, ο Μάνος άμεσα ανέφερε *«εεε… τα ακρότατα…»* και ο Ραφαήλ διατύπωσε: *«αλλάζουν μόνο τα ακρότατα. Περίοδος, μονοτονία και οι θέσεις των ακροτάτων μένουν τα ίδια»*. Η συζήτηση για τον εντοπισμό της τιμής του α όπου οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται, ξεκίνησε με την πρόταση του Μάνου για δοκιμές, αλλά στο μεταξύ ρωτήθηκαν αν διακρίνουν ποια σχέση συνδέει τις δύο συναρτήσεις που εμφανίζονται, εικόνα 6, οπότε απάντησε *το «χ μένει το ίδιο, το y διπλασιάζεται, άρα το α πρέπει να γίνει 1»* χωρίς να μετακινήσει το δρομέα. Ο Ραφαήλ πρότεινε την τιμή α=0 και ο Μάνος του εξήγησε *«όχι, γιατί 1·1=1»* και τοποθέτησε την τιμή 1 στο δρομέα για να επιβεβαιώσει και το πρόγραμμα την υπόθεσή του. Από την εξήγηση που έδωσε ο Μάνος προκύπτει πως παρατήρησε τη μορφή των γραφικών

παραστάσεων και τα ακρότατά τους οπότε σκέφτηκε πως η ταύτιση των f(x) και g(x), σημαίνει πως η f(x) θα έχει μέγιστη τιμή το 1, οπότε θα πρέπει f(x)=1·g(x), άρα *1·1=1.* Κατά τη συμπλήρωση του ερωτήματος 2.1 α εντοπίζουμε πως ο Μάνος έδειξε ιδιαίτερη άνεση, έβρισκε σχέσεις και ήταν σε θέση να δίνει ερμηνείες στις παρατηρούμενες μεταβολές. Παράλληλα όμως, αντελήφθη πως ο Ραφαήλ δυσκολευόταν, οπότε κατά την επεξεργασία του ερωτήματος 2.1 β, όπου ζητείται η παρατήρηση των μεταβολών που προκαλούν οι διαφορετικές τιμές του α, προσπάθησε να τον βοηθήσει όπως προκύπτει από το παρακάτω απόσπασμα (90, 92, 94).

89. *Ρ: οπότε όταν παίρνει θετικές τιμές το α αυξάνεται.. αυξάνεται*
90. *Μ: Τι αυξάνεται;*
91. *Ρ: μεγαλώνουν τα ακρότατα, μεγαλώνουν οι τιμές των ακροτάτων.*
92. *Μ: ναι. Και για αρνητικές τώρα.*
93. *Ρ: αυξάνονται κ πάλι. Τι αυξάνεται;*
94. *Μ: Τα ακρότατα, καλά τα λες.*

Οι μαθητές ακολουθώντας τη λογική των προηγούμενων ερωτήσεων προσπάθησαν να βρουν διαφορές στη σχηματιζόμενη γραφική παράσταση ανάλογα με το πρόσημο του α. Κατέληξαν όμως, όπως προκύπτει από το παραπάνω απόσπασμα, πως είτε το α έπαιρνε όλο πιο μεγάλες θετικές είτε όλο και πιο μικρές αρνητικές τιμές τα ακρότατα αυξάνονταν (91,93) ενώ στη συνέχεια όταν συζήτησαν τον τρόπο που θα το συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας κατέληξαν στην παρακάτω διαφορετική απάντηση (εικόνα 7). Να σημειωθεί πως όσο ασχολούνταν με το ερώτημα 2.1 β δεν παρατήρησε κανείς τους τη μεταβολή της μονοτονίας.


b. Δώστε θετικές και αρνητικές τιμές στο α. Τι μεταβολές παρατηρείτε στη γραφική παράσταση της f;

Όταν τα α αυξάνονται οι τιμές των y των ακροτάτων στην f(x) ενώ όταν α τάσε μειώνονται οι τιμές των y των ακροτάτων στην f(x)

Εικόνα 7 «απάντηση ομάδας Α στο ερώτημα 2.1 β»

Στο ερώτημα 2.1 γ που ζητείται η μελέτη τη περιόδου, της μονοτονίας, των ακροτάτων και των θέσεων τους μεταβάλλοντας τις τιμές του α και οι δύο μαθητές απάντησαν πως μεταβάλλονται μόνο τα ακρότατα. Η παρατήρησή τους δεν ήταν επαρκής γι' αυτό και ρωτήθηκαν ξανά. Ο Μάνος στις δοκιμές παρατήρησε πιο προσεκτικά διατυπώνοντας: *«η περίοδος μένει η ίδια είτε είναι αρνητικό είτε θετικό το α. Η μονοτονία αν είναι αρνητικό πάει ανάποδα. (Το δοκιμάζουν) να, βλέπεις; Αντί να πάει έτσι, πάει ανάποδα.»*

Το ερώτημα 2.1 δ όπου ζητούνταν οι αλγεβρικές εκφράσεις που αντιστοιχούσαν στις γραφικές παραστάσεις για α= 2, α=-1 και α=0.5, αντιμετωπίστηκε γρήγορα από τους μαθητές. Οι απαντήσεις δόθηκαν ύστερα από αξιοποίηση της σκέψης του Μάνου στο πρώτο υποερώτημα για α=2 πως οι νέες τιμές είναι διπλάσιες από τις παλιές. Πρότεινε λοιπόν τον τύπο y=2ημx και τον επιβεβαίωσε. Οι ερωτήσεις που έκανε ο Ραφαήλ βλέποντας τη γραφική παράσταση (για α=2) ήταν «τι αυξήθηκε τώρα και πήγε έτσι;» οι οποίες δηλώνουν αδυναμία κατανόησης του διπλασιασμού των τιμών που είχε σκεφτεί ο Μάνος. Από τη στιγμή που επιβεβαιώθηκε η εικασία του Μάνου από το λογισμικό ο Ραφαήλ κατασκεύασε αναλογικά τους τύπους για τις άλλες δύο τιμές του α αλλά δεν φανερό πως ήταν ικανός να εξηγήσει το λόγο μετασχηματισμού του τύπου όπως έκανε ο Μάνος. Τέλος, ο Μάνος με τη σύμφωνη γνώμη του Ραφαήλ έδωσε τη γενική μορφή αυτών των συναρτήσεων, y=αημx και την συμπλήρωσε στο φύλλο εργασίας.

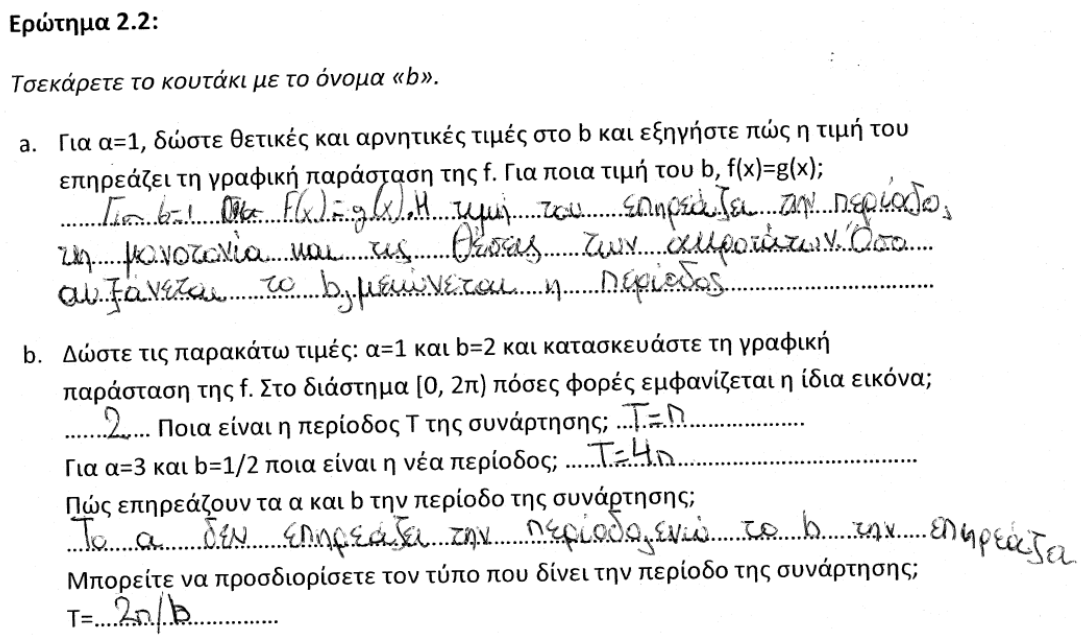
Κατά τη διάρκεια ενασχόλησης με το ερώτημα 2.1 οι μαθητές σταδιακά ανακάλυπταν και έχτιζαν την έννοια του μετασχηματισμού που προκαλείται από το συντελεστή α στην y=αημx. Όπως περιγράφει η Sfard στις φάσεις σχηματισμού μιας έννοιας προηγήθηκε η φάση της εσωτερίκευσης όταν οι μαθητές δοκίμαζαν μέσω του δρομέα και παρατηρούσαν τη λειτουργία του συντελεστή α και τις αλλαγές που επιφέρει στη συνάρτηση, δηλαδή την παρατήρηση της αλλαγής των ακροτάτων. Στη συνέχεια, ο εντοπισμός της σχέσης των τιμών της νέας συνάρτησης σε σχέση με την ημx από τον Μάνο, δηλώνει την πιο συστηματική παρατήρηση που οδήγησε στην εξαγωγή περισσότερο ποιοτικών συμπερασμάτων. Η εύρεση και αναγνώριση των τύπων που αντιστοιχούν στις ζητούμενες συναρτήσεις υποδηλώνει το πέρασμα στη φάση της συμπύκνωσης καθώς οι αλγεβρικές εκφράσεις εντοπίζονταν πριν τη

δοκιμή τους στο εργαλείο. Στις δύο αυτές φάσεις έφτασαν και οι δύο μαθητές. Το γεγονός πως ο Μάνος εξήγησε τη σχέση y=αημx και εντόπισε την αλλαγή της μονοτονίας για α<0 δηλώνει πως έφτιαξε μια πιο ολοκληρωμένη έννοια για το συγκεκριμένο μετασχηματισμό κατακτώντας και την τελευταία φάση της υποστασιοποίησης. Ο Ραφαήλ κατανόησε περισσότερο τον τρόπο που λειτουργεί ο μετασχηματισμός παρά τη δομή του.

Στο ερώτημα 2.2 οι δύο μαθητές ασχολήθηκαν αρχικά με την συνάρτηση y=ημbx και στη συνέχεια με την y=αημbx, δηλαδή επεξεργάστηκαν το ρόλο του συντελεστή b, χωρίς να γνωρίζουν τη θέση του στην αλγεβρική έκφραση. Οι μαθητές ενεργοποίησαν το κουτάκι με όνομα b, τοποθέτησαν το α=1 και από την αρχή ο Μάνος ανακοίνωσε *«θα το μεταβάλλω να δω τι γίνεται»*. Η ορθή επιλογή του 1, από το Ραφαήλ, ως η τιμή του b για την οποία οι g(x)=ημx και f(x) ταυτίζονται πιθανό να ήταν τυχαία, καθώς δεν δόθηκε κάποια εξήγηση, ούτε είχε ξεκινήσει να μετακινεί το δρομέα ο Μάνος. Οι μαθητές συνέχισαν τις αλλαγές στο δρομέα του b και έβγαλαν το συμπέρασμα πως επηρεάζει την περίοδο της συνάρτησης. Ο Ραφαήλ θέλησε να γίνει πιο συγκεκριμένος αναφέροντας πως όσο το b παίρνει τιμές πιο κοντά στο μηδέν, τόσο η περίοδος της συνάρτησης μικραίνει. Ο Μάνος τον διόρθωσε πως η περίοδος αυξάνεται και συνέχισαν συζητώντας και διαφωνώντας για τον ορισμό της περιόδου, με τον Μάνο να εξηγεί μέσω της φυσικής πως περίοδος είναι ο χρόνος για την ολοκλήρωση ενός κύματος ενώ ο Ραφαήλ να υποστηρίζει πως περίοδος είναι ο αριθμός των κυμάτων μέσα στο διάστημα [0,2π].

Στη συνέχεια της συζήτησης για τον ορισμό της περιόδου ο Μάνος θυμήθηκε από τα μαθήματα στο σχολείο πως η περίοδος δίνεται από τη σχέση T=2π/ω και μαζί με τον Ραφαήλ απάντησαν πως το *«ω είναι αυτό που μπαίνει μπροστά από το x»* στον τύπο της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Ο Μάνος αναγνώρισε πως το ω στην περίπτωσή μας ταυτίζεται με το b, καθώς σε τόσα διαστήματα, όσο είναι η τιμή του b, μοιράζεται η περίοδος T=2π της ημιτονοειδούς y=ημx δίνοντας τη νέα περίοδο. Εξαιτίας της παρανόησης της έννοιας της περιόδου ο Ραφαήλ αντέδρασε και πάλι προτείνοντας το b να είναι η περίοδος συγχέοντας την περίοδο με τον αριθμό των κυμάτων στο διάστημα 2π. Τελικά, ο Ραφαήλ δεν όρισε σωστά την περίοδο και

απλά συμβιβάστηκε με την άποψη του Μάνου γράφοντας τα παρακάτω στο φύλλο εργασίας. (εικόνα 8)



Ερώτημα 2.2:

Τσεκάρετε το κουτάκι με το όνομα «b».

a. Για α=1, δώστε θετικές και αρνητικές τιμές στο b και εξηγήστε πώς η τιμή του επηρεάζει τη γραφική παράσταση της f. Για ποια τιμή του b, f(x)=g(x);

Για b=1 θα f(x)=g(x). Η τιμή του επηρεάζει την περίοδο, τη κανονικία και τις θέσεις των ακροτάτων. Όσο αυξάνεται το b, μειώνεται η περίοδος

b. Δώστε τις παρακάτω τιμές: α=1 και b=2 και κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της f. Στο διάστημα [0, 2π) πόσες φορές εμφανίζεται η ίδια εικόνα;

2 Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης; Τ=π

Για α=3 και b=1/2 ποια είναι η νέα περίοδος; Τ=4π

Πώς επηρεάζουν τα α και b την περίοδο της συνάρτησης;

Το α δεν επηρεάζει την περίοδο, ενώ το b την επηρεάζει

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο που δίνει την περίοδο της συνάρτησης;

Τ=2π/b

Εικόνα 8

Το επόμενο υποερώτημα 2.2 γ ζητά τις αλγεβρικές εκφράσεις των γραφικών παραστάσεων με συγκεκριμένες τιμές στα α και b (στην πρώτη περίπτωση α=1 και b≠1 ενώ στις επόμενες δύο α≠1 και b≠1). Οι μαθητές ακολούθησαν τη σκέψη πως το b ταυτίζεται με το γνωστό από το μάθημα «ω» το οποίο αποτελεί το συντελεστή του x, οπότε σχημάτισαν τους σωστούς τύπους που αντιστοιχίζονταν με καθεμία από τις δεδομένες γραφικές παραστάσεις.

Στις περιπτώσεις που α≠1 δεν υπήρξε κάποια δυσκολία στην προσαρμογή του τύπου ούτε για συγκεκριμένες τιμές των α και b, ούτε για το σχηματισμό της γενικής μορφής y=αημbx. Αναλυτικότερα, για α=3 και b=0.5 συμπλήρωσαν y=3ημ0.5x και για α=2.5 και b=-3, y=2.5ημ(-3x), το οποίο όμως δεν προσπάθησαν να το τροποποιήσουν σε y=-2.5ημ3x. Η μετατροπή του y=2.5ημ(-3x) σε y=-2.5ημ3x θα μπορούσε να γίνει είτε σκεπτόμενοι πως οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετα ημίτονα, είτε παρατηρώντας ότι η γραφική παράσταση της y=2.5ημ(-3x) είναι η συμμετρική της y=2.5ημ3x ως προς x'x, οπότε ο τύπος γίνεται y=-2.5ημ3x. Οι μαθητές αρκέστηκαν στη συμπλήρωση των μεταβλητών στη σωστή θέση στον τύπο χωρίς κάποια βαθύτερη σκέψη ή τροποποίηση.

Το ερώτημα 2.2 και κυρίως ο πειραματισμός με την εφαρμογή στο λογισμικό οδήγησε τους μαθητές σε βαθύτερη διερεύνηση της y=αημx και της y=ημbx από αυτήν που είχε γίνει στο σχολείο. Το πιο σημαντικό είναι η αντίστροφη πορεία που αναγκάστηκαν οι μαθητές να ακολουθήσουν. Στο σχολικό βιβλίο γινόταν περιγραφή των δύο συναρτήσεων και η κατασκευή των γραφικών τους παραστάσεων για την παρατήρηση των μετασχηματισμών, ενώ εδώ έπρεπε να αναγνωριστεί η αλγεβρική έκφραση που γραφικά απεικονίζεται με τα διαγράμματα που ήταν σχηματισμένα, μέσω της ερμηνείας των μετασχηματισμών που απεικονίζονταν και μπορούσαν να μεταβληθούν με δυναμικό τρόπο. Τέλος, η κατασκευή της y=αημbx από τους μαθητές δηλώνει την κατανόηση της ανεξαρτησίας των δύο μεταβλητών.

Ακολουθώντας τις τρεις φάσεις της Sfard για το σχηματισμό της έννοιας του μετασχηματισμού που οφείλεται στη μεταβλητή b στις y=ημbx και y=αημbx οι μαθητές έχουν κατακτήσει και τη δεύτερη φάση, την συμπύκνωση. Φαίνεται να έχουν καταλάβει τον τρόπο που λειτουργεί ο μετασχηματισμός δηλαδή πώς επηρεάζεται η συνάρτηση από τη μεταβλητή b και έχουν αυτοματοποιήσει τη μετάβαση από τη γραφική αναπαράσταση στην αλγεβρική. Η τρίτη και τελευταία φάση δεν είναι φανερό πως έχει κατακτηθεί. Αυτό κυρίως που είναι αμφίβολο είναι η βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του μετασχηματισμού ή αν οι μαθητές ακολούθησαν ένα μη κατανοητό μοτίβο προερχόμενο από τη θεωρία του σχολικού εγχειριδίου το οποίο οδηγεί στο σχηματισμό σωστών αλγεβρικών εκφράσεων.

Στο δεύτερο μέρος του δεύτερου φύλλου εργασίας όπου ζητήθηκε η εφαρμογή των κατακόρυφων και οριζόντιων μετασχηματισμών στην y=αημx και στην y=αημbx παρατηρήθηκε εύκολη αντιμετώπιση των ερωτημάτων από τους δύο μαθητές. Προσάρμοσαν τους τύπους που σχημάτισαν στα ερωτήματα 1.2 και 1.3 και κατέληξαν στον y=αημb(x+c)+k παρατηρώντας και ερμηνεύοντας τους μετασχηματισμούς που είναι υπεύθυνη η κάθε μεταβλητή.

Κατά την επεξεργασία του ερωτήματος 2.3 Α, ζητήθηκε στην αρχή η κατασκευή της y=3ημx μέσω της μετατόπισης των δρομέων στις κατάλληλες θέσεις και στη συνέχεια η εμφάνιση και ο προσδιορισμός των εκφράσεων των q(x) και h(x) οι οποίες αποτελούν οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της y=3ημx αντίστοιχα.

Οι μαθητές για τον εντοπισμό των τύπων των q(x) και h(x) συζήτησαν τα παρακάτω:

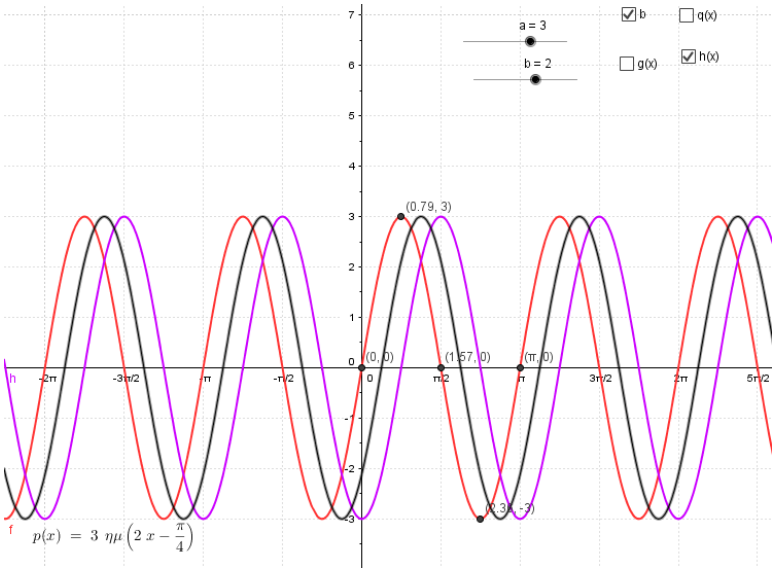
95. *Ρ: κατασκευάστε την y=3ημx, δίνοντας τις κατάλληλες τιμές στα a και b. Άρα α=3*
96. *Μ: και το b=1. Τσεκάρετε το κουτάκι «q(x)» και προσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης q(x) που εμφανίστηκε*
97. *Ρ: ανεβαίνουν και τα δύο τώρα; Τι θα κάνουμε τώρα;*
98. *Μ: λειτουργούν κάτω από σχέση*
99. *Ρ: τι σχέση;*
100. *Μ: κράτα α=3 και b=1. Και τώρα να βρούμε τον τύπο της πράσινης….. γράφε εσύ… y=3ημx…*
101. *Ε: τι μετατόπιση έχω;*
102. *Μ: Κάθετη. y=3ημx+ πόσο Ραφαήλ;*
103. *Ρ: +2;*
104. *Μ: Συν 2 είναι*
105. *Ρ: Συν 2 είναι! Κάτσε κάτσε να το γράψουμε!!*
106. *Μ&Ρ: Ναι!*

Από τον παραπάνω διάλογο διακρίνουμε την άμεση αναγνώριση των τιμών των α και b από τη μορφή της εξίσωσης που τους δόθηκε (95,96) κάτι που επιβεβαιώνει την κατάκτηση της φάσης της συμπύκνωσης για το σχηματισμό της έννοιας των αντίστοιχων μετασχηματισμών. Ο Ραφαήλ παρουσιάζει μια μικρή ανησυχία για τον τρόπο που θα αντιμετωπίσουν το συνδυασμό περισσότερων μετασχηματισμών (97) αλλά ο Μάνος δείχνει σίγουρος πως έχει καταλάβει τον τρόπο που θα το αντιμετωπίσει (98,100). Για να ενισχυθεί η συμμετοχή του Ραφαήλ ρωτήθηκαν το είδος της μετατόπισης που εμφανίζεται (101). Μπορεί, ο Μάνος να απάντησε στην ερώτηση αλλά συνέχισε αυτός να ρωτά το Ραφαήλ ώστε να τον βοηθήσει να συμμετέχει στη συζήτηση και στη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας (102). Ο Ραφαήλ απαντά στις ερωτήσεις του Μάνου στην αρχή με μια επιφύλαξη (103) αλλά στη συνέχεια δείχνει πολύ πιο σίγουρος για την επιλογή του (105) με την οποία συμφωνεί και ο Μάνος και τελικά επιβεβαιώνεται και από το λογισμικό (106). Ο Ραφαήλ όταν αναφέρει με σιγουριά ότι στην y=3ημx πρέπει να προστεθεί +2 για να προκύψει η μετατοπισμένη (105) δηλώνει πως υπήρξε η σκέψη ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις δίνονται από τη σχέση f(x)=g(x)+k οπότε εδώ πρότεινε να προστεθεί το +2.

Για την εύρεση της h(x) δούλεψαν ισοδύναμα και οι δύο μαθητές δηλώνοντας πως είχαν και οι δυο καταλάβει τον τρόπο έπρεπε να σκεφτούν. Ο Μάνος πρότεινε την εξίσωση y=3ημ(x+π/4) τονίζοντας πως το όρισμα έπρεπε να είναι ολόκληρο το x+π/4 από το οποίο προκύπτει πως σκέφτηκε τη σχέση f(x)=g(x+c) που περιγράφει

οριζόντια μετατόπιση της g(x) κατά c. Ο Ραφαήλ συμφώνησε πως στο όρισμα θα ήταν και η φάση π/4 αλλά του εξήγησε πως στις οριζόντιες μετατοπίσεις «*πηγαίνει με το αντίθετο»* εννοώντας πως η δεξιά μετατόπιση θα πρέπει να μεταφραστεί με αρνητικό πρόσημο στο π/4, προτείνοντας τον ορθό τύπο y=3ημ(x-π/4).

Στο ερώτημα 2.3 Β ζητήθηκαν οι τιμές των α και b για την κατασκευή μέσω των δρομέων της y=3ημ2x διαδικασία αυτόματη για τους δύο μαθητές και στη συνέχεια ο προσδιορισμός των νέων q(x) και h(x). Ο προσδιορισμός της q(x)=3ημ2x+2 ήταν άμεσος και από τους δύο μαθητές. Για τον προσδιορισμό της h(x) χρειάστηκε περισσότερη διερεύνηση. Και οι δυο μαθητές ήταν σύμφωνοι με την άποψη του Ραφαήλ πως *«με το π/4 έχει σχέση...»*, πως η φάση ήταν το –π/4 και πως θα πρέπει να γραφεί *«μέσα στην παρένθεση»* όπως δήλωσαν κάτι που φανερώνει πως έχουν παρατηρήσει ότι πρόκειται για οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά και πως αν δεν γραφεί στο όρισμα θα επέλθει κατακόρυφη μετατόπιση. Η πρώτη τους εικασία ήταν η εξίσωση p(x)=3ημ(2x-π/4), η οποία απορρίφθηκε με πρόταση τροποποίησης από τον Μάνο την y=3ημ(2x+π/4) η οποία δεν έγινε δεκτή από τον Ραφαήλ καθώς θα ήταν μετατοπισμένη προς την αντίθετη κατεύθυνση η συνάρτηση. Ο Ραφαήλ σύγκρινε τη γραφική παράσταση της f(x) και της p(x)=3ημ(2x-π/4) και συμπέρανε πως πρέπει να τοποθετήσει αντί της φάσης π/4, π/6. Από αυτή του την πρόταση προκύπτει πως παρατήρησε ότι ενώ η ζητούμενη συνάρτηση ήταν μετατοπισμένη κατά π/4 προς τα δεξιά, όταν ζητούσαν το σχεδιασμό της y=3ημ(2x-π/4) αυτή μετατοπιζόταν μεν προς τα δεξιά αλλά πολύ λιγότερο από π/4, οπότε πρότεινε την δοκιμή του π/6 ως μια μικρότερη τιμή από το π/4. (εικόνα 9)



Εικόνα 9

Αφού δοκίμασε την υπόθεσή του και παρατήρησε πως δεν ήταν σωστή, πρότεινε την y=3ημ2(x-π/4) η οποία ήταν και η ζητούμενη. Η επιλογή του να γράψει με τον αυτόν τον τρόπο την αλγεβρική σχέση δεν είναι τυχαία. Όταν ρωτήθηκε «*Συμπέρασμα; Τι έπρεπε να αλλάξουμε;*» απάντησε «*το x*» απ' όπου είναι φανερό πως τοποθετώντας την παρένθεση επηρέασε μόνο το x όπως ακριβώς σκέφτηκαν και στην ερώτηση 1.3 και στην 1.5 δ για τον προσδιορισμό των εξισώσεων για τις οριζόντιες μετατοπίσεις της $y=x^3$ και της y=ημx αντίστοιχα.

Το ερώτημα 2.4 ζητά σε πρώτη φάση την κατασκευή της y=αημ(b(x+c))+k ως μετακίνηση της g(x)=αημbx κατακόρυφα και οριζόντια με τη δημιουργία δύο νέων δρομέων k και c και στη συνέχεια τον εντοπισμό των τιμών των μεταβλητών α, b, c και k για τρεις συγκεκριμένες ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Οι μαθητές κατασκεύασαν τους δρομείς k και c, στη συνέχεια εισήγαγαν τη γενική μορφή y=αημ(b(x+c))+k και προσδιόρισαν τις τιμές των μεταβλητών για καθεμιά από τις τρείς δεδομένες συναρτήσεις. Ο προσδιορισμός των μεταβλητών γινόταν με τρείς τρόπους. Ο πρώτος ήταν απευθείας αναγνώριση από τον τύπο. Έτσι εντοπίζονταν οι μεταβλητές k, α και b (107). Η μεταβλητή c υπολογίστηκε με αυτόν τον τρόπο μόνο στην περίπτωση που η συνάρτηση είχε δοθεί στη μορφή y=αημ(b(x+c))+k. Ο δεύτερος τρόπος εντοπισμού των τιμών ήταν μέσω μετακίνησης των δρομέων ώστε να ταυτίζονται η ζητούμενη συνάρτηση με τη γραφική παράσταση που επηρεάζεται

από τους δρομείς (107). Και τέλος, ο τρίτος τρόπος ήταν μέσω αλγεβρικού μετασχηματισμού των τύπων που δεν ήταν στη μορφή y=αημ(b(x+c))+k (109). Η δεύτερη και τρίτη μέθοδος εφαρμόστηκαν από τους μαθητές για τον εντοπισμό των τιμών του c. Παρακάτω παρατίθεται απόσπασμα του διαλόγου για το ερώτημα 2.4.

107. ***P:*** *y=3ημ(2x+π/2)+5 λοιπόν, βάλε 3 το α, το 2 στο b, το 5 στο k και τώρα το π/2 μπαίνει στο c. Πώς θα το γυρίσουμε; Να τοο 0.8 βγαίνει το c. Πόσο βγαίνει το 0.8;*
108. *Ε: πώς θα μετασχηματιστεί ο τύπος που φτιάξατε;*
109. *Ρ: Φέρε το χαρτί. y=3ημ(2x+π/2)+5 το c το π/2 βγαίνει… Θα έπρεπε να είχα 1.6. άρα πρέπει να βγάλω ένα 2 απέξω. Οπότε π/4 πρέπει, για να γίνει π/2. Και το γυρίσαμε. Πόσο είναι το π/4;*
110. *Ε: περίπου 0.8. Λογικό;*
111. *Μ: Λογικότατο!*
112. *Ρ: Αυτό θα κάνουμε! Θα τα γράψουμε…*

Από το παραπάνω απόσπασμα παρατηρούμε πως ο Ραφαήλ έδινε τις απαντήσεις και έκανε τους απαραίτητους μετασχηματισμούς. Αυτό όμως δεν δηλώνει πως ο Μάνος δεν συμμετείχε. Ο Μάνος καταλάβαινε τι έκανε ο Ραφαήλ και από την απάντησή του (111) συμπεραίνουμε πως ήταν σε θέση εξηγήσει το λόγο που το c πρέπει να πάρει την τιμή π/4≈ 0.8 μετασχηματίζοντας τον δοσμένο τύπο.

Το ερώτημα 2.5 που είχε σαν ζητούμενο την κατασκευή της γραφικής παράστασης της y=0.5ημ3(x-π/4)-2 έφερε πολλές αντιδράσεις. Οι μαθητές δεν ήθελαν να σχεδιάσουν, χαρακτήρισαν το ερώτημα πολύ δύσκολο και πως δεν ήταν μέσα στην ύλη που είχαν διδαχτεί στο σχολείο. Από ερωτήσεις που τους τέθηκαν παρατηρήθηκε πως ήταν σε θέση να εντοπίσουν πως η προς κατασκευή συνάρτηση προέκυπτε από τη μετατόπιση προς τα κάτω κατά δύο μονάδες και κατά π/4 προς τα δεξιά της y=0.5ημ3x, αλλά δεν προσπάθησαν να σχεδιάσουν καμιά από τις δυο. Είναι φανερό πως η χρήση του λογισμικού τους διευκόλυνε πάρα πολύ, κάτι που φαίνεται και από το γεγονός πως πολλές φορές απετράπησαν οι μαθητές να μετακινήσουν κατάλληλα τους δρομείς ώστε να σχηματίσουν τη ζητούμενη συνάρτηση.

Το τελευταίο ερώτημα 2.6 παρουσιάζει τη γραφική παράσταση μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης που έχει υποστεί τις μετατοπίσεις που μελέτησαν οι μαθητές και ζητείται η αλγεβρική της έκφραση. Από γραφική αναπαράσταση σε αλγεβρική οι μαθητές εργάζονταν και νωρίτερα με το λογισμικό αλλά εδώ τελικά δεν κατέληξαν

σε ορθά συμπεράσματα. Παρατηρήθηκε μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα πρόταση από τον Μάνο πως η ζητούμενη ήταν η y=συνx+2.5, συνδυάζοντας και επεκτείνοντας τα συμπεράσματα που είχε βγάλει για τις ημιτονοειδείς . Ο Μάνος παρατήρησε πως αν δεν είχε υποστεί κατακόρυφη μετατόπιση, η συνάρτηση έμοιαζε με την συνημιτονοειδή. Δεν πρόσεξε όμως δύο χαρακτηριστικά: πόσο έχει μετατοπιστεί προς τα πάνω και το πλάτος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, τα σφάλματα του, ήταν πως δέχτηκε την κατακόρυφη μετατόπιση να ταυτίζεται με τη μέγιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση και πως εξίσωσε την τιμή του α με τη διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη τιμή και όχι με το ημιάροισμά της. Ο Ραφαήλ δεν ασχολήθηκε καθόλου με την ιδέα του Μάνου για συσχετισμό με την συνημιτονοειδή συνάρτηση αλλά προσπάθησε να εντοπίσει τις τιμές των μεταβλητών α, b, c και k ώστε να τις αντικαταστήσει στον τύπο που είχαν εντοπίσει. Αν είχε υπάρξει συνεργασία των μαθητών με τον έναν ή με τον άλλο τρόπο θα είχε επιτευχθεί η επίλυσή του. Κανένας από τους μαθητές δεν κατάφερε να επιβεβαιώσει τις υποθέσεις του και τελικά εγκατέλειψαν τις προσπάθειές τους.

4.2 Η Ομάδα Β

4.2.1 Φύλλο εργασίας 1^{ο} – μετασχηματισμοί συναρτήσεων

Στην ομάδα Β, η οποία αποτελούνταν από την Χρύσα (Χ) και το Δημήτρη (Δ), η συνεργασία ήταν τελείως διαφορετική απ’ ότι με την ομάδα Α. Οι μαθητές δεν μπορούσαν καθόλου να δουλέψουν σαν μια ομάδα μόνοι τους, χρειάζονταν συνεχώς υποστήριξη από εμένα με επεξηγήσεις στα ερωτήματα ενδιάμεσες ερωτήσεις και το κυριότερο συνεχή υπενθύμιση να δοκιμάζουν στο εργαλείο. Κοιτούσαν στην οθόνη στατικές εικόνες, σκέφτονταν μεμονωμένα τι να απαντήσουν με βάση τι είχαν ακούσει από τους καθηγητές τους στο σχολείο, χωρίς να πειραματίζονται, ειδικά στην αρχή, στο λογισμικό για να καταλήξουν σε κάποια συμπεράσματα.

Στο ερώτημα 1.1 συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών της $y=x^3$ αλλά αδυνατούσαν να αναγνωρίσουν τον τύπο της ακόμα και ύστερα από τις ερωτήσεις – βοήθεια που

τους προσφέρθηκε, οπότε αναγκαστικά ζήτησαν από το λογισμικό να τους εμφανίσει τον τύπο της συνάρτησης. Οι μόνες σκέψεις που διατύπωσαν ήταν από τον Δημήτρη πως τα αντίθετα x έχουν την ίδια τιμή και η Χρύσα εξήγησε πως η δεδομένη συνάρτηση είναι περιττή.

Στο ερώτημα 1.2 α ο Δημήτρης μετακινώντας, στην αρχή, το δρομέα δίνοντας όλο και μεγαλύτερες θετικές τιμές στο k ανέφερε: *«δηλαδή αυξάνεται, όσο πάμε προς τα δεξιά μεγαλώνει η κόκκινη γραμμή. Αυτό.»* (εννοώντας πως όσο ο δρομέας πηγαίνει προς τα δεξιά, δίνοντας δηλαδή, στην μεταβλητή k μεγαλύτερες τιμές οδηγεί όλο και σε μεγαλύτερες τιμές τη συνάρτηση δηλαδή «ανεβαίνει»). Στη συνέχεια τους ζητήσαμε να δώσουν και αρνητικές τιμές στη μεταβλητή, όπου η Χρύσα ανέφερε πως πηγαίνει προς τα κάτω. Από αυτό που ανέφερε ο Δημήτρης είναι φανερό πως κοιτούσε μόνο τη συνάρτηση f(x) και το δρομέα χωρίς να κάνει έμμεσα τη σύγκριση και με την g(x) συμπεραίνοντας πως η f(x) αποτελεί μετατόπιση της. Όταν μετακίνησαν το δρομέα και προς τα αρνητικά, είδαν πως ταυτίστηκαν οι δυο παραστάσεις και μετά να κατέβηκε κάτω από την g(x), οπότε διαπίστωσαν πως η f(x) με την g(x) σχετίζονται. Η Χρύσα στην ερώτηση πότε οι συναρτήσεις ταυτίζονται, πρώτα απάντησε για k=0 και στη συνέχεια ο Δημήτρης το επιβεβαίωσε. Οπότε είδαν πως η g(x) αποτελεί περίπτωση της f(x).

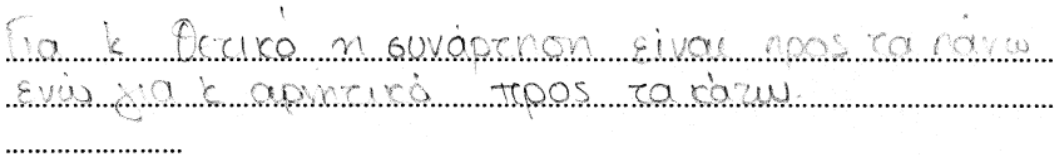
Έπειτα, στο ερώτημα 1.2 β ο αλγεβρικός τύπος της f(x) όταν k=3, ήρθε πολύ εύκολα για την Χρύσα τον οποίο και επιβεβαίωσε μέσω του λογισμικού ο Δημήτρης. Όταν της ζητήθηκε πώς σκέφτηκε στην αρχή έδωσε το λόγο στον Δημήτρη να εξηγήσει, ενώ η ίδια είχε εντοπίσει τον τύπο. Στη συνέχεια ανέφερε πως θυμήθηκε από τα μαθήματα στο σχολείο πως για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις αρκεί να προσθέσουμε στο τέλος τον αριθμό που αντιστοιχεί στις μονάδες μετατόπισης. Χαρακτηριστικά είπε *«έτσι τα είχαμε κάνει στο σχολείο και μου είχε μείνει! Ότι όταν προσθέτουμε κάποιον αριθμό πηγαίνει πάνω ή κάτω.»* Αρκέστηκαν και οι δυο στις θεωρητικές πληροφορίες από το σχολείο, οι οποίες είδαν πως επιβεβαιώνονταν τώρα από το λογισμικό και χωρίς να ψάξουν το λόγο που ισχύει κάτι τέτοιο, προχώρησαν στο επόμενο ερώτημα. Στο ερώτημα 1.2 γ εντόπισαν τους τύπους των συναρτήσεων και για άλλες τιμές του k και αυτό που παρατηρήθηκε είναι πως τους υπολόγιζαν σωστά ακολουθώντας μόνο το μοτίβο που υπέδειξε η Χρύσα. Ο

ακόλουθος διάλογος δείχνει πως δεν υπήρχε κάποια βαθύτερη κατανόηση, τουλάχιστο από τη μεριά του Δημήτρη καθώς ουσιαστικά δεν δίνει απάντηση στην ερώτηση γιατί μετατοπίζεται πάνω και κάτω η συνάρτηση g όταν στον τύπο προσθέτουμε έναν αριθμό (4):

1. *Ε: Είναι λογικό αυτό που λέει το βιβλίο όταν προσθέσουμε ένα αριθμό ή όταν αφαιρέσουμε, ανάλογα με το πρόσημό του το γράφημα πάει πάνω κάτω; Τι γίνεται με τις τιμές;*
2. *Δ: αλλάζουν*
3. *Ε: και γιατί πάει πάνω κάτω;*
4. *Δ: Γιατί όταν προσθέσουμε θα ανεβεί και όταν αφαιρέσουμε θα μειωθεί.. Εεε ξέρω γω;!*

Στο ερώτημα 1.2 δ που ζητούνται τα συνολικά συμπεράσματα και ο γενικός τύπος που δηλώνει την κατακόρυφη μετατόπιση μιας συνάρτησης g(x) ο Δημήτρης προσπάθησε να το εξηγήσει χρησιμοποιώντας και πάλι παράδειγμα, για k=-1 και δείχνοντας με τα χέρια του πως θα μετατοπιστεί προς τα κάτω η συνάρτηση, χωρίς να το εξηγεί ολοκληρωμένα για κάθε περίπτωση. Όταν ρωτήθηκαν πόσο θα μετατοπιστεί η $g(x)=x^3$ η Χρύσα απάντησε «-1, όσο θα είναι και το k. Και όσο θα είναι θετικό, ανάλογα ποιος αριθμός θα είναι, θα είναι τόσο προς τα πάνω.» Τελικά η απάντηση τους στο φύλλο εργασίας ήταν η παρακάτω, στην οποία δεν εξηγούν με σαφή τρόπο ποια συνάρτηση μετατοπίζεται:

Ερώτημα 1.2 δ Διατυπώστε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε για τη σχέση της μεταβλητής k και την αντίστοιχη μετατόπιση της συνάρτησης


Για k θετικό η συνάρτηση είναι προς τα πάνω ενώ για k αρνητικό προς τα κάτω.

Εικόνα 10

Ένα σημαντικό συμπέρασμα από την παραπάνω διαπραγμάτευση ήταν πως η Χρύσα έκανε τη σύνδεση πως το k δηλώνει τις μονάδες μετατόπισης, μόνο που εννοεί τη συνάρτηση f(x), καθώς δεν έχει συνειδητοποιήσει πως η f(x) αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση της g(x) κατά k πάνω ή κάτω ανάλογα με το πρόσημο του.

Στη συνέχεια ζητείται ο γενικός τύπος αυτής της οικογένειας συναρτήσεων με τους μαθητές να μην μπορούν να γενικεύσουν παρά μόνο με βοήθεια. Ο διάλογος ήταν ο παρακάτω:

5. *Χ: προσδιορίστε το γενικό τύπο αυτής της οικογένειας συναρτήσεων*

(οι μαθητές φάνηκαν προβληματισμένοι οπότε τους δόθηκαν εξηγήσεις για την έννοια της οικογένειας συναρτήσεων και τους ζητήθηκε ο τύπος της οποιασδήποτε f)

6. *Χ: αx+k; Όχι*
7. *Ε: ποια συνάρτηση είναι αυτή που μετατοπίστηκε;*
8. *Χ: η f(x) η κόκκινη*
9. *Ε: η μπλε ($y=x^3$) μετατοπίστηκε και φτιάχτηκε η κόκκινη f(x)*
10. *Χ: Α ναι*
11. *Ε: οπότε;*
12. *Χ: δεν ξέρω…*
13. *Ε: Για k=2 ποιος είναι ο τύπος;*
14. *Χ: $y=x^3+2$*
15. *Ε: για k=3*
16. *Χ: x^3+3*
17. *Ε: Για k=k;*
18. *Χ: x^3+k…;*
19. *Δ: ναι*
20. *Ε: ναι;*
21. *Χ: νομίζω… να το γράψω;*

…

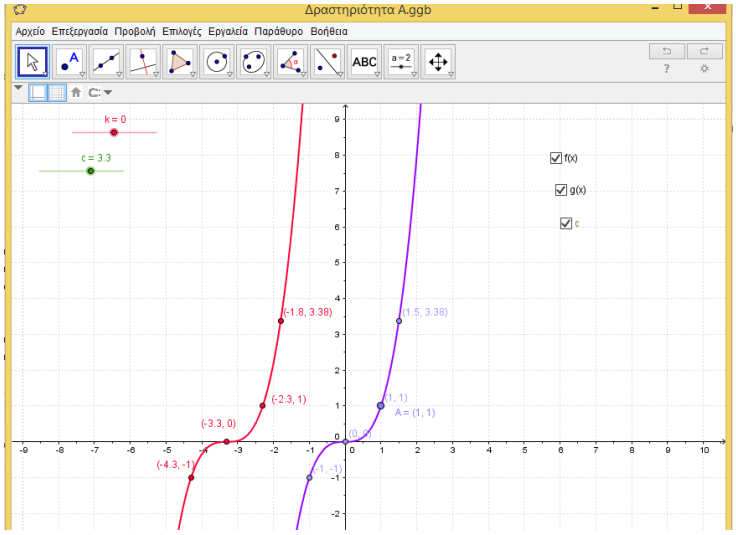
22. *Ε: οπότε τι σχέση έχει η f με την $g(x)=x^3$;*
23. *Δ: Α ναι άρα πάλι $f(x)=x^3+g(x)$*
24. *Ε: η x^3 είναι η g*
25. *Δ: Α ναι*
26. *Ε: Άρα;*
27. *Χ: f(x)=g(x)+k*

Η Χρύσα ενώ πρωτύτερα έδειξε να χρησιμοποιεί τις γνώσεις από το σχολείο και να αντιμετωπίζει τα ερωτήματα καλύτερα από τον Δημήτρη βρίσκοντας τον τύπο συγκεκριμένων συναρτήσεων, όταν ήρθε η στιγμή της γενίκευσης πρότεινε έναν τελείως διαφορετικό τύπο, (6) που πιθανό να προέκυψε από τον y=αx+β. Από την επιλογή της είναι φανερό πως ανέφερε έναν γνωστό τύπο από το σχολείο χωρίς να σκεφτεί τη μορφή των τύπων που είχε νωρίτερα προτείνει και επαληθεύσει. Να σημειωθεί επίσης πως η Χρύσα απαντάει διστακτικά (21) δηλώνοντας πως δεν είναι σίγουρη για τις απαντήσεις της και πως νιώθει το βάρος της συμπλήρωσης του φύλλου εργασίας, αφού δεν έχει καθόλου βοήθεια από το Δημήτρη. Με τη συζήτηση και τις ερωτήσεις που τέθηκαν, η Χρύσα προσανατολίστηκε και κατέληξε στο ζητούμενο f(x)=g(x)+k, (27) φτάνοντας σε ένα ικανοποιητικό επίπεδο την

κατάκτηση της έννοιας των κατακόρυφων μετασχηματισμών. Σε αντίθεση με αυτά, ο Δημήτρης δεν συμμετείχε στην συζήτησή μας παρά μόνο στο τέλος δείχνοντας πόσο πολύ μπερδεμένο του φαίνεται αυτό, (23) συμφωνώντας ευγενικά (25).

Σύμφωνα με τις φάσεις σχηματισμού μιας έννοιας κατά Sfard και οι δύο μαθητές βρίσκονταν στην πρώτη φάση της εσωτερίκευσης, μέχρι και το υποερώτημα 1.2 δ. Δεν συνεργάζονταν επιτυχώς, δεν πειραματίζονταν ιδιαίτερα χρησιμοποιώντας το λογισμικό, το χρησιμοποιούσαν μόνο για να επιβεβαιώνουν τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και δεν είχαν δώσει καμία ερμηνεία για το λόγο που ισχύουν αυτά που επαλήθευαν. Κατά την εύρεση της γενικής μορφής στο τέλος της ερώτησης 1.2 έγιναν φανερές δυσκολίες που δεν είχαν εμφανιστεί πρωτύτερα τις οποίες υπερπήδησε η Χρύσα αλλά όχι και ο Δημήτρης. Από τη Χρύσα δηλαδή εμφανίστηκε μια πιο βαθειά κατανόηση η οποία όμως θα μπορούσε να είναι ένα βήμα για το πέρασμα στην επόμενη φάση της συμπύκνωσης κατά Sfard.

Στο ερώτημα 1.3 όπου γίνεται η διερεύνηση των οριζόντιων μετατοπίσεων της $y=x^3$ οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγαλύτερες δυσκολίες απ' ότι στις κατακόρυφες μετατοπίσεις. Μετακίνησαν το δρομέα δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή c και παρατήρησαν τις αλλαγές που επήλθαν. Ο Δημήτρης κατάληξε στο συμπέρασμα: «*τώρα στο c όταν του δώσαμε θετικές τιμές τότε η συνάρτηση πήγε στα αριστερά δηλαδή στα αρνητικά, όταν το πήγαμε στα αρνητικά (το c) πήγε στα θετικά (η συνάρτηση), και στο 0 τώρα;*». Με παρόμοιο τρόπο εκφράστηκε και η Χρύσα *«για c θετικό η f γίνεται αρνητική; όχι, πηγαίνει προς τα αρνητικά».* Ο τρόπος που εξήγησαν οι μαθητές την οριζόντια μετατόπιση της $g(x)=x^3$, φανερώνει πως επικεντρώνονταν στην παρατήρηση του σημείου $A(0, g(0))\equiv(0,0)$ πάνω στον οριζόντιο άξονα. Μέσα από συζήτηση που ακολούθησε αλλά και τις δοκιμές τους στο λογισμικό προέκυψε πως οι μαθητές έδιναν στο c τιμές τέτοιες ώστε το τμήμα της f(x) που έβλεπαν στην οθόνη του υπολογιστή να είναι είτε στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο είτε στο πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο. Παρατηρούσαν τις τετμημένες των σημειωμένων σημείων και τις συσχέτιζαν με την τιμή του c, καταλήγοντας στο συμπέρασμα πως για αρνητικές τιμές στο c η συνάρτηση μετατοπιζόταν προς τα αρνητικά (αριστερά) ενώ για θετικές προς τα θετικά (δεξιά). (Εικόνα 11)



Εικόνα 11

Ύστερα από αρκετές δοκιμές και συζήτηση η Χρύσα έγραψε στο φύλλο εργασίας «Για c θετικό η f πηγαίνει προς τα αριστερά ενώ για c αρνητικό η f πηγαίνει προς τα δεξιά». Ο Δημήτρης υπέθεσε και με τη βοήθεια του λογισμικού επιβεβαίωσε πως το c=0 είναι η τιμή που η f(x) ταυτίζεται με την g(x).

Στο ερώτημα 1.3 β που σταθεροποιούνται τα k και c (k=0, c=3), η Χρύσα με τον Δημήτρη συνεργάστηκαν απαντώντας σωστά πως η f(x) κατασκευάζεται από την g(x) αν η g μετατοπιστεί προς τα αριστερά κατά 3 μονάδες αλλά η εύρεση του αλγεβρικού τύπου που αντιστοιχεί στην μετατοπισμένη συνάρτηση αποδείχτηκε ανεπιτυχής στόχος.

Μερικές από τις προσπάθειες της ομάδας περιγράφονται στον παρακάτω διάλογο:

28. *Χ: Ποιος είναι ο τύπος της f; Αχ αυτά δεν τα θυμάμαι!!*
29. *Δ: Όπως κάναμε πριν; (εννοεί με δοκιμές) ε δεν θα ναι πάλι… y=x… αφού πήγε προς τα αριστερά δεν θα είναι μείον;*
30. *Χ: όχι, νομίζω είναι συν αλλά αλλού είναι το συν, δεν πάει όπως πριν!*
31. *Δ: $y=x^3+3$…;*
32. *Χ: Βάλ' το αλλά νομίζω θα πάει προς τα πάνω. Βάλ το.*
33. *Δ: όχι. 3 είναι προς τα εκεί*
34. *Χ: Δοκίμασα το $3x^3$, αλλά όχι.*
35. *Δ: Μήπως είναι μείον; Δηλαδή $3x^3$-3 (το δοκιμάζουν) όχι…*
36. *Χ: δεν θα το βρούμε καθόλου αυτό!*

Για την εύρεση του τύπου της συνάρτησης η Χρύσα και πάλι προσπάθησε να βασιστεί στις πληροφορίες για από το σχολείο (28). Η μνήμη όμως δεν τη βοήθησε

οπότε κατέφυγε στην επόμενη εναλλακτική που ήταν η τυχαία τοποθέτηση του c=3 σε διάφορες θέσεις στην αλγεβρική έκφραση και ο έλεγχος των υποθέσεων μέσω του λογισμικού (30, 34). Σε παρόμοια τακτική κατέφυγε και ο Δημήτρης κάνοντας διάφορες υποθέσεις (29, 31, 35) οι οποίες απορρίφθηκαν ύστερα από την εισαγωγή τους στην εφαρμογή. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι η προσπάθεια να εφαρμόσουν τα συμπεράσματα που είχαν καταλήξει από τις προηγούμενες παρατηρήσεις τους. Ο Δημήτρης προσπάθησε να προσαρμόσει το πρόσημο με την μετατόπιση, μόνο που από τη μια παρασύρθηκε από τη διαίσθηση και ενώ η μετατόπιση ήταν προς τα αριστερά πρότεινε αρνητικό πρόσημο στο «3» (29) ενώ από την άλλη πρότεινε αλγεβρικές εκφράσεις που οδηγούσαν σε κατακόρυφες μετατοπίσεις. Η Χρύσα τον διόρθωσε ζητώντας θετικό πρόσημο στο 3 (30) και απορρίπτοντας τύπους στη μορφή y=g(x)+c εξηγώντας του πως οδηγούν σε κατακόρυφη μετατόπιση (32) κάτι που επιβεβαιώνει το πέρασμα στη φάση της συμπύκνωσης στον σχηματισμό της έννοιας των κατακόρυφων μετασχηματισμών. Τέλος να σημειωθεί πως δεν έγινε καμία προσπάθεια να μελετηθούν οι τιμές συγκεκριμένων σημείων με σκοπό τη γενίκευση και εξαγωγή συμπερασμάτων για τη συνάρτηση.

Ακολούθησαν και άλλες ανεπιτυχείς δοκιμές εκφράσεων ώσπου ζήτησαν από το εργαλείο την εμφάνιση του τύπου $y=(x+3)^3$. Έπειτα άλλαξαν την τιμή του c και προσδιόρισαν τους νέους τύπους κατ' αντιστοιχία με τον τύπο $y=(x+3)^3$. Η σχέση τέλος που συνδέει την f με τη g ήταν απόφαση μόνο της Χρύσας γράφοντας f(x)=(g(x)+3), από την οποία προκύπτει το συμπέρασμα πως δεν έγινε κατανοητή η θέση της μεταβλητής c στην αλγεβρική έκφραση και πως η διαδικασία της γενίκευσης τη δυσκόλεψε.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε πως οι δύο μαθητές δεν ξεπέρασαν τη φάση της εσωτερίκευσης για την κατασκευή της έννοιας των οριζόντιων μετασχηματισμών. Μπορεί να έκαναν πολλές δοκιμές και να αναγνώρισαν τον τρόπο που επηρεάζει η μεταβλητή c τη γραφική παράσταση της g αλλά δεν κατάφεραν να βγάλουν περισσότερα συμπεράσματα ώστε να κατασκευάσουν μόνοι τους αλγεβρικές εκφράσεις που περιγράφουν οριζόντιες μετατοπίσεις.

Με βάση τον τύπο που τους έδωσε το λογισμικό για k=0 και c=3 κατασκεύασαν σωστά και εύκολα στο ερώτημα 1.3 γ τις δύο πρώτες περιπτώσεις που η συνάρτηση είχε δεχτεί μόνο οριζόντιες μετατοπίσεις, δίνοντας παράλληλα και ερμηνεία όταν ρωτούνταν. Παρακάτω παρατίθεται το απόσπασμα για την τελευταία περίπτωση k=-1 και c= -3 όπου η συνάρτηση g έχει υποστεί τόσο οριζόντια όσο και κατακόρυφη μετατόπιση.

37. *Δ: μετατοπίζεται προς τα αριστερά εε προς τα δεξιά…*
38. *Χ: Αυτό*
39. *Ε: μόνο;*
40. *Δ: μμμ (αρνητική απάντηση!) γέλιο!*
41. *Χ: δεν ξέρω, τώρα δεν κατάλαβα γιατί βάλαμε… το c=-3 αλλά εγώ δεν βλέπω πουθενά να πηγαίνει...*
42. *Ε: τι επηρεάζει το c;*
43. *Χ: το…. χ, δεν ξέρω…*
44. *Ε: την οριζόντια ή την κατακόρυφη μετατόπιση;*
45. *Χ: την οριζόντια*
46. *Ε: το k;*
47. *Χ: την κατακόρυφη; Ναι. Άρα έχει υποστεί και οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση….. τώρα μ... μήπως είναι* $(x-3)^3+1$*;*
48. *Δ: ναι. Αυτό που είπες!* $(y=(x-3)^3-1)$

Οι μαθητές δεν αναγνώρισαν απευθείας πως η συνάρτηση έχει υποστεί δύο είδη μετατοπίσεων. Ο Δημήτρης περιέγραψε μόνο την οριζόντια μετατόπιση (37) χωρίς να αναγνωρίζει την κατακόρυφη μετατόπιση (40) και από τότε και στο εξής δεν εξέφρασε καμία άλλη ιδέα παρά μόνο δοκίμαζε στο λογισμικό τις ιδέες της Χρύσας (48). Η Χρύσα παρατήρησε πως αφού το c έπαιρνε την τιμή -3 αυτό θα έπρεπε να οδηγούσε σε οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης αλλά δεν κατανοούσε γιατί η συνάρτηση παρουσίαζε το συγκεκριμένο γράφημα (41) καθώς διέφερε από τα γραφήματα των προηγούμενων δύο περιπτώσεων. Από αυτή της την απορία είναι φανερό πως δεν είχε παρατηρήσει ούτε στη γραφική απεικόνιση πως υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, αλλά ούτε και την μη μηδενική τιμή του k. Όταν καθοδηγήθηκε, αναγνώρισε τις μετατοπίσεις και σχημάτισε τον τύπο αυτόματα (47).

Η Χρύσα παρουσιάζει εξέλιξη στον σχηματισμό της έννοιας των οριζόντιων μετασχηματισμών καθώς πλέον δείχνει πως έχουν αυτοματοποιηθεί οι αντιστοιχίες ανάμεσα στις τιμές της c και στις μετατοπίσεις της συνάρτησης. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα μπορούσε να θεωρηθεί πως η Χρύσα είχε κάνει σημαντικά βήματα

προς τη μετάβαση στη φάση της συμπύκνωσης για τις έννοιες των κατακόρυφων και οριζόντιων μετατοπίσεων της συνάρτησης $g(x)=x^3$. Ο Δημήτρης αντιθέτως αντιμετώπιζε αρκετές δυσκολίες κρατώντας τον στη φάση της εσωτερίκευσης για το σχηματισμό και των δύο ειδών μετατοπίσεων. Η Χρύσα διαρκώς προσπαθούσε να του εξηγεί και να του αφήνει το περιθώριο να εκφράσει τις απόψεις του αλλά ο ίδιος όσο παρατηρούσε πως δεν τα κατάφερνε, παραιτούνταν. Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι πως ενώ δεν καταλαβαίνει δεν ζητά διευκρινίσεις και επεξηγήσεις από την Χρύσα.

Τελειώνοντας με το ερώτημα 1.3 αναλαμβάνει η Χρύσα το σχηματισμό της γενικής μορφής οριζόντιων και κατακόρυφων μετατοπίσεων της $g(x)=x^3$ γράφοντας $f(x)=g(x)\pm c\pm k$ και όταν τους ζητήθηκε να δώσουν συγκεκριμένες τιμές στα k και c για έναν τελευταίο έλεγχο της απάντησής τους διαπίστωσαν πως είναι λάθος αλλά και πάλι δεν μπορούσαν να τον προσαρμόσουν για τις οριζόντιες μετατοπίσεις. Το ερώτημα τελικά έμεινε με τη λάθος απάντηση.

Το ερώτημα 1.4 οι μαθητές το άφησαν τελείως αναπάντητο. Στο ερώτημα αυτό από τους μαθητές ζητούνταν μια νέα συνάρτηση δικής τους επιλογής την οποία μέσω της χρήσης του εργαλείου θα μετατόπιζαν κατακόρυφα και οριζόντια. Τα προβλήματα που εμφανίστηκαν ήταν τρία. Πρώτον, δεν καταλάβαιναν τι ζητούσε το ερώτημα. Αυτό ξεπεράστηκε όταν του δόθηκαν αρκετές επεξηγήσεις. Δεύτερο εμπόδιο αποτελούσε η επιλογή της συνάρτησης. Στην αρχή επιλέχθηκε η $y=x+2$ και στη συνέχεια η x^2. Αυτό που προκύπτει από την επιλογή της $y=x+2$ είναι πως δεν έχουν καταλάβει ποια είναι η «αρχική-κύρια συνάρτηση», καθώς η $y=x+2$ αποτελεί μετατόπιση της $y=x$. Το τρίτο και τελευταίο πρόβλημα ήταν η αδυναμία τους να σχηματίσουν τη γενική μορφή που περιγράφει τις οριζόντιες μετατοπίσεις της x^3, κάτι που οδήγησε στην αδυναμία κατασκευής της αντίστοιχης γενικής μορφής για οποιαδήποτε συνάρτηση.

Το επόμενο και τελευταίο τμήμα του πρώτου φύλλου εργασίας έχει την εφαρμογή των κατακόρυφων και οριζόντιων μετατοπίσεων στην ημιτονοειδή συνάρτηση $y=ημx$. Στα εισαγωγικά ερωτήματα απάντησαν πως το Πεδίο Ορισμού ήταν το διάστημα [-1,1], (με αμφιβολία αν το διάστημα ήταν ανοιχτό ή κλειστό) και το

Σύνολο Τιμών ήταν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Και οι δύο απαντήσεις δόθηκαν χωρίς να φαίνονται σίγουροι οι μαθητές. Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης αποφάσισαν να βρουν τις τιμές για τα x=0, x=π/2, x=π, x=3π/2 και x=2π, κατασκευάζοντας τον τριγωνομετρικό κύκλο (51). Η εύρεση των σημείων και η κατασκευή της γραφικής παράστασης έγινε μόνο από τη Χρύσα (52, 54, 58, 59, 60).

Ένα τμήμα της συνομιλίας των μαθητών αποτελεί το παρακάτω:

49. *Δ: τη γραφική παράσταση από το -1 ως το 1;*
50. *Χ: ναι αλλά έχει… αχ… κάτι θυμάμαι, έχει σαν κύμα. Λοιπόν, μισό ημπ/2, ημ90...*
51. *Δ: Α ναι, πρέπει να κάνουμε τον κύκλο ναι, το θυμήθηκα*
52. *Χ: είναι 1 άρα είναι εδώ. Βόηθα κι εσυ!*
53. *Δ: κάνε το πρώτα εδώ πέρα κ μετά εκεί.*
54. *Χ: το θυμάμαι… θες να το κάνω, έλα ας το κάνω (σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο). Στο π το ημίτονο είναι…*
55. *Δ: εεε… ή και τα δύο…*
56. *Χ: ωχ και μας τα έκανε η κυρία…*
57. *Δ: ή θα είναι το ένα θετικό και το άλλο…*
58. *Χ: Βρε άνθρωπε…!! Να το πάρει το ποτάμι; 0. Το ημίτονο αυτής της γωνίας; Το ημ3π/2;*
59. *Δ: μη ρωτάς εμένα!*
60. *Χ: -1 και το ημ2π; 0. (τοποθετεί τα σημεία στο επίπεδο και τη σχεδιάζει) πάλι το ίδιο και από δω… (και από τις δύο πλευρές)*
61. *Δ: Συμφωνώ! Της έχω απόλυτη εμπιστοσύνη!*

Να σημειωθεί πως η Χρύσα κατασκεύασε σε όλο το R τη γραφική παράσταση λαμβάνοντας υπόψη της την περιοδικότητα της συνάρτησης (60), την οποία και συμπλήρωσε ορθά στο αντίστοιχο ερώτημα. Επίσης, ύστερα από την κατασκευή της γραφικής παράστασης τους προτάθηκε να βγάλουν συμπέρασμα για το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών από τη γραφική παράσταση, καθώς είχαν αμφιβολίες πρωτύτερα αλλά δεν κατάλαβαν πως ήταν γραμμένα αντίστροφα. Για το λόγο αυτό τους ζητήθηκαν οι δύο ορισμοί οι οποίοι όπως φαίνεται από τον παρακάτω διάλογο δεν τους ήταν καθόλου ξεκάθαροι (63-70).

62. *Ε: Θυμάστε τι είναι το Π.Ο.;*
63. *Χ: ναι.*
64. *Χ&Δ: Ποιες τιμές μπορεί να πάρει…*
65. *Χ: το ημίτονο*
66. *Ε: το y ή το x; Το f(x)=ημx ή το x;*
67. *Δ: ποιες τιμές μπορεί να πάρει η συνάρτηση*
68. *Χ: το y*
69. *Ε: και το σύνολο τιμών;*

70. Δ: πχ δεν υπάρχει ένας κανόνας που λέει ότι αν είναι υψωμένο στο τετράγωνο δεν μπορούμε να την ορίσουμε…. Δεν είμαι σίγουρος γι' αυτό…

Τέλος, ύστερα από συνεργασία, δόθηκαν με ακρίβεια τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα για το διάστημα [0,2π).

Συνεχίζοντας στο υποερώτημα 1.5 α, οι μαθητές αναγνώρισαν πως η συνάρτηση g(x) που εμφανίστηκε ήταν η ημx και η συνάρτηση h(x) αποτελεί μετατόπιση της g(x) κατά 3 μονάδες προς τα πάνω. Για την εύρεση της αλγεβρικής μορφής της h(x) ο Δημήτρης σκέφτηκε πως θα πρέπει να προστεθεί ο αριθμός 3 στο τέλος, αλλά πρότεινε την y=x+3. Τη δοκίμασε και την απέρριψε. Δεν είχε κατανοήσει τον τύπο f(x)=g(x)+k που είχαν συμπληρώσει στο ερώτημα 1.2. Ρωτήθηκαν τότε ποια συνάρτηση έχει μετατοπιστεί και η Χρύσα αναφέρει «*ναι, ημx+ κάτι…*» πληκτρολόγησε y=ημx+3 και επιβεβαίωσε την σκέψη της. Στο ερώτημα 1.5 β για τη γενική μορφή των κατακόρυφων μετατοπίσεων της ημιτονοειδούς, ο Δημήτρης *ανέφερε «αυτή που έβαλες πριν αλλά κάπου θα βάλουμε το k μέσα»,* η Χρύσα όμως συμπληρώνει πως στο τέλος πρέπει να προσθέσουν το ±k γράφοντας y=sin(x) ±k. Κανένας από τους δυο δεν έχει κατανοήσει πως το ± μπροστά από το k δεν χρειάζεται καθώς το k είναι πραγματικός αριθμός.

Οι μαθητές για το υποερώτημα 1.5 γ εμφάνισαν τη συνάρτηση φ(x) που αποτελεί οριζόντια μετατόπιση της g(x). Ο Δημήτρης διατύπωσε πως η g(x)=ημx έχει μετατοπιστεί προς τα κάτω για να φτιαχτεί η φ(x). Η Χρύσα του εξηγεί πως είναι οριζόντια η μετατόπιση καθώς οι τιμές της συνάρτησης είναι μεταξύ του -1 και του 1 και ο Δημήτρης αντιλαμβάνεται πως έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά π/4. Στη συζήτηση έπειτα, για την κατασκευή του τύπου της φ(x), ενώ ο Δημήτρης είχε κατανοήσει ότι η φ(x) αποτελεί οριζόντια μετατόπιση πρότεινε τον τύπο y=ημx+π/4, δηλώνοντας πως δεν είχε συνδέσει τη γραφική απεικόνιση των κατακόρυφων μετατοπίσεων με την αντίστοιχη αλγεβρική τους έκφραση. Δοκίμασε στο εργαλείο τη σκέψη του, την απέρριψε αλλά κατέληξε στο συμπέρασμα πως το πρόβλημα έγκειται στο πρόσημο του π/4. Η Χρύσα έχοντας κάνει τις ανάλογες συνδέσεις, του εξήγησε πως ο τρόπος που το έγραψε θα τον οδηγεί σε κατακόρυφες μετατοπίσεις και πως το ερώτημα συσχετιζόταν με το ερώτημα 1.3 που δεν το είχαν ολοκληρώσει. Το γεγονός πως η Χρύσα αναγνώρισε αυτή τη συσχέτιση δηλώνει πως

είχε κατανοήσει πως οι οριζόντιοι μετασχηματισμοί θα εμφανίζονται στην αλγεβρική έκφραση οποιασδήποτε συνάρτησης με τον ίδιο τρόπο αν και δεν τον έχει εντοπίσει ακόμα.

Καθώς συνέχισαν να σκέφτονται τον τρόπο γραφής του τύπου ο Δημήτρης ανέφερε «*μήπως είναι x+π/4;*» και πληκτρολόγησε y=ημ(x+π/4) διαπιστώνοντας πως η συνάρτηση μετατοπίστηκε προς τα αριστερά, χωρίς να φαίνεται να μπορεί να το αιτιολογήσει κάτι που δηλώνει την πιθανότατα τυχαία επιλογή του συγκεκριμένου τύπου. Η Χρύσα κάνοντας τη σύνδεση με τα συμπεράσματα για τις οριζόντιες μετατοπίσεις της $y=x^3$ προσθέτει «*ναι. Α θα βάλουμε μείον για να πάει προς τα δεξιά*» καταλήγοντας στη ζητούμενη εξίσωση y=ημ(x-π/4). Στη συνέχεια, χωρίς βοήθεια από τον Δημήτρη, έκανε τη γενίκευση για τις οριζόντιες μετατοπίσεις των ημιτονοειδών στο υποερώτημα 1.5 δ καταλήγοντας στον y=ημ(x±c) και γύρισε πίσω στο ερώτημα 1.3 συμπληρώνοντας ως γενικό τύπο τον f(x)=g(x±c)+k. Τέλος στο 1.5 ε, συμπλήρωσε τον y=ημ(x±c)±k ως την αλγεβρική εξίσωση που περιγράφει τις οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις της g(x)=ημx.

Για τη συμπλήρωση των 1.5 στ και ζ δόθηκαν επεξηγήσεις για τον τρόπο κατασκευής των δρομέων καθώς δεν είχαν αντιμετωπίσει το ερώτημα 1.4 που δίνονταν οι αντίστοιχες οδηγίες. Τα παιδιά εισήγαγαν τον τύπο f(x)=ημ(x+c)+k και όταν τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν τις μετατοπίσεις για διάφορες τιμές των μεταβλητών ο Δημήτρης ανέφερε ενθουσιασμένος «ο τύπος ήταν σωστός!», δηλώνοντας πως δεν είχε κατανοήσει πλήρως την πορεία της σκέψης της Χρύσας ούτε ήταν σε θέση να ελέγξει την ορθότητα του χωρίς τη χρήση του υπολογιστή. Η απαντήσεις στην 1.5 στ για τις τιμές των μεταβλητών δόθηκαν εύκολα από το Δημήτρη ύστερα από μετατοπίσεις των δρομέων και στη συνέχεια ο τύπος συμπληρώθηκε από τη Χρύσα. Στο τελευταίο υποερώτημα, 15 ζ, η Χρύσα απάντησε πως k=-1 και c=π/2 χωρίς να προηγηθεί μετακίνηση των δρομέων.

Στο τελευταίο ερώτημα του πρώτου φύλλου εργασίας οι μαθητές μελέτησαν τις μεταβολές στις ιδιότητες των συναρτήσεων (περίοδος, μονοτονία, ακρότατα και θέσεις ακροτάτων) ύστερα από κατακόρυφους και οριζόντιους μετασχηματισμούς. Το εργαλείο έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εξαγωγή συμπερασμάτων καθώς με το

δυναμικό χειρισμό των νέων συναρτήσεων μπορούσαν να παρατηρήσουν τις επικείμενες μεταβολές. Εμπόδια όμως εμφανίστηκαν επειδή οι μαθητές δεν είχαν ξεκάθαρες τις παραπάνω έννοιες. Μεταβάλλοντας το k κατέληξαν πως μεταβάλλονται η μονοτονία και τα ακρότατα, ενώ η περίοδος και οι θέσεις ακροτάτων παραμένουν αναλλοίωτα, και μεταβάλλοντας το c επηρεάζονται η μονοτονία, τα ακρότατα και οι θέσεις ακροτάτων ενώ η περίοδος όχι.

Με τη συμπλήρωση του πρώτου φύλλου εργασίας οι μαθητές ολοκλήρωσαν τη μελέτη των κατακόρυφων και οριζόντιων μετατοπίσεων συνάρτησης. Αυτό που παρατηρήθηκε ωστόσο, είναι πως δεν παρουσίασαν την ίδια πορεία και πρόοδο στην κατασκευή των δύο αυτών εννοιών. Από τη μία, ο Δημήτρης αντιμετώπισε αρκετές δυσκολίες και παρανοήσεις και είχε μικρή εξέλιξη. Η συμμετοχή του στις δραστηριότητες δεν ήταν ενεργή είχε κυρίως το ρόλο να εισάγει στο εργαλείο τις προτάσεις της Χρύσας για να επιβεβαίωση ή για απόρριψη. Οι δικές του παρατηρήσεις ήταν κυρίως επιφανειακές και είχε πολύ μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στη Χρύσα παρά στον εαυτό του. Σύμφωνα με τις φάσεις που προτείνει η Sfard για το σχηματισμό μιας έννοιας ο Δημήτρης μπορεί να θεωρηθεί πως κατέκτησε την πρώτη φάση της εσωτερίκευσης και στις κατακόρυφες αλλά και τις οριζόντιες μετατοπίσεις. Η Χρύσα αντίθετα, σταδιακά συνδύασε τις πληροφορίες που θυμόταν από τα μαθήματα στο σχολείο με τα συμπεράσματα που έβγαζε από την ενασχόληση με τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας και κυρίως από τις δοκιμές στο λογισμικό. Η παρατήρηση των μεταβολών στο εργαλείο έδωσε τις περισσότερες φορές νόημα σε αυτά που ήξερε θεωρητικά απ’ όπου προέκυψαν και οι απαντήσεις στα ερωτήματα και η κατασκευή των νέων εννοιών. Υπήρχαν όμως και περιπτώσεις, όπως ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών της y=ημx, που δεν ήταν σε θέση να την ερμηνεύσει και να αντλήσει πληροφορίες από το γράφημα για να ελέγξει τις απαντήσεις της. Ο σχηματισμός των εννοιών της κατακόρυφης και της οριζόντιας μετατόπισης συνάρτησης για τη Χρύσα έχει συμπληρώσει τη φάση της συμπύκνωσης και μπορεί να θεωρηθεί πως έκανε πολύ σημαντικά βήματα για τη φάση της υποστασιοποίησης.

4.2.2 Φύλλο εργασίας 2^{ο} ομάδας 2 – μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι μαθητές, εξοικειωμένοι με τη χρήση του λογισμικού, άνοιξαν το αρχείο «Δραστηριότητα Γ» όπου εμφανίζονταν ο δρομέας α, η g(x)=ημx και η f(x) που αποτελούσε μετασχηματισμό της g και άλλαζαν τις τιμές του α, μέσω του δρομέα, παρατηρώντας τις μεταβολές. Για το ερώτημα 2.1 α ο Δημήτρης εντόπισε άμεσα πως οι συναρτήσεις ταυτίζονται όταν α=1 αλλά οι διαπιστώσεις και τα συμπεράσματα για τη σχέση των δύο συναρτήσεων όταν α=2 ήταν λιγοστές. Και οι δύο μαθητές παρατηρούσαν μεμονωμένα σημεία με τη Χρύσα να αναφέρει «*όταν α=2 η f είναι στο 2 ενώ η g στο 1» μιλώντας για τις μέγιστες τιμές,* χωρίς περισσότερες ερμηνείες και τον Δημήτρη να περιγράφει πως *«και οι δυο περνούν από το 0»*. Κανένας τους δεν παρατήρησε πως οι τιμές της f προκύπτουν από το διπλασιασμό τον τιμών της g και προχώρησαν στο ερώτημα 2.1 β μεταβάλλοντας και πάλι τις τιμές του α. Η Χρύσα μόνο ανέφερε «*η περίοδος μένει η ίδια απλά αλλάζουν οι τιμές, αλλάζουν και τα ακρότατα αυτό»*. Ο Δημήτρης δεν συμμετείχε περισσότερο από το να συμφωνεί με τη Χρύσα.

Το ερώτημα 2.1 γ ζητά τη συσχέτιση των τιμών του α με την περίοδο, τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις θέσεις τους. Τη διατήρηση της περιόδου ανεξάρτητα από τις τιμές του α την είχε εντοπίσει νωρίτερα η Χρύσα και δεν ασχολήθηκαν περισσότερο. Εκτενέστερη συζήτηση έγινε για τη μονοτονία, με το Δημήτρη να συμμετέχει πολύ πιο ενεργά. Η Χρύσα ανέφερε πως οι συναρτήσεις με α>0 έχουν μεταξύ τους την ίδια μονοτονία καθώς επίσης και μεταξύ τους οι συναρτήσεις με α<0. Ο Δημήτρης τη διέκοψε αναφέροντας την παρατήρησή του πως για α=-4 και α=4,6 η μονοτονία στα ίδια διαστήματα είναι διαφορετική, εννοώντας πως όταν το α αλλάζει πρόσημο αλλάζει και η μονοτονία της συνάρτησης. Στην αρχή το είπε με δισταγμό αλλά όταν συμφώνησε μαζί του η Χρύσα έδειξε να ενθουσιάζεται και να αυξάνεται το ενδιαφέρον του. Η μεταβολή του α και η ταυτόχρονη μεταβολή των ακροτάτων εξηγήθηκε από την Χρύσα, με το Δημήτρη να δείχνει να καταλαβαίνει και να συμφωνεί μαζί της. Τέλος, για τις θέσεις των ακροτάτων απάντησαν πως δεν αλλάζουν χωρίς καμία εξήγηση.

Το ερώτημα 2.1 δ που ζητούσε για συγκεκριμένες τιμές του α τις αλγεβρικές εκφράσεις, δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές. Στη μέχρι τότε διερεύνησή τους οι μαθητές δεν είχαν συγκρίνει τις συναρτήσεις f και g παρά μόνο είχαν εντοπίσει πως για α=1 ταυτίζονται. Η πρώτη σκέψη του Δημήτρη ήταν η αναζήτηση κάποιου μοντέλου (72) που θα μπορούσαν να ακολουθήσουν κάνοντας φανερή την αδυναμία του να βγάζει τα δικά του συμπεράσματα μελετώντας τις γραφικές παραστάσεις. Τότε τους δόθηκε μια μικρή βοήθεια και το προηγούμενο φύλλο εργασίας για να το συμβουλεύονταν και να αναγνωρίσουν πως ο μετασχηματισμός δεν είναι ούτε κατακόρυφος ούτε οριζόντιος (73). Ο Δημήτρης δεν μπορεί να αντιληφθεί πως η συνάρτηση f(x) αποτελεί έναν νέο μετασχηματισμό της g(x) (74) κάτι που είναι κατανοητό για την Χρύσα (75). Το εντυπωσιακό στο σημείο αυτό ήταν πως δεν αναγνωρίζουν την g(x)=ημx προτείνοντας άλλες συναρτήσεις (80, 81) όπως η y=αx καθώς εμφανιζόταν μεταβλητή με όνομα α, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

71. *Χ: προσδιορίστε τον τύπο για α=2*
72. *Δ: α όπως το κάναμε την προηγούμενη φορά; Έχουμε παράδειγμα;*
73. *Ε: τις προάλλες μιλούσαμε για κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις. Αυτή τη στιγμή αυτή έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα ή οριζόντια για να δούμε αν ταιριάζει με τα προηγούμενα;*
74. *Δ: δεν έχει αλλάξει η f;*
75. *Χ: αλλάζει αλλά δεν μετατοπίζεται*
76. *Δ: Α….*
77. *Χ: άρα…*
78. *Δ: δεν βρήκαμε πως για α=1 ταυτίζονται;*
79. *Ε: ωραία για α=1 ποιος είναι ο τύπος της f;*
80. *Δ: Εμ… χ^2;*
81. *Χ: μήπως είναι y=αx; Να δοκιμάσουμε; Και είναι η y=1x;*
82. *Δ: 1χ;*
83. *Χ: ναι*

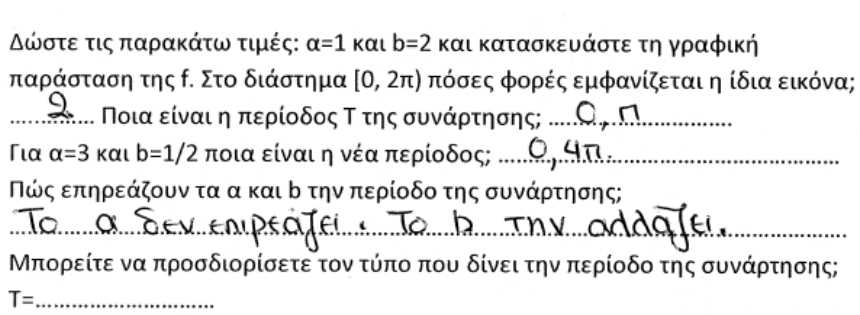
Οι μαθητές ήταν πολύ προβληματισμένοι. Τους ζητήθηκε να επικεντρωθούν στην συνάρτηση g(x) και να εντοπίσουν τον τύπο της, ώσπου η Χρύσα αναγνώρισε την y=ημx και ο Δημήτρης ανέφερε «για την f *ημίτονο θα βάλουμε τώρα αλλά…. να βάλουμε ημχ^2; Ή (ημx)^2 με το 2 απέξω;»* προσπαθώντας να βρει πιθανές θέσεις για το α=2 στην εξίσωση. Η Χρύσα διαφωνεί μαζί του και πρότεινε την y=ημ(2x) την οποία δοκιμάζει και απορρίπτει αφού πρώτα παρατήρησε πως αλλάζει η περίοδος κάτι που δεν ισχύει στον μετασχηματισμό που μελετούσαν. Να σημειωθεί πως όλες

τους οι εικασίες βασίζονταν σε τυχαίες επιλογές της θέσης που θα μπορούσε να τοποθετηθεί ο αριθμός 2 χωρίς καμία προσπάθεια για βαθύτερη ερμηνεία και κατανόηση. Για να προωθηθεί η ουσιαστικότερη παρατήρηση τους δόθηκαν οδηγίες και κατασκεύασαν ένα σημείο σε καθεμία από τις δύο συναρτήσεις τα οποία είχαν την ίδια τετμημένη. Η Χρύσα εντοπίζει πως οι τιμές της f είναι διπλάσιες των τιμών της g αλλά και πάλι κανένας από τους δυο δεν κατάφερε να κατασκευάσει τον τύπο της f(x). Μόνο όταν τους ζητήθηκε η διπλάσια της ημx, η Χρύσα διατύπωσε «*η 2ημx. Όντως…»* την οποία και επιβεβαίωσαν. Από τη στιγμή που βρέθηκε πως για α=2 η αλγεβρική έκφραση της σχηματισμένης γραφικής παράστασης είναι η y=2ημx ο Δημήτρης σχημάτισε το αντίστοιχο μοντέλο λέγοντας πως «*για α=-1 θα είναι το ίδιο απλά θα βάλουμε το -1 και για α=0.5 θα βάλουμε το 0.5»* και συμπλήρωσαν στο φύλλο εργασίας τις y=-ημx και y=0.5ημx. Η γενική μορφή y=αημx, που περιγράφει τους παραπάνω μετασχηματισμούς δόθηκε αμέσως μετά από τη Χρύσα, ολοκληρώνοντας το ερώτημα 2.1.

Η έννοια του μετασχηματισμού που μελέτησαν οι μαθητές στο ερώτημα 2.1 δημιουργήθηκε σταδιακά, με ισχυρή καθοδήγηση και ενισχύθηκε ιδιαίτερα από τη χρήση του λογισμικού. Όσο οι μαθητές παρατηρούσαν τις μεταβολές που επέρχονται στο γράφημα ανάλογα με την τιμή που παίρνει η μεταβλητή α βρίσκονταν στη φάση της εσωτερίκευσης για την κατασκευή της νέας έννοιας. Όταν αναγνώρισαν πως για α=2 η f ήταν η διπλάσια της g και σχημάτισαν την εξίσωση άρχισαν να ερμηνεύουν τις μεταβολές που παρατηρούσαν νωρίτερα. Η επόμενη φάση της συμπύκνωσης είναι φανερό πως κατακτήθηκε με την αντιστοίχιση των γραφικών παραστάσεων με τις εξισώσεις τους για τις τυχαίες τιμές του α που δόθηκαν. Ο σχηματισμός της μορφής y=αημx από τη Χρύσα δηλώνει πως έχει κατασκευάσει μια πιο ολοκληρωμένη δομή κάτι που οδηγεί στο συμπέρασμα πως ήταν κοντά στο να κατακτήσει την τελευταία φάση της υποστασιοποίησης για τον σχηματισμό του δεδομένου μετασχηματισμού. Ο Δημήτρης συμμετείχε ακριβώς μέχρι τη συμπλήρωση των τριών ζητούμενων εξισώσεων και δεν έδειξε ότι καταλαβαίνει ή ότι συμφωνεί με τη γενίκευση που έκανε η Χρύσα. Δεν είναι λοιπόν φανερή η κατάκτηση της τελευταίας φάσης σύμφωνα με τη Sfard.

Οι μαθητές συνέχισαν στο ερώτημα 2.2 και ασχολήθηκαν με μετασχηματισμούς ημιτονοειδών συναρτήσεων που επηρεάζεται η περίοδός τους. Στην πρώτη επαφή με τον νέο μετασχηματισμό, που επηρεαζόταν από τη μεταβλητή b, ζητήθηκε η τοποθέτηση της τιμής 1 στη μεταβλητή α. Ο Δημήτρης αρκετά ενεργοποιημένος στη αρχή, μετακίνησε το δρομέα b και απάντησε πως για b=1 f(x)=g(x)=ημx. Η Χρύσα εξέφρασε με δισταγμό ότι μεταβάλλεται η περίοδος ώσπου της το επιβεβαίωσε ο Δημήτρης και προχώρησαν στο υποερώτημα 2.2 β χωρίς να περιγράψουν άλλες παρατηρήσεις.

Η ενασχόληση των μαθητών με το 2.2 β έφερε στην επιφάνεια δυσκολίες με την έννοια της περιόδου. Ο Δημήτρης δεν μπορούσε μόνος του να απαντήσει στα ερωτήματα για την περίοδο ενώ η Χρύσα ανέφερε πως η περίοδος είναι «το διάστημα στο οποίο υπάρχει η γραφική παράσταση 1 φορά» ενώ τελικά στις απαντήσεις της έγραφε μόνο τα άκρα του διαστήματος τα οποία είχαν τη μορφή 0, Τ. (Εικόνα 12) Αυτή η εντύπωση πιθανό να προκύπτει από το γεγονός πως το διάστημα μιας περιόδου της y=ημx που συνήθως σχεδιάζουμε είναι το [0,2π). Μπορεί η Χρύσα να μην οριζε σωστά την περίοδο αλλά με βάση αυτό που είχε σχηματίσει στο νου της ήταν σε θέση να ελέγξει τις μεταβολές της περίοδου ανάλογα με τις τιμές του b.


Δώστε τις παρακάτω τιμές: α=1 και b=2 και κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της f. Στο διάστημα [0, 2π) πόσες φορές εμφανίζεται η ίδια εικόνα;
2 Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης; 0,π
Για α=3 και b=1/2 ποια είναι η νέα περίοδος; 0,4π
Πώς επηρεάζουν τα α και b την περίοδο της συνάρτησης;
Το α δεν επηρεάζει. Το b την αλλάζει.
Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο που δίνει την περίοδο της συνάρτησης;
Τ=.....

Εικόνα 12: απάντηση ομάδας Β στο ερώτημα 2.2 β

Οι μαθητές μετακινούσαν τους δρομείς και εντόπισαν εύκολα πως είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και πως μόνο οι τιμές του b επηρεάζουν την περίοδο της συνάρτησης. Ο Δημήτρης μετακινώντας το δρομέα για το b παρατήρησε επίσης την αλλαγή της μονοτονίας της συνάρτησης όταν b<0 και το συσχέτισε με την αντίστοιχη συμπεριφορά που εμφάνιζε η y=αημx για α<0. Στη συνέχεια της

συζήτησης τους προσπάθησαν να περιγράψουν με πιο συγκεκριμένο τρόπο πώς το b επηρεάζει την περίοδο της συνάρτησης διατυπώνοντας τα παρακάτω:

84. *Δ: όταν είναι το b θετικό…. και όταν είναι αρνητικό συμπυκνώνεται η συνάρτηση; Πώς να το πω;*
85. *Χ: νομίζω όσο πιο κοντά στο 0 είναι οι τιμές του τόσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος και όταν μεγαλώνουν οι τιμές, είτε θετικά είτε αρνητικά ε… μικραίνει.*

Παρατηρούμε δηλαδή πως παρά τις δυσκολίες, οι μαθητές προσπαθούσαν, συνεργάζονταν, χρησιμοποιούσαν το λογισμικό και εκμεταλλευόμενοι των δυνατοτήτων του κατέληξαν σε ορθά συμπεράσματα. Ο προσδιορισμός του τύπου της περιόδου που ζητήθηκε στη συνέχεια δεν επιτεύχθηκε τελικά, αν και τους δώθηκε αρκετή βοήθεια εξετάζοντας μεμονωμένα παραδείγματα.

Ο προσδιορισμός της θέσης του b στην ημιτονοειδή συνάρτηση βρέθηκε τυχαία από το Δημήτρη και όχι σαν αποτέλεσμα της διερεύνησης που είχαν κάνει ως εκείνη τη στιγμή. Κατά τη διάρκεια των δοκιμών για την εύρεση της εξίσωσης για α=1 και b=2, έγραψε στην εισαγωγή την y=ημ2x και το λογισμικό το επιβεβαίωσε. Στις επόμενες δύο περιπτώσεις από κοινού οι μαθητές σχημάτισαν τις εξισώσεις και ήταν σε θέση να προβλέψουν και να εξηγήσουν αν η περίοδος της νέας συνάρτησης θα ήταν μεγαλύτερη ή μικρότερη από της y=ημx. Τελειώνοντας με την κατασκευή των τριών αυτών εξισώσεων τους ζητήσαμε τον γενικό τύπο και γρήγορα η Χρύσα απάντησε «Άρα, y=αημbx» γράφοντάς τον ταυτόχρονα στο φύλλο εργασίας.

Η έννοια του μετασχηματισμού που οφείλεται στο ρόλο του συντελεστή b στην y=ημbx δεν δομήθηκε πλήρως από κανέναν από τους δυο μαθητές. Η Χρύσα φαίνεται να κατασκεύασε μια πιο ολοκληρωμένη έννοια από τον Δημήτρη αλλά δεν είαναι φανερό αν κάποιος από τους δυο κατέκτησε πλήρως τη δεύτερη φάση, σύμφωνα με τη Sfard, αυτή της συμπύκνωσης. Μπορούμε τέλος, να κάνουμε την εξής παρατήρηση: οι μαθητές ήταν σε θέση να συνδέουν την όλο και μεγαλύτερη περίοδο όσο οι τιμές του b πλησίαζαν στο 0, πιθανότατα όμως, δεν ήταν ικανοί γνωρίζοντας την περίοδο να υπολογίσουν την τιμή του b και αντίστροφα, καθώς δεν εντόπισαν τη σχέση T=2π/b.

Για το ερώτημα 2.3 οι μαθητές κατασκεύασαν την y=3ημx δίνοντας στους δρομείς τις κατάλληλες τιμές, εμφάνισαν την q(x) και η Χρύσα αναγνώρισε ότι το είδος της μετατόπισης είναι κατακόρυφη προς τα πάνω 2 μονάδες χωρίς να εξηγήσει ποια συνάρτηση έχει υποστεί τη μετατόπιση. Ο Δημήτρης συνδύασε τις πληροφορίες και πρότεινε την y=3ημx+2 η οποία έγινε αποδεκτή.

Η h(x) που ζητούσε στη συνέχεια το 2.3 Α, β αποτελούσε οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά π/4, της y=3ημx, κάτι που άμεσα αναφέρθηκε από την Χρύσα. Ο Δημήτρης τότε τόνισε πως στον τύπο θα βάλουν την 3ημx και πως για την οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά πρέπει να εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο η φάση π/4. Η Χρύσα συμφωνεί και σχηματίζει τη ζητούμενη εξίσωση h(x)=3ημ(x-π/4).

Από τον τρόπο που αντιμετώπισαν οι μαθητές το ερώτημα 2.3 Α παρατηρούμε σημαντική εξέλιξη στη σκέψη και ανάπτυξη συνδυαστικής ικανότητας των συμπερασμάτων για τις οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις και στους δυο. Ο Δημήτρης έχει κατακτήσει τη φάση της συμπύκνωσης για τις έννοιες των κατακόρυφων και οριζόντιων μετασχηματισμών καθώς ξεπέρασε το στάδιο του πειραματισμού για τον εντοπισμό των ιδιοτήτων που αλλάζουν αλλά πλέον ερμηνεύει αυτά που παρατηρεί στα γραφήματα και τα αντιστοιχίζει αυτόματα με τις αλγεβρικές εξισώσεις. Η Χρύσα παρατηρήθηκε πως ήταν σε θέση να απαντήσει στα ερωτήματα με άνεση και ίσως κάποιες στιγμές προωθούσε το Δημήτρη να δώσει απαντήσεις.

Το ερώτημα 2.3 Β ζητά την κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της y=3ημ2x μέσω της εύρεσης των εξισώσεων των νέων q(x) και h(x) αντίστοιχα. Η εύρεση της q(x)=3ημ2x+2 ήταν από κοινού απόφαση χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Η κατασκευή όμως της οριζόντιας μετατόπισης τους δυσκόλεψε. Κυρίως ενεργοποιήθηκε η Χρύσα η οποία εξηγούσε στον Δημήτρη τις επιλογές της. Ο Δημήτρης δοκίμαζε τις ιδέες της, σε καμία περίπτωση όμως με παθητικό τρόπο όπως έκανε στην πρώτη συνάντηση. Η Χρύσα προσάρμοσε την οριζόντια μετατόπιση κατά π/4 σχηματίζοντας τον y=3ημ(2x-π/4). Από κοινού οι μαθητές κατάλαβαν πως η οριζόντια μετατόπιση δεν ήταν η αναμενόμενη αλλά δεν προχώρησαν σε ερμηνεία ώσπου η Χρύσα ζήτησε από το Δημήτρη *«για βάλε –π/2, από περιέργεια να δω τι θα*

βγει». Όταν τους ζητήθηκε να εξηγήσουν τη μη αναμενόμενη συμπεριφορά του γραφήματος κανείς τους δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσει.

Στο ερώτημα 2.4 οι μαθητές κατασκεύασαν στο λογισμικό δύο δρομείς k και c και εισήγαγαν τη συνάρτηση w(x)=αημ(bx+c)+k. Οι τιμές των μεταβλητών α, b, c, k που ζητούνταν για τρεις δεδομένες εξισώσεις δόθηκαν ορθά με βάση τον τύπο της w(x) που είχαν εισάγει. Να σημειωθεί πως στην τελευταία περίπτωση που η εξίσωση ήταν η y=-1.5ημ3(x+π/2)+3 και δεν ακολουθούσε τη μορφή που είχαν καταλήξει, κατάφεραν να την προσαρμόσουν τοποθετώντας στο c την τιμή 3π/2. Οι λόγοι που οι μαθητές δεν κατάφεραν την γράψουν τη γενική μορφή w(x)=αημ(b(x+c))+k πιστεύω ήταν δύο**.** Ο πρώτος σχετίζεται με την ελλιπή κατανόηση του σχηματισμού των μετασχηματισμών που οδηγούν τις οριζόντιες μετατοπίσεις, κάτι που δηλώνει πως κανένας από τους δυο μαθητές δεν κατέκτησε τη φάση της υποστασιοποίησης για το σχηματισμό του εν λόγω μετασχηματισμού. Ο δεύτερος λόγος σχετίζεται με τον τρόπο γραφή του ορίσματος της συνάρτησης που δεχόταν το λογισμικό. Η εισαγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο GeoGebra γίνεται με το όρισμα να γράφεται σε παρένθεση. Οι μαθητές ακόμα και κατά τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας πάντα το όρισμα το τοποθετούσαν ανάμεσα σε παρενθέσεις. Εισάγοντας τη γενική μορφή ως w(x)=αημ(b(x+c))+k έπρεπε να σκεφτούν τη χρήση και δεύτερης παρένθεσης που πιθανό αυτό γράφοντας στον υπολογιστή να μην τους ήταν οικείο.

Οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το ερώτημα 2.5 που ζητά το σχεδιασμό της y=0.5ημ3(x-π/4)-2 είχαν σαν πρώτη αντίδραση να την κατασκευάσουν στον υπολογιστή. Καθώς δεν τους επιτράπηκε κάτι τέτοιο συνεργάστηκαν και επανέλαβαν στη συνέχεια τους μετασχηματισμούς που προκύπτουν από τις τιμές των α, b, c, k και προσπάθησαν να εντοπίσουν τις τιμές που παίρνουν στη ζητούμενη συνάρτηση, αφού πρώτα η Χρύσα μετασχημάτισε τη συνάρτηση στην y=0.5ημ(3x-3π/4)-2. Για αρκετή ώρα προσπαθούσαν να σκεφτούν βήμα βήμα πώς θα την κατασκευάσουν αλλά τελικά δεν τα κατάφεραν κάνοντας φανερό πως η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στην κατασκευή της γραφικής παράστασης δεν ήταν καθόλου απλή υπόθεση. Τα εμπόδια που εμφανίστηκαν ήταν τα παρακάτω. Σαν πρώτο πρόβλημα αντιμετώπισαν την αδυναμία εντοπισμού της

συνάρτησης που δεν είχε υποστεί κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση. Όταν ρωτήθηκαν, απάντησαν και οι δυο πως είναι η y=ημx. Επόμενο εμπόδιο αποτέλεσε ο συντελεστής α=0.5 που ενώ γνώριζαν πως θα επηρεάσει τα ακρότατα, η Χρύσα ανέφερε πως «η συνάρτηση θα περνά από το 0.5» εννοώντας από το σημείο (0, 0.5). Τέλος, εμπόδιο αποτέλεσε η ερμηνεία τιμής b=3, κάτι που ήταν αναμενόμενο από τους δύο μαθητές καθώς κατά τη διερεύνησή του b δεν είχαν καταλήξει στη σχέση T=2π/b οπότε δεν έχουν τη δυνατότητα να υπολογίσουν την περίοδο της συνάρτησης. Για τη ζητούμενη κατασκευή πέρα από την αντιμετώπιση των προαναφερθέντων εμποδίων έπρεπε να συνδυάσουν όλες μαζί τις πληροφορίες κάτι που φάνηκε να κουράζει ιδιαίτερα την ομάδα.

Στο τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας όπου ζητούνταν η εξίσωση μιας γραφικής παράστασης αποτυπωμένη στο φύλλο εργασίας κάτι που σημαίνει πως δεν ήταν γνωστοί οι συντελεστές α, b, c, και k όπως όταν ήταν σχεδιασμένο το γράφημα στον υπολογιστή, οι μαθητές πρότειναν την εξίσωση y=2.5ημ(x+π/2)+2.5. Επέλεξαν έναν προς έναν τους μετασχηματισμούς και υπολόγισαν τις τιμές των συντελεστών. Οι λάθος επιλογές τους δεν ήταν καθόλου αναμενόμενες. Σε κάθε ενασχόληση τους με τις κατακόρυφες μετατοπίσεις παρατηρούσαν τις μονάδες μετατόπισης και τις αντιστοιχούσαν με την τιμή του k. Στην προκειμένη περίπτωση το k το ταύτισαν με τη μέγιστη τιμή. Για τον εντοπισμό της τιμής του συντελεστή α σκέφτηκαν πως επηρεάζει τα ακρότατα και πως η y=ημx που παίρνει τιμές από το -1 ως το 1 έχει α=1 αλλά στη δοσμένη συνάρτηση δεν παρατήρησαν πως η μέγιστη με την ελάχιστη τιμή απέχουν 1 μονάδα για να τοποθετήσουν το α=0.5, παρά το ταύτισαν και αυτό με τη μέγιστη τιμή. Ο υπολογισμός του b ενώ γενικά τους δυσκόλευε σε προηγούμενα ερωτήματα έγινε με έξυπνο τρόπο. Παρατήρησαν πως η περίοδος της συνάρτησης είναι ίδια με της y=ημx η οποία έχε b=1, οπότε τοποθέτησαν και στη ζητούμενη b=1. Τέλος, η οριζόντια μετατόπιση κατά π/2 προς τα αριστερά βρέθηκε πολύ γρήγορα από τη στιγμή που τους προτάθηκε να σχεδιάσουν την y=ημx για να κάνουν τη σύγκριση. Αυτό που προκάλεσε εντύπωση μετά το σχηματισμό του τύπου που κατά τη γνώμη τους αντιστοιχεί στη σχηματισμένη γραφική παράσταση ήταν πως κανένας από τους δύο μαθητές δεν θέλησε να τον ελέγξει χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα της έρευνας με βάση το ερευνητικό ερώτημα και τη βιβλιογραφία. Θα συγκριθεί ο τρόπος που εργάστηκαν οι ομάδες μεταξύ τους αλλά και το νόημα που έδωσαν οι τέσσερεις μαθητές στους μετασχηματισμούς τριγωνομετρικών συναρτήσεων με ταυτόχρονη κατάταξη τους στις αντίστοιχες φάσεις σχηματισμού μιας έννοιας σύμφωνα με τη Sfard (1991) για κάθε μετασχηματισμό.

Οι δύο ομάδες ήταν αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους και δούλεψαν με διαφορετικό τρόπο. Η πρώτη παρατήρηση είναι πως οι μαθητές στην ομάδα Α συνεργάστηκαν πολύ καλύτερα και οι απαντήσεις τους ήταν αποδεκτές και από τους δυο εκτός λίγων εξαιρέσεων που διαφώνησαν έντονα και η απάντηση δόθηκε από τον έναν από τους δυο. Αντίθετα, οι απαντήσεις που πήραμε από την άλλη ομάδα σε ένα μεγάλο ποσοστό ήταν της Χρύσας χωρίς την κατανόηση τους από τον Δημήτρη. Η συνεργασία μεταξύ των μαθητών σε μια ομάδα οφείλεται στην ομοιογένεια. Η ομάδα Α παρουσίαζε μεγαλύτερη ομοιογένεια από τη δεύτερη καθώς ο Δημήτρης είχε περισσότερες γνωστικές ελλείψεις από τη Χρύσα.

Επόμενο χαρακτηριστικό που επηρέαζε την κατανόηση των μετασχηματισμών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ήταν το μαθηματικό υπόβαθρο και οι προϋπάρχουσες γνώσεις που είχαν οι μαθητές. Οι μαθητές της ομάδας Α είχαν καλύτερο μαθηματικό υπόβαθρο από αυτό της Β, γεγονός που τους βοήθησε, καθώς χρησιμοποιούσαν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους για την κατασκευή της καινούριας, σε αντίθεση με τους μαθητές της ομάδας Β που εγκλωβίζονταν σε προηγούμενες μερικώς σχηματισμένες έννοιες. Τα κυριότερα προβλήματα που επηρέαζαν την κατανόηση των μετασχηματισμών, εντοπίστηκαν στην έννοια της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού, του συνόλου τιμών και της περιόδου συνάρτησης. Ελλείψεις παρουσιάστηκαν και στον ορισμό της μονοτονίας και στην έννοια της μεταβλητής, οι οποίες όμως δεν εμπόδισαν τόσο την κατανόηση των μετασχηματισμών. Να σημειωθεί πως από την ομάδα Α ο Ραφαήλ εμφάνισε παρανοήσεις στις έννοιες του πεδίου ορισμού και της περιόδου, γεγονός που

δημιούργησε διαφωνία με τις απόψεις του συνεργάτη του, Μάνου, ο οποίος όμως του εξηγούσε βοηθώντας τον να υπερπηδήσει τα εμπόδια ώστε να κατανοήσει τους μετασχηματισμούς.

Καταλυτικό ρόλο για τον σχηματισμό της έννοιας των μετασχηματισμών της ημιτονοειδούς συνάρτησης συμπεραίνουμε επίσης, πως έπαιξε η χρήση του ψηφιακού εργαλείου συμφωνώντας με τις απόψεις των Santos (2000), Clements (1989), Rieber (1990), Κυνηγός (2011). Οι μαθητές της ομάδας Α από την πρώτη στιγμή χρησιμοποίησαν το εργαλείο, δοκίμαζαν, έκαναν υποθέσεις τις οποίες και έλεγχαν για την ορθότητά τους και κατέληγαν σε συμπεράσματα. Σε αντίθεση με αυτό οι μαθητές της ομάδας Β κυρίως στην αρχή της πρώτης συνάντησης, απέφευγαν να χρησιμοποιούν τον υπολογιστή, αρκούνταν στην παρατήρηση στατικών εικόνων και προσπαθούσαν να απαντήσουν με βάση τις πληροφορίες που θυμούνταν από τα μαθήματα από την παραδοσιακή διδασκαλία, χωρίς να σημαίνει πως τις κατανοούν πλήρως. Αποτέλεσμα αυτού ήταν η ομάδα Β να συμπληρώσει λιγότερες απαντήσεις από την ομάδα Α στο πρώτο φύλλο εργασίας. Παράδειγμα που επιβεβαιώνει τη δυνατότητα που προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία προωθώντας την κατάκτηση της γνώσης από τον ίδιο το μαθητή όπως περιγράφουν οι Papert (1972) και Κυνηγός (2011), αποτελεί το γεγονός πως οι μαθητές δεν αναγνώρισαν όλα όσα είχα διδαχτεί στο σχολείο απαντώντας απευθείας στις ερωτήσεις των φύλλων εργασίας αλλά έχτιζαν τη γνώση σιγά σιγά πειραματιζόμενοι με το εργαλείο, συμφωνώντας με την άποψη του Boon (2005) πως η παραδοσιακή διδασκαλία δεν επαρκεί για την εκμάθηση των μετασχηματισμών. Τέλος, όπως υποστηρίζεται και από τον Clements (1989) η χρήση του εργαλείου φάνηκε να ενισχύει την «ενεργή μάθηση» με παράδειγμα τη συμπεριφορά του Δημήτρη, το μαθητή που εμφάνισε τις περισσότερες δυσκολίες. Παρατηρήθηκε πως συμμετείχε περισσότερο στα ερωτήματα που ο ίδιος είχε ανακαλύψει κάποιο συμπέρασμα μέσω της παρατήρησης στο εργαλείο με τα συμπεράσματα αυτά να τα θυμάται πιο εύκολα και μπορεί να τα χρησιμοποιεί σε επόμενα ερωτήματα.

Συγκριτικά τώρα μεταξύ τους οι τέσσερεις μετασχηματισμοί αντιμετωπίστηκαν διαφορετικά από τις ομάδες. Και οι δύο ομάδες αναγνώρισαν τις μεταβολές που επέφερε ο κάθε μετασχηματισμός στο γράφημα της συνάρτησης y=ημx, με τον

κατακόρυφο μετασχηματισμό να αντιμετωπίζεται πιο εύκολα από τους υπόλοιπους τρείς. Σε αντίθεση με τον κατακόρυφο συμφωνώντας με τους Ninness et al (2006) οριζόντιος μετασχηματισμός δυσκόλεψε περισσότερο τις ομάδες με το πρόβλημα να εντοπίζεται στο γεγονός πως η μεταβολή στο αλγεβρικό τύπο εμφανίζεται μέσα στο όρισμα της συνάρτησης. Ο μετασχηματισμός που μεταβάλει το πλάτος της συνάρτησης δυσκόλεψε τους μαθητές μέχρι να εντοπίσουν πως για α=2 οι τιμές της συνάρτησης διπλασιάζονται οπότε στη συνέχεια εντόπισαν εύκολα τη γενική μορφή y=αημx. Ο μετασχηματισμός της y=ημx σε y=ημbx δημιούργησε αρκετά εμπόδια στις ομάδες, και κυρίως στο Δημήτρη και τη Χρύσα. Η ομάδα του Μάνου και του Ραφαήλ κατανόησε καλύτερα το συγκεκριμένο μετασχηματισμό ύστερα από τη διαπίστωση του Μάνου πως είναι η μορφή y=ημωx που είχαν επεξεργαστεί στο σχολείο. Τέλος, και οι δύο ομάδες έδωσαν γενική μορφή ημιτονοειδούς συνάρτησης που περιλαμβάνει τους τέσσερεις μετασχηματισμούς με την ομάδα Α να προτείνει τον y=αημ(b(x+c))+k και την ομάδα Β τον y=αημ(bx+c)+k δηλώνοντας πως δεν είναι πλήρως κατανοητός ο μετασχηματισμός που οδηγεί στις οριζόντιες μετατοπίσεις.

Αυτό που δυσκόλεψε τις ομάδες ήταν η μετάβαση από τη γραφική στην αλγεβρική αναπαράσταση και αντίστροφα όταν τα γραφήματα ή οι αλγεβρικές εκφράσεις περιλάμβαναν ημιτονοειδείς συναρτήσεις που είχαν δεχτεί παραπάνω από δύο μετασχηματισμούς. Στην περίπτωση της κατασκευής της γραφικής παράστασης δεν ήταν σε θέση να απομονώσουν τη συνάρτηση που δεν έχει υποστεί κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις ώστε να απλουστευθεί το πρόβλημα. Είναι φανερό όμως πως η διαρκής μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη φώτισε καλύτερα την έννοια των μετατοπίσεων οδηγώντας σε βαθύτερη κατανόηση των μετασχηματισμών.

Εξετάζοντας τώρα μεμονωμένα τους μαθητές, ο Ραφαήλ ήταν από την αρχή αρκετά ενεργοποιημένος. Από την ενασχόληση του με το πρώτο κιόλας φύλλο εργασίας, πέρασε γρήγορα από τη λειτουργική στη δομική αντίληψη της έννοιας του μετασχηματισμού που οδηγεί σε κατακόρυφες μετατοπίσεις συνάρτησης κατακτώντας και τις τρείς φάσεις σύμφωνα με τη Sfard. Παρόμοια πορεία είχε για το σχηματισμό του μετασχηματισμού που οδηγεί σε οριζόντιες μετατοπίσεις

κατακτώντας επίσης την φάση της υποστασιοποίησης. Συγκεκριμένα ήταν ο μόνος από τους τέσσερεις μαθητές που σχημάτισε τη μορφή y=αημ(b(x+c)) μετατοπίζοντας οριζόντια την y=αημbx. Ο μετασχηματισμός που εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής α στην y=αημx ήταν αυτός που τον δυσκόλεψε περισσότερο από τους υπόλοιπους. Κυρίως κατανόησε τον τρόπο που λειτουργεί και μετά από παρατήρηση, δοκιμές και συζήτηση με τον Μάνο κατάφερε να συνδέει τις τιμές του α με τη γραφική παράσταση και την εξίσωση της συνάρτησης κατακτώντας τη φάση της συμπύκνωσης. Τέλος, ο μετασχηματισμός που προκύπτει από τη μεταβολή των τιμών του b προσεγγίστηκε στην αρχή και αυτός από τη λειτουργική πλευρά αλλά στη συνέχεια υπήρξε εξέλιξη κατανοώντας πιο βαθιά τη δομή του. Τα προβλήματα που αντιμετώπισε και τα οποία επηρέασαν την προσπάθειά του για τη διερεύνηση των μετασχηματισμών ήταν η έννοια πεδίου ορισμού και της περιόδου μιας συνάρτησης.

Ο Μάνος ήταν ίσως ο μαθητής που συνολικά κατάφερε να κατανοήσει βαθύτερα τους περισσότερους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων γενικά αλλά και των τριγωνομετρικών ειδικότερα, τόσο από τον τρόπο που λειτουργούν όσο και τη δομή τους. Οι μετασχηματισμοί που οδηγούν σε κατακόρυφες, οριζόντιες μετατοπίσεις καθώς και ο μετασχηματισμός που επηρεάζει το πλάτος της τριγωνομετρικής συνάρτησης κατακτήθηκαν ολοκληρωτικά, δηλαδή επιτεύχθηκε η φάση της υποστασιοποίησης για καθένα από αυτά. Ο μετασχηματισμός που προκύπτει από τις διάφορες τιμές του b στην y=ημbx έγινε αντιληπτός λειτουργικά αλλά όχι ως προς τη δομή του. Παράδειγμα που επιβεβαιώνει μια πιο ποιοτική αντίληψη του μετασχηματισμού αποτελεί η ταύτιση της μεταβλητής b που χρησιμοποιήθηκε στη δραστηριότητα με την μεταβλητή ω που χρησιμοποιούνταν στο σχολικό βιβλίο. Μολαταύτα, η κατάκτηση της φάσης της υποστασιοποίησης δεν ήταν σίγουρη αλλά πιθανή.

Ο Δημήτρης είναι ο μαθητής που αντιμετώπισε τις περισσότερες δυσκολίες και που κυρίως έμεινε στη διαδικαστική πλευρά και δεν αντιλήφθηκε τόσο τη δομή των τεσσάρων μετασχηματισμών. Η έννοια των κατακόρυφων μετατοπίσεων ήταν αυτή που σχηματίστηκε καλύτερα από τους υπόλοιπους μετασχηματισμούς κατακτώντας σίγουρα τη φάση της συμπύκνωσης. Σε ότι αφορά την έννοια των οριζόντιων

μετατοπίσεων συνάρτησης θα μπορούσε να θεωρηθεί πως έκανε κάποια βήματα για να κατακτήσει τη φάση της συμπύκνωσης. Επίσης ως το στάδιο της συμπύκνωσης κατάφερε να σχηματίσει την έννοια του μετασχηματισμού που επηρεάζει το πλάτος της ημιτονοειδούς και τέλος ο μετασχηματισμός που επέρχεται στην περίοδο της συνάρτησης έγινε αντιληπτός ο τρόπος που λειτουργεί και όχι η δομή του.

Η Χρύσα ήταν η μαθήτρια που απάντησε μόνη της τα περισσότερα ερωτήματα και είχε ταυτόχρονα το ρόλο του βοηθού του Δημήτρη παρά του συνεργάτη. Τους κατακόρυφους μετασχηματισμούς τους αντιλήφθηκε αρκετά καλά και ως προς τη λειτουργία και τη δομή τους κατακτώντας τη φάση της υποστασιοποίησης. Η έννοια των οριζόντιων μετασχηματισμών δεν είχε συλληφθεί σαν ένα πλήρες αντικείμενο αλλά το επίπεδο που είχε φτάσει κατατάσσει το σχηματισμό της έννοιας στη φάση της συμπύκνωσης. Ο μετασχηματισμός που επηρεάζει το πλάτος της ημιτονοειδούς σχηματίστηκε σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό από τη Χρύσα αλλά όχι τόσο ώστε να κατακτηθεί τη φάση της υποστασιοποίησης. Τον τελευταίο μετασχηματισμό αυτόν που επηρεάζει την περίοδο της ημιτονοειδούς τον αντιλήφθηκε κυρίως λειτουργικά και ελάχιστα τη δομή του.

Οι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την κατανόηση των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών όπως φάνηκε από την παρούσα εργασία είναι διάφοροι αλλά ο κάθε μαθητής το αντιμετωπίζει με το δικό του τρόπο φτιάχνοντας τα δικά του νοήματα συνθέτοντας την νέα έννοια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη Βιβλιογραφία

Backett, N., & Tall, D.O. (1991). *Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software.* In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.1 , pp.144-151). Asssi, Italy: PME.

Baker, B., Hemenway, H., & Trigueros, T. (2001) On Transformations of Functions PME 2001

Boon, K. N., Chun, H. (2005) Use Web –based Simulation to Learn Trigonometric Curves. International Journal for Mathematics Teaching and Learning.

Bruner, J. (1990) Acts of meaniFng. Cambrige: Harvard University Press.

Clements, D. H. (1989). Computers in elementary mathematics education. NJ: Prentice- Hall

Dubinski, E. (1991) *Reflective Abstraction in Mathematical Thinking.* In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Duval, R. (2001) Pourquoi les representation semiotiques doivent-elles etre places au centre des apprentissages en mathematiques? In A. Gagatsis (Ed.), Learning in Mathematics and science and Educational Technology. (pp. 67-90). Intercollege press: Cyprus.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1994) Learning to visualize functions. Research in collegiate mathematics education I. CBMS Issues on Mathematics Education (Vol. 4, pp.45-68).

Even, R (1998) Factors Involved in Linking Representations of Functions. The Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 105-121.

Golding G. A., & Kaput, J. J. (1996). A Joint Perspective of the Idea of representation

in Learning and doing Mathematics. In von L. P.Steffe & … Mahwah, Theories of Mathematical Learning (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Golding, G. & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 1-4.

Golding, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In A. Cucoco & F. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics (pp. 1-23). Reston: National Council of Teachers Mathematics.

Greeno, J.G., & Hall, R.P. (1997) Practicing representation: Learning with and without representational forms. Phi Delta Kappan, 78, 361-367.

Hirsch C. R., Weinhold M., & Nichols C. (1991). *Trigonometry Today.* Mathematics Teacher, 84(2), 98-106.

Hoyles, C. & Noss, R. (1993) Deconstructing microworlds. In D. Ferguson (Ed.), Advanced technologies in the teaching of mathematics and science (pp.415-438). Berlin: Springer-Verlag.

Janvier, C (1987) Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and learning of Mathematics (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Janvier, J. Girardon, C., & Morand, J. (1993) Mathematical symbols and representations. In P. Wilson (Ed.), Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics (pp.79-102). Reston: NCTM.

Kendal και Stacey (1997). Teaching trigonometry. Vinculum, 34(1), 4-8.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp.19-26). Hillsdale, NJ: Hillsdale Erlbaum

Kaput, J. (1991) Notations and representations as mediators of constructive

prosesses. In E. Glasersfeld (Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education (pp. 53-74). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Larson, R., & Hostetler, R. P. (2001). Intermediate algebra (3rd ed.). Boston Miffin.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987) Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and learning of Mathematics (pp. 33-40). Hillsdale Erlbaum

Michell, W. (1994) Picture Theory. Chicago: University of Chicago Press

National council of Teachers of Mathematics NCTM (2000). principles and standards for school mathematics**.** Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics.

Ninness C., Barnes-Holmes D., Rumph R., McCuller G., Ford A., Payne R., Ninness S., Smith R., Ward T. & Elliott M. (2006) Transformations of Mathematical and Stimulus Functions, Journal of applied behavior analysis, 39, 299-321 Number 3

Pape, S, & Tchoshanov M 2001, The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. Theory into Practice, 40(2), 118-125.

Papert, S. (1972). Teaching Children to be Mathematicians Versus Teaching about Mathematics. Journal of Mathematics in Science and Technology, 31, 249-262

Park, O. (1994). Dynamic visual displays in media-based instruction. Educational Technology, 34(4): 21-25.

Rieber, L.P. (1990) Animation in computer-based instruction. Educational Technology Research and Development, 38(1) 77-86.

Roth, W. M., & McGinn, M.K. (1998). Inscriptions: Towards a Theory of Representing as Social Practice. Review of Educational Research, 68 (1), 35-59.

Santos, M. (2000). *Students' approaches to the use of technology in mathematical problem solving.* Paper presented at the working group Representation and Mathematics Visualization. PMENA, Tucson Arizona

Sfard, A. (1991). *On dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics 22, p.1-36

Tall, D. O., Thomas M., Davis G., Gray, E. & Simpson A. (2000) "What is the Object of Encupsulation of a Process?" Journal of Mathematics Behavior 18, no. 2, 1-19

Tall, D., (2004) Thinking through three worlds of mathematics. Proceedings of the 28th Conference of PME, Bergen, Norway, 158-161.

Tchoshanov, M. (1997) Visual Mathematics. Kazan, Russia: ABAK

Weber, K. (2005), "Students' Understanding of Trigonometric Functions". Mathematics Education Research Journal, Vol.17 no. 3, p. 91, 112

Weber, K. (2008), "Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research". Mathematics teacher, Vol.102 No2, p. 99, 112

Zazkis, R., & Liljedhl, P. (2004) Understanding primes: The role of representation. Journal for Research in Mathematics Education, 35(3), 164-186.

Ελληνική βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβερκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ. & Δαμιανού, Χ. (2012) (1) Άλγεβρα Α' Γενικού λυκείου. Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων. Αθήνα..

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. & Σβερκος, Α., (2012) (2) Άλγεβρα Β' Γενικού λυκείου. Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων. Αθήνα.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ. , Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2007) Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων. Αθήνα.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ., (2007) Μαθηματικά Β' γυμνασίου. Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων. Αθήνα.

Γαγάτσης, Α, Σπύρου, Π, (2000) Πολλαπλές Αναπαραστάσεις Ανθρώπινη Νοημοσύνη και Μάθηση. Αθήνα.

Πατσιομίτου Σ., Εμβαλωτής Α. (2011) Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία, Θέματα θετικών επιστημών και τεχνολογίας στην εκπαίδευση Τόμος 2, Τεύχος 3 Σελ. 247-272 Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Ηλία, Ι., & Γαγάτσης, Α. (1) (2004) *Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών της δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης.* 21^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας. (Σελ 157-167)

Ηλία, Ι,. & Γαγάτσης, Α., (2) () Στεγανοποίηση ή σπονδυλοποίηση σημειωτικών αναπαραστάσεων σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992) Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 10-11, 21-43.

Κυνηγός, Χ. (2011) Το Μάθημα της διερεύνησης. Εκδόσεις Τόπος

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

Φύλλο εργασίας 1

Ονοματεπώνυμο:

……

……

…….

Ανοίξτε το αρχείο με όνομα Δραστηριότητα Α

Ερώτημα 1.1: Στην οθόνη εμφανίζεται το γράφημα μιας συνάρτησης g(x). Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών για την g(x).

(Μετακινώντας το σημείο Α έχετε την τιμή οποιουδήποτε σημείου πάνω στο γράφημα)

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
g(x)									

Σε ποια συνάρτηση g(x) αντιστοιχεί το γράφημα και ο παραπάνω πίνακας τιμών;
……

Ερώτημα 1.2:

α. *Τσεκάρετε το κουτάκι με όνομα f(x).* Εμφανίζονται το γράφημα της συνάρτησης f(x) και ένας δρομέας με τον οποίο μπορούμε να δίνουμε τιμές στη μεταβλητή k. Δώστε διάφορες τιμές στο k και παρατηρήστε τις μεταβολές που επέρχονται. Για ποια τιμή του k το γράφημα της συνάρτησης f ταυτίζεται με αυτό της g;
……

β. Εισάγετε k=3. Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της νέας συνάρτησης; Ελέγξτε την εκτίμησή σας, εισάγοντας τον τύπο στη γραμμή εντολών.
……
……
……

γ. Επαναλάβατε τη διαδικασία για διάφορες τιμές του k (θετικές και αρνητικές), προσδιορίζοντας κάθε φορά τον τύπο της νέας συνάρτησης.

δ. Διατυπώστε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε για τη σχέση της μεταβλητής k και την αντίστοιχη μετατόπιση της συνάρτησης.
……
……
……

Προσδιορίστε το γενικό τύπο αυτής της οικογένειας των συναρτήσεων.

Ερώτημα 1.3:

Τσεκάρετε το κουτάκι με όνομα «c»

α. Για k=0 δώστε στο c θετικές και αρνητικές τιμές. Πώς επηρεάζει η τιμή του c τη γραφική παράσταση της f;
……
……
Για ποια τιμή του c ισχύει f(x)=g(x); ……

β. Δώστε τις τιμές k=0 και c=3. Η f(x) κατασκευάστηκε από την $g(x)=x^3$ αν η g μετατοπιστεί προς τα …… κατά ……
Ποιος είναι ο τύπος της f; ……
Ποια σχέση συνδέει τις f και g; ……

γ. Προσδιορίστε τον τύπο των συναρτήσεων με:
k=0, και c=2 ……
k=0, και c=-1 ……
k=-1, και c=-3 ……

Δώστε τον γενικό τύπο της συνάρτησης όταν μεταβάλλονται τα k και c

Ερώτημα 1.4: Οι μετατοπίσεις που επεξεργαστήκατε και ο τύπος στον οποίο καταλήξατε εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης;

Βήμα 1: Επιλέξτε μια δική σας συνάρτηση **g(x)= ……** και κατασκευάστε την στο αρχείο με όνομα *ερώτημα 1.4*.

Βήμα 2: Προσαρμόστε τον τύπο, f(x), που καταλήξατε πως περιγράφει την κατακόρυφη και την οριζόντια μετατόπιση της $y=x^3$ στην δική σας καινούρια συνάρτηση.

Βήμα 3: Κατασκευάστε δύο δρομείς k και c (κλικ στο εικονίδιο του δρομέα, κλικ στην επιφάνεια, δώστε του όνομα, εφαρμογή) και εισάγετε τον τύπο στη γραμμή εντολών.

Ερωτήσεις:

α) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f όταν k=-1.5 και c=-3; ……

Τι μετατοπίσεις έχει υποστεί η g για να κατασκευαστεί η f; ……

…….

β) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f αν η g μετατοπιστεί προς τα κάτω 2 μονάδες και αριστερά 4; ……..

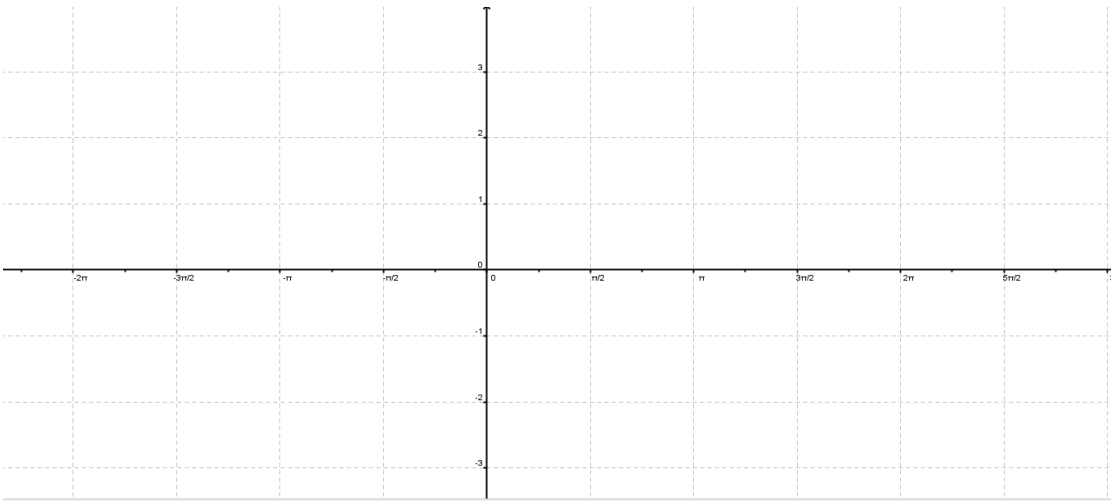
γ) Αν f(x)=g(x-6)+2 ποιες τιμές πρέπει αν πάρουν οι k και c; …….

Συνάρτηση ημιτόνου, y=ημx.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της;

Π.Ο.: …… Σ.Τ.: ……

Σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο παρακάτω καρτεσιανό επίπεδο.



Διακρίνετε περιοδικότητα; Εξηγήστε…

……

Μελετήστε τη μονοτονία και τα ακρότατα.

……
……
……

Ανοίξτε το αρχείο geogebra με όνομα «Δραστηριότητα Β»

Ερώτημα 1.5:

α. *Τσεκάρετε το κουτάκι «h(x)».*Τι μετατόπιση έχει υποστεί η g(x)=ημx για να προκύψει η h(x); Προσδιορίσετε τον τύπο της ημιτονοειδούς συνάρτησης h(x); ……
…….

β. Ποιος είναι ο γενικός τύπος των ημιτονοειδών συναρτήσεων που αποτελούν κατακόρυφη μετατόπιση της g(x)=ημx; (χρησιμοποιήστε τη μεταβλητή k)
……..

γ. *Τσεκάρετε το κουτάκι «φ(x)».* Τι μετατόπιση έχει υποστεί η g(x)=ημx για να προκύψει η φ(x); Προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης φ(x);
……
…….

δ. Ποιος είναι ο γενικός τύπος των ημιτονοειδών συναρτήσεων που αποτελούν οριζόντια μετατόπιση της g(x)=ημx; (χρησιμοποιήστε τη μεταβλητή c)
……

ε. Ποιος είναι ο γενικός τύπος ημιτονοειδών συναρτήσεων που αποτελούν κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της g(x)=ημx; (χρησιμοποιήστε k για την κατακόρυφη και c για την οριζόντια)
……..

Δημιουργήστε δύο δρομείς k και c και εισάγετε τον γενικό τύπο που καταλήξατε από τη γραμμή εντολών.

στ. *Τσεκάρετε το κουτάκι «w(x)».* Ποιες τιμές πρέπει να πάρουν τα k και c για να ταυτιστεί η συνάρτηση που κατασκευάσατε με την w(x); Ποιος είναι ο τύπος της; ……..
…….

ζ. Ποιες τιμές πρέπει να πάρουν οι μεταβλητές k και c για να κατασκευαστεί η z(x)=ημ(χ+π/2)-1; .....
.....

Ερώτημα 1.6: Τι μεταβολές παρατηρείτε στην περίοδο, στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις θέσεις των ακροτάτων καθώς μεταβάλλεται μόνο το k και ποιες μεταβάλλοντας μόνο το c;

Μεταβάλλοντας το k

……

……

……

……

……..

Μεταβάλλοντας το c

……

……

……

……

……..

Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Φύλλο εργασίας 2

Ονοματεπώνυμα:

……

……

……..

Ερώτημα 2.1: *Ανοίξτε το αρχείο με όνομα «Δραστηριότητα Γ»*

Στην οθόνη σας εμφανίζονται οι συναρτήσεις f(x) και g(x).

α. Δώστε την τιμή α=2. Παρατηρείστε και συγκρίνετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g. Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στο α ώστε f(x)=g(x);
……

β. Δώστε θετικές και αρνητικές τιμές στο α. Τι μεταβολές παρατηρείτε στη γραφική παράσταση της f;
……
……
……
……

γ. Η μεταβολή του α επηρεάζει την περίοδο, τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις θέσεις των ακροτάτων;
……
……
……
……
……

δ. Προσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης για:

- α=2 ……
- α=-1 ……
- α=0.5 ……

Δώστε το γενικό τύπο των ημιτονοειδών συναρτήσεων που επηρεάζονται από το α που μελετήσατε:

Ερώτημα 2.2:

Τσεκάρετε το κουτάκι με το όνομα «b».

α. Για α=1, δώστε θετικές και αρνητικές τιμές στο b και εξηγήστε πώς η τιμή του επηρεάζει τη γραφική παράσταση της f. Για ποια τιμή του b, f(x)=g(x);
……
……
……
……

β. Δώστε τις παρακάτω τιμές: α=1 και b=2 και κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της f. Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης; …….
Για α=3 και b=1/2 ποια είναι η νέα περίοδος;
……
Πώς επηρεάζουν τα α και b την περίοδο της συνάρτησης;
…….

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο που δίνει την περίοδο της συνάρτησης; T=……

γ. Προσδιορίστε τον τύπο στις παρακάτω συναρτήσεις:

α=1 και b=2 …….
α=3 και b=0.5 .....
α=2.5 και b=-3 …….

Ποιος είναι ο γενικός τύπος των ημιτονοειδών συναρτήσεων που επηρεάζονται από τα α και b;

Ερώτημα 2.3:

Α. Κατασκευάστε την y=3ημx, (δηλαδή την y=sin(x)) δίνοντας τις κατάλληλες τιμές στα a και b.

α. Τσεκάρετε το κουτάκι «q(x)» και προσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης q(x) που εμφανίστηκε. ……

β. Τσεκάρετε το κουτάκι «h(x)» και προσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης h(x) που εμφανίστηκε. ……

B. Κατασκευάστε την y=3ημ2x δίνοντας τις κατάλληλες τιμές στα a και b και προσδιορίστε τους νέους τύπους των q(x) και h(x).

q(x)=…….. h(x)=…….

Ερώτημα 2.4: Κατασκευάστε τους κατάλληλους δρομείς k και c και την αντίστοιχη συνάρτηση w(x) που να μετακινεί την f(x)=αημbx κατακόρυφα και οριζόντια αντίστοιχα.

Ποια τιμή πρέπει να πάρουν οι μεταβλητές a, b, c και k ώστε να κατασκευαστούν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων;

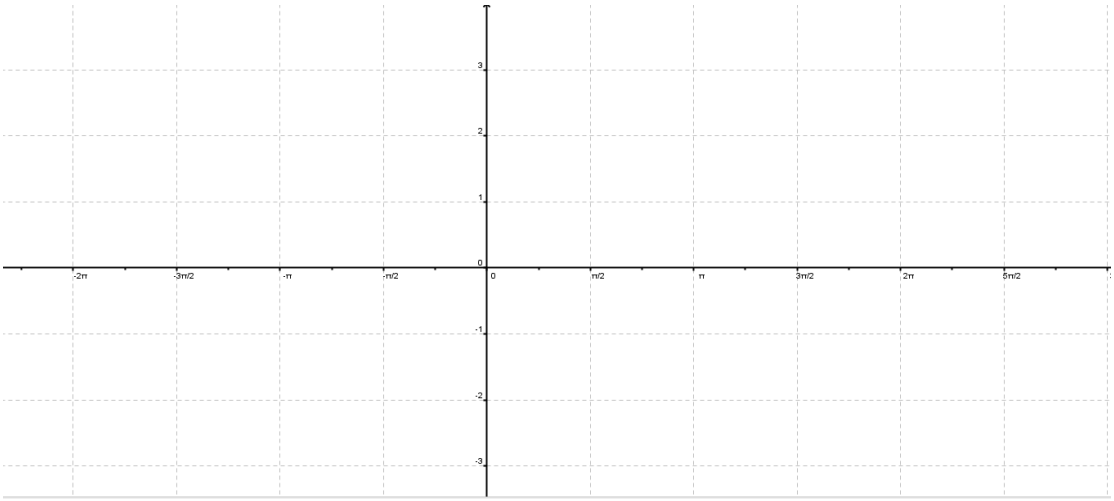
y=3ημ(2x+π/2)+5

y=-ημ(3x-π/12)]-1

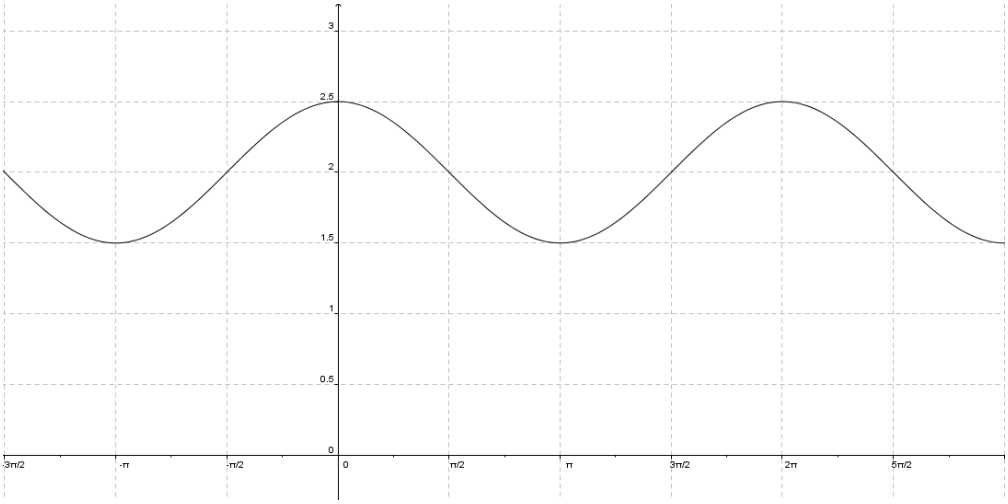
y=-1.5ημ3(x+π/2)+3

Ερώτημα 2.5: Σχεδιάστε στα παρακάτω επίπεδα τις συναρτήσεις

- y=0.5ημ3(x-π/4)-2



Ερώτηση 2.6: Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης που αντιστοιχεί στην παρακάτω γραφική παράσταση;


3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2