ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Μελέτη της Μαθηματικής Επικοινωνίας στην Διδασκαλία της Γεωμετρίας Στην Α΄ Γυμνασίου

ΓΕΩΡΓΙΑ ΓΡΑΒΑΝΗ

Α.Μ. 201314

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

Δέσποινα Πόταρη

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 17η Ιουνίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Αν. Καθηγήτρια Πόταρη Δέσποινα, για την άριστη συνεργασία που είχαμε, για την καθοριστική συμβολή της στην ερευνητική εργασία, για τις στοχευμένες παρατηρήσεις της και την πολύτιμη καθοδήγησή της σε όλο το διάστημα της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας καθώς και για τον χρόνο που μου αφιέρωσε, την υπομονή και την υποστήριξή της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και τον Λέκτορα Ψυχάρη Γεώργιο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή, τις παρατηρήσεις τους και την πολύτιμη βοήθεια τους στο σύνολο της διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη γραμματέα του μεταπτυχιακού προγράμματος κ. Κλη Ελένη για την πολύτιμη, πρόθυμη και ευγενική βοήθειά της όποτε τη χρειάστηκα και

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τους μαθητές και τον καθηγητή που εθελοντικά συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία.

Ευχαριστώ πολύ όλους τους συμφοιτητές μου και ιδιαίτερα τον Τσουκαλά-Μανιάτη Γεώργιο και την Μακρή-Γυαλιά Χριστίνα για την εποικοδομητική συνεργασία μας ως ομάδα στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος, καθώς και για την στήριξη που μου παρείχαν. Επίσης ευχαριστώ τους φίλους και τις φίλες που με βοήθησαν με τα σχόλιά τους και την ψυχολογική στήριξή τους σε όλη την διάρκεια της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου που με στήριξε μέχρι το πέρας της διπλωματικής εργασίας.

Γραβάνη Γεωργία, Ιούνιος 2015

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ **6**

ABSTRACT **7**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ **8**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} **12**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ 12

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ 12

1.1 Μαθηματική επικοινωνία και αλληλεπίδραση 12

1.1.1 Μαθηματική επικοινωνία από την οπτική της Sfard 12

1.1.2 Μαθηματική επικοινωνία από την οπτική του Bauersfeld και της γερμανικής σχολής της Διδακτικής των Μαθηματικών 16

1.1.3 Μοτίβα αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη 18

1.2 Μελέτη της διδασκαλίας των μαθηματικών-αλληλεπίδρασης 25

1.2.1 Η διδακτική τριάδα ως εργαλείο ανάλυσης 25

1.2.2 Οι δράσεις του εκπαιδευτικού σε συζητήσεις με όλη την τάξη και η σχέση τους με τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές 29

1.3 Διαχείριση του εκπαιδευτικού 35

1.3.1 Πως ο εκπαιδευτικός απαντά στα διάφορα είδη εξηγήσεων των μαθητών 35

1.3.2 Πώς ο εκπαιδευτικός ανταποκρίνεται στις ανεξήγητες απαντήσεις των μαθητών-ευκαιρίες μάθησης των μαθητών 37

1.4 Κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες 38

1.5 Η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας 40

1.5.1 Η έννοια του μήκους 40

1.5.2 Η έννοια της γωνίας 42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} **45**

Μεθοδολογία της έρευνας 45

2.1 Ερευνητικά ερωτήματα 45

2.2 Μέθοδος έρευνας 45

2.3 Πλαίσιο έρευνας-Συμμετέχων της έρευνας 46

2.4 Συλλογή δεδομένων 46

2.5 Διαδικασία ανάλυσης δεδομένων 47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} **49**

Αποτελέσματα της έρευνας 49

3.1 Δράσεις του εκπαιδευτικού 49

3.1.1 Δράσεις του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν την μαθηματική πρόκληση 49

3.1.2 Αλληλεπιδράσεις-μοτίβα δράσεων..... 76

3.2 Η διαχείριση του εκπαιδευτικού στην διαμόρφωση και στην εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης σε σχέση με την δράση των μαθητών 89

Κεφάλαιο 4^{ο} 101

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ..... 101

Βιβλιογραφικές Αναφορές 112

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική έχει ως θέμα τη μελέτη της μαθηματικής επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου μέσα από την εμπλοκή τους σε μια σειρά από δραστηριότητες Γεωμετρίας που σχεδιάζει ο εκπαιδευτικός. Σύμφωνα με την υπάρχουσα έρευνα μια τέτοια επικοινωνία βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν γνώσεις σχετικά με το δικό τους τρόπο σκέψης, να αναπτύξουν και να εκφράσουν τις μαθηματικές ιδέες και τις στρατηγικές τους, με ακρίβεια και με συνέπεια, με τον εαυτό τους και τους άλλους. Η παρούσα έρευνα εστιάζει σε δύο κυρίαρχα σημεία: στην κατηγοριοποίηση των δράσεων και στα μοτίβα δράσεων που εκτελεί ο εκπαιδευτικός για να υποστηρίξει την μαθηματική πρόκληση, καθώς και στον τρόπο που η μαθηματική πρόκληση στηρίζεται στην δράση των μαθητών. Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης της διδασκαλίας ενός εκπαιδευτικού σε τρία τμήματα της Α΄ Γυμνασίου. Τα δεδομένα προήλθαν από την παρακολούθηση 8 ωρών διδασκαλίας του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού, από τα φύλλα εργασίας των μαθητών και από τις κατ' ιδίαν συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με την αναγνώριση των κρίσιμων συμβάντων (critical events). Από την ανάλυση αυτή εντοπίστηκαν 124 δράσεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες οδήγησαν στην διαμόρφωση ενός πλαισίου δράσεων, σε συνδυασμό με την υπάρχουσα θεωρία. Παράλληλα αναδείχθηκαν μοτίβα δράσεων που ενίσχυσαν την υπάρχουσα έρευνα καθώς και αναδύθηκαν οι ιδιαίτερες μορφές δράσεων που εκτελεί ο εκπαιδευτικός κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες.

Λέξεις κλειδιά: *μαθηματική επικοινωνία, αλληλεπίδραση, δράσεις, μαθηματική πρόκληση*

ABSTRACT

This thesis has as subject the study of mathematical communication and interaction in seventh grade students through their involvement in a series of Geometry activities created by the teacher. According to the existing research such communication helps students learn about their way of thinking, develop and express mathematical ideas and strategies, accurately and consistently with themselves and with others. This research focuses on two dominant points: the classification of the actions and patterns of actions performed by the teacher to support mathematical challenge and the way the mathematical challenge is based on the action of the students. The research is a case study of a teacher into three seventh grade classes. The data were gathered from 8 teaching hours of this specific teacher, from the students' worksheets and from individual interviews with the teacher. Data analysis was made by the identification of critical events. From this analysis a total of 124 actions of the teacher were identified, which led to the constitution of a framework of actions, combined with the existing theory. At the same time patterns of actions appeared which reinforced the existing research and specific forms of actions emerged which are called upon by the teacher in dealing with students' activities.

Key Words: *mathematical communication, interaction, actions, mathematical challenge*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αρκετές έρευνες στη Διδακτική των Μαθηματικών εστιάζουν στη μελέτη της μαθηματικής επικοινωνίας στη σχολική τάξη. Η μαθηματική επικοινωνία είναι σημαντική για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και έχουν αναπτυχθεί διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια που μελετούν τη σχέση ανάμεσα στην επικοινωνία και την γνώση. Η προσέγγιση της Sfard (2008) χαρακτηρίζεται ως επικοινωνικό – γνωστική, δηλαδή υποστηρίζει ότι η γνώση και η επικοινωνία είναι αδιαχώριστες, (cognition + communication = commognition) (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η επικοινωνικό-γνωστική προοπτική καλεί τους εκπαιδευτικούς να επικεντρωθούν στις δικές τους και στων παιδιών παρατηρήσιμες διαπροσωπικές επικοινωνίες. Ένας καθηγητής αυτό που μπορεί να αλλάξει είναι να επικοινωνεί με διαφορετικό τρόπο και να αξιολογεί τα παιδιά με βάση τα πρότυπα και τις αλλαγές που παρατηρεί στις διαπροσωπικές τους επικοινωνίες.

Από την οπτική της γερμανικής διδακτικής, παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές θέσεις που εξετάζουν με διαφορετικό τρόπο την γλώσσα και την επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών, όπως αναφέρεται από τον Steinbring (1998). Το Stoffdidactik επικεντρώνεται στη σύνταξη της τεχνικής μαθηματικής γλώσσας, η κοικωνικό-αλληλεπιδραστική θέση βλέπει τα μαθηματικά ως γλώσσα από την πραγματιστική προοπτική ενώ η φιλοσοφική-επιστημολογική θέση εστιάζει στις ιδιόμορφες σημασιολογίες των μαθηματικών συμβόλων και στη θεωρητική φύση της μαθηματικής γνώσης. Οι ερευνητές της δεύτερης θέσης ανέπτυξαν έννοιες που κατανοούν φαινόμενα της επικοινωνίας της τάξης: το πρότυπο χωνί (funnel pattern) (Bauersfeld, 1978), μαθηματική διαμόρφωση (mathematical framing) (Krummheuer, 1982) και ρουτίνες και μοτίβα (Voigt, 1984b). Τα μοτίβα αυτά αξιοποιήθηκαν αργότερα από τους Cobb, Wood και Voigt. Τα μαθήματα στην τάξη των μαθηματικών μπορούν να χαρακτηριστούν από μοτίβα αλληλεπίδρασης και τρόπους επικοινωνίας που αποκαλύπτουν διαφορετικές θέσεις σχετικά με την διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών. Ο Voigt (1989) επισημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν συνειδητοποιούν ότι τα παραδοσιακά μοτίβα αλληλεπίδρασης είναι ακόμα ζωντανά στις τάξεις τους (Voigt, 1994). Η συμμετοχή σε μοτίβα αλληλεπίδρασης συνεισφέρει στην γνωστική ανάπτυξη των παιδιών.

Επίσης, από μία εθνογραφική μελέτη της διερευνητικής διδασκαλίας των μαθηματικών (Jaworski, 1994) σε έναν μικρό αριθμό καθηγητών των μαθηματικών

προέκυψε το θεωρητικό εργαλείο της διδακτικής τριάδας, το οποίο συνεισφέρει στην ανάπτυξη της σκέψης και των πρακτικών των καθηγητών (Jaworski & Potari, 2002). Η διδακτική τριάδα αποτελείται από τρία στοιχεία την διαχείριση της μάθησης, την ευαισθησία στους μαθητές και την μαθηματική πρόκληση. Η έννοια της "αρμονίας" (μεταξύ της μαθηματικής πρόκλησης και της ευαισθησίας στους μαθητές) είναι βασικός παράγοντας που εξηγεί την φαινομενική επιτυχία διδασκαλίας/μάθησης (Jaworski & Potari, 2002). Το ζήτημα της μαθηματικής πρόκλησης έχει απασχολήσει και άλλους ερευνητές. Η Stein (2008) καθορίζει 5 βασικές παιδαγωγικές πρακτικές που μπορούμε να μάθουμε για να χρησιμοποιούμε τις απαντήσεις των μαθητών πιο αποτελεσματικά στις συζητήσεις στην τάξη. Στην συνέχεια, έχουμε το σχήμα κωδικοποίησης των Scherrer και Stein (2013) το οποίο είναι ένα αναλυτικό εργαλείο που σχεδιάστηκε για να ευαισθητοποιήσει τους καθηγητές ως προς : τις αλληλεπιδράσεις του λόγου, πώς οι εκπαιδευτικοί έχουν έλεγχο (μερικό) αυτών των αλληλεπιδράσεων, πώς αυτές οι αλληλεπιδράσεις διαμορφώνουν τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών (Analyzing Teacher Moves Guide (ATM)).

Κατά την διάρκεια της συζήτησης στην τάξη εμπλέκεται μία ποικιλία δράσεων των εκπαιδευτικών. Για να μελετήσουν τις δράσεις του εκπαιδευτικού οι Ponte, Mata-Pereira και Quaresma (2013) ανέπτυξαν ένα πλαίσιο που προϋποθέτει ότι ο εκπαιδευτικός εκτελεί δράσεις που έχουν άμεση σχέση με τα θέματα και τις μαθηματικές διαδικασίες, καθώς και δράσεις που σχετίζονται με την διαχείριση της μάθησης (όπως αναφέρεται στους Ponte & Quaresma, 2015). Επίσης, ο Fraivillig (1999) διερεύνησε τη φύση των συζητήσεων ολόκληρης της τάξης που στοχεύουν στην επέκταση της μαθηματικής σκέψης δηλαδή ποιες διδακτικές δράσεις υποστηρίζουν τα επεισόδια επέκτασης και ποια η σχέση των δράσεων αυτών με τη γνώση του εκπαιδευτικού. Μία πρόσφατη προσέγγιση περιγραφής του λόγου είναι το πλαίσιο του αναπροσανατολισμού, της προόδου και της εστίασης και η αντιστοίχιση αυτής της περιγραφής με τους 5 διαφορετικούς τύπους σχολίων των μαθητών (Drageset, 2014). Πιο συγκεκριμένα, όταν ο Drageset μελέτησε τις εξηγήσεις των μαθητών και το πώς οι εκπαιδευτικοί ανταποκρίνονται σε αυτές κατέληξε σε τρεις τύπους εξηγήσεων των μαθητών και τις συσχέτισε με τις 13 διαφορετικές δράσεις των εκπαιδευτικών (αναπροσανατολισμένες-προοδευτικές-εστιασμένες). Ακόμα, στηριζόμενος στο ίδιο πλαίσιο ο Drageset μελέτησε το πως οι εκπαιδευτικοί

ανταποκρίνονται σε ανεξήγητες απαντήσεις των μαθητών και τι σημαίνει αυτό για τις ευκαιρίες των μαθητών να μάθουν μαθηματικά.

Μία ακόμα βασική «υποχρέωση» του ερευνητή της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών είναι η μελέτη των κοικωνικομαθηματικών νορμών. Σημαντική συνεισφορά στην μελέτη αυτών των κανόνων στον χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών, είχε η έρευνα των Cobb και Yackel (1996). Η γνώση αυτών των κανόνων εφοδιάζει τόσο τους μαθητές και το δάσκαλο, όσο και τον ερευνητή με ένα πλαίσιο αναφοράς (Σύνταγμα), σύμφωνα με το οποίο μπορούν να επεξηγούνται οι δράσεις και οι δηλώσεις των μαθητών που αφορούν: την εξήγηση, την αιτιολόγηση, την επιχειρηματολογία και την μαθηματική αποτελεσματικότητα (Cobb & Yackel, 1996). Υπάρχουν όμως ακόμα πολλά αναπάντητα ερωτήματα και ζητήματα που χρήζουν περαιτέρω μελέτη. Μπορεί να διαμορφωθεί ένα πλαίσιο το οποίο να προσφέρει μία πιο ολιστική εικόνα των δράσεων εκπαιδευτικού; Μπορεί ο εκπαιδευτικός με την βοήθεια αυτού του πλαισίου να κάνει συνειδητές επιλογές των δράσεων που εκτελεί; Ποιες είναι οι κυρίαρχες δράσεις που εκτελεί ένας εκπαιδευτικός; Εμφανίζονται αλληλεπιδράσεις-μοτίβα δράσεων; Υποστηρίζουν οι δράσεις αυτές την μαθηματική πρόκληση; Είναι σε θέση να χρησιμοποιεί το πλαίσιο αυτό των δράσεων ως ένα έναυσμα για να υποστηρίξει την ισορροπία ανάμεσα στην μαθηματική πρόκληση και την ευαισθησία του για τους μαθητές;

Η παρούσα διπλωματική επικεντρώνεται στα σημεία αυτά. Στο επίκεντρο της μελέτης αυτής τοποθετείται η μαθηματική πρόκληση και ως πρώτο ερευνητικό ερώτημα θέτει την διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει την μαθηματική πρόκληση και την εξέταση των δράσεων που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός για να πετύχει την υποστήριξη αυτή. Κατά την ανάλυση και κατηγοριοποίηση των δράσεων του εκπαιδευτικού προέκυψαν και κάποια μοτίβα δράσεων τα οποία ενίσχυσαν την μελέτη του τρόπου με τον οποίο ο εκπαιδευτικός προκαλεί μαθηματικά τους μαθητές του. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, εστιάζει στην μελέτη του πως η μαθηματική πρόκληση στηρίζεται στην δράση των μαθητών, στον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική πρόκληση εξελίσσεται και διαμορφώνεται μέσα στην τάξη καθώς και στο ποιοι παράγοντες την επηρεάζουν. Η απάντηση των

ερωτημάτων αυτών, θεωρούμε ότι συνεισφέρει στη μαθηματική κοινότητα τόσο από ερευνητικής, όσο και από παιδαγωγικής σκοπιάς.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα κεφάλαια στα οποία διαρθρώνεται η εργασία. Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει το θεωρητικό πλαίσιο και την βιβλιογραφική ανασκόπηση γύρω από το αντικείμενο της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται λεπτομερώς η μεθοδολογία της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η ανάλυση των αποτελεσμάτων μέσα από κάποια κρίσιμα σημεία που αναδύθηκαν κατά την διάρκεια διεξαγωγής της έρευνας. Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται συζήτηση και εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με τα αποτελέσματα της έρευνας, τα οποία αντιπαρατίθενται με την υπάρχουσα έρευνα όπου είναι εφικτό, αναδεικνύεται η συνεισφορά της έρευνας στη μαθηματική κοινότητα, ενώ τέλος κατατίθενται προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1 Μαθηματική επικοινωνία και αλληλεπίδραση

- Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσω τις βασικές θεωρητικές έννοιες με τις οποίες θα ασχοληθεί αυτή η διπλωματική και τα θεωρητικά εργαλεία ανάλυσης.

1.1.1 Μαθηματική επικοινωνία από την οπτική της Sfard

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε πως η Sfard σε μία σειρά από εργασίες της, συζητά και αναλύει το θέμα της μαθηματικής επικοινωνίας.

Η Sfard (2001) βάζει την επικοινωνία στην καρδιά της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η προσέγγιση της Sfard (2008) εστιάζει στους εσωτερικούς μηχανισμούς της ανάπτυξης λόγου (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Στηρίζεται στο εννοιολογικό πλαίσιο που θεωρεί την μάθηση ως απόκτηση και ως συμμετοχή. Η διάκριση απόκτηση/συμμετοχή έχει οντολογικό χαρακτήρα και στηρίζεται σε δύο ριζικά διαφορετικές απαντήσεις στο θεμελιώδες ερώτημα: Τι είναι αυτό το πράγμα που ονομάζεται μάθηση και η διάκριση ατομικό/κοινωνικό δεν συνεπάγεται αντιπαράθεση ως προς τον ορισμό της μάθησης αλλά στηρίζεται σε διαφορετικές όψεις του μηχανισμού της μάθησης (Sfard, 2001). Η 'μεταφορά' της απόκτησης της γνώσης (ορσ. Μάθησης) είναι δημοφιλής στην εκπαιδευτική έρευνα (Sfard, 1998). Η γνώση ως απόκτηση υπογραμμίζει τον ατομικό χαρακτήρα της προσπάθειας. Στο πλαίσιο της απόκτησης η κατανόηση είναι ένας τρόπος γνώσης, ενώ η ίδια η γνώση είναι αντιληπτή ως ένα ορισμένο αντικείμενο που ένα άτομο είτε έχει ή όχι και η μάθηση θεωρείται ως η διαδικασία απόκτησης αυτού του αντικειμένου (Sfard, 2008). Η χρήση της μεταφοράς αντικειμένου έχει διερευνηθεί λεπτομερώς, επιτρέποντας στην Sfard (2008) να προτείνει ότι αν και η διαδικασία της αντικειμενοποίησης είναι

κεντρική στην ανάπτυξη του λόγου είναι η πηγή πολλών δυσκολιών στον τρόπο σκέψης μας για την σκέψη (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Πολλές φορές μια συνομιλία αποτυγχάνει επειδή ο ένας συνομιλητής χρησιμοποιεί γενικές έννοιες με αντικειμενικό τρόπο ενώ ο άλλος όχι. Έτσι προσπάθησε να εξαιρέσει την διαδικασία της αντικειμενοποίησης ("disobjectify") του λόγου μας για την σκέψη. Το έργο της αφαίρεσης της αντικειμενοποίησης (disobjectifying) του λόγου μας για την σκέψη περιλαμβάνει την κατάργηση εικασιών σχετικά με διανοητικά αντικείμενα και δραστηριότητες και την αντικατάσταση τους με λειτουργικούς ορισμούς των παρατηρήσιμων φαινομένων (Wing, 2011). Η Sfard (2008) επίσης χρησιμοποιεί την διάκριση του Mikhail Bakhtin μεταξύ και μονόλογου και διάλογου και χρησιμοποιεί μια διαλεκτική προσέγγιση στο δικό της ερευνητικό έργο (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η Sfard (2008) πρότεινε την ανάπτυξη ενός μη δυϊστικού λόγου (non dualist discourse) που θα αποφεύγει την εφεύρεση εμπειρικά απρόσιτων ψυχικών αντικειμένων (π.χ. : σχήμα) και θα ασχολείται μόνο με εμπειρικά παρατηρήσιμα φαινόμενα (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Δεύτερον, η Sfard (2008) προτείνει να αποφεύγουμε οποιαδήποτε όψη της μάθησης μιλά για την απόκτηση αμφίβολων αντικειμένων (γεγονότα, δεξιότητες, σώμα της γνώσης) και είναι υπέρ της συμμετοχικής προσέγγισης του Vygotsky που βλέπει την ανθρώπινη γνώση ως την 'δυναμική συνομιλία της ανθρωπότητας' όπου τα παιδιά είναι απαραίτητο να μοιραστούν (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η υιοθέτηση μιας τέτοιας συμμετοχικής θέσης επιτρέπει στην Sfard (2008) να δει τόσο την ανθρώπινη όσο και ατομική ανάπτυξη ως δύο αλληλοσυμπληρούμενες διαδικασίες, και έτσι να αναζητήσει την προέλευση αυτού που έχουμε συνηθίσει να αποκαλούμε ατομική σκέψη μέσα σε μία πρότυπη συνεργατική δραστηριότητα του ανθρώπου που μπορεί δικαιολογημένα να θεωρηθεί ως πρόδρομος της (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η θεωρία της Sfard (2008) παρουσιάζει μία διαφορετική άποψη ότι η γνώση και η επικοινωνία είναι αδιαχώριστες, (cognition + communication = commognition) (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο η σκέψη ορίζεται ως: μία εξατομικευμένη εκδοχή της διαπροσωπικής επικοινωνίας (Sfard, 2008, όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η γνώση θεωρείται σε σχέση με την συμμετοχή στον λόγο και όχι ως μια αντικειμενική οντότητα που μπορεί να αποκτηθεί και η μάθηση ως μια συνεχής αλλαγή στον λόγο. Μία τέτοια αλλαγή μπορεί να είναι είτε σε επίπεδο-αντικειμένου (όπου νέες λέξεις εισάγονται) είστε σε μετά-επίπεδο (όπου οι κανόνες του λόγου αλλάζουν). Αν η σκέψη είναι επικοινωνία τότε μια συνομιλία

μεταξύ δύο ανθρώπων είναι ένας πολύπλοκος συνδυασμός πολλών στενά μεταξύ τους μερικώς επικαλυπτόμενων προσπαθειών επικοινωνίας, μόνο μερικές από τις οποίες είναι προσβάσιμες από τους παρατηρητές αλλά όλες αυτές τους επηρεάζουν όλους. Σύμφωνα με την Sfard (2008) ο λόγος ορίζεται ως εξής : οι διαφορετικοί τύποι επικοινωνίας και επομένως του commognition που αντλούν ορισμένα άτομα μαζί ενώ αποκλείουν κάποια άλλα (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η προσέγγιση της Sfard (2008) χαρακτηρίζεται ως επικοινωνικό-γνωστική. Οι γνωστικές διαδικασίες και οι διαπροσωπικές διαδικασίες επικοινωνίας είναι διαφορετικές εκδηλώσεις του ίδιου φαινομένου. Η γνώση ως επικοινωνιακή δραστηριότητα στηρίζεται στο φαινόμενο της αμοιβαίας ρύθμισης και αυτορρύθμισης. Επίσης, ο όρος συζήτηση-λόγος (discourse) χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει κάθε συγκεκριμένη περίπτωση επικοινωνίας είτε διαχρονική είτε συγχρονική, είτε λεκτική είτε με τη βοήθεια οποιουδήποτε άλλου συμβολικού συστήματος (οι λόγοι αναλύονται ως πράξεις επικοινωνίας). Διαφορετικοί τύποι επικοινωνίας και επομένως το commognition, ότι αντλούμε ορισμένα άτομα μαζί με εξαίρεση κάποιους άλλους ονομάζονται συζητήσεις. Έπειτα γίνεται μία επικοινωνικό-γνωστική εξέταση των μαθηματικών ως λόγο. Τα μαθηματικά ως λόγος δεν είναι το ίδιο με τα μαθηματικά ως γλώσσα, είναι μια συνεχής αυτοποιητική διαδικασία (εφεύρει δικά της αντικείμενα) και η λέξη επικοινωνία χρησιμοποιείται εδώ με πολύ ευρεία έννοια και δεν περιορίζεται στις αλληλεπιδράσεις που προκαλούνται από την γλώσσα. Η επικοινωνία (communication) διαφέρει από την λέξη λόγο (discursive) στα επιστημολογικά θεμέλια τους. Η επικοινωνικό-γνωστική προοπτική καλεί τους εκπαιδευτικούς να επικεντρωθούν στις δικές τους και στων παιδιών παρατηρήσιμες διαπροσωπικές επικοινωνίες. Ένας καθηγητής αυτό που μπορεί να αλλάξει είναι να επικοινωνεί με διαφορετικό τρόπο και να αξιολογεί τα παιδιά με βάση τα πρότυπα και τις αλλαγές που παρατηρεί στις διαπροσωπικές τους επικοινωνίες. Η Sfard (2008) λέει ότι η καθομιλούμενη δημιουργήθηκε για χάρη της επικοινωνίας με τη φυσική πραγματικότητα ενώ τα αντικείμενα του μαθηματικού λόγου δημιουργήθηκαν για λόγους επικοινωνίας (όπως αναφέρεται στον Wing, 2011). Η έννοια της αφαίρεσης της αντικειμενοποίησης “disobjectify” του λόγου, μας επιτρέπει να βάλουμε στην άκρη τις αιώνιες διαφορές και διαμάχες για την οντολογική κατάσταση των μαθηματικών αντικειμένων και να εργαστούμε σε μια σχολική τάξη με παρατηρήσιμα φαινόμενα. Επίσης έχουμε το επιχείρημα της Sfard (2008) για επικοινωνικό-γνωστική σύγκρουση μεταξύ των εξατομικευμένων νεοεισερχόμενων και παλιών λόγων (όπως

αναφέρεται στον Wing, 2011). Η επικοινωνιακή σύγκρουση είναι διαφορετική από την γνωστική σύγκρουση. Η έννοια της γνωστικής σύγκρουσης προϋποθέτει την ικανότητα κάποιου να δικαιολογήσει λογικά δύο συγκρουόμενες αξιώσεις για τον κόσμο (Tall & Schwartzenberger, 1978), η έννοια της σύγκρουσης λόγου υπογραμμίζει τη σύγκρουση της συνήθους χρήσης λέξεων το οποίο είναι ένα εγγενής φαινόμενο λόγου. Υπάρχουν δύο ειδών κανόνες: κανόνες σε επίπεδο αντικειμένου του μαθηματικού λόγου που διέπουν το περιεχόμενο (Sfard, 2000b, Sfard & Kieran, 2001a) και μετακανόνες που είναι οι προϋποθέσεις των επικοινωνιακών δραστηριοτήτων (Sfard, 2000c), (π.χ.: συμμετοχή σε διαφορετικές συζητήσεις), (όπως αναφέρεται στην Sfard, 2000). Ο μετακανόνας θα πρέπει να νοείται ως μια ερμηνευτική υπόθεση που κατασκευάστηκε από τον μελετητή προκειμένου να εξηγήσει αυτό που βλέπει και όχι κάτι που είναι πραγματικά εκεί. Η επίδραση των μετακανόνων είναι αισθητή σε κάθε δράση λόγου. Μας λένε πότε να κάνουμε τι και πώς να το κάνουμε (Bauersfeld, 1993 & Cazden, 1988, όπως αναφέρεται στην Sfard, 2000). Η καθημερινή ομιλία έχει μετακανόνες που είναι σε αντίθεση με τις κοινές μορφές επικοινωνίας σε μια συνηθισμένη τάξη μαθηματικών. Όπως ο Voigt (1985) είπε: η αλληλεπίδραση σε μια τάξη αποκτά κανονιστικά χαρακτηριστικά (όπως αναφέρεται στην Sfard, 2000). Οι έννοιες των κοινωνικών και των κοινωνικομαθηματικών κανόνων έχουν κανονιστικό χαρακτήρα αντίστοιχο των μετακανόνων (Cobb, 1996, Cobb et al., 1993,Yackel & Cobb, 1996, όπως αναφέρεται στην Sfard, 2000). Δηλαδή οι επικρατούσες μορφές δράσης τείνουν να θεωρούνται μετά από λίγο ως οι προτιμώμενες μορφές συμπεριφοράς. Το σύνηθες και το κυρίαρχο αποκτούν την ποιότητα του επιθυμητού και του προνομιακού. Οτιδήποτε αποκλίνει από το κανονικό περιγράφεται ως παθολογία, ως λάθος. Οι μετακανόνες είναι σιωπηροί με μεγάλη επίδραση στην σκέψη μας που είναι δύσκολο να αλλάξει. Οι νέες διαλεκτικές συμπεριφορές του μαθητή αναπτύσσονται σταδιακά ως αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων στην τάξη. Ο μαθηματικός λόγος γίνεται ειδικός από 2 βασικούς παράγοντες: 1) από την εξάρτηση του από συμβολικά αντικείμενα ως εργαλεία επικοινωνίας-μεσολάβησης, 2) από τους συγκεκριμένους μετακανόνες που ρυθμίζουν αυτό το είδος επικοινωνίας. Στην περίπτωση των μαθηματικών οι μετακανόνες περιλαμβάνουν την μοναδικότητα των μαθηματικών τρόπων ορισμού και απόδειξης. Είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ του ακαδημαϊκού μαθηματικού λόγου, του σχολικού μαθηματικού λόγου και του καθημερινού μαθηματικού λόγου. Πολλές μαθηματικές έννοιες μπορούν να αντιμετωπιστούν με

λογική ακρίβεια εντός των ευέλικτων ορίων του καθημερινού λόγου. Διαφορετικού είδους εξηγήσεις πιο πειστικές στα μάτια των μαθητών θα μπορούσαν να έρθουν μόνο από την καθημερινή ομιλία. Οι συζητήσεις στην τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης των μαθητών δεν είναι περίπτωση ενός πλήρως ανεπτυγμένου μαθηματικού λόγου αλλά μία διασταύρωση του καθημερινού και του σύγχρονου μαθηματικού λόγου. Στην πραγματικότητα ενώ μιλάμε για το ίδιο πράγμα συμμετέχουμε σε διαφορετικές συζητήσεις που ρυθμίζονται από διαφορετικούς μετακανόνες. Η τάση να αναζητούμε πάντοτε καταστάσεις της καθημερινής ζωής και να αποφεύγουμε να ασχολούμαστε με το 'απόσταγμα' του μαθηματικού περιεχομένου είναι στο πνεύμα της καθημερινής ομιλίας αλλά έρχεται σε αντίθεση με την ουσία της μαθηματικοποίησης. Μία σειρά από αρχές που πρέπει να καθοδηγούν την διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών τα οποία υπερβαίνουν τα όρια του μαθηματικού λόγου είναι: Να αποφασίσουμε ποιους μετακανόνες θα διατηρήσουμε και ποιους θα εγκαταλείψουμε, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί να μην εγκαταλείψουμε συστατικά χωρίς τα οποία η κατασκευή θα καταρρεύσει, είναι χρήσιμο να είμαστε σαφείς με το ποιους μετακανόνες πρέπει να μάθουν. Οι Lampert (1990), Ball (1997) και Cobb (Cobb, Wood, & Yackel, 1991, 1993) έδειξαν ότι αυτό μπορεί να γίνει ακόμη και στα πιο στοιχειώδη επίπεδα (όπως αναφέρεται στην Sfard, 2000). Επίσης, είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε την αμοιβαία εξάρτηση ορισμένων συνόλων μετακανόνων και συγκεκριμένων συνόλων εννοιών.

1.1.2 Μαθηματική επικοινωνία από την οπτική του Bauersfeld και της γερμανικής σχολής της Διδακτικής των Μαθηματικών

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσω τις αλλαγές στον τρόπο εξέτασης της γλώσσας και της επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών από την οπτική της γερμανικής διδακτικής όπως αναφέρονται από τον Steinbring (1998). Η πρώτη θέση ονομάζεται Stoffdidaktik και είναι μία διδακτική του περιεχομένου του αντικειμένου η οποία υποστηρίζει ότι το πρωταρχικό καθήκον της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να προετοιμάσει τα μαθηματικά για τους μαθητές δηλαδή να απλοποιήσει μεθοδολογικά την μαθητική γνώση που προέρχεται από τους μαθηματικούς. Με αυτήν την προσέγγιση το πρόβλημα της γλώσσας και της επικοινωνίας αναδύεται με τη μορφή

του ασυμβίβαστου μεταξύ της μαθηματικής τεχνικής γλώσσας και της καθημερινής γλώσσας των μαθητών (Abele, 1988, 1992, Maier, 1986 & Bauer, 1978, Winter, 1978, όπως αναφέρεται στον Steinbring, 1998). Το Stoffdidaktik είναι μία θεώρηση της γλώσσας και επικοινωνίας που περιγράφεται από τους Lakoff & Johnson ως μύθος του αντικειμενισμού. Αυτή η αντίληψη για τον ρόλο της γλώσσας και της επικοινωνίας στην διδασκαλία των μαθηματικών επικρίθηκε από δύο θέσεις: 1) φιλοσοφική και επιστημολογική κριτική, 2) κοινωνιολογική και αλληλοσυσχετιστική κριτική. Σύμφωνα με την πρώτη κριτική το ερώτημα είναι αν η επιστήμη και ιδιαίτερα τα μαθηματικά μπορούν να χαρακτηριστούν ως γλώσσα. Η απάντηση είναι ότι τα μαθηματικά δεν μπορούμε να τα δούμε ως μία απλοϊκή τεχνική γλώσσα, τα μαθηματικά πρέπει να τα βλέπουμε ως μία ζωντανή, ανοιχτή γλώσσα και ως μέσο επικοινωνίας που παράγει τις δικές του μεταφορές, σημασίες και ερμηνείες. Οι ερευνητές της δεύτερης θέσης ανέπτυξαν έννοιες που κατανοούν φαινόμενα της επικοινωνίας της τάξης: το πρότυπο χωνί (funnel pattern) (Bauersfeld, 1978), μαθηματική διαμόρφωση (mathematical framing) (Krummheuer, 1982) και ρουτίνες και μοτίβα (Voigt, 1984b). Σύμφωνα με την πρώτη θέση δεν υπάρχει αυστηρή αντιστοιχία μεταξύ αντικειμένων και συμβόλων (Bauersfeld, 1995, όπως αναφέρεται στον Steinbring, 1998). Αυτή η θέση βλέπει τα μαθηματικά ως μία ανεξάρτητη κουλτούρα που παράγει μία ειδική σχολικό-μαθηματική γλώσσα και πολύ συχνά η ιδανική διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης αντικαθίσταται από κοινωνικό-λογικές αλληλεπιδράσεις (Bauersfeld, 1988, όπως αναφέρεται στον Steinbring, 1998). Σύμφωνα με τον Voigt (1994) τα μοτίβα αλληλεπίδρασης διδασκαλίας και μάθησης από μόνα τους δεν εγγυούνται μία επιτυχή μάθηση μαθηματικών. Η συμβολική αλληλεπίδραση (symbolic interactionist) και ο ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός ισχυρίζονται ότι μόνο οι μαθηματικές έννοιες που μπορούν να μοιραστούν μπορούν να παραχθούν μέσω διαπραγματεύσεων. Η συμβολική αλληλεπίδραση βλέπει τις έννοιες ως κοινωνικά προϊόντα (Blumer, 1969, όπως αναφέρεται στον Voigt, 1994). Όταν ένα αντικείμενο ή γεγονός γίνεται ορατό και κατανοητό αποκτά την ιδιότητα ενός διϋποκειμενικού αντικειμένου (Leiter, 1980, όπως αναφέρεται στον Voigt, 1994). Στην καθημερινή πρακτική ο καθηγητής και οι μαθητές υποθέτουν ότι το πλαίσιο είναι γνωστό ενώ στην πραγματικότητα γίνεται κοινόχρηστο με ασαφή και σιωπηρό τρόπο. Οι 'ρουτίνες' (σταθερότητα κανονικοτήτων) λειτουργούν για την ελαχιστοποίηση του μονίμου κίνδυνου μιας πιθανής κατάρρευσης και αποδιοργάνωσης του λόγου στην τάξη (Voigt,1994). Οι ρουτίνες συνδέονται με τις

αλληλεπιδραστικές υποχρεώσεις. Μία δράση ρουτίνας επιτρέπει στον παρατηρητή να αναμένει μία άλλη δράση ρουτίνας με τη μορφή μιας αντίδρασης εάν δεν υπάρχει σύγκρουση μεταξύ των συμμετέχοντων. Οι υποχρεώσεις γίνονται φανερές σε περιπτώσεις σύγκρουσης. Το Stoffdidactik επικεντρώνεται στη σύνταξη της τεχνικής μαθηματικής γλώσσας, η κοινωνικό-αλληλεπιδραστική θέση βλέπει τα μαθηματικά ως γλώσσα από την πραγματιστική προοπτική ενώ η φιλοσοφική-επιστημολογική θέση εστιάζει στις ιδιόμορφες σημασιολογίες των μαθηματικών συμβόλων και στη θεωρητική φύση της μαθηματικής γνώσης. Η φιλοσοφική-επιστημολογική θέση υποστηρίζει ότι η έννοια της θεωρητικής μαθηματικής γνώσης μπορεί να δημιουργηθεί κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδραστικών διαδικασιών μόνο αν η έννοια της μαθηματικής γνώσης δεν περιορίζεται στην πραγματική αλληλεπιδραστική κοινωνική πρακτική στην οποία οι μαθητές και ο δάσκαλος εμπλέκονται και αν γίνει δεκτό ότι υπάρχει κάποιο είδος επιστημολογικής έννοιας της μαθηματικής γνώσης έξω από την πραγματική κοινωνική πρακτική. Αντίθετα η κοινωνικό-αλληλεπιδραστική θέση υποστηρίζει ότι καμία σημασία της μαθηματικής γνώσης δεν υφίσταται έξω από μια κοινωνική πρακτική. Το Stoffdidaktik θεωρεί το σώμα της μαθηματικής γνώσης και εννοιών κυρίαρχο και ότι η γλώσσα και η επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών εξαρτούνται από αυτό. Η κοινωνικό-αλληλεπιδραστική θέση δίνει έμφαση στην ανεξαρτησία των κοινωνικών διαδικασιών διδασκαλίας και μάθησης. Η επιστημολογική θέση υποστηρίζει ότι το μαθηματικό νόημα δεν περιορίζεται στην πραγματική κοινωνική πρακτική αλλά λαμβάνει υπόψη εννοιολογικές σχέσεις της μαθηματικής γνώσης. Για την κοινωνικό-αλληλεπιδραστική θέση η γλώσσα είναι το κεντρικό μέσο σε μία κοινωνική πρακτική για να επιφέρει οποιοδήποτε νόημα και να επικοινωνήσει το νόημα με την γνώση.

1.1.3 Μοτίβα αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσω τα μοτίβα αλληλεπίδρασης που πηγάζουν από την γερμανική σχολή με κύριο εκπρόσωπο τον Bauersfeld, αλλά αξιοποιούνται και απ' τους Cobb, Wood και Voigt. Υπάρχουν δύο διαφορετικές παραδόσεις των μαθηματικών στην τάξη, αυτή που σύμφωνα με τον Richard (1991) καλούμε σχολικά μαθηματικά και τα διερευνητικά μαθηματικά (όπως αναφέρεται στους Cobb, Wood,

&Yackel, 1991). Όπως η Eisenhart (1988) προτείνει η εκμάθηση των μαθηματικών μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδικασία ατομικής κατασκευής και ως μία διαδικασία πολιτισμικής αφομοίωσης (εκπολιτισμού) των μαθηματικών εννοιών και των πρακτικών της ευρύτερης κοινωνίας (όπως αναφέρεται στους Cobb, Wood, &Yackel, 1991). Η μάθηση συμβαίνει όχι μόνο επειδή τα παιδιά προσαρμόστηκαν στην μαθηματική δραστηριότητα αλλά επειδή οι προσαρμογές αυτές συνέβαλαν στον εκπολιτισμό τους με τις μαθηματικές πρακτικές της ευρύτερης κοινωνίας. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι αναλύσεις της επικοινωνίας στην τάξη θα πρέπει να εξετάσουν τις ισοδύναμες, παράλληλες και ασύγκριτες πτυχές, τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών, των πεποιθήσεών τους και των μαθηματικών δυνατοτήτων τους σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Μια πτυχή του ενεργού και απαιτητικού ρόλου του καθηγητή είναι να διευκολύνει τις μαθηματικές συζητήσεις μεταξύ των μαθητών ενώ ταυτόχρονα ενεργεί ως συμμετέχων που μπορεί να νομιμοποιήσει ορισμένες πτυχές της μαθηματικής δραστηριότητας και να εγκρίνει άλλες. Όταν υπάρχει ομοφωνία καλούμε τις ερμηνείες ισοδύναμες οι οποίες διαφέρουν από τις παράλληλες ερμηνείες. Οι παράλληλες ερμηνείες και λύσεις οφείλονται στις πεποιθήσεις σχετικά με το γενικό χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας. Στις ερμηνείες υπάρχουν σιωπηρές ασυμβατότητες οι οποίες όταν γίνονται εμφανείς οδηγούν σε μία ενδοψυχολογική σύγκρουση. Οι διαφορετικές ερμηνείες θα πρέπει να γίνουν θέματα συζήτησης προκειμένου να επιλυθεί το αδιέξοδο με ένα αμοιβαίο αποδεκτό τρόπο. Μία από τις πρωταρχικές ευθύνες του καθηγητή είναι να βοηθήσει τους μαθητές να διαπραγματευτούν τις υποχρεώσεις τους για τη δική τους δραστηριότητα και τις προσδοκίες τους για τους άλλους κατά την διάρκεια της εργασίας σε μικρές ομάδες (Cobb, Wood, &Yackel, 1991). Τα μαθήματα στην τάξη των μαθηματικών μπορούν να χαρακτηριστούν από μοτίβα αλληλεπίδρασης και τρόπους επικοινωνίας που αποκαλύπτουν διαφορετικές θέσεις σχετικά με την διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών. Για να καταλάβουν οι μαθητές μαθηματικά ο αναστοχασμός και η επικοινωνία είναι τα βασικά χαρακτηριστικά. Σύμφωνα με τους Voigt (1985) και Steinbring (1993) η επικοινωνία της τάξης στηρίζεται στην εύρεση από τους μαθητές της προκαθορισμένης λύσης που έχει ο καθηγητής στο μυαλό του (όπως αναφέρεται στην Wood, 1994). Ένα εναλλακτικό μοτίβο αλληλεπίδρασης περιγράφεται από την Wood (1994): οι μαθητές ενθαρρύνονται να εκφράσουν τις σκέψεις τους και μία ποικιλία λύσεων οι οποίες γίνονται δεκτές και αξιολογούνται ενώ ο καθηγητής επισημαίνει την λύση που θεωρεί

ότι είναι ένας ενδιαφέρον τρόπος να σκεφτούν οι μαθητές για το πρόβλημα. Το μοντέλο των Wood et al (2006) αφορά τα είδη των μοτίβων αλληλεπίδρασης (κοινά μοτίβα σε όλες τις διδασκαλίες, μοτίβα συμβατικών διδασκαλιών και μοτίβα εναλλακτικών διδασκαλιών), (όπως αναφέρεται στον Larsson, 2015). Η συνεργασία μεταξύ μαθητών-καθηγητή βρίσκεται στο επίκεντρο της διερευνητικής διδασκαλίας (Wood et al, 2006, όπως αναφέρεται στον Larsson, 2015). Οι μαθητές εξηγούν τις στρατηγικές τους και ο καθηγητής ελέγχει αν υπάρχει συναίνεση. Οι μαθητές προσπαθούν να οικοδομήσουν μια από κοινού κατανόηση-χτίζουν συναίνεση. Ο καθηγητής δεν λέει τίποτα κατά την διάρκεια όλων αυτών των περιπτώσεων που οι μαθητές χτίζουν συναίνεση. Οι μαθητές αξιοποιούν τις δηλώσεις των συμμαθητών τους. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ένα αποτέλεσμα των κοινωνικών και κοικωνικομαθηματικών νορμών (Yackel & Cobb, 1996). Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται σύνδεση μεταξύ των νορμών της τάξης και των μοντέλων αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται (Wood et al, 1996, όπως αναφέρεται στον Larsson, 2015). Το παραδοσιακό μοντέλο επικοινωνίας IRE είναι ένας μονοσήμαντος τρόπος επικοινωνίας που δεν υποστηρίζει την μάθηση των μαθηματικών. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά η Wood (1996) μία τάξη που ερευνά και επιχειρηματολογεί σχετίζεται με ανωτέρα γνωστικά επίπεδα μαθητικής σκέψης (όπως αναφέρεται στην Larsson, 2015). Η κύρια διαφορά μεταξύ παραδοσιακών και εναλλακτικών τάξεων είναι στη φύση των κοινωνικών νορμών (Yackel, Cobb & Wood, 1991). Τα μοτίβα είναι οι κρυμμένες κανονικότητες που καθοδηγούν τις δράσεις των συμμετεχόντων στην τάξη. Τα μοτίβα αλληλεπίδρασης θεωρούνται ως κανονικότητες που αποκτούνται με αλληλεπίδραση και όχι σταθεροί κανόνες. Ο Voigt το 1985 ανασυνθέτει το 'μοτίβο εκμαίευσης' το οποίο υπαινίσσεται τον αντιφατικό συνδυασμό 2 ισχυρισμών (Voigt, 1994). Στο μοτίβο εκμαίευσης διακρίνουμε 3 φάσεις: 1) ο καθηγητής δημιουργεί μία αμφιλεγόμενη δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές προσφέρουν διαφορετικές απαντήσεις και εκείνος αξιολογεί μόνο, 2) αν οι συνεισφορές των μαθητών είναι αποκλίνουσες ο καθηγητές τους καθοδηγεί προς μια οριστική λύση, 3) ο καθηγητής και οι μαθητές σκέφτονται και αξιολογούν τι έχει γίνει. Οι κοινωνικές νόρμες της επιχειρηματολογίας πρέπει να αλλάξουν κατά την μετωπική διδασκαλία προκειμένου οι μαθητές να αλλάξουν τις συνήθειές τους κατά την ομαδική εργασία (Yackel, Cobb & Wood, 1991). Ο Voigt (1989) επισημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν συνειδητοποιούν ότι τα παραδοσιακά μοτίβα αλληλεπίδρασης είναι ακόμα ζωντανά στις τάξεις τους (Voigt, 1994). Το μοτίβο της

άμεσης μαθηματικοποίησης είναι ένα 'θεματικό μοτίβο' ειδικό για τις τάξεις των μαθηματικών και περιγράφει την ανάπτυξη ενός θέματος. Το μοτίβο αυτό κατασκευάζεται όταν εμπειρικές καταστάσεις ερμηνεύονται μαθηματικά (Voigt, 1994). Λόγω των διαφορών του γνωστικού υπόβαθρου ο καθηγητής και οι μαθητές διαπραγματεύονται τις μαθηματικές έννοιες. Κατά την διάρκεια των διαπραγματεύσεων το νόημα και το πλαίσιο του νοήματος ενημερώνουν το ένα το άλλο. Οι συγκρούσεις ελαχιστοποιούνται μέσω των ρουτινών και των υποχρεώσεων. Το δίκτυο των ρουτινών και των υποχρεώσεων μπορεί να περιγραφεί ως μοτίβο αλληλεπίδρασης (Bauersfeld, 1988, Jungwirth, 1991, McNeal, 1991 & Voigt, 1985, όπως αναφέρεται στον Voigt, 1994). Οι κανονικότητες είναι τα επιτεύγματα των συμμετεχόντων κατά την διάρκεια των αλληλεπιδράσεών τους. Αυτές οι διαφορές χαρακτηρίζουν την συζήτηση μέσα στην τάξη. Οι συνεισφορές των μαθητών στο μαθηματικό θέμα πρέπει να θεωρηθούν βασικές πτυχές στην θεωρία : οι μαθητές συμβάλλουν στην εξέλιξη του θέματος το οποίο συμβάλλει στην μάθησή τους. Η συμμετοχή σε μοτίβα αλληλεπίδρασης συνεισφέρει στην γνωστική ανάπτυξη των παιδιών. Σύμφωνα με τον Voigt (1994) το θεματικό μοτίβο μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να παράγουν λανθασμένες μαθηματικές δηλώσεις αν και κάθε βήμα μπορεί να φαίνεται λογικό. Οι συμβάσεις μπορεί να είναι χρήσιμες αλλά και εμπόδια στη μάθηση. Οι μαθητές πρέπει να διακρίνουν τα μαθηματικά επιχειρήματα και τις συμβάσεις της μαθηματικοποίησης που είναι εγκατεστημένες ώστε να γίνει η διαπραγμάτευση ευκολότερη. Στην συνέχεια παρουσιάζω τα μοτίβα αλληλεπίδρασης του Bauersfeld όπως περιγράφονται από την Wood (1994). Ένας συχνός τρόπος που ο καθηγητής και οι μαθητές επικοινωνούν περιγράφεται από τον Bauersfeld ως μοτίβο-χωνί (funnel pattern). Ο καθηγητής κάνει μια σειρά από φανερές ερωτήσεις μέχρι που παρέχει την σωστή απάντηση. Ο καθηγητής είναι ο μόνος που πραγματικά συμμετέχει στη γνωστική δραστηριότητα. Η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση είναι μονοσήμαντη και η σκέψη των μαθητών είναι εστιασμένη στο να καταλάβουν την απάντηση που ο καθηγητής θέλει κατά την διάρκεια της μαθηματικής σκέψης για τον εαυτό του. Το μοτίβο αυτό δίνει την ψευδαίσθηση ότι η μάθηση συμβαίνει. Ένα άλλο μοτίβο είναι να δημιουργήσει ο καθηγητής καταστάσεις που οι μαθητές επεξηγούν και αιτιολογούν τις μαθηματικές τους ιδέες καθώς επικοινωνούν με τους άλλους. Το να βρουν οι μαθητές την στρατηγική ανεπιτυχώς τους οδηγεί να αντιμετωπίσουν μία κατάσταση την οποία δεν είναι ικανοί να επιλύσουν αμέσως. Η εύρεση μιας αποτελεσματικής λύσης από έναν μαθητή μπορεί να βοηθήσει τους άλλους. Ο

καθηγητής παρεμβαίνει και συνοψίζει τις λύσεις που αισθάνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν. Μετά εστιάζει την προσοχή στο δύσκολο σημείο της λύσης βάζοντας τον μαθητή να την αιτιολογήσει. Δηλαδή ο καθηγητής με μία εστιασμένη ερώτηση προσανατολίζει την συζήτηση στην πτυχή της λύσης ενός μαθητή. Το funnelling διαφέρει από το εστιασμένο μοτίβο, το πρώτο καθοδηγεί την σκέψη του μαθητή ενώ το δεύτερο του δίνει τον έλεγχο της συζήτησης. Στο εστιασμένο μοτίβο ο καθηγητής προσπαθεί να προβλέψει τι οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν και ρωτάει ερωτήσεις που κρατούν την προσοχή εστιασμένη στις δύσκολες πτυχές της λύσης. Δεν θέλει οι μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν μία μέθοδο αλλά να ακολουθούν την αιτιολόγηση ενός μαθητή και να έχουν αίσθηση αυτής. Η αλληλεπίδραση των κοινωνικών νορμών με τα μοτίβα αλληλεπίδρασης δημιουργεί μία διαφορετική κουλτούρα για την μάθηση των μαθηματικών στην τάξη. Το funnel pattern εκφράζει την άποψη ότι η μάθηση των μαθηματικών στηρίζεται αποκλειστικά στην αυθεντία του καθηγητή. Στο focusing pattern αν και ο καθηγητής προσδοκεί οι μαθητές να επικοινωνήσουν τις λύσεις τους με τους άλλους, οι μαθητές νιώθουν ότι είναι σε μία κατάσταση που η σκέψη τους είναι διαθέσιμη για δημόσια αξιολόγηση. Για να υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στην καθοδήγηση της κατανόησης των μαθητών και στο να επιτραπεί στους μαθητές να συμμετέχουν σε δραστηριότητες ο καθηγητής έχει αναπτύξει τρόπους επικοινωνίας που εστιάζουν την προσοχή των μαθητών σε δύσκολες πτυχές μιας λύσης αλλά αφήνει σε αυτούς την ευθύνη να λύσουν το πρόβλημα. Ο καθηγητής με αυτόν τον τρόπο μεταφέρει στους μαθητές ότι αυτό που μετράει σε μία τάξη μαθηματικών είναι τα νοήματα και οι κατανοήσεις που οι μαθητές κατασκευάζουν.

Ο παρακάτω πίνακας είναι μετάφραση του πίνακα που παρουσιάζει η Wood και οι υπόλοιποι (όπως αναφέρεται στην Larsson, 2015) στον οποίο περιγράφονται τα μοτίβα αλληλεπίδρασης της εναλλακτικής διδασκαλίας:

Μοτίβα αλληλεπίδρασης της εναλλακτικής διδασκαλίας (Wood et al, 2006).

Μοτίβο αλληλεπίδρασης	**περιγραφή**	**σκοπός**	**μυητής**
Εξερεύνηση μεθόδων	οι μαθητές εξηγούν τις στρατηγικές επίλυσης.	Να δώσουν πολλαπλές στρατηγικές	Καθηγητής ή μαθητές.

		επίλυσης.	
έρευνα	ο καθηγητής ή οι μαθητές ρωτούν ερωτήσεις γιατί δεν καταλαβαίνουν.	Να καταλάβουν.	Καθηγητής ή μαθητές.
επιχείρημα	Ένας μαθητής ακροατής αμφισβητεί μία ιδέα διότι διαφωνεί, με την οποία οι μαθητές συμμετέχουν εκ περιτροπής.	Να φτάσουν σε μια απόφαση.	Μαθητής ακροατής.
Επεξεργασία του καθηγητή.	Ο καθηγητής επεξεργάζεται μια εξήγηση του μαθητή επειδή οι πληροφορίες είναι ελλιπείς.	Να δώσει περισσότερες πληροφορίες στους μαθητές.	Καθηγητής.
Μοντελοποίηση με υλικό.	ο καθηγητής χρησιμοποιεί υλικό για να βρουν είτε την σωστή απάντηση ή να αποκτήσουν κατανόηση.	Να φτάσουν στην σωστή απάντηση ή να παρέχει γνώση.	Καθηγητής.
Απόδειξη της απάντησης από εξήγηση μαθητή.	Ο καθηγητής αφήνει τους μαθητές να εξηγήσουν την σωστή λύση.	Να εξασφαλίσει ότι η τάξη ακούει την σωστή λύση.	Καθηγητής.
εστίαση	Ο καθηγητής πρώτα δίνει μία	Να προσανατολίσει τους μαθητές σε	Καθηγητής.

	περίληψη πριν ρωτήσει κάτι που εστιάζει τους μαθητές σχετικά με το τι πρέπει να επιλύσουν.	βασικές πτυχές.	
Κατασκευή συμφωνίας	Ο καθηγητής προσπαθεί να κάνει την τάξη να συμφωνήσει σε μία βασική μαθηματική ιδέα.	Να δημιουργηθεί κοινό έδαφος συζήτησης στην τάξη.	Καθηγητής.
Έλεγχος συμφωνίας.	Ο καθηγητής ελέγχει με τους μαθητές αν έχουν ερωτήσεις ή σχόλια σχετικά με την ιδέα κάποιου μαθητή.	Το άνοιγμα ερωτήσεων ή σχόλιων πριν προχωρήσουν.	Καθηγητής.
Ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης.	Ο καθηγητής κάνει μία ερώτηση με την οποία εξετάζει μία συγκεκριμένη ιδέα ή έννοια.	Να διευκολύνει τους μαθητές με την εννοιολογική κατανόηση.	Καθηγητής.
Οι μαθητές αυτό-ορίζουν	Ένας μαθητής προσφέρει εθελοντικά μία ιδέα ή αντίληψη που πηγαίνει πέρα από το θέμα και εξηγεί-δικαιολογεί την ιδέα.	Να ασκούν οι μαθητές την αυτονομία τους ως συμμετέχοντες.	Μαθητής.

1.2 Μελέτη της διδασκαλίας των μαθηματικών-αλληλεπίδρασης

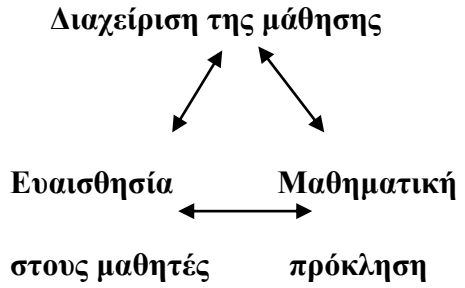
1.2.1 Η διδακτική τριάδα ως εργαλείο ανάλυσης

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσω το θεωρητικό εργαλείο της διδακτικής τριάδας με το οποίο θα ασχοληθεί η παρούσα διπλωματική. Η θεωρητική κατασκευή της διδακτικής τριάδας χρησιμοποιείται ως αναλυτικό εργαλείο από τους ερευνητές και ως αναστοχαστικό μέσο για την ανάπτυξη της διδασκαλίας από τους καθηγητές. Η τριάδα ως αναλυτικό εργαλείο βοηθά να αναγνωρίσουμε, να ερμηνεύσουμε και να κατανοήσουμε τις διαδικασίες μετάφρασης από την θεωρία στα αποτελέσματα, ενώ ως αναπτυξιακό εργαλείο βοηθά να γίνουν αυτές οι μεταφράσεις πιο αποτελεσματικές. Ευρήματα ερευνών δείχνουν ότι η τριάδα συνεισφέρει στην ανάπτυξη της σκέψης και των πρακτικών των εκπαιδευτικών (Jaworski & Potari, 2002). Η διδακτική τριάδα προέκυψε από μια εθνογραφική μελέτη της διερευνητικής διδασκαλίας των μαθηματικών (Jaworski, 1994) από έναν μικρό αριθμό καθηγητών των μαθηματικών (όπως αναφέρεται στις Jaworski & Potari, 2002). Η διδακτική τριάδα αποτελείται από τρία στοιχεία την διαχείριση της μάθησης, την ευαισθησία στους μαθητές και την μαθηματική πρόκληση. Η διαχείριση της μάθησης περιγράφει τον ρόλο του καθηγητή στην συγκρότηση του μαθησιακού περιβάλλοντος από αυτόν και από τους μαθητές (ομάδες στην τάξη, σχεδιασμός tasks, καθορισμός νορμών κ.τ.λ), η ευαισθησία στους μαθητές περιγράφει τη γνώση του καθηγητή για τους μαθητές και την προσοχή του στις ανάγκες τους (οι τρόποι με τους οποίους ο καθηγητής αλληλεπιδρά με το άτομο και με τις ομάδες), η μαθηματική πρόκληση περιγράφει τις προκλήσεις που προσφέρονται στους μαθητές για να προκύψει μαθηματική σκέψη και δράση (σειρά εργασιών, θέσιμο ερωτήσεων και επεξεργασία μεταγνωστικών διαδικασιών). Αυτά τα πεδία είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους και αλληλοεξαρτώμενα. Η διδακτική τριάδα αναπτύσσει μία μεθοδολογική προσέγγιση στη μελέτη της διδασκαλίας με βάση την ανάλυση των αλληλεπιδράσεων στην τάξη. Η έννοια της "αρμονίας" (μεταξύ της μαθηματικής πρόκλησης και της ευαισθησίας στους μαθητές) είναι βασικός παράγοντας που εξηγεί την φαινομενική επιτυχία διδασκαλίας/μάθησης (Jaworski & Potari, 2002). Η προσπάθεια του καθηγητή να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν ή να αποκτήσουν πρόσβαση σε μια ιδέα φαίνεται να περιλαμβάνει παιδαγωγικές διαδικασίες του scaffolding (Bruner, 1985) και του funneling (Bauersfeld, 1988), (όπως αναφέρεται στις Jaworski &

Potari, 2002). Αυτές οι διαδικασίες συνδέονται με την διαχείριση της μάθησης. Έχουμε σύνδεση του όρου 'αποτελεσματική διδασκαλία' με τον όρο 'αρμονία' των 3 στοιχείων της διδακτικής τριάδας. Για κάποιους μαθητές η μαθηματική πρόκληση βρίσκεται κυρίως στο αρχικό έργο, με πολύ μικρή συμβολή του καθηγητή ενώ για άλλους η μαθηματική πρόκληση (γνωστικός τομέας) είναι περισσότερο προσαρμοσμένη στις ανάγκες τους από τον καθηγητή που τους προσφέρει συμβουλές ή ερωτήσεις ώστε να ξεκινήσουν να διατυπώνουν την κατάσταση ή να επεκτείνουν το έργο σε νέες δυνατότητες για διερεύνηση. Η διαχείριση της μάθησης κινείται σε 2 επίπεδα: 1) η πραγματική αλληλεπίδραση με τον κάθε μαθητή, 2) ο συντονισμός των διάφορων δράσεων και αποφάσεων που επιτρέπει στον καθηγητή να ικανοποιήσει τις διαφορετικές ανάγκες όλων των μαθητών του στην τάξη. Ο καθηγητής μέσω της διαχείρισης της μάθησης δημιουργεί ένα περιβάλλον όπου η ευαισθησία στους μαθητές λειτουργεί και στον συναισθηματικό και στον γνωστικό τομέα ώστε να κάνει την μαθηματική πρόκληση κατάλληλη για τις ανάγκες και την σκέψη των μαθητών. Ζητήματα που αναδύονται: 1) η φύση της μαθηματικής πρόκλησης και πώς αλλάζει σε σχέση με τα άλλα 2 στοιχεία της τριάδας. 2) η διττή φύση της ευαισθησίας των μαθητών (γνωστική/συναισθηματικήή) και η σχέση της με την μαθηματική πρόκληση. Η γνωστική ευαισθησία αφορά την εκτίμηση και την αναγνώριση της σκέψης των μαθητών που μπορούν στην συνέχεια να αναπτυχθούν περαιτέρω από κατάλληλη πρόκληση. Η συναισθηματική ευαισθησία περιλαμβάνει την ενίσχυση των προσωπικών πεποιθήσεων των μαθητών, την αποτίμηση της ικανότητάς τους να κάνουν και να σκεφτούν μαθηματικά, αφορά την ευημερία των μαθητών και την θετική στάση στο περιβάλλον της τάξης και δεν πρέπει πάντα να συνδέονται με μια γνωστική διάσταση. Μπορεί δηλαδή να μην επιτευχθεί η ποιότητα της μαθηματικής σκέψης, στην οποία οι μαθητές είναι ικανοί να φτάσουν. Ο χρόνος, οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος και η κοινωνία λειτουργούν ως παράγοντες πίεσης. Αυτοί οι παράγοντες από κοινού μπορούν να προκαλέσουν μείωση της πρόκλησης (αλληλεπίδραση γνωστικών και κοινωνικών παραγόντων). Η μαθηματική πρόκληση είναι κεντρική στον σχεδιασμό της διδασκαλίας. Οι διαφορές μεταξύ σχεδιασμού και διδασκαλίας υποδεικνύουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών στοιχείων της τριάδας. Συνοψίζοντας, η τριάδα είναι ένα εργαλείο που παρέχει πρόσβαση στην πολυπλοκότητα και μας βοηθά να αντιληφθούμε δυϊκές πτυχές της διδασκαλίας (funelling/scaffolding, εννοιολογική/διαδικαστική) με έναν πιο ολοκληρωμένο τρόπο από την άποψη γνωστικής και συναισθηματικής ανάπτυξης των μαθητών αλλά και

από την άποψη των εμποδίων και αποφάσεων των καθηγητών (Jaworski & Potari, 2002).

Το μοντέλο της διδακτικής τριάδας που παρουσιάζεται από τις Jaworski & Potari (2002) είναι το εξής:



Το ζήτημα της μαθηματικής πρόκλησης έχει απασχολήσει και άλλους ερευνητές. Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσω και θα αναλύσω το παιδαγωγικό μοντέλο των 5 πρακτικών των Stein et al (2008). Ειδικότερα, η Stein (2008) ασχολείται με την μαθηματική πρόκληση μέσα από την μαθηματική δραστηριότητα του εκπαιδευτικού και μέσα από την διαχείριση. Έτσι λοιπόν η Stein (2008) καθορίζει 5 βασικές παιδαγωγικές πρακτικές που μπορούμε να μάθουμε για να χρησιμοποιούμε τις απαντήσεις των μαθητών πιο αποτελεσματικά στις συζητήσεις στην τάξη. Οι συζητήσεις αυτές πραγματοποιούνται όταν οι μαθητές εργάζονται σε υψηλού επιπέδου γνωστικά-απαιτητικές δραστηριότητες. Οι μαθηματικές συζητήσεις αποτελούν βασικό μέρος της αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών (Cobb, Boufi et al., 1997; Kazemi & Stipek, 2001; Nathan & Knuth, 2003, όπως αναφέρεται στους Stein, Engle & Smith 2008). Κατά την διάρκεια των συζητήσεων στην τάξη πρέπει να δημιουργούνται νόρμες που επιτρέπουν στους μαθητές να αισθάνονται ότι οι συνεισφορές τους ακούγονται και αξιολογούνται (Cobb, Wood &Yackel, 1991). Οι 5 πρακτικές είναι οι εξής: 1) πρόβλεψη των πιθανών απαντήσεων των μαθητών σε γνωστικά απαιτητικές μαθηματικές δραστηριότητες, 2) παρακολούθηση των απαντήσεων των μαθητών κατά την διάρκεια της φάσης διερεύνησης, 3) επιλογή συγκεκριμένων μαθητών να παρουσιάσουν τις απαντήσεις τους κατά την διάρκεια της συζήτησης-σύνοψης, 4) σκόπιμη αλληλουχία των απαντήσεων που εμφανίζονται και 5) βοηθώντας την τάξη να κάνει μαθηματικές συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών απαντήσεων των μαθητών και των βασικών ιδεών τους, (anticipating , monitoring, selecting, sequencing, and making connections). Η επιτυχής χρήση των 5 πρακτικών εξαρτάται από την

εφαρμογή μιας γνωστικά απαιτητικής δραστηριότητας. Οι πρακτικές εξαρτούνται από την γνώση του καθηγητή για τους μαθητές του και από τους διδακτικούς στόχους του. Πιο συγκεκριμένα η πρόβλεψη περιλαμβάνει την ανάπτυξη των προσδοκιών σχετικά με το πως οι μαθητές θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν μαθηματικά κάποιο πρόβλημα, την σειρά των στρατηγικών (σωστές και λανθασμένες) που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για να το αντιμετωπίσουν, και το πως αυτές οι στρατηγικές και ερμηνείες μπορεί να συσχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες, αναπαραστάσεις, διαδικασίες και πρακτικές που ο καθηγητής θα ήθελε οι μαθητές του να μάθουν. Η παρακολούθηση σημαίνει ότι πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στην μαθηματική σκέψη την οποία οι μαθητές ασκούν καθώς εργάζονται σε ένα πρόβλημα κατά την διάρκεια της φάσης διερεύνησης. Ο στόχος είναι η εκμάθηση συγκεκριμένων στρατηγικών ή αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές και θα ήταν σημαντικό να μοιραστούν με όλη την τάξη κατά την φάση συζήτησης. Κατά την επιλογή ο καθηγητής καλεί συγκεκριμένους μαθητές (ή ομάδες) να παρουσιάσουν την δουλειά τους. Η σκόπιμη επιλογή μαθητών καθιστά ποιες μαθηματικές ιδέες θα συζητηθούν στην τάξη. Κάποιες απαντήσεις μπορεί να παρουσιαστούν κάποια άλλη στιγμή. Κατά την αλληλουχία των απαντήσεων έχοντας επιλέξει συγκεκριμένους μαθητές να παρουσιάσουν ο καθηγητής μπορεί να λάβει αποφάσεις σχετικά με την αλληλουχία των παρουσιάσεων των μαθητών. Έτσι μεγιστοποιούνται οι πιθανότητες οι μαθηματικοί στόχοι για συζήτηση να επιτευχθούν (π. χ :αρχή με προσιτή στρατηγική ή με στρατηγική που βασίζεται σε κοινή παρανόηση). Στην σύνδεση ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να επιστήσουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών που αντικατοπτρίζονται στις στρατηγικές και στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν. Ο στόχος είναι οι παρουσιάσεις των μαθητών να οικοδομήσουν η μία πάνω στην άλλη για την ανάπτυξη ισχυρών μαθηματικών ιδεών. Αυτό παραπέμπει τους μαθητές να προβληματιστούν με τις άλλες ιδέες κατά την αξιολόγηση και αναθεώρηση τους. Αυτές οι πρακτικές είναι αόρατες στους μαθητές. Αυτές οι πρακτικές βοηθάνε τους καθηγητές να ενορχηστρώσουν πιο αποτελεσματικά τις συζητήσεις στην τάξη. Οι 5 πρακτικές δεν είναι πανάκεια μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας, αλλά ένα σημαντικό συστατικό της.

1.2.2 Οι δράσεις του εκπαιδευτικού σε συζητήσεις με όλη την τάξη και η σχέση τους με τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές

Στην παρούσα ενότητα εστιάζω στις δράσεις του εκπαιδευτικού κατά την διδασκαλία των μαθηματικών. Μία πρόκληση για τους καθηγητές μαθηματικών που χρησιμοποιούν υψηλού επιπέδου, γνωστικά απαιτητικά tasks είναι η διαχείριση των απαντήσεων των μαθητών που αυτά τα tasks παράγουν (Peterson & Leatham 2009, Stein et al. 2008, όπως αναφέρεται στις Scherrer, & Stein, 2013). Το σχήμα κωδικοποίησης είναι ένα αναλυτικό εργαλείο που σχεδιάστηκε για να ευαισθητοποιήσει τους καθηγητές ως προς : τις αλληλεπιδράσεις του λόγου, πώς οι εκπαιδευτικοί έχουν έλεγχο (μερικό) αυτών των αλληλεπιδράσεων, πώς αυτές οι αλληλεπιδράσεις διαμορφώνουν τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών (Analyzing Teacher Moves Guide (ATM)). Η αλληλεπίδραση συνομιλίας είναι ο μηχανισμός μεσολάβησης σύμφωνα με τον οποίο η συνεργασία συμβάλλει στην μάθηση (Gee & Green 1998, Palincsar 1998, Sawyer 2006, όπως αναφέρεται στις Scherrer, & Stein, 2013). Οι συζητήσεις των μαθητών σε tasks υψηλού επιπέδου (π.χ.: κατασκευή τύπων και ανάπτυξη γενικεύσεων) είναι αρκετά διαφορετικές από τις συζητήσεις των μαθητών σε παραδοσιακά tasks (π.χ.: παροχή τύπου και εφαρμογή αυτού σε ένα σύνολο πρακτικών προβλημάτων). Μία πτυχή που πλαισιώνει τις πρακτικές των εκπαιδευτικών είναι η φύση της επικοινωνίας της τάξης (Bishop & Goffree, 1986; Franke, Kazemi & Battey, 2007, όπως αναφέρεται στις Ponte & Quaresma, 2015). Μία θεμελιώδης πτυχή της επικοινωνίας είναι τα ερωτήματα που θέτονται από τον εκπαιδευτικό (τα διερευνητικά ερωτήματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα). Ακόμα η διαδικασία διαπραγμάτευσης του μαθηματικού νοήματος (Bishop & Goffree, 1986), οδηγεί τους μαθητές να κάνουν νέες συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και βοηθούν τον εκπαιδευτικό να αναγνωρίσει μερικές απρόβλεπτες απόψεις τους (όπως αναφέρεται στις Ponte & Quaresma, 2015). Το ATM κάνει εμφανές στους καθηγητές ότι η συζήτηση είναι ένα παιδαγωγικό εργαλείο για την υποστήριξη της ενεργούς εμπλοκής με προκλητικό περιεχόμενο. Οι κώδικες του ATM διαχωρίστηκαν σε 4 κατηγορίες: 1) κινήσεις που αρχίζουν μια συζήτηση, 2) αυτές που επεξεργάζονται ή εμβαθύνουν τη γνώση των μαθητών μέσω της εμβάθυνσης της συζήτησης, 3) κινήσεις που προκαλούν-αποσπούν πληροφορίες και 4) άλλες κινήσεις. Η υποστήριξη (επαναλαμβανόμενη συνεισφορά, κυριολεκτική ερώτηση (literal question), παροχή

πληροφοριών) αν έχει πολλές ερωτήσεις σε μια σειρά μπορεί να εμποδίσει τους μαθητές να μάθουν. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές και περιορίζει τις ευκαιρίες τους να σκεφτούν τα μαθηματικά που συζητούνται. Επίσης, η επανάληψη των απαντήσεων των μαθητών από τον καθηγητή περιορίζει τις ευκαιρίες των μαθητών γιατί τους στερεί την μάθηση μέσω ακρόασης και της κριτικής της συνεισφοράς των άλλων. Διαφορετικές κινήσεις προς την ίδια απάντηση των μαθητών θα μπορούσαν να δημιουργήσουν διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης. Ο αντίκτυπος αυτών των κινήσεων εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο αφήνουν χώρο για μαθητική σκέψη. Ένας κώδικας που διαμορφώνει τις ευκαιρίες των μαθητών να μάθουν θα μπορούσε να κάνει τους εκπαιδευτικούς να έχουν συνείδηση των κινήσεών τους όταν ενορχηστρώνουν την συζήτηση σε όλη την τάξη (Scherrer & Stein, 2013). Κατά την διάρκεια της συζήτησης στην τάξη εμπλέκεται μία ποικιλία δράσεων των εκπαιδευτικών. Οι Cengiz, Kline and Grant (2011) διέκριναν 3 είδη δράσεων: i) προκλητικές δράσεις (οδηγούν τους μαθητές να παρουσιάσουν τις μεθόδους τους), ii) υποστηρικτικές δράσεις (για την προώθηση της εννοιολογικής κατανόησης), iii) δράσεις επέκτασης (να διευρύνουν ή να εμβαθύνουν τη σκέψη των μαθητών). Η πρόκληση είναι κρίσιμη δράση (Potari & Jaworski, 2002; McCrone, 2005) αλλά πρέπει να υποστηριχθεί με άλλα είδη δράσεων (όπως αναφέρεται στις Ponte & Quaresma, 2015). Για να μελετήσουν τις δράσεις του εκπαιδευτικού οι Ponte, Mata-Pereira και Quaresma (2013) ανέπτυξαν ένα πλαίσιο που προϋποθέτει ότι ο εκπαιδευτικός εκτελεί δράσεις που έχουν άμεση σχέση με τα θέματα και τις μαθηματικές διαδικασίες, καθώς και δράσεις που σχετίζονται με την διαχείριση της μάθησης (όπως αναφέρεται στις Ponte & Quaresma, 2015). Σύμφωνα με τους Ponte, Mata-Pereira και Quaresma (2013) 4 κύριες κατηγορίες δράσεων σχετίζονται με τις μαθηματικές πτυχές: i) δράσεις πρόσκλησης, ii) καθοδηγητικές-υποστηρικτικές δράσεις, iii) ενημέρωση-πρόταση δράσεων , iv) πρόκληση δράσεων. Και οι δράσεις και οι μαθηματικές διαδικασίες εξαρτώνται από τις γνώσεις των μαθητών. Οι δράσεις πρόσκλησης οδηγούν τους μαθητές να συμμετέχουν στην συζήτηση, οι καθοδηγητικές-υποστηρικτικές δράσεις εμπλέκουν τους μαθητές με έμμεσο ή άμεσο τρόπο στην συζήτηση ώστε αυτή να συνεχιστεί, η ενημέρωση-πρόταση δράσεων αφορούν την εισαγωγή πληροφοριών, την παροχή ενός επιχειρήματος ή την επικύρωση των παρεμβάσεων των μαθητών και η πρόκληση δράσεων οδηγεί τους μαθητές να προσθέσουν πληροφορίες, να προσθέσουν ένα επιχείρημα ή να αξιολογήσουν ένα επιχείρημα ή λύση. Οι λάθος διαδικασίες οδηγούν τον καθηγητή

να προκαλέσει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις με προηγούμενες γνώσεις : πρόκληση δράσεων αντί καθοδήγηση-πρόταση δράσεων. Ο καθηγητής παρόλο που εισάγει νέα γνώση ξεκινάει τις συζητήσεις με μία προκλητική δράση που οδηγεί στην εμφάνιση αρκετά απρόβλεπτων απαντήσεων από τους μαθητές. Αυτή η επιλογή του εκπαιδευτικού παρέχει πλούσιες δυνατότητες μάθησης που δεν θα μπορούσαν να προκύψουν αν η δράση της καθοδήγησης ήταν κεντρική. Οι προκλητικές δράσεις ακολουθούνται από άλλες προκλητικές δράσεις όταν οι μαθητές έχουν τα εργαλεία να τις αξιοποιήσουν, σε αντίθετη περίπτωση ακολουθούνται από καθοδήγηση ή πρόταση δράσεων. Ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός συνυφαίνει τις δράσεις πρότασης-καθοδήγησης και κάνει προκλητικές δράσεις σε σημεία κλειδιά είναι ζωτικής σημασίας για την προώθηση της συμμετοχής των μαθητών και για την επίτευξη μαθησιακών στόχων. Όσον αφορά τις μαθηματικές διαδικασίες, οι κεντρικές δράσεις των εκπαιδευτικών βασίζονται κυρίως σε ερμηνεία των διαδικασιών. Στην σύγκριση λύσεων εμφανίζονται δράσεις αξιολόγησης. Οι στιγμές συζήτησης με όλη την τάξη μπορούν να δημιουργήσουν πολλά προβλήματα στον εκπαιδευτικό που απαιτούν την ικανότητα του να ασχοληθεί με απρόβλεπτες καταστάσεις και να παρατηρήσει τις ευκαιρίες για την προώθηση της μάθησης των μαθητών (Scherrer & Stein, 2013). Ένα ερώτημα που παραμένει είναι το πώς θα βοηθήσουμε τους εκπαιδευτικούς να αξιοποιήσουν καλύτερα την εκπαιδευτική πληροφόρηση για την υποστήριξη της μάθησης των μαθητών (Fraivillig et al, 1999, όπως αναφέρεται στους Cengiz, Kline & Grant, 2011). Ο Fraivillig (1999) διερεύνησε τη φύση των συζητήσεων ολόκληρης της τάξης που στοχεύουν στην επέκταση της μαθηματικής σκέψης δηλαδή ποιες διδακτικές δράσεις υποστηρίζουν τα επεισόδια επέκτασης και ποια η σχέση των δράσεων αυτών με τη γνώση του εκπαιδευτικού. Η επέκταση της μαθηματικής σκέψης γίνεται αντιληπτή βοηθώντας τους μαθητές να προχωρήσουν πέρα από τις αρχικές μαθηματικές παρατηρήσεις τους και αναπτύξουν περαιτέρω την κατανόηση ενός μαθηματικού φαινομένου. Ως επεισόδιο επέκτασης καλείται ένα τμήμα συζήτησης με όλη την τάξη (2-6 λεπτά) που εστιάζει σε μία συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα ή λύση όπου εμπλέκονται ο μαθηματικός αναστοχασμός ή αιτιολόγηση ή πέρα από τις αρχικές μεθόδους επίλυσης. Η αρχή ενός επεισοδίου επέκτασης είναι όταν ο καθηγητής θέτει μια ερώτηση ή μοιράζεται μια μαθηματική παρατήρηση ώστε να επικεντρωθούν οι μαθητές με τους τρόπους του πλαισίου. Το τέλος ενός τέτοιου επεισοδίου είναι όταν η συζήτηση μετατοπίζεται σε μια διαφορετική ιδέα ή λύση ή μαθηματικό έργο. Το πρώτο βήμα στην επέκταση της

μαθηματικής σκέψης είναι η αναγνώριση της δυνατότητας μιας συγκεκριμένης κατάστασης για να γίνει. Το επόμενο βήμα είναι η προσεκτική ενορχήστρωση του λόγου στην τάξη ώστε να επιτευχθεί ο στόχος επέκτασης. Το ACT πλαίσιο του Fraivillig et al (1999) με τις διδακτικές δράσεις είναι το εξής : εκμαίευση μεθόδων (πρόκληση), υποστήριξη εννοιολογικής κατανόησης (υποστήριξη) και επέκταση μαθηματικής σκέψης (επέκταση). Η εκμαίευση μεθόδων επιτρέπει στους καθηγητές να έχουν πρόσβαση στην σκέψη των μαθητών και να την δημοσιοποιούν, η υποστήριξη ενεργειών βοηθάει τους μαθητές να θυμηθούν ή να οπτικοποιήσουν αυτό που ήδη γνωρίζουν κατά την εξέταση νέων πληροφοριών, οι δράσεις επέκτασης ενθαρρύνουν τους μαθητές να κινηθούν πέρα από την αρχική μαθηματική δραστηριότητα. Ένας συνδυασμός των υπαρχουσών ερευνών οδήγησαν στο πλαίσιο επέκτασης της μαθηματικής σκέψης. Η γνώση του μαθηματικού περιεχομένου είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς να συνειδητοποιούν τις ευκαιρίες επέκτασης της σκέψης των μαθητών τους. Η κατανόηση του τι γνωρίζουν οι μαθητές για το περιεχόμενο και τι είδους ιδέες μπορεί να είναι πιο εύκολες ή πιο δύσκολες για αυτούς να κατανοήσουν μπορεί να βοηθήσει τους καθηγητές να κάνουν αποτελεσματικές αποφάσεις για το τι ιδέες να επιδιώκουν και πώς να υποστηρίξουν και να επεκτείνουν την μαθητική σκέψη. Ένας άλλος παράγοντας είναι η γνώση των καθηγητών για την διδασκαλία, δηλαδή ποια γλώσσα θεωρούν κατάλληλη και τι θεωρούν ως απόδειξη για την μαθηματική κατανόηση. Ένας συνδυασμός των 3 τύπων διαφορετικών τύπων διδακτικών δράσεων (πρόκληση, υποστήριξη, επέκταση) φαίνεται να είναι κρίσιμος για την δημιουργία ευκαιριών για την επέκταση της μαθητικής σκέψης.

Μοντέλο που συσχετίζει τις δράσεις του εκπαιδευτικού στις συζητήσεις σε ολόκληρη την τάξη με τις μαθηματικές διαδικασίες (αναπαράσταση, ερμηνεία, αιτιολόγηση και αξιολόγηση) :

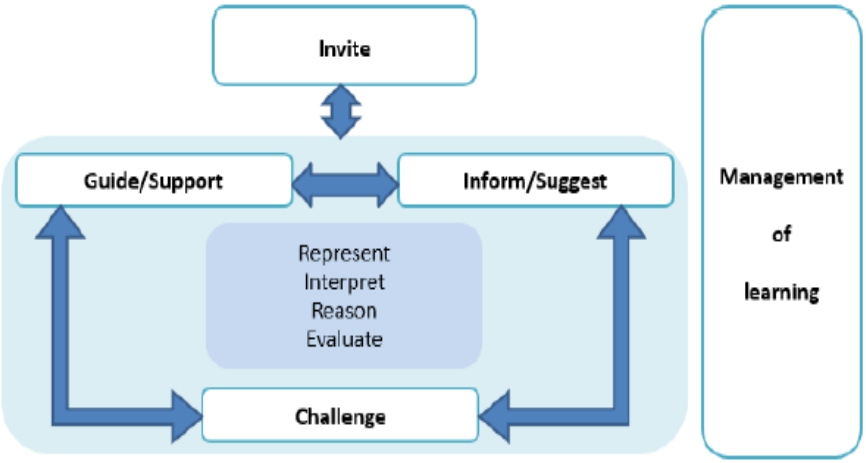


Figure 1: Framework to analyze teachers' actions (adapted from Ponte et al., 2013).

Παρακάτω παρουσιάζεται το πλαίσιο επέκτασης (ACT) του Fraivillig (1999) που περιέχει τις διδακτικές δράσεις του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν τα επεισόδια επέκτασης και τα βασικά επεισόδια επέκτασης που μπορεί να συμβούν κατά την διάρκεια συζήτησης με όλη την τάξη.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ:

Διδακτικές δράσεις:

Eliciting action-εκμαίευση δράσης:

-Προσκαλώντας τους μαθητές να μοιραστούν τις μεθόδους

Supporting actions-Υποστηρικτικές ενέργειες:

-Προτείνοντας μια ερμηνεία του ισχυρισμού / παρατήρησης

-Υπενθυμίζοντας στους μαθητές τον στόχο της συζήτησης,

το πρόβλημα, ή άλλες πληροφορίες

-Επανάληψη ισχυρισμού

-Καταγραφή μαθητικής σκέψης

-Εισάγοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις / πλαίσια

Extending actions-επέκταση δράσεων:

-Προσκαλώντας τους μαθητές να:

Αξιολογήσουν έναν ισχυρισμό ή μια παρατήρηση

Δώσουν το σκεπτικό για έναν ισχυρισμό

Συγκρίνουν τις διαφορετικές μεθόδους

Χρησιμοποιήσουν την ίδια μέθοδο για νέα προβλήματα

-Παροχή εικασίας για έναν ισχυρισμό

Επεισόδια επέκτασης:

Ενθάρρυνση μαθηματικού αναστοχασμού :

-Ενθαρρύνοντας τους μαθητές να κατανοήσουν, να συγκρίνουν,

και να γενικεύσουν τις μαθηματικές έννοιες / ισχυρισμούς

-Η ενθάρρυνση των μαθητών να εξετάσουν και να συζητήσουν

αμοιβαίες σχέσεις μεταξύ εννοιών

-Χρησιμοποιώντας πολλαπλές λύσεις για να προωθήσει τον προβληματισμό/αναστοχασμό

-Η ενθάρρυνση των μαθητών να εξετάσουν την

ορθότητα / εγκυρότητα ενός ισχυρισμού

Πηγαίνοντας πέρα από τις αρχικές μέθοδος επίλυσης:

-Ώθηση μεμονωμένων μαθητών να δοκιμάσουν εναλλακτικές μεθόδους

επίλυσης για την κατάσταση ενός προβλήματος

-Προώθηση της χρήσης πιο αποτελεσματικών μεθόδων επίλυσης

για όλους τους μαθητές

Ενθάρρυνση μαθηματικού συλλογισμού:

-Η ενθάρρυνση των μαθητών να προσφέρει μια αιτιολόγηση

για λύσεις / τους ισχυρισμούς τους

-Η ενθάρρυνση των σπουδαστών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων

1.3 Διαχείριση του εκπαιδευτικού

1.3.1 Πως ο εκπαιδευτικός απαντά στα διάφορα είδη εξηγήσεων των μαθητών

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζω πως ο εκπαιδευτικός ανταποκρίνεται στα διάφορα είδη εξηγήσεων των μαθητών εστιάζοντας στο μοντέλο του Drageset (2014). Το πιο γνωστό μοτίβο λόγου στην τάξη είναι το IRE (Initiate-Response-Evaluation) (κίνηση-ανταπόκριση-αξιολόγηση) (Cazden, 1988, όπως αναφέρεται στον Drageset, 2014). Δηλαδή ο καθηγητής ξεκινά μία συζήτηση ή ένα task, ο μαθητής απαντά και ο καθηγητής αξιολογεί (δασκαλοκεντρικό μοτίβο). Επίσης, έχουμε μία προσέγγιση περιγραφής του λόγου στην τάξη με λεπτομέρειες των Fraivillig, Murphy και Fuson (1999) με το πλαίσιο ACT (Advancing Children's Mathematics) το οποίο έχει 3 συνιστώσες: 1) πρόκληση μεθόδων επίλυσης 2) στήριξη της εννοιολογικής κατανόησης και 3) επέκταση της μαθηματικής σκέψης (όπως αναφέρεται στον Drageset, 2014). Μία πρόσφατη προσέγγιση περιγραφής του λόγου είναι το πλαίσιο του αναπροσανατολισμού, της προόδου και της εστίασης και η αντιστοίχιση αυτής της περιγραφής με τους 5 διαφορετικούς τύπους σχολίων των μαθητών (Drageset, 2014). Οι αναπροσανατολισμένες δράσεις χρησιμοποιούνται όταν ο εκπαιδευτικός θέλει να αλλάξει την προσέγγιση των μαθητών του. Οι προοδευτικές δράσεις γίνονται με σκοπό την μετακίνηση της προόδου προς τα εμπρός. Οι εστιασμένες δράσεις

αφορούν την διακοπή της προόδου με σκοπό να κοιτάξουμε βαθύτερα κάποια σημαντική λεπτομέρεια. Οι 5 κύριες κατηγορίες παρεμβάσεων που βρέθηκαν είναι οι εξής : εξηγήσεις (τί και πώς) , οι πρωτοβουλίες των μαθητών, οι μερικές απαντήσεις, οι κατευθυνόμενες απαντήσεις των καθηγητών και οι ανεξήγητες απαντήσεις (Drageset, 2014). Πιο συγκεκριμένα, όταν ο Drageset μελέτησε τις εξηγήσεις των μαθητών και το πώς οι εκπαιδευτικοί ανταποκρίνονται σε αυτές κατέληξε σε τρεις τύπους εξηγήσεων των μαθητών και τις συσχέτισε με τις 13 διαφορετικές δράσεις των εκπαιδευτικών (αναπροσανατολισμένες-προοδευτικές-εστιασμένες). Οι 3 κατηγορίες των εξηγήσεων είναι οι εξής: 1) εξήγηση μαθηματικών εννοιών , 2) εξήγηση γιατί μία απάντηση ή μία μέθοδος είναι σωστή (αιτιολόγηση) , 3) περιγραφή των βημάτων της διαδικασίας επίλυσης : αυτή κατηγορία αποτελείται από εξηγήσεις σχετικά με το πώς ή τί, πώς να φτάσουμε στην λύση ή τι να κάνουμε και ονομάζεται δράση εξήγησης. Αυτή η εξήγηση αναφέρεται σε μια μέθοδο για να βρεις την απάντηση διευκρινίζοντας τι ή πώς μπορεί να γίνει κάτι (πριν το κάνει) είτε τι έγινε (αφού το κάνει). Αυτές οι εξηγήσεις εξυπηρετούν τόσο τον έλεγχο της κατανόησης των μαθητών καθώς και παρέχουν έναν τρόπο να γίνουν σαφείς οι λεπτομέρειες προκειμένου να μοιραστούμε τη γνώση. Η εξήγηση δράσης έχει διαδικαστικό χαρακτήρα, κάνει χρήση τυποποιημένων μεθόδων ή κανόνων και εξηγεί κάθε βήμα στη συγκεκριμένη περίπτωση. Οι καθηγητές επισημαίνουν μια σημαντική ιδέα ή κανόνα κατά την διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης. Αυτή ονομάζεται δράση κοινοποίησης (Drageset, 2014) και ακολουθεί τις εξηγήσεις αιτιολόγησης. Οι δράσεις που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στους 3 τύπους εξηγήσεων είναι οι εστιασμένες δράσεις και πιο συγκεκριμένα την κοινοποίηση-επισήμανση. Ένας άλλος τύπος δράσης που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί είναι οι κλειστές λεπτομέρειες προόδου, όπου ο κύριος στόχος είναι να προχωρήσει η διαδικασία χωρίς να υπεισέλθουν σε περισσότερες λεπτομέρειες. Τέλος ζητάνε από τους μαθητές διαφώτιση λεπτομερειών. Το να κάνουμε τις λεπτομέρειες σαφείς και ορατές στους άλλους μαθητές είναι από την πιο ισχυρή κίνηση που ο καθηγητής μπορεί να κάνει. Οι εξηγήσεις αιτιολόγησης και εννοιών χρειάζονται περαιτέρω διευκρινήσεις από τις εξηγήσεις δράσης.

1.3.2 Πώς ο εκπαιδευτικός ανταποκρίνεται στις ανεξήγητες απαντήσεις των μαθητών-ευκαιρίες μάθησης των μαθητών

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζω πως ο εκπαιδευτικός ανταποκρίνεται στις ανεξήγητες απαντήσεις των μαθητών εστιάζοντας στο μοντέλο του Drageset (2014). Οι ανεξήγητες απαντήσεις είναι εκείνες όπου οι πληροφορίες σχετικά με την στρατηγική λύσης ή την μαθητική σκέψη δεν είναι παρατηρήσιμες (black box). Ο Drageset μελετά το πως οι εκπαιδευτικοί ανταποκρίνονται σε ανεξήγητες απαντήσεις των μαθητών και τι σημαίνει αυτό για τις ευκαιρίες των μαθητών να μάθουν μαθηματικά. Η μελέτη του Drageset βασίζεται στο πλαίσιο των 3 κατηγοριών και στους 5 κύριους τύπους παρεμβάσεων των μαθητών. Οι ανεξήγητες απαντήσεις είναι διαφορετικές από τις άλλες καθώς η αιτία αυτών των απαντήσεων δεν έχει δοθεί ή δεν έχει γίνει εμφανής από πριν (black box). Το να κάνει ο καθηγητής ρητά και εμφανή τα στοιχεία με τα οποία ένας μαθητής έφτασε σε μια απάντηση είναι μία από τις πιο ισχυρές δράσεις που μπορεί να κάνει (Franke, Kazemi, and Battey, 2007, όπως αναφέρεται στον Drageset, 2015). Οι ανεξήγητες απαντήσεις αποτελούν μια ευκαιρία για τον διδάσκοντα πρόκλησης των μαθητών για αιτιολόγηση. Σύμφωνα με τον Drageset προέκυψαν 3 κατηγορίες ανεξήγητων ερωτήσεων: σωστής απάντησης, λάθος απάντησης και αυτές που ο μαθητής είναι ανίκανος να απαντήσει. Σωστές ανεξήγητες απαντήσεις σχετίζονται με τις εστιασμένες δράσεις και ερωτήσεις πώς, τι και γιατί; Οι λανθασμένες ανεξήγητες απαντήσεις σχετίζονται με τις αναπροσανατολισμένες δράσεις. Το ότι οι μαθητές είναι ανίκανοι να απαντήσουν σχετίζεται με τις προοδευτικές δράσεις και την εστιασμένη δράση της κοινοποίησης. Ο Kilpatrick (2001) αναφέρει ότι οι ευκαιρίες για να μάθουν είναι ο πιο σημαντικός προγνωστικός παράγοντας για την επιτυχία των μαθητών (όπως αναφέρεται στον Drageset, 2015).

Ο παρακάτω πίνακας αποτελεί μετάφραση του πλαισίου του Drageset (2014) με τις 13 διαφορετικές δράσεις των εκπαιδευτικών κατά την διάρκεια συζήτησης στην τάξη:

Αναπροσανατολισμένες δράσεις	**Προοδευτικές δράσεις**	**Εστιασμένες δράσεις**
Βάζει στην άκρη (παραμερίζω)	Επίδειξη (demonstration)	Διαφώτιση λεπτομερειών
Παρέχει μία νέα στρατηγική	απλοποίηση	αιτιολόγηση
Διορθώνει ερώτηση	Κλειστές λεπτομέρειες προόδου	Εφαρμογή σε παρόμοια προβλήματα
	Ανοιχτές πρωτοβουλίες προόδου	Αίτημα αξιολόγησης από άλλους μαθητές
		κοινοποίηση
		ανακεφαλαίωση

(Η κατηγορία της απλοποίησης του Drageset σχετίζεται με το φαινόμενο Topaze: Brousseau και Balacheff (1997).)

1.4 Κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες

Στην παρούσα ενότητα θα εστιάσω στην μελέτη των κοινωνικομαθηματικών κανόνων η οποία είναι μια από τις βασικές «υποχρεώσεις» του ερευνητή της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών, παρουσιάζοντας τις βασικές πτυχές της μελέτης των Cobb & Yackel (1996). Η γνώση αυτών των κανόνων εφοδιάζει τόσο τους μαθητές και το δάσκαλο όσο και τον ερευνητή με ένα πλαίσιο αναφοράς (Σύνταγμα), σύμφωνα με το οποίο μπορούν να επεξηγούνται οι δράσεις και οι δηλώσεις των μαθητών που αφορούν : την εξήγηση , την αιτιολόγηση, την επιχειρηματολογία και την μαθηματική αποτελεσματικότητα (Cobb & Yackel, 1996). Οι κοινωνικομαθηματικοί κανόνες αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης από κάθε καθηγητή και μαθητές μέσω της αλληλεπίδρασης. Μέσα από τις δραστηριότητες, την αλληλεπίδραση και την διαπραγμάτευση, τόσο οι μαθητές όσο και ο Δάσκαλος οριοθετούν τις έννοιες και δημιουργούν τα κοινωνικά πρότυπα της τάξης. Τα οφέλη της θεσμοθέτησης των κοινωνικών κανόνων είναι ότι προωθούν την

ανάπτυξη των παιδιών της κοινωνικής αυτονομίας. Με βάση αυτά τα κριτήρια μπορούμε να διακρίνουμε, καθώς οι μαθητές εργάζονται στην επίλυση προβλήματος συνεργατικά, αν είναι κοινωνικά αυτόνομοι ή αναφέρονται συχνά στην επικρατούσα αρχή, τον καθηγητή της τάξης. Η έννοια των κοινωνικομαθηματικών κανόνων είναι επίσης σημαντική για την αποσαφήνιση του ρόλου του εκπαιδευτικού ως εκπρόσωπου της μαθηματικής κοινότητας. Ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στον καθορισμό της μαθηματικής ποιότητας του περιβάλλοντος στην τάξη και στην καθιέρωση προτύπων για τα μαθηματικά στις πτυχές της δραστηριότητας των μαθητών. Τονίζει επίσης τη σημασία των προσωπικών μαθηματικών πεποιθήσεων και αξιών του εκπαιδευτικού και τη δική του μαθηματική γνώση και την κατανόηση. Με τον τρόπο αυτό, ο κρίσιμος και κεντρικός ρόλος του δασκάλου ως εκπρόσωπου της μαθηματικής κοινότητας υπογραμμίζεται.

Ο παρακάτω πίνακας αποτελεί μετάφραση του πίνακα που παρουσιάζεται στην μελέτη των Cobb & Yackel (1996) ο οποίος υπογραμμίζει τις βασικές διαφορές των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών:

Διαφορές κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών:

Κοινωνικές νόρμες	**Κοινωνικομαθητικές νόρμες**
Οι μαθητές αμφισβητούν την σκέψη του άλλου.	Οι μαθητές ρωτούν ο ένας τον άλλον ερωτήσεις για μαθηματικό συλλογισμό, αιτιολόγηση και κατανόηση.
Οι μαθητές εξηγούν τον τρόπο σκέψης τους.	Οι μαθητές εξηγούν τις λύσεις τους χρησιμοποιώντας μαθηματική επιχειρηματολογία.
Οι μαθητές συνεργάζονται για την επίλυση προβλημάτων.	Οι μαθητές καταλήγουν σε συμφωνία χρησιμοποιώντας μαθηματικό συλλογισμό και απόδειξη.
Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας μία ποικιλία προσεγγίσεων.	Οι μαθητές συγκρίνουν τις στρατηγικές τους, ψάχνουν για μαθηματικά σημαντικές ομοιότητες και διαφορές.
Οι μαθητές βλέπουν τα λάθη τους ως φυσικό μέρος της μάθησης.	Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα λάθη ως ευκαιρία να επανεξετάσουν τις

	αντιλήψεις των μαθηματικών ιδεών και να εξετάσουν αντιφάσεις. Λάθη υποστηρίζουν νέα μάθηση για τα μαθηματικά.

- Το περιεχόμενο των μαθημάτων που παρακολουθήθηκαν αφορούσαν την περιοχή της Γεωμετρίας και πιο συγκεκριμένα την έννοια του μήκους και την έννοια της γωνίας. Για τον λόγο αυτό στο παρακάτω υποκεφάλαιο παρουσιάζω μερικές βασικές έρευνες και τα ευρήματά τους που αφορούν τις έννοιες αυτές.

1.5 Η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας

1.5.1 Η έννοια του μήκους

Το παιδί οικοδομεί την έννοια του μήκους στην ολότητά της, την στιγμή που ξεκινά να αντλεί τις πληροφορίες του από την «λογικό-μαθηματική εμπειρία» (Boullinger, 1971, όπως αναφέρεται στον Παπανδρέου, 2002). Η σύνδεση των μετρήσεων με τις γεωμετρικές έννοιες και οι μελέτες του Piaget για την εξέλιξη της προσέγγισης των μετρικών σχέσεων επηρέασαν για πολλά χρόνια τη διδακτική τους προσέγγιση και οδήγησαν στην καθυστερημένη εισαγωγή τους στην εκπαίδευση (Τζεκάκη, 2009). Επιπλέον, ο τρόπος διδασκαλίας έδινε έμφαση στις τεχνικές μέτρησης χωρίς αυτές να συνοδεύονται από αντίστοιχα παιδαγωγικά πλαίσια που να προσδίδουν νόημα στις διαδικασίες μέτρησης και στην αναγκαιότητα εισαγωγής της μονάδας μέτρησης (Boulton- Lewis, Wilss, & Mutch, 1996). Ακόμα, χρησιμοποιώντας, τα παιδιά, τις μονάδες μέτρησης δίνεται η ευκαιρία να διαπιστώσουν ότι ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση συνδέεται με το μέγεθος του εργαλείου που χρησιμοποιούμε γιανα μετρήσουμε. Ένας σημαντικός αριθμός ερευνών υποστηρίζουν ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν το μέτρο ή άλλες συμβατικές μονάδες πριν κατανοήσουν ουσιαστικά τι είναι μέτρηση και τι μετρούν. Συχνά προτιμούν τις συμβατικές από τις αυθαίρετες μονάδες κάτω και από την επιρροή των ενηλίκων και της κοινότητας της τάξης που τους φαίνονται πιο εύκολες καθώς με αυτή την τυπική διαδικασία και αντιστοίχιση πετυχαίνουν μια απάντηση με αριθμούς.» (Τζεκάκη, 2009). Τα παιδιά έχουν μια διαισθητική αντίληψη στην οποία θα βασίσουν τη σκέψη τους για την απόσταση και το μήκος, αλλά η γνωστική τους ανάπτυξη ίσως απαιτεί ειδικές εκπαιδευτικές

εμπειρίες ώστε να οικοδομήσουν έννοιες και δεξιότητες που θα τους επιτρέπουν να ευθυγραμμίζουν τα άκρα, να χρησιμοποιούν ένα τρίτο αντικείμενο (μέτρο) ώστε να συγκρίνουν το μήκος δύο αντικειμένων που δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα, να τοποθετούν τις μονάδες μέτρησης κατά μήκος του μετρούμενου αντικειμένου και να συνδέουν το μεγαλύτερο αριθμητικό αποτέλεσμα με το πιο μακρύ αντικείμενο, να κατανοούν την ανάγκη για ίσου μήκους μονάδες, να χρησιμοποιούν τα εργαλεία μέτρησης με ακρίβεια και νόημα και τέλος να εξάγουν συμπεράσματα για το σχετικό μέγεθος των αντικειμένων (π.χ., εάν ο αριθμός των μονάδων είναι ο ίδιος, αλλά οι μονάδες είναι διαφορετικές) (Sarama, Clements, Barrett, Dine, & McDonel, 2011).

Στην περίπτωση της μέτρησης του μήκους εμπλέκονται έννοιες και διαδικασίες όπως (Boulton-Lewis & Gillian, 1987):

 Η επιλογή της μονάδας μέτρησης (unitization), που συνήθως είναι αντικείμενο με διακριτό το μέγεθος του μήκους και η αναλογία του ως προς το μετρούμενο μέγεθος διευκολύνει στη μέτρηση.

 Ο χωρισμός σε τμήματα (partitioning) που είναι η νοητική δραστηριότητα τεμαχισμού ενός αντικειμένου σε μονάδες ίσου μεγέθους.

 Η συνεχής επανάληψη της μονάδας (iterating) που σχετίζεται με την ικανότητα της θεώρησης του μήκους ενός μικρού κομματιού (μονάδα) ως τμήματος του μήκους που μετράται και της επαναλαμβανόμενης τοποθέτησης του μικρότερου κομματιού (μονάδας) κατά μήκος της επιφάνειας ώστε η αρχή της κάθε μονάδας να συμπίπτει με το τέλος της προηγούμενης.

 Ο μεταβατικός συλλογισμός (transitivity) σχετίζεται με την κατανόηση της μεταβατικής ιδιότητας σε σχέση με το μήκος ενός αντικειμένου (Αν Α=Β & Β=Γ τότε Α=Γ).

 Η διατήρηση (conservation) που αφορά στην κατανόηση ότι το μήκος ενός αντικειμένου δεν αλλάζει από τις διαφορετικές τοποθετήσεις του στο χώρο.

 Η συσσώρευση της απόστασης (accumulation of distance) που σχετίζεται με την κατανόηση ότι, καθώς τοποθετείται και επανατοποθετείται η μονάδα κατά μήκος του αντικειμένου και μετριέται ο αριθμός των τοποθετήσεων δηλώνει το χώρο που έχει καλυφθεί μέχρι αυτό το σημείο.

 Η συσχέτιση του αριθμού με τη μέτρηση (relation between number and measurement). Τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία οικειοποιούνται την ικανότητα της απαρίθμησης κάτι που μπορεί να τα βοηθήσει να οδηγηθούν σταδιακά στην επιθυμητή συσχέτιση.

1.5.2 Η έννοια της γωνίας

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσω τη μελέτη του Keiser (2009) που συγκρίνει τις ιδέες των παιδιών για τον ορισμό της γωνίας με τις προσπάθειες των μαθηματικών να ορίσουν την έννοια αυτή. Η γωνία είναι μία έννοια η οποία έχει οριστεί διαφορετικά στην πάροδο των αιώνων και ανάλογα με την μαθηματική κατάσταση μπορεί να πάρει ακόμα και σήμερα διαφορετικές σημασίες. Τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις είχαν ενσωματωθεί στις δραστηριότητες: η γωνία ως στροφή, η γωνία ως σφήνα και η γωνία ως η τομή των ευθειών. Ο Keiser (2009) ταξινόμησε τα δεδομένα σε 3 κατηγορίες: 1) Τι ακριβώς μετριέται όταν αναφερόμαστε στο μέγεθος της γωνίας;, 2) Μπορεί η γωνία να περιέχει καμπύλες;, 3) Δυσκολίες με την σύλληψη των γωνιών 0, 180 και 360 μοιρών. Η ιστορική προοπτική των 3 δεδομένων είναι η εξής: 1) Οι αρχαίοι Έλληνες θεωρούν την γωνία ως σχέση, ποσότητα ή ποιότητα, ο Πρόκλος και τις 3 κατηγορίες. Οι κοινές αντιλήψεις για την γωνία σύμφωνα με τον Schotten 1983: -Η γωνία είναι η διαφορά κατεύθυνσης μεταξύ 2 ευθειών γραμμών. -Η γωνία είναι η ποσότητα (ή το μέτρο) της περιστροφής που είναι απαραίτητο να φέρει μία από τις πλευρές της από την θέση της προς την άλλη πλευρά χωρίς να κινείται έξω από το επίπεδο που περιέχει και τις δύο. -Η γωνία είναι το τμήμα ενός επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ 2 ευθειών στο χώρο που συναντώνται σε ένα σημείο (Euclid, 1956, p. 179). Η συσχέτιση με τις αντιλήψεις των παιδιών είναι ότι οι μαθητές δίνουν έμφαση στην ποιότητα όταν συγχέουν το μέγεθος της γωνίας με το μήκος των πλευρών, μια εντονότερη γωνία είναι μεγαλύτερη από μία άλλη (σύνδεση με καθημερινές φράσεις: στροφή με απότομη γωνία): έμφαση στην εξωτερική γωνία. Έμφαση στην ποσότητα έχουμε όταν ισχυρίζονται ότι όσο μεγαλύτερες είναι οι ακτίνες τόσο μεγαλύτερο το μέτρο της γωνίας, όσος περισσότερος είναι ο χώρος μεταξύ των ακτινών τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνία και έμφαση στη σχέση όταν θεωρούν την γωνία ως πλάτος ή απόσταση μεταξύ των δύο ακτινών (κλίση των δύο ακτινών) : εμπλοκή περιστροφικής κίνησης. Η εικόνα που έχουν οι μαθητές για την γωνία επηρεάζει το λεξιλόγιό τους. Όσο αφορά την ιστορική προοπτική του δεύτερου δεδομένου ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του πρότεινε ότι υπάρχουν γωνίες οι οποίες θα μπορούσαν να αποτελούνται από γραμμές που δεν είναι ίσιες αλλά καμπύλες :σχολιασμός Πρόκλου. Αυτές οι καμπύλες ήταν τόξα από κύκλους (π.χ. : κερατοειδής γωνία ή γωνία που σχηματίζεται από 2 κύκλους εφαπτόμενος ο ένας στον άλλον) :

δυσκολία στην μέτρηση τέτοιων γωνιών. Την συσχέτιση της δεύτερης κατηγορίας με τις αντιλήψεις των μαθητών την βλέπουμε όταν οι μαθητές μπερδεύονται στο κατά πόσο τα γράμματα της αλφαβήτα περιέχουν γωνίες : διασταύρωση καμπυλών. Δεν είναι σαφής σε όλους τους μαθητές ότι η τρέχουσα κατανόηση της γωνίας συνήθως δεν περιλαμβάνει καμπύλες γραμμές. Τέλος η ιστορική προοπτική της τρίτης κατηγορίας είναι ότι αν θεωρούμε την γωνία ως απόσταση 2 ακτινών αποκλίνουμε τις γωνίες μεγαλύτερες ή ίσες με 180 μοίρες δηλαδή αφορά την επικάλυψη (ή διασταύρωση) των δύο ημιεπιπέδων που οριοθετούνται από τις ακτίνες. Σε σχέση με αυτό οι μαθητές στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στην καθημερινή τους εμπειρία με τον φυσικό κόσμο, καθώς επιχειρούν να δώσουν νόημα στις μαθηματικές έννοιες. Εμφανίζουν δυσκολία στο δώσουν μία φυσική κατάσταση και αφαίρεση στις γωνίες των 180 και 360 μοιρών. Χρειάζονται περισσότερες ευκαιρίες για εξερεύνηση της περιστροφικής ιδέας της γωνίας. Πολλοί λίγοι ορισμοί στην ιστορία της γωνίας επικεντρώνονται στην περιστροφική πτυχή της. Θα πρέπει να είναι προφανές ότι η γωνία ορίστηκε στην ιστορία με πολλούς τρόπους. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της γωνίας παρέχουν μία πιο ολοκληρωμένη και καλύτερη προετοιμασία για μαθηματικά υψηλότερου επιπέδου. Η κοινοποίηση και αμφισβήτηση ιδεών επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα έννοιας που μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικές καταστάσεις. Στην συνέχεια θα παρουσιάσω δύο ακόμα κυρίαρχα εμπόδια για την έννοια της γωνίας: το μήκος της πλευράς και την περίοπτη θέση της πρωτότυπης ορθής γωνίας. Σύμφωνα με τους Mitchelmore (1998) , Wilson και Adams (1992), Masuda (2009) Browning, Garza-Kling και Sundling (2007), κατά την διδασκαλία της γωνίας, στους μαθητές θα πρέπει να δοθούν καταστάσεις που αφορούν τόσο στατικές όσο και δυναμικές γωνίες (όπως αναφέρεται στους Devichi & Munier, 2013). Υπάρχει μία ελαφρά υπεροχή της δυναμικής προσέγγισης. Όσο αφορά την ορθή γωνία ο κανονικός προσανατολισμός εμφανίζεται συνήθως στους μαθητές και συχνά δεν αναγνωρίζουν την γωνία αν έχει διαφορετική κλίση. Στην βιβλιογραφία υποδηλώνεται ότι το εμπόδιο της ορθής γωνίας είναι οντογενετικό. Το οντογενετικό αυτό εμπόδιο εντείνεται από τις μεθόδους διδασκαλίας και γίνεται επίσης ένα διδακτικό εμπόδιο. Το ζήτημα του μήκους πλευρών είναι οντογενετικό εμπόδιο σε αντίθεση με τους Berthelot και Salin (1996) που το θεωρούν διδακτικό (όπως αναφέρεται στους Devichi & Munier, 2013). Όταν ο καθηγητής εισάγει την ευθεία γωνία οι μαθητές λένε ότι δεν υπάρχει πια γωνία ή ότι η γωνία εξαφανίστηκε. Όταν η γωνία είναι μεγαλύτερη των 180 μοιρών οι μαθητές λένε ότι 'τώρα είναι κάτω'

λαμβάνοντας υπόψη μόνο την προεξέχουσα γωνία. Αυτό οδηγεί στην εισαγωγή των εσωτερικών και εξωτερικών γωνιών. Τρεις διαστάσεις μπορούν να τροποποιηθούν από τους μαθητές κατά τον σχεδιασμό γωνιών : το άνοιγμα, το μήκος πλευράς και ο προσανατολισμός. Τα αποτελέσματα της έρευνας των Devichi & Munier (2013) δείχνουν ότι τα παιδιά ήταν διατεθειμένα να αλλάξουν το μήκος των πλευρών όταν ο όρος μικρότερη ή μεγαλύτερη γωνία χρησιμοποιήθηκε (αυτό οφείλεται στο ότι οι όροι μεγαλύτερη, μικρότερη χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση ευθ. τμημάτων και τη μέτρηση μηκών: μεταφορά αυτής της γνώσης για την εκτίμηση του μεγέθους γωνίας, το εμπόδιο του μήκους πλευράς συνδέεται με τους όρους μεγαλύτερη/μικρότερη) και είχαν την τάση να προσανατολίσουν το σχέδιο τους με διαφορετικό τρόπο όταν οι οδηγίες ήταν να σχεδιάσουν μία διαφορετική γωνία. Η επιλογή των λέξεων του καθηγητή είναι κρίσιμη και μπορεί να είναι πηγή σύγχυσης και δυσκολίας για τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

Μεθοδολογία της έρευνας

2.1 Ερευνητικά ερωτήματα:

1) Με ποιο τρόπο ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη μαθηματική πρόκληση;
2) Πώς η μαθηματική πρόκληση στηρίζεται στην δράση των μαθητών;

2.2 Μέθοδος έρευνας

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είναι ποιοτική και πιο συγκεκριμένα αποτελεί μελέτη περίπτωσης του εκπαιδευτικού και των σχολικών τάξεων που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο Yin (1994) ορίζει ως μελέτη περίπτωσης «μια εμπειρική έρευνα η οποία διερευνά εις βάθος και μέσα στο πραγματικό του πλαίσιο ένα σύγχρονο φαινόμενο, ιδιαίτερα τα όρια μεταξύ του φαινομένου και του πλαισίου δεν είναι εντελώς ξεκάθαρα» (Yin, 1994, 2003). Η συλλογή δεδομένων στην μελέτη περίπτωσης πραγματοποιείται από διάφορες πηγές όπως τα διάφορα έγγραφα, τα καταγεγραμμένα αρχεία, τις συνεντεύξεις, την άμεση παρατήρηση, την συμμετοχική παρατήρηση και τις φυσικές μεθόδους καταγραφής (Yin, 1994). Επίσης, η μελέτη περίπτωσης αναφέρεται στη συλλογή ή παρουσίαση λεπτομερών πληροφοριών σχετικά με το άτομο ή μια ομάδα ατόμων για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων μόνο για το συγκεκριμένο άτομο ή τη συγκεκριμένη ομάδα και μόνο στο συγκεκριμένο πλαίσιο που εξετάζεται. Τα ευρήματα της έρευνας δεν είναι καθολικά γενικεύσιμα, αφορούν αποκλειστικά το άτομο ή την ομάδα ατόμων που μελετήθηκε. Προαπαιτούμενο για ασφαλή και έγκυρα συμπεράσματα είναι η μακροχρόνια παρατήρηση και η καλύτερη γνώση του υποκειμένου που μελετάται (Yin, 1994). Σύμφωνα με τον Yin (1994), ο σωστός σχεδιασμός μιας μελέτης περίπτωσης χαρακτηρίζεται από πέντε στοιχεία: α) τα ερευνητικά ερωτήματα, β) τις προτάσεις της, γ) την μονάδα ανάλυσης, δ) τον προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίο τα δεδομένα συνδέονται με τις προτάσεις και ε) τα κριτήρια με τα οποία ερμηνεύονται τα ευρήματα της έρευνας.

2.3 Πλαίσιο έρευνας-Συμμετέχων της έρευνας

Η παρούσα έρευνα βασίστηκε στην παρακολούθηση 8 ωρών διδασκαλίας μαθηματικών, σε 3 τμήματα Α΄ Γυμνασίου ενός Πρότυπου Πειραματικού Γυμνασίου της Αττικής. Το τμήμα Α΄1 αποτελείτο από 26 μαθητές, το Α΄2 από 27 μαθητές και το Α΄4 από 28 μαθητές. Τα μαθήματα διήρκεσαν από τις 4 Νοεμβρίου μέχρι και τις 25 Νοεμβρίου 2014. Τα μαθήματα αυτά αφορούσαν την διδασκαλία της Γεωμετρίας, το μεγαλύτερο μέρος των οποίων σχετίζονταν με την έννοια της γωνίας. Ο εκπαιδευτικός που συμμετείχε στην έρευνα είναι διορισμένος καθηγητής μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επίσης είναι κάτοχος Μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών στο ΠΜΣ: «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Ο λόγος που επιλέχθηκε ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός είναι οι εκτενείς μαθηματικές και παιδαγωγικές γνώσεις του, το έντονο ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά και την διδασκαλία τους, η προσπάθεια αξιοποίησης της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών στα μαθήματά του, τα εννοιολογικά ερωτήματα που θέτει στους μαθητές του, οι νόρμες που θέτει οι οποίες υποστηρίζουν την έκφραση μαθηματικών ιδεών και επιχειρημάτων από τους μαθητές, η ανιδιοτελής προσφορά βοήθειας και η αφιέρωση προσωπικού του χρόνου για τις ανάγκες της έρευνας.

2.4 Συλλογή δεδομένων

Κατά το στάδιο συλλογής δεδομένων έγινε μαγνητοφώνηση των 8 μαθημάτων, κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου από τον ερευνητή και επίσης δόθηκαν συνεντεύξεις από τον εκπαιδευτικό μετά το τέλος κάθε διδακτικής ώρας. Οι συνεντεύξεις αφορούσαν συζητήσεις πάνω στα κρίσιμα συμβάντα που εντοπίστηκαν κατά την διάρκεια της διδασκαλίας και ιδιαίτερα στα σημεία που η μαθηματική πρόκληση είτε είχε συμβεί είτε όχι, στον αντίκτυπο που είχε η μαθηματική πρόκληση στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ καθηγητή-μαθητών και των μαθητών μεταξύ τους, καθώς και στα μαθηματικά νοήματα που κατασκεύαζαν οι μαθητές μέσα από αυτές τις αλληλεπιδράσεις. Έγινε κατά λέξη απομαγνητοφώνηση όλων των μαθημάτων που παρακολουθήθηκαν (122 σελίδες), καθώς και των συνεντεύξεων με τον εκπαιδευτικό και κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου (44 σελίδες).

Πίνακας περιεχομένου μαθημάτων :

Α.Α	**Τμήμα**	**Διάρκεια**	**Περιεχόμενο**
1	Α΄1	37:00	Άθροισμα και διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων.
2	Α΄4	40:00	Άθροισμα και διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων.
3	Α΄4	41:34	Εισαγωγή στην έννοια της γωνίας.
4	Α΄2	37:00	Εισαγωγή στην έννοια της γωνίας.
5	Α΄1	31:31	Εισαγωγή στην έννοια της γωνίας.
6	Α΄4	30:00	Μέτρηση γωνιών με υλικό.
7	Α΄2	30:00	Μέτρηση γωνιών με υλικό.
8	Α΄1	35:00	Μέτρηση γωνιών με υλικό.

2.5 Διαδικασία ανάλυσης δεδομένων

Στην πρώτη φάση της ανάλυσης πραγματοποιήθηκε απομαγνητοφώνηση των 8 ωρών διδασκαλίας των μαθημάτων του εκπαιδευτικού που διήρκεσε περίπου 1 μήνα. Έπειτα έγινε τριγωνοποίηση (triangulation) των δεδομένων από τις απομαγνητοφωνήσεις με τις σημειώσεις πεδίου που είχαν κρατηθεί από τον ερευνητή. Με αυτόν τον τρόπο αποσαφηνίστηκαν ορισμένα αμφιλεγόμενα σημεία που είχαν εντοπιστεί κατά την διάρκεια των απομαγνητοφωνήσεων. Στην συνέχεια έγινε απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων που είχαν πραγματοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό. Το σύνολο όλων αυτών των δεδομένων που συλλέχθηκαν αποτελεί το υλικό ανάλυσης της παρούσας μελέτης. Κατά την ανάλυση των δεδομένων ακολουθήθηκαν οι κανόνες δεοντολογίας και έτσι τα ονόματα των μαθητών που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των δεδομένων είναι τυχαία.

Στην δεύτερη φάση της ανάλυσης πραγματοποιήθηκε προσεκτική μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων των μαθημάτων εντοπίζοντας τα κρίσιμα συμβάντα (critical incidents) επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης. Στην θεωρία κρίσιμων συμβάντων (Maher, 2002; Maher & Martino, 1996a, 1996b, 2000) αναφέρεται ότι τα συμβάντα παρουσιάζονται μέσα από τα επεισόδια ως αποσπάσματα διαλόγων γύρω από ένα θέμα που έχουν προκύψει από τα δεδομένα παρατήρησης (Powell, Francisco & Maher, 2003). Η διαδικασία εντοπισμού των κρίσιμων συμβάντων που προέκυψαν

από τα ερευνητικά ερωτήματα έγινε με τον εξής τρόπο: Μετά την προσεκτική μελέτη των διαλόγων των μαθητών αναδείχθηκε ότι σε κάποια σημεία είχε συμβεί η μαθηματική πρόκληση ενώ σε κάποια άλλα όχι. Έπειτα ακολουθήθηκε μελέτη του πως ο εκπαιδευτικός προκαλεί την δράση των μαθητών, εστιάζοντας σε συγκεκριμένες δράσεις και μοτίβα αλληλεπίδρασης του εκπαιδευτικού με τους μαθητές. Επίσης, κρίσιμα συμβάντα θεωρήθηκαν επεισόδια ή καταστάσεις όπου ο εκπαιδευτικός μέσα από την μαθηματική πρόκληση, ενεργοποιούσε την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών του.

Η ανάλυση των κρίσιμων συμβάντων στηρίχθηκε στο θεωρητικό εργαλείο ανάλυσης της διδακτικής τριάδας των Jaworski και Potari (2002) σε συνδυασμό με το παιδαγωγικό μοντέλο των 5 πρακτικών των Stein et al (2008). Οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν για την ανάλυση και τον εντοπισμό των κρίσιμων συμβάντων αλληλεπίδρασης προήλθαν από τα μοτίβα αλληλεπίδρασης του Bauersfeld (1994) και των Wood et al (1996). Έπειτα μελετήθηκαν οι δράσεις του εκπαιδευτικού σε συζητήσεις με όλη την τάξη σε σχέση με την μάθηση μαθηματικών από τους μαθητές. Η μελέτη αυτή στηρίχθηκε στο σχήμα κωδικοποίησης Analyzing Teacher Moves Guide (ATM) των Scherrer και Stein (2013), στο πλαίσιο των 4 κατηγοριών δράσεων των Ponte, Mata-Pereira και Quaresma (2013) και στο Advancing Children's Mathematics (ACT) πλαίσιο του Fraivillig (1999). Ειδικότερα, πραγματοποιήθηκε η μελέτη των δράσεων του εκπαιδευτικού για τα διάφορα είδη εξηγήσεων των μαθητών και για τις ανεξήγητες απαντήσεις τους, η οποία μελέτη βασίστηκε στο πλαίσιο του Drageset (2014).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

Αποτελέσματα της έρευνας

Στο κεφάλαιο αυτό καταγράφονται τα αποτελέσματα που συνάγονται από τα δεδομένα της έρευνας σύμφωνα με την Μέθοδο Ανάλυσης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με βάση τα δύο ερευνητικά ερωτήματα. Στο υποκεφάλαιο 3.1 παρουσιάζονται οι δράσεις του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν την μαθηματική πρόκληση ενώ στο υποκεφάλαιο 3.2 παρουσιάζεται η διαχείριση του εκπαιδευτικού στην διαμόρφωση και στην εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης σε σχέση με την δράση των μαθητών.

3.1 Δράσεις του εκπαιδευτικού

3.1.1 Δράσεις του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν την μαθηματική πρόκληση

Αναδύθηκαν 8 κύριες κατηγορίες δράσεων του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν την μαθηματική πρόκληση οι οποίες παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες:

<u>Κατηγορίες Δράσεων του Εκπαιδευτικού</u>: (124)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1:

Αναπροσανατολισμένες δράσεις (15) (12%)	**Προοδευτικές δράσεις (19) (15,3%)**	**Εστιασμένες δράσεις (26) (20,9%)**	**Διδακτικές δράσεις (31) (25%)**
Βάζει στην άκρη (παραμερίζει) (4)	Ανοιχτές πρωτοβουλίες προόδου (11)	Διαφώτιση λεπτομερειών (9)	Δράση εκμαίευσης (8)
Αλλαγή σχεδιασμού μαθήματος(2)	Επίδειξη (1)	Αξιολόγηση (3)	Υποστηρικτικές δράσεις(20)
Δράση επανεκκίνησης(4)	Δράση διερεύνησης (4)	Επεξεργασία εξήγησης μαθητή (4)	Δράσεις επέκτασης (3)
Παροχή νέας στρατηγικής(3)	Απλοποίηση(3)	Παροχή πληροφοριών (4)	
Διόρθωση ερώτησης(2)		Κοινοποίηση (1)	
		Αιτιολόγηση(4)	
		Δράση εστίασης (1)	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2:

Επεισόδια επέκτασης (9) (7,2%)	**Δράσεις εμβάθυνσης (8) (6,4%)**	**Δράσεις συμφωνίας (13) (10,4%)**	**Μοτίβα (3) (2,4%)**
Ενθάρρυνση μαθηματικού συλλογισμού (8)	Δημιουργία συνδέσεων (5)	Έλεγχος συμφωνίας (8)	Funnel Pattern (1)
Ενθάρρυνση μαθηματικού αναστοχασμού(1)	Δράση πρόσληψης(3)	Κατασκευή συμφωνίας(5)	5 πρακτικές της Stein (είναι ορατές σε 2 σημεία)

Παρακάτω αναφέρω μερικές υποκατηγορίες δράσεων και περιγράφω κάποιες πιο εξειδικευμένες υποκατηγορίες από τις οποίες αποτελούνται αυτές.

Ανοιχτές πρωτοβουλίες προόδου: εξερεύνηση μεθόδων

Δράση διερεύνησης: Κάνει ερωτήσεις με σκοπό να καταλάβει τι συμβαίνει

Υποστηρικτικές δράσεις: επανάληψη απάντησης μαθητή, μοντελοποίηση με υλικό, εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων, επανάληψη ισχυρισμού, Υπενθυμίζοντας στους μαθητές τον στόχο της συζήτησης, το πρόβλημα, ή άλλες πληροφορίες

Δράσεις επέκτασης: δράση πρόσκλησης, σύγκριση διαφορετικών μεθόδων και ιδεών

Ενθάρρυνση μαθηματικού συλλογισμού: Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων, Η ενθάρρυνση των μαθητών να προσφέρει μια αιτιολόγηση για λύσεις / τους ισχυρισμούς τους

Ενθάρρυνση μαθηματικού αναστοχασμού: Η ενθάρρυνση των μαθητών να εξετάσουν την ορθότητα / εγκυρότητα ενός ισχυρισμού

Η διάρθρωση των κατηγοριών δράσεων σε υποκατηγορίες

Από τα δεδομένα προέκυψαν οι 8 κατηγορίες δράσεων, οι οποίες αναλύονται σε υποκατηγορίες. Οι υποκατηγορίες εξειδικεύτηκαν ως προς το περιεχόμενο με βάση τις ειδικές δράσεις του εκπαιδευτικού που παρουσιάζονταν σε σχέση με την πορεία και την εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης καθώς και με τις δράσεις των μαθητών.

Οι πρώτες τρεις κατηγορίες έχουν προέλθει από έναν συνδυασμό του πλαισίου δράσεων του Drageset με τα δεδομένα της παρούσας έρευνας. Η τρίτη και τέταρτη κατηγορία προήλθαν από το πλαίσιο επέκτασης της μαθηματικής σκέψης του Fraivillig, η έκτη κατηγορία προήλθε από το πλαίσιο ATM και η έβδομη από το πλαίσιο της Wood. Τέλος, η τελευταία κατηγορία διαμορφώθηκε με βάση τα μοτίβα που εντοπίστηκαν στην παρούσα έρευνα και τα οποία έχουν προέλθει από την θεωρία.

Οι αναπροσανατολισμένες δράσεις αποτελούνται από την δράση που βάζει κάτι στην άκρη, την αλλαγή σχεδιασμού του μαθήματος, τις δράσεις επανεκκίνησης, την παροχή νέας στρατηγικής και την διόρθωση ερώτησης. Οι προοδευτικές δράσεις αποτελούνται από τις ανοιχτές πρωτοβουλίες προόδου, την επίδειξη, την δράση διερεύνησης και την απλοποίηση. Οι εστιασμένες δράσεις αποτελούνται από την διαφώτιση λεπτομερειών, την αξιολόγηση, την επεξεργασία εξήγησης του μαθητή, την παροχή πληροφοριών, την κοινοποίηση, την αιτιολόγηση και την δράση εστίασης. Οι διδακτικές δράσεις αποτελούνται από τις δράσεις εκμαίευσης, τις υποστηρικτικές και τις δράσεις επέκτασης. Τα επεισόδια επέκτασης αποτελούνται από την ενθάρρυνση του μαθηματικού συλλογισμού και την ενθάρρυνση του μαθηματικού αναστοχασμού. Οι δράσεις εμβάθυνσης αποτελούνται από την δημιουργία συνδέσεων και τις δράσεις πρόσληψης. Οι δράσεις συμφωνίας αποτελούνται από τον έλεγχο και την κατασκευή συμφωνίας και τέλος, τα μοτίβα

αποτελούνται από το μοτίβο χωνί (funnel pattern) και τις 5 πρακτικές της Stein. Μερικές υποκατηγορίες των δράσεων αποτελούνται από πιο εξειδικευμένες υποκατηγορίες τις οποίες αναφέρω κάτω από τους πίνακες. Παρατηρούμε ότι οι δράσεις που εμφανίζονται πιο συχνά είναι οι διδακτικές και οι εστιασμένες δράσεις, ακολουθούν οι προοδευτικές, οι αναπροσανατολισμένες και οι δράσεις συμφωνίας και τέλος λιγότερο συχνά εμφανίζονται οι εξής δράσεις: επεισόδια επέκτασης, δράσεις εμβάθυνσης και μοτίβα. Οι κυρίαρχες υποκατηγορίες είναι οι υποστηρικτικές δράσεις, η διαφώτιση λεπτομερειών, οι ανοιχτές πρωτοβουλίες προόδου, οι δράσεις που παραμερίζει κάτι, οι δράσεις επανεκκίνησης, ο έλεγχος συμφωνίας, η ενθάρρυνση του μαθηματικού συλλογισμού, η δημιουργία συνδέσεων και οι πρακτικές της Stein, αντίστοιχα. Αντίθετα, οι δράσεις που εμφανίζονται λιγότερο συχνά είναι η επίδειξη, η κοινοποίηση, η δράση εστίασης, η ενθάρρυνση του μαθηματικού αναστοχασμού και το μοτίβο χωνί (funnel pattern).

- Στη συνέχεια, παρουσιάζεται αναλυτικά η κάθε κατηγορία δράσεων και οι αντίστοιχες υποκατηγορίες μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα των δράσεων του εκπαιδευτικού, που χαρακτηρίζουν κρίσιμα ζητήματα της μαθηματικής πρόκλησης.

Αναπροσανατολισμένες δράσεις:

1.	*Μ*	*Να πάρουμε τον διαβήτη να πάρουμε ένα σημείο και μετά να*
2.		*πάρουμε το β να δούμε πόσες φορές χωράει, και μετά αυτό που*
3.		*περισσεύει να το μετρήσουμε με το διαβήτη να το πάμε στο α να*
4.		*δούμε πόσες φορές χωράει αφού είναι μικρότερο για να είναι 2α*
5.		*και αυτό.*
6.	*Κ 40:00*	*Ακούσατε τι είπε η Άννα-Μαρία; Μισό λεπτό, μπορεί να ακούσατε*
7.		*τι είπε η Άννα-Μαρία αλλά καταλάβατε τι λέει η Άννα-Μαρία;*
8.	*Μ*	*Όχι.*
9.	*Μ1*	*Ναι.*
10.	*Κ*	*Τι λέει;*
11.	*Μ1*	*Λέει ότι πρέπει να ενώσουμε τις δύο γραμμές , αλλά λέει ότι πρέπει*

12.		*να αρχίσουμε από την αρχή. Δηλαδή από το Α σημείο πρέπει να*
13.		*βάλουμε για μετρήσουμε 2α.*
14.	*Κ*	*Δεν έλεγε κάτι τέτοιο. Κατά περίεργο τρόπο η Άννα-Μαρία έχει*
15.		*δίκιο αλλά έλειπε απολύτως η ιδέα του τι είναι αυτό που είπε και*
16.		*γιατί έχει δίκιο, δεν είμαι σίγουρος 100% ότι ξέρεις εσύ γιατί*
17.		*γίνεται ή ξέρεις ότι θα γίνει. Εντάξει, πάει κάπου αλλού.*
18.		*Να ξεκαθαρίσω άλλο πράγμα η μέτρηση , μέτρησα πόσες φορές θα*
19.		*χωρέσει το ένα στο άλλο, οπότε είναι η επανάληψη της μονάδας*
20.		*εκεί μέσα , και άλλο πράγμα αυτό εδώ που θέλω να φτιάξω πόσο*
21.		*είναι και τα δύο μαζί. Αυτό σημαίνει αυτό.*

Σε αυτό σημείο μια άλλη μαθήτρια η Άννα-Μαρία μπαίνει στην συζήτηση προσφέροντας εθελοντικά μία ιδέα. Αυτό είναι σημαντικό γιατί φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν αρχίσει να ασκούν την αυτονομία τους ως συμμετέχοντες. Στην συνέχεια ένας άλλος μαθητής διατυπώνει με δικά του λόγια αυτό που νομίζει ότι είπε η Άννα-Μαρία (γραμμές 11-13). Εδώ φαίνεται ότι ο μαθητής αυτός αξιοποίησε την δήλωση της μαθήτριάς του. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ένα αποτέλεσμα των κοινωνικών και κοικωνικομαθηματικών νορμών (Yackel & Cobb, 1996). Δηλαδή οι μαθητές ακούν και συμμετέχουν ταυτόχρονα. Έπειτα ο καθηγητής επεμβαίνει αξιολογεί θετικά την δήλωση της Άννας-Μαρίας αλλά προσθέτει ότι έλειπε η αιτιολόγηση αυτής της ιδέας. Η δήλωση της Άννας-Μαρίας δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ως μία ανεξήγητη απάντηση διότι η μαθηματική σκέψη της μαθήτριας δεν είναι παρατηρήσιμη (black box). Οι ανεξήγητες απαντήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως μία ευκαιρία για τον διδάσκοντα πρόκλησης των μαθητών για αιτιολόγηση. Σε αυτό το συμβάν ο εκπαιδευτικός αποφάσισε να μην αξιοποιήσει αυτήν την ευκαιρία για αιτιολόγηση διότι ξέφευγε από το υπό συζήτηση θέμα. Έτσι επέλεξε **να παραμερίσει αυτήν την δήλωση**, έκανε δηλαδή μία αναπροσανατολισμένη δράση.

1.	*Κ*	*Κάνει μία περιστροφή. Το ξαναλέω σιγά σιγά για να καταλάβετε τι*
2.	*15:00*	*θέλω να πω. Οπότε αυτό που θέλω να κάνετε είναι κάτι αντίστοιχο*

3. σαν αυτό που έκανα εγώ εκεί πέρα. Ε είπαμε γιατί δεν προσέξατε τα

4. εξής: η μύτη του διαβήτη θα τοποθετηθεί εδώ πέρα το πόσο θα

5. ανοίξω είναι εκεί που έχω το σημείο θα κάνετε αυτό εδώ. Θέλω να

6. σταματήσετε απλώς όταν το φτάσετε στην άλλη ημιευθεία.

Σε αυτό το σημείο σύμφωνα με το πλαίσιο ATM ο καθηγητής κάνει μία **δράση επανεκκίνησης** δηλαδή επαναλαμβάνει και παραφράζει μία ερώτηση που ήδη έχει τεθεί. Αυτό το κάνει για να προσκαλέσει όλους τους μαθητές στην συζήτηση.

1. K Προεκτείνετε λοιπόν όλοι σε αυτήν την περίπτωση πολλοί το

2. είχατε σκεφτεί και το κάνατε άλλοι απλώς βάλατε τον χάρακα και δεν

3. το κάνατε, προεκτείνετε με το χάρακα όλοι τις δύο πλευρές της

4. γωνίας αυτές ονομάζονται οι δύο ημιευθείες πλευρές της γωνίας

5. όσο σας παίρνει στο χαρτί.

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής κάνει μία αναπροσανατολισμένη δράση δηλαδή **παρέχει στους μαθητές μία νέα στρατηγική** που κάποιοι από αυτούς την είχαν εφεύρει ήδη. Με άλλα λόγια αξιοποιεί και κοινοποιεί τις παρατηρήσεις που είχε κάνει κυκλοφορώντας στην τάξη και παρατηρώντας τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ομάδων των δύο ατόμων.

1. M Έτσι δηλαδή μοιάζει η γωνία;

2. K Όχι είναι η γωνία, η γωνία έχει άπειρο μέγεθος όχι άπειρο μέγεθος

3. έχει άπειρη έκταση. Το μέγεθος είναι άλλο. Το μέγεθος θα το

4. συζητήσουμε αργότερα. Έχει άπειρη έκταση μια γωνία. Λοιπόν για

Εδώ ένας μαθητής ρωτάει με σκοπό να καταλάβει. Ο καθηγητής τότε εκτελεί μία αναπροσανατολισμένη δράση και **διορθώνει την ερώτηση** του μαθητή, λέγοντας του πως δεν μοιάζει απλά με γωνία αλλά ότι είναι γωνία. Τέλος, παρείχε κάποιες επιπλέον πληροφορίες στους μαθητές για την έκταση και το μέγεθος της γωνίας, στο οποίο μέγεθος θα επανέλθει στα επόμενα μαθήματα.

1.	*Κ*	*Άσε δεν θα μπούμε ακόμα στην μέτρηση γιατί δεν ξεκαθαρίσαμε τι*
2.		*είναι αυτά που έχουμε να διαπραγματευτούμε και μετά πήγατε...*
3.		*Εντάξει μπορεί και εγώ να μην το έκανα...*

Σε αυτό το σημείο κάνει μία αναπροσανατολισμένη δράση-**αλλαγή σχεδιασμού** του μαθήματος, βάζει δηλαδή στην άκρη την μέτρηση δηλαδή το αντικείμενο της δραστηριότητας που έθεσε στους μαθητές να κάνουν, λόγω προβλημάτων διαπραγμάτευσης της έννοιας της γωνίας. Στο τμήμα αυτό συνειδητοποιεί ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα δεν είχε αποτέλεσμα.

Προοδευτικές δράσεις:

1.	*Κ*	*Θα σας μοιράσω κάποια αντικείμενα. Αυτά εδώ είναι κάποια*
2.		*σχήματα.*
3.	*Μ*	*Σα τουβλάκια.*
4.	*Κ*	*Σα τουβλάκια ακριβώς. Αυτό που θέλω να κάνετε είναι το εξής:*
5.		*Χωρίς προσέξτε χωρίς να χρησιμοποιήσετε μοιρογνωμόνιο...*
6.	*Μ*	*Να βρούμε τις μοίρες;*
7.	*Κ*	*Να βρείτε πόσο είναι αυτή η γωνία, βρείτε οποιοδήποτε τρόπο και*
8.		*θα το συζητήσουμε.*
9.	*Μ*	*Πολύ εύκολο!*
10.	*Κ*	*Θα σας μοιράσω, προσέξτε χωρίς μοιρογνωμόνιο, όταν λέω βρείτε*

11. βρείτε τρόπο να την μετρήσετε αυτό σημαίνει, πως θα την μετρήσετε,

12. σε τι μονάδα θα την μετρήσετε κ.τ.λ. είναι θέματα που εσείς θα τα

13. αποφασίσετε και δεν είναι απαραίτητο να είναι σε μοίρες .

Η δραστηριότητα που θέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές είναι μία προοδευτική δράση καθώς αποτελεί μία **ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου**. Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός βάζει τους μαθητές σε μία διαδικασία εξερεύνησης μεθόδων (γραμμές 7-8, 10-13).

1. K Λοιπόν! Θα το δείξω τώρα εδώ και μην περιμένετε ότι αυτό εγώ που

2. θα δείξω θα είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό που είχατε εσείς να

3. κάνετε.

4. Έχουμε ένα τμήμα α, έχουμε ένα τμήμα.

5. Λοιπόν έχουμε ένα τμήμα α και έχουμε και ένα ευθύγραμμο τμήμα

6. ΑΒ και ζητάει να μετρήσουμε το ΑΒ με μονάδα μέτρησης το α.

7. Λοιπόν μου περιγράφετε από κάτω την διαδικασία..εε..πείτε μου

8. ακριβώς το τι πρέπει να γίνει. Εντάξει; Και θα το κάνουμε αργότερα

9. για να μην σας σηκώνω στον πίνακα.Λέγε..

1. K Να τραβάω γραμμές. Μπορεί κάποιος να μου περιγράψει δηλαδή τι

2. είναι αυτό που κάνω με διαφορετικά λόγια; Λέγεε...

Σημαντικό είναι ότι ενώ κάνει κάποια πράγματα στον πίνακα ζητά από τους μαθητές λεκτική περιγραφή των δράσεών του. Εδώ δηλαδή υπάρχει μία συσχέτιση των δράσεων του εκπαιδευτικού με την μαθητική διαδικασία της λεκτικής αναπαράστασης. Ο καθηγητής αφήνει τους μαθητές να εξηγήσουν την σωστή λύση

ώστε να εξασφαλίσει ότι όλη η τάξη ακούει την σωστή λύση. Στη συνέχεια ο καθηγητής δείχνει στον πίνακα την διαδικασία που περιγράφουν οι μαθητές, εκτελεί δηλαδή την προοδευτική δράση **της επίδειξης.**

1.	*Μ*	*Δεν θα διακρίναμε τις γραμμές.*
2.	*Μ1*	*Ναι αυτό λέω και εγώ.*
3.	*Κ*	*Τι δεν θα διακρίναμε; Δεν με πολυενδιαφέρει...Τι εννοείς δεν θα*
4.		*διακρίναμε εξήγησε.*

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι ο μυητής καθηγητής κάνει **δράση διερεύνησης**, δηλαδή παροτρύνει τον μαθητή να εξηγήσει την απάντηση του, γιατί ο ίδιος δεν καταλαβαίνει. Ο σκοπός αυτής της κίνησης του καθηγητής είναι να καταλάβουν την απάντηση του μαθητή και οι υπόλοιποι μαθητές.

1.	*Κ*	*Λοιπόν για παρακολουθήστε. Δεν έχει σημασία που πήγαμε στην*
2.		*ορθή, τώρα θα σας έλεγα σε όλους να ασχοληθείτε πρώτα με την*
3.		*ορθή γιατί ίσως είναι πιο εύκολο.*

Εδώ εκτελεί την προοδευτική δράση **της απλοποίησης**, παρέχοντας μία νέα στρατηγική, λέγοντας δηλαδή σε όλους να ξεκινήσουν με την ορθή γωνία για όλους ευκολίας.

Εστιασμένες δράσεις:

1.	*Μ*	*Αυτό είναι έτσι ο διαβήτης αυτό πάει προς τα πάνω και εμείς...άμα*
2.		*το κάνουμε αυτό που θέλουμε εγώ πιστεύω θα αφήνει από κάτω τα*
3.		*σημεία...*
4.	*Κ*	*Τι εννοείς από κάτω; Δείξε μου...Δεν καταλαβαίνω το από κάτω;*

Σε αυτό το σημείο αρχικά (γραμμές 1-3) ο μαθητής αυτοορίζει δηλαδή προσφέρει εθελοντικά την αντίληψη του ενώ ο καθηγητής κάνει ερωτήσεις γιατί δεν καταλαβαίνει (γραμμή 4). Μία ερμηνεία αυτού του φαινομένου είναι η εξής: Ο μαθητής δίνει μία ανεξήγητη απάντηση καθώς η μαθηματική σκέψη του δεν είναι παρατηρήσιμη (black box). Έτσι ο καθηγητής κάνει μία εστιασμένη δράση **ζητώντας επιπλέον λεπτομέρειες**.

1.	*Κ*	*γραμμές...η μία συμπληρώνει την άλλη. Ωραία εντάξει το*
2.		*κατάλαβα έχεις δίκιο σε αυτό που λες αλλά είναι το ίδιο ως τελικό*
3.		*αποτελέσμα. Η Ναταλία αυτό που είχε στο μυαλό της είναι το εξής:*
4.		*Και δίκιο έχει έτσι που το σκέφτεται αλλά για φαντάσου Ναταλία το*
5.		*εξής: Μισό λεπτό να εξηγήσω την ιδέα της Ναταλίας γιατί μπορεί*
6.		*και κάποιος άλλος να μην το έχει καταλάβει. Φανταστείτε το εξής:*
7.		*Ότι εδώ πέρα ας πούμε στην άκρη του χεριού μου έχω ένα λέιζερ*
8.		*που χρησιμοποιείται για να δείχνετε και είστε σε ένα δωμάτιο το*
9.		*οποίο είναι τίγκα στο καπνό απλώς για να φαίνονται τα μόρια που*
10.		*υπάρχουν για αυτό. Και διαγράφω με την άκρη του χεριού μου μία*
11.		*τέτοια κίνηση από εκεί εκεί. Η ακτίνα λέιζερ σε αυτήν την*
12.		*περίπτωση δεν ξέρω αν έχετε πειραματιστεί ποτέ με κάτι τέτοιο θα*
13.		*δείτε ότι λόγω του καπνού που υπάρχει φαίνεται το που είναι σε*
14.		*κάθε σημείο αλλιώς αν δεν υπάρχει ο καπνός φαίνεται μόνο το*
15.		*τελικό αποτέλεσμα η κουκίδα στην άλλη άκρη. Μπορείτε να*
16.		*καταλάβετε τι είναι αυτό που σας περιγράφω τώρα; Πες ένα*
17.		*παράδειγμα εσύ.*

18.	*Μ*	*Στο αυτοκίνητο ανάβουν τα φώτα...*
19.	*Κ*	*Ναι άρα αυτό που με νοιάζει είναι π.χ. να είμαι σε ένα δωμάτιο με*
20.		*πολύ σκόνη ή με πολύ καπνό καθώς διαγράφει λοιπόν η*
21.		*ακτίνα λέιζερ αυτή εδώ την κίνηση αυτό που με νοιάζει είναι το εξής*
22.		*θα φανούν όλα τα σημεία τα ενδιάμεσα τα οποία υπάρχουν. Η*
23.		*ακτίνα λέιζερ είναι ευθεία, όμως η κίνηση που θα κάνω θα μου*
24.		*γεμίσει εντελώς όλο αυτό εδώ το ενδιάμεσο. Εντάξει Ναταλία*
25.		*οπότε έγινε κατανοητό γιατί είναι έτσι;*

Στις γραμμές 1-6 ο καθηγητής αφού κατάλαβε την ιδέα της Ναταλίας, της είπε ότι έχει δίκιο. Παράλληλα **κοινοποιεί** την ιδέα της Ναταλίας ενώ ταυτόχρονα αξιοποιεί την ιδέα με το λέιζερ που του έδωσε ένας μαθητής από το Α΄4, ώστε να εισάγει ένα διαφορετικό πλαίσιο, πιο κατάλληλο, για να εξηγήσει την ιδέα της Ναταλίας.

1.	*Κ*	*Τι νομίζετε ότι είπε η Αθηνά; Είπε σε αυτή την περίπτωση για αυτό*
2.		*εδώ οι πλευρές της γωνίας ποιες είναι τώρα οι πλευρές, αυτή και*
3.		*αυτή έχουν πώς το είπες;*
4.	*Μ*	*Έχουν συγκεκριμένο μήκος.*
5.	*Κ*	*Ενώ λέει σε αυτή εδώ υπάρχει ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό ότι*
6.		*οι πλευρές επεκτείνονται απεριόριστα. Άρα μπαίνει όμως το εξής:*

Ο καθηγητής εκτελεί μία εστιασμένη δράση δηλαδή **επεξεργάζεται, προσθέτει πληροφορίες** στην εξήγηση της Αθηνάς, ώστε να αποκτήσουν όλοι οι μαθητές κατανόηση αυτής της εξήγησης και να μπορούν να συμμετέχουν στην συζήτηση.

1.	*Κ*	*Εντάξει ας βάλω αυτό το επιπλέον που λέει ο Αναστάσης ή αλλιώς*

2.		*ΓΔ=ΑΒ/3.Εντάξει είναι απλώς ένας άλλος συμβολισμός όμως εδώ*
3.		*νομίζω καλά δεν είναι τόσο προφανές αλλά το από πάνω και αυτό*
4.		*που είπε ο Αναστάσης συμβολικά λένε το ίδιο πράγμα. Εντάξει;*
5.		*Συμβολικά. Τώρα πάμε στην ουσία και η ουσία είναι αν ισχύει ή δεν*
6.		*αυτό εδώ που έχει περιγράψει η Φένια. Παναγιώτη;*
7.	*Μ*	*Εε..ισχύει αυτό.*

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιεί την διαδικασία του revoicing (γραμμές 4-5). Έπειτα, εκτελεί μία εστιασμένη δράση, ζητά δηλαδή από τους άλλους μαθητές να **αξιολογήσουν** την απάντηση της Φένιας (γραμμές 16-17).

1.	*Κ*	*Θα γέμιζε όλη η ενδιάμεση επιφάνεια αυτό δεν θα γίνονταν;*
2.		*Δηλαδή ουσιαστικά αυτό το οποίο περιγράφει ο Σταμάτης εκτός αν*
3.		*κάποιος άλλος έχει κάποια άλλη άποψη ή δεν είναι βέβαιος ότι αυτό*
4.		*θα συμβεί...ο Σταμάτης περιγράφει ότι αυτό που θα συμβεί είναι ότι*
5.		*θα γεμίσει με κάποιο τρόπο όλο αυτό εδώ το κομμάτι, και θα αφήσει*
6.		*σε αυτήν την περίπτωση, θα άφηνε λοιπόν το ίχνος της μέχρι εδώ*
7.		*πέρα και τελικά θα έρχονταν εδώ επάνω να πέσει. Γιατί είπα ότι η*
8.		*περιστροφή θα γίνει μέχρι να συναντήσω την άλλη ημιευθεία δεν θα*
9.		*την ξεπεράσω την ημιευθεία. Ερωτήσεις ακούω.*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής παραφράζει την απάντηση του Σταμάτη **παρέχοντας** τελικά **πληροφορίες** στους μαθητές για το τι πρόκειται να συμβεί στην περίπτωση που η μία ημιευθεία περιστραφεί ως προς την άλλη.

1.	*Κ*	*Γιατί; Εγώ δεν αναγνωρίζω γιατί υπάρχουν ημιευθείες. Λέγε Φώτη*

γιατί είναι ημιευθείες αυτά εκεί; Τι είναι τα χαρακτηριστικά που δείχνουν ότι είναι ημιευθεία;

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής κάνει μία ερώτηση με την οποία εξετάζει την έννοια της ημιευθείας με σκοπό να διευκολύνει τους μαθητές με την εννοιολογική κατανόησή της. Αν ερμηνεύσουμε την δράση του καθηγητή θα δούμε ότι κάνει μία εστιασμένη δράση με την οποία ζητάει **αιτιολόγηση** (Γιατί;) στην ανεξήγητη απάντηση του μαθητή (black box).

K *Σα διαβήτης αλλά το πάω σε καθένα από τα άπειρα που δεν μπορώ να το πάω οπότε για αυτό λέω φανταστείτε το. Το τελικό αποτέλεσμα που θα έπαιρνα ποιο θα ήτανε; Να συζητήσουμε για το τελικό αποτέλεσμα όλης αυτής της διαδικασίας. Προσπαθήστε να φανταστείτε το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας. Να το ξαναπώ;*

M *Όχι*

K *Όχι; Αφού δεν το έχετε καταλάβει. Θα το ξαναπώ και θα το δείξω με 2 διαφορετικούς τρόπους. Φανταστείτε να είμαστε σε ένα δωμάτιο το οποίο έχει ή πάρα πολύ σκόνη ή καπνό. Και εγώ στην άκρη του χεριού μου έχω μία συσκευή από αυτές που είναι λέιζερ τις έχετε δει Λοιπόν ο λόγος που πρέπει να έχει σκόνη είναι για να μου φαίνονται τα μόρια σε αυτήν την περίπτωση να δείχνει να φαίνεται όλη η ακτίνα που υπάρχει από το λέιζερ. Η ακτίνα από το λέιζερ είναι ευθ. τμήμα καθ'ομοίωση , δεν είναι. Μοιάζει να είναι ευθ. Τμήμα ημιευθεία ή ευθεία; Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο από πίσω δείχνει*

16. το τι είναι η ακτίνα λέιζερ μέσα σε ένα δωμάτιο με σκόνη δηλαδή να

17. βλέπω το που πηγαίνει και όχι μόνο το τελικό αποτέλεσμα η κουκίδα

18. τι μου κάνει. Γεωργία;

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής σύμφωνα με την Wood χρησιμοποιεί την δράση **της εστίασης** δηλαδή προσανατολίζει τους μαθητές σχετικά με το τι πρέπει να κάνουν. Έπειτα ρωτάει αν οι μαθητές κατάλαβαν. Αν και εκείνοι του λένε πως κατάλαβαν, λόγω της ευαισθησίας του για τους μαθητές στον γνωστικό τομέα επιμένει να εξηγήσει ξανά τι πρέπει να κάνουν. Μάλιστα για τον σκοπό αυτό εισάγει διαφορετικές αναπαραστάσεις και πλαίσια.

Διδακτικές δράσεις:

1. Κ Πείτε μου χαρακτηριστικά που αναγνωρίζετε να υπάρχουν σε αυτήν

2. την περίπτωση. Κοιτάξτε καλά το σχήμα και πείτε μου

3. χαρακτηριστικά που αναγνωρίζετε να υπάρχουν. Αν αναγνωρίζετε

4. μπορεί και να μην αναγνωρίζετε κανένα χαρακτηριστικό , όταν λέω

5. χαρακτηριστικά εννοώ υπάρχουν σε αυτήν την περίπτωση

6. γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία με κάποιο τρόπο δημιουργούν

7. αυτό που θα πω αργότερα; Γιατί ακόμα δεν έχω πει τι είναι γωνία.

8. Επομένως αυτό που έχετε εσείς είναι μια ιδέα στο τι μπορεί να είναι

9. γωνία. Υπάρχουν γεωμετρικά αντικείμενα εδώ πέρα στο σχήμα που

10. έδωσα τα οποία μπορείτε να αναγνωρίσετε ας πούμε με κάποιο

11. τρόπο; Φένια επειδή σε βλέπω σκεπτική θα ξεκινήσω από σένα .

12. Πες ότι βλέπεις δεν έχει σημασία αν είναι σωστό ή λάθος.

Σύμφωνα με τους Ponte, Mata-Pereira και Quaresma (2013) σε αυτό το επεισόδιο ο καθηγητής χρησιμοποιεί μία **δράση πρόσκλησης** των μαθητών στην συζήτηση για την έννοια της γωνίας. Παρατηρούμε δηλαδή ότι μυεί τους μαθητές στην αναγνώριση γεωμετρικών αντικειμένων που σχετίζονται με την έννοια αυτή.

1. K Λοιπόν για να ακούσω τι έχετε κάνει μέχρι στιγμής.

2. Από την κάθε ομάδα θα ακούσω τις ιδέες έτσι ώστε να δούμε τι

3. ακριβώς έγινε, μετά θα δούμε αν αυτές είναι σωστές ή όχι.

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής ζητά από τις ομάδες να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους, άρα έχουμε μία **δράση εκμαίευσης**.

1. K Το άνοιγμα που θα έπρεπε ας πούμε εγώ θα το

2. έβλεπα ως εξής : αυτό θα το τοποθετούσα με τέτοιο τρόπο ώστε το

3. ένα χέρι να δείχνει από κει και το άλλο χέρι να ακολουθεί περίπου

4. αυτό εκεί το άνοιγμα για να έχω περίπου αυτή τη γωνία πόσο είναι.

5. Αυτό όλο που δημιουργείται είχαμε πει ότι είναι η γωνία.

Σε αυτό το σημείο έχουμε μία δράση υποστήριξης, **υπενθυμίζοντας** στους μαθητές με άτυπο, μη-φορμαλιστικό τρόπο τον ορισμό της γωνίας, ώστε να δημιουργηθεί κοινό έδαφος και η έννοια της γωνίας να μπορέσει να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Σημαντικό είναι ότι ο καθηγητής προσπαθεί με δυναμικό τρόπο να περιγράψει στους μαθητές την έννοια της γωνίας.

1. K Για παρατηρήστε τώρα αυτό που θέλω να

2. παρατηρήσετε. Εδώ τώρα είναι εε δώστε προσοχή στο κόκκινο

3. μονάχα που υπάρχει εδώ τώρα είναι σαν να έχω εδώ αυτήν εδώ την
4. ημιευθεία και αυτό που κάνω είναι αυτό που σας ζήτησα πριν είναι
5. να σκεφτείτε το εξής: περιστρέφω μέχρι ουσιαστικά να
6. καταφέρω εδώ τώρα αυτό εδώ που έχει εμφανιστεί είναι στην
7. πραγματικότητα ένα μέρος από αυτό που θα ονομάσουμε γωνία θα
8. πούμε σε λίγο το τι είναι γωνία. Εδώ έχει ένα μειονέκτημα αυτό που
9. σας δείχνω ότι δεν έχω ημιευθεία γιατί είναι κύκλος κάποια στιγμή
10. σταματάει ο κύκλος, φανταστείτε το λοιπόν αυτό να πηγαίνει
11. απεριόριστα προς τα πάνω και φανταστείτε ότι έγινε αυτή εδώ η
12. περιστροφή , θα το δείξω ακόμα μία φορά. Οπότε για φανταστείτε
13. αυτή η περιστροφή τι ακριβώς θα είχε σαν αποτέλεσμα;
14. Φανταστείτε ότι στο geogebra έχω πάρει όλη την ημιευθεία όχι
15. απλώς σημείο σημείο πάνω στην ημιευθεία και έχω πει σε όλη την
16. ημιευθεία να αφήνει το ίχνος της όταν την μετακινώ εδώ θέλω
17. απλώς να την περιστρέψω την ημιευθεία γύρω από αυτό εδώ το
18. σημείο. Τι ακριβώς θα συνέβαινε σε αυτή την περίπτωση; Αυτό
19. είναι που θέλω να φανταστείτε. Μπορεί κάποιος να το φανταστεί;
20. Σταμάτη;

Στις γραμμές 1-20 ο καθηγητής χρησιμοποιεί για πρώτη φορά μέσα από την περιγραφή ένα εναλλακτικό μοτίβο αλληλεπίδρασης που λέγεται **μοντελοποίηση με υλικό**. Μέσα από αυτό το μοτίβο ο καθηγητής χρησιμοποιεί υλικό στατικό (κατασκευή με κύκλους) και δυναμικό (Geogebra) ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν κατανόηση της κατάστασης που περιγράφει. Αυτή η δράση του καθηγητή μπορεί να

χαρακτηριστεί και ως μία υποστηρικτική ενέργεια **εισαγωγής διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων**.

1.	*Κ*	*Που είναι η πλήρης περιστροφή; Είναι ουσιαστικά ο πλήρης κύκλος*
2.		*που έχω εδώ πέρα. Και είπε ότι αν σκεφτώ ότι αυτό εδώ πέρα το*
3.		*κομμάτι το άσπρο είναι ουσιαστικά το 1 από 4 ίσα μέρη που μπορώ*
4.		*να δημιουργήσω εδώ , ποια είναι αυτά τα 4, πως θα τα*
5.		*δημιουργούσα; Το καθένα από αυτά θα είναι ίσο με τα άλλα*
6.		*οπότε έτσι θα έχω το 1 από τα 4 ίσα μέρη. Τότε σε αυτή την*
7.		*περίπτωση η ορθή γωνία θα πω ότι είναι το ¼ μιας περιστροφής.*
8.		*Που είναι σωστό. Ωραία το ερώτημα είναι τώρα τι θα κάνω όταν έχω*
9.		*μία άλλη γωνία και δεν είναι ορθή, πηγαίνετε να σκεφτείτε.*

Εδώ ο καθηγητής επεξεργάζεται την απάντηση του μαθητή προσθέτοντας πληροφορίες, ταυτόχρονα με μία **δράση επανάληψης** της απάντησης του μαθητή.

1.	*Κ*	*Ναι αλλά η ιδέα της Έλενας με την ιδέα της Λυδίας είναι η ίδια; Εσύ τι*
2.		*λες Λυδία; Εσύ θα αποφασίσεις αν μιλάτε για το ίδιο ή όχι. Αν είναι*
3.		*διαφορετικό αυτό που μιλάτε.*
4.	*Μ*	*Εγώ λέω ότι γωνία είναι αυτό εδώ (η μύτη) εκείνη λέει ότι είναι όλο*
5.		*αυτό εδώ.*
6.	*Κ*	*Λοιπόν Γεωργία; Εγώ λέω ότι κάνατε το εξής λάθος σαν ομάδα*
7.		*χωρίς καλά καλά να έχετε ξεκαθαρίσει τι θα εννοείται ότι είναι η*
8.		*γωνία αποφασίσατε να μπείτε στην διαδικασία, μπήκατε στην*
9.		*διαδικασία δεν είμαι και 100% βέβαιος, να μπείτε στην*

διαδικασία να κάνετε και το υπόλοιπο κομμάτι. Πρώτα θα αποφασίσετε αν έχετε όλοι την ίδια άποψη για τα πράγματα τι είναι γωνία και μετά θα μπείτε στην διαδικασία. Αν δεν έχετε προσπαθήστε να το λύσετε ή ρωτήστε με ή δεν ξέρω με τι άλλο τρόπο μπορεί να το καταφέρετε ή σκεφτείτε καλύτερα. Λοιπόν τι κάνατε μετά Γεωργία περιέγραψε.

Εδώ ο καθηγητής κάνει μία δράση επέκτασης, βάζει δηλαδή τις μαθήτριες να **συγκρίνουν τις διαφορετικές ιδέες** που έχουν για την έννοια της γωνίας, για το τι είναι η γωνία δηλαδή και μετά να μπούνε στην διαδικασία μέτρησης της γωνίας.

Επεισόδια επέκτασης:

K 27:00 *Ακούστε 1 και ¼ λέει. Εσύ είπες απλώς λιγότερο από 2 εκείνοι είπαν 1 και 1/4 , ψάξτε το αν είναι έτσι ή όχι . Ας δούμε αν εκείνοι έχουν δίκιο γιατί μπορεί να λέει 1 και ¼ τι είναι αυτό το οποίο είδε παραπάνω σε αυτήν την περίπτωση; Θα ψάξετε να το βρείτε εσείς στο σπίτι .*

Σε αυτό το σημείο για πρώτη και μοναδική φορά ο καθηγητής ενθαρρύνει τον μαθηματικό αναστοχασμό. Έχουμε δηλαδή ένα **επεισόδιο επέκτασης** όπου ο καθηγητής ενθαρρύνει τους μαθητές να εξετάσουν την ορθότητα-εγκυρότητα ενός ισχυρισμού. Πιο συγκεκριμένα, τους ενθαρρύνει να ψάξουν πως προκύπτει η απάντηση 1 και ¼ που παρουσιάστηκε κατά την φάση διερεύνησης μιας δραστηριότητας μέτρησης γωνίας από μια ομάδα μαθητών.

K 31:00 *Ποιος θα παρουσιάσει πρώτα την ιδέα του; Τα κορίτσια εδώ πέρα. Λιγάκι γρήγορα το τι κάνανε και παρακολουθήστε οι υπόλοιποι.*

Μπορεί αυτό που θα σας πούνε , λοιπόν μπορεί αυτό που θα πούνε τα κορίτσια με κάποιο τρόπο να συνεχίζει την δικιά σας ιδέα και να τους πάρετε εσείς την δικιά τους ιδέα και να το πάτε παρακάτω ή να την συνδέσετε καλύτερα με αυτό που έχετε κάνει εσείς.

Σε αυτό το σημείο έχουμε ένα επεισόδιο επέκτασης, καθώς ο καθηγητής ενθαρρύνει τους μαθητές **να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων.** Δηλαδή, να παρακολουθούν και να αξιοποιούν τις απαντήσεις και τον συλλογισμό κάθε ομάδας μαθητών.

K *Γιατί; Εγώ δεν αναγνωρίζω γιατί υπάρχουν ημιευθείες. Λέγε Φώτη γιατί είναι ημιευθείες αυτά εκεί; Τι είναι τα χαρακτηριστικά που δείχνουν ότι είναι ημιευθεία;*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής κάνει μία ερώτηση με την οποία εξετάζει την έννοια της ημιευθείας με σκοπό να διευκολύνει τους μαθητές με την εννοιολογική κατανόησή της. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την δράση του καθηγητή ως μία δράση ενθάρρυνσης του μαθηματικού συλλογισμού και συγκεκριμένα ενθαρρύνει τον Φώτη **να προσφέρει μία αιτιολόγηση** για τον συλλογισμό του, ο οποίος είναι ότι αναγνωρίζει την ύπαρξη μιας ημιευθείας.

Δράσεις εμβάθυνσης:

M *Είναι σαν την ακτίνα λέιζερ.*

K *Ακριβώς είναι μια ακτίνα λέιζερ η οποία έκανε αυτή εδώ την κίνηση όλη η περιοχή η οποία διέγραψε σε αυτήν την περίπτωση η ακτίνα λέιζερ από το ένα άκρο μέχρι το άλλο στην περιοχή που κινείται.*

Αυτό μπορείτε να το φανταστείτε;

6.	*Μ*	*Ναι.*
7.	*Κ*	*Ε αυτό στην πραγματικότητα όλο το χρωματισμένο μέρος είναι*
8.		*σημεία από γεωμετρικής, μαθηματικής απόψεως είναι σημεία που*
9.		*απλώς τα ξεχωρίζω από τα υπόλοιπα σημεία με κάποιο τρόπο όπως*
10.		*ξεχωρίζω αυτό όπως ξεχώρισα κάποια στιγμή εκείνο είναι σημεία*
11.		*λοιπόν και όλο αυτό είναι η γωνία τώρα μαζί με τούτα και με τούτα.*
12.		*Όλα λοιπόν αυτά τα σημεία είναι αυτό που λέω γωνία στα*
13.		*μαθηματικά. Να το ξαναπώ λιγάκι διαφορετικά.*

Στην γραμμή 1 ένας μαθητής προσφέρει εθελοντικά μια ιδέα που δικαιολογεί αυτό που εξηγεί τόση ώρα ο καθηγητής. Σκοπός αυτής της δράσης είναι οι μαθητές να μάθουν να ασκούν την αυτονομία τους ως συμμετέχοντες. Στην συνέχεια του επεισοδίου (γραμμές 2-13) ο καθηγητής κάνει μία **κίνηση πρόσληψης (uptake)**, δηλαδή αξιοποιεί την ιδέα του μαθητή για να εμβαθύνει και να παρατείνει την συζήτηση, καθώς και την χρησιμοποιεί ως αφορμή για την εισαγωγή ενός μη φορμαλιστικού ορισμού της έννοιας της γωνίας. Παρατηρούμε ότι ο καθηγητής χρησιμοποιώντας στατικά μέσα προσπαθεί να δώσει μία δυναμική προσέγγιση της έννοιας της γωνίας.

1.	*Κ*	*Σα διαβήτης αλλά το πάω σε καθένα από τα άπειρα που δεν μπορώ*
2.		*να το πάω οπότε για αυτό λέω φανταστείτε το. Το τελικό*
3.		*αποτέλεσμα που θα έπαιρνα ποιο θα ήτανε; Να συζητήσουμε για το*
4.		*τελικό αποτέλεσμα όλης αυτής της διαδικασίας. Προσπαθήστε να*
5.		*φανταστείτε το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας. Να το ξαναπώ;*
6.	*Μ*	*Όχι*
7.	*Κ*	*Όχι; Αφού δεν το έχετε καταλάβει. Θα το ξαναπώ και θα το δείξω με*

8.	*2 διαφορετικούς τρόπους. Φανταστείτε να είμαστε σε ένα δωμάτιο*
9.	*το οποίο έχει ή πάρα πολύ σκόνη ή καπνό. Και εγώ στην άκρη του*
10.	*χεριού μου έχω μία συσκευή από αυτές που είναι λέιζερ τις έχετε δει*
11.	*Λοιπόν ο λόγος που πρέπει να έχει σκόνη είναι για να μου φαίνονται*
12.	*τα μόρια σε αυτήν την περίπτωση να δείχνει να φαίνεται όλη η*
13.	*ακτίνα που υπάρχει από το λέιζερ. Η ακτίνα από το λέιζερ είναι ευθ.*
14.	*τμήμα καθ'ομοίωση , δεν είναι. Μοιάζει να είναι ευθ. Τμήμα*
15.	*ημιευθεία ή ευθεία; Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο από πίσω δείχνει*
16.	*το τι είναι η ακτίνα λέιζερ μέσα σε ένα δωμάτιο με σκόνη δηλαδή να*
17.	*βλέπω το που πηγαίνει και όχι μόνο το τελικό αποτέλεσμα η κουκίδα*
18.	*τι μου κάνει. Γεωργία;*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής αρχικά προσανατολίζει τους μαθητές σχετικά με το τι πρέπει να κάνουν. Έπειτα ρωτάει αν οι μαθητές κατάλαβαν. Αν και εκείνοι του λένε πως κατάλαβαν, επιμένει να εξηγήσει ξανά τι πρέπει να κάνουν. Μάλιστα για τον σκοπό αυτό εισάγει διαφορετικές αναπαραστάσεις και πλαίσια πράγμα που υποδηλώνει μία υποστηρικτική ενέργεια. Μάλιστα είναι φανερή η επιρροή της ιδέας του μαθητή του τμήματος Α΄4 που είπε για το λέιζερ στο σχεδιασμό των μαθημάτων του καθηγητή. Τέλος (γραμμές 7-18), πάλι προσπαθεί **να συνδέσει αυτές τις διαφορετικές αναπαραστάσεις**, μία κίνηση που στοχεύει στην εμβάθυνση των γνώσεων των μαθητών.

Δράσεις συμφωνίας:

1.	*Μ*	*Θα έλεγα ότι το μήκος του ευθ.τμήματος ΑΒ είναι 3α.*
2.	*Κ*	*Το μήκος του ΑΒ είναι 3α. Εντάξει; Ωραία. ΕΕ..συμφωνείτε,*
3.		*διαφωνείτε; Τι γίνετε; Λέγε..*

4.	*Μ*	*Συμφωνώ.*
5.	*Κ*	*Εντάξει στο διαφωνείτε πάμε. Υπάρχει κάποιος που να διαφωνεί ως*
6.		*προς αυτό;*
7.	*Μ*	*όχι*
8.	*Κ*	*Όχι; Όλοι το ίδιο λέτε; Μία ερώτηση εδώ τώρα*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής **ελέγχει αν υπάρχει συμφωνία.** Ελέγχει δηλαδή αν οι μαθητές έχουν ερωτήσεις ή σχόλια σχετικά με την ιδέα της μαθήτριας. Ο σκοπός του είναι το άνοιγμα ερωτήσεων ή σχόλιων πριν προχωρήσουν παρακάτω. Σημαντικό είναι ότι δεν υπάρχει κάποιος μαθητής που να διαφωνεί.

1.	*Κ*	*Αυτό που κρατάτε σημειώσεις. Φτιάξτε δύο ευθ.τμήματα όχι ίσα*
2.		*μεταξύ τους, το ένα πέστε το α μικρό και το άλλο β μικρό. Δώστε*
3.		*ονομασίες Α,Β στα άκρα, Γ,Δ στο άλλο. Όχι ίσα μεταξύ τους το*
4.		*ξαναλέω όχι ίσα μεταξύ τους έχει σημασία. Εσείς φτιάξτε δύο*
5.		*αντίστοιχα ναι. Πρώτον , να βρείτε γεωμετρικά, έχει μεγάλη σημασία*
6.		*το τι εννοώ με αυτό θα το εξηγήσω σε λίγο γεωμετρικά το άθροισμα.*
7.		*Άθροισμα ξέρετε τι είναι;*
8.	*Μ*	*Ναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης.*
9.	*Κ*	*Ωραία! Και την διαφορά των δύο τμημάτων. Για να μην ξαναγίνει*
10.		*Αυτός ο διάλογος, χεράκια, έλεος.*
11.	*Μ*	*Τι εννοείται γεωμετρικά;*
12.	*Κ*	*Μόνο με χρήση του διαβήτη. Ο χάρακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί*
13.		*αλλά για να τραβάω γραμμές, όχι για να μετράω. Εντάξει;*

14. *Καταλάβατε τι σημαίνει γεωμετρικά λοιπόν; Η μέτρηση όταν*

15. *μπαίνει δεν έχει αυτό το καθαρά 100% , γεωμετρικά λοιπόν σημαίνει*

16. *δουλεύω με διαβήτη και κανόνα. Θα εξηγήσω τώρα την λέξη κανόνα τι σημ*

17. *Κανόνας είναι ο χάρακας που ουσιαστικά δεν χρησιμοποιώ την*

18. *μέτρηση που έχει επάνω δηλαδή μπορώ να τον χρησιμοποιήσω για*

19. *να τραβήξω γραμμές ευθείες αλλά απαγορεύεται να μετρήσω με*

20. *αυτόν. Εντάξει; Έλα αυτό έχετε να κάνετε. Το πως θα το κάνετε*

21. *σκεφτείτε το δεν ξέρω.*

Στο παρόν περιστατικό ο καθηγητής εξηγεί στους μαθητές τι εννοεί με τον όρο γεωμετρικό υπολογισμό αθροίσματος και διαφοράς ευθ. τμημάτων (γραμμές 5-6, 12-21). Περιγράφει επίσης τι εννοεί με τον όρο κανόνα, πιο συγκεκριμένα επισημαίνει την διαφορά κανόνα-χάρακα και περιγράφει τον τρόπο λειτουργίας των γεωμετρικών οργάνων (διαβήτης, χάρακας, κάνονας). Αυτό το σημείο είναι σημαντικό διότι ο καθηγητής διαπραγματεύεται το νόημα των μαθηματικών αυτών όρων με τους μαθητές του και διαμορφώνει ένα κοινό έδαφος επικοινωνίας, κάνει δηλαδή μία **κατασκευή συμφωνίας**. Επίσης, φαίνεται ο καθοριστικός ρόλος που ασκεί η γλωσσική επίδραση. Η χρήση της γλώσσας στα μαθηματικά διαφέρει από τη γλώσσα της καθομιλουμένης. Λέξεις στα μαθηματικά που έχουν διαφορετικές έννοιες μέσα στην καθημερινή γλώσσα προκαλούν, συχνά, σύγχυση τους μαθητές. Όπου οι λέξεις έχουν μαθηματικό και μη μαθηματικό νόημα οι μαθητές πρέπει να ξέρουν και τα δύο και να είναι σε θέση να ερμηνεύσουν την έννοια σωστά στο κατάλληλο πλαίσιο (Μαστρογιάννης, 2009). Η γλώσσα εντούτοις που ο δάσκαλος χρησιμοποιεί μέσα στην τάξη δεν είναι καν η γνήσια τεχνική γλώσσα των μαθηματικών αλλά ένα κράμα καθημερινής και τεχνικής μαθηματικής γλώσσας. Χαρακτηριστικά της γλώσσας αυτής όπως τεχνικοί όροι που δεν υπάρχουν στην καθημερινή γλώσσα, γλωσσικές συμβάσεις που αλλάζουν υπό την επίδραση των κανόνων χρήσης της τεχνικής γλώσσας, η κατασκευή προσωπικών ιδεών π.χ.: οι περισσότεροι γεωμετρικοί όροι χρησιμοποιούνται χωρίς κάποια αξιόλογη προσπάθεια να δοθεί στο μαθητή μια

επαρκής ιδέα της σημασίας τους. Έτσι ο μαθητής κατασκευάζει τη δική του ιδέα η οποία συχνά αποκλίνει από αυτήν του δασκάλου, ή παραβίαση της σαφήνειας και της συνοχής, όταν χρησιμοποιούνται από το δάσκαλο συνώνυμα ή όταν συνδέονται διαφορετικές σημασίες με την ίδια λέξη (Barmpagianni, 2011).

Μοτίβα:

1.	*Κ 05:00*	*Έχουν κοινή αρχή αυτές οι δύο ημιευθείες. Ωραία. Είπε ο Νίκος ότι*
2.		*αυτές είναι αντικείμενες ημιευθείες. Ωραία Νίκο να σε ρωτήσω;*
3.		*Ποια είναι τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχουν για να είναι*
4.		*αντικείμενες οι δύο ημιευθείες;*
5.	*Μ*	*Να έχουν κοινή αρχή.*
6.	*Κ*	*Κοινή αρχή το έχουν αυτό;*
7.	*Μ*	*Ναι.*
8.	*Κ*	*Το έχουν ωραία πάμε παρακάτω.*
9.	*Μ*	*Να είναι δύο. Να ανοίξω το βιβλίο;*
10.	*Κ*	*Άμα θες άνοιξε το βιβλίο, καλύτερα τις σημειώσεις σου.*
11.	*Μ*	*Να είναι ημιευθείες.*
12.	*Κ*	*Να είναι ημιευθείες. Ωραία το έχουν και αυτό το χαρακτηριστικό*
13.		*να είναι 2 το έχουν και αυτό το χαρακτηριστικό και μαζί να είναι*
14.		*τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να δημιουργούν ευθεία.*
15.		*Θυμίζω εγώ τον ορισμό.*
16.	*Μ*	*Αα...*
17.	*Κ*	*Είναι τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργούν ευθεία;*
18.	*Μ*	*Όχι.*

19.	*Κ*	*Όχι άρα είναι αντικείμενες ημιευθείες;*
20.	*Μ*	*Όχι*

Στις γραμμές 3-4 ο καθηγητής κάνει μία ερώτηση για να εξετάσει την έννοια των αντικειμένων ημιευθειών γιατί έχει ως στόχο την εννοιολογική κατανόηση. Όμως στην συνέχεια αυτού του επεισοδίου συνέβη κάτι που ο καθηγητής δεν το έκανε συνειδητά. Το μοτίβο που ακολούθησε ο καθηγητής είναι σύμφωνα με τον Bauersfeld γνωστό ως **funnel-pattern**. Διότι παρατηρούμε ότι ο καθηγητής με μια σειρά από φανερές ερωτήσεις οδηγεί τον μαθητή στην σωστή απάντηση. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας μια σειρά από ερωτήσεις ακόμα και το σχολικό βιβλίο οδηγεί τον μαθητή να πει τον ορισμό των αντικείμενων ημιευθειών. Στην πραγματικότητα υπάρχει ψευδαίσθηση ότι η μάθηση έχει συμβεί, καθώς ο μόνος που συμμετέχει στην γνωστική δραστηριότητα είναι ο καθηγητής.

1.	*Κ*	*Να δω εδώ τι κάνατε.*
2.	*Μ*	*Εε... βάλαμε αυτόν τον ρόμβο και είδαμε ότι είναι περίπου δύο*
3.		*γωνίες.*
4.	*Κ*	*Ωραία εδώ τι κάνατε;*
5.	*Μ*	*Εδώ το προσαρμόσαμε.*
6.	*Κ*	*Α τι προσπάθησες να προσαρμόσεις;*
7.	*Μ*	*Προσαρμόσαμε...*
8.	*Κ*	*Για να δω εδώ τι κάνατε;*
9.	*Μ*	*Εμείς αυτή την στιγμή προσπαθούμε να βρούμε πόση είναι η γωνία...*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής **παρακολουθεί** τις απαντήσεις των μαθητών κατά την διάρκεια της φάσης διερεύνησης και τους ζητά να εξηγήσουν τις μεθόδους τους που ακολούθησαν για να μετρήσουν την γωνία με την βοήθεια του πλαστικού ρόμβου.

1.	*Κ*	*Λοιπόν για να ακούσω τι βρήκατε σε σχέση με το πρώτο. Να*
2.		*ακούσω τι καταφέρατε να βρείτε εκεί πέρα δεν ξέρω τι βρήκατε.*
3.		*Λέγε Σοφία τι κάνετε όχι τι κάνατε ξέρω το τι κάνατε μάλλον*
4.		*περιέγραψε μου το τι κάνατε.*

Έπειτα **επιλέγει συγκεκριμένη μαθήτρια** να παρουσιάσει την απάντηση της κατά την διάρκεια της συζήτησης-σύνοψης.

1.	*Κ*	*Παιδιά ακούστε πως το έκανε η ομάδα της Σοφίας. Η ομάδα της*
2.		*Σοφίας λοιπόν αυτό που έκανε πήρε αυτό εδώ, για ακούστε πήρε*
3.		*αυτό εδώ το προσάρμοσε έτσι ώστε η μία από τις πλευρές εδώ πέρα*
4.		*αυτού εδώ του σχήματος να ταιριάξει κοίταξε να κάνει όλο το*
5.		*περίγραμμα το έκανες;*
6.	*Μ*	*Όχι, μια γραμμή μόνο.*
7.	*Κ*	*Μια γραμμή μονάχα κοίταξε να κάνει και μετά προσπάθησε από εδώ*
8.		*να επαναλάβει αυτή εδώ τη μονάδα για να δει αυτό.*
9.		*Εδώ εσείς τι κάνατε; Εσείς κάνατε κάτι διαφορετικό. Πήρατε αυτό*
10.		*εδώ και τι αρχίσατε να το κάνετε; Καλά δεν έχει σημασία η Ναταλία.*
11.		*Δεν σκεφτήκατε άμα είναι σωστό της Ναταλίας. Γιατί δεν είναι*
12.		*σωστό;*
13.	*Μ*	*Γιατί δεν θέλαμε να δούμε πόσο χωράει...*
14.	*Κ*	*Η Ναταλία σκέφτηκε αυτό να αρχίσει να το επαναλαμβάνει μέσα για*
15.		*να δει πόσες φορές αυτό εδώ θα επαναληφθεί μέσα. Τέτοια*
16.		*κομματάκια εντάξει; Αυτό είναι διαφορετικό...*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής **κάνει σκόπιμη αλληλουχία των απαντήσεων των μαθητών** και πάλι βοηθάει την τάξη να κάνει μαθηματικές συνδέσεις. Πρώτα δηλαδή αποφασίζει να παρουσιάσει την ιδέα της ομάδας της Σοφίας η οποία προσάρμοσε την πλευρά του ρόμβου στην πλευρά του σχήματος, και μετά της Ναταλίας η οποία άρχισε να επαναλαμβάνει τον ρόμβο μέσα στην γωνία, ακολούθησε δηλαδή μια μη-κατάλληλη στρατηγική για την συγκεκριμένη δραστηριότητα.

3.1.2 Αλληλεπιδράσεις-μοτίβα δράσεων

Κατά την ανάλυση και κατηγοριοποίηση των δράσεων του εκπαιδευτικού προέκυψαν 36 επεισόδια με αλληλεπιδράσεις και μοτίβα δράσεων. Πιο συγκεκριμένα προέκυψαν 17 μοτίβα δράσεων του εκπαιδευτικού τα οποία είναι τα εξής:

1. Έλεγχος συμφωνίας - κατασκευή συμφωνίας (2)
2. Έλεγχος συμφωνίας - Δημιουργία συνδέσεων (2)
3. Έλεγχος συμφωνίας – παροχή πληροφοριών (2)
4. Κατασκευή συμφωνίας – αξιολόγηση (2)
5. Κατασκευή συμφωνίας- Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων (2)
6. Μοντελοποίηση με υλικό - υποστηρικτική ενέργεια (εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων) - δημιουργία συνδέσεων (3)
7. Μοντελοποίηση με υλικό - αναπροσανατολισμένη δράση (παροχή νέας στρατηγικής (2)
8. Μοντελοποίηση με υλικό - ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου (4)
9. Διαφώτιση λεπτομερειών - Επεξεργασία εξήγησης μαθητή (3)
10. Διαφώτιση λεπτομερειών – υποστηρικτική δράση (επανάληψη απάντησης του μαθητή) (2)
11. Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων – Επεξεργασία εξήγησης μαθητή (2)
12. Δημιουργία συνδέσεων – αξιολόγηση (2)
13. Ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου – δράση εκμαίευσης (2)
14. Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων – δράση εκμαίευσης (2)

15. Αναπροσανατολισμένη δράση (διόρθωση ερώτησης και παραμερίζει) - υποστηρικτική ενέργεια (εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων) (2)
16. Αιτιολόγηση – παροχή πληροφοριών (2)
17. Διαφώτιση λεπτομερειών – δράση πρόσληψης (2)

-Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά τα μοτίβα δράσεων που προέκυψαν, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα αλληλεπιδράσεων των δράσεων του εκπαιδευτικού, που χαρακτηρίζουν κρίσιμα ζητήματα της μαθηματικής πρόκλησης.

Έλεγχος συμφωνίας-κατασκευή συμφωνίας:

Κατασκευή συμφωνίας – αξιολόγηση

1.	*Μ*	*Κύριε θα βρούμε ότι το ΓΔ είναι το 1/3 του ΑΒ.*
2.	*Κ*	*Εμ..για να το γράψω γιατί δεν ξέρω δεν είμαι σίγουρος αν κατάλαβα*
3.		*καλά αυτό εδώ εννοείς; Για να γυρίσουμε στην ιδέα της Φένιας.*
4.		*Πες το ξανά. Έγραψα αυτό που ήθελες ή έγραψα κάτι άλλο;*
5.		*Ξαναπέστο δηλαδή;*
6.	*Μ*	*Το ΓΔ θα δούμε ότι χωράει 3 φορές δηλαδή θα είναι το 1/3 του ΑΒ.*
7.	*Κ*	*Αφού λέει το ΓΔ χωράει 3 φορές στο ΑΒ εγώ το γράφω και μετά θα*
8.		*δούμε...τότε το ΓΔ είναι το 1/3 του ΑΒ. Αυτό είπε εντάξει; Έγραψα τα*
9.		*λόγια της το τι είπε. Εε.. ισχύει αυτό ή δεν ισχύει; Αναστάση για πες.*
10.	*Μ*	*Πιστεύω ότι ισχύει επειδή μπορούμε να πούμε ότι το ΓΔ είναι το ΑΒ*
11.		*διά 3.*
12.	*Κ*	*Εντάξει ας βάλω αυτό το επιπλέον που λέει ο Αναστάσης ή αλλιώς*
13.		*ΓΔ=ΑΒ/3.Εντάξει είναι απλώς ένας άλλος συμβολισμός όμως εδώ*
14.		*νομίζω καλά δεν είναι τόσο προφανές αλλά το από πάνω και αυτό*

15.		*που είπε ο Αναστάσης συμβολικά λένε το ίδιο πράγμα. Εντάξει;*
16.		*Συμβολικά. Τώρα πάμε στην ουσία και η ουσία είναι αν ισχύει ή δεν*
17.		*αυτό εδώ που έχει περιγράψει η Φένια. Παναγιώτη;*
18.	*Μ*	*Εε..ισχύει αυτό.*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής πάλι κάνει **έλεγχο συμφωνίας** μεταξύ των μαθητών με σκοπό να ελέγξει αν κάποιος μαθητής διαφωνεί με την ιδέα της Φένιας. Επίσης, εξηγεί ότι η λύση του Αναστάση είναι ίδια με της Φένιας απλά έχουν διαφορετική συμβολική αναπαράσταση. Προσπαθεί δηλαδή να κάνει μία **κατασκευή συμφωνίας**. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιεί και την διαδικασία του revoicing (γραμμές 4-5). Έπειτα, εκτελεί μία εστιασμένη δράση ζητά δηλαδή από τους άλλους μαθητές να **αξιολογήσουν** την απάντηση της Φένιας (γραμμές 16-17).

Έλεγχος συμφωνίας- δημιουργία συνδέσεων:

1.	*Κ*	*Και ακούστε όλοι το τι έχει κάνει για να δείτε άμα αυτό που λέει*
2.		*είναι ίδιο ή διαφορετικό με αυτό που έχετε κάνει εσείς και αν*
3.		*συμφωνείτε ή διαφωνείτε.*

Ο καθηγητής εδώ εκτελεί **έλεγχο συμφωνίας** και **βοηθάει την τάξη να κάνει μαθηματικές συνδέσεις** μεταξύ της απάντησης της μαθήτριας που θα περιγράψει ξανά ο ίδιος και των βασικών ιδεών τους.

Κατασκευή συμφωνίας- Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων

Διαφώτιση λεπτομερειών - Επεξεργασία εξήγησης μαθητή

Κατασκευή συμφωνίας – αξιολόγηση

Δημιουργία συνδέσεων – αξιολόγηση

1.	*Κ*	*Λέει δεν ξέρω παρακολουθείστε αυτό που θέλω να μάθετε και*
2.		*στις συζητήσεις που είναι στο eclass τώρα πια είναι να*
3.		*παρακολουθείτε και την σκέψη του άλλου, το τι λέει. Μπορεί να σας*
4.		*βοηθήσει ίσως να καταλάβετε κάτι. Εντάξει; Ή μπορεί να έχει*
5.		*άδικο και να προσπαθήσετε εσείς να τον βοηθήσετε να καταλάβει*
6.		*αυτό που εσείς νομίζετε ότι είναι το σωστό. Εντάξει; Αλλά το ίδιο*
7.		*ισχύει και εδώ μέσα.*
8.		*Είπε ο Ζώη να επαναλάβουμε τα επιχειρήματα που είπε έχεις να*
9.		*μετρήσεις αυτό. Βασίλη Βασίλη έχεις να μετρήσεις εδώ,*
10.		*ξέχασέ το τα προηγούμενο εντάξει τώρα πάμε κάτι άλλο κάτι*
11.		*εντελώς διαφορετικό, έχεις να μετρήσεις εδώ και έχεις αυτόν τον*
12.		*χάρακα, μπορείς με αυτόν τον χάρακα να μετρήσεις εδώ;*
13.	*Μ*	*Ναι γίνεται.*
14.	*Κ 26:00*	*Γιατί γίνεται; Γιατί μπορείς να μετρήσεις; Αφού είναι μεγάλος ο*
15.		*χάρακας και έχεις κάτι μικρό. Γιατί γίνεται; Είναι σημαντικό να το*
16.		*συνειδητοποιήσετε όλοι σας. Γιατί γίνεται; Με κάτι μεγάλο να μπορώ*
17.		*να μετρήσω κάτι μικρό. Γιατί λέει ο Ζώη όπως πολύ σωστά το είπε*
18.		*αυτό είναι μεγάλο και εγώ έχω να μετρήσω αυτό εδώ που είναι*

19.		*μικρότερο από αυτό εδώ. Εντάξει; Αλλά γίνεται να το μετρήσω.*
20.		*Γιατί γίνεται να το μετρήσω; Γιατί είναι το ίδιο πράγμα με αυτό που*
21.		*συζητάμε εδώ, προσπαθήστε να συνειδητοποιήσετε ότι είναι το*
22.		*ίδιο πράγμα με αυτό που συζητάμε εδώ. Γιατί γίνεται; Γιώργο;*
23.	*Μ*	*Γιατί πιστεύω ότι άμα μετρήσουμε με τον χάρακα το μεγαλύτερο*
24.		*σχήμα, σε κάποιο σημείο δεν θα μας φτάνει ο χάρακας και θα*
25.		*Βάλουμε ένα σημείο και θα συνεχίσουμε.*
26.	*Κ*	*Ξανά Γιώργο δεν σε κατάλαβα.*
27.	*Μ*	*Άμα μετρήσουμε το θρανίο θα βάλουμε ένα σημάδι και θα*
28.		*συνεχίσουμε.*
29.	*Κ*	*Ε Ζώη είναι το ίδιο αυτό που έλεγες με αυτό που λέει ο Γιώργος;*
30.	*Μ*	*Ο Γιώργος αναφέρεται σε κάτι μεγαλύτερο από τον χάρακα.*
31.	*Κ*	*Ο Γιώργος αναφέρεται σε κάτι μεγαλύτερο από τον χάρακα. Αυτό*
32.		*λέει η Χριστίνα. Γιώργο σε αυτό αναφέρεσαι ενώ ο Ζώη αναφέρεται*
33.		*σε κάτι μικρότερο από τον χάρακα. Εσύ αναφέρεσαι σε κάτι*
34.		*μεγαλύτερο. Το μεγαλύτερο το καταλαβαίνετε όλοι; Στο μικρότερο*
35.		*είναι που έχουμε κολλήσει τώρα το αν είναι ή δεν είναι. Στέλιο;*
36.	*Μ*	*Ο χάρακας είναι μεγαλύτερος από αυτό το σημείο.*
37.	*Κ*	*Από αυτό το τμήμα.*
38.	*Μ*	*Από αυτό το τμήμα. Άρα μπορούμε εμείς να το μετρήσουμε με...*
39.	*Κ*	*Γιατί αφού ο χάρακας είναι μεγαλύτερος εγώ δεν μπορώ να*
40.		*μετρήσω το μικρό με ευκολία. Δεν το καταλαβαίνω. Γιατί;*

41.		*Την εξήγησή σου θέλω γιατί μπορώ; Είπες μπορώ με ευκολία*
42.		*κιόλας. Ας ξεχάσουμε την ευκολία, μπορώ να μετρήσω ευκολία*
43.		*Δυσκολία δεν είναι θέμα.*
44.	*Μ*	*Αφού ο χάρακας είναι μεγαλύτερος μπορώ να μετρήσω.*
45.	*Κ*	*Πώς το μετράς;*
46.	*Μ*	*Από το σημείο 0.*
47.	*Κ*	*Από το σημείο 0.*
48.	*Μ*	*Επειδή έχει νούμερα επάνω.*
49.	*Κ*	*Επειδή έχει νούμερα επάνω, λέγε Αναστάση μισό λεπτό.*
50.	*Μ*	*Επειδή αυτό το σημείο είναι ένα, επειδή ο χάρακας είναι 5 θα*
51.		*είναι το 1/5.*
52.	*Κ*	*Άρα κοιτάει την σχέση που έχει το μικρό με το μεγάλο. Στην*
53.		*πραγματικότητα ..για λέγε Παναγιώτη.*
54.	*Μ*	*Ε...εφόσον ξέρουμε ένα συγκεκριμένο μέγεθος όπως ο χάρακας*
55.		*ξέρουμε ότι έχει αριθμούς. Μπορούμε έτσι να μετρήσουμε μια*
56.		*μικρότερη επιφάνεια.*
57.	*Κ*	*Επιφάνεια είναι αυτό που μετράμε εδώ;*
58.	*Μ*	*Ε όχι μήκος.*
59.	*Κ*	*Μισό λεπτό να διορθώσω. Επιφάνεια είναι αυτό εδώ το...*
60.		*Εμείς μετράμε μήκος. Απόσταση από εδώ μέχρι εδώ.*
61.	*Μ*	*Επειδή ξέρουμε στο ΑΒ ποιο είναι το μέγεθός του ότι είναι 3α . Έτσι*
62.		*μπορούμε να μετρήσουμε αυτό το ΓΔ. Άμα δεν ξέραμε...*

63.	*K*	*Ας μείνουμε στον χάρακα να συνειδητοποιήσουμε τι γίνεται με το*
64.		*χάρακα και μετά πάμε σε αυτό εδώ. Γιατί αν δεν καταλάβουμε το*
65.		*ένα δεν θα μπορέσουμε ποτέ να φτάσουμε στο άλλο.*
66.		*Στέλιο σε τέτοιες συζητήσεις μείνετε συγκεντρωμένοι όσο*
67.		*μπορείτε όλοι σας και παρακολουθείστε τι λέει ο ένας και ο άλλος.*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής παροτρύνει τους μαθητές να παρακολουθούν την σκέψη του άλλου, το τι λέει. Σημαντικό είναι ότι τους λέει να μάθουν να αξιοποιούν αυτά που λένε οι συμμαθητές τους, **τους ενθαρρύνει δηλαδή να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις τους** ώστε να είναι σε θέση στο τέλος **να κατασκευάσουν μία από κοινού συμφωνία** (γραμμές 1-7). Έπειτα ο καθηγητής **επεξεργάζεται την εξήγηση** του Ζώη ώστε να **δώσει περισσότερες πληροφορίες** στους μαθητές και δημιουργήσει **συνδέσεις** μεταξύ του επιχείρηματος του Ζώη και αυτού που συζητάνε στην τάξη ώστε να εμβαθύνει τις γνώσεις των μαθητών (γραμμές 16-22). Δηλαδή ο σκοπός του είναι **να δημιουργήσει κοινό έδαφος συζήτησης** στην τάξη ώστε όλοι οι μαθητές να συμφωνήσουν στην βασική μαθηματική ιδέα που εξέφρασε ο Ζώη ότι δηλαδή με κάτι μεγάλο μπορώ να μετρήσω κάτι μικρό. Σε αυτό το σημείο ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί εστιασμένες **δράσεις αξιολόγησης** ώστε οι μαθητές να αξιολογήσουν τα επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν. Παρακάτω πολλοί μαθητές εκφράζουν τις απόψεις τους αξιοποιώντας την δήλωση του Ζώη. Ο καθηγητής τους λέει να μείνουν συγκεντρωμένοι στην συζήτηση και να παρακολουθούν τι λέει ο ένας και ο άλλος. Παρατηρούμε ότι δημιουργείται ένα είδος συνέντευξης μεταξύ των μαθητών καθώς οι μαθητές ακούν και συμμετέχουν ταυτόχρονα.

Διαφώτιση λεπτομερειών - Επεξεργασία εξήγησης μαθητή

Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων – Επεξεργασία εξήγησης μαθητή

Διαφώτιση λεπτομερειών – υποστηρικτική δράση (επανάληψη απάντησης του μαθητή)

1.	*Μ*	*Κύριε έχω καταλάβει.*
2.	*Κ*	*Ναι ωραία συγχαρητήρια δεν είσαι το μοναδικό άτομο που υπάρχει*
3.		*27 είστε εδώ μέσα. Έλα Ηλία συνέχισε. Ηλία προσπάθησε να το*
4.		*συνεχίσεις αυτό που έλεγες. Καλά δεν πειράζει εντάξει ας πει*
5.		*κάποιος άλλος τι νομίζει. Προσέξτε έχουν προκύψει δύο διαφορετικά*
6.		*ζητήματα. Και το τελευταίο ζήτημα στο οποίο συζητάμε είναι το εξής :*
7.		*Πρότεινε ο Ηλίας και καλά έκανε και το πρότεινε παίρνουμε την*
8.		*μονάδα αυτή εδώ και την επαναλαμβάνω εδώ μέσα μία και μετά πάλι*
9.		*κι άλλο εκεί πέρα και θέλω να δω έτσι το α το πόσες φορές χωράει*
10.		*στο β. Και το ερώτημα που έχω κάνει εγώ λέω το εξής :*
11.		*Ωραία σωστά αυτά που λες...εε αυτό μου είχες πει ή θες κάτι άλλο*
12.		*να πεις;*

Εδώ ο καθηγητής έχει επικεντρωθεί στην ιδέα του Ηλία, ο οποίος συνεχίζει να έχει τον ρόλο του κεντρικού συμμετέχοντα στην κοινότητα της τάξης. Προσπαθεί να μυήσει και τους υπόλοιπους μαθητές στην συζήτηση, και τους παροτρύνει να αξιοποιήσουν την ιδέα του Ηλία, την οποία **επαναλαμβάνει** με δικά του λόγια και μετά επανέρχεται πάλι στον Ηλία για να βεβαιωθεί ότι μιλάνε για την ίδια ιδέα. Έχουμε δηλαδή μία **επεξεργασία** της εξήγησης του Ηλία από τον καθηγητή με σκοπό

να την κάνει πιο σαφή, να δει αν πράγματι συζητάνε για το ίδιο πράγμα με τον Ηλία καθώς και να δώσει περισσότερες πληροφορίες στους μαθητές. Έχουμε δηλαδή μία **εστιασμένη δράση διαφώτισης λεπτομερειών** πάνω στην εξήγηση του Ηλία. Επίσης, **ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν στην αιτιολόγηση του Ηλία.**

Διαφώτιση λεπτομερειών – δράση πρόσληψης

1.	*Μ*	*Είναι σαν την ακτίνα λέιζερ.*
2.	*Κ*	*Ακριβώς είναι μια ακτίνα λέιζερ η οποία έκανε αυτή εδώ την κίνηση*
3.		*όλη η περιοχή η οποία διέγραψε σε αυτήν την περίπτωση η ακτίνα*
4.		*λέιζερ από το ένα άκρο μέχρι το άλλο στην περιοχή που κινείται.*
5.		*Αυτό μπορείτε να το φανταστείτε;*
6.	*Μ*	*Ναι.*
7.	*Κ*	*Ε αυτό στην πραγματικότητα όλο το χρωματισμένο μέρος είναι*
8.		*σημεία από γεωμετρικής, μαθηματικής απόψεως είναι σημεία που*
9.		*απλώς τα ξεχωρίζω από τα υπόλοιπα σημεία με κάποιο τρόπο όπως*
10.		*ξεχωρίζω αυτό όπως ξεχώρισα κάποια στιγμή εκείνο είναι σημεία*
11.		*λοιπόν και όλο αυτό είναι η γωνία τώρα μαζί με τούτα και με τούτα.*
12.		*Όλα λοιπόν αυτά τα σημεία είναι αυτό που λέω γωνία στα*
13.		*μαθηματικά. Να το ξαναπώ λιγάκι διαφορετικά.*

Στην γραμμή 1 ένας μαθητής προσφέρει εθελοντικά μια ιδέα που δικαιολογεί αυτό που εξηγεί τόση ώρα ο καθηγητής. Σκοπός αυτής της δράσης είναι οι μαθητές να μάθουν να ασκούν την αυτονομία τους ως συμμετέχοντες. Στην συνέχεια του επεισοδίου (γραμμές 2-13) ο καθηγητής κάνει μία **κίνηση πρόσληψης** (uptake), δηλαδή **αξιοποιεί την ιδέα του μαθητή** για να εμβαθύνει και να παρατείνει την συζήτηση, καθώς και την χρησιμοποιεί ως αφορμή για την εισαγωγή ενός μη φορμαλιστικού ορισμού της έννοιας της γωνίας. Παρατηρούμε

ότι ο καθηγητής χρησιμοποιώντας στατικά μέσα προσπαθεί να δώσει μία δυναμική προσέγγιση της έννοιας της γωνίας.

Μοντελοποίηση με υλικό - ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου

1.	*Κ*	*Θα σας μοιράσω κάποια αντικείμενα. Αυτά εδώ είναι κάποια*
2.		*σχήματα.*
3.	*Μ*	*Σα τουβλάκια.*
4.	*Κ*	*Σα τουβλάκια ακριβώς. Αυτό που θέλω να κάνετε είναι το εξής:*
5.		*Χωρίς προσέξτε χωρίς να χρησιμοποιήσετε μοιρογνωμόνιο...*
6.	*Μ*	*Να βρούμε τις μοίρες;*
7.	*Κ*	*Να βρείτε πόσο είναι αυτή η γωνία, βρείτε οποιοδήποτε τρόπο και*
8.		*θα το συζητήσουμε.*

Εδώ ο καθηγητής αναθέτει μία σειρά εργασιών στους μαθητές. Συγκεκριμένα **χρησιμοποιεί υλικό** (τουβλάκια) για να αποκτήσουν οι μαθητές κατανόηση. Η δραστηριότητα αυτή του εκπαιδευτικού αποτελεί μία **ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου**, καθώς βάζει τους μαθητές σε μία διαδικασία εξερεύνησης μεθόδων.

Αναπροσανατολισμένη δράση (διόρθωση ερώτησης και παραμερίζει) - υποστηρικτική ενέργεια (εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων)

1.	*Κ*	*Η ώρα περνάει αλλάζω το τι έχετε να κάνετε ξεχάστε εντελώς το τι*
2.		*έχετε να κάνετε έτσι και αλλιώς δεν έχω δει πολλά ενδιαφέροντα*
3.		*πράγματα δεν ξέρω τι έχετε βρει ή τέλος πάντων μπορεί να το*
4.		*έχετε βρει θα το δούμε μετά,*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής εκτελεί μία **αναπροσανατολισμένη δράση**, διορθώνει δηλαδή την αρχική του ερώτηση και ταυτόχρονα την βάζει στην άκρη, αλλάζει τελείως τον σχεδιασμό της δραστηριότητας που ανάθεσε στους μαθητές γιατί δεν έχει δει πολλά ενδιαφέροντα πράγματα, (χρονικοί περιορισμοί). Η δράση αναπροσανατολισμού είναι ταυτόχρονα και μία **υποστηρικτική δράση** καθώς **εισάγει διαφορετικά πλαίσια** για την καλύτερη κατανόηση-διευκόλυνση των μαθητών.

Ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου – δράση εκμαίευσης

1.	*Κ*	*Λοιπόν για να ακούσω τι έχετε κάνει μέχρι στιγμής.*
2.		*Από την κάθε ομάδα θα ακούσω τις ιδέες έτσι ώστε να δούμε τι*
3.		*ακριβώς έγινε, μετά θα δούμε αν αυτές είναι σωστές ή όχι.*

Εδώ ο καθηγητής βάζει τις ομάδες να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους **(ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου)**, ενώ ταυτόχρονα ασκεί μία **δράση εκμαίευσης**.

Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων – δράση εκμαίευσης

1.	*Κ 31:00*	*Ποιος θα παρουσιάσει πρώτα την ιδέα του; Τα κορίτσια εδώ πέρα.*
2.		*Λιγάκι γρήγορα το τι κάνανε και παρακολουθήστε οι υπόλοιποι.*
3.		*Μπορεί αυτό που θα σας πούνε , λοιπόν μπορεί αυτό που θα πούνε*
4.		*τα κορίτσια με κάποιο τρόπο να συνεχίζει την δικιά σας ιδέα και να*
5.		*τους πάρετε εσείς την δικιά τους ιδέα και να το πάτε παρακάτω ή*
6.		*να την συνδέσετε καλύτερα με αυτό που έχετε κάνει εσείς. Σε*

Εδώ ο καθηγητής κάνει μία **δράση εκμαίευσης** προσκαλώντας τους μαθητές να μοιραστούν τις ιδέες τους. Έπειτα **ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων.**

Μοντελοποίηση με υλικό - αναπροσανατολισμένη δράση (παροχή νέας στρατηγικής)

1.	*Σχόλιο*	*(ο καθηγητής πάει στην μαθήτρια και με την χαρτοκατασκευή την*
2.		*βοηθάει να δει ότι αυτό το σημείο είναι στην κόκκινη περιοχή, η*
3.		*μαθήτρια τελικά βλέπει ότι το Γ ανήκει στην γωνία).*
4.	*Μ*	*Ναι το περνάει.*
5.	*Κ*	*Όχι άσε το περνάει το αν βρίσκεται στην κόκκινη περιοχή σε*
6.		*ενδιαφέρει. Είναι στην κόκκινη περιοχή όταν είναι στην κόκκινη*
7.	*35:00*	*περιοχή είναι στην γωνία. Το Δ είναι; Για κοίταξε φαντάσου εδώ δεν*
8.		*είναι το Δ; Η κόκκινη περιοχή σε ενδιαφέρει. Το Δ είναι λοιπόν; Η*
9.		*γωνία σου είναι το κόκκινο. Όχι δεν σου είπα ότι θα μου πάρεις...*
10.		*Για κοιτάξτε για κοιτάξτε μια παρεξήγηση που υπάρχει εδώ πέρα*
11.		*θα την λύσω αυτήν την παρεξήγηση δεν είπα ότι ένα σημείο που*
12.		*είναι εδώ πέρα θα πρέπει να το πάρετε και σε αυτό το σημείο να*
13.		*συμπεριφερθείτε με το διαβήτη έτσι όπως συμπεριφερθήκατε δεν*
14.		*είπα κάτι τέτοιο προφανώς άμα κάνω περιστροφή κάποια στιγμή η*
15.		*περιστροφή αυτή θα μου διαγράψει και υποχρεωτικά ένα μέρος της*
16.		*περιστροφής θα μπει εκεί μέσα. Εμένα με νοιάζει για κοιτάξτε τι με*
17.		*νοιάζει όταν έχω αυτό εδώ το κόκκινο είμαι στην κόκκινη περιοχή*
18.		*όπου κόκκινη δεν είναι μόνο αυτή που μου φαίνεται είναι και η*
19.		*υπόλοιπη η οποία συνεχίζει , είμαι στην κόκκινη περιοχή;*
20.	*Μ*	*Ναι*
21.	*Κ*	*Αν είμαι στην κόκκινη περιοχή τότε λέω ότι το σημείο ανήκει στη*

22. γωνία. Αν είμαι στη μπλε περιοχή όπου η μπλε περιοχή τώρα εδώ

23. είναι το υπόλοιπο τότε το σημείο μου δεν ανήκει στη γωνία. Όμως

24. όπου μπλε περιοχή δεν είναι η περιορισμένη εδώ πέρα μπλε

25. περιοχή θα ήτανε όλο αυτό εδώ. Όλο το απέξω από το κόκκινο.

Ο καθηγητής εδώ χρησιμοποιεί **υλικό** δηλαδή την κατασκευή με τους δύο κύκλους ώστε να οδηγήσει την μαθήτρια στην σωστή απάντηση. Αν ερμηνεύσουμε αυτήν του την δράση θα δούμε ότι εκτελεί μία **αναπροσανατολισμένη δράση** δηλαδή **παρέχει μία στρατηγική επίλυσης** στην μαθήτρια. Στη συνέχεια, με αφορμή την παρανόηση της μαθήτριας αλληλεπιδρά με όλη την τάξη κάνοντας ρητή την παρεξήγηση που δημιουργήθηκε και χρησιμοποιώντας πάλι **υλικό**, δηλαδή την κατασκευή με τους κύκλους ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές κατανόηση της κατάστασης, κάνει δηλαδή ξανά μία **αναπροσανατολισμένη δράση**. Αυτή η δράση όμως δεν υποστηρίζει την μαθηματική πρόκληση των μαθητών.

Μοντελοποίηση με υλικό - υποστηρικτική ενέργεια (εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων) - δημιουργία συνδέσεων

1. Κ αποκαλύφθηκε μία περιοχή. Κατά αντίστοιχο τρόπο φανταστείτε ότι

2. αυτό εδώ δεν είναι ο περιορισμένος κύκλος που έχει αυτή εδώ την

3. ακτίνα αλλά είναι ένας κύκλος ο οποίος είναι με άπειρη ακτίνα.

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής εισάγει διαφορετικές αναπαραστάσεις (κατασκευή με κύκλους) ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την κατάσταση. Αυτή είναι μία **υποστηρικτική δράση.** Επίσης, για να υποστηρίξει αυτήν την δράση χρησιμοποιεί **υλικό** ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές κατανόηση. Μετέπειτα προσπαθεί **να συνδέσει αυτές τις διαφορετικές αναπαραστάσεις**, μία κίνηση που στοχεύει στην εμβάθυνση των γνώσεων των μαθητών.

Έλεγχος συμφωνίας – παροχή πληροφοριών

Αιτιολόγηση – παροχή πληροφοριών

1.	*Μ*	*Πεπερασμένα.*
2.	*Κ*	*Πεπερασμένα ωραία εξήγησε το γιατί. Πεπερασμένα σημαίνει όχι*
3.		*άπειρα, πάρα πολλά ίσως ή λίγα αλλά όχι άπειρα. Γιατί Δημήτρη;*
4.	*Μ*	*Εεε...*
5.	*Κ*	*Να δώσω μία εξήγηση, γιατί εδώ σταματάω. Αυτό δεν θα έλεγες;*
6.	*Μ*	*Ναι.*

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής ενώ στην αρχή ζητάει από τον μαθητή **αιτιολόγηση**, αναιρεί την δράση του αυτή **παρέχοντας ο ίδιος την εξήγηση**. Εδώ ο καθηγητής ενεργεί ασυνείδητα καθώς με τον τρόπο αυτό απουσιάζει η ευαισθησία του για τους μαθητές στον γνωστικό τομέα. Παρόλα αυτά ρωτάει τον μαθητή αν θα έλεγε το ίδιο, κάτι που δείχνει ότι κάνει **έλεγχο συμφωνίας**.

3.2 Η διαχείριση του εκπαιδευτικού στην διαμόρφωση και στην εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης σε σχέση με την δράση των μαθητών

Στο παρόν υποκεφάλαιο θα παρουσιάσω την διαχείριση της μάθησης από τον εκπαιδευτικό η οποία συμβάλλει στην διαμόρφωση και την εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης σε σχέση με την δράση των μαθητών. Η διαχείριση του εκπαιδευτικού θα παρουσιαστεί αναλυτικά μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα που χαρακτηρίζουν ζητήματα μαθηματικής πρόκλησης, τα οποία αφορούν δραστηριότητες μέτρησης γωνιών με υλικό. Μέσα από αυτά τα παραδείγματα θα αναδυθεί ο τρόπος με τον οποίο μέσα από τις αλληλεπιδράσεις καθηγητή-μαθητών, η μαθηματική πρόκληση αλλάζει και εξελίσσεται μέσα στην τάξη, αλλά

και το πως αυτές οι αλληλεπιδράσεις επηρεάζουν την μαθηματική πρόκληση που προσφέρεται στους μαθητές από τάξη σε τάξη.

Τμήμα Α΄4 :

Περιγραφή μαθηματικής πρόκλησης: Ο καθηγητής αρχικά χωρίζει τους μαθητές σε ομάδες (3-4 άτομα) και τους μοιράζει κάποια τρισδιάστατα σχήματα **(μοντελοποίηση με υλικό)** στους μαθητές και τους αναθέτει την εξής εργασία: Χωρίς την χρήση μοιρογνωμονίου να βρουν πόσες μοίρες είναι η μία γωνία ενός σχήματος, με όποιον τρόπο θέλουν. Έτσι προωθεί την **εξερεύνηση μεθόδων** από τους μαθητές. Τότε οι μαθητές χρησιμοποιούν διάφορες μη-αποτελεσματικές και μη-κατάλληλες μεθόδους για να μετρήσουν την γωνία (κατασκευή με κύκλους, μοίρες, εκατοστά), καθώς και υπάρχει έντονη διαφωνία μεταξύ τους όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στα παρακάτω αποσπάσματα:

1.	*Κ*	*Στο περίπου τι εννοείς;*
2.	*Μ*	*Εγώ επιμένω αυτό εδώ είναι η μύτη-γωνία. Λοιπόν η γωνία είναι η*
3.		*μυτούλα. Μέτρησε εσύ την μυτούλα.*
4.	*Μ1*	*Τι λέμε τόση ώρα;*
5.	*Μ2*	*Πώς να μετρήσω την μυτούλα;*
6.	*Μ3*	*Τι μας έδειξε με τους κύκλους; Τι μας έδειξε; Δεν πρόσεχα. Τους*
7.		*κύκλους δεν τους πρόσεξα καθόλου.*
8.	*Μ*	*Επιμένω ότι είναι αυτό με τους κύκλους.*
9.	*Μ1*	*Ωραία Ζώη φέρε το άλλο το σχηματάκι δεν κατάλαβα.*
10.	*Κ 10:00*	*Σε ότι θέλετε εσείς δεν είναι απαραίτητο να είναι σε μοίρες εντάξει;*
11.	*Μ*	*Η γωνία είναι η μυτούλα, αυτό τι γωνία είναι ρε παιδιά;*
12.	*Μ1*	*Αυτό δεν είναι γωνία.*
13.	*Μ2*	*Σαν τι σου φαίνεται εσένα;*

14.	*Μ*	*Οξεία.*
15.	*Μ1*	*Τι λες ρε Ζένια;*
16.	*Μ4*	*Το βλέπεις; Αυτό είναι περίπου μία πλήρης περιστροφή.*
17.		*Συγκεντρώσου, αυτό είναι περίπου μία πλήρης περιστροφή.*
18.		*Περίπου 10-20 μοίρες λιγότερο από 180. Αυτό αντίθετα...*
19.	*Μ1*	*Είναι παραπάνω.*
20.	*Μ4*	*Θα είναι περίπου 30 με 20.*
21.	*Μ1*	*Πες μου τώρα ότι αυτό εδώ πέρα.*
22.	*Μ4*	*Όχι αυτό εδώ είναι 360 μοίρες. Έχει μικρότερο άνοιγμα από μία...*
23.		*Με την λογική που έχεις κάνει αυτό, αυτό και αυτό και αυτές οι δύο*
24.		*γωνίες έχουν 360 μοίρες και οι δύο γιατί και οι δύο άμα τις χωρίσεις..*
25.	*Μ1*	*Περίπου έτσι; Περίπου...*
26.	*Μ2*	*Εγώ θέλω ακριβώς όμως.*
27.	*Μ4*	*Γιατί να το βρεις ακριβώς;*
28.	*Μ5*	*Κύριε το βρήκα!*
29.	*Μ4*	*Αυτό που κάνεις δεν είναι λογικό.*
30.	*Κ*	*Με κάποιο τρόπο μετρήστε την γωνία.*
31.	*Μ4*	*Ζένια 180 μοίρες είναι αυτή αυτή αυτή και αυτή η γωνία μαζί.*
32.	*Μ1*	*Ε ναι όλες θα τις μετρήσουμε δεν θα μετρήσουμε μόνο μια γωνία.*
33.	*Μ4*	*Αν το χωρίσουμε και κάνουμε 180+ 180 είναι 360*
34.	*Μ*	*Όλο.*
35.	*Μ1*	*Δεν είναι λογικό γιατί όλο είναι 180.*

36.	*Μ*	*Έχεις κάνει μαθηματικά στο δημοτικό;*
37.	*Μ4*	*Ναι.*
38.	*Μ*	*Ωραία και εγώ έχω κάνει.*
39.	*Μ1*	*Συγκεντρώσου λίγο...*
40.	*Μ*	*Ναι αλλά εσύ λες περίπου.*
41.	*Μ4*	*380 μοίρες ρε παιδιά θα είναι η γωνία αυτή 380 μοίρες*
42.	*Μ2*	*Εγώ λέω αυτό.*
43.	*Μ4*	*Αυτό εδώ όλο είναι 180 μοίρες. Αυτό είναι μικρότερο...*
44.	*Μ1 15:00*	*Αυτό εδώ πέρα είναι περίπου 20 με 15 εκ. Οπότε 180 –μείον 20 με 15*
45.		*Εκ.*
46.	*Μ*	*Δεν είναι 20 με 15 είναι ακριβώς σας λέω πρέπει να βρούμε ακριβώς.*
47.	*Μ4*	*Φέρε μου ένα μολύβι τώρα.*

Ο καθηγητής περιφέρεται στην τάξη κατά την διάρκεια της φάσης διερεύνησης, ακούει τις ιδέες των μαθητών, βλέπει τον τρόπο που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά επειδή δεν είδε πολλά ενδιαφέροντα πράγματα, υπάρχει δυσκολία των μαθητών να προχωρήσουν την πρόκληση και λόγω χρονικών περιορισμών αποφασίζει να αλλάζει την δραστηριότητα και να βάλει στην άκρη την προηγούμενη. Έχουμε δηλαδή **αλλαγή της μαθηματικής πρόκλησης** και αυτό το επιτυγχάνει με μία **δράση αναπροσανατολισμού** και συγκεκριμένα **αλλάζει τελείως τον σχεδιασμό της δραστηριότητας** που ανάθεσε στους μαθητές. Η δράση αυτή του αναπροσανατολισμού είναι ταυτόχρονα και μία **υποστηρικτική δράση** καθώς εισάγει διαφορετικό πλαίσιο για την καλύτερη κατανόηση-διευκόλυνση των μαθητών. Η δράση αυτή του εκπαιδευτικού φαίνεται στο παρακάτω σημείο:

14.	*Κ*	*Η ώρα περνάει αλλάζω το τι έχετε να κάνετε ξεχάστε εντελώς το τι*

15.		*έχετε να κάνετε έτσι και αλλιώς δεν έχω δει πολλά ενδιαφέροντα*
16.		*πράγματα δεν ξέρω τι έχετε βρει ή τέλος πάντων μπορεί να το*
17.		*έχετε βρει θα το δούμε μετά.*

Περιγραφή δεύτερης μαθηματικής πρόκλησης: Η επόμενη δραστηριότητα που αναθέτει στους μαθητές είναι η εξής: Με μονάδα μέτρησης την μικρότερη γωνία που έχει ο τρισδιάστατος ρόμβος τους λέει να μετρήσουν μία γωνία, με όποιο τρόπο θέλουν. Πάλι χρησιμοποιεί **υλικό** καθώς και ενθαρρύνει ξανά την **εξερεύνηση μεθόδων**. Ο καθηγητής ξανά παρακολουθεί τις απαντήσεις των μαθητών κατά την φάση της διερεύνησης, μετά βάζει τους μαθητές να παρουσιάσουν και να εξηγήσουν με συγκεκριμένη αλληλουχία, τις στρατηγικές τους και προσπαθεί **να συνδέσει τις ιδέες τους.** Για να πετύχει βαθύτερη κατανόηση εκτελεί **δράσεις επέκτασης** (σύγκριση στρατηγικών) και **δράσεις αξιολόγησης** των μεθόδων που εμφανίστηκαν. Κάτι που χαρακτηρίζει επίσης την διαχείριση του καθηγητή σε αυτό το σημείο είναι ότι οι κοινωνικές νόρμες γίνονται ρητές καθώς οι μαθητές εξηγούν τον τρόπο σκέψης τους, συνεργάζονται για την επίλυση προβλημάτων και χρησιμοποιούν μια ποικιλία προσεγγίσεων. Σε αυτήν την δραστηριότητα οι μαθητές ανταποκρίθηκαν και εμφανίστηκαν διάφορες απαντήσεις. Ένα χαρακτηριστικό σημείο είναι το εξής:

1.	*Μ*	*Τοποθετήσαμε την γωνία πάνω στην άλλη γωνία και είδαμε ότι*
2.		*Είναι περίπου δύο φορές αυτή η γωνία.*
3.	*Κ*	*Περίπου 2 φορές μήπως μπορείς να είσαι πιο ακριβής;*
4.	*Μ*	*Είναι περίπου 2 τέτοιες γωνίες.*
5.	*Κ*	*Ναι περίπου 2 δηλαδή λιγότερο από 2 ή περισσότερο από 2;*
6.		*Περίπου 2 μπορεί να είναι λιγότερο από 2 ή περισσότερο από 2.*
7.	*Μ*	*Λιγότερο.*
8.	*Κ*	*Ε και πώς το κάνατε αυτό; Εδώ εσείς τι βρήκατε; Βρήκατε ένα*

9.		*αντίστοιχο αποτέλεσμα;*
10.	*Μ*	*Όχι*
11.	*Κ*	*Εσείς πώς το κάνατε;*
12.	*Μ*	*Ε τοποθετήσαμε την γωνία αυτήν πάνω σε αυτήν την γωνία*
13.		*χαράξαμε μία γραμμή*

Τμήμα Α΄2:

Περιγραφή μαθηματικής πρόκλησης: Σε αυτό το τμήμα ο καθηγητής αρχικά αφού χώρισε τους μαθητές σε ομάδες των 3-4 ατόμων, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της παρέμβασης που έκανε στο προηγούμενο τμήμα ανάθεσε στους μαθητές την δεύτερη δραστηριότητα που σχεδίασε και για το τμήμα Α΄1. Αυτό δείχνει την ευαισθησία του καθηγητή για τους μαθητές στον γνωστικό τομέα. Αρχίζει λοιπόν το μάθημα με μία δράση αναπροσανατολισμού (αλλαγή σχεδιασμού του μαθήματος) από τμήμα σε τμήμα. Ο καθηγητής πάλι βάζει τους μαθητές να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους, αλλά σε αυτό το τμήμα χρειάστηκε να κάνει και μία **δράση επανεκκίνησης**, επανάληψη και παράφραση δηλαδή της ερώτησης που έχει ζητηθεί καθώς οι μαθητές δυσκολευόντουσαν να βρουν ποια είναι η μικρότερη γωνία του στερεού-ρόμβου. Με αφορμή αυτό εδώ παρουσιάστηκε το ακόλουθο συμβάν:

1.	*Μ*	*Η μικρότερη γωνία είναι αυτή εδώ.*
2.	*Κ*	*Δεν δείχνεις σε μένα δείχνεις σε όλους τους υπόλοιπους όπως στις*
3.		*συζητήσεις μέσα στο φόρουμ στο eclass δεν μιλάτε σε εμένα μιλάτε*
4.		*μεταξύ σας. Η μικρότερη γωνία είναι ποια;*
5.	*Μ*	*Αυτή εδώ.*
6.	*Κ*	*Τι εννοείς;*
7.	*Μ*	*Ωραία αυτή εδώ η γωνία αυτή εδώ και αυτή εδώ είναι μικρότερες*

8.		*επειδή αυτές οι δύο είναι οξείες ενώ αυτές εδώ είναι αμβλείες.*
9.		*Άρα αυτό είναι μικρότερο;*
10.	*M1*	*Καταλάβατε τίποτα εσείς;*
11.	*M2*	*Οι αμβλείες γωνίες είναι μεγαλύτερες.*
12.	*M3*	*Όχι δεν κατάλαβα.*
13.	*K*	*Αυτό είναι ότι αυτές είναι οι μικρότερες γιατί είναι οι οξείες ενώ οι*
14.		*άλλες λέει είναι αμβλείες. Ναι συνέχισε.*
15.	*M*	*Και μετά την βάλαμε πάνω στην γωνία.*
16.	*K*	*Όταν λες την έβαλες πάνω στην γωνία τι περίπου έκανες;*
17.	*M*	*Ε αυτό εδώ.*
18.	*K*	*Κοίταξε σε αυτήν την περίπτωση θα το δείξω με μεγαλύτερο σχήμα*
19.		*όχι σε εκείνο που έχετε η διεργασία είναι η ίδια περίπου.*
20.		*Φανταστείτε λοιπόν ότι παίρνει αυτό εδώ το πραγματάκι και πάει και*
21.		*το ταιριάζει εδώ. Τι ακριβώς θα ταιριάξει εκεί πέρα; Εξήγησε μου.*
22.		*Λοιπόν Αντώνη σήκω πάνω να περιγράψεις τι έκανες.*
23.	*M*	*Είχαμε το σχήμα εδώ*
24.	*K*	*Περιέγραψε Αντώνη.*

Ο μαθητής εξηγεί τι έκανε, και ο καθηγητής επεξεργάζεται την εξήγηση του μαθητή επειδή οι πληροφορίες είναι ελλιπείς (black box), κάνει δηλαδή μία **εστιασμένη δράση** ώστε να δώσει περισσότερες λεπτομέρειες. Έπειτα κάνει **δράση εκμαίευσης** προσκαλώντας τον μαθητή στον πίνακα να εξηγήσει την μέθοδό του. Ο μαθητής όμως δίνει μία ελλιπή-ανακριβή και μη-κατανοητή εξήγηση (black box), ο καθηγητής τότε χρησιμοποιεί ξανά μία **εστιασμένη δράση** ζητώντας από τον μαθητή καλύτερη περιγραφή και λεπτομέρειες. Αυτό

δεν έχει αποτέλεσμα καθώς ο μαθητής δεν μπορεί να εκφράσει αυτό που θέλει. Έτσι ο ίδιος ο μαθητής προτείνει να σηκωθεί ο συμμαθητής του από την ομάδα του. Έπειτα παρουσιάζεται το εξής κρίσιμο σημείο στην τάξη:

4.	*Κ*	*Ναι αλλά η ιδέα της Έλενας με την ιδέα της Λυδίας είναι η ίδια; Εσύ τι*
5.		*λες Λυδία; Εσύ θα αποφασίσεις αν μιλάτε για το ίδιο ή όχι. Αν είναι*
6.		*διαφορετικό αυτό που μιλάτε.*
7.	*Μ*	*Εγώ λέω ότι γωνία είναι αυτό εδώ (η μύτη) εκείνη λέει ότι είναι όλο*
8.		*αυτό εδώ.*
9.	*Κ*	*Λοιπόν Γεωργία; Εγώ λέω ότι κάνατε το εξής λάθος σαν ομάδα*
10.		*χωρίς καλά καλά να έχετε ξεκαθαρίσει τι θα εννοείται ότι είναι η*
11.		*γωνία αποφασίσατε να μπείτε στην διαδικασία, μπήκατε στην*
12.		*διαδικασία δεν είμαι και 100% βέβαιος, να μπείτε στην*
13.		*διαδικασία να κάνετε και το υπόλοιπο κομμάτι. Πρώτα θα*
14.		*αποφασίσετε αν έχετε όλοι την ίδια άποψη για τα πράγματα τι*
15.		*είναι γωνία και μετά θα μπείτε στην διαδικασία. Αν δεν έχετε*
16.		*προσπαθήστε να το λύσετε ή ρωτήστε με ή δεν ξέρω με τι άλλο*
17.		*τρόπο μπορεί να το καταφέρετε ή σκεφτείτε καλύτερα. Λοιπόν τι*
18.		*κάνατε μετά Γεωργία περιέγραψε.*

Εδώ οι μαθήτριες προσπαθούν να επιλύσουν την δραστηριότητα, χωρίς όμως να έχουν ξεκαθαρίσει τι είναι γωνία. Αυτό το σημείο ήταν <u>ένα μη-αναμενόμενο σημείο για τον καθηγητή.</u> Για αυτόν τον λόγο χρησιμοποίησε μία **δράση υποστήριξης**, υπενθυμίζοντας στους μαθητές με άτυπο, μη-φορμαλιστικό τρόπο τον ορισμό της γωνίας, ώστε να δημιουργηθεί κοινό έδαφος και η έννοια της γωνίας να μπορέσει να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Βλέποντας και

συνειδητοποιώντας αυτήν την παρανόηση ο καθηγητής αποφασίζει να εκτελέσει για ακόμα μια φορά μία **δράση αναπροσανατολισμού, άλλαξε δηλαδή για τρίτη φορά τον σχεδιασμό του μαθήματος και έβαλε στην άκρη την δραστηριότητα της μέτρησης.** Αυτό αναδεικνύει την ευαισθησία του για τους μαθητές ως προς τον γνωστικό τομέα.

Περιγραφή δεύτερης μαθηματικής πρόκλησης:

Το ερώτημα που έθεσε ήταν το εξής: Τι διαφορά έχει η γωνία που συζητάνε με την γωνία που είχαν συζητήσει τις προηγούμενες μέρες. Για να υποστηρίξει την μαθηματική πρόκληση και να εμβαθύνει τις γνώσεις των μαθητών ο καθηγητής εκτελεί μία **δράση πρόσληψης** κάνει δηλαδή την εξής **ανοιχτή ερώτηση**: Έχει γωνία αυτό τρισδιάστατο σχήμα ή όχι.

Τμήμα Α΄1:

Περιγραφή μαθηματικής πρόκλησης: Αρχικά ο καθηγητής χωρίζει τους μαθητές σε ομάδες των 3-4 ατόμων. Τώρα όμως είναι πιο συνειδητοποιημένος και ευαισθητοποιημένος για τους μαθητές ως προς τον γνωστικό τομέα γιατί είδε τα αποτελέσματα και την ανταπόκριση των μαθητών στις μαθηματικές προκλήσεις που ανάθεσε στα δύο προηγούμενα τμήματα. Έτσι παραμερίζει την δραστηριότητα με τον τρισδιάστατο ρόμβο και εκτελεί ξανά μία **δράση αναπροσανατολισμού**, αλλάζει δηλαδή για τέταρτη φορά την μαθηματική πρόκληση. Την αναπροσανατολισμένη αυτή δράση ακολουθεί μία **προοδευτική δράση**-ανοιχτές λεπτομέρειες προόδου, επίσης χρησιμοποιεί **μοντελοποίηση με υλικό** (τρίγωνο) ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν κατανόηση και ταυτόχρονα προκαλεί την **εξερεύνηση μεθόδων** από τους μαθητές. Κατόπιν, χρησιμοποιεί μία **δράση επανεκκίνησης** επαναλαμβάνοντας το ερώτημα. Επειδή οι μαθητές δεν κατάλαβαν το ερώτημα ξαναχρησιμοποιεί για δεύτερη φορά μία **δράση επανεκκίνησης** παραφράζοντας το ερώτημα. Τέλος, εκτελεί την **εστιασμένη δράση** της αιτιολόγησης. Η δραστηριότητα που τους αναθέτει είναι η εξής: Τι μέρος μιας πλήρους περιστροφής είναι η κάθε γωνία του τριγώνου (γνώμονας). Ακολουθεί το παρακάτω συμβάν :

1. *Μ* *Κύριε δεν έχω καταλάβει.*

2.	*Μ1*	*Άμα το μετρήσουμε με...μας αφήνει ο κύριος να το μετρήσουμε με*
3.		*αυτό;*
4.	*Μ*	*Ένα λεπτό.*
5.	*Μ1*	*Όχι έτσι.*
6.	*Μ*	*Πώς;*
7.	*Μ1*	*Τι εννοείς; Τι εννοούσε ο κύριος;*
8.	*Μ*	*Ας πάρουμε του Στέλλιου.*
9.	*Μ2*	*Γιατί του Στέλλιου είναι καλό;*
10.	*Μ*	*Είναι καλό ναι. Τι μέρος της πλήρους περιστροφής είναι;*
11.	*Μ1*	*Είναι το 1/3 από του Στέλλιου είναι το 1/3 κοιτάξτε. Άμα χωρίσουμε*
12.		*τον κύκλο σε 3 ίσα μέρη αυτό είναι το ένα μέρος του, άρα είναι το*
13.		*1/3. Ωωω είναι το ένα 1/3 το βρήκαμε ναι.*
14.	*Μ*	*Όχι είναι το ¼ ένα, δύο, τρία, τέσσερα.*
15.	*Μ1*	*Α ναι ναι.*
16.	*Μ*	*Κύριε κύριε κύριε...*
17.	*Κ*	*Μισό λεπτό. Πριν πάμε σε κάτι άλλο, το βρήκατε κιόλας;*
18.	*Μ1*	*Μάλλον.*
19.	*Μ*	*Κύριε άμα χωρίσουμε αυτό σε 4 ίσα μέρη αυτό είναι το ένα μέρος*
20.		*του άρα το ¼.*
21.	*Μ1*	*Το βρήκαμε.*

Παρατηρούμε ότι κάποιες ομάδες μαθητών ανταποκρίθηκαν στην πρόκληση ενώ κάποιες άλλες όχι. Έτσι ο καθηγητής αποφασίζει να το διαχειριστεί αυτό

κάνοντας μία **αναπροσανατολισμένη δράση** σε συνδυασμό με την **προοδευτική δράση της απλοποίησης**, παρέχοντας μία νέα στρατηγική, λέγοντας δηλαδή σε όλους να ξεκινήσουν με την ορθή γωνία για όλους ευκολίας. Ο καθηγητής τότε επεξεργάζεται τις απαντήσεις των μαθητών, ασκώντας **δράσεις εστίασης** και **επανάληψης** αλλά και **ενθαρρύνοντας τους μαθητές και συγκεκριμένα την Αναστασία, να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων.** Αυτό φανερώνει ευαισθησία για τους μαθητές και ως προς τον γνωστικό αλλά και ως προς τον συναισθηματικό τομέα και διαφαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

1.	*Κ*	*Ε δείχνε το... παιδιά Αναστασία συγκεντρώσου λιγάκι σε αυτό που*
2.		*λένε τα παιδιά μήπως αυτό σας δώσει καμιά ιδέα τι θα κάνετε και*
3.		*εσείς. Λέω η διαφορά είναι ότι μετρά την ορθή γωνία αυτό*
4.		*ετοιμαζόμουν να σας πω μάλλον την ορθή μετρήστε πρώτα. Ξανά*
5.		*Βαρβάρα γιατί δεν σε άκουσαν από την αρχή.*

Στην συνέχεια αφού διαπίστωσε ότι οι μαθητές ανταποκρίθηκαν στην πρόκληση, αποφάσισε να την εξελίξει. Έτσι τους ανάθεσε το εξής: Τι μέρος μιας πλήρης περιστροφής είναι μία γωνία που δεν είναι ορθή. Αυτό το έκανε εκτελώντας μία **δράση πρόσληψης** με σκοπό να παρατείνει την συζήτηση. Ο καθηγητής **παρακολουθεί** τις απαντήσεις των μαθητών κατά την διάρκεια της φάσης διερεύνησης και τους **ζητά να εξηγήσουν** τις μεθόδους τους. Ταυτόχρονα κάνει **εστιασμένες δράσεις** ώστε να συλλέξει λεπτομέρειες για τις μεθόδους επίλυσης. Έπειτα επιβραβεύει τους μαθητές. Αυτό φανερώνει την ευαισθησία του για τους μαθητές ως προς τον συναισθηματικό τομέα. Όλα αυτά διαφαίνονται στο παρακάτω απόσπασμα:

1.	*Κ*	*Εδώ τι κάνατε;*
2.	*Μ*	*Βάζουμε τον διαβήτη στο άνοιγμα της γωνίας αυτής και μετράμε*
3.		*πόσες φορές είναι μες τον κύκλο. Εμείς ανοίξαμε το διαβήτη στο*

4.		*άνοιγμα της γωνίας και το χουμε βρει ακριβώς με αυτό και έχουμε*
5.		*κάνει πόσες φορές χωράει στον κύκλο. Και ανοίξαμε το διαβήτη στο*
6.		*άνοιγμα της γωνίας και βρήκαμε πόσες φορές χωράει και*
7.		*διαπιστώσαμε...*
8.	*Κ*	*Ε αυτό πώς το βρήκατε;*
9.	*Μ*	*Και μετά τοποθετήσαμε τον διαβήτη , βάλαμε αυτό εδώ και μετά*
10.		*Αυτό που κάναμε ...και να δούμε αν είναι ακριβώς αυτό και μετά*
11.		*στρέψαμε το διαβήτη στον κύκλο και βρήκαμε πόσες φορές χωράει*
12.		*Και διαπιστώσαμε...*
13.	*Κ*	*Είσαστε ξεφτέρια*

Κεφάλαιο 4ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται μια σύνοψη των κύριων ευρημάτων της έρευνας σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα. Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αφορά τη μελέτη του τρόπου που ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη μαθηματική πρόκληση. Μελετώντας τα σημεία όπου υπήρχε μαθηματική πρόκληση, εξετάσαμε ποιες είναι οι δράσεις που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός για να την υποστηρίξει. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αφορά τη μελέτη του πως η μαθηματική πρόκληση στηρίζεται στην δράση των μαθητών. Συγκεκριμένα, εστιάσαμε στην διαχείριση του εκπαιδευτικού στην διαμόρφωση και την εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης, σε σχέση με αυτά που φέρνουν οι μαθητές στην τάξη. Στόχος της ενότητας αυτής είναι να συζητηθούν, να σχολιαστούν κριτικά και να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα της έρευνας, καθώς και να συνδεθούν με το θεωρητικό πλαίσιο και τα πορίσματα άλλων ερευνών που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους της εργασίας. Κατά την σύνδεση αυτή θα λάβουμε υπόψη τις ιδιαιτερότητες του ελληνικού εκπαιδευτικού πλαισίου. Με αυτόν τον τρόπο θα απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε.

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, μέσα από την ανάλυση των κρίσιμων σημείων, αναδύθηκαν 8 κύριες κατηγορίες δράσεων του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν την μαθηματική πρόκληση. Σε συνδυασμό με το πλαίσιο δράσεων του Drageset, το πλαίσιο επέκτασης της μαθηματικής σκέψης του Fraivillig, το πλαίσιο ATM, το πλαίσιο της Wood, τα μοτίβα του Steinbring και τις 5 πρακτικές της Stein, οι 8 κατηγορίες που προέκυψαν χαρακτηρίστηκαν ως εξής: 1) αναπροσανατολισμένες δράσεις, 2) προοδευτικές δράσεις, 3) εστιασμένες δράσεις, 4) διδακτικές δράσεις, 5) επεισόδια επέκτασης, 6) δράσεις εμβάθυνσης, 7) δράσεις συμφωνίας και 8) μοτίβα. Οι κατηγορίες αυτές στην συνέχεια διαρθρώθηκαν σε υποκατηγορίες οι οποίες αποτελούνται από πιο εξειδικευμένες δράσεις του εκπαιδευτικού οι οποίες προέκυψαν από την πορεία και την εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης καθώς και από τις δράσεις των μαθητών κατά την διάρκεια της πρόκλησης. Από τις 8 κύριες κατηγορίες δράσεων που προέκυψαν παρατηρούμε ότι ο εκπαιδευτικός εκτελεί πιο συχνά διδακτικές, έχουμε 31 τέτοιες δράσεις με την υποκατηγορία των

υποστηρικτικών δράσεων να υπερτερεί. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το σχήμα κωδικοποίησης ATM (Analyzing Teacher Moves Guide (ATM) το οποίο ισχυρίζεται ότι η υποστήριξη (επαναλαμβανόμενη συνεισφορά, κυριολεκτική ερώτηση (literal question), παροχή πληροφοριών) αν έχει πολλές ερωτήσεις σε μια σειρά μπορεί να εμποδίσει τους μαθητές να μάθουν. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές και περιορίζει τις ευκαιρίες τους να σκεφτούν τα μαθηματικά που συζητούνται. Επίσης, η επανάληψη των απαντήσεων των μαθητών από τον καθηγητή περιορίζει τις ευκαιρίες των μαθητών γιατί τους στερεί την μάθηση μέσω ακρόασης και της κριτικής της συνεισφοράς των άλλων. Το σχήμα ATM δηλαδή ενθαρρύνει την χρήση διαφορετικών δράσεων ώστε να δημιουργηθούν διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης. Παρόλα αυτά οι δράσεις είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα της έρευνας του Fraivillig, ο οποίος ισχυρίζεται ότι η υποστήριξη ενεργειών βοηθάει τους μαθητές να θυμηθούν ή να οπτικοποιήσουν αυτό που ήδη γνωρίζουν κατά την εξέταση νέων πληροφοριών. Έπειτα 8 από τις 31 υποστηρικτικές δράσεις είναι δράσεις εκμαίευσης και 3 από τις 31 δράσεις επέκτασης. Παρατηρούμε ότι κατά την διάρκεια των 8 μαθημάτων ο εκπαιδευτικός προσκάλεσε 8 φορές τους μαθητές να μοιραστούν τις μεθόδους τους. Οι δράσεις εκμαίευσης είναι σε συμφωνία με το πλαίσιο του Fraivillig, σύμφωνα με τον οποίο η εκμαίευση μεθόδων επιτρέπει στους καθηγητές να έχουν πρόσβαση στην σκέψη των μαθητών και να την δημοσιοποιούν. Ακόμα οι δράσεις αυτές έρχονται σε συμφωνία με το πλαίσιο των Ponte, Mata-Pereira και Quaresma (2013). Τέλος, οι δράσεις επέκτασης είναι και αυτές σε συμφωνία με το πλαίσιο του Fraivillig, καθώς ενθαρρύνουν τους μαθητές να κινηθούν πέρα από την αρχική μαθηματική δραστηριότητα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημανθεί ότι ο εκπαιδευτικός δεν χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό των 3 αυτών δράσεων, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με αυτό που λέει ο Fraivillig, ότι ένας συνδυασμός διαφορετικών τύπων διδακτικών δράσεων είναι κρίσιμος για την δημιουργία ευκαιριών για την επέκταση της μαθηματικής σκέψης.

Στη συνέχεια, προκύπτει ότι 26 από τις 124 δράσεις του εκπαιδευτικού είναι εστιασμένες δράσεις. Αυτές οι δράσεις έρχονται σε συμφωνία με τα ευρήματα της έρευνας του Drageset (2014). Ο εκπαιδευτικός δηλαδή χρησιμοποιεί αυτές τις δράσεις για να εξετάσει βαθύτερα κάποια σημαντική λεπτομέρεια. Οι υποκατηγορίες των δράσεων αυτών που υπερτερούν είναι η διαφώτιση λεπτομερειών (9), η επεξεργασία εξήγησης μαθητή (4), η παροχή πληροφοριών (4) και η αιτιολόγηση (4).

Σύμφωνα με την έρευνα του Drageset, το να κάνει ο εκπαιδευτικός ορατές και σαφείς σε όλους τους μαθητές κάποιες λεπτομέρειες είναι από τις πιο ισχυρές κινήσεις που μπορεί να κάνει. Επίσης, οι ανεξήγητες απαντήσεις των μαθητές είναι μία ευκαιρία για τον καθηγητή να ζητήσει αιτιολόγηση. Παρατηρούμε όμως ότι ο εκπαιδευτικός δεν ζητάει αρκετά συχνά αιτιολογήσεις, ίσως λόγω έλλειψης χρόνου. Ακόμα, η υποκατηγορία της παροχής πληροφοριών έρχεται σε αντίθεση με το πλαίσιο ATM, ενώ η επεξεργασία εξήγησης μαθητή είναι σύμφωνη με το πλαίσιο της Wood.

Η αμέσως επόμενη κύρια κατηγορία δράσεων του εκπαιδευτικού είναι οι προοδευτικές δράσεις, καθώς 19 από τις 124 έχουν χαρακτηριστεί ως τέτοιες. Αυτές οι δράσεις είναι σύμφωνες με τα ευρήματα του Drageset (2014), καθώς ο σκοπός αυτών των δράσεων είναι να μετακινηθεί η πρόοδος προς τα εμπρός. Συγκεκριμένα, η υποκατηγορία προοδευτικών δράσεων που υπερτερεί για τον συγκεκριμένο εκπαιδευτικό είναι οι ανοιχτές λεπτομέρειες προόδου (11) οι οποίες έχουν εντοπιστεί με βάση αν ο εκπαιδευτικός ωθεί τους μαθητές να κάνουν εξερεύνηση μεθόδων. Η εξερεύνηση μεθόδων επίσης, είναι σύμφωνη με το πλαίσιο της Wood, καθώς απώτερος σκοπός του εκπαιδευτικού είναι να δώσουν οι μαθητές πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, τις οποίες θα αναπτύξουν κατά την φάση διερεύνησης της μαθηματικής δραστηριότητας. Χαρακτηριστικό στις δραστηριότητες που θέτει ο εκπαιδευτικός είναι ότι κατά την φάση της διερεύνησης η συνεργασία μεταξύ μαθητών βρίσκεται στο επίκεντρο (Wood et al, 2006). Ο ρόλος του καθηγητή είναι να ελέγξει αν υπάρχει συναίνεση. Έπειτα προκύπτει ότι 4 από τις 19 είναι δράσεις διερεύνησης δηλαδή ο καθηγητής κάνει ερωτήσεις με σκοπό να καταλάβει. Αυτές οι δράσεις είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα της έρευνας της Wood (2006). Ακόμα, 3 από τις 19 είναι δράσεις απλοποίησης. Η απλοποίηση συμβαίνει όταν οι μαθητές δυσκολεύονται να ανταποκριθούν στην μαθηματική πρόκληση με σκοπό να συνεχιστεί το μάθημα. Μία πιθανή ερμηνεία για αυτές τις δράσεις είναι η έλλειψη χρόνου, καθώς και οι γνώσεις του εκπαιδευτικού για το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών. Τέλος, 1 από τις 19 είναι δράση επίδειξης. Ο εκπαιδευτικός δηλαδή σπάνια δείχνει ο ίδιος την στρατηγική, καθώς παραπέμπει τους μαθητές να διερευνήσουν και να αναπτύξουν τις δικές τους. Αυτό δείχνει ότι ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός δεν υποστηρίζει το δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας, τον οποίο υποστηρίζει η πλειοψηφία των καθηγητών πιθανόν εξαιτίας έλλειψης χρόνου ή άλλων εξωγενών πολιτισμικών ή πολιτικών παραγόντων.

Η επόμενη κατηγορία δράσεων που προέκυψε είναι η κατηγορία των αναπροσανατολισμένων δράσεων (15 στις 124). Η κατηγορία αυτή είναι πάλι σύμφωνη με τα ευρήματα της έρευνας του Drageset (2014) και η πιο κατάλληλη ερμηνεία για την εμφάνιση αυτής της κατηγορίας δράσεων είναι η θέληση του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού να αλλάξει την προσέγγιση των μαθητών του. Επίσης, δράσεις χρησιμοποιούνται όταν ο εκπαιδευτικός αποφασίζει να αλλάξει την πορεία και την εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης καθώς και τον σχεδιασμό του μαθήματός του. Πιο συγκεκριμένα προκύπτουν οι εξής ενέργειες: ο εκπαιδευτικός 4 στις 19 φορές βάζει στην άκρη, παραμερίζει μια μαθηματική ιδέα και 4 στις 19 φορά εκτελεί δράση επανεκκίνησης δηλαδή παραφράζει ή επαναλαμβάνει μία ερώτηση που ήδη έχει ζητηθεί, αυτό είναι σε συμφωνία και με το πλαίσιο ATM. Ακόμα, 3 στις 19 φορές παρέχει στους μαθητές μία νέα στρατηγική, 2 στις 19 φορές διορθώνει ερώτηση και τέλος 2 στις 19 φορές αλλάζει τον σχεδιασμό του μαθήματος. Η αλλαγή του σχεδιασμού του μαθήματος όπως θα δούμε παρακάτω στηρίζεται στην ανταπόκριση των μαθητών στην μαθηματική πρόκληση και στις δράσεις που διαπράττουν με αφορμή την πρόκληση αυτή.

Η κατηγορία των δράσεων συμφωνίας προέκυψε με βάση 13 από τις 124 δράσεις. Η κατηγορία αυτή είναι σε πλήρη συμφωνία με τα μοτίβα της εναλλακτικής διδασκαλίας που περιγράφει η Wood (2006). Τέτοιες δράσεις χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός με σκοπό την δημιουργία κοινού εδάφους συζήτησης για την διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών. Παρατηρήθηκε ότι κατά την διάρκεια των περιπτώσεων που οι μαθητές χτίζουν συναίνεση ο καθηγητής δεν παρεμβαίνει, οι μαθητές εξηγούν τις στρατηγικές τους και αξιοποιούν τις δηλώσεις των συμμαθητών τους. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ένα αποτέλεσμα των κοινωνικών και κοικωνικομαθηματικών νορμών (Yackel & Cobb, 1996). Έτσι όπως αναφέρει και η Wood οι νόρμες που έχει δημιουργήσει ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός στην τάξη συνδέονται με τα μοτίβα αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται στην συγκεκριμένη τάξη. Άρα παρατηρούμε ότι οι δράσεις αυτές είναι σε αντίθεση με το μοντέλο αλληλεπίδρασης IRE το οποίο σύμφωνα με την υπάρχουσα έρευνα δεν υποστηρίζει την μάθηση των μαθηματικών.

Στη συνέχεια έχουμε την εμφάνιση 9 συνολικά επεισοδίων επέκτασης, τα οποία υποστηρίζει το πλαίσιο του Fraivillig (1999). Τέτοια επεισόδια παρατηρήθηκαν καθώς ο εκπαιδευτικός κατά την διάρκεια συζήτησης με όλη την τάξη εστίασε σε μία

σημαντική μαθηματική ιδέα ή λύση όπου εμπλέκονται ο μαθηματικός αναστοχασμός ή αιτιολόγηση ή η πορεία πέρα από τις αρχικές μεθόδους επίλυσης. Πιο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός εκτέλεσε επεισόδια επέκτασης με δύο τρόπους: ενθαρρύνοντας τον μαθηματικό συλλογισμό και ενθαρρύνοντας τον μαθηματικό αναστοχασμό. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ενθάρρυνση του μαθηματικού συλλογισμού υπερτερεί (8 στις 9 φορές), υπεραντιπροσωπεύει δηλαδή αυτήν την κατηγορία δράσεων ενώ η ενθάρρυνση μαθηματικού αναστοχασμού εμφανίζεται μια και μοναδική φορά. Τα ευρήματα αυτά ενώ υποστηρίζουν την επέκταση της μαθηματικής σκέψης, δείχνουν ότι ο καθηγητής αυτός δεν χρησιμοποιεί την ποικιλία επεισοδίων επέκτασης που προτείνει η έρευνα του Fraivillig. Επίσης, δεν επικαλείται χρήση των διδακτικών δράσεων οι οποίες λειτουργούν ως υποστηρικτικοί παράγοντες των επεισοδίων επέκτασης σύμφωνα με τον Fraivillig. Δηλαδή αυτό που λείπει στην συγκεκριμένη περίπτωση ανάμεσα στην μαθηματική πρόκληση και την επέκταση είναι η υποστήριξη.

Η επόμενη κατηγορία δράσεων είναι οι δράσεις εμβάθυνσης σε ποσοστό αρκετά κοντά με το ποσοστό των επεισοδίων επέκτασης. Εντοπίστηκαν 8 από τις 124 δράσεις που χαρακτηρίστηκαν ως δράσεις εμβάθυνσης. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτών των δράσεων είναι η δημιουργία συνδέσεων (5 στις 8) και οι δράσεις πρόσληψης (3 στις 8). Αυτές οι δράσεις είναι σύμφωνες με την κατηγορία δράσεων από τις οποίες αποτελείται το σχήμα κωδικοποίησης ATM. Άρα μία κατάλληλη ερμηνεία εμφάνισης τέτοιων δράσεων είναι ο στόχος του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού να εμβαθύνει τις γνώσεις των μαθητών μέσω της εμβάθυνσης της συζήτησης. Οι δράσεις αυτές βοηθάνε τον εκπαιδευτικό να έχει συνείδηση των ενεργειών του κατά την διάρκεια ενορχήστρωσης της συζήτησης σε όλη την τάξη. Τα ευρήματα αυτά σχετίζονται με τα ευρήματα των ερευνών των Scherrer και Stein (2013).

Η τελευταία κατηγορία δράσεων που προέκυψε είναι τα μοτίβα με συχνότητα 2 στις 124 δράσεις. Ποιο συγκεκριμένα ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε το μοτίβο χωνί (funnel pattern) μία και μοναδική φορά. Το μοτίβο αυτό προέρχεται από τον Bauersfeld και σύμφωνα με αυτόν ο μόνος που συμμετέχει στην γνωστική δραστηριότητα ουσιαστικά είναι ο καθηγητής. Η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση είναι μονοσήμαντη και η σκέψη των μαθητών είναι εστιασμένη στο να καταλάβουν την απάντηση που ο καθηγητής θέλει κατά την διάρκεια της

μαθηματικής σκέψης για τον εαυτό του. Το μοτίβο αυτό δίνει την ψευδαίσθηση ότι η μάθηση συμβαίνει. Άρα η δράση αυτή του εκπαιδευτικού έρχεται σε αντίθεση με το εναλλακτικό μοντέλο διδασκαλίας που υποστηρίζει ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός, καθώς το μοτίβο δίνει την εντύπωση ότι ο καθηγητής είναι η αυθεντία. Τέλος, έρχεται σε αντίθεση με το πλαίσιο των εναλλακτικών μοτίβων αλληλεπίδρασης της Wood (2006). Ακόμα ο εκπαιδευτικός σε δύο σημεία χρησιμοποιεί κάποιες πρακτικές από αυτές που προτείνει η έρευνα της Stein οι οποίες βοηθάνε τους καθηγητές να ενορχηστρώσουν πιο αποτελεσματικά τις συζητήσεις στην τάξη. Το αρνητικό είναι ότι σε αυτά τα σημεία ο καθηγητής αυτός μάλλον διενεργεί ασυνείδητα, με αποτέλεσμα την σπάνια και μηδαμινή εμφάνιση τέτοιων βοηθητικών πρακτικών.

Στην συνέχεια, κατά την ανάλυση και κατηγοριοποίηση των δράσεων του εκπαιδευτικού προέκυψαν 36 επεισόδια με αλληλεπιδράσεις και μοτίβα δράσεων. Συγκεκριμένα προέκυψαν 17 μοτίβα δράσεων του εκπαιδευτικού τα οποία είναι τα εξής:

1. Έλεγχος συμφωνίας - κατασκευή συμφωνίας (2)
2. Έλεγχος συμφωνίας - Δημιουργία συνδέσεων (2)
3. Έλεγχος συμφωνίας – παροχή πληροφοριών (2)
4. Κατασκευή συμφωνίας – αξιολόγηση (2)
5. Κατασκευή συμφωνίας- Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων (2)
6. Μοντελοποίηση με υλικό - υποστηρικτική ενέργεια (εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων) - δημιουργία συνδέσεων (3)
7. Μοντελοποίηση με υλικό - αναπροσανατολισμένη δράση (παροχή νέας στρατηγικής (2)
8. Μοντελοποίηση με υλικό - ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου (4)
9. Διαφώτιση λεπτομερειών - Επεξεργασία εξήγησης μαθητή (3)
10. Διαφώτιση λεπτομερειών – υποστηρικτική δράση (επανάληψη απάντησης του μαθητή) (2)
11. Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων – Επεξεργασία εξήγησης μαθητή (2)
12. Δημιουργία συνδέσεων – αξιολόγηση (2)
13. Ανοιχτή πρωτοβουλία προόδου – δράση εκμαίευσης (2)

14. Ενθάρρυνση των μαθητών να συμμετέχουν στις αιτιολογήσεις των άλλων – δράση εκμαίευσης (2)
15. Αναπροσανατολισμένη δράση (διόρθωση ερώτησης και παραμερίζει) - υποστηρικτική ενέργεια (εισαγωγή διαφορετικών αναπαραστάσεων και πλαισίων) (2)
16. Αιτιολόγηση – παροχή πληροφοριών (2)
17. Διαφώτιση λεπτομερειών – δράση πρόσληψης (2)

Αυτά τα μοτίβα ενίσχυσαν την μελέτη του τρόπου με τον οποίο ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει την μαθηματική πρόκληση, και επιπλέον μας βοηθάνε να συνειδητοποιήσουμε και να δώσουμε μία πιο κατάλληλη, έγκυρη αλλά και συνάμα διαφωτιστική ερμηνεία για τους παράγοντες (δράσεις και αλληλεπιδράσεις δράσεων) που επηρέασαν, εξέλιξαν, διαμόρφωσαν ή ακόμα και ακόμα και ακύρωσαν την μαθηματική πρόκληση. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε όλα αυτά τα μοτίβα εμφανίζονται με τη ίδια συχνότητα ενώ μόνο δύο από αυτά υπερτερούν (το 8 και το 9). Αυτό μας οδηγεί να αναστοχαστούμε και να συνειδητοποιήσουμε ότι οι δράσεις που εκτελούσε ο εκπαιδευτικός δεν ήταν τυχαίες, αλλά σχετίζονταν μεταξύ τους και μάλιστα πιθανόν ο εκπαιδευτικός έκανε συνειδητή διαδοχή των δράσεων αυτών ώστε να επιτύχει τους στόχους του και να υποστηρίξει τελικά μέσα από αυτά τα μοτίβα την μαθηματική πρόκληση. Άλλωστε σύμφωνα με τις έρευνες των Potari και Jaworski (2002), του McCrone (2005) και των Ponte & Quaresma, 2015 η μαθηματική πρόκληση είναι κρίσιμη δράση αλλά πρέπει να υποστηριχθεί με άλλα είδη δράσεων, και ο εκπαιδευτικός όπως φάνηκε το γνώριζε αυτό. Άρα έχουμε συμφωνία των αποτελεσμάτων των προϋπάρχουσων ερευνών με τις δράσεις που ο εκτελεί ο καθηγητής. Τα ευρήματα αυτά εκτός από το ότι συμφωνούν, θεωρώ ότι ενισχύουν και συνεισφέρουν στα πλαίσια των δράσεων των υπαρχουσών ερευνών που προαναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Μάλιστα, τα ευρήματα (μοτίβα δράσεων) της έρευνας αυτής θεωρώ ότι δημιουργούν μια ανάγκη για περαιτέρω έρευνα η οποία να αναδείξει με μεγαλύτερη ακρίβεια μοτίβα αλληλεπίδρασης των δράσεων των εκπαιδευτικών.

Σχετικά με το *δεύτερο ερευνητικό ερώτημα*, αναλύθηκαν παραδείγματα όπου αναδείχθηκαν ζητήματα μαθηματικής πρόκλησης τα οποία αφορούν δραστηριότητες μέτρησης γωνιών με υλικό. Μέσα από την ανάλυση των παραδειγμάτων αυτών

προέκυψε ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματική πρόκληση εξελίσσεται και διαμορφώνεται μέσα στην τάξη καθώς και ποιοι παραγόντες την επηρεάζουν.

Ειδικότερα, στο τμήμα Α΄4 οι δράσεις που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός αρχικά με βάση το πλαίσιο των 8 κατηγοριών που αναπτύχθηκε είναι η μοντελοποίηση με υλικό και η εξερεύνηση μεθόδων. Στην πορεία, παρατήρησε *ότι υπήρχε δυσκολία από τους μαθητές να προχωρήσουν την μαθηματική πρόκληση*, να μετρήσουν την γωνία και έτσι εκτέλεσε **μία δράση αναπροσαντολισμού**. Η δράση αυτή είναι σύμφωνη με τα αποτελέσματα της έρευνας του Drageset καθώς λόγω χρονικού περιορισμού έπρεπε να προχωρήσει το μάθημα. Την δράση αυτή διαδέχθηκαν οι ακόλουθες δράσεις: εισαγωγή διαφορετικού πλαισίου (υποστηρικτική δράση), μοντελοποίηση με υλικό, εξερεύνηση μεθόδων, σύνδεση ιδεών, δράσεις επέκτασης και δράσεις αξιολόγησης. Αυτές οι ενέργειες του εκπαιδευτικού συμφωνούν με τις υπάρχουσες έρευνες καθώς η πρόκληση πρέπει να υποστηρίζεται με διαφορετικά είδη δράσεων όπως προαναφέρθηκε. Επίσης είναι φανερό ότι υπάρχει μία ισορροπία ανάμεσα στα τρία στοιχεία της διδακτικής τριάδας, την μαθηματική πρόκληση, την διαχείριση της μάθησης και την εαυαισθησία στους μαθητές.

Στο τμήμα Α΄2 παρουσιάστηκε ένα αποτέλεσμα που χρήζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και προτείνεται η περαιτέρω μελέτη αυτού του περιστατικού. Πιο συγκεκριμένα ο καθηγητής έθεσε στους μαθητές αυτού του τμήματος την διαμορφωμένη ήδη δραστηριότητα που είχε αναθέσει και στους μαθητές του τμήματος Α΄1. Πιο συγκεκριμένα αρχικά ο εκπαιδευτικός εκτέλεσε κατά σειρά τις εξής δράσεις σύμφωνα πάλι με το πλαίσιο της παρούσας έρευνας: δράση επανεκκίνησης, παροχή λεπτομερειών (εστιασμένη δράση) και διαφώτιση λεπτομερειών (εστιασμένη δράση). Όμως παρουσιάστηκε ένα *μη-αναμενόμενο συμβάν*, οι μαθήτριες μιας ομάδας προσπαθούσαν να μετρήσουν την γωνία χωρίς όμως να έχουν δημιουργήσει κοινό έδαφος διαπραγμάτευσης της έννοιας αυτής. Μόλις αντιλήφθηκε το γεγονός αυτό ο εκπαιδευτικός, χρησιμοποίησε **μία δράση υποστήριξης**, πιο συγκεκριμένα υπενθύμισε στις μαθητές με άτυπο τρόπο τον ορισμό της γωνίας, ώστε να τις βοηθήσει να ανταποκριθούν όλες μαζί με ομαδοσυνεργατικό τρόπο στην πρόκληση που τους είχε αναθέσει. Χωρίς αυτήν την δράση του εκπαιδευτικού η επικοινωνία μεταξύ των μαθητριών της ομάδας αυτής είχε χαθεί. Αυτή η δράση του εκπαιδευτικού είναι σύμφωνη με τα ευρήματα της έρευνας του Fraivillig. Όμως λόγω έντονων προβλημάτων επικοινωνίας μεταξύ των μαθητές ο

καθηγητής αποφάσισε να αλλάξει ξανά την μαθηματική πρόκληση εκτελώντας **μία δράση αναπροσανατολισμού** και θέτοντας στους μαθητές μία νέα δραστηριότητα. Την μαθηματική πρόκληση αυτήν την υποστήριξε κάνοντας μία δράση πρόσληψης (ανοιχτή ερώτηση). Παρατηρούμε ότι ο καθηγητής είναι ευέλικτος με τον σχεδιασμό δραστηριότητας και τις προσαρμόζει στις ανάγκες των μαθητών του. Έχουμε δηλαδή ισορροπία ανάμεσα στα τρία στοιχεία της διδακτικής τριάδας.

Τέλος, στο τμήμα Α΄1 ο καθηγητής επηρεασμένος από τα αποτελέσματα και τις δράσεις των μαθητές στις μαθηματικές προκλήσεις που είχε αναθέσει στα δύο προηγούμενα τμήματα, αποφασίζει να αλλάξει ξανά την μαθηματική πρόκληση εκτελώντας πάλι **μία δράση αναπροσανατολισμού** (παραμέρισε δηλαδή την δραστηριότητα με τον τρισδιάστατο ρόμβο). Την μαθηματική αυτή πρόκληση υποστήριξε με τα εξής είδη δράσεων: ανοιχτές λεπτομέρειες προόδου (προοδευτική δράση), μοντελοποίηση με υλικό, εξερεύνηση μεθόδων, δράση επανεκκίνησης και αιτιολόγηση (εστιασμένη δράση), πράγμα που έρχεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των προαναφερθεισών ερευνών. Όμως *δεν ανταποκρίθηκε* η πλειοψηφία των ομάδων στην πρόκληση εύρεσης του μέρους της πλήρης περιστροφής που ήταν η γωνία. Έτσι ο καθηγητής εκτέλεσε ταυτόχρονα **μία αναπροσανατολισμένη δράση** και **μία δράση απλοποίησης**. Τις δράσεις αυτές ακολούθησαν δράσεις εστίασης και επανάληψης. Σημαντικό είναι ότι εδώ ο καθηγητής ενθάρρυνε μία μαθήτρια να συμμετέχει στις αιτιολογήσεις των άλλων. Αυτό μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ως εξής: ότι εκτός από την ισορροπία ανάμεσα στα τρία στοιχεία της διδακτικής τριάδας που εμφανίζεται και πάλι, έχουμε επιπλέον και ευαισθησία του καθηγτή για τους μαθητές και στον συναισθηματικό τομέα εκτός από τον γνωστικό. Τέλος, εμφανίζεται τον εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα: *έχουμε ανταπόκριση των μαθητών στην μαθηματική πρόκληση και την απόφαση του καθηγητή να εκμεταλλευτεί το γεγονός αυτό και να την εξελίξει.* Την εξέλιξη της μαθηματικής πρόκλησης την επιτυγχάνει με μία δράση πρόσληψης με σκοπό να παρατείνει την συζήτηση. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τις κινήσεις που εμβαθύνουν τις γνώσεις των μαθητών μέσω της εμβάθυνσης της συζήτησης σύμφωνα με το πλαίσιο ATM. Τέλος οι δράσεις που εκτελούνται για να υποστηρίξουν την εξέλιξη της πρόκλησης είναι η παρακολούθηση (Stein) και εστιασμένες δράσεις (Drageset).

Σχετικά με τον εκπαιδευτικό που συμμετέχει στην έρευνα, η φοίτησή του στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών της Διδακτικής των Μαθηματικών, φαίνεται

ότι είναι καθοριστικός παράγοντας στην ανάπτυξη της επαγγελματικής του ταυτότητας. Επιπλέον παράγοντες που επηρεάζουν τις δράσεις που εκτελεί στα μαθήματα του είναι η προσπάθεια αξιοποίησης της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών στα μαθήματα του, τα εννοιολογικά ερωτήματα που θέτει στους μαθητές του καθώς και οι νόρμες που θέτει οι οποίες υποστηρίζουν την έκφραση μαθηματικών ιδεών και επιχειρημάτων από τους μαθητές. Η επικοινωνιακή προσέγγιση (Sfard, 2008), οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών και η κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης, παράγοντες που ο ίδιος υιοθετεί και διαμορφώνει βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές.

Θεωρώ ότι η συνεισφορά της παρούσας έρευνας είναι η κατασκευή ενός πλαισίου των 8 κατηγοριών δράσεων του εκπαιδευτικού, η οποία αποτελεί εν μέρει μία σύνδεση των πλαισίων που διαμορφώθηκαν από τις προηγούμενες έρευνες. Η μελέτη αυτή λοιπόν, μας προσφέρει μία πιο ολιστική εικόνα των δράσεων του εκπαιδευτικού. Το πλαίσιο αυτό συμβάλλει στην κατανόηση των επιλογών των δράσεων του εκπαιδευτικού και στην παρατήρηση αποτελεσματικών και μη-αποτελεσματικών αποτελεσμάτων που προέρχονται από τις δράσεις αυτές (δηλαδή υποστήριξη ή μη της μαθηματικής πρόκλησης). Το μεγαλύτερος όμως όφελος του πλαισίου αυτού, είναι ότι αποτελεί ένα εργαλείο για τον εκπαιδευτικό να κάνει πιο συνειδητές επιλογές των δράσεων που εκτελεί, να αξιολογεί τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες κάθε δράσης και να είναι έτοιμος να λειτουργεί με ευελιξία καθώς και να επινοεί τρόπους να χρησιμοποιεί αυτές τις δράσεις πιο αποτελεσματικά για την καλύτερη υποστήριξη της μαθηματικής πρόκλησης, την οποία να είναι σε θέση να προσαρμόζει στις ανάγκες (γνωστικές και συναισθηματικές) των μαθητών. Έπειτα, η περαιτέρω μελέτη οδήγησε στην ανάδειξη την 17 μοτίβα μοτίβων δράσεων, κάτι που δεν ήταν αρχικά εμφανές. Επίσης, η ύπαρξη μοτίβων δράσεων είναι κάτι το πρωτότυπο καθώς οι προηγούμενες έρευνες δεν έχουν μελετήσει περιπτώσεις αλληλεπιδράσεων δράσεων. Άρα το εύρημα αυτό μπορεί να δώσει το έναυσμα και σε άλλους ερευνητές για βαθύτερη μελέτη μοτίβων δράσεων. Επίσης, η μελέτη αυτή αναδεικνύει ιδιάζουσες, ενδιαφέρουσες περιπτώσεις όπου η μαθηματική πρόκληση διαμορφώνεται και εξελίσσεται σε σχέση με τις δράσεις των μαθητών και συναρτήσει με την ύπαρξη ισορροπίας ανάμεσα στα τρία στοιχεία της διδακτικής τριάδας.

Η μελέτη αυτή δημιουργεί την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα και αναδεικνύει κρίσιμα ερωτήματα ως προς το είδος δράσεων που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί,

τις αλληλεπιδράσεων μεταξύ των δράσεων, την πιθανή ύπαρξη μοτίβων μεταξύ των δράσεων καθώς και τι είδους δράσεις χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός σε ιδιάζουσες περιπτώσεις. Επίσης, ένα άλλο ερώτημα που θα μπορούσε να μελετηθεί είναι ποιοι παράμετροι επηρεάζουν την ισορροπία ανάμεσα στα τρία στοιχεία της διδακτικής τριάδας σε σχέση με τις δράσεις των μαθητών, καθώς και το πώς επιτυγχάνεται το πέρασμα της μαθηματικής πρόκλησης στους μαθητές. Επίσης, ένα ερώτημα που προκύπτει είναι αν είναι δυνατή η διεκπεραίωση της παρούσας έρευνας και σε άλλες περιπτώσεις εκπαιδευτικών καθώς και σε άλλα σχολικά περιβάλλοντα. Θα προέκυπταν αντίστοιχα αποτελέσματα; Ακόμα, ένα άλλο ζήτημα που προκύπτει είναι το εξής: Με ποιο τρόπο τα ευρήματα της παρούσας έρευνας μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε εκπαιδευτικά προγράμματα ή σε σεμινάρια επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών;

Τέλος, το πλαίσιο των 8 κατηγοριών δράσεων και τα 17 μοτίβα αλληλεπίδρασης, όπως και οι διαπιστώσεις που προέκυψαν, σαφώς και αφορούν τον συγκεκριμένο εκπαιδευτικό που συμμετείχε στην έρευνα και συνεπώς πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί κατά την γενίκευση των αποτελεσμάτων. Παρόλα αυτά η πληθώρα των παραδειγμάτων που παρουσιάζονται στην παρούσα έρευνα καθώς και τα ευρήματά της μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κινητήριο έναυσμα για μελλοντικές έρευνες, καθώς να αξιοποιηθούν από έναν συνειδητοποιημένο δάσκαλο μαθηματικών ως αντικείμενα προβληματισμού, αναστοχασμού και αναθεώρησης απόψεων.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Boulton-Lewis, G. (1987). Recent cognitive theories applied to sequential length measuring knowledge in young children. *British Journal Of Education Psychology, 57*, pp. 330- 342.

Boulton- Lewis, G., Wilss, L. A., & Mutch, S. L. (1996). An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, pp. 329-347.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, J. T. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal Mathematics Teacher Education*, 14:355–374 DOI 10.1007/s10857-011-9179-7.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics* 23: 99-122, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Drageset, O. G. (2014). Teacher's response to unexplained answers. 9th *Congress of European Research in Mathematics Education. 4-8 February 2015.* Prague, Czech Republic. Charles University in Prague, Faculy of Education. UiT – The Arctic University of Norway.

Drageset, O. G. (2014). How students explain and teachers respond. 37th *Mathematics Education Research Group of Australasia. 29 June-3 July 2014.* Sydney. UiT – The Arctic University of Norway.

Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, pp. 1– 19.

Jaworski, B., & Potari, D. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5: 351–380, 2002. Kluwer Academic Publishers.

Keiser, M. J. (2009). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (3), 285-306. Copyright © 2004, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Larsson, M. (2014). Exploring a framework for classroom culture: a case study of the interaction of mathematical whole-class discussions. 9th *Congress of European Research in Mathematics Education. 4-8 February 2015.* Prague, Czech Republic. Charles University in Prague, Faculy of Education. *School of Education, Culture and Communication*, Mälardalen University, Sweden.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 194–214.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996b). Young children invent methods of proof: the gang of four. In: P. Nesher, L. P. Steffe, P. Cobb, B. Greer, & J. Golden (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431–447). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maher, C. A. (2002). How students structure their own investigations and educate us: what we've learned from a fourteen year study. In: A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Sixth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31–46). Norwich, UK: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Mata-Pereira, J., Ponte, P. J. & Quaresma M. (2014). Teaching actions conducting mathematical whole class discussions. 9th *Congress of European Research in Mathematics Education. 4-8 February 2015.* Prague, Czech Republic. Charles University in Prague, Faculy of Education. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Mosvold, R. (2014). Developing mathematical discourse for teaching education: A case of the equal sign. 9th *Congress of European Research in Mathematics Education. 4-8 February 2015.* Prague, Czech Republic. Charles University in Prague, Faculy of Education. University of Stavanger, Norway.

Ponte, P. J. & Quaresma, M. Conducting mathematical discussions as a feature of teacher's professional practice. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. 9th *Congress of European Research in Mathematics Education. 4-8 February 2015.* Prague, Czech Republic. Charles University in Prague, Faculy of Education.

Powell A. B., Francisco J. M., & Maher C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data, The Robert B. Davis Institute for learning, Graduate School of Education, Rutgers University, 10 Seminary Pl., New Brunswick, NJ, USA, *Journal of Mathematical Behavior*, 22 pp. 405 – 435.

Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J., Dine, D. W., & McDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *Mathematics Education*, pp. 667-680.

Sfard, A. (2000). On Reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157–189. Copyright © 2000, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46: 13–57, 2001. © 2002 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal Mathematics Teacher Education*, 16:105–124 DOI 10.1007/s10857-012-9207-2.

Steinbring, H. (1998). From "Stoffdidaktik" to Social Interactionism: An Evolution of language and communication in German Mathematics Education Research. *Language and Communication in the Mathematics Classroom-National Council of Teachers of Mathematics*, INC 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593.

Stein, K. M., Engle, A. R., Smith, S. M., & Hughes, K. E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five Practices for Helping Teachers Move beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10 : 313-340, 2008, Copyright © Taylor & Francis Group LLC ISSN 1098-6065 print/ 1532-7833 online DOI: 10.1088/10986060802229675.

Voigt, J. (1994). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26: 275-298, 1994. Copyright ©1994 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Wing, T. (2011). Book Review: Purifying the dialect of the tribe.
Anna Sfard (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press. 324 pages, ISBN 978-0-521-86737-5 [hard cover], RRP Sept 2010: $99.00; ISBN 978-0-521-16154-1 [soft cover] RRP Sept 2010: $35.00. *Educational Studies in Mathematics*, 76:363–369 DOI 10.1007/s10649-010-9283-0.

Wood, T. (1994). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or Focusing? *Language and Communication in the Mathematics Classroom-National Council of Teachers of Mathematics*, INC 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

Yin, R. K. (1994). Case Study Research. *Design and Methods (Third Edition)*. London, United Kingdom: SAGE

Yin, R. K. (2003). Case study research: *Design and methods (3rd ed.).* Thousand Oaks,CA: Sage.

Keramaris, K., & Barmpagianni, E. (2011). *The language of mathematics textbooks in the two last grades of primary school*.

Μαστρογιάννης, Α. (2009). *Η Μαθηματική Γλώσσα στα νέα διδακτικά εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου.* Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης, Μεταπτυχιακός Φοιτητής Μαλέτσκος Αθανάσιος, Msc, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης Υπ. Δρ.

Παπανδρέου, Μ. (2002). Δυναμικά Μαθησιακά Περιβάλλοντα Δραστηριοτήτων για την Ανάπτυξη της Λογικο-μαθηματικής Σκέψης στο Νηπιαγωγείο: Η Περίπτωση της Έννοιας του Μήκους.

Τζεκάκη, Μ. Παρουσίαση στο μάθημα: Μαθηματικές έννοιες στο νηπιαγωγείο ΙΙΙ (χειμερινό 2009-2010).