ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Ανάπτυξη εικασιών και αναγκαιότητας της κατασκευής της απόδειξης με τη χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας»

Κωτσιάκη Μαρία

Επιβλέπων καθηγητής:

Ψυχάρης Γεώργιος

Αθήνα, Ιούνιος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 17η Ιουνίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Λέκτορα
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Λέκτορα
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Λέκτορα κ. Ψυχάρη Γεώργιο, για την πολύτιμη καθοδήγηση και το άριστο κλίμα συνεργασίας σε όλο το διάστημα εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Η συμβολή του στην παρούσα ερευνητική εργασία ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω την Αν. Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα και την Καθηγήτρια κ. Φαρμάκη Βασιλική για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μαθητές μου που συμμετείχαν εθελοντικά στην έρευνα, καθώς και τους φίλους μου αλλά και την οικογένειά μου που με στήριξαν μέχρι το πέρας της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

Πρόλογος…….. 7

Περίληψη…….. 8

Δομή της εργασίας…… 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ……..11

1.1 Η έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά…… 11

1.2 Οι λειτουργίες της απόδειξης…….. 12

1.3 Ο ρόλος της απόδειξης στην σχολική τάξη……. 17

1.4 Δυσκολίες των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία….. 18

1.5 Ο ρόλος της εικασίας στην πορεία της απόδειξης …….. 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ…….23

2.1 Ψηφιακά εργαλεία και μαθηματική απόδειξη……. 23

2.2 Τα ψηφιακά εργαλεία ως μέσα σημειωτικής διαμεσολάβησης……24

2.3 Η αξιοποίηση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στη σχολική τάξη….. 26

2.4 Το «Σύρσιμο» (Dragging) και οι λειτουργίες του…….. 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ……32

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα……... 32

3.2 Ερευνητική διαδικασία…….. 33

3.3 Συλλογή δεδομένων…….. 33

3.4 Δραστηριότητες …… 34

3.5 Μέθοδος Ανάλυσης…… 40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^0 : ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ…….. 42

4.1 Εικασίες μέσω συρσίματος και αναγνώριση της ανάγκης για απόδειξη….. 44

4.1.1 Εικασίες που οι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους….. 45

4.1.2 Εικασίες που οι μαθητές αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους…….48

4.2 Εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης …….. 54

4.3 Εικασίες που αναδύθηκαν με αφορμή τη λειτουργία της μέτρησης και η αναγνώριση της ανάγκης για απόδειξη……...61

4.4 Εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης……... 64

4.5 Εικασίες που οι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ανάγκη της απόδειξης…… 68

Σύνοψη δραστηριότητας 1……. 71

Σύνοψη δραστηριότητας 2……. 74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^0 :ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……76

ΑΝΑΦΟΡΕΣ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..80

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ……...83

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η κατάκτηση της διαδικασίας της απόδειξης αποτελεί αναμφισβήτητα το πιο κρίσιμο σημείο της μαθησιακής διαδικασίας, και σηματοδοτεί το πέρασμα από τα εμπειρικά μαθηματικά στην επιστήμη των μαθηματικών. Είναι γενικά παραδεκτό, όχι μόνο από τις έρευνες αλλά και από την σχολική πρακτική ότι η διδασκαλία και η εκμάθηση της απόδειξης δημιουργεί δυσκολίες στους μαθητές. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν σχετίζονται με την φύση της απόδειξης αλλά και με το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη του να αποδείξουν ότι μια σχέση ισχύει ή όχι. Συχνά οι μαθητές αναρωτιούνται «γιατί πρέπει να το αποδείξω αυτό αφού ξέρω ότι ισχύει;», «γιατί αποδεικνύουμε;» , «ποια η σημασία της απόδειξης;».

Η χρήση νέων τεχνολογιών και συγκεκριμένα η χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (Geogebra, Cabri, Sketchpad Geometry κ.άλλα) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν γνωστικό και αναπτυξιακό εργαλείο για την εκμάθηση της γεωμετρίας και την βελτίωση της κατανόησης του ρόλου της γεωμετρικής απόδειξης. Η ενσωμάτωση την νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία και εκμάθηση της απόδειξης μπορεί να παρακινήσει τους μαθητές στο να κάνουν εμπειρικές εικασίες, να πειστούν εύκολα για την γενική ισχύ της εικασίας και να αναγνωρίσουν την ανάγκη για κατασκευή της απόδειξης.

Παρ’ όλα αυτά η χρήση υπολογιστών δεν μπορεί να αντικαταστήσει τον εκπαιδευτικό. Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που με τις κατάλληλες μεθόδους του, τις ιδέες του, την ενθάρρυνσή του, τις ερωτήσεις αλλά και το συντονισμό της συζήτησης κατορθώνει να μετατρέψει ένα άψυχο μηχάνημα σε ένα γνωστικό εργαλείο ανάπτυξης.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να διερευνήσει τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές κάνουν υποθέσεις/εικασίες για την κατασκευή μιας γεωμετρικής απόδειξης. Η εργασία απευθύνεται σε μαθητές Β΄ λυκείου οι οποίοι εργάστηκαν σε ομάδες των 2 ατόμων. Δόθηκε στους μαθητές αρχικά ένα φύλλο εργασίας προκειμένου να εξοικειωθούν με το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας κατασκευάζοντας βασικά γεωμετρικά σχήματα. Στη συνέχεια, οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με κατάλληλες σχεδιασμένες δραστηριότητες και διατύπωσαν εικασίες, τις οποίες άλλοτε επιβεβαίωναν και άλλοτε απέρριπταν. Σκοπός μας ήταν να αξιολογηθούν οι εικασίες που παράγονται μέσα από κατάλληλα δομημένες δραστηριότητες και συνδυάζουν στατικό και δυναμικό περιβάλλον. Επιπλέον, διερευνήθηκε κατά πόσο το λογισμικό διαμεσολαβεί στην αναγνώριση της αναγκαιότητας για κατασκευή της γεωμετρικής απόδειξης των εικασιών. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές με τη συνεισφορά του λογισμικού διατύπωναν εικασίες μέσα από απαγωγικές διαδικασίες, τις οποίες άλλοτε αποδείκνυαν και άλλοτε όχι. Στις περιπτώσεις που οι μαθητές απέδειξαν τις εικασίες τους το λογισμικό με τις λειτουργίες του διαμεσολάβησε ώστε οι μαθητές να μεταβούν στην τυπική απόδειξη των εικασιών του. Ορισμένες εικασίες των μαθητών δεν αποδείχθηκαν είτε διότι θεώρησαν προφανή τα συμπεράσματά τους, είτε διότι δεν μπορούσαν με λογικούς κανόνες να μεταβούν στην τυπική απόδειξη.

Λέξεις κλειδιά: εικασίες, Geometer’s Sketchpad, κατασκευή γεωμετρικής απόδειξης, λειτουργίες του λογισμικού, διαμεσολάβηση δυναμικού περιβάλλοντος

ABSTRACT

The aim of this research is to investigate the process of making assumptions in order to construct a geometric proof. This research is addressed to students of the Senior High school who will work into groups of two people in a dynamic geometry environment to find out the functions of the software. Working with the software they will explore mathematical theorems so as to formulate assumptions and restate them. The software will be used as a tool of learning geometry aiming the improvement of the understanding of geometrical proof.

At first they will get involved with appropriately designed activities so as to make assumptions which some of them will confirm or reject. Our aim is to evaluate the assumptions which produced from the activities which combine static and dynamic environment. In addition, there will be investigated whether or not the software amplify the derivation of assumptions and whether or not is identified the need of constructing the geometric proof. After the completion of this research we pursue from students to understand the need and necessity of proof and be able to do over from the optical explanation to construct the typical geometric proof.

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο **πρώτο κεφάλαιο**, αναφέρονται γενικές αντιλήψεις που ισχύουν σχετικά με το ρόλο της απόδειξης, τη διδασκαλίας της στη σχολική τάξη και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την εκμάθηση της απόδειξης. Αναφέρεται επίσης, ο ρόλος των εικασιών στην αποδεικτική διαδικασία με την χρήση δυναμικού λογισμικού γεωμετρίας(Sketchpad) .

Στο **δεύτερο κεφάλαιο**, αναφέρεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχτηκε η συγκεκριμένη εργασία. Επιπλέον, αναφέρονται οι λειτουργίες των ψηφιακών εργαλείων καθώς και ο ρόλος τους στην αποδεικτική διαδικασία της σχολικής τάξης.

Στο **τρίτο κεφάλαιο**, περιγράφεται λεπτομερώς η διαδικασία της έρευνας, ο σκοπός της και η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε, η δραστηριότητα με την οποία εργάστηκαν οι μαθητές και ο τρόπος με τον οποίο έγινε η συλλογή των δεδομένων κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο**, γίνεται ανάλυση των δεδομένων της έρευνας ανά ομάδα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν και τέλος γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα.

Τέλος, στο **πέμπτο κεφάλαιο** αναφέρονται τα συμπεράσματα της έρευνας, αναφέρονται θέματα που αφορούν περιορισμούς της παρούσας έρευνας και προτείνονται θέματα για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1.1) Η έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά

Στην καθημερινή μας ζωή, συναντάμε την έννοια της απόδειξης με πολλές και διαφορετικές ερμηνείες. Για παράδειγμα, μια φαρμακευτική εταιρεία μπορεί να αποδείξει ότι ένα φάρμακο δεν έχει καμία σοβαρή παρενέργεια με τη δοκιμή του σε πολλούς ανθρώπους, βασιζόμενη σε αποτελέσματα ερευνών. Ένας δικηγόρος μπορεί να αποδείξει ότι ένας εγκληματίας είναι ένοχος, χρησιμοποιώντας κάποια γεγονότα ως αποδεικτικά στοιχεία και την πειθώ του. Σε κάθε περίπτωση, καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που άλλοτε είναι αληθές και άλλοτε όχι.

Όμως στα μαθηματικά, η έννοια της απόδειξης είναι αντίθετη από αυτές τις καθημερινές έννοιες. Συνήθως ο συλλογισμός είναι παραγωγικός και κατέχει κεντρικό ρόλο στις μαθηματικές αξιώσεις και στις παρουσιάσεις των αποδείξεων. Όμως, η μαθηματική απόδειξη στηρίζεται μόνο σε λογικά επιχειρήματα και όχι στην προσωπική πειθώ (όπως ο δικηγόρος στο δικαστήριο) ούτε σε στοιχεία (όπως στη περίπτωση του φαρμάκου).

Η μαθηματική απόδειξη σύμφωνα με τον Schoenfeld (1988), είναι μια αλληλουχία επιχειρημάτων και υποθέσεων από τα οποία παράγονται ένα ή περισσότερα συμπεράσματα, σύμφωνα με καλά προκαθορισμένους κανόνες από δύο σύνολα δεδομένων: α) ένα σύνολο από υποθέσεις και β) ένα σύνολο από αποδεκτά γεγονότα, αποτελούμενο από αξιώματα είτε από αποτελέσματα που έχουν ήδη αποδειχθεί.

Ωστόσο, στη βιβλιογραφία συναντώνται πλήθος ορισμών που υποδεικνύουν ότι η απόδειξη είναι κάτι παραπάνω από απλή μαθηματική επιβεβαίωση ενός θεωρήματος καθώς εμπεριέχει και κοινωνική πτυχή. Σύμφωνα με τον Balacheff (1987) ο οποίος επικεντρώνεται στην κοινωνική φύση της απόδειξης, αναφέρει χαρακτηριστικά ότι: «Η απόδειξη είναι μια εξήγηση δεκτή από μια συγκεκριμένη μαθηματική κοινότητα, σε μια δεδομένη στιγμή».

Η παραδοσιακή άποψη για το ρόλο της απόδειξης αποτυπώνεται εύστοχα από τον Griffiths (2000) σύμφωνα με τον οποίο η απόδειξη είναι μια τυπική και

λογική πορεία συλλογισμού που αρχίζει με ένα σύνολο αξιωμάτων και μέσω λογικών βημάτων οδηγείται σε ένα συμπέρασμα με σκοπό την απόδειξη ενός θεωρήματος.

Στη διδασκαλία της γεωμετρίας η απόδειξη είναι μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι απαραίτητα ορθή, μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των μαθηματικών. Η απόδειξη προέρχεται από παραγωγικούς συλλογισμούς και όχι εμπειρικά. Δηλαδή, η απόδειξη πρέπει να μας πείθει για την αλήθεια μιας πρότασης για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση. Μία πρόταση, χωρίς απόδειξη για την οποία πιστεύεται ή υπάρχουν ισχυρές υποψίες ότι ισχύει, λέγεται εικασία.

Επομένως, η έννοια της μαθηματικής απόδειξης η οποία είναι αποδεκτή στη μαθηματική κοινότητα ορίζει την απόδειξη σαν μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι απαραίτητα ορθή, μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των μαθηματικών. Δηλαδή μια απόδειξη πρέπει να δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση.

1.2) Οι λειτουργίες της απόδειξης

Η απόδειξη κατέχει πολλές σημαντικές λειτουργίες στη γεωμετρική επιστήμη, οι οποίες σε πολλές καταστάσεις αναδεικνύουν την σπουδαιότητα της. Η απόδειξη εξυπηρετεί έναν αριθμό σκοπών στη μαθηματική εκπαίδευση οι οποίοι ποικίλλουν όπως είδαμε. Αρχικά, εισάγεται σαν ένα μέσο εξήγησης και επαλήθευσης στη διδασκαλία της γεωμετρίας (κυρίως κατά την διδασκαλία σε υπολογιστικά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας), ώστε να εξυπηρετήσει αργότερα και άλλες σημαντικές λειτουργίες όπως η ανακάλυψη, η συστηματοποίηση και η πνευματική πρόκληση (de Villiers, 2003).

Αρκετοί μαθηματικοί αναμένουν από τους μαθητές να δώσουν μια ολοκληρωμένη απόδειξη και όχι απλά μια επεξήγηση, σύμφωνα με τον Manin (1977) (Hanna, 2000) μια σωστά διατυπωμένη απόδειξη θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα το θεώρημα που απέδειξαν και να διαπιστώσουν όχι μόνο ότι ισχύει αλλά και το γιατί ισχύει. Με αυτό τον τρόπο θα πεισθούν για την αλήθεια του θεωρήματος και θα μπορέσουν να ανακαλύψουν και άλλες αλήθειες.

Ορισμένοι ερευνητές θεωρούν ότι η γεωμετρική απόδειξη εξυπηρετεί έναν αριθμό σκοπών:

- Επαλήθευση / Πεποίθηση

Κατά γενική ομολογία η απόδειξη στη σχολική τάξη στο μάθημα της γεωμετρίας παρουσιάζεται ως μέσο βεβαιότητας προκειμένου να καταρριφθούν οι αμφιβολίες των μαθητών. Αρκετοί είναι αυτοί που ισχυρίζονται ότι μόνο μέσα από την απόδειξη οι μαθητές αποκτούν βεβαιότητα ότι κάτι ισχύει. Ο βασικός ρόλος της απόδειξης στην γεωμετρία σύμφωνα με την Hanna (1983) είναι να επιβεβαιώσει την ορθότητα και την ισχύ ενός ισχυρισμού ή ενός θεωρήματος. Θεωρείται δηλαδή, ως ένα μέσο επαλήθευσης μιας μαθηματικής εικασίας προκειμένου να πεισθούμε για την αλήθεια του, και αυτός ο ρόλος είναι και ο πιο οικείος για τους μαθητές.

Επικρατεί η άποψη ότι η απόδειξη ως επαλήθευση χρησιμοποιείται για την εξακρίβωση ή την επιβεβαίωση με έλεγχο μιας αλήθειας ή μη μιας πρότασης προκειμένου να επαλειφθεί η αμφιβολία και η αβεβαιότητα για την αλήθεια της (de Villiers, 2002).

Χαρακτηριστικά ο George Polya (the role of function of proof) αναφέρει ότι αφού πεισθούν για την αλήθεια ενός θεωρήματος τότε μπορούν να κατασκευάσουν και την απόδειξή του. Οι αρχικές τους υποψίες ότι το θεώρημα ισχύει θα επαληθευτούν μέσα από την απόδειξή του. Χαρακτηριστικά αναφέρει τα εξής : «Όταν θα έχετε ικανοποιήσει τον εαυτό σας ότι το θεώρημα είναι αλήθεια, μπορείτε να ξεκινήσετε να το αποδείξετε» (Polya).

Ωστόσο, η πεποίθηση ότι κάτι ισχύει προέρχεται από ένα συνδυασμό πραγμάτων, τη διαίσθηση που έχουμε για το αν κάτι ισχύει ή όχι, την εμπειρική επαλήθευσή του με άτυπα μαθηματικά και την απόδειξή του ότι κάτι ισχύει με λογικές συνεπαγωγές και όχι απαραίτητα αυστηρά μαθηματικά.

- Εξήγηση

Αν και είναι δυνατόν να ξέρουμε την αλήθεια ενός θεωρήματος μέσα από την εμπειρική επαλήθευση, ωστόσο δεν μας παρέχει ικανοποιητικές επεξηγήσεις γιατί οι εικασίες μας να είναι αληθινές. Για αυτό το λόγο η αποδεικτική διαδικασία έχει μεγάλη σημασία προκειμένου να πεισθούμε ότι οι υποθέσεις μας είναι αληθείς.

Για ορισμένους μαθηματικούς η επεξήγηση ενός θεωρήματος είναι σημαντικότερη απ ότι η επαλήθευσή του. Η Hanna (1995) ισχυρίζεται ότι η επεξήγηση θα πρέπει να είναι ο πρωταρχικός σκοπός της γεωμετρικής απόδειξης στην σχολική τάξη προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν όχι μόνο ότι κάτι ισχύει

αλλά και το γιατί ισχύει. Μερικές αποδείξεις από τη φύση τους είναι πιο επεξηγηματικές από άλλες και μας παραπέμπουν σε στοιχεία χρήσιμα για την απόδειξη του υπό εξέτασιν θεωρήματος. Παρόλα αυτά δεν είναι πάντα εύκολη η εύρεση επεξηγηματικών αποδείξεων για κάποια θεωρήματα οπότε χρησιμοποιούμε άλλες τεχνικές ή μη επεξηγηματικές μεθόδους (Hanna, 2000).

Η λειτουργία της απόδειξης ως εξήγηση χρησιμοποιείται περισσότερο όταν η αρχική υπόθεση δεν είναι προφανής και όταν η διατύπωση ενός ισχυρισμού ή ενός θεωρήματος είναι δυσνόητη από τους περισσότερους μαθητές.

- Συστηματοποίηση

Βασικό στοιχείο σε μια απόδειξη δεν είναι πάντα ο έλεγχος της αλήθειας της, αλλά ο τρόπος με τον οποίο έχουμε οργανώσει τις δηλώσεις που είναι πλέον γνωστές σε ένα συνεπές, ανεξάρτητο και πλήρες σύστημα. Σύμφωνα με τον de Villiers (1990) η απόδειξη είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για τη συστηματοποίηση διάφορων γνωστών αποτελεσμάτων σε ένα ενοποιημένο σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων.

Μερικές από τις πιο σημαντικές λειτουργίες μιας παραγωγικής συστηματοποίησης σύμφωνα με τον de Villiers (1986) είναι :

- ✓ Συνδέει και απλοποιεί μαθηματικές θεωρίες με την ενσωμάτωση ανεξάρτητων προτάσεων ώστε να παρουσιάσει σφαιρικά τα αποτελέσματα.
- ✓ Ενισχύει την αναγνώριση φανερών και μη διατυπωμένων υποθέσεων.
- ✓ Οδηγεί συχνά σε εναλλακτικά παραγωγικά συστήματα που μας παρέχουν νέα στοιχεία.
- ✓ Είναι χρήσιμη όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά και στην καθημερινότητά μας.

Αυτός ο ρόλος της απόδειξης επιτρέπει στα γεωμετρικά αποτελέσματα, που αρχικά θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους, να ενταχθούν και να οργανωθούν σε ένα πλαίσιο, που βασίζεται σε κοινά αποδεκτούς γεωμετρικούς κανόνες. (Bell, 1976; de Villiers, 1999; Hanna 1983; Schoenfeld, 1994).

- Ανακάλυψη

Μέσα από μια απόδειξη μπορεί να οδηγηθούμε στην ανακάλυψη νέων γεωμετρικών συμπερασμάτων. Θεωρείται, ότι προτού τα θεωρήματα αποδειχθούν, ανακαλύπτονται με τη βοήθεια της διαίσθησης ή και των εμπειρικών μεθόδων. Σύμφωνα με τον de Villiers (1999) η απόδειξη αποτελεί ένα μέσο για εξερεύνηση και ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων, και δεν είναι μόνο ένα μέσο επαλήθευσης αποτελεσμάτων που το άτομο γνωρίζει ότι ισχύουν. Με την εξερεύνηση των λογικών συνεπειών των ορισμών ενός αξιωματικού συστήματος, είναι εφικτό να αναπτυχθούν νέες μαθηματικές θεωρίες.

Η λεκτική διατύπωση μιας γεωμετρικής πρότασης δεν μπορεί να μας πείσει εάν ισχύει ή όχι, ωστόσο μέσα από την παραγωγική απόδειξη αυτής της πρότασης ανακαλύπτουμε σε ποιές άλλες περιπτώσεις ισχύει. Συνεπώς, οι μαθητές μέσα από μια τέτοια διαδικασία εξερευνούν και τους δίνεται ένα έναυσμα για νέα γεωμετρικά αποτελέσματα.

- Επικοινωνία

Μια επιπλέον λειτουργία της απόδειξης είναι ως μέσο επικοινωνίας. Η παρουσίαση και δημοσίευση των αποδείξεων είναι ένας τρόπος, ώστε ένας μαθηματικός να επικοινωνεί με τους άλλους μαθηματικούς. Αυτός ο ρόλος της απόδειξης βοηθά στην μετάδοση των γεωμετρικών κανόνων, των ορισμών, των αξιωμάτων και κυρίως των γεωμετρικών εννοιών που διατυπώνονται για ένα γεωμετρικό θεώρημα μεταξύ των μαθητών, αλλά και μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Μέσα από αυτόν τον τρόπο τα μέλη της τάξης ενεργοποιούνται, διατυπώνοντας υποθέσεις που πρέπει να εξεταστούν με την ανταλλαγή απόψεων, προτείνουν άλλους τρόπους λύσης, ασκούν κριτική και διαλογίζονται αν πείστηκαν για την αλήθεια της πρότασης ή του θεωρήματος (Hanna, 1990). Επιπλέον, μέσα από την κριτική εξέταση ενός επιχειρήματος οδηγούμαστε στην τελειοποίησή του, ή εντοπίζονται σφάλματα και μερικές φορές οδηγούμαστε στην εύρεση ενός αντιπαραδείγματος (de Villiers, 1999).

- Πνευματική πρόκληση (intellectual challenge)

Η απόδειξη ως μέσο πνευματικής/νοητικής πρόκλησης είναι συνώνυμη με την εσωτερική ικανοποίηση που προέρχεται από την κατασκευή μιας απόδειξης. Οι μαθητές κατά την αποδεικτική διαδικασία μιας αλήθειας συναντούν εμπόδια και δυσκολίες τα οποία καλούνται να αντιμετωπίσουν με την κριτική τους σκέψη.

Αρκετοί εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η αποδεικτική διαδικασία κατέχει εξέχοντα ρόλο στην ανάπτυξη της αφαιρετικής και της κριτικής σκέψης. Συνεπώς, αποτελεί μια πνευματική/νοητική πρόκληση ακόμα και για τον ίδιο τον εκπαιδευτικό ο οποίος πρέπει να χρησιμοποιήσει όλες τις τεχνικές προκειμένου να εισάγει νέες έννοιες στους μαθητές και να δώσει τις εξηγήσεις στους μαθητές.

Η Hanna (2000) προσθέτει μερικές ακόμα λειτουργίες της απόδειξης που είναι οι εξής :

- Κατασκευή εμπειρικής θεωρίας
- Διερεύνηση της σημασίας ενός ορισμού
- Ενσωμάτωση ενός οικείου γεγονότος σε ένα νέο πλαίσιο

Κατά τη διαδικασία εκμάθησης μιας απόδειξης οι εκπαιδευτικοί δεν δίνουν την ίδια βαρύτητα σε όλες τις λειτουργίες της απόδειξης και αυτό γιατί όλες οι λειτουργίες της απόδειξης δεν είναι σχετικές και δεν έχουν την ίδια βαρύτητα στην εκμάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Hanna, 2000).

Κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος οι μαθητές αναπτύσσουν διαφορετικά είδη συλλογισμού για την παραγωγή μιας αποδεκτής απόδειξης, τα οποία μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες ως εξής:

- Ο **παραγωγικός συλλογισμός** (deductive argumentation) αρχίζει από ένα γενικό κανόνα και καταλήγει σε ένα ειδικό συμπέρασμα μέσα από μια λογική αλυσίδα συλλογισμών στην οποία κάθε βήμα προκύπτει από το επόμενο. Επομένως, η παραγωγική απόδειξη είναι μια διαδικασία εξαγωγής συμπεράσματος που ακολουθεί προηγούμενες γνώσεις και στηρίζεται σε αυτές.
- Ο **επαγωγικός συλλογισμός** (inductive argumentation) αρχίζει από μια ειδική περίπτωση και ολοκληρώνεται με έναν γενικό κανόνα. Συνεπώς, κατά την

απαγωγική απόδειξη μια κοινή ιδιότητα διαφορετικών παραδειγμάτων που επαναλαμβάνονται αποτελεί τη βάση για γενίκευση.

- Ο **απαγωγικός συλλογισμός** (abductive argumentation) προκύπτει όταν κάποιος συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία. Δηλαδή, παρατηρεί τα γεγονότα και αναζητά μια θεωρία για να τα εξηγήσει.

Η κατασκευή μίας παραγωγικής απόδειξης γίνεται με τη μετάβαση από απαγωγικά ή επαγωγικά βήματα σε παραγωγικά. Η αλλαγή αυτή δεν είναι πάντοτε απλή για τους μαθητές αλλά είναι πάντοτε αναγκαία αλλιώς η δομή της απόδειξης μπορεί να μην είναι παραγωγική. Στα μαθηματικά η απόδειξη είναι παραγωγική όμως οι εξερευνητικές διαδικασίες και οι διαδικασίες εικασιών χαρακτηρίζονται συχνά από απαγωγική διαδικασία. Οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν απαγωγικές διαδικασίες για την παραγωγή αποδείξεων. Οι Arzarello et al. (2000) ισχυρίζονται πως η απαγωγή είναι κρίσιμη για την παραγωγή εικασιών. Επίσης, οι Baccaglini-Frank και Mariotti (2009) αναφέρουν πως η απαγωγή θεωρείται απαραίτητη ώστε οι μαθητές να γράψουν τις εικασίες σε μία λογική μορφή «αν … τότε», μια δήλωση η οποία είναι τώρα έτοιμη να αποδειχθεί. Η απαγωγή είναι μια απαραίτητη διαδικασία μέσα από την οποία διατυπώνονται εικασίες και γίνεται η μετάβαση προς την απόδειξη.

1.3) Ο ρόλος της απόδειξης στη σχολική τάξη

Είναι γνωστό ότι η απόδειξη θεωρείται κεντρική για την επιστήμη των μαθηματικών και έχει καθοριστική σημασία στην μαθηματική δραστηριότητα, άρα η καλλιέργεια της έννοιας της απόδειξης είναι βασικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών κυρίως στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επειδή λοιπόν, η απόδειξη αλλά και οι αποδεικτικές διαδικασίες αποτελούν ένα σημαντικό αντικείμενο μελέτης, υπάρχουν ανησυχίες για το πώς οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν μια απόδειξη μαθηματικών αλλά και το πώς μπορούμε να ενισχύσουμε τις αποδεικτικές διαδικασίες (Marrades & Gutierrez, 2000).

Σύμφωνα με τον Furinghetti F. και Paola D. (2003) οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ενεργό συμμετοχή στην ανακάλυψη της απόδειξης ώστε να είναι ικανοί να κάνουν εικασίες, να διατυπώνουν επιχειρήματα, να διερευνούν αν κάτι ισχύει ή όχι, έτσι ώστε μέσα από αυτή τη διαδικασία να κατανοήσουν την χρησιμότητα μιας απόδειξης. Παρόλο που η έννοια της διερεύνησης και της απόδειξης είναι δύο έννοιες

διαφορετικές είναι ωστόσο συμπληρωματικές και υποστηρίζουν η μία την άλλη. Ουσιαστικά η διερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη ενώ η απόδειξη είναι η επιβεβαίωση. Η διερεύνηση ενός προβλήματος μπορεί να οδηγήσει κάποιον να αντιληφθεί τη δομή του, χρειάζεται όμως αιτιολόγηση τέτοια που να το αποδεικνύει.

Επιπλέον, αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τη λογική μιας απόδειξης εάν το πρόβλημα έχει σχέση με την καθημερινότητά τους και έχει νόημα για αυτούς (Wason & Johnson-Laird, 1972; Wallington, 1974; Hewson, 1977; Donaldson, 1979). Αυτή η άποψη ενισχύεται και από τον de Villiers (1999) ο οποίος υποστηρίζει ότι η απόδειξη έχει σημασία για τους μαθητές μόνο όταν απαντά στις ερωτήσεις τους και στις αμφιβολίες τους, όταν δηλαδή αποδεικνύεται κάτι το οποίο δεν είναι προφανές. Μια τέτοια απόδειξη θα ήταν πιο πειστική για τους μαθητές και θα μπορούσε να τους οδηγήσει και σε νέες ανακαλύψεις. Φυσικά, δεν μπορεί κανείς να βρίσκει πάντα επεξηγηματικές αποδείξεις για κάθε θεώρημα.

Επίσης, είναι απαραίτητο οι μαθητές να διδάσκονται τη φύση και τις αρχές του παραγωγικού συλλογισμού έτσι ώστε να είναι σε θέση να πουν πότε ένα αποτέλεσμα έχει επιτευχθεί ή όχι (Hanna, 2000). Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόδειξη μπορεί να προσφέρει τη μέγιστη συμβολή στην τάξη μόνο όταν ο δάσκαλος είναι ικανός να χρησιμοποιήσει αποδείξεις που ενισχύουν την κατανόηση. Να δει κάποιος όχι μόνο ότι είναι αλήθεια αλλά και γιατί είναι αλήθεια.

Συνεπώς, αναζητούμε πιο αποτελεσματικούς τρόπους διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών και των αποδείξεών τους, προσπαθώντας να απομακρυνθούμε από τις αυστηρές αποδείξεις, στοχεύοντας σε μια βαθύτερη κατανόηση από τους μαθητές.

1.4) Δυσκολίες των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει αρκετές έρευνες στη Διδακτική των Μαθηματικών οι οποίες μας παρέχουν συμπεράσματα και στοιχεία για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την απόδειξη στη γεωμετρία.

Είναι γεγονός ότι ένας μεγάλος αριθμός μαθητών συναντά δυσκολίες με την εκμάθηση και κατασκευή της γεωμετρικής απόδειξης στον τομέα της γεωμετρίας. Στις τάξεις του γυμνασίου η γεωμετρία μελετάται, αλλά συνήθως σε διαισθητικό

επίπεδο, παρουσιάζεται στους μαθητές ως μία συλλογή «ορισμών», ονομάζοντας και παρουσιάζοντας γεωμετρικά σχήματα, και αναφέροντας συγκεκριμένες ιδιότητες (Mariotti, 2000). Επιπλέον, από τους μαθητές δεν ζητείται ποτέ να δικαιολογήσουν την γνώση τους, η αλήθεια της οποίας θεωρείται άμεση και αυτονόητη. Κατά συνέπεια, με την έναρξη του Λυκείου, οι μαθητές έχουν γενικά ένα διαισθητικό γεωμετρικό υπόβαθρο, που πρέπει να αναδιοργανωθεί σύμφωνα με μία παραγωγική προσέγγιση.

Αρκετοί ερευνητές θεωρούν ότι αυτές οι δυσκολίες οφείλονται στο ότι το εκπαιδευτικό μας σύστημα στοχεύει στην απομνημόνευση ορισμών, θεωρημάτων και αφηρημένων εννοιών με στόχο την λύση των ασκήσεων και την αντιμετώπιση των εξετάσεων. Οι μαθητές θεωρούν ότι προκειμένου να είναι σε θέση να μάθουν μια αποδεικτική διαδικασία αρκεί να απομνημονεύσουν αυτά που διατυπώνονται από το διδάσκοντα ή το σχολικό βιβλίο. Βλέπουν ουσιαστικά την απόδειξη σαν ένα μέσο επαλήθευσης, και δεν διακρίνουν το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει στο μάθημα της γεωμετρίας. Αυτό ενισχύεται και από την ανεπαρκή διαισθητική κατανόηση των εννοιών και ορισμών της γεωμετρίας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να αδυνατούν να κατανοήσουν την χρησιμότητα μιας απόδειξης, αλλά και να την κατασκευάσουν. Πολλοί καθηγητές θα έχουν έρθει σε επαφή με την ερώτηση των μαθητών «γιατί πρέπει να το αποδείξουμε αυτό αφού βλέπουμε ότι ισχύει;» ειδικά όταν μια πρόταση είναι προφανής ότι ισχύει. Σύμφωνα με τον de Villiers (1999) αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δουν την χρησιμότητα και σπουδαιότητα της απόδειξης.

Σύμφωνα με τον Dreyfus (1990) ταξινομεί σε τρείς κατηγορίες τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές για την κατάκτηση της αποδεικτικής διαδικασίας:

1) Οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη της απόδειξης.

2) Αδυνατούν να συλλάβουν το στοιχείο του «λογικά αναπόφευκτου».

3) Δυσκολεύονται να διατυπώσουν την απόδειξη.

Βασικός παράγοντας για τον οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον σκοπό και την χρήση της απόδειξης είναι ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί διδάσκουν σύμφωνα με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας στο

οποίο οι μαθητές είναι παθητικοί ακροατές και η μάθηση είναι αφηγηματική. Γι αυτό το λόγο πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι ένας κλάδος αφηρημένος ξεκομμένος από την καθημερινή ζωή. Ακόμα και όταν οι μαθητές πετύχουν να κατασκευάσουν μια απόδειξη, δε βλέπουν την αναγκαιότητα της (Hadas et al, 2000).

Η αποτυχία των μαθητών να κατακτήσουν την έννοια της απόδειξης βασίζεται κυρίως στο ότι αδυνατούν να κατανοήσουν την αναγκαιότητα και το νόημα των αυστηρών αποδείξεων, ιδιαίτερα όταν μια απόδειξη επικυρώνει προφανή αποτελέσματα της παρατήρησης και της διαίσθησης τους (Balacheff, 1991). Σύμφωνα με τις θεωρήσεις τους δεν είναι αναγκαίο να αποδειχθεί οτιδήποτε είναι γνωστό ότι ισχύει.

Ο Balacheff (1991) υποστηρίζει ότι οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν μια γεωμετρική απόδειξη και τη χρησιμότητά της εάν δεν εμπλακούν με τη διαδικασία κατασκευής της. Κάνουν αποδείξεις γιατί ο καθηγητής τους το απαιτεί και όχι γιατί αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της απόδειξης (Balacheff, 1988). Εάν οι μαθητές πεισθούν για την αλήθεια μιας πρότασης χωρίς να την αποδείξουν τότε είναι πολύ πιθανό να θεωρήσουν τη διαδικασία της απόδειξης ανούσια (Hanna & Jahnke, 1993; Tall, 1992; de Villiers, 1990).

Υπάρχουν, όμως, φορές που οι μαθητές δείχνουν να έχουν κατανοήσει ένα θεώρημα και την απόδειξή του, ωστόσο αυτό μπορεί να μην είναι αληθές για αυτό το λόγο θα πρέπει να επιβεβαιωθεί καλώντας τους μαθητές να το εφαρμόσουν (Fischbein, 1982). Η χρήση υπολογιστή και ειδικά, η χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, βοηθά τους μαθητές ώστε να οπτικοποιήσουν και να ανακαλύψουν τη νέα γνώση κάτι που δεν θα μπορούσαν να κάνουν στην διδασκαλία χωρίς τη χρήση νέων τεχνολογιών.

Ένας άλλος λόγος που δυσκολεύει τους μαθητές με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης είναι ότι αδυνατούν να εφαρμόσουν λογικούς κανόνες, και να χρησιμοποιήσουν σωστά τη μαθηματική γλώσσα. Συχνά οι μαθητές δηλώνουν ότι η απόδειξη είναι μια δύσκολη και δυσνόητη διαδικασία την οποία όταν καλούνται να σχολιάσουν δίνουν επί το πλείστο τις εξής απαντήσεις:

α) «Μισώ τις αποδείξεις, γιατί δεν τις καταλαβαίνω»

β) «Γιατί πρέπει να αποδείξω κάτι αφού φαίνεται ότι ισχύει»

γ) «Εγώ εμπιστεύομαι τον Ευκλείδη που τα απέδειξε οπότε δεν χρειάζεται να τα αποδείξουμε και εμείς» (Healy & Hoyles, 1998).

1.5) Ο ρόλος της εικασίας στην πορεία της απόδειξης

Οι δυσκολίες των μαθητών για την απόδειξη οδήγησαν στο να επαναπροσδιοριστεί ο ρόλος της κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Μια εναλλακτική πρόταση είναι η παραγωγή εικασιών η οποία προηγείται της τυπικής αφαιρετικής απόδειξης. Σύμφωνα με το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) ο ρόλος της εικασίας θεωρείται αναπόσπαστο μέρος της πορείας προς την τυπική απόδειξη. Η εικασία και η άτυπη κατασκευή της απόδειξης πρέπει να προετοιμάζουν τους μαθητές για την πιο αυστηρή πράξη της παραγωγικής απόδειξης.

Η παραγωγή εικασιών και η απόδειξη πρέπει να είναι κεντρική για τη διδασκαλία των μαθητών. Ωστόσο, υπάρχει μια δυσκολία για το πώς θα οδηγήσουμε τους μαθητές στο να παράγουν εικασίες. Πρέπει οι διδάσκοντες να δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να συνδέουν τη διαισθητική απόδειξη που κατασκευάζουν με την τυπική απόδειξη. Σύμφωνα με το NCTM standards (2000) οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί :

- Να ανακαλύπτουν σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων και να κάνουν εικασίες.
- Να επιβεβαιώσουν τις εικασίες τους με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης.

Είναι δυνατόν η απόδειξη ενός θεωρήματος ή ενός ισχυρισμού να προέλθει μέσα από εικασίες, μέσα δηλαδή από άτυπες αιτιολογήσεις οι οποίες είναι η βάση για την θεωρητική απόδειξη. Βασική προϋπόθεση όμως είναι η δημιουργία ενός κατάλληλου περιβάλλοντος από τον εκπαιδευτικό ώστε οι μαθητές μέσα από την οπτικοποίηση, την εξερεύνηση, τη δοκιμή, τον πειραματισμό, την αλληλεπίδραση να μπορέσουν να κάνουν τις δικές τους υποθέσεις χωρίς να στηρίζονται στην βοήθεια του δασκάλου ή του βιβλίου.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να φτάσουμε να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση είναι λογικό να θέλουμε να δούμε πρώτα πώς προέκυψε αυτή η πρόταση ως εικασία. Δηλαδή, ξεκινώντας από κάποια κατάσταση προβλήματος και μετά από κατάλληλες σκέψεις

να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανό να ισχύει η συγκεκριμένη πρόταση. Παρόλα αυτά η δημιουργία εικασιών απουσιάζει από την διδασκαλία των μαθηματικών με συνέπεια να μην φαίνεται η διαδικασία που προέκυψε η διατύπωση των θεωρημάτων.

Αυτό που έχει παρατηρηθεί μέσα από έρευνες είναι ότι μια πλειοψηφία μαθητών προκειμένου να καταλήξει στην αλήθεια ή όχι μιας πεποίθησης βασίζεται στην αυθεντία του δασκάλου ή του βιβλίου και όχι στην προσωπική τους πεποίθηση (de Villiers, 1992). Επίσης, οι μαθητές προκειμένου να κάνουν εικασίες χρειάζονται ένα κατάλληλο περιβάλλον το οποίο να ενισχύει τον πειραματισμό και την παραγωγή εικασιών, γεγονός το οποίο είναι δύσκολο όταν απλά τους παραδίδεται ένα έγγραφο με προβλήματα και ερωτήσεις. Γι αυτό το λόγο η χρήση νέων τεχνολογιών με τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικών μεταβολών των αντικειμένων μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στη δημιουργία εικασιών από τη χρήση χαρτιού-μολυβιού.

Είναι γεγονός ότι η παραδοσιακή διδασκαλία έχοντας σαν στόχο την παρουσίαση στους μαθητές των μαθηματικών αποτελεσμάτων αλλά και την απομνημόνευση αυτών δεν ενισχύει ή ενισχύει ελάχιστα την παραγωγή εικασιών. Αντιθέτως, η παρατήρηση δεδομένων, η αναζήτηση μοτίβων (patterns) και η δημιουργία γενικεύσεων ενισχύει την παραγωγή εικασιών.

Υπάρχουν λογισμικά τα οποία ενισχύουν τους μαθητές στο να παράγουν εικασίες και να κατασκευάσουν την απόδειξη των εικασιών τους. Το Geometer’s Sketchpad βοηθά τους μαθητές στο να κάνουν εικασίες και τους παρέχει ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές διαισθητικά ανακαλύπτουν σχέσεις και προσπαθούν να μεταβούν στην τυπική κατασκευή της απόδειξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{0}

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1) Ψηφιακά εργαλεία και μαθηματική απόδειξη

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές δημιουργούν νοήματα και κάνουν υποθέσεις αποτελεί ένα πεδίο το οποίο αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει. Αντίστοιχο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές κάνουν το πέρασμα από την «εικόνα» της δραστηριότητας στην αναγνώριση της αναγκαιότητας της απόδειξης.

Σύμφωνα με τη Mariotti (1995) η γεωμετρία είναι ένας χώρος όπου οι εικόνες και οι έννοιες βρίσκονται συνεχώς σε αλληλεπίδραση. Για αυτό το λόγο ενδείκνυται η χρήση ενός δυναμικού περιβάλλοντος γεωμετρίας στην εκμάθηση της γεωμετρίας, αφού βοηθά στην ανάπτυξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ του εικονικού και του εννοιολογικού μέρους της γεωμετρικής λογικής. Τα σχήματα στην γεωμετρία έχουν ένα πολύπλοκο ρόλο στην παρουσίαση της γεωμετρικής γνώσης. Δεν είναι απλά ένα αντικείμενο αποτελεί έναν εκπρόσωπο μιας κλάσης άπειρων αντικειμένων που έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες (Fischbein, 1993). Με αυτό τον τρόπο γίνεται ουσιαστικά μια αλληλοσυσχέτιση του σχεδίου και του σχήματος, δηλαδή γίνεται αλληλεπίδραση του σχήματος και των εννοιών που υποκρύπτει. Επομένως, τα εκπαιδευτικά λογισμικά βοηθούν στην ανάπτυξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ του εικονικού και του εννοιολογικού μέρους της γεωμετρικής λογικής.

Οι Hoyles και Noss (2009) προσπάθησαν να ερευνήσουν τη φύση της μαθηματικής γνώσης που αναπτύσσεται κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με ψηφιακά εργαλεία και πώς η γνώση αυτή σχετίζεται με την επίσημη μαθηματική γνώση. Δεχόμενοι το Constructionism ως τρόπο μάθησης για τα μαθηματικά θεωρούν σχεδόν αυτονόητη την ανάγκη εισαγωγής κατάλληλων εργαλείων προκειμένου να ενισχύσουμε την προσπάθεια των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων. Τα εργαλεία αυτά μπορούν να είναι στατικά ή να στηρίζονται στα επιτεύγματα της σύγχρονης τεχνολογίας. Τα ψηφιακά εργαλεία είναι καταλληλότερα για την

κατασκευή μαθηματικών εννοιών, βασικός λόγος είναι ο δυναμικός χειρισμός τους και η αλληλεπίδραση με τον μαθητή σε πραγματικό χρόνο.

Η αλληλεπίδραση με τον υπολογιστή γίνεται μέσα από τις λειτουργίες και τις εντολές που βρίσκονται στο δυναμικό περιβάλλον. Η εικόνα είναι ένα μέρος διαμεσολάβησης όπως και οι λειτουργίες του συρσίματος, με τις οποίες μπορούν να μετακινηθούν τα στοιχεία στην οθόνη του υπολογιστή. Η σχεδίαση του σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή γίνεται με τις εντολές του λογισμικού, και η «αλλοίωσή» του γίνεται με διαφορετικό τρόπο διαμεσολάβησης. Είτε μέσω των εντολών του λογισμικού είτε μέσω του «συρσίματος». Σύμφωνα με τον Hölzl (1996) ορισμένα αντικείμενα σύρονται κατά την διαδικασία του drag mode, διατηρώντας όμως τις ιδιότητες με τις οποίες κατασκευάστηκαν. Με αυτή τη δυνατότητα του λογισμικού, δηλαδή της κατασκευής μιας απειρίας σχημάτων της ίδιας κλάσης, δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να δει πολλές όψεις του ίδιου σχήματος.

Οι Hoyles και Noss (1989) υποστηρίζουν ότι το περιβάλλον του υπολογιστή δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές μέσα από την διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων να κάνουν γενικεύσεις. Αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι οι μαθητές μπορούσαν να κάνουν γενικεύσεις μέσα από τον πειραματισμό στο δυναμικό περιβάλλον του Geometer’s Sketchpad και να συνδέσουν την επαγωγική σκέψη που ανέπτυξαν με την παραγωγική.

2.2) Τα ψηφιακά εργαλεία ως μέσα σημειωτικής διαμεσολάβησης.

Σύμφωνα με τον Vygotsky υπάρχει μια διαλεκτική εξάρτηση μεταξύ των πρακτικών εργαλείων και των συμβολικών εργαλείων. Είναι είτε εξωτερικά προσανατολισμένα και χρησιμεύουν ως αγωγός της ανθρώπινης επιρροής στο αντικείμενο της δραστηριότητας είτε, εσωτερικά προσανατολισμένα και στοχεύουν στον έλεγχο της δράσης. Ο Vygotsky (1978) στην κατηγορία των διαμεσολαβητών τοποθετεί αυτά που ονομάζει εργαλεία (tools) και σημεία (signs) ή γενικότερα όργανα σημειωτικής διαμεσολάβησης (instruments of semiotic meditation). Παρόλο που και τα δύο είδη, εργαλεία και σημεία, παράγονται και χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο, διαφέρουν ως προς τη λειτουργία διαμεσολάβησης τους. Τα εργαλεία είναι εξωτερικά προσανατολισμένα ενώ τα σημεία είναι εσωτερικά προσανατολισμένα. Σύμφωνα με την Mariotti (2000) μέσω της διαδικασίας της εσωτερίκευσης τα εργαλεία μπορούν να μετασχηματιστούν σε ψυχολογικά εργαλεία. Κατά τη

διαδικασία αυτή ένα εργαλείο μετατρέπεται σε ένα ψυχολογικό εργαλείο και παρέχει δυνατότητες να διαμορφωθούν νέες έννοιες και επομένως λειτουργεί ως σημειωτικός διαμεσολαβητής.

Οι μαθητές στα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας χρησιμοποιούν τα εργαλεία του λογισμικού για να κάνουν υποθέσεις, αιτιολογήσεις και να προβούν στον έλεγχο της ορθότητας ενός συλλογισμού. Συγκεκριμένα, ακολουθούν μια διαδικασία ανακάλυψης στην οποία τα διάφορα εργαλεία μπορούν να θεωρηθούν ως «εξωτερικά σημεία» (signs) αναφερόμενα σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια και επομένως σαν εργαλεία σημειωτικής διαμεσολάβησης (Mariotti, 2002). Συνεπώς, τα εργαλεία μπορούν να διαμεσολαβήσουν μεταξύ του μαθητή και των μαθηματικών εννοιών που κατασκευάζονται στα πλαίσια μιας μαθηματικής δραστηριότητας (Jones, 1997). Ειδικότερα, αναφέρεται ότι:

- Τα εργαλεία αποτελούν συσκευές προς πρόσβαση στη γνώση
- Τα εργαλεία τροποποιούν τις διανοητικές δραστηριότητες
- Τα εργαλεία διαμεσολαβούν και επηρεάζουν τις ενέργειες των μαθητών
- Η δραστηριότητα μάθησης, τα εργαλεία και οι ενέργειες του μαθητή συνδέονται μεταξύ τους
- Η κατανόηση μιας έννοιας συνδέεται με τον τύπο των εργαλείων που έχει χρησιμοποιηθεί.

Επιπλέον, τα σχήματα που παράγονται αποτελούν υπολογιστικά αντικείμενα, που σημαίνει ότι οι ιδιότητές τους διατηρούνται ενώ το σχήμα τους αλλάζει μέσω του άμεσου χειρισμού. Γενικά, τα εργαλεία που παρέχονται και οι γεωμετρικές κατασκευές που διαμορφώνονται, διαδραματίζουν το ρόλο των διαμεσολαβητών μεταξύ των γεωμετρικών εννοιών που ενσωματώνουν και του μαθητή κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων. Στα περισσότερα δυναμικά περιβάλλοντα οι χρήστες αλληλεπιδρούν άμεσα μέσω του ποντικιού ώστε να κατασκευάσουν, να χειριστούν και να διερευνήσουν γεωμετρικά σχήματα.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η λειτουργία του συρσίματος η οποία φέρνει στο προσκήνιο τη σχέση μεταξύ σχήματος και σχεδίου. Το dragging σύμφωνα με τον Vygotsky μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης αφού μετακινεί τα αντικείμενα αλλάζοντάς τους σχήμα. Μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα

εξωτερικό σημείο (sign) αφού οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν θεωρητικές πτυχές της γεωμετρίας.

2.3) Η εμφάνιση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην σχολική πρακτική

Με την εισαγωγή των λογισμικών στην εκπαίδευση έχει αλλάξει ο τρόπος προσέγγισης και διδασκαλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας. Αρκετοί ερευνητές χαρακτήρισαν ορισμένα περιβάλλοντα λογισμικού σαν γνωστικά περιβάλλοντα γιατί παίζουν σημαντικό ρόλο στην γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Μέσα σε αυτά τα περιβάλλοντα οι μαθητές έχουν την δυνατότητα για «ενεργή μάθηση» και ενεργοποιούν διαφορετικούς τρόπους σκέψεις (Clements, 1989). Τα δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα αποτελούν εικονικά εργαστήρια στα οποία οι μαθητές μπορούν να παίξουν, να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν σχήματα με μεγάλη ακρίβεια. Σύμφωνα με τους Arcavi και Hadas με τη δυνατότητα που παρέχουν τα λογισμικά δυναμικού περιβάλλοντος στους μαθητές, να σχεδιάσουν αυτό που τους ζητείται, είναι σε θέση να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα του προβλήματος ώστε να μπορούν να κάνουν περισσότερες υποθέσεις. Σε αντίθεση με τα περιβάλλοντα που οι μαθητές χρησιμοποιούν χαρτί και μολύβι στα οποία δυσκολεύονται να δημιουργήσουν σχήματα, να κατανοήσουν αφηρημένες έννοιες και να δουν τη χρησιμότητά τους στην καθημερινή τους ζωή.

Το κύριο πλεονέκτημα των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας είναι ότι οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν σύνθετα γεωμετρικά σχήματα και μπορούν να κάνουν μετασχηματισμούς ώστε οι μαθητές να έχουν πρόσβαση σε μια μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων, ασύγκριτα μεγαλύτερη από αυτή που προσφέρουν τα στατικά περιβάλλοντα (Marrades & Guitierrez 2001). Οι μαθητές σε αυτά τα περιβάλλοντα βρίσκονται αντιμέτωποι με καταστάσεις που τους δημιουργούν αβεβαιότητες τις οποίες μέσα από τον πειραματισμό προσπαθούν να εξηγήσουν. Σκέφτονται δυναμικά προσπαθώντας να βρουν τεχνικές και στρατηγικές ώστε να επιλύσουν το ζητούμενο πρόβλημα. Κάνουν υποθέσεις των οποίων ο έλεγχος οδηγεί τους μαθητές σε εκπλήξεις γεγονός που πυροδοτεί την ανάπτυξη της ανάγκης τους για επανεξέταση των υποθέσεών τους (Arcavi & Hadas, 2000). Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επανορθώσουν τα λάθη τους με το πάτημα ενός πλήκτρου με αποτέλεσμα να οδηγούνται στην ανάπτυξη νέων εννοιών και στην τροποποίηση λανθασμένων εικασιών.

Με άλλα λόγια τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας παρέχουν στον μαθητή ένα περιβάλλον ελεύθερο όπου μπορεί να κατασκευάσει γεωμετρικά σχήματα γρήγορα και με μεγάλη ακρίβεια. Μέσα από την οπτικοποίηση μπορούν να διατυπώσουν υποθέσεις, να τις διερευνήσουν, να συζητήσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν. Έχει δηλαδή ο μαθητής μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον την ελευθερία του λάθους και της άμεσης διόρθωσής του. Προωθείται η ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης με τρόπο πρωτότυπο, που εστιάζει το ενδιαφέρον των μαθητών στα μαθηματικά (Jones, 2002).

Τα λογισμικά δυναμικού περιβάλλοντος που έχουν εμφανιστεί τα τελευταία χρόνια (Geogebra, Cabri, Geometer's Sketchpad) στοχεύουν στην παραγωγή εικασιών με την κίνηση που παρέχουν σαν λειτουργία και βοηθούν στην ανάπτυξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ του εικονικού και εννοιολογικού μέρους της γεωμετρικής λογικής. Η λειτουργία αυτή του λογισμικού δημιουργεί νέες διαδρομές στη θεωρητική γνώση σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον που είναι σημαντικό για τους μαθητές (Hanna & de Villiers, 2008).

Σύμφωνα με την Mariotti (2005) ένα δυναμικό περιβάλλον το οποίο περιέχει «αντικείμενα» όπως σημεία, γραμμές, κύκλους είναι ένας μικρόκοσμος. Βασικό στοιχείο των μικρόκοσμων είναι ότι «τα αντικείμενα» που περιλαμβάνονται προσφέρουν την ευκαιρία στο χρήστη να πειραματιστεί απευθείας με τα «μαθηματικά αντικείμενα» επειδή το λογικό σκεπτικό πίσω από τα αντικείμενα στο μικρόκοσμο, έχει σχεδιαστεί για να είναι το ίδιο με εκείνο πίσω από τα πραγματικά μαθηματικά αντικείμενα που εκπροσωπούν.

Ο μαθητής εργάζεται σε ένα τέτοιο περιβάλλον μεταβάλλοντας το σχήμα χωρίς να είναι αναγκασμένος να το σχεδιάσει από την αρχή εξερευνώντας τις ιδιότητές του κάτι το οποίο δεν θα μπορούσε να το κάνει σε περιβάλλον με χαρτί και μολύβι (Healy & Hoyles, 2001). Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να κάνουν εικασίες, να γενικεύσουν και να δέχονται ή να απορρίπτουν την ισχύ ενός κανόνα. Δίνει επομένως τη δυνατότητα στους μαθητές να ανακαλύψουν αν μια εικασία τους είναι σωστή ή όχι, εάν είναι λανθασμένη επαναπροσδιορίζουν την εικασία τους και στην περίπτωση που η αρχική υπόθεσή τους είναι σωστή αποδεικνύουν και γενικεύουν τα συμπεράσματά τους. Σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές βλέποντας την γραφική απεικόνιση γεωμετρικών

αντικειμένων μπορούν εύκολα να πειστούν για την γενική ισχύ μιας εικασίας (Hoyles & Healy, 1991).

Η δημιουργία εικασιών, η αιτιολόγηση και η απόδειξη είναι τρόποι που ενισχύουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, γι αυτό το λόγο είναι πολύ σημαντικό να παροτρύνουμε τους μαθητές να κάνουν εικασίες. Ωστόσο, θα πρέπει οι μαθητές να είναι ικανοί να αποδείξουν τις εικασίες τους δηλαδή, να περάσουν από τον εμπειρικό κόσμο στον κόσμο των τυπικών μαθηματικών και σε αυτή την προσπάθεια το λογισμικό είναι μια γέφυρα ανάμεσα σε αυτούς τους δύο κόσμους, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς όλα τα απαραίτητα εφόδια προκειμένου οι μαθητές να ξεπεράσουν στις δυσκολίες (Baccaglini & Mariotti, 2010).

2.4) Το «Σύρσιμο» (Dragging) και οι λειτουργίες του

Η λειτουργία του συρσίματος ενισχύει αυτή την προσπάθεια, υποστηρίζοντας την παραγωγή εικασιών γιατί επιτρέπει στους χρήστες να ανακαλύψουν ιδιότητες των σχημάτων και να εξερευνήσουν σχήματα μέσα από την μετακίνηση. Σύμφωνα με τον Arzarello et al. (2000) προσφέρει ανατροφοδότηση στη φάση της ανακάλυψης παρέχοντας υποστήριξη στο ρόλο των αποδείξεων ως πραγματικών «εξηγήσεων» των εικασιών ή των ιδιοτήτων.

Επιπλέον, η διαδικασία συρσίματος ισχυροποιεί την υπόθεση αφού αυτή επιβεβαιώνεται από την εξερεύνηση των σχεδίων με την κίνησή τους και των τρόπων με τους οποίους αλλάζουν οι μορφές τους (Hanna, 2000; Arzarello et al., 2002; de Villiers, 1998). Αυτό βοηθά τους μαθητές να διαμορφώσουν μια νοητική εικόνα και να ανακαλύψουν νέες ιδιότητες και προτάσεις. Η λειτουργία του συρσίματος ενθαρρύνει την διερεύνηση και ενισχύει την πεποίθηση των μαθητών για ορθότητα των εικασιών τους (Arzarello et al., 2002).

Αναφέρεται ότι σύμφωνα με τον Hölzl (2001) η λειτουργία του συρσίματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους :

- Ως εργαλείο διερεύνησης, όπου οι μαθητές μεταβάλλοντας τις γεωμετρικές κατασκευές μπορούν να διατυπώσουν υποθέσεις για τις γεωμετρικές τους ιδιότητες.

- Ως εργαλείο ελέγχου, δηλαδή οι μαθητές μπορούν να επαληθεύσουν τις εικασίες που έχουν διαμορφώσει και να οδηγηθούν σε νέα συμπεράσματα.

Επίσης, η λειτουργία του συρσίματος δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να περάσουν από το «ειδικό» του συγκεκριμένου σχήματος στο «γενικό» το οποίο είναι αυτό που μας ενδιαφέρει στα μαθηματικά. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της λειτουργίας του συρσίματος η οποία επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα και να κάνουν εικασίες τις οποίες να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν (Marrades & Guitierrez, 2001). Εάν απορρίψουν μια εικασία, μπορούν να ξεκινήσουν από την αρχή μια νέα και με αυτό τον τρόπο της εξερεύνησης μπορούν να αποδείξουν αφαιρετικά την εικασία. Μια επιτυχημένη εικασία οδηγεί στην διατύπωση της απόδειξης και στο να τελειώσει η διαδικασία της ανακάλυψης, μπορεί όμως να ενεργοποιήσει το μαθητή στη δημιουργία νέων εικασιών. Συνεπώς, η πρακτική του συρσίματος λειτουργεί σαν διαμεσολαβητής κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα και από το σχήμα στη θεωρία.

Σύμφωνα με τον Arzarello αναφέρονται οι εξής διαδικασίες:

- **Ανερχόμενες ή ανιούσες διαδικασίες (ascending processes)**, από το σχήμα στη θεωρία, ώστε να εξερευνήσουν ελεύθερα μια κατάσταση .
- **Κατερχόμενες ή κατιούσες διαδικασίες(descending processes)** , από τη θεωρία στα σχήματα, ώστε να επιβεβαιωθούν ή να απορριφθούν ο εικασίες.

Αυτή η εναλλαγή από τη θεωρία στο σχήμα και από το σχήμα στη θεωρία γίνεται με την απαγωγή (abduction). Σύμφωνα με τον Arzarello (1998) η απαγωγική διαδικασία παρατηρείται όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν τις λειτουργίες του συρσίματος.

Τα σχήματα σε αυτά τα περιβάλλοντα είναι γεωμετρικά αντικείμενα στα οποία μπορούμε να τους αλλάξουμε τη μορφή διατηρώντας όμως τις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες με τις οποίες κατασκευάστηκαν. Δίνει επομένως τη δυνατότητα στους μαθητές να παίξουν, να εξερευνήσουν και να μάθουν μαθηματικά, οι οποίοι μπορούν να κάνουν παρατηρήσεις στο λογισμικό μέσα από τους διαφορετικούς τύπους του dragging και να οδηγηθούν στην αναζήτηση της απόδειξης (Arcavi & Hadas, 2000).

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους συρσίματος ανάλογα με το τι θέλουν να ανακαλύψουν κάθε φορά. Σύμφωνα με τους Arzarello et al. (1998), Olivero (1999) και Arzarrello (2001) οι διαφορετικοί τύποι συρσίματος είναι οι εξής:

- **Wandering dragging** (σύρσιμο περιπλάνησης): Μετακινώντας με τυχαίο τρόπο τα σημεία στην οθόνη προσπαθούν να ανακαλύψουν διαμορφώσεις ή κανονικότητες στα σχήματα.
- **Guided dragging** (καθοδηγούμενο σύρσιμο): Σύροντας βασικά σημεία του σχήματος ώστε να του δώσουν ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- **Dummy locus dragging** (σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου): Μετακινώντας ένα βασικό σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί.
- **Dragging test** (σύρσιμο ελέγχου): Μετακινώντας συρόμενα ή ημι-συρόμενα σημεία ώστε να δουν αν το σχέδιο διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες. Αν ναι τότε το σχήμα περνάει τον έλεγχο αν όχι τότε το σχέδιο δεν κατασκευάστηκε με βάση τις γεωμετρικές ιδιότητες που θέλουν να έχει.
- **Line dragging** (σύρσιμο γραμμής): Σχεδιάζοντας νέα σημεία κατά μήκος μιας γραμμής ώστε να διατηρήσουν την κανονικότητα του σχήματος.
- **Linked dragging** (συνδεδεμένο σύρσιμο): Συνδέοντας ένα σημείο με ένα αντικείμενο και μετακινώντας το πάνω σε αυτό το αντικείμενο.

Οι Arzarello et al. (2002) υποστηρίζουν ότι οι μορφές συρσίματος συνδέονται με τις φάσεις ανόδου και καθόδου και με τις γνωστικές διαδικασίες των μαθητών που στοχεύουν στην διερεύνηση, στην ανακάλυψη, τη διατύπωση της υπόθεσης, τον έλεγχο της υπόθεσης και την επικύρωση της υπόθεσης. Το σύρσιμο και συγκεκριμένα οι ειδικότητες συρσίματος, μπορούν να ευνοήσουν την απαγωγική διαδικασία και κατά συνέπεια την παραγωγή εικασιών.

Οι παραπάνω τύποι συρσίματος χρησιμοποιούνται από τους μαθητές κατά τη διάρκεια επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων για διαφορετικούς σκοπούς ώστε να εικάσουν, να παρατηρήσουν, να εξερευνήσουν, να επικυρώσουν ή να αιτιολογήσουν τις εικασίες τους. Για παράδειγμα, στη φάση της διερεύνησης οι μαθητές χρησιμοποιούν το wandering dragging (σύρσιμο περιπλάνησης) και guided dragging (καθοδηγούμενο σύρσιμο), ενώ για την κατασκευή μιας εικασίας χρησιμοποιούν το

dummy locus dragging (σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου) και για τον έλεγχο αυτής χρησιμοποιούν το dragging test (σύρσιμο ελέγχου) (Arzarello et al., 2002).

Αυτό που έχει παρατηρηθεί είναι ότι οι διαφορετικοί τύποι συρσίματος ενεργοποιούν τους μαθητές στο να κάνουν απαγωγικές σκέψεις, να εικάζουν και να καταγράφουν τις εικασίες τους σε μια πιο ολοκληρωμένη μορφή για παράδειγμα εάν έχουν παρατηρήσει ότι ισχύει το Α τότε θέλουν να αποδείξουν ότι θα ισχύει και το Β, το οποίο καλούνται στην συνέχεια να το αποδείξουν.

Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι διάφορες μορφές συρσίματος στην δυναμική γεωμετρία ποικίλλει και έχει αρκετή σημασία γιατί :

- Καθορίζει τους τύπους των επεξηγήσεων και τις φάσεις λύσης των προβλημάτων απόδειξης.
- Μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν την ανάγκη για τυπικές αιτιολογήσεις και αποδείξεις στα μαθηματικά (Marrades & Guitierrez, 2000).

Συνεπώς, το σύρσιμο υποστηρίζει την παραγωγή εικασιών εξερευνώντας σχήματα ψάχνοντας ιδιότητες που αλλάζουν (ή δεν αλλάζουν) επιτρέποντας στο χρήστη να ανακαλύψει τις αμετάβλητες ιδιότητες. Λειτουργεί ως διαμεσολαβητής κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα και αντίστροφα η οποία πραγματοποιείται μέσα από απαγωγικές διαδικασίες. Άρα μπορούμε να ισχυριστούμε πως τα περιβάλλοντα δυναμικής Γεωμετρίας (DGEs) διευκολύνουν τη μετάβαση από την εικασία στην απόδειξη και ως εκ τούτου συμβάλλουν στην ενίσχυση των αποδεικτικών διαδικασιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1) Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα

Αυτό που θα μας απασχολήσει στην παρούσα έρευνα είναι εάν και πώς οι μαθητές αναπτύσσουν εικασίες εργαζόμενοι σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας και τελικά εάν τους δημιουργείται η ανάγκη για κατασκευή της τυπικής απόδειξης. Οι μαθήτριες συνεργάζονταν μεταξύ τους σε ένα περιβάλλον νέων τεχνολογιών που έχουν την δυνατότητα για χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικές μεταβολές των αντικειμένων. Σύμφωνα με τους Hanna και de Villiers (2008) τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στοχεύουν στην παραγωγή εικασιών και βοηθούν στην ανάπτυξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ του εικονικού και εννοιολογικού μέρους της γεωμετρικής λογικής.

Πιο συγκεκριμένα θα μας απασχολήσουν τα παρακάτω ερωτήματα:

- ✓ Με ποιούς τρόπους μαθητές Β΄Λυκείου δημιουργούν εικασίες ενώ εργάζονται σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και διερευνούν γεωμετρικές δραστηριότητες;
- ✓ Πώς τα διαθέσιμα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας συνεισφέρουν και με ποιούς τρόπους στην αναγνώριση της ανάγκης για κατασκευή της τυπικής απόδειξης και στην ολοκλήρωσή της με χαρτί και μολύβι;

Η μελέτη αυτών των δύο ερωτημάτων πραγματοποιήθηκε σε μια μελέτη περίπτωσης με δύο ομάδες μαθητών που εργάστηκαν σε δύο δραστηριότητες. Αρχικά, οι μαθήτριες διερεύνησαν τα προβλήματα που περιλαμβάνονταν στις δραστηριότητες, καταγράφηκαν οι διάλογοί τους κατά την επίλυσή τους και αναλύθηκαν για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Η ανάλυση των διαλόγων μας οδήγησε στα συμπεράσματα της έρευνας και στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

3.2) Ερευνητική διαδικασία

Αρχικά, στις μαθήτριες δόθηκε μια δραστηριότητα με βασικές γεωμετρικές κατασκευές, τις οποίες καλούνταν να κατασκευάσουν οι ίδιοι, προκειμένου να εξοικειωθούν με το λογισμικό του Sketchpad. Σκοπός αυτής της δραστηριότητας ήταν οι μαθήτριες να έρθουν σε επαφή με βασικές λειτουργίες του λογισμικού να συνεργαστούν, να πάρουν πρωτοβουλίες και να συμπληρώσουν τα ερωτήματα της δραστηριότητας. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα στόχευε στην εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό, δεν είχε στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Στην συνέχεια δόθηκε στις μαθήτριες η δεύτερη δραστηριότητα η οποία απαντά στα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας, στην οποία καλούνταν να αντιμετωπίσουν μια γεωμετρική δραστηριότητα κάνοντας εικασίες και κατασκευάζοντας γεωμετρικές αποδείξεις. Κάθε ομάδα ασχολήθηκε 3 ώρες για τη διεκπεραίωση της πρώτης δραστηριότητας και 3 για τη δεύτερη.

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 4 μαθήτριες Β' λυκείου: Κατερίνα (Κ) και Δανάη (Δ) (1η ομάδα), Ελένη (Ε) και Νάνσυ (Ν) (2η ομάδα) και πραγματοποιήθηκαν με την κάθε ομάδα χωριστά 2 τρίωρες συναντήσεις στις 16 και 17 Απριλίου 2014. Η επιλογή των μαθητών έγινε με βάση το ενδιαφέρον που έδειξαν να συμμετέχουν εθελοντικά στην συγκεκριμένη έρευνα και στη θετική τους στάση απέναντι στα μαθηματικά και στη γεωμετρία. Οι μαθήτριες χωρίστηκαν σε ομάδες προκείμενου να συνεργαστούν μεταξύ τους για την επίλυση των δραστηριοτήτων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι μαθήτριες έρχονταν για πρώτη φορά σε επαφή με το λογισμικό του Sketchpad. Τα ονόματα των μαθητριών είναι πλασματικά αλλά αντιπροσωπεύουν τους μαθητές ως προς το φύλο. Το επίπεδο των μαθητριών ήταν από μέτριο έως πολύ καλό (βαθμολογίες στα μαθήματα των μαθηματικών 15 - 18).

3.3) Συλλογή δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων και στις δύο φάσεις έγινε με την καταγραφή των παρατηρήσεων από την ερευνήτρια καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας των μαθητών. Επίσης, έγινε ηχογράφηση των μαθητριών κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων με μαγνητόφωνο που ήταν μπροστά στις μαθήτριες ώστε να ακούγονται καθαρά οι διάλογοι τους. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της έρευνας έγινε καταγραφή της οθόνης του υπολογιστή και όλων των ενεργειών των μαθητριών με το πρόγραμμα Hyper Cam. Οι μαθήτριες κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων

συμπλήρωναν τα φύλλα εργασίας που τους είχαν δοθεί τα οποία στο τέλος των δραστηριοτήτων κρατήθηκαν προκειμένου να μελετηθούν οι απαντήσεις τους.

3.4) Δραστηριότητες

Σχεδιάστηκαν δύο δραστηριότητες που αντιστοιχούσαν σε δυο διαφορετικά φύλλα εργασίας, ώστε να ανταποκρίνονται στα ερευνητικά ερωτήματα. Μέρος των δραστηριοτήτων αυτών βασίστηκε σε ιδέες που είχαν ήδη επεξεργαστεί ερευνητές που είχαν εργαστεί στο Geometer's Sketchpad.

Αρχικά, η ερευνήτρια παρουσίασε βασικές λειτουργίες του λογισμικού στις μαθήτριες (κατασκευή σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, παράλληλες ευθείες, τρίγωνα και τετράπλευρα) και στη συνέχεια τους παρότρυνε να πάρουν πρωτοβουλίες και να κατασκευάσουν μόνοι τους διάφορα γεωμετρικά σχήματα προκειμένου να εξοικειωθούν με βασικές λειτουργίες του λογισμικού. Οι μαθήτριες αμέσως ενεργοποιήθηκαν, άρχισαν να συνεργάζονται και να κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή. Στη συνέχεια, τους δόθηκε το πρώτο φύλλο εργασίας το οποίο είχε εισαγωγικό χαρακτήρα στοχεύοντας στο να εξοικειωθούν οι μαθήτριες με βασικές γεωμετρικές λειτουργίες και κατασκευές του λογισμικού. Περιελάμβανε γεωμετρικές κατασκευές τις οποίες είτε έπρεπε οι μαθητές να τις κατασκευάσουν με βάση τις οδηγίες που τους δίνονταν βήμα-βήμα είτε να τις κατασκευάσουν μόνοι τους χρησιμοποιώντας τις λειτουργίες του λογισμικού. Κατασκεύαζαν ορισμένα γεωμετρικά σχήματα όπως ορθογώνιο τρίγωνο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο τα οποία καλούνταν να μεταβάλλουν και να παρατηρήσουν εάν και ποιες ιδιότητές τους μεταβάλλονται. Προσπαθούσαν να βρουν κανονικότητες στα σχήματα μεταβάλλοντάς τα με τη λειτουργία του συρσίματος. Όταν παρατηρήθηκε ότι οι μαθήτριες είχαν εξοικειωθεί με το λογισμικό και τις λειτουργίες του, τους δόθηκε το δεύτερο φύλλο εργασίας. Σε αυτό το δεύτερο φύλλο εργασίας, στόχος ήταν οι μαθητές να εμπλακούν με πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα, να κάνουν εικασίες σχετικά με το σχήμα που έχουν στην οθόνη του υπολογιστή και να προσπαθήσουν να αποδείξουν τις εικασίες τους.

2^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1^{Η} ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας είναι το :

«Ανοίξτε το λογισμικό του Geometer's Sketchpad που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας και κατασκευάστε ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Σε κάθε πλευρά του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ βρείτε τα αντίστοιχα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν και ενώστε τα σημεία ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ.»

- «Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΚΛΜΝ σε σχέση με το ΑΒΓΔ; Γράψτε τις εικασίες σας.»

Σε αυτό το σημείο οι μαθήτριες εισέρχονται στη διαδικασία της διερεύνησης. Αυτό το ερώτημα έχει ως σκοπό μετακινώντας μία από τις κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ να παρατηρήσουν ότι το τετράπλευρο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα από τα γνωστά τους σχήματα. Αρχικά, αναμέναμε να χρησιμοποιήσουν περιπλανώμενο/τυχαίο σύρσιμο δηλαδή, να μετακινήσουν το σημείο Α τυχαία, ψάχνοντας για ένα από τα γνωστά τους σχήματα. Οι μαθήτριες από την Α' λυκείου έχουν διδαχθεί όλα τα είδη παραλληλογράμμων, τις ιδιότητές τους και τα κριτήρια οπότε εδώ αναμέναμε να μην αντιμετωπίσουν ιδιαίτερη δυσκολία στο να τα αναγνωρίσουν. Από τις μαθήτριες αναμέναμε αρχικά να προσπαθήσουν να μετασχηματίσουν το ΑΒΓΔ σε ορθογώνιο ή τετράγωνο και να παρατηρήσουν πώς μεταβάλλεται το σχήμα με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ το ΚΛΜΝ. Σε αυτό το σημείο αναμέναμε να χρησιμοποιήσουν το καθοδηγούμενο σύρσιμο, δηλαδή να κινήσουν μια κορυφή του ΑΒΓΔ προκειμένου το ΑΒΓΔ να πάρει συγκεκριμένο σχήμα παρατηρώντας κάθε φορά το είδος του ΚΛΜΝ. Αυτό που αναμέναμε να παρατηρήσουν είναι ότι μεταβάλλοντας κάθε φορά το ΑΒΓΔ προκύπτει και διαφορετικό τετράπλευρο συνεπώς, έπρεπε να μελετήσουν το είδος του εξωτερικού τετραπλεύρου σε σχέση με το εσωτερικό. Μετασχηματίζοντας κάθε φορά το εξωτερικό τετράπλευρο σε παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, τετράγωνο, ρόμβο και τραπέζιο έπρεπε να παρατηρήσουν πώς μεταβάλλεται το ΚΛΜΝ. Από αυτό το σημείο και μετά άρχισε η απαγωγική διαδικασία. Αναμέναμε οι μαθήτριες να μετακινήσουν το σημείο Α με σκοπό το ΑΒΓΔ να πάρει συγκεκριμένο σχήμα πιθανώς ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και να παρατηρήσουν το σχήμα του ΚΛΜΝ.

Το ίδιο αναμέναμε να κάνουν και για τα υπόλοιπα γνωστά στους σχήματα. Επιπλέον, αναμέναμε από τις μαθήτριες να καταγράψουν τις εικασίες τους για το είδος των τετραπλεύρων μεταβάλλοντας κάθε φορά το σχήμα, στηριζόμενοι αρχικά στην παρατήρηση. Επομένως, σε αυτό το ερώτημα η καταγραφή των εικασιών από τους μαθητές θα είναι της μορφής «εάν το ΑΒΓΔ είναι……. τότε το ΚΛΜΝ είναι……» Συνεπώς, αυτό το ερώτημα στόχευε στη διατύπωση αυτών των εικασιών και δεν αναμέναμε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν τις εικασίες τους. Αυτή η απαγωγική διαδικασία φαίνεται να επέτρεψε στις μαθήτριες στο να μεταβούν στην απόδειξη των εικασιών τους. Το επόμενο ερώτημα που μας ενδιαφέρει και καλούνταν να απαντήσουν οι μαθήτριες είναι το εξής:

- «Θα παρουσιάζατε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε ένα διαγώνισμα; Τι θα αλλάζατε στις απαντήσεις που δώσατε; »

Σε αυτό το δεύτερο ερώτημα άρχισε η αποδεικτική διαδικασία, ζητούσαμε από τις μαθήτριες να σκεφτούν εάν θα παρουσίαζαν τα αποτελέσματά τους σε ένα διαγώνισμα. Στόχος του συγκεκριμένου ερωτήματος ήταν οι μαθήτριες να προβληματιστούν για το εάν τα συμπεράσματα του προηγούμενου ερωτήματος είναι αποδεκτά σε ένα πιο αυστηρό πλαίσιο. Ουσιαστικά, αναμέναμε από τις μαθήτριες να αιτιολογήσουν τις εικασίες τους βασιζόμενοι σε θεωρήματα και αξιώματα της γεωμετρίας που έχουν διδαχθεί. Σε αυτή τη φάση δεν αναμέναμε από τις μαθήτριες απαντήσεις της μορφής « φαίνεται από το σχήμα…», «αφού τα κατασκευάσαμε έτσι…». Σε αυτό συνέβαλλε και η παρατήρηση του σχήματος στην οθόνη του λογισμικού από το οποίο μπορούσαν να παρατηρήσουν ποιά μεγέθη μεταβάλλονταν και ποιές ιδιότητες των σχημάτων παρέμεναν αναλλοίωτες.

Αυτό που αναμέναμε από τις μαθήτριες να γράψουν είναι : «Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο/ορθογώνιο/τετράγωνο/ρόμβος/τραπέζιο». Σε αυτό το σημείο αναμέναμε να χρησιμοποιήσουν θεωρήματα και αξιώματα της γεωμετρίας προκειμένου να αποδείξουν τους συλλογισμούς τους. Αυτό που χρειαζόταν να θυμούνται ήταν τα κριτήρια των παραλληλογράμμων τα οποία τα έχουν διδαχθεί από

την Α' λυκείου. Σε περίπτωση που παρατηρούσαμε ότι οι μαθητές δεν τα θυμούνται τους υπενθυμίζαμε τις ιδιότητες αλλά και τα κριτήρια των παραλληλογράμμων. Επομένως οι απαντήσεις των μαθητριών αναμέναμε να είναι ως εξής:

- Αν το ΑΒΓΔ είναι <u>ορθογώνιο παραλληλόγραμμο</u> τότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος γιατί έχει, όλες τις πλευρές του ίσες, ή γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, ή γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, ή γιατί είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του.

Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις που το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και ρόμβος. Επίσης, σε αυτό το σημείο αναμέναμε οι μαθήτριες να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους όπως τις αιτιολογούν σε διαγωνίσματα του σχολείου. Συνεπώς, στόχος του δεύτερου ερωτήματος ήταν οι μαθήτριες να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν την τυπική απόδειξη των εικασιών τους τις οποίες τεκμηρίωναν βασιζόμενοι σε θεωρήματα και αξιώματα της γεωμετρίας. Επιπλέον, στόχευε στη μετάβαση από το σχήμα στη θεωρία το οποίο πραγματοποιείται μέσα από απαγωγικές διαδικασίες.

<u>2^{Η} ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ</u>

Το τρίτο ερώτημα της δραστηριότητας είναι το εξής:

«Ανοίξτε ένα νέο σχέδιο στο Geometer's Sketchpad κατασκευάστε τυχαίο τετράπλευρο ΕΖΗΘ και σε κάθε πλευρά του τετραπλεύρου ΕΖ,ΖΗ,ΗΘ,ΘΕ βρείτε αντίστοιχα τα μέσα Π, Ρ, Σ, Τ. Στη συνέχεια ενώστε τα Ε Σ, Ζ Τ, Η Π, Θ Ρ ώστε να σχηματιστεί το τετράπλευρο ΙΚΛΜ»

- «Μετακινώντας τις κορυφές του ΕΖΗΘ μπορείτε να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΙΚΛΜ για τις διάφορες μορφές του ΕΖΗΘ; Γράψτε τις εικασίες σας.»

Σε αυτό το ερώτημα ζητούνταν από τις μαθήτριες να φτιάξουν ένα καινούριο σχήμα παρόμοιο με του πρώτου ερωτήματος και να κάνουν εικασίες για το είδος του εσωτερικού σε σχέση με το εξωτερικό τετράπλευρο. Στόχος του ερωτήματος ήταν οι μαθήτριες τώρα με ένα πιο πολύπλοκο σχήμα να εικάσουν και να συμπεράνουν το

είδος του τετραπλεύρου χρησιμοποιώντας βασικές λειτουργίες του λογισμικού. Έχοντας ασχοληθεί με το πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας αναμέναμε από τις μαθήτριες να αρχίσουν να μετακινούν σημεία του ΕΖΗΘ ώστε να μετασχηματιστεί σε ένα από τα γνωστά τους σχήματα. Οι μαθήτριες αναμέναμε να χρησιμοποιήσουν το καθοδηγούμενο σύρσιμο ώστε να μετασχηματίσουν το ΕΖΗΘ σε ένα από τα γνωστά τους σχήματα και όχι το περιπλανώμενο σύρσιμο, δεδομένου ότι γνώριζαν τι θα κάνουν από το πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας. Συγκεκριμένα, οι μαθήτριες αναμέναμε να μετασχηματίσουν το ΕΖΗΘ σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και ρόμβο και να παρατηρήσουν το σχήμα του εσωτερικού τετραπλεύρου ΙΚΛΜ. Συνεπώς περιμέναμε απαντήσεις από τις μαθήτριες της μορφής: «Αν το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο/ορθογώνιο/τετράγωνο/ρόμβος/τραπέζιο». Αναμέναμε οι μαθήτριες σε αυτό το σημείο να αναρωτηθούν εάν θα πρέπει να εμπλακούν με την κατασκευή της απόδειξης των εικασιών τους δεδομένου ότι έχουν ασχοληθεί με τα δυο πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας. Εάν παρατηρούσαμε κάτι τέτοιο η ερευνήτρια θα τους παρότρυνε ώστε να μεταβούν στην τυπική κατασκευή της απόδειξης. Οι μαθήτριες, εάν αποδείξουν τις εικασίες τους, αναμέναμε να ξεκινήσουν με την απόδειξη της εικασίας: «Αν το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο». Αυτό που αναμέναμε είναι να αιτιολογήσουν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο χρησιμοποιώντας ένα από τα κριτήρια του παραλληλογράμμου.

Αυτό που ενδεχομένως να δυσκόλευε τις μαθήτριες ήταν να εικάσουν το είδος του ΙΚΛΜ και αυτό γιατί στη συνέχεια τους δόθηκε ένα πιο πολύπλοκο σχήμα. Ενδέχεται οι μαθήτριες να χρησιμοποιήσουν τις λειτουργίες του λογισμικού όπως τη λειτουργία της μέτρησης και τη μέτρηση γωνιών προκειμένου να εικάσουν το είδος του ΙΚΛΜ. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει η ερευνήτρια να αποθαρρύνει τις μαθήτριες να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία της μέτρησης. Στόχος αυτού του ερωτήματος είναι η διατύπωση των εικασιών από τις μαθήτριες τις οποίες αναμέναμε να αιτιολογήσουν με επιχειρήματα δεδομένου ότι είχαν εμπλακεί με το πρώτο και δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας. Επιπλέον, μελετάται κατά πόσο οι μαθήτριες αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα για κατασκευή της απόδειξης. Στη συνέχεια καλούνταν να απαντήσουν στο επόμενο ερώτημα:

Το τέταρτο ερώτημα της δραστηριότητας είναι το :

- «Θα παρουσιάζατε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε ένα διαγώνισμα; Τι θα αλλάζατε στις απαντήσεις που δώσατε; »

Στο τέταρτο ερώτημα ζητούνταν πάλι από τις μαθήτριες να αναρωτηθούν για το εάν θα παρουσίαζαν τα αποτελέσματα του δεύτερου ερωτήματος σε ένα διαγώνισμα. Στόχος του ερωτήματος ήταν οι μαθήτριες να εμπλακούν με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης των εικασιών του προηγούμενου ερωτήματος. Αναμέναμε από τις μαθήτριες να κατασκευάσουν την τυπική απόδειξη των εικασιών τους από το τρίτο ερώτημα δεδομένου ότι είχαν ασχοληθεί με παρόμοιο ερώτημα στην δραστηριότητα. Ωστόσο, ίσως να δυσκολευόντουσαν αρκετά στο να αποδείξουν τις εικασίες τους δεδομένου ότι το σχήμα σε αυτή τη φάση ήταν αρκετά πολύπλοκο. Όπως και στο δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας αναμέναμε οι απαντήσεις των μαθητριών να ήταν ως εξής:

- Αν το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις πλευρές του ανά δύο ίσες, ή γιατί έχει δύο πλευρές ίσες και παράλληλες, ή γιατί έχει τις γωνίες ανά δύο ίσες, ή γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις που το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και ρόμβος. Λόγω της πολυπλοκότητας του σχήματος αναμέναμε από τις μαθήτριες να μην ολοκληρώσουν τις αποδείξεις, ωστόσο εάν παρατηρούσαμε κάτι τέτοιο η ερευνήτρια θα επενέβαινε να βοηθήσει τις μαθήτριες υπενθυμίζοντάς τους χρήσιμα θεωρήματα και αξιώματα της γεωμετρίας. Στόχος του συγκεκριμένου ερωτήματος ήταν η εμπλοκή των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία. Παράλληλα μελετάται και κατά πόσο το λογισμικό διαμεσολαβεί σε όλη αυτή τη διαδικασία.

3.5) Μέθοδος ανάλυσης

Αμέσως μετά τη συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε μια πρώτη αποτίμηση της ερευνάς, εστιάζοντας στα σημεία που μας ενδιέφεραν και απαντούσαν στα ερευνητικά ερωτήματά. Οι διάλογοι οι οποίοι καταγράφθηκαν, απομαγνητοφωνήθηκαν ώστε να γίνει λεπτομερής μελέτη τους και η προσπάθεια αυτή ενισχύθηκε από την μελέτη των όσων είχε καταγράψει το team viewer όση ώρα τα παιδιά εργάζονταν στην οθόνη του υπολογιστή. Για την επεξεργασία των δεδομένων έγινε ανάλυση των διαλόγων των μαθητριών εστιάζοντας στις εικασίες των τους και στην αναγνώριση της ανάγκης για κατασκευή της τυπικής απόδειξης.

Οι φάσεις ανάλυσης είναι οι ακόλουθες:

Φάση 1: Παρατήρηση: Απομαγνητοφώνηση των διαλόγων και παρατήρηση των όσων είχε καταγράψει το Hyper Cam.

Φάση 2: Επεξεργασία των δεδομένων με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα: Λεπτομερής μελέτη των διαλόγων και των προσωπικών σημειώσεων της ερευνήτριας σε συνδυασμό με την ανάλυση των βιντεοσκοπημένων κινήσεων των μαθητριών ώστε να αποσπαστούν τα σημεία τα οποία μας ενδιέφεραν να μελετήσουμε και απαντούσαν στα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Φάση 3: Δημιουργία κατηγοριών με βάση τις εικασίες που ανέπτυξαν οι μαθητές: Μετά την λεπτομερή μελέτη ακολούθησε η δημιουργία κατηγοριών των εικασιών που παρήγαγαν οι μαθήτριες με βάση τη συχνότητα που εμφανίζονταν. Σκοπός ήταν η δημιουργία σαφής κατηγοριών ώστε να μελετηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Οι κατηγορίες των εικασιών αναφέρονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Φάση 4: Μελέτη των λειτουργιών του «Συρσίματος» και της αναγκαιότητας κατασκευής της απόδειξης σε κάθε κατηγορία εικασιών ανά ομάδα: Στις κατηγορίες που έχουμε δημιουργήσει μελετάμε σε κάθε μία από αυτές τις λειτουργίες του συρσίματος και πώς επηρέασαν τις εικασίες των μαθητριών. Σκοπός μας ήταν να μελετήσουμε εάν οι λειτουργίες του συρσίματος επηρέασαν τις εικασίες των μαθητών και στην περίπτωση που τις επηρέασαν πώς άλλαξαν την διατύπωσή τους. Επιπλέον, μελετάται εάν δημιουργήθηκε η ανάγκη στις μαθήτριες να αποδείξουν τις εικασίες τους σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά και αν ναι πώς τις απέδειξαν.

<u>Φάση 5:</u> Σύνθεση των αποτελεσμάτων με βάση την εργασία και των δύο ομάδων: Λεπτομερής μελέτη κάθε κατηγορίας ξεχωριστά και επιλογή των σημαντικότερων διαλόγων από τις δύο ομάδες των μαθητών με σκοπό τη λεπτομερή ανάλυσή τους. Σε κάθε κατηγορία μελετήθηκε ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές δημιουργούν εικασίες και η διαμεσολάβηση του λογισμικού στην αναγνώριση της αναγκαιότητας για κατασκευή της τυπικής απόδειξης. Η επιλογή των διαλόγων έγινε με βάση τα ερευνητικά μας ερωτήματα.

<u>Φάση 6:</u> Σύνοψη των αποτελεσμάτων και συμπεράσματα: Με βάση την ανάλυση των κατηγοριών παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν και από τις δύο ομάδες απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό καταγράφονται τα αποτελέσματα που συνάγονται από τα δεδομένα της έρευνας σύμφωνα με την μέθοδο ανάλυσης που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αρχικά, γίνετε περιγραφή της κάθε ομάδας ξεχωριστά και αναλύονται σε κατηγορίες οι εικασίες που παρατηρήθηκαν αλλά και εάν οι μαθήτριες οδηγήθηκαν στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης των εικασιών τους. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε κατηγορία ξεχωριστά μελετάται ο ρόλος του dragging και εάν οι μαθητές κατασκεύασαν μόνοι τους τη απόδειξη των εικασιών τους. Η περιγραφή αυτή έγινε μέσα από τη λεπτομερή ανάλυση των διαλόγων των μαθητών και έγινε παράθεση των πιο κρίσιμων διαλόγων των μαθητών με βάση τη χρονική εξέλιξη των δραστηριοτήτων. Σε κάθε κατηγορία έγινε λεπτομερής ανάλυση και αναφορά στα ερευνητικά ερωτήματα και τα σημεία που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε.

ΑΝΑΛΥΣΗ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τις κατηγορίες των εικασιών που παρατηρήθηκαν στην πρώτη δραστηριότητα.

Ανάπτυξη εικασιών | **Παράγοντες που προκάλεσαν την αναγνώριση για απόδειξη** | **Απόδειξη**

Εικασίες μέσα από το μετασχηματισμό dragging

Εικασίες που οι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους:

-Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
-Όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο τότε το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Απόδειξη με βάση θεωρήματα της γεωμετρίας που ήδη γνώριζαν, χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι.

Εικασίες που οι μαθητές αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους:

- Όταν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.
-Όταν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

- Διαφωνία με άλλο μαθητή
- Επιδίωξη να πειστεί ο άλλος μαθητής

4.1) Εικασίες μέσω συρσίματος και αναγνώριση της ανάγκης για απόδειξη

Οι μαθήτριες της πρώτης ομάδας αφού διάβασαν την εκφώνηση της πρώτης δραστηριότητας συμφώνησαν στο ότι θα χειρίζονταν εναλλάξ το ποντίκι του υπολογιστή προκειμένου να σχεδιάσουν αυτό που τους ζητούνταν κάθε φορά. Από αυτό το σημείο άρχισε η διαδικασία της εξερεύνησης για τις μαθήτριες. Αρχικά, κατασκεύασαν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το ΚΛΜΝ, του οποίου οι κορυφές του είναι μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ, και άρχισαν να μετασχηματίζουν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ προσπαθώντας να κατανοήσουν τι έπρεπε να κάνουν. Χρησιμοποιώντας τη λειτουργία του συρσίματος έσυραν τυχαία την κορυφή Α και παρατηρούσαν το σχήμα του ΑΒΓΔ. Οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν τυχαίο/περιπλανώμενο σύρσιμο προκειμένου να εξετάσουν σε ποια γνωστά τους σχήματα μετασχηματιζόταν το ΑΒΓΔ. Μέσα από τη συζήτηση και την τυχαία μετακίνηση του Α κατέληξαν στο ότι το ΑΒΓΔ μπορεί να μετασχηματιστεί σε παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και ρόμβο και αναλόγως μετασχηματίζεται και το ΚΛΜΝ. Από αυτό το σημείο άρχισε η απαγωγική διαδικασία με την οποία οι μαθήτριες μέσα από την παρατήρηση άρχισαν να κατασκευάζουν τις πρώτες εικασίες. Μετασχημάτιζαν το ΑΒΓΔ σε ένα από τα γνωστά τους σχήματα και παρατηρούσαν σε ποιο από τα γνωστά τους σχήματα μεταβάλλεται το ΙΚΛΜ. Οι σημειώσεις που κρατούσαν στο φύλλο εργασίας ήταν της μορφής:

- Αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
- Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο τότε το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.
- Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

Παρόμοια εργάστηκαν και οι μαθήτριες της δεύτερης ομάδας καταγράφοντας με τον ίδιο τρόπο τις εικασίες τους. Μέσα από την απαγωγική διαδικασία οι μαθήτριες και στις δύο ομάδες κατέληξαν στις παραπάνω διατυπώσεις της μορφής «αν… τότε…» γεγονός που τους επέτρεπε να μεταβούν στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης. Σε αυτό το πρώτο ερώτημα και από τις 2 ομάδες παρατηρήθηκαν 4 ειδών εικασίες οι οποίες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: 3.1.1)Εικασίες που οι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους, 3.1.2) Εικασίες που οι μαθητές

αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους. Οι εικασίες που ακολουθούν παρουσιάζονται με βάση τη χρονική εξέλιξη που εμφανίστηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας και στις δυο ομάδες.

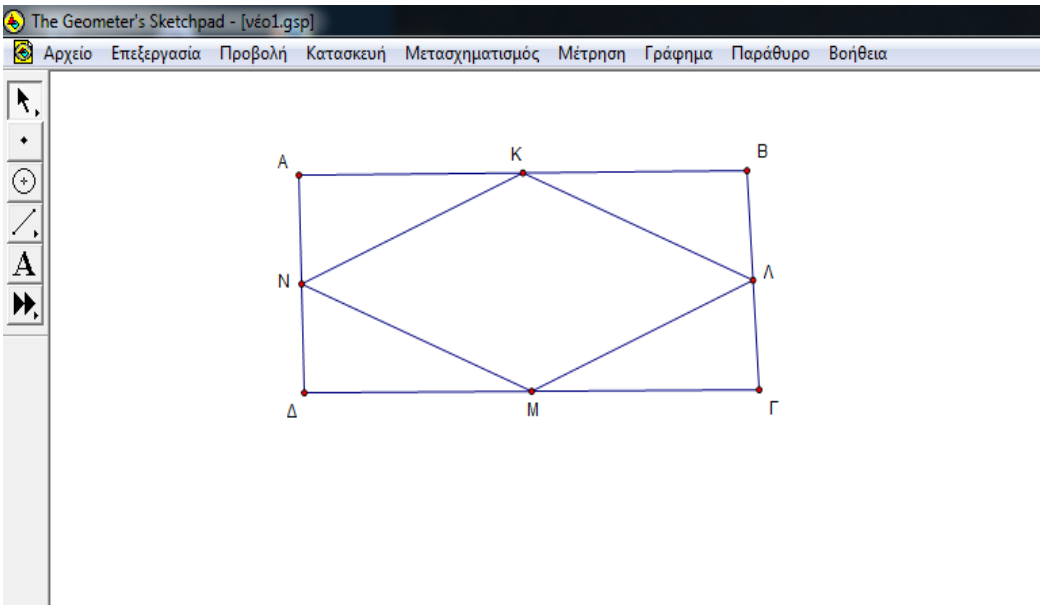
4.1.1) Εικασίες που οι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξής τους

Σε αυτή την κατηγορία παρατηρήθηκαν 2 εικασίες από τις μαθήτριες της πρώτης ομάδας, η μία είναι: «όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε το ΚΛΜΝ είναι…» και η δεύτερη είναι «όταν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και τότε το ΚΛΜΝ είναι….», προσπαθώντας οι μαθήτριες να προσδιορίσουν το είδος του ΚΛΜΝ σε κάθε περίπτωση. Οι μαθήτριες σε αυτή την κατηγορία χρησιμοποίησαν καθοδηγούμενο σύρσιμο σύροντας τις κορυφές του ΑΒΓΔ, έτσι ώστε να το μετασχηματίσουν σε ένα από τα γνωστά τους σχήματα και να παρατηρήσουν το είδος του ΚΛΜΝ. Παρακάτω αναφέρεται αναλυτικά η περίπτωση που οι μαθήτριες έχουν μετασχηματίσει το ΑΒΓΔ σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Η μία από τις 2 μαθήτριες σύροντας τις κορυφές του ΑΒΓΔ προσπαθούσε να μετασχηματίσει το ΑΒΓΔ από τυχαίο τετράπλευρο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σχηματίζοντας ορθές γωνίες στο ΑΒΓΔ. Από τη στιγμή που προσάρμοσαν τις γωνίες του ΑΒΓΔ σε ορθές άρχισαν να κάνουν υποθέσεις για το είδος του ΚΛΜΝ. Μέσα από τη μεταξύ τους συζήτηση και παρατήρηση του σχήματος κατέληξαν στο ότι το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος. Δεν δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στο να προσδιορίσουν το είδος του τετραπλεύρου αλλά ούτε προβληματίστηκαν για το εάν θα έπρεπε να ισχυροποιήσουν την εικασία τους. Σε αυτή τη φάση σημαντικό ρόλο έπαιξε η λειτουργία του συρσίματος και συγκεκριμένα το καθοδηγούμενο σύρσιμο αφού οι μαθητές μετακινούσαν συγκεκριμένα σημεία ώστε το ΑΒΓΔ να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο. Δεν τους δημιουργήθηκε εξ’ αρχής η ανάγκη να αποδείξουν τις εικασίες τους, έτσι ώστε να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τα συμπεράσματά τους και αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι ήταν το πρώτο στάδιο της δραστηριότητας και δεν είχαν εξοικειωθεί ακόμα με το λογισμικό και με τα ερωτήματα της δραστηριότητας. Ένας άλλος λόγος για τον οποίο οι μαθήτριες δεν κατασκεύασαν την τυπική απόδειξη των εικασιών τους είναι γιατί ίσως να πείστηκαν για την ορθότητα τους και δεν θεώρησαν αναγκαία την απόδειξη. Σύμφωνα με τους Hanna, Jahnke (1993), Tall (1992) και de Villiers (1990) εάν οι μαθήτριες πεισθούν για την αλήθεια μιας πρότασης χωρίς να την αποδείξουν τότε είναι πολύ πιθανό να θεωρήσουν τη διαδικασία της απόδειξης

ανούσια. Γενικά, αυτό που παρατηρήθηκε σε αυτές τις εικασίες ήταν ότι οι μαθήτριες δεν αναρωτήθηκαν για το αν θα έπρεπε να αποδείξουν τις εικασίες τους, τις οποίες επιβεβαίωναν παρατηρώντας το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω:

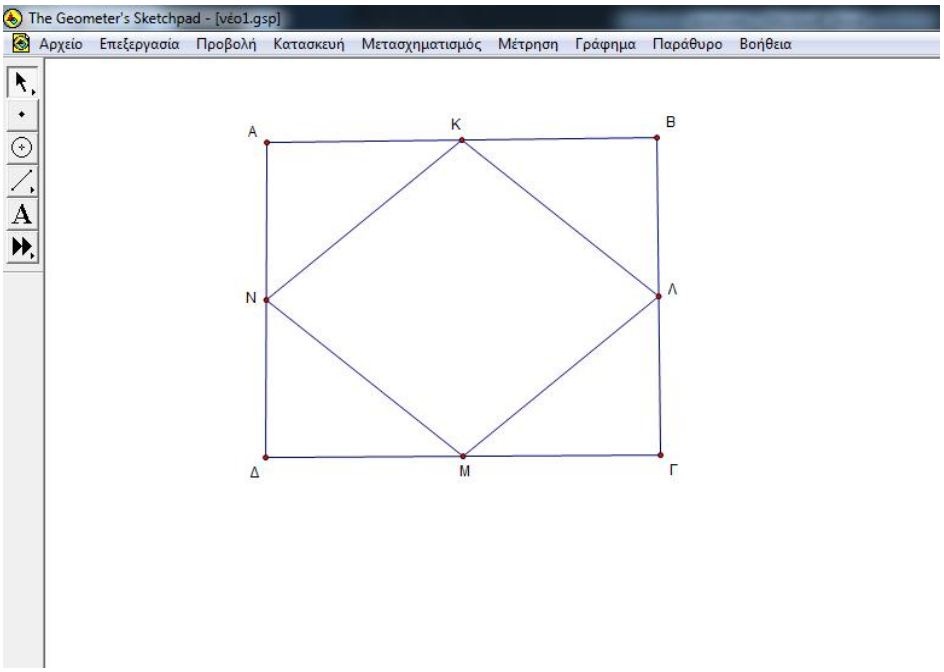


Δ: Ωραία, το ΑΒΓΔ μοιάζει με ορθογώνιο, και το ΚΛΜΝ με ρόμβο;	*Μετά από την παρατήρηση του σχήματος κατέληξαν ότι είναι ρόμβος.*
Κ: Ναι έτσι μου φαίνεται κ εμένα… έχει όλες τις πλευρές ίσες.	
Δ: Λες ε; Ναι και παραλληλόγραμμο βέβαια μοιάζει, αλλά όχι έχει όλες τις πλευρές ίσες, άρα ρόμβος.	

Στη δεύτερη ομάδα παρατηρήθηκαν 3 εικασίες για τις οποίες δεν τους δημιουργήθηκε η ανάγκη να τις αποδείξουν. Και οι μαθήτριες αυτής της ομάδας άρχισαν να σύρουν τις κορυφές του ΑΒΓΔ ώστε να το μετασχηματίσουν σε ένα από τα γνωστά τους και να παρατηρήσουν το σχήμα του ΚΛΜΝ. Αρχικά, μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σε τετράγωνο και παρατηρούσαν το σχήμα του ΚΛΜΝ. Σύροντας το σημείο Α προσπαθούσαν να προσαρμόσουν τις γωνίες του ΑΒΓΔ σε ορθές και όλες τις πλευρές του να είναι ίσες, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο. Σε όλη αυτή τη διάρκεια χρησιμοποιούσαν καθοδηγούμενο σύρσιμο, μετακινώντας

σημεία του ΑΒΓΔ ώστε να προκύψει τετράγωνο. Έπειτα, οι μαθήτριες βασιζόμενοι στην παρατήρηση του σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή ξεκίνησαν τις πρώτες εικασίες για το είδος του ΚΛΜΝ. Οι μαθήτριες αρκέστηκαν στα συμπεράσματα που είχαν με την παρατήρηση του σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή και για αυτό δεν τους δημιουργήθηκε η ανάγκη να αποδείξουν τις εικασίες τους.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:



Ε: Το ΑΒΓΔ μοιάζει με τετράγωνο και νομίζω και το ΚΛΜΝ τετράγωνο θα είναι τι λες;	
Ν: Ναι έτσι φαίνεται, αλλά μήπως είναι ρόμβος;	
Ε: Όχι αφού οι γωνίες του ΚΛΜΝ φαίνονται ορθές τετράγωνο θα είναι.	*Βασίστηκαν στην παρατήρηση και κατέληξαν ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.*

4.1.2) Εικασίες που οι μαθητές αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξης

- *Διαφωνία με άλλο μαθητή*

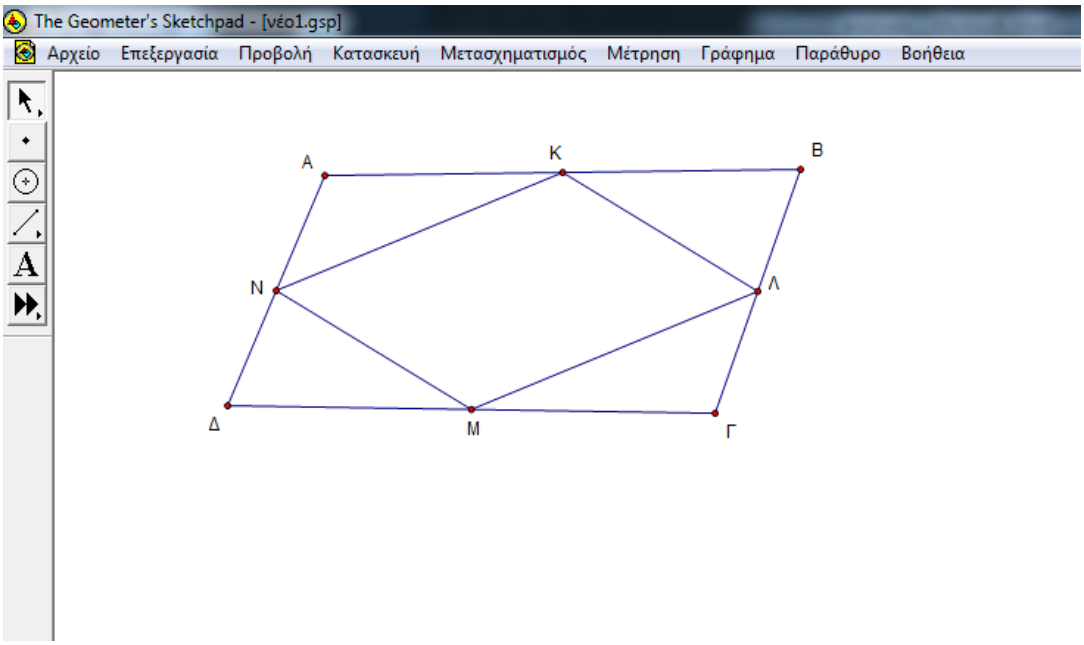
Σε αυτή την κατηγορία παρατηρήθηκε μία εικασία από τις μαθήτριες της πρώτης ομάδας και συγκεκριμένα η περίπτωση που το ΑΒΓΔ ήταν παραλληλόγραμμο και προσπαθούσαν να συμπεράνουν το είδος του ΚΛΜΝ. Αφού μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σύροντας τις κορυφές του ώστε να μοιάζει με παραλληλόγραμμο, άρχισαν να συζητούν μεταξύ τους για το είδος του ΚΛΜΝ. Σε αυτό το σημείο υπήρξε μια διαφωνία ανάμεσα στους μαθητές ως προς το είδος του ΚΛΜΝ, η μία μαθήτρια υποστήριζε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και ο άλλος ότι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Μέσα από τη μεταξύ τους συζήτηση δεν μπόρεσαν να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα και στην προσπάθειά του ο ένας μαθητής να αποδείξει ότι έχει δίκιο σκέφτηκε να κατασκευάσει μόνος του εξ' αρχής ένα παραλληλόγραμμο στο λογισμικό και να παρατηρήσουν το είδος του ΚΛΜΝ . Οι μαθήτριες σκέφτηκαν αυτό τον τρόπο επιβεβαίωσης των εικασιών τους πιθανόν γιατί είναι επηρεασμένοι από τον τρόπο που εργάζονται στο σχολείο και θέλησαν να σιγουρευτούν για τις εικασίες τους . Από τη φάση της εξοικείωσης με το λογισμικό, οι μαθήτριες φάνηκε ότι έπαιρναν πρωτοβουλίες και είχαν αρκετές ιδέες για το πώς θα κατασκεύαζαν τα γνωστά τους γεωμετρικά σχήματα.

Συγκεκριμένα, οι μαθήτριες άνοιξαν ένα νέο παράθυρο στο Geometer's Sketchpad και κατασκεύασαν μια ευθεία. Από τα «εργαλεία σχεδίασης ευθύγραμμων τμημάτων» θεώρησαν δύο σημεία Α και Β πάνω στην ευθεία και ένα σημείο Γ εξωτερικό της ευθείας. Στη συνέχεια, σχεδίασαν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και με τις λειτουργίες του λογισμικού απέκρυψαν την ευθεία. Από το Γ έφεραν παράλληλη προς την ΑΒ χρησιμοποιώντας τη λειτουργία « Κατασκευή – Παράλληλης ευθείας» και ένωσαν το Β με το Γ. Έπειτα, έφεραν παράλληλη ευθεία στην ΒΓ που να περνάει από το Α και ονόμασαν Δ το σημείο τομής. Έφεραν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ και απέκρυψαν την ευθεία και με αυτό τον τρόπο κατασκεύασαν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προκειμένου να κατασκευάζουν το ΚΛΜΝ επέλεξαν την πλευρά ΑΒ και από την λειτουργία « Κατασκευή- Μέσου σημείου» σχεδίασαν το μέσο του ΑΒ το οποίο και ονόμασαν Κ. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρήκαν τα μέσα των υπόλοιπων πλευρών τα ένωσαν μεταξύ τους σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΚΛΜΝ. Σε αυτό το σημείο άρχισαν να σύρουν την κορυφή Α και παρατηρούσαν το είδος του ΚΛΜΝ

δεδομένου πως ήξεραν ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και θα διατηρεί τις ιδιότητές του όπως και αν το μετασχηματίσουν. Μέσα από αυτή τη διαδικασία του καθοδηγούμενου συρσίματος διαπίστωσαν ότι και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Η μαθήτρια με αυτό τον τρόπο, κατασκευάζοντας ένα παραλληλόγραμμο που να διατηρεί τις ιδιότητές του διαπίστωσε ότι η εικασία της είναι αληθής και της συμμαθήτριάς της λανθασμένη. Κυρίαρχο και κρίσιμο ρόλο στις εικασίες των μαθητών έπαιξε η παρατήρηση του σχήματος και η λειτουργία του συρσίματος και συγκεκριμένα, του καθοδηγούμενου συρσίματος και συρσίματος-ελέγχου μέσα από τα οποία οι μαθητές επιβεβαίωσαν τις εικασίες τους. Και σε αυτή τη φάση οι μαθήτριες δε σκέφτηκαν να αποδείξουν τις εικασίες τους αλλά με τον τρόπο που χρησιμοποίησαν δηλαδή, κατασκευάζοντας μόνοι τους ένα παραλληλόγραμμο που διατηρούσε τις ιδιότητές του θέλησαν να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματά τους.

<u>Χαρακτηριστικό παράδειγμα:</u>



Δ:Ρόμβος θα είναι;	
Κ:Λες; Εμένα μου μοιάζει για παραλληλόγραμμο.	
Δ:Όχι ρόμβος πιστεύω θα είναι	*Σκέφτηκαν να κατασκευάσουν μόνοι τους*

	ένα παραλληλόγραμμο ώστε να το μετακινούν και να διατηρούνται οι ιδιότητές του.
Κ: Όχι αποκλείεται αφού δεν έχει όλες τις πλευρές ίσες.	
Δ: Ναι, αλλά τελικά;	
Κ: Αν μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο τότε θα μπορούσαμε να δούμε τι είναι το ΚΛΜΝ τι είναι.	
	Μετά την κατασκευή κατέληξαν στο ότι θα είναι παραλληλόγραμμο

- *Επιδίωξη να πειστεί ο άλλος μαθητής*

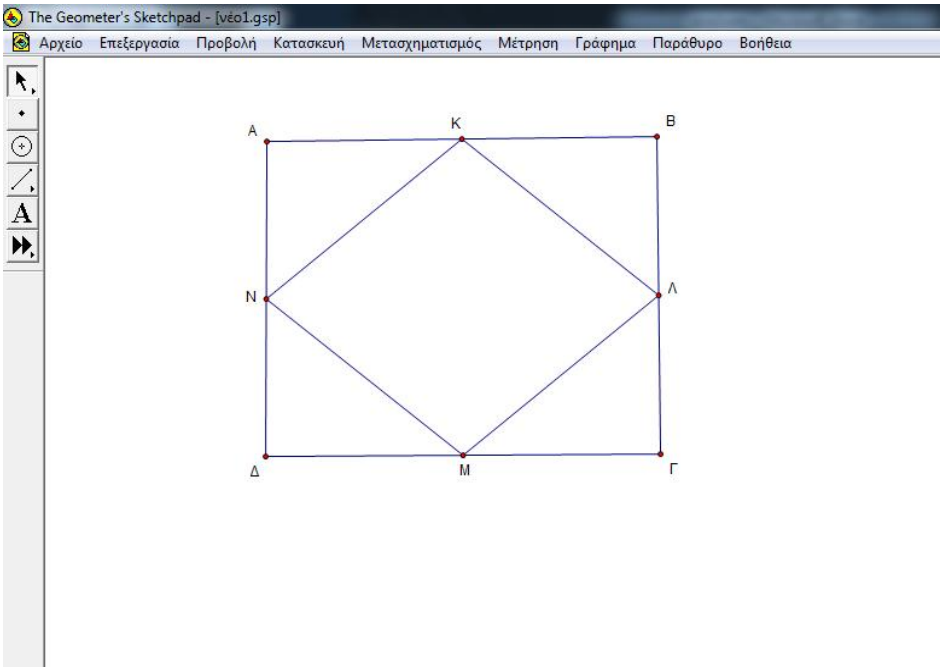
Σε αυτή την κατηγορία αναδύθηκε μία εικασία και συγκεκριμένα οι μαθήτριες της πρώτης ομάδας μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σε τετράγωνο σύροντας τις κορυφές του όπως έκαναν και στις προηγούμενες περιπτώσεις. Το χαρακτηριστικό σε αυτή την περίπτωση ήταν ότι οι μαθήτριες προχώρησαν στην τυπική κατασκευή της απόδειξης. Μέσα από τη συζήτηση και την παρατήρηση του σχήματος τους δημιουργήθηκε η ανάγκη να αποδείξουν ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Υπήρξε μια συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές για το είδος του ΚΛΜΝ, η μία μαθήτρια υποστήριζε ότι είναι τετράγωνο ενώ η άλλη αμφέβαλλε για αυτό. Στην προσπάθειά της μιας να πείσει την άλλη για το είδος του ΚΛΜΝ άρχισαν άτυπα να αποδεικνύουν ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι όταν οι μαθήτριες συζητούσαν μεταξύ τους για το είδος του ΚΛΜΝ προσπαθούσαν ταυτόχρονα να το αποδείξουν χρησιμοποιώντας θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή προσπαθούσαν να εφαρμόσουν θεωρήματα που γνώριζαν ώστε να μπορέσουν να συμπεράνουν ότι το ΚΛΜΝ ήταν τετράγωνο και κρατούσαν κάθε φορά σημειώσεις για τα συμπεράσματα στα οποία κατέληγαν. Προκειμένου, να αποδείξουν ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο αρχικά, προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια να βρουν μια γωνία ορθή. Επομένως, έψαχναν να βρουν δύο πλευρές του ίσες και παράλληλες έτσι ώστε να ήταν παραλληλόγραμμο. Αυτό που παρατήρησαν ήταν ότι στο τρίγωνο ΑΔΓ τα σημεία Ν και Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα οπότε ισχύει από θεώρημα ότι «Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της», δηλ. ΝΜ

=// ΑΓ/2. Ομοίως για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι ΚΛ=// ΑΓ/2. Συνεπώς, ΝΜ=//ΚΛ δηλαδή το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον παρατήρησαν ότι όλες οι πλευρές του ΚΛΜΝ είναι ίσες μεταξύ τους γιατί οι διαγώνιοι του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι ίσοι. Επομένως, έψαχναν μια γωνία ορθή. Στη συνέχεια, παρατήρησαν ότι το τρίγωνο ΑΚΝ ήταν ισοσκελές ορθογώνιο με ορθή την γωνία Α (γιατί το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο) και ΑΚ=ΑΝ (ως μισά ίσων πλευρών τετραγώνου) συνεπώς η γωνία ΑΚΝ είναι 45^0. Ομοίως, τα ίδια ισχύουν για το τρίγωνο ΚΒΛ με τη γωνία ΒΚΛ=45^0. Άρα, η γωνία ΛΚΝ του ΚΛΜΝ είναι 90^0. Επομένως, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο με μια γωνία ορθή, δηλαδή τετράγωνο.

Καθ' όλη τη διάρκεια που αποδείκνυαν ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο έγραφαν τις σχέσεις που προέκυπταν με βάση τα θεωρήματα της γεωμετρίας στο φύλλο εργασίας που τους είχε δοθεί . Σκεφτόντουσαν και ενεργούσαν σαν να εργάζονταν εξ' ολοκλήρου χρησιμοποιώντας «χαρτί και μολύβι» μόνο που το σχήμα αυτή τη φορά ήταν στην οθόνη του υπολογιστή. Χαρακτηριστικό ήταν επίσης ότι φαντάστηκαν ότι υπήρχε σχεδιασμένη η ΑΓ (διαγώνιος του ΑΒΓΔ) η οποία ουσιαστικά τους βοήθησε να αποδείξουν ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Ο ρόλος του συρσίματος ήταν φανερός μέχρι τη στιγμή που μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σε τετράγωνο, μετά απλά παρατηρούσαν το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή χωρίς να "σύρουν" σημεία του.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθήτριες είχαν εμπλακεί αρχικά και με άλλα σχήματα για τα οποία δεν τους δημιουργήθηκε η ανάγκη να τα αποδείξουν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθήτριες μέσα από την μεταξύ τους συζήτηση και προκειμένου η μία να πείσει την άλλη , άρχισαν να αποδεικνύουν τις εικασίες τους και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους όπως θα έλυναν μια άσκηση γεωμετρίας αιτιολογώντας κάθε φορά με θεωρήματα γεωμετρίας. Δηλαδή, χρησιμοποιούσαν στοιχεία που προέκυπταν από την παρατήρηση του σχήματος και κάποια που προέκυπταν από θεωρήματα της γεωμετρίας περνώντας σιγά σιγά στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης με παραγωγικό συλλογισμό.

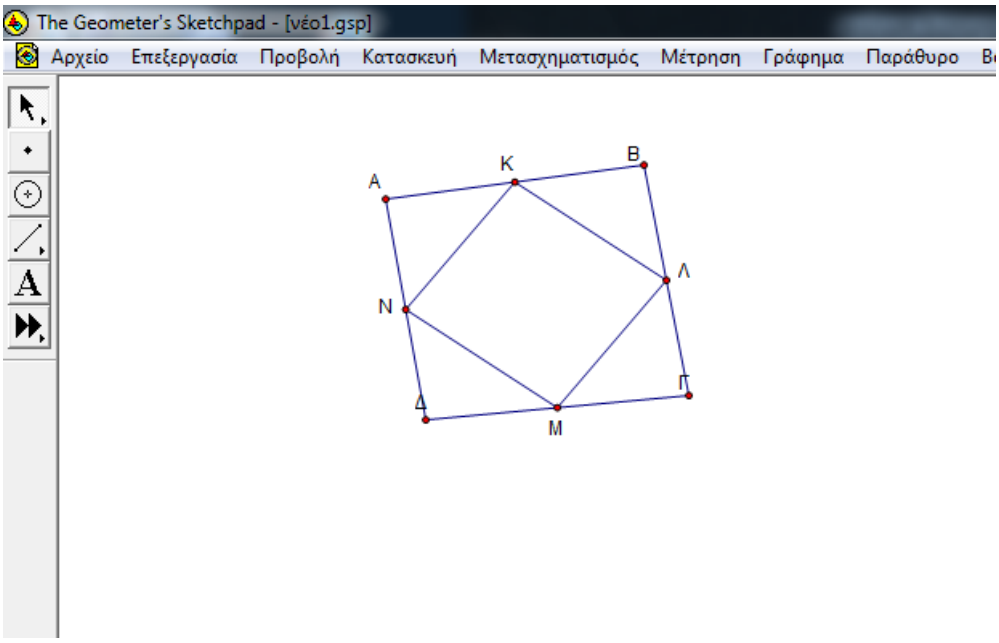
Χαρακτηριστικό παράδειγμα:



Κ: Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο τότε θα είναι τετράγωνο;	
Δ: Ναι έτσι νομίζω..	
Κ: Γιατί αν φέρουμε την ΑΓ τότε τα Κ Λ είναι μέσα άρα, ΚΛ ίσο και παράλληλο με το μισό ΑΓ. Το ίδιο και για το ΝΜ. Άρα, ΝΜ ίση και παράλληλη με την ΚΛ.	*Εφαρμόζουν τη γνώση που έχουν από το σχολείο και αποδεικνύουν τις εικασίες τους.*
Δ: Δηλ, παραλληλόγραμμο το ΚΛΜΝ, τώρα θα πρέπει να βρούμε και … ναι όμως όλες οι πλευρές του ΚΛΜΝ θα είναι ίσες μεταξύ τους γιατί το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με ΑΓ=ΒΔ	
Κ: Ναι, οπότε τώρα μένει να δείξουμε μια ορθή αν δεν κάνω λάθος.	
Δ: Ααα η ΛΚΝ γωνία είναι ορθή γιατί αυτή (εννοεί την ΝΚΑ γωνία) είναι 45^0 αφού το ΑΚΝ είναι ισοσκελές ορθογώνιο. Το ίδιο για το τρίγωνο ΒΚΛ, άρα ΛΚΝ 90^0.	
Κ: Τέλεια, άρα είμαστε εκατό τις εκατό σίγουρες ότι είναι τετράγωνο.	

Στη δεύτερη ομάδα σε αυτή την κατηγορία παρατηρήθηκε μία εικασία και συγκεκριμένα η περίπτωση που το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και προσπαθούσαν να προσδιορίσουν το είδος του ΚΛΜΝ. Αυτή η περίπτωση δίχασε τις μαθήτριες διότι η μια μαθήτρια υποστήριζε ότι το ΚΛΜΝ θα είναι τετράγωνο και η άλλη ότι θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Επομένως, άρχισαν άτυπα να προσπαθούν να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους. Με τη λειτουργία του καθοδηγούμενου συρσίματος μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σε ρόμβο και προσπαθούσαν να εικάσουν το είδος του ΚΛΜΝ. Συζητούσαν μεταξύ τους για το είδος του ΚΛΜΝ αλλά συνέχιζαν να διαφωνούν. Ωστόσο, η μία μαθήτρια στην προσπάθειά της να πείσει την άλλη ότι είχε δίκιο άρχισε άτυπα να αποδεικνύει την εικασία της ώστε να είναι σίγουροι για το ποιά από τις δύο ισχύει. Παρατηρούσαν το σχήμα και χωρίς να το μετακινούν προσπαθούσαν να εφαρμόσουν θεωρήματα της γεωμετρίας προκειμένου να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους. Φαντάστηκαν ότι υπάρχουν σχεδιασμένοι στο σχήμα οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ρόμβου ΑΒΓΔ, επομένως εφάρμοσαν το θεώρημα «Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της» και κατέληξαν στο ότι οι απέναντι πλευρές του ΚΛΜΝ είναι ίσες και παράλληλες. Στη συνέχεια, συμπέραναν ότι το ΚΛΜΝ δεν μπορεί να είναι τετράγωνο γιατί δεν έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Συνέχισαν με την κατασκευή της απόδειξης, ψάχνοντας μια γωνία ορθή. Προκειμένου να βρουν μια γωνία ορθή βασίστηκαν στο πόρισμα «Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δυο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη» και παρατηρούσαν ότι αφού οι διαγώνιοι του ρόμβου θα τέμνονται κάθετα και οι πλευρές του ΚΛΜΝ είναι παράλληλες τότε κάθε γωνία του ΚΛΜΝ θα είναι ορθή. Συνεπώς το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:



N: Θα είναι τετράγωνο;	
Ε: Μπορεί να είναι και ορθογώνιο όμως	
N: Δεν νομίζω, τετράγωνο θα είναι.	
Ε: Κάτσε να προσπαθήσουμε να δούμε τι ισχύει..	
	Στη συνέχεια προσπαθούν να βρουν σχέσεις με βάση το σχήμα και να καταλήξουν τελικά στο είδος του ΚΛΜΝ.

4.2) Εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης

Σε αυτή τη φάση έγινε μια συζήτηση με τις μαθήτριες για το αν ήταν σίγουροι για τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν και αν θα έδιναν αυτές τις απαντήσεις σε ένα διαγώνισμα. Αυτό που έδωσαν σαν απάντηση ήταν ότι στο διαγώνισμα δεν θα ήταν αποδεκτές οι απαντήσεις του πρώτου ερωτήματος και αυτό γιατί δεν ήταν τεκμηριωμένες. Κατέληξαν λοιπόν στο ότι θα έπρεπε να αποδείξουν τις εικασίες του πρώτου ερωτήματος προκείμενου να είναι αποδεικτές αλλά και οι ίδιες οι μαθήτριες να είναι σίγουρες για τις εικασίες τους.

Απόσπασμα διαλόγου πρώτης ομάδας μαθητών:

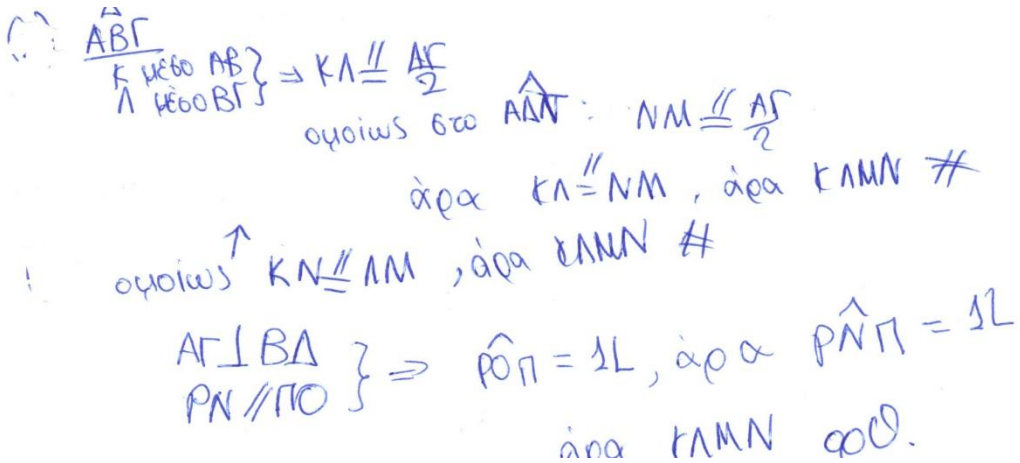
Ε: Είστε σίγουρες για τις εικασίες στις οποίες καταλήξατε;	
Δ: Ναι, γιατί να μην είμαστε αφού φαινόταν από το σχήμα τι θα είναι το ΚΛΜΝ.	
Κ: Και εξάλλου σε κάποια το αποδείξαμε οπότε είμαστε 100% σίγουρες.	
Ε: Θα παρουσιάζατε δηλαδή τα συμπεράσματά σας σε ένα διαγώνισμα;	
Δ: Όχι σε διαγώνισμα με τίποτα	
Κ: Αποκλείεται είναι σαν να μην έχουμε γράψει τίποτα. Θα ήθελαν και απόδειξη αυτά σε ένα διαγώνισμα.	
Ε: ΑΑΑ σωστά… Εδώ χρειάζεται λέτε απόδειξη;	
Δ: Μα εδώ έχουμε το σχήμα και φαίνεται	
Κ: Μμμμ ναι… αλλά και εδώ δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι..να ας πούμε σε αυτή την περίπτωση που εσύ υποστήριζες ότι είναι ρόμβος το αποδείξαμε για να δούμε τελικά τι ισχύει.	
Δ: Ναι δίκιο έχεις, άρα θα πρέπει να κάνουμε τις αποδείξεις για όλες τις εικασίες του πρώτου ερωτήματος.	

Έπειτα, οι μαθήτριες άρχισαν να κατασκευάζουν την απόδειξη για κάθε μία από τις εικασίες που είχαν κάνει στην πρώτη δραστηριότητα, εκτός από τις εικασίες που είχαν ήδη αποδείξει. Από αυτό το σημείο και μετά ξεκίνησε η παραγωγική διαδικασία όπου οι μαθήτριες άρχισαν να μεταβαίνουν από το σχήμα και την οπτική επαφή στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης. Αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι οι μαθήτριες σε κάθε εικασία που είχαν να αποδείξουν μετασχημάτιζαν το ΑΒΓΔ σε ρόμβο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο και προσπαθούσαν να εφαρμόσουν θεωρήματα και αξιώματα της γεωμετρίας προκειμένου να αποδείξουν τις εικασίες τους. Στις απαντήσεις των μαθητριών παρατηρήθηκαν αποδείξεις με βάση θεωρήματα της γεωμετρίας που ήδη γνώριζαν.

Παρατηρήθηκαν συνολικά 4 αποδείξεις οι οποίες έγιναν με βάση θεωρήματα που γνώριζαν από τη γεωμετρία. Αναφέρεται παρακάτω ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου οι μαθήτριες μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σε ρόμβο και

προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως είχαν αρχικά εικάσει με βάση την παρατήρηση του σχήματος. Προκειμένου να αποδείξουν την εικασία τους σχεδίασαν κάποιες βοηθητικές ευθείες στο υπάρχον σχήμα και αυτό γιατί σκέφτονταν και ενεργούσαν σαν να εργάζονταν με «χαρτί και μολύβι». Συγκεκριμένα, έφεραν τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ του ΑΒΓΔ χωρίς να ξέρουν αν θα τους χρειαστούν στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης. Παρατήρησαν ότι επειδή το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε οι διαγώνιοι του ΑΓ και ΒΔ θα τέμνονται κάθετα. Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Ν και Κ είναι μέσα των πλευρών άρα ισχύει το θεώρημα «Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της» δηλαδή ΝΚ =// ΒΔ/2. Ομοίως, στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει ότι ΜΛ =// ΒΔ/2 επομένως ΝΚ =// ΜΛ. Άρα, το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο επομένως, αρκούσε να βρουν μια γωνία του ορθή έτσι ώστε να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως είχαν αρχικά εικάσει. Στη συνέχεια βρήκαν μια γωνία ορθή μετά από την παρατήρηση ότι οι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα και οι ΑΓ και ΝΜ είναι παράλληλες εφαρμόζοντας το πόρισμα « Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δυο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη» άρα, η γωνία ΚΝΜ είναι ορθή. Κατέληξαν, επομένως, στο ότι το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο επιβεβαιώνοντας τις εικασίες που είχαν κάνει αρχικά.

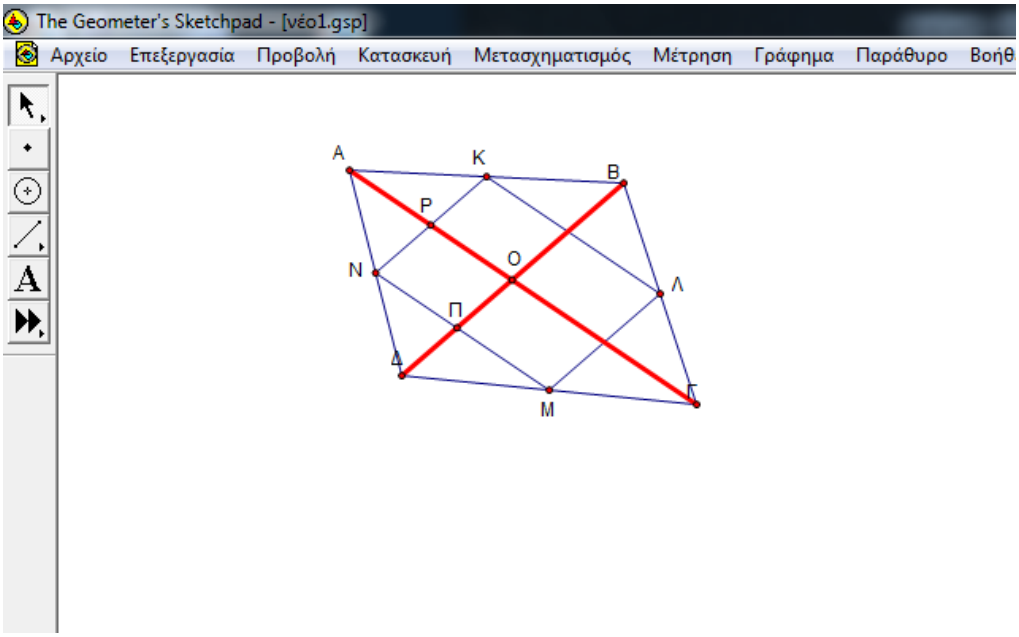
Σε όλη αυτή τη διαδικασία οι μαθήτριες έγραφαν στο φύλλο εργασίας τις σχέσεις που προέκυπταν με βάση τα θεωρήματα που εφάρμοζαν κάθε φορά, προκειμένου να καταλήξουν στο ότι το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Παρατίθεται παρακάτω ένα ενδεικτικό απόσπασμα των σημειώσεων των μαθητριών.



Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθήτριες σε όλη αυτή τη διαδικασία, σκέφτονταν και ενεργούσαν σαν να εργάζονταν εξ' ολοκλήρου με «χαρτί και μολύβι»

μόνο που το σχήμα αυτή τη φορά ήταν στην οθόνη του υπολογιστή. Χαρακτηριστικό ήταν επίσης ότι σκέφτηκαν να σχεδιάσουν τη διαγώνιο ΑΓ την οποία είχαν χρησιμοποιήσει και στην προηγούμενη δραστηριότητα χωρίς όμως να τη σχεδιάσουν. Ο ρόλος του συρσίματος εδώ ήταν φανερός μέχρι τη στιγμή που μετασχημάτισαν το ΑΒΓΔ σε τετράγωνο, μετά απλά παρατηρούσαν το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή χωρίς να "σύρουν" σημεία του.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:



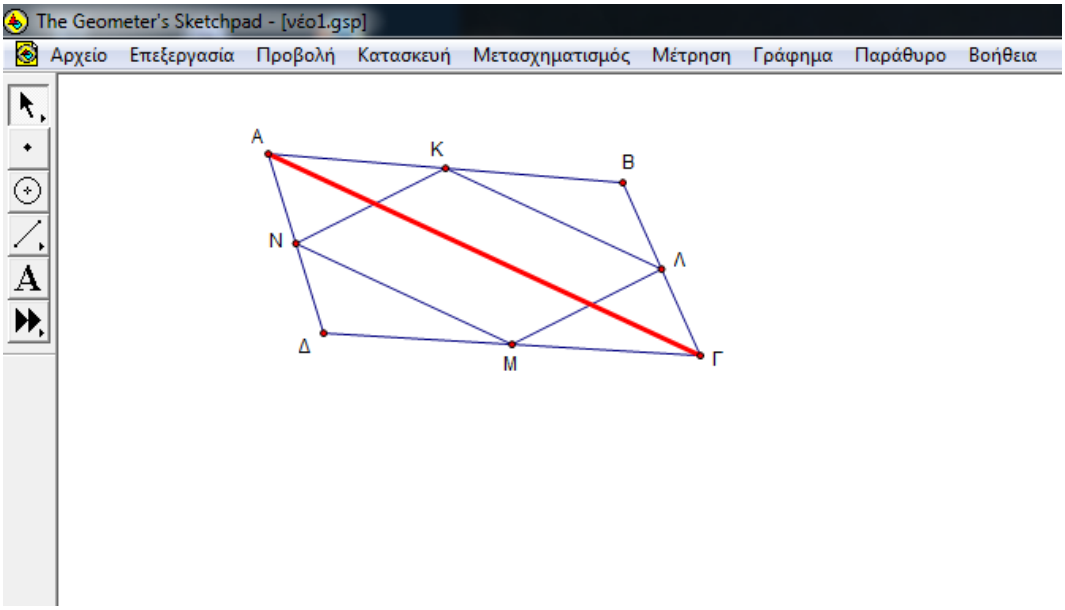
Κ: Ααα όπως και στις άλλες περιπτώσεις αποδεικνύουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και…	
Δ: Άρα, ψάχνουμε μετά μια ορθή γωνία	
Κ: Αφού η ΑΓ είναι παράλληλη στην ΝΜ τότε και η ΑΟ θα είναι παράλληλη στην ΝΠ	
Δ: Σωστά και αφού οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα τότε και η ΝΠ θα είναι κάθετη στην ΟΔ άρα Ν ορθή γωνία.	
Κ: Οπότε ορθογώνιο το ΚΛΜΝ ωραία, ας τα γράψουμε τώρα	

Στη δεύτερη ομάδα παρατηρήθηκαν 4 εικασίες σε αυτή τη κατηγορία, χαρακτηριστικά αναφέρετε το παράδειγμα που οι μαθήτριες προσπαθούσαν να αποδείξουν την περίπτωση που το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και έχουν εικάσει

ότι και το ΚΛΜΝ θα είναι παραλληλόγραμμο. Μετασχημάτισαν αρχικά το ΑΒΓΔ σε παραλληλόγραμμο σύροντας τις κορυφές του, ώστε να μοιάζει με παραλληλόγραμμο και προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το ΚΛΜΝ είναι και αυτό παραλληλόγραμμο. Αρχίζει από αυτό το σημείο και μετά η παραγωγική διαδικασία με την απόδειξη των εικασιών του προηγούμενος ερωτήματος. Συζητώντας μεταξύ τους αναρωτιόντουσαν εάν μπορούν να σχεδιάσουν και άλλες ευθείες στο σχήμα οι οποίες μπορούσαν να τους βοηθήσουν να αποδείξουν τις εικασίες τους. Γι αυτό το λόγο σχεδίασαν τη διαγώνιο ΑΓ του ΑΒΓΔ. Φέροντας τη διαγώνιο διαπίστωσαν ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ επομένως μπορούσαν να εφαρμόσουν το θεώρημα της γεωμετρίας «Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της», δηλαδή ΚΛ ίση και παράλληλη με την ΑΓ. Ομοίως, απέδειξαν ότι το ίδιο ισχύει για το τρίγωνο ΑΔΓ με ΝΜ ίση και παράλληλη με την ΑΓ. Βρήκαν με αυτό τον τρόπο δύο πλευρές του ΚΛΜΝ ίσες και παράλληλες συνεπώς το ΚΛΜΝ θα είναι παραλληλόγραμμο.

Κατά τη διάρκεια που οι μαθήτριες προσπαθούσαν να αποδείξουν τις εικασίες τους κρατούσαν σημειώσεις με βάση τα συμπεράσματά τους και τα όσα παρατηρούσαν. Κοιτούσαν κάθε φορά το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή και κατέγραφαν τα συμπεράσματά τους κατασκευάζοντας σταδιακά την τυπική απόδειξη των εικασιών τους. Ενεργούσαν σαν να είχαν το σχήμα στο χαρτί, αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι σκέφτηκαν να σχεδιάσουν κάποιες βοηθητικές ευθείες χωρίς να είναι σίγουροι αν θα τους χρειαστούν. Ο ρόλος του καθοδηγούμενου συρσίματος ήταν εμφανής μέχρι το σημείο που μετασχηματίζουν το ΑΒΓΔ σε παραλληλόγραμμο, από αυτή τη στιγμή και μετά απλά παρατηρούσαν το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή και εξήγαγαν συμπεράσματα βασιζόμενοι στη διαίσθησή τους.

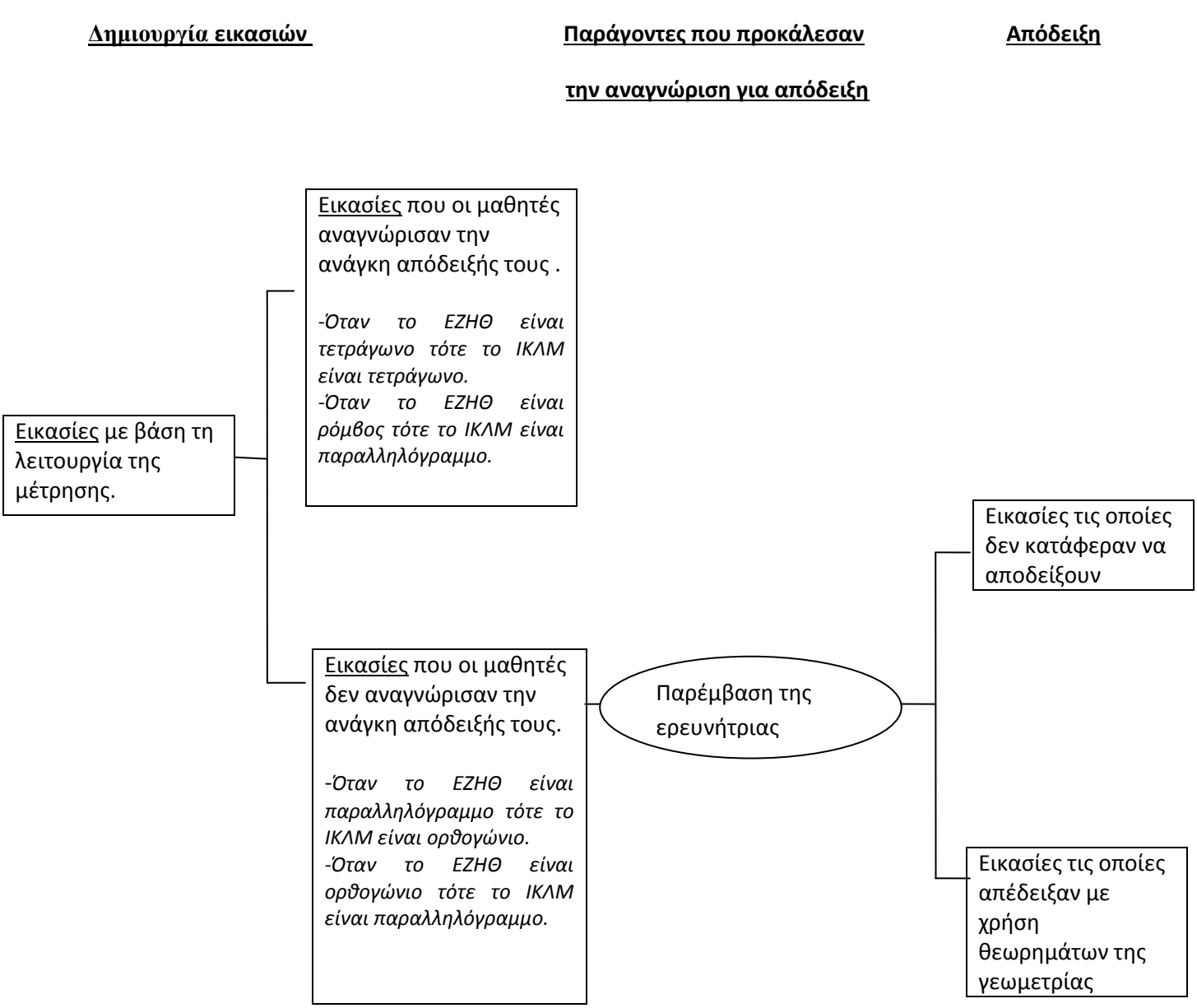
Χαρακτηριστικό παράδειγμα:



Ε: Μπορούμε να φέρουμε ευθείες..να την ΑΓ	*Φέρουν βοηθητική ευθεία ΑΓ διαγώνιο του ΑΒΓΔ*
Ν: Γιατί;	
Ε: Να γιατί τα Κ και Λ είναι μέσα οπότε στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι ΚΛ = // ΑΓ/2	
Ν: Σωστά	
Ε: Ομοίως για το ΑΔΓ άρα βρήκαμε 2 πλευρές του ΚΛΜΝ ίσες και παράλληλες άρα θα είναι παραλληλόγραμμο.	

ΑΝΑΛΥΣΗ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τις κατηγορίες των εικασιών που παρατηρήθηκαν στη δεύτερη δραστηριότητα.



4.3) Εικασίες που αναδύθηκαν με αφορμή τη λειτουργία της μέτρησης και η αναγνώριση της ανάγκης για απόδειξη

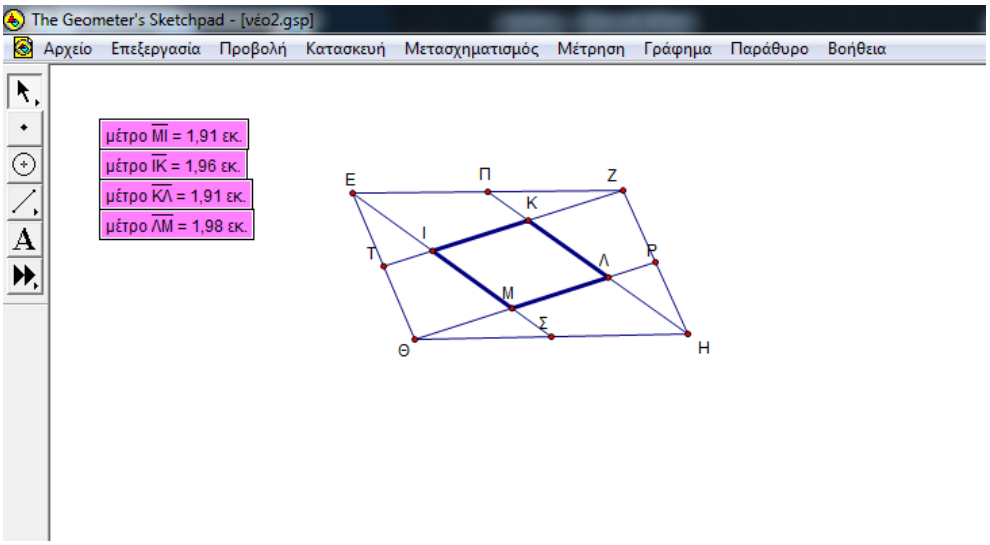
Έπειτα δόθηκε στις μαθήτριες μια δεύτερη δραστηριότητα η οποία είχε παρόμοια ερωτήματα με την πρώτη απλά το σχήμα σε αυτή την περίπτωση ήταν πιο πολύπλοκο. Δεδομένου ότι οι μαθήτριες είχαν εμπλακεί και με την προηγούμενη δραστηριότητα, είχαν κατανοήσει ότι θα έκαναν εικασίες τις οποίες έπειτα θα έπρεπε να επιβεβαιώσουν κατασκευάζοντας την απόδειξή τους. Κατασκεύασαν στο λογισμικό ένα τυχαίο τετράπλευρο ΕΖΗΘ και ενώνοντας τις κορυφές του με τα μέσα των απέναντι πλευρών σχημάτισαν ένα τετράπλευρο ΙΚΛΜ του οποίου έπρεπε οι να μελετήσουν το είδος σε σχέση με το ΕΖΗΘ. Αυτό που αξίζει να αναφερθεί είναι ότι επειδή το σχήμα ήταν αρκετά πολύπλοκο και δεν μπορούσαν εύκολα να κάνουν υποθέσεις άρχισαν να ψάχνουν άλλες λειτουργίες του λογισμικού που θα τους βοηθούσαν. Επειδή δεν ήταν εύκολο με παρατήρηση να εικάσουν το είδος του ΙΚΛΜ, όπως είχαν κάνει στο πρώτο ερώτημα, σκέφτηκαν να ενεργοποιήσουν τη λειτουργία της μέτρησης. Σε αυτό το σημείο επενέβη η ερευνήτρια αποτρέποντας τις μαθήτριες να χρησιμοποιήσουν αυτή τη λειτουργία του λογισμικού. Ωστόσο, οι μαθήτριες επειδή δυσκολεύονταν αρκετά την είχαν ενεργοποιήσει καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας. Αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι η λειτουργία της μέτρησης είχε βοηθητικό και όχι κυρίαρχο ρόλο, αφού ήταν η αφορμή προκειμένου οι μαθητές να διατυπώσουν τις εικασίες τους, χωρίς να βασίζονται εξ' ολοκλήρου στις τιμές που έβλεπαν στην οθόνη του υπολογιστή.

Αυτό που παρατηρήθηκε στην <u>πρώτη ομάδα</u> ήταν ότι υπήρξαν 4 εικασίες. Οι μαθητές ενεργοποίησαν τη λειτουργία της μέτρησης για τις πλευρές του ΕΖΗΘ και του ΙΚΛΜ. Χαρακτηριστικά αναφέρεται το παράδειγμα όπου οι μαθήτριες σύροντας τις κορυφές του ΕΖΗΘ το μετασχημάτισαν σε παραλληλόγραμμο προσέχοντας οι τιμές της μέτρησης των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου να είναι ίσες και παρατηρούσαν το μήκος των πλευρών του ΙΚΛΜ. Στη συνέχεια, αγνοώντας ότι υπήρχαν οι τιμές στις πλευρές του ΙΚΛΜ προσπαθούσαν να εξάγουν συμπεράσματα για το είδος του. Αυτό που διαπίστωσαν ήταν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές φαίνονταν να ήταν ανά δύο ίσες.

Οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν καθοδηγούμενο σύρσιμο και προσπαθούσαν να προσαρμόσουν το σχήμα με βάση τις τιμές που είχαν από τη λειτουργία της μέτρησης

ώστε να εξάγουν συμπεράσματα για το είδος του ΙΚΛΜ. Παρόλο που οι μαθητές από την προηγούμενη δραστηριότητα είχαν κατανοήσει ότι μόνο μέσα από την απόδειξη των εικασιών μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για τα συμπεράσματά μας, ωστόσο έγινε μετάβαση στην απόδειξη των εικασιών τους. Προσπάθησαν να αποδείξουν τις εικασίες τους αλλά δεν είχαν αρκετά δεδομένα και αφού δεν τους το ζητούσε η εκφώνηση παράβλεψαν την απόδειξη των εικασιών τους σε αυτή τη φάση.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:

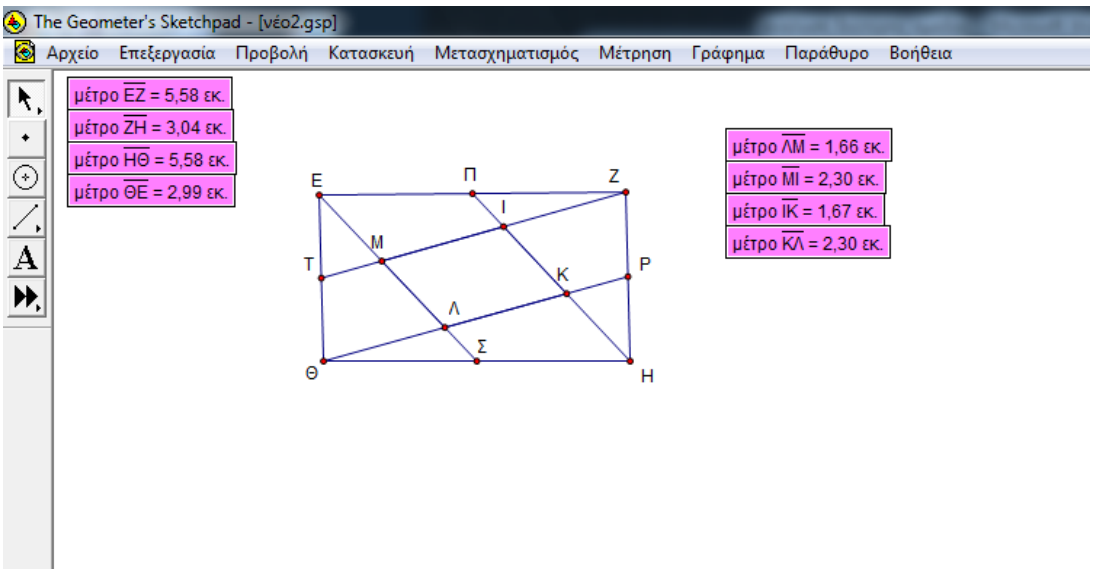


Δ: Θα είναι παραλληλόγραμμο ε;	
Κ: Ε ναι αφού φαίνεται και από τις πλευρές, δες και τις τιμές..	*Βασίστηκαν στις εικασίες τους για να βεβαιωθούν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο*
Δ: Άρα όταν το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος τότε και το ΙΚΛΜ θα είναι παραλληλόγραμμο.	

Οι μαθήτριες της δεύτερης ομάδας ενήργησαν όπως και οι μαθήτριες της πρώτης. Σε αυτή τη φάση έχουμε 4 εικασίες οι οποίες βασίστηκαν στη λειτουργία της μέτρησης. Οι μαθήτριες αρχικά μετασχημάτισαν το ΕΖΗΘ σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο προσάρμοσαν τις απέναντι πλευρές του ΕΖΗΘ ώστε να είναι

ίσες, παρατηρώντας τις τιμές που είχαν από τη λειτουργία της μέτρησης, και τις γωνίες του να είναι ορθές. Στη συνέχεια, παρατηρώντας το σχήμα του ΙΚΛΜ εξήγαγαν συμπεράσματα για το είδος του. Οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν καθοδηγούμενο σύρσιμο και αυτό γιατί έσυραν συγκεκριμένα σημεία ώστε να επιτύχουν οι απέναντι πλευρές του ΕΖΗΘ να είναι ίσες.

<u>Χαρακτηριστικό παράδειγμα</u>



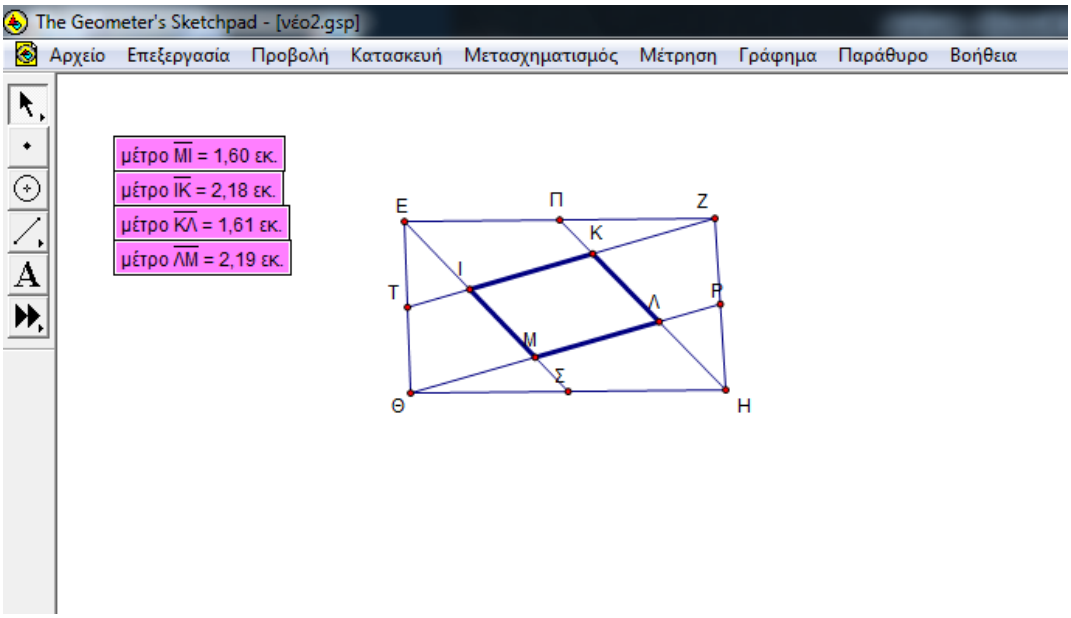
Ν: Ε φαίνεται παραλληλόγραμμο θα είναι	
Ε: Ναι και εγώ έτσι λέω έχουν μια μικρή απόκλιση αλλά οκ..	
Ν: Εεε σιγά μικρή είναι η απόκλιση..Άρα γράφουμε ότι όταν το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο τότε το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο	*Βάσισαν τις εικασίες τους κυρίως στη λειτουργία της μέτρησης.*

4.4) Εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή της τυπικής απόδειξης

Σε αυτή την κατηγορία παρατηρήθηκαν 2 εικασίες τις οποίες οι μαθήτριες της πρώτης ομάδας απέδειξαν. Οι μαθήτριες αφού μετασχημάτιζαν κάθε φορά το ΕΖΗΘ σε ένα από τα γνωστά τους σχήματα με βάση τη λειτουργία της μέτρησης προσπαθούσαν να αποδείξουν τις εικασίες τους για το είδος του ΙΚΛΜ. Το σχήμα ήταν αρκετά πολύπλοκο για να αποδείξουν τις εικασίες τους οπότε χρειάστηκε αρκετές φορές να επέμβει η ερευνήτρια υπενθυμίζοντάς τους στοιχεία της θεωρίας ώστε να μπορέσουν να συνεχίσουν την κατασκευή της απόδειξης. Αναφέρεται παρακάτω ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας στο οποίο οι μαθήτριες προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο όταν το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Χρησιμοποίησαν καθοδηγούμενο σύρσιμο για να μετασχηματίσουν το ΕΖΗΘ σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έπειτα απλά παρατηρούσαν το σχήμα και έκαναν υποθέσεις εφαρμόζοντας θεωρήματα.

Για να αποδείξουν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο αρχικά οι μαθήτριες προσπαθούσαν να βρουν δύο πλευρές του ίσες και παράλληλες. Ωστόσο, με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούσαν να εντοπίσουν πλευρές παράλληλες και ίσες με αποτέλεσμα να μην ξέρουν τι άλλο να κάνουν ώστε να αποδείξουν τις εικασίες τους. Σε αυτό το σημείο επενέβη η ερευνήτρια υποδεικνύοντάς τους ότι δεν είναι αναγκαίο να βρουν μόνο 2 πλευρές ίσες και παράλληλες θα μπορούσαν να εφαρμόσουν ένα από τα άλλα κριτήρια του παραλληλογράμμου. Μετά από αυτή την παρέμβαση οι μαθητές ενεργοποιήθηκαν και άρχισαν να συγκρίνουν τρίγωνα εφαρμόζοντας τα κριτήρια ισότητας τριγώνων ώστε να βρουν γωνίες ίσες. Με βάση τα συμπεράσματα που είχαν βρήκαν ποιές πλευρές του ΙΚΛΜ είναι παράλληλες συμπεραίνοντας ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:

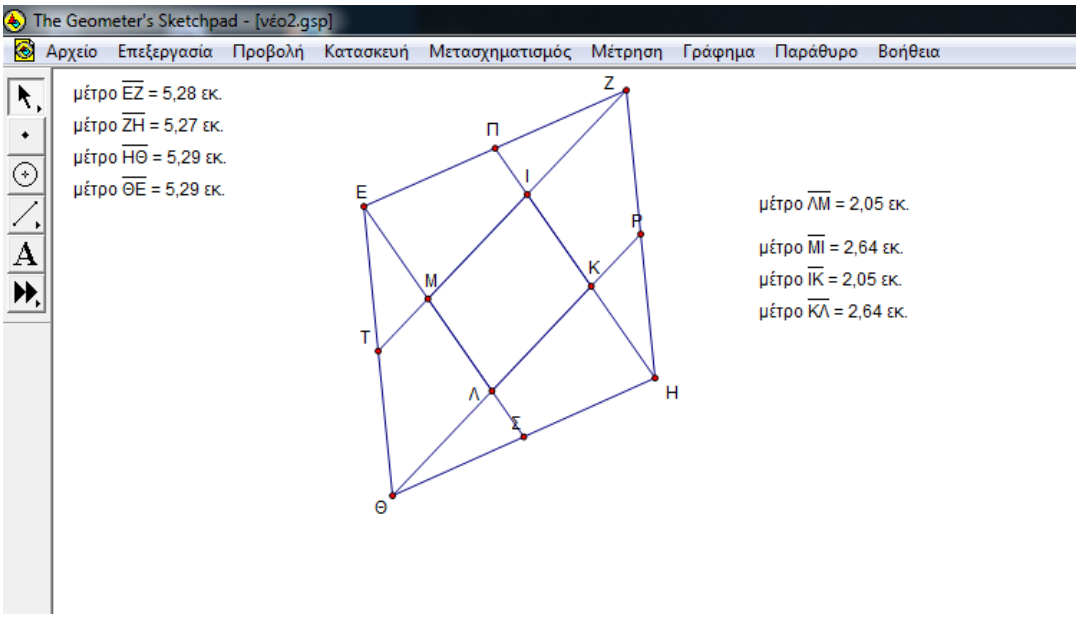


Κ: Για να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο αρκεί να βρούμε 2 πλευρές ίσες και παράλληλες.	
Ε: Μόνο τότε θα είναι παραλληλόγραμμο;	
Δ: Και αν βρούμε τις απέναντι γωνίες ίσες ..	
Κ: Οπότε να δείξουμε ότι ΙΚ//ΛΜ ή τις άλλες 2..	
	Συζητούσαν μεταξύ τους αλλά δεν έβρισκαν κάποιο τρόπο για το αποδείξουν.
Ε: Μήπως συγκρίνοντας τρίγωνα βρίσκεται ίσες γωνίες που θα σας οδηγήσουν στις παράλληλες που ψάχνετε;	
Δ: Να συγκρίνουμε τα ΕΘΣ και ΗΠΖ, θα είναι ίσα γιατί ΕΘ=ΖΗ , ΘΑ=ΠΖ και είναι ορθογώνια. Άρα, η $\Theta\hat{\Sigma}E = H\hat{\Pi}Z$	
Κ: Ναι και;.. Ααα όμως η $\Theta\hat{\Sigma}E = \Sigma\hat{E}\Pi$ ως εντός εναλλάξ των ΕΖ//ΗΘ. Οπότε και $H\hat{\Pi}Z = \Sigma\hat{E}\Pi$ άρα ΙΜ//ΚΛ.	
Δ: Ωραία, ομοίως λογικά και ΙΚ//ΛΜ	
Κ: Ααα οπότε μπορούμε να το αποδείξουμε με τις απέναντι γωνίες.	
	Αποδεικνύουν βρίσκοντας εντός εναλλάξ γωνίες και εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες ίσες ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες άρα θα είναι παραλληλόγραμμο.

Και στη δεύτερη ομάδα παρατηρήθηκαν 2 αποδείξεις τις οποίες ολοκλήρωσαν μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας. Οι μαθήτριες ενεργούσαν όπως και οι μαθήτριες της πρώτης ομάδας, μετασχημάτισαν το ΕΖΗΘ με βάση τη λειτουργία της μέτρησης σε ρόμβο και προσπαθούσαν να αποδείξουν τις εικασίες τους για το είδος του ΙΚΛΜ. Το σχήμα τους δυσκόλευε αρκετά και χρειάστηκε η ερευνήτρια να επέμβει θυμίζοντάς τους θεωρήματα της γεωμετρίας ώστε να ενεργοποιηθούν και να συνεχίσουν την απόδειξή τους. Ο ρόλος του dragging ήταν εμφανής, και συγκεκριμένα του καθοδηγούμενου συρσίματος, μόνο μέχρι τη στιγμή που οι μαθητές μετασχημάτισαν το ΕΖΗΘ ώστε να γίνει ρόμβος, από εκείνη τη στιγμή και μετά απλά παρατηρούσαν το σχήμα και έκαναν υποθέσεις εφαρμόζοντας θεωρήματα της θεωρίας. Αναφέρεται παρακάτω ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας στο οποίο προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο όταν το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

Για να αποδείξουν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο αρχικά προσπαθούσαν να βρουν δύο πλευρές του ίσες και παράλληλες. Δεν είχαν κάποια συγκεκριμένη ιδέα, απλά αυτό που έκαναν ήταν να συγκρίνουν τρίγωνα μήπως προκύψουν στοιχεία τα οποία τους ήταν χρήσιμα. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΕΖΤ και ΘΗΡ βρήκαν ίσες γωνίες οι οποίες τους οδήγησαν στο να συμπεράνουν ότι οι απέναντι πλευρές του ΙΚΛΜ είναι ανά δύο παράλληλες. Επομένως, επιβεβαίωσαν ότι το ΙΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο όπως είχαν αρχικά εικάσει.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα



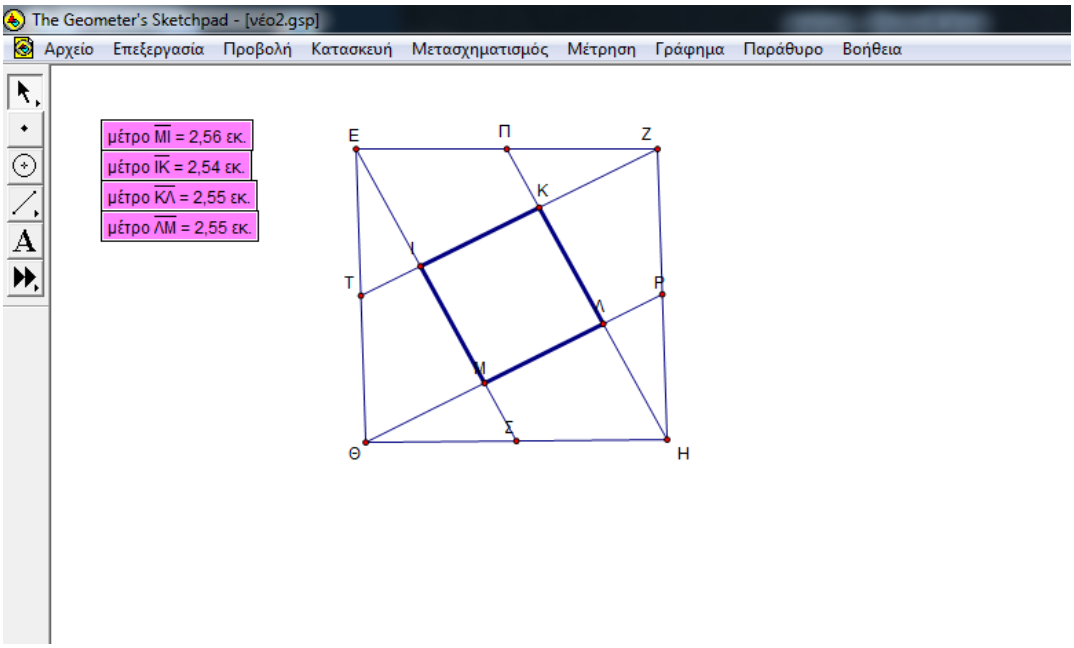
Ν: Ωχ, άντε τώρα να δείξεις ότι είναι παραλληλόγραμμο	
Ε: Α ενώνει μέσα άρα θα είναι παράλληλη … όχι δεν είναι και τα δύο μέσα..	
Ν: Μμμ δεν ξέρω πως..Να το αφήσουμε;	
ΕΡ: Μπορείτε να βρείτε ίσα τρίγωνα; Μήπως από τις ίσες γωνίες που θα βρείτε καταλήξετε να βρείτε τις πλευρές του ΙΚΛΜ παράλληλες;	
	Συγκρίνουν τρίγωνα βρίσκουν ίσες γωνίες και καταλήγουν στο να βρουν τις απέναντι γωνίες του ΙΚΛΜ ίσες.

4.5) Εικασίες που οι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ανάγκη απόδειξης

Σε αυτή την περίπτωση στην πρώτη ομάδα παρατηρήθηκαν 2 εικασίες των οποίων οι μαθήτριες δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν την απόδειξη τους. Μετασχημάτιζαν το τετράπλευρο ΕΖΗΘ όπως και στις άλλες περιπτώσεις και προσπαθούσαν σε κάθε περίπτωση να αποδείξουν τις εικασίες τους. Παρατηρούσαν το σχήμα, εφάρμοζαν θεωρήματα και κρατούσαν σημειώσεις των συμπερασμάτων που εξήγαγαν. Και σε αυτήν την περίπτωση ο ρόλος του dragging, καθοδηγούμενο σύρσιμο, ήταν φανερός μέχρι τη στιγμή που μετασχημάτισαν το ΕΖΗΘ, στη συνέχεια οι εικασίες τους βασίστηκαν στην παρατήρηση του σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή.

Συγκεκριμένα, αναφέρεται το παράδειγμα όπου το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο και οι μαθητές πρέπει να αποδείξουν ότι το ΙΚΛΜ θα είναι και αυτό τετράγωνο. Αρχικά, απέδειξαν ότι οι απέναντι πλευρές του ΙΚΛΜ είναι παράλληλες όπως είχαν ξανακάνει και προσπαθούσαν να βρουν μια γωνία του ορθή προκειμένου να αποδείξουν ότι το ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο. Είχαν κάποιες ιδέες για το πώς θα αποδείξουν ότι μια γωνία του είναι ορθή ωστόσο δεν μπόρεσαν τελικά να μεταβούν στην τυπική απόδειξη της αρχικής τους εικασίας ότι το ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο. Αυτό που τους δυσκόλεψε ήταν ότι το σχήμα ήταν αρκετά πολύπλοκο, είχαν λίγα δεδομένα και δεν μπορούσαν να εξάγουν συμπεράσματα. Πιθανόν άλλος ένας παράγοντας αδυναμίας κατασκευής της απόδειξης να ήταν και η πνευματική κόπωση των μαθητών δεδομένου ότι οι εικασίες τις οποίες δεν κατάφεραν να αποδείξουν ήταν προς το τέλος της διαδικασίας.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:



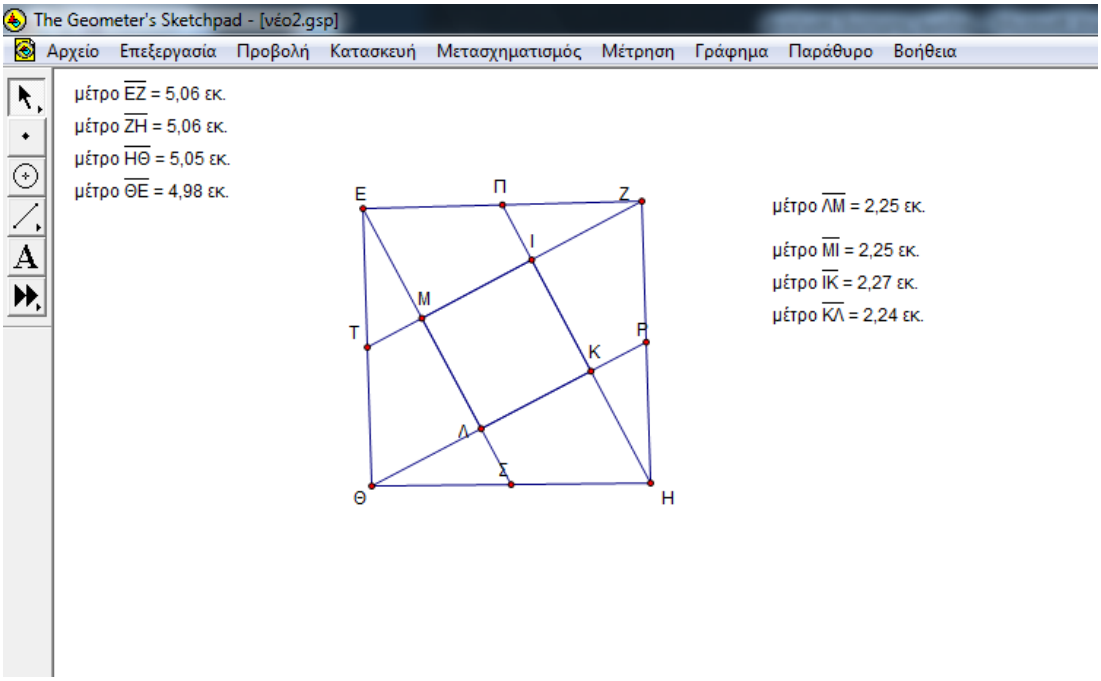
Δ: Πρέπει να βρούμε μια γωνία ορθή και ίσες πλευρές ε;	
Κ: Ναι αλλά πώς να δείξουμε τις πλευρές ίσες;	
Δ: Μμμ δύσκολο νομίζω..	
	Είχαν κάποιες ιδέες ωστόσο δεν μπόρεσαν να μεταβούν στην απόδειξη.

Στη δεύτερη ομάδα, παρατηρήθηκαν 2 εικασίες τις οποίες οι μαθήτριες δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν την απόδειξη. Μετασχημάτιζαν το τετράπλευρο ΕΖΗΘ και προσπαθούσαν να αποδείξουν σε κάθε περίπτωση τις εικασίες τους. Παρατηρούσαν το σχήμα, εφάρμοζαν θεωρήματα και κρατούσαν σημειώσεις. Και σε αυτή την περίπτωση ο ρόλος του dragging ήταν φανερός μέχρι τη στιγμή που μετασχημάτισαν το ΕΖΗΘ, στη συνέχεια οι εικασίες τους βασίστηκαν στην παρατήρηση του σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή. Την ίδια εικασία δεν κατάφερε να αποδείξει και η πρώτη ομάδα. Πιθανόν τους μπέρδευε αρκετά το σχήμα και δεν μπορούσαν να κάνουν υποθέσεις έτσι ώστε να αποδείξουν τις εικασίες τους. Βασικός παράγοντας στην μη ολοκλήρωση των αποδείξεων θεωρείται και το γεγονός

ότι οι μαθήτριες βρίσκονταν προς το τέλος της δραστηριότητας και είχαν κουραστεί αρκετά αδυνατώντας να ολοκληρώσουν τις αποδείξεις.

Σύμφωνα με τον Balacheff (1991) οι μαθήτριες δεν ασχολούνται με την αποδεικτική διαδικασία όχι επειδή δεν μπορούν να κατασκευάσουν την απόδειξη αλλά επειδή δεν τους δημιουργείται η ανάγκη να το κάνουν.

<u>Χαρακτηριστικό παράδειγμα:</u>



Ε: Πρέπει να βρούμε ότι είναι ορθογώνιο; Πως;	
Ν: Δύσκολο.	
Ε: Δεν ξέρω με μπερδεύει το σχήμα.	*Παρόλη την προσπάθεια δεν κατάφεραν να μεταβούν στην απόδειξη*

ΣΥΝΟΨΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ 1

- **Ερώτημα 1**

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, αυτό που διαπιστώθηκε ήταν ότι οι μαθήτριες και των δύο ομάδων έκαναν εικασίες οι οποίες κυρίως προέκυπταν από τη λειτουργία του συρσίματος. Μετασχημάτιζαν κάθε φορά το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και παρατηρούσαν το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ, που σχηματιζόταν από τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ. Σε αυτή τη φάση καθοριστικό ρόλο για την εξαγωγή των συμπερασμάτων έπαιξε το σύρσιμο και κυρίως το καθοδηγούμενο ή περιπλανώμενο σύρσιμο. Οι μαθήτριες προκειμένου να μελετήσουν το είδος του ΚΛΜΝ μετασχημάτιζαν το ΑΒΓΔ σύροντας τις κορυφές του, χρησιμοποιώντας τυχαίο ή καθοδηγούμενο σύρσιμο. Ωστόσο, στις πρώτες εικασίες που έκαναν οι μαθήτριες δεν τους δημιουργήθηκε η ανάγκη στις μαθήτριες να αποδείξουν τις εικασίες τους και αυτό ίσως γιατί δεν είχαν εξοικειωθεί αρκετά με το λογισμικό ή γιατί θεωρούσαν προφανή τα συμπεράσματα που εξήγαγαν. Όπως αναφέρθηκε και στο θεωρητικό πλαίσιο σύμφωνα με τον de Villiers (1999) η απόδειξη έχει σημασία για τις μαθήτριες μόνο όταν απαντά στις ερωτήσεις τους και στις αμφιβολίες τους, όταν δηλαδή αποδεικνύεται κάτι το οποίο δεν είναι προφανές.

Στη συνέχεια, καθώς οι μαθήτριες συνέχιζαν να κάνουν εικασίες και να εξοικειώνονται όλο και περισσότερο με το λογισμικό και τις λειτουργίες του, παρατηρήθηκε ότι προσπαθούσαν με κάποιο τρόπο να επιβεβαιώσουν τις εικασίες που δημιουργούσαν. Συγκεκριμένα, οι μαθήτριες της μιας ομάδας διαφώνησαν για το είδος του ΚΛΜΝ στην περίπτωση που το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Η μία μαθήτρια υποστήριζε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο ενώ η άλλη ότι θα είναι ορθογώνιο. Η λειτουργία του συρσίματος και η παρατήρηση του σχήματος δεν μπορούσε να τους οδηγήσει στο να συμπεράνουν το είδος του ΚΛΜΝ, οπότε η μία μαθήτρια σκέφτηκε να σχεδιάσει εκ νέου στο λογισμικό ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που διατηρούσε τις ιδιότητές του. Η διαδικασία αυτή έχει παρουσιαστεί αναλυτικά στην ανάλυση της δραστηριότητας. Και σε αυτό το σημείο κύριο ρόλο στη δημιουργία εικασιών των μαθητριών έπαιξε το καθοδηγούμενο σύρσιμο. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τρόπο οι μαθήτριες σαν να ήθελαν να βεβαιωθούν για τις εικασίες τους. Συνεπώς, οι μαθήτριες με αφορμή τη διαφωνία τους αναζητούσαν έναν τρόπο έτσι ώστε να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους. Χρονικά αυτή η εικασία ήταν η προτελευταία (της πρώτης δραστηριότητας) που έκαναν οι

μαθήτριες οι οποίες χρησιμοποίησαν κυρίως απαγωγικές διαδικασίες και συλλογισμούς. Στην τελευταία τους εικασία και οι δύο ομάδες στην προσπάθειά τους να πείσουν τη συμμαθήτριά τους για το είδος του ΚΛΜΝ άρχισαν άτυπα να αποδεικνύουν τις εικασίες τους. Στην πρώτη ομάδα, η μία μαθήτρια υποστήριζε ότι όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο τότε και το ΚΛΜΝ θα είναι τετράγωνο, όμως η δεύτερη μαθήτρια δεν μπορούσε να πειστεί ότι ισχύει αυτή η εικασία. Στην προσπάθεια της μιας μαθήτριας να πείσει την άλλη, άρχισε άτυπα να αποδεικνύει την εικασία της χρησιμοποιώντας θεωρήματα και πορίσματα της γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή, οι μαθήτριες εφάρμοζαν θεωρήματα της γεωμετρίας και έγραφαν τις προϋποθέσεις των θεωρημάτων και των πορισμάτων, όπως θα τα έγραφαν εάν έλυναν μια άσκηση γεωμετρίας. Οι μαθήτριες επηρεασμένες από τον τρόπο που εργάζονται στο σχολείο, έγραφαν τις παρατηρήσεις τους με «χαρτί και μολύβι» και με αυτό τον τρόπο οδηγήθηκαν στην κατασκευή της απόδειξης των εικασιών τους. Άρα, οι μαθήτριες μέσα από απαγωγικές διαδικασίες οδηγήθηκαν στην αναγνώριση της κατασκευής της τυπικής απόδειξης των εικασιών τους. Και στη δεύτερη ομάδα, ενεργώντας όπως η πρώτη, παρατηρήθηκε κάτι αντίστοιχο, άλλα αυτή τη φορά οι μαθήτριες προσπαθούσαν να αποδείξουν την περίπτωση που το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και το ΚΛΜΝ θα είναι ορθογώνιο. Παρατηρούσαν το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή και με τα δεδομένα που είχαν εφάρμοζαν θεωρήματα της γεωμετρίας. Τα συμπεράσματά τους τα κατέγραφαν κάθε φορά στο φύλλο εργασίας που τους είχε δοθεί.

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι εικασίες που κατέγραφαν οι μαθήτριες ήταν της μορφής: «Όταν το ΑΒΓΔ είναι…….. τότε το ΚΛΜΝ είναι …..» το οποίο ήταν το κλειδί ώστε οι μαθήτριες μέσα από απαγωγικές διαδικασίες να μεταβούν στην απόδειξή τους. Αυτά τα ευρήματα επιβεβαιώνονται και μέσα από άλλες έρευνες, οι Arzarello et al. (2000) ισχυρίζονται πως η απαγωγή είναι κρίσιμη για την παραγωγή εικασιών. Επίσης, η απαγωγή επιτρέπει στις μαθήτριες να γράψουν εικασίες σε μία λογική μορφή «αν … τότε», μια δήλωση η οποία είναι τώρα έτοιμη να αποδειχθεί (Baccaglini-Frank & Mariotti (2009)). Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι μαθήτριες αρχικά, έκαναν μόνο εικασίες χωρίς να αναρωτιούνται αν θα έπρεπε να τις αποδείξουν ενώ στη συνέχεια, μέσα από τη διαφωνία τους ή προκειμένου η μία μαθήτρια να πείσει την άλλη άρχισαν να τις αποδεικνύουν.

- **Ερώτημα 2**

Αφού οι μαθήτριες ολοκλήρωσαν τις εικασίες τους στη συνέχεια έγινε μια συζήτηση για το εάν ήταν σίγουροι για τα συμπεράσματά τους και εάν θα τα παρουσίαζαν σε ένα διαγώνισμα. Αυτό που έδωσαν σαν απάντηση και οι δύο ομάδες ήταν ότι οι απαντήσεις τους χωρίς απόδειξη δεν θα ήταν αποδεκτές σε ένα διαγώνισμα, θα έπρεπε να τις αποδείξουν ώστε να είναι σίγουροι για την αλήθεια τους. Όπως αναφέρθηκε και στο θεωρητικό πλαίσιο, σύμφωνα με τους Arzarello, Olivero, Paola και Robutti, (1999) η αποδεικτική διαδικασία αποτελείται από δύο φάσεις: τη διατύπωση μιας εικασίας και την κατασκευή μιας απόδειξης. Οι μαθήτριες αρχικά διερεύνησαν μια κατάσταση και διατύπωσαν εικασίες, ενώ στη δεύτερη φάση προσπαθούσαν να αποδείξουν τις εικασίες τους τοποθετώντας σε σειρά σύμφωνα με τους κανόνες λογικής τα στοιχεία που έχουν από τη προηγούμενη φάση της διερεύνησης. Επομένως, οι μαθήτριες προκειμένου να σιγουρευτούν για τις εικασίες τις οποίες δεν είχαν αποδείξει, άρχισαν να κατασκευάζουν την τυπική τους απόδειξη με «χαρτί και μολύβι» όπως είχαν κάνει και από το πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας. Οι μαθήτριες και των δύο ομάδων ενήργησαν με τον ίδιο τρόπο, μετασχημάτιζαν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ ανάλογα με την εικασία που ήθελαν να αποδείξουν κάθε φορά. Ύστερα απλά παρατηρούσαν το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή και προσπαθούσαν να εφαρμόσουν θεωρήματα της γεωμετρίας έτσι ώστε να αποδείξουν τις εικασίες τους. Η γνώση που χρησιμοποίησαν για να αποδείξουν τις εικασίες τους ήταν κυρίως από το σχολικό μάθημα της γεωμετρίας. Αυτό που είχε ενδιαφέρον ήταν ότι οι μαθήτριες καθ' όλη αυτή τη διάρκεια ενεργούσαν και σκέφτονταν σαν να εργάζονταν με χαρτί και μολύβι. Πολλές φορές προκειμένου να βοηθηθούν για να αποδείξουν τις εικασίες τους έφεραν κάποιες βοηθητικές ευθείες. Αυτό επιβεβαιώνεται και από άλλες έρευνες αφού σύμφωνα με τους Sinclair & Robutti (2003) κατά την αποδεικτική διαδικασία τα DGEs έχουν ιδιαίτερη σημασία εφόσον η πρώτη φάση της διαδικασίας (διατύπωση μιας εικασίας) διαφέρει ριζικά από τα περιβάλλοντα χαρτί-μολύβι, επηρεάζει ωστόσο, τον τρόπο που εξελίσσεται η δεύτερη φάση (κατασκευή μιας απόδειξης).

Γενικά, σε αυτή τη φάση ο ρόλος του συρσίματος ήταν εμφανής μόνο μέχρι τη στιγμή που οι μαθήτριες μετασχημάτιζαν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και παρατηρούσαν το είδος του ΚΛΜΝ μετά, απλά παρατηρούσαν το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή αι εξήγαγαν συμπεράσματα τα οποία κατέγραφαν. Οι μαθήτριες και των δύο ομάδων

σε αυτή τη φάση απέδειξαν όλες τις εικασίες τους τις οποίες είχαν καταγράψει από το προηγούμενο ερώτημα στη μορφή «αν…….. τότε …….». Μέσα από απαγωγικές διαδικασίες οδηγήθηκαν στην παραγωγική απόδειξη των εικασιών τους.

ΣΥΝΟΨΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ 2

- **Ερώτημα 1**

Σε αυτή τη φάση δόθηκε και στις δύο ομάδες ένα πιο πολύπλοκο σχήμα όπου πάλι οι μαθήτριες άρχισαν εικάζουν. Ενήργησαν όπως και στο πρώτο ερώτημα της πρώτης δραστηριότητας, μετασχημάτιζαν το ΕΖΗΘ και παρατηρούσαν το είδος του ΙΚΛΜ. Δεδομένου ότι οι μαθήτριες είχαν έρθει σε επαφή με παρόμοια ερωτήματα στην προηγούμενη δραστηριότητα, και είχαν κατανοήσει ότι μόνο μέσα από την κατασκευή της τυπικής απόδειξης μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε αναμέναμε να κατασκευάσουν την απόδειξη των εικασιών τους. Ωστόσο, αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι οι μαθήτριες δυσκολεύτηκαν στο να κάνουν εικασίες και αυτό ίσως γιατί το σχήμα ήταν αρκετά πολύπλοκο. Προκειμένου να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο σκέφτηκαν να ενεργοποιήσουν τη λειτουργία της μέτρησης για τις πλευρές των τετραπλεύρων ΕΖΗΘ και ΙΚΛΜ. Αυτό παρατηρήθηκε και από τις δύο ομάδες και ήταν μια αφορμή για να αρχίσουν να εικάζουν. Οι μαθήτριες και των δύο ομάδων παρατηρούσαν τις τιμές των μετρήσεων καθώς μετασχημάτιζαν το ΕΖΗΘ, ωστόσο δεν επαφίονταν στις τιμές που έβλεπαν, αυτές ήταν απλά μια αφορμή, ένα έναυσμα ώστε να διερευνήσουν το είδος του ΙΚΛΜ που τους ενδιέφερε. Οι εικασίες που παρατηρήθηκαν ήταν της μορφής «Όταν το ΕΖΗΘ είναι ……. τότε το ΙΚΛΜ είναι ……» όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα. Σημαντικό ρόλο στη δημιουργία εικασιών έπαιξε ο ρόλος του συρσίματος και συγκεκριμένα του καθοδηγούμενου και του περιπλανώμενου. Όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, σύμφωνα με τους Arzarello et al. (2002) το περιπλανώμενο, καθοδηγούμενο σύρσιμο χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη και εξερεύνηση μιας δοσμένης δραστηριότητας. Επιπλέον, λειτουργεί σαν διαμεσολαβητής κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα και αντίστροφα.

- **Ερώτημα 2**

Και σε αυτήν την περίπτωση οι μαθήτριες ρωτήθηκαν εάν θα παρουσίαζαν τα συμπεράσματά τους σε ένα διαγώνισμα και πάλι η απάντησή τους ήταν ότι δεν θα ήταν αποδεκτό εάν δεν είχαν κατασκευάσει την τυπική απόδειξη των εικασιών τους. Κλήθηκαν επομένως, να αποδείξουν τις εικασίες που είχαν από το προηγούμενο ερώτημα. Σε αυτή τη φάση παρατηρήθηκαν αποδείξεις οι οποίες ολοκληρώθηκαν και αποδείξεις οι οποίες έμειναν ανολοκλήρωτες. Στις αποδείξεις που ολοκλήρωσαν οι μαθήτριες εργάστηκαν όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα και προσπαθούσαν να εφαρμόσουν θεωρήματα και πορίσματα της γεωμετρίας. Σε αυτή τη φάση οι μαθήτριες είχαν ενεργοποιημένη τη λειτουργία της μέτρησης για τις πλευρές των τετραπλεύρων, ωστόσο οι μαθήτριες δεν αρκέστηκαν σε αυτές τις τιμές. Προσπαθούσαν να αποδείξουν τις εικασίες τους αγνοώντας τις τιμές στην οθόνη του υπολογιστή, προσπαθώντας να εφαρμόσουν θεωρήματα της γεωμετρίας. Σε αυτή τη φάση ο ρόλος του συρσίματος ήταν ενεργός μόνο στην αρχή που μετασχημάτισαν το ΕΖΗΘ, από τη στιγμή που το μετασχημάτισαν παρατηρούσαν απλά το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή και εφάρμοζαν θεωρήματα της γεωμετρίας. Ομοίως ενεργούσαν οι μαθήτριες και στις εικασίες τις οποίες δεν κατάφεραν να αποδείξουν. Μετασχημάτιζαν το ΕΖΗΘ σύμφωνα με την εικασία που ήθελαν να αποδείξουν και προσπαθούσαν να εφαρμόσουν θεωρήματα της γεωμετρίας, ωστόσο δεν μπορούσαν να μεταβούν στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης πιθανόν γιατί η δραστηριότητα ήταν αρκετά απαιτητική και αδυνατούσαν να εφαρμόσουν λογικούς κανόνες, και να χρησιμοποιήσουν σωστά τη μαθηματική γλώσσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{0}

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία με τη βοήθεια του λογισμικού Geometer's Sketchpad (DGS) και με την υλοποίηση δύο δραστηριοτήτων οι οποίες διαμορφώθηκαν κατάλληλα, μελετήσαμε με ποιον τρόπο οι μαθήτριες δημιουργούν εικασίες σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και πώς αυτά συνεισφέρουν στην αναγνώριση της αναγκαιότητας της κατασκευής της απόδειξης. Οι δραστηριότητες υλοποιήθηκαν από δύο ομάδες μαθητών των 2 ατόμων η καθεμία, της Β΄ Τάξης του Γενικού Λυκείου. Αρχικά, οι μαθήτριες ήρθαν σε επαφή με το λογισμικό μέσω μιας δραστηριότητας η οποία είχε σαν στόχο να εξοικειωθούν με τις λειτουργίες του, δεδομένου ότι εργαζόντουσαν για πρώτη φορά με αυτό. Αυτή η δραστηριότητα περιείχε βασικές γεωμετρικές κατασκευές τις οποίες οι μαθήτριες καλούνταν είτε να σχεδιάσουν μόνοι τους είτε να τις σχεδιάσουν έπειτα από τις οδηγίες που τους είχαν δοθεί. Οι μαθήτριες, στη συνέχεια, ασχολήθηκαν με τη δεύτερη δραστηριότητα όπου κλήθηκαν να κάνουν εικασίες με βάση το γεωμετρικό πρόβλημα που τους δόθηκε αλλά και να αποδείξουν τις εικασίες τους.

Το πρώτο ερώτημα της έρευνας αφορούσε, στο αν και με ποιούς τρόπους οι μαθήτριες της Β΄ Τάξης του Γενικού Λυκείου κάνουν εικασίες μέσα από τη διερεύνηση γεωμετρικών προβλημάτων με τη βοήθεια του λογισμικού Geometer's Sketchpad. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε στη συνεισφορά του λογισμικού Geometer's Sketchpad στην κατασκευή της απόδειξης από τις μαθήτριες. Στη φάση αυτή ερευνήθηκε ο ρόλος και οι λειτουργίες του λογισμικού προς την κατεύθυνση αυτή.

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, μελετήθηκαν οι εικασίες αλλά και ο τρόπος με τον οποίον αυτές δημιουργήθηκαν από τις μαθήτριες, κατά τη διάρκεια του πειραματισμού και της εμπλοκής τους με τις δραστηριότητες. Η χρήση του λογισμικού Geometer's Sketchpad οδήγησε τις μαθήτριες στον πειραματισμό, στην ανακάλυψη αλλά και στην διατύπωση των εικασιών τους με βάση τα ερωτήματα της δραστηριότητας. Καθοριστικό ρόλο στη διατύπωση των εικασιών από τις μαθήτριες έπαιξε κυρίως η λειτουργία του συρσίματος αλλά και η λειτουργία της μέτρησης. Οι εικασίες που προέκυψαν είτε μέσω της λειτουργίας του συρσίματος είτε μέσω της

λειτουργίας της μέτρησης, ιεραρχήθηκαν και παρουσιάστηκαν σε κατηγορίες. Οι κατηγορίες διαμορφώθηκαν με βάση εάν οι μαθήτριες αναγνώρισαν την ανάγκη για κατασκευή της απόδειξης των εικασιών τους ή όχι. Αρχικά, αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι οι μαθήτριες και των δύο ομάδων διατύπωναν τις εικασίες τους χωρίς να προβληματίζονται εάν θα πρέπει να κατασκευάσουν και την τυπική τους απόδειξη ώστε να είναι βέβαιοι για τα συμπεράσματά τους. Αυτό που αξίζει να αναφερθεί αφορά την πρώτη ομάδα, στην οποία η μία μαθήτρια προκειμένου να πείσει την άλλη για τον ισχυρισμό της, κατασκεύασε στο λογισμικό ένα σχήμα που διατηρούσε τις ιδιότητές του προσπαθώντας να της αποδείξει ότι έχει δίκιο. Στη συνέχεια, οι μαθήτριες μέσα από μια διαφωνία που είχαν για το ποιά εικασία ισχύει άρχισαν να αποδεικνύουν τους ισχυρισμούς τους, κατασκευάζοντας την τυπική απόδειξη, προκειμένου να διαπιστώσουν ποιός ήταν αληθής. Με αυτό τον τρόπο οι μαθήτριες πέρασαν σταδιακά στην αποδεικτική διαδικασία. Επομένως, μέσα από την ανάλυση των διαλόγων διαπιστώσαμε ότι οι μαθήτριες με τις λειτουργίες και τη διαμεσολάβηση του λογισμικού δημιουργούν εικασίες μέσα από απαγωγικές διαδικασίες όπου σταδιακά οδηγούνται στην αναγνώριση της αναγκαιότητας της κατασκευής της τυπικής απόδειξης, δηλαδή οδηγούνται σε παραγωγικές διαδικασίες.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, ο δυναμικός χειρισμός των γεωμετρικών σχημάτων και στις δύο δραστηριότητες ανέδειξε τις δυνατότητες του λογισμικού, στην προσπάθεια που έκαναν οι μαθήτριες προκειμένου να διατυπώσουν τις εικασίες τους. Επιπλέον, το εργαλείο του συρσίματος βοήθησε σημαντικά στην ανακάλυψη των μεγεθών που μεταβάλλονται και σε αυτά που μένουν αναλλοίωτα. Η συνεισφορά του εργαλείου του συρσίματος είτε στη μορφή της περιπλάνησης, είτε στη μορφή του καθοδηγούμενου συρσίματος ήταν καθοριστική στη διατύπωση των εικασιών από τις μαθήτριες. Η δράση πάνω στο γεωμετρικό αντικείμενο ήταν το κλειδί ώστε οι μαθητές να ενεργοποιηθούν και να παράγουν εικασίες. Επίσης, η λειτουργία της μέτρησης την οποία χρησιμοποίησαν οι μαθήτριες στη δεύτερη δραστηριότητα, διαμεσολάβησε προκειμένου οι μαθήτριες να παρατηρήσουν πώς τα μεγέθη μεταβάλλονται και τελικά να διατυπώσουν τις εικασίες τους. Οι μαθήτριες μέσα από απαγωγικές διαδικασίες διατύπωσαν εικασίες των οποίων κατασκεύασαν την τυπικής απόδειξη με παραγωγικές διαδικασίες. Όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο οι Hoyles και Noss (1989) υποστηρίζουν ότι το περιβάλλον του υπολογιστή δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές μέσα από την διερεύνηση και τον πειραματισμό

στο δυναμικό περιβάλλον του Geometer's Sketchpad να συνδέσουν την απαγωγική σκέψη που ανέπτυξαν με την παραγωγική.

Στο θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάστηκαν τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με το αν τα υπολογιστικά περιβάλλοντα μπορούν να βοηθήσουν τις μαθήτριες να αντιληφθούν την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης ή και να μεταβούν στην αποδεικτική διαδικασία. Από την ανάλυση των επεισοδίων και των διαλόγων των μαθητών, προκύπτει ότι και οι δύο ομάδες και στις δύο δραστηριότητες διατύπωναν εικασίες σύμφωνα με τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων. Όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο η ανάπτυξη και διατύπωση εικασιών προηγείται της τυπικής αφαιρετικής απόδειξης, και είναι απαραίτητο στάδιο έτσι ώστε οι μαθήτριες να μεταβούν στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης. Οι μαθήτριες και των δύο ομάδων έκαναν υποθέσεις μέσα από τον πειραματισμό τους με το λογισμικό στη δημιουργία των οποίων καθοριστικό ρόλο έπαιξε η λειτουργία του συρσίματος αλλά και της μέτρησης. Μέσα από τη μεταξύ τους διαφωνία και καθώς οι μαθήτριες εξοικειώνονταν περισσότερο με το λογισμικό και τις λειτουργίες του οδηγήθηκαν στην κατασκευή της τυπικής απόδειξης της τελευταίας εικασίας που έκαναν στην πρώτη δραστηριότητα. Σε αυτό το σημείο κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι μόνο μέσα από την κατασκευή της απόδειξης των εικασιών τους οι μαθήτριες θα μπορούσαν να είναι σίγουρες για τα συμπεράσματά τους. Συνέχισαν να παράγουν εικασίες και στη δεύτερη δραστηριότητα αλλά παρόλο που είχαν διαπιστώσει ότι μέσα από την απόδειξη των εικασιών βεβαιωνόμαστε για την αλήθεια τους, σε αυτό το σημείο δεν κατασκεύασαν την απόδειξη των εικασιών τους. Η απόδειξη των εικασιών τους στη δεύτερη δραστηριότητα έγινε ύστερα από μια συζήτηση για το εάν θα παρουσίαζαν τα αποτελέσματά τους σε ένα διαγώνισμα. Σε αυτό το σημείο παρατηρήθηκαν εικασίες τις οποίες οι μαθητές απέδειξαν και εικασίες τις οποίες δεν κατάφεραν να αποδείξουν. Οι μαθήτριες αδυνατούσαν να εφαρμόσουν λογικούς κανόνες, και να χρησιμοποιήσουν σωστά τη μαθηματική γλώσσα για την κατασκευή της απόδειξης των εικασιών τους με αποτέλεσμα οι μαθητές να δηλώνουν ότι η απόδειξη είναι μια δύσκολη και δυσνόητη διαδικασία.

Σε μελλοντική έρευνα, η παρούσα εργασία θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί σε ένα μεγαλύτερο δείγμα με στόχο να διαπιστώσουμε εάν τα αποτελέσματα της έρευνας μπορούν να γενικευτούν. Τέλος, θα είχε ενδιαφέρον στην παρούσα έρευνα

να μελετηθεί και ο ρόλος της οπτικοποίησης και εάν ενισχύει τη μετάβαση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arzarello, F., Andriano, V., Olivero, F., & Robutti, O. (2000). Abduction and conjecturing in mathematics. *Philosophica, 1998, 1, 61*, pp. 77-94.

Arzarello, F., Olivero F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *International Reviews on Mathematical Education, Vol. 34*(3), pp. 66-72.

Arzarello, F., Ferrara F., & Robutti, O. (2012). Mathematical Modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching mathematics and its applications, pp.1-11*.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. (2009). Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: The elaboration of some research hypotheses. *In Proceedings of CERME 6.* Lyon, France.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. (2010). Generating conjectures in Dynamic Geometry: The maintaining dragging model. *International journal of computers for mathematical learning, 15, 3, pp.225-253*

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. *Designing learning environments for developing Understanding of geometry and space*, pp. 369-393.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. Rethinking Proof with Sketchpad. *Key Curriculum Press.*

De Villiers, M. (2002). Developing understanding for different roles of proof in Dynamic Geometry.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teacher's understanding of proof. *International journal of mathematical education in science and technology, Vol. 35, 5*, pp.703-724.

De Villiers, M. (2006). Rethinking proof with The Geometer's Sketchpad. *The Scottish mathematical council journal, 36,* pp. 72.

De Villiers, M. (2007). Proof in Dynamic Geometry: More than Verification. *School of science, Math and Technology education, pp. 369-390.*

De Villiers, M. (2007). Rethinking Proof with Geometer's Sketchpad. *Key Curriculum Press 2003, From: The Scottish Mathematical Council Journal No.36*, pp.72.

Falcade, R., Laborde, C., Mariotti, M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics,* pp. 317-333.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners understanding of the definition and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics* Education*, 9, ½,* pp. 3-20.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study. *Proceedings of the 27th Conference of the PME, 2*, pp. 397-404.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). The role of Contradiction and uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 44*, Issue ½, p.127, p.24

Hanna, G. (2000). Proof explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", *44 (1-2)*, pp. 5-23.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. *London: Institute of Education, University of London.*

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24* (4), pp. 389-399.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in Dynamic Geometry Contexts. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* pp. 121-128.

Hölzl, R. (1996). How does "Dragging" Affect the Learning of Geometry? *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 1, pp. 169-187.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student's interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics. 44* (1/2), pp. 55-85.

Jones, K. (2001). Learning geometrical concepts using dynamic geometry software. *Irwin, K. (ed.), Mathematics Education Research:* A catalyst for change. Auckland, New Zealand, University of Auckland, pp. 50-58.

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of proving. *Educational studies in mathematics, Vol. 44,* ½, pp. 151-161.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 283-317.

Leugn, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *Computer Math Learning, 13*, pp. 135-157.

Leugn, A., Baccaglini, A., Mariotti. M. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 439-460.

Mackrell, K. (2011). Design Decisions in interactive geometry software. *ZDM Mathematics Education 43*, pp. 373-387.

Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematic, Vol.* 44 (1/2), pp. 25-53.

Mariotti, M. (2001). Justifying and Proving in Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6 (1)*, pp. 257-281.

Mariotti, M. (2006). Proof and proving in mathematics education. A. Gutierrez & P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands,* pp. 173-204.

Mariotti, M. (2012). Proof and Proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in mathematics education, 14, 2,*pp.163-185.

Mariotti, M. (2013). Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potentials of a DGS. *The international journal on mathematics education, 45,* pp.441-452.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational studies in mathematics, Vol. 44,* pp. 87-125.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez, C., Pierce, D. (2009). Broadening the sense of "dynamic": a micro world to support student's mathematical generalization. *The international journal on mathematics education, 41, 4,* pp. 493-503.

Olivero, F., Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International journal of Computers for Mathematical Learning, 12,* pp. 135-156.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of Dynamic Geometry. *Third International Handbook of Mathematics Education,* pp.571-596.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1^{0} Φύλλο εργασίας

Εξοικείωση με το λογισμικό του **Geometer's Sketchpad**

Δραστηριότητα 1^{η}

Στο λογισμικό του Geometer's Sketchpad

- Ενεργοποιούμε το εργαλείο για την σχεδίαση σημείων και με αριστερό κλικ στην επιφάνεια του λογισμικού βρίσκουμε 3 τυχαία σημεία.
- Ενεργοποιούμε το κουμπί για την σχεδίαση ευθυγράμμων τμημάτων και με αριστερό κλικ πάνω σε ένα από τα προηγούμενα σημεία φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα στα άλλα σημεία ώστε να σχηματιστεί ένα τρίγωνο.
- Ενεργοποιούμε το εργαλείο κειμένου και κάνουμε αριστερό κλικ σε κάθε μια από τις κορυφές του τριγώνου ώστε το τρίγωνο να ονομαστεί ΑΒΓ. Μπορούμε με τον δείκτη να πιάσουμε το γράμμα μιας κορυφής και να το μετακινήσουμε λίγο. Επίσης μπορούμε να αλλάξουμε το γράμμα με κάποιο άλλο. Για να γίνει αυτό κάνουμε διπλό κλικ πάνω στο γράμμα και στην καρτέλα που ανοίγει πληκτρολογούμε το γράμμα που επιθυμούμε.

  Ερωτήσεις: 1) Μετασχηματίστε το τρίγωνο ΑΒΓ ώστε το ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο.

  2) Μετακινώντας τις κορυφές του τριγώνου τι παρατηρείται για το τρίγωνο; Διατηρεί τις ιδιότητές του;

  3) Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο; Γράψτε τα βήματα που πρέπει να κάνετε.

  4) Κατασκευάστε τώρα ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Γράψτε τα βήματα που πρέπει να κάνετε.

Δραστηριότητα 2^{η}

Μετασχηματίζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ της προηγούμενης δραστηριότητας σε οξυγώνιο και θέλουμε να κατασκευάσουμε το ύψος από την κορυφή Α, τη διάμεσο του ΑΓ και την μεσοκάθετο του ΑΒ .

- *Κατασκευή ύψους:* Ενεργοποιούμε την κορυφή Α από την οποία θέλουμε να φέρουμε το ύψος, και το ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο θα φέρουμε το ύψος και στην συνέχεια επιλέγουμε «Κατασκευή» → «Κάθετης ευθείας»

- *Κατασκευή διαμέσου:* Αρχικά κατασκευάζουμε το μέσο της πλευράς ΑΓ. Ενεργοποιούμε την πλευρά ΑΓ και από την επιλογή «Κατασκευή» → «Μέσου σημείου». Με την επιλογή κειμένου και με αριστερό κλικ στο μέσο της πλευράς ονομάζουμε Κ το μέσο της ΑΓ. Μαρκάρουμε τα σημεία Β και Κ και με την επιλογή «Κατασκευή» → «Ευθύγραμμου τμήματος» κατασκευάσαμε την διάμεσο της πλευράς ΑΓ.
- *Κατασκευή μεσοκαθέτου:* Κατασκευάζουμε το μέσο της πλευράς όπως και στο προηγούμενο βήμα και μαρκάρουμε το μέσο και την πλευρά που θέλουμε να φέρουμε την μεσοκάθετο και από την επιλογή «Κατασκευή» → «Κάθετης ευθείας» κατασκευάσαμε την μεσοκάθετο.

Παρατήρηση: Μπορούμε επιλέγοντας μια ευθεία και κάνοντας δεξί κλικ από την επιλογή «χρώμα» μπορούμε να αλλάξουμε το χρώμα μιας ευθείας. Αλλάξτε το χρώμα του ύψους σε κόκκινο και της μεσοκαθέτου σε πράσινο. Επίσης μπορούμε να αποκρύψουμε κάποια στοιχεία του τριγώνου που θεωρούμε ότι δεν χρειαζόμαστε. Επιλέγουμε την ευθεία που θέλουμε να αποκρύψουμε και με δεξί κλικ επιλέγουμε απόκρυψη ευθείας.

1) Κατασκευάστε μόνοι σας τα ύψη των άλλων δύο πλευρών, τις διαμέσους και τις μεσοκαθέτους. Αλλάξτε τα χρώματα των ευθειών όπως προηγουμένως.
2) Μετασχηματίστε το τρίγωνο ΑΒΓ, τι παρατηρείται για τις μεσοκαθέτους καθώς το σχήμα μεταβάλλεται;

<u>Δραστηριότητα 3η</u>

Κατασκευή τετραγώνου

- Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ
- Μαρκάρουμε το τμήμα ΑΒ και το σημείο Β και από την επιλογή «Κατασκευή» → «Κάθετης ευθείας» .
- Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα ΒΑ ο οποίος τέμνει την ευθεία σε δύο σημεία και ονομάζουμε το ένα από αυτά Γ
- Αποκρύπτουμε τον κύκλο και την ευθεία και σχεδιάζουμε την ευθεία ΒΓ.
- Μαρκάρουμε το τμήμα ΑΒ και το σημείο Α και από την επιλογή «Κατασκευή» → «Κάθετης ευθείας»
- Μαρκάρουμε το τμήμα ΑΓ και το σημείο Γ και από την επιλογή «Κατασκευή» → «Κάθετης ευθείας»
- Ονομάζουμε Δ το σημείο τομής των ευθειών .
- Αποκρύπτουμε τις ευθείες και σχεδιάζουμε τα τμήματα ΑΔ και ΓΔ.

1) Μετασχηματίστε το ΑΒΓΔ, τι παρατηρείται ότι παθαίνει το σχήμα;

Δραστηριότητα 4η

1) Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ; Γράψτε τα βήματα τα οποία πρέπει να κάνετε.
2) Μετασχηματίστε το ΑΒΓΔ τι παρατηρείται για το σχήμα του;

2^0 Φύλλο εργασίας

Δραστηριότητα:

Ανοίξτε το λογισμικό του Geometer's Sketchpad που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας και κατασκευάστε ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Σε κάθε πλευρά του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ βρείτε τα αντίστοιχα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν και ενώστε τα σημεία ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ.

1) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΚΛΜΝ σε σχέση με το ΑΒΓΔ; Γράψτε τις εικασίες σας.

2) Είστε βέβαιοι για τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξατε; Προσπαθήστε να αποδείξετε τις εικασίες σας σε κάθε περίπτωση.

Ανοίξτε ένα νέο σχέδιο στο Geometer's Sketchpad κατασκευάστε τυχαίο τετράπλευρο ΕΖΗΘ και σε κάθε πλευρά του τετραπλεύρου ΕΖ,ΖΗ,ΗΘ,ΘΕ βρείτε αντίστοιχα τα μέσα Π, Ρ, Σ, Τ. Στη συνέχεια ενώστε τα Ε Σ, Ζ Τ, Η Π, Θ Ρ ώστε να σχηματιστεί το τετράπλευρο ΙΚΛΜ.

3) Μετακινώντας τις κορυφές του ΕΖΗΘ μπορείτε να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΙΚΛΜ για τις διάφορες μορφές του ΕΖΗΘ; Γράψτε τις εικασίες σας.

4) Είστε βέβαιοι για τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξατε; Μπορείτε να αποδείξετε τις εικασίες σας;