ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

Πολλαπλασιαστική σκέψη και η εξέλιξή της: Μία ερευνητική προσέγγιση

ΜΑΝΔΕΛΕΝΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ
Δ201124

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής:
Παναγιώτης Σπύρου

ΑΘΗΝΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στην τριμελή επιτροπή για την πολύτιμη βοήθεια τους. Ιδιαίτερα τον κ. Παναγιώτη Σπύρου για την τιμή που δέχτηκε να είναι επιβλέπων καθηγητής της εργασίας μου, την κα Ξένια Βαμβακούση για όλες τις συμβουλές της, την καθοδήγησή της, την υπομονή και το χρόνο που μου αφιέρωσε κατά την συγγραφή καθώς και τον κ. Γεώργιο Ψυχάρη για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν. Την Διονυσία Μπακογιάννη και την Ελένη Κλή που διευκόλυναν την καθημερινότητά μου μέσω της άριστης δουλειάς τους στη γραμματεία του τμήματος. Τους διευθυντές και δασκάλους-καθηγητές του 14ου Δημοτικού και 6ου Γυμνασίου Γλυφάδας για τη συνεργασία τους.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, τους φίλους και τη σύντροφό μου Νικολετα για τις συμβουλές και την υποστήριξή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έρευνα αυτή ασχολείται με την πολλαπλασιαστική σκέψη των μαθητών και εξετάζει πώς αυτή αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια της σχολικής θητείας. Πλήθος ερευνών φανερώνουν ότι οι μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα σε δραστηριότητες που απαιτείται πολλαπλασιαστικός συλλογισμός. Βέβαια, ο βαθμός δυσκολίας τέτοιων δραστηριοτήτων επηρεάζεται από μια σειρά παραγόντων όπως το είδος της σχέσης, ο τύπος της ποσότητας και το πλήθος των πεδίων μονάδων μέτρησης.

Δίνεται ένα ερωτηματολόγιο με επτά έργα τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν με αθροιστικό ή πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης. Τα ερωτήματα απευθύνονται σε μαθητές της Δ΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου. Ο χρόνος συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων ορίστηκε να είναι η μια διδακτική ώρα. Στα έργα του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους μαθητές αξιοποιούνται παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία και εξετάζεται μέσω των απαντήσεων που δόθηκαν η εξέλιξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης.

Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι υπάρχει μια σταδιακή εξέλιξη στην πολλαπλασιαστική σκέψη των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται μια μετάβαση από τον αθροιστικό τρόπο σκέψης και αιτιολόγησης προς τον πολλαπλασιαστικό με την πάροδο των ετών. Η προσέγγιση των μαθητών των τάξεων του Δημοτικού είναι στη πλειοψηφία τους αθροιστική σε αντίθεση με αυτούς του Γυμνασίου που στη συντριπτική πλειοψηφία τους παρατηρούν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων και απαντούν πολλαπλασιαστικά.

ABSTRACT

This research is focused on the multiplicative thinking of students, by analyzing how it is developed during school years. A vast number of researches demonstrate that older students achieve better results on activitities demanding multiplicative thinking. It goes without saying that the level of difficulty in those activities is affected by a series of factors such as the type of relationsip, the type of quantity and the number of the fields of units of measurement.

A questionnaire is handed, structured on the basis of 7 projects, which can be addressed using additive or multiplicative thinking. Those questions are addressed to students of the 4th and 6th Grade of Primary Education and 3rd Grade of Secondary Education. The time to complete the questionnaire was set in one (1) hour. The projects included in the questionnaire make use of factors affecting the level of difficulty. Through answers provided per question, the evolution of the multiplicative thinking is examined.

The results of this research demonstrate a gradual evolution of the multiplicative thinking of students. Specifically, a transition from the additive to multiplicative way of reasoning and justifying can be observed. The approach followed by students of elementary education is mainly focused on additive thinking in contrast with those of secondary education who in their vast majority have the ability to observe the relations developed between quantities and answer multiplicatively.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 7
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ 11
   2.1. Γενική Επισκόπηση 11
   2.2. Ειδικότερα ζητήματα: Γιατί ορισμένα ερωτήματα 14
   σχετικών ποσοτήτων είναι πιο δύσκολα; 14
   2.3. Πολλαπλασιαστική σκέψη και παρεμβολές από αθροιστικές μεθόδους 22
3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ 24
   3.1. Ερευνητικά ερωτήματα 24
   3.2. Μεθοδολογία 24
      3.2.1. Συμμετέχοντες 24
      3.2.2. Ερευνητικά Εργαλεία 24
      3.2.3. Διαδικασία 32
   3.3. Αποτελέσματα 33
      3.3.1. Αποτελέσματα ανά έργο 33
         3.3.1.1. 1ο και 6ο Έργο 34
         3.3.1.2. 2ο Έργο 36
         3.3.1.3. 5ο Έργο 39
         3.3.1.4. 3ο Έργο 41
         3.3.1.5. 4ο Έργο 42
         3.3.1.6. 7Ο Έργο 43
      3.3.2. Αποτελέσματα χρήσης πολλαπλασιαστικής σκέψης ανά μαθητή στο σύνολο των έργων 44
      3.3.3. Σύνοψη αποτελεσμάτων 45
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΚΕΨΕΙΣ 47
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 49
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 55

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Αποτελέσματα 1ου έργου 34
Πίνακας 2: Αποτελέσματα 6ου έργου 35
Πίνακας 3: Αποτελέσματα 2ου έργου – 1ο ζεύγος 37
Πίνακας 4: Αποτελέσματα 2ου έργου – 2ο ζεύγος 37
Πίνακας 5: Αποτελέσματα 2ου έργου – 3ο ζεύγος 37
Πίνακας 6: Αποτελέσματα 5ης έργου 39

Πίνακας 7: Αποτελέσματα 3ου έργου 41
Πίνακας 8: Αποτελέσματα 4ου έργου 42
Πίνακας 9: Αποτελέσματα 7ου έργου 43

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Διάγραμμα 1: Συγκριτική Αποτύπωση απαντήσεων 39
Διάγραμμα 2: Αριθμός πολλαπλασιαστικών απαντήσεων (%) ανά τάξη 44

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γεγονός πως η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στην εκμάθηση των Μαθηματικών. Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι σύνθετες πράξεις που αποτελούν μέρος των εννοιών και διαδικασιών των ακέραιων αριθμών που κυριαρχούν στη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών (Degrande, Verschaffel, & Wim Van Dooren, 2014).

Η αναλογική σκέψη απαιτεί την ικανότητα να μπορούν να αντιμετωπιστούν καταστάσεις σύγκρισης τόσο με αθροιστικό όσο και με πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης. Η μετάβαση από τον αθροιστικό στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις στη διάρκεια των σχολικών χρόνων. Η αθροιστική σκέψη συχνά αναφέρεται ως απόλυτη ενώ η πολλαπλασιαστική ως σχετική.

Η πολλαπλασιαστική σκέψη χαρακτηρίζεται από:

- Την ικανότητα εργασίας με ένα φάσμα αριθμών ευέλικτα και αποτελεσματικά (ακέραιους, δεκαδικούς, κλάσματα, αναλογίες).
- Την ικανότητα αναγνώρισης και επίλυσης ποικίλων προβλημάτων που αφορούν πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, ευθεία ή αντίστροφη αναλογία.
- Τα μέσα αποτελεσματικής επικοινωνίας με αυτή με διάφορους τρόπους (π.χ. διαγράμματα, λέξεις).

Εν συντομία, ***η πολλαπλασιαστική σκέψη χαρακτηρίζεται από την ικανότητα ευέλικτης ενασχόλησης με έννοιες, στρατηγικές και αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού (και της διαίρεσης) σε ένα ευρύ φάσμα πλαισίων***.

Η λογική της ταυτόχρονης αντιμετώπισης μιας αλλαγής και με τους δύο τρόπους σκέψης που αναφέρθηκαν εξηγείται μέσω ενός απλουστευμένου παραδείγματος: έστω οι αριθμοί τρία και εννιά. Αν τεθεί το ερώτημα τι πρέπει να συμβεί στον αριθμό τρία προκειμένου να γίνει εννιά τότε κάποιος που σκέφτεται αθροιστικά θα απαντούσε «προσθέσαμε 6» ενώ αν σκέφτεται πολλαπλασιαστικά εκτός από την προηγούμενη απάντηση, θα έβλεπε και την αλλαγή ως πολλαπλασιασμό επί τρία.

Οι μαθητές που κατανοούν πώς λειτουργεί ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση και είναι σε θέση να λύνουν αντίστοιχα προβλήματα θεωρούνται ότι έχουν την ικανόνητα της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Επομένως, κάποιος που χρησιμοποιεί τον πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης είναι πιο ευέλικτος όσον αφορά αριθμούς και καταστάσεις που αφορούν αριθμούς. Η πολλαπλασιαστική σκέψη απαιτεί ένα νέο επίπεδο εξειδίκευσης στο πώς σκεφτόμαστε για τους αριθμούς και τις πράξεις τους. Αυτή η εξειδίκευση είναι έμφυτη στη φύση του πολλαπλασιασμού (Ell, Irwin, & McNaughton, 2004).

Υπάρχουν δύο θεωρήσεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002). Σύμφωνα με την πρώτη, οι έννοιες της πολλαπλασιαστικής σκέψης αναδύονται αργά και με δυσκολία. Το σκεπτικό γύρω από αυτήν την άποψη βασίζεται στην παραδοχή ότι η ικανότητα αναπαράστασης και αιτιολόγησης για διακριτούς αριθμούς είναι ένα έμφυτο κληροδότημα. Έτσι, λόγω του γεγονότος ότι ο έμφυτος αυτός μηχανισμός δεν μπορεί να αναπαραστήσει ποσά μεταξύ των ακεραίων (κλάσματα και αναλογίες) καθιστά την απόκτηση των δεξιοτήτων και την κατανόηση των εννοιών που αφορούν την πολλαπλασιαστική σκέψη αρκετά δύσκολη. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν τα λεγόμενα «λάθη ακεραίων» σε ερωτήματα που σχετίζονται με κλάσματα (σύγκριση ¼ και ½). Είναι γεγονός πως η σχετική σκέψη και κατ΄επέκταση η πολλαπλασιαστική είναι κομβικής σημασίας στην αρχική διδασκαλία των κλασμάτων. Ο λόγος είναι απλός: αυτή συνεπάγεται την κατανόηση αρκετών και σημαντικών εννοιών όπως:

- Τη σχέση μεταξύ του μεγέθους και τον αριθμό των κομματιών.
- Την ανάγκη να συγκρίνονται κλάσματα προς την ίδια μονάδα.
- Την έννοια ενός κλασματικού αριθμού.
- Τη σχέση ανάμεσα σε ισοδύναμα κλάσματα. Για παράδειγμα, ο κλασματικός αριθμός 3/5 δείχνει την ίδια σχετική ποσότητα με τα κλάσματα12/20 και 6/10.
- Τη σχέση μεταξύ ισοδύναμων κλασματικών αναπαραστάσεων.

Σύμφωνα με τη δεύτερη άποψη, τα παιδιά αντιλαμβάνονται έννοιες σχετικές με την πολλαπλασιαστική σκέψη πριν ακόμα εισέλθουν στα σχολικά χρόνια. Πράγματι, οι έννοιες του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού ίσως είναι πιο πρωταρχικές από εκείνες του απόλυτου. Σύμφωνα με τους Gestalt ψυχολόγους, το ανθρώπινο αντιληπτικό σύστημα είναι δομημένο έτσι ώστε οι εκτιμήσεις για τα μεγέθη να επηρεάζονται από το πλαίσιο στο οποίο περιέχονται. Ο Bryant (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007) σε μια έρευνα του εξέτασε αν οι σχετικές εκτιμήσεις είναι η βασική μέθοδος που χρησιμοποιούν τα παιδιά προκειμένου να αποφασίσουν για τα μεγέθη. Το συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι τα παιδιά μαθαίνουν να κάνουν τις σχετικές εκτιμήσεις πιο εύκολα απ' ότι τις απόλυτες. Ωστόσο, ενώ ορισμένες έννοιες της πολλαπλασιαστικής σκέψης αποκτούνται σχετικά νωρίς άλλες καθυστερούν και προκύπτουν σταδιακά με την πάροδο των ετών (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002).

Οι Mix, Huttenlocher, and Levine (2002) κατέδειξαν πως ο λόγος για την διαφορά μεταξύ των ερευνών σε ότι αφορά την ηλικία εμφάνισης και ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης είναι ότι ο τύπος της ποσότητας σε ένα αναλογικό ερώτημα επηρεάζει. Ερωτήματα με όμοιο περιεχόμενο αλλά διαφορετικού τύπου ποσότητες όπως για παράδειγμα συνεχείς και διακριτές μπορούν να δώσουν μεγάλες αποκλίσεις στις απαντήσεις των μαθητών. Φαίνεται ότι μαθητές μικρής ηλικίας βασίζονται σε μια πρώιμα αναδυόμενη

ικανότητα να αιτιολογούν με σχετικό τρόπο αναλογικά ερωτήματα για συνεχείς ποσότητες (Jeong, Lenine & Huttenlocher, 2007).

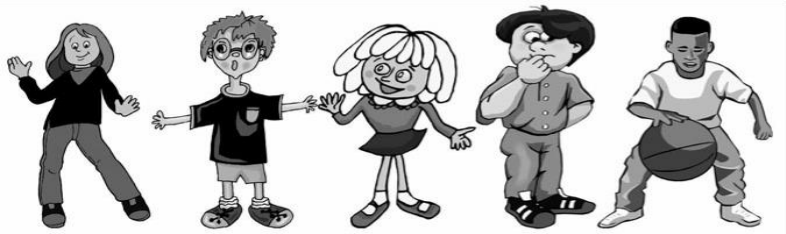
Σύμφωνα με τους Nunes and Bryant (1996) (στο Van Dooren, De Bock, & Verschaffe, 2009) τα πρώτα στάδια της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών μπορεί να προέρχονται ουσιαστικά από την αθροιστική αλλά όταν αυτά βασίζονται στην συνεκτικότητα μεταξύ τους τότε μπορεί να προκύψουν αρκετές δυσκολίες και λάθη σε πολλαπλασιαστικές εφαρμογές.

Μια σειρά από διαθεματικές και διαμήκεις έρευνες φανέρωσαν τις φάσεις ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Ell, Irwin, & McNaughton, 2004). Τα παιδιά ξεκινούν χρησιμοποιώντας στρατηγικές μέτρησης, συνεχίζουν με στρατηγικές βασισμένες στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και καταλήγουν να χρησιμοποιούν στοιχεία του πολλαπλασιασμού (όπως η αντιμεταθετικότητα) για να λύνουν προβλήματα. Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο πως ορισμένα παιδιά δεν καταφέρνουν ποτέ να φτάσουν στη φάση της σωστής χρήσης της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Jacob & Willis, 2001). Επομένως, η μετάβαση από τον αθροιστικό στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό δεν είναι αυτόματη. Η πολλαπλασιαστική σκέψη δεν μπορεί να γενικευθεί από την αθροιστική με απλό τρόπο.

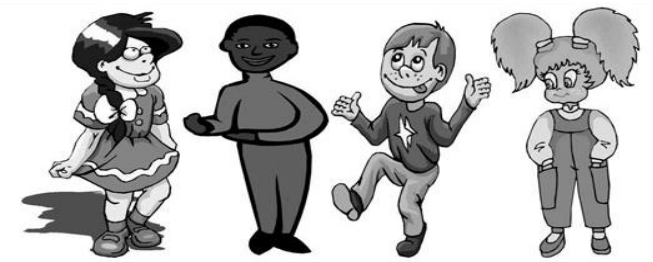
Όταν ένας εκπαιδευτικός επιθυμεί να εξετάσει αν οι μαθητές σκέφτονται αθροιστικά ή πολλαπλασιαστικά είναι χρήσιμο να θέτει ερωτήματα που να δύνανται να αιτιολογηθούν και με τους δύο τρόπους προκειμένου να αξιολογήσει τι απαντήσεις θα δώσουν οι μαθητές. Ένα τέτοιο ερώτημα θα μπορούσε να έχει την εξής μορφή:

«Ποια οικογένεια έχει περισσότερα κορίτσια;»

1Η Οικογένεια



2Η Οικογένεια



Εικόνα 1. *Επιλογή οικογένειας με κριτήριο τον αριθμό των κοριτσιών (Lamon, 2006)*

Οι Mix et al. (2002) πραγματοποίησαν μια επισκόπηση στην κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης από τα νεαρά παιδιά. Μέσα από αυτήν προέκυψαν ενδιαφέροντα και σημαντικά ευρήματα:

- Ο τύπος της σχέσης επηρεάζει: ο εντοπισμός μιας σχέσης ισότητας μεταξύ αναλογιών προηγείται (σε ηλικία τριών με τεσσάρων ετών) της αντίστοιχης για τη διάταξη (σύγκριση αναλογιών που δεν είναι ίσες).
- Επιπλέον, οι σχέσεις μέρους-μέρους είναι ευκολότερες από τις σχέσεις μέρους-συνόλου (ίδιο συμπέρασμα με την έρευνα των Singer & Resnick, 1992).
- Ο τύπος της ποσότητας επηρεάζει: κλάσματα και λόγοι που περιλαμβάνουν συνεχείς ποσότητες (Σ/Σ) είναι πιο εύκολες από εκείνα που περιλαμβάνουν διακριτές ποσότητες (Δ/Δ).

Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο οι λόγοι μεταξύ διαφορετικών ποσοτήτων (όπου περιλαμβάνονται εντατικές ποσότητες) αποτελούν για τα παιδιά το πιο δύσκολο αντικείμενο πολλαπλασιαστικής δομής για να το αντιληφθούν.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας που έγινε σε παιδιά της Δ΄, ΣΤ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου και εξετάζει πώς η πολλαπλασιαστική σκέψη αναπτύσσεται με την πάροδο των ετών. Τα ερωτήματα της έρευνας εστιάζουν σε συγκεκριμένους παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία των πολλαπλασιαστικών ερωτημάτων. Η τάση των μαθητών να προσεγγίζουν αναλογικές καταστάσεις αθροιστικά αντί για πολλαπλασιαστικά έχει τεκμηριωθεί από πλήθος ερευνών στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009). Παράλληλα, όμως, η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές συχνά τείνουν να χρησιμοποιούν πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις σε περιπτώσεις που δεν εφαρμόζονται ακόμα και όταν αυτές έχουν αθροιστική δομή (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005; Fernández, Llinares, & Valls, 2008).

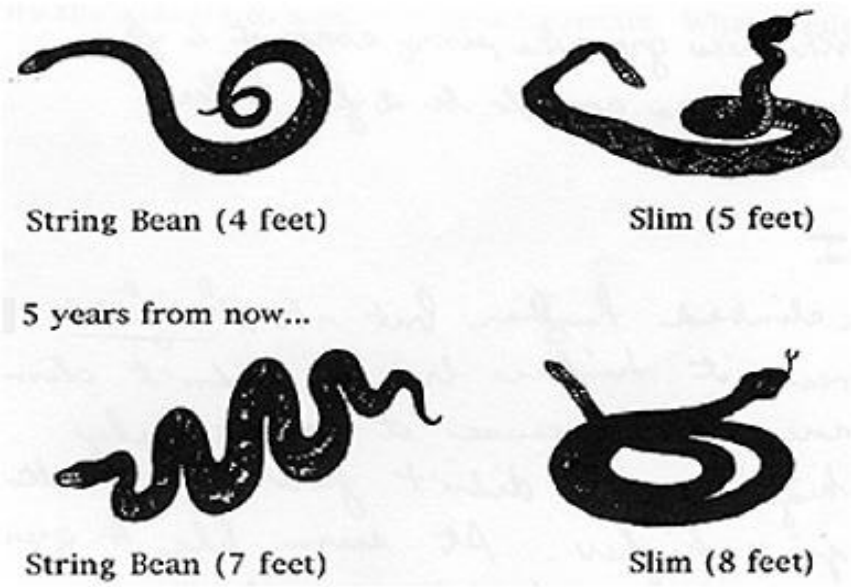
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

2.1. Γενική Επισκόπηση

Η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης έχει απασχολήσει και συνεχίζει να απασχολεί ερευνητές από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά και γνωστικούς και αναπτυξιακούς ψυχολόγους. Σημαντική έρευνα έχει πραγματοποιηθεί ήδη κατά τη δεκαετία 80-90 σχετικά με τον πολλαπλασιασμό, τις δομές του και τις κατανοήσεις των παιδιών (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009). Αυτή η προηγούμενη ενασχόληση είναι σημαντική, καθώς συνέβαλε στην κατανόηση ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη δεν αφορά μια μαθηματική πράξη, αλλά ένα πλήθος αλληλένδετων εννοιών, καθώς επίσης φανέρωσε τα στάδια ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης με το χρόνο. Ο Vergnaud (1988) αναφέρει αυτή τη σειρά των εννοιών ως «πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο». Τα στοιχεία του πολλαπλασιαστικού αυτού πεδίου περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό, διαίρεση, αναλογία, ποσοστά και πραγματικούς αριθμούς.

Το παράδειγμα της Lamon (2006) που ακολουθεί τονίζει έναν από τους πιο σημαντικούς τύπους σκέψης που απαιτεί η αναλογική αιτιολόγηση: την ικανότητα να αναλύεται η αλλαγή τόσο απόλυτα ή αθροιστικά όσο και σχετικά ή πολλαπλασιαστικά. Βέβαια, πρέπει να σημειωθεί πως αυτό δεν σημαίνει ότι ο ένας τρόπος είναι σωστός και ο άλλος λάθος. Και οι δύο είναι χρήσιμοι, ωστόσο για να μπορούν οι μαθητές να υιοθετήσουν πιο ισχυρούς τρόπους σκέψης, κρίνεται αναγκαίο να πάνε ένα βήμα παραπέρα από την απλή αρίθμηση και τον απόλυτο τρόπο σκέψης. Η πολλαπλασιαστική σκέψη είναι πιο απαιτητική από την αθροιστική επειδή ότι προϋπόθέτει περισσότερη αφαιρετικότητα και με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται πιο σύνθετες ποσότητες.

«Ποιο φίδι μεγάλωσε περισσότερο;»



Εικόνα 2: Απόλυτη ή σχετική αλλαγή, Lamon (2006)

Σαφέστατα, μια απάντηση είναι ότι μεγάλωσαν το ίδιο, δηλαδή τρία πόδια. Η αιτιολόγηση αυτή βασίζεται στον απόλυτο τρόπο σκέψης σύμφωνα με τον οποίο:

- String Bean: 7-4=3 πόδια αύξηση
- Slim: 8-5=3 πόδια αύξηση

Μια άλλη διάσταση στην αλλαγή σχετίζει την αύξηση με το αρχικό μήκος.

- String Bean: Μεγάλωσε κατά τα ¾ του αρχικού του μήκους.
- Slim: Μεγάλωσε κατά τα $3/5$ του αρχικού του μήκους.

Άρα ο String Bean μεγάλωσε περισσότερο.

Εδώ και αρκετές δεκαετίες, πλήθος ερευνών έχουν εστιάσει στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και πιο συγκεκριμένα στη μετάβαση από τον αθροιστικό τρόπο σκέψης στον πολλαπλασιαστικό (Jacob, & Willis, 2003). Είναι ευρέως αποδεκτό στην κοινότητα των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών πως ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι κάτι περισσότερο από απλές αριθμητικές πράξεις που διδάσκονται μετά την πρόσθεση και την αφαίρεση και ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη δεν αποτελεί μια κατάκτηση που προέρχεται απλώς από μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Παρόλο που η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση συχνά παραμένει το υποσυνείδητο και πρωταρχικό μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985, p. 4), οι μελετητές τονίζουν ότι είναι ατελής και απαιτείται μια σημαντικά ποιοτική αλλαγή για τη μετάβαση από τον αθροιστικό στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009).

Έρευνες (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009) επιβεβαιώνουν ότι παιδιά οκτώ έως δέκα ετών αποδίδουν ικανοποιητικά σε πολλαπλασιαστικά ερωτήματα που αφορούν σε αντιστοιχίσεις ενός-προς-πολλά (π.χ. κάθε ράφι έχει τρία βιβλία, πόσα βιβλία έχουν τα τέσσερα ράφια;). Ο λόγος αυτής της επιτυχίας είναι διότι μπορούν να λυθούν με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Ωστόσο, αποτυγχάνουν σε άλλα ερωτήματα όπου ο πολλαπλασιασμός πρέπει να αντιμετωπιστεί διαφορετικά, όπως το καρτεσιανό γινόμενο (π.χ. στη ντουλάπα υπάρχουν τρία τζιν και τέσσερις μπλούζες. Πόσοι συνδυασμοί ρούχων είναι δυνατόν να δημιουργηθούν;).

Έρευνες για την ικανότητα των παιδιών να αιτιολογούν αναλογικά ερωτήματα έχουν καταλήξει σε ανάμεικτα και διαφορετικά συμπεράσματα. Αρκετές, δείχνουν ότι τα παιδιά έχουν αυτήν την ικανότητα πριν ακόμα πάνε σχολείο. Άλλες πάλι, με κυρίαρχο το έργο των Piaget και Inhelder (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007) δείχνουν ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη είναι μια ικανότητα που αποκτάται σταδιακά και όχι πριν τα έντεκα χρόνια. Σε ένα τυπικό παράδειγμα αναλογικής σκέψης του Piaget - το οποίο συμπεριλήφθηκε σε αυτήν την έρευνα (με διαφορετικά χρώματα)- παρουσιάζονται δύο σύνολα από κόκκινους και άσπρους βόλους τέτοια ώστε να διαφέρουν τόσο στον απόλυτο αριθμό των βόλων όσο και στην αναλογία τους. Το ζητούμενο για τα

παιδιά είναι να επιλέξουν εκείνο το σύνολο που έχει περισσότερες πιθανότητες να εμφανίσει κόκκινο βόλο σε μια τυχαία επιλογή. Μέχρι την ηλικία των έντεκα ετών, τα παιδιά συνήθως επιλέγουν το σύνολο με το μεγαλύτερο απόλυτο αριθμό κόκκινων βόλων και όχι εκείνο με τη μεγαλύτερη αναλογία κόκκινων βόλων. Δηλαδή, χρησιμοποιούν ξεκάθαρα τον αθροιστικό τρόπο σκέψης και δεν έχουν αναπτύξει ακόμα (τουλάχιστον σε ικανοποιητικό βαθμό) την πολλαπλασιαστική σκέψη.

Σε μια παρόμοια έρευνα του Noelting (1980) (στο Singer, & Resnick, 1992), τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές του Δημοτικού συναντούν δυσκολίες να συσχετίσουν δυο σχετικές ποσότητες. Ο Noelting παρουσίασε σε παιδιά ηλικίας έξι έως και δεκαέξι ετών δύο κούπες με μείγμα πορτοκαλάδας και νερού με διαφορετική αναλογία του νερού προς του πορτοκαλιού και αυτά έπρεπε να αποφασίσουν ποιο μείγμα είχε κάθε φορά πιο έντονη την γεύση του πορτοκαλιού. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές δεν τα κατάφερναν σωστά μέχρι την ηλικία των δώδεκα ετών, γιατί θεωρούσαν πως μόνο η ποσότητα της πορτοκαλάδας μετράει και όχι και το πόσο νερό αναμειγνυόταν.

Παρόμοια αποτελέσματα είχαν μια σειρά ερευνών που καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη εμφανίζεται σε σχετικά μεγαλύτερες ηλικίες παιδιών και αναπτύσσεται σταδιακά κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007). Η δυσκολία των μαθητών σε όλες τις έρευνες σχετίζεται με το γεγονός ότι εστιάζουν σε μια μόνο πτυχή των ποσοτήτων και όχι στη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων.

Σε αντίθεση με αυτά τα ευρήματα, ορισμένες έρευνες δείχνουν πως τα μικρά παιδιά μπορούν να αιτιολογούν με πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και μάλιστα πριν την εισαγωγή τους στα σχολικά χρόνια (Mix, Levine & Huttenlocher, 1999; Huttenlocher, Newcombe & Vasilyeva, 1999). Στα έργα αυτών των ερευνών, οι μαθητές ερωτώνται να εκτιμήσουν την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός χρησιμοποιώντας μια συνεχή κλίμακα διαβάθμισης. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Acredolo et al. (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007), τα παιδιά έκαναν εκτίμηση της πιθανότητας ένα έντομο να προσγειωθεί πάνω σε λουλούδι που βρίσκεται μέσα σε ένα κουτί που περιέχει μαζί λουλούδια και αράχνες χρησιμοποιώντας ως τρόπο μέτρησης μια συνεχή κλίμακα (διαβαθμίσεις πιθανότητας αποτελούσαν οι εκφράσεις χαρούμενου προσώπου). Ακόμα και πέντε ετών παιδιά μπορούσαν να δουν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ του αριθμού των εντόμων και των λουλουδιών. Σε μια παρόμοιας προσέγγισης έρευνα, ο Schlottmann (2001) έδειξε ότι παιδιά έξι ετών μπορούσαν με επιτυχία να κάνουν εκτιμήσεις σε σύνθετα ερωτήματα που έπρεπε να συνδέσουν την πιθανότητα με την τιμή του αποτελέσματος.

Οι Mix, Huttenlocher, and Levine (2002) κατέδειξαν πως ο λόγος για αυτήν την διαφορά μεταξύ των ερευνών σε ότι αφορά την ηλικία εμφάνισης και ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης είναι ότι ο τύπος της ποσότητας σε

ένα αναλογικό ερώτημα επηρεάζει τη δυσκολία του. Όμως, δεν είναι μόνο ο τύπος της ποσότητας αλλά και άλλοι παράγοντες που αναφέρονται και αναλύονται στην ακόλουθη υποενότητα.

2.2. Ειδικότερα ζητήματα: Γιατί ορισμένα ερωτήματα σχετικών ποσοτήτων είναι πιο δύσκολα;

Τα ερωτήματα που αφορούν σχετικές ποσότητες ποικίλουν ως προς το βαθμό δυσκολίας τους και αυτός εξαρτάται από τέσσερις παράγοντες:

1. Τον τύπο της ποσότητας
2. Το είδος της σχέσης
3. Τη μεταβολή των ποσοτήτων αναφοράς και των ποσοτήτων που καθορίζονται με βάση τις ποσότητες αναφοράς.
4. Τη συσχέτιση της ποσότητας με μια απλή, μια σύνθετη μονάδα ή μια μονάδα μέτρησης.

Ο διαχωρισμός αυτός, δεν χρησιμεύει μόνο για τον καθορισμό της δυσκολίας αλλά δίνει μέσω στοχευμένων δραστηριοτήτων χρήσιμες πληροφορίες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών με το πέρασμα των ετών.

Πριν όμως ξεκινήσει η ανάλυση αυτών των παραγόντων, είναι θεμιτό να διευκρινιστεί πως χρησιμοποιούνται οι όροι αναλογία και λόγος στο δοκίμιο αυτό για την αποφυγή συγχύσεων. Στα ξενόγλωσσα δοκίμια ο όρος λόγος συναντάται ως ratio ή rate, δύο λέξεις όμως που στην πραγματικότητα εκφράζουν διαφορετικά πράγματα.

Στα σχολικά μαθηματικά, τόσο το ratio, όσο και το rate, είναι λόγοι. Σε ορισμένες περιπτώσεις το rate μεταφράζεται ως ρυθμός (π.χ. ρυθμός μεταβολής). Η διαφορά μεταξύ ratio και rate στα αγγλικά (για κάποιους, όχι όλους) είναι ότι το ratio είναι λόγος μεταξύ ομοειδών μεγεθών/ποσοτήτων, ενώ το rate είναι λόγος μεταξύ μη ομοειδών μεγεθών/ποσοτήτων. Για παράδειγμα, ένα κομμάτι πίτσα από τα 6 μιας πίτσας είναι το 1/6 της πίτσας. Και στον αριθμητή και στον παρονομαστή έχουμε το ίδιο είδος, δηλαδή ποσότητα πίτσας. Όσον αφορά την αναλογία αυτή ορίζεται ως η ισότητα μεταξύ λόγων.

❖ Τύποι της ποσότητας

Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικοί τύποι ποσοτήτων:

- *Διακριτές/Συνεχείς*
- *Μονόμετρες/Διανυσματικές*
- *Εκτατικές/Εντατικές*
- *Απόλυτες/Σχετικές*

Οι διακρίσεις μεταξύ διακριτών/συνεχών και εκτατικών/εντατικών είναι ιδιαίτερα σημαντικές καθώς οι αλλαγές σε τέτοιες ποσότητες απασχολούν την συγκεκριμένη έρευνα.

Πιο συγκεκριμένα, δραστηριότητες που φανέρωναν επιτυχία σε μικρές ηλικίες περιλάμβαναν σχέσεις ανάμεσα σε συνεχείς ποσότητες (Huttenlocher et al., 1999), ενώ εκείνες που φανέρωναν επιτυχία σε μεγαλύτερες ηλικίες περιλάμβαναν σχέσεις με διακριτές ποσότητες (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009).

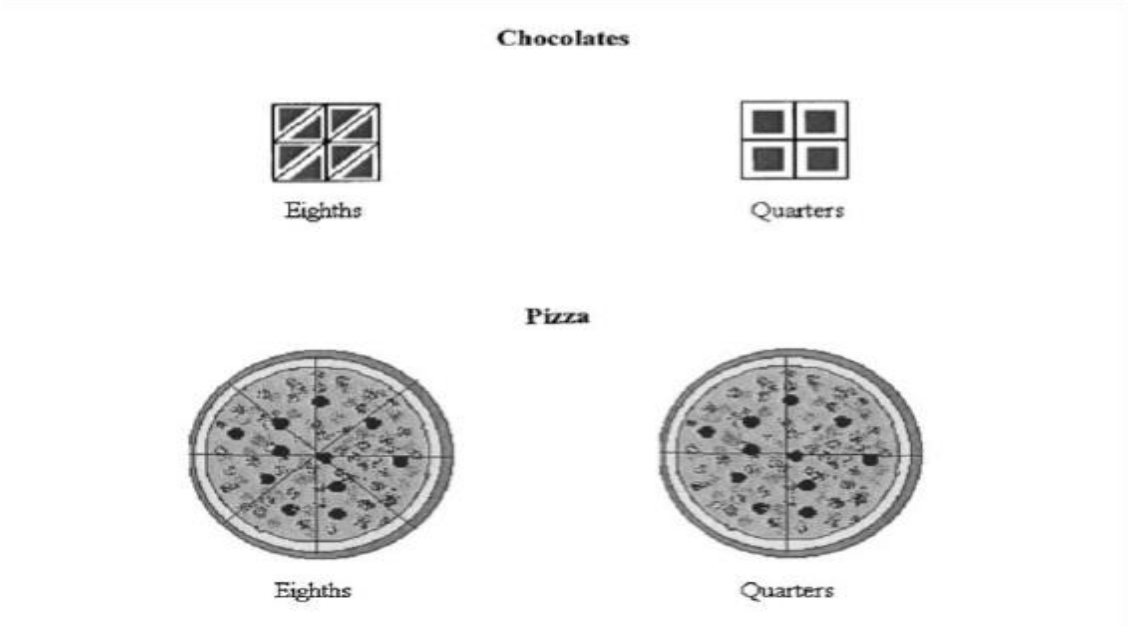
Ομοίως, από την έρευνα των Jeong, Levine και Huttenlocher (2007) προκύπτει ότι ο τύπος της ποσότητας επηρεάζει τις εκτιμήσεις αναλογικών σχέσεων. Η μεγαλύτερη επιτυχία των μαθητών σε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν συνεχείς ποσότητες έναντι διακριτών φαίνεται να σχετίζεται με τις διαφορετικές στρατηγικές που έχουν απέναντι σε καταμετρήσιμες και μη καταμετρήσιμες οντότητες. Όπως φάνηκε στην έρευνα, τα παιδιά οκτώ και δέκα ετών χρησιμοποίησαν λανθασμένες στρατηγικές καταμέτρησης στις διακριτές περιπτώσεις. Έτσι, εστίασαν μόνο στα στοιχεία που ήταν ο στόχος και όχι στη σχέση αυτών των στοιχείων με τα υπόλοιπα.

Επιπρόσθετα, οι Mix et al. (2002) πρότειναν συγκεκριμένους λόγους γιατί η πολλαπλασιαστική σκέψη δυσκολεύει όταν εμπλέκονται διακριτές ποσότητες. Πρώτον, η διαμέριση των περιοχών δεν επιτρέπει να γίνει αντιληπτή η μορφή τους στην ολότητά της. Δεύτερον, τα παιδιά όταν έχουν να αντιμετωπίσουν διακριτές οντότητες επικεντρώνονται στην αρίθμηση των ευνοϊκών στοιχείων και όχι στη σύγκριση τους με τα υπόλοιπα στοιχεία. Ακόμα όμως και αν το κάνουν αυτό, είναι πιθανό να μην μπορούν να συγκρίνουν αριθμητικά τις αναλογίες.

Οι Singer-Freeman και Goswami (2001) διεξήγαγαν μια έρευνα με σκοπό να εξετάσουν την ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν πολλαπλασιαστική σκέψη σε δραστηριότητες τόσο με συνεχείς όσο και με διακριτές ποσότητες. Τα παιδιά έκαναν εκτιμήσεις σχετικά με το αν υπήρχε αναλογική ισοδυναμία. Στο ερώτημα της συνεχούς ποσότητας, δόθηκαν δύο πίτσες ίσου μεγέθους, μια για τον ερευνητή και μια για το παιδί. Η πίτσα του ερευνητή χωρίστηκε σε οκτώ ίσα κομμάτια ενώ του παιδιού σε τέσσερα. Ο ερευνητής αφαίρεσε ένα μέρος της δικής του πίτσας (2/8, 4/8, 6/8) και ζήτησε από το παιδί να αφαιρέσει το ίδιο μέρος από την δική του. Το πρόβλημα στην διακριτή του μορφή διαφοροποιείται μόνο στο ότι ο ερευνητής είχε ένα κομμάτι σοκολάτας κομμένο στα οκτώ ενώ το παιδί στα τέσσερα. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα παιδιά απέδωσαν καλύτερα στη δραστηριότητα με τη συνεχή μορφή.

Βέβαια, οι παραπάνω δραστηριότητες στο πείραμα των Singer-Freeman και Goswami μπορεί να απαντήθηκαν και χωρίς πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Στη συνεχή μορφή της δραστηριότητας αν και οι πίτσες χωρίστηκαν σε διαφορετικό αριθμό κομματιών (τέσσερα έναντι οκτώ) το απόλυτο μέγεθος και των δύο ήταν

ίδιο. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και στην διακριτή μορφή. Άρα και στις δύο περιπτώσεις τα παιδιά θα μπορούσαν να απαντήσουν σωστά διακρίνοντας το απόλυτο μέγεθος που λείπει σε καθεμία. Μια τέτοια τακτική είναι ευκολότερο να εφαρμοστεί στο πλαίσιο της συνεχούς πίτσας από ότι στο πλαίσιο της διακριτής σοκολάτας γιατί οι ποσότητες είναι εκ φύσεως συνεχείς. Για το λόγο αυτό, το εύρημα ότι τα παιδιά έχουν καλύτερες επιδόσεις σε ερωτήματα με συνεχείς ποσότητες δεν προσφέρει αδιάσειστα στοιχεία ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη στο πλαίσιο συνεχών είναι πιο εύκολη.



Εικόνα 3. Η σχηματική άποψη της συνεχούς και της διακριτής μορφής ποσοτήτων στην έρευνα των Singer-Freeman και Goswami (2001).

Μια διάκριση στο είδος της ποσότητας που είναι αρκετά ενδιαφέρουσα είναι αυτή των εκτατικών και εντατικών ποσοτήτων. Ως εντατική ορίζεται η ποσότητα της οποίας η αξία δεν εξαρτάται από το άθροισμα των επιμέρους τμημάτων της. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία ενός συστήματος που βρίσκεται σε θερμική ισορροπία είναι όσο είναι και κάθε μέρος από το οποίο αποτελείται. Αντίθετα, εκτατική ορίζεται η ποσότητα της οποίας η αξία καθορίζεται από τα μέρη τα οποία την αποτελούν. Επομένως, η αξία της είναι ανάλογη του μεγέθους του συστήματος που περιγράφει (π.χ. μάζα, όγκος). Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των εκτατικών και εντατικών ποσοτήτων είναι ότι οι εκτενείς υπόκεινται σε πρόσθεση ενώ οι εντατικές όχι. Για παράδειγμα, δύο ποσότητες νερού 20° C και 40° C δεν παράγουν νέα με 60° C.

Σύμφωνα με τους Nunes et al. (2003) (στο Vamvakoussi, 2014), οι εντατικές ποσότητες μπορούν να διακριθούν σε δύο είδη:

- Στο πρώτο, οι ποσότητες που συνθέτουν την εντατική ποσότητα σχηματίζουν ένα σύνολο: για παράδειγμα, η ζάχαρη και ο χυμός λεμονιού

μαζί σχηματίζουν ένα μείγμα, τη λεμονάδα. Σε αυτήν την περίπτωση το μέγεθος της ποσότητας μπορεί να περιγραφθεί ως κλάσμα της μονάδας ή ως λόγος (π.χ. το μείγμα έχει 1/5 ζάχαρη και 4/5 χυμό λεμονιού ή χρειάστηκε ένα κουτάλι ζάχαρης για κάθε τέσσερα κουτάλια χυμό λεμονιού. Η εντατική ποσότητα του παραδείγματος (που εντάχθηκε στο ερωτηματολόγιο) είναι η γεύση.

- Στο δεύτερο, οι ποσότητες που συνθέτουν την εντατική ποσότητα παραμένουν ξεχωριστά. Το μέγεθος της ποσότητας, σε αυτήν την περίπτωση, εκφράζεται μόνο ως λόγος και όχι ως κλάσμα της μονάδας όπως πριν. Δύο τέτοια παραδείγματα είναι το κόστος και το πλήθος. Το κόστος εξαρτάται από την τιμή και την ποσότητα που αγοράστηκαν. Για παράδειγμα, μπορούν να αγοραστούν τετρακόσια γραμμάρια καφέ για ένα ευρώ ή τρακόσια γραμμάρια για ένα ευρώ: η τιμή μένει η ίδια αλλά το κόστος όχι, το πρώτο είναι πιο ακριβό. Μπορεί το κόστος να περιγραφθεί ως αναλογία τιμής και ποσότητας (τιμή ανά κιλό) αλλά δεν γίνεται να χρησιμοποιηθούν κλάσματα για αυτήν την περιγραφή. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το πλήθος το οποίο εξετάστηκε και στο ερωτηματολόγιο.

Μια σημαντική παρατήρηση για τις εντατικές ποσότητες είναι ότι αποτελούν εκ φύσεως σχετικές ποσότητες και ότι ακόμα και στις πιο απλές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις υπάρχει συνήθως μια τέτοια ποσότητα που περνάει απαρατήρητη (π.χ. η βιβλιοθήκη έχει πέντε ράφια και κάθε ράφι χωράει τρία βιβλία. Η εντατική ποσότητα είναι πέντε βιβλία ανά ράφι).

❖ ΕΙΔΟΣ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ

- *Ισότητα/διάταξη*
- *Μέρους-όλου, μέρους–μέρους*

Μια πηγή μεταβολής της δυσκολίας των δραστηριοτήτων που αφορούν την πολλαπλασιαστική σκέψη όπως αναφέρθηκε αποτελεί το είδος της σχέσης. Οι εκτιμήσεις αναλογιών για ισότητα φαίνεται να είναι πιο εύκολη διαδικασία συγκριτικά με τη διάταξη. Μια σειρά ερευνών επιβεβαιώνει ότι ακόμα και παιδιά τεσσάρων ετών είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ισοδυναμίες αναλογικών ποσοτήτων (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002). Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες από αυτές.

Η Goswami (1989) βρήκε πως παιδιά ηλικίας τεσσάρων ετών μπορούν να διαλέξουν ισοδύναμες αναλογίες για αντικείμενα διαφορετικών σχημάτων. Για παράδειγμα, όταν δόθηκε στα παιδιά ότι το ½ ενός κύκλου ταιριάζει με το ½ ενός τετραγώνου, αυτά μπόρεσαν να συνδυάσουν πως το ¼ του κύκλου ταιριάζει με το ¼ του τετραγώνου. Την ίδια ικανότητα ανέδειξαν και οι Spinillo και Bryant (1991) μέσα από ένα ερώτημα αντιστοίχησης σχημάτων. Έδειξαν

πως παιδιά τεσσάρων έως επτά ετών μπορούσαν να διακρίνουν ποια τρίγωνα προέρχονταν από μια σειρά τριγώνων που τους είχε δοθεί. Αντίστοιχα ευρήματα είχαν και οι Sophian και Crosby (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002) όταν έδωσαν ορθογώνια με συγκεκριμένη αναλογία πλάτους και μήκους και ζήτησαν από τα παιδιά να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο άλλα ορθογώνια ποιο έχει την ίδια αναλογία με το πρώτο.

Αρχικά, η έρευνα των Piaget and Inhelder (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007), έδειξε πως τα παιδιά δεν τα καταφέρνουν μέχρι την ηλικία των δέκα να σκέφτονται πολλαπλασιαστικά σε προβλήματα διάταξης με αναλογίες. Βέβαια, το συμπέρασμα αυτό κρίθηκε επισφαλές γιατί το ερώτημα της έρευνας περιλάμβανε και κατανόηση πιθανοτήτων. Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του Piaget, μια σειρά ερευνών (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002; Jeong, Lavine & Huttenlocher, 2007) φανέρωσε πως παιδιά από έξι ετών και πάνω ξεκινούν να σκέφτονται πολλαπλασιαστικά για τη διάταξη. Για να φανεί η πραγματική κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης, πρέπει να μπορεί να αιτιολογηθεί η αλλαγή στην μεταβολή των ποσοτήτων αναφοράς (παρανομαστής) και των ποσοτήτων που καθορίζονται με βάση τις ποσότητες αναφοράς (αριθμητής). Για παράδειγμα όταν συγκριθούν το 2/3 με το 4/6 η αναλογία είναι η ίδια γιατί και οι δύο ποσότητες πολλαπλασιάστηκαν με τον ίδιο παράγοντα. Ωστόσο, είναι δυνατόν να κατασκευαστούν και αναλογικά ερωτήματα με συγκεκριμένη ποσότητα είτε στόχου είτε αναφοράς και να μεταβάλλεται μόνο ένα από τα δύο. Βέβαια, οι περιπτώσεις αυτές δεν είναι κατ' ανάγκην σχετικές γιατί μπορούν να γίνουν εκτιμήσεις απλά εστιάζοντας στη ποσότητα που μεταβάλλεται. Είναι πιο εύκολα αντιμετωπίσιμα ερωτήματα όπου η ποσότητα αναφοράς παραμένει σταθερή από ότι όταν η ποσότητα που καθορίζεται με βάση τις ποσότητες αναφοράς μένει σταθερή. Στην πρώτη περίπτωση, παιδιά ηλικίας πέντε έως επτά επιτυγχάνουν σε μεγάλο βαθμό ενώ στη δεύτερη περίπτωση, παιδιά μεγαλύτερα των επτά μπορούν να τα αντιμετωπίσουν ικανοποιητικά (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002). Η ταυτόχρονη αλλαγή και των δύο ποσοτήτων δυσκολεύει και μαθητές ηλικίας έως δέκα ετών.

Οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις διαφέρουν από τις απόλυτες στο ότι περιλαμβάνουν σύγκριση μεταξύ ποσοτήτων η οποία μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Είναι αποδεκτό πως το είδος της σύγκρισης επηρεάζει τη δυσκολία ενός ποσοτικού σχετικού ερωτήματος (Spinillo & Bryant, 1991). Ένα είδος σύγκρισης χρησιμοποιεί το σύνολο ως ποσότητα αναφοράς (παρανομαστή) όπως για παράδειγμα αντικείμενα συγκεκριμένου είδους στο σύνολο όλων των αντικειμένων (μηχανικά μολύβια στο σύνολο των μολυβιών). Έτσι, οι σχέσεις μέρους-όλου εμπεριέχονται στα συμβατικά σύμβολα για τα κλάσματα. Για παράδειγμα, το ½ έχει νόημα σε σχέση με τη κάποια συνολική μονάδα (½ μήλου, ½ της δωδεκάδας κ.τ.λ.).

Ένα δεύτερο είδος ποσοτικής σχετικής σύγκρισης περιλαμβάνει το χωρισμό του συνόλου σε δύο μέρη. Σε τέτοια προβλήματα, η σχετική ποσότητα μπορεί να

θεωρηθεί ως το μέρος της ποσότητας στόχου προς το υπολειπόμενο μέρος. Η σχέση αυτή αναφέρεται ως σχέση μέρους-μέρους. Το παρακάτω σχήμα βοηθάει στην κατανόηση :

Εικόνα 5 . Απεικόνιση σχέσεων ποσοτήτων:

- Υπάρχει μια αθροιστική (μέρους–μέρους-όλου) σχέση:
  5 τετράγωνα=3 κόκκινα τετράγωνα + 2 κίτρινα τετράγωνα
- Υπάρχει επίσης και μια πολλαπλασιαστική (μέρους -όλου) σχέση:
  Κόκκινα τετράγωνα= 3/5 των τετραγώνων,
  κίτρινα τετράγωνα= 2/5 των τετραγώνων
- Τέλος, υπάρχει και η σχέση μέρους-μέρους:
  Κόκκινα τετράγωνα / κίτρινα τετράγωνα= 3/2

Σύμφωνα με τους Jacob και Willis (2001), οι φάσεις ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης είναι πέντε:

1. **Ένα προς ένα καταμέτρηση (One to One Counting)**: Μία προς μία αντιστοίχιση χωρίς να συνδέεται με το σύνολο. Τα παιδιά που καταμετρούν με ένα προς ένα τρόπο βρίσκονται σε αυτήν τη φάση. Τεχνικά καταλαβαίνουν τι πρέπει να κάνουν για να απαντήσουν στην ερώτηση πόσο κάνει. Ώστόσο, δεν αντιλαμβάνονται την καταμέτρηση ως ένα σταθερό δείκτη της ποσότητας που μετράται και έτσι για παράδειγμα δεν την εμπιστεύονται ακόμα και όταν έχουν να προσθέσουν δυό ίδιες ποσότητες ή όταν αλλάζει η σειρά των πραγμάτων που αποτελούν την ποσότητα που μετρούν. Σε πολλαπλασιαστικούς όρους η συνέπεια ενός τέτοιου τρόπου σκέψης είναι το γεγονός ότι για τα παιδιά δεν έχει νόημα να δημιουργούν σύνολα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό που περιγράφει η Steffe (Jacob & Willis, 2003) όπου ένας μαθητής υπολόγισε πόσες θέσεις υπάρχουν σε μια διάταξη που αποτελείται από τέσσερις σειρές και τρεις στήλες, απλά μετρώντας κατά τρεις αφού γνώριζε την ακολουθία των αριθμών του τρία (3-6-9-12). Όταν προστέθηκε όμως μία επιπλέον σειρά δεν μπόρεσε να απαντήσει από το σημείο που είχε μείνει (δηλαδή 12-15) και αναγκάστηκε να ξεκινήσει πάλι από την αρχή για να δώσει σωστή απάντηση.
2. **Προσθετική σύνθεση (Additive Composition):** Όταν τα παιδιά κατανοούν ότι η καταμέτρηση είναι σταθερός δείκτης για την μέτρηση ποσοτήτων τότε βρίσκονται σε αυτή τη φάση. Καταλαβαίνουν ότι μια ποσότητα μπορεί να μετρηθεί και με άλλους τρόπους χωρίς να μεταβάλλεται το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν δωθούν στα παιδιά δύο όμοιες ποσότητες με τέσσερα και εννέα στοιχεία, δεν χρειάζεται να μετρήσουν από

την αρχή, αλλά μπορούν να ξεκινήσουν από το τέσσερα ή το εννέα και να συνεχίσουν την πρόσθεση με καταμέτρηση. Το να χρησιμοποιούν μονοπάτια για πιο γρήγορους υπολογισμούς πλέον έχει νόημα για αυτά.

Σε πολλαπλασιαστικούς όρους, η συνέπεια αυτού του σκεπτικού είναι ότι εάν τα παιδιά αναγνωρίζουν ίσα σύνολα, τότε είναι σε θέση να εκμεταλλευτούν αυτά τα σύνολα για να μετρούν περισσότερο αποδοτικά, μέσω της παράλειψης των πράξεων και της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Ωστόσο, και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χρειαστεί να αναδιατάξουν τα μέρη του συνόλου πριν παραλείψουν τις πράξεις ή προσθέσουν επαναλαμβανόμενα για να βρουν πόσα είναι. Εστιάζουν στον πολλαπλασιαστέο και δεν κατανοούν το ρόλο του πολλαπλασιαστή.

3. **Ένας-προς πολλούς μετρητές (Many to One Counters)**: Όταν τα παιδιά καταλαβαίνουν ότι τα σύνολα μπορούν να μετρηθούν και ότι μπορούν να παρακολουθούν δύο πράγματα ταυτόχρονα –τον αριθμό των συνόλων και το σύνολο των μερών του κάθε συνόλου- βρίσκονται σε αυτήν τη συγκεκριμένη φάση. Μπορούν να συγκρατήσουν δύο αριθμούς ταυτόχρονα και να διπλομετρήσουν. Τα παιδιά τώρα ξέρουν ότι μπορούν να αναπαραστήσουν ένα σύνολο και να μετρήσουν τις επαναλήψεις του συνόλου αυτού. Αυτό το κάνουν με δύο τρόπους: είτε χρησιμοποιώντας δάκτυλα είτε αριθμούς. Έτσι, όμως, τα παιδιά μπορεί αρχικά να θεωρήσουν τον πολλαπλασιαστή ως τον αριθμό που τους λέει πότε να σταματήσουν την καταμέτρηση. Μετρούν τις επαναλήψεις του πολλαπλασιαστέου και καθώς προχωρούν μετρούν τον αριθμό των συνόλων δηλαδή του πολλαπλασιαστή ως τρόπο για να ξέρουν πότε πρέπει να σταματήσουν. Για παράδειγμα, «5 για 1». «10 για 2», «15 για 3» «20 για 4». Όμως, προκειμένου να αναπτύξουν την πολλαπλασιαστική τους σκέψη τα παιδιά πρέπει να αλλάξουν αυτήν την θεωρία τους για τον πολλαπλασιαστή. Να κατανοήσουν ότι πολλαπλασιαστής και πολλαπλασιαστέος συνεργάζονται πριν τον υπολογισμό για να πραγματοποιηθεί ένας πολλαπλασιαστικός υπολογισμός.
4. **Πολλαπλασιαστικές σχέσεις (Multiplicative Relations)**: Όταν τα παιδιά φτάνουν στο σημείο να κατανοήσουν ότι οι πολλαπλασιαστικές καταστάσεις εμπλέκουν τρεις πτυχές: σύνολα ίδιου μεγέθους (πολλαπλασιαστέος), αριθμό συνόλων (πολλαπλασιαστή) και ένα συνολικό ποσό (το γινόμενο), και μπορούν να εναρμονίσουν την ικανότητα ομαδοποίησης τόσο σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα όσο και σε προβλήματα διαίρεσης, προτού προβούν σε πράξεις, τότε βρίσκονται σε αυτήν την φάση. Τα παιδιά κατανοούν ποιος αριθμός σχετίζεται με το πόσες φορές και ποιος με τον τρόπο του υπολογισμού. Για παράδειγμα, καταλαβαίνουν να ξεχωρίζουν αν τους ζητείται να βρουν έξι φορές μια ποσότητα του συνόλου ή το υποεξαπλάσιο αυτής της ποσότητας. Σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα μια από αυτές τις πτυχές λείπει και απαιτείται ο προσδιορισμός του κατάλληλου υπολογισμού.

5. **Διενέργεια πράξεων (Operate the Operator)**: Όταν τα παιδιά μπορούν να χειρίζονται μεταβλητές σε αλγεβρικές καταστάσεις και να διενεργούν πράξεις, τότε βρίσκονται σε αυτήν τη φάση. Αυτό θα σήμαινε ότι μπορούν να πολλαπλασιάσουν τον πολλαπλασιαστή. Ένα παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού προβλήματος: Κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους από τη γέννησή του, ο Όττο ο ελέφαντας τριπλασίασε το βάρος του. Κατά το δεύτερο έτος, διπλασίασε το βάρος τους. Πόσο πολλαπλάσιο βάρος είχε στο τέλος του δεύτερου έτους?
   Επίσης, αυτό θα σήμαινε μεταξύ άλλων, ότι θα μπορούσαν με ευκολία να αξιοποιήσουν παράγοντες για να παράγουν μία πολλαπλασιαστική σειρά αριθμών, η οποία είναι ευκολότερη στη διενέργεια υπολογισμών.

2.3. Πολλαπλασιαστική σκέψη και παρεμβολές από αθροιστικές μεθόδους

Η αναλογία, εξαιτίας της ευρείας εφαρμοσιμότητας της, κατέχει κυρίαρχο ρόλο στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η πλήρης κατανόηση και χειρισμός της πολλαπλασιαστικής αιτιολόγησης που απαιτείται σε αναλογικές καταστάσεις δεν επιτυγχάνεται εύκολα ωστόσο έρευνες έχουν δείξει ότι ακόμα και παιδιά μικρής ηλικίας μπορούν να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά αναλογικές καταστάσεις (Lamon, 1994). Για παράδειγμα, ακολουθώντας την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (αν 2 παγωτά κοστίζουν 4 ευρώ, τα 8 θα κοστίζουν 4+4+4+4=16 ευρώ).

Ένα ενδιαφέρον εύρημα αποτελεί το γεγονός πως τα παιδιά βασίζονται, όποτε μπορούν, στην απόλυτη ποσότητα και αυτό συχνά τα οδηγεί σε λάθη. Αυτό σχετίζεται με τη διάκριση μεταξύ αθροιστικής και πολλαπλασιαστικής σκέψης (Lamon, 2006; Moss, 2005). Είναι γεγονός πως ο αθροιστικός συλλογισμός δύσκολα παρακάμπτεται.

Ουσιαστικά, η πραγματική διδασκαλία της αναλογίας ξεκινά στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού όπου οι μαθητές εξασκούν εντατικά τις αναλογικές τους ικανότητες σε προβλήματα εύρεσης της ποσότητας που λείπει (Kaput & West, 1994) και βρίσκονται αντιμέτωποι με παραδοσιακά πλαίσια στα οποία απαιτείται αναλογική αιτιολόγηση (κόστος, πλήθος, μείγματα). Για παράδειγμα, "η μαμά ρίχνει 2 κύβους ζάχαρης σε χυμό 10 λεμονιών για να κάνει λεμονάδα. Αν βάλει 6 κύβους ζάχαρης πόσα λεμόνια θα χρειαστεί;"

Σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις δημιουργούνται σχέσεις μεταξύ όμοιων αλλά και ανόμοιων ποσοτήτων δηλαδή με την ίδια μονάδα μέτρησης ή διαφορετική. Αυτό αποτελεί μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στην πολλαπλασιαστική και αθροιστική σκέψη. Στη τελευταία, για να μπορούν να προστεθούν ανόμοιες ποσότητες πρέπει να υπάρχει ένα υπερσύνολο (π.χ. πορτοκάλια και μήλα με υπερσύνολο τα φρούτα) ενώ στην πρώτη δεν ισχύει κάτι ανάλογο.

Δεδομένης της δεσπόζουσας θέσης που κατέχει η αναλογική σκέψη στη μαθηματική εκπαίδευση, πλήθος ερευνών έχουν εστιάσει στο πως οι μαθητές αποκτούν ικανότητες να απαντούν σε τέτοια ερωτήματα, ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν και πώς να αναπτυχθούν μέσα από τη διδασκαλία (Freudenthal, 1983; Harel & Behr, 1989; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2009). Ανάλογα με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε αναλογικές καταστάσεις, η σχετική βιβλιογραφία διαχωρίζει τις σωστές πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις από τις λανθασμένες προσθετικές. Πριν γίνει αναφορά στις τελευταίες, παρατίθενται οι διάφορες σωστές πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις.

Θεωρώντας το παράδειγμα που δόθηκε προηγουμένως με τη λεμονάδα, οι μαθητές το αντιμετωπίζουν πολλαπλασιαστικά χρησιμοποιώντας βαθμωτή

προσέγγιση εστιάζοντας στην εσωτερική αναλογία της ζάχαρης προς τη ζάχαρη (6 κύβοι/2 κύβοι) και εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα στον αριθμό των λεμονιών (3 x 10=30 λεμόνια για 6 κύβους ζάχαρης). Εναλλακτικά, είναι πιθανό να χρησιμοποιήσουν μια προσέγγιση μέσω συνάρτησης εστιάζοντας στην εξωτερική αναλογία της ζάχαρης προς τον αριθμό των λεμονιών (10 λεμόνια/2 κύβους ζάχαρης➔ 6 x 5=30 λεμόνια). Μια παραλλαγή της προσέγγισης μέσω συνάρτησης είναι αυτή της μονάδας-παράγοντα που εστιάζει στη μονάδα αξίας μίας εκ των ποσοτήτων (10 λεμόνια για κάθε 2 κύβους ζάχαρης ➔ 5 λεμόνια για 1 κάθε κύβο ζάχαρης ➔ 5 x 6=30 λεμόνια). Τέλος, οι μαθητές ενδεχομένως να αντιμετωπίσουν την κατάσταση με μία πιο στοιχειώδη προσέγγιση που ονομάζεται οικοδόμηση ή αναπαραγωγή: για κάθε 2+2+2 κύβους ζάχαρης χρειάζονται 10+10+10 λεμόνια. Είναι σαφές πως αυτή η προσέγγιση βασίζεται στον επαναλαμβανόμενο προσθετικό χαρακτήρα του πολλαπλασιασμού και επομένως έχει χαρακτηριστικά προσθετικής αιτιολόγησης. Παρόλα αυτά κατηγοριοποιείται ως πολλαπλασιαστικός συλλογισμός γιατί αντιμετωπίζει τον πολλαπλασιαστικό χαρακτήρα του προβλήματος.

Εκτός από αυτές τις σωστές πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις, υπάρχει και μια λανθασμένη μορφή στην οποία οι ερευνητές δίνουν μεγάλη προσοχή: την αθροιστική, όπου η σχέση μεταξύ των δοσμένων ποσοτήτων υπολογίζεται αφαιρώντας τη μία από την άλλη και εφαρμόζοντας τη διαφορά σε μια τρίτη. Για παράδειγμα, στο προηγούμενο πρόβλημα, οι μαθητές απαντούν ότι στο δεύτερο μείγμα υπάρχουν 6-2=4 κύβοι ζάχαρης περισσότερες οπότε 10+4=14 λεμόνια χρειάζονται.

3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

3.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα εξετάζει αν επιτυγχάνεται σταδιακή ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών με την πάροδο των σχολικών χρόνων. Σύμφωνα με τη διαθέσιμη βιβλιογραφία και αρθρογραφία αναμένεται να παρατηρηθεί μια τέτοια ανάπτυξη και μάλιστα τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου να υπερέχουν στη χρήση της πολλαπλασιαστικής σκέψης σε μεγάλο βαθμό σε σχέση με τα παιδιά του Δημοτικού.

3.2. Μεθοδολογία

3.2.1. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 80 παιδιά εκ των οποίων τα 30 παρακολουθούν τη Δ΄ Δημοτικού, 25 τη ΣΤ΄ Δημοτικού και 25 τη Γ΄ Γυμνασίου. Τα παιδιά του Δημοτικού είναι όλα από το ίδιο σχολείο. Τόσο το Δημοτικό όσο και το Γυμνάσιο βρίσκονται στην περιοχή της Γλυφάδας.

Σύμφωνα με το διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών μαθηματικών (Υπουργείο Παιδείας 2003), οι μαθητές έως το τέλος της ΣΤ΄ Δημοτικού θα πρέπει:

- να γνωρίζουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας και να είναι ικανά να βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας,
- να γνωρίζουν την έννοια του ποσοστού ως λόγου, ως πηλίκου και ως δεκαδικού,
- να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών καθώς και
- να προσδιορίζουν τον αριθμό που πρέπει να προσθέσουν, να αφαιρέσουν να πολλαπλασιάσουν ή να διαιρέσουν σε έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό.

3.2.2. Ερευνητικά Εργαλεία

Στους μαθητές των τριών τάξεων δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με επτά έργα που καλούνται να απαντήσουν. Καθένα από τα έργα περιλαμβάνει ερωτήματα που αναφέρονται σε διαφορετικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία των πολλαπλασιαστικών ερωτημάτων. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εκφωνήσεις και το σκεπτικό της επιλογή τους.

Αρχικά, δίνονται οι εκφωνήσεις των έργων 1 και 6 γιατί και οι δύο αναφέρονται σε εντατικές ποσότητες.

❖ **<u>Εκφώνηση 1ου έργου</u>**

Έχουμε 2 ίδια ποτήρια με τσάι που στο καθένα έχουμε ρίξει κύβους ζάχαρης για να γίνουν πιο γλυκά. Το πρώτο ποτήρι είναι γεμάτο και έχει 3 κύβους ζάχαρης. Το δεύτερο είναι γεμάτο μέχρι τη μέση και έχει 2 κύβους.

- Ποιο από τα δύο ποτήρια θα προτιμούσατε να πιείτε αν θέλατε να είναι πιο γλυκό; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Το πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο

- Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

.....
.....
.....
.....

❖ **<u>Εκφώνηση 6ου έργου</u>**

Ο Νίκος θα κάνει πάρτι. Αν το πάρτι γίνει στο σπίτι του που είναι 75 τ.μ., τότε θα καλέσει 25 παιδιά. Αν γίνει στον παιδότοπο που είναι 100 τ.μ., τότε θα καλέσει 50 παιδιά. Ο Νίκος αποφάσισε να κάνει το πάρτι εκεί που θα έχουν περισσότερο χώρο να παίξουν.

- Πού πιστεύετε ότι θα κάνει το πάρτι του ο Νίκος; Επιλέξτε με Χ.

  - ☐ Στο σπίτι του
  - ☐ Στον παιδότοπο

- Εξηγήστε την απάντηση σας:

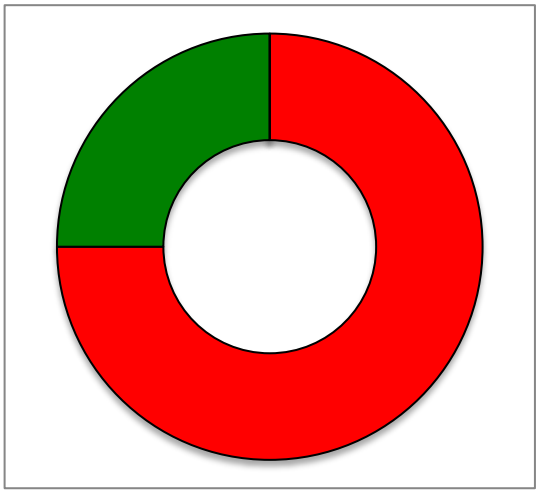
.....
.....
.....
.....
.....

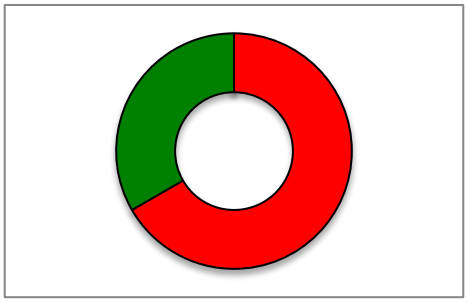
Όπως αναφέρθηκε, ο τύπος της ποσότητας επηρεάζει το βαθμό δυσκολίας σε πολλαπλασιαστικά ερωτήματα. Μια διάκριση που αφορά τον τύπο της ποσότητας είναι οι εντατικές ποσότητες. Σύμφωνα με τους Nunes et al. (2003) (στο Vamvakoussi, 2014), οι εντατικές ποσότητες διακρίνονται σε δύο είδη. Στο πρώτο είδος, η εντατική ποσότητα μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα ή ως λόγος μεγεθών ενώ στο δεύτερο ως λόγος μεγεθών και όχι ως κλάσμα. Για το πρώτο έργο, η εντατική ποσότητα είναι η γεύση και για τη δεύτερη το πλήθος. Για το λόγο αυτό τα δύο έργα αυτά εξετάζονται μαζί.

❖ **<u>Εκφώνηση 2ου έργου</u>**

Στο παιχνίδι «Ο τροχός της τύχης», οι παίκτες επιλέγουν έναν τροχό, το γυρνάνε και αν σταματήσει στο πράσινο χρώμα, κερδίζουν δώρα.

✓ ***1ο ζεύγος***





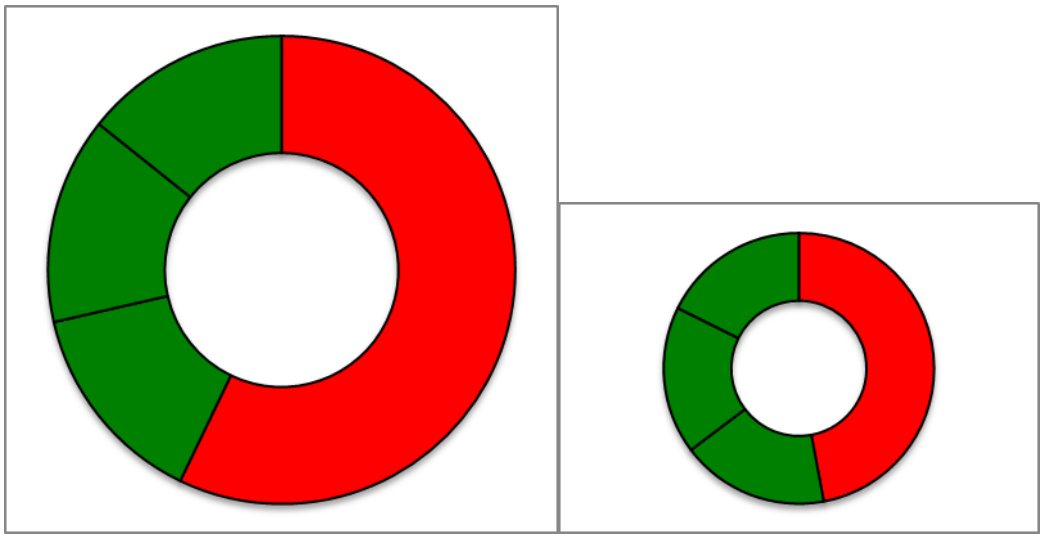
➢ Ποιον τροχό θα επιλέγατε για να κερδίσετε δώρα; Επιλέξτε με Χ.

- ☐ Τον πρώτο
- ☐ Το δεύτερο
- ☐ Όποιον και να διαλέξω, δεν έχει διαφορά

➢ Εξηγήστε την απάντηση σας:

.....
.....
.....
.....

✓ ***2ο ζεύγος***

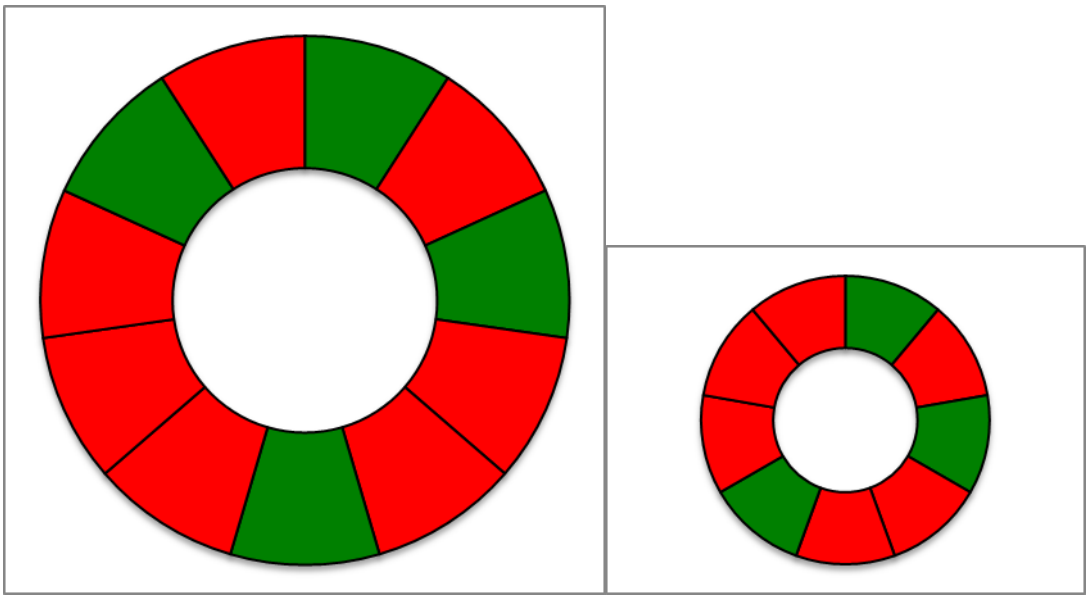


- Ποιον τροχό θα επιλέγατε για να κερδίσετε δώρα; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Τον πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο
  - ☐ Όποιον και να διαλέξω, δεν έχει διαφορά

- Εξηγήστε την απάντηση σας:

.....
.....
.....
.....
.....

✓ ***3ο ζεύγος***



- Ποιον τροχό θα επιλέγατε για να κερδίσετε παιχνίδια; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Τον πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο
  - ☐ Όποιον και να διαλέξω, δεν έχει διαφορά

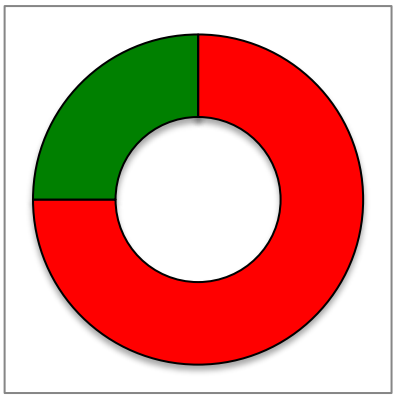
- Εξηγήστε την απάντηση σας:

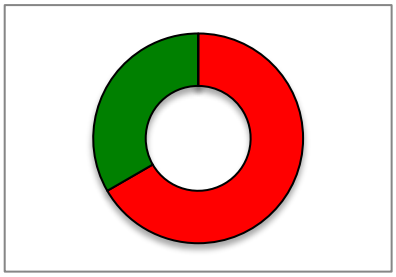
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Χρησιμοποιώντας μια παρόμοια προσέγγιση με αυτήν των Singer-Freeman και Goswami και διαφοροποιώντας το κλασικό πρόβλημα των βόλων των Piaget and Inhelder, κατασκευάστηκε μια δραστηριότητα του ερωτηματολογίου της έρευνας αυτής. Συγκεκριμένα, δίνονται δύο τροχοί της τύχης χωρισμένοι σε πράσινες και κόκκινες περιοχές. Όταν ο τροχός σταματήσει σε πράσινο τότε τα παιδιά κερδίζουν δώρα. Ρωτήθηκαν λοιπόν οι μαθητές ποιον τροχό προτιμούν για να κερδίσουν δώρα. Προκειμένου να αποφευχθεί η απόλυτη σύγκριση των πράσινων περιοχών όπως έγινε στην έρευνα των Singer-Freeman και Goswami (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007), οι τροχοί διέφεραν ως προς το μέγεθός τους. Η δραστηριότητα περιλαμβάνει ένα ερώτημα συνεχών ποσοτήτων και δύο ερωτήματα διακριτών ποσοτήτων. Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων είναι εύκολο να απαντήσουν σωστά ακόμα και μικρά παιδιά απλά συγκρίνοντας σε κάθε τροχό την πράσινη με την κόκκινη περιοχή. Στην περίπτωση των διακριτών καταστάσεων, οι περιοχές χωρίστηκαν σε υποπεριοχές ίσου εμβαδού με δύο τρόπους: (α) μια κατάσταση στην οποία οι υποπεριοχές ίδιου χρώματος γειτνιάζουν και (β) μία κατάσταση στην οποία οι υποπεριοχές διαφορετικών χρωμάτων είναι αναμεμειγμένες.

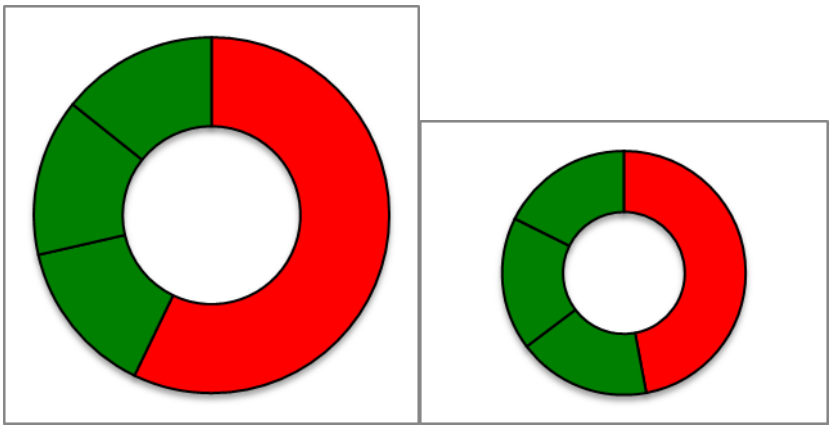
Η κατάσταση (α) μοιάζει με το πείραμα των Piaget and Inhelder.

Συνεχής κατάσταση

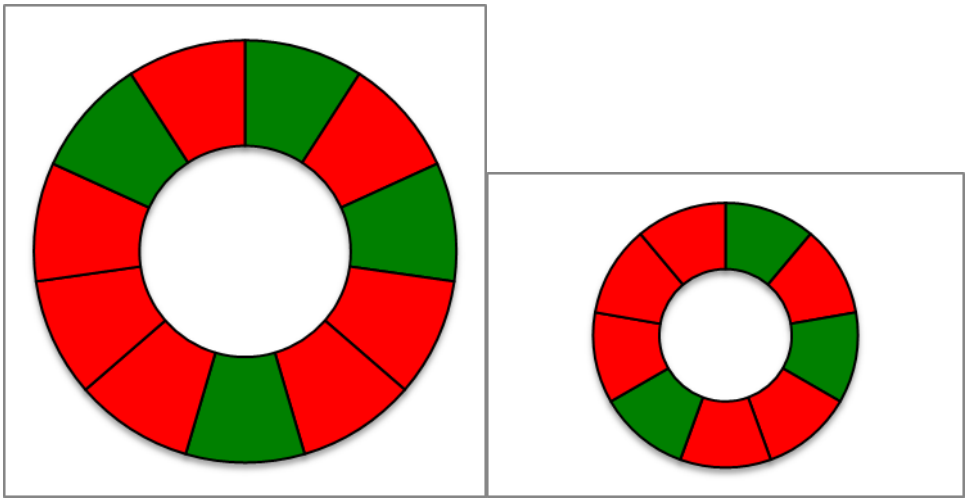




Διακριτή κατάσταση (γειτνίαση)



***Διακριτή κατάσταση* (ανάμειξη)**



Εικόνα 4. Παραδείγματα (α) συνεχών, (β) διακριτών με γειτνίαση και (γ) διακριτών με ανάμειξη καταστάσεων

❖ **<u>Εκφώνηση 3ου έργου</u>**

Μια παρέα 3 παιδιών μοιράζεται 6 σοκολάτες. Μια δεύτερη παρέα 4 παιδιών μοιράζεται 7 σοκολάτες. Σε ποια από τις δύο παρέες θα φάει περισσότερη σοκολάτα το κάθε παιδί;

- ☐ Στην πρώτη
- ☐ Στη δεύτερη
- ☐ Το ίδιο και στις δύο παρέες

- Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Η επιλογή του 3ου έργου βασίστηκε στη δυσκολία που προκαλούν ερωτήματα στα οποία μεταβάλλεται ταυτόχρονα η ποσότητα αναφοράς και η ποσότητα που καθορίζεται με βάση την ποσότητα αναφοράς. Εξετάζεται το κατά πόσον είναι ικανά να διακρίνουν την αλληλεξάρτηση αυτών των δύο προκειμένου να δωθεί μία πολλαπλασιαστική απάντηση.

❖ **<u>Εκφώνηση 4ου έργου</u>**

Οι μαθητές ενός σχολείου είχαν επισκεφτεί πέρυσι ένα ενυδρείο. Εκεί είχαν δει δύο μικρά δελφίνια, το Φοίβο και τη Φοίβη. Ο Φοίβος είχε μήκος 3 μέτρα και η Φοίβη 2 μέτρα. Φέτος ξαναεπισκέφτηκαν το ενυδρείο. Ο Φοίβος είχε φτάσει τα 5 μέτρα και η Φοίβη τα 4 μέτρα μήκος.

- Ποιο δελφίνι αύξησε περισσότερο το μήκος του; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Ο Φοίβος
  - ☐ Η Φοίβη
  - ☐ Και τα δύο το ίδιο

- Αιτιολογήστε την απάντηση σας:

  .....
  .....
  .....
  .....
  .....
  .....

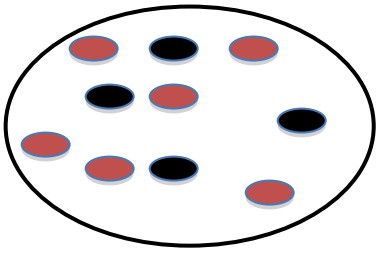
Το έργο αυτό είναι εμπνευσμένο από τις δραστηριότητες της Lamon (2006). Αποτελεί ένα καλό κριτήριο για να διαπιστωθεί αν ένα παιδί μπορεί να δεί και να απαντήσει με πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Στην περίπτωση αυτή, αντιλαμβάνεται την αλλαγή στο μήκος σε σχέση με το αρχικό μήκος. Αντίθετα,

αν η απάντηση βασίζεται μόνο στο πόσο μήκος προστέθηκε τότε ο συλλογισμός είναι ξεκάθαρα απόλυτος-αθροιστικός.

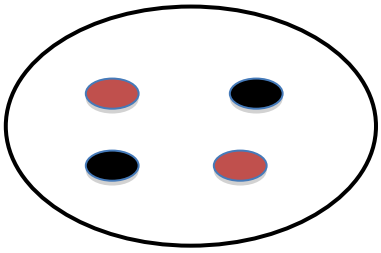
❖ **<u>Εκφώνηση 5ου έργου</u>**

Στο παιχνίδι «βρες την μπίλια» οι παίκτες επιλέγουν μια μπίλια από ένα βάζο χωρίς να βλέπουν και αν αυτή είναι μαύρη τότε κερδίζουν δώρα.

1ο Σχήμα



2ο Σχήμα



- Ποιο βάζο θα επιλέγατε για να κερδίσετε δώρα; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Το πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο

- Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Η επιλογή του 5ου έργου έγινε με σκοπό να εκτιμηθεί αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως σωστή απάντηση τον απόλυτο αριθμό των ευνοϊκών περιπτώσεων (δηλαδή των μαύρων βόλων) ή συνειδητοποιούν ότι περισσότερες πιθανότητες σημαίνει μεγαλύτερος λόγος μαύρων/κόκκινων βόλων (σχέση μέρους-μέρους) ή μαύρων/σύνολο βόλων (σχέση μέρους-όλου). Από τις πολλαπλασιαστικές απαντήσεις μπορεί να προκύψει ως πληροφορία αν οι μαθητές προτιμούν την αιτιολόγηση μέρους-μέρους ή μέρους-όλου.

❖ **<u>Εκφώνηση 7ου έργου</u>**

Σε μια κατασκήνωση πηγαίνουν παιδιά Δημοτικού και Γυμνασίου. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πόσα παιδιά από το Δημοτικό και πόσα από το Γυμνάσιο επέλεξαν να ασχοληθούν με το μπάσκετ και με την κολύμβηση, αντίστοιχα.

	ΜΠΑΣΚΕΤ	ΚΟΛΥΜΒΗΣΗ	Σύνολο
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	36	12	48
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	20	10	30

- Ο Κώστας ισχυρίστηκε ότι η κολύμβηση είναι πιο δημοφιλές άθλημα στους μαθητές του Γυμνασίου απ' ό,τι του Δημοτικού.

  Συμφωνείτε; Επιλέξτε με Χ.

  - ☐ Ναι
  - ☐ Όχι

- Εξηγήστε την άποψή σας.

……
……
……
……
……
……

Η επιλογή του συγκεκριμένου έργου έγινε για να εξετασθεί αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την πολλαπλασιαστική δομή του ερωτήματος συγκρίνοντας το άθλημα με το σύνολο των προτιμήσεων για να απαντήσουν στη δημοφιλία ή αιτιολογούν απόλυτα εστιάζοντας μόνο στον αριθμό των παιδιών που επιλέγουν το άθλημα.

3.2.3. Διαδικασία

Στους μαθητές των τάξεων της Δ΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου δόθηκαν ερωτηματολόγια με επτά έργα τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν τόσο με αθροιστικό όσο και με πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν εντός της τάξης σε χρόνο όπως αυτός καθορίζεται από μία σχολική ώρα. Οι απαντήσεις των μαθητών καθώς επίσης και το σκεπτικό των απαντήσεων τους αποτυπώνονται πάνω στο ερωτηματολόγιο. Οι

συμμετέχοντες ενημερώθηκαν ότι δεν έχει καμία σημασία αν απαντούσαν σωστά ή λανθασμένα και πως αυτό που ενδιαφέρει την έρευνα είναι ο τρόπος με τον οποίο σκέφτηκαν για να επιλύσουν τις δραστηριότητες. Οποιοδήποτε είδος βοήθειας είτε από τον δάσκαλο-καθηγητή είτε από συμμαθητή είτε από τον ίδιο τον ερευνητή απαγορευόταν. Μόνη εξαίρεση αποτελούσε η περίπτωση μη κατανόησης του έργου σε επίπεδο λεκτικό, όπου τότε η βοήθεια του ερευνητή κρινόταν επιτρεπτή.

3.3. Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της έρευνας αναλύονται σε τρία επίπεδα.

- Σε πρώτο επίπεδο, ελέγχονται οι απαντήσεις των μαθητών σε καθένα από τα επτά έργα ξεχωριστά προκειμένου να εξεταστεί το κατά πόσον επηρεάζονται οι απαντήσεις από τους παράγοντες που μεταβάλλουν τη δυσκολία με την ηλικία και συγκεκριμένα αν το ποσοστό των μαθητών που σκέφτονται πολλαπλασιαστικά αυξάνεται όσο προχωρούν στη σχολική βαθμίδα.
- Σε δεύτερο επίπεδο, εξετάζεται το σύνολο των πολλαπλασιαστικών απαντήσεων ανά μαθητή σε κάθε τάξη προκειμένου να διαφανεί μία τάση στις μεθόδους που χρησιμοποιούν.
- Σε τρίτο επίπεδο, αναλύονται στο σύνολο τους οι απαντήσεις των μαθητών και καθορίζεται η απάντηση στο κύριο ερευνητικό ερώτημα.

3.3.1. Αποτελέσματα ανά έργο

Οι απαντήσεις στο ερευνητικό ερώτημα κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

- πολλαπλασιαστική απάντηση (Π), όταν εμφανίζεται πολλαπλασιαστικός συλλογισμός στην αιτιολόγηση (π.χ. πολλαπλασιαστικοί υπολογισμοί, πολλαπλασιαστικές στρατηγικές, εξηγήσεις που αναφέρονται σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις).
- αθροιστική απάντηση (Α), όταν εμφανίζεται αθροιστικός συλλογισμός στην αιτιολόγηση (π.χ. αθροιστικοί υπολογισμοί, αθροιστικές το
- άλλη απάντηση (Ο), όταν οι αριθμοί συνδυάζονται με διαφορετικό τρόπο από τους δύο παραπάνω, όταν το ερώτημα παραμένει χωρίς απάντηση ή όταν η απάντηση είναι ελλιπής.

Να σημειωθεί πως στην περίπτωση λάθος αριθμητικών υπολογισμών (π.χ. 75τ.μ /25παιδιά=4 τ.μ. ανά παιδί), η απάντηση δε καταλήγει απαραίτητα στη κατηγορία «άλλη απάντηση». Εφόσον, οι υπολογισμοί είναι ξεκάθαρα αθροιστικοί ή πολλαπλασιαστικοί τότε η απάντηση κατατάσσεται στην αντίστοιχη κατηγορία.

Αρχικά, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα 1 και 6 του ερωτηματολογίου. Ο λόγος που εξετάζονται μαζί είναι διότι και τα δύο αναφέρονται σε εντατικές ποσότητες. Σύμφωνα με τους Nunes et al. (Βαμβακούση, 2014), οι εντατικές ποσότητες διακρίνονται σε δύο είδη. Στο πρώτο είδος, η εντατική ποσότητα μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα ή ως αναλογία ενώ στο δεύτερο ως αναλογία και όχι ως κλάσμα. Για την πρώτη δραστηριότητα, η εντατική ποσότητα είναι η γεύση και για τη δεύτερη το πλήθος.

3.3.1.1. 1ο και 6ο Έργο

❖ **<u>Αποτελέσματα 1ου έργου:</u>**

Πίνακας 1*: Αποτελέσματα 1ου έργου*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*9/30*	*30%*	*11/25*	44%	*18/25*	*72%*
(Α)	*9/30*	*30%*	*4/25*	16%	*1/25*	*4 %*
(Ο)	*12/30*	*40%*	*10/25*	40%	*6/25*	*24%*

Είναι εμφανές από τις απαντήσεις των παιδιών πως όσο μεγαλώνουν, η χρήση της πολλαπλασιαστικής σκέψης τείνει να εδραιώνεται. Το ποσοστό των μαθητών που σκέφτονται με αυτόν τον τρόπο ξεκινά στο 30% για τη Δ΄Δημοτικού, γίνεται 44% στη ΣΤ΄Δημοτικού και μεγαλώνει στο 72% στη Γ΄Γυμνασίου. Επίσης, είναι σημαντική και η σταδιακή μείωση των μαθητών που αιτιολογούν με αθροιστικό συλλογισμό. Βέβαια, η διαφορά των μαθητών της Δ΄ Δημοτικού από αυτούς των υπόλοιπων τάξεων είναι κάτι αναμενόμενο αν τεθεί υπόψη ότι σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα οι αναλογίες και η σύγκρισή τους εισάγονται στη ΣΤ΄Δημοτικού.

Παρακάτω, παρουσιάζονται απαντήσεις μαθητών της Δ΄Δημοτικού που χρησιμοποίησαν πολλαπλασιαστικό, αθροιστικό και άλλον τρόπο σκέψης αντίστοιχα.

Χαρά: «Πιστεύω ότι είναι το δεύτερο επειδή όπως λέει και το πρόβλημα έχουμε δύο ποτήρια, το πρώτο είναι γεμάτο με τσάι και έχει τρεις κύβους ζάχαρης ενώ το δεύτερο έχει δύο. Αν το πρώτο το χωρίζαμε σε 2

ποτήρια το κάθε ένα θα ήταν γεμάτο μέχρι τη μέση και θα είχε 1,5 κύβους. Όμως, το δεύτερο έχει δύο κύβους άρα είναι πιο γλυκό.».

Κώστας: «Περισσότεροι κύβοι σημαίνει πιο γλυκό. Επειδή 3 > 2 το πρώτο είναι πιο γλυκό.».

Αντώνης: «Στο δεύτερο ποτήρι υπάρχει λιγότερο τσάι και δεν μπορούμε να πούμε ποιο είναι πιο γλυκό.».

Είναι ενδεικτικό πως όλοι οι μαθητές -ανεξαρτήτως τάξεως- που απάντησαν με πολλαπλασιαστικό συλλογισμό ακολούθησαν τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο αιτιολόγησε η Χαρά. Αντίθετα, οι μαθητές με απόλυτη αιτιολόγηση βασίστηκαν στο ότι 3 > 2.

❖ **<u>Αποτελέσματα 6ου έργου:</u>**

***Πίνακας 2**: Αποτελέσματα 6ου έργου*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*8/30*	*26,6%*	*10/25*	40%	*16/25*	*64%*
(Α)	*15/30*	*50%*	*9/25*	36%	*1/25*	*4 %*
(Ο)	*7/30*	*24,4%*	*6/25*	24%	*8/25*	*32%*

Όπως και στο 1ο έργο, ομοίως και σε αυτό, παρατηρείται σημαντική ποσοστιαία διαφορά στους μαθητές της κάθε τάξης που χρησιμοποιούν την πολλαπλασιαστική σκέψη. Διαφαίνεται σταδιακή ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης με την πάροδο των ετών, όπως είχε προβλεφθεί.

Ωστόσο, φαίνεται πως το 6ο έργο δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές όλων των τάξεων από ότι το 1ο. Παρατηρείται ένα ποσοστό αποτυχίας σκέψης με πολλαπλασιαστικό τρόπο της τάξης του 36% στα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου. Επομένως δεν μπορεί να ειπωθεί ότι αυτή η σταδιακή αύξηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης στα μεγαλύτερα παιδιά συνεπάγεται και παγίωση της.

Ένα ενδιαφέρον εύρημα αποτελεί και το γεγονός πως οι μαθητές διέκριναν και εφάρμοσαν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό σε μεγαλύτερο βαθμό στο πρώτο είδος εντατικής ποσότητας (1ο έργο-γεύση) συγκριτικά με το δεύτερο (6ο έργο-πλήθος). Άρα, ένα συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι εντατικές ποσότητες που μπορούν να εκφραστούν ως κλάσμα ή αναλογία είναι πιο εύκολο

για τους μαθητές να τις αντιμετωπίσουν πολλαπλασιαστικά σε σχέση με τις εντατικές ποσότητες που εκφράζονται μόνο ως αναλογία.
Εντύπωση, επίσης, προκαλεί το 4% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου που απάντησαν απόλυτα με το σκεπτικό 100 > 75. Αναμενόταν, ίσως, μεγαλύτερο ποσοστό εξαιτίας της ύπαρξης της λέξης «περισσότερο» που μπορούσε να μπερδέψει τους μαθητές όπως έγινε στις μικρότερες τάξεις.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται απαντήσεις μαθητών που χρησιμοποίησαν πολλαπλασιαστικό, άλλον και αθροιστικό τρόπο σκέψης αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, οι δύο πρώτες παρουσιάζουν χρήση πολλαπλασιαστικής σκέψης με διαφορετικό τρόπο.

Δημήτρης (Δ΄Δημοτικού): «Γιατί άμα διαιρέσουμε το 75τ.μ. με 25 βγαίνει 3τ.μ. που έχει το κάθε παιδί ενώ αν διαιρέσουμε το 100 με το 50 μας βγαίνει 2τ.μ. για κάθε παιδί».

Φρύνη (ΣΤ΄ Δημοτικού): «Γιατί άμα είναι τα διπλάσια παιδιά στο πάρτι τότε πρέπει να είναι και ο διπλάσιος χώρος».

Χριστίνα (Δ΄Δημοτικού): «Μπορεί να είναι πιο μικρός χώρος αλλά έχει λιγότερα παιδιά».

Ορέστης (Γ΄Γυμνασίου): «Το 100 είναι μεγαλύτερο από το 75. Άρα θα προτιμήσω στον παιδότοπο».

Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές που ακολούθησαν πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης απάντησαν όπως ο Δημήτρης, δηλαδή, δημιουργώντας το λόγο τ.μ. ανά παιδί. Στον αντίποδα, όσοι χρησιμοποίησαν απόλυτο συλλογισμό το έκαναν λόγω του γεγονότος ότι 100 > 75.

3.3.1.2. 2ο Έργο

❖ **<u>Αποτελέσματα 2ου έργου</u>**

<u>1ο Ζεύγος</u>: Εδώ χαρακτηρίστηκαν ως (Π) οι απαντήσεις που σύγκριναν τη πράσινη επιφάνεια κάθε τροχού με ολόκληρη την επιφάνεια ή με την επιφάνεια του κόκκινου, ως (Α) οι απαντήσεις που βασίστηκαν μόνο στο απόλυτο μέγεθος των δύο τροχών (δηλαδή μεγαλύτερος τροχός σημαίνει περισσότερο πράσινο και άρα περισσότερες πιθανότητες κέρδους) και ως (Ο) οποιαδήποτε απάντηση διαφορετική των δύο τρόπων αιτιολόγησης που αναφέρθηκαν.

***Πίνακας 3**: Αποτελέσματα 2ου έργου – 1ο ζεύγος*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*24/30*	*80%*	*20/25*	80%	*21/25*	*84%*
(Α)	*2/30*	*6,7%*	*2/25*	8%	*1/25*	*4%*
(Ο)	*4/30*	*13,3%*	*3/25*	12%	*3/25*	*12%*

2ο Ζεύγος: Εδώ χαρακτηρίστηκαν ως (Π) οι σωστές απαντήσεις που σύγκριναν την αναλογία του πράσινου με το κόκκινο μέρος σε κάθε τροχό, ως (Α) οι απαντήσεις που βασίστηκαν στις διακριτές περιοχές των δύο τροχών ή στο απόλυτο μέγεθος (όπως στο 1ο ζεύγος) και ως (Ο) οποιαδήποτε απάντηση διαφορετική των δύο που αναφέρθηκαν.

***Πίνακας 4**: Αποτελέσματα 2ου έργου – 2ο ζεύγος*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*25/30*	*83,3%*	*19/25*	76%	*22/25*	*88%*
(Α)	*3/30*	*10%*	*4/25*	16%	*2/25*	*8%*
(Ο)	*2/30*	*6,7%*	*2/25*	8%	*1/25*	*4%*

3ο Ζεύγος: Εδώ, χαρακτηρίστηκαν ως (Π) οι σωστές απαντήσεις που σύγκριναν το πράσινο με το κόκκινο μέρος, ως (Α) οι απαντήσεις που βασίστηκαν στον απόλυτο αριθμό των διακριτών περιοχών και ως (Ο) οποιαδήποτε απάντηση διαφορετική των δύο που αναφέρθηκαν.

***Πίνακας 5**: Αποτελέσματα 2ου έργου – 3ο ζεύγος*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*0/30*	*0%*	*3/25*	12%	*16/25*	*64%*
(Α)	*25/30*	*83,3%*	*17/25*	68%	*9/25*	*36%*
(Ο)	*5/30*	*16,7%*	*5/25*	20%	*0/25*	*0%*

Αρχικά, επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι στα δύο πρώτα ζεύγη του έργου δεν αναμένονται μεγάλες διαφοροποιήσεις μεταξύ των μαθητών των τριών τάξεων. Αυτό δείχνει την ικανότητα και την ευελιξία των μαθητών να μπορούν να αιτιολογούν συνεχείς ποσότητες πολλαπλασιαστικά σε αντίθεση με τις διακριτές. Έτσι, στο 3ο ζεύγος που αφορά διακριτές ποσότητες τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα μεγαλύτερα παιδιά ανταποκρίνονται καλύτερα. Μια προσεκτική ματιά στα ποσοστά καταδεικνύει το βαθμό δυσκολίας αυτού του ερωτήματος για τα παιδιά του Δημοτικού. Μόλις το 5% επί του συνόλου και των δύο τάξεων διέκρινε τη σχετική δομή του ερωτήματος. Άλλωστε, σε αυτό το συμπέρασμα είχαν καταλήξει και οι Jeong, Levine και Huttenlocher (1999) στην έρευνα που διεξήγαγαν για να αποδείξουν ότι οι μαθητές τα καταφέρνουν αποτελεσματικότερα σε ερωτήματα με συνεχείς ποσότητες σε σχέση με αντίστοιχα που περιλαμβάνουν διακριτές. Τα παιδιά του Δημοτικού σχεδόν στο σύνολο τους εστιάζουν αποκλειστικά στον απόλυτο αριθμό των περιοχών με πράσινο αδυνατώντας να διακρίνουν τη πολλαπλασιαστική σχέση πράσινων-κόκκινων και πράσινων-ολόκληρου. Χαρακτηριστικές οι εξής αιτιολογήσεις:

Γιώργος (Δ΄ Δημοτικού): «Προτιμάω τον πρώτο τροχό γιατί έχει ένα κομμάτι παραπάνω».

Άννα-Μαρία (ΣΤ' Δημοτικού): «Προτιμάω τον πρώτο τροχό γιατί έχει τέσσερα πράσινα κουτάκια ενώ ο δεύτερος μόνο τρία».

Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε από τις απαντήσεις των μαθητών της Γ' Γυμνασίου που αιτιολόγησαν με πολλαπλασιαστική σκέψη ότι καταφεύγουν στην σχέση μέρους-όλου και όχι μέρους-μέρους. Δηλαδή, οι αιτιολογήσεις είχαν μορφή όπως η παρακάτω:

Σταυρίνα: «Στον πρώτο τροχό, η πράσινη περιοχή είναι 4/11 ενώ στο δεύτερο 3/9. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα δηλαδή 36/99 και 33/99 αντίστοιχα. Άρα, αν επιλέξουμε τον πρώτο τροχό έχουμε περισσότερες πιθανότητες να κερδίσουμε αφού 36/99 >33/99.».

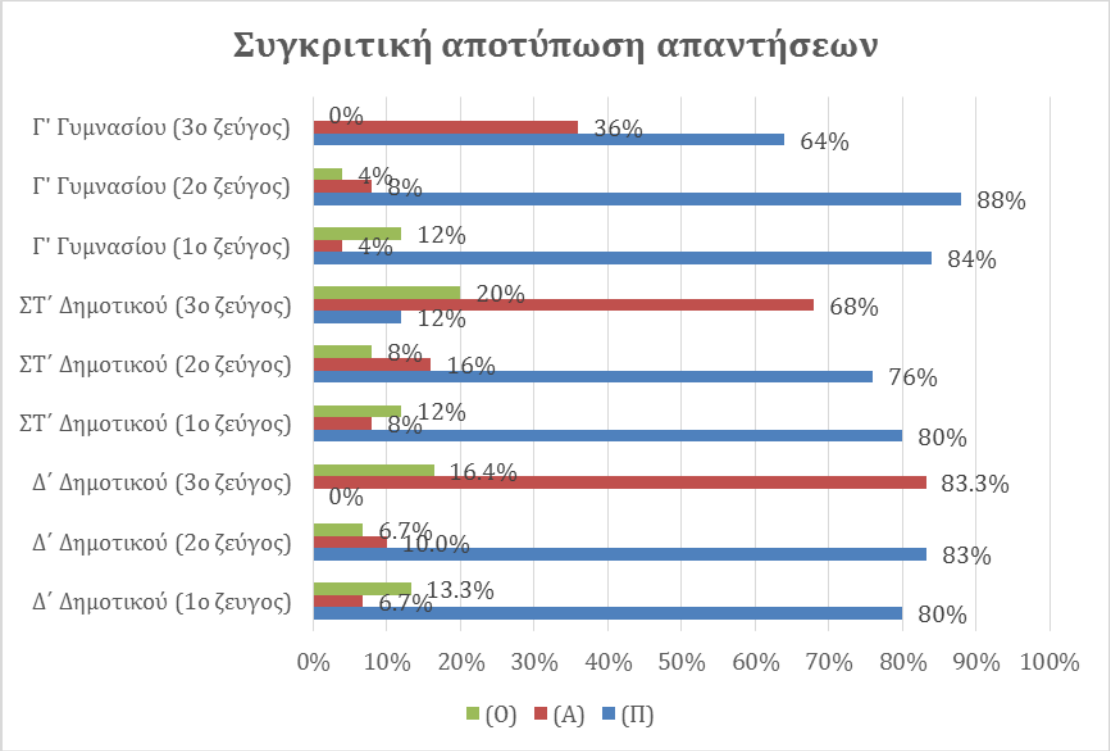
'Οσοι δεν απάντησαν με απόλυτο ή πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης κατέφυγαν σε άλλες παράξενες αλλά αξιοσημείωτες τεχνικές. Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα:

Χαρά (Δ΄ Δημοτικού): «Επειδή ο πρώτος κύκλος έχει ένα πράσινο κουτάκι και ένα πορτοκαλί , δηλαδή μια θετική και μια αρνητική. Απλώς, ο δεύτερος κύκλος δεν έχει ακόμα δύο κουτάκια.».

Επομένως, στο σύνολο των μαθητών διακρίνουμε ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης μόνο στις πιο μεγάλες ηλικίες (Γ΄Γυμνασίου), και όχι στις πιο μικρές, αφού είναι ικανοί να διακρίνουν την πολλαπλασιαστική δομή τέτοιων δραστηριοτήτων είτε αυτές αφορούν συνεχείς είτε διακριτές

ποσότητες Διαγραμματικά, η σύγκριση των απαντήσεων στα τρία ζεύγη αποτυπώνεται ως ακολούθως:

***Διάγραμμα 1**: Συγκριτική Αποτύπωση απαντήσεων στο 2ο έργο*



3.3.1.3. 5ο Έργο

❖ **<u>Αποτελέσματα 5ου έργου:</u>**

***Πίνακας 6**: Αποτελέσματα 5ης έργου*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*10/30*	*33,3%*	*14/25*	56%	*23/25*	*92%*
(Α)	*9/30*	*30%*	*5/25*	20%	*1/25*	*4%*
(Ο)	*11/30*	*36,7%*	*6/25*	24%	*1/25*	*4%*

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, είναι φανερό πως τα μεγαλύτερα παιδιά δίνουν πολλαπλασιαστικές απαντήσεις σε μεγαλύτερο βαθμό από τα μικρότερα. Τα παιδιά του Γυμνασίου σε ποσοστό 92% χρησιμοποιούν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό για να αιτιολογήσουν όταν τα αντίστοιχα της Δ΄ Δημοτικού απαντούν με τον ίδιο τρόπο μόλις σε ποσοστό 33,3%. Από τον πίνακα προκύπτει

η σταδιακή αύξηση της χρήσης της πολλαπλασιαστικής αιτιολόγησης καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν. Είναι χαρακτηριστικό ότι στο Γυμνάσιο μόλις το 4% είδε απόλυτη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων.

Αναλυτικότερα, οι μαθητές της Δ΄ Δημοτικού είναι μοιρασμένοι ως προς τις απαντήσεις τους γεγονός που αποδεικνύει πως δεν υπάρχει κάποια μέθοδος αιτιολόγησης που επικρατεί στην ηλικία αυτή. Η συγκεκριμένη παρατήρηση έρχεται σε ταύτιση με τα ευρήματα της έρευνας των Piaget και Inhelder σύμφωνα με τα οποία παιδιά μικρότερα των 10-11 ετών συχνά αποτυγχάνουν να δουν την πολλαπλασιαστική δομή τέτοιων δραστηριοτήτων. Δύο παραδείγματα απόλυτου συλλογισμού με διαφορετική αιτιολόγηση είναι οι απαντήσεις των:

Ελένη-Ισιδώρα (Δ' Δημοτικού): «Επέλεξα το πρώτο βάζο γιατί έχει περισσότερες μαύρες μπίλιες και έτσι υπάρχουν περισσότερες πιθανότητες να κερδίσεις και να πάρεις δώρα».

Δημήτρης (Δ΄ Δημοτικού): «Επιλέγω το δεύτερο γιατί αν διάλεγα το πρώτο θα είχε περισσότερες ροζ μπίλιες».

Ωστόσο, αρκετοί μαθητές του Δημοτικού χρησιμοποίησαν και μεθόδους που δεν εμπεριέχουν ούτε αθροιστικό ούτε πολλαπλασιαστικό συλλογισμό:

Ηλιάνα (Δ' Δημοτικού): «Θεωρώ πως όσο λιγότερες μπίλιες υπάρχουν στο βάζο τόσες περισσότερες είναι οι πιθανότητες να κερδίσω».

Ένα αξιοσημείωτο εύρημα είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές που αντιλήφθηκαν την πολλαπλασιαστική δομή της δραστηριότητας απάντησαν με βάση τη σχέση μέρους-μέρους και όχι μέρους-όλου σε αντίθεση με ότι έκαναν στο 3ο ζεύγος του 2ου έργου. Σύμφωνα με τους Singer και Resnick (1992) η προσφυγή των μαθητών σε αυτήν τη μέθοδο είναι πιο συνηθισμένη. Στα ακόλουθα αποσπάσματα φαίνονται οι δύο αυτές διαφορετικές προσεγγίσεις πολλαπλασιαστικής σκέψης.

Μαρία (Γ' Γυμνασίου): «Θα επέλεγα το δεύτερο διότι το πρώτο μεν μπορεί να έχει δύο μαύρες μπίλιες παραπάνω αλλά έχει έξι κόκκινες μπίλιες και η πιθανότητα να τύχεις κόκκινη είναι μεγαλύτερη. Στο δεύτερο βάζο είναι ½ δηλαδή 50% ενώ στο πρώτο 4/10 δηλαδή 40%».

Ελευθερία (Δ' Δημοτικού): «Το δεύτερο βάζο έχει ίσες μπίλιες κόκκινες και μαύρες ενώ το πρώτο έχει παραπάνω κόκκινες από ότι μαύρες που σημαίνει πως λιγοστεύουν οι ευκαιρίες για να κερδίσουμε».

3.3.1.4. 3ο Έργο

❖ **<u>Αποτελέσματα 3ου έργου</u>**

Πίνακας 7*: Αποτελέσματα 3ου έργου*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*21/30*	*70%*	*19/25*	76%	*22/25*	*88%*
(Α)	*3/30*	*10%*	*2/25*	8%	*0/25*	*0%*
(Ο)	*6/30*	*20 %*	*4/25*	16%	*3/25*	*12%*

Αν και οι αποκλίσεις στις απαντήσεις δεν είναι πολύ μεγάλες, ωστόσο παρατηρείται διαφορά με το πέρασμα των ετών. Τα μεγαλύτερα παιδιά φαίνεται να αντιλαμβάνονται στο σύνολο τους πως να αντιμετωπίσουν την ταυτόχρονη αλλαγή στη ποσότητα αναφοράς και στη ποσότητα που καθορίζεται με βάση τις ποσότητες αναφοράς. Το ζήτημα της σύγκρισης δύο κλασμάτων απασχόλησε και τους Sophian, Garyantes και Chang (1997) οι οποίοι σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας που πραγματοποίησαν έδειξαν πως παιδιά ηλικίας μέχρι 10 ετών βρίσκουν τέτοια ερωτήματα δύσκολα.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όλοι οι μαθητές που απάντησαν με πολλαπλασιαστικό σκεπτικό, έκαναν τις διαιρέσεις και στη συνέχεια σύγκριναν τα κλάσματα. Ωστόσο, υπήρξαν και δύο μαθητές οι οποίοι εξέφρασαν την πολλαπλασιαστική τους σκέψη μέσα από την παρακάτω απάντηση:

Γιώργος (Γ΄ Γυμνασίου): «Θα έπρεπε να έχουμε οκτώ παιδιά για να φάνε το ίδιο»

Επιπρόσθετα, φαίνεται πως ο απόλυτος τρόπος αιτιολόγησης χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα, κάτι που δείχνει ότι όταν δεν μπορούσαν να δώσουν σωστή πολλαπλασιαστική απάντηση κατέφευγαν σε κάποιο άλλο τρόπο εκτός του απόλυτου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το απόσπασμα που ακολουθεί:

Δημήτρης (Δ΄ Δημοτικού): «Διάλεξα στην πρώτη γιατί στη δεύτερη είναι περισσότερα τα άτομα άρα θα φάνε λιγότερο σοκολάτα ο καθένας.».

Αν γίνει συσχέτιση του 3ου έργου με τα έργα 5 και 6 βλέπουμε πως το πλήθος των μαθητών που χρησιμοποίησε πολλαπλασιαστική σκέψη είναι αρκετά μεγαλύτερο. Ίσως σε αυτό παίζει ρόλο το γεγονός πως το ερώτημα με τη σοκολάτα είναι κάτι πιο οικείο στους μαθητές και έχουν εξοικειωθεί με αυτό από μικρή ηλικία.

3.3.1.5. 4ο Έργο

❖ **<u>Αποτελέσματα 4ου έργου:</u>**

Πίνακας 8*: Αποτελέσματα 4ου έργου*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*1/30*	*3,3%*	*4/25*	16%	*11/25*	*44%*
(Α)	*27/30*	*90%*	*17/25*	68%	*14/25*	*56%*
(Ο)	*2/30*	*6,7 %*	*4/25*	16%	*0/25*	*0%*

'Οπως δείχνουν τα αποτελέσματα, το έργο αυτό προβλημάτισε περισσότερο από κάθε άλλο τους μαθητές και των τριών τάξεων. Στη Δ΄ Δημοτικού σχεδόν όλα τα παιδιά αναγνώρισαν την αλλαγή στο μήκος αθροιστικά απαντώντας ότι μεγάλωσαν το ίδιο. Επίσης, στη ΣΤ' η πλειοψηφία συνεχίζει να έχει τον ίδιο τρόπο σκέψης αλλά σε όχι τόσο μεγάλα ποσοστά ενώ στη Γ' Γυμνασίου οι μαθητές που χρησιμοποιούν τόσο τον πολλαπλασιαστικό όσο και τον αθροιστικό τρόπο σκέψης είναι σχεδόν ίσοι. Επομένως, παρατηρείται οτι τα ποσοστά του μαθητών που αντιλαμβάνονται την αλλαγή στο μήκος σε σχέση με το αρχικό μήκος δηλαδή πολλαπλασιαστικά αυξάνονται όσο μεγαλώνουν τα παιδιά. Ωστόσο, ακόμα και στα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου οι αθροιστικές απαντήσεις είναι περισσότερες από ότι οι πολλαπλασιαστικές, γεγονός που φανερώνει ότι ο πολλαπλασιαστικός τρόπος σκέψης δεν έχει εδραιωθεί ούτε στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Όλες οι απαντήσεις των παιδιών και των τριών τάξεων σε αυτό το ερώτημα μπορούν να παρουσιαστούν μέσω των επόμενων αιτιολογήσεων που έδωσαν τρεις διαφορετικοί μαθητές:

Αποστόλης (ΣΤ' Δημοτικού): «Το δελφίνι το οποίο αύξησε περισσότερο το μήκος του είναι η Φοίβη γιατί αυτή διπλασιάστηκε ενώ όμως ο Φοίβος δεν διπλασιάστηκε αλλά αύξησε το μήκος του κατά δύο μέτρα».

Σταυρίνα (Γ' Γυμνασίου): «Και τα δύο δελφίνια αύξησαν το μήκος τους κατά δύο μέτρα. Η διαφορά στα μήκη τους παραμένει ίδια: ένα μέτρο. Επομένως, τα δύο δελφίνια είχαν ίδια αύξηση.

Σιμόνα (Δ' Δημοτικού): «Διάλεξα τον Φοίβο επειδή εκείνος αύξησε και πήγε πέντε μέτρα ενώ η Φοίβη πήγε τέσσερα. Άρα, σκέφτηκα ότι: 5>4.

3.3.1.6. 7ο Έργο

❖ **<u>Αποτελέσματα 7ου έργου</u>**

Πίνακας 9*: Αποτελέσματα 7ου έργου*

	Δ΄ Δημοτικού		**ΣΤ΄ Δημοτικού**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Πλήθος Απαντήσεων	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*	*Πλήθος Απαντήσεων*	*Ποσοστό (%)*
(Π)	*4/30*	*13,3%*	*11/25*	44%	*17/25*	*68%*
(Α)	*26/30*	*86,7%*	*12/25*	48%	*4/25*	*16%*
(Ο)	*0/30*	*0 %*	*2/25*	8%	*4/25*	*16%*

Στο έργο αυτό επιβεβαιώνεται ότι όσο προχωράνε οι μαθητές στη σχολική βαθμίδα τα ποσοστά εκείνων που απάντησαν με πολλαπλασιαστική σκέψη μεγαλώνουν. Η διαφορά των παιδιών της Δ΄Δημοτικού που αιτιολογούν με απόλυτο τρόπο με τους αντίστοιχους της Γ΄ Γυμνασίου είναι πολύ μεγάλη. Μέχρι το τέλος του Δημοτικού παρατηρείται μια σταδιακή αλλαγή στον τρόπο αιτιολόγησης η οποία ολοκληρώνεται στο Γυμνάσιο.

Σταυρίνα (Γ' Γυμνασίου): «Το κλάσμα που εκφράζει την ποσότητα των παιδιών του Δημοτικού που επέλεξαν κολύμβηση είναι 12/48, ενώ του Γυμνασίου είναι 10/30. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα δηλαδή 360/1440 και 480/1440 αντίστοιχα. Καταλαβαίνουμε πως η κολύμβηση είναι πιο δημοφιλές άθλημα στα παιδιά του Γυμνασίου αφού 480/1440>360/1440, άρα ο Κώστας έχει δίκιο.».

Μια σημαντική παρατήρηση που δύναται να εξαχθεί είναι το κατά πόσον οι μαθητές που χρησιμοποίησαν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό κατέφυγαν στην αιτιολόγηση μέρους – μέρους ή μέρους - όλου. Από τις τριάντα μια απαντήσεις πολλαπλασιαστικού χαρακτήρα μόλις μία περιλάμβανε αιτιολόγηση μέρους – μέρους.

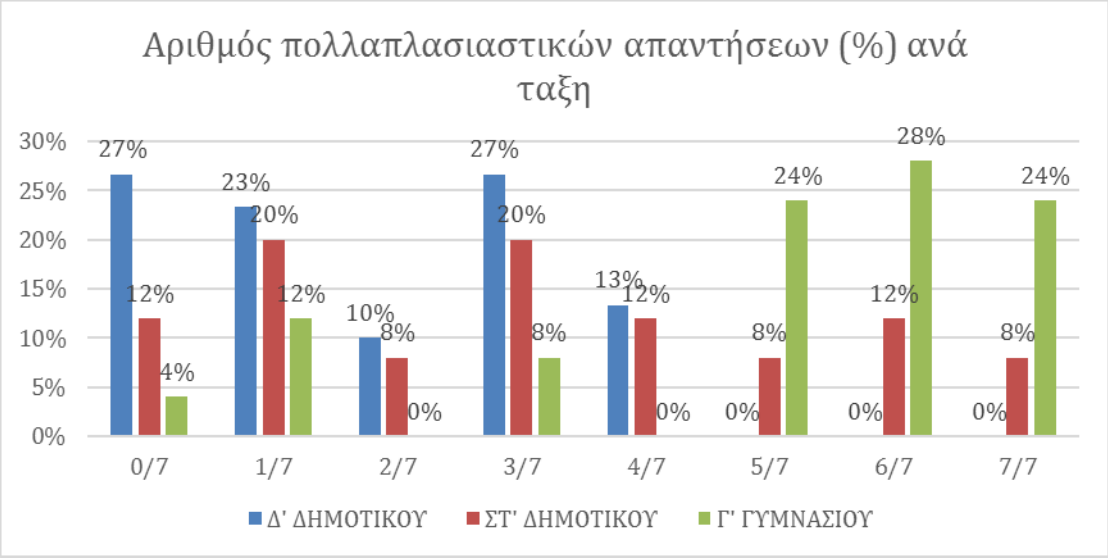
Νάντια-Ζωή (ΣΤ' Δημοτικού): «Στην περίπτωση του Γυμνασίου 10 παιδιά επέλεξαν κολύμβηση και 20 μπάσκετ δηλαδή ½. Στο Δημοτικό 12 παιδιά επέλεξαν κολύμβηση και 36 μπάσκετ δηλαδή 1/3. Άρα έχει δίκιο.».

Κάτι ανάλογο φάνηκε και στις απαντήσεις του 3ου ζεύγους του 2ου έργου. Αντίθετα, στη έργο με τις μπίλιες οι αιτιολογήσεις εστίαζαν στα δύο μέρη που αποτελούσαν την ποσότητα. Η προτίμηση αυτή, βέβαια, ίσως να οφείλεται στους αριθμούς που επιλέχτηκαν καθώς το ένα βάζο είχε μισές μπίλιες από κάθε είδος και έτσι ήταν πιο εύκολη η σύγκριση μέρους – μέρους.

3.3.2. Αποτελέσματα χρήσης πολλαπλασιαστικής σκέψης ανά μαθητή στο σύνολο των έργων

Στην ανάλυση αυτή αποτυπώνεται ο αριθμός των πολλαπλασιαστικών απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές στο σύνολο των επτά έργων προκειμένου να διαπιστωθεί αν υπάρχει τάση των μαθητών κάθε τάξης να βασίζονται σε αθροιστικές, πολλαπλασιαστικές ή σε ένα μείγμα αυτών των δύο για να απαντήσουν στα έργα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα:

Διάγραμμα 2*: Αριθμός πολλαπλασιαστικών απαντήσεων (%) ανά τάξη*



Σύμφωνα με τα δεδομένα του διαγράμματος προκύπτει πως τα μικρότερα παιδιά της Δ΄ Δημοτικού δίνουν με συνέπεια αθροιστικές-απόλυτες απαντήσεις. Η συντριπτική πλειοψηφία τους δίνει από καμία έως τρεις πολλαπλασιαστικές απαντήσεις στο σύνολο των επτά έργων. Είναι χαρακτηριστικό πως κανένα παιδί δεν έδωσε πάνω απο τέσσερεις πολλαπλασιαστικές απαντήσεις. Σε αντίθεση, τα μεγαλύτερα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου απαντούν σταθερά με πολλαπλασιαστικό τρόπο γεγονός που δείχνει πως αντιλαμβάνονται σε μεγάλο βαθμό την πολλαπλασιαστική δομή των ερωτημάτων. Τα μισά παιδιά δίνουν τουλάχιστον έξι πολλαπλασιαστικές απαντήσεις στο σύνολο των επτά έργων. Τα παιδιά της ΣΤ΄ Δημοτικού χρησιμοποιούν ένα μείγμα απο αθροιστική και

πολλαπλασιαστική αιτιολόγηση φανερώνοντας τη μη παγείωση της πολλαπλασιαστικής σκέψης στη συνείδησή τους όταν έρχονται σε επαφή με πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.

Απο τα προηγούμενα συμπεραίνεται πως όντως υπάρχει μια σταδιακή αλλαγή αιτιολόγησης από τον αθροιστικό στον πολλαπλασιαστικό τρόπο καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν. Αξίζει όμως να παρατηρηθεί πως τέσσερα παιδιά της Γ' Γυμνασίου έδωσαν μόνο το πολύ μια πολλαπλασιαστική απάντηση, γεγονός που φανερώνει πως ενώ υπάρχει η γενική τάση της σταδιακής εξέλιξης αυτό δεν ισχύει για όλα τα παιδιά.

3.3.3. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Η έρευνα αυτή είχε ως στόχο να εξετάσει αν η πολλαπλασιαστική σκέψη των παιδιών αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών. Συγκεκριμένα, τέθηκαν επτά ερωτήματα πολλαπλασιαστικής δομής σε μαθητές της Δ' Δημοτικού, ΣΤ' Δημοτικού και Γ' Γυμνασίου. Κάθε ερώτημα ήταν διαφορετικό ως προς τον παράγοντα που επηρεάζει το βαθμό δυσκολίας (π.χ. διακριτές με συνεχείς ποσότητες, εκτενής ποσότητες διαφορετικού είδους, ταυτόχρονη αλλαγή στην ποσότητα αναφοράς (αριθμητής) και στην ποσότητα που καθορίζεται με βάση τις ποσότητες αναφοράς (παρανομαστής).

Τα αποτελέσματα σε όλες τις ηλικιακές ομάδες έδειξαν πως οι μεγαλύτερης ηλικίας μαθητές πέτυχαν καλύτερα αποτελέσματα στο σύνολο των έργων. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα πως τελικά υπάρχει σταδιακή ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών καθώς μεγαλώνουν. Αυτή η γενική τάση όμως δεν σημαίνει πως ισχύει για όλα τα παιδιά. Υπάρχουν μεγαλύτεροι μαθητές της που αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν την πολλαπλασιαστική σκέψη. Πιο συγκεριμένα, φαίνεται πως η τακτική του αθροιστικού συλλογισμού κυριαρχεί στα παιδιά της Δ΄ Δημοτικού οδηγώντας τα με αυτόν τον τρόπο σε χρήση μεθόδων όπως η αρίθμηση και η σύγκριση ποσοτήτων με απόλυτα μέτρα. Η σταδιακή αλλαγή στον τρόπο σκέψης αρχίζει να φαίνεται στους μαθητές της ΣΤ΄Δημοτικού, χωρίς όμως να σημαίνει ότι έχουν εδραιώσει τις μεθόδους που επιτάσσει ο πολλαπλασιαστικός συλλογισμός. Στη Γ' Γυμνασίου, η πλειοψηφεία των μαθητών χρησιμοποιεί πλέον με μεγαλύτερη ευχέρεια τον πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης, όμως υπάρχουν ακόμα μαθητές που δεν το καταφέρνουν όπως επίσης και συγκεκριμένα έργα (Έργο 4) που δεν αντιμετωπίζονται με πολλαπλασιαστική σκέψη ακόμα και από μαθητές που απάντησαν στα υπόλοιπα έργα πολλαπλασιαστικά.

Η μετάβαση από τον αθροιστικό ή απόλυτο στον πολλαπλασιαστικό ή σχετικό τρόπο σκέψης έχει επιτευχθεί σε μεγάλο βαθμό στο τέλος του Γυμνασίου. Οι απαντήσεις καταδεικνύουν το βαθμό δυσκολίας των παιδιών να κάνουν τη μετάβαση αυτή. Το γεγονός, όμως, ότι τα παιδιά απαντούν σε ορισμένα ερωτήματα με αθροιστικό τρόπο δε σημαίνει ότι δε μπορούν να

σκεφτούν πολλαπλασιαστικά. Είναι πολύ χρήσιμο να δίνονται και να συζητιούνται αναλογικές δραστηριότητες μέσα στην τάξη προκειμένου να ενθαρρύνονται οι μαθητές να διακρίνουν και τη σχετική-πολλαπλασιαστική προοπτική ενός ερωτήματος εκτός από την απόλυτη. Για παράδειγμα, μπορεί η πλειοψηφία των παιδιών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού να σκέφτονται αθροιστικά αλλά ένας ή δύο να αντιλαμβάνονται και τη σχετική αλλαγή. Αυτό μπορεί να προκαλέσει μια συζήτηση που θα έχει ως αποτέλεσμα και άλλα παιδιά να υποπτευθούν ότι υπάρχει και ένας άλλος διαφορετικός τρόπος αντίληψης και αιτιολόγησης.

Επομένως, ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει το ρόλο του καθοδηγητή σύμφωνα με τον οποίο αρχικά πρέπει να διακρίνει αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται καταστάσεις αθροιστικά ή πολλαπλασιαστικά και στη συνέχεια με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες να προάγει τη συζήτηση και τη σκέψη που θα κατευθύνει τους μαθητές στην απαιτούμενη γνώση.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΚΕΨΕΙΣ

Η πολλαπλασιαστική σκέψη, έννοια η οποία αποτυπώνει την ικανότητα ευέλικτης ενασχόλησης με έννοιες, στρατηγικές και αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού (και της διαίρεσης) σε ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών πλαισίων, έχει αποτελέσει και εξακολουθεί να αποτελεί αντικείμενο διεξοδικής μελέτης και ερευνών στην ακαδημαϊκή κοινότητα. Η μετάβαση από τον αθροιστικό ή απόλυτο συλλογισμό στον πολλαπλασιαστικό ή σχετικό συλλογισμό αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διάρκεια των σχολικών χρόνων. Η πολλαπλασιαστική σκέψη απαιτεί ένα νέο επίπεδο εξειδίκευσης στο πώς σκεφτόμαστε για τους αριθμούς και τις πράξεις τους.

Λαμβάνοντας υπόψην το εκτεταμένο θεωρητικό και εμπειρικό υπόβαθρο γύρω από την έννοια της πολλαπλασιαστικής σκέψης και κατανοώντας την κρισιμότητα και σπουδαιότητα που διαδραματίζει στη ανάπτυξη ικανοτήτων και δεξιοτήτων όχι μόνο στην αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων αλλά και στον χειρισμό ποικίλων πτυχών της καθημερινής ζωής, η παρούσα εργασία επιχείρησε να δώσει μια απάντηση στο αν τελικά η πολλαπλασιαστική σκέψη των μαθητών εξελίσσεται με την πάροδο των ετών. Μέσα από μία ερευνητική διαδικασία η οποία στόχευε σε μαθητές της Δ΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου, εξετάστηκε η υπόθεση σύμφωνα με την οποία οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου υπερέχουν στη χρήση της πολλαπλασιαστικής σκέψης σε μεγάλο βαθμό σε σχέση με τα παιδιά του Δημοτικού.

Τα ερωτήματα της έρευνας εστίασαν σε συγκεκριμένους παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία των αναλογικών ερωτημάτων, μέσα από τη δημιουργία αντίστοιχων δραστηριοτήτων, οι οποίες εξέταζαν διαφορετικούς παράγοντες. Ειδικότερα, εξετάζονται οι διαφορετικού είδους εντατικές ποσότητες όπως το πλήθος και η γεύση (1ο και 6ο έργο), οι συνεχείς και διακριτές ποσότητες (2ο έργο), επιχειρείται η ταυτόχρονη αλλαγή στην ποσότητα αναφοράς και στην ποσότητα που καθορίζεται με βάση τις ποσότητες αναφοράς (3ο έργο), δίνονται διακριτές ποσότητες και τίθενται ερωτήματα διάταξης που μπορούν να φέρουν αιτιολογήσεις μέρους-μέρους ή μέρους-όλου (5ο και 7ο έργο) ενώ εξετάζονται οι ποσότητες και αν οι σχέσεις που δημιουργούν είναι είτε σχετικές είτε απόλυτες (4ο έργο).

Επιβεβαιώνοντας τα υφιστάμενα θεωρητικά και ερευνητικά πορίσματα, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας κατέδειξαν ότι όσο τα παιδιά ανέβαιναν τάξεις στη σχολική βαθμίδα τόσο πιο συχνές ήταν οι πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις στα έργα που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν. Οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων φαίνεται να επηρεάζονται σε μικρότερο βαθμό από αυτούς των μικρότερων στις αλλαγές των παραγόντων που δυσκολεύουν τα ερωτήματα, γεγονός που δείχνει ότι έχουν εδραιώσει τον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό σε μεγαλύτερο βαθμό. Ωστόσο, ακόμα και μαθητές μεγαλύτερων

τάξεων αντιμετωπίζουν προβλήματα να διακρίνουν την πολλαπλασιαστική δομή συγκεκριμένων ερωτημάτων (Έργο 4)

Τα πορίσματα της συγκεκριμένης ερευνητικής προσπάθειας συμβάλουν στην βαθύτερη κατανόηση της εξελικτικής πορείας στη σκέψη των μαθητών, επιβεβαιώνοντας ότι αυτή δεν παραμένει στάσιμη, αλλά τείνει να διαφοροποιείται και να εξελίσσεται. Η διαπίστωση αυτή επηρεάζει τον τρόπο άσκησης του εκπαιδευτικού έργου και τον ίδιο το ρόλο του εκπαιδευτικού, ο οποίος αφενός καλείται να προσαρμόσει τον τρόπο διδασκαλίας του και το αντίστοιχο εκπαιδευτικό υλικό στις διαφοροποιημένες ανάγκες της κάθε ηλικιακής και εκπαιδευτικής βαθμίδας, και αφετέρου να παρέχει τις κατάλληλες προκλήσεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Acredolo, C., O'Connor, J., Banks, L., & Horobin, K. (1989*). Children's ability to make probability estimates: Skills revealed through application of Anderson's functional measurement methodology*, Child Development, 60, 933–945.

Anghileri, J. (1989). *An investigation of young children's understanding of multiplication*, Educational Studies in Mathematics*, 20*, 367-385.

Bryant, P. (1974). *Perception and Understanding in Young Children: An Experimental Approach*, Vol. 588 London: Methuen

Chapman, R. H. (1975). *The development of children's understanding of proportions*. Child Development, 46, 141–148.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). *Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5*. Journal for Research in Mathematics Education*, 27*, 41–51.

Davydov, V. (1992). *The psychological analysis of multiplication procedures*. Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14(1)*, 3-67.

Degrande, T., Verschaffel, L, Van Dooren, W. (2014). How do Flemish children solve 'Greek' word problems? On children's quantitative analogical reasoning in mathematically neutral word problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 13* (1-2), 57-74.

Ell, F., Irwin, K., & McNaughton, S. (2004). Two pathways to multiplicative thinking. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), Mathematics education for the third Millennium, towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville pp. 199-206). Sydney: MERGA

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2008)*. Implicative analysis of strategies in solving proportional and nonproportional problems. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.)*, Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education (Vol. 4, pp. 369–376). Morelia, Mexico: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2009). *The effect of the number structure and the quantity type on secondary school students' proportional reasoning*. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education (Vol. 3, pp. 25–32). Thessaloniki, Greece.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). *The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division*. Journal for Research in Mathematics Education*, 16*, 3–17.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*.

Dordrecht: Reidel.

Gelman, R. (1991). *Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent structures*. In S. Carey, R. Gelman (Eds.), Epigenesis of mind: Studies in biology and cognition, Erlbaum, Hillsdale, NJ (1991), pp. 293–322

Goswami, U. (1989). *Relational complexity and the development of analogical reasoning.* Cognitive development*, 4, 251–268.*

Greer, B. (1994). *Extending the meaning of multiplication and division*. In G. Harel & J. Confrey (Eds.). The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 61–85). New York: State University press.

Harel, G., & Behr, M. (1989). *Structure and Hierarchy of Missing Value Proportion Problems and Their Representations.* Journal of Mathematical Behavior, 8(1), 77–119.

Harel, G., & Confrey, J. (Eds.). (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. SUNY Press

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*: 11–16. London: Murray.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER Nelson.

Hoemann, H., & Ross, B. (1971). *Children's understanding of probability concepts*. Child Development, 42, 221–236.

Huttenlocher, J., Newcombe, N., & Vasilyeva, M. (1999*). Spatial scaling in young children*. Psychological Science, 10, 393–398.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958*). The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Jacob, L., & Willis, S. (2001). *Recognising the difference between additive and multiplicative thinking in young children*. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore. (Eds.), Numeracy and beyond (Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney pp.306-313). Sydney: MERGA.

Jacob, L. & Willis, S. (2003). *The development of multiplicative thinking in young children*. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousely (Eds.), Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity. Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, (460-467). Deakin University, 6th - 10th July.

Jeong, Y., Levine, S.C., & Huttenlocher, J. (2007). *The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities*. Journal of Cognition and Development, 8, 237-256

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). *Missing-value proportional reasoning problems:*

Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 235–287). New York: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). *Proportional reasoning of early adolescents*. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematical concepts and processes (pp. 45–89). New York: Academic Press.

Kouba, V. (1989). *Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems*. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 147-158.

Lamon, S. J. (1994). *Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming*. In G. Harel & J. Confrey (Eds.). The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 89–120). New York: State University press.

Lamon, S.J. (2006). *Teaching fractions and ration for understanding*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). *Proportional reasoning*. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Lin, F.-L. (1991). *Understanding in multiple ratio and non-linear ratio*. Proceedings of the National Science Council ROC(D), 1(2), 14–30.

Mix K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S.C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press

Mix, K. S., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (1999). *Early fraction calculation ability*. Developmental Psychology, 35, 164–174.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). *Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity"*. Educational Psychology, 27(1), 75–92. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). *Young children's intuitive models of multiplication and division*. Journal for Research in Mathematics Education, 28, 309-330.

Mulligan, J., & Wright, B. (2000). *Interview-based assessment of early multiplication and division*. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol.1, pp.17-24). Hiroshima, Japan: PME.

Nesher, P. (1988). *Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings*. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and

operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 19–40). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noelting, G. (1980). *The development of proportional reasoning and the ratio concept, part I. Differentiation of stages*. Educational studies in Mathematics, 11, 217–254.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). *The development of children's understanding of intensive quantities*. International Journal of Educational Research 39, 651–675.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Wiley.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). *Epistemology and psychology of functions* (F. Castelanos & V. Anderson, Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origins of the idea of chance in children*. New York: Norton.

Resnick, L. B. and Greeno, J. G.; 1990, *'Conceptual growth of number and quality'*, unpublished manuscript, University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center.

Resnick, L. B. and Singer, J.: in press, *'The protoquantitative origins of ratio reasoning'*, to appear in T. Carpenter, E. Fennema, and T. Romberg (eds.), Rational Numbers: An Integration of Research.

Scwharz, J. (1988). *Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations*. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp.41-52). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R. S., & Vago, S. (1978). *The development of proportionality concept: Judging relative fullness*. Journal of Experimental Child Psychology, 25, 311–395.

Siemon, D., Breed, M. & Virgona, J. (2005). *From additive to multiplicative thinking – the big challenge of the middle years*. In J. Mousley, L. Bragg & C. Campbell (Eds.), MAV Annual Conference. 1 & 2 December 2005, Bundoora, Australia: The Mathematical Association of Victoria.

Siemon, D. E., & Breed, M. (2006, November). *Assessing multiplicative thinking using rich tasks*. Paper presented at the AARE conference, Adelaide, Australia.

Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). *Does a half pizza equal half a box of chocolate? Proportional matching in an analogy task*. Cognitive Development, 16, 811–829.

Singer, J.A., & Resnick, L.B. (1992). *Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners?* Educational Studies in Mathematics, 23, 231-246.

Sophian, C. (2000). *Perceptions of proportionality in young children: Matching*

spatial ratios. Cognition, 75, 145–170.

Sophian, C., & Crosby, M. E. (April, 1999). *Young children's match spatial proportions*. Poster presentedat the biennial meetings of the Society for Research in Child Development, Albuquerque, NM.

Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C. (1997). *When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities*. Developmental Psychology, 33, 731-744.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. E. (1999). *Proportional reasoning in young children : Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity*. Mathematical Cognition, 5, 181–197.

Squire, S., Davies, C., & Bryant, P. (2005). *Does the cue help? Children's understanding of multiplicative concepts in different problem contexts*. British Journal of Educational Psychology, 74, 515–32.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). *Proportional reasoning: A review of the literature*. Educational Studies in Mathematics, 16, 181–204.

Vamvakousi, X., (2014). Unpublished project

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). *Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. Cognition and Instruction*, 23(1), 57–86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). *The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity*. Journal for Research in Mathematics Education, 39(3), 311–342.

Van Dooren, W., De Bock, D., Verschaffel, L. (2009). *From addition to multiplication and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills*. Cognition and Instruction, 28(3):360-381.

Vergnaud, G. (1983).Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127-173). Orlando: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). *Multiplicative structures*. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141–161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). *Whole number concepts and operations*. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 557- 627). Charlotte, NC: NCTM, Information Age Publishing.

Wynn, K. (1995). *Origins of numerical knowledge. Mathematical Cognition*, 1, 35–60.

Wynn, K. (1997). *Competence models of numerical development*. Cognitive

Development, 12, 333-339.

Λοιπές αναφορές

Αριθ. 21072α/Γ2/28.2.2003 (ΦΕΚ 303/Β'/2003) Απόφαση του Υπ. Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων όπου περιλαμβάνεται το «Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών μαθηματικών»

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Παρακαλώ να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν. Σε κάθε ερώτηση, επιλέγετε την απάντηση που θεωρείτε ότι είναι σωστή και στη συνέχεια εξηγείτε την επιλογή σας όσο πιο απλά και κατανοητά μπορείτε.

Σας ευχαριστώ!

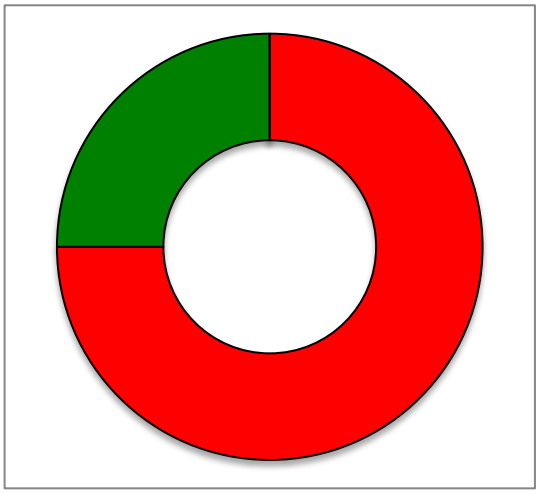
1) Έχουμε 2 ίδια ποτήρια με τσάι που στο καθένα έχουμε ρίξει κύβους ζάχαρης για να γίνουν πιο γλυκά. Το πρώτο ποτήρι είναι γεμάτο και έχει 3 κύβους ζάχαρης. Το δεύτερο είναι γεμάτο μέχρι τη μέση και έχει 2 κύβους.

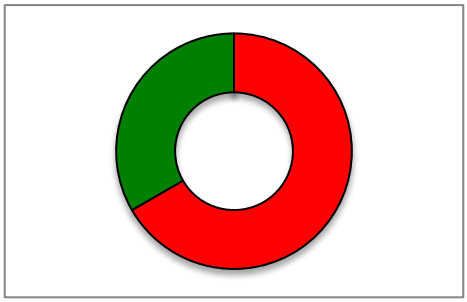
- Ποιό από τα δύο ποτήρια θα προτιμούσατε να πιείτε αν θέλατε να είναι πιο γλυκό; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Το πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο

- Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

.....
.....
.....
.....

2) Στο παιχνίδι «Ο τροχός της τύχης», οι παίκτες επιλέγουν έναν τροχό, το γυρνάνε και αν σταματήσει στο πράσινο χρώμα, κερδίζουν δώρα.





✓ ***1ο ζεύγος***

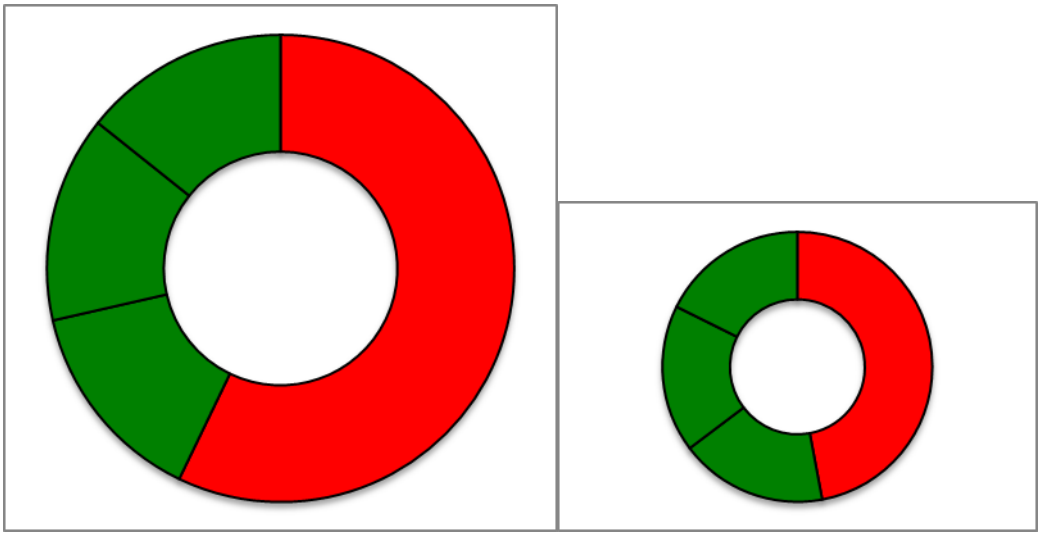
➢ Ποιον τροχό θα επιλέγατε για να κερδίσετε δώρα; Επιλέξτε με Χ.

- ☐ Τον πρώτο
- ☐ Το δεύτερο
- ☐ Όποιον και να διαλέξω, δεν έχει διαφορά

➢ Εξηγήστε την απάντηση σας:

.....
.....
.....
.....

✓ ***2ο ζεύγος***

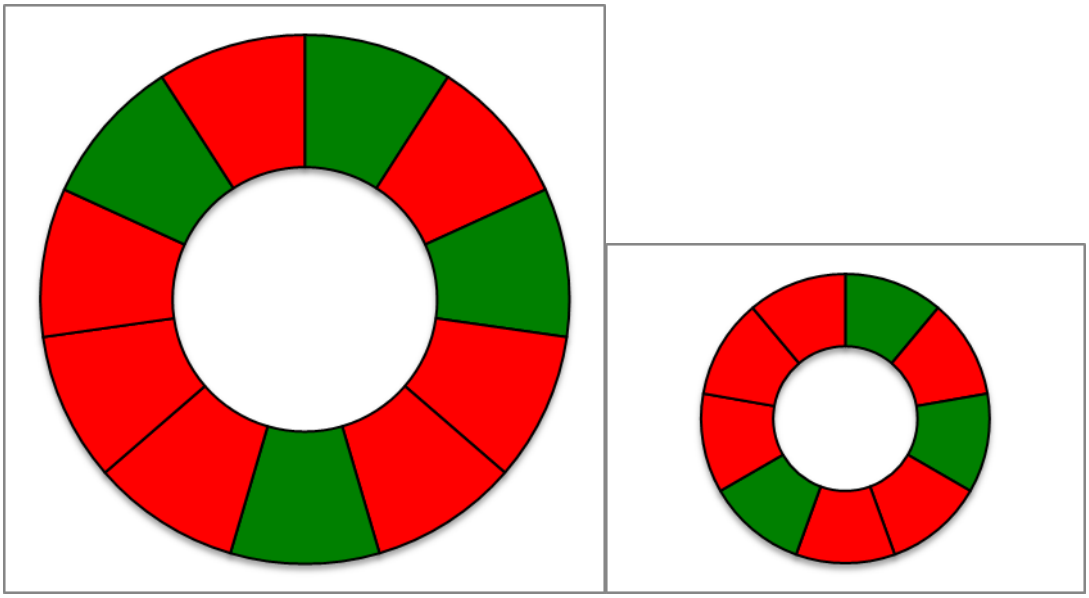


- Ποιον τροχό θα επιλέγατε για να κερδίσετε δώρα; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Τον πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο
  - ☐ Όποιον και να διαλέξω, δεν έχει διαφορά

- Εξηγήστε την απάντηση σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

✓ ***3ο ζεύγος***



- Ποιον τροχό θα επιλέγατε για να κερδίσετε παιχνίδια; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Τον πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο
  - ☐ Όποιον και να διαλέξω, δεν έχει διαφορά

- Εξηγήστε την απάντηση σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

3) Μια παρέα 3 παιδιών μοιράζεται 6 σοκολάτες. Μια δεύτερη παρέα 4 παιδιών μοιράζεται 7 σοκολάτες. Σε ποιά από τις δύο παρέες θα φάει περισσότερη σοκολάτα το κάθε παιδί;

- ☐ Στην πρώτη
- ☐ Στη δεύτερη
- ☐ Το ίδιο και στις δύο παρέες

- Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

4) Οι μαθητές ενός σχολείου είχαν επισκεφτεί πέρυσι ένα ενυδρείο. Εκεί είχαν δει δύο μικρά δελφίνια, το Φοίβο και τη Φοίβη. Ο Φοίβος είχε μήκος 3 μέτρα και η Φοίβη 2 μέτρα. Φέτος ξαναεπισκέφτηκαν το ενυδρείο. Ο Φοίβος είχε φτάσει τα 5 μέτρα και η Φοίβη τα 4 μέτρα μήκος.

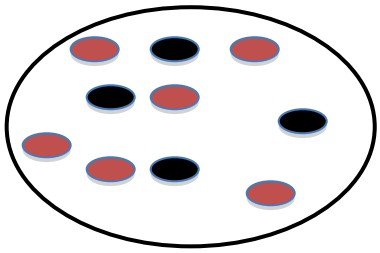
- Ποιο δελφίνι αύξησε περισσότερο το μήκος του; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Ο Φοίβος
  - ☐ Η Φοίβη
  - ☐ Και τα δύο το ίδιο

- Αιτιολογήστε την απάντηση σας:

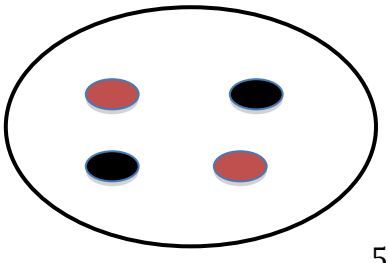
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5) Στο παιχνίδι «βρές την μπίλια» οι παίκτες επιλέγουν μια μπίλια από ένα βάζο χωρίς να βλέπουν και αν αυτή είναι μαύρη τότε κερδίζουν δώρα.

1ο Σχήμα



2ο Σχήμα



- Ποιο βάζο θα επιλέγατε για να κερδίσετε δώρα; Επιλέξτε με Χ.
  - ☐ Το πρώτο
  - ☐ Το δεύτερο

- Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

6) Ο Νίκος θα κάνει πάρτι. Αν το πάρτι γίνει στο σπίτι του που είναι 75 τ.μ., τότε θα καλέσει 25 παιδιά. Αν γίνει στον παιδότοπο που είναι 100 τ.μ., τότε θα καλέσει 50 παιδιά. Ο Νίκος αποφάσισε να κάνει το πάρτι εκεί που θα έχουν περισσότερο χώρο να παίξουν.

- Πού πιστεύετε ότι θα κάνει το πάρτι του ο Νίκος; Επιλέξτε με Χ.

  - ☐ Στο σπίτι του
  - ☐ Στον παιδότοπο

- Εξηγήστε την απάντηση σας:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

7) Σε μια κατασκήνωση πηγαίνουν παιδιά Δημοτικού και Γυμνασίου. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πόσα παιδιά από το Δημοτικό και πόσα από το Γυμνάσιο επέλεξαν να ασχοληθούν με το μπάσκετ και με την κολύμβηση, αντίστοιχα.

	ΜΠΑΣΚΕΤ	ΚΟΛΥΜΒΗΣΗ	Σύνολο
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	36	12	48
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	20	10	30

- Ο Κώστας ισχυρίστηκε ότι η κολύμβηση είναι πιο δημοφιλές άθλημα στους μαθητές του Γυμνασίου απ' ό,τι του Δημοτικού.

  Συμφωνείτε; Επιλέξτε με Χ.

  - ☐ Ναί
  - ☐ Όχι

- Εξηγήστε την άποψή σας.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....