ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μήτσου Γεώργιος
201107

Επιβλέπων καθηγητής

Ψυχάρης Γεώργιος

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Λέκτορα
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Λέκτορα
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 Η απόδειξη …….. **8**

1.2 Η απόδειξη στο πλαίσιο της διδασκαλίας …….. **10**

1.3 Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (DGS-DGE) ……. **12**

1.4 Το σύρσιμο ……. **15**

1.5 Η συμβολή των DGS στην αποδεικτική διαδικασία …….. **16**

1.6 Η εικασία ……. **19**

1.7 Ανοικτά προβλήματα …… **20**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Η Θεωρία ενός Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (TSM) ……. **22**

2.1.1 Η έννοια ενός σημειωτικής δυνατότητας ενός τεχνουργήματος

2.1.2 Η έννοια του διδακτικού κύκλου

2.2 Τύποι συρσίματος κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με DGS **25**

2.3 Ταξινόμηση αιτιολογήσεων …… **28**

2.4 Θεωρητικό πλαίσιο του Stylianides …… **32**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Στόχοι της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα …… **34**

3.2 Συμμετέχοντες και διαδικασία της έρευνας …….. **35**

3.3 Διαδικασία …….. **36**

3.4 Δραστηριότητες …….. **38**

- Φύλλο εργασίας 1
- Φύλλο εργασίας 2

3.5 Ανάλυση των δεδομένων ……. **44**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ανάλυση ανά ερευνητικό ερώτημα ……... **45**

4.1 1ο ερευνητικό ερώτημα ……. **45**

4.1.1 Μελέτη της δημιουργίας εικασιών …… **45**

4.1.2 Παράγοντες που επηρέασαν την παραγωγή εικασιών …… **47**

4.1.3 Εικασίες σε μορφή υποθετικού λόγου …….. **54**

4.2 2ο ερευνητικό ερώτημα …… **56**

4.2.1 Προσπάθειες αιτιολόγησης και κατηγοριοποίησή τους …….. **56**

4.3 Ανάλυση των αιτιολογήσεων σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Stylianides …… **63**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ **66**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΝΑΦΟΡΕΣ - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παραγωγή εικασιών και η απόδειξη αποτελούν κεντρικά ζητήματα των μαθηματικών και της διδασκαλίας τους. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι το μάθημα με το οποίο εισάγεται αλλά και διδάσκεται η απόδειξη κυρίως στο Λύκειο. Παρότι υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για την απόδειξη είναι λίγες έρευνες που εξετάζουν την επαφή των μαθητών με την εικασία και την απόδειξη σε μικρότερες τάξεις και ειδικά στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου. Η συγκεκριμένη έρευνα μελετά την παραγωγή εικασιών από μαθητές στο τέλος της Α΄ Γυμνασίου όταν έρχονται σε επαφή με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (DGS), (το Geometers' Sketchpad), προσπαθώντας να διερευνήσουν ένα ανοικτό πρόβλημα και ακολούθως να ¨ανακαλύψουν¨ κάποιες ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Μελετάται η μορφή των εικασιών που διατυπώθηκαν και συγκεκριμένα αν διατυπώθηκαν ως υποθετικές προτάσεις, μια μορφή που βοηθά περισσότερο στη μετάβαση στην απόδειξη. Τέλος εξετάζεται η προσπάθεια των μαθητών να αιτιολογήσουν η και να αποδείξουν τις εικασίες που κατασκεύασαν. Οι προσπάθειες αυτές ταξινομούνται σύμφωνα με το μοντέλο που ανέπτυξαν οι Marrades - Gutierrez. Η έρευνα εστιάζει κυρίως στο ρόλο που έπαιξε το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας στη διαδικασία παραγωγής εικασιών και προσπάθειας απόδειξης.

Abstract

Generating conjectures and proving are considered some of the major issues in mathematics. Euclidian Geometry is the lesson which is used to introduce and teach proof, particularly in high school. This is mainly the reason why research about students' attitudes towards conjecture and proving is focused basically on high school students, with less studies concerning the attitudes among younger ages.

This research aimed to study the forming of conjectures of middle school students (7th Grade, first year of the lower secondary school) when they use a Dynamic Geometry System (Geometers' Sketchpad), to explore an open problem and consequently to discover some of the parallelogram's properties. The research also explores about the different kinds of conjectures that the students developed and particularly whether these conjectures are in the form conditional statements. Finally the ways the students try to prove their conjectures are analyzed and classified according the Marrades- Gutierrez model. The main focus of this study concerns the role which DGS played in students' activity

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

1.1 Η απόδειξη

Η επεξήγηση είναι αυτό που αποσαφηνίζει, που κάνει κάτι σαφές. Αν πρόκειται για μαθηματική επεξήγηση, είναι αυτό που προσδίδει εγκυρότητα σε μια μαθηματική πρόταση. Η απόδειξη είναι μια επεξήγηση η οποία είναι αποδεκτή από μια κοινότητα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή και κατ' αναλογία μια μαθηματική απόδειξη είναι η απόδειξη η οποία είναι αποδεκτή από τους μαθηματικούς (Jones, 2000).

Η απόδειξη στα μαθηματικά είναι η διαδικασία κατά την οποία επιβεβαιώνονται και επικυρώνονται οι μαθηματικές προτάσεις και αποκτούν καθολικότητα. Παραδοσιακά η απόδειξη επιβεβαιώνει την αλήθεια μιας πρότασης και αυτό γίνεται απομακρύνοντας τις αμφιβολίες που έχει αυτός ο οποίος διατυπώνει την πρόταση ή ακόμα και οι άλλοι που έρχονται σε επαφή με αυτήν. Αυτός είναι ό λόγος που ο Tall προτείνει 3 επίπεδα για την παρουσίαση μιας απόδειξης που έχουν σχέση με:

1. την προσωπική πειθώ
2. την πειθώ ενός φίλου
3. την πειθώ ενός εχθρού

Ο Bell προτείνει 3 λειτουργίες της απόδειξης:

- επιβεβαίωση (verification)
- διαφώτιση (illumination)
- συστηματοποίηση (systematization)

Ο de Villiers (1999) επεκτείνει την παραπάνω λίστα του Bell αναφερόμενος σε 6 λειτουργίες της απόδειξης:

1. *επιβεβαίωση, επαλήθευση – verification*

Η απόδειξη προσφέρει βεβαιότητα στους μαθηματικούς και ως εκ τούτου επιβεβαιώνει την αλήθεια μιας εικασίας

2. *επεξήγηση – explanation*

Απαντά στην ερώτηση γιατί συμβαίνει κάτι.

3. *συστηματοποίηση – systematization*

Είναι ένα εργαλείο συστηματοποίησης και οργάνωσης προτάσεων και άλλων μαθηματικών αποτελεσμάτων σε ένα αφαιρετικό μαθηματικό σύστημα.

4. *ανακάλυψη – discovery*

Είναι ένα μέσο εξερεύνησης, ανάλυσης, ανακάλυψης και εφεύρεσης νέων προτάσεων και μεθόδων.

5. *επικοινωνία – communication*

Μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο διαφωνίας ή συμφωνίας ανάμεσα στους εμπλεκόμενους μαθηματικούς ή και μαθητές, ως μέσο γενικότερα επικοινωνίας ανάμεσα στα μέλη της κοινότητας

6. *πνευματική πρόκληση - intellectual challenge*

Είναι μια πνευματική πρόκληση για τον εμπλεκόμενο η ενασχόληση με την απόδειξη ανάλογη αυτής που μπορεί να κάνει έναν αθλητή να συμμετέχει σε έναν αγώνα ή ένα ορειβάτη να ανέβει στο βουνό.

Η Hanna (2000) επεκτείνει και άλλο τον παραπάνω κατάλογο χρησιμοποιώντας τις πέντε πρώτες λειτουργίες και προσθέτοντας άλλες τρεις:

1. *κατασκευή* (μιας εμπειρικής θεωρίας)
2. *εξερεύνηση* (του νοήματος ενός ορισμού ή των συνεπειών μιας υπόθεσης)
3. *ενσωμάτωση* (ενός γεγονότος το οποίο γνωρίζουμε καλά σε ένα νέο πλαίσιο και εξέτασή του από μια άλλη σκοπιά)

Όπως ισχυρίζεται ο de Villiers αυτές είναι κάποιες λειτουργίες της απόδειξης οι οποίες εμφανίζονται συχνότερα. Προφανώς μπορούν να βρεθούν και άλλες λειτουργίες. Φυσικά δεν εμφανίζονται σε κάθε απόδειξη όλες ταυτόχρονα και κάποιες δεν εμφανίζονται καθόλου.

1.2 Η απόδειξη στο πλαίσιο της διδασκαλίας

Συνήθως η χρήση της απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών γίνεται διαμέσου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σε αυτό το πλαίσιο η απόδειξη εμφανίζεται

ως μια συγκεκριμένη φορμαλιστική τυπική διαδικασία η οποία προσπαθεί να προσφέρει στους μαθητές την επιβεβαίωση για μαθηματικές προτάσεις και εικασίες. Όμως το φαινόμενο που παρουσιάζεται να δίνεται περισσότερη σημασία στην ίδια τη διαδικασία παρά στο περιεχόμενο, δημιουργεί δυσκολίες στους μαθητές. Σύμφωνα με τον Jones (2000) οι μαθητές αδυνατούν να καταλάβουν τη διαφορά ανάμεσα σε μια τυπική και μια εμπειρική απόδειξη και θεωρούν ότι η τυπική απόδειξη δεν είναι μέρος της λύσης του προβλήματος, απλά προσφέρει παραπάνω στοιχεία. Προτείνει οι δάσκαλοι να βρουν τρόπους η απόδειξη να έχει επικοινωνιακό, διερευνητικό και επεξηγηματικό χαρακτήρα.

Η Hanna (2000) αναγνωρίζει την αξία της απόδειξης και αναφέρει ότι πρέπει να διδάσκεται στην τάξη. Θεωρεί όμως ότι ο κύριος ρόλος της είναι να προωθήσει τη μαθηματική κατανόηση και έτσι πρέπει να βρεθούν αποτελεσματικοί τρόποι γι' αυτό. Χρησιμοποιώντας τη μεταφορά του Rav ότι οι αποδείξεις είναι ένα δίκτυο δρόμων σε ένα σύστημα μαζικής μεταφοράς όπου τα θεωρήματα είναι οι στάσεις των λεωφορείων, αναδεικνύει την απόδειξη ως το αξιοθέατο που θα μπορούσε να δει κάποιος μεταφερόμενος σε αυτό το δίκτυο. Αυτό το αξιοθέατο του δίνει τα όπλα να κατανοήσει καλύτερα όλο το σύστημα δηλαδή τον βοηθάει στην καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών.

Η Hadas και οι συνεργάτες της (Hadas et al. 2000) ισχυρίζονται ότι οι 2 κλασικοί λόγοι για να διδάσκονται οι αποδείξεις είναι:

- να διδάσκεται η παραγωγική αιτιολόγηση (κλασική απόδειξη) ως τμήμα της ανθρώπινης κουλτούρας
- να χρησιμοποιηθεί ως όχημα για την επιβεβαίωση και ανάδειξη της καθολικότητας των μαθηματικών προτάσεων

Οι ίδιοι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι η απόδειξη λειτουργεί περισσότερο ως ανάγκη των μαθηματικών να καλύψουν τις εσωτερικές τους απαιτήσεις παρά ως μέσο που βοηθά τις ψυχολογικές ανάγκες των μαθητών. Ο πειραματισμός, η οπτικοποίηση, η μέτρηση, ο επαγωγικός συλλογισμός (από τα μεμονωμένα στα γενικά) δε θεωρούνται μέσα τα οποία λειτουργούν σύμφωνα με τους μαθηματικούς κανόνες και οδηγούν στη μαθηματική γνώση. Όμως αυτή η

προσέγγιση έχει αλλάξει σύμφωνα με την Hadas και τους συνεργάτες της (Hadas et al. 2000) κυρίως για 3 λόγους:

- αποτυχία να διδαχθεί η απόδειξη
- η παραδοχή ότι πρέπει να δημιουργούνται κίνητρα στους μαθητές για να αναζητήσουν και να προσεγγίσουν την απόδειξη
- η εμφάνιση των δυναμικών εργαλείων

Ο Jones (2000) υποστηρίζει ότι σύμφωνα με την έρευνα, πολλοί μαθητές αφενός μεν δε νοιώθουν την ανάγκη για παραγωγικές αποδείξεις αφετέρου δε μπορούν να διαχωρίσουν τους διαφορετικούς τύπους μιας μαθηματικής αιτιολόγησης όπως είναι η επεξήγηση, η επιχειρηματολογία, η επιβεβαίωση και η απόδειξη. Αναφέρει μάλιστα κάποιους λόγους τους οποίους θεωρεί ότι είναι οι αιτίες για αυτήν την κατάσταση:

- το να μάθει κανείς να αποδεικνύει χρειάζεται να χρησιμοποιήσει κάποιες δεξιότητες οι οποίες δεν είναι καθόλου τετριμμένες.
- η διδασκαλία συνήθως επικεντρώνεται σε επαλήθευση κάποιων μαθηματικών προτάσεων και δε δίνει τόσο βάρος στην αναζήτηση και στην επεξήγηση.
- η απόδειξη είναι μια δύσκολη διαδικασία μετάβασης από τα υπολογιστικά μαθηματικά σε ένα πεδίο περίπλοκα συνδεδεμένων κατασκευών.

Με τη χρήση των υπολογιστών υπάρχει μια μετατόπιση της γνωστικής διαδικασίας από το αντιληπτικό επίπεδο στις αφηρημένες ιδέες και το αντίστροφο. Ο Arzarello και οι συνεργάτες του (Arzarello et al. 2002) περιγράφουν αυτή τη διαδικασία με ένα πλαίσιο στο οποίο αναφέρουν την **ανερχόμενη πορεία (ascending phase)** και την **κατερχόμενη πορεία (descending phase).**

Η ανερχόμενη πορεία χαρακτηρίζεται από εμπειρική δραστηριότητα και στοχεύει στην καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και τη δημιουργία εικασιών. Ο λύτης ο οποίος μπορεί να είναι κάποιος ειδικός ή μαθητής, μελετά το σχήμα, εξερευνά την κατάσταση με την οποία εμπλέκεται και αναζητά κομμάτια της θεωρίας τα οποία σχετίζονται με αυτήν (Saada –Robert στο Olivero 1999). Η κατερχόμενη πορεία είναι αυτή κατά την οποία ο λύτης χρησιμοποιώντας τη θεωρία προσπαθεί να κατασκευάσει μια παραγωγική (deductive) απόδειξη, να επιβεβαιώσει ή να απορρίψει εικασίες.

Οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν σε μαθητές του λυκείου και έτσι υπάρχουν πολύ λιγότερα στοιχεία για τους μαθητές του γυμνασίου αν και όπως ισχυρίζεται ο Jones (2000) η επαφή των τελευταίων με τη γεωμετρική θεωρία μέσα από DGS μπορεί να είναι πολύτιμη, θέτοντας τις βάσεις ανάπτυξης της παραγωγικής αιτιολόγησης.

1.3 Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (DGS ή DGE)

Η εμφάνιση των DGS προσέφερε στους ασχολούμενους με τα μαθηματικά πολλά είδη αναπαραστάσεων και αυτό είχε μεγάλες συνέπειες όσον αφορά τη διδασκαλία και τη μάθηση. Ο λόγος είναι ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις δίνουν σημαντική στήριξη για εξερεύνηση, ανακάλυψη, παραγωγή εικασιών σε μαθηματικά προβλήματα (Arzarello, Ferrara & Robutti, 2011).

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές βοηθούν τους μαθητές να προσεγγίζουν με έναν ημιπειραματικό τρόπο τα μαθηματικά και κυρίως τους τομείς των αριθμών και των σχημάτων στο επίπεδο και στο χώρο. Διευκολύνουν μια πιο ενεργή προσέγγιση και ανάμειξη των μαθητών. Δίνουν μεγάλη δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν παρατηρήσεις και να χειρίζονται σχήματα κινώντας τα στο επίπεδο ή μετασχηματίζοντάς τα, γενικότερα δίνουν μεγάλες δυνατότητες πειραματισμού. Βοηθούν στο να μελετάται η ίδια έννοια από διαφορετικές μεριές. Συνεισφέρουν στη διαδικασία της αφαίρεσης, ειδικότερα στα μαθηματικά και οδηγούν σε βαθύτερη και καλύτερη κατανόηση (Laborde, 2001).

Τα DGS βοηθούν σε 2 κατευθύνσεις:

- Παρέχουν ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές μπορούν να πειραματισθούν ελεύθερα. Μπορούν να ελέγξουν εύκολα πράγματα τα οποία η διαίσθησή τους υπαγορεύει αλλά και τις εικασίες τους οι οποίες δημιουργούνται καθώς ψάχνουν για κανονικότητες και ιδιότητες.

- Δημιουργούν μη παραδοσιακούς τρόπους για να μάθουν και να κατανοήσουν οι μαθητές μαθηματικές έννοιες και μεθόδους (Marrades and Gutierrez, 2000).

Αυτό που κάνει ένα DGS να είναι ένας ισχυρός μικρόκοσμος απόκτησης μαθηματικής γνώσης είναι η δυνατότητα να φανερώνει οπτικά το δυναμισμό του να σκέπτεται κάποιος σε σχέση με μαθηματικά θέματα. Ασχολούμενος κάποιος με τα μαθηματικά πρέπει να αντιλαμβάνεται αφηρημένες έννοιες, να οπτικοποιεί νοητικά κινήσεις μαθηματικών αντικειμένων στην προσπάθειά του να διακρίνει κάποιες κανονικότητες και κάποιες ιδιότητες. Ένα περιβάλλον DGS είναι ένας ημι-αληθινός κόσμος όπου αυτή η γνωστική διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί (Leung, 2008). Ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας έχει εργαλεία τα οποία μπορούν να βοηθήσουν το χρήστη να παρατηρήσει στην οθόνη γεωμετρικά σχήματα να κινούνται ή να μετασχηματίζονται. Ένα τέτοιο εργαλείο είναι το σύρσιμο, με το οποίο το σχήμα κινείται καθώς σύρεται ένα σημείο του ή μια πλευρά του. Οι μετασχηματισμοί του σχήματος είτε με τη συμμετρία είτε με ανακλάσεις είναι άλλο εργαλείο αυτής της μορφής.

Στην ίδια λογική κινούνται και οι Lopez-Real και Leung οι οποίοι αναφέρουν ότι ένα DGS είναι μια εικονική μαθηματική πραγματικότητα όπου αφηρημένες έννοιες και κατασκευές μπορούν να οπτικοποιηθούν. Αυτό έχει ως συνέπεια, ότι η παραδοσιακή γεωμετρική λογική μπορεί να ερμηνευθεί πάλι ή ακόμα και να επαναορισθεί (Lopez-Real, Leung, 2006)

Ο κόσμος των Γεωμετρικών Κατασκευών αναγεννήθηκε με το λογισμικό Cabri (ένα από τα DGS). (Mariotti, 2000)

Μπορούμε να θεωρήσουμε δύο κόσμους:

- το μαθηματικό κόσμο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Είναι ένας αξιωματικός κόσμος, αποκρυσταλλωμένος, μέσα στον οποίο δεν υπάρχει χρόνος και είναι οργανωμένος με λογική εξάρτηση του ενός αντικειμένου από το άλλο.
- τον φαινομενολογικό κόσμο της εμπειρίας μέσα στον οποίο περιέχονται και τα περιβάλλοντα που δημιουργούνται από τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

(DGS). Έχει ενσωματωμένο το χρόνο και με εργαλείο το σύρσιμο μας δίνει εμπειρία σε πραγματικό χρόνο. (Baccaglini-Frank, Mariotti 2010)

Ανάμεσα σε αυτούς τους δύο κόσμους υπάρχει ένα χάσμα που από τους Lopez-Real και Leung ονομάσθηκε ¨πειραματικό – θεωρητικό χάσμα¨ (Lopez-Real, Leung, 2006). Χρειάζεται ο μαθητής να κάνει μετάβαση από τον ένα κόσμο της εμπειρίας στον άλλο των μαθηματικών και αυτό δεν είναι καθόλου απλό. Τα DGS μπορεί να γίνουν μια γέφυρα ανάμεσα στους δύο κόσμους δίνοντας στους εκπαιδευτικούς διαισθητικά και όχι μόνο εργαλεία (Baccaglini-Frank, Mariotti 2010).

Η χρήση των νέων τεχνολογιών από μόνη της δε μπορεί να φέρει αλλαγή στην εκπαιδευτική διαδικασία. Πολλές φορές οι μαθητές χρησιμοποιούν και άλλα τεχνουργήματα μαζί με τα λογισμικά, όπως σχήματα στο χαρτί ή χειρονομίες.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι σημαντικός σε διάφορα επίπεδα. Τα διαφορετικά είδη συρσίματος οδηγούν στη λύση του προβλήματος από διαφορετικούς δρόμους και μπορεί να οδηγήσουν και σε διαφορετικά αποτελέσματα. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να κατασκευάσει αυτές τις διδακτικές συνέχειες που θα οδηγήσουν την εκπαιδευτική διαδικασία έτσι ώστε να εσωτερικευθεί από τους μαθητές η χρήση του συρσίματος και να γίνει μέρος της κουλτούρας της τάξης δίνοντας έτσι παραγωγικά αποτελέσματα. (Arzarello et al. 2002). Έρευνες δείχνουν ότι το λογισμικό από μόνο του δε μπορεί να επιφέρει τη μεταφορά από το εμπειρικό στο θεωρητικό επίπεδο. Η χρήση του μπορεί κάποιες φορές να είναι αρκετά δύσκολη για τους μαθητές και σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται η διαμεσολάβηση του δασκάλου.

Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι οι μαθητές να πεισθούν για την αλήθεια μιας εικασίας και να μην προσπαθήσουν για την αιτιολόγησή της μένοντας απλά στο εμπειρικό επίπεδο. Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που πρέπει να τους οδηγήσει ρωτώντας το ¨γιατί¨ ισχύει αυτό που βλέπουν.

Γενικότερα χρησιμοποιώντας τις νέες τεχνολογίες υπάρχει ανάγκη επαναπροσδιορισμού του περιεχομένου των σπουδών, των μεθόδων και του ρόλου του εκπαιδευτικού (Bottino & Chiappini 1995; Noss, 1995).

Η Hadas και οι συνεργάτες της (Hadas et al. 2000) προσδιορίζουν 6 λειτουργίες με τις οποίες ένα **δυναμικό σύστημα γεωμετρίας** (Dynamic Geometry System - DGS) μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο στην πορεία προς την απόδειξη:

1. να λειτουργήσει ως γνωσιακό περιβάλλον για την ανάπτυξη εικασιών.
2. να βοηθήσει στην επιβεβαίωση ή στην απόρριψη μιας αρχικής εικασίας (η οποία δημιουργήθηκε είτε με το ίδιο το εργαλείο είτε με διαφορετικό τρόπο). Στην περίπτωση μάλιστα της απόρριψης να δημιουργήσει διαμάχη ανάμεσα στα αναμενόμενα αποτελέσματα και στα πραγματικά ευρήματα.
3. στην περίπτωση που η εικασία η οποία διατυπώθηκε δε μπορεί να ελεγχθεί, να οδηγήσει τους μαθητές σε άλλη εικασία
4. να πείσει τους μαθητές για την αλήθεια ενός συμπεράσματος, εργαζόμενοι επαγωγικά
5. να βοηθήσει στην παραγωγή ενός παραδείγματος
6. να λειτουργήσει ως πηγή επεξηγήσεων

1.4 Το σύρσιμο

Το σύρσιμο είναι μια σημαντική διαδικασία στη δυναμική γεωμετρία κατά την οποία σύρεται από το χρήστη του λογισμικού ένα συγκεκριμένο σημείο ή μια γραμμή ενός σχήματος με τυχαίο τρόπο είτε ακολουθώντας μια συγκεκριμένη πορεία είτε αναζητώντας κάποιες ιδιότητες του σχήματος και κάποιες κανονικότητες.

Ο Arzarello και οι συνεργάτες του (Arzarello et al, 2002) υποστηρίζουν ότι το σύρσιμο βοηθά στη δημιουργία εικασιών γιατί αφενός μεν προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση δίνοντας πολλές πληροφορίες κυρίως οπτικές στο χρήστη και βοηθώντας άμεσα στην επεξήγηση και την απόδειξη ιδιοτήτων και εικασιών, αφετέρου κινώντας ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί κάποιος να παρατηρήσει, να διακρίνει τα αναλλοίωτα στοιχεία του που είναι οι ιδιότητες του σχήματος . Με λίγα λόγια μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι το σύρσιμο διαμεσολαβεί ανάμεσα στο θεωρητικό και το αντιληπτικό.

Για να μπορέσει όμως ο μαθητής να το χρησιμοποιήσει με έναν τρόπο που θα του προσφέρει θετικά στοιχεία πρέπει να ασχοληθεί αρκετά και να πειραματισθεί.

1.5 Η συμβολή των DGS στην αποδεικτική διαδικασία

Η εμφάνιση των δυναμικών εργαλείων γεωμετρίας άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται η απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων κυρίως από τους μαθητές. Σύμφωνα με τον Jones (2000) τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας παρέχουν άμεση επαφή με τη γεωμετρική θεωρία και έτσι έχουν τη δυνατότητα να μειώσουν το χάσμα ανάμεσα στη γεωμετρική κατασκευή και την παραγωγική διαδικασία. Το σχήμα κατασκευάζεται στην οθόνη του υπολογιστή και με το κατάλληλο εργαλείο του λογισμικού μπορεί να συρθεί επάνω στο επίπεδο της οθόνης. Οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τις ιδιότητες του σχήματος, πώς αυτές μεταβάλλονται αλλά και ποιές μένουν αναλλοίωτες. Έτσι όπως λένε οι Hoyles και Jones (1998) δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να επικεντρωθεί όχι στην απόδειξη αυτή καθ' αυτή, αλλά στη δυνατότητα που έχει το λογισμικό να βοηθήσει στη μετάβαση από το ειδικό στο γενικό. Μια ιδιότητα που παρατηρείται σε ένα συγκεκριμένο σχήμα, με το σύρσιμο του σχήματος μπορεί να παρατηρηθεί αν μένει αναλλοίωτη και άρα γενικεύεται ή αν αλλάζει και έτσι δεν είναι κάτι που αφορά περισσότερα σχήματα.

Επιπλέον σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας δίνονται περισσότερες ευκαιρίες σε κάποιους τουλάχιστον μαθητές, εκτός από την ερώτηση ¨γιατί…….;¨ που μπορεί να κάνουν για μια πρόταση, να αναρωτηθούν ακόμα και ¨τι θα γινόταν αν……..;¨ ή και ¨τι θα γινόταν αν δεν …….;¨ που είναι το πρώτο βήμα για να διερευνήσουν την ισχύ της συγκεκριμένης πρότασης. Όπως αναφέρει η Hadas και οι συνεργάτες της (Hadas et al. 2000) με αυτόν τον τρόπο είναι πολύ πιο εύκολο να πειστεί κάποιος για την αλήθεια μιας εικασίας. Έτσι όμως δε νοιώθει την ανάγκη να προχωρήσει σε αιτιολόγηση της εικασίας και σε απόδειξη. Συνεπώς τα δυναμικά εργαλεία γεωμετρίας δημιουργούν ένα περιβάλλον το οποίο όχι μόνο δεν ευνοεί την ανάγκη του μαθητή για απόδειξη αλλά μπορεί και να την εμποδίζει. Με αυτήν την άποψη φαίνεται να συμφωνούν και να την επιβεβαιώνουν μετά από έρευνες που έκαναν και οι Yerusalmy, Chazan και Gordon.

Ο de Villiers (1999) προτείνει την αλλαγή της στόχευσης όταν διδάσκεται η απόδειξη. Θα μπορούσε το ζητούμενο να είναι ¨τι θα γινόταν αν …….¨ το οποίο θα

οδηγούσε τους μαθητές σε διερεύνηση μέσω του λογισμικού με αποτέλεσμα νέες ανακαλύψεις και γενικεύσεις.

Οι Goldenberg, Cuoco & Mark (1998) συμπεραίνουν ότι ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας θα μπορούσε να βοηθήσει δημιουργώντας αβεβαιότητες δίνοντας έτσι ένα κίνητρο στον μαθητή να διερευνήσει, να ανακαλύψει και να επεξηγήσει τις εικασίες του.

Ο de Villiers (1999) προτείνει μια ιεράρχηση για το πώς πρέπει να διδάσκεται η απόδειξη μέσα στην τάξη αφού οι μαθητές έρθουν σε επαφή πρώτα με κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Η διαπίστωση είναι ότι αφού οι μαθητές διερευνήσουν μια γεωμετρική εικασία με κάποιο DGS δεν έχουν σημαντικό κίνητρο να συνεχίσουν σε επαλήθευση διαμέσου μιας απόδειξης. Η λειτουργία λοιπόν της απόδειξης ως επαλήθευση – επιβεβαίωση ατονεί και έρχεται στην επιφάνεια ως κυρίως ζητούμενο από την απόδειξη η επεξήγηση. Στις πρώτες γραμμές χρησιμότητας είναι και η ανακάλυψη δηλαδή οι μαθητές να κατορθώσουν να εμφανίσουν δια μέσου της απόδειξης καινούργια μαθηματικά αποτελέσματα είτε προτάσεις είναι αυτά είτε νέες μέθοδοι απόδειξης. Στην περίπτωση που υπάρχει κάποια αμφιβολία για την ισχύ μιας πρότασης η επιβεβαίωση μπορεί να λειτουργήσει προς την κατεύθυνση της αποδεικτικής διαδικασίας. Η προσπάθεια εμπλοκής με τη απόδειξη πρέπει να είναι μια πνευματική πρόκληση για τους μαθητές, αλλά και στην περίπτωση που κάποιοι δεν αισθάνονται έτσι, η διαπίστωση ότι αυτή η πρόκληση υπάρχει στους υπόλοιπους λειτουργεί θετικά. Τέλος σημαντικό είναι να συστηματοποιούνται όλες οι κινήσεις και τα αποτελέσματα της αποδεικτικής διαδικασίας. Σχηματικά θα μπορούσαμε να συστηματοποιήσουμε την πρόταση του de Villiers ως εξής:

Επεξήγηση - Ανακάλυψη - Επιβεβαίωση - Πνευματική πρόκληση - Συστηματοποίηση

Η σειρά με την οποία πρέπει να εμφανίζονται οι λειτουργίες δεν είναι αυστηρά συγκεκριμένη και γραμμική και μπορούν κατά περίπτωση οι λειτουργίες να εναλλάσσονται και κάποιες να τονίζονται περισσότερο.

Από την άλλη υπάρχει μια συζήτηση για το αν πρέπει να διδάσκεται η απόδειξη στην εκπαίδευση και σε ποιο βαθμό. Υπάρχει μια 'διαμάχη' ανάμεσα στην ευρετική

και την απόδειξη. Κάποιοι επιστήμονες σύμφωνα με την Hanna (2000) ισχυρίζονται ότι οι μαθητές πρέπει να εκπαιδεύονται στη μαθηματική έρευνα και να αναπτύσσουν ικανότητες στη λύση προβλήματος. Θεωρούν ότι αυτά κάνουν τα μαθηματικά να φαίνονται πιο χρήσιμα, πιο ευχάριστα και όχι τόσο απρόσιτα. Περίπου στην ίδια λογική κινείται και το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών των ΗΠΑ (NTCM) μετά από πρόταση των οποίων σχεδόν εξαφανίσθηκε από τα προγράμματα των σχολείων η απόδειξη και αντικαταστάθηκε από διαδικασίες έρευνας και ευρετικής. Παρατηρήθηκε όμως ότι αυτά δε μπορούσαν να δουλέψουν ως υποκατάστατα της απόδειξης και έτσι αυτή επανήλθε στα προγράμματα των σχολείων.

Το 2000 το NTCM σύμφωνα με τη Hanna (2000) συνιστούσε ότι η αιτιολόγηση και η απόδειξη θα έπρεπε να είναι μέρος του σχολικού προγράμματος σε όλα τα επίπεδα, από το προνήπιο έως την ηλικία των 12. Το σχετικό κείμενο έλεγε ότι οι μαθητές θα έπρεπε να είναι ικανοί να:

- αναγνωρίζουν την αιτιολόγηση και την απόδειξη ως βασικά σημεία των μαθηματικών
- κάνουν μαθηματικές εικασίες και να τις διερευνούν
- αναπτύσσουν και αξιολογούν προτάσεις και αποδείξεις
- επιλέγουν και χρησιμοποιούν διάφορους τύπους αιτιολόγησης και μεθόδους απόδειξης

Όπως αναφέρει ο Jones (2000) σύμφωνα με την έρευνα, οι εξηγήσεις που δίνουν οι μαθητές σε μαθηματικά προβλήματα μπορούν να εξελιχθούν από όχι τόσο ακριβείς καθημερινές εκφράσεις σε μαθηματικές επεξηγήσεις, με τη διαμεσολάβηση ενός λογισμικού ξεπερνώντας ακόμα και το ίδιο το λογισμικό

Πολλοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα DGS πέρα από τα παραπάνω, δηλαδή να διευκολύνουν τις ήδη υπάρχουσες διανοητικές διεργασίες έχουν τη δυνατότητα να τις μορφοποιήσουν και να τις μετασχηματίσουν. Όπως χαρακτηριστικά λέει ο Pea (στο Jones 2000) μπορούν να λειτουργήσουν περισσότερο ως γνωστικοί αναδιοργανωτές παρά ως απλοί ενισχυτές των ήδη υπαρχόντων δυνατοτήτων.

1.6 Η εικασία

Ως εικασία μπορούμε να ορίσουμε μια αιτιολογημένη (μη αυθαίρετη) υπόθεση η οποία στηρίζεται σε ελλιπή στοιχεία και εμπεριέχει ένα βαθμό αβεβαιότητας (Stylianides, 2008). Είναι μια παρατήρηση που γίνεται από κάποιον ο οποίος έχει αμφιβολίες για την αλήθειά της (Harel, Sowder, 1998)

Στα μαθηματικά ο δρόμος για τη γνώση περνάει από κάποια στάδια έχοντας στο τέλος του δρόμου την απόδειξη. Στην πορεία αυτή κάποιος αρχικά πρέπει να παρατηρήσει γεγονότα και να αναγνωρίσει κανονικότητες. Αυτό θα τον οδηγήσει στη δημιουργία εικασιών και στον έλεγχο αυτών. Στη συνέχεια θα αναθεωρήσει τις εικασίες στηριζόμενος σε αντιπαραδείγματα ή θα προχωρήσει στην απόδειξή τους που είναι και το τέλος (Stylianides 2008).

Η δημιουργία εικασιών λοιπόν είναι ένα σημαντικό βήμα στην πορεία προς την απόδειξη. Δεν έχει εκτιμηθεί όμως τόσο, με αποτέλεσμα να μην είναι ζητούμενο στην εκπαιδευτική διαδικασία και η απόδειξη να διδάσκεται απομονωμένη από τα υπόλοιπα βήματα που οδηγούν προς αυτήν. Για να μπορέσουν οι μαθητές να κατασκευάσουν μέρη μιας θεωρίας πρέπει να τους επιτραπεί να συμμετέχουν στην κατασκευή τμημάτων της, όπως είναι η εξερεύνηση, η παρατήρηση κανονικοτήτων, η δημιουργία εικασιών και η επικύρωσή τους μέσω μιας θεωρίας ή η απόρριψή τους (Furinghetti, Paola, 2003)

Σύμφωνα με την Pedemonde (2007) η εικασία είναι μια τριάδα η οποία αποτελείται από:

1. μία πρόταση - δήλωση
2. επιχειρηματολογία
3. ένα σύστημα πεποιθήσεων

Αυτό που εννοεί η Pedemonde είναι ότι η δήλωση – εικασία που μπορεί να κάνει κάποιος δε μπορεί να είναι μια αποκομμένη διαδικασία αλλά έχει νόημα όταν συνοδεύεται από κάποια επιχειρήματα τα οποία τη στηρίζουν και τα οποία μπορεί να προηγούνται της δήλωσης ή και να έπονται, όπως φαίνεται παρακάτω. Όλη αυτή η διαδικασία κινείται μέσα σε ένα θεωρητικό πλαίσιο από το οποίο παίρνει τους κανόνες και είναι αυτό το οποίο ονομάζει σύστημα πεποιθήσεων.

Η επιχειρηματολογία συνδέεται με την εικασία με δύο τρόπους:

- δημιουργεί τις συνθήκες να παραχθεί μια εικασία και τότε ονομάζεται **κατασκευαστική επιχειρηματολογία (constructive argumentation).** Σε αυτήν την περίπτωση η επιχειρηματολογία προηγείται της εικασίας.
- ακολουθεί μια εικασία η οποία έχει παραχθεί, αιτιολογώντας την και τότε ονομάζεται **structurant argumentation.**

Ο ορισμός της Pedemonde για την εικασία αντιστοιχεί (όπως λέει η Pedemonde) σε αυτό που η Mariotti (2012) ονομάζει **Θεώρημα:**

Μια τριάδα που αποτελείται από:

1. μια δήλωση
2. μια απόδειξη
3. ένα θεωρητικό πλαίσιο, μια θεωρία, μέσα στο οποίο κινείται η αποδεικτική διαδικασία

Η Mariotti (2012) ονομάζει θεωρία αφενός μεν τα αξιώματα, τους ορισμούς και τα θεωρήματα που όλα μαζί αποτελούν τα συστατικά και τα μέσα προς την απόδειξη, αφετέρου τους μεταθεωρητικούς κανόνες οι οποίοι δείχνουν το δρόμο για το πώς θα συνδυασθούν όλα τα παραπάνω έτσι ώστε να παραχθεί η απόδειξη.

1.7 Ανοικτά προβλήματα

Ανοικτό πρόβλημα (open ended problem) συνήθως ονομάζεται μια δραστηριότητα στην οποία τίθεται ένα ερώτημα, αλλά δεν εμφανίζεται ή προτείνεται κάποια απάντηση. Οι ερωτήσεις οι οποίες τίθενται σε ένα ανοικτό πρόβλημα δεν είναι ίδιες με αυτές που ζητούνται συνήθως, της μορφής «Να αποδείξτε ότι ……», αλλά όπως αναφέρει η Mogetta (στο Baccaglini-Frank, Mariotti, 2010) εκφράζονται στη μορφή: «ποια σχέση μπορείς να βρεις ανάμεσα …..;» ή «ποιο είδος σχήματος μπορεί να μετασχηματιστεί σε αυτό;»

Μπορεί σε ένα ανοικτό πρόβλημα να ζητηθεί από τους μαθητές να παράγουν εικασίες και τότε μιλάμε για *ανοικτό πρόβλημα εικασίας (conjecturing open problem).*

Ένα ανοικτό πρόβλημα προωθεί τη μεταβίβαση της υπευθυνότητας από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή (Furinghetti, Paola, 2003). Σύμφωνα με τη Mariotii (2012) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο κυρίως στην ανάπτυξη της αίσθησης των μαθητών για την απόδειξη. Ο μαθητής ασχολούμενος με ένα ανοικτό πρόβλημα

αντιμετωπίζει αβεβαιότητα, γνωστικές συγκρούσεις και κάποιες φορές έκπληξη. Παράγει εικασίες, τις οποίες συχνά προσπαθεί να αιτιολογήσει και να επαληθεύσει. Όπως αναφέρουν οι Arsac and Mande (στο Marioti 2012) όταν ασχολείται με ένα ανοικτό πρόβλημα δημιουργείται ένα πλούσιο γνωσιακό περιβάλλον στο οποίο έχει μεγάλη δυνατότητα ο εκπαιδευτικός με τις παρεμβάσεις που θα κάνει να οδηγήσει τους μαθητές σε επιχειρηματολογία και σε θεωρητική επικύρωση δηλαδή απόδειξη.

Η Mariotti προτείνει μια διαδικασία με την οποία ισχυρίζεται η εξερεύνηση ενός ανοικτού προβλήματος είναι παραγωγική δηλαδή δίνει κάποια καλά αποτελέσματα. Δίνεται στους μαθητές ένα ανοικτό πρόβλημα και ζητείται να κάνουν κάποιες εικασίες που έχουν σχέση με το σχήμα αυτού του προβλήματος. Οι εικασίες αυτές βοηθούν περισσότερο αν είναι διατυπωμένες σε μορφή υποθετικής πρότασης δηλ.: αν --------(ισχύει αυτό) τότε …….(ισχύει εκείνο).

Ο μαθητής αρχίζει να μετασχηματίζει το σχήμα σύροντας κάποια στοιχεία του (πλευρές, κορυφές κ.λπ.) προσπαθώντας να δει ποιες είναι αυτές οι ιδιότητες οι οποίες σχετίζονται μεταξύ τους έτσι ώστε να μπορέσει να διατυπώσει την εικασία. Αυτό που ζητείται στην ουσία είναι να μπορέσει να μετατρέψει τα δεδομένα που προσλαμβάνει οπτικά σε γεωμετρικές σχέσεις και προτάσεις.

Όπως αναφέρει ο Boero (στο Marioti 2012) μια τέτοια υποθετική πρόταση είναι η αποκρυστάλλωση μιας δυναμικής εξερεύνησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης (Theory of semiotic mediation – TSM)

Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης (TSM) (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008) είναι ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο περιγράφει τη δυνατότητα που έχει ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιώντας κάποια εργαλεία να προωθήσει και να βελτιώσει τη διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης.

Τα δομικά του στοιχεία είναι:

- Η έννοια της σημειωτικής δυνατότητας ενός τεχνουργήματος
- Η έννοια του διδακτικού κύκλου

Αρχικά θα πρέπει να διασαφηνιστούν οι όροι εργαλείο και τεχνούργημα.

Τεχνούργημα είναι το όργανο, εργαλείο είναι το τεχνούργημα όταν το χρησιμοποιούμε για κάποιο σκοπό

Το τεχνούργημα μετατρέπεται σε εργαλείο όταν χρησιμοποιείται για να επιτευχθεί ένας συγκεκριμένος σκοπός, μια συγκεκριμένη εργασία.

2.1.1 Η έννοια της σημειωτικής δυνατότητας ενός τεχνουργήματος

Κατά τη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης (teaching – learning) χρησιμοποιώντας το εργαλείο – λογισμικό αναδύονται δύο ειδών νοήματα στους μαθητές. Προσωπικά νοήματα και μαθηματικά νοήματα.

Η ύπαρξη των προσωπικών νοημάτων διαπιστώνεται από διάφορα σημεία (signs) όπως λέξεις, σκίτσα, χειρονομίες. Τα προσωπικά αυτά νοήματα πηγάζουν από τη χρήση του τεχνουργήματος. Δεν εμπεριέχουν καθαρή μαθηματική γνώση αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Σε αυτό θα χρειασθεί η διαμεσολάβηση του εκπαιδευτικού ο οποίος θα στρέψει τα προσωπικά νοήματα και τις έννοιες οι οποίες αναδύονται, σε μαθηματικές έννοιες, με αποτέλεσμα να κατασκευασθεί η μαθηματική γνώση.

Συγχρόνως με τα προσωπικά εμφανίζονται όμως και μαθηματικά νοήματα τα οποία χρειάζεται να αναγνωρισθούν ως τέτοια από έναν ειδικό. Η

διαμεσολάβηση του ειδικού, στην περίπτωσή μας μαθηματικού – εκπαιδευτικού, θα είναι αφενός μεν να αναγνωρίσει τα καθαρά μαθηματικά νοήματα τα οποία θα εμφανισθούν και να τα τονίσει ως τέτοια, αφετέρου να συνδέσει τα προσωπικά νοήματα των μαθητών με μαθηματικές έννοιες, ανοίγοντας το δρόμο προς την κατασκευή της γνώσης.

Η διπλή αυτή σχέση ανάμεσα στο λογισμικό και τα δημιουργούμενα νοήματα (προσωπικά και μαθηματικά) ονομάσθηκε **'σημειωτική δυνατότητα ενός τεχνουργήματος' (semiotic potential of an artefact) (**Bartolini Bussi, Mariotti, 2008**).** Με τον όρο αυτόν εννοούμε αφενός μεν τη χρήση του τεχνουργήματος από τους μαθητές, αλλά και από τον εκπαιδευτικό. Αυτός θα αναγνωρίσει τα μαθηματικά νοήματα τα οποία θα αναδυθούν και θα τα τονίσει στους μαθητές ως τέτοια. Συγχρόνως θα διακρίνει τα προσωπικά νοήματα τα οποία θα δημιουργηθούν και θα προσπαθήσει να τα κατευθύνει και να τα συνδέσει με μαθηματικές έννοιες. Για το λόγο αυτό πρέπει να είναι γνώστης των δυνατοτήτων του λογισμικού.

2.1.2 Η έννοια του διδακτικού κύκλου

Το δεύτερο συστατικό στοιχείο της TSM είναι οι διδακτικοί κύκλοι, μια επαναλαμβανόμενη διδακτική διαδικασία η οποία σκοπό έχει αρχικά να δημιουργήσει το περιβάλλον όπου θα αναδυθούν τα προσωπικά και μαθηματικά νοήματα των μαθητών και μετά να γίνει προσπάθεια να μετατραπούν αυτά σε μαθηματικά νοήματα. Ο κάθε διδακτικός κύκλος αποτελείται από φάσεις οι οποίες λειτουργώντας συμπληρωματικά η μία με την άλλη δημιουργούν το οικοδόμημα το οποίο ονομάζεται TSM. Ιεραρχώντας τη διαδικασία των διδακτικών κύκλων:

1. Αρχικά δίνονται στους μαθητές δραστηριότητες τις οποίες καλούνται να ολοκληρώσουν χρησιμοποιώντας ένα τεχνούργημα. Οι δραστηριότητες αυτές πρέπει να είναι καλά σχεδιασμένες έτσι ώστε να βοηθούν στην ανάπτυξη νοημάτων
2. Κατά τη διαδικασία αυτή εμφανίζονται τα νοήματα τα οποία προαναφέρθηκαν και γίνεται η ανάδειξη των σημειωτικών δυνατοτήτων όπως αναφέρει η Mariotti (2013). Τα νοήματα γίνονται αντιληπτά με συγκεκριμένα σημεία (σημάδια) τα

οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές, όπως λέξεις - σχήματα – χειρονομίες. Η παραγωγή νοημάτων μπορεί να ενισχυθεί με δραστηριότητες όπως γραπτά κείμενα. Ο εκπαιδευτικός δηλαδή μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν με γραπτά κείμενα αφενός μεν τον τρόπο με τον οποίον διάλεξαν να εργασθούν, τις παρατηρήσεις που έχουν να κάνουν και αφορούν τη διαδικασία, ερωτήσεις και απορίες που έχουν και εμφανίσθηκαν όσο εργαζόντουσαν με το τεχνούργημα.

3. Μόλις ο εκπαιδευτικός αντιληφθεί την ύπαρξη των προσωπικών νοημάτων πρέπει να ξεκινήσει τη διαδικασία μετατροπής τους σε μαθηματικές έννοιες και αυτό μπορεί να γίνει με συγκεκριμένες δραστηριότητες σχεδιασμένες με τέτοιον τρόπο που να εκμεταλλεύονται τη δυνατότητα που δίνει το τεχνούργημα. Μία από τις πιο σημαντικές τέτοιες δραστηριότητες είναι οι ομαδικές συζητήσεις που γίνονται μέσα στην τάξη μεταξύ όλων των μελών της και στις οποίες συμμετέχει και αυτός. Σε αυτή τη διαδικασία έχει σημαντικό ρόλο γιατί αφενός μεν πρέπει να διακρίνει τα διαφορετικά νοήματα που εμφανίζονται ατομικά σε κάθε μαθητή, να τα αναδείξει και χρησιμοποιώντας τη δυνατότητα που του δίνει το τεχνούργημα, να τα στρέψει προς τα μαθηματικά, μετατρέποντάς τα σε μαθηματικά νοήματα.

4. Επιπλέον παρατηρεί τη χρήση του τεχνουργήματος από τον κάθε μαθητή. Αναλύει τα γραπτά κείμενα των μαθητών που έχουν προηγούμενα ζητηθεί και αφορούν είτε λύσεις των προβλημάτων είτε προσωπικές παρατηρήσεις και απορίες.

Έχοντας στο οπλοστάσιό του όλα τα παραπάνω οργανώνει συζήτηση μέσα στην τάξη προσπαθώντας να ωθήσει τα πράγματα προς το ζητούμενο που είναι η ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών νοημάτων και εννοιών που από την αρχή ήταν ο στόχος της διδασκαλίας.

Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού σύμφωνα με τη Mariotti (2009) μπορούν να ομαδοποιηθούν σε 4 κατηγορίες:

- να ζητάει από τους μαθητές να ανατρέξουν στις ερωτήσεις που τους έχουν δοθεί και να ανακαλέσουν όσα έχουν κάνει με τα εργαλεία που χρησιμοποιούν, στη συγκεκριμένη περίπτωση το λογισμικό.

- να ζητάει από τους μαθητές να επικεντρωθούν σε συγκεκριμένα σημεία της δραστηριότητάς τους
- να ζητάει να συνθέσουν αυτά που έως εκείνη τη στιγμή έχουν γίνει και έχουν παραχθεί, στην ουσία να γενικεύσουν
- να παρέχει ο ίδιος ενός είδους σύνθεση, στην περίπτωση που δεν είναι αυτό δυνατό από τους μαθητές

Πρέπει να τονισθεί ότι η μετατροπή των προσωπικών νοημάτων σε μαθηματικά δεν είναι αυθόρμητη και καθόλου εύκολη (Mariotti 2012)

Όταν ο μαθητής ψάχνει τη λύση ενός προβλήματος με το λογισμικό, αναμένεται να διερευνήσει το σχήμα δυναμικά, κινώντας το δηλαδή. Θα πρέπει να παρατηρήσει τις μεταβολές που συμβαίνουν στο σχήμα και να προσπαθήσει να μετατρέψει τις οπτικές πληροφορίες που παίρνει από αυτήν την παρατήρηση σε γεωμετρικές προτάσεις. Είναι αποδοτικό και χρήσιμο η πρόταση που θα διατυπώσει να είναι της μορφής υποθετικής πρότασης με υπόθεση και συμπέρασμα. (Mariotti 2012)

2.2 Τύποι συρσίματος κατά την αλληλεπίδραση μαθητών με DGS

Στη βιβλιογραφία έχουν προσδιορισθεί διάφοροι τύποι συρσίματος οι οποίοι χρησιμοποιούνται κυρίως από τους μαθητές και η διαφορετικότητά τους έγκειται στους σκοπούς που έχουν οι μαθητές κάθε φορά.

Έτσι σύμφωνα με τον Arzarello και τους συνεργάτες του (Arzarello et al, 2002) έχουμε τους εξής τύπους συρσίματος:

1. *Σύρσιμο περιπλάνησης (wandering dragging*). Όταν ο μαθητής μετακινεί τυχαία βασικά σημεία του σχήματος προσπαθώντας να κάνει παρατηρήσεις είτε για κάποιες ιδιότητες είτε για κανονικότητες που μπορεί να εμφανισθούν στην οθόνη.

2. *Κατευθυνόμενο-δεσμευμένο σύρσιμο (bound dragging*). Όταν μετακινεί ένα σημείο το οποίο είναι συνδεδεμένο με ένα αντικείμενο και μπορεί να κινηθεί μόνο επάνω σε αυτό

3. *Καθοδηγούμενο σύρσιμο (guided dragging).* Όταν μετακινεί κάποια βασικά σημεία ενός σχήματος με σκοπό να πετύχει μια συγκεκριμένη μορφή του σχήματος.

4. *Σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου (dummy locus dragging)*. Όταν μετακινεί ένα βασικό σημείο του σχήματος, προσπαθώντας να διατηρήσει το σχήμα μια ιδιότητα που ο μαθητής έχει παρατηρήσει. Το σημείο διαγράφει μια γραμμή η οποία αποτελεί έναν γεωμετρικό τόπο.

5. Σύρσιμο γραμμής (line dragging) .

6. Συνδεδεμένο σύρσιμο (linked dragging). Όταν συνδέει ένα σημείο με ένα αντικείμενο και σύρει το σημείο επάνω στο αντικείμενο αυτό.

7. *Σύρσιμο ελέγχου (dragging test)* . Όταν σύρει ένα οποιοδήποτε σημείο του σχήματος με σκοπό να ελέγξει αν αυτό διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες.

Οι Baccaglini-Frank και Mariotti (2010) αναφέρουν το ***σύρσιμο με ενεργοποιημένο το ίχνος (dragging with trace activated)***, όταν κάνοντας το οποιοδήποτε σύρσιμο ενός σημείου ή ενός ευθυγράμμου τμήματος ο μαθητής έχει ενεργοποιημένο το ίχνος του και έτσι μπορεί να παρατηρήσει την κίνησή του στην οθόνη.

Ακόμη κάνουν έναν άλλο διαχωρισμό, αναφέροντας δύο είδη συρσίματος:

1. Αυτό που προκαλεί την ***άμεση κίνηση*** ενός βασικού στοιχείου δηλαδή ενός σημείου ή ενός τμήματος (βασικό σημείο λέγεται ένα ελεύθερο σημείο ή ένα σημείο το οποίο είναι συνδεδεμένο με ένα αντικείμενο το οποίο μπορεί να συρθεί οπουδήποτε επάνω στην οθόνη ή επάνω στο αντικείμενο με το οποίο είναι συνδεδεμένο) και

2. Αυτό που προκαλεί την ***έμμεση κίνηση*** ενός στοιχείου. Αυτό συμβαίνει γιατί το στοιχείο είναι με κάποιον τρόπο συνδεδεμένο με ένα συρόμενο βασικό σημείο. Η ανεξάρτητη κίνηση του βασικού σημείου προκαλεί την κίνηση του εξαρτώμενου στοιχείου.

Αυτή η εξάρτηση μπορεί να ερμηνευθεί από το χρήστη με υποθετική πρόταση της μορφής: ¨αν …….. τότε …….. Μια πρόταση τέτοιου τύπου μπορεί να θεωρηθεί εικασία και αυτή ακριβώς η διαδικασία μας δείχνει πώς μπορεί ο μαθητής εκμεταλλευόμενος το σύρσιμο να παράγει εικασίες. Φυσικά είναι κάτι το οποίο δε γίνεται τόσο εύκολα και αυθόρμητα από το μαθητή και είναι ένα σημείο στο οποίο χρειάζεται να μεσολαβήσει ο εκπαιδευτικός.

Χρησιμοποιώντας το σύρσιμο με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ένα τεχνούργημα που υποστηρίζει την παραγωγή εικασιών. Πέραν όμως από αυτό, το σύρσιμο βοηθά στην αιτιολόγηση και απόδειξη των εικασιών.

Μπορεί όμως να αποτελέσει και εμπόδιο για οποιαδήποτε προσπάθεια αιτιολόγησης. Είναι αρκετά πιθανό με το σύρσιμο που κάνει ο μαθητής στο σχήμα, να πεισθεί για την εγκυρότητα της εικασίας την οποία επεξεργάζεται και να μη θελήσει να προχωρήσει παραπέρα στην απόδειξή της. Σε αυτό το σημείο η διαμεσολάβηση του εκπαιδευτικού είναι καταλυτική. Δίνοντας κίνητρα στο μαθητή είτε δημιουργώντας αμφιβολίες μπορεί να τον ωθήσει να προχωρήσει τη διαδικασία σε απόδειξη, μεταβαίνοντας από το αντιληπτικό στο θεωρητικό.

Τα ανοικτά προβλήματα επίσης είναι ένα πεδίο στο οποίο το σύρσιμο προσφέρει μεγάλη χρησιμότητα. Ο λόγος είναι ότι δίνει άμεση ανατροφοδότηση, πολλαπλές εικόνες του σχήματος κινούμενο ή μετασχηματιζόμενο και καθοδηγεί το χρήστη στην εξερεύνηση του προβλήματος

Οι Lopez-Real και Leung (2006) κάνουν έναν διαφορετικό διαχωρισμό όσον αφορά το σύρσιμο και τις λειτουργίες του:

1. *Σύρσιμο επιβεβαιωτικό.*

Όταν γίνεται μια γεωμετρική κατασκευή, κάποια στοιχεία του σχήματος εξαρτώνται από κάποια άλλα. Όταν λοιπόν συρθεί κάποιο από τα ανεξάρτητα στοιχεία, εφόσον το σχήμα έχει κατασκευασθεί με τους περιορισμούς που χρειάζονται, αυτό θα παραμείνει ανέπαφο, θα διατηρήσει όπως λέγεται τη στιβαρότητά του. Στην αντίθετη περίπτωση το σχήμα θα χαλάσει. Για παράδειγμα κατασκευάζοντας κάποιος ένα παραλληλόγραμμο με τις δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δύο να φαίνονται παράλληλες, όταν σύρει το σχήμα από μια κορυφή ή μια πλευρά, αυτό θα χαλάσει και θα παραμείνουν μόνο οι δύο παράλληλες πλευρές. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι ένα σχήμα είναι καλά κατασκευασμένο.

Να θυμηθούμε σε αυτό το σημείο ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η επιβεβαίωση μιας καλής κατασκευής γίνεται με την παραγωγική απόδειξη.

2. Σύρσιμο εξερευνητικό

Σύροντας ανεξάρτητα στοιχεία μιας κατασκευής ο μαθητής προσπαθεί να δει ιδιότητες του σχήματος που παραμένουν αναλλοίωτες.

Έχει παρατηρηθεί (Arzarello et al, 2002) ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικά είδη συρσίματος, όταν προσπαθούν να πετύχουν διαφορετικούς σκοπούς. Για παράδειγμα το σύρσιμο περιπλάνησης το δεσμευμένο και το καθοδηγούμενο σύρσιμο τα χρησιμοποιούν όταν εξερευνούν το σχήμα προσπαθώντας να ανακαλύψουν κάτι. Η πορεία που ακολουθούν σε αυτήν την περίπτωση είναι η ανοδική, αυτή που οδηγεί από το σχήμα στη θεωρία. Το σύρσιμο του κρυφού γεωμετρικού τόπου χρησιμοποιείται κυρίως όταν προσπαθούν να κατασκευάσουν μια εικασία και όταν θέλουν να εξετάσουν την ισχύ της εικασίας χρησιμοποιούν το σύρσιμο ελέγχου. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατά τον έλεγχο μιας εικασίας, μιας μαθηματικής πρότασης δηλαδή, ο μαθητής ακολουθεί την κατερχόμενη πορεία. Συμπερασματικά η μετάβαση από έναν τρόπο συρσίματος σε έναν άλλο φανερώνει και την αλλαγή στην πορεία που ακολουθεί ο μαθητής, από την ανερχόμενη στην κατερχόμενη και το αντίστροφο.

2.3 Ταξινόμηση αιτιολογήσεων

Οι Marrades – Gutierrez έχουν δημιουργήσει ένα θεωρητικό πλαίσιο με το οποίο ταξινομούν τις διαδικασίες αιτιολόγησης και απόδειξης των μαθητών (Marrades and Gutierrez, 2000):

1. Εμπειρικές αιτιολογήσεις: όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν παραδείγματα για να πείσουν για την αλήθεια μιας πρότασης. Παρατηρούν κανονικότητες σε παραδείγματα ή σχέσεις ή ιδιότητες, βασιζόμενοι σε αυτές κάνουν εικασίες και προσπαθούν να πείσουν για την ισχύ της εικασίας των με τα παραδείγματα αυτά. Στην περίπτωση που η εικασία ενυπάρχει στην εκφώνηση του προβλήματος, κατασκευάζουν ένα παράδειγμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουν για να την ελέγξουν και να την αιτιολογήσουν. Η κατηγορία αυτή χωρίζεται σε 3 υποκατηγορίες:

- **Αφελής εμπειρισμός (naive empiricism).** Οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα ή περισσότερα παραδείγματα για να δείξουν ότι η εικασία είναι αληθής. Οι

παρατηρήσεις των παραδειγμάτων μπορεί να είναι μόνο οπτικές οπότε μιλάμε για **οπτικού τύπου** αφελή εμπειρισμό ή να χρησιμοποιούνται και μαθηματικές σχέσεις ή οποιοδήποτε μαθηματικό στοιχείο οπότε μιλάμε για **επαγωγικού τύπου** αφελή εμπειρισμό.

- **Κρίσιμο πείραμα (crucial experiment).** Οι μαθητές γνωρίζουν την ανάγκη της γενίκευσης, οπότε προσπαθούν να βρουν ένα παράδειγμα όσο το δυνατόν πιο γενικό. Παρατηρώντας την αλήθεια της εικασίας σε αυτό το παράδειγμα γενικεύουν την ισχύ της και θεωρούν ότι ισχύει σε οποιαδήποτε περίπτωση. Όταν η αιτιολόγηση στηρίζεται σε ένα μόνο παράδειγμα και δεν υπάρχει ούτε αντιπαράδειγμα μιλάμε για **βασιζόμενο σε παράδειγμα (example based)** κρίσιμο πείραμα. Όταν ο μαθητής επικεντρώνεται στον τρόπο που θα κατασκευάσει το παράδειγμα μιλάμε για **δημιουργικό (constructive)** κρίσιμο πείραμα. **Αναλυτικό (analytical)** κρίσιμο πείραμα έχουμε όταν η αιτιολόγηση στηρίζεται σε ιδιότητες που παρατηρούν οι μαθητές εμπειρικά στο παράδειγμα όπως κάνοντας μετρήσεις. **Διανοητικό (intellectual),** όταν η αιτιολόγηση στηρίζεται σε ιδιότητες και σχέσεις των στοιχείων του παραδείγματος που είναι δεδομένες και αποδεκτές και τις οποίες γνωρίζουν οι μαθητές και ανακαλούν στη μνήμη τους.

- **Το γενικεύσιμο παράδειγμα (generic example)**

Οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα παράδειγμα το οποίο θεωρούν ως αντιπροσωπευτικό. Το επεξεργάζονται ή το μετασχηματίζουν και χρησιμοποιούν αφηρημένες ιδιότητες και στοιχεία για την αιτιολόγηση.

Στην κατηγορία αυτή μπορούμε να συναντήσουμε τις 4 υποκατηγορίες που υπάρχουν και στο κρίσιμο πείραμα (βασιζόμενο σε παράδειγμα-δημιουργικό-αναλυτικό-διανοητικό) ανάλογα με τον τρόπο που χρησιμοποιείται το παράδειγμα για την αιτιολόγηση

2. Παραγωγικές αιτιολογήσεις (deductive justifications).

Είναι ένα είδος γενικής αιτιολόγησης, η οποία βασίζεται σε νοητικές λειτουργίες και λογική παραγωγή. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί παράδειγμα για να βοηθήσει στη δημιουργία ενός δρόμου σκέψης αλλά δε θα χρησιμοποιηθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του στην αιτιολόγηση.

- **Πείραμα σκέψης (thought experiment)**

Χρησιμοποιείται παράδειγμα για τη συστηματοποίηση της επιχειρηματολογίας, τα συμπεράσματα όμως που προκύπτουν δεν προέρχονται άμεσα από το παράδειγμα, αλλά πρώτα εσωτερικεύονται και αποκόπτονται από αυτό. Υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις στο πείραμα σκέψης:

Μετασχηματιστικό πείραμα σκέψης (transformative).

Οι μαθητές μετασχηματίζουν το πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα. Το παράδειγμα βοηθά να βρεθεί ο καλύτερος μετασχηματισμός.

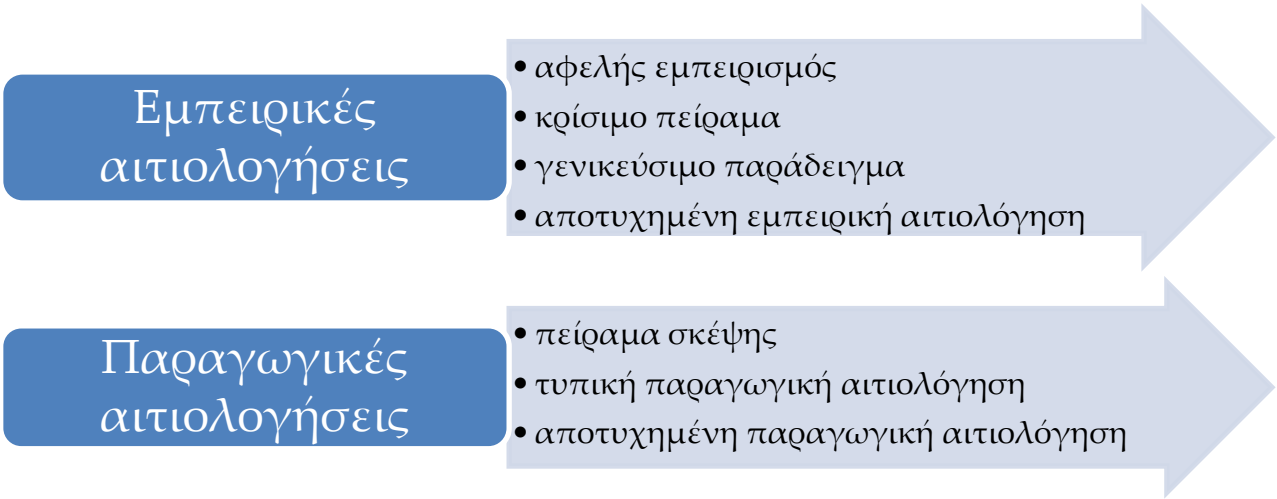
Δομική αιτιολόγηση (structural)

Ακολουθείται η τυπική διαδικασία απόδειξης, μέσα από ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα. Το παράδειγμα έρχεται ως βοηθός σε αυτή τη διαδικασία.

- **Τυπική παραγωγική αιτιολόγηση (formal)**

Είναι η πορεία που χρησιμοποιεί ένας μαθηματικός ερευνητής και αποτελείται από μια νοητική ακολουθία προτάσεων και συμπερασμάτων. Δε χρησιμοποιείται παράδειγμα.

Στη διαδικασία αιτιολόγησης μπορεί να προστεθεί και η περίπτωση αφού ακολουθηθεί η οποιαδήποτε πορεία είτε Εμπειρική είτε Παραγωγική, ο μαθητής να αποτύχει να δώσει μια σωστή αιτιολόγηση οπότε μιλάμε για **αποτυχημένη (failed)** πορεία.



Ο παραπάνω διαχωρισμός προϋποθέτει ότι οι μαθητές κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος εργάζονται με ένα σταθερό γραμμικό τρόπο, πράγμα το οποίο τις περισσότερες φορές δε συμβαίνει. Συνήθως ξεκινούν με εμπειρικό τρόπο προσπαθώντας να κατανοήσουν το πρόβλημα και να ανακαλύψουν τρόπους

δημιουργίας εικασιών και κατόπιν αιτιολόγησής τους. Στη συνέχεια τις περισσότερες φορές κάνουν παραγωγικές (deductive) αιτιολογήσεις. Επειδή ο τρόπος που εργάζονται δεν είναι αυστηρά γραμμικός, είναι σύνηθες να μεταπηδούν κατά τη διάρκεια της απόδειξης από τον εμπειρικό τρόπο στον παραγωγικό και αντίθετα.

Οι Harel και Sowder (1998) χρησιμοποιούν 3 κύριες κατηγορίες:

1. Αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς, όπου οι αμφιβολίες μετακινούνται με επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί συμβολική φόρμα

2. Εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα

Οι εικασίες επικυρώνονται ή αντικρούονται από φυσική εμπειρία, αντιληπτικά ή επαγωγικά επιχειρήματα.

3. Αναλυτικά αποδεικτικά σήματα όπου η εικασία επικυρώνεται με λογική παραγωγή

και η Hadas και οι συνεργάτες της (Hadas et al, 2000) χρησιμοποιεί μια παρόμοια κατηγοριοποίηση:

1. κατηγορία μη επεξήγησης

σε αυτήν ανήκουν απαντήσεις που δεν είχαν καμία επιχειρηματολογία, ή ήταν κυρίως ταυτολογίες ή η επιχειρηματολογία τους στηριζόταν σε εξωτερική πηγή

2. κατηγορία επαγωγικής επεξήγησης

όταν τα συμπεράσματα δε βασίζονταν σε παραγωγική αιτιολόγηση αλλά ήταν γενικεύσεις παραδειγμάτων

3. κατηγορία μερικής παραγωγικής επεξήγησης

4. κατηγορία οπτικής μεταβολής

όταν η επεξήγηση χρησιμοποιούσε οπτική μεταβολή που ήταν αποτέλεσμα φαντασίας ή του συρσίματος

5. κατηγορία παραγωγικής επεξήγησης

2.4 Θεωρητικό πλαίσιο του Stylianides

Ο Stylianides (2007) έχει δημιουργήσει ένα θεωρητικό πλαίσιο με το οποίο νοηματοδοτεί την έννοια της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά. Μέσα απ᾽ αυτό το πλαίσιο εξετάζοντας μια μαθηματική διαδικασία μπορεί κάποιος να αποφανθεί αν αυτή αποτελεί μαθηματική απόδειξη ή όχι. Δύο είναι οι βασικές αρχές του:

1. **Η αρχή της διανοητικής εντιμότητας (The intellectual honesty principle).**

Σύμφωνα με αυτήν την αρχή, η απόδειξη όσον αφορά τα σχολικά μαθηματικά θα έπρεπε να εμπεριέχει δύο στοιχεία. Αφενός μεν να υιοθετεί την αυστηρότητα και την ακρίβεια που έχει μια μαθηματική διαδικασία, λαβαίνοντας υπόψη και σεβόμενη την επιστημονικότητα των μαθηματικών, αφετέρου να σέβεται τους μαθητές ως εκπαιδευόμενους στα μαθηματικά, ως δέκτες της μαθηματικής γνώσης. Θα πρέπει να υπάρχει μια ισορροπία ανάμεσα στις δύο λειτουργίες η οποία να ικανοποιεί μια πρόταση για να θεωρηθεί απόδειξη.

Στηρίζεται στην εργασία του Bruner ο οποίος υποστήριζε ότι οποιοδήποτε θέμα στα μαθηματικά μπορεί να διδαχθεί αποτελεσματικά σε κάποιο επίπεδο μαθηματικής πραγματικότητας, σε οποιοδήποτε παιδί, σε οποιοδήποτε στάδιο ανάπτυξης.

2. **Η αρχή της συνέχειας (The continuum principle)**.

Σύμφωνα με αυτήν, η έννοια της απόδειξης θα έπρεπε να έχει μια συνέχεια στη διάρκεια της εκπαίδευσης στα μαθηματικά στο σχολείο δηλαδή να υπάρχει μια συνέχεια στο πως εμφανίζεται η απόδειξη στους μαθητές διαφόρων επιπέδων. Να μη χρειάζεται καθώς ο μαθητής ανεβαίνει επίπεδο, να αναιρούνται αυτά που είχε μάθει στο προηγούμενο επίπεδο. Από τις μικρές τάξεις του δημοτικού έως το λύκειο η απόδειξη θα έπρεπε να παρουσιάζεται στους μαθητές έχοντας μια συνεκτικότητα και να μη χρειάζεται να αντιμετωπίζεται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε επίπεδο εκπαίδευσης.

Υπάρχουν 4 στοιχεία τα οποία είναι σημαντικά για να θεωρήσουμε ότι μια πρόταση έχει την ισχύ της μαθηματικής απόδειξης και δεν είναι ένας απλός ισχυρισμός.

1. Η θεμελίωση (foundation). Αφορά τα στοιχεία στα οποία βασίζεται η πρόταση, για παράδειγμα οι ορισμοί, τα αξιώματα κ.λπ.

2. Η τυποποίηση (formulation). Έχει σχέση με τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται ο ισχυρισμός από το μαθητή, αν για παράδειγμα γενικεύει μια ειδική περίπτωση ή αν χρησιμοποιεί λογική επαγωγή και λογικά συμπεράσματα.

3. Η έκφραση (representation). Περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο εκφράζεται ο μαθητής κατά τη διάρκεια της περιγραφής του ισχυρισμού του, αν δηλαδή χρησιμοποιεί αλγεβρική γλώσσα ή γλώσσα της καθημερινότητας κ.ο.κ.

4. Κοινωνική διάσταση (social dimension). Πως εμφανίζεται η απόδειξη στο κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο παράγεται.

Οι μαθηματικές προτάσεις και αποδείξεις έχουν ένα γενικά παραδεκτό στη μαθηματική κοινότητα προφίλ και στηρίζονται σε γενικούς κανόνες. Βασίζονται σε ορισμούς , αξιώματα και προτάσεις οι οποίες έχουν αποδειχθεί και είναι γενικά αποδεκτές, χρησιμοποιούν ορθούς κατά την κοινότητα συμπερασμούς, παρουσιάζονται με κατάλληλες μαθηματικές εκφράσεις. Ο δάσκαλος παίζει σημαντικό ρόλο στην τάξη αφού μπορεί να θεωρηθεί ο αντιπρόσωπος της μαθηματικής κοινότητας μέσα στην τάξη.

Σύμφωνα με τις παραπάνω αρχές μια εμπειρική αιτιολόγηση δε μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη ακόμα και στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Στόχοι της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Η απόδειξη είναι μια από τις σημαντικότερες διαδικασίες των Μαθηματικών και ένα από τα κύρια συστατικά της είναι η εικασία.

Η εικασία προηγείται μιας δήλωσης – πρότασης στα μαθηματικά και είναι η αρχή της αλυσίδας πρόταση – απόδειξη – θεωρητικό πλαίσιο το οποίο η Mariotti (2012) ονόμασε Θεώρημα. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό η εικασία να διατυπωθεί σε μορφή υποθετικής πρότασης.

Η διαδικασία της απόδειξης είναι περίπλοκη και δύσκολη ιδιαίτερα για τους μαθητές. Παρόλ' αυτά, όπως αναφέρει ο Jones (2000) έρευνες και στην πρωτοβάθμια αλλά και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχουν δείξει ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν στοιχεία παραγωγικής απόδειξης μέσα από διαδικασίες στις οποίες εμπλέκονται και οι εκπαιδευτικοί αλλά και τα εργαλεία.

Σύμφωνα με τον Jones (2000) ενώ έχουν γίνει αρκετές έρευνες σχετικά με την επίδραση που έχουν τα DGS επάνω σε μαθητές της ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (λυκείου) και γνωρίζουμε αρκετά για το θέμα αυτό, είναι λίγα αυτά που γνωρίζουμε για τους μικρότερους μαθητές του γυμνασίου αλλά και του δημοτικού.

Η προτεινόμενη έρευνα θα μελετήσει τη δημιουργία εικασιών, τη διαμόρφωσή τους σε υποθετικές (υπό όρους προτάσεις) από τους μαθητές καθώς εμπλέκονται με τη διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (Dynamic Geometry System – DGS) καθώς και τη διάθεση που θα δείξουν στο να προχωρήσουν σε αιτιολόγηση των εικασιών τους και ίσως σε απόδειξη.

Σημαντικό ρόλο στην έρευνα παίζει η ηλικία των μαθητών δεδομένου ότι είναι μαθητές της α' γυμνασίου για τους οποίους όπως αναφέρεται παραπάνω δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες που μελετούν τη συμπεριφορά τους στην αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

1. Μελέτη δημιουργίας εικασιών. Θα διερευνηθεί αν οι μαθητές δημιουργούν εικασίες όταν εμπλέκονται με τη διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Θα εξεταστεί η διαμόρφωση και εξέλιξη των εικασιών, ποιοι παράγοντες επέδρασαν στην παραγωγή τους και θα αναλυθεί ο ρόλος των διαθέσιμων εργαλείων του λογισμικού με έμφαση στο σύρσιμο. Ακόμα θα εξεταστεί αν οι μαθητές μπορούν με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να διαμορφώσουν τις εικασίες τους σε μορφή υποθετικών προτάσεων (conditional statements)

2. Εμπλοκή σε προσπάθεια απόδειξης. Θα εξεταστεί αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές αναγνωρίζουν την ανάγκη να στηρίξουν λογικά τις εικασίες τους και να προχωρήσουν σε κάποιες μορφές αιτιολόγησης και απόδειξης. Σε αυτήν την περίπτωση θα διερευνηθεί το είδος των αποδεικτικών σχημάτων που θα χρησιμοποιήσουν.

3.2 Συμμετέχοντες και διαδικασία της έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν 6 μαθητές (5 αγόρια και 1 κορίτσι) της Α' Γυμνασίου. Η έρευνα έγινε τον τελευταίο μήνα της σχολικής περιόδου, οπότε είχαν διδαχθεί τις ακόλουθες ενότητες γεωμετρίας: ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες και σχετική θέση τους, γωνίες και είδη γωνιών, παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία και σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από αυτές, συμμετρία.

Οι μαθητές χωρίσθηκαν σε 3 ομάδες των 2 ατόμων η καθεμιά έτσι ώστε να χειρίζονται και οι δύο το ποντίκι και να βοηθηθεί έτσι η εμφάνιση σημείων από τη μεταξύ τους επικοινωνία. Όπως αναφέρει η Pedemonde (2007) οι δύο μαθητές εργαζόμενοι μαζί μπροστά στην οθόνη του υπολογιστή είναι δεσμευμένοι προκειμένου να βρουν μια κοινή λύση.

Οι συναντήσεις έγιναν σε εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, εκτός διδακτικού ωραρίου και αφού είχε ζητηθεί η σχετική άδεια από τους γονείς των μαθητών. Η κάθε ομάδα είχε μπροστά της έναν υπολογιστή με οθόνη. Ο εκπαιδευτικός χειριζόταν φορητό υπολογιστή ο οποίος ήταν συνδεδεμένος με διαδραστικό πίνακα. Υπήρχε η δυνατότητα να βλέπει τις οθόνες των μαθητών στον υπολογιστή του και να τις προβάλλει στον κεντρικό πίνακα. Οι μαθητές

επιλέχθηκαν τυχαία μετά από πρόσκληση του εκπαιδευτικού και αποδοχής της. Δεν αποτελούν αντιπροσωπευτικό δείγμα. Οι επιδόσεις τους στα μαθηματικά ήταν πάνω από το μέτριο και έφτανε ως το άριστα για δύο από αυτούς.

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Geometer's Sketchpad.

Η σχέση των μαθητών με τους υπολογιστές, ήταν η τυπική που έχει ένας μέσος μαθητής αυτής της ηλικίας και τάξης. Είχαν παρακολουθήσει το μάθημα πληροφορικής της τάξης τους για τα 2 πρώτα τρίμηνα. Ήξεραν να χειρίζονται το ποντίκι και είχαν βασικές γνώσεις της χρήσης του υπολογιστή. Δεν είχαν κάνει χρήση λογισμικών που αφορούν τα μαθηματικά. Είχαν παρακολουθήσει ελάχιστες φορές μάθημα μαθηματικών στο οποίο έγινε χρήση του λογισμικού από τον εκπαιδευτικό.

3.3 Διαδικασία

Αρχικά έγινε μία προκαταρκτική συνάντηση έτσι ώστε οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με το λογισμικό και να αποκτήσουν κάποια εξοικείωση με αυτό. Αυτή η συνάντηση έγινε μια εβδομάδα πριν την έναρξη της έρευνας και διήρκεσε δύο ώρες. Συμμετείχαν οι έξι μαθητές οι οποίοι θα συμμετείχαν και στην έρευνα, δεν ήταν όμως χωρισμένοι σε ομάδες. Ο λόγος ήταν για να έρθουν σε επαφή όλοι με το λογισμικό για όσο περισσότερο χρόνο ήταν δυνατόν. Η συνάντηση έγινε στην ίδια αίθουσα με αυτήν της υπόλοιπης έρευνας και με τον ίδιο εξοπλισμό. Δόθηκαν φύλλα εργασίας με ζητούμενες κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουν κάποιες εντολές που θα χρησίμευαν στην υπόλοιπη δραστηριότητα.

Στη συνέχεια έγιναν δύο δίωρες συναντήσεις στις οποίες συμμετείχαν και οι τρεις ομάδες συγχρόνως. Δόθηκαν δύο συνολικά φύλλα εργασίας από τα οποία τα 1ο συζητήθηκε στην 1η συνάντηση και το 2ο στη 2η .

Η συλλογή δεδομένων έγινε από:

1. Φύλλα εργασίας
2. Λογισμικό καταγραφής της οθόνης

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε σε κάθε συνάντηση ήταν η εξής:

Οι μαθητές εργαζόντουσαν στις ομάδες τους υλοποιώντας τα φύλλα εργασίας και την ίδια ώρα ο εκπαιδευτικός είτε εκινείτο ανάμεσα στα θρανία παρατηρώντας τη διαδικασία είτε βρισκόταν μπροστά στον υπολογιστή του βλέποντας τις οθόνες των μαθητών. Σε κάθε περίπτωση συνεργαζόταν με τους μαθητές είτε απαντώντας σε ερωτήσεις τους είτε δίνοντας κάποιες οδηγίες όταν το έκρινε απαραίτητο. Όταν οι μαθητές ήταν έτοιμοι, δηλαδή είχαν εργασθεί με όλες τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας, ανεξάρτητα αν είχαν πετύχει κάποιο αποτέλεσμα, γινόταν συζήτηση στην ολομέλεια.

Ο εκπαιδευτικός συμβουλευόμενος ανάλογες δραστηριότητες (Hadas et al, 2000) ενθάρρυνε τους μαθητές να:

- κάνουν εικασίες
- ελέγχουν τις υποθέσεις τους με μετρήσεις
- να εξηγούν προφορικά την καθολικότητα των ισχυρισμών τους
- να γράφουν τις υποθέσεις τους και τις επεξηγήσεις τους σε φύλλα εργασίας

3.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Παρακάτω παρατίθενται τα δύο φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές στις δύο συναντήσεις. Σε κάθε ερώτημα υπάρχει μια μικρή επεξήγηση για το λόγο ύπαρξης αυτού του ερωτήματος καθώς και τι ανέμενε ο εκπαιδευτικός να γίνει από τους μαθητές κατά τη διαδικασία εμπλοκής τους με αυτό.

Φύλλο εργασίας 1

1. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Φτιάξτε τη διάμεσο ΑΜ, τη διχοτόμο ΑΔ και το ύψος ΑΚ.

Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν οι ίδιοι τα τρία ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε μέσα από τη διαδικασία κατασκευής τους, να γίνουν πιο οικείοι με αυτές τις έννοιες.

2. Σέρνοντας την κορυφή Α, κάντε μεταβολές στο τρίγωνο. Κάντε το οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο. Τι παρατηρείτε; Διατυπώστε την παρατήρησή σας σε μια πρόταση.

Με αυτό το ερώτημα ζητείται από τους μαθητές αρχικά να κάνουν σύρσιμο αναζήτησης (wandering dragging). Σύμφωνα με τον Arzarello και τους συνεργάτες του (Arzarello et al, 2002) το σύρσιμο μπορεί να διαμεσολαβήσει συνδέοντας το κενό ανάμεσα στο θεωρητικό και το αντιληπτικό. Βοηθά στη δημιουργία εικασιών και δίνει ανατροφοδότηση, ενισχύοντας την πορεία προς την απόδειξη. Δεν αναμένεται να χρησιμοποιήσουν κάποιον άλλον τρόπο συρσίματος γιατί λόγω της ηλικίας και των γνώσεων που έχουν δε θα θεωρήσουν αναγκαίο κάτι διαφορετικό.

Η πορεία που περιμένουμε να ακολουθήσουν είναι η ανερχόμενη (ascending) σύμφωνα με την οποία ο μαθητής ξεκινά από τα σχήματα και οδηγείται προς τη θεωρία.

Αναμένεται να παρατηρήσουν:

- Ότι και τα τρία ευθύγραμμα τμήματα περνούν συνέχεια από το Α (αφού βέβαια κατασκευάσθηκαν έτσι).
- ότι και τα τρία μεταβάλλονται.
- ότι η σχετική τους θέση παραμένει σταθερή, δηλαδή το ύψος βρίσκεται πάντα προς το μέρος της μικρότερης πλευράς και η διχοτόμος βρίσκεται ανάμεσα στο ύψος και τη διάμεσο.
- ότι κάποια στιγμή ταυτίζονται. Με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού θα οδηγηθούν στην εικασία ότι τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Θα γίνει προσπάθεια να δημιουργηθεί η υποθετική πρόταση:

ΑΝ ***το τρίγωνο είναι ισοσκελές*** ΤΟΤΕ ***το ύψος η διάμεσος και η διχοτόμος ταυτίζονται.***

Μια τέτοια υποθετική πρόταση (conditional statement) η οποία εκφράζει μια εικασία του μαθητή σύμφωνα με τη Mariotti είναι η απαρχή της πορείας προς την απόδειξη.

Αφού γίνει η διατύπωση της παραπάνω πρότασης θα τονισθεί στους μαθητές ότι αυτή ονομάζεται εικασία έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί η έννοια στην υπόλοιπη δραστηριότητα. Πάντως οι μαθητές ήταν οικείοι με τον όρο ¨εικασία¨ από το μάθημα.

Η διατύπωση της εικασίας είναι απαραίτητη για τη συνέχεια της δραστηριότητας και έχει σχεδιασθεί να υπάρξει αρκετή βοήθεια από τον εκπαιδευτικό προς αυτήν την κατεύθυνση. Δεδομένου ότι το ερευνητικό ερώτημα είναι αν οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν εικασίες όταν έρθουν σε επαφή με κάποια γεωμετρικά προβλήματα (ένα ανοικτό πρόβλημα στην περίπτωση που εξετάζουμε), στην περίπτωση που απέχουν από τέτοιου είδους διατύπωση, θεωρείται ότι όσον αφορά τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, το ερώτημα θα έχει απαντηθεί αρνητικά.

3. Πιστεύετε ότι η παραπάνω εικασία ισχύει σε όλα τα τρίγωνα ανεξάρτητα από τα μήκη των πλευρών τους και από τις γωνίες τους (ορθή – οξεία – αμβλεία);

Σύμφωνα με το Tall (στο de Villiers 1999) υπάρχουν 3 επίπεδα για μια πειστική επιχειρηματολογία. Να πείσει κάποιος τον εαυτό του, να πείσει έναν φίλο και να πείσει έναν εχθρό. Στα πλαίσια αυτής της πρότασης, η ερώτηση αυτή θέλει να ελέγξει αν ο μαθητής είναι πεπεισμένος για την ισχύ της εικασίας που έχει κάνει αλλά και για την καθολικότητα της.

Ο εκπαιδευτικός αναμένει να χρησιμοποιήσουν το σύρσιμο περιπλάνησης και να κάνουν πολλές δοκιμές με τρίγωνα όλων των ειδών, δηλαδή οξυγώνια, ορθογώνια και αμβλυγώνια. Η πορεία που αναμένεται να ακολουθήσουν είναι η ανερχόμενη, από τα παραδείγματα προς τη θεωρητική γενίκευση. Η αιτιολόγηση θα είναι εμπειρική (empirical justification) σύμφωνα με το μοντέλο των Marrades, Gutierrez.

Η επόμενη ερώτηση συνεχίζει τη διερεύνηση αυτή, ζητώντας να μάθει αν ο μαθητής θεωρεί ότι έχει πείσει τους άλλους.

4. Πως μπορείτε να πείσετε τον οποιοδήποτε για την αλήθεια του ισχυρισμού σας;

Η προσπάθεια του ερευνητή είναι να δημιουργήσει στο μαθητή την ανάγκη να κάνει κάποια απόδειξη της παραπάνω εικασίας του. Υπάρχει τρόπος τυπικής απόδειξης, χρησιμοποιώντας συμμετρία που οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί. Ο δρόμος λοιπόν που θα προσπαθοήσει ο εκπαιδευτικός να ωθήσει τα πράγματα είναι κάποια επιβεβαίωση - απόδειξη μέσω της συμμετρίας.

Φύλλο εργασίας 2

1. Κατασκευάστε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σχεδιάζοντας τις απέναντι πλευρές του παράλληλες . Σύρετε την πλευρά ΑΒ και τοποθετήστε την επάνω στη ΓΔ. Τι παρατηρείτε; Κάντε το ίδιο και με τις άλλες δύο πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

Στη 2η συνάντηση ο σκοπός είναι να μελετηθεί κατά το δυνατόν το παραλληλόγραμμο και οι ιδιότητές του. Στο 1ο ερώτημα ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο και τους υποδεικνύεται ο τρόπος, τον οποίον γνωρίζουν από τη συνάντηση που είχε προηγηθεί για να έρθουν σε επαφή με το λογισμικό. Αναμένεται να σύρουν τη μια πλευρά του παραλληλογράμμου, να την ακουμπήσουν επάνω στην απέναντι πλευρά, να παρατηρήσουν ότι οι δύο πλευρές ταυτίζονται και από αυτό να βγάλουν το συμπέρασμα ότι οι πλευρές αυτές είναι ίσες. Στη συνέχεια κάνοντας το ίδιο για τις άλλες δύο πλευρές αναμένεται να συμπεράνουν ότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες.

2. Δοκιμάστε τη μετακίνηση αυτή σε διαφορετικά παραλληλόγραμμα. Τι παρατηρείτε; Διατυπώστε τις παρατηρήσεις σας σε μια μαθηματική πρόταση.

Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να γενικεύσουν την παρατήρηση που έχουν κάνει για την ισότητα των απέναντι πλευρών. Για το λόγο αυτό πρέπει να κατασκευάσουν διαφορετικά παραλληλόγραμμα και να επαναλάβουν το σύρσιμο που είχαν κάνει στο 1ο ερώτημα. Παρακινούνται να κάνουν διερεύνηση με σύρσιμο και αναμένεται να κάνουν σύρσιμο αναζήτησης (wandering dragging). Στη συνέχεια και με τη διαμεσολάβηση του ερευνητή θα πρέπει να διατυπώσουν μια εικασία. Η εικασία θα είναι της μορφής υποθετικής πρότασης:

Εάν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο **τότε** οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

3. Φέρτε τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου ΑΓ και ΒΔ. Με το κατάλληλο εργαλείο του λογισμικού βρείτε τα μέσα τους. Παρατηρήστε το σχήμα και διατυπώστε μια εικασία. Πως μπορείτε να πείσετε κάποιον ότι αυτή η εικασία ισχύει σε κάθε παραλληλόγραμμο;

Η ιδιότητα η οποία αναμένεται να αναδυθεί είναι ότι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Με αυτήν την ερώτηση ζητείται πάλι οι μαθητές να εικάσουν αλλά τώρα τους ζητείται να προχωρήσουν παρακάτω, σε μια αιτιολόγηση ή απόδειξη. Αναμένεται οι μαθητές χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα εργαλεία του λογισμικού, να βρουν τα μέσα των διαγωνίων και να παρατηρήσουν ότι ταυτίζονται. Υπάρχει πιθανότητα κάποιοι να σύρουν μια κορυφή του παραλληλογράμμου έτσι ώστε να το αλλάξουν για να διερευνήσουν αν η ιδιότητα που έχουν παρατηρήσει έχει καθολική ισχύ. Εκτιμάται ότι δύσκολα οι μαθητές θα μπορέσουν να διατυπώσουν μια εικασία ακόμα και αν παρατηρήσουν την ιδιότητα γι' αυτό έχει σχεδιασθεί να υπάρξει παρέμβαση του εκπαιδευτικού προς αυτήν την κατεύθυνση.

Επιπλέον θα διερευνηθεί και η διάθεση των μαθητών να προχωρήσουν σε κάποια μορφή αιτιολόγησης σύμφωνα με το 2ο ερευνητικό ερώτημα. Η εκτίμηση είναι ότι το σχήμα που θα βλέπουν οι μαθητές στην οθόνη θα είναι αρκετό να τους πείσει για την αλήθεια της πρότασης, οπότε σύμφωνα με τη βιβλιογραφία θα έχουμε μια μορφή εμπειρικής αιτιολόγησης.

4. Ορίζοντας ως κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων, επιλέξτε τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ και στρέψτε τις κατά γωνία 180ο. Τι παρατηρείτε; Ποια μαθηματική διαδικασία σας θυμίζει η στροφή ενός σχήματος κατά 180ο;

Τα ερωτήματα 4 και 5 αποσκοπούν να βγει το συμπέρασμα ότι οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες. Ζητείται να στρέψουν δύο πλευρές κατά 180ο γύρω από το κέντρο του παραλληλογράμμου μια διαδικασία που οι μαθητές γνωρίζουν από την προηγούμενη συνάντηση. Στρέφοντας τις πλευρές κατά 180ο θα συμπέσουν με τις άλλες δύο πλευρές του παραλληλογράμμου και η γωνία που

σχηματίζουν θα ταυτισθεί με την απέναντι γωνία. Αυτή είναι η παρατήρηση που περιμένουμε να κάνουν οι μαθητές. Η διαδικασία αυτή θυμίζει κεντρική συμμετρία την οποία έχουν διδαχθεί και θα γίνει προσπάθεια να οδηγηθούν προς αυτήν.

5.	Εξηγήστε γιατί οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες

Αφού οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι συμμετρικές με κέντρο συμμετρίας το κέντρο του παραλληλογράμμου, θα είναι και ίσες.

Με την τελευταία ερώτηση δίνεται η μαθηματική πρόταση στους μαθητές και ζητείται η αιτιολόγησή της. Η βοήθεια γι' αυτό είναι η προηγούμενη ερώτηση 4 και τα συμπεράσματά της, ότι δηλαδή αφού οι απέναντι γωνίες είναι συμμετρικές θα είναι και ίσες. Αναμένεται οι μαθητές δύσκολα να μπορέσουν να φτάσουν στο τελικό συμπέρασμα. Ο σχεδιασμός είναι να τους δοθεί κάποια βοήθεια ανάλογα με το βαθμό προσέγγισής τους προς το ζητούμενο.

3.5 Ανάλυση των δεδομένων

Η ανάλυση έγινε με τη μέθοδο των κρίσιμων συμβάντων. Σύμφωνα με τους Powell, Francisco και Maher (2003) λέμε κρίσιμο ένα γεγονός στο οποίο παρατηρείται σημαντική πρόοδος σε σχέση με προηγούμενα συμβάντα. Σε αυτήν την περίπτωση ο ερευνητής βοηθείται να κατανοήσει την επίδραση που έχει το γεγονός στην παραπέρα κατανόηση. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι αρχικά να αναγνωρισθεί ένα γεγονός ως κρίσιμο είτε γιατί δημιουργείται από μια μαθηματική ενόραση είτε γιατί παρουσιάζει γνωστικό εμπόδιο. Ο ερευνητής καλείται να αναγνωρίσει το πλαίσιο μέσα στο οποίο κινείται ο μαθητής, τις στρατηγικές που ακολουθεί, τις αρχικές του ιδέες και τα δρόμο προς τον οποίο κινείται. Οργανώνοντας τα κρίσιμα συμβάντα δημιουργείται μια ιστορία η οποία τελικά βοηθά τον ερευνητή να κατανοήσει τη νοητική πορεία του μαθητή ή μιας ομάδας που συνεργάζεται.

Αφού απομαγνητοφωνήθηκαν τα δεδομένα των 2 συναντήσεων, επιλέχθηκαν τα σημεία στα οποία εμφανιζόντουσαν συμβάντα που είχαν ενδιαφέρον για την έρευνα και αναλύθηκαν. Τέτοια γεγονότα ήταν αυτά που έδειχναν τη στρατηγική που ακολουθούσε ο μαθητής, τη συνεργασία των μαθητών μέσα στην ομάδα, οι περιπτώσεις που διαφαινόταν ότι ο μαθητής είχε κάποια ενόραση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ανάλυση ανά ερευνητικό ερώτημα

Παρακάτω περιγράφεται η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας ανά ερευνητικό ερώτημα. Αναλύοντας το 1ο ερευνητικό ερώτημα το οποίο έχει σχέση με τη δημιουργία εικασιών από τους μαθητές, καταγράφονται οι εικασίες οι οποίες έγιναν και κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τους παράγοντες που επηρέασαν τη δημιουργία τους. Περιγράφονται κάποια κρίσιμα συμβάντα σχετικά με το 1ο ερευνητικό ερώτημα και αναλύονται. Στη συνέχεια γίνεται μελέτη της διατύπωσης των εικασιών σε μορφή υποθετικού λόγου. Τέλος αναλύεται το 2ο ερευνητικό ερώτημα το οποίο σχετίζεται με την προσπάθεια των μαθητών να αιτιολογήσουν η ακόμα και να αποδείξουν τις εικασίες οι οποίες παρήχθησαν. Η ανάλυση εμπεριέχει και την κατηγοριοποίηση των αιτιολογήσεων σύμφωνα με θεωρητικά πλαίσια που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο της έρευνας.

4.1 1ο ερευνητικό ερώτημα

4.1.1 Μελέτη της δημιουργίας εικασιών

Οι μαθητές αρχικά έκαναν τις κατασκευές που τους ζητήθηκαν και άρχισαν να σύρουν μια κορυφή του τριγώνου σύμφωνα με το φύλλο εργασίας.

Στη συνέχεια έκαναν εικασίες τις οποίες έγραψαν στα σημειωματάριά τους. Κάποιοι έλεγξαν τις υποθέσεις τους με μετρήσεις που έκαναν. Ακολούθησε συζήτηση με τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές από όλες τις ομάδες. Στη συζήτηση αυτή αναφέρθηκαν οι εικασίες που είχαν γίνει και δόθηκαν κάποιες εξηγήσεις. Στη συνέχεια διερευνήθηκε από τον εκπαιδευτικό η διάθεση που είχαν οι μαθητές να προχωρήσουν σε αιτιολόγηση των εικασιών τους ή ακόμα πιο πέρα σε κάποιου είδους απόδειξη. Δεδομένου ότι η λειτουργία του συρσίματος βοηθά τους μαθητές να διακρίνουν κάποιες ιδιότητες, με αποτέλεσμα να πείθονται για την ισχύ μιας εικασίας αρκετά πιο εύκολα, χρειάσθηκε ο εκπαιδευτικός να

παρέμβει αρκετές φορές δίνοντας κίνητρα για να ασχοληθούν με την αιτιολόγηση μιας εικασίας και τελικά την απόδειξή της.

Αρχικά λοιπόν πρέπει να τονισθεί και έτσι απαντάται και το 1ο ερευνητικό ερώτημα, ότι οι μαθητές έκαναν εικασίες. Η παραγωγή εικασιών ήταν αναμενόμενη αφού σύμφωνα με τις Baccaglini-Frank, Mariotti (2010) κατά τη διερεύνηση κυρίως ανοικτών προβλημάτων μέσω ενός δυναμικού συστήματος γεωμετρίας (DGS) οι μαθητές παράγουν εικασίες.

Οι εικασίες οι οποίες καταγράφηκαν ήταν: (διατηρώ τον τρόπο που διατυπώθηκαν τόσο συντακτικά όσο και σχηματικά)

1. Όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο τότε και η διάμεσος και η διχοτόμος και το ύψος είναι εσωτερικά του τριγώνου
2. Όταν είναι ορθογώνιο τότε το ύψος εφάπτεται με την ορθή γωνία και τα άλλα δύο μένουν στο εσωτερικό του τριγώνου
3. Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο το ύψος βγαίνει έξω από το τρίγωνο, ενώ τα άλλα μένουν μέσα.
4. Η διχοτόμος + τη διάμεσο μένουν πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου
5. Όταν είναι ισοσκελές το τρίγωνο τότε και η διχοτόμος και το ύψος και η διάμεσος περνούν από το ίδιο σημείο.
6. Παρατηρώ ότι η διάμεσος παραμένει σταθερή στην ευθεία ΒΓ
7. Το ύψος πηγαίνει προς την πλευρά που πηγαίνει η κορυφή Α.
8. Όταν το τρίγωνο γίνεται ορθογώνιο το ύψος ενώνεται με την πλευρά ΑΒ
9. Όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο το ύψος είναι απ᾽ έξω.
10. Στο ορθογώνιο τρίγωνο το ύψος ταυτίζεται με την πλευρά ΑΒ
11. Στο αμβλυγώνιο το ύψος βγαίνει έξω από το τρίγωνο
12. Στο οξυγώνιο το ύψος παραμένει μέσα στο τρίγωνο
13. Η διάμεσος και η διχοτόμος παραμένουν πάντα μέσα στο τρίγωνο
14. Η διάμεσος μένει πάντα στο ίδιο σημείο

4.1.2 Παράγοντες που επηρέασαν την παραγωγή εικασιών

Οι εικασίες οι οποίες κατεγράφησαν από τους μαθητές είτε ακούσθηκαν κατά τη διάρκεια της ομαδικής συζήτησης, επηρεάσθηκαν από τους παρακάτω παράγοντες:

1. το σύρσιμο
2. το δυναμικό σχήμα
3. προηγούμενες γνώσεις και πεποιθήσεις
4. τον εκπαιδευτικό
5. το ανοικτό πρόβλημα

Οι εικασίες οι οποίες παρήχθησαν από τους μαθητές ήταν αποτέλεσμα όλων των παραπάνω παραγόντων (πλην των προηγούμενων γνώσεων οι οποίες έπαιξαν ρόλο σε δύο περιπτώσεις που περιγράφονται) και ο συνδυασμός τους οδήγησε τους μαθητές στη δημιουργία μαθηματικών προτάσεων.

- **Το σύρσιμο** που έκαναν οι μαθητές δημιουργεί άμεση ανατροφοδότηση και είναι πάντα ένας σημαντικός παράγοντας παραγωγής εικασιών. Μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε ως τεχνούργημα που βοηθά το χρήστη να παρατηρήσει τις ιδιότητες ενός σχήματος, τις κανονικότητες αν υπάρχουν, τα αναλλοίωτα και τελικά να διατυπώσει εικασίες. Ανάλογα με το σκοπό που χρησιμοποιεί κάποιος το σύρσιμο μπορούμε να διακρίνουμε τον τύπο του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές κινούσαν τυχαία κάποια κορυφή του τριγώνου και γι αυτό θα χαρακτηρίσουμε αυτό που έκαναν **σύρσιμο περιπλάνησης (wandering dragging)**. Έσερναν την κορυφή του τριγώνου και έτσι το τρίγωνο μεταβαλλόταν παραμένοντας όμως οξυγώνιο. Συγχρόνως με το σύρσιμο περιπλάνησης έκαναν και ένα άλλο είδος συρσίματος σύμφωνα με το οποίο προσπαθούσαν να διατηρήσουν μια ιδιότητα του σχήματος (π.χ. το να είναι οξυγώνιο). Το είδος αυτού του συρσίματος θα το ονομάζαμε **σύρσιμο διατήρησης (maintaining dragging).** Αφού διατύπωσαν τις παρατηρήσεις τους έκαναν το τρίγωνο ορθογώνιο και μετά από αυτό, σέρνοντας πάντα τη μια κορυφή το έκαναν αμβλυγώνιο.

Όταν έκαναν τις παρατηρήσεις και διετύπωσαν τις εικασίες, το σύρσιμο μετατράπηκε σε ***σύρσιμο ελέγχου (dragging test),*** μετακινούσαν δηλαδή την κορυφή Α, μεταβάλλοντας το τρίγωνο για να ελέγξουν αν η εικασία ίσχυε σε όλες τις

περιπτώσεις. Η πορεία που αναφέρεται παραπάνω ακολουθήθηκε και από τις τρεις ομάδες και μάλιστα με την ίδια σειρά. Όλες οι εικασίες οι οποίες διατυπώθηκαν από τους μαθητές επηρεάσθηκαν από το σύρσιμο και κατά μεγάλο ποσοστό οφείλονται σε αυτό.

- **Το δυναμικό σχήμα**, αποτέλεσμα του συρσίματος, είναι ο δεύτερος παράγοντας που βοήθησε στην παραγωγή εικασιών. Ένα σταθερό σχήμα, συνήθως επάνω στο χαρτί, δίνει αρκετές πληροφορίες και για πολλά χρόνια ήταν ένα σημαντικό εργαλείο για τη λύση προβλημάτων κυρίως στη γεωμετρία. Η δημιουργία των λογισμικών που αφορούν τα μαθηματικά και κυρίως τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας προσέφεραν το δυναμικό σχήμα, το σχήμα το οποίο μεταβάλλεται και δίνει άμεση ανατροφοδότηση στο μαθητή και στον οποιοδήποτε χρήστη. Το δυναμικό σχήμα έχει μια δυναμική η οποία δίνει προστιθέμενη αξία. Το παρακάτω κρίσιμο συμβάν περιγράφει αυτήν τη δυναμική:

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Πρόκειται για την ομάδα των Πασχ-Ντ. Ο Ντ. κινεί το ποντίκι και ο Πασχ κρατά σημειώσεις. Έχουν κατασκευάσει ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουν φέρει, όπως τους έχει ζητηθεί από το φύλλο εργασίας, το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο από την κορυφή Α.

Πασχ. Πρέπει να μετακινήσεις την κορυφή Α του τριγώνου

Ντ. Αυτό κάνω. Που να την πάω; Πάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά;

Πασχ. Οπουδήποτε, αρκεί να αλλάζει το τρίγωνο. Ξεκίνα να είναι οξυγώνιο, μετά κάντο αμβλυγώνιο και τέλος ορθογώνιο.

Ο Ντ αρχίζει να σύρει την κορυφή Α διατηρώντας το τρίγωνο οξυγώνιο.

Πασχ. Ωραία, μεγάλωσε λίγο την πλευρά ΑΒ και την ΑΓ.

Ντ. Η ΒΓ δεν αλλάζει, έχει το ίδιο μήκος.

Πασχ. Τι παρατηρούμε για τα 3 ευθύγραμμα τμήματα; Κινούνται και αλλάζουν συνέχεια.

Ντ. Θα κάνω το τρίγωνο ορθογώνιο γιατί θέλω να δω κάτι.

Ο Ντ σύρει την κορυφή Α και το τρίγωνο γίνεται αμβλυγώνιο (με αμβλεία γωνία τη Γ).

Ντ. Βλέπεις κάτι; Το ύψος βγαίνει έξω από το τρίγωνο. Όσο πηγαίνω το Α προς τα δεξιά, το ύψος βγαίνει πιο έξω.

Πασχ. Γύρνα λίγο πίσω το Α να δούμε τι γίνεται.

Ο Ντ. μετακινεί το Α στην αντίθετη κατεύθυνση και η αμβλεία γωνία Γ μικραίνει τείνοντας προς την ορθή.

Πασχ. Ώπα, κάντο ορθογώνιο.

Ο Ντ. κάνει τη γωνία Γ ορθή (κατά προσέγγιση, δεν παίρνει μετρήσεις).

Πασχ. Βλέπεις; Το ύψος έπεσε πάνω στην πλευρά.

Ντ. Ναι. Το είχα δει από πριν. Τα άλλα δύο μένουν μέσα στο τρίγωνο, ότι τρίγωνο και να είναι.

Πασχ. Τι να γράψουμε;

Ακολουθεί μια μικρή συζήτηση μεταξύ τους και μετά γράφουν τις παρακάτω τέσσερεις εικασίες:

1. Όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο τότε και η διάμεσος και η διχοτόμος και το ύψος είναι εσωτερικά του τριγώνου.
2. Όταν είναι ορθογώνιο τότε το ύψος εφάπτεται με την ορθή γωνία και τα άλλα δύο μένουν στο εσωτερικό του τριγώνου.
3. Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο το ύψος βγαίνει έξω από το τρίγωνο, ενώ τα άλλα μένουν μέσα.
4. Η διχοτόμος + τη διάμεσο μένουν πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου.

Αυτό που παρατηρούμε στο παραπάνω επεισόδιο είναι η δυνατότητα που δίνει στους μαθητές το δυναμικό σχήμα, και η οποία οφείλεται στο σύρσιμο, να κάνουν παρατηρήσεις και τελικά να διατυπώσουν προτάσεις σχετικές με ιδιότητες που είτε δε θα μπορούσαν να διακρίνουν αν είχαν μπροστά τους ένα σταθερό σχήμα επάνω στο χαρτί είτε ακόμα και να τις έβλεπαν, δε θα τους δημιουργούσαν κάποιο ενδιαφέρον έτσι ώστε να τις αναφέρουν. Αν για παράδειγμα είχαν μπροστά τους στην οθόνη ένα ακίνητο οξυγώνιο τρίγωνο και τα 3 ευθύγραμμα τμήματα (ύψος, διάμεσο, διχοτόμο), δε θα ήταν τόσο σημαντικό ή αξιοπρόσεκτο ότι και τα τρία βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου. Η μετακίνηση τους όμως και η αλλαγή θέσης, τους κίνησαν την περιέργεια, με αποτέλεσμα να δοκιμάσουν

διάφορα τρίγωνα και να παρατηρήσουν πολλές περιπτώσεις, διατυπώνοντας έτσι μια σημαντική όσον αφορά τη γεωμετρία, πρόταση.

Κρίσιμο συμβάν 2

Κάτι αντίστοιχο συνέβη και με την ομάδα των Β-Η. Αφού κατασκεύασαν το οξυγώνιο τρίγωνο και τα ευθύγραμμα τμήματα, άρχισαν να σύρουν την κορυφή Α.

Β. Κάνε πάλι το τρίγωνο ορθογώνιο.

Ο Η σύρει το Α έτσι ώστε το τρίγωνο να γίνει ορθογώνιο στο Γ.

Β. Κοίτα, το ύψος πέφτει πάνω στην πλευρά. Κάντο αμβλυγώνιο.

Ο Η σύρει το Α και η γωνία Γ γίνεται αμβλεία. Αμέσως κάνει την παρατήρηση:

Η. Το ύψος βγαίνει απέξω. Κοίτα όσο σέρνω το Α προς τα αριστερά (εννοεί ότι η γωνία Γ τείνει να γίνει οξεία) το ύψος μπαίνει προς τα μέσα. Στο οξυγώνιο είναι μέσα. Τα άλλα δύο τι κάνουν;

Β. Το πρόσεξα, τα άλλα δύο είναι συνέχεια μέσα στο τρίγωνο. Τι θα γράψουμε;

Συζητούν και αρχίζουν να γράφουν τις παρακάτω προτάσεις:

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο το ύψος ταυτίζεται με την πλευρά ΑΒ.
2. Στο αμβλυγώνιο το ύψος βγαίνει έξω από το τρίγωνο.
3. Στο οξυγώνιο το ύψος παραμένει μέσα στο τρίγωνο.
4. Η διάμεσος και η διχοτόμος παραμένουν πάντα μέσα στο τρίγωνο.
5. Η διάμεσος μένει πάντα στο ίδιο σημείο.

Η Β παρατηρεί ότι κάποια στιγμή το ύψος ταυτίζεται με τη μια πλευρά, διακρίνει ότι τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ζητά από τον Η να το ξανακάνει ορθογώνιο. Λέει στον Η την παρατήρησή της και του ζητά να το ξανακάνει αμβλυγώνιο για να την ολοκληρώσει. Ο Η αντιλαμβάνεται τη σκέψη της Β και συνεχίζει να σύρει το Α κάνοντας το τρίγωνο οξυγώνιο, έτσι ώστε να διαπιστώσουν και εκεί την ισχύ της πρότασης που είχαν στο νου τους. Στην ουσία κάνει σύρσιμο ελέγχου (dragging test). Αφού λοιπόν έχουν σχεδιάσει και τα 3 είδη τριγώνου και μάλιστα περνώντας κατά την κίνηση από πολλά οξυγώνια και αμβλυγώνια τρίγωνα διατυπώνουν τις εικασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Ως αποτέλεσμα του συρσίματος, το δυναμικό σχήμα επέδρασε με τον ίδιο τρόπο καταλυτικά στην παραγωγή εικασιών. Όλες οι ομάδες των μαθητών, παρατηρώντας το δυναμικό σχήμα στην οθόνη, μπόρεσαν να διατυπώσουν τις

εικασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Συμπερασματικά, το δυναμικό σχήμα επέδρασε καταλυτικά στην παραγωγή εικασιών και θεωρείται ένας σημαντικός παράγοντας δημιουργίας εικασιών και μαθηματικών προτάσεων.

- **Οι προηγούμενες γνώσεις και πεποιθήσεις** των μαθητών σαφώς έπαιξαν ρόλο στη διαδικασία αυτή και μάλιστα όχι πάντα θετικό. Για παράδειγμα όταν διερευνούσαν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου φάνηκε ότι κάποιοι γνώριζαν ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και έτσι δε θεώρησαν σκόπιμο να το καταγράψουν κατά τη διαδικασία της παρατήρησης. Όταν όμως παρακινήθηκαν από τον εκπαιδευτικό να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις που έκαναν σχετικά με τις πλευρές, το ανέφεραν δείχνοντας όμως ότι δεν προέκυψε από τη συγκεκριμένη διαδικασία.

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Γίνεται η ομαδική συζήτηση και αφού έχουν σύρει τη μια πλευρά του παραλληλογράμμου επάνω στην άλλη, ο εκπαιδευτικός ρωτά τι συμπεραίνουν από αυτό που βλέπουν.

Εκπ. Τι συμπεράνατε;

Β. Ότι δημιουργείται ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ταυτίζονται οι ΑΒ και οι ΓΔ.

Εκπ. Άρα αυτό τι πληροφορία μας δίνει;

Π. Ότι αφού είναι παράλληλες και ίσες ……

Εκπ. Πού το ξέρεις ότι είναι ίσες;

Π. Είναι ίσες γιατί είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες και αφού είναι ίσες και κατεβάσουμε τη μία παράλληλη στην άλλη παράλληλη θα ταυτίζονται.

Αυτό που μπορεί να παρατηρήσει κάποιος είναι ότι ο Π γνωρίζει ότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες και το χρησιμοποιεί για να δικαιολογήσει γιατί ταυτίζονται οι δύο πλευρές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η προηγούμενη γνώση λειτούργησε ανασταλτικά για τον Π και δεν του επέτρεψε να συμπεράνει σωστά από το δυναμικό σχήμα που έβλεπε εμπρός του.

Κάτι αντίστοιχο συνέβη και με το κέντρο του παραλληλογράμμου. Οι μαθητές δε γνωρίζουν ποιο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, έχουν όμως

μάλλον διαισθητική αντίληψη για το που βρίσκεται. Όταν λοιπόν τους ζητήθηκε να κάνουν κάποιες διαπιστώσεις για το σημείο τομής των διαγωνίων, ανέφεραν το κέντρο χωρίς όμως να προχωρήσουν παραπέρα τη σκέψη τους και χωρίς να διατυπώσουν κάποια πρόταση ή εικασία.

Κρίσιμο συμβάν 2

Εκπ. Πάμε στο 3.

Κατασκευάζει στον πίνακα αυτό που ζητάει το 3ο ερώτημα. Δηλαδή φέρνει τις δύο διαγωνίους και παίρνει με το κατάλληλο εργαλείο του λογισμικού, τα μέσα τους.

Π. (Διαβάζει αυτό που γράψανε στο 3). Στη διαγώνιο που φέραμε παρατηρούμε ότι το σημείο τομής βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο του παραλληλογράμμου.

Β. Παρατηρήσαμε ότι είναι το ίδιο σημείο τομής και στα δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Εκπ. Το ίδιο σημείο τομής; Κάτι άλλο θέλετε να πείτε. Ότι το μέσο τους…

Β. Είναι το ίδιο.

Ο Π και ο Χ μιλάνε για το κέντρο του παραλληλογράμμου μάλλον διαισθητικά και αυτό τους εμποδίζει να διαπιστώσουν ότι οι διαγώνιοι έχουν κοινό μέσο σε εκείνο το σημείο.

- **Ο εκπαιδευτικός**. Σε όλη τη διάρκεια της συνάντησης οι μαθητές κινήθηκαν από την εμπειρία δηλαδή το σχήμα που είχαν μπροστά τους στην οθόνη, προς τη θεωρία, όταν δηλαδή προσπαθούσαν να δημιουργήσουν μαθηματικές προτάσεις ή ακόμα και όταν χρησιμοποιούσαν κάποιες απλές μαθηματικές έννοιες. Όλες αυτές οι κινήσεις των μαθητών ανάμεσα στο αντιληπτικό και το θεωρητικό, δεν έγιναν αυθόρμητα, αλλά σημαντικό ρόλο έπαιξε και ο εκπαιδευτικός στην προσπάθεια να προσεγγίσουν τη θεωρητική γνώση (Arzarello et al 2002).

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός παρενέβη όπως προαναφέρθηκε αρκετές φορές και οι παρεμβάσεις του ακολούθησαν την κατηγοριοποίηση που έχει προαναφερθεί και την οποία αναφέρει η Mariotti. Πιο συγκεκριμένα αρκετές φορές επενέβη με ερωτήσεις του τύπου:

- Τι ακριβώς ρωτάει το φύλλο εργασίας;

- Τι έχεις κάνει μέχρι τώρα;

Επίσης όταν παρατηρούσε ότι οι μαθητές δε διέκριναν κάτι σημαντικό που βρισκόταν μπροστά τους στην οθόνη του υπολογιστή, τους εφιστούσε την προσοχή σε αυτό. Τέλος κατά τη διάρκεια της ομαδικής συζήτησης κάποιες φορές ζητούσε να συνθέσουν αυτά που είχαν αναφερθεί έως εκείνη τη στιγμή βοηθώντας και αυτός στη σύνθεση όταν έβλεπε ότι υπήρχαν δυσκολίες.

Κρίσιμο συμβάν 1

Η ομάδα των Πασχ.-Ντ έχει κατασκευάσει το παραλληλόγραμμο και αρχίζει να σύρει την πλευρά ΑΒ έτσι ώστε να ακουμπήσει επάνω στη ΓΔ, σύμφωνα με το φύλλο εργασίας. Ο Πασχ χειρίζεται το ποντίκι και τοποθετεί την πλευρά ΑΒ επάνω στη ΓΔ. Αυτό που μπορεί να διακρίνει κάποιος στην οθόνη είναι ότι το παραλληλόγραμμο έχει γίνει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Χωρίς όμως να επαναφέρει την πλευρά ΑΒ στην αρχική της θέση, κινεί το σημείο Γ προς το σημείο Δ και έτσι τελικά αυτό που μένει στην οθόνη είναι ένα σημείο.

Πασχ. (προς τον Ντ) Βλέπεις τι έγινε; Όλο το παραλληλόγραμμο έγινε ένα σημείο.

(προς τον εκπαιδευτικό) Κύριε αυτό θέλατε να δούμε; Ότι το παραλληλόγραμμο γίνεται ένα σημείο με το σύρσιμο;

Εκπ. Όχι. Διάβασε καλά το φύλλο εργασίας. Τι ακριβώς σου ζητάει;

Πασχ. Να σύρω τη μια πλευρά επάνω στην άλλη.

Εκπ. Και μετά; Εσύ τι έκανες;

- **Το ανοικτό πρόβλημα**. Το πρόβλημα που δόθηκε θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ανοικτό πρόβλημα, αφού δε ζητούσε κάτι συγκεκριμένο αλλά να κάνουν παρατηρήσεις από τη μεταβολή του σχήματος κατά την κίνησή του. Αυτού του είδους τα προβλήματα είναι σαφές ότι βοηθούν στην παραγωγή και διατύπωση εικασιών

4.1.3 Εικασίες σε μορφή υποθετικού λόγου

Το 1ο ερευνητικό ερώτημα επιπλέον έχει σχέση με τη μορφή με την οποία εκφράστηκαν οι εικασίες και συγκεκριμένα αν διατυπώθηκαν με τη μορφή υποθετικού λόγου: «αν …… τότε ……» Η Mariotti (2012) αναφέρει ότι είναι σημαντικό μια εικασία να διατυπώνεται σε τέτοια μορφή γιατί αυτό θεωρείται ένα βήμα πριν τη διαδικασία αιτιολόγησης και απόδειξης.

Στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές παρήγαγαν αρκετές εικασίες τις οποίες διατύπωναν με διαφορετικούς τρόπους. Οι διαφορετικοί τρόποι αφορούν αρχικά τα επίπεδα παρουσίασης των εικασιών. Δηλαδή οι μαθητές αρχικά εργαζόντουσαν σε ομάδες των 2 ατόμων και εκεί γινόταν η πρώτη έκφραση των παρατηρήσεών τους. Σε αυτό το επίπεδο οι διατυπώσεις ήταν εντελώς πρωτόλειες, πολλές από τις εκφράσεις δεν είχαν σωστή σύνταξη και αρκετές λέξεις που χρησιμοποιούνταν δεν ήταν οι σωστές όσον αφορά το γεωμετρικό τους νόημα. Για παράδειγμα ακούσθηκαν οι εκφράσεις:

- Η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο στη μέση
- Το ύψος είναι ορθογώνιο στη ΒΓ
- Η διάμεσος μένει πάντα στο ίδιο σημείο.

Σε δεύτερο επίπεδο οι μαθητές εκφράστηκαν όταν έγινε η ομαδική συζήτηση. Εκεί οι εκφράσεις ήταν πιο προσεγμένες από τους ίδιους. Επιπλέον εκεί παρενέβη αρκετές φορές και ο εκπαιδευτικός προσπαθώντας να διορθώσει ή να οδηγήσει με τις ερωτήσεις του σε πιο ορθές διαδρομές.

Το παρακάτω συμβάν είναι αντιπροσωπευτικό:

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Β. Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο το ύψος εφάπτεται με την ορθή γωνία.

Εκπ. Τι εννοείς;

Β. Καθώς το ύψος κινείται, ακουμπά πάνω στην πλευρά.

Εκπ. Η λέξη ακουμπά είναι καλύτερη από το εφάπτεται, θα μπορούσαμε βέβαια να βρούμε ακόμα καλύτερη. Έχει κανείς κάποια ιδέα;

Χ. Πέφτει επάνω.

Εκπ. Ακόμα καλύτερα. Η λέξη που χρησιμοποιούμε συνήθως στη γεωμετρία είναι ¨ταυτίζεται¨.

Εδώ είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι: Καθώς κινείται η κορυφή Α του τριγώνου συμπαρασύροντας το ύψος, αυτό κάποια στιγμή ¨ακουμπά¨ και τελικά ταυτίζεται με την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου. Η αίσθηση που δίνεται σε αυτόν που παρατηρεί τη διαδικασία είναι όντως της επαφής και αυτό περιγράφουν οι μαθητές. Είναι δηλαδή μια λάθος έκφραση, η οποία όμως δικαιολογείται, όσον αφορά τους μαθητές και το γνωστικό λόγω ηλικίας υπόβαθρο, από τον τρόπο που παρήχθη. Σε αυτό το σημείο μπορεί να παρατηρήσει κανείς και τα προσωπικά νοήματα που εμφανίζονται από τη χρήση του λογισμικού. Αυτά γράφονται στο φύλλο εργασίας και μετά μέσα από τη συζήτηση και με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού θα βρουν το δρόμο προς τη μαθηματική σκέψη και θεωρία.

Τελευταίο επίπεδο έκφρασης ήταν ο γραπτός λόγος. Οι μαθητές σημείωναν σε χαρτί τις παρατηρήσεις τους, αρχικά πριν τη συζήτηση αλλά και μετά από αυτήν και εκεί οι εκφράσεις ήταν ακόμα πιο προσεγμένες και πλησιέστερα σε αυτό που θεωρείται σωστή μαθηματική έκφραση από την κοινότητα των μαθηματικών.

Σημαντικό ρόλο στη διατύπωση κάποιων εικασιών στη μορφή υποθετικού λόγου έπαιξε και ο εκπαιδευτικός. Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού ο σχεδιασμός της παρέμβασης στηρίχθηκε στη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης (TSM) και στην οποία ο εκπαιδευτικός έχει σημαντικό και συνεχή ρόλο στη διαδικασία. Πρέπει να κατανοεί άμεσα τις έννοιες οι οποίες αναδύονται είτε μαθηματικές είναι αυτές είτε προσωπικές, να τις επεξεργάζεται και να καθοδηγεί τη διαδικασία μετατρέποντας αυτές τις έννοιες σε μαθηματικές.

Η 1η εικασία η οποία διατυπώθηκε στην αρχή της συζήτησης ήταν από τον Πασχ.

Πασχ. : *Όταν είναι ισοσκελές (το τρίγωνο) τότε μένει πάνω της (εννοεί η διχοτόμος επάνω στη διάμεσο).*

Όπως εύκολα παρατηρούμε είναι διατυπωμένη στην προαναφερόμενη μορφή υποθετικού λόγου, οπότε ο εκπαιδευτικός επενέβη μόνο για να διευκρινίσει κάποια πράγματα και να διορθώσει την έκφραση ¨τότε μένει πάνω της¨.

Η 2η εικασία διατυπώθηκε από τον Χ και ήταν:

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε το ύψος ενώνεται με την πλευρά

Και αυτή εκφράστηκε με τη μορφή υποθετικού λόγου. Η έκφραση ¨το ύψος ενώνεται¨ μετά από σύντομη συζήτηση του εκπαιδευτικού με τους μαθητές αντικαταστάθηκε από τη λέξη ¨ταυτίζεται¨.

Η παρατήρηση που μπορεί κάποιος να κάνει είναι ότι από την αρχή οι μαθητές διατύπωναν τις εικασίες σε μορφή υποθετικής πρότασης, οπότε δεν ήταν δύσκολο στη συνέχεια αρκετές από αυτές να διατυπωθούν με αυτήν τη μορφή. Συγκεκριμένα περίπου το 1/3 των εικασιών διατυπώθηκαν σε μορφή υποθετικής πρότασης. Ο εκπαιδευτικός παρενέβη κάποιες φορές είτε για να διορθώσει κάποιες λέξεις οι εκφράσεις είτε για να τονίσει τον υποθετικό λόγο. Πάντα μετά τη συμφωνία όλων των μαθητών, οι εικασίες γράφονταν στον πίνακα για να είναι ορατές απ' όλους.

Συμπερασματικά το DGS επέδρασε θετικά έτσι ώστε οι μαθητές να εμπλακούν με το πρόβλημα που τους δόθηκε. Αν και δεν ήταν έμπειροι όσον αφορά τη χρήση του λογισμικού, διερεύνησαν το σχήμα και αποτέλεσμα αυτού ήταν ότι μπόρεσαν να διατυπώσουν αρκετές εικασίες. Εκτιμάται ότι αυτό δε θα γινόταν αν εργαζόντουσαν με μολύβι και χαρτί.

4.2 2ο ερευνητικό ερώτημα

4.2.1 Προσπάθειες αιτιολόγησης και κατηγοριοποίησή τους

Στις περισσότερες από τις εικασίες που διατυπώθηκαν και στις δύο συναντήσεις, οι μαθητές δεν έδειξαν ενδιαφέρον να προχωρήσουν σε αιτιολόγηση. Στην 1η συνάντηση επικεντρώθηκαν στην προσπάθεια αιτιολόγησης μιας συγκεκριμένης εικασίας, αλλά αυτό έγινε ύστερα από προτροπή και επιμονή του εκπαιδευτικού. Στη 2η συνάντηση το φύλλο εργασίας ζητούσε να προχωρήσουν σε αιτιολογήσεις και οι μαθητές ασχολήθηκαν περισσότερο με αυτό χωρίς όμως να δείξουν μεγάλο ενδιαφέρον προς αυτήν την κατεύθυνση.

Οι κατηγορίες αιτιολογήσεων οι οποίες παρατηρήθηκαν και ταξινομούνται σύμφωνα με το μοντέλο των Marrades – Gutierrez είναι:

1. Εμπειρικές αιτιολογήσεις - αφελής εμπειρισμός (naïve empiricism)

Σε αυτήν την κατηγορία θα κατατάσσαμε τις αιτιολογήσεις που προκύπτουν από τα παρακάτω κρίσιμα συμβάντα:

Εικασία 1η

¨Όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος που φέρνουμε από την κορυφή, ταυτίζονται¨

Κρίσιμο συμβάν 1

Γίνεται ομαδική συζήτηση προσπαθώντας να αιτιολογηθεί η παραπάνω εικασία. Η ομάδα των Πασχ-Ντ έχει κατασκευάσει στην οθόνη ένα τρίγωνο με το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο από την κορυφή Α, έχει σύρει τα τρία ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε να συμπέσουν και προσπαθεί να αποδείξει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Η πρόταση την οποία προσπαθούν να αποδείξουν είναι η αντίστροφη από αυτήν η οποία εσυζητείτο, αλλά ο εκπαιδευτικός θεώρησε ποιο σημαντικό να τους αφήσει να συνεχίσουν την προσπάθειά τους από το να τους διορθώσει, στην ουσία σταματώντας τους.

Εκπ. Που το ξέρεις ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές;

Χ. Να μετρήσουμε τις πλευρές του

Παρατηρούμε τη μέτρηση ως προσπάθεια αιτιολόγησης, γεγονός που την κατατάσσει στον αφελή εμπειρισμό.

Κρίσιμο συμβάν 2

Εκπ. Μπορείτε να πείσετε τον οποιονδήποτε για την αλήθεια αυτής της πρότασης;

Πασχ. Πάει στο SP (Sketchpad) κάνει τα ίδια με μας και το βλέπει.

Εκπ. Θα έδειχνες το σχήμα σε έναν καθηγητή, για παράδειγμα εμένα, για να με πείσεις;

Χ. Ναι θα έμπαινα στο SP και θα σας το έδειχνα.

Εκπ. Τι θα μου έδειχνες;

Χ. Θα έπαιρνα όλες τις περιπτώσεις τριγώνων, οξυγώνιο, ορθογώνιο και αμβλυγώνιο και θα σας έδειχνα ότι ισχύει.

Αυτό που αναφέρεται λοιπόν είναι ότι για να πεισθεί κάποιος θα μπορούσε να επαναλάβει τα βήματα που έκαναν οι μαθητές με το λογισμικό. Να

κατασκευάσει ένα τρίγωνο, να φέρει από μια κορυφή το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο και να σύρει την κορυφή αυτή. Αυτό που θα παρατηρούσε θα ήταν αυτό που παρατηρήθηκε από τους μαθητές, δηλαδή ότι όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, η διάμεσος , η διχοτόμος και το ύψος που άγονται από την κορυφή, ταυτίζονται. Αυτή η παρατήρηση θα ήταν αρκετή για να τον πείσει για την καθολική ισχύ της πρότασης. Ακόμα, αν ήθελε ο μαθητής να πείσει κάποιον, για παράδειγμα τον καθηγητή του, θα μπορούσε ο ίδιος να κάνει όλα αυτά, να τα εμφανίσει στην οθόνη και αυτό θα ήταν αρκετό.

Σε αυτό το συμβάν διακρίνουμε ότι ο μαθητής προσπαθεί να αιτιολογήσει μια πρόταση χρησιμοποιώντας τα διαφορετικά σχήματα που εμφανίζονται στην οθόνη καθώς σύρει το σχήμα και τα οποία αποτελούν παραδείγματα που ενισχύουν τον ισχυρισμό του. Η αιτιολόγησή του στηρίζεται σε πολλά παραδείγματα και έτσι την κατατάσσουμε στην κατηγορία του αφελούς εμπειρισμού.

Εικασία 2η

Αν είναι παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Η ομάδα Β-Η αρχικά κατασκεύασε το παραλληλόγραμμο κάνοντας τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Ο Η χειρίζεται το ποντίκι και η Β του υποδεικνύει ότι πρέπει να σύρει τη μια πλευρά ΑΒ επάνω στην απέναντι ΓΔ και να κάνουν κάποιες διαπιστώσεις. Ο Η κάνει όπως του λέει η Β. Σύρει την ΑΒ και την ακουμπά επάνω στη ΓΔ. Στη συνέχεια συνεχίζει να σύρει την πλευρά ΑΒ επαναφέροντάς την σχεδόν στην αρχική της θέση, ξαναεμφανίζοντας το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (όχι το ίδιο με το αρχικό) και μετά φέρνει πάλι την ΑΒ επάνω στη ΓΔ. Το ίδιο κάνει και με τις άλλες δύο πλευρές του παραλληλογράμμου. Έχει διαπιστώσει όπως λέει παρακάτω ότι ¨μάλλον γίνεται μια ευθεία¨ και παίρνει διαφορετικά παραλληλόγραμμα για να διαπιστώσει την καθολικότητα αυτής της παρατήρησης. Να σημειωθεί ότι είναι αυτό που του ζητείται στο 2ο ερώτημα αλλά αυτός δεν το έχει διαβάσει ακόμα.

Κάποια στιγμή αρχίζει να εμφανίζει μέσω του κατάλληλου εργαλείου του λογισμικού, μετρήσεις του μήκους των πλευρών του παραλληλογράμμου χωρίς

αυτό να ζητείται από το φύλλο εργασίας. Αυτές όμως τις μετρήσεις δε φαίνεται να τις χρησιμοποιεί άμεσα εκείνη τη στιγμή. Η Β παρατηρεί επίσης την οθόνη και γράφει στο φύλλο εργασίας:

Βλέπουμε ότι ταυτίζεται η ΑΒ με τη ΓΔ και η ΑΔ με τη ΒΓ. Γίνονται ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Ακολουθεί ο διάλογος:

Η. μάλλον γίνεται μια ευθεία

Β. ευθύγραμμο τμήμα γίνεται το έγραψα παραπάνω, αλλά ….

Η Β. δεν ικανοποιείται από αυτήν τη διαπίστωση γιαυτό δεν τελειώνει τη φράση της. Μετά από λίγο συνεχίζει:

Β. Ξέρεις γιατί γίνεται αυτό; Γιατί αυτές (εννοεί η ΑΒ και ΓΔ) είναι ίσες. Κοίτα τα μήκη των πλευρών, είναι ίσα. Έχουν την ίδια απόσταση και μετά εδώ βγαίνουν μηδέν (μάλλον εννοεί τις μετρήσεις των μηκών των δύο άλλων πλευρών).

Γράφει στο φύλλο εργασίας: *Ταυτίζονται επειδή έχουν ίσα μήκη.*

Εδώ παρατηρούμε ότι αν και όταν εμφάνισαν τα μήκη των πλευρών δεν τα χρησιμοποίησαν φανερά, τα συμβουλεύονται κατά διαστήματα και αυτό φαίνεται από την παραπάνω φράση της Β.

<u>Κρίσιμο συμβάν 2</u>

Η ομάδα των Χ-Π εμφάνισε επίσης μετρήσεις των πλευρών και πρότεινε στην ομαδική συζήτηση να μετρηθούν οι πλευρές έτσι ώστε να αποδειχθεί η πρόταση.

Και στα δύο παραπάνω συμβάντα παρατηρούμε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα απλό παράδειγμα, ένα παράδειγμα δηλαδή που δεν επιλέχθηκε με κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο, για να αποδείξουν την εικασία. Η πρώτη ομάδα χρησιμοποιεί το σχήμα στην οθόνη και το σύρσιμο. Και οι δύο ομάδες χρησιμοποιούν τις μετρήσεις των πλευρών του παραλληλογράμμου. Οι μέθοδοί τους είναι εμπειρικές. Η παραπάνω περιγραφή συμφωνεί με τα χαρακτηριστικά που δίνουν οι Marrades-Gutierrez στην ***εμπειρική αιτιολόγηση (empirical justification)*** και μάλιστα στην υποκατηγορία ***αφελούς εμπειρισμού (naïve empiricism)***.

Κρίσιμο συμβάν 3

Ο Χ έκανε την εξής διατύπωση: *Μπορεί η πάνω και η κάτω πλευρά να μην είναι ίσες, να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη, αλλά τότε οι άλλες δε θα είναι παράλληλες.*

Ο μαθητής Χ διατυπώνει την αιτιολόγηση: Αν οι δύο πλευρές δεν είναι ίσες τότε οι άλλες δύο δε θα είναι παράλληλες. Αυτή η πρόταση είναι αρκετά εμφανής αν παρατηρήσει κάποιος το σχήμα (ένα παραλληλόγραμμο). Και σε αυτήν την περίπτωση ο μαθητής χρησιμοποιεί ένα παράδειγμα (το σχήμα στην οθόνη) για να αιτιολογήσει την εικασία. Η αιτιολόγησή του έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τις προηγούμενες οπότε θα την κατατάσσαμε στην ***εμπειρική αιτιολόγηση – αφελή εμπειρισμό.***

Επιπλέον πρέπει να τονισθεί ότι η παραπάνω διατύπωση η οποία χρησιμοποιείται από τον Χ ως αιτιολόγηση, είναι η αντιθετοαντίστροφη έκφραση από την εικασία η οποία συζητείται αυτή τη στιγμή. Ας δούμε τον πίνακα:

	Υπόθεση	Συμπέρασμα
εικασία	***Αν είναι παραλληλόγραμμο***	***οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.***
έκφραση του Χ ή με άλλα λόγια	Μπορεί η πάνω και η κάτω πλευρά να μην είναι ίσες, να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη δηλ Αν οι απέναντι πλευρές δεν είναι ίσες	οι άλλες δε θα είναι παράλληλες δηλ δεν είναι παραλληλόγραμμο

Η διατύπωση όμως της αντιθετοαντίστροφης πρότασης δε μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη.

Κρίσιμο συμβάν 4

Π. Όλα τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες ευθείες, που έχουν τις πλευρές παράλληλες (άρα) είναι όλες ίσες. (Εκείνο) το τραπέζιο που είναι πάλι τετράπλευρο έχει μόνο τις δύο πλευρές παράλληλες, αλλά δεν είναι όλες οι πλευρές ίσες.

Ντ: Ας πούμε το τετράγωνο.

Εκπ: Το τετράγωνο τι;

Ντ: Είναι ίσες.

Ο μαθητής Π. προσπαθώντας να αιτιολογήσει την εικασία αναφέρει ότι στα τετράπλευρα που οι πλευρές είναι παράλληλες (εννοεί οι απέναντι πλευρές) είναι και ίσες. Χρησιμοποιεί μάλιστα και το παράδειγμα του τραπεζίου, το οποίο έχει μόνο τις δύο πλευρές παράλληλες, με συνέπεια να μην είναι οι απέναντι πλευρές ίσες. Η έκφραση αυτή είναι η αντιθετοαντίστροφη της πρότασης – εικασίας η οποία συζητείται. Ο μαθητής Ντ. όμως συνεχίζει τον ισχυρισμό και φέρνει ως παράδειγμα-αιτιολόγηση το τετράγωνο, υπονοώντας ότι αυτό έχει τις απέναντι πλευρές ίσες. Η αιτιολόγηση του Ντ. στηρίζεται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα το οποίο γενικεύει και το χρησιμοποιεί σαν αντιπρόσωπο μιας κατηγορίας τετραπλεύρων. Υποστηρίζει δηλαδή ότι αφού ισχύει στο τετράγωνο μια συγκεκριμένη ιδιότητα θα ισχύει και σε όλα τα παραλληλόγραμμα. Θα μπορούσαμε να κατατάξουμε την αιτιολόγηση αυτή στην ***εμπειρική αιτιολόγηση*** και μάλιστα στην υποκατηγορία ***γενικεύσιμο παράδειγμα (generic example).***

2. Αποτυχημένη τυπική-παραγωγική απόδειξη

Σε αυτήν την κατηγορία θα κατατάσσαμε τις αιτιολογήσεις που προκύπτουν από τα παρακάτω κρίσιμα συμβάντα:

Εικασία 1η

¨Όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος που φέρουμε από την κορυφή, ταυτίζονται¨

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Β. Το ύψος όταν είναι ισοσκελές θα πέφτει πάντα στη μέση για να γίνεται ορθή γωνία, η διάμεσος θα είναι σίγουρα στη μέση, άρα θα ταυτίζεται με το ύψος, η διχοτόμος ποια είναι;

Εκπ. Αυτή που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες.

Β. Ναι και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος θα το χωρίζει στη μέση.

Η αιτιολόγηση που κάνει η μαθήτρια Β. πλησιάζει αρκετά σε μια τυπική απόδειξη. Συγκεκριμένα θεωρεί ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές και προσπαθεί να αποδείξει ότι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος ταυτίζονται. Για το λόγο αυτό αναφέρει ότι και τα τρία τμήματα είτε χωρίζουν το τρίγωνο στη μέση είτε πέφτουν στη μέση του τριγώνου. Είναι μια μορφή αιτιολόγησης η οποία βρίσκεται στα χνάρια μιας τυπικής απόδειξης αλλά περιέχει λάθος στοιχεία.
Θα κατατάσσαμε την αιτιολόγηση αυτή στην αποτυχημένη τυπική απόδειξη.

Εικασία 2η

Αν είναι παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Β. Να πω και κάτι άλλο; Άμα βρούμε τη διάμεσο και μετά το στρίψουμε και πέσει από την άλλη.

Εκπ. Τι εννοείς διάμεσο, τη διαγώνιο;

Β. Όχι, την κάθετη ανάμεσα στις δύο παράλληλες (με το χέρι της προσπαθεί να δείξει ποια γραμμή εννοεί) και το γυρίσουμε να πέσει το ένα πάνω στο άλλο, θα πέσει.

Η Β υπονοεί συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία την οποία δε μπορεί εύκολα να προσδιορίσει και μάλλον είναι η μεσοπαράλληλη των δύο απέναντι πλευρών. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συμμετρία είναι ένας από τους ελάχιστους τρόπους που γνωρίζουν οι μαθητές για να διαπιστώσουν ότι κάποια ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα. Η Β προσπαθεί να τη χρησιμοποιήσει προχωρώντας σε μια τυπική απόδειξη αλλά η διαδρομή την οποία ακολουθεί δεν είναι σωστή. Θα μπορούσε να κάνει απόδειξη με κεντρική συμμετρία. Πάντως πρέπει να τονισθεί ότι προσπαθεί να κάνει μια παραγωγική απόδειξη, αλλά απέχει αρκετά από αυτό.

Εικασία 3η: ***Δημιουργούνται τέσσερα τρίγωνα που τα απέναντι είναι ίσα***

<u>Κρίσιμο συμβάν 1</u>

Β. Δημιουργούνται τέσσερα τρίγωνα που τα απέναντι είναι ίσα.

Εκπ. Βέβαια δεν έχουμε μιλήσει για ίσα τρίγωνα. Τι σημαίνει ίσα τρίγωνα;

Β. Που έχουν ίσες πλευρές, ίδιο εμβαδόν. Είναι ίσα γιατί άμα το κάνετε τούμπα θα πέσει το ένα στο άλλο.

Η Β. κάνει την παρατήρηση ότι φέρνοντας τις δύο διαγωνίους του παραλληλογράμμου σχηματίζονται τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ανά δύο ίσα (τα απέναντι). Σε ερώτηση του εκπαιδευτικού τι σημαίνει ίσα τρίγωνα (οι μαθητές φοιτούν στην α' γυμνασίου και δε γνωρίζουν την έννοια της ισότητας σχημάτων), η Β δίνει μια απάντηση για ίσες πλευρές ή ίσα εμβαδά, αλλά συγχρόνως προσπαθεί να αιτιολογήσει τον ισχυρισμό της. Μιλάει για ¨τούμπα¨ του ενός τριγώνου έτσι ώστε να πέσει επάνω στο άλλο. Είναι προφανές ότι η Β έχει στο νου της την επίθεση του ενός τριγώνου επάνω στο άλλο και την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο (το κέντρο του παραλληλογράμμου). Η αιτιολόγηση της Β έχει όλα τα στοιχεία μιας τυπικής μαθηματικής απόδειξης. Χρησιμοποιεί νοητικές διεργασίες, μαθηματικές έννοιες και προτάσεις με σκοπό να επικυρώσει την πρόταση την οποία διατύπωσε. Θα την κατατάσσαμε στην **αποτυχημένη τυπική απόδειξη (failed formal justification)** αφού στο τέλος αποτυγχάνει να ολοκληρώσει την αιτιολόγηση.

4.3 Ανάλυση των αιτιολογήσεων σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Stylianides

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω (θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε από το Stylianides) μια εμπειρική αιτιολόγηση, δε μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη αφού παραβαίνει και τους δύο κανόνες του πλαισίου. Έτσι οι αιτιολογήσεις οι οποίες προαναφέρθηκαν και κατατάχθηκαν στην κατηγορία της εμπειρικής αιτιολόγησης, δε θεωρούνται αποδείξεις ούτε στο επίπεδο του σχολείου σύμφωνα με το μοντέλο αυτό. Ο λόγος είναι γιατί παραβιάζονται και οι δύο αρχές που συνθέτουν το πλαίσιό του.

Παραβιάζεται η αρχή της διανοητικής εντιμότητας (intellectual honesty principle) γιατί αφενός μεν δεν έχει την αυστηρότητα που πρέπει να έχει μια μαθηματική απόδειξη αφετέρου δεν αντιμετωπίζει τους μαθητές με την δέουσα σοβαρότητα ως δέκτες της μαθηματικής γνώσης. Πρέπει να αναφερθεί ότι

υπάρχουν στοιχεία από την έρευνα που υποστηρίζουν ότι οι μικροί μαθητές μπορούν, είναι ικανοί να συμμετέχουν σε παραγωγικές αποδεικτικές διαδικασίες.

Επιπλέον παραβιάζεται και η αρχή της συνέχειας γιατί θα χρειασθεί σε μεγαλύτερες τάξεις να απορριφθεί η απόδειξη δια μέσου παραδειγμάτων δημιουργώντας ένα σημαντικό και πολλές φορές δύσκολο να ξεπερασθεί κενό στη σχέση του μαθητή με τη διαδικασία της απόδειξης.

Ας εξετάσουμε την αιτιολόγηση της μαθήτριας Β στην 1η εικασία σύμφωνα με το κρίσιμο συμβάν που αναφέρεται παραπάνω. Χρησιμοποιεί προτάσεις της γεωμετρίας, έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το στοιχείο **της θεμελίωσης** που αναφέρεται στο μοντέλο του Stylianides ικανοποιείται. Επιπλέον χρησιμοποιεί λογικές συνεπαγωγές, όπως «*Το ύψος όταν είναι ισοσκελές θα πέφτει πάντα στη μέση για να γίνεται ορθή γωνία, η διάμεσος θα είναι σίγουρα στη μέση, άρα θα ταυτίζεται με το ύψος*» ικανοποιώντας και το δεύτερο στοιχείο με το οποίο μπορεί κάποιος να αξιολογήσει μια αιτιολόγηση, το στοιχείο **της τυποποίησης.**
Η γλώσσα την οποία χρησιμοποιεί πλησιάζει αρκετά την τυπική γεωμετρική γλώσσα. Όλα αυτά κάνουν την αιτιολόγηση της μαθήτριας Β να ικανοποιεί και τις 2 αρχές του πλαισίου του Stylianides, οπότε θα την αξιολογούσαμε ως (αποτυχημένη) απόδειξη.

Όσον αφορά την προσπάθεια αιτιολόγησης στην 3η εικασία:
Δημιουργούνται τέσσερα τρίγωνα που τα απέναντι είναι ίσα
Η θεμελίωση της αιτιολόγησης, στηρίζεται σε προτάσεις από την κεντρική συμμετρία και συγκεκριμένα ότι δύο σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας είναι ίσα. Η πορεία που ακολουθεί είναι η τυπική παραγωγική πορεία, αφού θέλοντας να συγκρίνει δύο τρίγωνα προσπαθεί να δείξει ότι στρέφοντας το ένα κατά 180ο θα πέσει επάνω στο άλλο τρίγωνο και αυτό σημαίνει ότι είναι συμμετρικά άρα ίσα. Η παρουσίαση που κάνει είναι με γλώσσα της καθημερινότητας λέγοντας ότι ¨άμα κάνουμε τούμπα το τρίγωνο ……¨ Η αιτιολόγηση λοιπόν που κάνει πλησιάζει σε αυτήν που θα έκανε ένας μαθηματικός, απέχει βέβαια αρκετά η γλώσσα που χρησιμοποιεί. Αυτό δεν είναι απαγορευτικό στο να χαρακτηρισθεί ως απόδειξη καθότι δεν παραβιάζεται η αρχή της πνευματικής εντιμότητας. Σύμφωνα με το Stylianides οι αποδείξεις των

μαθητών δεν είναι αναγκαίο να μοιάζουν με αυτές των μαθηματικών γιατί τότε θα χάλαγε η ισορροπία που πρέπει να υπάρχει ανάμεσα στα αυστηρά μαθηματικά και το μαθητή ως εκπαιδευόμενο δηλαδή στην απλοποίηση των πραγμάτων προς χάριν της κατανόησης του μαθητή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην έρευνα ετέθησαν δύο ερευνητικά ερωτήματα τα οποία αφορούν την παραγωγή εικασιών από τους μαθητές και την προσπάθεια για αιτιολόγηση τους. Πιο συγκεκριμένα μέσα από δύο δραστηριότητες έγινε η προσπάθεια να διερευνηθεί, αν οι μαθητές οι οποίοι επιλέχθηκαν να συμμετέχουν, θα διετύπωναν κάποιες εικασίες, τι μορφή θα είχαν αυτές, και τελικά αν θα αναγνώριζαν την ανάγκη να αιτιολογήσουν η ακόμα και να αποδείξουν τις προτάσεις που θα είχαν παραχθεί. Για την αιτιολόγηση επιλέχθηκε το θεωρητικό μοντέλο των Marrades – Gutierez μέσω του οποίου θα μπορούσε αυτές να ταξινομηθούν.

Στην 1η συνάντηση με τους μαθητές, δόθηκε ένα ανοικτό πρόβλημα και ζητήθηκε να διερευνήσουν το σχήμα και να γράψουν τις παρατηρήσεις και τις εικασίες τους. Το 1ο φύλλο εργασίας το οποίο διεκπεραιώθηκε στην 1η συνάντηση άφηνε τους μαθητές ελεύθερους να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις τους. Τα δύο τελευταία ερωτήματα προσπαθούσαν να διερευνήσουν αν οι μαθητές ήθελαν να προχωρήσουν σε κάποια αιτιολόγηση, αν είχαν πεισθεί για την αλήθεια των προτάσεων που είχαν διατυπώσει και αν θεωρούσαν ότι θα μπορούσαν να πείσουν τον οποιονδήποτε γι' αυτό και με ποιόν τρόπο.

Οι μαθητές εργαζόμενοι αρχικά σε ομάδες και αργότερα σε ομαδική συζήτηση, διατύπωσαν κάποιες εικασίες και μάλιστα σε μορφή υποθετικών προτάσεων. Οι εικασίες ταξινομήθηκαν κατά την ανάλυση, σύμφωνα με τους παράγοντες που επέδρασαν έτσι ώστε να παραχθούν. Το αξιοσημείωτο είναι ότι από τους πέντε παράγοντες οι τρεις δηλαδή το σύρσιμο, το δυναμικό σχήμα και ο εκπαιδευτικός επηρέασαν την παραγωγή όλων των εικασιών και αυτό αναλύθηκε παραπάνω. Η διατύπωση σε μορφή υποθετικών προτάσεων δεν αποδείχθηκε δύσκολη. Αρχικά υπήρξε βοήθεια από τον εκπαιδευτικό έτσι ώστε οι δύο πρώτες εικασίες να έχουν αυτή τη μορφή.

Οι μαθητές δεν έδειξαν διάθεση να αποδείξουν αυτές τις εικασίες ούτε όταν εργαζόντουσαν στις ομάδες τους, ούτε κατά τη διάρκεια της συζήτησης. Σύμφωνα με το σχεδιασμό, ο εκπαιδευτικός επέμεινε στην ερώτηση αν μπορούσε να πεισθεί

κάποιος για την ισχύ των προτάσεων που είχαν διατυπωθεί και πως θα μπορούσε να γίνει αυτό και τελικά έγιναν τρεις προσπάθειες αιτιολόγησης οι οποίες ταξινομήθηκαν σύμφωνα με το μοντέλο των Marrades-Guttierez. Οι δύο πρώτες κατατάσσονται στις εμπειρικές αιτιολογήσεις και μάλιστα στην υποκατηγορία τους αφελούς εμπειρισμού αφού στηρίζονται στις μετρήσεις και στα παραδείγματα, η δε τρίτη κατατάσσεται στην κατηγορία της αποτυχημένης παραγωγικής απόδειξης αφού ακολούθησε πορεία που ταιριάζει σε μια τυπική απόδειξη, ήταν όμως αποτυχημένη.

Κατά τη 2η συνάντηση δόθηκε στους μαθητές το 2ο φύλλο εργασίας, πάνω στο οποίο εργάσθηκαν σε όλη τη συνάντηση και στο τέλος έγινε πάλι ομαδική συζήτηση. Στο 2ο φύλλο εργασίας ο σκοπός ήταν να μελετηθούν οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα, θα γινόταν προσπάθεια να αναδυθούν και να διατυπωθούν κάποιες ιδιότητες του παραλληλογράμμου καθώς οι μαθητές θα εργαζόντουσαν με το λογισμικό. Η 1η ιδιότητα ήταν ότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες. Η 2η ιδιότητα ήταν ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Σε αυτήν την ιδιότητα το φύλλο εργασίας ζητούσε κάποια μορφή αιτιολόγησης η οποία θα μπορούσε να πείσει κάποιον για την ισχύ της. Οι μαθητές ακολούθησαν την πορεία που τους ζητούσε το φύλλο εργασίας, όμως δε μπόρεσαν να διατυπώσουν την ιδιότητα ούτε όταν εργάσθηκαν στις ομάδες τους ούτε και κατά τη διάρκεια της συζήτησης. Μια από τις ομάδες αναφέρθηκε στο κέντρο του παραλληλογράμμου, χωρίς όμως να το συνδέσει με το σημείο τομής των διαγωνίων. Μια άλλη ομάδα μπόρεσε με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να διατυπώσει την εικασία ότι οι διαγώνιοι έχουν κοινό μέσο, όμως δεν προχώρησε παραπέρα τη σκέψη της. Καμία από τις τρεις ομάδες δεν έκανε προσπάθεια να αιτιολογήσει την πρόταση.

Η 3η ιδιότητα στην οποία το φύλλο εργασίας στόχευε να συζητηθεί ήταν ότι οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες. Υπήρχαν 2 ερωτήματα τα οποία σχετιζόντουσαν με αυτήν την ιδιότητα. Στο 1ο έπρεπε οι μαθητές να στρέψουν δύο πλευρές γύρω από το κέντρο του παραλληλογράμμου, να παρατηρήσουν ότι ταυτίζονται με τις απέναντι πλευρές και από αυτό να συμπεράνουν ότι είναι συμμετρικές με κέντρο συμμετρίας το κέντρο του. Το

επόμενο ερώτημα ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν γιατί οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες. Δινόταν δηλαδή η διατύπωση της ιδιότητας και εζητείτο από τους μαθητές η απόδειξη. Ο σχεδιασμός του εκπαιδευτικού ήταν οι μαθητές αφού παρατηρήσουν ότι οι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι συμμετρικές να συμπεράνουν ότι και οι γωνίες είναι συμμετρικές επομένως ίσες. Δύο μαθητές μίλησαν για συμμετρία χωρίς όμως να εξελίξουν τη σκέψη τους. Άλλοι δύο μαθητές προσπάθησαν να δώσουν κάποιες αιτιολογήσεις οι οποίες δε στηριζόντουσαν στο λογισμικό αλλά προερχόντουσαν από προηγούμενες γνώσεις, ήταν όμως όλες αυτές οι προσπάθειες, αποτυχημένες. Ο εκπαιδευτικός έδωσε αρκετή βοήθεια κατά τη διάρκεια της συζήτησης, αλλά διέκρινε ότι οι μαθητές δεν έκαναν βήματα προς την κατεύθυνση που θα μπορούσε να δώσει κάποια θετικά αποτελέσματα. Έτσι δε συνέχισε τη συνάντηση η οποία τελείωσε σε αυτό το σημείο.

Για να συνοψίσουμε τα παραπάνω, οι μαθητές έκαναν εικασίες στηριζόμενοι στη διερεύνηση του σχήματος με τη βοήθεια του λογισμικού.
Πολλές από αυτές τις εικασίες διατυπώθηκαν σε μορφή υποθετικής πρότασης.
Αν και υπήρξε αρκετή παρότρυνση και βοήθεια από τον εκπαιδευτικό, έγιναν λίγες προσπάθειες για αιτιολόγηση ή απόδειξη των εικασιών και καμία από αυτές δεν ήταν ολοκληρωμένη.

Η έρευνα ανέδειξε τη δυναμική που μπορεί να προσδώσει στην παραγωγή εικασιών και στην προσπάθεια για απόδειξη ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Το σχήμα που κινείται και μετασχηματίζεται αφενός μεν δρα ως εποπτικό μέσο το οποίο προκαλεί το μαθητή να διερευνήσει περισσότερο το πρόβλημα που έχει εμπρός του αφετέρου δίνει σημαντική ανατροφοδότηση και πληθώρα πληροφοριών βοηθώντας το χρήστη να κάνει εικασίες αλλά και να προσπαθήσει να τις αιτιολογήσει ή και να τις αποδείξει.

Η ηλικία των μαθητών που πήραν μέρος στην έρευνα ήταν καθοριστική για τα αποτελέσματά της. Στην 1η τάξη του γυμνασίου οι μαθητές έχουν έρθει πολύ λίγο σε επαφή με την απόδειξη στα μαθηματικά και σχεδόν δεν τη γνωρίζουν ως έννοια. Είναι πολύ δύσκολο λοιπόν να αναγνωρίσουν την ανάγκη της. Όμως ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας δίνει σημαντική στήριξη στην πορεία προς την

απόδειξη, αφού ευνοεί την εξερεύνηση, την παραγωγή εικασιών και δίνει συνεχή ανατροφοδότηση. Είναι πολύ πιθανό ότι αν εφαρμοσθεί σε αυτές τις ηλικίες θα αλλάξει αρκετά το τοπίο στο χώρο της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Πρέπει να τονισθεί το μικρό δείγμα των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα και ως εκ τούτου δε μπορεί να θεωρηθεί ότι τα αποτελέσματα αντιπροσωπεύουν το σύνολο των μαθητών αυτής της ηλικίας. Μια μελλοντική έρευνα με μεγαλύτερη χρονική διάρκεια και μεγαλύτερο αριθμό μαθητών θα έδινε πολύ σημαντικά συμπεράσματα για την απόδειξη στα μαθηματικά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Φύλλο εργασίας

(αφορά τη συνάντηση που έγινε με τους μαθητές ώστε να έρθουν σε επαφή με το λογισμικό)

1. Σχεδιάστε μια ευθεία ε και ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Πάρτε ένα σημείο Κ εκτός της ευθείας. Φέρτε μια κάθετη ευθεία από το Κ προς την ευθεία ε.

Φέρτε μια ευθεία παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ η οποία να περνάει από το Κ.

Παίρνοντας ως κέντρο το σημείο Κ κάντε περιστροφή του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ κατά 90°.

2. Σχεδιάστε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρτε από την κορυφή Α το ύψος ΑΚ, τη διχοτόμο της γωνίας Α και τη διάμεσο ΑΜ. Κάντε το ίδιο από τις κορυφές Β και Γ. Αποκρύψτε τα ύψη του τριγώνου.

Σύρετε την κορυφή Β και μετασχηματίστε το τρίγωνο σε ορθογώνιο και αμβλυγώνιο.

3. Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Σύρετε την κορυφή Α. Τι παρατηρείτε;

4. Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνοντας τις απέναντι πλευρές παράλληλες δηλαδή ΑΒ//ΓΔ και ΑΓ//ΒΔ.

Φύλλο εργασίας 1

1. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρετε τη διάμεσο ΑΜ, τη διχοτόμο ΑΔ και το ύψος ΑΚ.

2. Σέρνοντας την κορυφή Α, μετασχηματίστε (αλλάξτε) το τρίγωνο. Κάντε το οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο.
Τι παρατηρείτε;

3. Πιστεύετε ότι η παραπάνω εικασία ισχύει σε όλα τα τρίγωνα ανεξάρτητα από τα μήκη των πλευρών τους και από τις γωνίες τους (ορθή – οξεία – αμβλεία);

4. Νομίζετε ότι με αυτόν τον τρόπο (σύρσιμο και μετασχηματισμό του τριγώνου) μπορείτε να πείσετε τον οποιονδήποτε για την αλήθεια του ισχυρισμού σας; Αν όχι τι θα μπορούσατε να κάνετε για να τον πείσετε;

Φύλλο εργασίας 2

1. Κατασκευάστε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σύμφωνα με τη διαδικασία που έχει προηγηθεί (απέναντι πλευρές παράλληλες). Σύρετε την πλευρά ΑΒ και τοποθετήστε την επάνω στη ΓΔ. Τι παρατηρείτε;
Κάντε το ίδιο και με τις άλλες δύο πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

2. Δοκιμάστε τη μετακίνηση αυτή για διαφορετικά παραλληλόγραμμα. Τι παρατηρείτε; Διατυπώστε τις παρατηρήσεις σας σε μια μαθηματική πρόταση.

3. Φέρτε τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου ΑΓ και ΒΔ. Με το κατάλληλο εργαλείο του λογισμικού βρείτε τα μέσα τους. Όπως παραπάνω, παρατηρήστε το σχήμα και διατυπώστε μια εικασία. Πως μπορείτε να πείσετε κάποιον ότι αυτή η εικασία ισχύει σε κάθε παραλληλόγραμμο;

4. Ορίζοντας ως κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων, επιλέξτε τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ και στρέψτε τις κατά γωνία 180°. Τι παρατηρείτε;
Ποια μαθηματική διαδικασία σας θυμίζει η στροφή ενός σχήματος κατά 180°;

5. Εξηγήστε γιατί οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Arzarello – Ferrara – Robutti (2012) Mathematical modeling with technology: the role of dynamic representations

2. Arzarello et al (2002) A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments

3. Bartollini Bussi & Mariotti (2008) Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom

4. Bottino & Chiappini (1995) Models, issues and strategies in the design of a multiple-tools problem solving environment

5. de Villiers (1999). The role and function of proof with sketchpad

6. Baccaglini –Frank, Mariotti (2010) Generating conjectures in dynamic Geometry: The Maintaining Dragging

7. Furinghetti and Paola (2003) To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment

8. Goldenberg, Cuoco & Mark (1998) A role for geometry in general education

9. Hadas et al (2000) The role of uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments

10. Hanna (2000) Proof, explanation and exploration

11. Harel and Sowder (1998) Students' proof schemes

12. Hoyles & Jones (1998) Proof in dynamic geometry contexts

13. Jones (2000) Providing a foundation for deductive reasoning

14. Laborde C. (2001) Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry

15. Leung A. (2008) Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation

16. Lopez-Real & Leung (2006) Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments

17. Mariotti (2009) Artifacts and signs : The role of teacher

18. Mariotti (2012) Proof and proving in the classroom: DGS as tools of semiotic mediation

19. Mariotti (2013) Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS

20. Mariotti (2000) The mediation of a dynamic software environment

21. Marrades, Gutierrez (2000) Proofs produced by secondary school students

22. Olivero F (1999) Cabri –Geometre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations

23. Pedemonde (2007) How can the relationship between argumentation and proof be analysed?

24. Pedemonde (2010) The role of abduction in proving processes

25. Powell, A. B., Francisco J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. Journal of Mathematical Behavior, 22, 405-435.

26. Stylianides (2007) The notion of proof in the context of elementary school mathematics

27. Stylianides G. (2008) Analytical framework of reasoning and proving