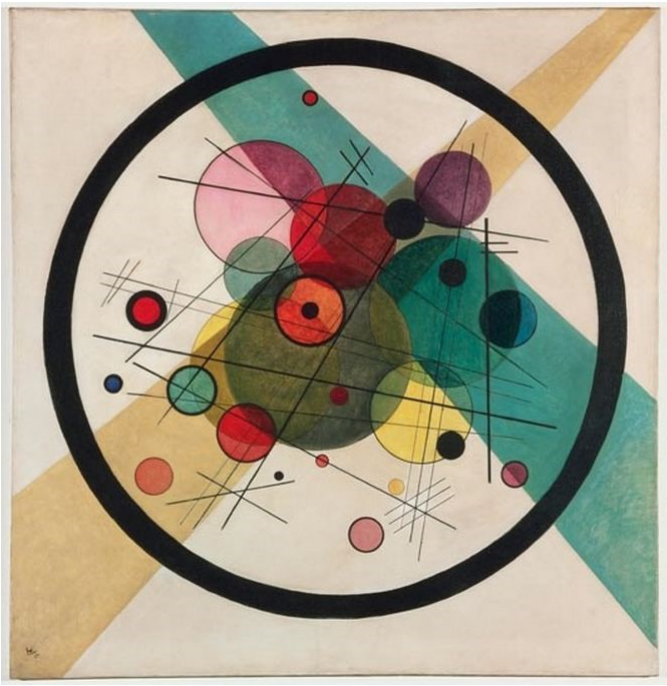
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
*"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"*



**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# "Απόπειρα διδασκαλίας της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος μέσω δομών Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε μαθητές Α΄ Λυκείου και διερεύνηση σχηματιζόμενων αντιλήψεων"

Μουσαδάκος Χαράλαμπος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

**ΑΘΗΝΑ 2015**

***Εξώφυλλο: Πίνακας του Wassily Kandinsky "Circles in a Circle" 1923***

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** |
|---|---|
| ▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων) | Καθηγητή |
| ▪ Δ. Πόταρη | Αναπλ. Καθηγήτρια |
| ▪ Γ. Ψυχάρη | Λέκτορα |

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** |
|---|---|
| ▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων) | Καθηγητή |
| ▪ Δ. Πόταρη | Αναπλ. Καθηγήτρια |
| ▪ Γ. Ψυχάρη | Λέκτορα |

**Στην σύζυγό μου Ελένη,**
**και στα δύο παιδιά μας Σοφία και Θοδωρή**

**Ευχαριστίες**

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη , για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε από την πρώτη συνάντηση που είχαμε μέχρι και το τέλος της συγγραφής της εργασίας μου, αλλά και για την υποστήριξη που μου παρείχε κατά την οργάνωση, και εκπόνηση της εργασίας μου.

Ευχαριστώ την αναπληρώτρια Καθηγήτρια Κα Δέσποινα Πόταρη, για την τιμή που μου έκανε να συμμετέχει στην συμβουλευτική επιτροπή.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Λέκτορα κ. Γεώργιο Ψυχάρη για την υποστήριξή του, καθ΄ όλη την πορεία των μεταπτυχιακών σπουδών μου ως σύμβουλος καθηγητής και ως συμμετέχων στην συμβουλευτική επιτροπή της Διπλωματικής εργασίας μου.

Τέλος ευχαριστώ όλη την μικρή κοινωνία του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών, ( Διδάσκοντες, Συμφοιτητές και Γραμματεία) και ιδιαίτερα την Αγγελική και τον Ηλία , τους δύο φίλους, συναδέλφους και συνοδοιπόρους σε αυτό το ταξίδι, για την αγάπη, την συμπαράσταση, την ανιδιοτελή συνεργασία και την απόλυτη εμπιστοσύνη που μου έδειξαν. Η παρουσία τους δίπλα μου, και το παράδειγμά τους, ήταν μία πηγή δύναμης που είχα ανάγκη.

## Περιεχόμενα


**Περίληψη – Abstract** ..... 8

**Εισαγωγή** ..... 9

**Κεφάλαιο Α – Θεωρητικό πλαίσιο**

1. Συμπεράσματα από την Γνωσιακή Επιστήμη ..... 11
   - 1.1. Η ενσώματη έννοια ..... 11
     - α) Χωρικές σχέσεις – Εικονοσχήματα ..... 13
       - i. The container schema ..... 14
       - ii. The source path goal schema ..... 15
       - iii. The link schema ..... 16
     - β) Το σχήμα όψης ..... 17
     - γ) Η εννοιολογική μεταφορά και η Βασική Μεταφορά του Απείρου 19
   - 1.2. Θεωρία πλαισίου – Εννοιολογική Αλλαγή ..... 22
     - α) Η Εννοιολογική αλλαγή ..... 22
     - β) Η εννοιολογική αλλαγή στο πεδίο των μαθηματικών ..... 24
2. Συμπεράσματα από την Διδακτική των Μαθηματικών ..... 27
   - 2.1. Οι τρεις μορφές γνώσεις ..... 27
   - 2.2. Αφαιρετική διαδικασία και συμπύκνωση γνώσης (επισκόπηση – συγκερασμός κατά D.Tall) ..... 29
   - 2.3. Ο κοινός τόπος και η άποψη του D.Tall ..... 32
   - 2.4. Οι τρείς κόσμοι των Μαθηματικών ..... 36
   - 2.5. Διασύνδεση και ανάμιξη γνωστικών δομών – το παράδειγμα της πραγματικής ευθείας ..... 38
   - 2.6. Η τεχνολογία και η ανακάλυψη της Μαθηματικής γνώσης ..... 39

**Κεφάλαιο Β – Διδακτικό πλαίσιο ρητών και αρρήτων / Έρευνες – Διαπιστώσεις**

1. Οι ρητοί και οι άρρητοι στο ελληνικό σχολείο ..... 41
2. Εννοιολογικά προβλήματα και διαπιστωμένες παρανοήσεις από την σχετική βιβλιογραφία ..... 48

**Κεφάλαιο Γ – Η μεθοδολογία της έρευνας**

1. Το πλαίσιο και τα στοιχεία της έρευνας ..... 51
2. Περιγραφή της δραστηριότητας και ερωτήματα προς τους μαθητές ..... 52
3. Στόχοι – ερευνητικά ερωτήματα – αναμενόμενες προσεγγίσεις από τους μαθητές ..... 54

**Κεφάλαιο Δ – Τα αποτελέσματα της έρευνας** 59

Φάση Α : Συμπεριφορά του μήκους του τμήματος ΒΓ..... 59

Φάση Β : Διερευνώντας την συμπεριφορά του μήκους του τμήματος ΑΔ..... 61

Φάση Γ : Η ποσότητα ΑΔ είναι άνω φραγμένη από την μονάδα..... 67

Φάση Δ : Πόσο κοντά μπορεί να φτάσει το μήκος του ΑΔ στην μονάδα..... 73

Φάση Ε : Ακροβασίες ανάμεσα στην διαίσθηση και την λογική στον κόσμο του απείρου..... 80

Φάση ΣΤ : Πυκνότητα, διαδοχικότητα και τελική αναζήτηση του supremum του μήκους ΑΔ..... 87

Φάση Ζ : Συμπεριφορά μήκους ΒΔ..... 90

Φάση Η : Διαισθητική αναζήτηση ενός άρρητου supremum..... 94

Φάση Θ : Το supremum του μήκους ΒΔ και η φύση του αριθμού $\sqrt{2}$ ..... 97

Φάση Ι : Η δομή και της φύση των πραγματικών μέσω της νέας έννοιας του supremum..... 100

**Κεφάλαιο Ε – Τα συμπεράσματα της έρευνας**..... 104

**Βιβλιογραφία**..... 111

Παράρτημα ..... 115

## Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μία απόπειρα διδασκαλίας σε μαθητές της Α τάξης του Γενικού Λυκείου της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος στο γνωστικό υπόβαθρο που παρέχει η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Παραλλήλως διερευνώνται οι σχηματιζόμενες αντιλήψεις των μαθητών γύρω από την έννοια της πυκνότητας και της πληρότητας της πραγματικής ευθείας, πριν μετά και κατά την διάρκεια της οικοδόμησης της νέας έννοιας. Οι έννοιες προσεγγίζονται στα πλαίσια του Ενσώματου Φορμαλισμού, με χρήση της διαισθητικής συμπερασματολογίας των εικονοσχημάτων και της εννοιολογικής βασικής μεταφοράς του απείρου εντός του αξιωματικού πλαισίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, και με εργαλείο ένα Γεωμετρικό μοντέλο σε περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα αφορούν σε απομαγνητοφωνημένα στιγμιότυπα διαλόγων από την φάση της διδασκαλίας, και σε αποσπάσματα από γραπτά δοκίμια των μαθητών. Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι στην συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης η Ευκλείδεια Δομή ως περιβάλλον διερεύνησης και ως αξιωματικό πλαίσιο μπορεί να ενεργοποιήσει διαισθητικές αντιληπτικές δομές, μαθητών του Λυκείου ώστε οι τελευταίοι να αποδεχθούν διαισθητικά και να οικοδομήσουν νοητικά την έννοια του ελαχίστου άνω φράγματος, παράλληλα με τις έννοιες της πυκνότητας και της πληρότητας της πραγματικής ευθείας.



**Λέξεις κλειδιά :** Ελάχιστο άνω φράγμα, Γεωμετρικό Μοντέλο, Ενσώματος Φορμαλισμός, Ενσώματη έννοια, Εικονοσχήματα, Βασική μεταφορά του απείρου



## Abstract

In this study we present an attempt to teach students of senior high school (A class) the concept of “least upper bound” on background knowledge provided by Euclidean geometry. Simultaneously, the perceptions of students formed around the concept of density and the completeness of the real line are being investigated, before, after and during the construction of the new concept. The concepts are being reached within the “Embodied formalism” by the use of intuitive inference of “image schemas” and “conceptual basic metaphor of infinity” within the axiom framework of Euclidean Geometry and the use of a Geometric Model in Dynamic Geometry environment as a tool. The results refer to transcripts of dialogue highlights acquired over the teaching phase and excerpts from students’ written essays. The qualitative analysis of the data shows that in this case study the Euclidean structure as an environment of investigation and axiom framework can activate intuitive perceptual structures of senior high school students so that they accept intuitively and build mentally the meaning of least upper bound, along with the concepts of density and completeness of the real line.



**Key words:** Least Upper Bound, Geometric Model, Embodied Formalism, Embodied Concept, Image schemas, Basic Metaphor of Infinity.

## Εισαγωγή

Το ζήτημα της κατανόησης των ιδιοτήτων των ρητών και των άρρητων αριθμών, στο γνωστικό επίπεδο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών και εκτενούς μελέτης. Η παρούσα ερευνητική εργασία αποτελεί μία μελέτη πάνω σε μία διδακτική προσέγγιση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος σε μαθητές πρώτης Λυκείου μέσω του αξιωματικού πλαισίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με παράλληλη διερεύνηση των σταδιακά νεοσχηματιζόμενων απόψεων των μαθητών γύρω από την δομή των πραγματικών.

Στην διδακτική παρέμβαση επιχειρείται να χρησιμοποιηθούν ως όχημα προσέγγισης της νέας έννοιας τα στοιχειώδη συμπερασματολογικά μοτίβα που προέρχονται και εδράζονται στο αισθησιοκινητικό σύστημα του ανθρώπου, υπό τους αυστηρούς περιορισμούς που επιβάλλει το αξιωματικό περιβάλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Πρόκειται συνεπώς για ένα εγχείρημα διαισθητικής και όχι φορμαλιστικής διδασκαλίας, ενώ ο απώτερος διδακτικός στόχος είναι η αναδόμηση των απόψεων που έχουν οι μαθητές για την φύση των πραγματικών και για τις βασικές ιδιότητες της πυκνότητας και της πληρότητας, χωρίς όμως την φορμαλιστική υποστήριξή τους.

Στο ερευνητικό πεδίο και σε πρώτο επίπεδο ελέγχεται η ενεργοποίηση και η λειτουργία των αισθησιοκινητικών συμπερασματολογικών μοτίβων που οικοδομούνται στις αντιληπτικές δομές των «εικονοσχημάτων» (image schemas) και των εννοιολογικών μεταφορών. Σε ένα δεύτερο επίπεδο μελετάται η λειτουργία της Ευκλείδειας δομής αφενός ως «δίχτυ ασφαλείας» στις λάθος υποθέσεις, ή και πεποιθήσεις, των μαθητών γύρω από την δομή των πραγματικών, και αφετέρου ως ένα ισχυρό πλαίσιο υποστήριξης ακόμα και αντιδιαισθητικών υποθέσεων που ωστόσο είναι αποδεκτές εντός του οικοδομήματος των αξιωμάτων της. Τέλος διερευνάται η εξέλιξη των απόψεων των μαθητών για την δομή των πραγματικών σε όλες τις φάσεις του διδακτικού εγχειρήματος.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μία αναλυτική αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο βάση του οποίου δομήθηκε η διδακτική προσέγγιση. Λόγω της διττής αναγκαιότητας (διαισθητική προσέγγιση – αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο) που επιβάλλεται από την αναντιστοιχία του υψηλού αφαιρετικού επιπέδου της έννοιας (τυπικά μαθηματικά) και του μέσου γνωστικού επιπέδου των μαθητών ( Α Λυκείου), η διδακτική προσέγγιση οικοδομείται σε δύο θεωρητικούς πυλώνες. Ο ένας είναι αυτός της Γνωσιακής Επιστήμης, προς αναζήτηση των στοιχειωδών αντιληπτικών δομών και συμπερασματολογικών μοτίβων, βάση των οποίων θα γίνει η διαισθητική προσέγγιση της έννοιας, και ο άλλος είναι αυτός της Διδακτικής των Μαθηματικών προς αναζήτηση του αυστηρού πλαισίου εντός του οποίου θα λειτουργήσουν αυτές οι στοιχειώδεις αντιληπτικές δομές και τα αντίστοιχα συμπερασματολογικά μοτίβα. Έτσι η θεωρητική στοιχειοθέτηση της διδακτικής προσέγγισης στηρίχθηκε αφενός πάνω στις απόψεις των George Lakoff, Rafael Nunez, Mark Johnson και Srini Narayanan περί «ενσώματων εννοιών», «εικονοσχημάτων», «εννοιολογικών μεταφορών» και «σχήματος όψης», και αφετέρου στην θεωρία των «τριών κόσμων των Μαθηματικών» του David Tall, και ειδικά στο αφαιρετικό επίπεδο του «ενσώματου και λειτουργικού φορμαλισμού». Τέλος επειδή ο απώτερος διδακτικός στόχος της παρέμβασης, αφορά στην αναδόμηση των αντιλήψεων και απόψεων των μαθητών γύρω από την δομή των πραγματικών και την έννοια του αριθμού, γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο της «Θεωρίας Πλαισίου» και της «εννοιολογικής αλλαγής» έτσι όπως αυτή λειτουργεί στο επιστημονικό πεδίο των Μαθηματικών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται με λεπτομέρεια η εξελικτική αφαιρετική διαδικασία που επιχειρείται στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών σχετικά με την σταδιακή οικοδόμηση της έννοιας αριθμός. Επιχειρείται ένας διαχωρισμός της όλης εξέλιξης στους δύο αφαιρετικούς άξονες που περιγράφει ο D. Tall (δομική – διεργασιακή αφαίρεση), ενώ εντοπίζεται ένα κενό στην διαισθητική προσέγγιση των κρίσιμων ιδιοτήτων της πυκνότητας και της πληρότητας αλλά και στην εξελικτική πορεία της δομικής αφαίρεσης στο Λύκειο. Το κενό αυτό εμφανίζεται λίγο πριν την εισαγωγή στοιχειωδών εννοιών ανάλυσης όπως αυτή του ορίου, της συνέχειας και της εκθετικής συνάρτησης. Τέλος, ακολουθεί μια σύντομη επισκόπηση των βιβλιογραφικών ευρημάτων σχετικά με τις καταγεγραμμένες παρανοήσεις οι οποίες παρατηρούνται σε μαθητές ή και φοιτητές σχετικά με την φύση και την δομή των πραγματικών, και οι οποίες μεταξύ άλλων αποδίδονται και στο χάσμα που σημειώνεται μεταξύ των αλγορίθμων, των διαισθήσεων και των τυπικών Μαθηματικών.

Στο τρίτο κεφάλαιο καταγράφεται το πλαίσιο και τα στοιχεία της έρευνας, οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτήν, οι ερευνητικές υποθέσεις και τα ερευνητικά ερωτήματα. Γίνεται διεξοδική αναφορά στην δομή της παρέμβασης με τα σχετικά ερωτήματα προς του μαθητές, ενώ σημειώνεται και ο αναμενόμενος τρόπος αντίδρασης και λειτουργίας των μαθητών σε αυτά. Εστιάζουμε κυρίως στον τρόπο που αναμένουμε να λειτουργήσουν τα αισθησιοκινητικής φύσης και προέλευσης, στοιχειώδη συμπερασματολογικά μοτίβα, των εικονοσχημάτων και των εννοιολογικών μεταφορών και στο πως οι δεσμεύσεις του Ευκλείδειου αξιωματικού πλαισίου, αναμένεται να οδηγήσουν στην τελική οικοδόμηση της νέας έννοιας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο καταγράφονται τα αποτελέσματα της έρευνας. Πρόκειται για: απομαγνητοφωνημένα επεισόδια από διαλόγους μεταξύ μαθητών ή μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών, για φωτογραφικά στιγμιότυπα από τα αρχεία geogebra που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, για φωτογραφικά στιγμιότυπα από καταγεγραμμένες στον πίνακα απαντήσεις μαθητών και για απαντήσεις των μαθητών από τα φύλλα εργασίας που τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν. Όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται χωρισμένα σε δέκα παραγράφους ανάλογα με την φάση οικοδόμησης της νέας έννοιας, αλλά και ανάλογα με το υπό διαπραγμάτευση θέμα.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα συμπεράσματα της όλης διδακτικής παρέμβασης. Τα συμπεράσματα καταγράφονται σε αντιστοιχία με τις κύριες ερευνητικές υποθέσεις και τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα, ενώ για κάθε συμπέρασμα υπάρχει και σχετική αναφορά σε αντίστοιχο στοιχείο των αποτελεσμάτων.

# Κεφάλαιο Α – Το θεωρητικό Πλαίσιο

## 1. Συμπεράσματα από την Γνωσιακή επιστήμη

### 1.1 Η ενσώματη έννοια

- *Η νόηση είναι εγγενώς ενσώματη.*
- *Η σκέψη είναι κυρίως ασυνείδητη.*
- *Οι αφηρημένες έννοιες είναι σε μεγάλο βαθμό μεταφορικές.*

Αυτά είναι τρία σημαντικά ευρήματα της γνωσιακής επιστήμης κατά τους George Lakoff και Mark Johnson (Lakoff G. & Johnson M., 1999), οι οποίοι σημειώνουν πως ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η ανθρώπινη λογική ως οικοδόμημα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το σώμα μας, την φυσιολογία μας και τις ιδιαιτερότητες του εγκεφάλου μας. Η ανάγκη για επιβίωση μας αναγκάζει να ταξινομούμε τον κόσμο που αντιλαμβανόμαστε, σε νοητικές κατηγορίες. Η κατηγοριοποίηση αυτή είναι συνέπεια της ενσώματης ύπαρξής μας, ενώ ως επί τω πλείστων, δεν είναι προϊόν της συνειδητής λογικής. *«Κατηγοριοποιούμε με κάποιον τρόπο επειδή έχουμε τον εγκέφαλο και το σώμα που έχουμε, και γιατί αυτά αλληλοεπιδρούν με τον κόσμο με τον τρόπο που το κάνουν»* (Lakoff G. & Johnson M., 1999).

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία των κατηγοριών (θεωρία των καθοριστικών γνωρισμάτων), οι έννοιες είναι οργανωμένες σε ευρύτερες εννοιολογικές δομές και περιγράφονται ως *«ένα σύνολο αναγκαίων και επαρκών καθοριστικών γνωρισμάτων που ορίζουν σαφώς ποιες περιπτώσεις ανήκουν σε μια δεδομένη εννοιολογική κατηγορία και ποιες όχι»* (Βοσνιάδου Σ., Νασιάκου Μ., Χαντζή Α. , Φατούρου Μ., 2011). Η Eleanor Rosch (Rosch, 1977) εστιάζοντας σε αυτή τη θεώρηση συμπέρανε ότι αν οι κατηγορίες αυτές καθορίζονται μόνο από τις ιδιότητες που συνδέουν τα μέλη, τότε οι κατηγορίες θα έπρεπε να είναι ανεξάρτητες από τις ιδιαιτερότητες του κάθε όντος που κάνει την κατηγοριοποίηση. Δηλαδή, η κατηγοριοποίηση θα έπρεπε να είναι ανεξάρτητη από ζητήματα όπως η ανθρώπινη νευροφυσιολογία, η ανθρώπινη κίνηση του σώματος, και ειδικά οι ανθρώπινες ικανότητες για ολιστική αντίληψη και σχηματισμό νοητικής εικόνας, για μάθηση, για απομνημόνευση και για οργάνωση γνώσης. Η Rosch προτείνει (θεωρία προτύπων) πως *«οι έννοιες, δεν αποτελούνται από καθορισμένα, αναγκαία και επαρκή χαρακτηριστικά γνωρίσματα , αλλά οργανώνονται γύρω από συγκεκριμένα πρότυπα ή υποδείγματα ενώ η κατηγοριοποίηση ενός νέου αντικειμένου γίνεται με βάση την ομοιότητά του με τα πρωτοτυπικά μέλη της κατηγορίας»* (Βοσνιάδου Σ., Νασιάκου Μ., Χαντζή Α. , Φατούρου Μ., 2011). Αν και η θεωρία προτύπων έχει τεθεί υπό αμφισβήτηση, εντούτοις είναι αποδεκτό ότι *«οι εννοιολογικές κατηγορίες όπως οργανώνονται από τον άνθρωπο δεν είναι αντικειμενικές στον κόσμο και ανεξάρτητες από τη ανθρώπινη ύπαρξη. Υπάρχουν έννοιες οι οποίες είναι ενσώματες. Η εννοιολογική κατηγορία χρώμα για παράδειγμα καθορίζεται από κοινού από τον εξωτερικό φυσικό κόσμο, την ανθρώπινη βιολογία, το ανθρώπινο μυαλό αλλά και από πολιτιστικά ζητήματα»*. (Lakoff G., 1987)

Όπως σημειώνεται από τους Lakoff & Johnson, (Lakoff G. & Johnson M., 1999) από εμπειρικά ερευνητικά δεδομένα προκύπτει ότι η έννοια του χρώματος συντίθεται από την τελική ταξινόμηση που δημιουργεί ένας συνδυασμός εξωτερικών παραγόντων και αλληλοεπίδρασης των εμπειριών που έχουμε ως οργανισμοί με το περιβάλλον. Αναλυτικότερα: η εμπειρία μας σχετικά με την έννοια του χρώματος έχει δημιουργηθεί από ένα συνδυασμό τεσσάρων παραγόντων:

- Δύο εξωσωματικούς
  - τα μήκη κύματος του ανακλώμενου φωτός, και
  - τις συνθήκες φωτισμού
- Δύο πτυχές της ενσώματης ύπαρξής μας :
  - Την φύση των υποδοχέων φωτός (κωνία - ραβδία) στον αμφιβληστροειδή και ιδιαίτερα τις τρεις παραλλαγές της πρωτεΐνης οψίνης που υπάρχουν στα κωνία του αμφιβληστροειδούς και είναι ευαίσθητες σε φωτόνια διαφορετικής ενέργειας, γεγονός το οποίο είναι τη βάση της τριμεταβλητής έγχρωμης όρασης του ανθρώπου και
  - Στο σύμπλοκο νευρωνικό κύκλωμα που συνδέεται με τα κωνία αυτά και η δομή του οποίου καθορίζει την σύνθεση της τελικής πληροφορίας η οποία μεταφέρεται στο οπτικό νεύρο.

Συνέπεια τέτοιων εμπειρικών ερευνητικών δεδομένων είναι η άποψη ότι οι έννοιες είναι αποτελέσματα της νευροφυσιολογίας του ατόμου, και *«αντιπροσωπεύουν νευρωνικές δομές που μας επιτρέπουν να χαρακτηρίζουμε νοητικά τις εννοιολογικές κατηγορίες που δημιουργούμε και να τις αιτιολογούμε».* (Lakoff G. & Johnson M. – 1999). Επίσης με δεδομένο ότι αυτό που κάνει τις έννοιες «έννοιες» είναι η επαγωγική ικανότητα τους, δηλαδή η ικανότητά τους να συνδέονται μεταξύ τους με τρόπους που αποδίδουν συμπεράσματα, οι Lakoff G. & Johnson M. (1999) ισχυρίζονται πως αν μια ενσώματη έννοια *«είναι μια νευρωνική δομή που είναι στην πραγματικότητα μέρος τού (ή κάνει χρήση τού) αισθησιοκινητικού συστήματος της ανθρώπινης ύπαρξης τότε και ένα μεγάλο μέρος της εννοιολογικής επαγωγής είναι, ως εκ τούτου, αισθησιοκινητική επαγωγή.»*

Επεκτείνοντας την πιο πάνω θεώρηση στα μαθηματικά οι Lakoff & Nunez (2000) οδηγούνται στον ισχυρισμό ότι κατά την νοηματοδότηση της κάθε νέας έννοιας, κάνουμε χρήση βασικών καθημερινών συστημάτων εννοιών – αισθησιοκινητικής φύσης και προέλευσης – που όλοι χρησιμοποιούμε στον τρόπο σκέψης μας, χωρίς όμως να μπορούμε να ανατρέξουμε σε αυτά συνειδητά. Ειδικότερα ισχυρίζονται για παράδειγμα ότι «*κατά την νοηματοδότηση της μαθηματικής έννοιας της κλάσης κάνουμε χρήση της καθημερινής έννοιας της συλλογής αντικειμένων εντός οριοθετημένου χώρου, ενώ νοηματοδοτούμε την μαθηματική έννοια της διαφόρισης ως μια διαρκή κίνηση προς κάποιο σύνορο»*.

Από εργασίες που έχουν γίνει μέχρι σήμερα, ισχυρίζονται οι Lakoff & Nunez – (2000), φαίνεται ότι *«οι προηγμένες μαθηματικές ικανότητες δεν είναι ανεξάρτητες της γνωστικού μηχανισμού που χρησιμοποιείται έξω από τα μαθηματικά. Μάλλον φαίνεται ότι η γνωστική δομή των προηγμένων μαθηματικών κάνει χρήση του είδους του εννοιολογικού μηχανισμού που είναι η ουσία της συνήθους καθημερινής σκέψης»*. Ενώ διατυπώνουν την άποψη ότι οι βασικοί καθημερινοί εννοιολογικοί μηχανισμοί στους οποίους τελικά ασυνείδητα ανατρέχουμε κατά την θεμελίωση πολυπλοκότερων μαθηματικών εννοιών είναι: τα Εικονοσχήματα, το σχήμα όψης, οι Εννοιολογικές μεταφορές και οι εννοιολογικές μίξεις.

**α) Χωρικές σχέσεις – Εικονοσχήματα**

Οι έννοιες των χωρικών σχέσεων βρίσκονται στην καρδιά του εννοιολογικού μας συστήματος. Θα λέγαμε πως είναι οτιδήποτε δίνει την έννοια του χώρου σε μας. Χαρακτηρίζουν τι είναι χώρος και ορίζουν τα χωρικά συμπεράσματα χωρίς όμως να υπάρχουν ως οντότητες στον έξω κόσμο. Σύμφωνα με τους Lakoff & Nunez, (2000) ερευνητικά αποτελέσματα στο χώρο της γλωσσολογίας έχουν δείξει ότι αν και τα συστήματα χωρικών σχέσεων διαφέρουν ριζικά από γλώσσα σε γλώσσα εντούτοις σε κάθε μία γλώσσα οι *«χωρικές σχέσεις αποσυνθέτονται σε εννοιολογικά αρχέτυπα που φαίνεται να είναι καθολικά. Αυτά τα αρχέτυπα τα ονομάζουμε εικονοσχήματα (image-schemas)»*. Έτσι οι περισσότερες χωρικές συσχετίσεις του εννοιολογικού οικοδομήματός μας, είναι συνθέσεις πάνω σε στοιχειώδεις χωρικές συσχετίσεις, οι οποίες έχουν μία εσωτερική δομή που στοιχειοθετείται από μία «εικόνα – σχήμα», δηλαδή ένα περίγραμμα και μία δομή ίχνους και συνόρου.

Για την αιτία και την αναγκαιότητα της ύπαρξης των εικονοσχημάτων ο Mark Johnson (1987) προτείνει ότι *«προκειμένου ως νευρωνικά όντα να μπορέσουμε να έχουμε νοηματοδοτικά συνδεδεμένες εμπειρίες που να μπορούμε να κατανοήσουμε και να σκεφτούμε, πρέπει να υπάρχει ένα πρότυπο (υπόδειγμα) και ένας κανόνας για τις δράσεις, τις αντιλήψεις, και τις έννοιές μας».* Μία «εικόνα – σχήμα» λοιπόν κατά τον M. Johnson (1987) είναι *«ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο (Υπόδειγμα), ένα περίγραμμα και μία κανονικότητα, μέσα στις (ή από τις) εν εξελίξει δραστηριότητές μας»*. Αυτά τα μοτίβα προκύπτουν ως ουσιαστική δομή για μας, κυρίως στο επίπεδο των σωματικών κινήσεων μας μέσα στο χώρο, το χειρισμό αντικειμένων μας, και τις αντιληπτικές αλληλεπιδράσεις μας, ενώ φαίνεται ότι αποτελούν σημείο αναφοράς και για την οικοδόμηση του εννοιολογικού κόσμου μας.

Για την Sfard (1994) τα εικονοσχήματα *«είναι το υπόβαθρο των ικανοτήτων μας για αφαίρεση και γενίκευση: είναι κατά μια έννοια ο σκελετός της εμπειρίας μας, η σάρκα από απογυμνωμένα συγκεκριμένα στιγμιότυπα»*, ενώ εστιάζοντας στο λειτουργικό σκέλος τους οι Lakoff & Nunez (2000) εντοπίζουν δύο κρίσιμα χαρακτηριστικά με διδακτική χρήση:

- Την διττή γνωστική λειτουργική φύση τους, καθώς είναι τόσο αντιληπτικά όσο και εννοιολογικά.
- Τις θεμελιώδεις χωρικές λογικές μέσα στην εσωτερική νοητική τους δομή που λειτουργούν ως έννοιες χώρου και χρησιμοποιούνται άμεσα σε κάθε χωρική συλλογιστική.

Οι δύο αυτές λειτουργίες τα κάνουν ιδιαίτερα κρίσιμα σε διδακτικό επίπεδο καθώς, όπως οι ίδιοι αναφέρουν:

- Είναι ικανά να παρέχουν μια γέφυρα μεταξύ της γλώσσας και της συλλογιστικής από την μια και της εικόνας από την άλλη και
- Κάθε συλλογιστική χωρικής φύσης φαίνεται να γίνεται άμεσα με χωρικούς όρους, χρησιμοποιώντας σχήματα εικόνας και όχι σύμβολα, όπως σε μαθηματικές αποδείξεις και επαγωγές συμβολικής λογικής.

Για την παρούσα εργασία κρίνουμε σημαντικό να γίνει αναφορά σε τρία βασικά εικονοσχήματα, έτσι όπως αυτά παρουσιάζονται στα κείμενα των Lakoff & Nunez (2000) , Johnson M., (1987), Lakoff G. & Johnson M.,(1999), : Το «Περιέχον σχήμα» (The container schema), το «σχήμα: αφετηρία – μονοπάτι – στόχος» (The source – path – goal schema) και το «σχήμα δεσμού» (The link schema).

*i)* *<u>The container schema</u>*

Το περιέχον σχήμα έχει την ακόλουθη δομή :

- ένα εσωτερικό
- ένα σύνορο και
- ένα εξωτερικό.

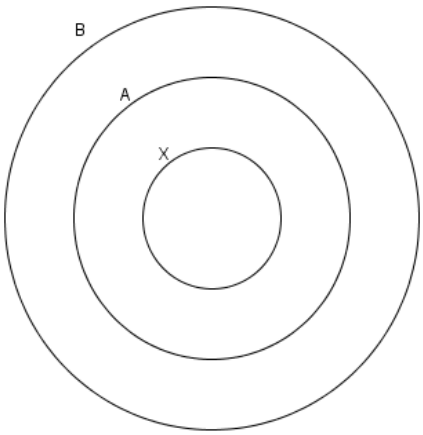
Πρόκειται για μία ολική δομή υπό την έννοια ότι τα μέρη δεν έχουν νόημα χωρίς το όλον. Δεν υπάρχει εσωτερικό χωρίς σύνορο και χωρίς εξωτερικό δεν υπάρχει εξωτερικό χωρίς σύνορο και χωρίς εσωτερικό δεν υπάρχει σύνορο χωρίς πλευρές. Η δομή είναι τοπολογική υπό την έννοια ότι το σύνορο μπορεί να γίνει μεγαλύτερο, μικρότερο ή και να παραμορφωθεί αλλά παραμένει πάντα σύνορο. Ένα σχήμα container, όπως και κάθε άλλο σχήμα εικόνας, είναι εννοιολογικό. Ένα τέτοιο σχήμα μπορεί, ωστόσο, να είναι και φυσικά υποστασιοποιημένο.

Η διδακτική σπουδαιότητα του εν λόγω σχήματος βρίσκεται στις εσωτερικές χωρικές λογικές που οικοδομούνται εντός της δομής του και οι οποίες περιγράφονται με τις πιο κάτω προτάσεις

- Για δύο δεδομένα εικονοσχήματα Α και Β και ένα αντικείμενο Χ , αν το Α είναι μέσα στο Β και το Χ είναι μέσα στο Α, τότε το Χ είναι μέσα στο Β
- Για δύο δεδομένα εικονοσχήματα Α και Β και ένα αντικείμενο Υ , αν το Α είναι μέσα στο Β και το Υ είναι έξω από το Β , τότε το Υ είναι έξω από το Α.

«*Οι δύο αυτές προτάσεις είναι άμεσα νοητικά αποτελέσματα της εσωτερικής βασικής δομής του σχήματος, είναι αυταπόδεικτες από την εικόνα*». Lakoff & Nunez (2000) Το εν λόγω σχήμα είναι η γνωστική δομή που μας επιτρέπει να δίνουμε νόημα αλλά και να εξάγουμε συμπεράσματα σε σχετικές έννοιες μέσω των γνωστών διαγραμμάτων Venn.

*<u>Σχήμα</u>*



*ii)* *<u>The source – path – goal schema</u>*

Το συγκεκριμένο σχήμα έχει τα εξής στοιχεία

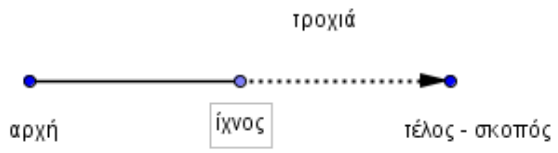
- Ένα ίχνος που κινείται
- Μία αφετηρία - εναρκτήριο σημείο
- Μία διαδρομή – μονοπάτι – από την αφετηρία προς τον στόχο
- Την πραγματική τροχιά της κίνησης
- Την θέση του ίχνους σε δεδομένη στιγμή
- Την κατεύθυνση του ίχνους την ίδια στιγμή
- Την πραγματική τελική θέση του ίχνους που μπορεί να είναι ή να μην είναι ο αναμενόμενος προορισμός.

Το σχήμα αυτό είναι τοπολογικό με την έννοια ότι ένα μονοπάτι μπορεί να έχει επεκταθεί, να έχει αλλοιωθεί, ή να έχει παραμορφωθεί και να εξακολουθεί να παραμένει ένα μονοπάτι. Οι τροχιές είναι φανταστικές, εφόσον δεν είναι οντότητες στον κόσμο. Είναι αντιληπτές ως μια γραμμή σαν «μονοπάτι» που άφησε το αντικείμενο καθώς κινείται και καθώς προβάλλεται η πορεία του προς τα εμπρός, προς στην κατεύθυνση της κίνησης.

Όπως και με το «περιέχον» - container - σχήμα, μπορούμε να σχηματίσουμε χωρικές σχέσεις με την προσθήκη ενός περιγράμματος και μία σχέση ίχνους-ορόσημου οι οποίες νοηματοδοτούνται αυτοτελώς και περιγράφονται στις πιο κάτω προτάσεις, Lakoff & Nunez (2000):

- Αν διασχίζεις μία διαδρομή προς κάποια συγκεκριμένη θέση τότε βρέθηκες σε όλες τις προηγούμενες θέσεις της διαδρομής αυτής.
- Αν κινείσαι από το Α στο Β και από το Β στο Γ , τότε κινήθηκες από το Α στο Γ.
- Αν υπάρχει μία απευθείας διαδρομή από το Α στο Β και κινείσαι σε αυτή τη διαδρομή προς το Β τότε διαρκώς πλησιάζεις πιο κοντά στο Β
- Αν Χ και Υ κινούνται κατά μήκος μιας απευθείας διαδρομής από το Α στο Β και ο Χ ξεπερνάει τον Υ τότε ο Χ είναι πιο μακριά από το Α και πιο κοντά στο Β απ' ότι ο Υ.
- Αν ο Χ και ο Υ ξεκινούν από το Α την ίδια στιγμή κινούμενοι κατά μήκος της ίδιας διαδρομής προς το Β και ο Χ κινείται πιο γρήγορα από τον Υ τότε ο Χ θα φτάσει στο Β πριν από τον Υ

*<u>Σχήμα</u>*



*iii)* *<u>The link schema</u>*

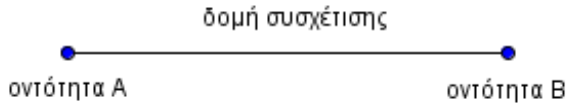
Η έννοια του δεσμού είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ύπαρξή μας ως ανθρώπινα όντα κατά τον Mark Johnson (1987). Από τον πρωταρχικό πραγματικό φυσικό δεσμό που συνδέει το έμβρυο με την μητέρα του ( ομφάλιο Λώρο) μέχρι τους αφηρημένους δεσμούς που ο νους μας αντιλαμβάνεται ανάμεσα σε υπαρκτές φυσικές οντότητες (δεσμοί ανθρώπων) ή και νοητές οντότητες (δεσμοί γεγονότων, αφηρημένοι μαθηματικοί δεσμοί), ο ανθρώπινα αντιληπτός κόσμος μοιάζει με ένα δίκτυο συνδέσεων. Η έννοια του δεσμού είναι στην πραγματικότητα αυτό που μας κάνει να βλέπουμε τον κόσμο (με την φυσική ή την αφηρημένη υπόστασή του) σαν ένα δίκτυο από συνδεδεμένες, σχετιζόμενες και αλληλεξαρτώμενες οντότητες.

Στην απλούστερη εκδήλωση της, η εσωτερική δομή του σχήματος LINK αποτελείται από δύο οντότητες (Α και Β) που συνδέονται από μια δομή συσχέτισης, όπως στο σχήμα. Αυτές οι οντότητες μπορεί να είναι χωρικά συνδεόμενες εντός του αντιληπτικού πεδίου μας, αλλά επεκτείνοντας την δομή αυτή θα μπορούσε αφενός να περιλαμβάνει πολλές σχετικές οντότητες (και όχι μόνο δύο) και αφετέρου θα μπορούσε να περιλαμβάνει χωρικά και χρονικά ασύνδετες οντότητες – «δράση από απόσταση»

Το σχήμα του δεσμού καθορίζει και καθορίζεται από αυτό που αφηρημένα στην κοινή γλώσσα αντιλαμβανόμαστε ως ομοιότητα ( όχι μόνο με την μαθηματική έννοια του όρου) ή συσχέτιση .

*«Δύο ή περισσότερα αντικείμενα είναι παρόμοια – συσχετίζονται - επειδή μοιράζονται κάποιο χαρακτηριστικό ή χαρακτηριστικά. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι οι κοινοί γνωστικοί τους δεσμοί στην κατανόηση μας. Εδώ, προφανώς, έχουμε μια πολύ αφηρημένη έννοια της σύνδεσης, στην οποία το "τρίτο πράγμα» που συνδέει ή συσχετίζει δύο αντικείμενα είναι μια αντιληπτική ή λογική λειτουργία. Το σχήμα LINK ερμηνεύεται μεταφορικά και εφαρμόζεται σε αφηρημένα αντικείμενα ή συνδέσεις, δεδομένου ότι δεν υπάρχει πάντα πραγματικός φυσικός δεσμός του απαιτούμενου είδους που να αφορά τα αντικείμενα.»* Johnson Mark (1987).

*<u>Σχήμα</u>*

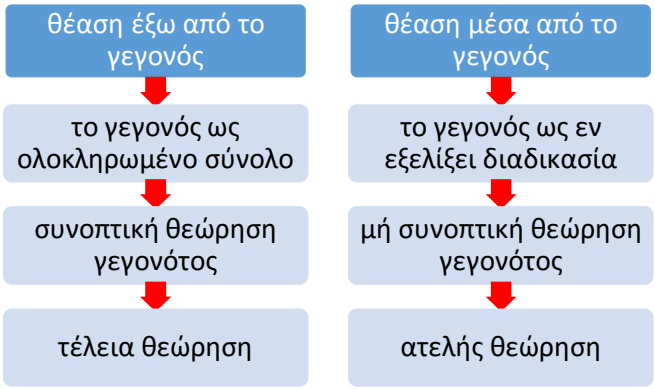


**β) Το Σχήμα όψης**

Ο όρος «όψη» ή πολλές φορές και «άποψη» (aspect) προέρχεται από τον χώρο της γλωσσολογίας και πρόκειται για μια γραμματική κατηγορία χρονικής υφής, η οποία όμως διαφοροποιείται ουσιαστικά από τη γραμματική κατηγορία του χρόνου. Ένα γεγονός εκτός από την θέση του στον άξονα του χρόνου (γραμματικός χρόνος) μπορεί να διαφοροποιηθεί και ως προς την εσωτερική του χρονική σύσταση, δηλαδή ως προς το αν είναι στιγμιαίο ή με διάρκεια ή ακόμα ως προς το αν είναι συνεχόμενο ή διακεκομμένο. *«Η όψη αποδίδει τον τρόπο με τον οποίο η ομιλήτρια επιλέγει να δει και να παρουσιάσει ένα γεγονός σε σχέση με την εσωτερική χρονική του σύσταση»* χωρίς όμως *«να αφορά την αντικειμενική χρονική σύσταση της κάθε ενέργειας ή κατάστασης, αλλά τον τρόπο με τον οποίο τη βλέπει η ομιλήτρια και συγκεκριμένα το αν τη βλέπει συνοπτικά, ως σύνολο, χωρίς δηλαδή να ενδιαφέρεται για την εσωτερική της διάρθρωση ή αν τη βλέπει στην εξέλιξή της και επιλέγει να μας δώσει σχετικές πληροφορίες»* και πιο συγκεκριμένα *«η όψη εκφράζει το αν η ομιλήτρια επιλέγει ένα σημείο θέασης έξω από το γεγονός ή μέσα σε αυτό. Στην πρώτη περίπτωση η θεώρηση είναι συνοπτική (ή τέλεια), στη δεύτερη είναι μη συνοπτική (ή ατελής)». Μόζερ Α. (διαδικτυακός τόπος «Πύλη για την ελληνική γλώσσα»)*

Η έννοια της όψης ως γραμματική κατηγορία χρόνου που εκφράζει την γενική χρονική δομή των γεγονότων έχει μια συγκεκριμένη εννοιολογική δομή όπως αυτή φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

**Η διάσταση της υποκειμενικότητας της όψης ως γραμματικός χαρακτήρας χρόνου**




---

Ο Srini Narayanan επιβεβαίωσε πειραματικά ότι *«η ίδια νευρωνική δομή που μπορεί να εκτελέσει τον έλεγχο της κίνησης χαρακτηρίζει επίσης την εννοιολογική δομή της γλωσσικής όψης, και ο ίδιος νευρωνικός μηχανισμός που μπορεί να ελέγχει τις κινήσεις του σώματος μπορεί να εκτελέσει λογικές συνεπαγωγές σχετικές με τη δομή των δράσεων εν γένει».* (Lakoff & Johnson – 1999)

Πιο συγκεκριμένα όπως το διατύπωσε ό ίδιος ο Srini Narayanan (1997a) *«οι εκφράσεις όψης* (όπως συναντώνται στην φυσική γλώσσα) *είναι γλωσσικές δομικές μονάδες που αναφέρονται σε σχηματοποιημένες διαδικασίες που επαναλαμβάνονται στο αισθητηριακό σύστημα του κινητικού ελέγχου. (όπως έναρξη, διακοπή, παύση, επανάληψη, αποπεράτωση, δύναμη και προσπάθεια)».*

Ερευνώντας στο πεδίο της δομημένης συνδεσμικής νευρωνικής προτυποποίησης (structured connectionist neural modeling), ο Narayanan (1997b) παρατήρησε ότι όλα τα νευρωνικά προγράμματα κινητικού ελέγχου παρουσιάζουν μία κοινή υπερδομή:

- Κατάσταση Ετοιμότητας: Πριν εκτελεστεί μια πράξη, πρέπει να πληρούνται συγκεκριμένες συνθήκες ετοιμότητας
- Διαδικασία Έναρξης: Πρέπει να γίνει οτιδήποτε προηγείται της έναρξης της διαδικασίας
- Κυρίως Διαδικασία: έναρξη της κυρίως διαδικασίας.
- Πιθανή διακοπή και επανεκκίνηση: Ενόσω εκτελείται η κύρια διαδικασία, υπάρχει η δυνατότητα-επιλογή να διακοπεί και αν διακοπεί, η δυνατότητα – επιλογή να ξαναρχίσει ή να μην ξαναρχίσει.
- Επανάληψη ή Συνέχιση: Όταν ολοκληρωθεί η κυρίως διαδικασία, μπορεί να την επαναληφθεί ή να συνεχιστεί.
- Σκοπός: Εάν η πράξη εκτελείται για την επίτευξη κάποιου σκοπού, γίνεται έλεγχος για το αν επετεύχθη.
- Ολοκλήρωση: Εν συνεχεία γίνεται ό,τι είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση της πράξης.
- Τελική Κατάσταση: Σημείο τελικής κατάστασης, όπου υπάρχουν τα αποτελέσματα και οι συνέπειες της πράξης.

Αυτή την υπερδομή την ονομάζουμε σχήμα όψης και θα μπορούσε να μην είναι τίποτα περισσότερο από ένα κλασσικό διάγραμμα ροής της επιστήμης των υπολογιστών, αν όπως ισχυρίζονται οι Lakoff & Nunez (2000) δεν κάλυπτε επιπλέον τις βασικές ιδιότητες που απαιτούνται για την ομαλή λειτουργία ενός νευρωνικού συστήματος ελέγχου κίνησης, δηλαδή:

- Να λειτουργεί σε πραγματικό χρόνο
- Να είναι ιδιαίτερα εξαρτημένο από το μέσο και το πλαίσιο
- Να μην είναι κεντρικά ελεγχόμενο η ρυθμισμένο
- Να μπορεί να λειτουργήσει παράλληλα με άλλες διαδικασίες, δεχόμενο πληροφοριών, από αυτές, ή και παρέχοντας πληροφορίες σε αυτές.

Σύμφωνα με τους ίδιους, Lakoff & Nunez (2000): *«Όλα όσα αντιλαμβανόμαστε ή σκεφτόμαστε ως ενέργεια ή εκδήλωση είναι αντιληπτά έχοντας αυτή την διάρθρωση. Σκεφτόμαστε λογικά σε σχέση με τα γεγονότα και τις ενέργειες χρησιμοποιώντας μια τέτοια δομή, ενώ οι φυσικές γλώσσες σε όλο τον κόσμο, έχουν μέσα κωδικοποίησης με τέτοια δομή στη γραμματική τους*». Σύμφωνα με τον ίδιο τον Narayanan (1997b): «η ίδια νευρωνική δομή που χρησιμοποιείται στον έλεγχο κινητικών σχημάτων σύνθετου χαρακτήρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο συλλογισμό για γεγονότα και πράξεις» . Ένα λογικό αποτέλεσμα του σχήματος όψης κατά τους Lakoff & Nunez (2000), ιδιαίτερα κρίσιμο στον τομέα των Μαθηματικών, είναι δύο συμπερασματολογικά μοτίβα, ιδιαίτερα σημαντικά για την κατανόηση της έννοιας του ενεστωτικού απείρου.

- Το στάδιο που χαρακτηρίζει την ολοκλήρωση μιας διαδικασίας είναι πιο απομακρυσμένο σε σχέση με την εξέλιξη της διαδικασίας από οποιοδήποτε άλλο στάδιο στο πλαίσιο της ίδιας διαδικασίας
- Δεν υπάρχει κανένα πιο απομακρυσμένο σημείο στην εξέλιξη μιας διαδικασίας, από το στάδιο ολοκλήρωσης αυτής της διαδικασίας.

**γ) Εννοιολογική μεταφορά και η Βασική Μεταφορά του Απείρου**

Η εννοιολογική μεταφορά ως όρος της γνωσιακής επιστήμης αναφέρεται στον γνωστικό μηχανισμό κατά τον οποίο έννοιες ή εννοιολογικές δομές νοηματοδοτούνται με όρους άλλων διαφορετικών εννοιών ή δομών. Η δομή του συγκεκριμένου μηχανισμού επιχειρήθηκε να αναλυθεί για πρώτη φορά από τους G. Lakoff & M. Johnson στο βιβλίο τους "Metaphors We Live By" (1980) Κατά τους (Lakoff & Johnson 1999) «Η εννοιολογική μεταφορά είναι διάχυτη και στη σκέψη και στη γλώσσα», καθώς πολλές φορές αναφερόμαστε σε έννοιες αφηρημένης δομής νοηματοδοτώντας τες ωστόσο με όρους άλλων εννοιολογικών δομών και κυρίως προερχόμενων από την περιοχή της αισθητικοκινητικής αντίληψης.

Η ερμηνεία της συνολικής θεωρίας της εννοιολογικής μεταφοράς, έτσι όπως αναλύεται από τους Lakoff G. & Johnson M., (1999) στηρίζεται σε τέσσερεις απόψεις οι οποίες διαδέχονται δομικά η μία την άλλη και οικοδομούνται πάνω στην βασική ιδέα της εξομοίωσης των εννοιών του C.Johnson (1997).

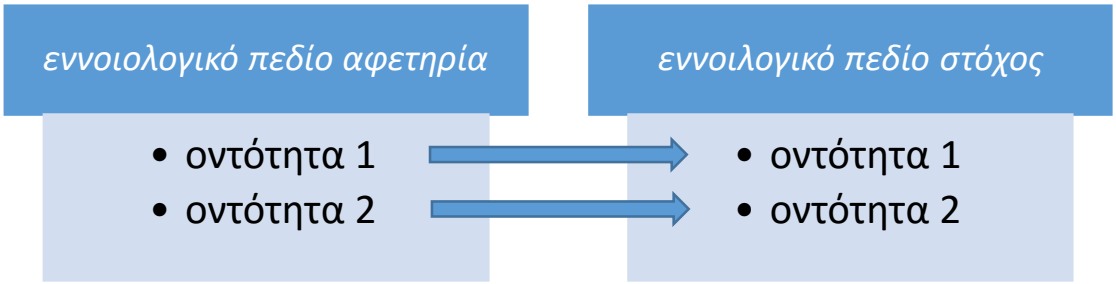
Η πρώτη είναι η ίδια η θεωρία της εξομοιώσεως (conflation) κατά την διάρκεια της μάθησης (C. Johnson - 1997), σύμφωνα με την οποία κατά την διάρκεια της βρεφικής και παιδικής ηλικίας οι υποκειμενικές (μη αισθησιοκινητικές) εμπειρίες συγχέονται με αντίστοιχες αμιγώς αισθησιοκινητικές, με αποτέλεσμα την δημιουργία συνάψεων ανάμεσα σε εννοιολογικές δομές, οι οποίες στην συνέχεια διαφοροποιούνται. Οι συνάψεις όμως εξακολουθούν να υπάρχουν και λειτουργούν ως χάρτες των επικείμενων εννοιολογικών μεταφορών, με αποτέλεσμα η πρωτογενής ταύτιση που ένα βρέφος σχηματίζει μεταξύ των εννοιών «αγάπη» ή στοργή και «ζεστασιά», μέσα από την αγκαλιά της μητέρας του, να το οδηγεί στην ενηλικίωσή του σε εκφράσεις όπως «ένα ζεστό χαμόγελο».

Η δεύτερη είναι η θεωρία των στοιχειωδών μεταφορών (Grady J. 1997) βάση της οποίας όλες οι σύνθετες εννοιολογικές μεταφορές είναι αποτέλεσμα σύνθεσης μικρών στοιχειωδών μεταφορών μέσω μίας διαδικασίας που λέγεται εννοιολογική μίξη. Οι στοιχειώδεις μεταφορές δημιουργούνται κατά εκατοντάδες στις εμπειρίες της βρεφικής και παιδικής ηλικίας κατά την διάρκεια της περιόδου "εξομοιώσεως" του C. Johnson. Λέμε λοιπόν «αύριο είναι μία μεγάλη μέρα» εννοώντας σημαντική μέρα, επανασυνδέοντας την μη αισθησιοκινητική έννοια «σημαντικό» με την αμιγώς αισθησιοκινητική έννοια «μεγάλο» ανατρέχοντας στην ταύτιση που είχαν οι δύο έννοιες στην εποχή της παιδικής η βρεφικής ηλικίας, όπου οι γονείς μας ήταν σημαντικοί και μεγάλοι.

Η Τρίτη άποψη – νευρωνική θεωρία της μεταφοράς – (Narayanan) ισχυρίζεται ότι οι συσχετίσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά την περίοδο της εξομοίωσης είναι νευρωνικής φύσης και οδηγούν σε μόνιμες νευρωνικές συνάψεις ανάμεσα στα δίκτυα που ορίζουν τους εννοιολογικούς τομείς. Έτσι κατάλληλη νευρωνική ενεργοποίηση κάποιου τομέα προκαλεί την ταυτόχρονη ενεργοποίηση και του τομέα που κάποτε συνδέθηκε μαζί του. Τέλος η θεωρία συμπληρώνεται με την ιδέα της εννοιολογικής μίξης όχι απλά στο επίπεδο της οικοδόμησης σύνθετων εννοιολογικών μεταφορών από στοιχειώδης, αλλά όπως ισχυρίζονται οι Fauconnier και Turner (Fauconnier, G., M. Turner. 1994 , 1996) , διακριτοί εννοιολογικοί τομείς μπορούν να συν-ενεργοποιηθούν και κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες οι συνδέσεις μεταξύ των τομέων μπορούν να οδηγήσουν σε νέα συμπεράσματα.

Συνοψίζοντας οι G. Lakoff και M. Johnson (1999) γράφουν: *«Μπορούμε να αποκτήσουμε ένα μεγάλο σύστημα στοιχειωδών μεταφορών αυτόματα και ασυναίσθητα, απλά λειτουργώντας με τον πιο συνήθη τρόπο στον καθημερινό κόσμο από τα πρώτα μας χρόνια. Δεν έχουμε επιλογή σε αυτό»* ενώ *«Λόγω του τρόπου που σχηματίζονται οι νευρωνικές συνάψεις κατά την περίοδο της εξομοίωσης , φυσιολογικά σκεπτόμαστε κάνοντας χρήση των εκατοντάδων αυτών στοιχειωδών μεταφορών».*

Κάθε εννοιολογική μεταφορά έχει την ίδια γενική δομή Lakoff & Nunez (2000): Πρόκειται για μία μονής κατεύθυνσης απεικόνιση από οντότητες ενός εννοιολογικού πεδίου σε οντότητες ενός άλλου εννοιολογικού πεδίου. Το πρώτο πεδίο λέγεται πεδίο προέλευσης – (source domain), και το άλλο πεδίο στόχος (target domain).




<u>Βασική εννοιολογική μεταφορά του απείρου</u>

Οι Lakoff & Nunez (2000) ισχυρίζονται ότι η έννοια του απείρου νοηματοδοτείται μέσω μίας βασικής εννοιολογικής μεταφοράς που απεικονίζει οντότητες από το εννοιολογικό πεδίο μίας περατωμένης διαδικασίας επαναλαμβανόμενων βημάτων, στο εννοιολογικό πεδίο μίας ατελούς και διαρκώς επαναλαμβανόμενης διαδικασίας. Η ικανότητα της υποκειμενικής θεώρησης της χρονικής φύσης μίας ενέργειας ως «τέλειας» ή «ατελούς» που εκφράζεται γλωσσικά από την γραμματική κατηγορία της «όψης», και συσχετίζεται πειραματικά μέσω της υπερδομής του «σχήματος όψης» με το νευρωνικό σύστημα ελέγχου της κίνησης από τον Narayanan (1997a, 1997b), προσφέρει την απαιτούμενη γέφυρα προκειμένου να συντελεστεί η μεταφορική απεικόνιση από το πεδίο της αισθησιοκινητικής αντίληψης (περατωμένη επαναλαμβανόμενη διαδικασία) στο πεδίο της υποκειμενικής κρίσης (ατελής και διαρκώς επαναλαμβανόμενη διαδικασία)
Στην βιβλιογραφία αναφέρονται δύο θεωρήσεις της έννοιας του απείρου, γνωστές ως δυνητικό άπειρο και ενεστωτικό άπειρο (potential infinity – actual infinity). Επιγραμματικά το δυνητικό άπειρο νοηματοδοτείται ως η διαρκώς επαναλαμβανόμενη και μη τερματιζόμενη διαδικασία (η συμπλήρωση όλο και περισσότερων δεκαδικών ψηφίων σε έναν άρρητο), ενώ το ενεστωτικό άπειρο είναι το άπειρο νοηματοδοτημένο ως οντότητα. (ή έννοια του άπειρου συνόλου των φυσικών). Κατά τους Lakoff & Nunez (2000) η έννοια του πραγματικού απείρου είναι μεταφορική, υπό την έννοια ότι το πραγματικό άπειρο ως αντικείμενο *«είναι «το τελικό» αποτέλεσμα μίας διαδικασίας χωρίς τέλος»* , ενώ η ικανότητά μας για εννοιολογικές μεταφορές μας κάνει ικανούς να νοηματοδοτήσουμε το τέλος μιας ατελούς διαδικασίας μέσω της εμπειρίας που έχουμε από την περάτωση μιας διεργασίας με τέλος.
Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η 1 – 1 αντιστοιχία ανάμεσα στις οντότητες των δύο πεδίων έτσι όπως δίδεται από τους Lakoff & Nunez (2000).

| *εννοιολογικό πεδίο αφετηρίας - επαναλαμβανόμενες περατωμένες διαδικασίες* | | *εννοιλογικό πεδίο στόχος - επαναλαμβανόμενες μη περατωμένες διαδικασίες* |
|---|---|---|
| • Η αρχική κατάσταση | → | • Η αρχική κατάσταση |
| • κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διεργασίας | → | • κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διεργασίας |
| • Η διαδικασία : Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η διάδοχη κατάσταση | → | • Η διαδικασία : Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η διάδοχη κατάσταση |
| • το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας | → | • το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας |
| • Η τελική προκύπτουσα κατάσταση - **πέρας διαδικασίας** | → | • Η τελική προκύπτουσα κατάσταση - ***ενεστωτικό άπειρο*** |
| • συμπέρασμα : Η τελική προκύπτουσα κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μή τελικής κατάστασης | → | • συμπέρασμα : Η τελική προκύπτουσα κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μή τελικής κατάστασης |

Η νοηματοδότηση της έννοιας στην πέμπτη στη σειρά αντιστοίχισης συνίσταται σε δύο κρίσιμες και μάλλον παράλληλες συμπερασματολογικές θέσεις:

- Δεν υπάρχει πρότερη καταληκτική κατάσταση :

Δηλαδή δεν υπάρχει διακριτή πρότερη κατάσταση εντός της διαδικασίας η οποία να ακολουθεί το στάδιο ολοκλήρωσης αλλά και να προηγείται της τελικής κατάστασης της διαδικασίας.

- Δεν υπάρχει ύστερη καταληκτική κατάσταση:

Δηλαδή δεν υπάρχει άλλη κατάσταση της διαδικασίας η οποία να είναι αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης της διαδικασίας και να ακολουθεί την τελική κατάσταση της διαδικασίας.

Πρόκειται για τα δύο συμπερασματολογικά μοτίβα που προκύπτουν λογικά από το σχήμα όψης και καθορίζουν μέσω της εννοιολογικής μεταφοράς την ύπαρξη και μοναδικότητα του ενεστωτικού απείρου ως νέας παραγόμενης έννοιας.

## 1.2 Θεωρία πλαισίου – Εννοιολογική Αλλαγή

### α) Εννοιολογική Αλλαγή

Έπειτα από την συλλογή αρκετών εμπειρικών δεδομένων από τον χώρο της έρευνας στην γνωστική ανάπτυξη, υποστηρίζεται η άποψη ότι από πολύ μικρή ηλικία οι άνθρωποι υπό την επίδραση του κοινωνικο-πολιτισμικού περιβάλλοντός τους, οργανώνουν τις εμπειρίες τους σε γνωστικές δομές με βασικό χαρακτηριστικό ένα είδος συνεκτικότητας .(Baillargeon, 1995 - Carey, Spelke, 1994 – Gelman 1990). Οι δομές αυτές φαίνεται ότι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τέσσερα διακριτά επιστημονικά πεδία με βάση την οντολογία των αντικειμένων τους : την φυσική, την ψυχολογία, τα μαθηματικά και την γλώσσα, που αδρά μπορούν να χαρακτηριστούν ως «θεωρίες πλαισίου». Βοσνιάδου Σ., Βαμβακούση Ξ., Σκοπελίτη Ε. (2008)

*«Θεωρία πλαισίου είναι μια σκελετική εννοιολογική δομή που στηρίζει τις βαθύτερες οντολογικές μας δεσμεύσεις υπό τους όρους των οποίων αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο. Μια θεωρία πλαίσιο είναι πολύ διαφορετική από μια επιστημονική θεωρία. Δεν είναι σαφής, καλοσχηματισμένη, και κοινωνικά κοινόχρηστη, δεν έχει την επεξηγηματική ισχύ και την εσωτερική συνοχή των επιστημονικών θεωριών. Παρ 'όλα αυτά, έχουμε επιλέξει να την ονομάσουμε «θεωρία», επειδή είναι ένα σύστημα βασισμένο σε αρχές το οποίο χαρακτηρίζεται από μια ξεχωριστή οντολογία και αιτιώδη συνάφεια και το οποίο είναι παραγωγικό υπό την έννοια ότι μπορεί να προκαλέσει την πρόβλεψη και εξήγηση.»* Vosniadou, S. Skopeliti, I. (2014)

Υπό το πρίσμα αυτό επιστημονικές έννοιες των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών, στο γνωστικό οικοδόμημα των μαθητών, εντάσσονται σε εξειδικευμένες κατά πεδίο θεωρίες πλαισίου, οι οποίες συνιστούν επεξηγηματικά πλαίσια που κατά κανόνα διαφέρουν από τα επικτρατώντα στις επίσημες επιστημονικές προσεγγίσεις. (Carey 1991 - Carey, Spelke, 1994 - Keil 1994). Πρόκειται για αρχικές εξηγήσεις των μαθητών και γενικότερα του ανθρώπινου νου, οι οποίες όμως δεν βασίζονται σε ασύνδετες μεταξύ τους παρατηρήσεις που ίσως εύκολα θα καταρρίπτονταν από μία διδακτική παρέμβαση, αλλά αντιθέτως «συνιστούν μία συνεκτική δομή, βασισμένη στην εμπειρία και συνεχώς επιβεβαιούμενη από αυτήν». (Βοσνιάδου Σ., Βαμβακούση Ξ., Σκοπελίτη Ε. (2008). Υπό την συγκεκριμένη προσέγγιση, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές στην κατανόηση κάποιων επιστημονικών εννοιών, οφείλονται εν πολλοίς στο ότι *«οι έννοιες αυτές είναι ενταγμένες σε επιστημονικές θεωρίες που παραβιάζουν θεμελιώδεις αρχές των «αφελών θεωριών» στις οποίες υπάγονται οι αντίστοιχες έννοιες του κοινού νου».* (Βοσνιάδου Σ., Βαμβακούση Ξ., Σκοπελίτη Ε. (2008). Η συνεκτικότητα που χαρακτηρίζει αυτό το εννοιολογικό πλαίσιο, αλλά και η καθημερινή επιβεβαίωσή του, σε συνδυασμό με την ασυμβατότητά του με την «νέα έννοια», έχει ως αποτέλεσμα η κατανόηση της νέας έννοιας να μην επιτυγχάνεται με μία διαδικασία συσσώρευσης επιπλέον γνώσης, αλλά να απαιτείται μία ριζική μεταβολή της υπάρχουσας θεωρίας πλαισίου.

Η πιο πάνω παραδοχή η οποία και έφερε στο προσκήνιο τον όρο «εννοιολογική αλλαγή» είναι μεταφορά στο πεδίο της ψυχολογίας και της εκπαίδευσης μίας ιδέας που αρχικώς γεννήθηκε στον χώρο της ιστορίας και της φιλοσοφίας της επιστήμης, Η μεταφορά της

συγκεκριμένης ιδέας στον χώρο της ψυχολογίας και κατά συνέπεια της εκπαίδευσης, οφείλεται κατά τις (Βοσνιάδου Σ., Βαμβακούση Ξ., Σκοπελίτη Ε. (2008). κυρίως στις εργασίες της Susan Carey ( 1985 - 1991 - Carey , Spelke 1994) η οποία προσδιόρισε και τεκμηρίωσε με εμπειρικά δεδομένα συγκεκριμένα είδη «ριζικής» εννοιολογικής αλλαγής που συντελούνται κατά την διάρκεια της γνωστικής ανάπτυξης. Αναλύοντας την διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής η Carey (1991) διέκρινε δύο τρόπους λειτουργίας :

- Την δημιουργία νέων οντολογικών κατηγοριών και την υπαγωγή μίας έννοιας σε μία διαφορετική οντολογική κατηγορία
- Την διαφοροποίηση ή την συγχώνευση εννοιών

Επίσης, σύμφωνα με τις Βοσνιάδου, Βαμβακούση, Σκοπελίτη (2008), η Εννοιολογική αλλαγή μπορεί να προκληθεί με δύο τρόπους.

- Είτε με την χρήση άδηλων προσθετικών μηχανισμών «από κάτω προς τα πάνω» (μηχανισμοί αφομοίωσης και συμμόρφωσης – Piaget, συλλογισμοί με χρήση αναλογιών που βασίζονται στην ομοιότητα - Vosniadou (1989), εσωτερίκευση - Vygotsky, (1978), οικειοποίηση πολιτισμικών πρακτικών - Rogoff, (1990)
- Είτε με την χρήση συνειδητών μηχανισμών «από πάνω προς τα κάτω» (σκόπιμη χρήση αναλογιών, κατασκευή νοερών πειραμάτων, μετάφραση από την «γλώσσα» της φυσικής στην γλώσσα των μαθηματικών). Carey and Spelke (1994) – Nersessian (1992) – Vosniadou, S. (2007b)

Ειδικά στο πεδίο της διδακτικής επιστήμης, το ζήτημα της εννοιολογικής αλλαγής αφορά σε αντιδιαισθητικές έννοιες (όπως αυτή της σφαιρικής Γης ή της αρρητότητας και της ασυμμετρίας) που η ανθρωπότητα χρειάστηκε δεκαετίες ή και αιώνες για να τις αποδεχθεί, και που τις θεμελίωσε έπειτα από σειρά επιστημονικών επαναστάσεων (αρνητικοί, ρητοί, άρρητοι, ηλιοκεντρικό σύστημα), κάποιες από τις οποίες ευνοήθηκαν μόνο έπειτα από την ανάπτυξη και της τεχνολογίας. Τέτοιες έννοιες οι μαθητές καλούνται να τις κατανοήσουν και να τις αποδεχτούν σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, μέσω προσθετικών μηχανισμών και από εκπαιδευτικούς και προγράμματα σπουδών που δεν λαμβάνουν υπόψη τους το ζήτημα της απαιτούμενης ριζικής εννοιολογικής αλλαγής. Οι Vosniadou Skopeliti (2014) προσεγγίζοντας το ζήτημα της εννοιολογικής αλλαγής υπό το πρίσμα της θεωρίας πλαισίου ισχυρίζονται ότι « οι οντολογικές, αναπαραστατικές και επιστημολογικές αλλαγές που πρέπει να γίνουν είναι αργές και βαθμιαίες και μπορεί να δημιουργήσουν αποσπασματική γνώση και νέα συνθετικά μοντέλα». Τα συνθετικά μοντέλα είναι έννοιες ή μοντέλα που παράγονται όταν οι μαθητές, στην αναζήτηση για τη συνοχή και εσωτερική συνέπεια, ενσωματώνουν την επιστημονική πληροφορία στην ασύμβατη πρότερη γνώση τους στρεβλώνοντάς την. Έτσι δημιουργούν μια εναλλακτική έννοια ή μοντέλο το οποίο αν και είναι διαφορετικό από αυτό που αρχικώς είχαν στο μυαλό τους και διατηρεί μια εσωτερική συνοχή και επεξηγηματική αξία, εντούτοις έχει ακόμα στρεβλώσεις σε σχέση με την επικρατούσα επιστημονική θεωρία.

**<u>β) Η Εννοιολογική αλλαγή στο πεδίο των Μαθηματικών</u>**

Αν και πρωτογενώς οι περισσότερες μελέτες που σχετίζονται με την προσέγγιση του ζητήματος της εννοιολογικής αλλαγής, στην επιστήμη της ψυχολογίας και κατ' επέκταση της διδακτικής, αφορούν έννοιες και προβλήματα των φυσικών επιστημών (Vosniadou, 2007a), εντούτοις υπάρχουν απόψεις και ερευνητικά δεδομένα τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν

ότι η πιο πάνω προσέγγιση αφορά και έννοιες των μαθηματικών. (Vosniadou & Verschaffel, 2004; Vosniadou, 2007a).

Σύμφωνα με τους Vosniadou & Verschaffel, (2004) Γενικότερα υπάρχει μία απροθυμία από τους κύκλους της φιλοσοφίας και της ιστορίας της επιστήμης να προσεγγίσουν μέσω της εννοιολογικής αλλαγής τις συντελούμενες εννοιολογικές μεταβολές στα μαθηματικά, αφού ως επιστήμη δεν βασίζεται στο πείραμα αλλά στην επαγωγική απόδειξη. Ωστόσο στο πεδίο της διδακτικής ερευνητές έχουν επισημάνει ότι ακόμη και στην περίπτωση των φυσικών επιστημών η εννοιολογική αλλαγή δεν πρέπει να ταυτιστεί με την τελική αντικατάσταση της «αφελούς» φυσικής των μαθητών με την ''σωστή'' επιστημονική θεωρία αλλά να συσχετιστεί με την δυνατότητα που παρέχει στους μαθητές να αναπτύξουν πολλαπλές οπτικές γωνίες και πιο αφηρημένα επεξηγηματικά πλαίσια με μεγαλύτερη γενικότητα και ισχύ. (Driver et al, 1994).

Υπό την δεδομένη οπτική, και αποδεσμεύοντας το ζήτημα της εννοιολογικής αλλαγής από την οριστική αντικατάσταση ή αναθεώρηση κάποιας επιστημονικής ή μη επιστημονικής θεωρίας, και συσχετίζοντάς το αποκλειστικά με την διαδικασία της μάθησης και της εκπαίδευσης, προκύπτει ως υπόθεση η σκέψη ότι *«όπως οι μαθητές αναπτύσσουν μία «αφελή φυσική» βάση της καθημερινής εμπειρίας, μπορούν επίσης να αναπτύξουν ''αφελή μαθηματικά'' τα οποία φαίνεται να έχουν μία νευρολογικής φύσης βάση που αναπτύχθηκε μέσα από μια μακρά διαδικασία εξέλιξης, και που αποτελείται από έναν πυρήνα αρχών ή προϋποθέσεων όπως η προϋπόθεση της διακριτότητας στην έννοια αριθμός, που διευκολύνουν κάποια είδη μάθησης, ενώ αναστέλλουν άλλα(Dehaene, 1998)»*. Vosniadou & Verschaffel (2004). Κατ' αντιστοιχία λοιπόν στα μαθηματικά η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής δεν πρέπει να συσχετίζεται με την άμεση και οριστική αντικατάσταση του υπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου με το «μαθηματικά σωστό», αλλά να αντιμετωπίζεται ως ένας τρόπος να δει κανείς μία έννοια από ένα διευρυμένο επεξηγηματικό πλαίσιο με πιο γενικευμένο χαρακτήρα και άρα ισχυρότερο από το προηγούμενο.

Από αποτελέσματα ερευνών στον τομέα της γνωσιακής επιστήμης (Carey, 1991;Carey & Spelke, 1994; Keil, 1994) καταδεικνύεται ότι από τις υπάρχουσες θεωρίες πλαισίου μία, αυτή που συσχετίζεται με το πεδίο των μαθηματικών, αφορά στην έννοια του αριθμού. Σύμφωνα με τις Carey και Gelman, - Carey, (1985) - Gelman, 1990, τα βρέφη και τα μικρά παιδιά, έχουν την απαιτούμενη προδιάθεση προκειμένου να προσεγγίσουν την έννοια του αριθμού. Ειδικά, η έννοια του φυσικού αριθμού διαμεσολαβείται από νωρίς μέσω των εργαλείων αναπαράστασης του πολιτισμού μας, όπως η γλώσσα, αλλά και η πρακτική, όπως η καταμέτρηση μέσω των δακτύλων. Σύμφωνα με εμπειρικές μελέτες, σε προσχολικό επίπεδο ηλικίας τεσσάρων ή πέντε ετών, τα παιδιά κατανοούν και προσεγγίζουν την έννοια του αριθμού κυρίως ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων καταμέτρησης, ενώ με χρήση του αλγορίθμου απαρίθμησης μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και να οικοδομούν την αρχή του επομένου ( Hartnett & Gelman 1998 ). Με αυτά τα δεδομένα φαίνεται ότι μέσα από το κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον και πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση της επίσημης εκπαιδευτικής κοινότητας, τα παιδία αντιλαμβάνονται ως αριθμό μία έννοια που συσχετίζεται με αυτή του φυσικού αριθμού, αφού έχει παρόμοιες ιδιότητες και αντίστοιχους κανόνες προβλεψιμότητας με αυτόν, στην επίλυση προβλημάτων.

Η σχέση αυτή θα ενισχυθεί όταν το παιδί θα πάει σχολείο και θα διδαχθεί (α) την πρόσθεση και την αφαίρεση ως διαδικασία καταμέτρησης, (β) τον πολλαπλασιασμό ως διαδικασία επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και (γ) την διάταξη πάνω στην λογική της αρχής του επομένου, στα πλαίσια της αριθμητικής του συνόλου των φυσικών αριθμών. ( Fischbein, Deri, Nello & Marino 1985)

Αυτά τα δεδομένα οδηγούν στον ισχυρισμό ότι, είτε στα πλαίσια του σχολικού είτε στα πλαίσια του κοινωνικο-πολιτισμικού περιβάλλοντος, από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσής τους *«οι μαθητές έχουν σχηματίσει ένα συνεκτικό επεξηγηματικό πλαίσιο για την έννοια του αριθμού ως αριθμού καταμέτρησης»* (Vamvakoussi X. Vosniadou S (2010), και υπό το πρίσμα της θεωρίας πλαισίου αυτό μπορεί να είναι μία πρώτη «κατά πεδίο εξειδικευμένη» θεωρία, μία θεωρία πλαισίου για την έννοια του αριθμού. (Vosniadou et al., 2008).

Επιχειρώντας μία επισκόπηση των εννοιολογικών παρεμβάσεων που απαιτούνται από την αρχική θεωρία πλαισίου για τον αριθμό καταμέτρησης, ως την διαισθητική δόμηση της έννοιας «πραγματικός αριθμός», κατά την θητεία των μαθητών στην υποχρεωτική εκπαίδευση και στην συνέχεια στο Λύκειο, θα πρέπει να διακρίνουμε τρεις πολύ διαφορετικές φάσεις.

Η μία, αν και όχι η πρώτη που επιχειρείται στην διδακτική σειρά, είναι η φάση της εισαγωγής των αρνητικών ακεραίων με κύριο χαρακτηριστικό την αποδέσμευση της έννοιας του αριθμού από την έννοια της καταμετρούμενης ποσότητας και την εννοιολογική συσχέτισή της με την έννοια της θέσης. Σε αυτή την μετάβαση, η παγιωμένες εννοιολογικά δομές της διακριτότητας και της μοναδικής αναπαράστασης, παραμένουν ανέπαφες καθώς η νέα έννοια δομικά και αναπαραστατικά, εξακολουθεί να συμπεριφέρεται όπως η προηγούμενη. Η διαφοροποίηση που αφορά στην διαχείρισή της στις πράξεις, «λύνεται» με αλγοριθμικές διαδικασίες αν και όχι πάντα επιτυχώς και σχεδόν ποτέ συνειδητά.

Η δεύτερη φάση, και πρώτη επιχειρούμενη στην διδακτική σειρά, είναι η εισαγωγή των ρητών. Η σύλληψη των ρητών αριθμών όμως ως ένα ενιαίο σύστημα αναπαραστάσεων, διάταξης και δομής μεταξύ άλλων (α) συμπεριλαμβάνει την ικανότητα να διαφοροποιεί κανείς τον αριθμό από τις αναπαραστάσεις του και (β) προϋποθέτει την νοητική υπέρβαση της έννοιας της διαδοχικότητας. Κατά συνέπεια «απαιτεί θεμελιώδεις οντολογικές και επιστημολογικές αλλαγές στην εννοιολογική οργάνωση του αριθμού στους μαθητές, δηλαδή, απαιτεί εννοιολογική αλλαγή». Vamvakoussi & Vosniadou (2010)

Η Τρίτη φάση, και τελευταία επιχειρούμενη διδακτικά, είναι η εισαγωγή της έννοιας του άρρητου. Εδώ οι απαιτούμενες διαφοροποιήσεις είναι επίσης οντολογικής και επιστημολογικής φύσης αφού στην νοηματοδότησή τους εμπλέκεται η αντιδιαισθητική έννοια του απείρου η οποία:

α) εμφανίζεται στην δεκαδική αναπαράστασή τους, και συνεπώς στον ίδιο τον ορισμό τους. (Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι άρρητοι στο Γυμνάσιο και αργότερα στο Λύκειο, ορίζονται ως αριθμοί που δεν είναι ρητοί και έχουν ένα άπειρο μη περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα)
β) εντείνει διαισθητικά το πρόβλημα της πυκνότητας, αφού στο ήδη πυκνό σύνολο των ρητών παρεμβάλλεται ένα ακόμα πυκνό σύνολο.

Η μέσω της θεωρίας πλαισίου προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής είναι μία κονστρουκτιβιστική θεώρηση που υποθέτει ότι οι μαθητές προκειμένου να νοηματοδοτήσουν το νέο είδος αριθμού, οικοδομούν πάνω στην προϋπάρχουσα σχετική γνωστική δομή.

Είναι προφανές ότι κατά την εισαγωγή των αρρήτων η εμφάνιση του απείρου στην δεκαδική αναπαράσταση, ουσιαστικά εισάγει στο γνωστικό οικοδόμημα των μαθητών όχι απλώς μια νέα έννοια αλλά και μία νέα αναπαράσταση αριθμού, φαινομενικά ασύμβατη με την «συνήθη» πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών, η οποία είναι η μόνη που χρησιμοποιείται στις διαδικασίες των πράξεων. Η νέα έννοια ορίζεται και διαφοροποιείται από τις προηγούμενες μόνο μέσω της διαφορετικής δομής του δεκαδικού της αναπτύγματος, συνεπώς η νοηματοδότησή της εξαρτάται από την νοηματοδότηση του ίδιου του άπειρου δεκαδικού αναπτύγματος. Υπό αυτό το πρίσμα ακόμα και ο ήδη γνωστός ρητός – φυσικός – αριθμός : 0,999 … άλλοτε γίνεται αντιληπτός ως διαδικασία που τείνει στην μονάδα – (συνθετικό μοντέλο) και άλλοτε θεωρείται ένας άρρητος αριθμός, αφού έχει άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα. ( παρανόηση – κατακερματισμένη γνώση)

Τέτοιες προσεγγίσεις υπό την οπτική της θεωρίας πλαισίου οφείλονται στο ότι «οι νέες πληροφορίες είναι συνήθως ασύμβατες με τις αντιλήψεις των μαθητών» και σύμφωνα με τις Vamvakoussi & Vosniadou (2010) η διαδικασία απόκτησης νοήματος: (α) είναι αργή και βαθμιαία, (β) ίσως σε πρώτη φάση να προκαλέσει αποσπασματική γνώση και ασυνέπεια και τέλος (γ) πιθανότατα θα παράγει συνθετικά μοντέλα.

## 2. Συμπεράσματα από την Διδακτική των Μαθηματικών

Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα γίνει μια εκτενής αναφορά στην Θεωρία του D. Tall έτσι όπως ο ίδιος την έχει διατυπώσει στο βιβλίο του «How Humans Learn to Think Mathematically - Exploring the Three Worlds of Mathematics» Cambridge University Press. (2013), αλλά και σε μία σειρά άρθρων του.

### 2.1 Οι τρείς μορφές γνώσης

Κατά τον D.Tall *«η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών είναι μία μακροπρόθεσμη και συνεχής ανακατασκευή διανοητικών συνδέσεων που με την πάροδο του χρόνου και σταδιακά, εξελίσσονται οικοδομώντας αυξανόμενης περιπλοκότητας δομές γνώσης»*. Tall D. (2013)

Σύμφωνα με τον Tall (2013), η εξέλιξη αυτή οικοδομείται πάνω σε δύο πυλώνες οι οποίοι συσχετίζονται και εδράζονται στις δύο θεμελιώδεις μαθηματικές περιοχές γνώσης: την γεωμετρία και την αριθμητική εκφράζοντας δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της Μαθηματικής Γνώσης:

- Ένα παιδί έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με την γεωμετρία παίζοντας με αντικείμενα, αναγνωρίζοντας τις ιδιότητές τους μέσω των αισθήσεών του και περιγράφοντας αυτές χρησιμοποιώντας την γλώσσα του. Σταδιακά η ακριβέστερη χρήση της γλώσσας δίνει την δυνατότητα για λεκτικούς ορισμούς σχημάτων και ιδιοτήτων και έπειτα από διαδοχικές αφαιρετικές διαδικασίες τελικώς οδηγεί στην λογική συσχέτιση και έκφρασή τους στο αξιωματικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το συγκεκριμένο πλαίσιο στο επίπεδο των σπουδών ενός μαθηματικού μπορεί να γενικευθεί ακόμα περισσότερο σε διαφορετικές δομές και μορφές γεωμετρίας, όπως οι μη ευκλείδειες, η διαφορική γεωμετρία ή και η τοπολογία.

- Η γνωριμία με την αριθμητική δεν ξεκινά με την αναγνώριση των ιδιοτήτων των αντικειμένων αλλά με τις ενέργειες του υποκειμένου επί των αντικειμένων. Τέτοιες ενέργειες είναι η μέτρηση, η ομαδοποίηση, το μοίρασμα, η διάταξη, η άθροιση κλπ. Έτσι αρχικώς το παιδί επενεργεί επί των καθημερινών αντικειμένων που το περιβάλλουν μετρώντας, αντιστοιχίζοντας, ομαδοποιώντας ή μοιράζοντας. Σταδιακά οι εμπειρικές αυτές κινήσεις μετατρέπονται σε συνεκτικές μαθηματικές διαδικασίες, ενώ στην διάρκεια της εκπαίδευσής του εισάγονται σύμβολα ώστε να γίνουν τετριμμένες και να απαιτούν όλο και μικρότερη προσπάθεια. Σε επόμενο στάδιο ανακαλύπτονται ιδιότητες των ενεργειών αυτών όπως η αντιμεταθετικότητα ή η επιμεριστικότητα, πάλι μέσω οπτικών απεικονίσεων και σχηματοποιούνται νοητικά οι πρώτοι κανόνες της αριθμητικής, προσφέροντας το υπόβαθρο της επερχόμενης συμβολικής απόδειξης. Για κάποιους πολύ αργότερα σε υψηλότερο επίπεδο εκπαίδευσης το σύνολο των φυσικών αριθμών θα σχηματοποιηθεί ως μία λίστα από αξιώματα , από τα οποία οι οικείες ιδιότητες – κανόνες θα αποδειχθούν ως θεωρήματα.

Η εξέλιξη αυτή ενσωματώνει και εκφράζει τρείς διακριτές μορφές γνώσης Tall D. (2013)

- Η πρώτη αφορά στην μελέτη των αντικειμένων και των ιδιοτήτων τους και *«σταδιακά οδηγεί σε νοητικές απεικονίσεις που περιγράφονται από την γλώσσα η οποία παράλληλα αναπτύσσεται σε αυξανομένη λεπτότητα».*
- Η δεύτερη *«αναπτύσσεται από ενέργειες επί των αντικειμένων οι οποίες εκφράζονται μέσα από σύμβολα και εξελίσσονται σε διαδικασίες της αριθμητικής και της άλγεβρας οι οποίες συμπιέζονται σε νοητικά αντικείμενα ικανά να εκφράσουν και να λύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας διαδικαστικό συμβολισμό».*
- Η τρίτη μορφή της μαθηματικής γνώσης *«αφορά στην φορμαλιστική προσέγγιση των θεωρητικών μαθηματικών στο πανεπιστήμιο»,* μέσω της αξιωματικής θεμελίωσης.

Οι δύο πρώτες μορφές αναπτύσσονται μέσα από πρακτική εξάσκηση (καθημερινότητα - σχολείο) και μέσα από την χρήση όλο και πιο θεωρητικών ορισμών και συμπερασμάτων (σχολείο), ενώ η τρίτη μορφή είναι αυτή που συνήθως αναπτύσσεται στο Πανεπιστήμιο.

**ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΑ - ΤΥΠΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

- φορμαλιστικοί ορισμοί ιδιοτήτων και
- συμπεράσματα από Μαθηματικές αποδείξεις

**ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

- Ανακάλυψη μέσω αισθήσεων
- Περιγραφή και ορισμοί μέσω γλώσσας
- Χρήση σε γεωμετρικές κατασκευές
- Λεκτική - λογική έκφραση στην Ευκλείδεια απόδειξη

**ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

- Πράξεις και διαδικασίες που
- από την εμπειρία της της αριθμητικής
- γενικεύονται σε αλγεβρικές εκφράσεις και
- συμβολίζονται ως έννοιες αριθμού

## 2.2 Αφαιρετική διαδικασία και Συμπύκνωση γνώσης – (επισκόπηση – συγκερασμός Tall)

Η αφαιρετική διαδικασία οικοδόμησης των εννοιών στην θεωρία σταδίων του Piaget (1985) συντελείται σε τρείς φάσεις – μορφές – που αναφέρονται ως :

- «εμπειρική» αφαίρεση – κατά την οποία τα παιδιά παίζουν με αντικείμενα και αναγνωρίζουν ιδιότητες τους.
- «Ψευδό – εμπειρική» αφαίρεση – κατά την οποία εστιάζουν περισσότερο στις ενέργειες επί των αντικειμένων.
- «συλλογιστική» αφαίρεση – κατά την οποία διαδικασίες από ένα συγκεκριμένο επίπεδο μετατρέπονται σε νοητικά σχήματα σε ένα υψηλότερο επίπεδο.

Σε μία διαφορετική προσέγγιση του ίδιου ζητήματος ο Bruner (1966) εστιάζει σε τρείς διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους πραγματοποιείται η αναπαράσταση των γνώσεων στην γνωστική δομή του ατόμου

- Πραξιακή αναπαράσταση – μάθηση σε πραγματικά αντικείμενα
- Εικονιστική αναπαράσταση – μάθηση μέσω εικόνων
- Συμβολική αναπαράσταση – μάθηση μέσω συμβόλων ( φυσική γλώσσα , μαθηματική γλώσσα)

Στις μελέτες του ειδικά στο χώρο της Γεωμετρίας ο Van Hiele, P. M. (1986), σχηματοποίησε την εξελικτική αφαιρετική διαδικασία σε μία επιτυχή διαδοχή πέντε επιπέδων σκέψης που το κάθε ένα οικοδομείται στο προηγούμενό του με ανεπαίσθητες αλλαγές από επίπεδο σε επίπεδο. Ακολουθεί πίνακας με τα συγκεκριμένα επίπεδα και τις ονομασίες που πήρε κάθε ένα στη σχετική βιβλιογραφία. Tall D. (2013)

| Van Hiele level | Hoffer (1981) | Clements & Batista (1992) | Tall (2013) |
|---|---|---|---|
| 1 | Recognition αναγνώρισης | Recognition αναγνώρισης | Recognition αναγνώρισης |
| 2 | Analysis ανάλυσης | Descriptive/Analytic περιγραφικό/αναλυτικό | Description περιγραφής |
| 3 | Ordering Κατάταξης | Abstract/relational Αφαιρετικό/συσχετιστικό | Definition Ορισμών |
| 4 | Deduction Συμπερασμάτων | Euclidean Deduction Ευκλείδειων συμπερασμάτων | Euclidean Proof Ευκλείδειας απόδειξης |
| 5 | Rigor Αυστηρότητας | Rigor Αυστηρότητας | Rigor Αυστηρότητας |

Ο Fischbein, (1987), ειδικότερα στο πεδίο της Μαθηματικής σκέψης εντοπίζει τις τρείς διακριτές της όψεις, κρίσιμες στην εξελικτική αφαιρετική διαδικασία των μαθηματικών εννοιών:

- Τις θεμελιώδης διαισθήσεις, που τις μοιράζονται σχεδόν όλοι οι άνθρωποι
- Τους αλγόριθμους που οδηγούν στην συμβολική διαχείριση των εννοιών
- Την φορμαλιστική διάσταση των Μαθηματικών που οδηγεί στην επίσημη απόδειξη μέσω ορισμών και αξιωμάτων

Σύμφωνα με τη θεωρία Action – Process – Object – Schema, Dubinsky (1991) - Dubinsky, & Macdonald, 2006) η αφαιρετική οικοδόμηση μίας μαθηματικής έννοιας επιτυγχάνεται μέσα από τέσσερεις φάσεις όχι απαραίτητα γραμμικά συνδεδεμένες

- τη δράση (action) πάνω σε φυσικά και νοητικά ήδη κατασκευασμένα αντικείμενα
- την εσωτερίκευση των δράσεων σε διεργασίες (processes)
- την ενθυλάκωση των δράσεων σε αντικείμενα (objects).
- Την από-ενθυλάκωση των αντικειμένων στις διεργασίες από τις οποίες προέρχονται, προς την συν - δημιουργία νοητικών σχημάτων (schemas).

Η Sfard (1991), (1992) οριοθετεί την πλήρη αφαιρετική προσέγγιση και κατασκευή μίας έννοιας σε τρείς φάσεις – στάδια με σαφή χαρακτηριστικά και συγκεκριμένη σειρά αλληλουχίας. Είναι χαρακτηριστικές φάσης οικοδόμησης μαθηματικών εννοιών, και επαναλαμβάνονται κάθε φορά που το άτομο οικοδομεί νέες αυξανόμενης περιπλοκότητας έννοιες.

- την φάση της εσωτερίκευσης (interiorization) η οποία συσχετίζεται με λειτουργίες – διαδικασίες με μαθηματικά αντικείμενα σε χαμηλό επίπεδο διαχειριστικής ικανότητας, έως το σημείο που το άτομο μπορεί να προβλέψει το τέλος της διαδικασίας χωρίς να την εκτελέσει.
- τη φάση της *συμπύκνωσης (condensation)*, κατά την οποία το άτομο αντιλαμβάνεται την εν λόγω διαδικασία ως έννοια, μπορεί και γενικεύει, συγκρίνει και συνδέει διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας, αλλά ακόμα δεν μπορεί να λειτουργήσει στο αφαιρετικό επίπεδο όπου η έννοια ανεξαρτητοποιείται νοητικά από την διεργασία
- την φάση της *υποστασιοποίησης (reification),* το υποκείμενο συλλαμβάνει την νέα έννοια ως ένα ανεξάρτητο μαθηματικό αντικείμενο, με τα δικά του χαρακτηριστικά έτοιμο να αποτελέσει δομικό στοιχείο για μια νέα έννοια, πιο περίπλοκη από την αρχική που θα εισάγει τον νου σε μία νέα εξελικτική διαδικασία

Οι Gray & Tall (1994) προσδίδουν μία νέα διάσταση στον ρόλο των συμβόλων ιδιαίτερα στην περιοχή της αριθμητικής και της άλγεβρας εισάγοντας ως νοητικό αντικείμενο τον όρο «procept» από τον συγκερασμό των όρων process – διαδικασία – και concept – έννοια – ικανό να λειτουργήσει ως *«άξονας ανάμεσα στην ικανότητα πράξης (process) και στην ικανότητα σκέψης (concept)»* Tall D. (2004)

Οι Biggs, J., & Collis, K. (1982). σε μία προσπάθεια αξιολόγησης της μάθησης, προτείνουν μία νέα δομή επιπέδων ανάπτυξης την ταξινομία SOLO (ακρωνύμιο της έκφρασης «Structure of Observed Learning Outcomes». Η Ταξινομία στην πραγματικότητα αφορά επίπεδα ικανότητας μάθησης αλλά όπως και η θεωρία σταδίων του Piaget συσχετίζεται με την αφαιρετική ικανότητα του εκπαιδευόμενου. Προτείνει τέσσερα στάδια – επίπεδα –

κατανόησης : το μονοδομικό, το πολυδομικό, το συσχετιστικό, το εκτεταμένης αφαίρεσης. (με ένα επιπλέον «μηδενικής ικανότητας» επίπεδο) Ο J. Biggs δημοσιεύει στην προσωπική του ιστοσελίδα τον πιο κάτω πίνακα όπου συσχετίζει το κάθε επίπεδο με ένα πλήθος ενεργητικών ρημάτων που εκφράζουν τον βαθμό ικανότητας που αντιστοιχεί σε κάθε επίπεδο. (http://www.johnbiggs.com.au/academic/solo-taxonomy)

Αύξηση ικανότητας

| Η ταξινομία SOLO με απλές ρηματικές εκφράσεις για κάθε επίπεδο κατανόησης | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Αποτυχία<br>Ανικανότητα<br>Αστοχία | Αναγνωρίζω<br>Ονοματοδοτώ<br>Παρακολουθώ<br>απλές διεργασίες | Συνδυάζω<br>Περιγράφω<br>Απαριθμώ<br>Εκτελώ λίστα διαδοχικών δεξιοτήτων | Αναλύω<br>εφαρμόζω<br>υποστηρίζω<br>συγκρίνω<br>αντιπαραβάλλω<br>κρίνω<br>εξηγώ αιτίες<br>συσχετίζω<br>δικαιολογώ | Δημιουργώ<br>μορφοποιώ<br>γενικεύω<br>υποθέτω<br>αναστοχάζομαι<br>θεωρητικοποιώ |
| **Μηδενική ικανότητα** | **Μία σχετική όψη** | **Περισσότερες από μία (σχετικές όψεις)** | **(Περισσότερες από μία σχετικές όψεις) Ολοκληρωμένες σε μία δομή** | **(Περισσότερες από μία σχετικές όψεις Ολοκληρωμένες σε μία δομή) Γενικευμένη σε ένα νέο πεδίο** |
| ***Προ-δομικό*** | ***μονοδομικό*** | ***Πολυδομικό*** | ***συσχετιστικό*** | ***Εκτεταμένης αφαίρεσης*** |

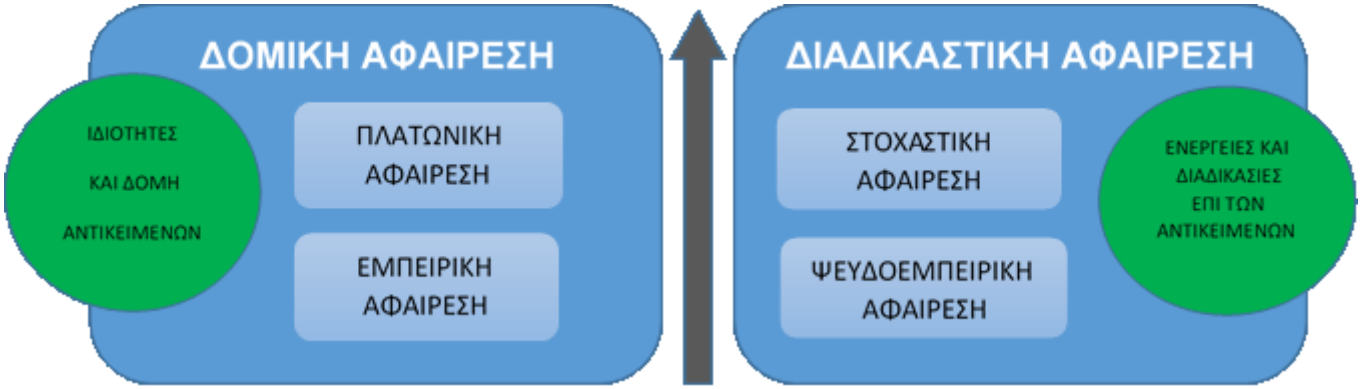
Παράλληλα με όλες τις πιο πάνω απόψεις αναπτύχθηκε στον χώρο της Γνωσιακής επιστήμης από τους G. Lakoff, M. Johnson, R. Nunez η ιδέα της «ενσώματης γνώσης» που υπερασπίζονται μέσω ερευνητικών αποτελεσμάτων την άποψη ότι η σκέψη είναι και αυτή μια διαδικασία ενσωματωμένη στην βιολογική νευρωνική ύπαρξη του ανθρώπου. Ταυτόχρονα από τον χώρο της γνωσιακής επιστήμης πειράματα ερευνητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι στα μικρά παιδιά, πολύ πριν την ανάπτυξη της γλώσσας, αναπτύσσεται μία θεμελιώδης διαισθητική ικανότητα διάκρισης μικρών ποσοτήτων, δύο ή τριών αντικειμένων, που ερμηνεύεται ως η πρώτη, διαισθητικής φύσης αντίληψη για την έννοια αριθμός.

## 2.3 Ο κοινός τόπος και η άποψη του Tall

Σε μία διαδρομή ανάμεσα σε όλες αυτές τις απόψεις και τα αντίστοιχα συμπεράσματά τους ο Tall διατυπώνει τις εξής κρίσεις και παρατηρήσεις :

Σχετικώς με την δομική διάστ1αση της αφαιρετικής διαδικασίας

- *«Η θεώρηση της ενσώματης γνώσης στο καθημερινό της νόημα συνδέεται με την χρήση των φυσικών αισθήσεων και δράσεων καθώς με τις οπτικό – χωρικές ιδέες στις δύο πρώτες κατηγορίες αναπαραστάσεων του Bruner (Πραξιακή και εικονιστική αναπαράσταση)».*Tall (2004)
- *«Η εννοιολογική εξέλιξη από τη φυσική ενσάρκωση σε αυξανόμενης περιπλοκότητας εννοιολογικές ενσαρκώσεις (ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών κατά Van Hiele) είναι αρκετά διαφορετική από τη συμβολική εξέλιξη που συναντάται στην αριθμητική όπου δράσεις και αντικείμενα συμβολίζονται και ως σύμβολα παίρνουν ένα νόημα που τους επιτρέπει να γίνουν διαχειρίσιμα σε ένα υψηλότερο επίπεδο»* (Θεωρία υποστασιοποίησης της Sfard ) Tall 2004
- *«Η εστίαση στην αυξανόμενη πολυπλοκότητα των αναπαραστάσεων των αντικειμένων, συσχετίζεται με δύο από τις τρεις μορφές αναπαράστασης της γνώσης του Bruner την πραξιακή και την εικονιστική, ενώ η εστίαση στην συμβολική αναπαράσταση συσχετίζεται με τις δύο από τις τρείς όψεις των μαθηματικών που διέκρινε ο Fischbein την αλγοριθμική και την φορμαλιστική διάστασή τους»* Tall D. (2004)
- Θεωρώντας ότι η «στοχαστική» αφαίρεση είναι ουσιαστικά μία διαδοχική επέκταση σε ένα υψηλότερο επίπεδο της «Ψευδό – εμπειρικής» αφαίρεσης ισχυρίζεται ότι «*αναλογικά θα πρέπει να υπάρχει και ένας τέταρτος τύπος αφαίρεσης που να επεκτείνει την «εμπειρική» αφαίρεση και κατά την οποία με αντίστοιχο τρόπο οι ιδιότητες των αντικειμένων δομούνται σε νοητά – ιδεατά – αντικείμενα»,* και την οποία ονομάζει Πλατωνική αφαίρεση. Tall D. (2013)




Σε ένα συγκερασμό των απόψεων τελικά ο Tall (2013) ισχυρίζεται ότι: *«οι τέσσερεις τύποι αφαίρεσης αφορούν σε δύο μακροπρόθεσμες διαδικασίες ανάπτυξης : μία που σχετίζεται και οικοδομείται στις ιδιότητες των αντικειμένων – εμπειρική και πλατωνική αφαίρεση – και μία που αντιστοίχως οικοδομείται και σχετίζεται με τις ενέργειες επί των αντικειμένων – ψευδό εμπειρική και συλλογιστική αφαίρεση. Η πρώτη εστιάζει στην δομή των αντικειμένων και η δεύτερη στις ενέργειες που μετατρέπονται σε διαδικασίες που συμβολίζονται ως νοητικά αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι αλγεβρικές εκφράσεις»*

Σχετικώς με την λειτουργική διάσταση της αφαιρετικής διαδικασίας

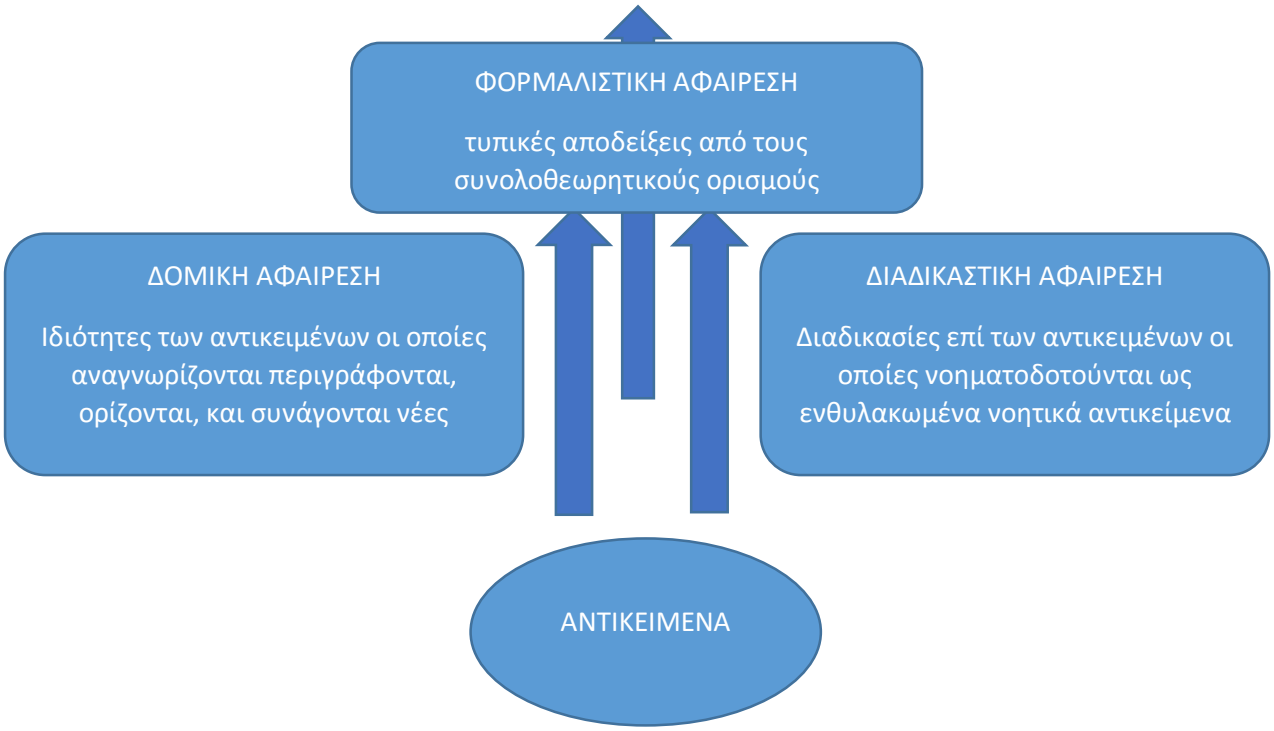
- Οι απόψεις που συσχετίζονται με την διαδικασία συμπύκνωσης της γνώσης (θεωρία APOS – θεωρία υποστασιοποίησης – θεωρία procept – ταξινομία SOLO) μπορούν να οργανωθούν σε έναν πίνακα ως ακολούθως Tall D (2013)

| Επίπεδο | | Θεωρία procept | Ταξινομία SOLO | Θεωρία APOS | Θεωρία υποστασιοποίησης |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **Αρχικό** *Δράση πριν την κατασκευή της διαδικασίας* | Διαδικαστικό | Μονοδομικό | δράση | εσωτερίκευση |
| **1** | **Διαδικαστικό** *βήμα-βήμα διαδικασία προς δημιουργία μίας διεργασίας* | | | | |
| **2** | **Πολυδιαδικαστικό** *διαφορετικές διαδικασίες δημιουργούν την ίδια διεργασία με την επιλογή της αποτελεσματικότερης* | Πολύδιαδικαστικό | πολυδομικό | | |
| **3** | **Ενιαίας διεργασίας δεδομένου αποτελέσματος** *Διεργασία ως ολότητα δοσμένη μέσω ισοδύναμων διαδικασιών* | Ισοδύναμες διαδικασίες ως ενιαία διεργασία | συσχετιστικό | διεργασία | Συμπύκνωση |
| **4** | **Διεργασίας – έννοιας** *Μια ενιαία νοητική οντότητα - έννοια αντιπροσωπευόμενη από ισοδύναμα σύμβολα που λειτουργεί με διπλό τρόπο ως διεργασία και ως έννοια* | Διεργασίας – έννοιας (procept) | Εκτεταμένης αφαίρεσης | αντικείμενο | υποστασιοποίηση |

- Τα πέντε επίπεδα εξέλιξης της σκέψης στο πεδίο της Γεωμετρίας αντιμετωπίζονται από τον Tall (2013) σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

| Van Hiele level | Hoffer (1981) | Clements & Batista (1992) | Tall (2013) |
|---|---|---|---|
| 1 | Recognition αναγνώρισης | Recognition αναγνώρισης | Recognition αναγνώρισης |
| 2 | Analysis ανάλυσης | Descriptive/Analytic περιγραφικό/αναλυτικό | Description περιγραφής |
| 3 | Ordering Κατάταξης | Abstract/relational Αφαιρετικό/συσχετιστικό | Definition Ορισμών |
| 4 | Deduction Συμπερασμάτων | Euclidean Deduction Ευκλείδειων συμπερασμάτων | Euclidean Proof Ευκλείδειας απόδειξης |
| 5 | Rigor Αυστηρότητας | Rigor Αυστηρότητας | Rigor Αυστηρότητας |

- Προκειμένου να περιγράψει την νοητική – αφαιρετική διαδικασία κατά την οποία *«ένα φαινόμενο συλλαμβάνεται στο μυαλό σε έναν απλούστερο και αποτελεσματικότερο τρόπο»* και γενικεύοντας τις απόψεις των Sfard (1991) (1992) και Dubinsky (1991), Dubinsky et al. (2006), χρησιμοποιεί τον γενικευμένο όρο : "compression of Knowledge" και όπως σημειώνει: *«συμβαίνει όταν γίνονται αμεσότερες διανοητικές συνδέσεις στον εγκέφαλο, ενώ ενισχύεται με την χρήση της γλώσσας που αφενός δίνει στην κάθε έννοια ένα όνομα και αφετέρου δίνει στο άτομο την δυνατότητα να μοιραστεί και να ανταλλάξει ιδέες σχετικές με τις ιδιότητές της διαδικασίας ή της έννοιας αλλά και την σχέση της με άλλες έννοιες»*. Tall (2013) Κατά την άποψή του είναι μία διαδικασία που εντάσσεται στο αφαιρετικό οικοδόμημα των δύο τύπων αφαίρεσης (δομική – διαδικαστική) που περιγράψαμε πιο πάνω και συμβαίνει με τρείς τρόπους :
  1. Από την αναγνώριση μέσω των αισθήσεων ομοιοτήτων και διαφορών , και την κατηγοριοποίηση εννοιών δίνοντας όνομα που προσδιορίζει την κατηγορία, ως μια μορφή δομικής αφαίρεσης των ιδιοτήτων μιας έννοιας, και οριοθέτησή τους σε μία ενιαία ονοματισμένη οντότητα.
  2. Από την πρακτική εφαρμογή μιας ακολουθίας ενεργειών ως μια διαδικασία που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με μικρή νοητική προσπάθεια, ως μία μορφή διαδικαστικής αφαίρεσης που ταυτίζεται με την νοητική ενθυλάκωση μιας διαδικασίας ως έννοια.
  3. Με την περιγραφή και χρήση αυξημένης νοητικής περιπλοκότητας εννοιών μέσω λεκτικών ορισμών.



Οι πιο πάνω ισχυρισμοί συνοπτικά επικεντρώνονται στα εξής συμπεράσματα:

1. Η μαθηματική αφαίρεση εξελίσσεται με δύο διαφορετικούς τρόπους :
    - Αφ' ενός με την χρήση νοητικών εικόνων οι οποίες με την υποστήριξη της γλώσσας μας δίνουν την δυνατότητα να εκλεπτύνουμε και να αναπτύξουμε περεταίρω περίπλοκα διανοητικά σχήματα.
    - Αφ' ετέρου με την χρήση του συμβολισμού στην αριθμητική και την άλγεβρα που μας δίνει την δυνατότητα να εκφράσουμε προβλήματα ως διαδικαστικές εξισώσεις και να τα λύσουμε με υπολογιστικές και συμβολικές μεθόδους
2. Η όλη εξέλιξη βασίζεται σε τρία θεμελιώδη ανθρώπινα χαρακτηριστικά:
    - Την δυνατότητα εσωτερίκευσης του έξω κόσμου μέσω των αισθήσεων η οποία οδηγεί στην αναγνώριση των ιδιοτήτων των αντικειμένων.
    - Την δυνατότητα εξωτερίκευσης τους μέσω ενεργειών επί των αντικειμένων οι οποίες γίνονται επαναλαμβανόμενες και τελικώς τετριμμένες διαδικασίες
    - Την γλώσσα που μαζί με τον συμβολισμό υποστηρίζουν τα δύο πιο πάνω χαρακτηριστικά , ώστε να αναπτύσσουν αυξανόμενης νοητικής περιπλοκότητας τρόπους σκέψης και αιτιολόγησης γύρω από τις μαθηματικές ιδέες.

3. Περιγράφοντας την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης ενός ατόμου, θα λέγαμε ότι αυτή ακολουθεί μία πορεία που αρχίζει με την επαφή του ατόμου με τα φυσικά αντικείμενα και τις λειτουργίες του ατόμου πάνω στα αντικείμενα αυτά και σταδιακά εξελίσσεται αφαιρετικά σε διαρκώς αυξανόμενης περιπλοκότητας έννοιες.

- Έτσι στην γεωμετρία σταδιακά :
    - Τα αντικείμενα κατηγοριοποιούνται μέσω οπτικής και απτικής εμπειρίας.
    - Η γλώσσα επιτρέπει σε αυτή την κατηγοριοποίηση να γίνει πιο εκλεπτυσμένη, παράλληλα με την ανάπτυξη της δομικής αφαίρεσης.
    - Σε πρώτη φάση δηλαδή οι ιδιότητες – χαρακτηριστικά – αναγνωρίζονται, περιγράφονται, ορίζονται και μετά χρησιμοποιούνται για να συναχθούν ιδιότητες, χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια απόδειξη.
- Αντιστοίχως στην αριθμητική:
    - Αφ' ενός οι διαδικασίες επί των αντικειμένων έχουν ιδιότητες οι οποίες επίσης αναγνωρίζονται, περιγράφονται, και μετά ορίζονται ως κανόνες της αριθμητικής.
    - Αφ' ετέρου η έννοια του αριθμού έχει επίσης ιδιότητες οι οποίες αναγνωρίζονται , περιγράφονται, και ορίζονται όπως για παράδειγμα αριθμοί άρτιοι, περιττοί, πρώτοι κλπ., από τις οποίες στη συνέχεια εξάγονται επιπλέον ιδιότητες όπως ότι κάθε ακέραιος γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων.

  Με αυτό τον τρόπο η αριθμητική και η άλγεβρα εμπλέκουν και τα δύο είδη αφαίρεσης την διαδικαστική και την δομική.

4. Σε ένα υψηλότερο επίπεδο αναπτύσσεται ένα νέο είδος αφαίρεσης το οποίο οδηγεί την μαθηματική σκέψη στα επόμενα σκαλοπάτια. Η φορμαλιστική αφαίρεση οικοδομεί μέσω λεκτικών ορισμών και εξάγει ιδιότητες από σαφώς ορισμένα πλέον μαθηματικά αντικείμενα με τυπικές αποδείξεις. Κατά τον Tall "είναι μία πιο δυναμική μορφή δομικής αφαίρεσης στην οποία κάποιες ιδιότητες αρχικώς ορίζονται και άλλες προκύπτουν από τον ορισμό αυτό».

## 2.4 Οι Τρείς κόσμοι των Μαθηματικών

Σύμφωνα με τον D. Tall,(2013) στην μαθηματική σκέψη μπορούμε να διακρίνουμε αδρά τρείς τρόπους λειτουργίας, οι οποίοι χωρίς να είναι ερμητικά κλειστοί ο ένας για τον άλλον, εντούτοις ο κάθε ένας έχει την δική του ταυτότητα την δική του ποιότητα και κάθε ένας αφορά σε έναν αυτόνομο κόσμο σκέψης που αναπτύσσεται με τον δικό του ιδιαίτερο τρόπο. Ο ένας βασίζεται στην ενσάρκωση της γνώσης, ο άλλος στον συμβολισμό, ακολουθώντας τους δύο βασικούς άξονες της αφαιρετικής διαδικασίας, και ό τρίτος στον φορμαλισμό.

- Ονομάζει εννοιολογική ενσάρκωση (conceptual embodiment) την λειτουργία κατά την οποία ο νους οικοδομεί στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις αναπτύσσοντας διανοητικές εικόνες που περιγράφονται σε ολοένα και πιο περίπλοκους τρόπους και γίνονται τέλειες νοητικές οντότητες στη φαντασία μας.
- Ονομάζει λειτουργικό συμβολισμό (operational symbolism) την λειτουργία κατά την οποία ο νους αναπτύσσει από φυσικές ενέργειες νέες μαθηματικές διαδικασίες και κατ' επέκταση νέες μαθηματικές έννοιες. Έτσι ενώ ορισμένοι εκπαιδευόμενοι μπορούν να παραμείνουν σε διαδικαστικό επίπεδο, άλλοι μπορεί να συλλάβουν τα σύμβολα ευέλικτα και ως διαδικασίες εκτέλεσης ενεργειών (πράξεις) αλλά και ως λειτουργικές ολότητες ( ως έννοιες ) σε υπολογισμούς και ελέγχους.
- Τέλος ονομάζει αξιωματικό φορμαλισμό (axiomatic formalism) την λειτουργία κατά την οποία ο νους οικοδομεί φορμαλιστική γνώση σε αξιωματικά συστήματα προερχόμενα για παράδειγμα συνολοθεωριτικούς ορισμούς και εξάγει ιδιότητες από τυπικές μαθηματικές αποδείξεις.

Οι τρείς τρόποι λειτουργίας και σε επέκταση οι τρείς κόσμοι που αντιστοίχως αναπτύσσονται, βασίζονται στην προηγούμενη εμπειρία, αλληλοϋποστηρίζονται και αλληλοεπιδρούν εξελικτικά, και οικοδομούνται παράλληλα με την εξελικτική αφαιρετική διαδικασία. Υπό αυτή την έννοια οι μεταβάσεις από τον έναν τρόπο – κόσμο, στον άλλο είναι βαθμιαίες και όχι στιγμιαίες. Προκειμένου να οριοθετηθούν και να περιγραφούν οι μεταβάσεις αυτές ο D. Tall συνθέτει τις λέξεις ενσάρκωση, συμβολισμός και φορμαλισμός και δημιουργεί τους όρους «ενσώματο συμβολισμό», «ενσώματο φορμαλισμό» και «συμβολικό φορμαλισμό».

Ονομάζει λοιπόν:

- «ενσώματο συμβολισμό» – «Embodied symbolism» – την μετάβαση από την εννοιολογική ενσάρκωση στον λειτουργικό συμβολισμό

- «ενσώματο φορμαλισμό» – «Embodied formalism» την μετάβαση από την εννοιολογική ενσάρκωση στον αξιωματικό φορμαλισμό και την ταυτίζει με διαδικασία της Ευκλείδειας απόδειξης

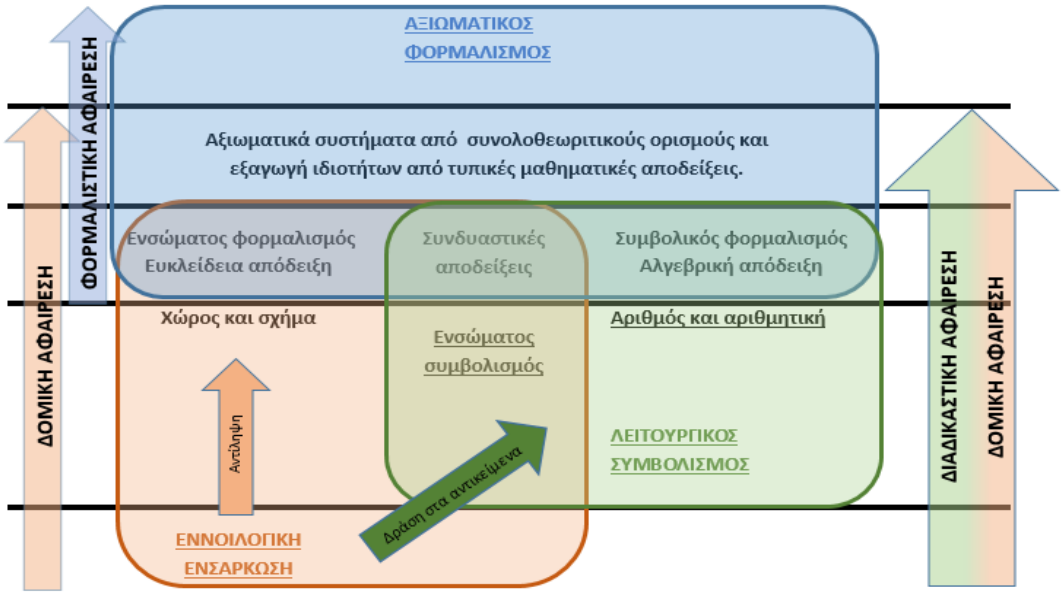
- «συμβολικό φορμαλισμό» – «Symbolic formalism» την μετάβαση από τον λειτουργικό συμβολισμό στον αξιωματικό φορμαλισμό και την ταυτίζει με την διαδικασία της αλγεβρικής απόδειξης με την χρήση των κανόνων της αριθμητικής.

Με αυτόν τον τρόπο ο Tall (2013) οριοθετεί τρία επίπεδα στην αφαιρετική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών τα οποία κατακτούνται από τον ανθρώπινο νου σε τρείς διαφορετικούς κόσμους που αντιστοιχούν σε τρείς αυτόνομες, διαφορετικές λειτουργικές προσεγγίσεις των μαθηματικών εννοιών με την δική της ποιότητα και ταυτότητα η κάθε μία. Σε κάθε επίπεδο αφαίρεσης η αποδεικτική διαδικασία και η αιτιολόγηση, έχει άλλο νόημα και άλλη δομή.

- Στο αρχικό επίπεδο – το οποίο ονομάζει πρακτικά Μαθηματικά – το υποκείμενο εμπλέκει την πρακτική εμπειρία του για το σχήμα, τον χώρο και τους υπολογισμούς στην αριθμητική. Στη γεωμετρία αυτό περιλαμβάνει τις αρχικές εμπειρίες στην αναγνώριση και περιγραφή ιδιοτήτων χωρίς απαραίτητα να γίνεται αντιληπτό ότι μία ιδιότητα ίσως συνεπάγεται μία άλλη, αντιστοίχως στην αριθμητική περιέχει την εξοικείωση με τις αριθμητικές διαδικασίες και τις σχέσεις μεταξύ τους.

- Στο επόμενο επίπεδο – το οποίο ονομάζει θεωρητικά Μαθηματικά – το υποκείμενο μπορεί στον τομέα της Γεωμετρίας να συνδυάσει Ευκλείδειους ορισμούς και ιδιότητες και να εξάγει νέες με την Ευκλείδεια απόδειξη, ενώ στην χώρο των συμβολικών μαθηματικών να γενικεύσει κανόνες, ορισμούς, και διαδικασίες της αριθμητικής και να εξάγει ιδιότητες μέσω της αλγεβρικής αποδεικτικής διαδικασίας. Στα θεωρητικά μαθηματικά θα συναντήσουμε τα πιο περίπλοκα επίπεδα ενσώματης γνώσης και συμβολισμού που είναι αυτό που ο Tall ονόμασε : ενσώματο και συμβολικό φορμαλισμό.

- Το τρίτο επίπεδο – φορμαλιστικά μαθηματικά – αναφέρεται στην ανάπτυξη της αξιωματικής φορμαλιστικής απόδειξης που βασίζεται στους συνολοθεωρητικούς ορισμούς και στην μαθηματική απόδειξη των θεωρημάτων και ιδιοτήτων.



## 2.5 Διασύνδεση και ανάμιξη γνωστικών δομών – το παράδειγμα της πραγματικής ευθείας

*«Η περιπέτεια της ανάπτυξης μιας ισχυρής μαθηματικής σκέψης εμπλέκει την συμπύκνωση της γνώσης σε νοητικά σχήματα έννοιες, την διασύνδεσή τους σε γνωστικές δομές, και επιπλέον την συνδυασμένη ανάμιξη διαφορετικών γνωστικών δομών σε μία νέα γνωστική δομή που είναι πιθανό να οδηγεί σε ένα νέοδημιουργηθέν νοητικό σχήμα - έννοια.»* D. Tall (2013) "How Humans Learn to Think Mathematically" Cambridge University Press.

Στο ίδιο βιβλίο, ο Tall, ονομάζει ανάμιξη δομών «blended structures» την διαδικασία κατά την οποία διαφορετικές γνωστικές δομές εκτείνονται και αναμιγνύονται προκειμένου να συνθέσουν μία νέα γνωστική δομή. Έτσι, ισχυρίζεται ότι η θεμελίωση της έννοιας του πραγματικού αριθμού στο νοητικό οικοδόμημα του μαθητή είναι το αποτέλεσμα διαδοχικών εκτατικών αναμίξεων που διευρύνουν κάθε φορά ένα υπάρχον σύστημα σε ένα μεγαλύτερο και πλουσιότερο σε ιδιότητες (εκτατική ανάμειξη), καθώς

1. το γνωστικό σύστημα των φυσικών αριθμών γενικεύεται στο πιο σύνθετο σύστημα των θετικών και αρνητικών ακεραίων
2. η δομή των ακεραίων με τα χαρακτηριστικά της διακριτότητας και της διαδοχικότητας γενικεύεται στην πυκνή δομή των ρητών και
3. τέλος το πυκνής δομής σύστημα των ρητών με τα πεπερασμένα δεκαδικά αναπτύγματα αναμιγνύεται με ένα επίσης πυκνής δομής σύστημα των αρρήτων με τα άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά αναπτύγματα προκειμένου να συνθέσουν το σύστημα των πραγματικών με τα χαρακτηριστικά της πληρότητας.

Κατά τον Tall (2013) όμως η τελική κατανόηση του συστήματος των πραγματικών και η διαδοχή των εκτατικών αναμίξεων που προαναφέρθηκαν συντελείται με *«μία ανάμιξη ενσάρκωσης , συμβολισμού και φορμαλισμού όπου κάθε κόσμος συνεισφέρει διαφορετικά χαρακτηριστικά στην τελική κατανόηση του αριθμού»*

*Έτσι όπως ο ίδιος σημειώνει (Tall 2013) : «Η ευθεία των πραγματικών μας διευκολύνει να δούμε τους αριθμούς ως σημεία σε μία οριζόντια γραμμή με διάταξη αύξουσα προς τα δεξιά. Αν βάλουμε το δάχτυλό μας στο 0 και το γλιστρήσουμε προς το 1 πιθανότατα φανταζόμαστε ότι κινούμαστε συνεχώς μέσω όλων των αριθμών από το 0 στο 1. Αν σκεπτόμαστε όμως έναν αριθμό ως ένα άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα είναι αδύνατο να φανταστούμε τις δεκαδικές εκφράσεις να διατρέχουν όλα τα δυνατά δεκαδικά αναπτύγματα ανάμεσα στα 0 και 1 σε πεπερασμένο χρόνο.»*

## 2.6 Η τεχνολογία και η ανακάλυψη της Μαθηματικής γνώσης.

Η νοητικές κατηγορίες που δημιουργεί ο άνθρωπος είναι άμεσα συσχετισμένες με τις ικανότητες που έχει ως νευρωνικό όν. Όπως αναλύθηκε σε προηγούμενη παράγραφο η έννοια χρώμα καθορίζεται τόσο από παράγοντες εξωγενείς του ατόμου που κατηγοριοποιεί, όσο και από παράγοντες ενδογενείς του ίδιου ατόμου. Αν όμως αποδεχτούμε την άποψη των *Lakoff G. & Johnson M. (1999),* όταν *«οι ικανότητες για το βασικό επίπεδο (κατηγοριοποίησης) επεκτείνονται από τον επιστημονικό εξοπλισμό, τότε η ικανότητά μας να επιλέξουμε χρήσιμους για τον πραγματικό κόσμο διαχωρισμούς βελτιώνεται. Οι κατηγορίες του βασικού επίπεδου είναι η πηγή των πιο σταθερών γνώσεων μας, και η τεχνολογική ικανότητα επεκτείνοντάς τις, μας επιτρέπει να επεκτείνουμε σταθερά τις γνώσεις μας»*

Είναι σαφώς αδύνατο λοιπόν να γλιστρήσουμε το δάχτυλό μας πάνω στην πραγματική ευθεία και να αισθανθούμε με αυτόν τον τρόπο τα άπειρα σε πλήθος και μορφή δεκαδικά αναπτύγματα που αντιστοιχίζονται στους άρρητους αριθμούς , είναι επίσης αδύνατο να γλιστρήσουμε το δάχτυλό μας πάνω στην ίδια ευθεία και να αντιληφθούμε την πυκνότητα των ρητών. Περιοριζόμαστε από την ίδια την φύση μας. Η δομή της πραγματικής ευθείας ξεπερνά τις νευρωνικές ικανότητες της αντιληπτικής φύσης μας και καταπολεμάμε αυτή την αδυναμία με πιο προσιτές στην φύση μας αντιληπτικές δομές όπως οι ακολουθίες ή τα σύνολα. Κατακτάμε την συνεχή δομή μέσω της διακριτότητας ή μέσω των συνόλων. Χρησιμοποιούμε τον φορμαλισμό και το υψηλότερο αφαιρετικό επίπεδο προσέγγισης προκειμένου να κατανοήσουμε αυτό που οι αισθήσεις μας από μόνες τους αδυνατούν να κατακτήσουν. Είναι κρίσιμο όμως το ερώτημα αν μπορούμε να παρεμβάλλουμε ανάμεσα στις διαισθητικές ικανότητές μας και στην αντιδιαισθητική δομή των πραγματικών τον τεχνολογικό εξοπλισμό, έτσι ώστε να διευρύνουμε τις αντιληπτικές μας ικανότητες. Σχετικά οι Godwin & Sutherland, απαντούν ότι η δυναμική και συμβολική δυνατότητα του περιβάλλοντος της πληροφορικής προκαλεί τους μαθητές να συνδέσουν τις διαισθητικές έννοιες με τις πιο τυπικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης. (Godwin & Sutherland, 2004). Ενώ ο Tall σημειώνει ότι «*Είναι δυνατό να σχεδιαστεί διαδραστικό λογισμικό που επιτρέπει στους σπουδαστές να διερευνήσουν μαθηματικές ιδέες με τον διπλό ρόλο του να είναι και άμεσα ελκυστικό στους μαθητές και να προετοιμάζει τις θεμελιώδεις έννοιες πάνω στις οποίες μπορούν να χτιστούν οι ιδέες» (Tall D. 1991). Ειδικά για τον τομέα του Λογισμού οι* F.Ferrara, D.Pratt, O. Robutti *(2006) ισχυρίζονται ότι*: *«Ο δυναμικός τρόπος διαχείρισης και ελέγχου αντικειμένων στον υπολογιστή αφήνει τους μαθητές να εξερευνήσουν πολλές περιπτώσεις και να εντοπίσουν τι αλλάζει και τι όχι. Και τα μαθηματικά της αλλαγής είναι το πρώτο βήμα στο δρόμο για το Λογισμό».*

Το ζήτημα της πιθανής αποδυνάμωσης της αναγκαιότητας μιας αυστηρής μαθηματικής απόδειξης, τίθεται από πολλούς ως ένας σκόπελος στην χρήση των λογισμικών, καθώς τα διαρκώς επιβεβαιούμενα διαφορετικά παραδείγματα πολλές φορές οδηγούν με μία συλλογιστική βάση της οποίας αφού κάτι ισχύει για πολλές περιπτώσεις, ισχύει για όλες. Κρίνεται συνεπώς απαραίτητο η κάθε δραστηριότητα να σχεδιάζεται με κατάλληλο τρόπο ώστε οι διαισθήσεις να μην είναι αρκετές για την τεκμηρίωση, και είτε μέσω της αντίφασης είτε μέσω της αβεβαιότητας να προκαλείται αναγκαστική αναφορά σε ένα ευρύτερο πλαίσιο αξιωμάτων τα οποία με μαθηματικούς συλλογισμούς θα είναι ικανά να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν υποθέσεις και εικασίες διαισθητικής φύσης.(Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000). Αυτό θα πει ότι η αναγκαστική ανάκληση ενός κατάλληλου αυστηρού αξιωματικού πλαισίου μπορεί να δώσει μία απάντηση στον συγκεκριμένο προβληματισμό όπως διατυπώνεται τελικά από τον D. Tall «*η διαίσθηση και η αυστηρότητα δεν είναι αναγκαίο να είναι σε σύγκρουση η μία με την άλλη. Παρέχοντας ένα κατάλληλα ισχυρό πλαίσιο, η διαίσθηση οδηγεί φυσιολογικά στην αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης» (Tall D. 1991*).

Σχηματοποιημένη παράσταση της συνεισφοράς των τριών κόσμων στην κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών μέσω της πραγματικής ευθείας D. Tall (2013)

**Φορμαλιστικά Μαθηματικά**

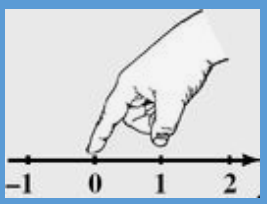
Ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα

δηλαδή

ένα σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με δύο πράξεις που ικανοποιούν συγκεκριμένα αξιώματα

**Ενσώματα Μαθηματικά**

Μία συνεχής γραμμή στην οποία μπορούμε να σύρουμε το δάχτυλό μας




**Συμβολικά Μαθηματικά**

Αριθμοί ως δεκαδικές συμβολικές εκφράσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ακριβείς υπολογισμούς

$$\sqrt{2} = 1,4142...$$

# Κεφάλαιο 2ο – Διδακτικό πλαίσιο ρητών και αρρήτων / Έρευνες – Διαπιστώσεις

## 1. Οι ρητοί και οι άρρητοι στο ελληνικό σχολείο.

Η έννοια του πραγματικού αριθμού (με τις ιδιότητες, και τα χαρακτηριστικά του), οικοδομείται στο ελληνικό σχολείο σταδιακά ξεκινώντας από την πρώτη τάξη του Δημοτικού με τους φυσικούς αριθμούς και φτάνοντας ως και την δεύτερη τάξη του Λυκείου, όπου διδάσκεται η έννοια της εκθετικής συνάρτησης. Στην Τρίτη τάξη του Λυκείου αν και διδάσκονται έννοιες (όριο – συνέχεια) που υποκρύπτουν βασικά χαρακτηριστικά των πραγματικών εντούτοις ο σκοπός της διδασκαλίας τους δεν αφορά την φύση των αριθμών αλλά μία πρώτη εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό.

Στις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι στα προς επίλυση προβλήματα εκφράζουν πλήθος ακέραιων μονάδων σε μία συλλογή ίδιων αντικειμένων.

Στην τρίτη και τέταρτη τάξη του Δημοτικού εισάγεται η έννοια του κλάσματος αρχικώς υπό την έννοια του μέρους της ακέραιας μονάδας ενώ αφού διδαχθεί η ισοδυναμία των κλασμάτων εισάγονται οι δεκαδικοί αριθμοί ως άλλες εκφράσεις των δεκαδικών κλασμάτων. Ιδιαίτερα στην τέταρτη τάξη, επιδιώκεται η συσχέτιση και τελικά η ταύτιση των εννοιών δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικός αριθμός, καθώς μέσω της μέτρησης μήκους, οικοδομείται μία δομή αριθμογραμμής που ενσωματώνει τους θετικούς ρητούς, ως δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικές εκφράσεις. Παράλληλα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να δουν την εν λόγω συσχέτιση και σε συμβολικό επίπεδο, υπό το πρίσμα της μέτρησης νομισματικών αξιών ή μέτρησης βάρους, ενώ μέσω της έννοιας του συμμιγούς αριθμού οι μαθητές διαχειρίζονται τους ρητούς (στην δεκαδική μορφή τους) σε επίπεδο αριθμητικής. Σταδιακά οικοδομείται επίσης η σχέση κλάσματος , δεκαδικής έκφρασης και διαίρεσης φυσικών με το 10 το 100 και το 1000. Ερμηνεύοντας την πιο πάνω διδακτική προσέγγιση μέσα από την θεωρία των «τριών κόσμων» Tall D. (2013) διακρίνουμε την «εκτατική ανάμιξη» (φυσικοί → θετικοί ρητοί), να επιχειρείται σε δύο άξονες αφαίρεσης.

- Δομικά – σε πρώτη φάση με την εισαγωγή του κλάσματος ως μέρος της ακέραιας μονάδας και σε δεύτερη φάση μέσω της χρήσης της αριθμογραμμής και της μέτρησης μήκους. Ισχυριζόμαστε ότι πρόκειται για μία δομικής μορφής αφαίρεση του πρώτου επιπέδου (πρακτικών Μαθηματικών), στα πλαίσια του «ενσώματου συμβολισμού», καθώς
    - αφενός το «μέρος της μονάδας» είναι έννοια με απευθείας αναπαραστάσεις από τον χώρο της καθημερινής «ενσώματης γνώσης» και
    - αφετέρου η αριθμογραμμή από το 0 ως το 1 με πεπερασμένο πλήθος σημειωμένων θέσεων ρητών, ενσωματώνει όλα τα στοιχεία του εικονοσχήματος «αφετηρία – μονοπάτι – στόχος» όπου
        - το 0 είναι η αφετηρία, και η μονάδα ο στόχος
        - κάθε βήμα στο μονοπάτι αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μήκος
        - κάθε μήκος αντιστοιχεί σε ένα δεκαδικό κλάσμα ή μία δεκαδική έκφραση. Ni, Y. (2001), Ni, Y. et all (2005)

- Διαδικαστικά – σε πρώτη φάση μέσω της μέτρησης νομισματικών αξιών και σε δεύτερη φάση μέσω της συσχέτισης του δεκαδικού με την πράξη της διαίρεσης.
  Ισχυριζόμαστε ότι πρόκειται για μία διαδικαστικής μορφής αφαίρεση επίσης του πρώτου επιπέδου (πρακτικών Μαθηματικών), στα πλαίσια του «λειτουργικού συμβολισμού» καθώς
    - Ο δεκαδικός αριθμός λειτουργεί ως σύμβολο νομισματικής αξίας

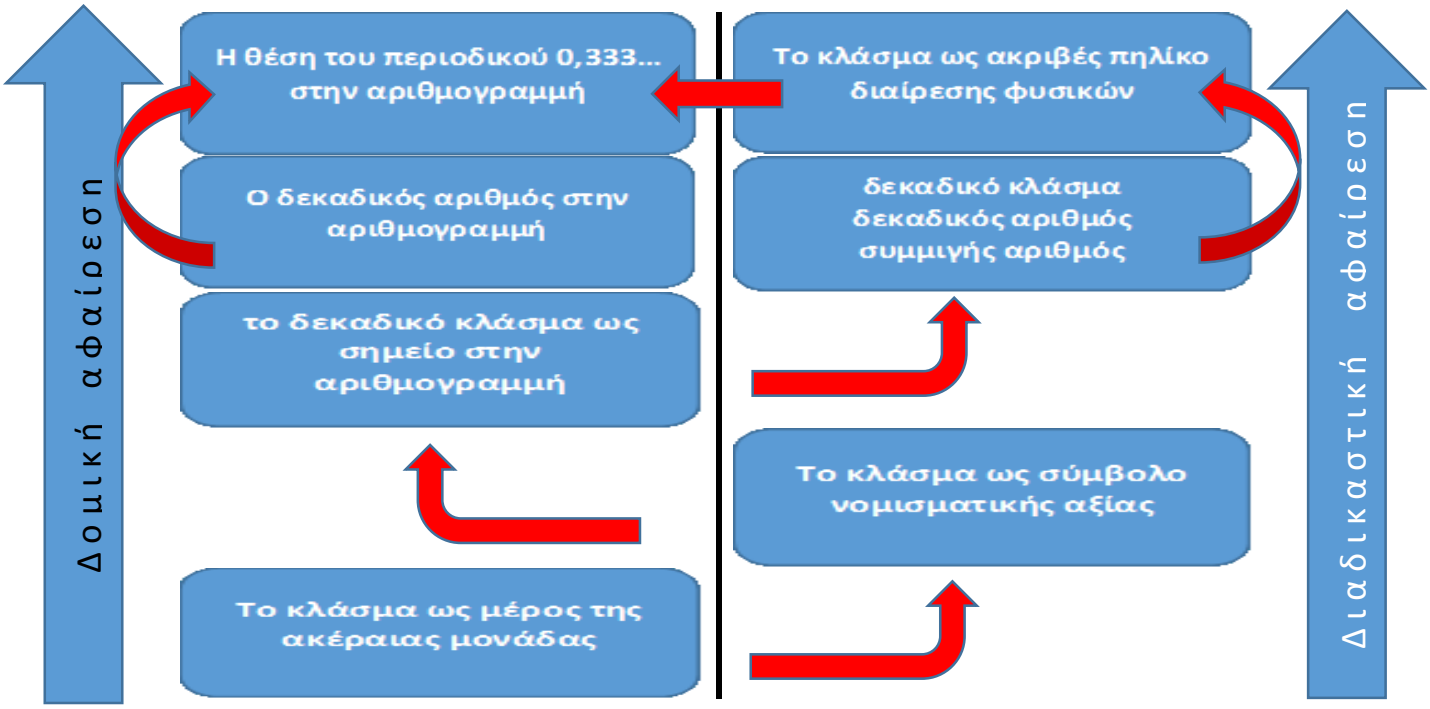
- μαθητής επιχειρεί να διαχειριστεί αφηρημένες έννοιες (αξία νομισμάτων) μέσω συμβόλων.
- Διευρύνεται το φάσμα των αναπαραστάσεων της έννοιας του αριθμού (κλάσμα, δεκαδικός, συμμιγής, αποτέλεσμα διαίρεσης) και οικοδομείται σε αρχικό στάδιο η κρίσιμη σχέση: διαδικασίας – έννοιας για τη σχέση διαίρεση φυσικών–ρητός (APOS/υποστασιοποίηση/procept/SOLO)

Στην Πέμπτη τάξη του Δημοτικού σχολείου εμπεδώνεται η σχέση «κλάσμα – δεκαδικός – διαίρεση φυσικών» και τίθεται ως στόχος η ικανότητα των μαθητών να διατάσσουν σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά θετικούς ρητούς αριθμούς. Παράλληλα αφιερώνεται πολύς χρόνος στην διαχείριση των θετικών ρητών μέσω προβλημάτων των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής. Κατά την γνώμη μας επιχειρείται μία αφαιρετική εξέλιξη στο πεδίο των διαδικαστικών μαθηματικών καθώς δεν γίνεται εστίαση στην δομική φύση των ρητών αλλά στην λειτουργία τους μέσω των τεσσάρων πράξεων. Σκοπός θα μπορούσε να είναι και η αποδόμηση λάθος στερεοτύπων και εννοιολογικών παρανοήσεων που οφείλονται στην υπερβατική επέκταση της συμπεριφοράς των φυσικών στον τρόπο λειτουργίας των ρητών («όταν πολλαπλασιάζω αυξάνω» – «όταν διαιρώ μειώνω»). Η σταθερή επαφή με τον κόσμο των συγκεκριμένων και απτών μαθηματικών μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπό το πρίσμα της θεωρίας του Tall (2013) βρισκόμαστε στο στάδιο του «λειτουργικού συμβολισμού».

Στην έκτη τάξη επανέρχεται το ζήτημα της σχέσης «κλάσμα – δεκαδικός – διαίρεση» σε μία πληρέστερη αφαιρετική διαδικασία καθώς :

- Επιδιώκεται η κατανόηση της φράσης *«Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του»*, ακόμα και όταν αυτή *«δεν δίνει ακριβές πηλίκο»,* σε μια πορεία που για απώτερο στόχο έχει την τελική ταύτιση της διαδικασίας της διαίρεσης και του αποτελέσματός της
- Τοποθετείται για πρώτη φορά στην αριθμογραμμή των δεκαδικών ο δεκαδικός 0,333… μέσω της ταύτισής του με το κλάσμα 1/3, ώστε σε δομικό επίπεδο μέσω της αριθμογραμμής να επιτευχθεί αυτό που ο D. Tall (2013) ονομάζει εκτατική ανάμιξη για την δημιουργία των θετικών ρητών.

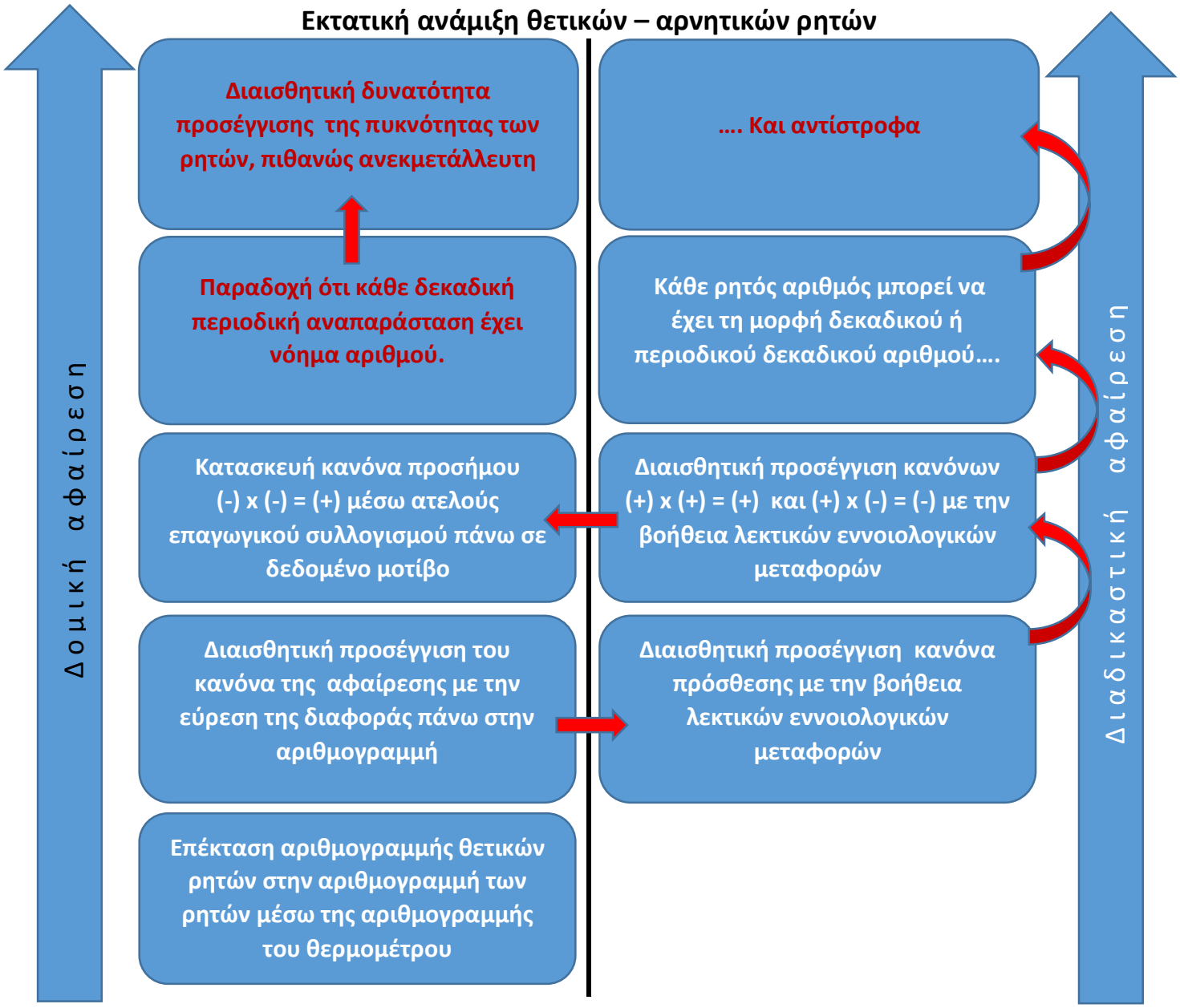
**Η οικοδόμηση της έννοιας του θετικού ρητού στο ελληνικό Δημοτικό σχολείο**



Στην πρώτη τάξη του Γυμνασίου το σύνολο των θετικών ρητών επεκτείνεται στο σύνολο των ρητών σε δύο φάσεις:

- Προηγείται μία δομικής μορφής επέκταση μέσω της αριθμογραμμής και με την βοήθεια αντίστοιχων αναπαραστάσεων της καθημερινότητας όπως: οι θερμοκρασίες κάτω από τους μηδέν βαθμούς Κελσίου ή η διάταξη των πλήκτρων που αντιστοιχούν σε υπόγεια επίπεδα στους ανελκυστήρες. Η άμεση αναφορά σε πραγματικές εικόνες (αριθμογραμμή θερμομέτρου), και η σύνδεσή τους με τις υπάρχουσες νοητικές κατασκευές (αριθμογραμμή θετικών δεκαδικών) είναι το πρώτο βήμα της εκτατικής επέκτασης, υπό την οπτική γωνία του Tall. Ως αφαιρετική διαδικασία κινείται στον χώρο του ενσώματου συμβολισμού, και είναι η βάση πάνω στην οποία θα κινηθεί το υπόλοιπο οικοδόμημα προσδιορισμού της λειτουργίας των τεσσάρων πράξεων στο νέο υπερσύνολο αριθμών.
- Σε δεύτερη φάση επιχειρείται η επέκταση της λειτουργίας των τεσσάρων πράξεων με βασικά χαρακτηριστικά:
    - Μία προσέγγιση «λειτουργικού συμβολισμού» στηριγμένη στην εννοιολογική μεταφορά «η αύξηση είναι θετική ποσότητα» , «η μείωση είναι αρνητική ποσότητα για την πράξη της πρόσθεσης.
    - Μία προσέγγιση «ενσώματου συμβολισμού» με την χρήση παραδειγμάτων επί της αριθμογραμμής των ρητών και του θερμομέτρου, για την πράξη της αφαίρεσης,
      (μέσω των πιο πάνω παραδειγμάτων, κατασκευάζονται με παρατήρηση οι πρώτοι λεκτικοί γενικευμένοι κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης)
    - Μία προσέγγιση αμιγώς «λειτουργικού συμβολισμού» στηριγμένη σε «εννοιολογικές μεταφορές» όπως: «το κέρδος είναι θετική ποσότητα», «η ζημιά είναι αρνητική ποσότητα» κλπ. Μέσω των μεταφορών αυτών επιδιώκεται από τους μαθητές να κατασκευάσουν τους κανόνες
      (θετικός) x (θετικός) = (θετικός) και (θετικός) x (αρνητικός) = (αρνητικός)
    - Έναν ατελή επαγωγικό συλλογισμό που προκύπτει από την πρόβλεψη της συνέχειας ενός μοτίβου με σκοπό την κατασκευή του κανόνα
      (αρνητικός) x (αρνητικός) = (θετικός)

Στην ίδια τάξη επανέρχεται το ζήτημα του περιοδικού δεκαδικού με το ερώτημα: «κάθε περιοδικός δεκαδικός μπορεί να έχει την μορφή κλασματικού ρητού;». Πρόκειται για ένα δομικής φύσεως ερώτημα η απάντηση του οποίου ολοκληρώνει την σχέση των ρητών με τους δεκαδικούς. Όμως η διαπραγμάτευσή του δεν μπορεί να γίνει παρά μόνο στα πλαίσια της διαδικαστικής αφαίρεσης, αφού προηγουμένως σιωπηρά κάνουμε μία δομική παραδοχή που οι μαθητές δεν είναι σε θέση να συσχετίσουν με τον αντιληπτό μέσω των αισθήσεων κόσμο, ότι κάθε περιοδική δεκαδική έκφραση πάντα εκφράζει κάποιον αριθμό. Η παραδοχή αυτή υποκρύπτει μία πρώτη διαισθητική προσέγγιση της πυκνότητας των ρητών, η οποία όμως μένει ανεκμετάλλευτη.




Στην δεύτερη τάξη του Γυμνασίου γίνεται η εισαγωγή της έννοιας του άρρητου αριθμού.

Αρχικά εισάγεται το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας, το οποίο θα αποτελέσει το εργαλείο διαχείρισης των πρώτων αρρήτων που θα γνωρίσουν οι μαθητές και στη συνέχεια εισάγεται η έννοια του άρρητου αριθμού, μέσω του του γνωστού προβλήματος της αρχαιότητας που αφορά στην εύρεση του μήκους της διαγώνιου ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με την μονάδα. Μετά την τοποθέτηση του προβλήματος, δηλώνεται από τους συγγραφείς πως οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να ισούται με το μήκος αυτής της διαγωνίου, και σύμφωνα με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, της τάξης αυτής, εξάγεται στο βιβλίο το συμπέρασμα ότι αυτό το μήκος, αφού δεν είναι ένας ρητός αριθμός : *«δεν μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός».*

Σε αυτό το σημείο το βιβλίο ορίζει ως άρρητο : *«κάθε αριθμό που δεν είναι ρητός».* Και με δεδομένη την εισαγωγή του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας, καταλήγει : *«τον αριθμό x*

*που προσπαθούμε να βρούμε έτσι ώστε* $x^2 = 2$ *, μπορούμε να τον συμβολίζουμε με* $\sqrt{2}$ *, αλλά δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Αφού είναι άρρητος, δε μπορεί να γραφεί ως ρητός ή δεκαδικός με γνωστά ψηφία».* (αποσπάσματα από το βιβλίο Μαθηματικών της Β΄Γυμνασίου)

Η οικοδόμηση της έννοιας του αρρήτου στο ξεκίνημά της έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ο ζητούμενος αριθμός υπάρχει και αντιπροσωπεύει το μήκος κάποιου τμήματος
- *«αλλά δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια»*
- Ενώ η συμβολική του αναπαράσταση είναι άλλης μορφής από την συνήθη δεκαδική μορφή

Τα τρία πιο πάνω χαρακτηριστικά είναι συνδεδεμένα αντίστοιχα με

- Την ασυμμετρία
- Την αρρητότητα
- Την σημειωτική αναπαράσταση

Όπως και στην περίπτωση των ρητών η εκτατική ανάμιξη, δομικά επιχειρείται μέσω της αριθμογραμμής: Το νοητικό οικοδόμημα της αριθμογραμμής των ρητών επεκτείνεται νοητικά στον άξονα των πραγματικών με την τοποθέτηση πάνω σε αυτόν των άρρητων αριθμών.

*«Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών».*(απόσπασμα από το βιβλίο Μαθηματικών της Β΄Γυμνασίου)

Η 1-1 αντιστοιχία που δηλώνεται στην πιο πάνω παράγραφο είναι διαισθητικά ανέφικτη καθώς, ακόμα και αν παραδεχθούμε ότι οι ρητοί λόγω αριθμησιμότητας μπορούν να τοποθετηθούν διαισθητικά επί της αριθμογραμμής με ένα είδος επαγωγικού συλλογισμού, η υπεραριθμησιμότητα των αρρήτων καθιστά ακόμα και μια τέτοια νοητική ακροβασία άχρηστη. Η μόνη δυνατότητα που απομένει στους συγγραφείς, για να δείξουν ένα παράδειγμα της μίας όψης του ισχυρισμού τους, είναι να τοποθετήσουν κάποιον άρρητο πάνω στον άξονα. Επιλέγεται ο $\sqrt{2}$, και τοποθετείται στον άξονα μέσω της γεωμετρικής κατασκευής του. Πρόκειται για μία κρίσιμη στιγμή «εννοιολογικής ενσάρκωσης» αντίστοιχη με την τοποθέτηση των φυσικών ή των ρητών πάνω στην αριθμογραμμή. Αυτός είναι ένας τρόπος στα πλαίσια της δομικής αφαιρετικής διαδικασίας να καλυφθεί το διαισθητικό και οντολογικό κενό που αφήνει η δηλωμένη αδυναμία υπολογισμού του άρρητου $\sqrt{2}$

Παραμένουν ωστόσο αδιαπραγμάτευτες τόσο σε διαισθητικό όσο και σε διαδικασιοεννοιολογικό επίπεδο οι δύο κρίσιμες δομικές ιδιότητες του νέου συνόλου των πραγματικών : η πυκνότητα (ρητών – αρρήτων) και η πληρότητα (πραγματικών).

Στην πρώτη τάξη του Λυκείου υπάρχει μία ακόμα τελευταία αναφορά στην αρρητότητα του αριθμού $\sqrt{2}$ σε ένα υψηλότερο καθαρά συμβολικό επίπεδο διαχείρισης της έννοιας. Πρόκειται για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι ο εν λόγω αριθμός είναι άρρητος, μέσω της μεθόδου της εις άτοπον απαγωγής. Υπό το πρίσμα της θεωρίας του D. Tall (2013) είναι μία διαδικασία που συντελείται στο δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης (των θεωρητικών Μαθηματικών) στο επίπεδο του «συμβολικού φορμαλισμού», καθώς πρόκειται για μία θεωρητική αποδεικτική διαδικασία που αποδεικνύει την αρρητότητα του αριθμού μέσω υποθέσεων και αλγεβρικών συμβολισμών, και παγιοποιεί σε συμβολικό επίπεδο την έννοια

ρητός, και τον διαχωρισμό της από την έννοια άρρητος. Επειδή όμως ο κύριος διδακτικός στόχος της απόδειξης αυτής δεν είναι ο επαναπροσδιορισμός της έννοιας της αρρητότητας αλλά η διδασκαλία και η εξοικείωση των μαθητών με την αποδεικτική μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής», ουσιαστικά χάνεται η ευκαιρία για επαναδιαπραγμάτευση της έννοιας πραγματικός αριθμός. Είναι αξιοσημείωτο ότι η πρώτη ουσιαστική επαναδιαπραγμάτευση των εννοιών αυτών με σκοπό τον επαναπροσδιορισμό τους, θα γίνει αποκλειστικά μέσω τού ορισμού της έννοιας, σε τυπικό και φορμαλιστικό επίπεδο με χρήση του αξιώματος της πληρότητας, των ακολουθιών Cauchy, του κιβωτισμού του Cantor, ή των τομών Dedekind στο Πανεπιστήμιο.

Έτσι με μόνο εφόδιο την πιο πάνω αρχική εισαγωγική προσέγγιση, οι μαθητές καλούνται στην Β ΄τάξη του Λυκείου και στον ορισμό της δύναμης θετικού πραγματικού με εκθέτη άρρητο να αποδεχθούν επιπλέον ότι:

*«Αν α > 0, x άρρητος και ρν η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία, τότε καθώς το ν αυξάνει τείνοντας στο +∞, οι όροι της ακολουθίας* $\alpha^{\rho_\nu}$ *«προσεγγίζουν» έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό, τον οποίο στο εξής θα ονομάζουμε όριο της ακολουθίας* $\alpha^{\rho_\nu}$ *.Το όριο αυτό συμβολίζεται με* $a^x$ *και λέγεται δύναμη του α με εκθέτη x. Συμβολικά γράφουμε:* $\alpha^x = \lim_{\nu\to\infty} a^{\rho_\nu}$ *»* (απόσπασμα από το βιβλίο της Άλγεβρας της Β ΄Λυκείου).

Σε αυτό το σημείο συγγραφείς και δάσκαλοι αποδέχονται «σιωπηρά»

- την πυκνή δομή των πραγματικών και
- το αξίωμα της πληρότητας,

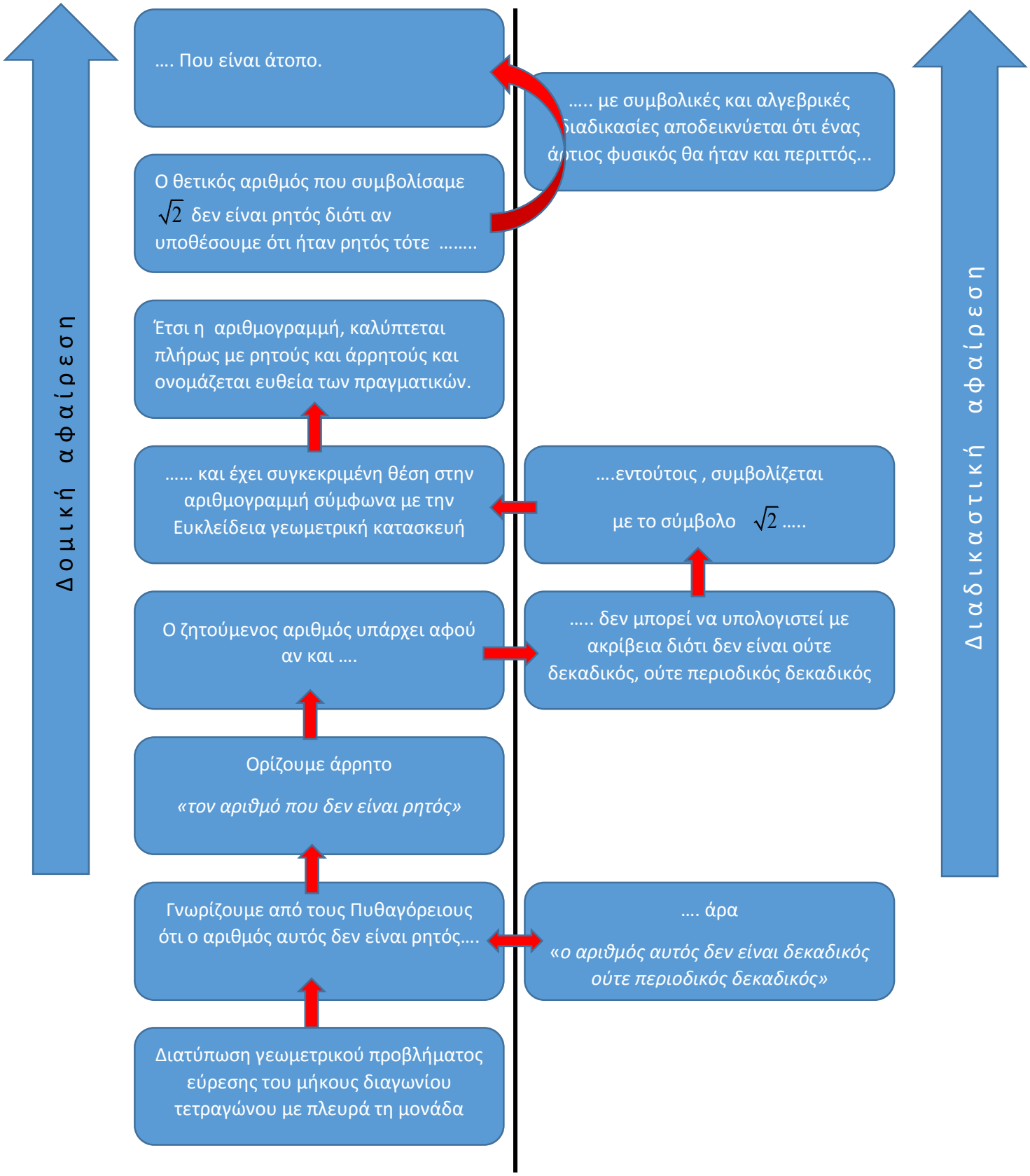
και μέσω αυτών των παραδοχών ορίζουν μία νέα έννοια ( όριο ακολουθίας ), η οποία ταυτίζεται με το τελικό αντικείμενο της διδασκαλίας, που είναι η δύναμη με εκθέτη άρρητο.

Ωστόσο οι μαθητές, πέραν της αρχικής δήλωσης του βιβλίου τους στο Γυμνάσιο ότι *«κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας»,* δεν έχουν καμιά άλλη διαισθητική ή διαδικασιοεννοιολογική προσέγγιση ούτε της πληρότητας του συγκεκριμένου συνόλου, ούτε της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων.

Σε όλες τις τάξεις της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αφιερώνεται αρκετός χρόνος προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια σε διαδικαστικές αριθμητικές ή αλγεβρικές διεργασίες, εντούτοις λίγες φορές αυτό γίνεται με σκοπό την ίδια την διαδικασία της αφαίρεσης. Έτσι παρατηρώντας τα σχεδιαγράμματα που αφορούν την εξέλιξη της έννοιας του ρητού και του άρρητου στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο εντοπίζουμε την δυσκολία της διαισθητικής προσέγγισης της έννοιας

- Της πυκνότητας
- Της πληρότητας
- Του περιοδικού δεκαδικού αναπτύγματος.
- Του άπειρου μη επαναλαμβανόμενου δεκαδικού αναπτύγματος.

**Στο πιο κάτω διάγραμμα φαίνεται η εξελικτική πορεία της οικοδόμησης της έννοιας των πραγματικών από τους ρητούς στους άρρητους έτσι όπως καταγράφεται στο ελληνικό σχολείο και σύμφωνα με το ισχύον διδακτικό πλαίσιο στους δύο άξονες αφαίρεσης**



## 2. Εννοιολογικά προβλήματα και διαπιστωμένες παρανοήσεις από την σχετική βιβλιογραφία

Είναι σαφές ότι στα προγράμματα σπουδών στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση ασχολούμαστε πολύ λίγο με την φύση των πραγματικών και ιδιαίτερα των αρρήτων. Συνήθως η ενασχόληση των εκπαιδευτικών με τους αριθμούς αυτούς αφορά αλγοριθμικές διαδικασίες μεταξύ συμβόλων που ελάχιστα έχουν να κάνουν με ζητήματα όπως η πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων ή η πληρότητα των πραγματικών.

*«Η μικρή προσοχή που δίδεται στους άρρητους στα σχολικά μαθηματικά οφείλεται κυρίως στο ότι τα αντιμετωπίζουμε σαν ένα σύνολο τεχνικών επίλυσης. Η ιδέα των μαθηματικών ως μία συναφή δομικά οργανωμένη δομή γνώσης δεν μεταφέρεται συστηματικά στους μαθητές»* (Fischbein et al., 1995)

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μαθητές αλλά και φοιτητές να αντιμετωπίζουν δυσκολίες που σχετίζονται με ένα φάσμα παρανοήσεων είτε εννοιολογικής, είτε διεργασιακής φύσης. Σε αυτήν την παράγραφο θα αναφερθούμε σύντομα αλλά λεπτομερώς στα συνηθέστερα προβλήματα που έχουν εντοπιστεί σχετικά με την κατανόηση ρητών και αρρήτων και παράλληλα θα επιχειρήσουμε να κάνουμε κάποια σχόλια που κρίνουμε ότι είναι κρίσιμα για την συλλογιστική της παρούσας εργασίας. Επειδή η δομή και η συμπεριφορά των αρρήτων προσομοιάζει με την αντίστοιχη δομή και συμπεριφορά των ρητών, η επισκόπηση περιλαμβάνει αναφορές και σε παρανοήσεις σχετικές και με τους ρητούς. «*Συγκεντρωτικά φαίνεται πως τα σημεία προσοχής και εστίασης των ερευνών γύρω από τις παρανοήσεις των μαθητών ή φοιτητών σχετικώς με τους πραγματικούς αριθμούς, αφορούν την έννοια της πυκνότητας, και την σημειωτική αναπαράσταση των ρητών και των αρρήτων, κατά την αναγνώριση και τον διαχωρισμό τους»*. (Zachariades, Christou and Pitta-Pantazi 2013)

Αποτελεί κοινή πεποίθηση ότι η έννοιες του ρητού και του άρρητου και συνεπώς του πραγματικού αριθμού είναι δύσκολο να γίνουν πλήρως αντιληπτές. (Fischbein et al., 1995; Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007; Sirotic & Zazkis, 2007; Tirosh, Fischbein, Grabber, & Wilson, 1998; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007; Zazkis & Sirotic, 2004). Γενικότερος σκοπός όλων των σχετικών ερευνών είναι αφενός η εστίαση στις δυσκολίες αυτές και αφετέρου η κατηγοριοποίηση και η θεωρητική αιτιολόγηση και προσέγγισή τους.

Σε κάποιες έρευνες φαίνεται ότι τα προβλήματα εστιάζονται στην εικόνα έννοιας που έχει σχηματιστεί για τους αριθμούς και τις πράξεις τους, από την δομή και την συμπεριφορά των φυσικών. Όταν η εικόνα αυτή, καταχρηστικά μεταφέρεται στα υπερσύνολα των ρητών και των πραγματικών, τότε λειτουργεί ως εμπόδιο τόσο για την κατανόηση της πυκνής δομής των αριθμών αυτών και της διάταξής τους, όσο και για τον τρόπο που αυτοί οι αριθμοί λειτουργούν μέσα στις πράξεις. Έτσι πολλές φορές οι μαθητές σε επίπεδο πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διατυπώνουν απόψεις όπως : *«ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση μικραίνει τους αριθμούς»* (Fischbein et al. 1985) ή *«όσα περισσότερα ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι»* (Moscal & Magone 2000), ενώ επεκτείνοντας την έννοια της διαδοχικότητας των ακεραίων στους ρητούς, θεωρούν ότι η «αρχή του επόμενου αριθμού» ισχύει και για το σύνολο των αριθμών αυτών.(Malara 2001, Merenluoto & Lehtinen 2002).

Αντίστοιχες παρανοήσεις παρατηρούνται και σε έρευνες στην τριτοβάθμια εκπαίδευση σε υποψήφιους δασκάλους ή καθηγητές μαθηματικών. (Giannakoulias, Souyoul, Zachariades, 2007; Tirosh, Fischbein, Graeber, Wilson, 1998).Διαπιστώνεται ότι η μαθηματική γνώση των υποψήφιων δασκάλων σε σχέση με τους ρητούς αριθμούς είναι "ανελαστική και αποσπασματική", καθώς οι περισσότεροι αν και διαχειρίζονται τους αριθμούς με αυστηρούς αλγόριθμους και ισχυρή διαδικαστική γνώση εντούτοις δεν είναι ικανοί να αιτιολογήσουν επιτυχώς τα βήματα των αλγοριθμικών διαδικασιών που εφαρμόζουν. "Για τους

περισσότερους τα Μαθηματικά είναι μια απλή συλλογή από υπολογιστικές τεχνικές, όχι σωστά αφομοιωμένες, μη τεκμηριωμένες τυπικά, και συχνά, ούτε και διαισθητικά". (Tirosh, Fischbein, Graeber, Wilson, 1998) Σε Θεωρητικό επίπεδο προσέγγισης, και ειδικά για τους ρητούς αριθμούς, διατυπώνεται, ελέγχεται και επιβεβαιώνεται η άποψη ότι κάποιες δυσκολίες είναι πτυχές ενός γενικότερου προβλήματος που αφορά στην εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται κατά την μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς. Vamvakoussi and Vosniadou (2010). Για την συγκεκριμένη προσέγγιση καθώς και άλλα θεωρητικά πλαίσια που μελετούν τις σχετικές παρανοήσεις γίνεται εκτενής αναφορά σε ιδιαίτερη παράγραφο του παρόντος κειμένου.

Σχετικώς με τους άρρητους η δυσκολία στην πλήρη κατανόηση της έννοιας είναι διαπιστωμένη σε μαθητές αλλά και σε υποψήφιους δασκάλους μαθηματικών της πρωτοβάθμιας ή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι Peled and Hershkovitz (1999) διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές μαθηματικών της έρευνάς τους, δεν ήταν ικανοί να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές πτυχές της έννοιας των άρρητων, όπως α) του ορισμού και της αναπαράστασής τους, β) της θέσης τους στο ευρύτερο σύστημα των αριθμών και γ) της σχέσης τους με άλλες έννοιες όπως το όριο. Αν και οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν ικανοί να διακρίνουν τους άρρητους και γνώριζαν τα χαρακτηριστικά τους, εντούτοις οδηγούνταν σε λάθη σε ζητήματα που απαιτούσαν καλή γνώση για τις διάφορες αναπαραστάσεις τους. Οι ερευνητές διέκριναν ότι η δυσκολία των φοιτητών συσχετιζόταν με την έννοια του ορίου, και προσομοίαζε με το επιστημολογικό εμπόδιο που τίθεται στο παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και την χελώνα. Έτσι οι περισσότεροι συμμετέχοντες, αν και αναγνώριζαν τον αριθμό $\sqrt{5}$ ως άρρητο και πραγματικό, εντούτοις πίστευαν ότι δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τμήμα με μήκος ίσο με αυτόν τον αριθμό καθώς το δεκαδικό του ανάπτυγμα είχε άπειρα ψηφία. Κατ' επέκταση δεν ήταν δυνατόν να τοποθετηθεί και στην ευθεία των πραγματικών, πράγμα που πολλοί το ισχυρίστηκαν και για τον ρητό 0,33… .

Σε άλλη προγενέστερη έρευνα διατυπώνεται και ελέγχεται ως υπόθεση (Fischbein et al., 1995) η άποψη ότι η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του αρρήτου οφείλεται σε δύο διαισθητικής φύσης ενστάσεις του ανθρώπινου νου, που σχετίζονται με την δομή των αρρήτων : (α) την ύπαρξη ασύμμετρων τμημάτων της ευθείας και (β) το γεγονός ότι παρόλο που οι άπειροι ρητοί είναι πυκνοί στην ευθεία, εντούτοις χρειάζονται επιπλέον άπειροι άρρητοι για να την πληρώσουν. Αν και δύσκολα κανείς μπορεί να αρνηθεί τα επιστημολογικής φύσης εμπόδια που υποκρύπτονται πίσω από αυτές τις διαισθητικές ενστάσεις, εντούτοις η έρευνα των Fischbein et al., 1995 δεν επιβεβαίωσε τον ισχυρό ρόλο που ίσως διαδραμάτιζαν κατά την υπόθεσή τους. Ουσιαστικά, όπως οι ίδιοι το διατυπώνουν, οι δυσκολίες εστιάζονται σε άλλο επίπεδο : *«Η έννοια του άρρητου αριθμού είναι σε πλήρη σύγχυση στο μυαλό πολλών μαθητών. Ο όρος άρρητος θεωρείται ισοδύναμος με «μη ακέραιους» αριθμούς, με τους αριθμούς που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, μερικές φορές με τους αρνητικούς αριθμούς, κ.λπ. Πολλοί μαθητές δεν γνωρίζουν τη βασική διάκριση μεταξύ περιοδικών και μη περιοδικών δεκαδικών»* Αντιθέτως : *«σε γενικές γραμμές, οι μαθητές δεν ήταν συγκλονισμένοι ούτε από το γεγονός ότι δύο τμήματα μπορεί να είναι ασύμμετρα, ούτε και από το ότι σε ένα διάστημα, υπάρχει ένα άπειρο πλήθος ρητών αριθμών και επιπλέον, ένα άπειρο πλήθος άρρητων αριθμών».* Κατά την γνώμη των ερευνητών τελικά οι συγκεκριμένες διαισθητικές δυσκολίες *«προϋποθέτουν μία ιδιαίτερη διανοητική ανάπτυξη»* και *«δεν αποτελούν πρωτογενούς φύσης εμπόδια»* για τους μαθητές. (Fischbein et al., 1995)

Έρευνες σχετικά με τους άρρητους έχουν γίνει και σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Διαπιστώθηκε ότι υπάρχει μια ευρεία πεποίθηση μεταξύ των εκπαιδευτικών ότι η αρρητότητα εξαρτάται από την δεκαδική αναπαράσταση, και για αρκετούς αποτελεί πρόβλημα η αναγνώριση αν κάποιος πραγματικός είναι ρητός ή άρρητος.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. and Ben-Zvi, R.(1987). Αντίστοιχα σε έρευνα που έγινε σε φοιτητές μαθηματικών, εξετάστηκε η επιρροή των διαφορετικών αναπαραστάσεων των αρρήτων στον τρόπο κατανόησης και χαρακτηρισμού της αρρητότητας, σε συνδυασμό με την επιρροή που ασκεί μέσω της εικόνας η αριθμομηχανή – calculator. Διαπιστώθηκε ότι το κριτήριο που για το 40% των συμμετεχόντων, υπερίσχυε στην απόφασή τους κατά τον διαχωρισμό αρρήτων – ρητών, ήταν η δεκαδική τους αναπαράσταση, έτσι όπως δίνεται από τον υπολογιστή. Έτσι ο ρητός 53/83 με περιοδικότητα δεκαδικού αναπτύγματος μετά από 41 ψηφία, κρίθηκε από πολλούς άρρητος, ή ρητός αλλά με αμφιβολία, καθώς δεν διαφαινόταν καμία περιοδικότητα στο αρχικό τμήμα του δεκαδικού αναπτύγματός του. Rina Zazkis (2005)

Η έρευνα των Natasa Sirotic & Rina Zazkis 2007 «The Gap Between Formal And Intuitive Knowledge», έγινε σε φοιτητές που είτε δεν είχαν εκπαίδευση σε ανώτερα μαθηματικά είτε είχαν αλλά σε παλαιότερο στάδιο. Εξετάστηκε η δυνατότητα των συμμετεχόντων να «παράγουν επαρκή διαισθητικά μοντέλα αναπαράστασης της έννοιας του αριθμού που να μπορούν να φιλοξενήσουν την απόδειξη της ύπαρξης των αρρήτων ως επιβεβλημένη». Διαπιστώθηκαν παρανοήσεις σχετικά με το πλήθος των ρητών και των αρρήτων, σχετικά με την πυκνότητά τους αλλά και σχετικά με την τοποθέτηση των αριθμών οι οποίες κατά τους συγγραφείς «οφείλονται στον μη διαισθητικό χαρακτήρα του απείρου». Έτσι, σκέψεις και υποθέσεις όπως το ότι αν και οι ρητοί είναι παντού πυκνοί, στην πραγματικότητα είναι πολύ αραιοί σε σχέση με τους άρρητους όπως οι ίδιοι σημειώνουν : *«δεν είναι καθόλου προφανείς διαισθητικά ούτε καν πιστευτές».* Σημειώνεται δε από τους συγγραφείς ότι *«όχι πλήρως αναπτυγμένες διαισθήσεις συχνά συνδέονται με αδυναμίες στην τυπική γνώση και την έλλειψη αλγοριθμικής εμπειρίας»*. Ενώ καταλήγουν : *«Η κατασκευή σταθερών συνδέσεων μεταξύ των αλγορίθμων, των διαισθήσεων και των εννοιών είναι απαραίτητη για την κατάκτηση μιας ζωντανής γνώσης (σε αντίθεση με την γνώση ρουτίνας) οποιουδήποτε μαθηματικού τομέα, και ως εκ τούτου, επίσης, και για την κατανόηση των αρρήτων»*.

# Κεφάλαιο 3ο – Η μεθοδολογία της έρευνας

## 1. Το πλαίσιο και τα στοιχεία της έρευνας

Η παρούσα έρευνα, αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης και αφορά στην διερεύνηση της επιρροής που άσκησε σε δύο ομάδες μαθητών της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου, μία Ευκλείδεια γεωμετρική κατασκευή, με χρήση του λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας geogebra στα πλαίσια μίας πειραματικής διδασκαλίας με σκοπό την διαισθητική προσέγγιση της δομής των πραγματικών και της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος μίας αύξουσας και φραγμένης ποσότητας.

Η έρευνα οργανώθηκε και πραγματοποιήθηκε σε Γενικό Λύκειο του νομού Αττικής. Κινήθηκε εκτός του πλαισίου του προγράμματος σπουδών του Γενικού Λυκείου διότι ο αρχικός σκοπός απαιτούσε ιδιαίτερη εστίαση σε αντικείμενα που δεν συνάδουν με τους στόχους του προγράμματος σπουδών της Α Λυκείου. Η διεξαγωγή της έρευνας έγινε στο δεύτερο τετράμηνο του σχολικού έτους. Η επιλογή του χρόνου συσχετίζεται με τις γνώσεις που θα έπρεπε να έχουν οι μαθητές στον τομέα της Ευκλείδειας γεωμετρίας σε ζητήματα ανισοτικών σχέσεων πλευρών τριγώνου, αθροίσματος γωνιών τριγώνου και παραλληλίας.

Η επιλογή των συμμετεχόντων μαθητών έγινε μόνο με βάση την επιθυμία των ίδιων των μαθητών και συνεπώς το δείγμα της έρευνας δεν είναι αντιπροσωπευτικό ούτε από άποψη μεγέθους ούτε από άποψη ποιοτικών χαρακτηριστικών. Συμμετείχαν 12 μαθητές χωρισμένοι σε δύο ομάδες. Η πειραματική διδασκαλία έγινε και στις δύο ομάδες σε σχεδόν παράλληλο χρόνο, έτσι ώστε η συλλογή και μελέτη των δεδομένων από την μία ομάδα να μην επηρεάσει την οργάνωση της διδακτικής παρέμβασης στην άλλη και να μην υπάρχει ανατροφοδότηση εμπειριών.

Κάθε ομάδα είχε στην διάθεσή της τρεις υπολογιστές (ένας Η/Υ ανά δύο μαθητές), ενώ για της ομαδικές συζητήσεις και τις αναγκαίες παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού έγινε χρήση διαδραστικού και κλασσικού πίνακα. Όλες οι συνεδριάσεις μαγνητοφωνήθηκαν και συλλέχτηκε φωτογραφικό υλικό από παρουσιάσεις μαθητών στην ολομέλεια. Το φωτογραφικό και ηχητικό υλικό αναλύθηκε με σκοπό την καταγραφή και αποτύπωση των κρίσιμων σημείων της κάθε συνάντησης. Με κάθε ομάδα έγιναν τρείς συναντήσεις διάρκειας μίας ώρας περίπου η κάθε μία .

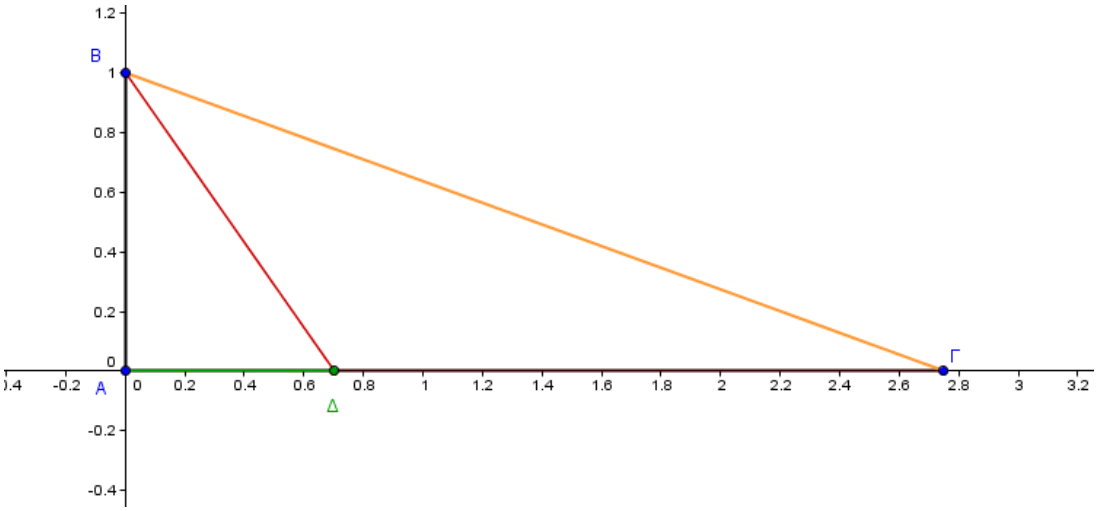
Από τους μαθητές ζητήθηκε να απαντήσουν σε ερωτήματα φύλλου εργασίας (Παράρτημα), έχοντας ταυτόχρονη πρόσβαση σε αντίστοιχο αρχείο του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας geogebra. Οι απαντήσεις στο φύλλο εργασίας δεν ταξινομήθηκαν ως προς την ορθότητά τους, για την εξαγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων, καθώς το δείγμα από άποψη πλήθους και ποιοτικών χαρακτηριστικών δεν ήταν το κατάλληλο. Όμως αποτέλεσαν αφορμή για συζήτηση στην ολομέλεια κάθε ομάδας, όπου διατυπώθηκαν: οι απόψεις των μαθητών, οι μεταξύ τους διαφωνίες ως προς τις απαντήσεις, καθώς και υποβοηθητικές παρεμβάσεις από τον εκπαιδευτικό προκειμένου να υποστηριχτούν οι νοητικές προσεγγίσεις των μαθητών.

**2. Περιγραφή της δραστηριότητας και ερωτήματα προς τους μαθητές**

Οι μαθητές κλήθηκαν να διερευνήσουν και να σχολιάσουν την συμπεριφορά τριών μεταβαλλόμενων τμημάτων ενός γεωμετρικού σχήματος σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας όλες τις γνώσεις που έχουν, αλλά και την διαίσθησή τους, είτε αυτή οδηγεί σε τυπικά σωστές αιτιολογήσεις είτε όχι.

Στο δοθέν πρόβλημα θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με

- Α την αρχή του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων,
- ΑΒ επί του θετικού ημιάξονα των τεταγμένων τέτοιο ώστε (ΑΒ)=1 μονάδα ,
- Γ σημείο το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα επί του θετικού ημιάξονα των τετμημένων, έτσι ώστε η απόστασή του από το Α να γίνεται οσοδήποτε μεγάλη επιθυμούμε.
- ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β του τριγώνου και Δ το σημείο τομής της με την πλευρά ΑΓ.




Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό geogebra έχουν την δυνατότητα να μετακινήσουν απεριόριστα το σημείο της κορυφής Γ του τριγώνου επί του άξονα των τετμημένων, προκειμένου να διερευνήσουν την συμπεριφορά των τμημάτων ΒΓ , ΑΔ και ΒΔ. Στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίζεται ένδειξη που δίνει το μήκος των τμημάτων ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ Το μήκος ΑΓ παίρνει τιμές φυσικών μεγαλύτερων ή ίσων του 2, ενώ τα ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ απεικονίζονται ως ρητοί ( αν και συνήθως δεν είναι ) με στρογγυλοποίηση 5 δεκαδικών. Η διερεύνηση εστιάζεται :

α) Στην διαφοροποίηση της συμπεριφοράς του ΒΓ από τα ΑΔ και ΒΔ όσον αφορά στην φύση του φραγμένου και μη φραγμένου μεγέθους.
β) Στην αναζήτηση του πιο μικρού αριθμού που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει το μήκος του ΑΔ
γ) Στην αναζήτηση του πιο μικρού αριθμού που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει το μήκος του ΒΔ

Από τους μαθητές ζητήθηκε:

- Να αιτιολογήσουν γιατί καθώς το μήκος ΑΓ αυξάνεται απεριόριστα, το μήκος ΒΓ αυξάνεται ομοίως απεριόριστα – δηλαδή να αναγνωρίσουν το «μήκος ΒΓ» ως μή φραγμένη ποσότητα και να το αιτιολογήσουν.

- Να αιτιολογήσουν ότι καθώς το μήκος ΑΓ αυξάνεται απεριόριστα το μήκος ΑΔ αυξάνεται αλλά παραμένει πάντα μικρότερο της μονάδας – δηλαδή να αναγνωρίσουν το «μήκος ΑΔ» ως αύξουσα αλλά άνω φραγμένη ποσότητα και να προχωρήσουν σε κάποια αιτιολόγηση

- Να αποδεχθούν διαισθητικά ότι το μήκος ΑΔ αυξάνεται διαρκώς και μπορεί να πλησιάσει οσοδήποτε κοντά στο ένα.

- Να κατασκευάσουν την έννοια του supremum της ποσότητας «μήκος ΑΔ»

- Να συγκρίνουν τους αριθμούς 0,999… και 1 και να καταλήξουν διαισθητικά στην αναγκαστική αποδοχή της ισότητας

- Να αιτιολογήσουν ότι καθώς το μήκος ΑΓ αυξάνεται απεριόριστα το μήκος ΒΔ αυξάνεται και παραμένει πάντα μικρότερο από κάποιον αριθμό – δηλαδή να αναγνωρίσουν το «μήκος ΒΔ» ως αύξουσα αλλά άνω φραγμένη ποσότητα και να προχωρήσουν σε κάποια αιτιολόγηση.

- Να αποδεχθούν διαισθητικά την ύπαρξη ελαχίστου άνω φράγματος για την ποσότητα «μήκος ΒΔ»

- Να εντοπίσουν την τετραγωνική ρίζα του δύο ως supremum του μεγέθους «μήκος ΒΔ»

- Να συσχετίσουν το άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα του άρρητου $\sqrt{2}$ με την ιδιότητά του του ως supremum μίας ποσότητας

- Να συσχετίσουν τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό με το πέρας μίας ατέρμονης διαδικασίας προσέγγισής του, μέσω της δεκαδικής του αναπαράστασης.

**3 . Στόχοι – ερευνητικά ερωτήματα – αναμενόμενες προσεγγίσεις από τους μαθητές**

Από την επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, διαπιστώνεται ότι τα προβλήματα της κατανόησης των πραγματικών αριθμών εστιάζονται:

- σε διαισθητικής φύσης δυσκολίες που συσχετίζονται με την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων και
- σε δυσκολίες που συσχετίζονται με την πολλαπλότητα των σημειωτικών αναπαραστάσεων πιστεύουμε πως

Επίσης η αντίστοιχη επισκόπηση που έγινε επίσης στο προηγούμενο κεφάλαιο, σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας του πραγματικού αριθμού στο σχολείο, καταδεικνύει την δυσκολία της διαισθητικής προσέγγισης τόσο της πυκνότητας όσο και της πληρότητας στο σύνολο των πραγματικών.

Αν θέλουμε λοιπόν να βελτιώσουμε τις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από αυτές τις έννοιες, θα πρέπει στην κατάλληλη ηλικιακή ομάδα μαθητών να επιχειρηθούν νέες διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του πραγματικού αριθμού, οι οποίες θα εστιάζουν στην ανάδυση αυτών των προβλημάτων, και στη συνέχεια στην όσο το δυνατό πειστικότερη αποσαφήνισή τους. Μία εκ νέου διδακτική προσέγγιση όμως καλό είναι να συνοδεύεται από νέες τεχνικές και νέα εργαλεία τα οποία θα στοχεύουν εκεί που τα προηγούμενα άφησαν κενά. Συνεπώς ως δάσκαλοι θα πρέπει να αναζητήσουμε, να προτείνουμε και να δοκιμάσουμε διδακτικές τεχνικές και διδακτικά εργαλεία ικανά:

- Να ενεργοποιούν τον διαισθητικό χαρακτήρα της γνώσης.
- Να αγγίζουν πολύπλευρα και πολυεπίπεδα την έννοια πραγματικός αριθμός
- Να συσχετίζουν την διαισθητική διάσταση της έννοιας με την πολλαπλότητα της σημειωτικής της αναπαράστασης.

Η βασική ιδέα της παρούσας εργασίας είναι η διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος μίας αύξουσας αλλά φραγμένης ποσότητας, μέσα από το θεωρητικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης προσέγγισης:

- Αντιμετωπίζουμε το πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (και διερευνούμε την αλήθεια αυτής της οπτικής γωνίας ) ως το περιβάλλον όπου ο διαισθητικός κόσμος των «ενσώματων εννοιών», των «εικονοσχημάτων», και των «εννοιολογικών μεταφορών» αφενός ενεργοποιείται και παράγει νέες έννοιες και δομές, και αφετέρου οργανώνεται εντός ενός αυστηρού πλαισίου αδιαμφησβήτητων για τους μαθητές νόμων, με τέτοιο τρόπο ώστε να συντίθενται διαισθητικές αντιλήψεις συμβατές με την δομή των πραγματικών
- Ισχυριζόμαστε (και διερευνούμε τον ισχυρισμό μας) ότι μέσω κατάλληλων γεωμετρικών δομών και εργαλείων, είναι εφικτή η πρόκληση προβληματισμών ικανών να συμβάλλουν στην ανάδυση των βασικών ιδιοτήτων της δομής της πραγματικής ευθείας, όπως η πυκνότητα των ρητών και η πληρότητα των πραγματικών ως «διαισθητικά αναγκαίες» σταθερές.
- Εικάζουμε (και ελέγχουμε την εικασία αυτή) ότι η διδασκαλία της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, ακόμα και σε διαισθητικό επίπεδο, μπορεί να είναι η

αφορμή για την ανάδυση και την συζήτηση σημαντικών παρανοήσεων σχετικών με την πυκνότητα των ρητών αλλά και την πληρότητα των πραγματικών.

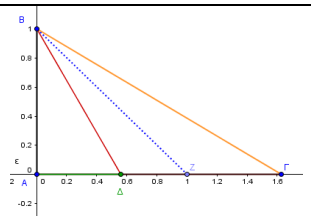
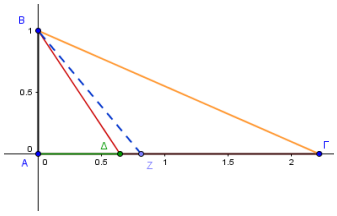
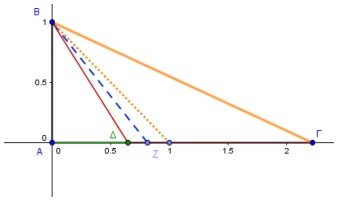
- Μέσω της διαισθητικής εισαγωγής της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος εντός του πλαισίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, προσβλέπουμε στην δημιουργία μίας δεύτερης οπτικής γωνίας για την έννοια ρητός, που υπό κατάλληλες συνθήκες μπορεί να οδηγήσει στην διεύρυνση της εικόνας έννοιας και όλων των πραγματικών ως supremum – όριο – μίας γνησίως αύξουσας και φραγμένης ακολουθίας που ορίζεται από την δεκαδική τους αναπαράσταση.

Ειδικότερα για την νοηματοδότηση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, πιστεύουμε ότι η απλή δομή του ορισμού της, εντός του περιβάλλοντος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, προσδίδει μία τριπλή δυνατότητα διαισθητικής προσέγγισης. Με τους πιο κάτω θεωρητικούς συλλογισμούς ισχυριζόμαστε ότι η διαισθητική οικοδόμηση της νέας έννοιας, μέσω του προτεινόμενου διδακτικού εργαλείου, είναι πιθανό να συσχετίζεται με την δομή δύο βασικών εικονοσχημάτων – ως αντιληπτικές δομές – και μίας βασικής εννοιολογικής μεταφοράς. Του source path goal σχήματος του container σχήματος, και της εννοιολογικής μεταφοράς του απείρου. Στην έρευνα αναζητούμε εκφράσεις και σκέψεις των μαθητών που ίσως επαληθεύουν, ενισχύουν ή τροποποιούν αυτόν τον θεωρητικό ισχυρισμό.

- Το source path goal schema, ως μία δομή που καθορίζει και καθορίζεται από μία αφετηρία, ένα τέλος ( σκοπός ) και ένα μονοπάτι προς αυτό το τέλος – σκοπό .
    - Αφετηρία είναι η αρχική θέση του σημείου Δ (θέση ρητού 0,68103 στρογγυλοποίηση σε 5 δεκαδικά για θέση του Γ στον φυσικό 2)
    - Το μονοπάτι είναι η προβολή της πορείας του Δ προς το θετικό άπειρο και διαισθητικά δημιουργείται από την κίνηση της κορυφής Γ του τριγώνου ΑΒΓ
    - Το τέλος είναι ασαφές εκ πρώτης όψεως και καθορίζεται μόνο μέσω Αλγεβρικών ή Ευκλείδειων μεθόδων.

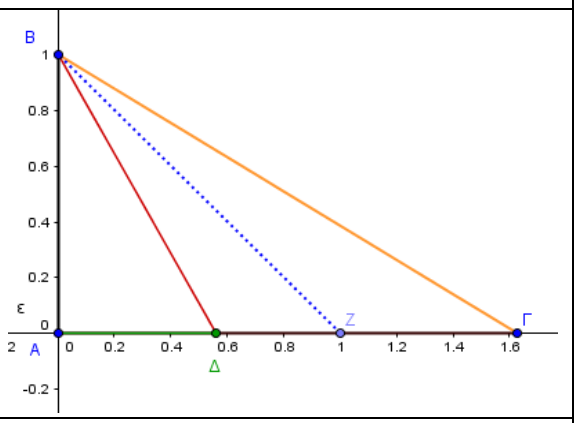
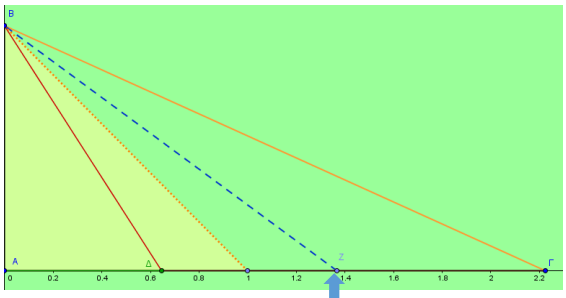
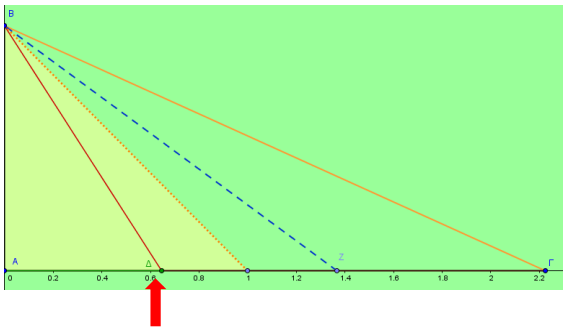
Στον πιο κάτω πίνακα ο οποίος αφορά στην συμπεριφορά των μηκών ΑΔ, ΒΔ αναφέρονται :

- Τα αναμενόμενα διαισθητικής φύσης συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από την εσωτερική δομή του source path goal σχήματος
- Τα αυστηρότερα , αναμενόμενα μαθηματικά συμπεράσματα, τα οποία δεν μπορούν να τεθούν υπό αμφισβήτηση, καθώς στηρίζονται σε μία κατοχυρωμένη στους μαθητές πρωτογενή αξιωματική δομή (Ευκλείδεια Γεωμετρία), και τα οποία ενισχύουν ή ανατρέπουν οριστικά τις αρχικές διαισθητικές υποθέσεις, οικοδομώντας βήμα βήμα ένα σταθερό μαθηματικό συλλογισμό.
- Το αναμενόμενο συμπέρασμα στα πλαίσια μίας αφαιρετικής διαδικασίας δομικής φύσης στην περιοχή του «ενσώματου φορμαλισμού», και της διασύνδεσης και ανάμιξης των γνωστικών δομών μέσω της Ευκλείδειας απόδειξης όπως προτείνεται από τον D. Tall. (2013).

| **Από την εσωτερική δομή του σχήματος (ισχυρά διαισθητικά συμπεράσματα)** | **Από την δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (συλλογισμοί που δεν αμφισβητούνται)** | **Σχήμα** |
|---|---|---|
| Το τέλος του Δ διαισθητικά φαίνεται να είναι το θετικό άπειρο | Αποδεικνύεται όμως ότι: **τέλος είναι το σημείο του θετικού ημιάξονα που αντιστοιχεί στην μονάδα** |  |
| Οποιαδήποτε θέση Ζ στο μονοπάτι, μετά την αρχική του Δ, είναι πλησιέστερη στο σημείο που αντιστοιχεί στην μονάδα | Συνεπώς: **ορίζει με το Α τμήμα ΑΖ μεγαλύτερου μήκους από το αρχικό ΑΔ, και με το Β τμήμα ΒΖ μεγαλύτερου μήκους από το αρχικό ΒΔ** |  |
| Οποιαδήποτε θέση Ζ στο μονοπάτι, πριν το σημείο που αντιστοιχεί στη μονάδα, βρίσκεται πλησιέστερα στο Α από αυτό | Συνεπώς: **απέχει από το Α λιγότερο από την μονάδα, είναι μία εφικτή θέση για το Δ., και ορίζει με το Α τμήμα ΑΖ μικρότερο από την μονάδα, και με το Β τμήμα ΒΖ, μικρότερο από το τμήμα που ορίζει το Β με το σημείο που αντιστοιχεί στην μονάδα.** |  |
| **Τελικό συμπέρασμα** **Το σημείο που αντιστοιχεί στην μονάδα καθορίζει το ελάχιστο άνω φράγμα των ποσοτήτων ΑΔ και ΒΔ** | | |

- Το container schema, ως μία καθολική δομή που καθορίζει και καθορίζεται από μία εσωτερική περιοχή, μία εξωτερική περιοχή και ένα σύνορο.
    - Το εσωτερικό ορίζεται από όλα τα πιθανά μήκη των ποσοτήτων ΑΔ και ΒΔ
    - Το εξωτερικό από όλα τα άνω φράγματα κάθε μίας από αυτές τις ποσότητες
    - Το σύνορο εννοιολογικά υπάρχει διότι η δομή συλλαμβάνεται ως ολότητα και κανένα από τα τρία μέρη δεν υπάρχει χωρίς τα άλλα δύο. Έτσι το σύνορο νοηματοδοτείται ως το νοητικό αντικείμενο που χωρίζει το μέσα με το έξω.

Στον πίνακα πού ακολουθεί αναφέρεται μία πιθανολογούμενη συμπερασματολογική υποθετική προσέγγιση της έννοιας ελάχιστο άνω φράγμα στην αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράφεται στο προηγούμενο σχήμα. Εδώ η οικοδόμηση της έννοιας αναμένεται να επιτευχθεί αντίστροφα. Δηλαδή στο διαισθητικό πλαίσιο που προσφέρει η εσωτερική δομή του εικονοσχήματος container, έτσι όπως αυτή κατασκευάζεται εννοιολογικά από τα αδιαμφησβήτητα συμπεράσματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

| **Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία** | **Σχήμα** |
|---|---|
| • Αποδεικνύεται ότι το τμήμα ΑΔ είναι πάντα μικρότερο από την μονάδα.<br>• Το ΑΔ μπορεί να είναι οσοδήποτε κοντά στη μονάδα |  |
| Αυτό καθορίζει μία πιθανή θέση συνόρου και κατ' επέκταση αναδύει το σχήμα container στην ολότητά του Μέσα – σύνορο – έξω | |
| **Από την εσωτερική δομή του σχήματος (ισχυρά διαισθητικά συμπεράσματα)** | **Σχήμα** |
| **Οτιδήποτε μετά από το σύνορο Είναι άνω φράγμα** |  <br>**Εξωτερικό** |
| **Οτιδήποτε πριν το σύνορο δεν είναι φράγμα.** |  <br>**Εσωτερικό** |
| **Τελικό συμπέρασμα**<br>**Το σύνορο είναι το ελάχιστο άνω φράγμα** | |

- *Την Βασική Μεταφορά του Απείρου*, ως μία απεικονιστική δομή που νοηματοδοτεί ένα τέλος σε μία άπειρη διαδικασία.

| **Εννοιολογικό πεδίο αφετηρίας** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος - 1** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος – 2** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος – 3** |
|---|---|---|---|
| **(Περατωμένες διαδικασίες)** | **μη περατωμένες διαδικασίες Θέση σημείου Γ** | **μη περατωμένες διαδικασίες μήκος ΑΔ (Στρογγυλοποιημένο)** | **μη περατωμένες διαδικασίες Μήκος ΒΔ (Στρογγυλοποιημένο)** |
| Η αρχική κατάσταση | φυσικός 2 | Ρητός 0,61803 < 1 | Ρητός 1,08239 < $\sqrt{2}$ |
| κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διεργασίας | Το πρώτο βήμα του σημείου Γ Φυσικός 3 | Ρητός 0,72076 Με 0,61803 < 0,72076 < 1 | Ρητός 0,72076 Με 1,08239<1,17557< $\sqrt{2}$ |
| Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η διάδοχη κατάσταση | Το ενενηκοστό ένατο βήμα του σημείου Γ Φυσικός 100 | Ρητός 0,99005 Με 0,99005 < 1 | Ρητός 1,4072 Με 1,4072 < $\sqrt{2}$ |
| Ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας | Το επόμενο βήμα του σημείου Γ Φυσικός: 100+1=101 | Ρητός 0,99015 Με 0,99005 < 0,99015 < 1 | Ρητός 1,40726 Με 1,4072 < 1,40726 < $\sqrt{2}$ |
| Τελική προκύπτουσα κατάσταση **Πέρας διαδικασίας** | **Άπειρο (πληθικότητα συνόλου φυσικών)** | **Αναμένεται να κριθεί αναγκαία η ύπαρξη πέρατος και ως πέρας της διαδικασίας και να πουν ότι είναι ο περιοδικός αριθμός 0,999…** | **Αναμένεται να κριθεί αναγκαίο ότι υπάρχει κάποιος αριθμός ως πέρας της διαδικασίας και να συμπεράνουν ότι είναι ο $\sqrt{2}$** |

Ως επέκταση των συμπερασμάτων της έννοιας της περάτωσης μιας πεπερασμένης διαδικασίας προκύπτει μεταφορικά ότι ομοίως και σε μία άπειρη διαδικασία: *«Η τελική προκύπτουσα κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μή τελικής κατάστασης»*

Έτσι αναμένουμε να προκύψουν μερικά από τα εξής διαισθητικά συμπεράσματα :

- Ο περιοδικός αριθμός 0,99… είναι μεγαλύτερος από κάθε αριθμό μικρότερο του 1
- Δεν υπάρχει κάποιος αριθμός που να είναι ο προηγούμενος του 1
- Ο αριθμός 0,99… θα πρέπει να είναι ο 1
- Δηλαδή ο 1 μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός με άπειρα ψηφία.
- Μπορούμε μέσω της ακολουθίας {0,9 , 0,99 , 0,999 , 0,9999 , ….} Να φτάσουμε οσοδήποτε κοντά στον 1
- Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ένας άρρητος αριθμός που όπως και ο 1 γράφεται με άπειρα δεκαδικά ψηφία και μπορούμε να τον πλησιάσουμε οσοδήποτε κοντά θέλουμε μέσω της ακολουθίας που προκύπτει από το δεκαδικό του ανάπτυγμα.

## Κεφάλαιο Δ – Τα αποτελέσματα της έρευνας

Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας σε φάσεις, ακολουθώντας την δομή του φύλλου εργασίας που δόθηκε στους μαθητές.

*Φάση Α : Συμπεριφορά του μήκους του τμήματος ΒΓ.*

Ηχογραφημένο επεισόδιο Α1 **(αρχείο ήχου 711-0102 . 02:15)**

Οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν γιατί η απομάκρυνση του Γ από το Α προκαλεί αύξηση του μήκους ΒΓ

| | |
|---|---|
| *Κ1* | *Χρησιμοποιήσαμε την απόδειξη του βιβλίου* |
| *Ε* | *Η απόδειξη του βιβλίου τι λέει; Το βιβλίο θυμάσαι τι λέει;* |
| *Κ1* | *Όχι* |
| *Ε* | *Να σου το δώσω εγώ να δεις. Θυμάσαι σε ποιο σημείο είναι;* |
| *Κ1* | *Ναι, να εδώ* |
| *Ε* | *Τι λέει για πες* |
| --- | *Διαβάζει την απόδειξή* |
| *Ε* | *Δεν διαβάζεις το θεώρημα καλύτερα* |
| *Κ1* | *Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου, είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.* |

Η μαθήτρια Κ1 αποδέχεται ότι η μετακίνηση του Γ αυξάνει το μήκος του ΑΓ και μέσω του θεωρήματος συμπεραίνει ότι αντιστοίχως αυξάνεται και το μήκος του ΒΓ. Χρησιμοποιεί το πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προκειμένου να κάνει το πρώτο βήμα για την μελέτη της μεταβολής της ποσότητας μήκος ΒΓ.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Α2 **(αρχείο ήχου 711-0102 . 06:25)**

Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα αν το μήκος του ΒΓ μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από 10

| | |
|---|---|
| *Α1* | *Υπάρχει και μία άλλη απόδειξη όμως* |
| *Ε* | *Πες* |
| *Α1* | *σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η …..* |
| *Ε* | *Η υποτείνουσα* |
| *Α1* | *ναι αυτό* |
| *Κ1* | *αυτό έχω κάνει εγώ* |
| *Ε* | *αυτό έχεις κάνει εσύ , ωραία πες τα εσύ* |
| *Κ1* | *Η ΒΓ είναι μεγαλύτερη της ΑΓ που ισχύει πάντα καθώς η ΒΓ είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ , άρα αν υποθέσουμε ότι το ΑΓ είναι ίσο με 10 με το Γ στη θέση 10 τότε το ΒΓ θα είναι μεγαλύτερο του 10. Αναγκαστικά* |

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα θεωρήματα των ανισοτικών σχέσεων που σχετίζονται με τις πλευρές του τριγώνου προκειμένου να αιτιολογήσουν ότι η αύξηση του ΒΓ μπορεί να είναι τέτοια ώστε το μήκος του να γίνει μεγαλύτερο από 10 μονάδες. Η χρήση της λέξης «αναγκαστικά» από την μαθήτρια Κ1, είναι δηλωτική της ισχύος που πιστεύει ότι έχει ένα τέτοιο συμπέρασμα.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Α3 **(αρχείο ήχου 711-0102 . 08:00)**

Οι μαθητές αναζητούν απάντηση στο ερώτημα αν υπάρχει κάποιος αριθμός ο οποίος να είναι μεγαλύτερος από οποιοδήποτε «μήκος ΒΓ». Ουσιαστικά επιχειρείται η οικοδόμηση της έννοιας της απειρίζουσας ποσότητας, η οποία θα λειτουργήσει ως πόλος διαφοροποίησης στις ποσότητες «μήκος ΑΔ», «μήκος ΒΔ», οι οποίες είναι άνω φραγμένες.

| | |
|---|---|
| *Ε* | *Σου λέω ότι το Γ το πηγαίνεις όσο μακριά θέλεις από το Α. Με αυτό το δεδομένο μπορείς να πεις ότι το μήκος ΒΓ , δεν ξεπερνάει έναν αριθμό. Ότι δηλαδή «βρήκα ότι το ΒΓ δεν μπορεί να γίνει πάνω από… τόσο».* |
| *Κ2* | *Μα λέει απεριόριστα* |
| *Ε* | *Ναι, λέει για το ΑΓ , δεν λέει για το ΒΓ. Ποιος το έχει δουλέψει; Πες Κ1* |
| *Κ1* | *δεν μπορούμε να βρούμε έναν τέτοιο αριθμό καθώς το ΒΓ είναι πάντα μεγαλύτερο από το ΑΓ* |
| Ε | μάλιστα , οπότε; |
| Κ1 | δεν υπάρχει ένας αριθμός που να κάνει το ΑΓ να είναι μεγαλύτερο του ΒΓ |
| *Κ3* | *κύριε δεν θα κλείσει η γωνία σιγά σιγά και θα κολλήσει στον χχ΄, οπότε…* |
| *Κ1* | *και πάλι θα είναι μεγαλύτερο* |
| *Ε* | *η ουσία ποια είναι , μπορείς να περιορίσεις το ΒΓ κάτω από έναν αριθμό;* |
| *Κ3* | *ναι δεν γίνεται, πάντα θα υπάρχει κάποιος.* |
| *Ε* | *δεν γίνεται…* |
| *Κ2* | *….να βρούμε έναν συγκεκριμένο αριθμό* |

Σε αυτό το σημείο η επιχειρούμενη «απεριόριστη» απομάκρυνση του Γ από το Α αλλοιώνει την εικόνα του σχήματος και η οπτική αντίληψη οδηγεί τους μαθητές στο διαισθητικό συμπέρασμα ότι κάποια στιγμή τα τμήματα ΑΓ και ΒΓ θα σχηματίσουν μηδενική γωνία, και είναι πιθανό να «κολλήσουν» και να είναι ίσα. Όμως η ίδια η μαθήτρια που πριν χρησιμοποίησε το επίρρημα «αναγκαστικά» για τον ισχυρισμό ότι το μήκος ΒΓ θα είναι μεγαλύτερο από το μήκος ΑΓ, επαναφέρει τα συμπεράσματα υπό το πρωτογενές αξιωματικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και ισχυρίζεται με επιμονή ότι ακόμα και όταν διαισθητικά τα δύο μήκη μοιάζουν ίσα, και πάλι τότε, σε οποιαδήποτε θέση και αν τα εξετάσουμε, πάντα το ΒΓ θα είναι μεγαλύτερο από το ΑΓ. Αυτός ο ισχυρισμός πείθει και την μαθήτρια Κ3, αλλά και την μαθήτρια Κ2 η οποία εστιάζει ακόμα περισσότερο στην απειρίζουσα έννοια λέγοντας ότι δεν γίνεται «να βρούμε έναν συγκεκριμένο αριθμό» που να είναι πάντα μεγαλύτερος από το ΒΓ.

Οι μαθητές αφαιρετικά κατά Tall κινούνται στον χώρο του ενσώματου συμβολισμού καθώς κάνουν διαισθητικές υποθέσεις οι οποίες στηρίζονται στην Γεωμετρική Αναπαράσταση και τις επιβεβαιώνουν ή τις αναιρούν χρησιμοποιώντας αποδείξεις ενός πρωτογενούς αξιωματικού πλαισίου όπως αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

*Φάση Β : Διερευνώντας την συμπεριφορά του μήκους του τμήματος ΑΔ*

Στην πρώτη ομάδα (Α1, Α2, Κ1, Κ2, Κ3, Κ4) οι μαθητές αναρωτιούνται αν το μήκος ΑΔ μπορεί να φτάσει ή να ξεπεράσει τον αριθμό 1. Η διερεύνηση γίνεται μέσω των δυνατοτήτων του αρχείου geogebra και των μετρήσεων που αυτό δίνει. Η απεριόριστη απομάκρυνση του Γ από το Α μεταβάλλει και πάλι την εικόνα του σχήματος. Ακούγεται η φράση: «αλλοιώνεται το τρίγωνο», και λίγο αργότερα, από την ίδια μαθήτρια Κ2, αναζητούνται απαντήσεις αποδεσμευμένες από την εικόνα και τις δυνατότητες του υπολογιστή, σε ένα ισχυρότερο, και οπωσδήποτε γενικευμένο θεωρητικό πλαίσιο.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Β1 **(αρχείο ήχου 711-0102 . 16:10)**

| | |
|---|---|
| *Κ2* | *Μήπως υπάρχει κάποιος τρόπος επίλυσης χωρίς να το δούμε από τον υπολογιστή;* |
| *Ε* | *Α!! Δεν ξέρω μπορεί . Εσύ λες να μη το δω από τον υπολογιστή αλλά να το δω γεωμετρικά;* |
| *Κ2* | *Ναι* |

Στη συνέχεια, διερευνώντας την συμπεριφορά του μήκους του ΑΔ, οι μαθητές αναζητούν και δίνουν ημιτελείς απαντήσεις σε δομές Ευκλείδειας Γεωμετρίας ή Άλγεβρας:

Ηχογραφημένο επεισόδιο Β2 **(αρχείο ήχου 711-0102 . 17:20)**

| | |
|---|---|
| *Α1* | *Κύριε θεωρία τριγωνομετρίας δεν έχουμε κάνει , δεν θυμόμαστε* |
| *Ε* | *Με τριγωνομετρία λες ότι βγαίνει* |
| *Α1* | *Λογικά* |
| *Ε* | *Ο.Κ. δεν το θυμάσαι από πέρυσι να το βγάλεις με τριγωνομετρία* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο Β3 **(αρχείο ήχου 711-0102 . 18:19)**

| | |
|---|---|
| *Κ1* | *Η Β δεν θα γίνει ποτέ μεγαλύτερη από ενενήντα* |
| *Ε* | *Η Β λέει δεν θα γίνει ποτέ μεγαλύτερη από ενενήντα. Γιατί ; Θα γίνει ενενήντα;* |
| *Κ1* | *Ενενήντα όχι, γιατί έχουμε ήδη μία ενενήντα, άρα δεν θα σχηματίζεται τρίγωνο.* |
| *Ε* | *Άρα λοιπόν η Β δεν θα γίνει ενενήντα. Πάμε πάρα κάτω* |
| *Κ1* | *Ως εδώ.* |

Στην δεύτερη ομάδα (Κ5, Κ6, Κ7, Κ8, Κ9, Κ10) διαπιστώνεται από την μαθήτρια Κ9, όπως και στο επεισόδιο Β3, ότι η γωνία Β δεν μπορεί να γίνει ορθή και η σκέψη της επεκτείνεται στο ότι δεν μπορεί και η γωνία $A\hat{B}\Delta$ να φτάσει τις 45 μοίρες. Αυτό στα πλαίσια του ερωτήματος «μπορεί το μήκος του ΑΔ να ξεπεράσει οποιονδήποτε αριθμό;» προκαλεί τον εξής διάλογο μεταξύ των μαθητριών Κ7, Κ8, Κ9 :

Ηχογραφημένο επεισόδιο Β4 **(αρχείο ήχου 711-0105 . 35:34)**

| | |
|---|---|
| Κ7 | *Ναι* |
| *Κ8* | *μεγαλύτερο από οποιονδήποτε τυχαίο αριθμό; Όσο μεγάλος και αν είναι;* |
| *Κ7* | *το Γ μπορεί να πάει ως το άπειρο* |
| *Κ9* | *Ναι* |
| *Κ7* | *και αυξάνεται ταυτόχρονα το ΑΔ, θα μπορεί και το ΑΔ να πάει όσο θέλεις* |
| *Κ8* | *ναι αλλά σκέψου την αναλογία. Δες λίγο όσο μεγαλώνεις αυτό μεγαλώνει η απόσταση ΓΔ και όσο πας προς τα εδώ μικραίνει. Το ΓΔ αλλάζει το ΑΔ αλλάζει ελάχιστα, μόνο για την γωνία* |
| *Κ7* | *και πάλι όμως* |
| *Κ9* | *ναι αλλά αλλάζει η γωνία* |
| *Κ8* | *αυτό που είπε πριν η Κ9 ότι δεν θα ξεπεράσουν αυτές οι δύο γωνίες τις 45 η κάθε μία, σημαίνει ότι μπορεί να φτάσει μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο.* |
| *Κ7* | *Ναι* |
| *Κ8* | *δεν μπορεί να πάει μετά από αυτό το σημείο.* |
| *Κ7* | *ναι και η Γ δεν θα γίνει ποτέ παράλληλη ώστε να ξεπεράσει τις 45 μοίρες* |
| *Κ8* | *Ακριβώς, άρα μπορεί να πάει μέχρι ένα σημείο μετά από αυτό το σημείο θα σταματήσει να μεγαλώνει. Δεν θα μπορεί να ξεπεράσει τις μοίρες* |
| *Κ7* | *ναι αλλά η Γ θα μεγαλώνει* |
| *Κ9* | *Ναι* |
| *Κ8* | *Η ΒΓ όχι η ΑΔ αυτό σου εξηγώ* |
| *Κ7* | *και θα μένει εκεί πέρα η ….. Και η άλλη θα μεγαλώνει;* |
| *Κ8* | *εγώ ξέρεις τι λέω ότι κάποια στιγμή το ΑΔ θα σταματήσει να μεγαλώνει, γιατί δεν θα μπορεί να ξεπεράσει τις μοίρες* |
| *Κ9* | *Ναι* |
| *Κ8* | *δηλαδή όσο πάει προς τα κει, αλλάζουν οι μοίρες της γωνίας αυτής , αλλά είπε πριν η Μ ότι αφού έχουμε μία ορθή και δεν γίνεται να είναι παράλληλες, δεν πρόκειται αυτό να ξεπεράσει τις 45 μοίρες, δεν γίνεται να γίνει 45 μοίρες και πάνω. Κάποια στιγμή θα σταματήσει να μεγαλώνει, γιατί δεν θα μπορεί να ξεπεράσει κάποιες μοίρες* |

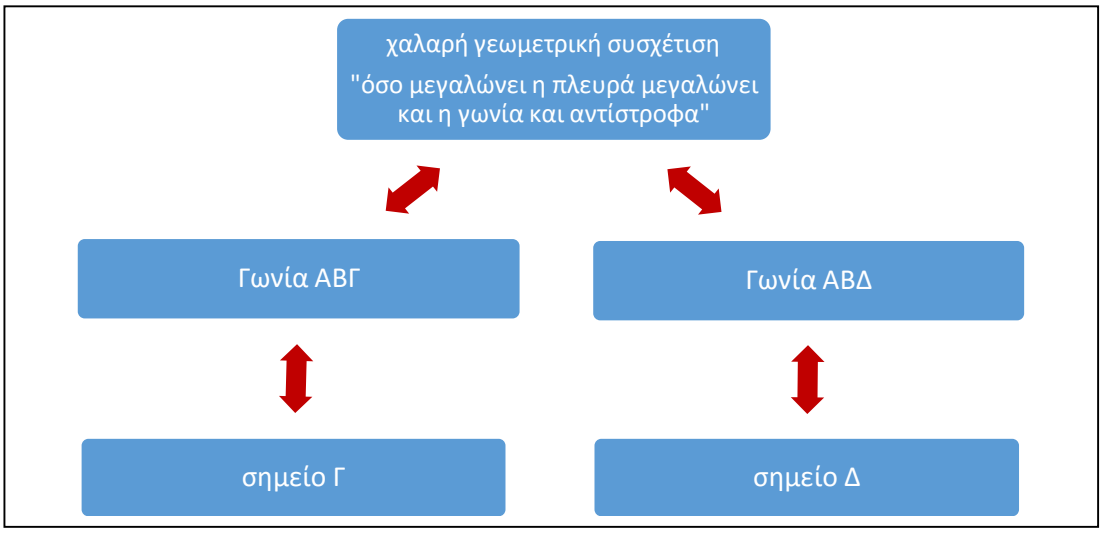
Και η μαθήτρια Κ7 καταλήγει:

Ηχογραφημένο επεισόδιο Β5 **( αρχείο ήχου 711 – 0105 41:25 )**

| | |
|---|---|
| *Κ7* | *Άρα μπορεί να μεγαλώνει όσο θέλουμε* |
| *Ε* | *Το όσο θέλω έχει να κάνει με το όσο μεγάλο θέλω ή με το όση ώρα θέλω, ίση διάρκεια θέλω* |
| *Κ7* | *Όση ώρα θέλω, όση διάρκεια θέλω, το Γ μπορεί να πάει μέχρι … δεν σταματάει είπαμε πριν. Και αφού το ΑΔ μεγαλώνει παράλληλα με το ΑΓ, ε δεν θα σταματάει ούτε το ΑΔ.* |
| *Ε* | *Απλώς δεν θα γίνει ποτέ…* |
| *Κ7* | *90 μοίρες η Β* |
| *Κ9* | *άρα 45 η Β1* |

Οι μαθητές είτε μέσω της εικόνας του Η/Υ είτε μέσω μίας χαλαρής γεωμετρικής εξήγησης «όσο μεγαλώνει ή πλευρά μεγαλώνει και η γωνία και αντίστροφα» έχουν συσχετίσει διαισθητικά τα σημεία Γ και Δ. Πρόκειται κατά την γνώμη μας για ένα link schema με το οποίο οι μαθητές «δένουν» τα δύο σημεία έτσι ώστε να θεωρούν δεδομένο ότι κάθε μετακίνηση του Γ προκαλεί μετακίνηση και του Δ. (Σχήμα 04-Β-1)

*Σχήμα 04-Β-1*




Αυτή η δομή σύνδεσης οδηγεί σε δύο διαισθητικής φύσης συμπεράσματα:

- Όταν κινείται το Γ κινείται και το Δ
- Όσο χρόνο κινείται το Γ κινείται και το Δ

Η πιο πάνω συμπερασματολογία όμως επειδή ακριβώς είναι διαισθητική αφήνει ασάφειες σχετικά με την διαφορετική φύση των μεταβολών των δύο σημείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την κρίσιμη διχογνωμία που καταγράφεται στο πιο πάνω επεισόδιο.

Η απεριόριστη απομάκρυνση του Γ μεταφράζεται διττά. Απεριόριστα σε μήκος και απεριόριστα σε διάρκεια. Αν και για το σημείο Γ ισχύουν και οι δύο μεταφράσεις, για το

σημείο Δ, λόγω του φραγμένου του μήκους του ΑΔ, η μετάφραση της λέξης απεριόριστα αφορά μόνο στην διάρκεια. Έτσι:

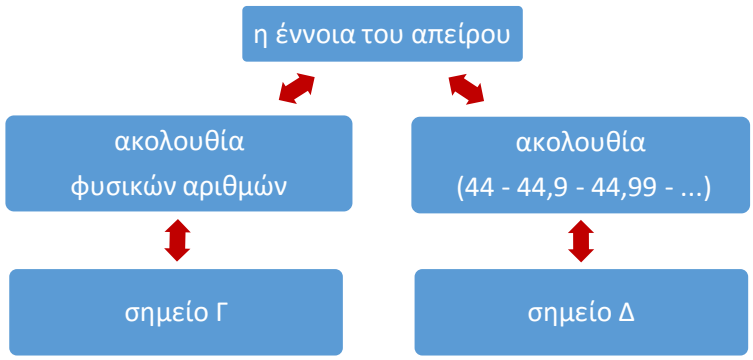
- Η μαθήτρια Κ7 κυριαρχούμενη διαισθητικά από το link schema που περιγράψαμε πιο πάνω αντιλαμβάνεται ότι το σημείο Δ θα πρέπει να απομακρύνεται απεριόριστα σε διάρκεια από το Α, όμως δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι η απομάκρυνση αυτή δεν μπορεί να είναι απεριόριστη και σε μήκος, ενώ
- Αντιθέτως η μαθήτρια Κ8, αντιλαμβανόμενη θεωρητικά την έννοια του φραγμένου για την γωνία $A\hat{B}\Delta$ δεν δείχνει να μπορεί να την διαχειριστεί, σε διαισθητικό επίπεδο, ταυτόχρονα με την απεριόριστη σε διάρκεια απομάκρυνση του σημείου Δ.

Μία άλλη απάντηση δίνεται από την μαθήτρια Κ10 η οποία επιχειρηματολογεί επίσης πάνω σε μία αντιληπτική δομή ενός link σχήματος που δένει τα σημεία Γ, Δ, μέσω του μέτρου της γωνίας $A\hat{B}\Delta$ και της ακολουθίας 44 – 44,9 – 44,99 – 44,999 – … και της άπειρης αύξησης του μέτρου του τμήματος ΑΓ

<u>Ηχογραφημένο επεισόδιο Β6</u> **<u>( αρχείο ήχου 711 – 0105 42:45 )</u>**

| | |
|---|---|
| *Κ10* | *το άπειρο είναι άπειρο οπότε όσες φορές και αν το μεγαλώσουμε δεν…* |
| *Ε* | *τι λες ;* |
| *Κ10* | *δεν είμαι σίγουρη αλλά..* |
| *Ε* | *πες μου* |
| *Κ10* | *όσες φορές και αν βάλουμε εννιά, εννιά, εννιά λέμε τώρα, δεν θα σταματήσουμε ποτέ να βάζουμε εννιά – εννιά –εννιά , οπότε θα προχωράει παράλληλα* |
| *Κ9* | *παράλληλα δεν θα μπορεί να φτάσει ποτέ* |
| *Κ10* | *όχι παράλληλα , εννοώ όσο προχωράει το ένα προχωράει και το άλλο* |
| *Ε* | *άρα δηλαδή όσο μπορεί να προχωράει το Γ θα προχωράει και το Δ* |
| *Κ10* | *ναι γιατί το άπειρο είναι άπειρο* |
| *Ε* | *αφού λοιπόν το Γ προχωράει πάντα….* |
| *Κ10* | *ναι για πάντα* |
| *Ε* | *άρα και το Δ ..;* |
| *Κ10* | *άρα και το Δ θα προχωράει για πάντα γιατί είναι άπειρο* |

Πρόκειται για μία συμπερασματολογία επίσης διαισθητικής φύσης η οποία έχει την βάση της πάνω σε ένα Link schema ανάμεσα στα αντικείμενα Γ και Δ μέσω της ακολουθίας των φυσικών αριθμών: 1 – 2 – 3 – 4 – … και της ακολουθίας : 44 – 44,9 – 44,99 – 44,999 – … οι




*Σχήμα 04-Β-2*

οποίες συσχετίζονται μέσω της έννοιας του άπειρου και του πλήθους των όρων τους (Σχήμα 04-Β-2)

Στην συγκεκριμένη επιχειρηματολογία αναγνωρίζεται και μία ατελής εννοιολογική μεταφορά του απείρου καθώς διαπιστώνονται μεν όλες οι αντιστοιχίσεις μία εννοιολογικής μεταφοράς, αλλά δεν υπάρχει σαφής αναφορά στο πέρας μίας διαδικασίας στο τελευταίο βήμα (πίνακας 04-Β-1)

*Πίνακας 04-Β-1*

| **Εννοιολογικό πεδίο αφετηρίας** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος - 1** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος – 2** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος – 3** |
|---|---|---|---|
| **(Περατωμένες διαδικασίες)** | **μη περατωμένες διαδικασίες Θέση σημείου Γ** | **μη περατωμένες διαδικασίες γωνία** $A\hat{B}\Delta$ | **μη περατωμένες διαδικασίες Μήκος ΑΔ** |
| Η αρχική κατάσταση | φυσικός 2 | Γωνία μικρότερη από 45° | Αρχική θέση Δ |
| κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διεργασίας | Το πρώτο βήμα του σημείου Γ Φυσικός 3 | Γωνία μεγαλύτερη από την αρχική αλλά μικρότερη από 45° | Μήκος ΑΔ μεγαλύτερο από το αρχικό |
| Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η διάδοχη κατάσταση | Κάποιο βήμα του σημείου Γ που αντιστοιχεί σε έναν φυσικό | Γωνία 44,9° < 45° | Μήκος ΑΔ μεγαλύτερο από το από του προηγούμενου βήματος |
| Ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας | Ένα επόμενο βήμα του σημείου Γ (όχι το αμέσως επόμενο) | Γωνία 44,99° < 45° | Μήκος ΑΔ μεγαλύτερο από το από του προηγούμενου βήματος |
| Τελική προκύπτουσα κατάσταση **Πέρας διαδικασίας** | **Άπειρο (πληθικότητα συνόλου φυσικών)** | **Αναφέρεται γωνία με μέτρο 44,99… αλλά δεν της αποδίδεται ιδιότητα πέρατος** | **Δεν αποδίδεται τελική θέση στο σημείο Δ** |

Οι μαθητές έχουν πλέον συμφωνήσει ότι η ποσότητα ΑΔ είναι αυτό που λέμε «γνησίως αύξουσα», καθώς όπως διαπιστώνουν «μεγαλώνει για πάντα». Όμως δεν έχουν ακόμα συνδυάσει τις δυνατότητες μίας ποσότητας να «μεγαλώνει για πάντα» αλλά ταυτόχρονα να «μην μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη». Αυτό θα αποτελέσει αντικείμενο μίας πιο εστιασμένης συζήτησης και ενός διαλόγου πάνω σε ένα πιο σαφές ερώτημα του φύλλου εργασίας: «το ΑΔ μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από 1; Μπορεί να γίνει ίσο με 1; Μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από 0,5; ». Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται η διαισθητική κατασκευή μίας νέας έννοιας της «γνησίως αύξουσας και άνω φραγμένης ποσότητας»

Ηχογραφημένο επεισόδιο Β7 **(αρχείο ήχου 711 – 0105 43:30 )**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *όμως θα γίνει τελικά ένα;* |
| *Κ7* | *μα αφού λέμε ναι σε αυτό που λέει ότι μπορεί να πάει όσο θέλει , δεν έχουμε απαντήσει και στα τρία;* |
| *Ε* | *πείτε μου τις απαντήσεις και στα τρία* |
| *Κ7* | *Ναι – ναι – ναι* |
| *Ε* | *μπορεί το ΑΔ να γίνει πάνω από δύο;* |
| *Κ7* | *γιατί όχι; γιατί να μην μπορεί αφού είπαμε ότι προχωράει όσο θέλουμε;* |
| *Ε* | *όσο θέλεις;* |
| *Κ7* | *Όση διάρκεια θέλω* |
| *Κ9* | *εγώ πιστεύω ότι δεν γίνεται* |
| *Ε* | *Κ9 για λέγε. Αυτό μπορεί να προχωράει πάντα…* |
| *Κ9* | *χωρίς όμως να μεγαλώνει… πάνω από ένα αριθμό* |
| *Κ7* | *Κατάλαβα* |

Στον πιο πάνω διάλογο επιτυγχάνεται ένα αξιοσημείωτο αφαιρετικό βήμα, καθώς οι μαθήτριες σε μία ανάμιξη διαφορετικών δομών, ( αριθμητικά σύμβολα – έννοια διάταξης – γεωμετρικά μεγέθη – Ευκλείδειες Γεωμετρικές δομές) οικοδομούν την έννοια της ποσότητας η οποία μπορεί να αυξάνεται διαρκώς, παραμένοντας όμως άνω φραγμένη από κάποιον αριθμό. Το αφαιρετικό βήμα είναι αποτέλεσμα ενός συνδυασμού διαισθητικής συμπερασματολογίας, Ευκλείδειων συμπερασμάτων και διαχείρισης αριθμητικών συμβόλων, και συνεπώς φαίνεται να είναι ένας συνδυασμός ενσώματου και συμβολικού φορμαλισμού κατά Tall.

*Φάση Γ : Η ποσότητα ΑΔ είναι άνω φραγμένη από την μονάδα*

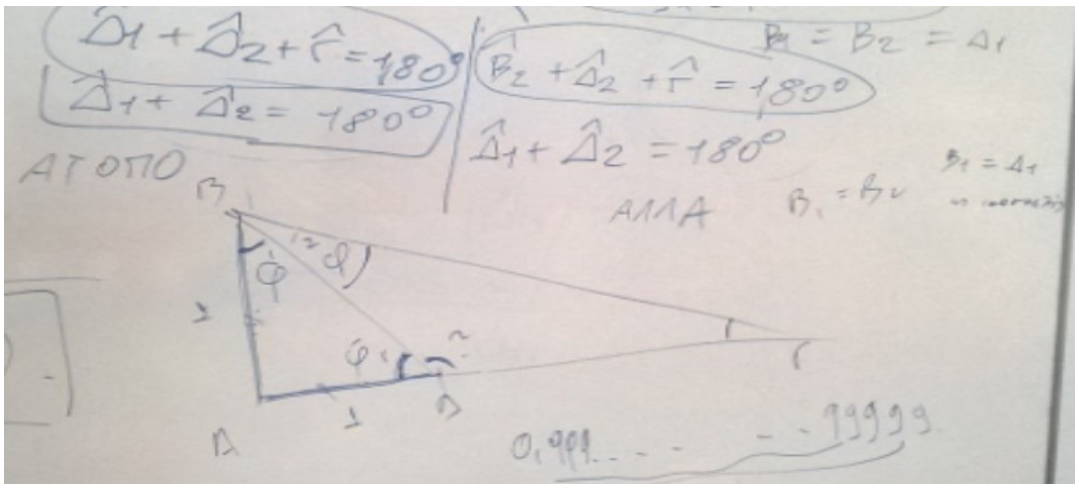
Στην πρώτη ομάδα, οι μαθητές μέσω του λογισμικού οδηγούνται στην υπόθεση ότι το μήκος ΑΔ δεν μπορεί να γίνει ίσο με την μονάδα και αναζητούν κάποια απόδειξη για τον ισχυρισμό τους. Η απόδειξη έρχεται από τον μαθητή Α1, ο οποίος μέσω της μεθόδου της απαγωγής σε άτοπο δίνει ολοκληρωμένη απάντηση, στηρίζοντας την σκέψη του σε θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο ηχογραφημένο επεισόδιο εκτός από τη απόδειξη, υπάρχει και ένας διάλογος μεταξύ των μαθητών και εκπαιδευτικού για την αποδεικτική μέθοδο που ακολουθεί ο μαθητής Α1.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Γ1 **(αρχείο ήχου 711 – 0102 , 23:27 )**

| | |
|---|---|
| *Α1* | *κύριε μισό λεπτό νομίζω ότι το βρήκα* |
| *Ε* | *για πες* |
| *Α1* | *ωραία λοιπόν θέλουμε να είναι το ΑΔ ίσο με το ένα, δεν μπορεί διότι για να είναι το ΑΔ ίσο με 1 σημαίνει ότι το ΑΒΔ είναι .. Το τρίγωνο με δύο ίσες πλευρές;* |
| *Ε* | *Ισοσκελές* |
| *Α1* | *ναι ισοσκελές ωραία;* |
| *Ε* | *Μπράβο* |
| | *( επιφώνημα μαθητών)* |
| *Α1* | *που σημαίνει ότι η γωνία Β1 που είναι ίση με την Β2, είναι επίσης ίση με την Δ1* |
| *Ε* | *την κάτω* |
| *Α1* | *ναι. Επίσης ξέρουμε Δ2, Β2, και Γ, είναι παραπληρωματικές όλες αυτές μαζί, κάνουν 180* |
| *Ε* | *εντάξει μην το λες παραπληρωματικές, κάνουν 180. Ωραία* |
| *Α1* | *Αλλά επίσης Δ1 και Δ2….* |
| *Ε* | *Αλέξη μήπως πρέπει να μας το γράψεις όλο αυτό γιατί έχουμε αρχίσει να χανόμαστε.* |
| *Σ* | *μπράβο, μόνος σου το βρήκες;* |
| *Ε* | *είχες πάρει βοήθεια από το τηλέφωνο;* |
| *Α1* | *όχι... Γέλια…* |
| *Ε* | *λέγε Αλέξη, έλα πάνω να το γράψεις και να λες κιόλας* |
| *Α1* | *ως γνωστόν Β1 ίσο Β2 επειδή ΒΔ διχοτόμος, και Β1 ίσο Δ1 διότι αυτό είναι ισοσκελές* |
| *Ε* | *Ναι* |
| *Α1* | *αυτό σημαίνει ότι Β1 ίσο Β2 ίσο Δ1* |
| *Ε* | *επίσης μετά έχουμε το εξής Β2 συν Δ2 συν Γ είναι ίσο με 180* |
| *Κ1* | *υποθέτουμε ότι είναι σκαληνό ή το ξέρουμε, όχι…. λάθος μου* |
| *Α1* | *είναι όπως βρήκαμε η παραλληλία* |
| *Ε* | *πες κ1* |
| *Κ1* | *παίρνεις αυτά τα δεδομένα υποθέτοντας ότι το ΑΔΒ είναι ισοσκελές; Το υποθέτουμε αυτό για να πάμε με απαγωγή σε άτοπο;* |
| *Ε* | *τι κάνεις Αλέξη;* |
| *Α1* | *Ναι* |
| *Ε* | *Αυτό κάνει , ναι αυτό κάνει* |
| *Α1* | *Αλλά αυτό εδώ πέρα δεν ισχύει διότι όλοι αυτοί οι αριθμοί ως γωνίες είναι θετικοί , δεν μπορεί να πάει μηδέν και επίσης από όλα αυτά εδώ καταλήγω στο ότι Δ1 συν Δ2 συν Γ ίσο 180 και Δ1συν Δ2 και τίποτα αλλά είναι 180. Αυτό είναι άτοπο.* |

Η απόδειξη του μαθητή Α1 στον πίνακα (φωτογραφικό στιγμιότυπο)

*Στιγμιότυπο 04-Γ-1*




Η δεύτερη ομάδα παρουσιάζει δύο μορφές αποδείξεων. Στην πρώτη μορφή χρησιμοποιούνται γνώσεις τριγωνομετρίας από την ύλη της Γ΄ Γυμνασίου, ενώ η δεύτερη γνώσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας από την ύλη της Α΄ Λυκείου.

<u>Ηχογραφημένο επεισόδιο Γ2**( αρχείο ήχου 711 – 0105 44:55 )**</u>

Η Μαθήτρια Κ9 εξηγεί στην ομάδα της την σκέψη της

| | |
|---|---|
| *Κ9* | *Η εφαπτομένη της υποτιθέμενης ΑΒΔ γωνίας (εννοεί στη θέση των 45 μοιρών) είναι ίση με ένα Ποια είναι η εφαπτομένη; Είναι η απέναντι ΑΔ προς την προσκείμενη ΑΒ, ίσο με ένα. Συνεπάγεται …* |
| | *Παιδιά το βρήκα! Η ΑΒ είναι σταθερή ένα, έχουμε πει ότι η ΑΒΔ είναι πάντα μικρότερη από 45 μοίρες, άρα η ΑΔ θα είναι πάντα μικρότερη από ένα.* |

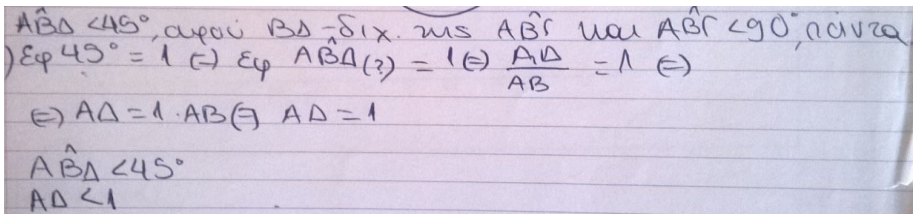
<u>Ηχογραφημένο επεισόδιο Γ3**( αρχείο ήχου 711 – 0105 46:55 )**</u>

Η μαθήτρια Κ9 εξηγεί στην τάξη την σκέψη της

| | |
|---|---|
| *Κ9* | *είπατε ότι η εφαπτομένη των 45 είναι ένα έτσι;* |
| *Ε* | *Ναι* |
| *Κ9* | *η εφαπτομένη της υποτιθέμενης ΑΒΔ αν ήταν 45 είναι ένα, οπότε η ΑΔ βγαίνει ίση με ένα εδώ πέρα. Όμως η ΑΒΔ είναι πάντοτε μικρότερη από 45, άρα και η ΑΔ θα είναι πάντοτε μικρότερη από ένα* |

Η σχετική απόδειξη, στο τετράδιο της μαθήτριας Κ9

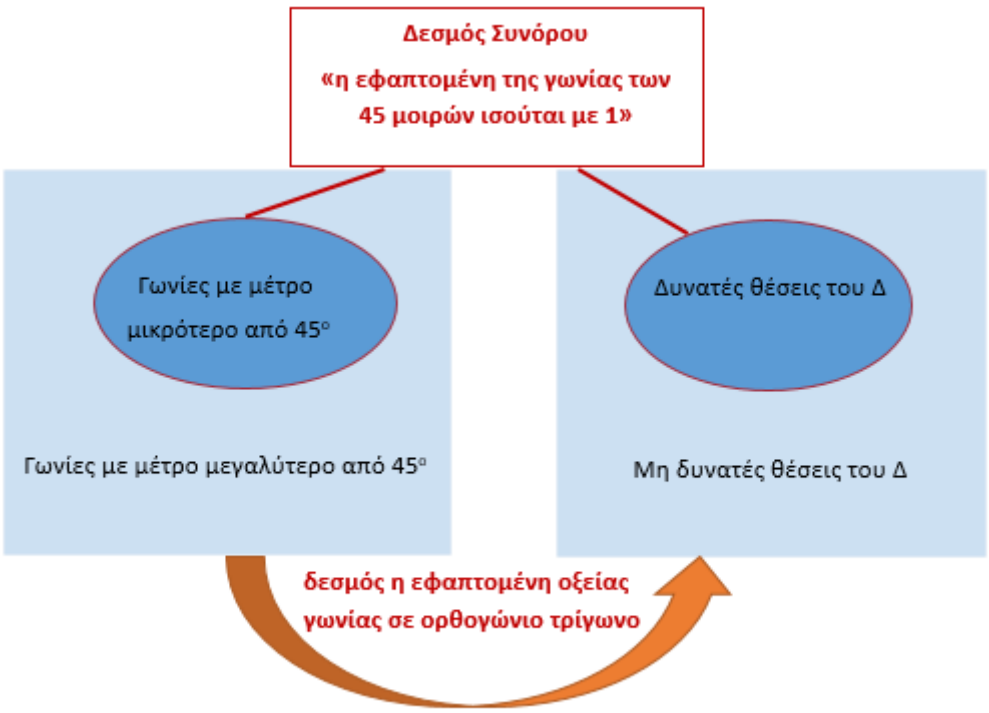
*Εικόνα 04-Γ-1*



Παρατηρούμε ότι η συσχέτιση της γωνίας $A\hat{B}\Delta$, με το μήκος ΑΔ, γίνεται με το συναρτησιακό εργαλείο της εφαπτομένης της οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο. Οι γνώσεις της μαθήτριας σχετικά με το εργαλείο αυτό δεν της επιτρέπουν να έχει μία σαφή εκτίμηση για την συναρτησιακή του λειτουργία (μεταβολή – μονοτονία), έτσι τα συμπεράσματά της δεν έχουν πλήρη μαθηματική αιτιολόγηση. Παρόλα αυτά είναι απολύτως βέβαιη για την ορθότητα του συμπεράσματός της. Ισχυριζόμαστε ότι αυτή η πεποίθηση, οφείλεται σε δύο πολύ ισχυρές διαισθητικές αντιληπτικές δομές. Ένα container και ένα link σχήμα.

Στην σκέψη της μαθήτριας, οι 45 μοίρες αποτελούν ένα σύνορο ανάμεσα στα μέτρα που η γωνία $A\hat{B}\Delta$ μπορεί να πάρει και στα μέτρα που η ίδια γωνία δεν μπορεί να πάρει. («Η ΑΒΔ είναι πάντα μικρότερη από 45 μοίρες»). Συνεπώς μέσω της έννοιας της διάταξης στα μέτρα των γωνιών καθορίζεται μία αντιληπτική δομή αντίστοιχη με αυτή του container σχήματος, με ένα εσωτερικό (γωνίες με μέτρο μικρότερο από 45 μοίρες), ένα εξωτερικό (γωνίες με μέτρο μεγαλύτερο από 45 μοίρες) και ένα σύνορο (γωνία με μέτρο 45 μοίρες). Η ίδια δομή μέσω ενός link σχήματος (Σχήμα 04-Γ-01) με «τρίτο μέρος» το εργαλείο της εφαπτομένης, μεταφέρεται στην ευθεία των πραγματικών και συνθέτει μία νέα container αντιληπτική δομή με ένα εσωτερικό (οι δυνατές θέσεις του Δ), ένα εξωτερικό οι μη δυνατές θέσεις του Δ, και ένα σύνορο (η θέση του Δ όταν η γωνία είναι 45 μοίρες). Έτσι εντοπίζεται τελικώς ως σύνορο η θέση του αριθμού ένα. («Η ΑΔ θα είναι πάντα μικρότερη του ένα»).

*Σχήμα 04-Γ-1*



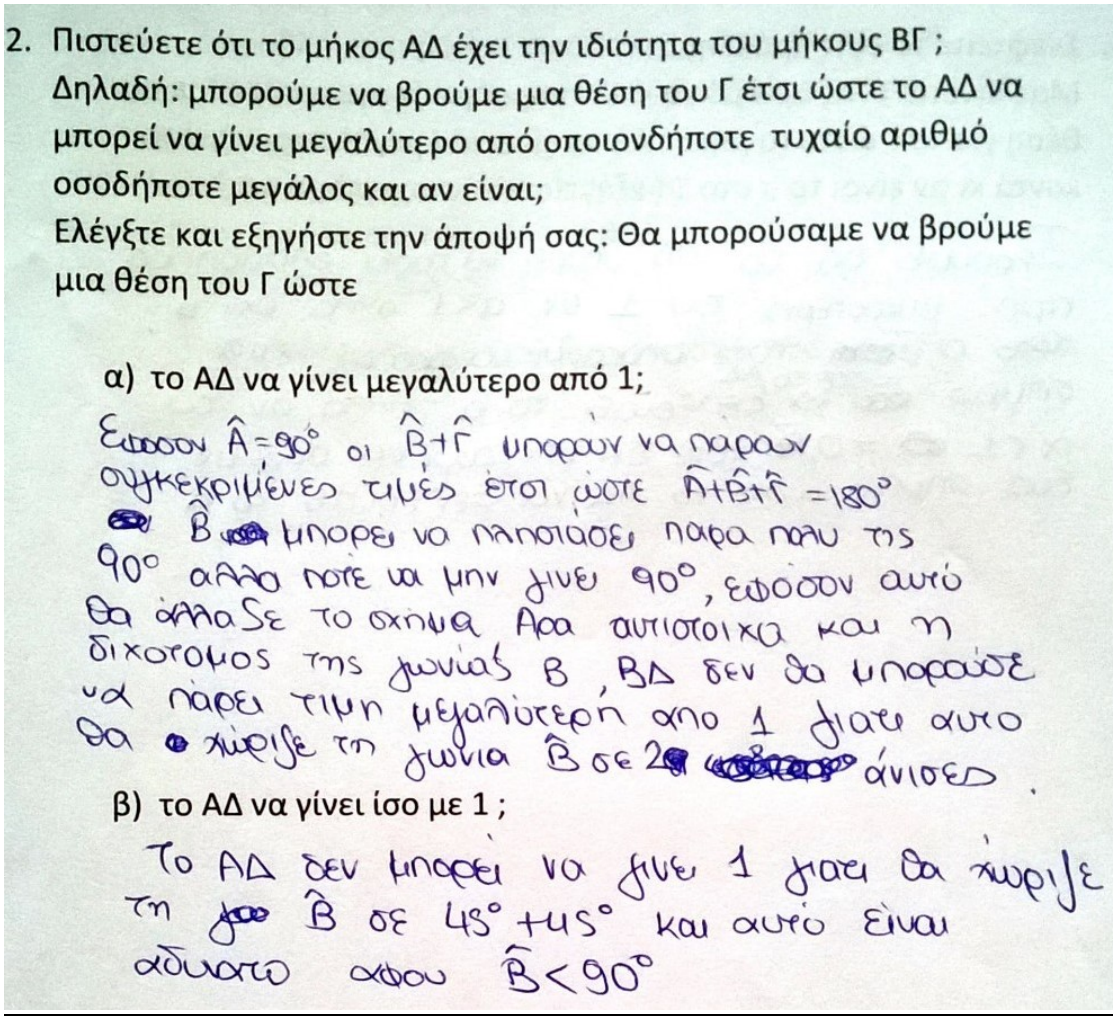
Η δεύτερη μορφή απόδειξης που παρουσιάζεται στην τάξη της δεύτερης ομάδας, είναι Ευκλείδειας δομής και είναι αντίστοιχη της απόδειξης που παρουσιάστηκε στην πρώτη ομάδα από τον μαθητή Α1.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Γ4 **( αρχείο ήχου 711 – 0105 47:45 )**

| | |
|---|---|
| *Κ8* | *Η ΑΒ είναι σταθερή 1, και μας ρωτάει αν αυτή (ΑΔ) μπορεί να γίνει ένα σωστά; για να είναι αυτή ένα αυτό θα πρέπει να είναι ισοσκελές, σωστά;* |
| *Ε* | *Ωραία* |
| *Κ8* | *για να είναι ισοσκελές αυτό αφού αυτή είναι ενενήντα αυτές οι δύο θα είναι 45 (εννοεί τις ίσες γωνίες ΑΒΔ και ΔΒΓ) αλλά δεν μπορεί να είναι 45 γιατί αυτή (εννοεί την ΑΒΓ) δεν μπορεί να είναι 90.* |
| *Ε* | *οπότε;* |
| *Κ8* | *οπότε δεν γίνεται.* |

Απάντηση στο φύλλο εργασίας από μαθήτρια Κ5

*Εικόνα 04-Γ-2*



2. Πιστεύετε ότι το μήκος ΑΔ έχει την ιδιότητα του μήκους ΒΓ ;
Δηλαδή: μπορούμε να βρούμε μια θέση του Γ έτσι ώστε το ΑΔ να μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από οποιονδήποτε τυχαίο αριθμό οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι;
Ελέγξτε και εξηγήστε την άποψή σας: Θα μπορούσαμε να βρούμε μια θέση του Γ ώστε

α) το ΑΔ να γίνει μεγαλύτερο από 1;

Εφόσον $\hat{A}=90^\circ$ οι $\hat{B}+\hat{\Gamma}$ μπορούν να παραν συγκεκριμένες τιμές έτσι ώστε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ Β μπορεί να πλησιάσει παρα πολυ της 90° αλλα ποτε να μην γινει 90°, εφόσον αυτό θα άλλαζε το σχημα Αρα αντιστοιχα και η διχοτομος της γωνιας Β, ΒΔ δεν θα μπορούσε να παρει τιμη μεγαλυτερη απο 1 γιατι αυτο θα χωριζε τη γωνια Β σε 2 ανισες.

β) το ΑΔ να γίνει ίσο με 1 ;

Το ΑΔ δεν μπορει να γινει 1 γιατι θα χωριζε τη Β σε 45°+45° και αυτό είναι αδυνατο αφου $\hat{B}<90^\circ$

Απάντηση στο φύλλο εργασίας από μαθήτρια Κ6

*Εικόνα 04-Γ-3*

2. Πιστεύετε ότι το μήκος ΑΔ έχει την ιδιότητα του μήκους ΒΓ ;
Δηλαδή: μπορούμε να βρούμε μια θέση του Γ έτσι ώστε το ΑΔ να μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από οποιονδήποτε τυχαίο αριθμό οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι;
Ελέγξτε και εξηγήστε την άποψή σας: Θα μπορούσαμε να βρούμε μια θέση του Γ ώστε

α) το ΑΔ να γίνει μεγαλύτερο από 1;

$A\hat{B}\Gamma$ ορθογώνιο με $\hat{A} = 90°$. Αφού άθροισμα γωνιών = 180° όταν η ΒΓ αυξάνεται, Δ απομακρύνεται επίσης απ' το Α αφού ΒΔ σταθερός. Όταν το Δ φτάσει κοντά στο 1 η $\hat{B}$ θα 'ναι περίπου 45° αφού ΑΒΓ = 180 (Α=90, Β=45, Γ=45). Αν ξεπεραστεί το 1 τότε το σχήμα δεν θα 'ταν τρίγωνο.

β) το ΑΔ να γίνει ίσο με 1 ;

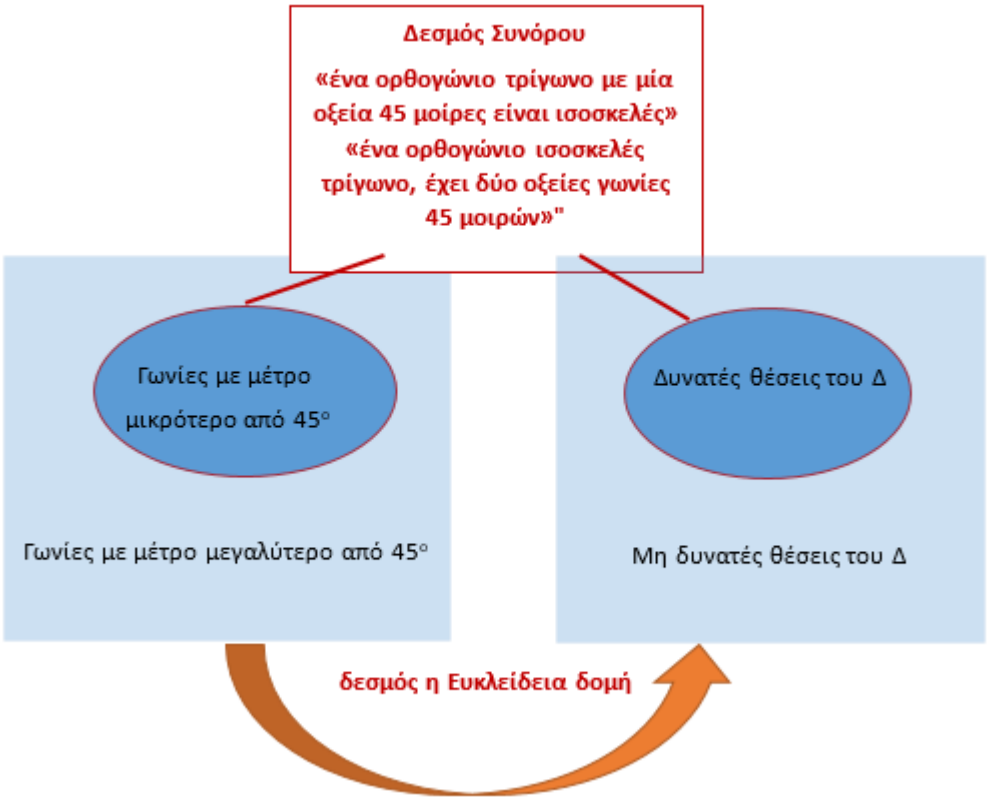
Όσο κι αν μεγαλώσει η ΒΓ το ΑΔ δεν θα φτάσει ποτέ το 1.

γ) το ΑΔ να γίνει μεγαλύτερο από 0,5

Μπορεί αφού η $\hat{B}$ θα 'χει πάρει μια τιμή ώστε το $A\hat{B}\Gamma$ να διατηρεί τις ιδιότητές του

Όπως και ο μαθητής Α1, στην πρώτη ομάδα, έτσι και η μαθήτριες Κ5, Κ6, Κ8 αποδεικνύουν, με τον δικό τους τρόπο ότι το τμήμα ΑΔ δεν μπορεί να είναι ίσο με ένα. Και οι δύο εστιάζουν στην γωνία των 45 μοιρών ως σύνορο δύο περιοχών διαφορετικής σημασίας. Θεωρούμε ότι και εδώ εμφανίζεται η ίδια δομή των δύο αντιληπτικών σχημάτων που σημειώσαμε πιο πάνω, με την διαφορά ότι το τρίτο μέρος – ο δεσμός – του link σχήματος δεν είναι το εργαλείο της εφαπτομένης, αλλά το αξιωματικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Σχήμα 04-Γ-2). Είναι χαρακτηριστική η φράση της μαθήτριας Κ6 με την οποία δικαιολογεί γιατί το μήκος ΑΔ μπορεί να ξεπεράσει τον αριθμό 0,5 : «Μπορεί αφού η γωνία Β θα έχει πάρει μία τιμή (εννοεί μικρότερη από 45 μοίρες) ώστε το τρίγωνο να διατηρεί τις ιδιότητές του».

*Σχήμα 04-Γ-2*

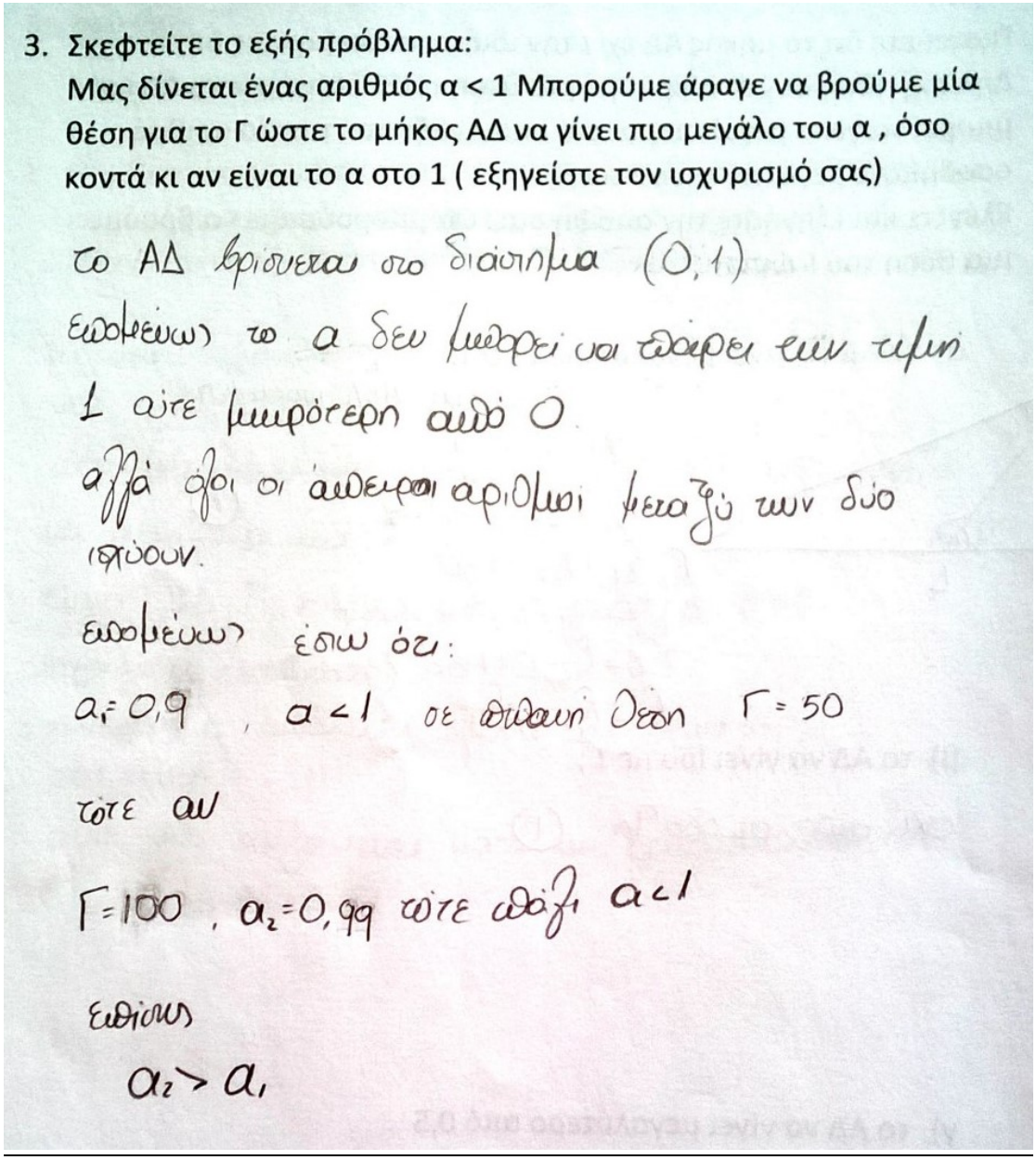


*<u>Φάση Δ: Πόσο κοντά μπορεί να φτάσει το μήκος του ΑΔ στην μονάδα.</u>*

Στη συνέχεια, οι μαθητές προσπαθούν να βρουν πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το μήκος του τμήματος ΑΔ, έτσι ώστε να απαντήσουν στο ερώτημα «Αν μας δοθεί ένας οποιοσδήποτε αριθμός α<1 μπορούμε να κάνουμε το ΑΔ μεγαλύτερο από το α;» Μερικές από τις απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας:

Απάντηση στο φύλλο εργασίας από την μαθήτρια Κ1

*Εικόνα 04-Δ-1*

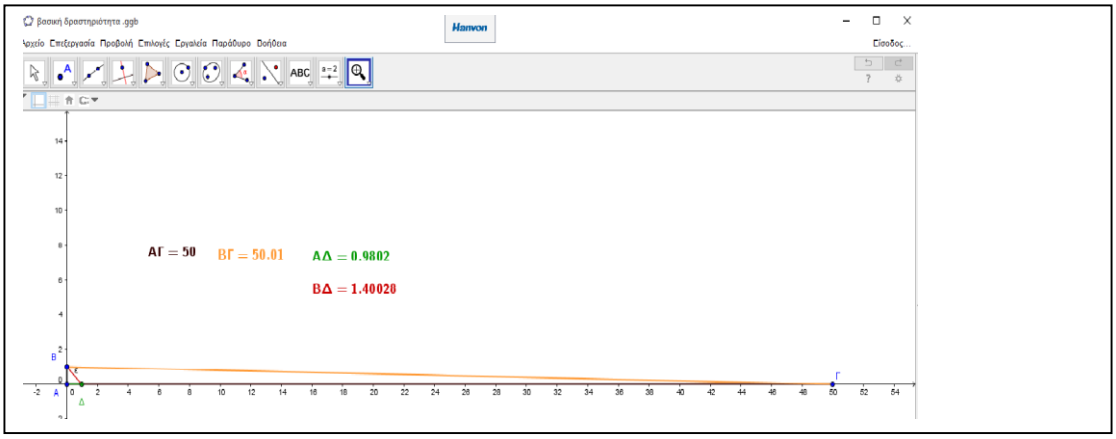


3. **Σκεφτείτε το εξής πρόβλημα:**
**Μας δίνεται ένας αριθμός α < 1 Μπορούμε άραγε να βρούμε μία θέση για το Γ ώστε το μήκος ΑΔ να γίνει πιο μεγάλο του α , όσο κοντά κι αν είναι το α στο 1 ( εξηγείστε τον ισχυρισμό σας)**

το ΑΔ βρίσκεται στο διάστημα (0,1)
ευλογεύω το α δεν μπορεί να πάρει την τιμή
1 ούτε μικρότερη από 0.
αλλά όλοι οι άλλοι αριθμοί μεταξύ των δύο
ισχύουν.
ευλογεύω έστω ότι:
$a_1 = 0,9$ , $a < 1$ σε κάποια θέση $\Gamma = 50$
τότε αν
$\Gamma = 100$ , $a_2 = 0,99$ τότε πάλι $a < 1$
ευθύνω
$a_2 > a_1$

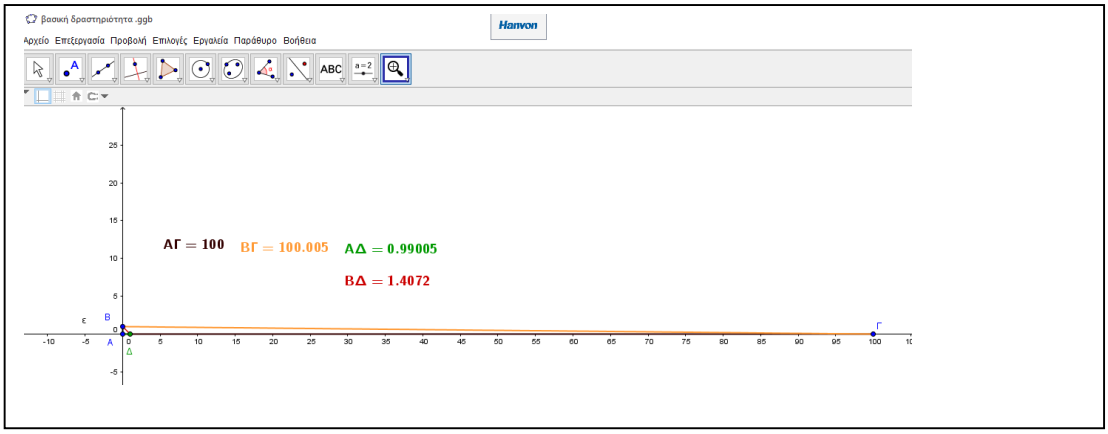
Η μαθήτρια Κ1 μέσω του λογισμικού geogebra (Στιγμιότυπο 04-Δ-1)παρατηρεί ότι αν βάλει τιμή στο α = 0,9 τότε μπορεί να ισχύει το ζητούμενο (ΑΔ > 0,9) για «πιθανή θέση» του σημείου Γ, εκείνη την θέση που κάνει το μήκος ΑΓ ίσο με 50.

*Στιγμιότυπο 04-Δ-1*




Παρατηρεί επίσης (Στιγμιότυπο 04-Δ-2) ότι αν μετακινήσει το σημείο Γ μέχρι το 100 τότε το ζητούμενο ισχύει και για α = 0,99 (ΑΔ > 0,99 ).

*Στιγμιότυπο 04-Δ-2*



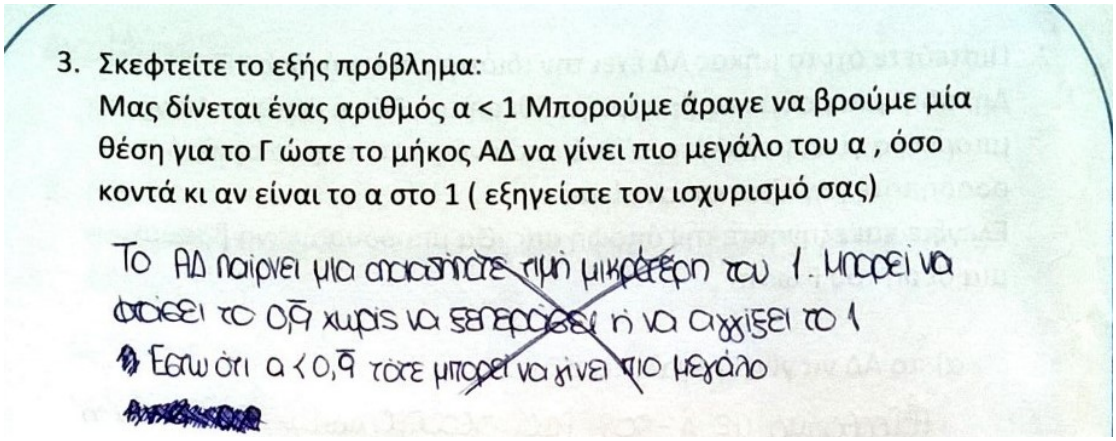

Δηλώνει τέλος ότι η δεύτερη τιμή του α είναι μεγαλύτερη από την πρώτη τιμή δηλαδή $α_1<α_2$ (άρα πλησιέστερη στο 1). Διακρίνουμε μία πρωτόλεια αλλά σαφέστατη διερευνητική επαγωγική διαδικασία ( η οποία πατάει στις αντιστοιχίσεις μίας ατελούς μεταφοράς του απείρου) την οποία η μαθήτρια δεν έχει την γνώση να συνεχίσει, γι' αυτό ίσως σταματάει σε αυτό το σημείο.

Πιο κάτω φαίνονται τα σχετικά αποτελέσματα των φύλλων εργασίας κάποιων άλλων μαθητών οι οποίοι χωρίς φανερή διερεύνηση, καταλήγουν σε ένα τελικό αποτέλεσμα:

Φύλλο εργασίας της μαθήτριας Κ6

( η σημειωμένη διαγραφή έρχεται σε επόμενο χρόνο και αφορά αναστοχασμό της μαθήτριας σε επόμενη φάση της διερεύνησης. Θα αποτυπωθεί σε επόμενη παράγραφο)

*Εικόνα 04-Δ-2*

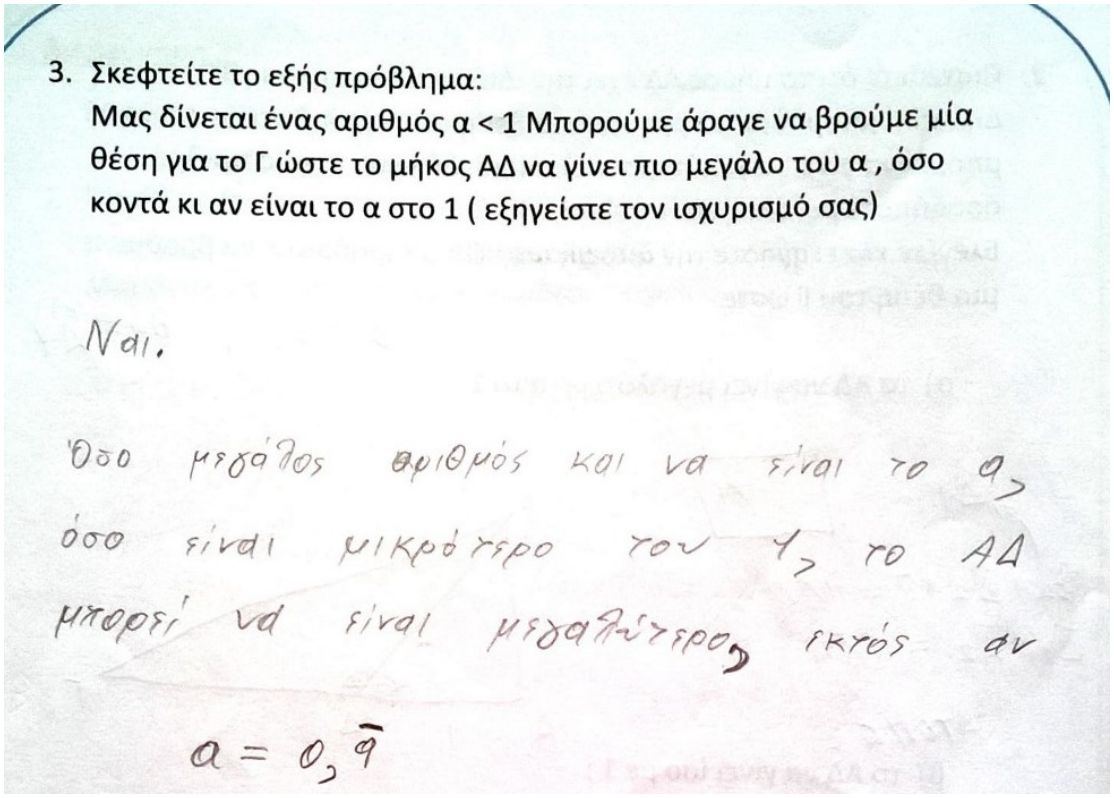


3. Σκεφτείτε το εξής πρόβλημα:
Μας δίνεται ένας αριθμός α < 1 Μπορούμε άραγε να βρούμε μία θέση για το Γ ώστε το μήκος ΑΔ να γίνει πιο μεγάλο του α , όσο κοντά κι αν είναι το α στο 1 ( εξηγείστε τον ισχυρισμό σας)

Το ΑΔ παίρνει μια οποιαδήποτε τιμή μικρότερη του 1. Μπορεί να φτάσει το 0,9̄ χωρίς να ξεπεράσει ή να αγγίξει το 1
Έστω ότι α < 0,9̄ τότε μπορεί να γίνει πιο μεγάλο

Φύλλο εργασίας του μαθητή Α1

*Εικόνα 04-Δ-3*



3. Σκεφτείτε το εξής πρόβλημα:
Μας δίνεται ένας αριθμός α < 1 Μπορούμε άραγε να βρούμε μία θέση για το Γ ώστε το μήκος ΑΔ να γίνει πιο μεγάλο του α , όσο κοντά κι αν είναι το α στο 1 ( εξηγείστε τον ισχυρισμό σας)

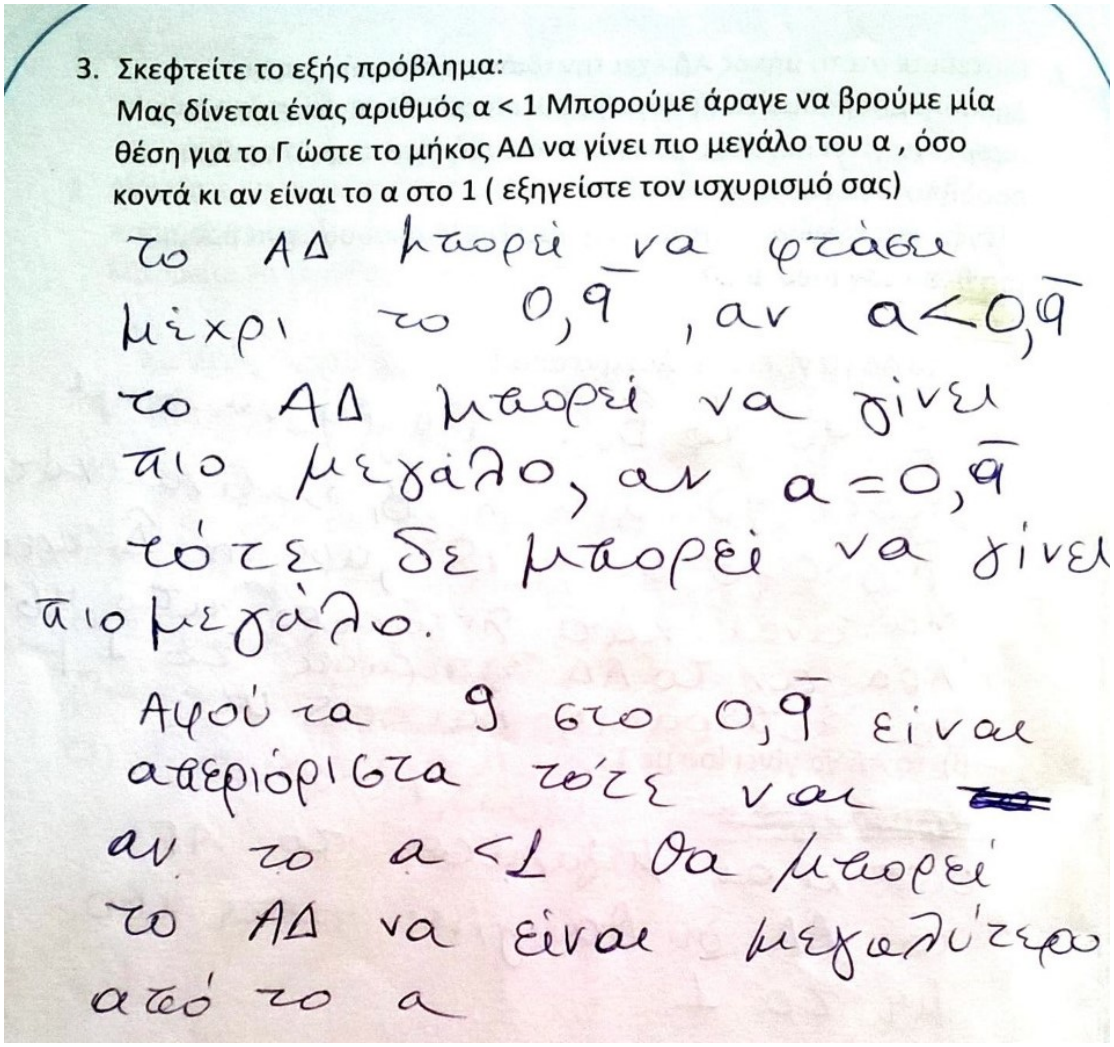
Ναι.

Όσο μεγάλος αριθμός και να είναι το α, όσο είναι μικρότερο του 1, το ΑΔ μπορεί να είναι μεγαλύτερο, εκτός αν

α = 0,9̄

Φύλλο εργασίας της μαθήτριας Κ7

*Εικόνα 04-Δ-4*



3. Σκεφτείτε το εξής πρόβλημα:
Μας δίνεται ένας αριθμός α < 1 Μπορούμε άραγε να βρούμε μία θέση για το Γ ώστε το μήκος ΑΔ να γίνει πιο μεγάλο του α , όσο κοντά κι αν είναι το α στο 1 ( εξηγείστε τον ισχυρισμό σας)

Το ΑΔ μπορεί να φτάσει μέχρι το $0,\overline{9}$, αν $a<0,\overline{9}$ το ΑΔ μπορεί να γίνει πιο μεγάλο, αν $a=0,\overline{9}$ τότε δε μπορεί να γίνει πιο μεγάλο.

Αφού τα 9 στο $0,\overline{9}$ είναι απεριόριστα τότε ναι ~~τα~~ αν το $a<1$ θα μπορεί το ΑΔ να είναι μεγαλύτερο από το α

Ηχογραφημένο επεισόδιο Δ1 **(αρχείο ήχου 711 – 0102, 32:05)**

| | |
|---|---|
| Ε | *Άρα συμπέρασμα τελικά για το ΑΔ* |
| Κ2 | *ότι δεν μπορεί να είναι 1 γιατί βγαίνει άτοπο* |
| Ε | *μάλιστα* |
| Κ2 | *δεν μπορεί να φτάσει στο ένα* |
| Ε | *δηλαδή μπορεί να μεγαλώσει ….* |
| Κ2 | *μπορεί να μεγαλώσει αλλά δεν θα γίνει ποτέ ένα, γιατί δεν θα είναι τρίγωνο* |
| Ε | *πόσο μπορεί να μεγαλώσει* |
| | *Α!!!!!! (επιφώνημα μαθητών)* |
| Κ4 | *μηδέν κόμμα ενενήντα εννέα, εννέα, εννέα.* |
| Κ2 | *Ενενήντα εννέα, εννέα, εννέα, εννέα, …* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο Δ2**( αρχείο ήχου 711 – 0102, 34:10)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *Το ΑΔ μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από 0,5;* |
| | *Ναι* |
| *Ε* | *Μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από 0,6;* |
| | *Ναι* |
| *Ε* | *Από 0,7 μπορεί να γίνει πιο μεγάλο;* |
| | *Ναι* |
| *Ε* | *Από 0,9 μπορεί να γίνει πιο μεγάλο* |
| *Κ2* | *Όχι* |
| *Ε* | *δεν μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από 0,9;* |
| *Κ2* | *από 0,9 ναι* |
| *Κ4* | *μέχρι εννιά, εννιά, εννιά.* |
| *Κ2* | *να μην φτάσει μέχρι το ένα* |
| *Ε* | *μάλιστα να μην φτάσει μέχρι το ένα* |
| *Κ2* | *ναι* |
| *Ε* | *πόσο δηλαδή μπορεί να γίνει; Να φτάσει πόσο κοντά στο ένα.* |
| *Κ2* | *Πολύ* |
| *Κ4* | *πάρα πολύ 0,9999* |
| *Κ3* | *με άπειρα εννέα* |
| *Ε* | *με άπειρα εννέα;* |
| *Κ2* | *όχι μπορεί με άπειρα εννέα να μην βγαίνει σωστό να βγαίνει πάλι άτοπο* |
| *Κ3* | *ναι αλλά δεν θα έχει πάει ένα, οπότε…* |
| *Κ2* | *που το ξέρεις ότι το 0,9999… δεν θα γίνει ένα* |
| *Κ3* | *και σύ που το ξέρεις ότι θα γίνει ένα* |
| *Ε* | *μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από αυτό; (δείχνει τον αριθμό 0,99)* |
| *Α1* | *ναι* |
| *Ε* | *μπορεί. Μπορεί να γίνει πιο μεγάλο από αυτό (δείχνει το 0,999)* |
| *Α1* | *γιατί όχι* |
| *Κ3* | *αφού δεν είναι ένα* |
| *Ε* | *αφού δεν είναι ένα μπορεί να γίνει* |
| *Κ4* | *όσα εννιάρια και να βάλουμε* |
| *Ε* | *α όσα εννιάρια και να βάλουμε* |
| *Κ3* | *άπειρα εννιάρια* |
| Ε | άμα βάλω άπειρα εννιάρια; |
| Α1 | μπορούμε να βάλουμε κι άλλα |
| | Γέλια |
| Κ4 | δεν θα γίνει πάλι ένα |
| Κ3 | Αφού δεν θα γίνει ένα. Μόνο άμα το στρογγυλοποιήσουμε θα γίνει ένα, άρα δεν θα γίνει πάλι ένα, οπότε αφού είναι 0,9999… δεν είναι ένα. |

Αν προσπαθήσουμε να αποδελτιώσουμε τις πιο πάνω διατυπώσεις και σκέψεις θα παρατηρήσουμε ότι τελικώς οι μαθητές, είτε διερευνητικά αλλά χωρίς τελική ολοκληρωμένη σκέψη (μαθήτρια Κ1), είτε διαισθητικά ( υπόλοιπα παραδείγματα ), και με μόνο όπλο την διάταξη των δεκαδικών:

- Επεκτείνοντας την ακολουθία των τιμών που τους δίνει το λογισμικό Geogebra για το μήκος του ΑΔ, ορίζουν ένα νοητό άπειρο μονοπάτι, πιθανότατα αποτελούμενο από ρητούς, με τέλος τον αριθμό ένα, και «βαδίζουν» προς αυτόν πατώντας τελικά πάνω στους όρους της ακολουθίας 0,9 – 0,99 – 0,999 – 0,9999 – …
- Έχουν την βεβαιότητα ότι το μονοπάτι αυτό οδηγεί προς τον αριθμό ένα
- Έχουν την βεβαιότητα ότι με αυτόν τον τρόπο πλησιάζουν βήμα βήμα όλο και πιο κοντά στον ένα.

Πρόκειται για μία αντιληπτική δομή όμοια με αυτή του *source path goal* σχήματος, με αρχή έναν ρητό μικρότερο του αριθμού ένα (1) και τέλος τον ίδιο τον αριθμό ένα (1).

Αυτό που δεν είναι ακόμα ξεκάθαρο στην αντίληψη των μαθητών είναι

- η πυκνή δομή που έχει το μονοπάτι
- η σαφής αντίληψη για το τέλος αυτού του μονοπατιού.

Έτσι οι μαθητές:

- Αφενός δίνουν στο «τέλος» του μονοπατιού μία «εικόνα» μέσω του περιοδικού αριθμού $0,\overline{9}$, εκφράζοντας έτσι το πέρας μίας άπειρης διαδικασίας η οποία μέσω της διάταξης των ρητών διαισθητικά οδηγεί προς το αυτό το τέλος.
  0,9 < 0,99 < 0,999 < 0,9999 < … < $0,\overline{9}$
- Αφετέρου αναδύεται ως ερώτημα η σχέση διάταξης του περιοδικού $0,\overline{9}$ με την μονάδα.

Ταυτόχρονα οι μαθητές μέσω ενός σχήματος όψης επιτυγχάνουν μία εννοιολογική μεταφορά του απείρου (Πίνακας 04-Δ-1)επί ενός *source path goal σχήματος* καθώς βλέπουν μία άπειρη διαδικασία (0,9 – 0,99 – 0,999 – 0,9999 – … ) ως περατωμένη (0,9 < 0,99 < 0,999 < 0,9999 < … < $0,\overline{9}$)

Σχετικά με τον περιοδικό αριθμό $0,\overline{9}$, πρέπει να σημειωθεί πως απ' ότι φαίνεται και στην συνέχεια, οι μαθητές δεν γνωρίζουν τι ή ποιος ακριβώς είναι. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι στην συγκεκριμένη φάση είναι πιο σωστό να πούμε ότι τα παιδιά «δημιουργούν» τον συγκεκριμένο αριθμό ( $0,\overline{9}$) και του «προσδίδουν» μια έννοια και μία οντότητα ως «το τέλος μίας άπειρης διαδικασίας», παρά να ισχυριστούμε ότι τον ανασύρουν και τον αναγνωρίζουν ως μία κατοχυρωμένη και παγιοποιημένη γνώση, η οποία αποτελεί την λύση στο πρόβλημά τους. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ισχυριζόμαστε ότι ή συμπερασματολογική διαδικασία αυτής της φάσης στηρίζεται κυρίως σε δομές διαισθητικής φύσης, και σε επίπεδο αφαίρεσης βρισκόμαστε στη φάση του λειτουργικού συμβολισμού και των πρακτικών μαθηματικών, καθώς κυριαρχεί η διαχείριση οι αριθμητικών παραστάσεων και η διάταξή τους.

*Πίνακας 04-Δ-1*

| **Εννοιολογικό πεδίο αφετηρίας** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος - 1** | **Εννοιολογικό πεδίο στόχος – 2** |
|---|---|---|
| **(Περατωμένες διαδικασίες)** | **μη περατωμένες διαδικασίες Θέση σημείου Γ** | **μη περατωμένες διαδικασίες μήκος ΑΔ (Στρογγυλοποιημένο)** |
| Η αρχική κατάσταση | φυσικός 2 | Ρητός 0,61803 < 1 |
| κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διεργασίας | Το πρώτο βήμα του σημείου Γ. Φυσικός 3 | Ρητός 0,72076<br>Με 0,61803 < 0,72076 < 1 |
| Από μία δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η διάδοχη κατάσταση | Το 49$^{o}$ βήμα του σημείου Γ. Φυσικός 50 | Ρητός 0,9802<br>Με 0,9802 < 1 |
| Ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας | Ένα επόμενο βήμα του σημείου Γ. Φυσικός: 100 | Ρητός 0,99005<br>Με 0,9802 < 0,99005 < 1 |
| Τελική προκύπτουσα κατάσταση<br>**Πέρας διαδικασίας** | **Άπειρο (πληθικότητα συνόλου φυσικών)** | **Δημιουργείται η δεκαδική μορφή 0,999… (με άπειρο πλήθος από εννέα), η οποία είναι το πέρας μίας άπειρης διαδικασίας** |

*Φάση Ε: Ακροβασίες ανάμεσα στην διαίσθηση και στην λογική στον κόσμο του απείρου*

Οι μαθητές αναζητούν τον μικρότερο αριθμό που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει το μήκος ΑΔ. Πρακτικά αναζητούν το supremum της ποσότητας «μήκος ΑΔ», και έρχονται αντιμέτωποι με το δίλημμα του πραγματικού τέλους του μονοπατιού στο οποίο διαισθάνονται ότι βαδίζουν.

- Έχουμε ήδη τονίσει ότι η δεκαδική μορφή $0,\overline{9} = 0,99...$ (με άπειρα εννέα), για τους μαθητές δεν αποτελεί μία σαφή έννοια. Είναι μάλλον ένα πρόσφατο, διαισθητικό, δημιούργημά τους που μοιάζει με κάτι που έχουν ξαναδεί στο παρελθόν και ταιριάζει απόλυτα με την λύση που αναζητούν. Για αυτό και είναι απόλυτα φυσιολογική η αμφιβολία τους για το αν ο ζητούμενος αριθμός (supremum του μήκους ΑΔ) είναι η μονάδα ή είναι «ο δικός τους» αριθμός, η δεκαδική μορφή $0,\overline{9} = 0,99...$
- Έχουμε επίσης τονίσει ότι η διαισθητική προσέγγιση των ζητημάτων ακόμα δεν έχει κάνει σαφή την πυκνή δομή του μονοπατιού πάνω στο οποίο κινείται το ίχνος Δ.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ε1**( αρχείο ήχου 711 – 0108, 11:50)**

| | |
|---|---|
| Ε | *αν μου πουν το α=0,999… με άπειρα εννιάρια τότε τι είπες Κ5* |
| *Κ5* | *τότε δεν μπορούμε να βρούμε ένα σημείο να ξεπερνάει το α.* |
| *Ε* | *Γιατί* |
| *Κ5* | *γιατί μετά το 0,9 περιοδικό υπάρχει το 1 και έχουμε πει ότι δεν είναι ένα* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ε2**(αρχείο ήχου 711 – 0102, 45:45)**

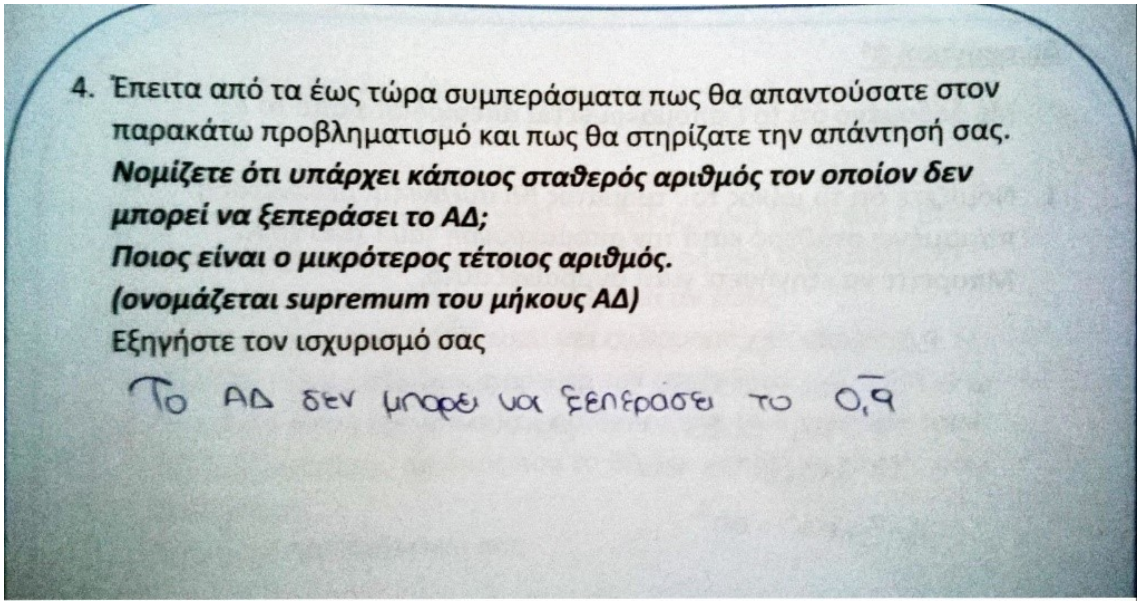
| | |
|---|---|
| *Ε* | *τελικά . Μου λέτε ότι το ΑΔ είναι σίγουρα μικρότερο από ένα* |
| *Κ6* | *ναι* |
| *Ε* | *και λέτε ότι το ΑΔ είναι μικρότερο ή ίσο από αυτόν τον αριθμό που έχει άπειρα εννιάρια ε;* |
| *Κ6* | *το μηδέν κόμμα εννιά με παύλα από πάνω είναι πάντα μικρότερο του ένα;* |
| *Ε* | *δεν ξέρω, είναι μικρότερο το 0,9 παύλα από το 1; , εσύ έχεις αμφιβολία για αυτό* |
| *Κ6* | *δεν ξέρω* |

Είναι σαφής η ανάδυση των παρανοήσεων που αφορούν στην καθ' υπέρβαση μεταφορά της έννοιας της διαδοχικότητας από την δομή των ακεραίων στην δομή των ρητών και η υποψία που αναδύεται για δεύτερη φορά, από δεύτερη μαθήτρια, σχετικά με την φύση του περιοδικού $0,\overline{9}$ , και την σχέση του με την μονάδα. Η εικόνα που σχηματίζουν οι μαθητές προς το παρόν, αν και ακόμα αμφισβητείται από αυτούς , περιγράφεται από δύο ανισώσεις. Η πρώτη είναι αποτέλεσμα συλλογισμών πάνω σε κοινώς αποδεκτές προτάσεις και θεωρήματα ενός πρωτογενούς αξιωματικού κόσμου, ενώ η δεύτερη βασίζεται στην διαίσθησή τους :

- $\text{ΑΔ} < 1$
- $\text{ΑΔ} \leq 0,\overline{9}$

Μερικές απαντήσεις δηλωτικές της πιο πάνω αμφιβολίας.

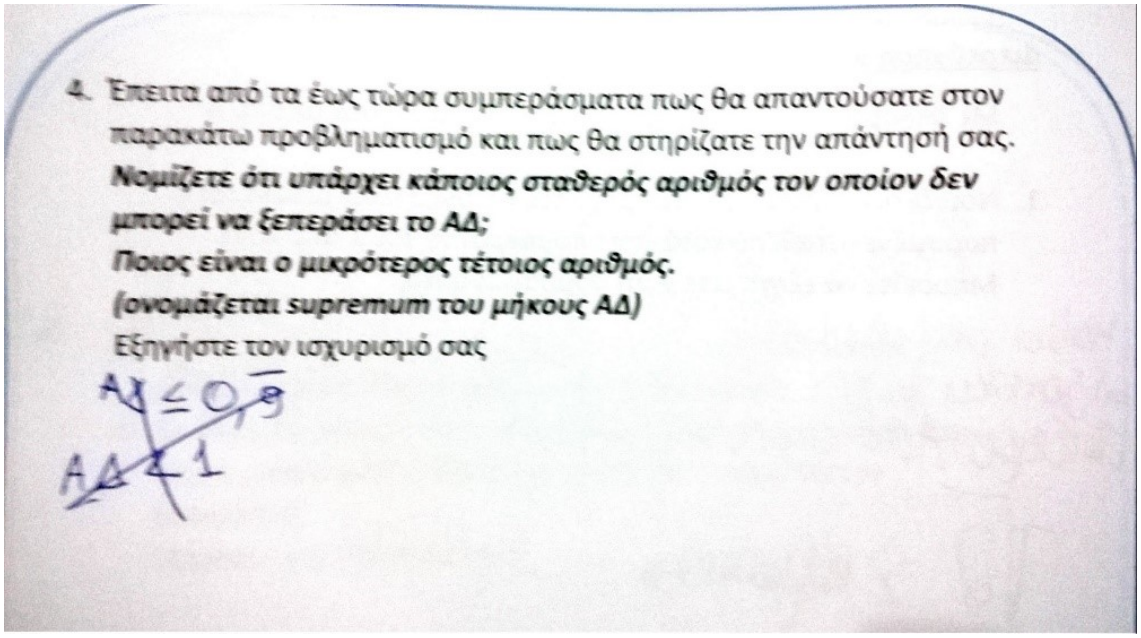
*Εικόνα 04-Ε-1*



4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

Το ΑΔ δεν μπορεί να ξεπεράσει το $0,\overline{9}$

*Εικόνα 04-Ε-2*

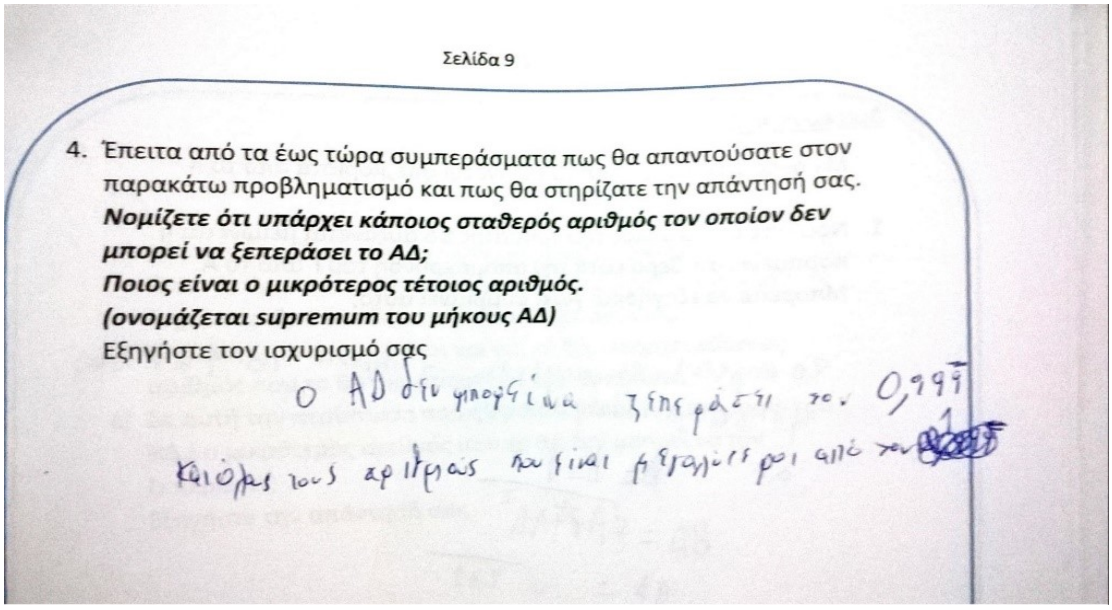


4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

$\cancel{ΑΔ \leq 0,\overline{9}}$

$\cancel{ΑΔ < 1}$

*Εικόνα 04-Ε-3*

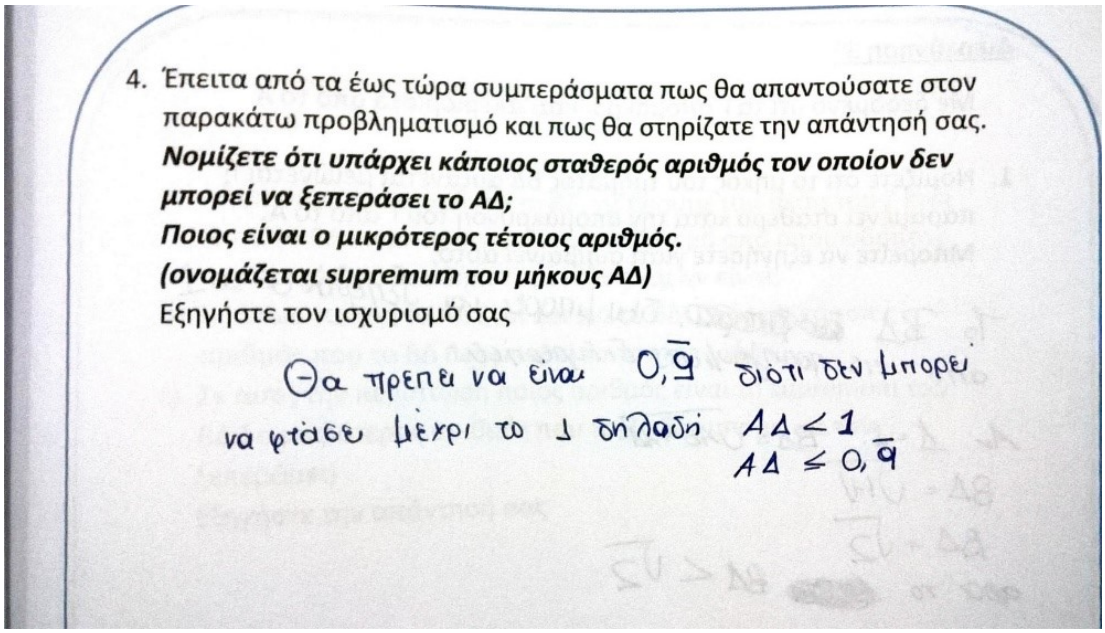


Σελίδα 9

4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

Ο ΑΔ δεν μπορεί να ξεπεράσει τον $0,99\overline{9}$ Καθώς τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από τον 1

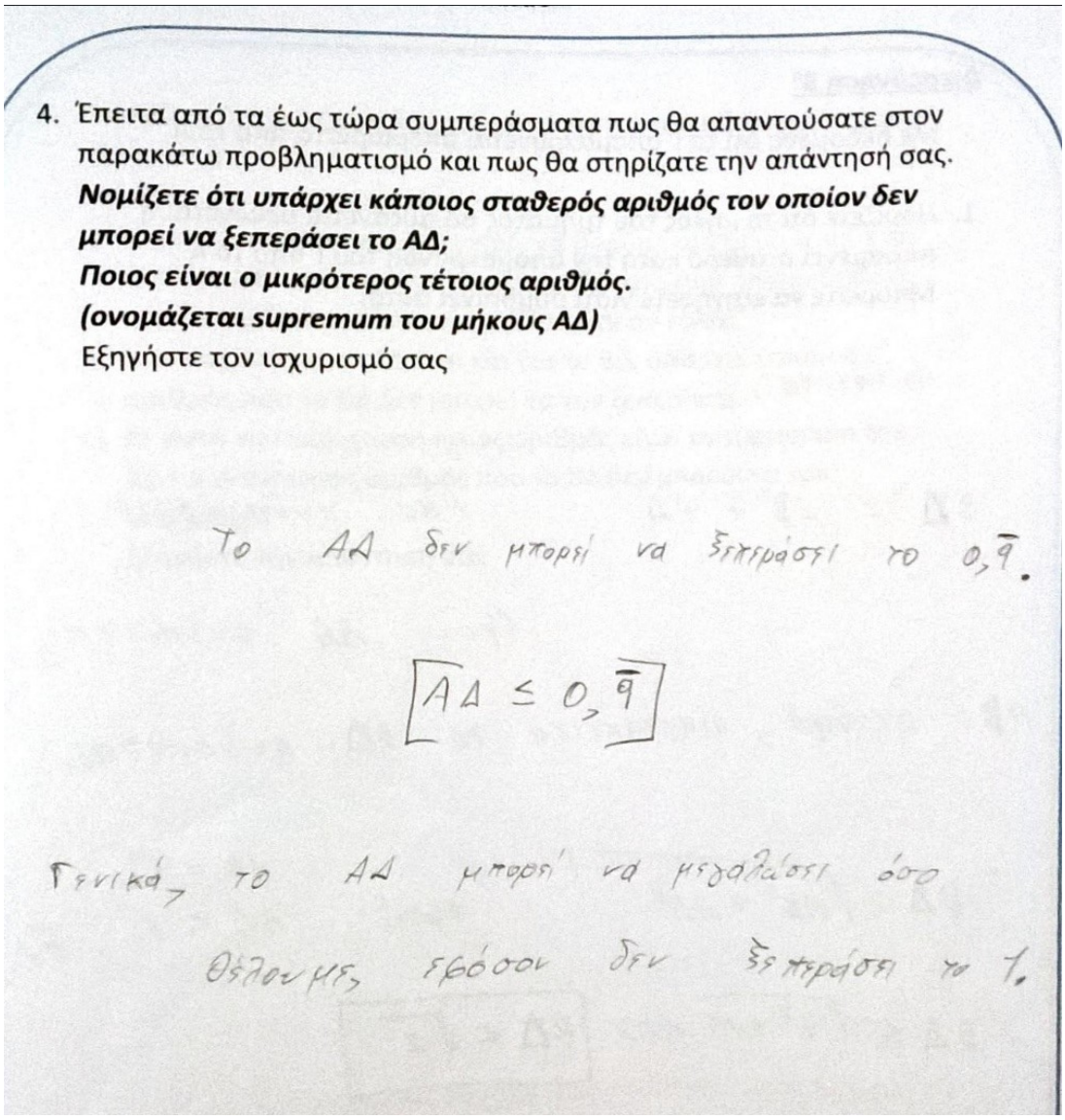
*Εικόνα 04-Ε-4*



4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

Θα πρεπει να είναι $0,\overline{9}$ διότι δεν μπορεί να φτάσει μέχρι το 1 δηλαδή $ΑΔ < 1$
$ΑΔ \leq 0,\overline{9}$

*Εικόνα 04-Ε-5*



4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

Το ΑΔ δεν μπορεί να ξεπεράσει το $0,\overline{9}$.

$$\boxed{AΔ \leq 0,\overline{9}}$$

Γενικά, το ΑΔ μπορεί να μεγαλώσει όσο θέλουμε, εφόσον δεν ξεπεράσει το 1.

Η έννοια της διάταξης και η σαφώς αποδεκτή σχέση (μήκος ΑΔ) < 1 δημιουργεί στους μαθητές μία αντιληπτική δομή, όμοια με αυτή ενός container schema με εσωτερικό όλους τους δεκαδικούς που είναι μικρότεροι του 1, εξωτερικό όλους τους δεκαδικούς που είναι μεγαλύτεροι από ένα, και ένα μεγάλο ερωτηματικό σε σχέση με το σύνορο. Στην αντιληπτική δομή των μαθητών όμως η αύξηση μοιάζει περισσότερο με βηματισμό παρά με ολίσθηση, γι' αυτό και κατά την γνώμη τους, το σύνορο είναι κάτι που στο τελευταίο βήμα ίσως να μπορέσουν να το αγγίξουν. Έτσι κατά την διαίσθησή τους φαίνεται ότι μία ποσότητα, όπως το μήκος του ΑΔ, μπορεί να βηματίζει πάνω στην ευθεία των πραγματικών από το 0 προς το 1, και αφού δεν μπορεί να γίνει ένα, τελικά να σταματήσει στον «προηγούμενο του ένα».

Παρατηρούμε ωστόσο ότι στα γραπτά των μαθητών υπάρχουν εκφράσεις όπως «το ΑΔ μπορεί να μεγαλώσει όσο θέλουμε εφόσον δεν ξεπεράσει το 1» ή «το Δ πάει όσο κοντά θέλουμε στο 1». Θα ήταν λάθος να πιστέψουμε όμως ότι ο όρος «όσο κοντά θέλουμε» έχει για τους μαθητές την ίδια σημασία με αυτό που λέμε «πυκνή δομή» των ρητών ή των πραγματικών. Αυτό φαίνεται από τις ίδιες τις απαντήσεις τους καθώς διαφοροποιούν τον αριθμό ένα από τον περιοδικό αριθμό 0,9…, σαν δύο διαδοχικούς αριθμούς. Θα ήταν όμως αντίστοιχα σημαντική παράληψη το να προσπεράσουμε αυτές τις εκφράσεις ως τυχαίες.

Οι πιο πάνω εκφράσεις κατά την γνώμη μας έχουν κρίσιμη θέση στην συμπερασματολογική αντίληψη των μαθητών και θα πρέπει να μεταφραστούν ως εξής: «το Δ μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε θέση του τμήματος με άκρα το 0 και το 1, εκτός από τη θέση της μονάδας», διότι όπως δηλώνει και η μαθήτρια Κ6 στο φύλλο εργασίας της, σε μία τυχαία τέτοια θέση: «Η γωνία Β θα έχει πάρει μία τιμή τέτοια ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να διατηρεί τις ιδιότητές του». Πρόκειται κατά την γνώμη μας για μία παραδοχή των μαθητών που δεν είναι διαισθητικής φύσης, αλλά αποτέλεσμα θεωρητικής σκέψης στηριγμένης στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στο κρίσιμο σημείο της τελικής συσχέτισης των δύο πιο πάνω αριθμών, η οποία και θα καθορίσει το ζητούμενο ελάχιστο άνω φράγμα, δοκιμάζουμε να υπερβούμε αυτή την πρωτογενή αντιληπτική δομή της διαδοχικότητας με δύο τρόπους. Σε πρώτη φάση διαισθητικά και σε δεύτερη φάση με αλγεβρικές διαδικασίες. Δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στην διαισθητική αποδοχή της ισότητας των δύο εκφράσεων, καθώς στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει η διερεύνηση της συγκεκριμένης δυνατότητας.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ε3 **(αρχείο ήχου 711 – 0108, 46:00)**

| | |
|---|---|
| Ε | *Ας πούμε ότι (το ΑΔ) μπορεί να τον πάρει αυτό τον αριθμό (0,999…) Τότε αν αυτός είναι πριν το ένα, τότε το ΑΔ θα πρέπει να μεγαλώσει κι άλλο και να βγει ένας καινούριος αριθμός ανάμεσα σε αυτόν και τον ένα* |
| Κ10 | *Ναι* |
| Ε | *πιστεύετε ότι υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός;* |
| Κ10 | *Ναι* |
| Ε | *Ποιος να είναι;* |
| Κ10 | *Υπάρχουν αριθμοί που δεν έχουμε μάθει;* |
| Ε | *Όχι. Όλοι οι αριθμοί που ξέρεις είναι πάνω στην πραγματική ευθεία.* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ε4 **(αρχείο ήχου 711 – 0108, 47:45)**

| | |
|---|---|
| Ε | *Είπαμε ότι το 0,9 περιοδικό δεν μπορεί να είναι μετά το ένα. Το 0,9 περιοδικό ή θα είναι πάνω στο ένα ή θα είναι πριν το ένα* |
| Κ10 | *Ναι* |
| Ε | *αν είναι πριν το ένα, θα πει ότι το ΑΔ θα πρέπει να έρθει και να μπει εδώ ανάμεσα, (ανάμεσα στο 0.999.. και το 1) αφού μεγαλώνει διαρκώς.* |
| Κ10 | *μήπως είναι πάνω στο ένα;* |
| Ε | *μήπως είναι πάνω στο ένα το 0,999…* |
| Κ9 | *αν το 0,999… είναι ένα και το παίρνουμε όλο ως έναν αριθμό, ...αυξανόμενο …* |
| Ε | *δεν αυξάνεται , ως έναν αριθμό θα τον δεις* |
| Κ9 | *εννοώ τα εννιάρια του να αυξάνονται* |
| Ε | *δεν αυξάνονται τα εννιάρια του, είναι άπειρα.* |
| Κ8 | *άρα κύριε μήπως είναι …. Ο ένα* |
| Ε | *μήπως είναι ο ένα* |
| Κ8 | *έτσι είπαμε και αυτή ήταν η δικιά μας σκέψη από την αρχή, αλλά δεν το έχουμε δεδομένο ότι δεν μπορεί να πάει στο ένα* |
| Κ10 | *Το έχουμε . Το έχουμε αποδείξει το έχουμε αποδείξει. Ότι δεν μπορεί να πάει στο ένα το έχουμε αποδείξει.* |
| Κ8 | *μήπως το ΑΔ δεν μπορεί να γίνει 0,9 περιοδικό γιατί είναι πάνω στο ένα , δηλαδή το ΑΔ παρόλο που μεγαλώνει διαρκώς και δεν γίνεται ποτέ ένα δεν μπορεί να φτάσει ούτε αυτό γιατί είναι και αυτό το ένα* |

Στην πιο πάνω παρέμβαση του εκπαιδευτικού επιχειρείται να οικοδομηθεί μία συμπερασματολογία βασισμένη στην διαισθητική αντίληψη και όχι στην διεργασιακή απόδειξη η οποία θα ακολουθήσει. Προφανέστατα δεν πρόκειται για αποδεικτική διαδικασία, αλλά για ένα συμπερασματολογικό πλαίσιο που οδηγεί σε υποθέσεις ικανές να τροποποιήσουν την αντιληπτική εικόνα των μαθητών για την δομή της πραγματικής ευθείας. Τα διαισθητικής φύσης συμπεράσματα, εδράζονται στο σχήμα container, στο σχήμα όψης, στο σχήμα source path goal και στην βασική μεταφορά του απείρου. Αναλυτικά:

- Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι ανεξάρτητα από την διαίσθησή τους, το ισχυρό αξιωματικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ορίζει μία σαφέστατη container δομή καθιστώντας επιτρεπτή για το Δ οποιαδήποτε θέση πριν την μονάδα και μη επιτρεπτή θέση οποιαδήποτε από την μονάδα και μετά, με σύνορο την μονάδα.
- Όπως φαίνεται και πιο πάνω από όλα τα φύλλα εργασίας, οι μαθητές έχουν την βεβαιότητα ότι ο περιοδικός 0,999… δεν είναι μετά τον αριθμό ένα. Συνεπώς το συμπέρασμα ότι ο περιοδικός 0,999… είναι ή μικρότερος ή ίσος με τον ένα, προκύπτει αβίαστα, μέσω της διαισθητικής αντίληψης που έχουν για την έννοια της διάταξης (επίσης μία δομή container, μικρότερο – μεγαλύτερο – ίσο, αντίστοιχη με την δομή: μέσα – έξω – σύνορο).
- Από την διαισθητική, αλγεβρική, ή Ευκλείδεια αντίληψη του δεσμού που όπως ήδη αναφέραμε, υπάρχει ανάμεσα στα δύο σημεία Γ και Δ, έχει ήδη προκύψει ως συμπέρασμα ότι «για όση διάρκεια κινείται το Γ, κινείται και το Δ»
- Το σημείο Γ εκτελεί μία επαναλαμβανόμενη κίνηση σε άπειρο χρόνο. (βηματισμός πάνω σε ένα μονοπάτι με πατήματα όλους τους φυσικούς αριθμούς – αρχή το 1 τέλος το θετικό άπειρο). Η μέσω του σχήματος όψης τέλεια θεώρηση της συγκεκριμένης κίνησης, τοποθετεί την ολοκλήρωσή της σε άπειρο χρόνο. Και έτσι όπως παραδέχονται οι μαθητές το Γ «κινείται για πάντα».
- Το σημείο Δ ως συνδεδεμένο με το Γ, (Διαισθητικά, Αλγεβρικά ή Γεωμετρικά) εκτελεί και αυτό μίας αντίστοιχης δομής κίνηση ( βηματισμός πάνω σε ένα μονοπάτι με πατήματα ρητές στρογγυλοποιήσεις πραγματικών από το 0 ως το 1) Η μέσω του σχήματος όψης τέλεια θεώρηση του συνδεδεμένου επαναλαμβανόμενου γεγονότος, τοποθετεί αντίστοιχα την ολοκλήρωσή του επίσης σε άπειρο και όχι σε πεπερασμένο χρόνο. Άρα όπως οι μαθητές είπαν «και το Δ κινείται για πάντα».
- Σύμφωνα με το συμπερασματολογικό μοτίβο του σχήματος όψης : “Δεν υπάρχει κανένα πιο απομακρυσμένο σημείο στην εξέλιξη μιας διαδικασίας, από το στάδιο ολοκλήρωσης αυτής της διαδικασίας” Lakoff & Nunez

Αν λοιπόν δεχτούμε ότι η δεκαδική έκφραση 0,99… είναι ταυτόσημη με έναν αριθμό και αυτός ο αριθμός είναι ο αμέσως μικρότερος της μονάδας τότε δύο είναι τα ενδεχόμενα:

- Το Δ κάποια στιγμή πατάει στον αριθμό αυτό ή
- Το Δ δεν πατάει ποτέ ούτε στον αριθμό αυτό.

Από το παραπάνω διαισθητικό συμπερασματολογικό πλαίσιο προκύπτει ότι αν το Δ πατήσει στον 0,99… και αφού θα κινείται για πάντα, θα πρέπει στη συνέχεια να τον ξεπεράσει, και να πατήσει σε κάποιον άλλον αριθμό μεγαλύτερό του, αλλά μικρότερο της μονάδας.

Αν πάλι το Δ δεν πατάει ποτέ πάνω στον αριθμό 0,99.. και αυτός είναι μικρότερος από τον 1 τότε υπάρχει άλλο ένα σημείο του τμήματος από το 0 ως το 1 (εκτός από την θέση της μονάδας) που το Δ επίσης δεν μπορεί να πατήσει.

Οι μαθητές λοιπόν προκειμένου να είναι συνεπείς με την διαίσθησή τους έχουν πολύ περιορισμένες επιλογές.

- Ή θα μεγαλώσουν έναν αριθμό με άπειρα εννέα στο δεκαδικό του μέρος, χωρίς να του αλλάξουν το ακέραιο μέρος ( «βάζοντας κι άλλα εννέα» όπως λένε, ή αντιμετωπίζοντάς τον «ως αυξανόμενο», ή «μη σταθερό» ).
- Ή θα πρέπει να τους ενημερώσουμε για την ύπαρξη κάποιου αριθμού που εμείς ξέρουμε αλλά αυτοί όχι, και βρίσκεται κάπου ανάμεσα στον 0,99… και τον 1.
- Ή θα ακυρώσουν το αξιωματικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, καταρρίπτοντας το Ευκλείδειο αίτημα.
- Ή θα αναγκαστούν αποδεχτούν μία ριζικά διαφορετική δομή για το σύνολο των αριθμών που γνωρίζουν, αναρωτώμενοι:
  - «μήπως ο 0,99.. είναι πάνω στον ένα;»
  - «μήπως το ΑΔ δεν μπορεί να γίνει 0,9 περιοδικό γιατί είναι πάνω στο ένα , δηλαδή το ΑΔ παρόλο που μεγαλώνει διαρκώς και δεν γίνεται ποτέ ένα δεν μπορεί να φτάσει ούτε αυτό γιατί είναι και αυτό το ένα;»

Η απάντηση στον ανστοχασμό τους θα έρθει μέσω της γνωστής απόδειξης του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Β Γυμνασίου, την οποία αν και έβλεπαν ίσως για τρίτη φορά ως μαθητές, και πάντως, σίγουρα για δεύτερη φορά στην διάρκεια της ίδιας χρονιάς, εντούτοις είναι σαν να την βλέπουν για πρώτη φορά καθώς μόλις τώρα απέκτησε νόημα για αυτούς.

<u>Η απόδειξη</u>

Αν υποθέσουμε ότι $x = 0,999...$
τότε πολλαπλασιάζοντας με 10 παιρνουμε την ισότητα
$10x = 9,999...$
Αφαιρώντας τις δύο ισότητες κατά μέλη έχουμε:
$10x - x = 9$ που ισοδύναμα γράφεται :
$9x=9$ δηλαδή $x = 1$

<u>Η αντίδραση ( καθώς παρουσιάζεται στον πίνακα η πιο πάνω απόδειξη )</u>

<u>Ηχογραφημένο επεισόδιο Ε5 **(αρχείο ήχου 711 – 0108, 54:50)**</u>

| | |
|---|---|
| Κ9 | χ=1…. |
| Κ10 | Άντε γειά |
| Κ6 | Κάποιος να το πάρει μία φωτογραφία και να μου το στείλει (την επόμενη αναρτήθηκε στο FB της Κ6) |

Το αφαιρετικό βήμα που παρατηρούμε συντελείται στο επίπεδο των θεωρητικών μαθηματικών, με έναν συνδυασμό διαισθητικής συμπερασματολογίας , Ευκλείδειων δομών και αλγεβρικής διαχείρισης αφηρημένων ποσοτήτων. Πρόκειται κατά την γνώμη μας για μία περίπτωση ενσώματου και συμβολικού φορμαλισμού κατά Tall, στα πλαίσια της ανάμιξης εννοιών από διαφορετικές δομές.

Φάση ΣΤ: Πυκνότητα, διαδοχικότητα και τελική αναζήτηση του supremum ΑΔ.

Μία μάλλον επιτυχημένη προσπάθεια

Έχουμε ήδη αποδείξει στην τάξη ότι ο περιοδικός δεκαδικός 0,999… ισούται με την μονάδα, και αναζητείται αν υπάρχει ο αμέσως προηγούμενος αριθμός της μονάδας για να είναι αυτός το ζητούμενο supremum.

Ηχογραφημένο επεισόδιο ΣΤ1 **(αρχείο ήχου 711 – 0109, 05:55)**

| | |
|---|---|
| Κ7 | μισό να πω κάτι . εκεί είναι 3 εννιάρια, μετά να είναι με τέσσερα |
| Ε | ωραία μετά; |
| Κ7 | μετά με πέντε |
| Κ5 | με έξι και πάει λέγοντας |
| Ε | άρα πόσους τέτοιους αριθμούς μπορώ να φτιάξω μέχρι να πάω στο ένα |
| όλοι | Άπειρους |
| Ε | το ΑΔ μέχρι που μπορεί να φτάσει |
| Κ7 | μέχρι τον προηγούμενο |
| Ε | Υπάρχει |
| Κ9 | κύριε μέχρι μία τιμή μικρότερη οποιαδήποτε μικρότερη του ένα |
| Ε | υπάρχει |
| Κ10 | υπάρχουν πολλοί τέτοιοι αριθμοί οι οποίοι.. |
| Ε | οι οποίοι είναι τι; |
| Κ10 | είναι μικρότεροι του ένα |
| Ε | μικρότεροι του ένα |
| Κ6 | βασικά είναι μικρότεροι του 0,9 περιοδικό |
| Ε | μπράβο. Τι θέλετε να πείτε δηλαδή ότι μπορεί να φτάσει σε οποιοδήποτε από αυτούς τους αριθμούς |
| Κ6 | δεν θα πάρει τιμή ίση με το μηδέν , δεν θα πάρει τιμή ίση με το ένα αλλά θα 0,9 περιοδικό αλλά κατά τα άλλα θα περάσει από όλους τους υπόλοιπους |
| Ε | άρα δηλαδή μπορεί να πάει πόσο κοντά στο ένα |
| Κ6 | πολύ κοντά |
| Κ8 | 0,8; |
| Κ7 | αφού υπάρχει και ο 0,99 και ο 0,999 και ο 0,9999 |
| Ε | πόσο κοντά μπορεί να φτάσει στο ένα |
| Κ6 | πάρα πολύ κοντά είναι όμως λίγο απροσδιόριστο αυτό |

Η αποσαφήνιση της νέας δομής, προσδιορίζει και το ζητούμενο supremum

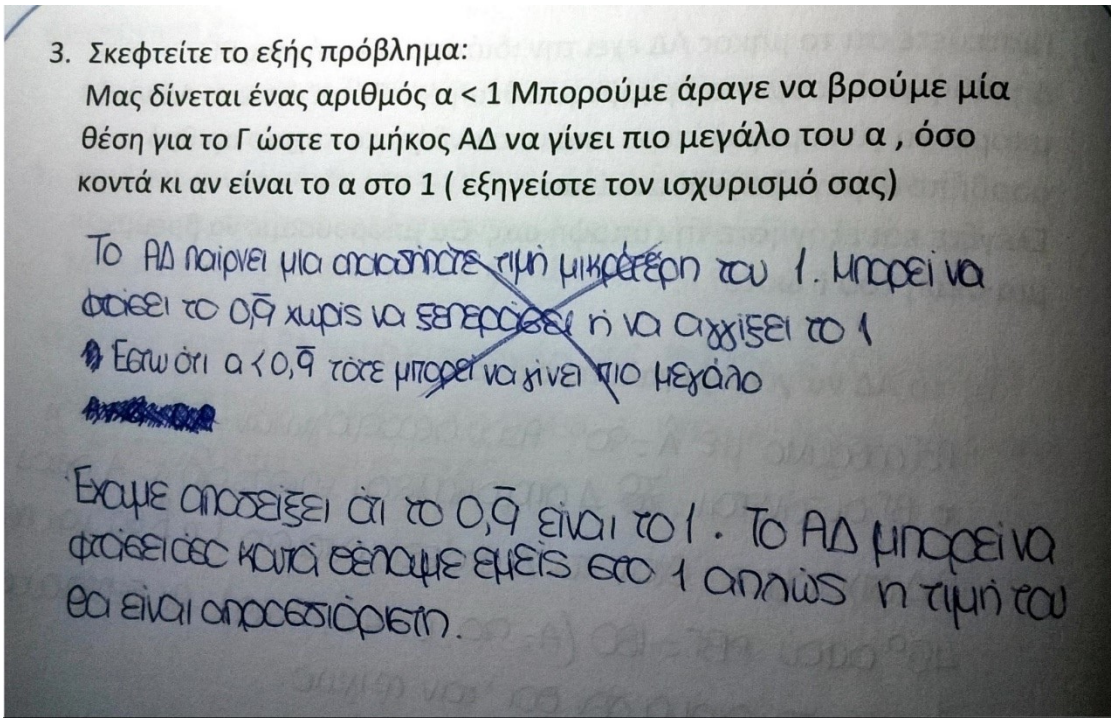
Ηχογραφημένο επεισόδιο ΣΤ2 **(αρχείο ήχου 711 – 0109, 09:30)**

| | |
|---|---|
| Ε | Άρα ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει ο ΑΔ |
| Κ6 | ο 0,9 περιοδικό |
| Ε | Δήλαδη; |
| Κ7 | ο ένα |

Πιο κάτω φαίνεται μία διόρθωση που έκανε μία μαθήτρια Κ6 σε κάποιο ερώτημα του Φύλλου εργασίας, αμέσως μετά την απόδειξη ότι $0,\overline{9}=1$.

Φύλλο εργασίας της μαθήτριας Κ6

*Εικόνα 04-ΣΤ-1*



3. Σκεφτείτε το εξής πρόβλημα:
Μας δίνεται ένας αριθμός α < 1 Μπορούμε άραγε να βρούμε μία θέση για το Γ ώστε το μήκος ΑΔ να γίνει πιο μεγάλο του α , όσο κοντά κι αν είναι το α στο 1 ( εξηγείστε τον ισχυρισμό σας)

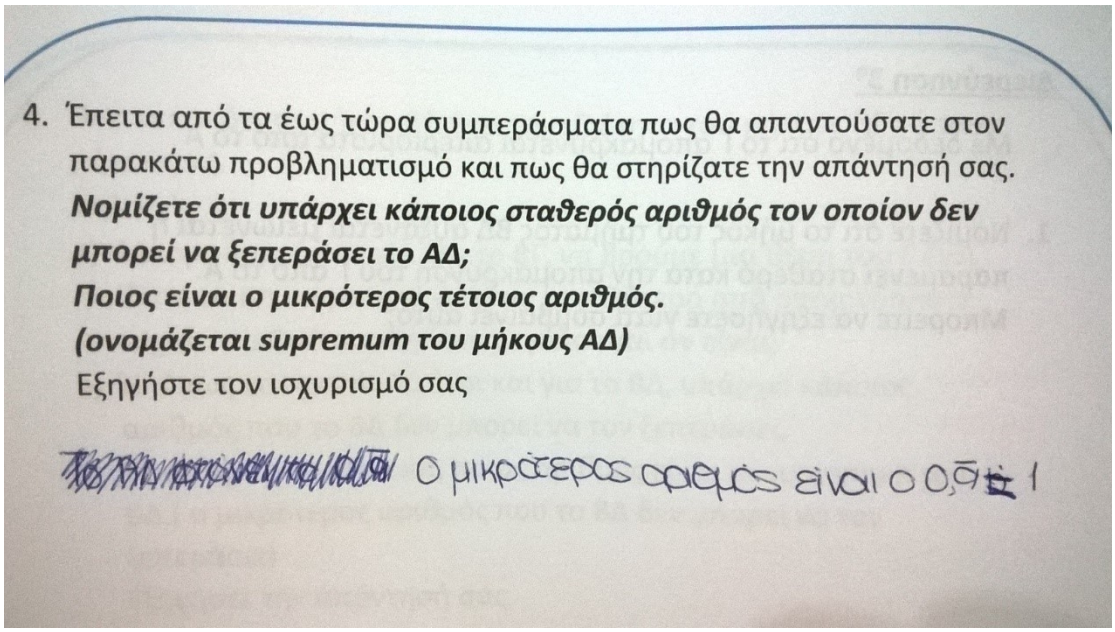
Το ΑΔ παίρνει μια οποιαδήποτε τιμή μικρότερη του 1. Μπορεί να φτάσει το 0,9̄ χωρίς να ξεπεράσει ή να αγγίξει το 1
Έστω ότι α < 0,9̄ τότε μπορεί να γίνει πιο μεγάλο

Έχουμε αποδείξει ότι το 0,9̄ είναι το 1. Το ΑΔ μπορεί να φτάσει όσο κοντά θέλουμε εμείς στο 1 απλώς η τιμή του θα είναι απροσδιόριστη.

Ενώ διορθώνοντας την απάντησή της για το ζητούμενο supremum της ποσότητας ΑΔ γράφει:

Φύλλο εργασίας μαθήτριας Κ6

*Εικόνα 04-ΣΤ-2*



4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

Ο μικρότερος αριθμός είναι ο 0,9̄ ± 1

Μία μάλλον αποτυχημένη προσπάθεια

Θα παρατηρήσουμε ότι η εύρεση του ζητούμενου supremum ( οριζόμενο ως ο μικρότερος αριθμός που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει το μήκος ΑΔ) ακόμα και μετά την απόδειξη της ισότητας $0,\overline{9}=1$, δεν είναι αυτονόητη. Αυτό συμβαίνει καθώς πολλοί μαθητές στο ερώτημα «ποιος είναι ο μικρότερος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το μήκος ΑΔ» προσθέτουν και ένα επιπλέον χαρακτηριστικό και ψάχνουν απάντηση στο ερώτημα: «ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός με τον οποίον να μπορεί να είναι ίσο το μήκος ΑΔ». Έτσι αν και επανατοποθετούνται με σωστή προσέγγιση στο ζήτημα της διαδοχικότητας, εστιάζοντας στο ζήτημα της πυκνότητας, εντούτοις δεν μπορούν να απαντήσουν σωστά στην τελική ερώτηση για το ζητούμενο ελάχιστο άνω φράγμα.

Ηχογραφημένο επεισόδιο ΣΤ3 **(αρχείο ήχου 711 – 0102, 49:30)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *άρα ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν μπορεί να ξεπεράσει* |
| *Κ3* | *να ρωτήσω κάτι ποιος είναι ο προηγούμενος αριθμός πριν από το ένα.* |
| *Ε* | *α! ποιος είναι ο αριθμός πριν από το ένα; Πες μου εσύ έναν* |
| *Α1* | *το βρήκαμε* |
| *Κ3* | *δεν το βρήκαμε* |
| *Κ4* | *το 0,9 (εννοεί 0,999…)* |
| *Κ3* | *Όχι το 0,999… κάνει ένα* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο ΣΤ4 **(αρχείο ήχου 711 – 0102, 56:35)**

| | |
|---|---|
| *Κ3* | *Πόσα εννιάρια μπορούμε να βάλουμε* |
| *Κ4* | *Άπειρα* |
| *Ε* | *Απλώς αν βάλεις άπειρα εννιάρια θα φτάσεις στο ένα, αν βάλεις συγκεκριμένο αριθμό θα είσαι λίγο πριν το ένα* |
| *Κ4* | *Αυτό γίνεται σε όλους.* |
| *Ε* | *Αλλά δεν θα μπορείς να πας ακόμα πιο κοντά; Πόσα εννιάρια θες να βάλουμε* |
| *Α1* | *Πάντα μπορείς να πας πιο κοντά* |
| *Ε* | *Να βάλουμε αυτά τα εννιάρια. Δεν ξέρω πόσα είναι. Αυτός δεν είναι ένα. Μπορείς να πας πιο κοντά στο ένα από αυτόν τον αριθμό;* |
| *Κ2* | *ναι προσθέτοντας ένα εννιά* |
| *Ε* | *να βάλεις άλλο ένα εννιάρι. Σωστά;* |
| *Κ2* | *Ναι* |
| *Ε* | *πιο κοντά στο ένα μπορείς να πας;* |
| *Κ2* | *πάλι το ένα εννιά* |
| *Κ4* | *αυτό γίνεται σε όλους τους αριθμούς;* |
| *Ε* | *μπορείς να πλησιάσεις στο ένα όσο κοντά θες;* |
| *Κ3* | *Ναι* |
| *Κ4* | *αυτό γίνεται με όλους τους αριθμούς;* |
| *Ε* | *Δεν γίνεται;* |
| *Κ2* | *ναι γίνεται* |
| *Κ3* | *άρα δεν έχουμε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό* |
| *Κ4* | *δεν υπάρχει. Άμα δεν είναι το άπειρο ( εννοεί τον περιοδικό 0,9…) που είναι ίσο με ένα…* |

| | |
|---|---|
| *Ε* | *δεν έχουμε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό που να είναι ο αμέσως προηγούμενος..* |
| *Κ2* | *..από το ένα* |
| *Ε* | *..από το ένα. Όχι δεν έχεις. Αλλά το ΑΔ μπορεί να πλησιάσει στο ένα πόσο κοντά* |
| *Κ3* | *Πολύ , πάρα πολύ* |
| *Ε* | *Τι θα πει πάρα πολύ* |
| *Κ3* | *Μπορεί να τον φτάσει* |
| *Κ2* | *Ένα τσίκ, ναι μπορεί και να τον φτάσει* |
| *Κ4* | *Δεν μπορεί να τον φτάσει* |
| *Ε* | *Μπορεί να τον φτάσει;* |
| *Κ2* | *Ναι είπαμε 0,9… = 1* |
| *Κ4* | *αλλά είπαμε δεν μπορεί να είναι ίσος με ένα* |
| *Ε* | *Μπορεί λέμε το ΑΔ να πλησιάσει στο ένα όσο κοντά θέλουμε….* |
| *Κ3* | *….Αλλά δεν θα γίνει ένα* |
| *Ε* | *Αλλά δεν θα γίνει ποτέ ένα* |
| *Κ2* | *Κατάλαβα* |
| *Ε* | *Ποιος είναι λοιπόν ο μικρότερος αριθμός που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει ο ΑΔ* |
| *Κ3* | *Δεν υπάρχει* |
| *Ε* | *Το ένα* |
| *Κ3* | *Άλλη μία* |
| *Κ4* | *Αφού δεν μπορεί να είναι ίσο με ένα* |

Η νέα δομή που έχουν στο μυαλό τους οι μαθητές, πιθανότατα δεν είναι ακόμα ενσωματωμένη στο ευρύτερο σύνολο των πραγματικών. Αυτό συμβαίνει διότι όλοι οι αριθμοί που τους εμφανίζει το λογισμικό (στρογγυλοποιημένες ποσότητες σε ορισμένο πλήθος δεκαδικών) και όσοι οι ίδιοι μπορούν να φανταστούν και να χρησιμοποιήσουν σαν παραδείγματα στις σκέψεις ή τις διερευνήσεις τους είναι τερματιζόμενες δεκαδικές μορφές ή άπειροι περιοδικοί. Όμως, η αποσαφήνιση της νέας έννοιας σε σχέση με τον επαναπροσδιορισμό της δομής των ρητών, μας επιτρέπει να πειραματιστούμε επεκτείνοντας την διερεύνησή μας σε αναζήτηση άρρητου supremum.

Φάση Ζ : Συμπεριφορά μήκους ΒΔ

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ζ1 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 17:55)**

| | |
|---|---|
| *Α1* | *δεν μπορεί να γίνει ίσο ή μεγαλύτερο του ενός …. Του δύο* |
| *Ε* | *του δύο* |
| *Α1* | *Ναι* |
| *Ε* | *εντάξει γιατί* |
| *Α1* | *επειδή μια πλευρά δεν μπορεί να είναι ίση ή μεγαλύτερη των δύο άλλων, γνωστό ότι η μία πλευρά είναι ένα, και η άλλη κάτι λιγότερο από ένα* |
| *Ε* | *δηλαδή εσύ λες ότι το ΒΔ πρέπει να είναι μικρότερο πες μου να γράψω* |
| *Α1* | *Μικρότερο του ΒΑ και του ΑΔ* |
| *Ε* | *το ΒΑ και το ΑΔ λες ότι το πολύ που μπορούν να γίνουν αυτά… είναι κάτι λιγότερο από δυο σωστά; άρα και το ΒΔ πρέπει να είναι λιγότερο του* |
| *Α1* | *Δύο* |

Ο μαθητής Α1 δημιουργεί ένα σχήμα δεσμού ανάμεσα στα μήκη ΒΔ και ΑΔ. Το τρίτο μέρος είναι η ευκλείδεια δομή και συγκεκριμένα η τριγωνική ανισότητα. Με αυτόν τον τρόπο το φραγμένο του μήκους ΑΔ οδηγεί στο φραγμένο του μήκους ΒΔ.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ζ2 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 21:10)**

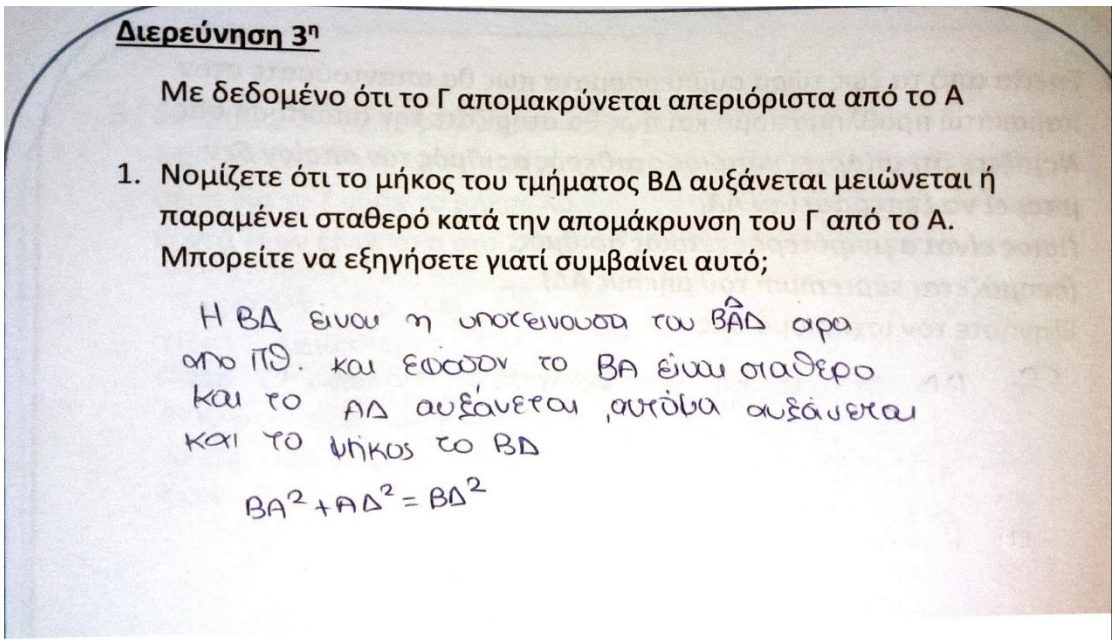
| | |
|---|---|
| *Ε* | *Α2 λέγε* |
| *Α2* | *νομίζω βάση του πυθαγορείου εφόσον μεγαλώνει η ΑΔ πρέπει να μεγαλώνει και η ΒΔ* |
| *Ε* | *βάση του πυθαγορείου λες , για πες μου να γράψω* |
| *Α2* | *ΒΔ=ρίζα ΑΒ τετράγωνο +ΑΔ τετράγωνο* |
| *Ε* | *Οπότε;* |
| *Α2* | *εφόσον αυξάνεται μία από τις ποσότητες του β μέλους αυξάνεται και το α μέλος* |

Ο δεσμός ανάμεσα στα μήκη ΑΔ και ΒΔ εμφανίζεται ενισχυμένος με ένα επιπλέον τρίτο μέρος την αλγεβρική σχέση του πυθαγορείου. Η σχέση αυτή βοηθά τον μαθητή να χαρακτηρίσει την ποσότητα ΒΔ ως αύξουσα, χωρίς όμως μία αυστηρή αλγεβρική απόδειξη.

Αντίστοιχα αποτελέσματα και από την μαθήτρια Κ5

Φύλλο εργασίας μαθήτριας Κ5

*Εικόνα 04-Ζ-1*



**Διερεύνηση 3η**

Με δεδομένο ότι το Γ απομακρύνεται απεριόριστα από το Α

1. Νομίζετε ότι το μήκος του τμήματος ΒΔ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

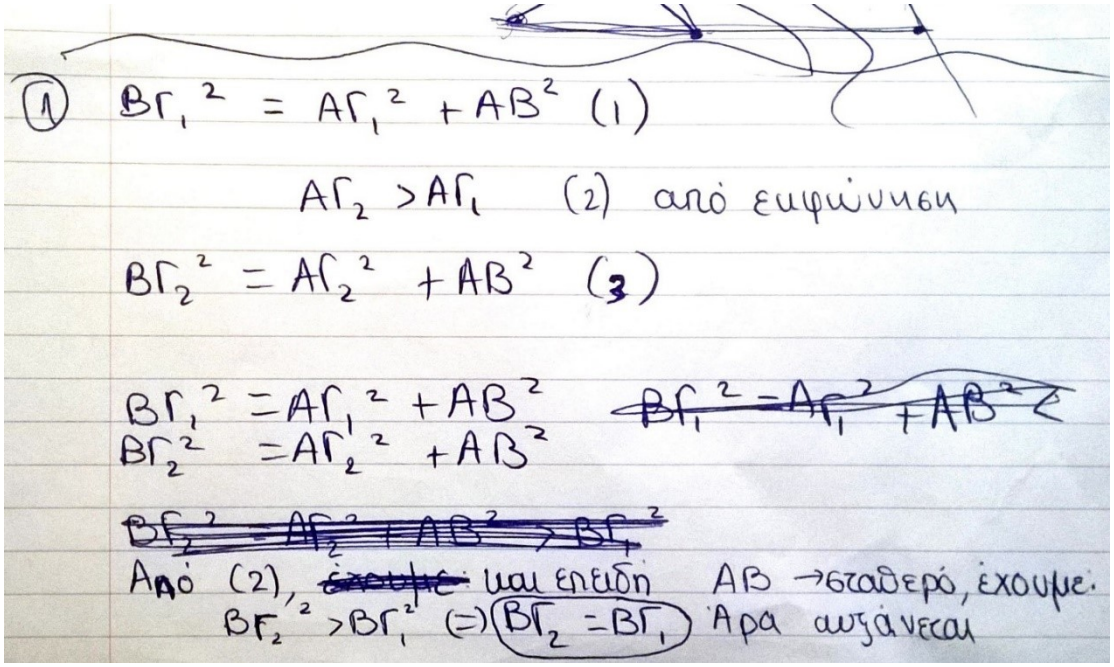
Η ΒΔ είναι η υποτείνουσα του $B\hat{A}\Delta$ άρα από ΠΘ. και εφόσον το ΒΑ είναι σταθερό και το ΑΔ αυξάνεται, αυτόνα αυξάνεται και το μήκος το ΒΔ

$BA^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2$

Μια πιο πλήρης απόδειξη, με αλγεβρική δομή αλλά και πάλι στηριγμένη στην σχέση του πυθαγορείου έρχεται από την μαθήτρια Κ9

Φύλλο εργασίας μαθήτριας Κ9

*Εικόνα 04-Ζ-2*




Παρατηρούμε ότι αν και η ίδια αύξουσα δομή παρατηρήθηκε και στην συμπεριφορά της υποτείνουσας ΒΓ, εντούτοις αυτή την φορά δεν παρουσιάστηκε ως προτεινόμενη δικαιολόγηση της αύξησης η από θεώρημα ομοιότροπη μεταβολή των ΑΔ και ΒΔ.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ζ3 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 18:50)**

| | |
|---|---|
| *Κ2* | *άρα δεν θα μπορεί να μεγαλώνει απεριόριστα* |
| *Ε* | *το απεριόριστα εδώ όπως λέει η Στεφανία, αφού δεν μπορεί να γίνει ούτε καν δύο , δεν μπορεί να μεγαλώνει απεριόριστα ,πως το εννοείς το απεριόριστα;* |
| *Α1* | *είπα σχετικά απεριόριστα, όπως και το ΑΔ που μπορεί συνέχεια να μεγαλώνει αλλά ποτέ να μην φτάσει στο ένα ,έτσι και το ΒΔ μπορεί συνέχεια να μεγαλώνει αλλά να μην φτάσει στο δύο* |
| *Ε* | *μπορεί λοιπόν να μεγαλώνει ….. Να πούμε μια άλλη λέξη.* |
| *Κ2* | *να αυξάνει* |
| *Ε* | *να αυξάνει .. Τι ; Το απεριόριστα κρύβει μέσα του το ότι μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλω. Να πούμε αλλιώς την λέξη απεριόριστα;* |
| *Κ2* | *απειρ - ιόριστα χα χα ;* |
| *Κ3* | *χωρίς τέλος* |
| *Ε* | *να μεγαλώνει χωρίς τέλος δηλαδή να μεγαλώνει ;* |
| *Α2* | *Άπειρα* |
| *Ε* | *να μεγαλώνει* |
| *Κ1* | *Αδιάκοπα* |
| *Ε* | *αδιάκοπα οκ αδιάκοπα ή να μεγαλώνει…* |
| *Κ4* | *μέχρι το άπειρο* |
| *Κ1* | *Συνεχώς* |

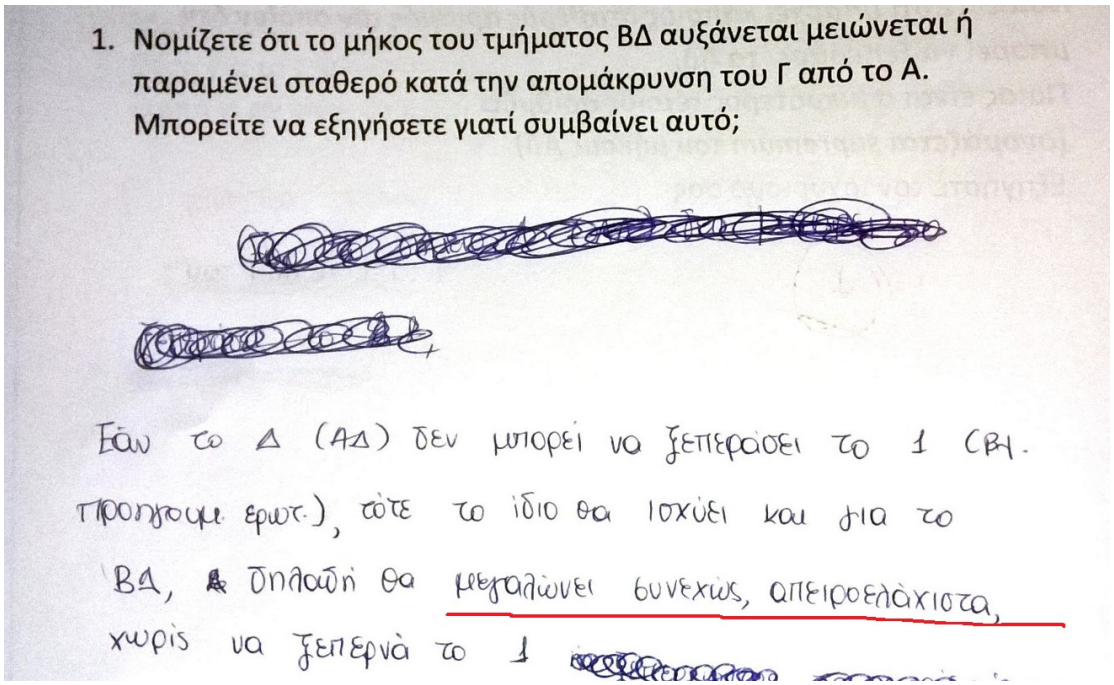
Το κρίσιμο σημείο του χαρακτηρισμού του μήκους ΒΔ ως διαρκώς αύξουσας αλλά φραγμένης ποσότητας, επιτυγχάνεται πάλι μέσω του σχήματος δεσμού που έχουν σχηματίσει οι μαθητές ανάμεσα στα μήκη ΑΔ και ΒΔ. Είναι χαρακτηριστικές όμως και οι εκφράσεις που οι μαθητές χρησιμοποιούν για να δηλώσουν λεκτικά με διαφορετικό τρόπο την διαρκή αύξηση του μήκους ΒΔ χωρίς να ακυρώνουν το φραγμένο. Εδώ η γλώσσα, διαδραματίζει τον ρόλο της χώρο του συμβολισμού καθώς «εσωτερικεύεται» η νέα έννοια.

«Σχετικά απεριόριστα», «απει-ριόριστα», «χωρίς τέλος», «άπειρα», «αδιάκοπα», «συνεχώς».

Χαρακτηριστική είναι και η έκφραση «μεγαλώνει συνεχώς απειροελάχιστα» που χρησιμοποιεί η μαθήτρια Κ8.

Φύλλο εργασίας μαθήτριας Κ8

*Εικόνα 04-Ζ-3*



1. Νομίζετε ότι το μήκος του τμήματος ΒΔ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

Εάν το Δ (ΑΔ) δεν μπορεί να ξεπεράσει το 1 (ΒΗ. Πρόταγμα ερωτ.), τότε το ίδιο θα ισχύει και για το ΒΔ, η ολοένα θα μεγαλώνει συνεχώς, απειροελάχιστα, χωρίς να ξεπερνά το 1

Παρατηρούμε ότι αν και δεν φαίνεται να έχει εντοπίσει την γεωμετρική ή αλγεβρική συσχέτιση των μηκών ΑΔ και ΒΔ μέσω της Ευκλείδειας δομής του σχήματος, εντούτοις αντιλαμβάνεται με απόλυτη σαφήνεια και ακρίβεια ότι ο τρόπος μεταβολής του ΒΔ θα πρέπει να είναι αντίστοιχος με τον τρόπο μεταβολής του ΑΔ. Πιστεύουμε ότι εδώ η συσχέτιση των δύο μηκών γίνεται στην πιο πρωτογενή μορφή της, με τρίτο μέρος του αντιληπτικού link σχήματος το κοινό σημείο Δ και καμμιά άλλη αφαιρετική συσχέτιση ως δεσμό των δύο μηκών. Σε αντίθεση με τους προηγούμενους συλλογισμούς των Α1, Α2, Κ5 και Κ9 οι οποίοι κινήθηκαν σε αφαιρετικό επίπεδο θεωρητικών μαθηματικών και συγκεκριμένα στον ενσώματο (Α1) και συμβολικό (Α2, Κ9, Κ5) φορμαλισμό, η μαθήτρια Κ8 σε αυτή την φάση κινείται στο διαισθητικό επίπεδο του λειτουργικού συμβολισμού. (Tall)

Φάση Η: Διαισθητική αναζήτηση ενός άρρητου supremum

Ηχογραφημένο επεισόδιο Η1 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 31:00)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *το ΒΔ είπαμε ότι 2 δεν μπορεί να γίνει* |
| *Κ2* | *το καταλάβαμε αυτό* |
| *Κ4* | *Ναι* |
| *Ε* | *Ωραία όπως το βλέπετε τώρα εκεί έχει φτάσει στο 1,41 και διαρκώς είπαμε μεγαλώνει, αλλά δύο δεν μπορεί να γίνει άρα υπάρχει σίγουρα …..* |
| *Κ2* | *… ένα στοπ* |
| *Ε* | *αυτό το στοπ ψάχνουμε* |
| *Κ2* | *Εγώ νομίζω ότι είναι λάθος που το κάνουμε, πρέπει να βρούμε έναν τύπο* |

Η μαθήτρια Κ2 χρησιμοποιεί την έκφραση «ένα στοπ» για τον αριθμό πάνω από τον οποίο δεν μπορεί να μεγαλώσει το μήκος ΒΔ. Ο ζητούμενος αριθμός αυτή την φορά δεν είναι αντιληπτός μέσα από μία εννοιολογική μεταφορά του απείρου, καθώς δεν διαφαίνεται στις τιμές του λογισμικού κάποιου είδους επανάληψη, η οποία μπορεί να παραπέμπει στην νοητική κατασκευή ενός πέρατος μιας βεβαιωμένα άπειρης διαδικασίας. Όμως η ύπαρξη κάποιου αριθμού ο οποίος θα έχει την ιδιότητα του «στοπ» θεωρείται από τους μαθητές φυσιολογική. Πρόκειται πάλι για μία αντιληπτική δομή ενός μονοπατιού με αρχή και τέλος.

Αυτή τη δυσκολία να εντοπίσουν ένα τέλος σε αυτό το άπειρο μονοπάτι, οι μαθητές θα την υπερβούν μέσω ενός άλλου αντιληπτικού σχήματος όπως φαίνεται στον πιο κάτω διάλογο:

Ηχογραφημένο επεισόδιο Η2 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 38:35)**

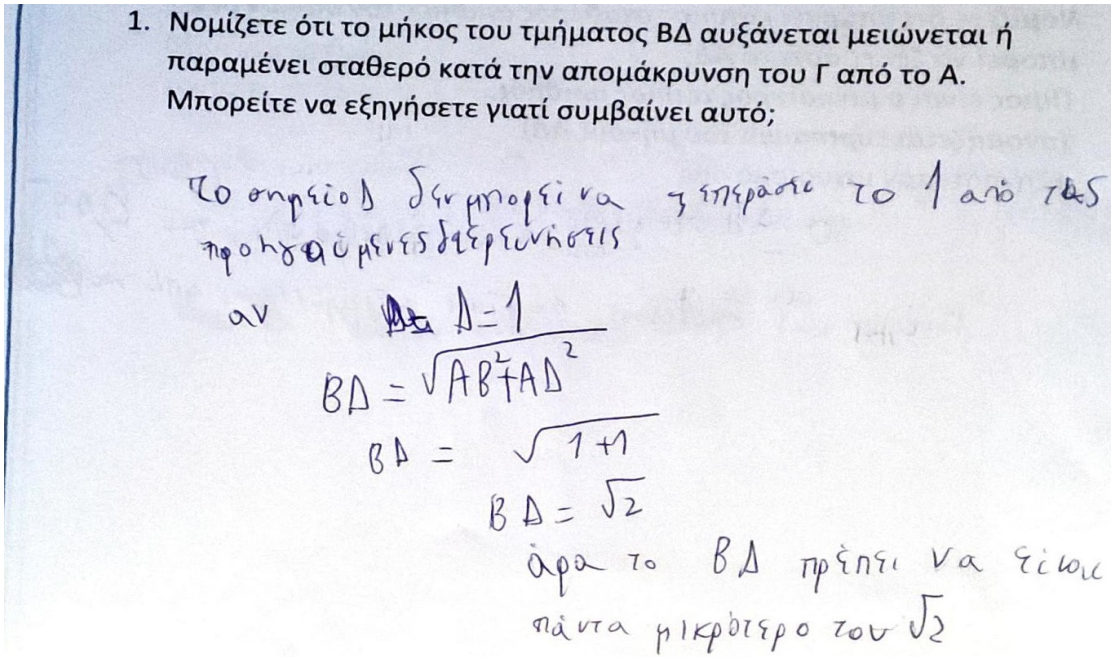
| | |
|---|---|
| *Α2* | *εφόσον είδαμε ότι το Δ δεν μπορεί να ξεπεράσει το σημείο 1, οπότε έβαλα το Δ στο σημείο 1, για να βρούμε μία τιμή όπου δεν θα μπορέσει να ξεπεράσει ούτε το ΒΔ* |
| *Ε* | *λοιπόν είπε ο Α2 ότι αφού το Δ δεν μπορεί να γίνει 1, άρα και το ΒΔ δεν μπορεί να είναι η υποτείνουσα ενός τριγώνου* |
| *Κ2* | *του τριγώνου ΑΒΔ* |
| *Ε* | *με το Δ πού, στο 1 εκεί που δεν μπορεί να πάει, και πόσο βρήκες ότι δεν μπορεί να γίνει τελικά το ΒΔ* |
| *Α2* | *ρίζα δύο* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο Η3 **(αρχείο ήχου 711 – 0109, 26:50)**

| | |
|---|---|
| *Κ10* | *Το ΑΔ θα 'ναι πάντα μικρότερο από το 1 και το 0,9…Αλλά το ΒΑ δεν είναι σταθερό;* |
| *Ε* | *Το ΒΑ είναι σταθερό* |
| *Κ10* | *ΒΑ=1, αλλά θα βγαίνει περίεργο* |
| *Ε* | *Να κάνεις το σχήμα; Και το ΑΔ δεν μπορεί να γίνει 1, είναι μικρότερο από ένα* |
| *Κ10* | *Μπορούμε να βάλουμε έναν τυχαίο αριθμό που να είναι μικρότερος από το ένα Άρα θα κάνουμε πυθαγόρειο και θα βρούμε αυτό (ΒΔ)* |
| *Ε* | *Αυτό όμως είναι μία τιμή που δεν μπορεί να γίνει το ΒΔ ή μια τιμή που μπορεί να γίνει το ΒΔ;* |
| *Κ10* | *Που θα μπορέσει να γίνει* |
| *Ε* | *Εμάς μας νοιάζει τι δεν μπορεί να γίνει το ΑΔ* |
| *Κ7* | *Άρα να βάλουμε το ΑΔ = 1, για να δούμε αν μπορεί το άλλο να γίνει* |

Φύλο εργασίας μαθητή Α2

*Εικόνα 04-Η-1*



1. Νομίζετε ότι το μήκος του τμήματος ΒΔ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

Το σημείο Δ δεν μπορεί να ξεπεράσει το 1 από τις προηγούμενες δραστηριότητες

αν Δ=1

$BΔ = \sqrt{AB^2 + AΔ^2}$

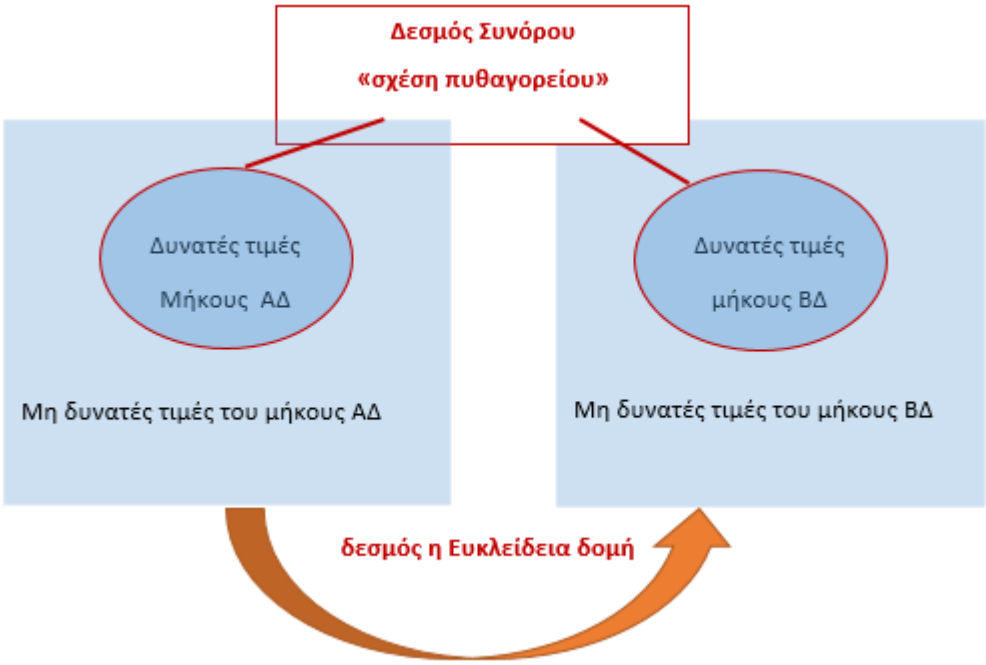
$BΔ = \sqrt{1+1}$

$BΔ = \sqrt{2}$

άρα το ΒΔ πρέπει να είναι πάντα μικρότερο του $\sqrt{2}$

Ο συλλογισμός των μαθητών στηρίζεται σε ένα αντιληπτικό σχήμα δεσμού μεταξύ τριών μηκών ΑΔ, ΑΒ, ΒΔ τα οποία συνδέονται στο αφαιρετικό πλαίσιο της Ευκλείδειας δομής μέσω του πυθαγορείου. Δεν χρησιμοποιεί καμία συμβολική σχέση διάταξης στην διασύνδεση των μηκών, αλλά εντοπίζει με σαφήνεια την τελική συμπεριφορά του μήκους ΒΔ. Κατά την γνώμη μας λειτουργεί σε μία αντιληπτική δομή container στην οποία το ζητούμενο σύνορο είναι ο αριθμός που επαληθεύει την σχέση του πυθαγορείου στο σύνορο μίας άλλης σχετιζόμενης container δομής ( σχήμα 04-Η-1 ), ενώ αφαιρετικά κινείται στο χώρο του ενσώματου και συμβολικού φορμαλισμού κατά Tall.

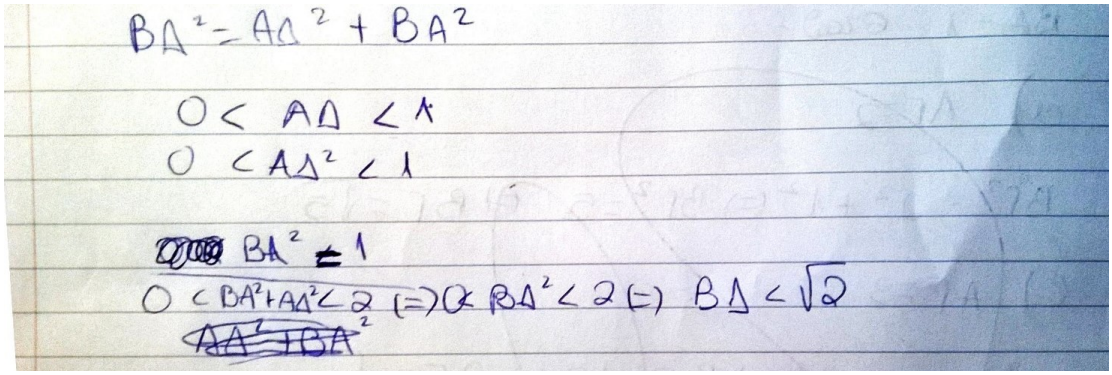
*Σχήμα 04-Η-1*



Δύο πιο πλήρεις απαντήσεις πάλι στο ίδιο πλαίσιο αντιληπτικής δομής βλέπουμε πιο κάτω από τους μαθητές Κ9 και Α1

Φύλλο εργασίας μαθήτριας Κ9

*Εικόνα 04-Η-2*



$BΔ^2 = AΔ^2 + BA^2$

$0 < AΔ < 1$

$0 < AΔ^2 < 1$

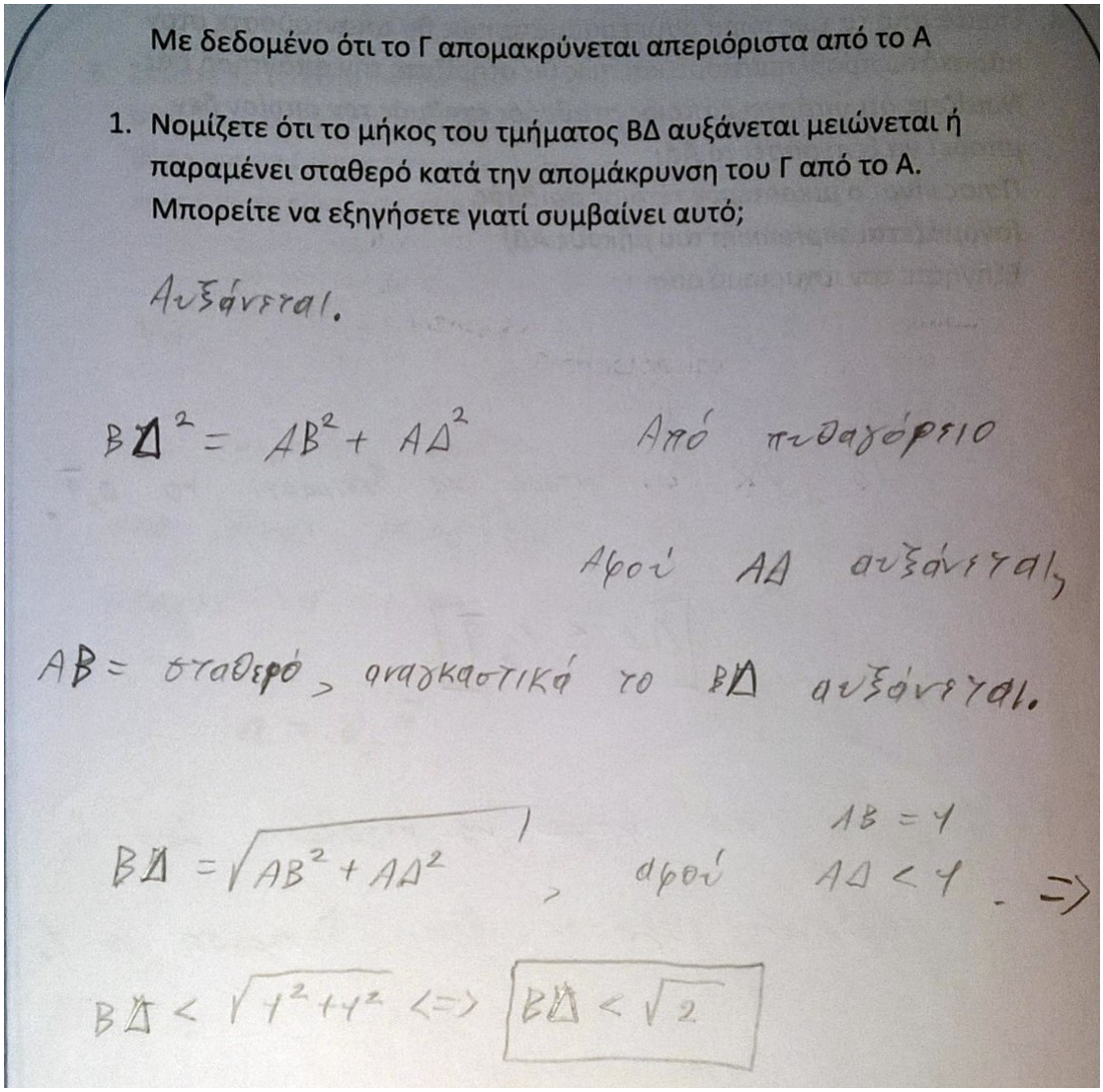
$BA^2 = 1$

$0 < BA^2 + AΔ^2 < 2 \Leftrightarrow BΔ^2 < 2 \Leftrightarrow BΔ < \sqrt{2}$

---

Φύλλο εργασίας μαθητή Α1

*Εικόνα 04-Η-3*



Με δεδομένο ότι το Γ απομακρύνεται απεριόριστα από το Α

1. Νομίζετε ότι το μήκος του τμήματος ΒΔ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

Αυξάνεται.

$BΔ^2 = AB^2 + AΔ^2$ Από πυθαγόρειο

Αφού ΑΔ αυξάνεται,

ΑΒ = σταθερό, αναγκαστικά το ΒΔ αυξάνεται.

$BΔ = \sqrt{AB^2 + AΔ^2}$, αφού $AB = 1$, $AΔ < 1$. $\Rightarrow$

$BΔ < \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow \boxed{BΔ < \sqrt{2}}$

Φάση Θ Το supremum του μήκους ΒΔ και η φύση του αριθμού $\sqrt{2}$

Ηχογραφημένο επεισόδιο Θ1 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 39:40)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *Συμπέρασμα. Βρήκαμε έναν αριθμό που δεν μπορεί να τον ξεπεράσει ο ΒΔ* |
| *Κ2* | *Είναι ο ρίζα δύο, είναι 1,414213562 (διαβάζει την τιμή από τον Η/Υ)* |
| *Ε* | *Σταματάει εκεί αυτός ο αριθμός;* |
| *Κ2* | *Συνεχίζει απλώς δεν χωράει* |
| Ε | Δηλαδή αν εγώ συνεχίσω να απομακρύνω το Γ τι θα γίνει τελικά |
| Κ2 | Δεν θα φτάσει τελικά μέχρι το 1,414213562 |
| Ε | Δεν θα φτάσει; |
| Κ2 | Όχι |
| Ε | θες να δούμε; |
| Κ1 | δε θα ξεπεράσει |
| Ε | αλλά θα μπορεί και να φτάσει εκεί; |
| Α2 | Όχι |
| Κ2 | όχι |
| Κ1 | μέχρι την μικρότερη τιμή που.. |
| Ε | μέχρι πού; |
| Κ1 | μέχρι το 1,414213561 |
| Κ4 | Εκεί |
| Ε | για να το δούμε αυτό; |

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές έχουν εντοπίσει το ελάχιστο άνω φράγμα του μήκους ΑΔ, αλλά χωρίς να λαμβάνουν υπόψη ούτε την αρρητότητα του συγκεκριμένου αριθμού, ούτε την πυκνή δομή των ρητών όπως συζητήθηκε στις προηγούμενες διερευνήσεις αλλά ούτε και την διαρκή αύξηση του μήκους ΒΔ όπως πριν λίγο έχουν διαπιστώσει. Αυτά φαίνονται τόσο από το ότι αντιμετωπίζουν τον $\sqrt{2}$ σαν έναν ρητό, όπως τον δίνει η οθόνη του υπολογιστή, αλλά και από το ότι μιλούν για το τέλος μιας άπειρης διαδικασίας κάνοντας βήματα προς τα πίσω στηριζόμενοι σε μία δομή διαδοχικότητας που πριν είχαν απορρίψει.

Εξάλλου, όπως και στην εύρεση του supremum του μήκους ΑΔ, όπου οι μαθητές σε πρώτη φάση κατασκεύασαν έναν αριθμό ( 0,999…) χωρίς να έχουν απόλυτη επίγνωση της φύσης του και του ρόλου του ως πέρας μιας άπειρης επαναλαμβανόμενης διαδικασίας, ( ακολουθία 0,9 – 0,99 – 0,999 – … ), έτσι και εδώ, φαίνεται ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ένας αριθμός που μπορεί εντός ενός διαισθητικού πλαισίου να καλύπτει τις προϋποθέσεις ενός συνόρου που θα λειτουργήσει ως πέρας μίας άπειρης αλλά μη επαναλαμβανόμενης διαδικασίας (δεκαδικό ανάπτυγμα), χωρίς όμως να είναι αντιληπτή ούτε η φύση του αλλά ούτε και η λειτουργία του εντός της συγκεκριμένης διαδικασίας.

Παρατηρήσαμε δύο στιγμές όπου μαθητές διαφορετικών ομάδων σε διαφορετικές φάσεις των διερευνήσεών τους κινούμενοι σε «άπειρα μονοπάτια» και κάνοντας μία επιτυχή μεταφορά του απείρου προσέγγισαν τον κοινό ρόλο των δύο αριθμών ως πέρατα ατέρμονων διαδικασιών.

Στην δεύτερη ομάδα και σε σημείο όπου οι μαθητές ακόμα ψάχνουν να βρουν ποιος αριθμός είναι το supΒΔ η μαθήτρια Κ6 κάνει την εξής παρατήρηση:

Ηχογραφημένο επεισόδιο Θ2 **(αρχείο ήχου 711 – 0109, 22:00)**

| | |
|---|---|
| Ε | Εδώ η Κ6 θέλει να συνεχίσει να το μεγαλώνει αυτό ( εννοεί το ΑΓ) |
| Κ6 | Θέλω να δώ τι θα γίνει όταν φτάσει το ΑΔ στο 0.9999… |

Η μαθήτρια δεν θα ολοκληρώσει την προσπάθειά της καθώς σε πρώτη φάση σκοντάφτει στον αργό ρυθμό προσέγγισης του ΑΔ στο 1, ενώ σε δεύτερη φάση είναι σίγουρο ότι δεν θα αναγνωρίσει το σχηματιζόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$, καθώς δεν έχει ακόμα εντοπίσει μέσω άλλου τρόπου το supΒΔ ως $\sqrt{2}$.

Στην πρώτη ομάδα όμως ο μαθητής Α1, έχοντας εντοπίσει το supΒΔ ως τον άρρητο $\sqrt{2}$ συσχετίζει τις δύο άπειρες διαδικασίες καθώς και τους δύο αριθμούς 0,999… και $\sqrt{2}$ που λειτουργούν ως τα δύο πέρατά τους. Τα συνδέει ως πέρατα άπειρων διαδικασιών με την διαφορά ότι το πρώτο είναι γνωστό και ίσο με ένα, ενώ το άλλο είναι τελικά «μη προσεγγίσιμο» (πίνακας 04-Θ-1)

Ηχογραφημένο επεισόδιο Θ3 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 40:40)**

| | |
|---|---|
| *Α1* | *είναι όπως λέγαμε και ότι το 0.9… είναι 1 έτσι και εδώ; έτσι και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ποια είναι η ρίζα δύο* |
| *Ε* | *πόσα ψηφία χρειαζόμαστε για να την προσεγγίσουμε* |
| *Α1* | *Άπειρα* |
| *Κ2* | *Πολλά* |
| *Ε* | *πολλά΄; εκεί πόσα θες ; Πολλά εννιάρια θες; (δείχνει το 0,999…)* |
| *Α1* | *δεν έχουμε αρκετά* |
| *Κ2* | *Άπειρα* |

*Πίνακας 04-Θ-1*

| **πεδίο αφετηρίας (Περατωμένες διαδικασίες)** | **πεδίο στόχος μη περατωμένες διαδικασίες** | |
|---|---|---|
| | **μήκος ΑΔ** | **μήκος ΒΔ** |
| Η αρχική κατάσταση | 0 | 1 |
| κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο | 0,9 | 1,4 |
| Από δεδομένη ενδιάμεση στην διάδοχη κατάσταση | 0,99999 | 1,41421 |
| Ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επόμενη επανάληψη | 0,999999 | 1,414213 |
| Τελική προκύπτουσα κατάσταση **Πέρας διαδικασίας** | **Απειροστό βήμα** $0,\bar{9}=1$ | $\sqrt{2}$ **=1,414213… ;** |

Στον πιο πάνω διάλογο φαίνεται πως ο μαθητής Α1 δημιουργεί μέσω της άπειρης δεκαδικής μορφής και μίας άπειρης διαδικασίας προσέγγισης, έναν δεσμό για δύο αριθμούς με διαφορετική φύση. Για τον φυσικό αριθμό 1 και για τον άρρητο $\sqrt{2}$. Πρόκειται για έναν βασικό στόχο της διδακτικής παρέμβασης που έχει ως απώτερο διδακτικό όφελος μία νέα οπτική γωνία για την έννοια αριθμός, ως πέρας μίας άπειρης διαδικασίας. Από την συνέχεια του διαλόγου, και τα δύο επόμενα ηχογραφημένα επεισόδια, σε πρώτη φάση, δεν φαίνεται ο δεσμός αυτός να μεταφέρεται άμεσα στους υπόλοιπους μαθητές. Φαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους άρρητους αριθμούς ως ατέρμονες διαδικασίες και όχι ως τα πέρατα αυτών των διαδικασιών Ισχυρίζονται πως δεν υπάρχουν είτε διότι έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία και δεν μπορούμε να τους γράψουμε είτε διότι είναι αριθμοί που συνεχίζουν για πάντα. Δεν έχουν ακόμα την κοινή οπτική ρητών και άρρητων ως πέρατα άπειρων διαδικασιών.

Ηχογραφημένος διάλογος Θ4 **(αρχείο ήχου 711 – 0109, 30:15)**

| | |
|---|---|
| *Κ10* | *Άρα ρίζα δύο είναι το ΒΔ, αλλά αυτή είναι μία τιμή που δεν μπορεί να πάρει γιατί εδώ είναι το ένα.* |
| *Ε* | *Μάλιστα αυτή είναι μία τιμή που δεν θα μπορέσει να πάρει το ΒΔ, η ρίζα του 2* |
| *Κ6* | *Και δεν υπάρχει* |
| *Κ7* | *Υπάρχει* |
| *Ε* | *Τι θα πεί δεν υπάρχει;* |
| *Κ6* | *Δεν είναι ένας στρογγυλός αριθμός* |
| *Κ10* | *Είναι ένας αριθμός που θα συνεχίζει πάντα* |

Ηχογραφημένο επεισόδιο Θ5 **(αρχείο ήχου 711 – 0104, 41:25)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *άρα αν τελικά σας έλεγα ποιο είναι το sup του ΑΔ τι θα μου λέγατε* |
| *Κ2* | *το ένα κόμμα κάτι* |
| *Κ1* | *η ρίζα δύο* |
| *Ε* | *Τι αριθμός είναι αυτός;* |
| *Κ2* | *ο 1,4142…* |
| *Ε* | *τι αριθμός είναι αυτός;* |
| *Κ1* | *Άρρητος* |
| Ε | τι με ρώτησες πριν, αν θέλω να μου πεις έναν συγκεκριμένο αριθμό ε; |
| Κ1 | ναι |
| Ε | είναι συγκεκριμένος αριθμός αυτός; |
| Κ1 | όχι γιατί έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία |
| Ε | δε είναι συγκεκριμένος αριθμός ο ρίζα δύο ; δηλαδή τόσο καιρό που κάνεις πράξεις με το ρίζα δύο δεν είναι συγκεκριμένος αριθμός; |
| Κ1 | είναι απλώς έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία |
| Ε | είναι συγκεκριμένος αριθμός ο ρίζα δύο; |
| Κ2 | Όχι |
| Κ1 | Είναι, έχει, απλώς δεν μπορούμε να τον γράψουμε γιατί είναι άπειρα τα ψηφία |
| Κ2 | είναι συγκεκριμένος αλλά είναι και άρρητος |
| Ε | είναι συγκεκριμένος άρρητος απλά εμείς δεν μπορούμε να τον γράψουμε με …. |
| Κ1 | αριθμούς, γιατί είναι άπειροι |

Φάση Ι : Η δομή και της φύση των πραγματικών μέσω της νέας έννοιας του supremum.

Επιχειρώντας να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις που σχημάτισαν οι μαθητές τόσο σχετικά με την νέα έννοια, όσο και σχετικά με την πυκνή δομή του συνόλου των αριθμών που γνωρίζουν, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήματα ανεξαρτητοποιημένα από την δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με αφορμή τα οποία προέκυψαν κρίσιμοι διάλογοι και ερωτήματα. Αφού ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν ένα μοτίβο – ακολουθία – αριθμών η οποία θα είχε ως ελάχιστο άνω φράγμα τον αριθμό ένα (και σχεδόν όλοι έδωσαν ως απάντηση την ακολουθία : 0,9 – 0,99 – 0,999 – … ), ακολούθησε ο πιο κάτω διάλογος

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ι1 **(αρχείο ήχου 711 – 0107, 09 :50)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *αν κάποιος θέλει να πλησιάσει κοντά στο ένα, πατώντας πάνω σε αυτό το μοτίβο, (0,9 – 0,99 – 0,999 – … ) πόσο κοντά στο ένα μπορεί να φτάσει;* |
| *Κ2* | *τόσο ώστε ο διαδοχικός αριθμός να είναι το ένα.* |
| *Ε* | *υπάρχει διαδοχικός αριθμός;* |
| *Α2* | *όχι δεν υπάρχει* |
| *Ε* | *δεν υπάρχει διαδοχικός αριθμός, πόσο κοντά όμως μπορεί να φτάσει* |
| *Κ2* | *πάρα πολύ κοντά, δηλαδή….* |
| *Κ1* | *0,999….* |
| *Ε* | *αυτό που μου λες είναι ότι πατάς πάνω. Πως μπορείς να απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα πόσο κοντά μπορείς να φτάσεις.* |
| *Α2* | *πολύ κοντά αλλά πάλι θα υπάρχει ένα αριθμός που μπορεί να ξεπεράσει* |
| *Ε* | *αυτό τι θα πει; 'όσο κοντά και αν φτάσεις….* |
| *Α2* | *υπάρχει και άλλο* |
| *Ε* | *μπορείς να φτάσεις….* |
| *Α2* | *ακόμη πιο κοντά* |

Παρατηρούμε την έννοια του «οσοδήποτε κοντά» στο σύνολο των ρητών, αρκετά καλά δομημένη στο μαθηματικό οικοδόμημα του μαθητή Α2, αλλά όχι και στο αντίστοιχο οικοδόμημα της μαθήτριας Κ5. Κατ' επέκταση μάλλον πρέπει να υποθέσουμε ότι η έννοια του supremum δεν είναι παγιοποιημένη στην Κ5, ενώ πιθανότατα είναι στον Α2

Στη συνέχεια και αφού οι μαθητές σχετικά εύκολα φτιάχνουν ακολουθίες που έχουν για supremum τους ρητούς $1/2$ και $1/3$ τους ζητείται να κατασκευάσουν ακολουθία με supremum τον άρρητο $\sqrt{2}$. Εδώ ακολουθούν οι εξής διάλογοι:

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ι2 **(αρχείο ήχου 711 – 0107, 22:45)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *Εσείς είδατε το ρίζα δύο σαν sup μίας πράσινης ποσότητας (μήκος ΒΔ)* |
| *Κ1* | *Ναι* |
| *Ε* | *Μπορεί να είναι το sup ενός μοτίβου; αυτός είναι ο ρίζα δύο εδώ δείτε τον* |
| *Κ1* | *Όμως όποιο sup έχουμε βγάλει είναι ρητός* |

Αν προσπαθήσουμε να μεταφράσουμε αυτόν τον διάλογο βλέποντας πίσω από τις λέξεις η μαθήτρια λέει ότι για κάθε ρητό πράγματι υπάρχει μία ακολουθία με supremum τον ίδιο, και μάλιστα είναι σαφώς ορισμένη, αφού πάντα τελικά προκύπτει μέσα από μία επαναλαμβανόμενη άπειρη δεκαδική μορφή, ενώ παράλληλα υπάρχει ένας εύχρηστος

αλγόριθμος ό οποίος επιβεβαιώνει αλγεβρικά την κάθε επιλογή. Επιχειρώντας να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με για έναν άρρητο αριθμό και οι δύο αυτές δυνατότητες καταργούνται. Δεν υπάρχει τρόπος να δούμε τον άρρητο μέσω μιας άπειρης δεκαδικής μορφής, ούτε υπάρχει τρόπος επιβεβαίωσης της ορθότητας της ακολουθίας που θα επιλέξουμε. Το ερώτημα όμως αποσκοπεί στο να προσδιορίσουν οι μαθητές τον άρρητο ως έναν αριθμό που προσεγγίζεται από μία άπειρη διαδικασία η οποία είναι όμως μη περιοδική και περιγράφεται από το δεκαδικό του ανάπτυγμα. Συνεχίζεται λοιπόν ο διάλογος έτσι ώστε η μαθήτρια να επαναφέρει στη σκέψη της τον τρόπο με τον οποίο λειτούργησε στο γεωμετρικό πεδίο, όπου η τετραγωνική ρίζα του δύο ήταν ένα σύνορο σε ένα container αντιληπτικό σχήμα, ή ένα τέλος σε ένα σχήμα άπειρου μονοπατιού, ώστε να απαλλαγεί από την ανάγκη αλγοριθμικής επιβεβαίωσης και να αναζητήσει απλώς τα σωστά βήματα του μονοπατιού κατά αντιστοιχία με αυτά που ακολουθεί προσεγγίζοντας έναν ρητό.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ι3 **(αρχείο ήχου 711 – 0107, 23:20)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *πάμε λοιπόν τώρα να δούμε αν μπορούμε να έχουμε και ένα μοτίβο για τον άρρητο* |
| *Κ1* | *δεν το βγάλαμε με μοτίβο* |
| *Ε* | *ωραία δεν το έβγαλες με μοτίβο, το έβγαλες γεωμετρικά, θα μπορούσες βλέποντας τον κόκκινο αριθμό να φανταστείς πως θα μπορούσε να είναι ένα μοτίβο;* |
| *Κ1* | *θα βγει απλώς δεν θα είναι περιοδικός* |
| *Ε* | *απλώς δεν θα είναι περιοδικός μπορείς να μου το πεις για το ρίζα δύο* |
| *Κ1* | *αυτό; Το ρίζα δυο δηλαδή* |
| *Ε* | *το μοτίβο, θα μπορούσες να μου πεις ένα μοτίβο που θα πηγαίνει προς τα εκεί.* |
| *Κ1* | *1,544722 (μάλλον βλέπει κάποιον άλλον αριθμό στην οθόνη του Η/Υ* |
| | *Όχι, 1,3495 (είναι η τιμή που δείχνει το αρχείο του Η/Υ για το μήκος ΒΔ για κάποια θέση του Γ)* |
| *Ε* | *κάτσε αυτό που μου λες τώρα είναι όλος ο αριθμός* |
| *Κ1* | *ναι* |
| *Ε* | *Εγω θέλω να μου πεις ένα μοτίβο σου ξαναλέω* |
| *Κ1* | *ωραία, όχι περιοδικό μοτίβο* |
| *Ε* | *δεν μας ενδιαφέρει αν θα είναι περιοδικό* |
| *Κ1* | *α ! Άρα κάθε φορά θα προσθέτουμε ένα νούμερο* |
| *Ε* | *οκ για πες λοιπόν* |
| *Κ1* | *1,3 - 1.34 -* |
| *Α1* | *κύριε συγγνώμη ένα μοτίβο εξορισμού δεν είναι και περιοδικό;* |
| *Ε* | *ναι σε αυτό μπορεί να έχεις δίκιο για την λέξη μοτίβο, θα σού έλεγα λοιπόν ας μην είναι ένα μοτίβο περιοδικό…* |
| *Κ1* | *μία συνέχεια - μία ακολουθία* |
| *Ε* | *...ας είναι μία ακολουθία αριθμών.* |
| *Κ1* | *1.3 - 1.34 - 1.349 - 1.3495 - και ούτω κάθε εξής χωρίς όμως να επαναλαμβάνεται* |

Σε αυτό το σημείο ο εκπαιδευτικός μεταφέρει το σημείο Γ δεξιότερα, το μήκος ΑΔ πλησιάζει πιο κοντά στο ένα και το μήκος ΒΔ ακόμα πιο κοντά στον $\sqrt{2}$, με αποτέλεσμα η στρογγυλοποιημένη τιμή του υπολογιστή να εμφανίζει πρώτα στην σειρά ψηφία τα 1,41…. Με αυτόν τον τρόπο η μαθήτρια διαπιστώνει ότι ακολουθώντας το προηγούμενο μονοπάτι δεν θα φτάσει ποτέ στον ζητούμενο αριθμό και ακολουθεί νέος διάλογος στον οποίον μπορούμε να διαπιστώσουμε την βεβαιότητα της μαθήτριας και τον «δεσμό» που έχει

οικοδομήσει ανάμεσα σε όλους τους πραγματικούς μέσω των δεκαδικών τους αναπτυγμάτων τους :

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ι4 **(αρχείο ήχου 711 – 0107, 25:35)**

| | |
|---|---|
| *Κ1* | *εγώ σας είπα να βρούμε την ρίζα δύο , Κ2 κάνε τα μαγικά σου* |
| *Ε* | *α! να βρούμε την ρίζα δύο λοιπόν . Βρες την* |
| *Κ2* | *πώς να την βρω την ρίζα δύο* |
| *Κ1* | *ωραία θα την βρω εγώ την ρίζα δύο έχει κομπιουτεράκι αυτό εδώ* |
| *Ε* | *2 λοιπόν ρίζα;* |
| *Κ1* | *αυτό ορίστε* |
| *Ε* | *αυτό;* |
| *Κ1* | *Ναι* |
| *Ε* | *πες το μου λοιπόν* |
| *Κ1* | *1,4 - 1,41 - 1,414, κλπ* |
| *Ε* | *και συνεχίζει* |
| *Κ1* | *Ναι* |
| *Ε* | *αν λοιπόν θέλεις να πλησιάσεις στον αριθμό ρίζα δύο, πόσο κοντά μπορείς να πας μέσω της ακολουθίας αυτής εδώ* |
| *Κ1* | *οσοδήποτε κοντά χωρίς να επαναλαμβάνεται* |
| *Ε* | *χωρίς να επαναλαμβάνεται τι* |
| *Κ1* | *το μοτίβο , να μην είναι συγκεκριμένο δηλαδή. Αυτό να μην ξαναγίνεται όπως είναι* |

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ίσως μπορούμε να διακρίνουμε μία διαφορετική μεταφορά του απείρου (Πίνακας 04-Ι-1)όπως στον παρακάτω πίνακα, όπου η επαναλαμβανόμενη διαδικασία αφορά στα βήματα που καθορίζουν το πλήθος των δεκαδικών, αλλά χωρίς αυτή η επανάληψη εμφανίζεται και ως περιοδικότητα στα ψηφία, όπως στους ρητούς.

*Πίνακας 04-Ι-1*

| **πεδίο αφετηρίας (Περατωμένες διαδικασίες)** | **πεδίο στόχος - μη περατωμένες διαδικασίες** | |
|---|---|---|
| | **βηματισμός προς το $\sqrt{2}$** | **μήκη ΒΔ** |
| Η αρχική κατάσταση | Αρχική θέση | 1 |
| κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο | Το πρώτο βήμα | 1,4 |
| Από ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η διάδοχη | 5ο βήμα | 1,41421 |
| Ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη | 6ο βήμα | 1,414213 |
| Τελική κατάσταση **Πέρας διαδικασίας** | **Απειροστό βήμα (πληθικότητα φυσικών)** | $\sqrt{2}$ |

Ένα αντίστοιχο είδος μεταφοράς μπορούμε να υποθέσουμε ότι επιχειρήθηκε( χωρίς όμως επιτυχία ) και στο πιο κάτω επεισόδιο όπου η μαθήτρια Κ6 προσπαθεί να βρει το sup του ΒΔ και προς στιγμή πάει να συσχετίσει την ατέρμονη διαδικασία προσέγγισης του ΑΔ με το πλήθος των ψηφίων που χρειάζονται για την προσέγγιση του ΒΔ.

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ι5 **(αρχείο ήχου 711 – 0109, 23:20)**

| | |
|---|---|
| Κ6 | Να κάνω μία ερώτηση; Όταν σταματήσει να μεγαλώνει η ΑΔ |
| Ε | Θα σταματήσει είπαμε να μεγαλώνει η ΑΔ; |
| Κ6 | Όχι, απλώς… |
| Ε | Από αυτό τι συμπεραίνεις; Από το ότι δεν θα σταματήσει να μεγαλώνει η ΑΔ; |
| Κ6 | Ότι είναι απεριόριστα τα ψηφία τα οποία θα….. Ότι η τιμή που θα παίρνει η ΑΔ είναι άπειρη, είναι μεγάλη , δεν σταματάει κάπου.. |
| Ε | Είναι άπειρη η τιμή του ΑΔ, αφού είπαμε σταματάει πριν το ένα |
| Κ6 | Σωστά. Τότε…. |

Αντίστοιχη επιτυχημένη προσέγγιση παρατηρείται και για τον άρρητο 0,1212212221…

Ηχογραφημένο επεισόδιο Ι6 **(αρχείο ήχου 711 – 0107, 28:50)**

| | |
|---|---|
| *Ε* | *μπορώ λοιπόν τον αριθμό αυτόν εκεί που είναι ένας άρρητος να τον πλησιάσω με μία ακολουθία ρητών και να πώ ότι αυτός είναι sup των αριθμών αυτών; μπορώ να φτιάξω μία ακολουθία ρητών που να έχει αυτόν τον αριθμό για sup* |
| *Κ1* | *τον άρρητο να έχει για sup;* |
| *Ε* | *Ναι* |
| *Κ1* | *Όχι. Ωραία να το πάρουμε από την αρχή. Βρήκαμε μοτίβα για ρητούς και άρρητους* |
| *Ε* | *Βρήκαμε* |
| *Κ1* | *άρα μπορούμε να βρούμε* |
| *Ε* | *άρα και για αυτό μπορούμε να βρούμε. Ποιο θα είναι;* |
| *Α2* | *α!!! 0,1 - 0,12 - 0,121* |
| *Ε* | *για λέγε Α2* |
| *Α2* | *0,1 - 0,12 - 0,121 - 0,1212 - 0,12122 - ….* |

## Κεφάλαιο Ε – Τα συμπεράσματα της έρευνας

Στην παρούσα ερευνητική εργασία, καταγράφεται μία πειραματική διδασκαλία της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών της Α' Λυκείου, μέσα από δομές Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Μέσω της συγκεκριμένης διδακτικής παρέμβασης :

I. Διερευνήθηκε η καταλληλότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας,
   a) αφενός ως ένα περιβάλλον αναπαράστασης ικανό προκαλέσει στους μαθητές την λειτουργία βασικών διαισθητικών αντιληπτικών δομών (εικονοσχήματα) και την νοητική κατασκευή κρίσιμων δομικών εννοιών της πραγματικής ευθείας
   b) και αφετέρου ένα πρωτογενές αξιωματικό πλαίσιο ικανό να τους βοηθήσει να στηρίξουν ή να απορρίψουν υποθέσεις και ισχυρισμούς κατά την πορεία των ανωτέρω νοητικών κατασκευών.

II. Αναζητήθηκε η λειτουργικότητα της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου, όπως προτείνεται από τους Lakoff & Nunez (2000) στην διαισθητική συμπερασματολογία των μαθητών πάνω σε ερωτήματα και υποθέσεις που αφορούν σε ατέρμονες μαθηματικές διαδικασίες

III. Εξετάστηκε η ενεργοποίηση δύο βασικών αντιληπτικών δομών χωρικών σχέσεων: του container σχήματος, και του σχήματος source path goal, στην διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος

IV. Διερευνήθηκε η αξιοποίηση της διαισθητικής διδασκαλίας της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος ως μέσο για ανάδυση και επίλυση παρανοήσεων σχετικών με την δομή των πραγματικών.

V. Ελέγχθηκε η τελική διαισθητική αποδοχή της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, μέσω Ευκλείδειων δομών ως εργαλείο αναπροσαρμογής των αντιλήψεων των μαθητών για έννοιες όπως η διαδοχικότητα, η πυκνότητα, η πληρότητα, το άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα, ο ρητός και ο άρρητος αριθμός.

Όπως τονίστηκε και στην παράγραφο «03-Μεθοδολογία της έρευνας», τα συμπεράσματα αφορούν μία συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης. Δεν προκύπτουν από δείγματα ή ερωτηματολόγια που παρέχουν ασφαλή δυνατότητα γενίκευσης. Όμως σε κάθε περίπτωση μπορούν να στοιχειοθετήσουν ισχυρές υποθέσεις ώστε να αποτελέσουν μία βάση για έρευνα σε ευρύτερη κλίμακα. Συμπερασματικά λοιπόν μέσα από την συγκεκριμένη έρευνα μπορούμε να καταλήξουμε στους εξής ισχυρισμούς που αφορούν στην δεδομένη μελέτη περίπτωσης:

*Η γνωστική οικοδόμηση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, μέσα από το περιβάλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να ενεργοποιήσει αντιληπτικές ικανότητες και συμπερασματολογικά μοτίβα διαισθητικής προέλευσης, ικανά να ωθήσουν τους μαθητές με βασικές γνώσεις, σε εύστοχες και διδακτικά εκμεταλλεύσιμες υποθέσεις σχετικές με τις απαιτήσεις της νέας έννοιας.*

Αναλυτικότερα, στην συγκεκριμένη έρευνα διαπιστώθηκε ότι το Ευκλείδειο περιβάλλον και η δοσμένη Γεωμετρική κατασκευή ως μέσα εισαγωγής της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος:

- Παρείχαν στους μαθητές την δυνατότητα να συσχετίσουν διαισθητικά ποσότητες με ιδιάζουσες συμπεριφορές (απειρίζουσες ή αύξουσες και φραγμένες) και μέσω των συμπερασματολογικών μοτίβων του βασικού αντιληπτικού σχήματος του δεσμού («link») να προχωρήσουν σε συμπεράσματα και υποθέσεις από την μία στην άλλη διασυνδεδεμένη έννοια. Αναλυτικά:
    - Οι μαθητές επιχειρηματολογούν στηριζόμενοι σε ένα σχήμα δεσμού ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ «όσο κινείται το ένα, κινείται και το άλλο» προκειμένου να υποστηρίξουν την αέναη κίνηση του σημείου Δ. Το τρίτο μέρος αυτής της συσχέτισης είναι είτε μία «χαλαρή γεωμετρική ερμηνεία» ( «όσο μεγαλώνει η πλευρά μεγαλώνει και η γωνία, και αντίστροφα») είτε μία συλλογιστική αμιγώς «απεικονιστικής προέλευσης». (Ηχ/να επεισόδια: Α3, Β4, Β5, Β6, Β7,)
    - Μέσω μίας αντίστοιχης "link" δομής (με τρίτο στοιχείο – δεσμό – τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ή τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξειών γωνιών) οι μαθητές συσχετίζουν το σύνορο των επιτρεπτών θέσεων του σημείου Δ με το σύνορο των επιτρεπτών τιμών της γωνίας ΑΒΔ, και το σύνορο των επιτρεπτών τιμών για τα μήκη ΑΔ, και ΒΔ, νοηματοδοτώντας με αυτόν τον τρόπο τις θέσεις όπου θα αναζητήσουν τα σχετικά supremum, πάνω στην ευθεία. (Ηχ/να επεισόδια:Γ1, Γ2, Γ3, Δ1, Δ2, Ζ1, Ζ2, Η1, Θ2, Θ3, Στιγμιότυπο: 04-Γ-1, Εικόνες : 04-Δ-2, 04-Δ-3, 04-Δ-4)

- Ενεργοποίησαν στους μαθητές τον βασικό μηχανισμό, χωρικής αντίληψης, που εκφράζεται μέσω του «container» σχήματος, προς θεωρητική επίλυση προβλημάτων διάταξης και φραγμένων ποσοτήτων. Αναλυτικά, μέσω των θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της έννοιας της διάταξης, ορίζουν τρείς ολικές δομές «container» της μορφής εσωτερικό – εξωτερικό – σύνορο.
    - Μία δομή για τις τιμές της γωνίας ΑΒΔ, «η γωνία ΑΒΔ δεν μπορεί να γίνει 45 μοίρες» Οι μαθητές αξιοποιώντας την Ευκλείδεια δομή ορίζουν ως σύνορο των τιμών της γωνίας ΑΒΔ τις 45 μοίρες, και ταυτόχρονα συνθέτουν μία σαφή δομή container με εξωτερικό τις γωνίες πάνω από 45 μοίρες και εσωτερικό τις γωνίες κάτω από 45 μοίρες. (Ηχ/να επεισόδια: Β4, Β5, Β7, Γ1, Στιγμιότυπο: 04-Γ-1)
    - Μία δομή για τις τιμές του μήκους ΑΔ, «το μήκος ΑΔ δεν μπορεί να γίνει ποτέ ίσο με ένα». Αξιοποιώντας το εργαλείο της εφαπτομένης – όχι σαφώς ως συνάρτηση – ή το εργαλείο της Ευκλείδειας δομής οι μαθητές οριοθετούν το μήκος ΑΔ εντός μία περιοχής με σύνορο τον αριθμό 1. Έτσι συνθέτουν νοητικά μία δομή container με εσωτερικό όλες τις τιμές που είναι μικρότερες από την μονάδα, εξωτερικό όλες τις τιμές που είναι μεγαλύτερες την μονάδα και σύνορο την μονάδα. (Ηχ/να επεισόδια: Γ1, Γ2, Γ3, Δ1, Δ2, Στιγμιότυπο: 04-Γ-1, Εικόνες: 04-Γ-1: 04-Δ-2, 04-Δ-3, 04-Δ-4)
    - Μία για τις τιμές του μήκους ΒΔ , αφού αρχικώς «το ΒΔ δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο ή ίσο του δύο» ενώ στη συνέχεια με πιο σαφή τρόπο: «το ΒΔ είναι πάντα μικρότερο της τετραγωνικής ρίζας του δύο». Εδώ με Ευκλείδειες δομές αλλά και χρήση αλγεβρικών εκφράσεων – έκφραση πυθαγορείου θεωρήματος – οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως σύνορο της ποσότητας ΒΔ την τιμή της τετραγωνικής ρίζας του δύο, και αντίστοιχα συνθέτουν την σχετική container δομή.(Ηχογραφημένα επεισόδια: Ζ1, Ζ2, Η1, Η2, Η3, Εικόνες : 04-Ζ-1, 04-Ζ-2, 04-Ζ-3, 04-Η-1, 04-Η-2, 04-Η-3 )

- Ενεργοποίησαν στους μαθητές τον βασικό μηχανισμό, χωρικής αντίληψης που εκφράζεται μέσω του «source – path – goal» σχήματος, προς την δημιουργία υποθέσεων για την δομή των ρητών επί της πραγματικής ευθείας και ειδικότερα σε ζητήματα που σχετίζονται με την πυκνότητα. Αναλυτικότερα:
    - Οι μαθητές συνθέτουν ακολουθίες ρητών οι οποίες πλησιάζουν όλο και πιο κοντά προς τα υποτιθέμενα σύνορα που είναι η τιμή των 45 μοιρών (ακολουθία 44 – 44,9 – 44,99 – 44,999 – …) και η τιμή της μονάδας (ακολουθία 0,9 – 0,99 – 0,999 – …), ορίζοντας νοητά μονοπάτια με αρχικώς ασαφή πέρατα, τα οποία όμως νοηματοδοτούν την έννοια του ζητούμενου supremum. (Ηχ/να επεισόδια: Δ1, Δ2, Ε1, Ε2, Εικόνες: 04-Δ-2, 04-Δ-3, 04-Δ-4, 04-Ε-1, 04-Ε-2, 04-Ε-3, 04-Ε-4, 04-Ε-5)
    - Αντίστροφα με νοηματοδοτημένο το supremum μίας ποσότητας, και δεδομένη την δεκαδική του αναπαράσταση, οι μαθητές συνθέτουν ακολουθίες ρητών που πλησιάζουν όλο και πιο κοντά στο συγκεκριμένο ελάχιστο άνω φράγμα.(Ηχογραφημένα επεισόδια Θ3, Ι2, Ι3, Ι4)

- Επέτρεψαν στους μαθητές να κάνουν εννοιολογικές μεταφορές, ώστε να διαχειριστούν διαισθητικά και πολλές φορές με επιτυχία τα ερωτήματα που συσχετίζονταν με το πέρας ατέρμονων διαδικασιών, αλλά και γενικότερα με τις έννοιες του απείρου και του απειροστού
    - Οι μαθητές αφού συνθέσουν την ακολουθία 0,9 – 0,99 – 0,999 – …. Προκειμένου να πλησιάσουν το σύνορο του container σχήματος που έχουν κατασκευάσει αλλά και το τέλος του μονοπατιού που αυτή ορίζει, ορίζουν ως πέρας της τον περιοδικό αριθμό $0,\overline{9}$. Ο συγκεκριμένος αριθμός στο νοητικό οικοδόμημα των μαθητών όπως φαίνεται και στη συνέχεια, δεν είναι η μονάδα. Είναι ένα νέο «δικό τους» δημιούργημα που ως οντότητα έχει τα χαρακτηριστικά του πέρατος μιας άπειρης διαδικασίας που διαρκώς αυξάνεται παραμένοντας μικρότερη της μονάδας. Έτσι πιθανολογούν ότι είναι «ο προηγούμενος» της μονάδας. (Ηχ/να επεισόδια: Δ1, Δ2, Εικόνες: 04-Δ-2, 04-Δ-3, 04-Δ-4)
    - Τα συμπερασματολογικά μοτίβα του σχήματος όψης, εφαρμοσμένα στην βασική μεταφοράς του απείρου (βάση των οποίων το πέρας κάθε διαδικασίας έπεται κάθε βήματος που εντάσσεται μέσα σε αυτήν , ενώ μετά από αυτό το πέρας δεν υπάρχει τίποτα από την συγκεκριμένη διαδικασία), οδηγούν τους μαθητές στην αναγκαστική διαισθητική αποδοχή ότι ο αριθμός $0,\overline{9}$ δεν μπορεί παρά να είναι η μονάδα. (Ηχ/να επεισόδια: Ε1, Ε2, Ε3, Ε4, )
    - Το νοητικά κατασκευασμένο πέρας μίας τέτοιας διαδικασίας μέσω κατάλληλων σχημάτων δεσμού που εδράζονται στην Ευκλείδεια δομή οδηγεί τους μαθητές σε νέες οντότητες ως πέρατα άλλων αντίστοιχων ατέρμονων διαδικασιών. Έτσι νοηματοδοτείται ο άρρητος αριθμός τετραγωνική ρίζα του 2 (Ηχ/να επεισόδια:Η1, Η2, Η3, Θ2, Θ3 Εικόνες: , 04-Η-1, 04-Η-2, 04-Η-3 )

*Το περιβάλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών της Α Λυκείου, μπορεί να λειτουργήσει ως ένα πρωτογενές, αλλά ισχυρό, αξιωματικό πλαίσιο, ικανό να ενισχύσει, να απορρίψει ή να διορθώσει διαισθητικές υποθέσεις και αντιλήψεις των μαθητών, ώστε να τροποποιήσουν στερεότυπες απόψεις γύρω από την δομή των πραγματικών και να αποδεχθούν διαισθητικά την νέα έννοια του supremum.*

Αναλυτικότερα, διαπιστώθηκε ότι το Ευκλείδειο περιβάλλον ως το αξιωματικό πλαίσιο που δεσμεύει την δομή της δεδομένης Γεωμετρικής κατασκευής

- Οδήγησε τους μαθητές μέσω της πρότασης ότι «απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία, και αντίστροφα» στην κατασκευή της έννοιας της απειρίζουσας ποσότητας ως μία ποσότητα που παραμένει πάντα μεγαλύτερη από οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. (Ηχ/να επεισόδια: Α1, Α2, Α3)
- Βοήθησε τους μαθητές να αντιληφθούν με βεβαιότητα ότι είναι εφικτό ένα μέγεθος να αυξάνεται διαρκώς αλλά να παραμένει πάντα μικρότερο από έναν συγκεκριμένο αριθμό. Συγκεκριμένα:
  - Στην μελέτη της συμπεριφοράς του μήκους του τμήματος ΑΔ, διαπιστώθηκε αφενός ότι οι δομές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας το περιόριζαν αυστηρά κάτω από την μονάδα ενώ η συσχέτισή του με την διαρκώς αυξανόμενη ποσότητα ΑΓ του προκαλούσε μία διαρκή αύξηση. (Ηχ/να επεισόδια: Β3, Β4, Β5 )
  - Αντίστοιχα στην μελέτη του μήκους του τμήματος ΒΔ διαπιστώθηκε ότι η Ευκλείδεια δομή το περιόριζε αυστηρά κάτω από τις δύο μονάδες (πρώτη προσέγγιση) ή και κάτω από την τετραγωνική ρίζα του δυο (τελική προσέγγιση) εντούτοις η συσχέτισή του με το μήκος ΑΓ, το ανάγκαζε σε μία διαρκή αύξηση. (Ηχ/να επεισόδια: Ζ3, Η1. Εικόνα: 04-Ζ-3)
- Οριοθέτησε με αυστηρό τρόπο το περίγραμμα λειτουργίας της Βασικής εννοιολογικής μεταφοράς του απείρου, καθορίζοντας κάθε φορά ένα πέρας σε μία ατέρμονη διαδικασία,
  - τόσο κατά την προσέγγιση της μονάδας από το μήκος ΑΔ, μέσω των σχέσεων πλευρών και γωνιών σε δεδομένο τρίγωνο (Ηχ/να επεισόδια: Δ1, Δ2, Δ3)
  - όσο και κατά την προσέγγιση της ποσότητας $\sqrt{2}$ μέσω της αλγεβρικής σχέσης του πυθαγορείου θεωρήματος (Ηχ/να επεισόδια: Θ3)
- Ως συμπερασματολογικό πλαίσιο υπήρξε αρκετά ισχυρό ώστε να οδηγήσει τους μαθητές να τροποποιήσουν παγιωμένες και λάθος διαισθητικές αντιλήψεις, και να αποδεχθούν πάλι διαισθητικά νέες υποθέσεις πλησιέστερες στην αληθινή δομή των πραγματικών.
  - Συγκεκριμένα λειτούργησε ως οδηγός της διαίσθησής τους προκειμένου αναγκαστικά να αποδεχθούν ότι ο αριθμός $0,\overline{9}$ ισούται με την μονάδα, αφού ως αξιωματικό πλαίσιο αποδέχεται για το μήκος ΑΔ κάθε τιμή μικρότερη της μονάδας, αλλά καμία τιμή μεγαλύτερη ή ίση με αυτή. (Ηχ/να επεισόδια: Ε3, Ε4 Εικόνες: 04-ΣΤ-1)
  - Αντίστοιχα μέσω της ίδιας λογικής οδήγησε τους μαθητές στον επαναπροσδιορισμό της έννοιας της διαδοχικότητας στο σύνολο των πραγματικών (Ηχ/να επεισόδια: ΣΤ1, Η1, )

*Κατά την προσπάθεια για νοηματοδότηση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος ως πέρας μίας ατέρμονης διαδικασίας παρατηρείται στην σκέψη και την συμπερασματολογία των μαθητών , ο διαισθητικής φύσης μεταφορικός μηχανισμός που οι Lakoff & Nunez (2000) περιέγραψαν ως Βασική εννοιολογική Μεταφορά του Απείρου.*

Αναλυτικότερα διαπιστώθηκε πως οι μαθητές, ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα της Γεωμετρικής δομής της δεδομένης κατασκευής

- άλλοτε ατελώς (Ηχ/νο επεισόδιο Β6, Ι5 ,Εικόνα 04-Δ-1) και άλλοτε ολοκληρωμένα (Ηχ/νο επεισόδιο Δ1, Δ2, Εικόνες 04-Δ-2, 04-Δ-3, 04-Δ-4), ακολούθησαν τις αντιστοιχίσεις μίας εννοιολογικής μεταφοράς του απείρου προκειμένου, μέσα από τα συμπερασματολογικά μοτίβα ενός σχήματος όψης, να ορίσουν πέρας σε μία άπειρη διαδικασία
- ακολούθησαν την συμπερασματολογία του σχήματος όψης και της μεταφοράς του απείρου, σχετικά με την φύση του πέρατος κάθε ατέρμονης διαδικασίας, και οδηγήθηκαν σε υποθέσεις και συμπεράσματα ικανά να αναπροσαρμόσουν την άποψη που έχουν για την δομή στο σύνολο των πραγματικών αλλά και να δώσουν άλλο νόημα στην έννοια της άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης. (Ηχ/νο επεισόδιο Ε3, Ε4 , Θ2, Θ3, Ι4).

*Κατά την προσπάθεια για νοηματοδότηση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος οι μαθητές ενεργοποίησαν δύο βασικές αντιληπτικές δομές χωρικής φύσης: Την δομή container, και την δομή source path goal.*

Αναλυτικά:

- Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να εντοπίσουν το ελάχιστο άνω φράγμα των εξεταζόμενων γεωμετρικών ποσοτήτων, συγκρότησαν άλλοτε εύστοχα και άλλοτε όχι
  - το σύνολο των σημείων της πραγματικής ευθείας
  - το σύνολο των ρητών και
  - το σύνολο των οξειών γωνιών

  σε καθολικής φύσης δομές αντίστοιχες με αυτή που παρατηρείται στο container σχήμα: εσωτερικό – σύνορο – εξωτερικό. (Ηχ/να επεισόδια Γ2, Γ3, Ε3, Ε4, Η2, Η3, Εικόνες 04-Γ-1, 04-Γ-2, 04-Γ-3, 04-Ε-1, 04-Ε-2, 04-Ε-3, 04-Ε-4, 04-Ε-5, 04-Η-1, 04-Η-2, 04-Η-3)
- Σε κρίσιμα σημεία της επιχειρηματολογίας τους και προκειμένου να εξάγουν συμπεράσματα και να ελέγξουν υποθέσεις τους, προχώρησαν σε μία «1 – 1» συσχέτιση των αντίστοιχων περιοχών είτε μέσω της Άλγεβρας είτε μέσω της Γεωμετρίας, είτε μέσω της διαίσθησής τους, επιβεβαιώνοντας κάθε φορά την καθολικότητα της συγκροτημένης δομής ως ενιαίο σύνολο, αλλά και την εσωτερική υποδομή της (εσωτερικό – σύνορο – εξωτερικό). (Ηχ/να επεισόδια Γ2, Γ3, Ε3, Ε4, Η2, Η3, Εικόνες 04-Γ-1, 04-Γ-2, 04-Γ-3, 04-Ε-1, 04-Ε-2, 04-Ε-3, 04-Ε-4, 04-Ε-5, 04-Η-1, 04-Η-2, 04-Η-3)
- Η όποια τελική αντίληψη της έννοιας επιτεύχθηκε και μέσα από τον ακριβή προσδιορισμό του συνόρου μίας τέτοιας δομής (εσωτερικό – σύνορο – εξωτερικό) στο σύνολο των ρητών (Ηχ/να επεισόδια , Ε3, Ε4, ΣΤ1, ΣΤ2)

Επίσης:

- Στην πρώτη προσέγγιση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, οι μαθητές ακολούθησαν είτε διαισθητικά, είτε οργανωμένα, άλλοτε με επιτυχία και άλλοτε όχι, μία επαγωγική διαδικασία βημάτων με πορεία προς ένα βέβαιο, αλλά αρχικώς ασαφές ως προς την ακριβή θέση του τέλος, πατώντας σε μία source – path – goal δομή.(Ηχ/να επεισόδια Δ1, Δ2, Εικόνες 04-Δ-1, 04-Δ-2, 04-Δ-3 )
- Η ίδια αντιληπτική δομή που προσομοιάζει με αυτή του source – path – goal σχήματος παρατηρείται και στην αντίστροφη διαδικασία όπου από ένα καθορισμένο τέλος (άρρητος) αναδύεται ένα συγκεκριμένο «μονοπάτι» προσέγγισης (ακολουθία δεκαδικού αναπτύγματος) (Ηχ/να επεισόδια Θ3, Ι4, Ι6)
- Ενώ και τελική αντίληψη που οι μαθητές διαμόρφωσαν για την υπό διαπραγμάτευση έννοια καθορίστηκε και μέσω της διαισθητικής συμπερασματολογίας που προκύπτει από το πιο πάνω χωρικό αντιληπτικό σχήμα. (Ηχ/να επεισόδια Ε3, Ε4, ΣΤ1, ΣΤ2, Η1)

*Η διαισθητική διδακτική προσέγγιση της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος μέσω δομών Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να φέρει στην επιφάνεια παρανοήσεις που αφορούν σε ζητήματα σχετικά με την δομή των πραγματικών.*

Κατά την προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων που τους τέθηκαν, οι μαθητές, έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις που έχουν την ρίζα τους σε συνήθεις παρανοήσεις που είχαν να κάνουν με

- Την πυκνή δομή των ρητών και την καθ΄ υπέρβαση μεταφορά της έννοιας της διαδοχικότητας από το σύνολο των ακεραίων στο σύνολο των ρητών (Ηχ/να Επεισόδια: Ε1, Ε2, ΣΤ3, Θ1, , Εικόνες 04-Ε-3, 04-Ε-4, 04-ΣΤ-1)
- Την φύση των άπειρων περιοδικών δεκαδικών αναπτυγμάτων (Ηχ/να επεισόδια: Δ1, Δ2, Θ4. Εικόνες: 04-Δ-2, 04-Δ-3, 04-Δ-4, 04-Ε-2, 04-Ε-4 )

*Η διαισθητική αποδοχή της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, μέσω του δεσμευτικού πλαισίου της Ευκλείδειας Γεωμετρία μπορεί να προκαλέσει αναπροσαρμογή των διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών για βασικές έννοιες όπως η πυκνότητα το δεκαδικό ανάπτυγμα, ο άρρητος αριθμός, ίσως και μία διαισθητική αναγκαιότητα του αξιώματος της πληρότητας.*

Παρατηρήθηκε ότι τόσο στην πρωτογενή προσπάθεια διαισθητικής προσέγγισης και οικοδόμησης της έννοιας του supremum, όσο και στην φάση της διαχείρισής της οι μαθητές οδηγήθηκαν σε αναπροσαρμογή των απόψεών τους:

- Για την διαδοχικότητα και την πυκνότητα στους ρητούς (Ηχ/να επεισόδια Ε4, ΣΤ1, ΣΤ4, Ζ3, Ι1, Ι4, Εικόνα 04-Ζ-3)
- Για την έννοια του άπειρου περιοδικού δεκαδικού αναπτύγματος (ρητός) (Ηχ/να επεισόδια Ε2, Ε4, Ε5)
- Για την έννοια του άπειρου μη δεκαδικού αναπτύγματος (άρρητος)(Ηχ/να επεισόδια Θ3, Θ5,Ι6)

Ειδικά το ζήτημα της πληρότητας το αντιμετωπίζουμε ως ένα κρίσιμο συμπέρασμα το οποίο χωρίς να είναι ανεξάρτητο από τα υπό διερεύνηση ερωτήματα, κυρίως σχετίζεται με την γενικότερη φιλοσοφία της πιο πάνω διδακτικής παρέμβασης, καθώς και με τις δυνατότητες επέκτασής της.

Η συγκεκριμένη παρέμβαση εστίασε περισσότερο στην διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του supremum, χωρίς να γίνει άμεση συσχέτιση με τον κρίσιμο ρόλο της στην υπόθεση της πληρότητας. Στην πραγματικότητα η παρέμβαση, όπως και η όλη φιλοσοφία της διδασκαλίας των πραγματικών , θεωρεί δεδομένη την πληρότητα, αποσιωπώντας όμως την σημασία της. Με αυτό το δεδομένο μιλάμε για τα άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά αναπτύγματα των αρρήτων, με αυτό το δεδομένο μιλάμε για τα όρια, την συνέχεια και όλο το οικοδόμημα του απειροστικού λογισμού, χωρίς όμως ποτέ να λέμε γιατί έχουμε αυτό το δικαίωμα. Προφανώς η οργάνωση ενός τυπικού μαθήματος πάνω σε αυτό το γιατί είναι υπόθεση της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ωστόσο η έκφραση «ένα στοπ» της μαθήτριας Κ2 στο Ηχ/νο επεισόδιο Η1, κατά την φάση της εύρεσης του άρρητου supremum μιας ποσότητας, μας οδηγεί στο κρίσιμο για την διαισθητική αντίληψη του μαθητή συμπέρασμα, ότι *αφενός η δομή της συγκεκριμένης κατασκευής και αφετέρου η ήδη κατασκευασμένη έννοια του supremum σε γεωμετρική σειρά (περιοδικός δεκαδικός), με δεδομένο ότι αντιληπτικά το container σχήμα λειτουργεί πάντα ως ολότητα (δεν υπάρχει εξωτερικό και εσωτερικό χωρίς σύνορο) καθιστά την αποδοχή της υπόθεσης ότι «κάθε φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών έχει ελάχιστο άνω φράγμα», ως διαισθητικά αναγκαία.*

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο ότι η χρήση των γεωμετρικών κατασκευών σε προβλήματα διερεύνησης της δομής των πραγματικών, παρέχει αφενός τις διαισθητικές δυνατότητες προσέγγισης που είναι απαραίτητες για την ομαλή και σταθερή οικοδόμηση βασικών Μαθηματικών εννοιών, ελεγχόμενες όμως από ένα απαραίτητα αυστηρό αλλά και διαχειρίσιμο πλαίσιο αξιωμάτων, όπως αυτό της Ευκλείδειας δομής, ικανό να συμβάλει στην πληρέστερη κατανόηση των κρίσιμων δομικών ιδιοτήτων της πραγματικής ευθείας όπως αυτή της έννοιας του ελαχίστου άνω φράγματος, και παραπλεύρως της πυκνότητας και της πληρότητας.

## Βιβλιογραφία


- Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. For the Learning of Mathematics, 7(2), 18–23.
- Baillargeon, R. (1995). A model of physical reasoning in infancy, Advances in infancy research, Vol 9
- Biggs, J., & Collis, K. (1982). Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy. New York: Academic Press.
- Biggs, J. (http://www.johnbiggs.com.au/academic/solo-taxonomy)
- Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., Σκοπελίτη, Ε. (2008) Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην Ψυχολογία, Νόησις τόμος 3, Τυπωθήτω
- Βοσνιάδου, Σ., Νασιάκου, Μ., Χαντζή, Α., Φατούρου, Μ. (2011). Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Gutenberg
- Carey, S. (1985). Conceptual change in childhood. Cambridge, MA: MIT Press.
- Carey, S. 1991. Knowledge acquisition: Enrichment or conceptual change? In S. Carey & R. Gelman (Eds.). The epigenisis of mind: Essays on biology and cognition. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Carey S. and Spelke E (1994), Domain Specific Knowledge and Conceptual Change. In HIRSCHFELD L.A. and GELMANS S. ( Eds ), Mapping The Mind, New York : Cambridge University Press
- Dehaene, S. (1998). The number sense: How the mind creates mathematics. Harmondsworth, Middlesex, England: The Penguin Press (First published by Oxford University Press, 1997).
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., & Scott, P. (1994). Constructing scientific knowledge in the classroom. Educational Researcher, 23(7), 5–12.
- Dubinsky Ed., (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David O. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Kluwer: Dordrecht.
- Dubinsky, E., & Macdonald, M. (2006) APOS : A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, Springer Netherlands
- Fauconnier, G., and M. Turner. (1994). Conceptual Projection and Middle Spaces. Department of Cognitive Science Technical Report 9401. University of California, San Diego.
- Fauconnier, G., and M. Turner. (1996). Blending as a Central Process of Grammar. In A. Goldberg, ed., Conceptual Structure, Discourse, and Language. Stanford: CSLI/Cambridge.
- Ferrara, F., Pratt, D., Robutti, O. (2006) The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future. SENSE PUBLISHERS ROTTERDAM / TAIPEI p. 237 - 275
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 3–17.
- Fischbein, E. (1987) intuitions in science and Mathematics: An Educational Approach, Dortrecht. The Netherlands : Kluwer
- Fischbein, E., Jehiam, R., Cohen, D., (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers Educational Studies in Mathematics 29: 29-44,

- Gelman, R (1990). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and animate inanimate distinctions as example. Cognitive science 14, pp 76 – 106
- Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 416–425). Larnaka, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.
- Godwin, S. and Sutherland, R. (2004) Whole class technology for learning mathematics: the case of functions and graphs. Education, Communication & Information (ECi), 4 (1), pp. 131–52.
- Grady, J. (1997). Foundations of Meaning: Primary Metaphors and Primary Scenes. Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley.
- Gray E. & Tall D, (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), 115–141.
- Hadas, N., Hershkowitz, & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. Educational Studies in Mathematics,44, p 127-150.
- Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: paths or barriers to the construction of new understandings? Learning and Instruction, 8, 341–374.
- Johnson C. (1997). Metaphor vs conflation in the acquisition of polysemy: The case of SEE in M.K.Hiraga, C.Sinha, & S.Wilcox (eds.) Cultural Typological and psychological Issues in Cognitive Linguistics. Current Issues in Linguistic Theory. Amsterdam: john Benjamins
- Johnson, M. (1987). The Body In The Mind, University of Chicago Press.
- Keil, F. C., (1994). Concepts, Kinds, and Cognitive Development Cambridge, MA: MIT Press.
- Lakoff, G. (1987). Women, Fire, and Dangerous Things, University of Chicago Press.
- Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). Metaphors We Live By. University of Chicago Press.
- Lakoff, G. & Johnson, M. (1999). Philosophy in the Flesh. The embodied mind and its challenge to western thought. Basic Books. Kindle Edition.
- Lakoff, G. & Nunez, R. (2000). Where Mathematics Comes From, How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being, Basic Books
- Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical Strategy and the question of density. In J. Novotna (Ed.), Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education (pp. 35–46). Praga: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Faculta.
- Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limón & L. Mason (Eds.), Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice (pp.233–257). Dordrecht: Kluwer.
- Μόζερ,Α., http://www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/ glossology /show.html?id=124
- Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. Educational Studies in Mathematics, 43, 313–335.

- Narayanan S. (1997a). Talking the Talk is Like Walking the Walk: A Computational Model of Verbal Aspect.
- Narayanan S. (1997b). Embodiment in Language Understanding: Sensory – Motor Representations for Metaphoric Reasoning about Even Descriptions. Ph. D. dissertation, Department of Computer Science, University of California At Berkeley
- Nersessian, N. (1992). How do scientists think? Capturing the dynamics of conceptual change in science. In R. N. Giere (Ed.), Minnesota studies in philosophy of science: Vol. 15. Cognitive models of science. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. Contemporary Education, 26, 400-417
- Ni, Y. & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. Educational Psychologist, 40 (1), 27-52
- Peled, I., and S. Hershkovitz. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. International Journal of Mathematics Education, Science and Technology. 30(1): 39–46.
- Piaget, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures.* Cambridge MA: Harvard.
- Rogoff, B., (1990). Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context. New York: Oxford University Press.
- Rosch E. (1977). Classification of Real World Objects: Origins and Representations in Cognition. In P.N.Johnson – Laird and P.C.Wason. Thinking: readings in cognitive science. New York Cambridge University Press.
- Sfard A. (1991), On the Dual Nature Of Mathematical Conceptions, Educational studies of Mathematics, 22, I-36
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds.). The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25 (pp. 59– 84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics, 14,* 44-55
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational number: The gap between formal and intuitive knowledge. Educational Studies in Mathematics, 65(1), 49–76.
- Tall D. (1991) Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus, Mathematics Education Research Centre University of Warwick U.K.
- Tall D. (2004) Thinking through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288. An introduction to the origins and ideas in 'the three worlds'.
- Tall, D. (2013) How Humans Learn to Think Mathematically - Exploring the Three Worlds of Mathematics, Cambridge University Press.
- Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., & Wilson, J. W. (1998). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Retrieved January 31, 2012, from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. Learning and Instruction, 14(5), 453–467.

- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational number interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (pp. 265–282). The Netherlands: Elsevier
- Vamvakoussi X. Vosniadou S (2010) How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation, COGNITION AND INSTRUCTION, 28(2), 181–209, 2010
- Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. Orlando, FL: Academic Press.
- Vosniadou, S., (1989). Analogical Reasoning and Knowledge Acquisition: A Developmental Perspective. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), Similarity and analogical reasoning, (pp. 413-422). New York: Cambridge University Press
- Vosniadou, S., (2007 α). The conceptual change approach and its re-framing. In S. Vosniadou, A., Baltas, & X., Vamvakoussi, (Eds.). Reframing the conceptual change approach in learning and instruction. Oxford: Elsevier.
- Vosniadou, S., (2007 β). Conceptual Change and Education. Human Development, 50(1), pp. 47-54
- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), International handbook of research on conceptual change (pp. 3–34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Vosniadou, S. Skopeliti, I. (2014) Conceptual Change from the Framework Theory Side of the Fence, Science & Education, vol.23 pp 1427 -1445
- Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. In L. Verschaffel, & S. Vosniadou (Eds.), Conceptual change in mathematics learning and teaching. Special Issue of Learning and Instruction, 14(5), pp. 445–451.
- Vygotsky, L.S., (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Zachariades, T., Christou, C., and Pitta-Pantazi, D., (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in Real Numbers Educational Studies in Mathematics. 82:5–22
- Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(2–3), 207–217.
- Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In M. J.Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (pp. 497–504). Norway: Bergen University College.

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**

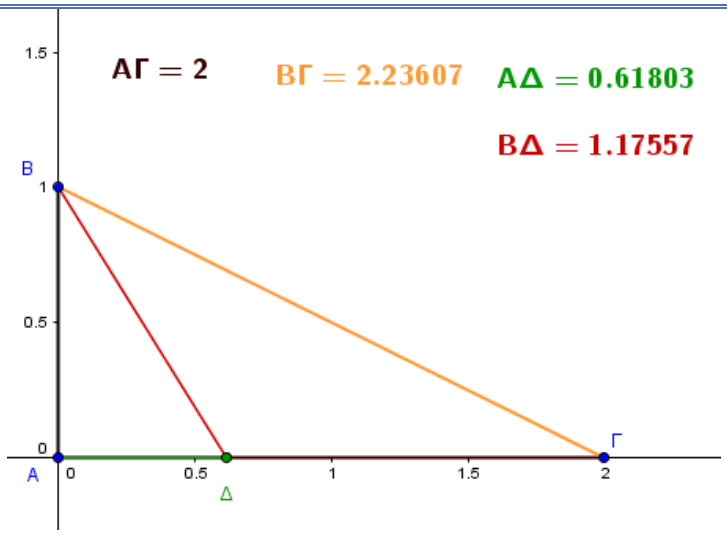
**Το φύλλο εργασίας**

Διάρκεια : 3 Διδακτικές Ώρες

Χρήση Λογισμικού Geogebra

Δυνατότητα ενός υπολογιστή ανά δύο μαθητές

Βασική Δραστηριότητα




Στο σχήμα δίνονται :

- Σταθερό σημείο Α
- Σταθερό σημείο Β
- Μεταβλητό σημείο Γ πάνω στον άξονα x'x
- ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ
- Το πλήκτρο του υπολογιστή με το βέλος μετακινεί το Γ ανά μία μονάδα.

*Μετακινείστε το σημείο Γ*
***απομακρύνοντάς το απεριόριστα από το Α,***
*και απαντήστε στα πιο κάτω ερωτήματα,*
*διερευνώντας τις απαντήσεις σας μέσω του αρχείου βασική δραστηριότητα ggb.*

**Διερεύνηση 1η**

Με δεδομένο ότι το Γ απομακρύνεται απεριόριστα από το Α

1. Νομίζετε ότι το μήκος του ΒΓ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α.
   Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

2. Νομίζετε ότι μπορείτε να βρείτε μία θέση του Γ τέτοια ώστε το ΒΓ να γίνει μεγαλύτερο από 10 μονάδες; Ποια είναι μία τέτοια θέση ; Μπορείτε να εξηγήσετε τον ισχυρισμό σας;

3. Νομίζετε ότι αυτό ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό μας δοθεί; Δηλαδή μπορείτε κάθε φορά να βρίσκετε μια θέση του Γ τέτοια ώστε το ΒΓ να γίνει μεγαλύτερο από 100 ή από 1000 ή από τον κάθε τυχαίο αριθμό Μ που κάθε φορά θα μας δοθεί, οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι αυτός; Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματά σας πως απαντάτε στο πιο κάτω ερώτημα και πως αιτιολογείτε την απάντησή σας.
   ***Βρείτε κάποιον σταθερό αριθμό τον οποίον να μην μπορεί να τον ξεπεράσει το ΒΓ.***

**Διερεύνηση 2η**

Με δεδομένο ότι το Γ απομακρύνεται απεριόριστα από το Α

1. Νομίζετε ότι το μήκος του τμήματος ΑΔ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

2. Πιστεύετε ότι το μήκος ΑΔ έχει την ιδιότητα του μήκους ΒΓ ;
   Δηλαδή: μπορούμε να βρούμε μια θέση του Γ έτσι ώστε το ΑΔ να μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από οποιονδήποτε τυχαίο αριθμό οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι;
   Ελέγξτε και εξηγήστε την άποψή σας: Θα μπορούσαμε να βρούμε μια θέση του Γ ώστε

   α) το ΑΔ να γίνει μεγαλύτερο από 1;

   β) το ΑΔ να γίνει ίσο με 1 ;

   γ) το ΑΔ να γίνει μεγαλύτερο από 0,5

3. Σκεφτείτε το εξής πρόβλημα:
   Μας δίνεται ένας αριθμός α < 1 Μπορούμε άραγε να βρούμε μία θέση για το Γ ώστε το μήκος ΑΔ να γίνει πιο μεγάλο του α , όσο κοντά κι αν είναι το α στο 1 ( εξηγείστε τον ισχυρισμό σας)

4. Έπειτα από τα έως τώρα συμπεράσματα πως θα απαντούσατε στον παρακάτω προβληματισμό και πως θα στηρίζατε την απάντησή σας.
   ***Νομίζετε ότι υπάρχει κάποιος σταθερός αριθμός τον οποίον δεν μπορεί να ξεπεράσει το ΑΔ;***
   ***Ποιος είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός.***
   ***(ονομάζεται supremum του μήκους ΑΔ)***
   Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

**Διερεύνηση 3η**

Με δεδομένο ότι το Γ απομακρύνεται απεριόριστα από το Α

1. Νομίζετε ότι το μήκος του τμήματος ΒΔ αυξάνεται μειώνεται ή παραμένει σταθερό κατά την απομάκρυνση του Γ από το Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

2. Πιστεύετε ότι το μήκος ΒΔ έχει την ιδιότητα του μήκους ΒΓ ; ή του μήκους ΑΔ Δηλαδή:
   a) Μπορούμε, όπως και για το ΒΓ, να βρούμε μια θέση του Γ έτσι ώστε το ΒΔ να μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από οποιονδήποτε τυχαίο αριθμό οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι;
   b) Ή ,όπως και για το ΑΔ έτσι και για το ΒΔ, υπάρχει κάποιος αριθμός που το ΒΔ δεν μπορεί να τον ξεπεράσει.
   c) Σε αυτή την περίπτωση ποιος αριθμός είναι το supremum του ΒΔ.( ο μικρότερος αριθμός που το ΒΔ δεν μπορεί να τον ξεπεράσει)
   Εξηγήστε την απάντησή σας

Δραστηριότητα επέκταση

Πρόβλημα

Εστιάστε στην δεύτερη διερεύνηση και παρατηρήστε τις τιμές που παίρνει το μήκος ΑΔ και τον τρόπο που αυτές μεταβάλλονται.

Μπορείτε να προβλέψετε το supremum μιας ποσότητας που παίρνει τιμές όπως αυτές ορίζονται από το πιο κάτω μοτίβο;

μοτίβο 1. 0,9 – 0,99 – 0,999 – 0,9999 – …..
Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας

Μπορείτε να εικάσετε ποιο είναι το supremum μιας ποσότητας που παίρνει τιμές όπως αυτές ορίζονται από τα πιο κάτω μοτίβα;

μοτίβο 2. 0,3 – 0,33 – 0,333 – 0,3333 - ….
μοτίβο 3. 3,5 – 3,54 – 3,545 – 3,5454 – 3,54545 – 3,545454 - …..

Με βάση όλες τις πιο πάνω παρατηρήσεις και διερευνήσεις προσπαθήστε να σκεφτείτε τα πιο κάτω ζητήματα.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο φυσικός 1 ορίζεται ως supremum μιας ακολουθίας (μοτίβο) ρητών, ποια θα μπορούσε να είναι μία τέτοια ;

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο φυσικός 2 ορίζεται ως supremum μιας ακολουθίας (μοτίβο) ρητών, ποια θα μπορούσε να είναι μία τέτοια ;

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο ρητός 1/3 ορίζεται ως supremum μιας ακολουθίας (μοτίβο) ρητών, ποια θα μπορούσε να είναι μία τέτοια ;

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο ρητός 1/2 ορίζεται ως supremum μιας ακολουθίας (μοτίβο) ρητών, ποια θα μπορούσε να είναι μία τέτοια ;

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο άρρητος 0,121221222122221… ορίζεται ως supremum μιας ακολουθίας ( μοτίβο ) ρητών, ποια θα μπορούσε να είναι μία τέτοια ;