ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΜΙΑ ΓΕΝΕΤΙΚΗ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ

ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΜΑΡΙΑ
Δ 201209

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

ΣΠΥΡΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ τ. Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα
Ιούνιος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών

Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 17η Ιουνίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	**τ**. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	**τ**. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητής
▪ Α. Μούτσιος-Ρέντζο	Διδάκτορα, εξωτερικό συνεργάτη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

- Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα, τον καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου που δέχθηκε να είναι επιβλέπων της διπλωματικής μου εργασίας καθώς και τους κυρίους Δ. Λάππα και Α. Μούτσιο-Ρέντζο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.

- Τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν ,

- Τους συμφοιτητές μου για τις ωραίες στιγμές που περάσαμε και τις φιλίες που δημιουργήσαμε.

- Τους γονείς μου, τον σύζυγό μου και κυρίως τον μονάκριβο γιό μου για την στήριξή τους, που απλόχερα μου προσέφεραν σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

.

Στον Ιωάννη-Μιχαήλ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....σελ.7

ABSTRACT.....σελ.8

ΕΙΣΑΓΩΓΗ σελ.9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1.1 ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ... .σελ.11

1.2 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΠΟΛΗΣ..... ...σελ.15

1.3 Η ΑΘΗΝΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΚΛΗ..... ..σελ.18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΣΤΑΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

2.1 ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ..... ....σελ.24

2.2 ΟΙ ΕΛΕΑΤΕΣ..... ....σελ.31

2.2.1 ΠΑΡΜΕΝΙΔΗΣ..... ..σελ.31

2.2.2 ΖΗΝΩΝ Ο ΕΛΕΑΤΗΣ.....σελ.39

2.3 ΟΙ ΣΟΦΙΣΤΕΣ ΚΑΙ Ο ΣΩΚΡΑΤΗΣ.....σελ.42

2.4 Ο ΠΛΑΤΩΝΑΣ σελ.49

2.5 Ο ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ.....σελ.55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3Ο

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΑ

3.1 ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.....σελ.59

3.2 Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΒΑΚΑ.....σελ.62

3.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.....σελ.67

3.4 ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ.....σελ.70

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

4.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ……σελ.81

4.1.1 ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ……σελ.84

4.1.2 ΤΑ ΜΕΣΑ ΠΟΥ ΗΤΑΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ……σελ.86

4.2 ΤΟ ΕΓΓΡΑΜΑΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ……σελ.88

4.2.1 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ……σελ.89

4.2.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ……σελ.92

4.2.3 ΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΩΣ ΜΕΣΟ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΟΡΑΤΟ ΣΤΟ ΙΔΕΑΤΟ…… σελ.96

4.2.4 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ……σελ.101

4.2.5 Η ΑΠΟΨΗ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΓΙΑ ΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ……σελ.104

4.3 Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ……σελ.106

4.4 Η ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ……σελ.114

4.5 ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ……σελ.122

ΕΠΙΛΟΓΟΣ ……σελ.126

ΑΝΑΦΟΡΕΣ……σελ.128

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα αρχαία ελληνικά παραγωγικά μαθηματικά έχουν απασχολήσει και γοητεύσει πολλούς μαθηματικούς , φιλοσόφους και ιστορικούς των επιστημών ανά τους αιώνες. Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται το ιστορικοκοινωνικό πλαίσιο που οδήγησε στη διαμόρφωση του επιστημονικού στοιχείου που αναπτύχθηκε στην ελληνική μαθηματική σκέψη. Αρχικά, αναφέρονται οι κύριοι σταθμοί της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας που επηρέασαν άμεσα την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας και οδήγησαν στη σύσταση της αποδεικτικής επιστήμης όπως αυτή καταγράφεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η αποδεικτική επιστήμη του Ευκλείδη βασίζεται σε περιορισμένο αριθμό ορισμών και αιτημάτων και ακολουθεί μια αυστηρή δομή στην ανάπτυξη και την απόδειξη των προτάσεων της. Στη συνέχεια, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο του εγγράμματου διαγράμματος στη διαμόρφωση των παραγωγικών μαθηματικών καθώς και στη δομή και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται στις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν την πιο σημαντική μορφή παρουσίασης των Στοιχείων.

Λέξεις κλειδιά*: Ευκλείδης, πρόταση, εγγράμματο διάγραμμα, απόδειξη, γενίκευση*.

ABSTRACT

The ancient Greek deductive mathematics have occupied and captivated many mathematicians, philosophers and historians of science over the centuries. This thesis presents the social and historical context that led to the development of scientific elements in Greek mathematical thought. First, the main milestones of ancient Greek philosophy that directly influenced the development of mathematical reasoning and led to the establishment of evidential science as recorded in the Elements of Euclid are presented. The evidentiary science of Euclid is based on a limited number of definitions and postulates and follows a strict structure for the development and proof of its propositions. Then, this thesis emphasizes the role of lettered diagram in shaping deductive mathematics as well as the structure and vocabulary used in the propositions, which comprise the most important form of presentation of the Elements.

Key words: *Euclid, proposition, lettered diagram, proof, generality*.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αποτελεί αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι τα μαθηματικά συμβαδίζουν με τον ανθρώπινο πολιτισμό, καθώς τόσο οι Βαβυλώνιοι όσο και οι Αιγύπτιοι, πριν από τους Έλληνες τα είχαν εξελίξει και είχαν καταφέρει να λύνουν πολύπλοκά μαθηματικά προβλήματα, χωρίς όμως ωστόσο να προσπαθήσουν ποτέ να φτάσουν στη λύση ενός προβλήματος μέσω παραγωγικών συλλογισμών.

Η συνεισφορά των Ελλήνων στη θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης είναι μοναδική, αφού τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά χαρακτηρίζονται από αξιωματική θεμελίωση, γενικευμένες προτάσεις, παραγωγική σκέψη και χρήση εγγράμματων διαγραμμάτων· χαρακτηριστικά που σαφώς τα διαφοροποιούν από τα προ-ελληνικά μαθηματικά τα οποία κυρίως περιορίζονταν σε πρακτική αριθμητική (λογιστική) και πρακτική γεωμετρία (υπολογισμός επιφανειών). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Szabo, τα ελληνικά μαθηματικά παριστάνουν ένα σύστημα γνώσεων αριστοτεχνικά συνδεδεμένο μέσω της παραγωγικής μεθόδου, ενώ τα μαθηματικά των άλλων λαών εμφανίζουν ενδιαφέρουσες μεν αλλά ασύνδετες δε μεταξύ τους 'συνταγές', μαζί με παραδείγματα βασιζόμενα πάνω σε αυτές τις ΄συνταγές'. «Ούτε μία φορά δεν επιβεβαιώθηκε ο σχηματισμός γενικών προτάσεων από τους Βαβυλωνίους. Στην αρχαία ινδική ιερά γεωμετρία της Sulva-Sutra είχαν λεχθεί γεωμετρικές γνώσεις με τη μορφή βραχυλογίας αλλά χωρίς να αποδεικνύονται». (Becker στο Szabo 1973 σελ.254)

Αυτό που είναι σημαντικό να εξεταστεί σε βάθος είναι το πώς προέκυψε η ανάγκη στους Έλληνες για επιστημονική τεκμηρίωση των μαθηματικών και ανάπτυξη αυστηρών αποδείξεων, καθώς χαρακτηριστικό των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών είναι ότι οι ισχυρισμοί πάντα αποδεικνύονται. Επομένως, το βασικό ερώτημα έγκειται στο τι ώθησε τους Έλληνες μαθηματικούς να γράψουν μαθηματικά κείμενα με ένα τρόπο εντελώς διαφορετικό από τους προγενέστερούς

τους, και κατ' επέκταση, ποιο ήταν το κρίσιμο χρονικό σημείο που ξεκίνησε αυτή η γνωστική μεταβολή;

Ο Jean-Pierre Vernant (1992) στο βιβλίο του 'Οι Απαρχές της Ελληνικής Σκέψης' παραθέτει τους προαναφερθέντες προβληματισμούς διατυπώνοντας το εξής: «Γιατί και πώς οι Έλληνες πήραν , μεταξύ του 6ου και του 3ου αιώνα μια κατεύθυνση που οδήγησε, με τον Ευκλείδη, στη σύσταση μιας αποδεικτικής επιστήμης που αφορά «ιδεατά» αντικείμενα και χρησιμοποιεί ως μέθοδο, ξεκινώντας από περιορισμένο αριθμό αιτημάτων, αξιωμάτων και ορισμών, την αλληλουχία προτάσεων που εξάγονται κατά τρόπο αυστηρό οι μεν από τις δε, έτσι ώστε η εγκυρότητα κάθε πρότασης να εξασφαλίζεται από το ρητό χαρακτήρα των αποδείξεων, οι οποίες στη συνέχεια του συλλογισμού εγκαθιδρύουν την εγκυρότητα αυτή;» (σελ.33).

Εν κατακλείδι, σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση του πλαισίου ανάπτυξης των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών καθώς και των παραγόντων που επηρέασαν αυτή τη μακροχρόνια γενετική διαδικασία. Διαδικασία που αποτελεί τομή στην ιστορία της σκέψης , και η οποία οδήγησε στο ελληνικό θαύμα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η σύνδεση των πρακτικών μαθηματικών με τα παραγωγικά μαθηματικά, η χρήση του εγγράμματου διαγράμματος και παράλληλα δίνεται έμφαση στην παρουσίαση της δομής των 'Στοιχείων' του Ευκλείδη και στον τρόπο που αυτή προέκυψε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1.1 ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα παλαιότερα μαθηματικά έργα που διασώζονται είναι δύο μικρά συγγράμματα του περιπατικού φιλόσοφου Αυτόλυκου εκ Πιτάνης που αφορούν τη σφαιρική γεωμετρία και χρονολογούνται γύρω στο 330 π.Χ. με τίτλους « Περί επιτολών και δύσεων β'» και « Περί της εν κινήσει σφαίρας». Ωστόσο το σημαντικότερο και πιο ολοκληρωμένο έργο είναι τα Στοιχεία του Ευκλείδη που χρονολογούνται 30 χρόνια αργότερα.

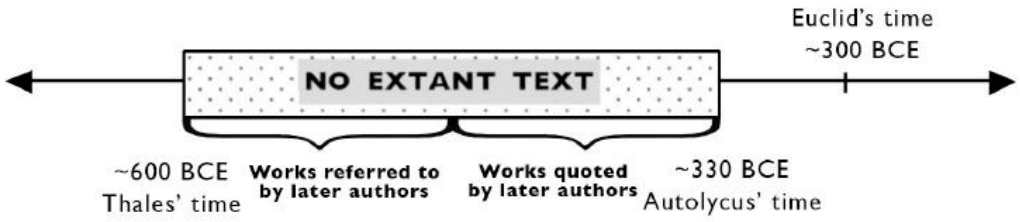
Υπάρχουν όμως αναφορές κυρίως από τον Πρόκλο στον Θαλή το Μιλήσιο (640-546 π.Χ.) όπου σύμφωνα με το 'Υπόμνημά' του που περιέχεται η περίληψη της ιστορίας του Ευδήμου, ο Θαλής πραγματοποίησε πολυάριθμα ταξίδια τόσο στην Ασία όσο και στην Αίγυπτο , ήρθε σε επαφή με τις γνώσεις και τον πολιτισμό άλλων

λαών και έφερε στην Ελλάδα ορισμένες γεωμετρικές αρχές και επινόησε αρκετές γεωμετρικές έννοιες. Ο Θαλής έθεσε τις βάσεις της θεωρητικής γεωμετρίας εισάγοντας για πρώτη φορά την αποδεικτική διαδικασία. Σ' αυτό το σημείο ο Πρόκλος αναφέρει χαρακτηριστικά « *Το μέν ουν διχοτομείσθαι τον κύκλο υπό της διαμέτρου πρώτον Θαλή εκείνον αποδείξαι φάσιν*». Στο ίδιο κείμενο ο Πρόκλος κάνει αναφορά και στον Πυθαγόρα ο οποίος μετέτρεψε τη φιλοσοφία της γεωμετρίας σε μέθοδο διδασκαλίας αναζητώντας τις αρχές της, βρήκε τη θεωρία της ασσυμετρίας και γενίκευσε κάποια θεωρήματα, αλλά όλα αυτά νοερώς χωρίς καταγραφή.

Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρεν, πολλὰς δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ᾽ αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον· μετὰ δὲ τοῦτον **Ἀμέριστος**[2] ὁ **Στησιχόρου** τοῦ ποιητοῦ ἀδελφός, ὃς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς μνημονεύεται, καὶ **Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος** ἱστόρησεν ὡς ἐπὶ γεωμετρίᾳ δόξαν αὐτοῦ λαβόντος· ἐπὶ δὲ τούτοις **Πυθαγόρας** τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας, ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δή καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν,

Το απόσπασμα είναι από το βιβλίο 'Οι μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας' του Β. Σπανδάγου (1994, σελ.31)

Το παρακάτω διάγραμμα του Δοξιάδη αποτελεί ένα χρονολόγιο για τις πηγές των Ελληνικών μαθηματικών .



Σχήμα από το άρθρο Δοξιάδη-Σιάλαρου (2013)

Άρα, τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά αναπτύχθηκαν την περίοδο που φαίνεται με γραμμοσκίαση στο παραπάνω σχήμα. Στην περίληψη της Ιστορίας του Ευδήμου που περιέχεται στο κείμενο του Πρόκλου αναφέρονται εκτός από το Θαλή και τον Πυθαγόρα (586-500π.Χ)), ο Αναξαγόρας(500-428 π.Χ.), ο Οινοπίδης(450π.Χ) , ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος(430 π.Χ.), ο Θεαίτητος(380π.Χ) και ο Εύδοξος(350 π.Χ.). Σίγουρα ο Εύδημος θα περιέλαβε στην ιστορία του όλες τις γνωστές μέχρι τότε πραγματείες που σχετίζονταν με τα μαθηματικά. Το πρώτο βιβλίο πιθανότατα να περιλάμβανε την εισαγωγή γενικών σχολίων, κάποια στοιχεία από τα Αιγυπτιακά μαθηματικά και φυσικά τα μαθηματικά του Πυθαγόρα και του Θαλή. Στο δεύτερο βιβλίο του κάνει αναφορά στις αποδείξεις του Ιπποκράτη. ‘ Είναι λοιπόν πολύ πιθανόν ότι ο πρώτος συγγραφέας μαθηματικών τον οποίο ήξερε ο Εύδημος να ήταν ο Ιπποκράτης και άρα ο πρώτος μαθηματικός. Τα μαθηματικά εμφανίζονται ξαφνικά και πολύ δυναμικά. Αυτό είναι κάτι που κάποιος μπορεί να αναμένει σε a-priori θέσεις. Γι’ αυτό θεωρώ ότι τα μαθηματικά ως αναγνωρίσιμη μαθηματική δραστηριότητα , ξεκίνησαν κάπου μετά το μισό του 5^{ου} αιώνα ‘ (Netz 1999, σελ.275)

Βέβαια οι περισσότεροι από αυτούς που προαναφέρθηκαν παραπάνω δεν είχαν ασχοληθεί μόνο με τα μαθηματικά αλλά και με άλλους κλάδους της επιστήμης και της τέχνης όπως τη φιλοσοφία και την αστρονομία. Η έλλειψη εξειδίκευσης στα μαθηματικά δεν θα πρέπει να αποτελεί έκπληξη, καθώς τα όρια ανάμεσα στα διαφορετικά πεδία αναζήτησης δεν είναι πλήρως καθορισμένα και ενδεχομένως ευρύτερα φιλοσοφικά ζητήματα να εγείρονταν σε κάθε μαθηματική εργασία. Εξάλλου η λέξη μάθημα από την οποία προέρχεται η λέξη μαθηματικός , αρχικά είχε την έννοια του ‘αυτό που μαθαίνεται’ ή ‘αντικείμενο διδασκαλίας’ και άρχισε να αναφέρεται αποκλειστικά στην γεωμετρία και την αριθμητική πολύ αργότερα. (Δοξιάδης (2012)). Κατά συνέπεια μαθηματικός ήταν κάποιος που του άρεσε να μαθαίνει. Ωστόσο, ο προβληματισμός που ανακύπτει είναι τι οδήγησε στην ανάπτυξη των θεωρητικών τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή στην Αρχαία Ελλάδα και η διαλεύκανση αυτού του ερωτήματος αναδύεται από τις συνθήκες που επικρατούσαν εκείνη την εποχή.

Ο Netz (1999) λοιπόν, υποστηρίζει ότι τα θεμέλια των ελληνικών μαθηματικών θα πρέπει να ήταν μια ξαφνική έκρηξη γνώσης. Θα πρέπει ένας μεγάλος αριθμός ενδιαφερόντων αποτελεσμάτων να ανακαλύφθηκε σχεδόν ταυτόχρονα, δηλαδή δεν χρειάζεται παραπάνω από μια γενιά για να βρεις τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που περιγράφονται στον Ευκλείδη. (Netz, σελ. 274) Επίσης, ο Knorr(1945) στο βιβλίο του 'The evolution of the Euclidean Elements' προσπαθώντας να προσδιορίσει χρονικά την ανακάλυψη της ασσυμετρίας (ανακάλυψη που συντάραξε τους Πυθαγόρειους) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αυτό πρέπει να έγινε γύρω στο 430 π.Χ. ή και λίγο αργότερα, αφού δεν υπάρχει καμμία αναφορά στους προ-Σωκρατικούς φιλόσοφους για αυτό το θέμα και ό,τι μαθαίνουμε είναι από τις αναφορές στα κείμενα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. (Knorr σελ.37-38) Ο Παρμενίδης και ο Ζήνωνας με τα παράδοξά του μπορεί να επηρέασαν την επιχειρηματολογία των μαθηματικών αλλά δεν πρόσφεραν κανένα μαθηματικό αποτέλεσμα. Στην εποχή όμως του Σωκράτη κάνουν την εμφάνισή τους πολλοί σημαντικοί άνθρωποι που ασχολούνται έντονα με μαθηματικά προβλήματα και έχουν σημαντικά αποτελέσματα. Στα έργα του Αριστοφάνη ' Όρνιθες' και 'Νεφέλες' βλέπουμε αναφορές σε γεωμετρικά αποτελέσματα.

Όμως το σημείο που ξεκινά η γεωμετρία να έχει το ύφος που αναπτύσσεται στα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη είναι στον Αριστοτέλη. Η χρήση των μαθηματικών από τον Αριστοτέλη δείχνει ότι γνώριζε πολύ καλά τα παραγωγικά μαθηματικά που γνώριζε και ο Ευκλείδης αν και τα χρησιμοποιούσε για τις δικές του φιλοσοφικές αναζητήσεις. Αυτό υποδηλώνει σύμφωνα με τον Netz (1999) ότι γύρω στο 360 π.Χ. τα περισσότερα Ελληνικά μαθηματικά αναπτύσσονταν στο στυλ των μαθηματικών του Ευκλείδη και ο ίδιος ερευνητής επισημαίνει ότι και τα έργα του Πλάτωνα περιέχουν μια συγκεκριμένη μαθηματική ορολογία που μοιάζει με αργκό. Ωστόσο, γενικά η χρήση των μαθηματικών από τον Πλάτωνα γίνεται σε κάποια απόσταση από αυτά , γεγονός που δεν μας επιτρέπει να δούμε καθαρά το είδος των μαθηματικών που γνώριζε.

1.2 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΠΟΛΗΣ

Η εμφάνιση της '**Πόλης**' τοποθετείται γύρω στον 8ο π.Χ. αιώνα και αποτελεί καθοριστικό γεγονός για την ιστορία της ελληνικής σκέψης. Δημιουργήθηκε στην προσπάθεια να αντιμετωπιστεί η οικονομικοκοινωνική κρίση που προέκυψε στα τέλη της ομηρικής εποχής (τέλη του 9ου αι. π.Χ.) λόγω πληθυσμιακής αύξησης, και συγχρόνως των περιορισμένων εκτάσεων καλλιεργήσιμης γης, όπως και μέσων εκμετάλλευσης, απουσίας εργασιακής ειδίκευσης αλλά και της έλλειψης άλλων πόρων πέρα από την εκμετάλλευση της γης.

Οι οικονομικές μεταβολές οδηγούν σε ανανέωση και ανάπτυξη επαφών με την Ανατολή, που είχαν διακοπή κατά το παρελθόν , στην ίδρυση αποικιών ,στην ανάπτυξη της βιοτεχνίας και του εμπορίου καθώς επίσης σε κατακτητικούς πολέμους και εδαφική επέκταση. Η ίδρυση αποικιών την αρχαϊκή εποχή ήταν επιχείρηση οργανωμένη εξ ολοκλήρου από τη μητέρα-πόλη (μητρόπολη). Οι αποικίες, ωστόσο, ήταν νέες πόλεις-κράτη, αυτόνομες και αυτάρκεις και οι δεσμοί τους με τις μητέρες-πόλεις ήταν χαλαροί, σε μερικές περιπτώσεις ανύπαρκτοι, ενώ σε σπάνιες περιπτώσεις οι σχέσεις ήταν εχθρικές. Τα αίτια που συνέβαλαν στην ίδρυση των αποικιών ήταν:

♦ η έλλειψη χώρου, δηλαδή το πρόβλημα που προέκυψε από την αύξηση του πληθυσμού και τις περιορισμένες εκτάσεις καλλιεργήσιμης γης

♦ η έλλειψη μετάλλων και άλλων πρώτων υλών

♦ η αναζήτηση νέων αγορών για την προμήθεια και την πώληση αγαθών

♦ οι εσωτερικές πολιτικές κρίσεις

♦ ο επεκτατικός χαρακτήρας των Ελλήνων εκείνης της εποχής

Οπότε παρατηρείται μια εξάπλωση διαμέσου της Μεσογείου που καθοδηγείται από την αναζήτηση τροφής και μεταλλευμάτων. Προφανώς, αυτή η μεταβολή της ελληνικής οικονομίας επιφέρει και αλλαγές στην κοινωνική δομή. Ο όρος πόλη-

κράτος χρησιμοποιείται για να δηλώσει την έννοια του χώρου και συγχρόνως της οργανωμένης κοινότητας ανθρώπων κάτω από μια εξουσία. Η οργάνωση εμπεριέχει την κυριαρχία σε κάποιο χώρο (όρια της πόλης) και τη συγκρότηση εξουσίας για την αντιμετώπιση των κοινών προβλημάτων. Η 'Πόλη' διαμορφώνει διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των ανθρώπων και αναδιαμορφώνει την κοινωνική και πολιτιστική τους ζωή. Ο Jean-Pierre Vernant (1992) στο βιβλίο του 'Οι Απαρχές της Ελληνικής Σκέψης' αναφέρει ότι «Αυτό που ενέχει **το σύστημα της πόλης είναι εν πρώτοις μια εκπληκτική υπεροχή του προφορικού λόγου** έναντι όλων των άλλων μέσων εξουσίας. Γίνεται το κατ' εξοχήν πολιτικό εργαλείο, το κλειδί κάθε εξουσίας μέσα στο κράτος, το μέσο διοίκησης και κυριαρχίας πάνω στους άλλους. Η δύναμη αυτή του προφορικού λόγου- που οι Έλληνες θα τον κάνουν θεότητα: **Πειθώ, η πειστική δύναμη-…… είναι η κατ' αντιπαράθεση συζήτηση, ο διάλογος, η επιχειρηματολογία.**» (σελ. 79-80).

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της 'Πόλης' είναι ότι όλα διαδραματίζονται δημόσια, και οι πολίτες έχουν τον πλήρη έλεγχο όλων των διαδικασιών που αφορούν τη ζωή τους. Άρα, επομένως μπορούν όχι μόνο να διατυπώνουν τις απόψεις τους ,αλλά και να τις στηρίζουν σε βάσιμα επιχειρήματα αποδεικνύοντας συνάμα τα λεγόμενα τους. Έτσι αναδεικνύεται η σημασία του λόγου και η στενή του σχέση με την πολιτική. Η πόλη - κράτος αδιαμφισβήτητα αποτελεί μοναδικό πολιτικό φαινόμενο αφού για πρώτη φορά η πολιτική ζωή είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις έννοιες της ελευθερίας , της συμμετοχής και της δικαιοσύνης . Δίνεται έμφαση στην προσωπική ελευθερία του πολίτη, και τη συμμετοχή του στις πολιτικές, δικαστικές, θρησκευτικές και αμυντικές λειτουργίες της πόλης καθώς επίσης, αναλαμβάνει τις ευθύνες του για τη διαχείριση των κοινών και την υπεράσπιση της ανεξαρτησίας του τόπου του. Η ρητορική και η σοφιστική αποδεικνύονται σημαντικές στο να βοηθήσουν τον πολίτη στο χειρισμό του λόγου και τους κανόνες που αυτός θα έπρεπε να ακολουθεί.

Ο προφορικός λόγος όμως δεν επαρκεί αν δεν συνοδεύεται και από τη γραφή που θα επιτρέψει την διάδοση των γνώσεων. Τα πρώτα δείγματα γραφής στην Ελλάδα είναι συλλαβικές γραφές (κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε μια συλλαβή) που

πρωτοεμφανίζονται το 2000 π.Χ. Οι πιο γνωστές είναι η γραμμική Α και η γραμμική Β. Οι συλλαβικές γραφές των Μινωιτών και των Μυκηναίων απαιτούσαν ειδική εκπαίδευση και χρησιμοποιούνταν αποκλειστικά στα ανακτορικά κέντρα εξουσίας για διοικητικούς σκοπούς. Τον 8ο π. χ. αιώνα κάνει την εμφάνισή του για πρώτη φορά το ελληνικό αλφάβητο που αποτελεί τροποποίηση του φοινικικού. Η φοινικική προέλευση του ελληνικού αλφαβήτου πιστοποιείται όχι μόνον από την ομοιότητα των γραμμάτων και την πανομοιότυπη διάταξή τους στα αντίστοιχα αλφαβητικά συστήματα, αλλά και από τις ονομασίες τους. Το αλφαβητικό σύστημα ήταν απλό στη χρήση του, κι έτσι μεγάλα τμήματα του πληθυσμού μπόρεσαν να αποκτήσουν γνώσεις γραφής και ανάγνωσης. Μαζί με την αποστήθιση και την απαγγελία των ομηρικών επών αποτελούν βασικά στοιχεία της ελληνικής παιδείας.

Από τον 6ο αι. π.Χ. και εξής, το αλφάβητο χρησιμοποιείτο τόσο σε δημόσιες επιγραφές, νομίσματα αλλά και σε επιτάφιες στήλες, αγγεία, πήλινα πλακίδια κτλ. Άλλη σημαντική ένδειξη της διάδοσης της γραφής στην Αθήνα του 5ου αι. π.Χ. είναι η χρήση όστρακών (θραύσματα αγγείων) όπου χαράσσονταν τα ονόματα υποψηφίων για εξοστρακισμό και που έχουν βρεθεί στο χώρο της Αρχαίας Αγοράς. Οι Έλληνες, βέβαια, έγραφαν και σε άλλα υλικά, όπως το ξύλο, το δέρμα, τον πάπυρο και την περγαμηνή. Σύμφωνα με τον Jean-Pierre Vernant, όταν κάποια άτομα θα αποφασίσουν να καταστήσουν δημόσια τη γνώση τους μέσω της γραφής είναι γιατί θέλουν να το καταστήσουν κοινό αγαθό της πόλης. Με τη διάδοσή της η σοφία τους αποκτά νέα υπόσταση και νέα αντικειμενικότητα: αναγορεύεται από την ίδια την αλήθεια και υποβάλλεται στην κρίση όλων των πολιτών. Και κάπου εκεί κάνει την εμφάνισή της η φιλοσοφία η οποία χρησιμοποιεί νέα νοητικά εργαλεία όπως τα μαθηματικά και άλλοτε εμφανίζεται ξεκάθαρη στη δημόσια ζωή ενώ σε άλλες περιπτώσεις , όπως στη σχολή των Πυθαγορείων, με μεγάλη δόση μυστικισμού και άρνηση να χρησιμοποιήσει στο γραπτό λόγο τα συμπεράσματά της.

Σε αυτό το περιβάλλον θα κάνουν την εμφάνισή τους οι Επτά Σοφοί που άρχισαν να θέτουν σε αμφισβήτηση τα εδραιωμένα παλαιά αξιώματα και να επιζητούν να κατανοήσουν το μυστήριο της ύπαρξης, ώστε να δώσουν απαντήσεις

σε θεμελιώδη ερωτήματα που απασχολούν τον Άνθρωπο ακόμη και σήμερα. Ο κατάλογός τους ποικίλει ανάλογα με το συγγραφέα που τον προτείνει. Είναι βέβαια χαρακτηριστικό ότι ο Θαλής ο Μιλήσιος εμπεριέχεται σε όλους τους καταλόγους και περιγράφεται ως άνθρωπος με πλατιές γνώσεις και μεγάλη επινοητικότητα. Ο Jean-Pierre Vernant (1992) αναφέρει ‘ … η λίγο πολύ μυθική παράδοση των Επτά Σοφών μας επιτρέπει να γνωρίσουμε και να κατανοήσουμε μια στιγμή κοινωνικής ιστορίας. Στιγμή κρίσης που αρχίζει στα τέλη του 7ου αιώνα και φουντώνει τον 6ο αιώνα, περίοδο ταραχών και εσωτερικών συγκρούσεων , της οποίας αντιλαμβανόμαστε μερικούς από τους οικονομικούς όρους και την οποία οι Έλληνες έζησαν , στο θρησκευτικό και ηθικό επίπεδο, ως ένα είδος αμφισβήτησης ολόκληρου του συστήματος αξιών…’ (σελ.102)

1,3 Η ΑΘΗΝΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΚΛΗ

Τον 5ο αιώνα π.Χ. μετά τη νίκη των ελληνικών δυνάμεων επί των Περσών έχουμε την άνοδο της ναυτικής δύναμης της Αθήνας και τη μετατροπή της Δηλιακής Συμμαχίας σε «Αθηναϊκή Ηγεμονία», κάτι που οδήγησε την πόλη του στην μεγαλύτερη ακμή της ιστορίας της . Το δημοκρατικό πολίτευμα πλαισιωμένο από τη Βουλή και τον Άρειο Πάγο εγκαθιδρύεται στην αθηναϊκή πόλη, η οποία συνάμα αποτελεί πρόσφορο έδαφος για τη πλήρη άνθιση των γραμμάτων και των τεχνών που αναπτύσσονται εκείνη την περίοδο και θα επηρεάσουν και θα διαμορφώσουν ολόκληρη την Ελλάδα και ολόκληρο τον κόσμο. Τεράστια έργα ανοικοδομούνται εκείνη την περίοδο που αλλάζουν τη μορφή της πόλης με αποτέλεσμα να εκπροσωπεί το πρότυπο κοινωνικής, οικονομικής και πολιτειακής οργάνωσης. Η Αθήνα βρίσκεται στο ζενίθ της ως επικεφαλής μιας πραγματικής αυτοκρατορίας και μέσα σε αυτή την οικονομική και πολιτιστική άνθηση αναπτύσσεται μεγάλη πνευματική δραστηριότητα.

Εκείνη την εποχή Σοφοκλής , Ευριπίδης και Αριστοφάνης κυριαρχούν με τα έργα τους στο θέατρο , οι ιστορικοί Ηρόδοτος και Θουκυδίδης βρίσκονται στην Αθήνα και ο Σωκράτης διδάσκει νεαρούς αριστοκράτες. Στην πόλη συρρέει πλήθος

ταλαντούχων ανθρώπων από τις αποικίες και όλον τον τότε γνωστό κόσμο. Μέσα σε αυτό το κλίμα κάνουν την παρουσία τους οι σοφιστές. ‘ Το ίδιο τους το όνομα μαρτυρεί τους επαγγελματίες της νόησης, που είχαν ούτε λίγο ούτε πολύ την απαίτηση να διδάσκουν πως χρησιμοποιείται. Δεν ήταν «σοφοί»- λέξη που δεν καθορίζει επάγγελμα αλλά μια κατάσταση, ούτε «φιλόσοφοι»-λέξη που υποβάλλει την υπομονετική επιδίωξη της αλήθειας περισσότερο παρά την αισιόδοξη εμπιστοσύνη στην προσωπική ευθυκρισία.’ (Romily,1994, σελ.23)

Ο Πρωταγόρας , ο Γοργίας και αργότερα άλλοι κάνουν την εμφάνισή τους, ενώ η συστηματική θεωρητική μόρφωση ήταν ανύπαρκτη στην Αθήνα μέχρι τότε. Οι Αθηναίοι εμπιστεύονταν τη διαπαιδαγώγηση των παιδιών τους στον παιδοτρίβη, τον κιθαριστή και των γραμματιστή. Ο πρώτος εξασκεί τα παιδιά στα αθλήματα (η τελειότητα του σώματος ήταν μέρος του ανθρώπινου ιδανικού), ο δεύτερος τους διδάσκει μουσική και χορό και ο τρίτος γραφή και ανάγνωση (κυρίως διδάσκονταν και αποστήθιζαν τα ομηρικά έπη). Τότε κάνουν την εμφάνισή τους οι σοφιστές, περιοδεύοντες δάσκαλοι που πουλούν τη θεωρητική γνώση, διδάσκοντας στους μαθητές τους τον λόγο , τον δημόσιο λόγο, δηλαδή πώς να επιχειρηματολογούν σε μία δημόσια συζήτηση στην εκκλησία του δήμου. Ο Πρωταγόρας αυτοπροσδιορίζεται ως διδάσκαλος της ‘πολιτικής τέχνης’ ενώ ο Γοργίας της ‘ρητορικής τέχνης’.

Βρισκόμαστε σε μία εποχή με ισχυρό δημοκρατικό σύστημα όπου κάθε πολίτης είχε ψήφο και λόγο στις κρατικές αποφάσεις, καθώς ήταν σημαντικό να μπορεί να κανείς να μιλήσει δημόσια προβάλλοντας επιχειρήματα με σκοπό να πείσει τους συμπολίτες του. Οπότε, όποιος είχε τη δύναμη του λόγου, είχε ένα ισχυρό προβάδισμα στα κοινά και μεγάλη επιρροή στην κοινωνική και πολιτική ζωή. Επομένως, η ρητορική τέχνη δηλαδή, η τέχνη της ομιλίας ήταν σημαντικό να την υιοθετήσουν όλοι οι πολίτες. Η ρητορική είναι ένα από τα πεδία που ασχολούνται όλοι οι σοφιστές. Σύμφωνα με τον Δοξιάδη οι Έλληνες γνώριζαν τη σημασία της ρητορικής στην διαμόρφωση του κόσμου τους, θεωρώντας την δική τους ανακάλυψη. Αυτό το στηρίζει σε μία φράση του Ισοκράτη ‘ Επειδή αναπτύξαμε την δυνατότητα να πείθουμε ο ένας τον άλλο σχετικά με ότι θέλαμε, όχι μόνο έχουμε

απαλλαχθεί από από έναν άγριο τρόπο ζωής, αλλά ερχόμενοι να ζήσουμε μαζί δημιουργήσαμε πόλεις θεσπίσαμε νόμους και ανακαλύψαμε τις τέχνες και τα επαγγέλματα'.

Ο Πρωταγόρας θέτει τις βάσεις για τη διαλεκτική επιχειρηματολογία, επικεντρώνοντας την προσοχή του στη γλωσσική ορθότητα , αφού οι αναζητήσεις του θα μπορούσαν να τις χαρακτηριστούν ως πιο επιστημονικές. Ο Πρωταγόρας έγινε γνωστός για τις αντιλογίες του (λεκτικές αντιπαραθέσεις) που είχαν σαν βάση ότι για κάθε θέση υπάρχει μια αντίθεση και κάθε ένας από τους ομιλητές διάλεγε να υποστηρίξει μια από τις δύο. Οι αντιλογίες προϋπήρχαν της σοφιστικής, καθώς χρησιμοποιούνταν ήδη στα δικαστήρια και υπάρχουν τόσο στα ΄έργα του Σοφοκλή όσο και του Αριστοφάνη. Αυτή η μέθοδος προέρχεται από του ελεάτες φιλόσοφους. Θα δούμε αργότερα πως η ελεατική φιλοσοφία επηρέασε τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

Οι σοφιστές συντάραξαν την ελληνική κοινωνία και την ελληνική σκέψη, αφού ήταν οι πρωτεργάτες της κατεδάφισης του κατεστημένου. Αναζητώντας την αλήθεια μέσα από τη λογική, αμφισβητούν την ύπαρξη των θεών, της ηθικής και της δικαιοσύνης και κρίνουν τα πάντα μέσα σε ένα πλαίσιο λογικών επιχειρημάτων. Αυτό ήταν λογικό να προκαλέσει σφοδρές αντιδράσεις απέναντι στους σοφιστές κάτι που γίνεται φανερό στα έργα του Αριστοφάνη που λοιδορεί τους σοφιστές, όπως και στον Πλάτωνα που χρησιμοποίησε το έργο του για να δείξει την υπεροχή του λόγου και της σκέψης του Σωκράτη απέναντι στους σοφιστές.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι είχαν αναπτυχθεί μορφές ρητορικής και σε άλλους αρχαίους πολιτισμούς πριν τους Έλληνες , τόσο στους Αιγύπτιους όσο και στους Κινέζους. Όμως η χρήση του επιχειρήματος στην ελληνική ρητορική τέχνη είναι μοναδική. Το συμπέρασμα του Zulick, όπως αναφέρεται στο κείμενο του Δοξιάδη, είναι ότι ελληνική ανύψωση και ο εξορθολογισμός της ρητορικής τέχνης δεν μπορεί να θεωρηθεί καθολική νόρμα. Αλλά είναι μια συγκεκριμένη ανάπτυξη που αφορά μια μικρή κοινωνία σε ένα συγκεκριμένο σημείο της ιστορίας .

Οι Δοξιάδης και Σιάλαρος (2013) αναγνωρίζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά του ρητορικού λόγου των Ελλήνων:

α) Προβάλλει ένα συγκεκριμένο αφηγηματικό ύφος ως απεικόνιση μιας ακολουθίας

πραγματικών γεγονότων , με τη μορφή που ταιριάζει καλύτερα τους στόχους του ομιλητή,

β) Επειδή δίδεται σε ένα αγωνιστικό περιβάλλον , πρέπει να λάβει υπόψη, σε κάθε στιγμή πιθανές σοβαρές αντιδράσεις,

γ) Η αποτελεσματικότητα μιας ομιλίας καθορίζεται από την ψήφο ενός μεγάλου αριθμού πολιτών,

δ) Οι ομιλητές λειτουργούν με βάση την υπόθεση ότι οι λέξεις έχουν συγκεκριμένες , σταθερές έννοιες , στις οποίες αναφέρονται - αν και φυσικά αντίθετοι ομιλητές συχνά διαφωνούν σχετικά με το τι είναι αυτές οι έννοιες ,

ε) Ο ομιλητής θεωρεί ότι υπάρχουν καθορισμένες γενικές αρχές οι οποίες δίνονται είτε σε γραπτή μορφή (νόμοι) είτε σε άγραφη (γνώμαι)

στ) Λόγω του μεγάλου αριθμού των ομιλιών που παράγονται ήταν αναγκαία η τυποποίηση.

Σε αυτό το κοινωνικό περιβάλλον που περιγράψαμε αναπτύχθηκαν τα παραγωγικά μαθηματικά. Διαβάζουμε σε συγγραφείς για συζητήσεις που αφορούν μαθηματικά μεταξύ φιλοσόφων και μαθηματικών και μπορούμε να εικάσουμε το ρόλο των μαθηματικών στην εκπαίδευση των νέων. Η εκτίμηση που έδειχναν στα θεωρητικά μαθηματικά οι περισσότεροι φιλόσοφοι και η εμφάνιση των μαθηματικών στους διαλόγους (κυρίως του Πλάτωνα) δείχνει την περίοπτη θέση που είχαν αποκτήσει στην κοινωνία. Βέβαια δεν γνωρίζουμε τη θέση των θεωρητικών μαθηματικών στην εκπαίδευση των νέων. Τα πιο συνηθισμένα μέρη για μαθηματική δραστηριότητα θα πρέπει να ήταν οι σχολές που δίδασκαν κυρίως φιλοσοφία και ρητορική. Για παράδειγμα στο διάλογο του Πλάτωνα 'Μένων' βλέπουμε τον Σωκράτη να διδάσκει έναν νέο χρησιμοποιώντας διαγράμματα .

Τα παραγωγικά μαθηματικά αναπτύχθηκαν την περίοδο των σοφιστών , όταν η Ελληνική, και κυρίως η Αθηναϊκή κουλτούρα θεωρούσε ανώτερο προσόν την ικανότητα να μπορεί κάποιος να πείθει τους άλλους για τις θέσεις του σε δημόσιους διαλόγους. Είναι εμφανές σύμφωνα με τον Sidoli (2012) ότι η μαθηματική πρακτική αρχικά εμπεριείχε τη λεκτική παρουσίαση επιχειρημάτων σε δημόσιους χώρους. Οπότε είναι φανερό ότι με τα μαθηματικά θα πρέπει να ασχολήθηκε ένα μικρό μέρος της άρχουσας τάξης που θα παρακολουθούσε διαλέξεις που αφορούσαν τη γεωμετρία και την αριθμητική και ένας ακόμα μικρότερος αριθμός μαθητών θα πρέπει να ασχολήθηκε με τα παραγωγικά μαθηματικά. Ο Cajori (1909) στο βιβλίο του 'Ιστορία των μαθηματικών' αναφέρεται στα μαθηματικά των σοφιστών. Οι σοφιστές ασχολήθηκαν με τη γεωμετρία του κύκλου με την οποία δεν είχαν ασχοληθεί οι Πυθαγόρειοι. Σχεδόν όλες οι ανακαλύψεις τους έγιναν ως επακόλουθο των άπειρων προσπαθειών τους να λύσουν τα ακόλουθα 3 διάσημα προβλήματα:

1) Η τριχοτόμηση της γωνίας

2) Ο διπλασιασμός του κύβου

3) Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Η διχοτόμηση της γωνίας ήταν ένα από τα ευκολότερα προβλήματα στη γεωμετρία . Η τριχοτόμηση όμως παρουσίασε τεράστιες δυσκολίες. Η ορθή γωνία είχε τριχοτομηθεί από τους Πυθαγόρειους, αλλά το γενικό πρόβλημα υπερέβαινε τα όρια της στοιχειώδους γεωμετρίας. Από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με την τριχοτόμηση της γωνίας ήταν ο Ιππίας ο Ηλείος (2ο ήμισυ του 5 π.Χ. αιώνα), σοφιστής, μαθηματικός και δάσκαλος της αριστοκρατίας της Αθήνας. Έδωσε λύση στο πρόβλημα της τριχοτόμησης χρησιμοποιώντας μια καμπύλη την 'τετραγωνίζουσα' αλλά απέτυχε να το καταφέρει με τη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Ο Πλάτωνας του έχει αφιερώσει δύο διαλόγους, γεγονός που καταδεικνύει πόσο σημαντικό πρόσωπο ήταν για εκείνη την εποχή.

Αναφορικά, με το δεύτερο πρόβλημα οι Πυθαγόρειοι είχαν ήδη δείξει ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι η πλευρά ενός άλλου τετραγώνου που έχει

διπλάσιο εμβαδό. Αυτό θα πρέπει να ήταν το έναυσμα για να τους απασχολήσει ο διπλασιασμός του κύβου, δηλαδή να υπολογίσουν την ακμή του κύβου που θα είχε διπλάσιο όγκο από τον αρχικό. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι γνωστό και ως 'Δήλιο πρόβλημα'. Ο πρώτος που ασχολήθηκε με το πρόβλημα ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.) ένας από τους τελευταίους οπαδούς του Πυθαγόρα. Είναι ο πρώτος συγγραφέας βιβλίου γεωμετρίας και μέρος του έργου του διασώθηκε από τον Σιμπλίκιο. Εξάλλου πολλές προτάσεις στο ΙΙΙ βιβλίο του Ευκλείδη αποδίδονται στον Ιπποκράτη. Είναι πολύ γνωστός για την επινόηση του μηνίσκου και τον τετραγωνισμό του. Για το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ο Ιπποκράτης ανέφερε ότι θα πρέπει ανάμεσα στα γνωστά μεγέθη την ακμή του δοσμένου κύβου α και την διπλάσιά αυτής 2α να παρεμβληθούν δύο μέσοι ανάλογοι χ και ψ ώστε να ισχύει α/χ=χ/ψ=ψ/2α .Το πρόβλημα όμως της παρεμβολής είναι εξίσου δύσκολο ωστόσο είχε γίνει το πρώτο βήμα.

Με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ασχολήθηκε ο Αντιφών ο Αθηναίος (5ος αιώνας π.Χ.) ο οποίος ήταν σοφιστής σύγχρονος του Σωκράτη και ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την διαδικασία της εξάντλησης. Πίστευε ότι είναι δυνατόν να επιτύχει τον τετραγωνισμό του κύκλου με εγγραφή σε αυτόν αρχικά τετραγώνου μετά οκταγώνου κ.ο.κ., μέχρις ότου η πλευρά του πολυγώνου συμπέσει με τον κύκλο. Με το ίδιο πρόβλημα ασχολήθηκε και ο Βρύσων ο Ηρακλειώτης σοφιστής και μαθηματικός σύγχρονος του Αντιφώντος θεωρώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα στον κύκλο πολύγωνα.

Η θεωρητική αυτή γνώση των μαθηματικών δεν εμφανίστηκε ξαφνικά αλλά βασίστηκε και διαφοροποιήθηκε βέβαια από την πρακτική γνώση που προϋπήρχε. Κάτι τέτοιο είναι εμφανές τόσο στα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν , στα διαγράμματα αλλά και σε κάποιες λέξεις που υποδηλώνουν μεταφορά τους από την πρακτική χρήση στη θεωρητική. Προφανώς, υπήρχαν άτομα που κινούνταν με ευκολία ανάμεσα στα πρακτικά και στα θεωρητικά μαθηματικά όπως για παράδειγμα ο Αρχιμήδης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΣΤΑΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

2.1 ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

Ιδρυτής της σχολής των πυθαγορείων είναι ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (586-500 π.Χ.) ο οποίος εγκατέλειψε τη Σάμο και εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα στην ηλικία των 40 ετών. Υπάρχουν ελάχιστα στοιχεία που να αφορούν τις μαθηματικές δραστηριότητες του Πυθαγόρα. Οι πρώτοι φιλόσοφοι και ιστορικοί αναφέρονται με θαυμασμό στο πρόσωπό του ως τον πιο ικανό φιλόσοφο μεταξύ των Ελλήνων. Ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος που ονόμασε τον εαυτό του "φιλόσοφο".

Ήταν αριστοκρατικής καταγωγής και ποιμενάρχης (μυσταγωγός) της αριστοκρατικής πολιτικής στην Κάτω Ιταλία. Δημιούργησε μια μυστικιστική αδελφότητα με θρησκευτικό, φιλοσοφικό και πολιτικό υπόβαθρο. Η σχολή του προσομοιάζει σε ιερατείο ανατολικής κοινωνίας που προστατεύει την διδασκαλία του από κάθε εξωτερική επέμβαση ‘βέβηλων’ και την περιορίζει σε ένα στενό κύκλο ακροατών. Αποτελεί τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα τη διανόηση ανατολικών λαών και την αρχαία ελληνική διανόηση.

Οι μαθητές της σχολής γίνονται δεκτοί κατόπιν αυστηρών μυήσεων όπου στο κατώτερο επίπεδο μύησης ήταν η εκμάθηση της σιωπής. Παρά τη μυστικότητα είχαν γίνει από νωρίς αρκετά πράγματα γνωστά για τα βασικά δόγματα της σχολής. Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο βασικό δόγμα της σχολής είναι ότι η ψυχή είναι αθάνατη και η καθαρότητά της μπορούσε να επιτευχθεί με δύο τρόπους : πρώτον διανύοντας μια ενάρετη ζωή και δεύτερον τροφοδοτώντας την ψυχή με τα αποτελέσματα της ενασχόλησης με τη μελέτη της δομής του κόσμου. Τα δομικά υλικά ήταν οι φυσικοί αριθμοί και όλες οι σχέσεις μπορούσαν να εκφραστούν ως σχέσεις λόγων φυσικών αριθμών. Δηλαδή κατασκεύασαν και πίστεψαν σε μια κοσμογονία με αριθμητικό χαρακτήρα. Το σύμπαν δημιουργήθηκε από τον αριθμό

ένα μετά από διαίρεσή του που πραγματοποιήθηκε από την εισπνοή απείρου. Το είναι ταυτόσημο με τον αριθμό ένα, ενώ το μη-είναι είναι ταυτόσημο με το κενό. Ο αριθμός ένα αντιπροσώπευε το ον, από αυτό το ένα δημιουργήθηκε με διαίρεση ο αριθμός δύο που είναι ταυτόσημος με την ευθεία γραμμή. Από το δύο προκύπτει το τρία που είναι ταυτόσημο με το τρίγωνο (το απλούστερο επίπεδο σχήμα) και από αυτό το τέσσερα που ταυτίζεται με το τετράεδρο το απλούστερο στερεό. Χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο απόσπασμά του Αριστοτέλη που αφορά τους Πυθαγόρειους.

Ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι πάντων. ἐπεὶ δὲ τούτων οἱ ἀριθμοὶ φύσει πρῶτοι, ἐν δὲ τούτοις ἐδόκουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλὰ τοῖς οὖσι καὶ γιγνομένοις, μᾶλλον ἢ ἐν πυρὶ καὶ γῇ καὶ ὕδατι, ὅτι τὸ μὲν τοιονδὶ τῶν ἀριθμῶν πάθος δικαιοσύνη τὸ δὲ τοιονδὶ ψυχή τε καὶ νοῦς ἕτερον δὲ καιρὸς καὶ τῶν ἄλ-λων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως, ἔτι δὲ τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθ-μοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους, - ἐπεὶ δὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιῶσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, τὰ τῶν ἀριθμῶν στοι-χεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἁρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμόν· καὶ ὅσα εἶχον ὁμολογούμενα ἔν τε τοῖς ἀριθμοῖς καὶ ταῖς ἁρμονίαις πρὸς τὰ τοῦ οὐρανοῦ πάθη καὶ μέρη καὶ πρὸς τὴν ὅλην διακό-σμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήρμοττον.

Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 985b, 24-986a,5

Μετάφραση

Στον καιρό αυτών των φιλοσόφων, και πρωτύτερα από αυτούς οι καλούμενοι Πυθαγόρειοι καταπιάστηκαν πρώτοι με τα μαθηματικά, και τα προήγαγαν. Και αφού έζησαν και μεγάλωσαν μέσα σε αυτά, έφτασαν στην αντίληψη ότι οι αρχές των μαθηματικών είναι αρχές όλων των όντων. Επειδή όμως στα μαθηματικά οι αριθμοί είναι εκ φύσεως πρώτοι, και επειδή μέσα στους αριθμούς νόμιζαν ότι διέκριναν πολλά απεικονίσματα που αντιστοιχούσαν περισσότερο με τα όντα και τα γινόμενα, παρ' όσον το πυρ ή η γη και το νερό, ότι δηλαδή το τέτοιο δα πάθημα των αριθμών είναι δικαιοσύνη, το τέτοιο δα ψυχή και νους, ένα άλλο είναι ο κρίσιμος χρόνος και γενικά καθένα από τα άλλα κατά τον ίδιο τρόπο. Επειδή επί πλέον έβλεπαν ότι τα πάθη και οι αναλογίες των αρμονιών, βρίσκονται σε αριθμητικές σχέσεις- μια λοιπόν και τους εφαίνοντο ότι εξ' ολοκλήρου η φυσική κατασκευή όλων των άλλων πραγμάτων είναι φτιαγμένη καθ' ομοίωση με τους αριθμούς, και μία και, από το άλλο μέρος, φαίνονταν οι αριθμοί πρώτοι από όλη τη φύση, ότι δηλαδή είναι οι πρωταρχικές πραγματικότητες του Σύμπαντος, έφτασαν στην αντίληψη ότι οι αρχές των αριθμών είναι τα στοιχεία όλων των όντων, και ολόκληρος ο ουρανός είναι αρμονία και αριθμός. Και όσες αντιστοιχίες είχαν βρεί μέσα στους αριθμούς καις τις αρμονίες της μουσικής που ταίριαζαν με τα φαινόμενα και τα μέρη του ουρανού με την όλη κοσμική τάξη τις συνένωναν και τις έβαζαν στο σύστημά τους.

Μετάφραση Ν. Κυργιόπουλος

Σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους ο κόσμος αποτελείται από διακριτές ψηφίδες κάτι που σήμερα θα αντιστοιχούσε στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Αυτός είναι ο λόγος που συνήθιζαν να αναπαριστούν τους αριθμούς με μικρά χαλίκια που τα τοποθετούσαν κατάλληλα σε μία επίπεδη επιφάνεια. Οι έννοιες περιττός και άρτιος ήταν συνδεδεμένες με το βασικό εννοιολογικό δίπολο των Πυθαγορείων «πέρας-άπειρο». Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι ο κόσμος βασιζόταν σε δέκα βασικές αρχές.

«ἕτεροι δὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι

τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας,

πέρας *[καὶ]* ***ἄπειρον****,*

περιττὸν *[καὶ]* ***ἄρτιον****,*

ἓν *[καὶ]* ***πλῆθος****,*

δεξιὸν *[καὶ]* ***ἀριστερόν****,*

ἄρρεν *[καὶ]* ***θῆλυ****,*

ἠρεμοῦν *[καὶ]* ***κινούμενον****,*

εὐθὺ *[καὶ]* ***καμπύλον****,*

φῶς *[καὶ]* ***σκότος****,*

ἀγαθὸν *[καὶ]* ***κακόν****,*

τετράγωνον *[καὶ]* ***ἑτερόμηκες****˙»*

Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 986 α

Αξίζει να επισημανθεί ότι το δίπολο πέρας –άπειρο κατείχε καθοριστική θέση στον αρχαίο Ελληνικό πολιτισμό που δεν αγαπούσε το μη πεπερασμένο. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα ότι ακόμα και οι θεοί που λατρεύονταν παρουσιάζονται με πεπερασμένες δυνατότητες όπως ο Ποσειδώνας που περιορίζεται στη θάλασσα.

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι η μαθηματική επιστήμη πρέπει να χωρίζεται σε τέσσερις κλάδους, την αριθμητική, την μουσική, την γεωμετρία και την αστρονομία. Ο Θέων ο Σμυρναίος αναφέρει ότι η μαθηματική κατασκευή της μουσικής κλίμακας είναι εργασία του ίδιου του Πυθαγόρα. Επηρεασμένοι από τις αριθμητικές αναλογίες των μουσικών διαστημάτων έδωσαν έμφαση στις αριθμητικές σχέσεις των πραγμάτων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αναπτύξουν μια μεταφυσική αντίληψη για τον αριθμό και τις αριθμητικές σχέσεις που διαπερνούσε τόσο την κοσμογονία και την αστρονομία, όσο τη μουσική και την ηθική. Αυτή η αριθμολογική θεώρηση του φυσικού κόσμου και της ανθρώπινης συμπεριφοράς δεν άφησε ανεπηρέαστη τη Γεωμετρία, όπου συσχετίζονταν π.χ. το σημείο με τη μονάδα, η γραμμή με τη δυάδα, η επιφάνεια με την τριάδα και το στερεό με την τετράδα. Ανάλογα με τους αριθμούς έτσι και τα γεωμετρικά σχήματα συμβόλιζαν διάφορες έννοιες, όπου η ευθεία παριστάνει τη γνώση και τη ζωή και ο κύκλος το

θείο. Ίσως σε αυτή την αντίληψη να βρίσκεται και η απαίτηση να λύνονται τα γεωμετρικά προβλήματα με κανόνα και διαβήτη.

Η μαθηματική σκέψη των Πυθαγορείων χαρακτηρίζεται αντιεμπειρική, αφού αφετηρία της αποτελεί η νοητική θεώρηση και όχι η αντίληψη των αισθήσεων και η ενόραση. Συγκεκριμένα αντιλαμβάνονταν τον αριθμό ως ένα καθαρά νοητικό εργαλείο, που χωρίς αυτό ο κόσμος δεν μπορεί να γίνει αντικείμενο γνώσης. Ο αριθμός παίζει το ρόλο του διαμεσολαβητή ανάμεσα στις αισθητηριακές εντυπώσεις και την ψυχή του ανθρώπου, δηλαδή οργανώνει το υλικό που προσφέρει η αισθητηριακή αντίληψη και του δίνει υπόσταση και μαθηματικές αναλογίες. Ανάπτυξαν τη μαθηματική σκέψη όχι με αφετηρία την αντίληψη των αισθήσεων ή την ενόραση αφού η εποπτική αντίληψη έπαιζε δευτερεύοντα ρόλο γι' αυτούς.

Η συμβολή των Πυθαγορείων στην ανάπτυξη των Μαθηματικών είναι καθοριστική.

- Οι Πυθαγόρειοι ανάπτυξαν την αριθμολογία. Στην κατεύθυνση αυτή διέκριναν τους αρτίους από τους περιττούς αριθμούς, τους πρώτους από τους σύνθετους αριθμούς ,τους τέλειους και τους φίλους αριθμούς. Ασχολήθηκαν με κάποιες ιδιότητες αυτών των αριθμών, όπως π.χ. το άθροισμα άρτιων αριθμών είναι άρτιος ή το περιττό άθροισμα περιττών είναι περιττός.

- Εξέτασαν τους λόγους και τις αναλογίες αριθμών, επηρεασμένοι από τις αναλογίες των μουσικών χορδών και ανέφεραν τρεις αναλογικές ισότητες : την αριθμητική, τη γεωμετρική και την αρμονική.

- Ασχολήθηκαν με τη γεωμετρία και σε αυτούς αποδίδονται οι αποδείξεις διαφόρων γεωμετρικών προτάσεων που εμφανίζονται στα στοιχεία του Ευκλείδη.

- Ανακάλυψαν την ασσυμετρία. (Ο αριθμός √2 δεν παριστάνεται με λόγο θετικών ακέραιων αριθμών α/β)

Σύμφωνα με τον Szabo(1973) η ανακάλυψη της ασσυμετρίας από τους Πυθαγορείους οδήγησε στη μεταβολή της επιστήμης των Ελληνικών μαθηματικών σε μια νέα τεχνοτροπία απόδειξης με μια καθαρά αντιεμπειρική και

αντιπαραστατική τάση. Σύμφωνα με τον ίδιο η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης της πρώτης Ελληνικής εποχής αποτελείται από τις ακόλουθες βαθμίδες.

1η Βαθμίδα : Η διδασκαλία των μουσικών αναλογιών η οποία δημιούργησε και τις ειδικές εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν αργότερα στη διδασκαλία των αναλογιών. Σε αυτή τη βαθμίδα διακρίνει δύο περιόδους, την αρχαιότερη και την νεότερη. Κατά την πρώτη περίοδο στην επιστήμη της μουσικής πειραματίζονταν μόνο με το μονόχορδο. Από αυτή την εποχή προέρχονται οι εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν αργότερα στη διδασκαλία των αναλογιών όπως «διπλάσιο διάστημα» (2:1) , «ημιόλιο διάστημα» (3:2) και «επίτριτον διάστημα» (4:3). Την δημιουργία του μουσικο-μαθηματικού όρου «λόγος».

2η Βαθμίδα : Σε αυτή τη βαθμίδα, η μουσική διδασκαλία των αναλογιών των ακέραιων αριθμών εφαρμόστηκε και εξετάστηκε στην Αριθμητική. Ο Szabo υποστηρίζει ότι η Αριθμητική του Ευκλείδη έχει μουσική προέλευση. Οι αριθμοί συμβολίζονται με ευθείες (οι ευθείες αναπαριστούσαν τις χορδές) και επίσης χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ανθυφαίρεσης που αρχικά είχε διαμορφωθεί στην επιστήμη της μουσικής.

3η Βαθμίδα : Εφαρμογή της διδασκαλίας των αναλογιών στη Γεωμετρία μετά την εφαρμογή τους στην Αριθμητική. Μέσω αυτής δόθηκε ο ορισμός της ομοιότητας των ευθυγράμμων τμημάτων και αμέσως μετά η κατασκευή του μέσου αναλόγου με γεωμετρικό τρόπο.

4η Βαθμίδα : Η ανακάλυψη της ασσυμετρίας (που σύμφωνα με τον Tannery προέρχεται τόσο από την γεωμετρία όσο και από τη θεωρητική μουσική) αποτέλεσε την αρχή της παραγωγικής μεθόδου και την αρχή για τη θεωρητική θεμελίωση των παραγωγικών μαθηματικών υπό την επίδραση των Ελεατών.

Με την ανακάλυψη της ασσυμετρίας οι Πυθαγόρειοι βρέθηκαν αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα που έθεσε σε αμφισβήτηση όλη την οντολογία τους. «Η κρίση καταστροφική για τους Πυθαγόρειους ενσωματώθηκε δημιουργικά στο γνωστικό corpus των ερχόμενων γενεών και οδήγησε τελικά μετά από αιώνες επώδυνου τοκετού, συνδεδεμένου βέβαια και με άλλες μικρότερες ή μεγαλύτερες κρίσεις, στα

σημερινά συνεχιστικά μαθηματικά που σχετίζονται με τα νοητά αντικείμενα τα οποία είναι γνωστά κάτω από το γενικό τίτλο πραγματικοί αριθμοί.» (Αναπολιτάνος, σελ.27). Η ανακάλυψη της ασσυμετρίας έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών καθώς δεν είναι τυχαίο ότι καταλαμβάνει το ένα τέταρτο των στοιχείων του Ευκλείδη και τόσο ο Πλάτωνας όσο και ο Αριστοτέλης αναφέρονται πολύ συχνά σε αυτή. Συγκεκριμένα ο Πλάτωνας στον Θεαίτητο δείχνει τον Θεόδωρο να αποδεικνύει την ασσυμετρία των τετραγωνικών ριζών από το 3 μέχρι το 17 και στην συνέχεια ο Θεαίτητος προχωρά σε γενικό ορισμό των τετραγωνικών ριζών. Και ο Αριστοτέλης επίσης αναφέρει αρκετά συχνά την απόδειξη της ασσυμετρίας.

μὲν γάρ, ὥσπερ εἴπομεν, ἀπὸ τοῦ θαυμάζειν πάντες εἰ οὕτως ἔχει, καθάπερ <περὶ> τῶν θαυμάτων ταὐτόματα [τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν] ἢ περὶ τὰς τοῦ ἡλίου τροπὰς ἢ τὴν τῆς διαμέτρου ἀσυμμετρίαν (θαυμαστὸν γὰρ εἶναι δοκεῖ πᾶσι <τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν> εἴ τι τῷ ἐλαχίστῳ μὴ μετρεῖται) δεῖ δὲ εἰς τοὐναντίον καὶ τὸ ἄμεινον κατὰ τὴν παροιμίαν ἀποτελευτῆσαι, καθάπερ καὶ ἐν τούτοις ὅταν μάθωσιν· οὐθὲν γὰρ ἂν οὕτως θαυμάσειεν ἀνὴρ γεωμετρικὸς ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή. τίς μὲν οὖν ἡ φύσις τῆς ἐπιστήμης τῆς ζητουμένης, εἴρηται, καὶ τίς ὁ σκοπὸς οὗ δεῖ τυγχάνειν τὴν ζήτησιν καὶ τὴν ὅλην μέθοδον.

Μεταφυσικά 983α 12-23

Στο παραπάνω απόσπασμα καθίσταται σαφές ότι η ασσυμετρία όχι μόνο δεν είναι ένα απλό ζήτημα , αλλά αποτελεί αντικείμενο θαυμασμού από αυτούς που γνωρίζουν γεωμετρία καθώς δείχνει να μην είναι κάτι αναμενόμενο. Φαίνεται πως αυτή η ανακάλυψη αποτελεί την αφετηρία για την εξέλιξη των μαθηματικών, αφού μετά από αυτή λαμβάνει χώρα μια μεγάλη μαθηματική έρευνα.

2.2 ΟΙ ΕΛΕΑΤΕΣ

2.2.1 ΠΑΡΜΕΝΙΔΗΣ

Ο Παρμενίδης (π. 515-440) ήταν ο πρώτος σημαντικός εκπρόσωπος της φιλοσοφικής σχολής των ελεατών. Προερχόταν από πλούσια και πολιτικά ισχυρή οικογένεια.

Με τον Παρμενίδη αρχίζει η καταδίκη των αισθήσεων και η θεμελίωση μιας καθαρά γνωσιοθεωρητικής σκέψης. Είναι σίγουρο ότι ο Παρμενίδης γνώριζε τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων, αφού γεννήθηκε και έζησε σε μια περιοχή όπου κυριαρχούσε το Πυθαγόρειο κίνημα. Στον Παρμενίδη για πρώτη φορά συναντάμε επιχειρηματολογία διαλεκτική, προκειμένου να πεισθούμε για τις απόψεις του, υποθετικούς συλλογισμούς που καταλήγουν σε αποκλεισμό κάποιων απόψεων και κατά συνέπεια έμμεση κατάφαση κάποιων άλλων. Ανάπτυξε μια πρώιμη μορφή συλλογισμού, δηλ. ένα πρώιμο είδος λογικού συμπερασμού.

Ήταν ο πρώτος που εισηγήθηκε την εις άτοπο απαγωγή, δηλ. έναν έμμεσο τρόπο απόδειξης. Ο Παρμενίδης για δύο θέματα θεωρείται ως ο ακρογωνιαίος λίθος της αρχαίας αλλά και της ευρωπαϊκής φιλοσοφίας: για το ότι άφησε με τη θεωρία του για το Ον και τον απατηλό κόσμο του Γίγνεσθαι, περιθώρια ανάπτυξης του οντολογικού δυϊσμού και για το ότι διατύπωσε ρητά και κατηγορηματικά το γνωσιοθεωρητικό δόγμα 'της ανταπόκρισης νόησης και πραγματικότητας' (Γραμματικάκη Αλατζόγλου-Θέμελη ,2000 σελ. 47)

Γενικά οι βασικές αρχές της Ελεατικής φιλοσοφίας είναι οι ακόλουθες:

Α) Ανέδειξε τη θεωρητική φύση των εννοιών, τις "καθαρές έννοιες", ως το σημαντικότερο συστατικό στην κατανόηση της αλήθειας και κατ' επέκταση υποβάθμισε, τις εμπειρικές (αισθητικές) έννοιες ως ατελείς και παραπλανητικές.

Β) Προέβαλε τον θεωρητικό τρόπο συλλογισμού, που στηρίζεται σε "καθαρές έννοιες" και σε μια θεωρητική λογική.

Γ) Υπέθαλψε την ιδέα της δίτιμης λογικής και την αρχή της μη-αντίφασης στον λογικό συλλογισμό.

Δ) Εισηγήθηκε τον έμμεσο τρόπο απόδειξης, αυτόν της “εις άτοπον απαγωγή”.

Ε) Έθεσε υπό αμφισβήτηση την ιδέα του συνεχούς και την ιδέα του απείρου, και τον σχετικών διαδικασιών.

Στο βιβλίο του Szabo(1973) ‘Οι Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών’ γίνεται εκτενής αναφορά στην επίδραση της Ελεατικής φιλοσοφίας στη δημιουργία των παραγωγικών συστηματικών μαθηματικών. Τα βασικότερα στοιχεία αυτής της ανάλυσης θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Έμμεση Απόδειξη

Το βασικότερο στοιχείο της ελεατικής φιλοσοφίας είναι η μη αποδοχή της πρακτικο-εμπειρικής γνώσης και της κατ’ αίσθηση αντίληψης. Η παλαιότερη μορφή της έμμεσης αποδεικτικής μεθόδου εμφανίζεται στο ποίημα του Παρμενίδη.

εἰ δ᾽ ἄγ᾽ ἐγὼν ἐρέω, κόμισαι δὲ σὺ μῦθον ἀκούσας,
αἵπερ ὁδοὶ μοῦναι διζήσιος εἰσι νοῆσαι·
ἡ μὲν ὅπως ἔστιν τε καὶ ὡς οὐκ ἔστι μὴ εἶναι,
Πειθοῦς ἐστι κέλευθος (Ἀληθείῃ γὰρ ὀπηδεῖ),
ἡ δ᾽ ὡς οὐκ ἔστιν τε καὶ ὡς χρεών ἐστι μὴ εἶναι,
τὴν δή τοι φράζω παναπευθέα ἔμμεν ἀταρπόν·
οὔτε γὰρ ἂν γνοίης τό γε μὴ ἐὸν (οὐ γὰρ ἀνυστόν)
οὔτε φράσαις.

Μετάφραση (Κουφόπουλος)

Λοιπόν , θα σου ανακοινώσω τώρα- κι εσύ μετέφερε όσα θ’ ακούσεις- ποιοι είναι οι μόνοι νοητοί δρόμοι της έρευνας. Ο ένας το ότι είναι και δεν υπάρχει μη είναι , αποτελεί τον δρόμο της πειθούς- γιατί η αλήθεια την ακολουθεί- ο άλλος, πως δεν είναι και ότι όφειλε μη είναι , αυτός ,σου λέω ο δρόμος είναι μονοπάτι αγνωσίας, γιατί ούτε να γνωρίσεις μπορείς το μη ον ούτε να το εκφράσεις.

Ο Παρμενίδης υποστήριζε ότι ο άνθρωπος μπορεί να συλλάβει την αλήθεια μόνο με την διάνοια (λόγο) και όχι μέσω των αισθήσεων, οι οποίες μπορούν να

είναι πολλές φορές και απατηλές. Είναι χαρακτηριστικό αυτό όταν προσπαθεί να αμφισβητήσει το «γίγνεσθαι» του όντος. Το «ον» μπορεί να προκύψει είτε από ένα «όν» είτε από ένα «μη ον». Αν το «ον» προέρχεται από το «ον» τότε προϋπήρχε ένα «ον», άρα ο χαρακτηρισμός «γίγνεσθαι» για το «ον» δεν έχει νόημα. Αν αντίθετα ισχυριστούμε ότι το «ον» πριν την γέννησή του ήταν «μη ον» τότε έχουμε αντίφαση. Είναι φανερό ότι η έμμεση απόδειξη ήταν σημαντικό στοιχείο της ελεατικής φιλοσοφίας.

Σύμφωνα με τον Szabo η εφαρμογή της έμμεσης αποδεικτικής μεθόδου εμφανίζεται στα Ελληνικά μαθηματικά ταυτόχρονα με μια αντιεμπειρική τάση που είναι άμεσα συνδεδεμένα με την απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου του τετραγώνου προς την πλευρά του. Οπότε η σύνδεση έμμεσης απόδειξης και αντιεμπειρισμού δεν αναπτύχθηκε μέσα στα μαθηματικά, αλλά προϋπήρχε και χρησιμοποιήθηκε στα μαθηματικά όταν αυτό κρίθηκε αναγκαίο.

Ορισμός της μονάδας και του αριθμού

Ο πρώτος ορισμός στο βιβλίο VII των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι ο ορισμός της μονάδας.

Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

Η διατύπωση είναι τόσο σύντομη που δύσκολα μπορεί κάποιος να καταλάβει τι κρύβεται πίσω από αυτή. Ο Πλάτωνας στην Πολιτεία (VII 525-526) αναφέρει τα εξής: «Γνωρίζεις ότι οι μαθηματικοί θα γελούσαν αν κανείς επιχειρούσε να αναλύσει τη μονάδα. Αν εσύ την τεμαχίσεις εκείνοι θα την πολλαπλασιάσουν. Γιατί δεν θα ήθελαν να φανεί η μονάδα διαφορετική από τον εαυτό της δηλαδή όχι εν αλλά πολλά…..Εγώ πιστεύω ότι θα απαντούσαν ότι μιλούν για νοητούς αριθμούς τους οποίους μπορεί κάποιος να τους συμπεράνει μόνο δια του νου και δεν είναι δυνατό να τους αντιληφθεί μέσω των αισθήσεων» (Szabo,1973 σελ.354)

Άρα σύμφωνα με το παραπάνω κείμενο η μονάδα είναι αδιαίρετος, γιατί αν ήταν διαιρετή τότε δεν θα ήταν πλέον μονάδα, αλλά κάτι άλλο το οποίο θα αποτελούνταν από πολλά μόρια. Επιπλέον γίνεται φανερή η προ-Ευκλείδεια και

προ-Πλατωνική προέλευση του ορισμού της μονάδος. Ο Ευκλείδειος ορισμός της μονάδας έγινε με τη μέθοδο της έμμεσης απόδειξης. Επιπροσθέτως, διακρίνονται πολλά κοινά με τον παρακάτω ορισμό που έχει δώσει για το «ον» ο Παρμενίδης, αφού στην ελεατική φιλοσοφία οι όροι «ον» και «εν» εναλλάσσονται.

οὐδὲ διαιρετόν ἐστιν, ἐπεὶ πᾶν ἐστιν ὁμοῖον·
οὐδέ τι τῇ μᾶλλον, τό κεν εἴργοι μιν συνέχεσθαι,
οὐδέ τι χειρότερον, πᾶν δ' ἔμπλεον ἐστιν ἐόντος.
τῷ ξυνεχὲς πᾶν ἐστιν· ἐὸν γὰρ ἐόντι πελάζει.

Μετάφραση (Κουφόπουλος)

Ούτε είναι διαιρετό γιατί είναι ομοιόμορφο. Ούτε υπάρχει κάπου περισσότερο , που θα εμπόδιζε την συνοχή του, ούτε κάπου λιγότερο, αλλά είναι όλο πλήρες από ον. Γι' αυτό και όλο είναι συνεχές. Γιατί το ον πλησιάζει και εφάπτεται στο ***ον.***

Είναι φανερό ότι ο ορισμός της μονάδας αποτελεί μια έκφραση της ελεατικής φιλοσοφίας περι του όντος. Είναι γνωστό ότι οι Ελεάτες παραδέχονταν την ύπαρξη του «όντος» του ενός αλλά δεν αποδέχονταν την ύπαρξη της έννοιας του πλήθους. Αλλά μια τέτοια άρνηση έρχεται σε αντίθεση με την Αριθμητική. Οπότε οι μαθηματικοί υιοθέτησαν τον ορισμό της μονάδας από την ελεατική φιλοσοφία χωρίς ωστόσο να απορρίψουν την έννοια του πλήθους , όπως άλλωστε διαπιστώνεται από τον Ευκλείδειο ορισμό του αριθμού.

Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Σύμφωνα με τον Szabo ο ορισμός αποτελεί μια διαμόρφωση της ελεατικής φιλοσοφίας και το αιτιολογεί ως εξής:

1) Οι Αριθμητικοί πραγματεύθηκαν τους αριθμούς όπως οι Ελεάτες το «ον» τους. Δεν δέχονται να βασίζονται οι αριθμοί επί ορατών και απτών

σωμάτων ακριβώς όπως και ο Παρμενίδης προέτρεπε τους μαθητές του να αντιληφθούν το «ον» μέσω της νόησης και όχι μέσω των αισθήσεων.

2) Το δεύτερο επιχείρημα που χρησιμοποιείται από τον συγγραφέα είναι ο λόγος που πολλαπλασίαζαν οι Αριθμητικοί την μονάδα των Ελεατών . Ο Πλάτωνας αναφέρει ότι ήθελαν με αυτό τον τρόπο να αποφύγουν την διαιρετότητα της μονάδας. Η Αριθμητική των Πυθαγορείων μετέτρεψε τα κλάσματα σε αριθμητικά στοιχεία (σχέσεις) εισάγοντας ένα μαθηματικό ισοδύναμο του όρου κλάσμα. Επομένως, ο ορισμός του αριθμού διευκόλυνε την εμμονή στο ελεατικό δόγμα του «αδιαίρετου».

Το πιο ενδιαφέρον είναι ότι η μονάδα αποκλείσθηκε από την περιοχή των αριθμών, όπως μαρτυρείται από τις λεπτομερείς διατυπώσεις των προτάσεων 9 και 15 του έβδομου βιβλίου των Στοιχείων.

Πρόταση 9

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Πρόταση 15

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

Επί της ουσίας οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες, αλλά διατυπώθηκαν αυτοτελώς μόνο για τον λόγο ότι η μονάδα δεν είναι αριθμός. Κατ' επέκταση είμαστε σε θέση να υποθέσουμε ότι καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση των βασικών αρχών της Αριθμητικής έπαιξε η ελεατική φιλοσοφία και το πρόβλημα του διαιρετού καθώς επίσης και το δόγμα των Ελεατών περί του αδιαίρετου.

Αίτημα

Ο όρος αίτημα έχει επίσης διαλεκτική προέλευση αφού η ετυμολογική του ρίζα ανάγεται στο ρήμα αιτέω που σημαίνει παρακαλώ, ζητώ, απαιτώ. Στη διαλεκτική συζήτηση παίζει σημαντικό ρόλο η παράκληση που απευθύνει ο ένας από τους συνομιλητές στον άλλο. Δηλαδή έπρεπε ο ένας να αιτήσει τη συγκατάθεση του άλλου. Το αίτημα φαίνεται στη διαλεκτική να ήταν μια αρχική πρόταση . Αν και ο συνομιλητής συμφωνούσε για την ορθότητα του ισχυρισμού τότε υπήρχε συμφωνία για την αφετηρία της συζήτησης. Στην ορολογία της διαλεκτικής το αίτημα είναι συνώνυμο με την υπόθεση και το ομολόγημα.

Το γεγονός όμως ότι στον Ευκλείδη μια ειδική ομάδα αναπόδεικτων αρχών καλούνται αιτήματα σύμφωνα με τον Szabo υποδηλώνει ότι με τον όρο αίτημα εκφραζόταν μια ειδική περίπτωση και επισημαίνει την ακόλουθη διαφορά ανάμεσα στις λέξεις αίτημα και ομολόγημα. Η λέξη ομολόγημα τονίζει ότι επήλθε συμφωνία μεταξύ των δύο συνομιλητών, ενώ ο όρος αίτημα θέλει να υπογραμμίσει ότι ένας από τους συνομιλητές ζήτησε κάτι. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα από τα Αναλυτικά Ύστερα (76b, 27-34) Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι όταν ο ισχυρισμός είναι άδηλος και ακολουθεί η υπόθεση, αν ο μαθητής δεν την έχει αποδεχθεί τότε μιλάμε για αίτημα.

θάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, ἂν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτό, αἰτεῖται. καὶ τούτῳ ***διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα·*** *ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας.*

Τα αιτήματα στον Ευκλείδη, σύμφωνα με τον Becker, αποβλέπουν στο να διασφαλίσουν τη μαθηματική ύπαρξη θεμελιωδών προτύπων, βάσει των οποίων θα κατασκευασθούν οι υπόλοιπες μορφές (ευθείες, κύκλοι κ.λπ.). (Szabo,1973 σελ.373) Αρχικά, επικράτησε η άποψη ότι τα αιτήματα προήρθαν από τον ίδιο τον Ευκλείδη, αλλά αργότερα κάποιοι μελετητές τοποθέτησαν τα αιτήματα στην προευκλείδεια

εποχή. Η δεύτερη αυτή άποψη βασίζεται στο γεγονός ότι τα τρία πρώτα κατασκευαστικά αιτήματα των Στοιχείων του Ευκλείδη ανάγονται, σύμφωνα με τον Πρόκλο, στον Οινοπίδη (5^{ος} αιώνας π.Χ.) , ο οποίος πρώτος πραγματοποίησε κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Οι απόψεις του Heath(1921) για το συγκεκριμένο θέμα συνοψίζονται σε τρία σημεία.

1. Ο Οινοπίδης ήταν ο πρώτος που έλυσε τα προβλήματα (κατασκευή κάθετης) μόνο με κανόνα και διαβήτη.
2. Ήταν ο πρώτος που βρήκε για τα προβλήματα αυτά μια μάλλον θεωρητική και όχι απλά πρακτική λύση.
3. Η σπουδαιότητα του Οινοπίδη βασίζεται στο ότι τελειοποίησε την μέθοδο από θεωρητικής πλευράς.

Ο Szabo προσθέτει ότι ο Οινοπίδης θα πρέπει να χρησιμοποίησε ενσυνείδητα τα τρία πρώτα Ευκλείδεια αιτήματα και μάλιστα θα μπορούσε να είναι και ο δημιουργός αυτών των αιτημάτων.

ΑΞΙΩΜΑ

Ο Πρόκλος καθορίζει ως αξίωμα στα μαθηματικά μια πρόταση της οποίας η ορθότητα δεν μπορεί να αμφισβητηθεί. Φαίνεται, όπως επισημαίνει ο Szabo ότι κατά την αρχαιότητα δεν θεωρούσαν ότι είναι δυνατό να αμφισβητηθεί η εγκυρότητα των Ευκλείδειων αξιωμάτων. Εξάλλου στήριζαν την ετυμολογία της λέξης αξίωμα στο ρήμα αξιόω το οποίο με απαρέμφατο έχει τη σημασία ‘θεωρώ άξιο’. Σε αυτό το σημείο ο Szabo (1973,σελ.390-394) διατυπώνει κάποιες αντιρρήσεις που συνοψίζονται στα ακόλουθα σημεία.

1. Η μαθηματική λέξη αξίωμα ,όπως και οι λέξεις όρος και αίτημα, έχει διαλεκτική προέλευση. Γι αυτό δεν μπορούμε να έχουμε την ετυμολογία μόνο για την υποτιθέμενη μαθηματική έννοια της λέξης. Θα πρέπει κανείς

να ξεκινήσει εξετάζοντας με ποιόν τρόπο χρησιμοποιήθηκε η λέξη στη διαλεκτική, γιατί με αυτή την σημασία θα την παρέλαβαν τα μαθηματικά.

2. Υπάρχουν και μέσα στη μαθηματική γλώσσα αναμφισβήτητα ίχνη ότι αρχικά η λέξη αξίωμα δεν είχε την έννοια την οποία θέλησε να της δώσει ο Πρόκλος. Φαίνεται ότι μετά τον Αριστοτέλη θέλησαν να αλλάξουν τη σημασία του μαθηματικού ειδικού όρου αξίωμα.

Τέλος, ο συγγραφέας συμπληρώνει ότι η λέξη αξίωμα στη Διαλεκτική σήμαινε αρχικά μόνο 'απαίτηση' ή 'παράκληση' όπως και το αίτημα. Άρα στη διαλεκτική ορολογία αξίωμα καλείται ο ισχυρισμός του οποίου την παραδοχή απαιτεί σε μια συζήτηση ο ένας συνομιλητής από τον άλλο, δηλαδή ένας ισχυρισμός για τον οποίο η συμφωνία του συνομιλητή βρίσκεται σε εκκρεμότητα. Αυτό φαίνεται και στην παρακάτω περικοπή του Πλάτωνα (Πολιτεία Ζ 526).

*"ὦ θαυμάσιοι**, περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε**, ἐν οἷς τὸ ἓν οἷον ὑμεῖς **ἀξιοῦτέ ἐστιν**, ἴσον τε ἕκαστον πᾶν παντὶ καὶ οὐδὲ σμικρὸν διαφέρον, μόριόν τε ἔχον ἐν ἑαυτῷ οὐδέν;" τί ἂν οἴει αὐτοὺς ἀποκρίνασθαι;*

Οι μαθηματικοί απαιτούν ένα ιδιαίτερο είδος αριθμού (εκφράζεται με τη λέξη αξιούτε) διότι στον κόσμο των αισθήσεων ο αριθμός των μαθηματικών δεν υπάρχει. Γι' αυτό και το κατά πόσο συμφωνούν οι άλλοι συνομιλητές με την απαίτηση του μαθηματικού μένει σε εκκρεμότητα. Συμπερασματικά προκύπτει ότι στη διαλεκτική το 'αίτημα' και το 'αξίωμα' είναι συνώνυμα όπως και για τους μαθηματικούς οι δύο όροι είναι συνώνυμοι, από ότι φαίνεται από τα διάφορα κείμενα που υπάρχουν.

2.2.2 ΖΗΝΩΝ Ο ΕΛΕΑΤΗΣ

Ο Ζήνων ο Ελεάτης δεν ήταν μαθηματικός αλλά φιλόσοφος που καταγόταν από την Ελέα της Κάτω Ιταλίας (488 π.Χ – 430 π.Χ.). Μαθητής του Παρμενίδη, υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους εκπροσώπους της Ελεατικής σχολής και σύμφωνα με τον Αριστοτέλη είναι ο πατέρας της διαλεκτικής, αφού ανέπτυξε και

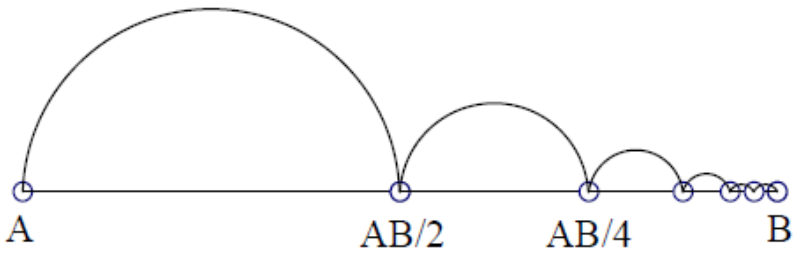
συστηματοποίησε τη διαλεκτική σκέψη και έκφραση. Έχοντας την πρόθεση να υπερασπιστεί το φιλοσοφικό σύστημα του Παρμενίδη παρήγαγε μια σειρά από παράδοξα.

1ο Παράδοξο **Η Διχοτομία**

τέττα-
ρες δ' εἰσὶν οἱ λόγοι περὶ κινήσεως Ζήνωνος οἱ παρέχοντες τὰς δυσκολίας τοῖς λύουσιν, πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖσθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἥμισυ δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φερόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος, περὶ οὗ διείλομεν ἐν τοῖς πρότερον λόγοις.

Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 9-14

Σύμφωνα με αυτό δεν υπάρχει κίνηση, γιατί ότι κινείται θα πρέπει να φτάσει στη μέση της διαδρομής πριν φτάσει στο τέλος της. Ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας θέλει να διανύσει την απόσταση ΑΒ. Για να τη διανύσει θα πρέπει προηγουμένως να διανύσει την ΑΒ/2, στη συνέχεια την ΑΒ/4, την ΑΒ/8 και ούτω καθεξής. Σύμφωνα με τον Ζήνωνα κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, διότι για να διανύσει ο δρομέας την πεπερασμένη απόσταση ΑΒ θα πρέπει να περάσει ένα άπειρο πλήθος σημείων δηλαδή να ολοκληρώσει μια άπειρη διαδικασία.



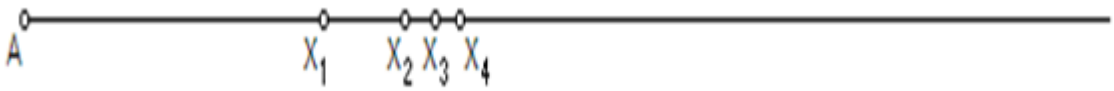
2ο Παράδοξο **Ο Αχιλλέας και η Χελώνα**

δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς· ἔστι δ'

οὗτος, ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θέον ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διῶκον ὅθεν ὥρμησεν τὸ φεῦγον, ὥστε ἀεί τι προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον. ἔστιν δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῷ διαιρεῖν μὴ δίχα τὸ προσλαμβανόμενον μέγεθος. τὸ μὲν οὖν μὴ καταλαμβάνεσθαι τὸ βραδύτερον συμβέβηκεν ἐκ τοῦ λόγου, γίγνεται δὲ παρὰ ταὐτὸ τῇ διχοτομίᾳ (ἐν ἀμφοτέροις γὰρ συμβαίνει μὴ ἀφικνεῖσθαι πρὸς τὸ πέρας διαιρουμένου πως τοῦ μεγέθους· ἀλλὰ πρόσκειται ἐν τούτῳ ὅτι οὐδὲ τὸ τάχιστον τετραγῳδημένον ἐν τῷ διώκειν τὸ βραδύτατον), ὥστ' ἀνάγκη καὶ τὴν λύσιν εἶναι τὴν αὐτήν

Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 14-26

Σύμφωνα με αυτό αν στη θέση Α βρίσκεται ο Αχιλλέας και στη θέση X_1 η χελώνα , ο Αχιλλέας δεν θα κατορθώσει ποτέ να φτάσει τη χελώνα , γιατί όταν ο Αχιλλέας θα έχει μετακινηθεί στη θέση X_1 η χελώνα θα έχει μετακινηθεί στη θέση X_2. Και νέα προσπάθεια του Αχιλλέα να φτάσει στη θέση X_2 θα συνοδεύεται από νέα μετακίνηση της χελώνας στη θέση X_3 και ούτω καθεξής.



3ο Παράδοξο **Το Βέλος**

οὗτοι μὲν οὖν οἱ δύο λόγοι, τρίτος δ' ὁ νῦν ῥηθείς, ὅτι ἡ ὀϊστὸς φερομένη ἕστηκεν. συμβαίνει δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν χρόνον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν νῦν· μὴ διδομένου γὰρ τούτου οὐκ ἔσται ὁ συλλογις-

μός.

Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 29-33

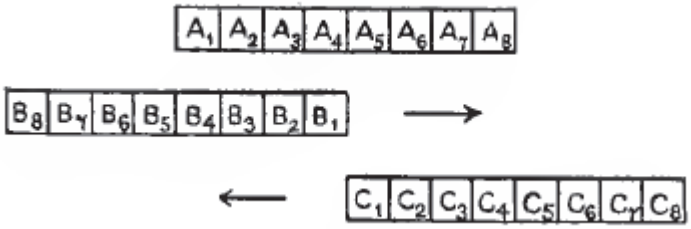
Ο Ζήνωνας υποστηρίζει ότι ”αν κάτι είναι σε ηρεμία ή κίνηση σε χώρο ίσο με τον εαυτό του και αν ό,τι κινείται θεωρείται πάντοτε στιγμιαίος, τότε το βέλος στο πέταγμά του είναι ακίνητο ”.

4ο Παράδοξο **Το Στάδιο** (Heath ,1921 σελ.277)

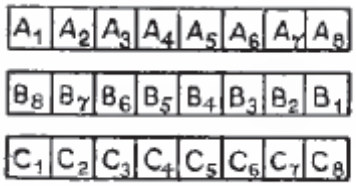
τέταρτος δ' ὁ περὶ τῶν ἐν τῷ σταδίῳ κινουμένων ἐξ ἐναντίας ἴσων ὄγκων παρ' ἴσους, τῶν μὲν ἀπὸ τέλους τοῦ σταδίου τῶν δ' ἀπὸ μέσου, ἴσῳ τάχει, ἐν ᾧ συμβαίνειν οἴεται ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλασίῳ τὸν ἥμισυν.

Αριστοτέλης, Φυσικά 239b 33-40

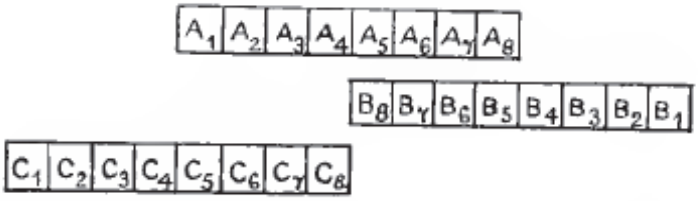
Ας φανταστούμε τρείς παράλληλες σειρές σημείων A,B,C από τις οποίες η σειρά A μένει ακίνητη και οι άλλες δύο κινούνται με ίση ταχύτητα προς αντίθετες κατευθύνσεις μπροστά από τη σειρά A. Τα σημεία B κινούνται προς τα δεξιά ενώ συγχρόνως τα σημεία C κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα και ρυθμό με το B.



Τότε θα υπάρξει κάποια στιγμή όπου η σειρές B, C θα βρίσκονται ακριβώς κάτω από τη σειρά A.



Και μετά από αυτό μια στιγμή όπου θα έχουν αντιστραφεί οι θέσεις των Β, C.



Δηλαδή στον ίδιο χρόνο που ο C έχει μετακινηθεί κατά μισή πλευρά (=μ/2) προς τα αριστερά ως προς τον ακίνητο Α, ο Β έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά το ίδιο διάστημα (μισή πλευρά ή μ/2) ως προς τον ακίνητο Α. Στον ίδιο επίσης χρόνο ο Β έχει μετακινηθεί κατά μ ως προς τον C. Στον διπλάσιο χρόνο, ο Β και ο C έχουν ο καθένας μετακινηθεί κατά επίσης μ σε σχέση με τον Α. Συνεπώς «ο μισός χρόνος ισούται με τον διπλάσιό του».

Σύμφωνα, με τον Αναπολιτάνο (1985) η σημασία των παραδόξων αυτών είναι σημαντική, γιατί συνδέεται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Επίσης ο Αριστοτέλης θεωρεί το άπειρο και το συνεχές ουσιωδώς συναρτημένα έτσι, ώστε οποιαδήποτε προσπάθεια ανάλυσης ή μελέτης του δευτέρου να απαιτεί αναγκαστικά και σύγχρονη προσπάθεια ανάλυσης ή μελέτης του πρώτου.

2.3 <u>ΟΙ ΣΟΦΙΣΤΕΣ ΚΑΙ Ο ΣΩΚΡΑΤΗΣ</u>

Οι σοφιστές εκφράζουν την πρώτη ευρεία παιδαγωγική κίνηση της αρχαιότητας. Η λέξη Σοφιστής προέρχεται από το ρήμα Σοφίζομαι, που σημαίνει εξασκώ την σοφία δηλώνει δηλαδή το άτομο που ενεργεί. Σύμφωνα με τον W. K. C. Guthrie (1989) ο σοφιστής γράφει ή διδάσκει γιατί έχει να μεταφέρει μια ειδική δεξιότητα ή γνώση. Η σοφία του είναι πρακτική είτε στον τομέα της συμπεριφοράς και της πολιτικής είτε στις πρακτικές τέχνες. Η λέξη σοφιστής πρωτοεμφανίζεται σε μία ωδή του Πίνδαρου και σημαίνει ποιητής, γιατί στα μάτια των Ελλήνων οι πρακτικές συμβουλές και η ηθική καθοδήγηση αποτελούσαν το κύριο έργο ενός ποιητή, η

σημασία της όμως αλλάζει κατά τον 5ο αιώνα. Οι σοφιστές κάνουν την εμφάνισή τους σε μία εποχή που η ελληνική κοινωνία αλλάζει, έχει παρέλθει οριστικά η εποχή των τυράννων και η Αθήνα του 5ου αιώνα είναι η πόλη σύμβολο της δημοκρατίας. Με τους σοφιστές έχουμε αναβάθμιση των αισθήσεων και της εκτίμησης προς τον απλό άνθρωπο. Τον απλό άνθρωπο προσπαθούν να διδάξουν οι σοφιστές να τον πείσουν ή να τον παραπείσουν γιατί αυτός είναι το κεντρικό πρόσωπο της δημοκρατίας, αυτός που ψηφίζει στην εκκλησία του δήμου για το αν θα μετάσχει ή όχι σε πόλεμο η πόλη του, ψηφίζει στην Ηλιαία για την αθωότητα ή την ενοχή των κατηγορουμένων.

Οι σοφιστές αλλάζουν τα μοτίβα της φιλοσοφικής σκέψης, σχετικοποιούν την αλήθεια και ρίχνουν το κέντρο βάρους της σκέψης τους στο υποκείμενο της γνώσης, το άτομο σε αντίθεση με τους προσωκρατικούς φιλοσόφους που ενδιαφέρονταν για το αντικείμενο της γνώσης π.χ τον φυσικό κόσμο τον οποίο προσπαθούσαν να γνωρίσουν παρατηρώντας αποκλειστικά το αντικείμενο. Αυτό που δίδασκαν ήταν ότι οι αισθήσεις μας δε μας δίνουν την απόλυτη αλήθεια για την αντικειμενική πραγματικότητα και πως μόνο από τις παραστάσεις που έχει ο άνθρωπος από τον εξωτερικό κόσμο μπορεί να γνωρίσει τι υπάρχει και τι δεν υπάρχει. «Με τους σοφιστές εμφανίζεται πρώτη φορά και η έννοια του Κριτηρίου , ίσως επειδή στο μεταξύ έχει ωριμάσει και η Δημοκρατία στους κόλπους της οποίας και μόνο δημιουργούνται τέτοιες έννοιες· ο Πρωταγόρας το ονομάζει ‘ μέτρον’ και εννοεί ότι αργότερα ονομάστηκε ‘ κριτήριόν’· ο Σέξτος Εμπειρικός μας το βεβαιώνει ρητά : ‘ μέτρον μεν λέγων το κριτήριο ‘»(Γρ. Αλατζόγλου-Θέμελη ,2000 σελ.71).

Σύμφωνα, με την Romily, (1994) οι σοφιστές ήταν γραφτό να ζήσουν για πάντα ως δάσκαλοι της ρητορικής. Εγκαινίασαν τους δρόμους της ρητορικής-δρόμους που οδηγούσαν στο σωστό ύφος και στη σύνθεση, αλλά και στους συλλογιστικούς δρόμους που οδηγούσαν στο σχηματισμό μιας κάποιας λογικής. Τα πάντα έγιναν τέχνη: ο λόγος, η πολιτική , η ψυχολογία , η στρατηγική, αλλά εκεί που ήταν πραγματικά πρωτοπόροι ήταν στον τομέα της κριτικής σκέψης. « Ήταν οι πρώτοι που με γνώμονα ένα μεθοδικό και απαιτητικό ορθολογισμό προχώρησαν στο ριζικό

έλεγχο όλων των παραδοσιακών δοξασιών ….Η κριτική σκέψη των σοφιστών προκάλεσε απαντήσεις και υποχρέωσε τους ανθρώπους να συνειδητοποιήσουν το βαθύτερο νόημα των δοξασιών τους.» (Romily, 1994 σελ.337).

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούν οι δύο σημαντικότεροι εκπρόσωποι της σοφιστικής ο Πρωταγόρας πατέρας των αμφισβητήσεων και των αντιλογιών που προερχόταν από τα Άβδηρα (κοντά στη Θράκη) και ο Γοργίας από τη Σικελία.. Ο Πρωταγόρας πρέπει να έφτασε στην Αθήνα γύρω στο 450 π.Χ. και απέκτησε μεγάλη φήμη ως δάσκαλος της ρητορικής και κυρίως της πολιτικής τέχνης, διδάσκοντας τους μαθητές του πώς να χειρίζονται τις υποθέσεις τους τόσο σε προσωπικό όσο και σε δημόσιο επίπεδο. Η τέχνη του βασίζεται στην επιχειρηματολογία και πιο συγκεκριμένα στην τεχνική αντιστροφής των επιχειρημάτων, δηλαδή στον τρόπο να περνά κανείς από τη θέση στην αντίθεση αντιστρέφοντας κάθε φορά τα πραγματικά δεδομένα. Με τον Πρωταγόρα εισάγεται το ρεύμα του σχετικισμού, αφού, πίστευε ότι η γνώση δεν προσδιορίζεται αντικειμενικά. Αυτό όμως που αποτελεί βασικό πρόβλημα της πρωταγορικής γνωσιοθεωρίας είναι αν ο πρωταγορικός άνθρωπος βασίζει την γνώση του αποκλειστικά στα δεδομένα των αισθήσεων. Μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για αυτόν το σχετικισμό από τη διατριβή ‘ Δισσοί Λόγοι’ (ένα έργο χωρίς ταυτότητα) όπου καταγράφονται επιχειρήματα που έχουν σκοπό να αποδείξουν το καλό και το κακό, το δίκαιο και το άδικο, το άσχημο και το όμορφο, υποδεικνύοντας συνάμα το διανοητικό κλίμα της εποχής που εξαφανίζει κάθε πίστη στην αντικειμενική αλήθεια.

Ο Γοργίας, σύμφωνα με τον Σέξτο χρησιμοποίησε ελεατική επιχειρηματολογία κάτι αναμενόμενο, αφού κατάγεται από τη Σικελία , την πατρίδα του Εμπεδοκλή και ο τόπος του βρίσκεται κοντά στην Ελέα, την πατρίδα του Παρμενίδη. Ο Γοργίας υιοθέτησε την αρχή της αντίφασης για να δείξει ότι δεν μπορούμε να ξέρουμε τίποτα , τίποτα να βεβαιώσουμε και τίποτα να αποκλείσουμε. Αναιρώντας το κριτήριο, δηλαδή τα μέσα που οδηγούν στην κριτική σκέψη. Γνωρίζουμε δύο μικρούς λόγους που έγραψε τα ‘Ελένης εγκώμιόν’ και ‘Υπέρ Παλαμήδους απολογίαν’. «Παρατηρούμε ότι και οι δύο αγορεύσεις-ή σχέδια αγορεύσεων- που έγραψε ο Γοργίας ακολουθούν από την άποψη της επιχειρηματολογίας, την ίδια

ακριβώς μέθοδο: και οι δύο χρησιμοποιούν την προκαταβολική 'διαίρεση' σε συνδυασμό με επιχειρήματα βασισμένα στην ψυχολογική αληθοφάνεια…. Η ίδια αρχή εφαρμόζεται και στις συζητήσεις της τραγωδίας, αργότερα και από τους ρήτορες.» (Romily,1994 σελ.105). Όπως υπογραμμίζεται από την Αλατζόγλου-Θέμελη(2000) ο Γοργίας θέτει το πρόβλημα της αντιστοιχίας ανάμεσα στη νόηση και την πραγματικότητα, δηλαδή την αντιστοιχία λόγου και πραγμάτων. Υποστηρίζει ότι κανείς δεν μπορεί να εγγυηθεί πως όλοι με τον ίδιο λόγο εννοούμε το ίδιο πράγμα, διότι όπως ακριβώς δεν γνωρίζουμε τους ήχους μέσω της όρασης ή τα χρώματα μέσω της ακοής, έτσι δεν μπορούμε να γνωρίσουμε και τα δύο μέσω του λόγου.

Η γνωσιολογική αρχή των Σοφιστών, που αντιμετώπιζε με σκεπτικισμό τη δυνατότητα απόκτησης βέβαιης γνώσης, συνεισέφερε στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης. Αυτό που καθιέρωσε η σοφιστική κίνηση είναι η ανάπτυξη ενός πλαισίου επιχειρηματολογίας για την υποστήριξη των συμπερασμάτων που βρήκε εφαρμογή σε πολλούς τομείς τόσο στην κοινωνική ζωή όσο και στα μαθηματικά. Εξάλλου, μαζί με την , ρητορική διδάσκανε και αριθμητική, αστρονομία, γεωμετρία και μουσική. Και εδώ εμφανίζεται μια αντίφαση ανάμεσα στους σοφιστές. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Guthrie (1989) στο βιβλίο του 'Οι σοφιστές' ο Πρωταγόρας επιτίθεται εναντίον των μαθηματικών, επειδή ασχολούνται με αφηρημένες έννοιες, περιγράφουν ευθείες γραμμές, κύκλους κ.ο.κ., που ο ίδιος δεν τα αντιλαμβάνεται και, κατά συνέπεια δεν υπάρχουν, αφού δεν έχουν αντικειμενική ύπαρξη. Την ίδια περίοδο όμως έχουμε την ενασχόληση του Ιππία με τα μαθηματικά. Ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με την τριχοτόμηση της γωνίας δίνοντας στο πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια καμπύλη την 'τετραγωνίζουσα' αλλά απέτυχε να το καταφέρει με τη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Επίσης ιδιαίτερη μνεία γίνεται από τον Cajori (1909) όταν αναφέρεται στα μαθηματικά των σοφιστών και στον Ιπποκράτη τον Χίο που τον χαρακτηρίζει ως έναν πολύ ταλαντούχο μαθηματικό (αν και ανόητο σε άλλα πράγματα), ο οποίος ασχολήθηκε με το 'Δήλιο πρόβλημα' (τον διπλασιασμό του όγκου του κύβου) και πέτυχε την αναγωγή του σε αυτό της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο αριθμών. Επίσης, ήταν ο πρώτος που έγραψε στοιχεία και ανακάλυψε μια νέα

γεωμετρική μέθοδο , την απαγωγή που ήταν πρόδρομος της μεθόδου της ανάλυσης και σύνθεσης (αναφορά σε αυτή τη μέθοδο γίνεται στο παρακάτω απόσπασμα του Αριστοτέλη).

Ἀπαγωγὴ δ' ἐστὶν ὅταν τῷ μὲν μέσῳ τὸ πρῶτον δῆλον ᾖ ὑπάρχον, τῷ δ' ἐσχάτῳ τὸ μέσον ἄδηλον μέν, ὁμοίως δὲ πιστὸν ἢ μᾶλλον τοῦ συμπεράσματος· ἔτι ἂν ὀλίγα ᾖ τὰ μέσα τοῦ ἐσχάτου καὶ τοῦ μέσου· πάντως γὰρ ἐγγύτερον εἶναι συμβαίνει τῆς ἐπιστήμης. οἷον ἔστω τὸ Α τὸ διδακτόν, ἐφ' οὗ Β ἐπιστήμη, τὸ Γ δικαιοσύνη. ἡ μὲν οὖν ἐπιστήμη ὅτι διδακτόν, φανερόν· ἡ δ' ἀρετὴ εἰ ἐπιστήμη, ἄδηλον. εἰ οὖν ὁμοίως ἢ μᾶλλον πιστὸν τὸ Β Γ τοῦ Α Γ, ἀπαγωγή ἐστιν·

(Αναλυτικά Πρότερα 69α 20-36)

Η απαγωγή είναι στην πραγματικότητα η μετάβαση ενός προβλήματος σε άλλο, για το οποίο, αν μπορεί να βρεθεί λύση, τότε θα μπορούσε να λυθεί και το αρχικό πρόβλημα. Με αυτόν εξάλλου τον τρόπο επιχείρησε να λύσει και το 'Δήλιο Πρόβλημα' όπως και τον τετραγωνισμό του κύκλου. Στην προσπάθειά του να τετραγωνίσει τον κύκλο σκέφτηκε να τετραγωνίσει πρώτα κάποια άλλα σχήματα που έχουν σχέση με τον κύκλο, τους μηνίσκους. Μελετώντας κανείς τις αποδείξεις του Ιπποκράτη παρατηρεί ότι ήταν γνώστης πολλών από τους ορισμούς, τις κοινές έννοιες, τα αιτήματα και τις προτάσεις που χρησιμοποίησε αργότερα ο Ευκλείδης στα στοιχεία του. Φαίνεται καθαρά ότι η συμβολή του στην αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών ήταν σημαντική, αφού πάνω στο έργο του στηρίχθηκε σε μεγάλο βαθμό ο Ευκλείδης για να δομήσει τα στοιχεία του.

Τι χρησιμοποίησε από τα Στοιχεία ο Ιπποκράτης (Σχήμα από Ζιάκας ,2014 (διπλωματική))

	Βιβλίο I
Ορισμοί:	8,10,11,12,15,16,17,18,20,21,22,23
Κοινές έννοιες:	1,2,3,4,5,6
Αιτήματα:	1,2,3,5
Προτάσεις:	3,4,5,9,10,11,12,13,15,16,19,23,26,27,28,29,30,31,32,33,47
	Βιβλίο II
Ορισμοί:	-
Προτάσεις:	6,12,13,14
	Βιβλίο III
Ορισμοί:	6,7,8,11
Προτάσεις:	2,9,31,33
	Βιβλίο IV
Ορισμοί:	3,6
Προτάσεις:	5,15
	Βιβλίο V
Ορισμοί:	-
Προτάσεις:	9,11,16
	Βιβλίο VI
Ορισμοί:	1
Προτάσεις:	4,6,13,22
	Βιβλίο XII
Ορισμοί:	-
Προτάσεις:	2

ΣΩΚΡΑΤΗΣ

Ο Σωκράτης έζησε στην Αθήνα (το 470 π.Χ. ή 469 π.Χ. - 399 π.Χ.) και αποτελεί μια από τις σημαντικότερες φυσιογνωμίες του παγκόσμιου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι οι φιλόσοφοι πριν από αυτόν καλούνται ως προσωκρατικοί. Χρονικά ανήκει στην ίδια γενιά με τους σοφιστές με τους οποίους εμφανίζεται στα αρχαία κείμενα να έχει διαρκή επικοινωνία, αν και διαφοροποιείται σε αρκετά σημεία από αυτούς. Σε αντίθεση με τους σοφιστές δεν ζητούσε αμοιβή για την διδασκαλία του, διότι δεν πίστευε στην αξία της διδασκαλίας αλλά στην αξία της μάθησης..

συλλογίζεσθαι γὰρ ἐζήτει, ἀρχὴ δὲ τῶν συλλογισμῶν τὸ τί ἐστιν· διαλεκτικὴ γὰρ ἰσχὺς οὔπω τότ' ἦν ὥστε δύνασθαι καὶ χωρὶς τοῦ τί ἐστι τἀναντία ἐπισκοπεῖν, καὶ τῶν ἐναντίων εἰ ἡ αὐτὴ ἐπιστήμη·

δύο γάρ ἐστιν ἅ τις ἂν ἀποδοίη Σωκράτει δικαίως, τούς τ' ἐπακτικοὺς λόγους καὶ τὸ ὁρίζεσθαι καθόλου· ταῦτα γάρ ἐστιν ἄμφω περὶ ἀρχὴν ἐπιστήμης)· - ἀλλ' ὁ μὲν Σωκράτης τὰ καθόλου οὐ χωριστὰ ἐποίει

οὐδὲ τοὺς ὁρισμούς·

Μετά τα φυσικά 1078b 27

Μετάφραση

Διότι εζητούσε να φτιάχνει συλλογισμούς, αρχή δε των συλλογισμών είναι το τι εστί. Διότι τότε δεν είχε φανεί ακόμη διαλεκτική δύναμη ώστε να μπορεί κανείς και χωρίς το τι εστί να εξετάζει τα εναντία, αφού αυτή η επιστήμη και εις τα εναντία πράγματα έχει αρμοδιότητα. Εξάλλου, υπάρχουν δύο επιτεύγματα τα οποία μπορεί κανείς να αποδώσει στον Σωκράτη, αν θέλει να είναι δίκαιος απέναντι του: οι επιτακτικοί λόγοι (δηλαδή οι επαγωγικοί συλλογισμοί) και οι καθολικοί ορισμοί. Αυτά δε βεβαίως και τα δύο σχετίζονται με την αρχή της επιστήμης.

Μετάφραση Ν. Κυργιόπουλος

Άρα, η μεγάλη προσφορά του Σωκράτη σύμφωνα με τον Αριστοτέλη είναι ότι καθιέρωσε τον ορισμό και την επαγωγική μέθοδο.

« Ο ορισμός όμως που επιζητεί ο Σωκράτης δεν βασίζεται στην ενόραση ενός κάποιου σοφού, ούτε στην ανάλυση των ιδιοτήτων μιας έννοιας, δεν είναι 'αναλυτικός' ορισμός, είναι αποτέλεσμα μιας συσσωρευτικής καταρχήν και στη συνέχεια αφαιρετικής διαδικασίας, που παίρνει υπ' όψη της πλήθος περιπτώσεων, από τις οποίες και συνάγει συμπεράσματα… Ανάλογο του Σωκρατικού ορισμού είναι η 'κοινή δόξα' που προτείνει ο Πρωταγόρας.» (Γρ. Αλατζόγλου-Θέμελη,2000 σελ.82)

Η επαγωγική μέθοδος του Σωκράτη είναι μια καθαρά εμπειρική μέθοδος που βασίζεται στην εμπειρία των αισθήσεων. Παρατηρώντας τα καθημερινά γεγονότα, τα χρησιμοποιεί ως παραδείγματα και από αυτά προσπαθεί να οδηγηθεί σε θεωρητικά συμπεράσματα. Επομένως, δεν στηρίζεται μόνο στις αισθήσεις, αλλά χρησιμοποιεί και τον νου για να βγάλει γενικά συμπεράσματα. Δείχνει να τον ενδιαφέρει περισσότερο η εγκυρότητα της γνώσης όπως και τους σοφιστές. Είναι χαρακτηριστικό στους πλατωνικούς διαλόγους ότι δεν παραθέτει ο ίδιος από την αρχή μια θεωρία ή μια άποψη, αλλά όλη η προσπάθεια του έγκειται στο να οδηγήσει μέσω της συζήτησης και διανοητικών διεργασιών τον συνομιλητή του να καταλήξει μόνος του στο συμπέρασμα. Πρέπει να επισημανθεί ότι οι αρχές της διδασκαλίας του

Σωκράτη στάθηκαν οι απαρχές της σύγχρονης παραγωγικής απόδειξης, παρόλο που ο ίδιος δεν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μαθηματικός

2.4 Ο ΠΛΑΤΩΝΑΣ

Η επίδραση του Πλάτωνα στην παγκόσμια σκέψη και στη φιλοσοφία των μαθηματικών ειδικότερα ήταν καθοριστική. Πολλοί μελετητές όπως ο Fowler(1999) θεωρούν ότι ο Πλάτωνας και η σχολή του κατέχουν κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξη των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Θεωρεί τη γνώση των μαθηματικών απαραίτητη προϋπόθεση για την γνώση της φιλοσοφίας. Είναι χαρακτηριστική η επιγραφή που υπήρχε στην είσοδο της ακαδημίας του *'ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΩΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ'* . Σε ένα σχόλιο ανώνυμου σχολιαστή διαβάζουμε ότι χρησιμοποιεί αυτή την επιγραφή αντί του άνισος και άδικος γιατί η γεωμετρία αποζητά την ισότητα και τη δικαιοσύνη. (Barker στον Fowler(1999)) Η ακαδημία του ιδρύθηκε περίπου το 385 π.Χ. και είχε καθοριστική επίδραση στον τρόπο σκέψης της Αθηναϊκής κοινωνίας . Στην 'Πολιτεία' διαχωρίζει 5 είδη μαθηματικών: τη θεωρία αριθμών, τη γεωμετρία του επιπέδου, τη στερεομετρία, την αστρονομία και την αρμονία. Το εκπαιδευτικό του πρόγραμμα συμπληρώνεται με την διαλεκτική καθώς οι διάλογοί του αποτελούν δοκίμια της φιλοσοφίας του.

'Το πλατωνικό φιλοσοφικό σύστημα αποτελεί κορυφαία στιγμή της αρχαίας ελληνικής σκέψης, όχι γιατί οι βασικές του αρχές και τα αξιώματα παρέμειναν απρόσβλητα στην πάροδο των αιώνων, αλλά γιατί η διάσταση ανάμεσα στο ον και στη γνώση αναδεικνύεται για πρώτη φορά γυμνή σε όλη της την τραγικότητα.' (Αναπολιτάνος ,1985 σελ. 28)

Από το βιβλίο του Αναπολιτάνου (1985) 'Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών' (σελ.28-53) παραθέτουμε κάποια στοιχεία σχετικά με τη φιλοσοφία του Πλάτωνα. Κατά τον Πλάτωνα τα αντικείμενα γνώσης πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες:

I. Η ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από την ύπαρξη της γνώσης τους.

II. Πρέπει να είναι ανεξάρτητα από τη δυνατότητα και τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να γνωσθούν.

III. Θα πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτα και να μην υπόκεινται σε αλλαγή.

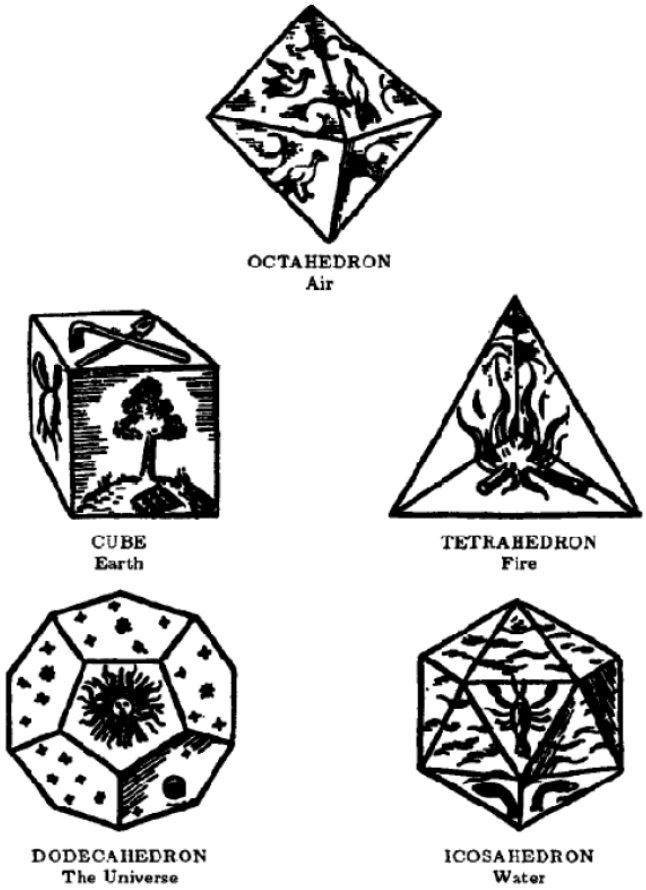
IV. Θα πρέπει να μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια.

Ακρίβεια, αχρονικότητα και ανεξαρτησία του γνωστικού αντικειμένου από το γνώστη του, είναι τα χαρακτηριστικά των πλατωνικών Ιδεών. Αντικείμενα όπως οι αριθμοί ή τα γεωμετρικά αντικείμενα υπάρχουν αχρονικά και ανεξάρτητα από τον τρόπο γνώσης τους. Αποδεικνύοντας ένα θεώρημα ή διατυπώνοντας μια αληθή μαθηματική πρόταση διατυπώνουμε αλήθειές που σχετίζονται με την περιγραφή των μαθηματικών Ιδεών. Οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις είναι για τον Πλάτωνα αναγκαίες. Ο κόσμος των ιδεών μπορεί να γνωσθεί μόνο νοητικά σε αντίθεση με τον κόσμο των φαινομένων που ο κόσμος πραγματώνεται μέσω της αισθητηριακής αντίληψης. Ωστόσο, πολλές φορές η νοητική γνώση είναι δύσκολη ή αδύνατη χωρίς τη βοήθεια της αισθητηριακής αντίληψης ή την κυριολεκτική εκμαίευσή της με διάμεσο την σωκρατική διαλεκτική.

Οι μαθηματικές αλήθειες υπάρχουν ανεξάρτητα από τον μαθηματικό που τις ανακαλύπτει. Οι μαθηματικές αλήθειες είναι ανεξάρτητες από τον φορμαλισμό που χρησιμοποιείται για την διατύπωσή τους και η χρήση σχημάτων, γραμμών και εικόνων δεν έχει σχέση με τις ίδιες αλλά σχετίζεται με την αισθητηριακή παρατήρηση που υποβοηθεί στη σύλληψη των Ιδεών. Η ορθότητα μιας μαθηματικής πρότασης συνάδει με την αντιστοιχία της ή μη σε κάποια συγκεκριμένα δομικά χαρακτηριστικά του σύμπαντος των μαθηματικών ιδεών και τα οποία περιγράφει. Αλλά πως πραγματώνεται η σύλληψη μιας Ιδέας, με ποια μέθοδο μπορούμε να εκμαιεύσουμε τις μαθηματικές αλήθειες και υπάρχει η περίπτωση λάθους στην αναγνώριση μιας Ιδέας. Η γνώση σύμφωνα με τον Πλάτωνα προϋπάρχει στην ψυχή του ανθρώπου και σχετίζεται με την προ-εμπειρική και την μετα-εμπειρική γνώση. Το ξύπνημα της ενυπάρχουσας στην ψυχή γνώσης μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με τη βοήθεια της αισθητηριακής

αντίληψης είτε με τη βοήθεια της σωκρατικής διαλεκτικής. Αναφορικά με τον αν μπορεί να προκύψει λάθος στη σύλληψη μιας ιδέας ο Πλάτωνας διευκρινίζει ότι δεν μπορεί ποτέ να γίνει λάθος στη σύλληψη μιας Ιδέας, αφού μια ιδέα συλλαμβάνεται ή όχι. Λάθος προκύπτει όταν συλλαμβανόμενη εκλαμβάνεται για κάτι που γλωσσικά προσδιορίζεται με τρόπο διάφορο αυτού με τον οποίο, κατά κοινή σύμβαση προσδιορίζεται όλο το ήδη γλωσσικά καθορισμένο τμήμα του σύμπαντος των Ιδεών.

Συνδεδεμένα με το όνομα του Πλάτωνα είναι τα πλατωνικά στερεά. Πλατωνικό στερεό ονομάζεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες. Επομένως, όλες οι ακμές του είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του είναι ίσες. Ο Πλάτωνας στο διάλογο '*Τιμαίος*' παρουσιάζει μια κοσμογονία βασισμένη πάνω σε καθαρά γεωμετρικά στοιχεία, αφού τα βασικά στοιχειώδη υλικά είναι το πύρ, ο αήρ, το ύδωρ και η γη από το συνδυασμό τους προκύπτει οτιδήποτε αισθητό. Αυτά τα στοιχειώδη υλικά με τη σειρά τους συντίθενται από τα πλατωνικά στερεά. Συγκεκριμένα, η γη αποτελείται από στοιχειώδης κύβους, το ύδωρ από στοιχειώδη κανονικά εικοσάεδρα, ο αήρ από στοιχειώδη κανονικά οκταέδρα και το πυρ από στοιχειώδη κανονικά τετράεδρα. Το πέμπτο πλατωνικό στερεό, το κανονικό δωδεκάεδρο που σχηματίζεται από κανονικά πεντάγωνα συνενωμένα ανα τρία στην αντίστοιχη κορυφή οριοθετεί για τον Πλάτωνα όλο το σύμπαν.



Εικόνα από το βιβλίο του Berger, Geometry II, 1980

Ο διάλογος 'Μένων' του Πλάτωνα είναι πολύ σημαντικός, σύμφωνα με τον Fowler (1999), γιατί είναι η πρώτη άμεση και σαφής απόδειξη σχετικά με τα Ελληνικά μαθηματικά αφού γράφτηκε γύρω στο 385π.Χ. και είναι επίσης ένα διαυγές και απλό παράδειγμα μερικών από τα προβλήματα που έθεταν οι Έλληνες μαθηματικοί καθώς και των τεχνικών που ακολουθούσαν για την επίλυσή τους. Στον συγκεκριμένο διάλογο ο Μένων ζητά από τον Σωκράτη να του πει αν η αρετή μπορεί ν΄ αποκτηθεί με διδασκαλία και με εξάσκηση ή μήπως γίνεται κτήμα του ανθρώπου με άλλο τρόπο.

Απόσπασμα από διάλογο Μένων 82b-82e

Σωκράτης: *εἰπὲ δή μοι, ὦ παῖ, γιγνώσκεις τετράγωνον χωρίον ὅτι τοιοῦτόν ἐστιν;*

Παῖς: *ἔγωγε.*

Σωκράτης: *ἔστιν οὖν τετράγωνον χωρίον ἴσας ἔχον τὰς γραμμὰς ταύτας πάσας, τέτταρας οὔσας;*

Παῖς: *πάνυ γε.*

Σωκράτης: *οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἐστὶν ἴσας ἔχον;*

Παῖς: *ναί.*

Σωκράτης: *οὐκοῦν εἴη ἂν τοιοῦτον χωρίον καὶ μεῖζον καὶ ἔλαττον;*

Παῖς: *πάνυ γε.*

Σωκράτης: *εἰ οὖν εἴη αὕτη ἡ πλευρὰ δυοῖν ποδοῖν καὶ αὕτη δυοῖν, πόσων ἂν εἴη ποδῶν τὸ ὅλον; ὧδε δὲ σκόπει: εἰ ἦν ταύτῃ δυοῖν ποδοῖν, ταύτῃ δὲ ἑνὸς ποδὸς μόνον, ἄλλο τι ἅπαξ ἂν ἦν δυοῖν ποδοῖν τὸ χωρίον;*

Παῖς: *ναί.*

Σωκράτης: *ἐπειδὴ δὲ δυοῖν ποδοῖν καὶ ταύτῃ, ἄλλο τι ἢ δὶς δυοῖν γίγνεται;*

Παῖς: *γίγνεται.*

Σωκράτης: *δυοῖν ἄρα δὶς γίγνεται ποδῶν;*

Παῖς: *ναί.*

Σωκράτης: *πόσοι οὖν εἰσιν οἱ δύο δὶς πόδες; λογισάμενος εἰπέ.*

Παῖς: *τέτταρες, ὦ Σώκρατες.*

Σωκράτης: *οὐκοῦν γένοιτ᾽ ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὥσπερ τοῦτο;*

Παῖς: *ναί.*

Σωκράτης: *πόσων οὖν ἔσται ποδῶν;*

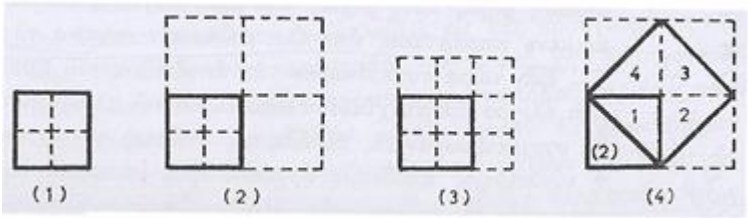
Παῖς: *ὀκτώ.*

Σωκράτης: *φέρε δή, πειρῶ μοι εἰπεῖν πηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἡ γραμμὴ ἑκάστη. ἡ μὲν γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν: τί δὲ ἡ ἐκείνου τοῦ διπλασίου;*

Παῖς: *δῆλον δή, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία.*

Στα πλαίσια του διαλόγου ο Πλατωνικός Σωκράτης χρησιμοποιεί σχήματα για να δείξει στον δούλο πώς μπορεί να κατασκευάσει τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν

από το αρχικό. Η ύπαρξη του συγκεκριμένου τετραγώνου θεωρείται δεδομένη καθώς ένα τέτοιο σχήμα θα μπορούσε να είναι είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο (Knorr σελ. 71). Παρουσιάζει στο δούλο ένα τετράγωνο με πλευρά 2 ποδών επομένως το εμβαδόν του είναι 4 (τετραγωνικών) ποδών. Έπειτα τον ρωτάει τι μήκος έχει η πλευρά του τετραγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν και ο δούλος απαντάει αμέσως 4 ποδών δηλαδή διπλάσιο. Ο Σωκράτης, πάντα με διάλογο, τον οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ούτε 4 ποδών αλλά ούτε και 3 ποδών είναι. Κατά συνέπεια ο δούλος βρίσκεται σε αμηχανία και δηλώνει την άγνοια του. Τότε ο Σωκράτης καταφέρνει με τις μεθόδους του την μαιευτική και την επαγωγική σκέψη να οδηγήσει τον συνομιλητή του στο σωστό συμπέρασμα.



Εικόνα από το βιβλίο του Szabo σελ.259

Στην Πλατωνική φιλοσοφία η χρήση σχημάτων σχετίζεται με την αισθητηριακή παρατήρηση και βοηθάει στη σύλληψη των μαθηματικών ιδεών όχι στην εφεύρεσή τους. (Αναπολιτάνος, 1985). Παρατηρούμε μέσω του συγκεκριμένου διαλόγου ότι τα ελληνικά μαθηματικά παραμερίζουν τον παραστατικό τρόπο γιατί θεωρούν ότι τα μαθηματικά αντικείμενα βρίσκονται στη σφαίρα της νόησης. Συνεπώς, διακρίνεται μια αντιεμπειρική και αντιπαραστατική μεταβολή στα ελληνικά μαθηματικά. Ο Szabo υποστηρίζει ότι το συγκεκριμένο απόσπασμα είναι μια περιγραφή του τρόπου με τον οποίο εξέταζαν την ορθότητα των προτάσεων στα Ελληνικά Μαθηματικά και τον τρόπο που τις αποδείκνυαν αρχικά. Σύμφωνα με τον Szabo(1973) από κάποιους ερευνητές υποστηρίζεται ότι κατά μία άλλη προγενέστερη βαθμίδα των Ελληνικών μαθηματικών θα έπρεπε να έπαιξε σπουδαίο ρόλο η **παραστατική προφάνεια**. Αυτό δημιούργησε την υπόθεση ότι η απόδειξη στα πρώτα ελληνικά μαθηματικά δεν ήταν απλώς μια υποδήλωση του συγκεκριμένου. Συγκεκριμένα, εξέφραζαν τη διαδικασία της απόδειξης με το ρήμα ***δείκνυμι*** γιατί την ορθότητα μιας μαθηματικής προτάσεως την αποδείκνυαν

αρχικώς με το να δεικνύουν, να κάνουν ορατή την κατάσταση των πραγμάτων κατά τρόπο συγκεκριμένο. Πιθανόν, η αρχική μαθηματική απόδειξη να ήταν το ***δείκνυναι*** δηλαδή το να κάνουν ορατό το συγκεκριμένο. Δεν μπορεί όμως κάποιος να ισχυριστεί ότι το σχήμα από μόνο του θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μαθηματική απόδειξη. Αυτό που θέλαν να δείξουν υποστηρίζονταν, βήμα προς βήμα, από μια λογική σκέψη. Η συγκεκριμένη παράσταση αποτελούσε μόνο τον πυρήνα της απόδειξης και τη μέθοδο αυτή δεν τη βρίσκουμε πλέον στον Ευκλείδη. Από το κείμενο του Ευκλείδη σχηματίζει κανείς τη γνώμη ότι δεν ενδιαφέρεται για την εποπτική απόδειξη αλλά για τον σχηματισμό λογικών νοημάτων.(Szabo,1973))

Σύμφωνα, με τον Mueller(1969) είναι φανερό ότι στο διάλογο 'Μένων' το λεκτικό επιχείρημα συνοδεύει απλά τον διαγραμματικό χειρισμό και ότι το διάγραμμα είναι ταυτόχρονα ή πηγή της πειθούς και το τελευταίο μέσο για να αποφασιστεί η αλήθεια ή όχι ενός γεωμετρικού ισχυρισμού. Ο Szabo(1973) θεωρεί τον συγκεκριμένο διάλογο σαν αντιπροσωπευτικό ενός προγενέστερου είδους μαθηματικού επιχειρήματος σε αντίθεση με την Ευκλείδεια απόδειξη. Ο Mueller(1969) βλέπει την αντίθεση περισσότερο στο ύφος παρά σαν εννοιολογική αντίθεση. Ο φορμαλισμός του Ευκλείδη είναι περισσότερο φορμαλισμός στην συγγραφή , που επικεντρώνεται σε υφολογικές λεπτότητες, παρά φορμαλισμός στα μαθηματικά ο οποίος κινείται από έναν φιλοσοφικό σχεδιασμό των μαθηματικών.

2.5 <u>Ο ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ</u>

Ο φιλόσοφος Αριστοτέλης γεννήθηκε το 384 π.Χ. στα Στάγιρα, της Χαλκιδικής και θεωρείται μοναδική αυθεντία της εποχής του . « Η σκέψη του αναπτύχθηκε εν μέρει σαν αντίδραση στην πλατωνική σκέψη και εν μέρει σαν κατάφαση σ' αυτήν, όπως είναι εξίσου αλήθεια πως το φιλοσοφικό του σύστημα, στις βασικές του συνιστώσες, είναι διαμετρικά αντίθετο από το πλατωνικό.» (Αναπολιτάνος,1985 σελ.54). Απορρίπτει τη διάκριση ανάμεσα στον κόσμο των Ιδεών και στον κόσμο των αισθήσεων.

Αν και ο Αριστοτέλης δεν ήταν μαθηματικός, ήταν ενήμερος για τα μαθηματικά και είχε μαθηματικές απόψεις. Σε αντίθεση με τον Πλάτωνα υποστηρίζει ότι ο

αισθητός κόσμος πρέπει να αποτελεί το αντικείμενο της επιστημονικής γνώσης. Σημαντική είναι η συνεισφορά του στην ανάλυση μαθηματικών εννοιών όπως του άπειρου και του συνεχούς και στη λογική όπου μελέτησε κυρίως τη δομή των αποδείξεων και των συμπερασματικών διαδικασιών που οδηγούσαν σε αυτές. Ο Thomas Heath(1921) στο βιβλίο του'History of Greek mathematics' και στο κεφάλαιο Mathematics in Aristotle παραθέτει μερικά παραδείγματα που δείχνουν την σοβαρή ενασχόληση του Αριστοτέλη με τα μαθηματικά. Στα Αναλυτικά Πρότερα παρατηρεί πρόβλημα στη θεωρία των παραλλήλων κάτι που ίσως έκανε τον Ευκλείδη να προσθέσει δύο αιτήματα ώστε να λύσει το πρόβλημα.

Η συστηματική θεμελίωση των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη συμβολή του Αριστοτέλη. Πιθανόν σύμφωνα με τον Szabo(1973) να υπήρχαν οι σπόροι μιας θεμελίωσης των μαθηματικών κατά τους προαριστοτελικούς χρόνους, αλλά η προσωπική επίδοση του Αριστοτέλη ήταν ότι προσπάθησε να αποδείξει ότι κάθε επιστήμη πρέπει να προέρχεται από πρώτες αναπόδεικτες αρχές. Με αυτό τον τρόπο ο Αριστοτέλης έκανε την πρώτη συστηματική θεμελίωση των μαθηματικών επί αρχών. Γιατί με αυτόν τον τρόπο μπορεί να θεωρήσει κάποιος τους ορισμούς, τα αιτήματα και τα αξιώματα σαν βασικές αρχές των μαθηματικών όταν γνωρίζει ότι αυτά δεν μπορούν να αποδειχθούν.

Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋ-
παρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ
πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου
τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν.

(Αναλυτικά Ύστερα Α 1)

πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ
ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, ὅσα τε εἶναι τίθεται (ταῦτα δ'
ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική),
καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδεί-
κνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμ-

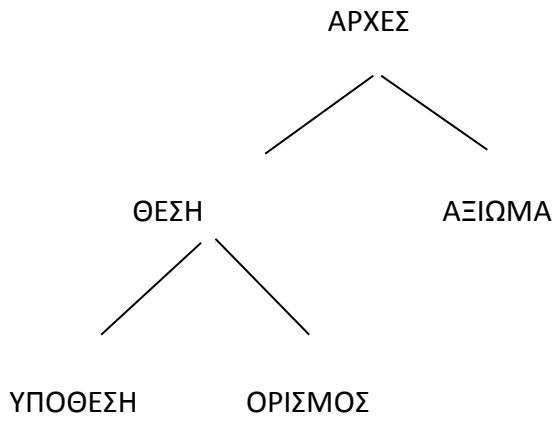
βάνει. ἐνίας μέντοι ἐπιστήμας οὐδὲν κωλύει ἔνια τούτων παρο-

ρᾶν, οἷον τὸ γένος μὴ ὑποτίθεσθαι εἶναι, ἂν ᾖ φανερὸν ὅτι

ἔστιν

Αναλυτικά Ύστερα 76Β 10

Σύμφωνα με τον Szabo(1973) ο Αριστοτέλης κάνει διάκριση ανάμεσα στη θέση και στο αξίωμα. Για τη θέση υποστηρίζει ότι όπως όλες οι πρώτες αρχές είναι αναπόδεικτος και ότι εκείνος που θα ήθελε να μάθει κάτι δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζει τη θέση. Το αξίωμα το διέκρινε από τη θέση υποστηρίζοντας ότι αυτό θα έπρεπε να το γνωρίζει όποιος ήθελε να κατανοήσει κάτι επιστημονικώς. Η θέση κατόπιν χωρίζεται στην υπόθεση και τον ορισμό. Η υπόθεση δηλώνει ότι κάτι είναι ή δεν είναι ενώ ο ορισμός από την άλλη είναι μια παραδοχή. Διαχωρίζεται από την υπόθεση , γιατί δεν καθορίζει όπως η υπόθεση ότι κάτι υπάρχει π.χ. ορίζει τη μονάδα αλλά δεν καθορίζει και το ότι υπάρχει μονάδα. Το αριστοτελικό σχήμα της διαίρεσης των αρχών είναι το ακόλουθο:



Σχήμα σελ.315 Szabo (1973)

«Η δημιουργική δουλειά του Αριστοτέλη στη λογική περιστράφηκε γύρω από τη διερεύνηση των παραγωγικών συμπερασματικών διαδικασιών και από τη μελέτη

της δομής των αποδείξεων. Τον απασχόλησαν βέβαια και οι επαγωγικές συμπερασματικές διαδικασίες και ήταν ενήμερος του μεγάλου ποιοτικού χάσματος ανάμεσα στα δύο αυτά είδη διαδικασιών. Ισχυριζόταν πως ενώ οι παραγωγικές διαδικασίες είναι απαραίτητες για την αποδειξιμότητα που είναι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των μαθηματικών, οι επαγωγικές είναι απαραίτητες για την ανακάλυψη των παρατηρήσιμων αληθειών, που είναι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των εμπειρικών επιστημών.»(Αναπολιτάνος ,1985 σελ.56)

Εν κατακλείδι, σημαντική είναι και η μελέτη του Αριστοτέλη για το άπειρο και το συνεχές, τα οποία θεωρούσε εξαρτημένα μεταξύ τους, οπότε η μελέτη του ενός προϋπέθετε μελέτη του άλλου. Οι διαδικασίες που σχετίζονται με το άπειρο είναι η αθροιστική και η διαιρετική ενώ το συνεχές σχετίζεται με μια δυνητικά άπειρη διαιρετότητα. Η προσπάθεια αυτή του Αριστοτέλη αντέκρουσε την επιχειρηματολογία του Ζήνωνα .

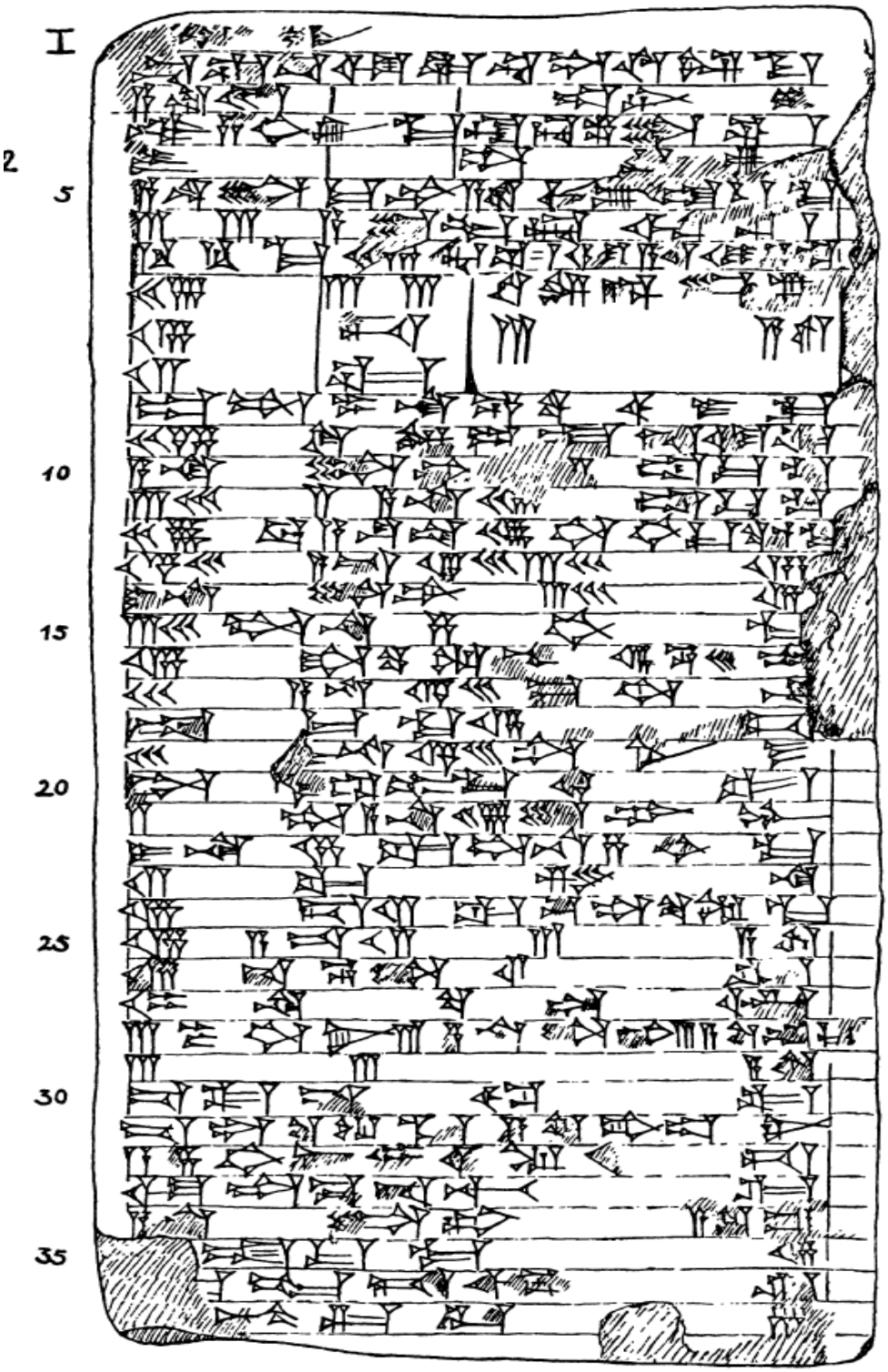
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΑ

3.1ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Είναι προφανές ότι τα θεωρητικά μαθηματικά δεν είχαν θέση στην καθημερινή πρακτική των ανθρώπων. Η λογιστική που χρησιμοποιούσαν για τις οικονομικές τους συναλλαγές , ο υπολογισμός και η σύγκριση εμβαδών και η μέτρηση απαιτούσαν τη χρήση μαθηματικών υπολογισμών . Φυσικά τα πρακτικά μαθηματικά προϋπήρχαν και χρησιμοποιούνταν ευρέως και από άλλους πολιτισμούς όπως οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι. Στο βιβλίο του van der Waerden

(1961 στη σελίδα 64), βλέπουμε τον ακόλουθο βαβυλωνιακό πάπυρο για τον υπολογισμό κάποιας επιφάνειας.



Ο πάπυρος αρχίζει δίνοντας το μήκος και το πλάτος και μετά δίνει οδηγίες. Στις πρώτες γραμμές δηλαδή διατυπώνει το πρόβλημα που στην πραγματικότητα

περιέχει δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους που ο καθένας αντιπροσωπεύεται από ένα σύμβολο. Τα σύμβολα των Σουμέριων χρησιμοποιούνται όπως τα δικά μας σύμβολα χ και ψ. Σε σημερινή μορφή αλγεβρικών εξισώσεων το πρόβλημα θα ήταν έτσι : χ*ψ+ χ- ψ= 183 και χ+ ψ= 27. Υπάρχουν και άλλοι πάπυροι με πολύ ποιο πολύπλοκες εξισώσεις π.χ. δευτεροβάθμιες, όμως δεν φαίνεται πουθενά καμμία προσπάθεια να αποδείξουν ή να κατασκευάσουν κάτι παρά μόνο υπολογισμοί.

Και στην Αρχαία Ελλάδα ήταν γνωστοί εμπειρικοί τρόποι υπολογισμού των επιφανειών που χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι. Είναι χαρακτηριστικό το ακόλουθο απόσπασμα από τον Ηρόδοτο.

Λένε ότι αυτός ο Βασιλιάς μοίρασε τη χώρα σε όλους τους Αιγυπτίους δίνοντας στον καθένα έναν ίσο τετράγωνο κλήρο για τον οποίο θα πληρώνει ετήσιο φόρο και με αυτό τον τρόπο δημιούργησε εισοδήματα. Και όποιος έχανε από πλημμύρα μέρος της γης του, πήγαινε στον Βασιλιά και έλεγε τι είχε συμβεί. Τότε ο Βασιλιάς έστελνε ανθρώπους που εξέταζαν και μετρούσαν το τμήμα κατά το οποίο μειώθηκε η γη, ώστε να πληρώνει αναλογικά μικρότερο φόρο από εκείνον που αρχικά του είχε επιβληθεί. Έτσι νομίζω βρέθηκε η γεωμετρία και ήλθε στην Ελλάδα.

Ηρόδοτος, ΙΣΤΟΡΙΑΙ, ΙΙ-109

Και στον Όμηρο υπάρχουν αναφορές για μετρήσεις επιφανειών.

όπως δυο χωριάτες για το σύνορο μαλώνουν, και στα χέρια
κρατούν κορδέλα για το μέτρημα, σε μεσιακό χωράφι,
σε μια της γης λουρίδα στέκοντας, πως να μοιράσουν δίκαια.

Ομήρου Ιλιάδα, Μ.421 -23, Μετ. Ν. Καζαντζάκη, Ι. Κακριδή

Αυτό που θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε εδώ είναι πως οι αρχαίοι Έλληνες ενσωμάτωσαν αυτές τις πρακτικές στο δικό τους σύστημα και κατά πόσο η χρήση των πρακτικών αυτών μαθηματικών βοήθησε την ανάπτυξη των αντίστοιχων θεωρητικών. Θα ασχοληθούμε με τη χρήση του άβακα, των πρακτικών διαγραμμάτων και την προέλευση των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν από τους Έλληνες μαθηματικούς.

3.2 Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΒΑΚΑ

Diog. Laert. i. 59

Ἔλεγε δὲ τοὺς παρὰ τοῖς τυράννοις δυναμένους παραπλησίους εἶναι ταῖς ψήφοις ταῖς ἐπὶ τῶν λογισμῶν. καὶ γὰρ ἐκείνων ἑκάστην ποτὲ μὲν πλείω σημαίνειν, ποτὲ δὲ ἥττω· καὶ τούτων τοὺς τυράννους ποτὲ μὲν ἕκαστον μέγαν ἄγειν καὶ λαμπρόν, ποτὲ δὲ ἄτιμον.

Σύμφωνα με τον Heath(1921), είναι φανερό ότι οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν κάποιο είδος άβακα από τις αναφορές κλασσικών συγγραφέων για τη χρήση ψήφων (βότσαλων) στους υπολογισμούς. Στις 'Σφήκες' του Αριστοφάνη ο Βδελυκλέων λέει στον πατέρα του να κάνει μια εύκολη πρόσθεση *'μή ψήφοις αλλ' από χειρός'* όχι με βότσαλα αλλά με τα δάκτυλα και ο Ηρόδοτος αναφέρει ότι στον υπολογισμό με βότσαλα όπως και στη γραφή οι Έλληνες κινούν το χέρι τους από αριστερά προς τα δεξιά ενώ οι Αιγύπτιοι από δεξιά προς τα αριστερά. Γι αυτό τον λόγο οι στήλες ήταν κάθετες και κοιτούσαν το χειριστή. Ο Διογένης Λαέρτιος αποδίδει στον Σόλωνα ένα σχόλιο ότι αυτοί που περιέβαλαν τους τυράννους ήταν σαν τους ψήφους που χρησιμοποιούσαν για τους λογισμούς, όπως κάθε ψήφος αντιπροσώπευε άλλοτε περισσότερο, άλλοτε λιγότερο έτσι και οι τύραννοι συμπεριφέρονταν στους κόλακες άλλοτε σαν σημαντικούς και δημοφιλείς και άλλοτε σαν να είναι ασήμαντοι.

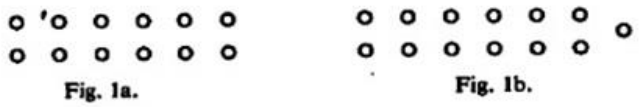
Η αριθμητική με βότσαλα χρησιμοποιούνταν για όλων των ειδών τους υπολογισμούς. Τα βότσαλα συμβόλιζαν διαφορετικούς αριθμούς μέσω διαφορετικών μορφών και μεγεθών, τα οποία μετακινούνταν πάνω σε μία επιφάνεια (Netz 2002, που το παρομοιάζει με το τάβλι) Προφανώς, θα πρέπει να υπήρχαν επαγγελματίες τους οποίους προσλάμβαναν όταν κάποιο πρόβλημα θα έπρεπε να λυθεί.

Ωστόσο, η χρήση βότσαλων σε έναν άβακα μπορεί να οδηγήσει στην ανακάλυψη γενικότερης μαθηματικής γνώσης, για παράδειγμα τις ιδιότητες των άρτιών και των περιττών ή των πρώτων αριθμών ή σε κανόνες για την παραγωγή τετράγωνων αριθμών. Ο Asper (2009) καλεί αυτή τη γνώση γενική γιατί δεν έχει

άμεση εφαρμογή. Εδώ η 'θεωρητική' γνώση προκύπτει από ένα καθαρά πρακτικό περιβάλλον.

Ο Knorr (1945) επίσης ασχολήθηκε με το θέμα και διατυπώνει αρχικά το ερώτημα 'Πως χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι με τα βότσαλα για την μελέτη των άρτιων και των περιττών αριθμών?' και συνεχίζει λέγοντας ότι δυστυχώς οι Νέο-Πυθαγόρειοι δεν χρησιμοποιούσαν τις μεθόδους της αναπαράστασης με τελείες για αυτό το σκοπό. Αλλά το απόσπασμα του Επίχαρμου υποδεικνύει ότι των 5^{ο} αιώνα οι μαθηματικοί είχαν όντως μελετήσει με αυτών τον τρόπο τους άρτιους και τους περιττούς. Έχουν προταθεί δύο διαφορετικές προσεγγίσεις σε αυτές τις μελέτες.

Καταρχήν, ο Heidel διατύπωσε την άποψη ότι οι Πυθαγόρειοι παρίσταναν τον άρτιο αριθμό ως μια διπλή γραμμή κουκκίδων, ενώ ο περιττός αριθμός παρουσιάζονταν ως μια παρόμοια διπλή σειρά με το περιττό μέρος να προεξέχει.



Σχήμα από Knorr (1945) σελ. 138

Παραπάνω βλέπουμε δείγματα για το 12 και το 13 όπως δίνονται στο βιβλίο του Knorr. Χρησιμοποιείται αυτή η μέθοδος από τον Heidel για να εξηγήθουν αρκετά αποσπάσματα που αφορούν τους άρτιους και τους περιττούς όπως για παράδειγμα την αναφορά του Σιμπλίκιου στον Αριστοτέλη. Εδώ ο σχολιαστής επιβεβαιώνει ότι οι Πυθαγόρειοι συνέδεαν τον άρτιο με το χωρίς όρια επειδή η διαίρεση του αρτίου συνεχίζεται επ' άπειρον, ενώ η πρόσθεση των περιττών φέρνει σε αυτή τη διαδικασία ένα τέλος. Ένας άρτιος όπως το 12 μπορεί να διαιρεθεί σε δύο μισά ενώ ένας περιττός όπως το 13 δεν μπορεί να διαιρεθεί καθώς η περιττή μονάδα εμποδίζει τη διαδικασία. (Knorr.σελ.138)

Μια διαφορετική μέθοδος παρουσιάστηκε από τον Becker αν και χωρίς υποστήριξη από κείμενα. Τοποθετεί τις μονάδες του αριθμού σε μία ευθεία γραμμή. Η ισότητα υποδηλώνεται χρησιμοποιώντας συνδυασμούς λευκών και

μαύρων βότσαλων. Για παράδειγμα το 12 εμφανίζεται σαν μία γραμμή λευκών και μαύρων βότσαλων όπως φαίνεται στο σχήμα.

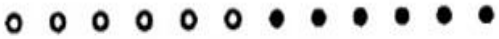
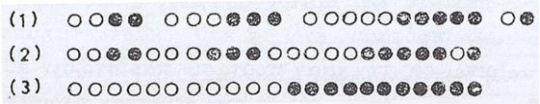


Fig. 3.

Σχήμα από Knorr (1945) σελ. 138

Χρησιμοποιώντας αυτό το σχήμα μπόρεσε εύκολα να αναπαραστήσει τις αποδείξεις του Ευκλείδη στα θεωρήματα άρτιων και περιττών. Χρησιμοποιώντας αυτό το σχήμα μπόρεσε εύκολα να αναπαραστήσει τις αποδείξεις του Ευκλείδη στα θεωρήματα άρτιων και περιττών, όπως η πρόταση IX,21 (ότι το άθροισμα άρτιων είναι άρτιος). (Knorr σελ.138))

Στο βιβλίο του Szabo δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα της μεθόδου του Becker. Έστω ΑΒ=4, ΒΓ=6, ΓΔ=10, ΔΕ=2 και ΑΕ=22

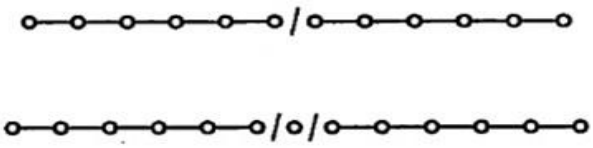


Σχήμα από Szabo σελ. 264

Στην πρώτη σειρά οι δοθέντες άρτιοι απλά τοποθετούνται, στη δεύτερη προστίθενται και στην τρίτη τα μισά τους (δηλ. τα λευκά και τα μαύρα) τοποθετούνται σύμφωνα με την αντιμεταθετική ιδιότητα, για να γίνει ορατό ότι στο άθροισμα υπάρχουν ακριβώς ο ίδιος αριθμός λευκών και μαύρων βότσαλων. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε μια παραστατική απόδειξη της ορθότητας της προηγούμενης πρότασης. Με τη πρωτόγονη αυτή τεχνική της απόδειξης φαίνεται αμέσως πως ένας περιττός αριθμός μπορεί να γίνει άρτιος προσθέτοντας ή αφαιρώντας ένα βότσαλο (πρόταση IX 22 Ευκλείδη *΄ Αφαιρεθείσης μονάδος αφ' εκάστου των δοθέντων περιττών αριθμών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, Δε, έκαστος των λοιπών άρτιος εσταί'*) Στον Ευκλείδη αυτή η πρόταση δεν έχει παρασταθεί. (Szabo ,1973 σελ.264)

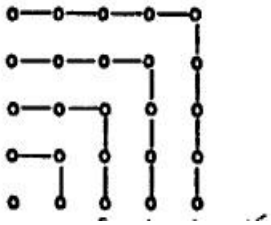
Ο Knorr(1945) ακολουθεί την άποψη του Becker αλλά διαφοροποιείται στον διαχωρισμό των βότσαλων σε μαύρα και άσπρα. Γιατί, για παράδειγμα , στην περίπτωση του άρτιου αριθμού αυτός ο διαχωρισμός μας περιορίζει σε ένα μόνο

είδος υποδιαίρεσης, σε δύο ίσα μέρη. ¨όμως σύμφωνα με τον Νικόμαχο ο αρχαίος ορισμός των άρτιων και περιττών εμπεριέχει μια ευρύτερη άποψη διαίρεσης.



Σχήμα από Knorr(1945) σελ. 140

Ο Knorr(1945) ακολουθεί τον απλούστερο τρόπο παρουσίασης . Οι αριθμοί αναπαριστάνονται σειρές μονάδων. Οι άρτιοι χωρίζονται σε δύο σειρές μονάδων μία στα δεξιά και μία στα αριστερά που περιέχουν τον ίδιο αριθμό μονάδων και η μεσαία θέση είναι άδεια. Στους περιττούς, από την άλλη, στη μεσαία θέση βρίσκεται μία μονάδα , οποιαδήποτε διαίρεση σε δύο σειρές θα δημιουργήσει ανόμοιες σειρές. Με αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης ο Knorr απέδειξε τις προτάσεις για άρτιους και περιττούς. Και υποστηρίζει επίσης ότι η πρώτη μαθηματική εμφάνιση των σχηματικών αριθμών θα πρέπει να έγινε μέσω της τοποθέτησης των βότσαλων σε τετράγωνα και παραλληλόγραμμα στην προσπάθειά τους να επιδείξουν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των αριθμών.



Σχήμα από Knorr σελ. 147

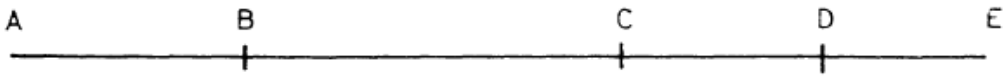
Και συνεχίζει με τις αποδείξεις των προτάσεων για τους σχηματικούς αριθμούς.

Ο Netz(1999) δεν αρνείται το ρόλο του άβακα στη διαμόρφωση της ελληνικής αριθμητικής έννοιας. Το ερώτημα που θέτει είναι διαφορετικό. Εστιάζει το ενδιαφέρον του στο αν υπήρξε οποιαδήποτε απόδειξη γραπτή ή προφορική που να έγινε με τη βοήθεια των βότσαλων. Οι ενδείξεις υποδεικνύουν προφορικές αποδείξεις. Ο Αριστοτέλης αναφέρεται σε πράγματα που άκουσε και όχι σε κάτι που διάβασε. Αυτό είναι κατανοητό γιατί οι χειρισμοί των βότσαλων υποκρύπτουν

μια μετάβαση σε γραπτό μέσο. Το πλεονέκτημα των βότσαλων σε σχέση με άλλους τύπους αριθμητικών αναπαραστάσεων είναι το αποτέλεσμα των άμεσων φυσικών χειρισμών που συνδέονται με πραγματικές πράξεις. Οι πηγές δεν δείχνουν παθητική παρατήρηση των βότσαλων, αναφέρουν ότι τα βότσαλα κινούνται και προστίθενται. Ο Netz (1999) γράφει ότι κανένα αριθμητικό κείμενο δεν αναφέρεται σε βότσαλα ή σε αναπαράσταση με κουκίδες μια μαθηματικής κατάστασης. Υπάρχει μια θεωρία που υποστηρίζει ότι κάποιοι Έλληνες αναπαρίσταναν τους αριθμούς με βότσαλα στους υπολογισμούς ή όταν έκαναν γραπτούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν κουκίδες. Αναφέρει επίσης αυτό που υποστηρίζει ο Philip ότι τα κείμενα που αναφέρονται στον άβακα είναι του τέλος του 4ου π.χ. αιώνα και μπορεί να έχουν σχέση με τη μεγάλη ανάπτυξη των μαθηματικών τον συγκεκριμένο αιώνα και οπότε δεν έχουν καμμία σχέση με το τέλος του 5ου αιώνα. Αναφέρει επίσης και την παρατήρηση του Knorr ότι αυτό δεν μπορεί να έχει επαναστατική λογική. Μπορεί η πρόοδος να οδηγήσει τα μαθηματικά στο επίπεδο των βότσαλων;

Το πρόβλημα είναι ότι η μόνη απόδειξη για μαθηματική χρήση των βότσαλων προέρχεται από μία εποχή όπου υπήρχαν ισχυρότεροι μαθηματικοί τύποι αριθμητικής.

Ο Ευκλείδης όπως γνωρίζουμε και όπως επισημαίνεται και στον Szabo αποδεικνύει τις προτάσεις των άρτιων και περιττών με τη βοήθεια ευθυγράμμων τμημάτων. Για παράδειγμα, στην πρόταση IX 21 των στοιχείων που αναφέρθηκε και προηγουμένως , ο ισχυρισμός του Ευκλείδη εξηγείται με μια συγκεκριμένη περίπτωση: ‘Αν προστεθούν οι άρτιοι αριθμοί ΑΒ, ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ ισχυρίζομαι ότι και το άθροισμα αυτών είναι άρτιος.’ Άρα, κάθε άρτιος παριστάνεται από δύο γράμματα(ΑΒ,ΓΔ κλπ.) δηλ. ο Ευκλείδης τους αριθμούς αυτούς τους αναπαριστούσε ως ευθύγραμμα τμήματα και το άθροισμά τους ως μια διαδοχική αλληλουχία των ευθυγράμμων τμημάτων κατά μήκος μια γραμμής.



Ο Szabo(1973) δίνει μεγάλη έμφαση στη χρήση ευθυγράμμων τμημάτων στα Στοιχεία αντί κουκκίδων. Χρησιμοποιώντας, ψήφους μόνο κάποιοι συγκεκριμένοι

άρτιοι ή περιττοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν, αλλά δεν μπορεί να παρασταθεί ο άρτιος ή ο περιττός γενικά. Από την άλλη ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί πάντα να είναι το σύμβολο ενός αυθαίρετου αριθμού. Αυτό σημαίνει ότι ο νέος τρόπος αναπαράστασης μπορεί να προέκυψε από την προσπάθεια να επιτευχθεί ένας υψηλότερος βαθμός γενικότητας. Ο Thaer παρατηρεί ότι η συνήθεια του Ευκλείδη να παριστάνει με ευθύγραμμα τμήματα τους αριθμούς είναι μια κληρονομιά από τη μουσική γιατί στο μονόχορδο τα τμήματα χορδής είχαν την ίδια σημασία με τους ακέραιους αριθμούς.(Szabo ,1973 σελ. 263)

3.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σε αντίθεση, με τη χρήση του άβακα που δεν έχουν διασωθεί γραπτά που να δείχνουν τη χρήση του παρά μόνο αναφορές όπως είδαμε προηγουμένως, κείμενα με πρακτικά διαγράμματα διασώζονται. Έχουν διασωθεί αρκετοί πάπυροι γραμμένοι από τους Έλληνες της Αιγύπτου. Αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι τέτοια γραπτά υπήρχαν στην Ελλάδα στην αρχαιότητα .(Asper,2009)

Στο άρθρο του ο Asper (2009) παραθέτει ένα παράδειγμα από έναν πάπυρο που χρονολογείται τον 1ο αιώνα μ.Χ. και βρίσκεται τώρα στη Βιέννη.

« Αν δίνεται ένα παραλληλόγραμμο όπως αυτό που σχεδιάζεται παρακάτω: το τετράγωνο της πλευράς 13 είναι 169 και το τετράγωνο της πλευράς 15 είναι 225. Αφαίρεσε από αυτό το 169 και μένει 56. Αφαίρεσε το 6 της βάσης από το 10 της κορυφής. Μένει 4. Πάρε το ¼ του 56 είναι 14. Από αυτό αφαίρεσε το 4. Μένει 10 το μισό του οποίου είναι το 5.Τόσο μεγάλη είναι η βάση του ορθογωνίου τριγώνου. Το τετράγωνό της είναι 25 και το τετράγωνο του 13 είναι 169. Αφαίρεσε το 25, μένει 144, η πλευρά είναι 12. Τόσο μεγάλη είναι η κάθετη. Και αφαίρεσε 5 από το 6 της βάσης. Περισσεύει 1. Πάρε το 1 από 10 της κορυφής. Μένει 9. Τόσο μεγάλη είναι η πάνω βάση του ορθογωνίου τριγώνου. Και το 12 της κάθετης επί το 5 της βάσης είναι 60, και το μισό του είναι 30.Τόσων τετραγωνικών μονάδων είναι το ορθογώνιο τρίγωνο. Και 12 επί 1 είναι 12. Τόσων τετραγωνικών μονάδων είναι το τρίγωνο. Και το 12 επί το 9 της βάσης είναι 108, και το μισό του 54.Τόσων τετραγωνικών μονάδων

είναι το άλλο ορθογώνιο τρίγωνο. Όλο μαζί είναι 96 μονάδες. Τόσο θα είναι το σχήμα.» (Asper, 2009 σελ.110)

Το διάγραμμα έχει αναπαραχθεί σύμφωνα με τον πάπυρο. Ο αλγόριθμος δίνει το εμβαδόν ενός ακανόνιστου σχήματος που αποτελείται από τρίγωνα και παραλληλόγραμμα.

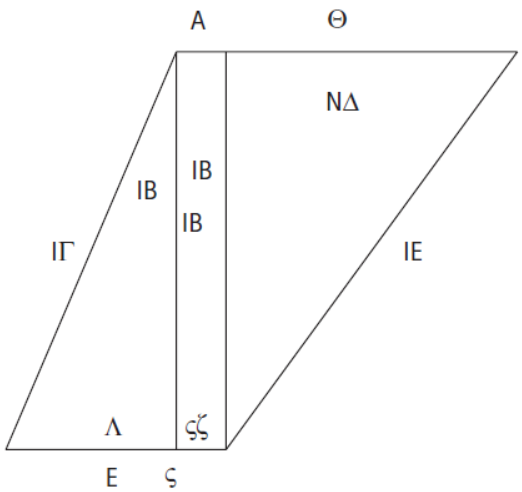


Figure 2.1.1 Diagram in Papyrus Ayer (first to second century AD)

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η όλη διαδικασία δίνεται σε βήματα, δίνοντας οδηγίες σε κάποιο πρόσωπο που θα ήθελε να υπολογίσει το εμβαδό αυτής της επιφάνειας. Δεν εξηγείται η μέθοδος που ακολουθείται, ούτε αποδεικνύεται κάτι και χρησιμοποιούνται αριθμοί που διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Δεν υπάρχει καμμία αναφορά που να οδηγεί σε γενικευμένη μέθοδο. Ενδεχομένως, να αφήνεται στον αναγνώστη να καταλάβει τη μέθοδο χρησιμοποιώντας την σε διαφορετικά παραδείγματα.

Αυτοί οι πάπυροι εμφανίζονται στην Αίγυπτο τους δύο πρώτους αιώνες μ. Χ. και επιλύουν βασικά προβλήματα και δεν έχουν καμμία σχέση με τα παραγωγικά μαθηματικά που ήταν γνωστά και ευρέως διαδεδομένα εκείνη την εποχή. Μας επιτρέπουν όμως να καταλάβουμε μια παράδοση στη χρήση διαγραμμάτων για την επίλυση απλών προβλημάτων που σαφώς προϋπήρχε. Σύμφωνα με τον Asper(2009) μπορεί κανείς να παρατηρήσει ρητορικά στοιχεία που είναι εμφανή στα ελληνικά κείμενα όπως ένα σαφώς διατυπωμένο πρακτικό πρόβλημα , την έντονη αναφορά

στον αναγνώστη, τη συγκεκριμένη δομή που μοιάζει με συνταγή και μία διαδικασία με παραδειγματικούς αριθμούς. Δηλαδή υπάρχει μια αφηρημένη μέθοδος ή οποία δεν αναφέρεται αλλά επιδεικνύεται μέσα από πραγματικές διαδικασίες. Αυτό το είδος διαγραμμάτων είχαν αναπτυχθεί προηγουμένως και σε άλλους πολιτισμούς και ακόμα και πριν τη μεγάλη άνθιση της Ελλάδας δεκάδες επαγγελματίες προσήλθαν στην περιοχή (από τον 9^{ο} αιώνα π.Χ.) και μετέφεραν τις γνώσεις τους. Σε αυτά τα κείμενα όπως ήδη επισημάναμε δεν υπάρχει κανενός είδους ορισμό, απόδειξη ή η έννοια της γενίκευσης κάτι που μπορεί να ερμηνευτεί από τους κοινωνικούς παράγοντες που αυτή η γνώση αφορούσε. Για να λύσεις πρακτικά προβλήματα της καθημερινότητας αυτό που απαιτούνταν ήταν η αναφορά μιας λεπτομερούς διαδικασίας.

3.4 ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Όταν κάποιος αναφέρεται σε μαθηματικά φέρνει στο μυαλό του ένα συγκεκριμένο είδος γραφής και παρουσίασης. Αναμένει να υπάρχουν προτάσεις, αποδείξεις και σχήματα, ένα είδος παρουσίασης που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης στα Στοιχεία.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτελούν το κορυφαίο σύγγραμμα των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, παράδειγμα αξιωματικής θεμελίωσης μιας επιστήμης και δεύτερο σε αριθμό εκδόσεων μετά την Αγία Γραφή. Τα Στοιχεία αποτελούνται από 13 βιβλία γράφτηκε στην Αλεξάνδρεια περίπου το 300 π.Χ.. Το περιεχόμενο των Στοιχείων στηρίχθηκε στο έργο προηγούμενων μαθηματικών που έζησαν και δημιουργήσαν από τον 6ο π.Χ. αιώνα και μετά. Ο Ευκλείδης δεν είναι ο πρώτος που γράφει Στοιχεία. Είχαν προηγηθεί άλλοι μαθηματικοί όπως ο Ιπποκράτης ο Χίος. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη όμως παρουσίαζαν μεγαλύτερη αυστηρότητα στην δομή τους από τις προηγούμενες εργασίες οι οποίες δεν διασώζονται.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο ο όρος Στοιχεία αναφέρεται σε κάθε σύστημα μαθηματικών προτάσεων. Τα στοιχεία μιας αποδεικτικής μελέτης τα πιο σημαντικά δηλαδή θεωρήματα ή τα θεωρήματα κλειδιά που χρησιμοποιούνται συχνά και πλατιά στο αντικείμενο της μελέτης και που χρειάζονται για την απόδειξη όλων ή των περισσότερων από τα άλλα θεωρήματα. Κάτι αντίστοιχο είναι τα γράμματα της αλφαβήτου για την γλώσσα.

Η διάρθρωση των 13 βιβλίων του Ευκλείδη είναι η εξής: τα πρώτα 6 πραγματεύονται την επιπεδομετρία, τα επόμενα 3 αναφέρονται στη θεωρία αριθμών και τα 3 τελευταία στην στερεομετρία. Στα 13 βιβλία των Στοιχείων περιέχονται 121 ορισμοί, 5 αιτήματα, 9 κοινές έννοιες και 465 προτάσεις, που καταλαμβάνουν 20000 σειρές κειμένου.

Ορισμοί: Υπάρχει μικρός αριθμός ορισμών . Οι περισσότεροι είναι προτάσεις που τις θεωρούμε αληθείς. Ορίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα προϋποθέτοντας την

ύπαρξή τους, ενώ δεν υπάρχει ορισμός για την ισότητα ή για βασικά γεωμετρικά σχήματα όπως το παραλληλόγραμμο. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ‘ Ο ορισμός διαφέρει από την απόδειξη γιατί δεν έχει ως στόχο την ύπαρξη του αντικειμένου’. Ας δούμε τους ορισμούς του πρώτου βιβλίου.

1. Σημείο είναι κάθε τι που δεν έχει μέρη.
2. Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος.
3. Τα άκρα κάθε γραμμής είναι σημεία.
4. Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή, η οποία κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.
5. Επιφάνεια είναι κάθε τι που έχει μόνο μήκος και πλάτος.
6. Τα πέρατα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.
7. Επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η επιφάνεια, η οποία κείται εξ ίσου προς τις ευθείες της.
8. Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο ευθειών γραμμών του επιπέδου που τέμνονται χωρίς να αποτελούν ευθεία.
9. Όταν δε οι ευθείες που περιέχουν μια γωνία αποτελούν ευθεία , η γωνία ονομάζεται ευθύγραμμη.
10. Όταν μια ευθεία τέμνει άλλη ευθεία και σχηματίζει τις εφεξής γωνίες ίσες, κάθε μία από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η τέμνουσα ονομάζεται κάθετος της ευθείας που τέμνει.
11. Αμβλεία γωνία είναι η μεγαλύτερη της ορθής γωνίας.
12. Οξεία γωνία είναι η μικρότερη της ορθής γωνίας.
13. Σύνορο είναι ότι είναι πέρας κάποιου αντικειμένου.
14. Σχήμα είναι ότι περιέχεται σε ένα ή περισσότερα σύνορα.

15. Κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται σε μία γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια, της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

16. Το σημείο αυτό λέγεται κέντρο του κύκλου.

17. Διάμετρος κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

18. Ημικύκλιο ονομάζεται το σχήμα που περιέχεται από τη γραμμή που αποτελείται από μία διάμετρο του κύκλου και από το αντίστοιχο στη διάμετρο τόξο. Κέντρο του ημικυκλίου είναι το κέντρο του κύκλου.

19. Ευθύγραμμα σχήματα είναι αυτά που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, τρίπλευρα αυτά που περιέχονται από τρεις, τετράπλευρα από τέσσερις, πολύπλευρα από περισσότερες των τεσσάρων γραμμές.

20. Από τα τρίπλευρα σχήματα αυτό που έχει ίσες τις τρεις πλευρές ονομάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, αυτό που έχει δύο μόνο πλευρές ίσες ισοσκελές και σκαληνό αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.

21. Από τα τρίπλευρα σχήματα, ορθογώνιο είναι αυτό που έχει μια γωνία ορθή, αμβλυγώνιο αυτό που έχει μια γωνία αμβλεία και οξυγώνιο αυτό που έχει τις γωνίες οξείες.

22. Από τα τετράπλευρα σχήματα, τετράγωνα είναι εκείνα τα οποία είναι ισόπλευρα και ορθογώνια, ετερομήκη είναι εκείνα που είναι ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα, ρόμβοι είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια και ρομβοειδή είναι εκείνα που δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα ονομάζονται τραπέζια.

23. Παράλληλες ονομάζονται οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ’ άπειρον εκατέρωθεν δεν τέμνονται.

Αιτήματα: Βρίσκονται μόνο στο πρώτο βιβλίο. Με τα αιτήματα ο Ευκλείδης προσπαθεί να διατυπώσει τις ιδιότητες που έχουν τα γεωμετρικά μεγέθη. Το πέμπτο αίτημα, το αίτημα των παραλλήλων απασχόλησε ιδιαίτερα τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα μέχρι τη σύγχρονη εποχή. Πολλοί θεωρούσαν ότι το συγκεκριμένο αίτημα είναι στην πραγματικότητα πρόταση που μπορεί να αποδειχθεί και ότι η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να γίνει χωρίς αυτό. Ορισμένοι διατυπώνουν την άποψη ότι τα αιτήματα στην ευκλείδεια και προευκλείδεια εποχή ήταν κατασκευές που σκοπό είχαν να αποδείξουν την ύπαρξη των διαφόρων γεωμετρικών αντικειμένων.

Αίτημα 1: Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.

Αίτημα 2: Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Αίτημα 3: Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα, είναι δυνατόν να γράψουμε κύκλο.

Αίτημα 4: Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Αίτημα 5: Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος ‘εντός και επί τα αυτά’ γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

Κοινές έννοιες: Βρίσκονται και αυτές μόνο στο πρώτο βιβλίο. Είναι έννοιες που εφαρμόζονται και σε άλλες επιστήμες εκτός των μαθηματικών. Ο Πρόκλος δεν χρησιμοποιεί των όρο κοινές έννοιες αλλά αξιώματα.

1.Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους ίσα.

2. Και αν σε ίσα προστεθούν ίσα προκύπτουν ίσα.

3. Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, μένουν ίσα.

4. Και αν σε άνισα προσθέσουμε ίσα, προκύπτουν άνισα.

5. Και τα διπλάσια του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.

6. Και τα μισά του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.

7. Και αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους, είναι ίσα μεταξύ τους.

8. Και ολόκληρο είναι μεγαλύτερο ενός μέρους του.

9. Και δύο ευθείες δεν περικλείουν χωρίο.

Σχετικά με τις κοινές έννοιες διατυπώνονται αμφιβολίες αν προέρχονται όλες από τον Ευκλείδη αφού ο Ήρωνας αναφέρει μόνο τρείς και ο Πρόκλος πέντε.

Προτάσεις : Είναι κατανεμημένες σε όλα τα βιβλία των Στοιχείων. Οι προτάσεις των 'Στοιχείων' διακρίνονται στα θεωρήματα και στα προβλήματα. Θεώρημα είναι η πρόταση της οποίας ζητείται η εύρεση της αλήθειας αποδεικτικά. Πρόβλημα είναι η πρόταση στην οποία ζητείται η κατασκευή ορισμένου γεωμετρικού σχήματος. Μετά την απόδειξη ενός θεωρήματος ο Ευκλείδης προσθέτει τη φράση '*όπερ έδει δείξαι'*, ενώ στο πρόβλημα αφού φέρει εις πέρας την κατασκευή χρησιμοποιεί τη φράση '*όπερ έδει ποιήσαι'*

Η πιο σημαντική μορφή παρουσίασης στα 'Στοιχεία' είναι η πρόταση. Είναι χαρακτηριστική η δομή των προτάσεων στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον Πρόκλο κάθε ολοκληρωμένη πρόταση θα πρέπει να περιέχει τα παρακάτω 6 στοιχεία.

1) Την **πρόταση** όπου διατυπώνονται τα δεδομένα και τα ζητούμενα. . Θεωρείται δε ως δεδομένο κάτι είτε ως προς τη θέση, είτε ως προς το μέγεθος, είτε ως προς το λόγο, είτε ως προς το είδος. Αλλά σε κάποιες περιπτώσεις που τα δεδομένα θεωρούνται προφανή μπορεί να παραλείπονται.

2) Την **έκθεση** το οποίο επαναλαμβάνει τα δεδομένα με μία μορφή που θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί αργότερα.

3) Τον **διορισμό** που ορίζει τον στόχο της πρότασης

4) Την **κατασκευή** που προσθέτει νέα δεδομένα , που θα χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία εύρεσης του ζητούμενου

5) Την **απόδειξη** όπου επιχειρηματολογεί χρησιμοποιώντας τα δεδομένα με στόχο να φτάσει στο ζητούμενο.

6) Το **συμπέρασμα** επανέρχεται στην πρόταση επαναδιατυπώνοντας αυτό που έχει δειχθεί.

Παραθέτουμε την πρόταση ΙΙ.5 των Στοιχείων :

Πρόταση

Αν τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δύο ίσα τμήματα και από ένα σημείο του σε δύο άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα μαζί με το τετράγωνο που έχει πλευρά το τμήμα με άκρα τα σημεία διαίρεσης είναι ίσα με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος.

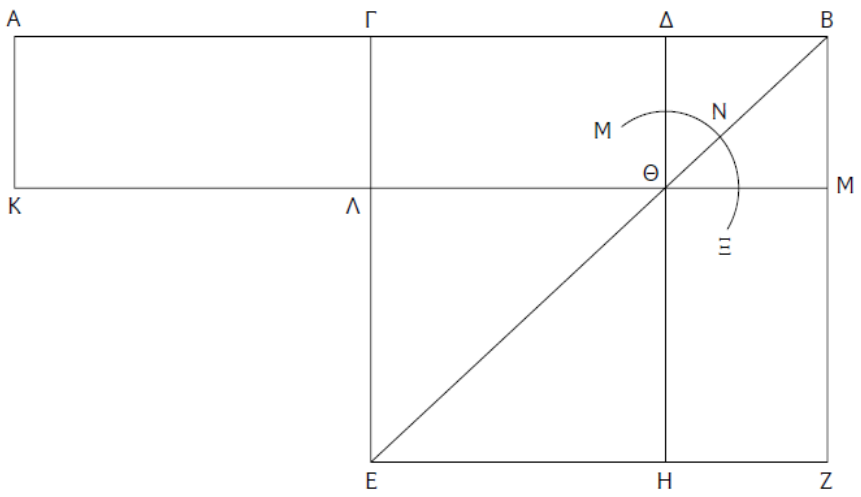
Έκθεση

Έστω Γ το μέσο του ΑΒ και Δ σημείο που διαιρεί το ΑΒ σε μέρη άνισα.

Διορισμό

Θα δείξουμε ότι το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα ΑΔ, ΔΒ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ είναι ισοδύναμα με το τετράγωνο πλευράς ΒΓ.

Κατασκευή



Σχεδιάζουμε με πλευρά ΓΒ τετράγωνο ΓΕΖΒ και ενώνουμε την ΒΕ. Από το σημείο Δ φέρνουμε ΔΗ // ΒΖ, και από το σημείο Θ την ΚΜ// ΑΒ. Από το Α φέρνουμε ΑΚ// ΓΛ.

Απόδειξη

Και αφού το ΓΘ είναι ίσο με το ΘΖ και ας προσθέσουμε τη ΔΜ ως κοινή τότε ολόκληρο το ΓΜ είναι ίσο με το ΔΖ. Όμως το ΓΜ είναι ίσο με το ΑΛ αφού το ΑΓ είναι ίσο με το ΓΒ. Γι αυτό το ΑΛ είναι ίσο με το ΔΖ. Ας προσθέσουμε το ΓΘ ως κοινό, οπότε ολόκληρο το ΑΘ είναι ίσο με τον γνώμονα ΜΝΞ. Όμως το ΑΘ είναι το ορθογώνιο που περιέχεται από τα ΑΔ και ΔΒ. Το ΔΘ είναι ίσο με το ΔΒ οπότε ο γνώμονας ΜΝΞ είναι ίσος με το περιεχόμενο από τις ΑΔ και ΔΒ ορθογώνιο. Ας προσθέσουμε την ΛΗ ως κοινή ή οποία είναι ίση με το τετράγωνο της ΓΔ, γι αυτό ο γνώμονας ΜΝΞ και ΛΗ είναι ίσες με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΔ , ΔΒ και το τετράγωνο της ΓΔ. Αλλά ο γνώμονας ΜΝΞ και η ΛΗ είναι το τετράγωνο ΓΕΖΒ το οποίο είναι το τετράγωνο του ΓΒ γι αυτό το ορθογώνιο που περιέχεται στις ΑΔ, ΔΒ με το τετράγωνο της ΓΔ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΒ.

Συμπέρασμα

Γι αυτό αν τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δύο ίσα τμήματα και από ένα σημείο του σε δύο άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα μαζί με το τετράγωνο που έχει πλευρά το τμήμα με άκρα τα σημεία διαίρεσης είναι ίσα με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος.

Στην πραγματικότητα, όπως και ο Πρόκλος αναφέρει δεν ακολουθούν όλες οι προτάσεις τον τυπικό διαχωρισμό που αναφέραμε προηγουμένως αν και πάντα υπάρχουν η πρόταση, η απόδειξη και το συμπέρασμα.(Liba Taub,2013). Υπάρχει και μία προγενέστερη περιγραφή των Στοιχείων πλησιέστερη στην περίοδο που έζησε ο Ευκλείδης από τον Ήρωνα ο οποίος υποστηρίζει ότι η συγκεκριμένη μορφή των προτάσεων αφορά μόνο τα θεωρήματα και όχι τα προβλήματα. Ο παρακάτω πίνακας που κατασκεύασαν οι Δοξιάδης και Σιάλαρος (2013) συμφωνεί με την εκδοχή του Ήρωνα. Μελετώντας το βιβλίο ΙΙ των 'Στοιχείων' παρατήρησαν ότι όλα τα θεωρήματα τελειώνουν με το συμπέρασμα ενώ τα προβλήματα τελειώνουν στην απόδειξη.

BOOK II	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
PROBLEM											x			x
THEOREM	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	
Enunciation	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Setting out	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Definition of goal	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construction	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Proof	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Conclusion	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	

Παρόμοιος λεκτικός φορμαλισμός με αυτόν που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης παρατηρούμε και στο έργο του Αυτόλυκου που είναι προγενέστερο των Στοιχείων. Ο Ευκλείδης στα Στοιχεία στην απόδειξη των προτάσεων χρησιμοποιεί μια παραγωγική διαδικασία χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, τα αιτήματα, τις κοινές έννοιες και τις προτάσεις που ήδη έχει αποδείξει προσπαθεί να φτάσει στο ζητούμενο. Βέβαια στα Στοιχεία βλέπουμε όλες τις γνωστές μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά όπως την τέλεια επαγωγή, την απαγωγή σε άτοπο, την αναλυτική και την συνθετική μέθοδο. Επειδή το είδος παρουσίασης μέσα στα 'Στοιχεία' δεν είναι ομοιόμορφο πιστεύεται ότι είναι μια συλλογή μαθηματικών κειμένων και όχι έργο ενός και μόνο συγγραφέα.

Σύμφωνα, με τον David Fowler (1999) ο Ευκλείδης είναι ο συντάκτης και όχι ο συγγραφέας του έργου. Πιστεύεται, ότι πήρε έργα από άλλους μαθηματικούς και τα εξέδωσε υιοθετώντας και ανακατανέμοντας το υλικό, ίσως προσθέτοντας νέο υλικό δικό του για να συμπληρώσει την πραγματεία. Τα πρωτότυπα κείμενα δεν πρέπει να είχαν γραφτεί πολύ αργότερα από την αλλαγή στην Αθηναϊκή πολιτιστική δραστηριότητα από προφορική σε γραπτή παράδοση κατά τον 6^{ο} ,5^{ο} και 4^{ο} αιώνα π.Χ.

Ο Knorr(1945) αναγνωρίζει τρεις βασικές αρχές στην συγγραφική δουλειά του Ευκλείδη.

I. Προσπάθησε να αλλάξει όσο το δυνατόν λιγότερα από τις ολοκληρωμένες πραγματείες που εμπεριέλαβε στη συλλογή του. Αυτό υποστηρίζεται από τον Πάππο αλλά μπορεί να γίνει φανερό ότι απέφυγε να αλλοιώσει τις ήδη

υπάρχουσες πραγματείες από τις διαφορετικές ενάρξεις στα βιβλία I, II, V, VII, X και XI.

II. Κάθε βήμα στην απόδειξη των θεωρημάτων δικαιολογείται από την αναφορά σε έναν ορισμό, ένα αξίωμα, σε ένα θεώρημα ή σε μέρος απόδειξης ενός θεωρήματος μέσα στα ΄Στοιχεία’. Αυτό είναι ένα ιδεώδες αξιωματικό σχήμα που σχετίζεται με τους περιορισμούς που έθεταν οι Πλάτωνας και Αριστοτέλης βάση των οποίων η επιστημονική γνώση πρέπει να βασίζεται μόνο σε πρώτες αρχές και σε αυτά που παράγονται από αυτές.

III. Ο χειρισμός του Ευκλείδη σε διπλό υλικό δεν είναι άμεσα εμφανής. Πολλές από τις πηγές στο βιβλίο II διαγράφησαν ,γιατί εμφανίζονταν πάλι είτε στο βιβλίο I ή στο βιβλίο VI. Αλλά παραμένει μεγάλος αριθμός φαινομενικών επικαλύψεων σε κάποια βιβλία ίσως για ιστορικούς λόγους.

Επίσης ο Van Der Waerden (1954, 231-232), διατυπώνει με ρητό τρόπο τη θέση του για την αξία του Ευκλείδη ως μαθηματικού – ερευνητή:

Ο Ευκλείδης κατ’ ουδένα τρόπο είναι μέγας μαθηματικός. Όπως ήδη έχουμε δει, τα πιο σημαντικά και πιο δύσκολα μέρη των Στοιχείων έχουν αντληθεί από άλλους συγγραφείς, ιδιαίτερα από τον Θεαίτητο (τα βιβλία X και XIII) και τον Εύδοξο (τα βιβλία V και XII). Τα μέρη αυτά, καθώς και τα αριθμητικά βιβλία VII και IX, είναι εξαιρετικά υψηλού μαθηματικού επιπέδου, ενώ άλλα μέρη, ιδίως το μεσαίο από τα αριθμητικά βιβλία (βιβλίο VIII) και η συναφής Κατατομή κανόνος, υπολείπονται κατά πολύ αυτού του επιπέδου. Περιέχουν λογικά σφάλματα και οι διατυπώσεις φανερώνουν μερικές φορές σύγχυση. Το επίπεδο του Ευκλείδη καθορίζεται φανερά από εκείνο των προγενεστέρων του τους οποίους ακολουθεί. Όταν καθοδηγείται από έναν συγγραφέα πρώτης γραμμής όπως ο Θεαίτητος ή ο Εύδοξος, είναι και ο ίδιος εξαιρετικός. Αλλά όταν αντλεί από έναν λιγότερο διαπρεπή συγγραφέα το επίπεδό του πέφτει. Ο Ευκλείδης είναι πάνω από όλα ένας παιδαγωγός, όχι ένας μεγαλοφυής δημιουργός. (Φουρναράκης ,2005 σελ. 268)

Βέβαια, είναι εντυπωσιακός ο τρόπος σύνθεσης του συγκεκριμένου έργου. Ο Mark Schiefsky (2005) μελετώντας τα στοιχεία του Ευκλείδη χρησιμοποιώντας κατάλληλα λογισμικά δημιούργησε το παρακάτω γράφημα που δείχνει τη σχέση των προτάσεων στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων.

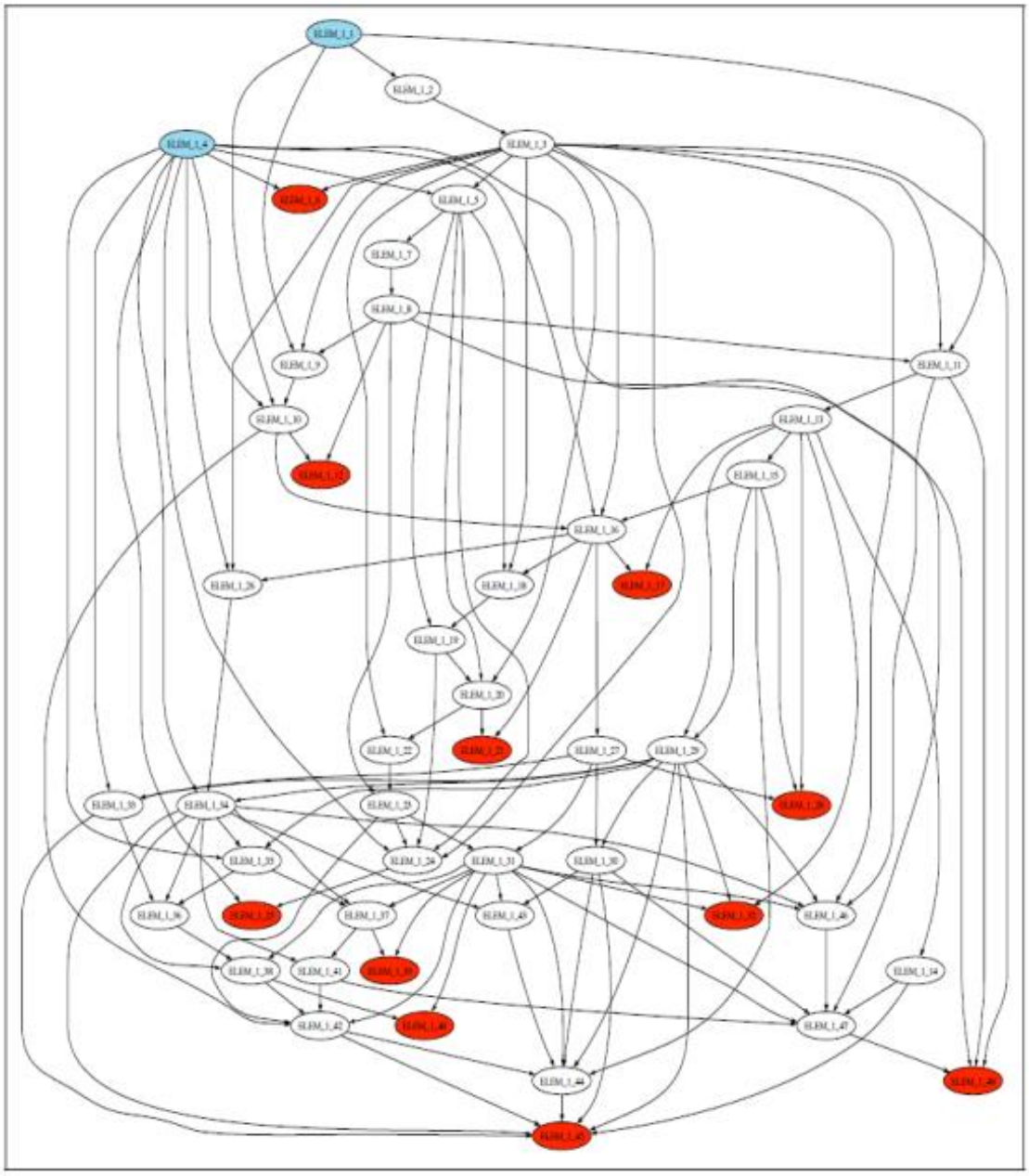


Figure 9: Deductive relationships in book 1. Proposition 1.45 is at the bottom center; starting points are colored in light gray and end points in dark grey.

Εδώ φαίνεται πόσο σημαντική είναι η πρόταση Ι.45 (δείχνει την κατασκευή παραλληλογράμμου με δοσμένη γωνία) που βρίσκεται στο κάτω μέρος του σχήματος. Από το γράφημα φαίνεται ότι η συγκεκριμένη πρόταση προκύπτει από 7 προηγούμενες προτάσεις τις 14, 29, 30, 33, 34, 42 και 44. Το γράφημα μας δείχνει την παραγωγική δομή του συγκεκριμένου βιβλίου , τις άμεσες και τις έμμεσες συνδέσεις μεταξύ τον προτάσεων και μπορούμε να καταλάβουμε πως έγινε σταδιακά η θεμελίωση των Στοιχείων και προς το συγκεκριμένο αποτελεί για τόσους αιώνες πρότυπο αξιωματικής θεμελίωσης των μαθηματικών.

.Ο Szabo(1973) θέτει το ερώτημα αν ήταν πάντα η απόδειξη στα Ελληνικά μαθηματικά όπως τη γνωρίζουμε από τον Ευκλείδη ή αν υπήρχε μία προγενέστερη βαθμίδα εξέλιξης των μαθηματικών αποδείξεων. Αυτό θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

4.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Όπως διαβάζουμε στον Netz (1999) η ελληνική λέξη διάγραμμα ορίζεται ως ένα σχήμα με γραμμές. Η πραγματική χρήση της λέξης στα αρχαία Ελληνικά είναι πιο πολύπλοκή από τη σημερινή.

Ο όρος διάγραμμα χρησιμοποιείται συχνά από τον Πλάτωνα είτε για μαθηματικές αποδείξεις είτε ως κατάλληλο συνοδό των μαθηματικών. Ο Πλάτωνας αναφέρεται στους γεωμέτρες ως αυτούς που φτιάχνουν διαγράμματα. Σύμφωνα με τον Knorr(1945) αν και κάποιος θα μπορούσε να έχει την άποψη ότι ο Πλάτωνας είχε μια διαφορετική αντίληψη της αξίας των διαγραμμάτων , ότι το αντιμετώπιζε σαν οδηγό για επιχειρηματολογία πάνω στα ιδανικά αντικείμενα που αναπαριστανόταν από το σχέδιο. Όμως ο Πλάτωνας αντιμετώπιζε το διάγραμμα με τον ίδιο τρόπο όπως και ο Αριστοτέλης. Τα θεωρούσαν τα διαγράμματα ως απαραίτητη βοήθεια για την ανακάλυψη και την απόδειξη των μαθηματικών αληθειών. Όπως και στο διαλογο *'Μένων'* αυτός που ερωτάται με κατάλληλο πρώτο για να αποκτήσει την ικανότητα να απαντήσει σωστά βοηθάτε από τα διαγράμματα να ξεκαθαρίσει τις απόψεις του.

Στον Αριστοτέλη διαγράμματα (πληθυντικός) πρακτικά σημαίνει 'μαθηματικά' ενώ το διάγραμμα σημαίνει 'μαθηματική πρόταση'. Στα μεταφυσικά ο Ασκληπιός επισημαίνει 'ότι διαγράμματα και θεωρήματα είναι το ίδιο' (Knorr,1945 σελ.72) Ο Ξενοφώντας αναφέρει ότι ο Σωκράτης συμβούλευε τους μαθητές του να μελετούν γεωμετρία ,αλλά όχι μέχρι τα ακατάληπτα διαγράμματα. Αυτό μας δείχνει ότι το διάγραμμα σήμαινε κάτι περισσότερο από ότι στη σύγχρονη εποχή.

Επιπλέον , ο Knorr έδειξε ότι το '***γράφειν***' (σχεδιάζω) πολλές φορές χρησιμοποιείται για να μεταφέρει ένα λογικό συμπέρασμα. Το μεταφράζει ' αποδείχθηκε με τη βοήθεια διαγράμματος'. Σύμφωνα με τον ίδιο Πλάτωνας και Αριστοτέλης διατηρούν την άποψη ότι το διάγραμμα δίνει ανεκτίμητη βοήθεια για να αρθρωθεί αυτό που πρέπει να αποδειχθεί, στην ανακάλυψη αληθών θεωρημάτων και στην οργάνωση των βημάτων της παρουσίασης.

Η λέξη διάγραμμα ποτέ δεν χρησιμοποιούνταν από τους Έλληνες μαθηματικούς με τη σημερινή της ερμηνεία. Όταν ήθελαν να δώσουν έμφαση ότι μια πρόταση βασίζεται πάνω σε ένα σχήμα το χαρακτήριζαν ότι έγινε δια γραμμών σε αντίθεση με την άλλη δυνατότητα το δι' αριθμών.

Στον Netz διαβάζουμε επίσης ότι μια λέξη την οποία ίσως χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί όταν αναφέρονταν σε διαγράμματα τα οποία παρουσιάζονταν μέσα σε μία απόδειξη είναι η λέξη *καταγραφή* . Το ***καταγραφείν*** χρησιμοποιούνταν με την έννοια συμπλήρωσης ενός σχήματος , όταν το σχήμα δεν ήταν συγκεκριμένο μέσα στο κείμενο. Το ρήμα χρησιμοποιείται πάντα μέσα σε αυτή τη φόρμουλα και με μία συγκεκριμένη μορφή: ένα παραλληλόγραμμο (συχνά ορθογώνιο) με μία διαγώνιο και παράλληλες γραμμές μέσα του. Οι αναφορές του Αριστοτέλη στα διαγράμματα είναι ποικίλες. Σε πολλές περιπτώσεις αναφέρεται στα διαγράμματα ως ***υπογραφαί*** ,επίσης αναφέρονται άλλα ως ***διαγραφαί***. Κανένα όμως από αυτά τα διαγράμματα δεν είναι μαθηματικά διαγράμματα. Όταν αναφέρεται σε μία απόδειξή όπου υπάρχει μαθηματικό διάγραμμα χρησιμοποιεί τη λέξη ***διάγραμμα*** χωρίς να είναι ξεκάθαρο αν αναφέρεται στο διάγραμμα μόνο ή στην απόδειξη ως ολότητα. Ο Πάππος χρησιμοποιεί το διάγραμμα σαν ισοδύναμο της πρότασης. Σε αρκετές περιπτώσεις όταν αναφέρεται στο διάγραμμα μέσα στην πρόταση χρησιμοποιεί τη λέξη υπογραφή.

Η λέξη **Διάγραμμα** χρησιμοποιείται ως ένα μετωνύμιο της πρότασης. Είναι τόσο ισχυρός ό δεσμός αυτός που όταν κάποιος θέλει να αναφερθεί στο σχήμα και όχι

στην πρόταση (το οποίο συμβαίνει σπάνια) Θα πρέπει να χρησιμοποιήσει πιο εξιδεικευμένους όρους.

Το ότι τα διαγράμματα θεωρούνταν ουσιώδη για τα μαθηματικά αποδεικνύεται από τα βιβλία V, VII-IX στα στοιχεία του Ευκλείδη. Εκεί όλες οι προτάσεις συνοδεύονται από διαγράμματα , σαν μεμονωμένα (όσο επιτρέπουν οι συνθήκες) και επεξεργασμένα σαν ένα γεωμετρικό διάγραμμα. Κατά μια έννοια , είναι περιττά γιατί δεν αντιπροσωπεύουν πλέον την υπό συζήτηση κατάσταση. Όπως επισημαίνει ο Mueller αυτά τα διαγράμματα μπορεί να είναι χρήσιμα με διάφορους τρόπους.

Βέβαια συμπληρώνει ότι δεν έχουν πλέον την ίδια χρήση. Αντικατοπτρίζουν μια πολιτιστική υπόθεση ,ότι τα μαθηματικά πρέπει να συνοδεύονται από διάγραμμα. Στον Ευκλείδη παρατηρούμε μια προσπάθεια μετάβασης από τη παράσταση στο ιδεατό. Αυτό το ισχυρισμό τον διατυπώνει ο Szabo(1973) και τον στηρίζει παραθέτοντας τις προτάσεις 21 και 22 από το βιβλίο IX των 'Στοιχείων'.

IX 21 «Εάν προστεθούν άρτιοι αριθμοί το άθροισμά τους θα είναι άρτιος.»

IX 22 « Εάν προστεθούν περιττοί αριθμοί άρτιοι στο πλήθος τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος»

Στις συγκεκριμένες προτάσεις τα διαγράμματα που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για τις αποδείξεις είναι με χρήση ευθύγραμμων τμημάτων στη θέση των αριθμών στην πρώτη περίπτωση παριστάνοντας τους άρτιους και στη δεύτερη περίπτωση παριστάνοντας με τα ίδια σχήματα τους περιττούς. Οι συγκεκριμένες αποδείξεις φαίνονται περιττές και εντελώς ακατάλληλες και δεν προσφέρουν την απαιτούμενη εποπτεία που θα ανέμενε κανείς. Η απόδειξη του Ευκλείδη σε αυτή την περίπτωση δεν είναι παραστατική.

Προφανώς, τα διαγράμματα γραμμών δεν είναι ο καλύτερος τρόπος να οργανώσεις την θεωρεία αναλογιών και την αριθμητική. Ο Πλάτωνας στην Πολιτεία εξηγεί ότι η Αριθμητική δεν επιδέχεται με κανένα τρόπο να βασίζονται οι αριθμοί της επί απτών και ορατών σωμάτων. Γιατί ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί αυτή την παράσταση; Προφανώς, αποτελεί ένα είδος παράδοσης .Μια συμβολική αναπαράσταση όπως το' =' θα ήταν πιο χρήσιμο. Άρα το διάγραμμα λειτουργεί στη

συγκεκριμένη περίπτωση ως εμπόδιο . Απαιτώντας ένα είδος αναπαράστασης περιορίζεις την ανάπτυξη άλλης πιο κατάλληλης αναπαράστασης.. Εμπόδιο ή βοήθημα το διάγραμμα ήταν απαραίτητο.

Υπάρχουν φυσικά διαγράμματα από Βαβυλώνιους και κινέζους αλλά τα διαγράμματα των Βαβυλωνίων ήταν λιγότερο κεντρικά για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά, ενώ τα διαγράμματα των κινέζων ανήκουν σε ένα διαφορετικό περιεχόμενο αναπαραστάσεων με πλούσια συμβολική σημασία. Κανένας δεν αναφέρεται στο διάγραμμα με ένα σύστημα παρόμοιο με τον Ελλήνων. Τυπικά στους Βαβυλώνιους το σχήμα αναφερόταν στα γεωμετρικά του στοιχεία (π.χ. μήκος και πλάτος παραλληλογράμμων) ή είχε αριθμούς που έδιναν τη μέτρηση κάποιων στοιχείων του. (Netz)

.

4.1.1 <u>ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ</u>

Σε πολλές αρχαίες εικόνες εμφανίζονται μαθηματικοί να εργάζονται με διαγράμματα. Θα δούμε πως τα διαγράμματα ήταν το ξεχωριστό χαρακτηριστικό της μαθηματικής δραστηριότητας και φυσικά ένας μαθηματικός θα προτιμούσε να έχει μπροστά του ένα διάγραμμα παρά να παίζει το παιχνίδι μέσα στο μυαλό του. Είναι πολύ πιθανόν η διαδικασία της ανακάλυψης να ενισχύονταν από τα σχήματα.

Το ότι τα διαγράμματα έπαιζαν καθοριστικό ρόλο στα Ελληνικά μαθηματικά συχνά υπαινίσσεται στη βιβλιογραφία αλλά ελάχιστα συζητείται. Υπάρχουν τρία ερωτήματα που σχετίζονται με την υλική εφαρμογή των σχημάτων :

Α) Το περιεχόμενο μέσα στο οποίο τα σχήματα χρησιμοποιούνταν

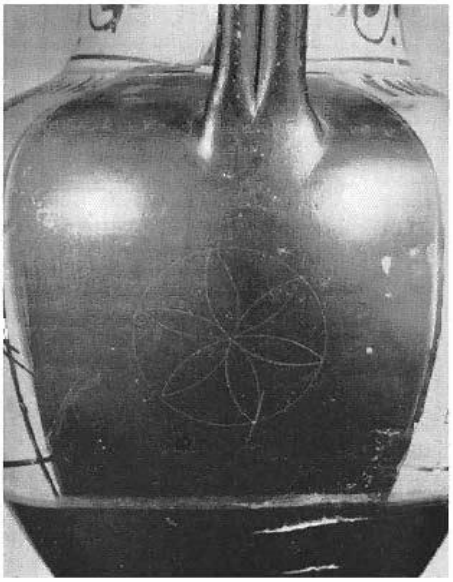
Β) Τα μέσα τα οποία ήταν διαθέσιμα για σχεδίαση και

Γ) Η τεχνική που χρησιμοποιούνταν για να σχεδιάσουν τα σχήματα και η τεχνική που απαιτούνταν για να ‘δει’ κάποιος τα σχήματα. (Netz,1999)

Η ιστορία που συνήθως λέγεται για τους Έλληνες μαθηματικούς είναι ότι σχεδίαζαν τα σχήματά τους στην άμμο ή σε μια σκονισμένη επιφάνεια. Πράγματι η χρήση της άμμου η μιας σκονισμένης επιφάνειας φαντάζει παράξενη επιλογή. Το 'όστρακον' ή ξύλο καλυμμένο με κερί θα ήταν κατάλληλο για ακροατήριο. Η άμμος δεν φαίνεται εύχρηστη. Θα χρειαζόταν αρκετή προετοιμασία για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί πριν από κάθε σχήμα. Η άμμος είναι ένα φθηνό υποκατάστατο για να σχεδιάσει κανείς σε ξύλο αλλά απαιτεί παρόμοια προετοιμασία. Σε πολλούς αμφορείς βλέπουμε παραστάσεις με άτομα που προσπαθούν με δυσκολία να μελετήσουν τεράστιους στο μήκος παπύρους. Ο πάπυρος είναι ένα πολύ ευαίσθητο υλικό που δεν συντηρείται εύκολα για αυτό και έχουν βρεθεί μόνο δύο ελληνικοί πάπυροι διατηρημένοι για 2500 χιλιάδες χρόνια.

Είναι γνωστό ότι ο Αριστοτέλης χρησιμοποιούσε διαγράμματα στις διαλέξεις του. Ο Θεόφραστος αναφέρει ότι υπήρχαν χάρτες πάνω σε πίνακες στην ιδιοκτησία της σχολής και ο ίδιος ο Αριστοτέλης αναφέρει τις 'ανατομές' (βιβλία με σχέδια ανατομίας). Για να είναι αυτά τα διαγράμματα εύκολο να μεταφερθούν εικάζεται ότι θα ήταν γραμμένα σε ένα είδος ξύλινου πίνακα, ο οποίος για να είναι πιο ευανάγνωστος θα πρέπει να ήταν βαμμένος λευκός ('λεύκωμα').

4.1.2 <u>ΤΑ ΜΕΣΑ ΠΟΥ ΗΤΑΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ</u>



Εικόνα από το άρθρο Δοξιάδη-Σιάλαρου(2013)

Στην προσπάθειά τους οι Έλληνες μαθηματικοί να κάνουν διαγράμματα και να επιχειρηματολογήσουν πάνω σε αυτά χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές, οι οποίες εμπεριείχαν τη χρήση κάποιων ειδικών εργαλείων. Είναι γνωστό ότι τα βασικά εργαλεία των Ελληνικών μαθηματικών ήταν ο κανόνας και ο διαβήτης. Στον Όμηρο όταν περιγράφονται τα άλογα του Διομήδη τα χαρακτηρίζει ίδια στο ύψος ως *<u>σταφυλή</u>* (διαβήτης αργότερα).Σύμφωνα με τους Δοξιάδη και Σιάλαρο οι πρώτοι κύκλοι φαίνεται να εμφανίζονται σε αμφορείς το 900 π. Χ. Σε αυτούς βλέπουμε για πρώτη φορά ένα μικρό χαρακτηριστικό σημάδι στο κέντρο τέλεια σχεδιασμένων κύκλων, απόδειξη της χρήσης κάποιου εργαλείου σχεδίασης κύκλων. Βέβαια, αυτοί οι πρώτοι κύκλοι δεν σχεδιάζονταν με διαβήτη αλλά με κάποιο άλλο εργαλείο. Η ανακάλυψη και γενικότερη χρήση τέτοιου εργαλείου θα μπορούσε να επηρεάσει τη μαθηματική σκέψη. Ο διαβήτης, εμφανίστηκε πολύ αργότερα πιθανότερα στην αρχαϊκή εποχή , όχι πάντως νωρίτερα από το τέλος του 6^{ου} π.Χ. αιώνα**.**

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε τη μετάβαση από τις συνήθειες των Ελλήνων τεχνητών (που ζωγράφιζαν το συγκεκριμένο σχέδιο στον αμφορέα) στις συνήθειες των Ελλήνων λόγιων (που απέδειξαν δύο αιώνες αργότερα την πρόταση 1.1) μπορεί να μην είναι τόσο ευδιάκριτη σαν μια παλαιότερη εξιδανικευμένη

εκδοχή της εξέλιξης της ανώτερης σκέψης. Σύμφωνα με τους συγγραφείς οι πρώτοι Έλληνες μαθηματικοί θα μπορούσαν να ανήκουν στο είδος των ανθρώπων. που συνδύαζαν τις ικανότητες του τεχνίτη και του διανοητή. 'Οπότε τα Ελληνικά παραγωγικά μαθηματικά θα μπορούσαν να έχουν αναπτυχθεί μερικώς και από τη γνώση μιας τέχνης και των ευκαιριών που δόθηκαν από το καινούριο εργαλείο (τον διαβήτη που χρησιμοποιούσαν οι διακοσμητές αμφορέων). Υπό αυτό το πρίσμα, η αφαίρεση που εμφανίζεται στα αξιώματα του Ευκλείδη μπορεί να θεωρηθεί σαν μια καταγραφή των βασικών κανόνων της τέχνης που αφορά τον διαβήτη, με σκοπό τη μετάφραση των αποτελεσμάτων από την αρχική μορφή επικοινωνίας, σε ζωντανή λεκτική αλληλεπίδραση μεταξύ ομοϊδεατών οι οποίοι χρησιμοποιούσαν μια επιφάνεια γραφής όπου μπορούσαν να σχεδιάσουν με κανόνα και διαβήτη και επίσης αναφέρεται στη μετάφραση από τη δεικτική επικοινωνία στη γλώσσα της γραπτής επικοινωνίας. Ειδικά, τα πρώτα τρία αξιώματα κωδικοποιούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις για τον μαθηματικό να μπορέσει να κάνει τη μετάβαση από τα λεκτικά στα γραπτά θεωρήματα χωρίς να χάσει πληροφορίες ή να εξασθενήσει η αποδεικτική ισχύς.' (Δοξιάδης& Σιάλαρος,2013)

Βέβαια ο κανόνας και ο διαβήτης δεν είναι τα μόνα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν οι Έλληνες μαθηματικοί. Ο Αρχιμήδης θεωρείται ότι έχει κατασκευάσει μηχανές που αναπαριστούν την κίνηση των πλανητών. Σε άλλα κείμενα βλέπουμε τη χρήση εύκαμπτου χάρακα για το σχεδιασμό παραβολής. Πολλά αποσπάσματα δείχνουν τους Έλληνες μαθηματικούς να χρησιμοποιούν εργαλεία στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν με τον καλύτερα δυνατό τρόπο τα αντικείμενα που μελετούσαν.

4.2 ΤΟ ΕΓΓΡΑΜΑΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει διαγράμματα υπήρχαν και σε άλλους πολιτισμούς πριν την ανάπτυξη των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών. Αυτό που κάνει τα διαγράμματα των Ελλήνων καινοτόμα σε σχέση με το παρελθόν είναι η χρήση του εγγράμματος διαγράμματος. Στο βιβλίο του Netz (1999) 'The shaping of deduction in Greek Mathematics' αναφέρεται ότι το εγγράμματο διάγραμμα είναι ένα ξεχωριστό στοιχείο των ελληνικών μαθηματικών, κυρίως γιατί κανένας άλλος πολιτισμός δεν το ανέπτυξε ανεξάρτητα. Πράγματι, θα ήταν αδύνατο στην προ –εγγράμματη κοινωνία. Μια επεξηγηματική στρατηγική μπορεί να προτείνει ότι το να εξηγήσεις την πρωτοτυπία του εγγράμματου διαγράμματος μέσω της πρωτοτυπίας της φοινικικής γραφής. Η πρόταση ίσως είναι ότι τα γράμματα του αλφαβήτου είναι πιο κατάλληλα για το σκοπό του εγγραμμάτου διαγράμματος από τα εικονογράμματα, αφού τα εικονογράμματα υποδηλώνουν το συμβολικό τους περιεχόμενο. Τα έγχρωμα συστατικά κάποιων κινέζικων φιγούρων ίσως είναι σχετικά.

Το βασικό επιχείρημα του Netz είναι ότι το εγγράμματο διάγραμμα είναι ένας συνδυασμός διαφορετικών στοιχείων σε διαφορετικά επίπεδα.

Α) Στο επίπεδο της λογικής , είναι ένας συνδυασμός του συνεχούς (διαγράμματος) και των διακριτών (γραμμάτων) που συνεπάγεται.

Β) Στο γνωστικό επίπεδο είναι ένας συνδυασμός οπτικών πηγών (διάγραμμα) και πεπερασμένων διαχειρίσιμων μοντέλων (γράμματα)

Γ) Στο σημειωτικό επίπεδο το εγγράμματο διάγραμμα είναι ο συνδυασμός μιας εικόνας (διάγραμμα) και δεικτών (γράμματα) , που επιτρέπει το ασαφές κατασκευαστικό χαρακτηριστικό της ελληνικής μαθηματικής οντολογίας.

Δ) Στο ιστορικό επίπεδο είναι ένας συνδυασμός μιας τέχνης (διάγραμμα) και ενός εγγράμματου αναστοχασμού (γράμματα).

Υπάρχει δηλαδή, ένας γόνιμος συνδυασμός ανταγωνιστικών στοιχείων που είναι υπεύθυνος για τον σχηματισμό της παραγωγικής σκέψης.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι με τους οποίους το εγγράμματο διάγραμμα παίρνει θέση στη διαμόρφωση της παραγωγικής σκέψης . Καταρχήν, υπάρχει μια συλλογή διαδικασιών για επιχειρηματολογία βασισμένες πάνω στο διάγραμμα. Καμμία άλλη πηγή επιχειρήματος δεν συγκρίνετε με την σημασία του διαγράμματος. Ουσιαστικά, αυτή η κεντρικότητα καταλήγει στο γεγονός ότι συγκεκριμενοποίηση των αντικειμένων γίνεται οπτικά.

Δεύτερο και πιο σύνθετο είναι το εξής. Το εγγράμματο διάγραμμα παρέχει ένα σύμπαν πηγών. Μιλώντας για τα διαγράμματά τους οι Έλληνες μαθηματικοί δεν χρειαζόταν να μιλήσουν για τις οντολογικές τους αρχές. Αυτό είναι χαρακτηριστικό στα Ελληνικά μαθηματικά. Οι αποδείξεις γίνονταν σε ένα επίπεδο αντικειμένου όπου άλλες ερωτήσεις αφήνονταν στην άκρη.

Στην πραγματικότητα τα θεωρητικά μαθηματικά βασίζονται στο διάγραμμα για να προσθέσουν στη λεκτική επιχειρηματολογία της απόδειξης οπτικά αποδεικτικά στοιχεία. Είναι τόσο ισχυρή η παρουσία του διαγράμματος που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα με ελάχιστες διαφοροποιήσεις. Το εγγράμματο διάγραμμα σίγουρα σχετίζεται, είναι εξέλιξη του διαγράμματος με αριθμούς που εμφανίζεται σε προβλήματα των Βαβυλώνιων. Όμως όπως αναφέραμε στα εγγράμματα διαγράμματα χρησιμοποιούν γενικευμένους δείκτες (γράμματα) και όχι συγκεκριμένους αριθμούς. Γι’ αυτό το συγκεκριμένο διάγραμμα αποτελεί μια γενίκευση των διαγραμμάτων που βρίσκουμε στα βιβλία των πρακτικών μαθηματικών κάτι που σύμφωνα με τον Asper μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα θεωρητικά μαθηματικά πρέπει να έχουν ένα πρακτικό υπόβαθρο.

4.2.1 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Οι προτάσεις των Ελληνικών μαθηματικών δημιουργήθηκαν με διάφορους τρόπους, αλλά ο πιο συνηθισμένος είναι να σχεδιάζεται το διάγραμμα, να μπαίνουν τα γράμματα συνοδευόμενα από μια λεκτική δοκιμή, έναν εσωτερικό μονόλογο, που ανταποκρίνεται στα κύρια στοιχεία του επιχειρήματος και κατόπιν να

προχωρούν στο τελικό γράψιμο της πρότασης (Netz, 1999,σελ. 86). Άρα η χρήση των γραμμάτων είναι ουσιώδης στο τελικό αποτέλεσμα είναι το απαραίτητο συνοδευτικό της οπτικής πληροφορίας. Εδώ θα προσπαθήσουμε να δούμε πως τα χρησιμοποιούσαν.

Τα μεμονωμένα γράμματα στη γεωμετρία χρησιμοποιούνται ως δείκτες που αντιπροσωπεύουν σημεία π.χ σημεία Α και Β ενώ όταν χρησιμοποιούν δύο γράμματα π.χ ΑΒ αναπαριστούν την ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία ενώ η χρήση των γραμμάτων στην αριθμητική αντιπροσωπεύει αριθμούς . Γενικά στη γεωμετρία η χρήση πολλών γραμμάτων αντιπροσωπεύει διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα (π.χ. ΑΒΓ για τρίγωνο). Η ονομασία των σημείων γίνεται συνήθως αλφαβητικά δηλαδή το πρώτο σημείο ονομάζεται Α, το δεύτερο Β και ου το καθεξής. Είναι χαρακτηριστικό ότι το ίδιο αντικείμενο μπορεί να ονομάζεται ΑΒ ή ΒΑ. Η αντιστροφή των γραμμάτων δεν αναφέρεται σε διαφορετικό αντικείμενο. Δηλαδή η ταυτότητα του αντικειμένου καθορίζεται από την οπτική του αναπαράσταση στο διάγραμμα. Ενδεχομένως η αλφαβητική ονομασία των σημείων να γινόταν για πρακτικούς λόγους γιατί κάτι τέτοιο θα διευκόλυνε την αποστήθιση. Όπως για παράδειγμα όταν αναφέρονται σε παράλληλες ευθείες η αναφορά τους είναι πάντα αλφαβητική για παράδειγμα ‘ η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στη ΓΔ’ και ποτέ δεν χρησιμοποιούν το ότι ‘η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στην ΔΓ’. Αν και δεν φαίνεται συγκεκριμένα γράμματα να αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένα αντικείμενα όπως γίνεται σήμερα για παράδειγμα το γράμμα ρ για την ακτίνα του κύκλου. Σύμφωνα με τον Netz(1999) το μόνο γράμμα που δείχνει σχέση μεταξύ σημαίνον και σημαινόμενού είναι το γράμμα Κ που χρησιμοποιείται για το κέντρο του κύκλου κυρίως στα ‘*Οπτικά*’ .Αυτό είναι πολύ λογικό από τη στιγμή που τα γράμματα χρησιμοποιούνται ως δείκτες και όχι ως σύμβολα. Η ταυτότητα του αντικειμένου είναι οπτική και όχι συμβολική. Ο Peirce Αμερικάνος φιλόσοφος που ασχολήθηκε με την επιστημονική σημειωτική αναφέρει ότι οι δείκτες χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν ένα αντικείμενο δείχνοντάς το με κάποιο τρόπο. Παρατηρείται επίσης ότι ενώ η χρήση κάποιων γραμμάτων καθορίζεται πλήρως από το κείμενο σε άλλες περιπτώσεις ο καθορισμός τους γίνεται αποκλειστικά από το διάγραμμα.

Σύμφωνα με τον Netz(1999) η χρήση των γραμμάτων που αναφέραμε μας οδηγεί σε κάποια συμπεράσματα σχετικά με το σχεδιασμό του διαγράμματος.

- Η αλφαβητική χρήση των γραμμάτων δείχνει ότι η ονομασία δεν προηγείται της διαμόρφωσης του επιχειρήματος.
- Η ονομασία προηγείται του γραψίματος του κειμένου αφού τα γράμματα χρησιμοποιούνται στο κείμενο.
- Η σχεδίαση προηγείται της σύνθεσης του επιχειρήματος αφού το επιχείρημα αναφέρεται στο διάγραμμα.
- Η ονομασία μπορεί να δομείται ακολουθώντας τη συνέχεια των γεωμετρικών δραστηριοτήτων και όχι τη συνέχεια του κειμένου κάτι που φαίνεται από τη χρήση σημείων που η θέση τους δεν προσδιορίζεται από το κείμενο αλλά από το διάγραμμα.

Αυτή η ανάλυση του Netz βασίζεται στο γεγονός ότι θεωρεί πολύ δύσκολη τη διαδικασία δημιουργίας ενός διαγράμματος με τα μέσα που διέθεταν οι αρχαίοι Έλληνες άρα και κατά συνέπεια θεωρεί σχεδόν αδύνατη τη διόρθωσή του. Όμως μια αναφορά του Πλούταρχου που βρίσκουμε στους Unguru & Rowe (1981–1982,II,5) μας δίνει την πληροφορία ότι ο Αρχιμήδης συνήθιζε να σχεδιάζει τα διαγράμματά του πάνω στην κοιλιά του με τους υπηρέτες να τον αλείφουν με λάδι (Wagner,2009). Σε αυτό που περιγράφει ο Πλούταρχος ίσως ταιριάζει καλύτερα ο ορισμός που δίνει ο Deleuze για το διάγραμμα ότι είναι ένας σωρός από σημεία με γνωρίσματα τα οποία φαντάζουν παράλογα, ακούσια, τυχαία . Δεν είναι αντιπροσωπευτικά, ούτε ενδεικτικά, ούτε αφηγηματικά. Δεν είναι ούτε σημαντικά ούτε σημαίνοντα, είναι μη-σημαίνοντα γνωρίσματα. (Deleuze, 2003 στον Wagner,2009) Προφανώς, αυτός ο ορισμός μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα διαγράμματα γράφονταν και ξαναγράφονταν.

Υπάρχει η άποψη ότι ο εκάστοτε μαθηματικός σχεδίαζε πολλά διαγράμματα χρησιμοποιώντας διαφορετικά γράμματα κάτι που δεν αρνείται ούτε ο Netz αλλά το θεωρεί αρκετά σπάνιο γεγονός γιατί αν αλλάξεις τα γράμματα στο διάγραμμα θα πρέπει να αλλάξεις και το κείμενο που το συνοδεύει. Όπως ήδη αναφέραμε ο Netz

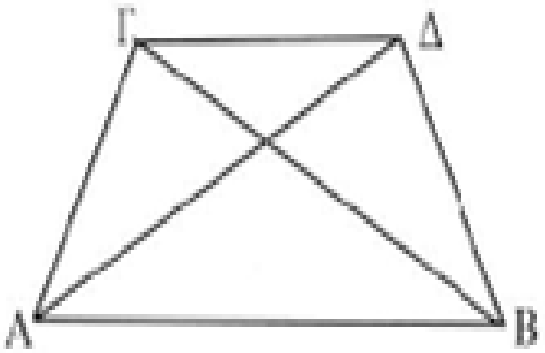
(1999) θεωρεί ότι προηγείται ένας εσωτερικός μονόλογος του συγγραφέα που οδηγεί σε μια αλυσιδωτή αντίδραση που αρχίζει με τον σχεδιασμό προχωρά στην τοποθέτηση των γραμμάτων και καταλήγει στο κείμενο. Άρα θα πρέπει να διαχωρίσουμε τα διαγράμματα σε δύο κατηγορίες σε αυτά που χρησιμοποιούνταν για να επικοινωνήσουν τα επιχειρήματά τους σε άλλους ανθρώπους και σε αυτά που χρησιμοποιούνταν για έρευνα.

4.2.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Οι Saito και Sidoli (2012) μελετώντας τα διαγράμματα από τα χειρόγραφα διέκριναν κάποια χαρακτηριστικά που θεωρούν ότι απεικονίζουν την αρχαία πρακτική. Τα δύο κυριότερα χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα.

Υπερεξειδίκευση (Overspecification)

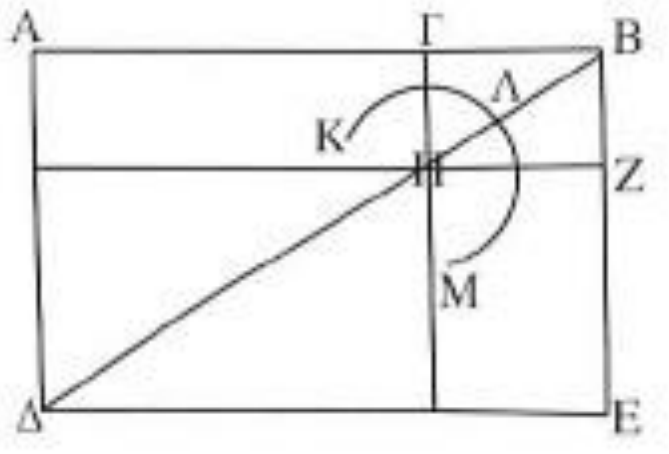
Ένα από τα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων είναι να παρουσιάζουν τα γεωμετρικά αντικείμενα μεγαλύτερη κανονικότητα από αυτή που απαιτείται από το επιχείρημα. Για παράδειγμα, υπάρχουν ορθογώνια τα οποία αντιπροσωπεύουν παραλληλόγραμμα, ισοσκελή τρίγωνα που αντιπροσωπεύουν τυχαία, τετράγωνα αντιπροσωπεύουν ορθογώνια και εμφανίζεται συμμετρία στο σχήμα όταν κάτι τέτοιο δεν απαιτείται από το κείμενο.



Στην πρόταση 1.7 των Στοιχείων βλέπουμε ότι δύο δοθείσες ευθείες γραμμές κατασκευασμένες από τα άκρα ενός δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος προς την ίδια πλευρά της ευθείας τέμνονται σε ένα μόνο σημείο. Στο παραπάνω σχήμα όπου οι δοσμένες ευθείες είναι ΑΓ και ΒΓ, η απόδειξη προχωρά έμμεσα υποθέτοντας κάποιες ευθείες ίσες με τις δοσμένες, ΑΔ και ΒΔ οι οποίες τέμνονται σε κάποιο άλλο σημείο Δ και κατόπιν δείχνει ότι αυτό είναι αδύνατο. Όλα τα χειρόγραφα τοποθετούν τα σημεία Γ,Δ σε μία ευθεία παράλληλη στην ΑΒ ,τοποθετημένα έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ να φαίνονται ίσα. Με αυτόν τον τρόπο το σχήμα παρουσιάζει συμμετρία και δεν ακολουθεί την γενικότητα που το κείμενο επιτρέπει για τα σημεία Γ και Δ. Σύμφωνα, με τους συγγραφείς η χρήση της υπερεξιδείκευσης συνεπάγεται ότι το διάγραμμα δεν ήθελε να μεταφέρει την ιδέα της γενίκευσης που είχε η πρόταση αλλά απλά απεικονίζει ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα για τα αντικείμενα που τους ενδιαφέρουν .

Αδιαφορία για την οπτική ακρίβεια

Μια άλλη τάση στα χειρόγραφα είναι η χρήση διαγραμμάτων που δεν είναι γραφικά ακριβείς απεικονίσεις των μαθηματικών αντικειμένων που αναφέρονται στο κείμενο. Αυτή την τάση για αδιαφορία στο σχήμα τη διαχώρισαν σε δύο κατηγορίες στην ‘αδιαφορία στην μετρική ακρίβεια’ και στην ‘αδιαφορία στο γεωμετρικό σχήμα’. Για παράδειγμα, η πρόταση των Στοιχείων ΙΙ.7 αναφέρεται στη σχέση ανάμεσα στα τετράγωνα και τα ορθογώνια που κατασκευάζονται όταν το σχήμα τέμνεται από μία τυχαία ευθεία. Το μεγάλο σχήμα αναφέρεται ως τετράγωνο που περιέχει δύο εσωτερικά τετράγωνα. Ενώ στο σχήμα των χειρογράφων όπως φαίνεται παρακάτω τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.

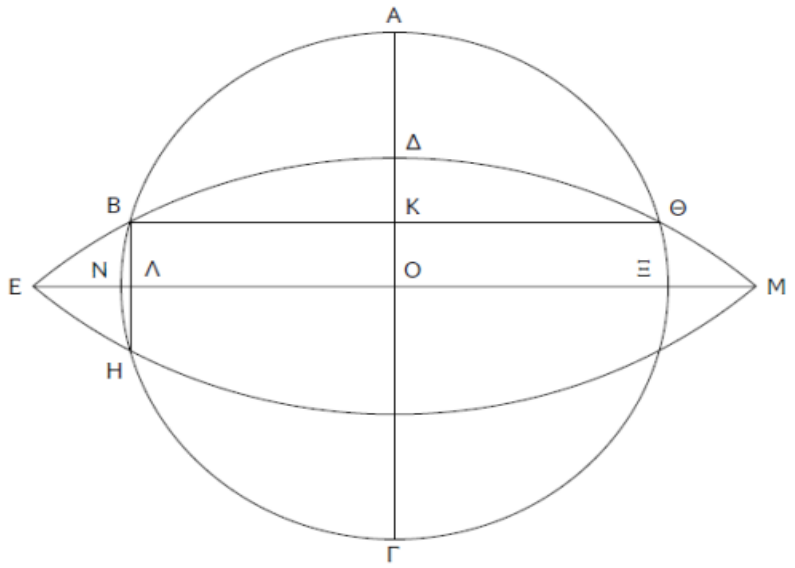


Η αδιαφορία στην οπτική ακρίβεια υπονοεί ότι το διάγραμμα δεν ήταν φτιαγμένο να είναι μια οπτικά αναπαράσταση των υπό συζήτηση αντικειμένων αλλά περισσότερο οπτικά στοιχεία για να μεταδώσουν τις σημαντικές μαθηματικές σχέσεις. Κατά αυτή την έννοια τα διαγράμματα είναι σχηματικές αναπαραστάσεις.

Ο Netz(1999) στην ερευνά του παρατήρησε ότι χρησιμοποιείται το ρήμα ***νοείν*** αρκετά συχνά στα Ελληνικά μαθηματικά όταν τα αντικείμενα δεν σχεδιάζονται καθόλου ή το διάγραμμα για κάποιο λόγο αποτυγχάνει να τα αναπαραστήσει σωστά. Είναι πιο συνηθισμένο στα τρισδιάστατα αντικείμενα. Τα διαγράμματα δεν θεωρούνταν ακριβείς απεικονίσεις του αντικειμένου που κατασκευάζεται μέσα στην πρόταση. Το επιχείρημα που διατυπώνει ο Netz(1999) είναι ότι η 'κατασκευή' ανταποκρίνεται σε μία συγκεκριμένη πρακτική στα Ελληνικά μαθηματικά. Στην πρώτη πρόταση των Στοιχείων του Ευκλείδη δείχνει την κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου. Αυτό επιτυγχάνεται με την κατασκευή δύο βοηθητικούς κύκλους. Δεν υπάρχει τρόπος αν κάποιος διαβάσει μόνο την πρόταση να κατασκευάσει το τρίγωνο χωρίς τη βοήθεια των κύκλων. Οπότε στην δεύτερη πρόταση όταν ένα ισόπλευρο τρίγωνο κατασκευάζεται για το σκοπό της πρότασης κάποιος αντιμετωπίζει το παρακάτω δίλλημα. Ή θα υποθέσει ότι οι δύο βοηθητικοί κύκλοι κατασκευάστηκαν επίσης ή θα καταλήξει ότι αυτό που ονομάζεται ισόπλευρο τρίγωνο στο διάγραμμα είναι ένα πλαστογράφημα. Οπότε το ισόπλευρο τρίγωνο της πρότασης 1.2 είναι μια λεκτική χειρονομία, μια προσποίηση (a make-

believe). Αναγνωρίζει τη σκιά μιας δυνατής κατασκευής χωρίς να την πραγματοποιεί.

Από τη μία πλευρά οι Έλληνες μαθηματικοί μιλούν σαν να είναι το αντικείμενο της πρότασης το διάγραμμα και από την άλλη δρούν κατά ένα τρόπο που αποκλείει αυτή τη δυνατότητα. Για να αναλύσει ο Netz(1999) αυτό το αδιέξοδο παραθέτει την πρόταση III.10 των Στοιχείων. Αυτή αποδεικνύει ότι ένας κύκλος δεν μπορεί να τέμνει έναν άλλο σε περισσότερα από δύο σημεία.



Αυτή η πρόταση αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο. Ο Ευκλείδης υποθέτει ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται σε περισσότερα από δύο σημεία και καταλήγει σε άτοπο. Ο Ευκλείδης σχεδιάζει το αδύνατο. Το συγκεκριμένο διάγραμμα επιβιώνει χάρη στην προσποίηση η οποία αποκαλεί κύκλο κάτι που είναι παρόμοιο με έλλειψη. Με τη δύναμη της προσποίησης η έλλειψη επενδύεται με κυκλικότητα για τις ανάγκες του επιχειρήματος σε άτοπο. Με τα σε άτοπο διαγράμματα η ψευδαίσθηση καταρρίπτεται στο τέλος του επιχειρήματος.

Αυτό που περιγράφει παραπάνω ο Netz(1999) ταιριάζει με την αναφορά του Deleuze που βασίζεται στην περιγραφή του Paul S΄erusier’s για την αφηρημένη ζωγραφική ότι ελαττώνει όλες τις μορφές στον ελάχιστό αριθμό μορφών που

είμαστε ικανοί να σκεφτούμε όπως ευθείες γραμμές, μερικές γωνίες, τόξα και κύκλους. (Wagner,2009)

4.2.3 ΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΩΣ ΜΕΣΟ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΟΡΑΤΟ ΣΤΟ ΙΔΕΑΤΟ

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται μια ποιο λεπτομερής μελέτη των ορισμών του Ευκλείδη.

1. Σημείο είναι κάθε τι που δεν έχει μέρη.
2. Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος.
3. Τα άκρα κάθε γραμμής είναι σημεία.
4. Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή, η οποία κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.
5. Επιφάνεια είναι κάθε τι που έχει μόνο μήκος και πλάτος.

Ο Ευκλείδης μας ορίζει ως σημείο κάτι που δεν έχει διαστάσεις σε αντίθεση με τους Πυθαγόρειους που όριζαν σύμφωνα με τον Πρόκλο το σημείο ως μία μονάδα που έχει θέση. Και το ερώτημα είναι πως απεικονίζεις ένα τέτοιο αντικείμενο όπως το περιγράφει ο Ευκλείδης. Πως το αντιλαμβάνεσαι στην πραγματική ζωή; Ο Ευκλείδης ορίζει ένα αντικείμενο προϋποθέτοντας την ύπαρξή του, επηρεασμένος από τη φιλοσοφία του Πλάτωνα (χρησιμοποιεί τον όρο σημείο όπως ο Πλάτωνας αντί για τον Αριστοτελικό όρο στιγμή).

Οι ορισμοί αυτοί είναι σύμφωνα με τον Bruncshvicg ονοματικοί και σχηματίζονται με μοναδικό τρόπο να επιτύχουν τη μέγιστη γλωσσική σαφήνεια

λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχειώδη δεδομένα της εμπειρίας. (Ευκλείδη 'Στοιχεία',2001)

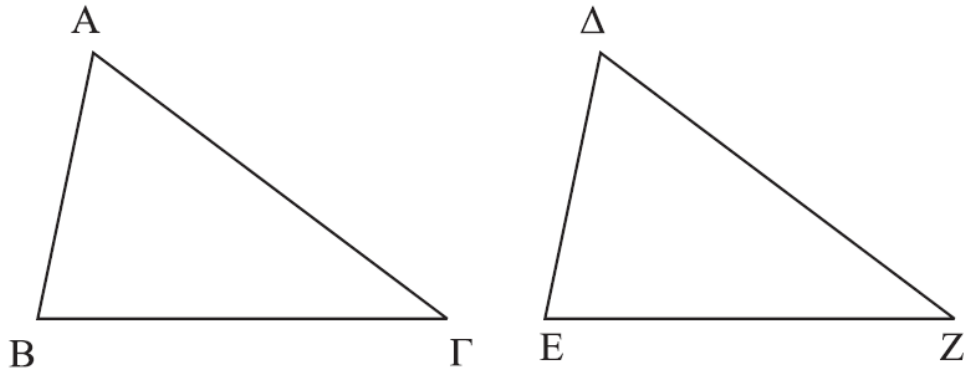
Ο ορισμός θα πρέπει να αντιμετωπίζεται σαν μία προσπάθεια να διευκρινίσει την έννοια των όρων που θα χρησιμοποιηθούν πριν ξεκινήσει η επιχειρηματολογία, δηλαδή να ξεκαθαρίσει τη φύση των αντικειμένων που θα μελετηθούν. Σύμφωνα με αυτό οι θεμελιώδης ορισμοί του σημείου και της γραμμής έχουν αποτέλεσμα μόνο με άτομα που ήδη έχουν μια ιδέα τι είναι τα συγκεκριμένα αντικείμενα και δεν παίζει ρόλο αν αυτοί οι ορισμοί δίνονται για να αντιπροσωπεύσουν πρωταρχικές συμφωνίες ανάμεσα σε άτομα με συνήθη εξυπνάδα (Zeuthen,1896 στον Mueller, 1969). Και καταλήγει ο Mueller ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι ένα πείραμα που πραγματοποιείται πάνω σε εξιδανικευμένα φυσικά αντικείμενα, το πείραμα περιορίζεται από πρωταρχικές συμφωνίες οι οποίες αφορούν τη φύση των αντικειμένων, κάποιες από τις ιδιότητές τους και τις λειτουργίες που μπορούν να εκτελέσουν.

Αυτό που περιγράφεται στον Ευκλείδη παρομοιάζει με αυτό που αναφέρει ο Sokolowski για την φαινομενολογία ότι οι μαθηματικές επιστήμες αποτελούν μια μετατροπή της εμπειρίας στην οποία δίνονται άμεσα τα πράγματα μέσα στον κόσμο, ωθούν αυτή την εμπειρία σε ένα υψηλότερο σημείο ταυτοποίησης και σύστοιχα μετατρέπουν τα αντικείμενα της εμπειρίας σε μαθηματικά αντικείμενα (σελ. 154) Τέτοια αντικείμενα δεν θα μπορούσαν να δοθούν στην εμπειρία μέσα στον κόσμο της ζωής. Τα εγκαθιδρύουνε ή τα συγκροτούμε μέσω ενός ιδιαιτέρου είδους αποβλεπτικότητας, ενός είδους που αποτελεί μίξη αντίληψης και φαντασίας. Αυτή η αποβλεπτικότητα εκκινεί από κάτι που βρίσκεται μέσα στον κόσμο της ζωής αλλά δημιουργεί κάτι που φαίνεται να μην ανήκει πλέον σε αυτόν τον κόσμο.

Ας δούμε σε αυτό το σημείο την πρόταση Ι.4

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες και θα είναι ίσα, δηλαδή θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο τρίγωνα που έχουν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ=ΕΖ. Εφαρμόζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με το ΔΕΖ,

ώστε η κορυφή Α να τοποθετηθεί στο Δ και η πλευρά ΑΒ στη ΔΕ.

Επειδή ΑΒ=ΔΕ το Β θα ταυτιστεί με το Ε.

Επίσης, η ΑΓ θα ταυτισθεί με τη ΔΖ αφού $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Ώστε το σημείο Γ θα συμπέσει με το Ζ, αφού ΑΓ=ΔΖ

Άρα ΒΓ=ΕΖ και αφού τα τρίγωνα θα εφαρμόσουν είναι ίσα και έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Είναι η πρώτη πρόταση που Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της επίθεσης. Αυτή η επίθεση υποδηλώνει μία κίνηση η οποία όμως θα ήταν αδύνατο να γίνει στην πραγματικότητα αν αναλογιστούμε τα μέσα της εποχής . Άρα από τη στιγμή που η κίνηση δεν είναι χειρωνακτική θα πρέπει να είναι εννοιολογική δηλαδή με αφορμή το διάγραμμα έχουμε μια εννοιολογική κίνηση που αναφέρεται σε ιδεατά αντικείμενα.

Ο Wagner(2009) περιγράφει και μια δεύτερη διανοητική κίνηση η οποία δεν μπορεί να είναι χειρωνακτική. Την κίνηση που προκύπτει από την τοποθέτηση γραμμάτων στο σχήμα. Με αυτό αναφέρεται σε περιπτώσεις όπως το 'Έστω ένα σημείο στον κύκλο' ή ' Έστω ένα σημείο στην ΑΒ'. Προφανώς, αυτά τα σημεία έχουν άπειρες θέσεις πάνω στο σχήμα. Ο προβληματισμός του Wagner(2009) αφορά το

γεγονός ότι μας δίνεται η εντολή (Το έστω είναι η προστακτική του ρήματος ειμί) να αισθανθούμε ένα σημείο αλλά με ποιό τρόπο ως κάτι γενικό ή ως κάτι τυχαίο. Θα πρέπει να μπορεί κάποιος να αντιληφθεί ότι το δοσμένο σημείο εκτός από το σημείο που βρίσκεται στο διάγραμμα θα μπορούσε να έχει άπειρες ενναλακτικές θέσεις. Αυτό θεωρεί ότι επιτυγχάνεται μέσω αυτού που ονομάζει ο Deleuze 'απτική όραση ' (haptic vision) η λέξη προέρχεται από το ελληνικό ρήμα άπτω στη μελέτη του για τα έργα του ζωγράφου Francis Bacon και αναφέρεται στη σχέση του ματιού με το χέρι που σχεδιάζει. Το απτικό μάτι περιορίζεται από τη γενεσιουργό ιστορία των ενσώματων αισθήσεων. Είναι η αναλυτική ικανότητα να διαρθρώνω και να αναδιατάσσω επίπεδα εντολές και πεδία της αίσθησης σε μια κίνηση που ο Deleuze ονομάζει λογική των αισθήσεων. (Wagner,2009)

Εν κατακλείδι, είναι φανερός ο επηρεασμός του Ευκλείδη από τον Πλάτωνα (πολλοί εικάζουν ότι έχει φοιτήσει στη σχολή του) και χρησιμοποιεί τα διαγράμματα για να ενισχύσει την αισθητηριακή αντίληψη ώστε να βοηθήσει στη νοητική σύλληψη των ιδεατών μαθηματικών αντικειμένων. Ο κ. Νεγρεπόντης υποστηρίζει ότι τα ΄Στοιχεία' τουλάχιστον ως προς το περιεχόμενό τους ουσιαστικά συμπληρώθηκαν την εποχή που ο Πλάτωνας διηύθυνε την Ακαδημία.

Τι είδους εποπτεία όμως σου παρέχουν τα διαγράμματα στις αριθμητικές προτάσεις;

Πρόταση IX.22

Αν προσθέσουμε οσουσδήποτε περιττούς αριθμούς που το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός, τότε το άθροισμά τους θα είναι άρτιος αριθμός.

Απόδειξη

Αν προσθέσουμε τέσσερις το πλήθος περιττούς αριθμούς α, β, γ, δ (των οποίων το πλήθος είναι αριθμός άρτιος) τότε θα αποδείξουμε ότι το άθροισμά τους ε είναι αριθμός άρτιος.

Επειδή καθένας από τους αριθμούς α, β, γ , δ είναι περιττός , αν αφαιρεθεί η μονάδα από καθέναν από αυτούς, τότε απομένει άρτιος αριθμός.

Έτσι το άθροισμά τους θα είναι άρτιος. Όμως το πλήθος των μονάδων που απομένουν είναι επίσης αριθμός άρτιος. Επομένως το άθροισμα των αριθμών, δηλαδή το ε, είναι άρτιος αριθμός.

Έχει αναφερθεί και νωρίτερα σε αυτή την εργασία ότι θα ήταν πολύ πιο εύκολο να αποδειχθούν οι συγκεκριμένες προτάσεις άρτιων και περιττών με τη χρήση των βότσαλων (ψήφων) όπως προτείνει ο Knorr(1945) στην ανακατασκευή του. Γιατί λοιπόν ο Ευκλείδης δείχνει αυτή την εμμονή στη χρήση γραμμών για την αναπαράσταση των αριθμών κάτι που δεν φαίνεται να βοηθά την αισθητηριακή αντίληψη του αναγνώστη. Σύμφωνα με τον Mueller(1969) η αναπαράσταση των αριθμών με γραμμές αντί για ψήφους εξηγείται ικανοποιητικά από την Ελληνική γεωμετρικοποίηση των μαθηματικών. Γιατί με αυτή την αναπαράσταση αριθμητικές πράξεις δεν είναι τίποτα παραπάνω από γεωμετρικές πράξεις με γραμμές η οποίες δικαιολογούνται ή προϋποθέτονται στα μη αριθμητικά βιβλία. Η πρόσθεση ενός αριθμού με έναν άλλο είναι η προέκταση μιας γραμμής με δοσμένο μήκος, πολλαπλασιάζοντας με έναν αριθμό ν έχουμε προέκταση της γραμμής ν φορές το μήκος της κ.λπ.

Είναι φανερό ότι τα διαγράμματα των αριθμητικών προτάσεων δεν έχουν το ίδιο αποτέλεσμα όπως τα διαγράμματα των γεωμετρικών προτάσεων. Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι η παράσταση των αριθμών με γραμμές είναι κατάλοιπο από τα περίφημα μουσικά πειράματα των Πυθαγορείων όπου μέσα από τη μουσική έψαχναν την αρμονία. Εξέφρασαν τα μουσικά διαστήματα ως αριθμητικούς λόγους. Σύμφωνα με τον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη η αριθμητική θεωρία των λόγων σχετίζεται με τα ακουστικά και τα αρμονικά πειράματα. Εξάλλου ο Ευκλείδης θεωρείται και συγγραφέας του έργου «Κατανομή Κανόνος» που όπως διαβάζουμε στον Barker αποτελείται από μια μικρή εισαγωγή και 20 προτάσεις οι οποίες παρουσιάζονται ως θεωρήματα που αναφέρονται στους τόνους των ήχων και στη σχέση τους με τις αριθμητικές αναλογίες (Barker,1989 σελ. 190). Επίσης, σύμφωνα

με τον Becker στο βιβλίο IX των 'Στοιχείων' οι προτάσεις (21-34) καθώς και η πρόταση IX.36 είναι τυπικά Πυθαγόρεια μαθηματικά (van der Waerden,1961 σελ.108)

4.2.4 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Αυτό που διαφοροποιεί τα μαθηματικά από τις άλλες επιστήμες είναι ότι η εμπειρική παρατήρηση φαίνεται να είναι άβουλη στην εγκαθίδρυση γενικών νόμων.(Mueller 1969) Και αργότερα (1981) αναφέρει ότι δεν πιστεύει ότι οι Έλληνες απάντησαν ικανοποιητικά αυτή την ερώτηση εννοώντας το τι κάνει αξιόπιστη μια κίνηση από μια συγκεκριμένη απόδειξη σε ένα γενικό συμπέρασμα (Netz ,1999 σελ. 241).

Αναφερθήκαμε ήδη στο εγγράμματο διάγραμμα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και τη μη χρήση συγκεκριμένων αριθμών που να το καθορίζουν όπως συνέβαινε στα προελληνικά μαθηματικά. Θα διερευνήσουμε πως αυτή η επιλογή των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών βοηθά στη διατύπωση γενικευμένων προτάσεων. Το διάγραμμα επιτυγχάνει τη γενίκευση παρουσιάζοντας ένα συγκεκριμένο στιγμιότυπο των γεωμετρικών αντικειμένων , το οποίο δείχνει στους αναγνώστες πως ορίζονται ώστε να μπορούν μόνοι τους να φτιάξουν άλλα διαγράμματα με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η πρόταση. Αφού το κείμενο αναφέρεται σε οποιοδήποτε γεωμετρικό αντικείμενο που έχει τις ίδιες συνθήκες, ώστε τα διαγράμματα του κειμένου να αναφέρονται σε οποιαδήποτε διαγράμματα έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά. (Saito & Sidoli ,2012) Δηλαδή, το εγγράμματο διάγραμμα για παράδειγμα ενός τετραγώνου λειτουργεί σαν αντιπρόσωπος της κλάσης που περιέχει τα τετράγωνα.

Ο Netz επισημαίνει το γεγονός ότι οι Έλληνες δεν υποστηρίζουν ότι τα αποτελέσματα τους αποδεικνύονται γενικά. Αναφέρουν όμως ορισμένες φορές ότι η απόδειξη ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος οδηγεί σε ένα άλλο αποτέλεσμα το οποίο κάποιες φορές μπορεί να είναι πιο γενικό (Netz,1999 σελ.242). Ο Netz δίνει έμφαση στη λέξη **ομοίως** που εμφανίζεται σε κάποιες αποδείξεις και υποστηρίζει

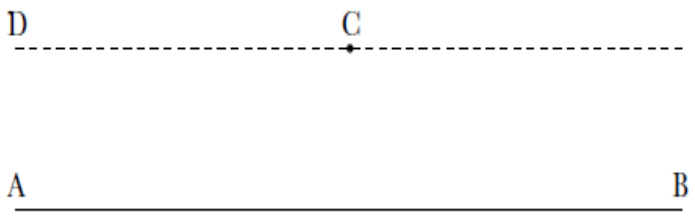
ότι η δυνατότητα γενίκευσης είναι στην πραγματικότητα σε κάποιες περιπτώσεις ικανότητα για επανάληψη. Δηλαδή η απόδειξη μπορεί να επαναληφθεί για τις περιπτώσεις στις οποίες αναφέρεται το ομοίως.

Σε μια περαιτέρω ανάλυση ο Netz(1999) συνδυάζει τις λέξεις ***'τις'*** και '***τυχών'*** που εμφανίζονται στο κείμενο με τους βαθμούς ελευθερίας του γεωμετρικού αντικειμένου που σχεδιάζεται και παρουσιάζει το ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω ότι σχεδιάζουμε μία ευθεία ΑΒ. 1^{ο} στάδιο

Μετά παίρνουμε ένα σημείο εξωτερικά από την ευθεία. 2^{ο} στάδιο

Φέρνουμε από το σημείο παράλληλη στην αρχική ευθεία. 3^{ο} στάδιο



Από τη στιγμή που τα 2 πρώτα στάδια έχουν τελειώσει η δεύτερη ευθεία είναι δοσμένη οπότε το στάδιο 3 δεν έχει κανένα βαθμό ελευθερίας. Αντίθετα τα στάδια 1 και 2 έχουν ελευθερία γιατί η ΑΒ μπορεί να είναι οποιαδήποτε ευθεία, καθώς και το σημείο στο στάδιο 2 μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο στην ευθεία. Παρατήρησε λοιπόν ο συγγραφέας οτι τα '*τις*' και '*τυχών*' αναφέρονται μόνο όταν τα αντικείμενα έχουν ελευθερία.

Όταν λοιπόν η απόδειξη ξεκινά για παράδειγμα με το 'έστω μια έλλειψη' δεν έχεις άπειρο αριθμό ελλείψεων από τις οποίες διαλέγεις μία. Απλά σχεδιάζεις μία έλλειψη πάνω στον πάπυρο, δεν έχεις εδώ επιλογή. Όταν όμως σου ζητηθεί να πάρεις ένα σημείο πάνω στην έλλειψη έχεις μια επιλογή ανάμεσα σε πολλαπλά σημεία. (Netz,1999 σελ.251).

Για να δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση των αριθμητικών προτάσεων. Έχουμε ήδη αναφέρει την εμμονή του Ευκλείδη στη χρήση γραμμών για την αναπαράσταση των αριθμών ενώ η χρήση των ψήφων φαίνεται πιο κατανοητή. Στην προσπάθειά μας να δούμε αν αυτή η επιλογή επηρεάζει τη γενίκευση των

προτάσεων θα παραθέσουμε τις προτάσεις που διατύπωσαν οι Szabo(1973) και Mueller(1969). Ο Szabo υποστηρίζει ότι τα συγκεκριμένα διαγράμματα δεν παίζουν ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη και η χρήση αναπαριστά την ανάγκη για γενίκευση. Σύμφωνα με αυτόν ‘ ο Ευκλείδης δεν αποδεικνύει μόνο (σε αντίθεση με την πρωτόγονη απόδειξη της ψηφοφορίας) ότι το άθροισμα των αρτίων αριθμών 4, 6,10 και 2 είναι άρτιος αριθμός αλλά ότι το αποτέλεσμα όλων αυτών των περιπτώσεων θα πρέπει να είναι πάντοτε άρτιος αριθμός’ (Szabo,1973 σελ.265). Αυτό το συνδέει με μια προσπάθεια του Ευκλείδη να απομακρυνθεί από τις παραστατικές αποδείξεις ακολουθώντας την πλατωνική θεωρία ότι η αριθμητική δεν ανέχεται οι αριθμοί της να βασίζονται επί απτών και ορατών σωμάτων.

Ο Mueller(1969) διαφωνεί με αυτή την άποψη και υποστηρίζει ότι αν οι Έλληνες πίστευαν ότι τα διαγράμματα ήταν άσχετα θα τα είχαν αφαιρέσει και δεν θα ενδιαφέρονταν πώς να τα κάνουν πιο γενικά. Η μεγαλύτερη γενίκευση που προσφέρουν σύμφωνα με το Szabo οι γραμμές σε σχέση με τις ψήφους φαίνεται να έχει μικρή σημασία αφού οι προτάσεις των στοιχείων να αναφέρονται σε οποιοδήποτε αριθμό αλλά οι αποδείξεις μέσω διαγραμμάτων αφορούν συγκεκριμένους αριθμούς. Δεν φαίνεται λοιπόν η διαγραμματική αναπαράσταση των αριθμών να έχει κάποια σχέση με προσπάθεια γενίκευσης των αποτελεσμάτων.

4.2.5 Η ΑΠΟΨΗ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΓΙΑ ΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

«εὑρίσκεται δὲ καὶ τὰ διαγράμματα ἐνεργείᾳ· διαιροῦντες γὰρ εὑρίσκουσιν. εἰ δ' ἦν διῃρημένα,
φανερὰ ἂν ἦν· νῦν δ' ἐνυπάρχει δυνάμει. διὰ τί δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον; ὅτι αἱ περὶ μίαν
στιγμὴν γωνίαι ἴσαι δύο ὀρθαῖς. εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν, ἰδόντι ἂν ἦν εὐθὺς δῆλον
διὰ τί. ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴ καθόλου διὰ τί; ἐὰν ἴσαι τρεῖς, ἥ τε βάσις δύο καὶ ἡ ἐκ μέσου
ἐπισταθεῖσα ὀρθή, ἰδόντι δῆλον τῷ ἐκεῖνο εἰδότι. ὥστε φανερὸν ὅτι τὰ δυνάμει ὄντα εἰς
ἐνέργειαν ἀγόμενα εὑρίσκεται· αἴτιον δὲ ὅτι ἡ νόησις ἐνέργεια· ὥστ' ἐξ ἐνεργείας ἡ δύναμις, καὶ
διὰ τοῦτο ποιοῦντες γιγνώσκουσιν (ὕστερον γὰρ γενέσει ἡ ἐνέργεια ἡ κατ' ἀριθμόν).»

Στο παραπάνω χωρίο ο Αριστοτέλης περιγράφει τη διαδικασία ανάλυσης ενός μαθηματικού «διαγράμματος» 1051α 21-33 των Μετά τα Φυσικά.

Μετάφραση

*Ακόμη και οι γεωμετρικές κατασκευές ανακαλύπτονται έπειτα από **ενέργεια**·*

γιατί τις ανακαλύπτουν διαιρώντας τα σχήματα· αν ήταν δα τα σχήματα διηρημένα

θα ήταν φανερή η κατασκευή. Στην πραγματικότητα όμως ενυπάρχει μέσα στο

αδιαίρετο σχήμα η κατασκευή δυναμικά. Γιατί οι γωνίες του τριγώνου ισούνται

με δύο ορθές; Γιατί οι γωνίες που σχηματίζονται γύρω από ένα σημείο είναι ίσες

με δύο ορθές. Εάν λοιπόν ήταν φερμένη η παράλληλη προς τη μια πλευρά του

τριγώνου γραμμή με την πρώτη ματιά θα ήταν το πράγμα φανερό. Γιατί είναι η μέσα σε ημικύκλιο γωνία γενικά ορθή; η αιτία είναι το να έχουμε τρεις γραμμές

ίσες δηλ. δύο ίσες γραμμές που φτιάνουν τη βάση των τριγώνων και τρίτη ίση

γραμμή που υψώθηκε επάνω στη βάση από τη μέση της βάσης. Με πρώτη ματιά

*όποιος από τη σχέση εκείνη είδηση έχει καταλαβαίνει την αιτία, ώστε τα δυνάμει όντα τα ανακαλύπτουμε αφού τα ανάγουμε στην ενέργεια**. Αίτιο δα είναι ότι η ενέργεια είναι νόηση**· ώστε η δύναμη βγαίνει από την ενέργεια· και γι' αυτό μαθαίνει κανείς χρησιμοποιώντας ενεργητική δημιουργική συμπεριφορά· εννοείται ότι η κατ' αριθμητική ατομικότητα θεωρημένη ενέργεια είναι κατά τη γένεση υστερώτερη.* (Φουρναράκης,2005 σελ. 139)

Σύμφωνα, με τον Αριστοτέλη τα μαθηματικά διαγράμματα περιέχουν ενέργεια και η αιτία για αυτό είναι ότι η ενέργεια είναι νόηση. Ο γεωμέτρης ασχολείται με σχήματα τα οποία είναι *νοητά* (Ζ.1063α 3), και η **ουσιαστική του δραστηριότητα είναι η *νόησις,* και όχι η κατασκευή του οτιδήποτε που είναι *αισθητόν*·** το τελευταίο είναι απλά μια βοήθεια στο προηγούμενο. Τονίζει δηλαδή ο Αριστοτέλης, σύμφωνα με την ανάλυση του Ross, ότι η νοητική ενέργεια –πραγματικότητα της σύλληψης, είναι αυτή που προηγείται στην «εύρεση» των γεωμετρικών κατασκευών. **Το πρώτο βήμα δηλαδή της ανάλυσης σχήματος είναι νοητικό και η πραγματικότητα της αρχικής σύλληψης και επεξεργασίας είναι η «νόηση»**- το υψηλότερο επίπεδο της σκέψης του γεωμέτρη ερευνητή.(Ross στον Φουρναράκης,2005 σελ. 140)

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο Αριστοτέλης κάνει μια γενική διάκριση ανάμεσα σε δύο είδη νόησης : την παθητική νόηση (νους παθητικός) και την ενεργητική νόηση (νους ποιητικός). Ο παθητικός νους σημαίνει την ατομική πλευρά , που είναι δοσμένη στη φυσική διάθεση του συγκεκριμένου ατόμου και που καθορίζεται από τις περιστάσεις της προσωπικής εμπειρίας του, ενώ αντίθετα, ο ποιητικός νους σημαίνει την καθαρή νόηση θεωρούμενη σαν ενότητα ως προς τη φύση και τις αρχές της. Ο ποιητικός νους εργάζεται πάνω σε ένα υλικό που του δίνεται και που το προάγει από δυναμικότητα σε πραγματικότητα. (Θεόφραστος Γέρος, 1985 σελ. 164-165)

4.3 Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η Lisa Taub (2013) στην εργασία της 'On the Variety of 'Genres' of Greek Mathematical Writing' αναρωτιέται πότε ένα αρχαίο Ελληνικό κείμενο που γνωρίζουμε θα πρέπει να θεωρηθεί ως μαθηματικό, τι σημαίνει να χρησιμοποιήσουμε τον όρο μαθηματικά όταν διαβάζουμε και κατανοούμε τα αρχαία Ελληνικά κείμενα. Είναι το θέμα; Η γλώσσα; Το λεξιλόγιο; Η δομή του κειμένου; Το είδος του επιχειρήματος; Είναι η χρήση συγκεκριμένων τεχνικών και εργαλείων όπως το εγγράμματο διάγραμμα; (σελ.335)

Το σίγουρο είναι ότι όταν κάποιος έρχεται σε επαφή με τα κείμενα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών αυτό που προσέχει είναι ο ιδιαίτερος τρόπος γραφής των αποδείξεων. Μικρές προτάσεις που χρησιμοποιούν πολύ συγκεκριμένο λεξιλόγιο και για κάποιους μελετητές θυμίζουν άλλες παλαιότερες μορφές έργων όπως τα ομηρικά έπη. . Σύμφωνα με τον Netz(1999) οι Ομηρικοί ποιητές ήταν αναλφάβητοι και επιπλέον ήταν λαϊκοί ερμηνευτές. Για να μπορούν να απαγγείλουν μεγάλους στίχους ενός ποιητικού κειμένου χωρίς σενάριο, ανέπτυξαν ένα συγκεκριμένο εργαλείο το οποίο ονομάζεται 'formulae'. Αυτό περιλαμβάνει μικρές φράσεις δοσμένων μετρικών μορφών που εφάρμοζαν σε συγκεκριμένες σκηνές.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει οι Έλληνες έδιναν μεγάλη σημασία στη μόρφωση των νέων. Ήταν απαραίτητο για τους νέους να γνωρίζουν πολύ καλά τα έργα του Ομήρου ώστε να μπορούν να τα απαγγέλουν απέξω. Σύμφωνα με τον Δοξιάδη(2012) τα χαρακτηριστικά των έργων του Ομήρου παίζουν καθοριστικό ρόλο στη δια μόρφωση μετέπειτα αφηγηματικών μορφών (σελ.14). Στην ομηρική ποίηση, τα τμήματα της αφήγησης καθοδηγούνται από την αναπαράστασης της δράσης κάτι που ακολουθείται αργότερα και στη λυρική ποίηση. Ο Δοξιάδης(2012) θεωρεί ότι η αφήγηση έχει επηρεάσει τις αποδείξεις των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών και σχηματοποιεί αυτή τη διαδρομή με το ακόλουθο διάγραμμα.

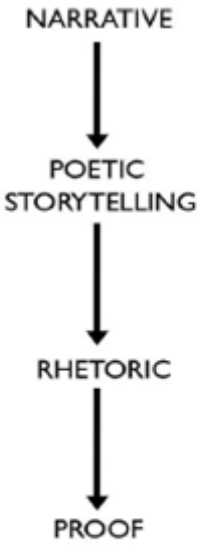


Fig. 2

Στην εργασία του «A Streetcar Named (among other things) Proof: Narrative and poetic roots of deductive mathematics», ο Δοξιάδης(2012) ισχυρίζεται ότι ο τρόπος γραφής των μαθηματικών αποδείξεων ήταν αποτέλεσμα της σταδιακής εξέλιξης διαφορετικών πρακτικών με επίκεντρο την ανθρώπινη ικανότητα για αφήγηση ιστοριών. Επιχειρεί μια σύντομη, ανασκόπηση της έρευνας γύρω από την εμφάνιση της μαθηματικής απόδειξης. Η εμφάνιση στον αρχαϊκό και στον κλασικό κόσμο του συστηματικού ορθολογισμού, μια μεθοδολογία της οποίας η μαθηματική απόδειξη θεωρείται το αποκορύφωμα, έχει εξιδανικευτεί σε έναν χρονολογημένο τόπο, της πνευματικής ιστορίας που είναι γνωστός ως «το ελληνικό θαύμα». Όμως, αν και νεότερες προσεγγίσεις εξετάζουν την ανακάλυψη της απόδειξης υπό ένα πιο ιστορικά ανανεωμένο πρίσμα, εξακολουθεί να υπάρχει στο κέντρο τους η ιδέα μιας ασυνέχειας, θεωρώντας την εμφάνιση του ορθολογισμού ως μια ρήξη με το παρελθόν. Αυτή η αίσθηση, της πλήρους εγκατάλειψης των παλαιών πρακτικών για κάτι εντελώς νέο, είναι ιδιαίτερα ισχυρή στην ιστοριογραφία που ασχολείται με την περίπτωση της εμφάνισης της μαθηματικής απόδειξης και ενισχύεται από την απουσία πρώιμων μαθηματικών κειμένων.

Επειδή όμως, η λέξη απόδειξη, περιγράφει δύο ξεχωριστές αν και σχετιζόμενες πρακτικές στη ρητορική και στα μαθηματικά μετά από ένα ορισμένο σημείο στην κλασική εποχή, αντικαθιστά το προηγούμενο διάγραμμα με το επόμενο. (σελ.4)

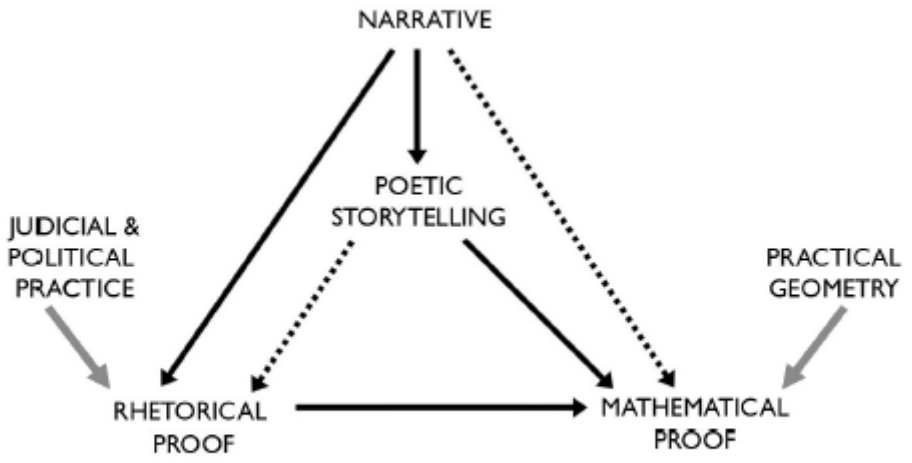


Fig. 3

Τα μαύρα στερεά βέλη δηλώνουν την άμεση επιρροή, τα διακεκομμένα την έμμεση, ενώ τα γκρι βέλη υποδηλώνουν αποκλειστικά επιρροές που προέρχονται από τις δύο συγκεκριμένες περιοχές στις οποίες γεννήθηκε, η ανάγκη για τέτοιου είδους αποδείξεις .

Σύμφωνα με τον Δοξιάδη η αφήγηση αποτελεί τον διάμεσο μεταξύ δύο κόσμων του κόσμο των δράσεων και του κόσμο των νοητικών αναπαραστάσεων (ενεργειών, δράσεων). Υποστηρίζει ότι όταν ένα πρόσωπο ενεργεί, στη ζωή, στη φαντασία ή σε μια αφήγηση, αυτός ή αυτή εν μέρει καθοδηγείται από την ανάγκη και τις διαθέσιμες επιλογές, και αυτό δίνει ήδη κάποια δομή στο μη-γραμμικό αφηγηματικό κόσμο. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται σύμφωνα με τον συγγραφέα χωρίζονται σε τρείς κατηγορίες.(σελ.8)

1) Την γλώσσα των στόχων και των επιμέρους στόχων: Το πιο ισχυρό και πολύπλοκο να οριστεί χαρακτηριστικό του κόσμου της δράσης είναι ο καθορισμός των στόχων.

2)Επεκτασιμότητα και περιγράμματα: Μπορούμε να συλλάβουμε τις αφηγήσεις φτιαγμένες σε μέρη τα οποία μπορούμε να συμπυκνώσουμε σε μικρότερες εκδοχές. Αν και αυτά τα περιγράμματα χάνουν πολλές από τις πληροφορίες που περιέχονται στην πλήρη μορφή, μπορούν να είναι -εν μέρει γι' αυτόν το λόγο- χρήσιμα σε

γνωστικό επίπεδο, βοηθώντας να κατανοηθεί καλύτερα το γενικό σχήμα της δράσης και άρα να προσανατολιστεί το άτομο σε έναν αφηγηματικό κόσμο ταυτόχρονα σε μάκρο και σε μίκρο-επίπεδο.

3)Φόρμουλες, Μοτίβα, Τύποι και Είδη. Όπως σε κάθε ανθρώπινη υψηλή διανοητική δραστηριότητα έτσι και στην ανθρώπινη ικανότητα να συνθέτουμε και να κατανοούμε ιστορίες, η έμφυτη γνωστική δυνατότητα εμπλουτίζεται από μια παραδοσιακή πρακτική.

Οι πρώτες γνωστές αρχαίες Ελληνικές αφηγήσεις είναι τα Ομηρικά έπη (8ος π.Χ αιώνας).Τόσο η Ιλιάδα (15.693 στίχοι) όσο και η Οδύσσεια(12.110 στίχοι) βασίζονται σε ένα σύνολο στερεότυπων μικρότερων ή μεγαλύτερων φράσεων (λογοτύπων) και τυποποιημένων σκηνών. Αυτό προκαλεί μεγάλο ενδιαφέρον αν αναλογιστεί κανείς ότι η Ελληνική γλώσσα έχει μεγάλη συντακτική και λεξιλογική πολυπλοκότητα. Στο αρχαϊκό στυλ, οι ατομικές προτάσεις τοποθετούνται μαζί-δίνοντας την αίσθηση «πλάνων ταινίας» ή «φωτογραφιών» της δράσης ή περιγραφής-για να συνθέσουν μεγαλύτερες μονάδες δράσης, ή σκηνές, οι οποίες δημιουργούν μια ζωντανή αναπαράστασης της δράσης στο μυαλό του ακροατή. (Δοξιάδης 2012 σελ. 9). « *Εκτός από τις εκφραστικές στερεοτυπίες, υπήρχαν και τυποποιημένες ακολουθίες πράξεων για να περιγράψουν εκτενή γεγονότα όπως η θυσία, η ικεσία, η υποδοχή ενός φιλοξενούμενου, ένα γεύμα, μία μονομαχία. Για παράδειγμα η αφήγηση μιας αριστείας, δηλαδή μιας σειράς κατορθωμάτων ενός ήρωα, βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο πρότυπο: πρώτα περιγράφεται ο εξοπλισμός του ήρωα. Όταν αρχίζει η μάχη, ο πρωταγωνιστής σκοτώνει κάποιους εχθρούς σε μονομαχίες και έπειτα επιτίθεται εναντίον του εχθρικού στρατού τον οποίο ωθεί σε φυγή. Η καταδίωξη διακόπτεται όταν αυτός πληγώνεται, αλλά με προσευχή σε ένα θεό θεραπεύεται, επιστρέφει στη μάχη και μονομαχεί με τον αρχηγό των εχθρών. Τον σκοτώνει και ακολουθεί μάχη των δύο παρατάξεων για το πτώμα, το οποίο αποκτούν τελικά οι φίλοι του νεκρού με θεϊκή παρέμβαση. Παρά την τυποποίηση, κάθε φορά που εμφανίζονται τυπικές σκηνές υπάρχουν διαφορές στις λεπτομέρειες ανάλογα με τις ανάγκες.*» (Edwards,2001 Όμηρος, σελ. 107)

Αυτή η τυποποίηση σύμφωνα με τον Netz ορίζει ένα συγκεκριμένο γνωστικό εργαλείο και υποστηρίζει ότι αυτό το εργαλείο ήταν απαραίτητο για την επίτευξη ενός ορισμένου γνωστικού έργου (δηλαδή ,τη δημιουργία του ομηρικού έπους) , δεδομένης της απουσία κάποιου άλλου γνωστικού εργαλείου (δηλαδή , της γραφής) . Η θεωρία προϋποθέτει κάποιες καθολικές απαιτήσεις : είναι αδύνατο κάποιος να αυτοσχεδιάσει τα ομηρικά ποιήματα αν δεν γνωρίζει την τυποποίηση που πρέπει να ακολουθήσει. Αντιστρόφως, με τη βοήθεια αυτών των τύπων ,αυτό είναι δυνατό. Η γραφή κάνει αυτού του είδους την τυποποίηση περιττή. Η θεωρία προϋποθέτει τη διαθεσιμότητα γνωστικών εργαλείων στην Ομηρική εποχή και επίσης συνεπάγεται κάποιες υποθέσεις σχετικά με το κοινωνικό υπόβαθρο , γι' αυτό θεωρείται ότι η δομή των τύπων εξελίχθηκε σταδιακά , εντός μιας κοινότητας που ενέκρινε και συγκέντρωσε αυτούς τους τύπους.

Αργότερα στην κλασσική εποχή με την εμφάνιση της τραγωδίας η παρουσίαση της δράσης περνά σε άλλο επίπεδο. *«Η τραγωδία, ειδικά μετά τον Αισχύλο, είναι σε μια συνεχή αλληλεπίδραση με την πρώτη ελληνική τέχνη πεζού λόγου, τη ρητορική, Υπάρχουν στοιχεία ρητορικής στην τραγωδία ενώ με τη σειρά της και η τραγωδία επηρεάζει τους ρήτορες.»* (McDonald 2006, στον Δοξιάδη,2012 σελ.15)

Η ποίηση ήταν ανάμεσα στις τεχνοτροπίες στις οποίες παρουσιάζονταν τα μαθηματικά προβλήματα. Στη Liba Taub (2013,σελ.354) παρουσιάζεται ένα γράμμα στον Πτολεμαίο όπου συγγραφέας διατυπώνει το πρόβλημα που απαιτεί λύση παραθέτοντας τους επόμενους στίχους:

μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου
διπλάσιος ἔστω, τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλεὶς
δίπλαζ' ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου.

Ανέφερες μια μικρή περιφέρεια του τάφου
Διπλασίασέ τον χωρίς να χάσει την ομορφιά του
Γρήγορα διπλασίασε κάθε πλευρά του τάφου

Το γράμμα ολοκληρώνεται με ένα ποίημα , ένα επίγραμμα το οποίο λειτουργεί ως μια ποιητική σφραγίδα. Η λύση του προβλήματος παρουσιάζεται στο επίγραμμα, το οποίο οι περισσότεροι το αποδίδουν στον Ερατοσθένη .

″ Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλήσιον, ὦγαθὲ, τεύχειν
φράζεαι ἢ στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν
εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην
ἢ σιρὸν ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος
τῇ δ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλης κανόνων.
μηδὲ σύ γ' *Ἀρχύτεω* δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων
μηδὲ *Μεναιχμείους* κωνοτομεῖν τριάδας
διζήσῃ. μηδ' εἴ τι θεουδέος *Εὐδόξοιο*
καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
τοῖς δε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις
ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
εὐαίων *Πτολεμαῖε* πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα,
αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνε *Ζεῦ*,
καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
τοῦ *Κυρηναίου* τοῦτ' *Ἐρατοσθένεος*″.

Μετάφραση

Εάν, ω αγαθέ, θέλεις να επιτύχεις κύβο διπλάσιο κύβο από ένα μικρό ή θέλεις να μετασχηματίσεις με κομψό τρόπο κάθε άλλο στερεό σώμα, αυτό είναι στο χέρι σου και θα μπορέσεις να μετρήσεις και μία μάντρα ή ένα λάκκο ή ευρύ κύτος ενός κοίλου πηγαδιού, αν βρεις δύο μέσες αναλόγους, αφού συμπεριλάβεις εντός δύο κανόνων συνδρομείς, των οποίων οι τομές να συγκλίνουν προς τα άκρα των τερμάτων τους. Ούτε να ζητάς να το πετύχεις αυτό με τα δυσμήχανα έργα των κυλίνδρων του Αρχύτα, ούτε να θέλεις να το βρεις με τις τρεις εκείνες κωνικές τομές του Μεναίχμου, ούτε με τις καμπύλες γραμμές του θεοσεβή Εύδοξου. Διότι με αυτή τη συσκευή μπορείς, ξεκινώντας από μια μικρή βάση, να βρεις μυριάδες μέσων αναλόγων ευκολότερα. Είσαι ευτυχής, Πτολεμαίε, διότι, απολαμβάνοντας με το παιδί σου τις νεανικές διασκεδάσεις, συ ο ίδιος χάρισες σ' αυτό όλα όσα είναι αγαπητά και στις μούσες και στους βασιλείς. Σε ό,τι αφορά δε στο μέλλον, ουράνιε

Ζεν, μακάρι το παιδί σου να δεχθεί από το χέρι σου και τα σκήπτρα. Και αυτά μεν ας γίνουν έτσι, είθε δε όποιος βλέπει το ανάθημα αυτό να λέει ότι αυτό είναι έργο του Ερατοσθένη τον Κυρηναίου. (μτφ Ε. Σκάσσης στον Σπανδάγο,1994 σελ.208)

Και ο Αρχιμήδης επίσης χρησιμοποιούσε την ποίηση για να παρουσιάσει ένα μαθηματικό πρόβλημα όπως το πρόβλημα των αγελάδων που παρουσιάζει ο Thomas (1939, σελ.202–205.)

Πρόβλημα

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,

ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν

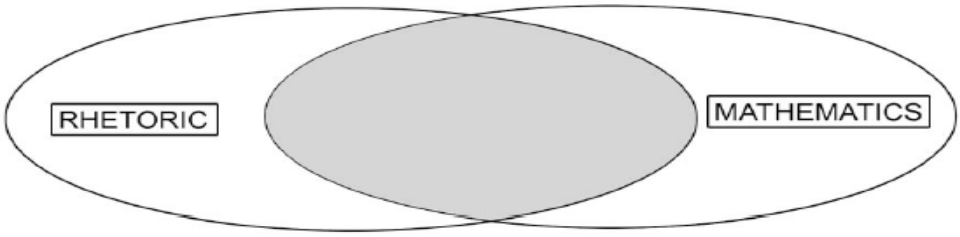
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.

ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
ξεῖνε, σὺ δ', Ἠελίοιο βόες πόσαι, ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ, θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλήθους[1] Θρινακίης πεδία.
ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Όπως επισημαίνει η Liba Taub (2013) υπάρχουν αρκετά χαρακτηριστικά στο ποίημα που δημιουργούν δεσμούς ανάμεσα στον Ερατοσθένη και τον Αρχιμήδη. Καταρχήν, έχουμε την αναφορά στην Οδύσσεια του Ομήρου και στις αγελάδες του Ήλιου κάτι που αναφέρεται στην αρχή της Οδύσσειας. Ο αριθμός των ζώων (7 κοπάδια από βοοειδή και πρόβατα με 50 στο καθένα) και ο βοσκότοπος (το νησί Θρινακία) αναφέρονται συγκεκριμένα στον Όμηρο όταν η Σκύλλα απευθύνεται στον Οδυσσέα. Το πρόβλημα τοποθετεί την Θρινακία στη Σικελία που είναι το σπίτι του

Αρχιμήδη. Τοποθετώντας ο Αρχιμήδης τον εαυτό του ανάμεσα στον Ερατοσθένη και τον Όμηρο δύο μεγάλες μορφές της αρχαιότητας υπογραμμίζει πνευματικούς δεσμούς ανάμεσα στους τρείς μέσω της ποίησης και των αριθμών. Στην Ελληνική ανθολογία υπάρχουν αρκετά ποιήματα τα οποία είναι μαθηματικά ποιήματα που παρουσιάζονται ως επιγράμματα.

4.4 Η ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Σχήμα Δοξιάδης (2012 ,σελ.3)

Ο όρος ρητορική στην αρχαία Ελλάδα δηλώνει την τέχνη της δημόσιας ομιλίας που χρησιμοποιούνταν στις συνελεύσεις του δήμου και στα δικαστήρια στις πόλεις που είχαν δημοκρατικό πολίτευμα. Αναπτύχθηκε κυρίως τον 5ο π.Χ αιώνα κυρίως από τους σοφιστές. «'Η αναγνώριση της δύναμης του λόγου και η σημασία της ρητορείας δεν αποτελούν καινοτομία των σοφιστών αφού ήδη στα ομηρικά έπη αναγνωρίζεται όχι μόνο η ανδρεία, αλλά και η ικανότητα να μιλά κανείς πειστικά. Το παιδευτικό ιδεώδες της εποχής , όπως το εκφράζει ο παιδαγωγός του Αχιλλέα ,ο Φοίνιξ ,είναι η ικανότητα στο λέγειν και στο πράττειν.» (Μπαρμπούτη, 2008 σελ.20)

Ο Αριστοτέλης στο παρακάτω απόσπασμα ορίζει το έργο της ρητορικής.

[1357a] (1)[12] ἔστιν δὲ τὸ ἔργον αὐτῆς περί τε τοιούτων περὶ ὧν βουλευόμεθα καὶ τέχνας μὴ ἔχομεν, καὶ ἐν τοῖς τοιούτοις ἀκροαταῖς οἳ οὐ δύνανται διὰ πολλῶν συνορᾶν οὐδὲ λογίζεσθαι πόρρωθεν. βουλευόμεθα δὲ περὶ τῶν φαινομένων ἐνδέχεσθαι ἀμφοτέρως ἔχειν: περὶ γὰρ τῶν

ἀδυνάτων ἄλλως ἢ γενέσθαι ἢ ἔσεσθαι ἢ ἔχειν οὐδεὶς βουλεύεται οὕτως ὑπολαμβάνων: οὐδὲν γὰρ πλέον.

Μετάφραση

Το έργο, λοιπόν, της ρητορικής α) αφορά σε θέματα σαν αυτά που αποτελούν αντικείμενο των συζητήσεων μας και για τα οποία δεν διαθέτουμε άλλες τέχνες, β) επιτελείται μπροστά σε ακροατές που δεν έχουν την ικανότητα να παρακολουθούν πολλές μαζί συλλογιστικές φάσεις και να μετέχουν σε έναν συλλογισμό που το ξεκίνημα του βρίσκεται πολύ μακριά. **Σε συζήτηση μπαίνουν μόνο τα θέματα που φαίνεται ότι μπορούν να έχουν δύο διαφορετικές μεταξύ τους όψεις**: για πράγματα που δεν υπάρχει περίπτωση να είχαν στο παρελθόν, να μπορούν να αποκτήσουν στο μέλλον ή να έχουν στο παρόν άλλη, διαφορετική όψη δεν συζητάει κανείς όσο τα θεωρεί τέτοια, αφού αυτό δεν θα ωφελούσε σε τίποτε.

(Αριστοτέλης, Ρητορική Βιβλίο Πρώτο. Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια Δ. Λυπουρλής, 2002Θεσσαλονίκη: Ζήτρος, σελ. 136-161)

Στο κείμενο του Δοξιάδη(2012) παρουσιάζεται η ύπαρξη τριών ειδών ρητορικής. Το **επιδεικτικό**, που συνήθως χρησιμοποιείται σε δημόσιες εκδηλώσεις, το **διαβουλευτικό ή πολιτικό**, που χρησιμοποιείται από τους ομιλητές στη συνέλευση, και το **δικανικό**, που ομιλείται από τους συμμετέχοντες σε ένα δικαστήριο. Σύμφωνα με τον συγγραφέα στο δικανικό λόγο περιέχονται τα πιο σαφή παραδείγματα των μορφών απόδειξης που ισχύουν και για τα μαθηματικά. Στην κλασσική εποχή το αποτέλεσμα μιας δίκης αποφασιζόταν από ένα πολυπληθές σώμα ενόρκων που ψήφιζε αφού άκουγε τις μαρτυρίες και τους λόγους των αντιδίκων. Ο Δοξιάδης υποστηρίζει ότι η παρουσίαση της δικανικής ρητορικής είναι αποτέλεσμα της επίδρασης της αφήγησης και της ποιητικής αφήγησης και εξετάζει αυτή την επιρροή σε δύο επίπεδα, αυτό της μάκρο-δομής και αυτό της μίκρο-δομής.

Ο δικανικός λόγος σύμφωνα με την ανάλυση του συγγραφέα, αποτελείται από τέσσερα μέρη, την εισαγωγή, την αφήγηση, την απόδειξη και τον επίλογο, αν και μερικοί αρχαίοι θεωρητικοί διαιρούν περαιτέρω το τρίτο μέρος στη διαίρεση, την

κατάλληλη απόδειξη και τη διάψευση. Ο κύριος στόχος αυτού του πρότυπου είναι δισδιάστατος: α) να δημιουργήσει σχετική, παρά συνολική, βεβαιότητα ότι αφήγηση του ρήτορα προσαρμόζεται καλύτερα στα γεγονότα της υπόθεσης και β) να δείξει ότι οι πράξεις που περιγράφονται σε αυτή θα κριθούν καλύτερα από την εφαρμογή ενός συγκεκριμένου νόμου της πόλης.

ΤΑ ΜΕΡΗ ΤΟΥ ΔΙΚΑΝΙΚΟΥ ΛΟΓΟΥ (Δοξιάδης, 2012 σελ. 15)

α) ***Εισαγωγή****:* Εκτός από τον στόχο να αιχμαλωτίσουν την προσοχή του κοινού και να το εντυπωσιάσουν με τη λεκτική δυνότητα του ρήτορα, η κύρια λειτουργία της εισαγωγής είναι να καθορίσει αυτό που πρέπει να αποδειχθεί τόσο σε όρους αφήγησης αλλά και νόμου. Η χρήση της εισαγωγής δεν αποτελεί καινοτομία του δικανικού λόγου αλλά μοιάζει με την ποιητική πρακτική όπως επισημαίνει ο Αριστοτέλης στα Ρητορικά 1415^{α}.

Τὰ δὲ τοῦ δικανικοῦ προοίμια δεῖ λαβεῖν ὅτι ταυτὸ δύναται ὅ περ τῶν δραμάτων οἱ πρόλογοι καὶ τῶν ἐπῶν τὰ προοίμια· τὰ μὲν γὰρ τῶν διθυράμβων ὅμοια τοῖς ἐπιδεικτικοῖς·

β) ***Αφήγηση****:* Αυτό το μέρος του λόγου είναι καθαρή αφήγηση, μια παρουσίαση των γεγονότων που αφορούν την υπόθεση που εκδικάζεται. Η ρητορική αφήγηση δεν ενδιαφέρεται για την αντικειμενικότητα αφού ο ομιλητής ενδιαφέρεται να παρουσιάσει τα γεγονότα κατά τρόπο που εξυπηρετεί καλύτερα τον στόχο του.

γ) ***Απόδειξη*** *:* Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κάποια αρχαίοι θεωρητικοί σπάνε περαιτέρω την απόδειξη σε διαίρεση, πραγματική απόδειξη και διάψευση.

δ) ***Διαίρεση****:* Η αποστολή της διαίρεσης είναι να σπάσει τη δράση κατά την αφήγηση της ομιλίας σε τμήματα, επιλέγοντας εκείνα τα οποία στην πραγματικότητα θα πρέπει να αποδειχθούν .Το δεύτερο, είδος το οποίο η διαίρεση μπορεί να δημιουργήσει είναι οι αντι-αφηγήσεις (μια λίστα με εναλλακτικές αφηγήσεις που ο αντίπαλος μπορεί να προτείνει ως πιθανότερα, για να τα αμφισβητήσει). Με αυτή τη διπλή διαδικασία, η διαίρεση φέρνει στην ομιλία νέες αφηγήσεις τις οποίες ο ομιλητής θα

πρέπει να υποστηρίξει, προκειμένου να διαπιστωθεί πέραν πάσης αμφιβολίας ότι η δική του αφήγηση είναι η καλύτερη προσέγγιση της αλήθειας.

ε) ***Η ορθή/κατάλληλη απόδειξη****:* Το αποδεικτικό τμήμα μιας κλασσικής δικανικής ομιλίας χρησιμοποιεί δύο τεχνικές, τις αποκαλούμενες μη καλλιτεχνικές αποδείξεις (άτεχνη πίστης) και τις καλλιτεχνικές αποδείξεις (έντεχνη πίστης). Στις Ελληνικές θεωρητικές πραγματείες η πίστη δηλώνει και το συνολικό μέρος της απόδειξης και τα επιμέρους τμήματά της. Οι μη καλλιτεχνικές αποδείξεις περιέχουν ένορκες καταθέσεις μαρτύρων καθώς επίσης συμβόλαια και νόμους. Οι καλλιτεχνικές αποδείξεις πρέπει να εφευρεθούν από τον ομιλητή.

Υπάρχουν τρία είδη καλλιτεχνικών αποδείξεων: οι αποδείξεις σχετικά με το χαρακτήρα (ήθος) του εναγομένου, του κατήγορου, ή μερικές φορές του μάρτυρα, οι

αποδείξεις που απευθύνεται στα συναισθήματα των ενόρκων (πάθος) και τέλος οι λογικές αποδείξεις οι οποίες απευθύνονται στο λόγο (διάνοια), σύμφωνα με τον Αριστοτέλη.

[1356a] (1)[3] τῶν δὲ διὰ τοῦ λόγου ποριζομένων πίστεων τρία εἴδη ἔστιν: αἱ μὲν γάρ εἰσιν ἐν τῷ ἤθει τοῦ λέγοντος, αἱ δὲ ἐν τῷ τὸν ἀκροατὴν διαθεῖναί πως, αἱ δὲ ἐν αὐτῷ τῷ λόγῳ διὰ τοῦ δεικνύναι ἢ φαίνεσθαι δεικνύναι.

ζ) ***Επίλογος:*** Πολλά από αυτά που λέγονται στον επίλογο είναι πλεονάζοντα όσον αφορά τις πληροφορίες ή το επιχείρημα. Συνήθως είναι μια περίληψη του σημαντικότερου επιχειρήματος.

Σύμφωνα με τον Δοξιάδη ***«Η ρητορική δανείστηκε τις μορφές της ποίησης για την ομορφιά, αλλά διατήρησε κάποιες από αυτές για την πειστική αποτελεσματικότητά τους.».***

Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να διαγνώσει τη φύση της ρητορικής και τον σκοπό της. Για τον Αριστοτέλη η ρητορική δεν συνιστά ουσιαστικά τίποτα άλλο παρά έναν τρόπο εφαρμογής της διαλεκτικής.

τοῦτο (10) ἐκ τῶν Ἀναλυτικῶν, ἀναγκαῖον ἑκάτερον αὐτῶν ἑκατέρῳ τούτων τὸ αὐτὸ εἶναι. 1356α[8] περὶ μὲν οὖν τῆς δυνάμεως αὐτῶν, καὶ πῶς ἔχουσι (35) πρὸς ἀλλήλας, εἴρηται σχεδὸν ἱκανῶς: τῶν δὲ διὰ τοῦ δεικνύναι ἢ φαίνεσθαι δεικνύναι, καθάπερ καὶ ἐν τοῖς διαλεκτικοῖς [1356b] (1) τὸ μὲν ἐπαγωγή ἐστιν, τὸ δὲ συλλογισμός, τὸ δὲ φαινόμενος συλλογισμός, καὶ ἐνταῦθα ὁμοίως: ἔστιν γὰρ τὸ μὲν παράδειγμα ἐπαγωγή, τὸ δ' ἐνθύμημα συλλογισμός, τὸ δὲ φαινόμενον ἐνθύμημα φαινόμενος συλλογισμός. καλῶ δ' ἐνθύμημα (5) μὲν ῥητορικὸν συλλογισμόν, παράδειγμα δὲ ἐπαγωγὴν ῥητορικήν. πάντες δὲ τὰς πίστεις ποιοῦνται διὰ τοῦ δεικνύναι ἢ παραδείγματα λέγοντες ἢ ἐνθυμήματα, καὶ παρὰ ταῦτα οὐδέν: ὥστ' εἴπερ καὶ ὅλως ἀνάγκη ἢ συλλογιζόμενον ἢ ἐπάγοντα δεικνύναι ὁτιοῦν [ἢ ὁντινοῦν] δῆλον δ' ἡμῖν

Μετάφραση

Για τη φύση λοιπόν των δύο αυτών τεχνών, για τις ιδιότητες τους και για τη σχέση της μιας με την άλλη έχουμε πει σχεδόν αρκετά. **Για την πειθώ, τώρα, που πετυχαίνεται μέσω της απόδειξης**, πραγματικής ή φαινομενικής: όπως στη **διαλεκτική υπάρχει η επαγωγή, ο (πραγματικός) συλλογισμός και ο φαινομενικός συλλογισμός, ακριβώς έτσι έχει το πράγμα και στη ρητορική: το παράδειγμα είναι επαγωγή, το ενθύμημα συλλογισμός,** [και το φαινομενικό ενθύμημα είναι φαινομενικός συλλογισμός]. Ονομάζω **ενθύμημα τον ρητορικό συλλογισμό** και **παράδειγμα τη ρητορική επαγωγή**. Όλοι οι ρήτορες πετυχαίνουν να πείσουν κάνοντας τις αποδείξεις τους είτε με τη βοήθεια παραδειγμάτων είτε με τη βοήθεια ενθυμημάτων – με τίποτε άλλο πέρα από αυτά. Αν, επομένως, προκειμένου να αποδείξουμε κάτι σχετικό με οποιοδήποτε πράγμα, είμαστε απολύτως υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε – όπως το έχουμε κάνει φανερό στα Αναλυτικά – συλλογισμό ή επαγωγή, ο καθένας από τους δύο αυτούς τρόπους δεν μπορεί παρά να είναι ίδιος με τον καθέναν – αντίστοιχα – από τους άλλους δύο τρόπους.

(Αριστοτέλης, Ρητορική Βιβλίο Πρώτο. Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια Δ. Λυπουρλής, 2002 Θεσσαλονίκη: Ζήτρος, σελ. 136-161)

Επίσης ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι κάθε προσπάθεια πειθούς δηλαδή κάθε ρητορικός λόγος προϋποθέτει την αμφισβήτηση . Η μορφή που παίρνει

αμφισβήτηση ανάγεται σε κάποιους κανόνες που ονομάζει **κοινούς τόπους** , δηλαδή ανεξαρτήτως θέματος του λόγου η αμφισβήτηση θα στρέφεται π.χ. στο αν αυτό υπάρχει ή όχι, αν είναι συμφέρον ή όχι κ.τ.λ.

[21] λέγω γὰρ διαλεκτικούς τε καὶ ῥητορικοὺς συλλογισμοὺς εἶναι περὶ ὧν τοὺς τόπους λέγομεν:

ΣΧΕΣΗ ΡΗΤΟΡΙΚΗΣ- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον Δοξιάδη τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά όπως και η ρητορική, ομοιάζουν με την ποιητική αφήγηση, δηλαδή, κατασκευάζουν τα θεωρήματα τους σύμφωνα με στερεά μοτίβα, ή πρότυπα. Από τα μέσα του τέταρτου αιώνα-αν όχι νωρίτερα- έχει προκύψει ένα πρότυπο σχέδιο για το γεωμετρικό θεώρημα, που είναι το εξής:

α) ***Πρόταση***, όπου δίνεται μια δήλωση σε μία γενική μορφή.

β) ***Έκθεση,*** όπου η γενική δήλωση που περιγράφεται στην πρόταση γίνεται συμβολικά συμπαγής, ή αρχικοποιείται ,διατηρώντας όμως τη γενικότητα της, αναφερόμενη σε ένα διάγραμμα γραμμάτων.

γ) ***Διορισμός***, όπου η δήλωση της πρότασης φτιάχνεται σύμφωνα με τους όρους της Έκθεσης, δηλαδή, εκεί που ο πραγματικός στόχος ορίζεται.

δ) ***Κατασκευή***, όπου επιπλέον σημεία, γραμμές ή σχήματα που θα είναι χρήσιμα στην απόδειξη κατασκευάζονται.

ε) ***Απόδειξη,*** η απόδειξη της δήλωσης, όπως ορίζεται στο β) και στο γ), χρησιμοποιώντας επίσης τα αντικείμενα που κατασκευάστηκαν στο δ)

στ)Συμπέρασμα, το οποίο επαναλαμβάνει τη δήλωση, σε μια αφηρημένη διατύπωση του α).

Ο Δοξιάδης κατασκευάζει τον ακόλουθο πίνακα που δείχνει την αντιστοιχία ανάμεσα στο ρητορικό λόγο και την μαθηματική απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ	ΔΙΚΑΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
Πρόταση Έκθεση-Διορισμός	Πρόλογος	Διατύπωση προβλήματος
Κατασκευή	Αφήγηση	Περιγραφή των γεγονότων
Απόδειξη	Απόδειξη	Απόδειξη ότι τα γεγονότα πραγματικά υποστηρίζουν την άποψη του ομιλητή
Συμπέρασμα	Επίλογος	Δήλωση αυτού που αποδείχθηκε

Ο δικανικός λόγος έχει ως σκοπό να δείξει ότι μια συγκεκριμένη ομάδα γεγονότων τα οποία περιγράφηκαν από τον ομιλητή υπάγονται σε έναν συγκεκριμένο νόμο να τα κρίνει. Έτσι και τα γεωμετρικά θεωρήματα προχωρούν για να δείξουν ότι η συγκεκριμένη κατάσταση ολοκληρώνεται με την κατασκευή, που ενσωματώνει την αλήθεια που αναφέρεται στην πρόταση. Η παραπάνω αναλογία γίνεται εντονότερη συγκρίνοντας το αποδεικτικό μέρος του θεωρήματος με αυτό της δικανικής ομιλίας. Και παραθέτει τον ακόλουθο πίνακα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ	ΔΙΚΑΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
«Διαίρεση»	Διαίρεση	Διάσπαση του προβλήματος σε όλες τις πιθανές εναλλακτικές
«Κατάλληλη απόδειξη»	Κατάλληλη απόδειξη	Απόδειξη κάθε μιας από τις πιθανές εναλλακτικές, οι οποίες αναφέρθηκαν στη διαίρεση.
«Μη-καλλιτεχνικές αποδείξεις» αξιώματα, ορισμοί, κοινές έννοιες, αποδεδειγμένα θεωρήματα	Μη-καλλιτεχνικές αποδείξεις καταθέσεις μαρτύρων, συμβάσεις, νόμοι	Αποδείξεις που δίνονται στον ομιλητή εκτός υπόθεσης/θεωρήματος.
«Καλλιτεχνικές αποδείξεις»:		
-	Ήθος	Αποδείξεις που δημιουργούνται από τον ομιλητή με χρήση επιχειρημάτων ήθους
-	Πάθος	Αποδείξεις δημιουργούνται από τον ομιλητή με χρήση επιχειρημάτων συναισθήματων
«Λόγος»	Λόγος	Αποδείξεις δημιουργούνται από τον ομιλητή χρησιμοποιώντας α)στοιχεία του θεωρήματος ή ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις (γεωμετρία), β)μέσα στο λόγο που υποστηρίζεται από υψηλή αφηγηματική πιθανότητα

4.5 ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

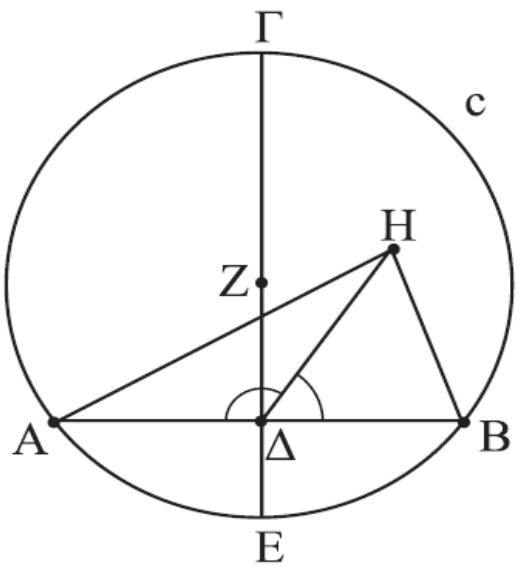
Με τον όρο γενίκευση εννοούμε την μετάβαση από το μερικό στο γενικό. Στο λεξικό του Μπαμπινιώτη (1998) συναντάμε τον ακόλουθο ορισμό « Γενίκευση είναι η λειτουργία της νόησης η οποία μαζί με την αφαίρεση οδηγεί στην εύρεση κοινών γνωρισμάτων σε ένα γνωστικό τομέα σχηματίζοντας έτσι έννοιες, θεωρίες, νόμους, αρχές κ.λπ.». Στα κείμενα των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών δεν εμφανίζεται ο όρος γενίκευση. Η πρώτη αναφορά στην έννοια της γενίκευσης γίνεται από τον Αριστοτέλη, ο οποίος όμως αναφέρεται στην επαγωγή την οποία ορίζει ως μετάβαση από το επιμέρους στο γενικό.

Διωρισμένων δὲ τούτων χρὴ διελέσθαι πόσα τῶν λό-
γων εἴδη τῶν διαλεκτικῶν. ἔστι δὲ τὸ μὲν **ἐπαγωγή**, τὸ δὲ
συλλογισμός. καὶ συλλογισμὸς μὲν τί ἐστιν, εἴρηται πρό-
τερον. **ἐπαγωγὴ δὲ ἡ ἀπὸ τῶν καθ' ἕκαστα ἐπὶ τὸ καθ-**
όλου ἔφοδος· οἷον εἰ ἔστι κυβερνήτης ὁ ἐπιστάμενος κράτιστος,
καὶ ἡνίοχος, καὶ ὅλως ἐστὶν ὁ ἐπιστάμενος περὶ ἕκαστον ἄρι-
στος. **ἔστι δ' ἡ μὲν ἐπαγωγὴ πιθανώτερον καὶ σαφέστερον**
καὶ κατὰ τὴν αἴσθησιν γνωριμώτερον καὶ τοῖς πολλοῖς
κοινόν, ὁ δὲ συλλογισμὸς βιαστικώτερον καὶ πρὸς τοὺς ἀντι-
λογικοὺς ἐνεργέστερον.

Αριστοτέλης, Τοπικά 104b, 47-56

Το ερώτημα που εγείρεται είναι πως η γενίκευση υποδηλωνόταν μέσα στις προτάσεις των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, αφού δεν αναφερόταν σαφώς ως έννοια. Με το συγκεκριμένο ερώτημα έχει ασχοληθεί ο Netz στο βιβλίο 'The shaping of deduction in Greek mathematics' τα συμπεράσματα του οποίου κυρίως θα παρουσιάσω. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην άποψη του Mueller ο οποίος πιστεύει ότι οι Έλληνες δεν απάντησαν ποτέ ικανοποιητικά το ερώτημα πως από μια συγκεκριμένη απόδειξη γίνεται η μετάβαση σε ένα γενικό συμπέρασμα.

Στα κείμενα που σώζονται δεν υπάρχει αναφορά ότι τα αποτελέσματα αποδεικνύονται γενικά. Ακόμα και οι λέξεις **καθόλου** και **παν** κάνουν την εμφάνισή τους σπάνια. Αυτό που αναφέρεται όμως σε αρκετές περιπτώσεις είναι ότι η απόδειξη ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος οδηγεί σε κάποιο άλλο αποτέλεσμα το οποίο φαντάζει πιο γενικό. Το κλειδί σε αυτή την περίπτωση είναι η λέξη **ομοίως** (ομοίως θα δείξουμε ότι…). Ας παρατηρήσουμε την πρόταση ΙΙΙ.1 των Στοιχείων. Σε αυτή την πρόταση το πρόβλημα είναι να βρούμε το κέντρο ενός δεδομένου κύκλου. Βλέπουμε το σχήμα παρακάτω.



Ο Ευκλείδης στην συγκεκριμένη απόδειξη παρουσιάζει την κατασκευή του κύκλου και κατόπιν υποθέτοντας ότι το κέντρο του κύκλου είναι ένα σημείο Η διαφορετικό από το Ζ καταλήγει σε άτοπο. <u>Στο τέλος της απόδειξης αναφέρει ότι ομοίως αυτό μπορεί να δειχθεί για οποιαδήποτε άλλη θέση του Η</u> (εκτός από το Ζ). Δηλαδή , ο Ευκλείδης υπόσχεται ότι μπορούν να δοθούν άπειρες το πλήθος αποδείξεις για τα διαφορετικά σημεία. Η γενίκευση, βέβαια, σε αυτές τις περιπτώσεις αφορά περισσότερο τη γενίκευση της απόδειξης και όχι του αποτελέσματος, είναι δηλαδή απόρροια της επαναληπτικότητας της απόδειξης.

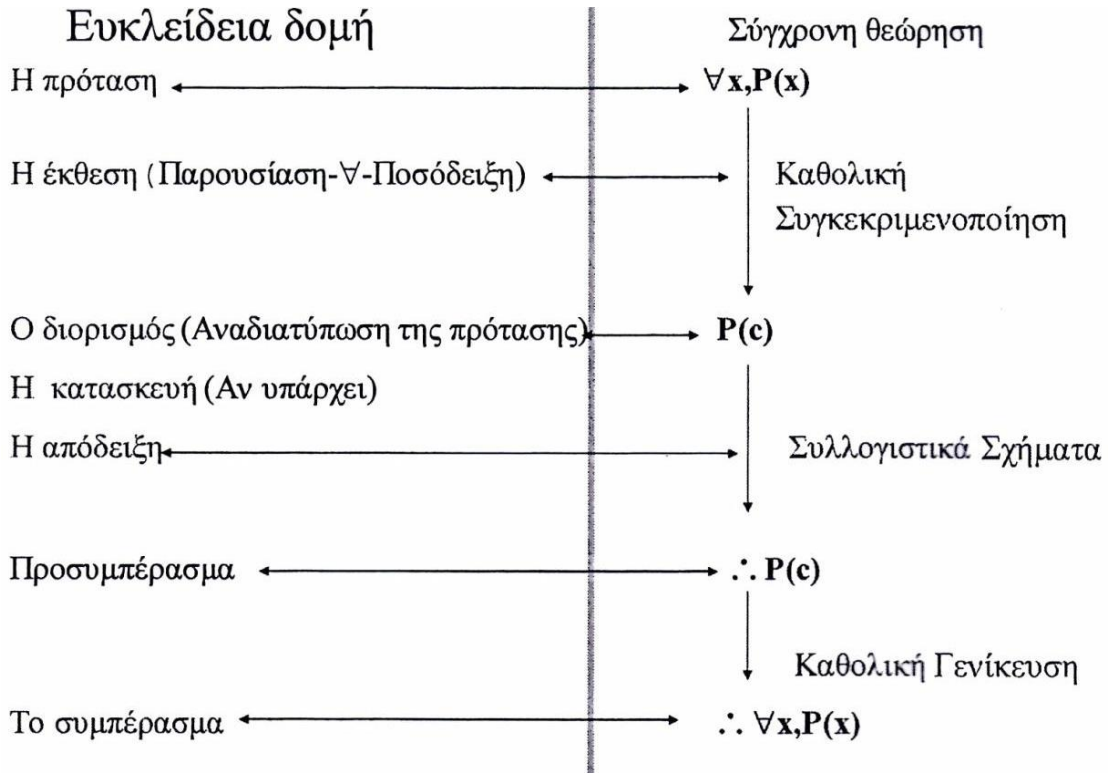
Σημαντικό ρόλο στη γενίκευση μιας πρότασης παίζουν και οι **ποσοδείκτες** , δηλαδή λέξεις όπως το **τις** και το **τυχόν** . Οι συγκεκριμένες λέξεις εμφανίζονται αρκετές φορές τόσο στον Ευκλείδη όσο και στον Απολλώνιο που μελέτησε ο Netz, ο

οποίος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι συγκεκριμένες λέξεις χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει μια **ενεργή επιλογή** (active choice) (π.χ την κατασκευή ενός σημείου). Η ενεργή επιλογή σχετίζεται και με τη σχέση της χρήσης του τις και τυχόν με τους βαθμούς ελευθερίας (επιλογών) που υπάρχουν στην κατασκευή ενός σχήματος.

«Όταν η απόδειξη ξεκινά με το 'έστω μια έλλειψη', δεν είναι σαν να επιλέγεις μια έλλειψη από ένα άπειρο πλήθος ελλείψεων. Απλά σχεδιάζεις μία πάνω στον άδειο πίνακα ή πάπυρο. Δεν υπάρχει η πράξη της επιλογής εδώ. Σε αντίθεση , όταν στο δεύτερο βαθμό ελευθερίας σου ζητείτε να πάρεις ένα σημείο πάνω στην έλλειψη, αυτό εμπεριέχει μια πραγματική επιλογή μέσα από πολλά σημεία.» (Netz, 1999, σελ. 251». Η δυνατότητα αυτών των πολλαπλών επιλογών εμπεριέχει στην πραγματικότητα την έννοια της γενίκευσης.

Σημαντική είναι και η δομή της Ευκλείδειας απόδειξης. Ο Mueller(1981) περιγράφει αυτή τη διαδικασία ως εξής: Η **πρόταση** δεν χρησιμοποιεί γράμματα για να αναδείξει τη γενικότητα του συλλογισμού που θα αποδείξει. Η **έκθεση** αρχίζει την απόδειξη ,αλλά, πριν η απόδειξη προχωρήσει , ο διορισμός επιμένει ότι είναι απαραίτητο μόνο να αποδείξεις κάτι συγκεκριμένο για να αποδείξεις την πρόταση. Όταν το συγκεκριμένο αποδεικνύεται , το **συμπέρασμα** επαναλαμβάνει αυτό που ανέφερε ο διορισμός, επιμένοντας ότι το συγκεκριμένο επιχείρημα είναι επαρκές για να αποδείξει ότι γενική πρόταση δεν είναι μια αιτιολόγηση αλλά βασίζεται σε κανόνες μαθηματικής απόδειξης. Δηλαδή, το να αποδεικνύεις μια συγκεκριμένη πρόταση θεωρείται σαν να αποδεικνύεις μια γενική πρόταση. Αν και ο Mueller αναφέρει ότι αυτό δεν έχει αιτιολογηθεί από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς ικανοποιητικά.(Netz, 1999, σελ. 252)

Στο βιβλίο του Ε. Παπαδομετράκη (2010) 'Φυσικές γλώσσες και Μαθηματικός Λόγος' βρίσκουμε την ακόλουθη διαγραμματική αναπαράσταση της Ευκλείδειας δομής της απόδειξης και πως αυτή οδηγεί στη γενίκευση.


Ευκλείδεια δομή
Σύγχρονη θεώρηση
Η πρόταση
∀x,P(x)
Η έκθεση (Παρουσίαση-∀-Ποσόδειξη)
Καθολική Συγκεκριμενοποίηση
Ο διορισμός (Αναδιατύπωση της πρότασης)
P(c)
Η κατασκευή (Αν υπάρχει)
Η απόδειξη
Συλλογιστικά Σχήματα
Προσυμπέρασμα
∴ P(c)
Καθολική Γενίκευση
Το συμπέρασμα
∴ ∀x,P(x)

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Πάντες ἄνθρωποι τοῦ εἰδέναι ὀρέγονται φύσει. σημεῖον δ'

Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, Α 980α,21

Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι όλοι οι άνθρωποι εκ φύσεως έχουν επιθυμία για μάθηση. Αποδεικνύεται ότι οι Έλληνες ανάμεσα στους άλλους λαούς της αρχαιότητας κατέχουν μια ξεχωριστή θέση στην αγάπη τους για τη γνώση. Η ανάπτυξη των ελληνικών παραγωγικών μαθηματικών αντικατοπτρίζει μια σημαντική οπτική της ελληνικής κοινωνίας για ανακάλυψη της αλήθειας.

Η περίοδος θεμελίωσης των ελληνικών μαθηματικών προσδιορίζεται μεταξύ του 6ου και του 3ου π.Χ. αιώνα και συμπίπτει με την εμφάνιση της πόλης κράτους και τη γένεση της φιλοσοφίας. Η ορθολογική σκέψη παρουσιάζεται να αναπτύσσεται αλληλένδετα τόσο στην κοινωνική ζωή με την αναβάθμιση του λόγου ως μέσου πειθούς όσο και στη φιλοσοφία και την επιστήμη. Οι Έλληνες προσθέτουν μια νέα διάσταση στην ιστορία της νόησης και οικοδομούν μια μαθηματική επιστήμη που χαρακτηρίζεται από αξιωματική θεμελίωση, γενικευμένες προτάσεις, παραγωγική σκέψη και χρήση εγγράμματων διαγραμμάτων.

Οι σημαντικότερες φιλοσοφικές σχολές που εμφανίζονται εκείνη την περίοδο προβάλλουν **,** διαφορετικές κοινωνικές, πολιτικές και κοσμολογικές αντιλήψεις και επηρεάζουν με διαφορετικό αλλά εξίσου καθοριστικό τρόπο τις μαθηματικές αντιλήψεις και πρακτικές που αναπτύχθηκαν όπως ο αντιεμπειρισμός και η διαλεκτική επιχειρηματολογία. Τα μαθηματικά ζητήματα που εξετάζονται αντιμετωπίζονται μ' ένα γενικό τρόπο κι όχι ως συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Δύο είναι τα κυριότερα χαρακτηριστικά των ελληνικών μαθηματικών που συνθέτουν την παραγωγική σκέψη, το εγγράμματο διάγραμμα και η δομή της πρότασης της σημαντικότερης μορφής παρουσίασης των 'Στοιχείων' του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον Netz (1999) δύο είναι οι τρόποι με τους οποίους συμμετέχει το εγγράμματο διάγραμμα στην ανάπτυξη της παραγωγικής σκέψης: α) με όλες τις διαδικασίες επιχειρηματολογίας που βασίζονται στο διάγραμμα και β) με το να παρέχει ένα σύμπαν ομιλίας γύρω από αυτό. Από την άλλη, η δομή της πρότασης αποτελεί αποτέλεσμα σταδιακής εξέλιξης διαφορετικών πρακτικών όπως η

αφήγηση, η ποίηση και κυρίως ο ρητορικός λόγος. Δηλαδή, τα μαθηματικά κατασκευάζουν τα θεωρήματα τους σύμφωνα με στερεά μοτίβα, ή πρότυπα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- **Αλατζόγλου-Θέμελη, Γ.** (2000). *Νούς εναντίον Αισθήσεων*. Αθήνα: Ινστιτούτο του βιβλίου-Μ.Καρδαμίτσα.

- **Αναπολιτάνος, Δ.** (1985). *Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

- **Αριστοτέλης**, *Ρητορική* Βιβλίο Πρώτο. Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια Δ. Λυπουρλής, 2002 Θεσσαλονίκη: Ζήτρος, σελ. 136-161

- **Αριστοτέλης**, *Τα Μετά τα Φυσικά*. Μετάφραση , σχόλια Ν. Κυργιόπουλος. Αθήνα : Πάπυρος Εκδοτικός Οργανισμός.

- **Asper, M.** (2009). The two cultures of mathematics in ancient Greece, in E. Robson & J. Stedall, ed., The Oxford Handbook of the History of Mathematics. (Oxford University Press), pp.107-132.

- **Barker, A.** (1989). *Greek Musical Writings II, Harmonic and Acoustic Theory*. Cambridge: University Press.

- **Γέρου, Θ.** (1984). *Νούς Ποιητικός- Νούς Παθητικός.* Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση 1 (1984) σελ.164-171.

- **Cajori, F.** (1909). *A History Of Mathematics*. London: Macmillan & Co., Ltd.

- **Doxiadis, A.** (2012). *A Streetcar Named (among other things) Proof From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric.* Published in Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative, edited by Apostolos Doxiadis and Barry Mazur, Princeton 2012.

- **Doxiadis, A., Sialaros, M.** (2013). *Sing Muse on the Hypotenuse. Influences of Poetry and Rhetoric on the formation of Greek mathematics*. Pre--final Draft Version από http://www.academia.edu/347960/Sing_Muse_of_the_Hypotenuse_Influences_of_Poetry_and_Rhetoric_on_the_Formation_of_Greek_Mathematics

- **Ευκλείδη,** Στοιχεία. Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό. Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης.

- **Edwards, M.W**. (2001). *Όμηρος. Ο ποιητής της Ιλιάδας*. Αθήνα: Ινστιτούτο του βιβλίου-Μ.Καρδαμίτσα.

- **Fowler, D.H.** (1999). *The mathematics of Plato's academy. A new reconstruction*. Oxford: Clarendon Press.

- **Ζιάκας, Α.Λ.(**2014). *Οι γνώσεις του Ιπποκράτη του Χίου στα Στοιχεία του Ευκλείδη.* Διπλωματική Εργασία. Ε.Μ.Π. Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε. στο https://dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/39849/ziakas.pdf?sequence=1

- **Guthrie, W. K. C.** (1989). Οι Σοφιστές. Αθήνα : Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης (ΜΙΕΤ)

- **Heath, T. L.** (1921). *A History of Greek Mathematics*. vol.I. Oxford: Clarendon Press.

- **Knorr, W.R.** (1945). *The Evolution Of The Euclidean Elements*. Dordrecht-Holland: D. Rei Del Publishing Company.

- **Μπαμπινιώτη, Γ.** (1998). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*. Αθήνα : Κέντρο Λεξικολογίας.

- **Μπαρμπούτης, Γ.** (2008) *Η σχέση ρητορικής και ηθικής στον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη. Διδακτορική διατριβή στο Εθνικό αρχείο Διδακτορικών Διατριβών* http://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/26971

- **Mueller, I.** (1969). *Euclid's Elements and the Axiomatic Method*. The British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 20, No. 4 (Dec., 1969), pp. 289- 309

- **Νεγρεπόντης, Σ.** (2012). Σημειώσεις του μαθήματος '*Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών- Στοιχεία του Ευκλείδη'* στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος 'Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών', Μαθηματικό Τμήμα, ακαδημαϊκό έτος 2012-2013.

- **Netz, R.** (1999). *The Shaping Of Deduction In Greek Mathematics*. *A Study in Cognitive History.* Cambridge: University Press.

- **Παρμενίδης**. *Το Ποίημα*. Μετάφραση, σχόλια Τάκης Κουφόπουλος από http://www.takiskoufopoulos.net/Biblia/Parmenidis.pdf

- **Παπαδομετράκη , Ε.** (2010). *'Φυσικές γλώσσες και Μαθηματικός Λόγος'.* Πανεπιστήμιο Πατρών.

- **Romily, J.** (1994). *Οι Μεγάλοι Σοφιστές στην Αθήνα του Περικλή*. Αθήνα: Ινστιτούτο του βιβλίου-Μ.Καρδαμίτσα.

- **Σπανδάγου, Β., Σπανδάγου, Ρ., Τραυλού, Δ.** (1994). *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας.* Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.

- **Saito, K.** (2012). A *43 page overview of Greek mathematics. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 11, 2014, από* http://individual.utoronto.ca/acephalous/Greek_Mathematics_Sidoli_12_05_18.pdf

- **Saito, K., Sidoli, N.** (2012). *Diagrams and arguments in ancient Greek mathematics: Lessons drawn from comparisons of the manuscript diagrams with those in modern critical editions, in K. Chemla, ed., The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions (Cambridge: Cambridge University Press), pp. 135-162.*

- **Schiefsky, M.J**. (2005). '*New technologies for the study of Euclid's Elements*', presented at Euclid and his heritage: a Clay Mathematics Institute conference, St. Catherine's College, Oxford University, October 7-8, 2005.

- **Szabo, A.** (1973). *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδας.

- **Taub, L.** (2013). *On the Variety of 'Genres' of Greek Mathematical Writing: Thinking about Mathematical Texts and Modes of Mathematical Discourse', in M. Asper (ed.), Writing Science: Medical and Mathematical Authorship in Ancient Greece (De Gruyter, 2013), 333-366.*

- **Thomas, I.** (1939). *Selections Illustrating The History Of Greek Mathematics.* Vol.I. London: William Heinemann Ltd.

- **Van der Waerden, B.L.** (1961). *Science Awakening*. New York: Oxford University Press.

- **Vernant, J.P.** (1992). *Οι Απαρχές της Ελληνικής Σκέψης*. Αθήνα: Ινστιτούτο του βιβλίου-Μ.Καρδαμίτσα.

- **Wagner, R.** (2009). *For Some Histories Of Greek Mathematics.* Science in Context. Volume 22. Issue 04.(December 2009). pp. 535-565.

- **Φουρναράκης , Φ.(**2005). *Μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης των αρχαίων Ελλήνων και μια νέα θεώρηση των Δεδομένων του Ευκλείδη, υπό το φως της διάκρισης μεταξύ των μαθηματικών όρων «δοθέν» και «δεδομένον»*. Διδακτορική διατριβή στο Εθνικό αρχείο Διδακτορικών Διατριβών http://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/21338