ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και τα αντίστοιχα διδακτικά βιβλία Δημοτικού – Γυμνασίου

ΦΙΛΙΠΠΑΚΟΥ ΧΡΙΣΤΟΦΙΛΗ

Α.Μ Δ 201114

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 09/**04/2014** από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	……
2) ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΡΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ	……
3) ΘΩΜΑΪΔΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ	ΔΙΔΑΚΤΩΡ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ	…… ……

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ…… .6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Η διαδρομή των σχέσεων της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη διδασκαλία τους…….....8

1.1 Η ιστορία των μαθηματικών στην εκπαίδευση…… .8
1.1.1 Βιβλιογραφική ανασκόπηση…… . 9
1.1.2 Ενσωμάτωση της ιστορίας στην εκπαίδευση……13

1.2 Γιατί η ιστορία των μαθηματικών πρέπει να έχει μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία……..18

1.2.1 Ο ρόλος της ιστορίας …… 18
1.2.2 Λόγοι για τη χρησιμοποίηση της ιστορίας……..19
1.2.3 Τρόποι αξιοποίησης της …… 28
1.2.4 Ενστάσεις για την αξιοποίησή της……..33

1.3 Εκτιμήσεις και ερευνητικά ερωτήματα……...35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του 2003……. 37

2.1.1 Η διεπιστημονικότητα στο αναλυτικό πρόγραμμα ……..38

2.2 Τα βιβλία καθηγητή – μαθητή …….. 44

2.2.1 Η ιστορία των μαθηματικών στα σχολικά βιβλία…….....48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μια κριτική ανάλυση των ιστορικών σημειωμάτων στα διδακτικά βιβλία…….. 56

3.1 Ιστορικά σημειώματα με λάθη…… 57

3.2 Πληροφοριακές αναφορές χωρίς μαθηματικά ερεθίσματα…….. 63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1 Απόψεις και τάσεις ως προς τα σχολικά βιβλία……..74

4.2 Ο καθηγητής των μαθηματικών και η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική……78

4.3 Το βιβλίο του καθηγητή……...83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Συζήτηση -συμπεράσματα …… 91

Βιβλιογραφία…….. 98

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

Τους καθηγητές και μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη , κ .Δέσποινα Πόταρη και κ. Θωμαΐδη Ιωάννη για τη βοήθεια και την υποστήριξή τους .Ειδικότερα τον κ. Θωμαΐδη Ιωάννη για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε , την υπομονή του ,την καθοδήγησή του και την άριστη συνεργασία κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας .

Την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία για την παροχή παλαιότερων και νεώτερων άρθρων χρήσιμων για την έρευνά μου.

Όλους τους συμφοιτητές μου και τη Διονυσία που με ενθάρρυναν σε κάθε στάδιο των σπουδών μου και με βοήθησαν στην αντιμετώπιση των δυσκολιών .

Την οικογένειά μου , τον Οδυσσέα , τον Αχιλλέα και τον Γιώργο για την κατανόηση , τη βοήθεια και τη συμπαράστασή τους .Τη μητέρα μου Παναγιώτα ,η οποία αποτέλεσε αρωγό σε όλη την προσπάθειά μου συμβάλλοντας με το δικό της τρόπο στην επίτευξη αυτού του στόχου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες με αντικείμενο τη δυνατότητα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, επιχειρούμε να καταγράψουμε τα σπουδαιότερα σημεία αυτών των ερευνών και να εξετάσουμε ιδιαίτερα το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών που δημοσιεύτηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο το 2002 (Φ.Ε.Κ 303,2003) και στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια που εκδόθηκαν το 2006 για το Δημοτικό και το 2007 για το Γυμνάσιο.

Στο 1^{ο} κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική ανασκόπηση της εξέλιξης της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία όπως αυτή παρουσιάζεται μέσα από τη βιβλιογραφία. Πιο λεπτομερής αναφορά γίνεται σε θέματα σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών που αφορούν:

- την ενσωμάτωσή της στην εκπαίδευση,
- το ρόλο της στην εκπαιδευτική διαδικασία,
- τους λόγους χρησιμοποίησής της,
- τους τρόπους αξιοποίησής της και
- τις ενστάσεις για την αξιοποίησή της.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν σε τρία σημαντικά ερευνητικά ερωτήματα που θα αποτελέσουν το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Σύμφωνα με αυτά θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε :

1.Με ποιες αρχές και με ποιους τρόπους επιχειρήθηκε η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα πρόσφατα προγράμματα σπουδών και διδακτικά βιβλία;

2.Υπάρχει η δυνατότητα να ενσωματωθεί η Ιστορία των Μαθηματικών στο μάθημα των Μαθηματικών;

3.Διαθέτει ο δάσκαλος τις γνώσεις και τα εφόδια για να επιτύχει αυτό το στόχο;

Στο 2^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζουμε το αναθεωρημένο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του 2003. Γίνεται αναφορά στη διαθεματικότητα και το ρόλο της καθώς και σχολιασμός του τρόπου με τον οποίο προτείνεται να ενσωματωθεί η Ιστορία των Μαθηματικών σε συνθήκες σχολικής τάξης. Γίνεται αναφορά στα βιβλία καθηγητή – μαθητή και κατηγοριοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων των βιβλίων του γυμνασίου.

Στο 3^{ο} κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα ιστορικά σημειώματα των σχολικών βιβλίων του Γυμνασίου και σχολιασμός αυτών. Παρουσιάζονται ιστορικά σημειώματα με λάθη, σημειώματα με καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα χωρίς μαθηματικά ερεθίσματα και σημειώματα σε λάθος θέση στην αντίστοιχη ενότητα τα οποία δεν κεντρίζουν το ενδιαφέρον του μαθητή.

Στο 4^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα σχολικά εγχειρίδια. Μέσα από αυτές φαίνεται πως αντιμετωπίζουν διστακτικά τη μετάβαση σε ένα ολιστικό τρόπο προσέγγισης της ύλης που απαιτείται στα νέα εγχειρίδια. Παρουσιάζονται οι λόγοι για τους οποίους οι μαθηματικοί ελάχιστα ενδιαφέρονται για την ιστορική εξέλιξη της επιστήμης τους καθώς επίσης και οι οδηγίες που τους δίνονται από το βιβλίο του καθηγητή σχετικά με την αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων. Τέλος αναλύονται οι προϋποθέσεις που είναι απαραίτητες ώστε η Ιστορία των Μαθηματικών να αποτελέσει ένα σπουδαίο διδακτικό εργαλείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Η διαδρομή των σχέσεων της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη διδασκαλία τους.

Στο παρόν κεφάλαιο προσπαθούμε να παρουσιάσουμε μια συνοπτική περιγραφή για το πως εξελίχθηκε η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως προς την ενσωμάτωσή της στη διδασκαλία τους. Εξετάζουμε τα υπέρ και τα κατά της χρήσης της στη διδασκαλία όπως παρουσιάζονται μέσα από τη βιβλιογραφία. Τέλος γίνεται μια προσπάθεια να επικεντρωθούμε στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα και πως αυτά προσπαθούν και προτείνουν την ενσωμάτωση της Ιστορίας σε συνθήκες σχολικής πραγματικότητας. Σε αυτή τη κατεύθυνση οδηγός είναι τα ανανεωμένα σχολικά συγγράμματα και αναθεωρημένο από το 2003 αναλυτικό πρόγραμμα. Το κεφάλαιο δομείται σε τρεις υποενότητες. Η πρώτη αφορά το ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών και η δεύτερη την Ιστορία των Μαθηματικών στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα. Στην τελευταία ενότητα αναλύονται τα ερευνητικά ερωτήματα.

1.1 Η Ιστορία των Μαθηματικών στην εκπαίδευση

Σε αυτή την παράγραφο αναλύονται οι λόγοι από τους οποίους προέκυψε η ανάγκη να εξεταστεί κατά πόσο η ιστορία θα μπορούσε να αποτελέσει το έναυσμα για την εισαγωγή ορισμένων μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στην εξέλιξη της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών και πώς ξεκίνησε η προσπάθεια εισαγωγής της στην εκπαίδευση.

1.1.1 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα τελευταία χρόνια πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί με κύριο ερώτημα τη δυνατότητα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση. Το ερώτημα αυτό φαίνεται να απασχολεί ολοένα και περισσότερο όσους ασχολούνται με τα Μαθηματικά και τη διδακτική τους προσέγγιση. Μέσα από τη πληθώρα των ερευνών έχει αρχίσει να διαφαίνεται ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών στο σχολικό περιβάλλον. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε την αναγκαιότητα εισαγωγής της Ιστορίας όπως αυτή έχει αποτυπωθεί μέσα στη βιβλιογραφία. Μέσα από αυτή την διαδρομή πλαισιώνεται και δομείται η βάση πάνω στην οποία η Ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να ενσωματωθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Αρχικά μελετώντας τους Γαγάτση, Ηλία και Μακρίδη (Γαγάτσης, Ηλία & Μακρίδης, 2002) βρίσκουμε μερικές από τις πιο βασικές απόψεις που επικράτησαν για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Συνοψίζοντας τα πιο βασικά σημεία αυτής της διαδρομής στεκόμαστε στα πιο σημαντικά πρόσωπα και πως ήταν η στάση τους απέναντι στην Ιστορία των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα:

1. Η Lucia Grugnetti (1989) εξετάζει το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών σε μια διεπιστημονική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και καταλήγει στον «ουμανιστικό» τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται η Ιστορία ενώ δίνει έμφαση στη σπουδαιότητά της ως παράγοντας που εμφανίζει τα μαθηματικά ως αποτέλεσμα μιας συνεχούς προσπάθειας στοχασμού και προόδου. Σύμφωνα με την παραπάνω άποψη η Ιστορία θα μπορούσε να αποτελέσει ένα μέσο για να αντιληφθεί ένας μαθητής ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αποτέλεσμα μιας διαρκούς και επίπονης διαδικασίας. Συνεπώς, θέτοντάς τον στη θέση του ερευνητή μπορούμε να του κεντρίσουμε το ενδιαφέρον βάζοντάς τον να ακολουθήσει τη διαδρομή και όχι το αντικείμενο καθεαυτό.

2. Ο Horst Struve (1989) αναδεικνύει τη σημαντικότητα της ιστορικής διαδρομής μια έννοιας. Πιο συγκεκριμένα εξετάζει τη σχέση των διερευνήσεων της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών θεωριών με τη διδασκαλία αυτών των θεωριών.
3. Η Martha Menghini (1989) προσπαθεί να αναδείξει τη διδακτική χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και εστιάζει τη προσοχή της στο σημαντικό ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η τελευταία στην αποσαφήνιση μιας μαθηματικής έννοιας όπως και στα οφέλη που μπορεί να αποκομίσει από την ιστορία η διεπιστημονικότητα.
4. Ο Francesco Speranza (1989) εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ της Ιστορίας, της Επιστημολογίας και της Διδακτικής. Τα σημαντικά σημεία στα οποία καταλήγει είναι ότι η Ιστορία και η Φιλοσοφία των Μαθηματικών:
   1. πρέπει να αποτελούν μέρος της εκπαίδευσης των διδασκόντων,
   2. μπορούν να υποδεικνύουν εναλλακτικές θεωρίες,
   3. δίνουν μια ιστορική συναίσθηση στους μαθητές,
   4. δικαιολογούν την εισαγωγή των μαθηματικών οργάνων και των μεθοδολογιών,
   5. χρησιμεύουν για την προώθηση ενός “στοχασμού.
5. Ο Hans-Georg Steiner (1989) προσπαθεί να διαπιστώσει τις σχέσεις ανάμεσα στις Ιστορικο-επιστημολογικές μελέτες και την έρευνα στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Προς αυτή τη κατεύθυνση δίνει έμφαση σε τρείς κατευθύνσεις που σχετίζονται με:

   1. τα Μαθηματικά, την ιστορική και σημερινή τους ανάπτυξη, και τις σχέσεις τους με άλλες επιστήμες,

   2. την πολύπλοκη δομή της διδασκαλίας και της εκπαίδευσης στην κοινωνία μας,

   3. την κοινωνική και γνωστική ατομική ανάπτυξη του διδασκόμενου.
6. Ο Hans Niels Jahnke (1989) εξετάζει τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη συστηματική σκέψη και επικεντρώνεται στο συστηματικό τρόπο στον οποίο είναι προσανατολισμένα τα εγχειρίδια στα προγράμματα της Γερμανίας. Όπως αναφέρει “η έννοια του συστήματος ή της συστηματικής σκέψης δεν διαδραματίζει κανένα ρόλο στα υπάρχοντα προγράμματα της Γερμανίας. Κάτι ανάλογο θα μπορούσαμε να πούμε

ότι ισχύει και στην ελληνική πραγματικότητα. Οι εκπαιδευτικοί είναι επιφορτισμένοι με το να δουλεύουν σε αυστηρά χρονικά πλαίσια. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προσκολλώνται στη ροή που ακολουθεί το σχολικό εγχειρίδιο και να μην κάνουν χρήση των ιστορικών αναφορών που λαμβάνουν χώρο κατακερματισμένα στην αρχή ή στο τέλος του μαθήματος καθώς τις θεωρούν χάσιμο χρόνου.

7. Ο Paolo Boero (1989) εξετάζει τα σημαντικά πεδία που υποδεικνύονται από την Ιστορία και τη λειτουργία τους στην απόκτηση των μαθηματικών εννοιών.
8. Ο Rudolf Strasser (1989) εξετάζει τη "Σχολική γνώση" και τις πηγές κοινωνικών αναγκών σε σχέση με τη νομιμοποίηση της μαθηματικής γνώσης που θα διδαχθεί. Παρουσιάζει την έννοια της Διδακτικής Μεταφοράς και προσπαθεί να επεξηγήσει και τους δυο παράγοντες της διδακτικότητας: την κοινωνική και πολιτιστική αξία.
9. Τέλος ο David Wheeler (1984) προσπαθεί να δώσει μια διαφορετική άποψη για τις σχέσεις της Ιστορίας με τη Μαθηματική Εκπαίδευση και συμπεραίνει ότι είναι αναγκαία η ύπαρξη μιας ιστορίας για την ίδια τη μαθηματική εκπαίδευση – που δεν είναι καθόλου το ίδιο με μια Ιστορία των Μαθηματικών.

Τα παραπάνω μπορεί να αποτελούν τις απαρχές στη προσπάθεια αναζήτησης της χρησιμότητας της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Από τότε μέχρι σήμερα η προσπάθεια να αναπτυχθεί μια θεωρία σχετικά με τα οφέλη της χρήσης της ιστορίας έχει εντατικοποιηθεί και έχει παράξει πολύ χρήσιμα συμπεράσματα. Ένα από αυτά είναι ότι η Ιστορία μπορεί να αποτελέσει το κίνητρο για να ασχοληθεί ένας μαθητής με μια έννοια (Farmaki & Paschos, 2007; Taimina, 2004). Το πώς η ιστορία μπορεί να αποτελέσει το κίνητρο για έναν μαθητή έχει επίσης αποτελέσει ένα από τα σημαντικότερα σημεία αναφοράς της έρευνας (Russ et al., 1991; Bakker & Gravemeijer, 2006; Tzanakis & Thomaidis, 2000). Μέσα από αυτήν της τη διάσταση η ιστορία μπορεί να παίξει το ρόλο του γνωστικού εργαλείου στη διδασκαλία των μαθηματικών (Helfgot, 2004; Bakker, 2004). Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα έχει διατυπωθεί η άποψη ότι η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση ("*ontogenesis recapitulates phylogenesis*", (Jankvist, 2009, p 238). Το

παραπάνω επιχείρημα συνοψίζεται στο ότι ένας μαθητής για να μάθει πρέπει να ακολουθήσει τις ίδιες διαδρομές και ανησυχίες που ακολούθησαν τα ίδια τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους (Furinghetti & Radford, 2002). Βασισμένοι στην παραπάνω άποψη, έχει διατυπωθεί το επιχείρημα του ιστορικού παραλληλισμού ("*historical parallelism*", Jankvist, 2009, p 239) σύμφωνα με τον οποίο παρατηρούνται καταστάσεις που συμβαίνουν στην τάξη και σχετίζονται με τα αντίστοιχα ιστορικά συμβάντα (Thomaidis & Tzanakis, 2007).

Οι δυσκολίες που παρουσιάζει η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και τη μάθηση (Fried, 2007) έχει αποτελέσει έναν από τους κύριους άξονες ενδιαφέροντος. Μέσα από αυτή την αναζήτηση έχουν προκύψει πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για ποιους λόγους και με ποιους τρόπους πρέπει να χρησιμοποιείται η Ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική, ζητήματα που αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως "whys" και "hows" (Jankvist, 2009; Tzanakis & Arcavi, 2000). Όλα τα παραπάνω έχουν ως κεντρική ιδέα τη χρήση της Ιστορίας ως παράγοντα που μπορεί να δώσει κίνητρα σε έναν μαθητή να ασχοληθεί με ορισμένες μαθηματικές έννοιες. Έχει βέβαια διατυπωθεί και το ερώτημα του κατά πόσο η Ιστορία μπορεί να πάει ένα βήμα παραπέρα και να αποτελέσει μία μέθοδο για τη μάθηση μεταγνωστικών κανόνων στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας η Ιστορία των Μαθηματικών είναι σε θέση να επιτελέσει έναν τέτοιο ρόλο. Ως προαπαιτούμενο για να γίνει κάτι τέτοιο εφικτό είναι να εισάγουμε μία αυθεντική προσέγγιση της επιστήμης (Kjeldsen & Blomboj, 2009). Μια τέτοια προσέγγιση κρίνεται αναγκαία καθώς πολλές φορές παρατηρείται αλλοίωση των πηγών όταν γίνονται μεταφράσεις αυτών (Schubring, 2008). Τέλος ένα επιπλέον θέμα που έχει απασχολήσει κατά καιρούς την έρευνα σχετικά με τη χρήση της Ιστορίας σε σχολικό περιβάλλον αφορά την καταλληλότητα των εκπαιδευτικών των μαθηματικών να ανταπεξέλθουν σε αυτόν το ρόλο και τις δυσκολίες που αυτοί συναντούν είτε πρόκειται σε υλικοτεχνικό επίπεδο είτε σε επίπεδο κατάρτισης (Furinghetti, 2007).

1.1.2 Ενσωμάτωση της Ιστορίας στην εκπαίδευση

Μέχρι τώρα παρουσιάσαμε πώς παρατίθεται μέσα από τη βιβλιογραφία η προσπάθεια να αξιοποιηθεί η Ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που γεννάται έχει σχέση με την αφετηρία των αναζητήσεων για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση.

Πριν από το 19^{ο} αιώνα κατά την εισαγωγή του μαθήματος της Γεωμετρίας στο σχολείο γίνεται αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της επιστήμης των Μαθηματικών. Η μορφή αυτή προέρχεται από τον Πρόκλο ο οποίος στα σχόλια που έγραψε για το πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη συμπεριέλαβε μια ιστορική ανασκόπηση της Γεωμετρίας. Αυτόν το δρόμο ακολουθούν διάφοροι συγγραφείς μετά την αναγέννηση. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η γεωμετρία του P.Ramus (1555) και του A.Tacquet (1654) που ασκούν μεγάλη επίδραση στη σχολική γεωμετρία. Ο λόγος για τον οποίο κυρίως προτάσσουν τα ιστορικά στοιχεία με το κύριο μάθημα είναι ο φιλοσοφικός προσανατολισμός του μαθητή, αλλά και η υπογράμμιση του ότι το υπό μελέτη θέμα είναι αποτέλεσμα της κοπιώδους παραγωγικής δραστηριότητας ανθρώπων σοφών. Με αυτό τον τρόπο επιδιώκουν να αμβλύνουν την αποστροφή των μαθητών από ένα μάθημα το οποίο επειδή στηρίζεται σε αδιάσειστους κανόνες και αυστηρή λογική, προσλαμβάνεται από αυτούς αισθητηριακά ως άχρωμο και στεγνό. Κοινωνικές – οικονομικές – επιστημονικές ανακατατάξεις γίνονται κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα και επιβάλουν την ολική μεταβολή των εκπαιδευτικών συστημάτων, αρχικά στις αναπτυγμένες χώρες και ακολούθως στις άλλες. Σε αυτό το περιβάλλον δίνεται προτεραιότητα στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, με συνακόλουθο τον προβληματισμό και τη διερεύνηση παιδαγωγικών και διδακτικών ζητημάτων. Αυτή τη περίοδο ωριμάζει η σκέψη της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στο διδακτικό επίπεδο. Πρώτη δημοσίευση προς την κατεύθυνση αυτή γίνεται το 1817 με το βιβλίο “The Philosophy of Arithmetic exhibiting a progressive view of the Theory and Practice of Calculation” του J.Leslie. Στο βιβλίο αυτό σύμφωνα με τους Θωμαϊδη και Καστάνη (1987) η Ιστορία υπάρχει παντού και ο ρόλος της είναι μεθοδολογικός. Δηλαδή η

Ιστορία χρησιμοποιείται για να αναλύσει και να παραστήσει την πορεία ανάδυσης και μορφοποίησης της αριθμητικής γνώσης και να συγκρίνει τρόπους χειρισμού των αριθμητικών ζητημάτων. Ο τρόπος αυτός είχε ως βάση “τη μελέτη του ανθρώπου και των νοητικών λειτουργιών του” και ένα από τα χαρακτηριστικά της γνωρίσματα είναι “η διαχρονική ερμηνεία της ανάπτυξης του ανθρώπινου γένους με βάση την ιδέα της προόδου και το πλαίσιο ανάπτυξης των ιστορικών σπουδών”.

Το 1853, στη Λειψία, το βιβλίο “Die Element der mathematik” του Richard Baltzer απευθύνεται στους εκπαιδευτικούς και είναι εφοδιασμένο με ιστορικές αναφορές (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987). Σιγά, σιγά η Ιστορία των Μαθηματικών χρησιμοποιήθηκε στη διδακτική τους ενσωματώνοντας ιστορικές περιγραφές ενός κλάδου των μαθηματικών ή ενός σχολικού μαθήματος. Τα στοιχεία αυτά πλέον περιλαμβάνονται σε βιβλία διδακτικής των Μαθηματικών. Η πορεία αυτή αναπτύχθηκε με έμφαση στη Γερμανία. Η ιστοριογραφική αυτή δραστηριότητα για τα μαθήματα ή τους κλάδους των μαθηματικών, που περιέχονταν στη βιβλιογραφία της διδακτικής προορίζονταν κατ’ αρχήν για το δάσκαλο και έμμεσα στο μάθημα για τον μαθητή.

Σε διάφορες χώρες του κόσμου, όπως στην Αγγλία, στη Ρωσία, στην Ιταλία ,στις Η.Π.Α. και στη Γερμανία, στα τέλη του 19^{ου} αιώνα υπήρχε κάποια σημαντική κινητικότητα όσον αφορά την Ιστορία των Μαθηματικών και την ενσωμάτωσή της στη διδακτική διαδικασία. Ο Felix Klein (1945) έδωσε σημαντική ώθηση στην ιστορική μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών και την περιέβαλε με το κύρος του. Χρησιμοποίησε πλατιά την Ιστορία των Μαθηματικών στις διαλέξεις που έδωσε για πρώτη φορά το 1907, στα πλαίσια της επιμόρφωσης μαθηματικών. Αυτές αποτέλεσαν και το περιεχόμενο του φημισμένου έργου του: “Στοιχειώδη μαθηματικά από ανωτέρα άποψη”. Οι Θωμαΐδης και Καστάνης (1987) αναφέρουν ένα απόσπασμα από το βιβλίο του:

> “ένα ουσιαστικό εμπόδιο στην ανάδυση μιας τόσο φυσικής κι αληθινά επιστημονικής μεθόδου διδασκαλίας είναι η έλλειψη ιστορικής γνώσης που τόσο συχνά γίνεται αισθητή. Για να το καταπολεμήσω αυτό αποφάσισα να εισάγω ιστορικές παρατηρήσεις στην παρουσίασή μου και κάνοντας το, πιστεύω ότι σας έχω ξεκαθαρίσει πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες, πως πάντοτε σχεδόν

εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και μόνο μετά από μακριά ανάπτυξη αποκρυσταλλώθηκαν σε αυστηρές μορφές τόσο οικείες στη συστηματική παρουσίαση. Είναι κρυφή μου ελπίδα ότι η γνώση αυτή θα αποκτήσει μια διαρκή και τελεσφόρα επίδραση πάνω στο χαρακτήρα της δικής σας διδασκαλίας".

Εκτός από τη Γερμανία όπου το ενδιαφέρον και η έρευνα για το διδακτικό ρόλο της Ιστορίας διατηρείται μέχρι σήμερα, υπήρξε έντονη προσπάθεια των Η.Π.Α. για τη σχέση Ιστορίας και διδακτικής των Μαθηματικών στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Ο David E. Smith (1860-1944) είναι ο κύριος εκφραστής συνύπαρξης διδακτικής και Ιστορίας των Μαθηματικών. Το 1923 δημοσιεύτηκε το πόρισμα της εθνικής επιτροπής για τις απαιτήσεις των Μαθηματικών που είχε για αντικείμενο την αναδιοργάνωση των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε τμήμα του κειμένου του αναφέρει (Θωμαΐδης & Καστάνης 1987):

"Συμβουλεύουμε τους δασκάλους να μάθουν τα καθοριστικά γεγονότα της Ιστορίας των Μαθηματικών και να μάθουν ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως απάντηση στις ανθρώπινες ανάγκες, τόσο τις νοητικές όσο και τις τεχνικές. Θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν αυτό το υλικό περιστασιακά στα μαθήματα τους για να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με άτυπες συζητήσεις για την ανάπτυξη των Μαθηματικών και για τη ζωή των μεγάλων δημιουργών της επιστήμης" και συνεχίζει: "Ιστορικό και βιογραφικό υλικό θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί για να κάνει τη δουλειά πιο ενδιαφέρουσα και με περισσότερη σημασία".

Ακολούθως έχουμε διάφορα ρεύματα τα οποία παρουσιάζουν διαφορετικές θέσεις είτε έχουν αντιιστορικό προσανατολισμό είτε φιλοσοφικό. Στις τελευταίες δεκαετίες του 20^{ου} αιώνα η ραγδαία ανάπτυξη στον επιστημονικό και τεχνολογικό χώρο είχε ως αναγκαίο επακόλουθο την αναπροσαρμογή στη δομή και το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στα πλαίσια αυτών των μεταβολών εκδηλώθηκε πάλι έντονα το ενδιαφέρον για τη διδακτική χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Υπάρχουν πολλά σημαντικά άρθρα και μελέτες σε διάφορες χώρες όπως στην Ιταλία, τις Η.Π.Α., τη Γερμανία, την Αγγλία κ.λ.π.

Μετά τη σύντομη αναφορά στις διεθνείς τάσεις, θα ανατρέξουμε στις ανάλογες πρωτοβουλίες που έγιναν στη χώρα μας για τη διδασκαλία της Ιστορίας των Μαθηματικών και το ρόλο της τόσο στη τριτοβάθμια εκπαίδευση όσο και στις άλλες βαθμίδες. Σε πανεπιστημιακό επίπεδο, δεν υπήρξε έδρα της Ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά υπήρχε η συνήθεια με την εισαγωγή στο αντικείμενο διδασκαλίας, να γίνεται κάποια ιστορική προσέγγισή του από τον διδάσκοντα. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση άρχισε να εκδηλώνεται περιορισμένο αλλά σοβαρό ενδιαφέρον για το διδακτικό ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών, όταν έγιναν γνωστές οι πρωτοβουλίες του Felix Klein στη Γερμανία. Τότε έγινε μετάφραση του Γερμανικού αναλυτικού προγράμματος που περιείχε αναφορές στην Ιστορία των Μαθηματικών, καθώς και δημοσιεύσεις άρθρων σε Περιοδικά της Ε.Μ.Ε. και σε άλλα Παιδαγωγικού περιεχομένου.

Το 1922, ο Κ.Ν.Λαμπίρης δημοσίευσε ένα άρθρο του στο περιοδικό “Παιδαγωγός” με τίτλο “Ιστορικαί παρεκβάσεις κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών” στο οποίο επιχείρησε να οριοθετήσει την εφαρμογή της Ιστορίας κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ανάμεσα στα άλλα γράφει (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987):

«Δεν εννοώ με όσα λέω ότι πρέπει να μεταβάλλουμε το μάθημα των Μαθηματικών. (…) Όμως με τις σύντομες ιστορικές παρεμβάσεις τις οποίες συνιστούμε, θα συμπληρώσουμε και θα τελειοποιήσουμε τη μαθηματική μόρφωση των μαθητών προσπαθώντας να πετύχουμε τρία πράγματα:

α) να εννοήσουν οι μαθητές τη βαθμιαία ,συνεχή και αδιάλειπτη πρόοδο της επιστήμης χάρη στην εργασία των επίλεκτων πνευμάτων κάθε φυλής,

β) να εκτιμήσουν τη μεγάλη συμβολή την οποία πρόσφεραν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί στη θεμελίωση της Μαθηματικής επιστήμης και

γ) με τη σύγκριση, όπου αυτή είναι δυνατή, των διαφορετικών μεθόδων με τις οποίες λύθηκαν εκάστοτε κάποια θεμελιώδη ζητήματα, να εισέλθουν βαθύτερα στο πνεύμα των μεθόδων αυτών και να εκτιμήσουν κατάλληλα την αξία κάθε μεθόδου».

Η αποδοχή της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών τονώθηκε ακόμα περισσότερο την περίοδο της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης του 1929. Ακολουθούν κάποιες αναθεωρήσεις των απόψεων για το διδακτικό ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών ως προς την αναγκαιότητα της ή ως προς τη μορφή διδασκαλίας της ή την οικονομία χρόνου. Οι αντιλήψεις αυτές εξακολουθούν και σήμερα να διατηρούνται, αναγνωρίζεται δηλαδή ο θετικός ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά απουσιάζει η μεθοδική και συστηματική αξιοποίηση της στη διδασκαλία. Η επιτροπή Παιδείας της Ε.Μ.Ε. την περίοδο 1978-82 στην εισήγηση της για την εκπόνηση του σχεδίου προγράμματος στα Μαθηματικά, πρότεινε την καθιέρωση του θεσμού των ελεύθερων μαθημάτων, δια των οποίων:

> "Ιδιαίτερο βάρος είναι ανάγκη να δοθεί σε θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών και των άλλων επιστημών, καθώς επίσης των συνθηκών μέσα στις οποίες διαγράφηκε η πορεία τους. Στα μαθήματα αυτά θα γίνει προσπάθεια να κάνουν οι μαθητές τη γνωριμία τους με το ερευνητικό πνεύμα και να μάθουν τις κύριες μεθόδους με τις οποίες οι μεγάλοι σκαπανείς της επιστήμης και της τεχνικής αντιμετώπισαν βασικά προβλήματα…."

Νομίζουμε πως είναι αναγκαίο να τονιστεί ο διδακτικός ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στη χώρα μας και ιδιαίτερα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία μεταξύ των άλλων σημαντικότατων προσφορών της στις άλλες επιστήμες, είναι ότι θεμελίωσε τους νεότερους κλάδους Γεωμετριών και συνέβαλλε στη δημιουργική τους εξέλιξη. Η ενσωμάτωσή της στη διδασκαλία έχει αποτελέσει αντικείμενο ερευνών στο τομέα της διδακτικής. Σε προγενέστερες έρευνες έχει μελετηθεί η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών με έμφαση την περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Μπιζμπιάνου, 2011), όπως επίσης και ο ρόλος που διαδραματίζει η Ιστορία στο πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών (Γαβριήλ, 2014).

1.2 Γιατί η Ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να έχει μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία

Σε αυτό το μέρος της παρούσας εργασίας προσπαθούμε όσο πιο συνοπτικά γίνεται να παρουσιάσουμε την αναγκαιότητα εισαγωγής της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική. Στη προσπάθεια αυτή επικεντρωνόμαστε στο ρόλο που μπορεί να έχει η Ιστορία, στους λόγους για τους οποίους πρέπει να χρησιμοποιείται ενώ γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στους τρόπους αξιοποίησής της και στις ενστάσεις που προκύπτουν για την εισαγωγή της στη διδασκαλία σε πραγματικές συνθήκες τάξης.

1.2.1 Ο ρόλος της Ιστορίας

Έχει υποστηριχθεί κατά καιρούς ότι πολλά προβλήματα σχετικά με την κατανόηση των Μαθηματικών οφείλονται στην έλλειψη ιστορικού πλαισίου από τη διδασκαλία. Αυτό έκανε τον Jacques Barzun, να διαμαρτύρεται στο βιβλίο του “Teacher in America”: «*Έχω την εντύπωση – σχεδόν τη βεβαιότητα – ότι η άλγεβρα έχει γίνει απωθητική εξαιτίας της απροθυμίας ή της ανικανότητας των δασκάλων να εξηγήσουν τα γιατί. Δεν υπάρχει ιστορικό πλαίσιο στην διδασκαλία, έτσι δίνεται η αίσθηση ότι όλο το σύστημα έχει πέσει έτοιμο από τον ουρανό και για να χρησιμοποιηθεί μόνο από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς”* (Barzun 1954, σ.82).

Ο Guedji, καθηγητής στο πανεπιστήμιο Paris VIII, στο βιβλίο του “Το θεώρημα του παπαγάλου” σατιρίζει την ανυπαρξία ιστορικού πλαισίου στη διδασκαλία ως εξής: “*Όπως όλοι οι μαθητές στον κόσμο. Ο Ιωνάθαν είχε συναντηθεί με το Θαλή αρκετές φορές. Κάθε φορά όμως, ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε, στο μάθημα των μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Πού και πού κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια: Θαλής, Πυθαγόρας, Pascal, Descartes ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για το πότε ή το πού συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις*

απλώς προσγειωνόντουσαν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Αλλά και τα βουνά έχουν κάποια ιστορία, κάποια αρχή" (Guedji 1998, p.35).

1.2.2 Λόγοι για τη χρησιμοποίηση της Ιστορίας

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί πρέπει να χρησιμοποιείται η Ιστορία στην εκπαίδευση. Τα επιχειρήματα για τη χρήση της Ιστορίας συνοψίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες και αναφέρονται σε αυτήν (Jankvist,2007a) ως:

- εργαλείο και
- στόχο

Στη πρώτη κατηγορία ανήκουν τα επιχειρήματα που έχουν να κάνουν με το πώς οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά. Σύμφωνα με αυτά η Ιστορία μπορεί να είναι ένας παράγοντας κινητοποίησης για τους μαθητές, βοηθώντας τους να διατηρήσουν το ενδιαφέρον τους (Farmaki & Paschos, 2007). Οι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν ότι έννοιες που τους δυσκολεύουν σήμερα, χρειάστηκαν πολλά χρόνια μελέτης και περισυλλογής για να φτάσουν στη σημερινή τους μορφή (Baker & Gravemeijer, 2006). Αυτή η φυσική ροή εξέλιξης φέρνει τους μαθητές πιο κοντά στα μαθηματικά τα οποία παύουν πια να είναι απρόσωπα και ξένα προς αυτούς. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι η Ιστορία μπορεί να βελτιώσει τη μάθηση προσφέροντας μία διαφορετική οπτική γωνία διδασκαλίας (Jahnke, 2001). Υπό αυτό το πρίσμα μπορεί να επιτελέσει το ρόλο του γνωστικού εργαλείου. Τέλος σε αυτή τη κατηγορία επιχειρημάτων ανήκουν τα λεγόμενα εξελικτικά επιχειρήματα (*evolutionary arguments*). Το πιο γνωστό από αυτά καλείται επιχείρημα ανακεφαλαίωσης (*recapitulation argument*) σύμφωνα με το οποίο για να μάθει κάποιος μαθηματικά πρέπει να ακολουθήσει τα ίδια βήματα που έχουν ακολουθήσει τα ίδια τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους (Jankvist, 2009).

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν επιχειρήματα που ενισχύουν την άποψη ότι οι μαθησιακές πτυχές της Ιστορίας αποτελούν από μόνες τους έναν

σκοπό. Πρέπει όμως να δοθεί προσοχή στο ότι δεν πρέπει να αντιμετωπιστεί η Ιστορία ως ένα ανεξάρτητο θέμα αλλά πάντα σε σχέση με τις αναπτυξιακές πτυχές των αυστηρών μαθηματικών αντικειμένων (Jankvist, 2009). Ποιος θα μπορούσε όμως να είναι στόχος για την Ιστορία. Για τους Tzanakis και Thomaidis (2000) στόχος είναι να δείξουμε στους μαθητές ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο. Σε αυτή τη προσπάθεια είναι σημαντικό να αναδειχθεί πως τα Μαθηματικά έχουν επηρεαστεί στη διαμόρφωσή τους από τους διάφορους πολιτισμούς και αντιστρόφως. Πιο συγκεκριμένα ότι οι ίδιοι οι άνθρωποι έχουν λάβει ενεργό ρόλο σε αυτή την διαδικασία εξέλιξης (Thomaidis & Tzanakis, 2007). Επίσης χρησιμοποιώντας την Ιστορία ως σκοπό, η εκμάθηση των αναπτυξιακών και εξελικτικών πτυχών των μαθηματικών, είτε εξυπηρετεί από μόνο του ένα σκοπό είτε απεικονίζει άλλες ιστορικές πτυχές της θεωρίας.

Στη βιβλιογραφία έχει υπάρξει προσπάθεια να αναδειχθούν και να κατηγοριοποιηθούν τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

Οι Tzanakis και Archavi (2000) έχουν εντάξει τα επιχειρήματα αυτά σε πέντε σημαντικές κατηγορίες που σχετίζονται με:

(α) Τη μάθηση των Μαθηματικών:
(*the learning of mathematics*)
1.Η Ιστορία μπορεί να εισάγει πιθανούς τρόπους παρουσίασης μαθημάτων με έναν πιο φυσικό τρόπο.
2. Η Ιστορία ως πηγή.
3.Η Ιστορία δρα ως γέφυρα ανάμεσα στα Μαθηματικά και άλλα μαθήματα.
4.Η πιο γενική διδακτική αξία της Ιστορίας.

(β) Τη φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας:
(*The nature of mathematics and mathematical activity*)
1.Το περιεχόμενο, προσφέρεται μια πιο ακριβή προσέγγιση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας.

2.Τα Μαθηματικά αποτελούν μια εξελικτική διαδικασία ως προς τη μορφή τους. Η Ιστορία βοηθάει στην κατανόησή της.

(γ) Το διδακτικό υπόβαθρο των καθηγητών:

(*The didactical background of teachers*)

1.Αναγνώρηση του κίνητρου πίσω από τη μαθηματική γνώση.

2.Γινόμαστε ενήμεροι των:

(ι) δυσκολιών, εμποδίων

(ιι) πόσο πολυσύνθετο μπορεί να είναι ένα φαινομενικά απλό μαθηματικό αντικείμενο (Tzanakis, 1996).

3.Εμπλοκή στη δημιουργική διαδικασία του κάνω Μαθηματικά (Barbin, 1997).

4.Εμπλουτίζεται η διδακτική πρακτική με εξηγήσεις, παραδείγματα και εναλλακτικές προσεγγίσεις παρουσίασης.

5. Συμμετοχή σε μια κατάσταση στην οποία θα πρέπει να αποκρυπτογραφηθεί και να κατανοηθεί ένα γνωστό κομμάτι σωστών Μαθηματικών των οποίων ο χειρισμός δεν είναι καθορισμένος.

(δ) Τη συναισθηματική προδιάθεση προς τα Μαθηματικά:

(*The affective predisposition towards mathematics*)

1.Τα Μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο μάθημα παρά ένα σύστημα από αμετάβλητες αξίες.

2.Η αξία της εμμονής με ιδέες με τις οποίες γίνεται μια προσπάθεια ανακάλυψης.

3.Η Ιστορία μας διδάσκει να μην απογοητευόμαστε από την αποτυχία.

(ε) Η αποτίμηση των Μαθηματικών ως μια πολιτισμική προσπάθεια:

(*The appreciation of mathematics as a cultural endeavor*)

1.Μέσα από τη λεπτομερή μελέτη ιστορικών παραδειγμάτων οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν ότι τα Μαθηματικά δεν οδηγούνται μόνο από χρηστικούς λόγους αλλά αναπτύσσονται για τους δικούς τους λόγους (Hallez, 1990) που υποκινούνται από παράγοντες όπως τα αισθητικά κριτήρια και η διανοητική περιέργεια (Kragh, 1990).

2.Η Ιστορία μπορεί να δώσει παραδείγματα για το πώς η εσωτερική ανάπτυξη των Μαθηματικών, καθοδηγείται είτε από χρηστικούς είτε από «αγνούς» λόγους, έχει επηρεαστεί, ή ακόμη και καθοριστεί σε μεγάλο βαθμό, από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες.

3.Οι καθηγητές και οι μαθητές γίνονται ενήμεροι του πως έχουν αντιμετωπιστεί οι μαθηματικές έννοιες από διαφορετικούς πολιτισμούς.

Άλλες ανάλογες κατηγοριοποιήσεις είναι αυτές των Fried (2001) και Furinghetti (2004).

Ο πρώτος διακρίνει τρεις θεματικές ενότητες σύμφωνα με τις οποίες η ιστορία:

1. εξανθρωπίζει τα Μαθηματικά,
2. κάνει τα Μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, κατανοητά και προσιτά και
3. δίνει διορατικότητα σε έννοιες, σε προβλήματα και στην επίλυσή τους.

Η δεύτερη χωρίζει δύο μεγάλες κατηγορίες χρήσης της Ιστορίας για:

1. προβληματισμό σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών ως μια κοινωνικοπολιτισμική διαδικασία,
2. κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων τα οποία:
   (ι) περιλαμβάνουν την ιδέα της Ιστορίας ως μέσου προώθησης των Μαθηματικών στην τάξη και
   (ιι) τον πυρήνα των προβλημάτων που σχετίζονται με τη διδασκαλία – μάθηση των Μαθηματικών.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω κατηγοριοποιήσεις αναφέρουμε μερικούς από του λόγους (Παναγιώτου, 2002) που συνηγορούν στη χρησιμοποίηση της ιστορίας:

1. Βελτιώνει την ποιότητα της διδασκαλίας και της μάθησης:

(α) Βοηθάει να καταλάβουμε τις μαθησιακές δυσκολίες των μαθητών.

Η μάθηση δεν είναι πάντα μια ομοιόμορφη και συνεχής διαδικασία. Μερικές φορές πραγματοποιείται με μικρά συνεχή βήματα ενώ άλλες φορές με άλματα. Μερικές έννοιες έρχονται ως φυσικό επακόλουθο της ροής των όσων διδάσκονται ενώ άλλες απαιτούν ριζικά γνωστικά άλματα. Πολλές φορές οι διαδικασίες και οι δυσκολίες που ακολουθούν οι ίδιοι οι μαθητές σε τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι άμεσα εμφανείς. Ωστόσο έχει παρατηρηθεί ότι τα άλματα που πρέπει να κάνουν οι μαθητές συμπίπτουν με αυτά που συνέβησαν στην εξέλιξη των Μαθηματικών. Οπότε ένας ενήμερος εκπαιδευτικός που είναι γνώστης του πως προέκυψαν στην Ιστορία των Μαθηματικών νέες και ριζικές ιδέες μπορεί να αφουγκραστεί και να πραγματευτεί καλύτερα τις δυσκολίες κατανόησης των μαθητών. Υπό αυτό το πρίσμα η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να επιτελέσει ένα πολύ χρήσιμο παιδαγωγικό εργαλείο σε περίπτωση που τα λογικά άλματα που απαιτούνται να κάνουν οι μαθητές είναι τέτοια που τους δυσκολεύουν να προχωρήσουν στην εκ βάθους κατανόηση της νέας γνώσης με την οποία καλούνται να έρθουν αντιμέτωποι.

(β) Βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις δείχνοντας πως εξελίχτηκαν.

Στην σχολική πραγματικότητα έχει επικρατήσει η άποψη να επιβραβεύεται πρώτα η επιτυχία, η προσπάθεια χρησιμοποιείται ως ένα μέσο για να μην πούμε σε κάποιον ότι δεν τα πήγε καλά ενώ η αποτυχία στιγματίζεται. Όμως με αυτόν τον τρόπο δεν χρησιμοποιούμε μία από τις μεγαλύτερες αρετές που μας λέει ότι αν θέλουμε να πετύχουμε πραγματικά πρέπει πρώτα να μάθουμε να αποτυγχάνουμε.

Σχεδόν σε όλα τα σχολικά βιβλία δεν παρουσιάζονται οι προσπάθειες και οι αποτυχίες που οδήγησαν στις έννοιες που περιγράφουν. Η παρουσίαση με τη μορφή Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη – Πόρισμα μπορεί να είναι κομψή και να κερδίζει χρόνο ο εκπαιδευτικός αλλά ο μαθητής δεν μαθαίνει

ποτέ για το πώς προέκυψαν όλες αυτές οι έννοιες που βρίσκονται στο βιβλίο του. Δε μαθαίνει ποτέ το πώς αυτές εξελίχθηκαν και πόσες αποτυχίες χρειάστηκαν, ακόμα και από πολύ μεγάλους μαθηματικούς, μέχρι να φτάσουν στη μορφή που τα έχουμε σήμερα. Με αυτόν τον τρόπο είναι πολύ εύκολο για έναν μαθητή να απογοητευτεί και να εγκαταλείψει την προσπάθεια όταν έρθει αντιμέτωπος με δύσκολες έννοιες που είναι εντελώς ξένες με τη λογική του.

Οπότε με τη χρήση της Ιστορίας διευκολύνουμε τους μαθητές να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες. Μπορούμε να δημιουργήσουμε στην τάξη ένα κλίμα έρευνας και ανακάλυψης. Οι μαθητές μπορούν να μπουν στη θέση του ερευνητή και να ανακαλύψουν μονοπάτια που δεν μπορούν να αποκαλύψουν τα σχολικά βιβλία από μόνα τους. Η μελέτη ακόμη και ξεχασμένων θεμάτων και μεθόδων επιτρέπει να αξιολογήσουμε καλύτερα τις σημερινές τεχνικές, να αναγνωρίσουμε τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες τους και να διαπιστώσουμε ότι στα Μαθηματικά υπάρχει συνεχής εξέλιξη και πρόοδος.

(γ) Μας εκπαιδεύει να θέτουμε προβλήματα.

Τα σχολικά εγχειρίδια είναι γραμμένα με τέτοιον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν μόνο μια μονόπλευρη αντιμετώπιση των προβλημάτων. Η λογική πίσω από αυτά είναι να αποδείξουν κάτι που ισχύει ή να εκτελέσουν μια συγκεκριμένη ακολουθία από πράξεις. Προβλήματα της μορφής «αποδείξτε ότι κάτι είναι αδύνατο» ή «δεν μπορεί να γίνει» απουσιάζουν σχεδόν από όλη τη σχολική διαδρομή ενώ εμφανίζονται μόνο στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου σε συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων. Επιπλέον τα περισσότερα προβλήματα έχουν θετική απάντηση ενώ και τα προβλήματα ανοικτού τύπου έχουν δευτερεύοντα ρόλο. Αυτή η αντιμετώπιση όμως σκοτώνει το πνεύμα του προβλήματος. Το πώς δηλαδή πρέπει να σκέφτονται και να αντιμετωπίζουν οι μαθητές τα προβλήματα, ανεξαρτήτου φύσεως. Αυτό απαιτεί τη δημιουργία μιας κατάλληλης κουλτούρας κάτι το οποίο δε μπορεί να προσφέρει από μόνο του το σχολικό βιβλίο. Η Ιστορία μπορεί να μας βοηθήσει να εισάγουμε προβλήματα:

- *Διερευνητικής φύσης*: Στην Ιστορία πολλά προβλήματα είναι διερευνητικής φύσεως και οι προσπάθειες για την επίλυσή τους προωθούν σημαντικά τα Μαθηματικά.

- *Στα οποία δεν έχει δοθεί ακόμα απάντηση*: Αποφεύγεται έτσι η εντύπωση ότι τα Μαθηματικά είναι ένα τελειωμένο θέμα και ότι ο δάσκαλος ξέρει τα πάντα.

Έτσι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να διεγείρει και να αναπτύξει τις δεξιότητες μαθηματικής επικοινωνίας, την κατανόηση των μαθηματικών συσχετίσεων και να ενισχύσει την εκτίμηση των μαθητών για τα Μαθηματικά (Tzanakis & Arcavi, 2000; Van Maanen,1997).

2. Αναδεικνύει την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών

(α) Τα Μαθηματικά είναι ανθρώπινη και δυναμική δραστηριότητα.

Τα Μαθηματικά είναι από τη φύση τους μια θεμελιώδης επιστήμη που συνήθως είναι προπομπός πολύ σημαντικών επιστημονικών εξελίξεων. Ένα πολύ μικρό άλμα για τα Μαθηματικά, συνήθως προκαλεί αλυσιδωτές αντιδράσεις εξέλιξης σχεδόν σε όλες τις θετικές επιστήμες. Ως φυσικό επακόλουθο είναι να επηρεάζει και την ίδια την κοινωνία αφού οι ανάγκες για εξέλιξη ξεκινούν από αυτήν και καταλήγουν σε αυτή.

Συνεπώς τα Μαθηματικά αποτελούν μια ανθρώπινη και δυναμική δραστηριότητα και ως τέτοια επηρεάζεται από κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες και διαμορφώνονται σύμφωνα με τις υλικές και πνευματικές ανάγκες της εποχής. Έτσι τα Μαθηματικά εξελίσσονται συνεχώς με βάση τις κοινωνικές συνθήκες. Η ιστορική ανάλυση μας παρέχει την δυνατότητα για την διαπολιτισμική παρουσίαση μιας έννοιας καθώς μπορεί να μας πληροφορήσει για την ανάπτυξή της μέσα σε διαφορετικούς πολιτισμούς.

Έτσι η διδασκαλία στην τάξη, που χαρακτηρίζεται από μια ιστορικά ενσωματωμένη αντίληψη, επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν το πολιτισμικό, πολιτικό, κοινωνικό και οικονομικό πλαίσιο της μαθηματικής ανάπτυξης καθώς και τους σημαντικούς ρόλους που έχουν παίξει οι διάφοροι

πολιτισμοί στην εξέλιξη των Μαθηματικών (Barbin, 1991; Ernest, 1998; Swetz, 1995a; Thomaidis,1991).

Οι μαθητές μπορούν να αναλογιστούν την αλληλεπίδραση μεταξύ Μαθηματικών και κοινωνίας (Swetz, 1995). Οπότε μέσα από την ενασχόλησή τους με την Ιστορία, είναι σε θέση να αντιληφθούν πως οι κοινωνικές νόρμες και οι πρακτικές από διαφορετικούς πολιτισμούς έχουν επιδράσει στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και πώς τα Μαθηματικά έχουν επιδράσει «στους τρόπους με τους οποίους οι άνθρωποι ενεργούν και σκέπτονται για τον κόσμο» (Wilson & Chauvot, 2000, p.643).

(β) Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά Μαθηματικά

Αποτελεί ένα εξαιρετικό μέσο αναγνώρισης των πολλών σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των διάφορων μαθηματικών περιοχών και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων αντικειμένων (Furinghetti & Somaglia, 1998; Grugnetti & Rogers, 2000).

(γ) Οι βιογραφίες των Μαθηματικών.

Μπορούν σε μεγάλο βαθμό να κάνουν τα Μαθηματικά πιο ανθρώπινα. Η Ιστορία αποκαλύπτει πολλές προσπάθειες, επιτυχημένες και αποτυχημένες, για τη λύση προβλημάτων και τονίζει τον ανθρώπινο παράγοντα. Μέσα από τη μελέτη της ζωής και συνάμα των έργων ενός μεγάλου επιστήμονα μπορούμε να αφουγκραστούμε τις ανησυχίες του που τον οδήγησαν κάθε φορά να ασχοληθεί με συγκεκριμένους τομείς της επιστήμης. Επιπλέον μπορούμε να γίνουμε μέτοχοι των δυσκολιών τις οποίες συνάντησε και να αντιληφθούμε καλύτερα ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μια ουρανοκατέβατη επιστήμη που απλά κάποιοι την κατανοούν και κάποιοι άλλοι όχι. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές, ή να βρουν από μόνοι τους, κίνητρα για να ασχοληθούν περισσότερο με δύσκολες έννοιες και να μάθουν να μην σταματούν την προσπάθειά τους με την πρώτη δυσκολία.

Επιπλέον μέσα από τις βιογραφίες μπορούμε να δούμε ένα άλλο μέρος της ανθρώπινης φύσης των Μαθηματικών που δεν είναι άλλος από τις

ίντριγκες και τις έχθρες που δημιουργήθηκαν κατά καιρούς ανάμεσα σε πολύ μεγάλους μαθηματικούς (για παράδειγμα Cardan-Tartaglia, Newton-Leibniz, Kronecker-Cantor). Πολλές φορές οι έριδες αυτές ήταν ιδιαίτερα σκληρές. Όμως αυτή η αντιπαλότητα σε ορισμένες περιπτώσεις οδήγησε σε πολύ σημαντικά μαθηματικά αποτελέσματα.

Ωστόσο ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στον τρόπο με τον οποίο παρατίθενται τα βιογραφικά σημειώματα για να πάρουμε τα μέγιστα των θετικών στοιχείων που αυτά μπορούν να μας παράσχουν. Έτσι για τον Jankvist (2010) ένα ολοκληρωμένο project, ενσωματωμένο στο πρόγραμμα σπουδών, το οποίο εκτυλίσσεται σε διαδοχικές φάσεις είναι προτιμότερο από μια αποσπασματική παράθεση βιογραφικών σημειωμάτων.

3. Αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση.

Η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει επίσης κίνητρο για τη μάθηση των Μαθηματικών. Βλέποντας ο μαθητής την πηγή των προβλημάτων, εννοιών μεθόδων και αποδείξεων αισθάνεται τα Μαθηματικά πιο φιλικά, απολαυστικά και συναρπαστικά με αποτέλεσμα να αυξάνεται το ενδιαφέρον του. Έχουν αναφερθεί επίσης περιπτώσεις που η Ιστορία των Μαθηματικών κίνησε το ενδιαφέρον των μαθητών που όχι μόνο ήταν αδιάφοροι αλλά είχαν και σοβαρά προβλήματα συμπεριφοράς (Ponza,1998).

Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό μπορεί να ποικίλει ελαφρά ανάμεσα στους ερευνητές. Ωστόσο όλοι τους έχουν ως κοινή νόρμα ότι η εξελικτική φύση των Μαθηματικών και ο τρόπος που αυτή ξεδιπλώνεται σε συνάρτηση με την ανάπτυξη του πολιτισμού μας, είναι αρκετή από μόνη της για να αποσπάσει την προσοχή των μαθηματικών. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν ότι *λάθη, ευρετικές μέθοδοι, αβεβαιότητες, αμφιβολίες, ενοματικά επιχειρήματα, αδιέξοδα, αντιπαραθέσεις και εναλλακτικές προσεγγίσεις σε προβλήματα, δεν ήταν μόνο εύλογα, αλλά ουσιώδες τμήμα των μαθηματικών εν τω γεννάσθαι* (Tzanakis & Arcavi, 2000, σελ.205).

4. Προσανατολίζει το δάσκαλο στη δουλειά του.

Είναι ένα καλό όχημα για συλλογισμούς πάνω στη γνώση και στα εκπαιδευτικά προβλήματα, για δουλειά πάνω στις αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά…. (Furinghetti , 2000, σελ.51).

Εφόσον οι μαθητές, σε διάφορα επίπεδα, αντιμετωπίζουν μαθησιακά εμπόδια τα οποία είναι ίδια με εκείνα των μαθηματικών του παρελθόντος (Philippou & Christou, 2001), η Ιστορία των Μαθηματικών εφοδιάζει τους δασκάλους με ένα χρήσιμο εργαλείο πρόβλεψης. Όταν συναντάται μια δυσκολία στην τάξη μπορούν να ανατρέξουν στο ιστορικό ανάλογό του. Σε αρκετές περιπτώσεις μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών προσφέρονται λύσεις αρκετά απλές που ξεφεύγουν τελείως από το πολυσύνθετο του σημερινού τρόπου σκέψης για τα μαθηματικά.

Η γνώση βέβαια της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους μαχόμενους εκπαιδευτικούς απαιτεί χρόνο και θυσίες. Είναι μια δουλειά δύσκολη και απαιτητική, η οποία ωστόσο μπορεί να βοηθήσει στην αλλαγή του τρόπου με τον οποίο σκέφτονται για τους μαθητές τους (Barbin, 2000, σελ.64). Τους τελευταίους πρέπει να τους αντιμετωπίζουν ως σκεπτόμενες υπάρξεις που ενδιαφέρονται να μάθουν και που πρέπει να έχουν ενεργό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης. Επομένως, οι πεποιθήσεις και οι πρακτικές των δασκάλων μπορούν να αλλάξουν, επιδρώντας τελικά στη μάθηση των μαθητών (Fauvel & van Maanen, 1997), αν και μια αλλαγή στις πεποιθήσεις δεν μεταφράζεται αναγκαία σε αλλαγή στη διδασκαλία (Franke, Fennema & Carpenter, 1997).

1.2.3 Τρόποι αξιοποίησής της

Μέχρι τώρα έχουμε αναλύσει τους λόγους για τους οποίους είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι λόγοι από μόνοι τους δεν είναι αρκετή πηγή πληροφοριών για να πετύχουμε την ενσωμάτωσή της στη σχολική πρακτική. Αυτή η ανάγκη από μόνη της οδήγησε στο να εξεταστούν οι τρόποι με τους οποίους κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει εφικτό.

Η Furinghetti (2000b), πρότεινε ένα μοντέλο για τα κύρια επίπεδα στη διαδικασία ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Θεωρεί τα επίπεδα αυτά ως εξής:

1.γνώση των πηγών
2.επιλογή θεμάτων κατάλληλων για την τάξη
3. ανάλυση των αναγκών της τάξης
4.σχεδιασμός της δραστηριότητας στην τάξη, με βάση την καταλληλότητα των μέσων, τους στόχους και το πλαίσιο της δραστηριότητας
5.πραγματοποίηση του project, και
6.αξιολόγηση της δραστηριότητας

Ας εξετάσουμε όμως τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να ενσωματώσουμε την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία:

Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να υποστηρίξει πιθανούς τρόπους εισαγωγής ενός μαθηματικού αντικειμένου κατά ένα φυσικό τρόπο και γι' αυτό, προτείνουν μια διαισθητική προσέγγιση στη διδασκαλία, αξιοποιώντας τις ιστορικές πηγές (Avital, 1995; Davitt, 2000; Tzanakis & Thomaidis, 2000). Πράγματι, *με τον ίδιο τρόπο που συμβαίνει στην ιστορία, η διδασκαλία στην οποία έχουμε μετάβαση από ειδικά παραδείγματα σε θεωρητική προσέγγιση, θα βοηθήσει τους μαθητές να μεταπηδήσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο (Avital, σελ.6).*

Κάποιες διδακτικές προσεγγίσεις χρησιμοποιούν ιστορικά κείμενα από πρωτότυπες ή δευτερεύουσες πηγές, ως ουσιώδες υλικό για τη διδασκαλία, θεωρώντας εκτός των άλλων, ότι οι πρωτότυπες πηγές βοηθούν τους μαθητές να δουν τα Μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα (Barbin, 1991; Furingetti, 1997; Arcavi,1985, 1987; Arcavi & Bruckheimer, 1982, 2000).

Μια άλλη πρόταση διδακτικής ανάλυσης είναι αυτή, η οποία μπορεί να ενσωματώσει ιστορικά δεδομένα στη διδακτική στρατηγική, με τέτοιο τρόπο ώστε η Ιστορία να μην είναι ορατή ως κυρίαρχο στοιχείο, στην αίθουσα διδασκαλίας. Γι' αυτό η Ιστορία *δεν είναι ένας στόχος καθ' εαυτός, αλλά ένα διδακτικό δρομολόγιο, δημιουργείται … διατηρώντας πάντα στο μυαλό τον διδακτικό στόχο (Barbin & Menghini, 2000, σελ.86).*

Μια τέτοια ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική δραστηριότητα, θέτει ως προτεραιότητα την ανακατασκευή (reconstruction), στην οποία η Ιστορία υπεισέρχεται σιωπηρά, και μπορούν να χρησιμοποιηθούν έννοιες, μέθοδοι και συμβολισμοί οι οποίοι εμφανίστηκαν αργότερα [ιστορικά] από το θέμα που εξετάζεται. Όλα αυτά πρέπει να συμβαίνουν έχοντας κατά νου ότι ο κύριος διδακτικός στόχος είναι να κατανοηθούν τα Μαθηματικά στη σύγχρονη μορφή τους (Tzanakis & Arcavi, 2000, σελ.210).

Οι δάσκαλοι μπορούν να σχεδιάσουν ερευνητικές μαθητικές δραστηριότητες με στόχο την προώθηση της ομαδικής συνεργασίας (ομάδες εργασίας). Τέτοιες δραστηριότητες επιτρέπουν στους μαθητές να κάνουν μαθηματικά με τρόπους διαφορετικούς από εκείνους που έχουν συνηθίσει και οδηγούν τους μαθητές να αναλογισθούν την αξία των εναλλακτικών λύσεων και την ισχύ των μοντέρνων Μαθηματικών (Van Maanen, 1997).Οι δάσκαλοι θα πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να αποκτήσουν εμπειρία πάνω σε ιστορικά υλικά, με στόχο να αναπτύξουν περισσότερες ερευνητικές πρακτικές που περιλαμβάνουν μελέτη, έρευνα για σχετικές πληροφορίες σε βιβλιοθήκες και στο δίκτυο, και τεκμηρίωση των ευρημάτων (Fauvel & van Maanen, 1997). Οι πραγματικά εμπνευσμένες από την ιστορία δραστηριότητες μπορούν να κάνουν τους μαθητές, αρχαιολόγους των μαθηματικών (Swetz, 1989, 2000).

Οι μαθητές μπορούν να τιμήσουν τα γενέθλια ενός μαθηματικού, ερευνώντας τη ζωή του, ακόμα και αν δεν σχετίζεται με το θέμα του μαθήματος. Εφοδιάζοντας τους με πληροφορίες για τη ζωή του και το έργο του, οι μαθητές είναι ικανοί να δουν ότι η γένεση των μαθηματικών ιδεών είναι μια ανθρώπινη και διαρκώς εξελισσόμενη δραστηριότητα και μπορούν (και πρέπει) να έχουν μια αρκετά καθαρή εικόνα των πολιτικών, οικονομικών, πολιτισμικών και κοινωνικών πλαισίων στα οποία εκείνοι οι μαθηματικοί έζησαν και των οποίων οι μαθηματικές ιδέες γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν (Barbin, 1991; Swetz , 1989).

Τέλος παραθέτουμε την κατηγοριοποίηση για το πώς πρέπει να χρησιμοποιείται η Ιστορία των Μαθηματικών όπως την παραθέτει ο Jankvist (2009):

1. Απευθείας παροχή ιστορικών πληροφοριών:
    - απομονωμένα πραγματικά στοιχεία

(Παρέχεται μια πληροφορία αυτούσια όπως είναι μέσα στη διδακτέα ενότητα ως πληροφορία και όχι ως αυτοτελή διδακτέα ενότητα)

- πλήρη μαθήματα ή βιβλία πάνω στην Ιστορία των Μαθηματικών

2. Ακολουθώντας μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία:

Ο Schubring (1978) διαχωρίζει δύο γενετικές αρχές πάνω στην εκπαίδευση:

- Η ιστορική – γενετική αρχή (historical – genetic principle) η οποία έχει στόχο να οδηγήσει τους μαθητές από βασικές σε πιο σύνθετες γνώσεις με τον ίδιο τρόπο που η ανθρωπότητα έχει προοδεύσει στην ιστορία των μαθηματικών.
- Η ψυχολογική – γενετική αρχή (psychological – genetic principle) η οποία βασίζεται στην ιδέα του να αφεθούν οι μαθητές να ξαναανακαλύψουν ή να επαναεφεύρουν Μαθηματικά χρησιμοποιώντας τις δυνατότητές τους και τις εμπειρίες τους.

3. Αναπτύσσοντας βαθύτερη επίγνωση για τα Μαθηματικά καθ' αυτά και σε σχέση με το κοινωνικοπολιτισμίκο πλαίσιο στο οποίο συναντώνται. Η μαθηματική επίγνωση χωρίζεται στη μελέτη δύο ειδών μαθηματικών δραστηριοτήτων:

- εγγενούς φύσεως (intrinsic nature): περιλαμβάνουν σημαντικές πτυχές του κάνω Μαθηματικά όπως το μέρος των γενικών εννοιολογικών πλαισίων και των σχετικών κινήτρων που παρέχονται.
- εξωγενούς φύσεως (extrinsic nature): τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως μια αρχή απομονωμένη από τις κοινωνικές και πολιτισμικές ανησυχίες και επιρροές.
-

Μέχρι τώρα έχουμε αναδείξει ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της έρευνας που έχει να κάνει με την κατηγοριοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και

για το πώς πρέπει αυτή να χρησιμοποιείται. Ωστόσο πρέπει να γίνει αναφορά στο τι γίνεται σε μετέπειτα στάδιο, αφού έχουμε δεχθεί και έχουμε ενσωματώσει την ιστορία στη μαθησιακή διαδικασία. Ο Jankvist (2009) υποστηρίζει ότι από τη στιγμή που έχουμε δεχθεί το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών ως σημαντικό (υπό τη μορφή εργαλείου ή αυτοσκοπού) για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιστορική πληροφορία με μια από τις τρεις προσεγγίσεις:

- *διαφωτιστική (illumination approach):*

η ιστορική πληροφορία λειτουργεί συμπληρωματικά με τη μορφή ιστορικών σημειωμάτων, που μπορούν να περιέχουν ημερομηνίες, σημαντικά προβλήματα, βιογραφίες, ανέκδοτα κλπ. Μπορεί ακόμα να αποτελέσει τον πρόλογο ή τον επίλογο ενός κεφαλαίου, "ανοίγοντας" την ενότητα με ένα ιστορικό πρόβλημα ή μια πληροφορία ή "κλείνοντας" με ανακεφαλαίωση και σύνοψη των βασικών ιστορικών στοιχείων που συνδέονται με το περιεχόμενο της ενότητας.

- *θεματική (modules approach, Katz & Michalowicz,2004)*:

η πιο συνοπτική μορφή περιλαμβάνει (Tzanakis&Arcavi,2000), ιστορικό υλικό (κυρίως σημαντικά ιστορικά προβλήματα) άμεσα συνδεδεμένο με το περιεχόμενο, που δεν περιλαμβάνεται όμως στην "τυπική ύλη". Σε πιο αναπτυγμένη μορφή, αυτό το υλικό μπορεί να αποτελέσει το αντικείμενο ενός project (π.χ. κατασκευή ιστορικών εργαλείων ή μηχανών) μεγάλης χρονικής διάρκειας.

- *ιστορικοκεντρική (history based approach):*

εμφανίζεται έμμεσα, δεδομένου ότι λειτουργεί ως μια "γενική ιδέα" προγραμματισμού της διδασκαλίας σύμφωνα με την ιστορική εξέλιξη των εννοιών που περιέχονται στο πρόγραμμα, π.χ. πρώτα οι φυσικοί, μετά οι ρητοί κλπ.

Αναφορικά λοιπόν με το πώς τα σχολικά βιβλία χειρίζονται το θέμα αυτό, έχει χρησιμοποιηθεί το γαστρονομικό ανάλογο (Siu & Tzanakis, 2004), σύμφωνα με το οποίο τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών βιβλίων μπορούν να λειτουργούν ως ορεκτικό, κυρίως γεύμα ή επιδόρπιο, αντιστοιχιζόμενα ανάλογα με την υποκίνηση, το κυρίως περιεχόμενο ή τον εμπλουτισμό του μαθήματος. Βέβαια, ο εμπλουτισμός του μαθήματος και η υποκίνηση αποτελούν, κατά κύριο λόγο, στόχο των περισσότερων από τις ιστορικές παρεμβάσεις που περιλαμβάνονται στα ελληνικά σχολικά βιβλία. Αυτό βρίσκεται σε ευθυγράμμιση και με τα αναλυτικά προγράμματα, που ως κύριο στόχο της ένταξης της ιστορίας θέτουν το να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και την αγάπη τους για τα Μαθηματικά

1.2.4 Ενστάσεις για την αξιοποίησή της

Παρόλα τα οφέλη που προαναφέρθηκαν, «*εξερευνώντας τη σκοπιμότητα της επιδίωξης να ενσωματωθεί η ιστορία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση»* (Tzanakis & Arcavi, 2000, σελ.202), έχουν προκύψει κάποια επιχειρήματα εναντίον μιας τέτοιας διδακτικής προσέγγισης. Τα επιχειρήματα κατά της ενσωμάτωσης της Ιστορίας βασίζονται σε τουλάχιστον δύο πηγές δυσκολίας: φιλοσοφικής (*philosophical*) και πρακτικής (*practical*), μερικά από τα οποία παρατίθενται από τους ίδιους μέσα από μια σύντομη σύνοψη της βιβλιογραφίας:

1. Η Ιστορία δεν είναι Μαθηματικά. Αν πρέπει η Ιστορία να διδαχθεί, τότε θα πρέπει πρώτα να διδαχθούν τα ίδια τα Μαθηματικά. Δηλαδή, πρώτα να διδαχθεί το μαθηματικό αντικείμενο και στη συνέχεια η ιστορία του.
2. Η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές, μάλλον, παρά να τους βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου (Fowler in Ransom, 1991, 15; Fauvel, 1991,4).

3. Οι μαθητές υπάρχει περίπτωση να έχουν μία ακανόνιστη αίσθηση του παρελθόντος που καθιστά την ιστορική πλαισιοποίηση των μαθηματικών αδύνατη χωρίς
να υπάρξει μια πιο διευρυμένη εκπαίδευση στην ιστορία γενικά (Fauvel, 1991,4).

4. Πολλοί μαθητές αντιπαθούν την ιστορία και κατ 'επέκταση αντιπαθούν την Ιστορία των Μαθηματικών, ή δεν τη θεωρούν λιγότερο βαρετή από τα Μαθηματικά.

5. Η πρόοδος στα Μαθηματικά είναι να κάνει ρουτίνα την αντιμετώπιση δύσκολων προβλημάτων, οπότε γιατί να μας απασχολεί να κοιτάζουμε το παρελθόν; (Le Goff, 1996, 13)

6. Η Ιστορία μπορεί να είναι ικανή να αναπαραγάγει πολιτιστικό σωβινισμό και τοπικιστικό εθνικισμό.

Μερικές από τις πρακτικές αντιρρήσεις για την ενσωμάτωση της Ιστορίας μέσα στη μαθηματική διδασκαλία και μάθηση είναι:

7. *Η έλλειψη χρόνου:* δεν υπάρχει αρκετός χρόνος στην τάξη για την εκμάθηση των Μαθηματικών όπως είναι. Χρόνος που γίνεται ακόμα λιγότερος ακόμη όταν προτείνεται να διδαχθεί και η Ιστορία των Μαθηματικών (Buhler, 1990, 43).

8. *Η έλλειψη πόρων:* υπάρχει μια γενικευμένη έλλειψη πηγών για χρήση στην τάξη (Fauvel, 1991,4;Le Goff, 1996,13).

9. *Η έλλειψη εμπειρίας*: η έλλειψη από πλευράς δασκάλου της απαραίτητης ιστορικής τεχνογνωσίας (Fowler in Ransom, 1991, p.16) που είναι συνέπεια της έλλειψης κατάλληλης εκπαίδευσης των ίδιων των εκπαιδευτικών. Πράγματι, όχι μόνο ιστορική αλλά και διεπιστημονική γνώση είναι απαραίτητη κάτι το οποίο βρίσκεται πολύ πιο πέρα από τις δυνατότητες που έχουν οι καθηγητές μαθηματικών. Η έλλειψη εμπειρογνωμοσύνης οδηγεί σε μια ακόμα πιο εξουθενωτική έλλειψη εμπιστοσύνης .

10. *Η έλλειψη αξιολόγησης*: δεν υπάρχει σαφής ή συνεπής τρόπος ενσωμάτωσης κάθε ιστορικής συνιστώσας στην αξιολόγηση των

μαθητών, και αν δεν αξιολογείται τότε οι μαθητές δεν θα την εκτιμήσουν ή δεν θα δίνουν προσοχή σε αυτή.

1.3 Εκτιμήσεις και ερευνητικά ερωτήματα

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω τις τελευταίες δεκαετίες έχει γίνει σημαντική προσπάθεια προς την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Όπως είναι αναμενόμενο σε μια τέτοια προσπάθεια υπάρχουν δύο όψεις του νομίσματος. Παρόλα αυτά είναι ολοφάνερο ότι η πλάστιγγα γέρνει υπέρ της χρήσης της Ιστορίας για τη βελτίωση της διδακτικής προσέγγισης των Μαθηματικών. Στην ελληνική πραγματικότητα η προσπάθεια εισαγωγής της Ιστορίας στο αναλυτικό σχολικό πρόγραμμα είναι τόσο πρόσφατη που δε μετρά μια δεκαετία. Παλαιότερα η ένταξη των σημειωμάτων στα διδακτικά βιβλία γινόταν με πρωτοβουλία των συγγραφέων χωρίς να προσδιορίζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Με τα αναλυτικά προγράμματα του 2003 επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση. Τα ιστορικά σημειώματα ακολουθούν τη δομή του σχολικού βιβλίου και τις περισσότερες φορές έχουν ρόλο εισαγωγικό ή υποενότητας. Μελετώντας τους τρόπους αξιοποίησής τους που προτείνονται στα βιβλία των καθηγητών διαπιστώνουμε ότι δίνονται ορισμένες ιστορικές πηγές και σύνδεσμοι όπου οι καθηγητές μπορούν να βρουν επιπλέον πληροφορίες. Δημιουργείται όμως το ερώτημα αν έχει γίνει σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων για τις αντίστοιχες ενότητες και αν οι οδηγίες που δίνονται στο βιβλίο του καθηγητή είναι σαφείς και βοηθούν στην ορθή αξιοποίησή τους. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω πρέπει να αναρωτηθούμε αν ο μαθηματικός, που δεν είναι ιστορικός και γνώστης της ιστορίας καθεαυτής, είναι σε θέση να ενεργήσει αυτόβουλα. Οπότε θα ήταν σημαντικό να διευκρινίζεται ποια κομμάτια ιστορίας πρέπει να διδαχθούν αλλά και με ποιον τρόπο θα μπορούσε να γίνει η ανάλογη παρέμβαση.

Με την παρούσα εργασία προσπαθούμε να απαντήσουμε στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Με ποιες αρχές και με ποιους τρόπους επιχειρήθηκε η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα πρόσφατα προγράμματα σπουδών και διδακτικά βιβλία;

2. Υπάρχει η δυνατότητα η Ιστορία να ενσωματωθεί στο μάθημα των Μαθηματικών ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν την εξελικτική τους πορεία;

3. Ο δάσκαλος των Μαθηματικών έχει τις ιστορικές γνώσεις, τη δυνατότητα πρόσβασης σε ιστορικό υλικό και τη διδακτική εμπειρία για να ενσωματώσει την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε λεπτομερώς το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών του Γυμνασίου όπως αυτό παρουσιάζεται από το 2003 και έπειτα. Γίνεται σχολιασμός του τρόπου με τον οποίο προτείνεται να γίνει η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη. Παρατηρείται ότι η διαθεματικότητα έχει κυρίαρχο ρόλο και τα βιβλία καθηγητή – μαθητή είναι γραμμένα πάνω σε αυτή τη βάση.

2.1 Το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών μετά το 2003

Οι επιστημονικές και τεχνολογικές αλλαγές που συντελούνται στη κοινωνία, η οποία χαρακτηρίζεται από μια διαρκή ρευστότητα, απαιτούν δεξιότητες και ικανότητες όπως είναι η κριτική σκέψη, η δια βίου μάθηση και η διάθεση για συνεργασία. Επιπλέον θεωρητικές και ερευνητικές αναφορές υποστηρίζουν ότι η αποσπασματική γνώση δε βοηθά στην κατάκτησή των απαιτούμενων αυτών δεξιοτήτων. Οι σύγχρονες αρχές και προσεγγίσεις της διδακτικής έρχονται σε αντίθεση με το μοντέλο που κυριαρχεί σήμερα στην εκπαίδευση, δηλαδή του διαχωρισμού και της κατάτμησης της γνώσης σε ξεχωριστά αντικείμενα χωρίς εσωτερική συνοχή.

Ο Διαχωρισμός της γνώσης έχει οδηγήσει στο μοντέλο που συναντάμε σε ένα οποιοδήποτε σχολείο όπου καθηγητές και μαθητές είναι υποχρεωμένοι να ανταπεξέλθουν στη ζητούμενη διδαχθείσα ύλη κάτω από συνθήκες περιορισμού χρόνου, ρυθμού και χώρου. Επιπλέον μια τέτοια κατάτμηση της γνώσης ευθύνεται, σε ένα μεγάλο βαθμό, για την έλλειψη διαδραστικότητας μεταξύ εκπαιδευτών – εκπαιδευόμενων, και γενικότερα την έλλειψη εσωτερικής συνοχής (Natriello, 2004). Γι’ αυτούς τους λόγους θεωρείται απαραίτητη και επιβεβλημένη μια διαρκής αναπροσαρμογή των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών καθώς και της φιλοσοφίας τους. Στο πλαίσιο λοιπόν, της ποιοτικής αναβάθμισης της εκπαίδευσης στη χώρα μας, ήδη από το 2006 εφαρμόζεται το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), το οποίο χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία και ολιστικότητα, ως

προς την εφαρμογή του, αφού αφορά όλες τις τάξεις και όλα τα μαθήματα της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης και του Γυμνασίου.

2.1.1 Η Διεπιστημονικότητα στο αναλυτικό πρόγραμμα

Με την αλλαγή που έγινε το 2006 μέσα από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και τα συνακόλουθα Αναλυτικά Προγράμματα (Α.Π.Σ.) στα οποία επικρατεί η διαθεματική προσέγγιση επιχειρείται η κάθετη και οριζόντια οργάνωση του περιεχομένου των προγραμμάτων και ταυτόχρονα, στο πλαίσιο της διαθεματικής προσέγγισης, προτείνονται μαθητοκεντρικές και ομαδοσυνεργατικές διδακτικές μέθοδοι που οδηγούν το μαθητή στην ολιστική κατάκτηση της γνώσης.

Με την έναρξη του σχολικού έτους 2006 - 2007, μέσω της εισαγωγής των νέων διδακτικών πακέτων στα σχολεία, καθιερώνεται, για πρώτη φορά, η αξιοποίηση της μεθόδου παραγωγής σχεδίων εργασίας στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές των 56 καινούριων βιβλίων που θα διδαχθούν στη διάρκεια της νέας σχολικής χρονιάς αλλά και των 68 υπό συγγραφή διδακτικών πακέτων, ένα μέρος του διδακτικού χρόνου κάθε μαθήματος, που φτάνει το 10% του ετήσιου συνολικού χρόνου, πρέπει να διατίθεται για διαθεματικά σχέδια εργασίας. Η ένταξη της μεθόδου project στα νέα αναλυτικά προγράμματα αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για τη βελτιστοποίηση της ποιότητας της παρεχόμενης εκπαίδευσης. Με την εισαγωγή τους αυτόν τον τρόπο θεσμοθετείται μια παιδαγωγική καινοτομία που όπως έχουν αποδείξει οι έρευνες μπορεί να φέρει πολλαπλά οφέλη στον τρόπο που δομείται η γνώση. Έτσι δημιουργείται αφενός η συνθήκη για δυναμικό σχεδιασμό και οργάνωση δραστηριοτήτων που προωθούν τη μάθηση μέσω της έρευνας, της μελέτης πεδίου και της συνεργασίας στο πλαίσιο του ωρολογίου προγράμματος. Αφετέρου δίνεται προτεραιότητα στην προσωπικότητα του μαθητή, στην ανάπτυξη της αυτενέργειας και στη σφαιρικότητα της γνώσης.

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΣΠ) (ΦΕΚ 303 & 304 /13-03-03), η υιοθέτηση της διαθεματικής προσέγγισης δημιουργεί πρόσφορο έδαφος για συνεργασίες και ανάδειξη των δεξιοτήτων που μπορεί να κατέχουν οι μαθητές αλλά δεν αναδεικνύονται από ένα τυπικό μάθημα που επικεντρώνεται αυστηρά σε ένα γνωστικό αντικείμενο. Πολλά έχουν γραφτεί για τη διαθεματικότητα. Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται είναι ο εξής:

> *ο όρος δηλώνει την κατά θέματα προσέγγιση και οργάνωση της σχολικής γνώσης, καθώς και τη συσχέτιση της εντός και μεταξύ των εξεταζομένων μαθημάτων. Ο όρος «διεπιστημονικότητα» αναφέρεται σε κάθε μορφή σύμπραξης επιστημών για τη μελέτη ενός θέματος (Ματσαγγούρας, 2003, 50).*
>
> *Με πιο απλά λόγια, διαθεματικότητα είναι το ντοσιέ που θα πάρουμε με πληροφορίες από διάφορα βιβλία και διεπιστημονικότητα είναι τα βιβλία των διαφόρων επιστημών καθαυτά (Καραγιάννης 2006: επιμορφωτικό σεμινάριο).*

Παρά το πρόσφατο του ορισμού της, η έννοια ανιχνεύεται σε πηγές πολύ προγενέστερες, ακόμα και στα κλασσικά έργα που γράφτηκαν αιώνες πριν.

Για παράδειγμα, στα πλατωνικά κείμενα ανιχνεύουμε στοιχεία που αναφέρονται στη σφαιρικότητα της γνώσης, καθώς δια στόματος Σωκράτη, στο έργο του Πρωταγόρας, ο Πλάτων αναφέρεται στην καθολικότητα της έννοιας της “αρετής” παρά το γεγονός ότι εκδηλώνεται με διαφορετικούς τρόπους. Συνεχίζοντας, ο Σωκράτης αντιπαραβάλλει την αρετή με το πρόσωπο, που, αν και αποτελείται από διαφορετικά μέρη – στόμα, μάτια, χείλη κ.λ.π. – ωστόσο αποτελεί ένα ενιαίο σύνολο. Επιπλέον στο Φαίδρο (275b, στο Ματσαγγούρας, 2003, 193) διαφαίνεται η άποψη του φιλοσόφου για την επεξεργασία πληροφοριών ως πρωταρχική ουσία της διδασκαλίας.

Όλα τα Α.Π.Σ. της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης και κατά συνέπεια και αυτό των μαθηματικών που εκπονήθηκαν με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ. στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στη διαθεματική προσέγγιση. Η διαθεματική προσέγγιση ή διαθεματικότητα «δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συγκροτήσει ένα ενιαίο

σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων, μια ολιστική εν πολλοίς αντίληψη της γνώσης, που του επιτρέπει να διαμορφώνει προσωπική άποψη για θέματα των επιστημών τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς και με ζητήματα της καθημερινής ζωής (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2002, τ. Α΄, σ.10). Η αναγκαιότητα εισαγωγής της διαθεματικής προσέγγισης συνάδει και με τα συμπεράσματα της Μορφολογικής Ψυχολογίας και της Ψυχολογίας του Παιδιού, τα οποία αναφέρονται στην ολιστική λειτουργία της αντίληψης και στο ενιαίο και αδιαίρετο του ψυχικού βίου του μαθητή. Σύμφωνα με αυτά τα συμπεράσματα ο μαθητής αντιλαμβάνεται την ολότητα και όχι απομονωμένα χαρακτηριστικά (Κολιάδης, 2002).

Η οργάνωση διαθεματικών δραστηριοτήτων στα μαθηματικά διευκολύνεται μέσα από θεμελιώδεις έννοιες των διαφόρων επιστημών, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν βασικούς κρίκους οριζόντιας διασύνδεσης των μαθημάτων. Οι έννοιες αυτές διευκολύνουν τη συσχέτιση γνώσεων από διαφορετικά αντικείμενα αλλά και με εμπειρίες από την καθημερινή ζωή. Ως ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης στα Μαθηματικά του Δημοτικού, προτείνονται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. οι παρακάτω:

Μεταβολή	Πολιτισμός
Αλληλεπίδραση	Συμμετρία
Σύστημα	Έδρα
Επικοινωνία	Ταξινόμηση
Άτομο / σύνολο	Πιθανότητα
Ομοιότητα / διαφορά	Ανάλυση / σύνθεση
Χώρος/Χρόνος	Αναλογία

Πιο συγκεκριμένα η διαθεματικότητα στα Μαθηματικά μπορεί να συμβάλλει θετικά :

1. Στην κατανόηση των Μαθηματικών

2. Στην αλλαγή στάσης για τα Μαθηματικά

3. Στη διευκόλυνση της χρήσης των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Ας δούμε όμως τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών 2003 και κατ' επέκταση το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική.

Σύμφωνα με τα Α.Π.Σ. (Φ.Ε.Κ, 2003) η επίτευξη των γενικών στόχων της Μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί, όπως είναι φυσικό, αντικείμενο συνεχούς αναζήτησης και προβληματισμού. Το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας (με έμφαση στα αποτελέσματα της μαθηματικής δημιουργίας και στο τρόπο παρουσίασης τους) αμφισβητείται. Τόσο το τελικό προϊόν της μαθηματικής δημιουργίας όσο και ο τρόπος παρουσίασης του υποβαθμίζει την διαδικασία μέσω της οποίας φτάνουμε σε αυτό.

Οι σύγχρονες αντιλήψεις σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών θεωρούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως το αποτέλεσμα αλλά και τη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται το αποτέλεσμα αυτό. Με αυτή την έννοια τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων αλλά και μια διαδικασία σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης αυτών των γνώσεων.

Αν δεχτούμε, επομένως, ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν αφορά μόνο γνώσεις και κατάκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων, αλλά περιλαμβάνει διαδικασίες μάθησης που καλύπτουν τις διαστάσεις που έχουμε ήδη περιγράψει, οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων, παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών.

Η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και η διατύπωση τους επιτρέπει την εμπλοκή, εφόσον είναι δυνατόν, του συνόλου των μαθητών της τάξης. Για τους μαθητές αυτό σημαίνει ότι έχουν την ευκαιρία

να σκεφτούν και να ενεργήσουν στο δικό τους προσωπικό επίπεδο και να διατυπώσουν τους δικούς τους επιμέρους στόχους. Για το δάσκαλο αυτό σημαίνει υψηλό βαθμό αυτενέργειας και πρωτοβουλίας. Πρέπει να είναι ικανός να διακρίνει πίσω από τη διατύπωση μιας δραστηριότητας τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και να τους προσαρμόσει στις ιδιαιτερότητες της τάξης του.

Για τη σωστή επιλογή δραστηριότητας επισημαίνεται ότι αυτή πρέπει να έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά:

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
- Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μια και μοναδική λύση.
- Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα πρέπει να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί από τους μαθητές.
- Η επεξεργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει, όπου είναι δυνατό, σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό – γραφικό) μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Επιδιώκοντας τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης μέσω επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν κατ' αναλογία, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας. Αυτοί είναι οι πραγματικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης, δηλαδή "οι στόχοι, που αφορούν την ίδια τη διαδικασία μάθησης και δεν αποτελούν απλά μετρήσιμο αποτέλεσμα".

Επομένως για κάθε τάξη η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να οργανωθεί στη βάση μιας συνύπαρξης ενός σχεδιασμού κατάλληλων και

πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς. Ακόμα είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει εφικτό με διάφορους τρόπους:

- Μέσω διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων (συμβολικά με γραφικές παραστάσεις, με πίνακες, με γεωμετρικά σχήματα)

- Διαθεματικά:

  - με αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών (η Ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας). Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει διεθνώς αντικείμενο συστηματικών μελετών. Η θετική συμβολή στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

    1. Προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
    2. Αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας ανά τους αιώνες.
    3. Συνεισφέρει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, αναδεικνύοντας όχι μόνο τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξής τους.

  - με αναφορά σε έννοιες που είναι συνυφασμένες ή έχουν προκύψει από την ανάγκη εξερεύνησης άλλων επιστημονικών πεδίων όπως είναι αυτά της φυσικής, της αστρονομίας κ.α.

(Βιβλίο καθηγητή Γ’ Γυμνασίου, σελ11)

2.2 Τα βιβλία καθηγητή – μαθητή

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τις προδιαγραφές που πρέπει να έχουν τα βιβλία καθηγητή και μαθητή σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα. Γίνεται μια αναφορά στο πως πρέπει αυτά να είναι διαβαθμισμένα και πως πρέπει να γίνεται η σύνδεση και η μετάβαση από τάξη σε τάξη. Επιπλέον προσπαθούμε να κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση για το πως ενσωματώνεται η ιστορία των μαθηματικών σε αυτά.

Βιβλίο για το μαθητή:

Σε ότι αφορά το περιεχόμενό του το εγχειρίδιο του μαθητή πρέπει να είναι συμβατό με το Πρόγραμμα Σπουδών και να έχει συνταχθεί και διαρθρωθεί με τρόπο που να εξυπηρετεί το σκοπό και τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη αντίστοιχη βαθμίδα. Στην κατεύθυνση αυτή οφείλει:

- Να είναι οργανωμένο σε ομοιογενείς ενότητες των οποίων το περιεχόμενο και το ύφος διασφαλίζουν τη συνέχεια και την ενότητα στις διδασκόμενες έννοιες.
- Κάθε ενότητα πρέπει να περιλαμβάνει εισαγωγικό τμήμα, το οποίο προετοιμάζει το μαθητή για το περιεχόμενό της, τον κατατοπίζει για τις πιθανές σχέσεις της με τις υπόλοιπες ενότητες του βιβλίου, τον πληροφορεί για το σκοπό της διδασκαλίας της και τους στόχους που αναμένεται να επιτευχθούν με την ολοκλήρωση της.
- Το περιεχόμενο κάθε ενότητας είναι αναγκαίο να έχει συνταχθεί έτσι ώστε να αναδεικνύει τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα αντικείμενα που εμπίπτουν στη μελέτη των Μαθηματικών, προκειμένου να ενισχύεται η οριζόντια σύνδεση τους (διαθεματικότητα) και η διεπιστημονικότητα κατά την εξέταση διαφόρων θεμάτων.

- Στα σχολικά εγχειρίδια πρέπει να περιλαμβάνεται η καταγραφή των μεγάλων ιστορικών στιγμών που καθόρισαν διαδοχικά την πορεία των Μαθηματικών ώστε ο μαθητής να αποκτά γνώση της γένεσης των ιδεών τους, προϋπόθεση απαραίτητη για την κατάκτηση κάθε γνωστικού αντικειμένου. Παράλληλα πρέπει να δίνεται έμφαση στις σύγχρονες επιστημονικές κατακτήσεις, όπως επίσης και στις συνέπειες τους σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο.

(ΦΕΚ 303, σελ 4037)

Βιβλίο για τον καθηγητή:

Οφείλει να παρέχει ενδεικτικές διδακτικές οδηγίες που αξιοποιούν τα διαφορετικά είδη των προτεινόμενων διδακτικών προσεγγίσεων, βιβλιογραφικές αναφορές, πηγές από το διαδίκτυο και ενημερωτικά στοιχεία για τα σύγχρονα επιστημονικά δεδομένα, δηλαδή πληροφορίες ιδιαίτερα απαραίτητες για τον εκπαιδευτικό. Στις ενδεικτικές διδακτικές ενέργειες που παρέχονται στον εκπαιδευτικό πρέπει να συμπεριλαμβάνονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες απαιτήσεις που επιδιώκεται να ικανοποιηθούν με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας, ώστε να υποβοηθείται η προσαρμογή της στις δυνατότητες της τάξης.

(ΦΕΚ 303, σελ 4037)

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών του Γυμνασίου ισχύουν τα εξής:

α) βιβλίο του μαθητή:

Το μαθηματικό περιεχόμενο του θα πρέπει να είναι συμβατό με το αντίστοιχο Α.Π.Σ. και το Δ.Ε.Π.Π.Σ. των Μαθηματικών. Μέσα από την ανάπτυξη του περιεχομένου θα πρέπει με τρόπο σαφή να παρουσιάζεται η βαθμιαία ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Κατά την ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου, θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τόσο οι προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών όσο και οι γνώσεις που θα

διδαχθούν αργότερα ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλή μετάβαση από τάξη σε τάξη.

- Τα ιστορικά σημειώματα δεν είναι απαραίτητο να εντάσσονται ξεχωριστά και στο τέλος κάθε ενότητας. Μπορεί (όπου αυτό κρίνεται) να παρουσιάζονται (με σύντομο τρόπο) και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου.
- Το βιβλίο να έχει παραρτήματα με αλφαβητικό ευρετήριο, ευρετήριο ονομάτων και βιβλιογραφία.
- Στο τέλος του βιβλίου θα δίνονται υποδείξεις ή λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων.
- Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιείται (εκτός των μαθηματικών συμβόλων) θα πρέπει να είναι συμβατός με τον χρησιμοποιούμενο και στα άλλα γνωστικά αντικείμενα.
- Οι προτεινόμενες ασκήσεις και τα προβλήματα να είναι κλιμακούμενης δυσκολίας.

Οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών αποτελούν όχι μόνο ένα σύνολο γνώσεων αλλά και διαδικασία μέσω της οποίας οικοδομούνται αυτές οι γνώσεις. Η μάθηση δεν είναι μια παθητική αποδοχή “έτοιμης” γνώσης, αλλά μια διαδικασία οικοδόμησης. Έτσι, η παράθεση του περιεχομένου θα πρέπει να συνοδεύεται και από τις διαδικασίες σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης αυτού του περιεχομένου.

β) Βιβλίο του καθηγητή:

Το βιβλίο του καθηγητή από μόνο του φυσικά δεν μπορεί να υποκαταστήσει την ανάγκη μιας επιμόρφωσης που στοχεύει στην ενημέρωση του εκπαιδευτικού για τις νέες απόψεις σχετικά με τη διδακτική των Μαθηματικών. Μπορεί ωστόσο, να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να εφαρμόσει τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις που προτείνει το Π.Σ., να του δώσει ιδέες για την οργάνωση της διδασκαλίας του, να του επισημάνει σημεία της ύλης τα οποία οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ή τείνουν να παρανοούν και

τέλος να του προτείνει συμπληρωματικές πηγές για να ανανεώσει και να επεκτείνει τις γνώσεις του. Ένα τέτοιο βιβλίο οφείλει να περιέχει:

- Αναλυτικές ενδεικτικές διδακτικές ενέργειες για τη διδασκαλία όλων των ενοτήτων του σχολικού βιβλίου.
- Προτεινόμενο διδακτικό υλικό για κάθε ενότητα και τρόπο αξιοποίησής του.
- Υποδειγματικές απαντήσεις των ερωτήσεων, ασκήσεων, προβλημάτων του σχολικού βιβλίου.
- Πρόσθετες ερωτήσεις ,ασκήσεις και προβλήματα.
- Επισημάνσεις για τις παρανοήσεις και τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών και τρόπους αντιμετώπισής τους.
- Ενδεικτικό ετήσιο προγραμματισμό της ύλης.
- Προτεινόμενη βιβλιογραφία και άλλες πηγές πληροφόρησης (π.χ. δικτυακούς τόπους).

Συμπερασματικά η διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών με τις δραστηριότητες και τα σχέδια εργασιών (projects), που προτείνονται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Γυμνασίου, φιλοδοξεί να δώσει τη δυνατότητα σε καθηγητές και μαθητές για μια νέα προσέγγιση των Μαθηματικών, αφού επιδιώκεται να τα συνδέσουν με άλλα γνωστικά αντικείμενα καθώς και με καταστάσεις που αντιμετωπίζουν στην καθημερινή τους ζωή.

Οι οδηγίες - κατευθύνσεις που παρέχονται από το Α.Π.Σ (Φ.Ε.Κ 2003) ενσωματώνουν με πολύ ώριμο τρόπο τις νέες τάσεις που έχουν επικρατήσει στη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με τη διαθεματικότητα και τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία. Πλέον οι καθηγητές και οι μαθητές καλούνται να αναθεωρήσουν τους ρόλους τους μέσα στο σχολικό περιβάλλον και να προσαρμοστούν στα σύγχρονα δεδομένα και τους νέους τρόπους προσέγγισης που προτείνονται από τα νέα Α.Π.Σ (Φ.Ε.Κ 2003).

2.2.1 Η Ιστορία των μαθηματικών στα σχολικά βιβλία

Τα νέα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου διδάχθηκαν και στις τρεις τάξεις για πρώτη φορά το σχολικό έτος 2007-2008. Ένα χρόνο πριν είχε προηγηθεί η διδασκαλία νέων αντίστοιχων βιβλίων στις έξι τάξεις του Δημοτικού. Τα βιβλία αυτά γράφτηκαν με βάση νέα Α.Π.Σ., τα οποία στηρίζονται σε σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση (Καραγεώργος, 1998; Τζεκάκη, 2000; Χιονίδου, 2002). Όπως αναφέραμε στα νέα αναλυτικά προγράμματα καθώς και στα βιβλία του εκπαιδευτικού που συνοδεύουν τα νέα βιβλία του Δημοτικού και του Γυμνασίου υπάρχουν πολλές αναφορές για την ενεργητική προσέγγιση της γνώσης και τον κρίσιμο ρόλο των δραστηριοτήτων στην οικοδόμηση των νέων γνώσεων από τους μαθητές. Συγκεκριμένα αναφέρεται, «η ενεργητική προσέγγιση της γνώσης έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να σκέπτονται, … , δηλαδή τελικά να μαθαίνουν το "πώς να μαθαίνουν". Απαιτεί κυρίως τη δραστηριοποίηση του μαθητή…» (Π.Ι., 2002, τ.Α', σ.16).

Μια από τις επιλογές του αναλυτικού προγράμματος του Γυμνασίου, όπως αυτό εκφράζεται στα σχολικά βιβλία τα τελευταία χρόνια είναι η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Αν και αυτό το ζήτημα έχει διερευνηθεί εκτενώς (Fauvel & van Maanen, 2000; Thomaidis & Tzanakis, 2009), υπάρχουν παράμετροι οι οποίες δεν έχουν εξετασθεί, όπως εκείνη που αφορά τα ιστορικά σημειώματα στα εγχειρίδια .

Το σύνολο των διδακτικών παρεμβάσεων που εντοπίστηκαν ως ιστορικές στα τρία βιβλία του γυμνασίου και μελετήθηκαν είναι εξήντα πέντε (65). Εξ' αυτών 33 ιστορικές παρεμβάσεις εμπεριέχονται στο βιβλίο της Α' Γυμνασίου, 18 στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου και 14 στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου. Σύμφωνα με τους (Β. Σπηλιωτοπούλου, Κ. Διακογιώργη & Β. Παπαντωνίου, 2009) προκύπτει η εξής κατηγοριοποίηση για τις διδακτικές παρεμβάσεις των βιβλίων του Γυμνασίου.

Οι κατηγορίες αυτές έχουν να κάνουν με ευρύτερες ομάδες όπως είναι:

- **Το είδος του κειμένου**

  - Μαθηματικό επεξηγηματικό κείμενο, θεωρούμε εκείνο το κείμενο που επεξηγεί θέματα γύρω από μαθηματικές έννοιες ή μαθηματικούς τύπους. Στην πρώτη περίπτωση εντάσσεται για παράδειγμα κομμάτι από το βιβλίο Β' Γυμνασίου, μέρος του οποίου παρατίθεται: "Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, οδήγησε στην προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.
  - Ιστορική μεμονωμένη πληροφορία (έκθεση ή πρόβλημα)
  - Περιγραφική αναδρομή μαθηματικών διαδικασιών ή επιτευγμάτων προσώπων
  - Συνδετικό αιτιολογικό
  - Αναφορές βιογραφικών στοιχείων φιλοσόφων ή μαθηματικών που συνέβαλαν στις υπό διδασκαλία γνωστικές περιοχές.

- **Το είδος της εικόνας**

  - Εικόνες προσώπων. Μπορεί να είναι πορτρέτα, είτε φωτογραφίες ή προτομές είτε και ζωγραφική και εικόνες προσώπων σε δράση.
  - Εικόνες αρχαιολογικών οντοτήτων, ιστορικών πηγών ή οργάνων που χρησιμοποιήθηκαν σε διάφορες εποχές.
  - Εικόνες αρχιτεκτονικών μνημείων (Παρθενώνας ,Θέατρα, Πυραμίδες).
  - Εικόνες αντικειμένων τέχνης (π.χ. πίνακες ζωγραφικής).
  - Σχηματική αναπαράσταση.

- **Η διδακτική λειτουργία της κάθε μονάδας,** η ιστορική παρέμβαση και η χρήση της στα σχολικά βιβλία μπορεί να λειτουργεί ως:

  - Εισαγωγική προετοιμασίας

- Εκτίμηση μεγεθών
- Ανάδειξη μαθηματικής σκέψης
- Δραστηριότητα
- Πλαίσιο δραστηριότητας (πάνω στο οποίο τίθενται προβληματισμοί)
- Πληροφοριακή
- Χωρίς λειτουργικό ρόλο. Παράδειγμα είναι οι πρώτες σελίδες των κεφαλαίων στο βιβλίο της Α' γυμνασίου, όπου οι οπτικές αναπαραστάσεις φαίνεται να μη παίζουν ενεργό διδακτικό ρόλο.

- **Η πολιτισμική αναφορά,** η ιστορική παρέμβαση μπορεί να προέρχεται από:

  - Την Ελλάδα
  - Άλλους πολιτισμούς
  - Γενική

- **Ο ρόλος της εικόνας σε σχέση με το κείμενο**, μπορεί να είναι:

  - Διακοσμητικός
  - Απεικονιστικός
  - Επεξηγηματικός
  - Συμπληρωματικός
  - Νοηματοδοτικός
  - Σχετίζεται απλά με το κείμενο
  - Σχετίζεται με νόημα
  - Ιστορικό πλαίσιο (στο οποίο οι έννοιες αρχικά αναπτύχθηκαν)

Από την καταμέτρηση ανά διάσταση, κατηγορία και βιβλίο των χαρακτηριστικών των ιστορικών αναφορών που περιλαμβάνονται στις σελίδες των βιβλίων, προέκυψε ο εξής πίνακας:

ΔΙΑΣΤΑΣΗ	**ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ**	*Α'Γυμνασ.*	*Β'Γυμνασ.*	*Γ'Γυμνασ.*
Κείμενο	Μαθηματικό επεξηγηματικό	3	28	50

Κείμενο	Έκθεση ιστορ. πληροφορίας	24	39	_
Κείμενο	πρόβλημα	24	11	50
Κείμενο	Αναδρομή διαδικασιών	18	6	-
Κείμενο	Αναδρομή προσωπικών επιτευγμάτων	9	16	14
Κείμενο	Συνδετικό αιτιολογικό	12	16	-
Κείμενο	Βιογραφικά στοιχεία	15	16	-
Εικόνα	Πορτρέτο	55	11	14
Εικόνα	Πρόσωπο σε δράση	18	11	50
Εικόνα	Αρχαιολογικές οντότητες	15	33	-
Εικόνα	Αρχιτεκτονικά μνημεία	6	22	14
Εικόνα	Αντικείμενο τέχνης	12	11	-
Εικόνα	Σχημ. αναπαράσταση	21	27	29
Διδ. λειτουργία	Εισαγωγική προετοιμασίας	-	38	57
Διδ. λειτουργία	Εκτίμηση μεγεθών	15	5,5	-
Διδ. λειτουργία	Ανάδειξη μαθηματικής σκέψης	15	11	-
Διδ. λειτουργία	Δραστηριότητα	15	5,5	36
Διδ. λειτουργία	Πλαίσιο δραστηριότητας	9	11	14
Διδ. λειτουργία	Πληροφοριακή	30	28	-
Διδ. λειτουργία	Χωρίς λειτουργικό ρόλο	33	-	-
Πολιτ.αναφορά	Ελλάδα	85	50	78
Πολιτ. αναφορά	Άλλοι πολιτισμοί	39	55,5	21
Πολιτ. αναφορά	Γενικό	6	5,5	-
Ρόλος εικόνας	Διακοσμητικός ρόλος	39	-	-
Ρόλος εικόνας	Απεικονιστικός	45	55,5	36
Ρόλος εικόνας	Επεξηγηματικός	12	28	43
Ρόλος εικόνας	Συμπληρωματικός	3	17	-
Ρόλος εικόνας	Νοηματοδοτικός	6	5,5	50
Ρόλος εικόνας	Σχετίζεται	39	33	14
Ρόλος εικόνας	Σχετίζεται με νόημα	33	67	43
Ρόλος εικόνας	Ιστορικό πλαίσιο	42	11	50

Πίνακας 1

Συχνότητα εμφάνισης κατηγοριών κειμένου, εικόνας, διδακτικής λειτουργίας, πολιτισμικής αναφοράς και της σχέσης εικόνας με κείμενο ιστορικών παρεμβάσεων στα σχολικά βιβλία του γυμνασίου (%)

Αναλύοντας τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου δίνεται έμφαση στη χρήση των ιστορικών αναφορών κυρίως ως

βάση για προβλήματα, πρακτική που συναντάται σε μικρότερο βαθμό στις δύο προηγούμενες τάξεις.

Η χρήση μαθηματικών τύπων ακόμη και στις εισαγωγικές σελίδες των κεφαλαίων δημιουργεί το μεγάλο ποσοστό της κατηγορίας μαθηματικού επεξηγηματικού κειμένου. Η χρήση πορτρέτων στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου φαίνεται να υιοθετείται σε μεγάλο βαθμό, ενώ πρόσωπα σε δράση είναι προσφιλής αναπαράσταση στο βιβλίο της Γ΄ τάξης. Αναφορικά με τη διδακτική λειτουργία, παρατηρούμε ότι για την Α΄ τάξη περιέχονται κυρίως αναφορές που είτε έχουν πληροφορικό χαρακτήρα – παρόμοιο ποσοστό προκύπτει και για τη Β΄ τάξη – είτε δεν έχουν λειτουργικό διδακτικό ρόλο, ενώ στη Β΄ και κυρίως στη Γ΄ τάξη οι αναφορές έχουν εισαγωγικό ρόλο, προετοιμάζοντας για όσα πρόκειται να διδαχθούν. Και εδώ διαπιστώνεται η επιλογή στη Γ΄ τάξη για χρήση της Ιστορίας ως βάση για μαθησιακές δραστηριότητες. Αυτό υποστηρίζεται και από το γεγονός ότι στο βιβλίο Δασκάλου της Γ ΄τάξης, υπάρχουν αρκετές προτάσεις για χρήση και άλλων ιστορικών παρεμβάσεων από τον εκπαιδευτικό. Διαπιστώνεται, επίσης, ότι οι περισσότερες ιστορικές αναφορές προέρχονται από τα μαθηματικά της Αρχαίας Ελλάδας στα βιβλία της Α΄ και Γ΄ τάξης, ενώ στη Β΄ τάξη εμφανίζεται μια ίση κατανομή ελληνικών μαθηματικών επιτευγμάτων και επιτευγμάτων άλλων πολιτισμών.

Ακόμα, διαπιστώνουμε την τάση, στο βιβλίο της Α΄ τάξης, οι εικόνες να έχουν κυρίως διακοσμητικό ή απεικονιστικό ρόλο, στη Β΄ κυρίως απεικονιστικό και στη Γ΄ επεξηγούν το κείμενο και του αποδίδουν νόημα. Σχετίζονται με νόημα με το κείμενο κυρίως στο βιβλίο της Β΄, ενώ στη Γ΄ παίζουν σε μεγαλύτερο ποσοστό το ρόλο δημιουργίας ιστορικού πλαισίου.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένα από τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα βιβλία του Γυμνασίου:

Α' Γυμνασίου

- Το έξυπνο τέχνασμα του Gauss
- Η ιστορία του μηδενός
- Τα σύμβολα των αριθμών
- Πυθαγόρειοι – ακολουθίες τρίγωνων αριθμών

- Το κόσκινο του Ερατοσθένη
- Ιστορία των κλασμάτων
- Η ηλικία του Διόφαντου
- Ευκλείδεια γεωμετρία –υπερβολική –ελλειπτική
- Τα τετράπλευρα κατά τον Ευκλείδη

Β' Γυμνασίου

- Η ηλικία του Διόφαντου
- Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα
- Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων – ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ
- Τα κανονικά πολύγωνα στη φύση, στη τέχνη και στις επιστήμες
- Εκτιμήσεις του π

Γ' Γυμνασίου

- Ο τετραγωνισμός του κύκλου
- Το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal
- Πυθαγόρειο θεώρημα και πυθαγόρειες τριάδες
- Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού
- Η χρυσή τομή
- Η θεωρία των πιθανοτήτων
- Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά
- Υπολογισμός του ύψους της Πυραμίδας από το Θαλή
- Οι θεμελιωτές της τριγωνομετρίας

Η ένταξη της ιστορίας στα βιβλία του Γυμνασίου φαίνεται ότι έχει αρχίσει να γίνεται με έναν πιο συστηματικό και ενδιαφέροντα από παλαιότερα τρόπο. Ωστόσο υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες οι ιστορικές πληροφορίες δεν είναι ούτε έγκυρες ούτε εξυπηρετούν κάποιο διδακτικό στόχο. Οι ιστορικές αναφορές όμως, πέρα από τις αδυναμίες που έχουν επισημανθεί από διάφορους ερευνητές (Θωμαΐδης, 2007), είναι

ενδιαφέρουσες και θα μπορούσαν να λειτουργούν πιο ουσιαστικά στην επίτευξη των επιστημονικών διδακτικών στόχων. Παρόλα αυτά, μια τέτοια σκέψη δεν υπάρχει στην διδακτική φιλοσοφία τους, αφού από τους στόχους και τις πρακτικές τους δεν προκύπτει αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων κατάλληλη, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν εκτίμηση της φύσης, της εξέλιξης και των λειτουργιών των μαθηματικών ως επιστήμης.

Τα βιβλία μαθητή της Α΄ τάξης περιέχουν ιστορικές παρεμβάσεις σε μεγαλύτερο βαθμό από τα άλλα δύο. Έχουν πληροφοριακό και δομημένο χαρακτήρα και πλούσιες σε στοιχεία περιγραφές ιστορικών επιτευγμάτων, ενώ της Β΄ τάξης στοχεύουν στο να δώσουν το νόημα των ενοτήτων μέσα από το ιστορικό πλαίσιο και να εισάγουν τον μαθητή σε όσα θα μελετήσει στις ενότητες που ακολουθούν, υιοθετώντας τις περισσότερες φορές πιο αφηγηματικό ύφος. Η λογική του βιβλίου της Γ΄ τάξης φαίνεται ότι βασίζεται περισσότερο στις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, περιλαμβάνοντας αρκετά ιστορικά στοιχεία στο βιβλίο του εκπαιδευτικού. Αν και η πρακτική του βιβλίου αυτού υιοθετεί σε μεγαλύτερο βαθμό τις ιστορικές αναφορές ως βάση για προβλήματα και δραστηριότητες, η λογική τους ακολουθεί το πλαίσιο επίλυσης ή ενασχόλησης με οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα του βιβλίου, αποδυναμώνοντας έτσι το ιστορικό πλαίσιο. Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση της έννοιας της απόδειξης μέσα από ιστορική μελέτη προτείνεται ως σχέδιο διαθεματικής εργασίας στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, αλλά οι προτεινόμενες δραστηριότητες για τις ομάδες δεν βασίζονται σε υλικό του βιβλίου του μαθητή, του εκπαιδευτικού. Είναι, δε, τόσο ευρείες και θεωρητικές που δύσκολα μπορεί να αναπτυχθεί κάποιος βαθμός επίγνωσης της πολύ σημαντικής έννοιας της απόδειξης.

Αυτό που φαίνεται να προκύπτει ως αναγκαιότητα είναι η αναζήτηση τρόπων ενασχόλησης των μαθητών με τις ιστορικές αναφορές των βιβλίων, που να τους εμπλέκει με τη μελέτη συγκεκριμένων αυθεντικών πλαισίων ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης, με την ουσία της, τα εργαλεία της, τους δρόμους της που δεν ήταν ούτε εύκολοι, ούτε δεδομένοι, αποκτώντας έτσι επίγνωση της δύναμης της ανθρώπινης σκέψης και ιδιαίτερα της γοητείας της μαθηματικής αναζήτησης. Έτσι, παραδείγματα όπως αυτά της έξυπνης λύσης του μαθητή Gauss, της Γεωμετρικής απόδειξης αλγεβρικών ταυτοτήτων, της επινόησης των λόγων και των αναλογιών του Πυθαγόρα χρειάζονται αρχικά

την εμπλοκή του μαθητή στην ίδια την ιστορική μαθηματική πληροφορία και στη συνέχεια στον προσδιορισμό και την αξιολόγηση του πλαισίου, των συνθηκών και των προσωπικών χαρακτηριστικών που επέτρεψαν την ανάπτυξη και εξέλιξη συγκεκριμένων ιδεών.

Όσον αφορά τα βιβλία του Δημοτικού, ιστορικά σημειώματα υπάρχουν στο βιβλίο μαθηματικών της ΣΤ' στην αρχή των θεματικών ενοτήτων. Συγκεκριμένα:

- Αριθμοί και πράξεις (Ινδοί, Άραβες, Ευρωπαίοι, σύμβολα των αριθμών)
- Εξισώσεις (κάτοικοι Μεσοποταμίας – πρόβλημα σε πήλινη πλάκα)
- Λόγοι –αναλογίες (αναλογίες – συμμετρία σε πρωτόγονες ζωγραφιές)
- Γεωμετρία (Αρχαία Ελλάδα – Θαλής ο Μιλήσιος – Πυθαγόρας ο Σάμιος, Ευκλείδης, Δημόκριτος)

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τα Μαθηματικά δε δημιουργήθηκαν ξαφνικά και χωρίς λόγο. Αντίθετα διαμορφώνονται σύμφωνα με τις ανάγκες της εποχής και εξελίσσονται συνεχώς με βάση τις κοινωνικές συνθήκες. Επομένως οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τη μαθηματική έννοια, τη χρήση της και την εξέλιξη της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μια κριτική ανάλυση των ιστορικών σημειωμάτων στα διδακτικά βιβλία.

Σύμφωνα με τα Α.Π.Σ. τα ιστορικά σημειώματα των Μαθηματικών πρέπει να συνδέονται άμεσα με την αναζήτηση και κατάκτηση της γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι τα ιστορικά σημειώματα δεν πρέπει απλά να παρέχουν πληροφοριακό υλικό αλλά να βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών που αποτελούν το αντικείμενο της διδασκαλίας και να συνεισφέρουν στη γνωστική συγκρότηση του περιεχομένου της συγκεκριμένης ενότητας. Συμπερασματικά οι ιστορικές αναφορές των διδακτικών βιβλίων θα πρέπει:

- να είναι έγκυρες
- να εξυπηρετούν τους στόχους της ενότητας στην οποία ενσωματώνονται.

Στην πρώτη έκδοση των βιβλίων που έγινε το 2006-2007 υπήρχαν **αρκετά ιστορικά λάθη**, τα οποία στην πλειοψηφία τους διορθώθηκαν σε επόμενη έκδοση. Ακόμα υπάρχουν **πολλά ιστορικά σημειώματα που απλά παρέχουν πληροφορίες** χωρίς όμως μαθηματικά ερεθίσματα, καθώς και **ιστορικά σημειώματα σε λάθος θέση** στο σχολικό βιβλίο αφού δεν κεντρίζουν το ενδιαφέρον του μαθητή. Αυτό δείχνει βέβαια ότι τα ιστορικά σημειώματα γράφτηκαν με προχειρότητα και χωρίς κανένα επανέλεγχο, με κύριο στόχο να ικανοποιηθεί ο σχετικός όρος της προκήρυξης του διαγωνισμού συγγραφής των βιβλίων και όχι η απαίτηση για ουσιαστική αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία.

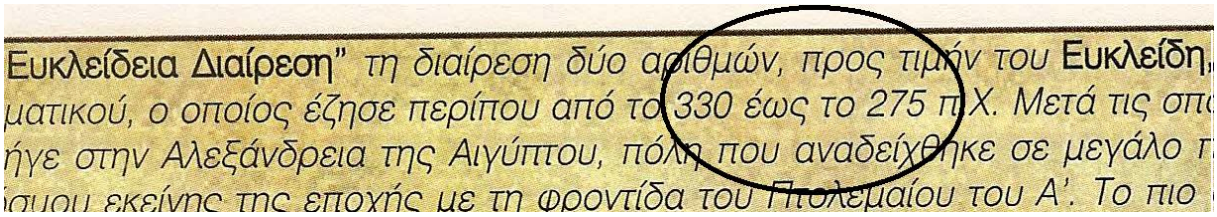
Στη παρούσα παράγραφο θα προσπαθήσουμε να αποτυπώσουμε τις ανορθογραφίες που υπήρξαν ή και συνεχίζουν να υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια σχετικά με τα ιστορικά σημειώματα. Σημαντικό είναι να ερευνήσουμε διεξοδικά το πώς αυτές επηρεάζουν θετικά ή αρνητικά την πορεία της διδασκαλίας και σε τι βαθμό μπορεί να επιτευχθεί η ενσωμάτωσή τους στα

πλαίσια της τάξης. Η συχνότητα των παραπάνω ακολουθεί τη συχνότητα που ακολουθούν τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά συγγράμματα Ως μια πρώτη παρατήρηση αναφέρουμε ότι αυτά δεν είναι ομοιόμορφα μοιρασμένα σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου αλλά ακολουθούν μια φθίνουσα πορεία με την πρώτη Γυμνασίου να συγκεντρώνει τον μεγαλύτερο όγκο σημειωμάτων.

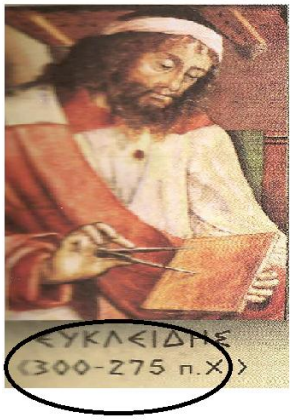
3.1 Ιστορικά σημειώματα με λάθη

Στα νέα σχολικά εγχειρίδια που προσπάθησαν να ενσωματώσουν την Ιστορία των Μαθηματικών παρατηρήθηκαν πολλά λάθη. Οι συγγραφείς των βιβλίων παραθέτουν ανακριβείς ιστορικές αναφορές καθώς και αναφορές που είναι αλληλοσυγκρουόμενες. Κάτι τέτοιο εκ πρώτης μπορεί να μην γίνεται αντιληπτό από το μέσο μαθητή αλλά πρέπει να έχουμε στα υπόψην μας ότι το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί σημείο αναφοράς για τους μαθητές και τους γονείς τους που σε αρκετές περιπτώσεις επιφορτίζονται με το βάρος της μελέτης τους. Ένα βιβλίο γεμάτο με λάθη οποιασδήποτε μορφής κλονίζεται ως προς την αξιοπιστία του.

Ξεκινώντας την ανασκόπηση των ιστορικών σημειωμάτων θα σταθούμε σε μια χαρακτηριστική περίπτωση όπου στο βιβλίο της Α Γυμνασίου αναφέρονται συγκρουόμενες πληροφορίες για ένα από τα πρόσωπα που καθιέρωσαν τον τρόπο που έχει δομηθεί όλη η σύγχρονη επιστήμη. Στην πρώτη έκδοση του βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου (2007) οι συγγραφείς δεν έδωσαν αρκετή προσοχή στα ιστορικά σημειώματα που παρέθεταν σε διαφορετικά σημεία του βιβλίου. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μέσα από την Ιστορία που παρέθεταν στα επιμέρους τμήματα του βιβλίου να προκύπτουν τρεις διαφορετικές “εκτιμήσεις” για το χρονικό διάστημα που έζησε ο Ευκλείδης:


Ευκλείδεια Διαίρεση” *τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του* Ευκλείδη,
ματικού, ο οποίος έζησε περίπου από το 330 έως το 275 π.Χ. Μετά τις σπ
ήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο π
ισμού εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α΄. Το πιο

Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου σ.26: Ευκλείδης (330 – 275 π.Χ.)



Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου σ.147: Ευκλείδης (300 – 275 π.Χ.)

Ο **Πλάτωνας** *έγραψε στην είσοδο της* **Ακαδημίας** *το ρητό:* **"Μηδείς αγεωμέτρητος εἰσίτω"**, *δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα "***Στοιχεία***" (13 βιβλία) του* **Ευκλείδη** *(330 - 270 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι απο*

Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου σ.182: Ευκλείδης (330 – 270 π.Χ.)

Στη ανανεωμένη έκδοση (2010) του βιβλίου της Α γυμνασίου οι ημερομηνίες έχουν αντικατασταθεί από τη φράση «άκμασε περίπου το 300 π.Χ»

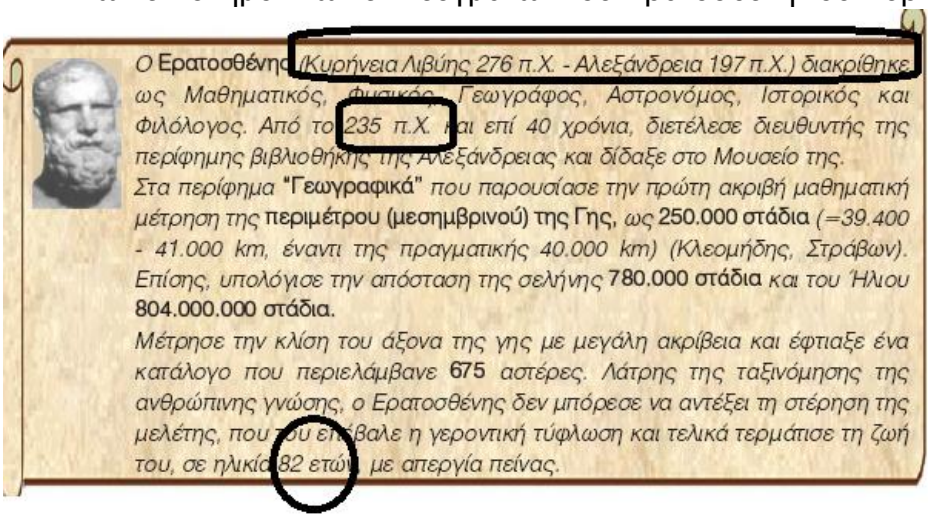
Μπορεί εκ πρώτης όψεως μια τέτοια ένσταση να φαίνεται υπερβολική, γιατί στη σχολική πραγματικότητα τα ιστορικά σημειώματα δεν αποτελούν σημείο αναφοράς για τον εκπαιδευτικό αλλά ούτε και σημεία εστίασης της προσοχής από τους μαθητές. Ωστόσο, αν κάποιος παρατηρητικός μαθητής εκτελέσει τις αντίστοιχες αφαιρέσεις, θα διαπιστώσει με έκπληξη ότι ο Ευκλείδης έζησε 55 ή 25 ή 60 χρόνια! Εδώ αγνοείται επιδεικτικά το γεγονός ότι η μοναδική έγκυρη ιστορική πηγή που διαθέτουμε για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι ένα απόσπασμα από τα *Σχόλια* του Πρόκλου στο 1^{ο} βιβλίο των *Στοιχείων*. Σύμφωνα με αυτή την πηγή η περίοδος ακμής του Ευκλείδη μπορεί να τοποθετηθεί λίγο πριν και λίγο μετά το 300 π.Χ., χωρίς να υπάρχει δυνατότητα προσδιορισμού κάποιου ακριβέστερου χρονικού διαστήματος. Σε καινούρια έκδοση των σχολικών βιβλίων έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις και αναφέρεται ότι ο Ευκλείδης έζησε περίπου το 300 π.Χ.

Όπως γίνεται αντιληπτό θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι κάτι τέτοιο αποτελεί μια πολύ μικρή αβλεψία αφού από τις ίδιες τις ιστορικές πηγές που έχουμε στη διάθεσή μας δεν προκύπτει ακριβής ημερομηνία για την περίοδο ζωής αυτού του σημαντικού Έλληνα μαθηματικού. Οπότε η συγγραφική

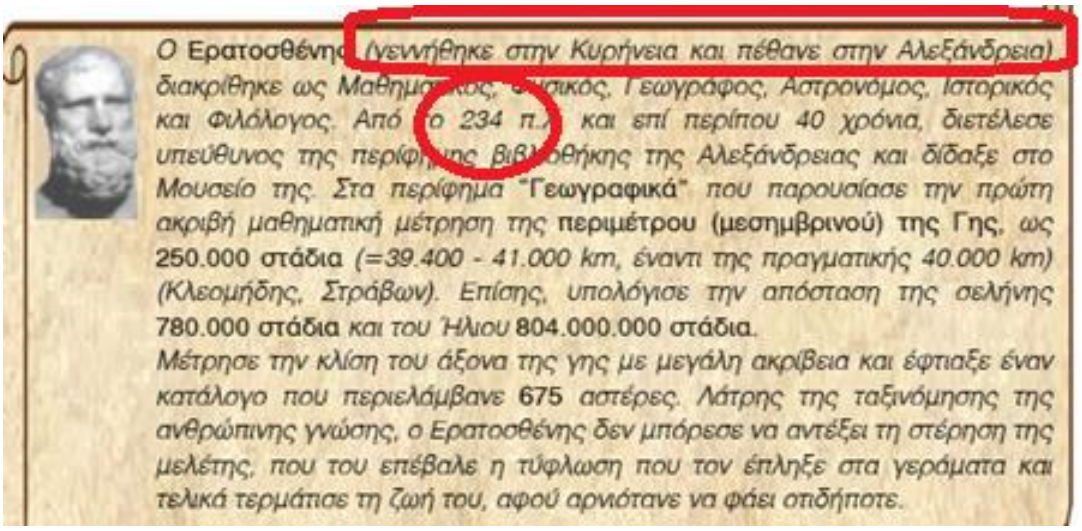
ομάδα δεν ήταν τελείως λάθος. Όμως από μαθηματικής και διδακτικής σκοπιάς, όταν ένα τέτοιο λάθος εντοπιστεί από έναν μαθητή, είναι σε θέση να δημιουργήσει αμφιβολίες ως προς τη γενική εγκυρότατα του συγγράμματος. Κάτι τέτοιο είναι αρκετά σοβαρό καθώς μπορεί κάποιος να επικαλείται τέτοιες περιπτώσεις ακόμα και σε λύσεις ασκήσεων μεταθέτοντας τις τυχόν αδυναμίες του στην ανεπάρκεια του σχολικού βιβλίου.

Στα προηγούμενα αναφερθήκαμε σε μία περίπτωση που μπορεί να φαίνεται εξεζητημένη καθώς οι πληροφορίες βρίσκονταν διάσπαρτες σε διαφορετικά κεφάλαια του σχολικού βιβλίου και κάποιος θα ισχυριστεί ότι ένα τέτοιο λάθος δε θα μπορούσε να γίνει αντιληπτό από έναν μαθητή. Ωστόσο όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο κομμάτι υπάρχουν περιπτώσεις που στο ίδιο απόσπασμα παρουσιάζονται χρονολογικές ανακρίβειες.

Στη σελίδα 29 του ίδιου βιβλίου υπήρχε το επόμενο ένθετο ιστορικό σημείωμα, στο οποίο επιχειρείται μια σύνοψη των βιογραφικών στοιχείων και των επιστημονικών επιτευγμάτων του Ερατοσθένη του Κυρηναίου:



Ο Ερατοσθένης (Κυρήνεια Λιβύης 276 π.Χ. - Αλεξάνδρεια 197 π.Χ.) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 235 π.Χ. και επί 40 χρόνια, διετέλεσε διευθυντής της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της.
Στα περίφημα **"Γεωγραφικά"** που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, ως **250.000 στάδια** (=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης **780.000 στάδια** και του Ήλιου **804.000.000 στάδια**.
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε ένα κατάλογο που περιελάμβανε **675** αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η γεροντική τύφλωση και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, σε ηλικία 82 ετών, με απεργία πείνας.



Ο Ερατοσθένης (γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα **"Γεωγραφικά"** που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, ως **250.000 στάδια** (=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης **780.000 στάδια** και του Ήλιου **804.000.000 στάδια**.
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε **675** αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιόταν να φάει οπωδήποτε.

Οι χρονολογίες που αναφέρονταν στο σημείωμα αυτό ήταν αντιφατικές. Αν ο ίδιος παρατηρητικός μαθητής εκτελέσει δύο αφαιρέσεις θα διαπιστώσει ότι 276 – 197 = 79 και (276-235) + 40 = 81. Δηλαδή ο Ερατοσθένης έζησε 3 χρόνια λιγότερα από τα 82 που αναφέρονται παρακάτω στο ίδιο σημείωμα και ότι εξακολουθούσε να διευθύνει το Μουσείο της Αλεξάνδρειας 2 χρόνια μετά το θάνατό του! Ποιες ιστορικές πηγές εξασφαλίζουν τέτοια "ακρίβεια" στοιχείων για το βίο του Ερατοσθένη;

Στο ίδιο ιστορικό σημείωμα έχουμε μια άλλη χαρακτηριστική περίπτωση προβληματικής χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών, την ανεξέλεγκτη χρήση εικονογραφικού υλικού. Η συγκεκριμένη εικόνα του Ερατοσθένη δεν συμπίπτει με καμία από τις γνωστές που υπάρχουν στη βιβλιογραφία ή το διαδίκτυο, οι οποίες βέβαια με τη σειρά τους είναι πολύ μεταγενέστερες, υποθετικές απεικονίσεις. Εδώ δεν ελλοχεύει απλώς ο κίνδυνος της παράθεσης εσφαλμένων βιογραφικών στοιχείων, αλλά της ταύτισης προσώπων που δεν έχουν την παραμικρή σχέση μεταξύ τους. Στην καινούρια έκδοση έχουν αφαιρεθεί οι χρονολογίες γέννησης και θανάτου του Ερατοσθένη όπως και η ημερομηνία έναρξης της θητείας του ως υπεύθυνου στη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας. Η εικόνα δεν έχει αλλάξει και παραμένει ίδια. Στο ψηφιακό σχολείο (αφορά τα διδακτικά πακέτα ανά τάξη:
http://ebooks.edu.gr/2013/classcoursespdf.php?classcode=DSGYM-A
http://ebooks.edu.gr/2013/classcoursespdf.php?classcode=DSGYM-B
http://ebooks.edu.gr/2013/class-main.php?classcode=DSGYM-C)
παρατηρούμε ότι υπάρχει και το ανανεωμένο βιβλίο αλλά και το παλιό χωρίς να υπάρχει κάποιος σαφής διαχωρισμός για το ποιο είναι το σωστό ! Παρατηρώ ότι το σωστό βιβλίο είναι εκείνο που βρίσκεται στα διδακτικά πακέτα και όχι στα βιβλία που εμφανίζονται στην αρχική οθόνη και όπου οι μαθητές έχουν πιο άμεση πρόσβαση. Το ίδιο ισχύει για όλα τα ιστορικά σημειώματα της Α Γυμνασίου.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα εξόφθαλμο παράδειγμα λάθους όπου η ίδια η εικόνα μαρτυρά την προχειρότητα με την οποία έχει αντιμετωπιστεί η εισαγωγή της στη συγκεκριμένη θέση. Η επόμενη προσωπογραφία βρισκόταν στη σελίδα 79 του βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου:

Δεν χρειάζεται ιδιαίτερη παρατηρητικότητα για να διαπιστώσει κανείς ότι στην προσωπογραφία αυτή δεν απεικονίζεται ο Απολλώνιος ο Περγαίος, ο περίφημος συγγραφέας των *Κωνικών*, αλλά ο νεοπυθαγόρειος φιλόσοφος και μύστης Απολλώνιος ο Τυανεύς (που έζησε τον 1^{ο} αιώνα μ.Χ.)!

Στην καινούρια έκδοση έβαλαν σωστή προσωπογραφία. Υπήρχαν αρκετά ακόμα ιστορικά σημειώματα στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου με λάθη (εσφαλμένες και μη έγκυρες πληροφορίες).

Το τελευταίο από τα παραδείγματα που παρουσιάστηκε λάθος, βρίσκεται στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου στο πλαίσιο ενός εισαγωγικού σημειώματος για το κεφάλαιο «εξισώσεις –ανισώσεις», σελ.10. Αναφέρεται ένα κείμενο για τη ζωή του Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου και στη συνέχεια η μετάφραση ενός επιγράμματος που υποτίθεται ότι έγραψαν οι μαθητές του πάνω στον τάφο του:

Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου έλληνα μαθηματικού Διόφαντου, που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση).
*Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα **«Αριθμητικά»** (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται **«Διοφαντικές εξισώσεις»**.*

Όταν πέθανε, οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.

Εδώ τα 13 κεφάλαια (βιβλία) ενός συγκεκριμένου έργου του Διόφαντου, των *Αριθμητικών*, συγχέονται με το συνολικό αριθμό των έργων του. Σύμφωνα με δήλωση του ίδιου του Διόφαντου, τα *Αριθμητικά* ήταν χωρισμένα σε 13 κεφάλαια από τα οποία 6 διασώθηκαν στο ελληνικό πρωτότυπο και μεταφέρθηκαν μετά την πτώση του Βυζαντίου στη Δύση, ενώ άλλα 4 ανακαλύφθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1960 σε μια αραβική μετάφραση του 9^{ου} αιώνα μ.Χ. Γνωρίζουμε με βεβαιότητα μόνο ένα άλλο έργο του Διόφαντου, που φέρει τον τίτλο *Περί πολυγώνων αριθμών*, μικρό μέρος του οποίου έχει διασωθεί στο ελληνικό πρωτότυπο. Άρα τίθεται εύλογα το ερώτημα: Ποια ήταν τα υπόλοιπα 11 “από τα 13 έργα που έγραψε” ο Διόφαντος; Επιπλέον, από πού αντλούν οι συγγραφείς την πληροφορία ότι ο Διόφαντος έδωσε ο ίδιος παραγγελία στους μαθητές του να συνθέσουν ένα γρίφο και να τον γράψουν πάνω στον τάφο του; Μήπως διαθέτουν πηγές που αγνοεί όλη η υπόλοιπη κοινότητα των ιστορικών της μαθηματικής επιστήμης;

Αυτό το ιστορικό σημείωμα εξακολουθεί να υπάρχει στο βιβλίο της Β’ Γυμνασίου, χωρίς να έχει γίνει καμιά διόρθωση.

3.2 Πληροφοριακές αναφορές χωρίς μαθηματικά ερεθίσματα

Σε αρκετά σημεία των σχολικών βιβλίων παρατηρείται το φαινόμενο να ενσωματώνονται ιστορικά αποσπάσματα τα οποία δεν συνδέονται άμεσα με τη διδακτέα ενότητα. Επιπλέον μπορεί να βρίσκονται στη σωστή μαθηματική ενότητα αλλά σε λάθος θέση μέσα σε αυτή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αποτελούν απλά μια πληροφόρηση που παρέχεται στους μαθητές χωρίς να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία της ενότητας στην οποία βρίσκονται. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ο αυξημένος όγκος της διδακτέας ύλης που δεν αφήνει πολλά περιθώρια ουσιαστικής αξιοποίησης της ιστορίας. Συνεπώς προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι ένα προβληματικό ιστορικό σημείωμα δεν προβάλλεται καθόλου.

Με αυτόν τον τρόπο ακυρώνεται μία από τις σημαντικότερες δυνατότητες που προσφέρει ένα ιστορικό σημείωμα που δεν είναι άλλη από το να κεντρίσει το ενδιαφέρον του μαθητή για την προς διδασκαλία έννοια.

Το επόμενο ιστορικό σημείωμα από το βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου (σ.146) φέρει τον περίεργο τίτλο “Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ”. Βέβαια το κείμενο και οι εικόνες που ακολουθούν έχουν τόση σχέση με το μηχανισμό των Αντικυθήρων, όση σχέση έχει ο αστρολάβος με αυτό το αινιγματικό αρχαιολογικό εύρημα, που εξακολουθεί μέχρι σήμερα να έλκει το ενδιαφέρον των ***ερευνητών [6].***

Αυτό το ιστορικό σημείωμα εξακολουθεί να υπάρχει στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ

Αστρολάβος είναι ένα αστρονομικό όργανο που εφευρέθηκε από τον έλληνα αστρονόμο Ίππαρχο το 2ο αιώνα π.Χ. για να μετρήσει το ύψος ενός αστεριού πάνω από τον ορίζοντα, καθώς και τη γωνιακή απόσταση δύο αστεριών.

Στην πρώτη του μορφή ο αστρολάβος ήταν ένας ξύλινος δίσκος, στο κυκλικό πλαίσιο του οποίου ήταν χαραγμένες οι υποδιαιρέσεις του σε μοίρες και μια ακτίνα που έδειχνε το μηδέν (αρχή) των υποδιαιρέσεων.

Στο κέντρο του δίσκου ήταν στερεωμένος ένας κανόνας (χάρακας), που μπορούσε να περιστρέφεται και με τον οποίο γινόταν η στόχευση του αστεριού.

Αργότερα οι αστρολάβοι έγιναν μεταλλικοί, με παραστάσεις από ζωδιακό κύκλο και κάποιους αστρονομικούς χάρτες. Ήταν το κυριότερο όργανο ναυσιπλοΐας κατά το μεσαίωνα και αντικαταστάθηκε από τον εξάντα τον 18ο αιώνα.

Σήμερα οι αστρολάβοι είναι αστρονομικά όργανα μεγίστης ακρίβειας, εφοδιασμένα με διόπτρα μπροστά από την οποία είναι προσαρμοσμένο ένα πρίσμα. Προσδιορίζουν τη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα συγκεκριμένο αστέρι βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα σε ορισμένο ύψος, συνήθως 45° ή 60°.

Στη γαλλική αυτή μικρογραφία του 13ου αιώνα τρεις μοναχοί παρατηρούν με έναν αστρολάβο κάποιο αστέρι.

Μπορούμε να πούμε ότι μια πιο αναλυτική εικόνα ενός αστρολάβου θα μπορούσε να εμπλέξει τους μαθητές στο πειραματισμό και να επιτρέψει στον εκπαιδευτικό να τους εμπλέξει σε μια κατάσταση δοκιμής και εξαγωγής συμπεράσματος. Με τον τρόπο που παρατίθεται το απόσπασμα δε φαίνεται πως συνδέεται με τον ορισμό των ημιτόνων και συνημιτόνων που μόλις έχουν προηγηθεί. Επιπλέον πώς ένα τέτοιο σημείωμα θα μπορούσε να κεντρίσει το ενδιαφέρων των μαθητών για τη χρησιμότητα των παραπάνω μαθηματικών

εννοιών όταν παρατίθεται μετά το πέρας του μαθήματος και όχι στην αρχή του;

Ενδεικτικά παρουσιάζουμε μερικά ακόμα ιστορικά σημειώματα από τα βιβλία του Γυμνασίου που έχουν καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα, παρέχουν γενικές πληροφορίες οι οποίες δεν έχουν καμιά χρησιμότητα για το μαθητή και δεν του προσφέρουν βοήθεια για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών:

*Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων **+** και **−** χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «**:**».*
Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό.
*Τα σύμβολα **x** και **=** καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.*

Σελ.16, Α' γυμνασίου

Πρόκειται για μια αναφορά καθαρά πληροφοριακού χαρακτήρα που δίνεται στην ενότητα Α.1.2 και πιο συγκεκριμένα στη πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών. Το σημείωμα αυτό βρίσκεται στο τέλος του μαθήματος και ακριβώς πριν τα παραδείγματα – εφαρμογές. Στη θέση που βρίσκεται κανείς δεν του δίνει τη δέουσα σημασία καθώς τα επόμενα φαντάζουν πολύ πιο σημαντικά και ουσιαστικά τόσο για τους μαθητές όσο και για τους καθηγητές. Η μοναδική περίπτωση στην οποία ένα τέτοιο σημείωμα θα μπορούσε να φανεί χρήσιμο θα ήταν εισάγοντας έναν προς διερεύνηση προβληματισμό σχετικά με τα σύμβολα και τη χρησιμότητά τους κατά την εισαγωγή αυτής της ενότητας.

Στο σημείωμα που ακολουθεί αναφέρεται μια πληροφορία με ένα σύστημα αρίθμησης των δεκαδικών αριθμών διαφορετικό από αυτό που χρησιμοποιείται σήμερα και χωρίς καμία συσχέτιση με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Στα μάτια ενός μαθητή ένα τέτοιο σημείωμα δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον αφού του παρέχει μια πληροφορία που εκ πρώτης όψεως δε φαίνεται να σχετίζεται άμεσα με την ενότητα που διδάσκεται. Ένας

μαθηματικός μπορεί να αντιληφθεί το πιο γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσεται, δε μπορεί όμως να συμβεί το ίδιο με έναν μαθητή.

Ο Φλαμανδός μαθηματικός Σιμόν Στέβιν *(Simon Stevin, 1548 - 1620) ασχολήθηκε με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Το έργο "η δεκάτη" (La disme) ήταν μια από τις μεγάλες συνεισφορές στη βελτίωση της τεχνικής των υπολογισμών και στην καθιέρωση του Ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης. Την ίδια χρονιά δημοσιεύει την "Αριθμητική" του, όπου εισάγει το σύμβολο ⓪, για να υποδηλώσει το ακέραιο μέρος του αριθμού, το σύμβολο ①, για τα δέκατα, το ②, για τα εκατοστά, κ.λπ. Με αυτό τον τρόπο συμβολισμού ο δεκαδικός 34,25 γραφόταν 34⓪2①5②, ο αριθμός 0,167 γραφόταν 0⓪1①6②7③ και ο αριθμός 32 γραφόταν 32⓪. Ο γνωστός σήμερα συμβολισμός προτάθηκε από τον* John Napier *στα 1620 περίπου. Αυτός πρώτος χρησιμοποίησε το κόμμα μεταξύ του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους ενός αριθμού. Το νέο σύστημα συμβολισμού επικράτησε, λόγω της συντομίας στην αναπαράσταση μεγάλων αριθμών και την ευκολία στην απομνημόνευση και εκτέλεση διαφόρων πράξεων.*

Σελ.56, Α' Γυμνασίου

Στο παράδειγμα που ακολουθεί έχουμε μια προσπάθεια να επιτευχθεί σύνδεση μεταξύ μιας γεωμετρικής έννοιας και του συστήματος αρίθμησης που τη διέπει. Μια τέτοια πληροφορία πρέπει να χρησιμοποιηθεί σωστά από τον εκπαιδευτικό ώστε να μπορέσει να εξάγει χρήσιμα συμπεράσματα. Ωστόσο τα συμπεράσματα αυτά θα μπορούσαν να είναι για τα διαφορετικά συστήματα αρίθμησης που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί. Όπως φαίνεται κάτι τέτοιο δε μπορεί να συμβαδίζει με τη προσπάθεια εισαγωγής μιας γεωμετρικής έννοιας.

Η μοίρα ανήκει σε εξηνταδικό *σύστημα αρίθμησης (με βάση το* 60*). Αυτό προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το* 2100 π.Χ. *Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το* 5 *και το* 12*). Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση* 60 *καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός* 60 *επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηνταδικό σύστημα για τη μέτρηση των γωνιών, του χρόνου κ.λπ.*

Σελ.166, Α' Γυμνασίου

Παρόμοια ιστορικά σημειώματα συναντάμε και στα βιβλία της Β γυμνασίου. Τα σημειώματα εδώ παρουσιάζονται πιο μακροσκελή. Έτσι στο

τέλος της ενότητας για τις εξισώσεις α΄ βαθμού βρίσκουμε το παρακάτω απόσπασμα.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες.

Κατά την αρχαιότητα η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού είχε εμποδίσει τις λύσεις προβλημάτων με αποτέλεσμα αυτές να θεωρούνται πολύπλοκες και δύσκολες.

- *Στον περίφημο αιγυπτιακό πάπυρο του Ρηντ (περίπου 1700 π.Χ. - Βρετανικό Μουσείο) περιγράφονται προβλήματα με ιερογλυφικά (διαβάζονται από δεξιά προς τα αριστερά).*
- *Στην Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας) οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν κατά κάποιον τρόπο:*
  - *Ο Γάλλος Nicolas Chuquet (1445 - 1500) έγραφε: «12^0 p 5^1 ισούται με 20^0», δηλαδή $12x^0 + 5x^1 = 20x^0$ ή πιο απλά $12 + 5x = 20$.*
  - *Επίσης, ο Γάλλος François Viete (1540 - 1603) έγραφε: «12aq 5a aeq. 23».*
  - *Ο Ιταλός Niccolo Fontana ή Tartaglia (1499 - 1557) έγραφε επίσης: «12 N p 5 R ισούται 20 N».*
- *Ο Γάλλος René Descartes (ή Καρτέσιος 1596 - 1650) στις αρχές του 17ου αιώνα έγραφε «12 + 5z B20». Την εποχή αυτή τα μαθηματικά καθώς και άλλα προβλήματα διατυπώνονται σχεδόν αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα, γεγονός που συνετέλεσε στην αλματώδη πρόοδο της επιστήμης.*

Σελ. 21, Β' γυμνασίου

Το χαρακτηριστικό με αυτό το σημείωμα είναι ότι βρίσκεται στο τέλος της ενότητας ακόμα και μετά από τις προτεινόμενες ασκήσεις. Όπως γίνεται αντιληπτό αυτό από μόνο του υποσκελίζει τη σημασία του. Επιπλέον ο προβληματισμός που τίθεται στους μαθητές έχει να κάνει με τις δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν στο παρελθόν ως προς το συμβολισμό μαθηματικών εννοιών. Αναφέρονται μόνο οι συμβολισμοί και όχι οι προβληματισμοί που οδήγησαν σε αυτούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην δημιουργείται έντονος προβληματισμός για τους λόγους χρήσης αυτών των συμβόλων και το σκεπτικό που μπορεί να κρύβεται πίσω από αυτούς.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.
*Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον **Πυθαγόρα το Σάμιο** (585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε.*
Όμως είναι βέβαιο πως είτε ό ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία 100 βοδιών. Για το λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως "θεώρημα της εκατόμβης". Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος.
Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ' αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield.
Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ' ένα βιβλίο.

Σελ. 132, Β' Γυμνασίου

Στην σελίδα 132 παρουσιάζεται στο τέλος της ενότητας μια σύντομη βιογραφία για τον Πυθαγόρα

και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να βρίσκεται στην αρχή της ενότητας και να δίνει μέρος της απόδειξης που έδωσαν οι αρχαίοι σχετικά με αυτό το θεώρημα. Με τον τρόπο που δίνεται αποτελεί ακόμα μία αναφορά που δεν κεντρίζει το ενδιαφέρον του μαθητή και που δε ταυτίζεται εντελώς με τη διδακτέα ενότητα.

Στο παρακάτω απόσπασμα ακολουθεί ένα ωραίο ιστορικό κομμάτι το οποίο όμως θα έπρεπε με τη σειρά του να βρίσκεται στην αρχή ή και ενσωματωμένο στην ενότητα που διδάσκεται. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα είχαν στα χέρια τους μια πολύ όμορφη εισαγωγή για τα πολύγωνα, το πώς χρησιμοποιήθηκαν μέσα στους αιώνες και ποια η σημασία τους για τις κοινωνίες μέσα από τις οποίες αναδείχθηκαν.

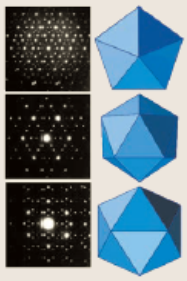
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο "συμμετρικός" τρόπος χρωματισμού.

Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για τον λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.



Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ού αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.

Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

Σελ. 185, Β' Γυμνασίου

Αντιθέτως το μάθημα αρχίζει απλά παραθέτοντας απλά μερικά πολύγωνα και την κατασκευή τους. Το σημείωμα δίνεται στο τέλος και απλά παρουσιάζει μερικά από τα ανθρώπινα επιτεύγματα που έχουν πραγματοποιηθεί με τη χρήση των κανονικών πολυγώνων.

Ένα ακόμα ιστορικό σημείωμα που φαίνεται ότι έχει καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα βρίσκεται στο τέλος του μαθήματος της Β γυμνασίου σχετικά με το μήκος του κύκλου. Παρατηρείται ότι δίνεται ένας μεγάλος όγκος πληροφόρησης σχετικά με τον υπερβατικό αριθμό π και τις τιμές που του έχουν αποδοθεί στο πέρασμα των αιώνων από τους διάφορους πολιτισμούς που ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό του. Όλη αυτή η παράθεση τιμών φαντάζει ανούσια αφού σε καμία περίπτωση δε φαίνεται η διαδικασία και τα ερεθίσματα που οδήγησαν σε αυτές.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971 \ldots$

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, –όπως λέγεται– αριθμός που συναντάται στη φύση. Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο π θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο π είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $\left(\frac{8}{9}\delta\right)^2$, όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε, $\pi \approx 3{,}16049\ldots$

Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν επιστημονική μέθοδο για τον υπολογισμό του π. Το συνδύασαν με ένα από τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.

Εκτιμήσεις του π

*Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρούν προσεγγίσεις του **π** με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \le \pi \le 3\frac{10}{70}$ ***ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ:*** $\pi \approx \frac{377}{120}(=3{,}1416\ldots)$

$3{,}14085\ldots \le \pi \le 3{,}142857$

$\pi \approx 3\frac{1}{7}$ ή $\frac{22}{7}$

TSU CHUNG-CHI (Κίνα): $3{,}1415926 \le \pi \le 3{,}1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL–KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN: *20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$

JOHN WALLIS: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$

LEIBNIZ *(1673):* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ldots$

JOHN MACHIN *(1706): 100 δεκαδικά ψηφία* ***JOLIANN DASE*** *(1824 - 1861): 200*

WILLIAM SHANKS *(1853): 707* ***ENIAC*** *(Η/Υ)(1949): 2037*

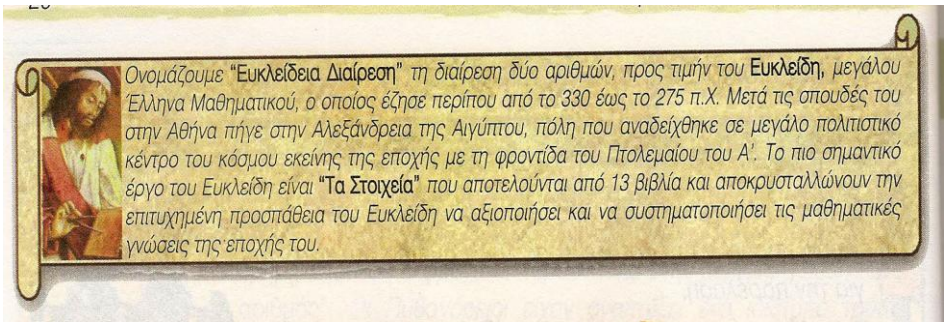
CDC 6600 *(1967): 500.000* ***Ιαπωνική Ομάδα*** *(1993): 16.777.216 (=2^{24}).*

Σελ. 189, Β’ Γυμνασίου

Παίρνοντας αφορμή από την παράθεση των παραπάνω πρέπει να συνοψίσουμε ότι από μόνα τους τα βιογραφικά στοιχεία, οι προσωπογραφίες, η απαρίθμηση επιτευγμάτων μεγάλων μαθηματικών δε συμβάλλουν με κάποιο ουσιαστικό τρόπο στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Για τα μαθηματικά ο ιστορικός Hankins, τα χαρακτήρισε ως ένα πεδίο " ιδιαίτερα δύσκολο για το βιογράφο, διότι ……είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρεις ανθρωπιστικό πλαίσιο στα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά έχουν τη δική τους ζωή … και δεν αντανακλούν παρά τον εαυτό τους (Hankins, 1979, σελ.11-12). Βέβαια η άποψη αυτή είναι αναμφισβήτητα ακραία αφού είναι προφανές ότι πίσω από κάθε μαθηματική δημιουργία βρίσκεται ο ανθρώπινος παράγοντας. Πάντως ο Hankins δεν είχε άδικο στο ότι οι μαθηματικές βιογραφίες είναι ένα δύσκολο εγχείρημα. Κι αυτό γιατί αν θελήσεις να τοποθετήσεις τα επιτεύγματα ενός μαθηματικού σε ένα ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο, απαιτείται ένας μεγάλος όγκος μαθηματικής πληροφορίας που μπορεί να διαταράξει τη ροή της αφήγησης. Αν θελήσεις να διατηρήσεις τη ροή της αφήγησης, δημιουργούνται μαθηματικά κενά, με επίπτωση στην κατανόηση του κειμένου.

Η μελέτη των βιβλίων των μαθηματικών του Γυμνασίου οδήγησε στη διαπίστωση ότι το κειμενικό είδος της βιογραφίας δεν περιλαμβάνεται σε μια καθαρή μορφή. Οι αναφορές στα σημαντικά πρόσωπα/επιστήμονες της μαθηματικής επιστήμης είτε απλά εμφανίζονται σε απεικονιστικά στοιχεία με τα πρόσωπα αναφοράς είτε σε πορτρέτο είτε σε στιγμιότυπα ανακάλυψης και τη χρονική διάρκεια της ζωής τους είτε συνήθως σε σύντομα βιογραφικά σημειώματα. Στο βιβλίο της Α' γυμνασίου καταγράφηκαν 22 βιογραφικά σημειώματα, 15 στο βιβλίο της Β' γυμνασίου και στο βιβλίο της Γ' γυμνασίου. Ενδεικτικά παρουσιάζω μερικά βιογραφικά σημειώματα:


Ονομάζουμε **"Ευκλείδεια Διαίρεση"** *τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του* **Ευκλείδη,** *μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος έζησε περίπου από το 330 έως το 275 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι* **"Τα Στοιχεία"** *που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.*

Σελ. 26, Α' Γυμνασίου

Ο Anders Celsius, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας.
Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο Magnus Celsius, μαθηματικός και ο Anders Spole, αστρονόμος. Ο πατέρας του Nils Celsius ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας.
Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας.
Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Tornea, στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του Lapland"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθεση του Newton, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος.
Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του.
Μετά το θάνατό του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.

Σελ.22, Β' γυμνασίου

Ο Ερατοσθένης *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα "*Γεωγραφικά*" που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης, *ως* 250.000 στάδια *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* 780.000 στάδια *και του Ήλιου* 804.000.000 στάδια.
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε 675 *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιόταν να φάει οτιδήποτε.*

Σελ. 29, Β Γυμνασίου

Η ανάλυση του περιεχομένου των ιστορικών βιογραφικών στοιχείων οδήγησε στον εντοπισμό τεσσάρων διαστάσεων. Η πρώτη διάσταση αναφέρεται σε προσωπικές πληροφορίες για το πρόσωπο/επιστήμονα, που μπορεί να είναι είτε χρονικοί/τοπικοί προσδιορισμοί, αναφορά σε γεγονότα και φιλοσοφία ζωής, είτε σε δράσεις επαγγελματικές ή κοινωνικές. Η δεύτερη διάσταση αναφέρεται στα μαθηματικά επιτεύγματα και περιλαμβάνει ονομασίες συγγραφικών έργων, εισαγωγή ή τροποποίηση μαθηματικών όρων/συμβόλων, νοητικές επινοήσεις και συστηματοποίηση της μαθηματικής γνώσης, παρατηρήσεις/υπολογισμούς/πειραματισμούς των προσώπων, επινόηση και κατασκευή οργάνων ή και παρουσίαση στιγμών επινόησης, ρήσεις ή γρίφους που χαρακτηρίζουν τα πρόσωπα. Η τρίτη διάσταση που εντοπίστηκε στα βιογραφικά σημειώματα σχετίζεται με την παρουσία κοινωνικών πλευρών που αναφέρονται στη συνεισφορά του έργου στην επιστήμη, στη σχέση της μαθηματικής γνώσης με ομάδες επιστημόνων, στη σχέση με το έργο άλλων επιστημόνων συγκεκριμένα, καθώς και με διάφορους κοινωνικούς παράγοντες, άλλες επιστήμες ή τέχνες. Μια τέταρτη τέλος διάσταση αναφέρεται στο αν και πώς τα βιβλία φαίνεται να αξιοποιούν

διδακτικά τα ιστορικά σημειώματα. Έτσι, όταν συμβαίνει αυτό, είτε τα βιογραφικά στοιχεία συσχετίζονται με το περιεχόμενο, είτε λειτουργούν ως πλαίσιο προβληματισμού προς τους μαθητές.

Διαπιστώνεται ότι και στα τρία βιβλία περιλαμβάνονται κυρίως στοιχεία για τις χρονικές περιόδους της ζωής των αναφερόμενων επιστημόνων και τους τόπους που γεννήθηκαν ή έζησαν. Μια άλλη κατηγορία, που εμφανίζεται κυρίως στο βιβλίο της Α' και της Γ' γυμνασίου είναι αυτή που αναφέρεται στις νοητικές επινοήσεις των προσώπων και στους τρόπους υπολογισμού και πειραματισμού τους με μαθηματικές έννοιες .Επίσης, αρκετά συχνά στα βιβλία της Α' και Β' τάξης, το βιογραφικά σημειώματα περιλαμβάνουν συσχετίσεις των μαθηματικών επιτευγμάτων ενός επιστήμονα, με το επιστημονικό έργο άλλων επιστημόνων.

Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι στη πλειοψηφία τους τα βιογραφικά σημειώματα του βιβλίου της Γ' γυμνασίου αξιοποιούνται ως ασκήσεις ή προβλήματα για τους μαθητές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αναφορά στον Θαλή τον Μιλήσιο (σελ. 224) και στην αξιοποίηση της θεωρίας των ομοίων σχημάτων για τον υπολογισμό της πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της .

Συμπερασματικά καταλήγω ότι τα βιογραφικά σημειώματα φαίνεται να υπηρετούν απλά μια "διαφωτιστική προσέγγιση" κάποιων πτυχών της ιστορίας, με μια εξαίρεση στη Γ΄ Γυμνασίου, όπου αρκετά λειτουργούν ως πλαίσιο επίλυσης ασκήσεων ή προβλημάτων. Τα περισσότερα βιογραφικά σημειώματα θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν επίπεδα, απλοϊκά και αποσπασματικά, χωρίς καμιά υπόδειξη για τη διδακτική τους συνεισφορά. Σε πολύ λίγες περιπτώσεις μέσω αυτών αποκαλύπτεται η διαδρομή της μαθηματικής σκέψης ή καταγράφονται παράγοντες που επέδρασαν θετικά ή αρνητικά στη διαδρομή της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Ακόμα πιο σπάνια επιχειρείται η σύνδεση του παρελθόντος με το παρόν, μέσα από ερωτήματα που θα προκαλούσαν τους μαθητές να σχολιάσουν αδυναμίες ή σημαντικές ιδέες ιστορικών προσώπων.

Επιπρόσθετα σύμφωνα με τους Thomaidis & Tzanakis (2009) σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα Προγράμματα Σπουδών και τα εγχειρίδια του γυμνασίου, το βασικό τους συμπέρασμα είναι: "*Το βασικό χαρακτηριστικό αυτού του ιστορικού υλικού είναι το μεγάλο ποσό*

πληροφορίας και η πλούσια εικονογράφηση, χωρίς εντούτοις κάποιες μεθοδολογικές υποδείξεις για το πώς μπορεί κάποιος να επωφεληθεί διδακτικά" (σελ. 2805).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζει η πρόταση των συγγραφέων για τη διεπιστημονική αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων (σελ. 2806-2807), κάτι που συναντάμε και στην καινοτόμα διδακτική πρόταση του Jankvist (2010) για τα εγχειρίδια των μαθηματικών της Δανίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να αποκρυπτογραφήσουμε το πώς αντιμετωπίζουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί τα εργαλεία που τους παρέχονται για να φέρουν εις πέρας το διδακτικό τους έργο. Η ναυαρχίδα αυτών των εργαλείων δεν είναι άλλη από τα ίδια τα σχολικά εγχειρίδια. Όπως έχει δείξει και η έρευνα οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται στην εφαρμογή των καινοτομιών που εισάγει το νέο αναλυτικό πρόγραμμα. Επιπλέον αντιμετωπίζουν διστακτικά την μετάβαση σε έναν πιο ολιστικό τρόπο αντιμετώπισης της ύλης κάτι που μπορεί να απορρέει από τις ελλιπείς γνώσεις σε τομείς όπως η διαθεματικότητα και η Ιστορία των Μαθηματικών. Προς αυτή την κατεύθυνση βρίσκονται ανοχύρωτοι από το ίδιο το σύστημα καθώς δεν έχουν προγραμματιστεί τα απαραίτητα υποχρεωτικά σεμινάρια κατάρτισης. Επιπρόσθετα οι οδηγίες – κατευθύνσεις που τους παρέχονται από τα αντίστοιχα εγχειρίδια των εκπαιδευτικών κρίνονται λίγες και ανεπαρκείς.

4.1 Απόψεις και τάσεις ως προς τα σχολικά βιβλία

Τα νέα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου διδάχθηκαν και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου για πρώτη φορά το σχολικό έτος 2007-2008. Στο 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (2009) έλαβε χώρα μία παρουσίαση σχετικά με τις στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών που δίδαξαν κατά τη σχολική χρονιά 2007 – 2008 τα νέα βιβλία. Πιο συγκεκριμένα με την έρευνα αυτή διερευνήθηκαν:

- ο βαθμός στον οποίο επιχειρήθηκε να εφαρμοστούν οι καινοτομίες που εισάγουν τα νέα Α.Π.Σ.,
- οι απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα νέα βιβλία καθώς και
- οι ανάγκες επιμόρφωσης που δημιουργούνται με αφορμή τη διδασκαλία των νέων βιβλίων.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με τη **χρήση δραστηριοτήτων** και τους τρόπους διαχείρισης αυτών προκύπτει ότι στη πλειοψηφία τους οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν το θέμα αυτό με τρόπο μάλλον «παραδοσιακό». Συγκεκριμένα το 27,7% αγνοεί τις δραστηριότητες και εισάγει απευθείας τη θεωρία με διάλογο, το 53,4% λύνουν οι ίδιοι τις δραστηριότητες στον πίνακα υιοθετώντας δασκαλοκεντρική προσέγγιση, το 29,6% αναθέτουν τη λύση των δραστηριοτήτων στους μαθητές υιοθετώντας τη λογική της οικοδόμησης της γνώσης (από αυτούς μόνο το 8,3% προτείνει τη συνεργατική μέθοδο).

Όσον αφορά τη **διαθεματικότητα**, τη δεύτερη βασική καινοτομία που εισάγουν τα Α.Π.Σ., φαίνεται ότι δεν κέντρισε το ενδιαφέρον και την αποδοχή της μεγαλύτερης πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να περάσουν από μια μακροχρόνια εφαρμογή των διακριτών μαθημάτων σε μια άλλη φιλοσοφία ολιστικής προσέγγισης της γνώσης που απαιτεί η διαθεματικότητα. Ακόμα και στην περίπτωση που ασχολούνται με διαθεματικές εργασίες, ο τρόπος προσέγγισης των θεμάτων αυτών από την πλευρά τους, φαίνεται ότι είναι μάλλον ερασιτεχνικός και έξω από το πνεύμα εφαρμογής τους σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και τα νέα Α.Π.Σ.. Πιο συγκεκριμένα οι περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς δεν ασχολήθηκαν καθόλου με διαθεματικές εργασίες, το 1/3 απλά «άγγιξε» το θέμα, διαθέτοντας μια ή το πολύ δύο ώρες όλη τη σχολική χρονιά, και ελάχιστοι (10%) ασχολήθηκαν συστηματικά διαθέτοντας είτε το σύνολο του προτεινόμενου διδακτικού χρόνου (3%) ή μέρος αυτού (7%). Οι εκπαιδευτικοί αυτοί προτρέπουν τους μαθητές τους να αντιμετωπίζουν τις δραστηριότητες είτε ατομικά είτε ομαδικά.

Οι απόψεις των εκπαιδευτικών για **την ποιότητα των νέων βιβλίων**, είναι σε μεγάλο βαθμό θετικές. Οι περισσότερες θετικές κρίσεις αφορούν στην παρουσίαση ενώ ακολουθούν με τη σειρά, η ποιότητα των λυμένων εφαρμογών, των ασκήσεων και της θεωρίας. Λιγότερες θετικές κρίσεις εκφράζονται για την ποιότητα των δραστηριοτήτων. Ως προς το βαθμό δυσκολίας των βιβλίων οι απόψεις των εκπαιδευτικών διαφοροποιούνται αισθητά. Το 40% του συνόλου θεωρεί ότι οι παραπάνω τομείς υπερβαίνουν σε δυσκολία τις μαθησιακές δυνατότητες των μαθητών. Τα περισσότερα αρνητικά σχόλια συγκεντρώνουν οι τομείς των δραστηριοτήτων και των ασκήσεων όπου

ξεπερνούν το 50% των εκπαιδευτικών, ενώ έπονται οι τομείς των λυμένων εφαρμογών και της θεωρίας, όπου τα ποσοστά μειώνονται σε 42% και 33% αντίστοιχα. Παρά τις διαφοροποιημένες θετικές ή αρνητικές απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα βιβλία, ένα μικρό μόνο ποσοστό από αυτούς (μόλις το 10%) επιθυμεί την επιστροφή στα προηγούμενα βιβλία.

Όπως προκύπτει από σειρά ερευνών, οι πάγιες αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική εκπαίδευση είναι πολύ δύσκολο να ανατραπούν και η επιμόρφωση, σε μικρό μόνο βαθμό μπορεί να τις επηρεάσει (Thomson, 1992). Η έρευνα στον ελλαδικό χώρο δείχνει ότι αν κατά τη διάρκεια μιας επιμόρφωσης οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών μεταβάλλονται θεωρητικά από το παραδοσιακό στο εποικοδομητικό μοντέλο διδασκαλίας οι επιμορφούμενοι δυσκολεύονται να συνδέσουν τις νέες προσεγγίσεις της διδασκαλίας στην καθημερινή τους πρακτική (Καλδρυμίδου κ.ά., 1997). Στην παρούσα έρευνα από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν το 1/3 πιστεύει ότι δεν έχει καμιά ανάγκη επιμόρφωσης σε θέματα διδακτικής και το 23,4% δηλώνει με απόλυτη βεβαιότητα την ανάγκη της επιμόρφωσης. Οι υπόλοιποι δεν εκφράζουν με βεβαιότητα την επιθυμία τους.

Η εφαρμογή των Δ.Ε.Π.Π.Σ., των αντίστοιχων Α.Π.Σ. και η εισαγωγή των νέων διδακτικών βιβλίων του γυμνασίου υπήρξε μια φιλόδοξη απόπειρα υπέρβασης καθιερωμένων αντιλήψεων στο χώρο της ελληνικής εκπαίδευσης. Οι βασικές καινοτομίες της «ενεργητικής μάθησης» και της «διαθεματικότητας» στοχεύουν ακριβώς στην ανατροπή των παραδοσιακών αντιλήψεων για το διακριτό χαρακτήρα και την ιεραρχική διάρθρωση των γνωστικών αντικειμένων και των πρακτικών που ενισχύουν τη δασκαλοκεντρική προσέγγιση της διδασκαλίας και μάθησης. Υπάρχουν όμως ενδείξεις ότι οι συντάκτες των νέων προγραμμάτων δεν εξασφάλισαν ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για την υλοποίηση των καινοτομιών στο χώρο της διδακτικής πράξης, όπως ο μεγάλος όγκος της διδακτέας ύλης, γεγονός που βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με το αίτημα εισαγωγής ριζικών καινοτομιών στη διδασκαλία (Ε.Μ.Ε., 2003). Η θετική στάση υπέρ των καινοτομιών παραμένει σε θεωρητικό επίπεδο καθώς δεν εκδηλώνεται με αλλαγή διδακτικής συμπεριφοράς από τη μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών. Στο θέμα των δραστηριοτήτων ένα μικρό ποσοστό εκπαιδευτικών φαίνεται να αποδέχεται και να εφαρμόζει τελικά το ενεργητικό

μοντέλο διδασκαλίας, ενώ το μεγαλύτερο ποσοστό είτε τις διδάσκει παραδοσιακά ακυρώνοντας το ρόλο τους στη διαδικασία της ενεργητικής μάθησης είτε τις αγνοεί.

Η δραστηριότητα για την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών, αποτελεί αφορμή για παρουσίαση της νέας γνώσης από τον εκπαιδευτικό και όχι πρόβλημα μέσα από την επίλυση του οποίου οι μαθητές θα ανακαλύψουν σταδιακά και θα οικοδομήσουν τη νέα γνώση.

Σχετικά με τη διαθεματικότητα, η οποία προϋποθέτει μια φιλοσοφία ολιστικής προσέγγισης της γνώσης, διαπιστώθηκε δυσκολία των εκπαιδευτικών να την αποδεχθούν και να παραμερίσουν το δοκιμασμένο μοντέλο της διδασκαλίας διακριτών μαθημάτων. Το πρόβλημα ίσως βρίσκεται στο γεγονός ότι παραμένει εγκλωβισμένη στο πλαίσιο ενός διδακτικού βιβλίου, μέσα από την παρουσίαση σχετικών θεμάτων που διατρέχουν την ύλη με τη μορφή παραδειγμάτων, όπου επιχειρείται η σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινότητα και δε διαχέεται δημιουργώντας συσχετίσεις ανάμεσα στα διάφορα διδακτικά αντικείμενα.

Τελικά διαπιστώθηκε ότι καινοτομίες όπως η ένταξη δραστηριοτήτων και διαθεματικών εργασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο δεν έγιναν τόσο εύκολα αποδεκτές, όσο ίσως θα περίμεναν οι συντάκτες των Α.Π.Σ. Το ποσοστό των εκπαιδευτικών που πειραματίζεται με τη χρήση δραστηριοτήτων είναι σχετικά περιορισμένο, ενώ εκδηλώνεται πλήρης σχεδόν αδιαφορία για τις διαθεματικές εργασίες (Γκίνης & Πιτέρη, 2008).

Η έκταση της ύλης καθώς και η δυνατότητα ολοκλήρωσής της, αναδεικνύονται σύμφωνα με πολλούς εκπαιδευτικούς σε σημαντικό εμπόδιο όχι τόσο για την εφαρμογή καινοτομιών όσο για τη μαθησιακή διαδικασία, καθώς τις συνδέουν με το υψηλό επίπεδο δυσκολίας των νέων βιβλίων. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών εφαρμόζει το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας και ακολουθεί πιστά τη σειρά των κεφαλαίων και ενοτήτων του σχολικού βιβλίου. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκεται αντιμέτωπη με τη μεγάλη δυσκολία των περισσότερων μαθητών να κατανοήσουν τη διδακτέα ύλη ενώ “παραβιάζει” τον αριθμό των προβλεπόμενων διδακτικών ωρών αδυνατώντας έτσι να ολοκληρώσει τη διδασκαλία των τελευταίων κεφαλαίων. Αντίθετα, η πλειοψηφία των (λίγων) εκπαιδευτικών που εφαρμόζει το μοντέλο διδασκαλίας με χρήση δραστηριοτήτων που προωθεί τη ενεργητική μάθηση,

φαίνεται ότι επιτυγχάνει την ολοκλήρωση της ύλης με την υιοθέτηση συγκεκριμένων στόχων, επιλογή ενοτήτων και κατάλληλο προγραμματισμό. Τα παραπάνω οδηγούν στην εκτίμηση ότι η ικανοποίηση του αιτήματος για μείωση της ύλης μπορεί να οδηγήσει στην επίτευξη της ολοκλήρωσής της, αλλά δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι θα στρέψει περισσότερους εκπαιδευτικούς στην υιοθέτηση νέων μεθόδων διδασκαλίας. Όλα τα παραπάνω συντελούν στο να αναρωτηθούμε κατά πόσο με τις παρούσες συνθήκες είναι εφικτό να ενσωματωθεί η Ιστορία σε πραγματικές συνθήκες μάθησης ή αποτελεί ουτοπία στα πλαίσια του Α.Π.Σ για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς.

Η εισαγωγή των καινοτομιών θα έπρεπε λογικά να θέτει ως πρωταρχικό το αίτημα για καθολική και συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Η έλλειψη επιμόρφωσης θα μπορούσε να προβάλλεται ακόμη και ως “άλλοθι” για την απροθυμία εισαγωγής καινοτομιών στη διδασκαλία. Αντίθετα, η μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών φαίνεται να θεωρεί ότι η τυπική γνώση των Μαθηματικών αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη διδακτικής επάρκειας, γεγονός το οποίο αποτυπώνεται και στον τρόπο που αξιολογούν τα νέα βιβλία. Οι θετικές κρίσεις για τα βιβλία αυξάνονται παράλληλα με την τάξη, δηλαδή παράλληλα με τη φανερή αύξηση του μαθηματικού επιπέδου και της δυσκολίας, αλλά και τη λιγότερη ίσως φανερή υποβάθμιση του ρόλου των δραστηριοτήτων.

Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι η επιθυμητή στροφή προς ενεργητικές μεθόδους διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, δεν μπορεί να στηριχτεί μόνο στο περιεχόμενο των νέων βιβλίων, αλλά απαιτεί μια προσεκτικά **σχεδιασμένη επιμορφωτική πολιτική** που θα στοχεύει στην αλλαγή αντιλήψεων και στάσεων των εκπαιδευτικών.

4.2 Ο καθηγητής των Μαθηματικών και η αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική.

Στη σχολική πραγματικότητα ο καθηγητής βρίσκεται αντιμέτωπος με ένα περίπλοκο σύμπλεγμα καταστάσεων που είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί

σε συνθήκες τάξης. Το έργο του γίνεται πιο δύσκολο όταν έρχεται αντιμέτωπος με συνθήκες ή απαιτήσεις τις οποίες δεν είναι συνηθισμένος όπως είναι η τομείς της διαθεματικότητας και της Ιστορίας των Μαθηματικών, έννοιες που εισάγονται για πρώτη φορά στα νέα σχολικά συγγράμματα. Συνεπώς σε σχέση με τρίτο ερευνητικό ερώτημα πρέπει να αναρωτηθούμε αν:

- Μπορεί ο δάσκαλος των Μαθηματικών να αξιοποιήσει τα Ιστορικά σημειώματα των σχολικών βιβλίων;
- Έχει τις απαραίτητες γνώσεις και τα εφόδια για να κάνει κάτι τέτοιο; Διδάσκονται οι δάσκαλοι των Μαθηματικών κάποια αντίστοιχα μαθήματα στο πανεπιστήμιο;
- Οι εκπαιδευτικές κοινότητες έχουν λάβει κάποια μέτρα ώστε να επωφεληθούν οι μαθητές από τη διδασκαλία των σημειωμάτων αυτών;

Οι δάσκαλοι Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης διδάσκονται ή τουλάχιστον διδάσκονταν στα παιδαγωγικά τμήματα το μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών. Πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι η βάση πάνω στην οποία γίνεται κάτι τέτοιο είναι τελείως επιφανειακή, δηλαδή, τα ιστορικά επιτεύγματα παρουσιάζονται σε θεωρητικό επίπεδο χωρίς ουσιαστική μαθηματική εμβάθυνση. Αυτό συμβαίνει, διότι, στις μέρες μας παρατηρείται το φαινόμενο πολύ δάσκαλοι να στερούνται βασικών μαθηματικών γνώσεων. Οπότε γεννάται το ερώτημα κατά πόσο οι ίδιοι είναι σε θέση να παρακολουθήσουν και να κατανοήσουν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη εννοιών που είναι έξω από τη πραγματικότητά τους. Από την άλλη μεριά, οι καθηγητές των Μαθηματικών δε διδάσκονται Ιστορία των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο. Μόνο τα τελευταία χρόνια έχει γίνει στροφή σε ορισμένα τμήματα και έννοιες όπως η διδακτική και η Ιστορία των Μαθηματικών έχουν ενταχθεί μερικώς στα προγράμματά τους.

Η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης μιας επιστήμης συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της και στην παραπέρα ανάπτυξη της. Ειδικότερα στην περίπτωση της μαθηματικής επιστήμης, η κατανόηση των βασικών εννοιών και η παρακολούθηση βήμα προς βήμα της σταδιακής εξέλιξης τους μέχρι την τελική τους διαμόρφωση βοηθά στην καλύτερη εμπέδωση τους και στη

δημιουργία εναλλακτικών και πολλές φορές πιο ενδιαφερόντων μορφών διδασκαλίας. Ωστόσο οι καθηγητές των μαθηματικών διδάσκονται αντίστοιχα μαθήματα στο πανεπιστήμιο μόνο κατ' επιλογή τους.

Τα μαθηματικά είναι μία από τις αρχαιότερες επιστήμες. Οι μαθηματικές έννοιες έχουν αρχίσει να διαμορφώνονται από αρχαιοτάτων χρόνων και αρκετές από αυτές έχουν φτάσει απαράλλακτες μέχρι σήμερα. Αυτή τη διαδρομή έχουμε την ευτυχία να την εξετάζουμε από τα πρωτότυπα κείμενα που έχουν διασωθεί μέσα στους αιώνες. Τα κείμενα αυτά ρίχνουν φως στο ξεκίνημα της μαθηματικής επιστήμης και στα πρώτα της βήματα προς το δρόμο της εξέλιξης και της ανάπτυξης της. Ωστόσο για πολλά χρόνια παρατηρήθηκε απροθυμία ενασχόλησης των ειδικών με αυτά τα κείμενα. Επιπλέον οι μαθηματικοί ελάχιστα ενδιαφέρονται για την ιστορική εξέλιξη της επιστήμης τους και αυτό οφείλεται σε διάφορους λόγους όπως:

- **η ταχεία ανάπτυξη των θετικών επιστημών**

  είναι ένας τέτοιος λόγος αφού παρακολουθούν την προς τα εμπρός πορεία της επιστήμης των Μαθηματικών και συνήθως δίνουν λίγη σημασία στο ξεκίνημα και την ιστορική διαδρομή που ακολούθησε αυτή η πορεία. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι ρυθμοί εξέλιξης ξεφεύγουν από το επίπεδο κατανόησης του μέσου εκπαιδευτικού οπότε αυτός μένει στάσιμος αφού δεν βρίσκει άμεσο συσχετισμό μεταξύ των εξελίξεων και της σχολικής πραγματικότητας (που τις τελευταίες δεκαετίες έχει εμπλουτιστεί ελάχιστα με νέο υλικό).

- **Η έλλειψη διαθέσιμου διδακτικού χρόνου** (Tzanakis, Arcavi et al, 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Οι περισσότεροι δάσκαλοι των Μαθηματικών θεωρούν ότι δεν υπάρχει αρκετός διδακτικός χρόνος για τη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών και συνεπώς θα υπάρχει ακόμα λιγότερος σε περίπτωση που θα διδάσκεται και η Ιστορία των Μαθηματικών στις συγκεκριμένες διδακτικές ώρες (Tzanakis, Arcavi et al, 2000). Επομένως είναι απαραίτητος ο κατάλληλος σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων από τα Μαθηματικά, οι οποίες είναι εφικτό να

διδαχθούν βάσει της ιστορικής προσέγγισης. Για να γίνει εφικτό κάτι τέτοιο απαιτείται και μια ανάλογη προσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων (Θωμαΐδης & Τζανάκης 2006). Ωστόσο πρέπει να γίνει σαφές ότι μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην Ιστορία, *για το σύνολο της διδακτέας ύλης*, είναι ανέφικτη, όσο κι αν ευνοούν οι διδακτικές συνθήκες, και όχι απαραίτητη. Είναι αρκετή μια τέτοιου είδους διδακτική προσέγγιση για ένα μικρό μέρος της ύλης για να έχει ευεργετικές επιδράσεις στην ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος και στη δημιουργία κινήτρων μάθησης στους διδασκόμενους (Τζανάκης, 2009). Πιο συγκεκριμένα ενότητες όπου τα αρχαία κείμενα μας παρέχουν πλούσιο υλικό ευνοούνται προς αυτή τη κατεύθυνση. Έτσι είναι πιο εύκολο να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον τους και η Ιστορία να επιτελέσει έναν από τους πιο βασικούς της στόχους.

- Οι μαθηματικοί θεωρούν πολλές φορές ότι η ενασχόληση με τα ιστορικά σημειώματα είναι **χάσιμο πολύτιμου χρόνου**. Όμως αν δε χάσει χρόνο ο δάσκαλος, ο μαθητής δε θα μπορέσει να επινοήσει μια νέα μορφή γνώσης. Δεν είναι μόνο δαπάνη χρόνου όπως νομίζουν μερικοί φοιτητές, ούτε σπατάλη χρόνου όπως είναι σίγουροι οι περισσότεροι καθηγητές. Αυτό το χάσιμο είναι μια από τις μεγάλες επενδύσεις του δασκάλου και σχετίζεται με το πρόβλημα του γνωστικού ορίζοντα.

- **Οι μαθηματικοί δεν είναι ιστορικοί**, άρα δεν είναι σίγουροι ότι παρουσιάζουν το θέμα σωστά (Tzanakis, Arcavi et al, 2000; Siu 2006; Τζανάκης, 2009). Η έλλειψη των απαραίτητων γνώσεων σε συνδυασμό με την έλλειψη της κατάλληλης επιμόρφωσης, οδηγεί στην έλλειψη της απαραίτητης αυτοπεποίθησης στους εκπαιδευτικούς που είναι αναγκαία για την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al, 2000).

- **Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση** (Tzanakis, Arcavi et al, 2000; Siu 2006; Τζανάκης 2009). Η έλλειψη των

κατάλληλων ιστορικών δεξιοτήτων στους δασκάλους είναι φυσικό επακόλουθο της έλλειψης των κατάλληλων προγραμμάτων εκπαίδευσης για αυτούς. Στην πραγματικότητα, η ιστορική αλλά και η διεπιστημονική γνώση που είναι απαραίτητες για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, δεν προσφέρονται στους καθηγητές των Μαθηματικών. Συνεπώς κρίνεται απαραίτητη η σχετική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, τόσο κατά τη διάρκεια της βασικής πανεπιστημιακής εκπαίδευσης, όσο και κατά τη διάρκεια της ενδοϋπηρεσιακής τους επιμόρφωσης (Τζανάκης, 2009).

- **Δεν υπάρχει διαθέσιμο το κατάλληλο διδακτικό υλικό**. Πολλοί δάσκαλοι των Μαθηματικών υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει αρκετό και κατάλληλο ιστορικό υλικό για να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς που θα ήθελαν να το ενσωματώσουν στη διδασκαλία τους (Tzanakis, Arcavi et al, 2000). Επιπλέον τα βιβλία που παρέχονται στους καθηγητές και παρουσιάζουν τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να αξιοποιηθεί το σχολικό βιβλίο αδυνατούν να πληροφορήσουν και να κατευθύνουν σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας σε συνθήκες τάξης. Ωστόσο τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές στη συγκεκριμένη περιοχή έχουν δημιουργήσει κατάλληλο βοηθητικό υλικό σε διάφορες μορφές (εκτενής βιβλιογραφία, βιβλία με πρωτότυπες πηγές, συλλογικοί τόμοι με λεπτομερή περιγραφή συγκεκριμένων παραδειγμάτων ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, κ.α.), το οποίο μπορούν οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιήσουν στη διδακτική πράξη (Τζανάκης, 2009).

- Επιπρόσθετα **η δομή** και οι ασαφείς πολλές φορές στόχοι του αναλυτικού προγράμματος δεν επιτρέπουν την αξιοποίηση των Ιστορικών σημειωμάτων. Οι μαθητές προετοιμάζονται στην ουσία μόνο για τις εξετάσεις, μαθαίνουν μεθοδολογίες, αλγοριθμικές διαδικασίες και δεν κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες σε βάθος.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να φτάσουμε σε μερικά χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τον καθηγητή των Μαθηματικών και τη σχέση με την Ιστορία των Μαθηματικών:

- **Δεν έχει τις απαραίτητες γνώσεις και τα εφόδια** για να μπορέσει να αξιοποιήσει τα Ιστορικά σημειώματα

- **Δεν διδάσκεται στο πανεπιστήμιο αντίστοιχα μαθήματα** και κατά συνέπεια δεν γνωρίζει μεθόδους και τρόπους προσέγγισης των σημειωμάτων αυτών.

- **Δεν έχει εύκολη πρόσβαση σε ιστορικό υλικό** ώστε να μπορεί να επιλέξει τα κείμενα που θεωρεί ότι συνεισφέρουν και βοηθούν τους διδακτικούς του στόχους.

4.3 Το βιβλίο του καθηγητή

Στη προσπάθεια του ο καθηγητής του Γυμνασίου ή ο δάσκαλος τους Δημοτικού να εφαρμόσει τα όσα ζητούνται από το αναλυτικό πρόγραμμα έχει ως κύριο εργαλείο το βιβλίο του καθηγητή. Σε αυτό περιγράφονται αναλυτικά το πως ο καθηγητής πρέπει να διδάξει την ύλη κάθε τάξης. Επιπλέον τίθενται οι διδακτικοί στόχοι που πρέπει να επιτευχθούν κατά τη διδασκαλία και τρόποι για να φτάσει ο καθηγητής σε αυτούς. Στα νέα βιβλία του καθηγητή για τα Μαθηματικά γίνεται μια προσπάθεια να ενταχθεί στη διδασκαλία η διαθεματικότητα και η Ιστορία των Μαθηματικών.

Όσον αφορά τα βιβλία του Γυμνασίου η προσέγγιση που επιχειρείται κρίνεται από ελλιπής ως και ανεπαρκής. Το βιβλίο στερείται σημαντικών πηγών οι οποίες θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες στον εκπαιδευτικό. Το ίδιο το βιβλίο δεν κάνει τίποτα παραπάνω από το να παραπέμπει τον εκπαιδευτικό σε διάφορους συνδέσμους στο διαδίκτυο όπου ο ίδιος πρέπει να επιλέξει κατά το δοκούν ποιο κομμάτι Ιστορίας θα διδάξει. Όμως όπως αναφέραμε και παραπάνω κάτι τέτοιο δεν είναι αρκετά χρήσιμο καθώς ο ίδιος ο εκπαιδευτικός

δεν είναι κατάλληλα καταρτισμένος για να επιλέξει ποιο κομμάτι Ιστορίας είναι καταλληλότερο. Επιπλέον με αυτόν τον τρόπο παρατηρείται το φαινόμενο να έχουμε εντελώς διαφορετικές προσεγγίσεις για την ίδια διδακτική ενότητα ανάλογα με την κρίση του καθηγητή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η συνοχή που επιθυμείται από το αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτός εξάλλου είναι και ο κύριος λόγος που υπάρχει το βιβλίο του καθηγητή.

Όσον αφορά τη διαθεματικότητα παρέχεται στην αρχή του βιβλίου του καθηγητή μια εκτενής αναφορά για το τι είναι διαθεματικότητα και ποια η χρησιμότητά της σε θεωρητικό επίπεδο. Στο πως θα γίνει η εφαρμογή της στη τάξη αφήνεται και αυτή με τη σειρά της στη κρίση του εκάστοτε καθηγητή. Οι οδηγίες που δίνονται είναι πολύ γενικές και στις περισσότερες φορές περισσότερο μπερδεύουν παρά βοηθούν τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι με τη σειρά τους πρέπει να στηριχθούν στη κρίση τους.

Πιο συγκεκριμένα στα βιβλία της Α' και Γ΄ Γυμνασίου απουσιάζει παντελώς η όποια προσπάθεια ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών στη τάξη. Για την Α' τάξη του Γυμνασίου έχουμε μόλις τρεις αναφορές που αφορούν τη χρήση των ιστορικών σημειωμάτων. Το πρώτο βρίσκεται στις γενικές κατευθύνσεις όπου αναφέρεται ότι:

Σε ορισμένες ενότητες υπάρχουν **ιστορικά σημειώματα** που έχουν σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία εξαρτάται από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες.

Σελ. 31

Το δεύτερο βρίσκεται λίγο πιο κάτω και αναφέρει έναν από τους βασικούς λόγους χρήσης ιστορικών σημειωμάτων στο μάθημα.

διαθεματικό περιεχόμενο. Τέλος, στο διδακτικό βιβλίο, περιέχονται αρκετά **ιστορικά σημειώματα και αναδρομές**, με σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Στη συνέχεια του

Σελ. 34

Το τρίτο απόσπασμα βρίσκεται στον ενδεικτικό προγραμματισμό της ύλης της ενότητας Α.1.2 όπου βλέπουμε το ακόλουθο απόσπασμα:

Το προτεινόμενο ιστορικό σημείωμα: δίνει την ευκαιρία να αναφερθούμε αφενός στη νίκη της ευφυΐας ενάντια στην επίμοχθη μηχανική εργασία και αφετέρου ως υπόδειγμα αυτού που οι μαθηματικοί ονομάζουν "κομψή" λύση ενός προβλήματος. Με αφορμή αυτή την ιστορία μπορείτε να υπογραμμίσετε ότι στα μαθηματικά (και όχι μόνο) εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη σημασία είναι ο τρόπος με τον οποίο φθάνουμε στην απάντηση και όχι αυτή η ίδια η απάντηση.

Σελ. 36

Το σημείωμα αυτό αναφέρεται στον τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος των αριθμών από το 1 έως το 100 και παραθέτει τη λύση που βρήκε ο Gauss. Σε καμία περίπτωση δεν προτείνεται η εμπλοκή των μαθητών σε πειραματισμό και προσπάθεια να βρουν μόνοι τους τρόπους υπολογισμού του παραπάνω αθροίσματος. Αντ' αυτού προτείνεται να δοθεί απευθείας η απάντηση και απλά να κεντρίσουμε τη προσοχή τους σε πιο γενικές δεξιότητες.

Ένα ακόμα απόσπασμα βρίσκεται στη σελίδα 50 και αφορά ένα σχέδιο εργασίας για την ενότητα Α.3..5. Χαρακτηριστικό με αυτό το απόσπασμα είναι ότι δεν αναφέρεται στη χρήση κάποιου ιστορικού σημειώματος από το βιβλίο αλλά στην προτροπή να εμπλακούν οι μαθητές από μόνοι τους στην αναζήτηση ιστορικών γνώσεων σχετικά με την έννοια που ζητείται να εξεταστεί.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

(α) Ενδεικτικοί στόχοι:

- Η διαχρονική καταγραφή των «μέτρων και σταθμών» σε διάφορους λαούς και εποχές.
- Η διερεύνηση των λόγων επιλογής των διαφόρων «μέτρων και σταθμών».
- Η ιστορική αναζήτηση των συνθηκών και του τρόπου επικράτησης του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.
- Η διερεύνηση του ρόλου της επιστήμης στην τελική επιλογή του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.

Σελ. 50

Στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου οι παραπομπές στα ιστορικά σημειώματα συναντώνται και εκεί με φειδώ. Στις λίγες αναφορές που υπάρχουν δίνονται χρήσιμοι σύνδεσμοι στο διαδίκτυο, όπου ο εκπαιδευτικός δύναται να αντλήσει πληροφορίες και να σχεδιάσει το μάθημα όπως αυτός κρίνει αναγκαίο. Οι μοναδικές πραγματικές αναφορές στα ιστορικά σημειώματα γίνονται σε ένα προτεινόμενο σχέδιο εργασίας όπου και αποτελούν κριτήριο επιλογής του και

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: **«Η έννοια των ανάλογων μεγεθών στις θετικές και ανθρωπιστικές επιστήμες»**

Κριτήρια επιλογής του θέματος

Β. Η αλληλεπίδραση μεγεθών δίνεται, ως ειδική περίπτωση, από το σταθερό τους λόγο. Οι λόγοι και αναλογίες ομοειδών μεγεθών παρουσιάζονται ιστορικά ως η μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον αφηρημένο μαθηματικό λογισμό (βλ. Στοιχεία του Ευκλείδη).

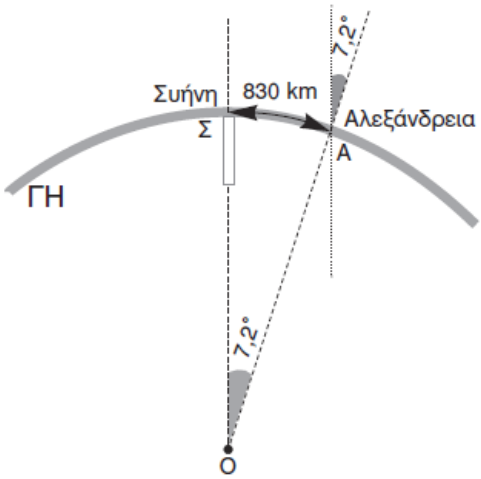
Σελ. 45

σε μία προτεινόμενη δραστηριότητα σχετικά με τη μέτρηση του κυκλικού τομέα:

Δραστηριότητα 2

«Οι υπολογισμοί του Ερατοσθένη»

Περίπου το 250 π.Χ. ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, διάσημος μαθηματικός και διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, ασχολήθηκε με τον υπολογισμό της διαμέτρου της Γης.
Παρατήρησε ότι κατά το θερινό ηλιοστάσιο (21 Ιουνίου) το είδωλο του Ήλιου καθρεπτιζόταν στο κέντρο ενός πηγαδιού στη Συήνη (πόλη της Αιγύπτου κοντά στην Ασουάν), δηλαδή ήταν σε κατακόρυφη θέση στο σημείο αυτό.
Μετά από ένα χρόνο, την ίδια ημέρα, ο Ερατοσθένης παρατήρησε ότι οι ακτίνες του ήλιου στην Αλεξάνδρεια σχημάτιζαν γωνία με την προηγούμενη κατακόρυφη θέση του, την οποία υπολόγισε ότι ήταν 7,2°.



Η Αλεξάνδρεια απέχει από τη Συήνη περίπου 830 Km (5.000 στάδια).
Να υπολογίσετε την περιφέρεια της Γης και κατόπιν τη διάμετρό της.

Σελ. 87

Σε καμία των περιπτώσεων δε γίνεται αναφορά στο τρόπο με το οποίο πρέπει να χρησιμοποιηθούν τα ιστορικά σημειώματα που βρίσκονται στο

βιβλίο του μαθητή. Προφανώς μια τέτοια κατεύθυνση δεν θεωρείται αναγκαία και αφήνεται στην κρίση του κάθε εκπαιδευτικού.

Η πιο συντονισμένη προσπάθεια να εναρμονιστεί το βιβλίο του εκπαιδευτικού με τις απαιτήσεις που θέτουν τα νέα αναλυτικά προγράμματα γίνεται για το βιβλίο της γ΄ Γυμνασίου. Στα εισαγωγικά σημειώματα βρίσκουμε πάλι κάποιες γενικές κατευθύνσεις:

Σε ορισμένες ενότητες παρουσιάζονται **θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών** στα οποία επιχειρείται να δοθεί η περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και η παρουσίαση των εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν προκειμένου να λυθεί. Τα θέματα αυτά μαζί με τα συνοδευτικά ερωτήματα έχουν ως στόχο να αξιοποιηθεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η ιστορία των Μαθηματικών. Η αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει διεθνώς αντικείμενο συστηματικών μελετών. Η θετική συμβολή στοιχείων από την ιστορία των Μαθηματικών τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

α) Προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
β) Αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας ανά τους αιώνες.
γ) Συνεισφέρει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, αναδεικνύοντας όχι μόνο τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξής τους.

Τα θέματα αυτά, καθώς και όσα επιπλέον αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή δεν μπορούν να θεωρηθούν ολοκληρωμένες μελέτες και γι' αυτό υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές για όσους μαθητές και καθηγητές εκδηλώνουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Σελ 10-11

Όπως φαίνεται τα προηγούμενα δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια αναφορά σχετικά με την αξία της χρήσης των ιστορικών σημειωμάτων κατά τη διδασκαλία. Σημαντικό είναι ότι η αναφορά αυτή τελειώνει με τη φράση: " Τα θέματα αυτά και όσα επιπλέον αναφέρονται στο βιβλίο.... όσους μαθητές και καθηγητές εκδηλώνουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον". Στην ουσία είναι σαν να λαμβάνεται η χρήση της Ιστορίας ως επιλογή του εκάστοτε εκπαιδευτικού και όχι ως προαπαιτούμενο όπως παρουσιάζεται στις καινοτομίες που θέτουν τα νέα αναλυτικά προγράμματα.

Εκεί βρίσκουμε πλούσιο υλικό από ιστορικά σημειώματα όπως:

- Ο τετραγωνισμός του κύκλου Σελ.19
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι Πυθαγόρειες τριάδες Σελ. 29-30

- Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού Σελ 44-45
- Η Χρυσή τομή Σελ. 51-53
- Η θεωρία των πιθανοτήτων Σελ. 73-74
- Ο υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά Σελ. 78
- Η ισότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία Σελ. 80-82

Τα σημειώματα αυτά κατά κύριο λόγο βρίσκονται στο τέλος κάποιων από τις ενότητες του σχολικού βιβλίου με το διακριτικό τίτλο “ένα θέμα από την ιστορία των μαθηματικών”. Στο βιβλίο του καθηγητή αναλύονται λεπτομερώς και είναι σαφώς πιο εμπλουτισμένα με υλικό σε σχέση μα τα αντίστοιχα που βρίσκονται στο βιβλίο του μαθητή. Ωστόσο στα περισσότερα από αυτά απουσιάζουν σημαντικές διδακτικές κατευθύνσεις οι οποίες θα μπορούσαν να βοηθήσουν τον διδάσκοντα να τα ενσωματώσει με επιτυχία στη τάξη. Στο καθηγητή ένα τέτοιο εγχειρίδιο θα έπρεπε να παρέχει τη μέγιστη δυνατή βοήθεια καθώς αποτελεί το κύριο εργαλείο με το οποίο καλείται να δουλέψει και να εναρμονιστεί. Οι απαιτήσεις είναι ακόμα περισσότερες όταν στη διδασκαλία εισάγονται καινούργιες νόρμες όπως είναι η διαθεματικότητα και η Ιστορία των Μαθηματικών. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη στα παραπάνω ιστορικά σημειώματα θα έπρεπε να αποσαφηνίζεται:

- ✓ κατά πόσο διδάσκονται ως ανεξάρτητες ενότητες
- ✓ πώς εμπλέκουμε τους μαθητές να ενασχοληθούν με τις δραστηριότητες αυτές
- ✓ σε περίπτωση που ενσωματώνονται στο μάθημα, πότε πρέπει να τις εισάγουμε (στην αρχή, στο τέλος ή κατά τη διάρκεια του μαθήματος)
- ✓ τι επιπλέον δραστηριότητες θα μπορούσαν να προκύψουν από την ενασχόληση των μαθητών με αυτά τα ιστορικά σημειώματα
- ✓ ποιος ο ρόλος του εκπαιδευτικού και ποιος ο ρόλος του μαθητή κατά την ενασχόληση με αυτά

Τα βήματα αυτά ίσως να μην είναι δύσκολο να δομηθούν από έναν έμπειρο καθηγητή. Ωστόσο η ύπαρξή τους στο βιβλίο του καθηγητή βοηθάει στο να εξασφαλιστεί η απαραίτητη συνοχή ως προς τον τρόπο που πρέπει να παραδίδεται ένα μάθημα σε συνθήκες τάξης. Επιπλέον πρέπει να

αναλογιστούμε ότι δεν είναι σε θέση όλοι οι εκπαιδευτικοί να παρακολουθήσουν σεμινάρια και μετεκπαιδεύσεις για το πως μπορεί κάποιος να επωφεληθεί από τη χρήση ενός ιστορικού σημειώματος στη τάξη. Υπό αυτό το πρίσμα η ύπαρξη ενός βιβλίου καθηγητή που είναι οδηγός για κάθε καθηγητή κρίνεται επιτακτική.

Όσον αφορά τις διαθεματικές δραστηριότητες που υπάρχουν βιβλίο των Μαθηματικών, μόνο σε μία καλείται ο εκπαιδευτικός να κάνει χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αυτό λαμβάνει χώρα στη προσπάθεια εισαγωγής της έννοιας της απόδειξης όπως φαίνεται στο ακόλουθο:

Σχέδιο διαθεματικής εργασίας
ΘΕΜΑ: Η έννοια της «απόδειξης»

Ενδεικτικές επισημάνσεις
Η μαθηματική απόδειξη θα γίνει καλύτερα αντιληπτή μέσα από την ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών. Η διαφορά των υπολογιστικών-προσεγγιστικών Μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν οι λαοί τής Μεσοποταμίας σε σχέση με τα αποδεικτικά Μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων να αποτελέσει την κύρια ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Το θέμα θα ολοκληρωθεί με τη χρησιμότητα της απόδειξης στην καθημερινή συλλογιστική και πρακτική (π.χ. απόδειξη της ενοχής – αθωότητας στο δικαστήριο, κ.τ.λ.).

Προτεινόμενες δραστηριότητες
Οι μαθητές προτείνεται να χωριστούν σε **3 ομάδες**.
Η πρώτη ομάδα θα ασχοληθεί με την ιστορική εξέλιξη της απόδειξης στα Μαθηματικά. Θα διερευνήσει τα υπολογιστικά προσεγγιστικά Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων από τα οποία απουσιάζει η απόδειξη (προβλήματα που περιέχονται στον πάπυρο του Ριντ (Rhind) και τις βαβυλωνιακές πινακίδες), καθώς και τις απαρχές της μαθηματικής απόδειξης από τους αρχαίους Έλληνες (Θαλής, Πυθαγόρας, Ευκλείδης κ.ά.). Τη διαφοροποίηση αυτή πρέπει να τη συνδέσει με την οργάνωση και τη δομή των κοινωνιών τους (μαζική κοινωνία, δεσποτισμός και θεοκρατία σε αντιδιαστολή με την προβολή της αξίας της προσωπικότητας και τη δημοκρατία).

Όπως φαίνεται προτείνεται στον καθηγητή να εμπλέξει τους μαθητές με την αναζήτηση ιστορικών σημειωμάτων ωστόσο απουσιάζει κάθε οδηγία ως προς την κατεύθυνση που πρέπει να κινηθούν. Σε αυτό το σημείο πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι δεν είναι όλοι οι καθηγητές των μαθηματικών ενημερωμένοι σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών και σε ορισμένες περιπτώσεις ίσως να μην είναι σε θέση να επιλέξουν το κατάλληλο κομμάτι ιστορίας που θα βοηθήσει στη περάτωση της δραστηριότητας αυτής. Κάτι

τέτοιο θα είχε ως αποτέλεσμα να μην φτάσουμε στους επιθυμητούς στόχους της διαθεματικής αυτής δραστηριότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Συμπεράσματα – Προτάσεις

Όπως δείχνουν τα στοιχεία που παραθέσαμε στο πρώτο κεφάλαιο,τα τελευταία χρόνια όλο και πιο πολλές έρευνες μελετούν και επιχειρούν την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην καθημερινή διδακτική πρακτική μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών και τα σχολικά βιβλία. Η κύρια ιδέα είναι ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει το μέσο για την επίτευξη ποικιλίας στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η ένταξη της στα βιβλία του Γυμνασίου φαίνεται ότι έχει αρχίσει να γίνεται με συστηματικό τρόπο όπως προκύπτει από τα ερευνητικά δεδομένα για τα ελληνικά διδακτικά βιβλία των μαθηματικών.

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών είναι ωφέλιμη για τη διδασκαλία σε πολλά επίπεδα: στο επίπεδο της εισαγωγής νέων μαθηματικών εννοιών, στην ανάδειξη της εσωτερικής δομής των Μαθηματικών, στην αποκάλυψη των κοινωνικο-πολιτισμικών παραγόντων που επέδρασαν ιστορικά στη διαμόρφωση των μαθηματικών αντικειμένων, στη δημιουργία κινήτρων και θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Επιπλέον, η μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους δασκάλους τους βοηθά να προβλέψουν και να ερμηνεύσουν τα λάθη των μαθητών τους, και να ανακαλύψουν και να επιλέξουν αποτελεσματικές στρατηγικές διδασκαλίας, ειδικά όσον αφορά τη χρήση των μαθηματικών εργαλείων και γενικότερα του μαθηματικού υλικού.

Η Ιστορία των Μαθηματικών δίνει επίσης στους μαθητές πολλές ευκαιρίες να γνωρίσουν τους αρχαίους πολιτισμούς και μέσα από αυτούς ποικίλες κοινωνικές δομές, τους ενθαρρύνει να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τον τρόπο που τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν από τους διάφορους πολιτισμούς στην πορεία του χρόνου. Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά Μαθηματικά ανοίγει τις πόρτες για μια πολυπολιτισμική προσέγγιση στη διδασκαλία και είναι ένας άριστος τρόπος για να αναδειχθούν οι συνδέσεις που υπάρχουν

μεταξύ των διάφορων μαθηματικών περιοχών. Σημαντική είναι και η συνεισφορά της στις συνδέσεις που υπάρχουν μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών, κάτι που προωθείται ιδιαίτερα στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών.

Όλα τα προηγούμενα αποτελούν τις βασικές αρχές πάνω στις οποίες **βασίστηκε η προσπάθεια αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στα πρόσφατα προγράμματα σπουδών και διδακτικά βιβλία**, απαντώντας παράλληλα στο πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα. Τα νέα σχολικά προγράμματα προσπάθησαν να υλοποιήσουν ένα σύνολο από τελείως νέα σχολικά βιβλία με τα οποία οι καθηγητές θα μπορούσαν να αποκομίσουν τα οφέλη που μπορούν να προσφέρουν η Ιστορία και η διαθεματικότητα.

Πιο αναλυτικά όπως δείχνουν τα στοιχεία που παραθέσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, **στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του 2003** το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας αμφισβητείται και οι σύγχρονες αντιλήψεις θεωρούν τα μαθηματικά όχι μόνο ως το αποτέλεσμα. Για να εφαρμοστεί το νέο αυτό μοντέλο κρίθηκε απαραίτητη η εισαγωγή νέων τρόπων διδασκαλίας. Πλέον η **δραστηριότητα** μέσω της οποίας παράγεται το προσδοκώμενο αποτέλεσμα βρίσκεται στο επίκεντρο της διδασκαλίας. Οι σύγχρονες αρχές και προσεγγίσεις της διδακτικής έρχονται σε αντίθεση με το μοντέλο του διαχωρισμού και της κατάτμησης της γνώσης σε ξεχωριστά γνωστικά αντικείμενα χωρίς εσωτερική συνοχή. Όσον αφορά τα Μαθηματικά η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης μιας έννοιας μέσω διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων, διαθεματικά ή με αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών. Δίνεται λοιπόν έμφαση στη καταγραφή των μεγάλων ιστορικών στιγμών που καθόρισαν διαδοχικά την πορεία των μαθηματικών ώστε ο μαθητής να αποκτά γνώση της γένεσης των ιδεών που τα καθόρισαν. Ακόμα τα ιστορικά σημειώματα είναι δυνατόν να εντάσσονται στο τέλος της ενότητας αλλά και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου καθώς το σημαντικό δεν είναι η θέση τους αλλά ο τρόπος που θα επιτευχθεί η ενσωμάτωσή τους κατά τη διδασκαλία μιας ενότητας.

Επιπλέον με τη **διαθεματικότητα** επιχειρείται η δόμηση του περιεχομένου των διδασκόμενων διακριτών μαθηματικών στη βάση μιας

ισόρροπης οριζόντιας και κάθετης κατανομής της διδασκόμενης ύλης. Έτσι προωθείται, αφενός μεν η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων που διδάσκονται σε μια τάξη και αφετέρου η ομαλή ροή της γνώσης από ενότητα σε ενότητα και από τάξη σε τάξη. Η διαθεματική προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συγκροτήσει ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων, μια ολιστική προσέγγιση της γνώσης, που του επιτρέπει να διαμορφώνει προσωπική άποψη τόσο για θέματα των επιστημών τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους όσο και για ζητήματα της καθημερινής ζωής. Πιο συγκεκριμένα η διαθεματικότητα συμβάλλει στην κατανόηση των Μαθηματικών, στην αλλαγή στάσης για τα Μαθηματικά και στη διευκόλυνση της χρήσης τους στην καθημερινή ζωή.

Με βάση τα παραπάνω **υπάρχει η δυνατότητα η Ιστορία των Μαθηματικών να ενσωματωθεί** στο μάθημα και να αξιοποιηθεί ουσιαστικά αρκεί να τηρούνται κάποιες προϋποθέσεις, όπως να γίνει σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων και οι απαραίτητες αλλαγές στα σχολικά εγχειρίδια, να τοποθετηθούν νοηματικά στη σωστή θέση της ενότητας και να δίνονται οι κατάλληλες προϋποθέσεις και κατευθύνσεις σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης τους από τον εκπαιδευτικό. Έτσι οι μαθητές αισθάνονται τα Μαθηματικά πιο εύκολα, πιο φιλικά, αυξάνεται το ενδιαφέρον τους και αντιλαμβάνονται ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν, αναπτύσσονται και εξελίσσονται στο χώρο και το χρόνο.

Τα νέα βιβλία των μαθηματικών που γράφτηκαν σύμφωνα με το Διαθεματικό Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου διδάχθηκαν για πρώτη φορά το 2007-2008. **Τα ιστορικά σημειώματα** που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτά ήταν συνολικά 65. Όπως δείχνουν τα στοιχεία που παραθέσαμε στο τρίτο κεφάλαιο, σε αυτά βρέθηκαν σημειώματα με ιστορικά λάθη, ακόμα υπήρχαν αρκετά ιστορικά σημειώματα με καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα χωρίς όμως μαθηματικά ερεθίσματα, καθώς και ιστορικά σημειώματα σε λάθος θέση στις αντίστοιχες ενότητες. Αυτό δείχνει ότι τα ιστορικά σημειώματα γράφτηκαν με προχειρότητα και χωρίς κανένα επανέλεγχο, με κύριο στόχο να ικανοποιηθεί ο σχετικός όρος της προκήρυξης του διαγωνισμού συγγραφής των βιβλίων και όχι η απαίτηση για ουσιαστική αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία.

Πολλά από αυτά τα λάθη διορθώθηκαν σε επόμενη έκδοση ωστόσο πολλά ιστορικά σημειώματα έχουν καθαρά πληροφοριακό χαρακτήρα χωρίς όμως να ενεργοποιούν το μαθητή ενώ κάποια άλλα έχουν τοποθετηθεί σε λάθος θέση στην ενότητα αφήνοντας αδιάφορους τους μαθητές.

Απαντώντας λοιπόν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, αν υπάρχει η δυνατότητα η Ιστορία να ενσωματωθεί στο μάθημα των Μαθηματικών ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν την εξελικτική τους πορεία μπορούμε να πούμε ότι αυτό γίνεται να συμβεί αλλά κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις :

- **να γίνει σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων και οι απαραίτητες αλλαγές στα σχολικά εγχειρίδια**
- **να τοποθετηθούν νοηματικά στη σωστή θέση της ενότητας**
- **να δίνονται οι κατάλληλες προτάσεις και κατευθύνσεις σχετικά με τον τρόπο αξιοποίησης τους από τον εκπαιδευτικό**

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι έτσι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να ενσωματωθεί στη διδασκαλία και να βοηθήσει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και της εξελικτικής τους πορείας στο πέρασμα των χρόνων. Οι μαθητές βλέποντας αυτή την πορεία αισθάνονται τα Μαθηματικά πιο εύκολα, πιο φιλικά, πιο συναρπαστικά, αυξάνεται το ενδιαφέρον τους, και αντιλαμβάνονται ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν, αναπτύσσονται και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο. Αντιλαμβάνονται ότι τα δικά τους εμπόδια ήταν τα ίδια με εκείνα των μαθηματικών του παρελθόντος.

Έτσι η χρήση της Ιστορίας είναι χρήσιμη και ωφέλιμη, μπορεί να διαδραματίσει πολύτιμο ρόλο και να αποτελέσει ένα «καλό εργαλείο» προσέγγισης των γνωστικών και εκπαιδευτικών προβλημάτων.

Όσον αφορά τη μελέτη του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος ξεκινάμε από **τη στάση των καθηγητών** απέναντι στα σχολικά εγχειρίδια όπου διαπιστώθηκε ότι πολλές φορές κάνουν την εμφάνισή τους απόψεις ανάλογες με εκείνες που έχουμε ήδη καταγράψει σχετικά με τις ενστάσεις ενσωμάτωσης της ιστορίας στην εκπαίδευση. Έτσι η Ιστορία των Μαθηματικών δεν είναι

Μαθηματικά, μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές ενώ προϋποθέτει πολύ διδακτικό χρόνο.

Όπως έδειξαν τα στοιχεία που παραθέσαμε στο τέταρτο κεφάλαιο , στη σχολική πραγματικότητα η χρήση δραστηριοτήτων αντιμετωπίζεται με μάλλον «παραδοσιακό» τρόπο. Σύμφωνα με αυτόν είτε αγνοούν τις δραστηριότητες και διδάσκουν κατευθείαν τη θεωρία είτε λύνουν οι ίδιοι στον πίνακα τις δραστηριότητες υιοθετώντας τη δασκαλοκεντρική προσέγγιση. Η δεύτερη βασική καινοτομία, η διαθεματικότητα φαίνεται ότι δε κέντρισε το ενδιαφέρον και την αποδοχή της μεγάλης πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών. Αναδείχθηκε η δυσκολία των καθηγητών να περάσουν από μια μακροχρόνια εφαρμογή του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών σε μια άλλη φιλοσοφία ολιστικής προσέγγισης. Η έκταση της ύλης καθώς και η δυνατότητα ολοκλήρωσης της, αναδεικνύονται σύμφωνα με πολλούς εκπαιδευτικούς σε σημαντικό εμπόδιο όχι τόσο για την εφαρμογή καινοτομιών όσο για τη μαθησιακή διαδικασία, καθώς τις συνδέουν με το υψηλό επίπεδο δυσκολίας των νέων βιβλίων. Έτσι παρατηρούμε ότι η θετική στάση υπέρ των καινοτομιών παραμένει σε θεωρητικό επίπεδο αφού δεν εκδηλώνεται με αλλαγή διδακτικής συμπεριφοράς από τη μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών.

Ένα άλλο εμπόδιο στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών είναι επίσης ότι οι μαθηματικοί ελάχιστα ενδιαφέρονται για την ιστορική εξέλιξη της επιστήμης τους και αυτό οφείλεται στην ταχεία ανάπτυξη των θετικών επιστημών, στην έλλειψη διαθέσιμου χρόνου, στην έλλειψη της κατάλληλης επιμόρφωσης, στην απουσία διαθέσιμου διδακτικού υλικού, στη δομή και τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος καθώς και στο γεγονός ότι οι μαθηματικοί δεν είναι ιστορικοί.

Όσον αφορά **το βιβλίο του καθηγητή** σχετικά με τα ιστορικά σημειώματα απουσιάζουν σημαντικές διδακτικές κατευθύνσεις οι οποίες θα μπορούσαν να βοηθήσουν το διδάσκοντα να τα ενσωματώσει με επιτυχία στην τάξη. Παρουσιάζεται να έχουν αρκετές ελλείψεις καθώς θα έπρεπε να αποσαφηνίζεται ο τρόπος με τον οποίο εμπλέκονται οι μαθητές με την ενασχόληση αυτών των δραστηριοτήτων, κατά πόσο διδάσκονται ως ανεξάρτητες ενότητες ενώ σε περίπτωση που ενσωματώνονται στο μάθημα δεν αποσαφηνίζεται πότε πρέπει να γίνεται η εισαγωγή τους και ποιος ο ρόλος

του εκπαιδευτικού και του μαθητή κατά την ενασχόληση αυτή. Ακόμα σε σχέση με τις διαθεματικές δραστηριότητες που υπάρχουν στο βιβλίο του καθηγητή μόνο σε μια καλείται ο εκπαιδευτικός να κάνει χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Όπως φαίνεται ένας καθηγητής Μαθηματικών είναι πολύ δύσκολο με τις παρούσες συνθήκες να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις που έχει θέσει το νέο αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτό οφείλεται στο ότι **δεν φαίνεται να έχει τις γνώσεις και τα εφόδια για να το επιτύχει αυτό.** Επιπλέον η ύλη είναι πολύ απαιτητική και έχουν εισαχθεί νέες ενότητες και δραστηριότητες που δεν υπήρχαν παλαιότερα. Επομένως για να μπορεί ο καθηγητής των Μαθηματικών να ασχοληθεί με την ιστορία των Μαθηματικών και να την αξιοποιήσει στη σχολική πραγματικότητα:

- Είναι αναγκαία η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και μάλιστα η επιμόρφωση πρέπει να είναι καθολική και συστηματική .

- Πρέπει να υπάρξει μάθημα ή μαθήματα σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών μέσα στο βασικό πρόγραμμα σπουδών στο πανεπιστήμιο ώστε οι απόφοιτοι να έχουν τις απαραίτητες γνώσεις.

- Να γίνει πιο σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων που εμπεριέχονται στα σχολικά βιβλία και να δίνονται οι κατάλληλες κατευθύνσεις για την καλύτερη αξιοποίησή τους.

- Πρέπει να παρατίθενται ή να διδάσκονται ιστορικά στοιχεία για τις μαθηματικές έννοιες τη στιγμή που διδάσκονται π.χ. διδάσκουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και ταυτόχρονα λέμε λίγα λόγια για τη ζωή του Πυθαγόρα, το χαρακτήρα του, τα κατορθώματα του προκειμένου να επηρεάσουμε θετικά το μαθητή προς το αντικείμενο διδασκαλίας και να γίνει το θεώρημα το αγαπημένο του.

- Είναι θετικό να διδάσκονται οι μαθητές υπό μορφή ιστορίας 1 ώρα την εβδομάδα βιογραφίες μεγάλων μαθηματικών, να προτείνονται για

ανάγνωση βιβλία λογοτεχνικά, ιστορικά μυθιστορήματα στα οποία αναδιπλώνονται με πολύ ωραίο τρόπο τα Μαθηματικά ώστε οι μαθητές να δημιουργήσουν θετική στάση για τα Μαθηματικά.

- Η Ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να βρίσκεται στην εισαγωγή κάθε μαθήματος. Οι μαθητές επιφορτίζονται με το έργο να βρουν πληροφορίες σχετικά με την έννοια που πραγματεύεται η έννοια του ιστορικού σημειώματος και πως έχει αυτή αντιμετωπιστεί από το κόσμο των Μαθηματικών. Στη συνέχεια ακολουθεί η αυστηρή εισαγωγή της έννοιας από τον εκπαιδευτικό.

Μόνο κάτω από τέτοιες προϋποθέσεις η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να γίνει ένα σπουδαίο διδακτικό εργαλείο που θα αυξήσει τα κίνητρα των μαθητών για μάθηση, θα αναδείξει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής εκπαίδευσης, θα συμβάλλει στη δημιουργία θετικής στάσης των παιδιών απέναντι στα Μαθηματικά, θα βοηθήσει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι υπάρχει συνέχεια στην ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Συμπερασματικά για να μπορέσει ο δάσκαλος των Μαθηματικών να ασχοληθεί με την Ιστορία των Μαθηματικών και να την αξιοποιήσει στη διδακτική θα πρέπει αφενός μεν να γίνει σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια και να δίνονται οι κατάλληλες κατευθύνσεις για την ουσιαστική χρήση τους και αφετέρου είναι αναγκαία η καθολική και συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών καθώς και ο εμπλουτισμός του βασικού προγράμματος σπουδών των πανεπιστημίων με σχετικά μαθήματα. Μόνο με αυτό τον τρόπο θα επέλθει η απαιτούμενη αλλαγή στην οπτική με την οποία αντιμετωπίζουν οι διδάσκοντες των μαθηματικών την εισαγωγή της Ιστορίας ως αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας. Μόνο αν αλλάξει η κουλτούρα των μαθηματικών θα μπορέσει η Ιστορία των Μαθηματικών να αποτελέσει ένα σπουδαίο διδακτικό εργαλείο που θα αυξήσει τα κίνητρα των μαθητών για μάθηση και θα συμβάλλει στη δημιουργία θετικής στάσης των παιδιών απέναντι στα Μαθηματικά.

Βιβλιογραφία.

Ξενόγλωσση

1. Arcavi, A., (1985). "*Hisroiy of Mathematics as a component of Mathematics Teachers background",* Ph.D. Thesis, Rehovot: Weizmann Institute of Science.

2. Arcavi, A. (1987), "Using Historical Materials in the Mathematics Classroom"', *Arithmetic Teacher* 35 (4), 13-16.

3. Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1982). "Maybe a Mathematics Teacher can Profit from the Study of the History of Mathematics", *For the Learning of Mathematics,* 3 (Nol) 30-37.

4. Arcavi, A. & Bruckheimer, M. (2000). "Didactical uses of primary sources from the History of Mathematics", *Themes in Education,* 1 (Nol) 55-74.

5. Avital, S. (1995). "History of mathematics can help improve instruction and learning". In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Hohansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters*, (pp. 3 - 23). Washington DC: The Mathematical Association of America.

6. Bakker, A. (2004). *"Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools".* Ph.D. thesis, The Freudenthal Inistitute, Utrecht

7. Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). "An historical phenomenology of mean and median". *Educational Studies in Mathematics, 62*,149-168.

8. Barbin, E. (1991). "The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective". *For the Learning of Mathematics* 11(2), 12- 14.

9. Barbin. E. (1996). "The role of problems in the history and teaching of mathematics". In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching,* (pp. 17- 25). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

10. Barbin, E. (1997). "Histoire et enseignement des mathématiques: pourquoi? comment?". *Bulletin AMQ, Montréal,* 37 (1), 20–25.

11. Barbin, E. (2000). "Integrating history". Research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study",* (pp. 63 - 90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

12. Barbin, E. & Menghini, M. (2000). "On potentialities, limits, and risks". In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), "History in Mathematics Education: The ICMI Study", p. 86 - 90. Dordrecht The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

13. Barzun, J. (1954]). "*Teacher in America*". New York: Doubleday and Co.

14. Boyer, C. B. (1968). "*A History of Mathematics*". New York: Wiley.

15. Bruhler, M. (1990). "Reading Archimedes' measurement of a circle", in J. Fauvel (ed), *History in the mathematics classroom: the IREM papers*, Leicester: Mathematical Association, 43–58.

16. Davitt, R. M. (2000). "The evolutionary character of mathematics". *Mathematics Teacher* 93(8), 692 -694.

17. Ernest, P. (1998). "The history of mathematics in the classroom". *Mathematics in School*, 27(4), 26-31.

18. Eves, H. (1983). "*Great moments in Mathematics - Before 1650"*. Mathematical Assosiation of America, Ελληνική έκδοση: *Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών – πριν το 1650*. Εκδόσεις Τροχαλία, 1989.

19. Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). "Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities". *Educational Studies in Mathematics, 66*, 83-106.

20. Fauvel, J. (1991). "Using history in mathematics education". *For the learning of mathematics 11*(2), 3–6

21. Fauvel, I. & van Maanen, J. (Eds.). "*History in Mathematics Education: The ICMI Study*", (pp. 201 - 240). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

22. Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997). "The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics": Discussion document for an ICMI study (1997 - 2000). *Mathematics in School*, 26(3), 10 - 11.

23. Franke, M. L., Fennema, E. & Carpenter, T. (1997). "Teachers creating change: Examining evolving beliefs and classroom practices". In E.

Fennema & B. Scott Nelson (Eds,), *Mathematics teachers in transition*, (pp. 255 - 282). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

24. Freudental, H. (1973). “What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education”, in A. G. Howson (ed.): *Developments in Mathematical Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 101-114.

25. Fried, M. N. (2001). “Can mathematics education and history of mathematics coexist?”. *Science & Education*, *10*, 391-408.

26. Fried, M. N. (2007). “Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge”. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 203-223. Special issue on the history of mathematics in mathematics education.

27. Furinghetti, F. (1997). "History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains". For the *Learning of Mathematics*, 17(1), 55 – 61.

28. Furinghetti F. (2000b). “The long tradition of history in mathematics teaching”. In V. Katz (Ed.). *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (pp. 49- 58). Washington. DC: The Mathematical Association of America.

29. Furinghetti, F. (2004). “History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy”. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 1¬20. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

30. Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). “Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook ofinternational research in mathematics education* (pp. 631-654, Chapter 25). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

31. Furinghetti F. & Somaglia, A. (1998*).* "History of mathematics in school across disciplines". *Mathematics in School*, 27(4), 48-51.

32. Grugnetti, L, & Rogers, L. (2000). “Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues”. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study"*, (pp. 39 - 62). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

33. Guedji, D. (1998). “*Le theoreme du perroquet*”. Editions du Seuil. Ελληνική έκδοση: *Το θεώρημα του παπαγάλου*, Μετάφραση: Τ, Μιχαηλίδης. Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, 1999.

34. Hallez, M. (1990). “Teaching Huygens in the rue Huygens” in J. Fauvel (ed), *History in the mathematics classroom*: the IREM papers, Leicester: Mathematical Association, 97–112

35. Hankins, T. (1979). “*In Defense of Biography: The use of Biography in the History Science*”. History of Science, Vol. 17, p. 1-16.

36. Helfgott, M. (2004). “Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics”. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 147-164. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

37. Jahnke, H. N. (2001). “Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view”. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 175-197.

38. Jankvist, U. T. (2007). “Den matematikhistoriske dimension i undervisning—generelt set”. *MONA*, 3(3), 70-90. English translation of title: The dimension of the history of mathematics in teaching and learning—generally seen.

39. Jankvist U. T. (2009). “A categorization of the “whys” and “hows” on using history in mathematics education”. *Educational Studies in Mathematics 71*, pp.235-261.

40. Jankvist U. T. (2010). “An empirical study of using history as a ‘goal’”. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1315-1321.

41. Katz, V. J., & Michalowicz, K. D. (Eds.) (2004). “*Historical modules for the teaching and learning of mathematics*”. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

42. Kragh, H. (1990). “*Dirac; a scientific biography*”. Cambridge: University Press.

43. Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). “Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics”. *Educational Studies in Mathematics* 80, pp.327-349.

44. Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2009). “Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work”. *ZDM Mathematics Education*, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41*, 87–104.

45. Le Goff, J-P. (1996). “Cubic equations at secondary school level: following in Euler’s footsteps”, in E. Barbin, R. Douady (eds), *Teaching*

mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice, 11–34, Pont-a-Mousson: Topiques Editions.

46. Natriello, G. (2004). "*Beyond Courses: The search for new forms of Education Online".* Ed Lab, Teachers' College, Columbia University. Διαθέσιμο στη διεύθυνση: http://edlab.tc.columbia.edu/index.php?q=node/471 (4/9/2006)

47. Philippou, G, & Christou, C. (2001). "History of mathematics in a preservice program and some results". In P. Radelet-de-Grave (Ed.), *Proceedings of the Third European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education: From Play School to University,* (Vol. 1. pp. 271 – 286). Louvin-la-Neuve and Leuven, Belgium, July 15 -21, 1999.

48. Ponza, M. V. (1998). "A Role for the History of Mathematics in the Teaching of Mathematics". *Mathematics in School,* 27 (4), 10-13.

49. Radford, L., Katz, V., Dorier, J-P., Bekken, O. & Sierpkiska, A. (2000). "The role of historical analysis m predicting and interpreting students' difficulties in mathematics". In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study"*, (pp. 149 – 154). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

50. Ransom, P., Arcavi, A,, Barbin, E., & Fowler, D. (1991). "The experience of history in mathematics education". *For the learning of mathematics 11* (2), 7–16, Special Issue on History in Mathematics Education.

51. Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G., et al. (1991). "The experience of history in mathematics education". *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 7-16. Special Issue on History in Mathematics Education.

52. Schubring (1978). *"Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*". Bielefeld: Klett – Cotta.

53. Siu, M. K. (2006). "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?", in F. Furinghetti, S. Kaisjer, C. Tzanakis (eds), *Proceedings HPM 2004 & ESU*, University of Crete, Greece, pp. 268 – 277.

54. Siu, M.K. & Tzanakis, C. (2004). "History of Mathematicsin Classroom Teaching – Appetizer? Main course? Or dessert?. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3* (1-2), v-x.

55. Speranza, F. (1989). "History, Epistemology, Didactics: some noteworthy cases". In: *proceedings of the first Italian - German bilateral*

symposium on Didactics of Mathematics. Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), *95 – 107*.

56. Steiner, H. G., (1989). “Relations between historico-epistemological studies and research in mathematics education”. In: *Proceedings of the first Italian - German bilateral symposium on Didactics of Mathematics*. Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), *25 - 35.*

57. Strasser, R. (1989). “Scholarly Knowledge and Social Needs Sources and legitimation of Mathematical Knowledge to be taught”. In: *Proceedings of the first Italian — German bilateral symposium on didactics of Mathematics.* Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), *125 – 144.*

58. Streefland, L. (1996). “Negative numbers: Reflections of a learning researcher". *Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 57 - 77.

59. Struve, H. (1989). “The relevance of investigations of the historical development of mathematical theories for the teaching of these theories”. In: *Proceedings of the first Italian - German bilateral symposium on Didactics of Mathematics.* Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), *37 - 50.*

60. Schubring, G. (2008). “The debate on a “geometric algebra” and methodological implications”. *Paper presented at the HPM 2008 satellite meeting of ICME 11,* Mexico.

61. Swetz, F. (1995). “Some not so random thoughts about the history of mathematics - its teaching, learning, and textbooks”. *PRIMUS*, 5(2), 97 – 107.

62. Swetz, F. (2000). “Problem solving from the history of mathematics”. In V. Katz (Ed.). *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (pp. 59 - 65). Washington. DC: The Mathematical Association of America.

63. Taimina, D. (2004). “History of mathematics and mechanics in digital Reuleaux kinematic mechanism collection”. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 89-102. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings fromTSG17atICME10).

64. Thom, R. (1973). “Modern Mathematics: does it exist?”, in A. G. Howson, (ed): *Developments in Mathematical Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 194-209.

65. Thompson A.G. (1992). “Teacher’s beliefs and conceptions: A synthesis of research”. In D. Grouws [ed.] *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 127-146. Macmillan, New York.

66. Thomaidis, Y. (1991). *"Historical digressions in Greek geometry lessons". For the Learning of Mathematics*, 11(2) 37-43.

67. Thomaidis, Y. &. Tzanakis, C (2009). “The implementation of the history of mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek secondary education” in V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (eds) *Proceedings of the 6th CERME*, Institut National De Recherche Pédagogique, France, ISBN 978-2-7342-1190-7, pp.2801-2810.

68. Tzanakis, C. (1996). "The history of the relation between Mathematics and Physics as an essential ingredient of their presentation", *Proc. of the Second European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, (eds) E. Veloso et al., Universidade do Minho, Braga, Portugal, pp.96-104.

69. Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). "Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey". In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study",* (pp. 201 - 240). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

70. Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). "Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks". *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44 – 55

71. Van der Waerden, B. L. (1961). “*Science Awakening*”. New York, Oxford University Press. Ελληνική έκδοση: *Η αφύπνιση της επιστήμης.* Μετάφραση: Γιάννης Χριστιανίδης. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2000.

72. Van Maanen, J. (1997). "New maths may profit from old methods". *For the Learning of Mathematics*,17(2), 39-46.

73. Wheeler. D. (1984). “*History Aid Pedagogy?*”. In: Newsletter, 6, 2 – 4.

74. Wilson, P. S. & .Chauvot, J. B. (2000). “Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics*". Mathematics Teacher*. 93(8), 642 - 645.

Ελληνική

1. Βαϊνά, Μ. **(1**996). “Μέθοδος project: Μια πρόκληση για το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα”, *Νέα Παιδεία*, τ.80, σελ. 77 – 87.

2. Γαβριήλ, Α. (2011). *Το πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών και ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στην αντιμετώπιση του.* (Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.)

3. Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι. & Μακρίδης, Γρ. (2002). “Σχέσεις ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και στη Διδακτική των Μαθηματικών”. *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σελ. 269-283.

4. Γκίνης, Δ. & Πιτέρη, Σ. (2008). “Εκπαιδευτική έρευνα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου με τα νέα βιβλία – Στάσεις και απόψεις των εκπαιδευτικών”. *Πρακτικά 25ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ 575-692. Ε.Μ.Ε.

5. Ε.Μ.Ε Παράρτημα Κέρκυρας (2003). Σχετικά με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου.

   http://dide.ker.sch.gr/emekerkyra/index.html

6. Δημητριάδου, Ε., Θωμαΐδης, Ι, Οικονόμου, Π. & Σταφυλίδου Σ. (2009). “Οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα νέα βιβλία μαθηματικών στο Γυμνάσιο.” *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*,.σσ. 345–354.

7. Δ.Ε.Π.Π.Σ – Α.Π.Σ, Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (ΦΕΚ), Τεύχος 2°, Αρ. Φύλλου 303 & 304/ 13.03.2003.

8. Θωμαΐδης, Γ. (1986). “Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών (το παράδειγμα των λογαρίθμων)”. *Ευκλείδης* Γ΄ 13, 1-30.

9. Θωμαΐδης, Γ. (2007). 5ο Ευρωπαϊκό Θερινό Πανεπιστήμιο με θέμα History and Epistemology in Mathematics Education (Πράγα). Οργάνωση τρίωρου εργαστηρίου (workshop) με θέμα Ancient Greek Mathematics.

   www.didamath.gr/seminario/Workshop.doc

10. Θωμαΐδης Γ., Καστάνης Ν.(1987). “Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των Μαθηματικών”. *Ευκλείδης Γ΄,* 16, 61-92.

11. Καραγεώργος, Δ. (1997-1998). “Το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και τα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Γενικής Εκπαίδευσης”. *Ευκλείδης Γ΄,* 47-48-49-50, σσ. 89-94.

12. Καλδρυμίδου, Μ., Οικονόμου, Α., Οικονόμου, Π. & Τζεκάκη, Μ. (1997). “Οι Αντιλήψεις των Καθηγητών των Μαθηματικών για την Επιμόρφωση και την Εκπαιδευτική Διαδικασία”. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 25, σσ. 119-160.

13. Κολιάδης, Ε. (2002). “Γνωστική Ψυχολογία, Γνωστική Νευροεπιστήμη και Εκπαιδευτική πράξη. Μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών”, Τόμος Δ΄. Αθήνα : Εκδόσεις Γρηγόρη.

14. Ματσαγγούρας, Η. (2003). Η Διαθεματικοτητα στη Σχολική Γνώση: Εννοιοκεντρική Αναπλαισίωση και Σχέδια Εργασίας. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

15. Μπιζιμπιάνος, Μ. (2014). *Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών. Η περίπτωση της Γεωμετρίας.* (Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.)

16. Παπασταυρίδης, Σ. (1979). «Αριθμοθεωρία». *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 13, 136-150.

17. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *Δ.Ε.Π.Π.Σ. –Α.Π.Σ. Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*, Τόμοι Α-Β. Αθήνα.

18. Παναγιώτου, Ε. (2002). “Ο ρόλος της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών”. *Πρακτικά του 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* - Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Σελ. 117-130, Αθήνα: εκδ. Ε.Μ.Ε.

19. Sir T. L. Heath (2001). *“Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών”*. Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα.

20. Σπηλιωτοπούλου, Β., Διακογιώργη, Κ. & Παπαντωνίου, Β. (2009). “Χαρακτηριστικά Ιστορικών Στοιχείων στα Βιβλία Μαθηματικών Γυμνασίου”. *Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές*. 3ο συνέδριο ΕΝΕΔΙΜ, 393-402, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

21. Τζανάκης Κ. (2009). “Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ της Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας”, στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης, Γ., Πάσχος Θ. (επιμ.), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 17 – 39.

22. Τζεκάκη, Μ. (2000). “ Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών”, *Πανελλήνιο Συνέδριο: Έρευνα για την ελληνική εκπαίδευση, Περιλήψεις Εισηγήσεων*, Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας.

http://www.kee.gr?html/researchfull.php?&ID=5&topicID=9

23. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Μ. (2002). Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 7,* σσ. 80–100.