ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ ΖΑΧΑΡΑΚΗ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Δέσποινα Πόταρη

ΑΘΗΝΑ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 17η Ιουνίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
○ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Αναπλ. Καθηγήτρια
○ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια
○ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
○ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Αναπλ. Καθηγήτρια
○ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια
○ Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Διδάκτορα, Εξωτ. Συνεργάτη

ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διδασκαλία της Γεωμετρίας εντός μίας σχολικής τάξης κυρίαρχο ρόλο κατέχει η απόδειξη, διαδραματίζοντας διαφορετικούς ρόλους για εκπαιδευτικούς και μαθητές. Κάθε ενέργεια παραγωγής μαθηματικής απόδειξης επηρεάζεται από τα συναισθήματα των μαθητών για αυτή. Οι στάσεις των μαθητών και τα συναισθήματά τους κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας τροφοδοτούν και καθορίζουν τον τρόπο δράσης εντός του πλαισίου της.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να αναδείξει τη σημασία των στάσεων των μαθητών απέναντι στην αποδεικτική διαδικασία και τα συναισθήματα που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια ενασχόλησης των μαθητών με αυτή. Πιο συγκεκριμένα με αφορμή τις δυσκολίες και τα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διδασκαλία και την εκμάθηση μιας μαθηματικής απόδειξης, καθώς και ερωτήματα που δημιουργούνται για το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη για απόδειξη, θα εξετάσουμε το ρόλο των συναισθημάτων ως βασικό παράγοντα διαμόρφωσης των στάσεων των μαθητών, απέναντι στη μαθηματική απόδειξη.

Ο βασικός ρόλος της απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη διαισθητικών αναπαραστάσεων και στη συνέχεια η προώθηση της κατανόησης. Θεωρώντας την απόδειξη ως κεντρικό και αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών, θα εξετάσουμε το βαθμό που τα συναισθήματα και οι στάσεις των μαθητών μπορούν να επηρεάσουν την εμπλοκή τους στην αποδεικτική διαδικασία.

Έγινε έρευνα κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2014 – 15, με δύο μαθητές α’ λυκείου, στο πλαίσιο του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στόχοι της έρευνας ήταν αφ’ ενός να εντοπιστούν οι παράγοντες, οι οποίοι ενισχύουν τις συνθήκες ανάπτυξης αρνητικών στάσεων στους μαθητές απέναντι στη μαθηματική απόδειξη και κατ’ επέκταση στη Γεωμετρία και αφ’ εταίρου να βελτιωθούν μέσα από μία σειρά παρεμβάσεων οι στάσεις και τα συναισθήματα τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι είναι δυνατή η αλλαγή των συναισθημάτων προς το ευνοϊκότερο, και συνακόλουθα των στάσεων, των μαθητών απέναντι στην απόδειξη.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, τους καθηγητές μου και μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο, κα. Δέσποινα Πόταρη και κα. Ξένια Βαμβασκούση, για τη βοήθεια και την υποστήριξη τους. Ιδιαίτερα την κα. Ξένια Βαμβακούση για τον πολύτιμο χρόνο της, τον οποίο διέθεσε για εμένα και για την άριστη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ τους δύο μαθητές μου, Αλέξανδρο και Μάριο, καθώς και τους γονείς τους, για την προθυμία τους να συμμετάσχουν στην έρευνα, την οποία πραγματοποίησα και για την άψογη συνεργασία μας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως και να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου, στους γονείς μου Στέφανο και Ειρήνη, οι οποίοι αποτέλεσαν αρωγούς σε αυτή μου την προσπάθεια. Τον αδερφό μου Γιάννη, για την υποστήριξή του, καθώς και τον αρραβωνιαστικό μου Βαγγέλη, για την αμέριστη συμπαράστασή του, συμβάλλοντας με τον τρόπο του στην επίτευξη αυτού του στόχου.

Στη μνήμη της
νονάς μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 **Εισαγωγή** 14

2 **Θεωρητικό Πλαίσιο** 16

2.1 Η σημασία της μαθηματικής απόδειξης στις αίθουσες διδασκαλίας. Η απόδειξη ως το εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης. 16

2.2 Συναισθήματα και Στάσεις των μαθητών απέναντι στη μαθηματική απόδειξη, είναι οι αναπαραστάσεις των στόχων και των αναγκών τους. 16

2.3 Η δύναμη του εκπαιδευτικού. Ο δάσκαλος πρέπει να αυξάνει τη συναισθηματική ατμόσφαιρα στο επιθυμητό επίπεδο μέσα στις αίθουσες διδασκαλίας. 18

2.4 Η αλληλεπίδραση μαθητών και η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης (ΖΕΑ) 20

2.5 Σύντομη σύνθεση – Σκοπός της έρευνας 21

3 **Μεθοδολογία της Έρευνας** 23

3.1 Τύπος, Σκοπός και Ερωτήματα της Έρευνας 23

3.1.1 Τα συναισθήματα χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής. 25

3.2 Μέθοδος 26

3.2.1 Συμμετέχοντες 26

3.2.2 Διαδικασία και Εργαλεία 27

4 **Ανάλυση Απομαγνητοσκοπήσεων και Απομαγνητοφωνήσεων** 28

4.1 Ευρήματα 1ης Συνέντευξης 29

4.1.1 Απαντήσεις και σχόλια πρώτου μαθητή 29

4.1.2 Απαντήσεις και σχόλια δεύτερου μαθητή 32

4.2 Η 1η Παρέμβαση 35

4.2.1 Περιεχόμενο 1ης Παρέμβασης 35

4.2.2 Αποτελέσματα 1ης Παρέμβασης 37

4.3 Η 2η Παρέμβαση 47

4.3.1 Περιεχόμενο 2ης Παρέμβασης 47

4.3.2 Αποτελέσματα 2ης Παρέμβασης 49

4.4 Η 3η Παρέμβαση 60

4.4.1 Περιεχόμενο 3ης Παρέμβασης 60

4.4.2 Αποτελέσματα 3ης Παρέμβασης 62

4.5 Η 4η Παρέμβαση 73

4.5.1 Περιεχόμενο 4ης Παρέμβασης 73

4.5.2 Αποτελέσματα 4ης Παρέμβασης 75

4.6 Ευρήματα 2ης Συνέντευξης 82
4.6.1 Απαντήσεις και σχόλια πρώτου μαθητή 82
4.6.2 Απαντήσεις και σχόλια δεύτερου μαθητή 84
5 **Συμπεράσματα** 86
5.1 Συμπεράσματα Έρευνας 86
5.2 Διδακτικές Προτάσεις 91
Σχόλια 92
Βιβλιογραφία 93
Παράρτημα 96

1 Εισαγωγή

Στην επιστήμη των μαθηματικών η απόδειξη είναι μία παρουσίαση, η οποία πείθει για την αλήθεια μίας μαθηματικής πρότασης. Η παραγωγή της απόδειξης δεν είναι εμπειρική. Είναι εκείνη η οποία πρέπει να επισημαίνει ότι μία πρόταση αληθεύει για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση, για αυτό το λόγο η απόδειξη παράγεται αναγωγικά.

Η απόδειξη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επιστήμη των μαθηματικών και ειδικότερα στο τομέα της Γεωμετρίας. Η αποδεικτική διαδικασία, η ανάλυση, η δόμηση και τελικά η παραγωγή της κατέχουν κεντρική θέση και εντός της μαθηματικής σχολικής τάξης, δημιουργώντας εύφορο έδαφος για διαδικασίες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας και μάθησης. Στην κατασκευή των αποδείξεων οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές αλληλεπιδρούν με στόχο τη θεμελίωση και οικοδόμηση της γεωμετρικής γνώσης. Σημαντικό και καθοριστικό ρόλο, εντός αυτού του πλαισίου, διαδραματίζουν τα συναισθήματα και οι στάσεις των μαθητών, όσον αφορά την αποδεικτική διαδικασία στη Γεωμετρία.

Μέσα από μία πληθώρα ερευνών αλλά και από την πρακτική στα σχολεία, είναι ευρέως γνωστό ότι η διδασκαλία και η μαθηματική απόδειξη προκαλεί σημαντικές δυσκολίες και προβλήματα, τόσο στον εκπαιδευτικό, όσο και στους μαθητές. Κάποια από αυτά αφορούν τη φύση της απόδειξης και το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη για απόδειξη. Όλα αυτά είναι γνωστά στους διδάσκοντες όλων των βαθμίδων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι συχνά τα ερωτήματα που απασχολούν τους μαθητές, όπως «ποιος ο λόγος να κάνουμε απόδειξη;» ή «που θα μας χρειαστεί αυτό που μαθαίνουμε, τι μας προφέρει;». Είναι απορίες που σχεδόν όλοι οι δάσκαλοι των μαθηματικών τις έχουν ακούσει και καλούνται να τις λύσουν.

Υπάρχουν όμως και άλλες δυσκολίες σχετικά με την μαθηματική απόδειξη, όπως η κατανόηση της εκφώνησης, μαθηματικοί όροι - έννοιες, σύμβολα καθώς και ο τρόπος έναρξης της απόδειξης, κυρίως με την κατασκευή κατάλληλου σχήματος. Όλα τα παραπάνω, όμως, σχετίζονται και αλληλεπιδρούν με το πώς ένας μαθητής νιώθει όταν καλείται να μελετήσει ή να παραγάγει μια μαθηματική απόδειξη. Τα συναισθήματα μας όταν «κάνουμε μαθηματικά» παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη αυτού που πραγματευόμαστε τη δεδομένη στιγμή.

Είναι γνωστή η μεγάλη σημασία του ψυχολογικού-συναισθηματικού τομέα στη μάθηση και τη διδασκαλία. Ειδικότερα στον τομέα της Μαθηματικής Παιδείας η διαδικασία της μάθησης επηρεάζεται, από τη στενή διασύνδεση μεταξύ γνωστικών, συναισθηματικών παραγόντων, κινήτρων καθώς και από το περιβάλλον στο οποίο λαμβάνει χώρα. Ιδιαίτερη σημασία έχει η σχέση που αναπτύσσεται ανάμεσα στον μαθητή και τον εκπαιδευτικό. Για αυτό το λόγο είναι σημαντικό να εξετάσουμε αν τα συναισθήματα και οι στάσεις των μαθητών σε μία μαθηματική απόδειξη επηρεάζουν

τη γενικότερη απόδοση τους και την παραγωγή αυτής, καθώς και υπό ποιες συνθήκες είναι δυνατή η μεταβολή τους προς το ευνοϊκότερο.

Βασιζόμενοι στη δουλειά των Ball, Hoyles, Jahnke και Movshovitz-Hadar (2002) θα επισημάνουμε την απόδειξη ως ένα βασικό συστατικό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Θα υποστηρίξουμε ότι η απόδειξη δεν είναι απλώς μια συντακτική παραγωγή και η αξία της είναι πολύ μεγάλη στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και διαδικασιών. Θα ορίσουμε τα συναισθήματα υιοθετώντας το θεωρητικό πλαίσιο του Hannula (2006) και θα εξετάσουμε τη σημασία τους καθώς και τη στάση των μαθητών απέναντι στη μαθηματική απόδειξη.

Σε αυτή την εργασία θα διερευνήσουμε αρχικά τη σημασία της μαθηματικής απόδειξης και τα συναισθήματα των μαθητών, τα οποία μπορούν να επηρεάζουν την παραγωγή αυτής. Αρχικά θα γίνει αναφορά στις θεωρίες, στις οποίες βασίστηκε και σχεδιάστηκε η έρευνα. Στην τρίτη ενότητα, θα γίνει λόγος για τη μεθοδολογία της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Στη συνέχεια, θα καταγραφούν και θα αναλυθούν τα αποτελέσματα των απομαγνητοφωνήσεων, των δύο συνεντεύξεων, καθώς και των απομαγνητοσκοπήσεων των τεσσάρων παρεμβάσεων. Τέλος θα γίνει μία καταγραφή των συμπερασμάτων και των διδακτικών προτάσεων.

2 Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Η σημασία της μαθηματικής απόδειξης στις αίθουσες διδασκαλίας. Η απόδειξη ως το εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης.

Στο πρώιμο στάδιο μίας θεωρίας, η απόδειξη ίσως εξυπηρετεί περισσότερο στο να ελέγξει την αξιοπιστία, την εγκυρότητα και τις προοπτικές εξέλιξης από τις υποθέσεις που προέρχεται, παρά να εδραιώσει την αλήθεια του αποτελέσματος που παράγει (Hanna & Jahnke, 2012). Οι Ball κ.ά. (2002) μας επισημαίνουν την ανάγκη για απόδειξη στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η απόδειξη αναφέρεται ως «*βασικό συστατικό*» αυτής όχι μόνο επειδή η απόδειξη είναι στην καρδιά αυτής αλλά και γιατί «είναι απαραίτητο εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης» (σελ. 907). Επίσης αναφέρουν τη χρήση αποδείξεων «ως παιδαγωγικό εργαλείο που υποστηρίζει τόσο την ανάπτυξη των πεποιθήσεων κάποιου στην αλήθεια των μαθηματικών ισχυρισμών, όσο και την ικανότητα κάποιου να δικαιολογεί αυτές τις πεποιθήσεις» (σελ. 916).

Η προσέγγιση ενός ατόμου στην κατασκευή μίας απόδειξης θα επηρεάσει τις ευκαιρίες μάθησης που παρέχονται από την παραγωγή της (Weber, 2005). Οι Moutsios-Rentzos και Spyrou (2013) αναφέρουν ότι «μέσα σε ένα παιχνίδι του μυαλού για την επιλογή διαφορετικών a priori συνδυασμών η απόδειξη καθίσταται ο μοναδικός τρόπος πρόσβασης και αξιολόγησης της μαθηματικής αλήθειας των ισχυρισμών» (σελ. 334). Τέλος η διδασκαλία και η μάθηση της μαθηματικής λογικής ξεκινάει στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, έχουν γίνει επισημάνσεις και έχει τονιστεί η σημασία της απόδειξης και της λογικής από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Ball, κ.ά., 2002).

2.2 Συναισθήματα και Στάσεις των μαθητών απέναντι στη μαθηματική απόδειξη, είναι οι αναπαραστάσεις των στόχων και των αναγκών τους.

Σύμφωνα με το πλαίσιο του McLeod το *θυμικό* είναι μία ιδέα για τις πτυχές των ανθρώπινων σκέψεων που δεν είναι απλή νόηση (Hannula, 2012b). Ο Hannula (2012b) ορίζει το θυμικό ως μία «ομπρέλα» κάτω από την οποία βρίσκονται τα συναισθήματα, οι στάσεις, οι πεποιθήσεις, οι αξίες, τα κίνητρα, τα πρότυπα, οι διαθέσεις, οι στόχοι και οι συγκινήσεις (σελ. 138). Επίσης ο Hannula (2012b) επισημαίνει ότι η στάση είναι ταυτόχρονα «γονέας και αδερφός στα συναισθήματα», σύμφωνα με το πλαίσιο του Hart (σελ.140).

Στάση είναι η συναισθηματική διάθεση που έχει ένας μαθητής απέναντι στα μαθηματικά (Hannula, 2002). Οι στάσεις παράγονται από συναισθήματα (εν θερμώ, όταν εμπλέκεται το υποκείμενο σε μια μαθηματική απόδειξη), προσδοκίες (πιο συγκεκριμένα τι αναμένει από την εμπλοκή του, επιτυχία ή αποτυχία) και αξίες (τι αξία αποδίδει στη γεωμετρία) (Hannula, 2002). Σύμφωνα με τον Liljedahl (2005) ορίζεται ως «η θετική ή αρνητική διάθεση να απαντήσει ένας μαθητής, σε κάποιο ερώτημα που προκύπτει» (σελ. 222). Ο Hannula (2002) επισημαίνει ότι «τα *συναισθήματα* είναι το επίκεντρο στις στάσεις παρά η νόηση» (σελ. 28). Μαθητές με αρνητικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά είναι δυνατό να ζήσουν στιγμές με θετικά συναισθήματα κατά τη διάρκεια παραγωγής μίας απόδειξης και αντίστροφα. Είναι λογικό ότι τα επαναλαμβανόμενα θετικά συναισθήματα και η επιτυχία μπορούν να παράγουν θετικές στάσεις και να συμβάλλουν στην αλλαγή αυτών απέναντι στα μαθηματικά. Απαιτούνται όμως μεγάλες χρονικοί περίοδοι και διαδοχικές επιτυχίες για να δημιουργήσουν σημαντική αλλαγή (Liljedahl, 2005). Οι Zan, Brown, Evans και Hannula (2006) αναφέρουν ότι «επαναλαμβανόμενη εμπειρία των συναισθημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως μία *βάση* για πιο *σταθερές* στάσεις» (σελ. 116).

Ποιός είπε όμως ότι τα αρνητικά συναισθήματα επιδρούν αρνητικά στην απόδοση των μαθητών; Ο Hannula (2012a) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «τα θετικά συναισθήματα διευκολύνουν τις δημιουργικές πτυχές της παραγωγής απόδειξης», αλλά από την άλλη μεριά «τα αρνητικά συναισθήματα διευκολύνουν την αξιόπιστη ανάκτηση της μνήμης» (σελ. 6). Τα αρνητικά συναισθήματα (π.χ. θυμός) ενός μαθητή μπορεί να παρεμποδίσουν καθώς και να διευκολύνουν την παραγωγή μίας μαθηματικής απόδειξης (Hannula, 2006). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και τα αρνητικά συναισθήματα είναι απαραίτητα σε ορισμένες φάσεις της μαθηματικής απόδειξης.

Τα συναισθήματα και η στάση ενός μαθητή απέναντι στα μαθηματικά είναι αναπαραστάσεις των στόχων και των αναγκών του ή τουλάχιστον κωδικοποιούν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με αυτά (Hannula, 2006). Σαν εκπαιδευτικοί αλλά και σαν ερευνητές πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας ότι είναι δύσκολο έως και ακατόρθωτο να εντοπίσουμε το συναίσθημα ενός μαθητή με το οποίο έχουμε να κάνουμε, αν δε λάβουμε υπόψη μας πώς ο ίδιος εκτιμάει ένα δεδομένο αντικείμενο ή μία κατάσταση (Cobb, Yackel και Wood, 2011). Επομένως είναι σημαντικό τα συναισθήματα να μελετώνται σε σχέση με τις επιθυμίες και τις σκέψεις του κάθε εφήβου, καθώς η γενική συναισθηματική κατάσταση του είναι αυτή που διαμορφώνει τον πρακτικό συλλογισμό και τις ενέργειες του (Evans, 2006). Μέσα από μία πληθώρα ερευνών, οι οποίες μελετούν τη σημερινή πραγματικότητα του σχολικού περιβάλλοντος, διαπιστώνεται ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά τη διάρκεια ενασχόλησής του με τα μαθηματικά, δε φαίνεται να διακατέχονται από ιδιαίτερα ευχάριστα συναισθήματα (Brown, Brown & Bibby, 2008), (όπως ανάφεραν και οι Moutsios – Rentzos και Kalozoumi – Paizi, 2014)

Επίσης μέσα από άλλες έρευνες, έχει επισημανθεί η σημασία των συναισθημάτων, διότι μας παρέχουν τη δυνατότητα να συλλέξουμε πληροφορίες σχετικά με την

ικανότητα ενός μαθητή να προχωρήσει (να προοδεύσει), σε αρμονία πάντα με τους στόχους του (Skemp, 1979), (όπως ανάφεραν και οι Moutsios – Rentzos και Kalozoumi – Paizi, 2014). Η εστίαση στα συναισθήματα ενός μαθητή κατά τη διάρκεια μίας μαθηματικής απόδειξης μπορεί να μας παρέχει ενδιαφέρουσες πληροφορίες στη διδακτική των μαθηματικών, διότι επιτρέπει την περιγραφή της κάθε δραστηριότητας(συγκεκριμένα παραγωγή μαθηματικής απόδειξης), όπως αυτή επηρεάζεται από το θυμικό (Evans, 2006). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η προσπάθεια μελέτης των συναισθημάτων μοιάζει να είναι αρκετά δύσκολη. Κάποια συναισθήματα που βιώνει ο μαθητής κατά τη διάρκεια παραγωγής μίας απόδειξης μπορεί να είναι εμφανή, αλλά κάποια άλλα όχι. Ποια είναι όμως τα συναισθήματα που μπορούν να γίνουν πιθανόν αντιληπτά και θα ενισχύσουν την μελέτη; Τα επτά βασικά συναισθήματα που εκδηλώνονται στις εκφράσεις του προσώπου και μπορούν να γίνουν αντιληπτά είναι: ο φόβος, η θλίψη, ο θυμός, η περιφρόνηση, η αποστροφή, η χαρά-ευτυχία και η έκπληξη (Ekman & Friesen, 1978), (όπως ανάφεραν και οι Moutsios – Rentzos και Kalozoumi – Paizi, 2014).

2.3 Η δύναμη του εκπαιδευτικού. Ο δάσκαλος πρέπει να αυξάνει τη συναισθηματική ατμόσφαιρα στο επιθυμητό επίπεδο μέσα στις αίθουσες διδασκαλίας.

Ο Hannula (2012a) αναφέρει «η θετική διάθεση για τα μαθηματικά έχει αμοιβαία σχέση με την επιτυχία, ενισχύοντας η μία την άλλη σε βάθος χρόνου» (σελ. 1). Κάθε εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να γνωρίζει ότι τα συναισθήματα των μαθητών του είναι απόρροια της συμπεριφοράς του ιδίου. Μέσα από αναφορές των Moutsios-Rentzos και Spyrou (2013) εκτιμάται ότι οι μαθητές «χρειάζονται έναν λόγο για να παράγουν μία απόδειξη» (σελ. 330), κάθε εκπαιδευτικός λοιπόν πρέπει να είναι σε θέση να τους τον προσφέρει.

Αναφέρεται από τους Harel και Showder (2007) ότι «η έμφαση που οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί δίνουν στην απόδειξη» και γενικότερα στην ανάγκη για αιτιολόγηση, «αναμφίβολα κατέχει κυρίαρχο ρόλο στη διαμόρφωση των συστημάτων απόδειξης» των μαθητών (σελ. 827). Η όχι και τόσο εκτεταμένη έρευνα, που έχει πραγματοποιηθεί σε αυτό τον τομέα, έχει δείξει ότι η έμφαση που δίνουν οι εκπαιδευτικοί, είναι ανεπαρκής (Biza, Nardi & Zachariades, 2009). Γιατί συμβαίνει όμως αυτό; Οι Harel και Showder (2007) αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι «οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να μην κατανοούν σημαντικούς ρόλους της απόδειξης», οι οποίοι ποικίλουν, παρά μόνο αυτόν της «επαλήθευσης» (σελ. 836). Πώς αναμένουμε λοιπόν οι μαθητές μας να διακατέχονται από θετικά συναισθήματα, όταν εμείς οι εκπαιδευτικοί δεν παρέχουμε την απαιτούμενη σημασία στον τομέα της απόδειξης;

Κατά τη διάρκεια διδασκαλίας των μαθηματικών ακόμα και ένα μικρό ερέθισμα, όπως ο τόνος της φωνής του δασκάλου μπορεί να αλλάξει τη συναισθηματική κατάσταση ενός μαθητή (Hannula, 2006). Κατ' επέκταση λοιπόν κατά τη διάρκεια παράδοσης μίας μαθηματικής απόδειξης, ο τρόπος παρουσίασης της από τον εκπαιδευτικό είναι πολύ σημαντικός για τα συναισθήματα που θα προκληθούν στους μαθητές. Ο δάσκαλος είναι αυτός που μπορεί και πρέπει να αυξήσει την συναισθηματική ατμόσφαιρα, στο επιθυμητό στάδιο, σε μία ζητούμενη απόδειξη την ώρα του μαθήματος (Hannula, 2012a). Ο Hannula (2012a) αναφέρει ότι «ο ενθουσιασμός των εκπαιδευτικών και η επιλεγείσα μέθοδος διδασκαλίας μπορεί να έχουν μία επίδραση στα συναισθήματα των μαθητών» (σελ. 14).

Υπάρχουν κάποια πράγματα που ένας εκπαιδευτικός πρέπει να γνωρίζει προκειμένου να προκαλεί όσο το δυνατόν θετικότερα συναισθήματα στους μαθητές του. Από έρευνες που έγιναν φάνηκε ότι η προσωπική *επιτυχία* ενός μαθητή ταυτίζεται με την επιτυχία του στη βαθμολογία του σχολείου και ως εκ τούτου η επιτυχία του κάθε έφηβου εναπόκειται στον εκπαιδευτικό να την αναγνωρίσει (Zan & Di Martino, 2007). Επίσης θετικά συναισθήματα στους μαθητές προκαλούνται μέσα από την διαδικασία επίτευξης προσωπικών τους στόχων, ενώ πιθανά εμπόδια που αναστέλλουν την επίτευξη αυτών προκαλούν αρνητικά συναισθήματα (π.χ. θυμό, θλίψη, φόβο κ.ά.) (Hannula, 2002). Όπως μας αναφέρουν η Zan κ.ά. (2006) «το άγχος αναστέλλει γνωστικές διαδικασίες π.χ. ανάκληση της προηγούμενης μάθησης ή γνώσης» (σελ. 113). Επισημαίνεται ότι η ομαδική εργασία διευκολύνει την εκμάθηση των μαθηματικών (Hannula, 2006). Ένα σημείο εκκίνησης για τον δάσκαλο είναι η διάγνωση μίας *αρνητικής* στάσης, σχεδιάζοντας μία παρέμβαση που θα έχει σαν στόχο την τροποποίηση του κάθε στοιχείου που προκαλεί αυτόν τον αρνητισμό στον μαθητή (Zan & Di Martino, 2007).

Ένα λεπτό σημείο που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι καλοπροαίρετες βοήθειες των εκπαιδευτικών μπορεί να έχουν διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά που θα θέλαμε, μπορεί να λειτουργήσουν εις βάρος των στόχων του μαθήματος. Πιο συγκεκριμένα την ώρα παραγωγής μίας απόδειξης οι μαθητές πρέπει να οδηγούνται σε γνωστικές συγκρούσεις και προβληματισμούς προκειμένου να δημιουργηθούν διαισθητικές αναπαραστάσεις και να επέλθει γνώση (Weber, 2005). Επίσης, η αποφυγή πολυπλοκότητας των μαθηματικών διαδικασιών από τους εκπαιδευτικούς, προς διευκόλυνση και αποφυγή αρνητικών συναισθημάτων των μαθητών, περιορίζει τη διαισθητική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών κατ' επέκταση και τη δημιουργία άτυπων αναπαραστάσεων, παρεμποδίζοντας έτσι τη δημιουργία λογικής ευχέρειας (Weber, 2005).

2.4 Η αλληλεπίδραση μαθητών και η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης (ΖΕΑ)

Μία αξιοσημείωτη έννοια της θεωρίας του Vygotsky, είναι η Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης (The Zone of Proximal Development – zpd). Η Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης θεωρείται ως ένας συμβολικός χώρος, ο οποίος περιλαμβάνει τα άτομα, τις ενέργειές τους καθώς και τις συνθήκες υπό τις οποίες ενεργοποιούνται οι δραστηριότητές τους. Σύμφωνα με τον Lerman (2001), η zpd δεν είναι κάτι που τα άτομα φέρνουν μαζί τους πριν την αλληλεπίδρασή τους με τους άλλους. Το μόνο εφόδιο που έχουν τα άτομα την ώρα που ξεκινούν έναν διάλογο είναι ένα σύνολο προηγούμενων εμπειριών. Συνεπώς, σε μία μαθησιακή δραστηριότητα ένας μαθητής, έχοντας ως εφόδιο τις σκέψεις που γενούν οι εμπειρίες του, θα κάνει μία ερώτηση η οποία θα προκαλέσει την ανάδυση της zpd ενός άλλου μαθητή, ο οποίος απαντώντας στον πρώτο θα προκαλέσει την ανάδυση της zpd του πρώτου. Έτσι αν θεωρήσουμε τις zpds των δύο μαθητών ως δύο επικαλυπτόμενες ζώνες, μέσα από το διάλογο δημιουργείται μία κοινή ζώνη, μέσα στην οποία αναπτύσσονται νοήματα που δεν υπήρχαν στο νου τους πριν την έναρξη του διαλόγου, και η διαδικασία της εσωτερίκευσης συμβαίνει μέσα στη zpd του κάθε μαθητή. Διαπιστώθηκε ότι η Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της υποστηρικτικής σκαλωσιάς (scaffolding).

Η μάθηση θεωρείται η μύηση σε έναν διάλογο. Η μάθηση των μαθηματικών για έναν μαθητή ξεκινά με την εισαγωγή του σε έναν μαθηματικό διάλογο, δηλαδή με την εισαγωγή του σε μία ειδική μορφή επικοινωνίας, γνωστής ως μαθηματική (Sfard, 2001). Δεδομένου ότι οι ομιλίες αναλύονται ως πράξεις επικοινωνίας, οτιδήποτε οδηγεί στην επικοινωνία δύο ή περισσοτέρων μαθητών, το οποίο μπορεί να επηρεάσει και την αποτελεσματικότητά της, όπως για παράδειγμα οι κινήσεις του σώματος, πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στην οποιαδήποτε ανάλυση μελέτης περιστατικού (Sfard, 2000 Sfard και Kieran, 2001).

Από τα πρώτα κιόλας στάδια της ζωής ενός ανθρώπου οι χειρονομίες φαίνεται να είναι μία έμφυτη πλευρά της επικοινωνίας του (Reeve & Reynolds, 2001). Συγκεκριμένα στη χειρονομία με το δάκτυλο (όταν θέλουμε να δείξουμε κάτι) έχει δοθεί μεγάλη έμφαση διότι έχει αναγνωριστεί ως η πρώτη συγκεκριμένη αναφορά χειρονομιών (Werner & Kaplan, 1963). Πιο συγκεκριμένα, χειρονομίες με το δάκτυλο (δείχνοντας κάτι συγκεκριμένο), παρουσιάζει δύο τουλάχιστον λειτουργίες: πρώτον τη θέληση για επίτευξη και διατήρηση της κοινής προσοχής και δεύτερον την προσπάθεια επικοινωνίας με συμβολικό τρόπο (Reeve & Reynolds, 2001). Η ανάλυση μίας αυθόρμητης χειρονομίας ενός μαθητή είναι ένας τρόπος να αντιληφθεί κανείς τα συναισθήματα, που κρύβονται πίσω από το συμβολικό τρόπο επικοινωνίας του. Πιο συγκεκριμένα μερικές αυθόρμητες χειρονομίες είναι ένδειξη θριάμβου(Kendon, 1972, 1980), συνεπώς χαράς και αυτοεκτίμησης, για παράδειγμα το χτύπημα με τα χέρια, ή δημιουργώντας το σύμβολο V με τα δύο δάκτυλα κ.α. (McNeill 1985, 1992).

Ο βαθμός συμμετοχής των μαθητών στο διάλογο, έχει θεωρηθεί ως ένας σημαντικός δείκτης κατασκευής γνώσης (Barab & Duffy, 2000). Η ποσότητα συμμετοχής, έχει τη δυνατότητα να προβλέψει θεωρητικά αν οι μαθητές είναι σε θέση να αποκτήσουν γνώση, εντός του πλαισίου της συζήτησης. Η αλληλεπίδραση των μαθητών παρατηρείται στον τρόπο με τον οποίο διατυπώνουν κάποιο επιχείρημα, μαζί ή ατομικά, καθώς και στον τρόπο που ο ένας ζητά πληροφορίες από τον άλλο. (Weinberger & Fisher, 2006).

2.5 Σύντομη σύνθεση – Σκοπός της έρευνας

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αξία της απόδειξης στη μαθηματική εκπαίδευση είναι μεγάλη. Προωθεί τη μαθηματική κατανόηση και δικαιολογεί την ισχύ της κάθε μαθηματικής πρότασης, ενισχύοντας έτσι τη σημασία της απόδειξης για τους μαθητές.

Πολλοί μαθητές έχουν μη ευνοϊκή στάση απέναντι στην απόδειξη, και κατ' επέκταση στη Γεωμετρία. Στάση ενός μαθητή είναι η αντίληψη που έχει ή η γνώμη του για τα μαθηματικά και συγκεκριμένα για την απόδειξη (π.χ. αγάπη, μίσος / «μου αρέσουν», «δε μου αρέσουν») και θεωρείται σχετικά σταθερή, εφόσον παγιωθεί. Θέλει λοιπόν χρόνο και προσωπική προσπάθεια από τον εκπαιδευτικό να αλλάξει μία πιθανή αρνητική στάση. Τα συναισθήματα είναι πιο ευμετάβλητα σε σχέση με τη στάση του μαθητή απέναντι στη μαθηματική απόδειξη και έχουν τις ρίζες τους στην αμεσότητα αυτού που πραγματευόμαστε (Liljedahl, 2005). Ωστόσο, σύμφωνα με το Hannula (2002), τα συναισθήματα που βιώνει κάποιος που εμπλέκεται στην παραγωγή μιας μαθηματικής απόδειξης, είναι ένας παράγοντας διαμόρφωσης της στάσης του, μαζί με τις προσδοκίες του (που συνδέονται με την προηγούμενη σχετική εμπειρία του), την αξία που αποδίδει στη δραστηριότητα, και τους γενικότερους προσωπικούς του στόχους (π.χ., είναι τα μαθηματικά σημαντικά για τη σχολή στην οποία στοχεύει;). Τα συναισθήματα τη δεδομένη στιγμή της απόδειξης έχουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση.

Είδαμε ότι ακόμα και τα αρνητικά συναισθήματα είναι απαραίτητα σε ορισμένες στιγμές της απόδειξης. Καταλήγουμε στο ότι τα συναισθήματα θετικά ή αρνητικά (π.χ. χαρά, θυμός) προκαλούνται τη δεδομένη στιγμή της απόδειξης στον μαθητή, επηρεάζονται από το γενικότερο περιβάλλον και ιδιαίτερα από τη συμπεριφορά του δασκάλου, και αποτελούν παράγοντα διαμόρφωσης της γενικότερης στάσης του μαθητή απέναντι στην απόδειξη.

Τονίζουμε τη σημασία του ρόλου του διδάσκοντα, διότι επηρεάζει με τον τρόπο διδασκαλίας του και τη συμπεριφορά του τον μαθητή, προκαλώντας του ποικίλα συναισθήματα (θετικά η αρνητικά). Όπως προαναφέραμε η επιτυχία ενός μαθητή και προσωπικά αλλά και για το οικογενειακό του περιβάλλον ταυτίζεται με την επιτυχία στο σχολείο, έτσι το πώς κρίνει ο εκπαιδευτικός την πρόοδο του κάθε

μαθητή επηρεάζει και την εικόνα του ίδιου για τον εαυτό του αλλά και για το κοινωνικό του σύνολο. Αυτό είναι αξιοσημείωτο διότι η βαθμολογία του εφήβου, που είναι απόρροια της γνώμης που έχει ο εκπαιδευτικός για τον ίδιο στα Μαθηματικά, είναι συχνά η αιτία της θετικής ή αρνητικής στάσης του απέναντι σε αυτά.

Στόχος της έρευνάς είναι , αφ' ενός, η διερεύνηση, του ρόλου των συναισθημάτων των μαθητών, κατά τη διάρκεια μίας απόδειξης. Αφ' ετέρου, η διερεύνηση των συνθηκών υπό τις οποίες είναι εφικτή η βελτίωση συναισθημάτων και κατ' επέκταση η αλλαγή στην στάση των μαθητών απέναντι στη Γεωμετρία.

3 Μεθοδολογία της Έρευνας

3.1 Τύπος, Σκοπός και Ερωτήματα της Έρευνας

Η έρευνα ήταν ένα διδακτικό πείραμα (teaching experiment) (Steffe & Thompson, 2000), το οποίο είναι μία ειδική περίπτωση του πειράματος σχεδιασμού (Cobb et. al. 2003). Πρόκειται για μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας, κατά την οποία οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί συμμετέχουν, είτε ατομικά, είτε ομαδικά εντός του πλαισίου μίας ομάδας ερευνητών και εκπαιδευτικών. Στην περίπτωσή μας, ο εκπαιδευτικός ήταν διδάσκων και ερευνητής ταυτόχρονα.

Στόχος του εκπαιδευτικού που πραγματοποιεί ένα διδακτικό πείραμα είναι αρχικά να κατανοήσει την πραγματικότητα του εκπαιδευτικού πλαισίου στο οποίο συμμετέχει, στη συνέχεια να εντοπίσει προβλήματα που αναμένεται να υπάρχουν και να διερευνήσει τις προοπτικές επίλυσής τους.

Αφορμή σχεδιασμού μίας τέτοιας έρευνας είναι μια προβληματική κατάσταση που απαιτεί παρεμβάσεις, οι οποίες σαν στόχο έχουν την βελτίωσή της. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικές έρευνες αυτού του τύπου δεν περιορίζονται στο να ελέγχουν αν μία επιλεγμένη μέθοδος διδασκαλίας αποδίδει, αλλά ενδιαφέρονται και για τη θεωρητική τεκμηρίωση. Τα πιο φιλόδοξα πειράματα σχεδιασμού στοχεύουν στην ανάπτυξη θεωριών (Cobb et al., 2003).

Στο πλαίσιο του διδακτικού πειράματος ξεκινάει ο διδάσκων-ερευνητής με κάποιες θεωρητικές παραδοχές και ο σχεδιασμός της κάθε παρέμβασης γίνεται μετά από αναστοχασμό σε σχέση με την προηγούμενη. Είναι μία κυκλική διαδικασία, στην οποία οι εκπαιδευτικοί συστηματικά παρατηρούν, στοχάζονται, επανασχεδιάζουν, παρατηρούν ξανά και ούτω καθεξής.

Το διδακτικό μου πείραμα ξεκίνησε με την παραδοχή ότι τα συναισθήματα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την εμπλοκή τους με τη γεωμετρική απόδειξη επηρεάζουν την εξέλιξη και ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς και τη γενικότερη στάση τους απέναντι στη Γεωμετρία, αλληλεπιδρώντας με τους στόχους τους και τις προσδοκίες τους.

Στόχος μου ήταν να διερευνήσω τους παράγοντες που προκαλούν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα κατά την αποδεικτική διαδικασία. Αναμφισβήτητα υπάρχουν πολλοί παράγοντες και πολλοί συνδυασμοί αυτών, που τροφοδοτούν την παραγωγή αρνητικών και θετικών συναισθημάτων στους μαθητές. Θεώρησα σημαντικούς τους παράγοντες γνωστικής φύσης (Hannula, 2002). Για παράδειγμα, η δυσκολία κατανόησης μίας εκφώνησης, ή η αδυναμία κατασκευής σχήματος λειτουργεί ως εμπόδιο στο στόχο του μαθητή να επιλύσει το πρόβλημα και μπορεί να δημιουργεί αρνητικά συναισθήματα. Επαναλαμβανόμενες τέτοιες αποτυχίες, μπορεί να συμβάλλουν στη διαμόρφωση αρνητικής στάσης.

Επιπλέον, στόχος μου ήταν η διερεύνηση των συνθηκών υπό τις οποίες η επίδραση των αρνητικών συναισθημάτων μπορεί να εξασθενήσει, και κατ' επέκταση να βελτιωθεί η στάση των μαθητών. Με βάσει όσα έχουν αναφερθεί στις παραγράφους 2.3 και 2.4, εστίασα στο ρόλο του εκπαιδευτικού, την αλληλεπίδρασή του με τους μαθητές, καθώς και την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών.

Ο ρόλος ο δικός μου στις προγραμματισμένες συναντήσεις μας, στα πλαίσια της έρευνας, απέκλινε από το παραδοσιακό πρότυπο εκπαιδευτικού. Παρότρυνα τους δύο συμμετέχοντες να διατυπώνουν ελεύθερα τις εικασίες τους χωρίς να φοβούνται την απόρριψη από τη μεριά μου, καθώς και να διορθώνει ο ένας τη λανθασμένη δήλωση του άλλου. Ο ρόλος μου ήταν κυρίως ερευνητικός και ενισχυτικός στα σημεία που κρινόταν αναγκαίο. Δεν απαντούσα εύκολα στα ερωτήματά τους, άφηνα τους ίδιους να προβληματιστούν και να αυτενεργούν, ενώ απεύθυναν το λόγο σε εμένα για αξιολόγηση. Τους παρότρυνα να ξεπερνούν τα αρνητικά τους συναισθήματα και να συνεχίσουν την προσπάθεια. Τους έδειχνα τις υψηλές προσδοκίες που είχα για τους ίδιους, λόγω των δυνατοτήτων τους, ότι θα τα καταφέρουν. Τους ενημέρωνα σχετικά με τη δυσκολία κάποιων θεμάτων, και την αναμενόμενη αυξημένη προσπάθεια που έπρεπε να καταβάλουν. Ταυτόχρονα, τους υποστήριζα με «στρατηγικές» αντιμετώπισης των δυσκολιών τους. Συγκεκριμένα, κατά τη συναναστροφή τους με άγνωστες έννοιες, για τους ίδιους, τους παρότρυνα να ερμηνεύσουν μέσα από τα συμφραζόμενα.

Τέλος, ήθελα να διερευνήσω κατά πόσο η αλληλεπίδραση των μαθητών στο πλαίσιο της συνεργατικής παραγωγής αποδείξεων μπορεί να λειτουργεί ευνοϊκά στο επίπεδο των συναισθημάτων. Με βάση αυτό, παρότρυνα τους ίδιους να συνεργαστούν, να συζητήσουν, να λύσουν τις τυχόν απορίες ο ένας του άλλου.

3.1.1 Τα συναισθήματα χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής.

Οι δυσκολίες στα μαθηματικά δεν είναι μόνο γνωστικής φύσεως, παίζουν σημαντικό ρόλο και τα συναισθήματα. Ένας μαθητής την ώρα της αποδεικτικής διαδικασίας βομβαρδίζεται από μία ποικιλία συναισθημάτων άλλοτε θετικών, άλλοτε αρνητικών, έτσι η κάθε ενέργεια του συνδέεται άρρηκτα με το πώς νιώθει τη δεδομένη στιγμή. Επιπλέον η στάση του κάθε μαθητή όσον αφορά το ρόλο της απόδειξης είναι υψίστης σημασίας. Πιο συγκεκριμένα μία πιθανόν αρνητική στάση μαθητή απέναντι στην έννοια της μαθηματικής απόδειξης υποθάλπει αρνητικά συναισθήματα την ώρα της δόμησης και οργάνωσης της απόδειξης (και αντιστρόφως).

Τα συναισθήματα είναι ένας από τους παράγοντες που άλλοτε παρακινούν, άλλοτε παρεμποδίζουν τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να παράγουν αποδείξεις. Τα συναισθήματα μπορούν να αλλάξουν την στάση των μαθητών απέναντι στη μαθηματική απόδειξη. Παίζουν κυρίαρχο ρόλο καθώς επηρεάζουν τη δόμηση και την ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας. Η μελέτη τους παρουσιάζει λοιπόν σημαντικό ενδιαφέρον για τον εκάστοτε εκπαιδευτικό, που διατηρεί ανησυχίες για τη συναισθηματική κατάσταση των μαθητών του και τη πρόοδο τους.

3.2 Μέθοδος

3.2.1 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν δύο μαθητές της α΄ τάξης ενιαίου λυκείου (16 ετών). Οι δύο μαθητές είναι αγόρια, δίδυμα που φοιτούν σε λύκειο (δημόσιο) της Ανατολικής Αττικής. Οι δύο μαθητές κέντρισαν το ενδιαφέρον μου από τη στιγμή της γνωριμίας μας (Σεπτέμβριος 2014), ως καθηγήτρια ενισχυτικής διδασκαλίας στο χώρο της οικίας τους, καθώς πρόκειται για δύο ευαίσθητους και ευγενικούς έφηβους. Οι ίδιοι, αποκάλυψαν σε εμένα από τις πρώτες κιόλας συναντήσεις μας, ότι διατηρούν μία αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και στους εκπαιδευτικούς του κλάδου.

Με την έναρξη του σχολικού έτους και κατ' επέκταση των συναντήσεων μας εντοπίστηκε ένα υψηλό επίπεδο γνώσεων των μαθητών, κάτι που αντικρουόταν με την άποψη που είχαν οι ίδιοι για τις δυνατότητές τους στα μαθηματικά. Η όχι και τόσο επιτυχής εξέταση τους στα μαθηματικά, τον προηγούμενο χρόνο στις προαγωγικές ενδοσχολικές εξετάσεις Ιουνίου τις γ' γυμνασίου, καθώς και η συναναστροφή τους τα τρία σχολικά έτη του γυμνασίου με έναν, κατά τη γνώμη τους, μη μεταδοτικό και αυστηρό εκπαιδευτικό, δημιούργησαν τις συνθήκες εκείνες οι οποίες είχαν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αρνητικών συναισθημάτων απέναντι στα μαθηματικά.

Με τη γνωριμία μας οι δύο μαθητές παρουσιάζοντας σε εμένα τη «μαθητική τους ταυτότητα», έκαναν αισθητή τη θέληση τους να ακολουθήσουν τη θεωρητική κατεύθυνση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Δεδομένου ότι θεωρούσαν ελλιπείς τις γνώσεις τους στα μαθηματικά και διατηρώντας αρνητική στάση απέναντι σε αυτά. Με την πάροδο του σχολικού έτους, από τις πρώτες κιόλας συναντήσεις μας, εντόπιζα σημεία που έδειχναν αλλαγή στη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Είτε φράσεις όπως «σκέφτομαι να ακολουθήσω θετική κατεύθυνση», είτε το ενδιαφέρον που έδειχναν για το μάθημα και ο ζήλος τους να προοδεύσουν στις ασκήσεις, μαρτυρούσαν τη θετικότερη στάση που έχουν υιοθετήσει για τον κλάδο αυτό.

Στόχος μου από την πρώτη στιγμή ήταν, όσο αυτό ήταν εφικτό, να μεταβάλλω τη στάση των δύο εφήβων απέναντι στα μαθηματικά. Δίνοντας την απαραίτητη έμφαση ως εκπαιδευτικός, κατά τη διάρκεια διδασκαλίας, ανέμενα στην αλλαγή της ψυχολογικής τους κατάστασης. Κάτι το οποίο σταδιακά παρατηρούσα να συμβαίνει. Όταν ήρθε στο προσκήνιο η έννοια της απόδειξης, στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας, διατηρούσαν μία αδιάφορη στάση. Το αντιμετώπιζαν σαν κάτι το οποίο υποχρεούνταν να πραγματευτούν. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων μας, γινόταν όλο και πιο εμφανής η προσπάθεια που κατέβαλαν κατά τη διαδικασία της απόδειξης στη Γεωμετρία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές γνώριζαν το περιεχόμενο της έρευνας που είχα σκοπό να πραγματοποιήσω και με χαρά δική τους αλλά και των γονέων τους προθυμοποιήθηκαν να συμμετάσχουν.

3.2.2 Διαδικασία και Εργαλεία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2014-2015. Όλες οι συναντήσεις πραγματοποιήθηκαν στο σπίτι των μαθητών.

Πριν τις παρεμβάσεις, κάθε ένα παιδί συμμετείχε σε ατομική συνέντευξη. Η πρώτη πραγματοποιήθηκε το μήνα Φεβρουάριο, με περιεχόμενο οχτώ ερωτήσεις που αφορούσαν το ρόλο της απόδειξης, σύμφωνα με τις αντιλήψεις των μαθητών (βλ. Παράρτημα Α1). Έπειτα από τις εν λόγω ερωτήσεις, στη συνέντευξη συμπεριλαμβανόταν η εξέταση και ο σχολιασμός πέντε συγκεκριμένων αποδείξεων, οι οποίες είχαν ζητηθεί νωρίτερα από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, τους είχαν ζητηθεί αποδείξεις που θα μπορούσαν να χαρακτηρίσουν ως εξής: 1. *Ήταν εύκολη. Δεν είχα κάποιο πρόβλημα.* 2. *Δυσκολεύτηκα – Δεν τα κατάφερα.* 3. *Δυσκολεύτηκα – δεν προσπάθησα καν.* 4. *Δυσκολεύτηκα – Τα κατάφερα.* 5. *Ήταν ενδιαφέρουσα.*

Στόχος ήταν η μελέτη των συναισθημάτων και των στάσεων των δύο μαθητών, σε αποδείξεις που είτε τους είχαν προβληματίσει είτε τους είχαν φανεί εύκολες, στο παρελθόν, και ταυτόχρονα, η διερεύνηση των λόγων για τους οποίους τις χαρακτήρισαν με αυτόν τον τρόπο.

Όσον αφορά τις παρεμβάσεις, ξεκίνησαν το μήνα Φεβρουάριο και οι τρεις πρώτες πραγματοποιήθηκαν με διαφορά μίας ή δύο εβδομάδων μεταξύ τους. Η τέταρτη και τελευταία πραγματοποιήθηκε λίγο πριν τις ενδοσχολικές εξετάσεις του Ιουνίου, με περιεχόμενο επαναληπτικό εφ’ όλης της ύλης. Κάθε παρέμβαση διήρκεσε 1-2 ώρες. Οι αποδείξεις στις οποίες εργάστηκαν οι μαθητές σε κάθε παρέμβαση παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β1-4.

Με το πέρας της τέταρτης παρέμβασης, την ίδια ημέρα, κάθε παιδί συμμετείχε σε ατομική συνέντευξη, στην οποία απάντησε εκ νέου στις ερωτήσεις της πρώτης συνέντευξης και τέσσερις επιπλέον ερωτήσεις, στόχος των οποίων ήταν η ανίχνευση αλλαγής στάσης και συναισθημάτων των δύο μαθητών, εφόσον υπήρχαν (βλ. Παράρτημα Α2).

Μετά από άδεια από τους συμμετέχοντες και τους γονείς τους, οι συνεντεύξεις πριν και μετά τις παρεμβάσεις ηχογραφήθηκαν, ενώ οι παρεμβάσεις βιντεοσκοπήθηκαν. Χρησιμοποιήθηκε μία κάμερα, η οποία εστίαζε στα πρόσωπα των δύο μαθητών καθώς και στα χέρια τους. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και οι παρεμβάσεις απομαγνητοσκοπήθηκαν.

4 Ανάλυση Απομαγνητοσκοπήσεων και Απομαγνητοφωνήσεων

Ο εντοπισμός και η ανάλυση των συναισθημάτων στις βιντεοσκοπημένες παρεμβάσεις έγινε με βάση τις δηλώσεις των ίδιων των μαθητών γύρω από το θέμα. Συγκεκριμένα οι ίδιοι σε αρκετά σημεία εκφράζουν λεκτικά τα συναισθήματα τους, όπως το φόβο, ή την αποστροφή τους για κάποιες ασκήσεις. Επίσης με βάση τον Πίνακα 1(βλ. Παράρτημα), έγινε η μελέτη των συναισθημάτων, εστιάζοντας στα χαρακτηριστικά του προσώπου τους. Τέλος μέσα από κάποιες χειρονομίες (όπως για παράδειγμα τα χέρια ψηλά, ως ένδειξη θριάμβου) ή και τη στάση του σώματός τους ενισχύθηκε ο εντοπισμός των συναισθημάτων. Τα συναισθήματα των δύο μαθητών αναπαριστώνται με γραφήματα, σε κάθε παρέμβαση ξεχωριστά. Η κατασκευή των γραφημάτων βασίστηκε σε παρόμοια προσέγγιση των Op’ t Eynde και Hannula (2006).

Όσον αφορά την αλληλεπίδραση των δύο μαθητών μεταξύ τους αλλά και του καθενός ξεχωριστά μαζί μου, έγινε ανάλυση με βάση τον Πίνακα 2 (βλ. Παράρτημα). Εντοπίστηκαν σημεία, στα οποία ο ένας μαθητής επεξηγούσε στον άλλο τις σκέψεις του, ή κάποιος εκ των δύο, παρότρυνε τον εταίρο να διορθώσει λάθη στο σχήμα του. Επίσης παρατηρήθηκαν δηλώσεις των δύο μαθητών, οι οποίες γίνονταν ταυτόχρονα, κάτι το οποίο μαρτυρά τη συνεργασία τους. Τέλος, από τις συζητήσεις μας ενισχυτικού περιεχομένου, εντοπίζεται το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης τους μαζί μου, καθώς οι μαθητές μέσα από τους διαλόγους φαίνεται να διαπιστώνουν πράγματα και να γεννούν ιδέες.

Στην ανάλυση και των δύο συνεντεύξεων, όσον αφορά τον πρώτο κύκλο ερωτήσεων, από τις οχτώ απαντήσεις του κάθε μαθητή παρατίθενται εκείνες οι οποίες παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον γύρω από την έρευνα.

4.1 Ευρήματα 1ης Συνέντευξης

Η πρώτη μαγνητοφωνημένη συνέντευξη με τα δύο παιδιά πραγματοποιήθηκε την Κυριακή 22 Φεβρουαρίου, στο χώρο της οικίας τους. Οι ίδιοι απάντησαν λεκτικά σε μία σειρά ερωτήσεων. Η συνέντευξη ήταν με μορφή διαλόγου ανάμεσα σε εμένα και το κάθε παιδί ξεχωριστά. Ολοκληρώθηκε αρχικά η ως άνω αναφερθείσα διαδικασία με τον Κώστα, ενώ παράλληλα ο Νίκος δε παρευρισκόταν εντός του χώρου συνέντευξης. Στη συνέχεια ομοίως ήρθε εις πέρας η αντίστοιχη διαδικασία με τον δεύτερο μαθητή με απόντα τον πρώτο.

4.1.1 Απαντήσεις και σχόλια πρώτου μαθητή

Ο Κώστας θεωρεί την απόδειξη ως ένα χρήσιμο εφόδιο, με το οποίο ο μαθητής που τη χρησιμοποιεί δείχνει τη φαντασία του και με τη σωστή χρήση αυτής επιτυγχάνει στο να λύσει προβλήματα. Στην 4η ερώτηση, η οποία αναφέρεται στη παρουσίαση αποδείξεων εντός της σχολικής τάξης ο μαθητής αποκρίνεται:

> «Άμα ένας καθηγητής είναι ικανός στην τάξη, θέλω να βλέπω την παρουσίαση μίας απόδειξης και στην τάξη, αλλά πιστεύω ότι όλα εξαρτώνται από τον καθηγητή, κατά πόσο ο ίδιος θέλει να συζητά, να εξηγεί και να λύνει απορίες.»

Συμφωνεί με την συμμαθήτρια του, Ελένη (5η ερώτηση), διαβάζοντας την απόδειξη ενός θεωρήματος του σχολικού βιβλίου, επιτυγχάνεται εύλογα η κατανόηση του θεωρήματος. Στην ερώτηση 7, η οποία αναφέρεται στην εργασία που θέτει η καθηγήτρια στους μαθητές της στο σχολείο, ο Κώστας θα επέλεγε τη δεύτερη, διότι προτιμά να εξασκηθεί κάνοντας κάτι μόνος του παρά να ασχοληθεί με κάτι «έτοιμο». Επίσης θεωρεί ότι για να φτάσει στο σημείο να εξηγήσει κάτι στους συμμαθητές του, θα πρέπει να έχει κατανοήσει «τα πάντα». Στην επόμενη ερώτηση γίνεται αναφορά σε μία υποθετική συμμαθήτρια του, η οποία δυσκολεύεται και επιζητά τη βοήθειά του, ο Κώστας αναφέρει:

> «θα έλεγα στη συμμαθήτρια μου ότι δε χρειάζεται να πελαγώνουμε (Σχολιάζει ό ίδιος: «Κοίτα ποιος μιλάει»), μία απόδειξη δεν είναι τόσο δύσκολη όσο μπορεί να φαίνεται, αρκεί να καταλάβουμε καλά τα ζητούμενα και τα δεδομένα του προβλήματος και αν βάλουμε τη φαντασία μας να δουλέψει, θα βγει.»

Στην επόμενη κατηγορία ερωτήσεων, οι οποίες αφορούν αποδείξεις του σχολικού βιβλίου τις οποίες διαχειρίστηκαν οι μαθητές, οι απαντήσεις του Κώστα κυμαίνονται ως εξής:

Ήταν εύκολη – Δεν είχα κάποιο πρόβλημα.

> «Μέσα από αυτές έβλεπα ότι κατανοώ τη Γεωμετρία, μέσω των προσωπικών μου γνώσεων και φαντασίας χωρίς να με καθοδηγεί κάποιος, το έκανα μόνος μου (αναφέρεται στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αφορούν την ισότητα τριγώνων). Σαφώς το πιο δύσκολο με κάνει να νιώθω μεγαλύτερη ικανοποίηση. Πάω στο κάτι πιο δύσκολο σταδιακά. Όταν καταφέρνω και λύνω με βοηθάει στη ψυχολογία μου γιατί βλέπω ότι δεν είμαι τελείως ανίκανος στη Γεωμετρία. Όταν λύνω κάτι μου δείχνει ότι οι δυνάμεις μου επαρκούν και ίσως μπορώ να προχωρήσω παρακάτω.»

Δυσκολεύτηκα – Δε τα κατάφερα.

> «Με δυσκόλεψε το σχήμα, πελάγωσα και την άφησα (αναφέρεται σε άσκηση από την κατηγορία Σύνθετα Θέματα του κεφαλαίου της παραλληλίας). Απογοητεύτηκα που δε τα κατάφερα, άμα είχα πεισμώσει, θα την είχα λύσει. Ανάλογα με το κεφάλαιο είμαι πιο ευάλωτος. Αν είναι από το κεφάλαιο που ξέρω καλά (τρίγωνα) θα την προσπαθούσα περισσότερο, αν είναι σε κάποιο δύσκολο κεφάλαιο, θα την παρατούσα.»

Δυσκολεύτηκα – Δεν προσπάθησα καν.

> «Αν δω Σύνθετα Θέματα (κατηγορία ασκήσεων αυξημένης δυσκολίας σχολικού βιβλίου) ή κάποιο δύσκολο σχήμα, αυθυποβάλλομαι και δεν την προσπαθώ. Απογοητεύομαι αλλά το αποδέχομαι ότι οι δυνάμεις μου και οι γνώσεις μου μπορεί να μη φτάνουν σε ένα επίπεδο τόσο καλό, ώστε να επιλύσω Σύνθετα Θέματα. Άσκηση άλλης κατηγορίας θα προσπαθήσω και δύσκολη να είναι.»

Δυσκολεύτηκα – Τα κατάφερα.

> «Ένιωσα πολύ ικανοποιημένος και πίστεψα στις δυνάμεις μου όταν κατάφερα να επιλύσω την άσκηση που αρχικά με δυσκόλευε. Εξαρτάται από την ψυχολογία μου κάθε φορά (αναφέρεται στο ερώτημα που αφορά τη συναναστροφή του με εύκολες ή δύσκολες αποδείξεις). Αν είμαι κουρασμένος δε θα πάω στις δύσκολες ασκήσεις με κίνδυνο να απογοητευτώ, όταν έχω όρεξη σαφώς θα πάω στις δύσκολες.»

Ήταν ενδιαφέρουσα.

> «Ο τρόπος σκέψης και το σχήμα με εντυπωσίασαν. Νιώθω συχνά ότι κάποιες ασκήσεις είναι ενδιαφέρουσες, με ένα ενδιαφέρον σχήμα. Αλλά όχι Σύνθετα Θέματα, γιατί αυτά δεν μπορώ να τα λύσω.»

Μέσα από τη συνέντευξη και τις απαντήσεις του ο Κώστας φαίνεται ότι είναι ένας έφηβος που δίνει μεγάλη σημασία στον εκπαιδευτικό, τον οποίο έχει απέναντι του. Αν είναι συζητήσιμος και πρόθυμος να λύσει τις απορίες του, τότε η παράδοση του μαθήματος της Γεωμετρίας, γίνεται πιο ενδιαφέρουσα και εποικοδομητική για τον ίδιο. Θα συμβούλευε τους συμμαθητές του σε περίπτωση δυσκολίας να μην «πελαγώνουν», αλλά ο ίδιος σχολιάζοντας δείχνει να μη το τηρεί. Απογοητεύεται όταν δεν επιτυγχάνει να λύνει ασκήσεις και νιώθει «ανίκανος» στη Γεωμετρία. Αντιθέτως μία επιτυχία του, δημιουργεί θετικά συναισθήματα για τον ίδιο, επιδιώκοντας να λύσει ασκήσεις αυξανόμενης δυσκολίας, ενώ παράλληλα σταματά να έχει αυτή την εικόνα (ανικανότητας) για τον εαυτό του. Οι δυσκολίες του έγκεινται σε μία κατηγορία ασκήσεων και στα πολύπλοκα σχήματα, στα οποία παρουσιάζει μια προκατειλημμένη στάση αδυναμίας να επιτύχει και εγκαταλείπει την προσπάθεια.

4.1.2 Απαντήσεις και σχόλια δεύτερου μαθητή

Ο Νίκος θεωρεί την απόδειξη ως τον τρόπο να στηρίζουμε έγκυρα τα πιστεύω μας και τις εικασίες μας. Στην 3η ερώτηση που αφόρα τον ρόλο της απόδειξης, συμφωνεί με τη συμμαθήτρια του Μαρία και αναφέρει χαρακτηριστικά:

> «Συμφωνώ, με τις αποδείξεις το κάνω έγκυρο, βασίζομαι κάπου. Χωρίς τις αποδείξεις δεν μπορούμε να λύσουμε μαθηματικά.»

Στην τέταρτη ερώτηση που αφορά την παρουσίαση των αποδείξεων από τον εκπαιδευτικό εντός της σχολικής τάξης, αναφέρει ότι δε συμφωνεί με τον συμμαθητή του Αλέξη. Πιο συγκεκριμένα:

> «Δε συμφωνώ όλοι πρέπει να συμμετέχουμε. Είναι πιο δύσκολο να μελετήσω κάτι μέχρι στιγμής άγνωστο, μόνος μου. Ο καθηγητής εξηγεί βασικά πράγματα. Μπορεί ένας συμμαθητής μας να έχει την ίδια απορία που έχω κι εγώ και έτσι μέσω εκείνου να τη λύσω και εγώ.»

Στην 7η ερώτηση, η οποία αναφέρεται στην εργασία που θέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές του, ο Νίκος θα διάλεγε την πρώτη εργασία, με την οποία θα μελετήσει μία απόδειξη του σχολικού βιβλίου και θα την εξηγήσει στους συμμαθητές του. Αναφέρει χαρακτηριστικά:

> «Θα επέλεγα την πρώτη εργασία, γιατί θα ήμουν πιο ασφαλής. Στην α' λυκείου υπάρχει δυσκολία αποδείξεων, το άγνωστο και καινούριο δεν είναι ασφαλές. Αν μπορέσεις να καταλάβεις και να χρησιμοποιήσεις προσεκτικά τα δεδομένα, μπορείς να τη λύσεις και να την εξηγήσεις εύκολα στους συμμαθητές σου.»

Στο επόμενο στάδιο της συνέντευξης, το οποίο αφορούσε τις αποδείξεις του σχολικού βιβλίου κατά τις οποίες δυσκολεύτηκε ή αντιμετώπισε με επιτυχία. Ο Νίκος παρουσίασε μία άσκηση ενδεικτικά για καθεμία κατηγορία αποδείξεων όπως του ζητήθηκε, συνοδευόμενες από τις παρατηρήσεις του.

Ήταν εύκολη – Δεν είχα κάποιο πρόβλημα.

> «Ένιωσα ικανοποίηση (αναφέρεται σε άσκηση με σύγκριση τριγώνων). Είναι μία από τις δυσκολίες της α' λυκείου (η αποδεικτική διαδικασία). Όταν λύνεις με επιτυχία, νιώθεις ότι είσαι έξυπνος. Παίρνω θάρρος για το δύσκολο. Με βοηθάει στη ψυχολογία μου όταν κάνω εύκολες αποδείξεις αλλά όχι στο βαθμό που με θα με βοηθούσε η επιτυχία μου σε μία δύσκολη απόδειξη. Δεν έχει σχέση τι είναι εύκολο και τι είναι δύσκολο, αλλά το γεγονός ότι τη λύνεις και τότε νιώθεις καλά με τον εαυτό σου.»

Δυσκολεύτηκα – Δε τα κατάφερα.

> «Ήμουν λίγο προκατειλημμένος (αναφέρεται σε άσκηση από την κατηγορία Σύνθετα Θέματα του κεφαλαίου της παραλληλία). Παρατήρησα το σχήμα και λέω εντάξει τώρα αποκλείεται να τη λύσω. Ήταν η ψυχολογία μου λίγο χάλια. Από την αρχή έλεγα δε θα τη λύσω, δε θα τη λύσω και νομίζω αυτό είναι που με έκανε να μην την λύσω τελικά. Απογοητεύτηκα! Την προσπάθησα ξανά, γιατί πιστεύω ότι ικανοποιείσαι όταν λύνεις δύσκολες, όταν βλέπεις όμως ότι δεν τα καταφέρνεις απογοητεύεσαι. Απογοητεύομαι πάντα όταν δεν τα καταφέρνω.»

Δυσκολεύτηκα – Δεν προσπάθησα καν.

> «Η εικόνα με τρόμαξε (αναφέρεται σε άσκηση με μεγάλη σε έκταση εκφώνηση και ερωτήματα). Με δυσκόλεψαν τα ζητούμενα έτσι όπως τα παρουσίαζε (ανισοτικές σχέσεις με πράξεις ευθυγράμμων τμημάτων). Την πρώτη στιγμή που είδα τα ζητούμενα, είπα στον εαυτό μου ότι αποκλείεται να τα καταφέρω. Δεν πίστευα ότι θα τα καταφέρω και δεν προσπάθησα καν. Απογοητεύτηκα με τον εαυτό μου και συνήθως αυτό συμβαίνει. Επειδή στα μαθηματικά δεν ήμουν ο καλύτερος μαθητής αυτό μου έχει μείνει στη ψυχολογία και νομίζω ότι δεν μπορώ να τα λύσω.»

Δυσκολεύτηκα – Τα κατάφερα.

> «Αρχικά το σχήμα, τα ζητούμενα, το κεφάλαιο (αναφέρεται στο κεφάλαιο της παραλληλίας) με δυσκόλεψαν. Όταν τελικά την έλυσα χάρηκα πολύ, ένιωσα ικανοποίηση. Κατάφερα κάτι επιτέλους. Όταν τελικά την έλυσα φώναξα Ναι! Πήρα θάρρος να προσπαθήσω κάτι πιο δύσκολο. Γενικότερα αν είμαι στις καλές μου προτιμώ τις δύσκολες αποδείξεις, αν όχι τις εύκολες, εξαρτάται καθαρά από τη ψυχολογία μου.»

Ήταν ενδιαφέρουσα.

> «Μου φάνηκε ενδιαφέρον το σχήμα, τα ζητούμενα. Είχα λίγο άγχος αλλά από την αρχή ένιωσα ότι θα τα καταφέρω και τα κατάφερα. Δε νιώθω και τόσο συχνά έτσι, αλλά υπάρχουν αποδείξεις που μου φαίνονται ενδιαφέρουσες.»

Ο Νίκος μέσα από τα λεγόμενα του φαίνεται να είναι ένας έφηβος ο οποίος κατανοεί τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης. Θεωρεί ότι είναι σημαντικό και ωφέλιμο να ακούγονται οι απορίες των συμμαθητών μέσα στην τάξη, διότι μέσα από αυτές αντλεί χρήσιμες πληροφορίες. Αναγνωρίζει την αποδεικτική διαδικασία ως μία από τις δυσκολίες της α' λυκείου και νιώθει ανασφάλεια όταν διαχειρίζεται κάτι άγνωστο προς τον ίδιο. Όταν αποδεικνύει με επιτυχία νιώθει ικανοποιημένος και σίγουρος για τα όσα θα ακολουθήσουν. Αλλάζει η εικόνα που διατηρεί για τον εαυτό του και λέει χαρακτηριστικά «όταν λύνεις νιώθεις ότι είσαι έξυπνος», «νιώθεις καλά με τον εαυτό σου». Αυθυποβάλλεται όταν συναναστρέφεται με μία συγκεκριμένη οικογένεια ασκήσεων (όπως και ο Κώστας), δεν καταφέρνει να αποδείξει με επιτυχία και απογοητεύεται. Αναφέρει ότι είναι επηρεασμένος από την εικόνα του σαν μαθητής (όσον αφορά τα μαθηματικά), τα προηγούμενα έτη και είναι κάτι το οποίο εδρεύει στη ψυχολογία του, καθιστώντας τον εαυτό του αδύναμο να επιτύχει στα προβλήματα αυξημένης δυσκολίας. Φράσεις όπως «Κατάφερα κάτι επιτέλους», «Συνήθως απογοητεύομαι με τον εαυτό μου», αναδεικνύουν την ευαισθησία του μαθητή και την μειωμένη εμπιστοσύνη στον εαυτό του.

4.2 Η 1η Παρέμβαση

4.2.1 Περιεχόμενο 1ης Παρέμβασης

Η πρώτη παρέμβαση πραγματοποιήθηκε την Κυριακή 8 Μαρτίου, με διάρκεια μιάμισης ώρας. Διεξάχθηκε εντός της οικίας των δύο παιδιών, όπως και οι υπόλοιπες παρεμβάσεις, σε χώρο στον οποίο παρευρισκόμασταν οι ίδιοι και εγώ. Τα προβλήματα, τα οποία διαχειρίστηκαν οι μαθητές, επιλέχτηκαν με βάση τις αδυναμίες που ανέφεραν οι ίδιοι στην πρώτη συνέντευξη. Πιο συγκεκριμένα οι δύο έφηβοι κλήθηκαν να επιλύσουν τρεις επιλεγμένες ασκήσεις, του βιβλίου οργανισμού (γεωμετρίας α' τάξης ενιαίου λυκείου).

Η επιλογή των ασκήσεων όπως προείπα δεν ήταν τυχαία. Συγκεκριμένα η πρώτη άσκηση επιλέγει λόγω της μεγάλης, σε έκταση, εκφώνησης. Κάτι το οποίο οι μαθητές ανέφεραν ότι τους προδιαθέτει αρνητικά όταν το αντικρίζουν. Επίσης η δεδομένη άσκηση ανήκει στην οικογένεια των προβλημάτων αυξημένης δυσκολίας (Σύνθετα Θέματα), η επίλυση των οποίων μοιάζει ακατόρθωτη και για τους δύο μαθητές. Οι δυσκολίες όμως αυτής της άσκησης δεν έγκειται μόνο στο μέγεθός και την κατηγορία της, όπως προαναφέρθηκαν, αλλά και στους όρους οι οποίοι χρησιμοποιούνται σε αυτή. Κάτι που όπως θα δούμε επρόκειτο να προβληματίσει τα δύο παιδιά. Αξίζει να σημειωθεί ότι στους δύο μαθητές έγινε γνωστή εξ' αρχής η κατηγορία στην οποία ανήκει η δεδομένη άσκηση.

Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα, επιλέχθηκε λόγω πιθανής δυσκολίας στο σχήμα. Το οποίο αφορά κύκλους, κάτι το οποίο από όλη τη σχολική χρονιά έχει παρατηρηθεί να προβληματίζει τους δύο μαθητές. Οι δύο μαθητές αναφέρθηκαν στη δυσκολία άλλοτε κατασκευής και άλλοτε ερμηνείας των σχημάτων σε ορισμένα προβλήματα της Γεωμετρίας, κάτι το οποίο δημιουργεί μία αρνητική στάση από τους ίδιους απέναντι στο πρόβλημα. Η δεδομένη άσκηση επίσης συγκαταλέγεται σε εκείνες της αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου. Τέλος βρίσκεται στο κεφάλαιο παραλληλίας, στο οποίο έχει παρατηρηθεί και επισημανθεί από τους ίδιους τους μαθητές, η δυσκολία που συναντούν στα περισσότερα προβλήματα αυτού.

Καταλήγοντας, το τρίτο και τελευταίο πρόβλημα της πρώτης παρέμβασης επιλέχθηκε λόγω της μεγάλης έκτασης της εκφώνησης. Ανήκει και αυτό στην οικογένεια των ασκήσεων, στην οποία ανήκουν και τα δύο προηγούμενα προβλήματα. Στην εκφώνηση υπάρχουν όροι και εκφράσεις οι οποίες θα προβληματίσουν τους δύο μαθητές.

Στόχος αυτής της επιλογής των προβλημάτων είναι οι δύο μαθητές να εστιάσουν στις πραγματικές δυσκολίες που πιθανόν να αντιμετωπίζουν όταν διαχειρίζονται ένα πρόβλημα της Γεωμετρίας. Είναι το μέγεθος της εκφώνησης αυτό που γεννά τις

αδυναμίες ή μήπως είναι όροι και εκφράσεις εντός εκείνης, που πιθανόν να κάνουν μια αποδεικτική διαδικασία απρόσιτη για τους μαθητές; Επίσης μέσα από τα τρία επιλεγμένα προβλήματα, ο Νίκος και ο Κώστας θα έρθουν αντιμέτωποι με εκείνα τα χαρακτηριστικά, που σύμφωνα με τα λεγόμενα τους, δημιουργούν μία αρνητική προδιάθεση στους ίδιους όσον αφορά την απόδειξη του ζητούμενου.

4.2.2 Αποτελέσματα 1^{ης} Παρέμβασης

Ανάλυση 1^{ου} θέματος

Οι δύο έφηβοι ξεκινώντας να συναναστρέφονται με την εκφώνηση αντιμετώπισαν δύο δυσκολίες. Η πρώτη εξ' αυτών έγκειται σε όρους της εκφώνησης, συγκεκριμένα οι «προβολές» και η «μεσοκάθετος». Καθώς και αδυναμία στην κατασκευή σχήματος. Θεώρησαν πολύπλοκο το σχήμα και προβληματίστηκαν με τη φράση «Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ».

Ο Κώστας αρχικά προβληματίστηκε με την έννοια της μεσοκαθέτου.

Κώστας: «Η μεσοκάθετος ποια είναι;» (Με κοιτάει και περιμένει την απάντηση μου)

Εγώ: «Μμμμ, Νίκο;» (Επιζητώ από τον άλλο μαθητή να απαντήσει στην ερώτηση του Κώστα)

Νίκος: «Αυτή που χωρίζει τη ΒΓ σε δύο ίσα μέρη. Αλλά όχι διάμεσος, μεσοκάθετος.» (κοιτάει το συμμαθητή του και στη συνέχεια εμένα για αξιολόγηση, παράλληλα ο Κώστας θυμήθηκε ποια ακριβώς είναι η μεσοκάθετος.)

Μέσα από την ενσωμάτωση του Νίκου στη συζήτηση, διαμέσου της απάντησης του στο ερώτημα του Κώστα, οι δύο μαθητές ξεκινούν την κατασκευή του σχήματος. Με τη σειρά μου αρχικά τους αφήνω να προβληματιστούν σχετικά με την έννοια της προβολής σημείου σε ευθεία, στη συνέχεια τους παρέχω την ακριβή ερμηνεία και εκείνοι συνεχίζουν την κατασκευή του σχήματός τους.

Στη διάρκεια κατασκευής (περίπου στα 3,5 πρώτα λεπτά), ενώ έχω αναφέρει την κατηγορία ασκήσεων στην οποία συγκαταλέγεται το δεδομένο πρόβλημα, ένας εκ των δύο με ρωτάει που ανήκει αυτή η άσκηση. Επαναλαμβάνω «Σύνθετα Θέματα» και αρχίζουν πλέον οι εκφράσεις του προσώπου τους να γίνονται πιο έντονες, εκδηλώνοντας φόβο, θλίψη, αποστροφή. Αλλά και οι λεκτικές τους εκφράσεις δηλώνουν τα ίδια συναισθήματα «Τι χαρά;», «Πότε μπορώ να κλάψω;». Στη συνέχεια οι δύο μαθητές είναι αρκετά νευρικοί και θλιμμένοι (χτυπούν νευρικά τα στυλό τους και ξεφυσούν).

Στη διάρκεια κατασκευής υπήρξε προβληματισμός, όπως προανέφερα στη τομή διχοτόμου και μεσοκαθέτου. Στον ένα εκ των δύο μαθητών το σημείο τομής των δύο ευθειών τύγχανε να βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου, κάτι το οποίο μέχρι να το εντοπίσει ο μαθητής δημιουργούσε αισθητά προβλήματα στην συναισθηματική του κατάσταση.

Νίκος: «Δε μου βγαίνει κάθετο στην ΑΒ.»

Εγώ: «Εννοείς ότι δεν πέφτει μέσα στην ΑΒ;»

Νίκος: «Ναι.»
Εγώ: « Αυτό μας ενοχλεί;»
Νίκος: «Α! Να το προεκτείνουμε.»

Με την ολοκλήρωση των σχημάτων τα παιδιά ξεκινούν τη διαδικασία κατασκευής της απόδειξης. Γνωρίζουν και γνωστοποιούν ότι στο πρώτο ερώτημα θα πραγματοποιήσουν μία σύγκριση τριγώνων. Αρχίζουν με μειωμένο το φόβο και τα υπόλοιπα αρνητικά συναισθήματα από το πρόσωπό τους, να αναζητούν τα απαραίτητα στοιχεία (στα πρώτα 10'). Ενώ σκέφτονται, Ο Νίκος αναφέρει μία άλλη σύγκριση τριγώνων που θα του δώσει νέα χρήσιμα στοιχεία για την ζητούμενη σύγκριση (τους διαφεύγει σε αυτό το σημείο ότι η μεσοκάθετος και η διχοτόμος είναι γεωμετρικοί τόποι). Τότε:

Κώστας: «Δε μπορώ να κάνω αυτό που είπε ο Νίκος; Και να βγάλω ότι ΑΔ=ΔΖ;»
Εγώ: «Αυτό μήπως το ξέρεις ήδη;»
Κώστας: «Αφού είναι μόνο προβολές;»
Εγώ: «Ναι, αλλά τι είναι το Δ;»
Κώστας/Νίκος: « Είναι εκεί που συναντιούνται διχοτόμος και διάμεσος.»
Εγώ: «Για τις οποίες τι…»
Κώστας/Νίκος: Α! (Χαμογελούν και λένε γρήγορα) Όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

Στο σημείο αυτό (στα 12') φαίνεται η αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους αλλά και μαζί μου. Με μία δήλωση του μαθητή, ο εταίρος αρχίζει και σκέφτεται τη λύση με διαφορετικό τρόπο και ξεκινάει ένας εποικοδομητικός διάλογος μέσω του οποίου οι μαθητές καταλήγουν στο ζητούμενο (στον διάλογο τους καθοδηγώ αλλά δεν λέω κατευθείαν την απάντηση). Στο χρόνο που ολοκληρώνεται αυτός ο διάλογος οι δύο μαθητές διακατέχονται από θετικά συναισθήματα, δε διακρίνονται αρνητικά συναισθήματα. Στα πρώτα 20' ολοκληρώνεται το πρώτο ερώτημα της άσκησης και τα δύο παιδιά ξεκινούν το δεύτερο ερώτημα.
Όσο έλυναν το δεύτερο ερώτημα οι μαθητές άρχισαν να εκδηλώνουν τα συναισθήματα τους και ακολούθησε ένας διάλογος, που μας δίνει πολλά στοιχεία για την ψυχολογική κατάσταση των μαθητών τη δεδομένη στιγμή (στα 22').

Κώστας: «Δε μου αρέσουν τα σύνθετα. Τα σιχαίνομαι!»
Εγώ: «Γιατί Κώστα; Αφού τα καταφέρνετε!»
Κώστας: «Δε μπορώ, είναι δύσκολα.»

Ακολούθησαν και άλλα σχόλια όπως «Θα αρχίσω να κλαίω», «Θα αυτοκτονήσω τώρα» (μεταξύ αστείου και σοβαρού) κατά τη διάρκεια εμπλουτισμού με νέα δεδομένα του σχήματος. Όλα όσα ειπώθηκαν μας δείχνουν ότι τα αρνητικά συναισθήματα έχουν έρθει πάλι στο προσκήνιο. Η πρώτη φράση του Κώστα δείχνει

αποστροφή και οι δύο μαθητές κυριεύονται κυρίως από θλίψη. Στη συνέχεια παροτρύνω τους δύο μαθητές να συνεργαστούν για την ολοκλήρωση των σχημάτων τους. Ο Νίκος κάνοντας μία δήλωση δείχνει με το δάχτυλο του κάτι στο σχήμα του Κώστα και ο δεύτερος κατευθείαν κατανοεί και ολοκληρώνει το σχήμα του (στα 25'). Σε αυτό το σημείο τα δύο παιδιά χαμογελούν και ξεκινούν τη διαδικασία σύγκρισης τριγώνων που απαιτείται στο δεύτερο ερώτημα. Δημιουργούνται θετικά συναισθήματα αλλά με τη φράση του Νίκου στα 26', όλα δείχνουν ότι τα αρνητικά συναισθήματα συνεχίζουν να κυριεύουν τους μαθητές.

Νίκος: «Α! Θεωρητική, μπα δεν αλλάζω!»
Κώστας: «Ναι, θεωρητική, θεωρητική!»

Είναι φράσεις που δείχνουν αποστροφή και περιφρόνηση πιθανόν για τα μαθηματικά (αναφέρονται στη θεωρητική κατεύθυνση, την οποία σκοπεύουν να ακολουθήσουν στις επόμενες τάξεις του λυκείου). Στη συνέχεια οι δύο μαθητές ανταλλάζουν τις σκέψεις τους και κάνοντας ο καθένας τις δηλώσεις του, καταλήγουν στο ζητούμενο. Σε αυτό το σημείο (στα 30'), λόγω του ότι διακρίνω τους δύο μαθητές να διακατέχονται από αρνητικά συναισθήματα, επιλέγω να διακόψω την αποδεικτική διαδικασία του πρώτου προβλήματος και να συνεχίσουν στο δεύτερο. Πριν προχωρήσουμε στο δεύτερο πρόβλημα τους ρωτάω τι ήταν αυτό που τους δυσκόλεψε και τα παιδιά αναφέρονται αποκλειστικά στο σχήμα (κυρίως οι όροι της προβολής). Τους εξηγώ τι θα κάνουμε σε παρόμοιες περιπτώσεις, τον τρόπο σκέψης και στη συνέχεια περνάμε στο δεύτερο πρόβλημα.

Ανάλυση 2ου Θέματος

Διαβάζοντας την εκφώνηση οι δύο μαθητές, παρατήρησαν ότι η άσκηση έχει να κάνει με κύκλο. Οι πρώτες τους αντιδράσεις, είτε λεκτικές είτε σωματικές προδίδουν την αρνητική στάση την οποία διατηρούν για την έννοια του κύκλου. Συγκεκριμένα ο Νίκος «Πρέπει να κάνω κύκλο; Έχε γεια! Τα παρατάω, δε το κάνω;» (ενώ παράλληλα αφήνει το στυλό από τα χέρια του και απομακρύνεται από το γραφείο). Στη συνέχεια και οι δύο μαζί, μου προτείνουν να προχωρήσουμε κατευθείαν στην επόμενη άσκηση, υποστηρίζοντας το ίδιο και μέσω των εκφράσεων του προσώπου. Τα συναισθήματα από τα οποία διακατέχονται είναι αρνητικά, πιθανόν θλίψη για τη διαχείριση των κύκλων και φόβο για μια πιθανή μη επιτυχή αποδεικτική διαδικασία (στα 31,5'). Τότε:

Εγώ: «Δε θα σας πω αν είναι εύκολο ή δύσκολο, θα σας πω απλά ότι μπορείτε. Από εκεί και πέρα, μη σας τρομάζει καθόλου το σχήμα, αυτό θέλω.»

Τότε ο Νίκος (στα 32') πιάνει στα χέρια του πάλι το στυλό (σχολιάζοντας «θα μας πάρει βέβαια κανένα δίωρο να το λύσουμε»), χαμογελάει και ξεκινάει να κατασκευάζει το σχήμα. Παράλληλα ο Κώστας έχει ήδη ξεκινήσει να δημιουργεί τους κύκλους με το διαβήτη του. Στη συνέχεια ο Κώστας στρέφει το βλέμμα του σε εμένα και με ρωτάει αν μπορεί να χρησιμοποιήσει σαν δεδομένο την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων (λόγω ακτίνων), του απαντάω θετικά και γράφει στην κόλλα του κατευθείαν τα δεδομένα (στα 36'). Ενώ οι δύο μαθητές κατασκευάζουν το σχήμα (δεν εμπλέκομαι καθόλου σε αυτό), ο Νίκος ψιθυρίζει συχνά «θα εκνευριστώ». Το σχήμα του εν λόγω έφηβου καταλήγει να βγαίνει λάθος στα 40', κάτι το οποίο δημιουργεί ακόμη μεγαλύτερο εκνευρισμό στο μαθητή. Ο Κώστας πλησιάζει την κόλλα του εταίρου και εντοπίζει το λάθος που έχει κάνει σχηματικά, παροτρύνοντάς τον να το διορθώσει. Παρατηρούμε λοιπόν σε αυτό το σημείο (στα 40'), ότι ο Κώστας αμφισβήτησε το σχήμα του Νίκου (εκμαίευση) και ο δεύτερος αποδέχτηκε τη συνεισφορά του συμμαθητή του (γρήγορη συναίνεση).

Στα 41' ενώ ο Νίκος έχει μπει στη διαδικασία ανακατασκευής του σχήματος του, αναφέρει «Καλά, ούτε τώρα μου βγήκε το σχήμα αλλά δε με ενδιαφέρει.» Με αυτή τη φράση εκδηλώνεται η αποστροφή του ίδιου, η θλίψη και ο φόβος έχουν μετατραπεί σε θυμό. Όπως είχε αναφέρει και στις συνεντεύξεις «Τις περισσότερες φορές απογοητεύομαι με τον εαυτό μου». Παράλληλα ο Κώστας εκφράζει τις σκέψεις του για τον τρόπο επίλυσης και αναζητά από εμένα την αξιολόγηση τους. Τους παροτρύνω να καταγράψουν τα δεδομένα τους (στα 42').

Ξεκινάει ένας διάλογος μεταξύ των δύο μαθητών με ποιόν τρόπο αποδεικνύουμε παραλληλία. Υπάρχει ένας διχασμός και αμφιβολία όσον αφορά τη διατύπωση των είδη γνωστών τους θεωρημάτων (συγχέουν το ευθύ με το αντίστροφο του θεωρήματος). Τους υπενθυμίζω ότι για την εφαρμογή του θεωρήματος που ορθά

διατυπώνουν πρέπει να γνωρίζουν την ισότητα γωνιών, εφόσον θέλουν να αποδείξουν παραλληλία (αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες). Τους τονίζω ότι δεν ξέρουν κάποια ισότητα γωνιών και πρέπει να εστιάσουν σε αυτό. Κάτι το οποίο κατανοούν και ενστερνίζονται, κατασκευάζοντας την απόδειξή τους (στα 44').

Μετά από δύο λεπτά ο Κώστας διατυπώνει την άποψή του (έπειτα από αρκετή σκέψη), την εξηγεί και στον Νίκο (κάνοντας μία δήλωση). Ο δεύτερος συμφωνεί, επιβεβαιώνω κι εγώ τις εικασίες του πρώτου, επικρατεί χαρά και καταγράφουν την απόδειξη. Παράλληλα ο Νίκος αναφέρει ξανά ότι το σχήμα του είναι λάθος και του δημιουργεί εκνευρισμό.

Οι δύο μαθητές (στα 48') αναφέρουν κάποιες ισότητες γωνιών και τις τεκμηριώνουν. Στη συνέχεια ο Νίκος διατυπώνει λανθασμένα μία ακόμα ισότητα (δήλωση) και ο Κώστας εντοπίζει το λάθος του πρώτου, αναφέροντας το ορθό (αντεπιχείρημα). Τότε (στα 47'):

Κώστας: «Εντάξει δεν είμαστε και τόσο χάλια.»

Κάτι το οποίο δείχνει ότι η αυτοπεποίθηση του μαθητή αυξάνεται, και κατ' επέκταση τα θετικά συναισθήματα να έρχονται στο προσκήνιο. Παράλληλα ο Νίκος κοιτάει το σχήμα του Κώστα (διότι το δικό του, τον αποπροσανατολίζει) και διατυπώνει ορθά τη δική του εικασία για το υπόλοιπο της αποδεικτικής διαδικασίας. Εντοπίζω το λάθος στο σχήμα του Νίκου, το αναφέρω και εκείνος χαμογελάει κατανοώντας ότι ήταν απροσεξία δική του. Ο θυμός μειώνεται αισθητά στον ίδιο και το πρόσωπο του εκφράζει κυρίως χαρά (στα 50'). Στη συνέχεια διατυπώνουν (με συνεργασία) την υπόλοιπη απόδειξη και την ολοκληρώνουν επιτυχώς. Με το πέρας της άσκησης (στα 52'):

Εγώ: «Πως νιώθετε τώρα;»
Νίκος: «Χάλια, τι;»
Εγώ: «Γιατί χάλια; Αφού είναι σύνθετο θέμα αυτό, τέταρτο κιόλας, το τελευταίο του κεφαλαίου αυτού»
(χαμογελάνε)
Κώστας: «Αλήθεια;»
Εγώ: «Στο κεφάλαιο που δε σας άρεσε με τις παράλληλες, το τέταρτο.»
Κώστας: «Σοβαρολογείς; Γιούπι» (παρατηρείται έκπληξη και έντονες εκδηλώσεις χαράς και ενθουσιασμού μέσω του προσώπου του και του σώματος του – τεντώνει τα χέρια ψηλά) (στα 53')
Κώστας: «Όχι εντάξει είναι πολύ ωραία. Το έλυσα!» (γέλια από όλους, ο Νίκος παρατηρείται λίγο πιο αποστασιοποιημένος)
Εγώ: «Και; Εντάξει; Δύσκολο;»
Κώστας: «Όχι! Καθόλου!»

Νίκος: «Ναι, όχι καθόλου.» (ειρωνεύεται τον Κώστα) (διακατέχεται από θλίψη λόγω σχήματος, φαίνεται στο πρόσωπό του)

Κώστας: «Όχι, καθόλου, όχι αλήθεια!»

Εγώ: «Γιατί; Εσύ (απευθύνομαι στον Νίκο) στο σχήμα λίγο..»

Νίκος: «Το σχήμα ναι, για αυτό.»

Εγώ: «Αν σου έβγαινε σωστό, νομίζω ότι θα το έβλεπες.» (συμφωνεί)

(Ο Κώστας συνεχίζει τις έντονες εκδηλώσεις χαράς και ενθουσιασμού)

Κώστας: «Εμένα καθόλου!» (χτυπάει παλαμάκια)

Εγώ: «Μια χαρά, μπράβο σας!»

Σε αυτό το επεισόδιο γίνεται εμφανής η ψυχολογική κατάσταση των δύο μαθητών. Ο Κώστας εκδηλώνει συνεχώς τον ενθουσιασμό και τη χαρά του, χαρακτηριστικά με τα οποία συνοδεύεται στο ξεκίνημα του επόμενου προβλήματος. Ο Νίκος αντίθετα, αν και χαμογελάει, η θλίψη για το σχήμα του δεν του επιτρέπει να χαρεί με την γρήγορη και επιτυχή ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας σε άσκηση αυξημένης δυσκολίας. Καταλήγοντας, ο πρώτος εκ των δύο θεώρησε εύκολο το πρόβλημα και την απόδειξη του, ενώ ο δεύτερος δύσκολο.

Αξίζει να σημειωθεί η εικόνα του Νίκου από όλη τη σχολική χρονιά. Είναι ένας μαθητής με υψηλή απόδοση στην κατασκευή σχημάτων και αποδείξεων. Η μη επιτυχής κατασκευή σχήματος στην δεύτερη άσκηση της πρώτης παρέμβασης, θεωρώ ότι είναι απόρροια της ψυχολογικής του κατάστασης.

Ανάλυση 3ου Θέματος

Ο Κώστας συναντάει δυσκολία στην κατανόηση της εκφώνησης. Τότε ο Νίκος επεξηγεί στον πρώτο σχηματικά. Και ξεκινάει ένας διάλογος γύρω από τον όρο «σταθερό», ο οποίος εντοπίζεται στην εκφώνηση. Οι μαθητές αναμένουν την αξιολόγηση μου για όλα όσα ειπώθηκαν και με την επιβεβαίωση αυτών προβαίνουν στο σχεδιασμό της αποδεικτικής διαδικασίας. Στα 70':

Κώστας: «Αχ ωραία ένιωσα πριν! Θα ξανακάνουμε τέτοια άσκηση, έχεις άλλη;»
Εγώ: «Και σε αυτή ωραία θα νιώσετε!»
Νίκος: «Άμα τη λύσουμε.»
Κώστας: «Πρώτη φορά λύνω και με παράλληλες και με κύκλο!» (λέει χαμογελαστός και περήφανος)

Μέσα από αυτό το επεισόδιο πληροφορούμαστε ότι τα συναισθήματα των μαθητών δεν έχουν αλλάξει ερχόμενοι σε συναναστροφή με ένα νέο πρόβλημα. Ο καθένας ξεχωριστά «κουβαλάει» τα συναισθήματα που του έχουν δημιουργηθεί από την προηγούμενη απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα ο Νίκος διακατέχεται πιθανόν από θλίψη και φόβο μίας μη επιτυχούς απόδειξης, ενώ ο Κώστας εκδηλώνει συχνά τη χαρά, την οποία δημιούργησε η προηγούμενη επιτυχία του.

Στη συνέχεια ο Νίκος, εμφανώς επηρεασμένος από το λανθασμένο σχήμα του, της προηγούμενης απόδειξης, παρατηρείτε αρκετά προσεκτικός με τα δεδομένα του νέου προβλήματος. Απευθύνοντάς μου το λόγο, επιζητά την επιβεβαίωση των όσων ορθά διατυπώνει για να μην προβεί σε κατασκευή λανθασμένου σχήματος. Γίνεται εμφανές για ακόμη μία φορά ότι διακατέχεται από φόβο. Παράλληλα μέσω της επιβεβαίωσης μου προς εκείνον, κατασκευάζει το σχήμα.

Οι δύο μαθητές ολοκληρώνουν τα σχήματά τους και τα παρατηρούν αν είναι ίδια. Αρχίζουν και οργανώνουν τις υποθέσεις και τα ζητούμενα. Ο Νίκος παρατηρείται πιο ήρεμος και πιο δυναμικός. Έχει επιτύχει στην κατασκευή του σχήματος. Διατυπώνει ορθά τον συλλογισμό του (κριτήριο για να είναι ένα κυρτό τετράπλευρο ορθογώνιο), ο οποίος θα είναι χρήσιμος για την απόδειξη του ζητούμενου. Ο Κώστας πιθανόν δεν αντιλαμβάνεται τη δήλωση του πρώτου και συλλογίζεται πότε ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. Απευθύνεται σε εμένα για να επιβεβαιώσει τις εικασίες του για το θέμα που προέκυψε. Τον παροτρύνω να σκεφτεί τα δεδομένα του, παράλληλα καλώ τον Νίκο να απαντήσει στο ερώτημα του εταίρου (στα 75').

Νίκος: «Τι είπες δεν άκουσα;» (απευθύνεται στον Κώστα.)
Κώστας: «Το ορθογώνιο είχε μία γωνία ορθή και..» (προσπαθεί να θυμηθεί όλα τα κριτήρια)
Εγώ: «Και παραλληλόγραμμο»
Νίκος: «Τι θέλει να αποδείξουμε;»

Εγώ: «Ότι είναι ορθογώνιο!»
Νίκος: «Ποιο;»
Κώστας: «Το ΜΚΕΗ»
Νίκος: «Αφού είναι ορθογώνιο!»
Κώστας: «Που το ξέρεις;»
Νίκος: «Αφού έχουμε πει ότι όποιο τετράπλευρο έχει τρεις γωνίες ορθές, δηλαδή η Η, η Ε και η Μ που είναι ορθές, άρα είναι ορθογώνιο.»
Κώστας: «Α!»
Εγώ: «Τρεις γωνίες ορθές.»

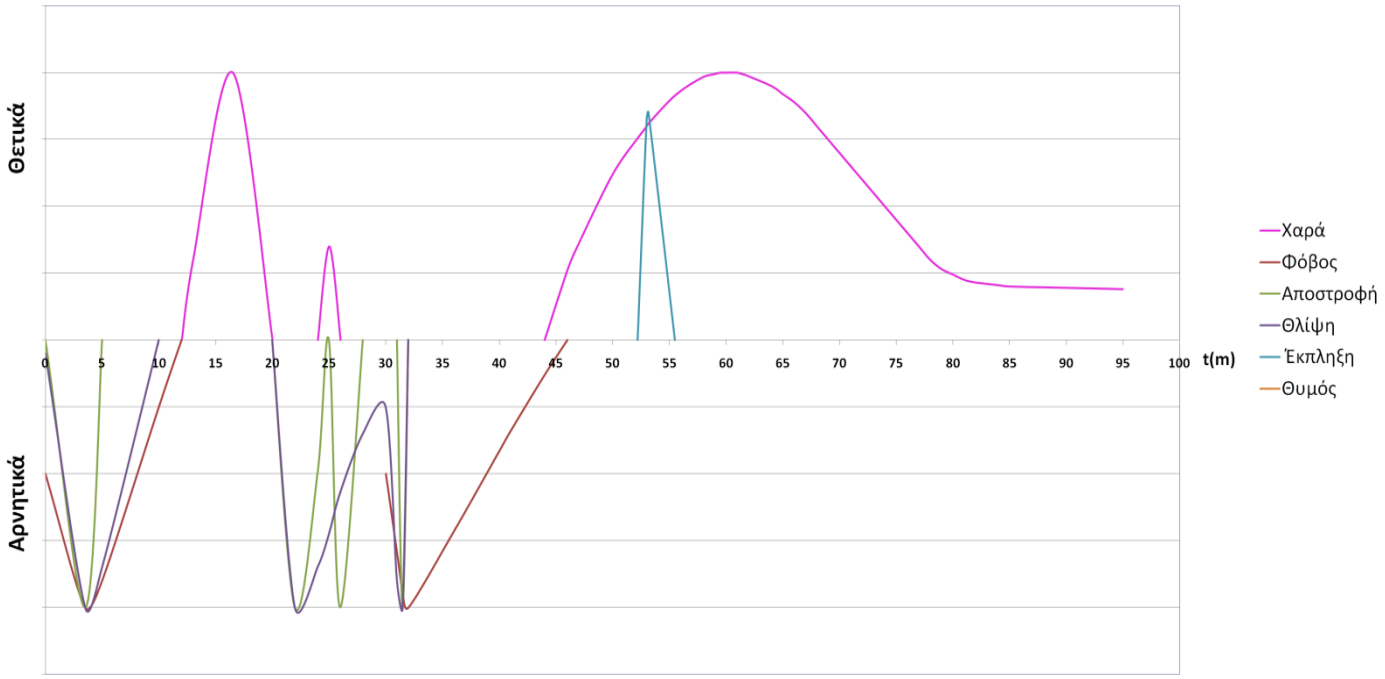
Σε αυτό το σημείο διαπιστώνεται η αλληλεπίδραση των δύο μαθητών. Ο Νίκος ενσωματώνεται στη συζήτηση (ενσωμάτωση – απάντηση) και κάνει μία δήλωση, την οποία αντιλαμβάνεται και αποδέχεται ο Κώστας (γρήγορη συναίνεση). Ο πρώτος παρατηρείται χαρούμενος έπειτα από τη διατύπωση του ορθού συλλογισμού του. Τα δύο παιδιά βρίσκονται στη διαδικασία παραγωγής της απόδειξης.

Στα 80’ ο Κώστας διατυπώνει τα στοιχεία που χρειάζεται να αποδείξει ώστε να καταλήξει στο ζητούμενο, και με τη δική μου επιβεβαίωση, εκφράζει τη χαρά και τον ενθουσιασμό του. Στόχος τους είναι μέσα από μία σύγκριση τριγώνων να καταλήξουν σε ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων, αλλά τους λείπει ένα στοιχείο, το οποίο αναφέρεται σε ισότητα γωνιών. Μετά από πέντε λεπτά σκέψης (ενώ παρατηρούνται κουρασμένοι), τους παροτρύνω να κοιτάξουν τα δεδομένα τους (ότι διαχειρίζονται ισοσκελές τρίγωνο και οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες). Μετά από λίγο, με συνδυασμό όλων όσων ειπώθηκαν καταλήγουν στο ζητούμενο και αμέσως κατασκευάζουν τρίγωνο στο δεύτερο ερώτημα της άσκησης.

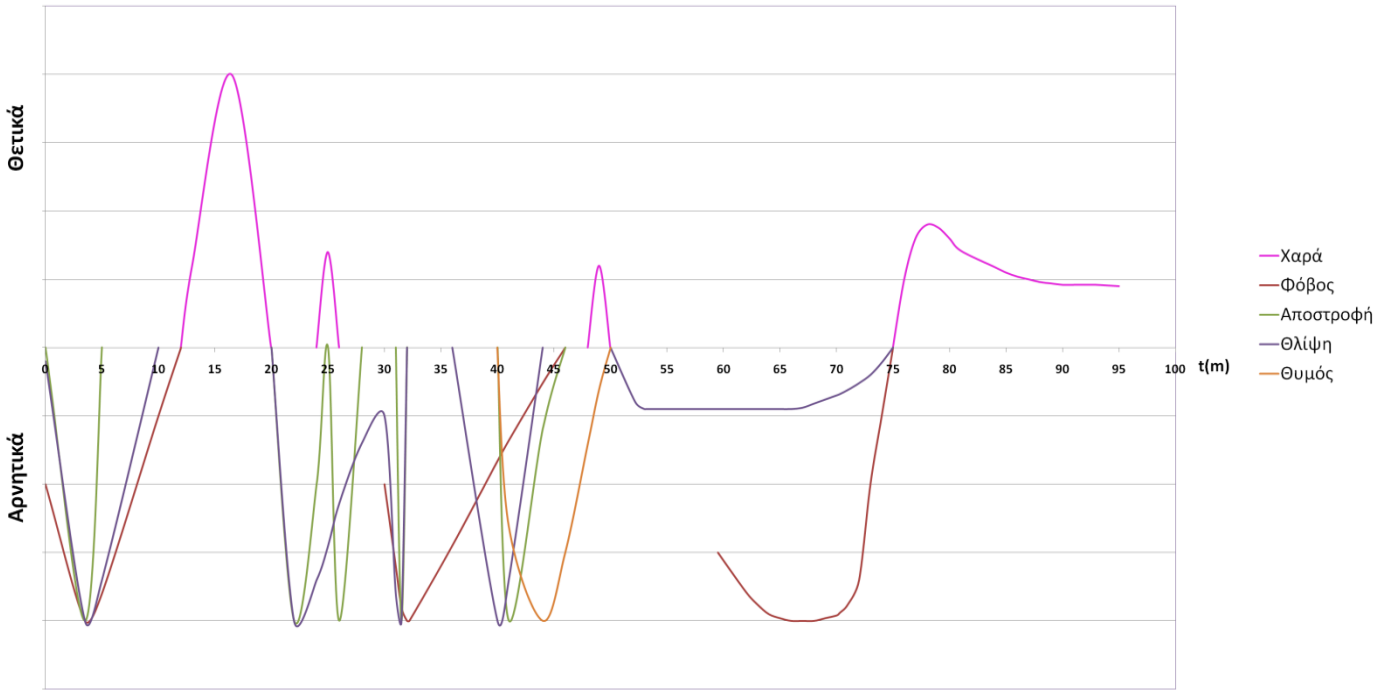
Όσο σχεδιάζουν παρατηρώ ότι ενώ η εκφώνηση αναφέρεται σε τυχαίο σημείο εντός του ισοπλεύρου τριγώνου, οι ίδιοι έχουν θεωρήσει σημείο πάνω σε πλευρά του τριγώνου. Τότε αναφέρω «προσέξτε την εκφώνηση» και κατευθείαν τα δύο παιδιά, διόρθωσαν το σχήμα τους (σύμφωνα με τα λεγόμενα τους, θυμήθηκαν ότι τους είχα τονίσει τη διαφορά εσωτερικού σημείου και σημείου πάνω σε πλευρά τριγώνου, κατά τη διάρκεια των μαθημάτων μας). Σε αυτό το σημείο γίνεται εμφανής η κούραση των δύο μαθητών και η συναισθηματική τους κατάσταση είναι ουδέτερη και δύσκολη ως προς την παρατήρηση. Για αυτό το λόγο, με επιλογή μου αποφασίζω να ανοίξω διάλογο με τους δύο μαθητές και να συζητήσουμε γύρω από την απόδειξη του ζητούμενο. Σκοπός μου ήταν να αποτρέψω την οποιαδήποτε δημιουργία αρνητικών συναισθημάτων στα δύο παιδιά. Καταλήγοντας τους αναφέρω ότι επέλεξα δύσκολα θέματα, με σκοπό να συνεργαστούμε για την επίλυσή τους και ότι δε θέλω να απογοητεύονται. Χαμογέλασαν και ο Νίκος είπε χαρακτηριστικά: «όχι εντάξει, δεν άξιζε να κλαίω!»

Ακολουθούν πίνακες αναπαράστασης των συναισθημάτων, κάθε εφήβου ξεχωριστά, καθ’ όλη τη διάρκεια της εν λόγω παρέμβασης (βλ. πίνακα 2, για τις κατηγορίες αλληλεπίδρασης, οι οποίες σημειώθηκαν).

Συναισθήματα Κώστα 1η Παρέμβαση



Συναισθήματα Νίκου 1η Παρέμβαση



4.3 Η 2η Παρέμβαση

4.3.1 Περιεχόμενο 2ης Παρέμβασης

Η δεύτερη συνάντηση μου με τον Νίκο και τον Κώστα πραγματοποιήθηκε την Κυριακή 22 Μαρτίου, με διάρκεια δύο ωρών. Επιλέχθηκαν τέσσερα προβλήματα από το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας α' λυκείου. Με βάση τα όσα διαδραματίστηκαν στην πρώτη συνάντηση αλλά και με τις δυσκολίες που παρατηρηθήκε ότι συναντούσαν οι δύο μαθητές κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, του τυπικού και εβδομαδιαίου προγράμματος μας (μετά την πρώτη παρέμβαση), δημιουργήθηκε το περιεχόμενο της τρέχουσας παρέμβασης.

Πιο συγκεκριμένα το πρώτο θέμα, επιλέχθηκε λόγω της πολυπλοκότητας των εννοιών, οι οποίες εντοπίζονται στην εκφώνηση και κατ' επέκταση πιθανούς δυσκολίας στην κατασκευή του σχήματος, από τους μαθητές. Η έννοια της προβολής, παρατηρήθηκε να προβληματίζει τους δύο έφηβους εντός του πλαισίου της πρώτης παρέμβασης και αξίζει να εξεταστεί σε αυτό το σημείο πως θα διαχειριστούν αυτή την έννοια, εφόσον την έχουν κατανοήσει. Επίσης ο όρος «εκατέρωθεν», μία όχι και τόσο γνώριμη έννοια , αναμένεται να προβληματίσει τα δύο παιδιά. Τέλος μία ακόμη δυσκολία της δεδομένης άσκησης έγκειται στο ζητούμενο, το οποίο αφορά την αφαίρεση μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι συμπεριλαμβάνεται στα προβλήματα αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου, συγκεκριμένα από την ενότητα του τραπεζίου, στην οποία οι μαθητές μόλις στο τελευταίο μάθημα είχαν εισαχθεί.

Όσον αφορά το δεύτερο θέμα, σε ένα από τα μαθήματα του τυπικού προγράμματός μας, ένας εκ των δύο μαθητών, δήλωσε την άρνηση του να διαχειριστεί την εν λόγω άσκηση, με την αιτιολογία δυσκολίας στην κατανόηση της εκφώνησης. Επίσης είχαν αναφέρει και οι δύο την αδυναμία τους να φανταστούν το σχήμα σε ένα πρόβλημα τέτοιου τύπου. Με αφορμή τα όσα οι ίδιοι οι μαθητές ανέφεραν καθώς και λόγω του φόβου τους να συναναστραφούν με την τρέχουσα άσκηση, επιλέχθηκε το δεδομένο θέμα.

Το τρίτο πρόβλημα επιλέχτηκε λόγω τον όρων που απαρτίζουν την εκφώνηση (ημιεπίπεδο, ημιευθείες), κάτι το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον, όσον αφορά τον τρόπο διαχείρισης τους από τους μαθητές. Επίσης συγκαταλέγεται και αυτό στα προβλήματα αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο της παραλληλίας (Κεφάλαιο 4). Η δυσκολία την οποία συναντούσαν οι δύο μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία των προβλημάτων του εν λόγω κεφαλαίου, έχει αναφερθεί από τους ίδιους στην πρώτη συνέντευξη, καθώς και έχει παρατηρηθεί κατά τη διάρκεια των μαθημάτων μας. Αρκεί μόνο να θυμηθούμε την έκπληξη και τη χαρά του Κώστα στο επεισόδιο της πρώτης παρέμβασης, στο οποίο

αντιλαμβάνεται ότι η πρόταση την οποία απέδειξε επιτυχώς, συμπεριλαμβάνεται στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Καταλήγοντας, το τέταρτο θέμα δεν συγκαταλέγεται στην κατηγορία ασκήσεων αυξημένης δυσκολίας, αλλά εντοπίζεται σε μία από τις πιο βασικές ενότητες του βιβλίου, με μία πληθώρα θεωρημάτων και προτάσεων (Εφαρμογές παραλληλογράμμων). Τοποθετήθηκε τελευταίο, διότι παρουσιάζει ενδιαφέρον η διαχείρισή της από τους δύο έφηβους και ως προς τον γνωστικό άξονα άλλα και ως προς τον άξονα των συναισθημάτων, καθώς οι ίδιοι έχουν διαχειριστεί πολλά προβλήματα της εν λόγω ενότητας. Αναμένεται (σκόπιμα) με την κατάληξη της δεύτερης παρέμβασης να εντοπίζονται θετικά συναισθήματα στους δύο μαθητές.

4.3.2 Αποτελέσματα 2^{ης} Παρέμβασης

Ανάλυση 1^{ου} θέματος

Με την έναρξη της δεύτερης παρέμβασης, οι δύο μαθητές παρατηρούνται ήρεμοι και με καμία ένδειξη φόβου στα πρόσωπά τους. Αρχικά προβληματίζονται με την έννοια του «εκατέρωθεν». Τους προτρέπω να ερμηνεύσουν μέσα από τα συμφραζόμενα. Μετά από σύντομο χρονικό διάστημα, ο Νίκος (στο 1') παρατηρεί «ότι είναι απέναντι; Το ένα σημείο από τη μία πλευρά και το δεύτερο από την άλλη;». Επιβεβαιώνω το συλλογισμό του και τα δύο παιδιά ξεκινούν την κατασκευή του σχήματος.

Μετά από ένα λεπτό περίπου ενώ ο Κώστας έχει κατασκευάσει ήδη μία φορά ένα σχήμα (παραλληλόγραμμο) λανθασμένα, ο Νίκος κάνει μια παρατήρηση στον πρώτο (εκμαίευση), δηλώνοντας ότι ούτε το δεύτερο σχήμα του αναπαριστά παραλληλόγραμμο. Τότε ο Κώστας διαγράφει από την κόλλα του και το δεύτερο σχήμα του (γρήγορη συναίνεση). Με την έναρξη της τρίτης προσπάθειας κατασκευής νέου, ο ίδιος δηλώνει «Αχ! Δε θα μου βγει πάλι.», καθώς απομακρύνεται από το έδρανο. Τη δεδομένη στιγμή παρατηρείται στο πρόσωπο του θλίψη. Παράλληλα ο Νίκος πλησιάζει στην κόλλα του εταίρου και κατασκευάζει ένα παραλληλόγραμμο. Ο ίδιος χαμογελάει (χαρά).

Κατά τη διάρκεια κατασκευής του σχήματος, ο τελευταίος μαθητής διαπιστώνει τον τρόπο με τον οποίο θα φέρει τις προβολές (προεκτείνοντας), κάτι το οποίο επιβεβαιώνω και συνεχίζουν τη διαδικασία κατασκευής. Στα έξι πρώτα λεπτά, τα δύο παιδία με την ολοκλήρωση του σχήματός τους έχουν ήδη ξεκινήσει τη διαδικασία σχεδιασμού της αποδεικτικής διαδικασίας. Ο Κώστας είναι εμφανώς επηρεασμένος (θλίψη στο πρόσωπό του) από τις λανθασμένες αποπήρες κατασκευής σχήματος και παρατηρείται αμέτοχος στις οποιεσδήποτε δηλώσεις του εταίρου γύρω από την αποδεικτική διαδικασία. Αντίθετα, ο Νίκος παρατηρείται ευδιάθετος και συμμετοχικός.

Στα 10', παρατηρείται προβληματισμός στους ίδιους με τον τρόπο έναρξης της απόδειξης. Κοιτούν νευρικά αρκετές φορές την εκφώνηση. Σε αυτό το σημείο τους απευθύνω το λόγο με στόχο να ενισχύσω τις εικασίες τους γύρω από την απόδειξη του ζητούμενου.

Εγώ: «Λοιπόν, αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε, στο πρώτο μέλος γιατί εκεί έχει την πράξη, σας θυμίζει κάτι; Αφαίρεση. Υπάρχει κάποιος τύπος που μιλάει για αφαίρεση; Κάποιο θεώρημα;»
(τα δύο παιδιά συλλογίζονται)

Εγώ: «Και συγκεκριμένα αυτές οι ευθείς είναι τυχαίες; Είναι μεταξύ τους, για παράδειγμα είναι…»

Κώστας: «Παράλληλες!»
Εγώ: «Α! Γιατί είναι παράλληλες;» (η ΑΑ’ και η ΓΓ’)
Νίκος: «Να ρωτήσω κάτι; Αφού… Τίποτα, τίποτα. Δεν είναι σωστό!»
Εγώ: Πες μου!
Νίκος: Όχι, δεν είναι σωστό!
Εγώ: «Πες το, δεν πειράζει και να μην είναι σωστό!»
Νίκος: «Αυτό που λέγαμε για τις παράλληλες, ότι αν φέρουμε κάθετες θα είναι παράλληλες, ισχύει σε αυτό;»
Εγώ: «Ωραία, ναι! Πες το λίγο ολοκληρωμένα! Τι είναι η ΑΑ’, ΒΒ’ και η ΓΓ’;»
Κώστας: «Παράλληλες!»
Εγώ: «Δεν ξέρεις αν είναι παράλληλες, είναι τι;»
Νίκος: «Προβολές!»
Εγώ: «Προβολή είναι ένα σημείο, για παράδειγμα το Β’ του Β.»
Νίκος: «Ναι!»
Εγώ: «Τι είναι σαν ευθύγραμμα τμήματα; Είναι κάθετα κάπου για παράδειγμα.»
Νίκος: «Ε! Ναι! Είναι κάθετα όλα στην ευθεία ε.» (Εξωτερίκευση)
Εγώ: «Και τι ξέρουμε εμείς για αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα;» (το σκέφτονται) «Τι είναι μεταξύ τους;»
Νίκος/Κώστας: «Παράλληλα! Α!»
Εγώ: «Αυτό! Έτσι αιτιολογούμε ότι είναι παράλληλα τα ευθύγραμμα τμήματα, όταν είναι κάθετα στην ίδια ευθεία.»

Στα 13’ μέσα από το διάλογο μας τα δύο παιδιά, κατανοούν και καταγράφουν αιτιολογώντας, την παραλληλία των ευθυγράμμων τμημάτων στην κόλλα τους. Στη συνέχεια, οι δύο μαθητές προβληματίζονται για το πώς συνδέεται το ζητούμενο με την παραλληλία των ευθυγράμμων τμημάτων που μόλις κατέγραψαν. Μικρές ενδείξεις γύρω από την ψυχολογική τους κατάσταση (με την ανάλυση του προσώπου και τη στάση του σώματος) δείχνουν ότι οι μαθητές διακατέχονται από θλίψη και πιθανόν φόβο. Προκειμένου να επέλθουν θετικά συναισθήματα, συνεχίζω τον ενισχυτικό διάλογο.

Εγώ: «Να ρωτήσω κάτι. Σε ποια τετράπλευρα συναντάμε παραλληλία δύο μόνο πλευρών;»
(Τα δύο παιδιά σκέφτονται, αυτή τη στιγμή κορυφώνεται ο φόβος διότι είναι κάτι το οποίο γνωρίζουν και δεν μπορούν να θυμηθούν) (στο 15’)
«Σκεφτείτε το λίγο. Δεν έχετε μάθει πολλά σχήματα κυρτά. Έχετε μάθει…»
Νίκος/Κώστα: «Παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο, ρόμβος και τετράγωνο.»
Κώστας: «Μήπως είναι τετράγωνο;» (Εξωτερίκευση)
Νίκος: «Δεν είναι τετράγωνο!» (Εκμαίευση)
Κώστας: «Α! Ναι, τι λέω;» (Γρήγορη συναίνεση) (16’)

Εγώ: «Μην αγχώνεστε! Σκεφτείτε ήρεμα, σε ποιο σχήμα έχω μόνο δύο παράλληλες πλευρές;»

Κώστας: «Στο τραπέζιο.» (Εξωτερίκευση)

Νίκος: «Α! Στο τραπέζιο!»

Εγώ: «Άρα τι είναι το σχήμα μας;» (Εννοώ το ΑΑ'ΓΓ')

Νίκος/Κώστας: «Τραπέζιο!» (17')

Εγώ: «Μπράβο, τώρα από εδώ και πέρα έγινε λίγο πιο εύκολο γιατί θα εστιάσετε στα θεωρήματα του τραπεζίου.»

Μέσα από αυτό το επεισόδιο φαίνεται έντονα η αλληλεπίδραση των δύο μαθητών, είτε μέσω της εξωτερίκευσης ιδεών, είτε μέσω εκμαίευσης και γρήγορης συναίνεσης. Ο ρόλος ο δικός μου ήταν ενισχυτικός. Σκοπός μου, μέσω των ερωτήσεων να καταλήξουν στο κατάλληλο τετράπλευρο. Μετά την επίτευξη της γνώσης του είδους του τετραπλεύρου (τραπέζιο), οι δύο μαθητές παρατηρούνται πιο ήρεμοι στις εκφράσεις του προσώπου τους (στα 22'). Εστιάζουν στο σχήμα και προσπαθούν να συνδυάσουν ευρήματα με ζητούμενα. Δεδομένου ότι τα τραπέζια σαν ενότητα τα έχουν επεξεργαστεί ελάχιστα (διότι μόλις στα προηγούμενα μαθήματα τα διδάχτηκαν), σε μία κόλλα καταγράφω, ενώ οι ίδιοι διατυπώνουν λεκτικά, τα θεωρήματα των εν λόγω τετραπλεύρων. Τους παροτρύνω να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα όποιο από αυτά τους χρειάζεται στην απόδειξη.

Για τα επόμενα λεπτά οι μαθητές διατυπώνουν τις σκέψεις τους και αναμένουν την αξιολόγηση μου. Τους προτρέπω κυρίως να συνεργαστούν για να καταλήξουν στην απόδειξη του ζητούμενου και μέσω εξωτερίκευσης και εκμαίευσης στα 35' ολοκληρώνουν την απόδειξη του ζητούμενου. Παρατηρείται σταδιακή μείωση του φόβου αλλά η ένδειξη θλίψης διακρίνεται στα πρόσωπά τους. Δεν παρατηρείται δημιουργία θετικών συναισθημάτων παρά μόνο μία μικρή ένδειξη χαράς με το πέρας της απόδειξης. Στο 35':

Κώστας: «Τα καταφέραμε. Αφού κάναμε δυόμισι ώρες το σχήμα.» (γέλια)

Εγώ: «Αυτό είναι δύσκολο, ήταν από τα σύνθετα θέματα των τραπεζίων. Που δεν τα έχουμε δουλέψει πολύ, οπότε μην απογοητεύεστε» (σε αυτό το σημείο ο Κώστας έχει μία έκφραση θυμού στο πρόσωπο του, μεταξύ αστείου και σοβαρού για την επιλογή προβλήματος που έκανα.)

Στη συνέχεια για δύο λεπτά περίπου τους δίνω συμβουλές για το πώς να διενεργούν και να οργανώνουν την αποδεικτική τους διαδικασία, όταν ένα πρόβλημα που καλούνται να διαχειριστούν είναι άγνωστο προς εκείνους. Παράλληλα τους εμψυχώνω για τις επόμενες ασκήσεις.

Ανάλυση 2ου θέματος

Με την έναρξη του δεύτερου προβλήματος οι δύο μαθητές παρατηρούνται επηρεασμένοι συναισθηματικά από την προηγούμενη άσκηση (θλίψη, φόβος).

Νίκος: «Με τα χωριά θα κάνουμε;» (στο 39')

Ο ίδιος ο μαθητής είχε εκφράσει σε εμένα, εν ώρα μαθήματος τυπικού προγράμματος, το φόβο ενασχόλησης του με τη δεδομένη άσκηση. Επικρατεί ανησυχία σχετικά με την μορφή του σχήματος. Αναρωτιούνται και οι δύο μαθητές πως θα κατασκευάσουν στο σχήμα τους τα τρία χωριά. Τους παροτρύνω να εστιάσουν στην ουσία του προβλήματος. Συγκεκριμένα στην έννοια του «ισαπέχουν». Ο Νίκος, όπως παρατηρήθηκε και σε προηγούμενο επεισόδιο, έχει δημιουργήσει κάποιες εικασίες αλλά αρνείται να τις εξωτερικεύσει κυριευμένος από το φόβο του λάθους. Συγκεκριμένα στα 42':

Νίκος: «Έχω σκεφτεί κάτι αλλά δεν είναι, όχι είναι λάθος!»

Κώστας: «Και στην προηγούμενη άσκηση είπες ότι ήταν λάθος αυτό που σκέφτηκες και τελικά ήταν σωστό!»

Εγώ: «Πες μου, συζήτηση κάνουμε, δεν είμαι εδώ για να σε κρίνω! Δε θα σε βαθμολογήσω!»

Νίκος: «Όχι! Θα σκεφτώ κάτι άλλο!»

Ο μαθητής δεν εξωτερικεύει τελικά τις σκέψεις του, διότι με την έναρξη της άσκησης διακατέχεται από φόβο.

Στη συνέχεια συζητάμε τις δύο περιπτώσεις, στις οποίες δύο σημεία ισαπέχουν από μία ευθεία. Συγκεκριμένα, είτε τα δύο σημεία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία, είτε εκατέρωθεν αυτής. Οι δύο μαθητές διατυπώνουν τις σκέψεις τους και οι γνώσεις του ενός συμπληρώνουν τις γνώσεις του άλλο. Καταλήγοντας στο επιθυμητό αποτέλεσμα τους ζητάω να αναλογιστούν πως θα σχεδιάσουμε τα τρία χωριά, δεδομένου ότι στην εκφώνηση γίνεται σαφές ότι τα εν λόγω χωριά δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Στα 45':

Εγώ: «Αφού τα τρία χωριά δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, θα σχηματίζουν…»

Κώστας: «Ένα τρίγωνο!» (και οι δύο μαθητές κατασκευάζουν τυχαίο τρίγωνο με κορυφές τα τρία χωριά.)

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα προβλήματα της τρέχουσας παρέμβασης, τα οποία μέχρι στιγμής διαχειρίζονται τα δύο παιδιά, ο ρόλος μου είναι πιο ενεργός σε σχέση με την προηγούμενη παρέμβαση. Αυτό συμβαίνει διότι τα δύο εν λόγω προβλήματα παρουσιάζουν αυξημένη δυσκολία για τους δύο μαθητές, το πρώτο λόγο της ενότητας στην οποία εντάσσεται και το δεύτερο λόγο της περιγραφικής φύσης των δεδομένων του προβλήματος.

Με την ολοκλήρωση των τριγώνων, ο Κώστας παρουσιάζει σε εμένα το σχήμα του και αναμένει την αξιολόγησή μου. Με την επιβεβαίωση της ορθότητας του σχήματος του, ο ίδιος παρατηρείται πιο ήρεμος και μπαίνει στη διαδικασία άρθρωσης των σκέψεών του (εξωτερίκευση). Στη συνέχεια και οι δύο μαθητές κάνουν δηλώσεις σχετικά με την κατασκευή της ευθείας (δρόμος). Στα 47':

Εγώ: «Που μπορεί να είναι η ευθεία λοιπόν παιδιά;»

Κώστας: «Από τα μέσα των δύο πλευρών;»

Εγώ: «Από τα μέσα των δύο πλευρών.»

Κώστας: «Άρα τώρα απλώς θα φέρουμε τις κάθετες και θα πρέπει να είναι ίσες.»

Τα δύο παιδιά φέρνουν τις αποστάσεις των τριών χωριών από τον δρόμο και μέσα από τη συζήτηση μας καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι αποστάσεις είναι ίσες αν και μόνο αν η ευθεία περνάει από το μέσο των δύο πλευρών του τριγώνου, το οποίο σχηματίζεται. Σε αυτό το σημείο (52'), παρατηρείται να διακατέχονται από θετικά συναισθήματα, κυρίως χαρά.

Νίκος: «Αυτό ήταν; Τελικά δεν ήταν δύσκολο!» (έκπληξη)

Σε αυτό το σημείο ενώ ο εν λόγω μαθητής παρατηρείται έκπληκτος με την ευκολία της άσκησης, λίγα δευτερόλεπτα μετά στο πρόσωπο του επικρατούν εκφράσεις θλίψης και πιθανού θύμου. Ξεκίνησε το σχεδιασμό της αποδεικτικής του διαδικασίας με φόβο και αυτό δεν του επέτρεψε να έχει ένα δυναμικό ρόλο σε αυτή. Αυτή είναι πιθανόν η αιτία, η οποία προκάλεσε τη δημιουργία των αρνητικών συναισθημάτων στο μαθητή τα τελευταία δευτερόλεπτα που πραγματευόμαστε.

Στη συνέχεια οι δύο μαθητές διαπίστωσαν ότι μπορούν να υπάρξουν τρείς δρόμοι με την ίδια ιδιότητα και σε αυτό το σημείο η αποδεικτική διαδικασία ολοκληρώθηκε. Τα επόμενα δευτερόλεπτα ακούγονται σχόλια γύρω από το τρέχων πρόβλημα, όπως «ήταν ωραίο!», «ήταν ενδιαφέρον», «μου άρεσε γιατί ήταν διαφορετικό από όλα όσα συναντάμε, συνδυάζει την καθημερινή ζωή». Οι εκφράσεις αυτές των δύο παιδιών αποκαλύπτουν ότι η συναισθηματική τους κατάσταση είναι αναμφισβήτητα καλύτερη από την αντίστοιχη όταν ξεκίνησαν να πραγματεύονται το θέμα. Στα 62':

Κώστας: «Αν θυμόμασταν τα αρχικά (σε ποιες περιπτώσεις δύο σημεία ισαπέχουν από ευθεία), εύκολα το αποδεικνύαμε.»

Στο πρόσωπο του Νίκου, οι εκφράσεις δε συμβαδίζουν με τα λεγόμενά του. Διακατέχεται ακόμα από θλίψη, δε διακρίνεται θυμός.

Ανάλυση 3ου θέματος

Κατά τη διάρκεια κατασκευής των σχημάτων, οι δύο μαθητές στρέφουν το βλέμμα τους σε εμένα, αναμένοντας αξιολόγηση. Οι ίδιοι δεν έχουν αποδώσει σχηματικά την έννοια της ημιευθείας (έχουν σχεδιάσει ευθείες). Τους παροτρύνω να είναι λίγο πιο προσεκτικοί και με αφορμή την παρατήρησή μου αυτή, διεξάγεται μία συζήτηση γύρω από τις έννοιες του ημιεπιπέδου και της ημιευθείας, οι οποίες συμπεριλαμβάνονται στην εκφώνηση. Στη συνέχεια οι δύο μαθητές κατανοούν το λάθος στο σχήμα τους και το διορθώνουν. Έπειτα παρατηρώ ότι οι ημιεθείες, τις οποίες έχουν σχεδιάσει οι μαθητές μοιάζουν να είναι κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα. Τους συμβουλεύω οι κατασκευές των σχημάτων τους να είναι όσο το δυνατό περισσότερο τυχαίες για να μη δημιουργείται σύγχυση στους ίδιους κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας. Τότε ο Νίκος με δική του πρωτοβουλία, ανακατασκευάζει τις ημιευθείες στο σχήμα του, ώστε να μη παραπλανούν ως κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα.

Μέχρι τώρα δε διαπιστώνεται κάποια εκδήλωση συναισθήματος από τους δύο έφηβους. Ο Νίκος εικάζεται να διακατέχεται από θλίψη (λόγω του προηγούμενου αποδεδειγμένου θέματος). Στοιχεία για τη συναισθηματική κατάσταση του Κώστα, δεν υπάρχουν. Στα 71’:

Κώστας: «Τώρα δε μου βγήκαν ίσα.» (Αναφέρεται στην ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων της εκφώνησης.)

Εγώ: «Κάνε αν θέλεις ξανά το σχήμα από κάτω.»

(Τότε ο μαθητής χαμογελάει λίγο απογοητευμένος με τις μη επιτυχείς αποπήρες κατασκευής σχήματος και ξεκινάει το σχεδιασμό νέου.)

Κώστας: «Δε είμαι καλός σήμερα στα σχήματα.» (κουνάει το κεφάλι, εκδηλώνοντας θλίψη μέσω του προσώπου του.)

Παράλληλα ο Νίκος ολοκληρώνει την κατασκευή του σχήματός του και εστιάζοντας το βλέμμα του στην εκφώνηση, συλλογίζεται την απόδειξη του ζητούμενου. Ο ίδιος, τα επόμενα λεπτά, αρθρώνει τις σκέψεις του (εξωτερίκευση), τις οποίες επιβεβαιώνω. Στη συνέχεια ο Κώστας κάνει μία διαπίστωση (λανθασμένη) και ο εταίρος αμφισβητώντας τον ισχυρισμό του πρώτου, διατυπώνει το ορθό (εκμαίευση). Τότε ο Κώστας αποδέχεται τη δήλωση (γρήγορη συναίνεση). Για τα επόμενα τριάμισι λεπτά οι δύο έφηβοι παρατηρούνται προβληματισμένοι. Ο Νίκος απευθύνοντας τον λόγο σε εμένα, αναρωτιέται συνεχώς αν θα γίνει χρήση όλων των δεδομένων (κάτι το οποίο γνωρίζει ότι σίγουρα θα συμβεί). Πιο συγκεκριμένα ερωτάται «Θα χρησιμοποιήσουμε ότι δημιουργούνται ισοσκελή τρίγωνα, λόγω της ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων;», «θα χρησιμοποιήσουμε ότι οι ημιευθείες είναι παράλληλες;». Κάθε ερώτηση του συνοδεύεται από εκφράσεις στο πρόσωπό του, οι οποίες δηλώνουν θλίψη. Η ένταση στις κινήσεις του σώματός του και το πρόσωπό

του (στα 75’) εκδηλώνουν θυμό (αδυνατεί σε αυτό το σημείο να ξεκινήσει την αποδεικτική διαδικασία).

Στη ψυχολογική κατάσταση των δύο μαθητών με βεβαιότητα συγκαταλέγονται αρνητικά συναισθήματα, αυτά του φόβου και της θλίψης. Προκειμένου να μειώσω αυτές τις ενδείξεις των συναισθημάτων, προτρέπω τα δύο παιδιά να καταγράψουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, με στόχο να ενισχυθούν οι σκέψεις τους γύρω από την αποδεικτική διαδικασία (στα 77’). Μετά από ένα λεπτό περίπου ο Κώστας διατυπώνει τη σκέψη του σχετικά με τον τρόπο απόδειξης του ζητούμενου (δήλωση), κάτι το οποίο επιβεβαιώνω. Τα δύο παιδιά εστιάζουν γύρω από την απόδειξη της δήλωσης του εν λόγω μαθητή, ο οποίος παρατηρείται πιο ήρεμος. Στα 81’:

Νίκος: «Εγώ δε ξέρω πως να χρησιμοποιήσουμε ότι είναι παράλληλες.»
Κώστας: «Η Ax και η By είναι παράλληλες και τέμνονται από την AB;»
Εγώ: «Ναι»
Νίκος: «Δεν κατάλαβα και τι σχέση έχει αυτό;»
Κώστας: «Για τις γωνίες.»

Μέσα από αυτό το επεισόδιο διακρίνεται έντονα ο θυμός και η θλίψη του Νίκου. Αδυνατεί να κατανοήσει τον σκοπό των δηλώσεων του εταίρου του (γνωστή σχέση μεταξύ γωνιών). Τότε:

Νίκος: «Η Α γωνία είναι ίση με τη Β;»
Εγώ: «Όχι, τι είναι η Α και η Β;»
Νίκος: «Παρ… όχι, λάθος!» (πάει να πει το σωστό, παραπληρωματικές γωνίες, αλλά διστάζει ενώ παράλληλα ξεφυσάει)
Κώστας: «Εντός εναλλάξ;» (εξωτερίκευση)
Νίκος: «Δεν είναι!» (εκμαίευση)
Κώστας: «Ίσες δεν είναι;»
Εγώ: «Γίνεται η μία γωνία σας να είναι αμβλεία, η άλλη οξεία και να είναι ίσες;»
Νίκος: «Ναι, σωστά! Μας κάνουν άθροισμα 90°;»
Εγώ: «Γίνεται αυτό; Όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη τότε δε σχηματίζουν ή ίσες γωνίες ή παραπληρωματικές;»
Νίκος: «Ναι συγνώμη, παραπληρωματικές είναι.»
Εγώ: «Ναι, ως…»
Κώστας: «Εντός εναλλάξ»
Εγώ: «Μα οι εντός εναλλάξ είναι ίσες.»

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ξανά και οι τρεις μαζί το σχήμα, στη συνέχεια και τα δύο παιδιά διατυπώνουν το ορθό (εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες). Δεδομένου του υψηλού γνωστικού επιπέδου των δύο μαθητών, η χρονική καθυστέρηση που εντοπίστηκε γύρω από την κατασκευή της απόδειξης είναι απόρροια των αρνητικών συναισθημάτων από τα οποία διακατέχονται καθώς και από την σύγχυση η οποία

προκλήθηκε με τη συναναστροφή τους με τις ημιευθείες. Οι ίδιοι για τα επόμενα τέσσερα λεπτά καταγράφουν τις ιδέες τους και όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως και στοχεύουν στην απόδειξη του ζητούμενου. Στη συνέχεια παρατηρούνται ξανά προβληματισμένοι και τους προτρέπω να εστιάσουν στα τρίγωνα που δημιουργούνται. Τότε ο Νίκος αναφέρει το σταθερό άθροισμα γωνιών τριγώνου 180°, το οποίο χρησιμοποιούν κατάλληλα με αντικατάσταση σε όσα έχουν καταγράψει.

Φτάνουν στο σημείο (στα 92') να έχουν καταγράψει όλα όσα χρειάζονται και να αδυνατούν να τα συνδυάσουν προκειμένου να ολοκληρωθεί η αποδεικτική διαδικασία. Τότε γίνεται μία προσπάθεια από μέρους μου να κατατοπίσω τους δύο μαθητές με στόχο να καταφέρουν οι ίδιοι να καταλήξουν στο ζητούμενο. Τελικά τα δύο παιδιά ολοκληρώνουν την αποδεικτική διαδικασία αλλά οι εκφράσεις του προσώπου τους δεν αποτυπώνουν κανένα θετικό συναίσθημα (στο 96'). Στα επόμενα δύο λεπτά υπενθυμίζω στους ίδιους τα κρίσιμα σημεία της απόδειξης τους, στα οποία κατείχαν γνώσεις αλλά δε τις διατύπωσαν. Στη συνέχεια στα πλαίσια ενός διαλόγου γίνεται λόγος για μία δεύτερη προσέγγιση του ζητούμενου, οι μαθητές παρατηρούνται πιο ήρεμοι και συμμετοχικοί (εξωτερικεύοντας τις ιδέες τους). Με την ολοκλήρωση αυτής της προσέγγισης διαπιστώνεται χαρά στο πρόσωπο του Κώστα. Στα 98':

Κώστας: «Α! Αυτό ήταν πιο εύκολο!»
Εγώ: «Ναι, αυτό ήταν σύνθετα θέματα να σας ενημερώσω από το κεφάλαιο τέσσερα, που μου λέτε ότι σας δυσκολεύει.»
Κώστας: «Αλήθεια;»

Οι εκφράσεις του Κώστα δηλώνουν, σε αυτό το σημείο, την έκπληξη του. Παράλληλα ο Νίκος παραμένει θλιμμένος και εμφανώς θυμωμένος. Καθώς ενώ ο πρώτος εκφράζει την έκπληξη του στο άκουσμα της κατηγορίας των ασκήσεων, στην οποία συγκαταλέγεται το τρέχον πρόβλημα, ο δεύτερος έχει ήδη ξεκινήσει να μελετάει την επόμενη και τελευταία εκφώνηση (αποστροφή και περιφρόνηση).

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτό το σημείο θελημένα από μέρους μου έγινε μια διακοπή της παρέμβασης (5 λεπτών). Συζητήσαμε με τους μαθητές μη σχετικά θέματα με το αντικείμενο, το οποίο πραγματευόμαστε. Σκοπός μου να μειωθούν όσο αυτό ήταν δυνατό τα αρνητικά συναισθήματα, τα οποία διακατείχαν τον Νίκο. Κάτι το οποίο λειτούργησε με επιτυχία, καθώς ο ίδιος παρατηρείται λιγότερο θλιμμένος και καθόλου θυμωμένος με την έναρξη ενασχόλησης τους στο τελευταίο επιλεγμένο θέμα.

Ανάλυση 4ου θέματος

Οι δύο μαθητές κατασκευάζουν το σχήμα τους, με βάση τα δεδομένα. Στα 100’ οι ίδιοι συγκρίνουν τα σχήματα τους.

Νίκος: «Δηλαδή εδώ τέμνεται;» (δείχνει το σχήμα του στον άλλο μαθητή)
Κώστας: «Η ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Ε, σου λέει. Τι έκανες; Είναι η ΑΜ και το μέσο της διαμέσου είναι το ΑΔ.» (εντοπίζει στην κόλλα του πρώτου το λάθος του ίδιου και τον προτρέπει να το διορθώσει.»
Νίκος: «Α!» (διορθώνει κατάλληλα το σχήμα του.)

Μέσα από αυτό το επεισόδιο διαπιστώνεται η αλληλεπίδραση των δύο παιδιών (εκμαίευση- γρήγορη συναίνεση). Είναι ήρεμοι και η ψυχολογική τους κατάσταση διατηρείται σταθερή. Στη συνέχεια οι ίδιοι συζητούν, διατυπώνοντας λεκτικά τις σκέψεις τους. Μετά από 4’ ο Κώστας με ρωτάει σε ποιο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου εντάσσεται η τρέχουσα άσκηση και αν συμπεριλαμβάνεται στα προβλήματα αυξημένης δυσκολίας. Με τις απαντήσεις μου παρατηρείται πιο χαρούμενος και ξεκινάει να αρθρώνει τις σκέψεις του. Αρκεί να θυμηθούμε ότι το δεδομένο πρόβλημα συμπεριλαμβάνεται στις ασκήσεις μειωμένης δυσκολίας του κεφαλαίου, με το οποίο έχουν συναναστραφεί αρκετά οι δύο μαθητές.

Οι δύο μαθητές συνεχίζουν να αναφέρουν τις εικασίες τους (εξωτερίκευση), οι οποίες αξιολογούνται και από τους τρεις μας. Στα 109’ τα δύο παιδιά παρατηρούνται ξανά προβληματισμένα. Γνωρίζουν με ποια θεωρήματα θα καταλήξουν στην απόδειξη του ζητούμενου, αλλά δεν εντοπίζουν τα κατάλληλα τρίγωνα προκειμένου να τα εφαρμόσουν. Τότε:

Εγώ: «Εσείς τι θέλετε να αποδείξετε;»
Κώστας: «Ότι η ΑΕ είναι το μισό της ΕΓ.»
Εγώ: «Ωραία, μήπως θα μας βοηθούσε να ξέρουμε ποιο είναι το μισό της ΕΓ;»
(Στόχος μου να εντοπίσουν στο σχήμα τους το μέσο της ΕΓ, προκειμένου να δημιουργηθούν τα κατάλληλα τρίγωνα, για την εφαρμογή των θεωρημάτων.)
«Δηλαδή εγώ βλέπω την ΕΓ, αλλά τι μπορώ να φέρω για να έχω το μισό της ΕΓ, το οποίο χρειάζομαι;»
Κώστας/Νίκος: «Το μέσο!»

Και οι δύο στη συνέχεια εντοπίζουν στο σχήμα τους το μέσο της ΕΓ. Μετά από λίγα λεπτά, ο Νίκος διατυπώνει λεκτικά την αποδεικτική διαδικασία, την οποία σκέφτηκε. Είναι σωστή αλλά με την απουσία ενός δεδομένου προκειμένου να την ολοκληρώσει. Τον παροτρύνω να το σκεφτεί λίγο και μετά από δύο λεπτά, διατυπώνει την ολοκληρωμένη απόδειξή του ζητούμενου, εμφανώς χαρούμενος, την οποία επιβεβαιώνω (στα 114’). Το χαμόγελο στο πρόσωπό του καθώς και οι σωματικές του αντιδράσεις (αφήνει κάτω το στυλό, σφίγγει τα χέρια ως ένδειξη θριάμβου),

μαρτυρούν την ύπαρξη των θετικών συναισθημάτων που διακατέχουν τον ίδιο. Παράλληλα ο Κώστας δηλώνει ότι δεν έχει κατανοήσει τα όσα ειπώθηκαν προηγουμένως και ο Νίκος μπαίνει στη διαδικασία επεξήγησης απέναντι στον πρώτο. Όσο οι δυο μαθητές ολοκληρώνουν την απόδειξη του ζητούμενου, ο Νίκος κάνει κάποιες δηλώσεις οι οποίες αποτυπώνουν την θετική συναισθηματική του κατάσταση. Όπως «εντάξει αυτή ήταν εύκολη», «είμαι τέλειος». Παράλληλα ο εν λόγω μαθητής παρατηρείται να θέλει να βοηθήσει τον εταίρο κατά τη διάρκεια δόμησης της αποδεικτικής του διαδικασίας.

Με το πέρας της τελευταίας απόδειξης (στα 117’):

Εγώ: «Για πείτε μου, πώς σας φάνηκε;»

Νίκος: «Το τελευταίο πανεύκολο ήταν.»

Κώστα: «Ναι.»

Νίκος: «Και με τα χωριά ήταν εύκολο και αυτό με τις παράλληλες!»
(εννοεί την τρίτη άσκηση)

Κώστας: «Όλα ήταν εύκολα.»

Νίκος: «Μόνο το πρώτο ήταν λίγο δύσκολο.»

Κώστας: «Ναι, το πρώτο ήταν λίγο.»

Νίκος: «Ναι, μόνο αυτό ήταν λίγο δύσκολο. Με τη σχέση, δε τα πάω καλά με τις σχέσεις.»
(Εννοεί την αφαίρεση μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων.)

Εγώ: «Εντάξει, αυτή η άσκηση όμως αναφέρεται σε τραπέζια, τα οποία δεν έχουμε δουλέψει πολύ, οπότε μην απογοητεύεστε. Συναισθήματα;»

Νίκος: «Είμαι πολύ καλός, πετάω.»

Κώστας: «Καλά. Αφού λύσαμε και σύνθετα θέματα.»

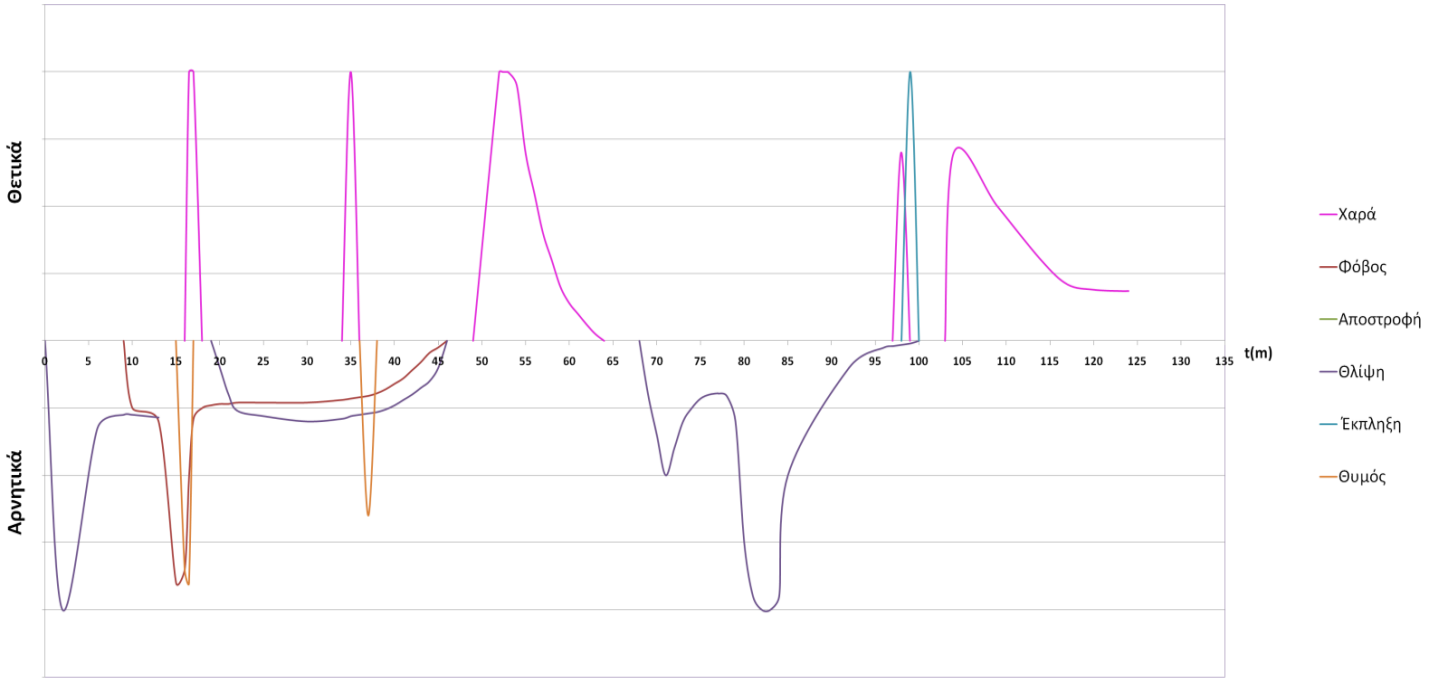
Νίκος: «Ε! Ναι. Μόνο στο πρώτο θέμα μπορώ να πω ότι αγχώθηκα και εκεί κόμπλαρα.»

Κώστας: «Δυσκολευτήκαμε και με τις λέξεις, εκατέρωθεν.»

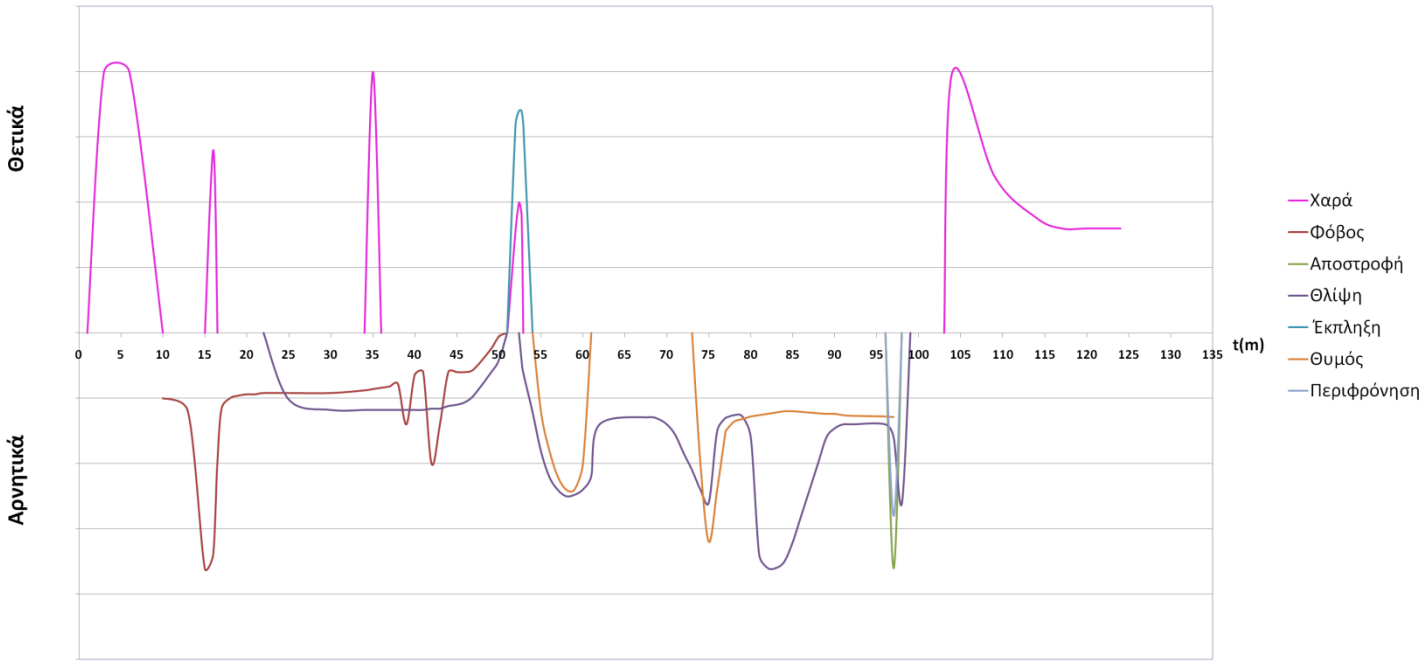
Με αυτό το επεισόδιο ολοκληρώνεται και η δεύτερη παρέμβαση, η οποία αφήνει τους δύο μαθητές με θετικά συναισθήματα, πιο ευδιάκριτα κυρίως στον Νίκο. Εκδηλώνουν μέσα από τη συζήτηση μας τη χαρά τους που ασχολήθηκαν επιτυχώς με σύνθετα θέματα. Καταλήγοντας, παρατηρείται ότι ενώ κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας των προηγούμενων θεμάτων εντοπίζονταν δυσκολίες για τους δύο μαθητές, οι ίδιοι χαρακτηρίζουν ως δύσκολη μόνο την πρώτη άσκηση. Αυτή τη θετική τους στάση, εικάζεται να έχει δημιουργήσει η χαρά της προόδου στα πλαίσια της τέταρτης απόδειξης.

Ακολουθούν πίνακες αναπαράστασης των συναισθημάτων, κάθε εφήβου ξεχωριστά, καθ’ όλη τη διάρκεια της εν λόγω παρέμβασης (βλ. πίνακα 2, για τις κατηγορίες αλληλεπίδρασης, οι οποίες σημειώθηκαν).

Συναισθήματα Κώστα 2η Παρέμβαση



Συναισθήματα Νίκου 2η Παρέμβαση



4.4 Η 3η Παρέμβαση

4.4.1 Περιεχόμενο 3ης Παρέμβασης

Η τρίτη συνάντηση όσον αφορά την τρέχουσα έρευνα έλαβε χώρα την Κυριακή 10 Μαΐου, με διάρκεια περίπου δύο ωρών. Το περιεχόμενο της δεδομένης παρέμβασης επιλέχθηκε με βάση τις δυσκολίες που συνάντησαν οι δύο μαθητές, οι οποίες εντοπίστηκαν στις δύο προηγούμενες παρεμβάσεις. Απαρτίζεται από τέσσερα προβλήματα του σχολικού βιβλίου γεωμετρίας της α' λυκείου. Αξίζει να σημειωθεί ότι στα ζητούμενα και στα τέσσερα επιλεγμένα θέματα, οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής τους διαδικασίας, πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων. Είναι κάτι το οποίο παρατηρήθηκε να δυσχεραίνει τα δύο παιδιά και κατά τη διάρκεια των μαθημάτων του τυπικού προγράμματος μας.

Πιο συγκεκριμένα το πρώτο θέμα συγκαταλέγεται στις ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου και συγκεκριμένα του τέταρτου κεφαλαίου (παραλληλίας ευθειών), κάτι το οποίο όπως έχει επισημανθεί και προηγουμένως, γεννά δυσκολίες στους μαθητές. Το πρόβλημα αυτό απαρτίζεται από αρκετά ζητούμενα και η εκφώνηση είναι εκτεταμένη. Στο δεύτερο ερώτημα αναφέρεται η έννοια του «σταθερού» αθροίσματος ευθυγράμμων τμημάτων, κάτι το οποίο παρατηρήθηκε να δυσχεραίνει τους δύο έφηβους σε προηγούμενη παρέμβαση. Επίσης στο τρίτο ερώτημα, στο οποίο συγκαταλέγονται δύο υποερωτήματα, κρίνεται απαραίτητη η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΕΜ κατά ίσο τμήμα, προκειμένου να ολοκληρωθεί επιτυχώς η αποδεικτική διαδικασία. Η δεδομένη προέκταση δεν αναφέρεται στην εκφώνηση και είναι κάτι το οποίο ο Κώστας και ο Νίκος καλούνται να εντοπίσουν και να κατασκευάσουν με δική τους πρωτοβουλία.

Η δεύτερη άσκηση επιλέχθηκε ομοιοτρόπως με το προηγούμενο θέμα. Συγκαταλέγεται στα προβλήματα αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου. Στην εκφώνηση περιέχονται έννοιες, με τις οποίες οι δύο μαθητές έχουν συναναστραφεί και σε προηγούμενη παρέμβαση, πιο συγκεκριμένα «προβολή σημείου σε ευθύγραμμο τμήμα». Κάτι το οποίο αναμένεται να διαχειριστούν με ευκολία πλέον. Τέλος και σε αυτή την άσκηση, μερικά από τα ερωτήματα αναφέρονται σε πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μειώνεται η πολυπλοκότητα και η δυσκολία στα δύο επόμενα θέματα, τα οποία καλούνται να διαχειριστούν οι δύο μαθητές. Δεν συγκαταλέγονται στις ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου. Και στα δύο, ομοίως με τα δύο προηγούμενα θέματα, στα ζητούμενα τους περιέχονται πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων. Συγκεκριμένα στην τέταρτη και τελευταία άσκηση, μία λεπτομέρεια έγκειται στην υπόθεση, στην οποία περιλαμβάνεται η φράση «αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της». Κάτι το οποίο οι δύο μαθητές πρέπει

να το λάβουν υπόψη τους στην κατασκευή του σχήματος. Περιλαμβάνονται και τα δύο θέματα στο κεφάλαιο των τραπεζίων, με το οποίο έχουν ενασχοληθεί αρκετά πλέον οι δύο μαθητές την τελευταία εβδομάδα μαθημάτων. Η επιλογή της εις άνω αναφερθείσας ακολουθίας των ασκήσεων, δεν είναι τυχαία. Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί η διαχείριση των ασκήσεων μειωμένης δυσκολίας από τους μαθητές, ειδικότερα στην ενότητα με την οποία πρόσφατα έχουν συναναστραφεί και ως προς το γνωστικό μέρος αλλά και ως προς τον τομέα των συναισθημάτων. Αναμένεται η παραγωγή θετικών συναισθημάτων στα δύο τελευταία προβλήματα.

4.4.2 Αποτελέσματα 3^{ης} Παρέμβασης

Ανάλυση 1^{ου} θέματος

Οι δύο μαθητές τα πρώτα τέσσερα λεπτά κατασκευάζουν το σχήμα τους. Δεν συναντούν ιδιαιτέρες δυσκολίες, μόνο μου απευθύνουν το λόγο, αναμένοντας να αξιολογήσω τα όσα δηλώνουν. Πιο συγκεκριμένα ο Νίκος εντοπίζει από μόνος του ότι προκειμένου να συναντήσει η παράλληλη από το μέσο Μ προς την ΑΔ, τις ΑΒ και ΑΓ, κρίνεται αναγκαία η προέκταση των δύο τελευταίων πλευρών. Λίγα δευτερόλεπτα έπειτα από την ολοκλήρωση του σχήματός τους, σκεπτόμενοι την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος, ο Κώστας ταχύτατα διατυπώνει την ολοκληρωμένη απόδειξη του, με αιτιολόγηση. Επιβραβεύω την ταχύτητά του και τα δύο παιδιά χαμογελάνε, καταγράφοντας την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος. Ο ίδιος μαθητής διαπιστώνει «Εντάξει, αυτό δεν ήταν δύσκολο».

Στα 5’ ο Νίκος ενώ καταγράφει την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος διερωτάται αν στη συνέχεια δυσκολεύουν τα ερωτήματα και οι υπόλοιπες ασκήσεις. Σε αυτό το σημείο υπάρχει μία ένδειξη φόβου στον ίδιο. Στα 6,5’ και οι δύο ολοκληρώνουν την απόδειξη του εν λόγω ερωτήματος και περνούν στο δεύτερο ζητούμενο. Εκεί συναντούν άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων και καλούνται να αποδείξουν ότι είναι «σταθερό». Δημιουργείται για ακόμη μία φορά ένας μικρός προβληματισμός στην αρχή με τον όρο αυτό. Σε αυτό το σημείο τα χαρακτηριστικά των προσώπων τους κάνουν αισθητή την παρουσία του φόβου και της θλίψης. Τους παροτρύνω να σκεφτούν τι ακριβώς χρειάζεται να αποδείξουν. Είναι κάτι το οποίο μπορούν να διαχειριστούν διότι το έχουν αντιμετωπίσει και σε προηγούμενη παρέμβαση. Αυτή τη στιγμή ο φόβος διακατέχει και τους δύο μαθητές. Μέχρι και τα 11’ δεν γίνεται κάποια δήλωση και οι ίδιοι παρατηρούνται αρκετά προβληματισμένοι. Στο ίδιο λεπτό υπάρχει μια ένδειξη στο πρόσωπο του Νίκου, η οποία αποκαλύπτει θυμό.

Προκειμένου να απαλύνω, όσο αυτό είναι εφικτό, τα αρνητικά συναισθήματα που έχουν δημιουργηθεί και στους δύο έφηβους, προτρέπω τους ίδιους να ξεκινήσουν από το πρώτο μέλος (άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων) και παρατηρώντας το σχήμα τους να ανακαλύψουν με τι είναι ίσο. Τους παροτρύνω να ξεχάσουν το ζητούμενο και να εστιάσουν στις γνώσεις, τις οποίες τους παρέχει το σχήμα. Ακολουθεί μία συζήτηση γύρω από το εν λόγω άθροισμα των ευθυγράμμων τμημάτων και οι δύο μαθητές κάνοντας στοχευόμενες και επιτυχείς δηλώσεις (εξωτερίκευση) καταλήγουν στην απαιτούμενη ισότητα, η οποία αποδίδει την έννοια της σταθερότητας. Στα 14’ με την ολοκλήρωση της απόδειξης του δεύτερου ερωτήματος, οι δύο μαθητές διαπιστώνονται πιο ήρεμοι και φαίνεται οι ίδιοι να έχουν κατανοήσει πλήρως πλέον την έννοια του «σταθερού». Ωστόσο δεν παρατηρείται κάποια δημιουργία θετικών συναισθημάτων. Η ένδειξη θλίψης εξακολουθεί να επικρατεί στο πρόσωπό τους καθώς συνεχίζουν στο τρίτο ζητούμενο.

Έπειτα από λίγα δευτερόλεπτα οι δύο μαθητές αρχίζουν να κάνουν εικασίες σχετικά με την απόδειξη του πρώτου υποερωτήματος. Κάποιες από τις δηλώσεις τους είναι ορθές (εξωτερίκευση). Οι ίδιοι συμφωνούν στο ότι προκειμένου να αποδειχτεί αρχικά η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων (ΒΕ = ΓΖ), κρίνεται χρήσιμη η σύγκριση κάποιων τριγώνων. Δε γνωρίζουν όμως ποια είναι τα κατάλληλα τρίγωνα που θα αποδώσουν το ζητούμενο. Αγνοούν την ανάγκη για προέκταση της ΕΜ κατά ίσο τμήμα, προκειμένου να δημιουργηθούν τα απαραίτητα ίσα τρίγωνα. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόμοια προβλήματα, τα οποία χρήζουν απαραίτητη την προέκταση ευθύγραμμου τμήματος κατά ίσο τμήμα, έχουν διαχειριστεί ξανά στο παρελθόν στα πλαίσια της ενότητας, στην οποία εντάσσεται και η τρέχουσα άσκηση. Για αυτό το λόγο (στα 17’) προκειμένου να ενισχυθούν οι ιδέες τους, αναφέρω στους ίδιους το κεφάλαιο στο οποίο συμπεριλαμβάνεται το εν λόγω πρόβλημα. Τότε ο Νίκος ξεφυσάει, αφήνει κάτω το στυλό του και πιάνει το πρόσωπό του, ως ένδειξη θλίψης και φόβου. Όπως έχει αναφερθεί σε αρκετά σημεία ως τώρα το αναφερόμενο εις άνω κεφάλαιο, δεν παρουσίασε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα δύο παιδιά, κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με αυτό, δημιουργώντας αρκετές δυσκολίες στους ίδιους.

Τους παροτρύνω να θυμηθούν ότι σε παρόμοιες περιπτώσεις, κρινόταν απαραίτητη η προέκταση ευθυγράμμων τμημάτων. Οι ίδιοι τότε κατανοούν την εν λόγω ανάγκη και ξεκινούν να εικάζουν ποιο ευθύγραμμο τμήμα χρειάζεται να προεκτείνουν. Ξεκινάει μία συζήτηση με στόχο την επιλογή του κατάλληλου τμήματος. Οι δύο μαθητές προβληματίζονται και μετά από λίγα λεπτά καταλήγουν στο ζητούμενο. Κατάφεραν λοιπόν να δημιουργήσουν δύο ίσα τρίγωνα, τα οποία και συγκρίνουν. Αυτό είναι κάτι που στη συνέχεια τους επιτρέπει να αποδείξουν μέχρι στιγμής ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΓΖ είναι ίσα. Οι ίδιοι παρατηρούνται αρκετά προβληματισμένοι, αδυνατούν να κατανοήσουν ποια στοιχεία της σύγκρισης τριγώνων θα χρησιμοποιήσουν, προκειμένου να καταλήξουν στην εν λόγω ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων. Τότε προσπαθώ να ενισχύσω τις εικασίες τους αναπτύσσοντας ένα διάλογο μαζί τους. Τελικά κατέληξαν στα στοιχεία που οδηγούν στη ζητούμενη ισότητα. Και ενώ το υπόλοιπο των ερωτημάτων δε σημειώνει κάποια δυσκολία, οι δύο μαθητές φαίνεται να μην μπορούν να αποδώσουν και στα εύκολα τη δεδομένη στιγμή. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συναισθηματική κατάσταση και των δύο παιδιών δε φαίνεται να παρουσιάζει καμία αλλαγή τα τελευταία 21’ ενασχόλησής τους με το πρόβλημα.

Τους παροτρύνω να ηρεμήσουν και να κάνουν τους κατάλληλους συνδυασμούς προκειμένου να ολοκληρώσουν την απόδειξή τους. Μετά από λίγο την ολοκληρώνουν και σειρά έχει το δεύτερο υποερώτημα του τρίτου ζητούμενου. Το οποίο επίσης δε σημειώνει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Οι δύο μαθητές όμως φαίνονται να προβληματίζονται πάλι. Τότε στα 32’:

Εγώ: «Το ΑΕ με τι ισούται;»

Κώστας: «ΒΕ-ΑΕ. Όχι;»

Εγώ: «Το ΑΕ;»

Κώστας: «ΒΕ-ΑΕ. (και ενώ με βλέπει να χαμογελάω.) Όχι, περίμενε!»

Νίκος: «Με την ΑΖ.»

Εγώ: «Ναι, αυτό το ξέρουμε από το πρώτο ερώτημα, αλλά για να αποδείξουμε το δεύτερο σκέλος του ζητούμενου, δείτε στο σχήμα σας με τι ισούται το ΑΕ.» (αναμένω να μου πουν ΒΕ-ΒΑ)

Κώστας: «Α! ΒΑ+ΑΕ;»

Εγώ: «Το ΑΕ; Το ΑΕ ισούται με…» (Κατανοεί το λάθος του ο Κώστας)

Νίκος: «ΒΕ-ΑΕ.»

Κώστας: «Το ΑΕ ψάχνουμε!» (φωνάζει, διότι έχει κατανοήσει το λάθος του ισχυρισμού τους.)

Νίκος: «Ναι, το ΑΕ.»

Εγώ: «Το ΑΕ; Δηλαδή είναι σα να μου λες ότι το μήλο είναι όλα τα φρούτα μείον το μήλο! Γίνεται το ΑΕ να ισούται με ΒΕ μείον ΑΕ;» (τους δείχνω με το χέρι μου τον ισχυρισμό τους πάνω στο σχήμα τους.) (Εκμαίευση)
«Στο σχήμα σας, το ΑΕ ισούται με ΒΕ μείον ποιο;»

Κώστας: «ΑΒ;» (Γρήγορη Συναίνεση)

Εγώ: «Ναι!»

Κώστας/Νίκος: «Α!» (και χαμογελάνε κατανοώντας το λανθασμένο συλλογισμό τους.)

Μέσα από αυτό το επεισόδιο παρατηρείται ο βαθμός που μπορεί να επηρεαστεί η ολοκλήρωση της μαθηματικής απόδειξης, από τα πολύωρα αρνητικά συναισθήματα που διακατέχουν τους μαθητές. Δεδομένου του υψηλού γνωστικού επιπέδου των ιδίων. Στη συνέχεια οι ίδιοι, για ακόμη μία φόρα παρατηρούνται προβληματισμένοι και αδυνατούν να ολοκληρώσουν την απόδειξη του ζητούμενου (το οποίο δε σημειώνει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία). Προσπαθώ να ενισχύσω τις σκέψεις τους και μετά από 2’ καταλήγουν στο ζητούμενο. Δε διαπιστώνονται αλλαγές στην συναισθηματική τους κατάσταση και με το πέρας της απόδειξης, ταχύτατα αλλάζουν σελίδα προχωρώντας στο επόμενο θέμα. Πριν προλάβουν να αναγνώσουν το επόμενο θέμα, αναφερόμενη στην πρώτη άσκηση, η οποία μόλις ολοκληρώθηκε, τους ρωτάω αν το κατάλαβαν. Τότε:

Κώστας: «Ναι, εντάξει, ποιο ήταν αυτό;» (αναρωτιέται σε ποια κατηγορία ασκήσεων και σε ποια ενότητα συγκαταλέγεται το εν λόγω πρόβλημα.)

Εγώ: «Ίσως είναι μία από τις πιο δύσκολες ασκήσεις του βιβλίου σας.»

Κώστας: «Που είναι;»

Εγώ: «Είναι τέταρτο, το τελευταίο, σύνθετα θέματα, από το Κεφάλαιο τέσσερα.»

Κώστας: «Γιατί μας τυραννάς έτσι;» (ψιθύρισε στον Νίκο, αναφερόμενος σε εμένα)

Κάτι το οποίο δείχνει τον προβληματισμό που προκάλεσε στους ίδιους το εν λόγω πρόβλημα, κατ' επέκταση και στη συναισθηματική τους κατάσταση. Στη συνέχεια, κάνοντας μία ανακεφαλαίωση, τους υπενθυμίζω τα κρίσιμα σημεία της απόδειξής τους και τους προτείνω τρόπους σκέψεις. Οι δύο μαθητές εισάγονται στο επόμενο θέμα με ενδείξεις θλίψης στο πρόσωπό τους (στα 36').

Ανάλυση 2^{ου} θέματος.

Οι δύο μαθητές ξεκινούν κατευθείαν την κατασκευή του σχήματός τους. Ο Νίκος διατυπώνει λεκτικά τις σκέψεις του, γύρω από την έννοια της προβολής καθώς και τον τρόπο κατασκευής αυτής στο σχήμα (εξωτερίκευση). Εντοπίζονται εκφράσεις χαράς στο πρόσωπό τους με την επιτυχή ολοκλήρωση του σχήματός τους (στα 38'). Οι ίδιοι ξεκινούν με αυτοπεποίθηση να οργανώνουν την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος. Τότε πραγματοποιείται μία συζήτηση (εξωτερίκευση) γύρω από τους τρόπους απόδειξης της παραλληλίας του πρώτου ερωτήματος (ΕΜ//ΑΓ). Τους παροτρύνω να σκεφτούν ποια είναι τα δεδομένα τους, προκειμένου να επιλέξουν τον ορθό τρόπο απόδειξης του ζητούμενου. Οι ίδιοι μετά από δυο λεπτά περίπου, καταλήγουν στην κατάλληλη μέθοδο (επιλέγουν το θεώρημα: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο με την Τρίτη πλευρά) και ξεκινούν την αναζήτηση των χρήσιμων στοιχείων. Σκοπός τους αυτή τη στιγμή να αποδείξουν ότι το Ε είναι το μέσο της ΒΝ. Τότε (στα 41΄):

Νίκος: «Να ρωτήσω κάτι; Το τρίγωνο ΒΑΝ δεν είναι ισοσκελές;» (Εξωτερίκευση)
Εγώ: «Το τρίγωνο ΒΑΝ είναι ισοσκελές!»
Νίκος: «Δεν είναι! Πώς θα αποδείξουμε ότι είναι ισοσκελές;» (έκπληξη)
Εγώ: «Νίκο σκέψου έξυπνα, είναι εύκολο, θα το βρείτε!»
Νίκος: «Θα αποδείξουμε ότι είναι ισοσκελές και μετά θα πούμε ότι η διχοτόμος είναι και ύψος και διάμεσος;»
Εγώ: «Ανάποδα! Αφού το ΑΕ είναι…»
Νίκος: «Διχοτόμος!»
Εγώ: «Και;»
Κώστας: «Και ύψος!»
Εγώ: «Άρα και τι άλλο θα είναι;»
Κώστας/Νίκος: «Διάμεσος!»
Νίκος: «Ναι, αλλά δεν πρέπει να αποδείξουμε πρώτα ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές;»
Εγώ: «Το είπαμε μόλις τώρα!»
Νίκος/ Κώστας: «Α!»
Κώστας: «Εντάξει εύκολο ήταν!» (έκπληξη)
Εγώ: «Το καταλάβατε; Αν η διχοτόμος είναι και ύψος τέλος! Το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές και αυτό που κρατάμε είναι ότι είναι και διάμεσος!»

Μέσα από αυτό το επεισόδιο διακρίνεται η σύγχυση που επικρατεί στον Νίκο, καθώς είναι ένας πολύ καλός μαθητής και αδυνατεί να συλλάβει τη δεδομένη στιγμή κάτι απλό. Η εν λόγω σύγχυση αναμφισβήτητα είναι απόρροια της (πολύωρης) αρνητικής συναισθηματικής του κατάστασης, στα πλαίσια απόδειξης του προηγούμενου θέματος. Στη συνέχεια καταγράφουν και ολοκληρώνουν την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος. Με την εισαγωγή τους στο επόμενο ερώτημα, με ρωτούν αν η τρέχουσα

άσκηση εντάσσεται στα Σύνθετα Θέματα του σχολικού βιβλίου. Με τη θετική μου απάντηση στο ερώτημα τους, υπάρχει μια ένδειξη θυμού στο πρόσωπο του Νίκου (στα 43’), η οποία όμως είναι σύντομη. Έπειτα οι δυο τους κάνουν δηλώσεις σχετικά με το εν λόγω ερώτημα (εξωτερίκευση). Τους προτρέπω σε παρόμοια ερωτήματα, να μην προβληματίζονται με την πράξη που υπάρχει στο δεύτερο μέλος της ισότητας, να ξεκινούν από το πρώτο μέλος και μέσα από τα στοιχεία που τους δίνει το σχήμα να καταλήγουν στο ζητούμενο. Μετά από λίγα δευτερόλεπτα, ο Νίκος διατυπώνει λεκτικά την απόδειξη του δεύτερου ερωτήματος (εξωτερίκευση), την οποία επιβεβαιώνω. Στη συνέχεια καταγράφουν και οι δύο το συλλογισμό του εν λόγω μαθητή (ένταξη – επίτευξη συναίνεσης). Δεν παρατηρείται σε αυτό το σημείο κάποια ένδειξη συναισθηματικής κατάστασης των δύο μαθητών.

Έπειτα πραγματοποιούνται κάποιες δηλώσεις από τους ίδιους σχετικά με την απόδειξη του δεύτερου ερωτήματος. Διαπιστώνουν ότι αφού στο πρώτο ερώτημα απεδείχθη παραλληλία ευθειών, θα τη χρησιμοποιήσουν στην απόδειξη της ζητούμενης ισότητας γωνιών. Όπως και σε προηγούμενη παρέμβαση οι δυο μαθητές φαίνεται να προβληματίζονται με τις σχέσεις των γωνιών που δημιουργούνται από τις παράλληλες και την τέμνουσα αυτών. Τότε τους προτρέπω να παρατηρήσουν, η γωνία στο πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας (γωνία ΔΕΜ) πάνω σε ποια από τις δύο παράλληλες (του πρώτου ερωτήματος) βρίσκεται, καθώς και από ποια ευθεία τέμνεται. Με αυτό τον τρόπο στη συνέχεια θα εντοπίσουν πάνω στη δεύτερη παράλληλη ποια γωνία έχει πλευρά, ίδια με εκείνη που τέμνει την πρώτη γωνία. Οι δύο μαθητές κατανοούν και βρίσκουν προσεκτικά το ζεύγος των εντός εκτός και επί τα αυτά ίσων γωνιών και ολοκληρώνουν την αποδεικτική διαδικασία.

Στη συνέχεια (στα 57’) αναφέρω στους δύο έφηβους ποιο πρόβλημα του σχολικού τους βιβλίου (κατηγορία ασκήσεων, κεφάλαιο) μόλις απέδειξαν. Σε αυτό το σημείο διαπιστώνεται χαρά στο πρόσωπο του Νίκου και μετά από λίγα δευτερόλεπτα χειρονομίες χαράς και θριάμβου από τον Κώστα. Χαρακτήρισαν το τρέχον θέμα πιο εύκολο από το προηγούμενο. Έπειτα ακολούθησε μία ολιγόλεπτη συζήτηση, κατά την οποία επέστησα την προσοχή των δύο μαθητών γύρω από τα κρίσιμα σημεία της ολοκληρωμένης απόδειξης τους, με στόχο να μην υπάρξει ξανά σύγχυση στους ίδιους, με τη διαχείριση παρόμοιων προβλημάτων.

Ανάλυση 3^{ου} θέματος

Στα 59’ με την εισαγωγή των δύο μαθητών στο τρίτο επιλεγμένο πρόβλημα, ο Κώστας διαβάζοντας την εκφώνηση, εκδηλώνει τη θλίψη του με τη φράση «Ωχ, όχι τραπέζια». Τότε με τη σειρά μου, τους ενθαρρύνω λέγοντας «Ξεκινάνε τα εύκολα τώρα, μην ανησυχείτε». Στη συνέχεια οι δύο έφηβοι κατασκευάζουν και ολοκληρώνουν τα σχήματά τους. Οι ίδιοι αναπτύσσουν έναν διάλογο, κατά τον οποίο αρθρώνουν τις σκέψεις τους (εξωτερίκευση). Η συζήτησή τους δεν καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα και για αυτό το λόγο επεμβαίνω. Παρακινώντας τους να αναπαραστήσουν τα δεδομένα τους πάνω στα σχήματα τους (πιο συγκεκριμένα τις ισότητες πλευρών), ενισχύονται οι σκέψεις τους. Τότε αιτιολογώντας δήλωσαν ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΔ, το οποίο δημιουργείται θα είναι τραπέζιο, καταγράφοντάς το στην κόλλα τους (εξωτερίκευση).

Έπειτα διαπίστωσαν την ύπαρξη της διαμέσου ΗΖ, του εν λόγω τραπεζίου. Με χρήση του γνωστού θεωρήματος που αφορά τη διάμεσο τραπεζίου, καθώς και με το κατάλληλο συνδυασμό των δεδομένων, ολοκλήρωσαν την απόδειξη του πρώτου σκέλους του ζητούμενου (ΑΒΖΗ παραλληλόγραμμο). Δεν εντοπίζονται εκφράσεις στα πρόσωπα των δύο μαθητών, οι οποίες να αποδίδουν σημαντικές πληροφορίες για τη συναισθηματική κατάσταση των ίδιων. Εκείνο, το οποίο με βεβαιότητα μπορεί να αποκληθεί είναι η ύπαρξη θετικών συναισθημάτων (χαρά, έκπληξη) στους δύο έφηβους. Στη συνέχεια οι ίδιοι μεταβαίνουν στο σχεδιασμό αποδεικτικής διαδικασίας, του δεύτερου σκέλους του ζητούμενου, ολοκληρώνοντας ότι κρίνεται απαραίτητο στο σχήμα τους. Καλούνται να αποδείξουν ότι ΘΔ = ΔΓ – ΑΒ, πράξη μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων, κάτι το όποιο όπως έχει αναφερθεί, προβληματίζει τα δύο παιδιά.

Στα επόμενα λεπτά γίνονται κάποιες δηλώσεις (εξωτερίκευση) και από τους δύο μαθητές. Στα 68’ ο Κώστας απορρίπτει έναν από τους ισχυρισμούς του Νίκου, διατυπώνοντας το ορθό. Στο πρόσωπό του δεύτερου υπάρχει ένδειξη θυμού, ενώ παράλληλα ο πρώτος διατυπώνει τις σκέψεις του καθώς απευθύνει το λόγο σε εμένα, αναμένοντας αξιολόγηση. Εκτιμώντας τις εικασίας του Κώστα, παροτρύνω τον ίδιο να προσπαθήσει να συνδυάσει τα όσα ορθά διατύπωσε, τότε στο πρόσωπό του παρατηρούνται χαρακτηριστικά περιφρόνησης (στιγμιαία). Στα 72’, εντοπίζεται μία επανειλημμένη συμπεριφορά του Νίκου, μέσω της οποίας διαπιστώνεται ο φόβος του να αρθρώνει τις σκέψεις του.

Νίκος: «Να ρωτήσω κάτι;
Εγώ: «Ναι!»
Νίκος: «Όχι τίποτα, θα είναι λάθος.»
Εγώ: «Πες μου!»

Κώστας: «Και άλλες δύο φορές, λάθος έλεγες ότι είναι αυτό που σκέφτηκες, αλλά ήταν σωστό.»

Νίκος: «Όχι, δεν είναι σωστό!»

Στη συνέχεια για αρκετές φορές τον παροτρύνω να διατυπώσει την ερώτηση του, αλλά αρνείται. Μετά από λίγο, οι ίδιοι κατανοούν ότι θα πρέπει να εξετάσουν στο σχήμα τους με τι ισούται το ΘΔ. Ο Κώστας διατυπώνει λεκτικά «ΘΔ = ΔΓ – ΓΘ» (εξωτερίκευση), το οποίο διαπιστώνεται μέσα από τα σχήματά τους. Οι δύο μαθητές καταγράφουν τη δήλωση του εν λόγω μαθητή (ένταξη – επίτευξη συναίνεσης από τον Νίκο). Έπειτα παρατηρούνται προβληματισμένοι, συγκεκριμένα ο Νίκος έχει αναπαραστήσει λανθασμένα κάποια στοιχεία της υπόθεσης στο σχήμα του και αυτό είναι κάτι το οποίο εμποδίζει τη δημιουργία εικασιών, στον ίδιο. Τους παροτρύνω να συγκρίνουν αυτό που μόλις κατέγραψαν στην κόλλα τους (ΘΔ = ΔΓ – ΘΓ), με το ζητούμενο (ΘΔ = ΔΓ – ΑΒ). Οι ίδιοι διαπιστώνουν ότι αρκεί να αποδειχθεί η ισότητα ΑΒ = ΘΓ.

Το υπόλοιπο της απόδειξης σε αυτό το σημείο δεν παρουσιάζει κάποια δυσκολία, οι δύο μαθητές όμως αδυνατούν να αντιληφθούν με ποιον τρόπο θα αποδειχθεί η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων. Τότε προκειμένου να ενισχυθούν οι εικασίες των δύο μαθητών, εφιστώ την προσοχή τους, λέγοντας τους «αν αποδειχθεί ότι το ΑΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο τότε και ΑΒ = ΘΓ». Ο Νίκος διατυπώνοντας λεκτικά τις σκέψεις του, αποδεικνύει ότι το εν λόγω τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και ολοκληρώνει την απόδειξη του. Ο Κώστας δεν κατανοεί τους ισχυρισμούς του εταίρου και με καλεί να του το εξηγήσω. Μέσα από τη συζήτηση μας ο ίδιος καταλήγει στο ζητούμενο, ολοκληρώνοντας την απόδειξή του. Τα τελευταία δευτερόλεπτα (στα 81’), η έντονη εκπνοή του Νίκου καθώς και τα χαρακτηριστικά του προσώπου του, μαρτυρούν την ύπαρξη αρνητικών συναισθημάτων στον ίδιο, συγκεκριμένα θλίψη. Δεν παρατηρείται κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό στο πρόσωπό ή ακόμα και στη συμπεριφορά του Κώστα, το οποίο να ενισχύσει την ανάλυση της συναισθηματικής του κατάστασης. Στη συνέχεια οι δύο μαθητές μεταβαίνουν στο τέταρτο και τελευταίο θέμα.

Ανάλυση 4^{ου} Θέματος

Οι δύο μαθητές ξεκινούν τη μελέτη της εκφώνησης, τότε ο Νίκος στα πρώτα κιόλας δευτερόλεπτα εκφράζει την αποστροφή του, καθώς και το θυμό του διαπιστώνοντας: «Πω, προβολές έχει πάλι;». Αυτή του η διαπίστωση, δημιούργησε σύγχυση στον ίδιο καθώς αρχικά κατασκεύασε ορθογώνιο (ενώ η εκφώνηση αναφέρεται σε παραλληλόγραμμο). Ο ίδιος παρατήρησε το λάθος του και εκδηλώνοντας το θυμό του, προχώρησε στη δημιουργία νέου σχήματος. Στα 85’ διαπιστώνεται θλίψη στο πρόσωπο του Κώστα και μετά από δύο λεπτά, με την ολοκλήρωση του σχήματός του διαπιστώνει: «Δε μου αρέσει το σχήμα», εκδηλώνοντας την περιφρόνησή του. Οι δύο μαθητές όσο συλλογίζονται με βάση το σχήμα, δε σταματούν να εκδηλώνουν τη θλίψη τους, είτε μέσω του προσώπου τους, είτε με έντονες εκπνοές. Κάτι το οποίο έρχεται να επιβεβαιώσει η αντίδραση του Κώστα στα 89’. Συγκεκριμένα όταν διαπιστώνει ότι στο σχήμα δημιουργούνται τραπέζια, λόγω των προβολών. Με την επιβεβαίωσή του ισχυρισμού του, σηκώνει τα χέρια του ψηλά ως ένδειξη θριάμβου, εκδηλώνοντας την αγανάκτηση του.

Με την παρατήρηση αυτή του Κώστα (εξωτερίκευση), οι δύο μαθητές καταγράφουν τα νέα δεδομένα και εστιάζουν το ενδιαφέρον τους γύρω από τα εν λόγω τραπέζια. Προβληματίζονται σχετικά με την επιλογή των τραπεζίων. Χρειάζεται να πάρουν κατάλληλα τραπέζια, τα οποία θα έχουν ως διάμεσο την ΚΚ’. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της διαμέσου των τραπεζίων, η απόδειξη του ζητούμενου είναι σύντομη. Οι δύο μαθητές όσο προβληματίζονται για τη σύνδεση τραπεζίων και ζητούμενου, οι εκφράσεις στα πρόσωπά τους εκδηλώνουν τη θλίψη, η οποία κορυφώνεται (στα 96’). Τότε:

Εγώ: «Σε ποίο θεώρημα πάει το μυαλό μας όταν συναναστρεφόμαστε με τραπέζια;»
Νίκος: «Στο θεώρημα της διαμέσου τραπεζίου.»
Εγώ: «Μπράβο, άρα θα πρέπει να πάρουμε τα κατάλληλα τραπέζια, στα οποία θα υφίσταται κάποια διάμεσος.»
Κώστας: «Ποια διάμεσο, αφού δεν έχουμε διάμεσο.»
Εγώ: «Ξεχάστε για λίγο τα τραπέζια που δημιουργούνται, απομονώστε τα σημεία, για παράδειγμα το Κ είναι σε κάποια πλευρά μέσο;»
Κώστας: «Στην ΔΒ.»
Εγώ: «Σωστά.»
Κώστας/Νίκος: «Και της ΓΑ.»
Εγώ: «Άρα ποια τραπέζια θα πάρετε;»
Κώστας: «ΔΔ’Β’Β»
Νίκος: «ΑΑ’Γ’Γ»
Εγώ: «Ωραία, γιατί θα πάρετε αυτά;»
Νίκος/ Κώστας: «Γιατί αυτά τα δύο έχουν ως διάμεσο την ΚΚ’.»

Εγώ: «Και γιατί Κ’ μέσο στις αντίστοιχες πλευρές των τραπεζίων»

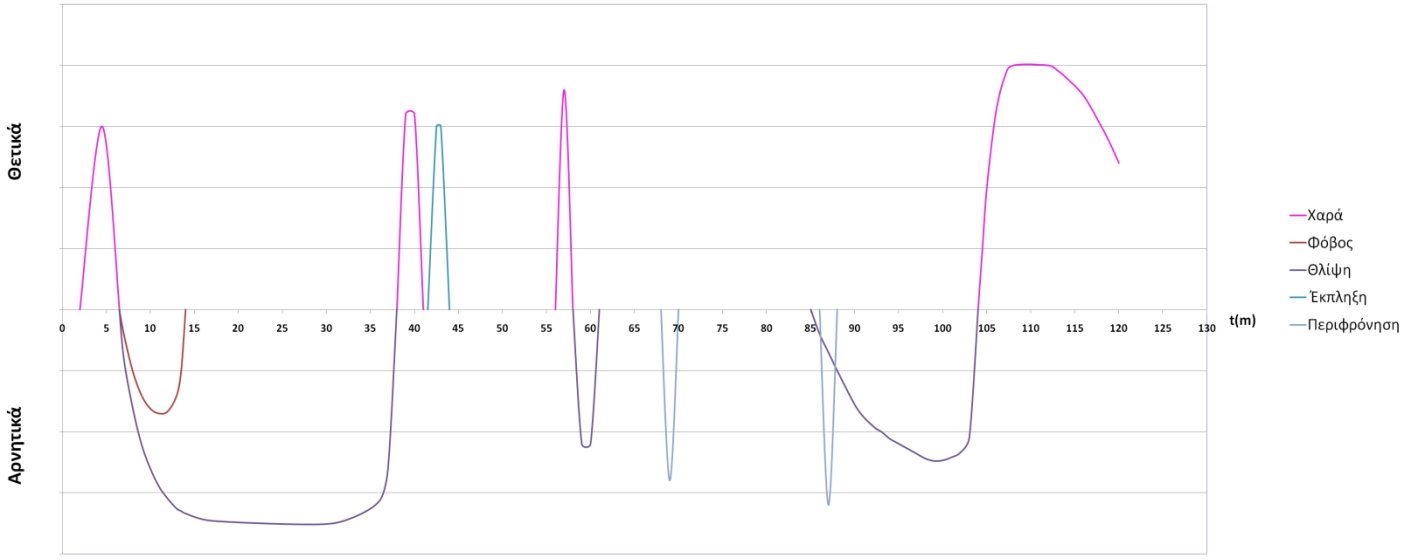
Νίκος: «Γιατί ΚΚ’ παράλληλη με τις ΑΑ’, ΒΒ’, ΓΓ’, ΔΔ’ και αφού Κ μέσο, τότε ΚΚ’ διάμεσος στα τραπέζια.»

Εγώ: «Μπράβο!»

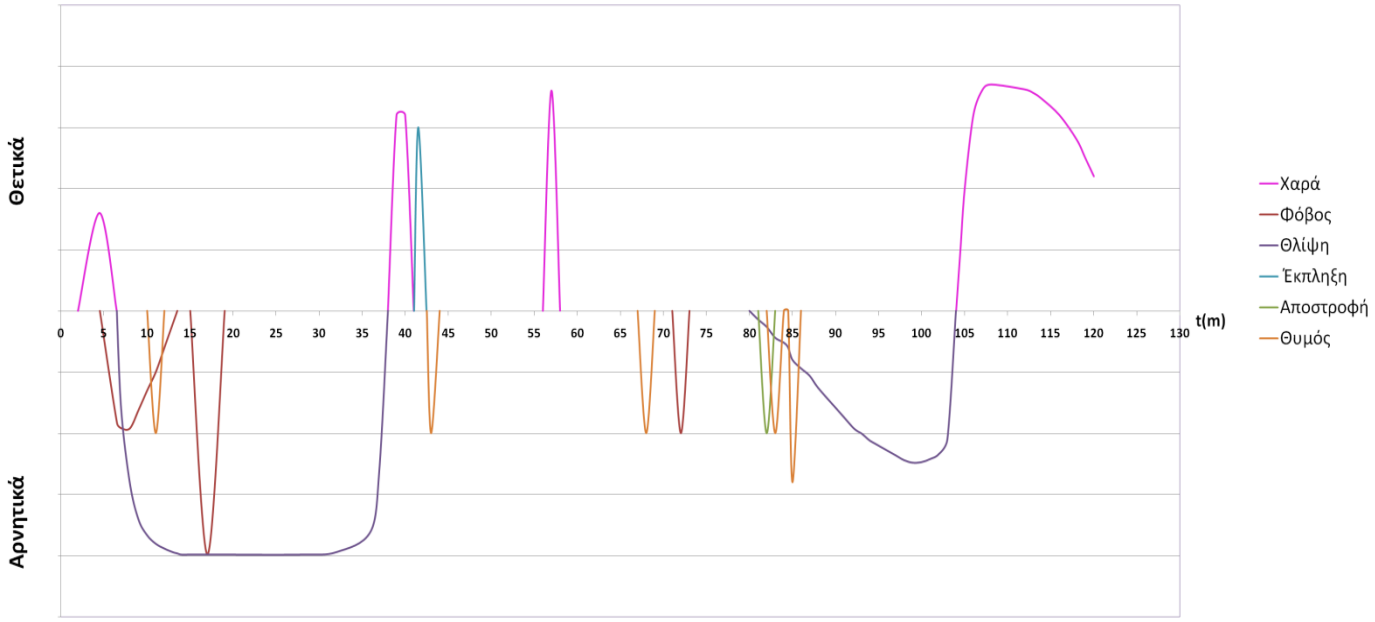
Στη συνέχεια ο Κώστας διατυπώνει λεκτικά το θεώρημα της διαμέσου τραπεζίου και οι δύο μαθητές προσαρμόζουν το εν λόγω θεώρημα στα δεδομένα τους. Έπειτα από λίγα λεπτά ολοκληρώνουν την απόδειξη του ζητούμενου. Στα 104’ ο Κώστας εκφράζει τη χαρά του, διαπιστώνοντας ότι «αυτή ήταν η πιο ωραία από όλες τις ασκήσεις». Με τη σειρά του ομοίως και ο Νίκος, διατυπώνοντας «αυτή ήταν ωραία και εύκολη». Με την ολοκλήρωση της τρίτης παρέμβασης οι δύο μαθητές εξέφρασαν τη συναισθηματική φόρτιση που τους προκάλεσε η πρώτη άσκηση, η οποία επηρέασε την απόδοσή τους στα επόμενα θέματα.

Ακολουθούν πίνακες αναπαράστασης των συναισθημάτων, κάθε εφήβου ξεχωριστά, καθ’ όλη τη διάρκεια της εν λόγω παρέμβασης (βλ. πίνακα 2, για τις κατηγορίες αλληλεπίδρασης, οι οποίες σημειώθηκαν).

Συναισθήματα Κώστα 3η Παρέμβαση



Συναισθήματα Νίκου 3η Παρέμβαση



4.5 Η 4η Παρέμβαση

4.5.1 Περιεχόμενο 4ης Παρέμβασης

Η τέταρτη και τελευταία συνάντηση με τους δύο μαθητές, στα πλαίσια της έρευνας, έλαβε χώρα την Κυριακή 10 Μαΐου, με διάρκεια μίας ώρας και δέκα λεπτών. Το περιεχόμενο της εν λόγω παρέμβασης αυτή τη φορά δε βασίστηκε σε ασκήσεις του σχολικού βιβλίου. Επιλέχθηκαν προβλήματα τα οποία κάλυπταν ολόκληρη τη διδακτέα ύλη, όσο αυτό ήταν εφικτό. Το πλήθος αυτών ήταν δύο και επιλέχθηκαν με βάση τις ανάγκες και τις δυσκολίες οι οποίες παρατηρήθηκαν στους μαθητές καθ' όλη τη περίοδο των παρεμβάσεων καθώς και την αντίστοιχη του τυπικού προγράμματος μαθημάτων μας. Συγκαταλέγονται στις ασκήσεις της Τράπεζας Θεμάτων (τέταρτο θέμα), με κάποιες τροποποιήσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μειωμένος αριθμός των επιλεγμένων προβλημάτων οφείλεται στον περιορισμένο διαθέσιμο χρόνο ενόψει ενδοσχολικών εξετάσεων περιόδου Ιουνίου, των δύο μαθητών.

Το πρώτο θέμα καλύπτει αρκετές από τις διδασκόμενες ενότητες της γεωμετρίας με μεγαλύτερη βαρύτητα σε αυτή των τραπεζίων. Η δυσκολία της εν λόγω άσκησης έγκειται στο ότι τα τρία ερωτήματα συνδέονται άμεσα μεταξύ τους και οι δύο μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν εικασίες πέρα από τις γνώσεις τους γύρω από τα τραπέζια. Το δεύτερο θέμα πλαισιώνεται από μία αρκετά εκτεταμένη εκφώνηση. Η δυσκολία αυτού εντοπίζεται γύρω από την πολυπλοκότητα του σχήματος που ζητείται να κατασκευάσουν τα δύο παιδιά, καθώς και στα ερωτήματα που το απαρτίζουν. Στα ζητούμενα συγκαταλέγονται πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων, το οποίο όπως έχει αναφερθεί γεννά δυσκολίες στους δύο μαθητές.

Οι δύο εκφωνήσεις δόθηκαν στους μαθητές μη συνοδευόμενες από τα σχήματα (όπως έγινε και στις υπόλοιπες παρεμβάσεις). Είναι σημαντικό στην τελευταία παρέμβαση να εντοπιστεί ο τρόπος διαχείρισης των σχημάτων από τους δύο μαθητές. Αρκεί να θυμηθούμε τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν τα δύο παιδιά στην πλήρη κατανόηση της εκφώνησης και κατ' επέκταση στην κατασκευή του σχήματος. Δυσκολίες, οι οποίες γεννούσαν αρνητικά συναισθήματα κατά την έναρξη της αποδεικτικής διαδικασίας, επηρεάζοντας την ολοκλήρωση της. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι η σειρά με την οποία τοποθετήθηκαν οι δύο ασκήσεις δεν είναι τυχαία. Είναι σκόπιμη η δημιουργία θετικών συναισθημάτων με την έναρξη της παρέμβασης. Η δεύτερη άσκηση εμφανίζει μεγαλύτερη δυσκολία και μία καλή ψυχολογική κατάσταση των δύο μαθητών, θα ενισχύσει την πρόοδό τους στην απόδειξη. Τέλος, η ημέρα πραγματοποίησης της αναφερόμενης παρέμβασης δεν είναι απρομελέτητη. Μαζί με τους δύο μαθητές είχαμε ολοκληρώσει την διδακτέα ύλη της Γεωμετρίας και είχαμε περάσει στη διαδικασία διεξαγωγής επαναληπτικών μαθημάτων τρεις εβδομάδες πριν την πραγματοποίησή της. Είναι σημαντικό λοιπόν

να παρατηρηθεί η διαχείριση των επιλεγμένων προβλημάτων από τους δύο μαθητές καθώς και η ψυχολογική τους κατάσταση. Δεδομένης της αυξημένης ενασχόλησης τους με τη Γεωμετρία την τελευταία περίοδο.

4.5.2 Αποτελέσματα 4^{ης} Παρέμβασης

Ανάλυση 1^{ου} θέματος

Οι δύο μαθητές με την έναρξη της τρέχουσας παρέμβασης, παρατηρούνται ήρεμοι και χαρούμενοι. Αναρωτιούνται αν οι επιλεγμένες ασκήσεις εντάσσονται στα θέματα αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου. Τους ενημερώνω ότι δεν είναι προβλήματα, τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο βιβλίο και είναι τέταρτα θέματα, της Τράπεζας Θεμάτων. Ξεκινούν με αυτοπεποίθηση την κατασκευή του σχήματος της πρώτης άσκησης. Στα 3' τους ρωτάω πως νιώθουν, ο Νίκος μου απαντάει ήρεμος, ότι νιώθει ωραία. Ο Κώστας μου αποκαλύπτει ότι τον διακατέχει ένα μικρός φόβος, επειδή είναι τέταρτο θέμα της εν λόγω Τράπεζας. Οι δύο μαθητές συνεχίζουν με την κατασκευή του σχήματος, στην οποία δεν αντιμετωπίζουν κάποιο πρόβλημα και η ολοκλήρωσή του πραγματοποιείται ταχεία.

Στη συνέχεια συλλογίζονται σχετικά με την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος. Στα 8' ο Κώστας διατυπώνει λεκτικά ένα ερώτημα του και χωρίς να παρέμβω, δίνω χώρο στον Νίκο να απαντήσει στον πρώτο.

Κώστας: «Για να είναι ισοσκελές τραπέζιο το ΑΖΓΔ, δεν πρέπει η ΑΔ να είναι ίση με την ΓΖ;» (αναφέρει ως ίσες τις παράλληλες πλευρές, ενώ το ισοσκελές τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.) (Εξωτερίκευση)

Νίκος: «Όχι, οι μη παράλληλες, δηλαδή η ΑΕ με τη ΔΓ.» (Εκμαίευση)

Κώστας: «Α! Ναι, μπερδεύτηκα.» (Γρήγορη Συναίνεση)

Μέσα από αυτό το στιγμιότυπο παρατηρείται η αλληλεπίδραση των δύο μαθητών, καθώς και η παρουσία φόβου στον Κώστα, ο οποίος κάνει λάθη τα οποία δε συμβαδίζουν με τις γνώσεις του ίδιου. Έπειτα από λίγα δευτερόλεπτα ο Νίκος διατυπώνει λεκτικά τις σκέψεις του, αιτιολογώντας ορθά το λόγο που το εν λόγω τετράπλευρο είναι τραπέζιο (εξωτερίκευση). Οι δύο μαθητές καταγράφουν τη δήλωση του Νίκου (ένταξη – επίτευξη συναίνεσης από τον Κώστα).

Μετά από τρία λεπτά περίπου, ο Νίκος διατυπώνει ορθά τα κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές (εξωτερίκευση). Εντός δευτερολέπτων ο εταίρος, κάνει μία επιτυχή παρατήρηση σχετικά με το ισοσκελές τρίγωνο που δημιουργείται, το ΑΖΒ, στο οποίο η διάμεσος είναι και ύψος (εξωτερίκευση). Με την επιβεβαίωση της δήλωσής του, ο ίδιος εκδηλώνει τη χαρά του, σηκώνοντας τα χέρια του ψηλά. Τότε ο πρώτος μαθητής, διαπιστώνει και εκφράζει «α! αφού είναι ισοσκελές τρίγωνο, τότε ΑΒ=ΑΖ και επειδή ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, τότε ΑΖ = ΔΓ και το τραπέζιο είναι ισοσκελές». Οι δυο τους ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος, χαρούμενοι με τη συνεργασία τους χτυπούν τα χέρια και χαμογελάνε. Τότε:

Κώστας: «Μακάρι να μπορούσαμε να γράψουμε εγώ και ο Νίκος μαζί στις εξετάσεις, θα γράφαμε είκοσι και οι δύο!»
(οι δυο τους χαμογελάνε)

Σε αυτά τα τελευταία λεπτά φαίνεται ο βαθμός που επηρεάζεται η πρόοδος των δύο παιδιών, μέσω της αλληλεπίδρασης τους. Διαμέσου της εξωτερίκευσης των σκέψεων τους, ο ένας συμπλήρωνε τις ιδέες του άλλου και κατόρθωσαν να ολοκληρώσουν ταχύτατα την απόδειξη του ζητούμενου.

Ολοκληρώνοντας την καταγραφή της απόδειξης του πρώτου ερωτήματος, οι ίδιοι μεταβαίνουν στο δεύτερο ερώτημα και άμεσα αρχίζουν να αρθρώνουν τις σκέψεις τους γύρω από το ζητούμενο. Τους διαφεύγει αρχικά ότι οι προσκείμενες γωνίες και στη μικρή βάση του ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες (θεωρούν ότι αυτό ισχύει μόνο στη μεγάλη βάση). Προσπαθούν να συνδυάσουν την εξωτερική γωνία Ζ του τραπεζίου, (για την οποία γνωρίζουν το μέτρο της 70°, αφού οι γωνίες Β=Ζ λόγω ισοσκελούς τριγώνου), με την απέναντι εσωτερική γωνία Δ. Αυτό δημιουργεί στους ίδιους μία μικρή σύγχυση καθώς δεν υπάρχει κάποιο γνωστό θεώρημα το οποίο να καλύπτει την πιθανή σχέση των δύο γωνιών. Τους προτρέπω να σκεφτούν ήρεμα και απλά, καθώς δε σημειώνει κάποια δυσκολία το εν λόγω ερώτημα. Ο Κώστας διαπιστώνει ορθά ότι το μέτρο της γωνίας Ζ, είναι 110° και στα 22’:

Νίκος: «Η εξωτερική γωνία γνωρίζουμε ότι ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών.»
Εγώ: «Κάτι μπερδεύεις τώρα. Που ισχύει αυτό;»
Νίκος: «Α! Στα τρίγωνα.»
Εγώ: «Σωστά, άρα τώρα που έχουμε τραπέζιο κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Η γωνία Ζ με ποια άλλη γωνία ισούται;»
Κώστας: «Με τη Γ;»
Εγώ: «Γιατί;»
Νίκος: «Μισό λεπτό, αφού είναι ισοσκελές το τραπέζιο, οι γωνίες Δ και Α είναι ίσες.»
Εγώ: «Ναι! Και ποιες άλλες;»
Κώστας: «Α! Οι γωνίες Ζ και Γ. Ναι!»
Εγώ: «Βέβαια! Οι προσκείμενες γωνίες στη μεγάλη βάση είναι ίσες αλλά και στη μικρή. Σας διέφευγε αυτό;»
Νίκος: «Α! Και στη μικρή;» (έκπληξη)

Αυτό το επεισόδιο κάνει ευδιάκριτη τη σύγχυση που δημιουργείται στους δύο μαθητές, η οποία οφείλεται στην έλλειψη γνώσης. Η εν λόγω ιδιότητα που αφορά τα ζεύγη προσκείμενων γωνιών στις βάσεις, αναφέρεται στη μεγάλη και στη μικρή βάση. Αυτό ήταν κάτι που οι δυο μαθητές φαίνεται να μην είχαν αφομοιώσει, καθώς διαπιστώθηκε έκπληξη στα πρόσωπά τους με το πέρας του διαλόγου. Στη συνέχεια καταγράφουν και ολοκληρώνουν την απόδειξη του δεύτερου ζητούμενου. Για τα επόμενα 4’, συζητάω με τους μαθητές όλα όσα πρέπει να γνωρίζουν γύρω από τις

γωνίες των τραπεζίων, προκειμένου να μην δημιουργηθεί ξανά κάποιος προβληματισμός. Οι ίδιοι μέσα από το διάλογο μας εστιάζουν στην παραλληλία των βάσεων και ορίζουν ως παραπληρωματικές τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Κάτι το οποίο ισχύει σε όλα τα τραπέζια και δεν αναφέρεται εντός του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Στη συνέχεια, οι δύο έφηβοι ολοκληρώνουν το σχήμα τους με βάση τα νέα δεδομένα του τρίτου ερωτήματος. Παράλληλα ο Κώστας μου αποκαλύπτει ότι δεν τον διακατέχει φόβος, διότι το πρόβλημα δε σημειώνει τη δυσκολία, που θεωρούσε ο ίδιος, ότι θα έχει. Κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με το τελευταίο ερώτημα, ο Νίκος διατυπώνει ορθά κάποια στοιχεία που αφορούν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΜ, αλλά αδυνατεί να εντοπίσει ότι το Μ είναι και μέσο της ΑΓ. Τότε:

Κώστας: «Το ΕΜ στο σχήμα ισούται με το μισό του ΑΓ.» (Εξωτερίκευση)

Νίκος: «Δεν ισούται με το μισό του ΑΓ, αφού δεν πέφτει το Μ στο μέσο της ΑΓ.» (Σύγκρουση)

Εγώ: «Γιατί;»

Κώστας: «Να ρωτήσω κάτι, στο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι δεν είναι ίσες;»

Εγώ: «Οι διαγώνιοι;»

Νίκος: «Διχοτομούνται.»

Εγώ: «Διχοτομούνται, σωστά! Άρα το Μ αφού είναι μέσο της ΒΔ, θα είναι και μέσο της…»

Κώστας: «ΑΓ»

Νίκος: «Μάλλον το σχήμα μου βγήκε λάθος, μέτρησα λάθος για το μέσο της ΒΔ και δε φαίνεται να είναι και μέσο της ΑΓ.»

Εγώ: «Ναι, αλλά αυτό είναι κάτι που γνωρίζεις ότι ισχύει από τα παραλληλόγραμμα.»

Νίκος: «Τότε ναι, βγαίνει αυτό το ερώτημα εύκολα.»

Παρατηρείται σε αυτό το σημείο η σύγχυση που δημιουργείται στο Νίκο, λόγω κάποιου λανθασμένου στοιχείου στο σχήμα του. Ενώ γνώριζε όλα όσα ισχύουν και πρέπει να χρησιμοποιήσει, αδυνατούσε να τα εφαρμόσει επηρεασμένος από το σχήμα του. Με την ολοκλήρωση της απόδειξης του τρίτου ερωτήματος οι δύο μαθητές διαπιστώνουν την ευκολία της εν λόγω απόδειξης και χαμογελάνε (36’). Τα επόμενα 3’, συζητάω με τους ίδιους τα κρίσιμα σημεία της τρέχουσας απόδειξης, με στόχο να εξαλειφθούν τυχόν εμμένουσες αμφιβολίες. Επίσης γύρω από το τρίτο ερώτημα, γίνεται αναφορά σε έναν δεύτερο τρόπο απόδειξης, ο οποίος δεν περιέχει την εν λόγω ιδιότητα των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Οι δυο μαθητές συζητούν και διατυπώνουν (λεκτικά) επιτυχώς την τροποποιημένη απόδειξη του τελευταίου ερωτήματος, εκδηλώνοντας την χαρά τους. Συγκεκριμένα ο Κώστας φωνάζει χαρούμενος, σηκώνοντας τα χέρια του ψηλά (στα 41’). Στη συνέχεια μεταβαίνουν στο δεύτερο θέμα.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του επόμενου θέματος, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας του πρώτου θέματος, ο Κώστας διαπιστώνοντας ότι καμία από τις δύο ασκήσεις δεν αφορά κύκλο, εξέφρασε τη λύπη του. Ανέφερε χαρακτηριστικά «Δεν έχει κύκλο. Κρίμα, ήθελα να ασχοληθούμε με κύκλο σήμερα.» Ο ίδιος, όπως και ο Νίκος, έχουν εκφράσει στο παρελθόν την αποστροφή τους στις ασκήσεις που αφορούν κύκλο. Είναι αξιοσημείωτη, λοιπόν, η αντίδραση του εν λόγω μαθητή. Αρκεί να θυμηθούμε την πρόοδο του ίδιου στην πρώτη παρέμβαση, σε μία από τις ασκήσεις, στην οποία συγκαταλεγόταν κύκλος. Η χαρά και η έκπληξη του ίδιου με την ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας, ήταν αρκετά εμφανείς. Αυτό, εικάζεται να είναι η αφορμή για την αλλαγή στη στάση του μαθητή, απέναντι στις αποδείξεις με κύκλο.

Ανάλυση 2^{ου} θέματος

Με την έναρξη της ενασχόλησης των δύο μαθητών στο επόμενο θέμα, ο Νίκος εξέφρασε το φόβο του, αντικρίζοντας την εκτεταμένη εκφώνηση. Δήλωσε χαρακτηριστικά «Δε μου φαίνεται πολύ εύκολο». Μετά από λίγο, ο ίδιος εκφράζει ξανά το φόβο του για την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος. Έπειτα από την ολοκλήρωση των σχημάτων τους, οι δύο μαθητές ξεκινούν να συλλογίζονται σχετικά με την απόδειξη του πρώτου ερωτήματος. Δεν γίνεται κάποια άρθρωση σκέψης, από κάποιον από τους εν λόγω μαθητές, περίπου για 3'. Παρατηρούνται προβληματισμένοι και υπάρχουν ενδείξεις θλίψης στο πρόσωπό τους. Μετά από λίγο, στα 48', ο Κώστας δηλώνει ότι αδυνατεί να σκεφτεί κάτι. Τότε προκειμένου να ενισχυθούν οι ιδέες τον δύο εφήβων, απευθύνοντας το λόγο σε εκείνους, τους προτρέπω να θυμηθούν, πως λειτουργούσαμε σε ανάλογες περιπτώσεις. Ο Νίκος διαπιστώνει ότι θα ξεκινήσουν από τη γωνία στο πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας και με βάση το σχήμα και τα δεδομένα θα καταλήξουν στο δεύτερο μέλος (εξωτερίκευση). Τους παροτρύνω να εργαστούν όπως πολύ σωστά επισήμανε ο Νίκος.

Μετά από δύο λεπτά σκέψης και ανταλλαγής ιδεών, οι δύο μαθητές ολοκληρώνουν την απόδειξη του εν λόγω ερωτήματος. Έπειτα διαπιστώνουν οι ίδιοι, την ευκολία της, αναφέροντας χαρακτηριστικά «Ήταν πολύ εύκολη τελικά, εμείς την κάναμε να φαίνεται δύσκολη στα μάτια μας». Οι δύο μαθητές διακατέχονται από χαρά και δεν υπάρχουν ενδείξεις θλίψης ή φόβου στα πρόσωπά τους (στα 50'). Ο Νίκος δηλώνει ότι ήταν προκατειλημμένος αρνητικά σχετικά με την απόδειξη του εν λόγω ερωτήματος και αυτός ήταν ο λόγος που αρχικά ήταν φοβισμένος και προβληματισμένος. Στη συνέχεια οι δυο τους μεταβαίνουν στο δεύτερο ερώτημα.

Έπειτα από 3', ο Νίκος κάνει μία λανθασμένη διαπίστωση «Αφού οι διαγώνιοι στο τετράπλευρο ΑΔΚΖ τέμνονται κάθετα, το τετράπλευρο θα είναι ρόμβος, άρα ΖΚ = ΚΔ». Εξηγώ στον ίδιο το σφάλμα στον ισχυρισμό του και ο ίδιος το κατανοεί (αναγκαία συνθήκη, το τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο). Έπειτα από λίγα δευτερόλεπτα, ο Κώστας διερωτάται αν είναι δύσκολη η απόδειξη του ζητούμενου. Τον παροτρύνω να χρησιμοποιήσει τα δεδομένα του και θα ολοκληρώσει αβίαστα την αποδεικτική διαδικασία. Ο ίδιος προσθέτει «πείσμωσα τώρα, θα το αποδείξω». Μετά από λίγο, στα 55', ο Νίκος διατυπώνει τις σκέψεις του, και μέσω σύγκρισης δύο ορθογωνίων τριγώνων ολοκληρώνει την απόδειξη του ζητούμενου. Διαπιστώνεται έντονη χαρά στο πρόσωπό του. Στα επόμενα λεπτά συζητάμε και άλλους πιθανούς, και ίσως συντομότερους, τρόπους προσέγγισης του ζητούμενου. Μέσω του διαλόγου μας, οι δύο μαθητές ορίζουν την ΑΚ ως μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΖΔ και αβίαστα καταλήγουν στο συμπέρασμα ΖΚ = ΚΔ. Οι ίδιοι παρατηρούνται αρκετά χαρούμενοι με το δεύτερο τρόπο απόδειξης, τον οποίο καταγράφουν (στα 57').

Έπειτα ξεκινάει η ενασχόληση τους με το τρίτο και τελευταίο ερώτημα του τρέχον θέματος.

Όσο οι δύο μαθητές συλλογίζονται γύρω από την απόδειξη του ζητούμενου, υπενθυμίζω στους ίδιους ότι με παρόμοια προβλήματα έχουν συναναστραφεί αρκετές φορές, στα πλαίσια των μαθημάτων του τυπικού προγράμματος μας. Τότε ο Νίκος ορθά διαπιστώνει ότι θα ξεκινήσουν από τη γωνία του πρώτου μέλους, θα εντοπίσουν ένα τρίγωνο στο οποίο ανήκει και με τις κατάλληλες πράξεις θα οδηγηθούν στο δεύτερο μέλος (εξωτερίκευση). Εφιστώ την προσοχή τους γύρω από την επιλογή του εν λόγω τριγώνου. Ο ίδιος μαθητής, ορθά διαπιστώνει ότι η επιλογή του κατάλληλου τριγώνου έχει σχέση με τις γωνίες του δεύτερου μέλους και ορίζει ως κατάλληλο, το τρίγωνο ΗΔΓ. Στη συνέχεια και οι δύο ξεκινούν την μελέτη της αποδεικτικής τους διαδικασίας με χρήση του σταθερού αθροίσματος γωνιών τριγώνου. Στα 67’ προβληματίζονται. Έπειτα από δύο λεπτά ο Νίκος διατυπώνει τη σκέψη του, που αφορά στη χρήση του αθροίσματος γωνιών τριγώνου ΑΒΓ και επιτυγχάνεται σε αυτό το σημείο η ολοκλήρωση της εν λόγω απόδειξης. Ο ίδιος διακατέχεται από χαρά, την οποία εκφράζει με το χαμόγελό του. Στο τέλος οι ίδιοι διαπιστώνουν:

Νίκος: «Μου άρεσε πολύ σήμερα, ένιωσα όμορφα κυρίως στη δεύτερη άσκηση. Ήταν εύκολη τελικά!»

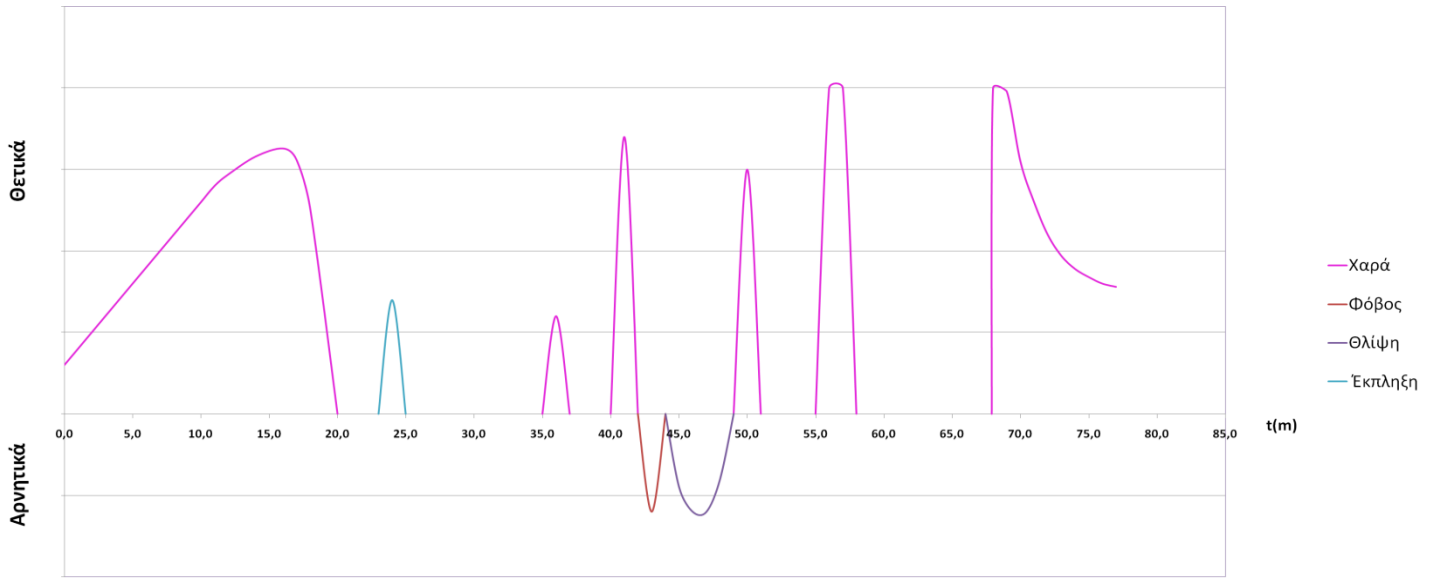
Κώστας: «Εμένα μου άρεσε η πρώτη.»

Μέσα από τις τελευταίες δηλώσεις των δύο μαθητών, παρατηρείται μία μικρή θλίψη στον Κώστα, η οποία οφείλεται στην χαμηλή απόδοση του στα πλαίσια του δεύτερου θέματος. Ο Νίκος είχε πιο ενεργό ρόλο και αυτό αποτυπώνεται στη συναισθηματική του κατάσταση.

Ακολουθούν πίνακες αναπαράστασης των συναισθημάτων, κάθε εφήβου ξεχωριστά, καθ’ όλη τη διάρκεια της εν λόγω παρέμβασης (βλ. πίνακα 2, για τις κατηγορίες αλληλεπίδρασης, οι οποίες σημειώθηκαν).

Συναισθήματα Κώστα 4η Παρέμβαση

Συναισθήματα Νίκου 4η Παρέμβαση



4.6 Ευρήματα 2^{ης} Συνέντευξης

Η δεύτερη μαγνητοφωνημένη συνέντευξη με τους δύο έφηβους πραγματοποιήθηκε την Κυριακή 10 Μαΐου, στο χώρο της οικίας τους. Όπως και στην πρώτη συνέντευξη, οι ίδιοι απάντησαν λεκτικά σε μία σειρά ερωτήσεων. Η συνέντευξη ήταν με μορφή διαλόγου ανάμεσα σε εμένα και το κάθε παιδί ξεχωριστά. Ολοκληρώθηκε αρχικά η ως άνω αναφερθείσα διαδικασία με τον Νίκο, χωρίς την παρουσία του Κώστα, στο χώρο. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η αντίστοιχη διαδικασία με τον δεύτερο μαθητή, με απόντα τον πρώτο.

4.6.1 Απαντήσεις και σχόλια πρώτου μαθητή

Ο Νίκος μέσα από τη δεύτερη συνέντευξη κάνει εμφανή την αλλαγή στη στάση του απέναντι στην απόδειξη αλλά και στη Γεωμετρία. Συγκεκριμένα στη δεύτερη ερώτηση, δηλώνει τη διαφωνία του στα λεγόμενα του συμμαθητή του, Γιάννη, αναφέροντας χαρακτηριστικά:

> «Δε με ενοχλούν πια οι αποδείξεις. Μέσα από αυτές μαθαίνουμε.»

Στη συνέχεια ο ίδιος συμφωνεί με τη Μαρία, την Ελένη και την Ελπίδα. Διατυπώνοντας το ρόλο της απόδειξης σύμφωνα με εκείνον:

> «Μέσω της απόδειξης ενός προβλήματος, εμπλουτίζω τις γνώσεις μου και πάω στη συνέχεια σε κάτι πιο δύσκολο. Επίσης με βοηθάει να κατανοήσω κάποια πράγματα, που στο παρελθόν τα θεωρούσα δυσνόητα. Με την απόδειξη τακτοποιώ τις γνώσεις μου.»

Στην έβδομη ερώτηση, η οποία αναφέρεται στην επιλογή μίας εκ των δύο εργασιών που θέτει η καθηγήτρια των μαθηματικών, στο σχολείο τους, ο εν λόγω μαθητής επιλέγει τη δεύτερη. Η εργασία αυτή αφορά την απόδειξη ενός άγνωστου θέματος. Ο ίδιος διαπιστώνει:

> «Τη δεύτερη θα επέλεγα, δηλαδή αυτή που πρέπει να αποδείξω κάτι μόνος μου. Δεν ξέρω γιατί. Ή μάλλον ξέρω, γιατί πολύ απλά μου φαίνεται πολύ πιο ενδιαφέρουσα από την πρώτη εργασία.»

Με την ολοκλήρωση του πρώτου κύκλου ερωτήσεων, από 1 – 8, περνάμε στις τέσσερις τελευταίες ερωτήσεις, οι οποίες σημειώνουν σημαντικό ενδιαφέρον για την έρευνα. Εστιάζουν στην αλλαγή, εφόσον αυτή υπάρχει, των στάσεων και των

συναισθημάτων απέναντι στη Γεωμετρία και την απόδειξη. Συγκεκριμένα οι απαντήσεις κυμαίνονται ως εξής:

Στην ένατη ερώτηση, η οποία αφορά μία πιθανή ενασχόληση του μαθητή, τη δεδομένη στιγμή, με ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας. Ποιά είναι πλέον τα συναισθήματα του ίδιου;

> «Πιστεύω ότι στην αρχή ήμουν λίγο προκατειλημμένος αρνητικά, ότι τα Σύνθετα Θέματα θα είναι όλα πολύ δύσκολα. Τώρα πιστεύω ότι αν συγκεντρωθώ και σημειώσω όλα τα δεδομένα, θα το λύσω. Κατάλαβα ότι τίποτα δεν είναι ακατόρθωτο. Είναι σημαντικό όταν ένα πρόβλημά είναι δύσκολο και το έχεις απέναντι σου, να είσαι συγκεντρωμένος και να θες να το αποδείξεις. Στην αρχή πίστευα ότι η Γεωμετρία είναι δύσκολη και δε τη θεωρούσα αγαπημένο μου μάθημα. Αλλά τώρα πλέον είδα ότι ακόμα και αν ένα πρόβλημα είναι δύσκολο, αν πραγματικά θέλεις να το λύσεις και πιστέψεις στον εαυτό σου, θα το λύσεις. Πιστεύω ότι η Γεωμετρία πλέον είναι το αγαπημένο μου μάθημα. Στην αρχή δεν είχα τόσες πολλές γνώσεις και απλά προσπαθούσα να κάνω το σχήμα, πάντα μου διέφευγε κάτι και δεν ολοκλήρωνα την απόδειξη. Τώρα με όλες αυτές τις αποδείξεις και τα θεωρήματα, γνωρίζω περαιτέρω πράγματα. Όλο αυτό που κάναμε μαζί με βοήθησε να τακτοποιήσω τις γνώσεις μου. Τώρα ξέρω πάντα πώς να ξεκινήσω και τι πρέπει να κάνω. Με το που διαβάζω την εκφώνηση ενός προβλήματος, φτιάχνω σχήμα και σημειώνω τα δεδομένα μου πάνω στο σχήμα. Παλιότερα δεν ένιωθα έτσι και δεν έκανα τίποτα από όλα αυτά. Με το που έβλεπα κάτι δύσκολο, πελάγωνα και τα παρατούσα.»

Στη δέκατη ερώτηση, η οποία αναφέρεται σε πιθανή αποτυχία παραγωγής μίας απόδειξης, ο Νίκος ανέφερε:

> «Δε θα πελαγώσω πλέον. Τώρα που έχω περισσότερες γνώσεις θα την ξαναπροσπαθήσω, όσες φορές χρειάζεται, μέχρι να την καταφέρω. Όταν κάτι δεν καταλήγει εκεί που πρέπει, ξέρω πλέον ότι κάτι θα μου έχει διαφύγει από τα δεδομένα. Με αρκετή θέληση θα βγει.»

Η προτελευταία ερώτηση αφορά τη γνώμη που διατηρεί ο μαθητής, τώρα πλέον, απέναντι στη Γεωμετρία και την απόδειξη.

> «Έχουν αλλάξει πολλά. Είναι το αγαπημένο μου μάθημα. Δεν περίμενα στην αρχή ότι μπορώ να λύσω Γεωμετρία. Φαινόταν ένα πολύ δύσκολο μάθημα, αλλά τελικά αποδείχθηκε ότι είναι εύκολο και ενδιαφέρον. Νιώθω πολύ όμορφα, επιτέλους μπορώ να λύσω Γεωμετρία. Όταν έβλεπα τους καλούς μαθητές να ανταπεξέρχονται σε αυτό το μάθημα και εγώ να μην μπορώ, ένιωθα

κατώτερος και ότι δεν είμαι έξυπνος. Τώρα που τα καταφέρνω νιώθω πολύ καλά με τον εαυτό μου. Είναι πολύ ενδιαφέρον μάθημα.»

Στην τελευταία ερώτηση, ο Νίκος αποκαλύπτει σε εμένα τους λόγους, που έκαναν τον ίδιο, να αλλάξει τη στάση του απέναντι στη Γεωμετρία:

«Με βοήθησαν πολύ όλα όσα κάναμε μαζί. Καταφέραμε επιτέλους να λύσουμε Σύνθετα Θέματα. Με βοήθησες εσύ η ίδια να αλλάξω τη γνώμη μου για τη Γεωμετρία. Μου άρεσε που σε όλο αυτό συνεργάστηκα με τον αδερφό μου.»

4.6.2 Απαντήσεις και σχόλια δεύτερου μαθητή

Ο Κώστας, στην τρίτη ερώτηση συμφωνεί με τη συμμαθήτριά του, Μαρία, αναφέροντας το ρόλο της απόδειξης σύμφωνα με τον ίδιο. Συγκεκριμένα αναφέρει:

«Σαφώς και όταν αποδεικνύεις κάτι νιώθεις πιο σίγουρος, ότι δεν έχεις κάνει λάθος και ότι αυτό που απέδειξες είναι αληθές.»

Έπειτα στην έκτη ερώτηση, υποστηρίζοντας τη δήλωση της Ελπίδας, ο ίδιος διαπιστώνει ότι:

«Οι αποδείξεις σίγουρα μας βοηθούν να τακτοποιήσουμε τις γνώσεις μας. Νομίζω ότι οι αποδείξεις μας οργανώνουν μία πορεία μέσα στο μυαλό μας, που να πάμε και τι να δούμε. Μπορώ και οργανώνω τη σκέψη μου. Όταν καταφέρω να αποδείξω ένα πρόβλημα συγκεκριμένο και κάποια στιγμή συναντήσω ένα παρόμοιο, η απόδειξη του πρώτου με βοηθάει στο πώς να κινηθώ, στο δεύτερο.»

Όσον αφορά την έβδομη ερώτηση, η οποία αναφέρεται στην εργασία, την οποία θέτει η εκπαιδευτικός του σχολείου στον ίδιο, ο Κώστας απαντάει ως εξής:

«Θα διάλεγα τη δεύτερη εργασία, γιατί με το άγνωστο βλέπεις μέχρι που μπορούν να φτάσουν οι ικανότητές σου. Να καταλάβω σε τι χρειάζομαι περισσότερη δουλειά και σε τι είμαι καλός. Δηλαδή αν μπω στη διαδικασία να αποδείξω κάτι μόνος μου, θα αποκαλύψω τις δυνατότητές μου.»

Με το πέρας του πρώτου σκέλους των ερωτήσεων, ο εν λόγω μαθητής απάντησε στις επόμενες τέσσερις ερωτήσεις, οι οποίες αφορούν τη γνώμη του ίδιου πλέον για τη Γεωμετρία, καθώς και τα συναισθήματά του κατά τη διάρκεια ενασχόλησης του ίδιου με αποδείξεις αυξημένης δυσκολίας. Αξίζει να σημειωθούν οι δηλώσεις του μαθητή.

Σχετικά με την ένατη ερώτηση, ο ίδιος εκφράζει την αλλαγή στη στάση, την οποία διατηρούσε απέναντι στα προβλήματα, που στο παρελθόν τον προβλημάτιζαν.

> «Καταρχήν πλέον δε θα πελαγώσω. Όταν έβλεπα Σύνθετα Θέματα ή δύσκολες έννοιες μέσα στην εκφώνηση, πριν κάνουμε ότι κάναμε, ένιωθα πολύ άσχημα, δεν έκανα τίποτα και κοιτούσα σαν ανίκανος το χαρτί. Τώρα δε θα το βάλω τόσο εύκολα κάτω. Αν κάποιον όρο δεν το καταλαβαίνω, θα προσπαθήσω να τον ερμηνεύσω μέσα από τα συμφραζόμενα. Πλέον νιώθω πιο άνετα ακόμα και με τα Σύνθετα Θέματα. Το έχω παρατηρήσει και στο σχολείο. Παλιά καθόμουν στην καρέκλα μου και απλώς κοίταγα στον πίνακα, τώρα πλέον ξέρω και συμμετέχω πολύ. Έχουμε δει πολλά είδη προβλημάτων και μπορώ να οργανώνομαι. Δε με τρομάζει ιδιαίτερα η σκέψη ενός δύσκολου θέματος.»

Έπειτα, στην ερώτηση που αφορά μία πιθανή αποτυχία απόδειξης του ζητούμενου, ο Κώστας δηλώνει:

> «Θα στενοχωρηθώ λίγο αλλά δε θα το παρατήσω. Τώρα πλέον έχω μάθει πώς να λύνω προβλήματα δύσκολα. Οπότε μου είναι πιο εύκολο να εντοπίζω το λάθος μου και να το διορθώνω.»

Στη συνέχεια, με την απάντηση του στην προτελευταία ερώτηση, κάνει εμφανή την αλλαγή στη στάση του απέναντι στη Γεωμετρία και τη μαθηματική απόδειξη. Ο ίδιος διαπιστώνει:

> «Σαφώς και έχουν αλλάξει πολλά. Πλέον μου φαίνεται πιο εύκολη η Γεωμετρία. Όλα είναι πολύ πιο κατανοητά. Τώρα ξέρω ότι οι γνώσεις μου επαρκούν για να λύσω Μαθηματικά. Όταν βλέπω ένα πολύπλοκο σχήμα και μου δίνει κάποια δεδομένα, ενδιαφέρομαι να δω που θα καταλήξει και νιώθω πολύ ωραία όταν τα καταφέρνω. Αν με ρωτούσαν δύο ή τρεις μήνες πριν, αν μπορώ να λύσω Σύνθετα, θα τους έλεγα δεν μπορώ, δε θα τα καταφέρω και θα απογοητευόμουν. Είναι ωραίο να βλέπεις τον εαυτό σου να μπορεί να αποδεικνύει τόσο δύσκολα προβλήματα, δε θα σου απαντούσα έτσι πριν τρεις μήνες. Τα συναισθήματα μου είναι πολύ καλύτερα πλέον και αυτό με βοηθάει να οργανώνομαι και καλύτερα.

Τέλος, ο ίδιος διαπιστώνει ότι η αλλαγή της γνώμης του απέναντι στη Γεωμετρία οφείλεται στο ότι όλα επιδέχονται λύση, αρκεί να καταβάλει κάποιος την απαιτούμενη προσπάθεια. Αναφέρει:

> «Μέσα από όλα όσα κάναμε και μάθαμε, πίστεψα στον εαυτό μου και στις δυνάμεις μου. Κατάλαβα ότι τίποτα δεν είναι ακατόρθωτο.

5 Συμπεράσματα

5.1 Συμπεράσματα Έρευνας

Μέσα από την ανάλυση των βιντεοσκοπημένων παρεμβάσεων, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν, καθώς και με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία έχουν τεθεί στην παρούσα μελέτη, γίνεται αντιληπτό το μέγεθος της επιρροής των συναισθημάτων στους δύο μαθητές, κατά τη διάρκεια παραγωγής μίας απόδειξης.

Πιο συγκεκριμένα με βάση τον πρώτο άξονα ανάλυσης, που αφορά το γνωστικό κομμάτι, οι δυσκολίες τις οποίες συναντούσαν οι δύο έφηβοι, κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με κάποιο θέμα, έγκεινται στις άγνωστες, προς τους ίδιους, έννοιες. Έννοιες, οι οποίες συμπεριλαμβάνονταν στην εκφώνηση. Με το πέρας των παρεμβάσεων, όπως και οι ίδιοι ανέφεραν στην τελευταία συνέντευξη, ξεπέρασαν το φόβο των άγνωστων εννοιών. Οι ίδιοι πλέον μπορούν και ερμηνεύουν τον κάθε νέο όρο, μέσα από τα συμφραζόμενα.

Αρχικά, παρατηρήθηκαν αδυναμίες στην κατασκευή των σχημάτων, οι οποίες με την πάροδο του χρόνου φάνηκε να υποχωρούν. Αξίζει να γίνει μία συνοπτική αναφορά των στοιχείων, για τα οποία παρατηρήθηκε ότι δημιουργούσαν αρνητικά συναισθήματα στους δύο έφηβους:

- Άγνωστες έννοιες εντός της εκφώνησης.
- Συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων αυξημένης δυσκολίας του σχολικού βιβλίου (Σύνθετα Θέματα).
- Ερωτήματα, στα οποία συγκαταλέγονταν αλγεβρικές πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι δύο μαθητές στην τελευταία συνέντευξη γνωστοποίησαν την αλλαγή στη στάση τους (προς το θετικό) απέναντι στα προβλήματα αυξημένης δυσκολίας και κατ' επέκταση στη Γεωμετρία. Που οφείλεται όμως αυτή η αλλαγή;

Με βάση το δεύτερο άξονα μελέτης και ανάλυσης των δεδομένων, ο οποίος αφορά τα συναισθήματα, οι δύο μαθητές σημείωσαν σημαντική αλλαγή στη συναισθηματική τους κατάσταση με την πάροδο του χρόνου. Μέσα από τους πίνακες συναισθημάτων, γίνονται σαφείς οι αυξομειώσεις του κάθε συναισθήματος ξεχωριστά, καθώς και η εναλλαγή αυτών. Αξίζει να θυμίσουμε τις περιπτώσεις των προβλημάτων, στις οποίες ένας έφηβος, εκ των δύο, ξεκινούσε την αποδεικτική διαδικασία με αρνητικά συναισθήματα, τότε η ενασχόληση του με τον εν λόγω πρόβλημα δεν είχε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Επίσης όσο ο μαθητής διακατεχόταν από φόβο, θλίψη ή και θυμό, οι ιδέες και οι εικασίες του για την τρέχουσα απόδειξη, απέκλιναν όλο και πιο πολύ από τις εύστοχες παρατηρήσεις. Τέλος, όσον αφορά τα αρνητικά συναισθήματα, παρατηρήθηκε ότι, σε περίπτωση εκτεταμένης χρονικά, επιρροής τους, ο μαθητής αδυνατούσε να ανταπεξέλθει σε θέματα τα οποία επακολουθούσαν, στα πλαίσια της ίδιας παρέμβασης.

Αναμφίβολα, τα θετικά συναισθήματα, όπως χαρά, έκπληξη, κατείχαν σημαντικό ρόλο στην ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας. Επίσης, συνετέλεσαν στη σταδιακή αλλαγή της στάσης των δύο εφήβων, απέναντι στην αναφερθείσα εις άνω κατηγορία προβλημάτων αυξημένης δυσκολίας αλλά και γενικότερα στο κλάδο της Γεωμετρίας. Αρκεί να θυμηθούμε την αντίδραση του Κώστα κατά τη διάρκεια ενασχόλησής του με τον κύκλο, στα πλαίσια του δεύτερου θέματος, της πρώτης παρέμβασης. Η έντονη χαρά και έκπληξη του ίδιου, με την επιτυχία του στην εν λόγω άσκηση, οδήγησε στην αλλαγή της στάσης του απέναντι στα προβλήματα, στα οποία συμπεριλαμβάνεται κύκλος.

Είναι γεγονός λοιπόν, η αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο, οι δύο μαθητές βλέπουν τη Γεωμετρία καθώς και την αποδεικτική διαδικασία, στα πλαίσια αυτής. Οι ίδιοι μέσα από τις συναντήσεις μας, κατάφεραν να αντιμετωπίσουν τους φόβους και τις αδυναμίες, που είχαν. Οι εν λόγω φόβοι ωθούσαν τους δύο έφηβους, σε σημείο υποτίμησης του γνωστικού τους επιπέδου, των δυνατοτήτων τους και κατ' επέκταση στη δημιουργία αρνητικής στάσης για τα Μαθηματικά. Είναι αξιοσημείωτο, ότι οι ίδιοι θεωρούν πλέον τη Γεωμετρία έναν πολύ ενδιαφέρον κλάδο και την απόδειξη ως μία διαδικασία οικοδόμησης γνώσεων.

Στη συνέχεια, όσον αφορά τον τρίτο και τελευταίο άξονα μελέτης, στον οποίο συγκαταλέγεται η επίδραση των δύο εφήβων, έγινε αντιληπτός ο ενισχυτικός της ρόλος μέσα από τα διάφορα επεισόδια, τα οποία αναφέρθηκαν. Η συνεργασία των δύο μαθητών διευκόλυνε σε αρκετά σημεία, την ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας. Όταν ένας εκ των δύο μαθητών διατύπωνε ορθά τη σκέψη του, ο εταίρος την έκανε κτήμα του. Σε πολλά σημεία , διαπιστώθηκε ότι οι γνώσεις του ενός συμπλήρωναν και ολοκλήρωναν τις γνώσεις του άλλου. Επίσης, δεν ήταν λίγες οι στιγμές που οι δύο μαθητές διατύπωναν το επιχείρημα τους μαζί και ο ένας ζητούσε ενεργά πληροφορίες από τον άλλο. Αρκεί να θυμηθούμε το σχόλιο του Κώστα, κατά την πραγματοποίηση της τέταρτης παρέμβασης:

«Μακάρι να μπορούσαμε να γράψουμε εγώ και ο Νίκος μαζί στις εξετάσεις, θα γράφαμε είκοσι και οι δύο!»

Καταλήγοντας, όπως φαίνεται και από τους πίνακες συναισθημάτων της τελευταίας παρέμβασης, στη συναισθηματική κατάσταση των δύο εφήβων διακρίνεται κατά

κύριο λόγο, χαρά. Οι ίδιοι, αυτή τη στιγμή νιώθουν έτοιμοι να ανταπεξέλθουν με επιτυχία, σε οποιοδήποτε πρόβλημα της Γεωμετρίας, το οποίο επιδέχεται απόδειξη. Δηλώνουν πλέον πιο σίγουροι για την επιτυχία τους, στις γραπτές ενδοσχολικές εξετάσεις του Ιουνίου, στο εν λόγω μάθημα. Αυτό είναι κάτι, το οποίο αντιβαίνει με τα πιστεύω τους τρείς μήνες πριν. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να σημειωθούν συνοπτικά τα συμπεράσματα σε συμφωνία με το Θεωρητικό Πλαίσιο, τα οποία αφορούν τη μεταβλητή των συναισθημάτων καθώς και αυτή της αλληλεπίδρασης.

Πιο συγκεκριμένα, σε συμφωνία με το πλαίσιο του Hannula, παρατηρήθηκε ότι η μεταβολή των συναισθημάτων προς το ευνοϊκότερο συνοδεύεται και από αλλαγή της στάσης απέναντι στη Γεωμετρία. Επίσης διαπιστώθηκε ότι μαθητές με αρνητικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά είναι δυνατόν να ζήσουν στιγμές με θετικά συναισθήματα κατά τη διάρκεια παραγωγής μίας απόδειξης. Τα θετικά συναισθήματα διευκόλυναν τις δημιουργικές πτυχές της παραγωγής απόδειξης, ενώ τα αρνητικά συναισθήματα παρεμπόδισαν την εξέλιξη της αποδεικτικής διαδικασίας. Όταν κάποιος εκ των εφήβων διατηρούσε μία θετική διάθεση κατά την ενασχόληση του με κάποιο θέμα, οδηγούταν στην επιτυχία. Με την αναστολή επίτευξης των στόχων κάποιου μαθητή, προκαλούνταν στον ίδιο αρνητικά συναισθήματα. Εντοπίστηκε ότι το άγχος αναστέλλει γνωστικές διαδικασίες, κάτι το οποίο βρίσκεται σε συμφωνία με το πλαίσιο των Zan κ. α. (2006).

Όσον αφορά τον ρόλο του εκπαιδευτικού, αξίζει να σημειωθεί ότι ο τρόπος παρουσίασης της απόδειξης, καθώς και η ενασχόληση μου στα πλαίσια της σε συνεργασία με τους μαθητές, φάνηκε να επηρεάζει τη συναισθηματική κατάσταση των εφήβων, κάτι το οποίο βρίσκεται σε συμφωνία με το πλαίσιο του Hannula (2012a). Η συνεργασία των δύο παιδιών διευκόλυνε την ολοκλήρωση των αποδείξεων και την ομαλή διεξαγωγή των παρεμβάσεων. Επίσης, σε συμφωνία με τον Weber (2005), παρατηρήθηκε ότι οι γνωστικές συγκρούσεις και οι προβληματισμοί δημιούργησαν διαισθητικές αναπαραστάσεις στους δύο έφηβους, αποκτώντας γνώσεις. Μέσα από την αλληλεπίδραση των δύο εφήβων εντοπίστηκε η δημιουργία κοινής ζώνης νοημάτων και γνώσεων, οι οποίες δεν υπήρχαν στο νου τους πριν την έναρξη του διαλόγου τους, κάτι το οποίο βρίσκεται σε συμφωνία με την Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης του Lerman (2001). Μέσα από το διάλογο, επήλθε η γνώση στους δύο μαθητές (Sfard, 2001). Τέλος, μέσα από τις χειρονομίες ο κάθε έφηβος ξεκινούσε έναν διάλογο με συμβολικό τρόπο, σύμφωνα και με τους Reeve και Reynolds (2001). Ο ένας διόρθωνε τον άλλο δείχνοντας το λάθος του. Τα θετικά αποτελέσματα της ομαδικής εργασίας ήταν εμφανή.

Συνοπτικά:

Παράγοντας - Συναισθήματα:

- Τα αρνητικά συναισθήματα γεννούν εμπόδια για τη δημιουργία εικασιών, σε καλούς μαθητές.
- Τα αρνητικά συναισθήματα εύνουν τη δημιουργία αρνητικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
- Επαναλαμβανόμενα αρνητικά συναισθήματα παρεμποδίζουν τη δημιουργία θετικών συναισθημάτων.
- Τα αρνητικά συναισθήματα παρατείνουν το χρόνο ολοκλήρωσης της αποδεικτικής διαδικασίας.
- Τα αρνητικά συναισθήματα περιορίζουν την απόδοση και επιτυχία των μαθητών.
- Τα θετικά συναισθήματα οδηγούν στην αλλαγή μιας αρνητικής στάσης.
- Τα θετικά συναισθήματα γεννούν θετική στάση.
- Τα θετικά συναισθήματα ενισχύουν τη δημιουργία εικασιών.

Παράγοντας – Εκπαιδευτικός:

- Δίνοντας ο εκπαιδευτικός, την απαιτούμενη έμφαση στο ρόλο της απόδειξης, οι μαθητές κατανοούν τη σημασία της ίδιας στα πλαίσια της Γεωμετρίας.
- Με την ανάπτυξη ενισχυτικού διαλόγου (υποστηρικτικής σκαλωσιάς), από πλευράς εκπαιδευτικού με τους μαθητές του, δημιουργούνται εικασίες στους ίδιους και δρομολογούνται οι σκέψεις τους, χωρίς να ανακοινώνεται στους ίδιους ευθέως η απάντηση του ζητούμενου.
- Μέσω της προτροπής του εκπαιδευτικού στους μαθητές του, να συζητήσουν και να σκεφτούν μόνοι τους, οι ίδιοι μαθαίνουν να αξιολογούν και να αποδέχονται ή να απορρίπτουν ο ένας τις σκέψεις του άλλου. Κάτι το οποίο οδηγεί στην απόκτηση γνώσης.
- Υποστηρίζοντας και εμψυχώνοντας ο διδάσκων, τους μαθητές του, πετυχαίνει την βελτίωση της συναισθηματικής τους κατάστασης.

Παράγοντας – Αλληλεπίδραση:

Αξίζει να σημειωθεί για ακόμη μία φορά, η ιδιαιτερότητας των συμμετεχόντων στην έρευνα. Πρόκειται για δύο δίδυμα αδέρφια, τα οποία συνηθίζουν να εργάζονται ομαδικά κατά τη διάρκεια μελέτης στο χώρο της οικίας τους. Μέσα από τη

συνεργασία τους, όπως παραδέχονται και οι ίδιοι, εμπλουτίζονται οι γνώσεις και των δύο.

- Η αλληλεπίδραση των μαθητών διευκόλυνε την ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας.
- Όταν ένας μαθητής διατύπωνε μία ιδέα, ο εταίρος τη χρησιμοποιούσε.
- Όταν κάτι δεν γινόταν κατανοητό από έναν μαθητή, ο άλλος του το εξηγούσε.
- Στην περίπτωση που κάποιος μαθητής διατύπωνε έναν λανθασμένο ισχυρισμό, ο δεύτερος εντόπιζε το λάθος, τροποποιούσε και άρθρωνε το σωστό.
- Οι ιδέες του ενός συμπλήρωναν τις ιδέες του άλλου και με αυτό τον τρόπο εμπλουτίζονταν οι γνώσεις τους.
- Η συνεργασία τους οδήγησε στην πρόοδο και των δύο.

5.2 Διδακτικές Προτάσεις

Βασικό έλλειμμα στα εκπαιδευτικά ιδρύματα είναι η επιμόρφωση των διδασκόντων σε θέματα ψυχολογίας εφήβου. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, τα συναισθήματα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής, καθώς αποτελούν τον κύριο παράγοντα δημιουργίας στάσεων, στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών. Οι μαθηματικοί διδάσκοντες χρειάζεται να κατανοούν τις ανάγκες των μαθητών τους και να δίνουν την απαιτούμενη έμφαση στο μάθημα της Γεωμετρίας, ώστε να επιτευχθούν οι διδακτικοί στόχοι της μαθηματικής απόδειξης.

Επομένως μία διδακτική πρόταση θα ήταν, ενδεχομένως κάποιοι αρμόδιοι φορείς να επιστήσουν την προσοχή των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, γύρω από τη συναισθηματική κατάσταση των νέων εν ώρα διδασκαλίας, καθώς και το ρόλο της μαθηματικής απόδειξης. Είναι προφανές ότι η ολική αναδόμηση του τρόπου διδασκαλίας των εκπαιδευτικών, δεν ενισχύεται με κάποια απλή ενημέρωση. Το ζητούμενο είναι, στους προσωπικούς στόχους του εκπαιδευτικού να συγκαταλέγεται η δημιουργία θετικών στάσεων στους μαθητές, για το μάθημά του.

Σχόλια

1. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατασκευή των γραφημάτων απόδοσης συναισθημάτων δεν ήταν δυνατό να είναι ακριβής. Ο κάθετος άξονας, ο οποίος αποδίδει το μέγεθος του συναισθήματος είναι πλασματικός. Πιο συγκεκριμένα στον εν λόγω άξονα γίνεται μία προσπάθεια από μέρους μου να αποτυπώσω το μέγεθος της εκδήλωσης συναισθήματος, το οποίο διακρίνω στα πρόσωπα ή στις λεκτικές εκφράσεις των δύο έφηβων. Δεν είναι εφικτή, λόγου χάρη η ακρίβεια στο μέγεθος της χαράς ενός εκ των δύο μαθητών μία δεδομένη στιγμή. Συγκριτικά με κάποια προηγούμενη χρονική στιγμή που ο εν λόγω μαθητής παρουσίαζε το ίδιο συναίσθημα, γίνεται η προσέγγιση του μεγέθους του συναισθήματος και αποτυπώνεται στο γράφημα. Όσον αφορά τον οριζόντιο άξονα (του χρόνου), έχει αποδοθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια, όσο αυτό είναι εφικτό, η παραγωγή και η εναλλαγή των συναισθημάτων ανά τις χρονικές περιόδους.

2. Στα αποτελέσματα των παρεμβάσεων, έγιναν αναφορές σε χρονικές στιγμές. Οι περισσότερες αναπαριστώνται με φυσικούς αριθμούς. Πραγματοποιήθηκε στρογγυλοποίηση στους χρόνους, προκειμένου να ευνοηθεί η κατασκευή των γραφημάτων (των συναισθημάτων) καθώς και η μελέτη αυτών.

3. Η μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο μαθητών καθώς και η κατασκευή του αντίστοιχου πίνακα (Πίνακας 2) έγιναν με βάση την ανάλυση των Weinberger A. και Fischer F. (2006). Επίσης η μελέτη καθώς και η ανάλυση των χαρακτηριστικών του προσώπου (Πίνακας 1), με βάση την οποία εντοπίστηκαν τα διάφορα συναισθήματα στους δύο έφηβους, βασίστηκε στη Διδακτορική Διατριβή της Ραουζαίου Α.

Βιβλιογραφία

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *ICM, 3* (1–3), 907-920.

Barab, S. A., & DuVy, T. M. (2000). From practice Welds to communities of practice. In D. H. Jonassen & S. M. Land (Eds.), *Theoretical foundations of learning environments* (pp. 25–55). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades T. (2009). *Teachers' Views On The Role Of Visualisation And Didactical Intentions Regarding Proof* (pp. 261-270), Proceedings of CERME 6, Working Groop 2, Argumentation and Proof. France.

Brown, M., Brown, P., & Bibby, T. (2008). 'I would rather die': reasons given by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics. *Research in mathematics education*, *10*(1), 3-18.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). *Design Experiments in Educational Research.*

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (2011). Young Children's Emotional Acts While Engaged in Mathematical Problem Solving. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Eds.), *A Journey In Mathematics Education Research* (vol. 5, pp. 41-71). Melbourne, Australia: Springer.

Ekman, P., & Friesen, W. V. (1978). *Facial action coding system: a technique for the measurement of facial movement*. Palo Alto, Calif.: Consulting Psychologists Press.

Evans, J. (2006). Affect And Emotion In Mathematical Thinking And Learning. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New Mathematics Education Research And Practice* (vol. 19, pp. 233-255). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.

Hanna, G., & Jahnke H. N. (2012). Proof and Proving. Toronto, Canada and Bielefeld, Germany.

Hannula, M.S. (2002). Attitude Towards Mathematics: Emotions, Expectations And Values. *Educational Studies In Mahtematics, 49*, 25-46.

Hannula, M. S. (2006). Motivation In Mathematics: Goals Reflected In Emotions. *Educational Studies in Mathematics 63*, 165–178.

Hannula, M. S. (2012a). Emotions In Problem Solving. *12th International Congress on Mathematical Education Program* XX-YY-zz (pp. abcde-fghij). Seoul, Korea: COEX.

Hannula, M. S. (2012b). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in mathematics education, 14* (2), 137-161.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perpectives on the learning and teaching of proof. In F.K.Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). USA: NCTM.

Kendon, A. (1972). Some relationships between body motion and speech. In A. Siegman and B. Pope (Eds.), *Studies in dyadic communication* (pp. 177-210). New York: Pergamon Press.

Kendon, A. (1980). Gesticulation and speech: Two aspects of the process of utterance. In M.R. Key (Ed.), *The relation between verbal and nonverbal communication* (pp. 207-227). The Hague: Mouton.

Lerman, S. (2001). *Accouting for accounts of learning mathematics: Reading the ZPD in videos and transcripts*, in Clarke, D (ed), 53-74.

Liljedahl, P. G. (*2005*). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! Experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 219-234.

McNeill, D. (1985). So you think gestures are nonverbal? *Psychological Review, 92,* 350-371.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago: University of Chicago Press.

Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2013). The Need For Proof In Geometry: A Theoretical Investigation Through Husserl's Phenomenology. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International* (vol. 3, pp. 329-336). Kiel, Germany: PME

Moutsios-Rentzos, A., & Kalozoumi-Paizi, F. (2014). Odysseus' proving journeys to proof: an investigation on cognitive and affective realities. Proceedings of CIEAEM 66. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 24*(1), 290-296.

Op 't Eynde, P., & Hannula, M. S. (2006). The Case Study of Frank. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 123–129. Springer.

Reeve, R. A., & Reynolds, F. J. (2001). The Role of Gesture in Co-Constructing Mathematical Understanding. Clarke D. (Ed.), *Perspectives on Practice and Meaning In Mathematics and Science Classrooms* (vol. 24, 231-253). Kluer Academic Publishers, Netherlands.

Sfard, A. (2000). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects, *Journal for Research in Mathematics Education* 31(3), 296-327.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Preparing teachers for handling students' mathematical communication, Gathering knowledge and building tools, To appear in F.L. Lin and T. Cooney (eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, Kluer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, *Educational Studies in Mathematics* (vol. 46, pp. 13-57). Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning and action*. New York: John Wiley & Sons.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior, 24* (3), 351-360.

Weinberger, A., & Fischer, F. (2006). *A framework to analyze argumentative knowledge construction in computer-supported collaborative learning* pp. 79- 95), Knowledge Media Research Center, IWM Institut fór Wissensmedienel, 40 Konrad-Adenauer-Strasse. Tóbingen. Germany.

Werner, H., & Kaplan, B. (1963). *Symbol formation*. New York: Wiley & Sons. Winegar, L. T. (in press). Developmental research and comparative perspectives: Applications to developmental science. To appear in J. Tudge, M. Shanahan, & J. Valsiner (Eds.), *Developmental Science: Vol. 2. Comparative approaches in human development.*

Zan, R., Brown, L., *Evans*, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect In Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics 63*: 113–121

Zan, R., & Di *Martino*, P. (2007). Attitude Toward Mathematics: Overcoming The Positive/Negative Dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 157-168.

Ραουζαίου, Α. (2006). *Αναπαράσταση Συναισθήματος και Σύνθεση Εκφράσεων Προσώπου και Χειρονομιών Σε Εικονικούς Χαρακτήρες*. Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα.

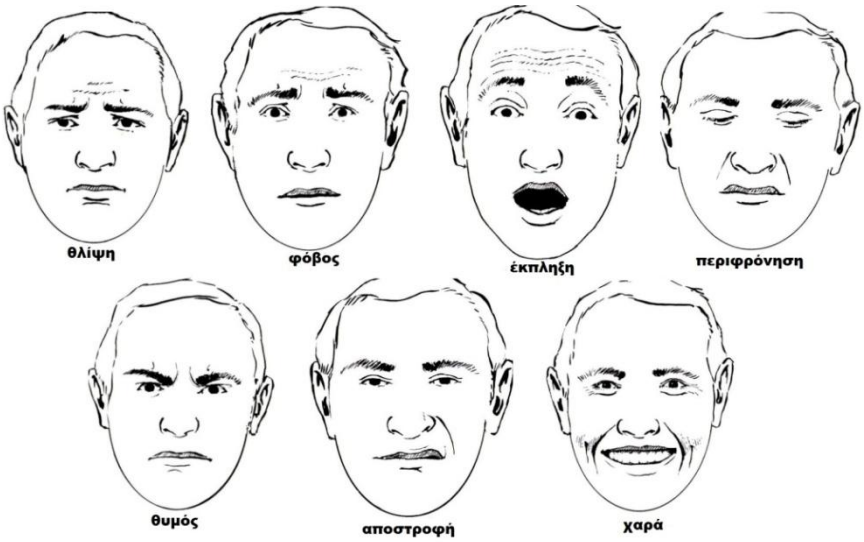
Παράρτημα

Συμπεριλαμβάνονται:

- Πίνακας ανάλυσης χαρακτηριστικών προσώπου (Πίνακας 1).
- Πίνακας μελέτης αλληλεπίδρασης, στον οποίο συγκαταλέγονται οι κατηγορίες που παρατηρήθηκαν στις απομαγνητοσκοπήσεις και η ερμηνεία τους (Πίνακας 2).

Καθώς, επίσης:

- Τα δύο ερωτηματολόγια (Α1 και Α2)
- Τα φύλλα εργασίας των τεσσάρων παρεμβάσεων (Β1, Β2, Β3, Β4).



- **Θλίψη:** Φρύδια – κλίνουν προς το εσωτερικό, με καμπή των εσωτερικών σημείων προς τα πάνω.
  Μάτια – ελαφρώς κλειστά.
  Στόμα – ελαφρώς πιεσμένα χείλη.
- **Φόβος:** Φρύδια – τράβηγμα προς τα πάνω, με καμπή των εσωτερικών σημείων προς τα πάνω.
  Μάτια – ανοιχτά.
  Στόμα – χαλαρωμένο.
- **Έκπληξη:** Φρύδια – κίνηση προς τα πάνω.
  Μάτια – μόνο άνω βλέφαρα ανοιχτά.
  Στόμα – ανοιχτό, σαγόνι κατεβασμένο.
- **Περιφρόνηση:** Φρύδια – ελαφρά κλίση προς τα κάτω.
  Μάτια – λίγο κλειστά (συνήθως). Χαμηλωμένο βλέμμα.
  Στόμα – χαλαρωμένο κάτω χείλος, ελαφρύ τράβηγμα προς τα πάνω του άνω χείλους
- **Θυμός:** Φρύδια – κλίνουν προς το εσωτερικό, με καμπή των εσωτερικών σημείων προς τα κάτω.
  Μάτια – ελαφρώς κλειστά.
  Στόμα – πιεσμένα χείλη ή ανοίγουν με αποτέλεσμα την έκθεση των δοντιών.
- **Αποστροφή:** Φρύδια – είναι χαλαρωμένα.
  Μάτια – ανοιχτά.
  Στόμα – το άνω χείλος τραβιέται προς τα πάνω, ασύμμετρα.
- **Χαρά:** Φρύδια – είναι χαλαρωμένα.
  Μάτια – Ανοιχτά, πολλές φορές ελαφρώς κλειστά.
  Στόμα – ανοιχτό, με τραβηγμένες στοματικές γωνίες προς τα αυτιά.

Πίνακας 1: Ανάλυση προσώπου.

Κατηγορία	Επεξήγηση
Εξωτερίκευση	Άρθρωση σκέψης σε όλη την ομάδα
Εκμαίευση	Αμφισβήτηση της δήλωσης εταίρου
Γρήγορη Συναίνεση	Αποδοχή των μαθησιακών παρατηρήσεων εταίρου με στόχο την εξέλιξη της άσκησης
Ένταξη – επίτευξη συναίνεσης	Ανάληψη, ενσωμάτωση και στη συνέχεια εφαρμογή των δηλώσεων εταίρου
Σύγκρουση – επίτευξη συναίνεσης	Διαφωνία, τροποποίηση ή αντικατάσταση των ισχυρισμών εταίρου
Δήλωση	Επιχείρημα υπέρ της πρότασης
Ενσωμάτωση (απάντηση)	Κατάσταση, η οποία στοχεύει στην προώθηση ενός προηγούμενου επιχειρήματος

Πίνακας 2: Κατηγορίες μέσων διαλεκτικής κατασκευής της γνώσης.

(A1)

Ερωτηματολόγιο 1ο

Όλα τα παιδιά που θα σου αναφέρω είναι μαθητές μου, στην ίδια τάξη με σένα.

1. Στη Γεωμετρία της α΄ λυκείου είναι η πρώτη φορά που χρειάζεται να μελετήσεις και να κάνεις ο ίδιος τόσες πολλές αποδείξεις. Γιατί πιστεύεις ότι σου ζητείται αυτό; Τι θεωρείς ότι μαθαίνεις με τις αποδείξεις;

2. **Γιάννης:** «Πραγματικά, δεν καταλαβαίνω γιατί μας ζητάνε να κάνουμε αποδείξεις. Θα μπορούσα, για παράδειγμα να μετρήσω με το χάρακά μου και να ξέρω αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές ή όχι. Η απόδειξη δεν προσφέρει κάτι παραπάνω».
   Κατά πόσο συμφωνείς με το Γιάννη; Γιατί;

3. **Μαρία:** Όταν αποδεικνύω κάτι, βεβαιώνομαι ότι αυτό που σκέφτηκα ισχύει, είναι αληθές. Αν δεν το αποδείξω, τότε δεν μπορώ να είμαι σίγουρη. Για παράδειγμα μπορεί να μη μετρήσω σωστά, ή, πάλι, μπορεί αυτό που σκέφτηκα να ισχύει μόνο για το συγκεκριμένο σχήμα που έφτιαξα.
   Κατά πόσο συμφωνείς με τη Μαρία; Γιατί;

4. **Αλέξης:** Δε νομίζω ότι ωφελεί σε κάτι να παρακολουθώ την παρουσίαση μίας απόδειξης στην τάξη, γιατί δεν την καταλαβαίνω αν δε μου την εξηγήσει κάποιος αναλυτικά και νιώθω άσχημα όταν συμβαίνει αυτό. Προτιμώ να τη δω μόνος μου στο σπίτι, που θα έχω όσο χρόνο χρειάζομαι και ότι απορία προκύψει να τη συζητήσω με τον καθηγητή μου.
   Κατά πόσο συμφωνείς εσύ με τον Αλέξη; Γιατί; Αν έχεις αντίθετη γνώμη, γιατί και σε τι θεωρείς ότι βοηθάει;

5. **Δημήτρης:** Δεν πιστεύω ότι οι αποδείξεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες. Για παράδειγμα, τι χρειάζεται να ξέρω πώς αποδεικνύεται ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα αυτού και αντίστροφα; Αρκεί να ξέρω τι λέει – τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω το θεώρημα και να λύσω ασκήσεις.
   Ελένη: Δε συμφωνώ! Αν δεν έχω καταλάβει πώς αποδεικνύονται τα θεωρήματα και οι προτάσεις, τότε δε θεωρώ ότι τα έχω κατανοήσει σε βάθος. Πώς θα μπορέσω μετά να τα χρησιμοποιήσω για να αποδείξω κάτι μόνη μου;
   Με ποιο από τα παιδιά συμφωνείς περισσότερο; Σε ποιο βαθμό συμφωνείς και με το άλλο; Γιατί;

6. **Ελπίδα:** Στη Γεωμετρία όταν αποδεικνύω προσπαθώ μέσα από τα δεδομένα και τα ζητούμενα να καταλάβω ποια θεωρήματα ή πορίσματα πρέπει να χρησιμοποιήσω και με ποιο τρόπο να τα συνδέσω όλα όσα χρειάζονται μεταξύ τους. Έτσι η παραγωγή μίας απόδειξης με βοηθάει να «τακτοποιήσω» τις γνώσεις μου.
   Συμφωνείς με την Ελπίδα; Γιατί; Θεωρείς ότι ένας από τους ρόλους της απόδειξης είναι να σας βοηθήσει να «τακτοποιήσετε» τις γνώσεις σας;

7. Η μαθηματικός σου στο σχολείο σας δίνει δύο εργασίες και σας ζητά να επιλέξετε με ποια από τις δύο θα ασχοληθείτε. Στην πρώτη, πρέπει να μελετήσετε μια απόδειξη από το βιβλίο σας και μετά να την εξηγήσετε στους συμμαθητές σας. Στη δεύτερη, πρέπει να αποδείξετε κάτι μόνοι σας. Ποια θα διάλεγες; Γιατί;

8. Μια συμμαθήτριά σου δυσκολεύεται με τις αποδείξεις και ζητά τη βοήθειά σου. «Κάθε φορά που πρέπει να κάνω μια απόδειξη, πελαγώνω. Ποτέ δεν ξέρω πώς να ξεκινήσω!» σου λέει. Εσύ τι κάνεις; Υπάρχει κάτι που θα θεωρούσες σημαντικό να της πεις για να τη βοηθήσεις;

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ:

- **Ήταν εύκολη. Δεν είχα κάποιο πρόβλημα.**

  Πως ένιωσες όταν την απέδειξες; Νιώθεις ικανοποίηση ή όχι λόγω της ευκολίας που τη χειρίστηκες; Πήρες θάρρος να πας και σε επόμενες αποδείξεις και να αντιμετωπίσεις σταδιακά κάτι πιο δύσκολο ή όχι; Βοηθάει σε κάτι στην ψυχολογία σου όταν «κάνεις» εύκολες αποδείξεις;

- **Δυσκολεύτηκα – Δεν τα κατάφερα.**

  Γιατί σε δυσκόλεψε; Τι ένιωσες όταν δεν κατέληξες στο επιθυμητό αποτέλεσμα; Απογοητεύτηκες, θύμωσες; Την ξαναπροσπάθησες; Γενικότερα πως αντιδράς κάθε φορά που αντιμετωπίζεις μία δύσκολη απόδειξη και ενώ την προσπαθείς δεν καταλήγεις στο ζητούμενο;

- **Δυσκολεύτηκα – δεν προσπάθησα καν.**

  Γιατί σε δυσκόλεψε; Τι ένιωσες και τα παράτησες; Απογοητεύτηκες, εκνευρίστηκες; Τι ήταν αυτό που σε έκανε να μην την προσπαθήσεις; Νιώθεις συχνά έτσι; Σου έχει συμβεί και σε άλλες αποδείξεις;

- **Δυσκολεύτηκα – Τα κατάφερα.**

  Τι ήταν αυτό που σε δυσκόλεψε; Πως ένιωσες όταν τελικά κατάφερες να αποδείξεις το ζητούμενο; Χάρηκες; Ένιωσες ικανοποίηση; Πίστεψες στις δυνατότητες σου; Σου αρέσει να συναναστρέφεσαι με δύσκολες αποδείξεις ή προτιμάς τις πιο εύκολες, στις οποίες δε βάζεις τον εαυτό σου στη διαδικασία αγωνίας και πιθανόν απογοήτευσης;

- **Ήταν ενδιαφέρουσα.**

  Τι ήταν αυτό που έκανε ενδιαφέρουσα τη συγκεκριμένη απόδειξη; Πως ένιωσες όταν συναναστρεφόσουν με τη συγκεκριμένη απόδειξη; Σου έχει συμβεί και σε άλλες αποδείξεις; Νιώθεις συχνά έτσι;

(A2)

Ερωτηματολόγιο 2^{ο}

Όλα τα παιδιά που θα σου αναφέρω είναι μαθητές μου, στην ίδια τάξη με σένα.

1. Στη Γεωμετρία της α΄ λυκείου είναι η πρώτη φορά που χρειάζεται να μελετήσεις και να κάνεις ο ίδιος τόσες πολλές αποδείξεις. Γιατί πιστεύεις ότι σου ζητείται αυτό; Τι θεωρείς ότι μαθαίνεις με τις αποδείξεις;

2. **Γιάννης:** «Πραγματικά, δεν καταλαβαίνω γιατί μας ζητάνε να κάνουμε αποδείξεις. Θα μπορούσα, για παράδειγμα να μετρήσω με το χάρακά μου και να ξέρω αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές ή όχι. Η απόδειξη δεν προσφέρει κάτι παραπάνω».
   Κατά πόσο συμφωνείς με το Γιάννη; Γιατί;

3. **Μαρία:** Όταν αποδεικνύω κάτι, βεβαιώνομαι ότι αυτό που σκέφτηκα ισχύει, είναι αληθές. Αν δεν το αποδείξω, τότε δεν μπορώ να είμαι σίγουρη. Για παράδειγμα μπορεί να μη μετρήσω σωστά, ή, πάλι, μπορεί αυτό που σκέφτηκα να ισχύει μόνο για το συγκεκριμένο σχήμα που έφτιαξα.
   Κατά πόσο συμφωνείς με τη Μαρία; Γιατί;

4. **Αλέξης:** Δε νομίζω ότι ωφελεί σε κάτι να παρακολουθώ την παρουσίαση μίας απόδειξης στην τάξη, γιατί δεν την καταλαβαίνω αν δε μου την εξηγήσει κάποιος αναλυτικά και νιώθω άσχημα όταν συμβαίνει αυτό. Προτιμώ να τη δω μόνος μου στο σπίτι, που θα έχω όσο χρόνο χρειάζομαι και ότι απορία προκύψει να τη συζητήσω με τον καθηγητή μου.
   Κατά πόσο συμφωνείς εσύ με τον Αλέξη; Γιατί; Αν έχεις αντίθετη γνώμη, γιατί και σε τι θεωρείς ότι βοηθάει;

5. **Δημήτρης:** Δεν πιστεύω ότι οι αποδείξεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες. Για παράδειγμα, τι χρειάζεται να ξέρω πώς αποδεικνύεται ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα αυτού και αντίστροφα; Αρκεί να ξέρω τι λέει – τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω το θεώρημα και να λύσω ασκήσεις.
   Ελένη: Δε συμφωνώ! Αν δεν έχω καταλάβει πώς αποδεικνύονται τα θεωρήματα και οι προτάσεις, τότε δε θεωρώ ότι τα έχω κατανοήσει σε βάθος. Πώς θα μπορέσω μετά να τα χρησιμοποιήσω για να αποδείξω κάτι μόνη μου;
   Με ποιο από τα παιδιά συμφωνείς περισσότερο; Σε ποιο βαθμό συμφωνείς και με το άλλο; Γιατί;

6. **Ελπίδα:** Στη Γεωμετρία όταν αποδεικνύω προσπαθώ μέσα από τα δεδομένα και τα ζητούμενα να καταλάβω ποια θεωρήματα ή πορίσματα πρέπει να χρησιμοποιήσω και με ποιο τρόπο να τα συνδέσω όλα όσα χρειάζονται μεταξύ τους. Έτσι η παραγωγή μίας απόδειξης με βοηθάει να «τακτοποιήσω» τις γνώσεις μου.
   Συμφωνείς με την Ελπίδα; Γιατί; Θεωρείς ότι ένας από τους ρόλους της απόδειξης είναι να σας βοηθήσει να «τακτοποιήσετε» τις γνώσεις σας;

7. Η μαθηματικός σου στο σχολείο σας δίνει δύο εργασίες και σας ζητά να επιλέξετε με ποια από τις δύο θα ασχοληθείτε. Στην πρώτη, πρέπει να μελετήσετε μια απόδειξη από το βιβλίο σας και μετά να την εξηγήσετε στους συμμαθητές σας. Στη δεύτερη, πρέπει να αποδείξετε κάτι μόνοι σας. Ποια θα διάλεγες; Γιατί;

8. Μια συμμαθήτριά σου δυσκολεύεται με τις αποδείξεις και ζητά τη βοήθειά σου. «Κάθε φορά που πρέπει να κάνω μια απόδειξη, πελαγώνω. Ποτέ δεν ξέρω πώς να ξεκινήσω!» σου λέει. Εσύ τι κάνεις; Υπάρχει κάτι που θα θεωρούσες σημαντικό να της πεις για να τη βοηθήσεις;

9. Καλείσαι να διαχειριστείς κάποιο πρόβλημα από τα σύνθετα θέματα του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας ή κάποιο πρόβλημα με όχι και τόσο οικίες έννοιες για εσένα, πως το αντιμετωπίζεις; Πως νιώθεις πλέον; Έχει αλλάξει κάτι στον τρόπο που οργανώνεις την απόδειξη σου;

10. Αν μία απόδειξη δεν καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα, πως νιώθεις; Την ξαναπροσπαθείς;

11. Έχει αλλάξει κάτι πλέον στον τρόπο που βλέπεις τη Γεωμετρία και την απόδειξης; Βλέπεις πλέον τον εαυτό σου διαφορετικό; Αν ναι, που εντοπίζεις διαφορές;

12. Τι ήταν αυτό που σε έκανε να αλλάξεις τη γνώμη σου για τη Γεωμετρία; Που οφείλεται η αλλαγή στη στάση σου;

(Β1)

Θέματα 1ης Παρέμβασης

Θέμα 1ο

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΔΓΖ.
ii. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Α, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ', με προβολές τα σημεία Ε' , Ζ' στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
iii. Να αποδείξετε ότι ΕΕ' = ΑΓ και ΖΖ' = ΑΒ.

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε,ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ,ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΜΚ.

Θέμα 3ο

Να αποδείξετε ότι:

i. Το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του),
ii. Το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

(Β2)

Θέματα 2ης Παρέμβασης

Θέμα 1ο

Μια ευθεία διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Αν Α’, Β’ και Γ’ οι προβολές των Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:

ΑΑ’ – ΓΓ’ = ΒΒ’ (με ΑΑ’ > ΓΓ’).

Θέμα 2ο

Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πως θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

Θέμα 3ο

Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx, Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΓΕ είναι ορθή.

Θέμα 4ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΑΕ = $\frac{ΕΓ}{2}$.

(Β3)

Θέματα 3ης Παρέμβασης

Θέμα 1ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ μέσο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.
ii. ΒΕ + ΓΖ = σταθερό.
iii. Αν Μ μέσο της ΒΓ τότε:
   α) ΒΕ = ΓΖ = $\frac{AΓ + AB}{2}$
   β) ΑΕ = ΑΖ = $\frac{AΓ - AB}{2}$

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

i. ΕΜ //ΑΓ,
ii. ΕΜ = $\frac{AΓ - AB}{2}$,
iii. $\widehat{ΔEM}$ = $\frac{\hat{A}}{2}$.

Θέμα 3ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = $\frac{3}{2}$ ΑΒ. Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε:
ΘΔ = ΔΓ – ΑΒ.

Θέμα 4ο

Αν Α’, Β’, Γ’, Δ’, Κ’ είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι:
ΑΑ’ + ΒΒ’ + ΓΓ’ + ΔΔ’ = 4ΚΚ’.

(Β4)

Θέματα 4^{ης} Παρέμβασης

Θέμα 1^{ο}

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70^{ο} και το ύψος του ΑΕ προς την πλευρά ΒΓ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ.

i. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
ii. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ.
iii. Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι ΕΜ = $\frac{A\Gamma}{2}$.

Θέμα 2^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

i. $Z\hat{\Delta}\Gamma$ = 90^{ο} + $\frac{\hat{A}}{2}$.
ii. ΖΚ = ΚΔ.
iii. $Z\hat{H}\Gamma$ = $\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.