ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

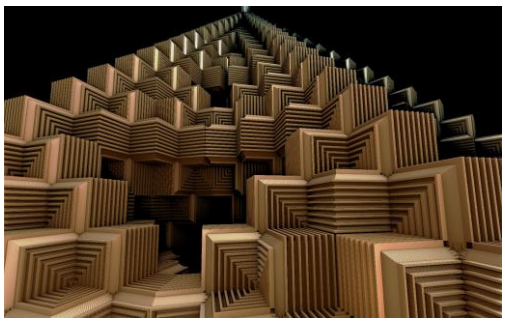
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο μέσω παραδείγματος μέτρησης

Γεωργακόπουλος Κωνσταντίνος
Α..Μ. Δ201327



Επιβλέπων καθηγητής: Σπύρου Παναγιώτης

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 29η Σεπτεμβρίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Στη μνήμη του πατέρα μου

Διονύση.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής εργασίας κ. Σπύρου Παναγιώτη για την καθοδήγηση του καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, για τις πολύτιμες συμβουλές του και το πολύτιμο υλικό που μου έδωσε και πάνω απ΄όλα να τον ευχαριστήσω διότι χωρίς εκείνον δεν θα φοιτούσα στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα.

- Την αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα για τις καίριες παρατηρήσεις της και την πολύτιμη βοήθειά σε αρκετά σημεία της παρούσης εργασίας.

- Τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

- Τον διδάκτορα κ. Μούτσιο Ρέντζο Ανδρέα για την αμέριστη βοήθειά του τόσο στο σχεδιασμό της εργασίας αυτής όσο και στη συνεχή του παρότρυνση για βελτίωση σε όσους τομείς κρίθηκε αναγκαίο. Τον ευχαριστώ πολύ για την αμεσότητά του και την κατανόησή του όλο αυτό το διάστημα που δουλέψαμε μαζί.

- Το σχολείο Ελληνογερμανική Αγωγή στην Παλλήνη καθώς και τους μαθητές που με ιδιαίτερη χαρά δέχθηκαν και μου έκαναν την τιμή να με βοηθήσουν στην έρευνα αυτή με τη συμμετοχή τους.

- Όλους τους φίλους και συναδέλφους που με βοήθησαν ηθικά για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής.

- Όλους τους καθηγητές που είχα από μαθητής και με έκαναν να λατρέψω τα Μαθηματικά.

Περίληψη

Η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης σε μαθητές Γυμνασίου είναι ομολογουμένως μια πολύ δύσκολη διαδικασία για τους καθηγητές. Πράγματι, ο ορισμός που δίνεται στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου προκαλεί πολλά ερωτηματικά στους μαθητές που ακόμα και πολλοί εκπαιδευτικοί αδυνατούν να δώσουν απαντήσεις. Θα δείξουμε στο κείμενο μας ότι τα Μαθηματικά δεν πρέπει να διδάσκονται μόνο ως θεωρητικές οντότητες αλλά θα πρέπει να βρούμε από που προέρχονται οι ορισμοί και ποιος είναι ο σκοπός που εξυπηρετούν. Θα προτείνουμε έναν εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης μέσα από ένα απλό πρόβλημα μέτρησης και όχι δίνοντας απλά έναν ορισμό για το τι είναι η συνάρτηση όπου μέσω αυτού δεν γίνεται καθόλου αντιληπτός ο λόγος ύπαρξης της συνάρτησης από τους μαθητές. Μέσα από αυτό το πρόβλημα μέτρησης θα εισάγουμε την έννοια της ανεξάρτητης μεταβλητής ως εκείνης που έχουμε πρόσβαση (προσβάσιμη μεταβλητή), δηλαδή που γνωρίζουμε και την έννοια της εξαρτημένης μεταβλητής (μετρήσιμη μεταβλητή) ως εκείνης που δεν έχουμε άμεση πρόσβαση αλλά την μετράμε μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής. Επομένως θα εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης ως μια διαδικασία μέτρησης και όχι απλά ως μιας αντιστοίχισης.

Λέξεις κλειδιά: συνάρτηση, δράση μέτρησης, προσβάσιμη μεταβλητή, διαμεσολαβημένη μεταβλητή.

Abstract

Teaching the concept of function to secondary school students is admittedly a very difficult process for the teachers. Actually, the definition that is given in the secondary school books raises many questions to the students that even many teachers cannot give answers to. We will show in our text that Mathematics shouldn't be taught only as theoretical entities but we should find out where the concepts come from and what is the purpose they service. We will suggest an alternative way of teaching the concept of function through a simple problem of measurement and not just giving a definition of what a function is, wherein isn't perceivable at all the purpose of existence of function to students. Through this problem of measurement we will introduce the concept of the independent variable as the one that we have access (accessible variable), namely that we know and the concept of the dependable variable (measurable variable) as the one that we don't have access but we measure it through the independable variable. Therefore, we will introduce the concept of function as a procedure of measurement and not just as a corresponding.

Key words: function, act of measurement, accessible variable, mediated variable.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ..... - 7 -
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ ..... - 9 -
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ..... - 10 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ. ΑΠΟ ΤΟ ΧΘΕΣ ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ ..... - 11 -
1.1. Εισαγωγή ..... - 11 -
1.2. Η συνάρτηση στα αρχαία χρόνια ..... - 11 -
1.2.1. Βαβυλώνιοι και αρχαίοι Έλληνες ..... - 11 -
1.2.2. Άραβες ..... - 14 -
1.3. Η πορεία της έννοιας της συνάρτησης από τον 18^0 αιώνα και μετά ..... - 15 -
1.4. Ο ορισμός της συνάρτησης στα βιβλία του οργανισμού ..... - 19 -
1.5. Κύρια σημεία του $1^{ου}$ κεφαλαίου ..... - 31 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°: ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ..... - 34 -
2.1. Εισαγωγή ..... - 34 -
2.2. Επιστημολογικά εμπόδια ..... - 35 -
2.3. Διδακτική μεταφορά της συνάρτησης ..... - 42 -
2.3.1. Νοητικές εικόνες, εικόνα έννοιας, ορισμός έννοιας ..... - 42 -
2.3.2. Διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης ..... - 44 -
2.4. Η συνάρτηση ως δράση μέτρησης ..... - 47 -
2.5. Κύρια σημεία του $2^{ου}$ κεφαλαίου ..... - 49 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ..... - 50 -
3.1. Σκοπός της έρευνας, ερευνητικό ερώτημα ..... - 50 -
3.2. Σχεδιασμός έρευνας ..... - 52 -
3.2.1. Σχεδιασμός δραστηριότητας ..... - 52 -
3.2.2. Σχεδιασμός τεστ ..... - 55 -
3.2.3. Σχεδιασμός συνέντευξης ..... - 56 -
3.3. Συμμετέχοντες -Υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ..... - 57 -
3.4. Συλλογή δεδομένων. ..... - 58 -
3.5. Μέθοδος ανάλυσης της έρευνας. ..... - 58 -
3.6. Κύρια σημεία του $2^{ου}$ κεφαλαίου ..... - 59 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ..... - 60 -
4.1. Δραστηριότητα ..... - 60 -
4.2. Τεστ ..... - 85 -
4.3. Συνεντεύξεις ..... - 89 -

4.3.1. Ο πρώτος μαθητής..... - 90 -
4.3.2. Ο δεύτερος μαθητής..... - 95 -
4.3.1. Ο τρίτος μαθητής..... - 101 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΖΗΤΗΣΗ..... - 105 -
5.1. Συζήτηση για τη δραστηριότητα..... - 105 -
5.1.1. Η δεύτερη διδακτική ώρα..... - 107 -
5.2. Συζήτηση για το τεστ..... - 110 -
5.3. Συζήτηση για τις συνεντεύξεις..... - 113 -
5.3.1. Πρώτος μαθητής..... - 113 -
5.3.2. Δεύτερος μαθητής..... - 114 -
5.3.3. Τρίτος μαθητής..... - 117 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ..... - 118 -
6.1. Περιορισμοί..... - 118 -
6.2. Μελλοντική έρευνα..... - 118 -
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... - 120 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Φύλλο εργασίας..... - 124 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Τεστ..... - 127 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 4.1. Πίνακας τιμών της συνάρτησης y=4x..... - 77 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1. Εξηκονταδικό Βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης..... - 11 -

Σχήμα 1.2. Ανάλογα ποσά στην Α΄Γυμνασίου. Βανδουλάκης κ.α. (2012)..... - 21 -

Σχήμα 1.3. Η έννοια της συνάρτησης στη Β΄Γυμνασίου. Βλάμος κ.α. (2012)..... - 23 -

Σχήμα 1.4. Η συνάρτηση $y = \alpha \cdot x^2, \alpha \neq 0$ στη Γ΄Γυμνασίου. Αργυράκης κ.α. (2014)..... - 25 -

Σχήμα 1.5. Η έννοια της συνάρτησης στην Α΄Λυκείου. Ανδρεαδάκης κ.α (2012)..... - 27 -

Σχήμα 1.6. Η έννοια της συνάρτησης στην Α΄Λυκείου. Ανδρεαδάκης κ.α (2012)..... - 28 -

Σχήμα 1.7. Ορισμός συνάρτησης στη Γ΄Λυκείου. Ανδεαδάκης κ.α. (2014)..... - 30 -

Σχήμα 2.1. Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού της έννοιας και της εικόνας της έννοιας..... - 43 -

Σχήμα 2.2. Ο ορισμός της έννοιας δημιουργεί την εικόνα της έννοιας..... - 44 -

Σχήμα 2.3. Γενικό μοντέλο του εννοιολογικού σχεδιασμού..... - 48 -

Σχήμα 4.1. Παρουσίαση δοχείου στο διαδραστικό πίνακα..... - 61 -

Σχήμα 4.2. Απάντηση μαθήτριας στην ερώτηση 2..... - 61 -

Σχήμα 4.3. Ερώτηση Α4 του μαθητή: Είναι ίδιος ο ρυθμός;..... - 62 -

Σχήμα 4.4. Η απάντηση Α.8 του μαθητή για τη χιαστή στην ερώτηση 2..... - 63 -

Σχήμα 4.5. Η μαθήτρια βοηθάει στις απλοποιήσεις των κλασμάτων (Ε.12 έως Α.15)..... - 64 -

Σχήμα 4.6. Απάντηση Α.17 του μαθητή. Με απλή διαίρεση και με αναγωγή στη μονάδα..... - 65 -

Σχήμα 4.7. Ερώτηση μαθητή Ε.37: Δεν πρέπει να βάλουμε y;..... - 68 -

Σχήμα 4.8. Ο μαθητής απαντάει στην Α.44: Να βάλουμε y..... - 70 -

Σχήμα 4.9. Ο καθηγητής δείχνει τη διαμέριση του δοχείου ανά λεπτό..... - 71 -

Σχήμα 4.10. Καθηγητής: Πολλαπλασιάζουμε τα εκατοστά ανά λεπτό με το χρόνο..... - 73 -

Σχήμα 4.11. Οι μαθητές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες (Α.59 έως Α.62)..... - 74 -

Σχήμα 4.12. Ο καθηγητής γράφει στον πίνακα τη σχέση y = 4x ..... - 76 -

Σχήμα 4.13. Ερώτηση Ε.77: Γιατί το Β είναι λάθος ;..... - 78 -

Σχήμα 4.14. Συμμετοχή μαθητών στην ερώτηση 8..... - 80 -

Σχήμα 4.15. Αν δεν ξέρω το χρόνο, μπορώ να βρω το ύψος ;..... - 81 -

Σχήμα 4.16. Αυτή παιδιά η σχέση λέγεται σχέση συνάρτησης..... - 82 -

Σχήμα 4.17. Συμπλήρωση πίνακα τιμών της συνάρτησης..... - 83 -

Σχήμα 4.18. Τέλος δραστηριότητας..... - 84 -

Σχήμα 4.19. Ραβδόγραμμα στην ερώτηση Α1 του τεστ..... - 86 -

Σχήμα 4.20. Κυκλικό διάγραμμα στην ερώτηση Α2 του τεστ..... - 87 -
Σχήμα 4.21. Ραβδόγραμμα στην ερώτηση Α3 του τεστ..... - 88 -
Σχήμα 4.22. Κυκλικό διάγραμμα στην ερώτηση Β του τεστ..... - 89 -
Σχήμα 4.23. Το τεστ του 1ου μαθητή..... - 90 -
Σχήμα 4.24. Συνέντευξη 1ου μαθητή..... - 92 -
Σχήμα 4.25. Το τεστ του 2ου μαθητή..... - 95 -
Σχήμα 4.26. Διόρθωση του 2ου μαθητή..... - 97 -
Σχήμα 4.27. Συνέντευξη 2ου μαθητή..... - 98 -
Σχήμα 4.28. Τεστ του 3ου μαθητή..... - 101 -
Σχήμα 4.29. Συνέντευξη 3ου μαθητή..... - 103 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ. ΑΠΟ ΤΟ ΧΘΕΣ ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ.

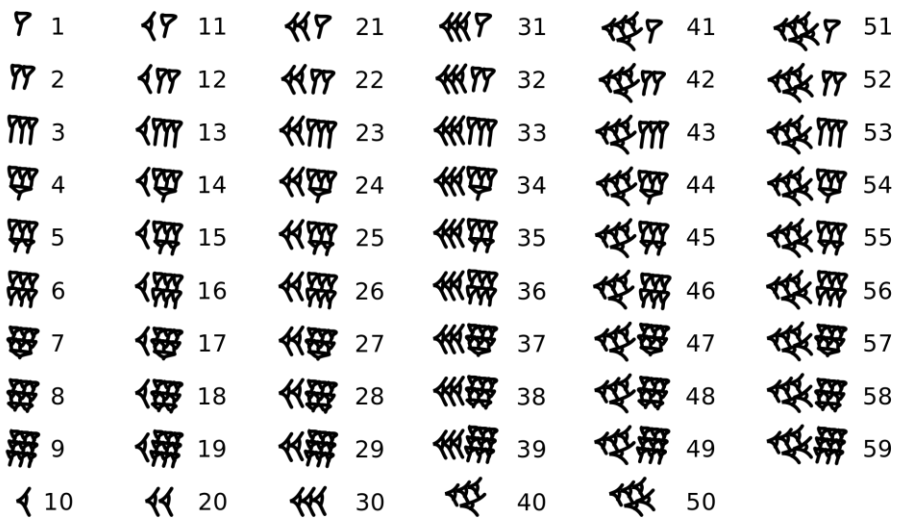
1.1. Εισαγωγή.

Είναι πολύ δύσκολο να καθορίσουμε πότε άρχισε να συλλαμβάνεται η έννοια της συνάρτησης για πρώτη φορά. Επιπροσθέτως, οι γνώμες διάφορων συγγραφέων συνήθως διαφέρουν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, δεν συμφωνούν ως προς το χρόνο όπου γεννήθηκε η έννοια της συνάρτησης (Youschkevitch, 1976). Σε πολλές περιπτώσεις στα Μαθηματικά, πολύ πριν δοθεί ένας φορμαλιστικός και μινιμαλιστικός ορισμός έχει προηγηθεί μια μακρόχρονη διαδικασία εξέλιξης. Η βαθύτερη έννοια της συνάρτησης προέρχεται από την ανάγκη του ανθρώπου να μετρήσει οτιδήποτε μπορεί για παράδειγμα το μήκος, το εμβαδόν, τον όγκο και πολλά άλλα μεγέθη της καθημερινής του ζωής. Υπό το πρίσμα αυτό λοιπόν θα πρέπει να αναζητήσουμε την έννοια της συνάρτησης πολλούς αιώνες πριν, τότε όπου έχουν μπει τα βαθύτερα θεμέλια της. Θα δείξουμε ότι η ανάγκη μέτρησης ενός μεγέθους από ένα άλλο, δηλαδή η μετάβαση από ένα σύστημα σε ένα άλλο ουσιαστικά γέννησε την έννοια της συνάρτησης καθώς επίσης και την αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής.

1.2. Η συνάρτηση στα αρχαία χρόνια.

1.2.1. Βαβυλώνιοι και αρχαίοι Έλληνες

Τα πρώτα στάδια της έννοιας της συνάρτησης έχουν γίνει κατά τα αρχαία χρόνια. Ακόμα και το 2000 π.χ. οι βαβυλωνιακοί Μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν ευρέως για τους υπολογισμούς εξηκονταδικούς πίνακες (σχήμα 1.1) για αντίστροφους αριθμούς, τέλεια τετράγωνα, τετραγωνικές ρίζες, τέλειους κύβους και κυβικές ρίζες καθώς επίσης και κάποιους άλλους πίνακες. Πίνακες συναρτήσεων δύο διαφορετικών τύπων, τις βαθμωτές συναρτήσεις και γραμμικές "zigzag" συναρτήσεις , όπως ο Neugebauer ([12], Κεφάλαιο 5) τις ονόμασε (Youschkevitch, 1976).



Σχήμα 1.1. Εξηκονταδικό Βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης.

Οι Βαβυλωνιακοί Μαθηματικοί, περίπου το 2000 π.χ., λοιπόν ήταν σπουδαίοι στην εκτέλεση υπολογισμών χωρίς όμως να υπάρχει η έννοια της Μαθηματικής απόδειξης μέσα στα μαθηματικά τους. Παρόλο αυτά, δεν θα ήταν καθόλου υπερβολικό να τους πιστώσουμε με την έννοια της συνάρτησης έστω και αν χρησιμοποιούταν θα μπορούσαμε να πούμε με κάποιον πρωτόγονο και συνάμα ενστικτώδη τρόπο. Θα ήταν πολύ λογικό και εύλογο να συμπεράνουμε ότι οι πίνακες τους και οι συσχετισμοί διαφόρων μεγεθών δίνουν ένα λακωνικό ορισμό της συνάρτησης (Bell, 1940).

Στην αρχαία Ελλάδα, ιδιαίτερα, η έννοια της συνάρτησης αρχίζει να εισέρχεται στα Μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. Η ενασχόληση των Πυθαγορείων με τη μουσική φαίνεται να ήταν έντονη και με απώτερο σκοπό τη σύνδεση των βασικών μουσικών διαστημάτων με τα μήκη των χορδών ενός μουσικού οργάνου, συνήθως μιας λύρας. Οι Πυθαγόρειοι ουσιαστικά ήθελαν να επιτύχουν μαθηματικοποίηση της μουσικής και πίστευαν ότι η τάση των χορδών σε μια λύρα δεν ήταν ουσιώδης, αλλά μόνο το μήκος των χορδών ήταν σημαντικό. Έτσι λοιπόν όλες οι αρχαίες λύρες (τρίχορδες, τετράχορδες, επτάχορδες και οκτάχορδες) είναι κατασκευασμένες με χορδές ίδιας τάσης αλλά διαφορετικών μηκών.

Είναι γνωστό ότι για να παραχθεί μια μουσική σύνθεση θα πρέπει να φτιάξουμε κατάλληλη ακολουθία μουσικών διαστημάτων. Για να φτιάξουμε ένα μουσικό διάστημα θα πρέπει να "χτυπήσουμε" ταυτόχρονα δύο χορδές. Η Πυθαγόρεια ονομασία των βασικών μουσικών διαστημάτων είναι:

1. Αρμονία.

2. Δι΄οξείαν.

3. Συλλαβήν.

4. Τόνος.

5. Δίεσις.

6. Πυθαγόρειον κόμμα.

Μάλιστα οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι έκαναν κάποια μουσικά πειράματα για να μπορέσουν να κατανοήσουν τα μουσικά διαστήματα. Ο Νεγρεπόντης αναφέρει:

Εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, μετά τον ίδιο τον Πυθαγόρα, ο Ίππασος, μαζί τον μη-Πυθαγόρειο Λάσο τον Ερμιονέα, ήταν μεταξύ των πρώτων για τους οποίους υπάρχουν αρχαίες πληροφορίες ότι ασχολήθηκαν με μουσικά πειράματα τα οποία συνέβαλαν στην μαθηματικοποίηση της θεωρίας της μουσικής (πρβλ. Θέων ο Σμυρνεύς 59,7 κ.ε. και το Ανώνυμο σχόλιο στο χωρίο 108d του Πλατωνικού διαλόγου Φαίδων) (σελ. 12-13).

Ο Ιάμβληχος έγραψε στο έργο του Περί του Πυθαγορικού Βίου ότι ο Πυθαγόρας κατάλαβε την αρμονία από κτύπο μεταξύ σφυριού και αμονιού μέσα σε σιδηρουργεία. Για παράδειγμα, για να αναπαράγει κάποιος την αρμονία πρέπει να παίξει σε μια οκτάχορδη λύρα την πρώτη και την όγδοη χορδή συγχρόνως. Η όγδοη χορδή έχει διπλάσιο μήκος από την πρώτη, οπότε τα μήκη των δύο χορδών βρίσκονται σε αναλογία $\frac{2}{1}$, με σημερινά μαθηματικά.

Πολλοί επιστήμονες μάλιστα υποστηρίζουν ότι η θεωρία λόγων φυσικών αριθμών έχει ξεκινήσει από τους Πυθαγόρειους και μάλιστα οι ιδιότητες των αναλογιών που ξέρουμε σήμερα μελετήθηκαν ακριβώς για να εξυπηρετήσουν μουσικές ιδιότητες. Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι δύο ζεύγη μουσικών χορδών είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν αναπαράγουν ακριβώς το ίδιο μουσικό διάστημα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο ζεύγη χορδών με μήκη α, β, γ και δ αντίστοιχα (όπου α<β<γ<δ φυσικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$) και ότι παίζοντας ταυτόχρονα τις χορδές με μήκη α και β αναπαράγεται το ίδιο μουσικό διάστημα που φτιάχνεται παίζοντας ταυτόχρονα τις χορδές με μήκη γ και δ ταυτόχρονα. Με σημερινά μαθηματικά θα συμβολίζαμε αυτή την μουσική ταύτιση με απλή ισότητα δύο κλασμάτων $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$, δηλαδή μία αναλογία. Θα μπορούσε σε αυτό το σημείο να ισχυριστεί κανείς με το παίξιμο δύο χορδών, δηλαδή με ένα κλάσμα για τα σημερινά δεδομένα, μπορούμε να αναπαράγουμε ένα και μόνο ένα μουσικό διάστημα. Είναι αξιοσημείωτο όμως το γεγονός ότι μπορούμε να παράγουμε το ίδιο μουσικό διάστημα και με τον χτύπο δύο άλλων χορδών. Δηλαδή, ίσως υπεραπλουστευμένα, μπορούμε *με ένα κλάσμα* να "βρούμε - αντιστοιχίσουμε" ένα και μόνο ένα μουσικό διάστημα, αλλά υπάρχουν και άλλα κλάσματα (ισοδύναμα) με τα οποία αναπαράγουμε το ίδιο μουσικό διάστημα. Είναι σαφές σε αυτό το σημείο ότι η έννοια της συνάρτησης μάλλον έχει πάρει σάρκα και οστά πολύ πριν δοθούν οι επίσημοι ορισμοί και τελικά καταλήξουμε στον επικρατέστερο.

Το μόνο ουσιαστικό "μειονέκτημα" που μπορούμε να εντοπίσουμε στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά ήταν η έλλειψη γνώσης της Άλγεβρας, η οποία βέβαια ανακαλύφθηκε αιώνες αργότερα.

Ο A.P.Youschkevitch (1976) αναφέρει:

Ο Ελληνικός συμβολισμός μέχρι περίπου τον τρίτο αιώνα π.Χ, εκτός από την χρήση ψηφίων, αυτοπεριορίστηκε στο να υποδηλώνει διάφορες ποσότητες με διαφορετικά γράμματα της αλφαβήτας. Καθόλου αλγεβρική φόρμουλα, κανενός είδους εμπεριστατωμένου αλγόριθμου και καμία αναλυτική έκφραση είχε ποτέ εισηγηθεί (σελ. 41).

Είναι φανερό λοιπόν ότι οι Μαθηματικοί της αρχαίας Ελλάδας δεν θα μπορούσαν ποτέ να εισαγάγουν την έννοια της συνάρτησης καθώς τους έλειπε ένα βασικό συστατικό, εργαλείο θα λέγαμε που χωρίς αυτό η έννοια της συνάρτησης θα φάνταζε φτωχή και χωρίς κανένα νόημα. Αυτό το μοναδικό εργαλείο και ταυτόχρονα δώρο στα σύγχρονα Μαθηματικά είναι η φοβερή γλώσσα της Άλγεβρας.

Κατά τη διάρκεια της Αλεξανδρινής εποχής, οι αστρονόμοι ανέπτυξαν την τριγωνομετρία των χορδών που αντιστοιχούν στην περιφέρεια σταθερής ακτίνας, χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Γεωμετρίας και κανόνες παρεμβολής, υπολόγιζαν πίνακες χορδών που ουσιαστικά ισοδυναμούν με πίνακες ημιτόνων. Οι παλαιότεροι πίνακες που σώζονται, βρίσκονται στην Αλμαγέστη του Πτολεμαίου, στην οποία υπάρχουν αριθμητικοί αστρονομικοί πίνακες άλλων ποσοτήτων, που είναι ισοδύναμες με ρητές συναρτήσεις και επίσης με απλές άρρητες συναρτήσεις όπου εισέρχεται η

συνάρτηση ημίτονο. Στην Αλμαγέστη του Πτολεμαίου δεν υπάρχουν μόνο τριγωνομετρικές συναρτήσεις που αφορούν τρίγωνα του επιπέδου αλλά και σφαιρική τριγωνομετρία. Για να προσδιορίσει κανείς τις συντεταγμένες στην ουράνια σφαίρα απαιτείται σφαιρική τριγωνομετρία η οποία μάλιστα έχει προηγηθεί χρονικά της επίπεδης τριγωνομετρίας. Τα σφαιρικά τρίγωνα έχουν και αυτά βέβαια πλευρές και γωνίες, όπως και τα τρίγωνα του επίπεδο, με τη διαφορά ότι οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι τόξα κύκλων. Επίσης ο Αρχιμήδης στο έργο του "Κύκλου μέτρησης" χρησιμοποιεί την συνάρτηση της εφαπτομένης για να υπολογίσει τον αριθμό π (Freudenthal, 1983).

1.2.2. Άραβες.

Μετά την παρακμή της αρχαίας Ελλάδας και κατ' επέκταση και των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, η Μαθηματική επιστήμη άνθισε πάλι με τους Άραβες τον 9^0 αιώνα π.Χ. Οι Άραβες Μαθηματικοί ήταν σίγουρα άξιοι συνεχιστές των Μαθηματικών στην Αρχαία Ελλάδα, καθώς είναι ο πρώτος λαός που ουσιαστικά έκτισε γερά θεμέλια πάνω στην Άλγεβρα. Οι Άραβες είναι ουσιαστικά ο λαός που γέννησε την Άλγεβρα και κατά γενική ομολογία χρησιμοποιήθηκε εκείνη την εποχή για να παράγει κάποιους κανόνες και για να τυποποιήσει κάποια μοτίβα. Προσπάθησαν λοιπόν οι Άραβες να εισάγουν την Άλγεβρα ως εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων, *κυρίως* του παρελθόντος, με τεράστιο πλεονέκτημα το αδιαμφισβήτητο γεγονός της πολύ απλής γραφής και του συμβολισμού που τους παρείχε η Άλγεβρα (Bell, 1945).

Όμως, οι Άραβες μαθηματικοί δεν παρουσίασαν κάτι ξεχωριστό πάνω στον τομέα των συναρτήσεων. Ουσιαστικά, εκείνη την εποχή, έγινε επέκταση και βελτίωση κάποιων ήδη γνωστών συναρτήσεων. Επιπλέον, έγινε εισήγηση κάθε μίας από τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις που γνωρίζουμε έως και σήμερα, αναπτύχθηκαν μέθοδοι που ουσιαστικά τελειοποίησαν την πινακοποίηση (πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν τετραγωνικές παρεμβολές μαζί με γραμμικές παρεμβολές), και αναπτύχθηκε ιδιαίτερα η μελέτη θετικών ριζών κυβικών πολυωνύμων με τη βοήθεια κωνικών τομών (Youschkevitch, 1976).

Όπως αναφέρει και ο Katz (1993):

Μέσα σε 50 χρόνια έργο των al- Khwārimī και ibh Turk, οι Μαθηματικοί από το Ισλάμ κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι απαραίτητες γεωμετρικές κατασκευές για τις αλγεβρικές λύσεις τετραγωνικών εξισώσεων πρέπει να βασίζονται στο έργο του Ευκλείδη, παρά σε αρχαιότερες παραδώσεις (σελ. 276).

Συγκεντρώνοντας και αναλύοντας όλες τις παραπάνω πληροφορίες, μπορούμε με σιγουριά να συμπερασματολογήσουμε ότι οι Άραβες μας έδωσαν το δώρο της Άλγεβρας, χωρίς τη χρήση της οποίας τα μαθηματικά και γενικά οι θετικές επιστήμες θα ήταν με βεβαιότητα ακόμη σε νηπιακό επίπεδο. Η εισαγωγή της Άλγεβρας στα Μαθηματικά, που ουσιαστικά τα μετατρέπει σε γλώσσα λογικής είναι ο εφαλτήριος μοχλός για την ανάπτυξη των επιστημών και γενικότερα για την πρόοδο και καλυτέρευση της ανθρώπινης ζωής. Οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί έκαναν ασύλληπτες ανακαλύψεις στα μαθηματικά, η μη χρήση Άλγεβρας όμως στα γραπτά τους μετατρέπουν τα

ογκώδη τους κείμενα σε δύστροπα ως προς την ανάγνωση αλλά και την κατανόηση. Επίσης θα πρέπει να είναι κανείς άριστος γνώστης της αρχαίας Ελληνικής γλώσσας, που είναι ιδιαιτέρως δύσκολη, για να κατανοήσει σε βάθος τα Μαθηματικά της εποχής ενώ η Άλγεβρα είναι μια παγκόσμια γλώσσα και η κατανόηση ενός μαθηματικού κειμένου πλέον μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή από ανθρώπους διαφορετικής εθνικότητας και γλώσσας.

Έτσι λοιπόν είναι σαφές ότι οι Άραβες γέννησαν την Άλγεβρα πάνω στα θεμέλια που είχαν βάλει οι Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, μελετώντας και λύνοντας προβλήματα που είχαν ήδη λυθεί, αλλά το έκαναν με έναν πολύ διαφορετικό, σύντομο, εξαιρετικό και συνοπτικό τρόπο. Έτσι λοιπόν δεν θα βρούμε σε αυτή την περίοδο κάτι το συγκλονιστικό πάνω στις συναρτήσεις, παρά μόνο βελτίωση των ήδη υπαρχουσών. Οι αρχικοί ορισμοί της συνάρτησης θα έρθουν πολλούς αιώνες αργότερα καθώς ο Μεσαίωνας είχε καταλυτικά αρνητική επίδραση στα Μαθηματικά και γενικότερα στις επιστήμες, με λίγες μονάχα φωτεινές εξαιρέσεις.

1.3. Η πορεία της έννοιας της συνάρτησης από τον 18^0 αιώνα και μετά

Όπως αναφέρει και ο Σπύρου (2005):

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στην επιστήμη των Μαθηματικών και τις εφαρμογές της και ανάγεται στην γενικότερη τάση του ανθρώπου να κάνει συσχετισμούς μεταξύ ποσοτήτων. Όμως, η πορεία που οδήγησε από τους απλούς συσχετισμούς στη σύγχρονη έννοια της συνάρτησης είναι περίπλοκη, μακρόχρονη και δραματική (σελ. 275).

Η έλλειψη της γνώσης της Άλγεβρας σίγουρα αποτελεί ένα τρομακτικό εμπόδιο στο να κατανοήσει κάποιος την έννοια της συνάρτησης. *Από την άλλη μεριά όμως ακόμα και κάποιος να έχει αποκτήσει πολύ καλές τεχνικές στην Άλγεβρα, δεν είναι σίγουρο ότι αυτό και μόνο το γεγονός θα σηματοδοτήσει την εις βάθος κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.* Θα μπορέσει να κάνει με πλήρη επιτυχία κάποιες αλγοριθμικές δραστηριότητες - διαδικασίες που αφορούν στον τομέα των συναρτήσεων, αλλά ίσως αυτό προκαλέσει ένα επιπρόσθετο εμπόδιο για να μπορέσει να καταλάβει την γενικότερη ιδέα της συνάρτησης (Sierpinska, 1992).

Πραγματικά, υπάρχουν αρκετοί μαθητές, κατά τη γνώμη του συγγραφέα πάντα, που δεν έχουν κατανοήσει καθόλου την έννοια της συνάρτησης ή την έχουν κατανοήσει λίγο, ενώ περιέργως είναι σε θέση να λύσουν σωστά πολλά και δύσκολα προβλήματα που εμπεριέχουν την χρήση συναρτήσεων. Και είναι βέβαιο ότι ένα μεγάλο ποσοστό εξ΄αυτών δεν ενδιαφέρεται να ανακαλύψει τον βαθύτερο λόγο ύπαρξης και γέννησης της έννοιας της συνάρτησης διότι ενδιαφέρεται μόνο για την *επίλυση προβλημάτων* χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις. Είναι θα λέγαμε απαγκιστρωμένοι στις δομές των συναρτήσεων και αδιάφοροι να μάθουν για την προέλευση της. Τα Μαθηματικά όμως δεν πρέπει να θεωρούνται μόνο ως ένα πεδίο το οποίο λύνει προβλήματα ή ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται σε άλλες επιστήμες αλλά θα πρέπει να κανείς να μελετάει σε βάθος τις έννοιες με τις οποίες έρχεται αντιμέτωπος και να τις κατανοεί σε πλήρη έκταση.

Το πρόβλημα λοιπόν της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης γιγαντώνεται στην ηλικία των 12-13 ετών όπου εισάγεται απλά ως ένα θεωρητικό Μαθηματικό αντικείμενο που δεν έχει, τουλάχιστον στα μάτια ενός μέσου μαθητή, κανένα αντίκρισμα με τον πραγματικό κόσμο. Στην ηλικία αυτή είναι πολύ λογικό ένας μαθητής να έχει μόνο βασικές γνώσης Άλγεβρας και να μην μπορεί να κατανοήσει καθόλου τον ορισμό που έχει το σχολικό βιβλίο. Θα δούμε λοιπόν παρακάτω στο κείμενο τον αρχικό ορισμό της συνάρτησης καθώς επίσης καθώς θα ακολουθήσουμε μια πορεία αλλαγών και εναλλαγών των ορισμών έως ότου καταλήξουμε στους ορισμούς που χρησιμοποιούμε σήμερα στη Μαθηματική κοινότητα.

Η πρώτη ιστορικά φορά που ορίστηκε η έννοια της συνάρτησης είναι από τον Jean Bernoulli το 1718 :

"Ορισμός. Αυτό καλείται Συνάρτηση μιας μεγαλειώδης μεταβλητής ως η ποσότητα που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτή τη μεγαλειώδη μεταβλητή και από σταθερές. "

Το πρωτότυπο κείμενο, στα γαλλικά είναι :

"Définition. On appelle ici Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable & de constantes." (Bernoulli, 1718, σελ. 241).

Στο ίδιο κείμενο ο Bernoulli (1718) χρησιμοποίησε το γράμμα φ για να χαρακτηρίσει μια συνάρτηση και για να δηλώσει ότι η μεταβλητή (η ανεξάρτητη) είναι το γράμμα x, έγραφε το συμβολισμό χωρίς κενό : φx. Ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον συμβολισμό f(x) είναι ένας από τους μεγαλύτερους Μαθηματικούς στην ιστορία, ο Euler (Youschkevitch, 1976).

Όπως παρατηρεί και ο Σπύρου (2005) : " η ιδέα της μεταβλητής ή της σταθεράς κατά τον Bernoulli δεν είναι τίποτα άλλο παρά εκτατά συνήθως γεωμετρικά μεγέθη κατά την μελέτη καμπύλων (τετμημένες, τεταγμένες κλπ.) (Euler, σελ. 2) στις οποίες αναφερόταν τα σύμβολα και φαινόταν ως συγκεκριμένες 'πραγματικές' οντότητες " (σελ. 276).

Ο Euler, μαθητής του Bernoulli, κινείται αρκετά κοντά στον ορισμό του Bernoulli και ουσιαστικά εισάγει την έννοια της αναλυτικής έκφρασης. Η μετάφραση του ορισμού της συνάρτησης που δίνει ο Euler (1797) είναι ο ακόλουθος :

Μια συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από την ίδια ποσότητα και από νούμερα ή σταθερές ποσότητες. Έτσι, κάθε αναλυτική έκφραση όπου, πέρα από την μεταβλητή z, περιέχει επίσης τις σταθερές ποσότητες είναι μια συνάρτηση του z. Για παράδειγμα: $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{(aa-zz)}$; c^z *κ.τ.λ. είναι συναρτήσεις του z*

(σελ. 4).

Σε αυτό το σημείο είναι ξεκάθαρο ότι ο Euler θέλει να δώσει έναν πιο συγκεκριμένο, αναλυτικό ορισμό από τον Bernoulli, χωρίς όμως να αλλάζει πολύ το νόημα στον ορισμό της. Για τον Euler λοιπόν, η αναλυτική έκφραση σημαίνει Μαθηματικός τύπος και ουσιαστικά η ποσότητα που παράγεται με τον τρόπο που ορίζουν ο Euler και Bernoulli, είναι η συνάρτηση. Επίσης, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο Euler είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί τον συμβολισμό f(x).

Είναι πλέον ξεκάθαρο ότι η συνάρτηση θεωρείται και από τους δύο ως η εξαρτημένη μεταβλητή που ονομάζουμε τα τελευταία χρόνια.

Στη συνέχεια, δίνεται ο ορισμός του Jean-Louis Lagrange (1797,σελ 18) :

" On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une maniére quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valuers données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valuers possibles. Ainsi, dans les fonction on ne considére que les quantirés qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées. "

Η δική μας μετάφραση στα ελληνικά είναι :

Αυτό καλείται συνάρτηση μίας ή περισσοτέρων ποσοτήτων, μια έκφραση υπολογισμού στην οποία αυτές οι ποσότητες εισέρχονται κατά οποιονδήποτε τρόπο, αναμεμιγμένες ή όχι με οποιονδήποτε τρόπο με άλλες ποσότητες που έχουμε ως προεπιλεγμένες και αμετάβλητες, ενώ οι ποσότητες της συνάρτησης μπορούν να πάρουν όλες τις δυνατές τιμές. Έτσι, στη συνάρτηση μας απασχολούν μόνο οι ποσότητες που θεωρούνται ως μεταβλητές, χωρίς να μας απασχολούν οι σταθερές που αναμειγνύονται.

Ουσιαστικά και ο Lagrange βρίσκεται στο ίδιο μήκος κύματος μόνο που ο ορισμός του είναι απαλλαγμένος από την έννοια της σταθεράς όπως αναφέρει και η Sierpinska (1992).

Στη συνέχεια, ο Cauchy (1821, σελ. 19) δίνει τον ακόλουθο ορισμό :

LORSQUE des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valuer de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valuers de toutes les autres, on concoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépedante; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on apelle des fonctions de cette variable.

Η αντίστοιχη μετάφραση στα ελληνικά πηγάζει από τη μετάφραση του παραπάνω κειμένου στα αγγλικά από τους Bradley & Sandifer (2009, σελ. 17):

Όταν μεταβλητές ποσότητες συσχετίζονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η τιμή της μιας εκ των μεταβλητών που δίνονται μπορεί να υπολογίσει τις τιμές όλων των άλλων μεταβλητών, τότε φυσιολογικά θεωρούμε αυτές οι μεταβλητές ποσότητες να εκφράζονται μέσα από αυτής ανάμεσά τους, που τότε παίρνει το όνομα ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσα από την

ανεξάρτητη μεταβλητή λέγονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής.

Από τον Lagrange μέχρι τον Cauchy υπάρχει μια μικρή μονάχα αλλαγή όσον αφορά στη γλώσσα αλλά και στον στόχο. Οι Bernoulli, Euler και Lagrange εξακολουθούν να ορίζουν τη σχέση των μεταβλητών ως τη συνάρτηση, ενώ για τον Cauchy, η συνάρτηση είναι το αποτέλεσμα των ενεργειών που γίνονται στην αναλυτική έκφραση. Σήμερα θεωρούμε την συνάρτηση να είναι ούτε ο νόμος ούτε η τιμή (το αποτέλεσμα), αλλά η συνάρτηση θεωρείται ένα σύνολο. Είναι δηλαδή η συνισταμένη αυτών των δύο και η έννοια του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών (Sierpinska, 1992).

Ο Boyer (1968) αναφέρει ότι ο Lejeune Dirichlet δίνει το 1837 έναν πολύ ευρύ ορισμό της συνάρτησης **:**

Αν μια μεταβλητή y είναι τόσο συσχετισμένη με μια μεταβλητή x κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε φορά που δίνεται μια αριθμητική τιμή στην x, να υπάρχει ένας κανόνας με τον οποίο να ορίζεται μια μόνο τιμή στην y, τότε λέμε ότι η μεταβλητή y θεωρείται να είναι μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Αυτός λοιπόν είναι και ο επικρατέστερος ορισμός που βρίσκεται με μικρές μόνο αλλαγές στην πλειονότητα των σχολικών βιβλίων καθώς θεωρείται από πολλούς ως ο ορισμός που κάνει ομαλή τη διδακτική μεταφορά της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές. Αυτός όμως ο ορισμός στην πραγματικότητα προκαλεί πολλά επιστημολογικά εμπόδια και ερωτηματικά στην κατανόηση του τι κατά βάθος εκπροσωπεί και που χρησιμεύει η συνάρτηση (Sierpinska, 1992).

Παρόλο που εκείνη την εποχή η έννοια του συνόλου και των πραγματικών αριθμών δεν υπήρχε, αυτός ο ορισμός είναι πολύ κοντά στον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης ιδιαίτερα στο μονοσήμαντο της υπόθεσης, αφού γίνεται πρώτη φορά αναφορά σε κάτι τέτοιο. Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι ο Dirichlet κατασκεύασε αυτόν τον ορισμό της συνάρτησης ώστε να προσπαθήσει, όπως και τα κατάφερε το 1828 με δημοσίευση στο Leopold Crelle's Journal, να αποδείξει τα κριτήρια σύγκλισης της σειράς Fourier σε μία συνάρτηση. Αυτά τα κριτήρια είναι γνωστά και ως κριτήρια σύγκλισης του Dirichlet.

Ο Fourier, σε μικρή ηλικία, είχε την λαμπρή ιδέα ότι κάθε συνάρτηση y=f(x) μπορεί να γραφτεί σε μορφή:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \cdots + a_n\cos(nx) + \cdots + b_1\sin x + b_2\sin(2x) + \cdots + b_n\sin(nx)\cdots$$

Ο Fourier δεν απέδειξε τον ισχυρισμό του καθότι πέθανε στον πόλεμο το 1815 αλλά όπως αναφέρει και ο Boyer (1968) οι συναρτήσεις για τις οποίες έχει εφαρμογή αυτή η σειρά είναι πολλές περισσότερες από αυτές της σειράς Taylor καθώς στη σειρά Fourier μια συνάρτηση μπορεί να είναι

μη παραγωγίσιμη σε πολλά σημεία, και ούτε καν συνεχής σε αυτά.

Σύμφωνα με τους Spyrou & Zagorianakos (2010) παρατηρούμε την αναγκαιότητα της συνθήκης ότι κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα σε μια μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Έτσι λοιπόν, για να καταλάβουμε την επιστημολογική αλλαγή στον ορισμό του Dirichlet, είναι πολύ χρήσιμο να κατανοήσουμε την πρόοδο της επιστήμης εκείνης της εποχής μέσω της επανάστασης της έννοιας της συνάρτησης.

Η ανάγκη του ανθρώπου να μετρήσει κάτι καινούργιο χρησιμοποιώντας προηγούμενα μεγέθη τα οποία είναι γνωστά και μετρήσιμα είναι ακριβώς εκείνη που οδήγησε τον Dirichlet σε αυτόν τον ορισμό.

Δηλαδή η συνάρτηση είναι μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία μπορούμε να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς. Για την ακρίβεια, θα ήταν πολύ εύστοχο να ισχυριστεί κάποιος ότι η μεταβλητή x, δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή, είναι εκείνη στην οποία έχουμε πρόσβαση και μόνο μέσω αυτής μπορούμε να εκτιμήσουμε (να μετρήσουμε) την εξαρτημένη μεταβλητή y. Το γεγονός ότι η μέτρηση ενός μεγέθους είναι μονοσήμαντη, στοιχειοθετεί και το λόγο για τον οποίο η κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής δίνει, μετράει, αντιστοιχεί σε μόνο μία τιμή της μεταβλητής y. Με αυτή την οπτική η συνάρτηση προσφέρεται ως διαμεσολαβητικό εργαλείο ή ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση ή ακόμα περιγραφή. (Σπύρου, 2005)

Στα σύγχρονα πανεπιστημιακά βιβλία επικρατούν κυρίως δύο ορισμοί της συνάρτησης οι οποίοι είναι καθαρά συνολοθεωρητικοί:

1. Ο πρώτος ορισμός αναφέρει ότι συνάρτηση είναι μια διατεταγμένη τριάδα (X,Y,f) , όπου X και Y είναι σύνολα και f υποσύνολο του γινομένου X x Y έτσι ώστε αν το ζεύγος (x,y) ανήκει στο f και το ζεύγος (x,y') ανήκει στο f τότε y=y'.
2. Ο δεύτερος ορισμός είναι ο ακόλουθος:

   Έστω δύο τυχαία σύνολα X και Y. Ονομάζουμε συνάρτηση $f : X \to Y$ ένα υποσύνολο f , του καρτεσιανού γινομένου X x Y τέτοιο ώστε αν $x \in X$, υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in f$. Το σημείο y είναι μοναδικό: Με άλλα λόγια, αν $x \in X$ και $y \in Y$ και $z \in Y$ είναι τέτοια ώστε αν $(x, y) \in f$ και $(x, z) \in f$, έπεται ότι y=z .

1.4. Ο ορισμός της συνάρτησης στα βιβλία του οργανισμού.

Προφανώς, ο παραπάνω ορισμός βρίσκεται σε αρκετά πανεπιστημιακά βιβλία και δεν θα μπορούσε ποτέ να βρίσκεται στα βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στα σχολικά βιβλία, οι ορισμοί είναι σε απλουστευμένη μορφή, έτσι ώστε να γίνουν κατανοητοί από τους μαθητές και η διδακτική μεταφορά της έννοιας της συνάρτησης να γίνει κατά το μέτρο του δυνατού ομαλότερη.

Συγκεκριμένα:

- Στην Α'Γυμνασίου οι Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος (2012) αναφέρουν ότι: " Η σχέση $y=\alpha\cdot x$ εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y. Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό κ.ο.κ. του άλλου ποσού" (σελ. 96). Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι δεν δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης, ούτε καν αναφέρεται η λέξη συνάρτηση. Η σχέση $y=\alpha\cdot x$ αναφέρεται ως σχέση αλληλεπίδρασης και δεν γίνεται κανένας λόγος για διάκριση εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής. Γίνεται όμως η πρώτη προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την πιο απλή μορφή συνάρτησης, το γραμμικό μοντέλο $y=\alpha\cdot x$.

Α.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα.

- *Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;*
- *Πώς δικαιολογείς το συμπεράσμά σου;*

Βάρος σε Kg	58	71	56	68
Ύψος σε m	1,60	1,65	1,62	1,72

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 € το κιλό. Μέσα σε μια ημέρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.

- *Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:*

Τιμή	6 €	2,8 €	5,2 €	3,2 €		3,6 €	4,8 €	2,4 €	1,6 €	4,4 €	2 €
Κιλά											

- *Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις ένα γενικό κανόνα.*

Μαθαίνουμε

- Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.
- Δύο ποσά **x** και **y** είναι **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο: $\frac{y}{x} = \alpha$. Το πηλίκο **α** λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.
  - Τα ανάλογα ποσά **x** και **y** συνδέονται με τη σχέση: $y = \alpha \cdot x$ όπου **α** ο συντελεστής αναλογίας.
  - Όταν το ποσό **y** είναι **ποσοστό** του ποσού **x**, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση: $y = \frac{\alpha}{100} \cdot x$ και είναι **ανάλογα**, με **συντελεστή αναλογίας** το $\frac{\alpha}{100}$ ή **α%**.
- Η σχέση $y = \alpha \cdot x$ εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y. Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό κ.ο.κ. του άλλου ποσού.

Σχήμα 1.2. Ανάλογα ποσά στην Α΄Γυμνασίου. Βανδουλάκης κ.α. (2012)

- Στη Β΄Γυμνασίου, δίνεται ξεκάθαρα ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης από τους Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης (2012):

  " Με τη σχέση αυτή κάθε τιμή της μεταβλητής x (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά ονομάζεται συνάρτηση" (σελ.56). Στο σημείο αυτό δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης ως μια σχέση αντιστοίχισης δύο μεταβλητών και μάλιστα τονίζεται και το μονοσήμαντο. Επιπροσθέτως, γίνεται ξεκάθαρη διάκριση των δύο μεταβλητών, χωρίς όμως να ονομάζονται ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή αντίστοιχα.

3.1. Η έννοια της συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;

β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

για τον πρώτο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24$ €,

για τον δεύτερο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33$ €.

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03x$ δηλαδή $y = 0{,}03x$.

Παρατήρηση:

Η σχέση $y = 0{,}03x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x. Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό $x = 700$ €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$ €. Ομοίως, για $x = 1500$ βρίσκουμε αύξηση $y = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ €.

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση).
Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **«η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x»**. Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $y = 0{,}03x$.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση $y = 0{,}03x$ έχουμε:

Για $x = 700$, $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$.
Για $x = 800$, $y = 0{,}03 \cdot 800 = 24$.
Για $x = 900$, $y = 0{,}03 \cdot 900 = 27$.
Για $x = 1000$, $y = 0{,}03 \cdot 1000 = 30$.
Για $x = 1100$, $y = 0{,}03 \cdot 1100 = 33$.

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης $y = 0{,}03x$.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

Σχήμα 1.3. Η έννοια της συνάρτησης στη Β΄Γυμνασίου. Βλάμος κ.α. (2012)

- Στη Γ΄Γυμνασίου δίνεται ο ακόλουθος ορισμός από τους Αργυράκη, Βουργάνα, Μεντή, Τσικοπούλου & Χρυσοβέργη (2014):

  "Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y" (σελ. 144). Ουσιαστικά, δίνεται πάλι ο ίδιος ορισμός με τη μόνη διαφορά να επίκειται στο γεγονός ότι σε αυτόν τον ορισμό δεν υπάρχει η λέξη σχέση διότι έχει αντικατασταθεί από τη λέξη διαδικασία.

4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

- ✓ *θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.*
- ✓ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a \neq 0$.*
- ✓ *Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = ax^2$ από τη γραφική της παράσταση.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
– Ο αριθμός y που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού x είναι y = ...
– Το εμβαδόν y ενός ορθογωνίου με πλάτος x και διπλάσιο μήκος είναι y = ...
– Το εμβαδόν y ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα x είναι y = ...

2. Στην πρώτη πρόταση, όταν ο x πάρει τις τιμές –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές του y;

3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη (x, y) που προσδιορίσατε και να σχεδιάσετε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a > 0$

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

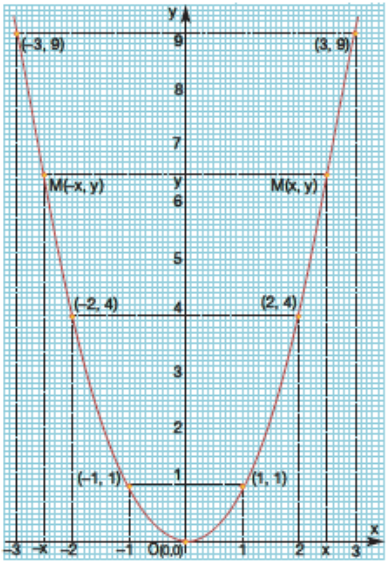
Π.χ. Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$,
για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$ κ.τ.λ.

Σ' ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



144

Σχήμα 1.4. Η συνάρτηση $y = \alpha \cdot x^2, \alpha \neq 0$ στη Γ΄Γυμνασίου. Αργυράκης κ.α. (2014).

- Στην Α΄Λυκείου δίνεται ο ακόλουθος ορισμός της συνάρτησης από τους Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος & Σβέρκος (2012):

  " Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β " (σελ. 146). Ουσιαστικά, ο ορισμός έχει πολύ μικρές αλλαγές πάνω του σε σχέση με τις προηγούμενες τάξεις και οι όποιες εντοπίζονται μόνο στην εισαγωγή των συνόλων Α και Β στην Α΄Λυκείου. Οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί ξανά την έννοια του συνόλου στο Γυμνάσιο, εκτός και αν έχουν διδαχθεί το κεφάλαιο των πιθανοτήτων στη Γ'Γυμνασίου, οπότε είναι η πρώτη φορά που μαθαίνουν αυτόν τον ορισμό της συνάρτησης. Επίσης, δίνονται για πρώτη φορά οι ορισμοί του πεδίου ορισμού, του συνόλου τιμών, της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής καθώς επίσης χρησιμοποιείται για πρώτη φορά το σύμβολο $f(x)$. Η θεωρία λοιπόν πάνω στις συναρτήσεις είναι σίγουρα περισσότερο εμπλουτισμένη στην τάξη της Α΄Λυκείου, κάτι που είναι λογικό να συμβαίνει, ενώ στο Γυμνάσιο η έννοια της συνάρτησης και η γενικότερη διδακτική της μεταφορά της γίνεται με ομαλότερο τρόπο. Ο ορισμός όμως της συνάρτησης στο Γυμνάσιο και στη Α΄Λυκείου έχει ελάχιστες διαφορές.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 6ο

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{\varepsilon}{100}$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν ε = 3, τότε Τ = 150, ενώ αν ε = 5, τότε Τ = 250 κτλ.
2. Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα υ σε km/h, δίνεται από τον τύπο S = 2υ. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν υ = 60, τότε S = 120, ενώ αν υ = 70, τότε S = 140 κτλ.
3. Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα, αν ρ = 1, τότε Ε = π, ενώ, αν ρ = 2, τότε Ε = 4π κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.

Σχήμα 1.5. Η έννοια της συνάρτησης στην Α΄Λυκείου. Ανδρεαδάκης κ.α (2012)

✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται συνάρτηση από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.
Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.
Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x**. Το γράμμα **x**, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$.
Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f : A \to B$$

$$x \to f(x)$$

Έτσι π.χ. η συνάρτηση f, με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \to \sqrt{x}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Έστω f η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.

Σχήμα 1.6. Η έννοια της συνάρτησης στην Α΄Λυκείου. Ανδρεαδάκης κ.α (2012)

- Οι Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπουχούτας, Παπασταυρίδης & Πολύζος (2014) δίνουν τον ορισμό της συνάρτησης στη Γ΄Λυκείου ως εξής:

  Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$ (σελ. 133).

  Ο παραπάνω ορισμός διαφέρει μονάχα στα "σημεία" συγκριτικά με τον αντίστοιχο ορισμό της συνάρτησης στο βιβλίο του οργανισμού της Α΄Λυκείου με την μόνη αλλαγή να έγκειται στο γεγονός ότι τονίζεται η έννοια της πραγματικής συνάρτησης. Αυτό κατά την άποψη του συγγραφέα γίνεται διότι οι μαθητές της Γ΄Λυκείου έχουν προηγουμένως διδαχθεί τους μιγαδικούς αριθμούς και υπάρχει μεγάλη αναφορά μέσα σε ασκήσεις σε αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής $f(z),\ z \in C$ και έτσι για να μην υπάρξει παρανόηση τονίζεται ότι και η ανεξάρτητη αλλά και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$
$$x \to f(x).$$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

— Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

— Όταν θα λέμε ότι **"Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο Β"**, θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή:

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}.$$

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα *θεωρούμε συμβατικά* ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε "δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$,

Σχήμα 1.7. Ορισμός συνάρτησης στη Γ΄Λυκείου. Ανδρεαδάκης κ.α. (2014)

1.5. Κύρια σημεία του 1ου κεφαλαίου.

Κλείνοντας λοιπόν το πρώτο κεφάλαιο, θα ήταν πολύ σκόπιμο να κάνουμε μια συνοπτική ανακεφαλαίωση. Τα κύρια λοιπόν θέματα που συζητήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο είναι τα ακόλουθα:

- Η γέννηση της έννοιας της συνάρτησης γίνεται μέσω της έννοιας της μέτρησης, χωρίς βέβαια να έχει αναφερθεί ποτέ η λέξη συνάρτηση, κατά τους Βαβυλωνίους και τους αρχαίους Έλληνες. Η ύπαρξη πινάκων τετραγωνικών, κυβικών, τετραγωνικών και κυβικών ριζών, αντίστροφων αριθμών, τριγωνομετρικών αριθμών και πολλοί άλλοι πίνακες που θέτουν τα θεμέλια για τη δημιουργία και θεμελίωση των αντίστοιχων συναρτήσεων.

- Αντιστοίχιση μηκών χορδών οκτάχορδης λύρας με αντίστοιχα κλάσματα από τους Πυθαγορείους. Αντιστοίχιση δηλαδή ενός κλάσματος σε ένα και μόνο ένα μουσικό διάστημα.

- Εισαγωγή της Άλγεβρας από τους Άραβες (9ος αιώνας π.Χ.). Η χρήση της αποτελεί τεράστιο πλεονέκτημα όσο αναφορά στην επίλυση προβλημάτων, *κυρίως όμως του παρελθόντος*, χωρίς όμως να παρουσιάσουν κάτι καινούργιο στον τομέα των συναρτήσεων (Bell, 1945).

- Η πορεία της συνάρτησης από τον 18ο αιώνα και μετά. Ο πρώτος που αναφέρει τη λέξη συνάρτηση (fonction) και την ορίζει είναι ο Bernoulli (1718). Η ιδέα της έννοιας της μεταβλητής για εκείνον είναι εκτατά συνήθως γεωμετρικά μεγέθη (Σπύρου, 2005). Στη συνέχεια ο Euler (1797) δίνει έναν παραπλήσιο ορισμό για τη συνάρτηση και ακολουθούν οι Lagrange (1797) και Cauchy (1821) με μία μικρή μονάχα αλλαγή στη γλώσσα αλλά και το στόχο όσον αφορά στους δύο τελευταίους.

- Ο Dirichlet δίνει το 1837 έναν πολύ ευρύ ορισμό για τη συνάρτηση, κατά τον Boyer (1968), ο οποίος είναι και ο πρώτος ορισμός που εμπεριέχει τη μονοσήμαντη σχέση της ανεξάρτητης μεταβλητής σε σχέση με την εξαρτημένη. Ο ορισμός αυτός βρίσκεται στην πλειονότητα των σχολικών βιβλίων αυτούσιος ή με μικρές αλλαγές και σύμφωνα με τη Sierpinska (1992) προκαλεί πολλά επιστημολογικά εμπόδια.

- Σύμφωνα με τους Spyrou & Zagorianakos (2010) η ανάγκη του ανθρώπου να μετρήσει κάτι καινούργιο χρησιμοποιώντας προηγούμενα γνωστά μεγέθη οδήγησε τον Dirichlet να εισάγει για πρώτη φορά σε ορισμό της συνάρτησης τη συνθήκη όπου κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα σε μια μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Το γεγονός ότι η μέτρηση ενός μεγέθους είναι μονοσήμαντη, στοιχειοθετεί και το λόγο για

τον οποίο η κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής δίνει-μετράει-αντιστοιχεί σε μόνο μία τιμή της μεταβλητής y (Σπύρου, 2015).

- Στα σύγχρονα πανεπιστημιακά βιβλία ο ορισμός είναι απαλλαγμένος από οτιδήποτε περιττό όπως οφείλει να είναι ένας ορισμός στα σύγχρονα Μαθηματικά, είναι θα λέγαμε μινιμαλιστικός και είναι συνολοθεωρητικός. Τέτοιος ορισμός δεν θα μπορούσε να βρίσκεται σε βιβλία Γυμνασίου ή Λυκείου.

- Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης στα σχολικά βιβλία του οργανισμού: Όλα τα βιβλία του οργανισμού, από τη Β΄τάξη του Γυμνασίου έως και τη Γ΄τάξη του Λυκείου έχουν ως κοινό παρονομαστή τον ορισμό του Dirichlet και η συνάρτηση αναφέρεται μονάχα ως αντιστοίχιση και ως κάποια διαδικασία ή κανόνας.

- Δεν αναφέρεται σε κανένα σχολικό βιβλίο ότι η έννοια της συνάρτησης έχει βασική αρχή τη μέτρηση και όχι απλά μια άσκοπη και ακατανόητη αντιστοίχιση η οποία περιέχει μάλιστα μια ακόμα πιο ακατανόητη συνθήκη: ότι κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή του y.

Παρατηρούμε τελικά ότι από τη πρώτη στιγμή που τυπικά παρουσιάστηκε η έννοια της συνάρτησης από τον Bernoulli μέχρι και τον ορισμό που επικρατεί στα σχολικά βιβλία (του Dirichlet) έχει υπάρξει μια ζύμωση, μια πορεία αλλαγών στους ορισμούς και αυτό σίγουρα δε μπορεί να είναι τυχαίο. Ο Bernoulli λοιπόν έκανε μια φοβερή τυποποίηση και ένα τεράστιο άλμα στα Μαθηματικά ορίζοντας τη συνάρτηση ως μια ποσότητα (μεταβλητή) όπου παράγεται με οποιονδήποτε τρόπο από μια μεγαλειώδη μεταβλητή και από σταθερές.

Η ιδέα της συνάρτησης όμως δεν είναι ανακάλυψη του Bernoulli, αλλά προϋπάρχει στο βάθος των αιώνων. Για παράδειγμα, το τετράγωνο ενός αριθμού συντίθεται από τον πολλαπλασιασμό του αριθμού με τον εαυτό του. *Η τελευταία λοιπόν σχέση* ($x \to x^2$) *είναι γνωστή μέσα σε πολλούς πίνακες της αρχαιότητας και μόνο η λέξη συνάρτηση λείπει από το να την περιγράψει.* Ο Bernoulli λοιπόν δεν έβαλε τα θεμέλια για την έννοια της συνάρτησης, διότι αυτά είχαν τοποθετηθεί πολλούς αιώνες πριν από εκείνον. Έδωσε όμως στη μαθηματική κοινότητα τη λέξη και τον ορισμό της συνάρτησης ο οποίος άλλαξε ριζοσπαστικά από τον Dirichlet. Θα πρέπει να αναζητήσουμε το λόγο που ο Dirichlet ανέφερε στον ορισμό του τη μονοσήμαντη αντιστοίχιση της μιας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη. Ο λόγος που έγινε αυτή η τεράστια αλλαγή στον ορισμό της συνάρτησης είναι απλός και προέρχεται από την ίδια την ιδέα που γέννησε τη συνάρτηση. Η ιδέα που γέννησε τη συνάρτηση είναι η μέτρηση μεγεθών χρησιμοποιώντας γνωστά - μετρήσιμα μεγέθη. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι αυτό είχε στο μυαλό του ο Dirichlet, όταν έδινε τον ορισμό της συνάρτησης. *Ο Dirichlet λοιπόν έχοντας στο νου του ότι η έννοια της συνάρτησης βασίζεται στη μέτρηση και θεμελιώνοντας την αδιαμφισβήτητη άποψη ότι όταν μετράμε κάτι δεν μπορούμε να έχουμε δύο ή περισσότερα αποτελέσματα* (εκτός και αν μιλάμε για

πείραμα όπου τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά κάποιες φορές, διότι οι αρχικές συνθήκες του πειράματος δεν είναι ακριβώς οι ίδιες), κατέληξε στην απαραίτητη συνθήκη ότι η κάθε τιμή της μεταβλητής που έχουμε πρόσβαση, της ανεξάρτητης μεταβλητής δηλαδή, αντιστοιχεί σε ένα μόνο αποτέλεσμα, σε μια μόνο τιμή της εξαρτημένης - διαμεσολαβημένης μεταβλητής.

Το γεγονός ότι χρησιμοποιείται ο ορισμός του Dirichet κατά κόρον στα σχολικά βιβλία και όχι για παράδειγμα ο ορισμός του Euler ή του Lagrange δείχνει κατά μεγάλο βαθμό τις προθέσεις των μαθηματικών που ενσωμάτωσαν τον ορισμό αυτόν στο αναλυτικό πρόγραμμα. Έτσι λοιπόν είναι πλέον ξεκάθαρο ότι στο μυαλό τους βρίσκεται ότι η έννοια της συνάρτησης βασίζεται στη μέτρηση.

Ο ίδιος ο ορισμός λοιπόν (του Dirichlet) δημιουργεί πολλά προβλήματα στους μαθητές και αυτό είναι ένα διαδεδομένο επιστημολογικό εμπόδιο (Sierpinska, 1992) όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Επίσης, κατά την άποψη πάντα του ερευνητή της έρευνας αυτής, υπάρχει μια μεγάλη μερίδα καθηγητών που δεν γνωρίζει την ιστορική πορεία της συνάρτησης, την αναγκαιότητα της και την απλή της προέλευση και όπου ασχολούνται μόνο με την επίλυση ασκήσεων και την μεταφορά μεθοδολογιών στους μαθητές. Αυτό όμως βασίζεται σε προσωπική εκτίμηση του ερευνητή της εργασίας αυτής και θα μπορούσε να αποτελέσει μελέτη για μια άλλη έρευνα.

Οι δυσκολίες της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές είναι πάρα πολλές και θα αναλύσουμε αρκετές από αυτές στο επόμενο κεφάλαιο όπου μεταξύ των άλλων θα μελετήσουμε τα επιστημολογικά εμπόδια που αναφέρει η Sierpinska (1992), την άποψη του Ponte (1992), της Lambertus (2008) και πολλών άλλων.

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι ακριβώς να αναδείξει ότι πολλά από τα προβλήματα που έχουν οι μαθητές πάνω στο κομμάτι των συναρτήσεων βρίσκεται στη ρηχή απομνημόνευση του σχολικού ορισμού της συνάρτησης και ότι η εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης πρέπει να γίνει με ένα παράδειγμα μέτρησης όπου το ένα μέγεθος να μπορεί να μετρηθεί αποκλειστικά και μόνο από το άλλο. Θα πρέπει δηλαδή ο σχολικός ορισμός να έπεται του παραδείγματος διαμεσολαβημένης μέτρησης διότι έτσι θα είναι πολύ εύκολο να εξηγηθεί ο ορισμός στους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

2.1. Εισαγωγή.

Οι συναρτήσεις έχουν μια εξέχουσα θέση σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, ακόμη και στο δημοτικό. Θεμελιώδης για την μελέτη των Μαθηματικών, η έννοια της συνάρτησης έχει αναγνωριστεί ως η μόνη τόσο σημαντική έννοια από το δημοτικό έως και την αποφοίτηση από το σχολείο (Dubinsky & Harel, 1992). Η έννοια της συνάρτησης απαιτεί ποικίλες αναπαραστάσεις, κάθε μία εξ΄αυτών προσφέρει πληροφορίες σε συγκεκριμένους τομείς χωρίς όμως καμία να είναι σε θέση να την περιγράψει σε πλήρη έκταση. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται είναι τα βελοδιαγράμματα, οι πίνακες τιμών, οι γραφικές αναπαραστάσεις και οι εξισώσεις (Iliada, Panaoura, Gagatsis, Gavvani & Spyrou, 2008).

Στην πραγματικότητα κάποιοι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν αυτές τις αναπαραστάσεις και μεταφέρονται από την μια κατάσταση στην άλλη, όμως λίγοι είναι εκείνοι που έχουν καταλάβει σε πλήρη έκταση την έννοια της συνάρτησης. Θα λέγαμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών έχει μάθει μνημονικά κάποιους λειτουργικούς κανόνες, ακόμα και τον ίδιο τον ορισμό. Δεν έχουν κατανοήσει όμως στην πραγματικότητα τη σπουδαιότητα και την αναγκαιότητα της ύπαρξης της συνάρτησης τόσο στον κόσμο των Μαθηματικών, πολλώ δε μάλλον και στον πραγματικό κόσμο. Η αποστήθιση του ορισμού σαφώς και δεν οδηγεί στην κατανόηση της έννοιας και θα πρέπει κάποιος να ασχοληθεί ιστορικά με την πορεία της συνάρτησης μέσα στους αιώνες για να κατακτήσει την έννοια της συνάρτησης και να κατανοήσει τον όποιον ορισμό.

Ενδεχομένως, πολλοί εκπαιδευτικοί δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την έννοια της συνάρτησης και αυτός είναι και ένας επιπλέον λόγος που προκαλεί δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές. Οι Μαθηματικοί υποστηρίζουν την ύπαρξη και τις ιδιότητες αυτής της άυλης, ασαφής και ακατανόητης προς τους μαθητές έννοιας χωρίς να δίνουν σημασία στις όποιες φιλοσοφικές ερωτήσεις που μπορούν να προκληθούν από όλα αυτά (Sfard, 1991). Πραγματικά, για να μπορέσουμε να μιλήσουμε για κάποια μαθηματικά αντικείμενα, θα πρέπει να είμαστε ικανοί να χειριστούμε τα προϊόντα των διαδικασιών χωρίς να μας ενδιαφέρουν οι διαδικασίες αυτές. Στην περίπτωση των συναρτήσεων και των συνόλων (στη σύγχρονη μορφή τους), όπως αναφέρει η Sfard (1991), πολλές φορές αγνοούμε την ανάγκη κατασκευής και ύπαρξής τους και ασχολούμαστε περισσότερο με τις ιδιότητές τους. Όπως αναφέρει και ο Vinner (1983): "πολλοί μαθητές επιτυγχάνουν στις εξετάσεις, έχοντας λανθασμένη εικόνα έννοιας (concept image)". (σελ. 13)

Πραγματικά, σύμφωνα με το συγγραφέα της παρούσας εργασίας, στην Ελλάδα η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δεν ασχολείται αρκετά με το να μεταφέρει στους μαθητές τον πραγματικό λόγο ύπαρξης της έννοιας της συνάρτησης τόσο στα Μαθηματικά, τόσο και στις υπόλοιπες φυσικές επιστήμες. Το σύνολο των εκπαιδευτικών απλά δίνει τον ορισμό της συνάρτησης στους μαθητές

και στη συνέχεια ασχολείται με διάφορα μοντέλα συναρτήσεων, με συγκεκριμένες ιδιότητες και με τις διάφορες αναπαραστάσεις που προκύπτουν από την έννοια της συνάρτησης. Πολλοί μαθητές είναι ουσιαστικά αναγκασμένοι να μάθουν όλες τις ιδιότητες των συναρτήσεων χωρίς να τους έχει εξηγήσει κάποιος την αναγκαιότητα του ανθρώπου να δημιουργήσει την συνάρτηση. Θα μπορούσε λοιπόν να πει κάποιος ότι τα θεμέλια της γνώσης στο συγκεκριμένο κλάδο είναι σαθρά και είναι πολύ εύκολο να γκρεμιστούν. Βέβαια οι ανασταλτικοί παράγοντες που αποτελούν εμπόδια ως προς την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές είναι πολλοί και συνάμα σημαντικοί και αυτό είναι κάτι που συμβαίνει σε παγκόσμια κλίμακα και όχι μόνο στην Ελλάδα.

2.2. Επιστημολογικά εμπόδια.

Η Sierpinska (1992) αναφέρει:

μπορούμε να κατανοήσουμε μια έννοια μόνο εάν πρώτα από όλα δούμε παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, έτσι ώστε να μπορέσουμε να πούμε τι είναι αυτή η έννοια και τι δεν είναι. Δεύτερον, όταν είμαστε ενήμεροι για τις σχέσης αυτής της έννοιας με άλλες σχέσεις. Τρίτον, όταν καταλάβουμε ότι αυτές οι σχέσεις είναι ανάλογες με σχέσεις που είναι οικείες με εμάς και τέταρτον όταν έχουμε αντιληφθεί ότι η έννοια αυτή κρύβει μέσα της μια θεωρία και ποιες είναι οι πιθανές εφαρμογές της. Τότε μπορούμε να πούμε ότι κάτι έχουμε αρχίσει να καταλαβαίνουμε για το αντικείμενο, δηλαδή τότε έχουμε κατανοήσει τις βασικές αρχές της συγκεκριμένης έννοιας (σελ.26).

Η έννοια αυτή δεν έχει υποχρεωτικά μαθηματικό περιεχόμενο αλλά μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε έννοια. Αν δεν περάσουμε από αυτά τα στάδια που αναφέρθηκαν παραπάνω τότε ή δεν έχουμε κατανοήσει καθόλου την έννοια αυτή ή έχουμε κατανοήσει μνημονικά κάποιες λειτουργίες της με αποτέλεσμα να τις ξεχάσουμε και αυτές εντελώς με την πάροδο του χρόνου. Πραγματικά, ο ανθρώπινος εγκέφαλος μαθαίνει και κατανοεί ένα αντικείμενο σε βάθος όταν καταλάβει πρώτα από που προέρχεται αυτό και ποια είναι η χρησιμότητά του διότι μόνο έτσι κάνει τις απαραίτητες συνδέσεις με αυτό.

Η Sierpinska (1992) ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως εξής: "Αν ένα εμπόδιο δεν είναι μόνο δικό μας ή πιθανών μερικών άλλων ανθρώπων, αλλά είναι πολύ εξαπλωμένο, ή υπήρξε πολύ εξαπλωμένο κάποτε ή σε κάποιον πολιτισμό, αυτό τότε καλείται επιστημολογικό εμπόδιο." (σελ.28). Αυτού του είδους τα εμπόδια θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι είναι εκείνα που συναντάει η πλειονότητα των ανθρώπων και για αυτό πρέπει να θεωρηθούν σημαντικά αλλά και να ξεπεραστούν αφού πρώτα υπάρξει σοβαρή επιστημονική μελέτη πάνω σε αυτά.

Τα επιστημολογικά εμπόδια που δημιουργούνται στους μαθητές από τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης με τον παραδοσιακό τρόπο είναι μεγάλης έκτασης. Η διδασκαλία δεν θα πρέπει να αποτελεί τυφλή καθοδήγηση, αλλά θα πρέπει να συνθέτει ένα μήνυμα αναζήτησης της αλήθειας μέσω απλών αλλά καθόλου απλοϊκών παραδειγμάτων προς τους μαθητές. Οι Σπύρου & Γαγάτσης

(2004) αναφέρουν: "Οι μαθητές ενίοτε, παγιδεύονται σε μια σειρά εμπόδια που αποτελούν γενικεύσεις των αποσπασματικών σχολικών εμπειριών ή μεταφορών γλωσσικών συνειρμών, που προσλαμβάνονται κατά κυριολεξία" (σελ. 12).

Ένα μεγάλο επιστημολογικό εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης στην ελληνική εκπαίδευση είναι η ίδια η λέξη. Οι μαθητές διδάσκονται την έννοια της συνάρτησης για πρώτη φορά στην Β΄ τάξη του Γυμνασίου, αλλά μια μεγάλη μερίδα εξ΄αυτών έχει ήδη ακούσει αυτή τη λέξη να χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη. Για παράδειγμα μπορεί να πει κάποιος "τα χρήματα που μπορώ να ξοδέψω για να αγοράσω ένα αυτοκίνητο είναι συνάρτηση του μισθού μου στην εταιρεία που δουλεύω". Επίσης μπορεί να πει κάποιος ότι " η επιλογή μου θα είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων". Έτσι λοιπόν είναι λογικό, η λέξη συνάρτηση να παρεισφρήσει στο μυαλό των μαθητών ως μια σχέση, μια εξάρτηση θα μπορούσε να πει κανείς, πολύ πριν τη διδαχθούν ως μια νέα μαθηματική έννοια. *Έτσι λοιπόν είναι αρκετά δύσκολο και συνάμα απαιτητικό για τους μαθητές να καταλάβουν ότι στα μαθηματικά η έννοια της συνάρτησης δεν αποτελεί απλά μια σχέση εξάρτησης, σύνδεσης αλλά είναι κάτι πολύ παραπάνω από αυτό*.

Ακόμη και όσοι μαθητές δεν έχουν ξανακούσει τη λέξη συνάρτηση, επίσης προβληματίζονται ιδιαίτερα όταν τους παρουσιάζεται για πρώτη φορά διότι δε ξέρουν την εννοιολογική της προέλευση και υπόσταση καθώς δεν είναι από τις πιο συνηθισμένες λέξεις. Έτσι λοιπόν η ίδια η λέξη είναι το πρώτο και πολύ μεγάλο επιστημολογικό εμπόδιο κατά τη διδαχή της έννοιας της συνάρτησης στα Μαθηματικά στους Έλληνες μαθητές. Όπως αναφέρουν και οι Spyrou & Zagorianakos (2009) η λατινική λέξη function είναι πολύ πιο οικεία στους μαθητές του εξωτερικού καθώς η λέξη χρησιμοποιείται αρκετά στην καθομιλουμένη και σημαίνει λειτουργία - χρήση. Παρόλα αυτά ο Vinner (1983) υποστηρίζει ότι αρκετοί μαθητές της 10 και 11 τάξης δυσκολεύονται αρκετά με την έννοια της συνάρτησης. *Αναφέρει ότι αν μελετήσουμε την έννοια της συνάρτησης με μια ιστορική ματιά, θα αποκτήσουμε μια τελείως διαφορετική άποψη για την έννοια της συνάρτησης.* Η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης θα πρέπει να γίνεται με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα όχι μόνο στην αρχή της διδασκαλίας αλλά συνεχώς μέχρι και την ολοκλήρωσή της.

Η Sierpinska (1992) συγκεκριμενοποιεί τα επιστημολογικά εμπόδια που δημιουργούνται κατά την διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης. Είναι πολύ σημαντικό να τα αναφέρουμε και να τα μελετήσουμε σε βάθος και σε πλήρη έκταση καθώς αποτελούν μια πολύ καλή επιστημολογική βάση μέσα από την οποία θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε τις δυσκολίες των μαθητών. Τα επιστημολογικά εμπόδια είναι τα ακόλουθα:

- 1^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια Φιλοσοφία των Μαθηματικών):

Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα.

Στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά έχουν δημιουργηθεί για να λύσουν πολλά πρακτικά προβλήματα, καθώς και προβλήματα επιβίωσης και καλυτέρευσης της ζωής του ανθρώπου, εδώ και

χιλιάδες χρόνια. Από την αρχαία Ελλάδα, υπάρχουν πολλοί πίνακες που συνδέουν δύο μεγέθη οι οποίοι μεταφέρονταν από γενιά σε γενιά. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικοί πίνακες συνδέουν μία γωνία με έναν λόγο πλευρών και χωρίς να υπάρχει μια αναλυτική φόρμουλα τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπως υπάρχει σήμερα, η έννοια της συνάρτησης αρχίζει να μεταφέρεται στη ζωή του ανθρώπου. Από τα αρχαία κιόλας χρόνια θα λέγαμε, η συνάρτηση είναι απαραίτητη στην αστρονομία, τη γεωγραφία και τη γεωμετρία. *Έτσι λοιπόν είναι πολύ σημαντικό η έννοια της συνάρτησης σε μια διδασκαλία να ξεκινήσει με ιστορικά στοιχεία έτσι ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές τη σπουδαιότητα της έννοιας αυτής.*

- 2^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια Φιλοσοφία των Μαθηματικών)

Υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή πινάκων με αριθμητικές σχέσεις δεν είναι άξιες για να είναι αντικείμενο μελέτης στα μαθηματικά.

Πραγματικά είναι διαπιστωμένο ότι πολλοί μαθητές έχουν ένα μεγάλο ερωτηματικό μέσα τους όταν διδάσκονται την έννοια της συνάρτησης με τον παραδοσιακό τρόπο. Η κλασσική διδασκαλία της συνάρτησης ξεκινάει με τον ορισμό που υπάρχει στο εκάστοτε σχολικό βιβλίο και στη συνέχεια δίνονται κάποια πολύ απλά μοντέλα συναρτήσεων (π.χ. η γραμμική συνάρτηση) όπου συμπληρώνονται κάποιοι πίνακες τιμών. Απλά οι μαθητές εκτελούν κάποιες συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις και συμπληρώνουν πίνακες. Η Anna Sfard (1991) αναφέρει ότι "πρέπει να μπορούμε να αναγνωρίζουμε την ιδέα με μια ματιά και να την χειριζόμαστε ως ολότητα, χωρίς να μπαίνουμε σε λεπτομέρειες" (σελ. 4). Έχοντας αυτό στο νου, θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να μεταφέρει στους μαθητές του την έννοια της συνάρτησης βλέποντας το δάσος και όχι το δέντρο. Ο Σπύρου (2005) αναφέρει ότι τα εκπαιδευτικά προγράμματα αποκαλύπτουν στους μαθητές ένα απίστευτα αόριστο συνονθύλευμα γνώσεων και πολλές φορές χαοτικών πληροφοριών-απομνημονεύσεων, που στα μάτια των μαθητών δεν υπάρχει καμία σύνδεση με την πραγματική ζωή, το οποίο τους προκαλούν μεγάλη σύγχυση. Οι μαθητές λοιπόν γίνονται παθητικοί αποδέκτες πληροφοριών, όπου ελάχιστοι από αυτούς τις συγκρατούν, χωρίς να έχουν κατανοήσει το αρχικό κομμάτι και το πιο απαραίτητο που δεν είναι τίποτα άλλο από το λόγο ύπαρξης της συνάρτησης. Η Sierpinska (1992) αναφέρει ότι θα ήταν καλύτερα οι συναρτήσεις να παρουσιάζονται ως μοντέλα περιγραφής και πρόβλεψης, ακόμα και αν χρειάζεται να γίνει εισαγωγή σε αυτές με απλές υπολογιστικές μεθόδους εξηγώντας ακριβώς και στους μαθητές και τον λόγο γέννησής τους.

- 3^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Ασυνείδητο σχέδιο της σκέψης)

Θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα. Εστίαση στο πως αλλάζουν τα πράγματα, αδιαφορώντας για το τι αλλάζει.

Είναι πολύ συνηθισμένο να προσπαθούμε να ορίσουμε και να κατηγοριοποιήσουμε κάποιες αλλαγές στην καθημερινότητα αλλά και στον κλάδο των μαθηματικών, χωρίς να μας ενδιαφέρει να βρούμε έναν τρόπο να μετρήσουμε και να ποσοτικοποιήσουμε τις αλλαγές αυτές. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι μας ενδιαφέρει να παρατηρήσουμε απλά πως αλλάζουν τα πράγματα χωρίς να

δούμε σε έκταση βάθους τι ακριβώς προκαλεί την αλλαγή και πως μπορούμε να την μετρήσουμε.

- 4^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Ασυνείδητο σχέδιο της σκέψης)

Σκεπτόμενοι με όρους εξίσωσης και εύρεσης αγνώστων μέσα από αυτές.

Το συγκεκριμένο επιστημολογικό εμπόδιο είναι σίγουρα ευρέως διαδεδομένο και προκαλείται διότι οι μαθητές έχουν μάθει να λύνουν αλγοριθμικά μια εξίσωση βρίσκοντας τον εκάστοτε άγνωστο που συνήθως είναι ο άγνωστος x. Ακριβώς αυτός είναι ο λόγος που στοιχειοθετεί το συγκεκριμένο εμπόδιο, δηλαδή όταν δίνεται στον μαθητή η εξίσωση της συνάρτησης που περιέχει τις μεταβλητές x και y, τότε εκείνος προσπαθεί να υπολογίσει κάποια από αυτή. Είναι πασιφανές ότι το συγκεκριμένο επιστημολογικό εμπόδιο παίρνει σάρκα και οστά λόγω του ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει τη διαφορά του αγνώστου και της μεταβλητής και έτσι όταν αντιμετωπίζουν μια σχέση που περιέχει γράμματα προσπαθούν να τα υπολογίσουν, θεωρώντας τα ως άγνωστες ποσότητες.

- 5^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Ασυνείδητο σχέδιο της σκέψης)

Θεωρώντας την σειρά - ρόλο των μεταβλητών ως κάτι ασήμαντο.

Το 5^0 επιστημολογικό εμπόδιο είναι σίγουρα πολύ συχνό και προκαλεί τεράστια σύγχυση στους μαθητές. Θα λέγαμε ότι μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών δε μπορεί να αναγνωρίσει και να κατανοήσει τη διαφορετικότητα και συνάμα τον ρόλο των δύο μεταβλητών, της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής. Πολλοί μαθητές δεν έχουν καταλάβει ότι οι μεταβλητές ανεξάρτητη - εξαρτημένη παίζουν έναν τελείως διαφορετικό ρόλο στην έννοια της συνάρτησης και όταν για παράδειγμα τους δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2=r^2$, που είναι μια εξίσωση κύκλου, την αναγνωρίζουν ως σχέση συνάρτησης. Πράγματι, η προηγούμενη εξίσωση παρουσιάζει μια απόλυτη συμμετρία στις δύο μεταβλητές της και αρκετοί μαθητές θεωρούν ότι σε αυτή την εξίσωση, όταν μας δίνεται το x, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το y. *Δηλαδή έχουν την πεποίθηση ότι η συνάρτηση είναι με απλά λόγια μια εξίσωση που περιέχει x και y και όταν μας δίνεται η τιμή της μίας μεταβλητής τότε υπολογίζουμε την άλλη. Όπως φαίνεται, δεν έχουν αντιληφθεί ότι η μια μεταβλητή καθορίζεται μονοσήμαντα από την άλλη και συνάμα δεν κάνουν διαφοροποίηση μεταξύ σχέσης και συνάρτησης.*

- 6^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια στάση απέναντι στην έννοια των αριθμών)

Μια ετερογενής έννοια των αριθμών.

Είναι γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί όριζαν ως αριθμούς μόνο τους φυσικούς αριθμούς πάνω από τη μονάδα. Ακόμα και ο σημερινός αριθμός ένα, στην αρχαία Ελλάδα είχε μια εξέχουσα θέση και δεν θεωρούταν ως αριθμός, αλλά ως μονάδα διότι το ένα παράγει όλους τους υπόλοιπους αριθμούς, δηλαδή ήταν μονάδα μέτρησης Είναι επίσης γνωστό ότι οι τελευταίοι γνώριζαν πως οι λόγοι των μεγεθών δεν εκφράζονται πάντα ως λόγοι αριθμών (ρητοί λόγοι) αλλά

υπάρχουν μεγέθη που είναι ασύμμετρα μεταξύ τους. Έτσι λοιπόν γίνεται διάκριση των αριθμών σε ρητούς, άρρητους, φυσικούς, ακέραιους κτλ. και αυτό προκαλεί σύγχυση και συνάμα επιστημολογικό εμπόδιο στο τι τελικά είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- 7^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια στάση απέναντι στην έννοια των αριθμών)

Η Πυθαγόρεια αντίληψη των αριθμών: όλα είναι αριθμός.

Μέσα στο πέρασμα των αιώνων με την Άλγεβρα να παίζει τον κυρίαρχο ρόλο στα Μαθηματικά, είναι πραγματικά δύσκολο να καταλάβει κάποιος τι συμβολίζουν τα διάφορα γράμματα που χρησιμοποιούνται στις σχέσεις των συναρτήσεων. Αυτός ο παράγοντας δημιουργεί σύγχυση, καθώς δεν είναι ξεκάθαρο αν τα γράμματα συμβολίζουν αριθμούς ή μεγέθη. Έτσι λοιπόν, η διαφοροποίηση των γραμμάτων που παριστάνουν αριθμούς και εκείνων που παριστάνουν μεγέθη εξαλείφεται όταν οι εξισώσεις που βρίσκονται μέσα χειραγωγούνται μόνο με καθαρό αλγεβρικό τρόπο (Sierpinska, 1992). Είναι λοιπόν σχεδόν επιτακτική ανάγκη να γίνει μια διαλεύκανση στο τι είναι νούμερο και τι είναι μέγεθος. Πολλοί μαθηματικοί και γενικότερα επιστήμονες θεωρούν ότι τα πάντα μπορούν να περιγραφούν από αριθμούς και ότι οι ποσότητες είναι και αυτές αριθμοί. Η συγκεκριμένη πεποίθηση είναι λανθασμένη, διότι υπάρχουν μεγέθη που δεν χαρακτηρίζονται απλά και μόνο από αριθμούς, όπως ένα κινούμενο αυτοκίνητο ή ένα κινούμενο τρένο. Το γεγονός ότι μπορούμε να αποδώσουμε διάφορους αριθμούς σε ένα κινούμενο αυτοκίνητο, όπως είναι λόγου χάρη η ταχύτητά του, η επιτάχυνσή του κ.τ.λ. δεν σημαίνει ότι το αυτοκίνητο αυτοπροσδιορίζεται από αυτούς.

Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο παίρνει σάρκα και οστά καθώς οι εκπαιδευτικοί περιορίζονται να εφοδιάσουν τους μαθητές τους με νοητικά εργαλεία των οποίων η αναγκαιότητα δεν είναι καθόλου προφανής και το μοναδικό που έχει σημασία είναι η διδαχή ασκησεολογίας που θα εισάγει τους μαθητές στα ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα (Σπύρου & Γαγάτσης, 2004). Έτσι λοιπόν, ακόμα και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί, πολλώ δε μάλλον οι μαθητές, δεν μπαίνουν στην διαδικασία να κατανοήσουν αν οι μεταβλητές της εκάστοτε συνάρτησης είναι αριθμοί ή αναπαριστούν συνεχή μεγέθη.

- 8^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Ένα ασυνείδητο σύστημα σκέψης)

Οι νόμοι της Φυσικής και οι συναρτήσεις στα Μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό. Ανήκουν σε διαφορετικά πεδία (διαμερίσματα) σκέψης.

Ο Youschkevitch (1976) αναφέρει ότι έχουν κατασκευαστεί ολοένα και περισσότερο πολύπλοκες θεωρίες στον τομέα των συναρτήσεων με απώτερο σκοπό την εισαγωγή τους σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών αλλά και για να υπηρετήσουν εφαρμογές σε διάφορες άλλες θετικές επιστήμες. Θα ήταν παράλογο να ισχυριστεί κανείς ότι ο τομέας των συναρτήσεων είναι ένας τελείως θεωρητικός τομέας που ανήκει μόνο στη σφαίρα των θεωρητικών Μαθηματικών, καθώς η σύλληψη και γενικότερα η έννοια της συνάρτησης πηγάζει ακριβώς από τον κόσμο της Φυσικής.

- 9^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Ένα ασυνείδητο σύστημα σκέψης)

Η αναλογία είναι ένας προνομιακός τύπος σχέσης.

Η θεωρία των αναλογιών αποτελεί θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ένα ισχυρότατο θεμέλιο στα μαθηματικά και έχει εισχωρήσει σε αυτά μέσα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Οι αναλογίες αποτελούν πλέον αναπόσπαστο κομμάτι των Μαθηματικών και μάλιστα υπάρχουν πολλοί άνθρωποι που προσπαθούν να εισάγουν πάντα σε κάποιο πρόβλημα μια φόρμουλα αναλογίας. Θεωρείται δηλαδή από πολλούς ότι μια συνάρτηση αναλογίας είναι ο *μοναδικός* τρόπος φόρμουλας και μπορεί να εξηγήσει όλα τα φαινόμενα. Αυτό αποτελεί σίγουρα ένα επιστημολογικό φαινόμενο. Αν για παράδειγμα ρωτήσουμε παιδιά γυμνασίου ή ακόμη και άτομα μεγαλύτερης ηλικίας το εξής: "Αν σε μία ώρα πέρασαν τον δρόμο αυτό 300 αυτοκίνητα, πόσα αυτοκίνητα θα περάσουν τον ίδιο δρόμο σε δύο ώρες;" τότε οι περισσότεροι θα εφαρμόσουν τη μέθοδο των τριών και θα απαντήσουν 600 αυτοκίνητα. Ουσιαστικά, χωρίς να το κατανοούν, έχουν στο μυαλό τους τη γραμμική συνάρτηση $y=\alpha x$, η οποία αντικατοπτρίζει τα ανάλογα ποσά. Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο συναντάτε σε πολλές θετικές επιστήμες και ιδιαίτερα στο πεδίο της φυσικής. Στην ερώτηση ενός καθηγητή φυσικής:

"Αν ένα αυτοκίνητο κινείται με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και καλύπτει απόσταση 2 μέτρα σε 1 λεπτό, τότε σε 2 λεπτά, πόσα μέτρα θα έχει διανύσει; " είναι μαθηματικά βέβαιο ότι η πλειονότητα των μαθητών θα απαντήσει 4m.

- 10^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια πεποίθηση που αφορά Μαθηματική μέθοδο)

Έντονη πίστη στη δύναμη των τυπικών λειτουργιών σε αλγεβρικές εκφράσεις.

Όπως αναφέρει η Sierpinska (1992) τα παιδιά στην ηλικία των 13 έχουν φτάσει σε ένα στάδιο των λεγόμενων *τυπικών λειτουργιών* και είναι πολύ δύσκολο να κατανοήσουν σε πλήρη έκταση κάποιους αλγεβρικούς φορμαλισμούς και συμβολισμούς. Για παράδειγμα, στον πρώτο κιόλας τύπο συνάρτησης δηλαδή τη συνάρτηση $y=\alpha x$, είναι πολύ λίγοι οι οποίοι πραγματικά κατανοούν ότι τα γράμματα y και x είναι μεταβλητές και όχι άγνωστοι και ότι το γράμμα α είναι παράμετρος και χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι μοναδική αλλά οικογένεια συναρτήσεων. Η έλλειψη αλγεβρικού συμβολισμού σίγουρα είναι ανασταλτικός παράγοντας στην κατανόηση των συναρτήσεων. Συνάμα, η υπερβολική χρήση των αλγεβρικών εξισώσεων σίγουρα οδηγεί σε κονσερβοποίηση γνώσεων και αλγοριθμική συστηματοποίηση βημάτων και όχι στην εκ βαθέων κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Η αλήθεια θα έλεγε κάποιος κρύβεται κάπου στη μέση. Όπως αναφέρει και η Sfard (1991):

Αν όλα αυτά είναι αλήθεια, τότε το να περιμένουμε από κάποιον να φτάσει σε δομικές συλλήψεις χωρίς προηγούμενη λειτουργική κατανόηση μοιάζει τόσο παράλογη, όσο και το ελπίζουμε ότι κάποιος ή κάποια να κατανοήσει το δισδιάστατο σχήμα ενός κύβου χωρίς πρώτα να έχει γνωρίσει το τρισδιάστατο μοντέλο του στον πραγματικό κόσμο (σελ. 18).

- 11^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια σύλληψη της συνάρτησης)

Μόνο οι σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικές φόρμουλες είναι άξιες ώστε να ονομάζονται συναρτήσεις.

Όλες οι σχέσεις συναρτήσεων ανήκουν στον πραγματικό κόσμο και περιγράφουν κάποιο φαινόμενο, αλλά είναι πραγματικότητα ότι τις περισσότερες φορές απλά δίνεται ό τύπος της συνάρτησης χωρίς να μας ενδιαφέρει από που έχει προέλθει αυτή η αναλυτική έκφραση. Το να δίνεται ο τύπος της συνάρτησης είναι τόσο στερεότυπο που όταν η αναλυτική φόρμουλα απουσιάζει και απλά περιγράφεται η συσχέτιση των μεγεθών που είναι σε συνάρτηση τότε προκαλείται φοβερή σύγχυση. Αυτό το είδος του επιστημολογικού εμποδίου δεν γεννάται συνήθως στην αρχή της διδαχής της έννοιας της συνάρτησης, αλλά παρουσιάζεται αργότερα, όταν οι μαθητές έχουν συνηθίσει να δουλεύουν πάνω σε αναλυτικές-αλγεβρικές εκφράσεις (στον τύπο της συνάρτησης).

- 12^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια σύλληψη της συνάρτησης)

Ορισμός είναι μια περιγραφή ενός αντικειμένου που είναι γνωστή με τις αισθήσεις ή τη διορατικότητα. Ο ορισμός δεν καθορίζει το αντικείμενο, μάλλον το αντικείμενο προσδιορίζει τον ορισμό. Ένας ορισμός δεν είναι δεσμευτικά λογικός.

Σύμφωνα με τους Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2002) πολλές έρευνες δείχνουν ότι αρκετοί μαθητές εισέρχονται στο πανεπιστήμιο με ελάχιστη κατανόηση πάνω στις συναρτήσεις. Όπως αναφέρει και η Ronda (2004) ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης έχει εξελιχθεί μέσα στη πάροδο των χρόνων από μια διαισθητική σχέση μεταβλητών σε μία αφηρημένη συσχέτιση δύο συνόλων. Σύμφωνα πάλι με τη Ronda (2004) αρκετοί μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και φοιτητές στην τριτοβάθμια έχουν ουσιαστικά κατασκευάσει στο μυαλό τους κάποια συγκεκριμένα μοτίβα συναρτήσεων ως πρότυπες συναρτήσεις. Αυτού του είδους οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμό τους και παραγωγίσιμες και στην ουσία αρκετές εξ΄αυτών είναι θεωρητικές συναρτήσεις χωρίς να εξυπηρετούν κάποιο σκοπό. Αποτελούν θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ανθρώπινα κατασκευάσματα πάνω στα οποία χτίζεται μια ατελείωτη ασκησεολογία. Τέτοιες συναρτήσεις αποτελούν οι πολυωνυμικές, οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές κ.τ.λ. *Είναι σαφές σε αυτό το σημείο ότι η πλειονότητα των μαθητών έχουν την εσφαλμένη εντύπωση, που τους έχει δημιουργηθεί όμως από το ίδιο το εκπαιδευτικό σύστημα, ότι δεν υπάρχουν άλλες συναρτήσεις. Ο ορισμός όμως της συνάρτησης έχει κατασκευαστεί ώστε να μπορέσει να "αγκαλιάσει" και άλλων ειδών συναρτήσεις που είναι λίγο πιο σύνθετες από το κλασσικό μοντέλο οπότε θα λέγαμε ότι ο ορισμός καθορίζει το αντικείμενο.*

- 13^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια σύλληψη της συνάρτησης)

Οι συναρτήσεις είναι ακολουθίες.

Οι ακολουθίες προφανώς είναι συναρτήσεις, αλλά συχνά δημιουργείται η πεποίθηση ότι ισχύει πάντα και το αντίστροφο. Αυτό το εμπόδιο έχει τις ρίζες του στα βελοδιαγράμματα που χρησιμοποιούμε οι Μαθηματικοί για να περιγράψουμε την αντιστοίχιση και όχι τη συμμεταβολή των δύο μεταβλητών. Έτσι λοιπόν γίνεται αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών, εκτός του μηδενός, με κάποιους πραγματικούς αριθμούς όταν ακριβώς αντιστοιχούμε τα x_1, x_2, x_3,..... με τους πραγματικούς αριθμούς y_1, y_2, y_3,.....

- 14^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια σύλληψη της συνάρτησης)

Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι ευθύγραμμα τμήματα (όχι αριθμοί).

- 15^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια σύλληψη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης)

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο της συναρτησιακής σχέσης. Δε χρειάζεται να είναι ακριβές, μπορεί να περιέχει σημεία (x,y) τέτοια ώστε η συνάρτηση να μην ορίζεται στο x.

- 16^0 επιστημολογικό εμπόδιο: (Μια σύλληψη της μεταβλητής)

Οι αλλαγές στη μεταβλητή είναι αλλαγές στο χρόνο.

Οι ρίζες του τελευταίου, κατά τη Sierpinska (1992), επιστημολογικού εμποδίου έχουν καλλιεργηθεί από τον Αριστοτέλη ο οποίος πίστευε ότι όλες οι αλλαγές δημιουργούνται από το χρόνο.

2.3. Διδακτική μεταφορά της συνάρτησης.

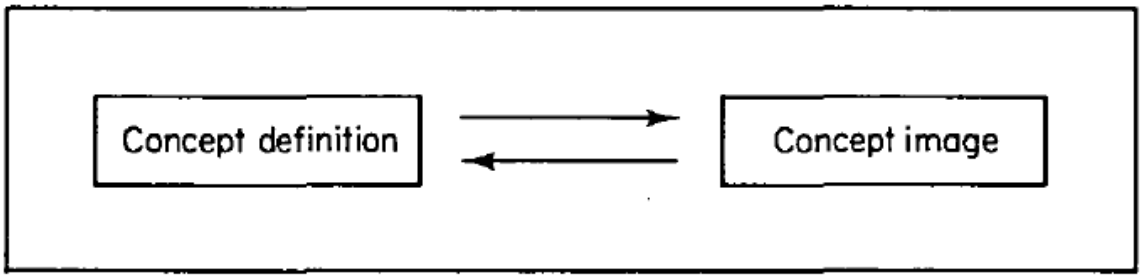
2.3.1. Νοητικές εικόνες, εικόνα έννοιας, ορισμός έννοιας.

Ο Vinner (1983) αναφέρει ότι οι *νοητικές εικόνες* είναι το σύνολο των εικόνων που δημιουργεί ένα άτομο και έχουν σχέση με μία οποιαδήποτε έννοια. Για παράδειγμα ένα βελοδιάγραμμα μπορεί να αποτελεί για κάποιον μια νοητική εικόνα για την έννοια της συνάρτησης ενώ για κάποιον άλλον μπορεί το παραλληλόγραμμο να αποτελεί μια νοητική εικόνα για το σύνολο των τετράπλευρων. Αν η νοητική εικόνα συνδυαστεί και με κάποιες ιδιότητες που κάποιος έχει στο μυαλό του (ενδεχομένως λανθασμένες) για μια έννοια τότε κατασκευάζεται η λεγόμενη *εικόνα έννοιας*. Όπως αναφέρει ο Vinner (1983) μπορεί κάποιος να σκεφτεί ότι οι συναρτήσεις είναι απαραίτητο και καταναγκαστικό να καθορίζονται μόνο μέσω αλγεβρικών εξισώσεων. Με τον *ορισμό έννοιας* ο Vinner (1983) εννοεί το σύνολο των προφορικών αλλά και γραπτών προτάσεων που περιγράφουν και εξηγούν την έννοια χωρίς βέβαια να γίνεται επαναχρησιμοποίηση λέξεων της έννοιας. Δηλαδή αν θέλουμε να ορίσουμε τον κύκλο δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μέσα στον ορισμό την

λέξη κύκλος για να τον περιγράψουμε.

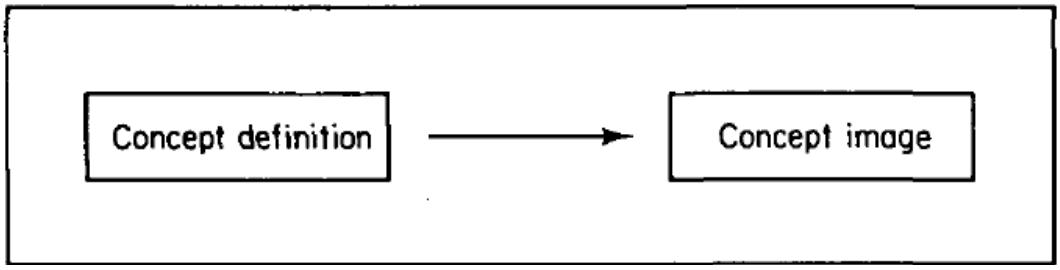
Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις όπου δεν μπορούμε ή δεν είναι απαραίτητο να δώσουμε ορισμό σε μια έννοια διότι η έννοια αυτή γίνεται άμεσα κατανοητή από το σύνολο του πληθυσμού. Στα Μαθηματικά σχεδόν όλες οι έννοιες ορίζονται διότι τα Μαθηματικά αποτελούν επιστημονικό πεδίο, όμως υπάρχουν αρκετές έννοιες που ενώ αποτελούν τα θεμέλια αυτής της πυραμίδας των γνώσεων, δεν μπορούν να οριστούν. Για παράδειγμα, ενώ οι πραγματικοί αριθμοί έχουν οριστεί ως σύνολα ρητών από τον Dedekind με τις λεγόμενες τομές Dedekind, παρόλο αυτά θεωρεί τους φυσικούς αριθμούς a-priori δεδομένους και όχι ορισμένους.

Ο Vinner (1989) θεωρεί ότι η εικόνα της έννοιας αλλά και ο ορισμός της έννοιας αλληλεπιδρούν και αλληλοεπηρεάζονται, αλλά έχει επίσης την πεποίθηση ότι μπορεί να δημιουργηθούν ξεχωριστά. Αν ένας εκπαιδευτικός επιμείνει πάρα πολύ στο να δώσει παραδείγματα για να εισάγει μια έννοια στους μαθητές του, με σκοπό να δημιουργήσει πρώτα μια εικόνα έννοιας, τότε ελλοχεύει ο κίνδυνος να μην μπορέσει να μεταφέρει σωστά τον ορισμό της έννοιας αργότερα. Ίσως το γεγονός αυτό αποτελέσει ανασταλτικό παράγοντα ώστε τελικά το παιδί να μην μάθει ποτέ του σωστά τον ορισμό διότι έχει ήδη δημιουργήσει πολύ έντονα στο μυαλό του την εικόνα της έννοιας. Κατά γενική ομολογία ενδέχεται σε αυτή την περίπτωση να δημιουργηθεί το φαινόμενο ότι μετά από λίγο καιρό ο ορισμός της έννοιας μπορεί να ξεχαστεί ή στη χειρότερη περίπτωση να διαστρεβλωθεί. Από την άλλη μεριά, κάποιοι εκπαιδευτικοί δίνουν πρώτα τον ορισμό έννοιας και στη συνέχεια εν μέσω πολλών παραδειγμάτων και ασκήσεων καλλιεργούν και την εικόνα έννοιας. Αυτό φαίνεται και από το επόμενο σχήμα :



Σχήμα 2.1. Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού της έννοιας και της εικόνας της έννοιας.

Αρκετοί καθηγητές πάντως θεωρούν ότι από κάποια ηλικία και μετά θα πρέπει ένας μαθητής να είναι σε θέση να δημιουργεί από μόνος του τις σωστές εικόνες έννοιας αφού του δοθεί πρώτα ο ορισμός της έννοιας. Αυτό φαίνεται και από το ακόλουθο σχεδιάγραμμα:



Σχήμα 2.2. Ο ορισμός της έννοιας δημιουργεί την εικόνα της έννοιας.

Η προσωπική γνώμη του συγγραφέα αυτής της εργασίας είναι ότι στις μικρότερες τάξεις θα πρέπει να δημιουργούν οι καθηγητές στους μαθητές τους τις εικόνες έννοιας εν μέσω εύστοχων παραδειγμάτων και στη συνέχεια να δίνουν τον ορισμό έννοιας, μόνο σε περιπτώσεις *όπου κρίνεται πραγματική ανάγκη*. Δεν θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να επιμείνει πάρα πολύ σε παραδείγματα διότι έτσι δημιουργούνται έντονες παρερμηνείες από τους μαθητές και στο τέλος του κύκλου του μαθήματος οι τελευταίοι αγνοούν ή αλλάζουν ολιστικά τον ορισμό. Είναι θα λέγαμε στην κρίση του καθηγητή να καθορίσει τον τρόπο διδασκαλίας της εκάστοτε έννοιας.

Για παράδειγμα, στη διδαχή της έννοιας της συνάρτησης θα δημιουργήσει αρκετά προβλήματα αν δοθεί πρώτα ο ορισμός της διότι είναι πολύ αφηρημένος και για την πλειονότητα των μαθητών ανοηματικός. Θα πρέπει, όπως θα δούμε και παρακάτω, πρώτα να δοθούν παραδείγματα για να εισαχθεί η έννοια της συνάρτησης όσο πιο ομαλά και διδακτικά γίνεται και αργότερα να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης αφού τα κατάλληλα παραδείγματα θα ρίξουν άπλετο φως στον ορισμό της. Υπάρχουν όμως και έννοιες όπου θα πρέπει να δίνεται από τους καθηγητές προς τους μαθητές πρώτα ο ορισμός και μετά να δημιουργούνται οι εικόνες της έννοιας. Ένα απλό παράδειγμα είναι η έννοια των άρτιων αριθμών, οπού αρκεί να δοθεί ο ορισμός για να γίνει αντιληπτή η έννοια από έναν μέσο μαθητή στα Μαθηματικά και μετά να κατακτηθεί η εικόνα της έννοιας μέσω παραδειγμάτων.

2.3.2. Διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Η διδακτική μεταφορά της συνάρτησης στο περιβάλλον μιας τάξης αποτελεί αδιαμφισβήτητα μια τρομερά επίπονη και συνάμα απαιτητική διαδικασία για τους μαθητές αλλά και για τους καθηγητές. Αρκετοί μαθητές συναντούν ιδιαίτερη δυσκολία στο να συνδέσουν αλλά και να αντιμετωπίσουν σαν ολότητα τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης που είναι οι ακόλουθες:

- Ο τύπος της συνάρτησης.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης.
- Τα διαγράμματα - βελοδιαγράμματα.
- Η προφορική περιγραφή μιας σχέσης συνάρτησης.

Μεγάλο μέρος των μαθητών του Γυμνασίου αλλά και του Λυκείου θεωρούν ότι η συνάρτηση είναι το y ή το f(x) και πολλοί θεωρούν πως η συνάρτηση είναι μια εξίσωση που στο ένα μέλος περιέχει το y ή το f(x) και στο άλλο μέλος είναι μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει το x. Για παράδειγμα, είναι αρκετά διαδεδομένη η αντίληψη των μαθητών ότι αν δε δίνεται ο τύπος της συνάρτησης τότε δε μπορούμε καν να μιλήσουμε για την ύπαρξη της. Επικρατεί η αντίληψη δηλαδή ότι η αλγεβρική εξίσωση σε μια σχέση συνάρτησης είναι το παν.

Υπάρχουν λοιπόν κάποιες στερεότυπες αντιλήψεις που έχουν δημιουργηθεί από τους μαθητές και είναι πολύ δύσκολο να αλλάξουν. Όπως αναφέρει και ο Thompson (1994), επανειλημμένα οι μαθητές κατασκευάζουν την εικόνα μιας συνάρτησης ως μια έκφραση ισότητας, όπου το πρώτο μέλος είναι μικρό και το δεύτερο μέλος είναι ανεπτυγμένο. Επικρατεί λοιπόν στους μαθητές η αντίληψη ότι η συνάρτηση είναι μια ισότητα. Αυτή η αντίληψη δεν έχει υπάρξει τυχαία, διότι υπάρχουν και πολλά βιβλία όπου αναφέρεται ότι.... *" η τελευταία ισότητα είναι μια συνάρτηση που περιέχει της μεταβλητές x και y."* Είναι λοιπόν μια αντίληψη που επικρατεί διάχυτα στο εκπαιδευτικό μας σύστημα και μάλλον μεταφέρεται από γενεά σε γενεά από τους εκπαιδευτικούς προς τους μαθητές.

Η διδακτική λοιπόν μεταφορά της συνάρτησης περιλαμβάνει τέσσερεις παράγοντες: τον επιστημολογικό παράγοντα που υπάρχει στα ιστορικά μαθηματικά βιβλία, την επιστημολογία των καθηγητών Μαθηματικών πάνω στο πεδίο των συναρτήσεων, τη διδακτική διάσταση που αποκτούν οι μαθητές πάνω στις συναρτήσεις και φυσικά τους στόχους - περιορισμούς που επιβάλει το υπουργείο και το ευρύτερο εκπαιδευτικό σύστημα. Όπως αναφέρει και η Sierpinska (1992), η συνάρτηση εκφράζεται με δυναμικό τρόπο (mappings), αλλά συνάμα και με στατικό τρόπο (relationships), με λειτουργικό ή κατασκευαστικό τρόπο αλλά και όχι. *Επίσης προτείνει να γίνεται σύνθεση όλων των αναπαραστάσεων της συνάρτησης και όχι απλά η μονόπλευρη αναπαράσταση του τύπου της συνάρτησης που κακά τα ψέματα κυριαρχεί κατά κόρον στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.* Οι μαθητές από πολύ μικρή ηλικία είναι εξοικειωμένοι με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και πολλά βιβλία βρίσκονται προς αυτήν την κατεύθυνση (Iliada κ.α., 2008).

Αρκετοί μαθητές επίσης δυσκολεύονται να κατανοήσουν πότε μια σχέση εξίσωσης περιγράφει μία συνάρτηση και πότε όχι. Αυτή η ελλιπής γνώση και ταυτόχρονα λανθασμένη θεώρηση της έννοιας της συνάρτησης σίγουρα δεν οδηγεί στην βαθύτερη κατανόηση και στην κατάκτηση δυσκολότερων εννοιών στο μέλλον. Όπως αναφέρουν οι Σπύρου & Γαγάτσης (2004) είναι εντελώς φυσιολογικό, με τον τρόπο που διδάσκονται οι συναρτήσεις σε οποιαδήποτε χώρα, να έχουν προβλήματα οι μαθητές με την έννοια αυτή. Πράγματι, σε γενικές γραμμές, ο τρόπος διδαχής της συνάρτησης είναι αρκετά φορμαλιστικός και αρκετοί εκπαιδευτικοί κατευθύνουν το μάθημα με απόλυτο στόχο την επίλυση ασκήσεων και ασχολούνται κυρίως με την εξίσωση της σχέσης συνάρτησης καθώς επίσης και με τη γραφική της παράσταση. Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ελλάδα ασχολείται κυρίως με αυτούς τους δύο τομείς και περιμένει από τους μαθητές σε κάποια τάξη της σχολικής τους ζωής να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης.

Σύμφωνα με την Sfard (1991), καθώς διευρύνουμε τη ματιά μας στο σύνολο των Μαθηματικών, υπάρχει μια ιεραρχία που ξεκινάει με καθαρά λειτουργικό και υπολογιστικό τρόπο και σε μεγαλύτερο επίπεδο υπάρχει κατασκευαστική - δομική και θεωρητική αντίληψη. Θα λέγαμε ότι γίνεται πάντα στα Μαθηματικά (αλλά και σε διάφορες άλλες επιστήμες) μια μετάβαση από το απλό στο πολύπλοκο. Ακριβώς και στο πεδίο της διδακτικής μεταφοράς της συνάρτησης θα πρέπει κάποιος να κατανοήσει σε βάθος όλες τις αναπαραστάσεις που προσφέρει απλόχερα η συνάρτηση διότι σε διαφορετική περίπτωση η γνώση αυτή θα είναι ρηχή και μονόπλευρη. Όπως αναφέρει η Sierpinska (1992) οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης οδηγούν στην κατάκτηση της έννοιας και ενώ η κάθε αναπαράσταση προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για την έννοια της συνάρτησης, εντούτοις καμία δεν μπορεί να σταθεί αυτόνομα από μόνη της και να την περιγράψει πλήρως. Θα μπορούσαμε δηλαδή να πούμε ότι αν για παράδειγμα κάποιος έχει αποκτήσει ικανότητες στο να σχεδιάζει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ή να δημιουργεί το βελοδιάγραμμα μιας σχέσης συνάρτησης, αυτές οι δύο μόνο συνιστώσες δεν αρκούν σε καμία περίπτωση ώστε να τον οδηγήσουν στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.

Ο Ponte (1992) αναφέρει ότι πολλοί μαθητές έρχονται στο Γυμνάσιο και έχουν αρκετή δυσκολία στο να σκέφτονται αφαιρετικά. Η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης κατά τον ίδιο θα πρέπει να διακατέχεται από 3 πολύ σημαντικές συνιστώσες:

1. την αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης (εξίσωση συνάρτησης)
2. την αριθμητική της έκφραση (πίνακας τιμών)
3. και την γραφική αναπαράσταση.

Επίσης αναφέρει ότι η ικανότητα και μόνο να διαχειρίζεται ο μαθητής αλγεβρικές εκφράσεις δεν είναι αρκετή για να οδηγήσει στο σχεδιασμό λύσεων πραγματικών προβλημάτων (real problems). Είναι προτιμότερο οι μαθητές να έρχονται σε πρώτη επαφή με τις συναρτήσεις υπό το πρίσμα απλών αριθμητικών πράξεων ανάμεσα στις μεταβλητές, παρά να απομνημονεύουν κάποιες μορφές συναρτήσεων.

Οι Dreyfus & Eisenberg (1986) αναφέρουν ότι ο μαθηματικός τρόπος σκέψης θα πρέπει να καλλιεργείται μέσα στην τάξη και επίσης ότι αυτός ο τομέας απουσιάζει από τη μαθηματική διδαχή. Έτσι λοιπόν είναι πολύ δύσκολο οι μαθητές της ηλικίας των 13-14 ετών να μπορέσουν να καλλιεργήσουν τον μαθηματικό τρόπο σκέψης και έτσι μπορούν να κατανοήσουν σε μικρό μόνο βαθμό τον κλάδο των συναρτήσεων. Η Lambertus (2008) αναφέρει:

Στην πραγματικότητα, οι μαθητές ίσως δεν κάνουν τη σύνδεση ότι μια εξίσωση, ένας πίνακας και η γραφική παράσταση όλα επικοινωνούν με την ίδια πληροφορία σε διαφορετικές μορφές. Η δυσκολία που έχουν οι μαθητές στο να κατασκευάζουν διασυνδέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις οδηγούν έναν μαθητή στο να ισχυριστεί ότι ένας κύκλος είναι συνάρτηση επειδή έχει ένα μαθηματικό όνομα στην προφορική και συμβολική αναπαράσταση και μετά μπορεί να κοιτάξει τη

γραφική παράσταση του κύκλου και να ισχυριστεί ότι δεν είναι συνάρτηση επειδή η γραφική παράσταση δεν επεκτείνεται μέχρι το άπειρο ή δεν περνά το test της κατακόρυφης γραμμής

(σελ. 14).

2.4. Η συνάρτηση ως δράση μέτρησης.

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, ο ορισμός της συνάρτησης, είτε αυτός που βρίσκεται στα σχολικά βιβλία, είτε αυτός που βρίσκεται στα πανεπιστημιακά βιβλία είναι σίγουρα θεωρητικός και απαλλαγμένος από οποιαδήποτε άλλη περιττή πληροφορία. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι, ιδιαίτερα ο συνολοθεωρητικός ορισμός είναι ένα προϊόν ανεπτυγμένης σκέψης. Εάν κάποιος έχει κατανοήσει την πολύ απλή λειτουργία της έννοιας της συνάρτησης λογικά θα κατανοήσει σε βάθος και τον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης καθώς αναφέρεται ως διατεταγμένη τριάδα με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες που ουσιαστικά "εξαναγκάζουν" την ανεξάρτητη μεταβλητή να αντιστοιχίζεται με μια μόνο τιμή της εξαρτημένης.

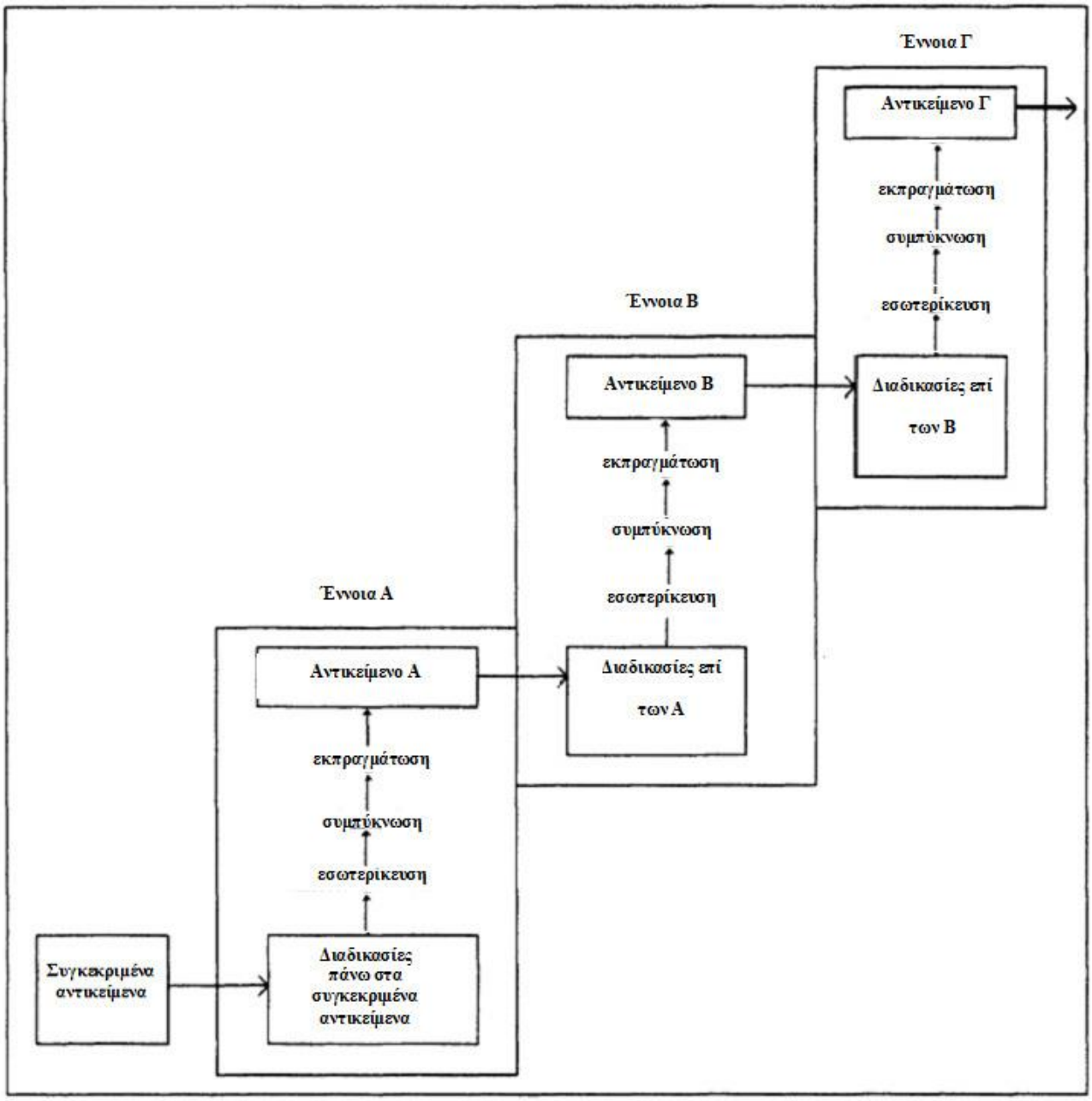
Η βασική όμως έννοια της συνάρτησης δεν είναι η αντιστοίχιση μεταβλητών - μεγεθών και προφανώς ούτε η έννοια της διατεταγμένης τριάδας, αλλά βρίσκεται στην βαθύτερη ανάγκη του ανθρώπου που δεν είναι τίποτα άλλο από τη μέτρηση αλλά και την πρόβλεψη.

Για παράδειγμα, η ναυσιπλοΐα στην αρχαία Ελλάδα βασίζεται στην τριγωνομετρία όπου ουσιαστικά με τη μέτρηση γωνιών και τη χρησιμοποίηση του κατάλληλου τριγωνομετρικού αριθμού μπορούσαν οι άνθρωποι να κάνουν ακριβέστατες *προβλέψεις* για τον τόπο προορισμού ενός πλοίου. Είναι βέβαιο ότι εκείνη την εποχή κανένας δεν έβλεπε τη συνάρτηση ημίτονο ως μία αντιστοίχιση της γωνίας στο ημίτονό της, αλλά ως ένα επιτακτικό εργαλείο επιβίωσης όπου χρησιμοποιώντας τη γωνία *(προσβάσιμη μεταβλητή)* θα μπορούσε να μετρήσει την απόσταση *(διαμεσολαβημένη μεταβλητή)* και γενικότερα να χαράξει πορεία. Επίσης, από το παραπάνω κιόλας παράδειγμα, είναι ξεκάθαρο ότι θα έπρεπε το σύστημα αυτό της ναυσιπλοΐας να διέπεται από μια βασική και αυτονόητη αρχή. Θα ήταν σίγουρα καταστροφικό αν μέτραγε κάποιος μια γωνία και ύστερα από τους κατάλληλους υπολογισμούς κατάληγε σε δύο ή περισσότερες μετρήσεις απόστασης! Τότε θα ήταν περισσότερο θέμα τύχης να φτάσει το πλοίο στον προορισμό του, παρά προϊόν εμπεριστατωμένης και επιστημονικής μελέτης. Έτσι λοιπόν η προσβάσιμη μεταβλητή (ανεξάρτητη) θα πρέπει να δώσει μία και μόνο τιμή της διαμεσολαβημένης (ανεξάρτητης) μεταβλητής. Αυτός λοιπόν είναι και ο λόγος όπου έγινε διάκριση των μεταβλητών και δημιουργήθηκε η αναγκαία συνθήκη: " Το κάθε x να αντιστοιχεί σε 1 μόνο y ".

Όπως αναφέρει και ο Bagni (2005), αρκετές έρευνες δείχνουν ότι η αρχική διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης γίνεται αρκετά ευκολότερη αν παρουσιαστεί ως δράση μέτρησης (action). Η Sfard (1991) σημειώνει ότι η μετάβαση στα θεωρητικά μαθηματικά γίνεται αφού πρώτα γίνει κατανόηση των απλών διαδικασιών και χρησιμοποιεί τη λέξη "reification" (εκπραγμάτωση) ως μια οντολογική μετάβαση από το ειδικό στο γενικό. Η Sfard (1991) πιστεύει ότι ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης αποτελεί ένα μεγάλο επιστημολογικό εμπόδιο και δεν συνάδει καθόλου στην επίτευξη αυτής της μετάβασης.

Είναι γεγονός ότι οι περισσότεροι Μαθηματικοί ξεκινούν τη διδασκαλία μιας έννοιας δίνοντας τον αυστηρό ορισμό χωρίς να κάνουν μια εισαγωγή στην έννοια αυτή και χωρίς να αναφέρουν τον μαθηματικό λόγο ύπαρξής της. Το καλά δουλεμένο μυαλό ενός Μαθηματικού ίσως να μην χρειάζεται την ανάγκη ενός παραδείγματος διότι έχει μάθει να χειρίζεται μια θεωρητική μαθηματική έννοια απευθείας. Αυτό όμως δεν συμβαίνει με το σύνολο των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθώς όταν τους δοθεί ένας μαθηματικός ορισμός, θα προσπαθήσουν να τον κάνουν κτήμα τους μόνο αν τον χειριστούν λειτουργικά, συνήθως με κάποιο παράδειγμα (Vinner & Dreyfus, 1989).

Σύμφωνα με την Sfard (1991, σελ.22):



Σχήμα 2.3. Γενικό μοντέλο του εννοιολογικού σχεδιασμού.

Όπως λοιπόν φαίνεται, η διδακτική μεταφορά της συνάρτησης είναι ένα δύσκολο "κομμάτι" ιδιαίτερα στο περιβάλλον της μέσης εκπαίδευσης. Στην πανεπιστημιακή κοινότητα, η εκπαίδευση μεταβαίνει από τους ορισμούς στο αντικείμενο και αυτό είναι κάτι φυσιολογικό, καθώς απευθύνεται σε άτομα που έχουν αναπτύξει τον θεωρητικό τρόπο σκέψης και έχουν σαφώς μεγαλύτερη αντίληψη από ένα μέσο μαθητή, όμως στη μέση εκπαίδευση τα πράγματα είναι εντελώς διαφορετικά. Εκεί, στο περιβάλλον της μέσης εκπαίδευσης, το "δύσκολο" αντικείμενο θα πρέπει να εμφανίζεται πρώτα στην εποπτεία και μετά να αποδίδεται με ορισμούς (Σπύρου, 2005).

2.5. Κύρια σημεία του 2ου κεφαλαίου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο λοιπόν αναπτύχθηκαν οι διάφορες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διδαχή της έννοιας της συνάρτησης και προτείναμε κάποιους εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας σε σχέση με τη παραδοσιακή. Συνοπτικά:

- Λίγοι μαθητές κατανοούν σε βάθος την έννοια της συνάρτησης και τον ορισμό της.

- Ελάχιστοι εκπαιδευτικοί δίνουν σημασία στις όποιες φιλοσοφικές ερωτήσεις που μπορούν εύλογα να προκληθούν από την ασαφή και ακατανόητη έννοια της συνάρτησης (Sfard, 1991).

- Το σύνολο των εκπαιδευτικών απλώς δίνει τον ορισμό της συνάρτησης και στη συνέχεια ασχολείται με τις διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης, κυρίως την αλγεβρική της εξίσωση και τη γραφική της παράσταση.

- Η Sierpinka (1992) διατυπώνει ότι αν ένα εμπόδιο προς τη γνώση δεν είναι μόνο δικό μας ή μερικών μόνο ανθρώπων, αλλά είναι ή ήταν ευρέως διαδεδομένο σε κάποιον πολιτισμό τότε καλείται επιστημολογικό εμπόδιο. Στην παρούσα εργασία αναφέρονται 16 επιστημολογικά εμπόδια.

- Οι νοητικές εικόνες που δημιουργούν οι μαθητές είναι συνήθως εσωτερικές τους δημιουργίες και συχνά οδηγούν σε λανθασμένες εικόνες έννοιας (Vinner, 1983). Παραδείγματος χάριν, πολλοί μαθητές έχουν την πεποίθηση ότι η συνάρτηση καθορίζεται μόνο από την αλγεβρική της εξίσωση.

- Ο ορισμός έννοιας και η εικόνα έννοιας αλληλεπιδρούν και αλληλοεξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό.

- Επανειλημμένα οι μαθητές κατασκευάζουν την εικόνα μιας συνάρτησης ως μια ισότητα με μικρό πρώτο μέλος και μεγαλύτερο το δεύτερο (Thompson, 1994). Επίσης δεν κάνουν την σύνδεση ότι η εξίσωση, ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση είναι συγκοινωνούντα δοχεία (Lampertus, 2007).

- Η Sfard (1992) σημειώνει ότι η μετάβαση στα θεωρητικά Μαθηματικά μπορεί να γίνει αφού πρώτα περάσουμε από την κατανόηση των απλών εννοιών.

- Ο ίδιος ο ορισμός της συνάρτησης αποτελεί ένα τεράστιο επιστημολογικό εμπόδιο και γίνεται η αιτία να δημιουργηθούν πολλές παρανοήσεις από τους μαθητές στον τομέα των συναρτήσεων.

- Σε μαθητές Γυμνασίου, ένα θεωρητικό αντικείμενο θα πρέπει να εμφανίζεται πρώτα στην εποπτεία και μετά να αποδίδεται με ορισμούς (Σπύρου, 2005).

Στη συγκεκριμένη εργασία, θα διαπιστώσουμε και θα αναλύσουμε ποια από τα επιστημολογικά εμπόδια που αναφέρει η Sierpinska (1992) παρατηρήθηκαν στους μαθητές που έλαβαν μέρος στις διάφορες δραστηριότητες αυτής της έρευνας. Πράγματι, όπως θα δούμε παρακάτω και μέσα από την έρευνά μας, εμφανίστηκαν αρκετά από αυτά τα επιστημολογικά εμπόδια και αυτό σίγουρα αποτελεί μια σαφή ένδειξη ότι πραγματικά αυτά τα εμπόδια είναι ευρέως διαδεδομένα και γνωστά. Επίσης θα μελετήσουμε πως η εικόνα έννοιας μπορεί να επηρεάσει δυναμικά τον ορισμό έννοιας αλλά και αντιστρόφως, πως μπορεί να επηρεάσει ο ορισμός έννοιας την εικόνα έννοιας.

Στη συγκεκριμένη εργασία δε θα ασχοληθούμε με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, με τον πίνακα τιμών της και με τα διαγράμματα - βελοδιαγράμματα. Ουσιαστικά στη συγκεκριμένη έρευνα, προηγήθηκε του ορισμού της συνάρτησης ένα παράδειγμα μέτρησης και δόθηκε κατόπιν ο ορισμός της συνάρτησης. Στα κεφάλαια 3 και 4 θα ασχοληθούμε με τη μεθοδολογία - σχεδιασμό των δραστηριοτήτων (κεφάλαιο 3) καθώς και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις διάφορες δραστηριότητες (κεφάλαιο 4) και θα τις αναλύσουμε εκτεταμένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.

3.1. Σκοπός της έρευνας, ερευνητικό ερώτημα.

Είναι γνωστό το γεγονός ότι η διδακτική μεταφορά της έννοιας της συνάρτησης από τους καθηγητές προς τους μαθητές αποτελεί πολύ δύσκολο μέρος της γενικότερης διδασκαλίας των

Μαθηματικών. Αυτό συμβαίνει κυρίως διότι ο ορισμός που δίνεται στα σχολικά βιβλία του οργανισμού είναι αρκετά θεωρητικός και αποτελεί θα λέγαμε προϊόν μιας εκ μακραίων συζήτησης και αλλαγής σε βάθος των τελευταίων αιώνων. Προκαλεί πολλά ερωτηματικά στους μαθητές και ιδιαίτερη σύγχυση με αποτέλεσμα την απομάκρυνση πολλών εξ αυτών από το αντικείμενο των συναρτήσεων. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα λοιπόν αποτελείται από ένα απλό παράδειγμα που κεντρικό στόχο έχει να εισάγει την έννοια της συνάρτησης στους μαθητές ομαλά και συνάμα παιδαγωγικά.

Όπως αναφέρει και η Sierpinska (1992), μικρή ποσότητα από αλγεβρικές εκφράσεις χρειάζεται ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης σε τόσο μικρή ηλικία. Η ουσία της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης δηλαδή δεν κατακτάται από αλγεβρικές εξισώσεις. Επίσης αναφέρει ότι το αν γίνει εισαγωγή στις συναρτήσεις χρησιμοποιώντας κατευθείαν τον ορισμό τότε θα δημιουργηθούν πολλά προβλήματα, διότι οι μαθητές σε αυτή την ηλικία δεν έχουν αποκτήσει ιδιαίτερη Μαθηματική κουλτούρα και γνωστικό θεωρητικό επίπεδο ώστε να τον αντιληφθούν.

Με τη μελέτη αυτή θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε αν ένα πρόβλημα μέτρησης πάνω στις συναρτήσεις θα μπορέσει να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης πριν ακόμα δοθεί σε αυτούς ο κλασσικός ορισμός της συνάρτησης που βρίσκεται μέσα στο βιβλίο. Αυτός είναι και ο κεντρικός στόχος, σκοπός της παρούσας εργασίας.

Για να μπορέσει να κατανοήσει κάποιος αν ο σκοπός της δραστηριότητας έχει επιτευχθεί ή όχι θα πρέπει μετά την περαίωση της δραστηριότητας και ύστερα από μια επόμενη διδακτική ώρα (παράγραφος 5.1.1) να εξετάσει τα παρακάτω κρίσιμα *ερευνητικά ερωτήματα*, οι απαντήσεις των οποίων είναι καίριες. Τα *ερευνητικά ερωτήματα* είναι τα ακόλουθα:

1. Έχουν κατανοήσει οι μαθητές ότι η έννοια της συνάρτησης πηγάζει από την καθημερινότητα του ανθρώπου και ότι η κεντρική ιδέα της κρύβεται στη μέτρηση;

2. Έχουν καταλάβει οι μαθητές ότι μια σχέση συνάρτησης είναι *καταρχήν* μια σχέση εξάρτησης;

3. Μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν ότι η μια μεταβλητή (προσβάσιμη - ανεξάρτητη) και μόνο αυτή μπορεί να μετρήσει την άλλη μεταβλητή (μετρήσιμη - εξαρτημένη) και ότι σε ένα πείραμα μέτρησης, το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μπορεί να είναι ένα και μόνο ένα;

4. Μπορούν να διακρίνουν τη διαφορά και την ασυμμετρία των δύο μεταβλητών; Μπορούν να θυμούνται τις δύο λέξεις, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή καθώς και το ρόλο της καθεμιάς χωρίς να τις μπερδεύουν;

5. *Μετά από τη δραστηριότητα μέτρησης και κατόπιν κατάλληλου διαλόγου (2η διδακτική ώρα) θα μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν τον ορισμό της συνάρτησης;*

3.2. Σχεδιασμός έρευνας.

3.2.1. Σχεδιασμός δραστηριότητας.

Είναι σαφές ότι για να μπορέσει μια δραστηριότητα, που ουσιαστικά είναι μια διδασκαλία όπου έχει δοθεί το κατάλληλο φύλλο εργασίας, να θεωρηθεί αποτελεσματική θα πρέπει να είναι κατάλληλα προετοιμασμένη μέχρι και την τελευταία λεπτομέρεια ώστε να μην υπάρχουν εκπλήξεις και αναπάντεχα γεγονότα. Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας είναι αρκετά επίπονος και μπορεί να αλλαχθεί αρκετές φορές μέχρι να επιτευχθεί το ζητούμενο αποτέλεσμα. Ένα ζητούμενο για την δραστηριότητα μας ήταν να είναι απλή ως προς τους υπολογισμούς που εμπεριέχει ώστε να κρατηθεί διατηρηθεί το ενδιαφέρον από όλους τους μαθητές και κατά δεύτερον να μην παρεκκλίνουμε του στόχου που ήταν η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Υπό αυτό το πρίσμα λοιπόν θα έπρεπε οι μαθητές να οδηγηθούν στην έννοια της συνάρτησης εν μέσω ενός περιβάλλοντος καθοδηγούμενης διδασκαλίας μεν, το οποίο να παρέχει όμως πολυφωνία και τον πρώτο λόγο στους μαθητές οπού ύστερα από κριτική σκέψη και συζήτηση να οδηγηθούν στη σωστή απάντηση της εκάστοτε ερώτησης. Με άλλα λόγια, όπως αναφέρει και ο Bruner (1996), θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίζουν τους μαθητές ως ενεργά όντα με πρόθεση όπου η γνώση δεν είναι απλά εκεί αλλά την ανακαλύπτουν οι ίδιοι. Δηλαδή η πορεία της διδασκαλίας αυτής ήταν σε μεγάλο βαθμό κονστρουκτιβιστική.

Στους μαθητές λοιπόν δόθηκε ένα φύλλο εργασίας, το οποίο βρίσκεται στο παράρτημα (Π.1) αυτής της διπλωματικής, όπου και το συμπλήρωσαν σταδιακά και μετά από την καθοδήγηση του καθηγητή. *Ο σκοπός ήταν να το συμπληρώσουν όλοι μαζί οι μαθητές ταυτόχρονα αφού πρώτα ακουστούν πολλές γνώμες και καταλήξουν, πάντα με την καθοδήγηση του καθηγητή, στο σωστό συμπέρασμα.* Οι ερωτήσεις που έγιναν στην τάξη ήταν προκαθορισμένες και επίσης το μάθημα σχεδιάστηκε κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προβλέπονται και πολλές διαφορετικές απαντήσεις σε κάθε ερώτηση με τελικό σκοπό να συμπληρωθεί το φύλλο εργασίας ακριβώς σε μια διδακτική ώρα. Στο φύλλο εργασίας διαλέξαμε ένα δοχείο με λάδι όπου ως αρχικό στόχο έχουμε να το γεμίσουμε με λάδι ως τη μέση με ώστε να το πουλήσουμε. Ο λόγος που επιλέξαμε ένα δοχείο με λάδι και όχι ένα δοχείο με κάποιο άλλο υγρό ήταν ότι θέλαμε το πρόβλημα να είναι μέσα από την καθημερινή ζωή ώστε οι μαθητές να αισθανθούν οικεία και να σκέφτονται πρακτικά. Επίσης επιλέξαμε το δοχείο να είναι αδιαφανές ώστε η μέτρηση του έως τη μέση να μην μπορεί να γίνει είτε με οπτική παρατήρηση (με το μάτι) ή με κάποιο άλλο μέσο (π.χ. υποδεκάμετρο). Επίσης το δοχείο επιλέχθηκε να είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έτσι ώστε τα ποσά χρόνος - ύψος να είναι ανάλογα για να μπορέσει το πρόβλημα να λυθεί προφανώς με γνώσεις Γυμνασίου. Βέβαια, το δοχείο θα μπορούσε να έχει οποιοδήποτε άλλο σχήμα, όπως για παράδειγμα κυλινδρικό, ώστε να διατηρηθεί και πάλι η

ζητούμενη αναλογία στα δύο μεγέθη που αναφέραμε.

Το δοχείο αυτό δεν ήταν πραγματικό, αλλά η εικόνα του προβλήθηκε στο διαδραστικό πίνακα του σχολείου. Ο διαδραστικός πίνακας δεν είναι απαραίτητος καθώς θα μπορούσε κάποιος να μην τον χρησιμοποιήσει και να προβάλει την φωτογραφία αυτή σε μια κόλλα Α4 ή ακόμη και να τη σχεδιάσει στον πίνακα. Καθώς το σχολείο διέθετε τέτοιο μέσο, ο λόγος προβολής της εικόνας ότι δοχείο σε αυτόν ήταν για να κερδηθεί πολύτιμος χρόνος. Προτιμήθηκε επίσης το δοχείο να έχει ύψος 48 cm και αυτό δεν έγινε τυχαία, διότι ο αριθμός αυτός είναι καταρχήν σχετικά μικρός και άρα δεν προκαλεί χρονοβόρους υπολογισμούς και κατά δεύτερον έχει μεγάλο πλήθος διαιρετών. Θα πρέπει να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι όλα τα κλάσματα είναι τέτοια ώστε οι τελικοί αριθμοί να είναι ακέραιοι ώστε οι υπολογισμοί να είναι εύκολοι και γρήγοροι. Στα Μαθηματικά προβλήματα βέβαια δεν πρέπει τα τελικά αποτελέσματα να είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί διότι αυτό δεν είναι καθόλου φυσιολογικό και παιδαγωγικά σωστό, όμως στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ο σκοπός ήταν εντελώς διαφορετικός και σε καμία περίπτωση δεν είχε στόχο την προσθήκη πολύπλοκων αριθμητικών παραστάσεων στο πρόβλημα.

Ο λόγος που μας οδήγησε στο να παρουσιάσουμε στην τάξη ένα εικονικό δοχείο και όχι ένα πραγματικό δοχείο αυτών των διαστάσεων ήταν καθαρά πρακτικός καθώς ένα πραγματικό δοχείο με λάδι θα μπορούσε να αποτελέσει ένα πείραμα Φυσικής και επιπροσθέτως ένα ατύχημα θα μπορούσε να καταστρέψει την όποια διαδικασία. Η πρώτη ερώτηση ήταν:

Πόσο θα είναι το ύψος του λαδιού μέσα στο δοχείο όταν το δοχείο γεμίσει μέχρι τη μέση; Αποτελεί μια εξαιρετικά απλή ερώτηση, ουσιαστικά ερώτηση Δημοτικού, που έχει όμως ως κύριους στόχους:

1. Να αισθανθούν από την αρχή οι μαθητές ότι το φύλλο εργασίας δεν είναι πολύπλοκο.

2. Να μπορέσουν ακόμα και οι πολύ αδύναμοι μαθητές να απαντήσουν και να νιώσουν ότι και εκείνοι μπορούν να συμμετάσχουν ενεργά στο μάθημα και όχι να είναι παθητικοί αποδέκτες.

Οι επόμενες ερωτήσεις (2 και 3) αφορούν στον υπολογισμό του χρόνου που απαιτείται ώστε το λάδι να φτάσει στο μέσο του δοχείου (όπου αποτελεί και αρχικό μέρος του προβλήματος) και σε κάποια άλλα σημεία (ύψη) του αδιαφανούς αυτού δοχείου. Στη συνέχεια, οι ερωτήσεις 4 και 5 έχουν ως στόχο την εύρεση του ύψους του λαδιού σε κάποιες δεδομένες χρονικές στιγμές. Στην ερώτηση 6, όπου είναι και η πιο βασική ερώτηση του φύλλου εργασίας, συμβολίζουμε το χρόνο με x και το ύψος με y και ζητάμε από τα παιδιά να βρουν τη σχέση εξάρτησης μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών. Ουσιαστικά ζητάμε από τους μαθητές να ανακαλύψουν τη ζητούμενη σχέση συνάρτησης. Σε όλες τις απαντήσεις των μαθητών έως την ερώτηση 5 ζητάμε συνεχώς να απαντήσουν με την απλή μέθοδο των τριών, που είναι γνωστή από το Δημοτικό, ακριβώς διότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο αυτή και στην ερώτηση 6 όπου χωρίς αυτήν ίσως να ήταν

δύσκολο να απαντήσουν. Οι επόμενες ερωτήσεις, 7 και 8, είναι κλειστού τύπου (πολλαπλής επιλογής με 4 πιθανές απαντήσεις αντίστοιχα) και έχουν ως στόχο να οδηγήσουν στη συνάρτηση $y=\alpha \cdot x$, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση η παράμετρος α είναι ίση με 4 cm/λεπτό. Η ερώτηση 9 έχει ουσιαστικά ως στόχο να τονίσει στους μαθητές ότι θα ήταν αδύνατο, με τις υποθέσεις του πειράματος βέβαια, να μετρήσει κάποιος το ύψος του λαδιού αν πρώτα δεν μετρήσει τον αντίστοιχο χρόνο που απαιτείται με το ρολόι. Στο σημείο αυτό του φυλλαδίου αναφέρεται ότι η συνάρτηση έχει ανακαλυφθεί στα μαθηματικά ώστε να μπορέσουμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος που δεν μπορούμε κατευθείαν (το ύψος) διαμέσου ενός άλλου μεγέθους που μπορούμε να μετρήσουμε (το χρόνο). Στη συνέχεια αναφέρεται ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μεταβλητή που έχουμε πρόσβαση, γνωρίζουμε και η εξαρτημένη μεταβλητή εκείνη που μετράμε και δεν έχουμε άμεση πρόσβαση αλλά έμμεση.

Στο φύλλο εργασίας, σκοπίμως δεν αναφέρεται ο ορισμός της συνάρτησης διότι ο χρόνος δεν θα μπορούσε να επαρκέσει και για αυτό αλλά δίνεται στην αμέσως επόμενη διδακτική ώρα, αφού πρώτα γίνεται αναφορά στο πρόβλημα μέτρησης με το δοχείο και κυρίως στα συμπεράσματά του. *Επίσης, την επόμενη διδακτική ώρα, δίνονται παραδείγματα και για άλλες σχέσεις συνάρτησης και τονίζονται οι ορισμοί ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή καθώς η ονοματολογία προκάλεσε κάποια σύγχυση και δυσκολία στους μαθητές, όπως είναι βέβαια αναμενόμενο. Επίσης τονίστηκε ότι κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής πρέπει υποχρεωτικά να αντιστοιχίζεται σε μία και μόνο μια τιμή της εξαρτημένης και ότι ο ορισμός της συνάρτησης δεν είναι απλά ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα αλλά επιτακτική ανάγκη.* Τη $2^{η}$ διδακτική ώρα γράφτηκαν στον πίνακα σχέσεις με δεδομένο (από τον διδάσκοντα) ότι η μία μεταβλητή είναι η ανεξάρτητη και η άλλη η εξαρτημένη όπου αυτές οι σχέσεις δεν ήταν σχέσεις συνάρτησης. Αυτό βέβαια δεν είναι εύκολο θέμα για μαθητές Β΄Γυμνασίου και είναι στην ευχέρεια του διδάσκοντα, αναλόγως και το επίπεδο της τάξης αλλά και τους χρονικούς περιορισμούς που πάντα υπάρχουν, να αποφασίσει αν θα το αναφέρει ή όχι. Επίσης τονίστηκε στους μαθητές ότι τα γράμματα που χρησιμοποιούνται για τις δύο μεταβλητές δεν είναι υποχρεωτικό να είναι πάντα τα x και y. Όλα αυτά θα τα δούμε στη συνέχεια αυτής της διπλωματικής.

Τέλος, στο φύλλο εργασίας υπάρχει ένας πίνακας τιμών όπου θα πρέπει να συμπληρωθεί με δεδομένη βέβαια τη σχέση αναλογίας του προβλήματος που είναι η $y = 4x$, δίνοντας όσο γίνεται εύκολα αποτελέσματα, ώστε οι μαθητές κατά τη λήξη του μαθήματος να νιώσουν ότι οι συναρτήσεις είναι τομέας που μπορούν να ανταπεξέλθουν και να αποχωρήσουν με ευχάριστα συναισθήματα. Οι τελευταίοι δυο παράγοντες ήταν κυρίαρχοι και συνεχώς στο μυαλό του διδάσκοντα κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας. Επίσης, καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας, κάθε φορά που ένας μαθητής έδινε μια απάντηση ο ερευνητής ρωτούσε τους υπόλοιπους μαθητές αν είχαν διαφορετική άποψη έτσι ώστε να ακουστούν όλες οι διαφορετικές γνώμες.

3.2.2. Σχεδιασμός τεστ.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, μετά τη δραστηριότητα ακολούθησε ένα μάθημα ($2^η$ διδακτική ώρα) όπου δόθηκε ο ορισμός της συνάρτησης και έγινε κάποια ανακεφαλαίωση και υπενθύμιση των βασικών αξόνων του φύλλου εργασίας. Δοθήκαν στους μαθητές και άλλα παραδείγματα συναρτήσεων και τονίστηκε επανειλημμένως ότι η έννοια της συνάρτησης προέρχεται από τη μέτρηση και αποσαφηνίστηκαν οι όροι ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή. Επίσης δοθήκαν στους μαθητές σχέσεις εξάρτησης που όμως δεν αποτελούσαν σχέσεις συνάρτησης με δεδομένο όμως ότι η μια μεταβλητή είναι η ανεξάρτητη και η άλλη η εξαρτημένη. *Την ακριβώς επόμενη διδακτική ώρα ($3^η$ διδακτική ώρα) δόθηκε στους μαθητές ένα τεστ αξιολόγησης που σκοπό είχε να βγάλει ασφαλή συμπεράσματα για το αν οι στόχοι της δραστηριότητας είχαν επιτευχθεί και σε τι βαθμό η καθεμία.* Οι κύριοι λοιπόν στόχοι του τεστ ήταν οι ακόλουθοι:

1. Να ελεγχθεί εάν οι μαθητές μπορούν σε ένα παρόμοιο πρόβλημα μέτρησης να βρουν τη σχέση συνάρτησης ανάμεσα στις δύο μεταβλητές και μάλιστα εάν είναι σε θέση να τεκμηριώσουν την απάντησή τους.

2. Να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να ξεχωρίσουν την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή στο πρόβλημα αυτό καθώς επίσης να απαντήσουν αν μπορούν να υπολογίσουν την εξαρτημένη μεταβλητή εν δεν γνωρίζουν την ανεξάρτητη.

3. Να εξεταστεί αν μπορούν οι μαθητές να καταλάβουν ότι μια οποιαδήποτε σχέση με δυο μεταβλητές δεν είναι πάντα σχέση συνάρτησης.

Για το σκοπό, όπως φαίνεται και από το παράρτημα 2 οι ερωτήσεις του τεστ ήταν δύο, η ερώτηση Α και η ερώτηση Β. Η ερώτηση Α είναι στο ίδιο μήκος κύματος με το φύλλο εργασίας στη δραστηριότητα με την ειδοποιό διαφορά να βρίσκεται στους αριθμητικούς παράγοντες. Οι διαφορές λοιπόν είναι ότι το ύψος του δοχείου είναι 36cm και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει μέχρι πάνω με λάδι είναι 6cm. Ο λόγος που επιλέχθηκαν οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ώστε η σχέση συνάρτησης να είναι η y=6x, δηλαδή το αποτέλεσμα να είναι εύκολο. Η ερώτηση Α1 είναι κλειστού τύπου, με δύο πιθανές απαντήσεις, τις y=6x και x=6y (όπου x είναι ο χρόνος και y είναι το ύψος του λαδιού) και επίσης ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Προφανώς η απάντηση y=6x είναι η σωστή και μπορεί να βρεθεί πολύ εύκολα με τη χρήση της απλής μεθόδου των τριών. Η απάντηση x=6y είναι σκοπίμως τοποθετημένη στο τεστ διότι πολλοί είναι οι μαθητές που κάνουν λάθος στις απλοποιήσεις των κλασμάτων και στη συγκεκριμένη περίπτωση το λάθος που θα μπορούσε να κάνει κάποιος είναι $\frac{\cancel{6}}{\cancel{36}} = 6$ ή κάποιο παρόμοιο στους υπολογισμούς του. Στην ερώτηση Α2 ρωτάμε τους μαθητές ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η

εξαρτημένη μεταβλητή του προβλήματος αυτού και στην ερώτηση Α3 η ερώτηση είναι αν μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο.

Η ερώτηση Β είναι, κατά τη γνώμη του ερευνητή, μια πολύ δύσκολη ερώτηση για μαθητές Β΄Γυμνασίου, παρόλο αυτά κάτι αντίστοιχο αναφέρθηκε στην τάξη και μετά από αρκετή συζήτηση αρκετοί μαθητές φάνηκε να έχουν κατανοήσει το πρόβλημα και την απάντηση. Η ερώτηση Β λοιπόν ήταν η εξής:

Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2 = x$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι, γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση, ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Ποιος έχει δίκιο, ο Μιχάλης ή ο Βαγγέλης;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Η ερώτηση αυτή θα μπορούσε να είναι και η ακόλουθη:

Να εξετάσετε αν η σχέση $y^2 = x$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Προτιμήθηκε όμως να μην είναι αυτή η ερώτηση Β διότι το επίπεδο δυσκολίας θα ανέβαινε πάρα πολύ και θα έπρεπε οι ίδιοι οι μαθητές να αντικαταστήσουν μια τιμή στο x για να καταλάβουν ότι με αυτή την κίνηση θα βρουν δύο τιμές για τη μεταβλητή y, το 1 και το -1. Επίσης οι μαθητές σε αυτή την τάξη δεν είναι εξοικειωμένοι με την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, όπως και με τη συγκεκριμένη εξίσωση $y^2 = 1$, όπου προκύπτουν οι δύο τιμές για το y. Έχει γίνει βέβαια αναφορά ,στο κεφάλαιο του Πυθαγορείου θεωρήματος του σχολικού βιβλίου, ότι σε τέτοιες εξισώσεις, όπως είναι η $y^2 = 1$, οι λύσεις είναι δύο, η θετική τετραγωνική ρίζα του 1 και η αρνητική τετραγωνική ρίζα του 1, όμως οι περισσότεροι μαθητές τις Β΄Γυμνασίου δεν έχουν το αλγεβρικό υπόβαθρο να κάνουν τέτοιους υπολογισμούς. Αυτός είναι και ο λόγος που η ερώτηση είναι αρκετά κατευθυνόμενη και μάλιστα είναι πολύ αναλυτική, χωρίς βέβαια να δίνει εύκολα και την απάντηση στο πρόβλημα.

3.2.3. Σχεδιασμός συνεντεύξεων.

Ουσιαστικά, οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν (σε 3 μαθητές) ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να διατυπώσουν με μεγαλύτερη σαφήνεια τις απαντήσεις τους έτσι ώστε να εξεταστεί εάν κάποιες απαντήσεις δοθήκαν στην τύχη ή ήταν προϊόντα εμπεριστατωμένης σκέψης. Αυτός είναι και ο βασικός σκοπός των συνεντεύξεων. Επίσης, βασικό μέλημα στην όλη προσπάθεια ήταν οι συνεντεύξεις να γίνουν αμέσως μετά τα τεστ, ώστε να μην έχουν τη δυνατότητα οι μαθητές που τους έγιναν οι συνεντεύξεις να ρωτήσουν τους συμμαθητές τους ή κάποιον άλλον για τις απαντήσεις του τεστ. Ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων και με το σκεπτικό ότι ο χρόνος των

συνεντεύξεων ήταν σχετικά περιορισμένος κινήθηκε σε δύο βασικούς άξονες:

1. Ο καθηγητής να έχει όσο το δυνατό δευτερεύοντα ρόλο και να επεμβαίνει όσο το δυνατόν λιγότερο. Θα έπρεπε οι μαθητές να έχουν τον κυρίαρχο ρόλο έτσι ώστε, να διατυπώσουν τις δικές τους απόψεις.

2. Η παρέμβαση του καθηγητή θα έπρεπε να γίνει μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, π.χ. αν καταλάβαινε ότι ο μαθητής έχει άγχος (κυρίως από την παρουσία της κάμερας) και δεν μπορεί να συνεχίσει.

3.3. Συμμετέχοντες - Υλικά που χρησιμοποιήθηκαν.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 27 μαθητές της Β΄ τάξης Γυμνασίου ενός σχολείου της Παλλήνης και η έρευνα έλαβε μέρος το Μάϊο του 2015. Στη δραστηριότητα συμμετείχαν και οι 27 μαθητές, στο τεστ συμμετείχαν οι 24 εξ΄αυτών λόγω απουσίας και στις βιντεοσυνεντεύξεις 3 μαθητές.

Το μέσο επίπεδο των μαθητών του συγκεκριμένου τμήματος στα Μαθηματικά ήταν αρκετά υψηλό, καθότι υπήρχαν αρκετοί μαθητές μέσα στο τμήμα που είχαν διακριθεί στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας "Θαλής". Αυτό δεν συνεπάγεται βέβαια ότι όλοι οι μαθητές ήταν ικανοί στα Μαθηματικά, αφού υπήρχαν και μαθητές (λίγοι) με μαθησιακές δυσκολίες.

Οι απαντήσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος, οι απαντήσεις τους στο τεστ που τους δόθηκε να συμπληρώσουν και οι συνεντεύξεις που έδωσαν οι τρεις εξ αυτών αποτελούν το ερευνητικό υλικό της εργασίας αυτής.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ο σχεδιασμός των ερωτήσεων του φύλλου εργασίας ήταν διεξοδικός και αρκετά σαφής, έτσι ώστε το μάθημα να είναι ουσιαστικό, πυκνό και να εμπεριέχει το ελάχιστο δυνατό πλήθος λαθών που θα οδηγούσαν σε παρεκτροπές από το σκοπό του μαθήματος. Θα μπορούσαμε να παρομοιάσουμε την πορεία του μαθήματος ως μια θεατρική παράσταση όπου το σενάριο έχει ήδη γραφεί και οι παρεκκλίσεις από αυτό πρέπει να είναι οι ελάχιστες δυνατές. Μια τάξη όμως είναι ένας ζωντανός οργανισμός και οι μαθητές δεν μπορεί να είναι παθητικοί αποδέκτες και αυτός είναι ο λόγος που σχεδιάστηκε a priori το σενάριο του μαθήματος. Στο σενάριο του μαθήματος είχαν προβλεφθεί σχεδόν όλες οι δυνατές απαντήσεις των μαθητών (κατά το μέτρο του λογικού και του αναμενόμενου) σε κάθε ερώτηση ξεχωριστά αλλά σκοπός ήταν αυτό να μην γίνει αντιληπτό από τους μαθητές έτσι ώστε να νιώσουν άνετα και να δώσουν σωστές και εμπεριστατωμένες απαντήσεις.

Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ο πράσινος πίνακας, οι κιμωλίες, ο διαδραστικός πίνακας, τα

φύλλα εργασίας καθώς επίσης και δυο κάμερες βιντεοσκόπησης, η μία στημένη πάνω σε τρίποδο και η άλλη χειρός.

3.4. Συλλογή δεδομένων.

Η συλλογή δεδομένων τόσο στη δραστηριότητα αλλά και στις συνεντεύξεις έγινε με χρήση εργαλείων που μας επιτρέπουν να έχουμε ταυτόχρονη καταγραφή εικόνας αλλά και ήχου. Τα φύλλα εργασίας που πήραν οι μαθητές της δραστηριότητας δεν ζητήθηκαν πίσω αλλά τα κράτησαν οι μαθητές. Πριν προηγηθεί η βιντεοσκόπηση της δραστηριότητας, αλλά και οι συνεντεύξεις ο διδάσκων πήρε έγγραφη άδεια από τη διεύθυνση του σχολείου αλλά και από όλους τους κηδεμόνες των μαθητών έτσι ώστε να πραγματοποιηθούν όλες οι βιντεοσκοπήσεις. Στο τεστ, η συλλογή δεδομένων έγινε από τις ίδιες τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές. Η δραστηριότητα διήρκησε μια διδακτική ώρα, η αξιολόγηση μέσα από το τεστ περίπου στα 10 λεπτά και οι συνεντεύξεις επίσης περίπου στα 10 λεπτά η καθεμία. Στις συνεντεύξεις χρησιμοποιήθηκε 'όπως είπαμε μια βιντεοκάμερα χειρός καθώς επίσης ένα στυλό και το τεστ το οποίο είχαν απαντήσει οι μαθητές πριν γίνουν οι συνεντεύξεις. Οι συμμετέχοντες στις συνεντεύξεις ήταν τρεις οι οποίοι ήταν διαφορετικού επιπέδου στο μάθημα των Μαθηματικών. Η συνέντευξη έγινε σε χαλαρό κλίμα και τονίστηκε και στους τρεις μαθητές ότι δεν αξιολογούνται καθώς επίσης ότι η βιντεοσκόπηση γίνεται καθαρά για επιστημονικούς λόγους και συγκεκριμένα για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

3.5. Μέθοδος ανάλυσης της έρευνας.

Τόσο η δραστηριότητα, αλλά και οι συνεντεύξεις έχουν ως βασική αρχή το μοντέλο που προτείνουν οι Powell, Francisco & Maher (2003) όπου προτείνουν ένα αναλυτικό μοντέλο για τη μελέτη της ανάπτυξης της Μαθηματικής σκέψης όπου περιλαμβάνει μια σειρά από επτά συσχετισμένες, μη γραμμικές φάσεις:

1. Πολύ προσεκτική παρακολούθηση στα δεδομένα του βίντεο (video-data).

2. Περιγραφή των βιντεοδεδομένων.

3. Αναγνώριση των κρίσιμων γεγονότων.

4. Μεταγραφή.

5. Κωδικοποίηση.

6. Κατασκευή ιστορίας (storyline)

7. Κατασκευή αφηγήματος (narrative)

(σελ. 413).

Έτσι λοιπόν, με βάση το μοντέλο αυτό, είδαμε αρκετές φορές τις συνομιλίες που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια των καταγραφών με τις κάμερες, τόσο στη δραστηριότητα αλλά και στις βιντοσυνεντεύξεις. Στη συνέχεια έγινε ακριβής μεταφορά των διαλόγων αυτών σε ένα αρχείο Word και έγινε κάποια κωδικοποίηση (μικρή) στους διαλόγους αυτούς. Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι έγινε ελάχιστη έως μηδαμινή αλλαγή στους πραγματικούς διαλόγους και την καταγραφή τους έτσι ώστε να μην αλλοιωθεί και το νόημα, περιεχόμενό τους. Έγινε αναγνώριση των κρίσιμων γεγονότων - συμβάντων όπου αυτά είναι που ουσιαστικά εστιάζει η έρευνά μας. Στη συνέχεια έγινε κατασκευή ιστορίας η οποία πηγάζει από τις δικές μας πεποιθήσεις και αντιλήψεις για τους διαλόγους που έγιναν. Για παράδειγμα, σε πολλά σημεία του διαλόγου που θα δούμε στο κεφάλαιο 4, κατασκευάζουμε όπου είναι δυνατόν και απαιτείται μια μικρή ιστορία - σχολιασμό από κάποια πιθανή απάντηση. Τέλος, μέσα από την έρευνα αυτή έχει δημιουργηθεί ένα αφήγημα που σκοπό έχει να αναδείξει όλους τους στόχους που θέσαμε αρχικά και να εξετάσει αν αυτοί πραγματοποιήθηκαν και σε ποιο βαθμό καθώς επίσης και να φέρει στην επιφάνεια όλα τα επιστημολογικά εμπόδια που δημιουργήθηκαν. Με λίγα λόγια, η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων τόσο της δραστηριότητας αλλά και των συνεντεύξεων ήταν ποιοτική.

Η μέθοδος ανάλυσης του τεστ τώρα, ήταν ποσοτική και για την ακρίβεια χρησιμοποιήθηκαν δύο κυκλικά διαγράμματα για τα αποτελέσματα των απαντήσεων στις ερωτήσεις Α2 και Β και δύο ραβδογράμματα για τις απαντήσεις Α1 και Α3. Τα κυκλικά διαγράμματα και τα ραβδογράμματα είναι σχεδιασμένα στο Word.

3.6. Κύρια σημεία του 3^{ου} κεφαλαίου.

Ανακεφαλαιώνοντας, τα κύρια σημεία του 3^{ου} κεφαλαίου είναι τα εξής:

1. Στόχος της έρευνας είναι να εισάγει την έννοια της συνάρτησης στους μαθητές μέσα από ένα απλό παράδειγμα μέτρησης, χωρίς να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης από την αρχή.

2. Στόχος της έρευνας είναι να κατακτηθεί ο ορισμός της συνάρτησης (του Dirichlet) που βρίσκεται μέσα στα σχολικά βιβλία, αφού πρώτα συνδεθεί με το παράδειγμα μέτρησης. Να γίνει δηλαδή ομαλή διδακτική μεταφορά της συνάρτησης προς τους μαθητές.

3. Στόχος της έρευνας είναι να αποσαφηνιστούν από τους μαθητές οι έννοιες ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή.

4. Οι ερωτήσεις στο φύλλο εργασίας της δραστηριότητας ήταν ιδιαίτερα σχεδιασμένες ώστε να αποφευχθούν άσκοποι και πολύπλοκοι υπολογισμοί και να μπορέσουν όλοι οι μαθητές να απαντήσουν.

5. Επιλέχθηκε η μέθοδος των τριών ως βασικό εργαλείο υπολογισμών, ώστε να καταστεί ευκολότερη η διαδικασία εύρεσης της σχέσης αναλογίας των δύο μεγεθών.

6. Οι ερωτήσεις του τεστ ήταν σχεδιασμένες έτσι ώστε να ελεγχθεί εάν οι μαθητές έχουν κατανοήσει και σε ποιο βαθμό την έννοια της συνάρτησης και δεν είχαν σκοπό να τους εξετάσουν σε κάποια δύσκολη άσκηση πάνω στις συναρτήσεις.

7. Οι βιντεοσυνεντεύξεις έπρεπε να έχουν πρωταγωνιστές τους μαθητές και η επέμβαση του ερευνητή να γίνει μόνο αν ήταν επιτακτική η ανάγκη.

8. Η μέθοδος ανάλυσης των αποτελεσμάτων ήταν ποιοτική όσον αφορά στη δραστηριότητα και στις συνεντεύξεις και ποσοτική όσον αφορά στο τεστ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.

4.1. Δραστηριότητα.

Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε τους διάλογους, όπως ακριβώς αυτοί προέκυψαν, μέσα από την πορεία του μαθήματος. Κάθε φορά που γίνεται μια ερώτηση τότε αυτή αναφέρεται ως Ε.i. όπου i φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του ένα και κάθε φορά που δίνεται μια απάντηση τότε αυτή αναφέρεται ως Α.i, όπου i είναι το προηγούμενο σύμβολο.

Το φύλλο εργασίας λοιπόν αρχίζει με μία εισαγωγή η οποία αποτελεί το θεμέλιο της δραστηριότητας και είναι η εξής:

" Έχουμε ένα δοχείο με λάδι που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όπως αυτό που βλέπουμε στη φωτογραφία (η φωτογραφία προβλήθηκε στο διαδραστικό πίνακα) και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 12 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 48 cm. "

Σχήμα 4.1. Παρουσίαση δοχείου στο διαδραστικό πίνακα.

- *Ερώτηση 1*

Ε.1. *Πόσο θα είναι το ύψος του λαδιού μέσα στο δοχείο όταν το δοχείο γεμίσει μέχρι τη μέση;*

Α.1 Θα κάνουμε 48 δια 2 και βγαίνει 24 cm.

(Σε αυτό το σημείο ρωτάμε και τους υπόλοιπους μαθητές αν συμφωνούν και απαντάνε ομόφωνα ναι. Στη συνέχεια ο διδάσκων γράφει στον πίνακα την απάντηση στην πρώτη ερώτηση.)

- Ερώτηση 2

Ε.2 *Πόσος χρόνος χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο μέχρι τη μέση; Πως το βρήκατε;*

Όποιος μου πει, θα μου πει και τη γνώμη του. Δεν αξιολογήστε, δεν με νοιάζει αν είναι σωστό ή λάθος... Θέλω να ακούσω τη γνώμη σας, πως το σκέφτεστε!

Α.2 Έξι λεπτά!

Ε.3 Έξι λεπτά... Πως το σκέφτηκες;

Σχήμα 4.2. Απάντηση μαθήτριας στην ερώτηση 2.

Α.3 (Η ίδια μαθήτρια) Άμα θέλει 12 (εννοεί λεπτά) για να γεμίσει όλο, το μισό του 12 είναι έξι, οπότε έξι λεπτά μέχρι τη μέση!

Ε.4 Τι λέτε οι άλλοι; Συμφωνείτε; Υπάρχει κάποιος που δε συμφωνεί;

Το σύνολο της τάξης λέει ναι, όμως ένας μαθητής έχει διαφορετική γνώμη!

Α.4 *Εγώ πιστεύω ότι εξαρτάται, αν ρίχνουμε με τον ίδιο ρυθμό διαρκώς!*

Απάντηση διδάσκοντα: Πολύ ωραία ερώτηση αυτή!! Ναι η απάντηση είναι ότι ρίχνουμε συνεχώς με τον ίδιο ρυθμό. Δεν αυξομειώνεται ο ρυθμός. Πολύ ωραία ερώτηση αυτή! Μπράβο!

Σχήμα 4.3. Ερώτηση Α4 του μαθητή: Είναι ίδιος ο ρυθμός;

(Σε αυτό το σημείο του μαθήματος, ο διδάσκων ρωτάει τους μαθητές του να βρουν την προηγούμενη απάντηση με τη *μέθοδο των τριών.* Αυτό θα γίνεται και στις ίδιου τύπου παρακάτω ερωτήσεις, *καθώς η μέθοδος των τριών θα αποτελέσει και το βασικό και ουσιαστικό μαθηματικό μας εργαλείο έτσι ώστε να ανακαλύψουν οι μαθητές τη σχέση της γραμμικής συνάρτησης που εμφανίζεται στο πείραμα.)*

Ε.5 Με τη μέθοδο των τριών πως μπορούμε να το δούμε;

Α.5 Εεε, αφού κάνουμε 12 λεπτά για να γεμίσουμε τα 48, πόσο χρόνο θα κάνουμε για να γεμίσουμε τα 24;

Ε.6 Πολύ σωστά! Το " πόσο χρόνο θα κάνουμε", να τον συμβολίσουμε με x; "

Α.6 Ομόφωνα το σύνολο της τάξης: ΝΑΙ!!

Ο καθηγητής τώρα γράφει στον πίνακα:

" Στα 12 λεπτά γεμίζει το δοχείο με 48 cm λάδι.

Στα x λεπτά γεμίζει το δοχείο με 24 cm λάδι."

Ε.7 Πως θα βρούμε τώρα το x; Τι πρέπει να κάνουμε;

Α.7 Χιαστί.

Ε.8 Δηλαδή;

Α.8 Θα κάνουμε 12 + 24, εεε επί 24 (ο μαθητής νιώθει αρκετό άγχος εκείνη τη στιγμή και ο διδάσκων του λέει "πες το δεν πειράζει, πες τη γνώμη σου ") ισούται με 48 επί x.

Ε.9 Άρα $12 \cdot 24 = 48 \cdot x$. Συμφωνείτε οι άλλοι παιδιά;

Α.9 Όλη η τάξη: Ναι!!

Σχήμα 4.4. Η απάντηση Α.8 του μαθητή για τη χιαστή στην ερώτηση 2.

(Σε κάθε απάντηση, είτε σωστή είτε λανθασμένη, ο διδάσκων ρωτάει αν οι υπόλοιποι συμφωνούν, έτσι ώστε να δίδεται η ευκαιρία σε όλους τους μαθητές να εκφράσουν τη γνώμη τους.)

Ο διδάσκων γράφει στον πίνακα τα ακόλουθα: " Άρα έχουμε (να βάλουμε πρώτα το x, στο πρώτο μέλος; Απάντηση: ναι) $48 \cdot x = 12 \cdot 24$."

Ε.10 Πως θα βρούμε τώρα το x;

Α.10 Θα κάνουμε πρώτα τον πολλαπλασιασμό 24 επί 12 και μετά θα διαιρέσουμε με το 48.

Ε.11 Συμφωνείτε όλοι; Υπάρχει πιο εύκολος τρόπος;

Α.11 Να απλοποιήσουμε το 24 με το 48!

(Διδάσκων: Άρα να μην κάνουμε τον πολλαπλασιασμό 24 επί 12 καθόλου...).

Να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με 48 και στη συνέχεια να απλοποιήσουμε το 24 με το 48.

Σχόλιο άλλου μαθητή: *Μπράβο, πολύ ωραία σκέψη!!*

Στον πίνακα ο διδάσκων γράφει $48 \cdot x = 12 \cdot 24$ ή $\frac{48 \cdot x}{48} = \frac{12 \cdot 24}{48}$.

Ε.12 Τι απλοποιούμε παιδιά εδώ;

Α.12 Εε, το 24 με το 48.

Ε.13 Μόνο;;

Α.13 Και το 48 με το 48

Ε.14 Και μετά;

Α.14 Κάνουμε 24 δια 48 και μένει 2..

Ε.15 Που μας μένει 2, επάνω ή κάτω;

Α.15 Επάνω, εεε.... κάτω. Και πάνω 1. Οπότε κάνουμε 12/2 που μας κάνει 6.

Σχήμα 4.5. Η μαθήτρια βοηθάει στις απλοποιήσεις των κλασμάτων (Ε.12 έως Α.15).

Ε.16 Συμφωνείτε όλοι;

Α.16 Ναι!!

Στον πίνακα, ο καθηγητής γράφει:

$$48 \cdot x = 12 \cdot 24 \text{ ή } \frac{48 \cdot x}{48} = \frac{12 \cdot 24}{48} \text{ ή } \frac{48 \cdot x}{48} = \frac{12 \cdot 24}{48} \text{ ή } \frac{\cancel{48} \cdot x}{\cancel{48}} = \frac{12 \cdot \cancel{24}^{1}}{\cancel{48}^{2}} \text{ ή } x = \frac{12}{2} = 6 \text{ λεπτά.}$$

- Ερώτηση 3

Ε.17 Μπράβο παιδιά! Πολύ καλά τα πάτε! *Λοιπόν, πόσος είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε το δοχείο να γεμίσει μέχρι το ένα τέταρτο του ύψους του; Πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει το λάδι στα πέντε έκτα του ύψους του δοχείου; Πως το βρήκατε;* Πρώτα θα πούμε για το 1/4.

Α.17 Υπάρχουν 2 τρόποι. Ο ένας τρόπος είναι με απλή διαίρεση, δηλαδή θα κάνουμε 12/4=3, δηλαδή 3 λεπτά και (ο άλλος) με την αναγωγή στη μονάδα, αφού το χωρίζουμε σε τέσσερα κομμάτια, 12/4=3 και 3 επί 1 ίσον 3, άρα 3 λεπτά.

Σχήμα 4.6. Απάντηση Α.17 του μαθητή. Με απλή διαίρεση και με αναγωγή στη μονάδα.

Ε.18 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Α.18 Πιστεύω ότι μπορούμε να το κάνουμε πάλι και με απλή μέθοδο των τριών, όπως και πριν.

Ε.19 Θέλω να το δούμε με την απλή μέθοδο των τριών παιδιά σήμερα, θέλω να τα βλέπουμε σχεδόν όλα έτσι. Πως θα το κάνουμε με απλή μέθοδο των τριών;

Α.19 (Απαντάει ο προηγούμενος μαθητής) Πιστεύω πως πρέπει να βρούμε πρώτα το ένα τέταρτο.

Ε.20 Το ένα τέταρτο ποιανού λοιπόν πρέπει να βρούμε;

Α.20 (Απαντάει ο προηγούμενος μαθητής) Εεε.. Το ένα τέταρτο του ύψους, δηλαδή του 48. Θα το βρούμε κάνοντας διαίρεση του 48 με το 4.

Ε.21 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Α.21 Ναι, κάνουμε τον πολλαπλασιασμό του 1/4 με το 48 και μας βγάζει 14..εεε.. συγγνώμη 12 cm.

Ο διδάσκων γράφει στον πίνακα:

Άρα το $\frac{1}{4}$ του ύψους είναι $\frac{1}{4} \cdot 48 = \frac{48}{4} = 12$ cm.

Ε.22 Λοιπόν.. Πως θα κάνουμε τώρα την απλή μέθοδο των τριών; Ο Χρήστος έχει δίκιο σε αυτό που λέει (στην Α.17). Είναι πολύ σωστός ο τρόπος, βέβαια. Πως θα κάνουμε την απλή μέθοδο των τριών; Θέλω να επιμείνουμε λιγάκι σε αυτό! Τι λέτε; Παύση.. Πως θα βρούμε δηλαδή το χρόνο που χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο με 12 cm λάδι;

Α.22 Θα κάνουμε: Σε 6 λεπτά, το δοχείο γεμίζει 24 εκατοστά, οπότε σε x λεπτά το δοχείο γεμίζει με 12 εκατοστά λάδι.

Ε.23 Συμφωνείτε όλοι με αυτό;

Α.23 Ναι!!

Ε.24 Να πάρω εδώ τα αρχικά, δηλαδή τα 12 λεπτά και τα 48 εκατοστά; Για να έχουμε σαν βάση αυτό και να μην μπερδευόμαστε;; Είναι το ίδιο και πιο εύκολο το δικό σου (του μαθητή της Α.22).

Α.24 Ναι.

(Ο διδάσκων εδώ προτίμησε να χρησιμοποιήσει τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος, παρότι το ζεύγος 6 λεπτά και 24 εκατοστά θα ήταν πιο βολικό ως προς τους υπολογισμούς. Αυτό έγινε για να μην δημιουργηθεί σύγχυση στις ακόλουθες απαντήσεις διότι τα νούμερα-ζεύγη είναι πολλά και διαφορετικά.)

Στον πίνακα γράφεται το εξής:

" Στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει με 48 cm λάδι

στα x λεπτά το δοχείο γεμίζει με 12 cm λάδι."

Ε.25 Πως θα βρούμε το x;

Α.25 Με χιαστί. Θα κάνουμε $48 \cdot x = 12 \cdot 12$ (Γράφεται και στον πίνακα αυτή η απάντηση).

Ε.26 Συμφωνούμε οι υπόλοιποι;

Α.26 Ναι!!!

Ε.27 Ωραία, πάμε. Πως θα βρούμε τώρα το x;

Α.27 Θα κάνουμε ότι κάναμε και πριν, δηλαδή θα διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου, άρα $\frac{48 \cdot x}{48} = \frac{12 \cdot 12}{48}$

(ο μαθητής δεν έκανε τον πολλαπλασιασμό 12 επί 12 με σκοπό προφανώς να απλοποιήσει).

Ε.28 Συμφωνούμε οι υπόλοιποι; (Απ. Ναι) Θέλει να συνεχίσει κάποιος άλλος;

Α.28 Απλοποιούμε 48 με 48 στο πρώτο μέλος και το ένα 12 με το 48 στο άλλο μέλος και μας μένει

$\frac{\cancel{48} \cdot x}{\cancel{48}} = \frac{12 \cdot \cancel{12}^{1}}{\cancel{48}^{4}}$ ή $x = \frac{12}{4} = 3$ λεπτά.

Ε.29 Πολύ ωραία. Συμφωνούμε οι υπόλοιποι;

Α.29 Ναι. Μπορούμε εε πριν κάνουμε τις πράξεις, επειδή το δοχείο γεμίζει με 48 εκατοστά σε 12 λεπτά και στα x λεπτά το δοχείο γεμίζει 12 εκατοστά, να κάνουμε $\frac{48}{12}$ και μετά τον αριθμό που θα βγάλουμε από την πράξη, δηλαδή το 3, να διαιρέσουμε το 12 με αυτόν.

(Δηλαδή, ο μαθητής προτείνει να υπολογίσουμε "απευθείας" το x από την απλή μέθοδο των τριών κάνοντας τις πράξεις: $x = \frac{12}{\frac{\cancel{48}^{4}}{\cancel{12}^{1}}}$ ή $x = \frac{12}{4} = 3$ λεπτά).

Διδάσκων: Πολύ ωραία απάντηση! Και εγώ το ίδιο κάνω για να το βρω, αλλά είδα ότι δεν το ξέρετε οι πιο πολλοί αυτό... Μπράβο!

Μαθητής: Και βγαίνει πιο γρήγορα!

Ε.30 Λοιπόν.. Σωστό είναι και αυτό!! Πάμε παιδιά για τα πέντε έκτα. Για να σας ακούσω. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει το λάδι στα πέντε έκτα του ύψους του δοχείου; Τι θα κάνουμε;

Α.30 Θα το λύσουμε όπως και πριν, λέγοντας ότι τα πέντε έκτα του χρόνου... (ο μαθητής σε αυτό το σημείο μπερδεύτηκε) μμμ στα πέντε έκτα του χρόνου... Βασικά θα αρχίσουμε με το ότι στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει με 48 cm και θα κάνουμε το αντίστοιχο για τα 5/6.

Ε.31 Τι πρέπει να βρω πρώτα;; Συμφωνείτε οι υπόλοιποι; (Παύση.... Να συμμετέχετε όλοι παιδιά!!).

Α.31 Βασικά, μπορούμε να βρούμε πρώτα το 1/6 των 48 cm και μετά να το πολλαπλασιάσουμε επί 5, ώστε να βρούμε τα 5/6 των 48 cm. (Ο μαθητής προφανώς εφαρμόζει τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα).

Ε.32 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι σε αυτό; Τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;

Α.32 Πρέπει να βρούμε καταρχήν τα 5/6 πόσο είναι, που είναι 40 cm και μετά να κάνουμε τον ίδιο τρόπο που κάναμε και πριν.

Ε.33 Για να το δούμε λοιπόν.. Για τα $\frac{5}{6}$, ισχύει ότι τα $\frac{5}{6}$ του ύψους....Ποια πράξη πρέπει να κάνουμε παιδιά;

Α.33 Εεε $\frac{5}{6} \cdot 48$.

Ο διδάσκων γράφει στον πίνακα: " $\frac{5}{6} \cdot 48 =$ ".

Ε.34 Πως θα κάνουμε αυτή την πραξούλα εύκολα;

Α.34 Θα απλοποιήσουμε το 6 με το 48 και θα μείνει στο 48 το 8 και από κάτω 1.

Ε.35 Συμφωνείτε;

Α.35 Ναι!

Ο διδάσκων γράφει στον πίνακα:

Άρα " $\frac{5}{\cancel{6}^{1}} \cdot \cancel{48}^{6} = 40$ cm."

Ε.36 Τι θα κάνουμε τώρα για να βρούμε το χρόνο μέχρι να πάει το λάδι στα 40 cm; Τι πρέπει να κάνουμε;

Α.36 Απλή μέθοδο των τριών. Θα κάνεις στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει 48 cm

και μετά στα x λεπτά....

Ε.37 (Μαθητής) Κύριε δεν πρέπει να βάλουμε y; Επειδή το x το έχουμε γράψει παντού, γι΄αυτό.

Σχήμα 4.7. Ερώτηση μαθητή Ε.37: Δεν πρέπει να βάλουμε y;

(Σε αυτό το σημείο είναι σχεδόν σίγουρο ότι ο μαθητής δεν έχει αποσαφηνίσει 100% την έννοια της μεταβλητής και τη διαφορά της με τον άγνωστο.)

Α.37 (Διδάσκων) Όχι, δεν πειράζει, ας συμβολίζουμε το χρόνο παντού με x. Δεν σημαίνει ότι θα είναι το ίδιο εδώ!!

Ε.38 Πως θα συνεχίσουμε τώρα; (Η ερώτηση απευθύνεται στο μαθητή που απάντησε την Α.36).

Α.38 Στα x λεπτά λοιπόν το δοχείο γεμίζει 40 cm λάδι.

Στον πίνακα, ο διδάσκων γράφει:

" Στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει 48 cm

στα x λεπτά το δοχείο γεμίζει 40 cm."

Ε.39 Πως θα βρούμε τώρα το x;

Α.39 Με χιαστί. Δηλαδή $48 \cdot x = 12 \cdot 40$. (Αυτό ακριβώς γράφει και ο διδάσκων στον πίνακα)

Ε.40 Ωραία, τι θα κάνουμε τώρα για να βρούμε το x;

Α.40 Θα το κάνουμε όπως πριν, δηλαδή x=..., βασικά όχι, $\frac{48 \cdot x}{48} = \frac{12 \cdot 40}{48}$, θα απλοποιήσουμε το 12 με το 48, εε και το 48 με το 48 στο πρώτο μέλος.

Ε.41 Το 12 με το 48 πώς θα απλοποιηθεί;

Α.41 Θα μείνει επάνω 1 και από κάτω θα μείνει 4. Οπότε θα γίνει τελικά 10 (το x εννοεί προφανώς).

Στον πίνακα, ο διδάσκων γράφει:

" $\frac{48 \cdot x}{48} = \frac{12 \cdot 40}{48}$ ή $\frac{\cancel{48} \cdot x}{\cancel{48}} = \frac{\cancel{12}^{1} \cdot 40}{\cancel{48}^{4}}$ ή $x = \frac{40}{4}$ ή $x = 10$ λεπτά. "

Ε.42 Συμφωνείτε όλοι; Έχει κάποιος διαφορετική άποψη;

Α.42 Μια χαρά. Συμφωνούμε!!

- *Ερώτηση 4*

Ε.43 *Ποιο θα είναι το ύψος του λαδιού στο ένα λεπτό; Πολύ εύκολη ερώτηση!! Μην ντρέπεστε να σηκώσετε χέρι!*

Α.43 Θα κάνουμε το ίδιο. Στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει με 48 cm, στο 1 λεπτό θα φτάνει τα x.

Καθηγητής: Για να το δούμε αυτό, για να το γράψω αυτό.... Για να δούμε τι λέει η Φωτεινή. Λες λοιπόν ότι στα 12 λεπτά γεμίζει με 48 cm, δεν το γράφω τώρα κάθε φορά το λάδι... και μετά μου είπες, ότι στο 1 λεπτό γεμίζει με x.

Στον πίνακα όμως ο καθηγητής γράφει τα εξής:

" Στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει με 48 cm

στο 1 λεπτό το δοχείο γεμίζει με _____ "

(Προφανώς ο καθηγητής αφήνει με κενό το γράμμα του αγνώστου διότι πρέπει να συμβολίσουμε το ύψος του λαδιού με y, ώστε να γίνει η διάκριση των δύο μεταβλητών. Με x όπως είπαμε θα συμβολίζουμε το χρόνο, δηλαδή την προσβάσιμη - ανεξάρτητη μεταβλητή και με y θα συμβολίζουμε την διαμεσολαβημένη - εξαρτημένη μεταβλητή.)

Ε.44 Συμφωνείτε;; Θα πρέπει να κάνουμε μια μικρή αλλαγή...

Α.44 Ναι!! Με y.

Διδάσκων: Ναι Σπύρο, δεν το άφησα τυχαία κενό!! Θα το βάλουμε y αυτό.

Με x να έχουμε το χρόνο και y να έχουμε το ύψος.

Σχήμα 4.8. Ο μαθητής απαντάει στην Α.44: Να βάλουμε y.

Ε.45 Τι θα κάνουμε τώρα για να βρούμε το y; Πολύ εύκολη ερώτηση, πανεύκολη!

Α.45 (Ο ίδιος μαθητής) Θα κάνουμε πολύ απλά $12y=48$.

Ε.46 Πολύ ωραία! Συμφωνείτε οι υπόλοιποι; (Θετικές απαντήσεις) Πως θα βρούμε τώρα το y;

Α.46 (Ο ίδιος μαθητής) Διαιρώ με 12. Δηλαδή $12y=48$ ή $y=\frac{48}{12}$ ή $y=4$ cm.

(Αυτό γράφηκε και στον πίνακα κατά η διάρκεια του μαθήματος.)

Ε.47 Συμφωνούμε όλοι; Προσέξτε τώρα πολύ καλά! Αυτή η τιμή του y, δηλαδή τα 4 cm, τι εκφράζει για το πρόβλημά μας, τι είναι; Ποιος θα μου το πει; Τι είναι αυτό το 4; Είναι πολύ

σημαντικό!!! Τα 4 cm είναι πολύ σημαντικά για το πρόβλημα!!

(Ο διδάσκων επιμένει πάρα πολύ σε αυτή την ερώτηση, γιατί ουσιαστικά ο αριθμός 4 (cm/min) εκφράζει τον συντελεστή αναλογίας της γραμμικής συνάρτησης και θα βοηθήσει ιδιαίτερα στους επόμενους υπολογισμούς.)

Α.47 Το ζητούμενο;

Ε.48 Ναι, εντάξει, γίνε λίγο πιο σαφής. Τι είναι;

Α.48 Είναι αυτό που μας ζητάει το πρόβλημα (προφανώς εννοεί η ερώτηση).

Ε.49 Ναι, είναι η απάντηση της ερώτησης..... Τι άλλο εκφράζει;

Α.49 Είναι το 1/12 του ύψους!

(Τα παιδιά αντιμετωπίζουν κάποιο πρόβλημα να απαντήσουν σε αυτή την ερώτηση, αλλά ο καθηγητής δε θέλει να βοηθήσει περαιτέρω και αυτό διότι το σημείο του μαθήματος είναι κομβικό και οποιαδήποτε μικρής έκτασης πληροφορία θα τους οδηγήσει πολύ εύκολα στην απάντηση.)

Ε.50 Ωραία. Τι άλλο εκφράζει;

Α.50 (Ο μαθητής δίνει μια ιδιαίτερα πολύπλοκη και μπερδεμένη απάντηση, που τελικά είναι σωστή) Μπορούμε να βρούμε σε πόσα λεπτά.... ε σε πόσο.... Ξέρουμε ότι τα 4 cm είναι σε ένα λεπτό..

Διδάσκων: Εεε, συμφωνώ με την Χριστίνα, το είπε λίγο πολύπλοκα. Αλλά εννοεί, είναι πολύ σημαντικό, ο αριθμός 4 μας δείχνει πόσο ύψος ανεβαίνει το λάδι στο κάθε λεπτό που περνάει (ο διδάσκων δείχνει την εικόνα με το δοχείο στο διαδραστικό πίνακα και κουνάει το χέρι κάνοντας "διαμέριση" του δοχείου δείχνοντας εντελώς εμπειρικά την άνοδο στο κάθε λεπτό). Ωραία, να το κρατήσουμε αυτό.

Σχήμα 4.9. Ο καθηγητής δείχνει τη διαμέριση του δοχείου ανά λεπτό.

- *Ερώτηση 5*

Ε.51 *Πάμε στην πέμπτη ερώτηση. Ποιο θα είναι παιδιά το ύψος του λαδιού μέσα στο δοχείο μετά από τρία λεπτά; Μην ξεχνάτε να μου πείτε πως το βρήκατε! (ο καθηγητής γράφει στον πίνακα την ερώτηση 5).*

Α.51 Εφόσον στο 1 λεπτό γεμίζει με 4 cm λάδι, εεε, στα 3 λεπτά γεμίζει σε τρία τέσσερα (ο μαθητής έχει διαγνωσμένα μαθησιακές δυσκολίες και προφανώς εννοεί τρία επί τέσσερα)

Ε.52 Συμφωνείτε όλοι με αυτό; Εννοείς τρία επί τέσσερα;

Α.52 Ναι!!

Ε.53 Μπορούμε να κάνουμε απλή μέθοδο των τριών;

Α.53 Ναι μπορούμε!!

Ε.54 Είναι πιο απλός ο τρόπος που μας είπε ο συμμαθητής σας; Χρειάζεται τώρα να κάνουμε απλή μέθοδο των τριών;

Α.54 Όχι.

(Σχεδόν κάθε ερώτηση την απαντάμε με την απλή μέθοδο των τριών αλλά αυτή την ερώτηση, για να κερδίσουμε χρόνο και για να ολοκληρωθεί το μάθημα στο χρόνο που είχαμε στη διάθεσή μας, την απαντάμε με τον πιο σύντομο τρόπο.)

Ο καθηγητής γράφει στον πίνακα:

" Στα 3 λεπτά, το ύψος θα είναι $3 \cdot 4 = 12$ cm. "

Ε.55 *Τώρα θέλω να μου πείτε λοιπόν, τι πρέπει να κάνω για να βρω το ύψος;*

Τι πολλαπλασίασα; Είναι πολύ σημαντικό αυτό!!! (οι μαθητές διστάζουν να δώσουν μια απάντηση) Έχω πολλαπλασιάσει δύο πράγματα....., δύο μεγέθη.....

Α.55 Πολλαπλασιάζω τα εκατοστά στο 1 λεπτό επί..... (ο μαθητής διστάζει λίγο)

Ε.56 Μπράβο... πολλαπλασιάζω τα εκατοστά στο ένα λεπτό, που είναι πόσα;;

Α.56 (ο ίδιος μαθητής) Που είναι τέσσερα, επί..... (ο μαθητής φαίνεται να έχει κολλήσει λίγο)

Ε.57 Να βοηθήσουμε λίγο τον συμμαθητή μας; Τι λέτε οι υπόλοιποι;;

Α.57 *Εεεε, θα πολλαπλασιάσουμε τα cm ανά λεπτό, δηλαδή το ύψος ανά λεπτό με το χρόνο.*

Ε.58 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Α.58 Ναι!!

[*Το μάθημα έχει ήδη ωριμάσει και έχει φτάσει πια σε ένα πολύ σημαντικό επίπεδο, διότι έτσι γίνεται*

μια πρώτη επαφή με τη συγκεκριμένη σχέση συνάρτησης, αφού γίνεται ξεκάθαρο πλέον, έστω και μόνο με αριθμητικούς παράγοντες, ότι για υπολογίσουμε - μετρήσουμε το ύψος του λαδιού, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό 4 που είναι ο συντελεστής αναλογίας με τον αντίστοιχο χρόνο. Ο διδάσκων επιμένει πάρα πολύ σε αυτό το κομμάτι, καθώς προσπαθεί να εισαγάγει στους μαθητές του την έννοια της συνάρτησης ως μια δράση μέτρησης κρίνοντας επιτακτική την ανάγκη να τονίζει συνεχώς ότι για να υπολογίσουμε τη μία μεταβλητή (διαμεσολαβημένη μεταβλητή), αρκεί να έχουμε πρόσβαση στην άλλη μεταβλητή (την ανεξάρτητη - προσβάσιμη).]

Ακριβώς αυτός είναι και ο λόγος λοιπόν που επαναλαμβάνει:

"Πολλαπλασιάζουμε τα εκατοστά ανά λεπτό, που είναι 4, με το χρόνο για να βρούμε το ύψος!!"

Σχήμα 4.10. Καθηγητής: Πολλαπλασιάζουμε τα εκατοστά ανά λεπτό με το χρόνο...

- *Ερώτηση 6*

Αυτή η ερώτηση αποτελεί και την πιο καίρια του μαθήματος καθώς ουσιαστικά εκμαιεύεται η σχέση της γραμμικής συνάρτησης y=αx.

Ε.59 *Πάμε στην ερώτηση 6!! Ας συμβολίσουμε το χρόνο με x και το αντίστοιχο ύψος με y. Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο (μια εξίσωση) που να μας δίνει το ύψος αν ξέρουμε το χρόνο χωρίς να μετρήσουμε (εννοείται χωρίς να μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος με υποδεκάμετρο);* Χωρίς βέβαια να μετρήσουμε το ύψος του λαδιού στο δοχείο! Τι πιστεύετε; Να το ξαναπώ..; Μην μπερδεύεστε με το x και το y. Το x είναι ο χρόνος, σωστά; Και το y είναι το ύψος..... Να μου βρείτε έναν τύπο...- ο τύπος τι είναι παιδιά;; Όπως στη Χημεία, στη Φυσική έχουμε $p=\frac{m}{v}$, αυτός είναι ένας τύπος, μια εξίσωση, ο τύπος της πυκνότητας...., να βρείτε μια αντίστοιχη εξίσωση που είναι "του προβλήματος" που να συνδέει το x και το y. Μια ισότητα που να έχει το x και το y (Λίγα μόνο

παιδιά σηκώνουν διστακτικά το χέρι τους). Για σκεφτείτε το και οι υπόλοιποι !!

Α.59 Εεε.... $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$.

Ε.60 Τι λέτε οι υπόλοιποι, συμφωνείτε;;;

Α.60 Ναι, ναι....(συμφωνεί σύσσωμη η τάξη!!) Πολύ καλό!! Πολύ σωστό!

Ε.61 Αντώνη τι λες;;

Α.61 Εγώ θα έλεγα $x = 4y$.

Ε.62 $x = 4y$.Τι λέτε; Συμφωνείτε οι υπόλοιποι με αυτό;

Α.62 Ναι καλύτερο αυτό... Ναι συμφωνούμε....

(Σε αυτό το σημείο, οι μαθητές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, η πρώτη εξ' αυτών πιστεύει ότι η σωστή απάντηση είναι η $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ *και η δεύτερη ομάδα που πιστεύει ότι η σωστή σχέση είναι η* $x = 4y$*.)*

Σχήμα 4.11. Οι μαθητές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες (Α.59 έως Α.62).

Ε.63 Μπορούμε να βρούμε έναν πιο σίγουρο τρόπο για να συνδέσουμε το x και το y; Ας πούμε με

τη μέθοδο των τριών; Με τη μέθοδο των τριών, πώς μπορούμε να τα συνδέσουμε αυτά; Τι λες;

Α.63 *Εγώ θα έλεγα ότι είναι το ύψος, εεε ισούται με το ύψος που ανεβαίνει ανά λεπτό και το χρόνο, εεε συγνώμη, επί το χρόνο!* Γιατί, έτσι βρίσκουμε το ύψος που θα γεμίσουμε σε πόσο χρόνο και εεεε... σε πόσο χρόνο... (ο μαθητής δεν είναι πολύ σίγουρος για την απάντηση που δίνει, όμως είναι απόλυτα σωστή !!!)

Ε.64 Τι λες εσύ;

Α.64 Αυτό για το ύψος, αν ξέρουμε το χρόνο....μμμμμ

Ε.65 Σπύρο, μας λέει αν ξέρουμε το χρόνο, να βρούμε έναν τύπο που να μας δίνει το ύψος!!

Α.65 (απαντάει ο μαθητής της Α.64) Αααα αν ξέρουμε το χρόνο.... Ε τότε αυτό που είπε ο Χρήστος είναι (ο μαθητής της Α.59)!!!

Ε.66 Να το δούμε πως βγαίνει! Με απλή μέθοδο των τριών, ωραία;; Ο καθηγητής γράφει στον πίνακα : " Στο ένα λεπτό, το ύψος ανεβαίνει..." Ποιος θα μου πει;

Α.66 4 κύριε!

Ε.67 Πολύ ωραία, 4. (Στον πίνακα γράφεται από τον καθηγητή : "Στο ένα λεπτό, το ύψος ανεβαίνει 4 εκατοστά"). Πως συμβολίζουμε το χρόνο;

Α.67 Με λεπτά...

(ο μαθητής δεν έχει καταλάβει την ερώτηση και νομίζει ότι ερωτάται για το ποια είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου)

Ε.68 Πως συμβολίζουμε το χρόνο; Μας το λέει εδώ!!

Α.68 Αα... με x. (απαντάει ο μαθητής Α.67)

Ε.69 Με x. Ο καθηγητής γράφει στον πίνακα : " Σε x λεπτά το ύψος ανεβαίνει...."

Πόσο; Πως συμβολίζουμε το ύψος;

Α.69 Με y.

Ε.70 Με y. Συμφωνείτε όλοι;

Α.70 Ναι!!

Στον πίνακα, ο καθηγητής γράφει συγκεντρωτικά :

" Στο 1 λεπτό το ύψος ανεβαίνει 4 cm

Σε x λεπτά το ύψος ανεβαίνει y cm."

(Αυτή είναι και η σχέση η οποία, με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς θα οδηγήσει την τάξη να αποδείξει τη σχέση συνάρτησης που εισέρχεται σε αυτά τα δύο μεγέθη. Τη μεταβλητή x που είναι ο χρόνος και τη μεταβλητή y που είναι το ύψος.)

Ε.71 Πως θα δουλέψουμε σε αυτό τον τύπο; Τι πρέπει να κάνουμε; Τι κάναμε πριν;;;

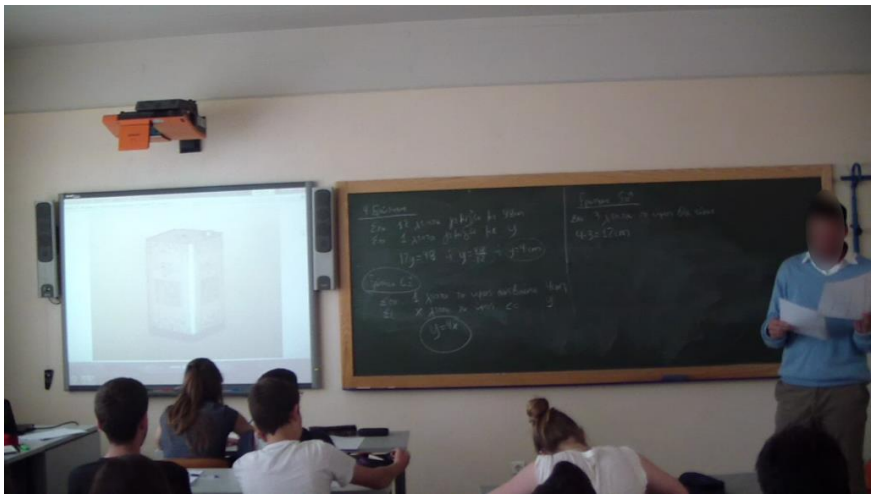
Α.71 Θα κάνουμε χιαστί, δηλαδή $y \cdot 1$, που μένει y, ισούται με 4x.

Ε.72 Συμφωνείτε παιδιά με αυτό;

Α.72 Ναι!

Ο καθηγητής γράφει λοιπόν στον πίνακα : " $y = 4x$ *".*

Πάρα πολύ ωραία!!



Σχήμα 4.12. Ο καθηγητής γράφει στον πίνακα τη σχέση $y = 4x$.

Ε.73 *(ερώτηση μαθητή προς τον καθηγητή) Όμως έτσι δεν έχουμε δυο αγνώστους;;*

Α.73 *Έτσι έχουμε, μην τους πούμε αγνώστους, έτσι έχουμε δύο μεταβλητές!! Δεν ψάχνουμε κάτι συγκεκριμένα, έχουμε δυο μεταβλητές.*

- *Ερώτηση 7*

Ε.74 Λοιπόν παιδιά ας πάμε στην ερώτηση επτά.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Α. Ύψος = (Ύψος ανα λεπτό) ×(Χρόνος)

Β. Χρόνος = (Ύψος) ×(Ύψος ανα λεπτό)

Γ. Ύψος ανα λεπτό = (Χρόνος) ×(Ύψος)

Δ. Κάτι άλλο

Τι πιστεύετε; Πολύ εύκολο!

Α.74 Το Α είναι.

Ε.75 Το Α λες ότι είναι, γιατί;

Α.75 Γιατί αυτό κάναμε και τώρα στο πρόβλημα!!

Καθηγητής: Γιατί αυτό κάναμε και τώρα στο πρόβλημα, πολύ ωραία! Άρα η σωστή απάντηση είναι το Α.

Ε.76 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι παιδιά, έχετε κάποια αντίρρηση;;

Α.76 Ναι, ναι συμφωνούμε.

Καθηγητής: Πάμε παρακάτω.. Πάντα στα μαθηματικά, όπως και στη Φυσική και στη Χημεία χρησιμοποιούμε σύμβολα! Έχετε δει ποτέ ότι το Ύψος = (Ύψος ανα λεπτό) ×(Χρόνος) ;;

Ε.77 (μαθητής) Κύριε... γιατί το Β είναι λάθος; (ο μαθητής αναφέρετε στην ερώτηση 7)

Σχήμα 4.13. Ερώτηση Ε.77: Γιατί το Β είναι λάθος;

Α.77 (καθηγητής) Ο χρόνος....

(Πριν προλάβει να απαντήσει ο καθηγητής, ο μαθητής το ξανασκέφτεται και απαντάει)

Α όχι είναι επί, τώρα το σκέφτηκα. Ναι, πρέπει να είναι το ύψος δια 4, δεν το είδα....

[Προφανώς ο μαθητής είχε στο μυαλό του ότι: Χρόνος = (Ύψος):(Ύψος ανα λεπτό), που είναι βεβαίως σωστή και ισοδύναμη απάντηση!]

Ε.78 Παιδιά, έχουμε ποτέ στα Μαθηματικά, στη Φυσική και στη Χημεία, σε αυτά τα μαθήματα όλον αυτόν τον "σιδηρόδρομο"; [ο καθηγητής αναφέρεται στην "περιγραφική" ισότητα Ύψος = (Ύψος ανα λεπτό) ×(Χρόνος)].

Α.78 Όχι.

Ε.79 Δε συμβολίζουμε με γράμματα;;; Ωραία; Πως συμβολίζουμε το ύψος, το ξαναλέμε.

Α.79 Σύσσωμη η τάξη: Με y.

- *Ερώτηση 8*

Ε.80 Αν το ύψος ανά 1 λεπτό το πω, συμβολίσω με α, το χρόνο με x και το ύψος με y, επιλέξτε τη σωστή απάντηση από τις τέσσερεις.

Η ερώτηση 8 είναι η ακόλουθη:

"Ας συμβολίσουμε λοιπόν:

- ✓ το *ύψος με y*
- ✓ το *ύψος ανά λεπτό με α*
- ✓ και το *χρόνο με x.*

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Α. $y = \alpha \times x$

Β. $x = \alpha \times y$

Γ. $\alpha = y \times x$

Δ. Κάτι άλλο

Α.80 Είναι σίγουρα το Α.

Ε.81 Άρα λες ότι στην ερώτηση 8 η σωστή απάντηση είναι $y = \alpha \times x$. Συμφωνείτε οι υπόλοιποι παιδιά; Είναι κάποιος που διαφωνεί;

Α.81 Όχι.

Ε.82 Πολύ ωραία. Συμπληρώστε μου τώρα αυτό το κουτάκι:

Στην περίπτωσή μας ξέρουμε το α= 4 cm το λεπτό ,
οπότε η εξίσωση θα γίνει ……

Είναι πολύ απλές οι ερωτήσεις! Τι λέτε; Μην ξαφνιάζεστε, μη νομίζετε ότι είναι κάτι δύσκολο!!

Οι ερωτήσεις είναι πολύ απλές και κάποιες φορές οι μαθητές διστάζουν να απαντήσουν νομίζοντας ότι εμπεριέχουν παγίδες.

Α.82 Ε.... y=4x.

Ε.83 Ωραία, είναι σωστό;

Α.83 Ναι!

Ο καθηγητής γράφει τα εξής στον πίνακα:

" Άρα το Ύψος = (Ύψος ανα λεπτό) × (Χρόνος) "

$y = \alpha \times x$

(Ο καθηγητής ρωτάει διαρκώς με ποιο γράμμα έχουμε συμβολίσει το χρόνο, το ύψος ανά λεπτό και το ύψος.).....

Σχήμα 4.14. Συμμετοχή μαθητών στην ερώτηση 8.

- *Ερώτηση 9*

Ε.84 *Πάμε στην ένατη ερώτηση. Πως μετρήσαμε το ύψος του λαδιού κάθε φορά; Τι βρήκαμε πρώτα,; Θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το ύψος του λαδιού αν δεν ξέραμε το χρόνο; Τι λέτε; Πως κάθε φορά βρίσκαμε το ύψος; Τι πρέπει να μετρήσουμε πρώτα;*

Α.84 Το ύψος ανά λεπτό επί το χρόνο...

Ε.85 Τι λέτε οι υπόλοιποι; Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Α.85 Όχι, όχι...

Ε.86 Διαφωνεί κάποιος με αυτό; Αν δεν ξέρω το χρόνο, μπορώ να βρω το ύψος;

Α.86 Μπα, δε νομίζω!

Ε.87 Όχι. Συμφωνείτε οι άλλοι;

Α.87 Ναι, ναι...

Καθηγητής: Σωστά, άρα για να μετρήσουμε το ύψος, δηλαδή το y, πρέπει να μετρήσω πρώτα το χρόνο. Αλλιώς θα έχουμε δύο αγνώστους! Το α το ξέρουμε σωστά; Πολύ ωραία.

Σχήμα 4.15. Αν δεν ξέρω το χρόνο, μπορώ να βρω το ύψος;

Ε.88 (μαθητής) Κύριε, αν είχαμε άλλα δεδομένα δεν θα μπορούσαμε να το βρούμε;

Α.88 (καθηγητής) Σωστά, αν είχαμε όμως άλλα δεδομένα θα είχαμε και άλλη ισότητα εδώ. Εντάξει;

Ε.89 (μαθητής) Εδώ τι γράφουμε δηλαδή; (στον κενό χώρο κάτω από την ερώτηση 9 εννοεί ο μαθητής)

Α.89 (καθηγητής) Εδώ γράφουμε λοιπόν τα εξής: Πρώτα βρίσκουμε το χρόνο και ότι δεν θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το ύψος του λαδιού αν δεν ξέραμε το χρόνο;

Ε.90 (μαθητής) Αν ξέραμε το ύψος θα μπορούσαμε να βρούμε το χρόνο;

Α.90 (καθηγητής) Για να το δούμε, σωστά. Συμφωνώ σε αυτό!

Ε.91 Δεν ξέρω οι υπόλοιποι, τι λέτε; Συμφωνείτε;

Α.91 Είναι το ανάποδο, αν ξέρω το ύψος γενικώς μπορώ να βρω το χρόνο.

Ε.92 Άρα αν ξέρω το ύψος, μπορώ να βρω το χρόνο;

Α.92 Ναι!!

Ε.93 Μια σχέση είναι αυτή σωστά;

Α.93 Ναι.

Καθηγητής: *Πως λέγεται αυτή η σχέση; Αυτή παιδιά η σχέση λέγεται σχέση συνάρτησης!! Άρα, πάμε στην τελευταία μας σελίδα. Η παραπάνω εξίσωση λέγεται σχέση συνάρτησης, δηλαδή μιλάμε για αυτή την εξίσωση εδώ, την y=4x και τα x, y δεν λέγονται άγνωστοι αλλά λέγονται μεταβλητές, γιατί μπορούν να πάρουν πολλές τιμές. Η συνάρτηση έχει ανακαλυφθεί στα μαθηματικά για να μπορέσουμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος και δεν μπορούμε κατευθείαν (στη συγκεκριμένη περίπτωση το ύψος y)....*

Ε.94 Στη συγκεκριμένη περίπτωση, για να μετρήσουμε το ύψος τι χρειαζόμαστε πρώτα;

Α.94 Το χρόνο.

Καθηγητής: *Άρα συνεχίζουμε... με τη βοήθεια ενός άλλου μεγέθους που μπορούμε να μετρήσουμε (στη συγκεκριμένη περίπτωση ο χρόνος x). Άρα μπορώ να μετρήσω το χρόνο με το ρολόι και αφού τον βρω, βρίσκω στη συνέχεια και το ύψος χωρίς να κοιτάξω το δοχείο, δεν μπορώ να βρω το ύψος αλλιώς. Ωραία, δηλαδή μετράμε το x για να βρούμε το y, αλλά και αντίστροφα όπως μου είπατε γνωρίζοντας το y βρίσκουμε το x. Προφανώς μπορούμε να βρούμε το x αν ξέρουμε το y μόνο εάν έχουμε βρει τον τύπο της συνάρτησης και κάνοντας την αντίστοιχη αντικατάσταση.*

Σχήμα 4.16. Αυτή παιδιά η σχέση λέγεται σχέση συνάρτησης.

Ε.95 Κύριε δεν είναι όμως λάθος αυτό; μμμμ όχι μπερδεύτηκα... σωστό είναι!

Α.95 Ωραία.

Καθηγητής: *Το x ονομάζεται συνήθως ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη , γιατί για να βρούμε το y (ύψος) θα πρέπει πρώτα να βρούμε το x (χρόνο). Δηλαδή το y εξαρτάται από το x. Προσέξτε τα πολύ αυτά.*

Ε.96 (μαθητής) Ναι αλλά κύριε και το x εξαρτάται από το y, διότι αν ξέρουμε το ύψος μπορούμε να βρούμε τα λεπτά.

Α.96 Έχεις δίκιο. Το y εξαρτάται από το x, αλλά και το x εξαρτάται από το y.

Ε.97 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Α.97 Ναι.

Καθηγητής: *Λοιπόν θα σας το πω στο άλλο μάθημα αναλυτικά ποιο ρόλο έχει η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο η εξαρτημένη μεταβλητή. Έχουν μια διαφορά. Θα το αναλύσουμε αυτό (Ο χρόνος πια είναι πολύ περιορισμένος μέχρι να χτυπήσει το κουδούνι).*

Καθηγητής: Πάμε στην τελευταία άσκηση λοιπόν. Η εξίσωση της συνάρτησης που έχουμε στο πρόβλημά μας είναι y=4x. Από κάτω σας δίνω ένα πινακάκι και θέλω να το συμπληρώσετε. Για να δούμε λοιπόν, πως θα συμπληρώσουμε αυτό το πινακάκι

(στη συνέχεια, στον πίνακα γράφετε αυτός ο πίνακας τιμών).

x (Χρόνος)	1	8	5			11
y (Υψος)				36	26	

Πίνακας 4.1. Πίνακας τιμών της συνάρτησης y=4x.

Εμείς θα κάνουμε μαζί μόνο τα δύο πρώτα και εσείς θα κάνετε τα άλλα στο σπίτι.

Ε.98 Να βοηθήσω για το πρώτο ή θέλει να μου πει κάποιος; Νομίζω ότι είναι πανεύκολο.

Α.98 Είναι 4 cm.

Ε.99 Πως το βρήκες;

Α.99 Το έχουμε βρει ήδη!!

Ε.100 Ναι, αλλιώς;; Πως μπορούμε να το βρούμε αλλιώς; Ποιος θα μου πει;

(ο καθηγητής δείχνει την σχέση της συνάρτησης που είναι γραμμένη πάνω από τον πίνακα τιμών)

Α.100 Για να βρούμε το y, *θα πολλαπλασιάσουμε το x τέσσερεις φορές,* οπότε 4 επί 1 ίσον 4, άρα το y=4.

Σχήμα 4.17. Συμπλήρωση πίνακα τιμών της συνάρτησης.

Καθηγητής: Σωστά. Άρα λοιπόν παιδιά, για να βρω πόσο είναι το y, θα πάω σε αυτή την εξίσωση (ο καθηγητής την κυκλώνει) και θα βάλω, αντικαταστήσω το x με 1.

Άρα από κάτω θα γράψω : " Για x=1, έχουμε $y = 4 \times 1 = 4\ cm$".

Ε.101 Πως θα βρούμε τώρα, πανεύκολο νομίζω, όταν ο χρόνος είναι 8 λεπτά, πόσο θα φτάσει το ύψος. Δεν το έχουμε βρει στο φυλλάδιο.

Α.101 Θα πολλαπλασιάσουμε $4 \times 8 = 32\ cm$.

Ε.102 Συμφωνείτε οι υπόλοιποι; Έχει κανείς άλλη γνώμη;

Α.102 Όχι.

Καθηγητής: Ωραία, πως θα το γράψω; " Για x=8, έχουμε $y = 4 \times 8 = 32\ cm$."

Λοιπόν παιδιά τα υπόλοιπα συμπληρώστε τα στο σπίτι.

Ευχαριστώ πάρα πολύ για τη συμμετοχή σας, ήσασταν εξαιρετικοί!!

Να είστε καλά!!!

Σχήμα 4.18. Τέλος δραστηριότητας.

Τέλος της δραστηριότητας.

4.2. Τεστ.

Παρακάτω γίνεται μια ποσοτική ανάλυση των δεδομένων του τεστ με διαγράμματα πάνω στις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές της τάξης. Το τεστ είναι το ακόλουθο:

ΤΕΣΤ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΝΟΜΑ……..... ΕΠΩΝΥΜΟ…….……..……

ΤΜΗΜΑ…… ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ…….

Α. Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36 cm.

Ερωτήσεις:

Α1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι:

Α) $y = 6x$ Β) $x = 6y$ Πως το βρήκατε;

Α2. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

Α3. Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

Β. Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y = x^2$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι, γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση, ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Ποιος έχει δίκιο, ο Μιχάλης ή ο Βαγγέλης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

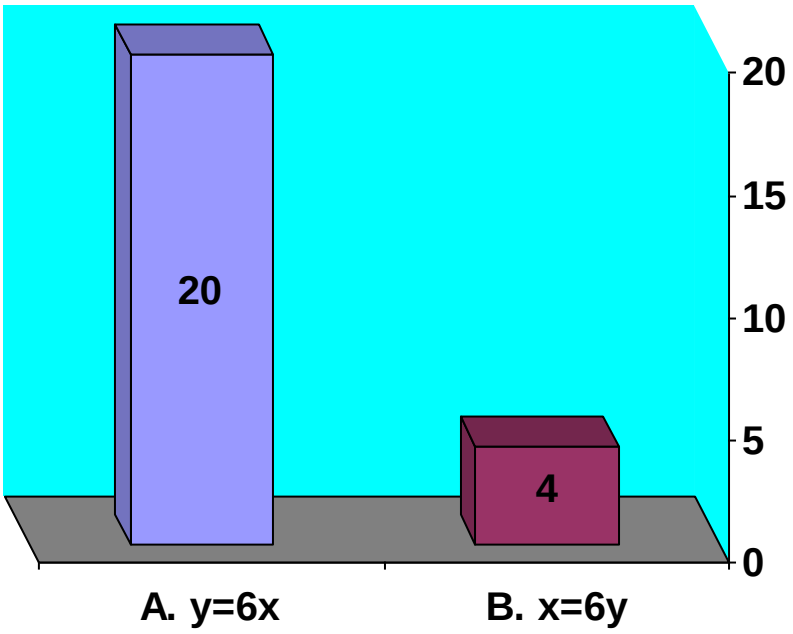
Ποσοτική ανάλυση δεδομένων:

Ερώτηση Α1:

Α1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι:

Α) $y = 6x$ Β) $x = 6y$ Πως το βρήκατε;

Η σωστή απάντηση είναι προφανώς η Α (y=6x) και οι απαντήσεις φαίνονται στο ακόλουθο ραβδόγραμμα:



Σχήμα 4.19. Ραβδόγραμμα στην ερώτηση Α1 του τεστ.

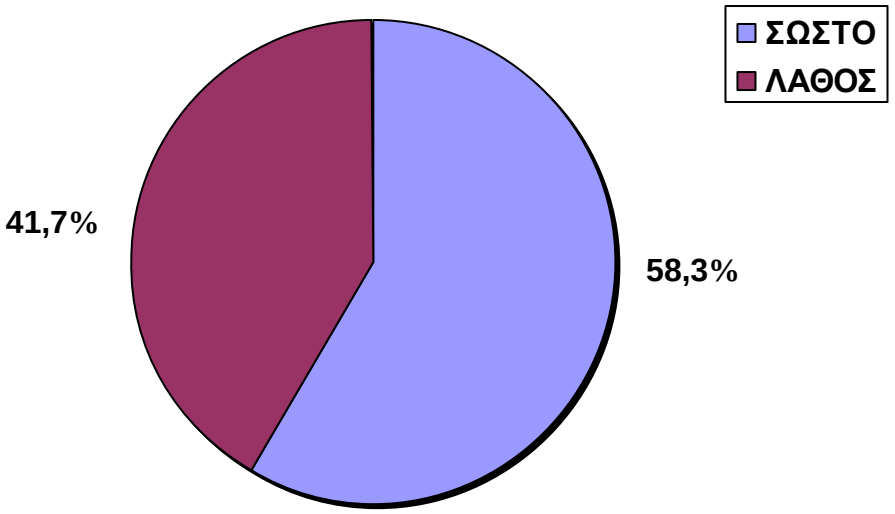
Οι μαθητές που απάντησαν *σωστά* (δηλαδή επέλεξαν την απάντηση Α) ήταν 20 ενώ οι υπόλοιποι μαθητές ήταν 4. Δηλαδή το περίπου 83,3% επί του συνόλου των μαθητών της τάξεως απάντησε *σωστά* και το υπόλοιπο 16,7% απάντησε *λάθος*. Παρατηρούμε ότι η πλάστιγγα γέρνει σαφώς υπέρ της σωστής απάντησης και μάλιστα *σχεδόν όλοι* οι μαθητές που έδωσαν την σωστή απάντηση αιτιολόγησαν το σκεπτικό τους κάνοντας απλή μέθοδο των τριών. *Έτσι λοιπόν δείχνει να είναι ξεκάθαρο το γεγονός ότι η μεγαλύτερη μερίδα της τάξης έχει κατανοήσει τον τρόπο εκείνον έτσι ώστε να μετασχηματίσει ένα πραγματικό πρόβλημα μέτρησης στη σωστή σχέση συνάρτησης.*

Ερώτηση Α2:

Α2. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

Η σωστή απάντηση είναι ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή στο πρόβλημα είναι η μεταβλητή x και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η μεταβλητή y.

Οι απαντήσεις των μαθητών δίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



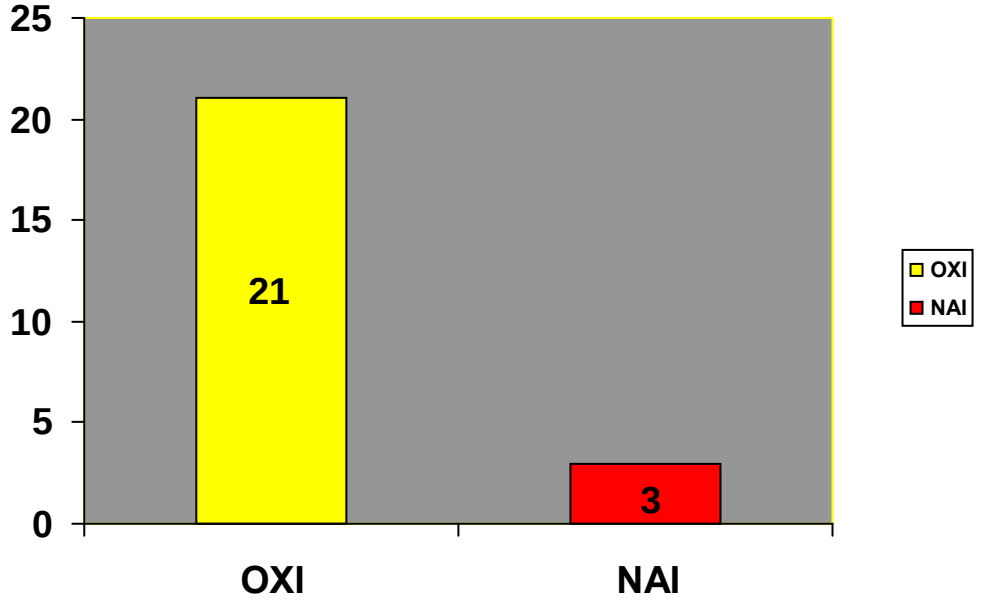
Σχήμα 4.20. Κυκλικό διάγραμμα στην ερώτηση Α2 του τεστ.

14 μαθητές απάντησαν *σωστά* και 10 μαθητές απάντησαν *λάθος*. Τα ποσοστά είναι αντίστοιχα, όπως φαίνεται και από το παραπάνω κυκλικό διάγραμμα, περίπου 58,3% και 41,7%. Σαφώς είναι περισσότερες οι σωστές απαντήσεις αλλά η διαφορά ανάμεσα στα δύο ποσοστά δεν είναι μεγάλη. Αυτό ίσως να οφείλεται και στο γεγονός ότι πολλοί μαθητές δεν ήταν ακόμη εξοικειωμένοι με τη συγκεκριμένη ορολογία και τους προκαλεί σύγχυση η ονοματολογία των δύο μεταβλητών. Δεν αποτελεί θα λέγαμε σημείο που θα πρέπει κάποιος να σταθεί και να αναλύσει και αυτό διότι οι επόμενες δύο απαντήσεις δείχνουν με μεγάλη βεβαιότητα ότι το σύνολο των μαθητών έχει κατανοήσει ότι κάθε τιμή του χρόνου μετράει μία και μόνο τιμή για το ύψος του λαδιού. Κατά τη διάρκεια των επόμενων μαθημάτων αρκετοί μαθητές εξέφρασαν ότι δυσκολεύονται να απομνημονεύσουν τις δύο λέξεις και διατύπωσαν την άποψη πως θυμούνται ότι κάθε τιμή της μεταβλητής που έχουμε πρόσβαση (που μπορούμε να μετρήσουμε, που ξέρουμε) πρέπει να μετράει μία και μόνο τιμή για τη διαμεσολαβημένη μεταβλητή (τη μεταβλητή που βρίσκουμε), αλλά μπερδεύουν τα ονόματα των δύο. Αυτό θα το αναλύσουμε και με τα αποτελέσματα της ερώτησης Β. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι πολλές λάθος απαντήσεις σε αυτή την ερώτηση οφείλονται στη βιασύνη των μαθητών και στη δυσκολία των δύο λέξεων κάτι που βελτιώθηκε αρκετά με την επανάληψη των δύο εννοιών.

Ερώτηση Α3:

Α3. Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

Η σωστή απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι όχι και οι απαντήσεις φαίνονται από το παρακάτω



Σχήμα 4.21. Ραβδόγραμμα στην ερώτηση Α3 του τεστ.

3 μαθητές απάντησαν *εσφαλμένα ναι* και οι υπόλοιποι 21 απάντησαν *σωστά με όχι*. Τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 12,5% και 87,5% αντίστοιχα.

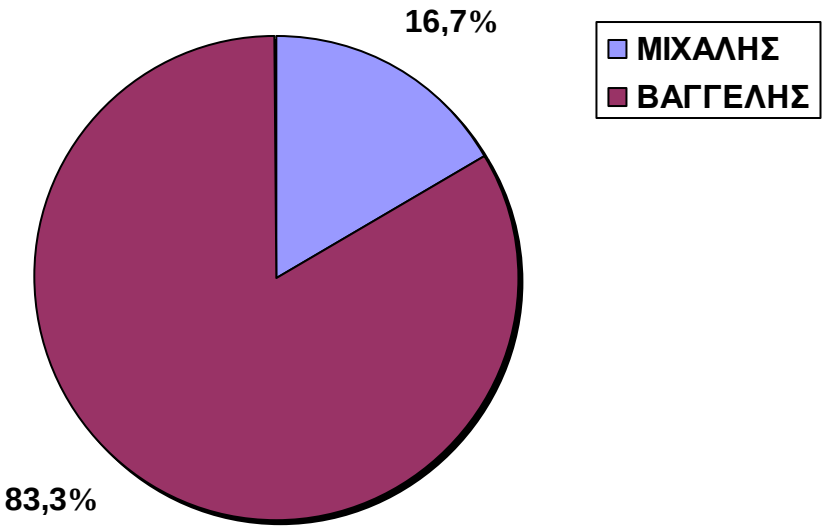
Από το παραπάνω ραβδόγραμμα μπορούμε να βγάλουμε ένα ασφαλές συμπέρασμα ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών έχει κατανοήσει ότι η μεταβλητή y (ύψος) δεν μπορεί να βρεθεί με κανένα άλλο τρόπο παρά μόνο με τη διαμεσολάβηση της μεταβλητής x (χρόνος).

Έχουν κατανοήσει δηλαδή σε μεγάλο βαθμό ότι η έννοια της συνάρτησης είναι άκρως συνυφασμένη με την έννοια της μέτρησης παρά με μια στυγνή και χωρίς νόημα προς αυτούς (τους μαθητές) αντιστοίχιση.

Ερώτηση Β:

Β. Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y = x^2$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι, γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση , ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Ποιος έχει δίκιο, ο Μιχάλης ή ο Βαγγέλης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Η σωστή απάντηση είναι η δεύτερη, δηλαδή η άποψη του Βαγγέλη και οι απαντήσεις δίδονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Σχήμα 4.22. Κυκλικό διάγραμμα στην ερώτηση Β του τεστ.

4 μόνο μαθητές απάντησαν *λανθασμένα* ότι η άποψη του Μιχάλη είναι σωστή και 20 μαθητές απάντησαν *σωστά*, δηλαδή ότι η άποψη του Βαγγέλη είναι η σωστή.

Τα αντίστοιχα ποσοστά είναι περίπου 16,7% και 83,3% αντίστοιχα. Η περισσότεροι μαθητές που απάντησαν ότι η άποψη του Βαγγέλη είναι η σωστή, διατύπωσαν πως όταν έχουμε μια σχέση συνάρτησης δεν γίνεται να μετρήσουμε (να "βγάλουμε" όπως είπαν οι περισσότεροι) δύο αποτελέσματα. Δηλαδή εξέφρασαν την γνώμη ότι κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής δεν μπορεί να δώσει δύο αποτελέσματα για την εξαρτημένη μεταβλητή. *Είναι πια σίγουρο ότι στους περισσότερους μαθητές έχει γίνει ξεκάθαρο ότι η συνάρτηση σημαίνει μέτρηση και έτσι δεν μπορούμε να έχουμε δυο αποτελέσματα σε μία μέτρηση διότι αυτό θα ήταν εντελώς παράλογο.*

4.3. Συνεντεύξεις.

Η κάθε συνέντευξη διήρκησε περίπου στα 10 λεπτά και ο σκοπός της ήταν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα ως προς το επίπεδο κατανόησης των μαθητών πάνω στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Ο καθηγητής είχε σκοπό να συμμετέχει μόνο αν έκρινε ότι έπρεπε και γενικά είχε επικουρικό ρόλο στη συνέντευξη. Τον κυρίαρχο ρόλο τον είχαν βεβαίως οι μαθητές καθώς έπρεπε να διατυπώσουν τις δικές τους απόψεις και θέσεις ανεξάρτητα αν ήταν σωστές ή λάθος. Οι τρεις συνεντεύξεις σίγουρα βοηθούν πάρα πολύ την συγκεκριμένη έρευνα καθώς διατυπώνονται με ακρίβεια οι πεποιθήσεις και τα πιστεύω των μαθητών γύρω από το πεδίο των συναρτήσεων και σε ένα ευρύτερο πλαίσιο γύρω από τα Μαθηματικά. Είναι αναπόφευκτο όμως το γεγονός ότι οι πεποιθήσεις των τριών αυτών μαθητών δεν αντικατοπτρίζουν με απόλυτη βεβαιότητα τις πεποιθήσεις και τις αντιλήψεις και των υπολοίπων μαθητών της τάξης. Και οι τρεις μαθητές που συμμετείχαν στις συνεντεύξεις είχαν άγχος, το οποίο κατά την άποψη του ερευνητή οφείλεται στην παρουσία της κάμερας.

4.3.1. Ο πρώτος μαθητής.

Ο πρώτος μαθητής ήταν και ο πιο αδύναμος από τους τρεις, κατά την κρίση βέβαια του καθηγητή, με κάποιες μικρές μαθησιακές δυσκολίες. Είχε επίσης αρκετό άγχος κατά τη διάρκεια της βιντεοσυνέντευξης. Το τεστ που συμπλήρωσε ο μαθητής είναι το ακόλουθο και με βάση αυτό έγινε ο επόμενος διάλογος.

Ερωτήσεις:

Α. Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36cm.

1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι

A) $y = 6x$ B) $x = 6y$ Πως το βρήκατε;

διότι ξέρουμε ότι 6 λεπτά = 36cm άρα αφού x = λεπτά κ y = cm
: y = 36 και x = 6 -> y = 6x ή 36 = 6·6

2. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

y - ανεξάρτητη

x - εξαρτημένη

3. Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

όχι

Β. Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2 = x$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι ,γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση , ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Εσείς τι νομίζετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Συνφωνω με τον Βαγγελη.

Σχήμα 4.23. Το τεστ του 1ου μαθητή.

Διάλογοι

Κ: Καλημέρα Χριστίνα, τι κάνεις;; Καλά;

Μ: Μια χαρά εσείς.

Κ: Θέλω να κάνουμε μια συνέντευξη σήμερα... Δεν θα βαθμολογηθείς, δεν πρόκειται για τεστ. Δεν με ενδιαφέρει αν είναι σωστό αυτό που θα μου πεις ή λάθος. Το μόνο που θέλω να μου πεις είναι πως το έχεις καταλάβει, πως το σκέφτεσαι, τι γνώμη έχεις πάνω σε αυτό! Εντάξει;; Και θέλω οι απαντήσεις σου να είναι όσο πιο αναλυτικές γίνεται, να μου πεις σκέφτηκα αυτό και να μου το εξηγήσεις όσο πιο πολύ μπορείς. Εντάξει;; Με αυτό που θέλω να ξεκινήσω είναι να μου πεις τι σου άρεσε και τι δε σου άρεσε από το μάθημα που κάναμε με το δοχείο και το λάδι.

Μ: Εμμμ, μου άρεσε το μάθημα.. Τι να σας πω... (ο μαθητής είχε πολύ τρακ στην αρχή). Μου άρεσε κυρίως η πρώτη άσκηση και η δεύτερη διότι και στα δύο απαντούσαμε μονολεκτικά, δεν χρειαζόταν να κάνουμε κάτι.

Κ: Όχι... λέω για το μάθημα που κάναμε στην αρχή όχι για το τεστ που γράψαμε. Το μάθημα στην αρχή που κάναμε, με το δοχείο και το λάδι.

Μ: Αααα.. Μου άρεσε γιατί ήταν αρκετά εύκολο στην αρχή και δυσκόλευε όσο προχωράγαμε..

Κ: Πιστεύεις ότι δεν ήταν κάποια πολύ δύσκολη ερώτηση ε; Δηλαδή πήγαινε αναλογικά ε;

Μ: Όχι, δεν ήταν δύσκολες.

Κ: Ωραία, πάμε στο τεστάκι που γράψαμε! Ερώτηση Α: " Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36 cm.

1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος, τότε η συνάρτηση είναι:

Α) y=6x Β) x=6y Πως το βρήκατε;

Θέλεις να μου πεις τι έχεις κάνει; Θέλω να μου δίνεις αναλυτικές απαντήσεις όσο μπορείς

Μ: Όσο μπορέσω... Θα βάλω το Α) y=6x. Το x είναι ο χρόνος και..... Θα σας πω τώρα γιατί....

Κ: Έβαλες την πρώτη απάντηση.

Μ: Ναι, αντικατέστησα τα νούμερα και βγαίνει ακριβώς. Δηλαδή, το έχω γράψει...

Ξέρουμε ότι 6 λεπτά χρειάζονται 36 cm για να γεμίσει το x είναι σε λεπτά και το y σε cm. Ας πούμε ότι το y είναι 36, αφού είναι το ύψος και είναι 36 cm και x είναι 6, γιατί είναι 6 λεπτά. Μας βγαίνει ότι είναι 6 το x, 36 ότι είναι το y, y=6x , $36=6\cdot 6$, 36=36.

Κ: Άρα εσύ ουσιαστικά, για να καταλάβω, έβαλες όπου x το 6, το y με 36 και βρήκες ότι μόνο το πρώτο είναι το σωστό. Άρα το βρήκες έτσι. Πολύ ωραία.

Μ: Το είχα σβήσει αρκετές φορές....

Κ: Τι είχες γράψει; Άλλα πράγματα;

Μ: Είχα μπερδευτεί, δεν θυμάμαι.... αλλά στο τέλος το ξανασκέφτηκα, είπα να το ξαναδώ και λέω μα τι σκεφτόμουνα, γιατί το έσβησα....

Σχήμα 4.24. Συνέντευξη 1^{ου} μαθητή.

Κ: Πάμε στη ερώτηση 2: *" Ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή."*

Μ: Λοιπόν, δεν το έχω καταλάβει 100% αυτή τη συγκεκριμένη ερώτηση... αλλά έχω βάλει y την ανεξάρτητη και x την εξαρτημένη.

(ο μαθητής δεν δίνει τη σωστή απάντηση και δεν μπορεί να εξηγήσει την απάντησή του)

Κ: Θέλω να μου πεις τώρα αν μπορούμε να μετρήσουμε, στην ερώτηση 3, το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο.

Μ: Λοιπόν.... Δε μπορούμε να.... Με τα στοιχεία, το ύψος.... Δε ξέρω... Λοιπόν δεν ξέρουμε το ύψος και θέλουμε να μετρήσουμε... Και δεν ξέρουμε.... (ο μαθητής δείχνει φοβερά μπερδεμένος). Δεν έχω καταλάβει τι θέλουμε να βρούμε...

Κ: Θέλουμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο. Όταν λέω το ύψος, όχι του δοχείου το ύψος, το ύψος με το λάδι. Θα μπορούσαμε να το μετρήσουμε;

Μ: Όχι, γιατί δεν έχουμε δεδομένα, δεν είναι διάφανο το δοχείο.

Κ: Ακριβώς, δεν θα μπορούσαμε ποτέ να δούμε για παράδειγμα αν έχει φτάσει στη μέση το λάδι. Σωστά; Άρα, σίγουρα μας χρειάζεται ο χρόνος για να μετρήσουμε το ύψος. Λοιπόν, πάμε στην τελευταία. Θέλεις να το διαβάσεις εσύ;

(ο καθηγητής επίτηδες ρωτάει το μαθητή αν θέλει να το διαβάσει για να είναι σίγουρος ότι ο μαθητής έχει καταλάβει την ερώτηση Β)

Μ: Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2 = x$, με ανεξάρτητη

μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι διότι οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι γιατί αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$, άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δε γίνεται. Εσείς τι νομίζετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Κ: Ωραία.

Μ: Εγώ έγραψα συμφωνώ με Βαγγέλη. Τώρα το αιτιολογώ διότι πιστεύω ότι ο Μιχάλης είναι εντελώς λάθος.

Κ: Γιατί το λες αυτό;

Μ: Γιατί οποιαδήποτε συνάρτηση με y και x δεν είναι απαραίτητα...εεεε... Οποιαδήποτε σχέση, ισότητα, με x και y δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση.

Κ: Δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση λες... Μπορώ να σε βοηθήσω λιγάκι στο εξής για την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη που δεν είναι εύκολο να το καταλάβει κάποιο παιδί. Το x και το y είναι δύο μεταβλητές.

Μ: Ωραία.

Κ: Γιατί το x είναι η ανεξάρτητη και το y η εξαρτημένη.... Το x, η μεταβλητή x, για κάθε τιμή που θα δώσεις θα βρεις μόνο ένα αποτέλεσμα στο y.

Μ: *Αυτός δεν είναι και ο ορισμός της συνάρτησης;*

Κ: Μπράβο, αυτός είναι ο ορισμός της συνάρτησης. Δεν μπορούμε δηλαδή, όπως εδώ, με ένα x να βρούμε δύο τιμές για το y. Για αυτό μου λες ότι είναι τελείως λανθασμένη η απάντηση του Μιχάλη;

Μ Ναι!

Κ: Να σου πω άλλο ένα παράδειγμα; Φαντάσου ότι ένα παιδί κάνει κούνια, ωραία;

Μ: Ναι.

Κ: Φαντάσου την κίνηση που κάνει μία κούνια (ο καθηγητής της δείχνει με τα χέρια του την κίνηση της κούνιας). Μπορεί δεξιά και αριστερά να βρεθεί από το ίδιο ύψος ως προς το έδαφος;

Μ: Όχι.

Κ: Ας πούμε ότι δεξιά βρίσκεται ένα μέτρο πάνω από το έδαφος. Μπορεί να βρίσκεται αριστερά ένα μέτρο από το έδαφος;

Μ: Όχι.

Κ: Σίγουρα; Για σκέψου το λίγο.

Μ: Εεεε, θα μπορούσε αν σπρώχνει με δύναμη.

Κ: Αυτό πιστεύεις, εάν σπρώχνει με δύναμη;

Μ: Μμμμ.... Δηλαδή από εδώ να πάει στο ένα μέτρο... Όχι δεν γίνεται ακριβώς στο ένα μέτρο βασικά..

Κ: Όχι να πάει στο μέγιστο ύψος στο ένα μέτρο. Αα, εσύ λες ότι πάει στο ένα μέτρο και χάνει ύψος μετά και δεν πάει ακριβώς πάλι στο ένα μέτρο (ο μαθητής εννοεί ότι λόγω τριβών δεν θα

μπορέσει να φτάσει πάλι στο ένα μέτρο από την αριστερή μεριά της κούνιας αν δεν σπρώχνει διαρκώς έτσι ώστε να διατηρεί σταθερή την κίνησή του). Ωραία, φαντάσου ότι από τα δεξιά πάει όντως μέχρι το ένα μέτρο και από τα δεξιά πάει λιγότερο. Θέλω να μου πεις το εξής: αν φτάσει στο μισό μέτρο από τα δεξιά (από το έδαφος εννοείται),μπορεί να φτάσει στο μισό μέτρο από τα αριστερά;

Μ: Ναι, ναι αυτό είναι εύκολο!

Κ: Ωραία. Φαντάσου τώρα ότι το x μας δείχνει τη θέση της κούνιας (με σημείο αναφοράς τη θέση όπου η κούνια έχει το μικρότερο ύψος από το έδαφος) και το y το ύψος από το έδαφος. Άρα μπορούν δύο διαφορετικές θέσεις (x) να δώσουν το ίδιο ύψος (y). Γίνεται;

Μ: Γίνεται.

Κ: Η ανεξάρτητη μεταβλητή εδώ είναι η μεταβλητή x και η εξαρτημένη είναι το ύψος y. Το ένα x δεν μπορεί να δώσει δύο τιμές για το y γιατί τότε η κούνια σε μια θέση θα απείχε δύο διαφορετικές αποστάσεις από το έδαφος..... Τι πιστεύεις εσύ;; Τι έχεις καταλάβει;;

Μ: Το έχω καταλάβει.... Ότι ξέρω εγώ.. Πώς να το πω.. Ότι y=6x.

Κ: Αυτή είναι η συνάρτηση στο 1 ερώτημα.

Μ: Ναι και x είναι η ανεξάρτητη και y είναι η εξαρτημένη.

Κ: Εντάξει Χριστίνα, σε ευχαριστώ πάρα πολύ, να είσαι καλά.

Τέλος συνέντευξης.

4.3.2. Ο δεύτερος μαθητής.

Ο δεύτερος μαθητής βρίσκεται σε μεσαίο επίπεδο στα Μαθηματικά σε σχέση με τους άλλους δύο καθώς κατά τη διάρκεια της χρονιάς τόσο η γραπτή του αλλά και η προφορική του επίδοση ανήκει στη μεσαία κλίμακα της βαθμολογίας.

Ο συγκεκριμένος μαθητής δεν είχε ιδιαίτερο άγχος κατά τη διάρκεια της βιντεοσυνέντευξης και οι απαντήσεις στο τεστ είναι οι ακόλουθες:

Ερωτήσεις:

Α. Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36cm.

1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι

A) $y = 6x$ B) $x = 6y$ Πως το βρήκατε;

Σε 6 λεπτα χρειαζονται 36cm

Σε Χ λεπτα χρειαζονται y

$\frac{36x}{36} = \frac{6y}{36}$ ⓘ $\frac{x}{1} = \frac{y}{6}$ $y = 6x$

2. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

Η y είναι η εξαρτημένη και χ η είναι η ανεξάρτητη

3. Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο; Ναι

Β. Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2 = x$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι ,γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση , ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Εσείς τι νομίζετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Συμφωνώ με τον Μιχάλη διότι κάθε σχέση της συνάρτησης αναλογεί σε μια μεταβλητή

Σχήμα 4.25. Το τεστ του 2^{ου} μαθητή.

Διάλογοι

Κ: Καλημέρα Νικήτα!

Μ: Καλημέρα σας.

Κ: Τι κάνεις;

Μ: Μια χαρά.

Κ: Λοιπόν σήμερα θα κάνουμε μια συνέντευξη. Δεν εξετάζεσαι σε αυτό, η συνέντευξη θα είναι πάνω στο τεστ που γράψαμε το τελευταίο, το οποίο ούτε αυτό μετράει. Δεν είναι κάποιο παιχνίδι γνώσεων αυτό, με ενδιαφέρει μόνο η άποψή σου, η γνώμη σου, θέλω να μου πεις πως το σκέφτεσαι, να μιλάς πολύ και να μου δίνεις όσο μπορείς πιο πολύ απαντήσεις τις οποίες θα τις δικαιολογείς. Εντάξει;; Αυτό θέλω από εσένα. Να σε ρωτήσω κάτι για αρχή, σου άρεσε το αρχικό μάθημα που κάναμε με το δοχείο με το λάδι; Το θυμάσαι που είχαμε κάνει το μάθημα;

Μ: Ναι που ήτανε το δοχείο με το λάδι, αλλά δεν ξέραμε πόσο είναι η στάθμη του γιατί δεν ήταν διάφανο.

Κ: Τι σου άρεσε και τι δεν σου άρεσε σε αυτό;

Μ: Μου άρεσε επειδή ήταν σχετικά εύκολο και....

Κ: Πιστεύεις ότι οι ερωτήσεις ήταν έεε... ξεκινούσαν από κάτι εύκολο και πήγαιναν σε κάτι πιο δύσκολο;

Μ: Όχι, πιστεύω ότι όλες είχαν τον ίδιο βαθμό δυσκολίας.

Κ: Δεν σου φάνηκε κάποια δύσκολη;;

Μ: Όχι όχι...

Κ: Ωραία, ωραία. Λοιπόν, για πάμε στο πρόβλημά μας εδώ. Στο πρώτο: (ερώτηση Α.1) Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36 cm. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι:

Α) y=6x Β) x=6y Πως το βρήκατε;

Μ: Καταρχάς το έκανα με μέθοδο των τριών.

Κ: Ωραία.

Μ: Ότι στα 6 λεπτά που γεμίζει όλο το δοχείο, το ύψος του είναι 36 cm

άρα στα x λεπτά χρειάζονται y εκατοστά.

Κ: Άρα, μου είπες ότι στα 6 λεπτά χρειάζονται 36 cm,

στα x λεπτά χρειάζονται y.

Έκανες μέθοδο των τριών. Ωραία. (ο μαθητής βέβαια δεν έχει διατυπώσει πολύ σωστά τη συγκεκριμένη μέθοδο των τριών)

Μ: Μετά έκανα χιαστί.

Κ: Δηλαδή, τι είπες;

Μ: Εεε, είπα ότι..... Θα πολλαπλασιάσουμε τα 36 cm με τα x λεπτά και τα 6 λεπτά με τα y εκατοστά ...εεε... για να βρούμε τη συνάρτηση.

Κ: Ωραία... και σου βγαίνει...

Μ: Βγαίνει 36x=6y.

Κ: Πολύ ωραία και τι κάνεις μετά;

Μ: Μετά τα διαίρεσα με το 36 και μου βγήκε x=6y.

Κ: x=6y. Για να το δούμε λιγάκι αυτό, μήπως έχει γίνει λαθάκι εδώ. Εδώ έχει $\frac{6y}{36}$. Τι απλοποιείς;

Μ: Το 6 με το 36.

Κ: Ναι, αλλά σκέψου ότι ο μικρός...εε ο μικρότερος αριθμός είναι στον αριθμητή και ο μεγαλύτερος στον παρονομαστή, άρα θα σου δώσει;

Μ: *Αρνητικό...;;; (ο μαθητής δίνει μια μη αναμενόμενη απάντηση την οποία δεν την σκέφτηκε προφανώς καθόλου)*

Κ: Όχι δεν σου δίνει αρνητικό... Θα σου δώσει μήπως $\frac{y}{6}$;

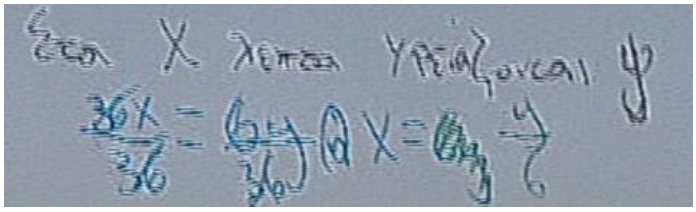
Ουσιαστικά διαιρείς και το 6 και το 36 με το 6, σωστά; (ο μαθητής γνέφει με το κεφάλι του)

Λοιπόν, $\frac{6}{6}=1$ και $\frac{36}{6}=6$. Μήπως θα σου μείνει στον παρονομαστή το 6;;

Μ: Μμμμμ ναι...

Κ: Εεε;; Θέλεις να το ξανασκεφτούμε λιγάκι; Κατάλαβες τι σου λέω; Εδώ δεν κάνει 6y, αλλά κάνει $\frac{y}{6}$.

Μ: Ναι..... Ο μαθητής γράφει:



Σχήμα 4.26. Διόρθωση του 2ου μαθητή.

Ναι το κατάλαβα, κάνουμε το x ένα (εννοεί βάζουμε κάτω από το x τη μονάδα) και εδώ αυτό (δείχνει το σχήμα της χιαστί ιδιότητας) και μας κάνει y=6x. Άρα είναι το Α.

Κ: Πολύ ωραία! Άρα y=6x. Πάμε στην ερώτηση 2: Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

Μ: Η y είναι η εξαρτημένη και η x η ανεξάρτητη.

Κ: Γιατί πιστεύεις ότι το x είναι η ανεξάρτητη και το y η εξαρτημένη;

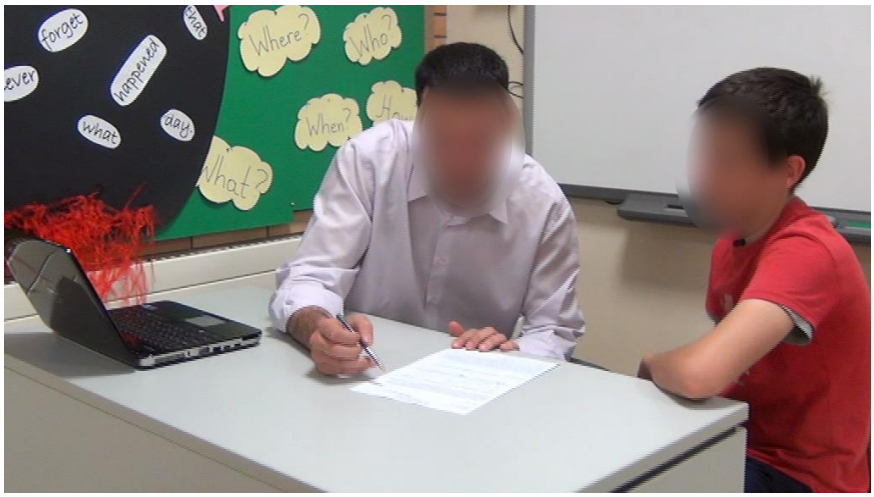
Μ: Διότι το y δεν είναι μόνο του στον αριθμητή, οπότε εξαρτάται από τον αριθμό το 6, ενώ το x που είναι μόνος του ο αριθμός στον αριθμητή, άρα εκείνο είναι η ανεξάρτητη.

Κ: Άρα πιστεύεις ότι από αυτό το κλάσμα δηλαδή, κάτω από το y είναι το 6 και κάτω από το x το 1 και άρα το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και y η εξαρτημένη.

Μ: Ναι, η ανεξάρτητη αυτή και η εξαρτημένη η άλλη.

Κ: *Δηλαδή αν το κλάσμα ήταν* $\frac{x}{6} = \frac{y}{1}$*, θα ήταν το ανάποδο;*

Μ: *Εεε....ναι.*



Σχήμα 4.27. Συνέντευξη 2^{ου} μαθητή.

Κ: Ωραία. Ερώτηση 3: Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος του λαδιού στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

Μ: Εε..πιστεύω ναι. Διότι αν ξέρουμε το ύψος...

Κ: Πρόσεχε την ερώτηση.... Δεν το ξέρουμε το ύψος.

Μ: Αααα..

Κ: Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος αν δεν ξέρουμε το χρόνο; (ο καθηγητής επαναλαμβάνει την ερώτηση) Εσύ έχεις το δοχείο με το λάδι, σωστά;

Μ: Ναι.

Κ: Ωραία..

Μ: Δεν ξέρουμε πόσο είναι το ύψος..

Κ: Σε κάποια φάση βάζεις μέσα λάδι και θέλεις να δεις αν έχει φτάσει μέχρι τη μέση ή σε ένα οποιοδήποτε ύψος. Πως μπορείς να το βρεις αυτό;

Μ: Με το ρολόι;;;

Κ: Με το ρολόι μπορούμε;

Μ: Πιστεύω ναι, άμα το μετρήσουμε.. (παύση)

Κ: Η σωστή απάντηση για τη συνάρτηση είναι y=6x. Αν ας πούμε, σου πω στα δύο λεπτά να μου βρεις το ύψος, μπορείς να το κάνεις αυτό;

Μ: Στα 2 λεπτά;

Κ: Ναι. Δηλαδή σου δίνω το χρόνο x που είναι 2 λεπτά και σου ζητάω να βρεις το ύψος.

Μ: Βάζουμε $y = \omega \cdot 2$.

Κ: Γιατί ω;;;

Μ: Αααα γιατί είπατε....εεεε...εεεε... ο χρόνος είναι ....

Κ: Ξέρεις το χρόνο που είναι 2 λεπτά (αν και φαινομενικά είναι πολύ απλή η ερώτηση αυτή, ο μαθητής δυσκολεύεται ιδιαίτερα να δώσει η σωστή απάντηση). Δηλαδή βάζουμε μέσα λάδι και μετράμε με το ρολόι 2 λεπτά και θέλουμε να βρούμε πόσο είναι το ύψος που έχει φτάσει το λάδι. Μπορούμε να το δούμε απ΄ έξω αυτό;

Μ: Απ΄ έξω όχι.

Κ: Όχι δεν μπορούμε, ωραία. Μπορούμε με τη βοήθεια αυτής της συνάρτησης να το βρούμε;

Μ: Ναι.

Κ: Τι θα κάνουμε;

Μ: y ίσον (παύση)..... $6 \cdot 2$;

Κ: Ναι, μην είσαι αγχωμένος, το ξέρω ότι το γνωρίζεις... Άρα;

Μ: 6 επί 2 μας κάνει 12.

Κ: 12 cm. Χωρίς λοιπόν να δούμε απ΄ έξω ξέρουμε ότι στα 2 λεπτά έχει...

Μ: Ότι έχει κάνει 12 cm το ύψος.

Κ: Μπορούμε λοιπόν να μετρήσουμε το ύψος αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

Μ: *Ναι.*

Κ: Αν δεν έχουμε μετρήσει με το ρολόι;;

Μ: ΑΑΑ όχι (ο μαθητής γελάει γιατί κατάλαβε το λάθος του)

Κ: Ωραία, τώρα το κατάλαβες καλά. Μπράβο, πάμε στο Β: " Ο καθηγητής των μαθηματικών

ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2 = x$, με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι διότι οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι γιατί αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$, άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δε γίνεται. Εσείς τι νομίζετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας."

Μ: Όταν εννοεί αυτό δεν γίνεται, τι εννοεί;

Κ: Τι εννοούμαι με το δεν γίνεται; Ότι δεν γίνεται να είναι συνάρτηση. Δηλαδή ο Μιχάλης λέει ναι είναι συνάρτηση, ενώ ο Βαγγέλης λέει όχι δεν γίνεται να είναι συνάρτηση.

Μ: Εγώ πιστεύω ότι είναι συνάρτηση, δηλαδή συμφωνώ με το Μιχάλη.

Κ: *Άρα μια σχέση με x και y είναι πάντα συνάρτηση λες ε;*

Μ: *Ναι.*

Κ: Δεν είναι μια οποιαδήποτε σχέση με x και y σχέση συνάρτησης. Για να είναι συνάρτηση θα πρέπει το κάθε x να δίνει μόνο μια τιμή για το y.

Μ: Αα, εδώ δεν δίνει....

Κ: Γιατί δεν δίνει;; Ποια τιμή έβαλα για το x για να το καταλάβουμε λίγο καλύτερα;

Μ: Ας πούμε ότι το x=2. Αφού είναι ίσο, τότε το y..... Ας το κάνουμε καλύτερα με 1, γιατί δεν βγαίνει η τιμή, είναι στη δευτέρα οπότε δεν βγαίνει ακριβώς...

Κ: Ωραία, είναι στη δευτέρα οπότε θα σε δυσκολέψει λιγάκι. Βάλε πιο εύκολο αριθμό.

Μ: Εεεε, το 1. Ας πούμε ότι x=1. Το y, αφού είναι μια ισότητα, θα μας δίνει και αυτό 1.

Κ: Το y ή το y^2;

Μ: Το y^2.

Κ: Άλλο αυτό.

Μ: Και δείξαμε ότι 1 στο τετράγωνο μας κάνει 1, εεεεεεε..... άρα το 1=1.

Κ: Μόνο το $1^2=1$ ή υπάρχει και άλλος αριθμός;

Μ: Υπάρχει και άλλος αριθμός... και το -1. Διότι αν υψώσουμε το -1 όλο στο τετράγωνο μας βγαίνει 1. Οπότε και το 1 και το -1 είναι λύση της..... (παύση) είναι λύση του y.

Κ: Είναι λύση του y. Πολύ ωραία. Άρα, έβαλες όπου x το 1, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το x και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το y. Μια τιμή έβαλες για το x, έναν αριθμό έβαλες... Πόσοι αριθμοί "βγήκαν" για το y; Τι πιστεύεις;

Μ: Τελικά ο Βαγγέλης έχει δίκιο!

Κ: Μπράβο Νικήτα. Σε ευχαριστώ πάρα πολύ, να είσαι καλά αγόρι μου.

Τέλος συνέντευξης

4.2.1. Ο τρίτος μαθητής.

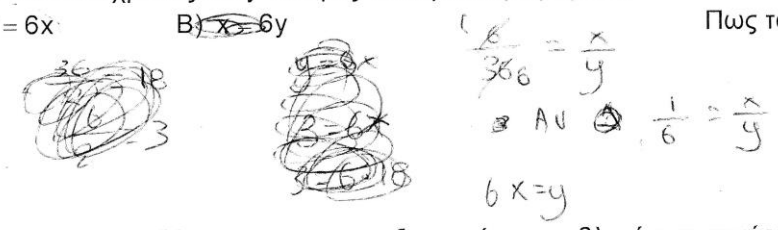
Ο τρίτος μαθητής είναι ένας μαθητής με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αγάπη για τα Μαθηματικά και έχει διακριθεί αρκετές φορές σε διαγωνισμούς των Μαθηματικών. Έχει έναν ιδιαίτερο τρόπο σκέψης και πάντα κατά τη διάρκεια της χρονιάς έδινε απαντήσεις τόσο αναλυτικές και εμπεριστατωμένες που κάποιες φορές ακόμα και οι ίδιοι οι συμμαθητές του είχαν δυσκολία να κατανοήσουν και αναλάμβανε ο διδάσκων να δώσει περαιτέρω επεξηγήσεις για να γίνουν κατανοητά τα όσα υποστήριζε. Οι απαντήσεις του στο τεστ είναι οι ακόλουθες:

Ερωτήσεις:

Α. Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36cm.

1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι

A) y = 6x B) ~~x = 6~~y Πως το βρήκατε;



2. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

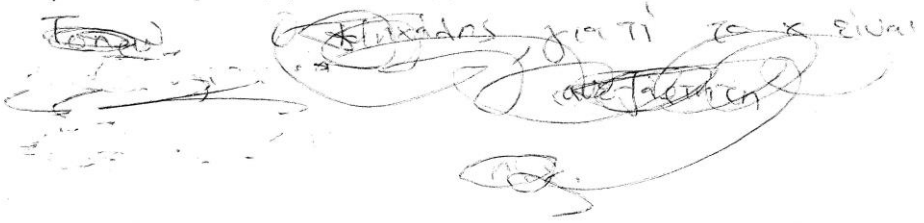
Στην y = 6x

y → εξαρτημένη

x → ανεξάρτητη

3. Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο; Ν.

Β. Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2 = x$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι ,γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση , ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Εσείς τι νομίζετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Σχήμα 4.28. Τεστ του 3^{ου} μαθητή.

Κ: Καλημέρα Α.....

Μ: Γεια σας κύριε!

Κ: Τι κάνεις;

Μ: Μια χαρά, εσείς;

Κ: Καλά! Λοιπόν σήμερα θα κάνουμε μια μικρή συνέντευξη, δεν θα διαρκέσει πολύ. Δεν εξετάζεσαι, δεν θα βαθμολογηθείς για τις απαντήσεις σου, θέλω απλά τη γνώμη σου. Θα διορθώσουμε κάποια πράγματα αν χρειάζεται, μόνο αν μου πεις τη δική σου γνώμη. Αυτό να σου μείνει! Το μόνο που θέλω είναι να μου δίνεις όσο το δυνατόν απαντήσεις που να τις σκέφτεσαι και να είναι η δική σου άποψη και να προσπαθείς να τις τεκμηριώνεις. Δηλαδή η σκέψη σου να είναι αναλυτική, όσο μπορείς.

Μ: Ναι!

Κ: Ωραία! Θέλω να σε ρωτήσω κάτι για αρχή. Θυμάσαι το πρώτο μάθημα που κάναμε με το δοχείο και το λάδι;

Μ: Ναι, ναι!!

Κ: Σου άρεσε αυτό το μάθημα;

Μ: Πολύ!!

Κ: Μπράβο, ωραία. Είναι κάτι που δεν σου άρεσε σε αυτό;

Μ: Όχι, όχι..

Κ: Οι ερωτήσεις που είχε;;

Μ: Μια χαρά μου φάνηκαν. Δηλαδή μου άρεσε πολύ αυτό... Απλός και εύκολος τρόπος για να μπούμε στις συναρτήσεις.

Κ: Ήταν απλός και εύκολος τρόπος για να μπούμε στις συναρτήσεις, δεν είχε κάποια δυσκολία;

Μ: Όχι.

Κ: Για να διαβάσουμε την πρώτη ερώτηση: (ερώτηση Α)

Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36 cm. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι:

Α) y=6x Β) x=6y Πως το βρήκατε;

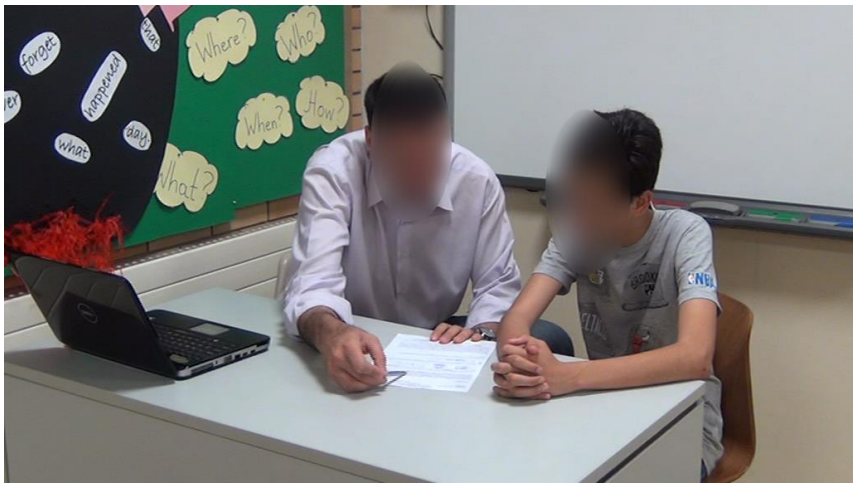
Μ: Εγώ έχω πει ότι εφόσον είναι $\frac{6}{36} = \frac{x}{y}$ με *αναλογία*, άρα κάνουμε απλοποίηση και μας βγαίνει $\frac{1}{6} = \frac{x}{y}$, άρα η σωστή απάντηση είναι, εεε κάνω χιαστί και η σωστή απάντηση πιστεύω ότι είναι το Α, δηλαδή $6x = y$.

Κ: Είναι ανάλογα αυτά τα ποσά έτσι;

Μ: Ναι, ναι.

Κ: Ωραία, μπράβο, συμφωνώ απόλυτα. Πάμε στην ερώτηση 2: *" Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;* "

Μ: ΕΕΕ, στην συνάρτηση y=6x, το y είναι η εξαρτημένη και το x είναι η ανεξάρτητη.



Σχήμα 4.29. Συνέντευξη 3^{ου} μαθητή.

Κ: Ερώτηση 3: "Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν έχουμε το χρόνο;

Μ: Ναι, θα έχουμε το πόσο είναι γεμάτο, εεε πόση ώρα χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο, πόσα εκατοστά και μπορούμε να βρούμε και το χρόνο αντίστοιχα.

Κ: Ναι αλλά, να σε ρωτήσω κάτι.. Σε ρωτάω να μου βρεις το ύψος, το οποίο δεν το ξέρεις καθόλου.. Μπορείς να το δεις απ΄ έξω το δοχείο και να μου πεις έφτασε μέχρι εκεί;

Μ: Στο περίπου....

Κ: Είναι διάφανο το δοχείο;

Μ: Όχι θα είναι στο περίπου άμα ξέρουμε πάνω-κάτω πόσο έχουμε ρίξει με το μάτι..

Κ: Με το μάτι δεν μπορούμε, δεν έχουμε ακρίβεια.. Άρα μπορούμε το ύψος να το μετρήσουμε αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

Μ: *Όχι.*

Κ: Όχι δεν μπορούμε, γιατί το ύψος δεν μπορούμε να το δούμε. Άρα για να μετρήσουμε το ύψος τι χρειαζόμαστε;;

Μ: Χρειαζόμαστε ή ένα μέτρο το οποίο το βυθίζουμε μέχρι το τέλος ή....

Κ: Σωστά, αλλά δεν το έχουμε αυτό στη διάθεσή μας..

Μ: *Ναι.. Ή να ξέρουμε το χρόνο και να μετράμε πόσο γεμίζει την κάθε φορά!*

Κ: Δηλαδή, να σου πω ένα παράδειγμα. Αν στην συγκεκριμένη άσκηση ξέρουμε ότι ο χρόνος είναι 2 λεπτά, πως μπορούμε να βρούμε το ύψος;

Μ: Κάνουμε $\frac{2}{y}=\frac{1}{6}$ και κάνουμε 18=y, άρα το y μας κάνει 18.

Κ: Στα 2 λεπτά λες ε; Για ξαναδές τις πράξεις σου (ο μαθητής έχει κάνει αριθμητικό λάθος).

Μ: $1\cdot y=12$. Άρα είναι 12 εκατοστά... Τι λέω....

Κ: Να σε ρωτήσω κάτι άλλο... Χωρίς να κάνεις όλη αυτή τη διαδικασία θα μπορούσες;

Μ: Ναι.. κάνω $2\cdot 6=12$ και μας βγαίνει πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

Κ: Τι πιστεύεις ότι είναι πιο απλό;

Μ: Και τα δύο το ίδιο απλά και δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα διότι το $\frac{6}{36}=\frac{x}{y}$ είναι πριν φτάσουμε σε αυτό το σημείο (δείχνει τη σχέση y=6x).

Κ: Ωραία, τι βολεύει καλύτερα, να έχουμε κλάσματα ή όχι;;

Μ: Όχι.

Κ: Άρα, ίσως καλύτερα είναι να χρησιμοποιήσουμε αυτό; (τη σχέση y=6x)

Μ: Ναι.

Κ: Λοιπόν, πάμε στο επόμενο (ερώτηση Β): " Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y^2=x$, με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι διότι οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι γιατί αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2=1$, άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δε γίνεται. Εσείς τι νομίζετε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. "

Μ: *Λοιπόν, ο Μιχάλης έχει για αρχή λάθος, γιατί καταρχήν σε μία συνάρτηση οι μεταβλητές δεν είναι απαραίτητο να είναι το x και το y, μπορεί να είναι και το ω και δεν ξέρω πόσες άλλες μεταβλητές υπάρχουν..*

Κ: Ωραία.

Μ: *Επίσης ο Βαγγέλης είναι σωστός διότι με τα δεδομένα αυτά δεν γίνεται να είναι το y η εξαρτημένη μεταβλητή γιατί το y μας δίνει πολλά αποτελέσματα.*

Κ: *Σου δίνει πολλά αποτελέσματα για μία τιμή του x;*

Μ: Ναι! Οπότε η λύση, εε η σωστή απάντηση είναι του Βαγγέλη.

Κ: Μου είπες κάτι... Δεν γίνεται σε αυτή τη σχέση το y η εξαρτημένη και το x η ανεξάρτητη...

Μ: ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΠΟΔΑ... Δηλαδή αν ήταν το y η ανεξάρτητη και το x η εξαρτημένη, τότε θα ήταν συνάρτηση.

Κ: Αν ήταν ανάποδα (οι μεταβλητές εννοείται) τι θα γινόταν, τότε θα ήταν πιστεύεις συνάρτηση;

Μ: *Ναι.*

Κ: Μπράβο, Αντώνη! Σε ευχαριστώ πάρα πολύ, να είσαι καλά!!

Μ: Ωραία! Γεια σας!

Τέλος συνέντευξης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΖΗΤΗΣΗ.

5.1. Συζήτηση για τη δραστηριότητα.

Η γενικότερη εντύπωση που εξέλαβε ο ερευνητής κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας και ιδιαίτερα από τις γνώμες των μαθητών μετά τη λήξη της ήταν πολύ θετικές και η μεγαλύτερη μερίδα των μαθητών συμφώνησε ότι το μάθημα ήταν πολύ κατανοητό και τους άρεσε το γεγονός ότι περάσαμε στο κεφάλαιο των συναρτήσεων με έναν πρωτότυπο και συνάμα διδακτικό τρόπο. Άρα οι στόχοι που είχαμε θέσει ώστε το μάθημα να μην έχει πολύπλοκους υπολογισμούς και να γίνει κατανοητό από το σύνολο των μαθητών ακόμα και των πιο αδύναμων μάλλον επιτεύχθηκε σε μεγάλο βαθμό. Οι μαθητές βρήκαν πολύ ενδιαφέρον το συγκεκριμένο πρόβλημα και δε δίστασαν να το δηλώσουν ευθέως. Όπως αναφέρει και η Heid (2009) θα πρέπει οι καθηγητές του Γυμνασίου να εισαγάγουν στη διδασκαλία τους μια ευρεία γκάμα (broad range) καινοτόμων ιδεών και αναπαραστάσεων. Αυτή λοιπόν η ιδέα είχε θετικό αντίκτυπο στην πρώτη επαφή των μαθητών με την έννοια της συνάρτησης διότι είδαν τη δραστηριότητα ως ένα πρόβλημα που πηγάζει από την πραγματική ζωή και που συνδέεται άμεσα με μια μαθηματική αφηρημένη έννοια. Πιο συγκεκριμένα τώρα, θα συζητήσουμε κάποια κρίσιμα γεγονότα (Powell, κ.ά, 2003) που συνέβησαν κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας και θα προσπαθήσουμε να τα συνδέσουμε με τη βιβλιογραφία αυτής της διπλωματικής. Τα κρίσιμα γεγονότα λοιπόν της δραστηριότητας, κατά τη άποψη του ερευνητή, είναι τα ακόλουθα:

- Η ερώτηση Ε.37 ενός μαθητή προς τον καθηγητή είναι η εξής: " Κύριε δεν πρέπει να βάλουμε y; Επειδή το x το έχουμε γράψει παντού, γι΄αυτό ". Η ερώτηση αυτή έγινε διότι ξαναγράψαμε στον πίνακα το x προηγουμένως σε άλλη μέθοδο των τριών συμβολίζοντας με x πάντα το χρόνο. Αυτό προκάλεσε σύγχυση στο μαθητή καθώς περιμένοντας το x να δώσει άλλη αριθμητική τιμή, δηλαδή να μην είναι το ίδιο, πρότεινε να το συμβολίσουμε με άλλο γράμμα, δηλαδή με y. Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.1, είναι σχεδόν σίγουρο ότι ο μαθητής δεν έχει αποσαφηνίσει 100% την έννοια της μεταβλητής και τη διαφορά της με τον άγνωστο.

- Πριν από την ερώτηση Ε.44 ο καθηγητής γράφει στον πίνακα

  " Στα 12 λεπτά το δοχείο γεμίζει με 48 cm

  στο 1 λεπτό το δοχείο γεμίζει με _____ "

  και αφήνει κενό το συμβολισμό των εκατοστών. Στην ερώτηση Ε.44 ρωτάει τους μαθητές ποια αλλαγή πρέπει να κάνουμε και ένας μαθητής απαντάει αμέσως: Με y (Α.44). *Σε αυτό το σημείο αρχίζουν οι μαθητές να κατανοούν το νόημα της μεταβλητής στην πράξη και γίνεται σαφές σε αυτούς ότι υπάρχουν δυο μεταβλητές στο πρόβλημά μας: η μεταβλητή x που συμβολίζει το χρόνο και η μεταβλητή y που συμβολίζει το ύψος.*

- Στην ερώτηση Ε.59, η οποία είναι πολύ σημαντική, τονίζεται διαρκώς ότι η εξίσωση που ψάχνουμε είναι ένας τύπος, μια ισότητα που συνδέει δυο μεταβλητές και δεν ψάχνουμε να βρούμε κάποια από τις δύο. Αυτό έγινε διότι όπως αναφέρει και η Sierpinska (1992), πολλοί μαθητές όταν αντικρίζουν μια σχέση συνάρτησης, ιδιαίτερα τις πρώτες φορές, την αντιμετωπίζουν σαν μια εξίσωση όπου το x είναι ο άγνωστος και ζητούν να λύσουν την εξίσωση. Αυτό είναι και το $4^{ο}$ επιστημολογικό εμπόδιο που αναφέρει η Sierpinska (1992) και το είδαμε στο $2^{ο}$ κεφάλαιο. Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο, που είναι πολύ διαδεδομένο, παίρνει σάρκα και οστά διότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας (13-14 ετών) δεν μπορούν εύκολα να κατανοήσουν τη διαφορά του αγνώστου και της μεταβλητής. Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο το βλέπουμε και εμείς μέσα στη δραστηριότητά μας και μάλιστα στην ερώτηση Ε.73 ενός μαθητή. Η ερώτηση Ε.73 είναι: " Όμως έτσι δεν έχουμε δυο αγνώστους; " και διατυπώνεται προς τον καθηγητή όταν εκείνος γράφει για πρώτη φορά στον πίνακα τη ζητούμενη σχέση συνάρτησης $y = 4x$. Η ερώτηση Ε.73 είναι μια ερώτηση που την έχουν, κατά τη διδακτική εμπειρία πάντα του ερευνητή, πολλοί μαθητές και το πιθανότερο είναι να αποτελούσε και ερώτηση και άλλων μαθητών της τάξης κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, οι οποίοι για κάποιους λόγους προτίμησαν να μην την εκφράσουν. Ίσως ένας λόγος να είναι και η βιντεοσκόπηση του μαθήματος η οποία ενδεχομένως να προκάλεσε ένα άγχος στους μαθητές, αν και το κλίμα μέσα στην τάξη ήταν αρκετά καλό και χαλαρό.

- Η απάντηση Α.59 είναι: " $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ " και αποτελεί την απάντηση ενός μαθητή στο ερώτημα ποια σχέση ψάχνουμε που να συνδέει τις δύο μεταβλητές στο πρόβλημά μας. Αυτή η απάντηση είναι σωστή και σχεδόν όλοι, πλην ενός, οι μαθητές συμφωνούν με αυτή. Μετά και την απάντηση του μαθητή (Α.61): " $x = 4y$ " , οι μαθητές διχάζονται και κανένας δεν μπορεί να απαντήσει και να αποδείξει τον ισχυρισμό του. Σε αυτό το σημείο, συναντούμε το $9^{ο}$ επιστημολογικό εμπόδιο κατά την Sierpinska (1992) που αναφέρει ότι η αναλογία είναι ένας προνομιακός τύπος σχέσης. Θεωρείται δηλαδή από πολλούς ότι μια συνάρτηση αναλογίας είναι ο *μοναδικός* τρόπος φόρμουλας και μπορεί να εξηγήσει όλα τα φαινόμενα. Ουσιαστικά, κανένας από τους μαθητές, ακόμη και ο μαθητής που έδωσε την απάντηση Α.59 δεν ήταν σε θέση να παγιώσει την άποψή του.

- Η ένατη ερώτηση είναι πάρα πολύ σημαντική, καθώς θα οδηγήσει στην αναγκαιότητα της διάκρισης και συνάμα του ρόλου της κάθε μεταβλητής. Οι μαθητές έχουν καταλάβει σε μεγάλο βαθμό τη σχέση που προκύπτει με τα δύο μεγέθη - μεταβλητές και σε αυτό το σημείο, χωρίς καν να τους δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης, θα πρέπει να κατανοήσουν ότι η μια μεταβλητή μετράει την άλλη. Ουσιαστικά, θα προσπαθήσει ο διδάσκων να τονίσει ότι η μεταβλητή που έχουμε πρόσβαση, δηλαδή ο χρόνος, είναι εκείνη και μόνο που μπορεί να αποδώσει μέτρηση στη μεταβλητή που λέγεται διαμεσολαβημένη - εξαρτημένη και στη συγκεκριμένη δράση είναι το ύψος. *Ο $2^{ος}$ στόχος της έρευνας που ήταν οι μαθητές να*

κατανοήσουν ότι σε μια σχέση συνάρτησης υπάρχει καταρχήν και σχέση εξάρτησης πραγματοποιήθηκε και μάλιστα από τις απαντήσεις Α.85, Α.86 και Α.87 φαίνεται ότι το σύνολο των μαθητών έχει κατανοήσει ότι για να βρούμε τη μία μεταβλητή (το ύψος) πρέπει πρώτα να ξέρουμε την άλλη μεταβλητή (το χρόνο). Δηλαδή στο μυαλό των μαθητών υπάρχει ότι στο πρόβλημά μας υπάρχει σίγουρα μια σχέση, εξάρτηση στις δύο μεταβλητές. Αυτό είναι πολύ σημαντικό να το κατανοήσουν οι μαθητές διότι είναι το πρώτο τεράστιο βήμα για να κατακτήσουν τον ορισμό της συνάρτησης.

- Η ερώτηση ενός μαθητή (Ε.90) είναι η εξής: " Αν ξέραμε το ύψος θα μπορούσαμε να βρούμε το χρόνο; ". Ο μαθητής λοιπόν ρωτάει δηλαδή αν με δεδομένη τη σχέση αναλογίας που έχουμε, μπορούμε να βρούμε το χρόνο γνωρίζοντας μόνο το ύψος. Η απάντηση είναι ναι, μόνο αν θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το ύψος, που όμως στο πρόβλημά μας είναι αδύνατο διότι το δοχείο είναι αδιαφανές.

- Στη δραστηριότητα αναφέρεται η λέξη συνάρτηση χωρίς όμως να αναφέρεται πουθενά στο φύλλο εργασίας ο ορισμός της. Αναφέρεται μάλιστα ότι η συνάρτηση έχει ανακαλυφθεί στα μαθηματικά για να μπορέσουμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος (ύψος) και δεν μπορούμε κατευθείαν, με τη βοήθεια ενός άλλου μεγέθους που μπορούμε να μετρήσουμε (χρόνος). Ορίσαμε ότι το ένα μέγεθος που μπορούμε να ξέρουμε είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το άλλο μέγεθος που βρίσκουμε μέσω του πρώτου λέγεται εξαρτημένη. Βέβαια, στην ερώτηση Ε.96 ενός μαθητή αναφέρεται ότι και το x εξαρτάται από το y, οπότε παρατηρούμε ότι δημιουργήθηκε ένα ακόμα επιστημολογικό εμπόδιο που έχει αναφέρει η Sierpinska (1992). Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο είναι το 5^{ο} όπου αναφέρεται: " Θεωρώντας την σειρά-ρόλο των μεταβλητών ως κάτι ασήμαντο ". Δηλαδή ότι μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών δεν μπορεί να αναγνωρίσει και να κατανοήσει τη διαφορετικότητα και συνάμα το ρόλο των δύο μεταβλητών, της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής.

Είναι ξεκάθαρο σε αυτό το σημείο ότι η δραστηριότητα είχε ως βασικό στόχο την ομαλή διδακτική προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης και αυτό είναι κάτι που πραγματοποιήθηκε σε μεγάλο βαθμό. Όμως, ο χρόνος της μιας διδακτικής ώρας δεν θα μπορούσε σε καμία περίπτωση να επαρκέσει για να αποσαφηνιστούν πλήρως όλες οι ζητούμενες πτυχές της έρευνας αυτής. Ένας από τους στόχους αυτής της έρευνας ήταν να γίνει η άμεση σύνδεση του ορισμού της συνάρτησης με το παράδειγμα μέτρησης. Ένας άλλος στόχος είναι να γίνουν αντιληπτές οι διαφορές της ανεξάρτητης από την εξαρτημένη μεταβλητής. Έγινε προσπάθεια να αποσαφηνιστούν όλα αυτά τη δεύτερη διδακτική ώρα με αρωγό βέβαια το πολύ σημαντικό αρχικό μάθημα - δραστηριότητα.

5.1.1. Η δεύτερη διδακτική ώρα.

Στο μάθημα - δραστηριότητα δεν έγινε καθόλου αναφορά για τον ορισμό της συνάρτησης του σχολικού βιβλίου και έγινε μια προσπάθεια να γίνει μια ομαλή διδακτική αναφορά μέσω της

δράσης μέτρησης στην ονοματολογία των δύο μεταβλητών. Ήταν αναμενόμενο λοιπόν να δημιουργηθούν απορίες από τους μαθητές στο γιατί το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή και γιατί το y λέγεται εξαρτημένη. Ο σκοπός του μαθήματος όμως ήταν να ανακαλύψουν τα παιδιά τη σχέση συνάρτησης και να γίνει σαφές ότι η μεταβλητή y μπορεί να μετρηθεί μόνο αν έχουμε πρόσβαση στην μεταβλητή x. Από τη στιγμή όμως που οι μαθητές είχαν στα χέρια τους την εξίσωση y=4x, ήταν απόλυτα φυσιολογικό και αναμενόμενο να καταλάβουν ότι και αντίστροφα αν ξέρουμε πρώτα το y, τότε μπορούμε να βρούμε το x.

Στην επόμενη διδακτική ώρα των μαθηματικών, ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές και άλλα παραδείγματα δράσης μέτρησης και έγινε προσπάθεια να κατανοήσουν οι μαθητές ότι κάθε τιμή του x πρέπει να μετρήσει - αντιστοιχιστεί με μία μόνο τιμή του y αλλιώς πολύ απλά θα είναι λάθος η μέτρηση. Με αυτό τον τρόπο έγινε η διάκριση μεταξύ της ανεξάρτητης (προσβάσιμης) μεταβλητής και της εξαρτημένης (μετρήσιμης, διαμεσολαβημένης) μεταβλητής. Στη συνέχεια δόθηκε ο ορισμός της συνάρτησης και τονίστηκε η αναγκαιότητα ότι κάθε x θα πρέπει να αντιστοιχιστεί με ένα μόνο y. Πιο συγκεκριμένα, την $2^{η}$ διδακτική ώρα έγινε ξεκάθαρο στους μαθητές ότι το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, όπως αυτή που κάναμε στο φύλλο εργασίας, πρέπει να είναι μονοσήμαντα ορισμένο και ήταν σχετικά πολύ απλό να κατανοήσουν ότι η κάθε τιμή του x πρέπει να μετρήσει (αντιστοιχίσει) μια μόνο τιμή του y. Θα ήταν παράλογο λοιπόν να μετρούσαμε με το ρολόι κάποιο συγκεκριμένο χρόνο και μέσα στο δοχείο να βλέπαμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές στάθμες λαδιού. Σχεδόν γέλασαν οι μαθητές μόλις το άκουσαν αυτό και μάλλον κατανόησαν ότι η κάθε τιμή του χρόνου πρέπει να αντιστοιχίζεται με μία τιμή του ύψους. Ακριβώς σε αυτό το σημείο λοιπόν τους δόθηκε ο ορισμός της συνάρτησης και φάνηκε πολύ λογικός σε όλους. Επίσης τονίστηκε στους μαθητές ότι η συνάρτηση έχει γεννηθεί από τη μέτρηση ή αλλιώς την πρόβλεψη.

Ένα άλλο απλό παράδειγμα που δόθηκε στους μαθητές ήταν ότι η μέγιστη θερμοκρασία μιας πόλης (π.χ. της Αθήνας) σε μία μέρα δεν μπορεί να είναι δύο ή περισσότερες ή ακόμα χειρότερα καμία! Δηλαδή με απλά λόγια θα πρέπει κάθε μέρα (ανεξάρτητη μεταβλητή) να μετράμε μόνο και μόνο μια τιμή της μέγιστης θερμοκρασίας (εξαρτημένη μεταβλητή). Φάνηκε ότι οι μαθητές κατανόησαν αρκετά τον ορισμό της συνάρτησης μέσα από τη δραστηριότητα μέτρησης και μέσα από τα παραδείγματα που έγιναν στην τάξη και μπορούμε να πούμε ότι και ο $5^{ος}$ στόχος που είχαμε θέσει επιτευχθεί, δηλαδή να μπορέσουν οι μαθητές μετά από τη δραστηριότητα μέτρησης και κατόπιν διαλόγου ($2^{η}$ διδακτική ώρα) να κατανοήσουν τον ορισμό της συνάρτησης.

Οπότε ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης έγινε με απλό και διδακτικό τρόπο. Έγινε όμως μεγάλη κουβέντα για τον ρόλο της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής καθώς και τη διαφορά τους διότι η συνάρτηση του προβλήματος παρουσιάζει μια συμμετρία στις μεταβλητές. Αυτό γίνεται διότι από τη στιγμή που ανακάλυψαν οι μαθητές τη σχέση συνάρτησης y=4x μια μεγάλη μερίδα από αυτούς είπε ότι το κάθε x μετράει μόνο ένα y, αλλά την ίδια στιγμή και το κάθε y μετράει μόνο ένα x. Η απορία τους δηλαδή ήταν εύλογη και είχε να κάνει με το ότι αν κάποιος δεν τους έλεγε ποια από τις δύο μεταβλητές στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η ανεξάρτητη και

ποια η εξαρτημένη, πως θα το καταλάβαιναν. Δηλαδή αν κάποιος τους έδινε από την αρχή τη σχέση συνάρτησης y=4x, πως θα ξεχώριζαν τις μεταβλητές. Η απάντηση ήταν πως δεν θα μπορούσαν να είναι σίγουροι και ότι συνήθως, χωρίς όμως να είναι πάντοτε έτσι, το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το y η εξαρτημένη.

Στους μαθητές δόθηκαν τα παρακάτω παραδείγματα όπου οι δύο μεταβλητές δεν παρουσιάζουν συμμετρία και θα πρέπει οι ίδιο οι ίδιοι να αποφανθούν ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή:

1. Το πρώτο παράδειγμα είναι το παράδειγμα με το τηλεκοντρόλ της τηλεόρασης, που αποτελεί ένα παράδειγμα αντιστοίχισης. Ο καθηγητής ζωγράφισε στον πίνακα δύο κύκλους και στον αριστερό κύκλο έβαλε τους αριθμούς 1 έως 10 και στο δεξί κύκλο έβαλε κάποια γνωστά τοπικά τηλεοπτικά κανάλια. Στη συνέχεια ρώτησε τους μαθητές αν πατώντας μόνο ένα κουμπί στο τηλεκοντρόλ θα μπορούσαν να παίξουν δύο κανάλια ή περισσότερα και αν θα γινόταν να πατήσουμε ένα κουμπί και να μην δείξει τίποτα η τηλεόραση (τονίστηκε στους μαθητές ότι το τηλεκοντρόλ σίγουρα δουλεύει σωστά και ότι κάθε αριθμός δείχνει ένα κανάλι). Αφού όλοι συμφώνησαν ότι το κάθε κουμπί θα πρέπει να δείξει μόνο ένα κανάλι τότε ερωτήθηκαν αν θα μπορούσαμε να πατήσουμε δύο διαφορετικά κουμπιά και να δείξουν το ίδιο κανάλι. Αρκετοί μαθητές διατύπωσαν την άποψη ότι θα ήταν παράλογο κάποιος να έχει το ίδιο κανάλι σε δύο διαφορετικά κουμπιά στο τηλεκοντρόλ, αλλά δεν θα ήταν και λάθος αν αυτό γινόταν. Με βάση τον ορισμό της συνάρτησης και το ότι κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής μετράει (αντιστοιχεί σε) μία μόνο τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, συμφώνησαν ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή αποτελείται από τους αριθμούς στο τηλεκοντρόλ και η εξαρτημένη αποτελείται από τα κανάλια που δείχνει η τηλεόραση.

2. Το δεύτερο παράδειγμα ήταν ένα παράδειγμα αλγεβρικής σχέσης όπου οι μεταβλητές δεν παρουσίαζαν συμμετρία ως προς το μονοσήμαντο, αλλά αυτό ήταν κάτι που έπρεπε να το ανακαλύψουν οι μαθητές. Η σχέση λοιπόν ήταν $\alpha^2 = \beta$, όπου σκοπίμως δεν χρησιμοποιήθηκαν τα γράμματα x και y. Θα έπρεπε οι μαθητές να καταλάβουν ποιο γράμμα αντικατοπτρίζει την ανεξάρτητη μεταβλητή, αφού πρώτα ξεκαθαρίστηκε ότι αυτή η σχέση είναι σχέση συνάρτησης. Αυτό μπέρδεψε πάρα πολύ τους μαθητές, όπως ήταν αναμενόμενο, αλλά τους έβαλε σε διαδικασία εποικοδομητικής σκέψης. Κατόπιν συζήτησης, 3 μόνο μαθητές από τους 27 κατάλαβαν ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το α. Και οι τρεις αντικατέστησαν το β με έναν θετικό αριθμό (ένας μαθητής συγκεκριμένα αντικατέστησε β=1) και συμπέραναν πως το α θα είναι ίσο με δύο διαφορετικές τιμές, τη θετική και την αρνητική τετραγωνική ρίζα του β. Έτσι λοιπόν έφτασαν επιτυχώς στο συμπέρασμα ότι το β αποκλείεται να είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή διότι κάθε θετική τιμή του θα αντιστοιχίζεται με δύο διαφορετικές τιμές του α. Επίσης διατύπωσαν ότι δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο και στην περίπτωση του α διότι όποιον αριθμό και να αντικαταστήσουμε με το α, τότε το τετράγωνό του θα είναι προφανώς μονοσήμαντα ορισμένο και αυτό θα σημαίνει ότι και το β θα δίνει μόνο ένα αποτέλεσμα.

5.2. Συζήτηση για το τεστ.

Τα αποτελέσματα του τεστ επί του συνόλου των μαθητών είναι αρκετά σημαντικά διότι μπορούν να αποσαφηνίσουν σε μεγάλη έκταση το επίπεδο κατανόησης των μαθητών στα ερωτήματα που εξετάζουμε και είναι πολύ σημαντικά για την παρούσα έρευνα. Η πρώτη ερώτηση λοιπόν (Α1) είναι η ακόλουθη:

Ερώτηση Α1:

Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36 cm

Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι:

A) $y = 6x$ B) $x = 6y$ Πως το βρήκατε;

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.1 τη σωστή απάντηση (που είναι η Α) έδωσε περίπου το 83,3% επί του συνόλου των μαθητών με τη μεγάλη πλειοψηφία εξ΄αυτών να βρίσκει τη σχέση συνάρτησης $y=6x$ χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο των τριών. Από αυτό το γεγονός μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι ο στόχος που είχαμε θέσει κατά το σχεδιασμό του τεστ, δηλαδή να μπορέσουν οι μαθητές να βρουν σε παρόμοιο πρόβλημα τη σχέση συνάρτησης και μάλιστα να τεκμηριώνουν την απάντησή τους, επιτευχθεί σε μεγάλο βαθμό.

Η επόμενη του τεστ ερώτηση (Α2) είναι η εξής: " Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή; ". Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 το περίπου 58,3% των μαθητών απάντησε σωστά ότι δηλαδή το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το y η εξαρτημένη. Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.2, αρκετοί μαθητές μπερδεύουν τις δύο λέξεις καθώς είναι αρκετά σύνθετη η ονοματολογία τους. Αυτό είναι κάτι που διαπίστωσε ο ερευνητής κατά τη διάρκεια και των υπόλοιπων μαθημάτων στις συναρτήσεις και ότι οι μαθητές χρειάζονται χρόνο μέχρι να κατανοήσουν τις δύο έννοιες και να τις αποσαφηνίσουν στο μυαλό τους. Όπως αναφέρει και η Heid (2009) πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης και μάλιστα αντιλαμβάνονται διαφορετικά τις επιμέρους έννοιες της. Ο Brown (2009) επίσης αναφέρει ότι η έννοια της συνάρτησης είναι αρκετά δύσκολη για τους μαθητές όπως επίσης αρκετά δύσκολη είναι και η διδακτική μεταφορά της από τον καθηγητή προς τους μαθητές Γυμνασίου. Άρα λοιπόν το $4^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα που θέσαμε και αναφερόταν στο αν θα μπορέσουν οι μαθητές να θυμούνται τις δύο λέξεις, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή καθώς επίσης και να διακρίνουν

το ρόλο τους χωρίς να τις μπερδεύουν έχει ως απάντηση ότι αρκετοί είναι οι μαθητές (παραμένοντας μειοψηφία όμως) που έδειξαν μπερδεμένοι σε αυτόν τον τομέα. Προφανώς χρειάζεται χρόνος και αρκετή επιμονή από τον καθηγητή για να μπορέσουν οι μαθητές να βελτιώσουν και αυτόν τον παράγοντα.

Η ερώτηση Α3 αναφέρει ότι: " Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο; ". Όπως μπορούμε να δούμε και στο σχήμα 4.3, η τεράστια πλειοψηφία των μαθητών (87,5%) απάντησαν όχι που είναι και η σωστή απάντηση. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.2, για να μετρήσουμε τη μεταβλητή ύψος θα πρέπει πρώτα να μετρήσουμε τη μεταβλητή χρόνος.

Άρα σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ερωτήσεων Α2 και Α3 πηγάζει ότι ο $2^{ος}$ στόχος που τέθηκε στην παράγραφο 3.2.2 για το εάν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και διαχωρίζουν την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή στο πρόβλημα αυτό καθώς επίσης και να απαντήσουν αν μπορούν να υπολογίσουν την εξαρτημένη μεταβλητή εν δεν γνωρίζουν την ανεξάρτητη δεν επιτεύχθηκε πλήρως, αλλά κατά το ήμισυ. Για την ακρίβεια οι μαθητές δεν μπορούν να διακρίνουν εύκολα την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή αλλά θυμούνται ότι η μια μεταβλητή δεν μπορεί να βρεθεί αν δε γνωρίζουμε την άλλη και αυτό είναι πολύ σημαντικό.

Η ερώτηση Β αναφέρει τα παρακάτω:

" Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y = x^2$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι, γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση , ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y^2 = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Ποιος έχει δίκιο, ο Μιχάλης ή ο Βαγγέλης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. "

Από το σχήμα 4.4 μπορούμε να δούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό της τάξης (περίπου το 83,3%) απάντησε σωστά. Πολλοί μαθητές μάλιστα ανέφεραν πως μια οποιαδήποτε σχέση με δυο μεταβλητές δεν είναι πάντα σχέση συνάρτησης. *Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι στο μυαλό των μαθητών υπάρχει έντονα η πεποίθηση ότι η συνάρτηση προκύπτει από τη μέτρηση και μάλιστα δεν μπορεί η μεταβλητή που μετράει να δώσει δύο ή περισσότερα αποτελέσματα για την άλλη. Αυτός είναι και ο κεντρικός σκοπός του μαθήματος και έτσι θα μπορέσει, κατά τη γνώμη του ερευνητή, κάποιος καθηγητής να περάσει ομαλά στους μαθητές του τον ορισμό της συνάρτησης.* Παρακάτω θα αναφέρουμε κάποιες απαντήσεις μαθητών προς αυτή την κατεύθυνση:

1. " Κατά τη γνώμη μου ο Βαγγέλης έχει δίκιο διότι δεν γίνεται όλες οι ισότητες με x και y να είναι συναρτήσεις και φυσικά σε μια συνάρτηση δεν γίνεται να βγαίνουν δυο αποτελέσματα από μια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής "

2. " Συμφωνώ με το Βαγγέλη διότι αν το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή τότε θα βρούμε δυο τιμές για το y και αυτό δε γίνεται"

3. " Συμφωνώ με το Βαγγέλη, γιατί αν $y^2 = 1$, τότε y=1 ή y= -1, ενώ στις συναρτήσεις δεν μπορούμε να έχουμε δύο διαφορετικά αποτελέσματα"

Από τις παρακάτω απαντήσεις φαίνεται ότι οι μαθητές προσπαθούν να διατυπώσουν ότι σε μια μέτρηση δεν μπορούμε να έχουμε δύο διαφορετικά αποτελέσματα και για αυτό το λόγο δεν γίνεται σε μια συνάρτηση το κάθε x να δώσει δύο διαφορετικές τιμές για το y, όπου x η ανεξάρτητη και y η εξαρτημένη μεταβλητή. Άρα ο $3^{ος}$ στόχος της έρευνας σίγουρα πραγματοποιήθηκε καθώς έγινε αντιληπτό από μεγάλη μερίδα των μαθητών ότι η μια μεταβλητή (προσβάσιμη - ανεξάρτητη) και μόνο αυτή μπορεί να μετρήσει την άλλη μεταβλητή (μετρήσιμη - εξαρτημένη) και ότι σε ένα πείραμα μέτρησης, το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μπορεί να είναι ένα μόνο ένα.

Ως τελικό συμπέρασμα από τις απαντήσεις των μαθητών στο τεστ μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές έχουν σίγουρα κατανοήσει ότι η συνάρτηση βασίζεται στη μέτρηση και οι περισσότεροι είναι σε θέση να φτιάξουν τη ζητούμενη σχέση συνάρτησης σε ένα πραγματικό πρόβλημα της καθημερινής ζωής, που είναι ένα πρόβλημα μέτρησης. Οι μαθητές μπόρεσαν να κατανοήσουν καλύτερα τον ορισμό της συνάρτησης μέσα από το παράδειγμα μέτρησης και συνάμα δεν τον αντιμετώπισαν ως κάτι το ιδιαίτερα δύσκολο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές μπόρεσαν να αντιληφθούν ότι η κάθε τιμή της μίας μεταβλητής πρέπει υποχρεωτικά να δώσει μια μόνο τιμή για την άλλη μεταβλητή. Φάνηκε όμως να μην έχουν ξεκαθαρίσει την ονοματολογία των δύο μεταβλητών, αλλά μετά από αρκετή κουβέντα μπόρεσαν να συνδέσουν τη μεταβλητή που ξέρουμε με το όνομα ανεξάρτητη και τη μεταβλητή που βρίσκουμε μέσω της πρώτης με το όνομα εξαρτημένη.

5.3. Συζήτηση για τις συνεντεύξεις.

Τα συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε από τις βιντεοσυνεντεύξεις θα λέγαμε ότι είναι διαφορετικά για τους τρεις μαθητές καθώς και οι τρεις είναι διαφορετικού επιπέδου στα Μαθηματικά. Έτσι λοιπόν θα συζητήσουμε εν τάχει για τους τρεις μαθητές ξεχωριστά.

5.3.1. Πρώτος μαθητής.

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.3.1, ο πρώτος μαθητής ήταν και ο πιο αδύναμος από τους τρεις, κατά την κρίση βέβαια του καθηγητή, με κάποιες μικρές μαθησιακές δυσκολίες. Είχε επίσης αρκετό άγχος κατά τη διάρκεια της βιντεοσυνέντευξης. Το γραπτό του ήταν αρκετά λιτό με μουντζούρες που και οι δύο αυτοί παράγοντες δείχνουν την αδυναμία του συγκεκριμένου μαθητή στον τομέα των συναρτήσεων και ίσως και γενικότερα στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα:

- Ο πρώτος μαθητής ουσιαστικά βρήκε την σωστή απάντηση στην ερώτηση Α1 αντικαθιστώντας τις μεταβλητές x, y με 6 και 36 αντίστοιχα, αλλά δεν μπορούσε να βρει άλλο τρόπο, πιο εμπεριστατωμένο, ώστε να αιτιολογήσει γιατί είναι αυτή η σωστή απάντηση. Αν η ερώτηση ήταν ανοικτού τύπου, κατά πάσα πιθανότητα ο μαθητής δεν θα μπορούσε να αποδείξει ότι η σωστή σχέση συνάρτησης είναι η y=6x. Επίσης την απάντηση δεν την έδωσε κατευθείαν, αλλά έκανε πολλές μουντζούρες, όπως είπε, και στο τέλος κατέληξε στην απάντηση Α. Παρόλο που στο μάθημα ο καθηγητής τόνισε πολλές φορές να απαντάνε οι μαθητές με την απλή μέθοδο των τριών, ο συγκεκριμένος μαθητής μάλλον δεν ήταν σε θέση να την εφαρμόσει και εδώ. Εδώ κατά τη γνώμη του ερευνητή παρατηρούμε το πρώτο επιστημολογικό που αναφέρει η Sierpinska (1992). Ο μαθητής λοιπόν πιστεύει ότι τα Μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα και απλά τα αντιμετωπίζει ως γράμματα και αριθμούς. Αυτός πρέπει να είναι και ο λόγος που απλά αντικατέστησε το x και το y στην κατάλληλη ισότητα και βρήκε τη σωστή απάντηση.

- Όπως φαίνεται και στις απαντήσεις Α2 και Α3 που έδωσε, δεν έδειξε να έχει κατανοήσει το ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή και ιδιαίτερα φάνηκε να μην έχει κατανοήσει το περιεχόμενο της ερώτησης Α3. Νόμιζε ότι η ερώτηση είχε να κάνει με το ύψος του δοχείου και όχι με το ύψος του λαδιού μέσα σε αυτό. Για αυτό ο ερευνητής τόνισε ότι αναφερόμαστε στο ύψος του λαδιού και τότε απάντησε (σωστά) ότι δεν έχουμε δεδομένα για να το μετρήσουμε διότι το δοχείο δεν είναι διάφανο.

- Ο μαθητής μάλλον απάντησε στην τύχη στην ερώτηση Β, διότι δεν έδωσε τεκμηριωμένη απάντηση απλά είπε ότι ο πρώτος μαθητής έχει τελείως λανθασμένη αντίληψη διότι μια

οποιαδήποτε σχέση με μεταβλητές x και y δεν είναι πάντα σχέση συνάρτησης. Το γεγονός ότι συμφωνεί με τον καθηγητή δεν αποδεικνύει ότι έχει καταλάβει σε βάθος το λόγο για τον οποίο συμβαίνει το προαναφερθέν. Μέσα από τη συζήτηση φαίνεται ότι έχει απομνημονεύσει τον ορισμό της συνάρτησης, αλλά ο καθηγητής δεν είναι πεπεισμένος ότι τον έχει κατανοήσει. Σε αυτό το σημείο επιβεβαιώνεται ο Vinner (1983) που αναφέρει ότι ο ορισμός της έννοιας δεν σημαίνει ότι έχει προκαλέσει και τη σωστή εικόνα της έννοιας. Με απλά λόγια δηλαδή, το γεγονός ότι ένας μαθητής έχει μάθει έναν ορισμό δεν σημαίνει ότι έχει κατανοήσει και την συγκεκριμένη έννοια που κρύβεται μέσα στον ορισμό αυτόν. Επίσης θεμελιώνεται θα λέγαμε και η πεποίθηση του Ponte (1992) ότι πολλοί μαθητές του Γυμνασίου έχουν αρκετή δυσκολία να σκέφτονται αφαιρετικά. Για αυτό το λόγο δίνει στον μαθητή ένα άλλο παράδειγμα και ουσιαστικά ρωτάει το μαθητή αν γίνεται μια κούνια που βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση να απέχει από το έδαφος δύο διαφορετικές αποστάσεις. Στην ερώτηση " τι πιστεύεις εσύ", που αναφέρεται στην κούνια, ο μαθητής απαντάει y=6x. , μάλλον μην έχοντας κάτι άλλο να πει. Προφανώς δεν έχει κατανοήσει καθόλου το ρόλο των δύο μεταβλητών και δυσκολεύεται να κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης. Μπορεί μόνο, από ότι διαφαίνεται, να αναγνωρίσει ότι η σχέση y=6x είναι μια ισότητα με γράμματα και μέσα από το διάλογο που έγινε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης φαίνεται να αποστήθισε ότι το γράμμα x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και y εκφράζει την εξαρτημένη. Όπως αναφέρει και ο Thompson (1994), επανειλημμένα οι μαθητές κατασκευάζουν την εικόνα μιας συνάρτησης ως μια έκφραση ισότητας όπου το πρώτο μέλος είναι μικρό και το δεύτερο μέλος είναι ανοιγμένο και μάλλον ο μαθητής αυτός βρίσκεται σε αυτή την κατηγορία. Δυσκολεύεται αρκετά να καταλάβει ότι η έννοια και ο ορισμός της συνάρτησης προέρχεται από πραγματικά προβλήματα και αυτός είναι ο λόγος όπου δυσκολεύτηκε να δώσει εμπεριστατωμένες και αναλυτικές απαντήσεις διότι το τεστ αυτό δεν περιείχε καθόλου μετασχηματισμούς και υπολογισμούς που προκύπτουν από την αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης.

5.3.2. Δεύτερος μαθητής.

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.3.2 ο συγκεκριμένος μαθητής ανήκει, κατά τη γνώμη του ερευνητή, στο μεσαίο επίπεδο στα Μαθηματικά. Η συζήτηση που μπορούμε να κάνουμε σε αυτό το σημείο περιλαμβάνει τα ακόλουθα κρίσιμα γεγονότα (Powell, κ.α., 2003):

- Ο μαθητής διαφαίνεται να έχει κατανοήσει πλήρως τον τρόπο εύρεσης της αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης κάτι το οποίο το αποκόμισε από το αρχικό μάθημα στις συναρτήσεις όπου κλιμακωτά οδηγήθηκαν οι μαθητές να βρουν την συγκεκριμένη σχέση συνάρτησης. Έτσι λοιπόν, στην απάντηση της ερώτησης Α1, ο τρόπος είναι η απλή μέθοδο των τριών και την οποία εφαρμόζει με επιτυχία μέχρι κάποιο σημείο. Ο συγκεκριμένος μαθητής έχει κάνει ένα αριθμητικό λάθος που είναι πάρα πολύ συνηθισμένο ακόμα σε

πολλούς μαθητές στα Μαθηματικά. Το λάθος είναι το ακόλουθο: $\frac{\cancel{6}y}{\cancel{3}6} = 6y$. Δηλαδή απλοποιεί το 6 και το 36 αλλά αντί να "κρατήσει" το 6 στον παρονομαστή, το αφήνει στον αριθμητή. Ο διδάσκων έχει τονίσει στους μαθητές του ότι η απλοποίηση γίνεται με τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών που απλοποιούν και ότι όταν σβήσουν τους δύο αριθμούς θα πρέπει να γράφουν τα υπόλοιπα της διαίρεσης, ακόμη και αν είναι το 1 το αποτέλεσμα. Τους έχει επίσης τονίσει ότι αν δεν βάζουν τίποτα και απλά απλοποιούν σημαίνει ότι οι αρχικοί αριθμοί είναι οι ίδιοι και ότι μετά δεν μπορούν να εμφανίσουν τα υπόλοιπα της διαίρεσης ως δια μαγείας για τελικά αποτελέσματα. Παρόλα αυτά, το συγκεκριμένο λάθος είναι από τα πιο κλασσικά λάθη που μπορεί να κάνει ένας μαθητής Β΄ Γυμνασίου, αλλά και μαθητής μεγαλύτερης τάξης. Παρόλο που ο καθηγητής είχε επικουρικό ρόλο στη συνέντευξη, έκρινε σκόπιμο να δώσει τη σωστή απάντηση στο μαθητή διότι αυτό το αριθμητικό λάθος θα μεταφερόταν και στις επόμενες απαντήσεις. Έτσι λοιπόν τελικά ο μαθητής, μετά την επέμβαση του καθηγητή, δίνει τη σωστή απάντηση.

- *Στην ερώτηση Α2 τώρα, για το ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή, ο μαθητής δίνει μια εντελώς απροσδόκητη απάντηση:*

  " Η y είναι η εξαρτημένη και η x η ανεξάρτητη..... Διότι το y δεν είναι μόνο του στον αριθμητή, οπότε εξαρτάται από τον αριθμό το 6, ενώ το x που είναι μόνος του ο αριθμός στον αριθμητή, άρα εκείνο είναι η ανεξάρτητη ". Μάλιστα στην ερώτηση του καθηγητή αν το κλάσμα ήταν $\frac{x}{6} = \frac{y}{1}$, τι θα γινόταν ο μαθητής απαντάει ότι τότε οι δύο μεταβλητές θα ήταν αντιστραμμένες, δηλαδή το x θα ήταν η εξαρτημένη και το y η ανεξάρτητη. Σε αυτό το σημείο θα λέγαμε ότι ο μαθητής έχει φτιάξει έναν *παρακανόνα* στα Μαθηματικά και όπως αναφέρει και ο Vinner (1983) έχει δημιουργήσει στο μυαλό του μια δική του θεωρία, δηλαδή μια δική του εικόνα έννοιας. Το αν αυτό αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο επαφίεται και σε επόμενες μελέτες και έρευνες.

- Ο συγκεκριμένος μαθητής μάλλον δεν έχει συνειδητοποιήσει πλήρως ότι οι έννοιες χρόνος και "μετράω με το ρολόι" είναι ταυτόσημες ή ενδέχεται να το γνωρίζει (όπως είναι και το λογικό) και να ήταν αγχωμένος κατά η διάρκεια της βιντεοσυνέντευξης. Προφανώς εκείνη τη στιγμή κατανόησε ότι είχε μπερδευτεί σε κάτι πολύ απλό διότι οι απαντήσεις που έδινε δεν ήταν σχετικές μεταξύ τους. Τη μία φορά έλεγε ότι δε μπορούμε να μετρήσουμε απ' έξω το ύψος και την άλλη έλεγε ότι μπορούμε. Αυτό έγινε όσον αφορά την απάντηση που έδωσε για το αν θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το ύψος αν δεν ξέρουμε το χρόνο (Α3). Τελικά και μετά από αρκετό διάλογο και παραδείγματα κατάλαβε το λάθος του γέλασε και απάντησε όχι.

- Στην ερώτηση Β ο μαθητής απαντάει ότι μια οποιαδήποτε σχέση με x και y είναι σχέση συνάρτησης. Αυτό είναι το 5^{ο} επιστημολογικό εμπόδιο που αναφέρεται από τη Sierpinska (1992), όπου οι μαθητές *έχουν την πεποίθηση ότι η συνάρτηση είναι με απλά λόγια μια εξίσωση που περιέχει x και y και όταν μας δίνεται η τιμή της μίας μεταβλητής τότε υπολογίζουμε την άλλη*. Ο καθηγητής δίνει την απάντηση ότι μια οποιαδήποτε σχέση που συνδέει το x και το y δεν είναι σχέση συνάρτησης για να συνεχιστεί ο διάλογος και να μπορέσει να διαπιστώσει όλες τις πεποιθήσεις και τα πιστεύω του μαθητή για τη διάκριση και το θεσμικό ρόλο των δύο μεταβλητών.

- Ο μαθητής για να απαντήσει στην ερώτηση Β, προσπαθεί να αντικαταστήσει έναν αριθμό στη θέση του x και επιλέγει τον αριθμό 2. Και στη συνέχεια λέει: " Ας πούμε ότι το x=2. Αφού είναι ίσο, τότε το y..... Ας το κάνουμε καλύτερα με 1, γιατί δεν βγαίνει η τιμή, είναι στη δευτέρα οπότε δεν βγαίνει ακριβώς...". Ο μαθητής δυσκολεύεται να απαντήσει ότι το y θα είναι η θετική ή η αρνητική τετραγωνική ρίζα του 2, κάτι που είναι λογικό καθώς στην Β΄Γυμνασίου δεν μαθαίνουν να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Θα μπορούσαμε λοιπόν να αναφέρουμε ότι ο δεύτερος μαθητής φάνηκε να έχει κατανοήσει πολλά περισσότερα από τον πρώτο μαθητή καθώς οι απαντήσεις του ήταν περισσότερο εμπεριστατωμένες και αναλυτικές. Στην πρώτη ερώτηση έκανε ένα πολύ σημαντικό αριθμητικό λάθος που τον οδήγησε να απαντήσει λανθασμένα. Όμως αφού κατάλαβε με τη βοήθεια του καθηγητή το λάθος του, έδωσε τη σωστή απάντηση και μάλιστα χρησιμοποίησε την απλή μέθοδο των τριών, ακριβώς όπως ο διδάσκων είχε υποδείξει στο μάθημα. Είχε καταλάβει ότι στη σχέση συνάρτησης συνυπάρχουν δύο μεταβλητές και ότι για να βρούμε την μία αντικαθιστούμε την άλλη με μια συγκεκριμένη τιμή. Δεν είχε καταλάβει όμως την έννοια της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής, κάτι όμως που άλλαξε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης όπου έδειξε να αντιλαμβάνεται ολοένα και περισσότερο τις έννοιες αυτές. Φάνηκε αρκετά μπερδεμένος στις απαντήσεις του, όμως κατάλαβε σχετικά γρήγορα τα λάθη του και εντέλει, με τη βοήθεια βεβαίως του διδάσκοντα, τα διόρθωσε έως έναν βαθμό. *Έδειξε να έχει κατανοήσει ότι η σχέση συνάρτησης εκμαιεύεται μέσα από πραγματικά προβλήματα δράσης μέτρησης και στα μέσα της συνέντευξης συνειδητοποίησε τελικά ότι για να υπολογίσουμε τη μία μεταβλητή αρκεί και μόνο αρκεί να μετρήσουμε την άλλη (την προσβάσιμη)*. Στην ερώτηση Α3 έδωσε λανθασμένη απάντηση, αλλά φάνηκε πως δεν είχε καταλάβει αρχικά ότι η μεταβλητή χρόνος μετριέται με το ρολόι και στη συνέχεια τη διόρθωσε και απάντησε πως χωρίς να έχουμε μετρήσει με το ρολόι δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ύψος μιας και το δοχείο είναι αδιαφανές. Συμπερασματικά, ο μαθητής έχει κατανοήσει αρκετά καλά τη σχέση εξάρτησης των δύο μεταβλητών και πως να μετατρέπει το πρόβλημα σε αλγεβρική εξίσωση συνάρτησης, όμως έχει κατανοήσει σε μικρό σχετικά βαθμό την ποιοτική διαφορά των δύο μεταβλητών καθώς επίσης και το ρόλο της κάθε μίας. Είναι σίγουρο ότι η συγκεκριμένη συνέντευξη τον βοήθησε να κατανοήσει αρκετά παραπάνω πράγματα καθώς μέσα από το διάλογο φάνηκε να αλλάζει αρκετά τις εσφαλμένες αντιλήψεις που είχε σχηματίσει για τις συναρτήσεις καθώς και για τις δύο μεταβλητές.

5.3.3. Τρίτος μαθητής.

Ο τρίτος μαθητής είναι ιδιαίτερα καλός στα Μαθηματικά με αρκετό ενδιαφέρον θα λέγαμε για τη συγκεκριμένη επιστήμη και αυτό αποτυπώθηκε και στη συνέντευξη που έγινε. Τα κύρια σημεία της συνέντευξης που χρίζουν συζήτησης είναι τα εξής:

- Καταρχήν ο μαθητής απάντησε σωστά σχεδόν σε όλες τις ερωτήσεις και δήλωσε ότι του άρεσε πολύ η δραστηριότητα με το δοχείο διότι είπε ότι *ήταν ένας απλός και εύκολος τρόπος για να μπούμε στις συναρτήσεις.*

- Απάντησε λάθος στην ερώτηση Α2, μάλλον από βιασύνη διότι ανέφερε πως θα μπορούσαμε στο περίπου να μετρήσουμε το ύψος παρά με ακρίβεια και αφού ο ερευνητής του τόνισε πως δεν έχουμε στη διάθεσή μας κάποιο μέτρο, ο μαθητής ανέφερε πως πρέπει να ξέρουμε το χρόνο για να μετράμε πόσο (το ύψος) γεμίζει κάθε φορά. Όταν ρωτήθηκε να βρει το ύψος όταν ο χρόνος είναι 2 λεπτά, τότε αμέσως αντικατέστησε το x με 2 και ύστερα από ένα μικρό λάθος απροσεξίας υπολόγισε το ύψος.

- Διαφαίνεται ότι έχει κατανοήσει ότι οι μεταβλητές δεν είναι υποχρεωτικό να είναι πάντα το x και το y, όπως ανέφερε και στην απάντηση της ερώτησης Β.

- Στην ερώτηση Β, έδωσε συνολικά μια καταπληκτική απάντηση καθώς πρώτα από όλα διατύπωσε την άποψη ότι μια αλγεβρική σχέση συνάρτησης δεν είναι υποχρεωτικό να εμπεριέχει μόνο τις μεταβλητές x και y, αλλά μπορεί να υπάρχουν και άλλα γράμματα. Άρα δεν έπεσε στην παγίδα να θεωρήσει ότι το x είναι η ανεξάρτητη και το y η εξαρτημένη μεταβλητή, πολύ απλά γιατί έτσι συνηθίζεται και αυτό δείχνει το υψηλό επίπεδο του στα Μαθηματικά. Έδειξε να έχει κατανοήσει πλήρως τη διαφοροποίηση και τη λειτουργία των δυο μεταβλητών σε μία συνάρτηση καθώς έχει κατανοήσει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή "μετράει" την εξαρτημένη και έτσι δεν μπορούμε να έχουμε δύο ή περισσότερα αποτελέσματα σε μία μέτρηση. *Κατά δεύτερον και κυριότερο, παρόλο που δεν ερωτήθη, ανέφερε πως αν οι μεταβλητές είχαν ακριβώς διαφορετική ονομασία, δηλαδή αν ήταν το y η ανεξάρτητη και το x η εξαρτημένη, τότε θα ήταν συνάρτηση. Αυτή είναι μια πολύ προχωρημένη παρατήρηση για μαθητή της Β΄ Γυμνασίου όπου ίσως ακόμη και φοιτητής Πανεπιστημίου να μην μπορούσε να στοιχειοθετήσει.*

Συμπερασματικά, ο τρίτος μαθητής φάνηκε να έχει καταλάβει σε πολύ μεγάλο βαθμό την έννοια της συνάρτησης καθώς έδωσε πολύ σωστές και αναλυτικές απαντήσεις. Η μόνη ερώτηση που δεν απάντησε σωστά ήταν η ερώτηση 3 και αυτό κατά πάσα πιθανότητα συνέβη διότι πίστευε ότι θα

μπορούσαμε να μετρήσουμε το ύψος του λαδιού στο περίπου. Ίσως, αν η ερώτηση 3 ήταν " Μπορούμε να μετρήσουμε με ακρίβεια το ύψος του λαδιού αν δεν ξέρουμε το χρόνο; ", η απάντησή του να ήταν διαφορετική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.

6.1. Περιορισμοί.

Ουσιαστικά ο μοναδικός περιορισμός της δραστηριότητας ήταν ότι δεν χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν ένα πραγματικό δοχείο με λάδι και γενικότερα ήταν ένα πρόβλημα που σίγουρα ανήκει στη σφαίρα της καθημερινότητας ενός ανθρώπου, όμως δεν έγινε με χειραπτικό υλικό. Ίσως να μπορούσε να γίνει και με ένα κανονικό δοχείο με λάδι και να συμμετέχουν οι μαθητές πιο ενεργά, όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η δραστηριότητα έγινε σε μαθητές Β΄Γυμνασίου και ο κίνδυνος ενός ατυχήματος ήταν μεγάλος. Αυτό το ατύχημα, μικρής ή μεγάλης έκτασης θα μπορούσε από το να ροκανίσει έστω και λίγα λεπτά από τον πολύτιμο χρόνο της μιας διδακτικής ώρας μέχρι να καταστρέψει πλήρως τη δραστηριότητα και μάλιστα από την αρχή. Αν συνυπολογίσουμε το γεγονός ότι η πραγματοποίηση μιας βιντεοσκόπησης στο χώρο μιας τάξης ενός σχολείου δεν είναι εύκολη διαδικασία, αλλά απαιτείται μια μεγάλη προεργασία για αυτό, τότε σίγουρα θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι μάλλον φρονίμως δεν έγινε η έρευνα με χειραπτικό υλικό. Ίσως αν δεν υπήρχε η πίεση της βιντεοσκόπησης μαζί με τη χρονική πίεση να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα σε μια διδακτική ώρα, τότε θα μπορούσε κάποιος να την πραγματοποιήσει απόλυτα ρεαλιστικά, με τη χρήση χειραπτικού υλικού.

6.2. Μελλοντική έρευνα.

Η έννοια της συνάρτησης είναι ένας τομέας που απασχολεί ιδιαίτερα την επιστημονική κοινότητα (Sierpinska, 1992 & Vinner, 1981) αλλά και πολλούς εκπαιδευτικούς. Όπως αναφέρουν οι Dreyfus & Eisenberg (1986) πολλοί εκπαιδευτικοί δίνουν τεράστια βαρύτητα στις αλγεβρικές αλλά και στις γραφικές αναπαραστάσεις, αλλά ενδιαφέρονται ελάχιστα να κατασκευάσουν δομές τέτοιες ώστε θα οδηγήσουν σε διαφορετική θεώρηση των εννοιών και εντέλει στη βαθύτερη κατανόησή τους. Πράγματι η πλειονότητα των καθηγητών απλά δίνει τον ορισμό της συνάρτησης στο πρώτο μάθημα των συναρτήσεων και στη συνέχεια ασχολείται με πίνακες τιμών, με κάποια χαρακτηριστικά συγκεκριμένων συναρτήσεων (π.χ. κλίση ευθείας, σημεία τομής με τους άξονες κ.τ.λ.) και με γραφικές αναπαραστάσεις, που σίγουρα αποτελούν πολύ σημαντικούς άξονες της διδασκαλίας. Λίγοι καθηγητές όμως προσπαθούν να μεταφέρουν στους μαθητές την έννοια της συνάρτησης με απλά παραδείγματα, όπως αναφέρει και η Sierpinska (1992). Η Sfard (1991) αναφέρει πως η λειτουργική αντίληψη προηγείται της δομικής και έτσι λοιπόν ο σχεδιασμός του πρώτου μαθήματος πάνω στις συναρτήσεις θα πρέπει να είναι πολύ διαφορετικός από "απλά να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης". Πραγματικά πολλοί είναι οι μαθητές που έχουν κατανοήσει πως να εκτελούν

αλγοριθμικές διαδικασίες όταν τους ζητείται να αντιμετωπίσουν κάποιο ερώτημα πάνω στις συναρτήσεις (για παράδειγμα τον εντελώς αλγοριθμικό τρόπο να βρίσκουν, αν υπάρχουν, σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες) και δεν έχουν κατανοήσει καθόλου τι είναι η συνάρτηση. Όπως αναφέρουν και οι Σπύρου & Γαγάτσης (2004), ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης αποτελεί ένα παράδειγμα προς μίμηση για την εξάσκηση πάνω στη λιτότητα της μαθηματικής αφαίρεσης και αποτελεί υπόδειγμα της μαθηματικής λογικής. Είναι όμως πολύ δύσκολο να τον κατανοήσει ένα παιδί στην ηλικία των 13-14 ετών αφού κατά κανόνα δεν έχει αναπτύξει τέτοιου είδους αναλυτική σκέψη και δεν είναι ώριμο να τον δεχθεί. Ο ορισμός σίγουρα δημιουργεί πολλά ερωτηματικά στους μαθητές και ένας τρόπος που προτείνεται για να λυθεί αυτό το πρόβλημα είναι ακριβώς να μην δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης! Για την ακρίβεια, να μη δοθεί στα εισαγωγικά μαθήματα της συνάρτησης. Όπως αναφέρει και η Zaslavsky (2010) θα πρέπει στη διδασκαλία των Μαθηματικών ο καθηγητής να χρησιμοποιεί διδακτικά παραδείγματα (instructional examples) για να παρουσιάσει στους μαθητές του μια έννοια. Πόσο μάλλον μια τόσο δύσκολη έννοια και που πρέπει να τη διδάξει ένας καθηγητής σε μαθητές Γυμνασίου (Brown, 2009), όπως είναι η έννοια της συνάρτησης. Κατά τη Zaslavsky (2010) ισχύει ότι: " τα διδακτικά παραδείγματα είναι απαραίτητα για τη γενίκευση, την αφαίρεση και την αναλογική συλλογιστική " (σελ. 107).

Έτσι λοιπόν προτείνουμε να διεξαχθούν και άλλες έρευνες πάνω στη διδασκαλία της έννοιας και του ορισμού της συνάρτησης που αφορούν καταρχήν μαθητές Γυμνασίου αλλά και μαθητές μεγαλύτερης τάξης. Προτείνεται δηλαδή να γίνουν και άλλες δραστηριότητες δράσης - μέτρησης και να ερευνηθεί κατά πόσο τελικά οι μαθητές μπόρεσαν δια μέσω αυτών να κατανοήσουν τον ορισμό της συνάρτησης καθώς και αν κατέκτησαν τις έννοιες "ανεξάρτητη - εξαρτημένη" μεταβλητή. Προτείνεται δηλαδή να πραγματοποιηθούν έρευνες όπου τα εισαγωγικά παραδείγματα πάνω στις συναρτήσεις να μην γίνονται με τη μέθοδο της αντιστοίχισης μέσω βελοδιαγραμμάτων αλλά μέσω πιο ρεαλιστικών προβλημάτων μέτρησης μέσα από τη καθημερινότητα διότι η έννοια της συνάρτησης κατά το συγγραφέα αυτής της διπλωματικής έχει τις αρχαίες ρίζες της στη μέτρηση και όχι την αντιστοίχιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bagni, G. T. (2005). Functions: Processes, properties, objects. *Scientia paedagogica experimentalis*, *42*(2), 205.

Bell, E. T. (1945). *The development of mathematics*. Courier Corporation.

Bernoulli, J. (1726). *Opera Omnia*. Lausannae & Genevae.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1968). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Bradley, R. E., & Sandifer, C. E. (2009). Cauchy's Cours d'analyse. *An Annotated Translation Springer Science Business Media, LLC.*

Brown, J. P. (2009). Concept maps: Implications for the teaching of function for secondary school students. *Australian Cotholic University.*

Bruner, J. S. (1996). *The culture of education*. Harvard University Press.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (Vol. 1). Imprimerie royale.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352-378.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the learning of mathematics*, *6*(1), 2-10.

Euler, L. (1797). *Introductio in Analysin Infinitorum.* Lugduni, Apud Bernuset, Delamolliere, Falque & Soc.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Heid, K., M. (2009). *Mathematical Knowledge for Secondary School Mathematics Teaching.* The Pennsylvania State University.

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *8*(1), 49-69.

Katz, V., J. (1993). *A History of Mathematics.* Harper Collins College Publishers, New York.

Lagrange, J., L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. A Paris, de L'Imprimerie De La République.

Lambertus, A. J. (2008). Students' understanding of the function concept: Concept images and concept definitions.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2).

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, *22*(4), 405-435.

Ronda, E. R. (2004). *A FRAMEWORK OF GROWTH POINTS IN STUDENTS'DEVELOPING UNDERSTANDING OF FUNCTION* (Doctoral dissertation, Australian Catholic University). Αναρτήθηκε Φεβρουάριος 10, 2016,από http://dlibrary.acu.edu.au/digitaltheses/public/adtacuvp55.29082005/02whole.pdf.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 23-58.

Spyrou, P., & Zagorianakos, A. (2009). An exploration of mathematics students' distinguishing between function and arbitrary relation. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *29*(3), 85-90.

Spyrou, P., & Zagorianakos, A. (2010). Greek students' understandings of the distinction between function and relation. *Research in Mathematics Education*, *12*(2), 163-164.

Spyrou, P., & Keisoglou, S. (2003). Processes of mathematization in a learning environment combining devices and computational tools. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 13,* 43-57.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. In *Learning Mathematics* (pp. 125-170). Springer Netherlands.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 356-366.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of exact Sciences*, *16*(1), 37-85.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. In *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). Springer US.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2014). *Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου. Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής*. Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων "Διόφαντος".

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ. & Δαμιανού, Χ. (2012). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων.* Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων "Διόφαντος".

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2014). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2012). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2012). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Νεγρεπόντης, Σ. Η ανακατασκευή της Πυθαγόρειας Γεωμετρίας και η παρεπόμενη ανθυφαιρετική ερμηνεία της Πυθαγόρειας Φιλοσοφίας και του παράδοξου διχοτομίας του Ζήνωνος. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών (Σημειώσεις).

Σπύρου, Π. (2005). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Σημειώσεις Παραδόσεων. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Σπύρου, Π., & Γαγάτσης, Α. (2004). Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και η διδακτική μεταφορά της. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, Δ. Πίττα & Π. Σπύρου (Εκδ.), *Πρακτικά Στ' Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Επιστήμης και Παιδείας* (σσ. 63-71). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής - Πανεπιστήμιο Κύπρου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Φύλλο εργασίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όπως αυτό που βλέπουμε στη φωτογραφία και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 12 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 48cm.

Ερωτήσεις:

1. Πόσο θα είναι το ύψος του λαδιού μέσα στο δοχείο όταν το δοχείο γεμίσει μέχρι τη μέση;

2. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο μέχρι τη μέση;

Πως το βρήκατε;

3. Πόσος είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε το δοχείο να γεμίσει μέχρι το ένα τέταρτο του ύψους του; Πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει το λάδι στα πέντε έκτα του ύψους του δοχείου; Πως το βρήκατε;

4. Ποιο θα είναι το ύψος του λαδιού στο ένα λεπτό;

5. Ποιο θα είναι το ύψος του λαδιού μέσα στο δοχείο μετά από 3 λεπτά; Πώς το βρήκατε;

6. Ας συμβολίσουμε το χρόνο με x και το αντίστοιχο ύψος y. Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο που να μας δίνει το ύψος αν ξέρουμε το χρόνο χωρίς να μετρήσουμε;

7. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Α. Ύψος = (Ύψος ανα λεπτό) × (Χρόνος)

Β. Χρόνος = (Ύψος) × (Ύψος ανα λεπτό)

Γ. Ύψος ανα λεπτό = (Χρόνος) × (Ύψος)

Δ. Κάτι άλλο

Ας συμβολίσουμε λοιπόν:

- ✓ το ύψος με y
- ✓ το ύψος ανά 1 λεπτό με α
- ✓ και το χρόνο με x.
- ✓

8. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Α. $y = \alpha \times x$

Β. $x = \alpha \times y$

Γ. $\alpha = y \times x$

Δ. Κάτι άλλο

Στην περίπτωσή μας ξέρουμε το α= 4cm το λεπτό ,
οπότε η εξίσωση θα γίνει ……

9. Πως μετρήσαμε το ύψος του λαδιού κάθε φορά; Τι βρήκαμε πρώτα;; Θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το ύψος του λαδιού αν δεν ξέραμε τον χρόνο;;

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται εξίσωση *συνάρτησης* και τα μεγέθη x , y λέγονται μεταβλητές.

Η συνάρτηση έχει ανακαλυφθεί στα μαθηματικά για να μπορέσουμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος, όπου δεν μπορούμε κατευθείαν (στη συγκεκριμένη περίπτωση το ύψος y), με τη βοήθεια ενός άλλου μεγέθους που μπορούμε να μετρήσουμε (στη συγκεκριμένη περίπτωση ο χρόνος x). Δηλαδή μετράμε το x για να βρούμε το y αλλά και αντίστροφα γνωρίζοντας το y βρίσκουμε το x. (αφού βρούμε πρώτα τη σχέση)

Το *x ονομάζεται συνήθως ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη,* γιατί για να βρούμε το y (ύψος) θα πρέπει *πρώτα* να βρούμε το x (χρόνο). *Δηλαδή το y εξαρτάται από το x.*

Άσκηση:

Η εξίσωση της συνάρτησης που έχουμε στο πρόβλημα είναι $y = 4x$.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών x , y.

x (Χρόνος)	1	8	5			11
y (Υψος)				36	26	

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Τεστ.

Α. Έχουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και θέλουμε να το γεμίσουμε με λάδι μέχρι τη μέση για να το πουλήσουμε. Το δοχείο δεν είναι διάφανο και το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ένα ρολόι. Από προηγούμενη μέτρηση που έχουμε κάνει ξέρουμε ότι για να γεμίσει το δοχείο μέχρι πάνω χρειάζονται 6 λεπτά. Το ύψος του δοχείου είναι 36 cm.

Ερωτήσεις:

Α1. Αν x είναι ο χρόνος και y το ύψος τότε η συνάρτηση είναι:

Α) $y = 6x$ Β) $x = 6y$ Πως το βρήκατε;

Α2. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή στη συνάρτηση αυτή;

Α3. Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος στο πρόβλημα αυτό αν δεν ξέρουμε το χρόνο;

Β. Ο καθηγητής των μαθηματικών ρώτησε την τάξη αν η σχέση $y = x^2$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y είναι σχέση συνάρτησης και ο Μιχάλης απάντησε ναι, γιατί οποιαδήποτε ισότητα με x και y είναι συνάρτηση , ενώ ο Βαγγέλης απάντησε όχι διότι αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα x=1 στη σχέση τότε θα έχουμε $y = 1$ και άρα θα βρούμε δύο τιμές για το y, το 1 και το -1 και αυτό δεν γίνεται. Ποιος έχει δίκιο, ο Μιχάλης ή ο Βαγγέλης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.