ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

«Η ιστορία της άλγεβρας και η χρήση της στις έρευνες της Διδακτικής»

Πολυπόρτης Σπύρος
Α.Μ: Δ201203

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής
Διονύσιος Λάππας — Αναπληρωτής καθηγητής

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 29η Σεπτεμβρίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Δ. Λάππα (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Δ. Λάππα (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ι. Θωμαΐδη	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές μου και μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, τον κ. Διονύσιο Λάππα, τον κ. Γιάννη Θωμαΐδη και τον κ. Παναγιώτη Σπύρου. Ιδιαίτερα τον κ. Γιάννη Θωμαΐδη για όλες τις εποικοδομητικές συμβουλές του, την καθοδήγησή του, την υπομονή και το χρόνο που μου αφιέρωσε.

Επίσης ευχαριστώ θερμά την Διονυσία Μπακογιάννη και την Ελένη Κλή για την αμέριστη βοήθειά τους τα τέσσερα αυτά χρόνια των σπουδών μου στο ΠΜΣ.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους γονείς μου που είναι πάντα δίπλα μου, στηρίζουν τις επιλογές μου και με βοηθούν να κάνω τα όνειρα μου πραγματικότητα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον αδερφό μου, Θάνο, και τους φίλους μου, Νατάσα και Νίκο, για την στήριξη και την συμβολή τους στην πραγματοποίηση αυτής της διπλωματικής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τίτλοι	**Σελίδες**
Περιεχόμενα	3
Περίληψη	6
Κεφάλαιο 0: Ερευνητικά ερωτήματα – Μεθοδολογία της έρευνας	7
Κεφάλαιο 1ο : Ιστορικά προβλήματα που συνδέονται με τη δημιουργία και εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού	11
1.1. Τα προβλήματα 1 & 3 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 (περίπου 1800 π.Χ.)	12
1.1.1 Το πρόβλημα 1	12
1.1.2. Το πρόβλημα 3	15
1.2. Τα προβλήματα I-1 & I-27 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (Αλεξάνδρεια, περίπου 250 μ.Χ.)	17
1.2.1. Το πρόβλημα I-1	17
1.2.2. Το πρόβλημα I-27	18
1.3. Ένα πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaṣar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala του Abū Ja‘far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ.Χ.)	19
1.4. Τα προβλήματα I-1 & I-3 από το De Numeris Datis του Jordanus de Nemore (περίπου 1250 μ.Χ.)	20
1.4.1 Το πρόβλημα I-1	20
1.4.2. Το πρόβλημα I-3	21
1.5. Το πρόβλημα I-1 από το Zeteticorum Libri Quique του François Viète (1540 – 1603).	23
1.6. Το πρόβλημα ‘άθροισμα και διαφορά’ στην Άλγεβρα του Euler.	24
Κεφάλαιο 2ο : Οι εξελίξεις στην Ιστοριογραφία των Μαθηματικών	26
2.1. Τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά	26
2.1.1. Το εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης	26
2.1.2. Παλαιότερες μελέτες πάνω στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά.	27
2.1.3. Νεότερες μελέτες πάνω στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά.	33
2.2. Διόφαντος	39
2.2.1. Η ζωή του	39
2.2.2. Τα Αριθμητικά	40
2.2.3. Μεθοδολογία, συμβολισμός και η έννοια της εξίσωσης	41
2.2.4. Σχέσεις με τη βαβυλωνιακή και την αραβική άλγεβρα.	49
2.3. Ο al-Khwārizmī	51
2.3.1. Η al-jabr	52
2.3.2. Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις	53
2.3.3 Οι γεωμετρικές βάσεις	54
2.3.4. Τα αλγεβρικά προβλήματα	55
2.4. Ο Jordanus de Nemore	57
2.4.1. Η ζωή του	58
2.4.2. Η Arithmetica και το De Numeris Datis	58
2.5. Ο François Viète.	60

2.5.1. Η ζωή του	61
2.5.2. Η έννοια της παραμέτρου	61
2.5.3. Ο συμβολισμός του και η αναλυτική τέχνη	62
2.6. Ο Leonhard Euler.	63
2.6.1. Η ζωή του	64
2.6.2. Ο συμβολισμός του	64
2.6.3. Οι βάσεις της Ανάλυσης	65
2.7. Συμπεράσματα για την ιστορική εξέλιξη των αλγεβρικών εννοιών	66
Κεφάλαιο 3ο : Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, και ειδικότερα της Άλγεβρας, στις έρευνες της Διδακτικής	69
3.1. E. Harper: Eon Ghosts of Diophantus (1987)	75
3.1.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Harper	75
3.1.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας του Harper	76
3.1.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας του Harper	77
3.1.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας του Harper	79
3.2. A. Sfard: On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on progress and objects as different sides of the same coin. (1991)	80
3.2.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα της Sfard	80
3.2.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας της Sfard	81
3.2.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας της Sfard	82
3.2.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας της Sfard	82
3.3. G. Harel: Students' Understanding of proofs (1999)	83
3.3.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Harel	84
3.3.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας του Harel	85
3.3.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας του Harel	86
3.3.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας του Harel	88
3.4. G. Bagni: The role of the history of mathematics in mathematics education: Reflections and examples (2000)	90
3.4.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Bagni	90
3.4.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας του Bagni	93
3.4.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας του Bagni	96
3.4.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας του Bagni	97
3.5. Y. Thomaidis & C. Tzanakis: The notion of historical 'parallelism' revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line (2007)	98
3.5.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Thomaidis & Tzanakis	98
3.5.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας των Thomaidis & Tzanakis	100
3.5.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας Thomaidis & Tzanakis	100
3.5.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας Thomaidis & Tzanakis	102
3.6. B. Kaygin, B. Balçin, C. Yildiz & S. Arslan: The effect of teaching the subject of Fibonacci numbers and golden ratio through the history of mathematics (2011)	103
3.6.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Kaygin, Balçin, Yildiz & Arslan	103
3.6.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας των Kaygin, Balçin, Yildiz & Arslan	108
3.6.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας των Kaygin, Balçin, Yildiz & Arslan	109
3.6.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας των Kaygin, Balçin, Yildiz & Arslan	111
Κεφάλαιο 4ο : Συμπεράσματα - Συζήτηση	113
Βιβλιογραφία	119

Επώνυμο

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται η ιστορία της άλγεβρας και η χρήση της στις έρευνες της διδακτικής. Πιο συγκεκριμένα, στόχος της εργασίας αυτής είναι να διαπιστωθεί πόσο έγκυρη μπορεί να θεωρηθεί η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν από αρκετές δεκαετίες και, επίσης, τι ακριβώς μπορεί να σημαίνει «παραλληλισμός» ανάμεσα σε ένα μαθηματικό του παρελθόντος , και ένα σημερινό μαθητή. Αναλύοντας έξι πρωτότυπα ιστορικά μαθηματικά κείμενα καθώς και μελετώντας παλαιότερες και νεότερες μελέτες σχετικά με την εξέλιξη της άλγεβρας, διαπιστώσαμε πως δεν μπορούμε να βασιστούμε απόλυτα σε επισκοπήσεις και ερμηνείες που ανήκουν στη λεγόμενη «παραδοσιακή ιστοριογραφία» των Μαθηματικών. Αυτό συμβαίνει, διότι τα μέσα ερμηνείας που χρησιμοποιούν οι ιστορικοί των μαθηματικών συνεχώς εξελίσσονται, νέα ιστοριογραφικά προβλήματα προκύπτουν συνεχώς, με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται οι απόψεις για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Οι αλλαγές αυτές επηρεάζουν και την ερμηνεία του παραλληλισμού. Η ανάλυση έξι ερευνών της διδακτικής που χρησιμοποιούν την ιστορία των μαθηματικών μας δείχνει αφενός πως εμπόδια, δυσκολίες, μέθοδοι και αντιλήψεις των μαθηματικών του παρελθόντος τείνουν να επαναλαμβάνονται στην σχολική τάξη και αφετέρου πως όταν τα ιστορικά στοιχεία στα οποία βασίζεται η έρευνα δεν είναι απόλυτα αξιόπιστα, τότε υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει.

Λέξεις κλειδιά

άλγεβρα, παραδοσιακή ιστοριογραφία, νεότερη ιστοριογραφία, παραλληλισμός, εμπόδια

ABSTRACT

This study examines the history of algebra and its' use in didactics' research. More specifically, the aim of this study is to determine how valid can be considered the knowledge that draws a researcher of didactics of mathematics today from historical analyzes or overviews written decades ago, and also what is the meaning of a 'parallelism' between a mathematician of the past, and a student of today. By analyzing six original historical texts of mathematics and studying old and new studies on the development of algebra, we find that we cannot rely entirely on reviews and interpretations that belong to the so-called 'traditional historiography' of mathematics. This is because the means of interpretation used by historians of mathematics are constantly evolving, new historiographical problems constantly arise, thereby changing views on the historical development of mathematics. These changes affect the interpretation of parallelism. The analysis of six studies of didactics using the history of mathematics shows us how obstacles, difficulties, methods and concepts of past mathematics tend to reappear in the classroom and also that when the historical data on which research is based is not entirely reliable, there is uncertainty as to the conclusions reached.

Keywords

algebra, traditional historiography, modern historiography, parallelism, obstacles

Επώνυμο

0. Ερευνητικά ερωτήματα – Μεθοδολογία της έρευνας

Όταν ασχολούμαστε με την έρευνα ή τη διδασκαλία των Μαθηματικών, συνήθως δεν μας ενδιαφέρει πώς ξεκίνησαν και πώς έφτασαν στη σημερινή τους μορφή, μέσα από μια εξέλιξη χιλιάδων χρόνων. Η μελέτη αυτής της εξέλιξης είναι μια εξειδικευμένη δραστηριότητα με την οποία έχουν ασχοληθεί από τις αρχές του 20ου αιώνα σημαντικοί μαθηματικοί και ιστορικοί όπως οι van den Waerden, Zeuthen, Tannery, Heath, Neugebauer και πολλοί άλλοι. Μελετώντας πρωτότυπα κείμενα με χρήση ειδικών εργαλείων και μεθόδων ανάλυσης, κάνοντας σύνθεση ανάμεσα σε διαφορετικές εποχές και μαθηματικές παραδόσεις (π.χ. συγκρίνοντας Βαβυλωνιακές πινακίδες μεταφρασμένες σε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, με κείμενα του Ευκλείδη) κατέληξαν σε διάφορα συμπεράσματα τα οποία αποτελούν τη λεγόμενη «παραδοσιακή» ιστοριογραφία των Μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτήν :

- Οι Βαβυλώνιοι έλυναν εξισώσεις δευτέρου βαθμού από το 1800-1700 π.Χ χρησιμοποιώντας παρόμοια μέθοδο με τη σημερινή. Ονομάστηκε η άλγεβρα αυτή *μικτή* και βλέπουμε να προστίθενται εμβαδά με ευθύγραμμα τμήματα και να εξισώνονται με αριθμούς.
- Οι αρχαίοι Έλληνες έλυναν εξισώσεις 2^{ου} βαθμού με γεωμετρικές μεθόδους. Η προσέγγιση αυτή αντανακλούσε την παλαιά άποψη για τα προελληνικά και τα ελληνικά μαθηματικά. Μάλιστα οι Έλληνες παρέλαβαν την αλγεβρική μέθοδο των Βαβυλωνίων και της έδωσαν 'γεωμετρικό περίβλημα', δημιουργώντας τη «γεωμετρική άλγεβρα».

Ωστόσο, τα μέσα ερμηνείας που χρησιμοποιούν οι ιστορικοί δεν είναι αμετάβλητα, αλλά συνεχώς εξελίσσονται και προσαρμόζονται τόσο στην τεχνολογία όσο και στα νέα ιστοριογραφικά προβλήματα που προκύπτουν. Αποτέλεσμα όλων αυτών είναι να αναθεωρούνται απόψεις για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ή ακόμη και απορρίπτονται. Για παράδειγμα, στις δεκαετίες του 1950 και 1960, κυριαρχούσαν οι απόψεις του van den Waerden (1954) που στηρίζονταν στην ανάλυση των αρχαίων μαθηματικών με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Από τη δεκαετία του 1970, όμως παρατηρούμε μια στροφή προς τα ιστορικά κείμενα και την όσο το δυνατό πιο πιστή ανάγνωσή τους. Παράλληλα, έχει αμφισβητηθεί η άποψη πως τα ιστορικά κείμενα εμπεριέχουν τις πρώιμες μορφές της σημερινής άλγεβρας. Τίθεται επομένως θέμα εγκυρότητας για τη γνώση που αντλεί ένας σύγχρονος ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν από αρκετές δεκαετίες.

Παράλληλα, από τις αρχές του 20ου αιώνα , γίνονται συζητήσεις στο χώρο της Διδακτικής των μαθηματικών για τη σχέση ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη μαθηματική εκπαίδευση προκειμένου να βελτιωθεί η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών. Αυτή η σχέση εκφράζεται με την έννοια του «παραλληλισμού». Ο παραλληλισμός είχε ως αφετηρία τη μεταφορά, στο χώρο της εκπαίδευσης, του «βιογενετικού νόμου» του Ernst Haeckel (1834–1919). Σύμφωνα με αυτόν, η οντογένεση (δηλαδή η ανάπτυξη ενός οργανισμού), είναι μια ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (δηλαδή της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους). Με βάση, λοιπόν, αυτό το νόμο, εξέχοντες μαθηματικοί υποστήριξαν ότι αν η γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους, τότε θα πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών να ακολουθεί κατά κάποιο τρόπο την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία της τελευταίας. Στην κατεύθυνση αυτή έχουν υπάρξει σημαντικές εξελίξεις, που ξεκινούν από την ανάπτυξη μιας σωστής βάσης για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών

και φτάνουν σε συγκεκριμένες προτάσεις μεθόδων διδασκαλίας. Έχουν, όμως, διατυπωθεί αμφιβολίες για τη δυνατότητα λειτουργικής ένταξης ιστορικών στοιχείων στην τρέχουσα πρακτική της σχολικής τάξης των Μαθηματικών ενώ ταυτόχρονα οι αλλαγές στην ιστοριογραφία των μαθηματικών μεταβάλουν τις αντιλήψεις για την ιστορική εξέλιξη των εννοιών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αμφισβητείται η εγκυρότητα ιστορικών ερευνών σχετικά με τον παραλληλισμό. Έτσι, λοιπόν προκύπτει ένα σημαντικό ερώτημα : τι ακριβώς είναι τελικά ο 'παραλληλισμός' ανάμεσα σε ένα δημιουργικό, και συνήθως κορυφαίο, μαθηματικό του παρελθόντος , και ένα μαθητή που προσπαθεί σήμερα, συνήθως ανεπιτυχώς, να μάθει Μαθηματικά;

Με βάση, επομένως, όλα τα παραπάνω, σκοπός της εργασίας αυτής είναι να απαντηθούν τα εξής βασικά ερωτήματα:

- **Πόσο έγκυρη μπορεί να θεωρηθεί η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν από αρκετές δεκαετίες;**
- **Τι ακριβώς μπορεί να σημαίνει 'παραλληλισμός' ανάμεσα σε ένα δημιουργικό, και συνήθως κορυφαίο, μαθηματικό του παρελθόντος , και ένα μαθητή που προσπαθεί σήμερα, συνήθως ανεπιτυχώς, να μάθει Μαθηματικά;**

Η μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί για να απαντηθούν τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα, θα είναι η εξής: θα γίνει προσπάθεια να μελετηθεί η ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας μέσα από παρουσίαση και ανάλυση πρωτότυπων ιστορικών κειμένων, τόσο με βάση την παραδοσιακή όσο και με τη σύγχρονη ιστοριογραφία των μαθηματικών και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν έρευνες της διδακτικής προκειμένου να αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται αυτή η ιστορική εξέλιξη ώστε να προσδιοριστεί ο όρος του ιστορικού παραλληλισμού.

Στο ***πρώτο*** κεφάλαιο δίνονται έξι ιστορικά κείμενα, μεταφρασμένα σε σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό:

- **Τα προβλήματα 1 & 3 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 (περίπου 1800 π.Χ.)**
- **Τα προβλήματα I-1 & I-27 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (Αλεξάνδρεια, περίπου 250 μ.Χ.)**
- **Ένα πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaşar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala του Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ.Χ.)**
- **Τα προβλήματα I-1 & I-3 από το De Numeris Datis του Jordanus de Nemore (περίπου 1250 μ.Χ.)**
- **Το πρόβλημα I-1 από το Zeteticorum Libri Quique του François Viète (1540 – 1603). (περίπου 1593 μ.Χ.)**
- **Το πρόβλημα 'άθροισμα και διαφορά' στην Άλγεβρα του Euler (1727-1783). (περίπου 1770 μ.Χ.)**

και γίνονται παρατηρήσεις πάνω σε αυτά με βάση την παραδοσιακή ιστοριογραφία.

Στο ***δεύτερο*** κεφάλαιο γίνεται περαιτέρω ανάλυση στα παραπάνω κείμενα και παρουσιάζονται νεότερες έρευνες πάνω στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας που αμφισβητούν την παραδοσιακή ιστοριογραφία.

Στο ***τρίτο*** κεφάλαιο θα εξετάσουμε με ποιο τρόπο έχει χρησιμοποιηθεί η ιστορία της Άλγεβρας από ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, οι οποίοι επιχειρούν να ερμηνεύσουν φαινόμενα της διδασκαλίας και μάθησης των αλγεβρικών εννοιών αξιοποιώντας στοιχεία της ιστορικής τους εξέλιξης. Οι έρευνες που θα μελετηθούν είναι οι εξής:

- **E. Harper: Eon Ghosts of Diophantus (1987).** Είναι μια εμπειρική έρευνα στην οποία με αφετηρία την ιστορική ανάλυση, καταγράφηκαν οι τρόποι που χρησιμοποιούν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να λύσουν το εξής πρόβλημα: Αν δοθεί το άθροισμα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε αριθμών να δειχθεί ότι μπορούν πάντοτε να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
- **A. Sfard: On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on progress and objects as different sides of the same coin. (1991)**. Πρόκειται για μια θεωρητική ανάλυση στην οποία η ιστορική εξέλιξη του αριθμού και της συνάρτησης χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη διατύπωση ενός θεωρητικού μοντέλου για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών κατά τη διαδικασία της μάθησης.
- **G. Harel: Students' Understanding of proofs (1999)**. Στην έρευνα αυτή, ο Harel προσπαθεί να αναλύσει τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθητές για απόδειξη και αιτιολόγηση μέσα από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.
- **G. Bagni: The role of the history of mathematics in mathematics education: Reflections and examples (2000)**. Στην έρευνα αυτή, επιχειρείται η διδασκαλία της έννοιας της ομάδας σε δυο ομάδες μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από δύο ιστορικά παραδείγματα: ένα από την *Άλγεβρα* του Bombelli (1572) και ένας πίνακας διπλής εισόδου (πίνακας Cayley) και αναλύονται οι αντιδράσεις των μαθητών.
- **Y. Thomaidis & C. Tzanakis: The notion of historical 'parallelism' revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line (2007)**. Στην έρευνα αυτή, εξετάζεται η σχέση ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη των εννοιών της διάταξης στην γραμμή αριθμών και των ανισοτήτων και στον τρόπο εκμάθησής τους από τους μαθητές
- **B. Kaygin, B. Balçin, C. Yildiz & S. Arslan: The effect of teaching the subject of Fibonacci (2011)**. Η έρευνα αυτή εξετάζεται αν βελτιώνεται η διδασκαλία των αριθμών Fibonacci και της χρυσής τομής μέσα από την ιστορία των μαθηματικών καθώς και οι αντιδράσεις των μαθητών στα ιστορικά παραδείγματα.

Στο ***τέταρτο*** κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη σύνθεση των στοιχείων που παραθέτονται στα προηγούμενα κεφάλαια και επιχειρούμε να διατυπώσουμε απαντήσεις στα δύο ερευνητικά ερωτήματα.

Κεφάλαιο 1: Ιστορικά προβλήματα που συνδέονται με τη δημιουργία και εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα μαθηματικά δεν είχαν πάντοτε τη σημερινή τους μορφή αλλά έφτασαν σε αυτήν ακολουθώντας μια εξέλιξη χιλιάδων χρόνων. Προκειμένου να κατανοήσουμε αυτή την εξέλιξη, χρειάζεται να μελετήσουμε ιστορικά κείμενα από διαφορετικές χρονικές περιόδους και να αναλύσουμε το περιεχόμενό τους, σύμφωνα με τις τάσεις της νεότερης ιστοριογραφίας. Το έργο αυτό είναι δύσκολο, καθώς πολλά κείμενα είναι γραμμένα πριν από αιώνες, σε γλώσσες που στην εποχή μας δεν χρησιμοποιούνται και διαφορετικό συμβολισμό από το σημερινό. Ωστόσο, πολλοί ιστορικοί των μαθηματικών έχουν ήδη επιχειρήσει το έργο αυτό. Κατά τη μελέτη τους διέκριναν τρία στάδια ανάπτυξης των αλγεβρικών εννοιών. Τα στάδια αυτά ανήκουν στην λεγόμενη «παραδοσιακή ιστοριογραφία» και είναι τα εξής:

- **Ρητορικό ή αρχικό στάδιο**, κατά το οποίο τα πάντα γράφονται πλήρως με λέξεις, οι υπολογισμοί γίνονται με τον λόγο αφού λείπει ο συμβολισμός. Χρονικά είναι η περίοδος πριν το Διόφαντο (περίπου 250μΧ). Το μόνο αποδεκτό αφηρημένο είδος αντικειμένων είναι οι αριθμοί.

- **Συγκεκομμένο ή ενδιάμεσο στάδιο**, στο οποίο χρησιμοποιείται ο λόγος, αλλά παρεμβάλλονται και συντομογραφίες, ώστε οι συλλογισμοί και οι υπολογισμοί να γίνουν συνοπτικότεροι και ευκολότεροι. Χρονικά αυτή η περίοδος ξεκινά από το Διόφαντο και διαρκεί έως το τέλος του 16ου αιώνα.

- **Συμβολικό ή τελικό στάδιο**, στο οποίο εισάγονται ειδικά σύμβολα για την αναπαράσταση των δεδομένων, των ζητούμενων και των πράξεων και αυτή η χρονική περίοδος χαρακτηρίζεται από τον Viete (περίπου στο 1600).

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την συγκεκριμένη διάκριση των σταδίων εξέλιξης, παραθέτουμε αντιπροσωπευτικά μερικά ιστορικά κείμενα. Το πρώτο κείμενο (τα προβλήματα 1 & 3 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 (περίπου 1800 π.Χ.)) ανήκει στο ρητορικό στάδιο, το δεύτερο (τα προβλήματα I-1 & I-27 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (Αλεξάνδρεια, περίπου 250 μ.Χ.)), το τρίτο (ένα πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaṣar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala του Abū Ja‘far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ.Χ.)) και το τέταρτο (τα προβλήματα I-1 & I-3 από το De Numeris Datis του Jordanus de Nemore (περίπου 1250 μ.Χ.)) στο συγκεκομμένο, ενώ το πέμπτο (το πρόβλημα I-1 από το Zeteticorum Libri Quique του François Viète (περίπου 1593 μ.Χ.)) και το έκτο (το πρόβλημα ‘άθροισμα και διαφορά’ στην Άλγεβρα του Euler περίπου 1770 μ.Χ.)) ανήκουν στο συμβολικό στάδιο. Τα κείμενα αυτά είναι μεταφρασμένα με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό και στη συνέχεια γίνονται κάποιες βασικές παρατηρήσεις που προκύπτουν από την μελέτη τους.

1.1. Τα προβλήματα 1 & 3 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 (περίπου 1800 π.Χ.)

1.1.1 Το πρόβλημα 1

Σε μια ορθογώνια επιφάνεια προσαρτώ τη διαφορά του μήκους από το πλάτος της. Το αποτέλεσμα είναι 183. Το μήκος και το πλάτος έχουν άθροισμα 27. Ποιο είναι το μήκος και ποιο είναι το πλάτος;

Μια συμβολική αναπαράσταση του προβλήματος:

$$\begin{Bmatrix} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{Bmatrix}$$

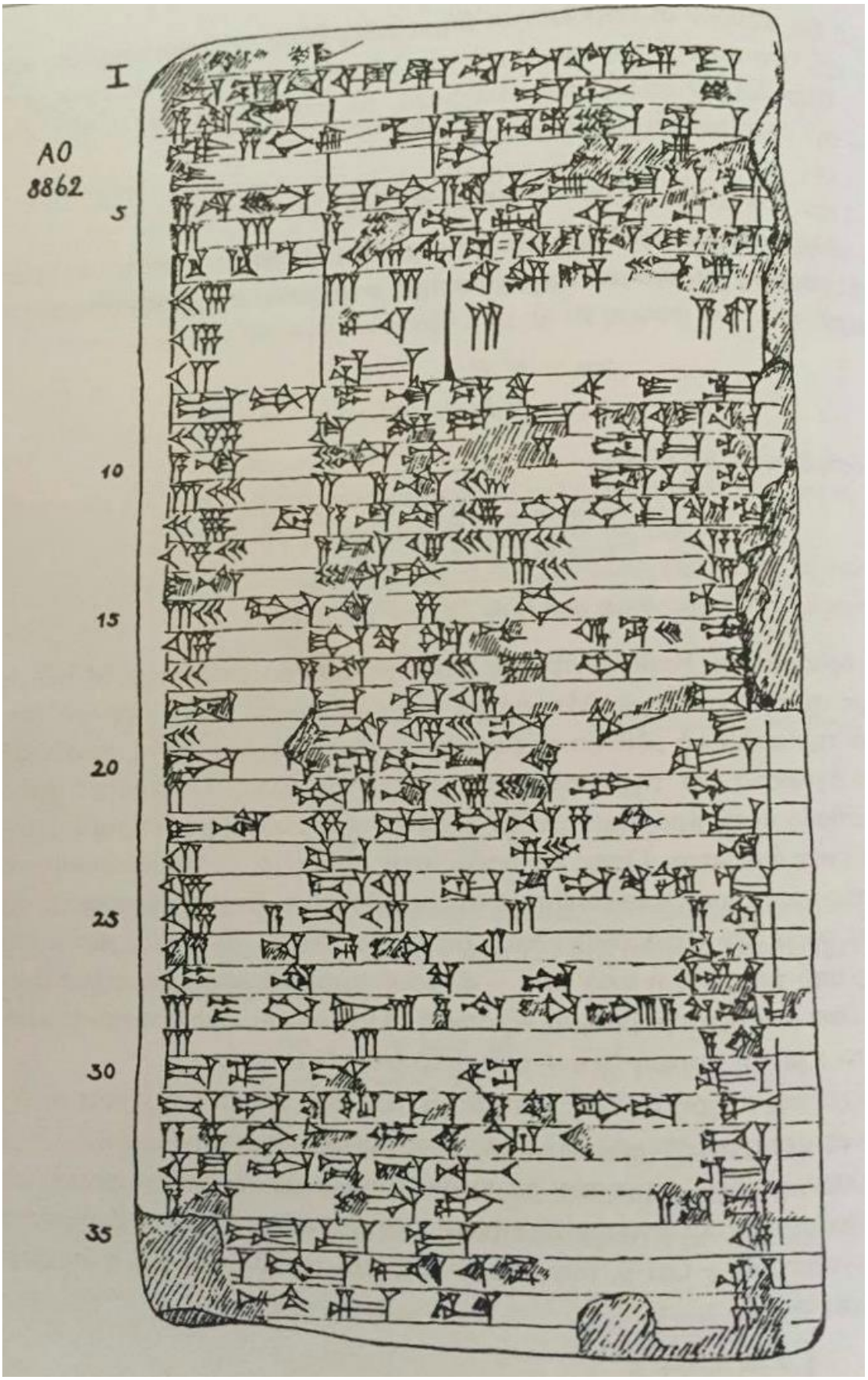
Με πρόσθεση κατά μέλη και πρόσθεση του 2 στη δεύτερη εξίσωση, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} x(y+2) = 210 \\ x + y + 2 = 29 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} xz = 210 \\ x + z = 29 \end{Bmatrix}$$

Επώνυμο

Ερμηνεία

Η λύση για το σύστημα στην πινακίδα AO 8862	**Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός**
$29:2=14,5$	$\frac{x+z}{2}=14,5$
$14,5\times14,5=210,25$	$\left(\frac{x+z}{2}\right)^2=210,25$
$210,25-210-0,25$	$\left(\frac{x+z}{2}\right)^2-xz=\left(\frac{x-z}{2}\right)^2=0,25$
$0,25=0,5\times0,5$	$\frac{x-z}{2}=\sqrt{0,25}=0,5$
$14,5+0,5=15(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)$	$\frac{x+z}{2}+\frac{x-z}{2}=x=15$
$14,5-0,5=14(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma)$	$\frac{x+z}{2}-\frac{x-z}{2}=z=14$



Σχήμα 1. Το πρόβλημα 1 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 (περίπου 1800 π.Χ.)

1.1.2. Το πρόβλημα 3

Το μήκος και το πλάτος μιας ορθογώνιας επιφάνειας έχουν άθροισμα 100. Με τη διαφορά του μήκους από το πλάτος δημιουργώ μια νέα ορθογώνια επιφάνεια. Οι δύο επιφάνειες μαζί είναι 4400.Ποιο είναι το μήκος και ποιο είναι το πλάτος;

Αν συμβολίσουμε το μήκος με x και το πλάτος με y τότε το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=100 \\ xy+(y-x)(y+x)=4400 \end{array}\right\}$$

Ερμηνεία

<u>Η λύση για το σύστημα στην πινακίδα ΑΟ 8862</u>	**<u>Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός</u>**
$100\times100=10000$	$(x+y)^2=10000$
$10000-4400=5600$	$(x+y)^2-(x+y)(x-y)-xy=5600$
$100:2=50$	$\frac{x+y}{2}=50$
$50\times50=2500$	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=2500$

$$5600+2500=8100 \qquad (x+y)^2-(x+y)(x-y)-xy+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{x+3y}{2}\right)^2=8100$$

$$8100=90\times 90 \qquad \frac{x+3y}{2}=\sqrt{8100}=90$$

$$100-90=10 \qquad x+y-\frac{x+3y}{2}=\frac{x-y}{2}=10$$

$$50+10=60(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma) \qquad \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x=60$$

$$50-10=40(\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma) \qquad \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y=40$$

Από τα δύο αυτά κείμενα παρατηρούμε τα εξής:

- Οι άγνωστοι αριθμοί αναπαρίστανται με γραμμές και επιφάνειες, αλλά πάντα παραμένουν αριθμοί.
- Το γινόμενο ερμηνεύεται ως εμβαδό ορθογωνίου και το τετράγωνο ως εμβαδό τετραγώνου.
- Δίνονται οδηγίες για τα βήματα που πρέπει να γίνουν για να λυθεί το πρόβλημα, χωρίς να δικαιολογείται η διαδικασία και χωρίς να δίνεται μια εξήγηση γιατί περνάμε από το ένα βήμα στο άλλο.
- Υπάρχει εμφανής αριθμητική και αλγεβρική ικανότητα, αλλά απουσιάζει η γενίκευση.

1.2. Τα προβλήματα I-1 & I-27 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (Αλεξάνδρεια, περίπου 250 μ.Χ.)

1.2.1. Το πρόβλημα I-1

Να διασπαστεί ένας αριθμός σε δύο αριθμούς που έχουν δοθείσα διαφορά.

Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι το 100, η δε διαφορά το 40. Να βρεθούν οι αριθμοί. Ας τεθεί x ο μικρότερος. Τότε ο μεγαλύτερος είναι x+40. Άρα οι δύο μαζί γίνονται 2x+40. Δόθηκε όμως ότι είναι 100. Άρα 100 είναι ίσα με 2x+40. Από ομοίων όμοια. Αφαιρώ από το 100 το 40 και από το 2x+40 ομοίως το 40. Μένουν οι 2x ίσοι με 60. Άρα ο καθένας γίνεται 30. Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο μικρότερος είναι το 30, ο μεγαλύτερος το 70 και η απόδειξη φανερή.

<u>Ερμηνεία</u>

<u>Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός</u>

Το γενικό πρόβλημα $\begin{Bmatrix} x+y=a \\ x-y=b \end{Bmatrix}$

Η επιλογή αριθμητικών δεδομένων $\begin{Bmatrix} x+y=100 \\ x-y=40 \end{Bmatrix}$

Επίλυση συστήματος με αντικατάσταση $\begin{Bmatrix} 2x+40=100 \\ y=x+40 \end{Bmatrix}$

Διαδικασία επίλυση $\begin{Bmatrix} 2x=60 \\ y=x+40 \end{Bmatrix}$

Λύση του προβλήματος $\begin{Bmatrix} x=30 \\ y=70 \end{Bmatrix}$

1.2.2. Το πρόβλημα Ι-27

Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι, ώστε το άθροισμα και το γινόμενό τους να είναι δοθέντες αριθμοί.
Πρέπει το τετράγωνο του αθροίσματος των ευρισκόμενων να ξεπερνά το γινόμενό τους κατά ένα τετράγωνο.

Έστω ότι το άθροισμα είναι 20, το δε γινόμενο 96. Ας τεθεί η διαφορά τους 2x. Επειδή το άθροισμα είναι 20, αν το χωρίσω σε δύο ίσα μέρη, θα είναι το καθένα από 10. Και αν το μισό της διαφοράς, δηλαδή το x, το προσθέσω στο ένα και το αφαιρέσω από το άλλο, θα είναι πάλι το άθροισμα 20 και η διαφορά 2x. Ας τεθεί λοιπόν ο μεγαλύτερος 10 + x οπότε ο μικρότερος θα είναι 10 - x. Έχουμε ακόμη ότι το γινόμενό τους είναι 96. Αλλά το γινόμενό τους είναι $100-x^2$. Αυτά ίσα με 96. Και γίνεται ο x (ίσος με) 2. Άρα είναι ο μεγαλύτερος 12, ο μικρότερος 8, και επαληθεύουν την πρόταση.

<u>Ερμηνεία</u>

<u>Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός</u>

Το γενικό πρόβλημα $x + y = S \qquad xy = P$

Η γενική συνθήκη $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = L^2$

Η επιλογή αριθμητικών δεδομένων $x + y = 20 \qquad xy = 96$

Η εισαγωγή του αγνώστου $x - y = 2\lambda \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \lambda$

Η αναπαράσταση των ζητούμενων $\frac{x+y}{2} = 10 \quad x = 10 + \lambda \ , \ y = 10 - \lambda$

Η κατασκευή της εξίσωσης $xy - 96 \Rightarrow 100 - \lambda^2 = 96$

Επώνυμο

Η λύση της εξίσωσης $\lambda = 2$

Η λύση του προβλήματος $x = 12$ $y = 8$

Από τα δύο αυτά κείμενα παρατηρούμε τα εξής:

- Φαίνεται να ακολουθεί μια χαρακτηριστική 'μέθοδο': όταν ζητά δύο αριθμούς που να ικανοποιούν δύο συνθήκες , επιλέγει αυτούς τους αριθμούς ώστε να ικανοποιούν μία από τις συνθήκες και κατόπιν στρέφεται προς την δεύτερη συνθήκη. Έτσι αντί να λύσει ένα σύστημα εξισώσεων 2x2, αντιμετωπίζει τις συνθήκες διαδοχικά ώστε μόνο ένας άγνωστος να εμφανίζεται στη λύση.
- Χρησιμοποιεί συντομεύσεις για τις μεταβλητές (το σύμβολο ς για τον άγνωστο ίσως από το τελευταίο γράμμα της λέξης αριθμός), καθώς και για δυνάμεις αλλά ακόμα έχουμε απουσία της παραμέτρου.

1.3. Ένα πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaşar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala του Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ.Χ.)

Αν κάποιος πει: "Χώρισε το δέκα σε δύο μέρη: πολλαπλασίασε το ένα με τον εαυτό του. Θα γίνει ίσο με ογδόντα-μία φορές το άλλο"

Υπολογισμός: Λέγεις, δέκα μείον το πράγμα, πολλαπλασιασμένο επί τον εαυτό του, γίνεται εκατό συν ένα τετράγωνο μείον είκοσι πράγματα, και αυτό ισούται με ογδόντα-ένα πράγματα.
Ξεχώρισε τα είκοσι πράγματα από το εκατό και το τετράγωνο, και πρόσθεσέ τα στα ογδόντα-ένα. Θα γίνουν τότε εκατό συν ένα τετράγωνο, που θα είναι ίσα με εκατό και μία ρίζες.
Χώρισε τις ρίζες σε δύο ίσα μέρη. Το μισό τους είναι πενήντα και ένα δεύτερο. Πολλαπλασίασε αυτό επί τον εαυτό του, γίνεται δύο χιλιάδες πεντακόσια πενήντα και ένα τέταρτο. Αφαίρεσε από αυτό εκατό. Το υπόλοιπο είναι δύο χιλιάδες τετρακόσια πενήντα και ένα τέταρτο. Βγάλε τη ρίζα του. Είναι σαράντα-εννέα και ένα δεύτερο. Αφαίρεσε αυτό από το μισό των ριζών ,που είναι πενήντα και μισό. Παραμένει 1, και αυτό είναι το ένα από τα δύο μέρη.

Ερμηνεία

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

Έστω x και 10-x ο διαχωρισμός του 10 σε δύο μέρη.
Τότε η εξίσωση που θα λυθεί είναι η $(10-x)^2 = 81x$, την οποία την φτάνει μέχρι το σημείο: $100 + x^2 - 20x = 81x \Leftrightarrow 100 + x^2 = 101x$.
Αν υποθέσουμε ότι έχουμε την $c + x^2 = bx$ τότε η διαδικασία επίλυσης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{b}{2} = \left(\frac{101}{2} = 50\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(2550\frac{1}{4} - 100 = 2450\frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \left(50\frac{1}{2} - 49\frac{1}{2} = 1\right)$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- Δεν γίνεται κάποια χρήση συντόμευσης ή σύντμησης. Η μεταβλητή συμβολίζεται με τη λέξη πράγμα.
- Το πρόβλημα αυτό είναι μια απλή μορφή επίλυσης εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

1.4. Τα προβλήματα I-1 & I-3 από το De Numeris Datis του Jordanus de Nemore (περίπου 1250 μ.Χ.)

1.4.1 Το πρόβλημα I-1

Αν ένας δεδομένος αριθμός χωρίζεται σε δύο μέρη των οποίων δίνεται η διαφορά, τότε καθένα από τα δύο μέρη προσδιορίζεται.

Επειδή το μικρότερο μέρος και η διαφορά δίνουν το μεγαλύτερο, έτσι το μικρότερο μέρος μαζί με τον εαυτό του και τη διαφορά δίνουν το σύνολο. Αφαιρούμε λοιπόν τη διαφορά από το σύνολο και μένει το διπλάσιο του μικρότερου μέρους. Από αυτό, όταν διαιρεθεί με το δύο, θα προσδιοριστεί το μικρότερο μέρος, επομένως και το μεγαλύτερο.
Για παράδειγμα, έστω ότι το 10 διαιρείται σε δύο μέρη η διαφορά των οποίων είναι 2. Όταν αυτή αφαιρείται από το 10 μένει το 8, το μισό του οποίου είναι 4 και είναι το μικρότερο μέρος. Το άλλο μέρος είναι 6.

<u>Ερμηνεία</u>

<u>Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός</u>

Έστω x ο αριθμός και χωρίζεται σε δύο μέρη a και b με δεδομένη διαφορά y. Τότε θα ισχύει ότι:

$$x = a + b \text{ και } y = a - b \text{ με } a > b$$

$$b + y = b + a - b = a$$

$$b + b + y = b + b + a - b = a + b = x$$

$$x - y = a + b - (a - b) = 2a$$

$$a = \frac{x - y}{2}$$

$$b = x - a$$

1.4.2. Το πρόβλημα Ι-3

Αν ένας δεδομένος αριθμός χωρίζεται σε δύο μέρη και δίνεται το γινόμενο του ενός επί του άλλου, τότε καθένα από αυτά προσδιορίζεται.

Έστω ότι ο δεδομένος αριθμός abc χωρίζεται στα μέρη ab και c. Έστω το γινόμενο του ab με το c είναι d και το γινόμενο του abc με τον εαυτό του είναι e. Έστω ότι f το τετραπλάσιο του d και g η διαφορά των e, f. Τότε το g είναι το τετράγωνο της διαφοράς των ab και c. Άρα η τετραγωνική ρίζα h του g είναι η διαφορά ανάμεσα στα ab και c.
Επειδή λοιπόν δίνονται τόσο η διαφορά όσο και το άθροισμα των ab και c, αυτά μπορούν να προσδιοριστούν με βάση την πρώτη πρόταση.

Π.χ. να χωριστεί ο 10 σε δύο μέρη με γινόμενο 21. Επειδή $10\times10=100, 4\times21=84, 100-84=16$, η διαφορά τους είναι 4 κ.λ.π.

Ερμηνεία

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

$$x = ab, y = c$$
$$x + y = abc$$
$$xy = d$$
$$(x+y)^2 = e$$
$$4xy = f$$
$$(x+y)^2 - 4xy = g$$
$$(x-y)^2 = g$$
$$x - y = h$$

Από τα δύο αυτά κείμενα παρατηρούμε τα εξής:

- Οι αριθμοί παριστάνονται με γράμματα και όχι με ψηφία.
- Η χρήση γραμμάτων υπαινίσσεται ίσως τη χρήση παραμέτρου αλλά μπορεί να προκαλέσει σύγχυση, γιατί μερικές φορές χρησιμοποιεί για να αναπαραστήσει έναν αριθμό δύο γράμματα ac και μερικές ένα γράμμα h.

1.5. Το πρόβλημα I-1 από το Zeteticorum Libri Quique του François Viète (1540 – 1603).

Αν δοθεί η διαφορά ανάμεσα σε δύο ρίζες και το άθροισμά τους, να βρεθούν οι ρίζες.

Έστω B η διαφορά ανάμεσα στις ρίζες και D το άθροισμά τους. Πρόκειται να βρεθούν οι ρίζες. Έστω A η μικρότερη ρίζα. Τότε η μεγαλύτερη θα είναι A+B.
Άρα το άθροισμα των ριζών είναι $2A+B$. Αλλά αυτό δόθηκε ως D. Επομένως $2A+B=D$ και, με αντίθεση, $2A=D-B$. Διαιρώντας με το 2, βρίσκουμε: $A=\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}B$.
Ή έστω E η μεγαλύτερη ρίζα. Τότε η μικρότερη θα είναι $E-B$.

Άρα το άθροισμα των ριζών είναι $2E-B$. Αλλά αυτό δόθηκε ως D. Επομένως $2E-B=D$ και, με αντίθεση, $2E=D+B$. Διαιρώντας με το 2, βρίσκουμε: $E=\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}B$.
Άρα, δεδομένης της διαφοράς μεταξύ δύο ριζών και του αθροίσματός τους, οι ρίζες μπορούν να βρεθούν, επειδή: *Το ημιάθροισμα των ριζών μείον η ημιδιαφορά τους είναι ίσο με την μικρότερη ρίζα, και το ημιάθροισμα των ριζών τους είναι ίσο με την μικρότερη.* Αυτό είναι που κάνει φανερό η Ζητητική.
Έστω ότι το B είναι 40 και το D είναι 100. Τότε το A είναι 30 και το E είναι 70.

<u>Ερμηνεία</u>

<u>Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός</u>

Έστω $x+y=D, x-y=B$.

Επομένως θα ισχύει ότι η μια ρίζα είναι το y και η άλλη $y+B$.

Άρα $2y+B=D$, οπότε $y=\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}B$ δηλαδή $y=\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)$.

Ομοίως θα ισχύει ότι αν η μια ρίζα είναι το x, η άλλη ρίζα θα είναι $x-B$.

Άρα $2x-B=D$, οπότε $x=\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}B$ δηλαδή $x=\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, τα εξής:

- Οι λύσεις των προβλημάτων αυτών είναι ένα βήμα πιο κοντά στο σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό.
- Πρώτη φορά βλέπουμε σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στο γνωστό και το άγνωστο μέγεθος.
- Εμφανίζεται η έννοια της παραμέτρου.

1.6. Το πρόβλημα 'άθροισμα και διαφορά' στην Άλγεβρα του Euler.

Ζητείται να διασπαστεί ο a σε δύο μέρη, ώστε το μεγαλύτερο να υπερβαίνει το μικρότερο κατά b.
Έστω ότι ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς εκφράζεται με το x και ο μικρότερος με το y.
Τότε θα έχουμε $x+y=a$ και $x-y=b$. Η πρώτη εξίσωση μας δίνει $x=a-y$, και η δεύτερη $x=b+y$.

Επομένως, $a-y=b+y, a=b+2y, 2y=a-b$, τελικά $y=\frac{a-b}{2}$ και επομένως $x=a-y=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Έχουμε λοιπόν το επόμενο θεώρημα: *Όταν το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε αριθμών είναι a, και η διαφορά τους είναι b, τότε ο μεγαλύτερος των δύο αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα συν η ημιδιαφορά, ενώ ο μικρότερος των δύο αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα μείον η ημιδιαφορά.*

Ερμηνεία

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

Δεν χρειάζεται να γίνει μετατροπή σε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό καθώς ο ίδιος ο Euler τον χρησιμοποιεί.

Κεφάλαιο 2. Οι εξελίξεις στην Ιστοριογραφία των Μαθηματικών

2.1. Τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά

Πριν από τέσσερις χιλιάδες χρόνια περίπου, η ανθρωπότητα βρισκόταν σε μια φάση σημαντικής ανάπτυξης. Κύρια χαρακτηριστικά της εποχής είναι η χρήση της γραφής, του τροχού και των μετάλλων, με την κοιλάδα της Μεσοποταμίας να είναι μια από τις κοιτίδες του πολιτισμού. Επειδή, ωστόσο η Βαβυλώνα ήταν η πιο σημαντική πόλη της Μεσοποταμίας, θα χρησιμοποιούμε συμβολικά τον όρο «βαβυλωνιακά» μαθηματικά για τα μαθηματικά που δημιούργησε ο πολιτισμός της περιοχής.

Χαρακτηριστικό του βαβυλωνιακού πολιτισμού ήταν η σφηνοειδής γραφή. Οι νόμοι, οι φόροι, οι ιστορίες, τα σχολικά μαθήματα, και άλλα κείμενα χαράσσονταν πάνω σε πλάκες πηλού με μια γραφίδα και στη συνέχεια οι πλάκες ψήνονταν στον καυτό ήλιο ή σε φούρνους. Τέτοιου είδους πλάκες ήταν ανθεκτικές στο χρόνο και έτσι έχουμε στη διάθεση μας αρκετά στοιχεία για τα μαθηματικά της Μεσοποταμίας. Περιέργως, οι περισσότερες ανήκουν σε δύο ιστορικές περιόδους: την παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο (περίπου 2000-1600 π.Χ..) και την περίοδο των Σελευκιδών, των διαδόχων του Μεγάλου Αλεξάνδρου (περίπου τρεις τελευταίοι αιώνες της πρώτης χιλιετίας π.Χ).

2.1.1. Το εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης

Το Βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα διαμορφώθηκε στο τέλος της 3^{ης} και στις αρχές της 2^{ης} π.Χ. χιλιετίας. Στο σύστημα αυτό χρησιμοποιούνται δύο μόνο σύμβολα: η απλή κατακόρυφη σφήνα, που παριστάνει την μονάδα και η διπλή σφήνα που παριστάνει την δεκάδα. Και τα δύο σύμβολα σχηματίζονταν με την πίεση μιας αιχμηρής γραφίδας στην πήλινη πινακίδα. Ήταν ένα από τα πρώτα είδη σφηνοειδούς γραφής που αποκρυπτογραφήθηκαν. Τα βασικά χαρακτηριστικά του είναι τα εξής:

- Είναι θεσιακό, δηλαδή η τιμή κάθε αριθμητικού συμβόλου εξαρτάται από τη θέση του συμβόλου αυτού μέσα στην όλη σημειογραφία ενός αριθμού.
- Είναι εξηκονταδικό, δηλαδή έχει ως βάση το 60, αντί του 10, που είναι η βάση του σημερινού αριθμητικού συστήματος.
- Δεν χρησιμοποιεί υποδιαστολή ή κάποιο άλλο σημείο το οποίο θα διαχώριζε το ακέραιο από το κλασματικό (εξηκονταδικό) μέρος του αριθμού. Το γεγονός αυτό προσέδιδε στο σύστημα εξαιρετική ευελιξία, αφού όλοι οι αριθμοί αντιμετωπίζονταν στη διαδικασία των πράξεων ως ακέραιοι. Το ίδιο συμβαίνει σήμερα με τους δεκαδικούς αριθμούς. Ο πολλαπλασιασμός τους γίνεται σαν να είναι ακέραιοι αριθμοί και το μόνο που χρειάζεται είναι να τοποθετηθεί στο τέλος, μετά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού, η υποδιαστολή στην κατάλληλη θέση.
- Η έλλειψη υποδιαστολής, είναι αλήθεια, προσέδιδε στο σύστημα ένα έλλειμμα σαφήνειας σε ότι αφορά την αναγνώριση, κάθε φορά, της απόλυτης τιμής του αριθμού, αφού το ίδιο σύμβολο , π.χ. η απλή κατακόρυφη σφήνα, μπορούσε να παριστάνει όχι μόνο το 1 αλλά και

οποιαδήποτε θετική ή αρνητική δύναμη του 60. Το μειονέκτημα αυτό πάντως αντισταθμίζεται ως ένα βαθμό από τα συμφραζόμενα του ευρύτερου πλαισίου εντός του οποίου είναι ενταγμένος κάθε φορά ο αριθμός.

- Τέλος, δεν υπήρχε σύμβολο για το μηδέν, γεγονός που αποτελεί μειονέκτημα του βαβυλωνιακού αριθμητικού συστήματος. Φαίνεται ότι αρχικά οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν τρόπο να παραστήσουν μια 'κενή' θέση, δηλαδή το μηδέν, αν και μερικές φορές άφηναν κενό στη θέση του. Το μειονέκτημα καλύφθηκε γύρω στο 300 π.Χ. , κατά την περίοδο των Σελευκιδών, με την εφεύρεση ενός νέου συμβόλου – δύο πλάγιες σφήνες – για να αντικαθιστά το κενό όπου έλειπε ένα ψηφίο. Το σύμβολο αυτό όμως δεν έβαλε τέρμα σε όλα τα προβλήματα, γιατί φαίνεται ότι τον χρησιμοποιούσαν μόνο για να δηλώσουν κενές θέσεις στα ενδιάμεσα ενός αριθμού. Δεν έχουμε στα χέρια μας καμία πλάκα, η οποία να παρουσιάζει το σύμβολο του μηδενός στην τελευταία δεξιά θέση.

2.1.2. Παλαιότερες μελέτες πάνω στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά.

Ο Neugebauer ήδη από τη δεκαετία του 1930 μελετώντας βαβυλωνιακές πινακίδες μαθηματικού περιεχομένου, είχε καταλήξει ότι οι Βαβυλώνιοι χειρίζονταν με σχετική ευκολία δευτεροβάθμιες εξισώσεις, (Θωμαΐδης 2011, σελ 15). Τα προβλήματα που αναφέρουμε παραπάνω ανήκουν σε πολυώνυμα της μορφής $x^2 + q = px$ και οι γραφείς την χειρίζονταν ως ισοδύναμη με το σύστημα

$$x + y = p\ ,$$
$$xy = p\,.$$

Υπάρχουν πολλά προβλήματα που ζητούν να βρούμε δύο αριθμούς όταν δίνεται το γινόμενο και η διαφορά ή το άθροισμά τους. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι θεωρούσαν 'φυσιολογική μέθοδο' να γράφουν το τριώνυμο σε αυτή την μορφή. Στη συνέχεια, μετασχηματίζοντας το σύστημα $xy = a$ και $x \pm y = b$ σε ένα ζεύγος γραμμικών εξισώσεων $x \mp y = b$ και $x \mp y = \sqrt{b^2 \mp 4a}$, υπολόγιζαν τις τιμές των x και y με μια πρόσθεση και μια αφαίρεση.

Ο van der Waerden το 1954 έδωσε την εξής ερμηνεία στο πρόβλημα 1 της πινακίδας AO8862 (van der Waerden, 2007, σελ 63):

(δεδομένα) 27 και 183, τα αθροίσματα

(αποτέλεσμα) 15 μήκος, 12 το πλάτος και 180 το εμβαδό.

Ακολουθεί κανείς αυτή τη μέθοδο:

$$27 + 183 = 210$$
$$2 + 27 = 29$$

Πάρε το μισό του 29 (που είναι 14,5).

$$14,5 \times 14,5 = 210,25$$
$$210,25 - 210 = 0,25$$

Η τετραγωνική ρίζα του 0,25 είναι 0,5

$$14,5 + 0,5 = 15 \ \ \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma$$
$$14,5 - 0,5 = 14 \ \ \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma$$

Από το 14 αφαίρεσε το 2, που πρόσθεσες στο 27, το πλάτος. 12 είναι το πραγματικό πλάτος.

Πολλαπλασίασα το 15,το μήκος, με το 12, το πλάτος.

$$15 \times 12 = 180 \ \ \varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}$$
$$15 - 12 = 3$$
$$180 + 3 = 183$$

Στις πρώτες γραμμές διατυπώνεται το πρόβλημα: δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους, ο καθένας από τους οποίους παριστάνεται με ένα σύμβολο uś και sag, μήκος και πλάτος σαν τα δικά μας σύμβολα x και y. Θέτουμε, λοιπόν, το πρόβλημα με την μορφή δύο αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} xy + x - y &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned} \quad (1)$$

Στις τέσσερις τελευταίες γραμμές του κειμένου επαληθεύεται απλώς ότι οι αριθμοί x=15, y =12 , που βρέθηκαν, ικανοποιούν την (1).

Από το κείμενο που προηγείται φαίνεται ότι ο συγγραφέας, θέλοντας να απλοποιήσει το πρόβλημα, εισάγει μια νέα μεταβλητή y', αντί του πραγματικού πλάτους y:

$$y' = y + 2, \text{ δηλαδή } y = y' - 2$$

Η αλλαγή απλοποιεί πράγματι το πρόβλημα. Οι εξισώσεις ως προς x και y' γίνονται:

$$\begin{aligned} xy' &= 183 + 27 = 210 \\ x + y' &= 27 + 2 = 29 \end{aligned} \quad (2)$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις του (2) βρίσκεται αμέσως, αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις του (1). Ο μετασχηματισμός του (1) στο (2) δηλώνεται στο κείμενο πολύ συνοπτικά, με τις δύο σύντομες γραμμές:

$$27 + 183 = 210$$
$$2 + 27 = 29$$

Ακολουθεί, κατόπιν, η επίλυση του απλοποιημένου συστήματος (2).Η επίλυση ακολουθεί μια πάγια διαδικασία που συναντάμε επανειλημμένα σε άλλα κείμενα.

Κατά τον van der Waerden, η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος 1 με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$xy' = P$$
$$x + y' = a$$

είναι

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a + w \\ y' &= \frac{1}{2}a - w \\ w &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - P} \end{aligned}$$

Η διαδικασία που ακολουθούν οι Βαβυλώνιοι, ισοδυναμεί, στην ουσία με εφαρμογή των τύπων (1). Παρόλα αυτά δεν τους χρησιμοποιούν αλλά παραθέτουν παραδείγματα, το ένα μετά το άλλο, που φανερώνουν την ίδια μέθοδο υπολογισμού.

Στο σημείο αυτό αναρωτιόμαστε πώς κατέληξαν οι Βαβυλώνιοι σε αυτή τη μέθοδο επίλυσης, αλλά μόνο με εικασίες μπορούμε να απαντήσουμε. Μπορούμε να αποκλείσουμε όμως αυτά που δεν έκαναν: δεν χρησιμοποιούν την αραβική μέθοδο της επίλυσης της μιας από τις εξισώσεις (1) ως προς τον έναν άγνωστο και της αντικατάστασης στην άλλη. Οι Άραβες χρησιμοποιούσαν την μέθοδο αυτή προκειμένου να ανάγουν κάθε αλγεβρικό πρόβλημα σε μια εξίσωση με έναν άγνωστο. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν και εκείνοι πώς να κάνουν απαλοιφή με αντικατάσταση. Στην προκειμένη περίπτωση δεν εργάζονταν κατ' αυτό τον τρόπο. Αν εργάζονταν έτσι θα έβρισκαν το y από το $a - x$ ή από το $x - d$ αφού προηγουμένως θα είχαν βρει το x έχοντας επιλύσει μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Αντί αυτού όμως έβρισκαν το x με τη μορφή $\frac{1}{2}a + w$ και το y ως $\frac{1}{2}a - w$.

Το 1939, ο S. Gandz εξέφρασε την άποψη ότι με τον ίδιο τρόπο εργάζεται και ο Διόφαντος συνήθως στα *Αριθμητικά* του (Gandz, 1997, σελ 416). Οι μέθοδοί του θυμίζουν περισσότερο την βαβυλωνιακή άλγεβρα, από ότι οι μέθοδοι των κλασσικών ελλήνων συγγραφέων. Όταν ο

Διόφαντος θέλει να βρει δύο αγνώστους x, y των οποίων δίδεται το άθροισμα ή η διαφορά, θέτει τις περισσότερες φορές:

$$x = \frac{1}{2}a + z \qquad \text{ή} \qquad x = z + \frac{1}{2}d$$
$$y = \frac{1}{2}a - z \qquad\qquad y = z - \frac{1}{2}d$$

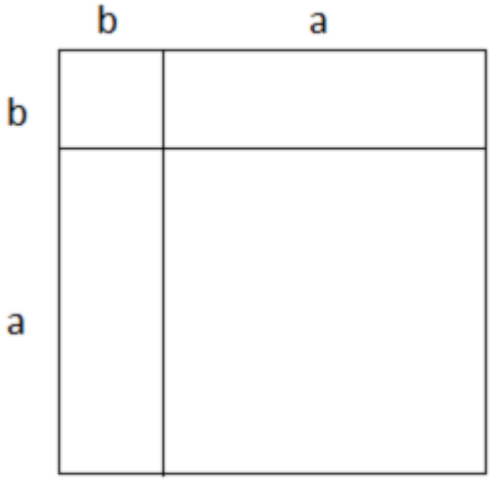
και κατόπιν εκφράζει συναρτήσει του z όλες τις υπόλοιπες σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν τα x,y.

Η ερμηνεία του van der Waerden αναδεικνύει ένα ακόμη ζήτημα, αυτό της γενικότητας που διακρίνει τις μαθηματικές μεθόδους των Βαβυλωνίων. Η πρόσθεση, για παράδειγμα, της διαφοράς του μήκους από το πλάτος ενός ορθογωνίου στο εμβαδό του, υποδηλώνει τη θεώρησή των συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων ως αφηρημένα μεγέθη που μπορούν να εκπροσωπούνται από τα μέτρα τους. Το ίδιο ισχύει με την πρόσθεση του αθροίσματος 183 και του 2 στο δοθέν άθροισμα 27 μήκους και πλάτους, που γίνεται στο πρώτο βήμα της επίλυσης, ενώ ακόμη δεν έχει βρεθεί η σημασία του αριθμού 0,5 που προκύπτει ως αποτέλεσμα αριθμητικών πράξεων μεταξύ των αριθμών 29 και 210 και οδηγεί στον προσδιορισμό των «αγνώστων». Αν, πάντως, πρόκειται για ένα αυθαίρετο αριθμητικό μέγεθος, άσχετο με το αρχικό γεωμετρικό σχήμα του συγκεκριμένου προβλήματος, τότε αυτό υποδεικνύει ένα πολύ αξιόλογο επίπεδο γενίκευσης για τα βαβυλωνιακά μαθηματικά, καθώς από συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα (ευθύγραμμα τμήματα και ορθογώνια) μεταβαίνουν στις αναπαραστάσεις με αριθμητικά μεγέθη (εμβαδό, μήκος και πλάτος) και τον αφηρημένο χειρισμό προβλημάτων.

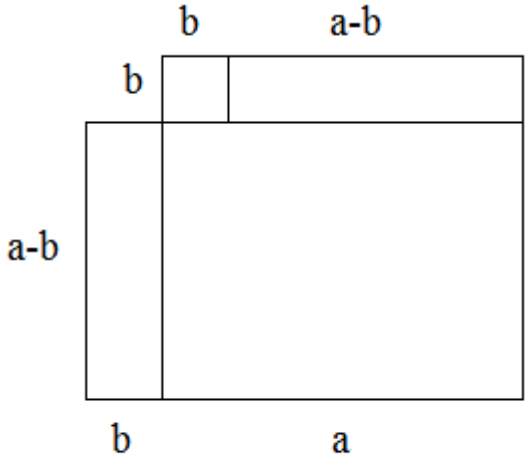
Ο van der Waerden (2007) ασχολείται επίσης με το πώς μπορεί να είχαν βρει οι Βαβυλώνιοι ταυτότητες όπως οι:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Είναι άγνωστο, αλλά υποστηρίζει πως ίσως να τις συνήγαγαν από διαγράμματα, όπως αυτά που συναντάμε στο Ευκλείδη και τους άραβες συγγραφείς:



Σχ. 2



Σχ. 3

Το γινόμενο το ερμήνευαν μάλλον ως εμβαδόν ενός ορθογωνίου και το τετράγωνο ως εμβαδόν ενός τετραγώνου, όπως φαίνεται από την ορολογία τους.

Τονίζει, ωστόσο, πως δεν πρέπει να παρασυρθούμε από την γεωμετρική ορολογία. Μπορεί οι Βαβυλώνιοι να απεικόνιζαν τους αγνώστους με γραμμές και επιφάνειες, αλλά παρέμεναν πάντα αριθμοί και η σκέψη τους είναι πρωτίστως αλγεβρική. Αυτό φαίνεται στο πρόβλημα 1, όπου προστίθενται επιφάνεια και ευθύγραμμο τμήμα, μια πρόσθεση που από την άποψη της γεωμετρίας δεν έχει νόημα. Οι Βαβυλώνιοι γενικά δεν δίσταζαν να πολλαπλασιάζουν δύο επιφάνειες. Ακόμη και σε προβλήματα που είναι διατυπωμένα με γεωμετρικούς όρους, αυτό που ζητείται από τους Βαβυλωνίους είναι πάντα κάποιος υπολογισμός, ποτέ κάποια κατασκευή ή απόδειξη. Μέσα στο γεωμετρικό περίβλημα, είναι πάντα ορατός ο αλγεβρικός πυρήνας. Αυτή η διαδικασία επίλυσης αντιστοιχεί στη σύγχρονη διαδικασία επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων δευτέρου βαθμού. Συνεπώς προκύπτει το συμπέρασμα ότι η άλγεβρα γεννήθηκε τον 18^{ο} π.Χ. αιώνα από τους μαθηματικούς της εποχής του Χαμουραμπί. Η επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Μεσοποτάμιους είναι ένα αξιοσημείωτο κατόρθωμα, αν αναλογιστεί κανείς την ωριμότητα και την ευχέρεια με την οποία χειρίζονταν αυτές τις έννοιες.

Με βάση όλες τις παραπάνω απόψεις της παραδοσιακής ιστοριογραφίας προκύπτουν διάφορα ζητήματα. Κατ' αρχήν, τα κίνητρα, που τους οδήγησαν σε αυτά τα κατορθώματα είναι ένα σημαντικό ζήτημα. Συχνά υποστηρίζεται ότι όλα τα προελληνικά μαθηματικά και επιστήμες είχαν καθαρά ωφελιμιστικό χαρακτήρα αλλά ποια ανάγκη της καθημερινής ζωής οδήγησε σε προβλήματα με διαφορά ανάμεσα σε ένα εμβαδό και ένα μήκος; Αν όντως το κίνητρο των Βαβυλωνίων ήταν η χρησιμότητα, τότε υστερούν σε αμεσότητα σε σχέση με σήμερα. Η άποψη αυτή για τον ωφελιμιστικό χαρακτήρα των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών, χωρίς να παρουσιάζουν κανένα ενδιαφέρον για τα μαθηματικά ως επιστήμη είναι θέμα εκτίμησης και όχι αναμφισβήτητων στοιχείων σύμφωνα με την παραδοσιακή ιστοριογραφία. Την εποχή εκείνη, όπως άλλωστε και η πλειονότητα των ανθρώπων, ασχολούνταν με τα άμεσα προβλήματα της επιβίωσης. Ο ελεύθερος χρόνος ήταν πολύ πιο σπάνιος τότε, αλλά ακόμη και κάτω από αυτές τις συνθήκες υπήρχαν προβλήματα στην Βαβυλώνα που μπορούν να θεωρηθούν μαθηματικά αναψυχής. Όταν κάποιο πρόβλημα ζητά το άθροισμα ενός μήκους και ενός εμβαδού, υποδεικνύει ότι ο συγγραφέας διακατεχόταν από μια τάση για γενίκευση.

Ένα, ακόμη, ζήτημα που προκύπτει είναι αν οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν βασικές αρχές των Μαθηματικών. Τα προβλήματα αναφέρονται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και δεν περιέχουν γενικεύσεις. Πολλά προβλήματα φαίνεται να είναι ασκήσεις που έπρεπε να λύσουν οι μαθητές σύμφωνα με ορισμένες μεθόδους και κανόνες. Το γεγονός ότι δεν διασώθηκαν κείμενα που να

περιγράφουν αυτούς τους κανόνες δεν σημαίνει ότι κατ' ανάγκη οι γενικεύσεις ήταν ανύπαρκτες στον αρχαίο κόσμο. Δύσκολα μπορεί να ερμηνευτεί η ομοιότητα των προβλημάτων χωρίς την ύπαρξη κάποιου γενικού κανόνα, ούτε φαίνεται λογικό τόσο μεγάλες συλλογές προβλημάτων να είναι αποκλειστικά και μόνο αποτέλεσμα τύχης.

Ένα ακόμη σχετικό ζήτημα με τις βαβυλωνιακές πινακίδες, είναι ότι σχεδόν όλα τα κείμενα περιέχουν απλώς προβλήματα και λύσεις αλλά όχι εξηγήσεις. Οι λύσεις δίνονται με την μορφή εντολών, χωρίς να λέγεται πώς κατέληξαν σε αυτές και χωρίς να τίθεται ζήτημα απόδειξης. Βέβαια η λέξη 'απόδειξη' έχει διαφορετικές σημασίες σε διαφορετικά επίπεδα και διαφορετικές εποχές. Άλλοι θεωρούν ότι η απόδειξη στηρίζεται σε αξιώματα και άλλοι βασίζονται στην οπτικοποίηση. Έτσι δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι οι λαοί της προελληνικής περιόδου δε συνειδητοποιούσαν την ανάγκη απόδειξης. Μερικές φορές, για παράδειγμα, αντικαθιστούσαν τον άγνωστο με το αποτέλεσμα για να το λύσουν. Το γεγονός ότι σε κανένα κείμενο της προελληνικής εποχής δεν αναφέρεται ρητά η ανάγκη απόδειξης έχει οδηγήσει πολλούς ερευνητές να συμπεράνουν ότι οι προελληνικοί πολιτισμοί δεν ασχολούνταν στην ουσία με τα μαθηματικά παρά το υψηλό επίπεδο δεξιότητας που παρουσίαζαν.

Ένα ζήτημα που αναδεικνύεται, είναι η απουσία της αφαίρεσης. Τα προβλήματα στο κείμενο που μελετήσαμε είναι συγκεκριμένες περιπτώσεις. Ίσως, όμως, οι λέξεις 'μήκος' και 'πλάτος' πρέπει να ερμηνευτούν ως x και y γιατί οι συγγραφείς των σφηνοειδών πλακών μπορεί να αναγνώριζαν την γενίκευση μέσα από συγκεκριμένες περιπτώσεις. Πώς αλλιώς μπορούμε να εξηγήσουμε την πρόσθεση ενός μήκους και ενός εμβαδού; Αξίζει, όμως, να σημειωθεί πως την εποχή εκείνη δεν υπήρχε κάποια ευδιάκριτη πνευματική δραστηριότητα που να μπορεί να συγκριθεί με αυτό που ονομάστηκε αργότερα 'μαθηματικά' κι εδώ είναι εύκολο να παρασυρθούμε από δογματισμούς. Ίσως είναι αλήθεια ότι η γεωμετρία δεν είχε ακόμα διαχωριστεί από την ακατέργαστη παρατήρηση του χώρου που περιλάμβανε οτιδήποτε μπορούσε να μετρηθεί. Από την άλλη πλευρά δεν γίνεται να μην αναγνωρίσουμε το ενδιαφέρον των Βαβυλωνίων για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους, κάτι πολύ κοντά σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε άλγεβρα.

Συμπερασματικά, αν ένας σημερινός αναγνώστης που ψάχνει τις ρίζες της άλγεβρας, στηριχτεί στην παραδοσιακή ιστοριογραφία, θα διαπιστώσει ότι οι μέθοδοι επίλυσης των Βαβυλωνιακών πινακίδων υποδηλώνουν ένα πολύ πρώιμο στάδιο της μεθόδου επίλυσης ενός συστήματος της μορφής

$$\begin{Bmatrix} x + y = S \\ xy = P \end{Bmatrix}$$

άρα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $x^2 - Sx + P = 0$. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη χρήση εγγράμματου συμβολισμού και ορισμένων βασικών αλγεβρικών ταυτοτήτων και με κατάλληλους μετασχηματισμούς να βρεθούν οι x και y ως συνάρτηση των S και P. Πράγματι η αλγεβρική αναπαράσταση των αριθμητικών πράξεων της πινακίδας AO8862 μας δείχνει ότι για την επίλυση του προαναφερθέντος συστήματος ακολουθεί κανείς τα εξής βήματα:

$$\frac{x+y}{2}=\frac{S}{2}$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{S}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=\left(\frac{S}{2}\right)^2-P$$

$$\frac{x-y}{2}=\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}$$

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=\frac{S}{2}+\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}$$

$$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=\frac{S}{2}-\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}$$

Η αλγεβροποίηση της διαδικασίας που περιγράφεται στην πινακίδα υποδεικνύει έναν τρόπο επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων που διαφέρει από την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου. Παράλληλα, αναδεικνύει την αναγκαιότητα διατύπωσης ορισμένων περιορισμών για τα S,P ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη θετικών και ρητών λύσεων. Όλα όσα αναφέραμε παραπάνω ήταν, επομένως, ήταν οι απόψεις της λεγόμενης παραδοσιακής ιστοριογραφίας των μαθηματικών σε σχέση με τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Ας δούμε τώρα τι υποστηρίζουν νεότερες μελέτες για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά.

2.1.3. Νεότερες μελέτες πάνω στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά.

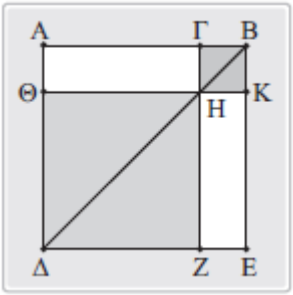
Με βάση, λοιπόν, τις παραπάνω απόψεις, ειδικά των Neugebauer και van den Waerden, οι Βαβυλώνιοι θεωρείται ότι έλυναν εξισώσεις δευτέρου βαθμού ήδη από την περίοδο 1800-1700 π.Χ. (εποχή του βασιλιά Χαμουραμπί και των διαδόχων του), χρησιμοποιώντας μια μέθοδο παρόμοια προς τη σημερινή, αλλά διατυπωμένη με λόγια. Παράλληλα, οι αρχαίοι Έλληνες της κλασικής

περιόδου θεωρείται ότι έλυναν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με γεωμετρικές μεθόδους δημιουργώντας μια «γεωμετρική άλγεβρα». Ο van der Waerden (1983, σελ 74) αναφέρει ότι αν συγκρίνουμε τα κείμενα των Βαβυλωνιακών πινακίδων με εκείνα του Ευκλείδη (περίπου 300 π.Χ.), του Al–Khwārizmī (περίπου 780-850 μ.Χ.) και του Omar Khayyām (1048-1131 μ.Χ.), μπορούμε να διακρίνουμε τρία είδη άλγεβρας:

1. ***Μικτή Άλγεβρα Βαβυλωνιακού τύπου***, στην οποία ευθύγραμμα τμήματα προστίθενται με εμβαδά και εξισώνονται με αριθμούς.
2. ***Αριθμητική Άλγεβρα***, στην οποία μόνο ρητοί αριθμοί m/n είναι δεκτοί για συντελεστές και λύσεις εξισώσεων, όπως στα «Αριθμητικά» του Διόφαντου.
3. ***Γεωμετρική Άλγεβρα*** όπως η άλγεβρα του Omar Khayyām, στην οποία απαγορεύεται αυστηρά η ανάμειξη ευθυγράμμων τμημάτων, εμβαδών και όγκων.

Τα θεμέλια της γεωμετρικής άλγεβρας, κατά τον van der Waerden, είχαν τεθεί από τον Ευκλείδη στο Βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων. Κυρίαρχο στοιχείο της προσέγγισης αυτής, αποτελεί η υπόθεση για την ύπαρξη, κατά την αρχαιότητα, ενός αλγεβρικού τρόπου σκέψης που ταυτίζεται ουσιαστικά με τη νεότερη συμβολική άλγεβρα. Ο όρος «γεωμετρική άλγεβρα» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στα τέλη του 19ου αιώνα και καθιερώθηκε μετά την κλασική έκδοση των Στοιχείων από τον ιστορικό των αρχαιοελληνικών Μαθηματικών Sir Thomas Heath (1861–1940) που έκανε συστηματική χρήση του όρου στην ανάλυση του έργου του Ευκλείδη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ερμηνεία της πρότασης 4 του Βιβλίου ΙΙ των *Στοιχείων* από τον Heath (1926,σελ 389) :

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Σχήμα 4

Δηλαδή, αν ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και Γ τυχαίο σημείο του, τότε το τετράγωνο που έχει πλευρά ολόκληρο το ΑΒ είναι ίσο με τα τετράγωνα που έχουν πλευρές τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ συν το διπλάσιο του ορθογωνίου που περιέχεται από τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ. Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στο παραπάνω σχήμα ισχύει

(ΑΒΕΔ) = (ΘΗΖΔ) + (ΓΒΚΗ) + 2(ΑΓΗΘ).

Όταν ο Ευκλείδης μιλάει για ισότητα, δεν εννοεί ισότητα εμβαδών (ως αριθμούς), αλλά ισότητα γεωμετρικών χωρίων η οποία στα Στοιχεία αποδεικνύεται αυστηρά. Η πρόταση αυτή έχει ερμηνευτεί από ιστορικούς ως η διατύπωση και απόδειξη, με γεωμετρικό τρόπο, της γνωστής ταυτότητας: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$.

Η άποψη για την «γεωμετρική άλγεβρα» των αρχαίων Ελλήνων ισχυροποιήθηκε όταν νέα αρχαιολογικά ευρήματα έδωσαν για πρώτη φορά μια αρκετά ικανοποιητική εικόνα των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών. Ο Neugebauer, ο οποίος τη δεκαετία του 1930 μελέτησε και μετέφρασε Βαβυλωνιακές πινακίδες μαθηματικού περιεχομένου, μετέτρεψε το περιεχόμενό τους σε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό παρουσιάζοντας έτσι ορισμένα από τα προβλήματα των πινακίδων και τις μεθόδους επίλυσής τους ως ισοδύναμα με την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Στη συνέχεια, οι αρχαίοι Έλληνες παρέλαβαν την μέθοδο αυτή των Βαβυλωνίων και περιβάλλοντάς την με «γεωμετρικό ένδυμα» προέκυψε η «γεωμετρική άλγεβρα». Οι απόψεις αυτές φαίνονται στο βιβλίο του van der Waerden, *η Αφύπνιση της Επιστήμης*, αποτέλεσαν για χρόνια ακλόνητο συμπέρασμα της ιστορικής έρευνας και γνώρισαν ευρεία διάδοση. Τις τελευταίες δεκαετίες, όμως, η ιστορική έρευνα έχει αμφισβητήσει τις προηγούμενες θέσεις, δημιουργώντας μια ρήξη ανάμεσα στην «παραδοσιακή» και τη «σύγχρονη» σχολή ιστοριογραφίας των Μαθηματικών της αρχαιότητας.

Οι πρώτες αμφισβητήσεις, ειδικά για την ορθότητα της μεθόδου να ερμηνεύονται τα αρχαία μαθηματικά κείμενα με σύγχρονους όρους και συμβολισμούς, εμφανίστηκαν στη διάρκεια της δεκαετίας του 1970. Μια πρώτη αμφισβήτηση αυτής της λογικής έγινε από τον ιστορικό Árpád Szabó στο βιβλίο του *Anfänge der griechischen Mathematik* (1969). Ο Szabó απέρριψε την ερμηνεία της «γεωμετρικής άλγεβρας» για το Βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων, επισημαίνοντας ότι οι προτάσεις που περιέχει, έχουν καθαρά γεωμετρικό υπόβαθρο και δε σχετίζονται με την επίλυση εξισώσεων. Παράλληλα, απέρριψε την υιοθέτηση των βαβυλωνιακών μεθόδων από τους αρχαίους Έλληνες, υποστηρίζοντας πως αν είχε συμβεί, τότε οι Έλληνες θα είχαν υιοθετήσει και το θεσιακό σύστημα αρίθμησης των Βαβυλωνίων.

Έντονη αμφισβήτηση εξέφρασε και ο Sabetai Unguru (1975) που υποστήριζε την ανάγκη να ξαναγραφεί η ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών. Υποστήριξε ότι η γεωμετρία είναι σκέψη για το χώρο, τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, ενώ η αλγεβρική σκέψη χαρακτηρίζεται από το λειτουργικό συμβολισμό και την ενασχόληση με μαθηματικές σχέσεις παρά με μαθηματικά αντικείμενα, τονίζοντας έτσι τη σημαντική διαφορά ανάμεσα στον γεωμετρικό και αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Παράλληλα, υποστήριξε ότι οι προτάσεις των Στοιχείων που ερμηνεύονται ως «αλγεβρικές ταυτότητες» ή «δευτεροβάθμιες εξισώσεις», έχουν συγκεκριμένο γεωμετρικό περιεχόμενο και επομένως η ερμηνεία με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό δεν έχει νόημα. Τέλος, η μετατροπή των γεωμετρικών προτάσεων του Ευκλείδη σε αλγεβρικούς τύπους, στηρίζεται στην αυθαίρετη υπόθεση για την ύπαρξη μιας «γεωμετρικής αριθμητικής». Π.χ. ότι υπάρχει μια πράξη πολλαπλασιασμού δυο ευθυγράμμων τμημάτων η οποία ισοδυναμεί με την κατασκευή ενός ορθογωνίου τριγώνου που έχει ως πλευρές τα τμήματα αυτά. Στα *Στοιχεία* όμως δεν υπάρχει τέτοια έννοια πολλαπλασιασμού (παρά μόνο ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση) και η κατασκευή ενός ορθογωνίου έχει εκεί το αυθεντικό γεωμετρικό της νόημα, χωρίς καμία σχέση με αριθμούς.

Οι απόψεις του Unguru ήταν η αφορμή να ξεσπάσει μια διαμάχη ανάμεσα στους ιστορικούς των Μαθηματικών για το νόημα του όρου «γεωμετρική άλγεβρα» με αποτέλεσμα η παραδοσιακή μεθοδολογία της παραδοσιακής ιστοριογραφίας για ερμηνεία των πρωτότυπων κειμένων με βάση τα σύγχρονα Μαθηματικά να κλονιστεί. Η νέα τάση της ιστοριογραφίας των μαθηματικών, εκδηλώνεται στο έργο του Jens Høyrup. Ο Høyrup (2002) ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τις κλασσικές μεταφράσεις των Βαβυλωνιακών πινακίδων και την ορολογία που χρησιμοποιούσαν. Υποστήριξε ότι το περιεχόμενο των προβλημάτων στις Βαβυλωνιακές πινακίδες είναι αμιγώς γεωμετρικό και περιλαμβάνει σύνθετες μεθόδους διαμέρισης, μετασχηματισμού και μέτρησης γεωμετρικών σχημάτων και όχι εξισώσεις. Έτσι απορρίπτει την ύπαρξη της Βαβυλωνιακής Άλγεβρας θεωρώντας ότι πρόκειται για μια εκτεταμένη γεωμετρία, στην οποία όμως δεν τίθεται θέμα αποδείξεων, και η

οποία χρησιμοποιεί ένα σύνολο διαφορετικών πράξεων και μεθόδων από τις αντίστοιχες της άλγεβρας. Προτείνει, λοιπόν, μια νέα ερμηνεία για το πρόβλημα 1:

Μήκος, πλάτος. Το μήκος και το πλάτος έχω ενώσει: έχω κατασκευάσει μια επιφάνεια. Έκανα μια περιστροφή. Όση ήταν του μήκους από το πλάτος η υπέρβαση την έχω επισυνάψει στο εσωτερικό της επιφάνειας:183. Γύρισα πίσω. Το μήκος και το πλάτος έχω συσσωρεύσει:27. Πόσο είναι το μήκος το πλάτος και η επιφάνεια;

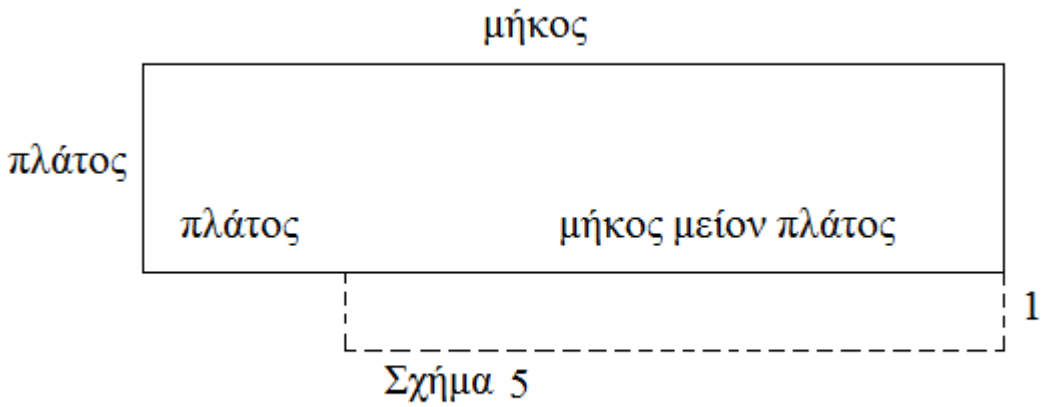
27 και 183 τα πράγματα συσσωρευμένα

15 το μήκος, 12 το πλάτος και 180 η επιφάνεια.

Εσύ με τη δικιά σου διαδικασία 27, τα πράγματα συσσωρευμένα, μήκος και πλάτος, στο εσωτερικό [183] να επισυνάψεις:210. Να επισυνάψεις το 2 στο 27:29. Να χωρίσεις το μισό του, αυτό του 29:14,5 βήματα του 14,5:210,25. Μέσα από το 210,25 να αποσπάσεις το 210:0,25 το υπόλοιπο. Η ίση πλευρά του 0,25 είναι 0,5. Το 0,5 στο ένα είναι 14,5 να επισυνάψεις:15 το μήκος. Το 0,5 από το δεύτερο 14,5 να αποκόψεις: 14 το πλάτος. Το 2 που έχεις επισυνάψει στο 27, από το 14, το πλάτος να το αποσπάσεις:12 το αληθινό πλάτος και 15 το μήκος και 12 το πλάτος, τα έχω ενώσει: 15 βήματα του 12, 180 η επιφάνεια. 15 το μήκος πέρα από το 12, το πλάτος, πόσο υπερβαίνει; Υπερβαίνει 3. Να επισυνάψεις 3 στο εσωτερικό 180 της επιφάνειας, άρα 183 η επιφάνεια.

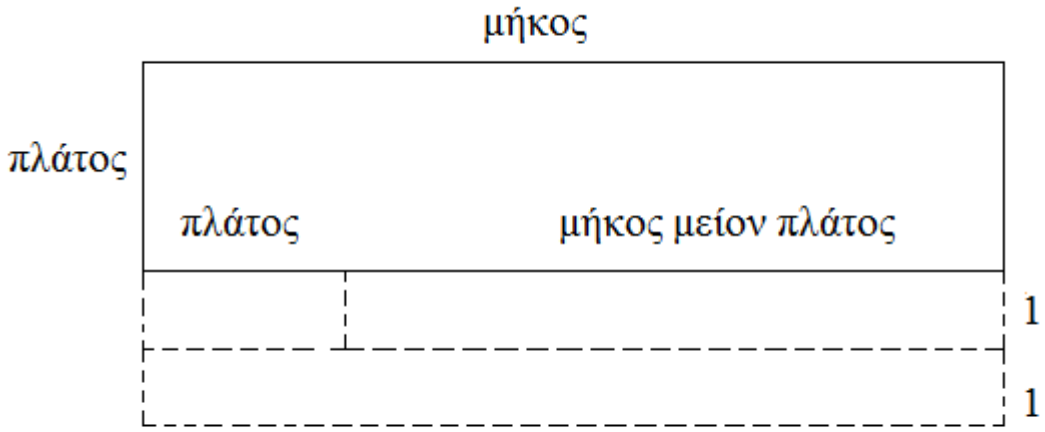
Ύστερα, από την μετάφραση του Høyrup ακολουθεί και η *γεωμετρική* ερμηνεία:

Η πρόσθεση στο εμβαδό του ορθογωνίου της διαφοράς του μήκους από το πλάτος, όπως αναφέρεται στις κλασσικές μεταφράσεις και είναι μια πράξη καθαρά αριθμητική, κατά τον Høyrup είναι η επισύναψη στο αρχικό ορθογώνιο ενός νέου, μικρότερου ορθογωνίου με μια πλευρά την υπεροχή του μήκους από το πλάτος και την άλλη την μονάδα (Σχήμα 5). Αυτή η πράξη είναι καθαρά γεωμετρική: το νέο ορθογώνιο είναι στην ουσία μια γραμμή με πλάτος. Η επισύναψη αυτή δημιουργεί μια γνωμονική επιφάνεια που έχει σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος εμβαδό 183



Σχήμα 5

Στο πρώτο στάδιο επίλυσης η πρόσθεση 27+183=210 των κλασσικών μεταφράσεων ερμηνεύεται από τον Høyrup ως η μετατροπή της προηγούμενης γνωμικής επιφάνειας σε ορθογώνιο, με την επισύναψη δύο νέων ορθογωνίων: πρώτα το ορθογώνιο που έχει πλευρές το μήκος του αρχικού και τη μονάδα και στη συνέχεια το ορθογώνιο που έχει πλευρές το μήκος του αρχικού και τη μονάδα (όπως φαίνεται στο σχήμα 6). Η επισύναψη αυτή των δύο ορθογωνίων σχηματίζει μια νέα γνωμονική επιφάνεια με εμβαδόν 27, το «άθροισμα» του αρχικού μήκους με το πλάτος. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα νέο ορθογώνιο, μια διαπλάτυνση του αρχικού με ίδιο μήκος, πλάτος αυξημένο κατά δύο μονάδες (άρα ημιπερίμετρος = άθροισμα μήκους και πλάτους =27+2=29) και εμβαδό 210.



Σχήμα 6

Στο δεύτερο στάδιο επίλυσης, εφαρμόζεται μια διαδικασία εύρεσης του μήκους και του πλάτους ενός ορθογωνίου όταν είναι γνωστά η ημιπερίμετρος και το εμβαδόν του. Αυτή εμφανίζεται και σε άλλα αντίστοιχα προβλήματα άλλων πινακίδων. Αρχικά, στο πρώτο βήμα, προεκτείνεται το μήκος κατά το πλάτος, δηλαδή δημιουργείται ένα τμήμα ίσο με την ημιπερίμετρο. Στο δεύτερο βήμα, το τμήμα αυτό διχοτομείται και με το μισό του ως πλευρά κατασκευάζεται ένα τετράγωνο (στο σχήμα 7). Από την σύγκριση των δημιουργούμενων ορθογωνίων, το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου υπερβαίνει το εμβαδό του αρχικού ορθογωνίου κατά το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μικρού τετραγώνου, που έχει πλευρά την ημιδιαφορά του μήκους από το πλάτος. Στο τρίτο βήμα, η πλευρά αυτή προστίθεται και αφαιρείται από την πλευρά του μεγάλου τετραγώνου παρέχοντας το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου. Η τυποποιημένη εφαρμογή αυτής της διαδικασίας στο «διαπλατυσμένο» ορθογώνιο του προβλήματος, με ημιπερίμετρο 29 και εμβαδό 210, σημαίνει διαδοχικά την διχοτόμηση του 29, τη δημιουργία του τετραγώνου με πλευρά 14,5 και εμβαδό 210,25, τον υπολογισμό του εμβαδού του γραμμοσκιασμένου τετραγώνου, δηλαδή 210,25-210=0,25, και στη συνέχεια της πλευράς του, δηλαδή 0,5. Με την βοήθεια της τελευταίας βρίσκουμε αμέσως τις πλευρές του ορθογωνίου: το μήκος 14,5+0,5=15 και το πλάτος 14,5-0,5=14. Επειδή το συγκεκριμένο ορθογώνιο είχε προκύψει από το αρχικό με αύξηση του πλάτος κατά 2, συμπεραίνουμε ότι οι ζητούμενες πλευρές και το εμβαδό του αρχικού ορθογωνίου είναι 15,12 και

180. Σε αυτή, δηλαδή τη γεωμετρική ερμηνεία του Høyrup πολύ σημαντικό ρόλο παίζει ο υπολογισμός της πλευράς του γραμμοσκιασμένου τετραγώνου, χωρίς να δηλώνεται το γεγονός ότι ισούται με την ημιδιαφορά των πλευρών του ορθογωνίου.

Σχήμα 7

Με αυτήν την ερμηνεία φανερώνεται μια γεωμετρική ορολογία, σύμφωνα με την οποία οι αριθμοί και οι αριθμητικές πράξεις εκφράζουν διαστάσεις συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων. Η γεωμετρική ερμηνεία του Høyrup προκάλεσε ρήξη στις ιστοριογραφικές προσεγγίσεις. Ειδικά, μάλιστα, αν με συγκριθεί την ακόλουθη άποψη του Neugebauer (2003, σελ 77):

«Είναι εύκολο να δειχτεί ότι οι γεωμετρικές έννοιες παίζουν πολύ δευτερεύοντα ρόλο στην Βαβυλωνιακή άλγεβρα, όσο εκτεταμένη και αν είναι η χρήση της γεωμετρικής ορολογίας. Φτάνει να αναφέρουμε την ύπαρξη παραδειγμάτων, όπου προστίθενται εμβαδά και μήκη ή πολλαπλασιάζονται εμβαδά, πράγμα που αποκλείει οποιαδήποτε γεωμετρική ερμηνεία ευκλείδειου τύπου, που μας φαίνεται τόσο φυσικός.»

Η νέα γεωμετρική ερμηνεία μπορεί να γίνει κατανοητή από το σύγχρονο αναγνώστη χωρίς προσφυγή σε συμβολικές αλγεβρικές αναπαραστάσεις και κλονίζει την επικρατούσα άποψη ότι οι Βαβυλώνιοι διέθεταν τον τύπο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Έτσι, λοιπόν, με βάση τη νέα ιστοριογραφία των μαθηματικών, προκύπτει το συμπέρασμα πως οι Βαβυλωνιακές πινακίδες, παρά τον αποσπασματικό χαρακτήρα του μαθηματικού τους περιεχομένου φαίνεται ότι δεν χρησιμοποιούσαν τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

2.2. Ο Διόφαντος

2.2.1 Η ζωή του

Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα πότε έζησε. Κατά τον Bombelli έζησε στη διάρκεια της βασιλείας του Αντωνίνου Πίου (150 μ.Χ), ενώ σύμφωνα με τον Abu'l-Faraj κατά την εποχή του Ιουλιανού του Παραβάτη(361-363 μ.Χ.). Ο Ψελλός, όμως αναφέρει ότι ο λογιότατος Ανατόλιος, ο οποίος έγινε επίσκοπος Λαοδικείας το 270 μ.Χ., αφιέρωσε ένα βιβλίο του στον Διόφαντο. Αυτό οδηγεί στη σκέψη ότι ο Διόφαντος έζησε κατά πάσα πιθανότητα περί το 250 μ.Χ. Σε ένα έμμετρο αλγεβρικό γρίφο, που περιέχεται στην *Παλατινή Ανθολογία,* ο βίος του περιγράφεται ως εξής (Van den Waerden, σελ 325) :

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἃ μέγα θαῦμα,
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
δωδεκάτην δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει·
αἶ αἶ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
τοῦδε καὶ ᾗ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Εικόνα 1

Σε αυτόν εδώ τον τάφο κείται ο Διόφαντος, τι θαυμαστός τάφος! Και με αριθμητική τέχνη μας λέει ο τάφος την ηλικία του. Το 1/6 της ζωής του εχάρισε ο θεός να είναι παιδί, το 1/12 δε μετά από αυτό να βγάλει τρίχες παρά τα μήλα (να είναι δηλαδή νεανίας), μετά το επόμενο δε 1/7 νυμφεύθηκε, πέντε δε έτη μετά τον γάμο του εχάρισε υιό. Αλλοίμονο, αργογεννημένο, ατυχές παιδί! Στο ήμισυ της ηλικίας του πατέρα όταν έφτασε, αφού απέθανε, κρύο πτώμα εκάη, παρηγορώντας δε το πένθος του από τότε επί τέσσερα έτη με την σοφία των αριθμών, έτσι ετερμάτισε τον βίον.

Αν συμβολίσουμε με x τα χρόνια που έζησε ο Διόφαντος κατασκευάζουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

από την οποία προκύπτει ότι η τιμή του x είναι 84. Άρα, λοιπόν, ο Διόφαντος πέθανε 84 ετών, αν φυσικά αυτός ο γρίφος είναι ιστορικά αληθής. Αρκετοί ιστορικοί των μαθηματικών έχουν χρησιμοποιήσει το παραπάνω πρόβλημα, ελλείψει άλλων ιστορικών στοιχείων προσδιορισμού της ηλικίας του Διόφαντου. Από τον γρίφο αυτό προκύπτει ότι ο Διόφαντος είχε μεγάλη φήμη κατά την αρχαιότητα, η οποία διατηρήθηκε και μετά το θάνατο του για πολύ καιρό. Υπάρχει βέβαια το ερώτημα αν το επίγραμμα προκύπτει πραγματικά από μια επιτύμβια στήλη ή είναι δημιούργημα μιας μαθηματικής-ποιητικής φαντασίας. Η πρώτη εκδοχή είναι πιθανότερη, διότι στο επίγραμμα περιλαμβάνεται το τραγικό γεγονός του θανάτου του γιού του Διόφαντου.

2.2.2. Τα Αριθμητικά

Τα Αριθμητικά του Διόφαντου είναι μια συλλογή αριθμητικών προβλημάτων που τη χαρακτηρίζει υψηλός βαθμός πρωτοτυπίας και μαθηματικής δεξιότητας και δεν έχει τίποτα κοινό με αυτά ή με οποιοδήποτε άλλο παραδοσιακό ελληνικό μαθηματικό κείμενο. Παρουσιάζει ένα διαφορετικό χειρισμό των μαθηματικών προβλημάτων. Έχοντας πάρει διαζύγιο από τις γεωμετρικές μεθόδους, μοιάζει σε μεγάλο με τη βαβυλωνιακή άλγεβρα. Οι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί, βέβαια, ενδιαφέρονταν, κυρίως, για τις κατά προσέγγιση λύσεις ορισμένων εξισώσεων έως τρίτου βαθμού, η Αριθμητική, όμως, του Διόφαντου (όπως έφθασε στα χέρια μας) είναι σχεδόν ολόκληρη αφιερωμένη στις ακριβείς λύσεις εξισώσεων, ορισμένων και απροσδιόριστων. Ο Διόφαντος, στην Αριθμητική του δίνει ιδιαίτερη έμφαση στη λύση αόριστων προβλημάτων και για το λόγο αυτό, ο κλάδος αυτών των μαθηματικών, που μερικές φορές αναφέρεται ως απροσδιόριστη ανάλυση, ονομάζεται από τότε Διοφαντική ανάλυση. Η μελέτη αυτού του είδους των προβλημάτων είναι συνήθως, σήμερα, μέρος της μελέτης της θεωρίας των αριθμών και όχι της στοιχειώδους άλγεβρας, ο τίτλος, λοιπόν, του πατέρα της άλγεβρας που προσδίδεται στο Διόφαντο δεν είναι απόλυτα δικαιολογημένος. Υπάρχει, όμως, κι ένας άλλος λόγος που δικαιολογεί αυτήν την πατρότητα. Η άλγεβρα, σήμερα, βασίζεται σχεδόν αποκλειστικά σε συμβολικές μορφές προτάσεων και όχι στο συνήθη γραπτό λόγο στον οποίο είχαν γραφεί όλα τα προηγούμενα ελληνικά μαθηματικά κείμενα.

Τα *Αριθμητικά* περιέχουν 189 προβλήματα μαζί με τις λύσεις τους. Αποτελούνται από 13 βιβλία (δηλαδή κεφάλαια), όμως τα αντίγραφα του έργου που έχουν διασωθεί στην αρχαιοελληνική γλώσσα περιέχουν 6 βιβλία, χωρίς να είναι γνωστή με βεβαιότητα η σειρά που κατείχαν μέσα στο πρωτότυπο. Στα τέλη της δεκαετίας του 1960 ανακαλύφθηκαν στο Ιράν 4 ακόμη βιβλία των Αριθμητικών στην αραβική γλώσσα, που προέρχονται από μια μετάφραση του 9^{ου} αιώνα. Ωστόσο οι σημαντικές αποκλίσεις στον τρόπο παρουσίασης ανάμεσα στο ελληνικό και αραβικό κείμενο δημιουργούν αμφιβολίες για το αν πρόκειται για πιστή μετάφραση ή παράφραση του πρωτότυπου.

Σχεδόν όλα τα προβλήματα του πρώτου βιβλίου ανάγονται σε ορισμένες εξισώσεις όπως οι:

$$as = b, \text{ ή } as^2 = b,$$

που έχουν ακριβώς μια λύση θετική. Στα υπόλοιπα πέντε βιβλία περιέχονται, ιδιαιτέρως, απροσδιόριστες εξισώσεις, οι λεγόμενες *διοφαντικές εξισώσεις*. Δέχεται μόνο τις θετικές ρητές λύσεις. Συνήθως αρκείται σε μια λύση του, ενώ του είναι αδιάφορο αν η λύση είναι ακέραια ή κλασματική.

Η μέθοδος του ποικίλλει από τη μία περίπτωση στην άλλη. Στο έργο του δεν υπάρχει ίχνος από μια συστηματική θεωρία των διοφαντικών εξισώσεων. Τη γενική λύση των διοφαντικών εξισώσεων πρώτου βαθμού

$$ax \pm by = c$$

υπέδειξε για πρώτη φορά ο Αριαμπάτα (Aryabhata) (500 μ.Χ.) και επεξεργάστηκε με λεπτομέρεια ο Βραχμαγκούπτα (Brahmagupta) (625 μ.Χ.). Σχετικά με τις διαφαντικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, στον Διόφαντο βρίσκουμε τη γενική λύση της εξίσωσης των «Πυθαγόρειων τριγώνων».

2.2.3. Μεθοδολογία, συμβολισμός και η έννοια της εξίσωσης

Βασικό στοιχείο της μεθοδολογίας του Διόφαντου αποτελεί η χρήση – για πρώτη φορά στα μαθηματικά – της έννοιας του «αγνώστου αριθμού» που συνοδεύεται από συντομογραφικές αναπαραστάσεις για τον άγνωστο και τις δυνάμεις του. Με τη βοήθεια αυτών των εργαλείων δημιουργούνται συντομογραφικές αναπαραστάσεις για τα ζητούμενα των αριθμητικών προβλημάτων και οι δεδομένες σχέσεις μετασχηματίζονται σε ισότητες από τις οποίες προσδιορίζεται η τιμή του αγνώστου και τελικά η λύση του προβλήματος.

Το αρχαιοελληνικό σύστημα αρίθμησης δεν είναι θεσιακό, δηλαδή η αξία κάποιου ψηφίου δεν συνδέεται με τη θέση του μέσα στη συμβολική αναπαράσταση ενός αριθμού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρήση μεγάλου πλήθους ψηφίων με αντίστοιχη επιβάρυνση της μνήμης. Για να γράψει πχ τον αριθμό 111 χρησιμοποιεί τρία γράμματα, το ρ για την εκατοντάδα, το ι για τη δεκάδα και το α για τη μονάδα, δηλαδή 111=ρια.

Η μεγάλη καινοτομία των *Αριθμητικών* είναι η εισαγωγή μιας έννοιας «αγνώστου» η οποία ορίζεται ως «αριθμός που περιέχει πλήθος μονάδων αόριστο» και συμβολίζεται με το ς, τελικό γράμμα της λέξης «αριθμός». Ο αλγεβρικός συμβολισμός του Διόφαντου είναι κατά τον van der Waerden (2007,σελ 328) πρωτόγονος. Στη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος, ο Διόφαντος χρησιμοποιεί μόνο έναν άγνωστο (ανεξάρτητα από το πλήθος των ζητούμενων αριθμών) και τον συμβολίζει πάντοτε με το ίδιο σύμβολο, το τελικό ς. Στην επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιεί δυνάμεις του αγνώστου. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί τα ακόλουθα σύμβολα-συντομογραφίες:

(1) Μ° = Μονάς = μονάδα

(s) ς = Ἀριθμός = αριθμός

(s^2) Δ^Y = Δύναμις = τετράγωνο

(s^3) K^Y = Κύβος = Κύβος

(s^6) K^YK = Κυβόκυβος = κυβόκυβος

Ο Διόφαντος, προφανώς, γνώριζε τους κανόνες που είναι ισοδύναμοι με τις σημερινές ιδιότητες των εκθετών και χρησιμοποίησε ειδικές ονομασίες για τους αντίστροφους των πρώτων έξι δυνάμεων των αγνώστων, ποσότητες που ισοδυναμούν, δηλαδή, με τις δικές μας αρνητικές δυνάμεις. Έγραφε τους αριθμητικούς συντελεστές μετά τα σύμβολα των δυνάμεων με τα οποία συνδέονταν, η πρόσθεση όρων γινόταν κατανοητή με την κατάλληλη παράθεση των συμβόλων των όρων, ενώ η αφαίρεση με ένα γράμμα που τοποθετούνταν μπροστά από τους προς αφαίρεση όρους. Με αυτού του είδους το συμβολισμό, ο Διόφαντος ήταν σε θέση να γράψει πολυώνυμα ενός αγνώστου, σχεδόν όσο σύντομα τα γράφουμε κι εμείς σήμερα.

Οι εκφωνήσεις των προβλημάτων διατυπώνονται πάντα με ρητορικό και γενικό τρόπο, ενώ κατά την επίλυση εισάγονται σχεδόν πάντα συγκεκριμένοι αριθμοί, που διαφοροποιούνται από τον άγνωστο και τις δυνάμεις του με την πρόταξη του συμβόλου Μ° και την τοποθέτηση μιας γραμμής πάνω από τα αντίστοιχα γράμματα. Ο Διόφαντος δεν χρησιμοποιεί τα σύγχρονα σύμβολα των αριθμητικών και αλγεβρικών πράξεων ή σχέσεων. Η πρόσθεση δηλώνεται με την απλή παράθεση των προσθετέων ενώ η ισότητα με τη λέξη «ίσα» ή με την συντομογραφία «ισ». Έτσι η συμβολική αναπαράσταση:

Επώνυμο

$$\Delta^{\text{Υ}}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\kappa}\bar{\delta}\iota\sigma.\overset{o}{\text{M}}\,\bar{\pi}\bar{\alpha}$$

δηλώνει ότι «μια (α) δύναμη και είκοσι τέσσερις (κδ) άγνωστοι αριθμοί είναι ίσα με ογδόντα μία (πα) μονάδες». Πρόκειται δηλαδή για την εξής εξίσωση:

$$x^2 + 24x = 81$$

Η βασική διαφορά ανάμεσα στο συμβολισμό του Διόφαντου και στο σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό είναι η έλλειψη ειδικών συμβόλων για τις πράξεις και σχέσεις καθώς και για τον εκθετικό συμβολισμό. Τα στοιχεία αυτά προστέθηκαν στον αλγεβρικό συμβολισμό την περίοδο από τα τέλη του δέκατου πέμπτου ως τις αρχές του δέκατου έβδομου αιώνα στην Ευρώπη.

Σχετικά με την επίλυση εξισώσεων, στην *Εισαγωγή* του, ο Διόφαντος εξηγεί πώς πολλαπλασιάζονται και διαιρούνται οι δυνάμεις του αγνώστου, πώς πολλαπλασιάζονται τα πολυώνυμα και πώς γίνεται η αναγωγή των ίδιων δυνάμεων του s. Στο σωζόμενο τμήμα του έργου του φαίνεται ότι γνώριζε να επιλύει τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha s^2 + \beta s = \gamma \ , \ \alpha s^2 + \gamma = \beta s \ , \ \beta s + \gamma = \alpha s^2 .$$

Φαίνεται, λοιπόν, ότι η επίλυση εξισώσεων ήταν για τον Διόφαντο κάτι γνώριμο. Πολλή περισσότερη πρωτοτυπία επιδεικνύει όταν πραγματεύεται τα απροσδιόριστα προβλήματα.

Οι εξισώσεις δεν ταξινομούνται από τον Διόφαντο σύμφωνα με το βαθμό, αλλά χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το πλήθος των όρων που έχουν μείνει σε κάθε μέρος αφού πραγματοποιηθούν όλες οι σχετικές απλοποιήσεις (απαλοιφές, αναγωγές, μεταφορές, κλπ). Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι εξισώσεις που έχουν ένα μόνο «είδος» σε κάθε μέρος (πχ η εξίσωση $x^2 = 4$) και στη δεύτερη οι εξισώσεις που έχουν δύο «είδη» στο ένα μέρος και ένα «είδος» στο άλλο (όπως η εξίσωση $6x^2 + 3x = 7$).

Ο Διόφαντος, επιπλέον, δεν αναζητά όλες τις αριθμητικές τιμές του αγνώστου που επαληθεύουν κάποια εξίσωση αλλά μόνο μια, η οποία δεν μπορεί να είναι αρνητικός ή άρρητος, ούτε μηδέν. Για παράδειγμα η εξίσωση $25x^2 = 200x$ έχει μοναδική λύση το 8, ενώ οι επόμενες δυο απορρίπτονται από το Διόφαντο ως «άτοπος» και «ου ρητή» αντίστοιχα:

$$4 = 4x + 20$$

$$x^2 = 160$$

Ο τρόπος χειρισμού των εξισώσεων από τον Διόφαντο προσδιορίζεται σε μεγάλο βαθμό στο επόμενο απόσπασμα από την εισαγωγή των *Αριθμητικών:*

Αν από κάποιο πρόβλημα προκύψουν ορισμένα είδη ίσα με όμοια είδη, αλλά διαφορετικού πλήθους, είναι αναγκαίο να αφαιρεθούν και από τα δύο μέρη τα όμοια από τα όμοια, μέχρι να παραμείνει ένα είδος ίσο προς ένα είδος. Αν συμβεί να υπάρχει στο ένα μέρος ή και στα δύο μέρη έλλειψη κάποιων ειδών, είναι αναγκαίο να προστεθούν και στα δύο μέρη τα ελλείποντα είδη, μέχρι να γίνουν τα είδη και στα δύο μέρη υπάρχοντα και ύστερα πάλι να αφαιρεθούν τα όμοια από τα όμοια μέχρι να παραμείνει ένα μόνο είδος σε κάθε μέρος. Αν χρειαστείς να εξασκηθείς σε αυτήν τη δραστηριότητα στις υποστάσεις των προτάσεων, μέχρι που να παραμείνει ένα είδος ίσο προς ένα είδος, στη συνέχεια θα σου δείξω επίσης πώς λύνεται η περίπτωση στην οποία έχουν παραμείνει δύο είδη ίσα προς ένα μόνο είδος.

Στο απόσπασμα αυτό ο Διόφαντος διατυπώνει δυο βασικούς κανόνες απλοποίησης των εξισώσεων:

- «Από ομοίων όμοια»
- «Κοινή προσκείσθω η λήψις»

Οι κανόνες αυτοί υποδηλώνουν την αφαίρεση ομοίων και ίσου πλήθους όρων από τα δυο μέρη μιας εξίσωσης ή την πρόσθεση ενός αφαιρούμενου όρου σε αυτά. Για παράδειγμα, η εξίσωση:

$$400 - 4x = x + 20$$

απλοποιείται στη μορφή $5x = 380$ σε δύο βήματα: αρχικά εφαρμόζεται ο δεύτερος κανόνας και προστίθεται και στα δύο μέρη η «λήψις» $4x$, οπότε γίνεται $400 = 5x + 20$, ενώ στη συνέχεια εφαρμόζεται ο πρώτος κανόνας και αφαιρούνται «όμοια από όμοια», δηλαδή 20 μονάδες από τις 400 και 20 μονάδες κάθε μέρους. Βέβαια εκτός από αυτούς τους δυο κανόνες ο Διόφαντος χρησιμοποιεί στην επίλυση προβλημάτων και πολλούς άλλους τρόπους απλοποίησης των εξισώσεων. Για παράδειγμα στην $25x^2 = 200x$ που αναφέρθηκε παραπάνω εφαρμόζεται ο κανόνας «πάντα παρά x», που σημαίνει όλα να διαιρεθούν με x.

Βασικό ζήτημα για τον Διόφαντο είναι το αν διαθέτει μια γενική μέθοδο επίλυσης των τριώνυμων εξισώσεων, επίδειξη της οποίας γίνεται σε κάποιο από τα απολεσθέντα βιβλία. Στο παραπάνω απόσπασμα, υπόσχεται ότι αργότερα θα δείξει πως λύνονται οι εξισώσεις στις οποίες μετά την εφαρμογή των δυο βασικών κανόνων απλοποίησης έχουν παραμείνει «δυο είδη ίσα με ένα είδος», δηλαδή εξισώσεις όπως π.χ. $6x^2 + 3x = 7$ και $x^4 + 1 = 10x^2$, ωστόσο, η επίδειξη δεν εμφανίζεται σε κανένα από τα διασωθέντα βιβλία των Αριθμητικών. Παράλληλα, οι απλούστερες μορφές αυτής της κατηγορίας δηλαδή οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

$$\beta x + \gamma = \alpha x^2$$
$$\alpha x^2 + \beta x = \gamma$$
$$\alpha x^2 + \gamma = \beta x$$

εμφανίζονται αρκετές φορές στα βιβλία IV, V και VI αλλά αντιμετωπίζονται από τον Διόφαντο με περίεργο τρόπο, αφού είτε δίνει αμέσως τη λύση τους χωρίς καμιά ένδειξη του τρόπου υπολογισμού, είτε απορρίπτονται αμέσως ως αδύνατες αφού δεν έχουν θετική ρητή λύση, χωρίς αιτιολόγηση. Αυτή η στάση του υποδηλώνει ότι θεωρούσε τους αναγνώστες του εξοικειωμένους με τον τρόπο υπολογισμού των λύσεων και την συνθήκη ύπαρξης ρητών λύσεων. Το γεγονός περιπλέκεται ακόμη περισσότερο από το ότι δεν γνωρίζουμε την ακριβή σειρά των βιβλίων IV, V και VI μέσα στο σύνολο των 13 βιβλίων που αποτελούσαν την αρχική έκδοση των Αριθμητικών. Σήμερα θεωρείται ότι αυτά τα βιβλία βρίσκονταν, όχι αναγκαστικά με αυτή τη σειρά, μεταξύ των 6 τελευταίων βιβλίων της αρχικής έκδοσης (τρία από τα οποία θεωρούνται οριστικά απολεσθέντα).

Η ερμηνεία αυτή έχει υποστηριχθεί από τον Jacques Sesiano (1982, σελ 76-78) , καθώς η επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων ήταν πολύ γνωστή από την βαβυλωνιακή εποχή (τότε ακόμη κυριαρχούσε η άποψη της παραδοσιακής ιστοριογραφίας ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων) και, επίσης, η υπόσχεση που έδωσε ο Διόφαντος στη εισαγωγή των Αριθμητικών αφορούσε γενικότερες μορφές τριώνυμων εξισώσεων που ανάγονται στις προηγούμενες και ο τρόπος επίλυσής τους υπήρχε μάλλον σε κάποιο από τα ακόλουθα βιβλία. Νεώτερες ιστορικές ερμηνείες, όμως, όπως αναφέραμε παραπάνω, έχουν καταρρίψει την άποψη ότι οι Βαβυλώνιοι έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Από την άλλη είναι δύσκολο να γίνει αποδεκτό ότι ο Διόφαντος αφού εξέθεσε λεπτομερώς στη εισαγωγή των Αριθμητικών την επίλυση των εξισώσεων που ανάγονται σε διώνυμες, παρέκαμψε ως πολύ γνωστή τη διαδικασία επίλυσης των δευτεροβάθμιων τριώνυμων και υποσχέθηκε να επιδείξει αργότερα την επίλυση σύνθετων τριώνυμων που ανάγονται στις προηγούμενες. Σε κάθε περίπτωση, πριν καταφύγουμε στην εύκολη λύση ότι η επίδειξη αυτή υπήρχε σε κάποιο από τα απολεσθέντα βιβλία θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ο «περίεργος» τρόπος με τον οποίο ο Διόφαντος διαχειρίζεται την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων της μορφής:

$$\beta x + \gamma = \alpha x^2$$
$$\alpha x^2 + \beta x = \gamma$$
$$\alpha x^2 + \gamma = \beta x$$

Ας επανέλθουμε όμως στο πρόβλημα Ι-27, που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1. Αν γίνει ταυτόχρονη μελέτη του με τα προβλήματα Ι-28 και Ι-30 παρατηρούνται κάποια κοινά πολύ ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Το Ι-28 είναι το εξής:

Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι ώστε η πρόσθεση αυτών και η πρόσθεση των τετραγώνων τους να δίνει δοθέντες αριθμούς.

Η σύγχρονη αλγεβρική του αναπαράσταση είναι η εξής:

$$\begin{Bmatrix} \alpha + \beta = S \\ \alpha^2 + \beta^2 = Q \end{Bmatrix}$$

Για το πρόβλημα Ι-30 η διατύπωσή του και η αναπαράστασή του σε σύγχρονη αλγεβρική μορφή είναι:

Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι ώστε η διαφορά και ο πολλαπλασιασμός αυτών να δίνει δοθέντες αριθμούς.

$$\begin{Bmatrix} \alpha - \beta = D \\ \alpha\beta = P \end{Bmatrix}$$

Και στα τρία αυτά προβλήματα ως λύση προκύπτουν οι αριθμοί 12 και 8, γεγονός που υποδηλώνει ότι δεν ήταν τυχαία τα δεδομένα τους, αλλά υπολογίστηκαν αναδρομικά με αφετηρία τη συγκεκριμένη λύση. Επίσης και στα τρία ο Διόφαντος χρησιμοποιεί την ίδια μέθοδο επίλυσης. Με επιλογή της ημιδιαφοράς ή του ημιαθροίσματος των δυο ζητούμενων αριθμών ως αγνώστου προκύπτει αναπαράσταση των ζητούμενων αριθμών συναρτήσει αυτών και από τη δεύτερη συνθήκη κάθε προβλήματος κατασκευάζεται η αντίστοιχη εξίσωση. Η συγκεκριμένη επιλογή του αγνώστου γίνεται σε κάθε περίπτωση για να εξασφαλιστεί τελική εξίσωση στην οποία ένα «είδος» θα είναι ίσο με ένα «είδος» που είναι εύκολα επιλύσιμες και δεν απαιτούν χρήση διακρίνουσας. Με την συγκεκριμένη επιλογή αγνώστου και μεθόδου ο Διόφαντος δείχνει την απροθυμία του να εξηγήσει στο πρώτο βιβλίο των Αριθμητικών τη διαδικασία επίλυσης των τριώνυμων εξισώσεων, που έχει υποσχεθεί στην αρχή. Η μέθοδος επίλυσης των τριών προβλημάτων, ιδιαίτερα η συμμετρική αναπαράσταση των ζητούμενων αριθμών με χρήση του ημιαθροίσματος και της ημιδιαφοράς τους, παραπέμπει στις αλγεβρικές ερμηνείες των Βαβυλωνίων που παρουσιάστηκαν νωρίτερα. Ορισμένοι υποστηρίζουν ότι αυτό το στοιχείο φανερώνει την πιθανή επίδραση της βαβυλωνιακής μαθηματικής παράδοσης στο έργο του Διόφαντου. Ο J.Sessiano (1982, σελ 237) έχει γράψει το εξής για το συγκεκριμένο θέμα:

Επώνυμο

Δεν πρέπει να οδηγηθεί κανείς στο συμπέρασμα, με βάση την ύπαρξη ορισμένων τύπων προβλημάτων που ανευρίσκονται τόσο στα μαθηματικά της Μεσοποταμίας όσο και στα Αριθμητικά, ότι ο Διόφαντος ακολουθούσε κάποια «Μεσοποτάμια παράδοση». Διότι, πρώτον, αυτά τα κοινά προβλήματα περιορίζονται στο στοιχειώδες Βιβλίο Ι... Δεύτερον, είναι βεβαίως αληθινό ότι ένα μεγάλο μέρος των Αριθμητικών στηρίζεται τελικά σε στοιχειώδεις ταυτότητες οι οποίες ήταν, εξ αιτίας της απλότητας τους, επίσης γνωστές στους Μεσοποτάμιους, όμως ήταν ακριβώς η ιδιοφυία του Διόφαντου (και των Ελλήνων προδρόμων του) εκείνη η οποία του επέτρεψε να παράγει από αυτές τις λίγες ταυτότητες ένα μεγάλο αριθμό αλγεβρικών προβλημάτων, φτάνοντας, ειδικά στα τελευταία βιβλία του, σε ένα υψηλό επίπεδο δυσκολίας.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον ζήτημα είναι η γενικότητα της μεθόδου επίλυσης του Ι-27(όπως και των Ι-28, Ι-30, ΙΙ-8, ΙΙ-19). Τα προβλήματα αυτά διατυπώνονται με απόλυτα γενικό τρόπο, γεγονός που εύκολα μας κάνει να περιμένουμε μια γενική λύση αντίστοιχα. Για παράδειγμα στο Ι-27 που έχει τη γενική διατύπωση:

$$\begin{Bmatrix} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{Bmatrix}$$

μπορεί να οδηγηθούμε στο πρόβλημα εύρεσης ριζών της εξίσωσης: $x^2 - Sx + P = 0$ και άρα στις γενικές λύσεις:

$$\alpha = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

$$\beta = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} = \frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

Τα χρησιμοποιηθέντα ωστόσο μαθηματικά εργαλεία και μέσα αναπαράστασης δεν ήταν γνωστά στον Διόφαντο. Η γενικότητα των παραπάνω τύπων είναι χαρακτηριστικό των Μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα. Ο Διόφαντος διαφοροποιείται από τους σημερινούς μαθηματικούς στο ότι αμέσως μετά τη γενική, ρητορική διατύπωση του Ι-27 επιλέγει συγκεκριμένους αριθμούς για το άθροισμα και το γινόμενο των ζητούμενων αριθμών, με αποτέλεσμα η τελική λύση του γενικού προβλήματος με δυο αγνώστους να συνίσταται από δύο συγκεκριμένους αριθμούς. Αναδύεται, επομένως, το ερώτημα: Πώς συμβιβάζεται αυτή η ειδική λύση με τη γενικότητα που απορρέει από την διατύπωση του προβλήματος;

Για να κατανοήσουμε τη ιστορική διάσταση αυτού του ερωτήματος βοηθούν τα επόμενα αποσπάσματα των έργων των John Wallis και Leonhard Euler. Ο Wallis (Witmer, 1983, σελ 5) περιγράφει τη διαφορά μεταξύ της αριθμητικής λύσης ενός προβλήματος και της αλγεβρικής λύσης που χρησιμοποιεί εγγράμματο συμβολισμό:

> *Στην αριθμητική λύση, οι αρχικοί αριθμοί εξαφανίζονται καθώς ενσωματώνονται σε εκείνους που παράγονται από αυτούς με τις διάφορες πράξεις έτσι ώστε να μην μπορεί κάποιος να τους διακρίνει εύκολα στο αποτέλεσμα. Στην αλγεβρική λύση όμως διατηρούνται μέχρι το τέλος, όπως και οι διάφορες πράξεις μεταξύ τους, έτσι ώστε να εξυπηρετούν όχι μόνο ως λύση του συγκεκριμένου ερωτήματος που τέθηκε, αλλά και ως γενική λύση παρόμοιων ερωτημάτων με άλλες ποσότητες, όσο κι αν αυτές έχουν μεταβληθεί.*

Το κείμενο αυτό γίνεται πιο εύκολα κατανοητό αν λάβουμε υπόψη μας ότι ο Wallis ανήκε στη γενιά των μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα οι οποίοι πρώτοι αξιοποίησαν τα πλεονεκτήματα της συμβολικής άλγεβρας του Viète με το έργο του *Εισαγωγή στην Αναλυτική Τέχνη*. Με την συμβολική άλγεβρα τέθηκε η βάση για την δημιουργία της αναλυτικής γεωμετρίας και του απειροστικού λογισμού της σύγχρονης εποχής. Ο Wallis εκφράζει στο απόσπασμα αυτό την γενικότητα που έφερε η χρήση εγγράμματου συμβολισμού για την αναπαράσταση των δεδομένων και την επίλυση ενός προβλήματος. Στο έργο του Διόφαντου υπάρχει μια διαφορετική γενικότητα, που καθορίζεται από το γενικό χαρακτήρα της μεθόδου επίλυσης και όχι των αποτελεσμάτων. Ο Leonhard Euler (Heath, 1964, σελ 56) έχει τονίσει την σημασία αυτού του ζητήματος στο έργο του *Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum* (*Γενική επίλυση μερικών Διοφαντικών εξισώσεων*) το 1761:

> *Είναι αλήθεια ότι ο Διόφαντος δίνει μόνο τις πιο ειδικές λύσεις όλων των ζητημάτων που διαπραγματεύεται και γενικά ικανοποιείται με το να υποδεικνύει αριθμούς που παρέχουν μια μεμονωμένη λύση. Αλλά δεν πρέπει να δημιουργηθεί η εντύπωση ότι η μέθοδός του περιοριζόταν σε αυτές τις πολύ ειδικές λύσεις. Στην εποχή του η χρήση των γραμμάτων για τη δήλωση των απροσδιόριστων αριθμών δεν είχε ακόμη καθιερωθεί και, κατά συνέπεια, οι πιο γενικές λύσεις τις οποίες είμαστε σε θέση τώρα να δίνουμε με τη βοήθεια αυτής της σημειογραφίας, δε θα μπορούσαν να απαιτηθούν από αυτόν. Όμως οι πραγματικές μέθοδοι που χρησιμοποιεί για να επιλύει τα προβλήματά του είναι εξίσου γενικές με εκείνες που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ή μάλλον θα πρέπει να παραδεχθούμε ότι σε αυτό το είδος της ανάλυσης ουσιαστικά δεν έχει επινοηθεί ακόμη καμία μέθοδος της οποίας ευδιάκριτα ίχνη να μην ανευρίσκονται στον Διόφαντο.*

Συμπερασματικά, λαμβάνοντας υπόψη μας όλα τα παραπάνω μπορεί να υποστηριχθεί ότι η γενικότητα της λύσης του Διόφαντου δεν μπορεί να τεθεί σε σχέση με γενικά αποτελέσματα, αλλά σε σχέση με την συχνή χρήση της διαδικασίας επίλυσης. Στο I-27 , δηλαδή, η γενικότητα της μεθόδου επίλυσης εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι η ίδια η μέθοδος μπορεί να επαναληφθεί με

διαφορετικά αριθμητικά δεδομένα και να οδηγήσει σε μια νέα λύση, αρκεί τα αριθμητικά δεδομένα να έχουν επιλεγεί κατάλληλα έτσι ώστε να δίνουν ρητές λύσεις.

2.2.4. Σχέσεις με τη βαβυλωνιακή και την αραβική άλγεβρα.

Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον ζήτημα που αναφέρθηκε παραπάνω είναι το κατά πόσο συνδέεται το έργο του Διόφαντου με την βαβυλωνιακή άλγεβρα. Κατά τον van der Waerden, σε ότι αφορά του προδρόμους του Διόφαντου στο πεδίο των απροσδιόριστων εξισώσεων γνωρίζουμε πολύ λίγα. Είναι ήδη γνωστό, κατ' αυτόν, ότι οι Βαβυλώνιοι ήταν γνώστες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης την οποία συναντάμε εκ νέου στο Διόφαντο. Ήδη από την εποχή του Αρχιμήδη στην Ελλάδα ήταν πολύ διαδεδομένα τα μικρά αλγεβρικά προβλήματα, γραμμένα σε έμμετρη μορφή, όπως ο επιτάφιος που αναφέραμε παραπάνω. Σε αντίθεση όμως με τους άλλους, ο Διόφαντος διατυπώνει τα προβλήματα σχεδόν πάντοτε χωρίς ιστορίες, με μορφή αριθμοθεωρητική.

Εικάζεται, λοιπόν, ότι η παράδοση αυτών των αλγεβρικών μεθόδων δεν διακόπηκε ποτέ και παράλληλα με την παράδοση της ελληνικής γεωμετρίας να υπήρχε πάντοτε μια παράδοση μικρών αλγεβρικών προβλημάτων και επιλυτικών μεθόδων που κατάγεται από τη βαβυλωνιακή άλγεβρα και καταλήγει στην αραβική άλγεβρα, με επιδράσεις στον ελληνικό πολιτισμό, στην Κίνα και την Ινδία. Πρόκειται για μια αίσθηση συγγένειας που αισθάνεται κανείς όταν, γνωρίζοντας τα σφηνοειδή κείμενα, κοιτάξει στον Ήρωνα, στον Διόφαντο, στην κινεζική Κλασική αριθμητική, στο *Αριαμπατίγια* του Αριαμπάτα και στην Άλγεβρα του al-Khwārizmī. Όλες οι αραβικές πηγές παρουσιάζουν τον al-Khwārizmī ως τον πρώτο συγγραφέα άλγεβρας, όμως η άλγεβρά του είναι τόσο ώριμη που είναι αδύνατο να υποθέσουμε ότι ο ίδιος τα ανακάλυψε όλα. Η άλγεβρα του al-Khwārizmī δεν μπορεί να εξηγηθεί με βάση τις γνωστές ελληνικές και ινδικές πηγές αλλά δίνει την εντύπωση ότι άντλησε από αρχαιότερες πηγές οι οποίες συνδέονται πιθανώς με τη βαβυλωνιακά άλγεβρα.

Τα προβλήματα 27-30 του πρώτου βιβλίου των Αριθμητικών συσχετίζονται στενά, χωρίς καμιά αμφιβολία, με βαβυλωνιακά προβλήματα. Το ίδιο και οι λύσεις. Πρόκειται για τα προβλήματα:

I.27. Να βρεθούν δύο αριθμοί, των οποίων δίνεται το άθροισμα και το γινόμενο,

I.28. Να βρεθούν δύο αριθμοί, των οποίων δίνεται το άθροισμα και το άθροισμα των τετραγώνων,

I.29. Να βρεθούν δύο αριθμοί, των οποίων δίνεται το άθροισμα και η διαφορά των τετραγώνων,

I.30. Να βρεθούν δύο αριθμοί, των οποίων δίνεται η διαφορά και το γινόμενο.

Η μέθοδος επίλυσης είναι ίδια με τη βαβυλωνιακή μέθοδο. Όταν δίνεται το άθροισμα $2a$, ο Διόφαντος θέτει τον ένα από τους αριθμούς ίσο με $a+s$, τον άλλο ίσο με $a-s$ και, έτσι, σχηματίζει μια εξίσωση ως προς s. Όταν δίνεται η διαφορά 2β, θέτει τους δύο αριθμούς ίσους με $s+\beta$ και $s-\beta$ αντίστοιχα.

Ο Διόφαντος ανάγει όλα τα προβλήματα σε εξισώσεις με έναν άγνωστο. Είτε εκφράζει όλους τους αγνώστους συναρτήσει ενός, είτε τους δίνει αυθαίρετες τιμές που στη συνέχεια θα αλλάξει όπου είναι απαραίτητο, προκειμένου να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του προβλήματος. Ο al-Khwārizmī, ομοίως, χωρίς να έχει στηριχτεί στο Διόφαντο, ανάγει συχνά όλα του τα προβλήματα σε εξισώσεις με έναν άγνωστο.

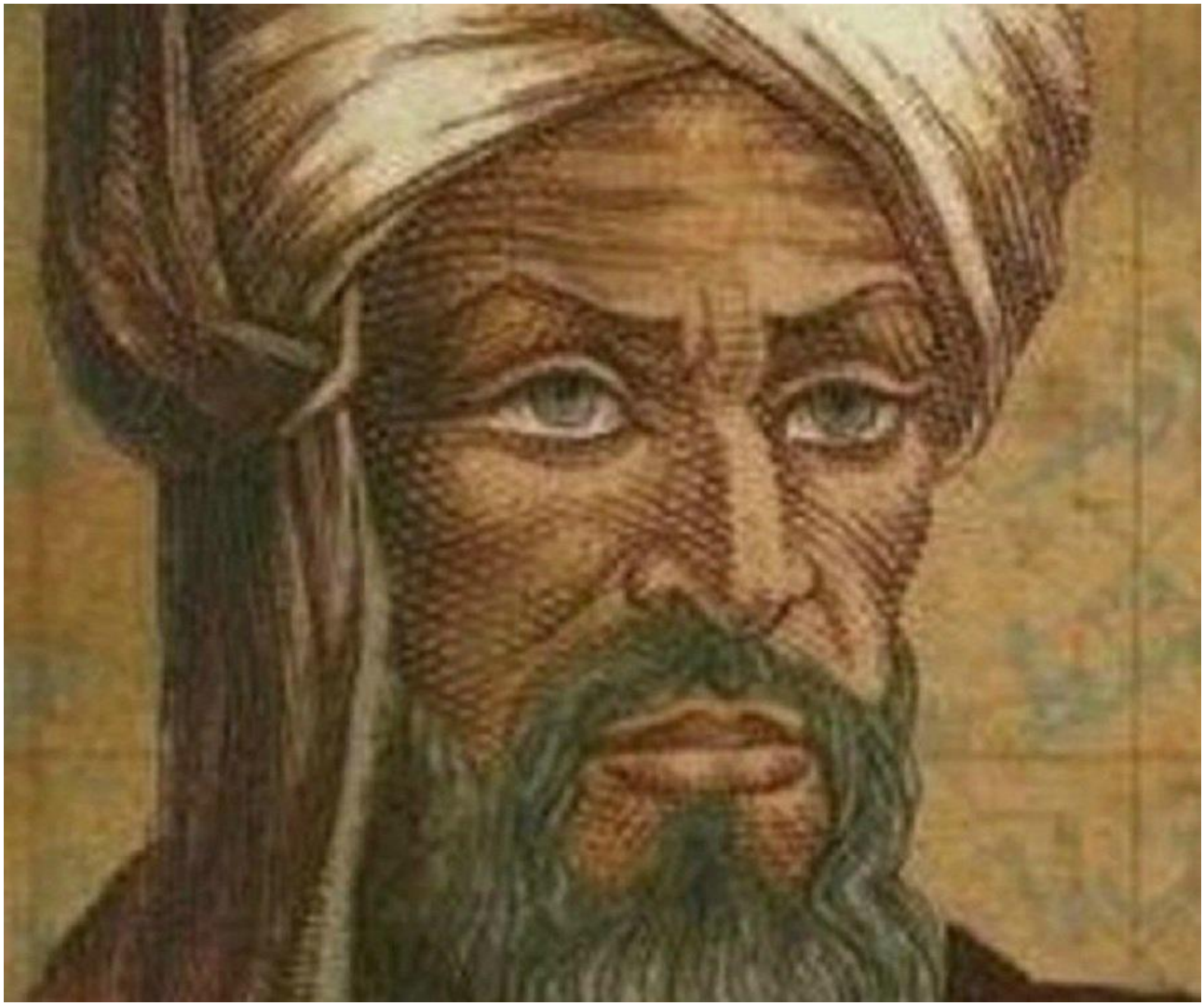
Όπως ο al-Khwārizmī έτσι και ο Διόφαντος χρησιμοποιεί ειδικά ονόματα για τις δυνάμεις του αγνώστου. Επιπλέον, χρησιμοποιεί ονόματα για τις αντίστροφες δυνάμεις, όπως S^{-1}, S^{-2}, κλπ. Ορισμένες φορές για το s το αποκαλεί πλευρά όπως ο al-Khwārizmī. Για να δηλώσει την πρόσθεση παραθέτει απλώς τους όρους τον έναν κατόπιν του άλλου, όπως λ.χ.

$$\Delta^{\Upsilon}\overline{\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\,\iota\overline{\beta} = 3s^2 + 12$$

Δεν γράφει απλώς «12», αλλά «12 μονάδες». Παρομοίως, ο al-Khwārizmī γράφει «12 ντιράμ». Για την αφαίρεση ο Διόφαντος χρησιμοποιεί ένα ορισμένο σημείο, που μοιάζει με αντεστραμμένο «Ψ». Σε κάθε άλλη περίπτωση, τον πολλαπλασιασμό, την ισότητα, το «μεγαλύτερο από» και το «μικρότερο από» τα εκφράζει με λέξεις όπως αργότερα οι Άραβες και πιο μετά οι Ιταλοί. Ο al-Khwārizmī δεν χρησιμοποιεί τις συντομογραφίες του Διόφαντου. Η άλγεβρά του είναι εντελώς «ρητορική» και επομένως πιο πρωτόγονη από αυτήν του Διόφαντου.

Νεότερες μελέτες, ωστόσο, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι μάλλον αγνοούμε τη σχέση του Διόφαντου, τόσο με τις προελληνικές μαθηματικές παραδόσεις όσο και με την Ελληνική της κλασικής περιόδου, από την οποία το έργο του έχει εμφανώς επηρεαστεί. Όπως αναφέραμε παραπάνω, στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου συναντούμε για πρώτη φορά τον ορισμό μιας έννοιας "αγνώστου" αριθμού, ένα συγκροτημένο σύστημα συμβολικής αναπαράστασης σχέσεων που περιέχουν τον "άγνωστο" και τις δυνάμεις του, και ορισμένους γενικούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων. Όλα αυτά τα αλγεβρικά εργαλεία χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων θεωρητικής αριθμητικής στο πεδίο των θετικών ρητών αριθμών, χωρίς γεωμετρικές ερμηνείες ή πρακτικές εφαρμογές. Αν ο Διόφαντος είχε «προετοιμάσει» το δρόμο για τον al–Khwarizmi, τότε η απολύτως «ρητορική» άλγεβρα, και με Ευκλειδείου τύπου γεωμετρικές ερμηνείες, του τελευταίου θα είχε διαφορετική μορφή. Αντίθετα, ο al-Khwarizmi φαίνεται ότι εκπροσωπούσε στο πλαίσιο των Ισλαμικών Μαθηματικών μια παράδοση με Ινδικές ή Βαβυλωνιακές ρίζες, προσανατολισμένη προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς και τις πρακτικές εφαρμογές (όπως θα δούμε παρακάτω, το μεγαλύτερο μέρος αυτού του βιβλίου αφιερώνεται σε προβλήματα εμπορικών συναλλαγών, μετρήσεων και κληρονομιών). Η παράδοση αυτή αναπτύχθηκε ως ένα σημείο ανεξάρτητα από το κυρίαρχο πρότυπο της «επιστημονικής γνώσης», που εκπροσωπούσαν στο Ισλάμ τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και οι μεταφράσεις τους στην Αραβική γλώσσα.

2.3. Ο al-Khwārizmī



Εικόνα 2

Το πλήρες όνομά του είναι Muhammad ibn Mūsā al–Khwarizmi. Μόνο κατά προσέγγιση τοποθετούμε το έτος γέννησης πριν το 800 μΧ και το θάνατό του μετά το έτος 847 μΧ. Το όνομα του al-Khwārizmī και οι τίτλοι κάποιων έργων του αναφέρονται από τους αλγεβριστές Abū Kamil και Sinān ibn al-Fath αλλά και από αστρονόμους όπως ο al-Birūni και ο al-Hāshimi. Όμως στα έργα αυτών των επιστημόνων δεν βρίσκουμε κάποια σημαντική πληροφορία για την ζωή του. Με βάση το επίθετο "al–Khwarizmi" σαν τόπος καταγωγής του θεωρείται συνήθως η Khwarizm η οποία βρισκόταν στην περιοχή της σύγχρονης πόλης Κίβα, νότια της λίμνης Αράλης στην κεντρική

Ασία. Πάντως δεν είναι βέβαιο, ότι καταγόταν από την Khwarizm. Πιθανολογείται ότι επί του χαλίφη αλ-Μαμούν (813-833μΧ), ο al–Khwarizmi απασχολούνταν ως αστρονόμος και μαθηματικός στην βιβλιοθήκη "bayt al-hikma" που σημαίνει "οίκος της σοφίας".

Τα έργα του αφορούν εκτός από τα μαθηματικά και την αστρονομία, τον καθορισμό του ημερολογίου, την γεωγραφία καθώς και την ιστορία. Έγραψε επίσης για μηχανικές συσκευές όπως ο αστρολάβος και το ηλιακό ρολόι και τέλος, βοήθησε στον καθορισμό της περιμέτρου της Γης και στη σύνταξη ενός παγκόσμιου χάρτη για τον Αλ-Μαμούν, επιβλέποντας 70 γεωγράφους.

2.3.1. Η al-jabr

Ο τίτλος του πιο σημαντικού έργου του al-Khwārizmī, *al-jabr wa-l-mugābala*, μας έδωσε μια δημοφιλή λέξη, την άλγεβρα, διότι αργότερα από το βιβλίο αυτό, οι Ευρωπαίοι ήρθαν σε επαφή με το συγκεκριμένο κλάδο των μαθηματικών.

Από μερικές απόψεις το έργο του al-Khwārizmī αποτελεί ένα "αναμάσημα" του έργου του Διόφαντου. Κατ' αρχήν, το επίπεδό του είναι πολύ πιο χαμηλό από αυτό που συναντάμε στα διοφαντικά προβλήματα και δεύτερον, η άλγεβρα του al-Khwārizmī είναι σαφώς ρητορική εφόσον ο συγγραφέας δεν χρησιμοποιεί καμία συντόμευση ή σύντμηση όπως κάνουν ο Διόφαντος στην Αριθμητική του και ο Βραχμαγκούπτα. Ο al-Khwārizmī γράφει τους αριθμούς με λέξεις και όχι με σύμβολα. Είναι μάλλον απίθανο, να γνώριζε ο al-Khwārizmī το έργο του Διόφαντου αλλά πρέπει να ήταν εξοικειωμένος τουλάχιστον με τα τμήματα της δουλειάς του Βραχμαγκούπτα που αναφέρονταν στην αστρονομία και στους αλγόριθμους. Παρόλα αυτά, ούτε ο al-Khwārizmī ούτε κανείς άλλος Άραβας συγγραφέας χρησιμοποίησε συντομεύσεις για τους όρους στους οποίους αναφερόταν καθώς και για τους αρνητικούς αριθμούς.

Η al-jabr, όμως, βρίσκεται πολύ πιο κοντά στη σημερινή άλγεβρα απ' ότι τα έργα του Διόφαντου ή του Βραχμαγκούπτα, γιατί το βιβλίο αυτό δεν περιέχει δύσκολα προβλήματα της απροσδιόριστης ανάλυσης αλλά μια απλή περιγραφή της επίλυσης εξισώσεων, κυρίως δευτεροβάθμιων. Γενικά, οι Άραβες αγαπούσαν τα σαφή επιχειρήματα, από την αρχική πρόταση έως την τελευταία (ή αλλιώς από τα δεδομένα έως το συμπέρασμα) καθώς και τη συστηματική οργάνωση. Σε αυτούς του τομείς, όμως δεν διακρίνονταν ούτε ο Διόφαντος ούτε οι Ινδοί.

Η al-jabr έφτασε σε εμάς σε δύο αντίτυπα: ένα λατινικό και ένα αραβικό. Από το λατινικό, όμως, *Liber algebrae et almucabala,* λείπει και ένα μέρος του αραβικού χειρόγραφου. Για παράδειγμα, λείπει η εισαγωγή. Αυτό μπορεί να έγινε γιατί ο πρόλογος του συγγραφέα στα αραβικά εξυμνούσε το Μωάμεθ και τον Αλ Μαμούν, τον 'Διοικητή των Πιστών'. Κατά τον al-Khwārizmī, ο τελευταίος τον ενθάρρυνε να φτιάξει ένα έργο, όπου χρησιμοποιώντας τους κανόνες της Συμπλήρωσης και Ελάττωσης, να εστιάσει στο κομμάτι της αριθμητικής που χρειάζονται οι άνθρωποι σε περιπτώσεις κληρονομιάς, μοιρασιάς περιουσίας, δικαστικών αγωγών και εμπορικών συναλλαγών καθώς και στις συναλλαγές μεταξύ τους ή στις μετρήσεις εκτάσεων, στη διάνοιξη καναλιών, στους γεωμετρικούς υπολογισμούς και σε άλλες περιπτώσεις.

2.3.2. Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις

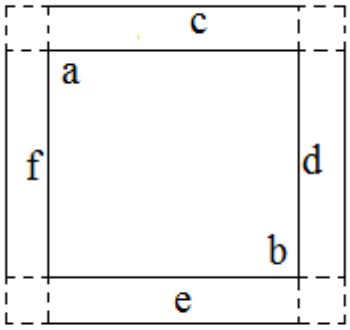
Η λατινική μετάφραση της Άλγεβρας του al-Khwārizmī ξεκινά με μια σύντομη εισαγωγική περιγραφή της αρχής θέσης για τους αριθμούς και προχωρεί στην επίλυση (σε έξι μικρά κεφάλαια) έξι ειδών εξισώσεων που περιέχουν ρίζες, τετράγωνα και αριθμούς (δηλαδή, x, x^2 και αριθμούς). Το κεφάλαιο I καλύπτει σε τρεις μικρές παραγράφους, την περίπτωση όπου τα τετράγωνα ισούνται με ρίζες, δηλαδή, σήμερα θα γράφαμε $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ και $5x^2 = 10x$, δίνει δε τις απαντήσεις, $x = 5$, $x = 12$ και $x = 2$ αντίστοιχα. (Δεν θεωρεί ρίζα την $x = 0$.) Το κεφάλαιο II αναφέρεται στην περίπτωση όπου τα τετράγωνα ισούνται με αριθμούς και το κεφάλαιο III στην περίπτωση όπου οι ρίζες ισούνται με αριθμούς· και εδώ συναντάμε τρία παραδείγματα σε κάθε κεφάλαιο, τα οποία καλύπτουν τις περιπτώσεις όπου ο συντελεστής της μεταβλητής ισούται, είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας. Τα κεφάλαια IV, V και VI είναι πιο ενδιαφέροντα, διότι καλύπτουν τις τρεις κλασικές περιπτώσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τρεις όρους:
(1) τετράγωνα και ρίζες ίσες με αριθμούς,
(2) τετράγωνα και αριθμοί ίσοι με ρίζες και
(3) ρίζες και αριθμοί ίσοι με τετράγωνα.

Οι λύσεις θυμίζουν οδηγίες για τη συμπλήρωση τετραγώνου σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Το κεφάλαιο IV, για παράδειγμα, περιέχει τα τρία παραδείγματα $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ και $\frac{x^2}{2} + 5x = 28$. Σε όλες τις περιπτώσεις αναφέρεται μόνο η θετική απάντηση. Στο κεφάλαιοV υπάρχει μόνον ένα παράδειγμα, το $x^2 + 21 = 10x$, αλλά δίνονται και οι λύσεις 3 και 7, σύμφωνα με τον τύπο $x = 5 \mp \sqrt{25 - 21}$. Εδώ ο al-Khwārizmī τονίζει ότι η διακρίνουσα πρέπει να είναι θετική.

Η περιγραφή του al-Khwārizmī ήταν τόσο συστηματική και λεπτομερής ώστε οι αναγνώστες του δεν πρέπει να συναντούσαν ιδιαίτερα προβλήματα στην παρακολούθηση των λύσεων. Για το λόγο αυτό, ο al-Khwārizmī δικαιούται να ονομάζεται "ο πατέρας της άλγεβρας". Παρόλα αυτά, δεν μπορούμε να μην αναρωτηθούμε πώς προέκυψε η αραβική έμπνευση για την άλγεβρα. Είναι αδύνατο, όμως, να δώσουμε κατηγορηματική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα· η αυθαιρεσία, όμως, των κανόνων και της αυστηρά αριθμητικής μορφής των έξι κεφαλαίων μας φέρνει στο νου τα αρχαία βαβυλωνιακά και μεσαιωνικά ινδικά μαθηματικά. Ο αποκλεισμός της απροσδιόριστης ανάλυσης, και η αποφυγή οποιασδήποτε σύντμησης οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ίσως η Μεσοποταμία να είναι μια πιθανή πηγή έμπνευσης.

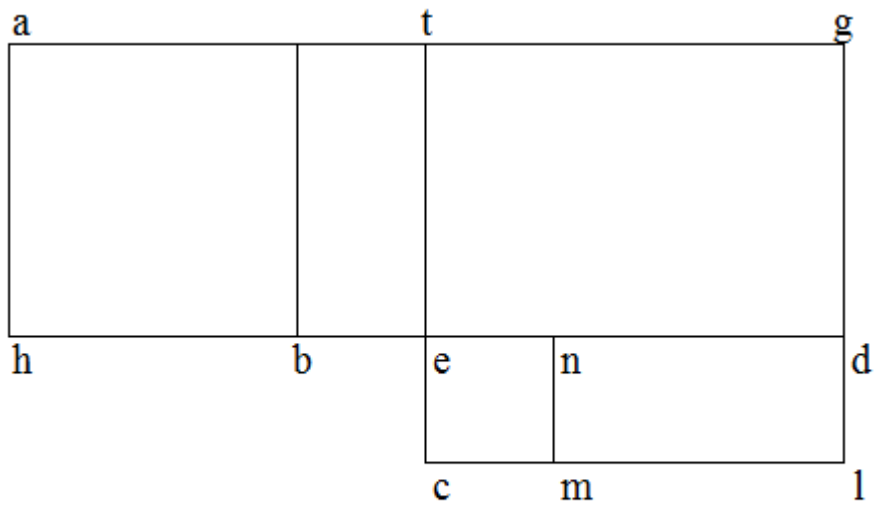
2.3.3 Οι γεωμετρικές βάσεις

Η Άλγεβρα του al-Khwārizmī προδίδει τις αναμφισβήτητες ελληνικές επιρροές που έχει δεχθεί ο συγγραφέας της· οι πρώτες, όμως, γεωμετρικές αποδείξεις έχουν λίγα κοινά στοιχεία με τα κλασσικά ελληνικά μαθηματικά. Ο al-Khwārizmī, για την εξίσωση $x^2 + 10x = 39$, σχεδίασε ένα τετράγωνο αb για να παραστήσει το x^2 και τοποθέτησε στις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου τα ορθογώνια c, d, e και f, πλάτους $2\frac{1}{2}$ μονάδων, το καθένα.



Σχήμα 8

Για να συμπληρώσουμε το μεγαλύτερο τετράγωνο πρέπει να προσθέσουμε τα τέσσερα μικρότερα γωνιακά τετράγωνα (που σημειώνονται με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 7), το καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν $6\frac{1}{4}$ μονάδες, ή 25 μονάδες και καταλήγουμε σε ένα τετράγωνο συνολικού εμβαδού $39 + 25 = 64$ μονάδων, όπως φαίνεται στο δεύτερο μέλος της αρχικής εξίσωσης). Άρα η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου πρέπει να είναι 8 μονάδες, από την οποία αφαιρούμε 2 φορές $2\frac{1}{2}$ ή 5 μονάδες για να καταλήξουμε στην τιμή $x = 3$, έτσι αποδεικνύεται ότι η απάντηση του βιβλίου IV είναι σωστή.



Σχήμα 9

Οι γεωμετρικές αποδείξεις των κεφαλαίων V και VI είναι λίγο πιο πολύπλοκες. Ο συγγραφέας αναφερόμενος στην εξίσωση $x^2+21=10x$, σχεδιάζει το τετράγωνο ab για να παραστήσει 21 μονάδες. Τότε το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιλαμβάνει το τετράγωνο και το ορθογώνιο bg πρέπει να έχει εμβαδό ίσο με $10x$, ώστε η πλευρά ag ή hd πρέπει να είναι 10 μονάδες. Στη συνέχεια διχοτομούμε την hd στο e, φέρουμε την κάθετη et στην hd, προεκτείνουμε την te έως το c έτσι ώστε $tc=tg$ και συμπληρώνουμε τα τετράγωνα tclg, cmne (σχήμα 8) το εμβαδό tb θα ισούται με το md. Το τετράγωνο tl, όμως, είναι ίσο με 25 και ο γνώμονας tenmlg είναι ίσο με 21 (εφόσον ο γνώμονας είναι ισεμβαδικός με το ορθογώνιο bg). Άρα το τετράγωνο nc είναι 4 και η πλευρά του ec ισούται με 2. Εφόσον $ec=be$ και $he=5$ βλέπουμε ότι $x=hb=5-2=3$. Άρα η αριθμητική λύση του κεφαλαίου V είναι σωστή. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί μια ελαφρά τροποποιημένη διαδικασία για τη ρίζα $x=5+2=7$, καθώς και ένα ανάλογο σχήμα για τη γεωμετρική απόδειξη του αποτελέσματος που δίνεται αλγεβρικά στο κεφάλαιο VI.

2.3.4. Τα αλγεβρικά προβλήματα

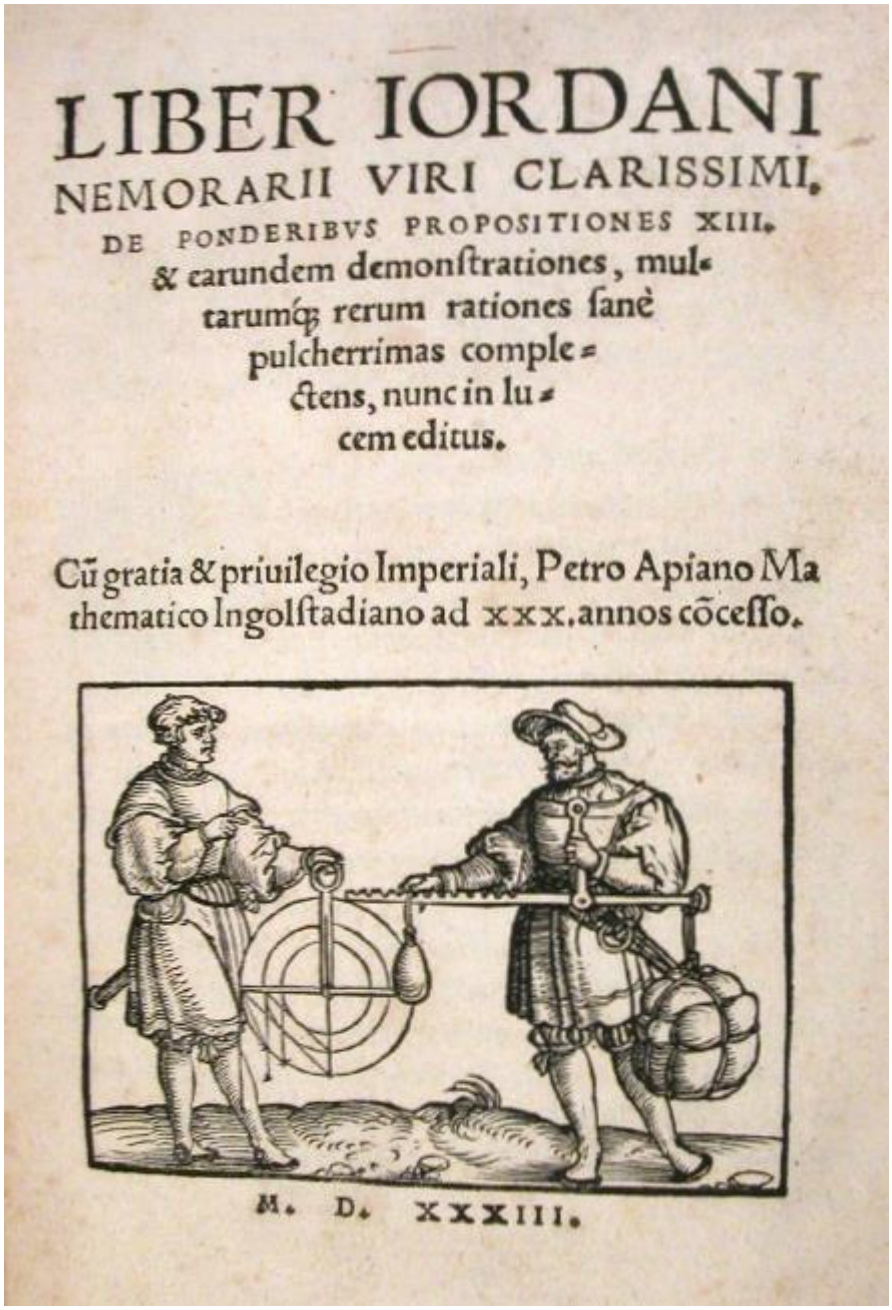
Αν συγκρίνουμε το σχήμα 8, που προέρχεται από την Άλγεβρα του al-Khwārizmī με τα σχήματα που συναντάμε στα Στοιχεία του Ευκλείδη, τα αναφερόμενα στην ελληνική γεωμετρική άλγεβρα συμπεραίνουμε ότι η αραβική άλγεβρα είχε πολλά κοινά με την ελληνική γεωμετρία· παρόλα αυτά, το πρώτο αριθμητικό τμήμα της Άλγεβρας του al-Khwārizmī είναι εντελώς ξένο προς

την ελληνική σκέψη. Πιθανώς, στη Βαγδάτη συνέβη ότι ακριβώς συμβαίνει σε ένα κοσμοπολίτικο πνευματικό κέντρο. Ίσως, ο al-Khwārizmī να είναι τυπικό παράδειγμα του εκλεκτικισμού των Αράβων. Κατά πάσα πιθανότητα, δανείστηκε το σύστημα αρίθμησής του από την Ινδία, τη συστηματική αλγεβρική λύση των εξισώσεων από τη Μεσοποταμία και το λογικό γεωμετρικό πλαίσιο των λύσεών του από την Ελλάδα.

Η Άλγεβρα του al-Khwārizmī δεν αναφέρεται μόνο στην επίλυση εξισώσεων, θέμα που καλύπτει το ήμισυ περίπου του έργου. Συναντάμε και κανόνες για υπολογισμούς διωνυμικών εκφράσεων, για παράδειγμα, συμπεριλαμβανομένων και γινομένων, όπως $(10+2)(10-1)$ και $(10+x)(10-\mathrm{x})$. Μολονότι οι Άραβες απέρριπταν τις αρνητικές ρίζες και τα αρνητικά μεγέθη, ήταν εξοικειωμένοι με τους κανόνες που ισχύουν για τους αριθμούς, που σήμερα ονομάζουμε προσημασμένους. Ο συγγραφέας αναφέρει, ακόμη, και εναλλακτικές γεωμετρικές αποδείξεις για ορισμένες από τις έξι περιπτώσεις εξισώσεων. Ως παράδειγμα για το πέμπτο κεφάλαιο, ο al-Khwārizmī ζητά τη διαίρεση του 10 σε δύο μέρη ώστε ‘το ‘άθροισμα των τετραγώνων των δυο αριθμών να ισούται με 58’. Η διασωζόμενη αραβική εκδοχή του έργου, αλλά όχι και η λατινική, περιέχει επίσης μια εκτεταμένη αναφορά σε προβλήματα κληρονομίας, όπως το παρακάτω:

> *Ένας πατέρας πεθαίνει, αφήνοντας δυο γιους πίσω του. Ένας ξένος κληρονομεί το ένα τρίτο του κεφαλαίου του. Ο πατέρας αφήνει δέκα* dirhmes *περιουσίας και απαιτεί δέκα* dirhmes *από τον ένα από τους δυο γιούς του.*

2.4. O Jordanus de Nemore



LIBER IORDANI
NEMORARII VIRI CLARISSIMI,
DE PONDERIBVS PROPOSITIONES XIII.
& earundem demonſtrationes, mul-
tarumq; rerum rationes ſanè
pulcherrimas comple-
ctens, nunc in lu-
cem editus.

Cũ gratia & priuilegio Imperiali, Petro Apiano Ma
thematico Ingolſtadiano ad xxx. annos cõceſſo.

M. D. XXXIII.

Εικόνα 3

2.4.1. Η ζωή του

Ο Jordanus Nemorarius ήταν ένας ικανός αλλά λιγότερο χαρισματικός μαθηματικός, σύγχρονος του Leonardo από την Πίζα. Ορισμένοι μελετητές τον ταυτίζουν με τον Jordanus από την Σαξονία, που πέθανε το 1237. Όπως και να 'χουν τα πράγματα ο Jordanus Nemorarius ή Jordanus de Nemore αντιπροσωπεύει μια άποψη της επιστήμης πλησιέστερη σε αυτήν του Αριστοτέλη από οποιονδήποτε άλλο μελετητή του δεκάτου τρίτου αιώνα. Ίδρυσε τη σχολή που μερικές φορές ονομάζεται η μεσαιωνική σχολή της μηχανικής. Σε αυτόν οφείλουμε την πρώτη σωστή διατύπωση του νόμου του κεκλιμένου επιπέδου, ενός νόμου που απασχόλησε τους αρχαίους χωρίς όμως κανένα αποτέλεσμα: η δύναμη κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου είναι αντιστρόφως ανάλογη της κλίσης του, όπου η κλίση ορίζεται προς την κατακόρυφη ανύψωση του επιπέδου.

2.4.2. Η Arithmetica και το De Numeris Datis

Ο Jordanus έγραψε βιβλία αριθμητικής, γεωμετρίας, αστρονομίας καθώς και μηχανικής. Η *Arithmetica* του, για παράδειγμα, σχολιαζόταν από το Πανεπιστήμιο του Παρισιού ως το δέκατο έκτο αιώνα· το βιβλίο αυτό δεν αναφερόταν σε υπολογισμούς αλλά ήταν ένα φιλοσοφικό έργο κατά την παράδοση του Νικόμαχου και του Βοήθιου. Περιέχει θεωρήματα, όπως αυτό που αναφέρει ότι κάθε πολλαπλάσιο ενός τέλειου αριθμού είναι υπερτέλειος αριθμός ενώ κάθε διαιρέτης του είναι ελλιπής αριθμός. Η *Arithmetica* είναι σημαντική κυρίως επειδή οι αριθμοί παριστάνονται με γράμματα και όχι με ψηφία· κατ' αυτόν τον τρόπο, γίνεται δυνατή η διατύπωση γενικών αλγεβρικών θεωρημάτων. Ο Ευκλείδης στα Στοιχεία VII-IX, στα αριθμητικά θεωρήματα παριστάνει τους αριθμούς με ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία ονομάζει χρησιμοποιώντας γράμματα και οι γεωμετρικές αποδείξεις στην Άλγεβρα του al-Khwārizmī περιέχουν διαγράμματα με γράμματα· όλοι, όμως, οι συντελεστές στις εξισώσεις της Άλγεβρας είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, οι οποίοι είτε παριστάνονται με ψηφία είτε με λέξεις.

Η έννοια της γενίκευσης υπάρχει σε λανθάνουσα κατάσταση στο έργο του al-Khwārizmī αλλά ο ίδιος δεν παρουσίασε κανένα τρόπο αλγεβρικής έκφρασης των γενικών προτάσεων, όπως συμβαίνει εύκολα στη γεωμετρία. Η χρήση των γραμμάτων στην *Arithmetica* υπαινίσσεται την έννοια της "παραμέτρου"· οι διάδοχοι, όμως, του Jordanus αγνόησαν τη χρήση των γραμμάτων που έκανε. Έδειξαν, μεγαλύτερο ενδιαφέρον στις αραβικές χροιές της άλγεβρας, που συναντάμε σε άλλα έργα του συγγραφέα, όπως το *De Numeris Datis*· πρόκειται για μια συλλογή αλγεβρικών κανόνων που βοηθούν στην εύρεση, δεδομένου ενός αριθμού, άλλων αριθμών που συνδέονται με τον πρώτο βάσει ορισμένων σχέσεων ή βοηθούν στην απόδειξη ότι ένας αριθμός ικανοποιεί δεδομένες συνθήκες. Παρατηρούμε ότι η χρήση των γραμμάτων από το Jordanus μπορεί εύκολα να προκαλέσει σύγχυση γιατί, ο συγγραφέας μερικές φορές χρησιμοποιεί δύο γράμματα για έναν αριθμό και μερικές φορές ένα γράμμα. Προφανώς, ακολούθησε την τακτική του Ευκλείδη θεωρώντας το δεδομένο αριθμό ως ένα ευθύγραμμο τμήμα ac και τα δύο τμήματα στα οποία υποδιαιρείται ως ab και bc· χρησιμοποιεί, όμως, και γράμματα για τα άκρα του τμήματος για να ονομάσει το πρώτο μέρος ή αριθμό και μόνο το γράμμα c για να παραστήσει τον αριθμό του ευθύγραμμου τμήματος bc. Δεν μπορούμε παρά να του αναγνωρίσουμε, βέβαια, ότι διατύπωσε τον κανόνα, που ισοδυναμεί με τη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, στη γενική του μορφή. Στη συνέχεια, παρουσίασε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με λατινικά ψηφία: θέλοντας να διαιρέσει τον

αριθμό Χ σε δύο μέρη το γινόμενο των οποίων είναι XXI, ο Jordanus ακολουθεί τα παραπάνω βήματα για να βρει ότι τα δύο μέρη είναι III και VII.

2.5. Ο François Viète

Εικόνα 4

2.5.1. Η ζωή του

Ο Viète δεν ήταν μαθηματικός εξ επαγγέλματος. Όταν ήταν νέος σπούδασε κι εργάστηκε ως δικηγόρος κι έγινε μέλος της βουλής της Βρετάνης. Αργότερα έγινε μέλος του συμβουλίου του βασιλιά, υπηρετώντας πρώτα τον Ερρίκο τον ΙΙΙ και στη συνέχεια τον Ερρίκο τον IV. Κατά τη διάρκεια της υπηρεσίας του υπό τον τελευταίο, τον Ερρίκο της Navarre, σημείωσε τόσο μεγάλη επιτυχία στην αποκρυπτογράφηση των μηνυμάτων του εχθρού ώστε οι Ισπανοί τον κατηγόρησαν ότι είχε συμμαχήσει με το διάβολο. Ο Viète αφιέρωνε μόνο τον ελεύθερο χρόνο του στα μαθηματικά και παρόλα αυτά συνεισέφερε στην αριθμητική, στην άλγεβρα, στην τριγωνομετρία και στη γεωμετρία. Για ένα διάστημα έξι περίπου χρόνων πριν τη βασιλεία του Ερρίκου του IV, ο Viète είχε πέσει σε δυσμένεια· αυτά τα χρόνια τα αφιέρωσε, κατά κύριο λόγο, στα μαθητικά. Στην αριθμητική θα πρέπει να τον θυμόμαστε για την υποστήριξη της χρήσης των δεκαδικών κλασμάτων και όχι των εξηνταδικών. Σε ένα από τα πρώτα μαθηματικά του έργα, το Canon mathematicus, το 1579, έγραφε:

«Τα εξηνταδικά και οι εξηκοντάδες πρέπει να χρησιμοποιούνται σπάνια ή ποτέ στα μαθηματικά, ενώ τα χιλιοστά και οι χιλιάδες, τα εκατοστά και οι εκατοντάδες, τα δέκατα και οι δεκάδες και οι παρόμοιες πρόοδοι, είτε αύξουσες είτε φθίνουσες, πρέπει να χρησιμοποιούνται συχνά ή αποκλειστικά αυτές.»

Στους πίνακες και στους υπολογισμούς του χρησιμοποίησε δεκαδικά κλάσματα. Μερικές φορές, χρησιμοποίησε μια κατακόρυφη γραμμή για να διακρίνει το ακέραιο από το κλασματικό μέρος.

2.5.2. Η έννοια της παραμέτρου

Ο Viète πρόσφερε πολλά στην άλγεβρα γιατί στον κλάδο αυτό πλησίασε τις σύγχρονες απόψεις. Τα σύμβολα και οι συντμήσεις για τον άγνωστο και για τις δυνάμεις του αγνώστου καθώς και για τις πράξεις και τη σχέση της ισότητας υπήρχαν πλέον. Η άλγεβρα, όμως, δεν είχε καταφέρει να απελευθερωθεί από τις ειδικές περιπτώσεις, κατά τη διάρκεια της αραβικής και πρώτης σύγχρονης περιόδου. Η αλγεβρική θεωρία δεν μπορούσε να προχωρήσει ιδιαίτερα όταν η κύρια απασχόληση των αλγεβριστών ήταν να βρουν "το πράγμα" σε μια εξίσωση με συγκεκριμένους αριθμητικούς συντελεστές. Ο Stifel, μάλιστα, είχε προχωρήσει τόσο πολύ ώστε να γράψει AAAA για την τέταρτη δύναμη μιας άγνωστης ποσότητας παρόλα αυτά, δεν είχε βρει κάποιο τρόπο για να γράψει μια εξίσωση που θα αντιπροσώπευε μια ολόκληρη ομάδα εξισώσεων –όλες τις δευτεροβάθμιες ή όλες τις τριτοβάθμιες, για παράδειγμα. Ένας γεωμέτρης με τη βοήθεια ενός σχήματος, μπορούσε με ένα τρίγωνο ΑΒΓ να παραστήσει όλα τα τρίγωνα αλλά ένας αλγεβριστής δεν μπορούσε με αντίστοιχο τρόπο να παραστήσει όλες τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Χρησιμοποιούνταν γράμματα για να παραστήσουν γνωστά ή άγνωστα μεγέθη από τον καιρό του

Ευκλείδη και ο Jordanus τα είχε χρησιμοποιήσει αρκετά. Δεν υπήρχε, όμως, κάποιος τρόπος διάκρισης των γνωστών από τα ζητούμενα άγνωστα μεγέθη.

Ο Viète παρουσίασε μία πολύ απλή και χρήσιμη συνθήκη: Χρησιμοποιούσε ένα φωνήεν για να παραστήσει το μέγεθος που ήταν άγνωστο κι ένα σύμφωνο για το μέγεθος ή τον αριθμό που ήταν γνωστός. Συναντάμε, λοιπόν, για πρώτη φορά στην άλγεβρα ένα σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στη σημαντική έννοια της παραμέτρου και αυτήν της άγνωστης ποσότητας.

2.5.3. Ο συμβολισμός του και η αναλυτική τέχνη

Ως προς το συμβολισμό του εν μέρει ήταν σύγχρονος αλλά ταυτόχρονα ήταν προσκολλημένος σε αρχαίες και μεσαιωνικές μεθόδους. Η αλγεβρική του δουλειά ήταν μάλλον συντετμημένη και όχι συμβολική, διότι μολονότι υιοθέτησε τα γερμανικά σύμβολα για την πρόσθεση και την αφαίρεση και τα διαφορετικά σύμβολα για τις παραμέτρους και τους αγνώστους, το υπόλοιπο του έργου του αποτελείται από λέξεις και συντμήσεις λέξεων. Η τρίτη δύναμη δεν ήταν A^3 ή AAA αλλά A cubus και η δεύτερη δύναμη ήταν A quadratus. Σημείωνε τον πολλαπλασιασμό με τη λατινική λέξη in, τη διαίρεση με την κλασματική γραμμή ενώ για την ισότητα χρησιμοποιούσε τη σύντμηση του λατινικού aequalis. Αν είχε υιοθετήσει και άλλα σύμβολα που υπήρχαν τον καιρό εκείνο θα μπορούσε να γράψει όλες τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ως $BA^2 + CA + D = 0$, όπου A είναι ο άγνωστος και B, C, D οι παράμετροι.

Ο Viète αντιπαθούσε τον αραβικό όρο άλγεβρα, για αυτό έψαχνε για κάποιον όρο για να αντικαταστήσει τη λέξη άλγεβρα. Κατά την αναζήτησή του, παρατήρησε ότι στα προβλήματα με τους αγνώστους, ακολουθούμε συνήθως μια διαδικασία που ονομάζεται ανάλυση. Με άλλα λόγια, αντί να προχωρήσουν από τα δεδομένα προς το ζητούμενο, οι αλγεβριστές συχνά ξεκινούσαν από την υπόθεση ότι ο άγνωστος ήταν δεδομένος και κατέληγαν σε ένα αναγκαίο συμπέρασμα από το οποίο μπορούσαν να υπολογίσουν τον άγνωστο. Σήμερα θα λέγαμε ότι αν θέλουμε να λύσουμε την:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

θα πρέπει να στηριχτούμε στην υπόθεση ότι υπάρχει κάποια τιμή του x, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση. Από την υπόθεση αυτή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-1) = 0,$$

έτσι ώστε ή $x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0$ ή και τα δυο, δηλαδή ότι το x είναι αναγκαστικά ίσο με το 2 ή το 1. Πρέπει, επομένως, να αντιστρέψουμε τα βήματα της λογικής αυτής διαδικασίας. Με άλλα λόγια η σύνθεση πρέπει να ακολουθήσει την ανάλυση.

Ο Viète, λοιπόν, εξαιτίας της μεθόδου αυτής, ονόμασε τον κλάδο αυτόν "αναλυτική τέχνη". Επιπλέον, συνειδητοποιούσε την ευρύτητα αυτού του κλάδου, κατανοώντας ότι η άγνωστη ποσότητα δεν είναι κατ' ανάγκη κάποιος αριθμός ή γεωμετρική γραμμή. Η άλγεβρα αναφέρεται σε "μορφές" ή είδη και ο Viète αντιπαράθεσε την logistica speciosa με την logistica numerosa. Σε όλα του τα έργα, ο Viète υποστήριξε την αρχή της ομοιογένειας στις εξισώσεις, έτσι ώστε σε μία εξίσωση, όπως η $x^3 + 3ax = b$, το α θεωρείται planum και το b solidum. Βέβαια, τα παραπάνω υπαινίσσονται κάποια ακαμψία, η ομοιογένεια, όμως, έχει μερικά πλεονεκτήματα, τα οποία αναμφισβήτητα είδε ο Viète. Ως αποτέλεσμα, η άλγεβρα του Viète ξεχώρισε για τη γενικότητα των

εκφράσεων της και άλλες πρωτότυπες πτυχές της, όπως η νέα προσέγγιση στη λύση της τριτοβάθμιας.

2.6. Ο Leonhard Euler.

Εικόνα 4. Πορτραίτο του Euler (1753)

2.6.1. Η ζωή του

Ο Euler ήταν γιος κληρικού. Σπούδασε δίπλα στον Jean Bernoulli και σχετίστηκε με τους γιους του, Nicholaus και Daniel και μέσα από αυτήν την εμπειρία ανακάλυψε την κλίση του. Τις βάσεις των μαθηματικών τις διδάχτηκε από τον πατέρα του. Εκτός από τα μαθηματικά, είχε ευρεία μόρφωση αφού μελέτησε θεολογία, ιατρική, αστρονομία, φυσική και γλώσσες της Άπω Ανατολής. Το εύρος αυτό τον βοήθησε πολύ όταν το 1727 οι αδερφοί Bernoulli του υπέδειξαν μια κενή θέση στην ιατρική στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης, την οποία είχε συστήσει η Αικατερίνη Ι. Η ημέρα της άφιξής του στην Ρωσία συνέπεσε με το θάνατο της Αικατερίνης και οι νέοι ηγεμόνες δεν έδειξαν την ίδια συμπάθεια προς τους μορφωμένους αλλοδαπούς με αυτήν που έδειξε η Αικατερίνη.

Η Ακαδημία, παρόλα αυτά, κατάφερε να επιβιώσει και το 1730 βρέθηκε στην έδρα της φιλοσοφίας. Έγινε ο κυριότερος μαθηματικός της Ακαδημίας στη ηλικία των 26 ετών και δημοσίευσε πολλά μαθηματικά άρθρα στο ερευνητικό περιοδικό της Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Το 1735 έχασε την όραση του δεξιού του ματιού αλλά αυτή η ατυχία δεν μείωσε καθόλου το ρυθμό της δουλειάς του. Σε όλη τη διάρκεια της ζωής του δημοσίευσε πάνω από πεντακόσια βιβλία και άρθρα. Από την αρχή της καριέρας του ο Euler απέκτησε διεθνή φήμη. Πριν ακόμη φύγει από τη Βασιλεία είχε τιμηθεί από την παρισινή Ακαδημία των Επιστημών για ένα άρθρο του που αναφερόταν στα κατάρτια των πλοίων. Συνήθως έγραφε στα λατινικά και μερικές φορές στα γαλλικά μολονότι μητρική του γλώσσα ήταν τα γερμανικά.

Το 1741 ο Μέγας Φρειδερίκος τον κάλεσε στην Ακαδημία του Βερολίνου και αυτός δέχτηκε. Πέρασε είκοσι πέντε χρόνια στην αυλή του Φρειδερίκου και όταν η κατάσταση έγινε ανυπόφορη επέστρεψε στη Ρωσία το 1766 μετά από πρόσκληση της Μεγάλης Αικατερίνης. Την ίδια χρονιά έχασε την όραση και από το άλλο του μάτι αλλά συνέχισε τις δημοσιεύσεις και την έρευνά του μέχρι το θάνατό του, το 1783.

2.6.2. Ο συμβολισμός του

Από το 1727 ως το 1783, ο Euler είχε μεγάλη συμβολή σε όλους τους τομείς των μαθηματικών (εφαρμοσμένους και θεωρητικούς, στοιχειώδεις και μη). Επιπλέον, στις περισσότερες περιπτώσεις ο Euler χρησιμοποίησε τη γλώσσα και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε και εμείς, σήμερα, γιατί κανένας άλλος δε συνέβαλε τόσο πολύ στη διαμόρφωση των σημερινών μαθηματικών όσο ο Euler. Ο Euler χρησιμοποίησε το γράμμα e πάνω από δώδεκα φορές για να σημειώσει τη βάση του συστήματος φυσικών λογαρίθμων. Η έννοια πίσω από αυτόν τον αριθμό ήταν πολύ γνωστή από την εποχή της εφεύρεσης των λογαρίθμων, πάνω από έναν αιώνα πριν, παρόλα αυτά δεν υπήρχε κάποιος κοινός συμβολισμός.

Η καθιέρωση του ελληνικού γράμματος π για το λόγο του μήκους προς τη διάμετρο ενός κύκλου οφείλεται, επίσης, στον Euler. Το σύμβολο i, για την $\sqrt{-1}$ είναι άλλο ένα που χρησιμοποίησε για πρώτη φορά ο Euler. Τα τρία σύμβολα e, π και i μπορούν να συνδεθούν με τους δυο σημαντικότερους ακέραιους, το 0 και το 1, στη διάσημη ισότητα $e^{i\pi}+1=0$. Ο Euler συμπεριέλαβε μια γενικευμένη μορφή αυτής της ισότητας το 1748 στο εγχειρίδιό του, *Introductio in analysin infinitorum*. Η αποκαλούμενη "σταθερά του Euler", η οποία, πολύ συχνά, παριστάνεται με το ελληνικό γράμμα γ, είναι μία έκτη σημαντική μαθηματική σταθερά, ο αριθμός που ορίζεται ως $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n)$ ένας διάσημος αριθμός, του οποίου γνωρίζουμε εκατοντάδες δεκαδικών ψηφίων, εκ των οποίων τα πρώτα δέκα είναι 0,5772156649.

Συναντάμε, επίσης, σύμβολα, ορολογία και ιδέες του Euler στη γεωμετρία, την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Η χρήση των μικρών γραμμάτων a, b και c για τις πλευρές ενός τριγώνου και των αντίστοιχων κεφαλαίων A, b και C για τις απέναντι γωνίες προέρχεται από τον Euler καθώς και τα γράμματα r, R και s για την ακτίνα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου και την ημιπερίμετρο του τριγώνου, αντίστοιχα. Ο τύπος $4rRs=abc$, που συνδέει τα έξι μήκη είναι ένα από τα πολλά στοιχειώδη αποτελέσματα που αποδίδονται σε αυτόν, μολονότι οι αρχαίοι είχαν διατυπώσει προτάσεις ισοδύναμές της. Το σύμβολο lx για το λογάριθμο του x, η χρήση του οικείου σε μας Σ για το άθροισμα και, ίσως, το πιο σημαντικό όλων, το σύμβολο f(x) για μια συνάρτηση του x (που συναντάμε στο *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* της Πετρούπολης από το 1734 έως το 1735) είναι σύμβολα του Euler που έχουν φθάσει ως εμάς. Συμπερασματικά, τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα τα οφείλουμε στον Euler περισσότερο από κάθε άλλον.

2.6.3. Οι βάσεις της Ανάλυσης

Ο Euler πήρε το διαφορικό λογισμό και τη μέθοδο των ρυθμών μεταβολής και το έκανε μέρος ενός γενικότερου κλάδου των μαθηματικών, ο οποίος είναι γνωστός από τότε ως «ανάλυση», δηλαδή η μελέτη των άπειρων μαθηματικών. Η *Introductio in analysin infinitorum* του Euler μπορεί να θεωρηθεί το κλειδί της ανάλυσης. Αυτή η δίτομη μελέτη του 1748 ήταν η πηγή των εξελίξεων στα μαθηματικά κατά τη διάρκεια του δεύτερου μισού του δέκατου όγδοου αιώνα. Από εκείνη και μετά, η έννοια της "συνάρτησης" έπαιξε βασικό ρόλο στην ανάλυση. Η τέταρτη παράγραφος της *Introductio* ορίζει τη συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ως "κάθε αναλυτική έκφραση που αποτελείται από τη μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές ποσότητες". Σήμερα ένας τέτοιος ορισμός θα ήταν απαράδεκτος γιατί δεν εξηγεί τι είναι "αναλυτική έκφραση".

Ο Euler, πιθανώς, είχε κατά νου, κυρίως, τις αλγεβρικές συναρτήσεις και τις στοιχειώδεις υπερβατικές συναρτήσεις. Η αυστηρή αναλυτική αντιμετώπιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων καθιερώθηκε ως ένα μεγάλο βαθμό από την *Introductio*. Το ημίτονο, για παράδειγμα, αντί για ευθύγραμμο τμήμα ήταν πλέον ένας αριθμός ή ένας λόγος – η τετμημένη ενός σημείου στο μοναδιαίο κύκλο ή αριθμός, που ορίζεται από τη σειρά $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...$ για κάποια τιμή του z. Οι "ταυτότητες του Euler" δεν βρίσκονταν μακριά από τις απειροσειρές για το e^x, $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$:

$$\eta\mu x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

$$e^{\sqrt{-1}x} = \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{-1}\eta\mu\chi$$

Ο Euler είχε χρησιμοποιήσει φανταστικούς εκθέτες πρώτη φορά το 1740 σε μια επιστολή του. Οι συντμήσεις ημ, συν, εφ, σφ, τεμ και συντεμ που χρησιμοποιεί στη λατινική *Introductio* βρίσκονταν πολύ πιο κοντά στις σημερινές καθιερωμένες μορφές από ότι οι αντίστοιχες συντμήσεις των άλλων γλωσσών. Επίσης ήταν ο πρώτος που αντιμετώπισε τους λογαρίθμους ως εκθέτες, κάτι που μας είναι οικείο σήμερα. Παράλληλα, ασχολήθηκε πολύ με άπειρες διαδικασίες, δηλαδή άπειρα κλάσματα, απειρογινόμενα και απειροσειρές.

2.7. Συμπεράσματα για την ιστορική εξέλιξη των αλγεβρικών εννοιών

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται το πρώτο μέρος της εργασίας αυτής που αφορά την παρουσίαση έξι ιστορικών κειμένων (κεφάλαιο 1), την μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αλγεβρικών εννοιών και τις αλλαγές στην ιστοριογραφία των αρχαίων μαθηματικών (κεφάλαιο 2). Ας συνοψίσουμε, λοιπόν, όσα είδαμε μέχρι τώρα:

Τα **βαβυλωνιακά μαθηματικά** είναι, με βάση νεότερες ιστορικές έρευνες, ένα είδος γεωμετρίας, η οποία χρησιμοποιεί ένα σύνολο διαφορετικών πράξεων και μεθόδων από τις αντίστοιχες της άλγεβρας. Στις Βαβυλωνιακές πινακίδες, βλέπουμε συγκεκριμένα δεδομένα και αριθμητικές πράξεις σε υπολογιστικά προβλήματα, χωρίς κανένα συμβολισμό και απόδειξη.

Στο **Διόφαντο**, παρατηρούμε γενική διατύπωση προβλημάτων, χρήση (για πρώτη φορά στα μαθηματικά) ενός μοναδικού αγνώστου και συντομογραφικές αναπαραστάσεις για τα ζητούμενα των αριθμητικών προβλημάτων και οι δεδομένες σχέσεις μετασχηματίζονται σε ισότητες από τις οποίες προσδιορίζεται η τιμή του αγνώστου και τελικά η λύση του προβλήματος. Η έννοια του αγνώστου ορίζεται ως «αριθμός που περιέχει πλήθος μονάδων αόριστο» και συμβολίζεται με το ς, τελικό γράμμα της λέξης «αριθμός». Ο τρόπος που χρησιμοποιεί τις έννοιες του αγνώστου και της εξίσωσης για επίλυση προβλημάτων αποτελεί μεγάλη καινοτομία και ταυτόχρονα ρήξη με την παλαιά λογιστική παράδοση. Ταυτόχρονα, υπάρχει έλλειψη ειδικών συμβόλων για τις πράξεις και

σχέσεις. Τέλος, η γενικότητα στο έργο του Διόφαντου δεν μπορεί να τεθεί σε σχέση με γενικά αποτελέσματα, αλλά σε σχέση με την επαναληπτικότητα της διαδικασίας επίλυσης.

Στο **al-Khwārizmī** βλέπουμε αμιγώς ρητορική διατύπωση και επίλυση προβλημάτων (ο συγγραφέας δεν χρησιμοποιεί καμία συντόμευση ή σύντμηση), γεγονός που μοιάζει με οπισθοδρόμηση σε σχέση με το έργο του Διόφαντου. Παρόλα αυτά η άλγεβρα του al-Khwārizmī βρίσκεται πολύ πιο κοντά στη σημερινή στοιχειώδη άλγεβρα απ' ότι τα έργα του Διόφαντου, γιατί στο βιβλίο του δεν υπάρχουν δύσκολα προβλήματα της απροσδιόριστης ανάλυσης αλλά μια απλή περιγραφή της επίλυσης εξισώσεων, κυρίως δευτεροβάθμιων.

Στον **Nemore** παρατηρούμε γενική διατύπωση αλλά και ρητορική επίλυση. Οι αριθμοί παριστάνονται με γράμματα και όχι με ψηφία και με αυτόν τον τρόπο, γίνεται δυνατή η διατύπωση γενικών αλγεβρικών θεωρημάτων. Η χρήση των γραμμάτων στην Arithmetica υπαινίσσεται την έννοια της "παραμέτρου". Ταυτόχρονα, όμως, η χρήση των γραμμάτων μπορεί να προκαλέσει σύγχυση γιατί, ο Nemore μερικές φορές χρησιμοποιεί δύο γράμματα για έναν αριθμό και μερικές φορές ένα γράμμα.

Στον **Viète** πρώτη φορά παρατηρούμε εγγράμματο συμβολισμό και διάκριση δεδομένων και ζητουμένων, γεγονός που τοποθετεί το έργο του πιο κοντά στη σύγχρονη άλγεβρα. Χρησιμοποιούσε ένα φωνήεν για να παραστήσει το μέγεθος που ήταν άγνωστο κι ένα σύμφωνο για το μέγεθος ή τον αριθμό που ήταν γνωστός. Στο έργο του συναντάμε για πρώτη φορά στην άλγεβρα ένα σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στη σημαντική έννοια της παραμέτρου και αυτήν της άγνωστης ποσότητας, καθώς είχε διαφορετικά σύμβολα για τις παραμέτρους και τους αγνώστους.

Τέλος, στον **Euler** έχουμε φτάσει πλέον στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα και σύμβολα. Θεωρείται ο ευρηματικότερος δημιουργός συμβολισμών.

Αυτή η ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας διακρίνεται σε τρία στάδια από αρκετούς ερευνητές της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, τα οποία, όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 1 είναι τα εξής:

1. **Ρητορικό ή αρχικό στάδιο**, κατά το οποίο όλα γράφονται με λέξεις και οι υπολογισμοί γίνονται με το λόγο απουσία συμβολισμού. Χρονικά είναι η περίοδος πριν το Διόφαντο (περίπου 250 μ.Χ).
2. **Συγκεκομμένο ή ενδιάμεσο στάδιο**, κατά το οποίο χρησιμοποιούνται ο λόγος και οι συντομογραφίες για την διευκόλυνση των υπολογισμών. Χρονικά είναι η περίοδος από το Διόφαντο έως το τέλος του 16^{ου} αιώνα.
3. **Συμβολικό ή τελικό στάδιο**, κατά το οποίο χρησιμοποιούνται ειδικά σύμβολα για την αναπαράσταση των δεδομένων, των ζητούμενων και των πράξεων και αυτή η χρονική περίοδος ξεκινά από τον Viète (περίπου στο 1600).

Κατά την εξέλιξη της άλγεβρας συναντάμε όμως διάφορα προβλήματα, τα οποία δυσκολεύουν και την διάκριση σε στάδια. Για παράδειγμα, ο αποσπασματικός χαρακτήρας των πηγών δε μας δίνει σαφή στοιχεία για την ύστερη περίοδο των Βαβυλωνιακών μαθηματικών (η έναρξή της τοποθετείται γύρω στο 625 π.Χ.). Τότε η επίλυση των προβλημάτων στις πινακίδες άρχισε να παρουσιάζει σαφείς ενδείξεις απομάκρυνσης από τους μετασχηματισμούς συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων και μια τάση αριθμητικοποίησης των διαδικασιών. Η εξέλιξη αυτή δείχνει

ενδεχομένως την ομογενοποίηση και εργαλειοποίηση των εννοιών και μεθόδων, ως αποτέλεσμα της πολύχρονης εφαρμογής τους στην επίλυση προβλημάτων. Η μόνιμη , παρόλα αυτά, απουσία θεωρητικής συγκρότησης και γενικού προσανατολισμού των Βαβυλωνιακών μαθηματικών δεν διευκολύνει τη συνολική αποτίμηση και εξαγωγή κάποιων ασφαλών ιστορικών συμπερασμάτων. Τέλος, την εποχή που γράφτηκαν οι βαβυλωνιακές πινακίδες δεν είχε γίνει πλήρης διαχωρισμός αριθμητικής – άλγεβρας – γεωμετρίας, κάτι που για τη σημερινή εποχή θεωρείται δεδομένο. Στη συνέχεια, ούτε για τον Διόφαντο έχουμε αξιόπιστες πληροφορίες για το βίο του και σε συνδυασμό με την αβεβαιότητα για την περίοδο της ακμής του κάνουν την ιστορική έρευνα πολύ επιφυλακτική. Νεότερες έρευνες, για παράδειγμα, αμφισβητούν τη σύνδεσή του με τα βαβυλωνιακά μαθηματικά και τον al-Khwārizmī . Ούτε για τη ζωή του al-Khwārizmī έχουμε ιδιαίτερα αξιόπιστες πληροφορίες, ενώ στα μαθηματικά κατά την εποχή του παρατηρούμε στοιχεία οπισθοδρόμησης, αφού παρατηρείται επιστροφή στη ρητορική διατύπωση.

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε πως η συγκεκριμένη διάκριση της ιστορικής εξέλιξης της άλγεβρας σε στάδια δεν είναι λανθασμένη, αλλά πρέπει να τονιστεί πως βάση της είναι η σύγκριση των μαθηματικών του παρελθόντος με το σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό και τρόπο σκέψης.

Μπορούμε, επίσης, να φανταστούμε την ιστορική εξέλιξη ως μια γραμμική και συνεχή διαδικασία; Σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να πιστεύουμε κάτι τέτοιο. Η διαδοχή των σταδίων δεν έγινε με γραμμικό τρόπο (δηλαδή από το ρητορικό στο συγκεκομμένο, κοκ). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η οπισθοδρόμηση της εποχής του al-Khwārizmī. Ούτε επίσης πρέπει να σκεφτούμε τα μαθηματικά ως μια συνεχή παράδοση που μεταδιδόταν από τον έναν πολιτισμό στον άλλο. Τα παραδείγματα των ιστορικών πηγών που έχουμε παρουσιάσει συνηγορούν προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς πρόκειται για μια εξέλιξη στο πλαίσιο της γενικότερης εξέλιξης του ανθρώπινου πολιτισμού που επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες.

Μπορεί, τέλος, να θεωρηθεί έγκυρη η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις γραμμένες πριν από αρκετές δεκαετίες; Με βάση την ιστορική ανάλυση που έγινε παραπάνω, καταλήγουμε πως δεν μπορεί να θεωρηθεί απόλυτα έγκυρη τέτοια γνώση. Οι αλλαγές στη μεθοδολογία της ιστορικής έρευνας, όπως η στροφή από την ανάλυση των αρχαίων μαθηματικών κειμένων με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό προς μια ανάγνωση που λαμβάνει πολύ σοβαρά υπόψη το ιστορικό περιβάλλον μέσα στο οποίο γράφτηκαν και η αμφισβήτηση της άποψης πως τα αρχαία μαθηματικά κείμενα εμπεριέχουν μια πρώιμη μορφή της σημερινής άλγεβρας οδήγησαν στην αναθεώρηση (ή ακόμη και απόρριψη) θεωριών για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελεί η αμφισβήτηση της άποψης ότι «οι Βαβυλώνιοι έλυναν εξισώσεις δευτέρου βαθμού» και η νέα ερμηνεία του Høyrup ότι στην πραγματικότητα επρόκειτο για γεωμετρία.

Κεφάλαιο 3. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, και ειδικότερα της Άλγεβρας, στις έρευνες της Διδακτικής.

Όπως έχουμε αναφέρει και στο κεφάλαιο 0, ήδη από τις αρχές του 20ου αιώνα είχαν αρχίσει οι συζητήσεις για τη σχέση ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη μαθηματική εκπαίδευση. Τότε βλέπουμε να πρωτοεμφανίζεται ο όρος του «παραλληλισμού» προκειμένου να βελτιωθεί η ποιότητα της διδασκαλίας και της μάθησης. Κατά τη διάρκεια των συζητήσεων αυτών, ερωτήματα όπως πώς εξελίσσονται τα μαθηματικά διαχρονικά, γιατί να χρησιμοποιείται η ιστορία στη διδασκαλία των μαθηματικών, με ποιους τρόπους μπορεί να χρησιμοποιηθεί, πως την αντιμετωπίζουμε, είναι συχνά. Όλες οι απόψεις που έχουν εκφραστεί για το ζήτημα αυτό δεν είναι απόλυτες, εξυπηρετούν όμως τον ίδιο σκοπό: να αναλύσουν τι απαιτείται για την σωστή χρήση της ιστορίας στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Perkins (1991), μέσω της ιστορίας των μαθηματικών, τα μαθήματα μπορούν να διδαχθούν με πιο ενδιαφέροντα τρόπο, ενώ οι Gulikers και Blom (2001) αναφέρουν ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να εφαρμοστεί σε εκπαιδευτικές εμπειρίες για να δημιουργήσει μια ζωηρή ατμόσφαιρα εντός τάξης και να προσθέσει τη ζωηράδα κατά τη διδασκαλία μαθηματικών. Κατά τον Jankvist (2009) τα επιχειρήματα για τη χρήση της ιστορίας είναι δύο ειδών: αυτά που αναφέρονται σε αυτήν ως εργαλείο που βοηθά στην μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών και αυτά που αναφέρονται σε αυτήν ως στόχο. Η πρώτη κατηγορία αφορά τον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά. Κυρίαρχη άποψη είναι ότι η ιστορία μπορεί να αποτελέσει κίνητρο στη μελέτη και την κατανόηση των μαθηματικών, προκαλώντας το ενδιαφέρον τους ή ότι μια ιστορική προσέγγιση μπορεί να προσδώσει στα μαθηματικά μια πιο ανθρώπινη χροιά. Επίσης στοιχεία της εξέλιξης των μαθηματικών που προβλημάτισαν τους μαθηματικούς στο παρελθόν μπορεί να δυσκολέψουν και τους μαθητές.

Το πιο σημαντικό, ίσως, ερώτημα σχετικά με τη χρήση της ιστορίας στην διδακτική, είναι τι ακριβώς είναι ο ιστορικός παραλληλισμός. Σημαντική αφετηρία για τον καθορισμό της έννοιας του παραλληλισμού υπήρξε η θεωρία της ανακεφαλαίωσης του Haeckel (1874) που είναι γνωστή ως ο «θεμελιώδης νόμος της βιογενετικής». Υποστηρίζει ότι η βιολογική ανάπτυξη (οντογένεση) ενός οργανισμού είναι παράλληλη και συνοψίζει ολόκληρη την εξελικτική ανάπτυξη (φυλογένεση). Ο Haeckel προχώρησε τη σκέψη του ένα βήμα παραπέρα λέγοντας ότι:

> *«η ψυχική ανάπτυξη ενός παιδιού δεν είναι τίποτα παραπάνω από επανάληψη της φυλογενετικής εξέλιξης»*

Με τη μεταφορά του νόμου αυτού στη διδακτική των μαθηματικών προκύπτει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών θα ακολουθήσει τα ίδια στάδια που ακολούθησε η εξέλιξή τους. Ο ιστορικός παραλληλισμός μπορεί να επεκταθεί και στα εμπόδια και τις δυσκολίες που εμφανίστηκαν κατά την ιστορική εξέλιξη , καθώς τείνουν να επανεμφανίζονται στην τάξη.

Ο Poincare (1899) υποστήριξε ότι το καθήκον κάθε δασκάλου είναι να έχει ως πυξίδα την ιστορία της επιστήμης. Για να εξηγήσουμε, δηλαδή, μια έννοια πρέπει να αναφερθούμε στη γέννησή της. Σημαντική στον ιστορικό παραλληλισμό ήταν και η συμβολή του Branford (1908), ο

οποίος τόνισε τη ανάγκη για διδακτική έρευνα ώστε να καθοριστεί με σαφήνεια η έννοια του παραλληλισμού.

Το 1962 δημοσιεύτηκε ένα υπόμνημα από μια ομάδα από 65 μαθηματικούς από τον Καναδά και τις ΗΠΑ (ανάμεσα τους ήταν οι Birkhoff, Courant, Kline, Polya, Andre Weil και Wittenberg) το οποίο υποστήριξε για τη γενετική αρχή:

«προκειμένου να εξηγήσει κάποιος μια ιδέα πρέπει να αναφερθεί στη γένεσή της και την ιστορική διαμόρφωσή της. Αυτό ίσως συνιστά μια γενική αρχή: ο καλύτερος τρόπος για να καθοδηγηθεί η ατομική πνευματική εξέλιξη είναι να τον αφήσουμε να ανιχνεύσει την πνευματική εξέλιξη της φυλής, δηλαδή να ανιχνεύσει τις βασικές γραμμές της και όχι τα χιλιάδες λάθη της πληροφορίας.» ,

Ο Schubring (1978), μάλιστα, προχώρησε ένα βήμα παραπέρα και διέκρινε δύο είδη γενετικής αρχής:

1. Η ιστορική – γενετική αρχή, η οποία στοχεύει στο να πηγαίνουν οι μαθητές από τη βασική στην πολύπλοκη γνώση με τον ίδιο τρόπο που το ανθρώπινο είδος προχώρησε στην ιστορία των μαθηματικών.
2. Η ψυχολογική – γενετική αρχή, η οποία βασίζεται στην ιδέα του να αφεθούν οι μαθητές να ξαναανακαλύψουν τα μαθηματικά χρησιμοποιώντας τις ικανότητες και τις εμπειρίες τους από το περιβάλλον τους.

Ο Toeplitz σε μια διάλεξή του το 1926 πρωτοπαρουσίασε την ιστορική – γενετική μέθοδο. Σύμφωνα με τον Jankvist (2009) ανέφερε ότι:

«όλες οι μαθηματικές γνώσεις πρέπει να τύχουν μιας συναρπαστικής διερεύνησης, μιας δράσης που θα ταράξει τα νερά, μέσα στα χρονικά πλαίσια στα οποία οι μαθηματικές γνώσεις δημιουργήθηκαν και εξελίχθηκαν. Αν κάποιος επιστρέψει στις ρίζες των εννοιών και τινάξει τη σκόνη του χρόνου από πάνω τους, τότε οι έννοιες θα εμφανιστούν μπροστά στα μάτια μας σαν ζωντανοί οργανισμοί. Και τότε υπάρχουν δύο διαφορετικοί δρόμοι του οποίους μπορούμε να πάρουμε: στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να παρουσιάσουμε την ανακάλυψη και την εξέλιξη των μαθηματικών με όλες τις λεπτομέρειες και με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μας θα δουν τα προβλήματα, τα ερωτήματα και τα γεγονότα να αναδύονται μπροστά στα μάτια τους (άμεση ή ευθεία γενετική μέθοδος). Στη δεύτερη περίπτωση μπορούμε να κάνουμε μια ιστορική ανάκληση εννοιών προκειμένου να εντοπίσουμε την πραγματική σημασία, τον πυρήνα της μαθηματικής έννοιας και να βγάλουμε συμπεράσματα για τη διδασκαλία της έννοιας, χωρίς περαιτέρω αναφορά στην ιστορία της έννοιας (έμμεση γενετική μέθοδος).»

Η γενετική μέθοδος, ωστόσο, έχει δεχτεί και διάφορες κριτικές. Μία από αυτές είναι του Scwager (Schubring, 1978, σελ 189), ο οποίος το 1956 τονίζει ότι η ιστορία γίνεται από ενήλικες, γεγονός που ίσως δυσκολεύει τους μαθητές να καταλάβουν πλήρως τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτή. Οι Furinghetti & Radford (2002), εμφανίζονται σκεπτικοί, καθώς εξετάζοντας τις κοινωνικές και πολιτιστικές επιρροές στις γνωστικές διαδικασίες υποστήριξαν ότι:

«*η σύγκλιση κοινωνικο-πολιτιστικής και φυσικής εξέλιξης στην διανοητική εξέλιξη του παιδιού σαφώς αποκλείει κάθε ανακεφαλαίωση*».

Αμφισβήτηση εκφράζουν και οι Lietzmann, Klafki, Freudental σύμφωνα με τον Schubring (1978, σελ 189-197), καθώς υποστήριξαν ότι η ιστορία δεν πρέπει να αποτελεί τη βάση της εκπαίδευσης, αλλά οι μαθητές με τις εμπειρίες τους. Τέλος, ο Schubring (2011), αφού αναφέρει ότι ο Toeplitz προσκολλάται στην παραδοσιακή άποψη της συνεχούς ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών μέθοδο, ισχυρίζεται ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών ακολουθεί γενικά την άποψη:

«από το πιο απλό στο πιο σύνθετο»

και αυτή η ιστορική άποψη μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά. Έτσι, το ζήτημα μεταφέρεται στην επαρκή γνώση της ιστορικής εξέλιξης.

Μια, ακόμη, σημαντική θεωρία για το ζήτημα που εξετάζουμε, ήταν αυτή του Piaget (1989). Η θεωρία του είχε σημαντική επίδραση στις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών και οριοθέτησε ένα συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της Ιστορίας. Ο Piaget διατύπωσε τη θεωρία του για τη νοητική ανάπτυξη αντλώντας ιδέες από τη θεωρία της βιολογικής προσαρμογής και διεξάγοντας εκτεταμένα πειράματα με παιδιά. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η απόκτηση των γνώσεων και η ανάπτυξη της σκέψης είναι μια διαδικασία σταθερής αλληλεπίδρασης των παιδιών με το περιβάλλον τους, η οποία εξελίσσεται σε τέσσερα διαδοχικά στάδια από τη βρεφική ως την εφηβική ηλικία, με προοδευτική κατασκευή νοητικών σχημάτων και δομών. Η προσαρμογή στο περιβάλλον πραγματοποιείται με την επίτευξη μιας εξισορρόπησης ανάμεσα στα αποτελέσματα που παράγουν οι μηχανισμοί της «**αφομοίωσης**» (ενσωμάτωση της νέας γνώσης σ' ένα υπάρχον νοητικό σχήμα) και της «**συμμόρφωσης**» (αλλαγές στη νοητική δομή που είναι απαραίτητες για το συνταίριασμα της νέας γνώσης με τις παλιές). Η μετάβαση από ένα στάδιο στο άλλο πραγματοποιείται με το μηχανισμό της «αναστοχαστικής αφαίρεσης» όπου οι ενέργειες και διαδικασίες ενός σταδίου μετασχηματίζονται σε αντικείμενα σκέψης στο επόμενο στάδιο ανάπτυξης. Αν και η θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη δεν αφορά άμεσα τη σχολική εκπαίδευση, εν τούτοις χρησιμοποιήθηκε ως θεωρητικό πλαίσιο πολλών ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και μεγάλων εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων.

Εκείνο που μας ενδιαφέρει στα πλαίσια της εργασίας αυτής, είναι ότι ο Piaget και οι συνεργάτες του επιχείρησαν να αποδείξουν ότι βασικά στοιχεία της θεωρίας, όπως τα στάδια και οι μηχανισμοί της νοητικής ανάπτυξης, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία επιστημολογικής ανάλυσης και να εντοπιστούν στην ιστορία της επιστήμης. Ιδιαίτερα αποκαλυπτικό για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι το επόμενο απόσπασμα από το βιβλίο *Ψυχογένεση και ιστορία της επιστήμης* που έγραψε ο Piaget με το συνεργάτη του Rolando Garcia (1989, σελ 28):

> «… οι πρόοδοι που έγιναν στην πορεία της ιστορίας της επιστημονικής σκέψης από τη μια περίοδο στην επόμενη δεν ακολουθούν, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, η μια την άλλη με τυχαίο τρόπο, αλλά μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά, όπως στη ψυχογένεση, υπό τη μορφή διαδοχικών "σταδίων". Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε, για κάθε πεδίο, τα πιο σημαντικά από αυτά τα στάδια. Για παράδειγμα, στην περίπτωση εκείνης της θεμελιώδους περιόδου στην εξέλιξη της άλγεβρας που αρχίζει με τις "ομάδες" του Galois, παρατηρούμε μια σειρά κατασκευών που δεν είναι καθόλου τυχαίες. κάθε μια γίνεται δυνατή από τις προηγούμενες και κάθε μια με τη σειρά της προετοιμάζει εκείνες που ακολουθούν. Στη γεωμετρία, δεν είναι καθόλου σύμπτωση ότι οι μη Ευκλείδειες

γεωμετρίες εμφανίστηκαν πολύ αργότερα από τις Ευκλείδειες και ότι τα συστήματα συντεταγμένων κατασκευάστηκαν πολύ αργότερα από την ανάλυση των γεωμετρικών μορφών. Μια από τις βασικές όψεις αυτής της έρευνάς μας είναι να προσπαθήσουμε να αναγνωρίσουμε τέτοιους νόμους προόδου. Πρέπει όμως να γίνει εξαρχής φανερό με ποιο τρόπο ορίζουμε το σκοπό που θέλουμε να πετύχουμε συγκρίνοντας τέτοιες προόδους με εκείνες που παρατηρήθηκαν στη ψυχογένεση: ο σκοπός αυτός δεν είναι να δημιουργήσουμε αντιστοιχίες ανάμεσα σε ιστορικές και ψυχογενετικές ακολουθίες ως προς το περιεχόμενο, αλλά μάλλον να δείξουμε ότι οι μηχανισμοί της μετάβασης από μια ιστορική περίοδο στην επόμενη είναι ανάλογοι προς εκείνους της μετάβασης από ένα ψυχογενετικό στάδιο στο επόμενο.»

Στην έρευνά τους οι Piaget και Garcia υιοθετούν μια μέθοδο ανάλυσης της ιστορικής εξέλιξης ορισμένων κλάδων των Μαθηματικών και της Φυσικής, η οποία στηρίζεται στην επιλεκτική μελέτη δευτερογενούς βιβλιογραφίας και όχι ιστορικών πηγών. Με τη μέθοδο αυτή διαπιστώνουν την ύπαρξη σταδίων ανάπτυξης των επιστημονικών εννοιών, και μηχανισμούς μετάβασης από το ένα στο άλλο ανάλογους προς εκείνους που παρατηρήθηκαν στις έρευνες για τη νοητική ανάπτυξη. Βασική αρχή ήταν ότι η γνωστική ανάπτυξη ακολουθεί μια προκαθορισμένη πορεία η οποία αποτελείται από τέσσερα διαφορετικά στάδια, αναπόσπαστα μεταξύ τους. Τα στάδια αυτά είναι:

1. Αισθησιοκινητικό στάδιο (από τη γέννηση έως 2 ετών). Το άτομο διαφοροποιεί τον εαυτό του από τους άλλους. Επιτυγχάνει τη μονιμότητα του αντικειμένου: αντιλαμβάνεται ότι τα πράγματα συνεχίζουν να υπάρχουν ακόμα και όταν δεν είναι παρόντα.
2. Προσυλλογιστικό στάδιο (2 έως 7 ετών). Μαθαίνει να χρησιμοποιεί τη γλώσσα και να αναπαριστάνει τα αντικείμενα με εικόνες και λέξεις. Η σκέψη του είναι ακόμη εγωκεντρική: έχει δυσκολία να λάβει υπόψη του τη γνώμη των άλλων.
3. Στάδιο συγκεκριμένων νοητικών ενεργειών (7 έως 12 ετών). Μπορεί να σκέφτεται λογικά για τα αντικείμενα και τα γεγονότα. Επιτυγχάνει τη διατήρηση του αριθμού (6 ετών), της μάζας (7 ετών) και του βάρους (9 ετών).
4. Στάδιο αφηρημένων νοητικών ενεργειών (12 ετών και άνω). Μπορεί να σκέφτεται λογικά για αφηρημένες έννοιες και να ελέγχει τις υποθέσεις συστηματικά. Αρχίζει να ενδιαφέρεται για υποθετικά, μελλοντικά και ιδεολογικά προβλήματα.

Το κάθε στάδιο αποτελείται από μια διαφορετική δομή γνώσης και η χρονική περίοδος εμφάνισής του διαφέρει από άτομο σε άτομο. Κατά τον Piaget η ανθρώπινη νοημοσύνη είναι μια διαδικασία προσαρμογής η οποία συντελείται σε τρεις φάσεις: **αφομοίωση**, **συμμόρφωση**, **εξισορρόπηση**. Έδωσε ιδιαίτερη σημασία στην έννοια της προσαρμογής και υποστήριξε ότι υπάρχει αναλογία ανάμεσα στην φυλογενετική ανάπτυξη και την οντογενετική ανάπτυξη. Κατά την φυλογενετική δημιουργούνται νέα, ποιοτικά διαφορετικά είδη ως το αποτέλεσμα των διαδικασιών βιολογικής προσαρμογής στο περιβάλλον, ενώ η οντογενετική ανάπτυξη χαρακτηρίζεται από τη δημιουργία διαφορετικών δομών γνώσεων που πηγάζουν από την ενεργητική προσπάθεια του

ανθρώπου να προσαρμόσει τη συμπεριφορά του στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος. Σύμφωνα με τους Piaget και Garcia:

> *«οι πρόοδοι που έγιναν στην πορεία της επιστημονικής σκέψης από τη μια περίοδο στην επόμενη, δεν ακολουθούν, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, η μια την άλλη με τυχαίο τρόπο, αλλά μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά, όπως στην ψυχογένεση, υπό μορφή διαδοχικών σταδίων.»*

Δηλαδή υποστηρίζουν ότι οι μηχανισμοί μετάβασης από τη μια ιστορική περίοδο στην άλλη είναι ανάλογοι προς εκείνους της μετάβασης από το ένα ψυχογενετικό στάδιο στο επόμενο. Υποστήριξαν, δηλαδή, ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ψυχολογικών και ιστορικών εξελίξεων και αυτή η σχέση πρέπει να εξεταστεί από την άποψη των μηχανισμών που μεσολαβούν κατά την μετάβαση από το ένα στάδιο στο επόμενο και όχι από την άποψη του περιεχομένου. Χαρακτηριστικό κάθε σταδίου είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνονται αντιληπτά τα αντικείμενα και ο συσχετισμός τους με το υποκείμενο. Ο Piaget γράφει στην *Γενετική Επιστημολογία* του μεταξύ άλλων ότι:

> *«η θεμελιώδης υπόθεση της γενετικής επιστημολογίας είναι ότι υπάρχει παραλληλισμός μεταξύ της προόδου που σημειώνεται στη λογική και ορθολογική οργάνωση της γνώσης, στην ιστορία της επιστήμης και των αντίστοιχων διαμορφωτικών ψυχολογικών διαδικασιών.»*

Παρόλα αυτά έχει ασκηθεί κριτική στον Piaget και τον συνεργάτη του, Rolando Garcia ειδικά επειδή στηρίχτηκαν σε ήδη υπάρχουσες ιστοριογραφικές δημοσιεύσεις χωρίς να πραγματοποιήσουν δική τους έρευνα (όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 0, η σύγχρονη ιστοριογραφία προτείνει την όσο πιο δυνατό πιστή εξέταση ιστορικών κειμένων ως σωστότερη μέθοδο μελέτης της ιστορίας των μαθηματικών). Η πρόθεσή τους ήταν να τις επανεκτιμήσουν υπό το πρίσμα της επιστημολογίας τους, η οποία δε θεωρεί την ιστορία ως «μνήμη της ιστορίας» αλλά ως «επιστημολογικό εργαστήριο» και έτσι καταλήγουν στην ύπαρξη παραλληλισμού οντογένεσης – φυλογένεσης. Όμως αυτό είναι σύνδεση γνωστικών μηχανισμών και όχι περιεχομένων. Έτσι οι αναλογίες ιστορικών και ψυχογενετικών διαδικασιών δεν είναι ο στόχος τους, αλλά η σύνδεση μηχανισμών μετάβασης από τη μια ιστορική περίοδο στην άλλη με τους μηχανισμούς μετάβασης από το ένα ψυχογενετικό επίπεδο στο άλλο.

Μια άλλη σημαντική θεωρία στη Διδακτική των Μαθηματικών είναι η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Guy Brousseau (1997) που αφορά τα λεγόμενα «επιστημολογικά εμπόδια». Η έννοια του εμποδίου στηρίζεται στην υπόθεση ότι η επιστημονική εξέλιξη δεν είναι συνεχής ούτε αθροιστική, αλλά χαρακτηρίζεται από αδιέξοδα που καθιστούν αναγκαίο τον επαναπροσδιορισμό των θεμελίων των επιστημών. Οι αιτίες των αδιεξόδων αυτών, ονομάζονται «επιστημολογικά εμπόδια» και η εμφάνισή τους είναι απαραίτητη για την απόκτηση γνώσεων. Ο Brousseau χρησιμοποιεί την ιστορία σαν γνωστικό εργαλείο για την κατασκευή διδακτικών καταστάσεων που θα εξασφαλίσουν την υπερπήδηση των εμποδίων. Τα εμπόδια αυτά αφορούν την ίδια τη φύση της μαθηματικής γνώσης και δε μπορούν να αγνοηθούν. Ανάλογα με την προέλευσή τους ο Brousseau ταξινομεί τα γνωστικά εμπόδια σε **οντογενετικά** (που σχετίζονται με την προσωπική νοητική

ανάπτυξη), **διδακτικά** (που σχετίζονται με επιλογές του εκπαιδευτικού συστήματος), **επιστημολογικά** (που συνδέονται με την επίμονη αντίσταση της προϋπάρχουσας γνώσης να προσαρμοστεί στις νέες συνθήκες) και **πολιτιστικά** (που σχετίζονται με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες). Εκείνα που μας ενδιαφέρουν άμεσα για το ζήτημα που εξετάζουμε είναι τα επιστημολογικά εμπόδια, τα οποία αποτελούν συστατικά στοιχεία της γνώσης και εμφανίζονται, κατά τον Brousseau, τόσο στο ιστορικό όσο και στο σχολικό περιβάλλον. Τα προηγούμενα προσδιορίζουν με αρκετή σαφήνεια το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων καθώς και το αντίστοιχο έργο των ερευνητών της Διδακτικής. Οι τελευταίοι, κατά τον Brousseau, οφείλουν:

α) να εντοπίζουν επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις.

β) να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών.

γ) να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό χαρακτήρα τους.

Τα επιστημολογικά εμπόδια είναι σημαντικά για την γνώση, γίνονται ορατά σε κάποιο στάδιο της ιστορικής εξέλιξης και μπορούν να εντοπιστούν από την ιστορική ανάλυση. Ο Brousseau εξηγεί ότι:

> *«Αληθινά εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης είναι αυτά από τα οποία κανείς δεν μπορεί ούτε και πρέπει να ξεφύγει λόγω του διαμορφωτικού τους ρόλου στην ζητούμενη γνώση. Μπορούν να βρεθούν στην ιστορία των εννοιών.» Από τη στιγμή που ορισμένες δυσκολίες των μαθητών μπορούν να επικεντρωθούν σε εμπόδια που παρουσιάζει η ιστορία, τότε αυτή μπορεί να βοηθήσει στην αναγνώριση και την αντιμετώπισή τους. Θεωρεί πως: «μια επιστημολογική αντανάκλαση της ανάπτυξης ιδεών στην ιστορία των μαθηματικών μπορεί να εμπλουτίσει διδακτικές αναλύσεις παρέχοντας σημαντικά στοιχεία τα οποία μπορούν να προσδιορίσουν τη φύση της διδασκόμενης γνώσης και να προσδιορίσουν εναλλακτικούς τρόπους πρόσβασης σε αυτήν.»*

Αφού παρουσιάσαμε ορισμένες γενικές θεωρητικές αρχές για το ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης, θα επιχειρήσουμε με βάση αυτές, να διατυπώσουμε έναν ορισμό για τον ιστορικό παραλληλισμό. Όπως είχαμε αναφέρει και στο κεφάλαιο 0 και σε συνδυασμό με το βιογενετικό νόμο που αναλύσαμε παραπάνω, η οντογένεση (δηλαδή η ανάπτυξη ενός οργανισμού), είναι μια ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (δηλαδή της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους). Έτσι, λοιπόν, η εκμάθηση των μαθηματικών θα ακολουθήσει τα ίδια στάδια που ακολούθησε η εξέλιξή τους. Ο ιστορικός παραλληλισμός, δηλαδή, μπορεί να συμπεριλάβει τα εμπόδια και τις δυσκολίες που εμφανίστηκαν κατά την ιστορική εξέλιξη (όπως τα ορίζει ο Brousseau), τις γνωστικές μεθόδους και τις αντιλήψεις των μαθηματικών του παρελθόντος, τα οποία τείνουν να επαναλαμβάνονται στην σχολική τάξη.

Αφού ορίσαμε τον ιστορικό παραλληλισμό, θα περάσουμε τώρα σε μια λεπτομερή ανάλυση ορισμένων ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών οι οποίες αξιοποιούν στοιχεία της ιστορικής

εξέλιξης στη μελέτη ζητημάτων διδασκαλίας και μάθησης . Επιλέξαμε έρευνες που αφορούν κυρίως αλγεβρικές έννοιες, έτσι ώστε να αξιολογήσουμε στη συνέχεια τον τρόπο χρήσης της Ιστορίας, λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία που έχουμε αναφέρει στα κεφάλαια 1 και 2 για την ιστορική εξέλιξη ορισμένων βασικών αλγεβρικών εννοιών. Η σειρά παρουσίασης των ερευνών είναι χρονολογική, προκειμένου να διακρίνουμε τις εξελίξεις τόσο στον τρόπο χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική όσο και στην έννοια του παραλληλισμού.

3.1. Harper Eon, Ghosts of Diophantus (1987)

Βασικό σημείο της αφετηρίας για το ζήτημα που εξετάζουμε αποτελούν οι εργασίες του Eon Harper, ο οποίος χρησιμοποίησε την ιστορική ανάλυση ως βάση μιας εμπειρικής έρευνας προκειμένου να εξετάσει την σχέση ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη των αλγεβρικών ιδεών και την εννοιολογική τους ανάπτυξη. Αποτελεί τμήμα ευρύτερης έρευνας του Harper (1979), η οποία σχεδιάστηκε για να εξετάσει τις δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών στη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα.

Στηρίχθηκε στις προτάσεις των Poincaré (1918), Branford (1924) και Polya (1962) για εκ νέου ανακάλυψη από τους μαθητές, των βημάτων που ακολούθησαν οι μαθηματικοί ανά τους αιώνες. Παράλληλα στηρίχθηκε στην γενετική αρχή, την άποψη, δηλαδή για παραλληλισμό της οντογενετικής ανάπτυξης των μαθηματικών ιδεών (η ανάπτυξή τους, δηλαδή, κατά την διάρκεια της ζωής ενός ατόμου) και της φυλογενετικής ανάπτυξης (η ανάπτυξή τους, δηλαδή, σε όλη την διάρκεια της ιστορίας).

3.1.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Harper.

Στην έρευνα αυτή χρησιμοποιείται η παραδοσιακή διάκριση της ιστορίας της άλγεβρας σε τρία σημαντικά στάδια:

- τη ρητορική άλγεβρα
- τη συγκεκομμένη άλγεβρα
- τη συμβολική άλγεβρα

Η ρητορική άλγεβρα περιλαμβάνει την περίοδο πριν το Διόφαντο (250 μ.Χ. περίπου) στην οποία τα ζητούμενα προσδιορίζονταν με φυσική γλώσσα (ρητορικά) και δεν υπήρχε συμβολισμός για τον άγνωστο αριθμό. Το δεύτερο στάδιο, η συγκεκομμένη άλγεβρα, εκτίνεται από την εποχή του Διόφαντου μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα και χαρακτηρίζεται από την χρήση γραμμάτων για άγνωστες ποσότητες σε εξισώσεις με ένα και δύο αγνώστους. Αρχικά χρησιμοποιούνταν ένα σύμβολο για τον ένα άγνωστο, ενώ ο άλλος εκφραζόταν συναρτήσει του πρώτου, ενώ αργότερα διαφορετικά σύμβολα χρησιμοποιούνται για διαφορετικούς αγνώστους. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα γράμματα πάντα αναπαριστούν άγνωστες ποσότητες χωρίς καμία γενικότητα. Το τρίτο στάδιο, η συμβολική άλγεβρα, χαρακτηρίζεται από την χρήση γραμμάτων και για γνωστές ποσότητες. Αποτέλεσμα αυτής της καινοτομίας ήταν η διατύπωση γενικών λύσεων.

3.1.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας του Harper

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 144 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αγγλία. Τους δόθηκε το εξής πρόβλημα:

‘*Αν δοθεί το άθροισμα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε αριθμών να δειχθεί ότι μπορούν πάντοτε να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.*’.

Ο στόχος της έρευνας είναι να εξεταστούν οι τρόποι επίλυσης και τα αλγεβρικά εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Η διατύπωσή του προβλήματος με αλγεβρικό συμβολισμό είναι:

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

όπου με δεδομένα το άθροισμα α και τη διαφορά b δυο αριθμών αναζητούνται οι δυο αριθμοί x,y.

3.1.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας του Harper

Ο Harper κατέταξε στα εξής στάδια τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν οι μαθητές: ρητορική, διοφαντική, βιετιανή, δοκιμή και σφάλμα και ημιτελής ή λανθασμένη μέθοδος, αλλά ασχολήθηκε κυρίως με τις τρεις πρώτες (οι οποίες αντιστοιχούν στα στάδια της ιστορικής εξέλιξης των αλγεβρικών εννοιών που υιοθετεί η παραδοσιακή ιστοριογραφία).

Στην **ρητορική** μέθοδο οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν αλγεβρικό συμβολισμό, αλλά κατόπιν σκέψης υπολόγισαν τον κάθε αριθμό. Συχνή είναι η χρήση παραδειγμάτων με συγκεκριμένους αριθμούς και παραλληλίζεται με την περίοδο πριν το Διόφαντο κατά την οποία δεν γινόταν χρήση γραμμάτων για τους αγνώστους. Τονίζεται ότι η επιλογή αριθμών για το άθροισμα και την διαφορά είναι ανεξάρτητη της διαδικασίας, κάνοντάς την «γενική». Το 11% των μαθητών χρησιμοποίησε αυτή την μέθοδο.

<u>Παράδειγμα</u>:

άθροισμα=8

διαφορά =4

$$\frac{8}{2}=4 \qquad \frac{2}{2}=1$$

Άρα ο πρώτος αριθμός είναι ο 4+1=5 και ο δεύτερος ο 4-1=3.

Η **διοφαντική** μέθοδος χαρακτηρίζεται από την χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση των αγνώστων όπως ακριβώς συνέβαινε και κατά την περίοδο από τον Διόφαντο έως τον Vieta. Δεν υπάρχει όμως σύμβολο για την παράμετρο. 13% των μαθητών χρησιμοποιούν αυτή τη μέθοδο.

<u>Παράδειγμα</u>:

$$x-y=2(1)$$
$$x+y=8(2)$$
$$(1)+(2)\Rightarrow 2\mathrm{x}=10 \text{ , άρα } x=5.$$

Αντικαθιστώντας στην (2) :

$$5 + y = 8$$
$$y = 8 - 5$$
$$y = 3$$

Αυτό μπορεί να γίνει για κάθε αριθμό.

Τέλος, η **βιετιανή** μέθοδος αντιστοιχίζεται με την αλγεβρική ωριμότητα της σύγχρονης εποχής, με χρήση γραμμάτων για τον άγνωστο και για την παράμετρο και γενικότητα διαδικασίας και παρουσίασης. Το 19% των μαθητών χρησιμοποίησε αυτήν τη μέθοδο.

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω οι αριθμοί x και y

n = άθροισμα των x και y

m = διαφορά των x και y

Γενικές εξισώσεις: $n = x + y$, $m = x - y$

Προσθέτουμε μαζί $m + n = 2x$

Βρίσκουμε το x και αντικαθιστούμε πίσω για το y

Η **μέθοδος δοκιμής και σφάλματος** χρησιμοποιήθηκε από το 10% των μαθητών. Γίνεται ως εξής:

6 – 4 = 2

6 + 4 = 10

Θα δοκιμάσουμε όλες τις περιπτώσεις μέχρι να βρούμε τους αριθμούς που δίνουν διαφορά 2.

Ποιών αριθμών η πρόσθεση δίνει δέκα;

Προχωρούμε μέχρι να βρούμε διαφορά ακριβώς 2

2 και 8

1 και 9

3 και 7

4 και 6

Τέλος, οι ημιτελείς ή λανθασμένες μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν από το 47% των μαθητών.

3.1.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας του Harper

Σχετικά με τα ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιεί ο Harper, παρατηρούμε πως όταν αναφέρεται στο ρητορικό στάδιο, ουσιαστικά στηρίζεται στην αμφισβητούμενη άποψη της ιστορικής ιστοριογραφίας περί ύπαρξης βαβυλωνιακής άλγεβρας. Έτσι, λοιπόν, θα γίνει σχολιασμός των ευρημάτων του με βάση όσα σχολιάσαμε στο κεφάλαιο 2, πως η διάκριση της ιστορικής εξέλιξης της άλγεβρας σε στάδια γίνεται σύμφωνα με την παραδοσιακή ιστοριογραφία που συγκρίνει και ερμηνεύει τα μαθηματικά έργα του παρελθόντος με το σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό και τρόπο σκέψης. Αφετηρία, δηλαδή, αποτελεί η σύγχρονη άλγεβρα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι τρεις τρόποι επίλυσης που μπορούν να ταυτοποιηθούν στην Ιστορία των Μαθηματικών ανιχνεύονται και στις απαντήσεις των μαθητών. Παρουσιάζει ,επίσης, ενδιαφέρον το γεγονός ότι η προτίμηση για τον τρόπο επίλυσης φαίνεται να μετακινείται από τον ρητορικό στο διοφαντικό και στη συνέχεια στον βιετιανό τρόπο και ότι η χρήση των δεδομένων υιοθετείται σχετικώς αργά στη σχολική ζωή (στην πλειοψηφία των περιπτώσεων).

Θα μπορούσε, ωστόσο, κάποιος να υποθέσει ότι όλα αυτά τα συμπεράσματα αντανακλούν απλώς τις εμπειρίες των μαθητών από τη σχολική τάξη και τη δομή του αναλυτικού προγράμματος της Άλγεβρας.

Πρέπει όμως να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι:

- Στο σχολείο οι μαθητές δεν ενθαρρύνονται να δίνουν απαντήσεις ρητορικού τύπου.
- Στην 1η τάξη οι μαθητές εισάγονται στη χρήση των γραμμάτων ως αγνώστων και αναμένεται να τους χρησιμοποιούν στο εξής για την επίλυση προβλημάτων.
- Ήδη από την 2η τάξη οι μαθητές χρησιμοποιούν τα γράμματα ως δεδομένα στο πλαίσιο των συναρτήσεων και για τη διατύπωση γενικεύσεων.
- Τα συστήματα εξισώσεων εισάγονται στην 2η τάξη.

Άρα, λοιπόν, η πλειοψηφία των μαθητών που έδωσε ορθές λύσεις του προβλήματος δεν χρησιμοποίησε αυτά τα σύμβολα σε μικρότερες τάξεις, γιατί πιθανώς οι μαθητές ήταν ανίκανοι να μεταφέρουν τη χρήση του συμβολισμού σε διαφορετικά πλαίσια, και ότι αυτό το είδος προβλήματος έγινε κυρίαρχο μόνο στο επίπεδο της 4ης και 5ης τάξης. Άλλη πιθανή εξήγηση είναι ότι οι δάσκαλοι δεν καθιστούν τους μαθητές ενήμερους για τις διαφορετικές χρήσεις γραμμάτων ως ‘άγνωστοι’ και ‘δεδομένοι’ με αποτέλεσμα οι μαθητές να πρέπει να διαχωρίσουν τις δυο χρήσεις από μόνοι τους.

Τέλος, στην έρευνα του Harper αναδεικνύεται ο θετικός ρόλος της ιστορικής γνώσης των Μαθηματικών για την ερμηνεία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές. Είδαμε ότι η σειρά απόκτησης των εννοιών από τους μαθητές , δείχνει να παραλληλίζεται με εκείνη που θα αποκαλύψει μια μελέτη της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας. Όπως αναφέρει ο Harper, δεν χρειάζεται πολλή φαντασία για να αναγνωρίσει κανείς ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν, επίσης,

παρόμοιες δυσκολίες και ότι θα καταφέρουν να κάνουν παρόμοιες προόδους με τους μαθηματικούς του παρελθόντος. Ανεξάρτητα, επομένως, από οποιαδήποτε θεώρηση για την φύση της ακριβούς σχέσης ανάμεσα στη φυλογενετική και την οντογενετική ανάπτυξη, η ιστορική ανάλυση των μαθηματικών ιδεών μπορεί να μας εφοδιάσει με σημαντικές εκφράσεις για τις νοητικές δυσκολίες και ανακαλύψεις που εμποδίζουν ή προάγουν την μαθηματική εξέλιξη.

3.2. Sfard Anna: On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on progress and objects as different sides of the same coin. (1991)

Η ιστορική εξέλιξη του αριθμού και της συνάρτησης χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη διατύπωση ενός θεωρητικού μοντέλου της ανακάλυψης των μαθηματικών εννοιών κατά τη διαδικασία της μάθησης.

3.2.1 Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα της Sfard.

Μελετώντας την ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας, η Sfard, χρησιμοποιεί κυρίως δευτερεύουσες ιστορικές πηγές. Διακρίνει τρία στάδια εξέλιξης της άλγεβρας (ρητορικό, συγκεκριμένο, συμβολικό). Παραθέτουμε το εξής απόσπασμα για να φανεί η αντίληψή της για την ιστορική εξέλιξη :

> «Όπως παρατηρούν οι Davis και Hersh (1983, σ.182), "Τα μαθηματικά της Αιγύπτου, της Βαβυλώνας, και της αρχαίας Ανατολής ήταν όλα αλγοριθμικού τύπου… Μόνο στη σύγχρονη εποχή βρίσκουμε μαθηματικά με ασήμαντο ή καθόλου αλγοριθμικό περιεχόμενο, τα οποία θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε πλήρως διαλεκτικά ή υπαρξιακά". Πράγματι η επιστήμη του υπολογισμού, που είναι σήμερα γνωστή με το σχετικά νέο όνομά της "άλγεβρα", έχει διατηρήσει έναν ευδιάκριτα εργαλειακό χαρακτήρα για χιλιάδες χρόνια. Η λεγόμενη "ρητορική" άλγεβρα, η οποία προηγήθηκε της συγκεκομμένης και της συμβολικής άλγεβρας (η τελευταία δεν αναπτύχθηκε πριν από το 16ο αιώνα) ασχολήθηκε με τις υπολογιστικές διαδικασίες καθαυτές, ενώ το μόνο αποδεκτό είδος αφηρημένων αντικειμένων ήταν οι αριθμοί. Ακόμη και οι πιο σύνθετες αλληλουχίες αριθμητικών πράξεων παρουσιάζονταν με τη βοήθεια λεκτικών εντολών, που είχαν έναν ευδιάκριτα επακόλουθο χαρακτήρα και δεν προκάλεσαν σύνοψη και αντικειμενοποίηση.»

3.2.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας της Sfard.

Η έρευνα αυτή δεν είναι εμπειρική, αλλά μια θεωρητική ανάλυση, η οποία στοχεύει να εξερευνήσει την ιδιομορφία της μαθηματικής σκέψης. Θεωρεί πολύ βασικές τις λέξεις **έννοια** (concept) και **σύλληψη** (conception) τις οποίες ορίζει ως:
Έννοια: μια μαθηματική ιδέα που αναφέρεται στην 'επίσημη' μορφή της
Σύλληψη: ένα σύνολο από εσωτερικές αναπαραστάσεις που προκαλεί η έννοια.

Διακρίνει, μάλιστα, τις συλλήψεις σε *δομικές* και *εργαλειακές*. Οι δομικές μεταχειρίζονται τις μαθηματικές έννοιες ως αφηρημένα αντικείμενα ενώ οι εργαλειακές δίνουν έμφαση στις διαδικασίες, τους αλγορίθμους και τις πράξεις αντί για τα αντικείμενα. Ανάλογα, λοιπόν, με το είδος της σύλληψης η συνάρτηση, για παράδειγμα, μπορεί να οριστεί είτε ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη είτε ως μέθοδος μετάβασης από το ένα σύστημα στο άλλο. Χαρακτηρίζει, τις δομικές ως στατικές, στιγμιαίες και συνολικές ενώ τις εργαλειακές ως δυναμικές, συνεχείς και λεπτομερείς. Καταλήγει, ωστόσο, στο συμπέρασμα ότι είναι συμπληρωματικές για την πλήρη κατανόηση μια έννοιας (Sfard, 1991, σελ. 4).

Στη συνέχεια, μεταφέρει τα δυο είδη συλλήψεων στην ιστορία των μαθηματικών. Υποστηρίζει πως οι εργαλειακές συλλήψεις προηγούνται των δομικών στη δημιουργίας μια έννοιας, αφού οι δομικές είναι πιο αφηρημένες. Ο ισχυρισμός αυτός κατά τη Sfard ισχύει τόσο στην ιστορική εξέλιξη μιας έννοιας όσο και στην εκμάθησή της από τον μαθητή και χρησιμοποιεί το παράδειγμα της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας του αριθμού για να το αποδείξει.

Το μοντέλο της Sfard προβλέπει την ιεραρχική εμφάνιση τριών σταδίων (φάσεων) που χαρακτηρίζονται αντίστοιχα:

- Φάση **εσωτερίκευσης**, κατά την οποία ο μαθητής εξοικειώνεται με τις διαδικασίες που όταν εκτελεστούν θα οδηγήσουν στη νέα έννοια. Οι διαδικασίες αυτές γίνονται σε μαθηματικά αντικείμενα χαμηλού επιπέδου. Για παράδειγμα στην περίπτωση των αρνητικών ακεραίων το άτομο αποκτά την ικανότητα να εκτελεί αφαιρέσεις, ενώ στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών αποκτά ευχέρεια στο χειρισμό τετραγωνικών ριζών.
- Φάση **σύνοψης**, κατά την οποία οι διαδικασίες συνοψίζονται σε πιο διαχειρίσιμες ενότητες. Κατά τη φάση αυτή, το άτομο αποκτά δεξιότητες και γίνεται πιο ικανό στο να μελετά μια διαδικασία χωρίς χρειαστεί να μπαίνει στις λεπτομέρειές της. Διαρκεί όσο μια νέα οντότητα παραμένει συνδεδεμένη με μια διαδικασία. Όταν το άτομο είναι πλέον ικανό να αντιλαμβάνεται την έννοια ως ένα πλήρως αναπτυγμένο αντικείμενο, τότε λέμε ότι η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Για παράδειγμα η αφαίρεση ενός φυσικού αριθμού από έναν μικρότερό του οδηγεί στην ιδέα του αρνητικού αριθμού, ενώ η αντιστροφή της διαδικασίας του τετραγωνισμού στον μιγαδικό αριθμό.
- Φάση **αντικειμενοποίησης,** κατά την οποία η διαδικασία μετασχηματίζεται σε ένα νέο και αυτόνομο αντικείμενο μελέτης. Το άτομο εδώ μπορεί να δει κάτι οικείο κάτω από ένα εντελώς νέο πρίσμα. Οι έννοιες θεωρούνται ως πλήρως ανεπτυγμένα αντικείμενα με στατική δομή. Στο παράδειγμα του αρνητικού αριθμού, η αντικειμενοποίηση εμφανίζεται όταν το άτομο τον χειρίζεται ως στοιχείο του δακτυλίου των ακεραίων (χωρίς κατ' ανάγκη να είναι γνωστή η τυπική δομή του δακτυλίου). Στους μιγαδικούς το σύμβολο α+βi ερμηνεύεται ως το όνομα του αντικειμένου (στοιχείου ενός καλά ορισμένου συνόλου) και όχι ως περιγραφή μιας διαδικασίας συγκεκριμένων υπολογισμών.

Οι δυο πρώτες φάσεις στις οποίες κυριαρχούν διαδικαστικές όψεις των εννοιών είναι εργαλειακές, ενώ η τρίτη, στην οποία κυριαρχούν οι αφηρημένες όψεις, είναι δομική. Η Sfard τονίζει πως το μοντέλο της παρά το εύρος των πεδίων δράσης του μπορεί να είναι ανεπαρκές για ορισμένους τομείς, όπως η γεωμετρία.

3.2.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας της Sfard

Με βάση, λοιπόν το μοντέλο της Sfard**,** η λεγόμενη ρητορική άλγεβρα, η οποία προηγήθηκε της συγκεκομμένης και της συμβολικής άλγεβρας, ασχολήθηκε με τις υπολογιστικές διαδικασίες καθαυτές, ενώ το μόνο αποδεκτό είδος αφηρημένων αντικειμένων ήταν οι αριθμοί. Ακόμη και οι πιο σύνθετες αλληλουχίες αριθμητικών πράξεων παρουσιάζονταν με τη βοήθεια λεκτικών εντολών, που είχαν έναν ευδιάκριτα επακόλουθο χαρακτήρα.

Δεν θεωρεί τυχαίο γεγονός τη μετάβαση από τη ρητορική στη συμβολική άλγεβρα, δηλαδή μια μετάβαση από την εργαλειακή στη δομική προσέγγιση στα υπολογιστικά μαθηματικά, κατά τον 16ο αιώνα. Θεωρεί πως η τεράστια πολυπλοκότητα των υπολογιστικών διαδικασιών έφερε τη ρητορική άλγεβρα σε κατάσταση αδιεξόδου τερματίζοντας έτσι την ανάπτυξή της. Η Sfard, μάλιστα, διακινδυνεύει την εικασία ότι όσο κοιτάμε πίσω, η απουσία δομικών αναπαραστάσεων, άρα δομικών αντιλήψεων, ήταν ένας από τους παράγοντες που επιβράδυναν την εξέλιξη της υπολογιστικής επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα και προκάλεσαν την υστέρηση της άλγεβρας έναντι της γεωμετρίας.

3.2.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας της Sfard

Η Sfard δημιούργησε ένα δυναμικό μοντέλο, το οποίο γνώρισε ευρεία διάδοση. Στην έρευνα αυτή το πρόβλημα δεν είναι το μοντέλο καθαυτό, αλλά ο τρόπος χρήσης των ιστορικών πηγών η οποία εκτός από αποσπασματική είναι και επιλεκτική:

> «Ότι ακολουθεί τώρα είναι μια πολύ σύντομη και με κανένα τρόπο εξαντλητική παρουσίαση της μακριάς και ταραχώδους ιστορίας μερικών από τις πιο κεντρικές μαθηματικές έννοιες. Σ' αυτή την εργασία θα ασχοληθώ μόνο με εκείνα τα ιστορικά γεγονότα και αποτελέσματα τα οποία φωτίζουν την άποψη που θα ήθελα να τονίσω εδώ …» (Sfard 1991).

Στην έρευνα αυτή γίνεται πολύ σύντομη παρουσίαση της μακροχρόνιας ιστορίας μερικών από τις κεντρικές μαθηματικές ιδέες. Δευτερογενείς ή ακόμη και τριτογενείς πηγές ιστορικής πληροφόρησης (όπως το βιβλίο των Davis και Hersh, *The Mathematical Experience*)

χρησιμοποιούνται αποσπασματικά για τη στήριξη ενός θεωρητικού μοντέλου της μάθησης, το οποίο εν συνεχεία γίνεται και εργαλείο διατύπωσης ιστορικών ερμηνειών. Όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 0, όμως, πλέον έχει γίνει στροφή προς τα ιστορικά κείμενα και την όσο το δυνατό πιο πιστή ανάγνωσή τους.

Στο Κεφάλαιο 0 τονίστηκε, επίσης, ότι τα αρχαία κείμενα δεν ερμηνεύονται πλέον σύμφωνα με την αντίληψη ότι αυτά περιέχουν τις πρώιμες και ατελείς μορφές των σύγχρονων μαθηματικών εννοιών, αντίληψη την οποία ακολουθεί και η Sfard. Με βάση αυτή τη στροφή της ιστοριογραφίας, έχει ανατραπεί η άποψη ότι το περιεχόμενο των Βαβυλωνιακών πινακίδων αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της άλγεβρας, η λεγόμενη «γενικευμένη Αριθμητική». Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, νεότερες έρευνες υποστηρίζουν πως το περιεχόμενο αυτό είναι στενά συνδεδεμένο με γεωμετρικές έννοιες και δραστηριότητες (Hoyrup 2002).

Σύμφωνα με το μοντέλο της Sfard, η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ακολουθεί μια ιεραρχική δομή, στην οποία αυτό που συλλαμβάνεται εργαλειακά σε ένα επίπεδο γίνεται αντιληπτό δομικά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο. Μερικά χρόνια αργότερα, το 1994,η Sfard, στηριζόμενη στο μοντέλο της, κωδικοποιεί το έργο του Διόφαντου ως εξής: το τοποθετεί στο εργαλειακό στάδιο, θεωρείται έργο γενικευμένης αριθμητικής, σημείο αιχμής του είναι οι αριθμητικοί υπολογισμοί και γίνεται χρήση μικτής, λεκτικής και συμβολικής, αναπαράστασης (Sfard & Linchevski 1994, σελ 203). Η κωδικοποίηση αυτή έχει τις εξής ιστορικές ερμηνείες:

- Ο Διόφαντος δεν προχώρησε πέρα από την χρήση αλγεβρικών εκφράσεων. Αυτό σημαίνει πως ένα γράμμα δήλωνε άγνωστη – σταθερή τιμή, ενώ οι εκφράσεις αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς που λαμβάνονται συνδυάζοντας τον άγνωστο με άλλους αριθμούς. Ο Διόφαντος ανέπτυξε άλγεβρα που βασίζεται σε σταθερές τιμές σε αντίθεση με την Συναρτησιακή άλγεβρα που τα γράμματα αντιπροσωπεύουν μεταβλητές και όχι σταθερά μεγέθη.
- Ο Διόφαντος χρησιμοποίησε συνδυασμό συμβόλων και λέξεων και δημιούργησε συγκεκομμένη άλγεβρα και έλυσε πολλούς διαφορετικούς τύπους εξισώσεων. Δεν δημιούργησε, ωστόσο, καθόλου μεθόδους. Κάθε πρόβλημα στα Αριθμητικά του λύνεται με διαφορετικό τρόπο.

Οι απόψεις αυτές σχετικά με τον Διόφαντο αποτελούν γενικεύσεις. Στο κεφάλαιο 2 δείξαμε ότι μάλλον αγνοούμε τη σχέση του, όχι μόνο με τις προελληνικές μαθηματικές παραδόσεις αλλά ακόμη και με την Ελληνική της κλασικής περιόδου. Όπως είδαμε, στα Αριθμητικά του Διόφαντου συναντούμε για πρώτη φορά τον ορισμό μιας έννοιας “αγνώστου” αριθμού, ένα συγκροτημένο σύστημα συμβολικής αναπαράστασης σχέσεων που περιέχουν τον “άγνωστο” και τις δυνάμεις του, και ορισμένους γενικούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων.

Συμπερασματικά, στην ανάλυση της Sfard διαπιστώνουμε ότι η χρήση δευτερογενών και παρωχημένων πηγών ιστορικής πληροφόρησης δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ιστορική τεκμηρίωση για τον «παραλληλισμό» ανάμεσα στο προτεινόμενο μοντέλο της γνωστικής ανάπτυξης και της ιστορικής εξέλιξης

3.3. G. Harel - Students' Understanding of proofs (1999)

Αυτή η εργασία του Harel μελετά τις συμπεριφορές σπουδαστών σε σχέση με την αιτιολόγηση και την απόδειξη. Η διαδικασία μελέτης των συμπεριφορών των σπουδαστών είναι ενδιαφέρουσα αλλά και ασταθής, επειδή περιλαμβάνει μεταβλητές που δε μπορεί να μετρήσει ούτε να ελέγξει ο ερευνητής. Ωστόσο, αυτό που μαθαίνουμε από αυτήν την διαδικασία είναι κατά τον Harel σημαντικό για το σχεδιασμό και την εφαρμογή των προγραμμάτων σπουδών, τόσο για τους σπουδαστές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Ισχυρίζεται, μάλιστα, πως από αυτές τις συμπεριφορές, κάποιες οφείλονται σε ανεπαρκή καθοδήγηση για τις αποδείξεις, ενώ άλλες θυμίζουν φαινόμενα που εμφανίστηκαν κατά την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

3.3.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Harel.

Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων εξετάζονται χωρίς απόδειξη, καθώς δεν περιλαμβάνουν γενικές δηλώσεις, αλλά δίνουν συγκεκριμένες λύσεις για συγκεκριμένα προβλήματα. Στη συνέχεια, οι Έλληνες χρησιμοποίησαν τη διαισθητική μέθοδο απόδειξης, δηλαδή την επαγωγική απόδειξη που βασίζεται σε ορισμένες γενικές αρχές. Για αυτούς τα νοητικά αντικείμενα ήταν εξιδανικεύσεις της φυσικής πραγματικότητας, όπως μια γραμμή, ένα τρίγωνο, κ.λπ. Ο Harel μάλιστα σημειώνει πως έδιναν έμφαση στην αυστηρή αιτιολόγηση και τις καλά ορισμένες έννοιες, γεγονός που τους εμπόδισε να χρησιμοποιήσουν έννοιες όπως οι άρρητοι αριθμοί και το άπειρο και έτσι να εξελίξουν περισσότερο τα μαθηματικά τους.

Έπειτα, ακολούθησε μια μακροχρόνια περίοδος κατά την οποία μικρή προσοχή δινόταν στην αυστηρότητα της αιτιολόγησης. Ο Harel θεωρεί πιο σημαντική την περίοδο από τον 16^{ο} μέχρι και τον 17^{ο} αιώνα, όπου και καθιερώθηκε η χρήση συμβόλων στην αιτιολόγηση. Οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα ήταν επηρεασμένοι από την άποψη του Αριστοτέλη ότι η βάση για την κατανόηση ενός πράγματος είναι η κατανόηση της αιτίας του. Ως αποτέλεσμα κάποιοι δέχονταν την απόδειξη με αντιπαράθεση (δίνοντας δηλαδή ένα σύνολο από αντικρουόμενα επιχειρήματα για μια κατάσταση) και κάποιοι όχι. Ο συγγραφέας παραθέτει ένα παράδειγμα από την ιστορία που μας βοηθά να καταλάβουμε τον τρόπο σκέψης της περιόδου αυτής: Η σύγχρονη έννοια του «αριθμού» γεννήθηκε όταν τα σύμβολα που δεν αντιπροσωπεύουν καμία συγκεκριμένη πραγματικότητα, αντιμετωπίστηκαν ως αντικείμενα που μπορούν να χρησιμοποιούνται σύμφωνα με ορισμένους κανόνες. Αυτά τα αντικείμενα καθορίζονται, δηλαδή, όχι από αυτά που αντιπροσωπεύουν αλλά από ένα καθορισμένο εκ των προτέρων σύνολο κανόνων. Βέβαια, πολλοί μαθηματικοί του 17ου αιώνα είχαν αμφιβολίες για αυτό τον τρόπο σκέψης και αναρωτιόνταν πως μπορεί να γίνεται λόγος για σύμβολα χωρίς γεωμετρικό υπόβαθρο ή χωρίς ένα σταθερό σημείο αναφοράς. Στο τέλος αυτής της περιόδου, ο Fourier, με τη συμβολική του λύση στο πρόβλημα της ροής θερμότητας έστρεψε την προσοχή προς την δομή της συνάρτησης και άνοιξε το δρόμο προς τη δημιουργία της Ανάλυσης.

Σταδιακά, επομένως, προέκυψε ένας δεύτερος τρόπος απόδειξης, ο δομικός. Για να γίνει πιο εύκολα κατανοητός, ο Harel κάνει μια κρίσιμη διάκριση μεταξύ των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και του *Grundlagen* του Hilbert. Ενώ τα αξιώματα στα *Στοιχεία* περιγράφουν πραγματικότητες που γίνονται αντιληπτές διαισθητικά (ακολουθώντας δηλαδή τη διαισθητική μέθοδο που αναφέρθηκε

στην προηγούμενη παράγραφο), το *Grundlagen* περιγράφει δομές που ταιριάζουν σε διαφορετικά μοντέλα. Έτσι, ενώ τα *Στοιχεία* είναι περιορισμένα σε μια ενιαία ερμηνεία και εστιάζουν συγκεκριμένα στο ότι το περιεχόμενό τους είναι περιγραφή της ανθρώπινης αντίληψης για το χώρο, το *Grundlagen* είναι ανοικτό σε διάφορες άλλες πιθανές πραγματικότητες, όπως το Ευκλείδειο διάστημα, η επιφάνεια μιας ημίσειας σφαίρας, διατεταγμένων ζευγαριών, κ.λπ., συμπεριλαμβανομένης και της ερμηνείας ότι τα αξιώματα μπορεί να είναι φόρμουλες χωρίς νόημα. Από όλα τα παραπάνω, επομένως, προκύπτει πως η δομική μέθοδος απόδειξης στηρίζεται στην άποψη ότι οι ορισμοί και τα θεωρήματα αφορούν διαφορετικές συνειδητοποιήσεις που έχουν μια κοινή δομή, η οποία καθορίζεται από έναν σύνολο αξιωμάτων. Τα αξιώματα που καθορίζουν τη δομή είναι σταθερά και μελετάται η δομή και όχι το σύστημα των αξιωμάτων.

Τελευταίος εμφανίστηκε ο αξιωματικός τρόπος απόδειξης. Κατά τον Harel, η δομική σύλληψη είναι μια γνωστική προϋπόθεση για την αξιωματική σύλληψη της απόδειξης, μια σύλληψη από την οποία ο ερευνητής είναι σε θέση να ερευνήσει τα αποτελέσματα της αλλαγής του συνόλου των αξιωμάτων ή να κατανοήσει την εφαρμογή αξιωμάτων σε κάποιο πεδίο των μαθηματικών.

3.3.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας του Harel

Ο Harel, με βάση τα παραπάνω, προσπαθεί να αναλύσει τις αντιλήψεις των σπουδαστών περί της απόδειξης σε σχέση με την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Έτσι, λοιπόν, τις ταξινομεί στις εξής τρεις κατηγορίες:

1. Αντιλήψεις των σπουδαστών για την απόδειξη που φαίνονται να παραλληλίζουν τον ελληνικό τρόπο σύλληψης των μαθηματικών.
2. Αντιλήψεις των σπουδαστών για την απόδειξη που θυμίζουν τον τρόπο σύλληψης των μαθηματικών κατά τον 16ο-17ο αιώνα.
3. Αντιλήψεις των σπουδαστών για την απόδειξη που οφείλονται σε μεγάλο βαθμό σε λανθασμένες οδηγίες από τους διδάσκοντες κατά την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ο Harel ασχολείται εδώ μόνο με τις δυο πρώτες κατηγορίες.

Τα συμπεράσματα για τις αντιλήψεις των σπουδαστών για την απόδειξη λήφθηκαν από έξι πειραματικές διδασκαλίες με 169 σπουδαστές (φοιτητές μαθηματικών και εφαρμοσμένης μηχανικής). Τα στοιχεία συλλέχτηκαν από την παρατήρηση στην τάξη μέσω αναδρομικών σημειώσεων (retrospective notes), κλινικών συνεντεύξεων (clinical interviews), ασκήσεων για το σπίτι (homework), γραπτών δοκιμών και διαγωνισμών γνώσεων. Μερικά από τα στοιχεία προήλθαν από βιντεοσκοπημένα μαθήματα μέσα στην τάξη και συνεντεύξεις (διάρκειας 60-90 λεπτών) με τους σπουδαστές. Με βάση τα ευρήματα από την έρευνα του, ο Harel προσπαθεί να κάνει παραλληλισμό μεταξύ των δυσκολιών των μαθητών στην απόδειξη και της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο συγγραφέας διακρίνει τρία είδη απόδειξης κατά την ιστορική εξέλιξη: τη διαισθητική, την δομική και την αξιωματική. Υποστηρίζει ότι με τη διαισθητική απόδειξη, ο σπουδαστής είναι σε θέση να ανταποκριθεί σε αξιώματα που είναι συμβατά με τη διαίσθησή του. Εδώ τα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία προέρχονται από μια εξιδανίκευση της

φυσικής πραγματικότητας, καθορίζουν το σύνολο αξιωμάτων όπως το νοεί ο σπουδαστής. Αυτό ήταν ένας επαναστατικός τρόπος σκέψης στην ανάπτυξη των μαθηματικών και μπορεί να ρίξει άπλετο φως σε μερικές από τις δυσκολίες που παρατήρησε ο Harel με τους σπουδαστές.

Η δομική σύλληψη, κατά τον Harel είναι η οπτική ότι οι ορισμοί και τα θεωρήματα αντιπροσωπεύουν διαφορετικές καταστάσεις που μοιράζονται μια κοινή δομή που καθορίζεται από ένα μόνιμο σύστημα των αξιωμάτων. Σε αυτή τη σύλληψη, τα αξιώματα βασίζονται σε μία μόνιμη δομή, και οι ερευνητές μελετούν την ίδια τη δομή όχι μόνο το σύστημα αξιωμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, κάποιος μελετά πραγματική ανάλυση βάσει των αξιωμάτων ενός πλήρους διατεταγμένου τομέα, ή μελετά τους διανυσματικούς χώρους βάσει των αξιωμάτων διανυσματικών χώρων.

Δύο από τις ερωτήσεις που ο Harel εξέτασε στη μελέτη του ήταν: Κατέχουν οι προπτυχιακοί φοιτητές μαθηματικών την αξιωματική σύλληψη σε οποιοδήποτε επίπεδο; Οι σπουδαστές καταλαβαίνουν ότι τα αξιώματα δεν απαιτούν κάποια συγκεκριμένη ερμηνεία;

3.3.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας του Harel

Σε σχέση με την πρώτη κατηγορία αντιλήψεων των μαθητών που εξετάζεται, ο Harel παρατηρεί πως:

Πολλοί μαθητές (55%) δε μπορούν να ξεφύγουν από τα συμφραζόμενα και εκπλήσσεται που εμφανίζεται σε τόσο ανώτερο στάδιο της εκπαίδευσης. Παραλληλίζει αυτή την κατάσταση με τη διχογνωμία που προκάλεσε στους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα η σύγχρονη έννοια του αριθμού. Ο Harel δίνει παραδείγματα των απαντήσεων των φοιτητών που καταδεικνύει την απουσία της δομικής σύλληψης από τη νόηση και αιτιολόγηση των σπουδαστών:

Q: Πώς θα περιγράψεις το μάθημα αφηρημένης άλγεβρας που έκανες πρόσφατα;
S1: Λοιπόν…πολλά σε αυτό είναι περίεργα πράγματα. Καταλήγεις να μαθαίνεις ότι 1+1 δεν κάνει 2 πλέον…
Q: Εξήγησε το επιχείρημα στον ισχυρισμό: $(-1)x = -x$
S2: Δεν υπάρχει επιχείρημα. Είναι προφανές ότι μια φορά αρνητικό x είναι αρνητικό x.

Η απουσία δομικής σύλληψης από την αιτιολόγηση των μαθητών και η εξάρτηση από τις δικές τους αντιλήψεις θυμίζει στον Harel τον τρόπο σκέψης των Αρχαίων Ελλήνων για τα μαθηματικά, οι οποίοι όριζαν τις έννοιες με βάση τις δικές τους εμπειρίες.

Σχετικά με τη δεύτερη κατηγορία, σε ότι αφορά στην κατανόηση των σπουδαστών των μαθηματικών για το ρόλο της αιτιότητας στα μαθηματικά της Αναγέννησης παρατηρούνται τα εξής:

Τείνουν να συνδέονται η παρερμηνεία και οι ελλιπείς αποδείξεις μόνο με αδύνατους σπουδαστές στα μαθηματικά. Στην πραγματικότητα, όμως, όλοι οι σπουδαστές, και οι αδύνατοι και οι ικανοί, λόγω της επιθυμίας τους να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες που σκοπεύουμε να τους διδάξουμε, συναντούν δυσκολίες. Οι παρακάτω αποδείξεις είναι παραδείγματα στα οποία ορισμένοι σπουδαστές, κατά κανόνα οι ικανότεροι, αποκρίνονται με τρόπο που μπερδεύει τον Harel. Όταν μάλιστα οι αποδείξεις επαναλαμβάνονται σε αυτούς τους σπουδαστές, φαίνονται να καταλαβαίνουν κάθε βήμα στην απόδειξη, αλλά στο τέλος επαναλαμβάνουν την ίδια ερώτηση.

Επώνυμο

<u>Απόδειξη Ι</u>:

<u>Πρόβλημα:</u> Να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε τρία διανύσματα στον R^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

<u>Απόδειξη</u>: (Δόθηκε από τον καθηγητή)

Έστω $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ τρία διανύσματα στον R^2 και θεωρούμε το σύστημα AX=0, όπου

$$A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα AX=0 έχει το λιγότερο μια ελεύθερη μεταβλητή, επομένως έχει μια μη-μηδενική λύση, την:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

Αφού $x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + x_3 A^{(3)} = 0$ και x_1, x_2, x_3 όχι όλα μηδενικά, μια από τις στήλες του A πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων. Άρα οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Κάποιοι μαθητές απαντούν το εξής στην απόδειξη του καθηγητή:

'*Τι θα γινόταν αν το σύστημα δεν ήταν ομογενές; Η απάντηση σου εξαρτάται από το γεγονός ότι το σύστημα είναι ομογενές. Αν το σύστημα δεν ήταν ομογενές, δε θα μπορούσες να αποδείξεις ότι τα διανύσματα είναι εξαρτημένα.*'

<u>Απόδειξη ΙΙ</u>:

<u>Θεώρημα</u>: Έστω T ένας τετραγωνικός πίνακας και έστω $v_1, v_2, ..., v_\kappa$ ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\kappa$. Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\kappa$ είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, τότε τα $v_1, v_2, ..., v_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

<u>Απόδειξη</u>:

Ας υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $a_i = 0$ για κάθε i. Έστω ότι για κάθε $p_i(x) = \prod_{j \neq i}^{k} \frac{(x-\lambda_j)}{(t_i - t_j)}$ για i=1,2,...,k. Από το θεώρημα φασματικής χαρτογράφησης,

$$0 = p_i(T)0 = \mathrm{p}_i(T)\sum_{j=1}^{k} a_j v_j = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{p}_i(T) a_j v_j = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathrm{p}_i(T) v_j = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathrm{p}_i(\lambda_j) v_j$$

Αφού $p_i(\lambda_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ o, i \neq j \end{cases}, 0 = p_i(\mathrm{T})0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \delta_{ij} v_i = \alpha_i v_i$. Άρα $\alpha_i = 0$ για κάθε i.

Μερικοί μαθητές απαντούν λέγοντας:
«*για το γεγονός τι θα γινόταν αν διαλέγαμε διαφορετικά πολυώνυμα; Τα* $v_1, v_2, ..., v_\kappa$ *είναι ανεξάρτητα επειδή διαλέγεις αυτά τα πολυώνυμα. Ίσως αν είχες διαλέξει διαφορετικά πολυώνυμα, δε θα μπορούσες να αποδείξεις το θεώρημα.*»

Τα εμπόδια που συναντούν αυτοί οι μαθητές παραλληλίζουν, κατά τον Harel, τα εμπόδια που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα ακολουθώντας την επικρατούσα λογική περί εύρεσης της αιτίας κάθε γεγονότος. Συναντάται πιο εύκολα στους ικανούς μαθητές καθώς αυτοί προσπαθούν να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες, ενώ οι αδύνατοι αρκούνται σε όσα παρουσιάζουν οι καθηγητές. Για παράδειγμα στην απόδειξη Ι, όταν οι μαθητές αναρωτιούνται για την περίπτωση που το σύστημα δεν ήταν ομογενές, θεωρούν το ομογενές σύστημα AX=0 ως την αιτία της ανεξαρτησίας των διανυσμάτων: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$.

Η σειρά, βέβαια, παρουσίασης του υλικού στους σπουδαστές και ο τρόπος που εισάγονται οι νέες έννοιες είναι κρίσιμοι παράγοντες εκμάθησης. Για παράδειγμα, η χρήση γεωμετρίας πριν την εισαγωγή αλγεβρικών εννοιών μπορεί να περιορίσει τον τρόπο σκέψης των μαθητών και να τους εμποδίσει να σκεφτούν αφαιρετικά.

Τέλος, παρατηρείται ότι οι σπουδαστές δυσκολεύονται να ξεφύγουν από τα συμφραζόμενα κατά την απόδειξη και να περάσουν στις δομές και στα αξιώματα. Πιθανή αιτία είναι ότι ακόμη δε μπορούν να σκεφτούν εντελώς αφαιρετικά και στηρίζονται πολύ στην παρατήρηση. Αυτό αντανακλά τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών προκειμένου να περάσουμε από τα προβλήματα και τις ανάγκες της καθημερινής ζωής σε πιο αφηρημένο τρόπο σκέψης.

3.3.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας του Harel

Σε αυτή την έρευνα ο Harel επιχειρεί να παραλληλίσει τα εμπόδια των μαθητών στην απόδειξη με την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Η ιστορική του ανάλυση συμπληρώνεται και από το

άρθρο του *Students' proof schemes. Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III*. (1998) χωρίς να στηρίζεται σε μελέτη πρωτότυπων κειμένων, η οποία είναι η σύγχρονη μέθοδος της ιστοριογραφίας, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 0.

Ως προς το ζήτημα του παραλληλισμού το οποίο εξετάζουμε, παρατηρούνται τα εξής:

- Στην πρώτη κατηγορία, πολλοί μαθητές στηρίχθηκαν στη διαίσθηση και δυσκολεύτηκαν να περάσουν στα αξιώματα, αντικατοπτρίζοντας την αδυναμία των Ελλήνων να περάσουν στις δομές καθώς και την εμμονή τους σε αντικείμενα που είναι εξιδανικεύσεις της καθημερινής ζωής.
- Στη δεύτερη κατηγορία, πολλοί μαθητές προσπάθησαν να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες παραλληλίζοντας την δυσκολία των μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα, ακολουθώντας την επικρατούσα λογική περί εύρεσης της αιτίας κάθε γεγονότος.

Και οι δυο αυτές παρατηρήσεις, αναδεικνύουν μια άλλη διάσταση του παραλληλισμού: βλέπουμε από τις απαντήσεις ότι πολλοί μαθητές εξαρτώνται αρκετά από τις αντιλήψεις τους για την απόδειξη, αντανακλώντας την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και αφαιρετικής σκέψης, συμπίπτοντας έτσι με τις δυσκολίες των μαθηματικών του παρελθόντος. Οι αντιλήψεις αυτές αποτελούν ένα επιστημολογικό εμπόδιο (σύμφωνα με τις απόψεις του Brousseau), οδηγώντας τους μαθητές σε αδιέξοδο που καθιστούν αναγκαίο τον επαναπροσδιορισμό των μεθόδων τους. Η υπερπήδηση των εμποδίων αυτών είναι απαραίτητη για την απόκτηση γνώσεων.

Επιπλέον, ο Brousseau, όπως αναφέραμε στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 3, υποστήριξε ότι οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών οφείλουν να:

α) να εντοπίζουν επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις.

β) να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών.

γ) να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό χαρακτήρα τους.

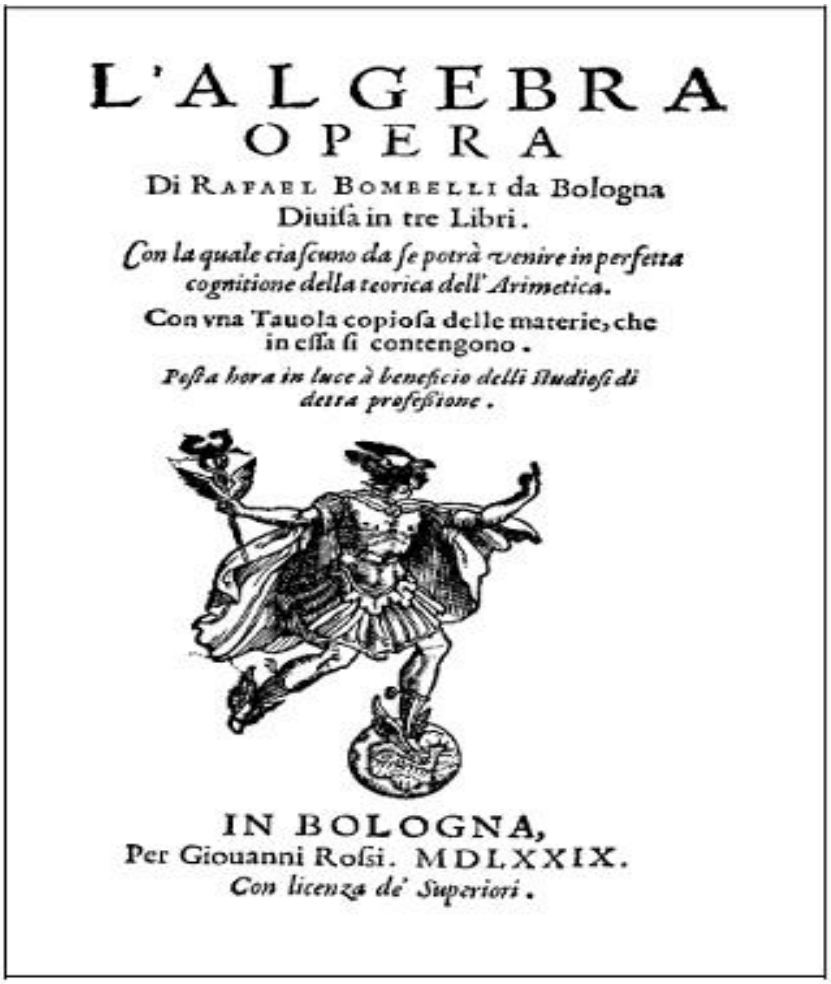
Ο Harel τήρησε τις αρχές αυτές στην έρευνά του. Εντόπισε επαναλαμβανόμενα λάθη των μαθητών (τα οποία εμείς συγκεντρώσαμε στις δυο παραπάνω παρατηρήσεις), βρήκε εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών σχετικά με την απόδειξη (εμπόδια των αρχαίων Ελλήνων και των μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα) και συνέκρινε τα εμπόδια των μαθητών με τα εμπόδια των μαθηματικών του παρελθόντος, τονίζοντας τις αντιλήψεις που αποτελούσαν επιστημολογικό εμπόδιο. Δεν προχώρησε, ωστόσο, στη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων για την υπερπήδηση των εμποδίων αυτών.

3.4. G. Bagni: The role of the history of mathematics in mathematics education: Reflections and examples (2000)

Σε αυτή τη δημοσίευση έγινε η εισαγωγή της έννοια της ομάδας σε ένα δείγμα σπουδαστών ηλικίας 16-18 ετών μέσα από ένα ιστορικό παράδειγμα που προέρχεται από την άλγεβρα του Bombelli (1572). Σε ένα δεύτερο δείγμα των σπουδαστών δόθηκε μια παράλληλη εισαγωγή μέσω ενός πίνακα διπλής εισόδου. Και οι δύο ομάδες υποβλήθηκαν στις ίδιες ερωτήσεις και οι απαντήσεις τους εξετάστηκαν και συγκρίθηκαν. Ο Bagni τονίζει πως η σωστή και αποτελεσματική χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση απαιτεί προσεκτική έρευνα.

3.4.1.Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Bagni

Στην παρούσα έρευνα , ο Bagni εξετάζει ένα σημαντικό θέμα του προγράμματος σπουδών τόσο στους μαθητές λυκείου (για σπουδαστές ηλικίας 16-18 ετών) όσο και στους φοιτητές προπτυχιακών μαθηματικών, δηλαδή την έννοια της ομάδας (group concept). Ο Rafael Bombelli της Μπολόνια (1526-1572) έγραψε την *Άλγεβρα*, που δημοσιεύθηκε δύο φορές, το 1572 και το 1579:



L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Εικόνα 6

Στην *Άλγεβρα*, ο Bombelli εισήγαγε τους όρους più di meno (pdm) και meno di meno (mdm) για να αντιπροσωπεύσει το +i και – i καθόρισε τους παρακάτω «βασικούς κανόνες»:

"Più" → +1; "Meno" → –1; "Più di meno" → +*i*; "Meno di meno" → –*i*;
"Via" → · (πολλαπλασιασμός/multiplication); "Fa" → =.

Ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε:

$$(+1)\cdot(+i) = +i$$
$$(-1)\cdot(+i) = -i$$
$$(+1)\cdot(-i) = -i$$
$$(-1)\cdot(-i) = +i$$
$$(+i)\cdot(+i) = -1$$
$$(+i)\cdot(-i) = +1$$
$$(-i)\cdot(+i) = +1$$

$$(-i)\cdot(-i) = -1$$

Επίσης, στην *Άλγεβρα* μπορούμε να βρούμε το εξής (σελ. 70):

"Più via più fa più. Meno via meno fa più.
Più via meno fa meno. Meno via più fa meno".

Μπορούμε να εκφράσουμε τα παραπάνω ως:

$$(+1)\cdot(+1) = +1 \quad (-1)\cdot(+1) = -1$$
$$(+1)\cdot(-1) = -1 \quad (-1)\cdot(-1) = +1$$

Έτσι, λοιπόν, προκύπτει ο εξής πίνακας, ο οποίος ονομάζεται *πίνακας Cayley* (ή *πίνακας διπλής εισόδου*, όπως ονομάζεται στην ελληνική βιβλιογραφία)*:*

Σχήμα 10

x	+1	-1	+i	-i
+1	+1	-1	+i	-i
-1	-1	+1	-i	+i
+i	+i	-i	-1	+1
-i	-i	+i	+1	-1

Ο πίνακας αυτός μπορεί να ερμηνευτεί ως η ομάδα $(\{+1,-1,+i,-i\}, \bullet)$ που προκύπτει από τις τέταρτες ρίζες της μονάδας. Πρόκειται για μια κυκλική ομάδα που μπορεί να παραχθεί είτε από το i είτε από το –i. Ο Bombelli δεν παρατήρησε αυτή την ιδιότητα και επίσης δεν την παρατήρησε για την υποομάδα που παράγεται από το -1.

Φυσικά, στην *Άλγεβρα* του Bombelli δε βρίσκουμε εισαγωγή στην έννοια της ομάδας ή στους μιγαδικούς αριθμούς. Ο Bombelli απλά έδειξε ορισμένα μαθηματικά αντικείμενα για να λύνει κυβικές εξισώσεις. Οι ιδέες του δεν έγιναν αμέσως δεκτές. Μάλιστα ο ίδιος ο Bombelli εκφράζει την αμφιβολία του στην *Άλγεβρα* (σελ. 169):

«*Βρήκα άλλο ένα είδος κυβικής ρίζας... και δεν τη θεωρώ αληθινή, μέχρι να έχω βρει την απόδειξή της.*»

Ο Bombelli θεωρούσε θεμελιώδη τη γεωμετρική απόδειξη για τις αλγεβρικές προτάσεις, οπότε γίνεται κατανοητός ο προβληματισμός του. Βέβαια, η τυπική εισαγωγή του i στην *Άλγεβρα* του Bombelli είναι σημαντική και σύγχρονη (Bourbaki, 1960, σελ. 91-92). Σχετικά με τους μιγαδικούς αριθμούς, ο Bagni, ακολουθώντας τις απόψεις της Sfard (1991, σελ. 12) που αναφέραμε παραπάνω, υποστηρίζει εισήχθησαν ως μια λειτουργική σύλληψη:

« *Οι οδηγίες του Cardan για επίλυση εξισώσεων τρίτης και τέταρτης τάξης που δημοσιεύτηκαν το 1545, περιελάμβαναν […] ακόμη και την εύρεση αρνητικών ριζών. Παρά την ευρεία χρήση αυτών των αλγορίθμων, οι μαθηματικοί αρνούνταν να δεχθούν τα υποπροϊόντα τους […]. Το σύμβολο (τετραγωνική ρίζα του 1) αρχικά θεωρούνταν ως τίποτα παραπάνω από συντομογραφία για ορισμένες αριθμητικές πράξεις 'χωρίς νόημα'. Ήρθε για να ορίσει ένα πλήρως ολοκληρωμένο μαθηματικό αντικείμενο μόνο αφού οι μαθηματικοί συνήθισαν σε τέτοια παράξενα, αλλά χρήσιμα είδη υπολογισμού.*»

Ο Bagni προτείνει να αντιληφθούμε την έννοια της ομάδας με παρόμοιο τρόπο: είναι λάθος να αποδίδεται στον Bombelli γνώση της ομάδας, αλλά έμμεσα εισήγαγε μια από τις πιο σημαντικές έννοιες των μαθηματικών.

3.4.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας του Bagni

Σε αυτό το άρθρο, ο Bagni προσπαθεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση των σπουδαστών για την έννοια της ομάδας (group concept), μέσα από ιστορικά παραδείγματα και να βελτιώσει την ποιότητα της διδασκαλίας μέσω της μεταφοράς σκέψης (thought transference). Στηρίζεται στις απόψεις του Burn (1996), ο οποίος προτείνει να γίνει εισαγωγή στην έννοια της ομάδας πριν δοθούν τα σχετικά αξιώματα (προ-αξιωματική εισαγωγή) και προσπαθεί να διαπιστώσει αν είναι δυνατό (και χρήσιμο) να γίνει αυτό. Επιδιώκει οι σπουδαστές να μάθουν μέσα από το ιστορικό παράδειγμα που θα χρησιμοποιήσει, αλλά η γνώση να μην τοποθετηθεί στην σφαίρα της ιστορίας. Αναρωτιέται, ωστόσο, αν η χρήση των κανόνων Bombelli θα κάνει τους μαθητές να κατανοήσουν και τις 4 απαραίτητες ιδιότητες για την ομάδα (κλειστότητα, προσεταιριστικότητα, ύπαρξη του μοναδιαίου στοιχείου, ύπαρξη αντιστρόφου).

Το δείγμα της έρευνας λοιπόν περιέλαβε τους 68 μαθητές και των τριών τάξεων από το 3ο Liceo Scientifico (ηλικίας 16-17 ετών), και 71 μαθητές (σύνολο 139 μαθητές) και των τριών τάξεων από το 4ο Liceo Scientifico (μαθητές ηλικίας 17-18 ετών) του Treviso της Ιταλίας. Κατά την διάρκεια του πειράματος, οι μαθητές ήξεραν τον i (όπου $i^2 = -1$) αλλά δεν ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια της ομάδας.

Ο Bagni διαίρεσε, με τυχαίο τρόπο, τους σπουδαστές σε δύο μέρη, τα Α και Β και στη συνέχεια έδωσε τις ακόλουθες κάρτες στους σπουδαστές (Κάρτες Α και Β αντίστοιχα σε κάθε μέρος οι οποίες φαίνονται στις παρακάτω εικόνες). Η κάρτα Α, που δόθηκε στους σπουδαστές του Α (συνολικά 68 σπουδαστές) περιλαμβάνει τους «βασικούς κανόνες» του Bombelli, ενώ στην κάρτα Β, που δόθηκε στους σπουδαστές του μέρους Β (συνολικά 71 σπουδαστές), δεν αναφέρθηκαν οι «βασικοί κανόνες» του Bombelli αλλά δόθηκε ο πίνακας διπλής εισόδου. Από τη δοκιμή μέσω ερωτήσεων, ο Bagni ήθελε να ανακαλύψει εάν η μελέτη ενός απλού ιστορικού παραδείγματος (χωρίς γνώση αξιωμάτων) είναι χρήσιμη στην εισαγωγή της έννοιας της ομάδας.

Επιπλέον, ήθελε να ανακαλύψει τις διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων που πέτυχαν οι σπουδαστές που τους δόθηκε μια περιγραφή ομάδας από τους «βασικούς κανόνες» Bombelli και των αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκαν από τους σπουδαστές που είχαν λάβει τον πίνακα διπλής εισόδου. Όσον αφορά στις ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν στον καθορισμό μιας ομάδας, ο Bagni ανέμενε ότι η κλειστότητα, η προσεταιριστικότητα και η παρουσία του μοναδιαίου στοιχείου στο G = {+1, –1, +*i*, –*i*} θα ήταν προφανής σε πολλούς μαθητές. Η κλειστότητα εμφανίζεται και στους κανόνες του Bombelli και στον πίνακα διπλής εισόδου ενώ οι άλλες ιδιότητες είναι γνωστές. Το δε αντίστροφο (presence of inverses), ότι δηλαδή για κάθε $x \in G$ υπάρχει x' ώστε : $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$, μπορεί να είναι πιο δύσκολο για να το διακρίνουν οι σπουδαστές.

Κάρτα Α. Στην *Άλγεβρα,* ο Rafael Bombelli της Bologna (1526-1572) έδωσε τους κανόνες:

$$+1)\cdot\ (+1) = +1 \qquad (-1)\cdot\ (+1) = -1 \qquad (+1)\cdot\ (-1) = -1 \qquad (-1)\cdot\ (-1) = +1$$
$$(+1)\cdot\ (+i) = +i \qquad (-1)\cdot\ (+i) = -i \qquad (+1)\cdot\ (-i) = -i \qquad (-1)\cdot\ (-i) = +i$$
$$(+i)\cdot\ (+i) = -1 \qquad (+i)\cdot\ (-i) = +1 \qquad (-i)\cdot\ (+i) = +1 \qquad (-i)\cdot\ (-i) = -1$$

Ας θεωρήσουμε το $G = \{+1, -1, +i, -i\}$. Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί ή λάθος;

1. Το γινόμενο δυο στοιχείων του G είναι πάντα ένα στοιχείο του G.
2. Ο πολλαπλασιασμός στοιχείων του G είναι προσεταιριστικός.
3. Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in G, e \cdot x = x \cdot e = x.$
4. Για κάθε $x \in G$, υπάρχει ένα στοιχείο $x' \in G$ τέτοιο ώστε $x \cdot x' = x' \cdot x = e.$

Εικόνα 7

Κάρτα Β. Ας θεωρήσουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$+1$	-1	$+i$	$-i$
$+1$	$+1$	-1	$+i$	$-i$
-1	-1	$+1$	$-i$	$+i$
$+i$	$+i$	$-i$	-1	$+1$
$-i$	$-i$	$+i$	$+1$	-1

Ας θεωρήσουμε το $G = \{+1, -1, +i, -i\}$. Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί ή λάθος;

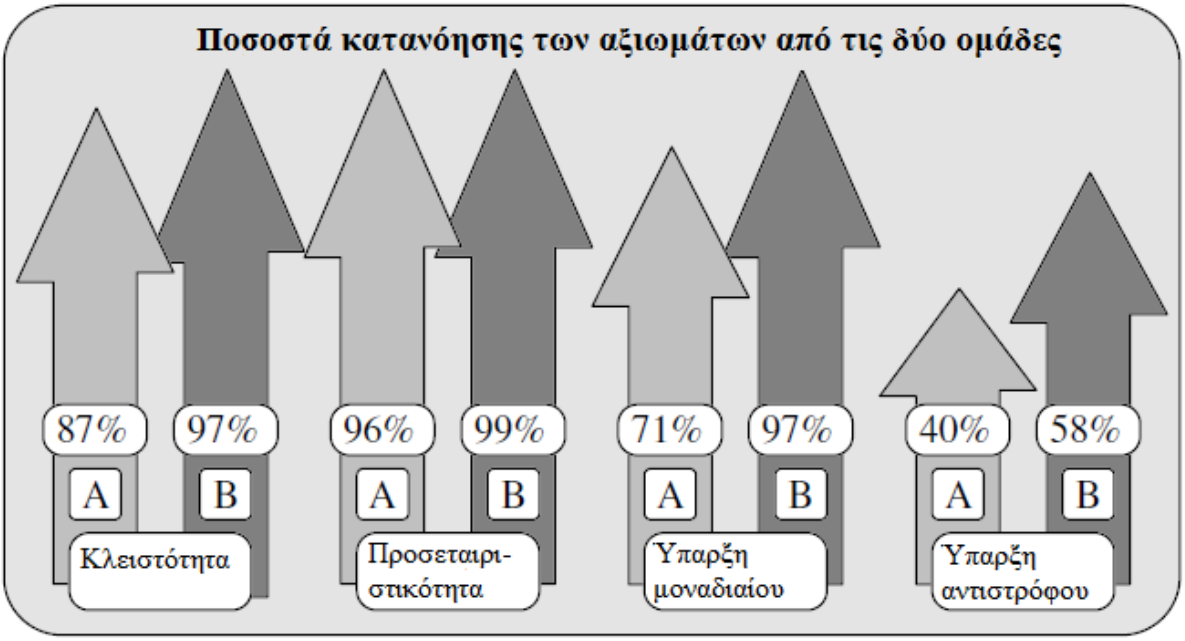
1. Το γινόμενο δυο στοιχείων του G είναι πάντα ένα στοιχείο του G.
2. Ο πολλαπλασιασμός στοιχείων του G είναι προσεταιριστικός.
3. Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in G, e \cdot x = x \cdot e = x$.
4. Για κάθε $x \in G$, υπάρχει ένα στοιχείο $x' \in G$ τέτοιο ώστε $x \cdot x' = x' \cdot x = e$.

Εικόνα 8

Ο επιτρεπόμενος χρόνος για να διαβαστεί η κάρτα και να απαντηθεί η ερώτηση ήταν 10 λεπτά. Ο ερευνητής ήθελε οι σπουδαστές να εξετάσουν το πρόβλημα «με μία ματιά».

3.4.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας του Bagni

Από τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται ότι οι ιδιότητες 1, 2, 3 (κλειστότητα, προσεταιριστικότητα, ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου) αναγνωρίζονται από τους σπουδαστές. Όσον αφορά στις ιδιότητες 1 και 2 οι διαφορές μεταξύ του δείγματος Α και του δείγματος Β είναι αρκετά μικρές, με μεγαλύτερη διαφορά για την ιδιότητα 3. Φαίνεται, δηλαδή, ότι ο πίνακας διπλής εισόδου ήταν κάπως χρησιμότερος στους μαθητές από τους κανόνες Bombelli. Όσον αφορά στην ιδιότητα 4 (η ύπαρξη αντιστρόφου) η κατάσταση είναι μάλλον διαφορετική: μόνο το 40% των σπουδαστών (δείγμα Α) και το 58% (δείγμα Β) δέχτηκε την ιδιότητα. Ας οπτικοποιήσουμε λοιπόν τα αποτελέσματα στην ακόλουθη εικόνα (πρόκειται περί μιας ποιοτικής αντιπροσώπευσης, καθώς οι διαφορές μεταξύ των ποσοστών μεταξύ Α και Β είναι μερικές φορές μικρές):



Σχήμα 11

Ο Bagni πήρε συνέντευξη χωριστά από εκείνους τους μαθητές (Α: 41 σπουδαστές, Β: 30 σπουδαστές) που δε θεώρησαν τη δήλωση 4 (ύπαρξη αντιστρόφων) αληθή. Σχεδόν όλοι αυτοί οι σπουδαστές δήλωσαν απλά ότι δεν αντιλήφθηκαν την παρουσία των αντιστρόφων με την εξέταση των κανόνων Bombelli (ή του πίνακα διπλής εισόδου στην αντίστοιχη περίπτωση).

Συμπεραίνει, λοιπόν, ότι η χρήση του ιστορικού παραδείγματος ήταν επιτυχής αφού εμφανίστηκαν τα αναμενόμενα αποτελέσματα (ο Bagni ανέμενε ότι η κλειστότητα, η προσεταιριστικότητα και η παρουσία του μοναδιαίου στοιχείου στο G = {+1, –1, +i, –i} θα ήταν προφανής σε πολλούς μαθητές, ενώ ανέμενε δυσκολία για την τέταρτη ιδιότητα). Όσον αφορά στην έννοια της ομάδας, μια προ-αξιωματική εισαγωγή μπορεί να είναι χρήσιμη αλλά το αν έγινε πλήρης εκμάθηση είναι ανοιχτό ερώτημα. Οι κανόνες Bombelli, για παράδειγμα, δε βοήθησαν ιδιαίτερα στην πλήρη εκμάθηση της έννοιας της ομάδας.

Από τις απαντήσεις τους, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές μάλλον βρίσκουν ευκολότερο τον προ-αξιωματικό τρόπο εισαγωγής τους στη θεωρία ομάδας και όχι τόσο με γενικό τρόπο. Αυτό το συμπέρασμα δείχνει την αδυναμία των μαθητών να σκεφτούν αφαιρετικά σε πρώιμο στάδιο της διδασκαλίας, το οποίο με τη σειρά του αντανακλά την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

3.4.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας του Bagni

Σε αυτή την έρευνα, η ιστορική ανάλυση του Bagni βασίστηκε αρκετά στην *Άλγεβρα* του Bombelli, δηλαδή σε πρωτότυπο ιστορικό κείμενο, εκφράζοντας έτσι τη νέα τάση της ιστοριογραφίας των μαθηματικών (όπως την έχουμε παραθέσει στο κεφάλαιο 0).

Βλέπουμε στη συγκεκριμένη έρευνα πως η χρήση του ιστορικού παραδείγματος βοήθησε στην καλύτερη κατανόηση των τριών πρώτων ιδιοτήτων της ομάδας. Η προ-αξιωματική εισαγωγή βοήθησε τους μαθητές οι οποίοι, αγνοώντας την έννοια της ομάδας, κατόρθωσαν να εκφραστούν με ορθό τρόπο. Με χρήση διαίσθησης και παρατήρησης, οι οποίες είναι και οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι στις πρωιμότερες μορφές των μαθηματικών, οι μαθητές μπόρεσαν σχετικά άνετα να κατανοήσουν τις τρεις πρώτες ιδιότητες.

Για την τέταρτη ιδιότητα, ωστόσο, παρατηρούμε μια σχετική δυσκολία των μαθητών. Οι μαθητές, προσκολλημένοι στις τεχνικές που χρησιμοποιούν, μπορούν να διακρίνουν ότι $(+1)\cdot(+1)=1$ αλλά ίσως το ότι $(+i)\cdot(-i)=1$ να τους δυσκολεύει. Η δήλωσή τους ότι δεν αντιλήφθηκαν την παρουσία των αντιστρόφων με την εξέταση των κανόνων Bombelli (ή του πίνακα διπλής εισόδου στην αντίστοιχη περίπτωση), θυμίζει την δυσκολία του Bombelli, ο οποίος δεν αντιλήφθηκε ότι τα {1,-1, i, -i} μπορούν να προκύψουν από το i ή το –i. Παρατηρούμε, δηλαδή, μια σύγκλιση ανάμεσα στις δυσκολίες των μαθητών και τις ιστορικές αντιλήψεις που φανερώνουν την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης για τους μιγαδικούς και την ομάδα.

Στο τέλος, ο Bagni καταλήγει να συμφωνεί με την άποψη των Dubinsky & Al (1997, σελ.252) :

> «Μια ιστορική άποψη είναι χρήσιμη μέσα από σχεδιασμό της έρευνας και των οδηγιών σε ότι αφορά τη θεωρία ομάδας (group concept). Η ιστορία είναι βεβαίως ένα μέρος της μεθοδολογίας μας, αλλά επηρεαζόμαστε όχι μόνο από το ποιος απέδειξε τι και πότε, αλλά και με από τους μηχανισμούς από τους οποίους σημειώθηκε πρόοδος»

Η άποψη αυτή ταιριάζει με την άποψη των Piaget & Garcia, που αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3, ότι υπάρχει μια στενή επαφή μεταξύ της ανάπτυξης του γνωστικού μηχανισμού σε ατομικό και σε συλλογικό επίπεδο. Υποστήριξαν, δηλαδή, ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ψυχολογικών και ιστορικών εξελίξεων και αυτή η σχέση πρέπει να εξεταστεί από την άποψη των μηχανισμών που μεσολαβούν κατά την μετάβαση από το ένα στάδιο στο επόμενο και όχι από την άποψη του περιεχομένου.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως αυστηρός παραλληλισμός ιστορίας – διδασκαλίας των μαθηματικών δεν μπορεί να γίνει καθώς παράγοντες όπως οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν τους μαθητές.

3.5. Y. Thomaidis & C. Tzanakis „. The notion of historical 'parallelism' revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line (2007)

Η έννοια του παραλληλισμού εξετάζεται ιδιαίτερα στο πλαίσιο της συγκεκριμένης ιστορικής μελέτης και εμπειρικής έρευνας που είχαν ως αντικείμενο την εξέλιξη και τη διδασκαλία της διάταξης πραγματικών αριθμών και της απόλυτης τιμής.

3.5.1. Ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Thomaidis & Tzanakis

Η διάταξη των ακέραιων αριθμών στην αριθμητική ευθεία ξεκίνησε μέσα από τα προβλήματα που απαιτούσαν χρήση των αρνητικών αριθμών. Ο Stiffel (1544) αιτιολογεί την ανάγκη διάταξης των πραγματικών αριθμών καθώς ασχολείται με το πρόβλημα απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών. Θεωρώντας τις γεωμετρικές και αριθμητικές προόδους ως εξής:

(αριθμητικές)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13…
(γεωμετρικές)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192…

εξήγησε πώς η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός ανάμεσα σε όρους γεωμετρικής προόδου μπορεί να περιοριστεί στην πρόσθεση και αφαίρεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου. Για διαιρέσεις όπως 64:518=1:8 και αδύνατες αφαιρέσεις όπως 6-9=0-3 έκανε επέκταση της αντιστοιχίας προς τα αριστερά με την εισαγωγή νέων πλασματικών αριθμών:

$$\ldots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$\ldots \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128$$

Σύμφωνα με τον Stiffel, με τον ίδιο τρόπο που τοποθετούμε τους φυσικούς αριθμούς μετά την μονάδα και τα κλάσματα πριν από αυτήν έτσι τοποθετούμε και τη μονάδα και τους φυσικούς αριθμούς μετά το μηδέν, ενώ την πλασματική μονάδα και τους πλασματικούς αριθμούς πριν από αυτήν.

Η αποδοχή της διάταξης δεν έγινε δεκτή ούτε άμεσα ούτε καθολικά. Ο Descartes (1637) δεν χρησιμοποιεί αυτή τη διάταξη όταν χρησιμοποιεί θετικούς και αρνητικούς αριθμούς ως ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων. Δηλαδή γράφει για παράδειγμα:

$$(x-5)(x+2)(x+3)(x+4)=0 \text{ και όχι } x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0,$$

θεωρώντας ως αληθινή ρίζα το 5 και ως ψεύτικες τα 2,3,4. Στη συνέχεια θέτει $x=y-3$ οπότε γίνεται:

$$(y-8)(y-1)y(y+1)=0 \text{ ή } y^4-8y^3-y^2+8y=0,$$

με αληθινές ρίζες τα 8,1,0 και ψεύτικη το 1. Ο Descartes περιγράφει το αποτέλεσμα ως εξής: αυξάνουμε την αληθινή ρίζα 5 κατά 3 και μειώνουμε κάθε ψεύτικη. Δηλαδή οι ψεύτικες ρίζες από 2,3,4 γίνονται -1,0,1.

Και ο Newton έχει την ίδια θεωρία για τις πολυωνυμικές εξισώσεις. Όταν η αρνητική ποσότητα είναι μεγαλύτερη της θετικής, τότε το άθροισμα θα είναι αρνητικό. Επίσης συζητώντας για τις θετικές και αρνητικές ρίζες μιας εξίσωσης αναφέρεται στην μέγιστη θετική ρίζα και στη μέγιστη αρνητική ρίζα, δηλαδή την πιο μακρινή ρίζα από το 0.

Ακόμη και στην άλγεβρα του Euler η διάταξη των θετικών και αρνητικών αριθμών στην αριθμητική ευθεία παραμένει ασαφής. Εισάγοντας τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς ο Euler υποστηρίζει ότι:

«οι αλγεβρικές ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν ως μια ακολουθία αριθμών που αυξάνουν κατά οποιοδήποτε λόγο, σε κάθε πλευρά του μηδενός μέχρι το άπειρο.»

Η διάταξη στην αριθμητική ευθεία ξεκαθάρισε με τον Lagrange.

3.5.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας των Thomaidis & Tzanakis

Αυτή η δημοσίευση αναφέρεται στη σύγκριση των συμπερασμάτων μιας ιστορικής ανάλυσης με μια εμπειρική έρευνα σε σπουδαστές Α' Λυκείου (16 χρονών). Το θέμα που εξετάζεται είναι η σειρά των αριθμών στην αριθμητική ευθεία. Στόχος είναι να εξεταστεί η σχέση μεταξύ της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και της διδασκαλίας τους. Οι Thomaidis & Tzanakis σχεδίασαν ένα ερωτηματολόγιο με τρεις ερωτήσεις Q1, Q2, Q3:

Q1: Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2>9$ ($x^2<9$), $x \in R$;

Q2: Αν $x^2<y^2$ ($x^2>y^2$), τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τους x, y, $x,y \in R$;

Q3: Αν οι α,β,γ είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι, ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος που μπορεί να προστεθεί στους α,β,γ για να γίνουν θετικοί;

Τα δεδομένα συλλέχτηκαν μέσα από ένα διαγώνισμα στο μέσο του εξαμήνου, όπου ο δάσκαλος μοίρασε τα ερωτηματολόγια και οι σπουδαστές είχαν 40 λεπτά για να απαντήσουν. Οι απαντήσεις κατανεμήθηκαν σε κατηγορίες ανάλογα με τη στρατηγική επίλυσης που ακολουθήθηκε.

3.5.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας των Thomaidis & Tzanakis

Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε σε 28 σπουδαστές που μόλις είχαν τελειώσει το 4^{ο} κεφάλαιο των ανισώσεων δευτέρου βαθμού (post-algorithmic group G2), ενώ σε μια άλλη ομάδα 30 σπουδαστών επρόκειτο να διδαχθεί το ίδιο κεφάλαιο (pre-algorithmic group G1). Οι Thomaidis & Tzanakis ανέμεναν πως το G1 θα έχει πιο πολλές δυσκολίες να αντιληφθεί τη σειρά των αρνητικών αριθμών (αφού αυτοί δεν είχαν εξοικειωθεί με αλγοριθμικές διαδικασίες), όπως και ιστορικά.

Στο G1 ανατέθηκε η πρώτη ανισότητα και στο G2 η δεύτερη ανισότητα του Q1. Το «x2>9» αναμενόταν να συναντήσει πιο πολλές δυσκολίες από το x2<9. Το Η Q1 επιτρέπει τη χρήση μιας ποικιλίας προσεγγίσεων:

- **Διαισθητική ή ανεπίσημη**. Για παράδειγμα η διάταξη συγκεκριμένων αριθμών στην αριθμητική ευθεία και η εύρεση, με εξερεύνηση, ορίων του x. Δεν ενθαρρύνεται η χρήση της μεθόδου αυτής από τους καθηγητές.
- **Τυπική**. Για παράδειγμα, η χρήση θεωρητικών εργαλείων του σχολικού βιβλίου, όπως οι ιδιότητες των ανισοτήτων, τετραγωνικών ριζών και απόλυτων τιμών.

- **Αλγοριθμική**. Για παράδειγμα, η χρήση μιας μεθόδου του βιβλίου για επίλυση ανισώσεων. Αναμένεται κυρίως από το post-algorithmic group.
- **Οπτική ή γεωμετρική**. Για παράδειγμα, η εύρεση σημείων τομής των $y=x^2$ και $y=9$.Η μέθοδος αυτή είναι διαφορετική από τις προηγούμενες, αλλά δε διδάχθηκε γιατί θεωρήθηκε χρονοβόρα.

Η Q2 ανήκει στην κατηγορία των ανισοτήτων που οδήγησαν στην καθιέρωση της ευθείας αριθμών και την εισαγωγή της απόλυτης τιμής σαν ανεξάρτητη έννοια. Η Q2 θεωρούνταν από τους ερευνητές πιο δύσκολη από την Q1 καθώς ξεφεύγει από τις αλγοριθμικές διαδικασίες, αλλά οι σπουδαστές πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της απόλυτης τιμής των αριθμών.

Στην Q3, η διάταξη και η αριθμητική ευθεία εισάγονται όχι μέσα από ανισότητες αλλά ως απαραίτητες έννοιες για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Το Q3 περιέχει τον κανόνα του Καρτέσιου για να γίνουν θετικές όλες οι ρίζες ενός πολυωνύμου.

Οι απαντήσεις του G1 στην Q1 ήταν οι μισές τυπικές, κάνοντας χρήση τετραγωνικής ρίζας και απόλυτης τιμής, ή αλγοριθμικές, με παραγοντοποίηση και δημιουργία κανόνα. Οι άλλες μισές ήταν χωρίς αιτιολόγηση ή χωρίς ένδειξη ότι χρησιμοποιήθηκε γράφημα. Γενικά, όλες αυτές θεωρήθηκαν σωστές (75% των απαντήσεων). Η κυριαρχία των τυπικών και αλγοριθμικών απαντήσεων ήταν πιο φανερή στη G2. Τέλος, οι σωστές απαντήσεις στην G1 ήταν λεκτικές, ενώ στο γκρουπ G2 βασίστηκαν κυρίως σε αλγοριθμικές μεθόδους. Μάλιστα η λεκτική απάντηση λείπει από το G2, κάτι που αντανακλά τις διαφορές μεταξύ των δύο γκρουπ: Οι σπουδαστές του G1 προσάρμοσαν άριστα τη πρότερη γνώση τους επί των ανισώσεων δευτέρου βαθμού, παρά τις μεθόδους που δεν είχαν στη διάθεσή τους, όπως οι σπουδαστές του G2.

Στην Q2 παρατηρούμε ότι όλες οι σωστές απαντήσεις εμπεριείχαν την έννοια της απόλυτης τιμής. Επίσης, σε αντίθεση με το Q1, οι σπουδαστές ακολούθησαν γενικά τις ίδιες διαδικασίες. Λίγοι σπουδαστές και στις δυο ομάδες έδωσαν τυπικές ή αλγοριθμικές απαντήσεις, κυρίως με αριθμητικά παραδείγματα ή και ευθεία απάντηση και είναι όλες λανθασμένες. Αυτό δείχνει πως όταν πρέπει να σκεφτούν την διάταξη των αριθμών δίχως αλγοριθμικές μεθόδους, έχουν σχετική άνεση με τον θετικό ημιάξονα αλλά όχι με τον αρνητικό. Στην Q2 υπάρχει μικρότερο ποσοστό επιτυχίας και στα δυο γκρουπ. Στις σωστές απαντήσεις γίνεται χρήση της απόλυτης τιμής.

Στο Q3, οι σωστές απαντήσεις του G1 (23.3%) ήταν διπλάσιες έναντι του G2 (10.7%). Οι πιο πολλοί σπουδαστές που έδωσαν ανεπαρκείς ή λανθασμένες απαντήσεις, μπέρδεψαν τον όρο «πιο μικρό» με τον «μεγαλύτερο», στην αριστερή πλευρά της γραμμής των αριθμών (γεγονός που θυμίζει το εμπόδιο που εμφανίστηκε και στην ιστορική εξέλιξη). Παρατηρήθηκε ότι δε χρησιμοποιήθηκαν τυπικές ή αλγοριθμικές διαδικασίες. Το πιο σημαντικό είναι πως μερικοί έδωσαν σωστές λεκτικές απαντήσεις βασιζόμενοι στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής ευθείας.

Συμπερασματικά, οι ομοιότητες μεταξύ της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών και της παράδοσής τους εντός τάξης (εντός δύο «κόσμων», είτε της θετικής είτε της αρνητικής όψης του παραλληλισμού) μπορούν να αξιοποιηθούν στο πλαίσιο μιας διδακτικής πρότασης, εναλλακτικής προς τη συμβατική διδασκαλία.

3.5.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας των Thomaidis & Tzanakis

Όσον αφορά την Q1, το γεγονός ότι οι σπουδαστές του G1 προσάρμοσαν άριστα τη πρότερη γνώση τους για τις ανισώσεις δευτέρου βαθμού, παρά το ότι δεν είχαν στη διάθεσή τους τις μεθόδους που είχαν οι σπουδαστές του G2, αποτελεί απόδειξη για τον ιστορικό παραλληλισμό, καθώς, ομοίως πολλοί μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα χωρίς να έχουν πρόσβαση σε ανάλογες μεθόδους, τα κατάφερναν καλά με τις λύσεις γενικών ανισώσεων. Έτσι, λοιπόν, ορίζεται (από τους Thomaidis & Tzanakis) η **θετική** όψη του ιστορικού παραλληλισμού, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές χωρίς να γνωρίζουν τις μεθόδους για χειρισμό των ανισώσεων δευτέρου βαθμού κατόρθωσαν να εκφραστούν σωστά, εμφανίζοντας αναλογίες με ιστορικές αντιλήψεις.

Στην Q2, από πολλές λανθασμένες απαντήσεις προκύπτει ότι οι μαθητές, πιθανώς επειδή δεν είχαν κατανοήσει πλήρως την απόλυτη τιμή, περιορίστηκαν σε θετικούς αριθμούς και έτσι δεν μπόρεσαν να χειριστούν τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Αυτό φανερώνει την ισχυρή αντίληψη των αριθμών ως ποσότητες, το οποίο είναι επιστημολογικό εμπόδιο που εμφανίζεται στο σχολείο και στην ιστορία και αποτελεί **αρνητική** όψη του ιστορικού παραλληλισμού όπως την ορίζουν οι Thomaidis & Tzanakis.

Ταυτόχρονα, οι μη συμβατικές απαντήσεις των σπουδαστών στο Q3 και στα δύο γκρουπ (που βασίζονται αρκετά στην προσέγγιση του Descartes για εξάλειψη των 'λανθασμένων' ριζών) δείχνουν την θετική και αρνητική όψη του παραλληλισμού. Μια ακόμη παρατήρηση σχετικά με την Q3, είναι ότι οι σπουδαστές που μπέρδεψαν το «πιο μικρό» με το «μεγαλύτερο», στην αριστερή πλευρά της γραμμής των αριθμών μας φέρνουν στο νου ανάλογο εμπόδιο που εμφανίστηκε και στην ιστορική εξέλιξη.

Ο αυστηρός βέβαια παραλληλισμός είναι αστήριχτος, καθώς διδακτικοί παράγοντες και διαδικασίες μπορούν να επηρεάσουν τις απαντήσεις των σπουδαστών. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι μεγάλο ποσοστό και του G1 και του G2 δεν απάντησε σωστά στην Q3, μπορεί να συσχετίζεται με τις συνθήκες του διδακτικού περιβάλλοντος χωρίς να θυμίζει τους δημιουργικούς μαθηματικούς του παρελθόντος. Σε γενικές γραμμές, ωστόσο, εντοπίστηκαν σημαντικές ομοιότητες από αυτή την έρευνα, που καθιστούν τη περαιτέρω μελέτη του ιστορικού παραλληλισμού αναγκαία, αλλά με προσοχή. Οι Thomaidis & Tzanakis στην ουσία κάνουν πιο σαφή τον ορισμό του ιστορικού παραλληλισμού που διατυπώθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3, διακρίνοντας τη θετική και την αρνητική όψη του. Οι όψεις αυτές εμφανίζονται και στις έρευνες που μελετήσαμε παραπάνω:

- Στην έρευνα του Harper, σχολιάσαμε ότι η σειρά απόκτησης των εννοιών από τους μαθητές, δείχνει να παραλληλίζεται με εκείνη που θα αποκαλύψει μια μελέτη ιστορίας των μαθηματικών και διατυπώνεται η άποψη ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν παρόμοιες νοητικές δυσκολίες (αρνητική όψη) και ότι θα καταφέρουν να κάνουν παρόμοιες προόδους με τους μαθηματικούς του παρελθόντος (θετική όψη).
- Στην έρευνα του Harel, είδαμε την αρνητική όψη σε δύο κατηγορίες αποδείξεων των μαθητών: στην πρώτη κατηγορία, πολλοί μαθητές στηρίχθηκαν στη διαισθητική απόδειξη και δυσκολεύτηκαν να περάσουν στα αξιώματα, αντικατοπτρίζοντας την αντίστοιχη δυσκολία των αρχαίων Ελλήνων, ενώ στη δεύτερη, πολλοί μαθητές προσπάθησαν να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες παραλληλίζοντας την δυσκολία των μαθηματικών του 17ου αιώνα στις αποδείξεις.
- Στην έρευνα του Bagni, παρατηρήσαμε πως τα ιστορικά παραδείγματα βοήθησαν τους μαθητές στην κατανόηση των τριών πρώτων ιδιοτήτων της ομάδας. Εδώ οι μαθητές αγνοώντας την έννοια της ομάδας, κατόρθωσαν να εκφραστούν με ορθό τρόπο (θετική όψη), παραλληλίζοντας με τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν την ιστορική εξέλιξη. Για την

τέταρτη ιδιότητα, ωστόσο, παρατηρούμε μια σχετική δυσκολία των μαθητών που συγκλίνει με αντίστοιχες του Bombelli (αρνητική όψη).

3.6. Bülent Kaygin, Bilal Balçin, Cemalettin Yildiz, Selahattin Arslan - The effect of teaching the subject of Fibonacci numbers and golden ratio through the history of mathematics

Πρόσφατες μελέτες στην ιστορία των μαθηματικών υπογραμμίζουν το γεγονός ότι η ιστορία των μαθηματικών είναι θεμελιώδης στη διδασκαλία τους. Χάρη στην ευρεία γνώση που δημιουργήθηκε κατά την εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται ευκολότερο να καταλάβουμε τις αφηρημένες έννοιες των μαθηματικών.

3.6.1. Ιστορικά Στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Kaygin, Balcin, Yildiz & Arslan

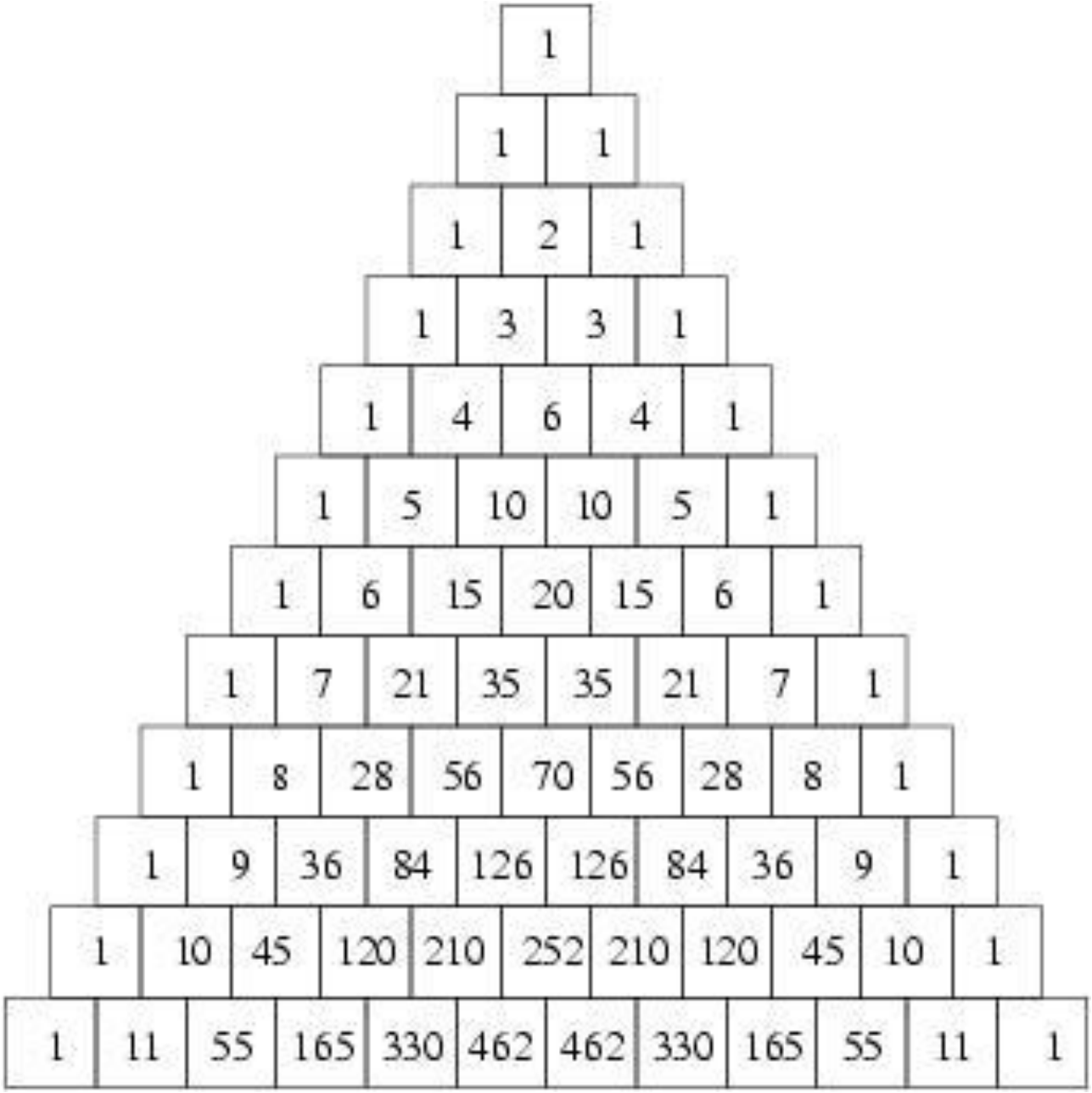
Στη Δύση, οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται για πρώτη φορά στο βιβλίο *Liber Abaci* (1202) του Λεονάρντο της Πίζας, γνωστού και ως Fibonacci. Ο Fibonacci έζησε κοντά στην πόλη της Bejaia, η οποία αποτελούσε ένα σημαντικό εξαγωγέα κεριού την εποχή του Fibonacci (από εκεί προέρχεται και η γαλλική εκδοχή του ονόματος της πόλης αυτής, «bougie», που σημαίνει «κερί» στα γαλλικά).

Ο Fibonacci ασχολήθηκε με το λεγόμενο πρόβλημα των κουνελιών. Παίρνει ως δεδομένο ένα ιδανικό πληθυσμό κουνελιών και κάνει τις εξής υποθέσεις: έχουμε ένα νεογέννητο ζευγάρι κουνελιών (αρσενικό και θηλυκό) σε ένα χωράφι. Τα κουνέλια είναι σε θέση να ζευγαρώσουν ένα μήνα από τη γέννησή τους και έτσι στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό μπορεί να γεννήσει ένα ζευγάρι κουνελιών. Επίσης τα κουνέλια δε πεθαίνουν ποτέ και κάθε ζευγάρι κουνελιών γεννάει ένα νέο ζευγάρι (ένα αρσενικό και ένα θηλυκό) κάθε μήνα από τον δεύτερο μήνα και μετά. Το ερώτημα που έθεσε ο Fibonacci ήταν: πόσα ζεύγη κουνελιών θα έχουν γεννηθεί μέσα σε ένα έτος; Συμπερασματικά:

- Στο τέλος του πρώτου μήνα, τα κουνέλια ζευγαρώνουν, αλλά ακόμη υπάρχει μόνο ένα ζεύγος.
- Στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό γεννάει ένα νέο ζεύγος, οπότε στο χωράφι υπάρχουν δύο ζεύγη κουνελιών.
- Στο τέλος του τρίτου μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννάει και δεύτερο ζεύγος, οπότε έχουμε τρία ζεύγη κουνελιών.
- Στο τέλος του τέταρτου μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννάει ακόμη ένα ζεύγος, το θηλυκό που γεννήθηκε δύο μήνες πριν γεννάει το πρώτο της ζεύγος, οπότε έχουμε πέντε ζεύγη κουνελιών στο χωράφι.
- Στο τέλος του νιοστού μήνα, το πλήθος των ζευγών των κουνελιών είναι ίσος με το πλήθος των νέων ζευγών (ν-2) προσθέτοντας το πλήθος ζευγών που υπήρχαν στο χωράφι τον προηγούμενο μήνα (ν-1). Αυτός είναι ο νιοστός αριθμός Fibonacci.

Μια ιστορική ανάλυση της περιόδου στην οποία έζησε ο Fibonacci προτείνει, βέβαια, ότι στην πραγματικότητα οι μελισσοκόμοι της Bejaia και οι γνώσεις τους σχετικά με την αναπαραγωγή των μελισσών αποτέλεσαν την πηγή έμπνευσης της ακολουθίας Fibonacci και όχι το μοντέλο της αναπαραγωγής κουνελιών.

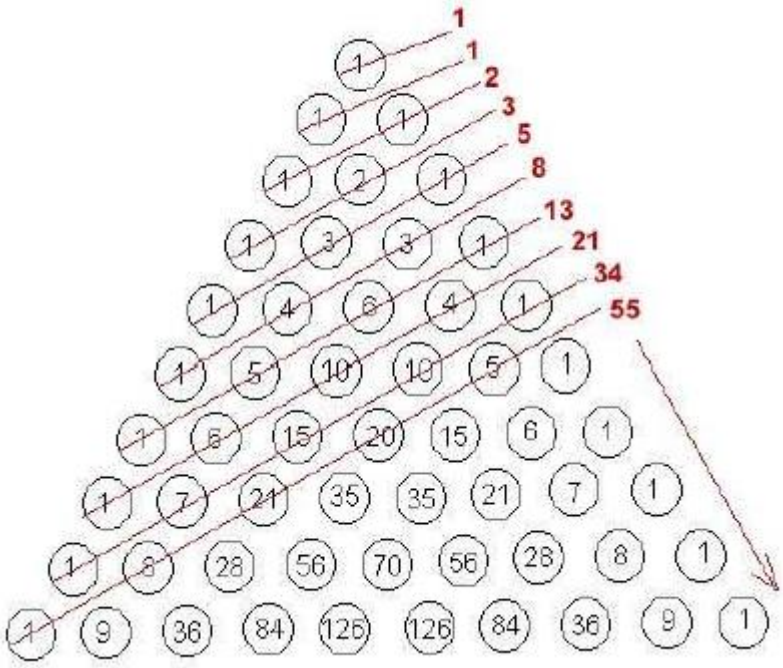
Οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci εμφανίζονται στο λεγόμενο τρίγωνο του Pascal. Το τρίγωνο του Pascal είναι μια ατελείωτη πυραμίδα αριθμών, χτισμένη από πάνω προς τα κάτω. Στην κορυφή της βρίσκεται η μονάδα και οι επόμενες σειρές της πυραμίδας «χτίζονται» με έναν απλό κανόνα: Στα άκρα τοποθετούνται μονάδες και κάθε αριθμός στο εσωτερικό της γραμμής προκύπτει από το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται από πάνω του.



Σχήμα 12

Πρόκειται απλή κατασκευή, η οποία όμως κρύβει μέσα της διάφορες ιδιότητες:

1. Αν αθροίσουμε διαγωνίως τους αριθμούς του τριγώνου Pascal, τα αποτελέσματα είναι οι αριθμοί Fibonacci, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 13

2. Οι αριθμοί της ν-οστής γραμμής του τριγώνου Pascal είναι συντελεστές του αναπτύγματος $(a+\beta)^{\nu-1}$. Για παράδειγμα: Το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^4$ έχει συντελεστές 1,4, 6, 4, 1 οι οποίοι είναι οι αριθμοί της πέμπτης γραμμής: $(a+\beta)^4 = 1a^4 + 4a^3\beta + 6a^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$.

3. Το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής είναι ίσο με μια δύναμη του 2. Για την ακρίβεια το άθροισμα των αριθμών της ν-οστής γραμμής είναι ίσο με $2^{\nu-1}$.

Μια ακόμη παρατήρηση για τους αριθμούς Fibonacci, είναι ότι σχετίζονται και με την χρυσή τομή (η χρυσή τομή είναι ο αριθμός $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61804...$). Θα δούμε τώρα την άμεση σύνδεση του αριθμού αυτού με τους αριθμούς Fibonacci. Θέτουμε:

$f_0 = 1,\ f_1 = 1$ (οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci)

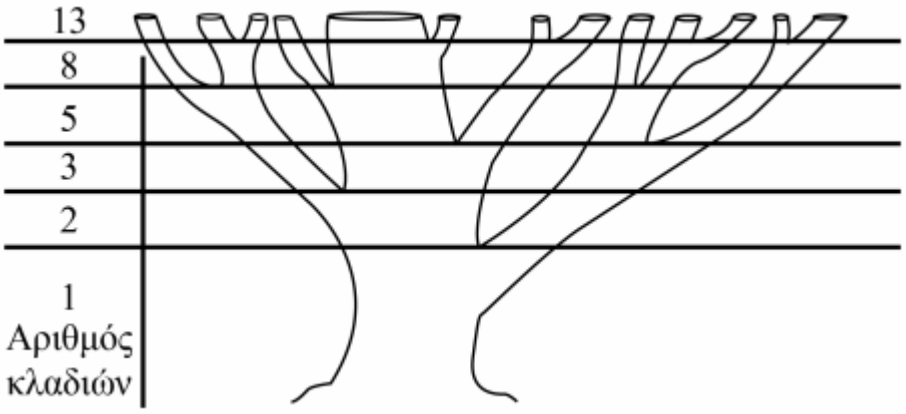
$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ (ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας)

Οπότε έχουμε $f_o = 1, \mathrm{f}_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3,\ f_4 = 5,\ f_5 = 8,\ f_6 = 13,\ f_7 = 21...$

Αν, λοιπόν, πάρουμε τον λόγο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας (τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο), διαπιστώνουμε ότι οι λόγοι αυτοί τείνουν προς τον αριθμό της χρυσής τομής. Και πραγματικά αν εξετάσουμε τα πηλίκα, θα το διαπιστώσουμε:

$$\frac{1}{1}=1,\quad \frac{2}{1}=2,\quad \frac{3}{2}=1,5\,,\quad \frac{5}{3}=1,666...,\quad \frac{8}{5}=1,6\,,\quad \frac{13}{8}=1,625\,,\quad \frac{21}{13}=1,61538...$$

Επιπρόσθετα, έχει παρατηρηθεί πως οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci εμφανίζονται στη φύση σε διάφορες περιπτώσεις, όπως η διάταξη των πετάλων των λουλουδιών ή των κλαδιών στον κορμό ενός δένδρου. Για παράδειγμα, υπάρχουν πολλά λουλούδια με ένα πέταλο, με δύο, με τρία, με πέντε κτλ, όπως δηλαδή και οι όροι της ακολουθίας Fibonacci (1,2,3,5,8,13,21,34,55, κλπ.). Πολύ πιο σπάνια θα δούμε λουλούδια με αριθμό πετάλων που είτε δεν ανήκει στην ακολουθία Fibonacci είτε δε βρίσκεται «κοντά» στους όρους της (εύκολα μπορεί να βρούμε λουλούδι με 20 ή 22 πέταλα - αριθμοί που είναι κοντά στο 21 - αλλά πολύ πιο δύσκολα με 18 ή 24). Εδώ πρέπει να προσθέσουμε επίσης πως πολλά φυτά κατά την ανάπτυξή τους φαίνεται να ακολουθούν την ακολουθία Fibonacci. Όταν φυτρώνει, για παράδειγμα, το μυριόφυλλο, ξεκινάει με 1 κλωνάρι, μετά βγάζει κι άλλο ένα οπότε έχει 2, ενώ μετά προχωράει στα 3, στα 5, στα 8, στα 13, όπως βλέπουμε και στην εικόνα :



Εικόνα 9

Επιπλέον, τα διαδοχικά φύλλα των φυτών σχηματίζουν σταθερές γωνίες που αν εκφραστεί η κάθε μια ως μέρος του κύκλου προκύπτει κλάσμα του οποίου οι όροι, είναι όροι της ακολουθίας Fibonacci. Τα κουκουνάρια είναι ένα ακόμα παράδειγμα της εμφάνισης της ακολουθίας Fibonacci στη φύση. Όλα τα κουκουνάρια αναπτύσσονται σε σπείρες, ξεκινώντας από τη βάση όπου ήταν ο μίσχος, και πηγαίνοντας κυκλικά μέχρι να φτάσουμε στην κορυφή. Ο αριθμός των σπειρών

(δεξιόστροφες - αριστερόστροφες) σε καθεμιά από τις δύο κατευθύνσεις του κύκλου είναι γειτονικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci.

3.6.2. Βασικά στοιχεία της έρευνας των Kaygin, Balcin, Yildiz & Arslan.

Ο στόχος των Kaygin, Balcin, Yildiz & Arslan είναι να καθοριστεί η επιρροή των αριθμών Fibonacci και της χρυσής τομής στη διδασκαλία μέσω της ιστορίας των μαθηματικών και να μελετηθούν οι απόψεις των σπουδαστών σχετικά με αυτό το ζήτημα. Οι ερευνητές παρατηρούν πως συχνά οι σπουδαστές κάνουν τις μαθηματικές διαδικασίες μέσω των αριθμών, των συμβόλων και των εννοιών χωρίς να ξέρουν τι εξυπηρετούν οι διαδικασίες αυτές στην πράξη ή που χρησιμεύουν στην καθημερινή ζωή. Εντούτοις, τα μαθηματικά είναι ένας κλάδος που μπορεί να εφαρμοστεί στη καθημερινή ζωή και που μπορεί να εξηγηθεί μέσω των παραδειγμάτων που πηγάζουν από αυτή. Προκύπτει, λοιπόν, ένας ακόμη στόχος αυτής της μελέτης, δηλαδή να τοποθετηθούν τα μαθηματικά μακριά από την παραδοσιακή τους δομή και να φανερωθεί ότι είναι ένας κλάδος της επιστήμης που υπάρχει παντού στη φύση.

Σχετικά με τη μεθοδολογία των ερευνητών, σε αυτήν την μελέτη χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος μελέτης περίπτωσης (case study). Οι μελέτες περίπτωσης επιτρέπουν την έρευνα σε βάθος για έναν ενιαίο χώρο ή για διάφορες περιπτώσεις και φαινόμενα. Τα στοιχεία αυτής της μελέτης συλλέχθηκαν μέσω 5 ανοιχτών ερωτήσεων και ενός τεστ απόδοσης 15 ερωτήσεων σχετικά με τους αριθμούς Fibonacci και τη χρυσή τομή. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η εγκυρότητα, οι ερωτήσεις παρουσιάστηκαν πρώτα σε 3 δασκάλους πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και 2 ακαδημαϊκούς που ασχολούνται με την εκπαίδευση των μαθηματικών. Προκειμένου να υπολογιστεί η αξιοπιστία του τεστ, ερευνήθηκε εάν οι σπουδαστές είχαν οποιαδήποτε δυσκολία στην κατανόηση των ερωτήσεων του τεστ και τον απαραίτητο χρόνο να απαντηθεί η δοκιμή. Συνολικά 50 σπουδαστές συμμετείχαν στην μελέτη και ήταν χωρισμένοι σε ζευγάρια σε όλη την διαδικασία.

Οι ερευνητές ανέφεραν ορισμένα βιογραφικά στοιχεία του Fibonacci και οι ερωτήσεις προστέθηκαν στο τέλος αυτού του κειμένου (1^{ο} φύλλο). Το 2^{ο} φύλλο εργασίας αφορούσε το πρόβλημα των κουνελιών που καθορίζει τη σειρά Fibonacci στο βιβλίο του Fibonacci , *Liber Abaci*. Οι πρώτοι 5 όροι της ακολουθίας Fibonacci, όπως προκύπτουν από το πρόβλημα των κουνελιών, απεικονίστηκαν και οι σπουδαστές κλήθηκαν να βρουν τους επόμενους αριθμούς. Το 3^{ο} φύλλο εργασίας αποτελούνταν από μια δραστηριότητα που καταδεικνύει τη σχέση μεταξύ της ακολουθίας του Fibonacci και του τριγώνου Pascal. Το 4^{ο} φύλλο εργασίας αφορούσε τέλος στη σειρά Fibonacci που εντοπίζεται στα κουκουνάρια και στο φυτό αγριαψιθιά.

Η σειρά που δόθηκαν τα φύλλα εργασίας ήταν η εξής: αρχικά παρουσιάστηκε η δραστηριότητα της ζωής του Fibonacci. Κατόπιν, το πρόβλημα των κουνελιών παρουσιάστηκε στους σπουδαστές ως ιστορικό πρόβλημα. Μετά από αυτό, παρουσιαστήκαν δύο δραστηριότητες που κατέδειξαν τη σχέση μεταξύ της ακολουθίας Fibonacci και του τριγώνου Pascal. Τέλος, η δραστηριότητα που καταδεικνύει τη σχέση μεταξύ της σειράς Fibonacci και της φύσης εξετέθη στους σπουδαστές. Εδώ, προσπαθούσαν να διακρίνουν την επιρροή της δραστηριότητας των κουκουναριών στους

σπουδαστές. Στο τέλος της έρευνας, ένα φύλλο με 5 ανοιχτές ερωτήσεις (Φύλλο 5) διανεμήθηκε για να καταγραφούν οι απόψεις των σπουδαστών.

3.6.3. Κυριότερα ευρήματα της έρευνας των Kaygin, Balcin, Yildiz & Arslan.

Παρατηρήθηκε πως η διδασκαλία της χρυσής τομής και των αριθμών του Fibonacci μέσω την ιστορία των μαθηματικών αύξησαν το ποσοστό επιτυχίας των σπουδαστών. Έτσι, διαπιστώνουν οι ερευνητές ότι ο τρόπος διδασκαλίας ήταν αποτελεσματικός για τους σπουδαστές για να καταλάβουν τα θέματα των αριθμών του Fibonacci και της χρυσής τομής.

Στην ερώτηση «πόσο χρήσιμες ήταν οι πληροφορίες που διδάχθηκαν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων; Γιατί;» , οι κυρίαρχες απαντήσεις ήταν:

- «Το μάθημα ήταν γεμάτο χρήσιμες πληροφορίες για την καθημερινή ζωή.»
- «Γιατί τα μαθηματικά θυμίζουν όχι μόνο υπολογισμούς αλλά και δείγματα από τη φύση.»
- «Η πληροφορία είναι ενδιαφέρουσα.»

Μπορεί κανείς να δει σε αυτές τις απαντήσεις τη χρησιμότητα της σειράς αυτής των μαθημάτων, καθώς οι σπουδαστές παρατήρησαν την ύπαρξη των μαθηματικών στη φύση, ενώ έλαβαν νέες και ενδιαφέρουσες πληροφορίες για τα θέματα.

Στην ερώτηση «πόσο αποτελεσματικός ήταν ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιήθηκε το μάθημα; Γιατί;» , οι πιο συχνές απαντήσεις είναι:

- «Υπήρξε καλύτερη κατανόηση του μαθήματος.» Αυτή ήταν η απάντηση που έδωσαν και οι πιο πολλοί μαθητές.
- «Ήταν αποτελεσματικό γιατί μάθαμε (οι μαθητές) νέα θέματα.»
- «Έχουμε ενεργό συμμετοχή στο μάθημα.»
- «Το μάθημα ήταν λεπτομερές και διαφωτιστικό.»

Μπορεί να δει κανείς από τις παραπάνω παρατηρήσεις των σπουδαστών πως δίνεται μεγάλη βαρύτητα στην όσο το δυνατό μεγαλύτερη κατανόηση του μαθήματος.

Στην ερώτηση «εσείς βρήκατε τίποτα ενδιαφέρον για τα μαθηματικά κάνοντας αυτή τη δραστηριότητα; Εάν ναι, γιατί ήταν ενδιαφέρον;» οι πιο συχνές απαντήσεις ήταν:

- «Η χρυσή τομή.» (Οι λόγοι διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci σχηματίζουν μια ακολουθία που τείνει προς τον αριθμό της χρυσής τομής.)
- «Η σειρά Fibonacci και περιοχές χρήσης.» Εξεπλάγησαν διάφοροι μαθητές με το γεγονός ότι η διάταξη των φύλλων στα κλαδιά και των σπόρων στους καρπούς ορισμένων φυτών εμφανίζεται κατά ζεύγη που αντιστοιχούν σε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας Fibonacci.

- «Η σχέση ανάμεσα στη σειρά Fibonacci και στο τρίγωνο Pascal.»
- «Οι σπειροειδείς αριθμούς στο κουκουνάρι στην αντίστοιχη δραστηριότητα.»
- «Το πόσο σχετίζονται τα μαθηματικά με τη φύση και την καθημερινή ζωή»
- «Μάθαμε για τη ζωή του Fibonacci.»
- «Το μαθηματικό αποτέλεσμα από την αναπαραγωγή των κουνελιών ήταν πολύ ενδιαφέρον.»

Οι απαντήσεις των σπουδαστών στην ερώτηση «εσείς τι σκέφτεστε για το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη μελέτη; Γιατί;» ήταν οι εξής:

- «Οι δραστηριότητες μας έκαναν να καταλάβουμε καλύτερα.»
- «Δίνονται πληροφορίες για την ιστορία των μαθηματικών.»
- «Η οπτικοποίηση έχει προτεραιότητα.»
- «Ήταν πολύ αποτελεσματικό, καθώς παρείχε ικανοποιητική πληροφορία.»

Φαίνεται, λοιπόν, και από τις απαντήσεις ότι τα ιστορικά παραδείγματα βοήθησαν τους σπουδαστές να καταλάβουν καλύτερα.

Τέλος παρουσιάζονται οι απαντήσεις των σπουδαστών στην ερώτηση «εσείς τι σκέφτεστε για τις διαφορές μεταξύ των εκπαιδευτικών υλικών που χρησιμοποιήθηκαν και αυτών που χρησιμοποιούνται συνήθως; Ποιες είναι; Παρακαλώ εξηγήστε.» ήταν :

- «Τα μαθηματικά δεν εξαρτιόταν μόνο από υπολογισμούς. Ενώ, δηλαδή, το μάθημα των μαθηματικών βασίζεται γενικά σε φόρμουλες και υπολογισμούς, τα εκπαιδευτικά υλικά έκαναν το μάθημα πολύ διαφορετικό.» Αυτή ήταν και η πιο συχνή απάντηση των μαθητών.
- «Διδαχτήκαμε την ιστορική εξέλιξη των θεμάτων, καθώς πήραμε ιστορικές πληροφορίες για τα θέματα του μαθήματος.»
- «Το μάθημα έγινε αντιληπτό με ένα συμπαγή τρόπο. Ενώ, δηλαδή, τα μαθηματικά θεωρούνται αφηρημένα ,το συγκεκριμένο μάθημα έγινε αντιληπτό συγκεκριμένα.»
- «Διαφορετικές πληροφορίες δόθηκαν.»

Η ιστορία των μαθηματικών ήρθε ως πρώτη επιλογή. Επίσης, οι σπουδαστές δήλωσαν ότι αυτός ο τρόπος παράδοσης ήταν πολύ διαφορετικός από τον παραδοσιακό.

Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν οι ερευνητές είναι ότι η διδασκαλία των μαθηματικών βελτιώθηκε με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και αύξησε το ποσοστό επιτυχίας των σπουδαστών. Επιπλέον, οι σπουδαστές βρήκαν διασκεδαστική τη διδασκαλία μέσα από την ιστορία των μαθηματικών και διαπίστωσαν ότι τα μαθηματικά δεν βασίζονται μόνο στις διαδικασίες ή τους τύπους. Με βάση αυτά τα συμπεράσματα, προτείνεται από τους ερευνητές ότι περισσότερες

μελέτες για την επιρροή της ιστορίας των μαθηματικών στους σπουδαστές πρέπει να πραγματοποιηθούν.

3.6.4. Σχολιασμός των ευρημάτων της έρευνας των Kaygin, Balcin, Yildiz & Arslan

Σε αυτή την έρευνα των Kaygin, Balcin, Yildiz & Arslan, μελετήθηκε η χρήση ιστορικών παραδειγμάτων για την εκμάθηση της χρυσής τομής και των αριθμών Fibonacci. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι για την ιστορική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε αρκετά το βιβλίο *Liber Abaci* του Fibonacci,δηλαδή πρωτότυπο κείμενο.

Ο τρόπος που χρησιμοποιείται η ιστορία στην έρευνα αυτή (δίνονται στοιχεία της ζωής του Fibonacci, το πρόβλημα των κουνελιών, δραστηριότητες για τη σχέση με το τρίγωνο Pascal, δραστηριότητες για τα κουκουνάρια και την αγριαψιθιά) είναι επίσης σημαντικός. Οι μαθητές θα πρέπει, δηλαδή, να αντιμετωπίσουν προβλήματα της καθημερινής ζωής, χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην απόδειξη. Εμφανής είναι και ο προσανατολισμός προς την οπτικοποίηση, την παρατήρηση και τη διαίσθηση. Όλα αυτά μοιάζουν με τη διαδικασία που ακολούθησε και ο Fibonacci για να φτάσει στη δημιουργία της ακολουθίας αυτής (είτε δεχτούμε ότι ξεκίνησε από το πρόβλημα των κουνελιών είτε από την αναπαραγωγή των μελισσών). Συμφωνούν, μάλιστα, με την άποψη ότι η διδασκαλία δεν πρέπει να ξεκινά από το αποτέλεσμα (τη σημερινή αλγεβρική σκέψη) αλλά από το ξεκίνημα, αξιοποιώντας έτσι την γενική άποψη που συμμερίζονται οι περισσότεροι δάσκαλοι των Μαθηματικών από την αρχαιότητα: από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.

Παράλληλα, όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3, δεν πρέπει να μελετάται μόνο η ιστορική πρόοδος, αλλά και οι μηχανισμοί με τους οποίους επιτεύχθηκε πρόοδος. Στην έρευνα αυτή, η αναφορά στη ζωή του Fibonacci εισάγει τους μαθητές στις συνθήκες κάτω από τις οποίες εργάστηκε ο Fibonacci και μέσα από τη δραστηριότητα με το πρόβλημα των κουνελιών φανερώνεται ο τρόπος σκέψης του. Αποτέλεσμα είναι να αποκτήσουν πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τους αριθμούς Fibonacci.

Ενδιαφέρουσα ήταν και η παρατήρηση ορισμένων μαθητών (10) πως:

> «Τα μαθηματικά δεν εξαρτιόταν μόνο από υπολογισμούς. Ενώ, δηλαδή, το μάθημα των μαθηματικών βασίζεται γενικά σε φόρμουλες και υπολογισμούς, τα εκπαιδευτικά υλικά έκαναν το μάθημα πολύ διαφορετικό»

Αν τη συνδυάσουμε με την απάντηση ορισμένων μαθητών πως:

> «ενώ τα μαθηματικά θεωρούνται αφηρημένα, το συγκεκριμένο μάθημα έγινε αντιληπτό συγκεκριμένα.»,

αντιλαμβανόμαστε πως οι μαθητές διακρίνουν δύο ξεχωριστές κατηγορίες μαθηματικών: την συγκεκριμένη (περιλαμβάνει προβλήματα της καθημερινής ζωής, οπτικοποίηση, παρατήρηση, διαίσθηση και όχι αποδείξεις) και την αφηρημένη (περιλαμβάνει φόρμουλες και υπολογισμούς), χωρίς να συνειδητοποιούν πως τα μαθηματικά είναι ενιαία. Αυτή η αντίληψή τους, τους εμποδίζει να περάσουν σταδιακά σε πιο αφηρημένο τρόπο σκέψης και μας θυμίζει τα στάδια που ακολούθησαν τα μαθηματικά για να φτάσουν στο σημερινό τους επίπεδο, τα οποία αναφέραμε στο κεφάλαιο 2. Αποτελεί αρνητική όψη του ιστορικού παραλληλισμού όπως την όρισαν οι Thomaidis & Tzanakis (2007).

Κεφάλαιο 4. Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στόχος της εργασίας αυτής ήταν να απαντηθούν τα εξής ερωτήματα, όπως διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 0:

- Πόσο έγκυρη μπορεί να θεωρηθεί η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν από αρκετές δεκαετίες;
- Τι ακριβώς μπορεί να σημαίνει «παραλληλισμός» ανάμεσα σε ένα δημιουργικό, και συνήθως κορυφαίο, μαθηματικό του παρελθόντος , και ένα μαθητή που προσπαθεί σήμερα, συνήθως ανεπιτυχώς, να μάθει Μαθηματικά;

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή κατά πόσο έγκυρη μπορεί να θεωρηθεί η γνώση που αντλεί σήμερα ένας ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις που ανήκουν στη λεγόμενη «παραδοσιακή ιστοριογραφία» των Μαθηματικών, μετά από μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας καταλήγουμε στα εξής:

Δεν μπορούμε απόλυτα να βασιστούμε σε αυτές. Τα τελευταία χρόνια παράλληλα με τις εξελίξεις στη Διδακτική, έχουν σημειωθεί ουσιαστικές αλλαγές στην ιστορική προσέγγιση και ερμηνεία των μαθηματικών γνώσεων της αρχαιότητας, οι οποίες αφορούν κυρίως θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και σχετίζονται άμεσα με τα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης. Στο κεφάλαιο 2, τονίσαμε πως οι αλλαγές αυτές, όπως η στροφή από την ερμηνεία των αρχαίων μαθηματικών κειμένων με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό προς την όσο πιο πιστή ανάγνωση των ιστορικών κειμένων και η αμφισβήτηση της άποψης πως τα αρχαία μαθηματικά κείμενα εμπεριέχουν μια πρώιμη μορφή της σημερινής άλγεβρας, οδήγησαν στην αναθεώρηση (ή ακόμη και απόρριψη) καθιερωμένων αντιλήψεων για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, οι παλαιότερες ερμηνευτικές προσεγγίσεις υποστηρίζουν την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού από τους Βαβυλώνιους από την περίοδο 1800-1700 π.Χ και ότι χρησιμοποιούσαν μια μέθοδο ανάλογη με αυτή που έχουμε σήμερα αλλά διατυπωμένη με λόγια, ενώ οι Έλληνες της κλασσικής περιόδου έλυναν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με γεωμετρικές μεθόδους, στα πλαίσια της γεωμετρικής άλγεβρας. Κυρίαρχο στοιχείο αυτών των προσεγγίσεων είναι η υπόθεση για την ύπαρξη, κατά την αρχαιότητα, ενός αλγεβρικού τρόπου σκέψης που ταυτίζεται ουσιαστικά με την νεότερη συμβολική άλγεβρα. Μάλιστα υπήρχε η άποψη ότι οι Έλληνες παρέλαβαν την αλγεβρική μέθοδο των Βαβυλωνίων, περιβάλλοντάς την με γεωμετρικό ένδυμα.

Σήμερα οι απόψεις αυτές αμφισβητούνται από τους νεώτερους ιστορικούς των αρχαίων Μαθηματικών. Η μέθοδος ερμηνείας των προβλημάτων των βαβυλωνιακών πινακίδων με βάση το σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό και τρόπο σκέψης θεωρείται πλέον ξεπερασμένη. Η άποψη περί ύπαρξης Βαβυλωνιακής άλγεβρας έχει επίσης αμφισβητηθεί, με το περιεχόμενο των προβλημάτων των πινακίδων να έχει πλέον μια καθαρά γεωμετρική ερμηνεία η οποία στηρίζεται σε σύνθετες

μεθόδους διαμέρισης, μετασχηματισμού και μέτρησης γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι, λοιπόν, η Βαβυλωνιακή Άλγεβρα είναι μια μορφή γεωμετρίας, όπου δεν τίθεται θέμα απόδειξης, και χρησιμοποιεί πράξεις και τεχνικές διαφορετικές από τις σημερινές. Φυσικά μιλάμε για μια εποχή που δεν είχε ακόμη οριστεί τι είναι επιστήμη, δεν είχε γίνει πλήρης διαχωρισμός άλγεβρας – γεωμετρίας – αριθμητικής και συχνά τα μαθηματικά επηρεάζονταν από την καθημερινή ζωή. Επομένως είναι λάθος να σκεφτόμαστε τα μαθηματικά της εποχής ως μια πρώιμη μορφή άλγεβρας. Τέλος, ένα άλλο ζήτημα που έχει αναδειχτεί είναι ο αποσπασματικός χαρακτήρας των πηγών που δε μας δίνει σαφή στοιχεία για την ύστερη περίοδο των Βαβυλωνιακών μαθηματικών (ξεκινά γύρω στο 625 π.Χ.).

Οι Έλληνες, με βάση νεότερες ερμηνείες, μάλλον είχαν άγνοια ή το πιθανότερο αγνόησαν συστηματικά τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Μια πολύ λογική παρατήρηση είναι πως αν υπήρχε κάποια συστηματική μεταφορά μαθηματικής γνώσης από τη Βαβυλώνα προς την Ελλάδα τότε θα υπήρχε και εξοικείωση των Ελλήνων με το θεσιακό σύστημα αρίθμησης, γεγονός που δεν συνέβη. Τα νεότερα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας Βαβυλωνιακών – Αιγυπτιακών – Ελληνικών – Ισλαμικών μαθηματικών αποκαλύπτουν ισχυρές πολιτιστικές επιδράσεις και ιδιομορφίες που αναθεωρούν καθιερωμένες ερμηνείες. Για παράδειγμα, η σύγχρονη έρευνα προσκομίζει πολλά επιχειρήματα που δείχνουν ότι πολλές απόψεις της παραδοσιακής ιστοριογραφίας για τον Διόφαντο είναι πρόωρες γενικεύσεις.

Ο Διόφαντος αποτελεί όντως κεντρική μορφή της εξέλιξης των μαθηματικών. Αγνοούμε, ωστόσο, την σχέση του όχι μόνο με τις προελληνικές μαθηματικές παραδόσεις, αλλά και με την ελληνική της κλασσικής περιόδου, από την οποία το έργο του έχει επηρεαστεί και ένας λόγος αυτής της άγνοιας είναι η αποσπασματικότητα των πηγών για τη ζωή και το έργο του (πχ τρία από τα βιβλία του χάθηκαν). Στα *Αριθμητικά* του συναντούμε για πρώτη φορά έναν ορισμό της έννοιας του αγνώστου αριθμού, ένα συγκροτημένο σύστημα συμβολικής αναπαράστασης σχέσεων που περιέχουν τον άγνωστο και ορισμένους γενικούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων. Όλα αυτά τα εργαλεία χρησιμοποιούνται για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων στο πεδίο των θετικών ρητών αριθμών, χωρίς γεωμετρική ερμηνεία ή πρακτικές εφαρμογές.

Αντίθετα, ο al–Khwarizmi φαίνεται ότι εκπροσωπούσε μια παράδοση με Ινδικές ή Βαβυλωνιακές ρίζες, προσανατολισμένη προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς και τις πρακτικές εφαρμογές (το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου του αφιερώνεται σε προβλήματα εμπορικών συναλλαγών, μετρήσεων και κληρονομιών). Η παράδοση αυτή αναπτύχθηκε ως ένα σημείο ανεξάρτητα από το κυρίαρχο πρότυπο της «επιστημονικής γνώσης», που εκπροσωπούσαν στο Ισλάμ τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και οι μεταφράσεις τους στην Αραβική γλώσσα. Η ρητορική του διατύπωση δείχνει μια οπισθοδρόμηση σε σχέση με τα μαθηματικά του Διόφαντου.

Στη συνέχεια, στον Nemore παρατηρούμε γενική διατύπωση αλλά και γενική και ρητορική επίλυση. Στον Viète πρώτη φορά παρατηρούμε εγγράμματο συμβολισμό και διάκριση δεδομένων και ζητουμένων, γεγονός που τοποθετεί το έργο του πιο κοντά στη σύγχρονη άλγεβρα. Στον Euler έχουμε φτάσει πλέον στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα και σύμβολα.

Μια ακόμη παρατήρηση που κάναμε παραπάνω, είναι πως η διάκριση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών σε στάδια (ρητορικό, συγκεκριμένο, συμβολικό), πρέπει να υιοθετείται με προσοχή. Κυρίως η διάκριση αυτή προκύπτει από τη σύγκριση των μαθηματικών του παρελθόντος με τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης που ακολουθούμε σήμερα (σύγχρονος συμβολισμός, αφαιρετική

σκέψη). Η διαδικασία μετάβασης από το ένα στάδιο στο άλλο δε μπορεί σε καμία περίπτωση να θεωρηθεί γραμμική. Τα μαθηματικά του al–Khwarizmi, για παράδειγμα δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι συνιστούν πρόοδο σε σχέση με τα μαθηματικά του Διόφαντου. Επίσης, δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να θεωρηθούν τα μαθηματικά ως μια ενιαία παράδοση που μεταδίδονταν από τη μια γενιά μαθηματικών στην επόμενη μέχρι να φτάσουμε στον Euler.

Στο κεφάλαιο 0, τέθηκε και ένα ακόμη ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή τι ακριβώς μπορεί να σημαίνει «παραλληλισμός» ανάμεσα σε ένα δημιουργικό, και συνήθως κορυφαίο, μαθηματικό του παρελθόντος , και ένα μαθητή που προσπαθεί σήμερα, συνήθως ανεπιτυχώς, να μάθει Μαθηματικά. Σχετικά με το δεύτερο, αυτό ερώτημα, μετά από την ανάλυση των ερευνών που πραγματοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 3, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

Οι έξι έρευνες που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3, έδειξαν αναλογίες ανάμεσα στην εκμάθηση των μαθηματικών και τα στάδια που ακολούθησε η εξέλιξή τους (συμφωνώντας έτσι με τον ορισμό που είχαμε δώσει στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3). Τα εμπόδια και οι δυσκολίες που εμφανίστηκαν κατά την ιστορική εξέλιξη, οι μέθοδοι και οι αντιλήψεις των μαθηματικών του παρελθόντος, παρατηρήσαμε ότι τείνουν να επαναλαμβάνονται στην σχολική τάξη. Οι Thomaidis & Tzanakis (2007) κάνουν πιο σαφή τον ορισμό του παραλληλισμού, διακρίνοντας δύο όψεις του: τη θετική (σύμφωνα με την οποία οι μαθητές, ακόμη και αγνοώντας σύγχρονες μαθηματικές έννοιες και μέσα αναπαράστασης, κατορθώνουν συχνά να εκφραστούν με ορθό τρόπο αντανακλώντας αντίστοιχα φαινόμενα που παρουσιάστηκαν στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών) και την αρνητική (αυτή η όψη αναδείχθηκε στις απαντήσεις μαθητών που εξαρτώνται απόλυτα από αλγοριθμικές διαδικασίες, αντανακλώντας την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης, αφαιρετικής σκέψης και έτσι συμπίπτουν με ορισμένες ιστορικές αντιλήψεις που σήμερα έχουν απορριφθεί πλήρως).

Η θετική όψη φαίνεται στην έρευνα του Bagni (2000), όπου οι μαθητές αγνοώντας την έννοια της ομάδας, κατόρθωσαν να εκφραστούν με ορθό τρόπο, καθώς και στην έρευνα των Kaygin, Balçin , Yildiz & Arslan (2011), όπου η διδασκαλία της χρυσής τομής και των αριθμών Fibonacci με αναφορά ιστορικών στοιχείων και προβλημάτων της πραγματικής ζωής φαίνεται ότι βελτίωσε τις στάσεις και τις επιδόσεις των σπουδαστών.

Και η αρνητική όψη αναδείχθηκε αρκετά στις έρευνες που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 3. Για παράδειγμα, στην έρευνα του Harel (1999), είδαμε την αρνητική όψη σε δύο κατηγορίες αποδείξεων των μαθητών. Στην πρώτη κατηγορία πολλοί μαθητές στηρίχθηκαν στη διαισθητική απόδειξη, ενώ τα μαθηματικά αντικείμενα που χρησιμοποιούν προέρχονται από μια εξιδανίκευση της φυσικής πραγματικότητας, καθορίζοντας το σύνολο αξιωμάτων. Η απουσία δομικής σύλληψης που παρατηρήθηκε στην αιτιολόγηση των μαθητών και η εξάρτηση από τις δικές τους αντιλήψεις θύμισε αρκετά τον τρόπο σκέψης των Αρχαίων Ελλήνων για τα μαθηματικά, οι οποίοι όριζαν τις έννοιες με βάση τις δικές τους εμπειρίες, με αποτέλεσμα να δυσκολευτούν να περάσουν στις δομές. Στην δεύτερη κατηγορία αποδείξεων, πολύ μαθητές, συνήθως οι πιο ικανοί στα μαθηματικά, προσπάθησαν να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες, αντίληψη που τους εμπόδισε να κατανοήσουν τις αποδείξεις πλήρως. Το εμπόδιο που συναντούν αυτοί οι μαθητές παραλληλίζει τα αντίστοιχα εμπόδια των μαθηματικών του 17ου αιώνα, οι οποίοι ακολουθώντας την λογική του Αριστοτέλη στα *Αναλυτικά Ύστερα*: «*Δεν έχουμε κατανοήσει κάτι αν δεν έχουμε πιάσει το γιατί… το να πιάσεις το γιατί ενός πράγματος είναι το να πιάσεις την πρωταρχική του αιτία*», είχαν διαφωνίες ως προς την

εγκυρότητα της απόδειξης με αντίφαση ή με τη μέθοδο της εξάντλησης, καθώς έτσι δεν διακρίνονταν οι αιτίες των αποτελεσμάτων.

Και στην έρευνα του Bagni (2000), παρατηρήσαμε πως για την τέταρτη ιδιότητα της ομάδας (ύπαρξη αντιστρόφου), υπήρχε μια σχετική δυσκολία των μαθητών που συγκλίνει με αντίστοιχες δυσκολίες που συνάντησε ο Bombelli. Στην έρευνά των Thomaidis & Tzanakis (2007), οι μαθητές, πιθανώς επειδή δεν είχαν κατανοήσει πλήρως την απόλυτη τιμή, δυσκολεύτηκαν να χειριστούν τη διάταξη των πραγματικών αριθμών, φανερώνοντας την ισχυρή αντίληψη των αριθμών ως ποσότητες, αντανακλώντας αντίστοιχες δυσκολίες των μαθηματικών του παραλθόντος. Τέλος, στην έρευνα των Kaygin , Balçin , Yildiz & Arslan (2011) οι μαθητές διέκριναν δύο ξεχωριστές κατηγορίες μαθηματικών: την συγκεκριμένη (περιλαμβάνει προβλήματα της καθημερινής ζωής, οπτικοποίηση, παρατήρηση, διαίσθηση και όχι αποδείξεις) και την αφηρημένη (περιλαμβάνει φόρμουλες και υπολογισμούς), χωρίς να συνειδητοποιούν πως συνδέονται άμεσα. Αυτή η αντίληψή τους, τους εμποδίζει να περάσουν σταδιακά σε πιο αφηρημένο τρόπο σκέψης

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις που εμφανίζεται η αρνητική όψη του ιστορικού παραλληλισμού, παρατηρούμε πως η προϋπάρχουσα γνώση και οι αντιλήψεις των μαθητών δεν προσαρμόζονται στις νέες συνθήκες. Αντιθέτως, οδηγούν σε αδιέξοδο και καθιστούν αναγκαίο τον επαναπροσδιορισμό των αντιλήψεων και των μεθόδων των μαθητών προκειμένου να εξελιχθεί η γνώση τους. Οι ερευνητές στις περιπτώσεις αυτές εντόπισαν επαναλαμβανόμενα λάθη των μαθητών και έδειξαν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις. Στη συνέχεια, βρήκαν αδιέξοδα στην ιστορία των μαθηματικών και τέλος σύγκριναν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση. Παρατηρούμε, επομένως, πως η αρνητική όψη του παραλληλισμού συνδέεται αρκετά με τα επιστημολογικά εμπόδια του Brousseau, τα οποία αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3.

Φυσικά δε μπορεί να είμαστε απόλυτα αυστηροί στο ζήτημα του παραλληλισμού. Όπως έχει γράψει και ο (Freudenthal 1983, σ.516):

> "η ιστορία μπορεί να είναι μια κατευθυντήρια γραμμή που δεν πρέπει να περιφρονεί κανείς, μολονότι περιέχει στριφογυρίσματα που δεν χρειάζεται να ακολουθήσουμε, αν και στο παρελθόν κάποιοι πίστευαν ότι το άτομο επαναλαμβάνει την ιστορία της ανθρωπότητας – στην πραγματικότητα η εκπαίδευση και η διδασκαλία πρέπει να έχουν υπόψη ότι αυτό ούτε συμβαίνει ούτε χρειάζεται να συμβεί."

Υπάρχουν παράγοντες όπως ο τρόπος με τον οποίο οι ερευνητές της Διδακτικής χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία και τα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας, η θεωρητική προσέγγιση που ακολουθούν και οι αντιλήψεις των καθηγητών για την ιστορία των μαθηματικών που μπορούν να επηρεάσουν τον ιστορικό παραλληλισμό.

Παράλληλα, προστίθεται και ένας παράγοντας ακόμη, αυτός των τάσεων της ιστοριογραφίας και του τρόπου ερμηνείας των ιστορικών πηγών. Ο παράγοντας αυτός είναι και το σημείο που φανερώνει την σύνδεση των δύο ερευνητικών ερωτημάτων που έχουν τεθεί. Είναι προφανές πως όταν αλλάζει ο τρόπος σκέψης των ιστορικών των μαθηματικών ή καθιερωμένες απόψεις καταρρίπτονται, τότε επισκοπήσεις και ιστορικές αναλύσεις μπορεί να αμφισβητηθούν, με αποτέλεσμα αναπροσαρμόζεται και η έννοια του παραλληλισμού ώστε να συμβαδίσει στις νέες εξελίξεις. Στα κεφάλαια 0, 1 και 2 αναλύσαμε τις αλλαγές που έγιναν τις τελευταίες δεκαετίες στην

ιστοριογραφία των μαθηματικών και ιδιαίτερα της πρώιμης Άλγεβρας, τόσο στη μεθοδολογία όσο και στις θεωρίες για την ιστορική εξέλιξη. Οι αλλαγές αυτές έχουν αντίκτυπο και σε έρευνες οι οποίες βασίστηκαν στην παραδοσιακή ιστοριογραφία, όπως η έρευνα της Sfard (1991), την οποία παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3. Η Sfard χρησιμοποιεί δευτερογενείς και παρωχημένες πηγές ιστορικής πληροφόρησης (όπως το βιβλίο των Davis και Hersh, *The Mathematical Experience*), οι οποίες μάλιστα παρατίθενται και αποσπασματικά, με αποτέλεσμα η ιστορική της ανάλυση να μη μπορεί να θεωρηθεί ως ιστορική τεκμηρίωση για τον «παραλληλισμό» ανάμεσα στο προτεινόμενο μοντέλο της γνωστικής ανάπτυξης και της ιστορικής εξέλιξης Σύμφωνα με τις πηγές που χρησιμοποιεί, το περιεχόμενο των Βαβυλωνιακών πινακίδων αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της άλγεβρας, η λεγόμενη «γενικευμένη Αριθμητική». Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, νεότερες ιστορικές έρευνες υποστηρίζουν πως το περιεχόμενο αυτό είναι στενά συνδεδεμένο με γεωμετρικές έννοιες και δραστηριότητες (Hoyrup 2002). Παράλληλα, η σύνδεση Βαβυλωνίων – Διόφαντου – Ισλαμικών μαθηματικών αποδεικνύεται ένα πολυσύνθετο ιστορικό πρόβλημα, το οποίο με κανένα τρόπο δεν μπορεί να ενταχθεί στα στενά πλαίσια μιας μονοδιάστατης γραμμικής εξέλιξης. Αντίθετα, στο μοντέλο της Sfard, η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ακολουθεί μια ιεραρχική δομή, στην οποία αυτό που συλλαμβάνεται εργαλειακά σε ένα επίπεδο γίνεται αντιληπτό δομικά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο. Η Sfard, λοιπόν, έφτιαξε ένα δυναμικό (από διδακτικής άποψης) μοντέλο, το οποίο έχει ως βάση του ιστορικές απόψεις οι οποίες, σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε στο κεφάλαιο 2, πλέον δεν είναι απόλυτα αξιόπιστες. Ένα ακόμη παράδειγμα της επιρροής των τάσεων της ιστοριογραφίας στον ιστορικό παραλληλισμό είναι η έρευνα του Harper, που μελετήθηκε στο κεφάλαιο 3. Υποστήριξε ότι τα τρία στάδια εξέλιξης που μπορούν να ταυτοποιηθούν στην Ιστορία των Μαθηματικών (ρητορικό, συγκεκομμένο, συμβολικό) ανιχνεύονται και στις απαντήσεις των μαθητών (τις οποίες είχε διακρίνει σε ρητορικές, διοφαντικές και βιετιανές) και, μάλιστα, η σειρά απόκτησης των εννοιών από τους μαθητές, δείχνει να παραλληλίζεται με εκείνη της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας. Συμπεραίνει, επομένως, ο Harper ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν παρόμοιες δυσκολίες και ότι θα καταφέρουν να κάνουν παρόμοιες προόδους με τους μαθηματικούς του παρελθόντος. Ωστόσο, η διάκριση της ιστορικής εξέλιξης σε στάδια (ρητορικό, συγκεκομμένο, συμβολικό) και η αντίστοιχη διάκριση των απαντήσεων των μαθητών (ρητορικές, διοφαντικές και βιετιανές) στηρίζονται στην αμφισβητούμενη άποψη της παραδοσιακής ιστοριογραφίας περί βαβυλωνιακής άλγεβρας, γεγονός που μπορεί να θέσει υπό αμφισβήτηση τα γενικότερα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει και τις προεκτάσεις τους στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Όπως έχουμε αναφέρει στην ενότητα 3.1.4 , η ταυτοποίηση αυτών των σταδίων και της σειράς εμφάνισής τους στις απαντήσεις των μαθητών, δεν σημαίνει ίσως τίποτε περισσότερο από τη μεγάλη επίδραση της δομής του αναλυτικού προγράμματος.

Συμπερασματικά, δεν χρειάζεται να έχει κανείς πολλή φαντασία για να αναγνωρίσει ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν παρόμοιες δυσκολίες και ορισμένοι από αυτούς θα καταφέρουν να κάνουν παρόμοιες προόδους με τους μαθηματικούς του παρελθόντος. Ανεξάρτητα, λοιπόν, από τον ακριβή προσδιορισμό της έννοιας του ιστορικού παραλληλισμού, η ιστορική ανάλυση των μαθηματικών ιδεών μπορεί να μας εφοδιάσει με σημαντικές πληροφορίες για τις νοητικές δυσκολίες και ανακαλύψεις που εμποδίζουν ή προάγουν την μαθηματική εξέλιξη. Ταυτόχρονα, η ιστορία δεν μπορεί να χρησιμοποιείται σαν ένα σταθερό σώμα γνώσεων, στο οποίο οι ερευνητές της Διδακτικής καταφεύγουν για να αντλήσουν ιδέες, ούτε να γίνεται αλόγιστη χρήση της στα

πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος (όπως η εισαγωγή ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία φαίνονται ασύνδετα με την έννοια που διδάσκεται). Θα πρέπει, επομένως, να γίνει περαιτέρω έρευνα για την προσαρμογή της στη διδασκαλία των μαθηματικών, να προσδιοριστούν όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν τον ιστορικό παραλληλισμό και να μελετηθεί ο βαθμός επιρροής τους. Πρέπει, επίσης, να γίνει βαθύτερη αναζήτηση των εννοιολογικών αλλαγών που πρέπει να πραγματοποιήσουν οι μαθητές, των μέσων αναπαράστασης που χρησιμοποιούν και των εμποδίων που αναμένεται να συναντήσουν και να διερευνηθεί πώς μπορεί η ιστορία των μαθηματικών να βοηθήσει. Η υπέρβαση των εμποδίων, ωστόσο, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί σε ένα σωστά διαμορφωμένο διδακτικό περιβάλλον, στο οποίο ο δάσκαλος έχει σημαντικό ρόλο για την διαμόρφωση των καταστάσεων που θα επιτρέψουν την αλληλεπίδραση ανάμεσα στο μαθητή και την επιδιωκόμενη γνώση. Τέλος, ο δάσκαλος θα πρέπει να έχει στο νου του τον ιστορικό παραλληλισμό ώστε να μην ξεκινά από το αποτέλεσμα (δηλαδή τη σημερινή αλγεβρική σκέψη) αλλά από το ξεκίνημα της ιστορίας.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως πρέπει να υπάρξει:

- συνεργασία και προώθηση της έρευνας τόσο στις κοινές περιοχές ιστορίας και διδακτικής όσο και σε συνδυασμό με άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως η Ψυχολογία, η Παιδαγωγική και η Κοινωνιολογία.
- εκπαίδευση-επιμόρφωση των εκπαιδευτικών για αξιοποίηση της ιστορικής γνώσης στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Βοσνιάδου Σ., 2001, *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

Βοσνιάδου Σ., 2012, Διαλέξεις στο μάθημα «*Ψυχολογία Μάθησης - Γνωστική Ψυχολογία των μαθηματικών*», ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θωμαΐδης Γ., 2011, *Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου,* Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη

Θωμαΐδης Γ., 2012-2013. *«Αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική τους».* Σημειώσεις του μαθήματος Δ12 στο ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θωμαΐδης Γ., 2014, Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους», Επιστήμες Αγωγής, 16-38

Νεγρεπόντης Σ., 2012-2013, Διαλέξεις του μαθήματος *«Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών»,* ΠΜΣ. Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σταμάτης Ε. Σ., 1963, *Διόφαντου Αριθμητικά. Η Άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων*, ΟΕΔΒ ΑΘΗΝΑ, σελ. 395

Χριστιανίδης Γ., 2008, *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών*», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο

Χριστιανίδης Γ., 2009, *Από την λογιστική στην άλγεβρα, μερικές διευκρινήσεις για το εγχείρημα του Διόφαντου,* Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη

Μεταφρασμένη

Boyer C. & Merzbach U., 1997, *Η Ιστορία των μαθηματικών* (μετάφραση Β.Κουσουλάκου), Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα

Loria, G., 1971-1974, *Ιστορία των Μαθηματικών*, (μετάφραση Μ. Κωβαίου), Τόμοι Ι,ΙΙ, ΙΙΙΑ & ΙΙΙΒ, Εκδόσεις ΕΜΕ & Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήναι

Neugebauer,O., 2003, *Οι Θετικές Επιστήμες στην αρχαιότητα*, (μετάφραση Χ. Ζερμπίνη & Ι. Αρζόγλου), Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Scabó, A., 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών* (Μετάφραση Α. Τεγοπούλου), Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητήριου Ελλάδος, Αθήναι

Van Der Waerden, 2007, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 3η έκδοση, Ηράκλειο

Ξενόγλωσση

Bagni G., 2000 , *The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples.* Proceedings of CERME-1, Schwank, I. (Ed.), Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, 220-231

Bagni, G.T., 2000, *The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples*, in I. Schwank (editor), Proceedings of CERME-1, v.II, 220-231, Osnabrück

Bidwell, J. K., 1993, Humanize Your Classroom with The History of Mathematics, *Mathematics Teacher*, 86, 461-464.

Bourbaki, N., 1960, *Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris.

Brandford, B., 1924, *A Study of Mathematical Education*, Clarendon Press, Oxford.

Brousseau, G., 1983/1997, Epistemological obstacles and problems in mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, 79-98, Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G., 1989/1997, Epistemological obstacles and didactique of mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, 98-116, Dordrecht: Kluwer.

Burn, B., 1996, What are the fundamental concepts of group theory?, *Educational Studies in Mathematics*, 31, 371 -377.

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R., 1997, A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?", *Educational Studies in Mathematics*, 34, 249-253.

Ernest, P., 1988, The Impact of Beliefs on the Teaching of mathematics, In P. Ernest (Eds.), *Mathematics Teaching: The State of the art*, 249-254, London: Falmer.

Freudenthal H., 1991, *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Furringetti F., Radford L., 2002, Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice. In L. English [ed], *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631 – 654, Laurence Erlbaum, Mahwah, New York

Furinghetti F., Radford L., 2008, Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics, *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition*, 626 – 655, Routledge, Taylor and Francis, New York

Gandz, S., 1997, The origin and development of quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra, *Osiris 3*, 416

Gulikers, I., & Blom, K., 2001, A historical angle, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223-258.

Haeckel, E., 1906, *The evolution of man—a popular scientific study*, Watts, London

Harel, G., & Sowder, L., 1998. *Students' proof schemes. Research on Collegiate Mathematics Education*, Vol. III. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-283.

Harel G., 1999, Students' Understanding of proofs. *Linear Algebra and its applications*, 601-613.

Harper, E., 1979, *The child's interpretation of a numerical variable*, unpublished doctorial thesis, Bath University

Harper, E., 1987, Ghosts of Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 75- 90.

Høyrup, J., 2002, *Lengths, Widths, Surfaces*: *A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin*. Springer Verlag, New York.

Jankvist, U. T., 2009, A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261.

Kaygin B., Balçin B., Yildiz C., Arslan S., 2011, The effect of teaching the subject of Fibonacci numbers and golden ratio through the history of mathematics. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 961–965

Kjeldsen,T., E. & Blomhøj M., 2012, Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 327-349

Marshall, G. L., & Rich, B. S., 2000, The Role of History in a Mathematics Class. *Mathematics Teacher*, 93(8), 704-706.

Perkins, P., 1991, Using history to enrich mathematics lessons in a girls' school, *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 9-10.

Piaget, J. & R. Garcia., 1989, *Psychogenesis and the History of Science* (translated by H.Feider), Columbia University Press, New York

Poincaré, H., 1899, La Logique et L'Intuition dans la Science Mathématique et dans L'Enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157–162.

Poincaré, H., 1908, Science et méthode, Flammarion, Paris. Authorised English translation by G. B. Halstead, *The Foundations of Science, The Science Press*, Lancaster, Pennsylvania, 546–854

Polya G., 1962, The teaching of mathematics and the biogenetic law, in I. J. Good (ed.), *The Scientist Speculates*, Heinemann, London, 352–356

Schubring, G., 1978. *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. [The genetic principle in mathematics education]*, Klett, Stuttgart

Schubring, G., 2011. Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning—epistemology, history, and semiotics interacting, *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 79-104

Sesiano, J., 1982. *Books IV to VII of Diophantus's Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qustā ibn Lūqā*, Springer Verlag, New York

Sfard, A., 1991, On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Sfard A., 1995. The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*. 14(1), 15-39.

Sfard, A. & Linchevski, L., 1994, The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191-228.

Thomaidis Y., 2011, Some remarks on the meaning of equality in Diophantos's Arithmetica, *Historia Mathematica*, 38(1), 28-41.

Thomaidis Y., & Tzanakis C., 2007, The notion of historical "parallelism" revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 165–183.

Toeplitz, O., 1927, Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. [The problem of university lectures on the calculus and their distinction from calculus at secondary schools]. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, XXXVI, 88–100,

Unguru S., 1975, On the need to rewrite the history of Greek Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 15(1), 67-114.

Wilson, P.S., & Chauvot, J. B., 2000, Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics, *Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645

Διαδικτυακή

Wikipedia, ανακτήθηκε στις 23 Ιουλίου 2016, από το: https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

Wikipedia, ανακτήθηκε στις 23 Ιουλίου 2016, από το: https://en.wikipedia.org/wiki/Patterns_in_nature

Wikipedia, ανακτήθηκε στις 23 Ιουλίου 2016, από το: https://en.wikipedia.org/wiki/Phyllotaxis