ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: θεωρητικές και διδακτικές προσεγγίσεις
Mathematical Induction in Mathematics Education: Theoretical and Educational Aspects

Συμεωνίδου Ελένη – Ελευθερία
Α.Μ. : Δ 201217

Επιβλέπων Καθηγητής
Σπύρου Παναγιώτης, Αναπληρωτής καθηγητής

Αθήνα
Ιανουάριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης που απονέμει το Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 27η Ιανουαρίου 2016 από την Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της Συμβουλευτικής Επιτροπής αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
Π. Σπύρου Π.	τ. Αναπλ. Καθηγητή
Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Στον σύζυγό μου, με τις θυσίες του οποίου γράφτηκε αυτή η διπλωματική·
στον μόλις 9 μηνών γιο μου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον αν. καθ. Κ. Σπύρου, την καθ. Κα. Πόταρη που ήταν τόσο μέλη της συμβουλευτικής όσο και της εξεταστικής επιτροπής μου, τον λεκτ. κ. Ψυχάρη που με τίμησε με την παρουσία του ως μέλος της εξεταστικής επιτροπής μου και ιδιαιτέρως τον δρ. κ. Μούτσιο-Ρέντζο για την καθοδήγηση, τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε και για τις γόνιμες, διεξοδικές και εποικοδομητικές συζητήσεις μας.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου: τους γονείς μου και τον αδερφό μου για την υποστήριξη. Όμως πάνω από όλα ευχαριστώ ιδιαίτερα τον σύζυγό μου, στον οποίο εξάλλου έχω αφιερώσει την εργασία αυτή, για τις αμέτρητες ώρες που αφιέρωσε στη φροντίδα του μικρού μας γιου, προκειμένου να καταστεί δυνατή η συγγραφή της διπλωματικής αυτής.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στη Ροδούλα και στον Γιάννη, τους καλούς φίλους που απέκτησα σε αυτό το μεταπτυχιακό, οι οποίοι με στήριξαν και εξακολουθούν να το κάνουν με ποικίλους τρόπους. Θα ήθελα όμως να ευχαριστήσω τη Ροδούλα για έναν ακόμα λόγο: τις διαφωτιστικές συζητήσεις που κάναμε πάνω στο θέμα της Μαθηματικής Επαγωγής, καθώς η ιστορική οπτική του θέματος που μελετά εκείνη αποτελεί μια πολύτιμη οπτική.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων **7**
Κατάλογος Σχημάτων **8**
Περίληψη **9**
Abstract **9**
1. Εισαγωγή **10**
1.1. Σύντομη περιγραφή της Εργασίας 10
1.2. Σύντομη Ιστορική Αναδρομή 11
1.3. Τα Μαθηματικά της Μαθηματικής Επαγωγής 12
1.3.1 Είδη Επαγωγής 12
1.3.2 Ισοδύναμες διατυπώσεις και Αρχές 14
1.4. Η Μαθηματική Επαγωγή – Επαγωγικός και Παραγωγικός συλλογισμός 18
1.5. Επιστημολογικά ζητήματα 19
1.5.1 Η φύση της προτασιακής γνώσης 21
1.5.2 Μέσα από ποιες διαδικασίες αποκτάται η γνώση; 22
1.6 Επιστημολογικές πτυχές της Μαθηματικής Επαγωγής 25
1.6.1 Ο μηχανισμός της κατανόησης της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής 25
1.6.2. Η νοητική σύλληψη της απειρίας 27
1.6.3 Επιστημολογικά Εμπόδια 29
1.7 Συναφείς θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών 31
1.7.1 Ρεαλιστικά Μαθηματικά (Freudenthal) και ‘μαθαίνω κάνοντας’ (Dewey) 32
1.7.2 Μάθηση που βασίζεται στη Διερεύνηση (Inquiry Based Learning) 34
1.7.3 Οι δραστηριότητες στη Διδακτική των Μαθηματικών 35
1.8 Η ανάγκη για απόδειξη 36
1.8.1 Η ανάγκη για βεβαιότητα 37
1.8.2 Ανάγκη για αιτιότητα 38
1.8.3 Ανάγκη για υπολογισμό 39
1.8.4 Ανάγκη για δομή 40
1.9 Ανακεφαλαίωση 42
2. Η Μαθηματική Επαγωγή στη Διδακτική των Μαθηματικών **45**
2.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση επί της Μαθηματικής Επαγωγής 45
2.1.1 Μια χαρτογράφηση του πεδίου 45
2.1.2. Συνήθεις δυσκολίες & αντιμετώπιση 47
2.1.3 Προϋποθέσεις για την διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής 54
2.2 Η Μαθηματική Επαγωγή στην ελληνική πραγματικότητα 59
2.3 Ανακεφαλαίωση – Ερευνητικό Ερώτημα 62
3. Συζήτηση **66**
3.1 Διδακτικό πλαίσιο 68
3.1.1 Προβληματισμός & ανάγκη για απόδειξη 68
3.1.2 Η εννοιολογική ‘κατανόηση’ του αλγορίθμου της Μαθηματικής Επαγωγής 72
3.1.3 Η αλγεβρική και εννοιολογική ικανότητα μετάβασης από το βήμα n στο n+1 75
3.1.4 Η εμβάθυνση στην εννοιολογική ‘κατανόηση’ της Μαθηματικής Επαγωγής 77
3.2 Μια διδακτική πρόταση: δραστηριότητες για τα ελληνικά δεδομένα 78
3.2.1 Πληροφορίες για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων 79
3.2.2 Οι δραστηριότητες 83
3.2.3 Τα Μαθηματικά των Δραστηριοτήτων 87
3.2.4 Ανάλυση των Δραστηριοτήτων 89
3.3. Περιορισμοί – Προτάσεις για έρευνα 93
4. Συμπεράσματα **95**

5. Βιβλιογραφικές Αναφορές.....97
6. Παράρτημα.....103
6.1 Η Αρχή του Ελαχίστου είναι ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.....103
6.2 Πώς αποφεύγεται το 'κ.ο.κ.' που εμπεριέχεται μέσα στην Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από τη διατύπωση της ισοδύναμης αρχής του 5ου Αξιώματος Peano (κατά τους Stewart & Tall, 1977).....104
6.3 Οι πύργοι του Ανόι.....106
6.4 Το πρόβλημα του κάλπικου νομίσματος.....107
6.5 Το πρόβλημα του χάρτη των δύο χρωμάτων.....109

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1: *Βασική Μεταφορά του Απείρου για Μαθηματική Επαγωγή*

Πίνακας 1.2: *Νοητικές ανάγκες & πώς πυροδοτούνται*

Πίνακας 2.1: *Πίνακας λογικών τιμών για το βήμα* $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Πίνακας 3.1: *Πίνακας που προκύπτει από Οριζόντια Μαθηματικοποίηση του προβλήματος*

Πίνακας 3.2: *Πίνακας άσκησης για εφαρμογή ψευδο-επαγωγής*

Πίνακας 3.3: *Πίνακας για διευκόλυνση στην εικασία του μοτίβου*

Πίνακας 3.4: *Πίνακας με πρώτους αριθμούς*

Πίνακας 3.4: *Πίνακας που προκύπτει από την Οριζόντια Μαθηματικοποίηση του προβλήματος*

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: *Παράθεση 5^{ου} Αξιώματος Peano και Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής*

Σχήμα 2.2: *Το σχήμα για την Μαθηματική Επαγωγή στο σχολικό βιβλίο*

Σχήμα 3.1: *Εναλλακτικό Tetris*

Σχήμα 3.2: *Χειραπτικό υλικό για άσκηση*

Σχήμα 3.3: *Η σκάλα και το αντίγραφό της αλληλοσυμπληρώνονται για να δώσουν ένα παραλληλόγραμμο με ν(ν+1) τετράγωνα*

Σχήμα 6.1: *Αναπαράσταση των πύργων του Ανόι*

Σχήμα 6.2: *Μία ζυγαριά*

Σχήμα 6.3: *Ο χάρτης του προβλήματος*

Περίληψη

Η εργασία εξετάζει το θέμα της Μαθηματικής Επαγωγής στη Διδακτική των Μαθηματικών μέσα από διάφορες πτυχές της: επιστημολογικές, γνωστικές, διδακτικές. Ο στόχος της μελέτης αυτής είναι ο συγκερασμός αυτών των πτυχών της Μαθηματικής Επαγωγής με ορισμένες θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών, όπως είναι τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και η Διερευνητική Μάθηση, προκειμένου να συγκροτηθεί αφενός μεν ένα διδακτικό πλαίσιο αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής αφετέρου δε μία διδακτική πρόταση για εφαρμογή αυτού του διδακτικού πλαισίου στην ελληνική πραγματικότητα.

Λέξεις κλειδιά: διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής, επιστημολογικές, γνωστικές και διδακτικές πτυχές, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Διερευνητική Μάθηση.

Abstract

In this study we examine Mathematical Induction through its multiple epistemological, cognitive and educational aspects. The aim of the present study is the juxtaposition and the merging of the above aspects together with several theories of Mathematics Education, such as Realistic Mathematics Education and Inquiry Based Learning, in the attempt to create two proposals. The first proposal is a teaching framework composed of teaching principles, concerning Mathematical Induction and the second proposal consists of our suggestion for implementing this teaching framework in the schools of Greece.

Key words: teaching Mathematical Induction, epistemological, cognitive and educational aspects, Realistic Mathematics, Inquiry Based Learning.

1. Εισαγωγή

1.1. Σύντομη περιγραφή της Εργασίας

Η εργασία αυτή ασχολείται με το θέμα της διδακτικής της Μαθηματικής Επαγωγής, ένα γνωστικό αντικείμενο γύρω από το οποίο, κατά τα πορίσματα της Διδακτικής των Μαθηματικών, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες παντός είδους: εννοιολογικές, μαθηματικές, τεχνικές, ψυχολογικές κ.ά. και κρίνεται κρίσιμη τόσο η περιγραφή τους όσο και η προσπάθεια για την αντιμετώπισή τους. Ο στόχος της εργασίας μας είναι διττός: θέλουμε μέσα από τη σύνθεση των πολλαπλών οπτικών της Μαθηματικής Επαγωγής που μελετούμε και τις θεωρίες της διδακτικής που παραθέτουμε, να συγκροτήσουμε αφενός ένα διδακτικό πλαίσιο αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής και αφετέρου μια πρόταση για την αξιοποίηση αυτών των αρχών στην ελληνική σχολική πραγματικότητα.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη αναφορά στην προέλευση της Μαθηματικής Επαγωγής ιστορικά, στα Μαθηματικά που αυτή περιέχει, στο είδος του συλλογισμού που ακολουθεί, καθώς επίσης θα μας απασχολήσουν θέματα που αφορούν στην επιστημολογία της γνώσης αλλά και επιστημολογικές πτυχές αυτής. Στο ίδιο κεφάλαιο, θα αναλύσουμε ορισμένες θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών, όπως είναι τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, η αρχή ‘μαθαίνω κάνοντας’ του Dewey, η Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση και η νοητική ανάγκη για απόδειξη, τις οποίες θα συνδέσουμε με τη Μαθηματική Επαγωγή σε αυτό αλλά κυρίως στο τρίτο κεφάλαιο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών γύρω από τη Μαθηματική Επαγωγή, μέσα από την οποία αναδύονται τόσο οι δυσκολίες των μαθητών όσο και οι τρόποι αντιμετώπισής τους, καθώς επίσης αναφέρονται οι προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής. Το δεύτερο κεφάλαιο κλείνει με αυτά που αφορούν τη Μαθηματική Επαγωγή στην ελληνική πραγματικότητα: πώς παρουσιάζεται το θέμα στο σχολικό βιβλίο, οι οδηγίες του πρώην Παιδαγωγικού Ινστιτούτου/ΙΕΠ κτλ.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε μία σύνθεση όλων των παραπάνω, δηλαδή των πολλαπλών πτυχών της Μαθηματικής Επαγωγής, των αναφερομένων θεωριών της Διδακτικής των Μαθηματικών και των πορισμάτων αυτής σχετικά με τη Μαθηματική Επαγωγή προκειμένου να συγκροτηθούν δύο προτάσεις. Η πρώτη πρόταση αφορά σε ένα διδακτικό πλαίσιο γενικών αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής και η δεύτερη αφορά στην αξιοποίηση αυτών των

διδακτικών αρχών στην διδακτική της Μαθηματικής Επαγωγής στο σημερινό ελληνικό σχολείο. Στο τέταρτο κεφάλαιο συνοψίζουμε τα συμπεράσματά μας. Ακολουθούν η βιβλιογραφία και ένα παράρτημα με πιο εξειδικευμένες πληροφορίες, ως πέμπτο και έκτο κεφάλαιο αντίστοιχα.

1.2. Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Συναντούμε πρώιμες μορφές της Μαθηματικής Επαγωγής βαθιά στην Ιστορία των Μαθηματικών. Παρόλο που η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής δεν αναφέρεται ρητά σε κανένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο, υπάρχουν ενδείξεις ότι η Μαθηματική Επαγωγή ήταν γνωστή, με κάποια μορφή, στους αρχαίους Έλληνες (Lambrou, 2005). Για παράδειγμα, υπάρχουν ιστορικοί που ιχνηλατούν την Μαθηματική Επαγωγή ή πρόδρομο αυτής στον Πρόκλο και στον Πλάτωνα (Παρμενίδης §147a7-c3) (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015· Lambrou, 2005).

Ωστόσο, η διατύπωση της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει πολύ μεταγενέστερα και μάλιστα από πολλαπλές και ανεξάρτητες μεταξύ τους πηγές, ανάμεσα στις οποίες συγκαταλέγονται οι Jacob (James), Bernoulli και Pierre de Fermat (Cajori, 1918). Ο πρώτος που φαίνεται πως χρησιμοποιεί την Μαθηματική Επαγωγή, ρητά διατυπωμένη, είναι ο Francesco Maurolyco (1495–1575), ο οποίος το 1557 απέδειξε ότι το άθροισμα ενός πλήθους περιττών, αρχής γενομένης από το 1, ισούται με το τετράγωνο του πλήθους των περιττών, δηλ. $1+3+5+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$ (Θωμαΐδης, 2004). Μεταγενέστερα, αλλά ανεξάρτητα από τον Maurolyco, ο Blaise Pascal (1623–1662) διατυπώνει με σαφήνεια την Μαθηματική Επαγωγή στην πραγματεία του 'Traité du triangle arithmétique' (Πάλλα, 2006).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στη διάρκεια όλου αυτού του διαστήματος η Μαθηματική Επαγωγή χρησιμοποιείται χωρίς την ονομασία 'Μαθηματική Επαγωγή'. Ο πρώτος που χρησιμοποιεί το γνωστό σημερινό όρο είναι ο Augustus De Morgan ο οποίος τον καθιέρωσε μέσα από το άρθρο του με τίτλο 'Induction (Mathematics)', που δημοσιεύτηκε στην Penny Cyclopedia, στο Λονδίνο, το 1838 (Cajori, 1918· Πάλλα, 2006·). Παρομοίως, ο Richard Dedekind, προκειμένου να την ονοματοδοτήσει, χρησιμοποίησε και καθιέρωσε τον όρο 'vollständige Induktion' ('τέλεια επαγωγή'), στο 'Was sind und was sollen die Zahlen, 1887, §§ 59 και 80 (Cajori, 1918· Θωμαΐδης, 2004).

Βέβαια, γεννάται το ερώτημα 'για ποιο λόγο ονομάστηκε Μαθηματική Επαγωγή αυτή η μέθοδος'. Η απάντηση θα μας απασχολήσει αργότερα.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Προάγγελοι της Μαθηματικής Επαγωγής ιχνηλατούνται στους αρχαίους Έλληνες. Ωστόσο, η διατύπωσή της προκύπτει μεταγενέστερα από πολλαπλές ανεξάρτητες πηγές. Ο πρώτος που την χρησιμοποιεί ρητά διατυπωμένη για την απόδειξη μιας συγκεκριμένης πρότασης είναι ο Maurolyco, αλλά ο Pascal είναι αυτός που τη διατυπώνει με σαφήνεια ως γενικό αλγόριθμο. Μεταγενέστερα, ο όρος 'Μαθηματική Επαγωγή' αποδίδεται ως όνομα στην αρχή, από τον De Morgan, ενώ ο Dedekind την χαρακτήρισε με τον όρο 'Τέλεια Επαγωγή'. Η ονομτοδοσία της κρίθηκε απαραίτητη προκειμένου να διαχωριστεί από την ατελή επαγωγή των Φυσικών Επιστημών

1.3. Τα Μαθηματικά της Μαθηματικής Επαγωγής

1.3.1 Είδη Επαγωγής

Ο όρος 'Μαθηματική Επαγωγή' χρησιμοποιείται σε αντιδιαστολή με τον όρο 'ατελής επαγωγή' (empirical induction) προκειμένου να διαχωριστεί η μαθηματική αποδεικτική διαδικασία από την μεθοδολογία που χρησιμοποιούν οι Φυσικές Επιστήμες (Θωμαΐδης, 2004). Η Μαθηματική Επαγωγή είναι ένα αξίωμα των Μαθηματικών ενώ η ατελής επαγωγή αφορά στην εύρεση ενός κανόνα μέσα από την εξέταση συγκεκριμένων (πεπερασμένων) παραδειγμάτων (Baroody & Reid, 2013). Για παράδειγμα μπορούμε να μετρήσουμε τη μέση θερμοκρασία ανά μήνα σε ένα συγκεκριμένο μέρος της γης. Αν θέλουμε να βρούμε έναν κανόνα, το μοτίβο που αυτή ακολουθεί, θα καταλήξουμε σε κάποιον ή κάποιους μαθηματικούς τύπους, μέσα από την παρατήρηση των δεδομένων που έχουμε συλλέξει. Αυτό δεν σημαίνει ότι όλα τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει θα ακολουθούν με απόλυτη ακρίβεια τον τύπο, εφόσον οι περιβαλλοντικές συνθήκες είναι παράγοντες που επηρεάζουν τη μέση θερμοκρασία του κάθε μήνα. Όσον αφορά στα Μαθηματικά, η ατελής επαγωγική προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει σε τεράστιες ανακαλύψεις ωστόσο, τα συμπεράσματα που διεξάγονται μέσα από αυτή τη διαδικασία, μπορούν να θεωρηθούν μόνο ως εικασίες, που έχουν μια πιθανότητα να είναι αληθείς (Avital & Hansen, 1976). Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας εικασίας που προκύπτει από ατελή επαγωγή στα Μαθηματικά: τον 17^{ο} αιώνα, ο P. Fermat έκανε την εικασία ότι οι αριθμοί της μορφής $2^{2^n}+1$ είναι πρώτοι. Παρατηρώντας τις σχέσεις $2^{2^0}+1=3,\ 2^{2^1}+1=5,\ 2^{2^2}+1=17,\ 2^{2^3}+1=257,$ και $2^{2^4}+1=65\,537$ λαμβάνουμε

αριθμούς που είναι γνωστό ότι είναι πρώτοι. Τελικά, τον 18^{ο} αιώνα, ο L. Euler τον διέψευσε, εφόσον ανακάλυψε ότι ο αριθμός $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ δεν είναι πρώτος. (Golovina & Yaglom, 1963).

Στα Μαθηματικά συναντούμε δύο είδη Μαθηματικής Επαγωγής: την ισχυρή και την ασθενή. Ας θεωρήσουμε μια πρόταση P, που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n.

Διατύπωση Ασθενούς Μαθηματικής Επαγωγής:

i. Η πρόταση P ισχύει για κάποιον Φυσικό n_0. Δηλ. $P(n_0)$ αληθής.

ii. Αν η P(n) είναι αληθής τότε η P(n+1) αληθεύει. Δηλ. $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω υποθέσεις ταυτόχρονα, τότε βάσει του αξιώματος της Μαθηματικής Επαγωγής, η πρόταση P(n) ισχύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Διατύπωση Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής

i. Η πρόταση P ισχύει για κάποιον Φυσικό n_0. Δηλ. $P(n_0)$ αληθής.

ii. Αν η πρόταση P ισχύει για τους Φυσικούς Αριθμούς $n_0 + 1 = n_1$, $n_1 + 1 = n_2, \ldots$, $n_{\kappa-1} + 1 = n_\kappa$ τότε $P(n_\kappa + 1)$ αληθεύει.

Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω υποθέσεις ταυτόχρονα, τότε βάσει του αξιώματος της Μαθηματικής Επαγωγής, η πρόταση P(n) ισχύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Ο λόγος για τον οποίο η δεύτερη πρόταση χαρακτηρίζεται ως ισχυρή η Μαθηματική Επαγωγή είναι διότι στο επαγωγικό βήμα (σχέσεις ii) φαίνεται να έχουμε ισχυρότερη υπόθεση, εφόσον απαιτείται να ισχύει P(n) αληθής για κάθε $n \leq n_\kappa$ και όχι P(n) αληθής για n_0. Η ονομασία λοιπόν δεν έχει να κάνει με το πόσο ισχυρή είναι η πρόταση. Εξάλλου αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές προτάσεις είναι ισοδύναμες (Schach, 1958).

Επίσης υπάρχουν πολλές παραλλαγές της Μαθηματικής Επαγωγής, όπως λ.χ. Μαθηματική Επαγωγή δύο διαστάσεων, άλματα, Διπλή Μαθηματική Επαγωγή, Infinite descent κ.ά. (Lambrou, 2005· Πάλλα, 2006).

Η αρχή της (ισχυρής ή μη) υπερπεπερασμένης επαγωγής αφορά διατακτικούς αριθμούς ή την κλάση τους και αποτελεί μια επέκταση της Μαθηματικής Επαγωγής σε καλά διατεταγμένα σύνολα και αποτελείται από τρεις υποθέσεις (Κάλφα, 1990). Ωστόσο η εμβάθυνση στη συγκεκριμένη αρχή κρίνεται περιττή, εφόσον η παρούσα εργασία δεν αναφέρεται σε αυτήν.

Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε στον όρο ‘Μαθηματική Επαγωγή’ ή ‘Τέλεια Επαγωγή’ ή απλά ‘επαγωγή’, θα εννοούμε την Ασθενή Μαθηματική

Επαγωγή, ενώ η υπόθεση i αυτής θα αναφέρεται και ως βασικό βήμα της επαγωγής ή βάση της Επαγωγής. Παρομοίως, η δεύτερη υπόθεση 'P(n)→P(n+1)' θα αναφέρεται και ως επαγωγικό βήμα, ενώ η υπόθεση P(n) θα αναφέρεται και ως επαγωγική υπόθεση ή υπόθεση της επαγωγής.

1.3.2 Ισοδύναμες διατυπώσεις και Αρχές

Είναι προφανές ότι η παραπάνω έκφραση της Μαθηματικής Επαγωγής μπορεί να εκφραστεί περισσότερο φορμαλιστικά μέσα από τη μαθηματική συμβολική γλώσσα και κυρίως με τη χρήση του υπαρξιακού και του καθολικού ποσοδείκτη, δηλαδή: αν για μια πρόταση P(n), $n \in N$

i. $\exists\, n_0$: $P(n_0)$ αληθής

ii. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

τότε με εφαρμογή του κανόνα της απόσπασης (Modus Ponens), καταλήγουμε ότι η P(n) είναι αληθής $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Στο σημείο αυτό, θυμίζουμε στον αναγνώστη τον νόμο του προτασιακού λογισμού Modus Ponens, σύμφωνα με τον οποίο: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

Επομένως, η διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής με συμβολισμό του προτασιακού λογισμού είναι η εξής:

$$[P(1) \wedge \forall n[P(n) \rightarrow P(n+1)]] \rightarrow \forall n\, P(n)$$

Ας σημειωθεί ότι οι δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επίσης ότι είναι και οι δύο, ταυτόχρονα απαραίτητες για τη διεξαγωγή του συμπεράσματος.

Ίσως είναι κάπως δύσκολο για τον αναγνώστη να αναλογιστεί πώς οι δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής σε συνδυασμό με το Modus Ponens μας δίνουν το συμπέρασμα της Μαθηματικής Επαγωγής. Πράγματι, το συμπέρασμα δεν είναι προφανές και δεν προκύπτει άμεσα από τις υποθέσεις, ενώ τίθενται και επιστημολογικά ζητήματα για την Μαθηματική Επαγωγή, όπως θα συζητηθεί παρακάτω σε κατάλληλη παράγραφο (βλ.§ 1.6.3). Γι' αυτό, θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε περισσότερο αυτό το σημείο. Οι Stewart και Tall (1977), ισχυρίζονται ότι η εφαρμογή των δύο υποθέσεων της Μαθηματικής Επαγωγής για μια πρόταση P(n), π.χ. για n=593, θέλει 592 εφαρμογές του γενικού βήματος: από n=1 σε n=2, από n=2 σε n=3 κ.ο.κ. Αυτή η φράση 'κ.ο.κ.', κατά τους συγγραφείς, είναι μια έκφραση

που θέτει πολλούς ανθρώπους σε άβολη θέση καθώς παρακολουθούν τη μαθηματική διαδικασία στην εξέλιξή της:

«Το πρόβλημα είναι ότι 'για μεγάλες τιμές του n, χρειάζεται μεγάλος αριθμός εφαρμογών του γενικού βήματος [P(n)→P(n+1)] και φυσικά είναι αδύνατον να καλύψουμε όλους τους φυσικούς σε μια απόδειξη πεπερασμένου μήκους»

(Stewart & Tall, 1977, σελ. 145)

Ωστόσο, οι παραπάνω συγγραφείς θεωρούν ότι ο τρόπος για να ξεπεραστεί το ζήτημα -με μαθηματικό τρόπο- είναι να διατυπωθεί μια ισοδύναμη μαθηματική αρχή που να μην υπονοεί τη φράση 'κ.ο.κ.'. Η ισοδύναμη αυτή αρχή είναι το $5^{ο}$ αξίωμα του Peano όπως μας πληροφορούν, εκτός από τους προαναφερθέντες συγγραφείς, και οι Palla, Potari και Spyrou (2012) καθώς επίσης και η Movschovitz-Hadar (1993). Το $5^{ο}$ Αξίωμα Peano διατυπώνεται ως εξής:

Αν A υποσύνολο του ℕ, έτσι ώστε

i. Το 0 ανήκει στο A
ii. Αν n ανήκει στο A, τότε n+1 ανήκει στο A.

Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω συνθήκες ταυτόχρονα, τότε A = ℕ

Ίσως, βλέποντας την διατύπωση της Μαθηματικής Επαγωγής και την διατύπωση του $5^{ου}$ αξιώματος του Peano, να μην βλέπει κανείς, με την πρώτη ματιά, τη σύνδεσή τους. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το $5^{ο}$ αξίωμα του Peano ασχολείται με το σύνολο των Φυσικών Αριθμών ενώ η Μαθηματική Επαγωγή ασχολείται με προτάσεις που αφορούν το σύνολο των Φυσικών. Ωστόσο, μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι οι δύο παραπάνω αρχές συναντώνται αν σκεφτεί κανείς το εξής:

«Προκειμένου να εφαρμόσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής σε αποδείξεις προτάσεων της μορφής 'για όλα τα n, ισχύει η P(n)' (όπου P(n) είναι μια ανοικτή πρόταση που δηλώνει κάτι για τη μεταβλητή n∈N), πρέπει να θεωρήσουμε το σύνολο στο οποίο αληθεύει η P(n) και να δείξουμε δύο πράγματα:

(i) ότι το σύνολο αυτό περιέχει το 1, πράγμα λογικά ισοδύναμο με το ότι P(1) είναι αληθής.

(ii) ότι το σύνολο αυτό είναι επαγωγικό, δηλ. ότι αν το σύνολο περιέχει κάποιο Φυσικό αριθμό, τότε θα περιέχει και τον επόμενό του. Με άλλα λόγια, για έναν τυχαίο Φυσικό αριθμό κ, η αλήθεια της P(κ) συνεπάγεται την αλήθεια της P(κ+1).

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την εφαρμογή του νόμου της απόσπασης (Modus Ponens) στην Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής με συμπέρασμα ότι το σύνολο στο οποίο αληθεύει η P(n) είναι όλο το N, η αλλιώς ότι η P(n) ισχύει για κάθε n∈N»

(Movschovitz-Hadar, 1993, σελ. 257).

Η ίδια συγγραφέας (Movschovitz-Hadar, 1993, σελ. 257) διατυπώνει ότι το 5^{ο} Αξίωμα Peano είναι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Ωστόσο, στην υπόλοιπη βιβλιογραφία, οι όροι 'Μαθηματική Επαγωγή' και 'Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής' χρησιμοποιούνται χωρίς να ορίζονται. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι υπάρχει μια διαφοροποίηση των όρων από τα συμφραζόμενα. Η δική μας ερμηνεία, μέσα από την ανάγνωση της βιβλιογραφίας επί του θέματος, είναι ότι ο όρος 'Μαθηματική Επαγωγή' χρησιμοποιείται κυρίως για να περιγράψει διαδικαστικά χαρακτηριστικά, όπως τον αλγόριθμό της (υποθέσεις - συμπέρασμα) ως διαδικασία ή την αποδεικτική διαδικασία. Ο όρος 'Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής' χρησιμοποιείται για να υπογραμμιστεί η ισχύς της μέσω του 5^{ου} αξιώματος Peano που φέρει μέσα της και μπορεί να περιγράφει τον αλγόριθμό της (υποθέσεις - συμπέρασμα) ως θεώρημα ή τις ισοδύναμες με αυτήν αρχές.

Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ισοδύναμη με την Αρχή του Ελαχίστου ή Αρχή της Καλής Διάταξης, σύμφωνα με την οποία κάθε μη κενό υποσύνολο του N έχει ελάχιστο στοιχείο (βλ. απόδειξη στην §6.1.).

Όπως έχουμε δει, η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής είναι αξίωμα των Φυσικών αριθμών, επομένως ισχύει στο $\mathbb{N}$. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να λεχθεί ότι οι Palla, Potari και Spyrou (2012) αναφέρουν ως δομικά χαρακτηριστικά του $\mathbb{N}$ το ελάχιστο στοιχείο, την έννοια του επόμενου στοιχείου και την αναδρομικότητα (recursiveness). Βέβαια, είναι προφανές ότι, εφόσον η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ισχύει στο $\mathbb{N}$, θα ισχύει και σε κάθε σύνολο S που είναι ισοδύναμό του, όπως λ.χ. στο $\mathbb{N}x\mathbb{Z}$, στο $\mathbb{Q}$ κ.ά. Ωστόσο, η λέξη 'ισοδύναμο' δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τη δομή αυτού του συνόλου S. Οι Avital και Hansen (1976) μας διαφωτίζουν ως προς αυτό και ισχυρίζονται ότι η Μαθηματική Επαγωγή λειτουργεί σε οποιοδήποτε σύνολο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

(i) Ύπαρξη διάταξης. Για κάθε δύο διακεκριμένα στοιχεία α και β είναι ξεκάθαρο ποιο προηγείται και ποιο έπεται.

(ii) Ασυμμετρία. Αν το α προηγείται του β τότε το β δεν προηγείται του α.

(iii) Μεταβατικότητα. Για κάθε τριάδα στοιχείων α,β,γ, αν το α προηγείται του β και το β προηγείται του γ, τότε το α προηγείται του γ.

(iv) Καλή διάταξη. Κάθε υποσύνολο του συνόλου έχει πρώτο στοιχείο.

(v) Κάθε στοιχείο του συνόλου, εκτός από το πρώτο, έχει καλά ορισμένο προηγούμενο στοιχείο.

Είναι σημαντικό να προσθέσουμε ότι η Μαθηματική Επαγωγή ως αποδεικτική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για την επιβεβαίωση μιας εικασίας που ισχύει στο σύνολο των Φυσικών Αριθμών ή σε κάποιο υποσύνολό του, και όχι για την κατάρριψη μιας εικασίας η οποία δεν ισχύει. Η κατάρριψη εικασίας απαιτεί αντιπαράδειγμα (όπως συνέβη με την εικασία του Fermat που προαναφέραμε) και πολλές φορές αυτό είναι δύσκολο να βρεθεί. Η αδυναμία απόδειξης μιας εικασίας με Μαθηματική Επαγωγή δεν οδηγεί σε κανένα συμπέρασμα σχετικά με την ισχύ της εικασίας. Σε αυτήν την περίπτωση, ενδέχεται η εικασία να είναι αληθής, αλλά να αποδεικνύεται με άλλο τρόπο, όπως επίσης ενδέχεται η εικασία να μην ισχύει, πράγμα που αποδεικνύεται με αντιπαράδειγμα.

Όσον αφορά τα Μαθηματικά της Μαθηματικής Επαγωγής, θα ολοκληρώσουμε με την πληροφορία ότι ο Dedekind, στη μαθηματική θεωρία του, δεν δέχεται την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ως αξίωμα -όμοια και για τα υπόλοιπα αξιώματα- αλλά την αποδεικνύει. Αυτό, το επιτυγχάνει μέσα από την διατύπωση κατάλληλων ορισμών. Αρχικά, δεν θεωρεί δεδομένη την ύπαρξη απείρων συνόλων αλλά την ορίζει (Άπειρο λέγεται κάθε σύνολο για το οποίο υπάρχει μια συνάρτηση που είναι αμφιμονότιμη και επί, ανάμεσα σε αυτό και ένα γνήσιο υποσύνολό του). Ορίζει τι είναι το επαγωγικό σύνολο (simple infinity ή inductive set) και έπειτα, βάσει αυτού του ορισμού αποδεικνύει ότι κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα επαγωγικό υποσύνολο. Ύστερα. αποδεικνύει ότι κάθε δύο επαγωγικά συστήματα είναι ισόμορφα και δηλώνει ότι -κατά συνέπεια- για κάθε δύο επαγωγικά σύνολα ισχύουν οι ίδιες αριθμητικές αλήθειες. Στη συνέχεια, ισχυρίζεται ότι εφόσον όλα τα επαγωγικά σύνολα είναι ισόμορφα, δεν παίζει ρόλο με ποιο θα ξεκινήσουμε. Έτσι, δημιουργεί νέα αντικείμενα που αντιστοιχίζονται σε όλα τα στοιχεία αυτού του επαγωγικού συνόλου με το οποίο ξεκινήσαμε, δημιουργώντας έτσι ένα νέο είδος επαγωγικού συνόλου, αυτό των Φυσικών Αριθμών (Reck, 2012).

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Από εδώ και στο εξής, όταν θα αναφερόμαστε στα Μαθηματικά της Μαθηματικής Επαγωγής που μας ενδιαφέρει να γνωρίζουν οι μαθητές θα εννοούμε την Ασθενή Μαθηματική Επαγωγή διατυπωμένη χωρίς ποσοδείκτες και χωρίς τον συμβολισμό της

Μαθηματικής Λογικής, ως εξής:

Έστω μια πρόταση P, που εξαρτάται από τον Φυσικό Αριθμό n

i. Η πρόταση P ισχύει για κάποιον Φυσικό n_0. Δηλ. $P(n_0)$ αληθής.
ii. Αν η P(n) είναι αληθής τότε η P(n+1) αληθεύει. Δηλ. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω υποθέσεις ταυτόχρονα, τότε βάσει του αξιώματος της Μαθηματικής Επαγωγής, η πρόταση P(n) ισχύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Σε ορισμένες περιπτώσεις θα αναφέρεται ρητά ότι επιπρόσθετα μας ενδιαφέρει και το 5ο Αξίωμα Peano, που θα χρησιμοποιούμε διατυπωμένο ως εξής:

Αν A υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε

i. Το 0 ανήκει στο A
ii. Αν n ανήκει στο A, τότε n+1 ανήκει στο A.

Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω συνθήκες ταυτόχρονα, τότε $A = \mathbb{N}$

1.4. Η Μαθηματική Επαγωγή – Επαγωγικός και Παραγωγικός συλλογισμός

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί μια κατηγοριοποίηση των ειδών συλλογισμού, προκειμένου να κατατάξουμε τη Μαθηματική Επαγωγή σε έναν από αυτούς. Η Βοσνιάδου (2001) ορίζει τη συλλογιστική σκέψη ως 'τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων από κάποια δεδομένα στη διάρκεια μιας διαλογικής διαδικασίας' και διακρίνει ανάμεσα σε δύο είδη συλλογισμών: τον παραγωγικό και τον επαγωγικό. Ο παραγωγικός συλλογισμός έχει ως αφετηρία μια γενική πρόταση, που θεωρείται αληθής. Αυτή η πρόταση αθροιστικά με ένα ακόμη δεδομένο, οδηγούν σε μια άλλη πρόταση που επιβάλλεται, εφόσον έπεται ως λογική αναγκαιότητα. Ο παραγωγικός συλλογισμός είναι η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων, λογικά αναγκαίων, ξεκινώντας από το γενικό και καταλήγοντας σε κάτι πιο ειδικό. Αντίθετα, ο επαγωγικός συλλογισμός αφορά στη διαδικασία διεξαγωγής συμπεράσματος, έχοντας ως σημείο εκκίνησης κάτι το ειδικό και καταλήγει σε κάτι πιο γενικό και αφηρημένο (Βοσνιάδου, 2001).

Όσον αφορά τα Μαθηματικά, η Μαθηματική Επαγωγή *δεν είναι επαγωγικός αλλά παραγωγικός συλλογισμός*, εφόσον ήδη ξεκινούμε από μια πρόταση P(n) που έχει γενική ισχύ (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015). Αντιθέτως, η ατελής επαγωγή που αναφέρθηκε πρωτύτερα αποτελεί επαγωγικό τρόπο σκέψης, μιας και σχετίζεται με την διεξαγωγή ενός γενικού κανόνα (γενίκευση) μέσα από την παρατήρηση ορισμένων παραδειγμάτων (ειδικές περιπτώσεις). Πολλοί ερευνητές (Ernest, 1984· Movschovitz-Hadar, 1993· Πάλλα, 2006· Καλαβάσης & Μούτσιος-

Ρέντζος, 2015) αναγνωρίζουν την σύγχυση που μπορεί να προκαλέσει η ονομασία Μαθηματική Επαγωγή, σε αυτήν την παραγωγικού συλλογισμού διαδικασία.

Επομένως, η Μαθηματική Επαγωγή είναι ένας παραγωγικός αποδεικτικός συλλογισμός που βαφτίστηκε με λάθος όνομα, όσον αφορά το είδος του συλλογισμού. Ποιοι λόγοι μπορεί να οδήγησαν σε αυτή την οξύμωρη ονομασία; Οι Καλαβάσης και Μούτσιος-Ρέντζος (2015) ισχυρίζονται ότι «ο όρος *επαγωγή* αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο επάγεται η ισχύς της πρότασης, σε όλα τα στοιχεία του συνόλου με ενδεχόμενα 'άλματα', χωρίς όντως να ελεγχθεί για καθένα από αυτά» (σελ. 284). Δηλαδή μοιάζει να επιτυγχάνεται η ισχύς της πρότασης με ένα επαγωγικού συλλογισμού άλμα, με μια επαγωγική εικασία, που όμως δεδομένης της δομής του συνόλου, είναι σαφώς παραγωγικό βήμα (Μούτσιος-Ρέντζος, 16/01/2016, προσωπική επικοινωνία). Ο Cajori (1918) θεωρεί ότι όρος επαγωγή προκύπτει από την διαδικασία αυτής καθεαυτής της λογικής που ακολουθεί η Μαθηματική Επαγωγή, κατ' αναλογία με την επαγωγή που χρησιμοποιούν οι Φυσικές Επιστήμες. Επιπρόσθετα αναφέρει ότι:

«Ο George Peacock, ... μιλά... για έναν 'νόμο σχηματισμού που εκτείνεται με επαγωγή σε οποιονδήποτε αριθμό' χρησιμοποιώντας τον όρο επαγωγή με την έννοια της εικασίας»

(Cajori, 1918, σελ. 200).

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Παραδόξως, η Μαθηματική Επαγωγή δεν είναι επαγωγικός αλλά παραγωγικός συλλογισμός, εφόσον σχετίζεται με τη διεξαγωγή συμπεράσματος βασισμένου όχι σε ειδικές περιπτώσεις -όπως συμβαίνει στην ατελή επαγωγή των Φυσικών Επιστημών- αλλά στην πρόταση P(n) που έχει γενική ισχύ.

Το οξύμωρο του ονόματός της πιθανολογείται ότι οφείλεται στη διαδικασία αυτής καθεαυτής της λογικής που ακολουθεί, κατ' αναλογία με την ατελή επαγωγή των Φυσικών Επιστημών.

1.5. Επιστημολογικά ζητήματα

Ως γνωστόν η Επιστημολογία είναι ο κλάδος της Φιλοσοφίας που ασχολείται με τη φύση και την οπτική της γνώσης· είναι μια Θεωρία Γνώσης που μελετά τα

αντικείμενα της επιστήμης και εξετάζει κριτικά τις αρχές και τα όρια του υποκειμένου, καθώς επίσης και τη σχέση των επιστημών αναμεταξύ τους (Σπύρου, 2015). Επομένως ορισμένα από τα ερωτήματα που θέτει η Επιστημολογία είναι:

Τι είναι γνώση;

Τι είναι δυνατόν να γνωρίζουμε;

Πώς μπορούμε να το γνωρίζουμε;

Πώς αποκτάται η γνώση;

Η γνώση που έχουμε ανταποκρίνεται στην αλήθεια;

Πώς μπορούμε να διακρίνουμε την αλήθεια από το ψεύδος;

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε την υπόθεση που βρίσκεται στην καρδιά αυτών των ερωτήσεων και στην οποία βασίζεται ο κύριος όγκος της βιβλιογραφίας γύρω από την Μαθηματική Επαγωγή, η οποία αφορά στο ότι θεωρούμε ότι υπάρχει *κάτι* που είναι η αντικειμενική αλήθεια, ώστε να προκύπτουν δύο τινά για τις πεποιθήσεις των ανθρώπων: είτε να συνάδουν με την πραγματικότητα είτε όχι· δηλαδή το να γνωρίζει κάποιος κάτι, προϋποθέτει ότι υπάρχει κάτι *για το οποίο* γνωρίζει (Truncellito, 2015).

Επιστρέφοντας λοιπόν στο θέμα που αφορά τη Διδακτική των Μαθηματικών στην παρούσα εργασία, δηλ. στη Μαθηματική Επαγωγή, τα ερωτήματα που μας αφορούν είναι:

Τι σημαίνει ότι ένας μαθητής γνωρίζει την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής;

Μέσα από ποιες διαδικασίες μπορεί να αποκτηθεί αυτή η γνώση;

Είδη γνώσης

Προκειμένου να απαντήσουμε στο πρώτο από τα παραπάνω ερωτήματα, θα πρέπει να παραθέσουμε λίγα λόγια για τη φύση και τα είδη της γνώσης, όπως τα περιγράφει ο Truncellito (2015): υπάρχουν πολλά είδη γνώσης, όπως είναι η διαδικαστική γνώση (π.χ. γνωρίζω πώς να οδηγώ ένα ποδήλατο) ή η γνώση γνωριμίας (acquaintance knowledge), π.χ. ‘γνωρίζω τον διευθυντή του 1^{ου} Γενικού Λυκείου Άνω Τούμπας’· αυτά τα είδη γνώσης δεν ενδιαφέρουν την Επιστημολογία. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την προτασιακή γνώση (propositional knowledge). ‘Πρόταση’ είναι οτιδήποτε μπορεί να εκφραστεί με μια δήλωση και αποσκοπεί στο να περιγράψει γεγονότα ή μια κατάσταση π.χ. ‘Οι σκύλοι είναι θηλαστικά’ ή ‘2+2=7’ κτλ., δηλαδή μια πρόταση δεν είναι απαραίτητο να είναι ‘αληθής’. Επίσης, η Επιστημολογία διακρίνει ανάμεσα σε δύο είδη προτασιακής γνώσης: την ‘a priori’ και την ‘a posteriori’. Η πρώτη είναι μη εμπειρική και μπορεί να υπάρξει προ ή άνευ

εμπειρίας και για την απόκτησή της απαιτείται μόνο η χρήση λογικής. Η δεύτερη μπορεί να υπάρξει μόνο κατόπιν εμπειρίας μέσω των αισθήσεων, σε συνδυασμό με τη λογική. Επίσης, μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε ατομική γνώση και συλλογική γνώση. Υπό αυτή την οπτική, ο Poincaré θεωρεί την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ως κατεξοχήν a priori γνώση (Heinzmann & Nabonnand, 2008).

1.5.1 Η φύση της προτασιακής γνώσης

Ο Truncellito (2015) ισχυρίζεται ότι η γνώση έχει τέσσερις παραμέτρους: 'πεποίθηση' (belief), 'αλήθεια', 'αιτιολόγηση', 'αποκλεισμός της τύχης'. Η γνώση θεωρείται ως διανοητική κατάσταση, ένα είδος 'πεποίθησης'. Αν κάποιος δεν έχει καμία πεποίθηση επί ενός ορισμένου θέματος, δεν μπορεί να έχει γνώση επ' αυτού. Φυσικά, δεν είναι δυνατόν όλες οι πεποιθήσεις μας να είναι αληθείς. Βεβαίως, η αλήθεια αποτελεί προϋπόθεση για τη γνώση, συνεπώς, οι μη αληθείς πεποιθήσεις μας δεν συνιστούν γνώση. Η τρίτη παράμετρος που περιγράφει τη γνώση είναι η αιτιολόγηση, η οποία αφορά στον τρόπο/δρόμο με τον οποίο αποκτήθηκε μια πεποίθηση. Θεωρείται ότι οι αληθείς πεποιθήσεις που έχουν αποκτηθεί μέσα από λάθος δρόμο, δεν αποτελούν γνώση. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο παραθέτουμε το εξής παράδειγμα: μπορεί ένας μαθητής να έχει την λανθασμένη πεποίθηση ότι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 3 είναι αυτοί που τελειώνουν σε 3 ή 6 ή 9 και στο 'Σωστό ή Λάθος' ερώτημα αν ο αριθμός 123 διαιρείται με 3 να απαντήσει 'Σωστό', με το σκεπτικό ότι ο 123 λήγει σε 3. Παρόλο που ο μαθητής δίνει σωστή απάντηση, η αιτιολόγηση μέσα από την οποία καταλήγει στην απάντηση είναι λάθος. Επομένως η αληθής πεποίθησή του ότι ο 123 διαιρείται με το 3 δεν συνιστά γνώση! Η τέταρτη και τελευταία παράμετρος που θέτει ο Truncellito (2015) είναι ο αποκλεισμός της τύχης η οποία σχετίζεται με την ορθότητα της αιτιολόγησης. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό παραθέτουμε το παράδειγμα με το πρόβλημα του Gettier:

«Ας υποθέσουμε ότι το ρολόι της πανεπιστημιούπολης (που έχει σωστή ώρα και συντηρείται καλώς) σταμάτησε να δουλεύει στις 11:56 χθες το βράδυ και δεν έχει ακόμα επιδιορθωθεί. Καθώς πηγαίνω στο πανεπιστήμιο για να παρακολουθήσω το μάθημα που έχω στις 12:00, ακριβώς 12 ώρες αργότερα, κοιτώντας το ρολόι και σχηματίζω την πεποίθηση ότι είναι 11:56. Η πεποίθησή μου είναι αληθής, φυσικά, αφού όντως είναι 11:56. Επίσης η πεποίθησή μου είναι αιτιολογημένη, καθώς δεν έχω κανένα λόγο να αμφισβητήσω το γεγονός ότι το ρολόι δουλεύει και δεν μπορεί κανείς να με κατηγορήσει για το γεγονός ότι θεμελιώνω την πεποίθησή μου για το τι ώρα είναι πάνω στην ώρα που αναγράφει το ρολόι, Παρόλα αυτά,

είναι προφανές ότι δεν γνωρίζω ότι η ώρα είναι 11:56. Αφού, αν είχα περάσει από το ρολόι λίγο νωρίτερα ή λίγο αργότερα, θα είχα καταλήξει με μια λάθος πεποίθηση.»

(Truncellito, 2015, χ.σ.)

Τελικά, καταλήγουμε στο ότι, προκειμένου να θεωρήσουμε ότι κανείς έχει γνώση επί ενός αντικειμένου, εν προκειμένω επί της Μαθηματικής Επαγωγής, θα πρέπει αυτός να έχει αληθείς πεποιθήσεις που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, χωρίς αυτό να προέρχεται από τύχη. Αυτές οι αληθείς πεποιθήσεις περί της Μαθηματικής Επαγωγής που θέλουμε να έχει ο μαθητής είναι -στην ιδανική περίπτωση- όσα έχουν προαναφερθεί επί του θέματος στις παραγράφους 1.3 και 1.4. *Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο μαθητής γνωρίζει την Μαθηματική Επαγωγή*. Ας σημειωθεί ότι η γνώση αυτού του τύπου της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής δεν συνεπάγεται ότι ο μαθητής μπορεί να την εφαρμόσει για να λύσει ασκήσεις. Επίσης, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι απαντήσεις των μαθητών σε παραδοσιακές ασκήσεις επί της Μαθηματικής Επαγωγής της μορφής 'Να δείξετε ότι…' δεν μπορούν να μας δώσουν ευκρινείς απαντήσεις για τις πεποιθήσεις των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής, πόσο μάλλον για το αν αυτές προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση που δεν προέρχεται από τύχη. Συνεπώς κατά τη διδασκαλία και την αξιολόγηση της Μαθηματικής Επαγωγής θα πρέπει να χρησιμοποιείται το κατάλληλο διδακτικό υλικό, προκειμένου να αναδεικνύονται όχι μόνο οι πεποιθήσεις των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής αλλά και το αν αυτές προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση και μάλιστα χωρίς να εμπλέκεται η τύχη σε αυτή τη διαδικασία.

1.5.2 Μέσα από ποιες διαδικασίες αποκτάται η γνώση;

Για να απαντήσουμε σε αυτό το δεύτερο ερώτημα, δηλαδή πώς ένας μαθητής θα δημιουργήσει αληθείς πεποιθήσεις που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, εξαιρώντας το ενδεχόμενο της τύχης, θα πρέπει να μετατοπίσουμε το βάρος στο ερώτημα ποιες εμπειρίες είναι ικανές να δημιουργήσουν τις ζητούμενες πεποιθήσεις και τι νόημα αποδίδουν οι μαθητές σε αυτές;

Προκειμένου να απαντηθούν τα παραπάνω πρέπει να αναφερθούμε στη διάκριση ανάμεσα στο 'μαθαίνω' και 'παράγω νέα γνώση', καθώς και στην έννοια του νοήματος. Ο Radford (2006) μιλά για την διττή υπόσταση του νοήματος ως ενός αντικειμενικού αλλά και ταυτόχρονα υποκειμενικού κατασκευάσματος. Από τη μια το νόημα ως μια αποβλεπτική δράση (intentional act), (π.χ. ως πρόθεση) φαίνεται ως υποκειμενικό κατασκεύασμα. Από την άλλη, ακριβώς επειδή οι προθέσεις

κατευθύνονται προς ένα αντικειμενικό γεγονός, το νόημα εμπεριέχει αντικειμενικότητα. Ο διάλογος ανάμεσα σε αυτές τις αντιτιθέμενες πλευρές του νοήματος αποδείχτηκε περίπλοκος. Αυτό αντικατοπτρίζεται καλύτερα στο ερώτημα που θέτει ο Husserl (στο Radford, 2006, σελ. 40): «Πώς τα αντικείμενα των Μαθηματικών [..] και άλλων επιστημών μεταβαίνουν από την αρχική, διαπροσωπική τους αφετηρία στην ιδανική τους αντικειμενικότητα;»

Από το άρθρο του Radford (2006) συνάγουμε το συμπέρασμα ότι η, επικρατέστερη θεωρία σήμερα βλέπει τα μαθηματικά αντικείμενα ως εννοιολογικές μορφές ιστορικά, κοινωνικά, αναστοχαστικά και κοινωνικά ενσαρκωμένης δράσης· γενικότερα αυτή η σημειωτικο-πολιτισμική προσέγγιση θεωρεί ότι η γνώση είναι προϊόν μιας διαμεσολαβημένης, γνωστικής, αναστοχαστικής πράξης (praxis). Μέσα σε αυτήν την σημειωτικο-πολιτισμική προσέγγιση είναι σημαντικό να διακρίνουμε ανάμεσα στην παραγωγή νέας γνώσης και στη μάθηση. Από τη μια, οι πολιτισμικές έννοιες προκύπτουν μέσα από τις κοινές συλλογικές, αναστοχαστικές, διαμεσολαβημένες δράσεις στη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης του πολιτισμού, ενώ από την άλλη, η σχολική μάθηση είναι η διαδικασία ενεργής και δημιουργικής μεταμόρφωσης αυτών των πολιτισμικών εννοιών -που είναι ενσωματωμένες σε κείμενα, σε τεχνουργήματα, στη γλώσσα και σε πεποιθήσεις- σε αντικείμενα της συνειδητότητάς μας (objects of consciousness) (Radford, 2006). Αυτή η διαδικασία κατά την οποία το υποκείμενο και το αντικείμενο διαμορφώνουν το ένα το άλλο, είναι η διαδικασία του νοήματος, η διαδικασία μέσα στην οποία συγχωνεύονται η υποκειμενικότητα όσων γνωρίζει κανείς και η αντικειμενικότητα της γνώσης (Radford, 2006). Πράγμα που μας φέρνει στο ερώτημα ποιες εμπειρίες της σχολικής τάξης είναι ικανές να δημιουργήσουν αυτό νόημα. Υπάρχουν διάφορες θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών οι οποίες απαντούν σε αυτό το ερώτημα, διευκολύνοντας την κατασκευή νοήματος. Τέτοιες θεωρίες είναι η θεωρία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, η θεωρία του Dewey J. (1859-1952) και η θεωρία της Μάθησης που Βασίζεται σε Διερεύνηση ή Διερευνητικής Μάθησης, οι οποίες αναπτύσσονται παρακάτω (§1.7).

Επίσης, δεν θα πρέπει να αγνοούμε ότι εφόσον η διαδικασία του νοήματος προκύπτει ως διάλογος ανάμεσα στο υποκείμενο και το αντικείμενο, είναι σαφές ότι πρέπει το υποκείμενο να βλέπει μια ανάγκη για να μπει σε αυτόν τον διάλογο προκειμένου να προκύψει νόημα. Είναι λοιπόν προφανές, ότι σε κάθε εγχείρημα της διδακτικής δεν υπάρχουν εχέγγυα. Το νόημα είναι αυστηρά προσωπική υπόθεση και

δεν είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε συνθήκες μέσα από τις οποίες να είμαστε βέβαιοι ότι θα προκαλέσουμε, ως δάσκαλοι, την δημιουργία ενός κοινού νοήματος για μια ομάδα μαθητών, ακόμα και αν διδάξουμε με τις καλύτερες και πιο σύγχρονες τεχνικές της Διδακτικής των Μαθηματικών την ίδια συλλογικότητα μαθητών, ακόμα και -αν θα ήταν ποτέ δυνατόν- αυτοί οι μαθητές να είχαν πανομοιότυπες πρότερες εμπειρίες στα Μαθηματικά. Όμως, αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία από τη βιβλιογραφία επί της Μαθηματικής Επαγωγής (δραστηριότητες, τεχνικές, θεωρίες κτλ.) ώστε να σχεδιαστεί μια διδακτική πρόταση που να δίνει στους μαθητές μεγαλύτερες πιθανότητες -σε σχέση με μια παραδοσιακή διδασκαλία- να έρθουν σε διάλογο με το μαθηματικό αντικείμενο Μαθηματική Επαγωγή, προκειμένου να κατασκευάσουν νόημα για αυτό. Συνεπώς, αναζητούμε εκείνες τις μαθηματικές εμπειρίες που θα κινητοποιήσουν τους μαθητές προς έναν διάλογο με το μαθηματικό κατασκεύασμα που ονομάζεται Μαθηματική Επαγωγή. Λαμβάνοντας υπόψη τις επιταγές της Διδακτικής των Μαθηματικών, θεωρούμε ότι ο παραπάνω στόχος μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την εφαρμογή ενός διδακτικού πλαισίου που περιέχει αρχές για τη διδακτική της Μαθηματικής Επαγωγής (βλ.§ 3.1). Αυτό το διδακτικό πλαίσιο θα συντεθεί ώστε να βασίζεται στα παρακάτω: i. Αξιοποίηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας στη Διδακτική των Μαθηματικών που αφορά τη Μαθηματική Επαγωγή (π.χ. δυσκολίες, παρανοήσεις κτλ.), ii. Σεβασμός στις αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών και στην αρχή ‘μαθαίνω κάνοντας’ του Dewey, iii. Αξιοποίηση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με την ανάγκη για απόδειξη, iv. Σχεδιασμός με βάση τη Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση v. Αξιοποίηση και διαμόρφωση δραστηριοτήτων σχετικών με τη Μαθηματική Επαγωγή.

Ωστόσο, όσα ειπώθηκαν παραπάνω αφορούν -στο μεγαλύτερο μέρος- γενικές πληροφορίες για την κατασκευή νοήματος και τη δημιουργία αληθών πεποιθήσεων που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, χωρίς την εμπλοκή της τύχης. Αν θέλουμε να συγκεκριμενοποιήσουμε το ερώτημα επί της Μαθηματικής Επαγωγής, τότε θα πρέπει να δούμε πώς κατανοούνται συγκεκριμένες πτυχές της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής (όπως είναι η σύλληψη του απείρου) αλλά και τυχόν εμπόδια που μπορεί να αποτελέσουν τροχοπέδη για αυτή τη διαδικασία. Όλα αυτά συζητούνται στην επόμενη παράγραφο.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Η εργασία μας βασίζεται στην υπόθεση ότι υπάρχει *κάτι* που είναι η αντικειμενική αλήθεια, γεγονός που σημαίνει ότι οι πεποιθήσεις των ανθρώπων είναι είτε αληθείς, όταν αυτές ανταποκρίνονται σε αυτή την αντικειμενική αλήθεια, είτε ψευδείς, στην αντίθετη περίπτωση.

Επίσης, συμφωνήσαμε πως θα λέμε ότι ένας μαθητής έχει γνώση επί κάποιου θέματος (εν προκειμένω επί της Μαθηματικής Επαγωγής), όταν έχει αληθείς πεποιθήσεις που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, εξαιρουμένου του ενδεχομένου της τύχης.

Η διαδικασία κατά την οποία το υποκείμενο και το αντικείμενο διαμορφώνουν το ένα το άλλο είναι η διαδικασία του νοήματος. Η Διδακτική των Μαθηματικών, μέσα από τις πολυάριθμες διδακτικές θεωρίες της, διευκολύνει την κατασκευή αυτού του νοήματος. Τέτοιες θεωρίες, που αξιοποιούνται στη συγκεκριμένη εργασία είναι: τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση, η αρχή ‘μαθαίνω κάνοντας’ του Dewey και η Μάθηση που Βασίζεται σε Διερεύνηση.

1.6 Επιστημολογικές πτυχές της Μαθηματικής Επαγωγής

1.6.1 Ο μηχανισμός της κατανόησης της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής

Οι Lakoff και Núñez (2000) αναφέρουν ότι ο μηχανισμός με τον οποίο κατανοείται το αφηρημένο μέσω του απτού ονομάζεται εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor). Κάθε εννοιολογική μεταφορά αποτελεί μια χαρτογράφηση μονής κατεύθυνσης από οντότητες ενός εννοιολογικού πεδίου σε αντίστοιχες οντότητες ενός άλλου εννοιολογικού πεδίου. Δηλαδή, μέσα σε μια εννοιολογική μεταφορά ένα πεδίο νοηματοδοτείται σε σχέση με ένα άλλο. Για παράδειγμα όταν λέμε ‘Μου φέρθηκε πολύ ζεστά’ η στοργή (το ένα εννοιολογικό πεδίο) γίνεται αντιληπτή μέσω της φυσικής θερμότητας (το άλλο εννοιολογικό πεδίο). Οι εννοιολογικές μεταφορές είναι μέρος του συστήματος της σκέψης μας. Η πρωταρχική τους λειτουργία είναι ότι μας επιτρέπουν να σκεφτόμαστε για σχετικώς αφηρημένα πεδία, χρησιμοποιώντας τη συμπερασματική δομή συγκεκριμένων πεδίων.

Συγκερασμός (Conflation) ονομάζεται το φαινόμενο της ταυτόχρονης ενεργοποίησης δύο ή περισσότερων διακεκριμένων περιοχών του εγκεφάλου, καθεμιά από τις οποίες σχετίζεται με διαφορετικές πλευρές της εμπειρίας μας, όπως π.χ. η εμπειρία της αίσθησης της ζέστης και η εμπειρία του συναισθήματος της

στοργής. Η ταυτόχρονη ενεργοποίηση δύο ή περισσότερων τμημάτων του εγκεφάλου παράγει μία μικτή εμπειρία (π.χ. στοργής-με-ζέστη). Μέσω αυτών των συγκερασμών αναπτύσσονται οι νευρωνικές συνδέσεις ανάμεσα στα πεδία· συχνά οι συνδέσεις αυτές, έχουν ως αποτέλεσμα μια εννοιολογική μεταφορά.

Κατά τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής, οι διδάσκοντες -και τα βιβλία- προσπαθούν να κάνουν την έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής (και κατ' επέκταση τη διάταξη των Φυσικών Αριθμών) κατανοητή μέσα από ορισμένες εικόνες ή παρομοιώσεις (μοντέλα μεταφοράς) ή αναλογίες που δημιουργούν εννοιολογικές μεταφορές. Οι συνηθέστερες είναι αυτές που αναφέρει ο Ernest (1984):

(i) Η άνοδος μιας σκάλας, σκαλί σκαλί.

(ii) Η μετάδοση ενός γράμματος διαμέσου μιας σειράς στρατιωτών.

(iii) Η αναχώρηση ενός τρένου κατά άμαξα: η μία μετά την άλλη.

(iv) Η είσοδος μιας πριγκίπισσας σε όλα τα κλειδωμένα δωμάτια ενός παλατιού, δεδομένου ότι έχει το κλειδί για το πρώτο δωμάτιο και κάθε δωμάτιο περιέχει το κλειδί για το επόμενο δωμάτιο.

(v) Η ρίψη των πλακιδίων ενός ντόμινο.

Επίσης, οι Ron και Dreyfus (2004) αναφέρουν ακόμα ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται ορισμένες φορές από εκπαιδευτικούς είναι:

(vi) Οι πύργοι του Ανόι (Hanoi towers) (βλ. § 6.3).

Επιπρόσθετα, στη βιβλιογραφία (Fendel & Resek, 1990, στο Movschovitz-Hadar, 1993 σελ. 259), συναντούμε την:

(vii) Μεταφορά του μαγικού τζίνι. Σε αυτήν την εννοιολογική μεταφορά ανάμεσα στην Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής και στο μαγικό τζίνι που δίνει 'Πιστοποιητικά ισχύος' για αποδείξεις και θεωρήματα. Για παράδειγμα, αν δώσουμε στο τζίνι μια απόδειξη που ισχυρίζεται ότι ένα σύνολο Α περιέχει το 1 και ότι είναι επαγωγικό (δηλ. για κάθε ν του Α συνεπάγεται ότι ν+1 ανήκει στο Α), τότε το τζίνι μας δίνει ένα πιστοποιητικό ότι το σύνολό μας θα περιέχει όλους τους Φυσικούς αριθμούς. Κατά την Movschovitz-Hadar (1993) το τζίνι παίζει τον ρόλο του αξιώματος και δημιουργεί μια πιο κοντινή συσχέτιση του αξιώματος με την ρεαλιστική εμπειρία της έκδοσης πιστοποιητικού και έτσι ξεκαθαρίζει την ανάγκη ύπαρξής του.

Όλες οι παραπάνω αναλογίες στοχεύουν στην κατανόηση της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από τη χρήση μιας εννοιολογικής μεταφοράς που συνδέει μια ρεαλιστική εμπειρία (π.χ. τη ρίψη πλακιδίων του ντόμινο) -που αποτελεί το πεδίο

αφετηρίας, το πεδίο με τις συγκεκριμένες οντότητες- με τη διάταξη των Φυσικών Αριθμών (και συνεπώς με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής) -που αποτελεί το πεδίο με τις αφηρημένες οντότητες στο οποίο μεταβαίνουμε. Συνεπώς είναι προφανές και ξεκάθαρο ότι η εννοιολογική μεταφορά μέσα από την οποία προσπαθούμε να διδάξουμε τη Μαθηματική Επαγωγή είναι μείζονος σημασίας και παίζει καθοριστικό ρόλο στο νόημα που θα αποδώσουν οι μαθητές στην έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής.

Ας παρατηρήσουμε ότι όλες οι μεταφορές από i ως v, έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι αφορούν σε μια συνεχή -δίχως τέλος- διαδικασία την οποία μπορούμε να τεμαχίσουμε σε επιμέρους τμήματα που επαναλαμβάνονται. Για παράδειγμα, η αέναη άνοδος μιας ατελείωτης σκάλας συμβαίνει μέσα από την πεπερασμένη διαδικασία ανάβασης μίας βαθμίδας που επαναλαμβάνεται στο διηνεκές. Ίσως η μεταφορά iv με την πριγκίπισσα παρεκκλίνει ελαφρώς σχετικά με τις λοιπές μεταφορές, ως προς το γεγονός ότι σε αυτήν είναι πιο εμφανής η προϋπόθεση της μετάβασης από το προηγούμενο στο επόμενο 'στοιχείο'. Αυτό συμβαίνει διότι εξηγείται ρητά ότι το κλειδί για το επόμενο δωμάτιο βρίσκεται στο προηγούμενο, ενώ στις υπόλοιπες μεταφορές δεν αναφέρεται καμία τέτοια προϋπόθεση. Για παράδειγμα, καθώς το γράμμα περνά από στρατιώτη σε στρατιώτη, δεν υπάρχει κανένας ρητός περιορισμός ούτε και κάποια φυσική δυσκολία στο να δώσει κάποιος στρατιώτης το γράμμα στον παραεπόμενο στρατιώτη, παραλείποντας τον επόμενο στρατιώτη.

1.6.2. Η νοητική σύλληψη της απειρίας

Οι Lakoff και Nunez (2000) θεωρούν ότι υπάρχει ένας γενικός γνωστικός μηχανισμός μέσα από τον οποίο αντιλαμβανόμαστε την έννοια του απείρου. Ονομάζουν αυτόν τον γνωστικό μηχανισμό Βασική Μεταφορά του Απείρου (Basic Metaphor of Infinity). Η Βασική Μεταφορά του Απείρου είναι κομμάτι του ασυνείδητου εννοιολογικού συστήματός μας και δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν χρησιμοποιούμε τους μηχανισμούς αυτού του συστήματος ή όχι.

Σε κάθε περίπτωση, οι παραπάνω συγγραφείς θεωρούν ότι αντιλαμβανόμαστε την έννοια του απείρου μέσα από επαναληπτικές -δίχως τέλος- διαδικασίες, οι οποίες μπορούν να τεμαχιστούν σε πεπερασμένα τμήματα, τα οποία επαναλαμβάνονται. Με βάση αυτή τη μεταφορά, οι διαδικασίες που συνεχώς επαναλαμβάνονται θεωρούνται σαν να έχουν ένα τέλος και ένα τελικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, μια αέναη

άνοδος βαθμίδων (σκαλιών) είναι μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία, μέσα στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε τις πεπερασμένες υπο-διαδικασίες 'ανάβαση μίας βαθμίδας' τη φορά. Το τέλος της υπο-διαδικασίας είναι εκεί όπου έχει ολοκληρωθεί η ανάβαση αυτής της βαθμίδας. Αυτή η μεταφορά χρησιμοποιείται εννοιολογικά στα Μαθηματικά για την απείρως συνεχή διαδικασία κατά την οποία μια ποσότητα πλησιάζει σε ένα όριο, κατά την οποία ακολουθούμε μια άπειρη σειρά καλά ορισμένων βημάτων.

Οι Lakoff και Nunez (2000) σχετικά με την Βασική Μεταφορά του Απείρου για την Μαθηματική Επαγωγή θεωρούν ότι αυτό που συμβαίνει είναι ότι κτίζεται ένα σύνολο: αυτό όλων των πεπερασμένων Φυσικών για τους οποίους ισχύει η P(n). Στο τελικό στάδιο (στάδιο-αποτέλεσμα) υπάρχει ένα άπειρο σύνολο πεπερασμένων αριθμών. Πιο αναλυτικά, μπορούμε να δούμε την Βασική Μεταφορά του Απείρου για την Μαθηματική Επαγωγή στον πίνακα1.1, που προτείνουν οι Lakoff και Nunez (2000, σελ. 176).

Πίνακας 1.1: Βασική Μεταφορά του Απείρου για Μαθηματική Επαγωγή

Πεδίο Στόχου (επαναληπτικές διαδικασίες που συνεχίζονται κ.ο.κ.)	Ειδική περίπτωση : Μαθηματική Επαγωγή
Η αρχική κατάσταση (0)	Μια πρόταση S(x), όπου x μια μεταβλητή που παίρνει τιμές στους Φυσικούς Αριθμούς
Κατάσταση (1) που προκύπτει από το αρχικό στάδιο της διαδικασίας	S(1) αληθής για το σύνολο {1}
Η διαδικασία από μια προηγουμένως ενδιάμεση κατάσταση (n-1) παράγεται η επόμενη κατάσταση (n).	Δεδομένου ότι S(n-1) αληθής για τα στοιχεία {1,2, … , n-1}, αποδεικνύουμε την αλήθεια της S(n) για τα στοιχεία {1,2, … , n}
Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά από αυτήν την επανάληψη της διαδικασίας (η σχέση μεταξύ n και n-1)	S(n) αληθής για τα στοιχεία του συνόλου {1,2, … , n}
Η τελική προκύπτουσα κατάσταση (πραγματικό άπειρο '∞')	S(∞) αληθής για τα στοιχεία του συνόλου *όλων* των Φυσικών Αριθμών
Συμπέρασμα Σ: Η τελική προκύπτουσα κατάσταση ('∞') είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης	Συμπέρασμα Σ: Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών για το οποίο S(∞) αληθής είναι μοναδικό και περιέχει *όλους* τους πεπερασμένους Φυσικούς Αριθμούς

Με άλλα λόγια στην ουσία, αυτό που συμβαίνει είναι ότι η δομή του $\mathbb{N}$ είναι τέτοια που επιτρέπει να περατωθεί η απειρία του. Όπως αναφέρουν οι Καλαβάσης και

Μούτσιος-Ρέντζος (2015) η μερική δομή του ℕ (από οποιονδήποτε Φυσικό Αριθμό n στον επόμενό του, n+1) αρκεί για να περιγράψουμε τη συνολική δομή του, ακριβώς επειδή η μερική δομή επαναλαμβάνεται μέσα στο ℕ εσαεί.

1.6.3 Επιστημολογικά Εμπόδια

Στη βιβλιογραφία, υπάρχει η άποψη ότι το μοντέλο του ντόμινο -και κατ' επέκταση η εικόνα έννοιας που αυτό δημιουργεί- είναι ακατάλληλο για την κατανόηση της Μαθηματικής Επαγωγής. Πιο συγκεκριμένα οι Lowenthal και Eisenberg (1992) θεωρούν ότι από τυπικής μαθηματικής απόψεως η μετάφραση από την εικόνα έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής στον αλγόριθμό της είναι λανθασμένη. Όπου η εικόνα έννοιας είναι αυτή που εικονογραφείται σε πολλά σχολικά βιβλία, όπου άπειρα στρατιωτάκια (ή πλακίδια του ντόμινο) παρατίθενται στη σειρά και οι απαραίτητες προϋποθέσεις για να πέσουν όλα αυτά τα άπειρα στρατιωτάκια είναι: i. να πέσει το πρώτο και ii. Αν πέσει το ν-οστό στρατιωτάκι να πέσει και το ν+1 στρατιωτάκι. Επίσης με τον όρο αλγόριθμο της Μαθηματικής Επαγωγής εννοούν τις δύο υποθέσεις και το συμπέρασμα της Μαθηματικής Επαγωγής. Πιο συγκεκριμένα, οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι οι δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής δεν επαρκούν -από μόνες τους- για τη διεξαγωγή του συμπεράσματος και ότι αυτές αποτελούν ένα μέσον επαλήθευσης της ισχύος της πρότασης P(n) για συγκεκριμένες τιμές του n. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει P(100), θα πρέπει αρχικά να δείξουμε ότι ισχύει P(1) και αν ισχύει για P(1) θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει και για P(2) και αν ισχύει για P(2)… ως το P(100). Κανένα ενδιάμεσο βήμα δεν μπορεί να παραλειφθεί. Επομένως, πώς μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα ότι ισχύει η P(n) για κάθε n Φυσικό Αριθμό αν δεν διατρέξουμε όλους τους Φυσικούς Αριθμούς; Και είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να διατρέξουμε όλους τους Φυσικούς Αριθμούς. Φαίνεται πως αυτό που θέλουν να πουν οι συγγραφείς είναι ότι, εφόσον μέσα στον αλγόριθμο της Μαθηματικής Επαγωγής δεν μπορούμε να εξετάσουμε *όλους* τους Φυσικούς Αριθμούς, η εικόνα όπου όλα τα στρατιωτάκια είναι πεσμένα δεν αντιστοιχεί στον αλγόριθμο της Μαθηματικής Επαγωγής. Επομένως κατά τους Lowenthal και Eisenberg (1992), ο αλγόριθμος της Μαθηματικής Επαγωγής δεν συνάδει με την εικόνα έννοιάς της.

Η θέση του Poincaré είναι ότι:

«[Η μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής] εμπλέκει άπειρα στο πλήθος επιχειρήματα. Ισχυρίζεται ότι, εφόσον μια πρόταση είναι αληθής για n=1, θα είναι αληθής και για n=2. Εφόσον είναι αληθής για n=2, θα είναι αληθής και για n=3 κτλ. για όλους τους Φυσικούς.

Καμία λογική Αρχή δεν δύναται να καλύψει απείρου πλήθους επιχειρήματα και η μέθοδος δεν μπορεί να προκύψει από τέτοιου είδους επιχειρήματα»

(Kline, 1980 στο Lowenthal & Eisenberg, 1992, σελ. 234).

Επομένως, κατά τον Poincaré μια απόδειξη δεν είναι δυνατόν να έχει άπειρα βήματα, πρέπει να είναι πεπερασμένη. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Lowenthal και Eisenberg (1992), η διεξαγωγή του συμπεράσματος P(n) για κάθε $n \in N$, από τις υποθέσεις, αποτελεί ένα επιστημολογικό άλμα και δεν μπορεί να αιτιολογηθεί. Στο ίδιο ύφος οι Lakoff και Nunez (2000) θεωρούν ότι οι υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής δεν επαρκούν για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η P(n) ισχύει για *όλους* τους Φυσικούς. Αντίθετα, θεωρούν ότι αυτό που κάνουν οι υποθέσεις είναι ότι δημιουργούν μια ατελείωτη, απείρως εκτυλισσόμενη σειρά Φυσικών Αριθμών, για τους οποίους ισχύει η πρόταση P(n). Όπως έχουμε προαναφέρει, παρόμοιες ανησυχίες έχουν εκφράσει οι Stewart και Tall (1977) (βλ. και § 1.6.3). Τελικά, οι Lowenthal και Eisenberg (1992) καταλήγουν ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, όπως διατυπώνεται, δεν είναι ένα θεώρημα αλλά ένα μετά-θεώρημα. Δηλαδή, η αλγοριθμική διατύπωσή της είναι ένα πόρισμα που προκύπτει από κάποια ισοδύναμη αρχή του αξιωματικού συστήματος στο οποίο εργαζόμαστε. Οι Lakoff και Nunez (2000) τονίζουν ότι οι υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής σε συνδυασμό με το Αξίωμα της Μαθηματικής Επαγωγής (και εικάζουμε ότι αναφέρονται στο 5^{ο} Αξίωμα Peano) μας δίνουν το συμπέρασμα ότι ισχύει η P(n) για κάθε Φυσικό Αριθμό. Έτσι, η ΜΕ, ως ένα μεταθεώρημα των Μαθηματικών πλέον, που προκύπτει από το 5^{ο} αξίωμα Peano, μέσα στα δύο βήματα των υποθέσεών της, συλλαμβάνει όλους τους Φυσικούς Αριθμούς για τους οποίους η p(n) είναι αληθής. Δηλαδή, η απειρία περατώνεται μέσα σε αυτό το μεταθεώρημα. Παρόμοιες ανησυχίες των Stewart και Tall (1977) αναφέραμε πρωτύτερα, όπου αυτά τα άπειρα βήματα της Μαθηματικής Επαγωγής που εκφράζονται με το 'κτλ.'. Ωστόσο, αυτοί κατάφεραν να υπερβούν αυτό το επιστημολογικό άλμα διατυπώνοντας αντί για την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής την ισοδύναμη αρχή του 5^{ου} αξιώματος του Peano, όπου δεν εμφανίζονται αυτά τα άπειρα βήματα (βλ. και § 6.2). Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την διατύπωση της Μαθηματικής Επαγωγής, δεν εμφανίζονται τα παραπάνω προβλήματα και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο του ντόμινο υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις: οι Καλαβάσης και Μούτσιος-Ρέντζος (2015) προτείνουν τη χρήση του μοντέλου του ντόμινο, με ρητά ειπωμένες τις δεσμεύσεις του μοντέλου (π.χ. ότι όλα

τα πλακίδια έχουν το ίδιο σχήμα, βάρος, πυκνότητα, ότι οι περιβαλλοντικές συνθήκες δεν ασκούν επιρροές στο παιχνίδι κ.ά.), έτσι ώστε τελικά να προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα τουβλάκια του ντόμινο πέφτουν διότι έτσι τα στήσαμε, που σε μαθηματικό επίπεδο, αναλογικά σημαίνει, ότι ο λόγος για τον οποίο ισχύει η Μαθηματική Επαγωγή (ή 'σαρώνεται' το ℕ) είναι επειδή είναι τέτοια η δομή του συνόλου των Φυσικών αριθμών. Με άλλα λόγια η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει ως μία από τις παρατηρούμενες ιδιότητες του ℕ, όπως κατ' αναλογία μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν τα πλακίδια του ντόμινο στηθούν με συγκεκριμένες προϋποθέσεις και αν πέσει το πρώτο και επιπλέον αν πέσει το ν-οστό τουβλάκι ξέρουμε ότι θα πέσει και το ν+1 τουβλάκι, τότε θα πέσουν όλα τα τουβλάκια.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Η εργασία υιοθετεί την άποψη ότι ο μηχανισμός μέσα από το οποίο κατανοείται το αφηρημένο διαμέσου του συγκεκριμένου είναι η εννοιολογική μεταφορά, δηλαδή η χαρτογράφηση μονής κατεύθυνσης από περισσότερο συγκεκριμένες οντότητες ενός εννοιολογικού πεδίου, σε περισσότερο αφηρημένες οντότητες ενός άλλου εννοιολογικού πεδίου. Η πιο συνήθης εννοιολογική μεταφορά που χρησιμοποιείται για την κατανόηση της Μαθηματικής Επαγωγής είναι αυτή του ντόμινο.

Επίσης, θεωρούμε ότι ο γενικός γνωστικός μηχανισμός μέσα από τον οποίο αντιλαμβανόμαστε την έννοια του απείρου είναι η Βασική Μεταφορά του Απείρου. Κατά την Βασική Μεταφορά του απείρου οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται την έννοια του απείρου μέσα από επαναληπτικές -δίχως τέλος- διαδικασίες, οι οποίες μπορούν να τεμαχιστούν σε πεπερασμένα τμήματα, τα οποία επαναλαμβάνονται. Για παράδειγμα, μια αέναη άνοδος σκαλιών είναι μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία, μέσα στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε τις πεπερασμένες υπο-διαδικασίες 'ανάβαση ενός σκαλοπατιού' τη φορά. Στη βιβλιογραφία υπάρχει έκδηλη η άποψη ότι η διεξαγωγή του συμπεράσματος της Μαθηματικής Επαγωγής από τις προϋποθέσεις της αποτελεί ένα επιστημολογικό άλμα, το οποίο, όπως είδαμε, υπερβαίνεται μέσα από την αξιοποίηση του 5^{ου} Αξιώματος Peano.

1.7 Συναφείς θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε και θα αναλύσουμε ορισμένες θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών που θεωρούμε αξιοποιήσιμες στη διδακτική της

Μαθηματικής Επαγωγής, ενώ η σύνδεσή τους με τη Μαθηματική Επαγωγή θα αναλυθεί σε μεταγενέστερο κεφάλαιο (βλ.§ 3.1).

1.7.1 Ρεαλιστικά Μαθηματικά (Freudenthal) και 'μαθαίνω κάνοντας' (Dewey)

Ρεαλιστικά Μαθηματικά

Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education) είναι μια θεωρία διδακτικής και μάθησης στη Διδακτική των Μαθηματικών η οποία αρχικά εισήχθη και αναπτύχθηκε από το Ινστιτούτο Freudenthal της Ολλανδίας (Zulkardi, 2010). Ο Γερμανο-Ολλανδός καθηγητής Hans Freudenthal (1905-1990) θεωρείται πνευματικός πατέρας των Ρεαλιστικών Μαθηματικών στην Εκπαίδευση.

Η σημερινή μορφή των Ρεαλιστικών Μαθηματικών στην Εκπαίδευση προσδιορίζεται κυρίως από την οπτική του Freudenthal στα Μαθηματικά και χαρακτηρίζεται από τα εξής δύο σημεία:

- Τα Μαθηματικά πρέπει να προκύπτουν ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα και να συνδέονται με την πραγματικότητα, να είναι κοντά στα παιδιά και σχετικά με καταστάσεις της καθημερινότητας. Ωστόσο, πρέπει να λεχθεί ότι η λέξη 'ρεαλιστικά' δεν σημαίνει μόνο τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο αλλά αναφέρεται σε προβληματικές καταστάσεις που να είναι αληθινές στο μυαλό των μαθητών, δηλαδή να έχουν νόημα για τα παιδιά.
- Η διδασκαλία πρέπει να οργανωθεί ως μια διαδικασία καθοδηγούμενης επαναεπινόησης, στην οποία οι μαθητές μπορούν να εμπειριστούν μια διαδικασία όμοια με αυτήν κατά την οποία εφευρέθηκαν τα Μαθηματικά. Όπου ο όρος 'εφεύρεση' αναφέρεται στα βήματα των διαδικασιών της μάθησης και ο όρος 'καθοδηγούμενη' αναφέρεται στο διδακτικό περιβάλλον της μαθησιακής διαδικασίας (Freudenthal, 1991).

Αξίζει να αναφέρουμε και τρεις κεντρικές έννοιες των Ρεαλιστικών Μαθηματικών: Οριζόντια Μαθηματικοποίηση, Κάθετη Μαθηματικοποίηση και Εννοιολογική Μαθηματικοποίηση. Κατά τον Zulkardi (2010) δίνουμε τις παρακάτω περιγραφές:

Οριζόντια Μαθηματικοποίηση

Κατά τη διάρκεια της Οριζόντιας Μαθηματικοποίησης οι μαθητές εφευρίσκουν μαθηματικά εργαλεία που βοηθούν στην οργάνωση και επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος (real life situation). Παραδείγματα διαδικασιών που αφορούν στην

Οριζόντια Μαθηματικοποίηση είναι: η αναγνώριση ή περιγραφή συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών-αντικειμένων ενός γενικού πλαισίου, η κατασκευή σχήματος, η τυποποίηση και απεικόνιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους, η ανακάλυψη σχέσεων, κανονικοτήτων, η αναγνώριση ισομορφικών χαρακτηριστικών σε διαφορετικά προβλήματα, η μετατροπή ενός πραγματικού-ρεαλιστικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα και η μετατροπή ενός πραγματικού-ρεαλιστικού προβλήματος σε ένα γνωστό μαθηματικό πρόβλημα.

Κάθετη Μαθηματικοποίηση

Πρόκειται για τη *διαδικασία* επαναδιοργάνωσης μέσα στο ίδιο το μαθηματικό σύστημα. Παραδείγματα τέτοιων διαδικασιών είναι η τυποποιημένη αναπαράσταση μιας σχέσης, η απόδειξη κανονικοτήτων, η βελτίωση και προσαρμογή μοντέλων, η χρήση διαφορετικών μοντέλων, ο συνδυασμός και η ενσωμάτωση μοντέλων, η τυποποίηση ενός μαθηματικού μοντέλου, η γενίκευση.

«Η οριζόντια μαθηματικοποίηση σχετίζεται με την μεταφορά από τον πραγματικού κόσμο στον κόσμο των συμβόλων […] στην άλλη [κάθετη μαθηματικοποίηση] διαμορφώνουμε, επαναδιαμορφώνουμε και χειριζόμαστε σύμβολα μηχανικά, με κατανόηση, με αναστοχασμό.»

(Freudenthal,1991, σελ. 41-42).

Εννοιολογική μαθηματικοποίηση (conceptual mathematization)

Πρόκειται για τη διαδικασία μέσα από την οποία εκμαιεύεται η κατάλληλη έννοια διαμέσου μιας πραγματικής κατάστασης.

«Η διαδικασία αυτή θα αναγκάσει τους μαθητές να διερευνήσουν την κατάσταση, να αναγνωρίσουν τα σχετικά με αυτήν Μαθηματικά, να κατασκευάσουν σχήματα, να ανακαλύψουν κανονικότητες, και να αναπτύξουν ένα μοντέλο που θα οδηγήσει σε μια μαθηματική έννοια. Τότε οι μαθητές μπορούν και πρόκειται να εφαρμόσουν μαθηματικές έννοιες σε νέα πεδία του πραγματικού κόσμου και έτσι θα ενισχύσουν και θα ισχυροποιήσουν την έννοια. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εφαρμοσμένη μαθηματικοποίηση.»

(Zulkardi, 2010, σελ. 7).

'Μαθαίνω κάνοντας' (learning by doing) – Dewey

Ο Dewey θεωρεί ότι η εμπειρία είναι ο στόχος της εκπαίδευσης αλλά και το μέσον προς αυτήν. Πιστεύει ότι η μάθηση συμβαίνει μέσα από την εμπειρία μας στον κόσμο και μέσα από τον αναστοχασμό μας πάνω σε αυτήν. Ωστόσο υποστηρίζει ότι δεν είναι όλες οι εμπειρίες εκπαιδευτικές. Αντιθέτως πολλές είναι τέτοιες που να εμποδίζουν ή να διαστρεβλώνουν τη δυνατότητα για περεταίρω εμπειρίες ή να είναι

τόσο ασύνδετες μεταξύ τους που να μην προκύπτει από αυτές μάθηση. Ο Dewey, θεωρεί ότι η παραδοσιακή διδασκαλία προσφέρει πληθώρα τέτοιων εμπειριών καθώς επίσης τονίζει ότι το κατά πόσο εκπαιδευτική θα είναι μια εμπειρία δεν εξαρτάται μόνο από τη δράση μέσα σε αυτήν αλλά και από την ποιότητά της (Dewey, 1938).

1.7.2 Μάθηση που βασίζεται στη Διερεύνηση (Inquiry Based Learning)

Στη Διδακτική των Μαθηματικών υπάρχουν δύο βασικές αντιδιαμετρικές προσεγγίσεις: η δασκαλοκεντρική και η μαθητοκεντρική. Στην πρώτη, η νέα γνώση 'αποκτάται' μέσα από την έκθεση των μαθητών σε μαθηματικούς ορισμούς, κανόνες και μεθόδους που παρέχει ο δάσκαλος στο μαθητή. Στην μαθητοκεντρική προσέγγιση όμως, η νέα γνώση 'ανακαλύπτεται' από τον μαθητή με περισσότερη ή λιγότερη βοήθεια από τον δάσκαλο (Bruder & Prescott, 2013).

«Η διερεύνηση είναι μια πολύπλευρη διαδικασία, η οποία εμπλέκει το να κάνουν οι μαθητές παρατηρήσεις, το να θέτουν ερωτήσεις, το να ανατρέξουν σε βιβλία και πηγές προκειμένου να θυμηθούν αυτά που θεωρούνται ήδη γνωστά, τον σχεδιασμό της έρευνας, την επισκόπηση σε αυτά που είναι ήδη γνωστά υπό το φως των εμπειρικών ενδείξεων, τη χρήση εργαλείων με στόχο τη συλλογή, την ανάλυση και την ερμηνεία δεδομένων, το να προτείνουν απαντήσεις, εξηγήσεις και προβλέψεις και την επικοινωνία των αποτελεσμάτων. Η διερεύνηση προϋποθέτει την αναγνώριση των υποθέσεων, τη χρήση κριτικής και λογικής σκέψης, τη θεώρηση εναλλακτικών εξηγήσεων και η επιστημονική διερεύνηση αναφέρεται στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι επιστήμονες μελετούν τον φυσικό κόσμο και προτείνουν εξηγήσεις βασισμένες σε ενδείξεις που προκύπτουν από την εργασία τους».

(Maaß & Artigue 2013, σελ. 781)

Οι Artigue και Blomhøj (2013) θεωρούν ότι η Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση στοχεύει στο να αναπτύξουν οι μαθητές προσωπικούς τρόπους λύσης προβλημάτων καθώς αυτοί εκτίθενται στον τρόπο με τον οποίο εργάζονται οι επιστήμονες. Οι ίδιοι ερευνητές θεωρούν ότι η Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση συνάδει τόσο με τις αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών όσο και με αυτές του Dewey, υπό την έννοια ότι αυτές οι αρχές μπορούν να ειδωθούν από τη σκοπιά της διερεύνησης. Η συσχέτιση των Ρεαλιστικών Μαθηματικών με τη Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση έγκειται στην αρχή των Ρεαλιστικών Μαθηματικών που αφορά την επαναεπινόηση της γνώσης η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της διερεύνησης. Η συσχέτιση της αρχής 'μαθαίνω κάνοντας' με τη διερεύνηση βρίσκεται στη φιλοσοφία του Dewey κατά την οποία η μάθηση προκύπτει από μια

δράση η οποία είναι ενσωματωμένη σε μια διαδικασία αναστοχαστικής διερεύνησης (Artigue & Blomhøj, 2013).

1.7.3 Οι δραστηριότητες στη Διδακτική των Μαθηματικών

Κατά τον Doyle (1988), η χρήση των δραστηριοτήτων στην τάξη αποτελούν τη βάση για τη μάθηση. Οι Stein και Smith (1998) ισχυρίζονται ότι υπάρχουν δραστηριότητες δύο ειδών: χαμηλότερου-επιπέδου και υψηλότερου-επιπέδου. Οι δραστηριότητες χαμηλότερου-επιπέδου ζητούν από τους μαθητές να εκτελέσουν απομνημονευμένες διαδικασίες με μηχανικό τρόπο, ενώ οι δραστηριότητες υψηλότερου-επιπέδου απαιτούν από τους μαθητές να σκέφτονται εννοιολογικά και τους παρακινούν να κάνουν συνδέσεις. Οι έρευνες προτείνουν ως βέλτιστο κοινωνικό πλαίσιο για τέτοιου είδους εγχειρήματα αυτό της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας (βλ. Ματσαγγούρας, 2002). Κατά τη διάρκεια της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, οι μαθητές συζητούν, αναλύουν, συνθέτουν, διερωτώνται, και επιλύουν προβλήματα. Η βάση για γνωστική ανάπτυξη βρίσκεται στο πώς οι μαθητές αλληλεπιδρούν με την υπόλοιπη κοινωνία της τάξης, στη Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης και συνεπώς προκύπτει μέσα από περιβάλλοντα κοινωνικά οργανωμένα ώστε να προάγεται η διαπροσωπική ομαδική δράση (Hausfather, 1996). Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα περιβάλλοντα είναι ιδιαιτέρως απαιτητικά στη διαχείριση. Οι Stein και Smith (1998) αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι η ύπαρξη μιας καλής δραστηριότητας και η καλή γνώση επί της έννοιας ‘δραστηριότητα’ πιθανόν να μην επαρκούν, διότι η διδασκαλία της δραστηριότητας απαιτεί από τον διδάσκοντα δεξιότητες στην ενορχήστρωση της δυναμικής της τάξης. Σε αυτή την εργασία, παρακάτω, θα αξιοποιήσουμε αυτό το θεωρητικό κομμάτι, για να προτείνουμε ορισμένες δραστηριότητες για εφαρμογή μέσα στην ελληνική σχολική τάξη.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση είναι μια θεωρία διδακτικής κατά την οποία τα Μαθηματικά πρέπει να προκύπτουν ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα και να συνδέονται με την πραγματικότητα, να είναι κοντά στα παιδιά και σχετικά με καταστάσεις της καθημερινότητας. Η αρχή ‘μαθαίνω κάνοντας’ του Dewey θεωρεί ότι η μάθηση συμβαίνει μέσα από την εμπειρία μας στον κόσμο και μέσα από τον αναστοχασμό μας πάνω σε αυτήν. Κατά τη θεωρία της Μάθησης που Βασίζεται στη Διερεύνηση, η διερεύνηση είναι

μια πολύπλευρη διαδικασία που οδηγεί στην ανακάλυψη της γνώσης και σχετίζεται με τις εξής διαδικασίες: οι μαθητές μεταμορφώνονται σε μικρούς επιστήμονες, παρατηρούν, διατυπώνουν εικασίες, ελέγχουν την ισχύ τους, επαληθεύουν, συλλέγουν και αναλύουν δεδομένα.

Η χρήση των δραστηριοτήτων αποτελεί τη βάση για τη μάθηση, ειδικά όταν πρόκειται για 'υψηλότερου επιπέδου' δραστηριότητες οι οποίες παρακινούν τους μαθητές να σκέφτονται εννοιολογικά και τους παρακινούν να κάνουν συνδέσεις. Το πλαίσιο που προτείνουμε ως βέλτιστο, για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων, είναι αυτό της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας στο οποίο η γνωστική ανάπτυξη επιτυγχάνεται καθώς οι μαθητές αλληλεπιδρούν με την υπόλοιπη κοινωνία της τάξης.

1.8 Η ανάγκη για απόδειξη

Ο Balacheff (1991, στο Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, Winicki-Lanman, 2012, σελ. 219) ισχυρίζεται ότι ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές δεν εμπλέκονται στη διαδικασία της απόδειξης είναι όχι γιατί δεν μπορούν να αποδείξουν αλλά διότι δεν βλέπουν καμία ανάγκη για να το κάνουν. Στη βιβλιογραφία, ο όρος 'ανάγκη' συναντάται με πολλές έννοιες. Ο Harel (2013) διακρίνει δύο ευρείες κατηγορίες αναγκών, τη συναισθηματική (affective) και τη νοητική (intellectual) -που αναλύεται παρακάτω-. Ο Reid (1999) επιλέγει να περιγράψει τον όρο 'ανάγκη' αποσυνθέτοντάς τον σε επιμέρους ανάγκες, όπως είναι η ανάγκη για εξήγηση, για διερεύνηση και επαλήθευση. Οι Zaslavsky κ.ά. (2012) κάνουν λόγο για νοητικές ανάγκες που οδηγούν στην απόδειξη, τις οποίες μάλιστα συνδέουν με λειτουργίες της απόδειξης. Επιπρόσθετα, οι Rav (1999), Dawson (2006), Pelc (2009) προβαίνουν σε φιλοσοφικές θεωρήσεις όσον αφορά την ανάγκη για απόδειξη μέσα στην επιστήμη των Μαθηματικών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι η φράση 'ανάγκη για απόδειξη' δεν προσεγγίζεται στην εργασία αυτή ως κάποια έμφυτη, πανανθρώπινη, διαχρονική και διαπολιτισμική ανάγκη, η οποία κινητοποιεί άπαντες τους ανθρώπους για απόδειξη. Η ανάγκη έχει την έννοια ενός τρόπου πρόκλησης του ενδιαφέροντος των μαθητών μας γύρω από το θέμα της απόδειξης.

Επηρεασμένος από την θεωρία περί 'εξισορρόπησης' του Piaget, ο Harel (2013) θεωρεί ότι, όταν ένας άνθρωπος αντιμετωπίζει μια προβληματική κατάσταση Κ, του δημιουργείται μια ανάγκη για 'εξισορρόπηση', η οποία επιτυγχάνεται μαθαίνοντας μια νέα γνώση Γ, που του επιτρέπει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα. Αυτή την ανάγκη την ονομάζει νοητική ανάγκη του ατόμου. Έτσι είναι εμφανές ότι θεωρεί πως η

νοητική ανάγκη είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη Λύση Προβλήματος. Διαχωρίζει πέντε κατηγορίες νοητικής ανάγκης: βεβαιότητα (certainty), αιτιότητα (causality), υπολογισμό (computation), επικοινωνία (communication) και δομή (structure), ορισμένες από τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω.

Οι Zaslavsky κ.ά. (2012) συνδέουν δύο από τις παραπάνω νοητικές ανάγκες με λειτουργίες της απόδειξης: η ανάγκη για βεβαιότητα αντιστοιχεί στην λειτουργία της απόδειξης ως επαλήθευσης και η *ανάγκη για αιτιότητα αντιστοιχεί στην λειτουργία της απόδειξης ως εξήγησης*.

1.8.1 Η ανάγκη για βεβαιότητα

Η ανάγκη για βεβαιότητα αναφέρεται στην ανάγκη του να γνωρίζει κανείς αν μια εικασία είναι αληθής –αν είναι γεγονός. Αυτή η επιθυμία για αναζήτηση βεβαιότητας στα Μαθηματικά εκπληρώνεται μέσα από παραγωγικά αποδεικτικά σχήματα (deductive proof schemes) (Harel, 2013). Η προφανής άποψη ότι η επιβεβαίωση φαίνεται να είναι η πιο λογική ανάγκη που οδηγεί στην απόδειξη, διαψεύδεται από τα πειραματικά αποτελέσματα του Reid (1995). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, παρόλο που η επαλήθευση είναι μια από τις πιο σημαντικές λειτουργίες της απόδειξης, οι μαθητές δεν αισθάνονται καμία ανάγκη για απόδειξη, λόγω της υποκειμενικής υπόστασης της έννοιας 'απόδειξη' (Zaslavsky κ.ά., 2012). Π.χ. πολλοί μαθητές πείθονται από εμπειρικά δεδομένα. Επίσης συμβαίνει και το αντίστροφο, δηλαδή οι μαθητές να μην πείθονται από την απόδειξη ενός θεωρήματος και να αναζητούν επιπρόσθετα εμπειρικά δεδομένα για να επαληθεύσουν την εικασία (Zaslavsky κ.ά., 2012). Υπάρχουν ευρήματα που αποδεικνύουν ότι οι μαθητές βεβαιώνονται για την ισχύ μιας εικασίας τους μέσα από ανεπιθύμητα Αποδεικτικά Σχήματα (Proof Schemes), όπως είναι το 'τι φαίνεται' στο σχήμα που αντιστοιχεί στο Perceptual Proof Scheme (Harel & Sowder, 1998).

Οι Zaslavsky κ.ά. (2012) ισχυρίζονται ότι είναι δυνατόν να πυροδοτηθεί η ανάγκη για βεβαιότητα στους μαθητές μέσα από καταστάσεις 'αβεβαιότητας'. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι μέσα από 'ανταγωνιστικούς ισχυρισμούς' (competing claims) (Zaslavsky, 2005). Για παράδειγμα κατά την επίλυση ενός προβλήματος στην τάξη, ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι ισχύει το Α και ένας άλλος ισχυρίζεται ότι ισχύει το Β (όπου το Α δεν συνεπάγεται το Β και αντίστροφα). Η κατάσταση αυτή δημιουργεί αβεβαιότητα στους μαθητές και μέσα από κατάλληλο διδακτικό χειρισμό, οδηγούνται οι μαθητές στη λύση του προβλήματος (Zaslavsky, 2005). Στην παρούσα

εργασία, θεωρούμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε καταστάσεις αβεβαιότητας και μέσα από δραστηριότητες αναστοχασμού (Reflective tasks), κατά τις οποίες δύο υποτιθέμενοι μαθητές ισχυρίζονται αντίθετες απόψεις, πάνω στο θέμα του μαθήματος, βασισμένοι ο καθένας πάνω στα δικά του επιχειρήματα.

Όσον αφορά τη Μαθηματική Επαγωγή ορισμένοι τρόποι δημιουργίας αβεβαιότητας που αναφέρονται στη βιβλιογραφία είναι:

- Η παρουσίαση μιας (λανθασμένης) απόδειξης με Μαθηματική Επαγωγή, η οποία καταλήγει σε έναν ισχυρισμό που είναι προφανώς ψευδής. Π.χ. Ο Polyà (1954), 'απέδειξε' με Μαθηματική Επαγωγή ότι όλες οι γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα μάτια. Κατά αντιστοιχία, η Jetter (2012) σε ένα διδακτικό πείραμα εξέθεσε τους μαθητές στην 'απόδειξη' με Μαθηματική Επαγωγή ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν το ίδιο ύψος και τους ζητούσε να βρουν πού βρίσκεται το λάθος.
- Παρουσίαση εικασιών που βάσει συγκεκριμένων περιπτώσεων φαίνεται ότι ισχύουν αλλά στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει, όπως η εικασία του Fermat που είδαμε στην § 1.3. Τέτοιες ασκήσεις συμπεριλαμβάνονται και στον Lambrou (2005).

Ωστόσο, αν ένας εκπαιδευτικός δεν λάβει υπόψη του την υποκειμενική υπόσταση της έννοιας απόδειξη, δηλαδή το 'μέσα από ποια μέσα βεβαιώνεται κανείς για την ισχύ μιας εικασίας', καμία από τις παραπάνω τεχνικές δεν θα λειτουργήσει.

1.8.2 Ανάγκη για αιτιότητα

Η ανάγκη για αιτιότητα είναι η ανθρώπινη ανάγκη για εξήγηση, για προσδιορισμό της αιτίας ενός φαινομένου (Harel, 2013). Συνεπώς είναι εμφανής η σύνδεση της ανάγκης για αιτιότητα με τη λειτουργία της απόδειξης ως επεξήγησης (Zaslavsky κ.ά., 2012). Όσον αφορά την ανάγκη για εξήγηση ο Reid (1999) διακρίνει τα εξής είδη εξήγησης: Εξήγηση για το 'πώς', εξήγηση για το 'γιατί', εξήγηση σε κάποιον άλλο, εξήγηση ως μέσον για να αντιληφθώ εγώ ο ίδιος, εξήγηση ως κοινωνική δραστηριότητα μιας κοινότητας, μη εξήγηση. Η πτυχή της ανάγκης για εξήγηση που αναφέρεται στο 'γιατί' φαίνεται να ταυτίζεται με την κατά Harel ανάγκη για αιτιότητα. Η διάκριση ανάμεσα στην ανάγκη για βεβαιότητα (που συνδέεται με την λειτουργία της απόδειξης ως επαλήθευσης) και την ανάγκη για αιτιότητα, (που συνδέεται με τη λειτουργία της απόδειξης ως επεξήγησης) έχει την εξής παιδαγωγική συνέπεια: οι αποδείξεις που εξηγούν το γιατί, σε σχέση με τις αποδείξεις που απλά επαληθεύουν, υπερτερούν στα μάτια των μαθητών, διότι διαφωτίζουν τον λόγο για

τον οποίο ισχύει μια εικασία (Harel, 2013). Επομένως είναι σημαντικό να στρέψουμε την προσοχή των μαθητών από τη βεβαιότητα στην αιτιότητα ως ανάγκης για απόδειξη. Ωστόσο, η απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή είναι μία καθαρά φορμαλιστική απόδειξη που από τη φύση της δεν παρέχει εξηγήσεις για το πώς προκύπτει ο ισχυρισμός (Hannah, 1989). Επομένως κατά την διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής θα πρέπει να δίνεται βάρος στον λόγο για τον οποίο η Μαθηματική Επαγωγή μας δίνει μαθηματική βεβαιότητα για την ισχύ μιας πρότασης. Με άλλα λόγια θα πρέπει πρώτα να εξηγούνται ξεκάθαρα οι λόγοι για τους οποίους οι υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής οδηγούν στο συμπέρασμά της ως απόδειξης αυτής καθεαυτής και έπειτα να εφαρμόζεται ο έλεγχος της ισχύος των υποθέσεων για οποιαδήποτε πρόταση P(n).

1.8.3 Ανάγκη για υπολογισμό

Ο Harel (2013) αναφερόμενος στην ανάγκη για υπολογισμό υπαινίσσεται την ανθρώπινη ανάγκη για ποσοτικοποίηση ή για τον προσδιορισμό ενός αγνώστου αντικειμένου ή για την κατασκευή ενός αντικειμένου (π.χ. ένας αριθμός, γεωμετρικό σχήμα, πίνακας). Η διαδικασία του υπολογισμού μέσω της συμβολικής άλγεβρας, τον 19^{ο} αι. μ.Χ., έφερε ως αποτέλεσμα μια στροφή στη Γεωμετρία: η εστίαση δεν είναι πια στα χωρικά χαρακτηριστικά των σχημάτων αλλά στη δομή τους και την αλγεβρική τους αναπαράσταση (Zaslavsky κ.ά., 2012). Αυτή η χρήση της άλγεβρας εξυψώνει τα Μαθηματικά.

Δυστυχώς στην σημερινή παιδεία η άλγεβρα χρησιμοποιείται με τρόπο τέτοιο που να μειώνει τα Μαθηματικά. Τα μαθηματικά στο σχολείο είναι βαθιά εμποτισμένα με αριθμητικούς υπολογισμούς και με συμβολικούς αλγεβρικούς χειρισμούς, πράγμα που δημιουργεί ένα χάσμα ανάμεσα στην υποδηλούμενη εικόνα έννοιας των μαθητών και τον φορμαλισμό που απαιτεί μια τυπική απόδειξη (Pinto-Fusaro & Tall, 1999). Ως γνωστόν το πλεονέκτημα της άλγεβρας είναι και το μειονέκτημά της: μπορεί κανείς να κάνει πολύ γρήγορα υπολογισμούς ασύνδετα με το αναφορικό τους νόημα. Ο Harel (2013) παρατηρεί ότι στην παιδεία η ανάγκη για υπολογισμό, που έχει την πιο έντονη παρουσία σε σχέση με τις υπόλοιπες ανάγκες, αξιοποιείται με λανθασμένο τρόπο: «[Οι μαθητές] μαθαίνουν να μετασχηματίζουν μία μορφή έκφρασης σε μία άλλη, χωρίς να αντιλαμβάνονται τον μαθηματικό στόχο που αυτό εξυπηρετεί αλλά ούτε και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια μορφή πλεονεκτεί μιας άλλης» (Harel, 2013, σελ. 133).

Είναι λοιπόν απαραίτητη μια στροφή στην παιδεία που να περιλαμβάνει την άλγεβρα ως εργαλείο που εξυπηρετεί την ανάγκη για υπολογισμό συνδέοντάς την ταυτόχρονα με τα αντικείμενα τα οποία περιγράφει.

Όσον αφορά τη μαθηματική επαγωγή, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ανάγκη για υπολογισμό προκειμένου να παρακινήσουμε τους μαθητές να κάνουν εικασίες για το ένα μέλος της πρότασης P(n): π.χ. 1+2+3+…+ν=; Στις περιπτώσεις όπου πρέπει να δειχθεί μια ισότητα με Μαθηματική Επαγωγή και δεν δίνεται το δεύτερο μέλος της, εκμεταλλευόμενοι την ανάγκη για υπολογισμό μπορούμε, εφοδιάζοντας τους μαθητές και με άλλα εργαλεία (βλ. και ότι αφορά τη 2η δραστηριότητα στην § 3.2), να τους οδηγήσουμε πρώτα να μαντέψουν το δεύτερο μέλος της ισότητας και έπειτα να αποδείξουν την ισχύ της. Επιπρόσθετα, προκειμένου να επιτευχθεί η σύνδεση της άλγεβρας με το αναφορικό αντικείμενο το οποίο περιγράφει, θα ήταν καλό η παραπάνω άσκηση να δοθεί μέσα σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, όπως αυτό που προτείνουμε στην 1η δραστηριότητα της § 3.2.

1.8.4 Ανάγκη για δομή

Πρόκειται για την ανάγκη ενός ανθρώπου για λογική αναδιοργάνωση των γνώσεών του εντός μιας δομής (Harel, 2013). Οι Moutsios-Rentzos και Spyrou (2013) παραθέτουν ότι οι μαθητές δεν έχουν καμιά εσωτερική ανάγκη για να παραγάγουν μια απόδειξη η οποία προκύπτει από αρχές που ήδη δέχονται ως αληθείς (π.χ. τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας).

Η νέα γνώση δεν ενσωματώνεται πάντα στην παλιά με ιεραρχικό τρόπο (Βοσνιάδου, 2001· Harel, 2013). Ένας άνθρωπος ενσωματώνει τη νέα γνώση σε μια υπάρχουσα δομή την οποία αναδιοργανώνει όταν και αν αντιληφθεί ότι υπάρχει κάποια ανάγκη για να το κάνει αυτό (Harel, 2013). Η *Θεωρία Πλαισίου* της Γνωστικής Ψυχολογίας υποστηρίζει ότι κατά την έκθεση ενός ανθρώπου σε νέα γνώση, όταν αυτή έρχεται σε σύγκρουση με την παλιά, απαιτείται σοβαρή προσπάθεια αναδιοργάνωσης της παλιάς γνώσης ώστε η νέα γνώση να μπορέσει να ενταχθεί μέσα στο νέο πλαίσιο. Αν η αναδιοργάνωση γίνει με λανθασμένο τρόπο, τότε το υποκείμενο έχει ένα μοντέλο γνώσης που λέγεται συνθετικό μοντέλο (Synthetic model) (Βοσνιάδου, 2001).

Η παιδαγωγική συνέπεια των παραπάνω είναι ότι *η γνωστική σύγκρουση συσχετίζεται με την ανάγκη για δομή*. Πάνω σε αυτό το θέμα οι Zaslavsky κ.ά. (2012) υποστηρίζουν ότι η ανάγκη για δομή μπορεί να προκληθεί μέσα από γνωστική

σύγκρουση ή/και μέσα από καταστάσεις αβεβαιότητας, συνδέοντας έτσι την ανάγκη για βεβαιότητα με την ανάγκη για δομή.

Η ανάγκη για δομή είναι πιο απαιτητική σε σχέση με άλλες ανάγκες, ειδικά αν άλλες ανάγκες έχουν εκπληρωθεί: π.χ. οι μαθητές είναι διστακτικοί στο να αποδείξουν κάτι που αντιλαμβάνονται ως προφανές (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013). Για παράδειγμα οι αποδείξεις στην Ευκλείδεια Γεωμετρία πολύ συχνά αφορούν προφανείς ισχυρισμούς (Harel, 2013). Για την παιδαγωγική προσέγγιση των παραπάνω οι Moutsios-Rentzos και Spyrou (2013) προτείνουν να δημιουργηθεί ένας παιδαγωγικός σχεδιασμός μέσα στον οποίο η 'φυσική στάση' των παιδιών (π.χ. η επιφύλαξη να αποδείξουν το προφανές) να ανασταλεί, ώστε να είναι εφικτή η δυνατότητα επανενεργοποίησης των προθέσεων που οδηγούν στη γεωμετρική απόδειξη:

«Υποστηρίζουμε ότι αναγνωρίζοντας ότι οι γεωμετρικές ιδέες είναι συνακόλουθα των a priori εννοιών […] οι μαθητές θα είναι σε θέση να κάνουν το επόμενο βήμα: να αμφισβητήσουν αυτές τις έννοιες, για να επιτρέψουν στο μυαλό τους να επιλέξει ένα εναλλακτικό a priori πλαίσιο, εντός του οποίου μπορεί να δράσει η λογική. Αναγνωρίζοντας ότι το a priori πλαίσιο μπορεί να δικαιολογήσει εσωτερικά τις μεταγνωστικές διεργασίες μιας ανάλυσης του 'τι θα γινόταν αν …'. Έτσι, η ανάγκη για την απόδειξη προέρχεται από την μεταγνωστική ικανότητα του εντοπισμού και της αμφισβήτησης των καθιζημάτων μέσα στον γλωσσικό χώρο του γεωμετρικού αντικειμένου»

(Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013, σελ. 334).

Αυτή η προσέγγιση της γνώσης μπορεί να λύσει και το πρόβλημα που προκύπτει από το γεγονός ότι η αιτιότητα μιας απόδειξης μπορεί να είναι εγκλωβισμένη μέσα στο αναπαραστασιακό της σύστημα. Μέσα από την προσέγγιση 'going back to things themselves' (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013), οι μαθητές μπορούν να αμφισβητήσουν το πλαίσιο-αναπαράσταση μέσα στο οποίο παρουσιάζεται ένα Μαθηματικό επιχείρημα.

Συνεπώς, η ανάγκη για δομή μπορεί να προκύψει είτε με γνωστική σύγκρουση είτε μέσα από μια μεταγνωστική ικανότητα αναγνώρισης των θεμελιακών στοιχείων που δημιουργούν μια μαθηματική θεωρία (π.χ. τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποτελούν το θεμελιακό της στοιχείο).

Ένα παράδειγμα της βιβλιογραφίας το οποίο αξιοποιεί την αρχή του 'τι θα γινόταν αν' επί της Μαθηματικής Επαγωγής βρίσκουμε στην Πάλλα (2006) και στους Palla, Potari και Spyrou (2012), όπου στο τεστ που έδωσαν στους μαθητές θέτουν το

ερώτημα αν ‘μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής για την απόδειξη της πρότασης: για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, $2^x>x$’. Αυτή η ερώτηση έχει ως στόχο να παρακινήσει τους μαθητές να σκεφτούν αν παίζει ρόλο το σύνολο στο οποίο αποδεικνύουμε μια πρόταση με Μαθηματική Επαγωγή και ποια είναι η ειδοποιός διαφορά του $\mathbb{N}$ από το $\mathbb{R}$. Έτσι, με κατάλληλο διδακτικό χειρισμό, μπορούν να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι αυτό που έχει σημασία στην Μαθηματική Επαγωγή είναι η δομή του συνόλου των Φυσικών Αριθμών.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγει κανείς στο ότι οι προαναφερθείσες νοητικές ανάγκες μπορούν να πυροδοτηθούν με κατάλληλες διδακτικές προσεγγίσεις, ώστε αυτές να αποτελέσουν την εσωτερική ώθηση που θα οδηγήσει τους μαθητές στο ‘αποδεικνύειν’. Βέβαια, η πυροδότηση της ανάγκης για απόδειξη στους μαθητές δεν συνεπάγεται ότι η απόδειξη που θα παραγάγουν θα είναι αποδεκτή από τον καθηγητή ή/και από την Μαθηματική Κοινότητα.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Σε αυτή την παράγραφο είδαμε ότι ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές δεν εμπλέκονται στη διαδικασία της απόδειξης είναι όχι γιατί δεν μπορούν να αποδείξουν αλλά διότι δεν βλέπουν καμία ανάγκη για να το κάνουν. Στη βιβλιογραφία συναντάμε δύο είδη ανάγκης: τη συναισθηματική και τη νοητική. Εμείς, ασχοληθήκαμε με τη δεύτερη. Διακρίναμε πολλά είδη νοητικών αναγκών, ωστόσο θεωρήσαμε σκόπιμο να αναλύσουμε ορισμένα εξ’ αυτών: βεβαιότητα, αιτιότητα, υπολογισμός, δομή. Επίσης ορίσαμε αυτές τις ανάγκες και είδαμε τρόπους που αναφέρονται στη βιβλιογραφία για την πυροδότηση αυτών των αναγκών μέσα στη σχολική τάξη. Για παράδειγμα η ανάγκη για αιτιότητα ορίζεται ως η ανάγκη για εξήγηση ή για προσδιορισμό της αιτίας ενός φαινομένου και πυροδοτείται στρέφοντας τους μαθητές από το ‘πώς’ στο ‘γιατί’.

1.9 Ανακεφαλαίωση

Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι η Μαθηματική Επαγωγή είναι ένα Αξίωμα των Μαθηματικών που ονοματοδοτήθηκε προκειμένου να διαχωριστεί από την ατελή επαγωγή των Φυσικών Επιστημών. Παρόλο που σχετίζεται με παραγωγικό και όχι επαγωγικό συλλογισμό, το παράδοξο του ονόματός της ίσως να οφείλεται στη διαδικασία αυτής καθεαυτής της λογικής που ακολουθεί, κατ’ αναλογία με την επαγωγή των Φυσικών Επιστημών.

Από μαθηματικής απόψεως η Μαθηματική Επαγωγή είναι ισοδύναμη με το 5^{ο} αξίωμα Peano και με την Αρχή του Ελαχίστου. Η διδασκαλία της μέσω της συνολοθεωρητικής μορφής του αξιώματος φαίνεται πως έχει παιδαγωγικά προτερήματα.

Η Επιστημολογία, ως κλάδος της Φιλοσοφίας που μελετά τη φύση και την προέλευση της γνώσης θέτει ερωτήματα όπως: 'τι είναι γνώση;', 'πώς ξέρουμε ότι γνωρίζουμε;' κτλ. Σε αυτά τα ερωτήματα σχετικά με τη Μαθηματική Επαγωγή συμφωνήσαμε ότι θα λέμε ότι κάποιος έχει γνώση επί της Μαθηματικής Επαγωγής όταν έχει αληθείς πεποιθήσεις επί αυτής που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, χωρίς να προέρχονται από τύχη. Αυτές οι αληθείς πεποιθήσεις είναι όσα αναφέρονται στις § 1.3, 1.4.

Επιστημολογικά, προκύπτουν ορισμένα ζητήματα διότι η διεξαγωγή του συμπεράσματος από τις υποθέσεις της αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως επιστημολογικό άλμα. Η κατανόησή της ως αφηρημένης έννοιας προϋποθέτει ένα μοντέλο εννοιολογικής μεταφοράς. Η καταλληλότητα αυτού του μοντέλου κρίνεται όχι τόσο ως προς την αναπαράσταση που χρησιμοποιείται όσο από το πώς χρησιμοποιείται (δηλαδή όσο από το ποιες πλευρές αυτής της αναπαράστασης αναδεικνύονται μέσα από τον τρόπο παρουσίασής της). Για παράδειγμα, κατά τη χρήση του μοντέλου εννοιολογικής μεταφοράς του ντόμινο, μπορεί κανείς να εστιάσει στη διαδικασία ή στον τρόπο με τον οποίο είναι στημένα τα τουβλάκια. Φαίνεται ότι εστίαση στη διαδικασία με την οποία πέφτουν τα πλακίδια (δηλ. 'αν πέσει το πρώτο και αν πέσει το ν-οστό…') δεν φέρνει τα βέλτιστα παιδαγωγικά αποτελέσματα. Αντιθέτως, η εστίαση στον τρόπο με τον οποίο στήθηκαν τα πλακίδια, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αυτά πέφτουν επειδή έτσι τα στήσαμε, κατ' αναλογία, σαρώνεται το σύνολο των Φυσικών Αριθμών, διότι το επιτρέπει-επιβάλλει η δομή του.

Θεωρίες που αναδεικνύονται χρήσιμες στη Διδακτική των Μαθηματικών και αφορούν την παρούσα εργασία είναι τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση, η αρχή 'μαθαίνω κάνοντας' του Dewey και η Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση. Η αρχή των Ρεαλιστικών Μαθηματικών είναι ότι οι μαθητές πρέπει να ανακαλύπτουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα από την 'καθοδηγούμενη επανεφεύρεσή' τους, ενώ σύμφωνα με την αρχή 'μαθαίνω κάνοντας' του Dewey, η μάθηση προκύπτει μέσα από την εμπειρία μας στον κόσμο και από τον αναστοχασμό μας πάνω σε αυτήν. Η Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση είναι μια πολύπλευρη διαδικασία η οποία

εμπλέκει του μαθητές σε πολλαπλές δράσεις: στην παρατήρηση, στο να θέτουν ερωτήματα, στη διατύπωση εικασιών, στον πειραματισμό, στον αναστοχασμό των υποθέσεών τους κτλ.

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών μας δείχνει ότι οι μαθητές δεν εμπλέκονται στη διαδικασία της απόδειξης διότι δεν βλέπουν καμιά ανάγκη για να το κάνουν. Η νοητική ανάγκη, ορίζεται ως η ανάγκη του ανθρώπου για εξισορρόπηση, καθώς αυτός συναντά ένα πρόβλημα. Η εξισορρόπηση επιτυγχάνεται μαθαίνοντας μια νέα γνώση που του επιτρέπει να λύσει το πρόβλημα. Στην εργασία συζητήσαμε ορισμένες νοητικές ανάγκες, καθώς επίσης και τρόπους για να τις πυροδοτήσουμε στην τάξη, όπως φαίνεται και στον πίνακα 1.2.

Πίνακας 1.2: Νοητικές ανάγκες & πώς πυροδοτούνται

Νοητική Ανάγκη	**Τι σημαίνει;**	**Πώς μπορεί να πυροδοτηθεί**
Βεβαιότητα	Ανάγκη του να γνωρίζει κανείς αν μια εικασία είναι αληθής	Γνωστική Σύγκρουση, Καταστάσεις Αβεβαιότητας
Αιτιότητα	Ανάγκη για εξήγηση, για προσδιορισμό της αιτίας ενός φαινομένου	Στρέφοντας τους μαθητές από το 'πώς' στο 'γιατί'
Υπολογισμός	Ανάγκη για ποσοτικοποίηση	Χρήση της άλγεβρας εντός του αναφορικού πλαισίου της
Δομή	Ανάγκη για λογική αναδιοργάνωση των γνώσεων εντός μιας δομής	Μέσω της ερώτησης: «Αν αφαιρέσουμε αυτό το αξίωμα, τι συνέπειες θα έχουμε;»

Ο παραπάνω πίνακας διαβάζεται ως εξής: για παράδειγμα, η ανάγκη για βεβαιότητα ορίζεται ως η ανάγκη για να γνωρίζει κανείς αν μια εικασία είναι αληθής και ορισμένοι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να την πυροδοτήσουμε στην τάξη είναι η γνωστική σύγκρουση και οι καταστάσεις αβεβαιότητας.

2. Η Μαθηματική Επαγωγή στη Διδακτική των Μαθηματικών

2.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση επί της Μαθηματικής Επαγωγής

2.1.1 Μια χαρτογράφηση του πεδίου

Τα διδακτικά ζητήματα που σχετίζονται με την Μαθηματική Επαγωγή έχουν απασχολήσει τους ερευνητές για περισσότερα από σαράντα χρόνια. Τα πιο συνήθη ερωτήματα που τίθενται είναι:

Ποια τα Μαθηματικά πίσω από την Μαθηματική Επαγωγή;

Ποιες οι γνώσεις των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής;

Πώς μπορούμε να υποστηρίξουμε την απόκτηση της γνώσης επί της Μαθηματικής Επαγωγής;

Όσον αφορά τα Μαθηματικά της Μαθηματικής Επαγωγής, οι ερευνητές αναφέρουν ορισμένα από αυτά που έχουμε παραθέσει στις §1.3-1.4. Προκειμένου να ελέγξουν τις γνώσεις των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής στις περισσότερες μελέτες οι ερευνητές δίνουν κάποιο τεστ στους μαθητές, που ορισμένες φορές συνοδεύεται και από κλινική συνέντευξη. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι, οι περισσότερες έρευνες επί του θέματός μας δεν είναι διδακτικά πειράματα αλλά βασικές έρευνες κατά τις οποίες δίνεται ένα διαγνωστικό τεστ κατανόησης στους μαθητές, μετά από παραδοσιακή –ή κατά βάση παραδοσιακή- διδασκαλία επί της Μαθηματικής Επαγωγής (Dubinsky & Lewin, 1986· Dubinsky, 1989· Baker, 1996· Stylianides, Stylianides & Philippou, 2005· Jetter, 2012 κ.ά.). Μάλιστα, οι έρευνες αυτές λειτουργούν επιβεβαιωτικά ως προς την προϋπάρχουσα βιβλιογραφία. Σε ό,τι αφορά τα λίγα διδακτικά πειράματα που έχουν γίνει (όπως π.χ. Movschovitz-Hadar, 1993), οι ερευνητές εστιάζουν και πάλι στο τι γνώσεις αποκόμισαν οι μαθητές από το εγχείρημα, και παρόλο που εξηγούν αναλυτικά το θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο ερμηνεύονται οι απαντήσεις των μαθητών, δεν εξηγούν τη θεωρία πίσω από τη διδασκαλία τους εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις. Μια τέτοια εξαίρεση είναι για παράδειγμα ο Harel (2001), ο οποίος από τη μια προσπαθεί να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα του πειράματός του, βάσει της θεωρίας των ‘αποδεικτικών σχημάτων’ (proof schemes) (βλ. Harel & Sowder, 1998) και από την άλλη εξηγεί ότι βασίζει τη διδασκαλία του στην προσπάθεια να κάνει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει από μια ‘ανάγκη’ για επίλυση ορισμένων προβλημάτων (βλ. Harel, 2013· Zaslavsky κ.ά., 2012) καθώς επίσης προσπαθεί να εισαγάγει την Μαθηματική Επαγωγή μέσα από προβλήματα που

διαφέρουν από αυτά της παραδοσιακής διδασκαλίας. Επίσης, στη βιβλιογραφία συναντάμε και θεωρητικές έρευνες, όπως αυτές των Avital και Hansen (1976), Avital και Libeskind (1978), Dubinsky (1991), που έχουν ως αντικείμενο συζήτησης την Μαθηματική Επαγωγή, τα προβλήματα κατανόησης που προκύπτουν στην τάξη, καθώς επίσης προτείνουν και λύσεις για την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών.

Στις περισσότερες έρευνες που είναι διδακτικά πειράματα τα υποκείμενα έχουν επιλεχθεί να είναι είτε μαθητές λυκείου (π.χ. Dubinsky, 1989· Allen, 2001) είτε φοιτητές (π.χ. Movschovitz-Hadar, 1993· Jetter, 2012, κ.ά.). Όμως και οι περισσότερες από τις θεωρητικές έρευνες εστιάζουν στο θέμα από τη σκοπιά του μαθητή. Υπάρχουν ελάχιστες έρευνες που έχουν ως αντικείμενο μελέτης τον δάσκαλο. Παραδείγματα τέτοιων ερευνών είναι η έρευνα των Ron και Dreyfus (2004) -η οποία είναι ένα πείραμα που μελετά τα μοντέλα μεταφοράς που χρησιμοποιούν οι διδάσκοντες στη διδακτική της Μαθηματικής Επαγωγής- καθώς επίσης και η έρευνα των Sharif-Rasslan και Rasslan (2015), η οποία μελετά τις αντιλήψεις ενός δασκάλου για την Μαθηματική Επαγωγή και το αν αυτές σχετίζονται με τις αντιλήψεις των μαθητών του επί της Μαθηματικής Επαγωγής. Υπάρχουν επίσης και έρευνες των οποίων τα υποκείμενα είναι μικρά παιδιά. Για παράδειγμα ο Smith (2002, 2003) ερευνά τον τρόπο σκέψης παιδιών 5-7 χρονών μέσω Μαθηματικής Επαγωγής. Οι Baroody και Reid (2013) ισχυρίζονται ότι είναι δυνατή η σκέψη μέσω μιας άτυπης μορφής Μαθηματικής Επαγωγής σε παιδιά 5-7 χρονών. Και οι δύο τελευταίες έρευνες βασίζονται στις απόψεις των Poincaré και Piaget όπως αυτές περιγράφονται στο Smith (2002), σύμφωνα με τις οποίες η Μαθηματική Επαγωγή συνδυάζει την ατελή επαγωγή και τον παραγωγικό συλλογισμό προκειμένου να δημιουργηθεί ένα νέο είδος συλλογισμού.

«Όμοια με την ατελή επαγωγή [η Μαθηματική Επαγωγή] σχετίζεται με το να κάνουμε γενίκευση που προκύπτει από ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο… αλλά ανόμοια με την ατελή επαγωγή και όμοια με τον παραγωγικό συλλογισμό, το συμπέρασμα για το n και το n+1 είναι απαραίτητα αληθές για όλους τους Φυσικούς»

(Baroody & Reid, 2013, σελ.1-2).

Οι έρευνες συμφωνούν στο ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλα προβλήματα στην ‘κατανόηση’ της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής, όμως υπάρχουν ευρήματα που υποστηρίζουν το εξής παράδοξο: παρόλες τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με την Μαθηματική Επαγωγή, έχουν πολύ καλές

επιδόσεις στη λύση των ασκήσεων μιας παραδοσιακής διδασκαλίας, όπου απαιτείται να γίνει απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή. Ένα αίτιο αυτού του φαινομένου φαίνεται πως είναι η διαδικαστική φύση της απόδειξης με Μαθηματική Επαγωγή, όπως θα δούμε και παρακάτω (Movschovitz-Hadar, 1993).

Επιπρόσθετα αξίζει να αναφερθεί ότι οι περισσότερες έρευνες που περιέχουν ασκήσεις επί της Μαθηματικής Επαγωγής αναφέρονται αποκλειστικά σε αλγεβρικά προβλήματα πλην ελαχίστων εξαιρέσεων. Τέτοιες εξαιρέσεις είναι η Πάλλα (2006), οι Palla, Potari και Spyrou (2012) και η Wiscamb (1970), στα άρθρα των οποίων υπάρχουν προβλήματα άθροισης πεπερασμένων σειρών, των οποίων η διατύπωση προκύπτει μέσα από γεωμετρικά μοτίβα. Τέλος, μια έλλειψη της βιβλιογραφίας είναι πάνω σε θέματα που σχετίζονται με το ερώτημα: 'Πώς αντιλαμβάνομαι ότι ο δρόμος που πρέπει να ακολουθήσω για να αποδείξω μια πρόταση P είναι η απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή';

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Οι έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών στον τομέα της Μαθηματικής Επαγωγής περιλαμβάνουν ελάχιστα διδακτικά πειράματα. Οι περισσότερες έρευνες είναι εμπειρικές κατά τη διεξαγωγή των οποίων δίνεται ένα διαγνωστικό τεστ -που ελέγχει τις γνώσεις και την 'κατανόηση' των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής· οι περισσότερες από αυτές τις έρευνες δρουν επιβεβαιωτικά ως προς τα αποτελέσματα της υπάρχουσας έρευνας, τα οποία χρονολογούνται από τις δεκαετίες '70 και '80. Συνεπώς, παρατηρείται σαφώς, μια έλλειψη σε έρευνες που να έχουν ως στόχο την ανακάλυψη θεωρίας που αφορά την Μαθηματική Επαγωγή. Στις περισσότερες έρευνες, τα υποκείμενα είναι μαθητές λυκείου ή φοιτητές. Ελάχιστες έρευνες είναι εκείνες που έχουν ως υποκείμενα παιδιά ηλικίας 5-7 χρονών, από τις οποίες προκύπτουν ευρήματα ότι είναι δυνατή η σκέψη μέσω Μαθηματικής Επαγωγής σε αυτές τις ηλικίες. Καθώς επίσης, ελάχιστες είναι οι έρευνες που έχουν ως αντικείμενο μελέτης τον διδάσκοντα. Τέλος παρατηρείται έλλειψη της έρευνας σχετικά με το ερώτημα 'Πώς αντιλαμβάνομαι ότι ο δρόμος που πρέπει να ακολουθήσω για να αποδείξω μια πρόταση P είναι η απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή;'.

2.1.2. Συνήθεις δυσκολίες & αντιμετώπιση

Όσον αφορά τη Μαθηματική Επαγωγή οι μαθητές αντιμετωπίζουν διαφόρων ειδών δυσκολίες όπως είναι οι εννοιολογικές, οι μαθηματικές (Avital & Libeskind, 1978) και οι τεχνικές δυσκολίες (Baker, 1996). Μία γενική δυσκολία, που ίσως δεν

μπορεί να καταταχθεί σε καμία από τις παραπάνω κατηγορίες είναι το γεγονός ότι η Μαθηματική Επαγωγή φαίνεται ουρανοκατέβατη και δεν αποτελεί γενίκευση πρότερης γνώσης (Ernest, 1984· Harel, 2001).

2.1.2.1 Εννοιολογικές δυσκολίες

Ανάμεσα στις εννοιολογικές δυσκολίες κυριαρχεί η αδυναμία κατανόησης της μετάβασης από το P(n) στο P(n+1), του επαγωγικού βήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι πιο συνήθεις απορίες είναι:

- Γιατί υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε (δηλ. P(n)); (Ernest, 1984· Allen, 2001· Avital & Libeskind, 1978) και
- Πώς υποθέτουμε ότι ισχύει το P(n), χωρίς να γνωρίζουμε ότι η P(n) είναι αληθής; (Ron & Dreyfus, 2004).

Όσον αφορά τη φαινομενική κυκλικότητα της σκέψης, δηλαδή το γεγονός ότι πολλοί μαθητές θεωρούν πως υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα εξής αίτια:

- Από τη μια, η επαγωγική υπόθεση P(n) (για κάποιον n $\in$ ℕ) και το επαγωγικό συμπέρασμα P(n) (για κάθε n $\in$ ℕ), περιέχουν τον *ίδιο* συμβολισμό P(n), ενώ εννοιολογικά πρόκειται για δύο διαφορετικά αντικείμενα. Πρόκειται λοιπόν ξεκάθαρα για μια περίπτωση Ομωνυμίας[1] (βλ. Κλαουδάτος, 2011, σελ. 17). Εννοιολογικά, στην υπόθεση P(n) το n είναι ένας τυχαίος μεν, αλλά συγκεκριμένος Φυσικός αριθμός, γεγονός που σηματοδοτείται από την έκφραση 'για κάποιον n $\in$ ℕ', ενώ το P(n) είναι μια έκφραση που περιέχει αυτόν τον συγκεκριμένο και τυχαίο Φυσικό. Εδώ, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, η γενική ισχύς του συμπεράσματος P(n) για κάθε n $\in$ ℕ, οφείλεται ακριβώς σε αυτήν την τυχαιότητα του n. Από την άλλη στο συμπέρασμα P(n) για κάθε n $\in$ ℕ, το n είναι μια μεταβλητή που διατρέχει το σύνολο των Φυσικών, γεγονός που χαρακτηρίζεται από την έκφραση 'για κάθε', ενώ η έκφραση P(n) είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τη μεταβλητή n (Rips & Asmuth, 2007). Για την υπέρβαση αυτής της δυσκολίας συνιστούμε ο διδάσκων να επιστήσει την προσοχή των μαθητών στο συγκεκριμένο φαινόμενο και να εξηγήσει αναλυτικά τις διαφορετικές έννοιες του P(n) που προκύπτουν από τις συνοδευτικές φράσεις 'για κάποιον' και 'για κάθε'.

[1] Ομωνυμία είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια Εξωτερική Αναπαράσταση (ΕΑ) αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερες Εσωτερικές αναπαραστάσεις (Εσ.Α). (Κλαουδάτος, 2011). Για παράδειγμα η ΕΑ 2+3 αναφέρεται τόσο στο άθροισμα των αριθμών, δηλ στο 5, όσο και στη διαδικασία της πρόσθεσης (βλ. και Mayer, 1995).

• Από την άλλη, στην εργασία αυτή υποστηρίζεται η *νέα* -για τα βιβλιογραφικά δεδομένα- *άποψη* ότι αυτή *η σύγχυση των μαθητών πρέπει να έχει και γλωσσικά αίτια*. Είναι γνωστό ότι η καθημερινή γλώσσα επηρεάζει την κατανόηση των Μαθηματικών (Πόταρη, 2011). Επίσης, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι, αν δεν διδάξουμε στους μαθητές την έννοια των εκφράσεων ΄Εστω', 'Υποθέτω ότι', 'Αν', 'Θεωρώ ότι' στα Μαθηματικά και αν δεν ειπωθεί ρητά ότι είναι μεταξύ τους ισοδύναμες, οι μαθητές θα αποδώσουν σε αυτές το νόημα που τους αποδίδουν στην καθομιλουμένη. Στην καθομιλουμένη ο υποθετικός σύνδεσμος 'αν' διαφέρει εννοιολογικά από τους υπόλοιπους ως προς το ότι είναι η λέξη που εκφράζει τον μικρότερο βαθμό βεβαιότητας σε σχέση με τις υπόλοιπες. Επομένως, είναι λογικό ότι η χρήση λέξεων με ισχυρή (ή ισχυρότερη βεβαιότητα), προκειμένου να εισαγάγουμε την επαγωγική υπόθεση, ορθά οδηγεί στο (λανθασμένο) συμπέρασμα ότι θεωρούμε την ισχύ της πρότασης P(n) ως δεδομένη. Για να γίνουν τα παραπάνω πιο ξεκάθαρα, ας εξετάσουμε ορισμένα λήμματα λεξικών σχετικά με τις παραπάνω λέξεις[2]. Ο σύνδεσμος 'αν' εισάγει δευτερεύουσες προτάσεις και όταν αυτές είναι υποθετικές, δηλώνει την προϋπόθεση που πρέπει να ισχύει (υπόθεση) για να συμβεί αυτό που εκφράζει η κύρια πρόταση (απόδοση), δηλαδή έχει το νόημα: στην περίπτωση που ή αν τυχόν ή άμα. Π.χ. 'Αν συνεταιριζόσουν μαζί του θα πλούτιζες'. (Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής, 1998). Το ρήμα 'θεωρώ' έχει πολλές σημασίες. Η συνηθέστερη είναι 'Πιστεύω ή έχω τη γνώμη ότι κάποιος ή κάτι έχει ορισμένη ιδιότητα'. Π.χ. 'Τον θεωρώ έξυπνο' (Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής, 1998). Επομένως, αυτή η απόδοση νοήματος στη λέξη 'Θεωρώ ότι P(n)', δημιουργεί την εντύπωση ότι 'πιστεύουμε ότι η P(n) είναι αληθής, χωρίς να έχει καμία βάση αυτή η 'πεποίθηση'. Αντιθέτως, μια άλλη έννοια της λέξης 'θεωρώ' είναι η 'εξετάζω κάτι προσεκτικά' και ειδικότερα με το νόημα 'εξετάζω κάτι που υποθέτω', όπως π.χ. 'Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο…' (Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής, 1998). Αυτή είναι η έννοια με την οποία χρησιμοποιούμε τη λέξη 'θεωρώ' στα Μαθηματικά. Ωστόσο, αν αυτό δεν εξηγηθεί ρητά, είναι προφανές ότι οι μαθητές λαθεμένα θα αποδώσουν στη λέξη τη συνήθη έννοια που αυτοί γνωρίζουν από τη χρήση της στην καθημερινότητά τους. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και για τις υπόλοιπες λέξεις. Η έννοια των εκφράσεων ΄Εστω', 'αν', 'Υποθέτω' και 'Θεωρώ' στα Μαθηματικά ταυτίζεται με την συνήθη έννοια του 'αν' της καθομιλουμένης, δηλαδή 'στην περίπτωση που'.

[2] Φυσικά, η κάθε λέξη έχει πάρα πολλές έννοιες. Γι' αυτό επιλέχθηκαν από τα λεξικά οι πιο συνήθεις χρήσεις των λέξεων υπό εξέταση.

Προκειμένου να λυθεί το παραπάνω ζήτημα, υποστηρίζουμε ότι πρέπει να εξηγηθεί ρητά στην τάξη ότι ορισμένες λέξεις της καθημερινότητας χρησιμοποιούνται με διαφορετικό νόημα στα Μαθηματικά, καθώς επίσης πρέπει να διευκρινιστεί το νόημα αυτών των λέξεων στα Μαθηματικά, επακριβώς.

Όσον αφορά το δεύτερο εμπόδιο των μαθητών, αυτό που τους θέλει να μην κατανοούν 'πώς μπορούμε να υποθέτουμε ότι το P(n) είναι αληθές εφόσον δεν ξέρουμε αν ισχύει' έχουμε να πούμε ότι οφείλεται στα εξής αίτια:

- Από τη μια, οι μαθητές δεν έχουν εμπειρία και εξάσκηση όσον αφορά την απόδειξη συμπερασματικών προτάσεων (implication statements) (Ron & Dreyfus, 2004). Στη βιβλιογραφία προτείνεται εξάσκηση με τέτοιου είδους αποδείξεις πριν την εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής (Ron & Dreyfus, 2004).
- Από την άλλη, αδυνατούν να αντιληφθούν ότι η αλήθεια της πρότασης P(n) δεν είναι απαραίτητη, εφόσον αυτό που θέλουμε να ξέρουμε είναι η αλήθεια της συνεπαγωγής P(n)→P(n+1), δηλ. 'αν η P(n) είναι αληθής, θα είναι αληθής και η P(n+1);' (Avital & Libeskind, 1978). Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο, συνιστάται να διδαχθεί το παραπάνω με πίνακα λογικών τιμών, για τον συνεπαγωγή p→q, όπως ο πίνακας 2.1.

Πίνακας 2.1: Πίνακας λογικών τιμών για το βήμα P(n)→P(n+1)

P	Q	P→q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Όπου η τιμή 1 συμβολίζει την αλήθεια μιας πρότασης ενώ το 0 σημαίνει ότι είναι ψευδής.

Μία ακόμα δυσκολία των μαθητών που αναφέρεται στη βιβλιογραφία είναι ότι συχνά θεωρούν ότι μια από τις δύο υποθέσεις είναι αχρείαστη -συνήθως η πρώτη (Ernest, 1984· Jetter, 2012, κ.ά.)- ενώ συχνά θεωρούν τον έλεγχο της ισχύος της πρότασης P(1) ως ένα τυπικό-διαδικαστικό βήμα (Ernest, 1984).

Επίσης, οι μαθητές δυσκολεύονται να εξηγήσουν για ποιο λόγο η Μαθηματική Επαγωγή δουλεύει στο ℕ και όχι στους θετικούς πραγματικούς, δηλ. δεν κατανοούν

ότι η Μαθηματική Επαγωγή ταυτίζεται με το 5^{ο} αξίωμα Peano, με την αρχή του ελαχίστου και ότι συνεπώς χαρακτηρίζει το ℕ (Πάλλα, 2006· Palla, Potari & Spyrou, 2012). Είναι προφανές ότι ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι διότι η Μαθηματική Επαγωγή διδάσκεται ως μια στείρα διαδικασία μαθηματικού φορμαλισμού 'βήμα 1^{ο}: ελέγχω αν ισχύει P(1), βήμα 2^{ο}: υποθέτω ότι ισχύει η P(n)…' ενώ δεν εξηγείται πουθενά η ισοδυναμία της με τις προαναφερθείσες αρχές, ούτε και το γεγονός ότι χαρακτηρίζει τους Φυσικούς.

Μία γλωσσική δυσκολία, που όμως δημιουργεί εννοιολογικά προβλήματα είναι η αμφισημία της λέξης επαγωγή (Ernest, 1984). Όπως έχουμε προαναφέρει η Μαθηματική Επαγωγή αφορά σε παραγωγικό τρόπο σκέψης που είναι αντίθετος από τον επαγωγικό. Αυτό το 'λάθος' όνομά της πολλές φορές δημιουργεί σύγχυση για το σκεπτικό που πρέπει να ακολουθηθεί. Αυτό το θέμα μπορεί να ξεκαθαριστεί με ενημέρωση των μαθητών επί του θέματος. Για παράδειγμα θα μπορούσαν να αναφερθούν οι πληροφορίες που παραθέτουμε στις § 1.2 και 1.4.

Στις εννοιολογικές δυσκολίες κατατάσσεται και η φαινομενική αυθαιρετότητα της Μαθηματικής Επαγωγής (Ernest, 1984). Πιο συγκεκριμένα οι Lowenthal και Eisenberg (1992) συμφωνούν με τους Stewart και Tall (1977) στο ότι δεν είναι προφανές το πώς προκύπτει το συμπέρασμα P(n) για κάθε n ∈ ℕ από τις δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής, και, όπως είδαμε (§ 1.6.3), θεωρούν ότι η διεξαγωγή του συμπεράσματος της Μαθηματικής Επαγωγής αποτελεί ένα επιστημολογικό άλμα. Συνεπώς φαίνεται ότι αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο συναντάται και σε προσωπικό επίπεδο ως γνωστικό εμπόδιο, εφόσον εξαιτίας αυτού του 'άλματος' οι μαθητές δεν μπορούν να 'δουν' πώς προκύπτει το συμπέρασμα της Μαθηματικής Επαγωγής από τις υποθέσεις. Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής και η μορφή της δεν παρέχει εξηγήσεις για το πώς προκύπτει το συμπέρασμα. Η Hannah (1989) στο άρθρο της 'Proofs that prove and proofs that explain' αναφέρει την Μαθηματική Επαγωγή ως το κατεξοχήν παράδειγμα ξηρού φορμαλισμού.

Όλες οι παραπάνω εννοιολογικές δυσκολίες κάνουν δυσνόητη τη Μαθηματική Επαγωγή στα μάτια των μαθητών. Ψυχολογικά, τους είναι δύσκολο να τη δεχτούν ως έγκυρη μαθηματική διαδικασία, εφόσον μοιάζει ως ένα 'τρικ' και δημιουργεί καχυποψίες (Movschovitz-Hadar, 1993· Avital & Libeskind, 1978· Ernest 1984).

2.1.2.2 Μαθηματικές δυσκολίες

Ανάμεσα στις μαθηματικές δυσκολίες των μαθητών, η βιβλιογραφία αναφέρει την αδυναμία στη χρήση συμβολισμού και/ή αλγεβρικών διαδικασιών, λανθασμένους

υπολογισμούς και λάθος ερμηνεία αλγεβρικών προτάσεων· επίσης, παρατηρούνται προβλήματα στον επαγωγικό συλλογισμό και σε διαδικασίες συμπεράσματος, όπως π.χ. φαίνεται ότι η καθημερινή σκέψη σχετίζεται με τη διεξαγωγή κανόνων από πεπερασμένα παραδείγματα και επομένως οι μαθητές, οδηγούμενοι από τις δράσεις τους εφαρμόζουν αυτό το σκεπτικό και στα Μαθηματικά, δηλ. γενικεύουν βάσει συγκεκριμένων περιπτώσεων (Baker, 1996). Το τελευταίο εμπόδιο μπορεί να αποφευχθεί μέσα από συζητήσεις για το ποιες διαδικασίες συλλογισμού θεωρούνται έγκυρες στα Μαθηματικά, με την παρουσίαση αντιπαραδειγμάτων, δηλ. γενικεύσεων από ειδικές περιπτώσεις που οδηγούν σε λανθασμένα συμπεράσματα (βλ. Lowenthal & Eisenberg, 1992, σελ. 234).

Επίσης, ο Ernest (1984) αναφέρει ότι η έκφραση της Μαθηματικής Επαγωγής με ποσοδείκτες μπερδεύει τους διδασκόμενους. Σήμερα, στην Ελλάδα, σε σχολικό επίπεδο, δεν χρησιμοποιούνται ποσοδείκτες. Η χρήση τους εισάγεται σε πανεπιστημιακό επίπεδο, όπου επίσης δημιουργείται σύγχυση. Γι' αυτό, καλό είναι η έκφραση της Μαθηματικής Επαγωγής να χρησιμοποιεί τις φράσεις, 'για κάποιον/υπάρχει n_0' και 'για κάθε $n \in \mathbb{N}$' αντί για $\exists$ και $\forall$ αντίστοιχα.

Οι Stylianides, Stylianides και Philippou (2005 και 2007) αναφέρουν δυσκολίες των μαθητών στο να αποφανθούν για την εγκυρότητα μιας απόδειξης με Μαθηματική Επαγωγή που χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί μια πρόταση P(n) σε ένα σύνολο S που είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου αλήθειας D της πρότασης P(n). Φαίνεται πως η συνήθης εφαρμοζόμενη πρακτική του να αποδεικνύουμε προτάσεις στο μέγιστο δυνατό σύνολο για το οποίο έχουν αυτές νόημα, έχει επηρεάσει τους μαθητές στον τρόπο σκέψης τους. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αποφευχθεί με την έκθεση των μαθητών σε παρόμοιου είδους προβλήματα (Stylianides, Stylianides & Philippou, 2005, 2007).

2.1.2.3 Τεχνικές δυσκολίες

Οι τεχνικές δυσκολίες περιλαμβάνουν προβλήματα στη μετάβαση από το p(n) στο P(n+1) (Avital & Libeskind, 1978). Αυτή η μετάβαση σχετίζεται με τη χρήση άλγεβρας όχι για απλοποίηση –που είναι το σύνηθες πλαίσιο χρήσης άλγεβρας- αλλά για τη δημιουργία μιας 1-1 αντιστοιχίας με ένα συγκεκριμένο μοντέλο (Ernest, 1984· Stylianides, Stylianides & Philippou, 2007). Αυτό το εμπόδιο λύνεται επίσης με έκθεση και εξάσκηση των μαθητών σε αυτού του τύπου τα προβλήματα, δηλ. χρήση άλγεβρας με στόχο να καταλήξουμε σε μια συγκεκριμένη έκφραση, όχι απαραίτητα

απλούστερη από την αρχική. Προτείνουμε ως παραδείγματα ασκήσεων που πληρούν το παραπάνω κριτήριο τις παρακάτω. Να δείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2 = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

$$(\alpha+\beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^5 - \alpha^5 - \beta^5 = 5\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$(\alpha+\beta)^7 - \alpha^7 - \beta^7 = 7\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$$

Επίσης, είναι πιθανό ότι πολλοί μαθητές χρησιμοποιούν -κατά την αποδεικτική διαδικασία- μια από πίσω προς τα μπρος μέθοδο. Αυτό ενέχει τον κίνδυνο να επισκιαστεί η απόδειξη ως επιχείρημα, όπου η αλήθεια μιας δήλωσης προκύπτει από γνωστές ή υποθετικές αλήθειες· πρέπει οι μαθητές να δηλώσουν ρητά ότι τα βήματα αντιστρέφονται (Baker, 1996). Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και πάλι μέσα από συζητήσεις και παραδείγματα για το ‘τι είναι απόδειξη στα Μαθηματικά;’ και ‘ποιες διαδικασίες θεωρούνται έγκυρες στην επιστήμη των Μαθηματικών;’.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών μας αποκαλύπτει ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές επί της Μαθηματικής Επαγωγής είναι πολυποίκιλες: εννοιολογικές, μαθηματικές, τεχνικές κ.ά. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι: η δυσκολία μετάβασης στο επαγωγικό βήμα από το βήμα n στο n+1 και η επαγωγική υπόθεση κατά την οποία οι μαθητές θεωρούν ότι υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε. Ορισμένα από τα αίτια των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την Μαθηματική Επαγωγή είναι η Ομωνυμία που σχετίζεται με τον συμβολισμό P(n), η καθημερινή γλώσσα, η έλλειψη εξάσκησης σε συλλογισμούς συμπερασμού, η ελλιπής κατανόηση του Modus Ponens, η αμφισημία του όρου ‘επαγωγή’ στη Μαθηματική Επαγωγή κ.ά. Σε αυτό το σημείο, υπογραμμίσαμε την έλλειψη της βιβλιογραφίας στην αναφορά του προφανούς, ότι η χρήση της καθημερινής γλώσσας συγχέει τους μαθητές σχετικά με τη χρήση λέξεων όπως ‘Υποθέτω’, ‘Θεωρώ’, ‘Έστω’, στην επαγωγική υπόθεση.

2.1.3 Προϋποθέσεις για την διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής

Οι Ron και Dreyfus (2004) αναφέρουν ότι πολλές φορές κατά τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής χρησιμοποιούνται ακατάλληλα μοντέλα εννοιολογικής μεταφοράς που δεν αντικατοπτρίζουν τη γενική μαθηματική ιδέα, ενώ αναφέρουν ότι το συνηθέστερο μοντέλο εννοιολογικής μεταφοράς είναι αυτό του ντόμινο.

Ο Baker (1996) ισχυρίζεται ότι τα παραδείγματα στα οποία εκτίθενται οι μαθητές, είναι πολύ σημαντικά διότι, λειτουργούν ως 'οδηγοί' για δράση και εξακρίβωση και θεωρεί ότι λόγω αυτού θα πρέπει να δίνονται στους μαθητές δραστηριότητες ανάλυσης απόδειξης προκειμένου να επιβεβαιώσουν τα σημαντικά χαρακτηριστικά της. Στο ίδιο πνεύμα, ο Harel (2001) αναφέρει ότι είναι πολύ σημαντικό να εξετάσουμε τα είδη και τη σειρά των προβλημάτων που δίνονται στους μαθητές κατά τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής. Μάλιστα, συμφωνεί με άλλους ερευνητές στον τομέα (π.χ. Wiscamb, 1970) ότι τα πρώτα και τα περισσότερα προβλήματα που δίνονται στους μαθητές για να λυθούν με Μαθηματική Επαγωγή αφορούν σε άθροιση πεπερασμένων σειρών, διαιρετότητα, ανισώσεις κ.ά. και είναι αλγεβρικής φύσης, όπως για παράδειγμα: $1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = \nu(\nu + 1)/2$. Τα προβλήματα αυτού του τύπου, αφενός φαίνονται ουρανοκατέβατα στους μαθητές Lowental και Eisenberg (1992). Επιπρόσθετα, δεν δίνονται στους μαθητές πληροφορίες για την προέλευσή τους, ενώ ορισμένα από αυτά προκύπτουν από προβλήματα απλής γεωμετρίας (Wiscamb, 1970). Αυτή η απότομη εισαγωγή της Μαθηματικής Επαγωγής αφενός μεν δεν βοηθά τους μαθητές να δουν πως η Μαθηματική Επαγωγή προκύπτει από μια *ανάγκη* επίλυσης προβλημάτων και αφετέρου δεν τους επιτρέπει να δουν το πώς αυτή προκύπτει από πιο προηγούμενες πιο στοιχειώδεις εμπειρίες τους (Harel, 2001). Γι' αυτό, ο Harel (2001) προτείνει την εισαγωγή της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από *ψευδο-επαγωγή* (quasi-induction) και εννοεί αυτό που εννοούν οι Avital και Libeskind (1976) με τον όρο *αφελή επαγωγή*, δηλαδή, την εποπτεία και τον έλεγχο αρκετών συγκεκριμένων περιπτώσεων με έμφαση στη μετάβαση από ένα βήμα στο επόμενο, δηλ. το πώς μεταβαίνω από το P(1) στο P(2) (P(1)→P(2)), P(2)→P(3), …, P(n)→P(n+1), όπου εδώ το n είναι ένας συγκεκριμένος τυχαίος Φυσικός. Ο διδακτικός στόχος αυτής της διαδικασίας είναι η ανακάλυψη ενός κοινού τρόπου μετάβασης για το πέρασμα από οποιοδήποτε βήμα στο επόμενο. Οι Avital και Libeskind (1976) συμπληρώνουν ότι σε αυτές τις περιπτώσεις τα παραδείγματα πρέπει να είναι επιλεγμένα ώστε να είναι αρκετά απλά, προκειμένου να μην επισκιάζεται η κύρια ιδέα από την τεχνική, όπως π.χ. 1 + 3 + 5 +

7 + … + 2ν-1 = ?. Βέβαια, ο Harel (2001) τονίζει ότι στην μεν ψευδο-επαγωγή το πέρασμα P(n)→P(n+1) είναι ένα ακόμα από τα βήματα, μία ακόμα συνεπαγωγή, ενώ στην Μαθηματική Επαγωγή πρόκειται για μια μεταβλητή μορφή επαγωγής. Οι Cusi και Malara (2009), συμφωνούν στο ότι η εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής πρέπει να γίνεται με την προσέγγιση της αφελούς επαγωγής και προσθέτουν ότι κατά τη διαδικασία αυτή πρέπει να αναδειχθεί η αναλογία ανάμεσα στη Μαθηματική Επαγωγή και στην καλή διάταξη του N.

Επιπρόσθετα οι Cusi και Malara (2009), θεωρούν ότι πρέπει να γίνεται διεξοδική ανάλυση της έννοιας του συμπερασμού αλλά και μια παρουσίαση παραδειγμάτων λανθασμένης Μαθηματικής Επαγωγής, προκειμένου να αναδειχθεί η σημασία της πρώτης υπόθεσης (P(1) ή $P(n_0)$, για κάποιον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο ισχύει η πρόταση P(n)). Τέτοια παραδείγματα με λανθασμένη επαγωγή που αναδεικνύουν τη σημασία της πρώτης υπόθεσης βρίσκουμε στους Golovina και Yaglom (1963), κατά τα οποία με εφαρμογή της δεύτερης υπόθεσης μόνο, καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα που είναι προφανές ότι είναι εσφαλμένο.

Στη βιβλιογραφία που αφορά τη Μαθηματική Επαγωγή, συναντούμε πολύ συχνά την τεχνική της έκθεσης των μαθητών σε λανθασμένες αποδείξεις, οι οποίες δεν έχουν πάντα τον ίδιο στόχο. Για παράδειγμα η Movschovitz-Hadar (1993), κατά τη διεξαγωγή διδακτικού πειράματος, παρουσίασε σε μαθητές μια λανθασμένη απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή -αυτήν που είχε δώσει ο Austin το 1988- για το πρόβλημα του κάλπικου νομίσματος (βλ. πρόβλημα & απόδειξη στην § 6.4), προκειμένου να αναδείξει τους συλλογισμούς που θεωρούνται ορθοί ή εσφαλμένοι από την Μαθηματική Κοινότητα. Η Jetter (2012), χρησιμοποιεί μια λάθος απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή για να ‘αποδείξει’ τον (ψευδή) ισχυρισμό ότι ‘όλοι οι άνθρωποι έχουν το ίδιο ύψος’ και ζητά από τους μαθητές να ανακαλύψουν το λάθος. Στο ίδιο πλαίσιο, αλλά προκειμένου να αναδειχθεί η σημαντικότητα του επαγωγικού βήματος της Μαθηματικής Επαγωγής -και να μην επαναπαύονται οι μαθητές στην ισχύ συγκεκριμένων περιπτώσεων που έχουν ελέγξει- οι Golovina και Yaglom (1963) αναφέρουν ορισμένες εικασίες μεγάλων μαθηματικών -οι οποίες ήταν βασισμένες στην εποπτεία συγκεκριμένων περιπτώσεων- και αργότερα αποδείχθηκαν λανθασμένες, όπως π.χ. αυτή του Fermat που αναφέρθηκε στην § 1.3. Κοντινά σε αυτό το πλαίσιο, ο Lambrou (2005, section 3, σελ. 7)) προτείνει μια σειρά ασκήσεων οι οποίες φαίνεται ότι ακολουθούν ένα μοτίβο, όμως στην πραγματικότητα αυτό δεν είναι αληθές για όλες τις ασκήσεις.

Η Sfard (1988), προτείνει την έκθεση των μαθητών σε αναδρομικά προβλήματα και την αναλυτική διατύπωση αναδρομικών αλγορίθμων σε απλή τυπική μαθηματική γλώσσα. Σε παρόμοιο ύφος, ο Allen (2001) προτείνει την εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από τη χρήση αναδρομικών συναρτήσεων ως εξής: Αν έχω δύο αναδρομικές συναρτήσεις f, g με γνωστούς τύπους και γνωρίζω ότι g(1)=f(1) και μπορώ να βρω έναν τρόπο να εκφράσω ότι 'αν g(n)=f(n) τότε και g(n+1)=f(n+1)', τότε διευκολύνεται η διαδικασία απόδειξης με Μαθηματική Επαγωγή προτάσεων που αφορούν σε μια ταυτότητα (π.χ. 1 + 2 + 3 +…+ n = n(n+1)/2, όπου g(n)= 1 + 2 + 3 +…+ n και f(n)= n(n+1)/2). Οι Palla, Potari και Spyrou (2012), χρησιμοποιώντας τη θεωρία της Sfard (1991), διακρίνουν ανάμεσα στη λειτουργική (operational) και τη δομική (structural) κατανόηση· σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, το πέρασμα από την πρώτη στη δεύτερη γίνεται μέσω μιας διαδικασίας πραγμοποίησης (reification), δηλ. μιας διαδικασίας που παγιώνει τη γνώση ως αντικείμενο. Το λειτουργικό επίπεδο αποτελεί την αρχική προσέγγιση στην Μαθηματική Επαγωγή και είναι αυτό στο οποίο δίνεται έμφαση στα περισσότερα βιβλία.

Σε ότι αφορά την κατασκευή θεωρίας που ασχολείται με το 'πώς αποκτάται η γνώση' και πιο συγκεκριμένα 'πώς αποκτάται η γνώση επί της Μαθηματικής Επαγωγής', ασχολήθηκαν κυρίως ο Harel και ο Dubinsky. 'Ο Dubinsky (1986, 1989, 1991) και οι Dubinsky και Lewin (1986), ορμώμενοι από τη θεωρία του Piaget θεωρούν ότι η μάθηση μιας έννοιας εμπλέκει μια κατασκευή. Ο μαθητής ξεκινά με ορισμένα ήδη υπάρχοντα σχήματα και μέσα από τη διαδικασία της αναστοχαστικής αφαίρεσης (reflective abstraction) κατασκευάζει άλλα, νέα σχήματα. Το 'σχήμα' κατά τους παραπάνω συγγραφείς ορίζεται να είναι μια συλλογή νοητικών αντικειμένων και νοητικών λειτουργιών (mental operations), που μπορεί το υποκείμενο να εφαρμόσει πάνω σε αυτά τα αντικείμενα (Dubinsky, 1986, σελ. 306). Επιπρόσθετα, υποστηρίζει (Dubinsky, 1986) την άποψη ότι ίσως θα είχαμε καλύτερα αποτελέσματα αν η διδασκαλία συμπεριλάμβανε το να κάνουν οι μαθητές, με στόχο την ενεργοποίησή τους, τις απαραίτητες αναστοχαστκές αφαιρέσεις προκειμένου να οικοδομήσουν τα απαιτούμενα σχήματα. Ο Harel (2001), κατηγοριοποιεί τα 'αποδεικτικά σχήματα' (proof schemes), όπου εδώ με τον όρο 'αποδεικτικό σχήμα' ενός ανθρώπου εννοεί 'οτιδήποτε αποτελεί βεβαίωση για αυτόν τον άνθρωπο' (σελ. 6). Ένα από αυτά τα σχήματα είναι το εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα· όσον αφορά την Μαθηματική Επαγωγή, μέσα σε αυτή την κατηγορία σχήματος, διακρίνει δύο (υπο-)σχήματα: τη 'γενίκευση που προκύπτει από τη διαδικασία του μοτίβου', που αποτελεί παραγωγικό

συλλογισμό, και ‘τη γενίκευση που προκύπτει από το αποτέλεσμα του μοτίβου’. Στην πρώτη περίπτωση, οι μαθητές εστιάζουν στην κανονικότητα της διαδικασίας, λαμβάνουν υπόψη τη γενικότητα του συμπεράσματος, ενώ στη δεύτερη, οι μαθητές εστιάζουν στην κανονικότητα του αποτελέσματος. Η ιδεατή κατάσταση είναι η πρώτη. Ιδανικά, θα θέλαμε να εκθέσουμε τους μαθητές σε εμπειρίες που να τους ενεργοποιήσουν στη γενίκευση που προκύπτει από τη διαδικασία του μοτίβου.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι στη βιβλιογραφία υπάρχει η άποψη ότι από παιδαγωγικής απόψεως, είναι προτιμότερη η διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής μέσω της Αρχής του Ελαχίστου (Kuperman, 1990, στο Movschovitz-Hadar, 1993, σελ. 265) ή μέσω του 5^{ου} Αξιώματος Peano (Henkin, 1961, στο Sharif-Rasslan & Rasslan, σελ. 2). Είδαμε ότι ορισμένοι ερευνητές (Lowenthal & Eisemberg, 1992· Stewart & Tall, 1977) θεωρούν ότι το επιστημολογικό άλμα του συμπεράσματος της Μαθηματικής Επαγωγής από τις υποθέσεις της υπερβαίνεται μέσα από το 5^{ο} Αξίωμα Peano. Βέβαια, στις έρευνες που υποστηρίζουν τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από κάποια ισοδύναμη αρχή δεν αναφέρεται η τάξη για τη οποία προορίζεται αυτή η διδασκαλία, αλλά θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι η διδασκαλία των παραπάνω αρχών δεν είναι πιο δύσκολη από τα υπόλοιπα Μαθηματικά της Β΄ Λυκείου. Εμείς, σε αυτή την εργασία, υποστηρίζουμε ότι είναι ωφέλιμο να διδαχτεί η Μαθηματική Επαγωγή μέσα από το 5^{ο} Αξίωμα Peano. Ας αντιπαραβάλουμε (βλ. Σχήμα 2.1) τη διατύπωση του 5^{ου} Αξιώματος Peano και της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής (χωρίς ποσοδείκτες και χωρίς συμβολισμό λογικής που ως γνωστόν περιπλέκουν τους μαθητές):

5^{ο} Αξίωμα Peano	Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής
Αν A υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε i. Το 0 ανήκει στο A ii. Αν n ανήκει στο A, τότε n+1 ανήκει στο A. Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω συνθήκες ταυτόχρονα, τότε A = $\mathbb{N}$	Αν P μια πρόταση που εξαρτάται από έναν Φυσικό Αριθμό n, ώστε i. Το P(0) είναι αληθές και ii. Αν το P(n) είναι αληθές, τότε και το P(n+1) είναι αληθές Αν ισχύουν οι δυο παραπάνω συνθήκες τότε η P(n) είναι αληθής για κάθε n Φυσικό Αριθμό.

Σχήμα 2.1: Παράθεση 5^{ου} Αξιώματος Peano και Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής

Καταρχάς, το 5^{ο} Αξίωμα Peano έχει απλούστερο συμβολισμό, εφόσον οι εκφράσεις 0, n και n+1 είναι απλούστερες από τις αντίστοιχες P(0), P(n), P(n+1).

Επίσης, μέσα από το 5ο Αξίωμα του Peano προκύπτει πιο εμφανώς, το ότι το 'σάρωμα' του ℕ, ενώ στην άλλη περίπτωση αυτή η πληροφορία είναι κρυμμένη. Ίσως λοιπόν θα ήταν προτιμότερο να εισαχθεί η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από το $5^{ο}$ Αξίωμα Peano με συζήτηση που να εστιάζει στη δομή του ℕ κι έπειτα να εισάγεται η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής ως ειδική περίπτωση αυτού, όπου $A=\{n \in \mathbb{N}/P(n)$ αληθής$\}$.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Η βιβλιογραφία στο πεδίο της Μαθηματικής Επαγωγής θέτει τις βάσεις για μια διδακτική προσέγγιση που θα ευνοήσει την 'κατανόησή' της. Τα σημαντικά σημεία σε αυτή την προσέγγιση είναι:

- Η εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής με 'αφελή επαγωγή' (ή ψευδο-επαγωγή) και με τρόπο ώστε η Μαθηματική Επαγωγή να προκύπτει μέσα από μια ανάγκη επίλυσης προβλήματος. Η εισαγωγή της Μαθηματικής Επαγωγής θα πρέπει επίσης να γίνεται μέσα από απλά παραδείγματα ώστε η τεχνική να μην επισκιάζει τη μετάβαση από το n στο n+1 (για συγκεκριμένες τιμές του n).
- Επίσης, κατά τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας πρέπει να αναδειχθεί η αναλογία ανάμεσα στη Μαθηματική Επαγωγή και στην Καλή Διάταξη του N.
- Θα πρέπει να γίνεται διεξοδική ανάλυση της έννοιας του λογικού συμπερασμού, καθώς επίσης οι μαθητές θα πρέπει να εκτίθενται σε προβλήματα με λανθασμένη Μαθηματική Επαγωγή προκειμένου να αναδειχθούν τα λεπτά σημεία της έννοιας.
- Η διδασκαλία οφείλει να κάνει χρήση κατάλληλων μοντέλων εννοιολογικής μεταφοράς.
- Τα παραδείγματα αλλά και η σειρά των προβλημάτων είναι ύψιστης σημασίας. Οι ασκήσεις πρέπει να έχουν ένα νόημα ύπαρξης, π.χ. να γεννώνται από τη γεωμετρία, και να μην εμφανίζονται ως ουρανοκατέβατα αλγεβρικά τρικ.
- Η εξάσκηση σε αναλυτική διατύπωση αναδρομικών αλγορίθμων με διαδοχικά περάσματα από 1→2, 2→3, … βοηθά στην διατύπωση του γενικού βήματος της Μαθηματικής Επαγωγής.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, υποστηρίχτηκε η άποψη ότι η διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από το 5ο Αξίωμα Peano, έχει παιδαγωγικά προτερήματα μιας και είναι μορφολογικά και εννοιολογικά απλούστερη.

2.2 Η Μαθηματική Επαγωγή στην ελληνική πραγματικότητα

Παρόλο που η Μαθηματική Επαγωγή συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του σχολικού βιβλίου (Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ Λυκείου), τα τελευταία χρόνια βρίσκεται εκτός διδακτέας ύλης. Σε διεθνές επίπεδο συμβαίνουν παρόμοια γεγονότα: υπάρχει ένα μεγάλο ερωτηματικό για το αν η Μαθηματική Επαγωγή θα έπρεπε ή όχι να αποτελεί τμήμα της διδακτέας ύλης (Lowenthal & Eisenberg, 1992). Φαίνεται πως ο λόγος για τον οποίο πλανάται αυτό το ερώτημα είναι τόσο οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση όσο και όσα έχουμε αναφέρει για το επιστημολογικό άλμα που σχετίζεται με το συμπέρασμά της.

Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007), και νυν Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ), στις οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του γενικού λυκείου (η τελευταία ενημέρωση του οποίου έγινε το 2007-2008), αναφέρει τις αρχές και τους σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών, οι οποίες συνάδουν με όσα προτείνει η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών. Για παράδειγμα, διατυπώνεται ρητά ότι η γνώση δεν μεταφέρεται από το δάσκαλο στο μαθητή και ότι ο κάθε μαθητής πρέπει να συμμετέχει ενεργά στην οικοδόμηση της γνώσης του, καθώς επίσης ότι σε κάθε ώρα διδασκαλίας συνιστάται να κυριαρχεί η προσωπική εργασία των μαθητών, ότι η τάξη δεν πρέπει να είναι ένας 'παθητικός τόπος' αλλά ένας τόπος όπου προάγεται η ανακαλυπτική μάθηση, η εξερεύνηση καταστάσεων κτλ. (ΥΠΕΠΘ, 2007). Παρόλα αυτά, σχετικά με τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής, δεν δίνει συγκεκριμένες προτάσεις ή τρόπους με τους οποίους μπορεί να υλοποιηθούν τα παραπάνω ούτε αναφέρει τις δυσκολίες που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές επί της Μαθηματικής Επαγωγής ή τρόπους για την υπέρβασή τους όπως αναφέρονται στην έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών. Αντιθέτως, η μοναδική πληροφορία που παρέχεται σχετικά με τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής ότι αυτό που πρέπει να γίνει κατανοητό -σχετικά με την έννοια- είναι ότι 'η αλήθεια ενός ισχυρισμού $P(\nu)$ για $\nu=1$ και η μετάβαση από την αλήθεια του $P(\nu)$ στην αλήθεια του $P(\nu+1)$ διασφαλίζουν την αλήθεια για κάθε θετικό ακέραιο' (ΥΠΕΠΘ, 2007, σελ.85). Επίσης προτείνεται οι καθηγητές να αφιερώσουν δεκατρείς διδακτικές ώρες το πολύ για όλο το εντός ύλης τέταρτο κεφάλαιο που αποτελείται από τις εξής παραγράφους: Μαθηματική Επαγωγή, ευκλείδεια διαίρεση, διαιρετότητα. Συνήθως, οι περισσότεροι διδάσκοντες δίνουν μεγαλύτερη σημασία -κατ' επέκταση και χρόνο- στις δύο τελευταίες

παραγράφους. Επομένως, η Μαθηματική Επαγωγή ως θεωρία-εφαρμογές και ασκήσεις, καταλήγει να διδάσκεται συνήθως για δύο διδακτικές ώρες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, οι μαθητές μυούνται στην έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής, μέσα από πληροφορίες που αφορούν την Ιστορία των Μαθηματικών. Κατόπιν ακολουθεί μια απόδειξη με εξηγήσεις και σχόλια ως εξής:

1. Αναφέρεται ότι θέλουμε να βρούμε το αποτέλεσμα του αθροίσματος: $1+3+5+7+...+(2\nu-1)$.

2. Υπολογίζεται το άθροισμα για κάποιες τιμές του ν (1,2,3,4) και εκφράζεται ως τετράγωνο κάποιου αριθμού

3. Εκφράζεται η εικασία $1+3+5+7+...+(2\nu-1)=\nu^2$. (1)

4. Εξηγείται ρητά ότι συνεχίζοντας να βρίσκουμε τιμές δεν μπορούμε να αποδείξουμε την ισχύ της πρότασης για όλους τους Φυσικούς Αριθμούς.

5. Ακολουθεί ένα σκεπτικό που σχετίζεται με τη διαισθητική επιβολή του συμπεράσματος της Μαθηματικής Επαγωγής, από τις υποθέσεις της:

«Αν όμως μπορούσαμε να δείξουμε ότι όταν αληθεύει ο ισχυρισμός (1) για αυθαίρετο θετικό ακέραιο ν *θα αληθεύει και για τον επόμενό του* ν+1 *, τότε ο ισχυρισμός θα ίσχυε για όλους τους θετικούς ακεραίους. Γιατί τότε, αφού ο ισχυρισμός είναι αληθής για* ν=1 *, θα είναι αληθής και για* ν=1+1=2 *, συνεπώς και για* ν=2+1=3 *και διαδοχικά για κάθε θετικό ακέραιο.»*

(ΥΠΕΠΘ, 1998, σελ. 136).

6. Διατυπώνεται αναλυτικά (λεκτικά και αλγεβρικά) το επαγωγικό βήμα.

7. Κλείνει η απόδειξη με το σκεπτικό ότι, αφού αποδείξαμε αυτό που είχαμε δηλώσει (στο 5^{ο} βήμα) ότι θέλαμε να δείξουμε, άρα η απόδειξη ισχύει.

Μάλιστα ακολουθεί η αναπαράσταση του μοντέλου του ντόμινο, με τη διαφορά ότι αντί για πλακίδια του ντόμινο έχουμε βιβλία και ότι δεν αναφέρεται ρητά η λέξη 'ντόμινο'. Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι, αν ρίξουμε το πρώτο βιβλίο και αν τα βιβλία είναι έτσι τοποθετημένα ώστε κάθε φορά που πέφτει κάποιο βιβλίο να ρίχνει και το επόμενό του, τότε θα ανατραπούν όλα τα βιβλία. Το μοντέλο της εννοιολογικής μεταφοράς που εικονογραφείται στο σχολικό βιβλίο (βλ. Σχήμα 2.2) είναι ουσιαστικά αυτό του ντόμινο, το οποίο όμως εκεί αποτελείται από βιβλία και όχι πλακίδια.

Σχήμα 2.2: Το σχήμα για την Μαθηματική Επαγωγή στο σχολικό βιβλίο (ΥΠΕΠΘ, 1998, σελ. 137).

Συνεπώς παρατηρούμε ότι ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια στο σχολικό βιβλίο (παράθεση ιστορικών στοιχείων) δεν είναι αυτός που προτείνεται στη βιβλιογραφία με ψευδο-επαγωγή (βλ. Harel, 2001) ή με επίλυση προβλήματος, όπως είναι π.χ. το πρόβλημα του κάλπικου νομίσματος (βλ. Movschovitz-Hadar, 1993). Επίσης, ο τρόπος με τον οποίο αιτιολογείται η διεξαγωγή του συμπεράσματος της Μαθηματικής Επαγωγής από τις υποθέσεις της σχετίζεται με αυτό που αναφέρει ο Poincaré (στο Lowenthal & Eisenberg, 1992) 'το συμπέρασμα επιβάλλεται πάνω μας μέσω της διαίσθησης' και δεν αναφέρεται ο πραγματικός λόγος για τον οποίο ισχύει το συμπέρασμα που είναι οι ισοδύναμες αρχές της Μαθηματικής Επαγωγής. Στο τέλος της θεωρίας παρατίθεται το μοντέλο της εννοιολογικής μεταφοράς του ντόμινο που προτείνεται δημιουργεί μια σύγχυση διότι, ενώ αντιστοιχίζεται σωστά ως εικόνα έννοιας στο ισοδύναμο 5^{ο} Αξίωμα Peano[3], το ίδιο το αξίωμα Peano δεν αναφέρεται. Αντιθέτως, οι υποθέσεις και το συμπέρασμα της Μαθηματικής Επαγωγής που αναφέρονται δεν μπορούν να αντιστοιχιστούν στο μοντέλο του ντόμινο ως εικόνα έννοιας, όπως έχουν αναφέρει οι Lowenthal και Eisenberg (1992).

Στη συνέχεια διατυπώνεται η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής και κατόπιν αναφέρεται ότι και οι δύο υποθέσεις είναι ταυτόχρονα απαραίτητες για τη διεξαγωγή του συμπεράσματος. Έπειτα αναφέρονται παραδείγματα λανθασμένων συμπερασμάτων λόγω του ότι μία από τις δύο υποθέσεις δεν ισχύει, πράγμα που συνιστάται και στη βιβλιογραφία. Ακολουθούν δύο εφαρμογές, σε αυστηρά

[3] Ο λόγος για τον οποίο η έκφραση 'Αν ρίξουμε προς τα πίσω το πρώτο βιβλίο και αν τα βιβλία είναι έτσι τοποθετημένα ώστε κάθε φορά που πέφτει κάποιο βιβλίο να ρίχνει και το επόμενό του, τότε θα ανατραπούν όλα τα βιβλία' έχει 1-1 αντιστοιχία με το 5^{ο} Αξίωμα Peano είναι ότι: η φράση 'Αν ρίξουμε προς τα πίσω το πρώτο βιβλίο' αντιστοιχίζεται στο 'αν το 1 ανήκει στο σύνολο S που εξετάζω' και η φράση 'αν τα βιβλία είναι έτσι τοποθετημένα ώστε κάθε φορά που πέφτει κάποιο βιβλίο να ρίχνει και το επόμενό του' αντιστοιχίζεται στο 'αν το σύνολό μου έχει τέτοια δομή ώστε να είναι επαγωγικό (δηλ. 'αν το ν ανήκει στο S, τότε και το ν+1 θα ανήκει στο S') και η φράση 'τότε θα ανατραπούν όλα τα βιβλία' αντιστοιχεί στο 'τότε σαρώνεται όλο το ℕ, δηλαδή S = ℕ).

αλγεβρικό πλαίσιο, μια με άθροισμα πεπερασμένης σειράς και μια ανισότητα. Στη συνέχεια παρατίθενται ασκήσεις για λύση που ανήκουν στους δύο παραπάνω τύπους.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Στην ελληνική πραγματικότητα, τα τελευταία χρόνια, η Μαθηματική Επαγωγή έχει τεθεί εκτός διδακτέας ύλης. Οι τελευταίες υποδείξεις του παιδαγωγικού ινστιτούτου από τις τελευταίες χρονιές που διδάχτηκε, παρέχουν οδηγίες που ναι μεν είναι συμβατές με την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών αλλά είναι πολύ γενικές και αφορούν τη διδακτική γενικά, με αποτέλεσμα να μην βοηθούν τον εκπαιδευτικό σχετικά με τη διαχείριση της Μαθηματικής Επαγωγής στην τάξη. Το σχολικό βιβλίο, χειρίζεται το θέμα της Μαθηματικής Επαγωγής, κατά βάση, με παραδοσιακό τρόπο. Το μοντέλο της εννοιολογικής μεταφοράς του ντόμινο που χρησιμοποιείται σε αυτό, παρόλο που δεν συνάδει -ως εικόνα έννοιας- με τον αλγόριθμο της Μαθηματικής Επαγωγής, είναι απολύτως συμβατό με το $5^{ο}$ αξίωμα Peano (εστιάζει στη δομή του $\mathbb{N}$) και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε μια διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής που την συνδέει με αυτό το αξίωμα.

2.3 Ανακεφαλαίωση – Ερευνητικό Ερώτημα

Στο κεφάλαιο αυτό, είδαμε ότι οι έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών στον τομέα της Μαθηματικής Επαγωγής περιλαμβάνουν ελάχιστα διδακτικά πειράματα γεγονός που χρήζει βελτίωσης. Οι περισσότερες έρευνες είναι εμπειρικές κατά τη διεξαγωγή των οποίων δίνεται ένα διαγνωστικό τεστ που ελέγχει τις γνώσεις και την ‘κατανόηση’ των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής· οι περισσότερες από αυτές τις έρευνες δρουν επιβεβαιωτικά ως προς τα αποτελέσματα της υπάρχουσας έρευνας, τα οποία χρονολογούνται από τις δεκαετίες ’70 και ‘80. Συνεπώς, παρατηρείται σαφώς, μια έλλειψη σε έρευνες που να έχουν ως στόχο την ανακάλυψη θεωρίας που αφορά την Μαθηματική Επαγωγή. Στις περισσότερες έρευνες, τα υποκείμενα είναι μαθητές λυκείου ή φοιτητές. Ελάχιστες έρευνες είναι εκείνες που έχουν ως υποκείμενα παιδιά ηλικίας 5-7 χρονών, από τις οποίες προκύπτουν ευρήματα ότι είναι δυνατή η σκέψη μέσω Μαθηματικής Επαγωγής σε αυτές τις ηλικίες. Καθώς επίσης, ελάχιστες είναι οι έρευνες που έχουν ως αντικείμενο μελέτης τον διδάσκοντα.

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών μας αποκαλύπτει ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές επί της Μαθηματικής Επαγωγής είναι πολυποίκιλες: εννοιολογικές, μαθηματικές, τεχνικές κ.ά. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι: η δυσκολία μετάβασης στο επαγωγικό βήμα από το βήμα n στο n+1 και η επαγωγική υπόθεση κατά την οποία οι μαθητές θεωρούν ότι υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε. Ορισμένα από τα αίτια των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την Μαθηματική Επαγωγή είναι η Ομωνυμία που σχετίζεται με τον συμβολισμό P(n), η καθημερινή γλώσσα, η έλλειψη εξάσκησης σε συλλογισμούς συμπερασμού, η ελλιπής κατανόηση του Modus Ponens, η αμφισημία του όρου 'επαγωγή' στη Μαθηματική Επαγωγή κ.ά. Σε αυτό το σημείο, υπογραμμίσαμε την έλλειψη της βιβλιογραφίας στην αναφορά του προφανούς, ότι η χρήση της καθημερινής γλώσσας συγχέει τους μαθητές σχετικά με τη χρήση λέξεων όπως 'Υποθέτω', 'Θεωρώ', 'Έστω', στην επαγωγική υπόθεση.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, υποστηρίχτηκε η άποψη ότι η διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από το 5ο Αξίωμα Peano, έχει παιδαγωγικά προτερήματα μιας και είναι μορφολογικά και εννοιολογικά απλούστερη.

Η βιβλιογραφία στο πεδίο της Μαθηματικής Επαγωγής θέτει τις βάσεις για μια διδακτική προσέγγιση που θα ευνοήσει την 'κατανόησή' της. Τα σημαντικά σημεία σε αυτή την προσέγγιση είναι:

- Η εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής με 'αφελή επαγωγή' (ή ψευδο-επαγωγή) και με τρόπο ώστε η Μαθηματική Επαγωγή να προκύπτει μέσα από μια ανάγκη επίλυσης προβλήματος. Η εισαγωγή της Μαθηματικής Επαγωγής θα πρέπει επίσης να γίνεται μέσα από απλά παραδείγματα ώστε η τεχνική να μην επισκιάζει τη μετάβαση από το n στο n+1 (για συγκεκριμένες τιμές του n).
- Επίσης, κατά τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας πρέπει να αναδειχθεί η αναλογία ανάμεσα στη Μαθηματικής Επαγωγής και στην Καλή Διάταξη του $\mathbb{N}$.
- Θα πρέπει να γίνεται διεξοδική ανάλυση της έννοιας του λογικού συμπερασμού, καθώς επίσης οι μαθητές θα πρέπει να εκτίθενται σε προβλήματα με λανθασμένη Μαθηματική Επαγωγή προκειμένου να αναδειχθούν τα λεπτά σημεία της έννοιας.
- Η διδασκαλία οφείλει να κάνει χρήση κατάλληλων μοντέλων εννοιολογικής μεταφοράς.

• Τα παραδείγματα αλλά και η σειρά των προβλημάτων είναι ύψιστης σημασίας. Οι ασκήσεις πρέπει να έχουν ένα νόημα ύπαρξης, π.χ. να γεννώνται από τη γεωμετρία, και να μην εμφανίζονται ως ουρανοκατέβατα αλγεβρικά τρικ.

• Η εξάσκηση σε αναλυτική διατύπωση αναδρομικών αλγορίθμων με διαδοχικά περάσματα από 1→2, 2→3, … βοηθά στην διατύπωση του γενικού βήματος της Μαθηματικής Επαγωγής.

Στην ελληνική πραγματικότητα, τα τελευταία χρόνια, η Μαθηματική Επαγωγή έχει τεθεί εκτός διδακτέας ύλης. Οι τελευταίες υποδείξεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου/ΙΕΠ από τις τελευταίες χρονιές που διδάχτηκε, παρέχουν οδηγίες που ναι μεν είναι συμβατές με την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών αλλά είναι πολύ γενικές και αφορούν τη διδακτική γενικά, με αποτέλεσμα να μην βοηθούν τον εκπαιδευτικό σχετικά με τη διαχείριση της Μαθηματικής Επαγωγής στην τάξη. Το σχολικό βιβλίο χειρίζεται το θέμα της Μαθηματικής Επαγωγής με παραδοσιακό τρόπο. Το μοντέλο της εννοιολογικής μεταφοράς του ντόμινο που χρησιμοποιείται σε αυτό, παρόλο που δεν συνάδει ως εικόνα έννοιας με τον αλγόριθμο της Μαθηματικής Επαγωγής, είναι απολύτως συμβατό με το 5° αξίωμα Peano (εστιάζει στη δομή του $\mathbb{N}$) και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε μια διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής που την συνδέει με αυτό το αξίωμα.

Ως γνωστόν ένας από τους κύριους στόχους της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών είναι να θεραπεύσει τα προβλήματα που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των διδασκόμενων εννοιών. Συνεπώς γεννάται η ανάγκη για αξιοποίηση των θεωρητικών και των διδακτικών οπτικών της Μαθηματικής Επαγωγής που έχουμε αναλύσει ως τώρα, προκειμένου να συγκροτηθεί ένα γενικό διδακτικό πλαίσιο αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής. Ωστόσο, είναι σαφές ότι οι πολλαπλές οπτικές, ο όγκος και η ποικιλία των πληροφοριών που μας δίνει η βιβλιογραφία, είναι δύσκολο να συντεθούν σε μια διδασκαλία που ακολουθεί τους κανόνες και τους χρονικούς περιορισμούς του ελληνικού Αναλυτικού Προγράμματος. Όμως στην εργασία μας, κρίνουμε ότι είναι σημαντική η προσπάθεια για την κατά το δυνατόν, αξιοποίηση των παραπάνω θεωρητικών και διδακτικών προσεγγίσεων στην ελληνική πραγματικότητα.

Επομένως, σε αυτή την εργασία θα γίνει μια απόπειρα να απαντηθούν τα εξής ερωτήματα:

Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις θεωρητικές και τις διδακτικές προσεγγίσεις της Μαθηματικής Επαγωγής που έχουμε αναφέρει ως τώρα προκειμένου να

- Συγκροτηθεί ένα γενικό διδακτικό πλαίσιο αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής
- *Συνθέσουμε μια διδακτική πρόταση για την ελληνική πραγματικότητα η οποία να διευκολύνει την κατασκευή νοήματος γύρω από την έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής;*

3. Συζήτηση

Το κεφάλαιο αυτό έχει διττό στόχο. Ο πρώτος στόχος είναι η αξιοποίηση των θεωρητικών και των διδακτικών προσεγγίσεων επί της Μαθηματικής Επαγωγής που έχουν παρουσιαστεί ως τώρα, προκειμένου να διατυπωθεί ένα διδακτικό πλαίσιο αποτελούμενο από ορισμένες γενικές αρχές για την διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής. Ο δεύτερος στόχος είναι ο συγκερασμός αυτού του διδακτικού πλαισίου που θα προκύψει με τα περιοριστικά δεδομένα της ελληνικής πραγματικότητας, με στόχο να καταλήξουμε σε μια διδακτική πρόταση για τα ελληνικά δεδομένα, αναφορικά με τη Μαθηματική Επαγωγή. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το διδακτικό πλαίσιο και η διδακτική πρόταση που προτείνουμε δεν αποτελούν τον μοναδικό τρόπο με τον οποίο μπορούν να συνδυαστούν και να συντεθούν οι θεωρητικές και διδακτικές προσεγγίσεις επί της Μαθηματικής Επαγωγής που έχουμε καλύψει μέχρι τώρα. Επίσης, θέλουμε να προσθέσουμε ότι οι μαθητές στους οποίους απευθύνεται το διδακτικό πλαίσιο που θα αναπτύξουμε μπορεί να είναι είτε μαθητές της Β΄ Λυκείου, είτε φοιτητές του πανεπιστημίου, τόσο των πρώτων ετών σχολών θετικών επιστημών όσο και άλλων σχολών. Αυτό το θεωρούμε διότι αφενός μεν, όπως έχουμε προαναφέρει η διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής με $5^{ο}$ Peano δεν παρουσιάζει δυσκολίες στη Β΄ Λυκείου και αφετέρου η εννοιολογική εμβάθυνση στην έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής που προσφέρει το παρακάτω διδακτικό πλαίσιο, συμβάλλει στο να αποκτήσουν μεγάλη επίγνωση επί της Μαθηματικής Επαγωγής ακόμα και σε φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών.

Ωστόσο, πριν προβούμε στους προαναφερθέντες στόχους, κρίνουμε απαραίτητο να διαχωρίσουμε τη γνώση που σχετίζεται με τη Μαθηματική Επαγωγή σε τέσσερα επίπεδα, όπως αυτό προκύπτει από τη δική μας ματιά, κατά την ανάγνωση της συνολικής βιβλιογραφίας που σχετίζεται με το θέμα μας. Αυτά τα τέσσερα επίπεδα γνώσης είναι τα εξής:

i. Προβληματισμός & ανάγκη για απόδειξη
ii. Η εννοιολογική ‘κατανόηση’ του αλγορίθμου της Μαθηματικής Επαγωγής
iii. Η αλγεβρική και εννοιολογική ικανότητα μετάβασης από το βήμα n στο n+1
iv. Η εμβάθυνση στην εννοιολογική ‘κατανόηση’ της Μαθηματικής Επαγωγής

Ας σημειωθεί ότι η λέξη ‘κατανόηση’ χρησιμοποιείται καταχρηστικά, μιας και δεν είναι εύκολο να ορίσει κανείς τί σημαίνει ‘κατανόηση’. Με τον όρο κατανόηση θα εννοούμε την κατασκευή νοήματος που βρίσκεται στη Ζώνη Επικείμενης

Ανάπτυξης του κάθε μαθητή αναφορικά με τη Μαθηματική Επαγωγή (πρβλ. Vygotsky, 1997).

Πριν περιγράψουμε αναλυτικά τα επίπεδα αυτά, κρίνουμε σκόπιμο να προτείνουμε όχι μόνο ένα διδακτικό πλαίσιο για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής αλλά και ορισμένες γενικές πληροφορίες που σχετίζονται με την αποτίμησή του αφού εφαρμοστεί, αναφορικά με την επίτευξη των επιμέρους διδακτικών στόχων. Επομένως, σχετικά με το πώς θα αξιολογήσουμε τη γνώση των μαθητών επί της Μαθηματικής Επαγωγής στην εξέλιξη της εφαρμογής αυτού του διδακτικού πλαισίου, να σημειώσουμε ότι υπάρχει μια γενική οδηγία-αρχή, η οποία αφορά όλα τα επίπεδα. Θεωρούμε ότι είναι πολύ σημαντικό σε κάθε άσκηση που αφορά σε μοτίβα (π.χ. εύρεση μοτίβου-γενικού τύπου, μετάβαση από ένα βήμα στο επόμενο κτλ.) ο διδάσκων να ζητά από τους μαθητές, αφού απαντήσουν στο ερώτημα που τους έθεσε (ο ίδιος ή η άσκηση), να διατυπώσουν γραπτά 'πώς σκέφτηκαν για να απαντήσουν στο ερώτημα'. Αυτό αποτελεί μια πρόταση των Stalo, Elia και Gagatsis (2006) η οποία αποσκοπεί αφενός στην άμεση διατύπωση του σκεπτικού των μαθητών, ώστε να μην το ξεχάσουν, και αφετέρου στην αξιοποίηση αυτής της πληροφορίας από τους ίδιους τους μαθητές, μεταγενέστερα, όταν θα χρειαστεί να γενικεύσουν. Η ιδέα αυτή εφαρμόζεται σε πολλές από τις προτεινόμενες δραστηριότητες της § 3.2**.** Εμείς, θεωρούμε ότι αυτή η τεχνική, εφαρμοσμένη σε τακτά χρονικά διαστήματα κατά τη διάρκεια του μαθήματος, εξυπηρετεί και τον στόχο του να εξετάσουμε τη γνώση των μαθητών αναφορικά με τον αν αυτή προέρχεται από αληθείς πεποιθήσεις που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση χωρίς να εμπλέκεται το ενδεχόμενο της τύχης σε αυτή τη διαδικασία. Έτσι, μπορούμε μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών να αξιολογήσουμε τόσο την ποσότητα και την ποιότητα της γνώσης τους, όσο και την πορεία εξέλιξής της. Επίσης, για τον αναγνώστη-διδάσκοντα που επιθυμεί να εφαρμόσει το παραπάνω πλαίσιο και να αξιολογήσει την 'κατανόηση' των μαθητών, σημειώνουμε για άλλη μια φορά, ότι κατά την Jetter (2012), ο καλύτερος τρόπος αποτίμησης των πεποιθήσεων των μαθητών περί απόδειξης είναι να τους ζητήσουμε να ασκήσουν κριτική σε μια απόπειρα απόδειξης. Αξίζει να προσθέσουμε ότι το διδακτικό πλαίσιο τάσσεται υπέρ των υψηλότερου-επιπέδου δραστηριοτήτων, οι οποίες απαιτούν από τους μαθητές να σκέφτονται εννοιολογικά και τους παρακινούν να κάνουν συνδέσεις. Μέσα στο διδακτικό πλαίσιο περιέχονται ορισμένα παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων.

3.1 Διδακτικό πλαίσιο

3.1.1 Προβληματισμός & ανάγκη για απόδειξη

Διδακτικοί στόχοι:

- Η πρόκληση της εμπλοκής των Μαθητών με τα Μαθηματικά
- Η πυροδότηση μιας νοητικής ανάγκης για απόδειξη

Κατά τη δική μας κρίση, καλό είναι η πρώτη επαφή των μαθητών με προτάσεις (π.χ. με πεπερασμένες σειρές) που αποδεικνύονται με Μαθηματική Επαγωγή να προκύπτουν μέσα στο πλαίσιο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, έτσι ώστε αφενός μεν να έχουν νόημα για τα παιδιά, και αφετέρου να μην αποτελούν ουρανοκατέβατα αλγεβρικά προβλήματα χωρίς πληροφορίες προέλευσης. Αυτό είναι πολύ απαιτητικό, διότι πρώτον τα μη αλγεβρικά - γεωμετρικά προβλήματα με Μαθηματική Επαγωγή σπανίζουν και δεύτερον ο συνδυασμός των Ρεαλιστικών Μαθηματικών με την Μαθηματική Επαγωγή είναι πράγμα ασυνήθιστο. Κατά τη διάρκεια αυτής της έρευνας, το μοναδικό πρόβλημα που έχουμε συναντήσει που θα μπορούσε να ενταχθεί στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά είναι το πρόβλημα του χάρτη των δύο χρωμάτων και οι παραλλαγές αυτού οι οποίες υπάρχουν σε διάφορες εκδοχές στο βιβλίο των Golovina και Yaglom (1963) (βλ. § 6.5). Παρακάτω, παραθέτουμε ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος. Εμείς δημιουργήσαμε το ρεαλιστικό κομμάτι-πλαίσιο αυτού του προβλήματος, ενώ η πηγή από την οποία ανασύραμε το γεωμετρικό πρόβλημα που συνδέεται με το άθροισμα 1 + 2 + 3+ … + n, είναι το άρθρο της Wiscamb (1970).

Παράδειγμα:

Σε μια ορεινή απομακρυσμένη περιοχή της Ελλάδας, οι δρόμοι που ενώνουν τα διάφορα χωριουδάκια αναμεταξύ τους έχουν καταστραφεί ή δεν κτίστηκαν ποτέ και πρέπει να δημιουργηθούν όλοι οι δρόμοι από την αρχή. Ο Δήμαρχος και το συμβούλιο της περιοχής προσπαθούν να βγάλουν άκρη για το πώς να δημιουργηθούν όλοι οι δυνατοί συντομότεροι δρόμοι (ευθύγραμμα τμήματα), ώστε όλα τα χωριά να επικοινωνούν το ένα με το άλλο με έναν δρόμο τη φορά, αλλά δεν τα καταφέρνουν. Πόσοι διαφορετικοί δρόμοι προκύπτουν (α) ανάμεσα σε δύο χωριά; (β) ανάμεσα σε τρία; (γ) ανάμεσα σε τέσσερα; (δ) ανάμεσα σε δέκα; (ε) ανάμεσα σε 10^{100}; (ζ) ανάμεσα σε n; Μπορείτε να τους βοηθήσετε; Ας σημειωθεί ότι τα χωριά είναι ανά τρία μη συνευθειακά.

Σχόλια: Επιθυμούμε ο καθηγητής να βοηθήσει τους μαθητές στην Οριζόντια Μαθηματικοποίηση και να τους οδηγήσει σε έναν ημι-συμπληρωμένο πίνακα όπως είναι ο πίνακας 3.1.

Πίνακας 3.1: Πίνακας που προκύπτει από Οριζόντια Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Σχήμα	Πλήθος χωριών	Πλήθος δρόμων	Παρατηρήσεις
	2	1=1	
	3	3=1+2	Όπου το 3 είναι το άθροισμα του προηγούμενου στοιχείου της ίδιας στήλης και του προηγούμενου στοιχείου της στήλης αριστερά.
	4	6=1+2+3	
	5		
	6		
	…		
	10		
	…		
	10^{100}		
	N		
	n+1		

Όσοι αναγνώστες ενδιαφέρονται να λύσουν το πρόβλημα, πολύ σύντομα θα διαπιστώσουν ότι μέσα από οριζόντια μαθηματικοποίηση προκύπτει το γεωμετρικό πρόβλημα ‘πόσες ευθείες (ή πόσα ευθύγραμμα τμήματα) διέρχονται ανά n μη συνευθειακά ανά τρία, σημεία;’ Το ενδιαφέρον είναι ότι στα n+1 σημεία έχω 1+2+…+n ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή ότι δημιουργείται το γνωστό αλγεβρικό πρόβλημα 1+2+…+n=n(n+1)/2. Περισσότερες πληροφορίες για την επίλυση και το χειρισμό αυτού του προβλήματος στην τάξη θα βρείτε στην § 3.2.2**.** Αυτή η άσκηση, οδηγεί τους μαθητές να διερευνήσουν τι συμβαίνει για τις διάφορες περιπτώσεις του n, πώς διαμορφώνεται το σχήμα, να υπολογίσουν πόσα ευθύγραμμα τμήματα

προκύπτουν σε σχέση με τις διάφορες τιμές του n, αλλά και να κάνουν εικασίες για το τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου το n είναι 'πολύ μεγάλο' (π.χ. 10^{100}) ή στην γενικευμένη περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η μεταβλητή n. Έτσι, μέσα από τη Μάθηση που Βασίζεται στη διερεύνηση, οι μαθητές ανακαλύπτουν μοτίβα, κάνουν υποθέσεις και διατυπώνουν εικασίες.

Εδώ, επίσης εκμεταλλευόμαστε την ανάγκη για υπολογισμό, καθώς ένα από τα 'συγκεκαλυμμένα' ερωτήματα είναι ποιος αριθμός είναι το 1+2+…+n; Φυσικά, οι μαθητές δεν έχουν τα μέσα να υπολογίσουν αυτού του τύπου το άθροισμα εφόσον δεν έχει διδαχτεί η Μαθηματική Επαγωγή ακόμα. Επομένως δεν απαιτούμε κάτι τέτοιο, μιας και οι στόχοι αυτής της άσκησης είναι να προβληματίσει τους μαθητές γύρω από ένα μαθηματικό θέμα, η σύνδεση Μαθηματικής Επαγωγής και Γεωμετρίας καθώς επίσης και η έκθεση των μαθητών σε ένα πρόβλημα Ρεαλιστικών Μαθηματικών που να έχει νόημα για αυτούς. Προτείνουμε, ο διδάσκων να επανέλθει σε αυτό το πρόβλημα, μετά τη διδασκαλία της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής, ως ένα από τα παραδείγματα για εφαρμογή.

Θεωρούμε ότι ένα από τα πρωταρχικά βήματα στη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής οφείλει να είναι η πυροδότηση μιας ανάγκης για απόδειξη στους μαθητές, και συγκεκριμένα ανάγκη για απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή. Όπως είδαμε, οι μαθητές δεν εμπλέκονται στη διαδικασία της απόδειξης, διότι δεν βλέπουν μια ανάγκη για να το κάνουν αυτό (Balacheff, 1991, στο Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, Winicki-Lanman, 2012, σελ. 219). Ένας τρόπος για να προκαλέσουμε την ανάγκη για απόδειξη είναι διαμέσου μιας από τις επιμέρους ανάγκες της απόδειξης που είδαμε: την ανάγκη για βεβαιότητα, η οποία, όπως έχουμε προαναφέρει, μπορεί να πυροδοτηθεί μέσα από καταστάσεις αβεβαιότητας. Μπορούμε λοιπόν να προκαλέσουμε αβεβαιότητα στους μαθητές μέσα από την έκθεσή τους σε εικασίες μεγάλων μαθηματικών -οι οποίες ήταν βασισμένες στην εποπτεία συγκεκριμένων περιπτώσεων- και αργότερα αποδείχθηκαν λανθασμένες, όπως αυτές που έχουμε αναφέρει ότι παραθέτουν οι Golovina και Yaglom (1963) - όπως είναι λ.χ., η εικασία του Fermat (βλ. §1.3)- ή μέσα από τις ασκήσεις που παραθέτουμε παρακάτω, τις οποίες προτείνει ο Lambrou (2005, section 3, σελ. 7). Οι ασκήσεις αυτές βασίζονται στη διερεύνηση εφόσον φαίνεται ότι ακολουθούν ένα συγκεκριμένο μοτίβο. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει για όλες τις ασκήσεις.

«Μαντέψτε το κατάλληλο μοτίβο, αφού ελέγξετε τι συμβαίνει για τις πρώτες τιμές του n. Χρησιμοποιήστε ένα επαγωγικό επιχείρημα για να βρείτε τα ακόλουθα αθροίσματα:

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2$,

b) $1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \ldots + n \cdot (n!)$,

c) $n^2 - [(n-1)^2 - [(n-2)^2 - [(n-3)^2 - [\ldots - [3^2 - (2^2 - 1^2)]\ldots]]]]$,

d) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$. »

(Lambrou, 2005, section 3, σελ. 7).

Ή

Να ελέγξετε για διάφορες τιμές του n αν οι παρακάτω αριθμοί είναι τέλεια τετράγωνα: $991 \times n^2 + 1$ (βλ. Golovina & Yaglom, 1963, σελ.7).

Ας αναλύσουμε την τελευταία άσκηση, προκειμένου να διασαφηνίσουμε αυτά που αναφέραμε σχετικά με την ανάγκη για βεβαιότητα. Αν ελέγξει κανείς την ποσότητα $991 \times n^2 + 1$ για τις πρώτες τιμές του n, θα καταλήξει στην εικασία ότι οι αριθμοί αυτής της μορφής είναι πρώτοι. Αν ελέγξει κανείς και για μεγαλύτερες τιμές του n, θα επιβεβαιώσει την εικασία. Ο πρώτος φυσικός για τον οποίο δεν ισχύει η εικασία είναι ο n=12.055.735.790.331.359.447.442.538.767. Φυσικά, αυτό μπορεί να ελεγχθεί μόνο μέσα από τη χρήση υπολογιστή. Επομένως, ο αναστοχασμός των μαθητών πάνω σε τέτοια παραδείγματα που κινούν υποψίες προς μία εικασία, η οποία όμως καταρρίπτεται από κάποιο αντιπαράδειγμα, είναι ικανός να δημιουργήσει στους μαθητές αβεβαιότητα για το πότε ισχύει μια εικασία και πότε όχι. Η απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή έρχεται να δώσει απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Βεβαίως, θεωρούμε ότι στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο ο διδάσκων να κάνει μια συζήτηση η οποία να ξεκινά με αφόρμηση την ανάγκη για εύρεση μιας μεθόδου η οποία να είναι ικανή να μας δώσει βέβαιες απαντήσεις σχετικά με την ισχύ μιας εικασίας. Κατόπιν θεωρούμε ότι ο διδάσκων καλό είναι να συνεχίζει τη συζήτηση παραθέτοντας επιχειρήματα και παραδείγματα προτάσεων που αποδεικνύονται αποκλειστικά με τη μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής, μέσα από τα οποία να προκύπτει ότι οι μέχρι τώρα γνωστές αποδεικτικές μέθοδοι (αυτές της άμεσης απόδειξης και της απόδειξης με εις άτοπον απαγωγή) δεν επαρκούν για τον συγκεκριμένο στόχο.

3.1.2 Η εννοιολογική 'κατανόηση' του αλγορίθμου της Μαθηματικής Επαγωγής

Διδακτικοί στόχοι

- Να γίνει αντιληπτό ότι και οι δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ταυτόχρονα απαραίτητες για τη διεξαγωγή του συμπεράσματος αυτής
- Να αναδειχθεί η αναλογία ανάμεσα στη Μαθηματική Επαγωγή και στην Καλή Διάταξη του συνόλου των Φυσικών Αριθμών.

Στη συνέχεια, προτείνουμε να γίνει εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από το μοντέλο του ντόμινο με τρόπο συναφή με αυτά που προτείνουν οι Καλαβάσης και Μούτσιος-Ρέντζος (2015). Ξεκινώντας από το ερώτημα 'Τι πρέπει να ισχύει για να πέσουν όλα τα κομμάτια ενός ντόμινο;' (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015, σελ. 267) καταγράφουμε την ιδεοθύελλα των απαντήσεων των μαθητών με στόχο να διασαφηνιστούν οι προϋποθέσεις της πτώσης όλων των κομματιών του ντόμινο δίνοντας έμφαση σε δύο άξονες: ο πρώτος άξονας έχει να κάνει με τις δύο προϋποθέσεις που σχετίζονται με τις υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής: δηλαδή, όλα τα κομμάτια του ντόμινο θα πέσουν εφόσον πέσει το πρώτο κομμάτι και εφόσον όλα τα κομμάτια είναι τοποθετημένα ώστε, αν πέσει κάποιο κομμάτι, να πέσει και το επόμενό του. Ο δεύτερος άξονας έχει να κάνει με την αναλογία που οφείλει να υπάρχει ανάμεσα στο μοντέλο μεταφοράς (εν προκειμένω στο μοντέλο του ντόμινο) και στην καλή διάταξη του συνόλου των Φυσικών Αριθμών. Δηλαδή, θέλουμε να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι τα κομμάτια του ντόμινο πέφτουν επειδή έτσι τα στήσαμε (γεγονός που αντιστοιχεί στο ότι η 'όποια' ιδιότητα P που θέλουμε να δείξουμε για τους Φυσικούς Αριθμούς, ισχύει λόγω της δομής του συνόλου των Φυσικών Αριθμών). Επιπρόσθετα, προκειμένου να κάνουμε αυτή την καθοδηγούμενη, αναφορικά με τις προϋποθέσεις που θέλουμε να προκύψουν, εμπειρία, μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να σηκωθούν και να προσποιηθούν ότι ο καθένας από αυτούς είναι ένα κομμάτι του ντόμινο. Μέσα από αυτό το παιχνίδι, αναμένουμε να τους παρακινήσουμε ακόμα περισσότερο να αναστοχαστούν επάνω σε αυτή τη βιωματική εμπειρία προκειμένου να διατυπώσουν τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες πέφτουν τα κομμάτια του ντόμινο. Έτσι, οι μαθητές 'μαθαίνουν κάνοντας' (Dewey) εφόσον αναστοχάζονται επί των εμπειριών τους προκειμένου να ανακαλύψουν ποιες είναι οι ζητούμενες προϋποθέσεις, μέσα σε ένα πλαίσιο καθοδηγούμενης επαναεπινόησης.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να διατυπώσουμε το 5^{ο} Αξίωμα Peano, εξηγώντας ότι τα αξιώματα των Μαθηματικών είναι αρχές που δεχόμαστε a priori, και να ρωτήσουμε τους μαθητές αν μπορούν να αναγνωρίσουν ομοιότητες ανάμεσα σε αυτό και όσα έχουν ειπωθεί για το ντόμινο. Εδώ, η σύνδεση με το μοντέλο του ντόμινο είναι ότι:

1. Η υπόθεση ‘ αν $0 \in A$, A υποσύνολο του N’ αντιστοιχεί στην πτώση του πρώτου κομματιού του ντόμινο.

2. Η υπόθεση ‘Αν n ανήκει στο A, τότε n+1 ανήκει στο A’, αντιστοιχεί στο ότι αν πέσει ένα κομμάτι του ντόμινο, τότε θα πέσει και το επόμενό του.

3. Το συμπέρασμα ότι ‘Αν ισχύουν οι δύο παραπάνω συνθήκες ταυτόχρονα, τότε A=N’ αντιστοιχεί στο ότι ‘αν ισχύουν οι δύο αυτές συνθήκες, τότε θα πέσουν όλα τα κομμάτια του ντόμινο’.

4. Η παρατήρηση ότι η δομή του συνόλου των Φυσικών Αριθμών είναι τέτοια ώστε αυτό να έχει ελάχιστο στοιχείο και να είναι επαγωγικό αντιστοιχεί στο ότι το ντόμινο είναι στημένο έτσι ώστε να υπάρχει ένα πρώτο κομμάτι και κάθε κομμάτι να ακολουθείται από το επόμενό του.

Στο σημείο αυτό, μπορεί να διδαχτεί η Μαθηματική Επαγωγή ως ειδική περίπτωση του 5^{ου} Αξιώματος Peano, όπως έχουμε δει πρωτύτερα, δηλαδή, η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει αν στις υποθέσεις του Αξιώματος θέσουμε όπου A το $B=\{n \in \mathbb{N}/P(n)$ αληθής$\}$. Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στην αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στη δομή του N και στο πώς στήσαμε το ντόμινο, δηλαδή πρέπει να υπογραμμιστεί ότι: το γεγονός ότι η ιδιότητα P που ισχύει στους Φυσικούς λόγω της δομής του $\mathbb{N}$ αντιστοιχεί στο ότι τα κομμάτια του ντόμινο πέφτουν διότι τα στήσαμε με τρόπο ώστε να πέφτουν. Μέσα από τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής ως ειδικής περίπτωσης του 5^{ου} Αξιώματος Peano εξηγούμε τους λόγους για τους οποίους ισχύει η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, ώστε αυτή να μην φαίνεται ως μια ουρανοκατέβατη εξωτερικά επιβεβλημένη θεωρία. Με τον τρόπο αυτό, καλύπτουμε την ανάγκη για αιτιότητα που έχουν οι μαθητές.[4]

[4] Εναλλακτικά, αν κάποιος διδάσκων διαφωνεί με τη χρήση του 5^{ου} Αξιώματος Peano, μπορεί να ακολουθήσει τα βήματα που προτείνουν οι Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος (2015), δηλαδή, να ρωτήσει αν οι μαθητές διακρίνουν κάποια σύνδεση ανάμεσα στο μοντέλο του ντόμινο και στην Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, αφού την διατυπώσει ως εξής: «ΑΝ μια ιδιότητα ισχύει για τον πρώτο Φυσικό ΚΑΙ μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση συνεπαγωγής ‘Αν η ιδιότητα ισχύει για έναν τυχαίο Φυσικό, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει και για τον επόμενό του’, ΤΟΤΕ η ιδιότητα ισχύει για όλους τους Φυσικούς» (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015, σελ. 71).

Είναι σημαντικό στο παραπάνω βήμα κατά το οποίο διατυπώνεται η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής να συζητηθούν όσα έχουμε αναφέρει ότι πρέπει να επισημανθούν ρητά, στην § 2.1.2. Υπενθυμίζουμε ότι αυτές οι επισημάνσεις αφορούν πρώτον, στην επεξήγηση της έννοιας των λέξεων 'Υποθέτω', 'Θεωρώ', κτλ., όπως αυτές νοηματοδοτούνται στη γλώσσα των Μαθηματικών (και επομένως δεν θεωρούμε ως αληθή την ισχύ της πρότασης P(n)), δεύτερον, στην Ομωνυμία της έκφρασης P(n) όπως αυτή εμφανίζεται στην επαγωγική υπόθεση και στο συμπέρασμα και τρίτον στο να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι και οι δύο υποθέσεις είναι απαραίτητες προκειμένου να καταλήξουμε στο συμπέρασμα. Αυτό, όπως έχουμε προαναφέρει, επιτυγχάνεται μέσα από λανθασμένες εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής που καταλήγουν σε συμπεράσματα που δεν ισχύουν. Για να γίνει αυτό περισσότερο κατανοητό, παραθέτουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1^{ο}

Στόχος: να αναδειχθεί η σημαντικότητα της βασικής υπόθεσης της Μαθηματικής Επαγωγής, $P(n_0)$.

Περιεχόμενο: αν παραλείψουμε την υπόθεση βάσης της Μαθηματικής Επαγωγής, μπορούμε να 'αποδείξουμε' την πρόταση P(n), ότι κάθε Φυσικός Αριθμός n 'ισούται' με τον επόμενό του (βλ. Golovina & Yaglom, 1963, σελ. 10).

'Απόδειξη'

Έστω ότι για κάποιο Φυσικό Αριθμό κ ισχύει ότι κ=κ+1 (Α), τότε πρέπει να δείξουμε ότι ο επόμενός του κ, δηλ. ο κ+1, θα είναι ίσος με τον επόμενο αυτού, δηλ. με (κ+1)+1=κ+2. Πράγματι, αν στη σχέση (Α), προσθέσουμε τον αριθμό 1 και στα δύο μέλη, λαμβάνουμε ότι κ+1=κ+2. Άρα κάθε Φυσικός 'ισούται' με τον επόμενό του.

Επομένως, το επαγωγικό βήμα ισχύει σε αυτό το παράδειγμα αλλά είναι προφανές ότι το συμπέρασμα είναι εσφαλμένο. Αυτό συμβαίνει διότι δεν ελέγχθηκε η υπόθεση βάσης της Μαθηματικής Επαγωγής. Το συμπέρασμα δεν ισχύει διότι δεν υπάρχει κανένας (ελάχιστος) Φυσικός για τον οποίο να ισχύει η πρόταση P(n). Πράγματι η εξίσωση x=x+1, όπου $x \in N$ είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 2^{ο}

Στόχος: να αναδειχθεί η σημαντικότητα του επαγωγικού βήματος $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

Περιεχόμενο: αν παραλείψουμε τον λογικό συμπερασμό $P(n) \rightarrow P(n+1)$, μπορούμε να 'αποδείξουμε' ότι για κάθε περιττό κ και για κάθε Φυσικό Αριθμό n, ο $n^{\kappa} - n$, διαιρείται με κ.

'Απόδειξη'

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο $n^3 - n$, διαιρείται με το 3.

(Υπόδειξη: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$. Οι $n - 1$, n, $n+1$, ως τρεις διαδοχικοί αριθμοί, σίγουρα συμπεριλαμβάνουν ανάμεσά τους ένα πολλαπλάσιο του 3, εφόσον τα πολλαπλάσια του 3 προκύπτουν ανά 3 διαδοχικούς Φυσικούς Αριθμούς. Άρα και το γινόμενό τους θα είναι πολλαπλάσιο του 3.)

Με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 και ότι ο $n^7 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Αν λοιπόν κανείς βασιστεί στην εποπτεία αυτών των συγκεκριμένων περιπτώσεων, μπορεί εύκολα να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ο $n^{\kappa} - n$, διαιρείται με κ. Ωστόσο, ένα αντιπαράδειγμα είναι η περίπτωση για κ=9. Ο $2^9 - 2 = 510$ δεν διαιρείται με 9.

Παρατήρηση: τυγχάνει τα παραδείγματα αυτής της κατηγορίας να είναι όμοια με τα παραδείγματα που χρησιμοποιούμε για να πυροδοτήσουμε καταστάσεις αβεβαιότητας σχετικά με την ισχύ μιας υπόθεσης. Επομένως, σε αυτή τη θέση θα μπορούσαμε να έχουμε το παράδειγμα με την εικασία του Fermat (βλ. §1.3) και τούμπλαλιν.

Στο σημείο αυτό μπορούν να δοθούν ορισμένα παραδείγματα προτάσεων που αποδεικνύονται με Μαθηματική Επαγωγή προκειμένου να μυηθούν οι μαθητές στη μαθηματική διαδικασία και συλλογιστική σε πρακτικό επίπεδο. Σύμφωνα με τις συμβουλές των Avital & Libeskind (1976), τα παραδείγματα πρέπει να είναι απλά, ώστε να μην επισκιάζει η αλγεβρική τεχνική τη συνολική διαδικασία. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο υπολογισμός του αθροίσματος $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2\nu-1$. Εδώ, μπορεί να γίνει η απόδειξη της σχέσης $1+2+\ldots+n=n(n+1)2$ που αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.1.i, μέσα στο γεωμετρικό πρόβλημα Ρεαλιστικών Μαθηματικών, συνδεδεμένη πάντα με το αναφορικό της νόημα, εντός του δοθέντος προβλήματος.

3.1.3 Η αλγεβρική και εννοιολογική ικανότητα μετάβασης από το βήμα n στο n+1

Διδακτικοί στόχοι

- Διευκόλυνση στον αλγεβρικό χειρισμό της μετάβασης από το βήμα n στο n+1

• Διευκόλυνση στη νοηματοδότηση της γενικότητας της ισχύος της μετάβασης από το βήμα n στο n+1

Προκειμένου να προσεγγίσουν οι μαθητές αυτό το επίπεδο γνώσης, προτείνουμε αρχικά, ο διδάσκων να δώσει στους μαθητές ασκήσεις διατυπωμένες με τρόπο τέτοιο, ώστε να τους οδηγεί στη μετάβαση από το βήμα n στο n+1, μέσα από την τεχνική της ψευδο-επαγωγής όπως την περιγράφει ο Harel (2001). Υπενθυμίζουμε ότι η ψευδο-επαγωγή σχετίζεται με την εποπτεία και τον έλεγχο αρκετών συγκεκριμένων περιπτώσεων με έμφαση στη μετάβαση από ένα βήμα στο επόμενο, δηλ. το πώς μεταβαίνω από το P(1) στο P(2) (P(1)→P(2)), P(2)→P(3), …, P(n)→P(n+1), όπου εδώ το n είναι ένας συγκεκριμένος τυχαίος Φυσικός. Επηρεασμένοι από το άρθρο του Allen (2001) προτείνουμε τον συνδυασμό της ψευδο-επαγωγής με τη χρήση αναδρομικών συναρτήσεων, όπως αυτά συνδυάζονται στο επόμενο παράδειγμα άσκησης.

Άσκηση:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις g(n)=n(n+1)/2 και f(n)=1+2+3+…+n. (α) να συμπληρώσετε τις πρώτες τέσσερις στήλες του πίνακα 3.2 και (β) να συμπληρωθεί η τελευταία στήλη του πίνακα. (γ) Μπορείτε να δώσετε έναν τίτλο στις στήλες 3 και 5;

Πίνακας 3.2: Πίνακας άσκησης για εφαρμογή ψευδο-επαγωγής

n	f(n)		g(n)	
1	1	-------	1x2/2=1	----------
2	f(2)=1+2=3	f(2)= f(1)+2	2x3/2=3	f(2)=1+2=g(1)+2=1x2/2+2= (1x2+2x2)/2=2(1+2)/2=2x3/2=g(2)
3				
4				
5				
κ				
κ+1				

Σχόλια: η διδακτική λογική που ακολουθεί η άσκηση είναι ότι από τη μια μεριά η τελευταία στήλη οδηγεί τους μαθητές (μέσα από τη συμπλήρωση της 3^{ης} στήλης) στη διατύπωση του f(n) βάσει του f(n-1) για συγκεκριμένες τιμές του n, διευκολύνοντας έτσι τη μετάβαση από το βήμα n στο n+1 για συγκεκριμένες τιμές

του n. Από την άλλη, η λειτουργία της τελευταίας στήλης είναι ότι οδηγεί στη μετάβαση από το f(n) στο g(n) για διάφορες αλλά συγκεκριμένες τιμές του n και αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι, όταν γνωρίζω ότι g(1)=f(1), f(2)=g(2) κτλ., και μπορώ να βρω έναν τρόπο να εκφράσω ότι 'αν g(n)=f(n) τότε και g(n+1)=f(n+1)', τότε διευκολύνεται η διαδικασία μετάβασης από το βήμα n στο n+1 (για συγκεκριμένες τιμές του n). Οπότε αυτό που απομένει είναι: πρώτον, το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα, δηλ. το πέρασμα από συγκεκριμένες τιμές του n, στη χρήση μεταβλητής για τη μετάβαση από το βήμα n στο n+1, όπου εδώ πλέον το n έχει το νόημα μιας συγκεκριμένης αλλά αφηρημένης αριθμητικής τιμής, και δεύτερον η παρατήρηση ότι εφόσον η μεταβλητή n επιλέχτηκε για να εκφράσει έναν τυχαίο Φυσικό αριθμό, χωρίς συγκεκριμένες προϋποθέσεις ή ιδιότητες, τότε η μετάβαση από το βήμα n στο n+1 έχει γενική ισχύ για κάθε Φυσικό αριθμό n.

3.1.4 Η εμβάθυνση στην εννοιολογική 'κατανόηση' της Μαθηματικής Επαγωγής

Διδακτικοί στόχοι

- Η ανάδειξη της σημαντικότητας του συνόλου των Φυσικών Αριθμών ως συνόλου στο οποίο αυτή εφαρμόζεται
- Η ανάδειξη των συλλογιστικών που είναι αποδεκτές στη Μαθηματική Κοινότητα

Αυτό το τελικό επίπεδο έχει διαμορφωθεί προκειμένου αφενός μεν να παγιωθούν οι μέχρι τώρα γνώσεις των μαθητών και αφετέρου να διευκολυνθεί η εμβάθυνση σε αυτές. Αυτό θεωρούμε ότι επιτυγχάνεται μέσα από δύο οδούς. Η πρώτη οδός αφορά στην αξιοποίηση της ανάγκης για δομή, δηλαδή της ανάγκης για λογική αναδιοργάνωση των γνώσεων εντός μιας δομής, η οποία, όπως είδαμε, κατά τους Moutsios-Rentzos και Spyrou (2013), μπορεί να πυροδοτηθεί μέσα από ερωτήσεις του τύπου: αν αφαιρέσουμε αυτό το αξίωμα, τι συνέπειες θα έχουμε; Η δεύτερη οδός σχετίζεται με την έκθεση των μαθητών σε λανθασμένες αποδείξεις με Μαθηματική Επαγωγή, των οποίων το λάθος δεν σχετίζεται με αυτά που έχουμε δει ως τώρα, δηλαδή με την παράλειψη μιας εκ των δύο υποθέσεων της Μαθηματικής Επαγωγής, αλλά με λανθασμένη συλλογιστική, όπως θα δούμε παρακάτω. Σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις έχουμε Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση, εφόσον αυτές ωθούν τους μαθητές να σκέφτονται κριτικά, να κάνουν παρατηρήσεις, να θέτουν ερωτήσεις, να ανατρέχουν σε βιβλία και άλλες πηγές, προκειμένου να θυμηθούν αυτά που θεωρούνται ήδη γνωστά, να κάνουν μια επισκόπηση πάνω σε όσα

γνωρίζουν υπό το φως των νέων πληροφοριών, καθώς επίσης τους ωθούν στο να αναπτύξουν νέους δικούς τους τρόπους επίλυσης, εφόσον αυτή η κατηγορία προβλημάτων τους είναι άγνωστη.

(α) Αξιοποίηση της ανάγκης για δομή

Όπως έχουμε προαναφέρει, ένα βιβλιογραφικό παράδειγμα που αξιοποιεί την αρχή του 'τι θα γινόταν αν' υπάρχει στη διπλωματική της Πάλλα (2006) και στο άρθρο των Palla, Potari και Spyrou (2012): δόθηκε ένα τεστ στους μαθητές στο οποίο έθεσαν το ερώτημα αν 'μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής για την απόδειξη της πρότασης: για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, $2^x>x$'. Η ερώτηση οδηγεί τους μαθητές να σκεφτούν τη σημασία του συνόλου των Φυσικών Αριθμών στην Επαγωγή, καθώς και τη διαφορετικότητά του σε σχέση με το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών. Μέσα από συζήτηση πάνω σε αυτή την άσκηση μπορούν να προκύψουν τα αξιώματα Peano (των Φυσικών Αριθμών), η Αρχή του Ελαχίστου και να ξαναγίνει συζήτηση για το πώς από το 5° Αξίωμα Peano περνούμε στη Μαθηματική Επαγωγή, καθώς επίσης να τονιστεί η σημασία του συνόλου των Φυσικών Αριθμών σε αυτήν.

(β) Αποδείξεις μέσω Μαθηματικής Επαγωγής με λανθασμένο συλλογισμό

Δύο παραδείγματα τέτοιων λανθασμένων αποδείξεων είναι αφενός η λανθασμένη απόδειξη του Austin στο πρόβλημα του κάλπικου νομίσματος που αναφέρει η Movschovitz-Hadar (1993) (βλ. § 6.4), και αφετέρου η 'απόδειξη' ότι 'όλοι οι άνθρωποι έχουν το ίδιο ύψος' που αναφέρει η Jetter (2012), η οποία είναι παρόμοια με αυτή που αναφέρει ο Polyà (1954) στην οποία 'αποδεικνύει' ότι όλες οι γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών (την οποία παραθέτουμε στην § 3.2.2). Μέσα από τέτοιες αποδείξεις αναδεικνύονται πτυχές της απόδειξης με Μαθηματική Επαγωγή όπως είναι το 'τι θεωρείται ως έγκυρο επιχείρημα στα Μαθηματικά' και 'ποια είδη συλλογισμών είναι αποδεκτά ή μη στην τάξη των Μαθηματικών'.

3.2 Μια διδακτική πρόταση: δραστηριότητες για τα ελληνικά δεδομένα

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναλύθηκε η Μαθηματική Επαγωγή από πολλές οπτικές, οι σημαντικότερες εκ των οποίων είναι: τα Μαθηματικά, ο παραγωγικός συλλογισμός και η Επιστημολογία της Μαθηματικής Επαγωγής, καθώς επίσης οι συνήθεις δυσκολίες των μαθητών επ' αυτής. Τέλος, παρουσιάστηκαν προτάσεις για τη διδακτική της καθώς και το πώς αυτές μπορούν να συνδυαστούν με θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών όπως είναι τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, η αρχή

‘μαθαίνω κάνοντας’ του Dewey και η Μάθηση που Βασίζεται στη Διερεύνηση, συνθέτοντας έτσι ένα διδακτικό πλαίσιο αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής. Όμως, παράλληλα, καταγράψαμε και την ελληνική πραγματικότητα, τις περιοριστικές συνθήκες μέσα στις οποίες διδάσκεται η Μαθηματική Επαγωγή, όπως είναι οι λιγοστές διδακτικές ώρες και η ελλιπής παροχή βοήθειας προς τον εκπαιδευτικό: δεν παρέχονται συγκεκριμένες οδηγίες για τη διδακτική της Μαθηματικής Επαγωγής, καθώς επίσης παρατηρείται ότι ο εκπαιδευτικός δεν έχει άμεση πρόσβαση στα πορίσματα της διεθνούς έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών επί της Μαθηματικής Επαγωγής. Επιπρόσθετα, είναι σαφές ότι στη σημερινή Ελλάδα της κρίσης, όπου ολοένα και λιγότερα κονδύλια δαπανώνται για την παιδεία, η βελτίωση των συνθηκών αποτελεί ουτοπία. Ωστόσο, το κρίσιμο ερώτημα είναι αν και πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε το προτεινόμενο προαναφερθέν διδακτικό πλαίσιο ή έστω ένα μέρος αυτού εντάσσοντάς το στη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής, μέσα στο περιοριστικό πλαίσιο που προσφέρει η ελληνική παιδεία. Ένας τρόπος για να πραγματοποιηθεί αυτό είναι η ένταξη όλων των παραπάνω σε μία δραστηριότητα ή σε μια σειρά δραστηριοτήτων που προορίζονται για να υλοποιηθούν μέσα στην ελληνική σχολική τάξη.

3.2.1 Πληροφορίες για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων

Προτείνουμε μια σειρά δραστηριοτήτων για την εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής. Ο σχεδιασμός είναι τέτοιος ώστε οι θεωρητικές πληροφορίες (μοντέλο εννοιολογικής μεταφοράς, διατύπωση της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής κτλ.) να προκύψουν στη διάρκεια της 3^{ης} δραστηριότητας, με τον τρόπο που περιγράφεται στην ανάλυση των δραστηριοτήτων (§ 3.2.3). Επίσης, αν και στην εργασία μας υποστηρίξαμε ότι το θεωρητικό κομμάτι της Μαθηματικής Επαγωγής, είναι καλύτερα να διδαχτεί μέσω του 5^{ου} αξιώματος Peano, οι προτεινόμενες δραστηριότητες δεν είναι δεσμευτικές προς αυτήν την κατεύθυνση. Στη διάρκεια της τρίτης δραστηριότητας, όπως φαίνεται παρακάτω, στην ανάλυσή της, δημιουργείται χώρος για τη διδασκαλία του θεωρητικού κομματιού της Μαθηματικής Επαγωγής. Θεωρούμε ότι αυτό πρέπει να συμβεί σύμφωνα με όσα είπαμε στην § 3.1.2, αναφορικά με το μοντέλο εννοιολογικής μεταφοράς του ντόμινο και με την εισαγωγή της Μαθηματικής Επαγωγής ως ειδικής περίπτωσης του 5^{ου} Αξιώματος Peano.

Οι *γνωστικές περιοχές των μαθηματικών* που σχετίζονται με τις προτεινόμενες δραστηριότητες είναι η Άλγεβρα, η Μαθηματική Λογική, η Γεωμετρία και η Θεωρία Αριθμών. Τα *Θέματα* που διαπραγματεύονται οι δραστηριότητες που προτείνουμε αφορούν τις παραπάνω γνωστικές περιοχές ως εξής:

- Άλγεβρα: η απόδειξη μέσω Μαθηματικής Επαγωγής, μοτίβα, άθροιση πεπερασμένων σειρών
- Μαθηματική Λογική: διαδικασίες συμπερασμού
- Γεωμετρία: Πλήθος διαφορετικών ευθειών (ή/και διαγωνίων) που διέρχονται από n, μη συνευθειακά ανά τρία, διακεκριμένα σημεία.
- Θεωρία Αριθμών: πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Οι παρακάτω δραστηριότητες αποτελούν μια απόπειρα για εφαρμογή του διδακτικού πλαισίου που εκπονήθηκε στην παράγραφο 3.1, για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής.

Πλαίσιο εφαρμογής

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες απευθύνονται σε μαθητές Β΄ Λυκείου και ο προτεινόμενος χρόνος υλοποίησης υπολογίζεται προσεγγιστικά σε τρεις (3) διδακτικές ώρες. Ως χώρος υλοποίησης των δραστηριοτήτων προτείνεται οι μαθητές το εργαστήριο υπολογιστών -προαιρετικά- για την $1^{η}$ δραστηριότητα και η αίθουσα διδασκαλίας για τις υπόλοιπες. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις που πρέπει να έχουν οι μαθητές για να συμμετάσχουν στη διαδικασία είναι:

- Διαίρεση-διαιρετότητα, πρώτος και σύνθετος αριθμός.
- Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας: σημείο, ευθεία, πολύγωνο, διαγώνιοι πολυγώνου.

Τα εργαλείο που κρίνεται ως προαιρετικό, για την $1^{η}$ δραστηριότητα, είναι ένα λογισμικό που να έχει δυνατότητα γεωμετρικών αναπαραστάσεων (σημεία, ευθείες, πολύγωνα κτλ.), όπως είναι τα geogebra, cabri, sketch-pad κ.ά., ώστε αφενός να μην αποσπώνται από τη χρονοβόρα διαδικασία σχεδιασμού με παραδοσιακά μέσα αλλά και για να μπορούν να έχουν δυναμική εποπτεία των γεωμετρικών καταστάσεων. Οι πηγές που θεωρούμε ότι χρειάζονται είναι: χαρτί, μολύβι, ψαλίδι, κανόνας, υπολογιστής τσέπης.

Η κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης προτείνεται να είναι τέτοια ώστε να ευνοείται η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία. Δηλαδή, οι μαθητές θα εργαστούν ομαδοσυνεργατικά σε ομάδες των πέντε ατόμων για την $1^{η}$ δραστηριότητα και τριών

για τις υπόλοιπες. Αυτό το θέλουμε διότι αφενός μεν στην 1η δραστηριότητα χρειαζόμαστε για το 'παιχνίδι' αρκετούς παίκτες, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να αποκτήσουν μια πραγματική εποπτεία της γεωμετρικής κατάστασης, και στις υπόλοιπες δραστηριότητες λιγότερα (τρία) άτομα, διότι η έρευνα στον τομέα έχει δείξει ότι σε μεγαλύτερου πλήθους ομάδες ανακύπτουν προβλήματα (Kynigos, 2010). Ο ρόλος του μαθητή είναι αυτός του ερευνητή, του μικρού επιστήμονα, του παιδιού που μαθαίνει κάνοντας. Ο ρόλος του δασκάλου είναι αυτός του συνερευνητή και συνδημιουργού της γνώσης, του σιωπηλού παρατηρητή, του παρέχοντα σκαλωσιά, του έγκυρου εκπροσώπου της μαθηματικής κοινότητας. Επίσης, όσον αφορά την εργονομία της τάξης θεωρούμε ότι ένας τρόπος για να διευκολύνουμε όλα τα παραπάνω, είναι η τοποθέτηση των θρανίων σε έναν κύκλο στην εσωτερική περιφέρεια των τοίχων της τάξης, έτσι ώστε να δημιουργείται στη μέση του χώρος για να εισέρχεται στον κύκλο ή να εξέρχεται από αυτόν ο δάσκαλος, ανάλογα με τον ανειλημμένο ρόλο της στιγμής.

Οι διδακτικοί στόχοι της σειράς των δραστηριοτήτων είναι οι εξής:

- Ο προβληματισμός μέσα από την εμπλοκή των μαθητών σε ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις.
- Η πυροδότηση μιας ανάγκης για απόδειξη που προκύπτει από την ανάγκη για βεβαιότητα.
- Η διατύπωση σχέσεων που υπαινίσσονται τη συνεπαγωγή $P(n) \rightarrow P(n+1)$ για συγκεκριμένες τιμές του n προκειμένου να διευκολυνθεί η μετάβαση του επαγωγικού βήματος και να γίνει αντιληπτή η γενικότητα της συνεπαγωγής.
- Η διατύπωση και ο έλεγχος εικασιών.
- Η δεξιότητα που προκύπτει από την εμπειρία συνεργασίας με άλλους ανθρώπους.
- Η ανάδειξη των συλλογιστικών που είναι αποδεκτές από την Μαθηματική Κοινότητα.
- Μάθηση που βασίζεται σε διερεύνηση.
- Διαθεματική προσέγγιση της Μαθηματικής Επαγωγής (διαθεματικότητα ανάμεσα σε διαφορετικούς τομείς των Μαθηματικών π.χ. Άλγεβρα-Γεωμετρία).
- Η εποπτεία μοτίβων και η διατύπωση εικασιών.
- Παγίωση γνώσεων.

Υπάρχουν ορισμένοι ακόμα στόχοι, που αναφέραμε στο διδακτικό πλαίσιο, ο οποίοι δεν συμπεριλαμβάνονται στους παραπάνω στόχους, όπως είναι το να γίνει αντιληπτό ότι και οι δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ταυτόχρονα απαραίτητες για τη διεξαγωγή του συμπεράσματος αυτής, το να αναδειχθεί η αναλογία ανάμεσα στη Μαθηματική Επαγωγή και στην Καλή Διάταξη του συνόλου των Φυσικών Αριθμών και το να διασαφηνιστεί ο ρόλος του συνόλου των Φυσικών Αριθμών στην Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Δεν θεωρούμε ότι αυτοί οι στόχοι πρέπει να παραληφθούν, όμως θεωρούμε ότι είναι στόχοι που μπορούν να επιτευχθούν χωρίς δραστηριότητες, μέσα από συζήτηση στην τάξη, με την εφαρμογή όσων έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 3.1.2. Τέλος, οι δραστηριότητες οδηγούν τους μαθητές σε διατυπώσεις που να επιτρέπουν στον διδάσκοντα να ελέγξει αν οι απαντήσεις των μαθητών προέρχονται από αληθείς πεποιθήσεις, που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, χωρίς να εμπλέκεται σε αυτό η τύχη.

Τα σημαντικά στοιχεία της ενότητας

Γνωστική περιοχή των μαθηματικών: Άλγεβρα, Μαθηματική Λογική, Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών.

Θέματα

Άλγεβρα: η απόδειξη μέσω Μαθηματικής Επαγωγής, μοτίβα, άθροιση πεπερασμένων σειρών

Μαθηματική Λογική: διαδικασίες συμπερασμού

Γεωμετρία: Πλήθος διαφορετικών ευθειών (ή/και διαγωνίων) που διέρχονται από n, μη συνευθειακά ανά τρία, διακεκριμένα σημεία.

Θεωρία Αριθμών: πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται: σε μαθητές Β΄ Λυκείου

Χρόνος υλοποίησης: τρεις (3) διδακτικές ώρες

Χώρος υλοποίησης: προαιρετικά εργαστήριο υπολογιστών για την 1η δραστηριότητα και στην αίθουσα διδασκαλίας για τις υπόλοιπες.

Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών.

Διαίρεση-διαιρετότητα, πρώτος και σύνθετος αριθμός.

Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας: σημείο, ευθεία, πολύγωνο, διαγώνιοι πολυγώνου.

Εργαλεία: προαιρετικά χρήση λογισμικού για αναπαράσταση γεωμετρίας, για $1^η$ δραστηριότητα.

Πηγές: χαρτί, μολύβι, ψαλίδι, κανόνας, υπολογιστής τσέπης.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης. Οι μαθητές θα εργαστούν ομαδοσυνεργατικά σε ομάδες των πέντε ατόμων για την $1^η$ δραστηριότητα και τριών για τις υπόλοιπες.

Διδακτικοί στόχοι της δραστηριότητας:

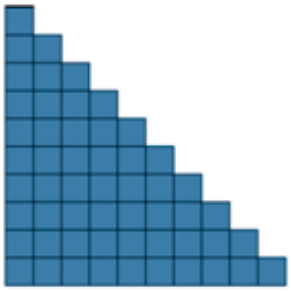
- Η εμπλοκή των μαθητών σε ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις μέσα από τις οποίες προκύπτει η έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής και η εποπτεία μοτίβων.
- Η διατύπωση σχέσεων που υπαινίσσονται τη συνεπαγωγή $P(n) \rightarrow P(n+1)$ για συγκεκριμένες τιμές του n.
- Η διατύπωση και ο έλεγχος εικασιών.
- Η δεξιότητα που προκύπτει από την εμπειρία συνεργασίας με άλλους ανθρώπους.

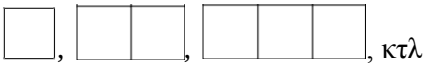
3.2.2 Οι δραστηριότητες

Δραστηριότητα $1^η$:

Σε μια ορεινή απομακρυσμένη περιοχή της Ελλάδας, οι δρόμοι που ενώνουν τα διάφορα χωριουδάκια αναμεταξύ τους έχουν καταστραφεί ή δεν κτίστηκαν ποτέ και πρέπει να δημιουργηθούν όλοι οι δρόμοι από την αρχή. Ο Δήμαρχος και το συμβούλιο της περιοχής προσπαθούν να βγάλουν άκρη για το πώς δημιουργηθούν όλοι οι δυνατοί συντομότεροι δρόμοι (ευθύγραμμα τμήματα), ώστε όλα τα χωριά να επικοινωνούν το ένα με το άλλο με έναν δρόμο τη φορά, αλλά δεν τα καταφέρνουν. Πόσοι διαφορετικοί δρόμοι προκύπτουν (α) ανάμεσα σε δύο χωριά; (β) ανάμεσα σε τρία; (γ) ανάμεσα σε τέσσερα; (δ) ανάμεσα σε δέκα; (ε) ανάμεσα σε 10^{100}; (ζ) ανάμεσα σε n; Μπορείτε να τους βοηθήσετε; Ας σημειωθεί ότι τα χωριά είναι ανά τρία μη συνευθειακά.

Δραστηριότητα $2^η$: (Εναλλακτικό Tetris)





Σχήμα 3.1: Εναλλακτικό Tetris

Στο εναλλακτικό Tetris τα κομμάτια που ‘πέφτουν’ είναι όλα ορθογώνια που αποτελούνται από τετράγωνα (ένα, δύο, τρία κ.ο.κ.) (βλ. Σχήμα 3.1). Οι κανόνες είναι οι ίδιοι: μια γραμμή για να ‘εξαφανιστεί’ πρέπει να συμπληρωθεί ολόκληρη. Κάποιος που δεν γνώριζε το παιχνίδι καλά, κατάφερε να σχηματίσει το σχέδιο που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1: μια σκάλα φτιαγμένη από τετράγωνα!

Α. Τι κομμάτια πρέπει να έρθουν και με ποια σειρά ώστε να ‘εξαφανιστούν’ όλες οι σειρές;

Β. Κόψτε με το ψαλίδι τα σχήματα που δίνονται στο Σχήμα 3.2.

i. Με τη βοήθεια αυτού του χειραπτικού υλικού προσπαθήστε να βρείτε έναν γενικό τρόπο υπολογισμού όλων των τετραγώνων του σχήματος της σκάλας μιας οθόνης που χωρά 3x3, 4x4, 8x8, 10x10.

ii. Πώς σκεφτήκατε για να το βρείτε;

iii. Μπορείτε να μαντέψετε πόσα τετράγωνα περιέχονται σε μια σκάλα 100x100, 10^{23}x10^{23}, νxν τετράγωνα; Συμπληρώστε τον Πίνακα 3.3 για να βοηθηθείτε.

Γ. Συνοψίστε τα κύρια αποτελέσματα και τις γενικεύσεις από τα συμπεράσματά σας.

Δ. Αναστοχασμός: συγκρίνετε τα κύρια αποτελέσματα/γενικεύσεις των δύο δραστηριοτήτων. Σε τι συμπεράσματα καταλήγετε;

Πίνακας 3.3: Πίνακας για διευκόλυνση στην εικασία του μοτίβου

Πλήθος γραμμών	Σχήμα	Συνολικό πλήθος τετραγώνων	Μετάβαση από προηγούμενη σε επόμενη γραμμή
1		1=1	1=1
2		1+2=3	1+2=3
3		1+2+3=6	3+3=6
4			
10			
100			
10^{23}			
ν			

Σχήμα 3.2: Χειραπτικό υλικό για άσκηση.

Δραστηριότητα 3η:

Με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης και του Πίνακα 3.4 να κατατάξετε τους παρακάτω αριθμούς σε πρώτους ή σύνθετους.

Πίνακας 3.4: Πίνακας με πρώτους αριθμούς

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163
167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269
271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383
389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499
503	509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619
631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751
757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997			

$2^{2^0} + 1 = 3,$

$2^{2^1} + 1 = 5,$

$2^{2^2} + 1 = 17$

$2^{2^3} + 1 = 257,$

$2^{2^4} + 1 = 65\,537$

i. Μπορείτε να μαντέψετε έναν γενικό κανόνα;

ii. Ανακοινώστε τα συμπεράσματά σας στην ολομέλεια της τάξης και συζητήστε τα με τον δάσκαλό σας.

iii. Αναστοχασμός: πώς μπορούμε να σιγουρευτούμε για την ορθότητα των ισχυρισμών μας;

iv. Ανατρέχοντας στις προηγούμενες δραστηριότητες μπορείτε να αποδείξετε τις εικασίες σας;

Εργασία για το σπίτι 1:

Ο Polyà το 1954 ισχυρίστηκε ότι μπορούμε να δείξουμε με *παράδοξη* απόδειξη με μαθηματική επαγωγή ότι όλες οι γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών! Παραθέτουμε μια αναλυτική απόδειξη για τον ισχυρισμό (βασισμένη στη λογική του Polyà το 1954):

Αρχικά θεωρώ την πρόταση P(n): n γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών

i. Για n=1, δηλαδή όταν το σύνολό μου αποτελείται από μία γυναίκα, πράγματι κάθε γυναίκα έχει το ίδιο χρώμα ματιών με τον εαυτό της. Άρα για n=1, η πρόταση P(n) είναι αληθής.

ii. Υποθέτω ότι η πρόταση P(n) ισχύει για κάποιον Φυσικό Αριθμό κ, δηλαδή θεωρώ ότι για n=κ η P(n) ισχύει. Συνεπώς υπέθεσα ότι n γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών. Τώρα θα δείξω ότι η πρόταση P(n) ισχύει για n=κ+1.

iii. Έστω ότι υπάρχουν κ+1 γυναίκες, έστω οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\kappa+1}$. Αφαιρώ μία οποιαδήποτε εξ αυτών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ ότι αφαίρεσα την γ_1. Τότε έχω κ πλήθους γυναίκες ($\gamma_2, \dots, \gamma_{\kappa+}1$) που βάσει της υπόθεσής μου έχουν ίδιο χρώμα ματιών μεταξύ τους. Ξαναπροσθέτω στο σύνολό μου τη γυναίκα γ_1, που είχα αφαιρέσει και αυτή τη φορά αφαιρώ μια άλλη, έστω τη γ_2. Τότε, πάλι έχω κ πλήθους γυναίκες: $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_{\kappa+1}$ που και πάλι βάσει της υπόθεσής μου θα έχουν το ίδιο

χρώμα ματιών. Συνεχίζοντας έτσι, αφαιρώντας κάθε φορά μια γυναίκα, μέχρι που να έχουν αφαιρεθεί όλες από το σύνολό μας, αποδεικνύουμε ότι οι κ+1 γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών.

Πώς σχολιάζετε την απόδειξη; Είναι σωστή; Αν ναι, πώς εξηγείται αυτό στον κόσμο γύρω μας; Αν όχι, πού βρίσκεται το λάθος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Εργασία για το σπίτι 2:

Αξιοποιήστε την 3η δραστηριότητα για να βρείτε πόσες διαγωνίους έχει ένα τρί-γωνο, τετρά-γωνο, πεντά-γωνο, δεκά-γωνο, ν-γωνο; Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

3.2.3 Τα Μαθηματικά των Δραστηριοτήτων

1η δραστηριότητα

Στην πρώτη δραστηριότητα, αν υποθέσουμε ότι τα χωριά εκπροσωπούνται από σημεία του επιπέδου και οι διαφορετικοί δρόμοι εκπροσωπούνται από τις διαφορετικές ευθείες που μπορώ να φέρω για κάθε τρία μη συνευθειακά σημεία, τότε το πρόβλημα ανάγεται σε γεωμετρικό. Όπως είδαμε νωρίτερα, αυτή η άσκηση γεωμετρίας μπορεί να περιγραφεί από τον Πίνακα 3.4. Επομένως, είναι ευνόητο ότι πρόκειται για τη γνωστή ισότητα 1+2+3+…+ν= ν(ν+1)/2, μία από τις πιο τετριμμένες ασκήσεις που αποδεικνύονται με Μαθηματική Επαγωγή. Το ενδιαφέρον πλεονέκτημα, εδώ, είναι ότι το άθροισμα εισάγεται όχι ως ένα ουρανοκατέβατο πόρισμα των Μαθηματικών, αλλά ως μια γεωμετρική άσκηση που έχει νόημα για τους μαθητές

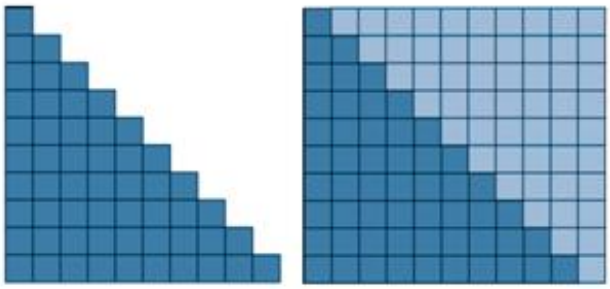
Πίνακας 3.4: Πίνακας που προκύπτει από την Οριζόντια Μαθηματικοποίηση του προβλήματος.

Σχήμα	Σημεία	Πλήθος ευθειών	Παρατηρήσεις
	2	1=1	
	3	3=1+2	Όπου το 3 είναι το άθροισμα του προηγούμενου στοιχείου της ίδιας στήλης και του

			προηγούμενου στοιχείου της στήλης αριστερά.
	4	6=1+2+3	Όμοια 6 = 3+3
	5	10=1+2+3+4	10 = 6+4
	6	15=1+2+3+4+5	15 = 10 + 5
	…		

2η δραστηριότητα

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.2 της σκάλας, στην πραγματικότητα πρόκειται για την ίδια πεπερασμένη σειρά με αυτήν της προηγούμενης δραστηριότητας 1+2+3+…+ν= ν(ν+1)/2 (1). Η διαφορά αυτών των δύο δραστηριοτήτων είναι ότι στην 1η αναπαρίσταται γεωμετρικά μόνο το πρώτο μέλος της σχέσης (1), ενώ στη 2η δραστηριότητα υπάρχει η δυνατότητα να αναπαρασταθεί και το 2ο μέλος της σχέσης (1) γεωμετρικά (βλ. Σχήμα 3.3). Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο τίθεται αυτή η δραστηριότητα. Στο ερώτημα Bi της 2ης δραστηριότητας ζητείται από τους μαθητές να αξιοποιήσουν ‘τη σκάλα’ και ένα αντίγραφο του εαυτού της, προκειμένου να βρουν έναν γενικό τρόπο υπολογισμού των συνολικών τετραγώνων. Ο στόχος είναι να δημιουργήσουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του Σχήματος 3.3, ώστε να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα τετράγωνα είναι πλήθους ν(ν+1)/2.



Σχήμα 3.3: Η σκάλα και το αντίγραφό της αλληλοσυμπληρώνονται για να δώσουν ένα παραλληλόγραμμο με ν(ν+1) τετράγωνα.

3η δραστηριότητα

Πρόκειται για την εικασία του Fermat που αναφέρθηκε στην §1.3 σύμφωνα με την οποία οι αριθμοί της μορφής $2^{2^n}+1$ είναι πρώτοι. Ωστόσο, ο Euler ανακάλυψε το αντιπαράδειγμα $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ καταρρίπτοντας έτσι την εικασία. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο εισήχθη η συγκεκριμένη δραστηριότητα: προκειμένου να αποκτήσουν οι μαθητές την εμπειρία ότι πολλές φορές φαίνεται ότι κάποιοι αριθμοί ακολουθούν ένα μοτίβο αλλά στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει. Επίσης, με τον τρόπο αυτό αναδεικνύεται η ανάγκη για απόδειξη.

1η εργασία για το σπίτι

Είναι προφανές ότι ο ισχυρισμός 'όλες οι γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών' είναι ψευδής και συνεπώς η 'απόδειξη' που παρατίθεται περιέχει ένα λάθος. Αυτό το λάθος είναι η υπόθεση της βάσης P(1), όπου έχουμε ελέγξει ότι μια γυναίκα έχει ίδιο χρώμα ματιών με τον εαυτό της. Είναι προφανές ότι σε ένα μονοσύνολο δεν έχει λογικό νόημα η πρόταση P. Ο ελάχιστος Φυσικός Αριθμός για τον οποίο έχει νόημα η πρόταση P είναι ο αριθμός 2 και φυσικά δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι δύο γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών, πάντα. Επομένως δεν ισχύει το βασικό βήμα της επαγωγής και κατ' επέκταση δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ισχύ ή μη της δοσμένης πρότασης, μέσα από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.

2η εργασία για το σπίτι

Πρόκειται για τη γνωστή γεωμετρική άσκηση υπολογισμού διαγωνίων ενός ν-γώνου και για απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή. Εδώ, επειδή έχει προηγηθεί η δραστηριότητα 1, οι μαθητές μπορούν να καταλήξουν στον τύπο ν(ν-3)/2 μέσα από το σκεπτικό ότι αν από το συνολικό αριθμό ευθειών που δημιουργούν τα ν σημεία αφαιρέσω το πλήθος των πλευρών του ν-γώνου, τότε αυτό που απομένει είναι ο αριθμός των διαγωνίων του πολυγώνου.

3.2.4 Ανάλυση των Δραστηριοτήτων

Ο στόχος της καλλιέργειας της δεξιότητας των μαθητών για συνεργασία με άλλους, επιτυγχάνεται μέσα από το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο εφαρμογής των Δραστηριοτήτων. Όλες οι δραστηριότητες αφορούν σε Διερευνητική Μάθηση: οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν μοτίβα, να διατυπώσουν και να ελέγξουν εικασίες, να εφεύρουν δικές τους στρατηγικές επίλυσης προκειμένου να δώσουν λύση σε ασυνήθιστα για αυτούς προβλήματα. Η διαθεματικότητα Άλγεβρας-Γεωμετρίας

είναι έκδηλη στις Δραστηριότητες 1,2 και στην 2η εργασία για το σπίτι. Η Τρίτη Δραστηριότητα συνδυάζει διαθεματικά την Άλγεβρα με τη Θεωρία Αριθμών.

Στις πρώτες τρεις Δραστηριότητες δεν εμφανίζεται η Μαθηματική Επαγωγή, ούτε ως Αρχή, ούτε ως αποδεικτική μέθοδος. Οι κύριοι στόχοι των τριών πρώτων Δραστηριοτήτων είναι, για τις μεν δύο πρώτες ο προβληματισμός μέσα από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, η εποπτεία των μοτίβων του πίνακα 3.4, η διατύπωση εικασιών, η μετάβαση από το βήμα n στο n+1, για συγκεκριμένες τιμές του n, και για την τρίτη, τόσο η διατύπωση και ο έλεγχος εικασιών, όσο η πυροδότηση μιας ανάγκης για βεβαιότητα (που προκύπτει από την αβεβαιότητα για την ορθότητα της εικασίας που ζητείται να διατυπωθεί σε αυτή τη Δραστηριότητα). Σε αυτό το σημείο, όπου έχει προκύψει αυτή η αβεβαιότητα, είναι η κατάλληλη στιγμή για την εισαγωγή της έννοιας της Μαθηματικής Επαγωγής, μέσα από το μοντέλο μεταφοράς του ντόμινο και το 5ο Αξίωμα Peano, όπως αυτά έχουν περιγραφεί στην παράγραφο 3.1. Η 3η Δραστηριότητα, ζητά από τους μαθητές να επανέλθουν στις δύο πρώτες, τώρα που πλέον γνωρίζουν τη Μαθηματική Επαγωγή, και να ξανα-ασχοληθούν με αυτές, υπό την οπτική της νέας γνώσης. Αυτό, επιτρέπει όχι μόνο την παγίωση των γνώσεων που αποκτήθηκαν κατά τη διάρκεια της πρώτης επαφής τους με τις Δραστηριότητες, αλλά και διευκολύνει την εφαρμογή της νέας γνώσης μέσα σε ένα πλαίσιο γνωστών δεδομένων, ώστε να μην επισκιαστεί η εφαρμογή της εφαρμογής της νέας γνώσης από την τεχνική. Η 1η εργασία για το σπίτι, επιτρέπει την εμβάθυνση στην Μαθηματική Επαγωγή, σχετικά με τις συλλογιστικές που είναι αποδεκτές από την Μαθηματική Κοινότητα. Η 2η εργασία για το σπίτι, επιτρέπει την παγίωση των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί ως τώρα.

1η δραστηριότητα

Πιστεύουμε ότι το ρεαλιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται αυτή η Δραστηριότητα, θα παρακινήσει τους μαθητές στο να εμπλακούν με αυτήν αλλά και στο να προβληματιστούν. Θεωρούμε ότι καθώς το παιχνίδι περιπλέκεται για τις ολοένα αυξανόμενες τιμές του ν, αυτή η δυσκολία θα οδηγήσει τους μαθητές σύντομα σε Οριζόντια Μαθηματικοποίηση του προβλήματος. Αναμένουμε ότι θα αρχίσουν να περιγράφουν το πρόβλημα με ολοένα πιο αφαιρετικούς τρόπους ώσπου να φτάσουν στο καθαρά γεωμετρικό πρόβλημα. Συνιστούμε ο διδάσκων να παρέμβει, αφού έχει αφήσει τους μαθητές να εργαστούν μόνοι τους για 10-15 λεπτά με στόχο να τους βοηθήσει στην εποπτεία των μοτίβων. Προτείνουμε ο εκπαιδευτικός να σχεδιάσει τον Πίνακα 3.4, προτρέποντας τους μαθητές να τον βοηθήσουν να το

συμπληρώσει. Ιδανικά, θα θέλαμε ο εκπαιδευτικός να οδηγήσει τους μαθητές να ανακαλύψουν τα μοτίβα, χωρίς όμως να αποσυνδέονται από το γεωμετρικό τους πλαίσιο. Για παράδειγμα θα θέλαμε οι μαθητές να δουν ότι η πρόσθεση ενός καινούριου σημείου στο σύστημα εισάγει μια νέα ευθεία για κάθε προϋπάρχον σημείο του συστήματος. Έτσι κάθε φορά, ο αριθμός των ευθειών ισούται με το άθροισμα του πλήθους ευθειών του προηγούμενου βήματος, αυξημένου κατά τον αριθμό των σημείων του προηγούμενου βήματος. Αν οι μαθητές ενθαρρυνθούν προς την κατεύθυνση της ανακάλυψης μοτίβων, ίσως επίσης ανακαλύψουν ότι το πλήθος των ευθειών σε κάθε βήμα ισούται με το ½ του γινομένου του αριθμού των σημείων αυτού του βήματος επί τον αριθμό των σημείων του προηγούμενου βήματος. Αναμένουμε οι μαθητές να παρατηρήσουν τα μοτίβα, να διατυπώσουν εικασίες κτλ. Ορισμένοι μάλιστα ίσως ισχυριστούν ότι είναι βέβαιοι για τις εικασίες τους. Στο σημείο αυτό μπορεί ο δάσκαλος να κάνει μια συζήτηση για τη διαφορά εικασίας-απόδειξης.

2η δραστηριότητα

Η ερώτηση 'Τι κομμάτια πρέπει να έρθουν…' αποσκοπεί στο να εκμαιεύσουμε από τους μαθητές ότι αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένα αντίγραφο του σχήματος της σκάλας που να το τοποθετηθεί απέναντί της έτσι ώστε να βρίσκονται σε σχέση εικόνας-κατόπτρου υπό στροφή 180 μοιρών στο επίπεδο που ανήκουν τα σχήματα. Αυτό είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να καταλήξουν οι μαθητές ότι το πλήθος των τετραγώνων ισούται με ν(ν+1)/2. Η ερώτηση ii που τους ζητά 'πως σκεφτήκατε για να το βρείτε;' αποσκοπεί στην άμεση αποτύπωση των σκέψεων των μαθητών αμέσως μετά την εύρεση ενός αποτελέσματος. Κατά την διερεύνηση, αυτό θα τους βοηθήσει παρακάτω, όταν θα χρειαστεί να σκεφτούν πιο αφηρημένα, προκειμένου να απαντήσουν στο υπο-ερώτημα iii (Stalo, Elia & Gagatsis 2006). Επίσης, η ερώτηση Bii επιτρέπει στον διδάσκοντα να ελέγξει αν οι απαντήσεις των μαθητών προέρχονται από αληθείς πεποιθήσεις που προκύπτουν από ορθή αιτιολόγηση, χωρίς την εμπλοκή της τύχης. Οι ερωτήσεις B i, iii συνδυαστικά, που ζητούν ένα γενικό τρόπο υπολογισμού του πλήθους των τετραγώνων για ολοένα αυξανόμενες και πιο αφηρημένες τιμές του ν, παρέχουν σκαλωσιά στο μαθητή για να σκεφτεί πιο γενικά ώστε να μπορέσει να διατυπώσει ένα γενικό συμπέρασμα, μια εικασία. Οι Zazkis, Liljedahl, και Chernoff, (2008) θεωρούν ότι η χρήση 'μεγάλων αριθμών' οδηγεί στη γενίκευση, υπό την έννοια του ότι πρόκειται όχι τόσο για αριθμούς όσο για εκφράσεις που δεν επιτρέπουν τις πράξεις και επομένως οδηγούν τον μαθητή να αφήσει το

μηχανιστικό-διαδικαστικό κομμάτι των Μαθηματικών και να παρατηρήσει τη δομή. Ακριβώς αυτό τον στόχο έχει το βήμα-σκαλωσιά που ζητά από τους μαθητές να βγάλουν συμπεράσματα για $\nu=10^{23}$. Επιπρόσθετα, ο Πίνακας 3.3 δίνεται με διττό στόχο: αφενός μεν για να διευκολυνθεί η μετάβαση από το βήμα n στο n+1, μέσα από τα ζητούμενα της τελευταίας στήλης του, και αφετέρου για να διαπιστωθεί ότι η $1^{η}$ και η $2^{η}$ δραστηριότητα διαπραγματεύονται την ίδια πεπερασμένη σειρά. Θεωρούμε ότι ο καθηγητής μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι εφόσον στην $1^{η}$ δραστηριότητα έχουμε $1+2+\ldots+\nu=$; ενώ στην $2^{η}$ δραστηριότητα έχουμε κάνει την εικασία ότι $1+2+\ldots+\nu=\nu(\nu+1)/2$ άρα το αποτέλεσμα αυτό θα πρέπει να ισχύει και για την πρώτη δραστηριότητα.

$3^{η}$ δραστηριότητα

Αυτή η δραστηριότητα έχει τοποθετηθεί ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν επίτηδες στη λανθασμένη εικασία του Fermat. Θέλουμε οι μαθητές να ανακοινώσουν τις εικασίες τους στην ολομέλεια της τάξης, προκειμένου ο δάσκαλος μέσα από συζήτηση και μέσα από την παράθεση του αντιπαραδείγματος $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\times 6\,700\,417$ ι δημιουργήσει γνωστική σύγκρουση και να προβληματίσει τους μαθητές. Θέλουμε μέσα από αυτό το πλαίσιο της κατάστασης αβεβαιότητας, να προκύψει η απόδειξη ως ανάγκη για βεβαιότητα. Αν υπάρχει χρόνος μπορεί να γίνει συζήτηση για το 'τι είναι απόδειξη στα Μαθηματικά'. Προτείνουμε στο σημείο αυτό ο εκπαιδευτικός να εισαγάγει την έννοια της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από το μοντέλο μεταφοράς του ντόμινο εστιάζοντας στο γεγονός ότι τα πλακίδια πέφτουν διότι έτσι τα στήσαμε, όπως έχουμε προαναφέρει. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός θα συνδέσει το ντόμινο με την Καλή Διάταξη του N, μέσα από τα παραδείγματα που προσφέρουν οι προηγούμενες δραστηριότητες και τέλος θα διατυπώσει την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Τέλος, η άσκηση παρακινεί τους μαθητές μέσα από τη διαδικασία του αναστοχασμού, να ανατρέξουν πίσω στις δραστηριότητες 1,2 και να αποδείξουν τις εικασίες τους μέσα από ΜΕ, γεγονός που θα αποτελέσει την πρώτη πρακτική εφαρμογή της Μαθηματικής Επαγωγής από τους μαθητές. Η επαναφορά στις δραστηριότητες υπό το πρίσμα της Μαθηματικής Επαγωγής, θα τους δώσει άλλη επίγνωση επί αυτών.

$1^{η}$ εργασία για το σπίτι

Η Jetter (2012), θεωρεί ότι ο καλύτερος τρόπος για να αποτιμήσουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών περί απόδειξης είναι να τους ζητήσουμε να ασκήσουν

κριτική σε μια απόπειρα απόδειξης. Για τον λόγο αυτό αλλά και για να αναδειχθεί η σημαντικότητα της ισχύος αμφότερων των υποθέσεων της Μαθηματικής Επαγωγής, προκειμένου να βγάλουμε συμπεράσματα βασισμένοι σε αυτήν, ζητούμε από τους μαθητές να ανακαλύψουν το λάθος στην δεδομένη απόδειξη. Έτσι, μέσα από τη συζήτηση που θα γίνει στην τάξη για το 'ποιο' είναι το λάθος της απόδειξης, αναδεικνύονται συλλογιστικές που είναι επιτρεπτές από την Κοινότητα των Μαθηματικών.

2η εργασία για το σπίτι

Η εργασία αυτή μπορεί να συνδυαστεί με τις δραστηριότητες 1,2, όπως προαναφέρθηκε, γι' αυτό και την προτείνουμε, ώστε να παρακινήσουμε τους μαθητές σε μια επανάληψη των όσων έχουν ειπωθεί, προκειμένου μέσα από αυτήν να δώσουμε στους μαθητές την ευκαιρία για παγίωση των γνώσεών τους. Ωστόσο, η δραστηριότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί και εντελώς ανεξάρτητα από τις δραστηριότητες 1,2. Συνιστούμε οι μαθητές να το λύσουν και με αυτόν τον τρόπο, μιας και θα τους προσφέρει τριβή με μια απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή.

3.3. Περιορισμοί – Προτάσεις για έρευνα

Βάσει των πολλών και πολύπλευρων ευρημάτων της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών επί του θέματος της εργασίας, θα μπορούσαμε να καταθέσουμε μια πληρέστερη διδακτική πρόταση που όμως θα ήταν πιο χρονοβόρα στην εφαρμογή της. Ο λόγος για τον οποίο επιλέξαμε μια (χρονικά) πιο σύντομη συλλογή δραστηριοτήτων είναι διότι τα ελληνικά ρεαλιστικά δεδομένα είναι περιοριστικά ως προς τον χρόνο και κρίθηκε σημαντικό η διδακτική πρόταση να έχει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί στα πραγματικά δεδομένα του σημερινού ελληνικού σχολείου.

Η εργασία αυτή είναι μία θεωρητική εργασία, που έχει διεξαγάγει κανόνες και νόρμες για τη διδακτική της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από την έρευνα στην περιοχή. Είναι προφανές ότι η εφαρμογή τόσο του διδακτικού πλαισίου όσο και της διδακτικής πρότασης που έχει κατατεθεί, σε ένα περιβάλλον πραγματικής τάξης θα ανατροφοδοτούσε τα όσα έχουν κατατεθεί και θα επέτρεπε αναπροσαρμογές και βελτιώσεις μέσα από την αναστοχαστική ανάλυση επί της εμπειρίας του πειράματος. Επομένως, ένας περιορισμός της εργασίας είναι η θεωρητική της φύση. Συνεπώς προτείνεται να εφαρμοστεί τόσο το προτεινόμενο διδακτικό πλαίσιο όσο και η προτεινόμενη διδακτική πρόταση, ως πειραματική συνέχεια αυτής της θεωρητικής

έρευνας, μιας και τα διδακτικά πειράματα επί της Μαθηματικής Επαγωγής σπανίζουν, όπως έχουμε προαναφέρει.

Όσα έχουν προταθεί προκύπτουν από μια σύνθεση της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών επί του θέματος. Ωστόσο, στη βιβλιογραφία -αλλά και στην εργασία αναφέρεται ρητά ότι τα πορίσματα της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν αποτελούν πανάκεια για τη διδακτική των μαθηματικών αντικειμένων, εν προκειμένω επί της Μαθηματικής Επαγωγής. Αυτό σημαίνει ότι όσο κι αν προσπαθούμε να εφεύρουμε και να εφαρμόσουμε τεχνικές και να δημιουργήσουμε μαθησιακά περιβάλλοντα κατάλληλα για μάθηση, κατά τις αρχές της Διδακτικής των Μαθηματικών, ο τελικός λόγος βρίσκεται στους μαθητές. Τελικά, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε με εκατό τα εκατό βεβαιότητα -και μάλιστα εκ των προτέρων- ότι θα δημιουργήσουμε στους μαθητές μαθηματικές εμπειρίες που θα τους κινητοποιήσουν λογικά και συναισθηματικά προς έναν διάλογο με το μαθηματικό κατασκεύασμα που ονομάζεται Μαθηματική Επαγωγή. Επομένως, η έρευνα στην κινητροδότηση και στο συναίσθημα που σχετίζονται με τη μάθηση και τους μηχανισμούς της κρίνεται απαραίτητη για τη συμπλήρωση της εργασίας.

Τέλος, ορισμένες παρατηρήσεις που προκύπτουν από ελλείψεις στην έρευνα επί της Μαθηματικής Επαγωγής, όπως αυτές φάνηκαν μέσα από την εργασία είναι οι εξής:

- Χρειάζονται περισσότερα διδακτικά πειράματα
- Χρειάζονται περισσότερες έρευνες που να μελετούν το φαινόμενο από τη σκοπιά του δασκάλου
- Χρειάζονται περισσότερες έρευνες που να συσχετίζουν τη Μαθηματική Επαγωγή με άλλα μαθηματικά πεδία πέραν της Άλγεβρας, όπως είναι η Γεωμετρία.
- Παρατηρείται έλλειψη συνδυασμού Μαθηματικής Επαγωγής και Ρεαλιστικών Μαθηματικών, ενώ τα μη αλγεβρικά (π.χ. γεωμετρικά) προβλήματα, μέσα από τα οποία νοηματοδοτούνται τα αντίστοιχα αλγεβρικά σπανίζουν.

4. Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή, αποτέλεσε μία σύνθεση των πορισμάτων της Διδακτικής των Μαθηματικών (όσον αφορά τόσο τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές επ' αυτής όσο και τις απαραίτητες προϋποθέσεις για τη διδασκαλία αυτής) και ορισμένων θεωριών αυτής (όπως είναι τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση, η Μάθηση που βασίζεται στη διερεύνηση κ.ά.). Από αυτή τη σύνθεση προέκυψαν δύο προτάσεις: η πρώτη αφορά σε ένα διδακτικό πλαίσιο αρχών για τη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής και η δεύτερη αφορά σε μια σειρά προτεινόμενων δραστηριοτήτων για εφαρμογή στο ελληνικό σχολείο.

Το διδακτικό πλαίσιο που προτείναμε αποτελείται από τα εξής τέσσερα επίπεδα γνώσης, όπως αυτά προέκυψαν από τη δική μας ανάγνωση της βιβλιογραφίας:

i. Προβληματισμός & ανάγκη για απόδειξη
ii. Η εννοιολογική 'κατανόηση' του αλγορίθμου της Μαθηματικής Επαγωγής
iii. Η αλγεβρική και εννοιολογική ικανότητα μετάβασης από το βήμα n στο n+1
iv. Η εμβάθυνση στην εννοιολογική 'κατανόηση' της Μαθηματικής Επαγωγής

Το πρώτο επίπεδο στοχεύει στην πρόκληση της εμπλοκής των Μαθητών με τα Μαθηματικά και στην πυροδότηση μιας νοητικής ανάγκης για απόδειξη. Ισχυριστήκαμε ότι αυτοί οι στόχοι επιτυγχάνονται ως εξής: ο μεν πρώτος μέσα από προβλήματα Μαθηματικής Επαγωγής εντός του πλαισίου των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, ο δε δεύτερος μέσα από τη δημιουργία καταστάσεων αβεβαιότητας που μπορούν να προκύψουν λ.χ. μέσα από εικασίες μεγάλων μαθηματικών -οι οποίες ήταν βασισμένες στην εποπτεία συγκεκριμένων περιπτώσεων- και αργότερα αποδείχθηκαν λανθασμένες. Το δεύτερο επίπεδο στοχεύει αφενός μεν στο να γίνει αντιληπτό ότι και οι δύο υποθέσεις της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ταυτόχρονα απαραίτητες για τη διεξαγωγή του συμπεράσματος αυτής, αφετέρου δε στο να αναδειχθεί η αναλογία ανάμεσα στη Μαθηματική Επαγωγή και στην Καλή Διάταξη του συνόλου των Φυσικών Αριθμών. Επιχειρηματολογήσαμε υπέρ του ότι όλα αυτά συμβαίνουν πρώτον, μέσα από τη χρήση του μοντέλου του ντόμινο ως μοντέλου εννοιολογικής μεταφοράς για την εισαγωγή της έννοιας, δεύτερον, μέσα από τη διδασκαλία του 5^{ου} Αξιώματος Peano και την επισήμανση ότι η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει ως ειδική περίπτωση αυτού και τρίτον, μέσα από την αξιοποίηση λανθασμένων αποδείξεων με Μαθηματική Επαγωγή στις οποίες

λείπει μια από τις δύο υποθέσεις αυτής. Το τρίτο επίπεδο έχει ως διδακτικούς στόχους τόσο τη διευκόλυνση στον αλγεβρικό χειρισμό της μετάβασης από το βήμα n στο n+1, όσο και τη διευκόλυνση στη νοηματοδότηση της γενικότητας της ισχύος της μετάβασης από το βήμα n στο n+1. Θεωρήσαμε ότι αυτοί οι στόχοι επιτυγχάνονται μέσα από την προσέγγιση της Μαθηματικής Επαγωγής διαμέσου της μεθόδου της ψευδο-επαγωγής σε συνδυασμό με τη χρήση τύπων αναδρομικών συναρτήσεων, και μέσα από την παρατήρηση ότι εφόσον η μεταβλητή n επιλέχτηκε για να εκφράσει έναν τυχαίο Φυσικό αριθμό, χωρίς συγκεκριμένες προϋποθέσεις ή ιδιότητες, τότε η μετάβαση από το βήμα n στο n+1, έχει γενική ισχύ, για κάθε Φυσικό αριθμό n. Το τέταρτο και τελευταίο επίπεδο στοχεύει τόσο στην ανάδειξη της σημαντικότητας του συνόλου των Φυσικών Αριθμών, ως συνόλου στο οποίο εφαρμόζεται η Μαθηματική Επαγωγή, όσο και στην ανάδειξη των συλλογιστικών που είναι αποδεκτές στη Μαθηματική Κοινότητα. Ισχυριστήκαμε ότι οι στόχοι αυτοί επιτυγχάνονται ως εξής: ο μεν πρώτος μέσα από την αξιοποίηση της ανάγκης για δομή (π.χ. μέσα από την ερώτηση αν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής για την απόδειξη της πρότασης: για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, $2^x>x$'), ο δε δεύτερος μέσα από την έκθεση των μαθητών σε αποδείξεις με Μαθηματική Επαγωγή οι οποίες χρησιμοποιούν λανθασμένη συλλογιστική (π.χ. η 'απόδειξη' που αναφέραμε για το επιχείρημα ότι 'όλες οι γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών').

Τέλος, σε αυτή την εργασία έγινε μια προσπάθεια να αξιοποιηθούν όσο το δυνατόν περισσότερα από τα πορίσματα του προαναφερθέντος διδακτικού πλαισίου επί της διδακτικής πρότασης που κατατέθηκε για τα ελληνικά δεδομένα, υπό τον περιορισμό των πραγματικών σχολικών συνθηκών της ελληνικής τάξης, όπως είναι ο περιορισμένος χρόνος, τα ανεπαρκή εφόδια εκπαιδευτικών κ.ά. Παράλληλα, σημειώθηκε ότι η συνέχιση αυτής της έρευνας αφορά στην εφαρμογή της προτεινόμενης διδακτικής πρότασης με στόχο την αναστοχαστική ανάλυση αυτού του διδακτικού πειράματος, προκειμένου να γίνουν αναπροσαρμογές και βελτιώσεις στις προτεινόμενες δραστηριότητες.

5. Βιβλιογραφικές Αναφορές

Allen, L. (2001). Teaching mathematical induction: an alternative approach. *Mathematics Teacher*, *94*(6), 500-504.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 797–810.

Avital, S., & Hansen, R. (1976). Mathematical induction in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 399-411.

Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, *9*, 429-438.

Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Εισαγωγή στη Γνωστική Ψυχολογία. Τόμος Α΄*. Αθήνα: Gutenberg.

Baker, J.D. (1996). Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (April 8-12). New York. Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED396931.pdf.

Baroody, A.J., Reid E.E., & Purpura, D.J. (2013). An Example of a Hypothetical Learning Progression: The Emergence of Informal Mathematical Induction. Symposium Paper for the *International STEM Research Symposium*, Savannah, Georgia, May 31 through June 2. Retrieved from http://www.uwyo.edu/wisdome/_files/documents/baroody2.pdf.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 811–822.

Cajori, F. (1918). Origin of the Name "Mathematical Induction". *The American Mathematical Monthly*, *25* (5), 197-201.

Cusi, A., & Malara, N.A. (2009). Improving awareness about the meaning of the principle of mathematical induction. *PNA*, *4*(1), 15-22.

Dawson, J.W. (2006). Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *3*(14), 269–286.

Dewey, J. (1998). *Experience and education: the 60th anniversary edition*. U.S.A.: Kappa Delta Pi.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking during Instruction. *Educational Psychologist*, *23*, 167-80.

Dubinsky, E. (1986). Teaching Mathematical Induction I. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 305-317.

Dubinsky, E. (1989). Teaching Mathematical Induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, *8*(3), 285-304.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). New York/Boston/Dordrecht/London/Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior, 5,* 55-92.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: a pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 173-189.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Golovina, L.I., & Yaglom, M. (1963). *Induction in Geometry*. Boston: D.C. Heath.

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. II,* 9-13 July (pp. 45-51). Paris: P.M.E. 13.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction* (pp. 185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. (2013). Intellectual Need. In K.R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119-151). New York: Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from Exploratory Studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Hausfather, S. J. (1996). Vygotsky and Schooling: Creating a Social Context for Learning. *Action in Teacher Education, 18*(2), 1-10.

Heinzmann, G., & Nabonnand, P. (2008). Poincaré: intuitionism, intuition and convevtion. In M. Atten, P. Boldini, M. Bourdeau, & G. Heinzmann (Eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007): The Cerisy Conference* (pp. 163-177). Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.

Θωμαΐδης, Ι. (2004). *Ιστορικά Σημειώματα.* Στο Λ. Αδαμόπουλος, Β. Βισκαδουράκης, Δ. Γαβαλάς, Γ. Πολύζος, & Α. Σβέρκος (επιμ.), *Μαθηματικά Β΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Jetter, M. (2012). Assessing Proof Schemes: An interesting “Proof” by mathematical induction. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 463-466). Portland: Oregon.

Καλαβάσης, Φ., & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2015). *Ανάμεσα στο μέρος και στο όλο. Αναστοχαστική οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Gutenberg.

Κάλφα, Κ. (1990). *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων*. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ

Κλαουδάτος, Ν. (2011). *Σημειώσεις από το μάθημα Δ1: Διδακτική των Μαθηματικών 1.* Στο *e-class*, ΕΚΠΑ.

Kynigos, Ch. (2010). Constructionism: Theory of learning or theory of design? *Mathematics Education, 42*, 63–76.

Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής (1998). Θεσσαλονίκη: Ινστιτούτο Νεοελληνικών Σπουδών, ΑΠΘ.

Lakoff, G., & Núñez, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being.* New York: Basic Books.

Lambrou, M. (2005). Mathematical induction: Notes for teacher (part1). *Creative Mathematics and Informatics, 14,* 19-30. Retrieved from http://creative-mathematics.ubm.ro/issues/creative_2005_14_19_30.pdf.

Lowenthal, F., & Eisenberg, T. (1992). Mathematics induction in school; An illusion of rigor. *School Science and Mathematics, 92,* 233-238.

Ματσαγγούρας, Η. (2000). *Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και μάθηση*, Αθήνα: Γρηγόρης.

Maaß, K., & Arigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education, 45,* 779–795.

Mayer, R.E. (1995). Μαθηματική ικανότητα. Στο Σ. Βοσινάδου (επιμ.), *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών* (σσ. 154-190). Αθήνα: Gutenberg.

Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2013). The Need For Proof In Geometry: A Theoretical Investigation Through Husserl's Phenomenology. In A.M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3* (pp. 329-336). Kiel, Germany: PME.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem. Mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 253-268.

Πάλλα, Μ. (2006). *Η μαθηματική επαγωγή και η κατανόησή της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Διπλωματική Εργασία.* Αθήνα: ΔΔΠΜΣ Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_palla.pdf.

Πόταρη, Δ. (2011). *Σημειώσεις από το μάθημα: Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Διδακτική Πράξη*. Στο *e-class*, ΕΚΠΑ.

Palla, M., Potari, D., & Spyrou, P. (2012). Secondary School Students' Understanding of Mathematical Induction: Structural Characteristics and the Process of Proof Construction. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(5), 1023-1045.

Pelc, A. (2009). Why Do We Believe Theorems? *Philosophia Mathematica, 3*(17), 84–94.

Pinto-Fusaro, M.M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME. Vol. 3* (pp. 281-288). Haifa, Israel.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics.* New Jersey: Princeton University Press.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 39-65.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5-41.

Reid, D. (1999). Needing to explain: The mathematical emotional orientation. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the Twentieth-third Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 105-112). Haifa, Israel.

Rips, L.J., & Asmuth, J. (2007). Mathematical Induction and Induction in Mathematic. In A. Feeney, & E. Heit (Eds.), *Induction*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Reck, E. (2012). Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics. In E.N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition). CSLI, Stanford University. Retrieved from http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/dedekind-foundations/.

Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The Use of Models in Teaching Mathematical Induction. In M. Johnsen Høines, & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 113-120). Bergen, Norway: Bergen University College. Retrieved from http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR249_Ron.pdf.

Σπύρου, Π. (2015). *Σημειώσεις από το μάθημα Δ13: Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών*. Στο *e-class*, ΕΚΠΑ.

Schach, A. (1958). Two Forms of Mathematical Induction. *Mathematics Magazine*, *32*(2), 83-85.

Sfard, A. (1988). Operational vs. structural method of teaching mathematics: A case study. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 560-567). Veszprem, Hungary: Ferenc Genzwein, OOK.

Sharif-Rasslan, A., & Rasslan, S. (2015). A Mathematician's Influence on Students' Perceptions. The Case of Mathematical Induction. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, *2*(1), 1-10.

Smith, L. (2002). *Reasoning by mathematical induction in children's arithmetic*. Oxford: Pergamon Press.

Smith, L. (2003). Children's reasoning by mathematical induction: normative facts, not justcausal facts. *International Journal of Educational Research*, *39*, 719-742.

Stalo, M., Elia, I., & Gagatsis, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 161-168). Prague: PME.

Stein, M.K., & Smith, M.S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Stewart, I., & Tall, D. (1977). *The foundations of mathematics*. Oxford, England: Oxford University Press.

Stylianides, A.J., Stylianides, G.J., & Philippou, G.N. (2005). Prospective Teachers' Understanding of Proof: what if the truth set of an open sentence is broader than that covered by the proof? In H.L. Chick & J.L.Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 241-248). Melbourne: PME. Retrieved on: 21 October 2015 from http://www.researchgate.net/publication/251401002.

Stylianides, G.J., Stylianides, A.J., & Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 145–166. DOI: 10.1007/s10857-007-9034-z.

Truncellito, D.A. (2015). Epistemology. In Ch. Wren (Ed.), *The Internet Encyclopedia of Philosophy* (χ.σ.). Retrieved from http://www.iep.utm.edu/epistemo/.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007). *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007-2008.* Αθήνα: ΟΕΔΒ. http://www.pi-schools.gr/lessons/mathematics/odigies_did_math_lyk.pdf.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998). *Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου. Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: ΟΕΔΒ. http://digitalschool.minedu.gov.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B100/491/3187,12926/.

Vygotsky, L.S. (1997). *Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των Ανώτερων Ψυχολογικών Διαδικασιών* (μτφρ. Α. Μπίμπου & Σ. Βοσνιάδου). Αθήνα: Gutenberg

Wiscamb, M. (1970). A Geometric Introduction to Mathematical Induction. *The Mathematics Teacher, 63*(5), 402-404.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 297-321.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki- Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics education, 40* (1), 131-141. doi: 10.1007/s11858-007-0065-9.

Zulkardi, H. (2010). How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach? Literature study. University of Twente. Retrieved from http://www.reocities.com/ratuilma/rme.html.

6. Παράρτημα

6.1 Η Αρχή του Ελαχίστου είναι ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Απόδειξη

(→) Έστω ότι ισχύει η αρχή του ελαχίστου. Θα δείξουμε την ισχύ της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής

Θεωρούμε ότι:

α) η P(0) ισχύει και

β) αν η P(κ) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό κ, τότε η P(κ+1) ισχύει.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος, ώστε η P(m) να μην ισχύει. Θεωρούμε το σύνολο A={n ∈ ℕ: P(n) δεν ισχύει}. Εφόσον το A είναι μη κενό υποσύνολο των Φυσικών Αριθμών, σύμφωνα με την Αρχή του Ελαχίστου, υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του A έστω το z. Προφανώς z≠0, εφόσον η P(0) ισχύει. Επειδή το z είναι το ελάχιστο στοιχείο του A, θα έχουμε z-1∉A, δηλαδή η P(z-1) ισχύει. Από την υπόθεση προκύπτει ότι η P(z) ισχύει, δηλαδή z∉A, το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως η P(n) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

(←) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η αρχή της μαθηματικής επαγωγής και θα αποδείξουμε την ισχύ της αρχής του ελαχίστου.

Έστω A υποσύνολο των Φυσικών Αριθμών με A ≠ ∅. Ας υποθέσουμε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω το σύνολο B που περιέχει τους φυσικούς που είναι μικρότεροι όλων των στοιχείων του A, δηλαδή:

B={κ ∈ ℕ/ κ < α, για κάθε α∈A} ή κ ∈ B ⇔ [για κάθε α ∈ A : κ < α].

Είναι προφανές ότι 0 ∈ B (αλλιώς θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του A).

Θεωρώ ν ∈ B. Τότε α>ν για κάθε α∈A. Όμως υποτέθηκε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, άρα ν+1 ∉ A. Επομένως α>ν+1 για κάθε α∈A. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής προκύπτει B = ℕ, και άρα A = ∅, πράγμα άτοπο. Συνεπώς, το A έχει ελάχιστο στοιχείο

6.2 Πώς αποφεύγεται το 'κ.ο.κ.' που εμπεριέχεται μέσα στην Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής μέσα από τη διατύπωση της ισοδύναμης αρχής του 5ου Αξιώματος Peano (κατά τους Stewart & Tall, 1977)

Προκειμένου να 'συλλάβουμε' την έννοια των Φυσικών Αριθμών μονομιάς, θεωρούμε την διαδοχή των αριθμών 1, 2, 3,… ως μια συνάρτηση s: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, με s(n)=n+1. (το γράμμα s, χρησιμοποιείται λόγω της λέξης 'successor', επειδή η s είναι η συνάρτηση που απεικονίζει έναν Φυσικό Αριθμό στον (διαδοχικό) επόμενό του).
Είναι προφανές ότι

i. η s δεν είναι επί, εφόσον το 1 δεν έχει πρότυπο
ii. η s είναι αμφιμονότιμη εφόσον $S(m)=S(n) \rightarrow m+1=n+1 \rightarrow m=1$

Υπάρχει μια ιδιότητα που είναι καθοριστική στις αποδείξεις με επαγωγή και αυτή η ιδιότητα είναι η εξής:

Ας υποθέσουμε ότι S ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε Α. $1 \in S$ και Β. για κάθε Φυσικό Αριθμό n, αν $n \in S$, τότε και $n+1 \in S$. Τότε $S= \mathbb{N}$. Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτές οι τρεις ιδιότητες είναι το μόνο που χρειάζεται για να περιγράψουμε τους Φυσικούς Αριθμούς. Για τεχνικούς λόγους είναι προτιμότερο να ξεκινήσουμε την αρίθμηση από το 0 και όχι από το 1. Ένας τέτοιος λόγος είναι για να μπορούμε να περιγράψουμε τον πληθάριθμο του κενού συνόλου, που περιέχει μηδέν στοιχεία.

Ας συμβολίσουμε με N_0, το σύνολο {0,1,2,3,…,n,…}. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο N_0 και μια συνάρτηση s: $N_0 \rightarrow N_0$, έτσι ώστε:

A_1. Η s δεν είναι επί, διότι $0 \neq s(n)$ για κάθε $n \in N_0$

A_2. Η s είναι αμφιμονότιμη, δηλ. $s(m)=s(n) \rightarrow m=n$

A_3. Αν S ένα υποσύνολο του N_0 ώστε: $0 \in$ και S $n \in S \rightarrow n+1=s(n) \in S$ για κάθε $n \in N_0$, τότε $S=N_0$.

Δεν υπάρχει κανένα εχέγγυο που να μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου, γι' αυτό θα πρέπει να θεωρήσουμε την ύπαρξή του ως βασικό αξίωμα για τα Μαθηματικά μας.

Αξίωμα ύπαρξης για τους Φυσικούς Αριθμούς: Υπάρχει ένα σύνολο N_0 και μια συνάρτηση s: $N_0 \rightarrow N_0$ που ικανοποιούν τις συνθήκες A_1, A_2, A_3. Από εδώ, μπορούμε να αναπτύξουμε τις συνήθεις ιδιότητες της αριθμητικής κτλ. Η συνθήκη A_3 ενσωματώνει την ιδέα της απόδειξης με Μαθηματική Επαγωγή, όπως συμβαίνει και στην επόμενη περίπτωση:

Πρόταση 1: Αν $n \in N_0$, $n \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδικό $m \in N_0$ ώστε $n=s(m)$.

Απόδειξη

Έστω ότι $S=\{ n \in N_0 / n=0$ ή $n=s(m)$ για κάποιο $m \in N_0\}$.

Παρατηρούμε ότι σίγουρα $0 \in S$.

Αν $n \in S$, τότε είτε $n=0$ είτε $n=s(m)$ για κάποιο $m \in N_0$

i. Αν $n=0$, τότε $s(n)=s(0)$, επομένως $s(n) \in S$

ii. Αν $n=s(m)$ για κάποιο $m \in N_0$, τότε $s(n)=s(s(m))$, όπου $s(m) \in N_0$ και άρα $s(n) \in S$.

Έτσι, από A_3 έχουμε ότι $S=N_0$.

Η πρόταση 1, μας λέει ότι το μόνο στοιχείο που δεν είναι διαδοχικό κάποιου άλλου είναι το 0, μια ιδιότητα που το διαφοροποιεί από όλα τα υπόλοιπα στοιχεία. Το σύνολο $\mathbb{N}=N_0 \backslash \{0\}$, θα ονομάζεται σύνολο των Φυσικών Αριθμών.

Ας ξαναδούμε πιο προσεκτικά την απόδειξη της πρότασης 1. Ουσιαστικά, η δομή της βασίζεται στον ορισμό ενός συνόλου S και έπειτα

I. Στην απόδειξη ότι $0 \in S$,

II. Στην απόδειξη ότι $n \in S \rightarrow n+1=s(n) \in S$,

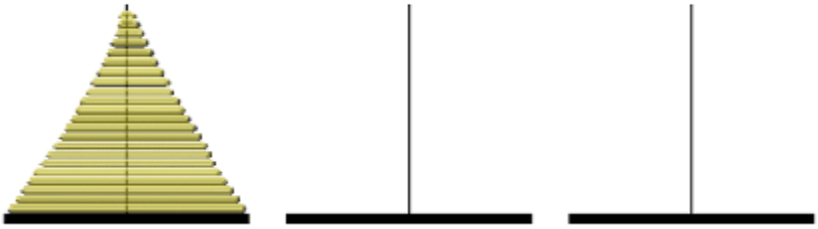
III. Στην επίκληση της συνθήκης A_3 προκειμένου να συμπεράνουμε ότι $S=N_0$.

Μια απόδειξη με επαγωγή έχει πάντα αυτή τη μορφή. Πρακτικά το S είναι της μορφής $S=\{n \in \mathbb{N} / P(n)$ αληθής$\}$, όπου $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από τη μεταβλητή n. Οι προτάσεις I, II, III, μετατρέπονται ως εξής:

1. Δείχνουμε ότι $P(0)$ αληθής
2. Δείχνουμε ότι αν $P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής
3. Επίκληση στη συνθήκη A_3, προκειμένου να συμπεράνουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in N_0$.

Η χρήση της συνθήκης A_3 βοηθά στην ολοκλήρωση της απόδειξης, χωρίς ίχνος ή υπόνοια της φράσης ‘κ.ο.κ.’

6.3 Οι πύργοι του Ανόι



Σχήμα 6.1: Αναπαράσταση των πύργων του Ανόι

Στο κέντρο του μεγαλόπρεπου Ναού του Benares, είναι στερεωμένοι τρεις μεταλλικοί στύλοι. Στον ένα από αυτούς τους στύλους, κατά τη δημιουργία του κόσμου, τοποθετήθηκαν 64 χρυσά δαχτυλίδια διαφορετικής διαμέτρου. Τα δαχτυλίδια είναι τοποθετημένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε, στη βάση του στύλου να βρίσκεται το δαχτυλίδι με την μεγαλύτερη διάμετρο και τα υπόλοιπα διατάσσονται κατά φθίνουσα σειρά από αυτό με την μεγαλύτερη διάμετρο προς αυτό με την μικρότερη (βλ. Σχήμα 6.1). Αυτός ο στύλος ονομάζεται ο πύργος του Βράχμα και μέρα νύχτα οι μοναχοί του ναού μεταφέρουν τα δαχτυλίδια από τον ένα στύλο στον άλλο, ακολουθώντας τους δυο απαράβατους νόμους του Βράχμα, οι οποίοι απαιτούν ότι δεν πρέπει να μετακινείται παραπάνω από ένα δαχτυλίδι τη φορά, καθώς επίσης δεν επιτρέπεται να τοποθετηθεί δαχτυλίδι μεγαλύτερης διαμέτρου πάνω σε δαχτυλίδι μικρότερης διαμέτρου. Ο Θρύλος λέει ότι, όταν όλοι οι δίσκοι μεταφερθούν από τον ένα στύλο στο άλλο, ο κόσμος θα μετατραπεί σε στάχτη και σκόνη.

Τα συνήθη ερωτήματα που ακολουθούν αυτό το πρόβλημα είναι ‘αν υπάρχει λόγος να πανικοβληθούμε’ ή ‘ποιος είναι ο (ελάχιστος) αριθμός κινήσεων που απαιτείται για την μεταφορά όλων των δαχτυλιδιών’.

Φυσικά και δεν υπάρχει λόγος ανησυχίας: αποδεικνύεται με Μαθηματική Επαγωγή ότι για την μεταφορά ν δίσκων απαιτούνται 2^{ν}-1 κινήσεις, άρα, αν για κάθε κίνηση χρειαζόμαστε π.χ. 1 δευτερόλεπτο, τότε τα 2^{64}-1 δευτερόλεπτα που θα χρειαστούν συνολικά είναι ισοδύναμα χρονικά με 50.000.000.000 χρόνια.

6.4 Το πρόβλημα του κάλπικου νομίσματος

Δίνονται n λίρες. Όλες τους έχουν το ίδιο βάρος εκτός από μία η οποία είναι ελαφρύτερη (κάλπικη). Με τη χρήση μιας ζυγαριάς όπως αυτή του Σχήματος 6.2 πρέπει να βρεθεί η κάλπικη λίρα με το ελάχιστο πλήθος ζυγίσεων. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ζυγίσεων;

Αυτό το πρόβλημα αποδεικνύεται πάρα πολύ δύσκολο να απαντηθεί. Μπορεί κανείς να βρει στοιχεία για την απάντηση στον σύνδεσμο:
http://math.uni.lodz.pl/~andkom/Marcel/Kule-en.pdf

Σχήμα 6.2: Μία ζυγαριά

Ο Austin, το 1988, έδωσε μια (λανθασμένη) απόδειξη με Μαθηματική Επαγωγή ότι τέσσερα ζυγίσματα είναι αρκετά για οσοδήποτε μεγάλου πλήθους νομίσματα. Παρακάτω παρατίθεται το σκεπτικό της απόδειξής του:

P(n) ορίζεται να είναι η πρόταση ότι το ελάχιστο πλήθος ζυγισμάτων που απαιτούνται για n νομίσματα, εξαιρώντας το ενδεχόμενο της τύχης (π.χ. να βρούμε το κάλπικο με το πρώτο ζύγισμα) είναι το πολύ 4.

Αν n=2, τότε ένα ζύγισμα αρκεί. Προφανώς $P(2) = 1 \leq 4$

Υποθέτω ότι η πρόταση P(n) ισχύει για κάποιον $n \in N$ (δηλαδή ότι n πλήθους νομίσματα απαιτούν 4 ζυγίσματα το πολύ) και θα δείξω ότι ισχύει και για n+1.

Έστω ότι έχω n+1 πλήθους νομίσματα. Τότε θα βρούμε το κάλπικο με 4 ζυγίσματα ως εξής:

Αφήνουμε ένα νόμισμα στην άκρη. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία που έχουμε από την επαγωγική υπόθεση στα εναπομείναντα n νομίσματα. Ξέρουμε, από την επαγωγική υπόθεση, ότι χρειαζόμαστε 4 ζυγίσματα το πολύ. Μέσα σε αυτή τη διαδικασία είτε θα βρούμε το κάλπικο νόμισμα (οπότε εκεί τελειώνει το πρόβλημα,

δηλ, στα 4 ζυγίσματα το πολύ) είτε δεν θα το βρούμε ανάμεσα στα n νομίσματα επομένως, χωρίς άλλο ζύγισμα (πέραν των το πολύ τεσσάρων ζυγισμάτων της διαδικασίας), ξέρουμε ότι το κάλπικο νόμισμα είναι αυτό που αφήσαμε στην άκρη.

Επομένως, σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής αποδείξαμε ότι προκειμένου να βρούμε το κάλπικο νόμισμα ανάμεσα σε n νομίσματα, το ελάχιστο πλήθος ζυγισμάτων είναι τέσσερα.

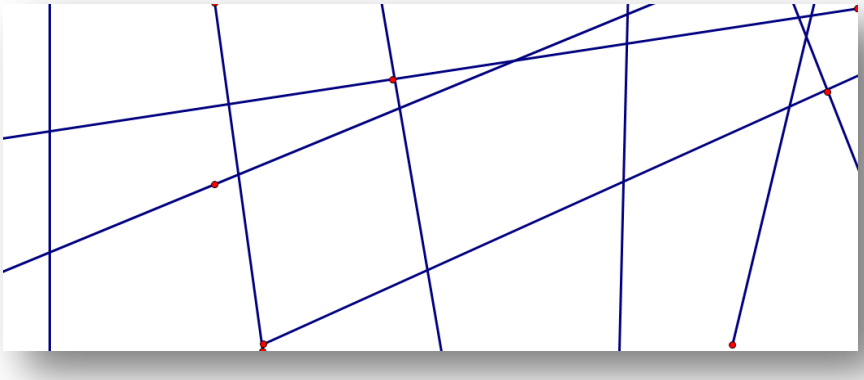
Πού βρίσκεται το λάθος στην απόδειξη του Austin;

Στην επαγωγική υπόθεση, θεωρώ ότι έχω μια διαδικασία που μου επιτρέπει με το πολύ 4 ζυγίσματα να βρω το ένα και μοναδικό κάλπικο νόμισμα που βρίσκεται ανάμεσα σε n πλήθους νομίσματα. Στο επαγωγικό βήμα, όταν θεωρώ ότι έχω n+1 νομίσματα, γνωρίζω σίγουρα ότι το κάλπικο νόμισμα είναι ανάμεσα σε αυτά. Όταν αφαιρώ ένα νόμισμα, τότε

Α. αν στα εναπομείναντα n νομίσματα εξακολουθεί να βρίσκεται μέσα το κάλπικο νόμισμα, τότε κατά την επαγωγική υπόθεση, πράγματι 4 ζυγίσματα αρκούν.

Β. Όμως, αν στα εναπομείναντα n νομίσματα παύει να βρίσκεται το κάλπικο νόμισμα (και φυσικά δεν υπάρχει τρόπος να το ξέρουμε αυτό εκ των προτέρων), τότε δεν έχουμε καμία διαδικασία που να μας εγγυάται ότι το πολύ 4 ζυγίσματα επαρκούν. Μπορεί να χρειάζονται περισσότερα ζυγίσματα.

6.5 Το πρόβλημα του χάρτη των δύο χρωμάτων



Σχήμα 6.3: Ο χάρτης του προβλήματος

Επάνω σε ένα επίπεδο, κείτονται ορισμένες ευθείες, χωρίζοντάς το έτσι σε περιοχές (νομούς). Να δείξετε ότι κάθε περιοχή μπορεί να χρωματιστεί με ένα από δύο δοσμένα χρώματα έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Ας διατυπώσουμε πρώτα ότι P(n) είναι η πρόταση που δηλώνει ότι για n ευθείες οι περιοχές που δημιουργούνται από αυτές είναι χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα για κάθε δύο γειτονικές περιοχές.

Η πρόταση P(1) προφανώς ισχύει διότι, αν έχουμε μία ευθεία στο επίπεδο η οποία το χωρίζει σε δύο 'περιοχές' (ημι-επίπεδα), τότε, αν χρωματίσουμε το ένα ημι-επίπεδο με το ένα χρώμα και το άλλο ημι-επίπεδο με το άλλο, τότε έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η P(n) και θα δείξουμε ότι, δεδομένης αυτής, ισχύει και η P(n+1). Πράγματι, αν σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα με n+1 ευθείες, τότε, αφαιρώντας μία οποιαδήποτε εξ αυτών, λαμβάνουμε έναν χάρτη με n ευθείες που, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, μπορεί να χρωματιστεί με τον ζητούμενο τρόπο. Τώρα ξαναπροσθέτουμε την ευθεία που αφαιρέσαμε και αλλάζουμε όλα τα χρώματα προς το μέρος του ενός ημι-επιπέδου της ευθείας και αφήνουμε τα χρώματα από την άλλη μεριά αυτής ως έχουν. Τότε, αν δύο περιοχές έχουν το ίδιο 'σύνορο', θα έχουν διαφορετικά χρώματα, είτε το κοινό τους σύνορο είναι τμήμα της ευθείας που προσθέσαμε στο τέλος είτε όχι.