



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αγγελή Ασημίνα

A.M 201437

**«Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος και πως
αυτό λειτουργεί στην ανάπτυξη γεωμετρικού
συλλογισμού και γεωμετρικής απόδειξης»**

Επιβλέπων Καθηγητής: Γαγάτσης Αθανάσιος

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΪΟΣ 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του **Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης** που απονέμει το **Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γαγάτσης Αθανάσιος (επιβλέπων καθηγητής)	Καθηγητής	
2) Πόταρη Δέσποινα	Αναπλ. Καθηγήτρια	
3) Σπύρου Παναγιώτη \\	Αναπλ. Καθηγητής	

Θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω,

- Τον επιβλέπων, καθηγητή κ. Γαγάτση Αθανάσιο για όλα όσα έμαθα από εκείνον για τη διδακτική των μαθηματικών κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα, αλλά και για την διαρκή υποστήριξή και τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη συγγραφή της εργασίας μου. Η εμπειρία του και οι γνώσεις του ήταν αυτές που με ενέπνευσαν και με ενθάρρυναν πολύ.
- Τον κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και την κ. Πόταρη Δέσποινα για τη συμμετοχή τους στη τριμελή συμβουλευτική επιτροπή της εργασίας μου.
- Τον κ. Σπύρου Παναγιώτη και την κ. Πόταρη Δέσποινα για τη συμμετοχή τους στη τριμελή εξεταστική επιτροπή της εργασίας μου.
- Τους συμφοιτητές μου που μοιραστήκαμε ένα ταξίδι εμπειρίας και γνώσεων.
- Τους συναδέλφους μου εκπαιδευτικούς και τους μαθητές των σχολείων με τους οποίους συνεργάστηκα και που με μεγάλη προθυμία συμμετείχαν στην διεξαγωγή αυτής της έρευνας.
- Όλους τους διδάσκοντες του τμήματος και την γραμματεία του μεταπτυχιακού την κ. Κλή Ελένη για όλη της την βοήθεια.
- Τους γονείς μου Κωνσταντία και Βασίλη καθώς και τον αδελφό μου Γιώργο που με αγάπη και υπομονή στήριζαν πάντα όλες τις επιλογές μου.
- Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ, στο σύζυγο μου Σωτήρη για την κατανόηση και την υποστήριξη του σε όλα τα χρόνια της κοινής μας πορείας.

Ασημίνα Β. Αγγελή, 2017

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στα παιδιά μου
Τζώρτζη και Βασίλη

Ευρετήριο εικόνων		σελίδα
Εικόνα 1.	Θεωρία και διαγράμματα	7
Εικόνα 2.	Διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος	9
Εικόνα 3.	Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος (Fischbein,1993)	11
Εικόνα 4.	Γνωστική ανάλυση της γεωμετρικής σκέψης του Duval	16
Εικόνα 5.	Πολυδιάστατη μελέτης της δομής ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης και κατανόησης	17
Εικόνα 6.	Απουσία συμφωνίας	18
Εικόνα 7.	Η θεωρία των Houdement και Kuzniak	23
Εικόνα 8.	Τρία είδη γνωστικών διαδικασιών της Γεωμετρίας	25
Εικόνα 9.	Γεωμετρικό σχήμα κατά Fischbein, (1993)	33
Εικόνα 10.	Έργο Α1	47
Εικόνα 11.	Ορθή γωνία ονομάστηκε οξεία	48
Εικόνα 12.	Αμβλείες γωνίες ονομάστηκαν οξείες	48
Εικόνα 13.	Έργο Α2	48
Εικόνα 14.	Υπολογισμός περιμέτρου	49
Εικόνα 15.	Υπολογισμός εμβαδού	49
Εικόνα 16.	Έργο Α3	50
Εικόνα 17.	Δίπλωση χαρτιού & μέτρηση τρυπών	51
Εικόνα 18.	Έργο Α4	51
Εικόνα 19.	Έργο Α5	52
Εικόνα 20.	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α Μέρους	54
Εικόνα 21.	Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων Α4-Α5	55
Εικόνα 22.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α Μέρους	58
Εικόνα 23.	Ομάδα των τριών μεταβλητών του έργου Α5	58
Εικόνα 24.	Ομάδα των τριών μεταβλητών του έργου Α5	59
Εικόνα 25.	Ομάδα των μεταβλητών του έργου Α1-Α2- Α4	59
Εικόνα 26.	Έργο Β1	60
Εικόνα 27.	Μη αναγνώριση δεδομένων στο Β1	61
Εικόνα 28.	Παρανόηση 1 μαθητή στο έργο Β1	62

Εικόνα 29.	Παρανόηση 2 μαθητή στο έργο B1	62
Εικόνα 30.	Έργο B2	63
Εικόνα 31.	Έργο B3	64
Εικόνα 32.	Έργο B4	65
Εικόνα 33.	Έργο B5	66
Εικόνα 34.	Δυσκολία αναγνώρισης στο B5 δεδομένα- ζητούμενα	67
Εικόνα 35.	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Β Μέρους	68
Εικόνα 36.	Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων Bde1- Bex1-Bop4	69
Εικόνα 37.	Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων B2-B3- Bex4	69
Εικόνα 38.	Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων B5	70
Εικόνα 39.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Β Μέρους	73
Εικόνα 40.	Συνεπαγωγική Αλυσίδα 1	74
Εικόνα 41.	Συνεπαγωγική Αλυσίδα 2	75
Εικόνα 42.	Συνεπαγωγική Αλυσίδα 3	76
Εικόνα 43.	Συνεπαγωγική Αλυσίδα 4	76
Εικόνα 44.	Έργο C1	77
Εικόνα 45.	Έργο C2	78
Εικόνα 46.	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους	79
Εικόνα 47.	Κλάση ομοιότητας C1	80
Εικόνα 48.	Κλάση ομοιότητας C2	80
Εικόνα 49.	Κλάση ομοιότητας C3	81
Εικόνα 50.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους	83
Εικόνα 51.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα Cex1-Cde1	84
Εικόνα 52.	Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α-Β-Γ Μέρους	85
Εικόνα 53.	Κλάση ομοιότητας 1	86
Εικόνα 54.	Κλάση ομοιότητας 2	86

Εικόνα 55.	Κλάση ομοιότητας 3	87
Εικόνα 56.	Κλάση ομοιότητας 4	87
Εικόνα 57.	Κλάση ομοιότητας 5	88
Εικόνα 58.	Κλάση ομοιότητας 2-3-4-5	88
Εικόνα 59.	Κλάση ομοιότητας 6	89
Εικόνα 60.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α-Β-Γ Μέρους	93
Εικόνα 61.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα C2a-C2b	94
Εικόνα 62.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα C2-B5	94
Εικόνα 63.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα Bfig5-Cfig2-B5a	95
Εικόνα 64.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα A4-B3	95
Εικόνα 65.	Συνεπαγωγικό διάγραμμα C1-B4	96
Εικόνα 66	Διδακτική προσέγγιση	102

Ευρετήριο πινάκων	σελίδα
Πίνακας 1. Λόγοι διδασκαλίας της γεωμετρίας	6
Πίνακας 2. Οι μεταβλητές της έρευνας	45
Πίνακας 3. Ποσοστά επιτυχίας των έργων του Α Μέρους	47
Πίνακας 4. Ποσοστά επιτυχίας Α2-Αex2	49
Πίνακας 5. Ποσοστά επιτυχίας των Α3-Αex3	50
Πίνακας 6. Ποσοστά επιτυχίας των Αop4-Apr4-Aex4	52
Πίνακας 7. Ποσοστά επιτυχίας των Αop5-Apr5-Aex5	53
Πίνακας 8. Συμπληρωματικές μεταβλητές Α Μέρους	56
Πίνακας 9. Ποσοστά επιτυχίας Συμπληρωματικών μεταβλητών Α Μέρους	57
Πίνακας 10. Ποσοστά επιτυχίας των έργων του Β Μέρους	60
Πίνακας 11. Ποσοστά επιτυχίας των Β1-Bex1	61
Πίνακας 12. Ποσοστά επιτυχίας των Β2-Bex2	63
Πίνακας 13. Ποσοστά επιτυχίας των Β3-Bex3	65
Πίνακας 14. Ποσοστά επιτυχίας στο έργο Β4-Bex4	66
Πίνακας 15. Ποσοστά επιτυχίας στο έργο Β5	67
Πίνακας 16. Συμπληρωματικές μεταβλητές Β Μέρους	72
Πίνακας 17. Ποσοστά επιτυχίας Συμπληρωματικών μεταβλητών Β Μέρους	72
Πίνακας 18. Ποσοστά επιτυχίας Cοp1-Cpr1-Cex1	77
Πίνακας 19. Ποσοστά επιτυχίας C2	79
Πίνακας 20. Συμπληρωματικές μεταβλητές Γ Μέρους	82
Πίνακας 21. Ποσοστά επιτυχίας Συμπληρωματικών μεταβλητών C Μέρους	83
Πίνακας 22. Συμπληρωματικές μεταβλητές Α-Β-Γ Μέρους	92
Πίνακας 23. Ποσοστά επιτυχίας Μ-Γ	92
Πίνακας 24. Ποσοστά επιτυχίας S1-S2-S3	92

Συντομογραφίες :

Π.Ι	παιδαγωγικό ινστιτούτο	
ΥΠ.Ε.Π.Θ	υπουργείο Παιδείας	
NCTM		National Council of Teachers of Mathematics
C.H.I.C.	Λογισμικό Πρόγραμμα	Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive
M	Αγόρι	male
F	κορίτσι	female
S	σχολείο	school
fig	σχήμα	figure
op	λειτουργική κατανόηση	operative apprehension
pe	αντιληπτική κατανόηση	perceptual apprehension
de	απόδειξη	demonstration
ex	εξήγηση	explanation
pr	πράξεις-διαδικασία	Procedure
er	λάθος	error

Περιεχόμενα		σελίδα
	Περίληψη	1
Κεφάλαιο 1°.	Εισαγωγή	5
Κεφάλαιο 2°.	Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος	9
2.1	Εννοιολογικό Σχήμα κατά Fischbein	10
2.2	Η θεωρία του Duval	12
2.3	Σημασιολογική Συμφωνία ή Ασυμφωνία	17
Κεφάλαιο 3°.	Γεωμετρικός συλλογισμός και απόδειξη	21
3.1	Η θεωρία των Houdement και Kuzniak	22
3.2	Νοητικές Διαδικασίες στη Γεωμετρία	23
3.3	van Hiele επίπεδα	26
3.4	Susumu Kunimune, Taro Fujita & Keith Jones	29
3.5	Συνδυασμός επίπεδων με τα ειδή Γεωμετρίας	33
3.6	Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος	34
3.7	Γεωμετρία και αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών	36
3.8	Απόψεις καθηγητών για την απόδειξη της Γεωμετρίας	38
Κεφάλαιο 4°.	Έρευνα	41
4.1	Δείγμα	41
4.2	Μεθοδολογία	42
4.3	Ανάπτυξη ερευνητικού εργαλείου και χορήγηση	42
4.4	Στατιστικές Αναλύσεις	45
4.5	Αποτελέσματα	47
Κεφάλαιο 5°.	Συμπεράσματα-Συζήτηση	97
5.1	Διδακτικές προτάσεις	101
Βιβλιογραφία		104
Παράρτημα I	Ερωτηματολόγιο Μέρος Α	109
Παράρτημα II	Ερωτηματολόγιο Μέρος Β	111
Παράρτημα III	Ερωτηματολόγιο Μέρος Γ	113
Παράρτημα IV	Κωδικοποίηση Ερωτηματολογίων	114
Παράρτημα V	Ποσοστά επιτυχίας ανά ερώτηση	117

Περίληψη: Η έρευνα αυτή εξέτασε δυο συνιστώσες: την κατανόηση του Γεωμετρικού σχήματος καθώς και τον γεωμετρικό συλλογισμό των μαθητών. Επίσης έγινε μια προσπάθεια σύνδεσης τους: πως μπορεί η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος να επηρεάσει την γεωμετρική απόδειξη. Ο κύριος στόχος της μελέτης ήταν να εξετάσει την λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος στο γεωμετρικό συλλογισμό σε μαθητές Λυκείου για να διερευνηθούν τα τρία είδη κατανόησης, αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική. Οι άξονες της διερεύνησης είναι α) η γνωστική δομή της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος, β) η επίδραση που έχουν οι διάφοροι τύποι κατανόησης στην επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος, γ) προβλήματα και δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην λειτουργική κατανόηση, δ) το σχήμα ως ευρετικό εργαλείο και ε) γεωμετρικός συλλογισμός και κατάταξη μαθητών σε επίπεδα σε σχέση με την γνωστική τους ανάπτυξη.

Η έρευνα αυτή οργανώθηκε με αναφορά σε δύο κυρίως θεωρητικά πλαίσια. Το πρώτο αφορά στη διάκριση μεταξύ τεσσάρων τύπων σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων, που προτείνεται από τον Duval (1988): η αντιληπτική, η ακολουθιακή, η λειτουργική και η λεκτική σύλληψη. Το δεύτερο θεωρητικό πλαίσιο εστιάζει στον γεωμετρικό συλλογισμό και στα επίπεδα κατανόησης γεωμετρικής αντίληψης που προτείνουν οι Houdement και Kuzniak (2003), καθώς και στα επίπεδα κατανόησης γεωμετρικής αντίληψης που προτείνουν οι Kunimine, Fujita & Jones. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν σημαντικά στοιχεία για τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος των μαθητών.

Τα στοιχεία συλλέχθηκαν από 168 μαθητές Λυκείου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος έχει μια ισχυρή επίδραση στη γεωμετρική απόδειξη. Συγκεκριμένα, κατασκευάστηκε και επαληθεύτηκε ένα δομικό μοντέλο, με το οποίο προσδιορίστηκε η σημασία της αντιληπτικής, της λειτουργικής, της ακολουθιακής και της λεκτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος. Αλληλεπιδράσεις εντοπίστηκαν μεταξύ των διαφόρων τύπων σύλληψης. Ισχυρές σχέσεις βρέθηκαν μεταξύ της λειτουργικής και της λεκτικής σύλληψης, καταδεικνύοντας τη σημασία της οπτικοποίησης στο γεωμετρικό συλλογισμό. Σημαντικές, επίσης, ήταν οι σχέσεις που προέκυψαν μεταξύ της λεκτικής και της ακολουθιακής

σύλληψης, τονίζοντας τη σημασία της γνώσης των μαθηματικών ιδιοτήτων για τις γεωμετρικές κατασκευές και τις διαδικασίες συλλογισμού για τις γεωμετρικές αποδείξεις. Επιπλέον, ο ρόλος της αντιληπτικής σύλληψης προέκυψε καθοριστικός για την ενεργοποίηση της λειτουργικής και της λεκτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος. Η σύλληψη γεωμετρικού σχήματος των μαθητών κυρίως αναπτύσσεται από τη μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην επόμενη. Οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών προκύπτουν στα έργα λεκτικής και λειτουργικής σύλληψης, ενώ εμφανίζονται ικανότεροι στην επίλυση έργων αντιληπτικής. Η γεωμετρική δραστηριότητα των μαθητών της Α΄ τάξης του Λυκείου φαίνεται να εντοπίζεται κυρίως σε ένα παράδειγμα ενός μικτού τύπου Γεωμετρίας (Γεωμετρία II και Γεωμετρία III), το οποίο περιέχει ως επί το πλείστον περισσότερα χαρακτηριστικά από την Γεωμετρία II (Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία), ενώ η γεωμετρική δραστηριότητα των υπολοίπων μαθητών του Λυκείου φαίνεται να βρίσκεται στη Γεωμετρία III (Αυστηρή Αξιοματική Γεωμετρία). Ένα επιπλέον συμπέρασμα από την στατιστική ανάλυση που έγινε οι μαθητές της Α΄ Λυκείου έχουν κατάκτηση τόσο τη γενικότητα της απόδειξης όσο και την κατασκευή της αρά βρίσκονται στο επίπεδο Επίπεδο II.

ABSTRACT : This study examined two components: the understanding of the geometric shape as well as the students' geometric reasoning. It was also attempted to connect them: how can the understanding of the geometric shape affect the geometric proof. The main objective of the study was to examine the functioning of the Geometric Scheme in Geometric reasoning in high school students to explore the three types of understanding, perceptual, verbal and functional. The axes of the investigation are a) the cognitive structure of the understanding of a geometric shape b) the influence of the different types of comprehension on the solution of a geometric problem c) the problems and difficulties faced by students in functional understanding, d) the geometric shape as a heuristic tool and e) the geometrical reasoning and classification of students at levels depending their cognitive development.

This research was organized with reference to two main theoretical frameworks. The first concerns the distinction between four types of geometrical conception, proposed by Duval (1988): perceptual, sequential,

functional and verbal conception. The second theoretical framework focuses on the geometric reasoning and levels of understanding of the geometric perception suggested by Houdement and Kuzniak (2003), as well as on the levels of understanding of the geometric perception suggested by Kunimune, Fujita & Jones. The analysis of the data resulted in important data for the conception of the geometric shape by students.

The data were collected by 168 high school students. The results showed that the understanding of the geometric shape has a strong effect on logical conception. In particular, a structural model was built and verified, which identified the importance of perceptual, functional, sequential and verbal conception of a geometric shape. Interactions were identified between the different types of the conception. Strong relationships were found between functional and verbal conception, demonstrating the importance of visualization in geometric reasoning. Significant were also the relationships that emerged between verbal and sequential conception, emphasizing the importance of knowledge of mathematical properties for geometric constructs and the reasoning processes for geometrical evidence. In addition, the role of perceptual conception were found to be decisive for the activation of functional and verbal geometric conception. The conception of geometrical shape of students develops mainly from one educational level to the next. The main difficulties of students arise in the works of verbal and functional conception, while they appear to be more capable of solving perceptual works. The geometric activity of the students of the first grade of Lyceum appears to be localized primarily in an example of a mixed type of geometry (Geometry II and Geometry III), which mostly contains more features from Geometry II (Natural Axiomatic geometry), while the geometric activity of the remaining high school students seems to lie in Geometry III (formal and Axiomatic Geometry). A further conclusion from the statistical analysis is that the students of the 1st grade of Lyceum have conquered both the generality of the proof and its construction, so they are in the level II.

Λέξεις κλειδιά: Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος, Γεωμετρικός συλλογισμός, Απόδειξη, Λειτουργική Σύλληψη, Εξεικόνιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: Εισαγωγή

Γεωμετρία είναι η μελέτη αντικειμένων του χώρου (δισδιάστατων και τρισδιάστατων), των σχέσεων και των μετασχηματισμών τους, όπως επίσης και των αξιωματικών συστημάτων, που έχουν κατασκευαστεί για την αναπαράστασή τους, (π.χ., καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, πίνακες κ.λ.π). Αντίστοιχα η γεωμετρική σκέψη είναι το σύνολο των γνωστικών διαδικασιών με τις οποίες το υποκείμενο κατασκευάζει και διαχειρίζεται νοητικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων του χώρου, των σχέσεων και των μετασχηματισμών τους (Γαγάτσης, 2003).

Γιατί πρέπει να διδάσκουμε γεωμετρία στα σχολεία μας; Οι González και Herbst (2006) μας εξηγούν τέσσερα επιχειρήματα (Πίνακας 1) που δικαιολογούν την διδασκαλία της γεωμετρίας στον 20 αιώνα. Αυτά τα επιχειρήματα συνέλαβαν στην διατήρηση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στα σχολεία μας.

Ο Freudental (1973) αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα με τον όρο «οπτικά μοτίβα» (visual pattern). Ένα οπτικό μοτίβο προκύπτει μέσα από μια διαδικασία αναίρεσης κάποιων «φυσικών» ιδιοτήτων των πραγματικών αντικειμένων: χρώμα, βάρος κ.τ.λ. Σύμφωνα με τον Freudental, εκείνο που μένει στο τέλος είναι το σχήμα και το μέγεθος. Και ίσως μόνον το σχήμα, γιατί έχει παρατηρηθεί ότι τα παιδιά από μικρή ηλικία μπορούν, χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα, να αναγνωρίζουν και να αντιγράφουν ένα σχήμα υπό κλίμακα από τον πίνακα στο τετράδιο τους.

Συμφώνα με τον Tall (1991) το γεωμετρικό σχήμα είναι μια νοητική εικόνα (concept image) που ελέγχεται και καθορίζεται από λογικούς κανόνες στα πλαίσια ενός λογικοπαραγωγικού συστήματος. Για παράδειγμα ο κύκλος αποκτά νόημα στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου λογικό-μαθηματικού συστήματος, είναι μια (νοητική) εικόνα που καθορίζεται πλήρως από έναν ορισμό. Αυτή η νοητική εικόνα σχηματίζεται και εμπλουτίζεται σταδιακά από το σύνολο όλων των εικόνων (concept imagery) που έχουν συσχετιστεί στο νου ενός ατόμου σχετικά με αυτό το σχήμα.

	Τυπικό επιχείρημα	Χρηστικό επιχείρημα	Μαθηματική ή συμφωνία	Έξυπνο επιχείρημα
Στόχοι του μαθήματος της Γεωμετρίας	Γεωμετρία είναι μια περίπτωση λογικών αιτιών.	Γεωμετρία είναι ένα εργαλείο για την αντιμετώπιση εφαρμογών σε άλλους τομείς.	Γεωμετρία είναι ένας εννοιολογικός τομέας που επιτρέπει να βιώσουμε το έργο των μαθηματικών.	Γεωμετρία μας παρέχει μια γλώσσα εμπειριών για τον πραγματικό κόσμο.
Απόψεις σχετικά με την μαθηματική δραστηριότητα	Μεταφορά γεωμετρικού συλλογισμού σε λογικές ικανότητες.	Μελετώντας έννοιες και προβλήματα που ισχύουν στο χώρο εργασίας μας	Εφαρμογή επαγωγικού συλλογισμού μέσω μελέτης γεωμετρικών εννοιών.	Προβλήματα μοντελοποίησης χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδέες.
Προσδοκίες για τους μαθητές	Όλοι οι μαθητές απαιτούν λογική σκέψη για να είναι καλοί πολίτες για να συμμετάσχουν σε μια δημοκρατία.	Όλοι οι μαθητές θα είναι μέρος του του εργατικού δυναμικού του μέλλοντος.	Όλοι οι μαθητές μπορούν να προσομοιώνουν την εργασία μαθηματικών.	Όλοι οι μαθητές θα μπορούν να αναπτύξουν δεξιότητες, αλλά και ποικιλία ικανοτήτων .
Χαρακτηριστικά προβλήματα γεωμετρίας στη διδασκτέα ύλη	Εφαρμόζοντας τη λογική σκέφτεται να μαθηματικές και καταστάσεις της πραγματικής ζωής.	Γεωμετρικές έννοιες και φόρμουλες για ένα μοντέλο πραγματικού κόσμου ή για να επιλυθούν προβλήματα που αναδύονται σε καταστάσεις εργασίας.	Κάνοντας εικασίες και αποδεικνύοντας θεωρήματα αφαιρετικά.	Εξερευνώντας διαισθητικά γεωμετρικές ιδέες προς την τυπικότητα. Ενσωμάτωση άλγεβρα και γεωμετρίας.

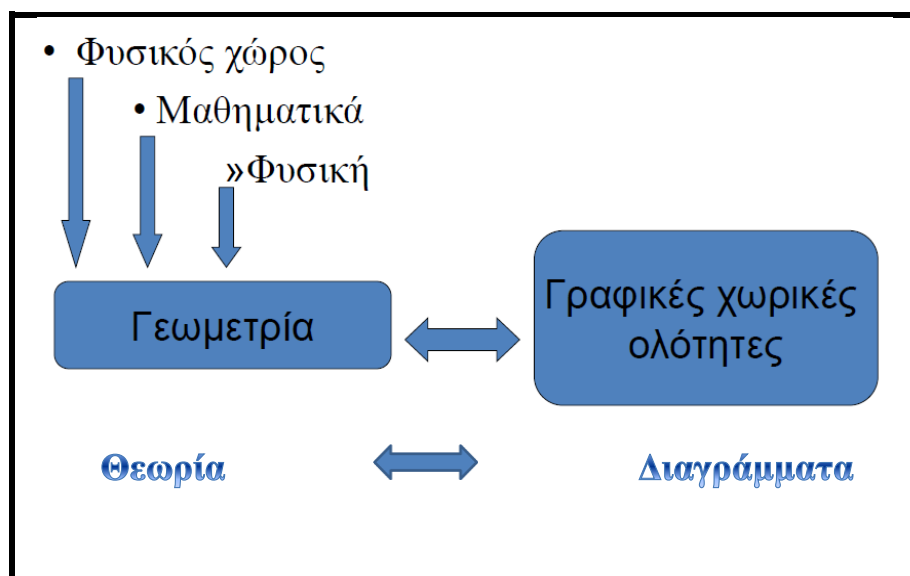
Πίνακας 1. Λόγοι διδασκαλίας της γεωμετρίας

Σύμφωνα με τους Hershkowitz και Vinner (1983) για την κατανόηση μιας γεωμετρικής έννοιας, π.χ. της έννοιας του ορθογωνίου και της σχέσης του με τα άλλα τετράπλευρα, απαιτούνται κυρίως καλά συγκροτημένες εικόνες της έννοιας (concept image), παρά ορισμοί (definition). Στην

περίπτωση που κατά τη διδασκαλία δεν δίνεται έμφαση στη συγκρότηση της εικόνας της έννοιας, αλλά επιχειρείται άμεση μετάβαση σε ορισμούς και παραγωγικούς συλλογισμούς, κατά την επίλυση προβλημάτων, αυτοί οι ορισμοί κινδυνεύουν ή να εφαρμοστούν λανθασμένα ή να μείνουν ανενεργοί και σταδιακά να ξεχασθούν.

Ο van Hiele (1986) επισημαίνει ότι όταν ένα πρόγραμμα σπουδών ξεκινά με ορισμούς και αξιώματα είναι αδύνατη μια κριτική στάση του μαθητή απέναντι σε αυτά τα αξιώματα και τους ορισμούς, με αποτέλεσμα τη στενή εξάρτηση από την αντιληπτική συνιστώσα και τις ιδιαιτερότητες του σχήματος. Δηλ. οι μαθητές δεν ήταν προετοιμασμένοι για την μαθηματική γνώση που τους δόθηκε κατά την διδασκαλία στη συνήθη μαθηματική μορφή καθώς αγνοούσαν και τον στόχο αυτής της μαθηματικής γνώσης. Για παράδειγμα οι μαθητές δυσκολεύονται να φέρουν το ύψος στην περίπτωση ενός αμβλυγωνίου τριγώνου παρόλο που ξέρουν τον ορισμό του ύψους. Το ίδιο ισχύει και στην αναγνώριση σχημάτων, παρόλο που γνωρίζουν τους ορισμούς δυσκολεύονται στην αναγνώριση ενός σχήματος αν είναι ρόμβος ή τετράγωνο, (Κολέζα,2009).

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι: «η διαδικασία οικοδόμησης γεωμετρικών εννοιών στη σκέψη των παιδιών δεν πρέπει να θεωρείται ένα αυθαίρετο, προφανές αποτέλεσμα ενός συνηθισμένου μαθήματος γεωμετρίας» (Fischbein,1993).



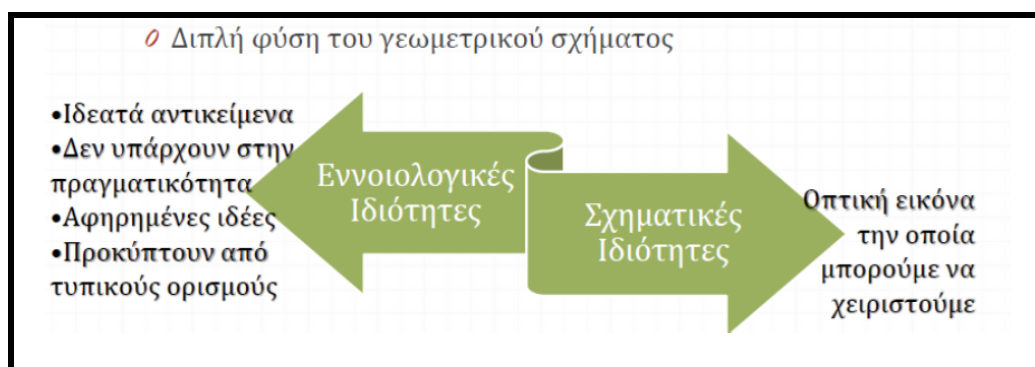
Εικόνα 1. Θεωρία και διαγράμματα

Στην πραγματικότητα, η μάθηση της Γεωμετρίας βασίζεται σε μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία της Γεωμετρίας (φυσικός χώρος, μαθηματικά, φυσική) και στις γραφικές χωρικές ολότητες, με άλλα λόγια, μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία και στα διαγράμματα (Εικόνα 1). Η θεωρία στηρίζει τη γνώση και το θεωρητικό έλεγχο, ενώ τα σχήματα ενισχύουν την οπτική αντίληψη με την πιθανή βοήθεια γεωμετρικών οργάνων ή άλλων μέσων. Αυτός είναι ο πιθανός λόγος που ο Fischbein (1993) αναφέρεται στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος, επισημαίνοντας ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος

Το NCTM (2000) χαρακτηρίζει τη Γεωμετρία και την αντίληψη του χώρου ως θεμελιώδεις παράγοντες για τη μάθηση των μαθηματικών, αφού παρέχουν τρόπους για να συλλογιστούμε και να ερμηνεύσουμε το φυσικό μας περιβάλλον. Επίσης, μπορούν να λειτουργήσουν και ως εργαλεία για τη μελέτη άλλων θεμάτων στα μαθηματικά και την επιστήμη. Η Γεωμετρία, περισσότερο από άλλες περιοχές των μαθηματικών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψη και ανάπτυξη διαφόρων τρόπων σκέψης (Duval, 1998). Για τους λόγους αυτούς, τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της Γεωμετρίας, τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000).

Η Γεωμετρία συχνά χαρακτηρίζεται ως «τα μαθηματικά του χώρου» και θεωρείται ένας τρόπος σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Bishop, 1983; Clements, 1998). Στην πραγματικότητα, η μάθηση της Γεωμετρίας βασίζεται σε μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία της Γεωμετρίας (φυσικός χώρος, μαθηματικά, φυσική) και στις γραφικές χωρικές ολότητες, με άλλα λόγια, μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία και στα διαγράμματα. Αυτός είναι ο πιθανός λόγος που ο Fischbein (1993) αναφέρεται στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος, επισημαίνοντας ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες.



Εικόνα 2. Διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος

Η διττή λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί τη βασική πηγή δυσκολιών των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα Γεωμετρίας (Γαγάτσης, 2007; Mesquita, 1998; Fischbein & Nachlieli, 1998). Αυτό συμβαίνει,

σύμφωνα με τον Fischbein (1993), γιατί η εικόνα και τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά θα πρέπει να ενώνονται σε ένα μοναδικό νοερό αντικείμενο για να μπορεί να το κατανοήσει ο μαθητής. Η Mesquita (1998) αναφέρει ότι τα γεωμετρικά σχήματα είναι αναπαραστάσεις με διπλή υπόσταση. Από τη μια το σχήμα στην ιδανική του αντικειμενικότητα, απαλλαγμένο από υλικούς περιορισμούς που χαρακτηρίζουν μια εξωτερική αναπαράσταση, και από την άλλη η ποικιλία πεπερασμένων μορφών.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων είκοσι χρόνων, ο γεωμετρικός συλλογισμός εξετάστηκε από διάφορους μελετητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, βασισμένοι ο καθένας σε διαφορετική θεωρητική θεώρηση. Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα του γεωμετρικού συλλογισμού στη μαθηματική εκπαίδευση, ο σχηματισμός ενός πλαισίου ικανοτήτων καθίσταται αναγκαίος, αφού οι ικανότητες αυτές θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για την ενδυνάμωση της απόδοσης των μαθητών στη Γεωμετρία (Γαγάτσης, 2013). Επιπλέον, από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας έχει εντοπιστεί ότι η διερεύνηση των διάφορων θεμάτων που αφορούν στη γεωμετρική σκέψη των μαθητών (γνώσεις, ικανότητες, στρατηγικές, δυσκολίες) περιορίζεται ως επί το πλείστον σε ηλικιακές ομάδες που αφορούν μία βαθμίδα της εκπαίδευσης (Παναούρα, 2007).

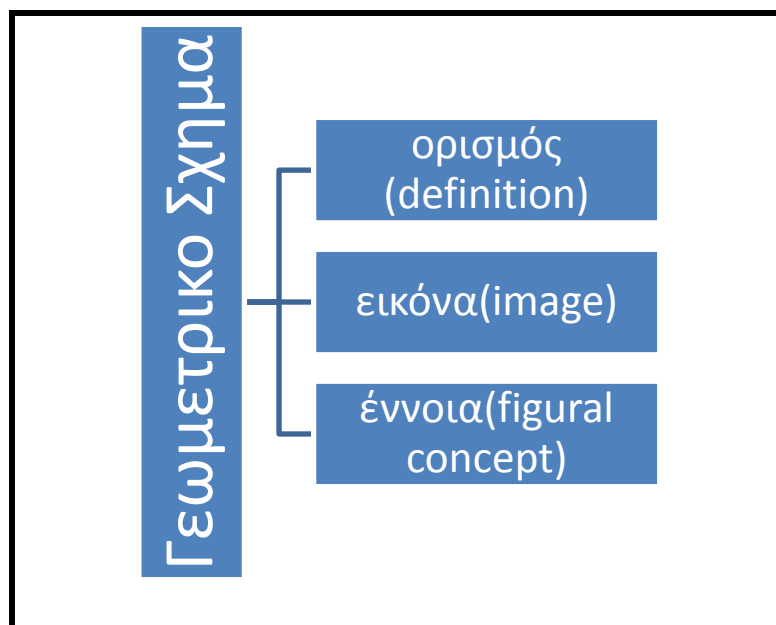
Ως εκ τούτου, υφίσταται η ανάγκη να συγκεντρωθούν δεδομένα που να επιτρέπουν τη μελέτη της γεωμετρικής σκέψης μαθητών μέσης εκπαίδευσης και τα οποία αν είναι δυνατό να αποτελέσουν πηγές πληροφοριών, τόσο σε σχέση με θέματα διδασκαλίας, όσο και σε σχέση με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα της Γεωμετρίας.

2.1 Εννοιολογικό Σχήμα κατά Fischbein

Ο E.Fischbein(1993) επισημαίνει ότι, «τα γεωμετρικά σχήματα είναι νοητικές οντότητες (mental entities) των οποίων ο χαρακτήρας είναι συγχρόνως εννοιολογικής (conceptual) και σχηματικής (figural) φύσης. Για παράδειγμα, μια σφαίρα είναι μια αφηρημένη, ιδεατή, τυπικά καθορισμένη οντότητα, όπως οποιαδήποτε άλλη έννοια (εννοιολογικός χαρακτήρας). Συγχρόνως όμως έχει κάποιες σχηματικές ιδιότητες, έχει κάποιο συγκεκριμένο σχήμα (σχηματικός χαρακτήρας). Το ιδεώδες, η απόλυτη

ταυτότητα μιας γεωμετρικής σφαίρας, δεν συναντάται στην πραγματικότητα. Σε αυτή τη συμβίωση μεταξύ έννοιας και σχήματος, έτσι όπως αυτή ανακαλύπτεται στα πλαίσια ενός γεωμετρικού σχήματος, η συνιστώσα της εικόνας (της μορφής) παρακινεί την σκέψη προς νέες κατευθύνσεις, ενώ οι λογικοί, εννοιολογικοί περιορισμοί καθορίζουν και ελέγχουν την τυπική αυστηρότητα της συλλογικής διαδικασίας».

Από θεωρητική σκοπιά, η έννοια του γεωμετρικού σχήματος (Fischbein, 1993) εμπεριέχει τρεις οντότητες: τον ορισμό (definition), την εικόνα (image), που στηρίζεται στην αισθήσιο-αντιληπτική εμπειρία και τη σχηματική έννοια (figural concept). Ο Fischbein εξηγεί αυτή την τριαδική συνύπαρξη ως έξης: «Ένα σχέδιο (drawing/image) δεν είναι αυτό το ίδιο το γεωμετρικό σχήμα, αλλά μια γραφική, συγκεκριμένη, υλική παρουσίαση του. Το γεωμετρικό σχήμα είναι η ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο, η αφηρημένη, ιδεατή, εξαυλωμένη οντότητα (figural concept), που καθορίζεται επακριβώς από τον ορισμό (definition)».



Εικόνα 3. Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος (Fischbein, 1993)

Για παράδειγμα, παρότι οι μαθητές γνωρίζουν τον ορισμό του ύψους τριγώνου, στην περίπτωση του αμβλυγωνίου τριγώνου αδυνατούν να φέρουν τα ύψη του τριγώνου. Επίσης παρότι γνωρίζουν τον ορισμό της ορθής γωνίας, δυσκολεύονται να την κατασκευάσουν. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση της αναγνώρισης σχημάτων π.χ. παρότι γνωρίζουν τον ορισμό του

τετραγώνου, αν το τετράγωνο σχεδιαστεί με πλάγιο τρόπο στο χαρτί, οι μαθητές το αναγνωρίζουν ως ρόμβο και όχι ως τετράγωνο(Γαγάτσης & Πατρώνης ,2003). Το συμπέρασμα που προκύπτει από αυτή την ανάλυση είναι ότι «η διαδικασία οικοδόμησης γεωμετρικών εννοιών στη σκέψη των παιδιών δεν πρέπει να θεωρείται ένα αυθόρμητο, προφανές αποτέλεσμα ενός συνηθισμένου μαθήματος γεωμετρίας» (Fischbein, 1993). Αντίθετα, η διδασκαλία της Γεωμετρίας πρέπει να οργανώνεται στη βάση συγκεκριμένων στόχων και να λαμβάνονται υπόψη τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των παιδιών.

2.2 Η θεωρία του Duval

Τόσο στη διδακτική των μαθηματικών όσο και στον κλάδο της γνωστικής ψυχολογίας οι ερευνητές προσπαθούν να βρουν απάντηση στο ερώτημα «Πως αντιλαμβάνονται τα παιδιά ένα γεωμετρικό σχήμα;». Ο Duval το 2011 κάνει αναφορά για την ύπαρξη δύο επίπεδων αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων:

1. η αναγνώριση του σχήματος: ο φυσικός αντιληπτικός τρόπος για φυσικά αντικείμενα ή χωρικές οντότητες (εικόνες, διαγράμματα κ.λπ.)
2. η αναγνώριση του αντικειμένου: σε σχέση με το μαθηματικό τρόπο αιτιολόγησης, ορισμού, επίλυσης προβλήματος και απόδειξης.

Ο ίδιος το (2004) είχε πει ότι υπάρχουν δυο τρόποι προσέγγισης ενός γεωμετρικού αντικειμένου, «*δια του λόγου*» και «*δια του σχήματος*». Ο πρώτος τρόπος επικεντρώνεται στη γεωμετρική έννοια με βάση ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα. Στο δεύτερο τρόπο, η γνωστική προσέγγιση επικεντρώνεται στην εξεικόνιση (visualization), δηλαδή πως βλέπει κανείς τις χωρικές σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα, ώστε να διευκολύνεται η επεξεργασία του γεωμετρικού προβλήματος.

Διακρίνονται δυο τύποι εξεικόνισης: εικονική και μη εικονική εξεικόνιση.

- **Εικονική εξεικόνιση:** ορίζει αποκλειστικά την οπτική αντίληψη των σχημάτων όπου κυρίως αντιλαμβάνονται οι μαθητές ένα σχήμα διαισθητικά, μέσω του περιγράμματος του, σε σύγκριση πάντοτε με το

διαμορφωθέν «πρωτοτυπικό σχήμα» που ενυπάρχει στο νου τους. Αδυνατούν ωστόσο στο επίπεδο αυτό να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων του σχήματος.

- **Μη εικονική εξεικόνιση:** θεωρεί την σύλληψη του σχήματος μέσω νοερών πράξεων και τον εντοπισμό των μεταξύ των ιδιοτήτων σχέσεων. Αυτές οι πράξεις πραγματοποιούνται είτε μέσω της κατασκευής είτε μέσω του μετασχηματισμού ενός σχήματος.

Ο Duval (2004) υποστηρίζει πως δεν πρέπει η διδασκαλία της Γεωμετρίας να ξεκινά με την αναγνώριση των σχημάτων αφού αυτό καθηλώνει τους μαθητές στην εικονική εξεικόνιση. Χαρακτηριστικά αναφέρει πως «*όταν κάποιος βλέπει σχήματα εικονικά δεν μπορεί ποτέ του να μάθει γεωμετρία*». Επιπλέον εκφράζει τη διαφωνία του με την ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων, εξηγώντας πως η ανάπτυξη διαφόρων γνωστικών λειτουργιών που σχετίζονται με τη γεωμετρία γίνεται ταυτόχρονα και μπορεί να ξεκινήσει από τη νηπιακή κιόλας ηλικία.

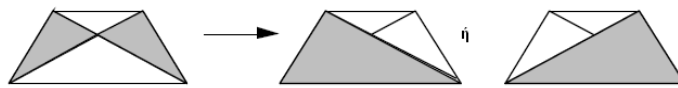
Σε αντίθεση με την θεωρία των van Hiele που αναφέρεται σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσα από τα οποία διέρχεται ένας μαθητής, πραγματοποιείται από τον Duval μια προσέγγιση από γνωστική σκοπιά και επιχειρείται μια προσπάθεια καθορισμού των γνωστικών διαδικασιών που βρίσκονται στο υπόβαθρο των διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης. Ο Duval (1995α) υποστηρίζει ότι: «*Τα σχήματα κατά την επίλυση προβλημάτων ή την αναζήτηση απόδειξης επιτρέπουν αυτό που ο Peirce ονομάζει απαγωγή (abduction) και έγκειται στον περιορισμό των υποθέσεων ή των δυνατών επιλογών. Το να μιλάμε για την ευρετική δύναμη του σχήματος ισοδυναμεί με μια απαγωγική σκέψη που οδηγεί στην παραγωγική σκέψη. Η δυνατότητα ενός τέτοιου χειρισμού ξεπερνάει τη γνώση μαθηματικών ορισμών και κανόνων. Η δυνατότητα επεξεργασίας ενός σχήματος συνδέεται με τη δυνατότητα αναδιοργάνωσης των στοιχείων του, την οπτική αναδιοργάνωση, που μπορεί να εκτελεστεί φυσικά ή νοητικά ανεξάρτητα από οποιαδήποτε μαθηματική γνώση*» (Duval 1995α).

Συγκεκριμένα ο Duval (1995β), προσδιορίζει τέσσερις τύπους «γνωστικής κατανόησης» (cognitive apprehension) ενός γεωμετρικού σχήματος:

- **Την αντιληπτική κατανόηση** (perceptual apprehension), που συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος με την πρώτη ματιά και (στη περίπτωση ενός σύνθετου σχήματος) στην διάκριση των μερών του με τρόπο όμως που ενδεχομένως δεν εξυπηρετεί την περαιτέρω επεξεργασία του στην περίπτωση που απαιτείται μια αιτιολόγηση, ή απόδειξη (με βάση το σχήμα) ή έστω μια διαδικασία κατασκευής. Περιλαμβάνει δεξιότητες όπως την ονομασία του σχήματος και αναγνώριση υποσχημάτων του σχήματος.
- **Την σειριακή κατανόηση** (sequential apprehension), που συνίσταται στην αντίληψη του τρόπου δόμησης των επιμέρους στοιχείων του και η οποία είναι απαραίτητη όταν χρειάζεται να κατασκευάσουμε (με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων ή του υπολογιστή) ή να περιγράψουμε ένα σχήμα. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νομούς της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες.
- **Τη λεκτική κατανόηση** (discursive apprehension), που συνδέεται αναπόσπαστα με τις δύο προηγούμενες, ιδιαίτερα όταν η επεξεργασία του σχήματος εντάσσεται σε ένα γενικότερο πλαίσιο κατανόησης μιας εκφώνησης, παρακολούθησης ενός τυπικού μαθηματικού συλλογισμού στα πλαίσια μιας απόδειξης, ή εκτέλεσης αριθμητικών υπολογισμών. Οι μαθηματικές σχέσεις δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν μόνο με την αντιληπτική κατανόηση αλλά απαιτείται και ο έλεγχος των λεκτικών δηλώσεων (ονομασίες, ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα).
- **Τη λειτουργική κατανόηση** (operative apprehension), η οποία στην ουσία εκφράζεται μέσω του απαγωγικού συλλογισμού που αναλύσαμε προηγουμένως. Δηλαδή, η λειτουργική κατανόηση ενός σχήματος είναι ένα είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος. Η λειτουργική κατανόηση, αφορά τη νοητική αναδιοργάνωση του σχήματος ώστε να αναδυθούν σχέσεις που δεν είναι προφανείς στην αντιληπτική κατανόηση (van Sommers, 1984). Η λειτουργική κατανόηση είναι δηλαδή μια ευρετική επεξεργασία του σχήματος με τρόπο ώστε να διατηρούνται οι ιδιότητές του. Ειδικά για την

λειτουργική κατανόηση ο Duval αναφέρει τρία είδη δυνατών τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος:

- ο **Μερολογικές (mereologic)** που αφορούν στην ανάλυση ή διάσπαση του σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, τα οποία αντίστοιχα μπορούν να συνδυαστούν σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και να δημιουργήσουν ένα νέο σχήμα. Προκύπτει επομένως μια αλλαγή του μορφιστικού τρόπου ενόρασης του σχήματος (με την πρώτη ματιά) και συντελείται μια αναδιοργάνωση του σχήματος (reconfiguration).



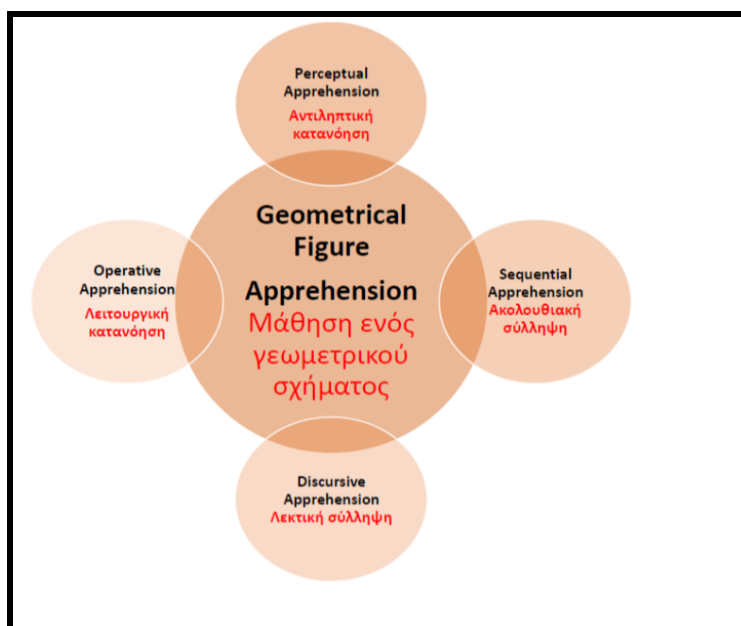
- ο **Οπτικές (optic)** που αφορούν μετασχηματισμούς όπως μεγέθυνση ή σμίκρυνση ή λόξωση του σχήματος, σαν να γίνεται χρήση φακών. Έτσι τα σχήματα μπορούν να φαίνονται διαφορετικά, χωρίς στην ουσία να έχουν όμως υποστεί καμία αλλαγή. Επίπεδα σχήματα μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο, ενώ υπάρχει η δυνατότητα να παρουσιασθούν δύο όμοια σχήματα σε επικάλυψη, στο βάθος, ώστε το μικρότερο να φαίνεται σαν να ήταν μεγαλύτερο.



- ο **Αλλαγής θέσης (place way)** που αφορούν αλλαγή του προσανατολισμού ενός σχήματος (στροφή κατά κάποιες μοίρες). Ο μετασχηματισμός ωστόσο αυτός, θεωρείται ασθενέστερος και επηρεάζει περισσότερο την αναγνώριση των ορθών γωνιών, αφού τα υποκείμενα κυρίως θεωρούν τις πλευρές μιας ορθής γωνίας ως σχηματιζόμενες από κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες.



Οι διάφορες αυτές λειτουργίες μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά, είτε φυσικά.



Εικόνα 4. *Γνωστική ανάλυση της γεωμετρικής σκέψης του Duval*

Για να λειτουργήσει μια φιγούρα ως γεωμετρικό σχήμα, πρέπει να προκαλέσει την ενεργοποίηση της **αντιληπτικής σύλληψης** και **τουλάχιστον ενός από τους υπόλοιπους** τύπους σύλληψης. Καθένας από τους τέσσερις αυτούς τύπους έχει τους δικούς του νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας των οπτικών ερεθισμάτων (Εικόνα 4).

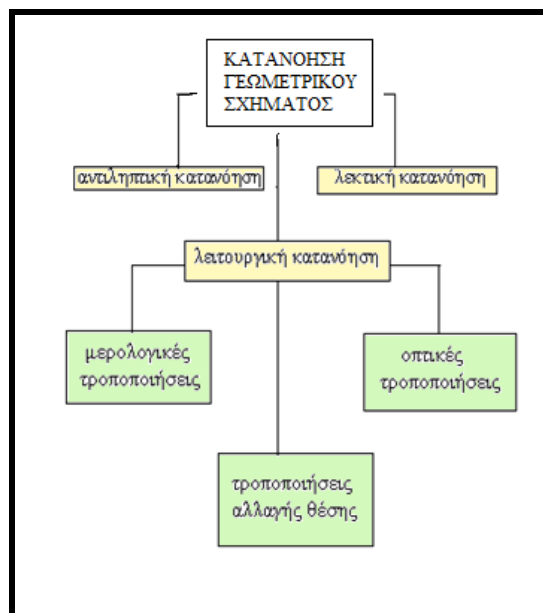
Συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια χειριστική λειτουργία. Όπως ο Polya (1945) αναφέρει στο βιβλίο του *How to solve it*, οι λειτουργίες αυτές μπορούν να φανερώσουν την «ιδέα», η οποία θα μας οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Θα μπορούσαμε, συνεπώς, να πούμε πως η λειτουργική σύλληψη αποτελεί ένα είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος, αφού κατά τον Piaget, η νοητική αντίληψη ενός αντικειμένου εμπεριέχει ευφυΐα. Με τη χρήση της ευφυΐας το άτομο καθίσταται ικανό να εντοπίζει ομοιότητες, διαφορές και χωρικές σχέσεις του αντικειμένου (Κολέζα, 2003).

Συνεχίζοντας την αναφορά του στη λειτουργική σύλληψη, ο Duval (1999), επιχειρεί να κάνει σαφέστερη τη διαφορετικότητα της από την αντιληπτική σύλληψη. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι η αντίληψη σταθεροποιεί με την πρώτη ματιά την όψη κάποιων σχημάτων, κάνοντας τα στατικά. Η λειτουργική σύλληψη εμπερικλείει νοητική αναδιοργάνωση του σχήματος, έτσι ώστε να προκύψουν σχέσεις μη προφανείς από την

αντιληπτική σύλληψη. Αποτελεί, δηλαδή, μια ευρετική επεξεργασία του σχήματος, κατά την οποία οι ιδιότητες του σχήματος δεν αλλοιώνονται (von Sommers, 1984, αναφορά στην Κολέζα, 2003).

Για την επίλυση, όμως, απαιτείται η κατανόηση της οργάνωσης του σχήματος. Στη λειτουργική σύλληψη το δοσμένο σχήμα αποτελεί σημείο αναφοράς για τη διερεύνηση άλλων σχηματοποιήσεων, μέσω των τροποποιήσεων που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Συνεπώς, δημιουργούνται πολλαπλές αλυσίδες σχημάτων, μια εκ των οποίων ανοίγει το δρόμο προς τη λύση του προβλήματος. Η ικανότητα σκέψης ή σχεδίασης επιπλέον μονάδων σε δοσμένο σχήμα υποδηλώνει την ύπαρξη λειτουργικής σύλληψης (Duval, 1999).

Η κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων δεν αποτελεί μοναδιαία οντότητα και ως εκ τούτου τονίζεται η αναγκαιότητα μιας πολυδιάστατης μελέτης της δομής ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης και κατανόησης (Εικόνα 5).

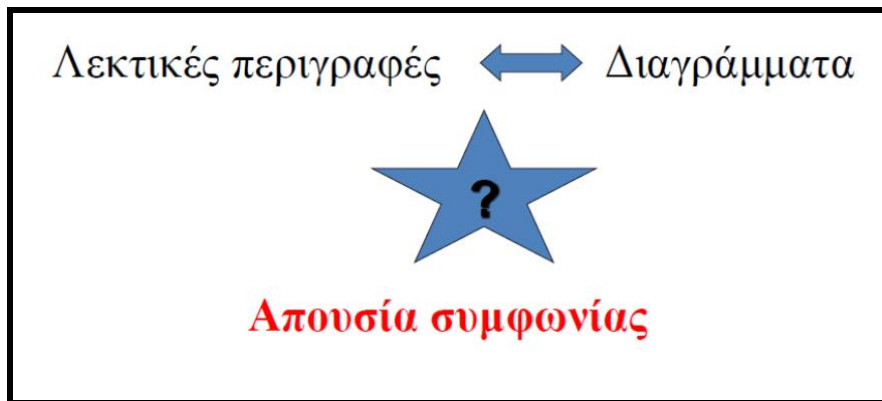


Εικόνα 5. Πολυδιάστατη μελέτης της δομής ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης και κατανόησης.

2.3 Σημασιολογική Συμφωνία ή Ασυμφωνία

Σύμφωνα με τον Γαγάτση (2003) «η σημασιολογική ασυμφωνία κρύβει την ισοδυναμία της σημασίας που επιτρέπει να περνάμε από μια έκφραση σε μια άλλη ή από μια έκφραση σε μια παράσταση. Αυτή η

δυσκολία παραπέμπει σε μια γνωστική διάσταση ανεξάρτητη από αυτήν της εννοιολογικής πολυπλοκότητας της έννοιας που εξετάζεται» (Εικόνα 6).



Εικόνα 6. Απουσία συμφωνίας

Για να επιτευχθεί η συμφωνία χρειάζεται ισοδυναμία ανάμεσα στην ανάγνωση γεωμετρικών σχέσεων και εξεικόνιση χωρικών σχέσεων (Fischbein, 1993).

Ο Duval (1987) για την κατανόηση του φαινομένου της σημασιολογικής συμφωνίας παραθέτει δύο πολύ απλές καταστάσεις που η καθεμία περιλαμβάνει μια πληροφορία και μια ερώτηση που αναφέρεται σε αυτή την πληροφορία.

Κατάσταση 1: «Ο Πέτρος είναι πιο ψηλός από το Γιάννη. Ποιος είναι ο πιο ψηλός;»

Κατάσταση 2: «Ο Πέτρος είναι πιο ψηλός από το Γιάννη. Ποιος είναι ο πιο χαμηλός;»

Η απάντηση στη δεύτερη κατάσταση απαιτεί μερικά κλάσματα του δευτερολέπτου περισσότερα από την πρώτη κατάσταση. Και τούτο επειδή το ερώτημα στην πρώτη κατάσταση αναφέρεται σε αυτό που η ίδια η κατάσταση περιγράφει, ενώ στη δεύτερη το ερώτημα είναι αντίθετο από τη διατύπωση της κατάστασης, δηλαδή παρουσιάζει σημασιολογική ασυμφωνία.

Η αναγνώριση της ισοδυναμίας ή της μη ισοδυναμίας ανάμεσα σε δυο σημασιολογικές παραστάσεις είναι πιο δαπανηρή, όταν αυτές οι παραστάσεις είναι μη σύμφωνες παρά όταν είναι σύμφωνες. Αυτό το κόστος εκδηλώνεται με μια αύξηση του χρόνου απάντησης για τις στοιχειώδεις ασκήσεις και οδηγεί σε μια αποτυχία, όταν η άσκηση γίνεται πιο πολύπλοκη (Γαγάτσης, 2003).

Η πράξη της αναπαράστασης και η μαθηματική πορεία

Ένα σχήμα διαμερισμένο δίνει αφορμή σε ενδιαμέσες διαφορετικές αναπαραστάσεις, δηλαδή σε ομαδοποιήσεις στοιχειωδών μερών σε πολύπλοκα υποσχήματα. Αυτή η απλή αναπαραστατική πράξη, όπως ο Duval (1987) επισημαίνει, επιτρέπει να εξεταστούν και να λυθούν πολλά προβλήματα:

- Με ισοδυναμίες δυο διαφορετικών ενδιάμεσων ομαδοποιήσεων.
- Με άθροιση των στοιχειωδών μερών.

Η ανάλυση της συμφωνίας στο πλαίσιο της λειτουργικής σύλληψης του σχήματος

Κάθε σχήμα μπορεί να τροποποιηθεί, αφού μπορούμε να το χωρίσουμε σε πολλά μέρη ή να το ολοκληρώσουμε σαν μέρος κάποιου άλλου, μπορούμε να το μεγεθύνουμε, να το μικρύνουμε, να το παραμορφώσουμε, να το κάνουμε να στραφεί κ.λπ. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα διαμορφωτικές τροποποιήσεις. Κάθε πεδίο διαμορφωτικών τροποποιήσεων επιφέρει μια αναπαραστατική πράξη. Αυτή είναι ακριβώς η πράξη που αποτελεί το ευρετικό ή το παραγωγικό στήριγμα του σχήματος. Παρόλα αυτά διάφοροι παράγοντες μπορούν να παρέμβουν για να ευκολύνουν ή αντίθετα για να αποκρύψουν τη λειτουργική σύλληψη, δηλαδή για να κάνουν αυτή την πράξη λιγότερο ή περισσότερο «ορατή» (Γαγάτσης, 2003).

Η γνωστική συμφωνία σε πολύπλοκες ασκήσεις

Στο επίπεδο των σύνθετων – πολύπλοκων ασκήσεων δεν πρόκειται πια για σημασιολογική συμφωνία, αλλά για γνωστική συμφωνία. Η σημασιολογική συμφωνία επιτρέπει μια αλλαγή πεδίου εκφράσεων ή την είσοδο στα ρητά δεδομένα του προβλήματος. Η γνωστική συμφωνία αφορά στην πραγματοποίηση επεξεργασιών σε ένα πεδίο, για να βρεθούν οι επεξεργασίες που θα γίνουν σε ένα άλλο πεδίο. Για το πεδίο του μαθηματικού συλλογισμού μπορούμε να δείξουμε ότι η επεξεργασία εξαρτάται από το γνωστικό δίκτυο που διαθέτει ένας μαθητής, δηλαδή από όλες τις σχέσεις που είναι ήδη θεμελιωμένες ανάμεσα σε ρητά εξακριβωμένες έννοιες.

Ένα σημαντικό μέρος στις δυσκολίες σχετικά με τις αποδείξεις στη γεωμετρία δεν εξηγούνται από την ανωριμότητα ως προς τον απαγωγικό συλλογισμό ή ως προς ορισμένες μορφές του λογικού συλλογισμού (π.χ. ο

συλλογισμός της εις άτοπο επαγωγής). Εξηγούνται καταρχήν από δυσκολίες ερμηνείας που οφείλονται στη μη σημασιολογική συμφωνία ή στη μη γνωστική συμφωνία των παρουσιαζόμενων καταστάσεων. Αυτή η ασυμφωνία είναι που κάνει το ρόλο της ερμηνείας συγχρόνως τόσο σημαντικό και τόσο δύσκολο για τους μαθητές σε μια μαθηματική δραστηριότητα (Γαγάτσης, 2003).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο:Γεωμετρικός συλλογισμός και απόδειξη

Η Σχολική γεωμετρία συνήθως θεωρείται ως ένα βασικό αντικείμενο στο οποίο μπορούμε να διδάξουμε μαθηματική επιχειρηματολογία καθώς και την απόδειξη και να αναπτύξουν οι μαθητές «αφαιρετική λογική και δημιουργική σκέψη». Ωστόσο, ενώ ο επαγωγικός συλλογισμός και η απόδειξη είναι κεντρικής σημασίας για την πρόοδο στα μαθηματικά, παραμένει η υπόθεση ότι οι μαθητές των μικρών τάξεων της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του σχολείου έχουν μεγάλη δυσκολία στην κατασκευή και στην κατανόηση της απόδειξη στη γεωμετρία (Battista, 2007; Mariotti, 2007). Παρατηρείται έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον στην διεθνή Μαθηματική κοινότητα για την μαθηματική απόδειξη και τη θέση της στη διδασκαλία.

Η Mariotti (2006) προτείνει την ύπαρξη τριών ερευνητικών κατευθύνσεων:

- α) ανάλυση του ρόλου της απόδειξης στα αναλυτικά μαθηματικά προγράμματα,
- β) προσεγγίσεις της έννοιας της απόδειξης από τους μαθητές και
- γ) διδασκαλία πειραμάτων για να εκπαιδεύσουμε τους μαθητές να αποδεικνύουν.

Ο Tall (1995) υποστηρίζει ότι η απόδειξη πρέπει να είναι η βάση της διδασκαλίας των μαθηματικών, εφόσον τα κύρια στοιχεία της, που είναι οι υποθέσεις και οι λογικές τους συνέπειες, είναι τα συστατικά στοιχεία της δημιουργίας της μαθηματικής γνώσης.

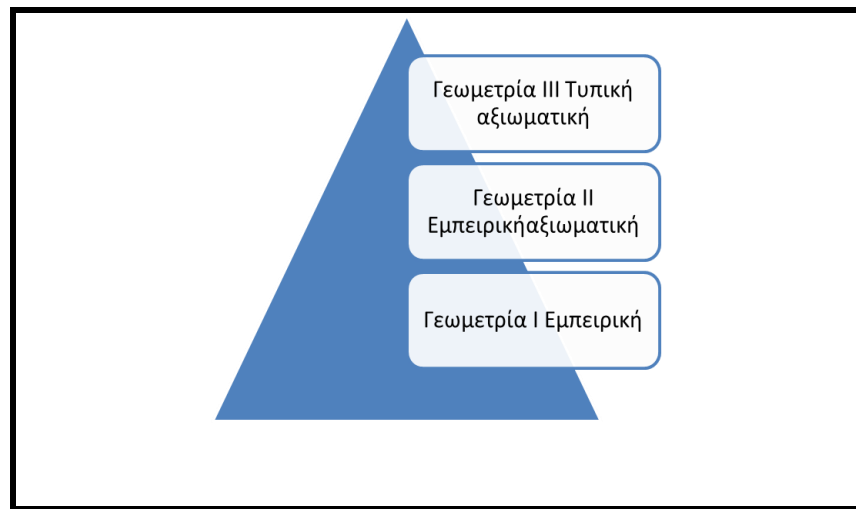
Από την άλλη, η διδασκαλία της απόδειξης σύμφωνα με τη Hanna (1995), μπορεί να λειτουργήσει ως «όχημα προώθησης της μαθηματικής κατανόησης», ενώ ο Ross (1998), τη θεωρεί ως την «πεμπουσία των μαθηματικών».

Τέλος, ο Duval (1993) διευκρίνισε ότι όταν τίθεται η ερώτηση «γιατί;» σχετικά με γεγονότα, τότε η απάντηση αποτελεί εξήγηση, ενώ όταν η ερώτηση αυτή αφορά δηλώσεις («γιατί λες αυτό;»), τότε η απάντηση αποτελεί επιχείρημα. Με τη σειρά του, το επιχείρημα μπορεί να αποτελεί ή όχι έγκυρο συλλογισμό, ενώ η απόδειξη έχει διαπιστωμένη εγκυρότητα.

3.1 Η θεωρία των Houdement και Kuzniak

Οι Kuzniak, Gagatsis, Ludwig, Marchini (2007) αναγνωρίζουν τρία στάδια ανάπτυξης της Γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών ή αλλιώς τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις της Γεωμετρίας σε σχέση με την γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Έτσι μιλάνε για τρεις ουσιαστικά Γεωμετρίες:

- **Η Γεωμετρία Ι ή Φυσική Γεωμετρία (Natural Geometry)** η οποία σχετίζεται άμεσα με τον πραγματικό φυσικό κόσμο και χρησιμοποιείται ως πηγή επικύρωσης των επιχειρημάτων των μαθητών η διαίσθηση και η αισθητική πραγματικότητα που αναπόφευκτα θα οδηγήσει σε μετρήσεις ή σε κατασκευές που θα βασίζονται σε πραγματικά εργαλεία, όπως ο χάρακας, ο διαβήτης και πολλά άλλα. Δηλ. Οι μαθητές δέχονται ως απόδειξη μια μέτρηση με το χάρακα ή το μοιρογνωμόνιο. Μία τέτοια Γεωμετρία έχει πολλές αντιστοιχίες με το είδος της γεωμετρίας που διδάσκεται στα Δημοτικά και Γυμνάσια της Ελλάδος.
- **Η Γεωμετρία II ή Φυσική και Αξιοματική (Natural and axiomatic Geometry)** η οποία οφείλει την ύπαρξη της σε αξιώματα και ορισμούς. Πάρα το γεγονός ότι το σύστημα αξιωμάτων δεν είναι ολοκληρωμένο η εγκυρότητα της βασίζεται σε υποθετικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς και νόμους που έχουν προκύψει από ένα σύνολο αξιωμάτων όσο το δυνατό πλησιέστερο προς την αισθητική πραγματικότητα. Μία τέτοια γεωμετρία είναι μία ικανοποιητική Γεωμετρία που διδάσκεται στο Λύκειο.
- **Η Γεωμετρία III ή Αυστηρή Αξιοματική Θεωρία (formal and axiomatic geometry)** η οποία δεν έχει καμία σχέση με τον πραγματικό φυσικό κόσμο και δεν στηρίζεται στις αισθήσεις. Αποτελεί ένα ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα που το μοναδικό κριτήριο αληθείας είναι η συνέπεια. Προφανώς τέτοια είδη Γεωμετρίας απαντώνται κυρίως στα Προπτυχιακά μαθήματα Μαθηματικών Σχολών αλλά και σε τάξεις του Λυκείου.



Εικόνα 7. Η θεωρία των Houdement και Kuzniak

Με ένα παρόμοιο τρόπο και μία ανάλογη συλλογιστική εισάγεται η αναγκαιότητα της διαίσθησης και της επαγωγής ως μέσα που καλούνται να χρησιμοποιηθούν για τη γεφύρωση όποιων λογικών δυσκολιών ανακύψουν στην γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Οι Kuzniak et. al, (2007) εντοπίζουν την δυσκολία μετάβασης από την Γεωμετρία I στην Γεωμετρία II. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της Γεωμετρίας I :Στην ερευνά Αγγελή-Μάρκου οι μαθητές Γ΄ Γυμνάσιου και Α΄ Λυκείου δέχτηκαν ως αποδείξεις για το άθροισμα γωνιών τριγώνου ότι :

1. Μέτρησα με το μοιρογνώνιο τις γωνίες και το άθροισμα τους έκανε 180° .
2. Σχεδίασα ένα τρίγωνο, έκοψα κάθε γωνία και τις έβαλα μαζί. Σχημάτισαν μια ευθεία άρα το άθροισμά τους είναι 180° .

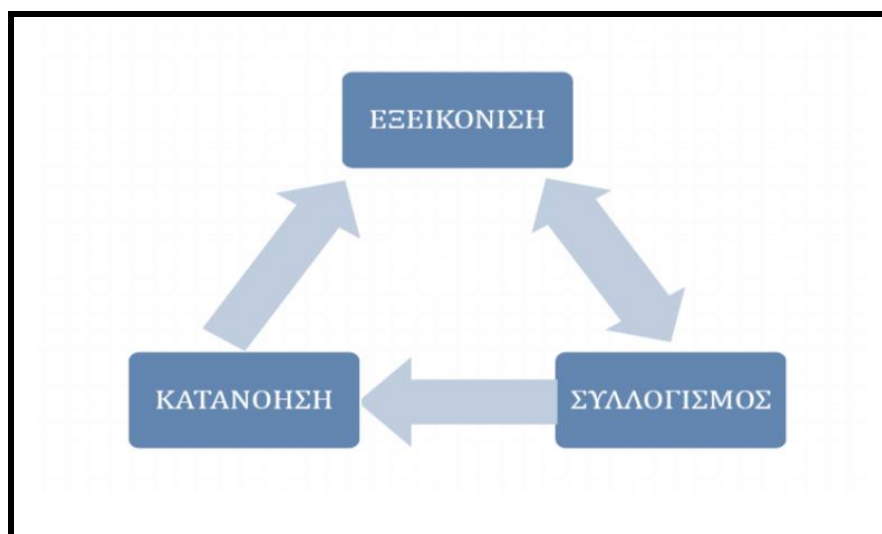
3.2 Νοητικές Διαδικασίες στη Γεωμετρία

Σύμφωνα με τον Duval και άλλους ερευνητές για να κατανοήσουμε καλύτερα τη γνωστική πολυπλοκότητα της γεωμετρικής δραστηριότητας θα πρέπει να αναλύσουμε τις γνωστικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στο μυαλό των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με τη Γεωμετρία. Ο Duval (1998) αναφέρει πως η Γεωμετρία περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών, τα οποία εκπληρώνουν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες:

- **Εξεικόνιση:** Είναι μια διαδικασία σχετική με την αναπαράσταση του χώρου για επεξήγηση μιας δήλωσης, για διερεύνηση πολύπλοκων καταστάσεων, για συνοπτική αντίληψη του χώρου. Πολλοί ερευνητές τονίζουν το ρόλο της εξεικόνισης και της οπτικής αιτιολόγησης για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι Zazkis et. al, (1996) δίνουν ένα πολύ ενδιαφέρον ορισμό για την εξεικόνιση λέγοντας πως: «Η εξεικόνιση είναι μια πράξη κατά την οποία το άτομο δημιουργεί μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ μιας εσωτερικής δομής για κάτι στο οποίο η πρόσβαση πετυχαίνεται μέσω των αισθήσεων. Μια τέτοια σύνδεση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Μια πράξη εξεικόνισης μπορεί να συνίσταται στην κατασκευή νοητικών αντικειμένων ή διαδικασιών τα οποία το άτομο συνδέει με αντικείμενα ή γεγονότα τα οποία λαμβάνει ως εξωτερικά. Επίσης, η πράξη της εξεικόνισης μπορεί να συνίσταται στην κατασκευή εξωτερικών αντικειμένων μέσω του χαρτιού, του πίνακα ή της οθόνης του ηλεκτρονικού υπολογιστή, τα οποία το άτομο αναγνωρίζει ως αντικείμενα ή διαδικασίες που βρίσκονται στο μυαλό του».
- **Κατασκευή:** Η κατασκευή των σχημάτων, η οποία γίνεται με το χέρι, με τη χρήση οργάνων ή στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (Duval, 2004), μπορεί να λειτουργήσει ως μοντέλο. Οι ενέργειες για την αναπαράσταση και το παρατηρούμενο αποτέλεσμα συσχετίζονται με τα μαθηματικά αντικείμενα που αναπαριστούν.
- **Συλλογισμός:** Κάθε γνωστική διαδικασία που εμπλέκεται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων θεωρείται μια μορφή συλλογισμού. Είναι ουσιαστικά μια διαδικασία η οποία μας καθιστά ικανούς να εξάγουμε νέες πληροφορίες από δοσμένες πληροφορίες.

Οι διαδικασίες αυτές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, ακόμα και αν γενικά η κατασκευή οδηγεί σε μια οπτικοποίηση, και η οπτικοποίηση κατευθύνει μια κατασκευή, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επεμβαίνουν ουσιαστικά (πχ. Η δυσκολία χρήσης των γεωμετρικών οργάνων). Επίσης, η οπτικοποίηση μπορεί να συνεισφέρει θετικά σε επίπεδο συλλογισμού, ενδέχεται όμως να λειτουργήσει και παραπλανητικά. Ιδιαίτερα αν υπάρχει μη συμβατότητα μεταξύ νοητικής εικόνας-πρότυπο και

ζητούμενης κατασκευής (Γαγάτσης , 2003). Τα τρία αυτά είδη γνωστικών διαδικασιών δημιουργούν ένα κύκλο ενεργειών όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.



Εικόνα 8. *Τρία είδη γνωστικών διαδικασιών της Γεωμετρίας*

Ο πιο πάνω κύκλος ενεργειών, όμως, δε λειτουργεί στην πραγματικότητα, αφού για πολλούς μαθητές το σχήμα δεν παίζει ρόλο ευρετικό (Duval, 2004). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί οι μαθητές κατά τη διαδικασία της εξεικόνισης δεν ασχολούνται με δραστηριότητες που να απαιτούν την αποσύνδεση/επανασύνδεση και μετασχηματισμό των σχημάτων, δύο δραστηριότητες που σύμφωνα με τους Brown και Wheatley (1997) είναι τα δυο κύρια συστατικά της εξεικόνισης. Αυτές οι διαδικασίες παίρνουν τη μορφή μιας πορείας όπου ο μαθητής σπάζει το σχήμα σε μικρότερα κομμάτια τα οποία μετακινεί ή/και περιστρέφει με σκοπό να καταλήξει σε μια ευρετική λύση (Duval, 2004). Η απουσία των πιο πάνω δραστηριοτήτων δε βοηθά τους μαθητές να κάνουν διάφορες οπτικές αναδιοργανώσεις των συστατικών μερών των διαφόρων σχημάτων, οι οποίες θα βοηθήσουν τους μαθητές να επιλύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Οι μαθητές παραμένουν έτσι σε μια οπτική αντίληψη των σχημάτων, που ο Duval (2004) αποκαλεί εικονική εξεικόνιση.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές αναγνωρίζουν ένα σχήμα με βάση το περίγραμμα δηλαδή διαισθητικά. Καταγράφουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά δεν μπορούν να δουν τις σχέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές ιδιότητες. Έτσι η οπτική σύλληψη δεν μπορεί να οδηγήσει από μόνη της στη δημιουργία εννοιών (Duval, 1988; Laborde, 2003). Η δημιουργία των εννοιών θα

επιτευχθεί μέσα από τη λειτουργική σύλληψη, κατά την οποία οι μαθητές πραγματοποιούν νοερούς ανασχηματισμούς του δοσμένου σχήματος, επιλέγουν τμήματα και τα ανά-ομαδοποιούν (Mesquita, 1989, στη Laborde, 2003).

Για να μπορέσουν οι μαθητές να ξεπεράσουν τα προβλήματα που τους δημιουργεί η εικονική εξεικόνιση, θα πρέπει να μάθουν να βλέπουν τα γεωμετρικά σχήματα με ένα διαφορετικό τρόπο. Αυτός ο διαφορετικός τρόπος είναι η μη εικονική εξεικόνιση, όπως ορίζεται από τον Duval (2004). Οι μαθητές που εφαρμόζουν αυτό τον τρόπο διασπούν το σχήμα με τη χρήση βοηθητικών και αναδιοργανωτικών γραμμών. Απαραίτητη προϋπόθεση στη μη εικονική εξεικόνιση είναι η αποσύνθεση των σχημάτων, έτσι που να μπορεί να επιτυγχάνεται ο μετασχηματισμός τους. Για καλύτερη διάκριση της εικονικής από τη μη εικονική εξεικόνιση, ο Duval (2004) αναφέρει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Ένας μαθητής που αντιμετωπίζει τα σχήματα εικονικά όταν βλέπει ένα καλά σχεδιασμένο τετράγωνο πάντα για αυτόν θα είναι τετράγωνο. Δεν μπορεί να είναι τίποτε άλλο, όπως για παράδειγμα δύο ορθογώνια τρίγωνα ενωμένα. Αντίθετα ένας μαθητής που βλέπει τα σχήματα μη εικονικά διακρίνει ένα τετράγωνο με βάση τον τρόπο που κατασκευάστηκε, και με βάση τους μετασχηματισμούς που μπορεί να κάνει σε αυτό το σχήμα.

Έτσι, οι μαθητές αναγνωρίζουν ένα σχήμα διαισθητικά. Καταγράφουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά δεν μπορούν να δουν τις σχέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές ιδιότητες. Η οπτική σύλληψη δεν μπορεί να οδηγήσει από μόνη της στη δημιουργία εννοιών (Duval, 1988, στη Laborde, 2003). Η δημιουργία των εννοιών θα επιτευχθεί μέσα από τη λειτουργική σύλληψη, κατά την οποία οι μαθητές πραγματοποιούν νοερούς ανασχηματισμούς του δοσμένου σχήματος, επιλέγουν τμήματα και τα ανά-ομαδοποιούν (Mesquita, 1989; Laborde, 2003).

3.3 van Hiele επίπεδα

Οι van Hiele υποστήριζαν στην έρευνά τους, ότι η μάθηση της γεωμετρίας ακολουθεί μια ιεραρχική αλληλουχία πέντε επιπέδων κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών. Ενώ η πρώτη διαπίστωση των απόψεών τους έγινε

το 1957, χρειάστηκε να παρέλθουν 30 ολόκληρα χρόνια για να οδηγηθεί ο Pierre Van Hiele στη δημοσίευση του έργου του «Structure and Insight» στο οποίο περιγράφονται τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης (Van Hiele, 1986). Υποστηρίζει ότι είναι ακατάλληλο να διδαχθεί στα παιδιά η Ευκλείδεια Γεωμετρία, ακολουθώντας μια τυπική μαθηματική διαδικασία. Τα παιδιά δεν σκέπτονται σε ένα τυπικό παραγωγικό επίπεδο, και επομένως μπορούν μόνο να απομνημονεύσουν γεγονότα και κανόνες, χωρίς όμως να κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδεών. Η κεντρική ιδέα που διατρέχει την θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης είναι ότι ο μαθητής, υποβοηθούμενος από την κατάλληλη διδασκαλία και εμπειρία και όχι από την ηλικία ή το βαθμό ωριμότητας του, περνά μέσα από πέντε επίπεδα σκέψης. (Mason, 2005) Ειδικότερα τα πέντε επίπεδα είναι:

- **Επίπεδο 1: Επίπεδο αναγνώρισης ή οπτικοποίησης (Recognition level- Visualization).**

Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα διάφορα σχήματα σύμφωνα με την ομοιότητά τους με κάποια «σχηματικά πρότυπα», δηλαδή αναγνωρίζουν τα σχήματα ως οπτικές ολότητες και άρα τα αναπαριστούν νοηματικά ως οπτικές εικόνες, χωρίς να μπορούν να αντιληφθούν τις ιδιότητές τους. Λείπει στους μαθητές αυτού του επιπέδου ο γεωμετρικός συλλογισμός και κυριαρχεί η αντίληψη. Για παράδειγμα κάποιος μαθητής ενδέχεται να μην αναγνωρίζει με ευκολία ένα αμβλυγώνιο ή ένα οξυγώνιο τρίγωνο, εάν στη σκέψη του κυριαρχεί ένα «πρότυπο τρίγωνο» που δεν είναι άλλο από ένα ορθογώνιο τρίγωνο και μάλιστα τοποθετημένο κατακόρυφα.

- **Επίπεδο 2: Περιγραφικό (Descriptive) ή ανάλυσης (Analysis)**

Βασικό χαρακτηριστικό του επιπέδου αυτού είναι η ικανότητα των μαθητών να ορίσουν ένα σχήμα με βάση τα χαρακτηριστικά του αλλά και τις ιδιότητές του. Πιο απλά, βλέπουν τα σχήματα ως συλλογές ιδιοτήτων, ενώ δηλαδή οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αδυνατούν να διακριβώσουν τις υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Στο επίπεδο αυτό τα αντικείμενα της σκέψης είναι οι «τάξεις σχημάτων» παρά τα ατομικά σχήματα. Έτσι, ένα τρίγωνο δεν είναι ένα σχήμα που μοιάζει με κάποιο οπτικό πρότυπο, αλλά ένα σχήμα που περιλαμβάνει ένα κατάλογο από ιδιότητες.

Ωστόσο, στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αδυνατούν να προχωρήσουν σε συσχετισμούς με αποτέλεσμα συχνά να διατηρούν την πεποίθηση ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο σημείο αυτό επανέρχεται στο προσκήνιο η πιαζετιανή έννοια της «συμπερίληψης κλάσης». Η αδυναμία, στο δεύτερο επίπεδο, ενεργούς εμπλοκής της γλώσσας στην ορθή περιγραφή γεωμετρικών όρων είναι εμφανής, ιδιαίτερα στη λανθασμένη διατύπωση των ορισμών των σχημάτων.

- **Επίπεδο 3: Θεωρητικό (Theoretical level) ή άτυπο αναγωγικό (Informal deduction) ή Διάταξης (Order).**

Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό, είναι ικανοί να κατανοήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και να τις διατάξουν λογικά. Μπορούν επίσης να κάνουν τη διάκριση μεταξύ των αναγκαίων και των ικανών συνθηκών που συνθέτουν μια έννοια, με αποτέλεσμα να καθίστανται ικανοί στις διατυπώσεις του τύπου «εάν-τότε». Ορισμοί με νόημα και αιτιολογήσεις των συλλογισμών τους είναι χαρακτηριστικά αυτού του επιπέδου της άτυπης αφαίρεσης. Παραδείγματος χάριν, ο μαθητής που διέρχεται από το επίπεδο αυτό είναι ικανός να κρίνει και να αποφασίσει αν ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος και να επιχειρηματολογήσει γιατί όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.

- **Επίπεδο 4: Τυπικό αναγωγικό (Formal deduction) ή Τυπικής λογικής (Formal Logic).**

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές καθίστανται ικανοί στη διερεύνηση σχέσεων, στην παραγωγή υποθέσεων αλλά και στη διατύπωση συλλογισμών για τον έλεγχο της ορθότητάς τους. Παρατηρείται δηλαδή, η εγκαθίδρυση μιας γεωμετρικής θεωρίας εντός ενός συστήματος αξιωμάτων. Εδραιώνεται η κατανόηση μιας μαθηματικής δομής ως συνόλου ορισμών αξιωμάτων και θεωρημάτων με διακριτό ρόλο που οδηγούν σε κατασκευή μαθηματικών αποδείξεων. Σ' αυτό το στάδιο οι μαθητές υπερβαίνουν τη διαισθητική αντίληψη και οδηγούνται μέσω αφηρημένων εννοιών, στηριζόμενοι στη λογική, στην εξαγωγή ανάλογων συμπερασμάτων.

- **Επίπεδο 5: Ακριβείας ή αυστηρό (rigor)**

Οι μαθητές σ' αυτό το επίπεδο είναι ικανοί να κατανοήσουν επαγωγικά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή μη – Ευκλείδεια συστήματα. Για παράδειγμα

μπορούν να κάνουν συγκρίσεις μεταξύ Ευκλείδειας και Υπερβολικής Γεωμετρίας ή να διερευνήσουν διαφορές μεταξύ Ελλειπτικής και Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Ο ίδιος ο van Hiele έχει πει: *«Η εμπειρία μου ως δασκάλου της Γεωμετρίας με πείθει ότι πάρα πολύ συχνά οι μαθητές δεν έχουν φτάσει στο επίπεδο της άτυπης αφαίρεσης. Συνεπώς δεν μπορούν να τα καταφέρουν στην ευκλείδεια Γεωμετρία, που χαρακτηρίζεται από τυπική αφαίρεση»*. (Pierre van Hiele, 1999). Στο ερευνητικό πεδίο, το μοντέλο των Van Hiele αποτέλεσε όντως ένα δυναμικό εργαλείο τόσο για το σχεδιασμό και τη δημιουργία εκπαιδευτικών παρεμβάσεων, όσο και για την εν γένει έρευνα και μελέτη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Πληθώρα διδασκαλιών με υπόβαθρο ανατροφοδοτικό, καθοδηγούμενης εξερεύνησης των γεωμετρικών σχημάτων και επαφής με καταστάσεις συνθετικών προβλημάτων, είδαν το φως της δημοσιότητας.

3.4 Kunimune, Fujita & Jones

Ο σκοπός της έρευνας τους είναι οι γνωστικές ανάγκες των μαθητών στην εκμάθηση γεωμετρικών εννοιών και στις αρχές για την πρακτική στην τάξη που θα ικανοποιήσει τέτοιες ανάγκες των μαθητών. Η έρευνα των Kunimune, et.al, έγινε το 2005 σε 418 Ιάπωνες μαθητές (206 από την δεύτερη τάξη και 212 από την Τρίτη τάξη). Σημειώνουμε εδώ ότι στην Ιαπωνία διδάσκονται εντατικά οι αποδείξεις στη γεωμετρία από τις μικρές τάξεις τις Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην Ιαπωνία έχουν γίνει μια σειρά ερευνητικών εργασιών για την μάθηση και τη διδασκαλία των γεωμετρικών αποδείξεων. Στην έρευνα των Kunimune, et.al, πάνω από το 60% των μαθητών θεωρεί το σχήμα αρκετό για να πει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

Παρόλο που δέχονται ότι η τυπική απόδειξη είναι ένας έγκυρος τρόπος επαλήθευσης, πολλοί από αυτούς θεωρούν εξίσου αποδεκτή και την πειραματική επαλήθευση. Στην ίδια έρευνα περισσότεροι από τους μισούς μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν μια απλή απόδειξη δεν μπορούν όμως να εντοπίσουν την κυκλικότητα. Οι ερευνητές προτείνουν να ενθαρρύνεται ο

επαγωγικός συλλογισμός των μαθητών για να τους βοηθήσει να εκτιμήσουν την ανάγκη για τυπική απόδειξη (Kunimune et al, 2007):

- Οι μαθητές να ανταλλάσσουν ιδέες για διάφορους τρόπους επαλήθευσης.
- Να σπείρουμε την αμφιβολία στους μαθητές σχετικά με την γενικευσιμότητα της πειραματικής επαλήθευσης.
- Συμβουλές από τον καθηγητή.

Καταρχήν έχουμε να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα των γνωστικών αναγκών των μαθητών για την πεποίθηση και την επαλήθευση και πώς αυτές οι ανάγκες θα μπορούσαν να αλλάξουν και να αναπτυχθούν μέσα από εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Πρέπει πρώτα να παρουσιαστεί το πώς οι μαθητές στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντιλαμβάνονται την «Απόδειξη» στη γεωμετρία σε σχέση με τα επίπεδα κατανόησης των γεωμετρικών αποδείξεων.

Τα πιο γνωστά επίπεδα κατανόησης γεωμετρικής αντίληψης είναι των Van Hiele τα οποία έχουν μεγάλη επίδραση στον επιστημονικό χώρο, όπως κανείς εύκολα διαπιστώνει από τις εκατοντάδες των άρθρων σε επιστημονικά περιοδικά, βιβλία και πρακτικά συνεδρίων. Παρόλα αυτά οι Kunimune, Fujita & Jones προτείνουν τα δικά τους επίπεδα κατανόησης γεωμετρικής αντίληψης.

Τίθεται το ερώτημα η μάθηση της γεωμετρίας ακολουθεί μια ιεραρχική αλληλουχία επιπέδων ή όχι. Σχετική έρευνα (Elia, Gagatsis & Kyriakides, 2004) έδειξε ότι η ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης είναι πολύ περιορισμένη σε όλες τις ηλικίες και οφείλεται κυρίως σε ελλείμματα που έχουν σχέση με τη διδακτική πρακτική. Άρα ενισχύεται η άποψη της εξέλιξης - ωρίμανσης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, όχι με βάση την ηλικία, αλλά και με τις παρεχόμενες ευκαιρίες μάθησης.

Συμπεραίνουμε ότι χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες συλλογισμού, οι μαθητές δε θα επιτύχουν την κατανόηση της απόδειξης ως έννοια και ως διαδικασία στα μαθήματα της γεωμετρίας. Όμως, εκτός από τις δεξιότητες συλλογισμού υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία. Μερίδιο ευθύνης για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την

αποδεικτική διαδικασία έχει ο εκπαιδευτικός και κυρίως η πρακτική της διδασκαλίας, που εφαρμόζει στη μαθηματική σχολική τάξη. Η πρακτική διδασκαλίας του εκπαιδευτικού σχετίζεται με τον τρόπο που αντιλαμβάνεται τις οδηγίες των εκπαιδευτικών προγραμμάτων και στην συνέχεια τις εφαρμόζει μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη. Επομένως για την πλήρη διερεύνηση του ζητήματος των πεποιθήσεων των μαθητών απαιτείται και η διερεύνηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών.

Οι Kunimune et.al χωρίζουν την κατανόηση των μαθητών για την απόδειξη σε δυο συνιστώσες:

Γενικότητα της απόδειξης: οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την οικουμενικότητα της απόδειξης, το ρόλο των σχημάτων, τη διαφορά μεταξύ τυπικής απόδειξης και πειραματικής επαλήθευσης, και ούτω καθεξής.

Κατασκευή απόδειξης: οι μαθητές πρέπει να μάθουν πώς να «κατασκευάζουν» αφαιρετικά επιχειρήματα γεωμετρίας γνωρίζοντας επαρκώς τους ορισμούς, τις υποθέσεις, τα θεωρήματα, την λογική κυκλικότητα και ούτω καθεξής.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις δύο συνιστώσες, δουλεύουν με τα ακόλουθα επίπεδα κατανόησης μαθητή (δεν τα συσχετίζουν με τα επίπεδα van Hiele μοντέλο):

Επίπεδο Ι: σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές θεωρούν ότι οι πειραματικές επαληθεύσεις είναι αρκετές για την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης. Το επίπεδο αυτό υποδιαιρείται σε:

Επίπεδο Ια: Μη επίτευξη τόσο « της γενικότητα απόδειξης» όσο και «της κατασκευής απόδειξης», και

Επίπεδο Ιβ: Επιτυγχάνεται «Κατασκευή απόδειξη», αλλά όχι «γενικότητα της απόδειξης»

Επίπεδο ΙΙ: σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές κατανοούν ότι η απόδειξη είναι απαραίτητη για να αποδειχθεί μια πρόταση. Το επίπεδο αυτό υποδιαιρείται σε:

Επίπεδο ΙΙα: Επιτυγχάνεται «γενικότητα της απόδειξης», αλλά δεν καταλαβαίνουν τη λογική της κυκλικότητα, και

Επίπεδο ΙΙβ: Κατανοητή η λογική κυκλικότητα

Επίπεδο ΙΙΙ: σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν απλές λογικές συνδέσεις μεταξύ θεωρημάτων.

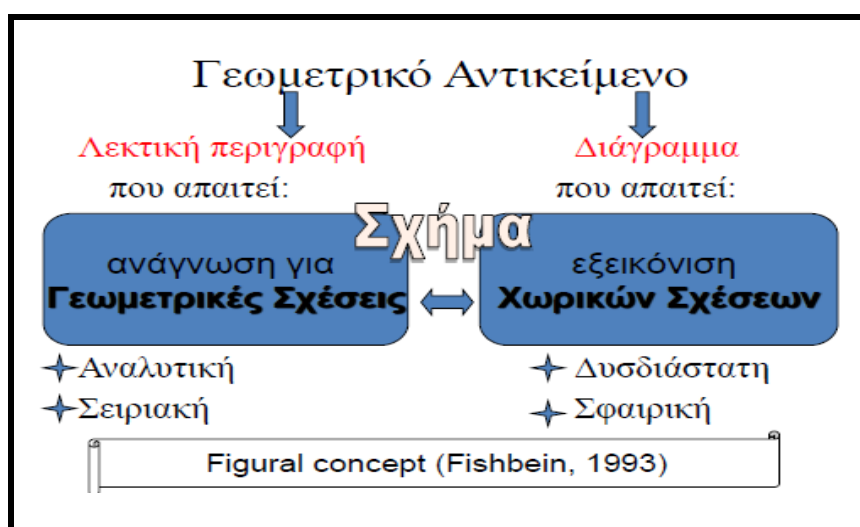
Επηρεασμένοι από το παραπάνω άρθρο και στα πλαίσια του μαθήματος Δ.5, οι Μάρκου Δήμητρα και Αγγελή Ασημίνα διεξήγαγαν μια έρευνα σε 97 μαθητές: 51 Α΄ Λυκείου του 6ου Λυκείου Ν. Σμύρνης και 46 Γ΄ Γυμνασίου του 7ου Γυμνασίου Ν. Σμύρνης. Η μελέτη στόχευε οι μαθητές να είναι όσο πιο κοντά στις τάξεις που αρχίζουν να κάνουν αποδείξεις στο μάθημα της Γεωμετρίας. Επιλεχθήκαν αυτές οι δυο τάξεις γιατί στην μεν Γ΄ Γυμνασίου οι αποδείξεις γίνονται με εμπειρικό τρόπο περισσότερο, ενώ στην Α΄ Λυκείου γίνονται αυστηρές αποδείξεις. Χρησιμοποιώντας το ερωτηματολόγιο των Kunimune, Fujita & Jones, οι μαθητές απάντησαν σε 4 ερωτήσεις οι οποίες ταξινομήθηκαν ανάλογα με το τι θα ελέγχει η κάθε ερώτηση.

Από την ερευνα αυτή πρόέκυψαν ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Το 59.8% των μαθητών του δείγματος βρίσκεται στο επίπεδο Ι, δηλαδή θεωρούν ότι οι πειραματικές επαληθεύσεις είναι αρκετές για την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης, γεγονός αναμενόμενο για το Γυμνάσιο όμως όχι και για το Λύκειο.

Επιπλέον συμπέρασμα οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάσουν μια απλή απόδειξη. Ενώ από την άλλη πλευρά δυσκολεύονται να εντοπίσουν τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα σε μια απόδειξη. Όσο αφορά την κυκλικότητα σε μια απόδειξη κανένας από τους μαθητές της Γ΄ γυμνασίου δεν την εντόπισε, ενώ οι μαθητές της Α΄ Λυκείου τα έχουν πάει καλύτερα. Είναι προφανές ότι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου τα πηγαίνουν καλύτερα με τις αποδείξεις καθώς και με την κυκλικότητα. Πιθανή ερμηνεία για αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι στο Λύκειο οι μαθητές αποδεικνύουν πολλά θεωρήματα και λύνουν ασκήσεις με αυστηρή απόδειξη που σημαίνει ότι είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με αποδείξεις, άρα μπορούν πιο εύκολα να ξεχωρίσουν δεδομένα ζητούμενα.

Σχετικά με την ηλικία, Deliyianni et al. (2011) τονίζουν ότι τα ευρήματα αποκαλύπτουν διαφορές μεταξύ της απόδοσης μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου. Στην πραγματικότητα, τα αποτελέσματα παρέχουν ενδείξεις για την ύπαρξη των τριών μορφών της στοιχειώδους γεωμετρίας, όπως τα προτείνουν οι Houdement και Kuzniak (2003). Σε αυτή την ερευνητική μελέτη, η διδασκαλία στο γυμνάσιο επικεντρώνεται κυρίως στην Γεωμετρία Ι (Φυσική Γεωμετρία), που συνδέεται στενά με την αντίληψη, και

εμπλουτίζεται από το πείραμα και τις κατασκευές. Από την άλλη πλευρά, η διδασκαλία στο Λύκειο δίνει έμφαση στην Γεωμετρία II (Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία) που συνδέεται στενά με τα στοιχεία και τα προνόμια της γνώσης των ιδιοτήτων και των αποδείξεων. Ως εκ τούτου, στην περίπτωση των μαθητών γυμνασίου το γεωμετρικό σχήμα είναι ένα αντικείμενο της μελέτης και της επικύρωσης, ενώ στην περίπτωση των μαθητών του λυκείου το γεωμετρικό σχήμα υποστηρίζει τη λογική του figural concept (Fischbein, 1993- Εικόνα 9).



Εικόνα 9. Γεωμετρικό σχήμα κατά Fischbein, 1993

3.5 Συνδυασμός επίπεδων με τα ειδή Γεωμετρίας

Τα αποτελέσματα των Gagatsis, et al.(2011) για την συμπεριφορά των μαθητών στις αποδείξεις και το ρόλο της φύσης του γεωμετρικού σχήματος, είτε ως αντικείμενο είτε ως εικόνα έδειξαν ότι υπάρχουν κυρίως διαφορές, αλλά και ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά στον τρόπο που οι μαθητές επιλύουν γεωμετρικά έργα. Στην έρευνα τους έκαναν μια προσπάθεια να συνδέσουν τα τρία επίπεδα κατανόησης των Houdement & Kuzniak (2003) που χρησιμοποιούνται για την κατηγοριοποίηση των μαθητών στην κατανόηση της απόδειξης με τα τρία επίπεδα που προτείνουν οι Kunimune, Fujita και Jones (2008). Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές του επιπέδου I εξακολουθούν να βρίσκονται στη Γεωμετρία I (Φυσική Γεωμετρία), στην οποία η διαίσθηση συχνά συνδέεται με την άμεση αντίληψη και εμπλουτίζεται από το πείραμα. Οι μαθητές του επιπέδου III έχουν τα

χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας II (Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία), όπου ένα σύστημα αξιωμάτων είναι απαραίτητο. Τέλος, οι μαθητές επιπέδου II φαίνεται να έχουν χαρακτηριστικά και των δύο Γεωμετρία I και Γεωμετρία II (Kuzniak, 2011). Διαφαίνεται μια συνεχής μετάβαση των μαθητών από την Γεωμετρία I προς τη Γεωμετρία II, άρα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι μια μικτή Γεωμετρία (GI / G2) θα ήταν δυνατή.

Τα ευρήματα δείχνουν ένα σημαντικό κοινό χαρακτηριστικό των μαθητών όσον αφορά τη σχέση μεταξύ της φύσης του γεωμετρικού σχήματος και τα επίπεδα κατανόησης της απόδειξης. Οι μαθητές που ανήκουν στο Επίπεδο III είναι εκείνοι που μπορούν και κάνουν προσπάθειες για την αντιμετώπιση των σχημάτων με την μορφή αντικείμενου. Για αυτούς τους μαθητές, οι οποίοι είναι επίσης στο επίπεδο της Γεωμετρίας III, το σχήμα λειτουργεί ως ευρετικό εργαλείο (Houdement & Kuzniak, 2003). Ως εκ τούτου, το ξεπέρασμα της αρνητικής επιρροής του γεωμετρικού σχήματος οδηγεί τους μαθητές στην αναγνώριση και αποδοχή της επίσημης απόδειξης ή αντίστροφα. Με αυτή την έννοια είναι αποδεκτό ότι ένα διάγραμμα είναι ένα νόμιμο συστατικό ενός μαθηματικού επιχειρήματος (Hanna, 2000).

3.6 Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Σε άρθρο της Μιχαήλ Π.(2012) αναφέρεται ότι μέσα από τα αποτελέσματα μιας έρευνας που διεξήχθη σε μαθητές δημοτικού ο ρόλος του σχήματος αναδεικνύεται ενισχυτικός και βοηθητικός για τους μαθητές. Το σχήμα διαδραματίζει ουσιαστικό ρόλο στην κατανόηση και την επιτυχή επίλυση των προβλημάτων, αφού βοηθά τους μαθητές να οργανώσουν τα δεδομένα τους και να ξεκαθαρίσουν τη σκέψη τους. Παρατηρούνται περιπτώσεις όπου το σχήμα καθίσταται καθοριστικό και απαραίτητο για την επίτευξη της λύσης, όπως σε πρόβλημα που εμπλέκει τροποποίηση αλλαγής θέσης, στο οποίο οι μαθητές φάνηκαν να εξαρτώνται από το σχήμα για την κατανόηση και την επιτυχή επίλυση του. Ολοκληρωτική επίδραση του σχήματος φαίνεται και στην περίπτωση προβλημάτων αντιληπτικής κατανόησης. Τα αποτελέσματα αυτά συνδέονται με αποτελέσματα άλλων ερευνών (DeWindt-King and Goldin, 2003), από τις οποίες προκύπτουν ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις αποτελούν θεμελιώδες γνωστικό σύστημα

αναπαράστασης για τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος. Τα αποτελέσματα δείχνουν, επίσης, ότι η συμπεριφορά των μαθητών στα προβλήματα σχετικά με τη σχεδίαση δικού τους σχήματος είναι αρκετά σταθερή. Επιπλέον, οι μαθητές κάνουν χρήση του δοσμένου σχήματος στις περισσότερες περιπτώσεις. Επεξεργάζονται το σχήμα και το χρησιμοποιούν κατά την πορεία επίλυσης του προβλήματος.

Παρόλο που οι μαθητές χρησιμοποιούν το σχήμα και φαίνονται να επωφελούνται από αυτό, εντούτοις, η αναγνώριση της θετικής επίδρασης που ασκεί κατά την επίλυση των προβλημάτων δεν γίνεται από όλους. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να συνδεθεί με τα αποτελέσματα των Elia και Philiprou (2004) αναφορικά με τη μη συνειδητοποίηση του βοηθητικού ρόλου των εικόνων από τους μαθητές. Παρατηρούνται, επίσης, περιπτώσεις όπου το δοσμένο σχήμα δε χρησιμοποιείται από τους μαθητές. Αυτή η συμπεριφορά των μαθητών πιθανόν να συνδέεται με την εισήγηση των Verdi και Kulhavi (2002 στο Schontz, 2002), οι οποίοι υποστηρίζουν πως οι εικόνες και τα κείμενα δεν μπορούν να παρουσιάζονται ταυτόχρονα. Με βάση την έρευνά τους, ισχυρίζονται ότι η εικόνα πρέπει να παρουσιάζεται πρώτη και ακολούθως το κείμενο. Εξηγούν ότι όταν η επεξεργασία κειμένου συμβαίνει πρώτη, χρησιμοποιείται το μεγαλύτερο μέρος της χωρητικότητας της εργαζόμενης μνήμης, αφήνοντας έτσι λίγη χωρητικότητα για την επεξεργασία της εικόνας. Επιπρόσθετα, η μη αξιοποίηση και επεξεργασία του δοσμένου σχήματος είναι δυνατό να συνδέεται και με την επιτυχή σχεδίαση σχήματος από τους μαθητές κατά την πρώτη επίλυση του προβλήματος. Τα σχήματα που οι μαθητές σχεδίαζαν στην πρώτη επίλυση ήταν όμοια με τα σχήματα που τους δίνονταν κατά τη δεύτερη επίλυση του προβλήματος, συνεπώς βλέποντας το σχήμα στο φυλλάδιο επιβεβαιώνονταν για τον τρόπο επίλυσης που ακολούθησαν και η αξιοποίηση του δοσμένου σχήματος δεν ήταν αναγκαία. Πέρα από το βοηθητικό ρόλο που το σχήμα διαδραματίζει στην κατανόηση του προβλήματος, οι μαθητές αναδεικνύουν και άλλες λειτουργίες του. Το γεωμετρικό σχήμα παρέχει ανατροφοδότηση στους μαθητές για τον τρόπο σκέψης και λύσης που ακολουθούν. Βοηθά τους μαθητές να αισθανθούν σίγουροι για την πορεία λύσης που ακολούθησαν. Επιπρόσθετα, οι μαθητές χρησιμοποιούν το σχήμα για να καταγράφουν, να συγκεντρώνουν και να οργανώνουν τις πληροφορίες του προβλήματος. Ο Schontz (1993)

αναφέρει ότι μέσα από έρευνες προκύπτει ότι τα άτομα θυμούνται καλύτερα τις πληροφορίες από ένα κείμενο, όταν αυτές παρουσιάζονται και από εικόνες. Από άλλες έρευνες προκύπτει ότι η κατανόηση αυξάνεται όταν ένα κείμενο συνοδεύεται με εικόνες, ειδικά για τους πιο αδύναμους μαθητές.

Σε μια ακόμα έρευνα που έγινε από τους Deliyianni et.al (2011), τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος έχει μια ισχυρή επίδραση στις επιδόσεις των μαθητών όσο αφορά την απόδειξη. Αυτό είναι σύμφωνο με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Hanna & Sidoli, 2007; Giaquinto, 2007), στις οποίες επισημαίνεται η ύπαρξη μιας δυνητικής συμβολής των οπτικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική απόδειξη. Ευρήματα αποκαλύπτουν επίσης ότι η λειτουργική προσέγγιση είναι εκείνη που συνεισφέρει τα μέγιστα στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απεικόνιση αποτελείται μόνο από λειτουργική προσέγγιση (Duval, 1999) ο σημαντικός ρόλος αυτού του είδους της σύλληψης επιβεβαιώνεται εμπειρικά (1999). Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα δείχνουν επίσης ότι η διδασκαλία και η μάθηση θα πρέπει να δώσει έμφαση σε αυτό το είδος της ανησυχίας δεδομένου ότι η οπτικοποίηση δεν είναι πρωτόγονη. Στην πραγματικότητα, η χρήση της απεικόνισης απαιτεί ειδική εκπαίδευση (Duval, 1999).

3.7 Γεωμετρία και αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών

Στις μέρες μας, τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της Γεωμετρίας και εισηγούνται τη διδασκαλία της τόσο ως αυτόνομου θέματος, όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη πολυάριθμων μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων σκέψης (NCTM, 2000). Είναι πολύ φυσικό μια ιδέα να εκφράζεται με ποικίλους τρόπους. Το σημαντικότερο όμως, είναι αυτή η ιδέα να γίνεται κατανοητή από το άτομο στο οποίο παρουσιάζεται. Αυτό είναι ιδιαίτερα σαφές στη μάθηση των μαθηματικών και κατά συνέπεια στη Γεωμετρία (Γαγάτσης, 2011).

Η Γεωμετρία περισσότερο από κάθε άλλο θέμα των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανακάλυψη και ανάπτυξη διαφορετικών τρόπων σκέψης (Duval, 1998). Κατά συνέπεια, αν αγνοηθεί η Γεωμετρία και η εξεικόνιση τότε οι μαθητές δε θα αναπτύξουν πολύ βασικές δεξιότητες όπως αυτές της οπτικής εξερεύνησης, της αιτιολόγησης και της

επιχειρηματολογίας και ως εκ τούτου η μαθηματική τους σκέψη θα είναι αποδυναμωμένη.

Μέσα από τα πιο πάνω, διαφάνηκε η σημασία της Γεωμετρίας και ο ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, γεγονός που οδήγησε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα να εντάξουν τη Γεωμετρία στα αναλυτικά τους προγράμματα δίνοντάς της μάλιστα μια ξεχωριστή θέση. Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, που σχεδιάζεται από το παιδαγωγικό ινστιτούτο (Π.Ι) του Υπουργείου Παιδείας (ΥΠ.Ε.Π.Θ), θέτει τους στόχους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος. Στις οδηγίες του παιδαγωγικού ινστιτούτου (Π.Ι) για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, προτείνεται "η διδακτέα ύλη να προσφέρεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιδιώκεται πρώτα απ' όλα η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή" (ΥΠ.Ε.Π.Θ. – Π.Ι.2000). Αυτή η γενική αρχή εξειδικεύεται στη συνέχεια και συνδέεται με ορισμένες βασικές αρχές της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι η <<αποδεικτική διαδικασία>>.

Επίσης από τις αναλυτικές οδηγίες του Π.Ι (2003 σελ.3) ειδικά για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο Λύκειο αναφέρεται ότι "βασικό έργο της διδασκαλίας της γεωμετρίας είναι η αφαιρετική-συνθετική σκέψη, τόσο με τον ακριβή προσδιορισμό των εννοιών, όσο και με τη χρήση της λογικής στην αποδεικτική διαδικασία".

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η γενικότερη φιλοσοφία που διέπει το πρόγραμμα σπουδών για τη γεωμετρία είναι η "εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία" ή "ο μαθητής πρέπει να διδαχθεί να κατανοεί την ανάγκη να αποδεικνύει θεωρήματα" ή ότι "είναι σημαντικό ο μαθητής να κατανοεί την καθολικότητα της τυπικής απόδειξης" και άλλες ταυτόσημες ή παρόμοιες εκφράσεις. Σε αυτές τις διατυπώσεις γίνεται αντιληπτό, πως η καλλιέργεια της απόδειξης ως έννοια και ως διαδικασία συνιστά ένα βασικό σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών κυρίως στη γεωμετρία. (Hirst, 1974, Quadling, 1979).

Παρά τη μεγάλη σημασία που δίνεται στα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών για την αποδεικτική διαδικασία στο μάθημα της γεωμετρίας, στη σχολική τάξη έχει παρατηρηθεί ότι το ενδιαφέρον περιορίζεται στην «τυπική δόμηση της απόδειξης». Δηλ. οι μαθητές θεωρούν ότι η απομνημόνευση της απόδειξης των θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως την

παρουσίασε ο καθηγητής ή το σχολικό εγχειρίδιο, είναι απόδειξη. Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών καλλιεργεί στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς την πεποίθηση ότι γνώση της απόδειξης λαμβάνεται από τους μαθητές έπειτα από την παρουσίαση μίας αποδεικτικής διαδικασίας από τον Εκπαιδευτικό. Η παρουσίαση οφείλει να ακολουθεί αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο, χωρίς να δίνονται στους μαθητές περιθώρια αναπαραγωγής συλλογισμών και πειραματισμού των υποθέσεων τους.

3.8 Απόψεις καθηγητών για την απόδειξη της Γεωμετρίας

Η γενική άποψη εκπαιδευτικών (Γαγάτσης, 2011) πήραν μέρος σε μια ερευνά στην Κύπρο χαρακτηρίζουν τη Γεωμετρία ως «παραμελημένη» και παραδέχονται ότι «δε φαίνεται τόσο η σημασία που έχει η Γεωμετρία». Οι εκπαιδευτικοί νιώθουν ότι «χάθηκε η Γεωμετρία. Είναι κρίμα». Θεωρούν ότι η Γεωμετρία δε δουλεύεται όσο θα έπρεπε και ότι κατάντησε να θεωρείται από τους μαθητές ως τύποι και τίποτε άλλο. «Τίποτε, να κάνουν πράξεις και τίποτε άλλο». Εντοπίζουν, ακόμη, το κενό της απουσίας της Αναλυτικής Γεωμετρίας από το περιεχόμενο διδασκαλίας. Σημειώνουν, ότι ο χρόνος που αφιερώνεται για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι λιγοστός, «Δεν αφιερώνεται αρκετός διδακτικός χρόνος στα Αναλυτικά Προγράμματα γι' αυτές τις συγκεκριμένες έννοιες. Ο χρόνος που αφιερώνεται είναι περισσότερος στην άλγεβρα».

Δυσκολίες προκαλούνται, επίσης, κυρίως με έννοιες που είναι πέρα από τα όρια του πραγματικού τους κόσμου, αφού οι μαθητές δεν μπορούν να έχουν αρκετά καλή οπτική αντίληψη των διαφόρων εννοιών. «Οι μαθητές δεν μπορούν να μεταφέρουν κάποιες έννοιες που έχουν στο μυαλό τους στο χαρτί, να τις αναπαραστήσουν». Κατά τις εφαρμογές, οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στο να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα, τις ιδιότητες, τα θεωρήματα και τον τρόπο εφαρμογής τους. Η γενική άποψη των συγκεκριμένων εκπαιδευτικών είναι πως «η προέλευση των δυσκολιών είναι ότι το γεγονός ότι η διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι επιφανειακή. Δε δίνουμε βάρος». Προτείνουν συνεπώς, πως οι δυσκολίες αυτές θα αντιμετωπιστούν δίνοντας περισσότερη έμφαση και χρόνο για τις συγκεκριμένες έννοιες. Παρόλα αυτά, οι εκπαιδευτικοί χαρακτηρίζουν το

χρόνο ως περιοριστικό παράγοντα, αφού «με το χρόνο που έχεις και την ύλη που πρέπει να καλύψεις δεν μπορείς να δουλέψεις βήμα-βήμα».

Ουσιαστικά δεν υπάρχει μόνο ανάγκη παρουσίασης διαφόρων τρόπων λύσεων ενός γεωμετρικού προβλήματος στους μαθητές, όπως υποδεικνύουν και οι διάφορες έρευνες για τη δημιουργικότητα των μαθητών στα μαθηματικά, αλλά και η αναγκαιότητα διάκρισης από τους μαθητές μιας μαθηματικής απόδειξης από μία εμπειρική ένδειξη της ορθότητας μίας γεωμετρικής πρότασης. Ουσιαστικά, δηλαδή, υπάρχει η αναγκαιότητα μετάβασης των μαθητών από τον εμπειρικό τρόπο εργασίας της Γεωμετρίας I στον ημι-αξιωματικό τρόπο εργασίας της Γεωμετρίας II (Houdement & Kuzniak, 2003).

Τέλος, προκύπτει και ο παράγοντας της οπτικοποίησης, αφού οι εκπαιδευτικοί αναφέρονται στη χρήση του γεωμετρικού σχήματος κατά την αποδεικτική διαδικασία και, επιπλέον, εισηγούνται τη χρήση λογισμικών, ώστε οι μαθητές «να βλέπουν τα διάφορα βήματα της απόδειξης στην κατασκευή του σχήματος, ώστε να μπορέσουν να το κατανοήσουν καλύτερα». Η παρατήρηση αυτή δείχνει μία ασυνείδητη αντίληψη της σημαντικότητας κατανόησης του σχήματος στη γεωμετρική απόδειξη. Γενικότερα εκφράζουν την άποψη ότι οι μαθητές δε λαμβάνουν υπόψη τους την απόδειξη. Οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τη φύση των μαθηματικών αποτελεί επίσης λόγο, κατά τους εκπαιδευτικούς, για τις παρανοήσεις αυτές. «Οι μαθητές νομίζουν ότι τα μαθηματικά είναι μόνο ασκησιολογία». Και οι πεποιθήσεις τους, όμως, ως προς την απόδειξη ασκούν επιδράσεις, αφού «οι μαθητές θεωρούν ότι αν μια απόδειξη ισχύει για κάποιο σχήμα, τότε ισχύει γενικότερα και νομίζουν ότι είναι απόδειξη». Εισηγούνται, λοιπόν, ότι είναι αναγκαίο να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποβάλουν αυτή την πεποίθηση και «να συνειδητοποιήσουν ότι η απόδειξη είναι κάτι πιο γενικό που αποδεικνύεται για όλα τα σχήματα, μια απόδειξη γενική δηλαδή».

Επιπλέον, στους μαθητές προκαλούνται παρανοήσεις λόγω των ελλιπών γνώσεων τους. Οι καθηγητές εντοπίζουν ότι αρχικά οι μαθητές «δεν κατέχουν τις έννοιες, λόγω του ότι δε δίνουν σημασία καν στο βιβλίο. Δεν κάνουν το κόπο να διαβάσουν το βιβλίο τους, για να δουν τις έννοιες και όλα τα πράγματα τα οποία αναφέρονται, τη θεωρία». Ακόμη προσθέτουν ότι οι μαθητές δεν είναι συνηθισμένοι στο θέμα της απόδειξης, «αφού τα σχολικά

τους εγχειρίδια περιλαμβάνουν πολύ λίγες αποδείξεις, ενώ αντιθέτως εμπεριέχουν αλγοριθμικές διαδικασίες και θέματα υπολογισμών». Συνεπώς το γεγονός ότι η απόδειξη απουσιάζει από το περιεχόμενο διδασκαλίας των μαθηματικών και το ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της απόδειξης, οδηγεί στο «να αισθάνονται πράγματι αδύναμοι όταν συναντήσουν τη Γεωμετρία με τις αποδείξεις που έχουν να κάνουν».

Συνεπώς, έγινε αναφορά στους παράγοντες που πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη στα νέα Αναλυτικά Προγράμματα, ώστε να υπερβούμε τις δυσκολίες των μαθητών στην απόδειξη. Οι παράγοντες αυτοί, όπως αναφέρθηκαν από τους καθηγητές, ταξινομούνται σε τρεις διαστάσεις. Η πρώτη αφορά στα Αναλυτικά Προγράμματα, η δεύτερη στους καθηγητές των μαθηματικών και η τελευταία σχετίζεται με τους μαθητές. Ειδικότερα, προτείνεται ότι στα Αναλυτικά Προγράμματα «η απόδειξη πρέπει να ενταχθεί πιο σοβαρά, για να μπορέσουν και οι μαθητές να την καταλάβουν καλύτερα και πρέπει επίσης να δοθούν λογικά παραδείγματα που να περιλαμβάνουν αποδείξεις κάποιων εννοιών, ώστε ο μαθητής να είναι σε θέση να τις διαβάσει» (Γαγάτσης, 2011).

Οι καθηγητές, θίγουν το θέμα της διδακτικής προσέγγισης που ακολουθούν, δηλαδή ότι *«η Γεωμετρία πρέπει να διδάσκεται καθαρά Γεωμετρικά και όχι με άλλες προσεγγίσεις»* και ότι *«κατά τη διδασκαλία τους θα πρέπει να δίνουν έμφαση και στην αναλυτική, αλλά και στη γενική απόδειξη ενός σχήματος»*. Ακόμη, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της απόδειξης είναι σημαντικός παράγοντας κατά τους εκπαιδευτικούς. Για να επιτευχθούν αυτά, γίνεται εισήγηση για επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σχετικά με τις διαδικασίες διδασκαλίας των Μαθηματικών και όχι να γίνεται απλά μια αναφορά σε μεθόδους διδασκαλίας. Συγκεκριμένα τονίζουν ότι *«η επιμόρφωση των Μαθηματικών πρέπει να γίνεται από Μαθηματικούς και όχι από επιμορφωτές, που συνήθως δε γνωρίζουν σε βάθος το αντικείμενο των Μαθηματικών»*. Ουσιαστικά η γεωμετρική γνώση ταυτίζεται με το σχήμα: ορισμός, αξίωμα, θεώρημα και απόδειξη (Hanna, 1991). Το σχήμα αυτό μεταφέρεται με τη σειρά του στο σύστημα των πεποιθήσεων των μαθητών όσον αφορά την οργάνωση, τη δομή της γνώσης και της αποδεικτικής διαδικασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: Έρευνα

Ερευνητικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν:

1. Να προσδιοριστούν οι γνωστικές διαδικασίες και ο τύπος σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιείται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.
2. Ποιος ο ρόλος της πολυπλοκότητας του σχήματος για την λειτουργική κατανόηση ;
3. Τι σχέση έχει η λειτουργική κατανόηση του σχήματος με την γεωμετρική απόδειξη;
4. Τι σχέση έχει η μερεολογική λειτουργία του σχήματος με την γεωμετρική απόδειξη ;
5. Το σχήμα σε μια γεωμετρική απόδειξη είναι ευρετικό εργαλείο ή όχι ;
6. Έχουν οι μαθητές αδυναμία διατύπωσης αποδεικτικού λόγου ή όχι ; Μπορούν οι μαθητές να κάνουν τυπικές αυστηρές αποδείξεις;
7. Σε ποια γεωμετρία θα κατατάσσαμε τους μαθητές σε σχέση με την γνωστική ανάπτυξη τους;

4.1. Δείγμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 168 μαθητές της Α΄ Λυκείου το σχολικό έτος 2016-17 το δεύτερο τετράμηνο. Τα σχολεία που συμμετείχαν στην ερευνά ήταν :

- το 6^ο Γενικό Λύκειο Ν. Σμύρνης
- το 1^ο Γενικό Λύκειο Π. Φαλήρου και
- το 2^ο Γενικό Λύκειο Άνω Λιοσίων.

Συγκεκριμένα συμμετείχαν 117 μαθητές 6^{ου} Γενικού Λυκείου Ν. Σμύρνης (70%), 21 μαθητές του 1^{ου} Γενικού Λυκείου Π. Φαλήρου(13%) και 30 μαθητές του 2^{ου} Γενικού Λυκείου Άνω Λιοσίων(52%). Η ύλη στην οποία οι μαθητές εξετάστηκαν είχε διδαχθεί στο Γυμνάσιο αλλά και στη διάρκεια της φετινής σχολικής χρονιάς στην Α΄ Λυκείου, μάλιστα κάποια είχαν διδαχθεί τον τελευταίο μήνα.

4.2. Μεθοδολογία

Η έρευνα μας χωρίστηκε σε τρία μέρη για να μην υπάρξει επίδραση μεταξύ των ασκήσεων (δηλ. η λύση μιας άσκησης να μην συνεπάγεται την λύση μιας άλλης).

Οι μαθητές έγραψαν τα τρία αυτά μέρη σε τρεις διαφορετικές μέρες, ο χρόνος που χρειάστηκαν για τα δυο πρώτα μέρη ήταν από μια διδακτική ώρα 45 λεπτών ενώ για το τρίτο μέρος τους δόθηκε χρόνος 30 λεπτών. Επισημαίνουμε ότι παρών στην ερευνά ήταν ο καθηγητής μαθηματικών που είχε το αντίστοιχο τμήμα του κάθε σχολείου. Διευκρινήσεις δεν δόθηκαν στους μαθητές. Κάποιοι μαθητές έγραψαν πρώτα το Α μέρος και κάποιοι το Β μέρος ενώ όλοι οι μαθητές έγραψαν τελευταίο το Γ μέρος.

Τόσο οι συνάδελφοι μαθηματικοί όσο και οι μαθητές ήταν πολύ πρόθυμοι να βοηθήσουν στην έρευνα. Αρκετοί από τους μαθητές ήταν και ενθουσιασμένοι.

4.3 Ανάπτυξη ερευνητικού εργαλείου και χορήγηση

Η κατασκευή του δοκιμίου στηρίχτηκε στα διαφορετικά είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος όπως προτείνονται από το Duval (1995, 1999) καθώς και στα τρία είδη γνωστικών διαδικασιών της Γεωμετρίας (εξεικόνιση-κατασκευή-συλλογισμός). Από την άλλη πλευρά στηρίχτηκε στα επίπεδα κατανόησης γεωμετρικής αντίληψης που προτείνουν οι Kuzniak, Gagatsis, Ludwig, Marchini (2007) καθώς και στα επίπεδα κατανόησης γεωμετρικής αντίληψης που προτείνουν Susumu Kunimune, Taro Fujita & Keith Jones.

Έτσι, αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο που αποτελούνταν από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος (Α- Μέρος) περιελάμβανε πέντε έργα (ασκήσεις) γεωμετρίας (Παράρτημα Ι) που αφορούσε τα είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος που πρότεινε ο Duval, το δεύτερο μέρος (Β- Μέρος) επίσης περιελάμβανε πέντε έργα γεωμετρίας (Παράρτημα ΙΙ) που αφορούσε την απόδειξη και το τελευταίο (Γ- Μέρος) περιείχε ένα έργο για το σχήμα και ένα έργο για την απόδειξη (Παράρτημα ΙΙΙ).

Τα έργα του δοκιμίου κωδικοποιήθηκαν με τα αρχικά:

- Για το Α Μέρος: A1 (αντιληπτική κατανόηση), A2 (λεκτική κατανόηση), A3 (χωρικής ικανότητας), Aop4 (λειτουργική (operational) – λεκτική κατανόηση –μετρολογική) ,Aop5 (λειτουργική- λεκτική κατανόηση-αλλαγή θέσης (στροφή)).
- Για το Β Μέρος: Bde1, Bde2, Bde3, Bde4 (ερωτήσεις για γεωμετρική απόδειξη (demonstration), δίνονταν το σχήμα - Bde3, Bde4 μερολογικής φύσεως) και Bfig5 (figure), Bde5a, Bde5b (ερώτηση χωρίς σχήμα).
- Για το Γ Μέρος: Cop1 (απόδειξη λειτουργική), Cfig2, Cde2a, Cde2b, Cde2c (ερώτηση χωρίς σχήμα).

Το τρίτο μέρος είχε μόνο δύο έργα για τους έξι λόγους:

α) προστέθηκε μια άσκηση στην οποία δεν δίνανε το σχήμα (C2)

β) δόθηκε μια άσκηση που σχετίζεται με την λειτουργική κατανόηση του σχήματος (C1) αλλά με πιο περίπλοκο σχήμα από ότι η άσκηση B4.

Στο δοκίμιο περιλαμβάνονται έργα που ανήκουν στις τέσσερις πιο κάτω ομάδες (Πίνακας 2):

1. Η πρώτη ομάδα έργων περιλαμβάνει τα έργα A1 και A3. Τα έργα αυτά εξετάζουν την αντιληπτική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος.
 - Το έργο A1 εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν και να ονομάζουν τις γωνίες σε ένα σύνθετο σχήμα.
 - Το έργο A3 εξετάζει επιπλέον και την χωρική ικανότητα των μαθητών.
2. Η δεύτερη ομάδα έργων περιλαμβάνει τα έργα A2, B1 και B2 που λαμβάνουν υπόψη τη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές. Σύμφωνα με άποψη των Harada, Gallou-Dumiel και Nohda's (2000) σε σχέση με τη λεκτική σύλληψη, η υποθετική-επαγωγική απόδειξη παράγεται από αυτό το είδος σύλληψης. Είναι γεγονός ότι η λεκτική σύλληψη παράγεται από συμπεράσματα με βάση τους ορισμούς και έγκυρες διαδικασίες απόδειξης.
 - Το έργο A2 απαιτεί συμπεράσματα βασισμένα στους ορισμούς προκειμένου να επιλυθεί.

- Ενώ τα έργα B1 και B2 απαιτούν συμπεράσματα βασισμένα στις διαδικασίες απόδειξης για να επιλυθούν.
3. Η τρίτη ομάδα έργων συνίσταται στα έργα A4, A5, B3, B4 και C1 τα οποία εξετάζουν τη λειτουργική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος:
- τα έργα B4 και C1 απαιτούν την αναδιαμόρφωση ενός σχήματος (μερεολογική τροποποίηση)
 - τα έργα A4, A5 και B3 απαιτούν περά από την αναδιαμόρφωση του σχήματος και λεκτική σύλληψη.
4. Η τέταρτη ομάδα έργων περιλαμβάνει τα έργα B5 και C2 τα όποια εξετάζουν τον ρόλο της οπτικοποίησης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.
- και τα δυο έργα απαιτούν από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα σχήμα (σειριακή σύλληψη)
 - οι μαθητές καλούνται να κάνουν μια τυπική απόδειξη

Οι ερωτήσεις του δοκιμίου είναι από τις ολυμπιάδες μαθηματικών στην Κύπρο, ενώ οι ερωτήσεις A1, B5 και C5 είναι από το σχολικό βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία της Α Λυκείου (Αργυρόπουλος, Η). Οι τρεις τελευταίες ασκήσεις είχαν διδαχτεί και στα πλαίσια του μαθήματος.

Οι ορθές απαντήσεις βαθμολογούνταν με 1 και οι λανθασμένες απαντήσεις ή οι μη απαντημένες βαθμολογούνταν με 0, ενώ οι ελλιπείς βαθμολογούνται με 0.5. Σε όλα τα έργα ζητήθηκε εξήγηση και αυτή βαθμολογήθηκε με 0 αν δεν δόθηκε καμιά ή ήταν λανθασμένη, με 0.5 αν δόθηκε μια ελλιπής εξήγηση και 1 αν εξηγήθηκε ορθά (Παράρτημα IV).

ΕΡΓΑ ΛΕΚΤΙΚΗΣ ΣΥΛΛΗΨΗΣ	ΕΡΓΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΗΣ ΣΥΛΛΗΨΗΣ	ΕΡΓΑ ΑΝΤΙΛΗΠΤΙΚΗΣ ΣΥΛΛΗΨΗΣ	ΕΡΓΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΗΣ &ΛΕΚΤΙΚΗΣ ΣΥΛΛΗΨΗΣ
Απόδειξη που βασίζεται σε ορισμό A2 Cfig2 Bfig5	Μερεολογική τροποποίηση Cop1 Bde3, Bde4	Αναγνώριση και ονομασία υποσχημάτων A1	Μερεολογική τροποποίηση Aop4
Απόδειξη που βασίζεται σε διαδικασία Bde1,Bde2 Bde5a, Bde5b Cde2a, Cde2b, Cde2c		Αντιληπτική και χωρική A3	Τροποποίηση αλλαγής θέσης Aop5

Πίνακας 2. Οι μεταβλητές της έρευνας

4.4. Στατιστικές Αναλύσεις

Για την ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε η ανάλυση ομοιότητας (Lerman, 1981) και η στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση του R. Gras με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος **C.H.I.C.** (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000), από τις οποίες προέκυψαν διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγικά διαγράμματα αντίστοιχα. Τα διαγράμματα ομοιότητας παρουσιάζουν τις μεταβλητές ανάλογα με την ομοιότητα που παρουσιάζουν. Σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται, δηλαδή, ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο.

Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας σύμφωνα με τα στάδια της γενετικής ψυχολογίας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στην σκέψη των υποκειμένων (μαθητών). Οι σχέσεις στις όποιες καταλήγουμε δεν είναι σχέσεις αιτιότητας. Αντίθετα, πρόκειται για ένα δείκτη ποιότητας που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται. Με ανάλογο τρόπο η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται.

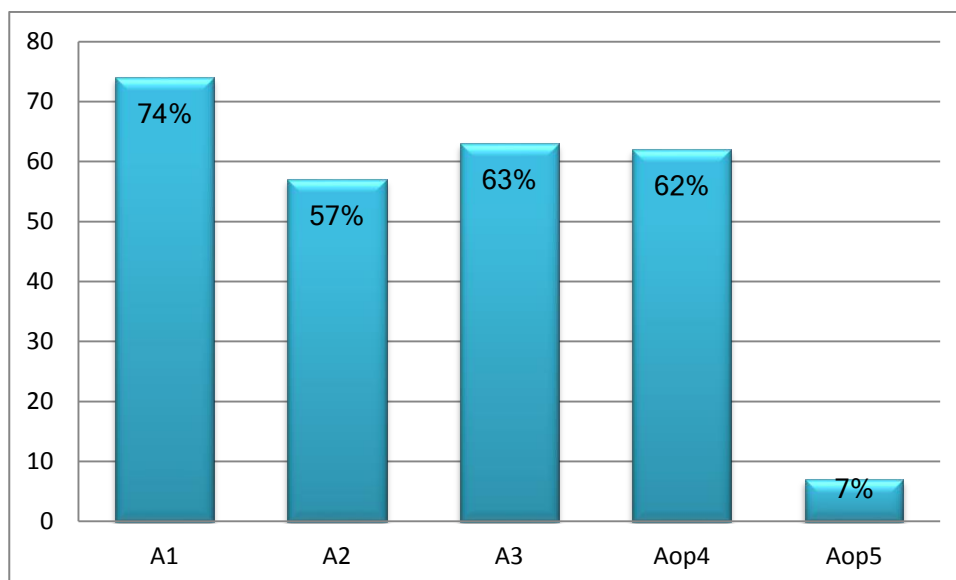
Η συνεπαγωγική μέθοδος δίνει τα εξής διαγράμματα: Συνεπαγωγικό διάγραμμα, Δεντροδιάγραμμα Ομοιότητας και Δεντροδιάγραμμα ιεράρχησης. Στο Συνεπαγωγικό διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατόν να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%(χοντρό βέλος) ή 95% (λεπτό βέλος). Σε περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή: (Έργο 1 → Έργο 2) αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται την επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται την αποτυχία στο Έργο 1. Στο Δεντροδιάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα διαφορά έργα. Έργα κατά την επίλυση των όποιων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Οι οριζόντιες συνδέσεις με έντονο μαύρο υποδηλώνουν την ύπαρξη ομοιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Τέλος το Δεντροδιάγραμμα ιεράρχησης παρουσιάζει τις συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα σε όλες τις μεταβλητές κατά σειρά προτεραιότητας. Οι συνεπαγωγές με έντονο μαύρο ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. (Γαγάτσης, Σιακαλλή, 2000).

Επιπλέον για την ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε και περιγραφική στατιστική από την οποία προέκυψαν τα περιγραφικά στοιχεία όπως τα ποσοστά επιτυχιών των μαθητών σε κάθε ερώτηση, σε ποια έργα είναι καλύτερα τα αγόρια και σε ποια τα κορίτσια καθώς και ποιο από τα τρία σχολεία που συμμετείχε στην έρευνα είχε μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας.

4.5 Αποτελέσματα

Ανάλυση ερωτηματολογίου Α Μέρους

Στο Πίνακα 3 μπορούμε να δούμε τα ποσοστά επιτυχίας όλων των μαθητών στο Α μέρος.



Πίνακας 3. Ποσοστά επιτυχίας των έργων του Α Μέρους

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές έχουν υψηλό ποσοστό επιτυχίας σε όλα τα έργα με εξαίρεση το Έργο A5, που είναι ένα έργο λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης.

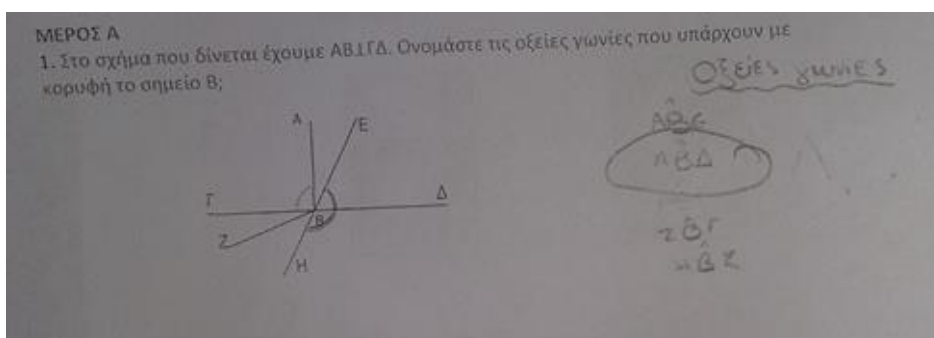
Ερωτήσεις Α' Μέρους

Έργο A1

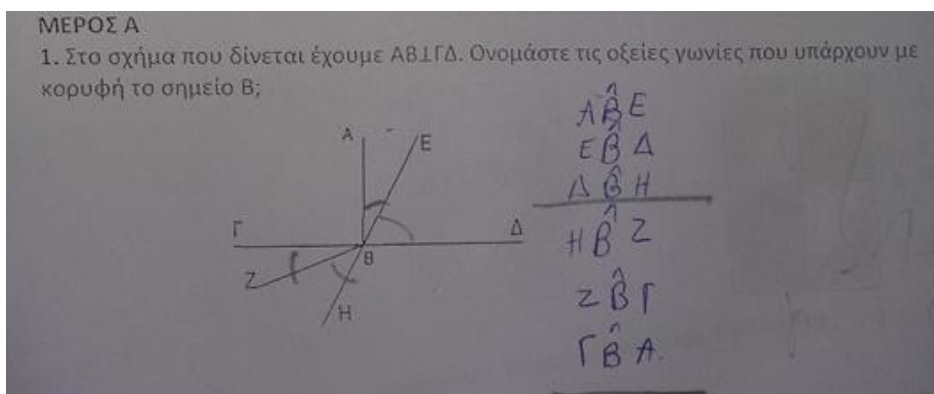
Στο σχήμα που δίνεται έχουμε $AB \perp \Gamma\Delta$. Ονομάστε τις οξείες γωνίες που υπάρχουν με κορυφή το σημείο B;

Εικόνα 10. Έργο A1

Παρατηρούμε από τον Πίνακα 2. ότι μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας (74%) οι μαθητές έχουν στο έργο A1 (Εικόνα 10) το οποίο είναι ένα καθαρά αντιληπτικό έργο. Στο έργο A1, οι μαθητές έπρεπε να ονομάσουν οξείες γωνίες, κάποιοι ονόμασαν για οξείες και ορθές (Εικόνα 11) και αμβλείες (Εικόνα 12). Πιθανή εξήγηση δεν κατάλαβαν τι ζητούσε η ερώτηση ή δεν ήξεραν ποιες είναι οι οξείες γωνίες και έτσι τις έγραψαν όλες.



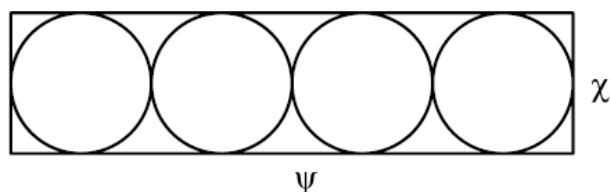
Εικόνα 11. Ορθή γωνία ονομάστηκε οξεία



Εικόνα 12. Αμβλείες γωνίες ονομάστηκαν οξείες

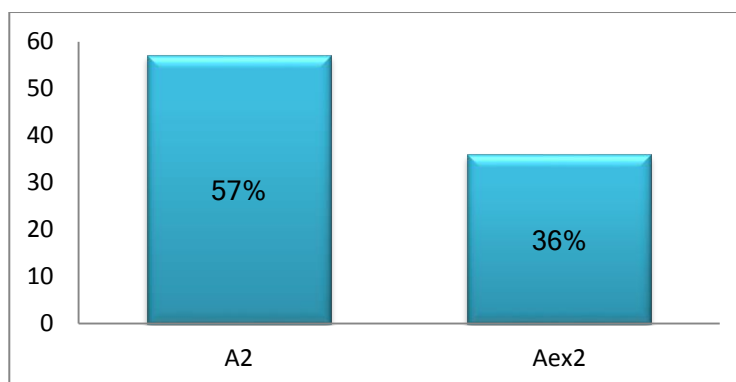
Έργο Α2

Στο σχήμα οι τέσσερις κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και ταυτόχρονα εφάπτονται στις πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τα χ και ψ . Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



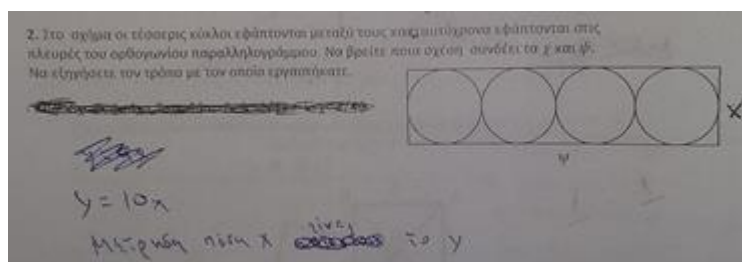
Εικόνα 13. Έργο Α2

Στο έργο A2 (Εικόνα 13), ζητήθηκε να εξηγηθεί Aex2 (explanation) η απάντηση (να δοθεί αιτιολόγηση). Οι μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση ήταν σε θέση να την αιτιολογήσουν; Από το ραβδόγραμμα (Πίνακας 4) φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν πολύ στην αιτιολόγηση του έργου A2. Μόνο το 36% των μαθητών κατάφεραν να δώσουν την εξήγηση: «η διάμετρος του κάθε κύκλου είναι χ , άρα έχοντας τέσσερις κύκλους το $\psi = 4\chi$ ».

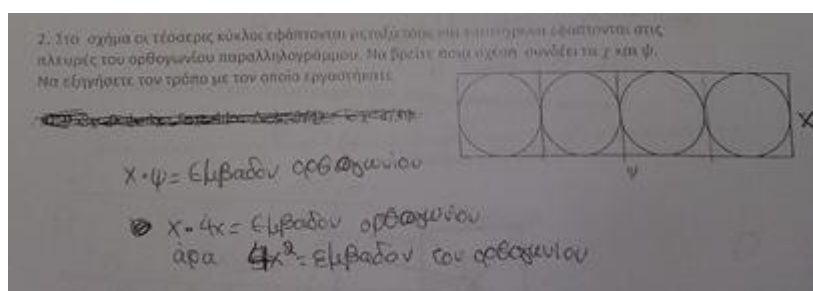


Πίνακας 4. Ποσοστά επιτυχίας A2-Aex2

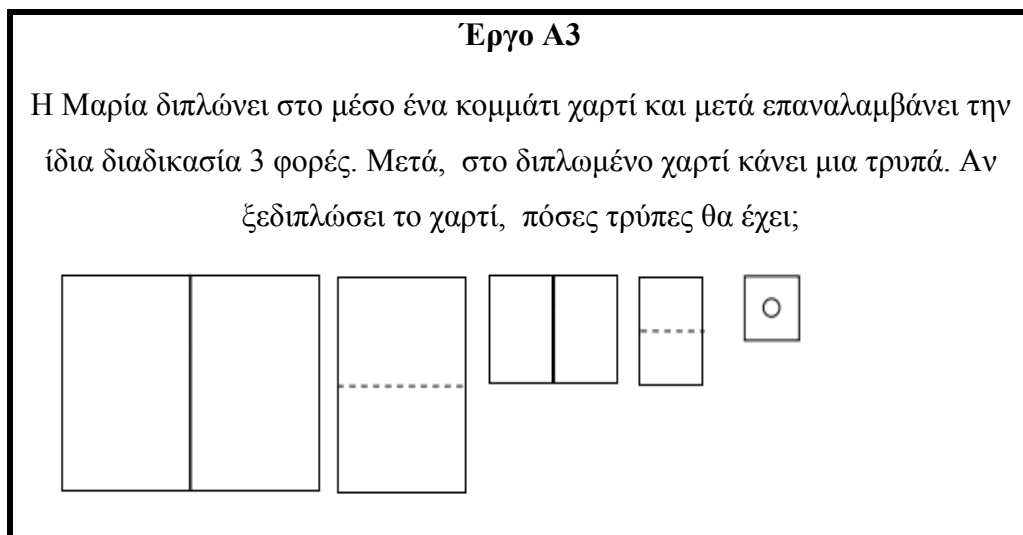
Στο έργο A2 κάποιοι μαθητές θεώρησαν ότι το ερώτημα ζητούσε να υπολογίσουν το εμβαδόν ή την περίμετρο του ορθογώνιου. Υπήρχε απάντηση $\psi=10\chi$ (Εικόνα 14) και απάντηση $\chi \cdot \psi$ (Εικόνα 15).



Εικόνα 14. Υπολογισμός περιμέτρου

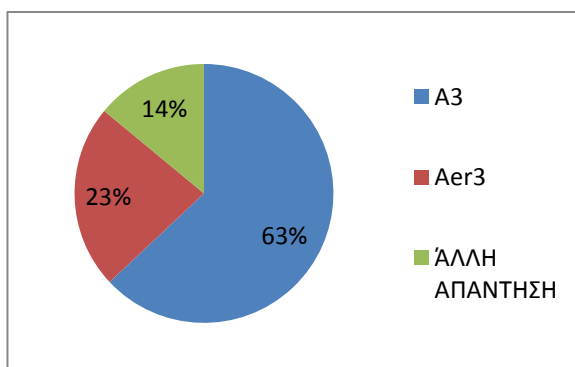


Εικόνα 15. Υπολογισμός εμβαδού



Εικόνα 16. Έργο A3

Στο έργο A3 (Εικόνα 16), το ποσοστό που απάντησε σωστά (πίνακας 5) ήταν ικανοποιητικό (63%) ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι ένα μεγάλο ποσοστό τις τάξεως του 23% απάντησε στο έργο A3 ότι οι τρύπες στο διπλωμένο χαρτί είναι 8 (Aer3-error), πιθανότατα διπλώσαν το χαρτί τρεις φορές αντί για τέσσερις.



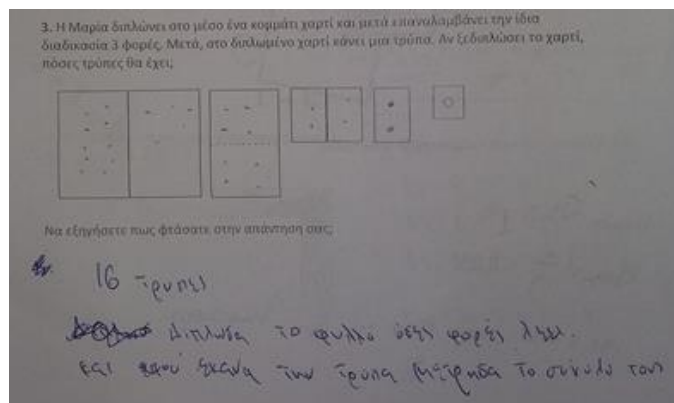
Πίνακας 5. Ποσοστά επιτυχίας των A3-Aer3

Από αυτό το 63% το 28% ήταν κορίτσια και το 35% αγόρια. Παρατηρούμε μια υπεροχή των αγοριών σε σχέση με τα κορίτσια.

Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με πολλές έρευνες που έχουν γίνει γύρω από την επίδραση του φύλου στην χωρική ικανότητα των μαθητών. Σε παλαιότερη έρευνα που έγινε για την χωρική ικανότητα από τους Γαγάτσης και Καλογήρου (2013) στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος πανεπιστήμιο Κύπρου, διαπιστώθηκε ότι τα αγόρια απαντούν καλύτερα στα έργα χωρικής ικανότητας. Παρόμοια αποτελέσματα για τις καθιδρυμένες

διαφορές ανάμεσα στα φύλα, με το αρσενικό να υπερέχει έχουν γίνει από τους Benbow (1988), Hedges & Nowell (1995), Hyde et.al (1990), καθώς και πιο πρόσφατες από τους Silverman et.al (2007) σε μια έρευνα σε επτά εθνικές διαφορετικές ομάδες από σαράντα χώρες εντόπισαν υψηλότερη επίδοση στους άντρες σε τεστ νοερής περιστροφής τρισδιάστατων σχημάτων. Στην έρευνα όμως που διεξήγαγε ο Michaelides (2003) βρέθηκε ότι δεν υπήρχαν διαφορές ανάμεσα στα κορίτσια και στα αγόρια όσον αφορά τη νοερή περιστροφή.

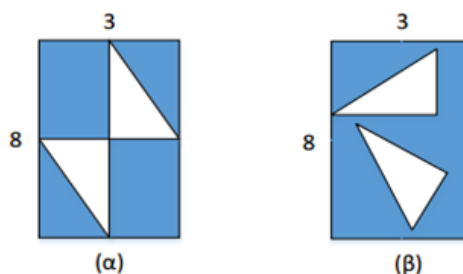
Υπήρξαν μαθητές που για να απαντήσουν στην ερώτηση έκαναν το πείραμα διπλώνοντας ένα χαρτί και μέτρησαν τις τρύπες που δημιουργήθηκαν (Εικόνα 17).



Εικόνα 17. Δίπλωση χαρτιού & μέτρηση τρυπών

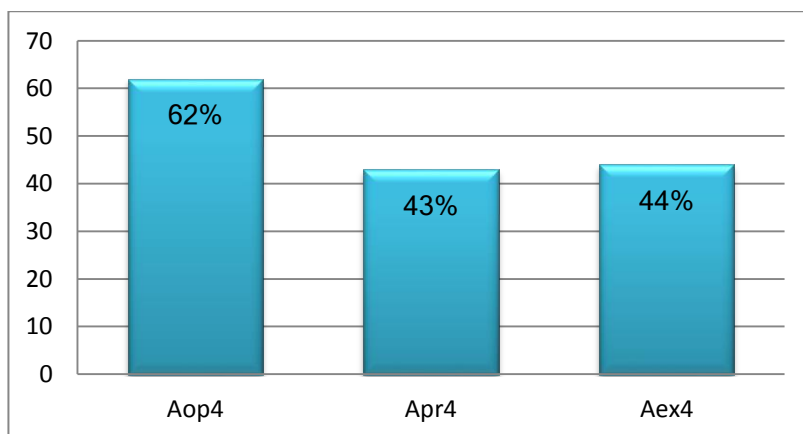
Έργο Α4

Δυο ίσα ορθογώνια τρίγωνα είναι τοποθετημένα σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 3×8 όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Εάν τα ίδια δυο τρίγωνα επανατοποθετηθούν μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως φαίνεται στο σχήμα (β), ποιο είναι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους στο σχήμα (β);



Εικόνα 18. Έργο Α4

Στο έργο A4 (Εικόνα 18), περιμέναμε οι μαθητές να κατανοήσουν ότι τα δυο εμβαδά του σχήματος (α) και του σχήματος (β) είναι ίσα, αφού τα δυο τρίγωνα του σχήματος (α) επανατοποθετήθηκαν άπλα με αλλαγή θέσης στο σχήμα (β). Ποσοστό 62% απάντησε σωστά ενώ σε θέση να κάνει πράξεις (Apr4-procedure) ήταν το 43% και να το εξηγήσει το 44% (Πίνακας 6). Αντιλαμβανόμαστε ότι σε έργα που μπλέκεται η λειτουργική σύλληψη μειώνεται το ποσοστό επιτυχίας.

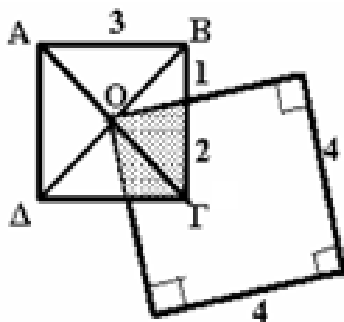


Πίνακας 6. Ποσοστά επιτυχίας των Aop4-Apr4-Aex4

Έργο A5

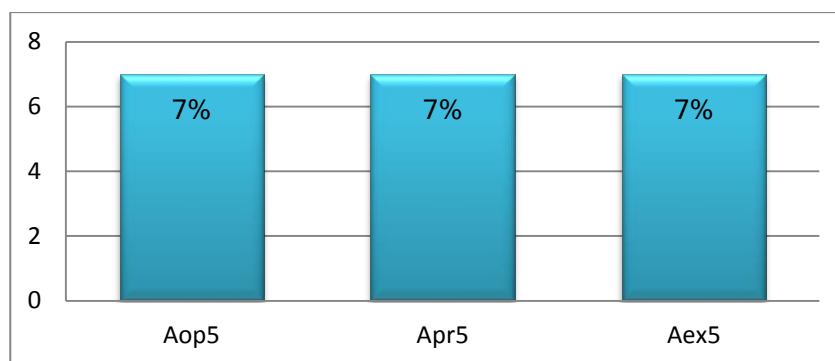
Εάν στο παρακάτω σχήμα Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε με ποσό ισούται το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ;

Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



Εικόνα 19. Έργο A5

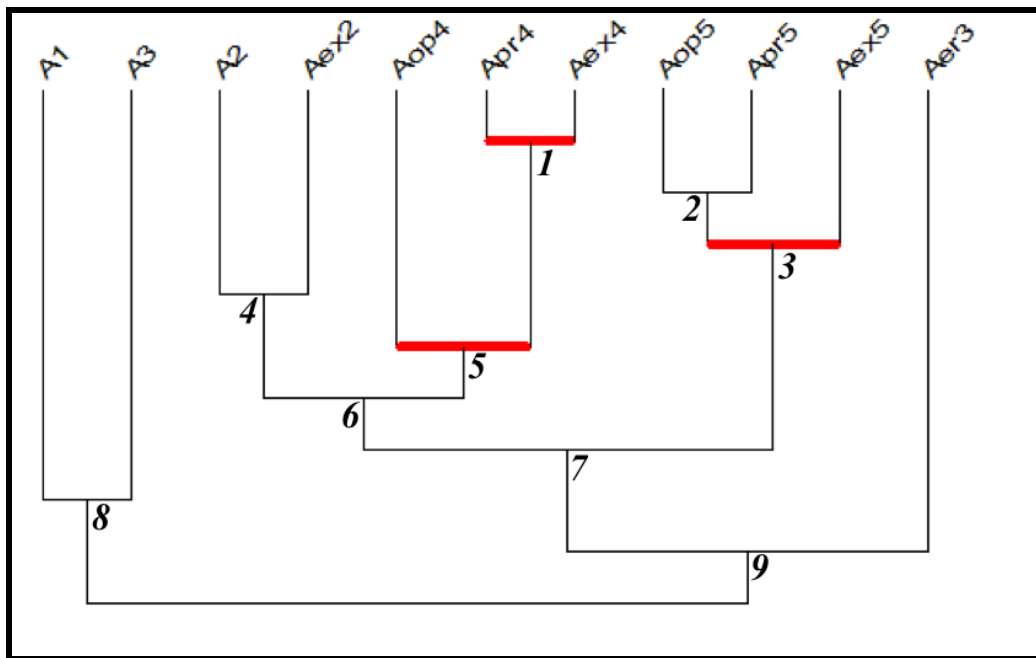
Το τελευταίο έργο Α5 (Εικόνα 19), φαίνεται να δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές αφού είχε το μικρότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων με διαφορά από τα υπόλοιπα έργα, μόλις 7%. Βέβαια όσοι το έλυσαν το εξήγησαν κιόλας (ποσοστό 7%). Επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα από το προηγούμενο έργο Α4, ότι έργα λειτουργικής σύλληψης δυσκολεύουν τους μαθητές. Στο έργο αυτό που, έχει να κάνει με περιστροφή, η δυσκολία είναι πολύ μεγαλύτερη. Το σχήμα δεν λειτούργησε ευρετικά, σαν εικόνα το είδαν οι μαθητές, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές κατά τη διαδικασία της εξεικόνισης δεν ασχολούνται με δραστηριότητες που να απαιτούν την αποσύνδεση ή επανασύνδεση και μετασχηματισμό των σχημάτων. Μόνο για το 7% (Πίνακας 7) των μαθητών λειτούργησε ευρετικά, οι μαθητές αυτοί μετακινώντας το μεγάλο τετράγωνο διαπίστωσαν ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ.



Πίνακας 7. Ποσοστά επιτυχίας των Aop5-Apr5-Aex5

Σχέσεις Ομοιότητας Μεταξύ των Έργων Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

Η Εικόνα 20 παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας στη συμπεριφορά των μαθητών στα έργα του Α Μέρους, για το συνολικό δείγμα της έρευνας.

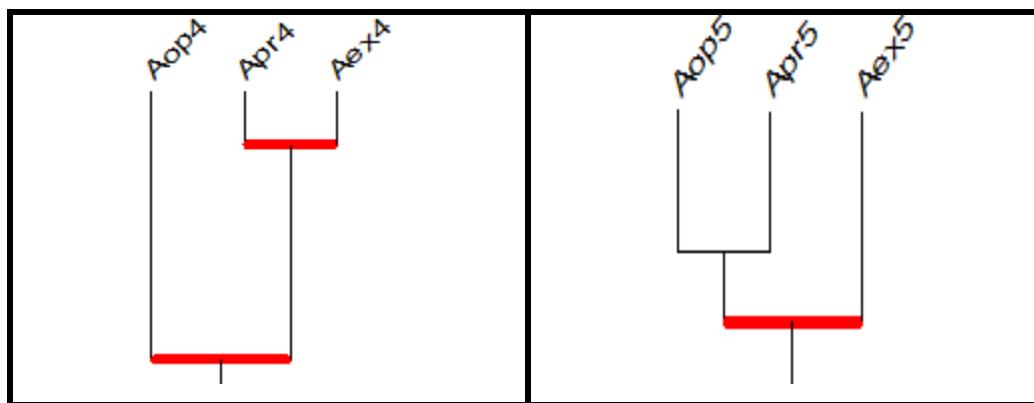


Εικόνα 20. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α Μέρους

Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κλάσεις ομοιότητας.

- Στην πρώτη κλάση βρίσκουμε τα έργα A1 και A3 που σχηματίζουν ομοιότητα μεταξύ τους και σχεδόν διαχωρίζονται από τα υπόλοιπα έργα. Στο A1 απαιτείται αντιληπτική σύλληψη, ενώ στο A3 παρεμβαίνουν και άλλες παράμετροι όπως η δημιουργία και ο χειρισμός νοερών εικόνων (συνεπώς και χωρική ικανότητα).
- Στη δεύτερη κλάση ομοιότητας συγκεντρώνονται τα έργα A4 και A5 που συνδέονται μεταξύ τους, αφού εμπλέκουν και τα δύο τη λειτουργική και λεκτική σύλληψη για την επίλυση τους. Επίσης έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι και τα δύο σχετίζονται με την έννοια του εμβαδού.
- Στην τρίτη κλάση ομοιότητας υπάρχει μόνο το έργο A2 το οποίο απαιτεί, πέρα από την αντιληπτική και λεκτική σύλληψη, γι' αυτό συνδέεται με τα έργα A4 και A5.

Παρατηρούμε ότι στα έργα A4 και A5, η διαδικασία (πράξεις) που ακολουθήθηκε συνδέεται σημαντικά με την εξήγηση που δόθηκε και με την ορθότητα της απάντησης (Εικόνα 21).



Εικόνα 21. Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων A4-A5

Τα δυο αυτά έργα λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο γι' αυτό σχηματίζουν δυο ομάδες, οι οποίες μάλιστα συνδέονται μεταξύ τους. Επίσης οι δυο αυτές ομάδες συνδέονται και με το έργο A2.

Τέλος φαίνεται ότι το έργο A3 παίζει έναν πολύ περιφερειακό ρόλο και δεν συνδέεται με τις άλλες ασκήσεις. Ένας πιθανός λόγος που μπορεί να συμβαίνει αυτό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους ασκήσεις καθώς και το γεγονός ότι εξετάζει και χωρική ικανότητα που δεν συνδέεται με την φύση των άλλων έργων.

Στο διάγραμμα ομοιότητας (Εικόνα 20) δημιουργούνται διάφοροι κόμβοι (ομάδες ομοιότητας) που δείχνουν τα επίπεδα ομοιότητας μεταξύ των έργων. Ο συντελεστής που μετρά την ομοιότητα των έργων έχει τιμές από 0 έως 1, όσο πιο κοντά στο 1 είναι ο συντελεστής τόσο μεγαλύτερη ομοιότητα έχουμε. Άρα πιο σημαντικοί είναι οι κόμβοι με ομοιότητα 1.

Στη συνέχεια θα κατατάξουμε (ταξινομήσουμε) αυτούς τους κόμβους και θα διερευνήσουμε για τον κάθε ένα ποιοι μαθητές απαντούν καλύτερα (αγόρια – κορίτσια) και σε ποιο σχολείο φοιτούν (S1-S3-S3).

Απολυτή ομοιότητα με συντελεστή 1 (δηλ. έργα που λειτουργούν με πανομοιότυπο τρόπο) έχουν:

- Κόμβος 1 : (Apr4 Aex4)
- Κόμβος 2 : (Aop5 Apr5)
- Κόμβος 3 : ((Aop5 Apr5) Aex5)

Ακολουθούν με συντελεστή 0,99 :

- Κόμβος 4 : (A2 Aex2)
- Κόμβος 5 : (Aop4 (Apr4 Aex4))

Με μικρότερους συντελεστές έχουμε:

- Κόμβος 6 : $((A2 \text{ Aex2}) (Aop4 (Apr4 \text{ Aex4})))$, με συντελεστή : 0.957369
- Κόμβος 7 : $((((A2 \text{ Aex2}) (Aop4 (Apr4 \text{ Aex4}))) ((Aop5 \text{ Apr5}) \text{ Aex5})),$
με συντελεστή: 0.796005
- Κόμβος 8 : $(A1 \text{ A3})$, με συντελεστή : 0.667836
- Κόμβος 9 : $(((((A2 \text{ Aex2}) (Aop4 (Apr4 \text{ Aex4}))) ((Aop5 \text{ Apr5}) \text{ Aex5}))$
 $\text{Aer3})$, με συντελεστή: 0.652944
- Κόμβος 10 : $((A1 \text{ A3}) (((A2 \text{ Aex2}) (Aop4 (Apr4 \text{ Aex4}))) ((Aop5 \text{ Apr5}) \text{ Aex5}))$
 $\text{Aer3}))$, με συντελεστή: 0.280605

Στον Πίνακα 8 φαίνεται για κάθε ομάδα ομοιότητας ποια από τις συμπληρωματικές μεταβλητές συμβάλλει περισσότερο. Για την μεταβλητή που είναι πιο σημαντική σημειώνουμε 1 διαφορετικά 0. Συμπληρωματικές λέγονται οι μεταβλητές που δεν εμφανίζονται στα διαγράμματα αλλά μας φανερώνουν ποια από όλες είναι πιο σημαντική για μια συγκεκριμένη ομάδα ομοιότητας.

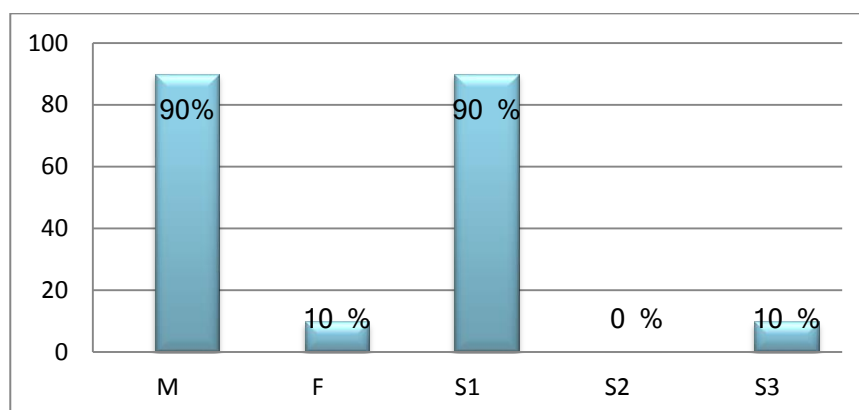
Ομάδες ομοιότητας	Male(M)	Female(F)	S1	S2	S3
Κόμβος 1	1	0	1	0	0
Κόμβος 2	1	0	1	0	0
Κόμβος 3	1	0	1	0	0
Κόμβος 4	1	0	1	0	0
Κόμβος 5	1	0	1	0	0
Κόμβος 6	1	0	1	0	0
Κόμβος 7	1	0	1	0	0
Κόμβος 8	0	1	0	0	1
Κόμβος 9	1	0	1	0	0
Κόμβος 10	1	0	1	0	0

Πίνακας 8. Συμπληρωματικές μεταβλητές Α Μέρους

Υπάρχουν δυο ομάδες συμπληρωματικών μεταβλητών από τη μια το φύλο (F-M) και από την άλλη τα τρία σχολεία (S1, S2, S3). Λέμε ότι μια

μεταβλητή συμβάλει περισσότερο όταν η πιθανότητα που αντιστοιχεί σε αυτή είναι μικρότερη από τις άλλες πιθανότητες. Βεβαία από στατιστικής πλευράς για να είναι σημαντική η συμβολή μιας μεταβλητής πρέπει η τιμή της να είναι μικρότερη του 0.05

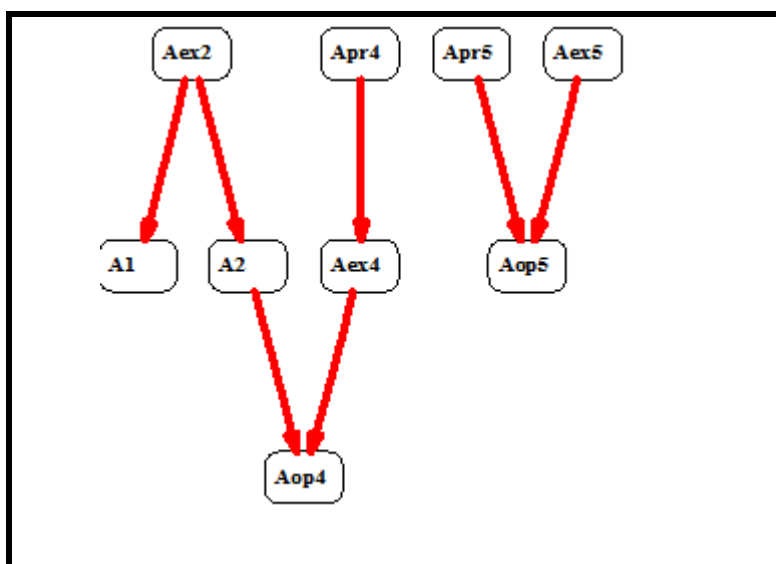
Από τον πίνακα 9 συμπεραίνουμε ότι τα αγόρια απαντούν καλύτερα σε όλα τα έργα κατανόησης γεωμετρικού σχήματος, εκτός από τον κόμβο 8 που καλύτερα απαντούν τα κορίτσια. Ο κόμβος 8 περιλαμβάνει τα έργα A1 και A3. Ένα δεύτερο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το σχολείο S1 απαντάει σε όλα τα έργα καλύτερα από τα άλλα δυο σχολεία. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος είναι από το σχολείο S1. Στα μόνα έργα που απαντάει καλύτερα το σχολείο S3 είναι τα έργα A1 και A3.



Πίνακας 9. Ποσοστά επιτυχίας Συμπληρωματικών μεταβλητών Α Μέρους

Συνεπαγωγικές Σχέσεις Μεταξύ των Έργων Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος

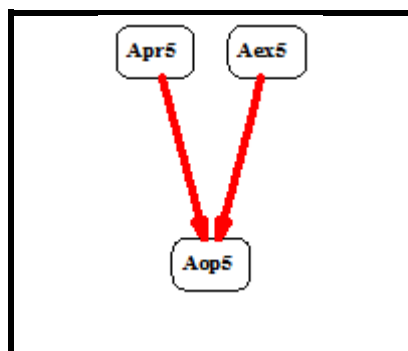
Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα (Εικόνα 22) διαμορφώθηκε βάση της συμπεριφοράς των μαθητών στα έργα κατανόησης γεωμετρικού σχήματος.



Εικόνα 22. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α Μέρους

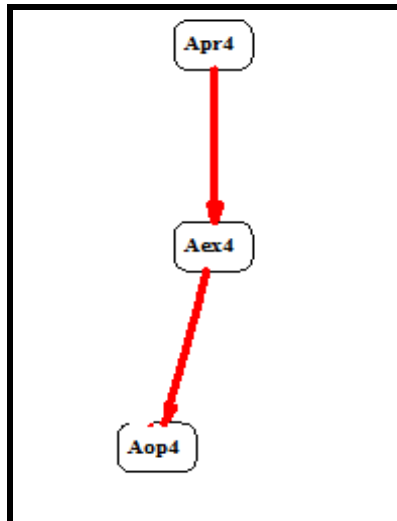
Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι σχηματίστηκαν δυο διαφορετικές ομάδες συνεπαγωγών που ουσιαστικά είναι τρεις:

- Η πρώτη ομάδα αφορά τις τρεις μεταβλητές του έργου A5. Η επίλυση του έργου A5 επηρεάζεται από την διαδικασία που ακολουθήθηκε και την εξήγηση που δόθηκε.



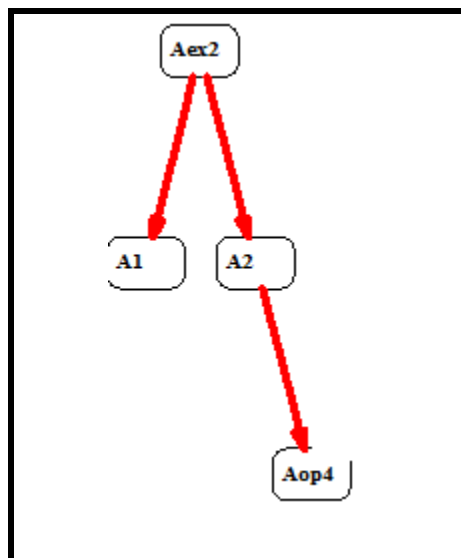
Εικόνα 23. Ομάδα των τριών μεταβλητών του έργου A5

- Η δεύτερη ομάδα αφορά τις τρεις μεταβλητές του έργου A4. Η επίλυση του έργου A4 επηρεάζεται από την διαδικασία που ακολουθήθηκε και την εξήγηση που δόθηκε.



Εικόνα 24. Ομάδα των τριών μεταβλητών του έργου A4

- Η τρίτη ομάδα αφορά τις μεταβλητές του έργου A1 και A2 με μια μικρή σύνδεση με τη μεταβλητή του έργου A4. Η εξήγηση στο έργο A2 οδηγεί στη λύση του έργου A2. Επίσης η λύση του έργου A2 συνεπάγεται και την λύση του A4.



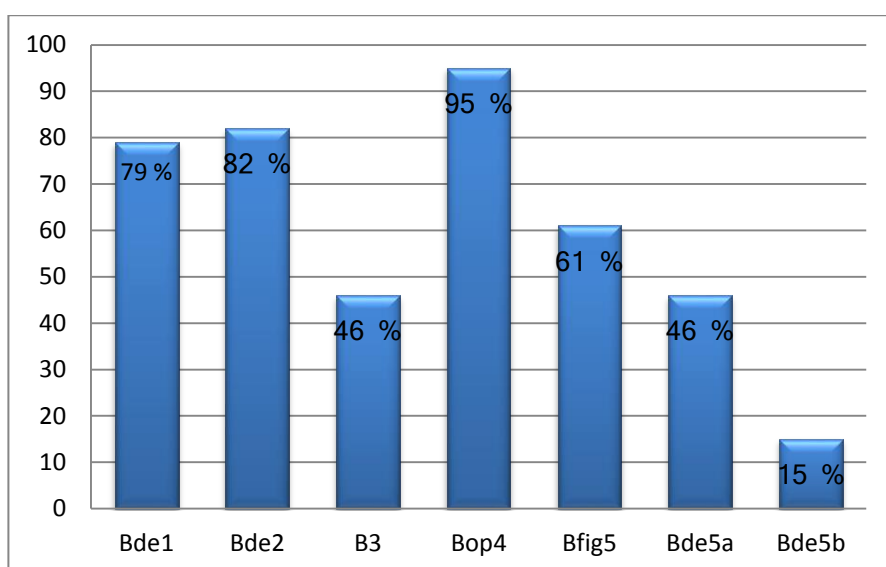
Εικόνα 25. Ομάδα των μεταβλητών του έργου A1 - A2- A4.

Επομένως με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα, που οι συνδέσεις είναι πιο «ισχυρές» από τις συνδέσεις ομοιότητας, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η επιτυχία στο έργο A4 δεν συνεπάγεται επιτυχία στο έργο A5 και αντίστροφα. Αυτό πιθανό να οφείλεται στον ιδιαίτερο χαρακτήρα του σχήματος κάθε

άσκησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους έργα.

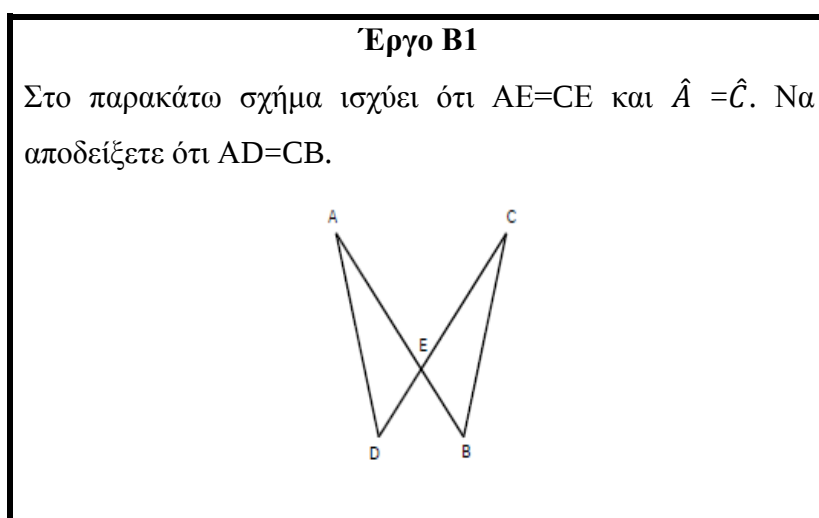
Ανάλυση ερωτηματολογίου Β Μέρους

Στο ραβδόγραμμα που ακολουθεί (Πίνακας 10) βλέπουμε τα ποσοστά επιτυχίας όλων των μαθητών στο Β Μέρος. Στα περισσότερα έργα οι μαθητές είχαν μεγάλα ποσοστά επιτυχίας, αυτό μπορεί να οφείλεται στο είδος των ασκήσεων αφού οι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι με αποδεικτικές ασκήσεις στο Λύκειο και μάλιστα με αυστηρές αποδείξεις.



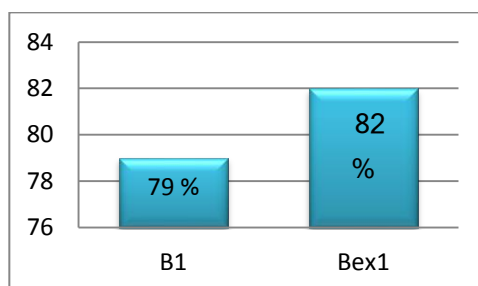
Πίνακας 10. Ποσοστά επιτυχίας των έργων του Β Μέρους

Θα δούμε τώρα αναλυτικά τις ερωτήσεις του Β Μέρους.



Εικόνα 26. Έργο B1

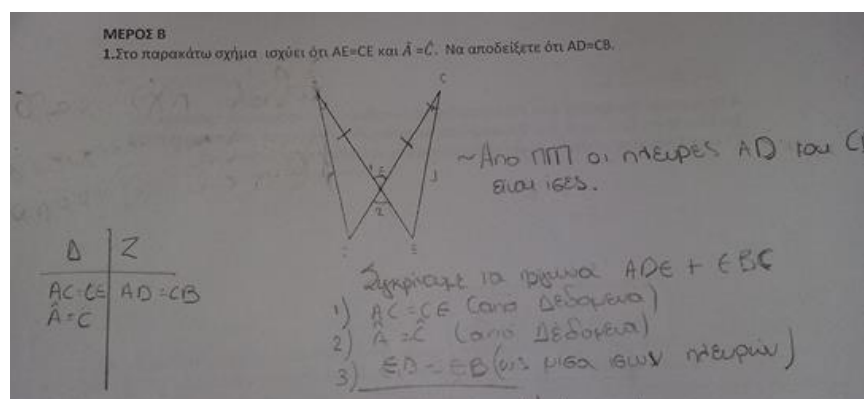
Το έργο αυτό είναι μια κλασσική άσκηση στις συγκρίσεις τριγώνων, σαν αυτή υπάρχουν πολλές στο σχολικό βιβλίο. Ήταν μάλλον αναμενόμενο το ποσοστό επιτυχίας καθώς και η εξήγηση του. Το 82% των μαθητών ήταν σε θέση να διακρίνει τα δεδομένα από τα ζητούμενα και να ακολουθήσει μια σωστή διαδικασία σύγκρισης των δυο τριγώνων.



Πίνακας 11. Ποσοστά επιτυχίας των B1-Bex1

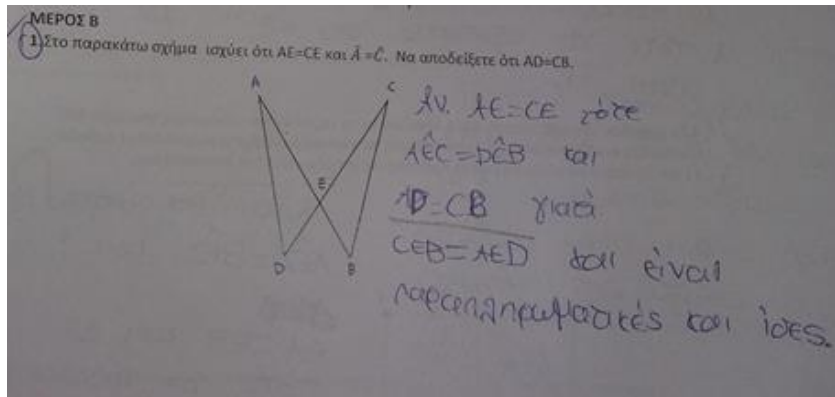
Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11, το 79% των μαθητών συνολικά απάντησε σωστά, ενώ το υπόλοιπο 21% απάντησε λανθασμένα (ή δεν απάντησε καθόλου). Επίσης 82% των μαθητών συνολικά μπορούσε να εξηγήσει την διαδικασία που ακολούθησε. Άρα υπάρχει ένα μικρό ποσοστό 3% που ενώ μπορούσε να εξηγήσει τη διαδικασία δεν κατάφερε να την αποδείξει. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές έχουν κατακτήσει την Γενικότητα της απόδειξης.

Στο έργο B1 μαθητής χρησιμοποιεί στοιχεία για δεδομένα που δεν τα γνωρίζει, ενώ έχει γράψει ποια είναι τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης δεν μπορεί να αποδείξει το ζητούμενο.



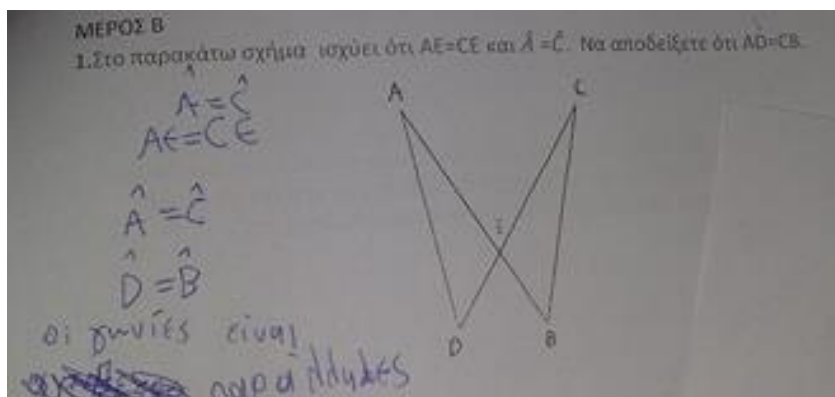
Εικόνα 27. Μη αναγνώριση δεδομένων στο B1

Στο ίδιο έργο B1 άλλος μαθητής έγραψε ότι δυο γωνιές είναι ταυτόχρονα και ίσες και παραπληρωματικές χωρίς καμία ένδειξη για κάτι τέτοιο. Μια πιθανή εξήγηση γι αυτό είναι ο μαθητής να ήθελε να πει πως είναι ίσες ως ίσες παραπληρωματικών.



Εικόνα 28. Παρανόηση 1 μαθητή στο έργο B1

Ένας ακόμα μαθητής στο έργο B1 έγραψε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.



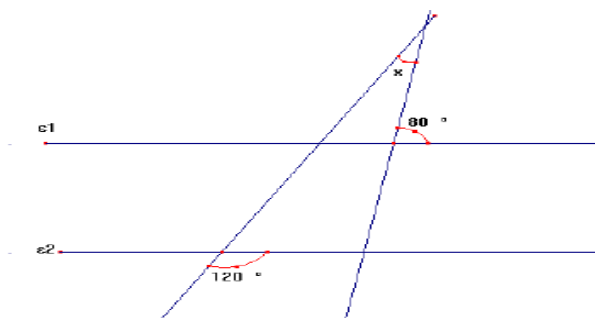
Εικόνα 29. Παρανόηση 2 μαθητή στο έργο B1

Έργο B2

Στο σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Πόσες μοίρες είναι η γωνία x ;

A. 70° B. 60° Γ. 40° Δ. 30° Ε. 20°

Εξηγήστε πως εργαστήκατε.

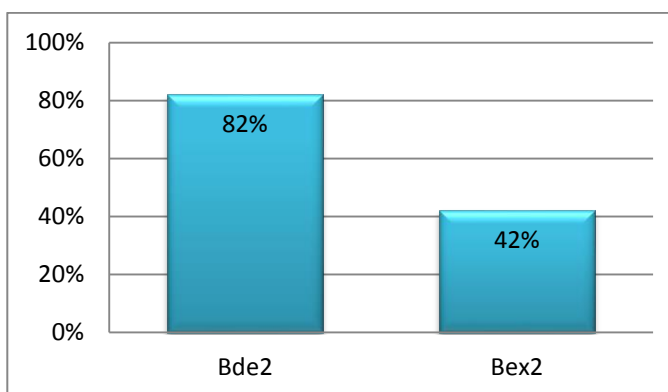


Εικόνα 30. Έργο B2

Στο έργο B2 οι μαθητές έπρεπε να κάνουν χρήση των θεωρημάτων:

- δυο ευθείες παράλληλες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

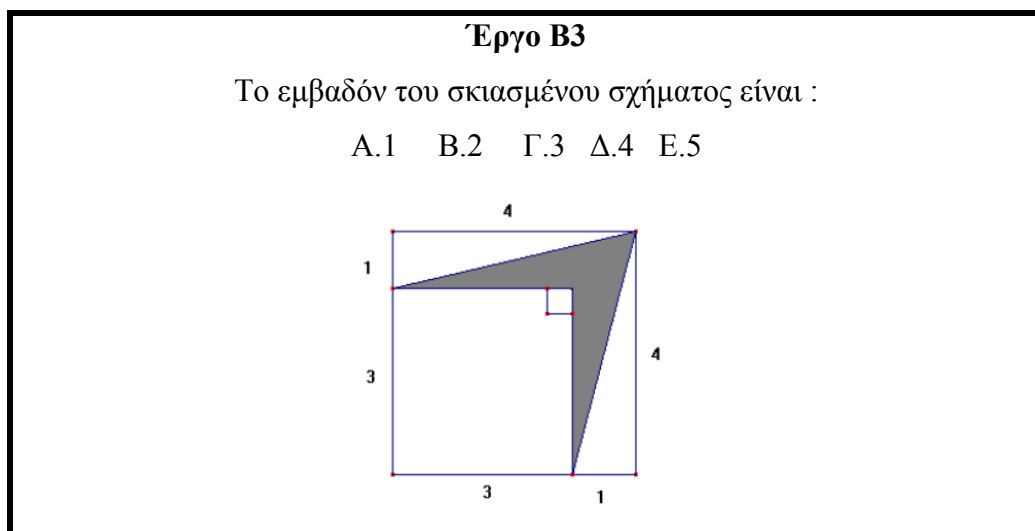
Τα δυο αυτά θεωρήματα τα έχουν διδαχτεί οι μαθητές και στην Γ΄ Γυμνάσιου και στην Α΄ Λυκείου. Από τον πίνακα 12 βλέπουμε ότι 82% απάντησε σωστά και 42% έδωσε και σωστή αιτιολόγηση. Το υπόλοιπο 40% δεν εξήγησε, απλά κύκλωσε την σωστή απάντηση.



Πίνακας 12. Ποσοστά επιτυχίας των B2-Bex2

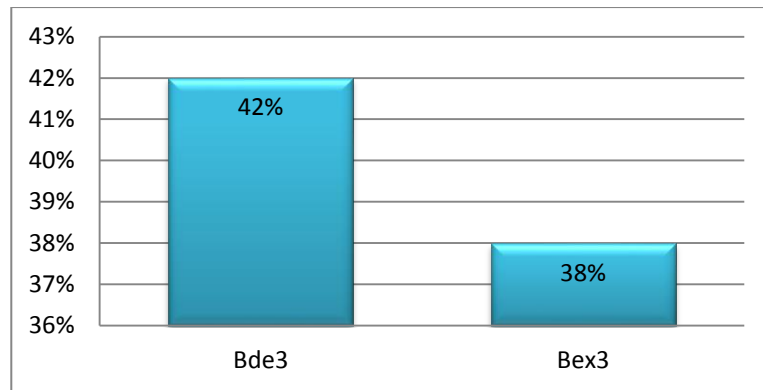
Συμφώνα με τα επίπεδα κατανόησης που προτείνουν οι Kunimune, Fujita & Jones θα μπορούσαμε να πούμε για τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα B1 και B2 ότι οι μαθητές κατανοούν ότι η απόδειξη είναι απαραίτητη για να αποδειχθεί μια πρόταση ή ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Ο μέσος όρος επιτυχίας των δυο αυτών έργων είναι 80,5% άρα οι μαθητές της Α΄ Λυκείου σε ποσοστό 80,5% έχουν κατάκτηση τόσο τη γενικότητα της απόδειξης όσο και την κατασκευή της άρα βρίσκονται στο επίπεδο Επίπεδο II.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου βρίσκονται στη Γεωμετρία II ή Φυσική και Αξιοματική (Natural and axiomatic Geometry), αφού σε αυτά τα δυο έργα είναι σε θέση να χρησιμοποιούν υποθετικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς και νόμους που έχουν προκύψει από ένα σύνολο αξιωμάτων όσο το δυνατό πλησιέστερο προς την αισθητική πραγματικότητα. Επιβεβαιώνεται το θεωρητικό πλαίσιο Deliyanni et.al (2011) που καταχωρεί τους μαθητές Λυκείου στη Γεωμετρία II.



Εικόνα 31. Έργο B3

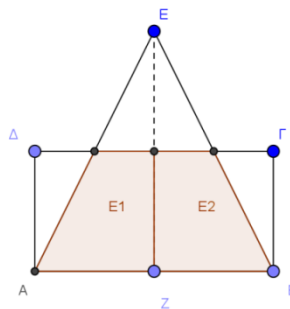
Οι μαθητές για την επίλυση του έργου B3 χρησιμοποίησαν τους τύπους εμβαδών σχημάτων (τετράγωνο – τρίγωνο). Παρόλο που υπήρχε το σχήμα και οι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου και τετραγώνου είναι γνωστοί από το Γυμνάσιο το ποσοστό επιτυχίας ήταν 42% (Πίνακας 13). Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν το σχήμα ως ευρετικό εργαλείο.



Πίνακας 13. Ποσοστά επιτυχίας των B3-Bex3

Έργο B4

Το εμβαδόν του ορθογώνιου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΕ (με $EA=EB$) και ΕΖ το ύψος του. Παρατηρήστε τα σκιασμένα σχήματα με αντίστοιχα εμβαδά Ε1 και Ε2. Βάλτε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

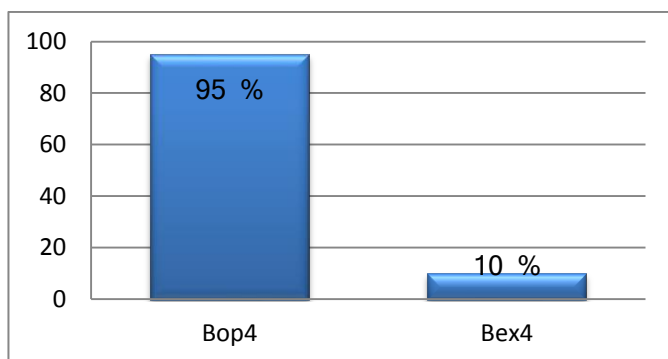


- A. Το εμβαδόν Ε1 είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν Ε2.
- B. Το εμβαδόν Ε1 είναι ίσο με το εμβαδόν Ε2.
- Γ. Το εμβαδόν Ε1 είναι μικρότερο από το εμβαδόν Ε2.

Εικόνα 32. Έργο B4

Το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας 95% (Πίνακας 14) έχει το έργο B4. Η απάντηση του έργου αυτού ήταν μορφής πολλαπλής επιλογής και οι μαθητές απάντησαν πιθανόν διαισθητικά, οι μαθητές έβλεπαν από το σχήμα ότι είναι ίσα τα δυο σχήματα άρα θα ήταν ίσα και τα εμβαδά τους, οι μαθητές βρίσκονται στη Γεωμετρία Ι. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το πολύ μικρό ποσοστό, μόνο(10%), που κατάφερε να εξηγήσει την απάντησή του. Οι μαθητές που κατάφεραν να δώσουν εξήγηση δεν συμβιβαστήκαν να πουν ότι τα εμβαδά των τριγώνων είναι ίσα, έκαναν τις απαραίτητες συγκρίσεις

τριγώνων για να αποδείξουν ότι τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και στη συνέχεια και τα εμβαδά. Άρα αυτό το 10% των μαθητών για να αποδείξει το ζητούμενο βασίζεται σε αυστηρές γεωμετρικές αποδείξεις.



Πίνακας 14. Ποσοστά επιτυχίας στο έργο B4-Bex4

Έργο B5

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της BA στο Z .

α. Να αποδείξετε ότι $BE=BA$.

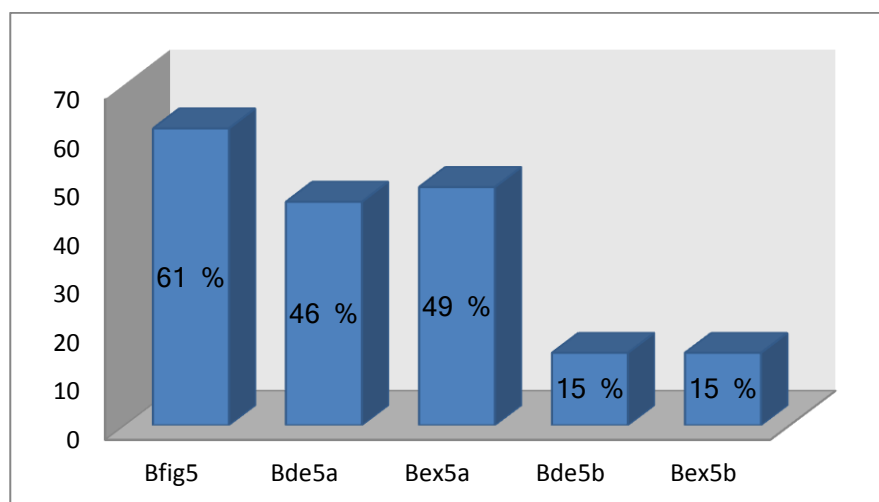
β. Να αποδείξετε ότι το $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

Εικόνα 33. Έργο B5

Στο έργο B5 το 61% (Πίνακας 15) των μαθητών σχεδίασε το σχήμα, παρόλα αυτά δυσκολεύτηκε στην επίλυση των δυο ερωτημάτων. Στο ερώτημα B5a δυο πιθανές λύσεις (που έδωσαν και οι μαθητές) ήταν είτε χρήση της ιδιότητας της διχοτόμου, είτε σύγκριση τριγώνων, για να προκύψει η ζητούμενη ισότητα. Από την άλλη πλευρά το ερώτημα B5b, που χρειαζόταν λογικές συνδέσεις μεταξύ θεωρημάτων και να αποδείξουν με αυστηρή απόδειξη το ζητούμενο, μόνο το 15% κατάφερε να το αποδείξει. Αυτό το ερώτημα ήταν το πιο δύσκολο αυτού του μέρους.

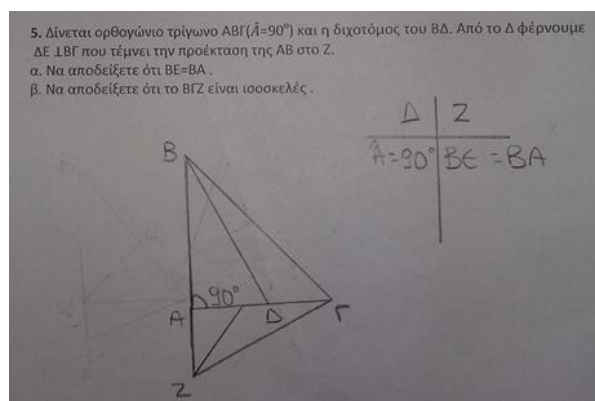
Οι μαθητές παραμένουν έτσι σε μια οπτική αντίληψη των σχημάτων, που ο Duval (2004) αποκαλεί εικονική εξεικόνιση. Το έργο B5 διαφέρει από τα υπόλοιπα του ερωτηματολόγιου γιατί δεν δίνεται το σχήμα, είναι και αυτός ένας λόγος για τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας. Εδώ βέβαια αξίζει να σημειωθεί ότι όσοι μαθητές έλυσαν το ερώτημα αυτό ήταν σε θέση και να

εξηγήσουν την διαδικασία που ακολούθησαν. Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι μαθητές που τα καταφέρνουν στην εξήγηση, έχουν κατακτήσει γεωμετρικό συλλογισμό, είναι σε θέση να επιλύσουν διάφορα έργα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές έχουν κατακτήσει την Κατασκευή της απόδειξης. Επίσης το 15% έχει αναπτύξει αφαιρετική σκέψη, άρα θα μπορούσε να βρίσκεται στη Γεωμετρία ΙΙΙ (Αυστηρή Αξιοματική Θεωρία).



Πίνακας 15. Ποσοστά επιτυχίας στο έργο B5

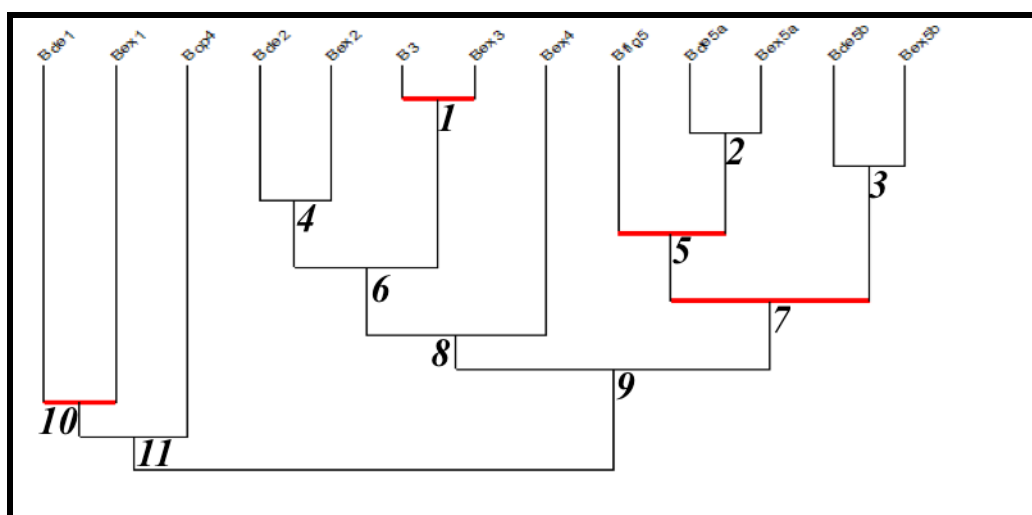
Στο έργο B5 παρατηρούμε ότι μαθητής της Εικόνας 3 δεν μπορεί να μετατρέψει το λεκτικό πρόβλημα, δηλ. χρησιμοποιώντας τον ορισμό της διχοτομίου να γράψει ότι «η διχοτόμος του BA σημαίνει $AB\hat{A} = \Delta\hat{B}\Gamma$ ». Είναι εμφανή η δυσκολία στα λεκτικά προβλήματα που δεν υπήρχε το σχήμα να εντοπίσουν τα δεδομένα – ζητούμενα.



Εικόνα 34. Δυσκολία αναγνώρισης στο B5 δεδομένα – ζητούμενα

Σχέσεις Ομοιότητας Μεταξύ των Έργων Γεωμετρικού Συλλογισμού (Απόδειξη)

Η Εικόνα 35 παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας στη συμπεριφορά των μαθητών στα έργα του Β Μέρους, για το συνολικό δείγμα της έρευνας.



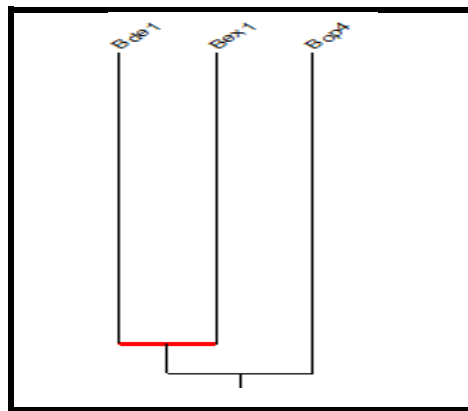
Εικόνα 35. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Β Μέρους

Στα περισσότερα έργα, η επίλυση τους συνδέεται με την εξήγηση τους. Η παροχή εξήγησης για τη λύση συνδέεται σημαντικά με την επίλυση του έργου.

Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κλάσεις ομοιότητας.

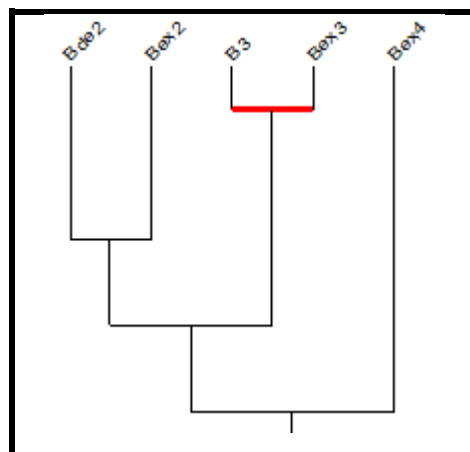
- Στην πρώτη ομάδα, το έργο B4 παρουσιάζει ομοιότητα με το έργο B1. Το έργο B1 απαιτεί ενεργοποίηση της αντιληπτικής και κυρίως της λεκτικής σύλληψης. Ενώ το έργο B4 σχεδιάστηκε για να προκαλέσει ενεργοποίηση της «λειτουργικής σύλληψης», εντούτοις φαίνεται να μη λειτουργήσει ως τέτοιο, λόγω της ομοιότητας του με το έργο B4. Συνεπώς και για το έργο B4 φαίνεται να παρενέβηκε η αντιληπτική και η λεκτική σύλληψη για την επίλυση του. Οι μαθητές μάλλον το αντιμετώπισαν σαν ένα πρόβλημα μέτρησης, παρόλο που δεν δίνονται τα μέτρα των ευθύγραμμων τμημάτων. Από την άλλη

πλευρά το σχήμα υποδεικνύει ισότητα τριγώνων και όχι μετασχηματισμό του σχήματος.



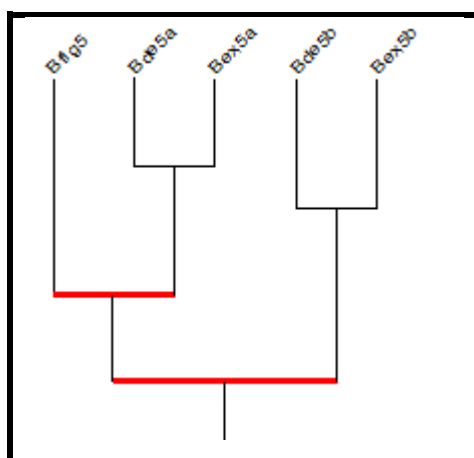
Εικόνα 36. Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων Bde1-Bex1-Bor4

- Το ίδιο ισχύει και για τη δεύτερη ομάδα ομοιότητας, όπου σχηματίζεται από τα έργα B2 και B3 και την εξήγηση του έργου B4. Ενώ για το έργο B2 απαιτείται η αντιληπτική και η λεκτική σύλληψη, εμφανίζει ομοιότητα με το έργο B3, το οποίο α priori κατασκευάστηκε για εξέταση της λειτουργικής σύλληψης. Φαίνεται λοιπόν ότι για τους μαθητές το έργο B3 δε λειτούργησε ως τέτοιο, αφού οι μαθητές δεν κατέφεραν να προσεγγίσουν το σχήμα ως ευρετικό εργαλείο, αλλά το προσέγγισαν αντιληπτικά και ενέπλεξαν τη λεκτική σύλληψη για να το λύσουν. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τους τύπους εμβαδών σχημάτων (τετράγωνο –τρίγωνο) για να το λύσουν.



Εικόνα 37. Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων B2-B3-Bex4

- Στην τρίτη ομάδα συναντούμε όλες τις μεταβλητές του έργου B5, οι οποίες σχηματίζουν ισχυρούς και σημαντικούς δεσμούς ομοιότητας. Το αξιοσημείωτο σε αυτή την ομάδα είναι ότι η σχεδίαση του σχήματος συνδέεται ισχυρά με την επίλυση του έργου και την παροχή επεξήγησης. Συνεπώς αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος της οπτικοποίησης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Και στα δύο ερωτήματα του έργου αυτού η επίλυση κάθε ερωτήματος του έργου συνδέεται με την παροχή επεξήγησης από τους μαθητές.



Εικόνα 38. Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων B5

Διαπιστώνουμε ότι και οι τρεις ομάδες συνδέονται μεταξύ τους, αν και ο δεσμός αυτός δεν είναι πολύ ισχυρός, γεγονός που δηλώνει μια ομοιογενοποιημένη συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση γεωμετρικών έργων με αιτιολόγηση, οι οποίοι παρουσιάζονται να εμπλέκουν περισσότερο την αντιληπτική και λεκτική σύλληψη παρά τη λειτουργική.

Καταλήγουμε άρα στο συμπέρασμα ότι η λειτουργική σύλληψη των μαθητών επισκιάζεται από την αντιληπτική και τη λεκτική σύλληψη. Οι μαθητές φαίνεται να διστάζουν να λύσουν τα έργα χρησιμοποιώντας τροποποιήσεις και αναδιαμορφώσεις στο δοσμένο σχήμα και προτιμούν να χρησιμοποιούν τυπικούς ορισμούς και ιδιότητες στις αποδείξεις τους. Από την άλλη πλευρά δεν έχουμε συνηθίσει τους μαθητές μας να σκεφτόνται με τέτοιο τρόπο.

Ο ρόλος της οπτικοποίησης είναι σημαντικός για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, αφού το γεωμετρικό σχήμα αναπαριστά τις σχέσεις που είναι απαραίτητες για τη γεωμετρική απόδειξη. Η οπτικοποίηση περιλαμβάνει την ικανότητα κάποιου να φαντάζεται πως θα εμφανιστούν τα αντικείμενα όταν μεταβληθούν με κάποιο τρόπο. Είναι δηλαδή το είδος του συλλογισμού που στηρίζεται στη χρήση οπτικών στοιχείων (εικόνων, διαγραμμάτων κ.τ.λ.) σε νοητικό ή πραγματικό επίπεδο.

Η ικανότητα επεξήγησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι σημαντικός παράγοντας για την ολοκλήρωση μια γεωμετρικής απόδειξης. Οι μαθητές που μπορούν να εξηγήσουν την διαδικασία που ακολουθούν είναι αυτοί που στο τέλος αποδεικνύουν τα έργα.

Οι κόμβοι που δημιουργούνται στο διάγραμμα ομοιότητας (Εικόνα 35) είναι 12:

- Κόμβος 1 : (B3 Bex3) με συντελεστή : 1
- Κόμβος 2 : (Bde5a Bex5a) με συντελεστή : 1
- Κόμβος 3 : (Bde5b Bex5b) με συντελεστή : 1
- Κόμβος 4 : (Bde2 Bex2) με συντελεστή : 0,999995
- Κόμβος 5 : (Bfig5 (Bde5a Bex5a)) με συντελεστή : 0,999953
- Κόμβος 6 : ((Bde2 Bex2) (B3 Bex3)) με συντελεστή : 0.999706
- Κόμβος 7 : ((Bfig5 (Bde5a Bex5a)) (Bde5b Bex5b)) με συντελεστή: 0.999465

Με μικρότερους συντελεστές έχουμε:

- Κόμβος 8 : (((Bde2 Bex2) (B3 Bex3)) Bex4) με συντελεστή : 0.994397
- Κόμβος 9 : (((((Bde2 Bex2) (B3 Bex3)) Bex4) ((Bfig5 (Bde5a Bex5a)) (Bde5b Bex5b)))) με συντελεστή: 0.99194
- Κόμβος 10 : (Bde1 Bex1) με συντελεστή: 0.988334
- Κόμβος 11 : ((Bde1 Bex1) Bop4) : με συντελεστή: 0.309964
- Κόμβος 12 : (((Bde1 Bex1) Bop4) (((((Bde2 Bex2) (B3 Bex3)) Bex4) ((Bfig5 (Bde5a Bex5a)) (Bde5b Bex5b)))))) : με συντελεστή: 0.0577931

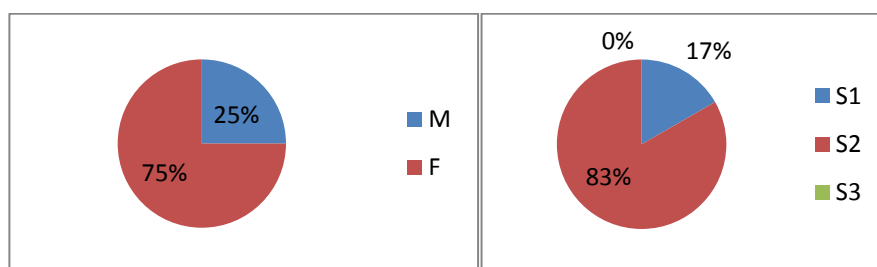
Την μεγαλύτερη ομοιότητα παρουσιάζουν οι κόμβοι 1,2, 3 και 4. Είναι η επίλυση των έργων μαζί με την εξήγηση τους.

Στον πίνακα 16 φαίνεται για κάθε ομάδα ομοιότητας ποια από τις συμπληρωματικές μεταβλητές συμβάλλει περισσότερο.

Ομάδες ομοιότητας	Male(M)	Female(F)	S1	S2	S3
Κόμβος 1	1	0	1	0	0
Κόμβος 2	0	1	0	1	0
Κόμβος 3	0	1	0	1	0
Κόμβος 4	1	0	0	1	0
Κόμβος 5	0	1	0	1	0
Κόμβος 6	1	0	0	1	0
Κόμβος 7	0	1	0	1	0
Κόμβος 8	0	1	1	0	0
Κόμβος 9	0	1	0	1	0
Κόμβος 10	0	1	0	1	0
Κόμβος 11	0	1	0	1	0
Κόμβος 12	0	1	0	1	0

Πίνακας 16. Συμπληρωματικές μεταβλητές Β Μέρους

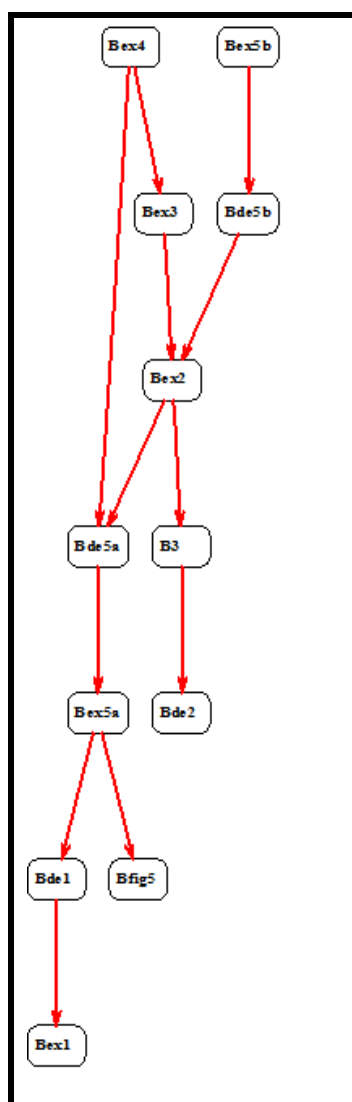
Από τον Πινάκα 17 συμπεραίνουμε ότι τα κορίτσια απαντούν καλύτερα στα περισσότερα έργα που αφορούν γεωμετρική απόδειξη, μια πιθανή ερμηνεία ίσως τα κορίτσια να είναι πιο μεθοδικά. Ένα δεύτερο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το σχολείο S2 απαντάει σε όλα τα έργα καλύτερα από τα άλλα δυο σχολεία. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι συγκεκριμένοι μαθητές του δείγματος είναι πολύ καλοί στις γεωμετρικές αποδείξεις.



Πίνακας 17. Ποσοστά επιτυχίας Συμπληρωματικών μεταβλητών Β Μέρους

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα (Εικόνα 39) διαμορφώθηκε βάση της συμπεριφοράς των μαθητών στα έργα για την γεωμετρική απόδειξη.

Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Β Μέρους

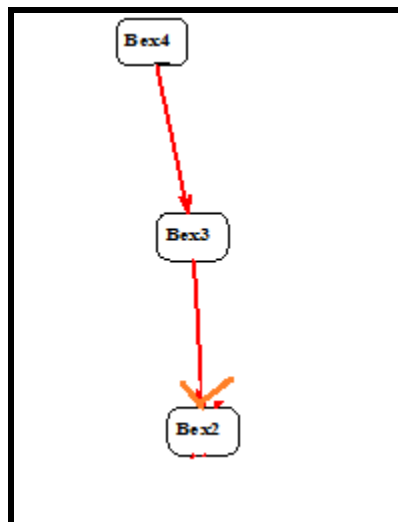


Εικόνα 39. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Β Μέρους

Από το διάγραμμα (Εικόνα 39) παρατηρούμε ότι σχηματίζονται πολλές συνεπαγωγικές αλυσίδες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Όλες οι μεταβλητές που αφορούν την γεωμετρική απόδειξη εμπλέκονται σε σχέσεις συνεπαγωγής.

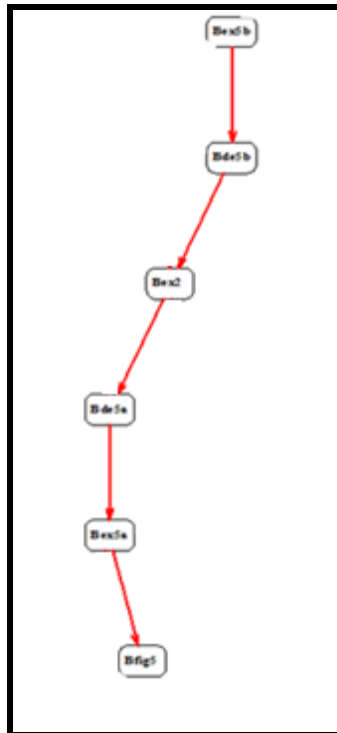
- Μια από αυτές τις ομάδες αποτελείται από τα έργα Bex4, Bex3 και Bex2. Τα έργα αυτά παρουσιάζουν μια ιδιαίτερη σχέση αφού εμφανίζεται συνέπεια στην παροχή επεξηγήσεων των απαντήσεων των μαθητών. Υπάρχει δηλ. μια σχέση μεταξύ της ορθής εξήγησης σε διάφορες ασκήσεις. Αυτή η αλυσίδα συνεπαγωγών σημαίνει ότι οι μαθητές που έχουν την ικανότητα να εξηγήσουν με ορθούς γεωμετρικούς συλλογισμούς μια άσκηση τότε εξηγούν και συλλογισμούς και σε άλλες ασκήσεις.

Παρόλα αυτά οι συνεπαγωγές αυτών των τριών ασκήσεων εμπλέκονται χωρίς μια συγκεκριμένη λογική, πιθανόν οι μαθητές να λειτούργησαν έτσι διότι δίνεται το σχήμα και στις τρεις αυτές ασκήσεις (Εικόνα 40).



Εικόνα 40. Συνεπαγωγική Αλυσίδα 1

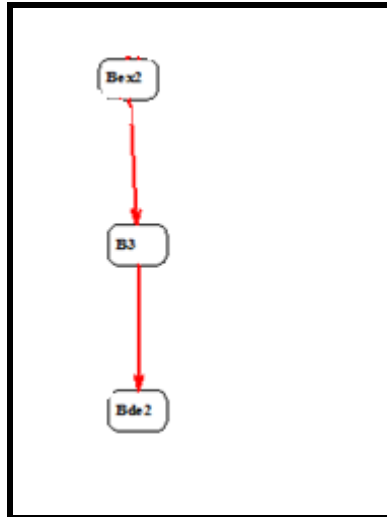
- Την πιο συνεπή συμπεριφορά ως προς τις συνεπαγωγές την εμφανίζει το έργο B5, αφού και οι πέντε μεταβλητές του έργου συνδέονται με συνεπαγωγές.



Εικόνα 41. Συνεπαγωγική Αλυσίδα 2

Συμπεραίνουμε ότι ένας μαθητής που μπορεί να επιλύσει και να εξηγήσει το ερώτημα B5b, μπορεί να εξηγήσει το έργο B2 και να αποδείξει το έργο B5a, όλα τα παραπάνω συνεπάγονται σχεδίαση του σχήματος του έργου. Παρατηρούμε ότι η σχεδίαση του σχήματος εμφανίζεται στη βάση της αλυσίδας. Είναι δύσκολο να το ερμηνεύσουμε αυτό το γεγονός γιατί κάτι τέτοιο θα το αναμέναμε στην κορυφή της αλυσίδας, αφού αποτελεί προϋπόθεση για την επίλυση του έργου. Συνήθως η κατασκευή του σχήματος συνεπάγεται τη λύση ενός έργου.

- Μια ακόμα συνεπαγωγική αλυσίδα που συναντάμε στο διάγραμμα είναι η αλυσίδα της Εικόνας 42.



Εικόνα 42. Συνεπαγωγική Αλυσίδα 3

Η εξήγηση στο έργο B2 επηρεάζει την επίλυση του έργου B3. Συνεπώς ισχύει ότι και στο διάγραμμα ομοιότητας, δηλ.ότι για την επίλυση του έργου B3 οι μαθητές χρησιμοποίησαν την λεκτική σύλληψη και όχι την λειτουργική, όπως αναμενόταν.

- Η τελευταία ομάδα αποτελείται από την επίλυση του έργου B5 που συνδέεται με την επίλυση του έργου B1, αφού και στα δύο εμπλέκονται έντονα η λεκτική σύλληψη.



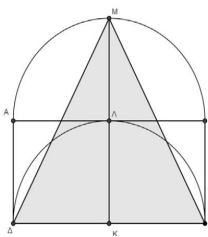
Εικόνα 43. Συνεπαγωγική Αλυσίδα 4

Ανάλυση ερωτηματολογίου Γ Μέρους

Οι επιδόσεις των μαθητών στα δυο έργα του Γ Μέρους:

Έργο C1

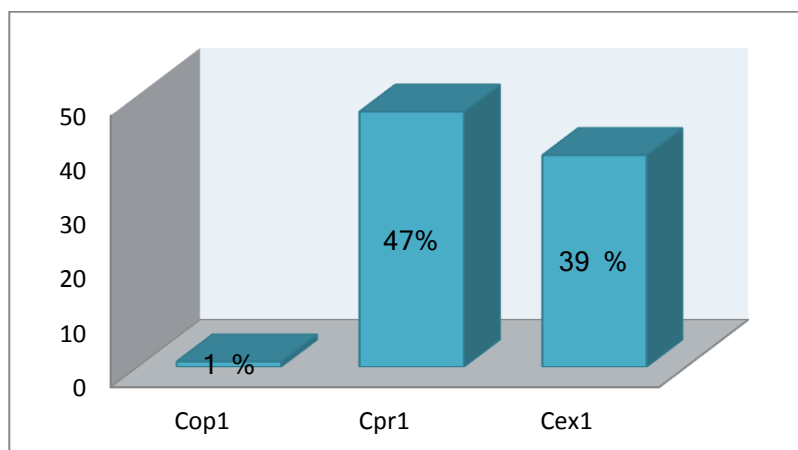
Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $B\Gamma=5\text{ cm}$ και τα τόξα AMB και $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ημικύκλια με διαμέτρους AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Τα σημεία M και Λ είναι τα μέσα των ημικυκλίων AMB και $\Delta\Lambda\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta M\Gamma$.



Να φαίνονται όλες οι πράξεις.

Εικόνα 44. Έργο C1

Το έργο C1, ερευνούσε κατά πόσο η λειτουργική σύλληψη του σχήματος θα οδηγούσε σε γεωμετρικό συλλογισμό. Από το ποσοστό 1% διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να κάνουν μερεολογική τροποποίηση του σχήματος έτσι ώστε να πουν ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου. Το 47% των μαθητών έκανε χρήση θεωρημάτων και πράξεις για να βρει το αποτέλεσμα (Πίνακας 18). Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ το έργο είναι το ίδιο με το έργο B4 αλλά με διαφορετική διατύπωση, έχει χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας.



Πίνακας 18. Ποσοστά επιτυχίας Cop1-Cpr1-Cex1

Στο έργο C2, παρατηρούμε ότι μεγάλο ποσοστό (84%) έκανε το σχήμα, όμως η κατασκευή του σχήματος από μόνη της δεν ήταν ικανή για την απόδειξη των τριών ερωτημάτων. Οι μαθητές μένουν στην εικονική εξεικόνιση, βλέπουν το σχήμα ως εικόνα. Ακολουθεί το έργο C2 (Εικόνα 45) και το αντίστοιχο ραβδόγραμμα (Πίνακας 19).

Έργο C2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γχ $\perp$ ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ= ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ

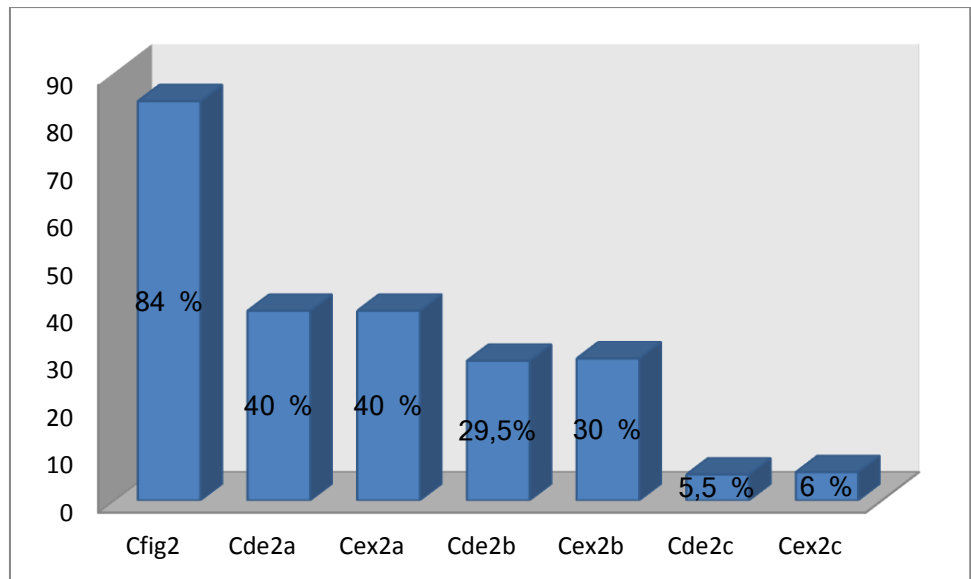
β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

γ) $\angle \Delta \hat{A} \Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

Εικόνα 45. Έργο C2

Το ερώτημα C2a είχε καλύτερη επίδοση (40%), οι μαθητές σε αυτό το ερώτημα έπρεπε να κάνουν χρήση του ορισμού των παράλληλων ευθειών. Ακολούθησε το C2b με ποσοστό (30%), το οποίο χρειαζόταν ένα συνδυασμό τόσο των υποθέσεων όσο και του θεωρήματος: αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

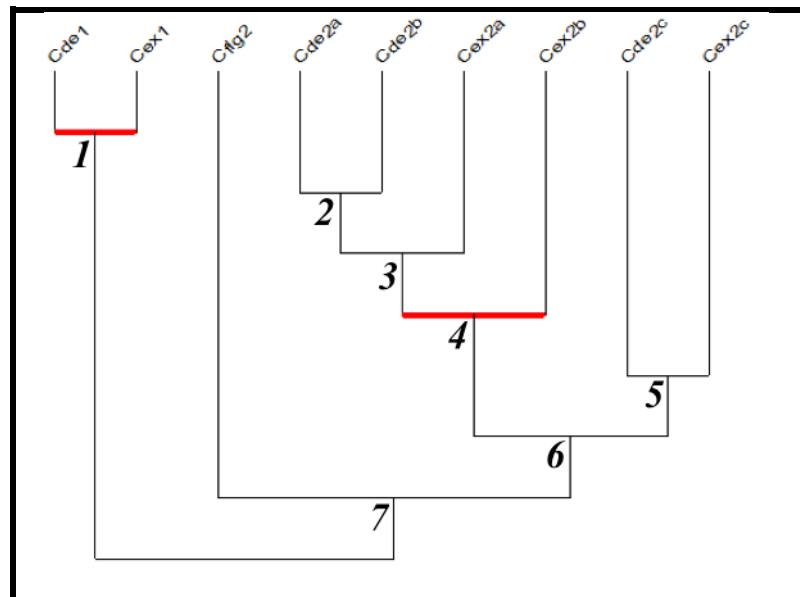
Ενώ το ερώτημα C2c είχε πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας (5%) καθώς η επιτυχία του βασιζόταν στο σωστό συνδυασμό των ορισμών, των θεωρημάτων και των προηγούμενων ερωτημάτων. Μια ακόμη παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι όσοι μαθητές ήταν σε θέση να εξηγήσουν το έργο ήταν αυτοί που κατάφεραν να το επιλύσουν. Άρα ο μέσος όρος επιτυχίας των μαθητών στα ερωτήματα C2a και C2b είναι 35%, δηλ. 35% των μαθητών βρίσκονται στο επίπεδο Γεωμετρία II από την άλλη ένα ποσοστό 5% έχει κατακτήσει το επίπεδο Γεωμετρία III.



Πίνακας 19. Ποσοστά επιτυχίας C2

Σχέσεις Ομοιότητας Μεταξύ των Έργων Γεωμετρικού Συλλογισμού (Απόδειξη) στο Γ Μέρος

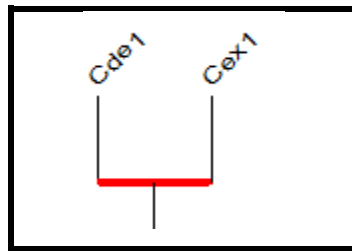
Η Εικόνα 46 παρουσιάζει τις σχέσεις ομοιότητας στη συμπεριφορά των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους, για το συνολικό δείγμα της έρευνας.



Εικόνα 46. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους

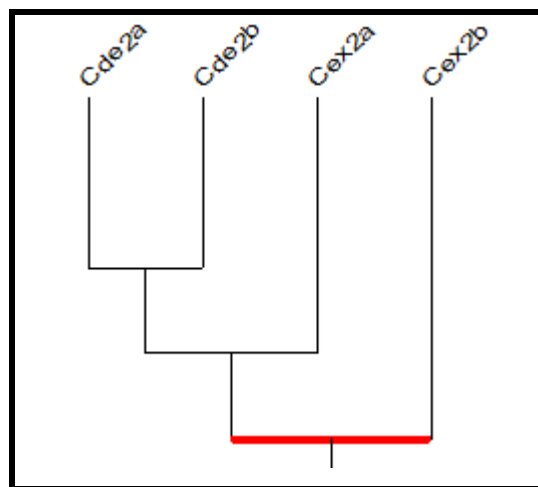
Σε όλα τα έργα, η επίλυση τους συνδέεται με την εξήγησή τους. Η παροχή εξήγησης για τη λύση των μαθητών συνδέεται σημαντικά με την επίλυση του έργου. Δημιουργούνται τρεις ομάδες ομοιότητας:

- Στην πρώτη ομάδα εμφανίζεται σημαντικός δεσμός μεταξύ επίλυσης και επεξήγησης στο έργο C1.



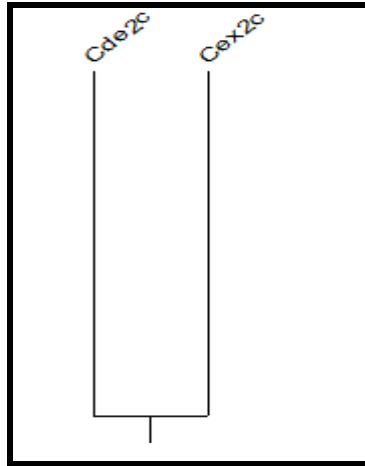
Εικόνα 47. Κλάση ομοιότητας C1

- Στη δεύτερη ομάδα σχηματίζεται σημαντικός δεσμός ομοιότητας μεταξύ της επίλυσης και της επεξήγησης στα δύο πρώτα ερωτήματα του έργου C2.



Εικόνα 48. Κλάση ομοιότητας C2

- Από την άλλη η επίλυση και η επεξήγηση του ερωτήματος C2c σχηματίζει μια τρίτη ομάδα ομοιότητας, η οποία όμως συνδέεται και με την δεύτερη ομάδα.



Εικόνα 49. Κλάση ομοιότητας C3

Μαζί με τη δεύτερη και την τρίτη ομάδα δεσμό εμφανίζει και η μεταβλητή που αφορά στη σχεδίαση του σχήματος στο έργο C2. Φαίνεται λοιπόν πως η σχεδίαση του σχήματος ήταν καθοριστική για τη λύση του συγκεκριμένου έργου.

Τα δύο έργα (C1,C2) διαχωρίζονται μεν σε ξεχωριστές ομάδες, πιθανόν λόγω της παρουσίας ή μη του σχήματος, αλλά συνδέονται ταυτόχρονα με σχέση ομοιότητας, η οποία φαίνεται να δημιουργείται από τον τύπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος. Για την επίλυση του έργου C2 καθοριστική ήταν η ενεργοποίηση της λεκτικής σύλληψης, αφού απαιτούνταν η γνώση τυπικών ορισμών και ιδιοτήτων. Για την επίλυση του έργου C1 αναμενόταν η ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης και η αναδιοργάνωση του σχήματος. Η ομοιότητα μεταξύ των δύο έργων δείχνει πως και για το έργο C1 ενεργοποιήθηκε η λεκτική, παρά η λειτουργική σύλληψη.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές προσεγγίζουν τα σχήματα κυρίως μέσω λεκτικής σύλληψης και όχι λειτουργικής. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στην παρέμβαση του διδακτικού συμβολαίου: ο τρόπος αντίδρασης των μαθητών στα έργα αυτά συνδέεται άμεσα με τις διδακτικές τους εμπειρίες, αφού καλούνται να χρησιμοποιήσουν ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα για να αποδείξουν κάτι.

Επιπλέον το σχήμα και στις δυο περιπτώσεις λειτούργησε μόνο σαν εικόνα. Τι κάνουμε λάθος στη διδασκαλία μας;

Από το διάγραμμα ομοιότητας (Εικόνα 46) βλέπουμε ότι έχουν δημιουργηθεί 8 κόμβοι ομοιότητας.

Απολυτή ομοιότητα με συντελεστή 1 έχουν:

- Κόμβος 1 : (Cde1 Cex1)
- Κόμβος 2 : (Cde2a Cde2b)
- Κόμβος 3 : ((Cde2a Cde2b) Cex2a)
- Κόμβος 4 : (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)
- Κόμβος 5 : (Cde2c Cex2c)

Με μικρότερους συντελεστές έχουμε:

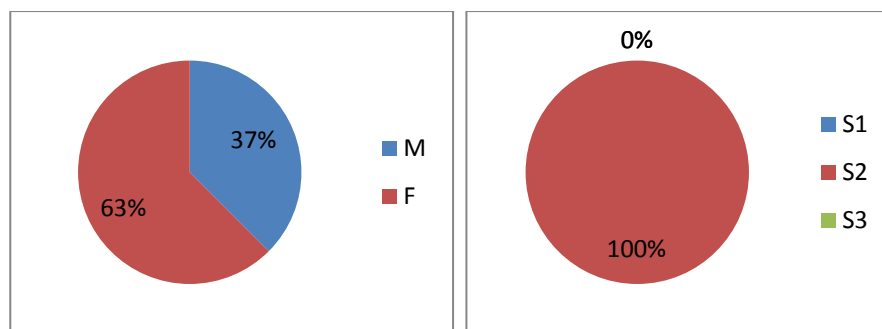
- Κόμβος 6 : (((((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b) (Cde2c Cex2c)) με συντελεστή : 0.999992
- Κόμβος 7 : (Cfig2 (((((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b) (Cde2c Cex2c))) με συντελεστή : 0.999935
- Κόμβος 8 : ((Cde1 Cex1) (Cfig2 (((((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b) (Cde2c Cex2c)))) με συντελεστή : 0.994387

Οι πιο σημαντικοί κόμβοι είναι 1,2, 3 και 4. Είναι η επίλυση των έργων μαζί με την εξήγησή τους. Στον πίνακα 20 φαίνεται για κάθε ομάδα ομοιότητας ποια από τις συμπληρωματικές μεταβλητές συμβάλλει περισσότερο.

Ομάδες ομοιότητας	Male(M)	Female(F)	S1	S2	S3
Κόμβος 1	0	1`	0	1	0
Κόμβος 2	0	1	0	1	0
Κόμβος 3	0	1	0	1	0
Κόμβος 4	0	1	0	1	0
Κόμβος 5	1	0	0	1	0
Κόμβος 6	1	0	0	1	0
Κόμβος 7	1	0	0	1	0
Κόμβος 8	0	1	0	1	0

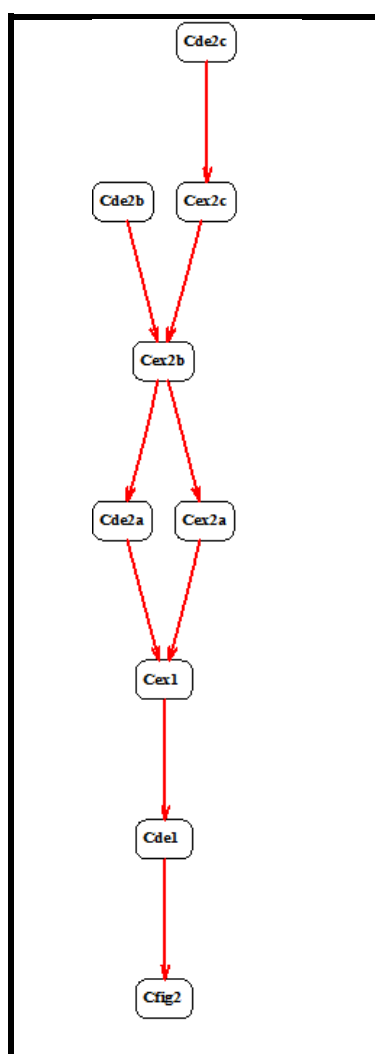
Πίνακας 20. Συμπληρωματικές μεταβλητές C Μέρους

Σε όλους τους κόμβους το σχολείο S2 έχει καλύτερες επιδόσεις. Επίσης τα κορίτσια δείχνουν καλύτερα στους περισσότερους κόμβους (Πίνακας 21).



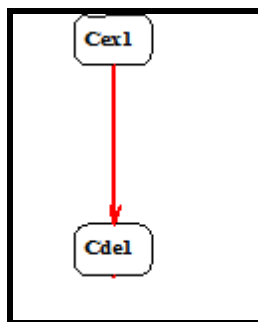
Πίνακας 21. Ποσοστά επιτυχίας Συμπληρωματικών μεταβλητών C Μέρους

Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους



Εικόνα 50. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους

- Στο πάνω μέρος της συνεπαγωγικής αλυσίδας (Εικόνα 50) εμφανίζονται συνεπαγωγές μεταξύ των μεταβλητών του έργου C2. Η παραγωγή της απόδειξης στα ερωτήματα του έργου αυτού επηρεάζει την επεξήγηση της.
- Στο κάτω μέρος της αλυσίδας βρίσκουμε συνεπαγωγή μεταξύ της επεξήγησης και της απάντησης στο έργο C1, με την απάντηση να δυσκολεύει λιγότερο τους μαθητές, σε σχέση με την επεξήγηση.

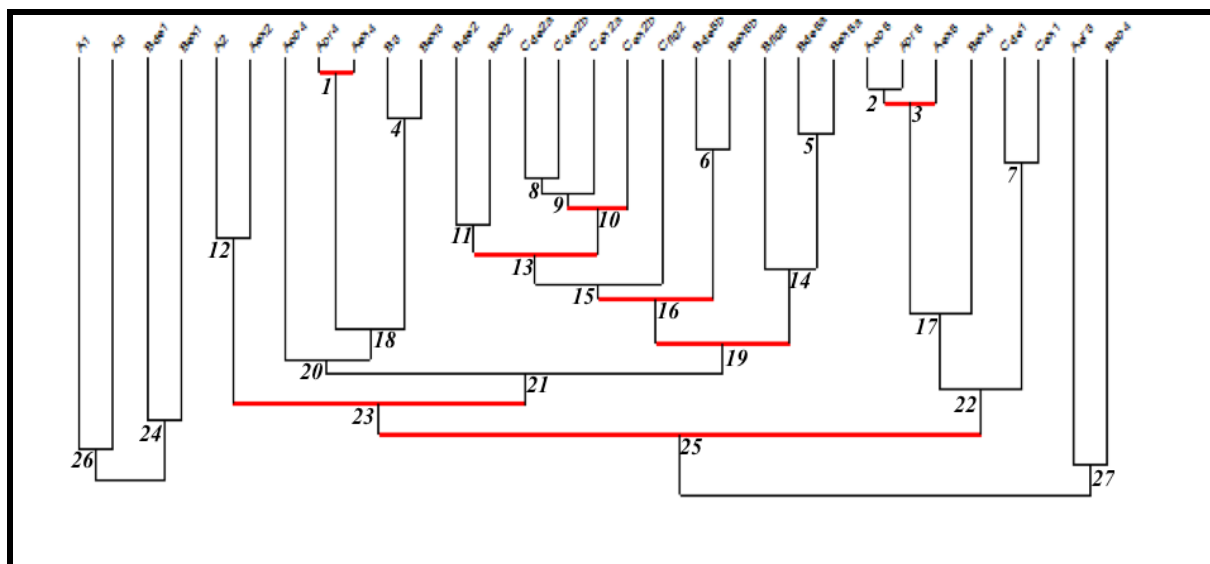


Εικόνα 51. Συνεπαγωγικό διάγραμμα Cex1-Cde1

- Το έργο C2 εμφανίζεται ως πιο απαιτητικό για τους μαθητές, παρά το έργο C1, πιθανόν λόγω της ανάγκης για κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος.
- Η σχεδίαση του σχήματος εμφανίζεται στη βάση της αλυσίδας, πώς το ερμηνεύουμε αυτό; Θα την ανέμενα στην κορυφή της αλυσίδας, αφού αποτελεί προϋπόθεση για την επίλυση του έργου.

Ανάλυση ερωτηματολογίου Α - Β – Γ Μέρους

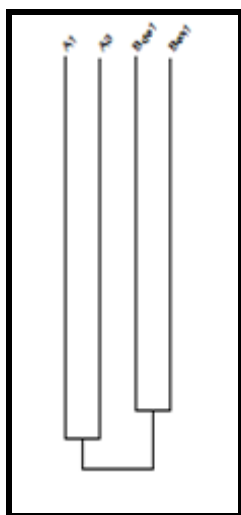
Διάγραμμα ομοιότητας (αφαιρώντας τις μεταβλητές Cop1, Cde2c, Cex2c)



Εικόνα 52. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α-Β-Γ Μέρους

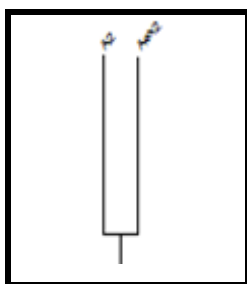
Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα (Εικόνα 52)μπορούμε να διακρίνουμε έξι κλάσεις ομοιότητας.

1. Στην πρώτη κλάση (Εικόνα 53) βρίσκουμε την επίλυση των έργων Α1 και Α3 που συνδέεται με την επίλυση και εξήγηση του έργου Β1. Η ομάδα αυτή δε συνδέεται με τις υπόλοιπες ομάδες. Τα έργα Α1 και Β1 σχετίζονται κυρίως με αναγνώριση γωνιών, συνεπώς ο κύριος τύπος σύλληψης που φαίνεται να παρεμβαίνει είναι η αντιληπτική και σε πολύ μικρό βαθμό η λεκτική για το έργο Β1. Στο έργο Α3 παρεμβαίνει επίσης η αντιληπτική σύλληψη αλλά και άλλες συνιστώσες που συνδέονται με χωρικό συλλογισμό. Συνεπώς τα έργα αυτά διαχωρίζονται από τα υπόλοιπα, αφού απαιτούν άλλου είδους γνωστικές λειτουργίες σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα που απαιτούν συνδυασμό λεκτικής και λειτουργικής σύλληψης για να λυθούν. Άρα τα έργα αυτά αποτελούν μια αντιληπτική ομάδα.



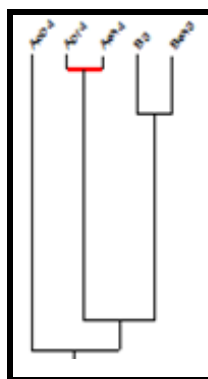
Εικόνα 53. Κλάση ομοιότητας 1

2. Στην δεύτερη κλάση (Εικόνα 54) υπάρχει η επίλυση και η εξήγηση του έργου A2, το οποίο απαιτεί λεκτική σύλληψη για να λυθεί. Άρα έχουμε μια λεκτική ομάδα.



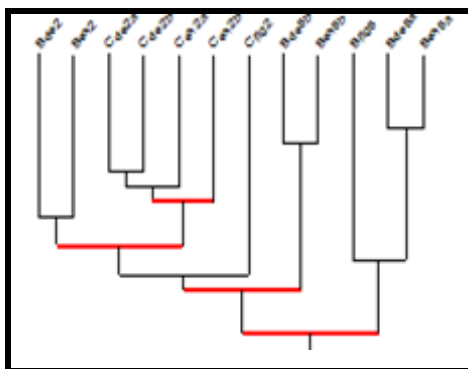
Εικόνα 54. Κλάση ομοιότητας 2

3. Στην τρίτη κλάση (Εικόνα 55) έχουμε το έργο A4 που συνδέεται με το έργο B3. Έχουμε δύο έργα τα οποία απαιτούν λειτουργική σύλληψη και αναδιοργάνωση του δοσμένου σχήματος για να λυθούν. Το κοινό χαρακτηριστικό των δυο αυτών έργων είναι ότι και τα δυο αφορούν την έννοια του εμβαδού. Η έννοια αυτή εμφανίζεται στο B3 με διάφορα μέτρα πλευρών όμως είναι φανερός και ο μερεολογικός χαρακτήρας του έργου. Αντίθετα το έργο A4 ευνοεί και την μερεολογική λειτουργία στο σχήμα (α) και την λειτουργική λειτουργία στο σχήμα (β). Αποτελούν μια λειτουργική ομάδα.



Εικόνα 55. Κλάση ομοιότητας 3

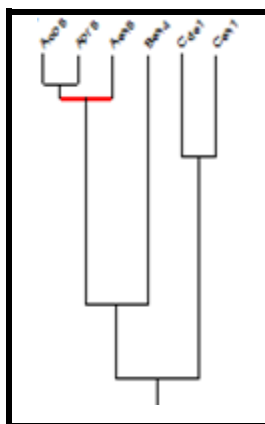
4. Το έργο B2 (επίλυση και εξήγηση) συνδέεται σημαντικά με όλες τις μεταβλητές του έργου C2, που ακολούθως συνδέονται επίσης σημαντικά με όλες τις μεταβλητές του έργου B5. Αυτή η μεγάλη ομάδα ομοιότητας (Εικόνα 56) περιλαμβάνει ουσιαστικά τρία έργα που απαιτούν αυξημένη λεκτική σύλληψη. Επίσης οι μαθητές αντιμετωπίζουν με συνέπεια τα έργα B5 και C2, όπου δίνονται μόνο λεκτικά και η επίλυση τους στηρίζεται στην κατασκευή του σχήματος, η οποία προκύπτει όντως να επηρεάζει την επίλυση τους. Άρα η τετάρτη κλάση αποτελεί μια **λεκτική ομάδα**.



Εικόνα 56. Κλάση ομοιότητας 4

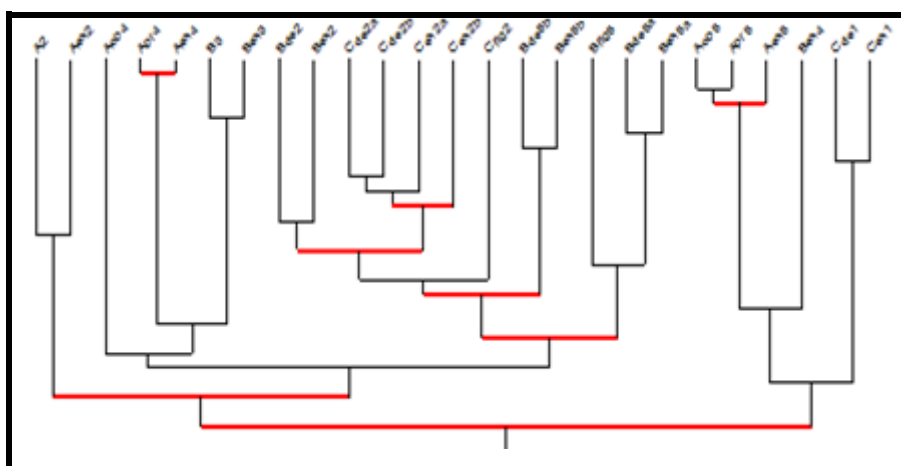
5. Η επίλυση του έργου A5 (απάντηση, διαδικασία και εξήγηση) συνδέεται με το έργο C1 (επίλυση και εξήγηση) και την εξήγηση στο έργο B4. Και τα τρία αυτά έργα απαιτούσαν λειτουργική σύλληψη για να λυθούν. Ειδικότερα τα έργα B4 και C1 ήταν αντίστοιχα, με ελαφρώς διαφοροποιημένο το δοσμένο σχήμα. Συνεπώς οι μαθητές αντέδρασαν με όμοιο τρόπο μεταξύ επίλυσης και εξήγησης στο έργο

C1 και την εξήγηση στο B4. Άρα η πέμπτη κλάση (Εικόνα 57) είναι μια λειτουργική ομάδα.



Εικόνα 57. Κλάση ομοιότητας 5

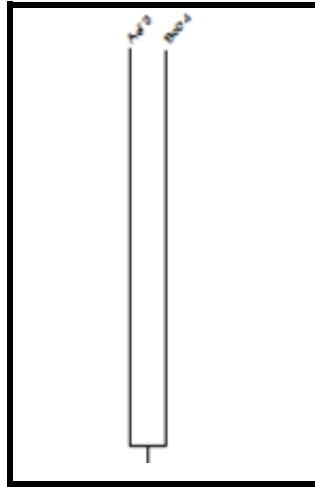
- Οι ομάδες 2, 3, 4, και 5 συνδέονται ισχυρά μεταξύ τους. Συνδέονται οι ομάδες (Εικόνα 58) με τα έργα λεκτικής και λειτουργικής σύλληψης. Μια πιθανή ερμηνεία (που συνδέεται με τα πιο πάνω αποτελέσματα των ξεχωριστών αναλύσεων) είναι ότι στα έργα λειτουργικής σύλληψης παρεμβαίνει έντονα και η λεκτική σύλληψη.



Εικόνα 58. Κλάση ομοιότητας 2-3-4-5

6. Στην τελευταία κλάση (Εικόνα 59) συνδέεται το λάθος στην επίλυση του έργου A3 με την επίλυση του έργου B4. Η ομάδα αυτή αν και φαίνεται στο διάγραμμα να συνδέεται με τις προηγούμενες ομάδες,

εντούτοις η ομοιότητα είναι ελάχιστη (0.07), συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ως μια εντελώς διακριτή ομάδα.



Εικόνα 59. Κλάση ομοιότητας 6

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα έργα στα οποία παρεμβαίνει η αντιληπτική σύλληψη είναι ευδιακρίτως διαχωρισμένα από τα υπόλοιπα έργα, στα οποία παρεμβαίνει η λειτουργική και η λεκτική σύλληψη. Η λεκτική και η λειτουργική σύλληψη συνδέονται σημαντικά:

- Από τη μια διαχωρίζονται σε ομάδες, άρα αποτελούν ξεχωριστές γνωστικές λειτουργίες.
- Από την άλλη ενώνονται σε μια ευρύτερη ομάδα, που δείχνει την αλληλεπίδραση των δύο τύπων σύλληψης για την επίλυση γεωμετρικών έργων.

Από το διάγραμμα ομοιότητας (Εικόνα 52) βλέπουμε ότι έχουν δημιουργηθεί 27 κόμβοι ομοιότητας.

Απόλυτη ομοιότητα με συντελεστή 1 έχουν:

- Κόμβος 1 : (Apr4 Aex4)
- Κόμβος 2 : (Aop5 Apr5)
- Κόμβος 3 : ((Aop5 Apr5) Aex5)
- Κόμβος 4: (B3 Bex3)
- Κόμβος 5: (Bde5a Bex5a)
- Κόμβος 6: (Bde5b Bex5b)
- Κόμβος 7: (Cde1 Cex1)

- Κόμβος 8: (Cde2a Cde2b)
- Κόμβος 9: ((Cde2a Cde2b) Cex2a)
- Κόμβος 10: (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)

Με μικρότερους συντελεστές έχουμε:

- Κόμβος 11: : (Bde2 Bex2) με συντελεστή : 0.999995
- Κόμβος 12: (A2 Aex2) με συντελεστή: 0.999994
- Κόμβος 13: : ((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) με συντελεστή: 0.999986
- Κόμβος 14: (Bfig5 (Bde5a Bex5a)) με συντελεστή : 0.999953
- Κόμβος 15: (((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) με συντελεστή: 0.999935
- Κόμβος 16: (((((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) (Bde5b Bex5b)) με συντελεστή : 0.999821
- Κόμβος 17: (((Aop5 Apr5) Aex5) Bex4) με συντελεστή: 0.999436
- Κόμβος 18: ((Apr4 Aex4) (B3 Bex3)) με συντελεστή : 0.999359
- Κόμβος 19: : (((((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) (Bde5b Bex5b)) (Bfig5 (Bde5a Bex5a))) με συντελεστή : 0.99836
- Κόμβος 20: (Aop4 ((Apr4 Aex4) (B3 Bex3))) με συντελεστή : 0.997647
- Κόμβος 21: ((Aop4 ((Apr4 Aex4) (B3 Bex3))) (((((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) (Bde5b Bex5b)) (Bfig5 (Bde5a Bex5a)))) με συντελεστή: 0.995593
- Κόμβος 22: (((Aop5 Apr5) Aex5) Bex4) (Cde1 Cex1)) με συντελεστή : 0.994883
- Κόμβος 23: ((A2 Aex2) ((Aop4 ((Apr4 Aex4) (B3 Bex3))) (((((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) (Bde5b Bex5b)) (Bfig5 (Bde5a Bex5a)))) με συντελεστή : 0.992226
- Κόμβος 24: (Bde1 Bex1) με συντελεστή : 0.988334
- Κόμβος 25: (((A2 Aex2) ((Aop4 ((Apr4 Aex4) (B3 Bex3))) (((((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) (Bde5b Bex5b)) (Bfig5 (Bde5a Bex5a)))) (((Aop5 Apr5) Aex5) Bex4) (Cde1 Cex1))) με συντελεστή: 0.969187

- Κόμβος 26: (A1 A3) με συντελεστή : 0.667836
- Κόμβος 27: (Aer3 Bop4) με συντελεστή : 0.440421
- Κόμβος 28: ((A1 A3) (Bde1 Bex1)) με συντελεστή : 0.150792
- Κόμβος 29: (((A2 Aex2) ((Aop4 ((Apr4 Aex4) (B3 Bex3))) (((Bde2 Bex2) (((Cde2a Cde2b) Cex2a) Cex2b)) Cfig2) (Bde5b Bex5b)) (Bfig5 (Bde5a Bex5a)))) (((Aop5 Apr5) Aex5) Bex4) (Cde1 Cex1))) (Aer3 Bop4)) με συντελεστή : 0.0696583

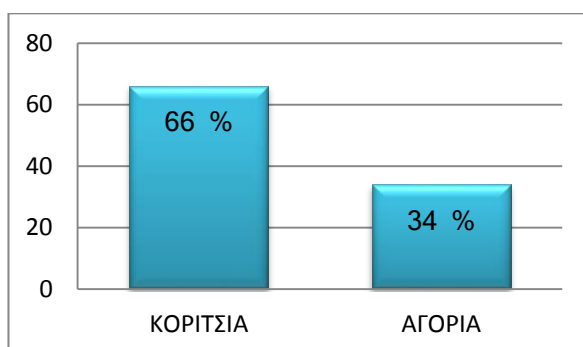
Ο πιο σημαντικός κόμβος είναι ο 25, εξίσου σημαντικοί είναι 1,3,10,13,16,19,23 . Είναι κυρίως η επίλυση των έργων μαζί με την εξήγηση τους. Στον πίνακα 22 φαίνεται για κάθε ομάδα ομοιότητας ποια από τις συμπληρωματικές μεταβλητές συμβάλλει περισσότερο.

Ομάδες ομοιότητας	Male(M)	Female(F)	S1	S2	S3
Κόμβος 1	1	0	1	0	0
Κόμβος 2	1	0	1	0	0
Κόμβος 3	1	0	1	0	0
Κόμβος 4	1	0	1	0	0
Κόμβος 5	0	1	0	1	0
Κόμβος 6	0	1	0	1	0
Κόμβος 7	0	1	0	1	0
Κόμβος 8	0	1	0	1	0
Κόμβος 9	0	1	0	1	0
Κόμβος 10	0	1	0	1	0
Κόμβος 11	1	0	0	1	0
Κόμβος 12	1	0	1	0	0
Κόμβος 13	0	1	0	1	0
Κόμβος 14	0	1	0	1	0
Κόμβος 15	0	1	0	1	0
Κόμβος 16	0	1	0	1	0
Κόμβος 17	1	0	1	0	0
Κόμβος 18	1	0	0	1	0
Κόμβος 19	1	0	1	0	0

Κόμβος 20	0	1	0	1	0
Κόμβος 21	1	0	1	0	0
Κόμβος 22	0	1	0	1	0
Κόμβος 23	0	1	0	1	0
Κόμβος 24	0	1	0	1	0
Κόμβος 25	0	1	0	1	0
Κόμβος 26	0	1	0	0	1
Κόμβος 27	0	1	0	1	0
Κόμβος 28	0	1	0	0	1
Κόμβος 29	0	1	0	1	0

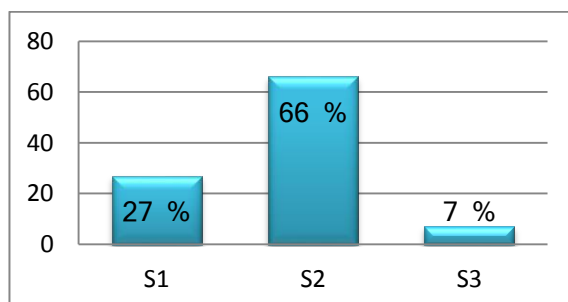
Πίνακας 22. Συμπληρωματικών μεταβλητών Α-Β-Γ Μέρους

Τα κορίτσια είχαν καλύτερα ποσοστά επιτυχίας στους παραπάνω κόμβους (66%) έναντι 34% των αγοριών (Πίνακας 23).



Πίνακας 23. Ποσοστά επιτυχίας Μ-Ε

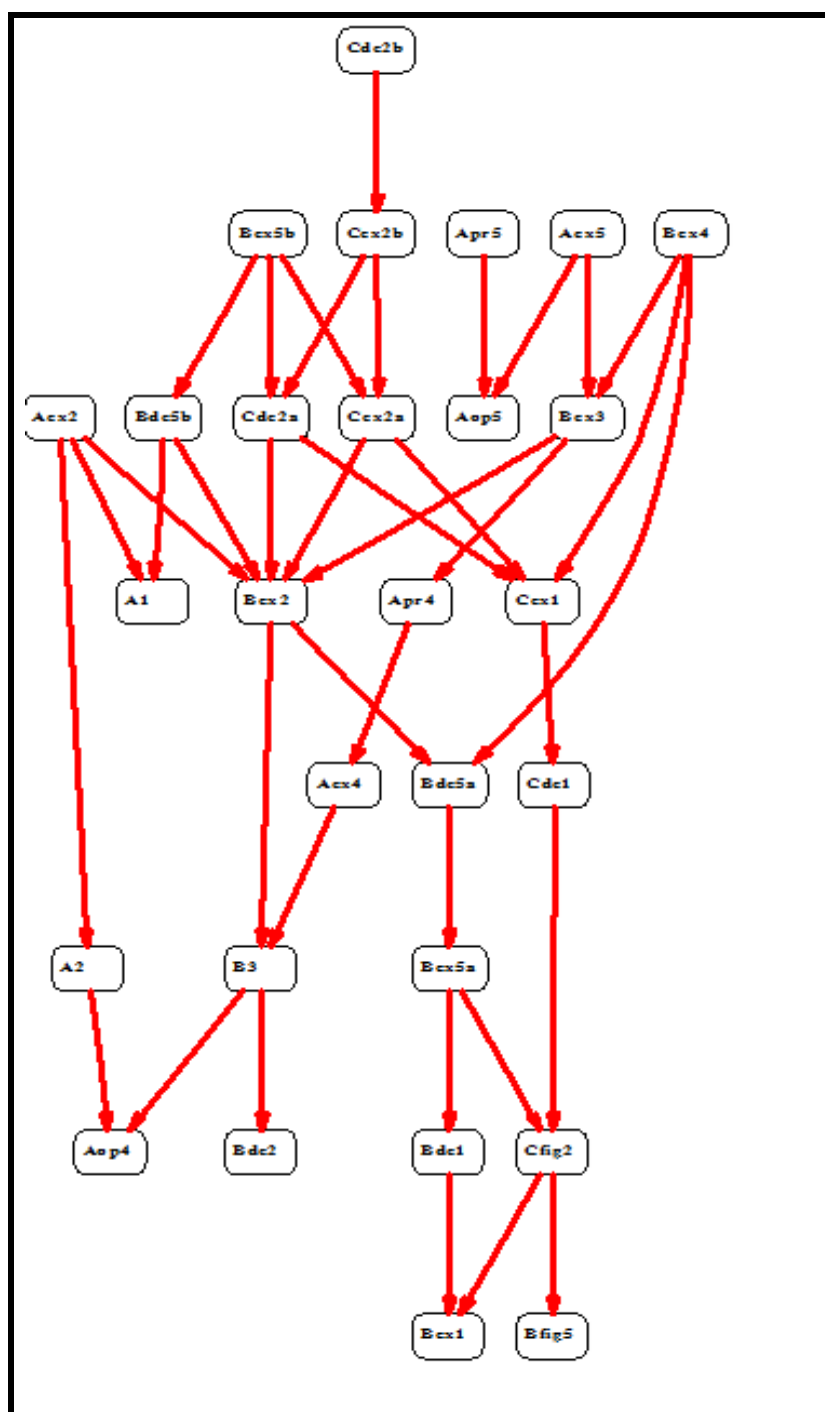
Ακολουθεί ο Πίνακας 24 που είναι επιτυχίας ανά σχολείο:



Πίνακας 24. Ποσοστά επιτυχίας S1-S2-S3

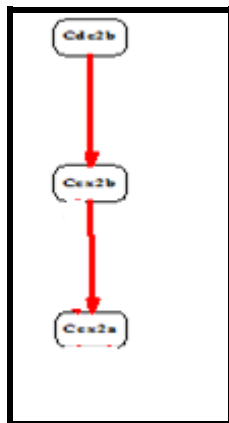
Το σχολείο S2 έχει το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας ενώ το σχολείο S3 το μικρότερο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το συνεπαγωγικό διάγραμμα και των τριών Μερών.



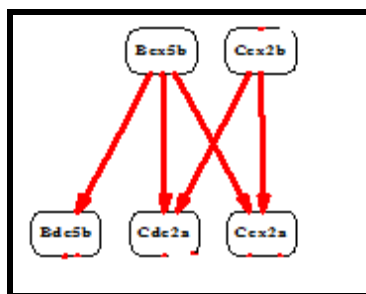
Εικόνα 60. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α-Β-Γ Μέρους

- Παρατηρούμε ότι στην κορυφή της συνεπαγωγικής αλυσίδας βρίσκουμε το έργο C2, του οποίου η επίλυση προκύπτει ως η πιο δύσκολη, σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα έργα. Η επίλυση του C2b συνεπάγεται την εξήγηση του και την εξήγηση του C2a.



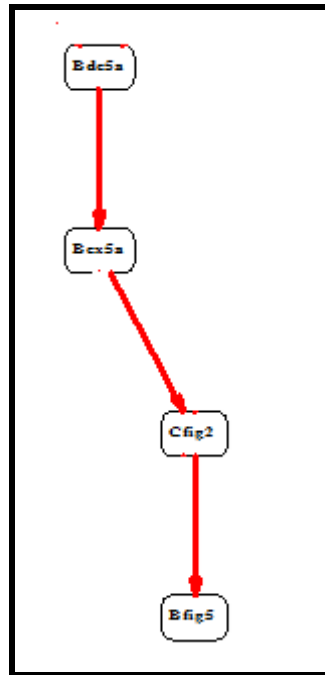
Εικόνα 61. Συνεπαγωγικό διάγραμμα C2a-C2b

- Οι μεταβλητές του έργου C2 παρουσιάζουν συνεπαγωγές με τις μεταβλητές του έργου B5. Φαίνεται και πάλι λοιπόν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν με συνέπεια τα έργα αυτά που δίνονται μόνο λεκτικά και η επίλυση τους στηρίζεται στην κατασκευή του σχήματος, η οποία προκύπτει όντως να επηρεάζει την επίλυση τους.



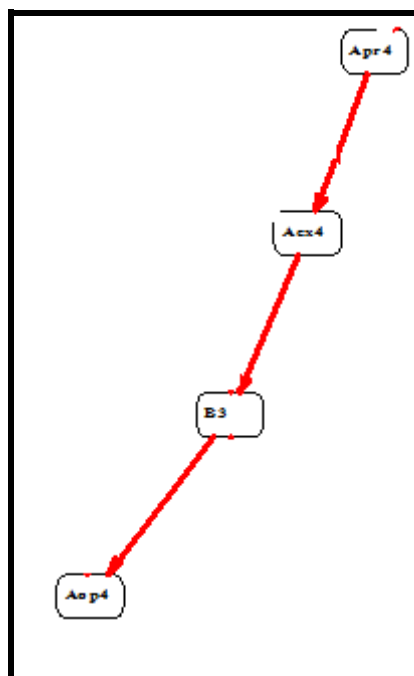
Εικόνα 62. Συνεπαγωγικό διάγραμμα C2-B5

- Επίσης προκύπτει συνεπαγωγή μεταξύ των μεταβλητών που αντιστοιχούν στη σχεδίαση του σχήματος στα δύο έργα, γεγονός που δείχνει τη σταθερότητα στην αντίδραση των μαθητών ως προς τη σχεδίαση σχημάτων σε λεκτικά προβλήματα γεωμετρίας. Η κατασκευή του σχήματος στο έργο C2 συνεπάγεται την κατασκευή του σχήματος στο έργο B5.



Εικόνα 63. Συνεπαγωγικό διάγραμμα Bfig5-Cfig2-B5a

- Επίσης το έργο A4 σχηματίζει συνεπαγωγές με το έργο B3, αφού και τα δύο έργα χρειάζονται λειτουργική σύλληψη και αναδιοργάνωση του δοσμένου σχήματος για να λυθούν.



Εικόνα 64. Συνεπαγωγικό διάγραμμα A4-B3

Το ίδιο ισχύει και για τα έργα C1 και B4. Τα έργα αυτά ήταν σχεδόν ίδια, έτσι όσοι μαθητές επίλυσαν το έργο B4 έλυσαν και το C1.



Εικόνα 65. Συνεπαγωγικό διάγραμμα C1-B4

Κεφάλαιο 5^ο: Συζήτηση

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν σημαντικά στοιχεία για τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος των μαθητών. Συγκεκριμένα, κατασκευάστηκε και επαληθεύτηκε ένα δομικό μοντέλο, με το οποίο προσδιορίστηκε η σημασία της αντιληπτικής, της λειτουργικής, της ακολουθιακής και της λεκτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος. Αλληλεπιδράσεις εντοπίστηκαν μεταξύ των διαφόρων τύπων σύλληψης. Ισχυρές σχέσεις βρέθηκαν μεταξύ της λειτουργικής και της λεκτικής σύλληψης, καταδεικνύοντας τη σημασία της οπτικοποίησης στο γεωμετρικό συλλογισμό. Σημαντικές, επίσης, ήταν οι σχέσεις που προέκυψαν μεταξύ της λεκτικής και της ακολουθιακής σύλληψης, τονίζοντας τη σημασία της γνώσης των μαθηματικών ιδιοτήτων για τις γεωμετρικές κατασκευές και τις διαδικασίες συλλογισμού για τις γεωμετρικές αποδείξεις.

Επιπλέον, ο ρόλος της αντιληπτικής σύλληψης προέκυψε καθοριστικός για την ενεργοποίηση της λειτουργικής και της λεκτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος. Οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών προκύπτουν στα έργα λειτουργικής και ακολουθιακής σύλληψης (στα έργα που δεν υπήρχε το σχήμα), ενώ εμφανίζονται ικανότεροι στην επίλυση έργων αντιληπτικής.

Φαίνεται λοιπόν ότι για τους μαθητές τα έργα λειτουργικής σύλληψης δε λειτουργούν ως τέτοια, αφού οι μαθητές δεν κατέφεραν να προσεγγίσουν το σχήμα ως ευρετικό εργαλείο, αλλά το προσέγγισαν αντιληπτικά και ενέπλεξαν τη λεκτική σύλληψη για να το λύσουν. Οι μαθητές ενεργοποιούν κυρίως τη λεκτική, παρά τη λειτουργική σύλληψη.

Καταλήγουμε άρα στο συμπέρασμα ότι η λειτουργική σύλληψη των μαθητών επισκιάζεται από την αντιληπτική και τη λεκτική σύλληψη. Οι μαθητές φαίνεται να διστάζουν να λύσουν τα έργα χρησιμοποιώντας τροποποιήσεις και αναδιαμορφώσεις στο δοσμένο σχήμα και προτιμούν να χρησιμοποιούν τυπικούς ορισμούς και ιδιότητες στις αποδείξεις τους. Από την άλλη πλευρά δεν έχουμε συνηθίσει τους μαθητές μας να σκέπτονται με τέτοιο τρόπο.

Παρατηρούμε ότι στα έργα μερεολογικής φύσεως οι μαθητές συμπεριφέρονται όμοια, βέβαια μπορεί να έχει παίξει ρόλο το γεγονός ότι όλα τα έργα περιελάμβαναν την έννοια του εμβαδού. Μηδαμινό ποσοστό

μαθητών έκανε διάσπαση και ανασύνθεση του σχήματος. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μερεολογική λειτουργία δεν συνείσφερε και πολλά στη γεωμετρική απόδειξη.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο τα έργα κατανόησης γεωμετρικού σχήματος αφού εμφανίζονται να συνδέονται όλα μεταξύ τους με εξαίρεση ένα έργο χωρικής ικανότητας που συνδέεται περιφερικά. Από το διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Α-Β-Γ Μέρους δημιουργούνται οι παρακάτω ομάδες ομοιότητας :

- αντιληπτική ομάδα
- λεκτική ομάδα
- λειτουργική ομάδα

Η αντιληπτική σύλληψη είναι ευδιακρίτως διαχωρισμένη από τα υπόλοιπα έργα, στα οποία παρεμβαίνει η λειτουργική και η λεκτική σύλληψη. Από την άλλη πλευρά οι ομάδες με τα έργα λεκτικής και λειτουργικής σύλληψης συνδέονται ισχυρά μεταξύ τους. Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι στα έργα λειτουργικής σύλληψης παρεμβαίνει έντονα και η λεκτική σύλληψη.

Άρα από τη μια έχουμε δυο ξεχωριστές γνωστικές λειτουργίες από την άλλη όμως αλληλεπιδρούν μεταξύ τους για την επίλυση γεωμετρικών έργων.

Το κάθε είδος κατανόησης είναι ξεχωριστό από τα υπόλοιπα και επιδρά στην κατανόηση με διαφορετικό τρόπο. Όλα όμως τα είδη συνεισφέρουν σημαντικά στην όλη δομή του μοντέλου. Την ίδια ώρα, για να μπορέσει ο μαθητής να αναπτύξει την γεωμετρική του σκέψη θα πρέπει να είναι σε θέση να συνδυάζει αλλά και να αλληλοεπιδρά μεταξύ των ειδών αυτών. Τα είδη κατανόησης δεν ακολουθούν καμία ιεραρχία. Η αντιληπτική κατανόηση είναι εντελώς απαραίτητη σε οποιοδήποτε έργο Γεωμετρίας. Το γνωστικό επίπεδο των μαθητών επηρεάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό την επίδοση του μαθητή, αφού υπάρχουν σημαντικές διαφορές που αφορούν τα αποτελέσματα των μαθητών διαφορετικού γνωστικού επιπέδου. Οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του σχήματος προκύπτουν από διάφορους παράγοντες, και κάθε ένας επηρεάζει ένα ή και περισσότερα είδη κατανόησης. Υπάρχει ανάγκη να επαναπροσδιοριστούν οι διδακτικές πρακτικές έτσι ώστε να υπάρχει περισσότερη επαφή του μαθητή με έργα τα

οποία απαιτούν προσεγγίσεις τροποποίησης του σχήματος. Αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη λειτουργική κατανόηση και να εφαρμόζουν τις τροποποιήσεις εκεί που είναι απαραίτητο. Αυτό θα επιτρέψει στους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τα θεωρήματα τα οποία αποτελούν τη βάση της Γεωμετρίας.

Τίθεται το ερώτημα: γιατί οι μαθητές προσεγγίζουν τα σχήματα κυρίως μέσω λεκτικής σύλληψης και όχι λειτουργικής; Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στην παρέμβαση του διδακτικού συμβολαίου: ο τρόπος αντίδρασης των μαθητών στα έργα αυτά συνδέεται άμεσα με τις διδακτικές τους εμπειρίες, αφού καλούνται να χρησιμοποιήσουν ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα για να αποδείξουν κάτι.

Επιπλέον στα περισσότερα έργα τα σχήματα λειτούργησαν μόνο σαν εικόνα. Τι κάνουμε λάθος στη διδασκαλία μας;

Από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας οι μαθητές μένουν στην προσέγγιση ενός αντικείμενου δια του λόγου. Δεν είναι εξοικειωμένοι με την εξεικόνιση. Αυτό που έχουν ανάγκη είναι να οδηγηθούν στην μη εικονική εξεικόνιση, έτσι ώστε το σχήμα να έχει ευρετική δύναμη που να οδηγεί σε παραγωγική σκέψη και στη συνέχεια σε γεωμετρικό συλλογισμό για την επιτυχία μιας γεωμετρικής απόδειξης. Παρατηρούμε ότι ενώ σε μεγάλο βαθμό οι μαθητές κατασκευάζουν με επιτυχία ένα σχήμα δεν μπορούν να διακρίνουν τις ιδιότητες του σχήματος, το παρατηρούν και βλέπουν μια στατική εικόνα. Άρα ενώ το σχήμα είναι αναγκαία προϋπόθεση για την ολοκλήρωση μιας απόδειξης δεν είναι από μόνο του ικανό.

Στα έργα που είχαν αναφορά σε αποδείξεις δεν παρατηρείται μεγάλη διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας από το γεγονός αν το σχήμα δινόταν ή όχι. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να συνδυάσουν με επιτυχία τη θεωρία με τα διαγράμματα και το ένα να τροφοδοτεί το άλλο, δηλ. ένα λεκτικό πρόβλημα πρέπει να μεταφραστεί σε μαθηματικές σχέσεις να γίνει το διάγραμμα (σχήμα) και στη συνέχεια το σχήμα να ανατροφοδοτήσει με νέες σχέσεις και συνδέσεις ορισμών – θεωρημάτων την απόδειξη για να μπορέσει να ολοκληρωθεί με επιτυχία.

Συμπερασματικά προκύπτει ότι στη σχολική τάξη δεν λειτουργούν τα τρία είδη γνωστικών διαδικασιών της Γεωμετρίας (εξεικόνιση – κατανόηση - συλλογισμός) ούτε θεωρία – διαγράμματα (Fischbein). Επιβεβαιώνονται τα

θεωρητικά πλαίσια του Duval (2004) και του Fischbein. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το συλλογισμό αναλύουν τις υποθέσεις, στη συνέχεια κατασκευάζουν το σχήμα και μετά; Μετά μικρό ποσοστό βλέπει μη εικονικά το σχήμα, όσοι μαθητές το κάνουν αυτό είναι αυτοί που έχουν κατακτήσει το γεωμετρικό συλλογισμό. Από τα γραπτά της έρευνας ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών γράφει τα δεδομένα, τα ζητούμενα, κατασκευάζει το σχήμα και σταματά εκεί. Επιτακτική η ανάγκη να βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο. Πρέπει να αναπτυχτεί η λειτουργική σύλληψη του μαθητή. Από τα αποτελέσματα τα έργα που ήταν λειτουργικής σύλληψης δυσκόλεψαν τους μαθητές. Άρα αν προσεγγίσουμε περισσότερο λειτουργικά τα σχήματα θα επιτύχουμε κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και κατ' επέκταση επιτυχή γεωμετρικό συλλογισμό.

Παρόλο που οι μαθητές χρησιμοποιούν το σχήμα και φαίνονται να ενισχύονται από αυτό, εντούτοις, η αναγνώριση της θετικής επίδρασης που ασκεί κατά την επίλυση των προβλημάτων δεν γίνεται από όλους, αποτέλεσμα που επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα των Elia και Philippou (2004) αναφορικά με τη μη συνειδητοποίηση του βοηθητικού ρόλου των εικόνων από τους μαθητές.

Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος έχει μια ισχυρή επίδραση σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών στην γεωμετρική απόδειξη. Ο γεωμετρικός συλλογισμός επιτυγχάνεται καλύτερα αν το σχήμα μας τροφοδοτεί με νέα δεδομένα και αντίστροφα. Αυτό είναι σύμφωνο με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Hanna & Sidoli, 2007; Giaquinto, 2007), που συμπεραίνουν ότι υπάρχει μια δυνητική συμβολή των οπτικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική απόδειξη. Ευρήματα αποκαλύπτουν επίσης ότι η λειτουργική προσέγγιση είναι εκείνη που συνεισφέρει τα μέγιστα στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος.

Το αξιοσημείωτο της έρευνας μας είναι ότι η σχεδίαση του σχήματος συνδέεται ισχυρά με την επίλυση του έργου και την παροχή επεξήγησης. Συνεπώς αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος της οπτικοποίησης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Έχοντας δεδομένο ότι η Γεωμετρία που διδάσκουμε στο Λύκειο δίνει έμφαση στην Γεωμετρία II (Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία) και βάση των

ποσοστών επιτυχίας που πρόεκυψαν θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου βρίσκονται στη Γεωμετρία II ή Φυσική και Αξιοματική (Natural and axiomatic Geometry), αφού στα περισσότερα έργα είναι σε θέση να χρησιμοποιούν υποθετικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς και νόμους που έχουν προκύψει από ένα σύνολο αξιωμάτων όσο το δυνατό πλησιέστερο προς την αισθητική πραγματικότητα ενώ ένα πολύ μικρό ποσοστό έχει αναπτύξει αφαιρετική σκέψη, άρα θα μπορούσε να βρίσκεται στη Γεωμετρία III (Αυστηρή Αξιοματική Θεωρία).

Ένα επιπλέον συμπέρασμα από την στατιστική ανάλυση που έγινε είναι πως οι μαθητές της Α΄ Λυκείου έχουν κατάκτηση τόσο της γενικότητας της απόδειξης όσο και της κατασκευή της, άρα βρίσκονται στο επίπεδο Επίπεδο II σύμφωνα με τους Susumu Kunimine, Taro Fujita & Keith Jones.

5.1 Διδακτικές προτάσεις

Καθώς, λοιπόν η κατασκευή των αποδείξεων των γεωμετρικών θεωρημάτων κυριαρχεί σε όλο το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης της γεωμετρίας καθίσταται επιτακτική ανάγκη αναζήτησης διδακτικών προσεγγίσεων και αποτελεσματικών μορφών διδασκαλίας που από την μία να τονίζουν την σπουδαιότητα και την αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας και από την άλλη να άρουν, όσο αυτό είναι εφικτό, τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με αυτήν.

Οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης φανερώνουν ότι στόχος της είναι να αποκτήσει ο μαθητής εμπειρίες ανάλογες με έναν μαθηματικό, για να αναπτύξει ενδιαφέρον και κίνητρα διερεύνησης και οικοδόμησης της γνώσης (Εικόνα 66). Τα κίνητρα των μεγάλων μαθηματικών που αφιερώνουν χρόνια για την απόδειξη ενός θεωρήματος, είναι η περιέργεια και η μαγεία της διερεύνησης και της ανακάλυψης. Όπως ο μαθηματικός κατασκευάζει μια τυπική απόδειξη, ώστε να γίνει δεκτή για δημοσίευση, έτσι και ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει την απόδειξη, με στόχο να πεισθεί ο ίδιος και να πείσει τον εκπαιδευτικό για την ισχύ του θεωρήματος (Godino & Recio, 1997). Άρα θα χρησιμοποιήσουμε την Ιστορία των Μαθηματικών ως εργαλείο στην οργάνωση του μαθήματος και στη διδασκαλία στην τάξη.

Η ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΕ ΔΙΔΑΞΙΜΗ

Η μαθηματική γνώση και ο διδακτικός μετασχηματισμός



Εικόνα 66. Διδακτική προσέγγιση

Η εργασία του μαθητή πρέπει να είναι συγκρίσιμη με αυτή την επιστημονική δραστηριότητα. Γνωρίζω τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο μαθαίνω ορισμούς και θεωρήματα, για να αναγνωρίζω την ευκαιρία να τα χρησιμοποιήσω και να τα εφαρμόσω. Μια καλή αναπαραγωγή από το μαθητή μιας επιστημονικής δραστηριότητας θα απαιτούσε να δράσει, να τυποποιήσει, να αποδείξει, να κατασκευάσει μοντέλα, γλώσσες, έννοιες, θεωρίες, που τις ανταλλάζει με τους άλλους, να αναγνωρίσει αυτές που είναι σύμφωνες με την πολιτιστική παράδοση, να δανειστεί αυτές που του είναι χρήσιμες κ.λπ. Για να κάνει δυνατή μια τέτοια δραστηριότητα ο καθηγητής πρέπει, λοιπόν, να φαντάζεται και να προτείνει στους μαθητές του καταστάσεις που μπορούν να τις ζήσουν και στις οποίες οι γνώσεις θα φαίνονται ως η βέλτιστη λύση και αποκαλυπτική για τα προβλήματα που τέθηκαν (Γαγάτσης, 2000).

Η καθοδηγούμενη ανακάλυψη θα βοηθήσει τους μαθητές να διευρύνουν τις γεωμετρικές έννοιες μέσω καλά σχεδιασμένων καθοδηγουμένων δραστηριοτήτων (Mason, 2005). Τέτοιες διδασκαλίες μπορούν να σχεδιαστούν με τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. SketchPad, Geogebra). Το Geometer's SketchPad, επιτρέπει στο μαθητή να μεταβάλλει το σχήμα των γεωμετρικών αντικειμένων, χωρίς να χρειάζεται να κάνει το σχήμα από την αρχή κερδίζοντας έτσι χρόνο να σκεφτεί τις γεωμετρικές ιδιότητες και να ανακαλύψει ιδιότητες που δεν θα ήταν δυνατόν με το μολύβι-χαρτί. Η πρακτική του συρσίματος λειτουργεί ως μεσολαβητής κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα και από το σχήμα στη θεωρία.

Η επανάληψη της έρευνας μετά την διδακτική παρέμβαση θα μας έδινε χρήσιμα συμπεράσματα κατά πόσο βοηθηθήκαν οι μαθητές στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και στη συνέχεια στην απόδειξη .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αργυρόπουλος, Η., Βλαμος, Π., Κατσουλης, Γ., Μαρκατης, Σ., Σιδερης, Π.
Ευκλείδεια Γεωμετρία, ΟΕΔΒ.

Γαγάτσης, Α. (2000). Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη:
Αδελφοί Κυριακίδη.

Γαγάτσης Α., & Σιακαλλή, Μ. (2000). CHIC: Ένα στατιστικό πρόγραμμα
επεξεργασίας δεδομένων σε σχέση με τη διδακτική των Μαθηματικών –
εφαρμογή στις συναρτήσεις. Πρακτικά 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου
Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά Κλειδί Ανάπτυξης (σσ. 602-612).
Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Γαγάτσης ,Α. , Πατρώνης ,Τ. (2003). Χρήση γεωμετρικών μοντέλων στη
διδασκαλία των μαθηματικών. Λευκωσία :Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α. (2007). Προβλήματα μάθησης Μαθηματικών κατά την
μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο .Λευκωσία :Πανεπιστήμιο
Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Δεληγιάννη, Ε., Ηλία, Ι., Μονογυιού, Α., & Παναούρα, Α.
(2009). Πειραματική Διδακτική των Μαθηματικών: Έννοιες-Μέθοδοι-
Έρευνες. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών
και Επιστημών τη Αγωγής.

Γαγάτσης, Α., Μιχαήλ, Π., Δεληγιάννη, Ε., Μονογυιού. Α., Καλογήρου, Π.,
& Φιλίππου, Α. (2011). Ικανότητα Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων
Συναρτήσεων και Γεωμετρίας: η Μετάβαση από το Γυμνάσιο στο
Λύκειο. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας.

Γαγάτσης, Α., Καλογήρου, Π. (2013). Ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας και
της αντίληψης του γεωμετρικού σχήματος .Λευκωσία :Πανεπιστήμιο
Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών τη Αγωγής.

Κολέζα, Ε.(2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών.
Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Μιχαήλ, Π., Γαγάτσης, Α, (2012). Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Πρακτικά 14^{ου} Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και επιστήμης .Λευκωσία :Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία .

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004-2005). Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και στο Ενιαίο Λύκειο. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Παναούρα, Γ.(2007).Οι γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες των μαθητών στο τέλος της Δημοτικής Εκπαίδευσης .Συγκρίνοντας τη γεωμετρική σκέψη μαθητών δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης .Διδακτορική Διατριβή .Πανεπιστήμιο Κύπρου .

Ξενογλώσση

Benbow, C. P. (1988). Sex differences in mathematical reasoning ability among the intellectually talented: Their characterization, consequences, and possible explanations. Behavioral and Brain Sciences, 11, 169-183.

Deliyianni E., Athanasios Gagatsis, Annita Monoyiou, Paraskevi Michael, Panayiota Kalogirou and Alain Kuzniak CERME 7 (2011). Towards a comprehensive theoretical model of students geometrical figure understanding and its relation with proof.

De Windt-King, A., and Goldin, G. (2003). Children's Visual Imagery: Aspects of Cognitive Representation in Solving Problems with Fractions. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2(1): 1-42.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), Exploiting mental imagery with computers in mathematical education (pp. 142- 157). Berlin: Springer-Verlag.

Elia, I., and Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 327-334). Bergen, Norway: PME .

Elia, I., Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2004). Young Children's Understanding of Geometric Shapes: The role of Geometric Models. In M. JOHNSEN HOINES & A. B. FUGLESTAD (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2 349-357). Bergen, Norway: Bergen University College.

Fischbein, E. (1993). Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 2(42), 139-162 .

Freudental, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fujita, T., Jones, K. & Kunimune, S. (2008). The design of textbooks and their influence on students' understanding of 'proof' in lower secondary school. Paper accepted for ICMI study 19.

Fujita, T. & Jones, K. (2003). Interpretations of national curricula: the case of geometry in Japan and the UK. In *British Educational Research Association annual conference 2003*, Edinburgh, Scotland, 11-13 September 2003.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2003). The use of number line in conducting arithmetic operations: A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the International Symposium in Elementary Maths Teaching* (pp. 70-73). Prague, the Czech Republic: Charles University. 401.

Gagatsis, A., Michael, P., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Kuzniak, A. (2011). Secondary students' behavior in proof tasks: understanding and the influence of the geometrical figure. *The 7 th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 4* (p.p.608-617). Rzeszów, Poland.

Gloriana González and Patricio G. Herbst¹, Competing Arguments for the Geometry Course: Why Were American High School Students Supposed to Study Geometry in the Twentieth Century, University of Michigan.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 73-78.

Hedges, L. V., & Nowell, A (1995). Sex differences in mental test scores, variability, and numbers of high-scoring individuals. *Science*, 269, 41-45.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Eds), *Proceedings of the seventh international conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp223-228. Rehovot, Israel: Department of Science Teaching, The Weizmann Institute of Science.

Hirst, Paul H. (1974) *Knowledge and the Curriculum*. London: Routledge & Kegan Pau. .Poster presented at the AERA Annual Meeting of American Education Research Association, Chicago, IL.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft.

Hyde, J., Fennema, E., & Lamon, S (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107, 139-155.

Kuzniak A., Athanasios Gagatsis, Matthias Ludwig, Carlo Marchini, Michaelides, M.P. (2003). Age and Gender differences in performance on a spatial rotation test NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Ανάκτηση από <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909>,

Mason, M. (2005) .Developing thinking in geometry .The open university in association with Paul Chapman Publishing.

Mesquita, A. L. (1998).On conceptual obstacles linked with external representation in geometry .Journal of mathematical behavior,17(2),183-195.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).Principles and Standards for School Mathematics.Reston :VA,NCTM .

Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. One of Princeton University Press's Notable Centenary Titles.

Quadling, D. (1979) Mathematical Education at upper secondary school, college and University transition. In ICMI, New Trends in Mathematics Teaching. Paris UNESCO.

Schnotz, W. (1993). Some remarks on the commentary on the relation of dual coding and mental models in graphics comprehension. Learning and Instruction, Vol. 3, (pp. 247-249).

Tall, D. (1991)The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Eds), Advanced mathematical thinking, pp3-21.Dordrecht:Kluwer.

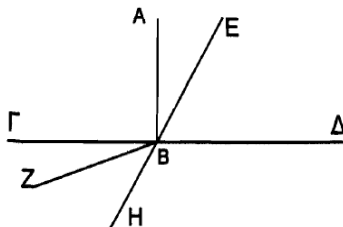
Van Hiele, P. M.(1986).Structure and Insight:A theory of Mathematics Education. Orlando, Florida: Academic Press.

Van Hiele, P. M.(1999).Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching Children Mathematics, 5(6), 310-316.

Παράρτημα Ι

ΜΕΡΟΣ Α

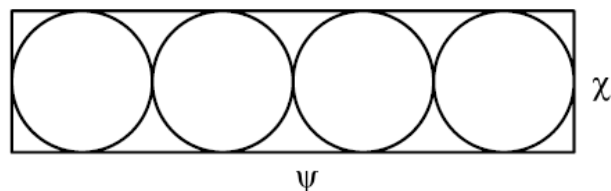
1. Στο σχήμα που δίνεται έχουμε $AB \perp \Gamma\Delta$. Ονομάστε τις οξείες γωνίες που υπάρχουν με κορυφή το σημείο Β;



2. Στο σχήμα οι τέσσερις κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και ταυτόχρονα εφάπτονται στις πλευρές του ορθογωνίου

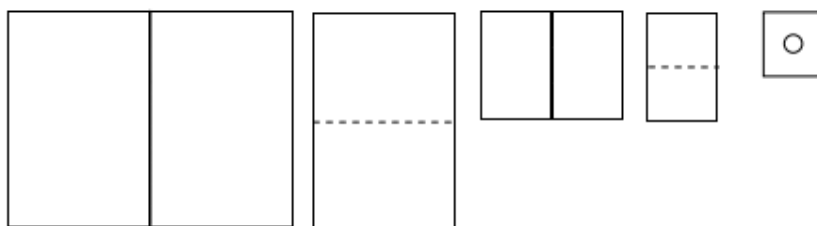
παραλληλογράμμου. Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τα χ και ψ .

Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



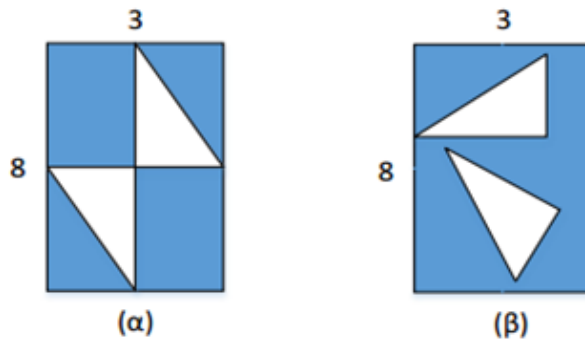
Α. $\psi=8\chi$ Β. $\psi=4\chi$ Γ. $\chi=4\psi$ Δ. $\psi=1/5\chi$ Ε. $\psi=1/9\chi$

3. Η Μαρία διπλώνει στο μέσο ένα κομμάτι χαρτί και μετά επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία 3 φορές. Μετά, στο διπλωμένο χαρτί κάνει μια τρύπα. Αν ξεδιπλώσει το χαρτί, πόσες τρύπες θα έχει;

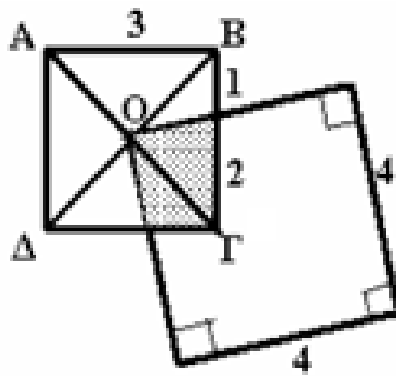


Να εξηγήσετε πως φτάσατε στην απάντησή σας;

4. Δυο ίσα ορθογώνια τρίγωνα είναι τοποθετημένα σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 3×8 όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Εάν τα ίδια δυο τρίγωνα επανατοποθετηθούν μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως φαίνεται στο σχήμα (β), ποιο είναι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους στο σχήμα (β);



5. Εάν στο παρακάτω σχήμα O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, τότε με ποσό ισούται το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ;

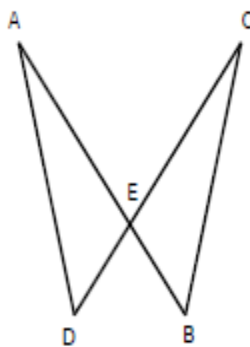


Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

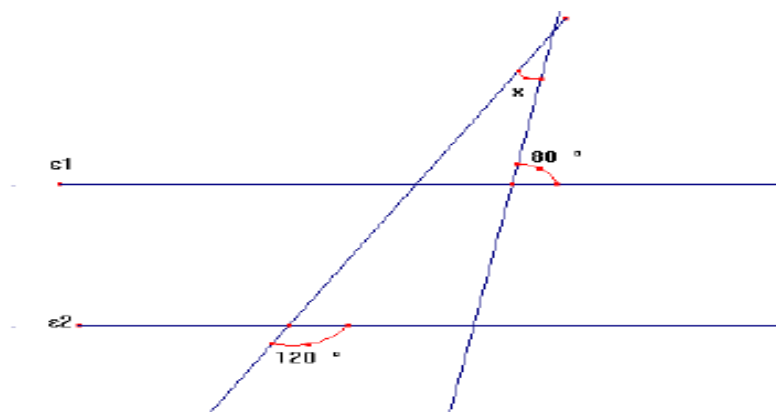
Παράρτημα II

ΜΕΡΟΣ Β

1. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $AE=CE$ και $\hat{A}=\hat{C}$. Να αποδείξετε ότι $AD=CB$.



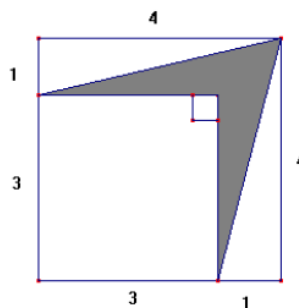
2. Στο σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Πόσες μοίρες είναι η γωνία x ; Εξηγήστε πως εργαστήκατε.



A. 70° B. 60° Γ. 40° Δ. 30° Ε. 20°

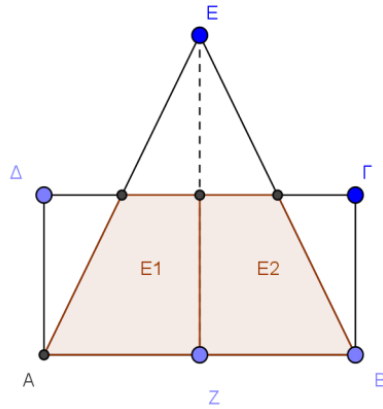
3. Το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος είναι :

A.1 B.2 Γ.3 Δ.4 Ε.5



Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

4. Το εμβαδόν του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου ABE (με $EA=EB$) και EZ το ύψος του. Παρατηρήστε τα σκιασμένα σχήματα με αντίστοιχα εμβαδά $E1$ και $E2$. Βάλτε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



A. Το εμβαδόν $E1$ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν $E2$.

B. Το εμβαδόν $E1$ είναι ίσο με το εμβαδόν $E2$.

Γ. Το εμβαδόν $E1$ είναι μικρότερο από το εμβαδόν $E2$.

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε

$\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της BA στο Z .

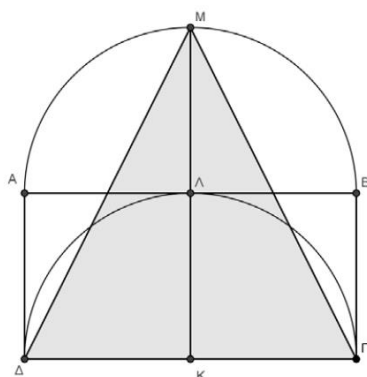
α. Να αποδείξετε ότι $BE=BA$.

β. Να αποδείξετε ότι το $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

Παράρτημα ΙΙΙ

ΜΕΡΟΣ Γ

1. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $B\Gamma=5\text{ cm}$ και τα τόξα AMB και $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ημικύκλια με διαμέτρους AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Τα σημεία M και Λ είναι τα μέσα των ημικυκλίων AMB και $\Delta\Lambda\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta M\Gamma$.



Να φαίνονται όλες οι πράξεις.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\Lambda\Gamma$.

γ) $\hat{\Delta\Lambda\Gamma} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

Παράρτημα IV

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

$$A1 = \begin{cases} 0 & , \text{αν βρηκαν απο } 0 - 1 \text{ γωνιες ή πανω απο } 5 \\ 0,5 & , \text{αν βρηκαν απο } 2 - 3 \text{ γωνιες} \\ 1 & , \text{αν βρηκαν απο } 4 - 5 \text{ γωνιες} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$A2 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη απαντηση} \\ 0 & , \text{λαθος απαντηση} \end{cases}$$

$$Aex2 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$A3 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη απαντηση} \\ 0 & , \text{λαθος απαντηση} \end{cases}$$

$$Aer3 = \begin{cases} 1 & , \text{αν η απαντηση ηταν 8 τρυπες} \\ 0 & , \text{λαθος απαντηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Aop4=

$$\begin{cases} 1 & , \text{απαντηση οτι το εμβαδο του } \beta \text{ σχηματος ειναι ισο με το εμβαδο του } \alpha \\ 0 & , \text{λαθος απαντηση} \end{cases}$$

$$Apr4 = \begin{cases} 1 & , \text{αν η διαδικασια(πραξεις)ειναι σωστες} \\ 0,5 & , \text{αν η διαδικασια(πραξεις)ειναι μιση} \\ 0 & , \text{αν δεν εχει κανει καμια πραξη} \end{cases}$$

$$Aex4 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$$Aop5 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη απαντηση} \\ 0 & , \text{λαθος απαντηση} \end{cases}$$

$$Apr5 = \begin{cases} 1 & , \text{αν η διαδικασια(πραξεις)ειναι σωστες} \\ 0,5 & , \text{αν η διαδικασια(πραξεις)ειναι μιση} \\ 0 & , \text{αν δεν εχει κανει καμια πραξη} \end{cases}$$

$$Aex5 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$$

ΜΕΡΟΣ Β

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

$$Bde1 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή αποδειξη (ολοκληρωμένη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελής αποδειξη} \\ 0 & , \text{λάθος αποδειξη} \end{cases}$$

$$Bex1 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή εξήγηση} \\ 0 & , \text{λάθος εξήγηση ή καθολού εξήγηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$$Bde2 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή απάντηση} \\ 0 & , \text{λάθος απάντηση} \end{cases}$$

$$Bex2 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή εξήγηση} \\ 0 & , \text{λάθος εξήγηση ή καθολού εξήγηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

$$Bde3 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή απάντηση} \\ 0,5 & , \text{σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση} \\ 0 & , \text{λάθος απάντηση} \end{cases}$$

$$Bex3 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή εξήγηση} \\ 0 & , \text{λάθος εξήγηση ή καθολού εξήγηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

$$Bde4 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή απάντηση} \\ 0 & , \text{λάθος απάντηση} \end{cases}$$

$$Bex4 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή εξήγηση} \\ 0 & , \text{λάθος εξήγηση ή καθολού εξήγηση} \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

$$Bfig5 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστό σχήμα} \\ 0 & , \text{λάθος σχήμα} \end{cases}$$

$$Bde5a = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή αποδειξη (ολοκληρωμένη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελής αποδειξη} \\ 0 & , \text{λάθος αποδειξη} \end{cases}$$

$$Bde5b = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή αποδειξη (ολοκληρωμένη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελής αποδειξη} \\ 0 & , \text{λάθος αποδειξη} \end{cases}$$

$$Bex5a = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή εξήγηση} \\ 0 & , \text{λάθος εξήγηση ή καθολού εξήγηση} \end{cases}$$

$$Bex5b = \begin{cases} 1 & , \text{σωστή εξήγηση} \\ 0 & , \text{λάθος εξήγηση ή καθολού εξήγηση} \end{cases}$$

ΜΕΡΟΣ Γ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Cop1=

$\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, οτι το εμβαδο του τριγωνου ειναι ισο με το εμβαδο του ορθογωνιου
 , αν καναν κατι αλλο

$Cde1 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη αποδειξη (ολοκληρωμενη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελης αποδειξη} \\ 0 & , \text{λαθος αποδειξη} \end{cases}$

$Cex1 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

$Cfig2 = \begin{cases} 1 & , \text{σωστο σχημα} \\ 0 & , \text{λαθος σχημα} \end{cases}$

$Cde2a = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη αποδειξη (ολοκληρωμενη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελης αποδειξη} \\ 0 & , \text{λαθος αποδειξη} \end{cases}$

$Cde2b = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη αποδειξη (ολοκληρωμενη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελης αποδειξη} \\ 0 & , \text{λαθος αποδειξη} \end{cases}$

$Cde2c = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη αποδειξη (ολοκληρωμενη)} \\ 0,5 & , \text{ημιτελης αποδειξη} \\ 0 & , \text{λαθος αποδειξη} \end{cases}$

$Cex2a = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$

$Cex2b = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$

$Cex2c = \begin{cases} 1 & , \text{σωστη εξηγηση} \\ 0 & , \text{λαθος εξηγηση ή καθολου εξηγηση} \end{cases}$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V

	occurrence	average	Standard deviations
A1	123.5	0.74	0.36
A2	96.0	0.57	0.49
Aex2	60.0	0.36	0.48
A3	105.0	0.63	0.48
Aer3	39.0	0.23	0.42
Aop4	104.0	0.62	0.49
Apr4	73.0	0.43	0.46
Aex4	74.0	0.44	0.49
Aop5	12.0	0.07	0.26
Apr5	11.5	0.07	0.25
Aex5	11.5	0.07	0.25
Ms	81.0	0.48	0.50
Fs	87.0	0.52	0.50
S1s	117.0	0.70	0.46
S2s	21.0	0.13	0.33
S3s	30.0	0.18	0.38

	occurrence	average	Standard deviations
Bde1	132.5	0.79	0.39
Bex1	138.0	0.82	0.38
Bde2	100.0	0.60	0.49
Bex2	71.0	0.42	0.49
B3	77.0	0.46	0.46
Bex3	63.5	0.38	0.48
Bop4	159.0	0.95	0.23
Bex4	17.0	0.10	0.30
Bfig5	102.0	0.61	0.49
Bde5a	77.0	0.46	0.48
Bde5b	25.5	0.15	0.36
Bex5a	82.0	0.49	0.50
Bex5b	24.5	0.15	0.35
Ms	81.0	0.48	0.50
Fs	87.0	0.52	0.50
S1s	117.0	0.70	0.46
S2s	21.0	0.13	0.33

	occurrence	average	Standard deviations
Cop1	2.0	0.01	0.11
Cde1	79.0	0.47	0.49
Cex1	66.0	0.39	0.49
Cfig2	84.0	0.50	0.50
Cde2a	40.0	0.24	0.43
Cde2b	29.5	0.18	0.38
Cde2c	5.5	0.03	0.17
Cex2a	40.0	0.24	0.43
Cex2b	30.0	0.18	0.38
Cex2c	6.0	0.04	0.19
Ms	81.0	0.48	0.50
Fs	87.0	0.52	0.50
S1s	117.0	0.70	0.46
S2s	21.0	0.13	0.33
S3s	30.0	0.18	0.38