ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στα βιβλία V. και VI. των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Προκαταρτική Μελέτη.

Ιωάννα Δοργιάκη
Α.Μ. Δ201111

Επιβλέπων Καθηγητής: Σ. Νεγρεπόντης

Αθήνα, Νοέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 2^{α} Δεκεμβρίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Σ. Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Σ. Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια

Ευχαριστίες-Αφιερώσεις

Σε τούτο το μακρύ ταξίδι δεν ήμουν μόνη, αν και υπήρξαν στιγμές που με έκαναν να συνειδητοποιήσω πως θα φτάσω στην απέναντη ακτή μόνο με το δικό μου κουπί.

Ευχαριστώ θερμά τον κυβερνήτη του σκάφους,τον Καθηγητή μου, κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη, που με οδήγησε σε διαδρομές μαγευτικές κι απίθανες!

Ευχαριστώ τη φίλη και συνάδελφο Γιάννα Μαυρομάτη, που στάθηκε με αληθινό και ουσιαστικό ενδιαφέρον διαρκώς δίπλα μου.

Ευχαριστώ τη φίλη Δήμητρα Κομνηνού, που χωρίς τη δική της υποστήριξη, το ταξίδι αυτό θα είχε περισσότερους Κύκλωπες και Λαιστρυγόνες.

Ευχαριστώ την κόρη μου Εβελίνα Παλκάνογλου, το γιο μου Γιώργο Παλκάνογλου για όλα… ακόμη και για κείνα που δεν φαντάζονται πως μου πρόσφεραν.

Τέλος, ευχαριστώ το σύντροφο της ζωής μου Κοσμά Παλκάνογλου, τον άοκνο συνοδοιπόρο, το δυνατό συναγωνιστή, τον υπέροχο άνθρωπο που με εμπνέει να ζω με ουσιαστική ποιότητα και βαθιά δημιουργική χαρά κάθε λεπτό!

Τους αφιερώνω τούτη τη διπλωματική εργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή 8

Βιβλίο V των *Στοιχείων*

Όροι 20
Πρόταση 1 23
Πρόταση 2 24
Πρόταση 3 26
Πρόταση 4 28
Πρόταση 5 30
Πρόταση 6 32
Πρόταση 7 34
Πρόταση 8 36
Πρόταση 9 39
Πρόταση 10 40
Πρόταση 11 42
Πρόταση 12 44
Πρόταση 13 46
Πρόταση 14 48
Πρόταση 15 50
Πρόταση 16 51
Πρόταση 17 53
Πρόταση 18 55
Πρόταση 19 57
Πρόταση 20 59
Πρόταση 21 61
Πρόταση 22 63
Πρόταση 23 65
Πρόταση 24 67
Πρόταση 25 69

Μεταφορά των Προτάσεων σε σύγχρονη διατύπωση 71

Σχηματική λογική δομή του βιβλίου V 97

Βιβλίο VI των *Στοιχείων*

Όροι 99
Πρόταση 1 100
Πρόταση 2 102
Πρόταση 3 104
Πρόταση 4 106
Πρόταση 5 108
Πρόταση 6 110
Πρόταση 7 112
Πρόταση 8 115
Πρόταση 9 117
Πρόταση 10 118
Πρόταση 11 120
Πρόταση 12 121
Πρόταση 13 122
Πρόταση 14 123
Πρόταση 15 125
Πρόταση 16 127
Πρόταση 17 129
Πρόταση 18 131
Πρόταση 19 133
Πρόταση 20 135
Πρόταση 21 139
Πρόταση 22 140
Πρόταση 23 142
Πρόταση 24 144
Πρόταση 25 146
Πρόταση 26 148
Πρόταση 27 150
Πρόταση 28 152
Πρόταση 29 155
Πρόταση 30 157
Πρόταση 31 158
Μεταφορά των Προτάσεων σε σύγχρονη διατύπωση 160
Σχηματική λογική δομή του βιβλίου VI 184
Βιβλιογραφία 186

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια προκαταρτική μελέτη της λογικής δομής των βιβλίων 5 και 6 των Στοιχείων του Ευκλείδη, με ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο της αρχής του Ευδόξου, του όρου 4 του βιβλίου 5 (η οποία συνήθως αναφέρεται ως αρχή Ευδόξου-Αρχιμηδους ή Αρχιμήδους, αν και σαφώς οφείλεται αποκλειστικά στον Εύδοξο). Η καταγραφή αυτή αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος του Καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη, το οποίο αποσκοπεί στην κατανόηση της θεωρίας λόγων μεγεθών του Ευδόξου, η οποία συνδέεται στενά με τον σύγχρονο ορισμό των πραγματικών αριθμών ως τομές Dedekind, και της προηγηθείσας θεωρίας Θεαίτητου, η οποία συνδέεται με την Πυθαγόρεια έννοια της ανθυφαίρεσης μεγεθών και είναι πολύ λιγότερο κατανοητή.

Στο πρώτο τμήμα της παρουσιάζεται ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στο βιβλίο 5 και είναι σαφής αυτός.

Στο δεύτερο τμήμα της και στα πλαίσια της μελέτης του βιβλίου 6 αποδεικνύεται πως ο ρόλος της αρχής του Ευδόξου σε αυτό, είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος.

ABSTRACT

This thesis is a preliminary study of the logical structure of the books 5 and 6 of Euclid's Elements, with particular emphasis on the role of Eudoxus principle of clause 4 of the book 5 (commonly referred to as principle Eudoxus-Archimedes or Archimedes, although clearly attributable exclusively to Eudoxus). This thesis is part of a broader research Programme of Professor Stelios Negrepontis, which aims at understanding the Eudoxus sizes grounds theory, which is closely linked to the current definition of the real numbers as Dedekind sections, and the past theory of Theaetetus, which linked to the Pythagorean concept of anthyfairesis and is much less understood.

The first section presents the role of the principle of Eudoxus in the book 5 and it is clear.

In the second half, and in the context of the book study 6 demonstrated that the role of the principle of Eudoxus on it, is very complex.

Εισαγωγή

«πάντων χρημάτων
μέτρον ἐστὶν ἄνθρωπος,
τῶν μὲν ὄντων ὡς ἔστιν,
τῶν δὲ οὐκ ὄντων, ὡς οὐκ ἔστιν».

Πλάτων, *Θεαίτητος*, 152α

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια προκαταρτική μελέτη της λογικής δομής των βιβλίων 5 και 6 των Στοιχείων του Ευκλείδη, με ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο της αρχής του Ευδόξου του όρου 4 του βιβλίου 5 (η οποία συνήθως αναφέρεται ως αρχή Ευδόξου-Αρχιμηδους ή Αρχιμήδους, αν και σαφώς οφείλεται αποκλειστικά στον Εύδοξο). Η καταγραφή αυτή αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος του Καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη, το οποίο αποσκοπεί στην κατανόηση της θεωρίας λόγων μεγεθών του Ευδόξου, η οποία συνδέεται στενά με τον σύγχρονο ορισμό των πραγματικών αριθμών ως τομές Dedekind, και της προηγηθείσας θεωρίας Θεαίτητου, η οποία συνδέεται με την Πυθαγόρεια έννοια της ανθυφαίρεσης μεγεθών και είναι πολύ λιγότερο κατανοητή.

Το ότι το βιβλίο 5 οφείλεται στον Εύδοξο μαρτυρείται από το ακόλουθο σχόλιο στον Ευκλείδη:

«Τοῦτο τό βιβλίον Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ κατά τούς Πλάτωνος χρόνους γεγονότος εἶναι λέγεται, ἐπιγέγραπται δ' ὅμως Εὐκλείδου, ἀλλ' οὐ κατά τινα ψευδῆ ἐπιγραφήν εὑρέσεως μέν γάρ ἕνεκα ἄλλου τινός οὐδέν κωλύει εἶναι, τῆς μέντοι κατά στοιχείων αὐτῶν συντάξεως χάριν καί τῆς πρός ἄλλα τῶν οὕτω ταχθέντων ἀκολουθίας ὡμολόγηται παρά πᾶσιν Εὐκλείδου εἶναι. Σκοπός δε τούτου τοῦ βιβλίου περί τῶν καθόλου μεγεθών ἐστί, ἐν ἄλλοις διδάσκοντος περί τινός μεγέθους τοῦ Εὐκλείδου. Ἐπεί γάρ τοῦ μεγέθους τρία εἴδη εἰσίν, γραμμή, ἐπιφάνεια, στερεόν καί περί ἀναλογιῶν κοινόν γάρ ἐστί τοῦτο γεωμετρίας καί ἀριθμητικῆς καί ἁπλώς πάσης μαθηματικῆς» (Στοιχ. Εύκλ. εκδ. Χάϊμπεργκ. τομ. 5ος σελ. 282)

(Τούτο το βιβλίον –δηλαδή το 5ον– κατά την παράδοσιν είναι έργον του Ευδόξου του Κνιδίου, του μαθηματικού, όστις έζησε κατά τους χρόνους του Πλάτωνος. Η επιγραφή όμως το αποδίδει εις τον Ευκλείδη και δεν πρόκειται περί ψευδούς τιτλοφορήσεως. Από της απόψεως ποίος έκαμε τας (εν αυτώ περιεχομένας) ανακαλύψεις, τίποτε δεν εμποδίζει να είναι έργον κάποιου άλλου. Από της απόψεως όμως της συστηματικής του διαρθρώσεως και της εντάξεως του εις τας προτάσεις τας κατά τον τρόπον τούτον με ακολουθίαν καταταχθείσας, όλοι αναγνωρίζουν ότι είναι έργον του Ευκλείδου. Σκοπός δε τούτου του βιβλίου είναι η εις τα μεγέθη αναφερομένη γενική διδασκαλία, κατ' αντιδιαστολήν προς την διδασκαλίαν την οποίαν κάμνει ο Ευκλείδης έχων υπ' όψιν του ειδικωτέρων κατηγοριών μεγέθη. Διότι, αφού

τρία υπάρχουν είδη του μεγέθους (και είναι ταύτα η γραμμή, η επιφάνεια και το στερεόν), το ίδιον πρέπει να ισχύη και περί των αναλογιών. Διότι το μέρος τούτο (της περί αναλογιών θεωρίας) αφορά από κοινού και την γεωμετρίαν και την αριθμητικήν και γενικώς όλην την μαθηματικήν επιστήμην).

Η θεωρία του Ευδόξου είναι ιδιαίτερα γενική με μόνο περιορισμό την συνθήκη που εμφανίζεται στον όρο 4 του βιβλίου 5 των Στοιχείων, την συνθήκη του Ευδόξου (ή Αρχιμήδους-Ευδόξου ή Αρχιμήδους, όπως συνήθως και ανακριβώς, λέγεται): **«δοθέντων δύο ομοειδών μεγεθών υπάρχει πάντοτε πολλαπλάσιον του μικρότερου υπερβαίνον το μεγαλύτερον».**

Η θεωρία αναλογιών του Ευδόξου επικράτησε στην αρχαιότητα σε σχέση με την προηγούμενη θεωρία του Θεαίτητου, επειδή είναι γενικότερη, και επειδή πλεονεκτεί στη μέθοδο της εξάντλησης, όπως εμφανίζεται στο βιβλίο 12 των Στοιχείων, που και αυτό οφείλεται στον Εύδοξο, και η οποία συνεχίσθηκε με ακόμη μεγαλύτερη επιτυχία από τον Αρχιμήδη. Η χρήση της θεωρίας λόγων του βιβλίου 5 στην θεωρία της εξάντλησης στο βιβλίο 12 και στο έργο του Αρχιμήδη είναι εντελώς ανάλογη με την χρήση των πραγματικών αριθμών, ως τομών Dedekind, στον Ολοκληρωτικό και Διαφορικό Λογισμό στα σύγχρονα Μαθηματικά. Ακόμη αποδείχθηκε αργότερα από τον Απολλώνιο η κατάλληλη θεωρία στη γεωμετρική μελέτη των Κωνικών τομών.

Ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στο **βιβλίο 5** είναι σαφής (και περιγράφεται στις παραδόσεις του μαθήματος του Σ. Νεγρεπόντη. Η μοναδική **άμεση** χρήση της αρχής του Ευδόξου στο βιβλίο 5 εμφανίζεται στην απόδειξη της Πρότασης 5.8 (και της αντιθετο-αντίστροφης 5.9). Η πρόταση 5.8 χρησιμοποιείται τρείς φορές στο βιβλιο 5: στις αποδείξεις των Προτάσεων 5.14, 20, 21. Οι Προτάσεις αυτές στην ουσία αποτελούν λήμματα για τις αποδείξεις των βασικών Προτάσεων του βιβλίου 5, ήτοι της 5.16 (εναλλάξ), 5.22 (δι' ίσου), και 5.23 (τεταραγμένης (δι' ίσου)), αντίστοιχα. Η 5.16 χρησιμοποιείται για την απόδειξη της διαίρεσης λόγου 5.19, και αυτή για την απόδειξη της 5.25. Όλες οι άλλες προτάσεις του βιβλίου 5 αποδεικνύονται με χρήση μόνο του ορισμού 5 του βιβλίου 5, χωρίς αναφορά στην αρχή του Ευδόξου.
Ο ρόλος της αρχής του Ευδόξου στο βιβλίο 5 φαίνεται ανάγλυφος στο παρακάτω σχήμα.

Η δομή των μη στοιχειωδών Προτάσεων του Βιβλίου 5

Όροι 5.4, 5, 7		
5.8, 5.9		
5.14		
5.16 **εναλλάξ**		
5.19 **αφαίρεση λόγου**		
	5.20	
		5.21
	5.22 **δι' ίσου**	
		5.23 **τεταραγμένη**
5.25		

Η πιο λεπτομερής λογική δομή του βιβλίου 5 είναι η ακόλουθη:

		1				5																				
			2	3																						
			2				6																			
ορ				3	4																					
ορ								7			10															
ορ Ο Ρ	σ	1							8	9																
ορ												11														
ορ		1											12													
ορ Ο Ρ														13												
									8		10			13	14											
								7					12			15										
ορ												11			14	15	16									
		1	2															17								
ορ												11						17	18							
												11					16	17		19						
									8		10			13							20					
									8		10			13								21				
ορ					4																20		22			
												11				15	16					21		23		
																			18						24	
																				19						25

Ο ρόλος της αρχής του Ευδόξου στο **βιβλίο 6** είναι πιο πολύπλοκος. Χωρίζουμε το βιβλίο 6 σε πέντε ενότητες.

Βιβλίο 6 των *Στοιχείων*
Η Πρόταση 6.1, οι άμεσες συνέπειές της 6.2α,3α,4, 18,24
[και οι αντίστροφες 6.2β, 3β, 5, 26, αντίστοιχα, και οι 6.6-13,

[1] Η βασική Πρόταση 6.1, και οι στοιχειώδεις Προτάσεις 2α, 3α, 4, 8-13, 18, 24

Η βασική Πρόταση 6.1 **δεν** χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου.
Είτε άμεσα είτε έμμεσα όλες σχεδόν οι Προτάσεις του βιβλίου 6 χρησιμοποιούν την Πρόταση 6.1.
Δύο απλές αλλά πολύ σημαντικές συνέπειες της Πρότασης 6.1 είναι
η ευθεία κατεύθυνση της Πρότασης 6.2, η οποία συμβολίζεται με 6.2α, και η Πρόταση 6.4.
Απλές συνέπειες αυτών είναι οι Προτάσεις 6.8-13, και 18.
Στις Προτάσεις αυτές κατ' ουσίαν αποδεικνύεται από μια υπόθεση ισογωνιότητα ή παραλληλίας κάποιο συμπέρασμα ομοιότητός/αναλογίας.

[2] Οι μη στοιχειώδεις αντίστροφες Προτάσεις 6.2β, 3β, 5, 26, και οι 6.6-7 (ισογωνιότης/παραλληλία vs. αναλογία/ομοιότης)

Οι Προτάσεις 6.2β, 3β, 5, 26 είναι **αντίστροφες** των 6.2α,3α, 4, 24, αντίστοιχα.
Σε αυτές τις αντίστροφες προτάσεις καθώς και στις Προτάσεις 6.6, 6.7, αποδεικνύεται κάποια ισογωνιότητα ή παραλληλία από μια υπόθεση ομοιότητος ή αναλογίας. Για την απόδειξη αυτής της συνεπαγωγής (από ομοιότητα προς ισογωνιότητα, αντίστροφης της αρχικής συνεπαγωγής από ισογωνιότητα προς ομοιότητα) είναι αναγκαία σε κάθε περίπτωση η Πρόταση **5.9,** και άρα, μέσω αυτής η αρχή του Ευδόξου.

1

	1																																					

2-7

	1	2α		3α																																		
5.9	1	2α	2β																																			
5.9	1			3α	3β																																	
		2α				4																																
5.9						4	5																															
5.9						4		6																														
5.9						4			7																													

8-13

						4				8					13																							
		2									9																											
		2										10																										
		2											11																									
		2												12																								

18

						4																		18														

24, 26

																										24												
5.9																										24	26											

Ο χρωματισμός όπως **2β** σημαίνει ότι οι Προτάσεις χρησιμοποιούν την αρχή Ευδόξου.
Στην περίπτωση των Προτάσεων 6.1-18 αυτό σημαίνει πάντοτε ότι
η Πρόταση χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.9.

Πρόταση 6.2. Αν ΑΒΓ τρίγωνο, Α*Δ*Β, Α*Ε*Γ, και θέτουμε ΑΒ=α, ΑΔ=α΄, ΑΓ=β, ΑΕ=β΄, ΒΓ =χ, ΔΕ =χ΄,
τότε
[**6.2.α**] αν χ, χ΄ είναι παράλληλες, τότε α/α΄=β/β΄.
[6.2.β] αν α/α΄=β/β΄, τότε χ,χ΄ είναι παράλληλες.

Απόδειξη. **[6.2.α]** έπεται από 6.1.
[**6.2.β**] Φέρουμε χ΄΄ ευθεία από Β παράλληλη προς χ΄, και η οποία τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄, και θέτουμε ΑΓ΄΄=β΄΄.
Τότε από 6.2α, α/α΄=β/β΄΄
Από την υποθεση, την 5.11, και την **5.9** (η οποία βασίζεται στην αρχή Ευδόξου), β=β΄΄.

Η πρόταση **6.3β** χρησιμοποιεί την **5.9**.

Πρόταση 6.4α. Αν δύο τρίγωνα είναι **ισογώνια**, τότε είναι **όμοια**.

Απόδειξη από την **6.2α**, χωρίς χρήση αρχής Ευδόξου
Η πρόταση **6.4α**, όπως δίδεται στα ***Στοιχεία*** χρησιμοποιεί εναλλάξ 5.16 και δι' ίσου 5.22, και άρα φαίνεται να βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου.
Όμως ο de Morgan είχε παρατηρήσει (πρβλ. Heath, *Elements*, v.2, p. 202) ότι
η Πρόταση **6.4α** αποδεικνύεται άμεσα από την **6.2α**.
Από αυτή την παρατήρηση προκύπτει ότι
η **6.4α δεν** χρησιμοποιεί την αρχή Ευδόξου.]]

Πρόταση 6.4β. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι ισογώνια.
Απόδειξη από την **6.2β**

Η πρόταση **6.5** χρησιμοποιεί την **5.9**, η οποία χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου.

Πρόταση 6.18. Δοθέντων ευθύγραμμου χωρίου Σ+Τ και ευθείας α΄, να κατασκευασθεί επί της α΄ ευθύγραμμο χωρίο όμοιο και όμοια κείμενο προς το Σ+Τ.

Απόδειξη. Από την Ι.23 κατασκευάζουμε γωνίες φ΄ , χ΄ στα δύο άκρα της α΄, ίσες ρος φ,χ αντίστοιχα., και συμπληρώνουμε με την κατασκευή του τριγώνου Σ΄, με βάση την α΄, και γωνίες φ΄, χ΄. Έστω β΄, γ΄ οι υπόλοιπες πλευρές του Σ΄.
Από την Ι.32, η τρίτη γωνία ψ΄ του Σ΄ είναι ίση με ψ.
Τότε τα τρίγωνα Σ, Σ΄ είναι ισογώνια.
Από την **6.4**, γ/γ΄=β/β΄=α/α΄, και άρα τα τρίγωνα Σ, Σ΄ είναι όμοια.
Επαναλαμβάνουμε τώρα την ίδια κατασκευή για την πλευρά γ και το τρίγωνο Τ. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει το τρίγωνο Τ΄ όμοιο προς Τ.
Άρα το ευθύγραμμο χωρίο Σ΄+Τ΄ είναι επί της ευθείας α΄, και όμοιο και όμοια κείμενο προς το Σ+Τ.

6.24. Η απόδειξη στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί 5.16 εναλλάξ, 5.22,
όμως, όπως παρατηρούν οι Simson-Heath (Heath, *Elements*, vol.2, p. 252-253)
η 6.24 μπορεί ν' αποδειχθεί με τη χρήση μόνο της 6.2 (ευθεία)
6.26 χρησιμοποιεί **5.9**.

[3] Η βασική Πρόταση 6.14 και η ενότητα των Προτάσεων 6.14-17

Στην ενότητα 6.14-17 **η βασική πρόταση είναι η 6.14.**
Η **6.14** αποτελείται από
την ευθεία **6.14α** (η οποία δεν χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου) και
την αντίστροφη **6.14β** (η οποία χρησιμοποιεί την 5.9 και άρα την αρχή του Ευδόξου).
Οι τρείς άλλες Προτάσεις (**6.15, 16, 17**) είναι ειδικές περιπτώσεις ή άμεσες συνέπειες της 6.14.

14-17 (ισότης εμβαδών και ισογωνιότης vs. αναλογία/ομοιότης)

	1														14α				16α		17α																
5.9	1														14α	14β																					
	1																15α																				
5.9	1																15α	15β																			
5.9	1															14β			16α	16β																	
	1																			16β	17α	17β															

Πρόταση 6.14α. Αν Π και Π΄ είναι **ίσα** και ισογώνια παραλληλόγραμμα, με πλευρές α, β, και α΄,β΄, αντίστοιχα, τότε α/α΄=β΄/β.

Απόδειξη α. Θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μεταξύ των παραλλήλων του Π, με την ίδια βάση β, και δεύτερη πλευρά την υ. Τότε Π=Ρ=υβ.
Παρόμοια θέτουμε Π΄, υ΄, ώστε Π΄=Ρ΄=υ΄β΄.
Από την υπόθεση Π=Π΄, έπεται Ρ=Ρ΄, άρα υβ=υ΄β΄.
Τότε, από τον ορισμό 5.5, υ/υ΄=β΄/β.
[Πράγματι, έστω μβ < νβ΄.
Άρα μβυ < νβ΄υ.
Από την υπόθεση ότι Π, Π΄ είναι **ίσα**, μυ΄β΄<νβ΄υ. Άρα μυ΄<νυ.
κλπ. Από τον ορισμό 5.5,
υ/υ΄=β΄/β].
Από την υπόθεση ότι Π, Π΄ είναι ισογώνια, έπεται **εύκολα** ότι υ/υ΄=α/α΄.
Από 5.11, έπεται α/α΄=β΄/β.
Η Πρόταση **6.14α** ΔΕΝ χρησιμοποιεί την αρχή Ευδόξου.

Heath, *Elements*, vol.2, p.217-218:
'**De Morgan** says upon this proposition: "Owing to the disjointed manner in which Euclid treats compound ratio, this proposition is strangely out of place. It is a particular case of VI. 23, being that in which the ratio of the sides, compounded, gives a ratio of equality. The proper definition of four magnitudes being reciprocally proportional is that the ratio compounded of their ratios is that of equality."
It is true that VI. 14 is a particular case of VI. 23, but, if either is out of place, it is rather the latter that should be placed before VI. 14, since most of the propositions between VI. I5 and VI. 23 depend upon VI. 14 and I5. But it is perfectly consistent with Euclid's manner to give a particular case first and its extension later, and such an arrangement often has great advantages in that it enables the more difficult parts of a subject to be led up to more

easily and gradually. Now, if **De Morgan's** view were here followed, we should, as it seems to me, be committing the mistake of explaining what is relatively easy to understand, viz. two ratios of which one is the inverse of the other, by a more complicated conception, that of compound ratio. In other words, it is easier for a learner to realise the relation indicated by the statement that the sides of equal and equiangular parallelograms are "reciprocally proportional" than to form a conception of parallelograms such that "the ratio compounded of the ratio of their sides is one of equality." For this reason I would adhere to Euclid's arrangement.'

Αλλά οι De Morgan, Heath παραβλέπουν το γεγονός ότι η απόδειξη της Πρότασης 6.23 χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου, ενώ η Πρόταση 6.14α δεν την χρησιμοποιεί, και είναι πιο στοιχειώδης από την 6.23.

Πρόταση 6.13. Δοθέντων δύο ευθειών α, β,
να κατασκευασθεί μέση ανάλογος γ, δηλαδή ώστε α/γ=γ/β.

Απόδειξη. Έστω Π ορθογώνιο παραλληλόγραμμό με πλευρές α, β.
Από την **II.14**, κατασκευάζεται ευθεία γ, ώστε
το τετράγωνο γ^2 της Π' είναι ίσο με το Π.
Από την **6.14α**, α/γ=γ/β.

Πρόταση 6.14β. Αν Π και Π΄ είναι ισογώνια παραλληλόγραμμα,
με πλευρές α,β, και α΄,β΄, αντίστοιχα, και α/α΄=β΄/β,
τότε Π και Π΄ είναι **ίσα.**

Απόδειξη. Θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,
μεταξύ των παραλλήλων του Π,
με την ίδια βάση β, και δεύτερη πλευρά την υ.
Τότε Π=Ρ=υβ.
Παρόμοια θέτουμε Π΄, υ΄, ώστε
Π΄=Ρ΄=υ΄β΄.
Από το γεγονός ότι το Π και το Π΄ είναι ισογώνια, έπεται **εύκολα** ότι
υ/υ΄=α/α΄
Από την υπόθεση και 5.11, έπεται ότι
υ/υ΄= β΄/β.
Από 6.1, υ΄β΄/ββ΄=υ΄/β, βυ΄/ββ΄=αυ/β΄.
Από 5.11 & υπόθεση, υ΄β΄/ββ΄=βυ/ββ΄.
Από **5.9** (η οποία χρησιμοποιείτην αρχή Ευδόξου), υ΄β΄=βυ.
Άρα Π=Π΄.
Η Πρόταση **6.14β** χρησιμοποιεί την **5.9**.

Η Πρόταση **6.15β** χρησιμοποιεί την **5.9**.

Πρόταση 6.16α Αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π με πλευρές α, β είναι ίσο με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π' με πλευρές α΄, β΄, τότε α/α΄=β΄/β.

Απόδειξη. Από την υπόθεση αβ=α΄β΄.
Εφαρμόζουμε την Πρόταση 6.14α.
Έπεται ότι α/β=α΄/β΄
Η Πρόταση 6.16α ΔΕΝ χρησιμοποιεί την αρχή Ευδόξου.

Πρόταση 6.16β. Αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π με πλευρές α, β και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π΄ με πλευρές α΄,β΄ ικανοποιούν α/α΄=β΄/β, τότε αβ=α΄β΄
(με χρήση της αρχής Ευδόξου απαραιτήτως!).
Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση **6.14β** για τα Π, Π΄.
Έπεται ότι Π=Π΄, άρα αβ=α΄β΄.

Η Πρόταση **6.17β** χρησιμοποιεί την 6.16β

[4] Η βασική Πρόταση 6.23 και η ενότητα των Προτάσεων 6.19-23.

Στην ενότητα 6.19-23 **η βασική Πρόταση είναι η 6.23**.
Η Πρόταση 6.19 είναι προκύπτει άμεσα από την 6.23, και
οι Προτάσεις 6.20, 22 προκύπτουν φυσιολογικά από την 6.19.
Η 6.20 αποτελεί γενίκευση της **6.19** για όμοια ευθύγραμμα χωρία=πολύγωνα).
Η Πρόταση 6.23 χρησιμοποιεί **την δι' ίσου Πρόταση 5.22**,
κάτι το αναμενόμενο εφόσον χρησιμοποιείται ο 'διπλασίων' λόγος.
Όπως έχουμε σημειώσει παραπάνω δεν θεωρούμε ορθή την συναγωγή της 6.14α από την 6.23, όπως είχε προτείνει ο de Morgan, διότι η 6.14α έχει απόδειξη η οποία δεν χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου, και έτσι είναι σαφώς πιο στοιχειώδης από την 6.23.

Προτάσεις 6.19-24 **(συγκείμενος λόγος για λόγους εμβαδών)**

5.22	1										11				15				19												
	1			4		6													19	20											
																					21										
											11	12						18	19			22									
5.22	1											12											23								

Στην ενότητα 6.19-23 η βασική Πρόταση είναι η 6.23. Η Πρόταση 6.19 είναι προκύπτει άμεσα από την 6.23, και οι Προτάσεις 6.20, 22 προκύπτουν φυσιολογικά από την 6.19**.** (Η 6.20 αποτελεί γενίκευση της **6.19** για όμοια ευθύγραμμα χωρία=πολύγωνα). Η Πρόταση 6.23 χρησιμοποιεί την δι' ίσου Πρόταση 5.22, κάτι φυσιολογικό εφόσον χρησιμοποιείται ο 'διπλασίων' λόγος. Ωστόσο δν θεωρούμε ορθή την συναγωγή της 6.14α από την 6.23, όπως είχε προτείνει ο de Morgan, διότι η 6.14α έχει απόδειξη η οποία δεν χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου, και έτσι είναι σαφώς πιο στοιχειώδης από την 6.23.

Πρόταση 6.19. Αν Τ είναι τρίγωνο με πλευρές α, β, γ,
Τ΄ τρίγωνο με πλευρές α΄, β΄, γ΄, και
τα Τ, Τ΄ είναι **όμοια** (α/α΄=β/β΄),
τότε $T/T' = (\alpha/\alpha')^2$
(εδώ ο ΄διπλασίων λόγος΄ $(\alpha/\alpha')^2$ εξ ορισμού συμβολίζει τον λόγο α/ζ,
όπου α΄/ζ=α/α΄, και ο ζ κατασκευάζεται με χρήση της 6.12).

Απόδειξη. Θέτουμε το τρίγωνο Τ μεταξύ δύο παραλλήλων με βάση β, και
θέτουμε Π το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μεταξύ των αυτών παραλλήλων,
με βάση β και υ η δεύτερη πλευρά του Π.
Τότε, από την Πρόταση **Ι.41**, Π=2Τ=βυ.

Παρόμοια θέτουμε Π΄, υ΄, ώστε
Π΄=2Τ΄=β΄υ΄.
Άρα Τ/Τ΄=Π/Π΄=βυ/β΄υ΄.
Από την υπόθεση ομοιότητος των τριγώνων Τ και Τ΄ και την Πρόταση **6.4α**
(με χρήση αρχής Ευδόξου),
τα τρίγωνα Τ και Τ΄ είναι ισογώνια.
Είναι τότε **εύκολο** ν' αποδειχθεί ότι
υ/υ΄=α/α΄.
Από την 6.1, υβ/υ΄β=υ/υ΄=α/α΄, και υ΄β/υ΄β΄=β/β΄=α/α΄=α΄/ζ.
Από την **δι΄ ίσου Πρόταση 5.22 (**με χρήση αρχής Ευδόξου),
Τ/Τ΄=Π/Π΄=υβ/υ΄β΄= α/ζ=$(α/α΄)^2$.
Η **6.19** χρησιμοποιεί τις **6.4β** και **5.22** και άρα βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου..

Οι Προτάσεις
6.20 (γενίκευση της **6.19** για όμοια ευθύγραμμα χωρία=πολύγωνα),
6.22
χρησιμοποιούν την **6.19**.
Οι 6.20 και 6.22 δεν χρησιμοποιούνται σε κάποιες άλλες Προτάσεις

Πρόταση 6.23.
Αν Π είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές α,β,
Π΄ είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές α΄,β΄, και
τα Π,Π΄ είναι **ισογώνια**,
Τότε Π/Π΄=$(α/α΄)^2$
(εδώ ο ΄διπλασίων΄ λόγος $(α/α΄)^2$ εξ ορισμού συμβολίζει τον λόγο α/ζ,
όπου α΄/ζ=α/α΄, με χρήση της **6.12**).

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι
τα Π, Π΄ είναι ισογώνια και την **6.4α** προκύπτει ότι
τα Π,Π΄ είναι όμοια,
α/α΄=β΄/β΄.
Θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μεταξύ των παραλλήλων του Π, με την ίδια βάση β, και δεύτερη πλευρά την υ. Τότε Π=Ρ=υβ.
Παρόμοια θέτουμε Π΄, υ΄, ώστε Π΄=Ρ΄=υ΄β΄.
Από την **ισογωνιότητα** των παραλληλογράμμων Π, Π΄ προκύπτει **εύκολα** ότι
υ/υ΄=α/α΄.
Από **6.1**, υβ/υ΄β=υ/υ΄=α/α΄, υ΄β/υ΄β΄=β/β΄=α/α΄=α΄/ζ.
Από την **δι' ίσου Πρόταση 5.22,** Π/Π΄=Ρ/Ρ΄=υβ/υ΄β΄=α/ζ= $(α/α΄)^2$.

Η **6.23** χρησιμοποιεί την **δι' ίσου Πρόταση 5.22** [ο Heath δεν σημειώνει ρητά αυτή την αναφορά], και άρα βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου.

[5] Η γενική Παραβολή χωρίων (6.25, 27-31)

Πρόταση 6.25. Δοθέντων τριγώνου Σ και χωρίου Δ, να κατασκευασθεί τρίγωνο Τ, ώστε Τ ομοιο προς Σ και Τ=Δ.

Απόδειξη. Από την Ι.45, κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π, με πλευρές α,β, ώστε Π=Σ.
Από την Ι.44, κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ, με πλευρές και γ.
Από την 6.13, κατασκευάζεται η μέση ανάλογος μ των α,γ, δηλαδή α/μ=μ/γ.
Από την 6.18, κατασκευάζεται επί της μ τρίγωνο **Τ, όμοιο προς το Σ**.
Από την **6.19**, $Σ/Τ=(α/μ)^2=α/γ$.
Από την 6.1, Π/Ρ=α/γ.
Αρα Σ/Τ=Π/Ρ.
Εφόσον Π=Σ, έπεται από την Πρόταση **5.8**, ότι **Τ=Ρ=Δ**.

6.27 Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί 6.26,
6.28 Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί 6.25 και 6.26
6.29 Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί 6.24, 25, 26

Πρόταση 6.29.
Δοθέντων ευθείας α, ευθυγράμμου χωρίου Μ, και λόγου μεγεθών κ/λ,
να κατασκευασθούν ευθείες χ, ψ, ώστε χ/ψ=κ/λ και Μ=ψ(α+χ).

Απόδειξη της 6.29 (*Στοιχεία*).
[Βήμα-'γενίκευση του ΠΘ' [Πρόταση 6.25]]
Από την πρόταση για την τέταρτη ανάλογο 6.12, κατασκευάζεται ευθεία ω ώστε α/2/ω=κ/λ,
και το προκύπτον ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π=α/2.β.
Από την 6.25, κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ=γ.δ,
ώστε Ρ=Π+Μ και γ/δ=κ/λ.

[Γενικευμένη Πρόταση ΙΙ.6]
Θετουμε το όμοιο Π εντός του Ρ, ώστε το Π να είναι ομοίως κείμενο.
Σαφώς Γνώμων Π-Ρ=Μ
Σαφώς γ > α/2, δ > β.
Θέτουμε χ=γ-α/2, ψ=δ-β.
Τότε Μ=ψ(α+χ)και χ/ψ=κ/λ.

6.30 Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί 6.29
6.31 Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί 6.8 και 6.19

Η λογική δομή της παραβολής χωρίων (6.25, 27-31) στα *Στοιχεία*

5.9	1											13					18	19						25						
																									26	27				
																	18			21				25	26		28			
																				21			24	25	26			29		

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με αδημοσίευτα αποτελέσματα του Σ. Νεγρεπόντη, τα οποία δεν περιλαμβάνονται στην παρούσα διπλωματική εργασία, κάθε μία από τις Προτάσεις 6.25, 6.27-31έχει απόδειξη διαφορετική και πολύ απλούστερη από εκείνη των *Στοιχείων*.

Συμπερασματικά για τον ρόλο της **αρχής του Ευδόξου στο βιβλίο 6**
παρατηρούμε τα εξής: Η αρχή του Ευδόξου

--**δεν** παίζει κανένα ρόλο στην στοιχειώδη βασική Πρόταση 6.1 και στις στοιχειώδεις συνέπειές της στην ενότητα [1] (ενδεικτικά οι 6.2α,6.4), που αποδεικνύουν κάποια μορφής ομοιότητα από ισογωνιότητα ή παραλληλία,

--χρησιμοποιείται στις Προτάσεις που αποδεικνύουν ισογωνιότητα ή παραλληλία από κάποια μορφής ομοιότητα (ενότητες [2], ενδεικτικά η 6.2β,6.5 και [3], ενδεικτικά η 6.14), πάντοτε μέσω της Πρότασης **5.9**, και

-- χρησιμοποιείται στις Προτάσεις που αναφέρονται στον 'διπλασίωνα' λόγο (ενότητα [4], ενδεικτικά οι 6.23, 6.19), μέσω της Πρότασης **δι' ίσου (5.22)**.

-- χρησιμοποιείται στις Προτάσεις που αναφέρονται στην παραβολή χωρίων (ενότητα [5]), όπου οι Προτάσεις 6.25, 27-31 έχουν απόδειξη, διαφορετική και πολύ απλούστερη από εκείνη που υπάρχει στα *Στοιχεία*.

Βιβλίο V των *Στοιχείων*

Ὅροι

1. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

2. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

3. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

4. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

5. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

6. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

7. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

9. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

Όροι

1. Μια ποσότητα, η μικρότερη, είναι μέρος μιας άλλης ποσότητας της μεγαλύτερης, όταν η μικρότερη μετρά τη μεγαλύτερη.

2. Η μεγαλύτερη δε ποσότητα είναι πολλαπλάσιο της μικρότερης, όταν η πρώτη μετρείται από τη δεύτερη.

3. Ο λόγος είναι ένα μια μορφή σχέσης, όσον αφορά το μέγεθος δυο ποσοτήτων, του ίδιου είδους.

4. Δύο μεγέθη λέγεται ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν πολλαπλασιαζόμενα υπερβαίνει το ένα το άλλο.

5. Μεγέθη λέγεται πως έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου, υπερβαίνουν και τα δύο ή είναι και τα δύο ίσα ή και τα δύο υπολείπονται των ίσων πολλαπλασίων του δευτέρου και τετάρτου αντίστοιχα, που παίρνονται στην αντίστοιχη σειρά, σύμφωνα με κάθε είδος πολλαπλασιασμού.

6. Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο καλούνται ανάλογα.

7. Και όταν για ίσα πολλαπλάσια (όπως στον ορισμό 5) το πολλαπλάσιο του πρώτου μεγέθους υπερβαίνει το πολλαπλάσιο του δεύτερου και το πολλαπλάσιο του τρίτου μεγέθους δεν υπερβαίνει το πολλαπλάσιο του τέταρτου, τότε το πρώτο μέγεθος προς το δεύτερο λέγεται πως έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το τρίτο μέγεθος προς το τέταρτο.

8. Η αναλογία με τρεις όρους είναι η ελάχιστη δυνατή.

9. Και όταν τρία μεγέθη είναι ανάλογα, το πρώτο λέγεται πως έχει προς το τρίτο το τετράγωνο του λόγου που έχει το πρώτο προς το δεύτερο.

10. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

10. Και όταν τέσσερα μεγέθη είναι (συνεχώς) ανάλογα το πρώτο λέγεται πως έχει προς το τέταρτο, τον κύβο του λόγου που έχει το πρώτο προς το δεύτερο. Συνεχίζουμε όμοια με οποιαδήποτε υπάρχουσα αναλογία.

11. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

11. Ομόλογα μεγέθη (σε δυο λόγους) λέγονται τα ηγούμενα προς τα ηγούμενα και τα επόμενα προς τα επόμενα.

12. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

12. Ο εναλλάξ λόγος προκύπτει από τον αρχικό λόγο (μεγεθών) αν θεωρήσουμε το λόγο των ηγούμενων μεγεθών ίσο με το λόγο των επόμενων μεγεθών.

13. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

13. Ο αντίστροφος λόγος προκύπτει από τον αρχικό, αν στη θέση των επόμενων μεγεθών θεωρήσουμε τα ηγούμενα μεγέθη και στη θέση των ηγούμενων τα επόμενα.

14. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

14. Η σύνθεση λόγου προκύπει αν στη θέση του ηγούμενου μεγέθους θεωρήσουμε το άθροισμα ηγούμενου και επόμενου και στη θέση του επόμενου τον ίδιο επόμενο.

15. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

15. Η διαίρεση λόγου προκύπτει από τη λήψη της υπεροχής του ηγούμενου μεγέθους από το επόμενο προς το επόμενο μέγεθος καθαυτό.

16. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

16. Η αναστροφή λόγου προκύπτει από το ηγούμενο μέγεθος προς την υπεροχή του ηγούμενου από το επόμενο μέγεθος.

17. Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

17. Ο δι᾽ ίσου λόγος είναι αν έχουμε κάποιο πλήθος μεγεθών κι ένα άλλο –ίσο σε αριθμό– πλήθος μεγεθών και λαμβανόμενα αυτά ανά δύο να έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν το πρώτο προς το τελευταίο στο πρώτο πλήθος μεγεθών, όπως και στο δεύτερο πλήθος μεγεθών το πρώτο προς το τελευταίο ή διαφορετικά: η λήψη των άκρων όρων εξαιρουμένων των μέσων όρων.

18. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς

18. Η τεταραγμένη αναλογία είναι όταν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα τόσα ίσα σε πλήθος και ισχύει: ο λόγος του ηγούμενου προς τον επόμενο στα πρώτα

ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

μεγέθη να είναι ίσος με το λόγο του ηγούμενου προς τον επόμενο στα δεύτερα μεγέθη και ο λόγος του επόμενου προς άλλον στα πρώτα μεγέθη να είναι ίσος με το λόγο του αντίστοιχου άλλου προς τον ηγούμενο στα δεύτερα μεγέθη.

α΄

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

σχήμα 1

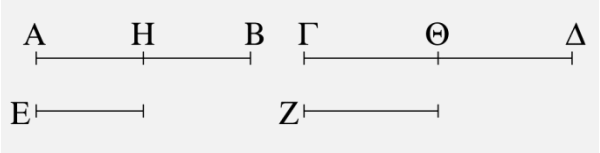
Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ ἴσα τοῖς Ε, Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση 1

Εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη που είναι ίσα πολλαπλάσια άλλων μεγεθών, ίσων το πλήθος με αυτά, τότε όσες φορές διαιρείται κάποιο από τα πρώτα μεγέθη με κάποιο από τα δεύτερα τόσες φορές θα διαιρούνται όλα τα πρώτα μεγέθη με όλα τα δεύτερα.



Έστω τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ (να είναι) ίσα πολλαπλάσια κάποιων άλλων μεγεθών Ε, Ζ ίσων το πλήθος με αυτά. Ισχυρίζομαι ότι όσες φορές διαιρείται το ΑΒ από το Ε τόσες φορές θα διαιρούνται και τα ΑΒ, ΓΔ από τα Ε, Ζ.

Επειδή το ΑΒ είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο του Ε όσο και το ΓΔ του Ζ, όσα μεγέθη ίσα με Ε περιέχονται στο ΑΒ τόσα μεγέθη, ίσα με Ζ, θα περιέχονται και στο ΓΔ. Έστω ότι διαιρώ το ΑΒ με Ε κι έχω τα ίσα (με Ε) μεγέθη ΑΗ, ΗΒ, το δε ΓΔ με Ζ κι έχω τα ίσα (με Ζ) μεγέθη ΓΘ, ΘΔ, είναι δε ίσο το πλήθος των ΑΗ, ΗΒ με το πλήθος των ΓΘ, ΘΔ. Επειδή είναι ίσο το μεν ΑΗ με Ε, το δε ΓΘ με Ζ, άρα ίσο το ΑΗ με Ε και τα ΑΗ, ΓΘ με τα Ε, Ζ. Για τον ίδιο λόγο ίσο το ΗΒ με το Ε και ίσα τα ΗΒ, ΘΔ με τα Ε, Ζ. Άρα όσα υπάρχουν μέσα στο ΑΒ ίσα με Ε, τόσα και μέσα στα ΑΒ, ΓΔ ίσα με Ε, Ζ. Άρα οσαπλάσιο είναι το ΑΒ του Ε, τοσαυταπλάσια είναι και τα ΑΒ, ΓΔ των Ε, Ζ.

Άρα αν υπάρχουν κάποια μεγέθη ίσα σε πλήθος με κάποια άλλα μεγέθη και το καθένα από τα πρώτα είναι ίσο με πολλαπλάσιο καθενός από τα δεύτερα, τότε όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το ένα του άλλου, τόσες φορές πολλαπλάσια θα είναι και όλα μαζί τα πρώτα των δεύτερων. Απεδείχθη το ζητούμενο.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, αυτή η πρόταση διαβάζεται $m\alpha + m\beta + \ldots = m(\alpha + \beta + \ldots)$]

β΄

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

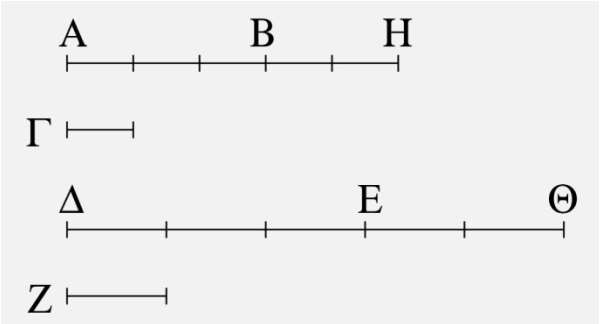
Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ. καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Πρόταση 2

Εάν το πρώτο και το τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου μεγέθους (αντίστοιχα) και ένα πέμπτο κι ένα έκτο μέγεθος είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου (αντίστοιχα), τότε το πρώτο μέγεθος και το πέμπτο αθροιζόμενα μαζί και το τρίτο και το έκτο αθροιζόμενα μαζί, θα είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα.

Ας είναι λοιπόν ένα πρώτο μέγεθος ΑΒ και ένα τρίτο ΔΕ ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου μεγέθους Γ και ενός τετάρτου μεγέθους Ζ (αντίστοιχα). Έστω και ένα πέμπτο μέγεθος το ΒΗ ίσο πολλαπλάσιο του δευτέρου μεγέθους Γ και ένα έκτο μέγεθος το ΕΘ ίσο πολλαπλάσιο του τετάρτου μεγέθους Ζ. Λέω ότι προστιθέμενα το πρώτο και το πέμπτο, το ΑΗ, είναι ίσο πολλαπλάσιο του Γ, όπως είναι το τρίτο και το έκτο προστιθέμενα, το ΔΘ, του τετάρτου μεγέθους Ζ.



σχήμα 2

Επειδή το ΑΒ είναι ίσο πολλαπλάσιο του Γ και το ΔΕ του Ζ, όσα μεγέθη ίσα με το Γ υπάρχουν στο ΑΒ τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ υπάρχουν και στο ΔΕ. Για τον ίδιο λόγο όσα μεγέθη ίσα με το Γ υπάρχουν στο ΒΗ, τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ υπάρχουν και στο ΕΘ. Άρα, όσα μεγέθη ίσα με το Γ υπάρχουν συνολικά στο ΑΗ, τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ υπάρχουν συνολικά στο ΔΘ. Οπότε αθροιζόμενα το πρώτο μέγεθος και το πέμπτο, δηλαδή το ΑΗ, και επίσης το τρίτο και το έκτο, δηλαδή το ΔΘ, δίνουν ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ και του τετάρτου Ζ αντίστοιχα.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Επομένως αν ένα πρώτο μέγεθος και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου μεγέθους κι ενός τετάρτου αντίστοιχα και ένα πέμπτο μέγεθος και ένα έκτο (μεγεθος) είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου κι ενός τετάρτου αντίστοιχα, τότε το πρώτο μέγεθος και το πέμπτο προστιθέμενα μαζί και το τρίτο και το έκτο (πάλι προστιθέμενα μαζί) θα είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου (μεγέθους) αντίστοιχα. Και αυτό είναι ό,τι ήθελα να απόδείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή διαβάζεται: $m\alpha + n\alpha = (m + n)\,\alpha$*]*

γ΄

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

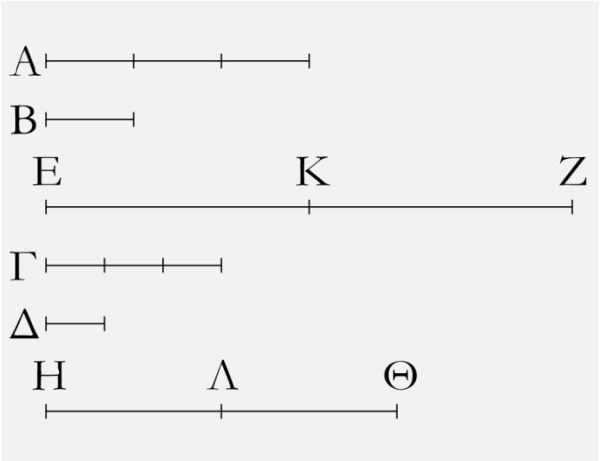
Πρόταση 3

Εάν ένα πρώτο μέγεθος και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου κι ενός τετάρτου μεγέθους (αντίστοιχα) και λάβω ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου μεγέθους τότε –μέσω της ισότητας– τα μεγέθη που θα προκύψουν θα είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα.

Έστω ένα πρώτο μέγεθος Α κι ένα τρίτο μέγεθος Γ που είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου Β κι ενός τετάρτου Δ αντίστοιχα. Παίρνοντας ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ τα ΕΖ, ΗΘ αντίστοιχα, τότε αυτά είναι ίσα πολλαπλάσια του Β και του Δ αντίστοιχα.

Επειδή το ΕΖ και το ΗΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του Α και του Γ αντίστοιχα, όσα μεγέθη ίσα με Α υπάρχουν στο ΕΖ, τόσα μεγέθη ίσα με Γ υπάρχουν και στο ΗΘ. Διαιρώ το μεν ΕΖ με το Α στα ίσα (μεταξύ τους) μεγέθη ΕΚ, ΚΖ και το δε ΗΘ με το Γ στα ίσα μεγέθη ΗΛ, ΛΘ. Είναι δηλαδή ίσο το πλήθος των ΕΚ, ΚΖ με το πλήθος των ΗΛ, ΛΘ· και επειδή είναι ίσα πολλαπλάσια το Α του Β και το Γ του Δ, ίσο δε το μεν ΕΚ του Α, το δε ΗΛ του Γ, άρα ίσο πολλαπλάσιο το ΕΚ του Β και το ΗΛ του Δ. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσο πολλαπλάσιο το ΚΖ του Β και το ΛΘ του Δ. Επειδή λοιπόν το πρώτο μέγεθος ΕΚ και το τρίτο ΗΛ είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου μεγέθους Β και του τετάρτου μεγέθους Δ αντίστοιχα, είναι δε και το πέμπτο μέγεθος ΚΖ και το έκτο ΛΘ ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου Β και του τετάρτου Δ και επομένως αθροιζόμενα το πρώτο και πέμπτο, το ΕΖ δηλαδή, και το τρίτο και έκτο, το ΗΘ δηλαδή, είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου μεγέθους Β και τετάρτου μεγέθους Δ αντίστοιχα. (Πρόταση 5.2)

σχήμα 3



Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Επομένως εάν το πρώτο και το τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου κι ενός τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα και λαμβάνοντας ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου μεγέθους, λόγω της ισότητας των ληφθέντων καθένα είναι ίσο πολλαπλάσιο το μεν του δευτέρου, το δε του τετάρτου αντίστοιχα. Αυτό ακριβώς που έπρεπε να δειχθεί.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή διαβάζεται: m (nα) = (mn) α]

δ΄

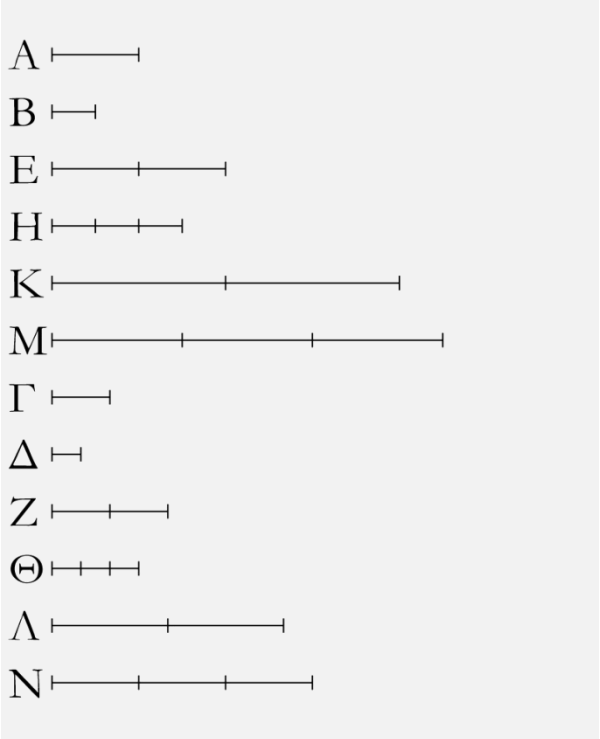
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Πρόταση 4

Εάν το πρώτο μέγεθος προς το δεύτερο (μέγεθος) και το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο έχουν τον ίδιο λόγο, τότε τα ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και τρίτου μέγεθος προς τα ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου, με οποιοδήποτε πολλαπλασιασμό, ληφθέντα κατάλληλα, θα έχουν τον ίδιο λόγο.

Διότι το πρώτο μέγεθος, το Α, προς το δεύτερο, το Β, έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο μέγεθος, το Γ, προς το τέταρτο, το Δ και παίρνοντας ίσα πολλαπλάσια των μεν Α, Γ τα Ε, Ζ, των δε Β, Δ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια, τα Η, Θ, λέγω ότι όπως είναι το Ε προς το Η, έτσι και το Ζ προς το Θ.



σχήμα 4

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

[Καὶ] ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Λ.

Ας πάρουμε ίσα πολλαπλάσια των Ε, Ζ τα Κ, Λ αντίστοιχα, των δε Η, Θ, άλλα τυχαία, ίσα πολλαπλάσια τα Μ, Ν.

Και επειδή είναι ίσο πολλαπλάσιο τον μεν Ε του Α, το δε Ζ του Γ και έχουν παρθεί τα Κ, Λ ίσα πολλαπλάσια των Ε, Ζ, άρα είναι ίσα πολλαπλάσια το Κ του Α και το Λ του Γ. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσο πολλαπλάσιο το Μ του Β και το Ν του Δ

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Πρόταση 5.3). Και επειδή όπως είναι το Α προς Β, έτσι είναι το Γ προς Δ και έχουν παρθεί των μεν Α, Γ ίσα πολλαπλάσια τα Κ, Λ, των δε Β, Δ άλλα, τυχαία, ίσα πολλαπλάσια τα Μ, Ν, τότε αν υπερέχει το Κ του Μ, υπερέχει και το Λ του Ν, αν είναι ίσο, είναι ίσο και αν είναι λιγότερο είναι λιγότερο. Και αν είναι τα μεν Κ, Λ ίσα πολλαπλάσια των Ε, Ζ, τα δε Μ, Ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Η, Θ είναι επομένως το Ε προς το Η όπως το Ζ προς το Θ (Ορισμός 5.5).

Επομένως αν ένα πρώτο μέγεθος προς ένα δεύτερο κι ένα τρίτο προς ένα τέταρτο (μέγεθος) έχουν τον ίδιο λόγο, και τα ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και τρίτου μεγέθους προς τα ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου μεγέθους, ληφθέντα αντίστοιχα, με οποιοδήποτε πολλαπλασιασμό, θα έχουν τον ίδιο λόγο. [Όπερ έδει δείξαι]

[Με σύγχρονο συμβολισμό: Εάν α/β = γ/δ, τότε mα/nβ = mγ/nδ, για όλα τα m και n]

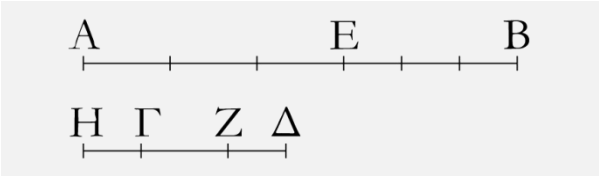
ε´

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Πρόταση 5

Εάν ένα πρώτο μέγεθος είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο ενός δευτέρου μεγέθους, όσες ακριβώς είναι ένα αφαιρεθέν τμήμα του πρώτου πολλαπλάσιο ενός αφαιρεθέντος τμήματος του δευτέρου, τότε και το υπόλοιπο τμήμα του πρώτου μεγέθους θα είναι ίσο πολλαπλάσιο του υπολοίπου τμήματος του δευτέρου μεγέθους, όσο και το όλον (πρώτο) του όλου (δευτέρου) αντίστοιχα.

σχήμα 5



Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ. κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τὸ ΗΓ τῷ ΔΖ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Έστω το μέγεθος ΑΒ ίσο πολλαπλάσιο του ΓΔ, όπως ακριβώς το αφαιρεθέν μεγεθος ΑΕ του αφαιρεθέντος ΓΖ και ισχυρίζομαι ότι και το υπόλοιπο ΕΒ είναι ίσο πολλαπλάσιο του ΖΔ, όσο ακριβώς πολλαπλάσιο είναι όλο το ΑΒ όλου του ΓΔ.

Όσες φορές το ΑΕ διαιρείται από το ΓΖ, τόσες φορές μπορεί το ΕΒ να είναι διαιρετό από κάποιο ΓΗ.

Και επειδή όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το είναι το ΑΕ του ΓΖ τόσες και το ΕΒ του ΗΓ, άρα όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το ΑΕ του ΓΖ θα είναι και το ΑΒ του ΗΖ (Πρόταση 1). Εντωμεταξύ το ΑΒ είναι ίσο πολλαπλάσιο και του ΗΖ και του ΓΔ, οπότε είναι ίσα τα ΗΖ και ΓΔ. Αν αφαιρέσω το κοινό τμήμα τους, το ΓΖ, τα υπόλοιπα τμήματα ΗΓ και ΖΔ θα είναι ίσα. Και επειδή είναι ίσο πολλαπλάσιο το ΑΕ του ΓΖ και το ΕΒ του ΗΓ –δεδομένου ότι είναι ίσα τα ΗΓ και ΔΖ– θα είναι ίσα πολλαπλάσια το ΑΕ του ΓΖ και το ΑΒ του ΓΔ. Άρα ίσα πολλαπλάσια είναι το ΕΒ του ΖΔ και το ΑΒ του ΓΔ. Δηλαδή το υπόλοιπο ΕΒ ίσο πολλαπλάσιο του υπολοίπου ΖΔ, όσο είναι το όλον του ΑΒ, όλου το ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα αν ένα πρώτο μέγεθος είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο ενός άλλου δευτέρου μεγέθους, όσες είναι ένα τμήμα που αφαιρείται από το πρώτο μέγεθος πολλαπλάσιο ενός τμήματος που αφαιρείται από το δεύτερο μέγεθος, τότε το υπόλοιπο του πρώτου μεγέθους θα είναι ίσες φορές πολλαπλάσιο του υπολοίπου του δευτέρου μεγέθους (όσες είναι το όλο πρώτο μέγεθος του όλου δευτέρου μεγέθους). Όπερ έδει δείξαι.

[Σύγχρονη γραφή: $m\alpha - m\beta = m\ (\alpha - \beta)$]

ϛ´

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

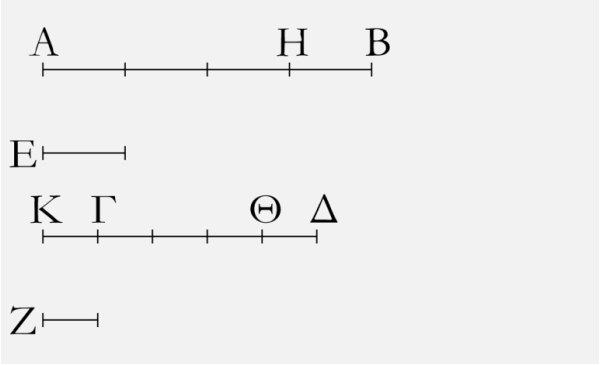
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Πρόταση 6

Εάν δύο μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια δυο άλλων μεγεθών και αφαιρεθούν από τα πρώτα κάποια μεγέθη, ίσα αντίστοιχα πολλαπλάσια των δευτέρων τότε τα υπόλοιπα είναι επίσης αντίστοιχα ίσα με τα δεύτερα μεγέθη ή ίσα πολλαπλάσια αυτών (αντίστοιχα πάλι).

Έστω τα δύο μεγέθη ΑΒ, ΓΔ ίσα πολλαπλάσια των δύο μεγεθών Ε, Ζ αντίστοιχα. Αφαιρούνται τα τμήματα (μέρη) ΑΗ, ΓΘ ίσα πολλαπλάσια των Ε και Ζ αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι τα υπόλοιπα ΗΒ και ΘΔ είναι επίσης ίσα των Ε και Ζ αντίστοιχα ή ίσα πολλαπλάσια αυτών.

σχήμα 6



Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν.

Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ Ζ τῷ ΚΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Έστω ότι το ΗΒ είναι ίσο με Ε, κατ' αρχάς. Τότε και το ΘΔ θα είναι ίσο με το Ζ.

Ας τοποθετήσουμε το ΓΚ ίσο με Ζ. Επειδή είναι ίσα πολλαπλάσια το ΑΗ του Ε και το ΓΘ του Ζ, ίσο δε το μεν ΗΒ του Ε, το δε ΚΓ του Ζ, ίσα επομένως θα είναι πολλαπλάσια το ΑΒ του Ε και το ΚΘ του Ζ (Πρόταση 2). Ίσα επίσης πολλαπλάσια είναι το ΑΒ του Ε και το ΓΔ του Ζ. Άρα τα ΚΘ και ΓΔ είναι ίσα πολλαπλάσια του Ζ. Επειδή λοιπόν καθένα από τα ΚΘ, ΓΔ είναι ίσο πολλαπλάσιο του Ζ, ίσο επομένως θα είναι το ΚΘ με το ΓΔ. Αφαιρούμε από το καθένα, το κοινό τους τμήμα ΓΘ. Το υπόλοιπο ΚΓ (του ενός) θα είναι ίσο με το υπόλοιπο ΘΔ του άλλου. Όμως επειδή το ΚΤ είναι ίσο με το Ζ και το ΘΔ θα είναι ίσο με το Ζ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι, κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Με όμοιο τρόπο είναι ανάγκη να δείξουμε ότι αν είναι πολλαπλάσιο το ΗΒ του Ε, ίσο πολλαπλάσιο θα είναι και το ΘΔ του Ζ.

Επομένως εάν δύο μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια δύο άλλων μεγεθών και κάποια τμήματα, ίσα πολλαπλάσια των δεύτερων μεγεθών αντίστοιχα, αφαιρεθούν από τα πρώτα μεγέθη, τότε τα υπόλοιπα είναι επίσης ίσα των δεύτερων μεγεθών ή ίσα πολλαπλάσια αυτών αντίστοιχα. Όπερ έδει δείξαι.

[Με σύγχρονο συμβολισμό: $m\alpha - n\alpha = (m - n)\,\alpha$]

ζ΄

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι, ὃ ἔτυχεν, μέγεθος τὸ Γ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

σχήμα 7

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Ζ. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

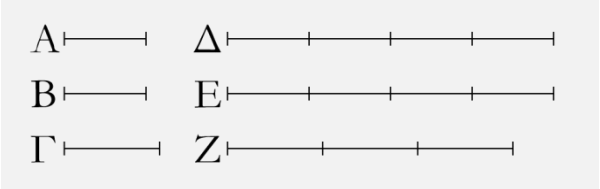
Λέγω [δή], ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Πρόταση 7

Ίσα μεγέθη προς το ίδιο μέγεθος έχουν τον ίδιο λόγο και το ίδιο μέγεθος προς ίσα μεγέθη επίσης τον ίδιο λόγο.

Έστω τα ίσα μεγέθη Α, Β κι ένα άλλο τυχαίο μέγεθος Γ. Ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα Α, Β προς το Γ έχει τον ίδιο λόγο και ότι το Γ προς καθένα από τα Α και Β έχει τον ίδιο λόγο.



Έστω τα ίσα πολλαπλάσια Δ και Ε των Α και Β αντίστοιχα και Ζ ένα τυχαίο πολλαπλάσιο του Γ.

Επομένως, αφού Δ και Ε είναι ίσα πολλαπλάσια των Α και Β αντίστοιχα και το Α είναι ίσο με το Β, το Δ είναι επίσης ίσο με το Ε. Το Ζ είναι τυχαία διαφορετικό. Έτσι, αν το Δ υπερβαίνει το Ζ, τότε το Ε επίσης υπερβαίνει το Ζ και αν το Δ είναι ίσο με το Ζ, τότε το Ε είναι επίσης ίσο με το Ζ και αν το Δ είναι λιγότερο από το Ζ, τότε επίσης το Ε είναι λιγότερο από το Ζ. Τα Δ και Ε είναι ίσα πολλαπλάσια των Α και Β αντίστοιχα και το Ζ ένα τυχαίο πολλαπλάσιο του Γ. Άρα όπως είναι το Α προς Γ, έτσι είναι το Β προς Γ. (Ορισμός 5.5)

Έτσι ισχυρίζομαι ότι και το Γ προς καθένα των Α και Β, έχει τον ίδιο λόγο.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε, χρησιμοποιώντας την ίδια κατασκευή, ότι το Δ είναι ίσο με το Ε. Το Ζ έχει κάποια άλλη τιμή. Έτσι αν το Ζ υπερβαίνει το Δ, τότε επίσης υπερβαίνει το Ε και αν το Ζ είναι ίσο με το Δ, τότε είναι επίσης ίσο με το Ε και αν το Ζ είναι λιγότερο από το Δ, τότε είναι επίσης λιγότερο από το Ε. Το Ζ είναι ένα πολλαπλάσιο του Γ και το Δ και Ε είναι άλλα τυχαία, ίσα πολλαπλάσια του Α και

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

του Β. Έτσι, όπως είναι το Γ προς το Α, είναι το Γ προς το Β. (Ορισμός 5.5)

Άρα, ίσες ποσότητες έχουν τον ίδιο λόγο προς την ίδια ποσότητα και αυτή η τελευταία ποσότητα, έχει τον ίδιο λόγο προς αυτές τις ίσες ποσότητες.

Πόρισμα

Είναι φανερό, από τούτα, πως αν κάποιες ποσότητες είναι ανάλογες, τότε αυτές θα είναι ανάλογες και αντίστροφα (ή και ανεστραμμένες).

[Με σύγχρονο συμβολισμό, αυτό το πόρισμα γράφεται: Εάν α/β = γ/δ τότε β/α = δ/γ]

η´

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

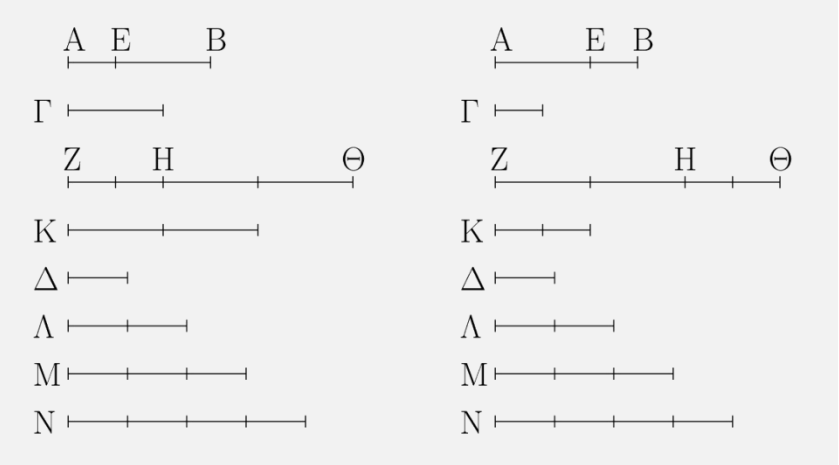
Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Πρόταση 8

Το μεγαλύτερο, από άνισα μεγέθη, έχει μεγαλύτερο λόγο προς κάποιο άλλο, από κείνον που έχει το μικρότερο προς το ίδιο αυτό μέγεθος. Και το τελευταίο αυτό μέγεθος προς το μικρότερο από τα άνισα μεγέθη, έχει μεγαλύτερο λόγο από το λόγο αυτού προς το μεγαλύτερο από τα άνισα μεγέθη.

Έστω τα άνισα μεγέθη ΑΒ και Γ, με ΑΒ το μεγαλύτερο και ένα άλλο τυχαίο μέγεθος το Δ. Ισχυρίζομαι πως το ΑΒ προς το Δ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το Γ προς το Δ και το Δ προς το Γ μεγαλύτερο λόγο από ότι το Δ προς το ΑΒ.

σχήμα 8



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ· τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.

Επειδή το ΑΒ είναι μεγαλύτερο του Γ, θεωρώ ΒΕ ίσο με Γ. Έτσι το μικρότερο από τα ΑΕ και ΕΒ πολλαπλασιαζόμενο, μπορεί μερικές φορές να είναι μεγαλύτερο από το Δ (Ορισμός 5.4). Κατ΄αρχάς, έστω ΑΕ μικρότερο του ΕΒ και καθώς πολλαπλασιάζω το ΑΕ, έστω το ΖΗ πολλαπλάσιό του που γίνεται μεγαλύτερο του Δ, και όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το ΖΗ του ΑΕ, τόσες φορές πολλαπλάσιο να γίνει και το μεν ΗΘ του ΕΒ, το δε Κ του Γ. Και λαμβάνω το Λ διπλάσιο του Δ, το Μ τριπλάσιο και συνεχίζω αυξάνοντας κατά ένα, έως ότου το λαμβανόμενο πολλαπλάσιο του Δ γίνει πρώτη φορά μεγαλύτερο του

Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὔκ ἐστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ· τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὔκ ἐστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστιν. μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστιν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστιν, συναμφότερα δὲ τὰ Μ, Δ τοῦ Δ ἐστι τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Μ, Δ μεῖζόν ἐστιν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει· τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Κ. Έστω ότι ελήφθησαν και έστω το Ν, το τετραπλάσιο του Δ, ότι είναι το πρώτο πολλαπλάσιο μεγαλύτερο του Κ.

Επειδή το Κ είναι πρώτα λιγότερο του Ν, το Κ δεν είναι λιγότερο του Μ. Και επειδή το ΖΗ είναι ίσο πολλαπλάσιο του ΑΕ και το ΗΘ του ΕΒ, άρα ίσο πολλαπλάσιο το ΖΗ του ΑΕ και το ΖΘ του ΑΒ (Πρόταση 1). Ίσο δε πολλαπλάσιο το ΖΗ του ΑΕ και το Κ του Γ, άρα ίσο πολλαπλάσιο είναι το ΖΘ του ΑΒ και το Κ του Γ. Τα ΖΘ, Κ άρα των ΑΒ, Γ είναι ίσα πολλαπλάσια. Πάλι επειδή είναι ίσο πολλαπλάσιο το ΗΘ του ΕΒ και το Κ του Γ, ίσο δε το ΕΒ του Γ, ίσο επομένως και το ΗΘ του Κ. Το δε Κ του Μ δεν είναι λιγότερο, άρα ούτε το ΗΘ του Μ είναι λιγότερο. Μεγαλύτερο δε το ΖΗ του Δ, άρα όλο το ΖΘ είναι μεγαλύτερο κι από τα δυο μαζί Δ και Μ. Αλλά και τα δυο μαζί Δ και Μ είναι ίσα με το Ν, επειδή το Μ είναι τριπλάσιο του Δ, και τα δυο δε μαζί Μ και Δ είναι τετραπλάσια του Δ, είναι δε και το Ν τετραπλάσιο του Δ, άρα Μ και Δ μαζί είναι ίσα με Ν. Αλλά το ΖΘ είναι μεγαλύτερο των Μ και Δ, το ΖΘ άρα υπερέχει του Ν. Το δε Κ δεν υπερέχει του Ν. Και είναι τα μεν ΖΘ, Κ των ΑΒ, Γ ίσα πολλαπλάσια, το δε Ν ένα τυχαίο άλλο πολλαπλάσιο του Δ. Άρα το ΑΒ προς το Δ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το Γ προς το Δ (Ορισμός 5.7).

Λέγω επομένως πως το Δ προς το Γ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι έχει το Δ προς το ΑΒ.

Όμοια με τα ήδη κατασκευασμένα μεγέθη, μπορούμε να δείξουμε ότι το μεν Ν υπερέχει του Κ, το δε Ν δεν υπερέχει του ΖΘ και είναι το μεν Ν, πολλαπλάσιο του Δ, τα δε ΖΘ, Κ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, Γ αντίστοιχα. Οπότε το Δ προς το Γ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το Δ προς το ΑΒ (Ορισμός 5.5).

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω. τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ οὐκ ἐστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ, τουτέστι τοῦ Ν, ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τοῦ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Αλλά έστω το ΑΕ μεγαλύτερο του ΕΒ. Πράγματι το μικρότερο ΕΒ, πολλαπλασιαζόμενο γίνεται κάποτε μεγαλύτερο του Δ. Έστω ότι πολλαπλασιάστηκε και έστω το ΗΘ, πολλαπλάσιο μεν του ΕΒ, μεγαλύτερο δε του Δ και όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το ΗΘ του ΕΒ, τόσες φορές πολλαπλάσιο θα είναι και το μεν ΖΗ του ΑΕ, το δε Κ του Γ. Συνεπώς με όμοιο τρόπο θα δείξουμε ότι τα ΖΘ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, Γ και λαμβάνοντας, με όμοιο τρόπο, το Ν πολλαπλάσιο μεν του Δ, πρώτα δε μεγαλύτερο του ΖΗ, ώστε πάλι το ΖΗ να μην είναι μικρότερο του Μ. Το ΗΘ να είναι δε μεγαλύτερο του Δ. Ολόκληρο επομένως το ΖΘ, υπερέχει των Δ, Μ, δηλαδή του Ν. Το δε Κ δεν υπερέχει του Ν και επειδή το ΖΗ είναι μεγαλύτερο του ΗΘ, δηλαδή του Κ, επίσης δεν υπερέχει του Ν. Ακολουθώντας τα παραπάνω επιχειρήματα, μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη με τον ίδιο τρόπο.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα για άνισα μεγέθη, το μεγαλύτερο προς κάποιο άλλο (μέγεθος) έχει μεγαλύτερο λόγο από το μικρότερο προς το ίδιο (μέγεθος). Και το τελευταίο αυτό μέγεθος προς το μικρότερο έχει μεγαλύτερο λόγο από το ίδιο αυτό μέγεθος προς το μεγαλύτερο. Ακριβώς αυτό ήθελα να αποδείξω.

θ΄

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

σχήμα 9

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

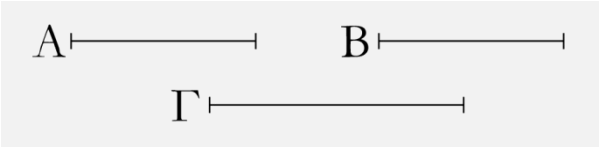
Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση 9

Τα μεγέθη που προς το ίδιο μέγεθος, έχουν ίδιο λόγο είναι ίσα μεταξύ τους. Και τα μεγέθη εκείνα προς τα οποία, το ίδιο μέγεθος έχει ίδιο λόγο, είναι ίσα.



Έστω ότι έχει καθένα από τα (μεγέθη) Α και Β προς το (μέγεθος) Γ τον ίδιο λόγο, τότε ισχυρίζομαι πως το (μέγεθος) Α είναι ίσο με το (μέγεθος) Β.

Εάν δεν είναι, τότε καθένα από τα (μεγέθη) Α και Β προς το (μέγεθος) Γ δεν θα είχε τον ίδιο λόγο. Όμως έχει, οπότε το (μέγεθος) Α είναι ίσο με το (μέγεθος) Β.

Έχοντας πάλι το (μέγεθος) Γ προς καθένα από τα μεγέθη Α και Β τον ίδιο λόγο, ισχυρίζομαι πως το (μέγεθος) Α είναι ίσο με το (μέγεθος) Β.

Εάν δεν είναι, ούτε το (μέγεθος) Γ προς καθένα από τα (μεγέθη) Α και Β έχει τον ίδιο λόγο. Όμως έχει. Άρα είναι το (μέγεθος) Α ίσο με το (μέγεθος) Β.

Επομένως τα μεγέθη, τα οποία προς το ίδιο μέγεθος, έχουν τον ίδιο λόγο, είναι ίσα μεταξύ τους και εκείνα τα μεγέθη, προς τα οποία, το ίδιο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο, είναι ίσα. Ακριβώς αυτό που ήθελα να δείξω.

ι΄

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

σχήμα 10

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

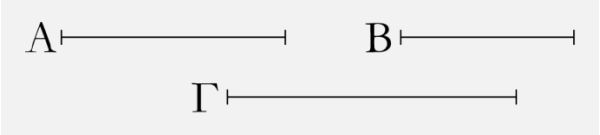
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Α τῷ Β· ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β· τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Β τῷ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α

Πρόταση 10

Για μεγέθη, τα οποία προς το ίδιο μεγεθος έχουν κάποιο λόγο, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο λόγο, είναι μεγαλύτερο. Το ίδιο μέγεθος προς διαφορετικά μεγέθη, έχει μεγαλύτερο λόγο με το μικρότερο μέγεθος από αυτά.



Έστω ότι το (μέγεθος) Α προς το (μέγεθος) Γ έχει μεγαλύτερο λόγο από εκείνο του (μεγέθους) Β προς το (μέγεθος) Γ, ισχυρίζομαι τότε πως είναι το (μέγεθος) Α μεγαλύτερο του (μεγέθους) Β.

Εάν δεν είναι, το μέγεθος Α είναι ίσο με το μέγεθος Β ή είναι μικρότερο από αυτό. Το (μέγεθος) Α δεν είναι ίσο με το (μέγεθος) Β, γιατί τότε καθένα από τα (μεγέθη) Α και Β θα είχε προς το (μέγεθος) Γ τον ίδιο λόγο, δεν έχει όμως. Επομένως δεν είναι ίσο το (μέγεθος) Α με το (μέγεθος) Β. Ούτε επίσης μικρότερο είναι το (μέγεθος) Α του (μεγέθους) Β. Γιατί τότε το (μέγεθος) Α προς το (μέγεθος) Γ θα είχε μικρότερο λόγο από εκείνο του (μεγέθους) Β προς το (μέγεθος) Γ, που όμως δεν έχει. Άρα δεν είναι το (μέγεθος) Α μικρότερο του (μεγέθους) Β. Εδείχθη δε ότι το (μέγεθος) Α δεν είναι ούτε ίσο με το (μέγεθος) Β. Επομένως το (μέγεθος) Α είναι μεγαλύτερο από το (μέγεθος) Β.

Έστω πάλι πως το (μέγεθος) Γ προς το (μέγεθος) Β έχει μεγαλύτερο λόγο από εκείνο που έχει το ίδιο μέγεθος προς το (μέγεθος) Α. Ισχυρίζομαι τότε πως το (μέγεθος) Β είναι μικρότερο του (μεγέθους) Α.

Γιατί αν δεν είναι, τότε είναι ίσο ή μεγαλύτερο. Όμως το (μέγεθος) Β δεν είναι ίσο με το (μέγεθος) Α. Διότι το (μέγεθος) Γ προς καθένα από τα (μεγέθη) Α ή Β θα είχε

τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

τον ίδιο λόγο. Όμως δεν έχει. Άρα δεν είναι ίσο το (μέγεθος) Α με το (μέγεθος) Β. Ούτε μεγαλύτερο είναι το (μέγεθος) Β του (μεγέθους) Α. Γιατί τότε το (μέγεθος) Γ προς το (μέγεθος) Β θα είχε μικρότερο λόγο, από εκείνο του (μεγέθους) Γ προς το (μέγεθος) Α. Δεν έχει όμως, άρα δεν είναι μεγαλύτερο το (μέγεθος) Β του (μεγέθους) Α. Εδείχθη δε πως δεν είναι ούτε ίσο, οπότε το (μέγεθος) Β είναι μικρότερο του (μεγέθους) Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα για διαφορετικά (μεγέθη) προς το ίδιο (μέγεθος), εκείνο που έχει το μεγαλύτερο λόγο είναι το μεγαλύτερο (μέγεθος). Και εκείνο το (μέγεθος), προς το οποίο, το ίδιο (μέγεθος) έχει μεγαλύτερο λόγο, είναι το μικρότερο (μέγεθος). Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

ια΄

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

σχήμα 11

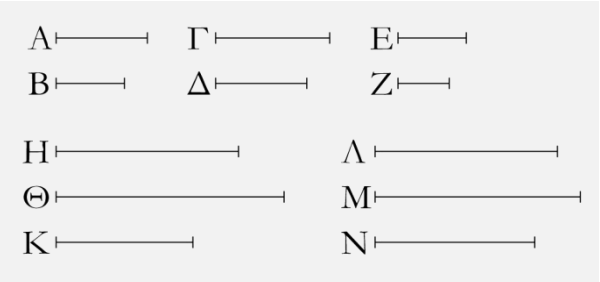
Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Πρόταση 11

Οι λόγοι που είναι ίσοι με τον ίδιο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι.



Έστω λοιπόν το Α προς το Β, όπως το Γ προς το Δ. Όπως δε το Γ προς το Δ, έτσι το Ε προς το Ζ. Ισχυρίζομαι ότι όπως το Α προς το Β, έτσι είναι και το Ε προς το Ζ.

Παίρνω λοιπόν τα Η, Θ, Κ ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ, Ε και τα Λ, Μ, Ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ, Ζ.

Και επειδή όπως είναι το Α προς το Β, έτσι και το Γ προς το Δ και έχουν ληφθεί τα ίσα πολλαπλάσια Η, Θ των Α, Γ και τα ίσα πολλαπλάσια (άλλα και τυχαία) Λ, Μ των Β, Δ, εάν υπερέχει το Η του Λ, υπερέχει και το Θ του Μ και εάν είναι ίσο, ίσο και το Θ του Μ και εάν ελλείπει, ελλείπει και το Θ του Μ. Επειδή πάλι είναι όπως το Γ προς το Δ έτσι και το Ε προς το Ζ και έχουν ληφθεί τα Θ, Κ ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ε και τα Μ, Ν, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Δ, Ζ, εάν υπερέχει το Θ του Μ, υπερέχει και το Κ του Ν και εάν είναι ίσο, είναι ίσο το Κ με το Ν και αν είναι λιγότερο, είναι λιγότερο και το Κ του Ν. Αλλά αν υπερείχε το Θ του Μ, θα υπερείχε και το Η του Λ και εάν ήταν ίσο, θα ήταν ίσο και εάν λιγότερο, θα ήταν λιγότερο. Ώστε και αν υπερέχει το Η του Λ, υπερέχει και το Κ του Ν και εάν είναι ίσο είναι ίσο και εάν είναι λιγότερο είναι λιγότερο. Και είναι τα μεν Η, Κ ίσα πολλαπλάσια των Α, Ε, τα δε Λ, Ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Β, Ζ. Επομένως όπως το Α προς το Β έτσι το Ε προς το Ζ.

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα λόγοι που είναι ίσοι με τον ίδιο λόγο, είναι και μεταξύ τους ίσοι. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

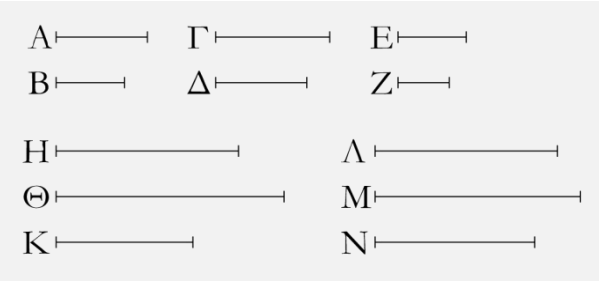
[Με σύγχρονο συμβολισμό, η παραπάνω πρόταση γράφεται:
Εάν α/β = γ/δ και γ/δ = ε/ζ, τότε α/β = ε/ζ]

ιβ΄

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Πρόταση 12

Εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη ανάλογα, με κάποιο τρόπο, τότε όπως είναι ένα των ηγουμένων προς ένα των επομένων, έτσι είναι όλα τα ηγούμενα προς όλα τα επόμενα.



σχήμα 12

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλαττον, ἐλάττονα. καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ

Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, με κάποιο τρόπο ανάλογα: όπως είναι το Α προς το Β, έτσι το Γ προς το Δ και το Ε προς το Ζ. Ισχυρίζομαι ότι όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι τα Α, Γ, Ε προς τα Β, Δ, Ζ.

Λαμβάνω τα ίσα πολλαπλάσια Η, Θ, Κ των Α, Γ, Ε αντίστοιχα και τα ίσα, μα άλλα τυχαία, Λ, Μ, Ν των Β, Δ, Ζ αντίστοιχα.

Και επειδή όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Γ προς το Δ και το Ε προς το Ζ και ελήφθησαν τα μεν Η, Θ, Κ ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ, Ε, τα δε Λ, Μ, Ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Β,Δ,Ζ αντίστοιχα, άρα εάν υπερέχει το Η του Λ, υπερέχει και το Θ του Μ και το Κ του Ν και εάν το Η είναι ίσο με το Λ, είναι και το Θ ίσο με το Μ και το Κ ίσο με το Ν και εάν το Η είναι λιγότερο από το Λ, είναι και το Θ λιγότερο από το Μ και το Κ λιγότερο από το Ν (Ορισμός 5.5). Ώστε και αν υπερέχει το Η του Λ τότε επίσης υπερέχουν και τα Η, Θ, Κ των Λ, Μ, Ν και εάν είναι ίσο το Η με το Λ, τότε θα είναι ίσα και τα Η, Θ, Κ με τα Λ, Μ, Ν και εάν είναι λιγότερο το Η του Λ, τότε θα είναι και τα Η, Θ, Κ λιγότερα από τα Λ, Μ, Ν. Και είναι το μεν Η και τα Η, Θ, Κ του Α και των Α, Γ, Ε αντίστοιχα

Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

ίσα πολλαπλάσια, καθώς εάν υπάρχει κάποιος αριθμός μεγεθών ίσος το πλήθος με κάποιον άλλον, με καθένα (από τα μεγέθη στο πρώτο πλήθος) ίσο πολλαπλάσιο του αντίστοιχού του (στο δεύτερο πλήθος), τότε όσο είναι πολλαπλάσιο, ένα από τα μεγέθη αυτά του αντίστοιχού του, τόσο πολλαπλάσιο θα είναι και όλα μαζί όλων των αντιστοίχων τους (Πρόταση 5.1). Για τον ίδιο λόγο, το Λ και τα Λ, Μ, Ν είναι αντίστοιχα ίσα πολλαπλάσια του Β και των Β,Δ,Ζ. Άρα όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι τα Α, Γ, Ε προς τα Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα αν κάποια μεγέθη είναι ανάλογα, τότε όπως είναι ένα των ηγουμένων προς ένα των επομένων, έτσι θα είναι και όλα (μαζί) τα ηγούμενα προς όλα (μαζί) τα επόμενα. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η παραπάνω πρόταση γράφεται:
Εάν α/α' = β/β' = γ/γ' = ..., τότε α/α' = (α + β + γ + ...) / (α' + β' + γ' + ...)]

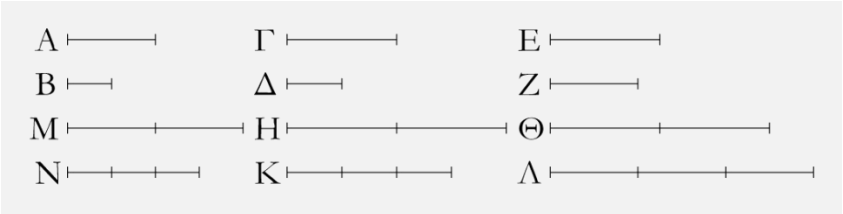
ιγ΄

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρόταση 13

Εάν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο, το τρίτο δε (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος) έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) προς το έκτο (μέγεθος) τότε και το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) θα έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) προς το έκτο (μέγεθος).

σχήμα 13



Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Το πρώτο (μέγεθος) Α προς το δεύτερο (μέγεθος) Β έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) Γ προς το τέταρτο (μεγεθος) Δ, το τρίτο δε (μέγεθος) Γ προς το τέταρτο (μέγεθος) Δ έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) Ε προς το έκτο (μέγεθος) Ζ. Ισχυρίζομαι ότι και το πρώτο (μέγεθος) Α προς το δεύτερο (μέγεθος) Β έχει μεγαλύτερο λόγο από εκείνο που έχει το πέμπτο (μέγεθος) Ε προς το έκτο (μέγεθος) Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Επειδή υπάρχουν των μεν Γ, Ε ίσα πολλαπλάσια, των δε Δ, Ζ άλλα, τυχαία, ίσα πολλαπλάσια και το μεν πολλαπλάσιο του Γ υπερέχει του πολλαπλασίου του Δ, το δε πολλαπλάσιο του Ε δεν υπερέχει του πολλαπλασίου του Ζ (ορισμός 5.7), ας ληφθούν και έστω των μεν Γ, Ε ίσα πολλαπλάσια τα Η,Θ, των δε Δ, Ζ άλλα, τυχαία, ίσα πολλαπλάσια τα Κ, Λ, ώστε το μεν Η να υπερέχει του Κ , το δε Θ να μην υπερέχει του Λ. Και όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το Η του Γ, τόσες φορές πολλαπλάσιο έστω και το Μ του Α, όσες φορές δε πολλαπλάσιο είναι το Κ του Δ, τόσες φορές πολλαπλάσιο έστω και το Ν του Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Και επειδή όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Γ προς το Δ, και λαμβάνοντας των μεν Α, Γ ίσα πολλαπλάσια τα Μ, Η (αντίστοιχα), των δε Β, Δ άλλα τυχαία, ίσα πολλαπλάσια τα Ν, Κ (αντίστοιχα), τότε εάν υπερέχει το Μ του Ν, υπερέχει και το Η του Κ και εάν είναι ίσο το Μ και το Ν είναι ίσο και το Η με το Κ, και εάν είναι λιγότερο το Μ από το Ν, είναι και το Η λιγότερο του Κ. (Ορισμός 5.5). Υπερέχει δε το Η του Κ, άρα υπερέχει και το Μ του Ν. Το δε Θ δεν υπερέχει του Λ. Και είναι τα μεν Μ,Θ ίσα πολλαπλάσια των Α, Ε (αντίστοιχα), τα δε Ν, Λ, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Β, Ζ (αντίστοιχα). Επομένως το Α προς το Β έχει μεγαλύτερο λόγο από κείνον που έχει το Ε προς το Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα αν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος) και το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος) έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) προς το έκτο (μέγεθος) τότε και το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) θα έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) προς το έκτο (μέγεθος). Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή γράφεται:
Εάν α/β = γ/δ και γ/δ > ε/ζ τότε α/β > ε/ζ]

ιδ΄

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

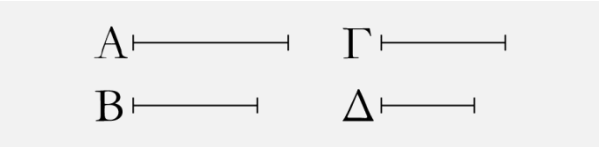
σχήμα 14

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, [μέγεθος] τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

Πρόταση 14

Αν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος), το δε πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), μεγαλύτερο θα είναι και το δεύτερο (μέγεθος) του τετάρτου (μεγέθους). Και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε και το δεύτερο (μέγεθος) θα είναι ίσο με το τέταρτο (μέγεθος). Και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε και το δεύτερο (μέγεθος) θα είναι μικρότερο από το τέταρτο (μέγεθος).



Έστω λοιπόν πρώτα ότι το πρώτο (μέγεθος) Α προς το δεύτερο (μέγεθος) Β έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) Γ προς το τέταρτο (μέγεθος) Δ και είναι το μέγεθος Α μεγαλύτερο του μεγέθους Γ. Τότε ισχυρίζομαι ότι και το μέγεθος Β είναι μεγαλύτερο του μεγέθους Δ.

Επειδή το μέγεθος Α είναι μεγαλύτερο του μεγέθους Γ και το μέγεθος Β είναι ένα άλλο τυχαίο (μέγεθος),το μέγεθος Α προς το μέγεθος Β έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το (μέγεθος) Γ προς το (μέγεθος) Β (Πρόταση 5.8). Όπως είναι δε το (μέγεθος) Α προς το (μέγεθος) Β έτσι είναι το (μέγεθος) Γ προς το (μέγεθος) Δ. Άρα και το (μέγεθος) Γ προς το (μέγεθος) Δ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το (μέγεθος) Γ προς το (μέγεθος) Β. Εκείνο δε το μέγεθος, προς το οποίο, το ίδιο μέγεθος έχει μεγαλύτερο λόγο, είναι μικρότερο. Άρα το (μέγεθος) Δ είναι μικρότερο του (μεγέθους) Β, ώστε το (μέγεθος) Β είναι μεγαλύτερο του (μεγέθους) Δ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ, κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι αν είναι ίσο το (μέγεθος) Α με το (μέγεθος) Γ, θα είναι ίσο και το (μέγεθος) Β με το (μέγεθος) Δ και εάν είναι το (μέγεθος) Α μικρότερο του (μεγέθους) Γ τότε μικρότερο θα είναι και το (μέγεθος) Β του (μεγέθους) Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Επομένως εάν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) έχει τον ίδιο λόγο που έχει το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος), το δε πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους) τότε και το δεύτερο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τετάρτου (μεγέθους) και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε είναι ίσο και το δεύτερο (μέγεθος) με το τέταρτο (μέγεθος) και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο του τρίτου (μεγέθους), τότε και το δεύτερο (μέγεθος) είναι μικρότερο του τετάρτου (μεγέθους). Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή γράφεται:
Εάν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$,τότε αν $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$, αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$, αν $\alpha < \gamma$ και $\beta < \delta$]

ιε΄

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

σχήμα 15

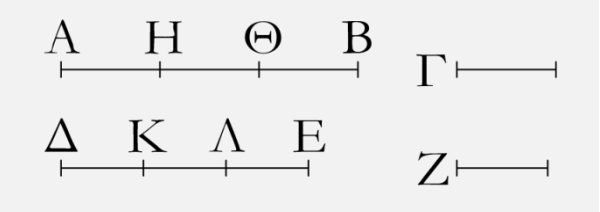
Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση 15

Τα μέρη των ίδιων πολλαπλασίων έχουν ίσο λόγο με αυτά, ληφθέντα κατάλληλα.



Έστω λοιπόν το ΑΒ και το ΔΕ, ίσα πολλαπλάσια του Γ και του Ζ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι πως, όπως είναι το Γ προς το Ζ, έτσι είναι το ΑΒ προς το ΔΕ.

Επειδή το ΑΒ είναι ίσο πολλαπλάσιο του Γ και το ΔΕ του Ζ, όσα μεγέθη ίσα με το μέγεθος Γ υπάρχουν στο ΑΒ, τόσα μεγέθη ίσα με το μέγεθος Ζ υπάρχουν και στο ΔΕ. Διαιρώντας το μεν ΑΒ με το μέγεθος Γ, προκύπτουν τα ίσα ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, το δε ΔΕ με το μέγεθος Ζ, προκύπτουν τα ίσα ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Είναι μάλιστα ίσο το πλήθος των ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ με το πλήθος των ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ και επειδή είναι ίσα μεταξύ τους τα ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, είναι δε ίσα μεταξύ τους και τα ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ, άρα όπως είναι το ΑΗ προς το ΔΚ, έτσι είναι το ΗΘ προς το ΚΛ και το ΘΒ προς το ΛΕ (Πρόταση 5.7). Είναι επομένως, όπως ένα από τα ηγούμενα (μεγέθη) προς ένα από τα επόμενα (μεγέθη), έτσι και όλα μαζί τα ηγούμενα (μεγέθη) προς όλα μαζί τα επόμενα (μεγέθη) (Πρόταση 5.12). Επομένως όπως είναι το ΑΗ προς το ΔΚ, έτσι είναι το ΑΒ προς το ΔΕ. Είναι ίσο δε το μεν ΑΗ με το Γ, το δε ΔΚ με το Ζ, οπότε όπως είναι το Γ προς το Ζ έτσι είναι το ΑΒ προς το ΔΕ.

Άρα τα μέρη των ίδιων πολλαπλασίων έχουν ίσο λόγο με αυτά, ληφθέντα κατάλληλα. Ακριβώς αυτό που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή γράφεται: α/β = μα/μβ]

ιϛ´

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ [ἀνάλογον] ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

σχήμα 16

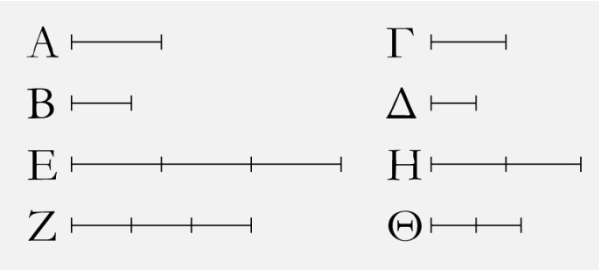
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, [οὕτως] τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Πρόταση 16

Εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, θα είναι ανάλογα και εναλλάξ.

Έστω τα Α, Β, Γ, Δ, τέσσερα μεγέθη ανάλογα, όπως το Α προς το Β, έτσι το Γ προς το Δ. Ισχυρίζομαι ότι θα είναι και εναλλάξ ανάλογα, όπως το Α προς το Γ έτσι και το Β προς το Δ.

Παίρνουμε ίσα πολλαπλάσια των μεν Α, Β τα Ε, Ζ αντίστοιχα, των δε Γ, Δ, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια, τα Η, Θ αντίστοιχα.



Επειδή είναι ίσο πολλαπλάσιο το Ε του Α και το Ζ του Β, τα δε μέρη των ίσων πολλαπλασίων έχουν τον ίδιο λόγο (Πρόταση 5.15), άρα όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Ε προς το Ζ. Όπως είναι δε το Α προς το Β είναι το Γ προς το Δ. Επομένως όπως το Γ προς το Δ, έτσι είναι το Ε προς το Ζ (Πρόταση 5.11). Επειδή πάλι τα Η, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Δ αντίστοιχα, άρα όπως είναι το Γ προς το Δ, έτσι είναι το Η προς το Θ (Πρόταση 5.15). Όπως είναι δε το Γ προς το Δ, έτσι είναι το Ε προς το Ζ και άρα όπως είναι το Ε προς το Ζ έτσι είναι το Η προς το Θ (Πρόταση 5.11). Εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, το δε πρώτο είναι μεγαλύτερο του τρίτου, τότε και το δεύτερο είναι μεγαλύτερο του τετάρτου και εάν το πρώτο είναι ίσο με το τρίτο, τότε και το δεύτερο είναι ίσο με το τέταρτο και εάν το πρώτο είναι μικρότερο του τρίτου, τότε και το δεύτερο είναι μικρότερο του τετάρτου (Πρόταση 5.14). Επομένως εάν υπερέχει το Ε του Η, τότε υπερέχει και το Ζ

του Θ και εάν είναι ίσο το Ε με το Η, τότε είναι ίσο και το Ζ με το Θ και εάν είναι μικρότερο το Ε του Η, τότε είναι και το Ζ μικρότερο του Θ. Και είναι τα μεν Ε, Ζ ίσα πολλαπλάσια των Α και Β αντίστοιχα, τα δε Η, Θ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Γ, Δ αντίστοιχα. Είναι επομένως όπως το Α προς το Γ, έτσι το Β προς το Δ (Ορισμός 5.5).

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα τέσσερα μεγέθη που είναι ανάλογα, είναι και εναλλάξ ανάλογα. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

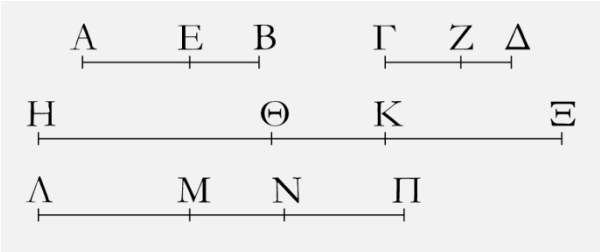
[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή γράφεται: Εάν α/β = γ/δ τότε α/γ = β/δ]

ιζ΄

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Πρόταση 17

Εάν προστεθέντα μεγέθη αποτελούν αναλογία και διαιρεθέντα θα αποτελούν αναλογία.



σχήμα 17

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ, καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια

Έστω τα ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ προστεθέντα μεγέθη τα οποία είναι ανάλογα ως εξής: όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ έτσι είναι το ΓΔ προς το ΔΖ. Ισχυρίζομαι ότι και όταν διαχωριστούν θα είναι ανάλογα ως εξής: όπως το ΑΕ προς το ΕΒ, έτσι το ΓΖ προς το ΔΖ.

Θεωρώ λοιπόν τα ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ αντίστοιχα και τα ΚΞ, ΝΠ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ αντίστοιχα.

Και επειδή το ΗΘ και το ΘΚ είναι ίσα πολλαπλάσια του ΑΕ και του ΕΒ αντίστοιχα, θα είναι ίσα πολλαπλάσια το ΗΘ και το ΗΚ του ΑΕ και του ΑΒ αντίστοιχα (Πρόταση 5.1). Είναι ίσα δε πολλαπλάσια τα ΗΘ και ΛΜ του ΑΕ και ΓΖ αντίστοιχα, οπότε θα είναι ίσα πολλαπλάσια τα ΗΚ και ΛΜ του ΑΒ και ΓΖ αντίστοιχα (Πρόταση 5.1). Επειδή πάλι είναι ίσα πολλαπλάσια το ΛΜ και το ΜΝ του ΓΖ και ΖΔ αντίστοιχα, θα είναι ίσα πολλαπλάσια το ΛΜ και το ΛΝ του ΓΖ και του ΓΔ αντίστοιχα (Πρόταση 5.1). Είναι ίσα δε πολλαπλάσια το ΛΜ και το ΗΚ του ΓΖ και του ΑΒ αντίστοιχα, οπότε θα είναι ίσα πολλαπλάσια τα ΗΚ και ΛΝ του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Άρα τα ΗΚ, ΛΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Επειδή πάλι είναι τα ΘΚ και ΜΝ ίσα πολλαπλάσια του ΕΒ και του ΖΔ αντίστοιχα, είναι δε και τα ΚΞ και

τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

ΝΠ ίσα πολλαπλάσια του ΕΒ και ΖΔ αντίστοιχα και προστιθέμενα γίνονται τα ΘΞ και ΜΠ ίσα πολλαπλάσια του ΕΒ και του ΖΔ αντίστοιχα (Πρόταση 5.2). Και επειδή όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ, έτσι το ΓΔ προς το ΔΖ και λαμβάνοντας των μεν ΑΒ, ΓΔ ίσα πολλαπλάσια τα ΗΚ, ΛΝ των δε ΕΒ, ΖΔ ίσα πολλαπλάσια τα ΘΞ, ΜΠ, εάν υπερέχει το ΗΚ του ΘΞ, υπερέχει και το ΛΝ του ΜΠ και εάν είναι ίσο το ΗΚ με το ΘΞ θα είναι ίσο και το ΛΝ με το ΜΠ και εάν είναι μικρότερο το ΗΚ του ΘΞ θα είναι μικρότερο και το ΛΝ του ΜΠ (Πρόταση 5.5). Έστω ότι το ΗΚ υπερέχει του ΘΞ και αφαιρώντας και από τα δυο μεγέθη το ΘΚ, θα υπερέχει και το ΗΘ του ΚΞ. Αλλά αν υπερείχε το ΗΚ του ΘΞ θα υπερείχε και το ΛΝ του ΜΠ. Άρα υπερέχει και το ΛΝ του ΜΠ και αφαιρώντας από κοινού το ΜΝ υπερέχει και το ΛΜ του ΝΠ. Ώστε αν υπερέχει το ΗΘ του ΚΞ, υπερέχει και το ΛΜ του ΝΠ. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι εάν είναι ίσο το ΗΘ με το ΚΞ, ίσο θα είναι και το ΛΝ με το ΝΠ και εάν είναι μικρότερο το ΗΘ από το ΚΞ, θα είναι μικρότερο και το ΛΝ από το ΝΠ. Και είναι τα μεν ΗΘ,ΛΜ ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΓΖ, τα δε ΚΞ, ΝΠ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ. Είναι επομένως όπως το ΑΕ προς το ΕΒ, έτσι και το ΓΖ προς το ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα εάν προστεθέντα μεγέθη αποτελούν αναλογία τότε και διαιρεθέντα τα μεγέθη αυτά θα αποτελούν πάλι αναλογία. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή γράφεται: Εάν α + β/β = γ + δ/δ τότε α/β = γ/δ]

ιη´

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

σχήμα 18

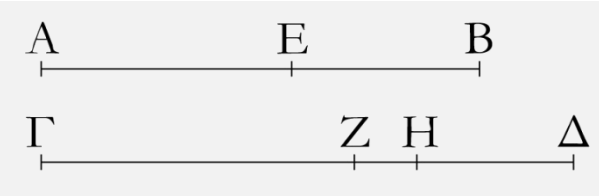
Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Πρόταση 18

Εάν διαιρεθέντα (διαχωρισμένα) μεγέθη αποτελούν αναλογία τότε και προστεθέντα τα μεγέθη αυτά αποτελούν αναλογία.



Έστω τα διαχωρισμένα μεγέθη ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ σε αναλογία, όπως το ΑΕ προς το ΕΒ, έτσι το ΓΖ προς το ΖΔ. Ισχυρίζομαι ότι και όταν προστεθούν θα είναι σε αναλογία, όπως το ΑΒ προς το ΒΕ, έτσι το ΓΔ προς το ΖΔ.

Εάν δεν ισχύει ότι όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ έτσι είναι το ΓΔ προς το ΔΖ, τότε θα ισχύει το εξής: όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ, έτσι είναι το ΓΔ είτε προς κάτι μικρότερο από το ΔΖ, είτε προς κάτι μεγαλύτερο από αυτό (το ΔΖ δηλαδή).

Έστω πρώτα προς το μικρότερο, το ΔΗ. Και επειδή όταν προστεθέντα μεγέθη είναι σε αναλογία, όπως το ΑΒ προς το ΒΕ, έτσι το ΓΔ προς το ΔΗ, θα είναι σε αναλογία και όταν διαχωριστούν τα μεγέθη αυτά (Πρόταση 5.17). Άρα είναι όπως το ΑΕ προς το ΕΒ, έτσι το ΓΗ προς το ΗΔ. Έχω επίσης ισχυριστεί πως είναι το ΑΕ προς το ΕΒ, όπως το ΓΖ προς το ΖΔ. Επομένως το ΓΗ προς το ΗΔ είναι όπως το ΓΖ προς το ΖΔ (Πρόταση 5.11). Όμως το πρώτο (μέγεθος), το ΓΗ, είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), του ΓΖ δηλαδή, οπότε και το δεύτερο (μέγεθος) το ΗΔ, θα είναι μεγαλύτερο του τετάρτου (μεγέθους), του ΖΔ δηλαδή (Πρόταση 5.14). Είναι όμως το ΔΗ και μικρότερο του ΔΖ, πράγμα αδύνατον. Επομένως δεν είναι το ΑΒ προς το ΒΕ όπως το ΓΔ προς κάτι μικρότερο του ΖΔ. Όμοια μπορούμε να δείξουμε πως το

ΑΒ προς το ΒΕ δεν είναι ούτε όπως το ΓΔ προς κάτι μεγαλύτερο από το ΖΔ. Άρα το ΑΒ προς το ΒΕ είναι όπως το ΓΔ προς κάτι ίσο με το ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Οπότε, εάν μεγέθη διαχωρισμένα είναι ανάλογα τότε και προστεθέντα τα μεγέθη αυτά, θα είναι πάλι ανάλογα. Ακριβώς αυτό που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση αυτή γράφεται: Εάν α/β = γ/δ τότε α + β /β = γ + δ /δ]

ιθ΄

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

σχήμα 19

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

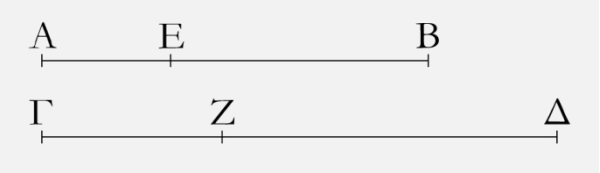
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

[Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ

Πρόταση 19

Εάν όπως είναι το όλο προς το όλο, έτσι είναι κι ένα τμήμα του (αφαιρούμενο) προς το αντίστοιχο (αφαιρούμενο) τμήμα του άλλου μεγέθους, τότε και το υπόλοιπο μέγεθος προς το υπόλοιπο είναι όπως το όλο προς το όλο.



Έστω λοιπόν ότι είναι όλο το ΑΒ προς όλο το ΓΔ, όπως είναι το αφαιρούμενο τμήμα του ΑΒ, το ΑΕ, προς το αφαιρούμενο τμήμα του ΓΔ, το ΓΖ. Ισχυρίζομαι λοιπόν ότι και το υπόλοιπο τμήμα του ΑΒ, προς το υπόλοιπο τμήμα του ΓΔ, είναι όπως ολόκληρο το ΑΒ προς ολόκληρο το ΓΔ.

Επειδή λοιπόν είναι όπως το ΑΒ προς το ΓΔ, έτσι το ΑΕ προς το ΓΖ, θα είναι και εναλλάξ, δηλαδή όπως το ΒΑ προς το ΑΕ έτσι το ΔΓ προς το ΓΖ (Πρόταση 5.16). Επειδή δε προστεθέντα μεγέθη που είναι ανάλογα, θα είναι ανάλογα και διαχωριζόμενα, όπως το ΒΕ προς το ΕΑ, έτσι το ΔΖ προς το ΓΖ (Πρόταση 5.17). Και εναλλάξ, όπως το ΒΕ προς το ΔΖ, έτσι το ΕΑ προς το ΖΓ (Πρόταση 5.16).Έχει δε υποτεθεί ότι όπως είναι το ΑΕ προς το ΓΖ, έτσι είναι όλο το ΑΒ προς όλο το ΓΔ. Άρα και το υπόλοιπο ΕΒ προς το υπόλοιπο ΖΔ είναι όπως όλο το ΑΒ προς όλο το ΓΔ (Πρόταση 5.11).

Εάν λοιπόν είναι όπως το όλο προς το όλο, έτσι το αφαιρούμενο τμήμα του προς το αφαιρούμενο του αντίστοιχου όλου, τότε και το υπόλοιπο τμήμα προς το αντίστοιχο υπόλοιπο θα είναι όπως το όλο προς το αντίστοιχο όλο. Ακριβώς αυτό που ήθελα να δείξω.

[Επειδή έχει δειχθεί ότι όπως είναι το

ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι].

ΑΒ προς το ΓΔ, έτσι είναι το ΕΒ προς το ΖΔ και εναλλάξ όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ, έτσι το ΓΔ προς το ΖΔ, άρα προστιθέμενα τα μεγέθη θα είναι ανάλογα. Έχει επίσης δειχθεί ότι όπως είναι το ΒΑ προς το ΑΕ, έτσι είναι το ΔΓ προς το ΓΖ και ο τελευταίος είναι ο ανάστροφος λόγος του προηγούμενου.]

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Από αυτό είναι φανερό πως εάν προστεθέντα μεγέθη είναι ανάλογα τότε θα είναι ανάλογα και ανεστραμμένα. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται: Εάν α/β =γ/δ τότε α/β = α-γ/β-δ]

[Με σύγχρονο συμβολισμό, το πόρισμα γράφεται: Εάν α/β = γ/δ τότε α/ α-β = γ/γ-δ]

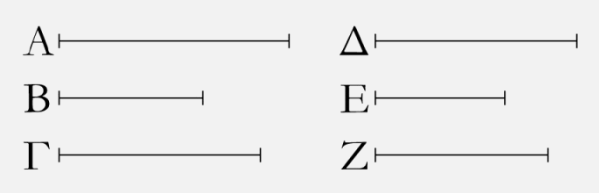
κ´

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρόταση 20

Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα τόσα ίσα στο πλήθος με αυτά, ανά δυο σε ίσους λόγους, εάν μέσω ισότητας είναι το πρώτο (μέγεθος) μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), θα είναι και το τέταρτο (μέγεθος) μεγαλύτερο του έκτου (μεγέθους). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), θα είναι ίσο και το τέταρτο (μέγεθος) με το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), θα είναι και το τέταρτο (μέγεθος) μικρότερο από το έκτο (μέγεθος).

σχήμα 20



Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δι' ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Έστω τα τρία μεγέθη Α, Β, Γ και άλλα τόσα ίσα στο πλήθος, τα Δ, Ε, Ζ, ανά δύο σε ίσους λόγους, όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Δ προς το Ε, όπως είναι το Β προς το Γ, έτσι είναι το Ε προς το Ζ. Είναι δε, μέσω της ισότητας, το Α μεγαλύτερο του Γ και ισχυρίζομαι ότι και το Δ είναι μεγαλύτερο του Ζ. Αν το Α είναι ίσο με το Γ, τότε και το Δ είναι ίσο με το Ζ. Αν το Α είναι μικρότερο από το Γ, τότε και το Δ είναι μικρότερο από το Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, [οὕτως] τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν. μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Επειδή λοιπόν το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ και το Β κάποιο άλλο μέγεθος, το δε μεγαλύτερο (μέγεθος) προς κάποιο μέγεθος, έχει μεγαλύτερο λόγο, από εκείνο το λόγο που έχει το μικρότερο (μέγεθος) προς το ίδιο μέγεθος (Πρόταση 5.8). Επομένως το Α προς το Β έχει μεγαλύτερο λόγο από κείνον που έχει το Γ προς το Β. Αλλά όπως είναι το μεν Α προς το Β, έτσι είναι το Δ προς το Ε, όπως δε το Γ προς το Β έτσι πάλι αντίστροφα είναι το Ζ προς το Ε (Πρόταση 5.7-πόρισμα). Και το Δ προς το Ε έχει

μεγαλύτερο λόγο από εκείνο που έχει το Ζ προς το Ε (Πρόταση 5.13). Από τα μεγέθη που έχουν λόγο προς το ίδιο (μέγεθος), εκείνο που έχει το μεγαλύτερο λόγο είναι μεγαλύτερο (Πρόταση 5.10). Επομένως το Δ είναι μεγαλύτερο του Ζ. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι αν το Α είναι ίσο με το Γ, ίσο είναι και το Δ με το Ζ. Και αν το Α είναι μικρότερο από το Γ, τότε και το Δ είναι μικρότερο από το Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα τόσα ίσα στο πλήθος με αυτά, ευρισκόμενα σε ίσους λόγους ανά δυο και εάν μέσω ισότητας, το πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), τότε το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι επίσης μεγαλύτερο από το έκτο (μέγεθος). Και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε επίσης το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι ίσο με το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μικρότερο από το έκτο (μέγεθος). Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται:
Εάν $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ και $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$,τότε: $\alpha > \gamma$ και $\delta > \zeta$
ή $\alpha = \gamma$ και $\delta = \zeta$
ή $\alpha < \gamma$ και $\delta < \zeta$]

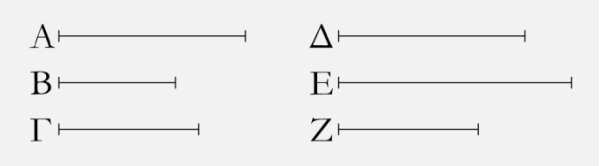
κα΄

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρόταση 21

Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα ίσα στο πλήθος με αυτά, ανά δυο σε ίσους λόγους και η αναλογία τους είναι τεταραγμένη, εάν μέσω της ισότητας το πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μεγαλύτερο του έκτου (μεγέθους). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι ίσο με το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μικρότερο από το έκτο (μέγεθος).

σχήμα 21



Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι' ἴσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Έστω τρία μεγέθη, τα Α, Β, Γ και άλλα ίσα στο πλήθος με αυτά, τα Δ, Ε, Ζ, ανά δύο σε ίσους λόγους και η αναλογία τους τεταραγμένη, όπως μεν το Α προς το Β, έτσι το Ε προς το Ζ, όπως δε το Β προς το Γ, έτσι το Δ προς το Ε και έστω ότι μέσω ισότητας το Α είναι μεγαλύτερο του Γ, ισχυρίζομαι τότε ότι και το Δ θα είναι μεγαλύτερο του Ζ. Και αν το Α είναι ίσο με το Γ, τότε και το Δ θα είναι ίσο με το Ζ. Και αν το Α είναι μικρότερο από το Γ, τότε και το Δ θα είναι μικρότερο από το Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Επειδή λοιπόν το Α είναι μεγαλύτερο του Γ και το Β είναι κάποιο άλλο μέγεθος, το Α προς το Β έχει μεγαλύτερο λόγο από εκείνο του Γ προς το Β (Πρόταση 5.8). Αλλά όπως είναι μεν το Α προς το Β, έτσι είναι το Ε προς το Ζ, όπως είναι δε το Γ προς το Β, έτσι πάλι αντίστροφα είναι το Ε προς το Δ (Πρόταση 5.7-πόρισμα). Άρα το Ε προς το Ζ έχει μεγαλύτερο λόγο από εκείνον που έχει το Ε προς το Δ (Πρόταση 5.13). Εκείνο δε το μέγεθος προς το οποίο ο

λόγος είναι μεγαλύτερος, είναι το μικρότερο (μέγεθος) (Πρόταση 5.10). Άρα το Ζ είναι μικρότερο του (μεγέθους) Δ. Επομένως το (μέγεθος) Δ είναι μεγαλύτερο από το (μέγεθος) Ζ. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε πως αν το (μέγεθος) Α είναι ίσο με το (μέγεθος) Γ, θα είναι ίσο και το (μέγεθος) Δ με το (μέγεθος) Ζ. Και αν το (μέγεθος) Α είναι μικρότερο από το (μέγεθος) Γ, τότε το (μέγεθος) Δ είναι μικρότερο από το (μέγεθος) Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εάν υπάρχουν λοιπόν τρία μεγέθη και άλλα ίσα στο πλήθος με αυτά, ανά δύο στον ίδιο λόγο, είναι δε η αναλογία τους τεταραγμένη και μέσω ισότητας το πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μεγαλύτερο από το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι ίσο με το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μικρότερο από το έκτο (μέγεθος). Ακριβώς αυτό που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται:

Εάν $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$ και $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ τότε: $\alpha > \gamma$ *και* $\delta > \zeta$

$\alpha = \gamma$ *και* $\delta = \zeta$

$\alpha < \gamma$ *και* $\delta < \zeta$*].*

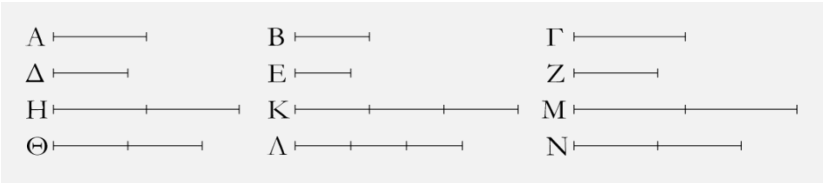
κβ΄

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Πρόταση 22

Εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη και κάποια άλλα μεγέθη, ίσα με αυτά στο πλήθος, τα οποία είναι ανά δυο στον ίδιο λόγο, τότε αυτά θα είναι στον ίδιο λόγο και μέσω ισότητας.

σχήμα 22



Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Θ, Λ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Έστω κάποια μεγέθη τα Α, Β, Γ και άλλα μεγέθη, ίσα με αυτά στο πλήθος, τα Δ, Ε, Ζ, τα οποία είναι ανά δυο στον ίδιο λόγο, όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Δ προς το Ε, όπως είναι δε το Β προς το Γ, έτσι είναι το Ε προς το Ζ. Ισχυρίζομαι ότι θα είναι επίσης στον ίδιο λόγο και μέσω ισότητας. (Δηλαδή, όπως είναι το Α προς το Γ, έτσι θα είναι το Δ προς το Ζ).

Έστω ίσα πολλαπλάσια, των μεν Α, Δ τα Η, Θ, των δε Β,Ε, άλλα τυχαία, ίσα πολλαπλάσια, τα Κ, Λ και ακόμη των Γ, Ζ, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια, τα Μ, Ν.

Και επειδή όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Δ προς το Ε και λαμβάνοντας ίσα πολλαπλάσια, των μεν Α, Δ, τα Η, Θ, των δε Β, Ε, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια, τα Κ, Λ, είναι επομένως όπως το Η προς το Κ, έτσι το Θ προς το Λ (Πρόταση 5.4). Για τον ίδιο λόγο, το Κ είναι προς το Μ, όπως το Λ προς το Ν. Επειδή λοιπόν είναι τρία μεγέθη, τα Η, Κ, Μ και άλλα, ίσα με αυτά στο πλήθος, τα Θ, Λ, Ν, τα οποία είναι ανά δυο στον ίδιο λόγο, άρα μέσω ισότητας, εάν υπερέχει το Η του Μ, υπερέχει και το Θ του Ν, και εάν είναι ίσο το Η με το Μ, είναι ίσο και το Θ με το Ν και εάν είναι το Η μικρότερο από το Μ, είναι και το Θ μικρότερο από το Ν (Πρόταση 5.20). Και είναι τα μεν Η, Θ ίσα πολλαπλάσια των Α, Δ, τα δε Μ,

Ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ζ. Άρα όπως είναι το Α προς το Γ, έτσι είναι το Δ προς το Ζ (Ορισμός 5.5).

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Επομένως εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη και κάποια άλλα, ίσα με αυτά στο πλήθος, τα οποία είναι ανά δυο στον ίδιο λόγο, τότε και μέσω ισότητας, τα μεγέθη θα είναι στον ίδιο λόγο. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται:
Εάν α/β = ε/ζ και β/γ = ζ/η και γ/δ = η/θ τότε α/δ =ε/θ].

κγ΄

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

σχήμα 23

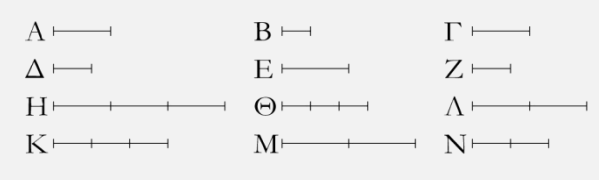
Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ. ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστι πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς

Πρόταση 23

Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα ίσα με αυτά στο πλήθος, ανά δυο στον ίδιο λόγο, και η αναλογία αυτών είναι τεταραγμένη, τότε και μέσω ισότητας θα είναι στον ίδιο λόγο.



Έστω τρία μεγέθη, τα Α, Β, Γ και άλλα ίσα στο πλήθος, ανά δύο στον ίδιο λόγο, τα Δ, Ε, Ζ και η αναλογία αυτών τεταραγμένη, όπως είναι το μεν Α προς το Β, έτσι είναι το Ε προς το Ζ, όπως είναι δε το Β προς το Γ, έτσι είναι το Δ προς το Ε. Ισχυρίζομαι ότι όπως είναι το Α προς το Γ, έτσι είναι το Δ προς το Ζ.

Παίρνω ίσα πολλαπλάσια των Α, Β, Δ τα Η, Θ, Κ, των δε Γ, Ε, Ζ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια τα Λ, Μ, Ν.

Και επειδή τα Η, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β, τα δε μέρη των ίσων πολλαπλασίων έχουν τον ίδιο λόγο (Πρόταση 5.15), άρα όπως το Α προς το Β, έτσι θα είναι και το Η προς το Θ. Για τον ίδιο λόγο, όπως είναι το Ε προς το Ζ, έτσι είναι το Μ προς το Ν. Όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι το Ε προς το Ζ και επομένως όπως το Η προς το Θ, έτσι είναι το Μ προς το Ν (Πρόταση 5.11). Και επειδή όπως είναι το Β προς το Γ, έτσι είναι το Δ προς το Ε και εναλλάξ όπως είναι το Β προς το Δ, έτσι είναι το Γ προς το Ε (Πρόταση 5.16). Και επειδή τα Θ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ, τα δε μέρη των ίσων πολλαπλασίων έχουν τον ίδιο λόγο (Πρόταση 5.15), επομένως όπως είναι το Β προς το Δ, έτσι είναι το Θ προς το Κ. Αλλά όπως είναι το Β προς το Δ, έτσι είναι το Γ προς το Ε και επομένως όπως το Θ προς το Κ, έτσι το Γ

τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Κ, Μ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

προς το Ε (Πρόταση 5.11). Πάλι επειδή τα Λ, Μ είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ε, όπως είναι επομένως το Γ προς το Ε, έτσι είναι το Λ προς το Μ (Πρόταση 5.15). Αλλά όπως είναι το Γ προς το Ε, έτσι είναι το Θ προς το Κ και επομένως όπως είναι το Θ προς το Κ, έτσι είναι το Λ προς το Μ (Πρόταση 5.11). Επίσης και εναλλάξ, όπως είναι το Θ προς το Λ, έτσι είναι το Κ προς το Μ (Πρόταση 5.16). Έχει δειχθεί δε, ότι όπως είναι το Η προς το Θ, έτσι είναι το Μ προς το Ν. Επειδή λοιπόν είναι τρία μεγέθη, τα Η, Θ, Λ, και άλλα ίσα με αυτά στο πλήθος, τα Κ, Μ, Ν ανά δύο στον ίδιο λόγο και είναι η αναλογία αυτών τεταραγμένη, επομένως μέσω ισότητας, εάν υπερέχει το Η του Λ, υπερέχει και το Κ του Ν και εάν είναι ίσο το Η με το Λ, είναι ίσο το Κ με το Ν και εάν είναι μικρότερο το Η από το Λ, είναι μικρότερο το Κ από το Ν (Πρόταση 5.21). Και είναι τα μεν Η, Κ ίσα πολλαπλάσια των Α και Δ αντίστοιχα, τα δε Λ, Ν ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ζ αντίστοιχα. Επομένως όπως είναι το Α προς το Γ, έτσι είναι το Δ προς το Ζ (Ορισμός 5 5).

Εάν λοιπόν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα ίσα στο πλήθος με αυτά, βρίσκονται σε ίσους λόγους ανά δύο και εάν η αναλογία τους είναι τεταραγμένη, τότε θα είναι κι αυτά μέσω ισότητας στον ίδιο λόγο. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται: Εάν α/β = ε/ζ και β/γ = δ/ε, τότε α/γ = δ/ζ].

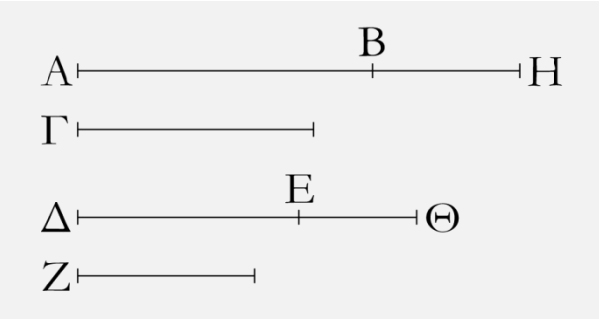
κδ΄

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρόταση 24

Εάν ένα πρώτο μέγεθος προς ένα δεύτερο μέγεθος, έχει τον ίδιο λόγο μ' εκείνον που έχει ένα τρίτο μέγεθος προς ένα τέταρτο μέγεθος και ένα πέμπτο μέγεθος προς το δεύτερο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο μ' εκείνον που έχει ένα έκτο μέγεθος προς το τέταρτο μέγεθος, τότε προστιθέμενα το πρώτο και το πέμπτο (μέγεθος), θα έχουν προς το δεύτερο (μέγεθος), τον ίδιο λόγο που έχουν το τρίτο και το έκτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος).

σχήμα 24



Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ, ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Πρώτο λοιπόν μέγεθος το ΑΒ προς δεύτερο μέγεθος το Γ και τρίτο μέγεθος το ΔΕ προς τέταρτο μέγεθος το Ζ, έχουν τον ίδιο λόγο. Επίσης ίδιο λόγο έχουν το πέμπτο μέγεθος ΒΗ προς το δεύτερο μέγεθος, το Γ, και το έκτο, το ΕΘ, προς το τέταρτο, το Ζ. Ισχυρίζομαι ότι και προστιθέμενα τα μεγέθη, πρώτο και το πέμπτο, δηλαδή το ΑΗ, προς το δεύτερο μέγεθος το Γ, έχουν τον ίδιο λόγο με εκείνο που έχουν προστιθέμενα τα μεγέθη, τρίτο και έκτο, δηλαδή το ΔΘ, προς το τέταρτο μέγεθος, το Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ, οὕ-

Επειδή λοιπόν όπως είναι το ΒΗ προς το Γ, έτσι είναι το ΕΘ προς το Ζ, άρα θα είναι όπως το Γ προς το ΒΗ, έτσι και το Ζ προς το ΕΘ (Πρόταση 5.7, Πόρισμα). Όπως είναι το ΑΒ προς το Γ, έτσι είναι το ΔΕ προς το Ζ και όπως είναι το Γ προς το ΒΗ, έτσι είναι το Ζ προς το ΕΘ, επομένως μέσω ισότητας, όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΗ, έτσι είναι το ΔΕ προς το ΕΘ (Πρόταση

τως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

5.22). Και επειδή τα μεγέθη που είναι ανάλογα, όταν είναι μεμονωμένα, θα είναι ανάλογα και όταν προστεθούν (Πρόταση 5. 18), επομένως θα είναι όπως το ΑΗ προς το ΗΒ, έτσι και το ΔΘ προς το ΘΕ. Είναι δε και όπως το ΒΗ προς το Γ, έτσι το ΕΘ προς το Ζ. Οπότε μέσω ισότητας, είναι όπως το ΑΗ προς το Γ, έτσι το ΔΘ προς το Ζ (Πρόταση 5. 22).

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα εάν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) και το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος) έχουν τον ίδιο λόγο και επίσης το πέμπτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) και το έκτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος) έχουν τον ίδιο λόγο, τότε και προστιθέμενα το πρώτο (μέγεθος) και το πέμπτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) θα έχουν τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) και το έκτο (μέγεθος) προστιθέμενα, προς το τέταρτο (μέγεθος). Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται:
Εάν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και $\varepsilon/\beta = \zeta/\delta$, τότε: $\alpha+\varepsilon /\beta = \gamma+\zeta /\delta$].

κε΄

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

σχήμα 25

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστιν.

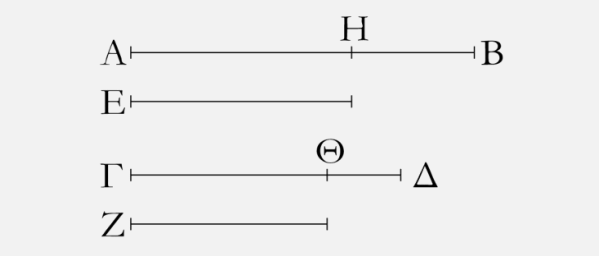
Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε.

Καὶ [ἐπεὶ] ἐὰν [ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισά ἐστιν, ἐὰν ἄρα] τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ τῷ μὲν ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε.

Πρόταση 25

Εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά, είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των υπολοίπων δυο μεγεθών.



Έστω τα τέσσερα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ανάλογα ως εξής: όπως είναι το ΑΒ προς το ΓΔ, έτσι είναι το Ε προς το Ζ και έστω ότι είναι μεγαλύτερο από αυτά το ΑΒ, μικρότερο δε το Ζ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒ και το Ζ είναι μεγαλύτερα των ΓΔ και Ε.

Έστω το Ε ίσο με το ΑΗ, το δε Ζ ίσο με το ΓΘ.

Επειδή λοιπόν είναι όπως το ΑΒ προς το ΓΔ, έτσι το Ε προς το Ζ, είναι ίσο δε, το μεν Ε με το ΑΗ, το δε Ζ με το ΓΘ, άρα όπως είναι το ΑΒ προς το ΓΔ, έτσι είναι το ΑΗ προς το ΓΘ. Και επειδή εάν όπως είναι όλο το ΑΒ προς όλο το ΓΔ, έτσι και το αφαιρεθέν (τμήμα του ΑΒ), το ΑΗ, προς το αφαιρεθέν (τμήμα του ΓΔ), το ΓΘ, θα είναι και το υπόλοιπο (τμήμα) του ΑΒ, το ΗΒ, προς το υπόλοιπο (τμήμα) του ΓΔ, το ΘΔ, όπως όλο το ΑΒ, προς όλο το ΓΔ (Πρόταση 5. 19). Είναι δε το ΑΒ μεγαλύτερο από το ΓΔ, άρα μεγαλύτερο είναι και το ΗΒ του ΘΔ. Και επειδή είναι το μεν ΑΗ ίσο με το Ε, το δε ΓΘ ίσο με το Ζ, άρα τα ΑΗ και Ζ είναι ίσα με τα ΓΘ και Ε.

Και επειδή (εάν στα άνισα μεγέθη προστεθούν ίσα μεγέθη, τότε όλα γίνονται άνισα) τα ΗΒ, ΘΔ είναι άνισα, με μεγαλύτερο το ΗΒ και προστεθεί το ΗΒ στα ΑΗ και Ζ, ενώ το ΘΔ προστεθεί στα ΓΘ και Ε, συνεπάγεται πως τα ΑΒ και Ζ είναι μεγαλύτερα από τα ΓΔ και Ε.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, το μεγαλύτερο και το μικρότερο από αυτά, είναι μεγαλύτερο μέγεθος από το μέγεθος που αποτελούν τα υπόλοιπα δύο μεγέθη μαζί. Αυτό ακριβώς που ήθελα να δείξω.

[Με σύγχρονο συμβολισμό, η πρόταση γράφεται:
Εάν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, και α είναι το μεγαλύτερο και δ το μικρότερο, τότε: $\alpha + \delta > \beta + \gamma$].

Μεταφορά των Προτάσεων σε σύγχρονη διατύπωση

Οι 25 Προτάσεις του βιβλίου 5 των Στοιχείων διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

Ι) Απολύτως Στοιχειώδεις Προτάσεις: είναι εκείνες που δεν αναφέρονται καθόλου σε λόγους μεγεθών,

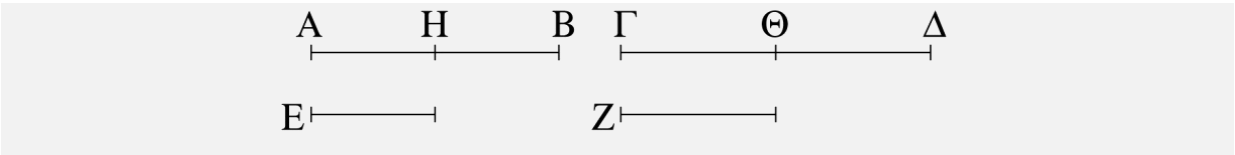
ΙΙ) Στοιχειώδεις Προτάσεις: είναι εκείνες που χρησιμοποιούν μόνο τον Ορισμό 5.5, αλλά όχι (την συνθήκη του Ευδόξου) τον ορισμό 5.4., τέλος

ΙΙΙ) Μη Στοιχειώδεις Προτάσεις: είναι εκείνες που χρησιμοποιούν τον Ορισμό 5.4 (συνθήκη Ευδόξου).

Θα ακολουθήσει η μεταφορά τους σε σύγχρονη μαθηματική ορολογία και ταυτόχρονα η διάκρισή τους στις τρεις κατηγορίες που αναφέρθηκαν.

Πρόταση 1 (Απολύτως Στοιχειώδης)

Εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη που είναι ίσα πολλαπλάσια άλλων μεγεθών, ίσων το πλήθος με αυτά, τότε όσες φορές διαιρείται κάποιο από τα πρώτα μεγέθη με κάποιο από τα δεύτερα τόσες φορές θα διαιρούνται όλα τα πρώτα μεγέθη με όλα τα δεύτερα.



Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, ΓΔ = β ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε = γ, Ζ = δ.

Τότε ΑΒ = ΑΗ + ΗΒ, ΑΗ = ΗΒ = γ και ΓΔ = ΓΘ + ΘΔ, ΓΘ = ΘΔ = δ.

Το πλήθος των ΑΗ, ΗΒ είναι ίδιο με το πλήθος των ΓΘ, ΘΔ.

Επειδή ΑΗ = γ και ΓΘ = δ θα έχω ΑΗ + ΓΘ = γ + δ.

Για τον ίδιο λόγο ΗΒ = γ και ΘΔ = δ, θα έχω ΗΒ + ΘΔ = γ + δ.

ΑΗ +ΓΘ = γ + δ

ΗΒ + ΘΔ = γ + δ

Άρα όσα περιέχονται στο ΑΒ ίσα με γ (που είναι τόσα όσα περιέχονται στο ΓΔ ίσα με δ) ακριβώς τόσα περιέχονται στο άθροισμα ΑΒ + ΓΔ ίσα με γ + δ.

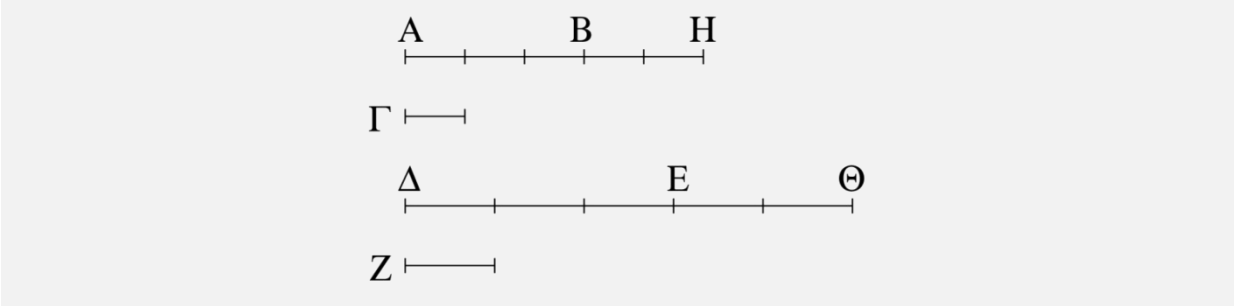
Επομένως όσες φορές πολλαπλάσιο είναι το ΑΒ του γ και το ΓΔ του δ, τόσες φορές είναι πολλαπλάσιο και το άθροισμα ΑΒ + ΓΔ του αθροίσματος γ + δ.

Δηλαδή α + β = μγ + μδ = μ (γ + δ), με μ κάποιο φυσικό αριθμό.

Γενικότερα μα + μβ + … = μ (α + β +…), με μ κάποιο φυσικό αριθμό.

Πρόταση 2 (Απολύτως Στοιχειώδης)

Εάν το πρώτο και το τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου μεγέθους (αντίστοιχα) και ένα πέμπτο κι ένα έκτο μέγεθος είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου (αντίστοιχα), τότε το πρώτο μέγεθος και το πέμπτο αθροιζόμενα μαζί και το τρίτο και το έκτο αθροιζόμενα μαζί, θα είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα.



Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, ΔΕ = β, Γ= γ, Ζ = ζ, ΒΗ = δ, ΕΘ = ε,

με α = κγ, β = κζ, δ = λγ, ε = λζ, κ, λ φυσικούς αριθμούς.

Τότε α + δ = κγ + λγ = (κ + λ) γ

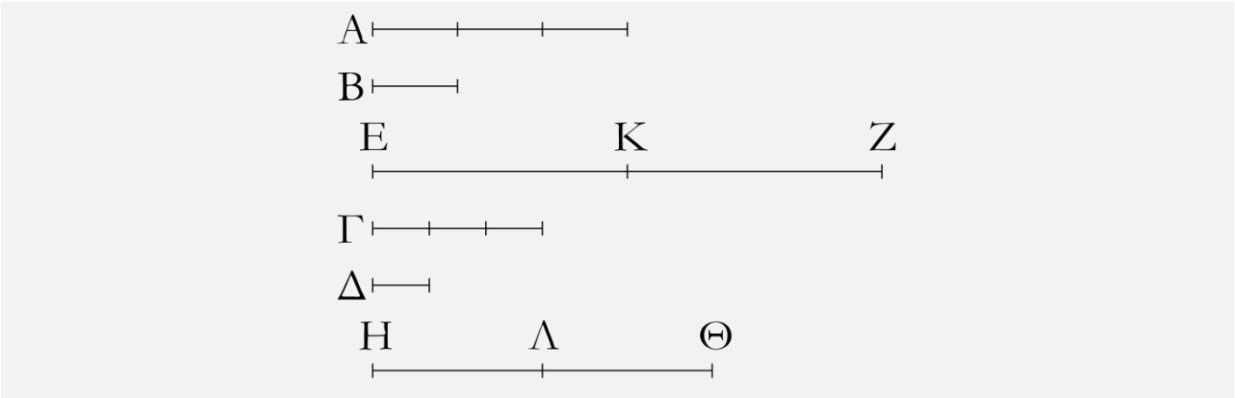
β +ε = κζ + λζ = (κ + λ) ζ.

Καταλήγω λοιπόν ότι τα μεγέθη ΑΗ, ΔΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών γ, ζ αντίστοιχα.

Γενικότερα κα +λα = (κ + λ) α, όπου α μέγεθος και κ, λ φυσικοί αριθμοί.

Πρόταση 3 (Απολύτως Στοιχειώδης)

Εάν ένα πρώτο μέγεθος και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου κι ενός τετάρτου μεγέθους (αντίστοιχα) και λάβω ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου μεγέθους τότε –μέσω της ισότητας– τα μεγέθη που θα προκύψουν θα είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα.



Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη Α = α και Γ = γ ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Γ = γ και Δ = δ αντίστοιχα α = κβ, γ = κδ, με κ φυσικό αριθμό.

Παίρνω τα μεγέθη ΕΖ, ΗΘ ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Α και Γ αντίστοιχα

ΕΖ = ΕΚ + ΚΖ και ΗΘ = ΗΛ + ΛΘ με ΕΚ = ΚΖ =Α = α = κβ και ΗΛ = ΛΘ = Γ = γ = κδ.

Το καθένα λοιπόν από τα ΕΚ, ΚΖ περιέχει ίσες φορές το μέγεθος α = κβ, όπως το καθένα από τα ΗΛ, ΛΘ περιέχει ίσες φορές το μέγεθος γ = κδ.

Οπότε –σύμφωνα με την Πρόταση 5.2– τα αθροίσματα ΕΚ + ΚΖ, ΗΛ + ΛΘ θα είναι ισοπολλαπλάσια των μεγεθών β και δ, αντίστοιχα.

Γενικότερα Αν α = κβ και γ = κδ, τότε

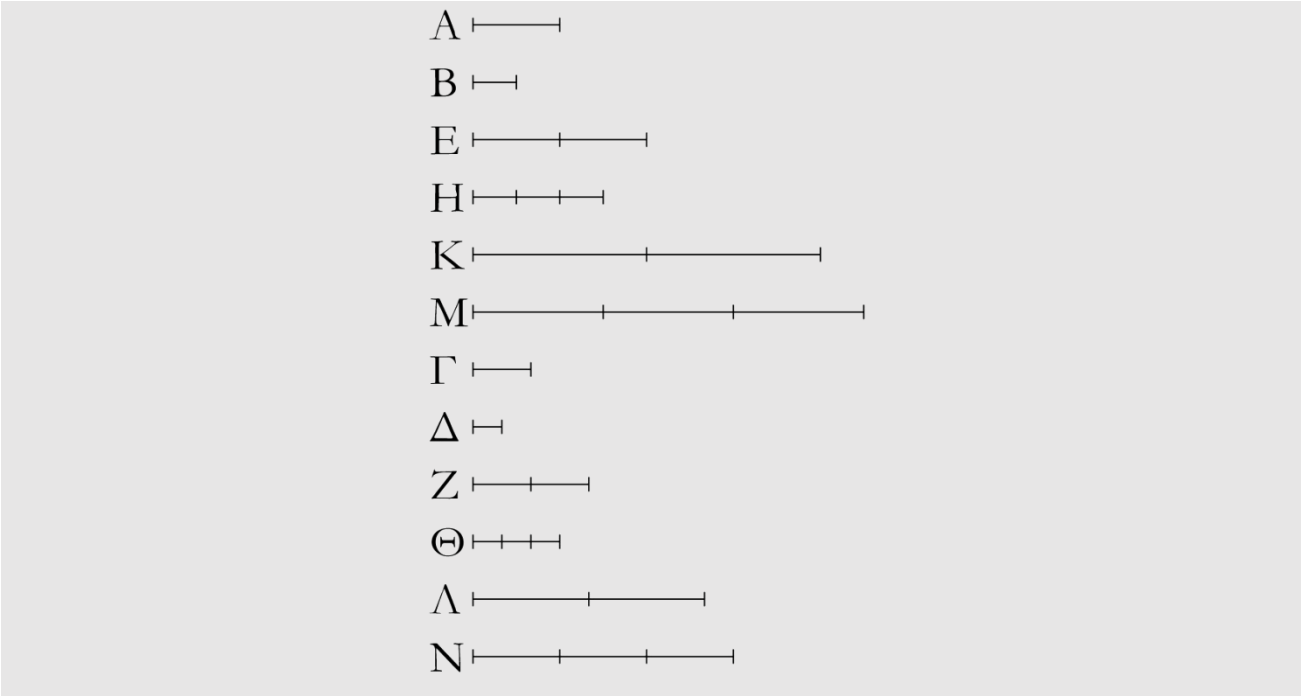
μα=μ(κβ)=(μκ)β και μγ=μ(κδ)=(μκ)δ, με α, β, γ, δ μεγέθη και μ, κ φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 4 (Στοιχειώδης)

Εάν το πρώτο μέγεθος προς το δεύτερο (μέγεθος) και το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο έχουν τον ίδιο λόγο, τότε τα ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και τρίτου μεγέθους προς τα ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και τετάρτου, με οποιοδήποτε πολλαπλασιασμό, ληφθέντα κατάλληλα, θα έχουν τον ίδιο λόγο.

Έστω τα μεγέθη α, β, γ, δ για τα οποία ισχύει α:β = γ:δ.

Επίσης τα μεγέθη ε, ζ, η, θ με ε = ρα, ζ =ργ, η = σβ, θ = σδ, ρ, σ φυσικοί αριθμοί. Ισχυρίζομαι ρα:σβ = ργ:σδ.



Απόδειξη

Παίρνω τα μεγέθη κ, λ, μ, ν με κ = χε, λ = χζ, μ = τη, ν = τθ, χ, τ φυσικοί αριθμοί.

Αφού ε = ρα και ζ = ργ,θα είναι κ = χε = χ(ρα) = (χρ) α και λ = χζ = χ(ργ) = (χρ) γ, από Πρόταση 5.3.

Επίσης αφού η = σβ, θ = σδ, θα είναι μ = τη = τ(σβ) = (τσ)β, ν = τ(σδ) = (τσ) δ,

από Πρόταση 5.3.

Επειδή α:β = γ:δ, από τον Ορισμό 5.5, θα ισχύει, για κάθε φ, ω φυσικό αριθμό

φ:ω < α:β (⇔ $\varphi\beta < \omega\alpha$) αν και μόνο αν φ:ω < γ:δ (⇔ $\varphi\delta < \omega\gamma$)

φ:ω = α:β (⇔ $\varphi\beta = \omega\alpha$) αν και μόνο αν φ:ω = α:β (⇔ $\varphi\delta = \omega\gamma$)

φ:ω > α:β (⇔ $\varphi\beta > \omega\alpha$) αν και μόνο αν φ:ω > α:β (⇔ $\varphi\delta > \omega\gamma$)

Οπότε και για φ = τσ, ω = χρ (φυσικοί αριθμοί)

τσ:χρ < α:β (⇔ $(\tau\sigma)\beta < (\chi\rho)\alpha$) αν και μόνο αν τσ:χρ < γ:δ (⇔ $(\tau\sigma)\delta < (\chi\rho)\gamma$)

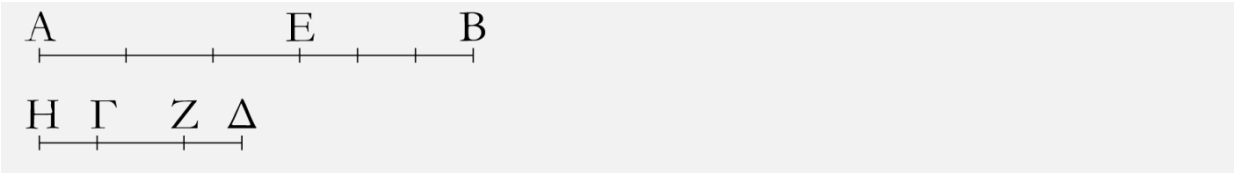
τσ:χρ =α:β(⇔ $(\tau\sigma)\beta = (\chi\rho)\gamma$) αν και μόνο αν τσ:χρ = γ:δ (⇔ $(\tau\sigma)\delta = (\chi\rho)\gamma$) τσ:χρ > α:β (⇔ $(\tau\sigma)\beta$ > (χρ)γ) αν και μόνο αν τσ:χρ > γ:δ (⇔ $(\tau\sigma)\delta > (\chi\rho)\gamma$)

Όμως (τσ)β = τ(σβ) = τη, (χρ)γ = χ(ργ) = χζ, (τσ)δ = τ(σδ) = τθ,(χρ)α = χ(ρα) = χε και με αντικατάσταση στις προηγούμενες σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη και τον Ορισμό 5.5, καταλήγω ε:η = ζ:θ.

Τελικά, αν α:β = γ:δ τότε ρα:σβ = ργ:σδ, με ρ, σ φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 5 (Απολύτως Στοιχειώδης)

Εάν ένα πρώτο μέγεθος είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο ενός δευτέρου μεγέθους, όσες ακριβώς είναι ένα αφαιρεθέν τμήμα του πρώτου πολλαπλάσιο ενός αφαιρεθέντος τμήματος του δευτέρου, τότε και το υπόλοιπο τμήμα του πρώτου μεγέθους θα είναι ίσο πολλαπλάσιο του υπολοίπου τμήματος του δευτέρου μεγέθους, όσο και το όλον (πρώτο) του όλου (δευτέρου) αντίστοιχα.



Απόδειξη

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, ΓΔ = β, ΑΕ = γ, ΓΖ = δ για τα οποία ισχύουν

ΑΒ = λ·ΓΔ = λβ, ΑΕ = λ·ΓΖ = λδ, όπου λ φυσικός αριθμός.

Παίρνω μέγεθος ΗΓ, τέτοιο ώστε ΕΒ = λ·ΗΓ και επειδή ΑΕ = λ·ΓΖ = λδ, έχω

ΑΕ + ΕΒ = λ·ΓΖ + λ·ΗΓ = λ·(ΓΖ + ΗΓ) (Πρόταση 5.1)

Δηλαδή ΑΒ = λ· ΗΖ κι επειδή είναι και ΑΒ = λ· ΓΔ, συμπεραίνω ότι

ΗΖ = ΓΔ = β.

Οπότε ΗΖ – ΓΖ = ΓΔ – ΓΖ,

ΗΓ = ΖΔ.

Άρα ΑΒ – ΑΕ =(λβ – λδ) = ΕΒ = λ·ΖΔ = λ(β – δ).

Γενικότερα ισχύει Αν α, β, γ, δ μεγέθη τέτοια ώστε α = λβ, γ = λδ, λ φυσικός αριθμός, τότε

α – γ = λβ – λδ = λ(β – δ), λ φυσικός αριθμός.

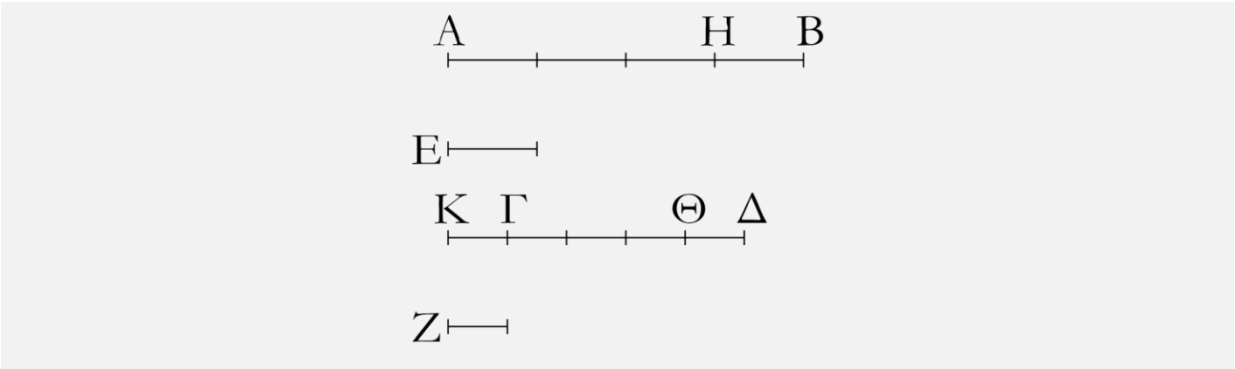
Πρόταση 6 (Απολύτως Στοιχειώδης)

Εάν δύο μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια δυο άλλων μεγεθών και αφαιρεθούν από τα πρώτα κάποια μεγέθη, ίσα αντίστοιχα πολλαπλάσια των δευτέρων τότε τα υπόλοιπα είναι επίσης αντίστοιχα ίσα με τα δεύτερα μεγέθη ή ίσα πολλαπλάσια αυτών (αντίστοιχα πάλι).

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, ΓΔ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ για τα οποία ισχύει

α = κε, δ = κζ, κ φυσικός αριθμός. Από τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ αφαιρώ τα μεγέθη ΑΗ = λε και ΓΘ = λζ, λ φυσικός αριθμός. Θα αποδείξω ότι

ΗΒ = ε και ΘΔ = ζ ή ΗΒ = με και ΘΔ = μζ.



Απόδειξη

Έστω ότι ΗΒ = ε. Παίρνω μέγεθος ΓΚ = ζ. Επειδή ΑΗ = λε, ΓΘ = λζ, ΗΒ = ε και ΓΚ = ζ, προσθέτοντας τα αντίστοιχα πολλαπλάσια των μεγεθών ε, ζ και εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.2, έχω:

ΑΗ + ΗΒ = λε + ε = (λ+1)ε και ΓΘ + ΓΚ = λζ + ζ = (λ+1) ζ, δηλαδή

ΑΒ = (λ+1)ε και ΚΘ = (λ+1)ζ

Όμως από την υπόθεση έχω ΑΒ =κε και ΓΔ = κζ, οπότε και ΓΔ = (λ+1) ζ = ΚΘ.

Από τα ΓΔ, ΚΘ αφαιρώ το κοινό τους τμήμα ΓΘ κι έχω

ΚΘ – ΓΘ = ΓΔ – ΓΘ

ΚΓ = ΘΔ = ζ.

Με τον ίδιο τρόπο μπορώ να αποδείξω πως αν ΗΒ = με τότε και ΘΔ = μζ.

Γενικότερα Αν α, β, γ, δ, ε, ζ είναι μεγέθη τέτοια ώστε

α = κε, β = κζ, γ = λε και δ = λζ, όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί,

τότε α – γ = (κ-λ)ε και β – δ = (κ-λ)ζ, επομένως

αν α – γ = ε τότε κ – λ = 1 ή κ = λ+1, άρα β – δ = ζ.

αν α – γ = με τότε κ – λ = μ ή κ = λ + μ, άρα β – δ = μζ.

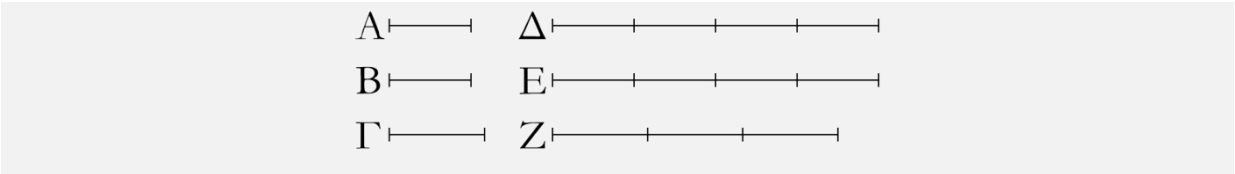
Πρόταση 7 (Στοιχειώδης)

Ίσα μεγέθη προς το ίδιο μέγεθος έχουν τον ίδιο λόγο και το ίδιο μέγεθος προς ίσα μεγέθη επίσης τον ίδιο λόγο.

Έστω τα ίσα μεγέθη Α, Β κι ένα άλλο τυχαίο μέγεθος Γ. Ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα Α, Β προς το Γ έχει τον ίδιο λόγο και ότι το Γ προς καθένα από τα Α και Β έχει τον ίδιο λόγο.

Έστω τα ίσα μεγέθη Α = α, Β = β και ένα άλλο τυχαίο μέγεθος Γ = γ.

Ισχυρίζομαι ότι α:γ = β:γ και γ:α = γ:β.



Απόδειξη

Παίρνω μεγέθη Δ = δ, Ε = ε, ίσα πολλαπλάσια των α και β αντίστοιχα δηλαδή δ = μ·α, ε = μ·β, όπου μ φυσικός αριθμός και μέγεθος Ζ = ζ, άλλο τυχαίο πολλαπλάσιο του γ, δηλαδή ζ = ν·γ,όπου ν φυσικός αριθμός.

Αφού α = β θα είναι και μ·α = μ·β, δηλαδή δ = ε.

Επομένως όταν ισχύει

δ > ζ και φυσικά ε > ζ τότε ισχύει μ·α > ν·γ και ταυτόχρονα μ·β > ν·γ

ή

δ = ζ και φυσικά ε = ζ τότε ισχύει μ·α = ν·γ και ταυτόχρονα μ·β = ν·γ

ή

δ < ζ και φυσικά ε < ζ τότε ισχύει μ·α = ν·γ και ταυτόχρονα μ·β < ν·γ

άρα –σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5 - θα ισχύει α:γ = β:γ.

Επίσης αν ισχύουν

ζ < δ και φυσικά ζ < ε τότε ν·γ < μ·α και ταυτόχρονα ν·γ < μ·β

ή

ζ = δ και φυσικά ζ = ε τότε ν·γ = μ·α και ταυτόχρονα ν·γ = μ·β

ή

ζ > δ και φυσικά ζ > ε τότε ν·γ > μ·α και ταυτόχρονα ν·γ > μ·β

άρα από τον Ορισμό 5.5, προκύπτει γ:α = γ:β.

Πόρισμα

Αν κάποιες ποσότητες είναι ανάλογες, τότε αυτές θα είναι ανάλογες και αντίστροφα (ή και ανεστραμμένες).

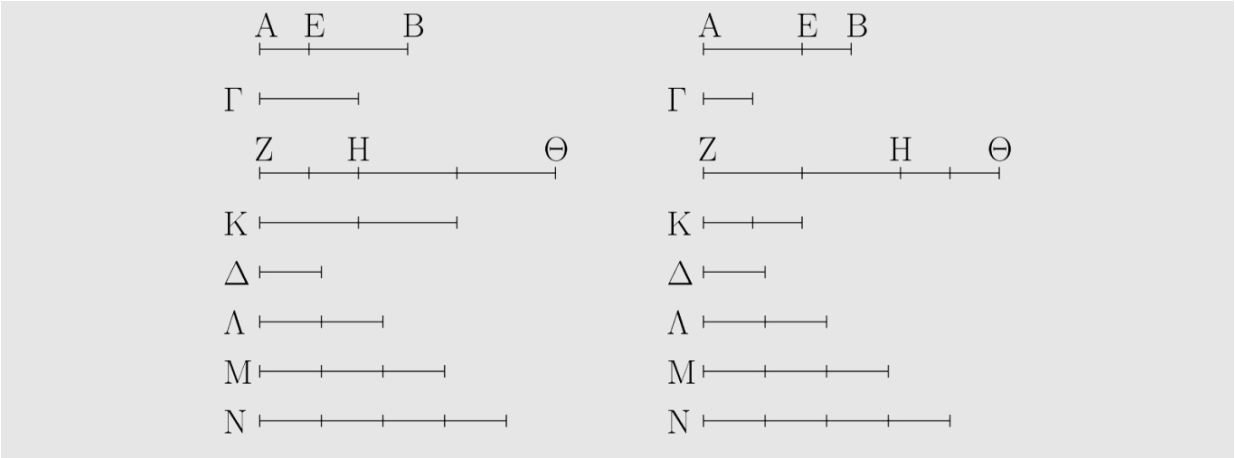
Αν α, β, γ, δ μεγέθη τέτοια ώστε α:β = γ:δ, τότε ισχύει και β:α = δ:γ.

Πρόταση 8 (Μη Στοιχειώδης)

Το μεγαλύτερο, από άνισα μεγέθη, έχει μεγαλύτερο λόγο προς κάποιο άλλο, από κείνον που έχει το μικρότερο προς το ίδιο αυτό μέγεθος. Και το τελευταίο αυτό μέγεθος προς το μικρότερο από τα άνισα μεγέθη, έχει μεγαλύτερο λόγο από το λόγο αυτού προς το μεγαλύτερο από τα άνισα μεγέθη.

Έστω δυο άνισα μεγέθη ΑΒ = α, Γ = γ, με α > γ και ένα τρίτο μέγεθος Δ = δ.

Θα αποδείξω ότι I) ΑΒ/Δ > Γ/Δ και II) Δ:Γ > Δ:ΑΒ.



Απόδειξη

Από τη συνθήκη του Ευδόξου (Ορισμός 5.4), υπάρχει φυσικός αριθμός ν, ώστε

[1] ν(ΑΒ-Γ)>Δ.

Άρα [1΄] Δ+νΓ<νΑΒ.

Από τη συνθήκη του Ευδόξου (Ορισμός 5.4), υπάρχει φυσικός αριθμός μ, ώστε

[2] μΔ>νΓ.

[3] Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε το μικρότερο φυσικό αριθμό μ, ώστε να ισχύει η [2].

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση [3α]: μ=1.

Τότε η [2] γίνεται Δ>νΓ

Από την [1΄] έπεται νΑΒ>Δ+νΓ>Δ.

Άρα από τον Ορισμό 5.7, ΑΒ/Δ>Γ/Δ.

Περίπτωση [3β]: μ>1.

Τότε, από την [3], (μ-1)Δ≤νΓ.

Άρα [3β΄] μΔ≤Δ+νΓ.

Άρα από [3β΄] και [1΄], μΔ≤Δ+νΓ<νΑΒ., και

από [2], μΔ>νΓ.

Άρα, από τον Ορισμό 5.7, ΑΒ/Δ>Γ/Δ.

Πρόταση 9 (Αντιθετοαντίστροφη της 5.8) (Μη Στοιχειώδης)

Τα μεγέθη που προς το ίδιο μέγεθος, έχουν ίδιο λόγο είναι ίσα μεταξύ τους. Και τα μεγέθη εκείνα προς τα οποία, το ίδιο μέγεθος έχει ίδιο λόγο, είναι ίσα.

Έστω τα μεγέθη Α =α, Β = β και Γ= γ.

Ισχυρίζομαι, αν Α/Γ = Β/Γ, τότε Α = Β.

Απόδειξη

Αν Α≠Β, τότε ή Α>Β ή Α<Β.

Αν Α>Β, τότε από Πρόταση 5.8, Α/Γ>Β/Γ, άρα Α/Γ≠Β/Γ, άτοπο.

Αν Α<Β, τότε από Πρόταση 5.8, Α/Γ>Β/Γ, άρα Α/Γ≠Β/Γ, άτοπο.

Άρα Α=Β.

Πρόταση 10 (Αντίστροφη της 5.8) (Στοιχειώδης)

Για μεγέθη, τα οποία προς το ίδιο μεγεθος έχουν κάποιο λόγο, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο λόγο, είναι μεγαλύτερο. Το ίδιο μέγεθος προς διαφορετικά μεγέθη, έχει μεγαλύτερο λόγο με το μικρότερο μέγεθος από αυτά.

Έστω τα μεγέθη Α = α, Β = β και Γ = γ.

Ισχυρίζομαι πως Αν α:γ > β:γ, τότε α > β.

Απόδειξη

Επειδή α:γ > β:γ – σύμφωνα με τον Ορισμό 5.7 – υπάρχουν μ, ν φυσικοί αριθμοί ώστε:

α:γ > μ:ν > β:γ ⇔ να > μγ > νβ, όπου: να = D, νβ = E τα ισοπολλαπλάσια των α, β αντίστοιχα και μγ = F το τυχαίο πολλαπλάσιο του γ.

Οπότε: να > νβ και α > β.

Για το δεύτερο μέρος της πρότασης,

Ισχυρίζομαι πως: Αν γ:β > γ:α τότε β < α.

Επειδή γ:β > γ:α – πάλι σύμφωνα με τον Ορισμό 5.7 – υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν ώστε: γ:β > ν:μ > γ:α ⇔ νβ < μγ < να ⇔ νβ < να ⇔ β < α.

(Και πάλι όπου να = D, νβ = E τα ισοπολλαπλάσια των α, β αντίστοιχα και μγ = F το τυχαίο πολλαπλάσιο του γ).

Η απόδειξη που καταγράφεται εδώ ανήκει στον Simson, ο οποίος αποδεικνύει με αυτήν πως δεν είναι αναγκαία η συνθήκη του Ευδόξου. Η απόδειξη που γράφει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.8.

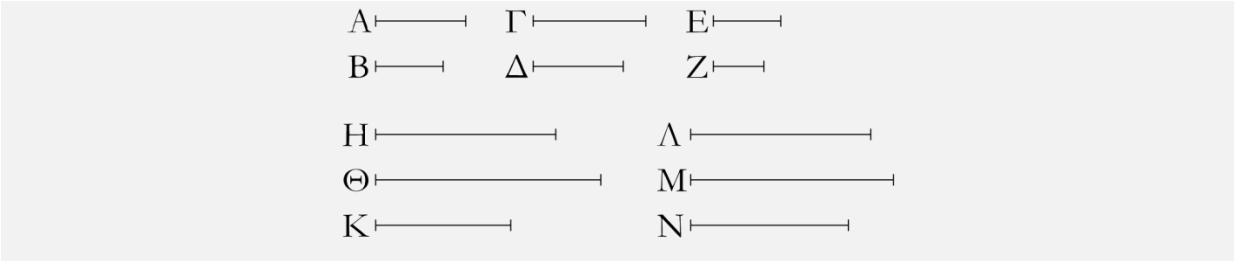
Πρόταση 11 (Στοιχειώδης)

Οι λόγοι που είναι ίσοι με τον ίδιο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι.

Έστω τα μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ, Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ, για τα οποία ισχύει:

α:β = γ:δ και γ:δ = ε:ζ.

Ισχυρίζομαι πως ισχύει: α:β = ε:ζ.



Απόδειξη

Παίρνω τα τυχαία ισοπολλαπλάσια Η = μ·α, Θ = μ·γ, Κ = μ·ε, μ φυσικός αριθμός των Α, Γ, Ε αντίστοιχα και τα ισοπολλαπλάσια (άλλα τυχαία) Λ = ν·β, Μ = ν·δ, Ν = ν·ζ, ν φυσικός αριθμός των Β, Δ, Ζ αντίστοιχα.

Αφού α:β = γ:δ τότε

Αν μ·α > ν·β θα είναι και μ·γ > ν·δ

Αν μ·α = ν·β θα είναι και μ·γ = ν·δ

Αν μ·α < ν·β θα είναι και μ·γ < ν·δ (Ορισμός 5.5)

Αφού γ:δ = ε:ζ, τότε

Αν μ·γ > ν·δ θα είναι και μ·ε > ν·ζ

Αν μ·γ = ν·δ θα είναι και μ·ε = ν·ζ

Αν μ·γ < ν·δ θα είναι και μ·ε < ν·ζ (Ορισμός 5.5)

Οπότε προκύπτουν τα εξής:

Αν μ·α > ν·β θα είναι και μ·ε > ν·ζ

Αν μ·α = ν·β θα είναι και μ·ε = ν·ζ

Αν μ·α < ν·β θα είναι και μ·ε < ν·ζ, που σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5, σημαίνουν πως

α:β = ε:ζ.

Πρόταση 12 (Στοιχειώδης)

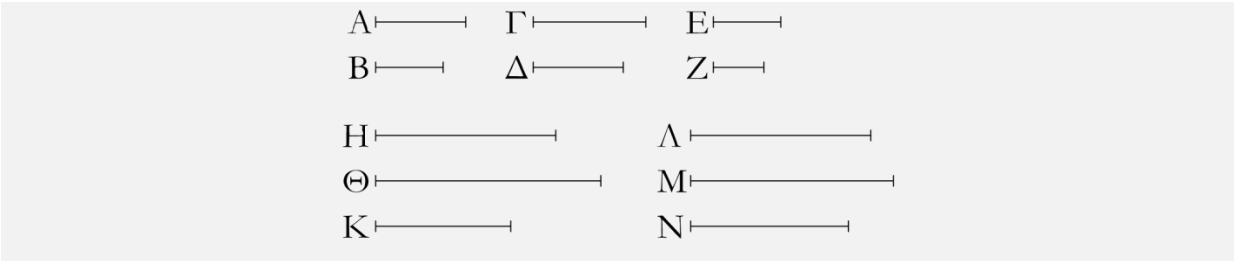
Εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη ανάλογα, με κάποιο τρόπο, τότε όπως είναι ένα των ηγουμένων προς ένα των επομένων, έτσι είναι όλα τα ηγούμενα προς όλα τα επόμενα.

Έστω κάποια μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ, Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ, τα οποία είναι ανάλογα ως εξής:

α:β = γ:δ = ε:ζ.

Ισχυρίζομαι ότι: Αν α:β = γ:δ = ε:ζ τότε ισχύει και:

α:β = γ:δ = ε:ζ = α+γ+ε:β+δ+ζ.



Απόδειξη

Παίρνω τα μεγέθη Η = η = π·α, Θ = θ = π·γ, Κ = κ = π·ε, π τυχαίος φυσικός αριθμός, ισοπολλαπλάσια των μεγεθών α, γ, ε, αντίστοιχα.

Επίσης τα μεγέθη Λ = λ = ρ·β, Μ = μ = ρ·δ, Ν = ρ·ζ, ρ άλλος τυχαίος φυσικός αριθμός, ισοπολλαπλάσια των μεγεθών β, δ, ζ.

Αφού α:β = γ:δ = ε:ζ θα ισχύουν τα ακόλουθα (σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5):

Αν η > λ θα είναι και θ > μ και κ > ν

Αν η = λ θα είναι και θ = μ και κ = ν

Αν η < λ θα είναι και θ < μ και κ < ν.

Οπότε: Αν η > λ, θ > μ, κ > ν τότε η + θ + κ > λ + μ + ν

Αν η = λ, θ = μ, κ = ν τότε η + θ + κ = λ + μ + ν

Αν η < λ, θ < μ, κ < ν τότε η + θ + κ < λ + μ + ν

Όμως η = π·α, θ = π·γ, κ = π·ε, λ = ρ·β, μ = ρ·δ, ν = ρ·ζ

Οπότε: π (α + γ + ε) > ρ (β + δ + ζ)

Ή π (α + γ + ε) = ρ (β + δ + ζ)

Ή π (α + γ + ε) < ρ (β + δ + ζ)

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5: α:β = γ:δ = ε:ζ = α+γ+ε:β+δ+ζ.

Πρόταση 13 (Στοιχειώδης)

Εάν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο, το τρίτο δε (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος) έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) προς το έκτο (μέγεθος) τότε και το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) θα έχει μεγαλύτερο λόγο από το πέμπτο (μέγεθος) προς το έκτο (μέγεθος).

Έστω κάποια μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ, Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ, για τα οποία ισχύει:

α:β = γ:δ και γ:δ > ε:ζ.

Ισχυρίζομαι πως θα είναι επίσης και α:β > ε:ζ.

Απόδειξη

Επειδή γ:δ > ε:ζ, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.7, υπάρχουν κάποια ισοπολλαπλάσια των Γ, Ε, έστω τα Η = η = π·γ, Θ = θ = π·ε αντίστοιχα, με π φυσικό αριθμό και κάποια άλλα ισοπολλαπλάσια των Δ, Ζ, έστω τα Κ = κ = ρ·δ, Λ = ρ·ζ, αντίστοιχα, με ρ φυσικό αριθμό, για τα οποία ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: η > κ και θ ≤ λ.

Παίρνω τώρα Μ = μ = π·α, τόσες φορές πολλαπλάσιο του Α=α όσες είναι το Η = π·γ πολλαπλάσιο του Γ = γ και Ν = ν = ρ·β, τόσες φορές πολλαπλάσιο του Β=β, όσες φορές είναι το Κ = ρ·δ πολλαπλάσιο του Δ=δ.

Αφού α:β = γ:δ τότε -σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5- για τα ισοπολλαπλάσια μ, η των α, γ αντίστοιχα και για τα άλλα ισοπολλαπλάσια ν, κ των β, δ αντίστοιχα θα ισχύουν ταυτόχρονα τα ακόλουθα:

Αν μ > ν τότε και η > κ

Αν μ = ν τότε και η = κ

Αν μ < ν τότε και η < κ.

Αλλά ενώ: αν η > κ και μ > ν έχω και θ ≤ λ.

Τα μ, θ είναι ισοπολλαπλάσια των α, ε αντίστοιχα και τα ν, λ είναι ισοπολλαπλάσια των β, ζ αντίστοιχα άρα –σύμφωνα με την Ορισμό 5.7 - ισχύει:

α:β > ε:ζ.

Πρόταση 14 (Μη στοιχειώδης)

Αν το πρώτο (μέγεθος) προς το δεύτερο (μέγεθος) έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος), το δε πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), μεγαλύτερο θα είναι και το δεύτερο (μέγεθος) του τετάρτου (μεγέθους). Και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε και το δεύτερο (μέγεθος) θα είναι ίσο με το τέταρτο (μέγεθος). Και αν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε και το δεύτερο (μέγεθος) θα είναι μικρότερο από το τέταρτο (μέγεθος).

Έστω τα μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ, Δ = δ, για τα οποία ισχύει: α:β = γ:δ.

Ισχυρίζομαι πως: αν α > γ τότε και β > δ.

Απόδειξη

Γιατί αφού α > γ και β τυχαίο τυχαίο άλλο μέγεθος, τότε α:β > γ:β (από Πρόταση 5.8).

Αλλά α:β = γ:δ, οπότε γ:δ > γ:β (από Πρόταση 5.13)

Και από Πρόταση 5.10 προκύπτει: β > δ.

Όμοια αποδεικνύεται πως: Αν α = γ τότε και β = δ

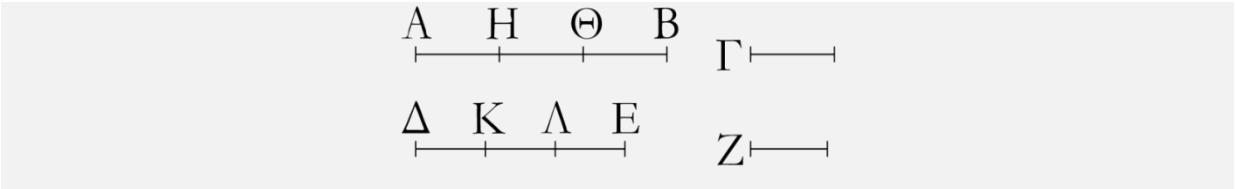
Ή αν α < γ τότε και β < δ.

Πρόταση 15 (Στοιχειώδης)

Τα μέρη των ίδιων πολλαπλασίων έχουν ίσο λόγο με αυτά, ληφθέντα κατάλληλα.

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, ΔΕ = β, ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Γ = γ και Ζ = ζ αντίστοιχα.

Ισχυρίζομαι πως: α:β = γ:ζ.



Απόδειξη

Έστω α = 3γ και β = 3ζ. Δηλαδή:

ΑΒ = ΑΗ + ΗΘ + ΘΒ, με ΑΗ = ΗΘ = ΘΒ = γ

ΔΕ = ΔΚ + ΚΛ + ΛΕ, με ΔΚ = ΚΛ = ΛΕ = ζ

Οπότε από την Πρόταση 5.7 προκύπτει: ΑΗ:ΔΚ = ΗΘ:ΚΛ = ΘΒ:ΛΕ = γ:ζ.

Τέλος εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.12 έχω:

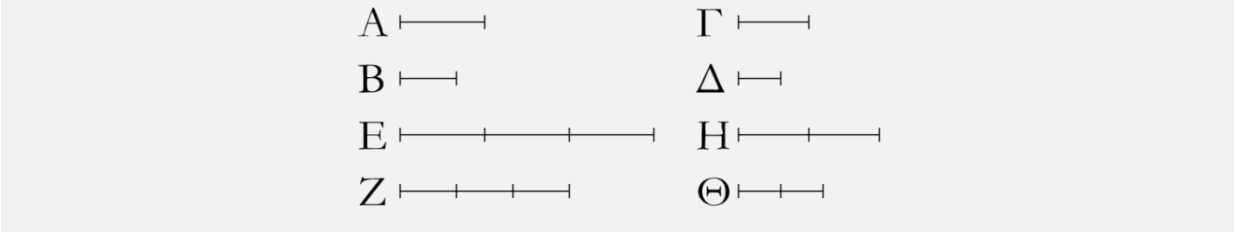
ΑΗ+ΗΘ+ΘΒ: ΔΚ+ΚΛ+ΛΕ= 3γ:3ζ = γ:ζ. Δηλαδή: α:β = γ:ζ.

Πρόταση 16 (Εναλλάξ) (Μη στοιχειώδης)

Αν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε είναι ανάλογα και εναλλάξ.

Έστω τα μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ, Δ = δ, και υποθέτουμε α: β = γ:δ.

Τότε α:γ = β:δ.



Απόδειξη

Θέτουμε Ε=να, Ζ=νβ, Η=μγ, Θ=μδ, όπου μ,ν είναι τυχαίοι φυσικοί αριθμοί. Τότε

Από την υπόθεση και την Πρόταση 5.15, να: νβ = α: β και μγ: μδ = γ: δ.

Από τη Πρόταση 5.11, να: νβ = μγ: μδ.

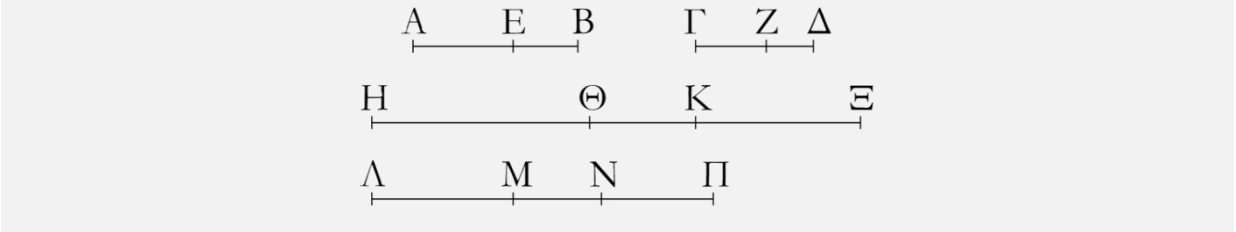
Από την Πρόταση 5.14 (η οποία χρησιμοποιεί την αρχή Ευδόξου),

Αν να > μγ αν και μόνο αν νβ > μδ. κλπ.

Από τον ορισμό 5.5, α: γ = β: δ.

Πρόταση 17 (Στοιχειώδης)

Εάν προστεθέντα μεγέθη αποτελούν αναλογία και διαιρεθέντα θα αποτελούν αναλογία. Έστω τα μεγέθη ΑΕ = α, ΕΒ = β, ΓΖ = γ, ΖΔ = δ, για τα οποία ισχύει α:β = γ:δ και α>β, γ>δ. Τότε α-β:β = γ-δ:δ.



Απόδειξη

Από την υπόθεση και τον ορισμό 5.5, μβ>να αν και μόνο αν μδ>νγ για κάθε φυσικούς αριθμούς μ, ν.

Άρα (μ+ν)β>να αν και μόνο αν (μ+ν)δ>νγ για κάθε μ, ν.

Δηλαδή, μβ>ν(α-β) αν και μόνο αν μδ>ν(γ-δ). κλπ.

Από τον ορισμό 5.5 έπεται (α-β):β = (γ-δ):δ.

Πρόταση 18 (Στοιχειώδης)

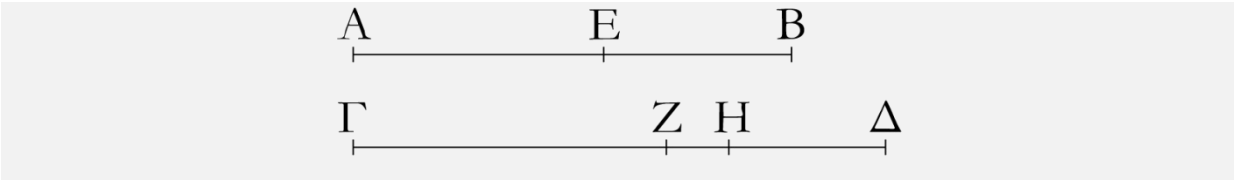
Εάν διαιρεθέντα (διαχωρισμένα) μεγέθη αποτελούν αναλογία, τότε και προστεθέντα τα μεγέθη αυτά αποτελούν αναλογία.

Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί την 5.14 (η οποία βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου), όμως στην πραγματικότητα η 5.18 είναι στοιχειώδης, και δεν βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου.

[Για την ακρίβεια η παρακάτω απόδειξη οφείλεται στον Simson και βασίζεται στις Προτάσεις 5.5 και 5.6. Καθώς η Πρόταση 5.18 είναι η αντίστροφη της Πρότασης 5.17 και η τελευταία αποδεικνύεται μέσω των Προτάσεων 5.1 και 5.2 των οποίων οι Προτάσεις 5.5 και 5.6 είναι αντίστροφες, η απόδειξη της Πρότασης 5.18 μέσω των Προτάσεων 5.5 και 5.6 φαίνεται πολύ λογική. Ο Simson μάλιστα ισχυρίζεται πως αυτή πρέπει να ήταν η απόδειξη που είχε ο Ευκλείδης καθώς οι Προτάσεις 5 και 6 δεν εμπλέκονται σε καμιά άλλη απόδειξη στο βιβλίο 5,όπως το έχουμε εμείς, ούτε οπουδήποτε αλλού μέσα στα 'Στοιχεία'. Αδιαμφισβήτητα οι Προτάσεις 5 και 6,έχουν μπει στο βιβλίο 5 για κάποιο λόγο, όπως άλλωστε κάνει ο Ευκλείδης για κάθε πρόταση που περιλαμβάνει στο έργο του].

Έστω τα μεγέθη ΑΕ = α, ΕΒ =β, ΓΖ = γ, ΖΔ = δ, για τα οποία ισχύουν τα ακόλουθα ΑΕ+ΕΒ = α+β = ΑΒ, ΓΖ+ΖΔ = γ+δ = ΓΔ, ΑΕ:ΕΒ = α:β = γ:δ = ΓΖ:ΖΔ.

Ισχυρίζομαι πως ΑΒ:ΕΒ = ΓΔ:ΖΔ, δηλαδή α+β:β = γ+δ:δ.



Απόδειξη

Παίρνω τα ισοπολλαπλάσια: μ·(α+β), μ·β, μ·(γ+δ), μ·δ των μεγεθών α+β, β, γ+δ, δ αντίστοιχα. Παίρνω επίσης άλλα τυχαία ισοπολλαπλάσια: ν·β, ν·δ των β,δ αντίστοιχα.

Ισχυρισμός:

Εάν ν·β > μ·β τότε ν·δ > μ·δ

Εάν ν·β = μ·β τότε ν·δ = μ·δ

Εάν $\nu\cdot\beta < \mu\cdot\beta$ τότε $\nu\cdot\delta < \mu\cdot\delta$

I) Έστω $\nu\cdot\beta \leq \mu\cdot\beta$ και $\nu\cdot\delta \leq \mu\cdot\delta$

Ισχύει: $\mu\cdot(\alpha+\beta) > \mu\cdot\beta$, οπότε $\mu\cdot(\alpha+\beta) > \nu\cdot\beta$

Επίσης: $\mu\cdot(\gamma+\delta) > \mu\cdot\delta$, οπότε $\mu\cdot(\gamma+\delta) > \nu\cdot\delta$

II) Έστω $\nu\cdot\beta > \mu\cdot\beta$

Αφού $\mu\cdot(\alpha+\beta)$, $\mu\cdot\beta$, $\mu\cdot(\gamma+\delta)$, $\mu\cdot\delta$, είναι ισοπολλαπλάσια των: $(\alpha+\beta)$, β, $(\gamma+\delta)$, δ, τότε από Πρόταση 5.5:

$\mu\cdot\alpha$ είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο του α, όσες φορές είναι το $\mu\cdot(\alpha+\beta)$ του $(\alpha+\beta)$

και

$\mu\cdot\gamma$ είναι τόσες φορές πολλαπλάσιο του γ, όσες φορές είναι το $\mu\cdot(\gamma+\delta)$ του $(\gamma+\delta)$. Άρα $\mu\cdot\alpha$, $\mu\cdot\gamma$ είναι ισοπολλαπλάσια των α, γ αντίστοιχα.

Επίσης $\nu\cdot\beta$, $\nu\cdot\delta$ είναι ισοπολλαπλάσια των β, δ αντίστοιχα

Το ίδιο δε είναι και τα $\mu\cdot\beta$, $\mu\cdot\delta$, γι΄αυτό, από Πρόταση 5.6,:

$(\nu-\mu)\cdot\beta$, $(\nu-\mu)\cdot\delta$ είναι ισοπολλαπλάσια των β, δ (είτε $\nu-\mu = 1$, είτε $\nu - \mu$ είναι οποιοσδήποτε άλλος φυσικός αριθμός),άρα -μέσω του Ορισμού 5.5- και αφού $\alpha:\beta = \gamma:\delta$ έχουμε: αν $\mu\cdot\alpha > (\nu-\mu)\cdot\beta$ τότε και $\mu\cdot\gamma > (\nu-\mu)\cdot\delta$

αν $\mu\cdot\alpha = (\nu-\mu)\cdot\beta$ τότε και $\mu\cdot\gamma = (\nu-\mu)\cdot\delta$

αν $\mu\cdot\alpha < (\nu-\mu)\cdot\beta$ τότε και $\mu\cdot\gamma < (\nu-\mu)\cdot\delta$

1) Αν $\mu\cdot(\alpha+\beta) > \nu\cdot\beta$, αφαιρώντας $\mu\cdot\beta$ και από τα δυο μέλη, έχουμε:

$\mu\cdot\alpha > (\nu-\mu)\cdot\beta$ οπότε: $\mu\cdot\gamma > (\nu-\mu)\cdot\delta$ και αν προσθέσουμε $\mu\cdot\delta$ και στα δυο μέλη:

$\mu\cdot(\gamma+\delta) > \nu\cdot\delta$

2) Όμοια μπορεί να αποδειχθεί πως:

Αν $\mu\cdot(\alpha+\beta) = \nu\cdot\beta$, τότε $\mu\cdot(\gamma+\delta) = \nu\cdot\delta$ και

3) Αν $\mu\cdot(\alpha+\beta) < \nu\cdot\beta$, τότε $\mu\cdot(\gamma+\delta) < \nu\cdot\delta$.

Αλλά (με δεδομένο το (I) πιο πάνω) έχει δειχθεί πως: αν $\nu\cdot\beta \leq \mu\cdot\beta$, τότε:

$\mu\cdot(\alpha+\beta) > \nu\cdot\beta$ και $\mu\cdot(\gamma+\delta) > \nu\cdot\delta$.

Οπότε όποιες κι αν είναι οι τιμές των μ, ν:

$\mu\cdot(\gamma+\delta) > \nu\cdot\delta$ αν $\mu\cdot(\alpha+\beta) > \nu\cdot\beta$ ή

$\mu\cdot(\gamma+\delta) = \nu\cdot\delta$ αν $\mu\cdot(\alpha+\beta) = \nu\cdot\beta$ ή

$\mu\cdot(\gamma+\delta) < \nu\cdot\delta$ αν $\mu\cdot(\alpha+\beta) < \nu\cdot\beta$.

Επομένως - σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5 – ισχύει:

$\alpha+\beta:\beta = \gamma+\delta:\delta$.

Πρόταση 19 (Μη Στοιχειώδης)

Εάν όπως είναι το όλο προς το όλο, έτσι είναι κι ένα τμήμα του (αφαιρούμενο) προς το αντίστοιχο (αφαιρούμενο) τμήμα του άλλου μεγέθους, τότε και το υπόλοιπο μέγεθος προς το υπόλοιπο είναι όπως το όλο προς το όλο.

Έστω τα μεγέθη: ΑΒ =α, ΓΔ = β, ΑΕ = γ, ΓΖ = δ, με ΑΕ < ΑΒ (γ < α) και ΓΖ < ΓΔ (δ < β) και α:β = γ:δ.

Ισχυρίζομαι πως α-γ:β-δ = α:β.

Απόδειξη

Επειδή: α:β = γ:δ, από Πρόταση 5.16, προκύπτει: α:γ = β:δ

από Πρόταση 5.17: α-γ:γ = β-δ:δ

από Πρόταση 5.16: α-γ:β-δ = γ:δ,

οπότε -σύμφωνα με την Πρόταση 5.11- αφού α:β = γ:δ έχουμε: α-γ:β-δ = α:β.

Πρόταση 20 (Μη Στοιχειώδης)

Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα τόσα ίσα στο πλήθος με αυτά, ανά δυο σε ίσους λόγους, εάν δι΄ίσου είναι το πρώτο (μέγεθος) μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), θα είναι και το τέταρτο (μέγεθος) μεγαλύτερο του έκτου (μεγέθους). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), θα είναι ίσο και το τέταρτο (μέγεθος) με το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), θα είναι και το τέταρτο (μέγεθος) μικρότερο από το έκτο (μέγεθος).

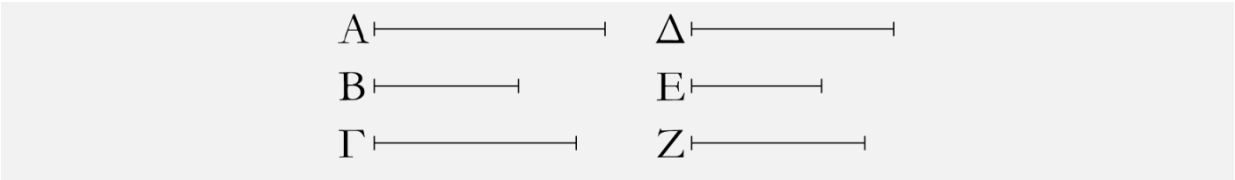
Έστω τρία μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ και άλλα τόσα – ίσα με αυτά στο πλήθος- τα: Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ, τα οποία -ανά δυο- έχουν ίσους λόγους, δηλαδή:

α: β = δ:ε και β:γ = ε:ζ

Αν α > γ (δι' ίσου), ισχυρίζομαι πως δ > ζ.

Αν α = γ ισχυρίζομαι δ = ζ

Αν α < γ ισχυρίζομαι δ < ζ.



Απόδειξη

Αφού α > γ και β κάποιο άλλο μέγεθος, από Πρόταση 5.8, προκύπτει: α:β > γ:β

Αλλά α:β = δ:ε (από υπόθεση) και γ:β = ζ:ε (από Πόρισμα της Πρόταση 5.4 ή Πόρισμα 5.7), οπότε: α:β > ζ:ε (Πρόταση 5.13), άρα δ:ε > ζ:ε κι εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.10 καταλήγω: δ > ζ.

Όμοια αποδεικνύεται πως: αν α = γ τότε δ = ζ

αν α < γ τότε δ = ζ.

Πρόταση 21 (Μη Στοιχειώδης)

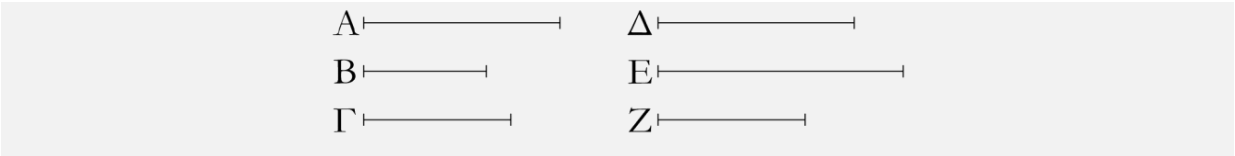
Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα ίσα στο πλήθος με αυτά, ανά δυο σε ίσους λόγους και η αναλογία τους είναι τεταραγμένη, εάν δι' ίσου το πρώτο (μέγεθος) είναι μεγαλύτερο του τρίτου (μεγέθους), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μεγαλύτερο του έκτου (μεγέθους). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι ίσο με το τρίτο (μέγεθος), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι ίσο με το έκτο (μέγεθος). Και εάν το πρώτο (μέγεθος) είναι μικρότερο από το τρίτο (μέγεθος), τότε και το τέταρτο (μέγεθος) θα είναι μικρότερο από το έκτο (μέγεθος).

Έστω τρία μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ και άλλα τόσα – ίσα με αυτά στο πλήθος – τα Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ, τα οποία ανά δυο έχουν ίσους λόγους και η αναλογία τους είναι τεταραγμένη, δηλαδή: α:β = ε:ζ και β:γ = δ:ε.

Ισχυρίζομαι πως αν α > γ (δι' ίσου) τότε δ > ζ

Αν α = γ (δι' ίσου) τότε δ = ζ

Αν α < γ (δι' ίσου) τότε δ < ζ.



Απόδειξη

Αφού α > γ και β κάποιο άλλο μέγεθος, από Πρόταση 5.8, προκύπτει: α:β > γ:β

Όμως: α:β = ε:ζ και γ:β = ε:δ, οπότε: ε:ζ > ε:δ (σύμφωνα πάντα με την Πρόταση 5.13), αλλά μέσω της Πρότασης 5.10, καταλήγουμε ζ < δ ή αλλιώς δ > ζ.

Όμοια αποδεικνύεται πως αν α = γ τότε δ = ζ και αν α < γ τότε δ < ζ.

Πρόταση 22 (Δι' ίσου) (Μη Στοιχειώδης)

Εάν υπάρχουν κάποια μεγέθη και κάποια άλλα μεγέθη, ίσα με αυτά στο πλήθος, τα οποία είναι ανά δυο στον ίδιο λόγο, τότε αυτά θα είναι στον ίδιο λόγο και μέσω ισότητας.

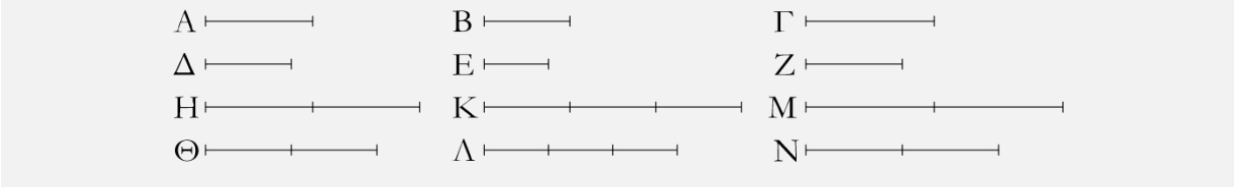
Εάν υπάρχει ένας αριθμός μεγεθών Α = α, Β = β, Γ = γ και άλλος ένας ίδιος:

Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ, τα οποία είναι ανά δυο σε ίσους λόγους:

α:β = δ:ε, β:γ = ε:ζ,

ισχυρίζομαι πως θα είναι και δι' ίσου σε ίσους λόγους, δηλαδή

α:γ = δ:ζ.



Απόδειξη

Παίρνω τα μεγέθη Η = η = π·α, Θ = θ = π·δ ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Α, Δ, αντίστοιχα,

τα μεγέθη Κ = κ = ρ·β, Λ =λ = ρ·ε άλλα τυχαία ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Β, Ε, αντίστοιχα

και ακόμη τα μεγέθη Μ = μ = σ·γ, Ν = ν = σ·ζ επίσης τυχαία ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Γ, Ζ, αντίστοιχα.

Τότε – σύμφωνα με την Πρόταση 5.4 – θα ισχύουν τα ακόλουθα:
π·α: ρ·β = π·δ:ρ·ε και ρ·β: σ·γ = ρ·ε:σ·ζ.

Αφού λοιπόν υπάρχουν τρία μεγέθη Η = π·α, Κ = ρ·β, Μ = σ·γ και άλλα τόσα ίσα σε πλήθος τα: Θ = π·δ, Λ = ρ·ε, Ν = σ·ζ, τα οποία ανά δυο είναι σε ίσους λόγους, γι΄αυτό - δι΄ίσου – και με εφαρμογή της Πρότασης 5.20, καταλήγουμε στα ακόλουθα:

Αν Η = η = π·α > Μ = μ = σ·γ τότε Θ = θ = π·δ > Ν = ν = σ·ζ

Αν Η = η = π·α = Μ = μ = σ·γ τότε Θ = θ = π·δ = Ν = ν = σ·ζ

Αν Η = η = π·α < Μ = μ = σ·γ τότε Θ = θ = π·δ < Ν = ν = σ·ζ.

Όμως τα Η = η, Θ = θ είναι ισοπολλαπλάσια των Α = α, Δ = δ

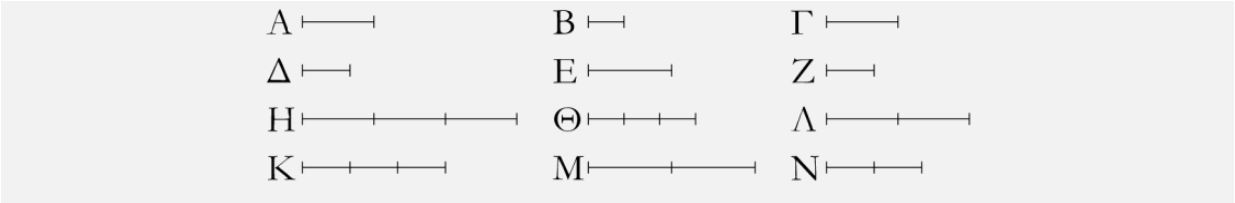
και τα Μ = μ, Ν = ν είναι ισοπολλαπλάσια των Γ = γ, Ζ = ζ, οπότε από τον Ορισμό 5.5, έχουμε τελικά: α:γ = δ:ζ.

Πρόταση 23 (Τεταραγμένη) (Μη Στοιχειώδης)

Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα ίσα με αυτά στο πλήθος, ανά δυο στον ίδιο λόγο, και η αναλογία αυτών είναι τεταραγμένη, τότε και μέσω ισότητας θα είναι στον ίδιο λόγο.

Έστω τρία μεγέθη Α = α, Β = β, Γ = γ και άλλα ίσα με αυτά σε πλήθος, τα οποία ανά δυο είναι στην ίδια αναλογία, τα: Δ = δ, Ε = ε, Ζ = ζ και η αναλογία αυτή είναι τεταραγμένη, δηλαδή α:β = ε:ζ και β:γ = δ:ε.

Ισχυρίζομαι πως α:γ = δ:ζ.



Απόδειξη

Παίρνουμε τα μεγέθη: Η = η = π·α, Θ = θ = π·β, Κ = κ = π·δ ισοπολλαπλάσια των μεγεθών: Α = α, Β = β, Δ = δ, αντίστοιχα και τα μεγέθη Λ = λ = ρ·γ, Μ = μ = ρ·ε, Ν = ν = ρ·ζ ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Γ = γ, Ε = ε, Ζ = ζ, αντίστοιχα.

Επειδή τα Η = η, Θ = θ είναι ισοπολλαπλάσια των Α = α, Β = β αντίστοιχα, σύμφωνα με την Πρόταση 5.15, ισχύει α:β = η:θ

Για τον ίδιο ακριβώς λόγο ισχύει και ε:ζ = μ:ν, όμως επειδή α:β = ε:ζ, από Πρόταση 5.11, προκύπτει η:θ = μ:ν

Και επειδή β:γ = δ:ε, από Πρόταση 5.16 ισχύει η αναλογία εναλλάξ,

δηλαδή β:δ = γ:ε.

Τα μεγέθη Θ = θ, Κ = κ είναι ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Β =β, Δ = δ αντίστοιχα, πάλι σύμφωνα με την Πρόταση 5.15, ισχύει:

β:δ = θ:κ.

αλλά β:δ = γ:ε, άρα από Πρόταση 5.11, θ:κ = γ:ε.

Πάλι επειδή τα μεγέθη Λ = λ, Μ = μ είναι ισοπολλαπλάσια των μεγεθών Γ = γ, Ε = ε αντίστοιχα, σύμφωνα με την Πρόταση 5.15, ισχύει: γ:ε = λ:μ, αλλά γ:ε = θ:κ

οπότε από Πρόταση 5.11, θ:κ = λ:μ και από Πρόταση 5.16 ισχύει η αναλογία εναλλάξ, δηλαδή: θ:λ = κ:μ. Έχει όμως δειχθεί πως η:θ = μ:ν

Υπάρχουν λοιπόν τρία μεγέθη, τα Η = η, Θ = θ, Λ = λ και άλλα τρία (ίσα δηλαδή σε πλήθος με τα πρώτα), τα Κ = κ, Μ = μ, Ν = ν, τα οποία ανά δυο έχουν ίσους λόγους και η αναλογία τους αυτή είναι τεταραγμένη, άρα δι' ίσου –σύμφωνα πάντα με την Πρόταση 5.21 – θα ισχύουν τα ακόλουθα:

Αν Η = η > Λ = λ τότε και Κ = κ > Ν = ν

Αν Η = η = Λ = λ τότε και Κ = κ = Ν = ν

Αν Η = η < Λ = λ τότε και Κ = κ < Ν = ν.

Και είναι: Η = π·α, Κ = π·δ ισοπολλαπλάσια δηλαδή των Α = α, Δ = δ αντίστοιχα και Λ = ρ·γ, Ν = ν = ρ·ζ ισοπολλαπλάσια των Γ = γ, Ζ = ζ αντίστοιχα, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5, από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει α:γ = δ:ζ.

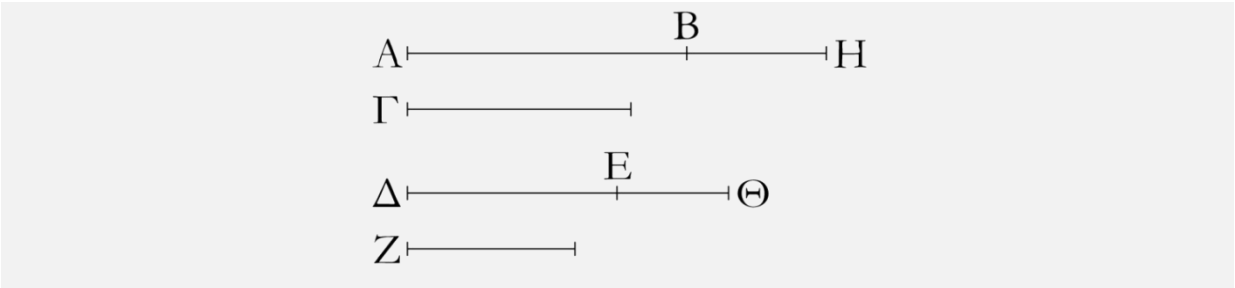
Πρόταση 24 (Στοιχειώδης)

Εάν ένα πρώτο μέγεθος προς ένα δεύτερο μέγεθος, έχει τον ίδιο λόγο μ' εκείνον που έχει ένα τρίτο μέγεθος προς ένα τέταρτο μέγεθος και ένα πέμπτο μέγεθος προς το δεύτερο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο μ' εκείνον που έχει ένα έκτο μέγεθος προς το τέταρτο μέγεθος, τότε προστιθέμενα το πρώτο και το πέμπτο (μέγεθος), θα έχουν προς το δεύτερο (μέγεθος), τον ίδιο λόγο που έχουν το τρίτο και το έκτο (μέγεθος) προς το τέταρτο (μέγεθος).

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, Γ = β, ΔΕ = γ, Ζ = δ, ΒΗ = ε, ΕΘ = ζ, ώστε

α:γ = δ:ζ και β:γ = ε:ζ.

Τότε (α+β):γ = (δ+ε):ζ.



Απόδειξη

Από τον ορισμό 5.5 και την υπόθεση,

$\mu_1\gamma>\nu\alpha$ αν και μόνο αν $\mu_1\zeta>\nu\delta$ και

$\mu_2\gamma>\nu\beta$ αν και μόνο αν $\mu_2\zeta>\nu\varepsilon$ για κάθε φυσικούς αριθμούς μ_1, μ_2, ν

Άρα $(\mu_1+\mu_2)\gamma>\nu(\alpha+\beta)$ αν και μόνο αν $(\mu_1+\mu_2)\zeta>\nu(\delta+\varepsilon)$ για κάθε φυσικούς αριθμούς μ_1, μ_2, ν.

Έπεται άμεσα ότι $\mu\gamma>\nu(\alpha+\beta)$ αν και μόνο αν $\mu\zeta>\nu(\delta+\varepsilon)$ για κάθε φυσικούς αριθμούς μ, ν. κλπ.

Από τον ορισμό 5.5 έπεται ότι (α+β): γ = (δ+ε): ζ.

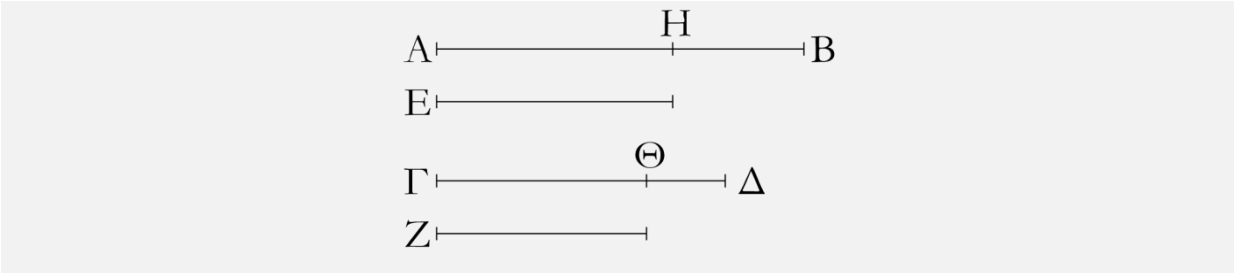
Η απόδειξη στα Στοιχεία χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.22 (δι' ίσου), η οποία βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου. Αλλά αυτό δεν είναι αναγκαίο.

Πρόταση 25 (Μη Στοιχειώδης)

Εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά, είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των υπολοίπων δυο μεγεθών.

Έστω τα μεγέθη ΑΒ = α, Γ = β, ΔΕ = γ, Ζ = δ, ΒΗ = ε, ΕΘ = ζ, τα οποία βρίσκονται στις ακόλουθες σχέσεις α:β = γ:δ και ε:β = ζ:δ.

Ισχυρίζομαι πως (α+ε):β = (γ+ζ):δ.



Απόδειξη

Παίρνω πάνω στο ΑΒ τμήμα ΑΗ = Ε = γ (2) και πάνω στο ΓΔ τμήμα ΓΘ = Ζ = δ (3). Οπότε η σχέση (1) γίνεται: α:β = ΑΗ: ΓΘ και εν συνεχεία – μέσω της Πρότασης 5.19 - α:β = ΗΒ: ΘΔ = (α – γ): (β – δ). Επειδή α > β άρα και α-γ > β-δ. Δηλαδή:

ΗΒ > ΘΔ

Εντωμεταξύ, λόγω των σχέσεων (2), (3), ισχύει: ΑΗ + Ζ = ΓΘ + Ε

Και ΗΒ > ΘΔ

(αν σε άνισα μεγέθη προσθέσω ίσα τότε αυτά εξακολουθούν να είναι άνισα):

ΑΗ + Ζ + ΗΒ > ΓΘ + Ε + ΘΔ

ΑΗ +ΗΒ + Ζ > ΓΘ + ΘΔ + Ε

ΑΒ + Ζ > ΓΔ + Ε

α+δ > β+γ.

Σύνδεση με τις τομές Dedekind

Ορισμός Τομής Dedekind

Αν α, β ομογενή μεγέθη, θέτω: Δ(α,β) = $\{(\mu,\nu): \mu\beta < \nu\alpha\ , \mu,\nu \in \mathbb{N}\}$

Ένα υποσύνολο Δ των θετικών ρητών είναι τομή Dedekind αν:

1. Δ ≠ ∅
2. Δ ≠ ℚ+
3. Αν x ∈ Δ και y < x,με y θετικό ρητό ⟹ y ∈ Δ
4. Αν x ∈ Δ ⟹ ∃ ω ∈ Δ: x < ω.

Πρόταση Β

Αν ο λόγος α:β ικανοποιεί τη συνθήκη του Ευδόξου, τότε το σύνολο Δ (α,β) είναι τομή Dedekind.

Απόδειξη:

1. Δ (α,β) ≠ ∅:

Από τη συνθήκη του Ευδόξου, ∃ ν ∈ ℕ: ν·α > β ⟹ ν·α > 1·β ⟹ 1·β < ν·α ⟹

(1,ν) ∈ $\Delta(\alpha,\beta)$, οπότε: Δ(α,β) ≠ ∅.

2. Δ (α,β) ≠ ℚ+

Από τη συνθήκη του Ευδόξου, ∃ μ ∈ ℕ: μ·β > 1·α, άρα (μ,1) δεν ανήκει στο σύνολο Δ(α,β), οπότε Δ(α,β) ≠ ℚ+.

3. Αν (μ,ν) ∈ Δ(α,β) και (μ_1,ν_1) < (μ,ν), τότε (μ_1,ν_1) ∈ Δ(α,β).

Αφού (μ,ν) ∈ Δ(α,β) ισχύει: μ·β < ν·α

Και (μ_1,ν_1) < (μ,ν), δηλαδή: $\frac{\mu_1}{\nu_1} < \frac{\mu}{\nu}$, άρα $\mu_1 \cdot \nu < \nu_1 \cdot \mu \Longrightarrow \mu_1 \cdot \nu \cdot \beta < \nu_1 \cdot \mu \cdot \beta < \nu_1 \cdot \nu \cdot \alpha \Longrightarrow \mu_1 \cdot \nu \cdot \beta < \nu_1 \cdot \nu \cdot \alpha \Longrightarrow \mu_1 \cdot \beta < \nu_1 \cdot \alpha \Longrightarrow (\mu_1, \nu_1) \in \Delta(\alpha,\beta)$.

4. Αν (μ, ν) ∈ Δ(α,β),τότε ∃ (κ,λ) ∈ Δ (α,β): (μ,ν) < (κ,λ).

Αν (μ,ν) ∈ Δ(α,β) τότε: μ·β < ν·α. Από Πρόταση 5.8 έχουμε: μ·β: ν·β < ν·α: ν·β

Από τον Ορισμό 5.7: ∃ (κ,λ) ώστε λ·μ·β < κ·ν·β και συγχρόνως λ·ν·α > κ·ν·β,

Δηλαδή: λ·μ·β < κ·ν·β < λ·ν·α ⟹ μ:ν < κ:λ < α:β.

Η τελευταία σχέση πιστοποιεί πως: (κ,λ) ∈ Δ(α,β) και επιπλέον (μ,ν) < (κ,λ).

Πρόταση Γ

Αν οι λόγοι α:β και γ:δ ικανοποιούν τη συνθήκη του Ευδόξου, τότε:

α:β = γ:δ ⟺ Δ(α,β) = Δ(γ,δ)

Απόδειξη:

Ι) (⟹) Αν α:β = γ:δ ⟹ Δ(α,β) = Δ(γ,δ)

Έστω (μ,ν) ∈ Δ(α,β) τότε: μ·β < ν·α

⟹ μ·β·δ < ν·α·δ (αφού α:β = γ:δ ⟺ α·δ = β·γ)

⟹ μ·β·δ < ν·β·γ

$\Longrightarrow \mu\cdot\delta < \nu\cdot\gamma$

που σημαίνει: $(\mu,\nu) \in \Delta(\gamma,\delta)$, οπότε: $\Delta(\alpha,\beta) \subseteq \Delta(\gamma,\delta)$ (1)

Έστω $(\mu,\nu) \in \Delta(\gamma,\delta)$, τότε: $\mu\cdot\delta < \nu\cdot\gamma$

$\Longrightarrow \mu\cdot\delta\cdot\beta < \nu\cdot\gamma\cdot\beta$ (και αφού $\alpha:\beta = \gamma:\delta \Longleftrightarrow \alpha\cdot\delta = \beta\cdot\gamma$)

$\Longrightarrow \mu\cdot\delta\cdot\beta < \nu\cdot\alpha\cdot\delta$

$\Longrightarrow \mu\cdot\beta < \nu\cdot\alpha$

που σημαίνει: $(\mu,\nu) \in \Delta(\alpha,\beta)$, οπότε: $\Delta(\gamma,\delta) \subseteq \Delta(\alpha,\beta)$ (2)

Από (1), (2) συμπεραίνεται: $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\gamma,\delta)$.

II) ($\Longleftarrow$) Αν $\Delta(\alpha,\beta) = \Delta(\gamma,\delta)$, τότε: $\alpha:\beta = \gamma:\delta$.

Έστω τυχαίο $(\mu,\nu) \in \Delta(\alpha,\beta)$ τότε - εξ΄ορισμού- ισχύει: $\mu\cdot\beta < \nu\cdot\alpha$ (3)

Επειδή $\Delta(\alpha,\beta) = \Delta(\gamma,\delta)$, ισχύει – εξ ορισμού – και: $\mu\cdot\delta < \nu\cdot\gamma$ (4)

Από (3),(4) –και σύμφωνα με τον Ορισμό 5.5- προκύπτει: $\alpha:\beta = \gamma:\delta$.

Πρόταση Δ

Η σχέση διάταξης των λόγων μεγεθών είναι ολική.

(Δηλαδή για κάθε δυο λόγους διαφορετικούς μεταξύ τους, ο ένας είναι μεγαλύτερος από τον άλλον).

Έστω $\alpha:\beta$ και $\gamma:\delta$,με $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ μεγέθη ομογενή, τότε θα ισχύει ένα από τα παρακάτω $\alpha:\beta = \gamma:\delta$ ή $\alpha:\beta > \gamma:\delta$ ή $\alpha:\beta < \gamma:\delta$.

Απόδειξη

Επειδή κάθε λόγος $\alpha:\beta$ αντιστοιχεί σε μια τομή Dedekind $\Delta(\alpha,\beta)$ (άμεσο συμπέρασμα από τις προτάσεις που προηγήθηκαν), αρκεί να δείξω πως για δυο τομές Dedekind, διαφορετικές μεταξύ τους, η μια είναι πάντα μεγαλύτερη της άλλης.

Έστω Δ, Δ΄ δυο τομές Dedekind, με $\Delta \neq \Delta'$, ισχυρίζομαι πως: είτε $\Delta \subset \Delta'$ είτε $\Delta' \subset \Delta$.

Αφού $\Delta \neq \Delta'$ ισχύει: $\exists\, x \in \Delta$ και $x \notin \Delta'$ ή αντίστροφα $\exists\, x \in \Delta'$ και $x \notin \Delta$.

Θεωρώ την πρώτη περίπτωση δηλαδή $(\Delta \subset \Delta')$ $\exists\, x \in \Delta$ και $x \notin \Delta'$, τότε για $\psi \in \Delta'$ και $\psi \notin \Delta$ έχω $x < \psi$, οπότε $x \in \Delta'$ άτοπο. Ισχύει λοιπόν: $\Delta' \subset \Delta$.

Συμπερασματικά: Κάθε λόγος μεγεθών $\alpha:\beta$ ορίζει μια τομή Dedekind.

Θα ερευνήσω τώρα ποιες από τις κοινές έννοιες και τα γεωμετρικά αιτήματα που τιθενται στο Βιβλίο 1 των «Στοιχείων» εμφανίζονται και χρησιμοποιούνται στο Βιβλίο 5, στη θεωρία λόγων μεγεθών δηλαδή του Ευδόξου.

Σε ό,τι αφορά τις **κοινές έννοιες**:

1. Αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο είναι και ίσα μεταξύ τους.
2. Και αν σε ίσα προστεθούν ίσα, οι ολότητες είναι ίσες.
3. Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, αυτά που υπολείπονται είναι ίσα.
4. Και αυτά που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο είναι ίσα μεταξύ τους.
5. Και το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος.

Χρησιμοποιούνται όλες στο Βιβλίο V και ως εξής:

Στην Πρόταση 5.1: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.2: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.3: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.4: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.5 (αντίστοιχη της 5.1, με την αφαίρεση να παίρνει τη θέση της πρόσθεσης): Κοινή Έννοια 3

Στην Πρόταση 5.6 (αντίστοιχη της 5.2, με την αφαίρεση πάλι να παίρνει τη θέση της πρόσθεσης): Κοινή Έννοια 3

Στην Πρόταση 5.7: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.8: Κοινή Έννοια 1, Κοινή Έννοια 4

Στην Πρόταση 5.9 (αντίστροφη της 5.7 και αντιθετοαντίστροφη της 5.8): Κοινή Έννοια

Στην Πρόταση 5.10 (αντίστροφη της 5.8): Κοινή Έννοια

Στην Πρόταση 5.11: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.12: Κοινή Έννοια 1, Κοινή Έννοια 5

Στην Πρόταση 5.13: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.14: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.15: Κοινή Έννοια 1, Κοινή Έννοια 5

Στην Πρόταση 5.16: Κοινή Έννοια 1

Στην Πρόταση 5.17: Κοινή Έννοια 1, Κοινή Έννοια 3 (για την ακρίβεια χρησιμοποιείται και η έννοια, «αν από άνισα αφαιρέσω ίσα, αυτά που υπολείπονται θα εξακολουθήσουν να είναι άνισα». Η έννοια αυτή και μερικές άλλες[1], υπήρχαν σε κάποιες εκδόσεις των «Στοιχείων», όμως αργότερα διαγράφτηκαν, γιατί διαπιστώθηκε ότι δεν περιέχονταν στο αρχικό κείμενο.

[1] *Οι κοινές επιπλέον έννοιες που παρουσιάστηκαν σε κάποιες εκδόσεις των «Στοιχείων»:*
Εάν σε άνισα προστεθούν ίσα, τα προκύπτοντα είναι άνισα.
Τα διπλάσια του ιδίου είναι μεταξύ τους ίσα.
Τα μισά του ιδίου είναι μεταξύ τους ίσα. Επίσης,
Οι δυο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια.

Στην Πρόταση 5.18 (αντίστροφη της 5.17): Κοινή Έννοια 1, Κοινή Έννοια 5

Στην Πρόταση 5.19: Κοινή Έννοια 5

Στην Πρόταση 5.23: Κοινή Έννοια 5

Στην Πρόταση 5.25: Κοινή Έννοια 5 και η έννοια «αν σε άνισα προσθέσω ίσα παραμένουν όμοια άνισα».

Σε ό,τι αφορά τα **γεωμετρικά αιτήματα**, στο βιβλίο 5 χρειάζονται τα πρώτα 3 αιτήματα, που ονομάζονται και αιτήματα ύπαρξης (η κατασκευή ουσιαστικά είναι απόδειξη ύπαρξης), δηλαδή:

1. Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.
2. Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς κι ευθυγράμμως.
3. Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα είναι δυνατό να γράψουμε κύκλο.

Το πρώτο και το δεύτερο αίτημα χρειάζονται για την χάραξη των ευθυγράμμων τμημάτων που χρησιμοποιούνται σε όλο το βιβλίο για όλες τις Προτάσεις του.

Το τρίτο υποκρύπτεται όπου υπάρχει αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων, γιατί έτσι από-δίδεται τούτη. (Ευθεία αναφορά στις Προτάσεις 1.2 και 1.3)

Δεν χρησιμοποιούνται τα άλλα δυο αιτήματα που συμπληρώνουν την πεντάδα των αιτημάτων των «Στοιχείων» και με τα οποία γίνεται ουσιαστικά παραδεκτό ότι κάποια γεωμετρικά σχήματα έχουν ορισμένες ειδικές ιδιότητες, δηλαδή τα:

4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και

5. Αν ευθεία, η οποία συναντάει δυο ευθείες, σχηματίζει δυο εσωτερικές και προς το ίδιο μέρος γωνίες μικρότερες (κατά το άθροισμα) των δυο ορθών, τότε οι δυο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρο συναντιούνται σε κείνα τα μέρη τους, όπου βρίσκονται οι γωνίες οι μικρότερες των δυο ορθών.

Δεν υπάρχουν καθόλου γωνίες μέσα στο βιβλίο 5, ώστε να χρειαστεί κάπου το αίτημα 4. Ούτε οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικό σχήμα για να χρειαστεί το αίτημα 5.

Σχηματική λογική δομή του βιβλίου V

		1				5																				
			2	3																						
			2				6																			
ορ				3	4																					
ορ								7			10															
ορ OP	σ	1							8	9																
ορ												11														
ορ		1											12													
ορ OP														13												
									8		10			13	14											
								7					12			15										
ορ												11			14	15	16									
		1	2															17								
ορ												11						17	18							
												11					16	17		19						
									8		10			13							20					
									8		10			13								21				
ορ					4																20		22			
												11				15	16					21		23		
																			18						24	
																				19						25

Με κόκκινο σημαίνει ότι
οι Ευκλείδειες αποδείξεις χρησιμοποιούν την αρχή Ευδόξου, (**σ** = συνθήκη 5.4)
είναι δηλαδή οι Μη Στοιχειώδεις Προτάσεις.
ορ = ορισμός 5.5
ΟΡ = ορισμός 5.7

Οι Προτάσεις 5.1, 5.2, 5.3 είναι Απολύτως Στοιχειώδεις, όπως και οι Προτάσεις 5.5 και 5.6 οι οποίες είναι οι αντίστροφες των Προτάσεων 5.1 και 5.2 αντίστοιχα.
Η Πρόταση 5.10 είναι αντίστροφη της Πρότασης 5.8 , παρ΄όλα αυτά είναι Στοιχειώδης, γιατί για την απόδειξή της δεν απαιτείται η 5.8 που αναφέρει ο Ευκλείδης, παρά μόνο ο Ορισμός 5.7 (απόδειξη από τον Simson).

Η Πρόταση 5.9 είναι η αντιθετο-αντίστροφη της Πρότασης 5.8 και είναι Μη Στοιχειώδης.

Η Πρόταση 5.14 είναι Μη Στοιχειώδης καθόσον χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.8.
Η Πρόταση 5.16, η εναλλάξ δηλαδή, είναι Μη Στοιχειώδης και χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.14 άρα την αρχή Ευδόξου.
Η Πρόταση 5.19 είναι Μη Στοιχειώδης και χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.16.
Οι Προτάσεις 5.20 και 5.21 Μη Στοιχειώδεις με άμεση χρήση της 5.8.
Η Πρόταση 5.22, η δι' ίσου δηλαδή, Μη Στοιχειώδης, με χρήση της Πρότασης 5.20.
Η Πρόταση 5.23, η Τεταραγμένη δηλαδή, Μη Στοιχειώδης, με χρήση των Προτάσεων 5.16 και 5.21.
Η Πρόταση 5.25 Μη Στοιχειώδης αφού χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.19.

Ὅροι

1. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

2. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

3. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Όροι

1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι όσα έχουν τις γωνίες τους μια προς μια ίσες και τις πλευρές τους που περιέχουν αντίστοιχα τις ίσες αυτές γωνίες, ανάλογες.

2. Ένα ευθύγραμμο τμήμα λέγεται ότι έχει χωριστεί σε άκρο και μέσο λόγο (από ένα σημείο του) όταν όπως είναι το όλο προς το μεγαλύτερο μέρος αυτού, έτσι είναι το μεγαλύτερο μέρος αυτού προς το μικρότερό του.

3. Ύψος κάθε σχήματος είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του προς την αντίστοιχη βάση του.

α΄

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

σχήμα 1

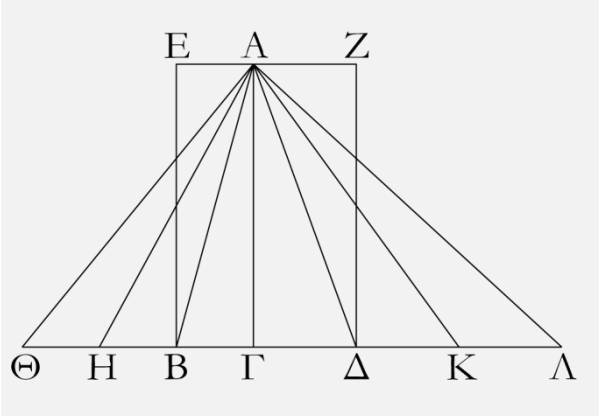
Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι [ὁσαιδηποτοῦν] αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΛ τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΛ τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν

Πρόταση 1

Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν το ίδιο ύψος, είναι μεταξύ τους όπως είναι οι βάσεις τους.



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, τα παραλληλόγραμμα ΕΓ, ΓΖ με το ίδιο ύψος ΑΓ. Ισχυρίζομαι ότι όπως είναι η βάση ΒΓ προς τη βάση ΓΔ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ και το παραλληλόγραμμο ΕΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ.

Προεκτείνοντας τη ΒΔ κι από τα δυο μέρη ως τα σημεία Θ, Λ, δημιουργούνται οι ίσες προς τη βάση ΒΓ, βάσεις ΒΗ,ΗΘ και οι ίσες προς τη βάση ΓΔ, βάσεις ΔΚ, ΚΛ. Και συνδέοντας προκύπτουν οι: ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Και επειδή είναι ίσα τα ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ μεταξύ τους, είναι ίσα μεταξύ τους και τα τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ (Πρόταση 1.38). Άρα όσες φορές πολλαπλάσιο είναι η βάση ΘΓ της βάσης ΒΓ, τόσες φορές πολλαπλάσιο είναι και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Για τους ίδιους λόγους, όσες φορές πολλαπλάσιο είναι η βάση ΛΓ της βάσης ΓΔ, τόσες φορές πολλαπλάσιο είναι και το τρίγωνο ΑΛΓ του τριγώνου ΑΓΔ. Και αν η βάση ΘΓ είναι ίση με τη βάση ΓΛ, ίσο είναι και το τρίγωνο ΑΘΓ με το τρίγωνο ΑΓΛ (Πρόταση 1.38) και εάν υπερέχει η βάση ΘΓ της βάσης ΓΛ, υπερέχει και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΓΛ

ΑΒΓ, ΑΓΔ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἥ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΛΓ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου, καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

και εάν είναι μικρότερη η βάση ΘΓ της βάσης ΓΛ, είναι μικρότερο και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΓΛ (άμεση γενίκευση της Πρότασης 1.38). Δεδομένων λοιπόν τεσσάρων μεγεθών, δυο βάσεων ΒΓ, ΓΔ και δυο τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ έχουμε πάρει ίσα πολλαπλάσια της μεν βάσης ΒΓ και του τριγώνου ΑΒΓ τη βάση ΘΓ και το τρίγωνο ΑΘΓ, της δε βάσης ΓΔ και του τριγώνου ΑΔΓ, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια, τη βάση ΛΓ και το τρίγωνο ΑΛΓ και έχουμε δείξει ότι αν υπερέχει η βάση ΘΓ της βάσης ΓΛ, υπερέχει και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΛΓ και αν η βάση ΘΓ είναι ίση με τη βάση ΓΛ, είναι και το τρίγωνο ΑΘΓ ίσο με το τρίγωνο ΑΛΓ και αν η βάση ΘΓ είναι μικρότερη από τη βάση ΓΛ, είναι και το τρίγωνο ΑΘΓ μικρότερο του τριγώνου ΑΛΓ. Άρα όπως είναι η βάση ΒΓ προς τη βάση ΓΔ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ (Ορισμός 5.5).

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Κι επειδή είναι του μεν τριγώνου ΑΒΓ διπλάσιο το παραλληλόγραμμο ΕΓ, του δε τριγώνου ΑΓΔ διπλάσιο το παραλληλόγραμμο ΖΓ (Πρόταση 1.34), τα δε μέρη των ίσων πολλαπλασίων έχουν ίσο λόγο με τα πολλαπλάσιά τους (Πρόταση 5.15), άρα όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΕΓ προς το παραλληλόγραμμο ΖΓ. Επειδή λοιπόν έχει δειχθεί πως όπως είναι η βάση ΒΓ προς τη βάση ΓΔ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ, όπως δε είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΕΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ και επομένως όπως είναι η βάση ΒΓ προς τη βάση ΓΔ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΕΓ προς το παραλληλόγραμμο ΖΓ (Πρόταση 5.11).

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν το ίδιο ύψος είναι μεταξύ τους όπως είναι οι βάσεις τους. Όπερ έδει δείξαι.

β΄

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

σχήμα 2

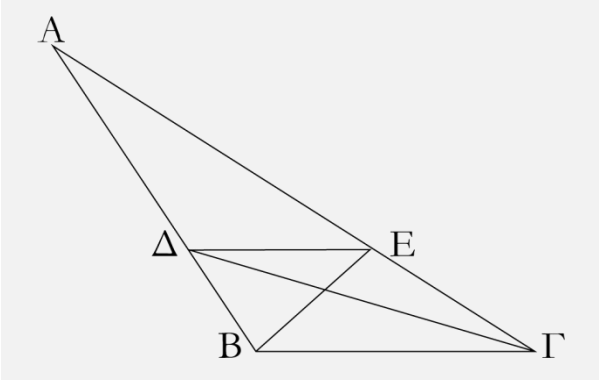
Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ· ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Πρόταση 2

Εάν σε ένα τρίγωνο φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια από τις πλευρές του, αυτή θα τέμνει τις άλλες δυο πλευρές του τριγώνου σε μέρη ανάλογα. Και εάν οι δυο πλευρές τριγώνου τμηθούν σε μέρη ανάλογα, η ευθεία που συνδέει τα σημεία τομής θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, φέρω τη ΔΕ παράλληλη προς μια πλευρά του τριγώνου και έστω προς τη ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι όπως είναι η ΒΔ προς τη ΔΑ, έτσι είναι η ΓΕ προς την ΕΑ.

Φέρω ΒΕ, ΓΔ.

Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΓΔΕ, αφού έχουν την ίδια βάση ΔΕ και βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ΔΕ, ΒΓ (Πρόταση 1.38). Υπάρχει δε και το τρίγωνο ΑΔΕ. Ίσα μεγέθη προς το ίδιο μέγεθος έχουν τον ίδιο λόγο (Πρόταση 5.7). Άρα όπως είναι το τρίγωνο ΒΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ, έτσι είναι το τρίγωνο ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ. Αλλά όπως είναι το ΒΔΕ τρίγωνο προς το ΑΔΕ (τρίγωνο), έτσι είναι η ΒΔ προς την ΔΑ, αφού έχουν το ίδιο ύψος, δηλαδή την ευθεία που από το Ε άγεται κάθετα στην ΑΒ, οπότε θα είναι το ένα προς το άλλο όπως είναι οι βάσεις τους (Πρόταση 6.1). Για τους ίδιους λόγους όπως είναι το τρίγωνο ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ, έτσι είναι η ΓΕ προς την ΕΑ. Επο-

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μένως όπως είναι η ΒΔ προς την ΔΑ έτσι είναι η ΓΕ προς την ΕΑ (Πρόταση 5.11).

Έστω οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ ότι έχουν τμηθεί σε μέρη ανάλογα, όπως η ΒΔ προς τη ΔΑ, έτσι η ΓΕ προς την ΕΑ και φέρω την ΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

Στην ίδια κατασκευή, επειδή όπως είναι η ΒΔ προς τη ΔΑ,έτσι είναι η ΓΕ προς την ΕΑ, αλλά όπως είναι μεν η ΒΔ προς την ΔΑ, έτσι είναι το τρίγωνο ΒΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ (Πρόταση 6.1), και όπως είναι δε η ΓΕ προς την ΕΑ, έτσι είναι το τρίγωνο ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ (Πρόταση 6.1), άρα το τρίγωνο ΒΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ είναι όπως το τρίγωνο ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ (Πρόταση 5.11). Επομένως καθένα από τα τρίγωνα ΒΔΕ, ΓΔΕ έχει προς το τρίγωνο ΑΔΕ τον ίδιο λόγο. Είναι λοιπόν ίσα τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ (Πρόταση 5.9). Είναι δε πάνω στην ίδια βάση, τη ΔΕ. Όμως τα ίσα τρίγωνα που είναι πάνω στην ίδια βάση, βρίσκονται μεταξύ παραλλήλων (Πρόταση 1.39). Επομένως είναι η ΔΕ παράλληλη της ΒΓ.

Εάν λοιπόν σε ένα τρίγωνο φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια από τις πλευρές του, αυτή θα τέμνει τις άλλες δυο πλευρές του τριγώνου σε μέρη ανάλογα. Και εάν οι δυο πλευρές τριγώνου τμηθούν σε μέρη ανάλογα, η ευθεία που συνδέει τα σημεία τομής θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου. Όπερ έδει δείξαι.

γ΄

Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

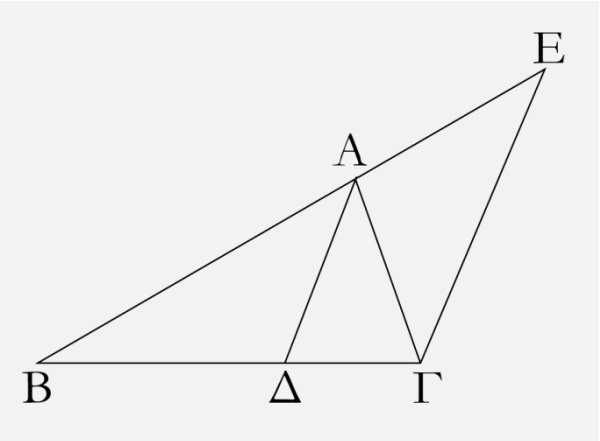
Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Πρόταση 3

Εάν μια γωνία τριγώνου διχοτομηθεί και η τέμνουσα τη γωνία τέμνει και τη βάση, τότε τα τμήματα στα οποία την τέμνει θα έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν οι υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου. Και εάν τα τμήματα στα οποία τέμνει τη βάση μια ευθεία που περνά από την κορυφή της απέναντι της γωνίας, έχουν τον ίδιο λόγο με τις υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου, η τέμνουσα αυτή θα διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου.

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και η γωνία ΒΑΓ τέμνεται στα δυο από την ευθεία ΑΔ. Ισχυρίζομαι πως η ΒΔ προς τη ΓΔ είναι όπως η ΒΑ προς την ΑΓ.

Φέρω από το Γ, τη ΓΕ παράλληλη προς τη ΔΑ και προεκτείνω τη ΒΑ ώσπου να συναντήσει τη ΓΕ στο σημείο Ε.



σχήμα 3

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν

Και επειδή η ευθεία ΑΓ τέμνει τις παράλληλες ΑΔ, ΕΓ, η γωνία ΑΓΕ είναι ίση με τη γωνία ΓΑΔ (Πρόταση 1.29). Αλλά η γωνία ΓΑΔ είναι ίση με τη γωνία ΒΑΔ. Έτσι η γωνία ΒΑΔ είναι ίση με τη γωνία ΑΓΕ (Κοινή Έννοια 1). Πάλι επειδή η ευθεία ΒΑΕ τέμνει τις παράλληλες ΑΔ, ΕΓ, η εκτός γωνία ΒΑΔ είναι ίση με την εντός γωνία ΑΕΓ (Πρόταση 1.29). Έχω δείξει δε ότι η γωνία ΑΓΕ είναι ίση με τη γωνία ΒΑΔ, οπότε η γωνία ΑΓΕ είναι ίση με τη γωνία ΑΕΓ. Συνεπώς η πλευρά ΑΕ είναι

πλευρῶν τὴν ΕΓ ἧκται ἡ ΑΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

ίση με την πλευρά ΑΓ (Πρόταση 1.6). Και αφού στο τρίγωνο ΒΓΕ, η ευθεία ΑΔ έχει χαραχθεί παράλληλη προς την πλευρά αυτού τη ΓΕ, ανάλογα είναι όπως η ΒΔ προς τη ΔΓ έτσι η ΒΑ προς την ΑΕ (Πρόταση 6.2). Είναι δε η ΑΕ ίση με την ΑΓ, οπότε όπως είναι η ΒΔ προς την ΔΓ είναι η ΒΑ προς την ΑΓ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Και τώρα έστω πως η ΒΔ προς τη ΔΓ είναι όπως η ΒΑ προς την ΑΓ και φέρω την ΑΔ. Ισχυρίζομαι πως η γωνία ΒΑΓ διχοτομείται από την ευθεία ΑΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ [ἐστιν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Στην ίδια κατασκευή, όπως είναι η ΒΔ προς την ΔΓ, έτσι είναι η ΑΒ προς την ΑΓ, αλλά και όπως είναι η ΒΔ προς τη ΔΓ, έτσι είναι η ΒΑ προς την ΑΕ, αφού στο τρίγωνο ΒΓΕ έφερα την ευθεία ΑΔ παράλληλη προς την πλευρά του ΕΓ (Πρόταση 6.2). Άρα όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ, έτσι είναι η ΒΑ προς την ΑΕ (Πρόταση 5.11). Ίση επομένως η ΑΓ με την ΑΕ (Πρόταση 5.9).Οπότε ίση και η γωνία ΑΕΓ με τη γωνία ΑΓΕ (Πρόταση 1.5). Αλλά η μεν γωνία ΑΕΓ είναι ίση με την εξωτερική γωνία ΒΑΔ, η δε γωνία ΑΓΕ είναι ίση με την εναλλάξ γωνία ΓΑΔ (Πρόταση 1.29). Άρα η γωνία ΒΑΔ είναι ίση με τη γωνία ΓΑΔ κι επομένως η γωνία ΒΑΓ διχοτομείται από την ευθεία ΑΔ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εάν λοιπόν μια γωνία τριγώνου διχοτομηθεί και η τέμνουσα τη γωνία τέμνει και τη βάση, τότε τα τμήματα στα οποία την τέμνει θα έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν οι υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου. Και εάν τα τμήματα στα οποία τέμνει τη βάση μια ευθεία που περνά από την κορυφή της απέναντι της γωνίας, έχουν τον ίδιο λόγο με τις υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου, η τέμνουσα αυτή θα διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου. Όπερ έδει δείξαι.

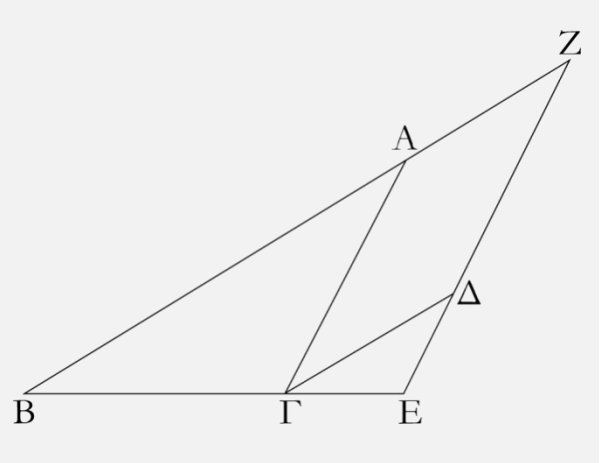
δ΄

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Πρόταση 4

Στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

σχήμα 4



Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Έστω τα ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ που έχουν τη γωνία ΑΒΓ ίση με τη γωνία ΔΓΕ, τη γωνία ΒΑΓ ίση με τη γωνία ΓΔΕ και τη γωνία ΑΓΒ ίση με τη γωνία ΓΕΔ. Ισχυρίζομαι ότι οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΔΓΕ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Έστω πως οι ευθείες ΒΓ και η ΓΕ βρίσκονται σε ευθεία και επειδή οι γωνίες ΑΒΓ, ΑΓΒ είναι λιγότερο από δυο ορθές (Πρόταση 1.17), είναι δε η ΑΓΒ ίση με την ΔΕΓ, οι γωνίες ΑΒΓ, ΔΕΓ είναι λιγότερο από δυο ορθές. Άρα οι ευθείες ΒΑ, ΕΔ προεκτεινόμενες θα συναντηθούν (Αίτημα 5). Έστω ότι προεκτάθηκαν και συναντήθηκαν στο σημείο Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς

Και επειδή είναι ίση η γωνία ΔΓΕ με τη γωνία ΑΒΓ, είναι η ΒΖ παράλληλη με τη ΓΔ (Πρόταση 1.28). Επειδή πάλι είναι ίση η γωνία ΑΓΒ με τη γωνία ΔΕΓ, είναι παράλληλη η ευθεία ΑΓ με την ευθεία ΖΕ (Πρόταση 1.28). Επομένως το ΖΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε η μεν ΖΑ είναι

τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

ίση με τη ΔΓ, η δε ΑΓ είναι ίση με τη ΖΔ (Πρόταση 1.34). Και επειδή στο τρίγωνο ΖΒΕ, η ΑΓ έχει χαραχθεί παράλληλη προς την πλευρά του ΖΕ, όπως η ΒΑ προς την ΑΖ, έτσι η ΒΓ προς τη ΓΕ (Πρόταση 6.2). Η δε ΑΖ είναι ίση με τη ΓΔ. Άρα όπως είναι η ΒΑ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η ΒΓ προς τη ΓΕ και εναλλάξ όπως είναι η ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι είναι η ΔΓ προς τη ΓΕ (Πρόταση 5.16). Πάλι επειδή είναι η ΓΔ παράλληλη στη ΒΖ γι' αυτό όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΕ έτσι είναι ΖΔ προς τη ΔΕ (Πρόταση 6.2). Είναι δε η ΖΔ ίση με την ΑΓ. Άρα όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΕ, έτσι είναι η ΑΓ προς τη ΔΕ και εναλλάξ όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΑ, έτσι είναι η ΓΕ προς την ΕΔ (Πρόταση 6.2). Επειδή λοιπόν έχει δειχθεί ότι όπως είναι η ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι είναι η ΔΓ προς τη ΓΕ, όπως δε είναι η ΒΓ προς τη ΓΑ, έτσι είναι η ΓΕ προς την ΕΔ, άρα δι' ίσου όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ, έτσι είναι η ΓΔ προς τη ΔΕ (Πρόταση 5.22).

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Στα ισογώνια λοιπόν τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες. Όπερ έδει δείξαι.

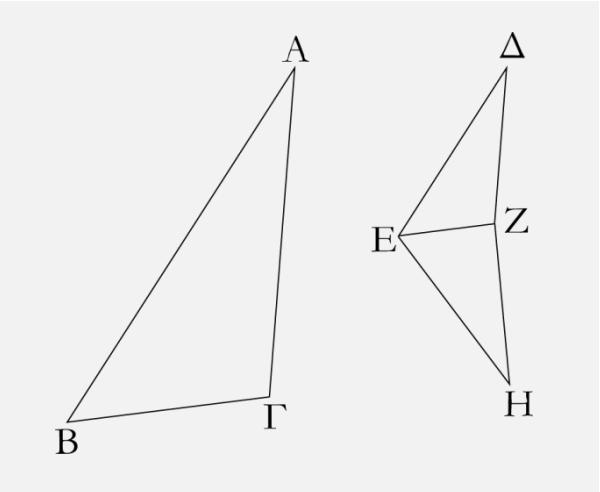
[Σχόλιο: Η Πρόταση 6.4 θα μπορούσε να προκύψει από την Πρόταση 6.2 αν τοποθετήσουμε το ένα τρίγωνο πάνω στο άλλο τρεις διαδοχικές φορές, έτσι ώστε κάθε γωνία του ενός να συμπέσει διαδοχικά με την ίση της γωνία στο άλλο τρίγωνο, τότε τα τρίγωνα είναι όμοια τοποθετημένα. Π.χ. Αν Α, Β, Γ και Δ, Γ, Ε είναι αντίστοιχα οι ίσες γωνίες, εφαρμόζουμε τη γωνία ΔΓΕ στη γωνία ΑΒΓ έτσι ώστε το σημείο Δ να βρίσκεται πάνω στην ΑΒ (παράγεται αν είναι απαραίτητο) και το σημείο Ε πάνω στη ΒΓ (παράγεται αν είναι απαραίτητο).
Ο De Morgan προτιμά τη μέθοδο αυτή. «Εγκαταλείπουμε, ισχυρίζεται, τον ιδιόμορφο τρόπο κατασκευής, με τον οποίο ο Ευκλείδης αποδεικνύει δυο περιπτώσεις σε μια, κάνοντας μια γωνία να συμπέσει με την ίση της και υποθέτοντας ότι αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται τρεις φορές, μια για κάθε γωνία τη φορά».]

ε´

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Πρόταση 5

Εάν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.



σχήμα 5

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Έστω δυο τρίγωνα, τα ΑΒΓ, ΔΕΖ, τα οποία έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, όπως την ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι τη ΔΕ προς την ΕΖ, όπως δε τη ΒΓ προς τη ΓΑ, έτσι την ΕΖ προς τη ΖΔ και ακόμη όπως τη ΒΑ προς την ΑΓ, έτσι την ΕΔ προς τη ΔΖ, ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές, δηλαδή τη γωνία ΑΒΓ με τη γωνία ΔΕΖ, τη γωνία ΒΓΑ με τη γωνία ΕΖΔ και τέλος τη γωνία ΒΑΓ με τη γωνία ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Α λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἐστιν ἴση.

Κατασκευάζονται στην ευθεία ΕΖ και στα σημεία της Ε, Ζ, γωνίες, η ΖΕΗ ίση με την ΑΒΓ και η ΕΖΗ ίση με την ΑΓΒ αντίστοιχα (Πρόταση 1.23). Άρα η εναπομείνασα γωνία Α (στο τρίγωνο ΑΒΓ) είναι ίση με την εναπομείνασα γωνία Η (στο τρίγωνο ΕΖΗ) (Πρόταση 1.32).

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ

Είναι λοιπόν το τρίγωνο ΑΒΓ ίσο με το τρίγωνο ΕΗΖ. Έτσι οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ, ΕΗΖ είναι ανάλογες και εκείνες που βρί-

τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, [οὕτως] ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΗ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

σκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες (Πρόταση 6.4). Άρα όπως είναι η ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι είναι η ΗΕ προς την ΕΖ. Αλλά όπως είναι η ΑΒ προς τη ΒΓ, έχει υποτεθεί πως είναι η ΔΕ προς την ΕΖ. Άρα η ΔΕ προς την ΕΖ είναι όπως η ΗΕ προς την ΕΖ (Πρόταση 5.11). Καθένα λοιπόν από τα ΔΕ, ΗΕ έχει προς την ΕΖ τον ίδιο λόγο. Οπότε η ΔΕ είναι ίση με την ΗΕ (Πρόταση 5.9). Για τον ίδιο λόγο η ΔΖ είναι ίση με την ΗΖ. Επειδή λοιπόν είναι ίση η ΔΕ με τη ΕΗ και η ΕΖ είναι κοινή, οι δυο πλευρές ΔΕ, ΕΖ είναι ίσες αντίστοιχα με τις δυο πλευρές ΗΕ, ΕΖ και η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΖΗ. Οπότε η γωνία ΔΕΖ είναι ίση με τη γωνία ΗΕΖ (Πρόταση 1.8). Και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΗΕΖ και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ίσες με τις υπόλοιπες γωνίες, οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές (Πρόταση 1.4). Άρα είναι ίση η μεν ΔΖΕ γωνία με τη γωνία ΗΖΕ, η δε γωνία ΕΔΖ με τη γωνία ΕΗΖ. Και επειδή η γωνία ΖΕΔ είναι ίση με τη γωνία ΗΕΖ, αλλά η γωνία ΗΕΖ είναι ίση με τη γωνία ΑΒΓ, άρα και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με τη γωνία ΔΕΖ. Για τους ίδιους λόγους η γωνία ΑΓΒ είναι ίση με τη γωνία ΔΖΕ και ακόμη η γωνία στο Α ίση με τη γωνία στο Δ. Είναι λοιπόν το τρίγωνο ΑΒΓ ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

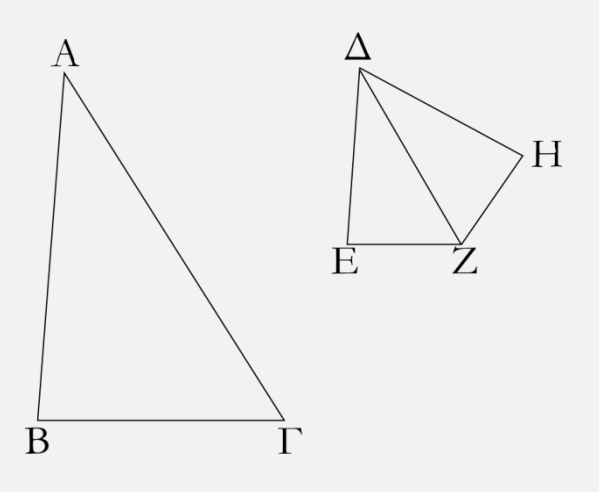
Εάν, άρα, δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες, απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές. Όπερ έδει δείξαι.

ϛ´

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Πρόταση 6

Εάν δυο τρίγωνα έχουν μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες ανάλογες, τότε τα τρίγωνα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι σε ομόλογες πλευρές.



σχήμα 6

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ.

Έστω δυο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, με τη γωνία ΒΑΓ του ενός ίση με τη γωνία ΕΔΖ του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ, έτσι είναι η ΕΔ προς τη ΔΖ. Ισχυρίζομαι πως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ και θα έχει τη γωνία ΑΒΓ ίση με τη γωνία ΔΕΖ, τη δε γωνία ΑΓΒ ίση με τη ΔΖΕ.

Κατασκευάζεται λοιπόν στην ευθεία ΔΖ και σε καθένα από τα σημεία της Δ, Ζ από μια γωνία, η γωνία ΖΔΗ ίση με τη γωνία ΒΑΓ και ίση επίσης με τη γωνία ΒΑΓ και η γωνία ΔΖΗ ίση με τη γωνία ΑΓΒ, αντίστοιχα (Πρόταση 1.23). Έτσι η έναπομείνασα γωνία Β (στο τρίγωνο ΑΒΓ) είναι ίση με την εναπομείνασα γωνία Η (στο τρίγωνο ΔΖΗ) (Πρόταση 1.32).

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΗΖ. Οπότε ανάλογα όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ, έτσι είναι η ΗΔ προς την ΔΖ (Πρόταση 6.4). Έχει δε υποτεθεί ότι όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ, έτσι είναι η ΕΔ προς τη ΔΖ. Άρα όπως είναι η

ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ· καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΔΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ΕΔ προς τη ΔΖ, έτσι είναι η ΗΔ προς την ΔΖ (Πρόταση 5.11). Οπότε η ΕΔ είναι ίση με τη ΔΗ (Πρόταση 5.9) και η ΔΖ είναι κοινή. Έτσι οι δυο πλευρές ΕΔ, ΔΖ είναι ίσες με τις δυο πλευρές ΗΔ, ΔΖ (αντίστοιχα) και η γωνία ΕΔΖ είναι ίση με τη γωνία ΗΔΖ. Επομένως η βάση ΕΖ είναι ίση με τη βάση ΗΖ και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΗΔΖ. Και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι ίσες με τις υπόλοιπες γωνίες, οι οποίες βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές (Πρόταση 1.4). Άρα η μεν γωνία ΔΖΗ είναι ίση με τη γωνία ΔΖΕ, η δε γωνία ΔΗΖ είναι ίση με τη γωνία ΔΕΖ. Αλλά η γωνία ΔΖΗ είναι ίση με τη γωνία ΑΓΒ. Επίσης η γωνία ΑΓΒ είναι ίση και με τη γωνία ΔΖΕ. Έχει δε υποτεθεί πως η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΕΔΖ. Οπότε η εναπομείνασα γωνία Β είναι ίση με την εναπομείνασα γωνία Ε. Ισογώνιο επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εάν λοιπόν δυο τρίγωνα έχουν μια γωνία του ενός, ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες ανάλογες, τότε τα τρίγωνα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι σε ομόλογες πλευρές. Όπερ έδει δείξαι.

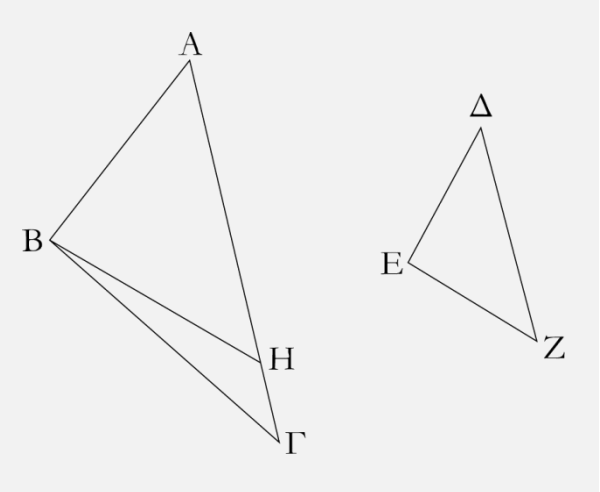
ζ΄

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Πρόταση 7

Εάν δυο τρίγωνα έχουν μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου, έχουν δε τις πλευρές που περιέχουν μια άλλη γωνία του ενός ανάλογες με τις πλευρές που περιέχουν μια άλλη γωνία του άλλου και καθεμιά από τις υπόλοιπες γωνίες τους είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη της ορθής γωνίας, τότε τα τρίγωνα είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται από τις ανάλογες πλευρές.

σχήμα 7



Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-

Έστω δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ, με μια γωνία του ενός, τη ΒΑΓ ίση με μια γωνία του άλλου, την ΕΔΖ, αντίστοιχα και οι πλευρές που περιέχουν άλλες γωνίες, την ΑΒΓ, ΔΕΖ αντίστοιχα, είναι ανάλογες, όπως είναι η ΑΒ προς την ΒΓ, έτσι είναι η ΔΕ προς την ΕΖ και οι γωνίες που απομένουν στο Γ, Ζ, για αρχή, μικρότερες της ορθής. Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο του τριγώνου ΔΕΖ, η γωνία ΑΒΓ ίση με τη γωνία ΔΕΖ και η γωνία που απομένει στο Γ στο ένα τρίγωνο προφανώς ίση με τη γωνία που απομένει στο άλλο τρίγωνο, στο Ζ.

Εάν λοιπόν οι γωνίες ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι άνισες, μία από αυτές θα είναι η μεγαλύτερη και έστω πως είναι η ΑΒΓ. Κατασκευάζεται τότε στην ΑΒ στο σημείο Β,

μείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, [οὕτως] ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ· ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

γωνία ίση με τη ΔΕΖ, η γωνία ΑΒΗ (Πρόταση 1.23).

Και επειδή είναι ίση η γωνία Α με τη γωνία Δ και η γωνία ΑΒΗ με τη γωνία ΔΕΖ, η γωνία που απομένει, η ΑΗΒ είναι ίση με τη γωνία που απομένει στο άλλο τρίγωνο, τη ΔΖΕ (Πρόταση 1.32). Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ. Άρα όπως είναι η ΑΒ προς τη ΒΗ, έτσι είναι η ΔΕ προς την ΕΖ (Πρόταση 6.4). Κι όπως είναι η ΔΕ προς την ΕΖ έτσι έχει υποτεθεί η ΑΒ προς τη ΒΓ. Έτσι η ΑΒ έχει τον ίδιο λόγο προς καθένα από τα ΒΓ, ΒΗ (Πρόταση 5.11). Άρα η ΒΓ ίση με τη ΒΗ (Πρόταση 5.9). Έτσι η γωνία στο Γ είναι ίση με τη γωνία ΒΗΓ (Πρόταση 1.5). Και η γωνία στο Γ έχει υποτεθεί μικρότερη από μια ορθή, οπότε μικρότερη μιας ορθής είναι και η γωνία ΒΗΓ. Η εφεξής γωνία αυτής, η ΑΗΒ λοιπόν είναι μεγαλύτερη από μια ορθή (Πρόταση 1.13) και έχει δειχθεί πως είναι ίση με τη γωνία στο Ζ. Οπότε η γωνία στο Ζ είναι επίσης μεγαλύτερη από μια ορθή. Αλλά έχει υποτεθεί μικρότερη από μια ορθή, πράγμα άτοπο. Άρα δεν είναι άνιση η γωνία ΑΒΓ με τη γωνία ΔΕΖ. Είναι ίση. Είναι δε ίση και η γωνία στο Α με τη γωνία στο Δ. Άρα και οι υπόλοιπες γωνίες, γωνία στο Γ είναι ίση με τη γωνία στο Ζ (Πρόταση 1.32). Έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ· οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὔκ εἰσιν ἐλάττονες· ὅπερ

Υποτίθεται πάλι πως καθεμιά από τις γωνίες Γ, Ζ δεν είναι μικρότερες της ορθής. Ισχυρίζομαι πως κι έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ισογώνιο του τριγώνου ΔΕΖ.

Στην ίδια κατασκευή μπορούμε όμοια να δείξουμε ότι η ΒΓ είναι ίση με τη ΒΗ. Οπότε και η γωνία Γ είναι ίση με τη γωνία ΒΗΓ. Και επειδή δεν είναι μικρότερη της ορθής η γωνία Γ, δεν είναι μικρότερη της ορθής ούτε η γωνία ΒΗΓ. Οπότε στο τρίγωνο ΒΗΓ δυο γωνίες του δεν είναι μι-

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

κρότερες της ορθής, πράγμα αδύνατο (Πρόταση 1.17). Δεν είναι λοιπόν η γωνία ΑΒΓ πάλι άνιση της γωνίας ΔΕΖ. Είναι ίση. Είναι δε και η γωνία στο Α ίση με τη γωνία στο Δ. Άρα και οι υπόλοιπες αντίστοιχα γωνίες είναι ίσες, δηλαδή ίση η γωνία Γ με τη γωνία Ζ (Πρόταση 1.32). Είναι επομένως ισογώνιο το τρίγωνο ΑΒΓ με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εάν λοιπόν δυο τρίγωνα έχουν μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου, έχουν δε τις πλευρές που περιέχουν μια άλλη γωνία του ενός ανάλογες με τις πλευρές που περιέχουν μια άλλη γωνία του άλλου και καθεμιά από τις υπόλοιπες γωνίες τους είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη της ορθής γωνίας, τότε τα τρίγωνα είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται από τις ανάλογες πλευρές. Όπερ έδει δείξαι.

η´

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

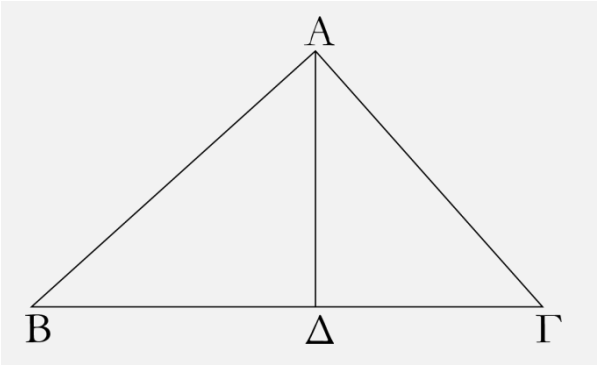
σχήμα 8

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.

Πρόταση 8

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο σχεδιαστεί από την κορυφή της ορθής γωνίας, ευθεία κάθετη στη βάση του, τότε τα τρίγωνα που δημιουργούνται με κοινή πλευρά αυτή την κάθετη είναι όμοια μεταξύ τους και το καθένα όμοιο με το αρχικό τρίγωνο.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ορθή τη γωνία ΒΑΓ και φέρεται από το Α η κάθετη στη ΒΓ, η ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοιο με το ΑΒΓ και ακόμη ότι είναι όμοια μεταξύ τους.



Επειδή λοιπόν είναι η γωνία ΒΑΓ ίση με τη γωνία ΑΔΒ –η καθεμιά είναι μια ορθή– και η γωνία Β, κοινή γωνία των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΒ, οι εναπομείνασες γωνίες, δηλαδή η ΑΓΒ και η ΒΑΔ είναι ίσες (Πρόταση 1.32). Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΒΔ. Οπότε όπως είναι η ΒΓ, υποτείνουσα της ορθής γωνίας του τριγώνου ΑΒΓ, προς τη ΒΑ, υποτείνουσα της ορθής γωνίας του τριγώνου ΑΒΔ, έτσι είναι η ΑΒ, υποτείνουσα της γωνίας Γ του ΑΒΓ τριγώνου, προς τη ΒΔ, υποτείνουσα της ίσης γωνίας ΒΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ και ακόμη η ΑΓ προς την ΑΔ, υποτείνουσες της γωνίας Β, της κοινής και των δυο τριγώνων (Πρόταση 6.4). Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΒΔ και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες, ανάλογες. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΔ (Ορισμός 6.1). Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι και το τρίγωνο ΑΔΓ είναι όμοιο με το τρί-

γωνο ΑΒΓ. Άρα το καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοιο με το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ισχυρίζομαι πως τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι μεταξύ τους όμοια.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β, καὶ ἔτι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Επειδή λοιπόν η ορθή γωνία ΒΔΑ είναι ίση με την ορθή γωνία ΑΔΓ, αλλά και η γωνία ΒΑΔ έχει δειχθεί πως είναι ίση με τη γωνία Γ, είναι και η γωνία Β που απομένει στο ένα τρίγωνο ίση με τη γωνία ΔΑΓ που απομένει στο άλλο τρίγωνο (Πρόταση 1.32). Οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΔΓ. Άρα όπως είναι η ΒΔ του τριγώνου ΑΒΔ, υποτείνουσα της γωνίας ΒΑΔ, προς τη ΔΑ, υποτείνουσα της γωνίας Γ που είναι ίση της ΒΑΔ, έτσι είναι η ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ, υποτείνουσα της γωνίας Β, προς τη ΔΓ, υποτείνουσα της γωνίας ΔΑΓ, του τριγώνου ΑΔΓ, που είναι ίση με τη γωνία Β και ακόμη (όπως είναι) η ΒΑ προς την ΑΓ, υποτείνουσες των ορθών γωνιών αντίστοιχα (στα υπό συζήτηση τρίγωνα) (Πρόταση 6.4). Είναι επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ όμοιο με το τρίγωνο ΑΔΓ (Ορισμός 6.1).

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Αν λοιπόν σε ορθογώνιο τρίγωνο σχεδιαστεί από την κορυφή της ορθής γωνίας, ευθεία κάθετη στη βάση του, τότε τα τρίγωνα που δημιουργούνται με κοινή πλευρά αυτή την κάθετη είναι όμοια μεταξύ τους και το καθένα όμοιο με το αρχικό τρίγωνο. Όπερ έδει δείξαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποιουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν].

Πόρισμα

Είναι λοιπόν φανερό πως σε ορθογώνιο τρίγωνο, αν από την κορυφή της ορθής γωνίας σχεδιαστεί η κάθετη προς τη βάση του, τότε αυτή η κάθετη είναι η μέση ανάλογος των τμημάτων που δημιουργεί στη βάση. Όπερ έδει δείξαι.

[Με άλλα λόγια, η κάθετη είναι ο γεωμετρικός μέσος των τμημάτων που ορίζει στην υποτείνουσα].

θ΄

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

σχήμα 9

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

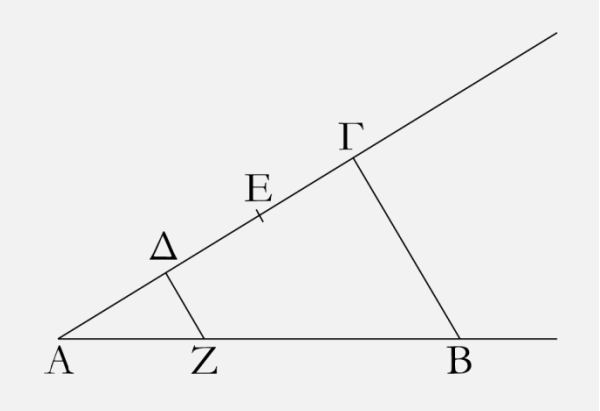
Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα ἡ ΑΓ γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση 9

Από δοθείσα ευθεία να αφαιρεθεί δεδομένο μέρος της.



Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ και πρέπει να αφαιρεθεί από αυτήν ένα δεδομένο τμήμα της.

Έστω το ένα τρίτο αυτής το δεδομένο τμήμα. Σχεδιάζω από το σημείο Α, την ευθεία ΑΓ, η οποία με την ευθεία ΑΒ περιέχουν μια τυχαία γωνία. Παίρνω τυχαίο σημείο Δ πάνω στην ΑΓ και ΔΕ, ΕΓ ίσες με την ΑΔ (Πρόταση 1.3). Συνδέω τα σημεία Β, Γ και από το σημείο Δ φέρω τη ΔΖ παράλληλη προς τη ΒΓ (Πρόταση 1.31).

Επειδή η ΖΔ σχεδιάστηκε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι ανάλογα όπως η ΓΔ προς την ΔΑ, έτσι η ΒΖ προς τη ΖΑ (Πρόταση 6.2). Η δε ΓΔ είναι διπλάσια της ΔΑ, οπότε και η ΒΖ είναι διπλάσια της ΖΑ. Άρα η ΒΑ είναι τριπλάσια της ΑΖ.

Από τη δοσμένη λοιπόν ευθεία ΑΒ, αφαιρείται το ΑΖ δηλαδή το ένα τρίτο αυτής. Όπερ έδει ποιήσαι.

ι΄

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

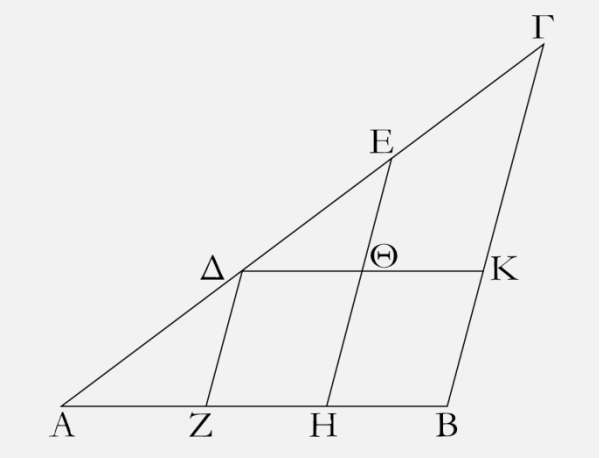
σχήμα 10

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Πρόταση 10

Να τμηθεί δοσμένη ευθεία όμοια με τον τρόπο που έχει τμηθεί άλλη δοσμένη ευθεία.



Έστω η άτμητη δοσμένη ευθεία ΑΒ και η ευθεία ΑΓ, που έχει τμηθεί με τα σημεία Δ,Ε και περιέχουν τυχούσα γωνία. Χαράζω τη ΓΒ και από τα σημεία Δ, Ε τις ευθείες ΔΖ, ΕΗ αντίστοιχα παράλληλες προς τη ΒΓ, από το σημείο Δ δε, χαράζω τη ΔΘΚ παράλληλη στην ΑΒ (Πρόταση 1.31).

Άρα καθένα από τα ΖΘ, ΘΒ είναι παραλληλόγραμμα. Οπότε η μεν ΔΘ είναι ίση με την ΖΗ, η δε ΘΚ είναι ίση με την ΗΒ (Πρόταση 1.34). Και επειδή προς την πλευρά ΚΓ του τριγώνου ΔΚΓ, έφερα παράλληλη τη ΘΕ, ανάλογα θα είναι όπως η ΓΕ προς την ΕΔ, έτσι η ΚΘ προς τη ΘΔ (Πρόταση 6.2). Είναι ίση δε η μεν ΚΘ με τη ΒΗ, η δε ΘΔ με την ΗΖ. Άρα όπως είναι η ΓΕ προς την ΕΔ, έτσι είναι η ΒΗ προς την ΗΖ. Επειδή πάλι προς την πλευρά ΗΕ του τριγώνου ΑΗΕ, έφερα παράλληλη τη ΖΔ, ανάλογα όπως είναι η ΕΔ προς τη ΔΑ, έτσι είναι η ΗΖ προς τη ΖΑ (Πρόταση 6.2). Έχει δειχθεί δε πως όπως είναι η ΓΕ προς την ΕΔ, έτσι είναι η ΒΗ προς την ΗΖ. Άρα όπως είναι η μεν ΓΕ προς την ΕΔ, έτσι είναι η ΒΗ προς την ΗΖ, όπως δε είναι η ΕΔ προς την ΔΑ, έτσι είναι η ΗΖ προς τη ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Η άτμητη λοιπόν δοσμένη ευθεία ΑΒ, χωρίστηκε σε τμήματα, με όμοιο τρόπο με τον οποίο είναι χωρισμένη σε τμήματα η δεδομένη ευθεία ΑΓ. Όπερ έδει ποιήσαι.

ια´

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

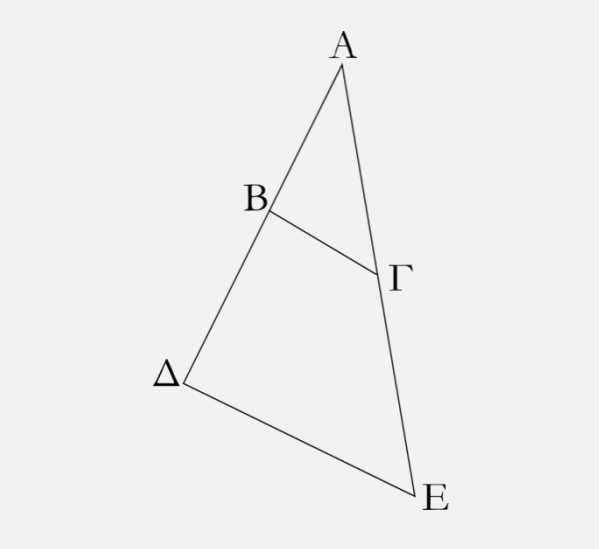
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση 11

Να βρεθεί η τρίτη ανάλογος δυο δοσμένων ευθειών.

Έστω οι δυο δοσμένες ευθείες ΒΑ, ΑΓ και περιέχουν τυχαία γωνία. Πρέπει να βρεθεί η τρίτη ανάλογος των ΒΑ, ΑΓ. Προεκτείνω τις ΒΑ, ΑΓ ως τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα και φτιάχνω τη ΒΔ ίση με την ΑΓ (Πρόταση 1.3). Φέρω τη ΒΓ. Σχεδιάζω από το σημείο Δ, τη ΔΕ παράλληλη προς αυτήν (Πρόταση 1.31).

Επειδή λοιπόν στο τρίγωνο ΑΔΕ, η πλευρά ΔΕ χαράχθηκε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, ανάλογα θα είναι όπως η ΑΒ προς τη ΒΔ, έτσι η ΑΓ προς τη ΓΕ (Πρόταση 6.2). Και η ΒΔ είναι ίση με την ΑΓ. Άρα όπως είναι η ΑΒ προς την ΑΓ, έτσι είναι η ΑΓ προς τη ΓΕ.



σχήμα 11

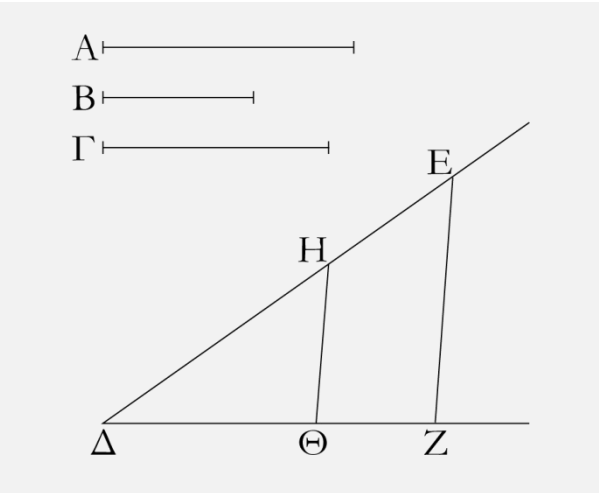
Βρέθηκε λοιπόν η τρίτη ανάλογος, η ΓΕ, δυο δοσμένων ευθειών ΑΒ, ΑΓ. Όπερ έδει ποιήσαι.

ιβ΄

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Πρόταση 12

Να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος τριών δοσμένων ευθειών.



σχήμα 12

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Έστω οι τρεις δοσμένες ευθείες Α, Β, Γ. Πρέπει να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος των ευθειών Α, Β, Γ.

Έστω δυο ευθείες οι ΔΕ, ΔΖ που περιέχουν τυχαία γωνία, την ΕΔΖ και λαμβάνω τη ΔΗ ίση με την Α, την ΗΕ ίση με τη Β και ακόμη τη ΔΘ ίση με τη Γ (Πρόταση 1.3). Χαράζω την ΗΘ και από το σημείο Ε την ΕΖ παράλληλη στην ΗΘ (Πρόταση 1.31).

Επειδή λοιπόν στο τρίγωνο ΔΕΖ, η ΗΘ είναι παράλληλη της ΕΖ, θα είναι όπως η ΔΗ προς την ΗΕ έτσι η ΔΘ προς τη ΘΖ (Πρόταση 6.2). Είναι δε η ΔΗ ίση με την Α, η ΗΕ ίση με τη Β, η δε ΔΘ ίση με τη Γ. Άρα όπως είναι η Α προς τη Β, έτσι είναι η Γ προς τη ΘΖ.

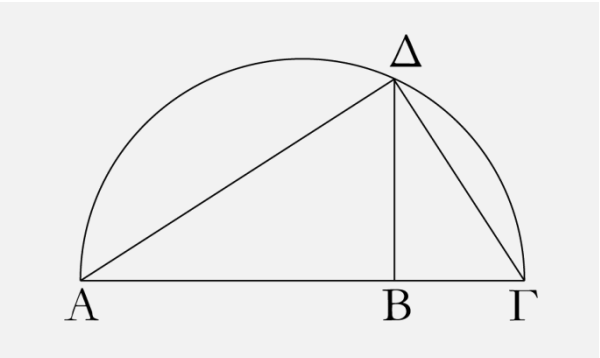
Βρέθηκε λοιπόν η τέταρτη ανάλογος ΘΖ, των τριών δοσμένων ευθειών Α, Β, Γ. Όπερ έδει ποιήσαι.

ιγ΄

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Πρόταση 13

Να βρεθεί η μέση ανάλογος δυο δοσμένων ευθειών.



σχήμα 13

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ, ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Έστω οι δυο δοσμένες ευθείες ΑΒ, ΒΓ. Πρέπει να βρεθεί η μέση ανάλογος των ευθειών ΑΒ, ΒΓ.

Τις τοποθετώ στην ίδια ευθεία και γράφω ημικύκλιο πάνω στην ΑΓ, το ΑΔΓ (Πρόταση 1.10). Σχεδιάζω από το σημείο Β, τη ΒΔ, η οποία προς την ΑΓ σχηματίζει δυο ορθές γωνίες (Πρόταση 1.11). Ενώνω στη συνέχεια ΑΔ, ΔΓ.

Επειδή η γωνία ΑΔΓ είναι γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή (Πρόταση 3.31). Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΔΒ που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας κάθετη στη βάση είναι μέση ανάλογος των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ (Πρόταση 6.8 - Πόρισμα).

Βρέθηκε λοιπόν η μέση ανάλογος, η ΔΒ, των δοσμένων ευθειών ΑΒ, ΒΓ. Όπερ έδει ποιήσαι.

[Με άλλα λόγια, η εύρεση του γεωμετρικού μέσου δυο δοσμένων ευθειών].

ιδ΄

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

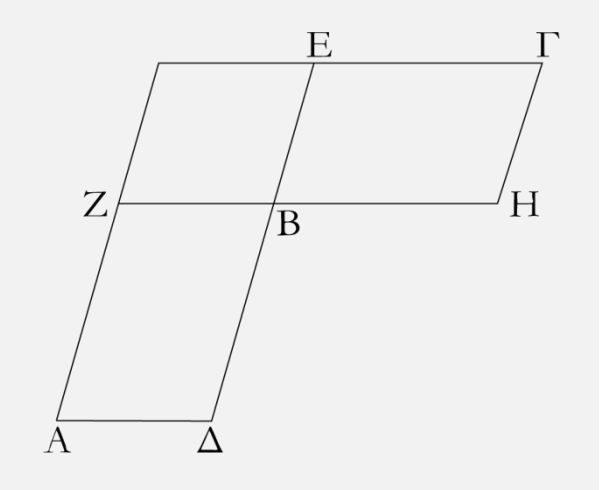
Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Πρόταση 14

Των ίσων και ισογωνίων παραλληλογράμμων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και τα ισογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα.

Έστω τα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα, τα ΑΒ, ΒΓ, που έχουν ίσες τις γωνίες στο σημείο Β. Έστω ότι είναι στην ίδια ευθεία οι ΔΒ, ΒΕ, άρα στην ίδια ευθεία είναι και οι ΖΒ, ΒΗ (Πρόταση 1.14). Ισχυρίζομαι ότι οι πλευρές των ΑΒ, ΒΓ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή όπως είναι η ΔΒ προς τη ΒΕ έτσι είναι η ΗΒ προς τη ΒΖ.

σχήμα 14



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Συμπληρώνω το ΖΕ παραλληλόγραμμο. Επειδή λοιπόν είναι ίσο το παραλληλόγραμμο ΑΒ με το παραλληλόγραμμο ΒΓ και το παραλληλόγραμμο ΖΕ είναι ένα άλλο, γι' αυτό όπως είναι το ΑΒ προς το ΖΕ, έτσι είναι το ΒΓ προς το ΖΕ (Πρόταση 5.7). Αλλά όπως είναι το ΑΒ προς το ΖΕ έτσι είναι η ΔΒ προς τη ΒΕ και όπως είναι το ΒΓ προς το ΖΕ, έτσι είναι η ΒΗ προς τη ΒΖ (Πρόταση 6.1). Οπότε όπως είναι η ΔΒ προς τη ΒΕ, έτσι είναι η ΗΒ προς τη ΒΖ. Έτσι στα παραλληλόγραμμα ΑΒ, ΒΓ οι

πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Έστω τώρα πως η ΔΒ προς τη ΒΕ είναι όπως η ΗΒ προς τη ΒΖ. Ισχυρίζομαι πως το παραλληλόγραμμο ΑΒ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΒΓ.

Επειδή λοιπόν είναι η ΔΒ προς τη ΒΕ όπως είναι η ΗΒ προς τη ΒΖ, αλλά όπως μεν η ΔΒ προς τη ΒΕ έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΑΒ προς το παραλληλόγραμμο ΖΕ, όπως δε η ΗΒ προς τη ΒΖ έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΒΓ προς το παραλληλόγραμμο ΖΕ (Πρόταση 6.1), άρα όπως είναι το παραλληλόγραμμο ΑΒ προς το ΖΕ έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΒΓ προς το παραλληλόγραμμο ΖΕ (Πρόταση 5.11). Ίσο επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΒ με το παραλληλόγραμμο ΒΓ (Πρόταση 5.9).

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα των ίσων και ισογωνίων παραλληλογράμμων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και τα ισογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Όπερ έδει δείξαι.

ιε΄

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

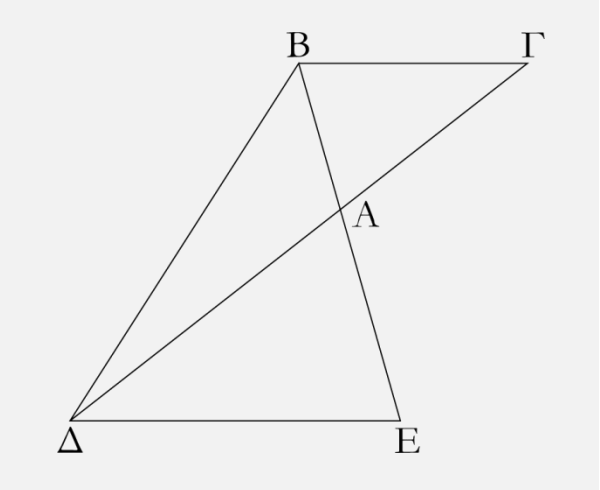
Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Πρόταση 15

Στα ίσα τρίγωνα, που έχουν μια γωνία του ενός, ίση με μια γωνία του άλλου, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και εκείνα τα τρίγωνα που έχουν μια γωνία του ενός, ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες αυτές γωνίες αντιστρόφως ανάλογες είναι ίσα.

Έστω τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ που έχουν μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου, δηλαδή τη γωνία ΒΑΓ ίση με τη γωνία ΔΑΕ. Ισχυρίζομαι πως οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ που περιέχουν τις ίσες αυτές γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, που σημαίνει ότι όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ, έτσι είναι η ΕΑ προς την ΑΒ.

σχήμα 15



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΒΑΔ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕ-

Έστω ότι βρίσκονται στην ίδια ευθεία η πλευρά ΓΑ με την πλευρά ΑΔ, άρα στην ίδια ευθεία (άλλη όμως) βρίσκονται και η πλευρές ΕΑ και ΑΒ (Πρόταση 1.14). Σχεδιάζω τη ΒΔ.

Επειδή λοιπόν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΔΕ και το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ένα άλλο τρίγωνο, άρα όπως είναι το τρίγωνο ΓΑΒ προς το τρίγωνο ΒΑΔ, έτσι είναι το τρίγωνο ΕΑΔ προς το τρίγωνο ΒΑΔ (Πρόταση 5.7). Αλλά όπως είναι μεν το τρίγωνο ΓΑΒ προς το ΒΑΔ έτσι είναι η

τως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

ΓΑ προς την ΑΔ, όπως είναι δε το τρίγωνο ΕΑΔ προς το τρίγωνο ΒΑΔ έτσι είναι η ΕΑ προς την ΑΒ (Πρόταση 6.1). Άρα όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ, έτσι είναι η ΕΑ προς την ΑΒ. Στα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΓ, ΑΔΕ οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Έστω τώρα πως οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ είναι αντιστρόφως ανάλογες, έστω δηλαδή πως όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ, έτσι είναι η ΕΑ προς την ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΔΕ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ [τρίγωνον] τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Φέρω λοιπόν πάλι τη ΒΔ. Επειδή όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ, έτσι είναι η ΕΑ προς την ΑΒ, αλλά όπως είναι μεν η ΓΑ προς την ΑΔ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΒΑΔ, όπως είναι δε η ΕΑ προς την ΑΒ, έτσι είναι το τρίγωνο ΕΑΔ προς το τρίγωνο ΒΑΔ (Πρόταση 6.1). Άρα όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΒΑΔ, έτσι είναι το τρίγωνο ΕΑΔ προς το τρίγωνο ΒΑΔ. Επομένως καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΑΔ προς το τρίγωνο ΒΑΔ έχει τον ίδιο λόγο. Οπότε το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ίσο με το ΕΑΔ τρίγωνο (Πρόταση 5.9).

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα, στα ίσα τρίγωνα, που έχουν μια γωνία του ενός, ίση με μια γωνία του άλλου, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και εκείνα τα τρίγωνα που έχουν μια γωνία του ενός, ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες αυτές γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Όπερ έδει δείξαι.

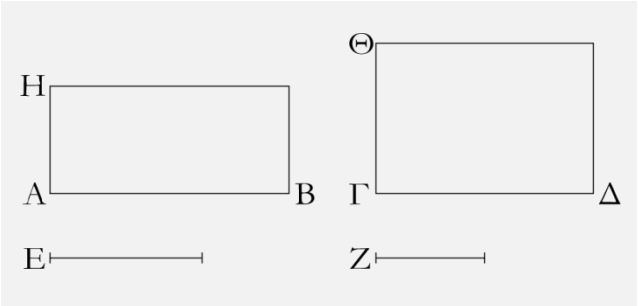
ις´

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Πρόταση 16

Εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο άκρες ευθείες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο μέσες ευθείες. Και εάν το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο άκρες ευθείες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο μέσες ευθείες, τότε οι τέσσερις αυτές ευθείες είναι ανάλογες.

σχήμα 16



Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἤχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΓ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ

Έστω τέσσερις ευθείες ανάλογες, οι ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, με τέτοιο τρόπο, ώστε όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ έτσι είναι η Ε προς τη Ζ. Ισχυρίζομαι πως το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις ΓΔ, Ε.

Χαράζω από τα σημεία Α και Γ των ευθειών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα τις ευθείες ΑΗ, ΓΘ σχηματίζοντας ορθές γωνίες (Πρόταση 1.11). Και παίρνω τη μεν ΑΗ ίση με τη Ζ, τη δε ΓΘ ίση με την Ε (Πρόταση 1.3). Συμπληρώνω στη συνέχεια τα παραλληλόγραμμα ΒΗ, ΔΘ αντίστοιχα.

Κι επειδή όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η Ε προς τη Ζ, είναι ίση δε η μεν Ε με τη ΓΘ , η δε Ζ με την ΑΗ, άρα είναι όπως η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΓΘ προς την ΑΗ. Είναι λοιπόν οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΒΗ, ΓΘ, που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες. Τα ισογώνια δε παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα (Πρόταση

παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

6.14). Άρα είναι ίσο το ΒΗ παραλληλόγραμμο με το ΔΘ παραλληλόγραμμο. Και είναι το μεν ΒΗ παραλληλόγραμμο, αυτό που περιέχεται στις ΑΒ, Ζ, με ίση την ΑΗ με τη Ζ, το δε ΔΘ, είναι το παραλληλόγραμμο που περιέχεται στις ΓΔ, Ε, με ίση τη ΓΘ με την Ε. Οπότε το ορθογώνιο που περιέχεται στις πλευρές ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στις πλευρές ΓΔ, Ε.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Έστω τώρα πως το ορθογώνιο που περιέχεται στις ευθείες ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στις ευθείες ΓΔ, Ε. Ισχυρίζομαι ότι οι τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, δηλαδή όπως είναι η ΑΒ προς την ΓΔ, έτσι είναι η Ε προς τη Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί ἐστιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Στην ίδια κατασκευή, επειδή το ορθογώνιο που περιέχεται στις πλευρές ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στις πλευρές ΓΔ, Ε και είναι μεν το ΒΗ αυτό που περιέχεται στις ΑΒ, Ζ, με ίση την ΑΒ στη Ζ και είναι δε το ΔΘ εκείνο που περιέχεται στις ΓΔ, Ε, με ίση τη ΓΘ στην Ε. Άρα είναι ίσο το ορθογώνιο ΒΗ με το ορθογώνιο ΔΘ και είναι ισογώνια. Των ίσων δε και ισογωνίων παραλληλογράμμων, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες (Πρόταση 6.14). Οπότε είναι όπως η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΓΘ προς την ΑΗ, ίση δε η μεν ΓΘ με την Ε, η δε ΑΗ με τη Ζ. Άρα όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η Ε προς τη Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εάν λοιπόν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο άκρες ευθείες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο μέσες ευθείες. Και εάν το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο άκρες ευθείες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται ανάμεσα στις δυο μέσες ευθείες, τότε οι τέσσερις αυτές ευθείες είναι ανάλογες. Όπερ έδει δείξαι.

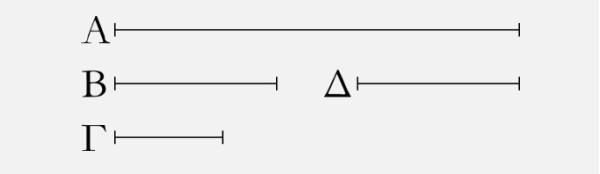
ιζ΄

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Πρόταση 17

Εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται στις δυο άκρες ευθείες της αναλογίας, είναι ίσο (με την έννοια του ισοεμβαδικού) με το τετράγωνο που περιέχεται στις μέσες ευθείες της αναλογίας. Και αν το ορθογώνιο που περιέχεται στις δυο άκρες ευθείες της αναλογίας, είναι ίσο με το τετράγωνο που περιέχεται στις μέσες ευθείες της αναλογίας, τότε οι τρεις αυτές ευθείες είναι ανάλογες.

σχήμα 17



Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Έστω τρεις ευθείες ανάλογες, οι Α, Β, Γ. Είναι όπως η Α προς τη Β, έτσι η Β προς τη Γ. Ισχυρίζομαι πως το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο που περιέχεται από τη Β.

Έστω η Δ ίση με τη Β (Πρόταση 1.3).

Κι επειδή είναι όπως η Α προς τη Β, έτσι η Β προς τη Γ, είναι δε ίση η Β με τη Δ, άρα είναι η Α προς τη Β, όπως είναι η Δ προς τη Γ. Εάν δε τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται στις άκρες ευθείες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στις μέσες ευθείες (της αναλογίας) (Πρόταση 6.16). Οπότε το ορθογώνιο που περιέχεται στις Α, Γ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στις Β, Δ. Αλλά το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Β, Δ είναι ίσο με εκείνο που περιέχεται από τη Β, αφού η Β είναι ίση με τη Δ. Είναι λοιπόν το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ ίσο με το τετράγωνο που έχει πλευρά τη Β.

Έστω τώρα ότι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο που περιέχεται από τη Β. Ισχυρίζομαι

πως όπως είναι η Α προς τη Β, έτσι είναι η Β προς τη Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Στην ίδια κατασκευή, επειδή το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο που περιέχεται από τη Β, αλλά το τετράγωνο που περιέχεται από τη Β είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Β, Δ, αφού η Β είναι ίση με τη Δ. Άρα το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Β, Δ. Εάν δε το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ευθείες που είναι οι άκροι όροι της αναλογίας είναι ίσο με αυτό που περιέχεται από τις ευθείες που είναι οι μέσοι όροι της αναλογίας, τότε οι τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες (Πρόταση 6.16). Είναι επομένως όπως η Α προς τη Β, έτσι η Δ προς τη Γ. Η δε Δ είναι ίση με τη Β. Άρα όπως είναι η Α προς τη Β, έτσι είναι η Β προς τη Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

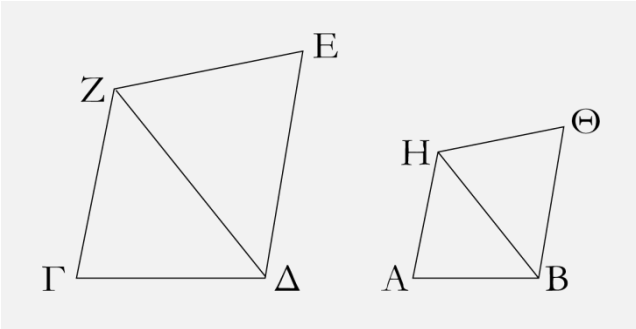
Εάν λοιπόν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται στις δυο άκρες ευθείες της αναλογίας, είναι ίσο (με την έννοια του ισοεμβαδικού) με το τετράγωνο που περιέχεται στις μέσες ευθείες της αναλογίας. Και αν το ορθογώνιο που περιέχεται στις δυο άκρες ευθείες της αναλογίας, είναι ίσο με το τετράγωνο που περιέχεται στις μέσες ευθείες της αναλογίας, τότε οι τρεις αυτές ευθείες είναι ανάλογες. Όπερ έδει δείξαι.

ιη´

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Πρόταση 18

Να σχεδιαστεί ένα ευθύγραμμο σχήμα, όμοιο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα και να τοποθετηθεί όμοια σε δοσμένη ευθεία.



σχήμα 18

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ

Έστω η μεν δοσμένη ευθεία η ΑΒ, το δε δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα το ΓΕ. Απαιτείται να σχεδιαστεί το όμοιο με το ΓΕ ευθύγραμμο σχήμα και να τοποθετηθεί με όμοιο τρόπο στην ευθεία ΑΒ.

Σχεδιάζω τη ΔΖ και κατασκευάζω πάνω στην ευθεία ΑΒ, στα σημεία της Α, Β, τη γωνία ΗΑΒ ίση με τη γωνία Γ και τη γωνία ΑΗΒ ίση με τη γωνία ΓΔΖ αντίστοιχα (Πρόταση 1.23). Έτσι η γωνία ΓΖΔ που απομένει στο ένα τρίγωνο είναι ίση με τη γωνία ΑΗΒ που απομένει στο άλλο τρίγωνο (Πρόταση 1.32). Τα τρίγωνα λοιπόν ΖΓΔ και ΗΑΒ είναι ισογώνια. Άρα θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, όπως η ΖΔ προς την ΗΒ, έτσι η ΖΓ προς την ΗΑ και η ΓΔ προς την ΑΒ (Πρόταση 6.4). Κατασκευάζω πάλι πάνω στην ευθεία ΒΗ, στα σημεία της Β, Η, τη μεν γωνία ΒΗΘ ίση με τη ΔΖΕ και τη δε γωνία ΗΒΘ ίση με τη γωνία ΖΔΕ αντίστοιχα (Πρόταση 1.23). Οπότε η γωνία Θ που απομένει στο ένα τρίγωνο είναι ίση με τη γωνία Ε που απομενει στο άλλο (Πρόταση 1.32). Ισογώνιο λοιπόν το τρίγωνο ΖΔΕ με το τρίγωνο ΗΘΒ. Οι πλευρές τους είναι ανάλογες, όπως είναι η ΖΔ προς την ΗΒ, έτσι είναι η ΖΕ προς την ΗΘ και η ΕΔ προς τη ΘΒ (Πρόταση 6.4). Έχει δειχθεί δε πως όπως είναι η ΖΔ προς την ΗΒ, έτσι

τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ· καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

είναι η ΖΓ προς την ΗΑ και η ΓΔ προς την ΑΒ. Και άρα όπως είναι η ΖΓ προς την ΑΗ, έτσι είναι και η ΓΔ προς την ΑΒ και η ΖΕ προς την ΗΘ και ακόμη η ΕΔ προς τη ΘΒ. Και επειδή η μεν γωνία ΓΖΔ είναι ίση με τη γωνία ΑΗΒ, η δε γωνία ΔΖΕ είναι ίση με τη γωνία ΒΗΘ, άρα όλη η γωνία ΓΖΕ είναι ίση με όλη τη γωνία ΑΗΘ. Για τους ίσιους λόγους όλη η γωνία ΓΔΕ είναι ίση με όλη τη γωνία ΑΒΘ. Είναι δε η γωνία Γ ίση με τη γωνία Α, η δε γωνία Ε ίση με τη γωνία Θ. Οπότε το σχήματα ΑΘ και ΓΕ είναι ισογώνια κι έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους, ανάλογες. Όμοιο λοιπόν το ευθύγραμμο σχήμα ΑΘ με το ευθύγραμμο σχήμα ΓΕ (Ορισμός 6.1).

Άρα κατασκευάστηκε και τοποθετήθηκε με όμοιο τρόπο στη δοσμένη ευθεία ΑΒ, το ευθύγραμμο σχήμα ΑΘ, όμοιο με το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα ΓΕ. Όπερ έδει ποιήσαι.

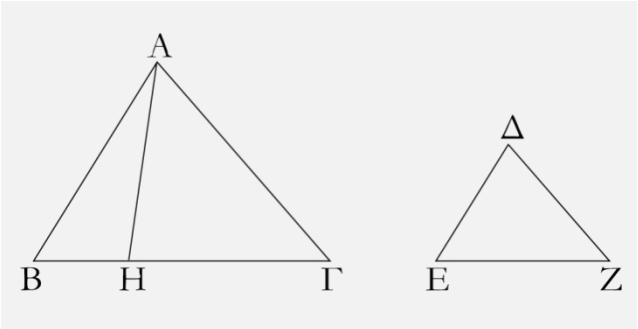
ιθ΄

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πρόταση 19

Τα όμοια τρίγωνα είναι το ένα προς το άλλο όπως το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους.

σχήμα 19



Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον

Έστω τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν τη γωνία Β ίση με τη γωνία Ε, όπως δε την ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι τη ΔΕ προς την ΕΖ, ώστε να είναι οι ΒΓ, ΕΖ ομόλογες. Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΔΕΖ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου που έχει η ΒΓ προς την ΕΖ.

Παίρνω λοιπόν την τρίτη ανάλογο των ΒΓ, ΕΖ, τη ΒΗ, ώστε να είναι όπως η ΒΓ προς την ΕΖ, έτσι η ΕΖ προς τη ΒΗ (Πρόταση 6.11). Και φέρω την ΑΗ.

Επειδή λοιπόν όπως είναι η ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι είναι η ΔΕ προς την ΕΖ, εναλλάξ άρα είναι όπως η ΑΒ προς τη ΔΕ, έτσι η ΒΓ προς την ΕΖ (Πρόταση 5.16). Αλλά όπως είναι η ΒΓ προς την ΕΖ, έτσι είναι η ΕΖ προς τη ΒΗ κι έτσι όπως είναι η ΑΒ προς τη ΔΕ, έτσι είναι η ΕΖ προς τη ΒΗ. Οι πλευρές λοιπόν των τριγώνων ΑΒΗ, ΔΕΖ, που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Τα τρίγωνα εκείνα που έχουν μια γωνία το ενός ίση με μια γωνία του άλλου και οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα (Πρόταση 6.15). Επομενως το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ. Και επειδή όπως είναι η ΒΓ προς την ΕΖ, έτσι είναι η ΕΖ προς τη ΒΗ, εάν δε τρεις ευθείες είναι ανάλογες, η πρώτη προς την

πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

τρίτη έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου, τον οποίο έχει η πρώτη προς τη δεύτερη (Ορισμός 5.9) γι' αυτό η ΒΓ προς τη ΒΗ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου που έχει η ΒΓ προς την ΕΖ. Όπως είναι δε η ΓΒ προς τη ΒΗ έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΒΗ (Πρόταση 6.1). Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΒΗ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου τον οποίον έχει η ΒΓ προς την ΕΖ. Το δε τρίγωνο ΑΒΗ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΔΕΖ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου που έχει η ΒΓ προς την ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Άρα τα όμοια τρίγωνα έχουν το ένα προς το άλλο, λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους. Όπερ έδει δείξαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον [ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Είναι λοιπόν φανερό πως εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη έτσι είναι το σχήμα που κατασκευάζεται πάνω στην πρώτη προς το όμοιο και όμοια τοποθετημένο σχήμα που κατασκευάζεται πάνω στη δεύτερη. Όπερ έδει δείξαι.

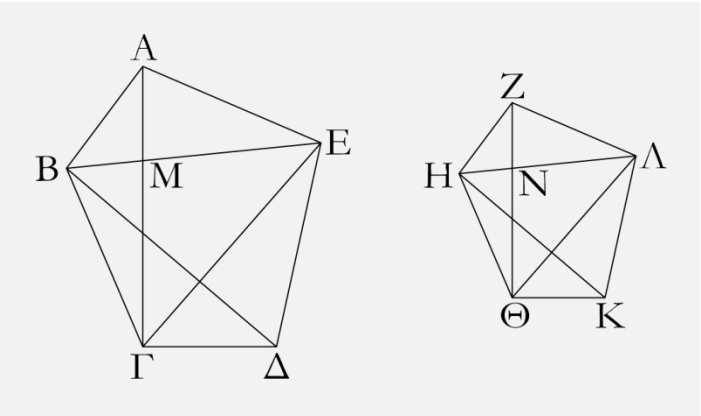
κ´

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρόταση 20

Τα όμοια πολύγωνα μπορούν να διαιρεθούν σε ίσο αριθμό όμοιων τριγώνων και ομολόγων αντίστοιχα προς το σύνολο και το ένα πολύγωνο έχει προς το άλλο πολύγωνο λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου τον οποίο έχει η μια ομόλογη πλευρά του ενός προς την αντίστοιχή της ομόλογη πλευρά του άλλου.

σχήμα 20



Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστιν

Έστω τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ και έστω η ΑΒ ομόλογη της ΖΗ. Ισχυρίζομαι πως τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ μπορούν να διαιρεθούν σε ίσο αριθμό όμοιων τριγώνων και ομολόγων προς το σύνολο και το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ προς το πολύγωνο ΖΗΘΚΛ έχει λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου, τον οποίο έχει η ΑΒ προς τη ΖΗ.

Χαράζω τις ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Και επειδή το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ είναι όμοιο με το πολύγωνο ΖΗΘΚΛ, η γωνία ΒΑΕ είναι ίση με τη γωνία ΗΖΛ και όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΕ, έτσι είναι η ΗΖ προς τη ΖΛ (Ορισμός 6.1). Επειδή λοιπόν τα δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΖΗΛ έχουν μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΖΗΛ (Πρόταση 6.6). Οπότε είναι και όμοια (Πρόταση 6.4, Ορισμός 6.1). Ίση άρα και η γωνία ΑΒΕ με τη γωνία

ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

ΖΗΛ. Και όλη η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με όλη τη γωνία ΖΗΘ λόγω της ομοιότητας των πολυγώνων. Άρα η υπόλοιπη γωνία ΕΒΓ είναι ίση με τη γωνία ΛΗΘ. Και επειδή εξαιτίας της ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΕ, ΖΗΛ είναι όπως η ΕΒ προς τη ΒΑ, έτσι η ΛΗ προς την ΗΖ, αλλά και εξαιτίας της ομοιότητας των πολυγώνων είναι όπως η ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι η ΖΗ προς την ΗΘ, άρα δι' ίσου είναι όπως η ΕΒ προς τη ΒΓ, έτσι η ΛΗ προς την ΗΘ (Πρόταση 5.22) και οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ΕΒΓ, ΛΗΘ είναι ανάλογες. Έτσι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΛΗΘ (Πρόταση 6.6). Οπότε και όμοιο το τρίγωνο ΕΒΓ με το τρίγωνο ΛΗΘ (Πρόταση 6.4, Ορισμός 6.1). Για τους ίδιους λόγους και το τρίγωνο ΕΓΔ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΛΘΚ. Άρα τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ έχουν διαιρεθεί σε ίσο πλήθος όμοιων τριγώνων.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ισχυρίζομαι πως τα αντίστοιχα τρίγωνα είναι ομόλογα προς το σύνολο. Δηλαδή τα τρίγωνα είναι ανάλογα και τα μεν ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ είναι ηγούμενα τα δε ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ επόμενα αυτών αντίστοιχα. Επίσης ισχυρίζομαι πως το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ προς το πολύγωνο ΖΗΘΚΛ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου τον οποίον έχει μια ομόλογη πλευρά του προς μια άλλη ομόλογη πλευρά του, δηλαδή η ΑΒ προς τη ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα

Χαράζονται οι ΑΓ, ΖΘ. Και επειδή εξαιτίας της ομοιότητας των πολυγώνων είναι ίση η γωνία ΑΒΓ με τη γωνία ΖΗΘ και είναι όπως η ΑΒ προς τη ΒΓ, έτσι η ΖΗ προς την ΗΘ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΖΗΘ (Πρόταση 6.6). Άρα η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΗΖΘ και η γωνία ΒΓΑ ίση με τη γωνία ΗΘΖ και επειδή είναι ίση η γωνία ΒΑΜ με τη γωνία ΗΖΝ, είναι δε και η γωνία ΑΒΜ

ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΜ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ.ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολό-

ίση με τη γωνία ΖΗΝ και η υπόλοιπη γωνία, η ΑΜΒ είναι ίση με την υπόλοιπη γωνία ΖΝΗ (Πρόταση 1.32). Άρα είναι ισογώνιο το τρίγωνο ΑΒΜ με το τρίγωνο ΖΗΝ. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι και το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΗΝΘ. Άρα ανάλογα είναι όπως μεν η ΑΜ προς τη ΜΒ, έτσι η ΖΝ προς τη ΝΗ, όπως δε η ΒΜ προς τη ΜΓ έτσι η ΗΝ προς τη ΝΘ (Πρόταση 6.4). Ώστε δι' ίσου, όπως είναι η ΑΜ προς τη ΜΓ έτσι είναι η ΖΝ προς τη ΝΘ (Πρόταση 5.22). Αλλά όπως είναι η ΑΜ προς τη ΜΓ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΜ προς το τρίγωνο ΜΒΓ και το τρίγωνο ΑΜΕ προς το τρίγωνο ΕΜΓ. Γιατί είναι το ένα προς το άλλο, όπως είναι οι βάσεις τους μεταξύ τους (Πρόταση 6.1). Και άρα όπως είναι ένα από τα ηγούμενα (μεγέθη) προς ένα από τα επόμενα (μεγέθη), έτσι είναι όλα τα ηγούμενα (μεγέθη) προς όλα τα επόμενα (μεγέθη) (Πρόταση 5.12). Οπότε όπως είναι το τρίγωνο ΑΜΒ προς το τρίγωνο ΒΜΓ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΓΒΕ, αλλά όπως είναι το τρίγωνο ΑΜΒ προς το τρίγωνο ΒΜΓ, έτσι είναι η ΑΜ προς τη ΜΓ και όπως είναι η ΑΜ προς τη ΜΓ έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΕΒΓ. Για τους ίδιους λόγους, όπως είναι η ΖΝ προς τη ΝΘ, έτσι είναι το τρίγωνο ΖΗΛ προς το τρίγωνο ΗΛΘ και είναι όπως η ΑΜ προς τη ΜΓ, έτσι η ΖΝ προς τη ΝΘ. Και άρα όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΒΕΓ, έτσι είναι το τρίγωνο ΖΗΛ προς το τρίγωνο ΗΛΘ και εναλλάξ όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΖΗΛ, έτσι είναι το τρίγωνο ΒΕΓ προς το τρίγωνο ΗΛΘ (Πρόταση 5.16). Όμοια μπορούμε να δείξουμε, συνδέοντας τις ΒΔ, ΗΚ ότι όπως είναι το τρίγωνο ΒΕΓ προς το τρίγωνο ΛΗΘ, έτσι είναι το τρίγωνο ΕΓΔ προς το τρίγωνο ΛΘΚ. Κι επειδή όπως είναι το

γων πλευρῶν. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.

τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΖΗΛ, έτσι είναι το τρίγωνο ΕΒΓ προς το τρίγωνο ΛΗΘ και ακόμη το τρίγωνο ΕΓΔ προς το ΛΘΚ και άρα όπως είναι ένα από τα ηγούμενα (μεγέθη) προς ένα από τα επόμενα (μεγέθη) έτσι είναι όλα τα ηγούμενα (μεγέθη) προς όλα τα επόμενα (Πρόταση 5.12). Έτσι όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΖΗΛ, έτσι είναι το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ προς το πολύγωνο ΖΗΘΚΛ. Αλλά το τρίγωνο ΑΒΕ προς το τρίγωνο ΖΗΛ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου τον οποίον έχει η ομόλογη πλευρά ΑΒ προς την ομόλογη πλευρά ΖΗ, διότι τα όμοια τρίγωνα έχουν λόγο το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους (Πρόταση 6.19). Άρα και το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ προς το πολύγωνο ΖΗΘΚΛ έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου που έχει η ομόλογη πλευρά ΑΒ προς την ομόλογη πλευρά ΖΗ.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Τα όμοια πολύγωνα λοιπόν μπορούν να διαιρεθούν σε ίσο αριθμό όμοιων τριγώνων και ομολόγων αντίστοιχα προς το σύνολο και το ένα πολύγωνο έχει προς το άλλο πολύγωνο λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου τον οποίο έχει η μια ομόλογη πλευρά του ενός προς την αντίστοιχή της ομόλογη πλευρά του άλλου. Όπερ έδει δείξαι.

Πόρισμα

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Με τον ίδιο λοιπόν τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι και τα όμοια τετράπλευρα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους. Έχει δε δειχθεί αυτό και για τα όμοια τρίγωνα. Άρα γενικά τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουν το ένα προς το άλλο, λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των ομολόγων αντίστοιχων πλευρών τους. Όπερ έδει δείξαι.

κα΄

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

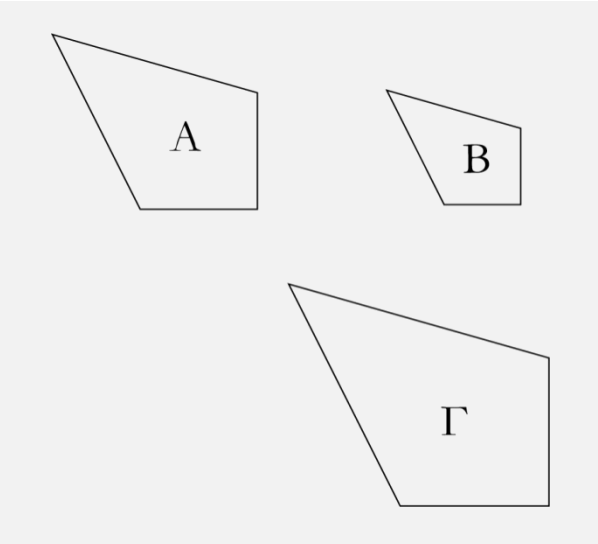
σχήμα 21

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστιν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση 21

Τα ευθύγραμμα σχήματα που είναι όμοια προς το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι επίσης όμοια το ένα προς το άλλο.



Έστω λοιπόν ότι καθένα από τα ευθύγραμμα σχήματα Α, Β είναι όμοιο με το ευθύγραμμο σχήμα Γ. Ισχυρίζομαι ότι και το Α είναι όμοιο με το Β.

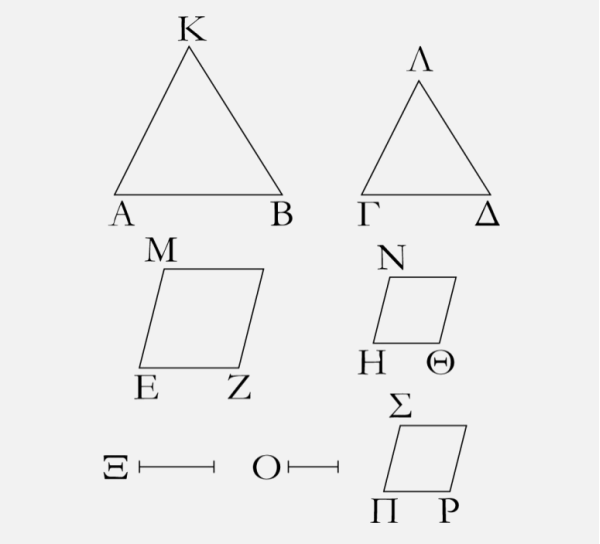
Αφού το Α είναι όμοιο με το Γ, το Α είναι ισογώνιο με το Γ και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (Ορισμός 6.1). Επειδή πάλι το Β είναι όμοιο με το Γ, είναι ισογώνιο με αυτό και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (Ορισμός 6.1). Έτσι το καθένα από τα Α, Β είναι ισογώνιο με το Γ και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες. Ώστε και το Α είναι ισογώνιο με το Β και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες. Οπότε το Α είναι όμοιο με το Β (Ορισμός 6.1). Όπερ έδει δείξαι.

κβ΄

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Πρόταση 22

Εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες τότε και τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα που προκύπτουν από αυτές και με όμοιο τρόπο τοποθετημένα, είναι επίσης ανάλογα. Και αν τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα και με όμοιο τρόπο τοποθετημένα είναι ανάλογα τότε και οι ευθείες των πλευρών τους είναι ανάλογες.



σχήμα 22

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως [καὶ] τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Έστω τέσσερις ευθείες που είναι ανάλογες, οι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, όπως η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΗΘ και κατασκευάζονται από μεν τα ΑΒ, ΓΔ τα όμοια και όμοια τοποθετημένα ευθύγραμμα σχήματα, τα ΚΑΒ, ΛΓΔ, από δε τα ΕΖ, ΗΘ τα όμοια και όμοια τοποθετημένα ευθύγραμμα σχήματα, τα ΜΖ, ΝΘ. Ισχυρίζομαι πως όπως είναι το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι είναι το ΜΖ προς το ΝΘ.

Έστω η ευθεία Ξ, η τρίτη ανάλογος των ευθειών ΑΒ, ΓΔ και η ευθεία Ο, η τρίτη ανάλογος των ευθειών ΕΖ, ΗΘ (Πρόταση 6.11). Και επειδή όπως είναι μεν η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η ΕΖ προς την ΗΘ, όπως είναι δε η ΓΔ προς την Ξ, έτσι είναι η ΗΘ προς την Ο, άρα δι' ίσου είναι όπως η ΑΒ προς την Ξ, έτσι η ΕΖ προς την Ο (Πρόταση 5.22). Αλλά όπως είναι μεν η ΑΒ προς την Ξ, έτσι είναι και το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, όπως είναι δε η ΕΖ προς την Ο, έτσι είναι

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

το ΜΖ προς το ΝΘ (Πρόταση 6.19, Πόρισμα). Κι έτσι όπως είναι το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι είναι το ΜΖ προς το ΝΘ.

Και έστω πως το ΚΑΒ είναι προς το ΛΓΔ, όπως είναι το ΜΖ προς το ΝΘ. Ισχυρίζομαι ότι όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η ΕΖ προς την ΗΘ. Γιατί εάν δεν είναι, όπως η ΑΒ προς την ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΗΘ, έστω πως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, όπως η ΕΖ προς την ΠΡ (Πρόταση 6.12). Και έστω το ευθύγραμμο σχήμα ΣΡ, όμοιο και όμοια τοποθετημένο με τα ΜΖ, ΝΘ (Πρόταση 6.18, 6.21).

Επειδή λοιπόν όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η ΕΖ προς την ΠΡ και κατασκευάσθηκαν από μεν τα ΑΒ, ΓΔ, τα όμοια και με όμοιο τρόπο τοποθετημένα (ευθύγραμμα σχήματα) ΚΑΒ, ΛΓΔ, από δε τα ΕΖ, ΠΡ, τα όμοια και με όμοιο τρόπο τοποθετημένα (ευθύγραμμα σχήματα) τα ΜΖ, ΣΡ, είναι άρα όπως το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι το ΜΖ προς το ΣΡ. Έχει δε υποτεθεί ότι όπως είναι το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι είναι το ΜΖ προς το ΝΘ. Οπότε όπως είναι το ΜΖ προς το ΣΡ, έτσι είναι το ΜΖ προς το ΝΘ (Πρόταση 5.11). Έτσι το ΜΖ έχει προς καθένα από τα ΝΘ, ΣΡ τον ίδιο λόγο, άρα είναι ίσο το ΝΘ με το ΣΡ (Πρόταση 5.9). Είναι επίσης όμοιο και όμοια τοποθετημένο με αυτό. Άρα είναι ίση η ΗΘ και η ΠΡ. Και επειδή όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η ΕΖ προς την ΠΡ, είναι δε ίση η ΠΡ με την ΗΘ, άρα όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι είναι η ΕΖ προς την ΗΘ.

Οπότε, εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες τότε και τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα που προκύπτουν από αυτές και με όμοιο τρόπο τοποθετημένα, είναι επίσης ανάλογα. Και αν τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα και με όμοιο τρόπο τοποθετημένα είναι ανάλογα τότε και οι ευθείες των πλευρών τους είναι ανάλογες.

κγ΄

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ

Πρόταση 23

Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν λόγο, το ένα προς το άλλο, το συγκείμενο λόγο των πλευρών τους.

Έστω τα ισογώνια παραλληλόγραμμα ΑΓ, ΓΖ, που έχουν τη γωνία ΒΓΔ ίση με τη γωνία ΕΓΗ. Ισχυρίζομαι ότι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ έχει λόγο το συγκείμενο λόγο των πλευρών τους.

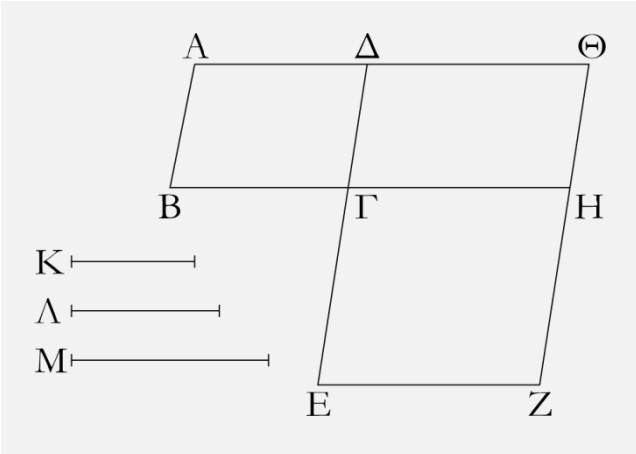
Έστω λοιπόν στην ίδια ευθεία η ΒΓ με τη ΓΗ, άρα στην ίδια ευθεία είναι και η ΔΓ με τη ΓΕ (Πρόταση 1.14). Και συμπληρώνεται το παραλληλόγραμμο ΔΗ. Έστω μια ευθεία Κ και επινοείται με τέτοιο τρόπο ώστε όπως είναι η μεν ΒΓ προς τη ΓΗ, έτσι είναι η Κ προς τη Λ, όπως είναι δε η ΔΓ προς τη ΓΕ, έτσι είναι η Λ προς τη Μ (Πρόταση 6.12).

Άρα οι λόγοι και της Κ προς τη Λ και της Λ προς τη Μ είναι ίσοι με τους λόγους των πλευρών και της ΒΓ προς τη ΓΗ και της ΔΓ προς την ΓΕ αντίστοιχα. Αλλά ο λόγος της Κ προς τη Μ προέρχεται από το λόγο της Κ προς Λ και το λόγο της Λ προς Μ. Ώστε και η Κ προς τη Μ έχει λόγο το συγκείμενο λόγο των πλευρών των παραλληλογράμμων. Και επειδή όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΗ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΘ (Πρόταση 6.1), αλλά όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΗ, έτσι είναι η Κ προς τη Λ και άρα όπως είναι η Κ προς τη Λ έτσι είναι το (παραλληλόγραμμο) ΑΓ προς το (παραλληλόγραμμο) ΓΘ. Πάλι επειδή όπως είναι η ΔΓ προς τη ΓΕ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΓΘ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ (Πρόταση 6.1), αλλά όπως είναι η ΔΓ προς τη ΓΕ, έτσι είναι η Λ προς τη Μ και άρα όπως είναι η Λ προς τη Μ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΓΘ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ. Επειδή λοιπόν δείχθηκε ότι

πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

όπως είναι μεν η Κ προς τη Λ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΘ, όπως δε είναι η Λ προς τη Μ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΓΘ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ, άρα δι' ίσου είναι όπως η Κ προς τη Μ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ (Πρόταση 5.22). Η δε Κ προς τη Μ έχει λόγο τον συγκείμενο των πλευρών των παραλληλογράμμων και το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ έχει λόγο τον συγκείμενο των πλευρών τους.

σχήμα 23



Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν λόγο, το ένα προς το άλλο, το συγκείμενο λόγο των πλευρών τους. Όπερ έδει δείξαι.

[Με σύγχρονη ορολογία «συγκείμενος» λόγος είναι αυτός που προκύπτει από το γινόμενο δυο άλλων].

κδ΄

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως, ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΑ· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕ-

Πρόταση 24

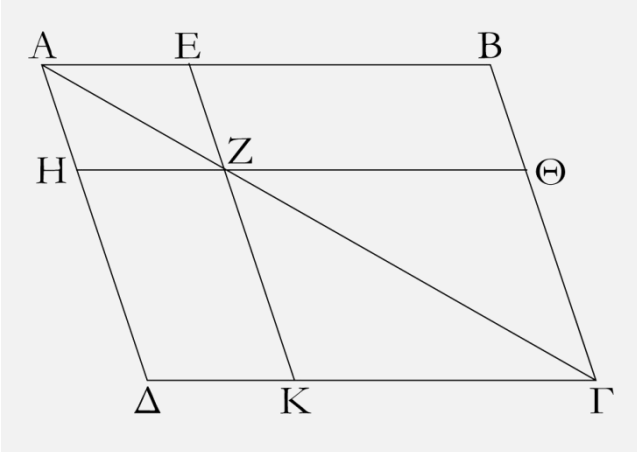
Σε κάθε παραλληλόγραμμο, τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται γύρω από μια διάμετρό του είναι όμοια μεταξύ τους και το καθένα προς το όλο.

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η διάμετρός του ΑΓ και γύρω από την ΑΓ έστω τα παραλληλόγραμμα ΕΗ, ΘΚ. Ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα παραλληλόγραμμα ΕΗ, ΘΚ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ και ότι είναι όμοια και μεταξύ τους (τα ΕΗ, ΘΚ).

Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρω την ΕΖ παράλληλη προς την πλευρά του ΒΓ, ανάλογα είναι όπως η ΒΕ προς την ΕΑ, έτσι η ΓΖ προς τη ΖΑ (Πρόταση 6.2). Πάλι επειδή στο τρίγωνο ΑΓΔ φέρω τη ΖΗ παράλληλη προς τη ΓΔ, ανάλογα είναι όπως η ΓΖ προς τη ΖΑ, έτσι η ΔΗ προς την ΗΑ (Πρόταση 6.2). Αλλά έχει δειχθεί πως όπως είναι η ΓΖ προς τη ΖΑ, έτσι είναι η ΒΕ προς την ΕΑ. Και άρα όπως είναι η ΒΕ προς την ΕΑ, έτσι είναι η ΔΗ προς την ΗΑ. Έτσι συνθέτοντας, όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΕ, έτσι είναι η ΔΑ προς την ΑΗ (Πρόταση 5.18). Και εναλλάξ όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΔ, έτσι είναι η ΕΑ προς την ΑΗ (Πρόταση 5.16). Έτσι στα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΗ, οι πλευρές που περιέχουν την κοινή τους γωνία ΒΑΔ είναι ανάλογες. Και επειδή η ΗΖ είναι παράλληλη στη ΔΓ, η γωνία ΑΖΗ είναι ίση με τη γωνία ΔΓΑ (Πρόταση 1.29). Η γωνία ΔΑΓ είναι κοινή στα δυο τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΗΖ. Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΗΖ (Πρόταση 1.32). Για τους ίδιους λόγους, το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΖΕ και όλο το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ισογώνιο με το παραλληλόγραμμο ΕΗ. Άρα ανάλογα είναι όπως η ΑΔ προς τη ΔΓ, έτσι η ΑΗ προς την ΗΖ, όπως δε η ΔΓ προς τη

τως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ [παραλληλογράμμῳ] ὅμοιόν ἐστιν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

ΓΑ, έτσι η ΗΖ προς τη ΖΑ, όπως δε η ΑΓ προς τη ΓΒ, έτσι η ΑΖ προς τη ΖΕ και ακόμη όπως η ΓΒ προς τη ΒΑ, έτσι η ΖΕ προς την ΕΑ (Πρόταση 6.4). Και επειδή έχει δειχθεί ότι όπως είναι μεν η ΔΓ προς τη ΓΑ, έτσι είναι η ΗΖ προς τη ΖΑ, όπως δε η ΑΓ προς τη ΓΒ, έτσι η ΑΖ προς τη ΖΕ, άρα δι' ίσου είναι όπως η ΔΓ προς τη ΓΒ, έτσι είναι η ΗΖ προς τη ΖΕ (Πρόταση 5.22). Οπότε οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΗ, που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες. Άρα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΕΗ (Ορισμός 6.1). Για τους ίδιους λόγους το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΚΘ. Οπότε καθένα από τα παραλληλόγραμμα ΕΗ, ΘΚ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Και ευθύγραμμα σχήματα που είναι όμοια με το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι επίσης και μεταξύ τους όμοια (Πρόταση 6.21). Έτσι το παραλληλόγραμμο ΕΗ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΘΚ.



σχήμα 24

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Άρα, σε κάθε παραλληλόγραμμο, τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται γύρω από μια διάμετρό του είναι όμοια μεταξύ τους και το καθένα προς το όλο. Όπερ έδει δείξαι.

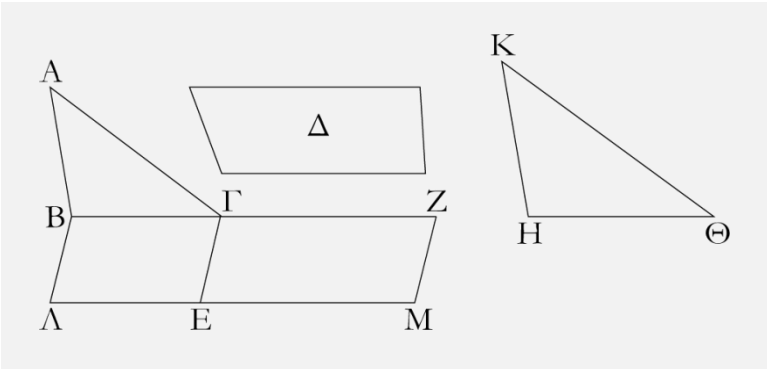
κε΄

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Πρόταση 25

Να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο σχήμα όμοιο προς ένα δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα και ίσο προς ένα άλλο δοσμένο (διαφορετικό) ευθύγραμμο σχήμα.

σχήμα 25



Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Έστω ΑΒΓ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, του οποίου πρέπει να κατασκευαστεί ένα όμοιο ευθύγραμμο σχήμα και Δ, το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα προς το οποίο πρέπει να είναι ίσο το ευθύγραμμο σχήμα που θα κατασκευαστεί. Πρέπει λοιπόν να κατασκευαστεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο προς το ΑΒΓ και ίσο προς το Δ.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Εφαρμόζω λοιπόν στην πλευρά ΒΓ, το παραλληλόγραμμο ΒΕ ίσο προς το τρίγωνο ΑΒΓ (Πρόταση 1.44) και στην πλευρά ΓΕ το παραλληλόγραμμο ΓΜ ίσο προς το Δ, με τη γωνία του ΖΓΕ ίση προς τη γωνία ΓΒΛ (Πρόταση 1.45). Άρα η μεν ΒΓ επεκτείνεται στη ΓΖ, η δε ΛΕ στην ΕΜ (Πρόταση 1.14). Και έστω η ΗΘ, η μέση ανάλογος των ΒΓ, ΓΖ (Πρόταση 6.13). Και κατασκευάζω στην ΗΘ, το τρίγωνο ΚΗΘ όμοιο και όμοια τοποθετημένο με το τρίγωνο ΑΒΓ (Πρόταση 6.18).

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ

Και επειδή είναι όπως η ΒΓ προς την ΗΘ, έτσι η ΗΘ προς τη ΓΖ και εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη, έτσι είναι το σχήμα που κατασκευάζεται πάνω στην πρώτη προς το όμοιο και όμοια τοποθετημένο σχήμα που κατασκευάζεται πάνω στη δεύτερη

τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

(Πρόταση 6.19, Πόρισμα). Άρα όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΖ, έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΚΗΘ. Αλλά όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΖ έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΒΕ προς το παραλληλόγραμμο ΕΖ (Πρόταση 6.1). Οπότε όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΚΗΘ, έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΒΕ προς το παραλληλόγραμμο ΕΖ και άρα εναλλάξ όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΓ προς το παραλληλόγραμμο ΒΕ, έτσι είναι το τρίγωνο ΚΗΘ προς το παραλληλόγραμμο ΕΖ (Πρόταση 5.16). Είναι σε ίσο το τρίγωνο ΑΒΓ με το παραλληλόγραμμο ΒΕ, άρα ίσο είναι και το τρίγωνο ΚΗΘ με το παραλληλόγραμμο ΕΖ. Αλλά το παραλληλόγραμμο ΕΖ είναι ίσο με το Δ, άρα και το τρίγωνο ΚΗΘ είναι ίσο με το Δ. Το ΚΗΘ δε είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Έτσι κατασκευάστηκε το ευθύγραμμο σχήμα ΚΗΘ, όμοιο προς το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα ΑΒΓ και ίσο προς ένα άλλο δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Δ. Όπερ έδει ποιήσαι.

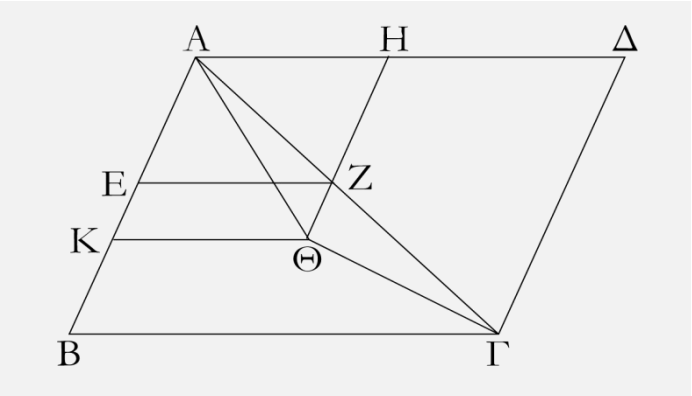
κς΄

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Πρόταση 26

Εάν από ένα παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί ένα άλλο παραλληλόγραμμο, όμοιο προς το αρχικό και με όμοιο τρόπο τοποθετημένο, έχοντας κοινή γωνία με αυτό, τότε το αφαιρεθέν παραλληλόγραμμο είναι γύρω από τη μια διαγώνιο του αρχικού όπως το αρχικό.

σχήμα 26



Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΖ παραλληλογράμμῳ.

Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ λοιπόν αφαιρείται το παραλληλόγραμμο ΑΖ, όμοιο με το ΑΒΓΔ και όμοια τοποθετημένο, με κοινή γωνία τη ΔΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒΓΔ έχει κοινή διάμετρο με το ΑΖ.

Εάν δεν είναι, τότε έστω η ΑΘΓ κοινή διάμετρος των ΑΒΓΔ και ΑΖ. Προεκτείνεται η ΗΖ ώστε να περάσει από το Θ και από το Θ φέρω τη ΘΚ παράλληλη των ΑΔ, ΒΓ (Πρόταση 1.31).

Επειδή λοιπόν έχουν κοινή διάμετρο τα ΑΒΓΔ και ΚΗ όπως είναι η ΔΑ προς την ΑΒ, έτσι η ΗΑ προς την ΑΚ (Πρόταση 6.24). Από δε την ομοιότητα των ΑΒΓΔ, ΕΗ, όπως είναι η ΔΑ προς την ΑΒ, έτσι είναι η ΗΑ προς την ΑΕ. Άρα όπως είναι η ΗΑ προς την ΑΚ έτσι είναι η ΗΑ προς την ΑΕ. Η ΗΑ λοιπόν έχει προς καθεμιά από τις ΑΚ,ΑΕ τον ίδιο λόγο. Ίση άρα η ΑΕ με την ΑΚ (Πρόταση 5.9), δηλαδή η μικρότερη με τη μεγαλύτερη. Πράγμα αδύνατον. Άρα δεν ισχύει ότι δεν έχουν κοινή διάμετρο τα ΑΒΓΔ, ΑΖ. Επομένως έχει κοινή διάμετρο

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με το παραλληλόγραμμο ΑΖ.

Εάν λοιπόν από ένα παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί ένα άλλο παραλληλόγραμμο, όμοιο προς το αρχικό και με όμοιο τρόπο τοποθετημένο, έχοντας κοινή γωνία με αυτό, τότε το αφαιρεθέν παραλληλόγραμμο είναι γύρω από τη μια διαγώνιο του αρχικού όπως το αρχικό. Όπερ έδει δείξαι.

κζ΄

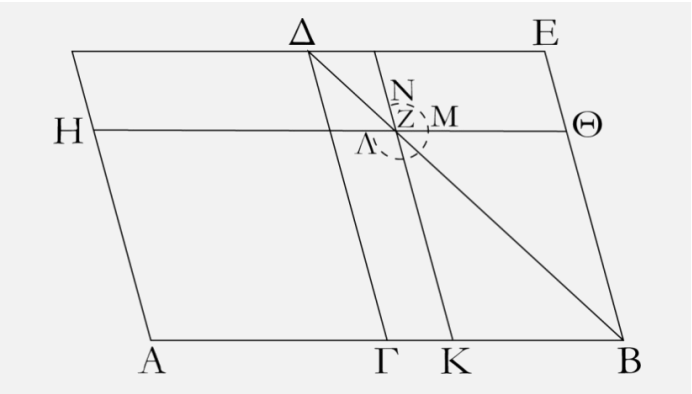
Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔΒ μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Πρόταση 27

Από όλα τα παραλληλόγραμμα που εφαρμόζονται στην ίδια ευθεία και από τα οποία λείπουν παραλληλογράμμα όμοια και ομοίως κείμενα προς το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη μισή ευθεία, το μεγαλύτερο είναι το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη μισή ευθεία, το οποίο είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο που λείπει.

Έστω η ευθεία ΑΒ και έστω πως το σημείο Γ την τέμνει στο μέσο της (Πρόταση 1.10). Εφαρμόζω πάνω στην ευθεία ΑΒ το παραλληλόγραμμο ΑΔ που υπολείπεται του παραλληλόγραμμου σχήματος ΔΒ, το οποίο εφαρμόζεται στο μισό τμήμα της ΑΒ, δηλαδή στο ΓΒ. Ισχυρίζομαι πως από όλα τα παραλληλόγραμμα που εφαρμόζονται στην ΑΒ και υπολείπονται όμοιων παραλληλόγραμμων σχημάτων και με όμοιο τρόπο τοποθετημένων προς το ΔΒ, το μεγαλύτερο είναι το ΑΔ. Έχοντας τοποθετήσει στην ευθεία ΑΒ το παραλληλόγραμμο ΑΖ, το παραλληλόγραμμο ΖΒ υπολείπεται, είναι όμοιο και με όμοιο τρόπο τοποθετημένο προς το ΔΒ. Ισχυρίζομαι λοιπόν πως το ΑΔ είναι μεγαλύτερο από το ΑΖ.



σχήμα 27

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΒ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επειδή το παραλληλόγραμμο ΔΒ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΖΒ, αφού έχουν την ίδια διάμετρο (Πρόταση 6.26), χαράσσω τη διάμετρο ΔΒ και ολοκληρώνεται το υπόλοιπο σχήμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Επειδή λοιπόν είναι το (συμπλήρωμα) ΓΖ ίσο με το (συμπλήρωμα) ΖΕ (Πρόταση 1.43) και το παραλληλόγραμμο ΖΒ είναι κοινό, όλο το παραλληλόγραμμο ΓΘ είναι ίσο με όλο το παραλληλόγραμμο ΚΕ. Αλλά το παραλληλόγραμμο ΓΘ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΓΗ, αφού η ΑΓ είναι ίση με τη ΓΒ (Πρόταση 6.1). Οπότε το παραλληλόγραμμο ΗΓ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΚΕ. Προστίθεται στο καθένα το παραλληλόγραμμο ΓΖ. Έτσι ολόκληρο το παραλληλόγραμμο ΑΖ είναι ίσο με το γνώμονα ΛΜΝ. Ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΒ, δηλαδή το ΑΔ, είναι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου ΑΖ.

Από όλα λοιπόν τα παραλληλόγραμμα που εφαρμόζονται στην ίδια ευθεία και υπολείπονται παραλληλογράμμων όμοιων και όμοια κείμενων προς το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη μισή ευθεία, το μεγαλύτερο είναι το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη μισή ευθεία, το οποίο είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο του οποίου υπολείπεται. Όπερ έδει δείξαι.

κη΄

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν].

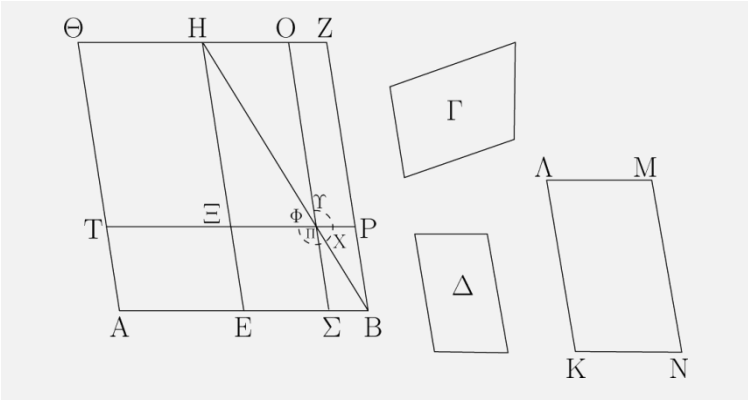
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ μὴ μεῖζον [ὂν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Πρόταση 28

Να εφαρμοστεί σε δοσμένη ευθεία γραμμή ένα παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρέσουμε παραλληλόγραμμο όμοιο και όμοια τοποθετημένο με δοσμένο παραλληλόγραμμο, αυτό που απομενει είναι ένα παραλληλόγραμμο ίσο προς ένα δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα.

Πρέπει δε το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα (προς το οποίο είναι ίσο το παραλληλόγραμμο που απομένει) να μην είναι μεγαλύτερο από το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται στη μισή ευθεία γραμμή και είναι όμοιο με το έλλειμμα. Έστω ΑΒ η ευθεία που δίνεται και Γ το δοσμένο επίσης ευθύγραμμο σχήμα, όχι μεγαλύτερο από το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται στη μισή ευθεία όμοιο προς το έλλειμμα και Δ το παραλληλόγραμμο προς το οποίο το έλλειμμα πρέπει να είναι όμοιο. Πρέπει δηλαδή να κατασκευαστεί στην ευθεία ΑΒ, παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρεθεί παραλληλόγραμμο όμοιο προς το Δ, εκείνο που απομένει είναι ίσο προς το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ.

σχήμα 28



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον.

Έστω το σημείο Ε, το μέσο της ΑΒ (Πρόταση 1.10) και κατασκευάζω στην ΕΒ, το παραλληλόγραμμο ΕΒΖΗ, όμοιο και όμοια τοποθετημένο προς το παραλληλόγραμμο Δ (Πρόταση 6.18). Και έστω πως συμπληρώνεται το παραλληλόγραμμο ΑΗ.

Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΗΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζον ἔστω τὸ ΘΕ τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ [ἐστιν] ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστιν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι [τὸ ΗΠ] τῷ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν]. καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Εάν μεν είναι ίσο το ΑΗ με το Γ, τότε ότι περιγράψαμε προηγούμενα κατασκευάστηκε. Κατασκευάστηκε δηλαδή στη δοσμένη ευθεία ΑΒ, παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρεθεί το παραλληλόγραμμο ΑΗ ίσο με το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ, το υπόλοιπο ΗΒ είναι παραλληλόγραμμο σχήμα, όμοιο προς το Δ. Εάν δεν είναι, έστω το ΘΕ μεγαλύτερο του Γ. Είναι δε ίσο το ΘΕ με το ΗΒ (Πρόταση 6.1). Άρα και το ΗΒ μεγαλύτερο του Γ. Έστω το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ, έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να είναι όμοιο και όμοια τοποθετημένο προς το Δ και ίσο με αυτή την υπεροχή του ΗΒ προς το Γ (Πρόταση 6.25). Αλλά το ΗΒ είναι όμοιο με το Δ. Άρα το ΚΜ είναι επίσης όμοιο με το ΗΒ (Πρόταση 6.21). Είναι λοιπόν ομόλογη, η μεν ΚΛ της ΗΕ, η δε ΛΜ της ΗΖ. Και επειδή είναι ίσο το (παραλληλόγραμμο) ΗΒ με το (σχήμα) Γ και το (παραλληλόγραμμο) ΚΜ, άρα είναι το ΗΒ μεγαλύτερο του ΚΜ. Μεγαλύτερη λοιπόν είναι και η μεν ΗΕ της ΚΛ, η δε ΗΖ της ΛΜ. Έστω η μεν ΗΞ ίση με την ΚΛ, η δε ΗΟ ίση με τη ΛΜ (Πρόταση 1.3) και συμπληρώνεται το ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμο. Άρα είναι ίσο και όμοιο το ΗΠ του ΚΜ (αλλά το ΚΜ είναι όμοιο με το ΗΒ) οπότε και το ΗΠ είναι όμοιο με το ΗΒ (Πρόταση 6.21). Είναι λοιπόν γύρω από την ίδια διάμετρο το ΗΠ με το ΗΒ (Πρόταση 6.26). Έστω ΗΠΒ η κοινή τους διάμετρος και καταγράφηκε το υπόλοιπο σχήμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστιν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΧΦ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΦΧΥ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλ'

Επειδή λοιπόν είναι ίσο το ΒΗ με τα Γ, ΚΜ, των οποίων το ΗΠ είναι ίσο με το ΚΜ, άρα ο υπόλοιπος γνώμονας ΥΧΦ είναι ίσος με το υπόλοιπο σχήμα Γ. Και επειδή είναι ίσο το (υπόλοιπο) ΟΡ με το (υπόλοιπο) ΞΣ (Πρόταση 1.43) προστίθεται κοινό και στα δυο το παραλληλόγραμμο ΠΒ. Είναι επομένως όλο το (παραλληλόγραμμο) ΟΒ ίσο με όλο το (παραλληλόγραμμο) ΞΒ.

ὁ ΦΧΥ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ [ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Αλλά το (παραλληλόγραμμο) ΞΒ είναι ίσο με το (παραλληλόγραμμο) ΤΕ, αφού η πλευρά ΑΕ είναι ίση με την πλευρά ΕΒ (Πρόταση 6.1). Άρα το ΤΕ είναι ίσο και με το ΟΒ και προστίθεται κοινό και στα δυο το ΞΣ. Άρα όλο το (παραλληλόγραμμο) ΤΣ είναι ίσο με το γνώμονα ΦΧΨ. Αλλά ο γνώμονας ΦΧΨ έχει δειχθεί ίσος με το Γ. Οπότε το παραλληλόγραμμο ΤΣ είναι επίσης ίσο με το (σχήμα) Γ.

Άρα στη δοσμένη ευθεία ΑΒ κατασκευάστηκε παραλληλόγραμμο από το οποίο αφαιρούμενο το παραλληλόγραμμο ΠΒ όμοιο με το Δ (επειδή το ΠΒ είναι όμοιο με το ΗΠ), απομένει το παραλληλόγραμμο ΤΣ, ίσο με το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ (Πρόταση 6.24). Όπερ έδει ποιήσαι.

[Σχόλιο:
Η πρόταση αυτή είναι η γεωμετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\mathbf{x^2 - \alpha x + \beta = 0}$. Εδώ, $\mathbf{x}$ είναι ο λόγος μιας πλευράς του ελλείμματος προς την αντίστοιχη πλευρά του σχήματος Δ, $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ο λόγος του μήκους της ΑΒ προς το μήκος εκείνης της πλευράς του σχήματος Δ, η οποία αντιστοιχεί στην πλευρά του ελλείμματος που «τρέχει» πάνω στην ΑΒ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι ο λόγος των επιφανειών των σχημάτων Γ και Δ. Ο περιορισμός για να έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες αντιστοιχεί στη συνθήκη: $\boldsymbol{\beta < \alpha^2/4}$. Βρίσκεται δε μόνο η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης. Η μεγαλύτερη ρίζα μπορεί να βρεθεί με παρόμοια μέθοδο.]

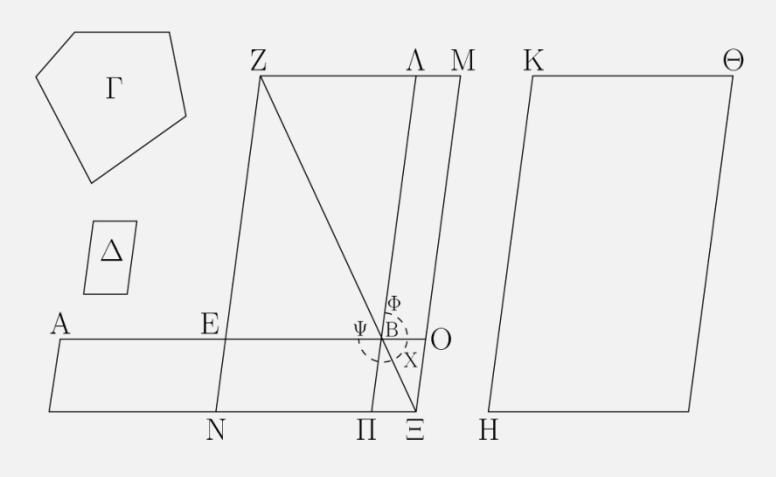
κθ΄

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Πρόταση 29

Να εφαρμοστεί σε δοσμένη ευθεία γραμμή παραλληλόγραμμο ίσο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο να είναι όμοιο με ένα άλλο δοσμένο παραλληλόγραμμο και μεγαλύτερο κατά ένα παραλληλόγραμμο ίσο με αυτό.

σχήμα 29



Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Έστω η δοσμένη ευθεία ΑΒ, το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ προς το οποίο πρέπει να είναι ίσο το παραλληλόγραμμο που θα κατασκευαστεί κατά μήκος της ευθείας ΑΒ και Δ το παραλληλόγραμμο προς το οποίο η υπερβολή πρέπει να είναι όμοια. Πρέπει δηλαδή να κατασκευαστεί κατά μήκος της δοσμένης ευθείας ΑΒ, παραλληλόγραμμο ίσο με το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ, υπερέχων κατά ένα παραλληλόγραμμο όμοιο με το παραλληλόγραμμο σχήμα Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ

Έστω το σημείο Ε που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο μέσο της (Πρόταση 1.10) και κατασκευάζεται στην ΕΒ, το παραλληλόγραμμο ΒΖ, όμοιο και όμοια τοποθετημένο με το Δ (Πρόταση 6.18). Και έστω το παραλληλόγραμμο ΗΘ, όμοιο μεν και όμοια τοποθετημένο προς το παραλληλόγραμμο Δ, ίσο δε με τα ΒΖ και Γ μαζί (Πρόταση 6.25). Ομόλογη λοιπόν η μεν ΚΘ με τη ΖΛ, η δε ΚΗ με τη ΖΕ. Και επειδή το παραλληλόγραμμο ΗΘ είναι μεγαλύτερο του ΖΒ,

ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

μεγαλύτερη άρα και η μεν ΚΘ της ΖΛ, η δε ΚΗ της ΖΕ. Προεκτείνονται οι ΖΛ, ΖΕ, η μεν ΖΛΜ ίση με την ΚΘ, η δε ΖΕΝ ίση με την ΚΗ (Πρόταση 1.3) και συμπληρώνεται το παραλληλόγραμμο ΜΝ. Άρα το ΜΝ είναι ίσο και όμοιο με το ΗΘ. Αλλά το ΗΘ είναι όμοιο με το ΕΛ οπότε και το ΜΝ είναι όμοιο με το ΕΛ (Πρόταση 6.21). Είναι άρα το ΕΛ και το ΜΝ γύρω από την ίδια διάμετρο (Πρόταση 6.26). Χαράσσω τη διάμετρο αυτή, τη ΖΞ και γράφεται το υπόλοιπο σχήμα.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστίν. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστίν· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Και αφού το παραλληλόγραμμο ΗΘ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΕΛ και το σχήμα Γ, αλλά το ΗΘ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΜΝ, άρα το ΜΝ είναι επίσης ίσο με τα ΕΛ και Γ. Αφαιρούμε το ΕΛ και από τα δυο, άρα το υπόλοιπο, ο γνώμονας ΨΧΦ είναι ίσος με το (σχήμα) Γ. Και επειδή είναι ίση η ΑΕ με την ΕΒ, το παραλληλόγραμμο ΑΝ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΝΒ (Πρόταση 6.1), δηλαδή το (παραλληλόγραμμο) ΛΟ (Πρόταση 1.43). Προσθέτω και στα δυο το παραλληλόγραμμο ΕΞ. Έτσι όλο το παραλληλόγραμμο ΑΞ είναι ίσο με το γνώμονα ΦΧΨ. Αλλά ο γνώμονας ΦΧΨ είναι ίσος με το σχήμα Γ. Άρα και το παραλληλόγραμμο ΑΞ είναι ίσο με το σχήμα Γ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον τὸ ΟΠ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΞ, κατάσκευασμένο κατά μήκος της δοσμένης ευθείας ΑΒ, ίσο προς το σχήμα Γ, υπερβαίνει κατά το παραλληλόγραμμο ΠΟ, που είναι όμοιο με το Δ, αφού και το ΕΛ είναι όμοιο με το ΟΠ (Πρόταση 6.24). Όπερ έδει δείξαι.

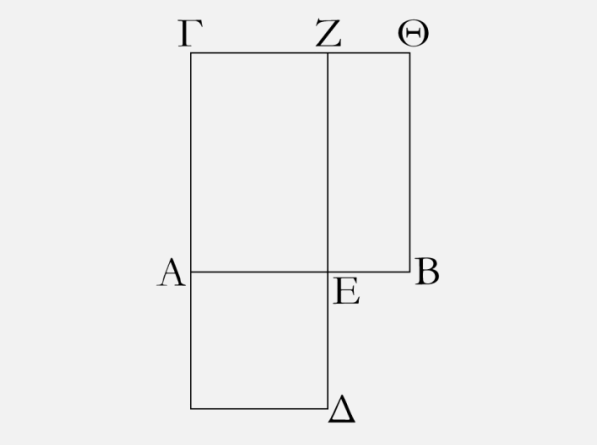
[Σχόλιο:
Η πρόταση αυτή είναι η γεωμετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\mathbf{x^2 + \alpha x - \beta = 0}$. Εδώ, **x** είναι ο λόγος μια πλευράς της υπεροχής προς την αντίστοιχη πλευρά του σχήματος Δ, **α** είναι ο λόγος του μήκους της ΑΒ προς το μήκος εκείνης της πλευράς του σχήματος Δ, η οποία αντιστοιχεί στην πλευρά της υπερβολής, που τρέχει κατά μήκος της ευθείας ΑΒ και **β** είναι ο λόγος των επιφανειών Γ και Δ. Μόνο η θετική ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται εδώ].

λ΄

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Πρόταση 30

Να τμηθεί δοθείσα πεπερασμένη ευθεία σε άκρο και μέσο λόγο.



σχήμα 30

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῇ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Έστω ΑΒ η δοσμένη πεπερασμένη ευθεία, η οποία απαιτείται να τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο.

Κατασκευάζουμε πάνω στην ΑΒ, τετράγωνο ΒΓ (Πρόταση 1.46) και στη συνέχεια πάνω στην ΑΓ το παραλληλόγραμμο ΓΔ, ίσο προς το ΒΓ, που υπερβάλλει κατά το τετράγωνο ΑΔ, το οποίο είναι όμοιο με το τετράγωνο ΒΓ (Πρόταση 6.29).

Το ΒΓ είναι τετράγωνο. Επίσης το ΑΔ είναι τετράγωνο. Αφού λοιπόν το ΒΓ είναι ίσο με το ΓΔ, αφαιρούμε κι από τα δυο το ορθογώνιο ΓΕ κι έτσι το ορθογώνιο ΒΖ που μένει είναι ίσο με το τετράγωνο ΑΔ που επίσης μένει. Είναι δε και ισογώνιο με αυτό. Άρα οι πλευρές των ΒΖ και ΑΔ που βρίσκονται γύρω από τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες (Πρόταση 6.14). Έτσι όπως είναι η ΖΕ προς την ΕΔ είναι η ΑΕ προς την ΕΒ. Είναι δε ίση η μεν ΖΕ με την ΑΒ, η δε ΕΔ με την ΑΕ. Οπότε όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΕ, έτσι είναι η ΑΕ προς την ΕΒ. Η ΑΒ δε είναι μεγαλύτερη της ΑΕ, άρα είναι και η ΑΕ μεγαλύτερη της ΕΒ (Πρόταση 5.14).

Το Ε λοιπόν τέμνει την ευθεία ΑΒ σε άκρο και μέσο λόγο, με μεγαλύτερο τμήμα αυτής το ΑΕ. Όπερ έδει ποιήσαι.

[Αυτή η μέθοδος τομής μιας ευθείας γραμμής λέγεται: «Χρυσή Τομή». Πρβλ. 2.11].

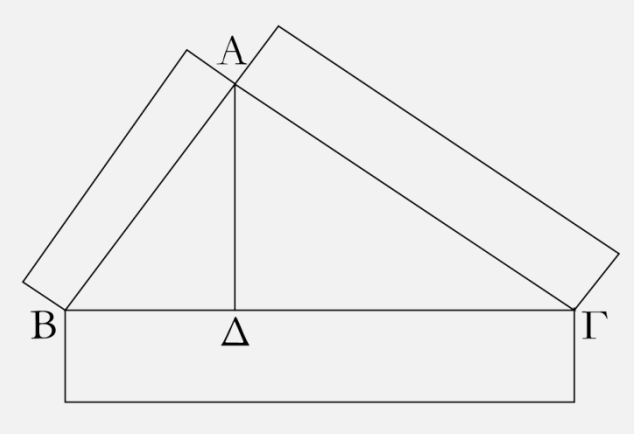
λα΄

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Πρόταση 31

Σε ορθογώνια τρίγωνα, το σχήμα που κατασκευάζεται στην υποτείνουσα πλευρά της ορθής γωνίας είναι ίσο με το άθροισμα των όμοιων και όμοια τοποθετημένων με αυτό, σχημάτων που κατασκευάζονται πάνω στις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

σχήμα 31



Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ορθή τη γωνία ΒΑΓ. Ισχυρίζομαι πως το σχήμα πάνω στην πλευρά ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των όμοιων και όμοια τοποθετημένων σχημάτων πάνω στην ΒΑ και στην ΑΓ.

Φέρω την κάθετη ΑΔ (Πρόταση 1.12).

Τότε αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ευθεία ΑΔ είναι η κάθετη από την κορυφή Α στη βάση ΒΓ, τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ γύρω από την κάθετη είναι όμοια με το (όλο) τρίγωνο ΑΒΓ και το μεταξύ τους (Πρόταση 6.8). Και αφού το ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΔ, τότε όπως είναι η ΓΒ προς τη ΒΑ, έτσι είναι η ΑΒ προς τη ΒΔ (Πρόταση 6.1). Και αφού τρεις ευθείες γραμμές είναι ανάλογες, όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη, έτσι το σχήμα που γράφεται στην πρώτη είναι όμοιο και όμοια τοποθετημένο με το σχήμα που γράφεται στη δεύτερη (Πρόταση 6.19,Πόρισμα). Οπότε όπως είναι η ΓΒ προς τη ΒΔ, έτσι είναι το σχήμα που γράφεται πάνω στη ΓΒ προς το όμοιο και όμοια τοποθετημένο σχήμα που γράφεται πάνω στη ΒΑ. Και

εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

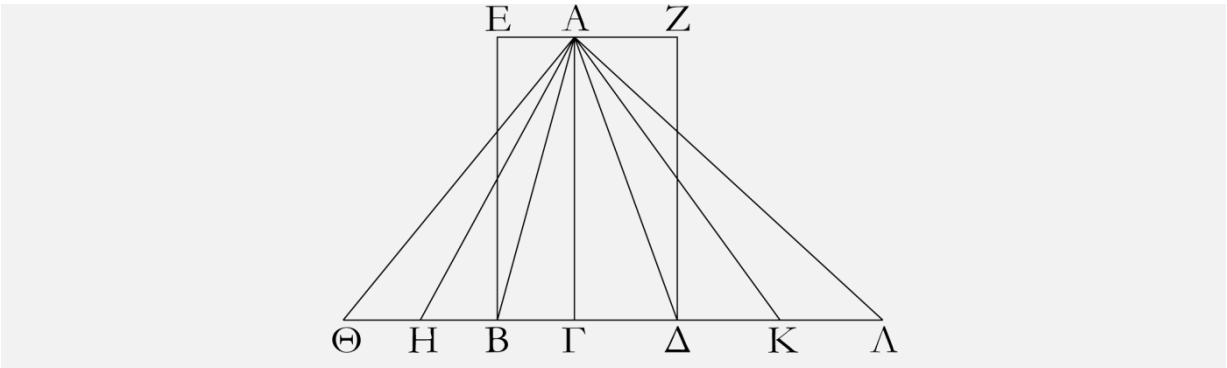
έτσι, για τους ίδιους λόγους, όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΔ, έτσι είναι το σχήμα πάνω στη ΒΓ προς το σχήμα πάνω στη ΓΑ. Επίσης, όπως είναι η ΒΓ προς τη ΒΔ και ΔΓ, έτσι είναι το σχήμα πάνω στη ΒΓ προς το άθροισμα των όμοιων και όμοια τοποθετημένων σχημάτων πάνω στη ΒΑ και ΑΓ (Πρόταση 5.24). Η ΒΓ είναι ίση με ΒΔ και ΔΓ. Άρα το σχήμα πάνω στη ΒΓ είναι επίσης ίσο προς το άθροισμα, των όμοιων και όμοια τοποθετημένων σχημάτων πάνω στη ΒΑ και στην ΑΓ (Πρόταση 5.9).

Επομένως, σε ορθογώνια τρίγωνα, το σχήμα που κατασκευάζεται στην υποτείνουσα πλευρά της ορθής γωνίας είναι ίσο με το άθροισμα των όμοιων και όμοια τοποθετημένων με αυτό, σχημάτων που κατασκευάζονται πάνω στις κάθετες πλευρές του τριγώνου. Όπερ έδει δείξαι.

Μεταφορά των Προτάσεων σε σύγχρονη διατύπωση

Πρόταση 1

Έστω τρίγωνα Τ, Τ’ και παραλληλόγραμμα Π, Π’ με κοινό ύψος υ και βάσεις α, α’ αντίστοιχα, τότε: Τ/Τ’ = α/α’ και Π/Π’ = α/α’.



Απόδειξη

Ίσα πολλαπλάσια των βάσεων α, α’ αντιστοιχούν σε ίσα πολλαπλάσια των τριγώνων Τ, Τ’, σύμφωνα με την Πρόταση 1.34.

Για κάθε κ, λ φυσικούς αριθμούς λοιπόν θα έχω:

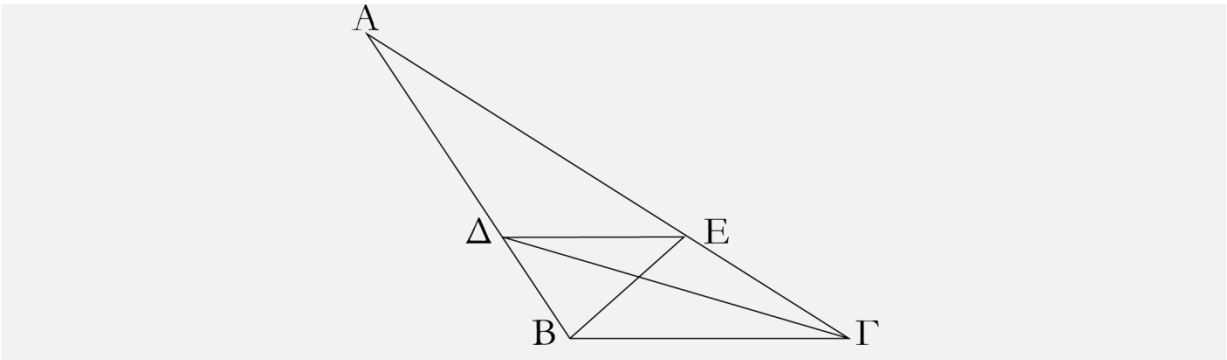
Αν κα ≥ λα’ τότε και κΤ ≥ λΤ’ ή Αν κα < λα’ τότε και κΤ < λΤ’

Άρα από τον Ορισμό 5.5 προκύπτει: Τ/Τ’ = α/α’.

Τώρα επειδή κάθε παραλληλόγραμμο είναι το διπλάσιο ενός τριγώνου με την ίδια βάση (Πρόταση 1.34) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο και για τα αντίστοιχα παραλληλόγραμμα Π, Π’, δηλαδή Π/Π’ = α/α’.

Πρόταση 2

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ = Τ φέρω παράλληλη ΔΕ προς μια πλευρά του, τότε αυτή τέμνει τις άλλες δυο πλευρές του ΑΒ, ΑΓ σε τμήματα ανάλογα, δηλαδή: ΒΔ = α, ΔΑ =α’, ΓΕ = β , ΕΑ = β’ με α/α’ = β/β’ και αντίστροφα: Αν οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ = Τ τέμνονται από την ευθεία ΔΕ αντίστοιχα, σε τμήματα α, α’, β, β’ ανάλογα, δηλαδή α/α’ = β/β’, τότε ΔΕ//ΒΓ.



Απόδειξη

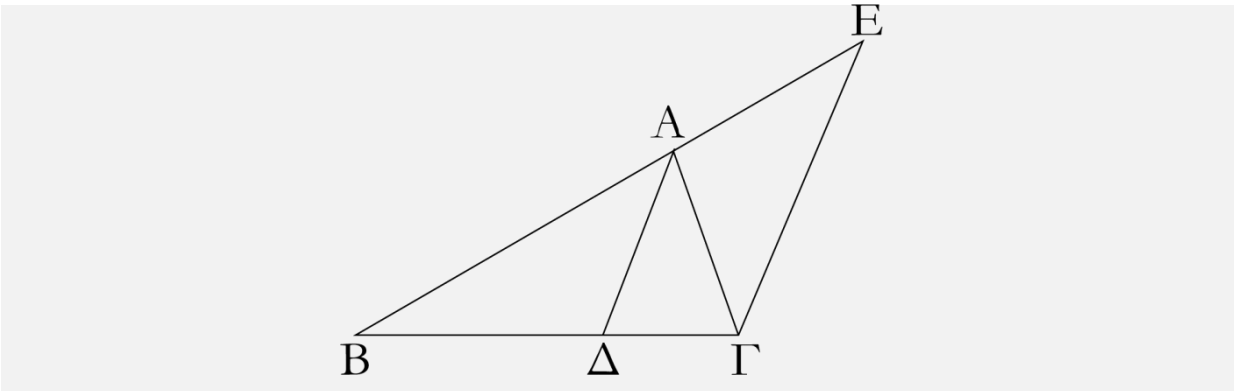
(Ευθύ) Τα τρίγωνα ΒΔΕ = T_1 , ΓΔΕ = T_2 –σύμφωνα με την Πρόταση 1.38– είναι ίσα, δηλαδή $T_1 = T_2$, και τρίγωνο ΑΔΕ = T_3 .

Από την Πρόταση 5.7 προκύπτει: $T_1 / T_3 = T_2 / T_3$. Αλλά T_1 / T_3 = α/α' και T_2 / T_3 = β/β' (Πρόταση 6.1). Οπότε από Πρόταση 5.11: α/α' = β/β' .

(Αντίστροφο) Ισχύει α/α' = T_1/T_3 και β/β' = T_2/T_3 (από Πρόταση 6.1), οπότε από Πρόταση 5.11 προκύπτει $T_1/T_3 = T_2/T_3$ και στη συνέχεια από την Πρόταση 5.9 συμπεραίνουμε ότι: $T_1 = T_2$. Τα τρίγωνα αυτά έχουν κοινή βάση την ΔΕ και εφόσον είναι ίσα θα βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ευθειών (Πρόταση 1.39). Οπότε ΔΕ // ΒΓ.

Πρόταση 3

Η ευθεία που διχοτομεί μια γωνία (έστω την Α) ενός τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ = Τ, τέμνει την απέναντή της πλευρά σε τμήματα ΒΔ = α, ΔΓ = α' ανάλογα προς τις υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου ΑΒ = γ, ΑΓ = β, δηλαδή: α/α' = γ/β. Και αντίστροφα, αν τα τμήματα της βάσης του τριγώνου ΑΒΓ = Τ είναι ανάλογα προς τις υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου, δηλαδή α/α' = γ/β, τότε η ευθεία που συνδέει το σημείο που διαχωρίζει τη βάση στα τμήματα αυτά (στη συγκεκριμένη περίπτωση το Δ) με την απέναντί της κορυφή, διχοτομεί τη γωνία (Α) του τριγώνου.



Απόδειξη

(Ευθύ) Φέρουμε τη ΓΕ//ΔΑ. Η ευθεία ΑΓ τέμνει τώρα τις δυο παράλληλες ευθείες ΑΔ,ΓΕ οπότε: ∠ΑΓΕ = ∠ΓΑΔ (Πρόταση 1.29). Αλλά ∠ΓΑΔ = ∠ΒΑΔ (από υπόθεση), άρα ∠ΒΑΔ = ∠ΑΓΕ (Ι)

Επίσης η ευθεία ΒΑ προεκτεινόμενη τέμνει εκτός από την ΑΓ και την παράλληλη της ΓΕ, οπότε:

∠ΒΑΔ = ∠ΑΕΓ (ΙΙ) (Πρόταση 1.29).

Από (Ι), (ΙΙ) προκύπτει: ∠ΑΓΕ = ∠ΑΕΓ και στη συνέχεια, από την Πρόταση 1.6:

ΑΕ = ΑΓ = β

Αφού ΑΔ//ΓΕ (στο τρίγωνο ΒΓΕ),από την Πρόταση 6.2 έχουμε: α/α' = γ/β.

(Αντίστροφο): Ισχύει α/α' = γ/β και α/α' = γ/γ' από Πρόταση 6.2 (αφού η ΑΔ//ΓΕ), όπου γ' = ΑΕ. Από Πρόταση 5.11 προκύπτει: γ/β = γ/γ' και στη συνέχεια μέσω της Πρότασης 5.9 καταλήγουμε: β = γ'. Επομένως: ∠ΑΓΕ = ∠ΑΕΓ (Πρόταση 1.5).

Όμως: ∠ΑΕΓ = ∠ΒΑΔ (εντός και εκτός) και ∠ΑΓΕ = ∠ΓΑΔ (εναλλάξ) (Πρόταση 1.29)

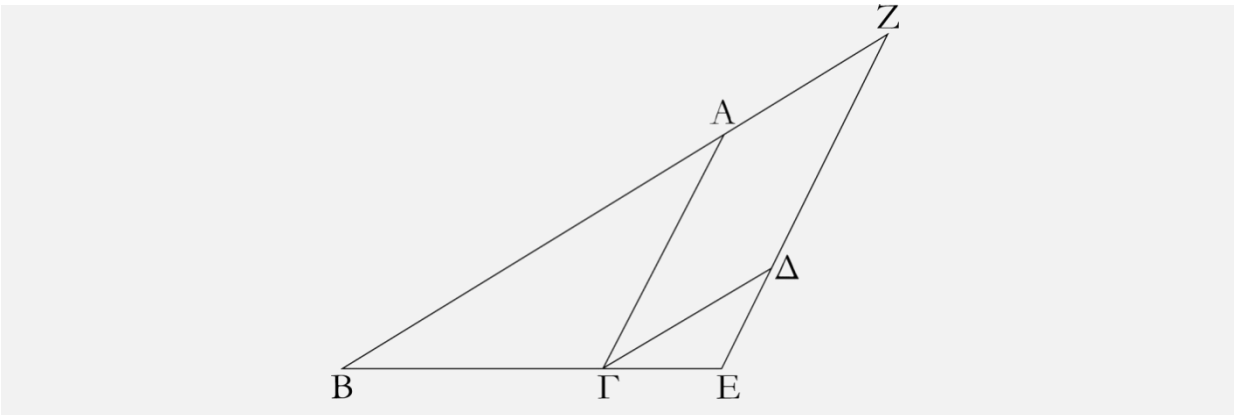
Άρα ∠ΒΑΔ = ∠ΓΑΔ, οπότε η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόταση 4

Σε ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ = T_1, ΔΕΓ =T_2 (∠ΑΒΓ = ∠ΔΓΕ, ∠ΒΑΓ = ∠ΓΔΕ, ∠ΑΓΒ = ∠ΓΕΔ)

ισχύει: γ/α = ε/δ, α/β = δ/γ', γ/β = ε/γ',

(όπου: ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ = γ, ΓΕ = δ, ΕΔ = δ', ΓΔ = ε)



Απόδειξη

Στο δοσμένο σχήμα, προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ, ΕΔ και επειδή ∠ΑΒΓ+∠ΓΕΔ < 2·L αυτές συναντώνται στο σημείο Ζ (Αίτημα 5)

Επειδή ∠ΔΓΕ = ∠ΑΒΓ, ΒΖ//ΓΔ (Πρόταση 1.28)

Επειδή ∠ΑΓΒ = ∠ΔΕΓ, ΑΓ//ΖΕ (Πρόταση 1.28)

Άρα ΖΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως: ΖΑ = ΔΓ και ΑΓ = ΖΔ. (Ι) (Πρόταση 1.34)

Στο τρίγωνο ΖΒΕ ΑΓ//ΖΕ, άρα από Πρόταση 6.2 έχουμε: ΒΑ/ΑΖ = ΒΓ/ΓΕ που μέσω των σχέσεων (Ι) γίνεται: ΒΑ/ΔΓ = ΒΓ/ΓΕ και εναλλάξ από Πρόταση 5.16: ΒΑ/ΒΓ = ΔΓ/ΓΕ (ΙΙ)

Πάλι επειδή στο τρίγωνο ΒΕΖ είναι ΓΔ//ΒΖ, έχουμε από Πρόταση 6.2: ΒΓ/ΓΕ = ΖΔ/ΔΕ, όμως ΖΔ = ΑΓ, οπότε: ΒΓ/ΓΕ = ΑΓ/ΔΕ και εναλλάξ πάλι από Πρόταση 5.16:

ΒΓ/ΑΓ = ΓΕ/ΔΕ (ΙΙΙ)

Από τις αναλογίες (ΙΙ), (ΙΙΙ) μέσω της Πρότασης 5.22 (δι' ίσου) καταλήγουμε:

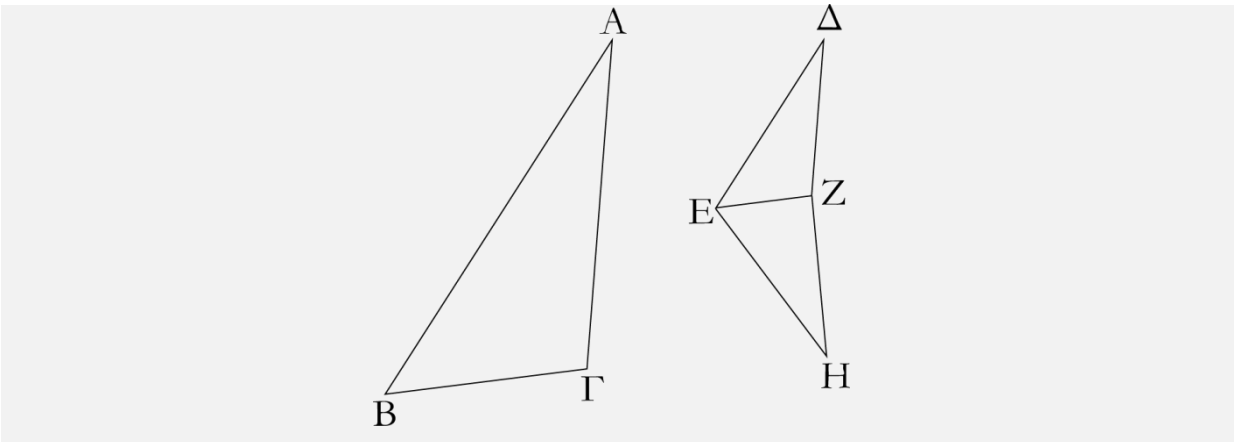
ΒΑ/ΑΓ = ΓΔ/ΔΕ, δηλαδή: γ/β = ε/γ'

Με όμοιο τρόπο προκύπτουν και οι: γ/α = ε/δ, α/β = δ/γ'.

Πρόταση 5

Αν στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ισχύει: ΑΒ/ΒΓ=ΔΕ/ΕΖ, ΒΓ/ΓΑ=ΕΖ/ΖΔ, ΒΑ/ΑΓ=ΕΔ/ΔΖ, με ΑΒ=γ, ΒΓ=α, ΔΕ=ζ, ΕΖ=δ, ΓΑ=β, ΕΖ=δ, ΖΔ=ε, δηλαδή: γ/α=ζ/δ, α/β=δ/ε, γ/β=ζ/ε, τότε:

∠ΑΒΓ = ∠ΔΕΖ, ∠ΒΓΑ = ∠ΕΖΔ, ∠ΒΑΓ = ∠ΕΔΖ και είναι ίσες οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές.



Απόδειξη

Στην πλευρά ΕΖ κατασκευάζουμε με κορυφή Ε ∠ΖΕΗ = ∠ΑΒΓ και με κορυφή Ζ ∠ΕΖΗ = ∠ΑΓΒ (Πρόταση 1.23), οπότε θα είναι και ∠ΕΗΖ = ∠ΒΑΓ (Πρόταση 1.32). Τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΕΖΗ. Άρα –εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.4- προκύπτει:

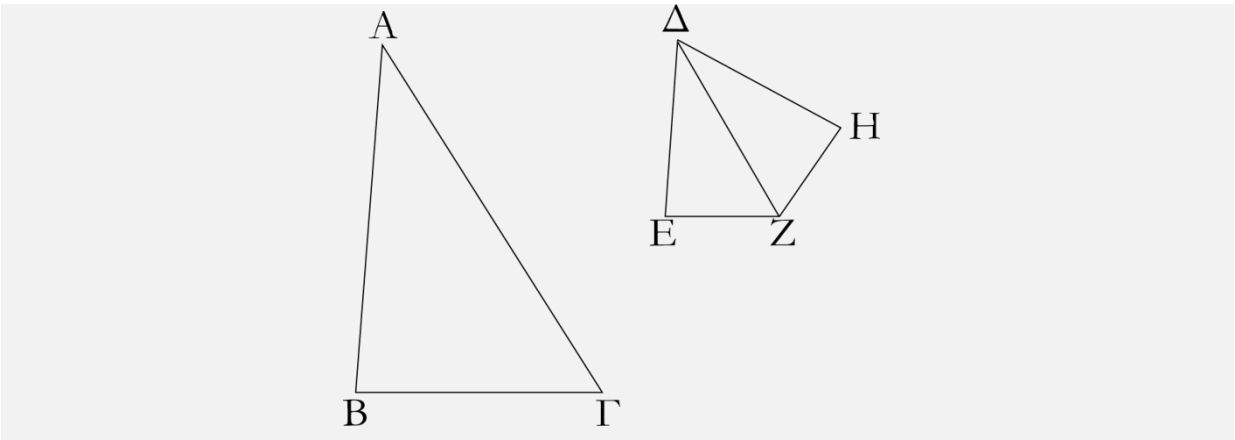
ΑΒ/ΒΓ = ΗΕ/ΕΖ και αφού από την υπόθεση ισχύει: ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ θα έχουμε από Πρόταση 5.11: ΗΕ/ΕΖ = ΔΕ/ΕΖ. Μέσω της Πρότασης 5.9 καταλήγουμε: ΗΕ = ΔΕ (Ι)

Με όμοιο τρόπο έχουμε: ΔΖ = ΗΖ (ΙΙ). Από (Ι), (ΙΙ) και το γεγονός πως η πλευρά ΕΖ είναι κοινή στα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΕΖ –μέσω της Πρότασης 1.8- συμπεραίνουμε πως:

∠ΔΕΖ = ∠ΗΕΖ και τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΕΖ είναι ίσα. Θα έχουν δε και τις υπόλοιπες γωνίες τους ίσες,δηλαδή: ∠ΔΖΕ = ∠ΗΖΕ και ∠ΕΔΖ = ∠ΕΗΖ και επειδή ∠ΗΖΕ = ∠ΑΓΒ και ∠ΗΕΖ =∠ΑΒΓ έχουμε: ∠ΔΖΕ = ∠ΑΓΒ, ∠ΔΕΖ = ∠ΑΒΓ και ακόμη ∠Α = ∠Δ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες που υπόκεινται σε ομόλογες πλευρές.

Πρόταση 6

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, με ∠ΒΑΓ = ∠ΕΔΖ και ΑΒ/ΒΓ = ΕΔ/ΔΖ, τότε: ∠ΑΒΓ = ∠ΔΕΖ και ∠ΑΓΒ = ∠ΔΖΕ (είναι δηλαδή ίσες οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές).



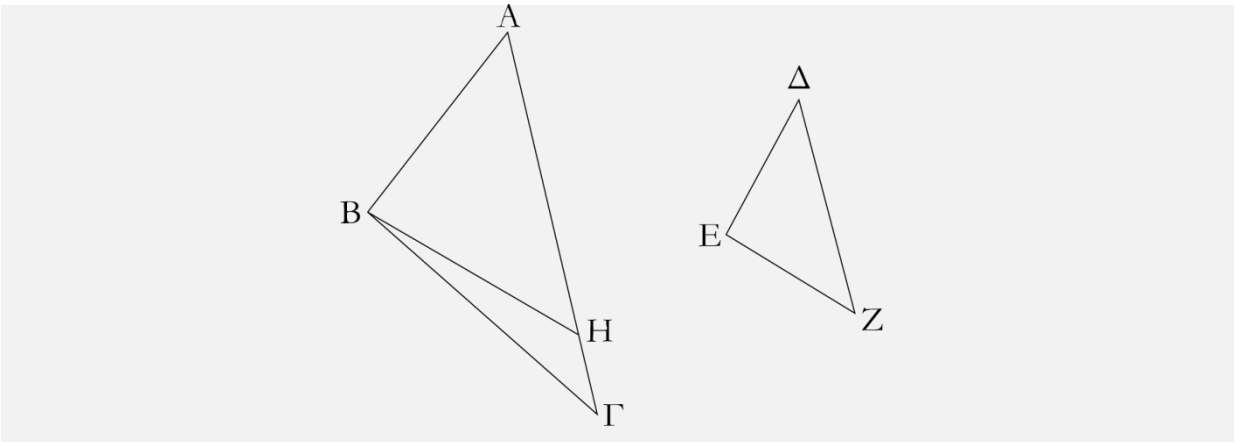
Απόδειξη

Στην πλευρά ΔΖ και στα σημεία της Δ,Ζ κατασκευάζουμε αντίστοιχα ∠ΖΔΗ = ∠ΒΑΓ = ∠ΕΔΖ και ∠ΔΖΗ = ∠ΑΓΒ (Πρόταση 1.23). Άρα ∠Β = ∠Η (Πρόταση 1.32).

Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΓ και ΔΗΖ είναι ισογώνια, οπότε με εφαρμογή της Πρότασης 6.4, έχουμε: ΑΒ/ΒΓ = ΗΔ/ΔΖ και λόγω της υπόθεσης προκύπτει: ΕΔ/ΔΖ = ΗΔ/ΔΖ (Πρόταση 5.11). Έτσι: ΕΔ = ΗΔ (Πρόταση 5.9) και ΔΖ κοινή πλευρά. Άρα ΕΖ = ΖΗ, τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΔΖ είναι ίσα και έχουν ∠ΔΖΕ = ∠ΔΖΗ, ∠ΔΕΖ =∠ΔΗΖ (Πρόταση 1.4). Όμως ∠ΔΖΗ = ∠ΑΓΒ οπότε ∠ΔΖΕ = ∠ΑΓΒ και ∠ΕΔΖ = ∠ΒΑΓ (από υπόθεση) και άρα ∠ΑΒΓ = ∠ΔΕΖ.

Πρόταση 7

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, με ∠ΒΑΓ = ∠ΕΔΖ, ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ και ∠Γ<1∟, ∠Ζ<1∟. Τότε ∠ΑΒΓ =∠ΔΕΖ και ∠Γ = ∠Ζ.



Απόδειξη

Υποθέτουμε πως ∠ΑΒΓ ≠ ∠ΔΕΖ και μάλιστα ∠ΑΒΓ > ∠ΔΕΖ. Κατασκευάζουμε λοιπόν στην πλευρά ΑΒ στο σημείο Β ∠ΑΒΗ = ∠ΔΕΖ(Πρόταση 1.23). Τότε τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΖ είναι ισογώνια (Πρόταση 1.32). Οπότε ισχύει: ΑΒ/ΒΗ = ΔΕ/ΕΖ (Πρόταση 6.4), όμως ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ (από υπόθεση) άρα: ΑΒ/ΒΗ = ΑΒ/ΒΓ (Πρόταση 5.11) και επομένως:

ΒΗ = ΒΓ (Πρόταση 5.9) αλλά και ∠ΒΓΑ = ∠ΒΗΓ (Πρόταση 1.5).

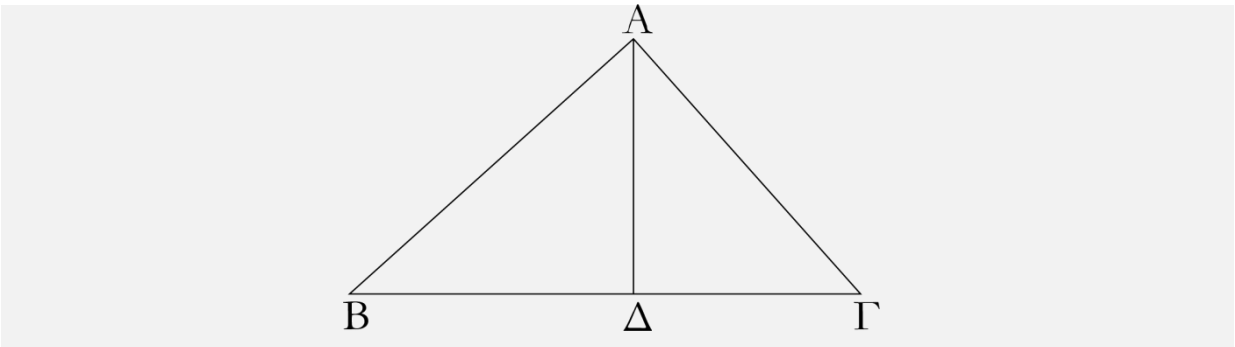
Αφού (από υπόθεση) ∠Γ = ∠ΒΓΑ < 1∟ ισχύει και ∠ΒΗΓ < 1∟. Συνεπώς η εφεξής παραπληρωματική γωνία της ∠ΒΗΓ είναι μεγαλύτερη μιας ορθής, δηλαδή:

∠ΑΗΒ > 1∟. (Πρόταση 1.13). Όμως τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΖ είναι ισογώνια, οπότε: ∠ΑΗΒ =∠ΕΖΔ και αφού ∠ΑΗΒ > 1∟ θα ισχύει και ∠ΕΖΔ > 1∟, όμως έχουμε από την υπόθεση πως ∠Ζ < 1∟, πράγμα άτοπο. Άρα ∠ΑΒΓ = ∠ΔΕΖ. Επίσης και ∠Γ = ∠Ζ αφού από την υπόθεση ισχύει ∠ΒΑΓ= ∠ΕΔΖ (Πρόταση 1.32).

Με όμοιο τρόπο εργαζόμαστε και στην περίπτωση που: ∠Γ > 1∟, ∠Ζ > 1∟.

Πρόταση 8

Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο (∠ΒΑΓ = 1∟), ΑΔ ⊥ ΒΓ. Τότε: τρΑΒΔ≈τρΑΒΓ, τρΑΔΓ≈τρΑΒΓ και τρ.ΑΒΔ ≈ τρ.ΑΔΓ.



Απόδειξη

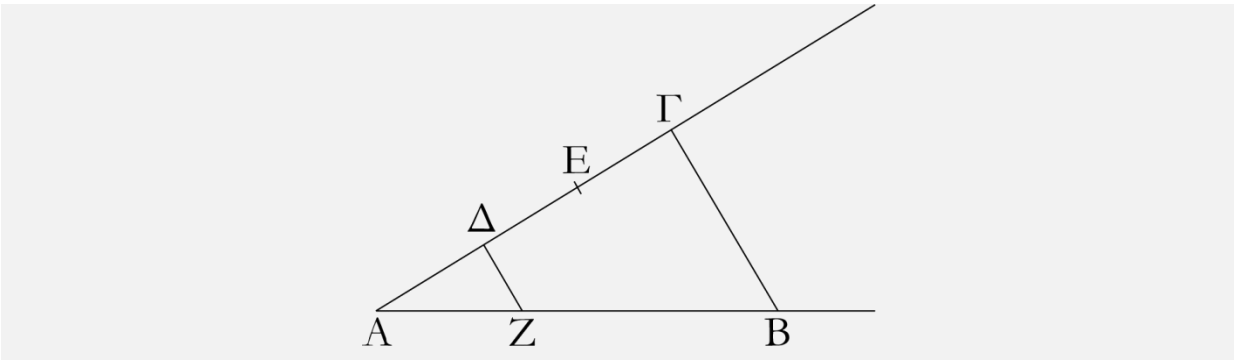
Αφού στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ (∠ΒΑΓ= 1∟), ΑΒΔ(∠ΒΔΑ=1∟) η ∠ΓΒΑ είναι κοινή, τότε ∠ΑΓΒ = ∠ΒΑΔ (Ι) (Πρόταση 1.32). Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισογώνια κι επομένως ισχύει: ΒΓ/ΒΑ = ΑΒ/ΒΔ = ΑΓ/ΑΔ (Πρόταση 6.4). Οπότε –σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1– τρΑΒΔ ≈ τρ ΑΒΓ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται πως: τρ ΑΔΓ ≈ τρ ΑΒΓ.

Επειδή τώρα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ(∠ΒΔΑ=1∟), ΑΔΓ(∠ΑΔΓ=1∟) έχει δειχθεί η ισχύς της (Ι), προκύπτει κατόπιν εφαρμογής της Πρότασης 1.32 ότι: ∠ΑΒΓ = ∠ΔΑΓ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ,ΑΔΓ είναι ισογώνια κι επομένως ισχύει: ΒΔ/ΔΑ = ΑΔ/ΔΓ = ΒΑ/ΑΓ (Πρόταση 6.4). Σύμφωνα με τον Ορισμό λοιπόν 6.1: τρΑΒΔ≈τρΑΔΓ.

Πρόταση 9

Έστω ευθεία ΑΒ = α, να κατασκευαστεί το 1/3.α

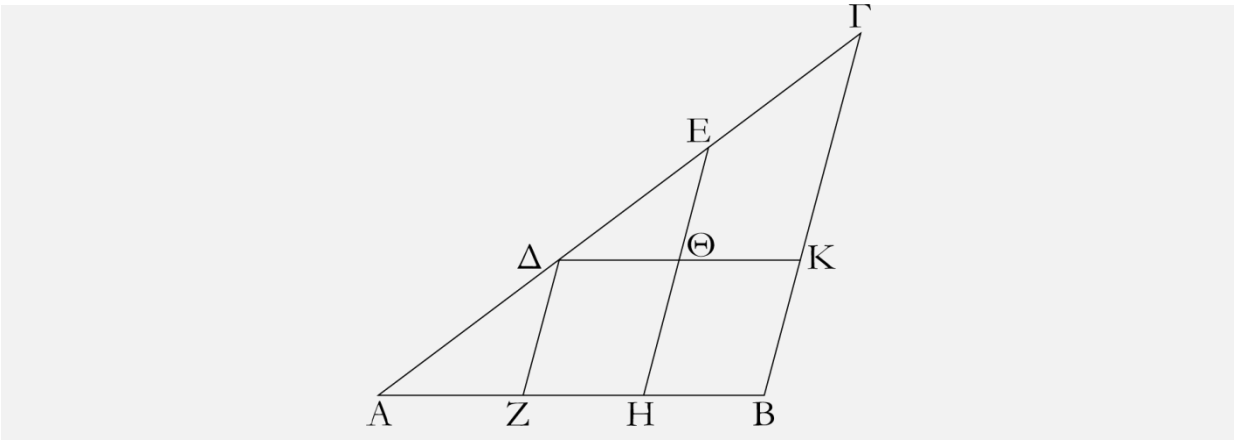


Απόδειξη-Κατασκευή

Χαράζω ευθεία ΑΓ υπό τυχαία γωνία με την ευθεία ΑΒ. Παίρνω πάνω στην ΑΓ, τυχαίο σημείο Δ και στη συνέχεια σημεία Ε, Γ, τέτοια ώστε: ΑΔ=ΔΕ=ΕΓ (Πρόταση 1.3). Συνδέω τα σημεία Β, Γ και κατασκευάζω την ΔΖ//ΒΓ (Πρόταση 1.31). Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΔΖ//ΒΓ, οπότε: ΓΔ/ΔΑ=ΒΖ/ΖΑ (Πρόταση 6.2). Όμως ΓΔ= 2.ΔΑ άρα και ΒΖ = 2. ΖΑ και τελικά: ΒΑ = 3.ΖΑ. ΖΑ = 1/3.α.

Πρόταση 10

Μια δοθείσα ευθεία γραμμή να τμηθεί με τον ίδιο τρόπο που τέμνεται μια άλλη τετμημένη ευθεία γραμμή.



Απόδειξη-Κατασκευή

Έστω η δοθείσα άτμητη ευθεία ΑΒ και η τετμημένη από τα σημεία Δ, Ε ευθεία ΑΓ, σε τυχαία γωνία με αυτήν. Χαράζουμε τη ΒΓ και από τα σημεία Ε, Δ τις ΕΗ, ΔΖ ώστε: ΕΗ//ΒΓ, ΔΖ//ΒΓ (Πρόταση 1.31). Επίσης από το σημείο Δ, τη ΔΘΚ//ΑΒ (Πρόταση 1.31). Σχηματίζονται λοιπόν τα παραλληλόγραμμα ΖΘ, ΘΒ και γι' αυτό ισχύει:

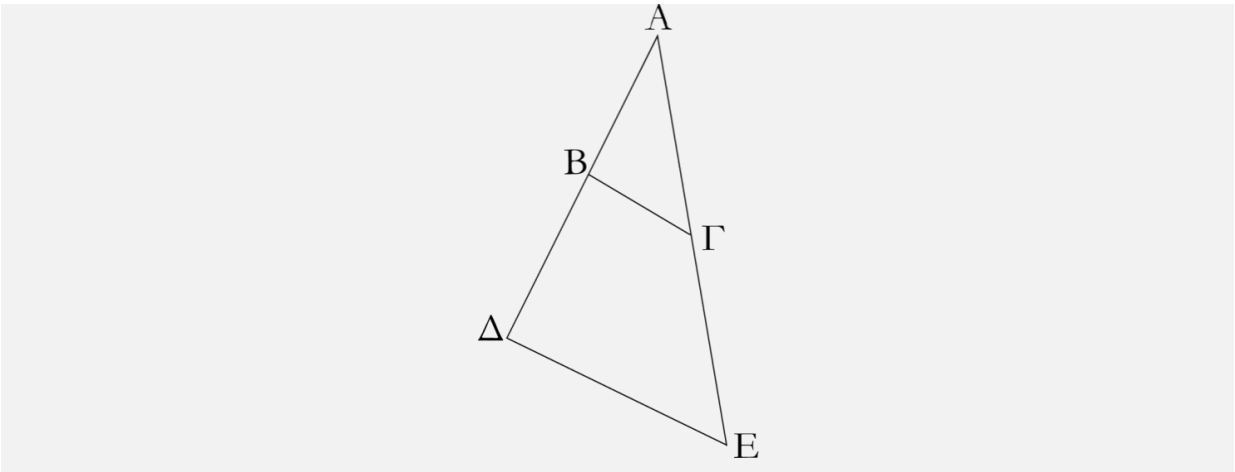
ΔΘ=ΖΗ, ΘΚ=ΗΒ (Ι) (Πρόταση 1.34). Επειδή στο τρίγωνο ΔΚΓ, ΘΕ//ΓΚ, ισχύει: ΓΕ/ΕΔ=ΚΘ/ΘΔ (Πρόταση 6.2), λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (Ι), προκύπτει: ΓΕ/ΕΔ=ΗΒ/ΖΗ.

Επειδή πάλι στο τρίγωνο ΑΗΕ έχουμε ΔΖ//ΗΕ,με εφαρμογή της Πρότασης 6.2 ισχύει: ΕΔ/ΔΑ=ΗΖ/ΖΑ. Κατασκευάστηκε το ζητούμενο.

Πρόταση 11

(Εύρεση τρίτης αναλόγου δυο δοσμένων ευθειών)

Έστω ΑΒ = α, ΑΓ = β, να βρεθεί ΓΕ = γ τέτοιο ώστε: α/β = β/γ.



Απόδειξη-Κατασκευή

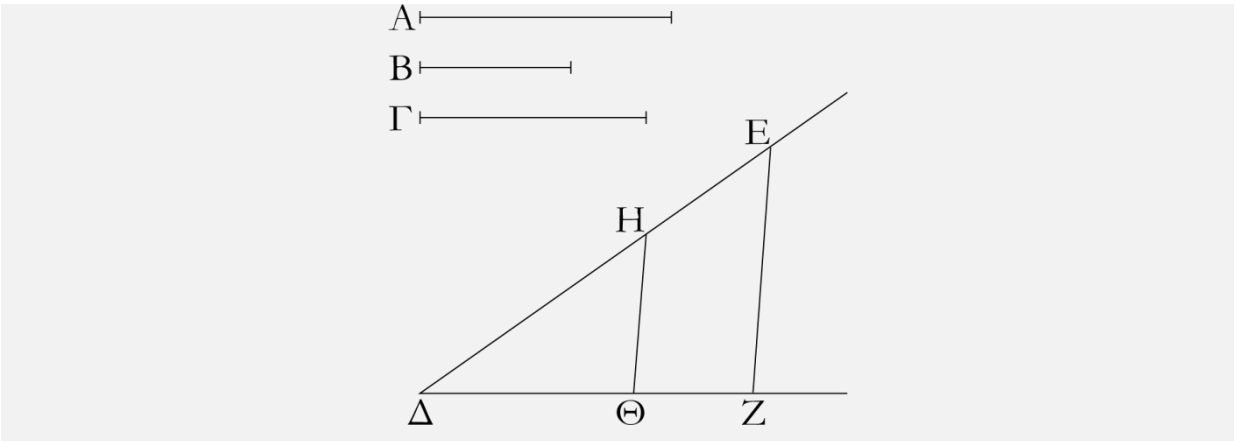
Προεκτείνουμε τις ευθείες ΑΒ=α, ΑΓ=β (που σχηματίζουν τυχαία γωνία) και παίρνουμε πάνω στην ΑΒ σημείο Δ ώστε: ΒΔ = ΑΓ (Πρόταση 1.3). Φέρουμε τη ΒΓ και στη συνέχεια ΔΕ//ΒΓ, σημείο Ε στην προέκταση της ΑΓ (Πρόταση 1.31). Επειδή στο τρίγωνο ΑΔΕ, ΔΕ//ΒΓ, με εφαρμογή της Πρότασης 6.2, έχουμε: ΑΒ/ΒΔ=ΑΓ/ΓΕ. Όμως ΒΔ=ΑΓ, οπότε: ΑΒ/ΑΓ=ΑΓ/ΓΕ, δηλαδή: α/β=β/γ. Και βρέθηκε η τρίτη ανάλογος γ των α, β.

[Ισοδυναμεί με την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας α.γ, αφού β^2=α.γ]

Πρόταση 12

(Εύρεση τετάρτης αναλόγου τριών δοσμένων ευθειών)

Έστω τρεις δοσμένες ευθείες Α=α, Β=β, Γ=γ, ζητείται τέταρτη ευθεία Δ=δ, ώστε α/β = γ/δ.



Απόδειξη-Κατασκευή

Έστω δυο ευθείες ΔΕ, ΔΖ περιέχουσες τυχαία γωνία, με ΔΗ=Α=α, ΗΕ=Β=β και ΔΘ=Γ=γ (Πρόταση 1.3). Φέρουμε την ΗΘ και στη συνέχεια από το σημείο Ε την ΕΖ//ΗΘ (Πρόταση 1.31).

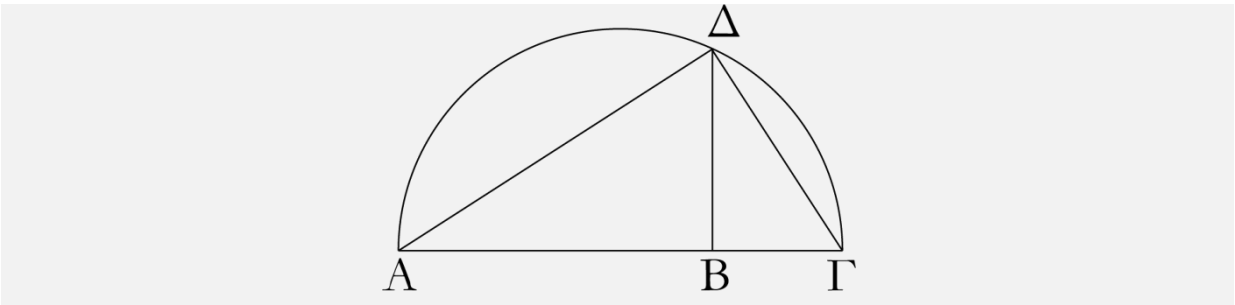
Επειδή στο τρίγωνο ΔΕΖ, ΗΘ//ΖΕ,κατόπιν εφαρμογής της Πρότασης 6.2, έχουμε:

ΔΗ/ΗΕ=ΔΘ/ΘΖ. Λαμβάνοντας δε υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις ισότητας, η τελευταία αναλογία γίνεται: α/β=γ/ΔΘ, με ΔΘ τη ζητούμενη ευθεία Δ=δ.

Πρόταση 13

(Εύρεση μέσης αναλόγου δυο ευθειών)

Δοθέντων δύο ευθειών α,β, να κατασκευασθεί μέση ανάλογος γ, δηλαδή ώστε α/γ=γ/β.



Απόδειξη

Έστω Π ορθογώνιο παραλληλόγραμμό με πλευρές α, β.

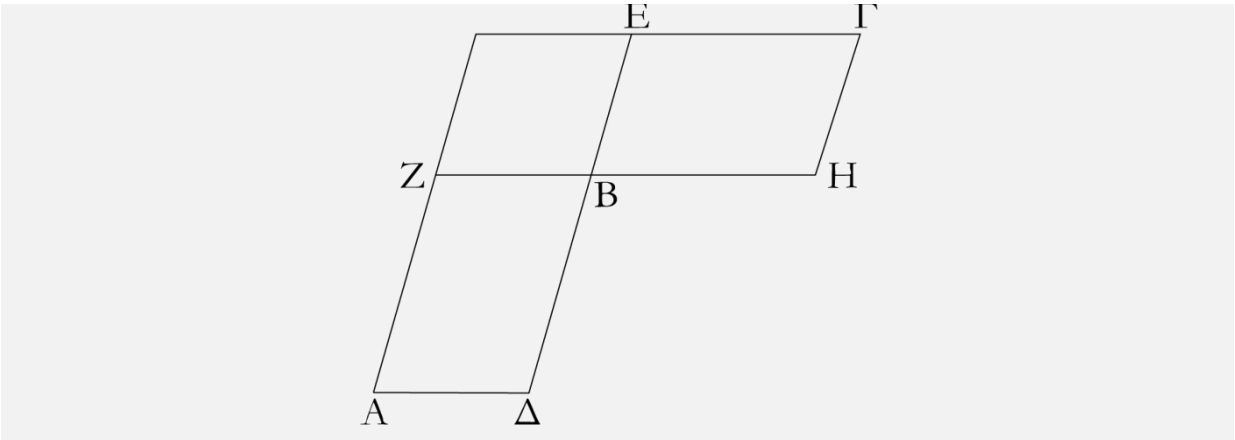
Από την ΙΙ.14, κατασκευάζεται ευθεία γ, ώστε το τετραγωνό γ2 της Π' είναι ίσο με το Π.

Από την 6.14, α/γ=γ/β

Η Πρόταση 6.13 ισοδυναμεί με την Πρόταση 2.14: «Να κατασκευάσετε τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοθέντος ορθογωνίου», δηλαδή με την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας.

Πρόταση 14α

Αν Π και Π' είναι ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα, με πλευρές α, β και α', β', αντίστοιχα, τότε α/α'=β'/β.



Απόδειξη . Θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μεταξύ των παραλλήλων του Π, με την ίδια βάση β, και δεύτερη πλευρά την υ. Τότε Π=Ρ=υβ.
Παρόμοια θέτουμε Π', υ', ώστε Π'=Ρ'=υ'β'.
Από την υπόθεση Π=Π', έπεται Ρ=Ρ', άρα υβ=υ'β'.
Τότε, από τον ορισμό 5.5, υ/υ'=β'/β.
[Πράγματι, έστω μβ<νβ'.
Άρα μβυ<νβ'υ.
Από την υπόθεση ότι Π, Π' είναι **ίσα**, μυ'β'<νβ'υ. Άρα μυ'<νυ.
κλπ. Από τον ορισμό 5.5,
υ/υ'=β'/β].
Από την υπόθεση ότι Π, Π' είναι ισογώνια, έπεται εύκολα ότι υ/υ'=α/α'.
Από 5.11, έπεται α/α'=β'/β.
Η Πρόταση **6.14α** ΔΕΝ χρησιμοποιεί την αρχή Ευδόξου.

Απόδειξη β. Άμεση από την **6.23.**

Πρόταση 6.14β. Αν Π και Π' είναι ισογώνια παραλληλόγραμμα,
με πλευρές α,β, και α',β', αντίστοιχα, και α/α'=β'/β,
τότε Π και Π' είναι **ίσα.**

Απόδειξη. Θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μεταξύ των παραλλήλων του Π, με την ίδια βάση β, και δεύτερη πλευρά την υ. Τότε Π=Ρ=υβ.
Παρόμοια θέτουμε Π', υ', ώστε Π'=Ρ'=υ'β'.
Από το γεγονός ότι το Π και το Π' είναι ισογώνια, επεται **εύκολα** ότι υ/υ'=α/α'
Από την υπόθεση και 5.11, έπεται ότι υ/υ'= β'/β.
Από 6.1, υ'β'/ββ'=υ'/β, βυ'/ββ'=αυ/β'.
Από 5.11 & υπόθεση, υ'β'/ββ'=βυ/ββ'.
Από **5.9** (η οποία χρησιμοποιείτην αρχή Ευδόξου), υ'β'=βυ.
Άρα Π=Π'.
Η Πρόταση **6.14β** χρησιμοποιεί την **5.9**.

Heath, Elements, vol.2, p.217-218:

'**De Morgan** says upon this proposition: "Owing to the disjointed manner in which Euclid treats compound ratio, this proposition is strangely out of place. It is a particular case of VI. 23, being that in which the ratio of the sides, compounded, gives a ratio of equality. The proper definition of four magnitudes being reciprocally proportional is that the ratio compounded of their ratios is that of equality."

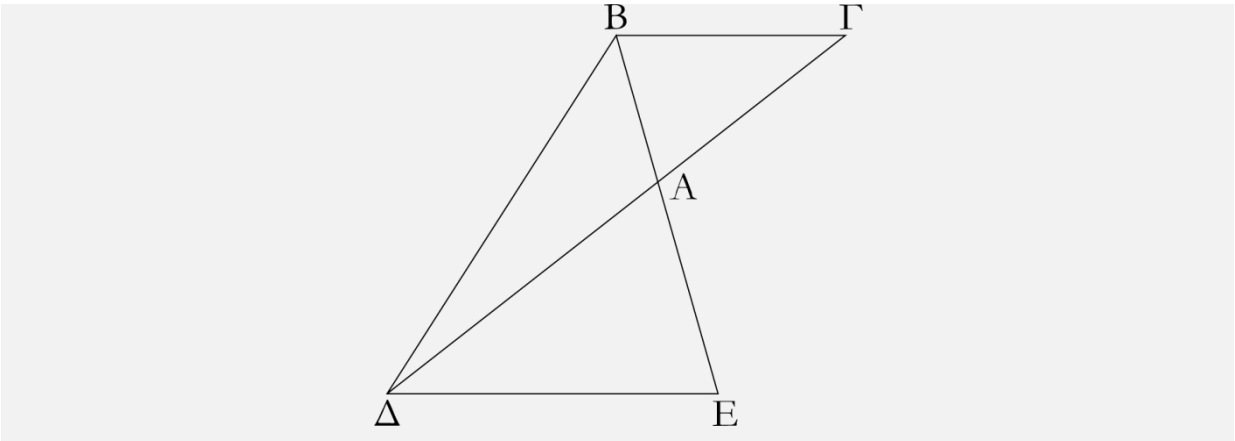
It is true that VI. 14 is a particular case of VI. 23, but, if either is out of place, it is rather the latter that should be placed before VI. 14, since most of the propositions between VI. I5 and VI. 23 depend upon VI. 14 and I5. But it is perfectly consistent with Euclid's manner to give a particular case first and its extension later, and such an arrangement often has great advantages in that it enables the more difficult parts of a subject to be led up to more easily and gradually. Now, if **De Morgan's** view were here followed, we should, as it seems to me, be committing the mistake of explaining what is relatively easy to understand, viz. two ratios of which one is the inverse of the other, by a more complicated conception, that of compound ratio. In other words, it is easier for a learner to realise the relation indicated by the statement that the sides of equal and equiangular parallelograms are "reciprocally proportional" than to form a conception of parallelograms such that "the ratio compounded of the ratio of their sides is one of equality." For this reason I would adhere to Euclid's arrangement.'

Αλλά οι De Morgan, Heath παραβλέπουν το γεγονός ότι
η απόδειξη της Πρότασης 6.23 χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου,
ενώ η Πρόταση 14α δεν την χρησιμοποιεί.

Πρόταση 15

Αν Τ,Τ΄ ίσα τρίγωνα με μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου και με πλευρές περί τις ίσες γωνίες α, β, α΄, β΄, τότε: β/β΄=α΄/α.

Και αντίστροφα: Αν τα τρίγωνα Τ,Τ΄ έχουν μια γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου και β/β΄=α΄/α, τότε Τ=Τ΄.



Απόδειξη

(Ευθύ) Επειδή ∠ΒΑΓ = ∠ΔΑΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία οι: α, α΄, β, β΄ (Πρόταση 1.14). Συνδέω Β, Δ και σχηματίζεται το τρίγωνο ΒΑΔ = T_1.

Αφού Τ=Τ΄ προκύπτει: $T/T_1=T'/T_1$ (Πρόταση 5.7) (Ι).

Όμως T/T_1 = β/β΄ και T'/T_1=α΄/α (Πρόταση 6.1) (ΙΙ)

Λόγω της (Ι) η (ΙΙ) γίνεται: β/β΄=α΄/α.

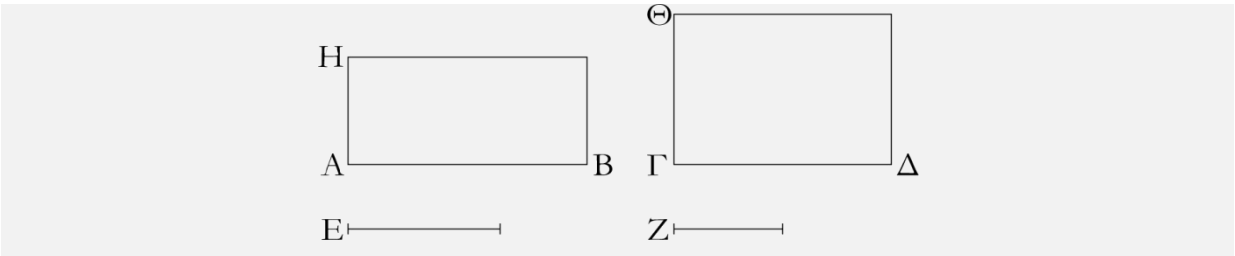
(Αντίστροφο): Σχηματίζεται το T_1,συνδέοντας Β,Δ. Αφού: β/β΄=α΄/α, τότε $T/T_1=T'/T_1$ (Πρόταση 6.1) και μέσω της **Πρότασης 5.9**, καταλήγουμε: Τ=Τ΄.

Πρόταση 16

Αν ΑΒ=α, ΓΔ=β, Ε=γ, Ζ=δ είναι τέσσερις ανάλογες ευθείες ως εξής: α/β=γ/δ, τότε:

Π=Π΄, όπου Π=α.δ και Π΄=β.γ

Και αντίστροφα, αν Π=α.δ=Π'=β.γ τότε: α/β =γ/δ.



Απόδειξη

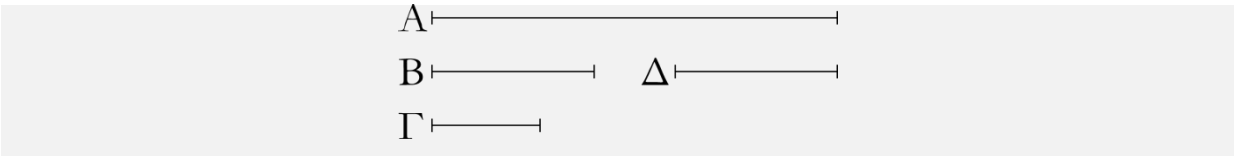
(Ευθύ) Κατασκευάζουμε τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα Π, Π' με πλευρές α, δ και γ, β αντίστοιχα (Προτάσεις 1.11, 1.3). Αφού ισχύει: α/β = γ/δ, των παραλληλογράμμων Π, Π' οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες κι επομένως Π=Π' (Πρόταση 6.14), δηλαδή α.δ = β.γ.

(Αντίστροφο) Κατασκευάζουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα Π, Π' με πλευρές α, δ και β, γ αντίστοιχα, Π=Π' και είναι ισογώνια. Οπότε από Πρόταση 6.14 ισχύει: α/β = γ/δ.

Πρόταση 17

Αν τρεις ευθείες Α=α, Β= β, Γ=γ είναι ανάλογες ως εξής: α/β=β/γ, τότε $α.γ=β^2$.

Και αντίστροφα, αν για τρεις ευθείες ισχύει $α.γ=β^2$, τότε α/β=β/γ.



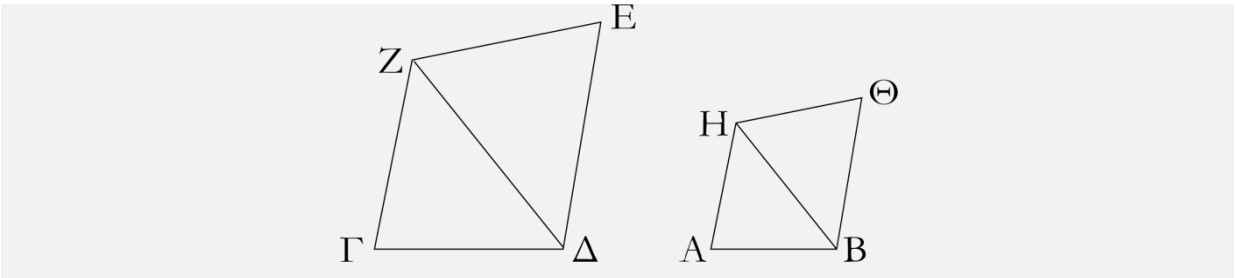
Απόδειξη

(Ευθύ) Κατασκευάζω ευθεία Δ=δ=Β=β (Πρόταση 1.3), οπότε η αναλογία α/β=β/γ γίνεται: α/β=δ/γ. Έχουμε λοιπόν τώρα τέσσερις ευθείες α, β, γ, δ οι οποίες είναι ανάλογες και εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.16 καταλήγουμε: α.γ=β.δ, δηλαδή: $α.γ=β^2$, αφού β=δ.

(Αντίστροφο) Στην ίδια κατασκευή, αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π=α.γ είναι ίσο με το τετράγωνο $Τ=β^2$=β.δ, τότε α.γ=β.δ και εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.16 προκύπτει: α/β=δ/γ όμως β=δ, άρα: α/β=β/γ.

Πρόταση 18

Δοθέντων ευθύγραμμου χωρίου Σ+Τ και ευθείας α΄, να κατασκευασθεί επί της α΄ ευθύγραμμο χωρίο όμοιο και όμοια κείμενο προς το Σ+Τ.



Απόδειξη

Από την Ι.23 κατασκευάζουμε γωνίες φ΄, χ΄ στα δύο άκρα της α΄, ίσες προς φ,χ αντίστοιχα., και συμπληρώνουμε με την κατασκευή του τριγώνου Σ΄, με βάση την α΄, και γωνίες φ΄, χ΄. Έστω β΄, γ΄ οι υπόλοιπες πλευρές του Σ΄.

Από την Ι.32, η τρίτη γωνία ψ΄ του Σ΄ είναι ίση με ψ.

Τότε τα τρίγωνα Σ, Σ΄ είναι ισογώνια.

Από την **6.4**, γ/γ΄=β/β΄=α/α΄, και άρα τα τρίγωνα Σ, Σ΄ είναι όμοια.

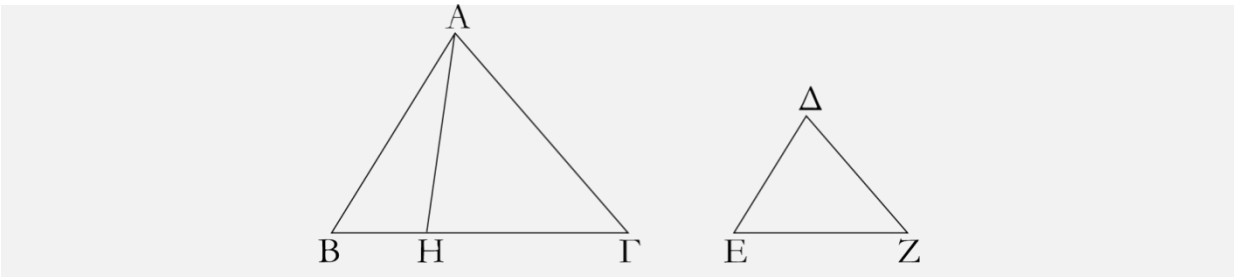
Επαναλαμβάνουμε τώρα την ίδια κατασκευή για την πλευρά γ και το τρίγωνο Τ. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει το τρίγωνο Τ΄ όμοιο προς Τ.

Άρα το ευθύγραμμο χωρίο Σ΄+Τ΄ είναι επί της ευθείας α΄, και όμοιο και όμοια κείμενο προς το Σ+Τ.

Πρόταση 19

Θέτουμε ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΔΕ=α΄, ΕΖ=β΄, Τ=ΑΒΓ, Τ΄=ΔΕΖ.

Αν α/α΄=β/β΄, τότε Τ/Τ΄=$(β/β΄)^2$.



Απόδειξη

Από την **6.11**, κατασκευάζουμε ΒΗ=γ, ώστε β/β΄=β΄/γ.

Θέτουμε ΑΒΗ=Σ

Από τον ορισμό 5.9, β/γ=$(β/β΄)^2$.

Από την εναλλάξ ιδιότητα 5.16, α/α΄=β/β΄=β΄/γ.

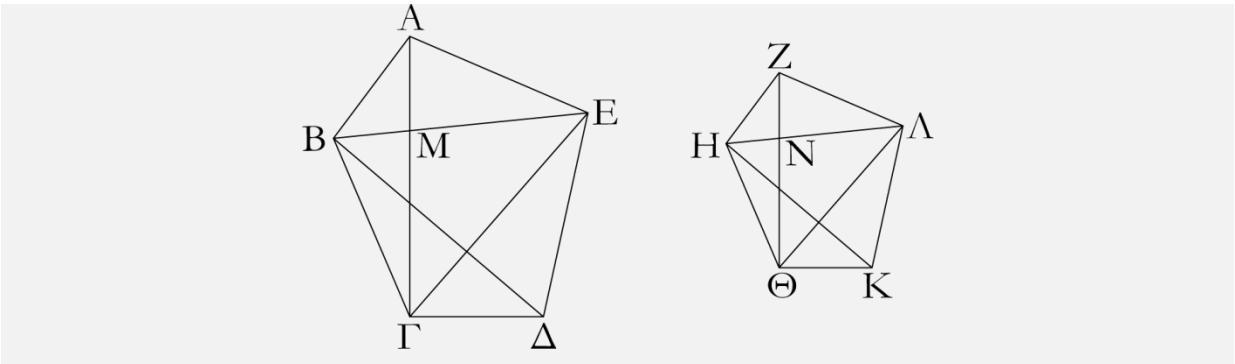
Από **6.15**, Σ=Τ΄.

Από **6.1**, Τ/Τ΄=Σ/Τ =β/γ=$(β/β΄)^2$.

Πρόταση 20

Έστω ΑΒ=α, ΑΕ=β,ΖΗ=α΄, ΖΛ=β΄, Π= (ΑΒΓΔΕ), Π΄=(ΖΗΘΚΛ)

Αν Π≈Π΄, τότε: Π/Π΄= $(α/α΄)^2$.



Απόδειξη

Επειδή Π≈Π' ισχύουν τα εξής από τον Ορισμό 6.1: ∠ΒΑΕ = ∠ΗΖΛ και ΑΒ/ΑΕ=ΗΖ/ΖΛ, δηλαδή: α/β=α΄/β΄. Άρα: ΑΒΕ≈ΖΗΛ, οπότε ∠ΑΒΕ = ∠ΖΗΛ και επειδή ∠ΑΒΓ=∠ΖΗΘ (αφού Π≈Π΄) προκύπτει: ∠ΕΒΓ =∠ΛΗΘ.
Από ΑΒΕ≈ΖΗΛ έχουμε: ΕΒ/ΒΑ=ΛΗ/ΗΖ και από Π≈Π΄έχουμε: ΑΒ/ΒΓ=ΖΗ/ΗΘ και από την Πρόταση 5.22 (δι' ίσου) καταλήγουμε: ΕΒ/ΒΓ=ΛΗ/ΗΘ. Άρα από Πρόταση 6.6 τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΛΗΘ είναι ισογώνια και από την Πρόταση 6.4 και τον Ορισμό 6.1 τα ίδια αυτά τρίγωνα είναι και όμοια. Για τους ίδιους λόγους ΕΓΔ ≈ ΛΘΚ, οπότε αποδείχθηκε πως τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΚΛ διαιρούνται σε ίσο πλήθος ομοίων τριγώνων.

Από Π≈Π' ισχύουν: ∠ΑΒΓ=∠ΖΗΘ και ΑΒ/ΒΓ=ΖΗ/ΗΘ, οπότε: ΑΒΓ≈ΖΗΘ (Πρόταση 6.6). Έχουμε λοιπόν: ∠ΒΑΓ=∠ΗΖΘ και ∠ΒΓΑ=∠ΗΘΖ.

Έχουμε άρα: ∠ΒΑΜ=∠ΗΖΝ και ∠ΑΒΜ=∠ΖΗΝ, οπότε και ∠ΑΜΒ=∠ΖΝΗ (Πρόταση 1.32), επομένως: ΑΒΜ≈ΖΗΝ.

Με όμοιο τρόπο προκύπτει πως: ΒΜΓ≈ΗΝΘ. Άρα από Πρόταση 6.4 : ΑΜ/ΜΒ=ΖΝ/ΝΗ, ΒΜ/ΜΓ=ΗΝ/ΝΘ και με εφαρμογή της Πρότασης 5.22: ΑΜ/ΜΓ=ΖΝ/ΝΘ.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΜ,ΜΒΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Β ισχύει:

ΑΜ/ΜΓ=ΑΒΜ/ΜΒΓ και ΑΜ/ΜΓ=ΑΜΕ/ΕΜΓ (Πρόταση 6.1)

ΑΜ/ΜΓ=ΑΒΜ+ΑΜΕ/ΜΒΓ+ΕΜΓ=ΑΒΕ/ΓΒΕ (Πρόταση 5.12)

Όμοια: ΖΝ/ΝΘ=ΖΗΛ/ΗΛΘ (Πρόταση 6.1) κι επειδή: ΑΜ/ΜΓ=ΖΝ/ΝΘ έχουμε: ΑΒΕ/ΓΒΕ=ΖΗΛ/ΗΛΘ ή ΑΒΕ/ΖΗΛ=ΓΒΕ/ΗΛΘ (Πρόταση 5.16)

Όμοια έχουμε: ΓΒΕ/ΛΗΘ=ΕΓΔ/ΛΘΚ

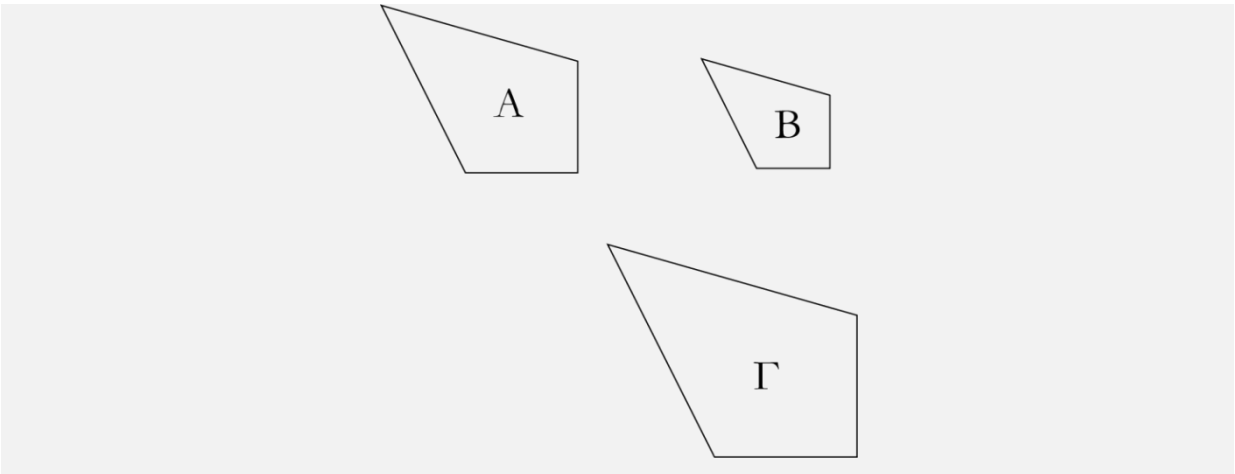
ΑΒΕ/ΖΗΛ=ΓΒΕ/ΛΗΘ=ΕΓΔ/ΛΘΚ=ΑΒΕ+ΓΒΕ+ΕΓΔ/ΖΗΛ+ΛΗΘ+ΛΘΚ=ΑΒΓΔΕ/ΖΗΘΚΛ (Πρόταση 5.12)

Όμως: ΑΒΕ/ΖΗΛ= $ΑΒ^2/ΖΗ^2$ (Πρόταση 6.19)

Άρα: ΑΒΓΔΕ/ΖΗΘΚΛ=$ΑΒ^2/ΖΗ^2$.

Πρόταση 21

Έστω Α, Β, Γ ευθύγραμμα σχήματα με Α≈Γ και Β≈Γ, τότε: Α≈Β.



Απόδειξη

Αφού Α≈Γ, τα Α, Γ είναι ισογώνια σχήματα και έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (Ορισμός 6.1)

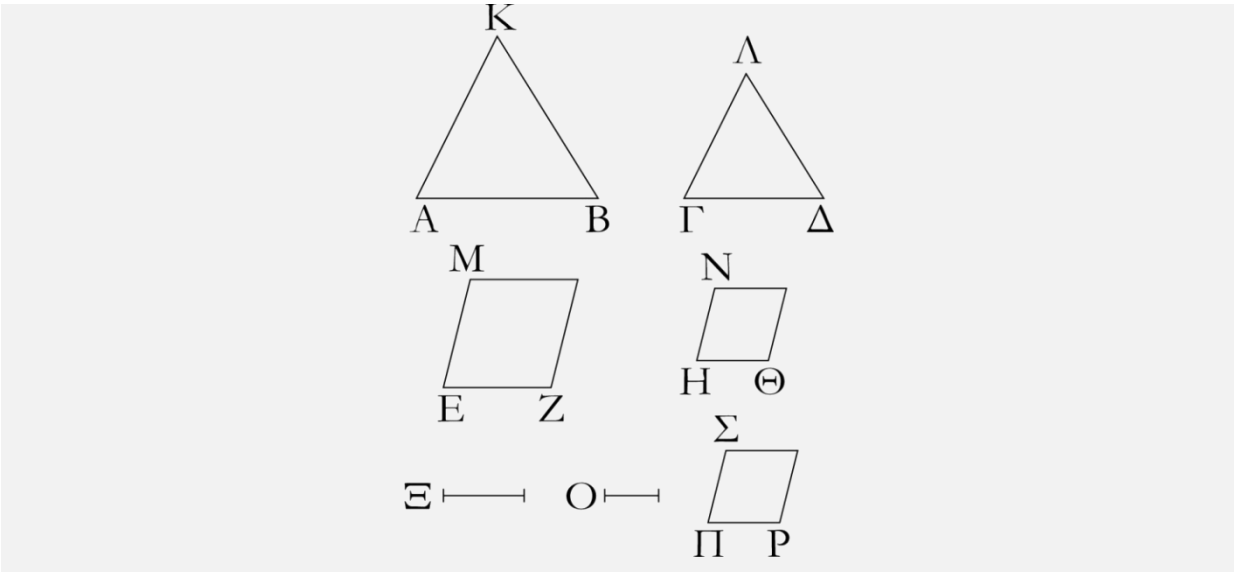
Επίσης αφού Β≈Γ, τα Β, Γ είναι ισογώνια σχήματα και έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (Ορισμός 6.1). Άμεσα λοιπόν προκύπτει πως και τα Α, Β είναι ισογώνια και έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες. Άρα Α≈Β από Ορισμό 6.1.

Πρόταση 22

Έστω ΑΒ=α, ΓΔ=β, ΕΖ=γ, ΗΘ=δ τέσσερις ευθείες με α/β=γ/δ.

Επίσης: $Τ_1$=ΚΑΒ, $Τ_2$=ΓΔΛ, $Π_1$=ΕΖΜ, $Π_2$=ΗΘΝ. Τότε ισχύει: $Τ_1/Τ_2 = Π_1/Π_2$.

Και αντίστροφα, αν $Τ_1/Τ_2=Π_1/Π_2$, τότε: α/β =γ/δ.



Απόδειξη

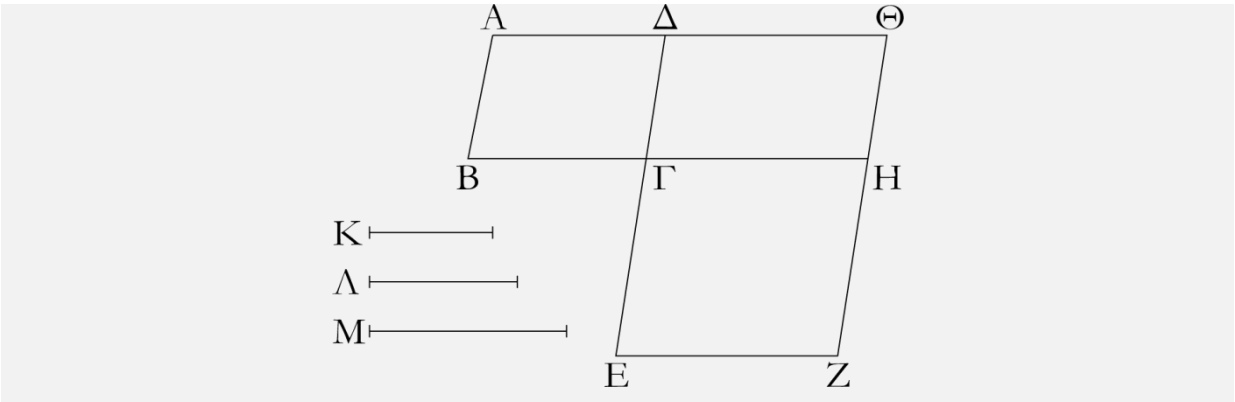
(Ευθύ) Έστω Ξ=ξ η τρίτη ανάλογος των ΑΒ, ΓΔ, δηλαδή: α/β=β/ξ και Ο=ο η τρίτη ανάλογος των ΕΖ, ΗΘ, δηλαδή: γ/δ=δ/ο (Πρόταση 6.11). Οπότε από Πρόταση 5.11, δι' ίσου, έχουμε: α/ξ = γ/ο. Από το πόρισμα όμως της Πρόταση 6.19 έχω: α/ξ = $Τ_1/Τ_2$ και γ/ο = $Π_1/Π_2$,άρα $Τ_1/Τ_2=Π_1/Π_2$.

(Αντίστροφο) Υποθέτω πως δεν ισχύει α/β=γ/δ. Τότε υπάρχει άλλη ευθεία κ≠δ: α/β=γ/κ (Πρόταση 6.12) και κατασκευάζω σε αυτήν ένα τετράπλευρο $Π_3$, με $Π_3≈Π_I$ και $Π_3≈Π_2$ και όμοια κείμενο με αυτά (Πρόταση 6.18, Πρόταση 6.21).

Επειδή α/β=γ/κ ισχύει από τα προηγούμενα πως $Τ_1/Τ_2=Π_1/Π_3$ με $Π_1≈Π_3$ και όμοια κείμενο.Όμως από την υπόθεση έχω και: $Τ_1/Τ_2=Π_1/Π_2$ με $Π_1≈Π_2$ και όμοια κείμενο, οπότε προκύπτει: $Π_1/Π_3=Π_1/Π_2$ (Πρόταση 5..11) και στη συνέχεια: $Π_3=Π_2$ (Πρόταση 5.9) και $Π_3≈Π_2$. Και επομένως κ=δ και ισχύει α/β=γ/δ.

Πρόταση 23

Αν Π και Π΄ είναι ισογώνια παραλληλόγραμμα, με πλευρές α, β και α΄, β΄, αντίστοιχα, τότε Π/Π΄είναι ίσος με τον συγκείμενο λόγο των α/α΄ και β/β΄.



Απόδειξη

Θέτουμε Π, Π΄ με κοινό σημείο το Γ, ώστε α, α΄ κείνται επ΄ ευθείας. Τότε β.β΄ κείνται επισης επ΄ ευθείας, εφ΄ όσον είναι ισογώνια.

Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο Ρ με πλευρές α΄, β.

Από την 6.12, κατασκευάζεται ευθεία γ, ώστε β/β΄=α΄/γ.

Τότε ο λόγος α/γ είναι ο συγκείμενος λόγος των α/α΄ και β/β΄.

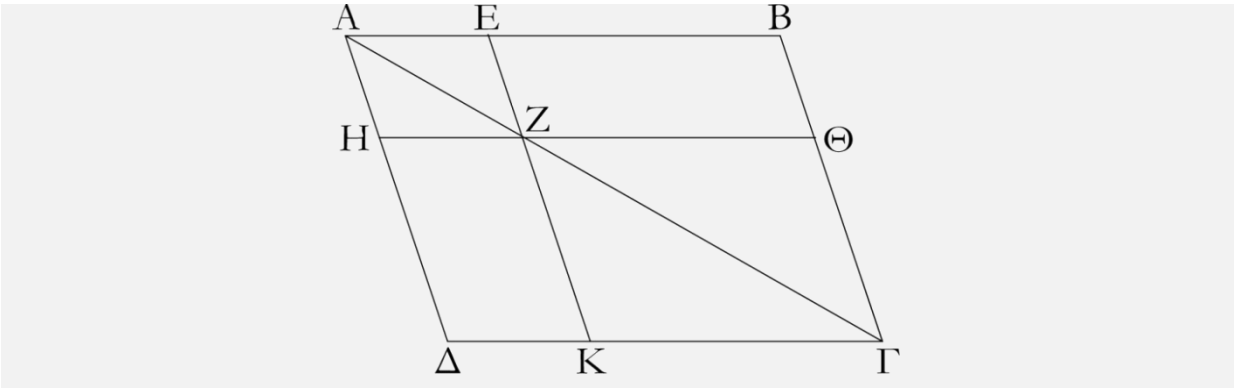
Από την 6.1, α/α΄=Π/Ρ.

Από την 6.1, α΄/γ=β/β΄=Ρ/Π΄.

Από την δι΄ ίσου 5.22, Π/Π΄=α/γ.

Πρόταση 24

Έστω παραλληλόγραμμο Π=ΑΒΓΔ και $Π_1$=ΑΕΖΗ, $Π_2$=ΖΘΓΚ τα παραλληλόγραμμα περί τη διάμετρό του ΑΓ, τότε: $Π_1 \approx Π$, $Π_2 \approx Π$ και $Π_1 \approx Π_2$.



Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή ΒΓ//ΕΖ ισχύει: ΒΕ/ΕΑ=ΓΖ/ΖΑ (Πρόταση 6.2)

Επίσης στο τρίγωνο ΑΓΔ επειδή ΓΔ//ΖΗ ισχύει: ΓΖ/ΖΑ=ΔΗ/ΗΑ (Πρόταση 6.2).

Άρα: ΒΕ/ΕΑ=ΔΗ/ΗΑ (Πρόταση 5.11) και (ΒΕ+ΕΑ)/ΕΑ=(ΔΗ+ΗΑ)/ΗΑ (Πρόταση 5.18), δηλαδή: **ΒΑ/ΕΑ=ΔΑ/ΗΑ**

και εναλλάξ: ΒΑ/ΔΑ=ΕΑ/ΗΑ (Πρόταση 5.16).

Τα Π, $Π_1$ λοιπόν έχουν τις πλευρές που περιέχουν την κοινή τους γωνία ανάλογες.

Επίσης, επειδή ΗΖ//ΓΔ ισχύει: ∠ΑΖΗ=∠ΔΓΑ (Πρόταση 1.29) και

αφού ∠ΔΑΓ είναι κοινή στα τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΔΓ προκύπτει πως

τα τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΔΓ είναι **ισογώνια.**

Για τους ίδιους λόγους

τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΑΖΕ είναι επίσης **ισογώνια**

(Πρόταση 1.32).

Άρα είναι **ισογώνια** και τα Π,$Π_1$.

Από εφαρμογή της Πρότασης 6.4 έχουμε:

ΑΔ/ΔΓ=ΑΗ/ΗΖ, ΔΓ/ΓΑ=ΗΖ/ΖΑ (Ι),

ΑΓ/ΓΒ=ΑΖ/ΖΕ (ΙΙ),

ΓΒ/ΒΑ=ΖΕ/ΕΑ

και μέσω της Πρότασης 5.22 από (Ι) και (ΙΙ) καταλήγουμε:

ΔΓ/ΓΑ=ΗΖ/ΖΑ

και αφού ΑΓ/ΓΒ=ΑΖ/ΖΕ δι' ίσου (Πρόταση 5.22) έχουμε:

ΔΓ/ΓΒ=ΗΖ/ΖΕ.

Τα Π,$Π_1$ λοιπόν έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους ανάλογες,

άρα Π≈$Π_1$ (Ορισμός 6.1).

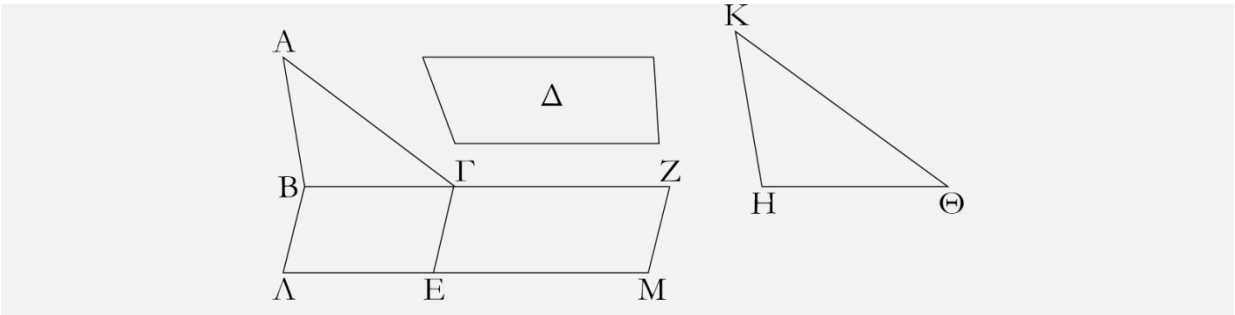
Για τους ίδιους λόγους Π≈$Π_2$.

Επίσης $Π_1$≈$Π_2$ (Πρόταση 6.21).

Πρόταση 25

Δοθέντων ευθυγράμμου χωρίου Μ και λόγου κ/λ, να κατασκευαστεί ορθογώνιο με πλευρές χ,ψ, ώστε χ.ψ = Μ και χ/ψ=κ/λ.

(Αποτελεί γενίκευση του 2.14,αν κ=λ)



Απόδειξη

Από την Ι.45, κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π, με πλευρές α, β, ώστε Π=Σ.

Από την Ι.44, κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ, με πλευρές α και γ.

Από την 6.13, κατασκευάζεται η μέση ανάλογος μ των α, γ, δηλαδή α/μ=μ/γ.

Από την 6.18, κατασκευάζεται επί της μ τρίγωνο **Τ, όμοιο προς το Σ.**

Από την 6.19, $Σ/Τ=(α/μ)^2=α/γ$.

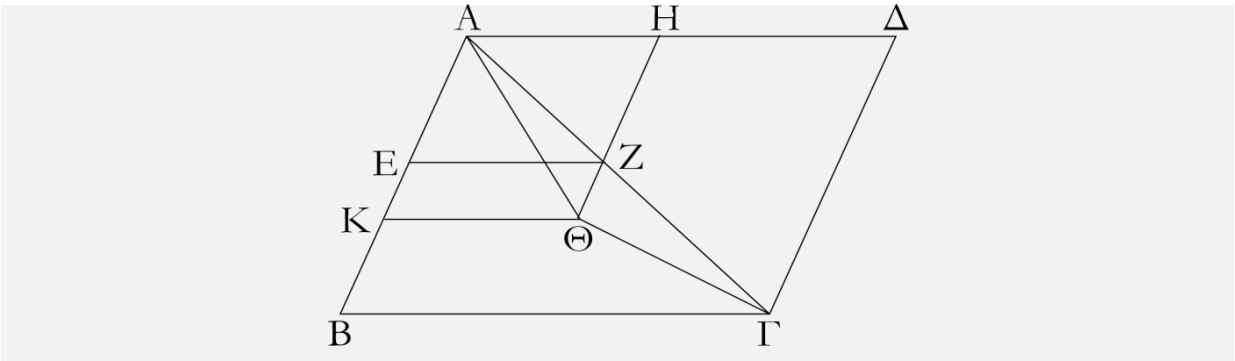
Από την 6.1, Π/Ρ=α/γ.

Αρα Σ/Τ=Π/Ρ.

Εφόσον Π=Σ, έπεται από την Πρόταση 5.8, ότι **Τ=Ρ=Δ.**

Πρόταση 26

Αν Π=ΑΒΓΔ, $Π_1$=ΑΕΖΗ, παραλληλόγραμμα με $Π_1$≈Π και όμοια κείμενα με κοινή γωνία φ=ΒΑΔ, ώστε Π-$Π_1$, τότε $Π_1$ είναι γύρω από την ίδια διάμετρο με το Π.



Απόδειξη

Υποθέτω πως το $Π_1$ δεν είναι γύρω από την ίδια διάμετρο με το Π και έστω ΑΘΓ η διάμετρος για το Π.Προεκτείνουμε την ΗΖ ώσπου να συναντήσει την ΑΘΓ στο Θ (και είναι βέβαιο αφού ΚΘ//ΑΔ//ΒΓ) (Πρόταση 1.31). Οπότε σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΚΗ=$Π_2$.

Αφού ΑΒΓΔ και ΚΗ είναι γύρω από την ίδια διάμετρο θα ισχύει: ΔΑ/ΑΒ=ΗΑ/ΑΚ (Ι) (Πρόταση 6.24).

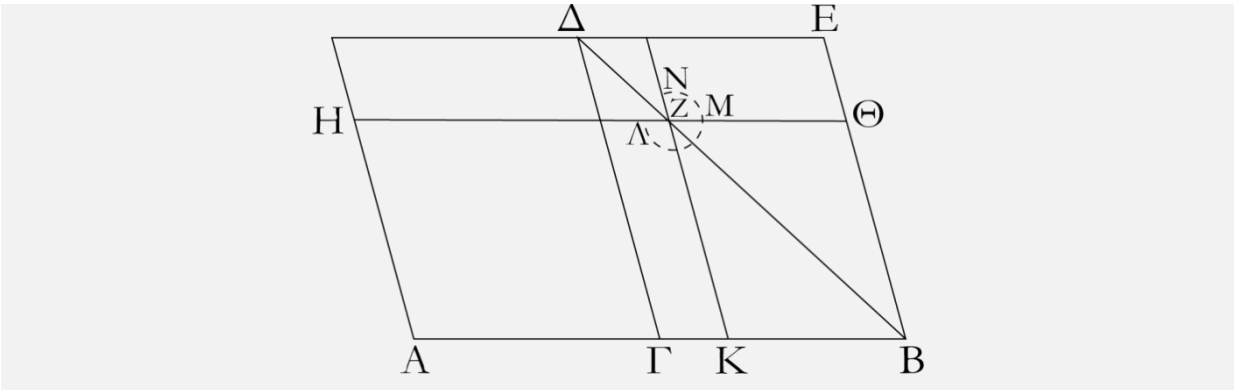
Ακόμη αφού Π≈$Π_1$ έχουμε: ΔΑ/ΑΒ=ΗΑ/ΑΕ (ΙΙ).

Από (Ι), (ΙΙ) προκύπτει: ΗΑ/ΑΚ=ΗΑ/ΑΕ κι επομένως: ΑΚ=ΑΕ (Πρόταση 5.9) πράγμα αδύνατον.

Άρα τα Π, $Π_1$ είναι γύρω από την ίδια διάμετρο.

Πρόταση 27

Από όλα τα παραλληλόγραμμα που εφαρμόζονται στην ίδια ευθεία και από τα οποία λείπουν παραλληλογράμμα όμοια και ομοίως κείμενα προς το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη μισή ευθεία, το μεγαλύτερο είναι το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη μισή ευθεία, το οποίο είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο που λείπει.



Απόδειξη

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ=α και το μέσο της Γ, οπότε ΑΓ=ΓΒ =α/2 (Πρόταση 1.10). Γράφουμε το παραλληλόγραμμο ΑΔ με πλευρές ΑΓ=α/2, ΓΔ=β από το οποίο λείπει το παραλληλόγραμμο ΒΔ με πλευρές ΓΒ=α/2, ΓΔ=β για να συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο με πλευρές ΑΒ=α, ΒΕ=β. Θεωρούμε πάνω στην ευθεία ΑΒ το παραλληλόγραμμο ΑΖ, με τυχαίες πλευρές ΑΚ=κ, ΚΖ=λ, από το οποίο λείπει το παραλληλόγραμμο ΖΒ, με πλευρές: α-κ, λ, όμοιο και όμοια κείμενο προς το ΔΒ.

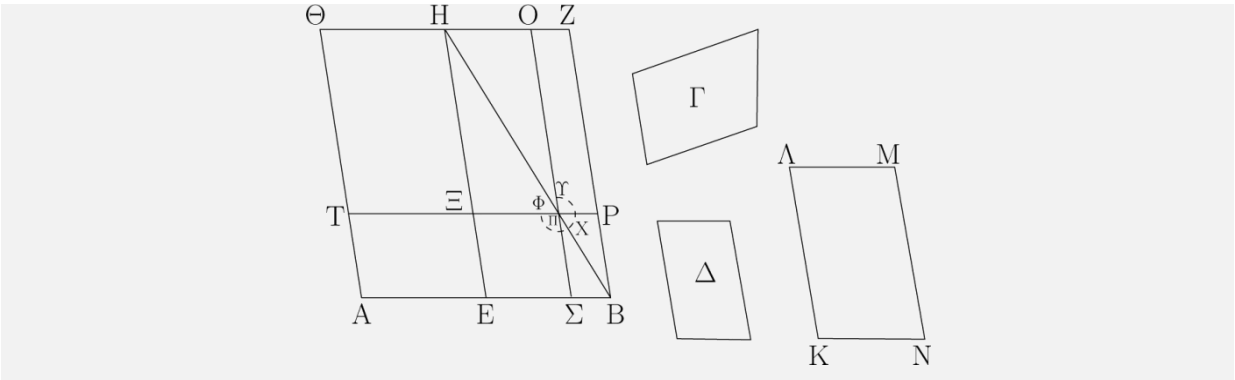
Επειδή ισχύει: (κ-1/2.α).λ=(α-κ).(β-λ) (Πρόταση 1.43) με πρόσθεση κατά μέλη του κοινού παραλληλογράμμου ΖΒ=(α-κ).λ έχουμε: (κ-1/2.α).λ+(α-κ).λ= (α-κ).(β-λ)+(α-κ).λ και μετά από τις πράξεις: ½.α.λ=(α-κ).β δηλαδή: ΓΘ=ΚΕ. Όμως: ΓΘ=ΓΗ (Πρόταση 6.1, αφού ΑΓ=ΓΒ=1/2.α), οπότε: ΓΗ=ΚΕ και ΓΗ+ΓΖ=ΚΕ+ΓΖ ΑΖ=ΛΜΝ (ο γνώμονας).

½.α= (α-κ).β+ ½.α.λ. Καταλήγουμε λοιπόν:

Το παραλληλόγραμμο ΔΒ είναι μεγαλύτερο από το γνώμονα ΛΜΝ, οπότε και το ίσο του ΑΔ είναι μεγαλύτερο από το ΑΖ.

Πρόταση 28

Να εφαρμοστεί σε δοσμένη ευθεία γραμμή ένα παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρέσουμε παραλληλόγραμμο όμοιο και όμοια τοποθετημένο με δοσμένο παραλληλόγραμμο, αυτό που απομένει είναι ένα παραλληλόγραμμο ίσο προς ένα δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα.



Απόδειξη

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ=α, ένα ευθύγραμμο σχήμα Σ κι ένα παραλληλόγραμμο Π. Επίσης το μέσο Ε της ΑΒ (Πρόταση 1.10), το παραλληλόγραμμο ΕΒΖΗ όμοιο και όμοια κείμενο προς το Π και το παραλληλόγραμμο ΑΕΗΘ.

Το Σ δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το ΑΕΗΘ.

Αν Σ=ΑΕΗΘ, τότε: ΑΒΖΘ=Σ+ΕΒΖΗ και έχουμε ακριβώς αυτό που ζητάμε, αφού: ΕΒΖΗ≈Π.

Αν ΑΕΗΘ>Σ τότε και ΕΒΖΗ>Σ, αφού ΑΕΗΘ=ΕΒΖΗ (Πρόταση 6.1).

Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ όμοιο και όμοια κείμενο με το Π, δηλαδή ΚΛΜΝ≈Π και ΚΛΜΝ=ΕΒΖΗ-Σ (Πρόταση 6.25). Όμως ΗΕΒΖ≈Π και ΚΛΜΝ≈Π, άρα ΚΛΜΝ≈ΗΕΒΖ (Πρόταση 6.21). Έχουμε λοιπόν: ΚΛ/ΗΕ=ΛΜ/ΗΖ και επειδή ΕΒΖΗ=Σ+ΚΛΜΝ (Ι) συνεπάγεται πως ΕΒΖΗ>ΚΛΜΝ άρα ΚΛ<ΗΕ και ΛΜ<ΗΖ.

Στην ΕΗ κατασκευάζω ΗΞ=ΚΛ και στην ΗΖ κατασκευάζω ΗΟ=ΛΜ (Πρόταση 1.3), οπότε κατασκευάζεται έτσι το παραλληλόγραμμο ΞΗΟΠ, με ΞΗΟΠ=ΚΛΜΝ, ΞΗΟΠ≈ΚΛΜΝ καθώς και ΞΗΟΠ≈ΗΕΒΖ (Πρόταση 6.21). Αλλά ΞΗΟΠ και ΗΕΒΖ είναι γύρω από την ίδια διάμετρο (Πρόταση 6.26). Έστω ΗΠΒ η κοινή τους διάμετρος κι ολοκληρώνεται το σχήμα του γνώμονα ΥΧΦ (φέρουμε ΡΤ//ΑΒ,ΟΣ//ΒΖ).

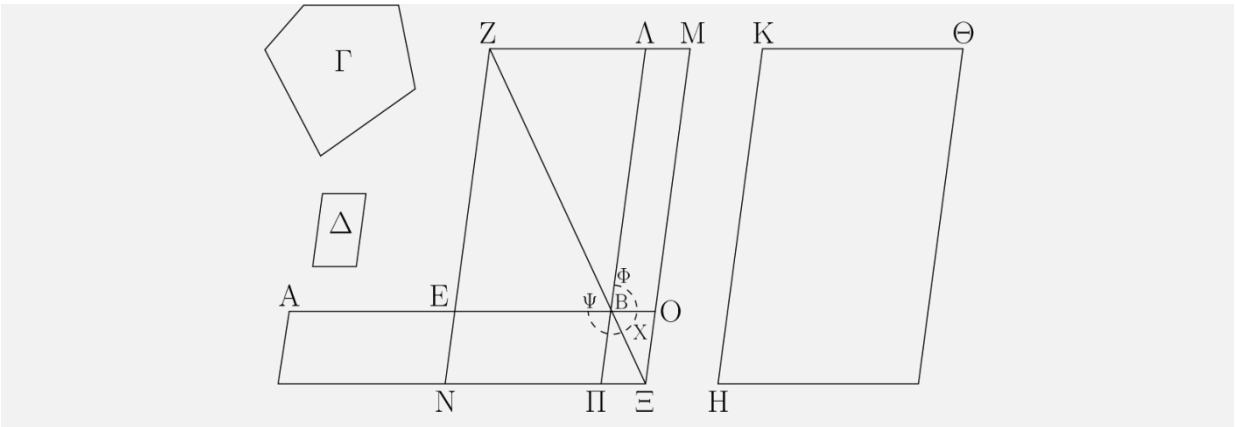
Από την (Ι) προκύπτει πως: ΥΧΦ=Σ. ΠΡΖΟ=ΕΣΠΞ (Πρόταση 1.43) (προσθέτω και στα δυο μέλη το κοινό ΠΡΒΣ): ΠΡΖΟ+ΠΡΒΣ=ΕΣΠΞ+ΠΡΒΣ, οπότε: ΣΒΖΟ=ΞΡΒΕ, όμως επειδή: ΞΡΒΕ=ΤΞΕΑ (Πρόταση 6.1, αφού ΑΕ=ΕΒ), ΑΣΠΤ=ΥΧΦ=Σ

Επομένως: ΑΒΡΤ=ΑΣΠΤ+ΣΒΡΠ=Σ+ΣΒΡΠ, με ΣΒΡΠ≈Π και όμοια κείμενο με το Π.

Πρόταση 29

Δοθέντων ευθείας γραμμής α, ευθυγράμμου χωρίου Μ, και λόγου μεγεθών κ/λ, να κατασκευαστούν ευθείες χ, ψ ώστε

Μ=ψ(α+χ), χ/ψ=κ/λ.



Απόδειξη

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ=α, ένα δοσμένο πολύγωνο Γ κι ένα δοσμένο παραλληλόγραμμο Δ. Έστω Ε το μέσον της ΑΒ (Πρόταση 1.10). Γράφουμε πάνω στο ΕΒ παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ, όμοιο και όμοια κείμενο προς το Δ (Πρόταση 6.25). Κατασκευάζουμε δε παραλληλόγραμμο ΗΙΘΚ, με ΗΙΘΚ=Γ+ΕΒΛΖ (Ι), όμοιο και όμοια κείμενο με το Δ πάντα σύμφωνα με την Πρόταση 6.25. Οπότε ΗΙΘΚ≈ΕΒΛΖ.

ΚΘ/ΖΛ=ΚΗ/ΖΕ

Όμως επειδή ΗΙΘΚ>ΕΒΖΛ θα είναι και ΚΘ>ΖΛ, ΚΗ>ΖΕ. Προεκτείνουμε τις ΖΛ, ΖΕ σε ΖΜ=ΚΘ, ΖΝ=ΚΗ αντίστοιχα (Πρόταση 1.3) και δημιουργείται το παραλληλόγραμμο ΖΝΞΜ=ΗΙΘΚ (ΙΙ) και ΖΝΞΜ≈ΗΙΘΚ, οπότε και ΖΝΞΜ≈ΕΒΛΖ (Πρόταση 6.21) και άρα γύρω από την ίδια διαγώνιο ΖΞ (Πρόταση 6.26).

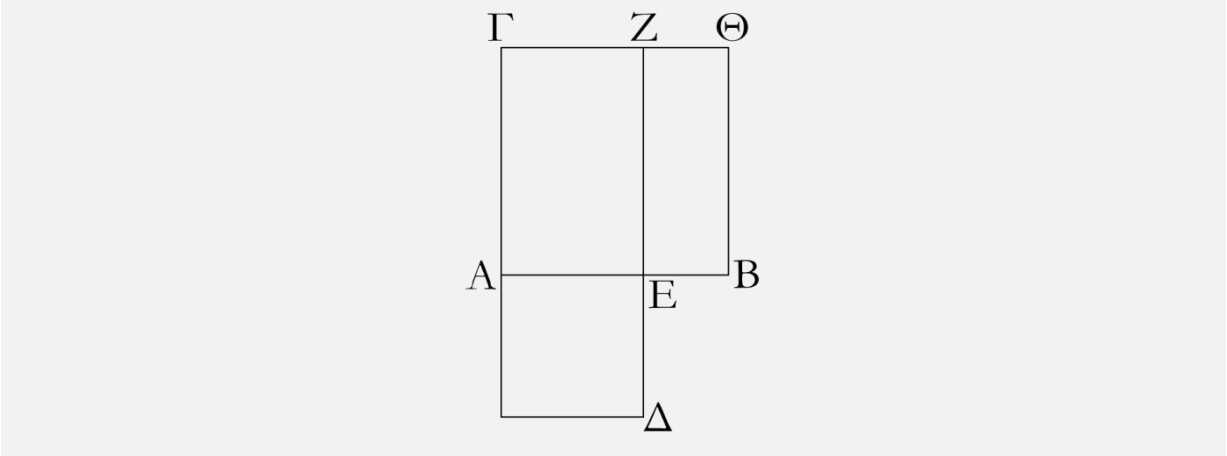
Από (Ι),(ΙΙ) έχουμε: ΖΝΞΜ=Γ+ΕΒΛΖ και ΖΝΞΜ-ΕΒΛΖ=Γ, οπότε ο γνώμονας ΦΧΨ = Γ.

Επειδή ΑΕ=ΕΒ ισχύει ΑΝ=ΝΒ (Πρόταση 6.1) και επίσης: ΝΒ=ΛΟ (Πρόταση 1.43)

ΝΒ+ΕΞ=ΛΟ+ΕΞ, άρα ΑΞ=ΦΧΨ,όμως επειδή: ΦΧΨ=Γ, θα έχουμε και ΑΞ=Γ.

Πρόταση 30

Έστω ΑΒ=α να βρεθεί σημείο Ε και ΑΕ=β , ώστε α/β=β/α-β.



Απόδειξη

Έστω τμήματα α,β, με α>β, τετράγωνα T1=α_2, T2=β_2 και ορθογώνιο Π=α.β ,ώστε Π+T_2=T_1, δηλαδή α.β+β_2=α_2. Αφαιρώ το ορθογώνιο Π=α.β και από τα δυο μέλη, οπότε

β_2=α_2-α.β

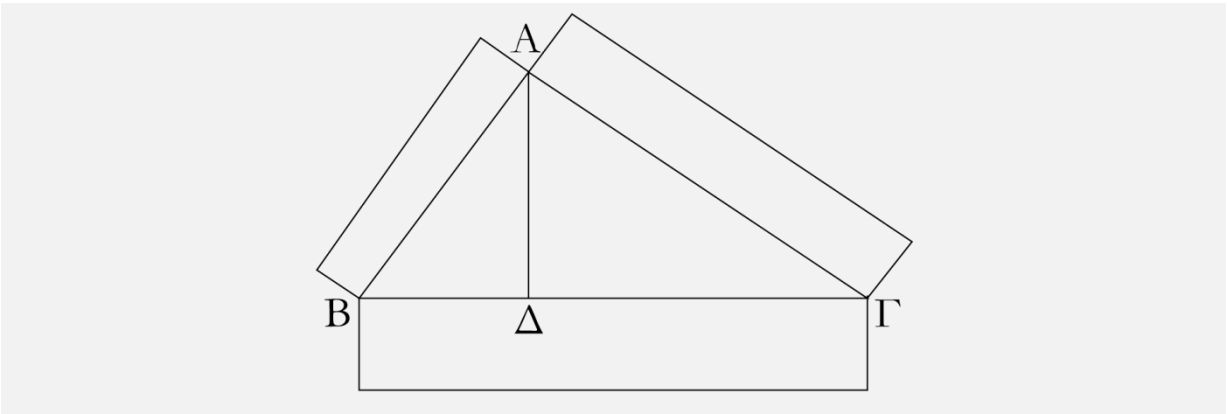
β_2=α(α-β)

α/β=β/α-β.

Πρόταση 31

Δοθέντος ορθογωνίου τριγώνου και λόγου μεγεθών κ/λ, να κατασκευαστούν ευθείες α, β, γ ώστε α/α_1=β/β_1=γ/γ_1=κ/λ και β.β_1 + γ.γ_1= α.α_1.

(Αν κ=λ, τότε έχουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα).



Απόδειξη

Έστω τα ορθογώνια Π1=α.α_1, Π2=β.β_1, Π3=γ.γ_1 όμοια μεταξύ τους και όμοια κείμενα .

Φέρνω το ύψος ΑΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ,οπότε από την ομοιότητα των τριγώνων που σχηματίζονται και μέσω της Πρότασης 6.8 : α/γ=γ/ΒΔ
Π1/Π3=α/ΒΔ (Πόρισμα Πρότασης 6.19), όμοια: Π1/Π2=α/ΓΔ
Π3/Π1=ΒΔ/α και Π2/Π1=ΓΔ/α (Πόρισμα Πρότασης 5.7)
Π3+Π2/Π1 = ΒΔ+ΓΔ/α = α/α = 1.
Τελικά Π2+Π3 = Π1.

[Σημείωση: Η Πρόταση 6.31 είναι μια επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, που ο Πρόκλος την αποδίδει στον Ευκλείδη.]

Σχηματική λογική δομή του βιβλίου VI

Η Πρόταση 6.1, οι άμεσες συνέπειές της (6.2α,3α,4,6-13,14α,15α,16α,17α,18)
[και οι αντίστροφες 6.2β, 3β, 5 (της 4),14β,15β,16β,17β]

	1																																				
	1	2α		3α																																	
5.9	1	2α	2β																																		
5.9	1			3α	3β																																
		2α				4																															
5.9						4	5																														
						4		6																													
						4			7																												
						4				8					13																						
		2α									9																										
		2α										10																									
		2α											11																								
		2α												12																							
	1															14α				16α		17α															
5.9	1															14α	14β																				
	1																	15α																			
5.9	1																	15α	15β																		
5.9	1																				16β																
5.9	1																						17β														
						4																		18													

Με στοιχεία όπως **14β** σημαίνει ότι οι Προτάσεις χρησιμοποιούν την αρχή Ευδόξου.Στην περίπτωση των Προτάσεων 6.1-18 σημαίνει ότι η Πρόταση χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.9.
Π.χ. Η Πρόταση 6.3 έχει δύο σκέλη, την ευθεία 6.3α και την αντίστροφη 6.3β.

Οι Πρότασεις 6.2β, 6.3β χρησιμοποιούν την 5.9, η οποία χρησιμοποιεί την αρχή του Ευδόξου.
Η Πρόταση 6.4 χρησιμοποιεί την Πρόταση (εναλλάξ) 5.16 και την Πρόταση (δι' ίσου) 5.22.
Όμως ο de Morgan είχε παρατηρήσει (πρβλ. Heath, v.2, p. 202) ότι η 6.4 αποδεικνύεται άμεσα από την (ευθεία) Πρόταση 6.2, η οποία **δεν** χρησιμοποιεί την αρχή Ευδόξου.
Η Πρόταση 6.5 χρησιμοποιεί την 5.9.
Η Πρόταση 6.14β χρησιμοποιεί την 5.9.
Η Πρόταση 6.15β χρησιμοποιεί την 5.9.
Η Πρόταση 6.16β χρησιμοποιεί την 6.14β.

Η Πρόταση 6.17 χρησιμοποιεί την 6.16 ως εξής:
Η 6.17α χρησιμοποιεί την 6.16 α και η 6.17β χρησιμοποιεί την 6.16β.

Οι Προτάσεις 6.19-24, 26

5.16	1										11				15				19												
	1			4		6													19	20											
																					21										
											11	12						18	19			22									
5.22	1											12											23								
		2α																						24							
5.9																								24	26						

Η Πρόταση 6.19 χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.16 (εναλλάξ).
Οι Προτάσεις 6.20, 6.22 χρησιμοποιούν την Πρόταση 6.19. Η Πρόταση 6.20 χρησιμοποιεί και την 5.22 (δι' ίσου).
Η Πρόταση 6.23 χρησιμοποιεί την 5.22.
Η Πρόταση 6.24 αποδεικνύεται στα Στοιχεία με τη χρήση της Πρότασης 5.16 (εναλλάξ) καθώς και της Πρότασης. 522 (δι' ίσου).
Όμως, όπως παρατηρούν οι Simson-Heath (Heath, *Elements*, vol.2, σελ. 252-253), η 6.24 μπορεί ν' αποδειχθεί με τη χρήση μόνο της 6.2 (ευθεία)
Η Πρόταση 6.26 χρησιμοποιεί την 6.24, αλλά και την Πρόταση 5.9.

Παραβολή χωρίων (6.25, 27-31)

5.16	1												13					18	19						25						
																										26	27				
																		18			21				25	26		28			
																					21			24	25	26			29		
														14α															29	30	
										8									19												31

Για το σχήμα χρησιμοποιούμε τις αποδείξεις ακριβώς όπως εμφανίζονται στα *Στοιχεία*.
Η Πρόταση 6.25 χρησιμοποιεί την Πρόταση 5.16 (εναλλάξ) και την Πρόταση 6.19
Η Πρόταση 6.27 χρησιμοποιεί την Πρόταση 6.26
Η Πρόταση 6.28 χρησιμοποιεί τις Προτάσεις 6.25 και 6.26
Η Πρόταση 6.29 χρησιμοποιεί τις Προτάσεις 6.24, 6.25, 6.26
Η Πρόταση 6.30 χρησιμοποιεί τις Προτάσεις 6.29 και 6.14α (η οποία χρησιμοποιεί την 6.1)
Η Πρόταση 6.31 χρησιμοποιεί την Πρόταση 6.19 και την Πρόταση 6.8
Οι Προτάσεις 6.25-6.31 (πλην της 6.26) επιδέχονται απλών αποδείξεων, διαφορετικών εκείνων που υπάρχουν στα *Στοιχεία*.
Αυτό αποδεικνύεται από τον Σ. Νεγρεπόντη, και δεν συμπεριλαμβάνεται στην παρούσα διπλωματική εργασία.
Οι Προτάσεις στα *Στοιχεία* δείχνουν αντίθετα βαρειά εξάρτηση από την αρχή του Ευδόξου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Thomas L. Heath, “EUCLID The thirteen books of the elements”, Vol.1-2, Second Edition Unabridged.
2. Richard Fitzpatrick, “Euclid’s Elements of Geometry”.
3. Σ. Νεγρεπόντης, Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος: «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά-Στοιχεία του Ευκλείδη».