ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

QUATERNIONS (Τετράνια)

- **Ιστορική αναδρομή**
- **Αλγεβρική και Γεωμετρική διαπραγμάτευση με διδακτικές προεκτάσεις**

Καζάκου Ελένη
Α.Μ. Δ201420

_Ireland_10_Euro_Sir_William_Hamilton_

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Διονύσιος Λάππας **Αναπληρωτής Καθηγητής**

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΪΟΣ 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 11η Μαΐου 2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Δ. Λάππα (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Δ. Λάππα (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ε. Ράπτη	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Διονύσιο Λάππα, γιατί με τίμησε με την εμπιστοσύνη του. Η βοήθεια και η υποστήριξή του ήταν σημαντική και καθοριστική. Η συγκεκριμένη εργασία ολοκληρώθηκε μέσα σε ήρεμο και συνεργατικό κλίμα υπό την πλήρη και σαφή καθοδήγησή του.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ. Ράπτη Ευάγγελο και κ. Σπύρου Παναγιώτη, οι οποίοι δέχτηκαν να συμμετάσχουν στη Συμβουλευτική Επιτροπή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα τέλη του 18ου αι. έως και τις αρχές του 19ου αι. οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν «νομιμοποιηθεί» στη μαθηματική κοινότητα ως μια καλά και πλήρως ορισμένη αλγεβρική δομή αποτελώντας ταυτόχρονα την Αλγεβρική ερμηνεία της Γεωμετρίας του επιπέδου. Την ίδια εποχή ξεκινάει μια προσπάθεια επέκτασης του πρώιμου διανυσματικού λογισμού από το επίπεδο στον τρισδιάστατο χώρο και η αναζήτηση της αντίστοιχης Αλγεβρικής δομής που θα περιέγραφε τη Γεωμετρία του χώρου αυτού. Το σύνολο των **Quaternions (Τετρανίων)** είναι το αποτέλεσμα αυτής της αναζήτησης. Ανακαλύφθηκαν από τον Ιρλανδό μαθηματικό Rowan William Hamilton το 1843. Κάθε Τετράνιο ορίστηκε τελικά όχι από μια τριάδα, όπως διαισθητικά θα ήταν αναμενόμενο, αλλά από μια τετράδα (α,β,γ,δ) με **quaternion q=α+β*i*+γ*j*+δ*k*** όπου *i*,*j*,*k* τα μοναδιαία ορθογώνια διανύσματα και πράξεις αναλογικές των μιγαδικών. Στην παρούσα Διπλωματική:

- Παρουσιάζονται αναλυτικά οι πρώτες προσπάθειες επέκτασης στον χώρο και ο τρόπος που αυτές επηρέασαν την ανακάλυψη των Τετρανίων με κυρίαρχη αυτή του Wessel
- Παρουσιάζεται σταδιακά η εξέλιξη των προσπαθειών του Hamilton, τα μαθηματικά εμπόδια που προέκυψαν και ο τρόπος που αυτά ξεπεράστηκαν, ώστε να οδηγηθεί στην ανακάλυψη των Τετρανίων όπως αυτά προκύπτουν μέσα από τη μελέτη των πρωτότυπων κειμένων
- Αναλύεται το πλαίσιο θεμελίωσης της Επιστήμης της Άλγεβρας μέσα στο οποίο αναπτύχθηκε ο Λογισμός των Τετρανίων
- Αναπτύσσεται η Άλγεβρα των Quaternions ως ένα Στρεβλό Σώμα και μελετώνται οι συνέπειες της μη αντιμεταθετικότητας στον πολλαπλασιασμό
- Απαντάμε στο ερώτημα, αν υπάρχουν παρόμοιες Αλγεβρικές Δομές όπως αυτή των Τετρανίων και αναλύουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές συνδέονται με τα γνωστά Σώματα των Πραγματικών και Μιγαδικών αριθμών
- Περιγράφουμε τη Γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου στο Αλγεβρικό πλαίσιο των Quaternions μέσω των περιστροφών και της Ομάδας SU(2)
- Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο το γινόμενο Τετρανίων οδήγησε στις θεμελιώδεις έννοιες Εσωτερικό και Εξωτερικό Γινόμενο και τον ρόλο τους στη θεμελίωση και εξέλιξη του σύγχρονου Διανυσματικού λογισμού (Gibbs-Heaviside)
- Συνδέουμε τα Τετράνια με τις Φυσικές επιστήμες

<u>Λέξεις-Κλειδιά</u>: Hamilton, Νόρμα ή Moduli, Βαθμωτό μέρος, Διανυσματικό μέρος, Quaternion ή τετράνιο, Αντιμεταθετικότητα, Διαιρετική άλγεβρα, Περιστροφές, Ανάδελτα, Εσωτερικό γινόμενο, Εξωτερικό γινόμενο

ABSTRACT

At the end of the 18th c. until the beginning of the 19th c. the complex numbers were “legalized” in the field of the mathematical community as a perfect and fully specific algebraic structure, constituting at the same time the algebraic interpretation of plane Geometry. It was during the same period that the attempt of extending the early Vector Calculus fron its 3-dimensional aspect began, together with the quest of the corresponding algebraic structure that would certainly describe the Geometry of that field. The Quaternions are the result of that quest – discovered by the Irish mathematician Rowan William Hamilton in 1843. Each quaternion was finally defined by quadruples (α,β,γ,δ) - and not by triplets triads, as it would have been expected - with **quaternion** $\mathbf{q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k}$, where *i*,*j*,*k* are the unit rectangular vectors. In this thesis:

- We present the first attempts of space extension as well as the way that these influenced the discovery of the Quaternions
- We present the gradual evolution of Hamilton´s attempts along with the mathematical obstacles that emerged, as well as the way they were surpassed so that we were led to the Quaternions, through the study of the original texts
- We analyse the framework of the foundation of the science of Algebra in which the calculus of Quaternions evolved
- The Algebras of the Quaternions is developed as skew field along with the consequences of the commutative property in multiplication
- We give the answer to the question whether there are similar algebraic structures such as the one of the Quaternions.We also analyse the way that they are connected to the real and complex numbers
- We describe the 3-dimensional geometry within the algebraic frame of Quaternions through the rotation group SU(2)
- We explain the way through which the product of the Quaternions led to the fundamental notions of the dot and cross product as well as their role in the foundation and evolution of the contemporary Vector Calculus (Gibbs-Heaviside)
- We associate the Quaternions with the Natural Sciences

Key Words: Hamilton, Norm or Moduli, Scalar part, Vector part, Quaternion, Commutative property, Devision Algebra, Rotations,Del, Dot product, Cross product

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος 8

1. Αλγεβρική Δομή των Quaternions - Ιστορικές αναφορές

1.1. Οι πρώτες προσπάθειες επέκτασης στο χώρο – Caspar Wessel 9

1.2. Από τους Μιγαδικούς ως την ανακάλυψη των Quaternions - W. R. Hamilton 21

1.3. Η ανακάλυψη των Quaternions μέσα από τις απαιτήσεις του πολλαπλασιασμού

1.3.1. Η θεωρία των triplets 25

1.3.2. Η ανακάλυψη των Quaternions 34

1.3.3. "*Η εγκατάλειψη της αντιμεταθετικής ιδιότητας*": μια ριζοσπαστική ιδέα 41

1.4. Η Άλγεβρα των Quaternions

1.4.1. Το σύνολο των Quaternions: Διαιρετικός Δακτύλιος 44

1.4.2. Αναπαράσταση των Quaternions με Πίνακες 51

1.4.3. Ερώτημα: *«υπάρχουν άλλες τέτοιες δομές;»* 55

1.4.4. Τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ και $\mathbb{O}$: το βασικό Θεώρημα 60

2. Γεωμετρική παράσταση - η γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου

2.1. Από το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο στα τετράνια

2.1.1. Το Τετράνιο ως Γεωμετρικό Πηλίκο 62

2.1.2. Ακτινικά Πηλίκα 70

2.1.3. Ανακαλύπτοντας το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο στα τετράνια 81

2.2. Περιγραφή μετασχηματισμών στο χώρο μέσω των τετρανίων 88

3. Εφαρμογές των Τετρανίων στις φυσικές επιστήμες 104

Βιβλιογραφία 117

".....Άλλωστε στο μάθημα των Μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Πού και πού κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια, Θαλής, Πυθαγόρας, Πασκάλ, Ντεκάρτ, ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για το πότε ή το πού συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς προσγειωνόντουσαν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Εδώ και τα βουνά είχαν κάποια ιστορία, κάποια αρχή. Θα ΄λεγε κανείς ότι τα θεωρήματα ήταν διαχρονικότερα από τα βουνά και τα ποτάμια!"

Από το βιβλίο "ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΠΑΓΑΛΟΥ" του Denis Guedj,

σε μετάφραση Τεύκρου Μιχαηλίδη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην ιστορία των μαθηματικών από την αρχαιότητα έως σήμερα συναντάμε τη σταδιακή επέκταση της έννοιας των αριθμών ξεκινώντας από τους φυσικούς και τα κλάσματα, προχωρώντας στους αρνητικούς, τους άρρητους και τους μιγαδικούς, έως τους υπερβατικούς αριθμούς, όπως και τους μιγαδικούς ανώτερης τάξης συμπεριλαμβανομένων και των διανυσμάτων. Σε κάθε περίπτωση αυτό που απασχόλησε τη μαθηματική κοινότητα ήταν η διατήρηση των ιδιοτήτων της προϋπάρχουσας δομής στη δομή των "νέων" αριθμών. Ένα δεύτερο ζήτημα ήταν αυτό της φυσικής και γεωμετρικής ερμηνείας των νέων αριθμών, ώστε αυτοί να "νομιμοποιηθούν", δηλαδή να γίνουν αποδεκτοί από το σύνολο της μαθηματικής κοινότητας αλλά και άλλων επιστημονικών κοινοτήτων. Η ανάγκη αυτή έγινε πιο επιτακτική από τον $17^{ο}$ αι. και μετά λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης των φυσικών επιστημών. Έτσι οι μαθηματικές οντότητες, οι πράξεις και τα μαθηματικά γενικότερα έπρεπε να μπορούν να αντιπροσωπεύουν και να ερμηνεύουν τη φυσική πραγματικότητα. Σε αυτή την κατεύθυνση έπαιξε σημαντικό ρόλο ο σταδιακός διαχωρισμός των φυσικών μεγεθών σε μονόμετρα και διανυσματικά.

Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν έως και σήμερα ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των διανυσμάτων και των περιστροφών στο επίπεδο. Ο Ιρλανδός μαθηματικός William Rowan Hamilton έδωσε μια διαφορετική υπόσταση στους μιγαδικούς αριθμούς παριστάνοντάς τους για πρώτη φορά ως ζεύγη πραγματικών αριθμών. Βασικός του στόχος ήταν η στέρεη θεμελίωση της Επιστήμης της Άλγεβρας αντίστοιχη με αυτή της Γεωμετρίας. Πίστευε στην "a priori" φύση της γνώσης των μαθηματικών που στηριζόταν στη διαίσθηση και ταυτόχρονα υποστήριζε την εφαρμοσιμότητά τους στις φυσικές και εμπειρικές επιστήμες. Υπήρξαν αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες, ώστε να βρεθεί ένας τρόπος αλγεβρικής αναπαράστασης των σημείων του τρισδιάστατου χώρου και της γεωμετρίας του κατ΄ αντιστοιχία με τους μιγαδικούς, πριν ο Hamilton ανακαλύψει τα quaternions ή τετράνια το 1843. Οι νέοι αριθμοί ορίστηκαν με τη βοήθεια τετράδων αριθμών (α,β,γ,δ) και των ορθογώνιων μοναδιαίων διανυσμάτων του χώρου i, j, k ως το άθροισμα $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ και πράξεις αναλογικές με αυτές των μιγαδικών.

Η νέα τετρασδιάστατη - αντίστοιχη των μιγαδικών - αλγεβρική δομή "δικαιώθηκε" μέσω των περιστροφών στον Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο R^3, ενώ ταυτόχρονα έθεσε τις βάσεις για την ανάπτυξη του σύγχρονου διανυσματικού λογισμού και βρήκε πολλές εφαρμογές στις φυσικές επιστήμες. Το σημαντικότερο ίσως όλων είναι ότι η Άλγεβρα των Quaternions υπήρξε μια ριζοσπαστική καινοτομία καθώς ήταν η πρώτη Μη Αντιμεταθετική Άλγεβρα. Μάλιστα μέσω αυτής αναδείχθηκε η σημαντικότητα των ιδιοτήτων που διέπουν τις αλγεβρικές δομές. Την ίδια εποχή

πραγματοποιήθηκε και το μεγάλο επόμενο βήμα που ήταν η ανακάλυψη των Οκτανίων. Η 8-διάστατη άλγεβρα των Οκτανίων αποδείχτηκε ότι αποτελεί τη μεγαλύτερη Διαιρετική ΄Αλγεβρα.

1. Αλγεβρική Δομή των Quaternions – Ιστορικές αναφορές

1.1. Οι πρώτες προσπάθειες επέκτασης στον χώρο – Caspar Wessel.

Είναι σημαντικό να αναφερθούμε αρχικά στο ρόλο των μιγαδικών, γιατί το δισδιάστατο διανυσματικό σύστημα στηρίχτηκε στη γεωμετρική τους ερμηνεία και αναπαράσταση. Βασικό κίνητρο της προσπάθειας του Hamilton ήταν ακριβώς η δημιουργία ενός τρισδιάστατου διανυσματικού συστήματος αντίστοιχου αυτού των μιγαδικών, δηλαδή να επεκταθεί στον χώρο κατ΄ αναλογία των μιγαδικών. Η ιστορία των μιγαδικών ξεκινά απο την αρχαιότητα, όταν ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς ($1^{ος}$ μ.Χ. αι.) και ο Διόφαντος ($3^{ος}$ μ.Χ. αι.) έθεσαν το ερώτημα της ύπαρξης και της ερμηνείας της τετραγωνικής ρίζας αρνητικών αριθμών, και ο Girolamo Cardano το 1545 στο *Ars Magna* χρησιμοποίησε τους Μιγαδικούς (*Complex*:ένας όρος που εισήγαγε ο Gauss το 1831) στην επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων. Μόνο όμως προς το τέλος του $19^{ου}$ αι. οι αριθμοί αυτοί «νομιμοποιήθηκαν» και έγιναν αποδεκτοί από τη Μαθηματική κοινότητα ως μαθηματικές οντότητες. Χρειάστηκαν λοιπόν αρκετά χρόνια έως την αυστηρή θεμελίωση των Euler ,Wessel, Hamilton και Gauss.

Η ανάπτυξη ενός συστηματικού λογισμού με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα άρχισε στα τέλη του 18ου αιώνα, για να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία στους αρνητικούς αριθμούς, αλλά και για να βρεθεί ένας τρόπος αναλυτικής έκφρασης του μήκους και της διεύθυνσης των ευθύγραμμων τμημάτων.

Caspar Wessel

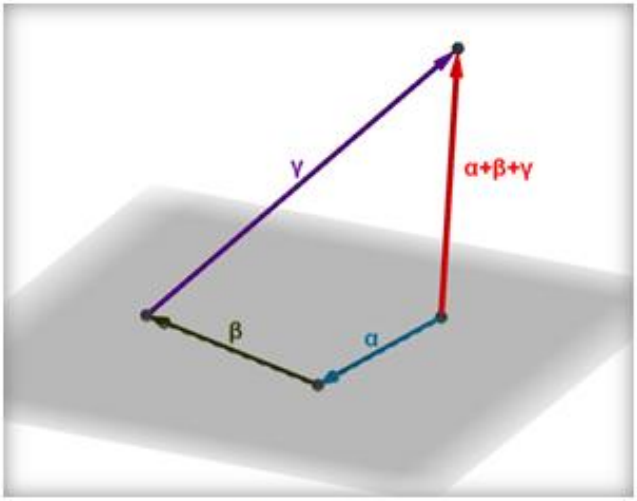
Η πρώτη προσπάθεια (ανεπιτυχής όμως) να ερμηνευτούν γεωμετρικά οι μιγαδικοί έγινε τον $17^{ο}$ αι. από τον Άγγλο μαθηματικό John Wallis (1616-1703). Ο Νορβηγός-Δανός ***Caspar Wessel*** (1745-1818), τοπογράφος, χαρτογράφος και μηχανικός, ήταν ο πρώτος που έδωσε μία γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών, η οποία παρουσιάστηκε στη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Δανίας το 1797 και δημοσιεύτηκε 2 χρόνια αργότερα (1799) στην εφημερίδα της Ακαδημίας *Memoires* με τίτλο ***"Om directionens analytiske betegning: et forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske polygoners opløsning"*** που σημαίνει ***"Στην αναλυτική αναπαράσταση της κατεύθυνσης: μια προσπάθεια εφαρμοσμένη κυρίως στην επίλυση επίπεδων και σφαιρικών πολυγώνων».*** Η εργασία του όμως αγνοήθηκε από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς έως τη Γαλλική επανέκδοση και μετάφρασή της το 1897 με τίτλο "*Essai*

sur la representation analytique de la direction". Η βασική ιδέα του Wessel ήταν να αναπαραστήσει τους μιγαδικούς με σημεία στο επίπεδο και κατόπιν – με τη βοήθεια των μιγαδικών - τις κατευθύνσεις στο επίπεδο, μια ιδέα που προϋπήρχε από το 1787. Χρησιμοποιεί τον όρο *line segment* ή απλώς *line* για να ορίσει τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, ενώ ο όρος *vector (διάνυσμα)* εισάγεται αργότερα από τον Hamilton.

Όλη η προσπάθειά του επικεντρώθηκε στην εύρεση ενός τρόπου με τον οποίο θα μπορούσε να αναπαραστήσει με μια αναλυτική έκφραση (εξίσωση) το μήκος και την κατεύθυνση ενός άγνωστου προσανατολισμένου ευθυγράμμου τμήματος, σε συνάρτηση άλλων γνωστών προσανατολισμένων τμημάτων μέσα από γεωμετρικές μεθόδους, με άλλα λόγια να εφαρμόσει την άλγεβρα στα διανύσματα.

Πρόσθεση

Έθεσε ως προϋπόθεση για την πρόσθεση δύο ή περισσότερων διανυσμάτων αυτά να είναι διαδοχικά αλλά όχι απαραιτήτως ομοεπίπεδα. Όρισε το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων ως ένα νέο διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου (όπως και σήμερα), χωρίς να έρχεται ο ορισμός του σε αντίθεση με τον κανόνα του παραλληλογράμμου (σχ. 1).



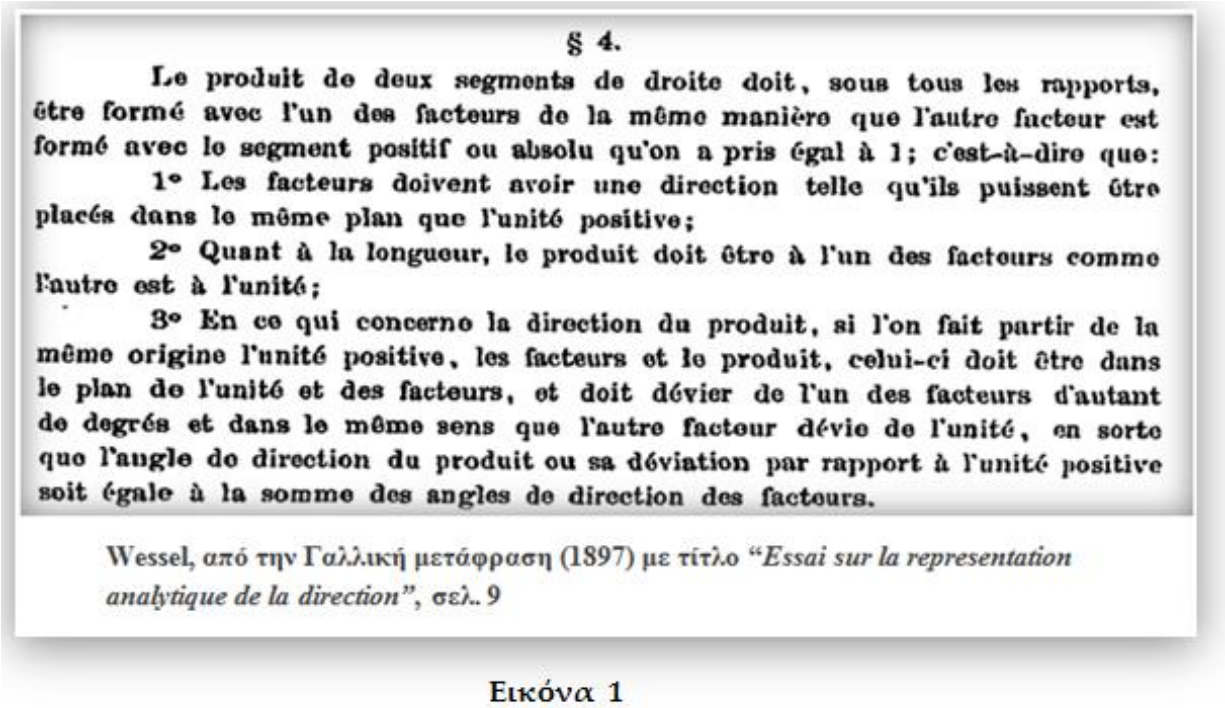
Σχήμα 1

Έτσι η πρόσθεση ορίστηκε όχι στο επίπεδο αλλά στον χώρο. Είχε επίσης αντιληφθεί τη σημαντικότητα των ιδιοτήτων των πράξεων και με «γεωμετρική γλώσσα» εξέφρασε την αντιμεταθετικότητα και την προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης διανυσμάτων.

Πολλαπλασιασμός

Όρισε το γινόμενο δύο *προσανατολισμένων γραμμών* ως μια τρίτη προσανατολισμένη γραμμή στο ίδιο επίπεδο με αυτές και τη θετική μονάδα ως εξής (εικ. 1):

«Το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων θα πρέπει, από κάθε άποψη, να σχηματίζεται από τον ένα παράγοντα με τον ίδιο τρόπο όπως ο άλλος παράγοντας σχηματίζεται από τη μονάδα.»



§ 4.

Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou absolu qu'on a pris égal à 1; c'est-à-dire que:

1° Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive;

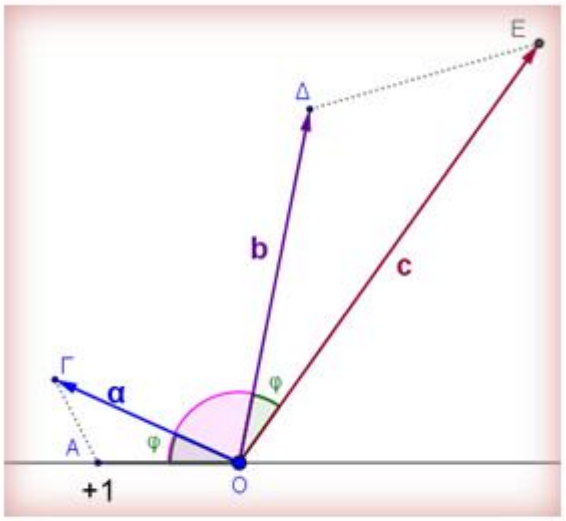
2° Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité;

3° En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.

Wessel, από την Γαλλική μετάφραση (1897) με τίτλο "*Essai sur la representation analytique de la direction*", σελ. 9

Εικόνα 1

Κατόπιν αναλύει την πρόταση αυτή καθορίζοντας πλήρως την κατεύθυνση και το μέτρο του γινομένου. Συγκεκριμένα, αν **c** είναι το γινόμενο των διανυσμάτων **α** και **b** τότε:



Σχήμα 2

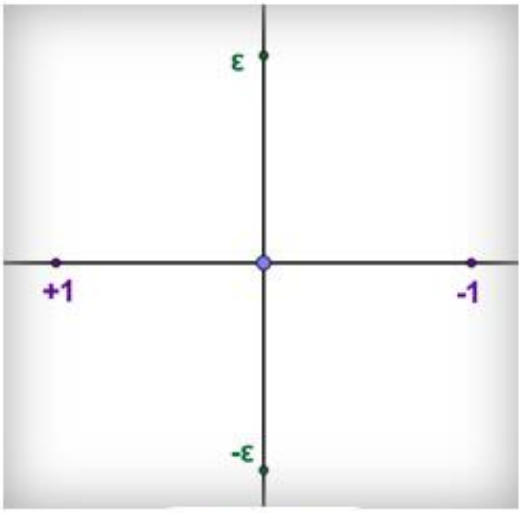
- Η κατεύθυνση του **c** είναι τέτοια, ώστε να σχηματίζει με το **b** την ίδια γωνία που σχηματίζει το **α** με τη θετική μονάδα, δηλ. γωνΑΟΓ= γωνΔΟΕ ή εναλλακτικά το **c** να σχηματίζει με το **α** την ίδια γωνία που σχηματίζει το **b** με τη θετική μονάδα, Προφανώς τα τρίγωνα ΑΟΓ, ΔΟΕ είναι όμοια (σχ. 2).
- Το μήκος του **c** ισούται με το γινόμενο των μηκών των **α** και **b,** δηλ. $\|c\| = \|\alpha\| \cdot \|b\|$. Η τελευταία σχέση προκύπτει από τον τρόπο που ο Wessel ορίζει το μέτρο του γινομένου (μήκος όπως το λέει), το οποίο πρέπει αναλογικά με το μέτρο του ενός παράγοντα, να είναι τόσο όσο το μέτρο του άλλου παράγοντα με τη μονάδα, δηλ ορίζει το μέτρο του γινομένου μέσω της αναλογίας $\frac{\|c\|}{\|b\|} = \frac{\|\alpha\|}{+1}$ ή εναλλακτικά $\frac{\|c\|}{\|\alpha\|} = \frac{\|b\|}{+1}$.

Όπως θα δούμε στην §2.1.2 το διάνυσμα **c** με τον τρόπο που ορίζεται αποτελεί ειδική περίπτωση της 4^{ης} αναλόγου για την τριάδα διανυσμάτων **+1**, **α, b** στο επίπεδο θεωρώντας τη θετική μονάδα +1 ως διάνυσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι Bodil Branner και Jesper Lutzen, Δανέζοι Μαθηματικοί, στο βιβλίο τους ***"Caspar Wessel: On the Analytical Pepresentation of Direction,*** *An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons, 1799"* που εκδόθηκε το 1999 στην Κοπεγχάγη, αναλύουν για πρώτη φορά στην Αγγλική γλώσσα το έργο και τις ιδέες του Wessel. Μελετώντας τα παραδείγματά του καθώς υπάρχουν σχήματα μόνο όσον αφορά τη σφαιρική τριγωνομετρία, οι δύο μαθηματικοί καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι ο Wessel τοποθετεί τη θετική μονάδα στον αριστερό ημιάξονα, δηλαδή με κατεύθυνση αντίθετη από τη συνήθη.

Κατασκευή Ορθοκανονικού Συστήματος - Μιγαδικό Επίπεδο

Στη συνέχεια ο Wessel θεώρησε ένα άλλο μοναδιαίο διάνυσμα **ε** κάθετο στην θετική μονάδα **+1** και έτσι όπως όρισε το γινόμενο διανυσμάτων, υπολόγισε τα γινόμενα $(\pm 1)(\pm 1)$, $(\pm 1)(\pm \varepsilon)$, $(\pm \varepsilon)(\pm \varepsilon)$. Το **ε** στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα των τεταγμένων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γινόμενο $(+\varepsilon)(+\varepsilon)$ ή πιο απλά $\varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon^2$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το **ε** σχηματίζει με το θετικό μοναδιαίο διάνυσμα +1 ορθή γωνία. Επομένως η γωνία κλίσης του γινομένου **ε·ε** ισούται με το άθροισμα 2 ορθών (από τον ορισμό του γινομένου), άρα έχει γωνία κλίσης 180°. Και αφού προφανώς το γινόμενο έχει μέτρο 1, το αποτέλεσμα του γινομένου ε^2 θα ισούται με την αρνητική μονάδα **-1**. Αυτό με τη σειρά του οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\varepsilon=\sqrt{-1}$. Με αυτόν τον τρόπο ο Wessel έδωσε μια γεωμετρική ερμηνεία της $\sqrt{-1}$ (σχ. 3). Ετσι όλα τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο μπορούσαν πλέον να αναπαρασταθούν αναλυτικά - σύμφωνα με τον Wessel - μέσα από τις εκφράσεις **α+εβ** και **r(cosφ + ε sinφ)**, που ισχύουν έως σήμερα στην ανάλυση των μιγαδικών. Έδειξε επίσης ότι μπορούν να πολλαπλασιαστούν, να διαιρεθούν και να υψωθούν σε δύναμη, χωρίς να παραβιαστεί κανένας από τους γνωστούς κανόνες της άλγεβρας.



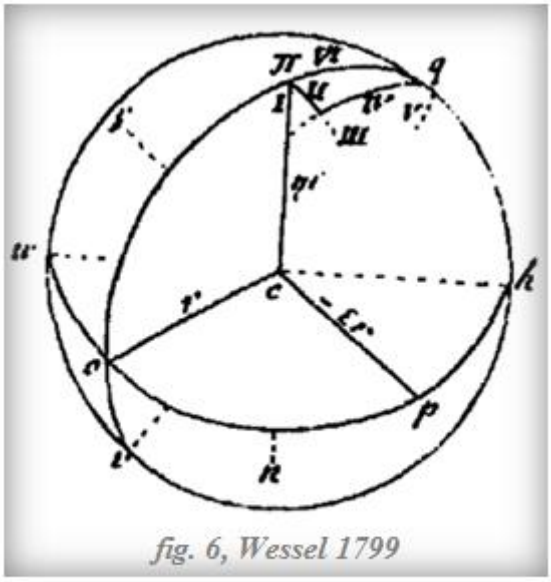
Σχήμα 3

Οι πράξεις στον χώρο – πολλαπλασιασμός και περιστροφές - το «ΠΡΟΒΛΗΜΑ»

Προσπαθώντας να επεκταθεί στον χώτο, ο Wessel κατασκεύασε κατ΄ αντιστοιχία 3 κάθετες μεταξύ τους ανά δύο ευθείες (άξονες) που διέρχονταν όλες από το κέντρο σφαίρας με ακτίνα μήκους **r.** Το επίπεδο των **+1** είναι **ε** είναι το οριζόντιο επίπεδο, ενώ ο κατακόρυφος άξονας του ***η*** είναι ο **Oy**. Σε κάθε έναν από τους τρεις θετικούς ημιάξονες ορίζει τη διανυσματική ακτίνα ως εξής: $r_{Ox} = +1r$, $r_{Oz} = \varepsilon r$ και $r_{Oy} = \eta r$ (σχ. 6). Έτσι για κάθε σημείο Α του χώρου στην επιφάνεια της σφαίρας με συν/νες ***(x,y,z)*** η προσανατολισμένη ακτίνα **ΟΑ** με αρχή το Ο και πέρας το σημείο Α***(x,y,z)*** θα μπορούσε να γραφεί στην αναλυτική μορφή $x+\eta y+\varepsilon z$ **(διάνυσμα).** Επίσης αντίστοιχα με πριν ορίζει τα γινόμενα: ***ηη*= -1** στο επίπεδο των **+1,*η*** και ***εε*= -1** στο επίπεδο των **+1,*ε***.

Τα παρακάτω σχήματα 4 και 5, είναι από το παράρτημα σχημάτων της Γαλλικής έκδοσης (1897) όπου εκτός από το σφαιρικό τρίγωνο που διακρίνεται και στη σφαίρα μπορούμε να καταλάβουμε τη σχετική θέση των αξόνων. Για παράδειγμα το οριζόντιο επίπεδο ορίζεται από την ακτίνα ***r*** του άξονα των πραγματικών και ***-εr*** του άξονα του μοναδιαίου ***ε***, ενώ το κατακόρυφο επίπεδο σχηματίζεται από τα ***r*** και ***ηr***.

Σχήμα 4



Σχήμα 5

Ο Wessel συνέδεσε τον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων με τις περιστροφές κι αυτό αποτέλεσε για τον ίδιο εργαλείο επίλυσης σφαιρικών τριγώνων. Οι περιστροφές γύρω από τους άξονες **y** και **z** μπορούσαν να οριστούν ως *συνθέσεις (πολλαπλασιασμοί)* περιστροφών για τον κάθε ένα γύρω από τον άλλον και αυτό ήταν αρκετό, ώστε να επιλύει σφαιρικά τρίγωνα. Για παράδειγμα (Branner & Lutzen, 1999, σελ.78-79), η προσανατολισμένη ακτίνα $x+\eta y+\varepsilon z$ αλλάζει όταν περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του η (Oy) κατά γωνία ***φ***. Εφόσον η τεταγμένη y παραμένει σταθερή, η περιστροφή πραγματοποιείται στο επίπεδο των μοναδιαίων **+1,*ε***. Σε σύγχρονη διατύπωση θα λέγαμε

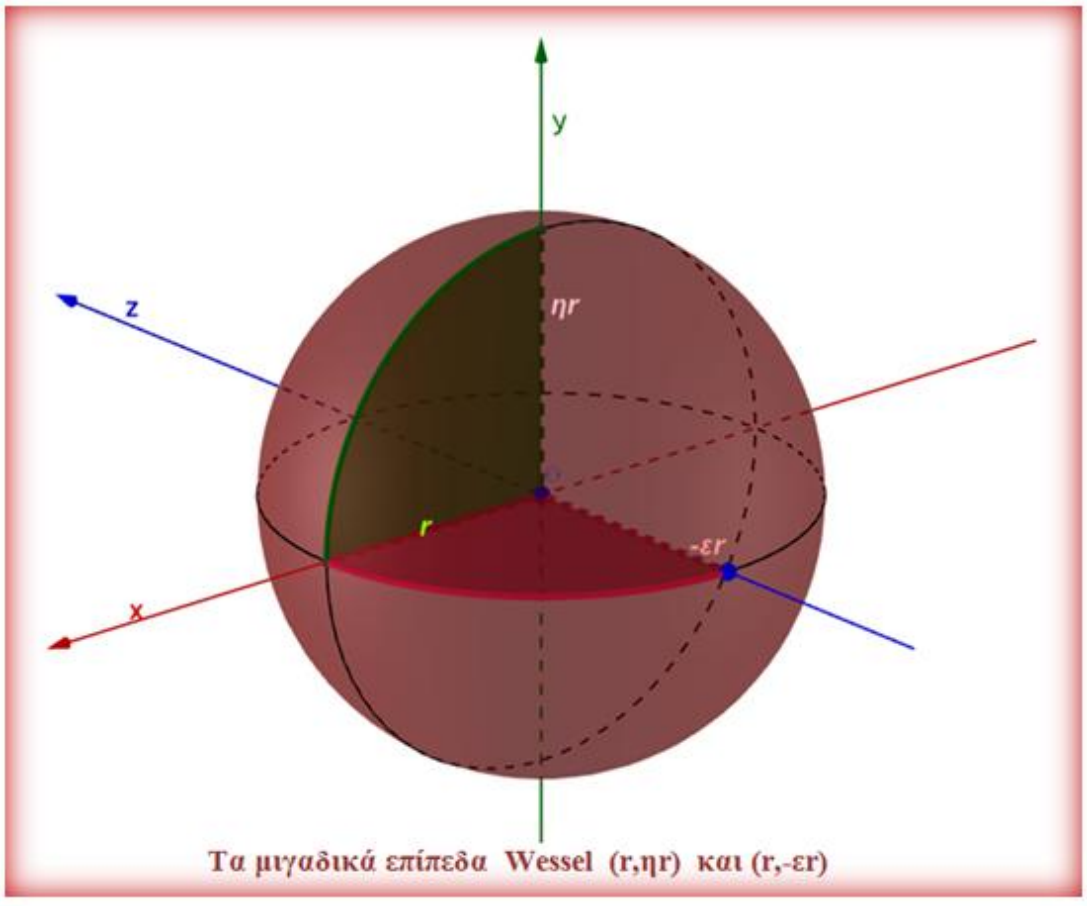
ότι περιστρέφεται η προβολή της διανυσματικής ακτίνας στο επίπεδο των **+1,ε**. Οπότε η νέα διανυσματική ακτίνα θα έχει διαφορετικές συντεταγμένες σε αυτό, έστω ***x΄***, ***z΄***, άρα $r' = x' + ny + \varepsilon z' =$ $ny + (\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)(x + \varepsilon z)$.

Έτσι ο Wessel εισάγει τη *σύνθεση* που συμβολίζει (**,,**) με τον τύπο: $(x + ny + \varepsilon z),,(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi) = ny + (\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)(x + \varepsilon z)$ εκφράζοντας έτσι την περιστροφή της ακτίνας $x + \eta y + \varepsilon z$ γύρω απο τον κατακόρυφο άξονα η.

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζει και την περιστροφή κατά γωνία ω γύρω από τον άξονα ε:

$(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos\omega + \eta \sin\omega) = \varepsilon z + (\cos\omega + \eta \sin\omega)(x + \eta y)$.

Προφανώς χρησιμοποιεί την περιστροφή των μιγαδικών στο επίπεδο μέσω του πολλαπλασιασμού και των πολικών συντεταγμένων, που ο ίδιος προηγουμένως έχει παρουσιάσει και αναλύσει όπως αυτή είναι γνωστή στη σύγχρονη θεωρία των μιγαδικών.



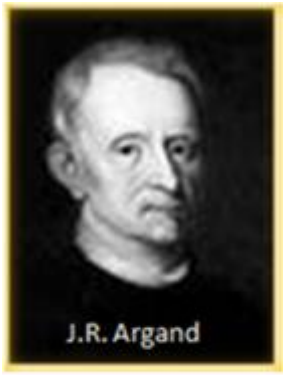
Σχήμα 6

Ο Wessel δεν αναφέρθηκε όμως στην περιστροφή γύρω από τον άξονα ***x***, πάνω στον οποίο είχε οριστεί η θετική μονάδα +1, γιατί δεν μπόρεσε να ορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα αντιπροσωπεύονταν τέτοιες περιστροφές. Κι αυτό, γιατί δεν μπόρεσε να ορίσει τα γινόμενα ***εη*** και ***ηε,*** και να τα εκφράσει αλγεβρικά.

Το τρισδιάστατο διανυσματικό σύστημα του Wessel προσέδωσε έναν εξειδικευμένο χαρακτήρα που αφορούσε στην επίλυση σφαιρικών τριγώνων. Αν και συγκριτικά ανεπαρκές με τα σύγχρονα συστήματα, ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποίησε τους μιγαδικούς ήταν εντυπωσιακός και παρήγαγε πλήθος χρήσιμων αποτελεσμάτων στη Σφαιρική Τριγωνομετρία (Crowe, 1967, σελ. 8).

Άλλες μελέτες γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών και επέκτασης στον χώρο λίγο πριν την ανακάλυψη των τετρανίων

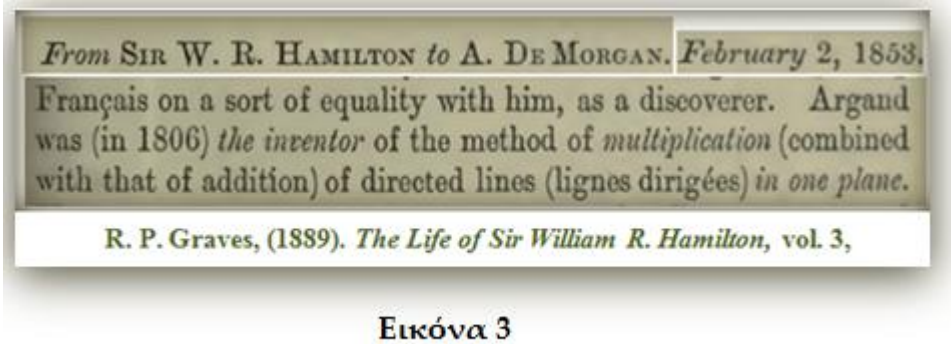
Εκτός από την εργασία του Caspar Wessel που προαναφέραμε, στις αρχές του 19ου αι. ταυτόχρονα αλλά τυχαία δημοσιεύτηκαν και άλλες μελέτες ανεξάρτητες μεταξύ τους, που αφορούσαν όχι μόνο στη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών αλλά και στην προσπάθεια επέκτασης στο χώρο μέσω γεωμετρικών αναπαραστάσεων και νέων αλγεβρικών δομών.



Εικόνα 2

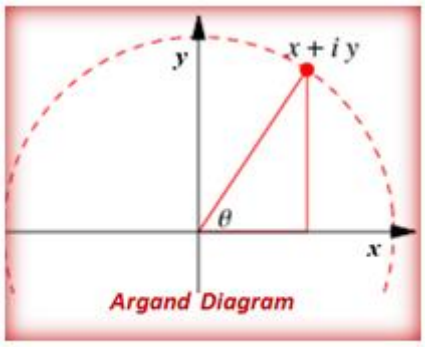
Το 1806 εμφανίζεται ένα μικρό βιβλίο του ***Jean Robert Argand*** (Ελβετός, λογιστής στο Παρίσι και ερασιτέχνης μαθηματικός, 1768-1822), το "*Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques*" . Σε αυτό ο Argand έθεσε τη σύγχρονη γεωμετρική αναπαράσταση της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών. Επίσης έδειξε ότι μέσω αυτής της αναπαράστασης, μπορούσαν να παραχθούν μια σειρά από θεωρήματα στην τριγωνομετρία, στη βασική γεωμετρία και στην άλγεβρα. Κάθε μιγαδικό αριθμό α+βi τον αντιστοιχεί σε ένα σημείο του επιπέδου με ορθοκανονικές συντεταγμένες α, β. Εισάγει την έννοια του προσανατολισμένου τμήματος και ορίζει την πρόσθεση με τον γνωστό κανόνα του παραλληλογράμμου όπως στη σύνθεση δυνάμεων, το δε γινόμενο δύο μιγαδικών ως ένα νέο προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με μέτρο το γινόμενο των μέτρων και γωνία κλίσης (όρισμα) το άθροισμα των ορισμάτων (ο ίδιος χρησιμοποιεί τα αντίστοιχα τόξα των ορισμάτων).

Ο Hamilton σε επιστολή του προς τον De Morgan θεωρεί τον Argand ως τον «εφευρέτη» του πολλαπλασιασμού προσανατολισμένων ευθειών στο επίπεδο (εικόνα 3).


From Sir W. R. Hamilton *to* A. De Morgan. *February* 2, 1853.
Français on a sort of equality with him, as a discoverer. Argand was (in 1806) *the inventor* of the method of *multiplication* (combined with that of addition) of directed lines (lignes dirigées) *in one plane*.
R. P. Graves, (1889). *The Life of Sir William R. Hamilton*, vol. 3,

Εικόνα 3

Το γνωστό επίσης σε όλους σχήμα απεικόνισης ενός μιγαδικού αριθμού στο επίπεδο ως σημείο που ειναι το πέρας της αντίστοιχης ακτίνας, το συναντάμε στη σύγχρονη βιβλιογραφία και ως ***Argand Diagram*** (σχ.7).



Σχήμα 7

Το έργο του Argand έγινε γνωστό μόλις το 1813, μετά από μια καταχώριση του ***Jacques Frederic Francais*** στο μαθηματικό περιοδικό ***Annales de mathématiques pures et appliquées*** ή ***Annales de Gergonne,*** στη μνήμη του αδερφού του ***Francois Francais***. Συγκεκριμένα ο Jacques Francais βρήκε στην αλληλογραφία του αδερφού του σχόλια του *Adrien-Marie Legendre*, (φίλου του αδερφού του) πάνω σε ιδέες ενός ανώνυμου μαθηματικού με τον οποίο ο ίδιος ο Legendre αλληλογραφούσε και που αποδείχτηκε εκ των υστέρων πως ήταν ο Argand. Τυχαία στο ίδιο τεύχος ο Argand δημοσίευσε 2 άρθρα στα οποία εξέθετε αναλυτικά και με πληρότητα τις ιδέες του περί της αναπαράστασης και γεωμετρικής κατασκευής των μιγαδικών. Όταν ο ίδιος μετά τη δημοσίευση των ανώνυμων σημειώσεων έστειλε επιστολή, όπου δήλωνε πως το καταχωρημένο ανώνυμο σημείωμα ήταν δικό του, αναφέρει για πρώτη φορά και μια (αποτυχημένη τελικά) προσπάθειά του να επεκταθεί στον τρισδιάστατο χώρο (Crowe, 1967 σελ.9-10, Hardy, 1881, σ. 114-115). Σύντομα μετά από τις δημοσιεύσεις του Argand στο περιοδικό Gergonne και απαντώντας στον Jacques Francais, ο ***Francois-Joseph Servois*** σε γράμμα του προς τον ***Gergonne*** (εκδότη του περιοδικού) τον Νοέμβριο του 1813 αναφέρεται στην επέκταση της θεωρίας του Argand στον τρισδιάστατο χώρο, στην οποία έκανε κριτική και περιέγραψε τις δικές του ιδέες του περί Ανάλυσης του Χώρου. Έτσι ξεκινά μια «συζήτηση» με ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των Francais, Servois και Gergonne μέσα από μια σειρά άρθρων. Σε αυτό το γράμμα του ο Servois μεταξύ άλλων αναφέρει:

«…αν συμβολίσουμε το μήκος μιας διανυσματικής ακτίνας με ***a*** *και τη γωνία που σχηματίζει με την πραγματική ευθεία με α, τις ορθογώνιες συντεταγμένες του άκρου της από την αρχή με* ***x,y*** *και η πραγματική ευθεία να είναι ο άξονας των x, το σημείο αυτό* [το πέρας της ακτίνας

που περιστρέφεται γύρω από το Ο] *θα μπορούσε να προσδιοριστεί από το* $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\sqrt{-1}$ *και αφού* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$*συνα και* $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}$*ημα,* [από την **α**συνα+**αi**ημα]=$\boldsymbol{a}\cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$**.** *Έτσι έχουμε μια νέα γεωμετρική ερμηνεία της συνάρτησης* $\boldsymbol{a}\cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$*, η οποία μου φαίνεται πιο σημαντική από αυτή των Argand και Francais. Αλλά φυσικά δε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι αυτή είναι μια μέθοδος* ***γεωμετρικής*** *κατασκευής φανταστικών ποσοτήτων, γιατί οι παραπάνω δείκτες προϋποθέτουν την ύπαρξή τους* [των ποσοτήτων]*. Όπως και να ΄χει, είναι ξεκάθαρο ότι η ευρηματική πινακοειδής τοποθέτηση αριθμητικών μεγεθών* [που αντιπροσωπεύουν έναν μιγαδικό] *θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια κεντρική "φέτα" ενός πίνακα τριπλής διάταξης αριθμητικών μεγεθών που θα αντιπροσώπευε σημεία και γραμμές στον τρισδιάστατο χώρο. Θα μπορούσες αναμφίβολα να δώσεις σε κάθε όρο μια τριωνυμική μορφή, αλλά τι θα ήταν ο συντελεστής του τρίτου όρου; Δε μπορώ να πω από τη μεριά μου. Αναλογικά, θα μπορούσαμε να υποδείξουμε ότι η τριωνυμική μορφή θα μπορούσε να είναι* $p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$*, όπου* α,β,γ *οι γωνίες που σχηματίζει μια ευθεία με τους τρεις ορθογώνιους άξονες και θα έπρεπε* $(p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma)(p'\cos\alpha + q'\cos\beta + r'\cos\gamma) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$*.*

Οι τιμές p,q,r,p',q',r' *που ικανοποιούν τη συνθήκη θα μπορούσαν να είναι μη πραγματικές, αλλά θα μπορούσαν να είναι φανταστικές, δηλαδή να μπορούν να αναχθούν στη γενική μορφή* $A+B\sqrt{-1}$ *?»*

Annales de Gergonne, Vol. 4, 1813-1814, Lettre de M. Servois, σελ. 228-235

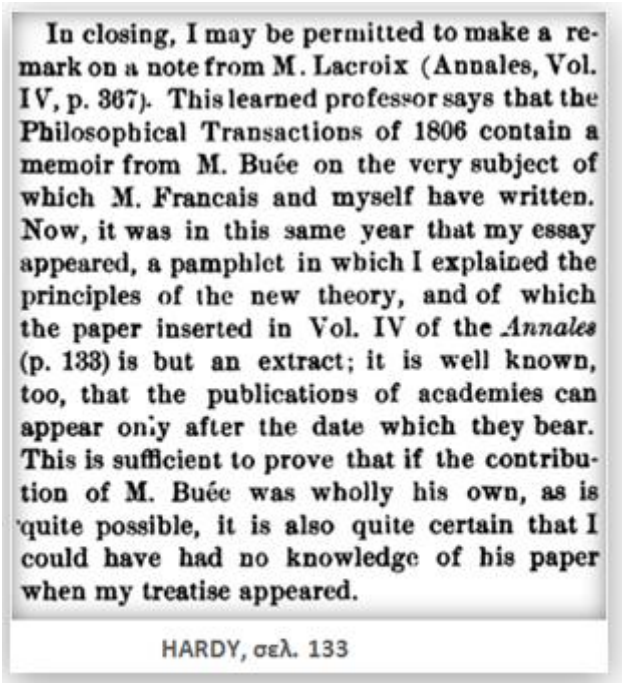
Imaginary Quantities: Their Geometrical Representation, trans. A.S. Hardy, 1881, σελ.114-115

Ο Hamilton έχοντας κατά νου την παραπάνω παράγραφο του Servois, απέδωσε στον Argand την πλησιέστερη προσέγγιση στην πρόβλεψη των τετρανίων. Συγκεκριμένα σημειώνει στο *Lectures on Quaternions* (1853),*(Preface , p.57),*

« *Οι 6 μη πραγματικοί που με τόση οξύνοια ο Servois προέβλεψε χωρίς όμως να μπορεί να τους προσδιορίσει, μπορούν τώρα να ταυτιστούν με τα τότε άγνωστα σύμβολα* ***+i, +j, +k, -i, -j, -k*** *της θεωρίας των quaternions: τουλάχιστον αυτά τα τελευταία σύμβολα ικανοποιούν ακριβώς τη συνθήκη που προτάθηκε από τον ίδιο και παρέχει μια απάντηση σε αυτήν την "ιδιαίτερη ερώτηση". Θα ήταν αρμόζον να πω ότι η θεωρία μου έχει κατασκευαστεί και δημοσιευτεί εδώ και πολύ καιρό πριν το τελευταίο κείμενο πέσει στην αντίληψή μου».*

Αυτή η σειρά άρθρων στο ***Annales de Gergonne*** ολοκληρώθηκε με ένα γράμμα του Argand, στο οποίο εξηγούσε συγκεκριμένα σημεία της θεωρίας του περί ριζών των πολυωνύμων.

Στο τέλος αυτού του γράμματος απαντά σε σχόλιο του Γάλλου μαθηματικού Lacroix, που παρότρυνε να δοθεί προσοχή στη δημοσίευση του Buee (1806). Ο Argand έγραψε ότι δε γνώριζε την εργασία του Buee και τεκμηριώνει την άποψή του, όπως φαίνεται στο απόσπασμα που παραθέτει ο Hardy (1881).



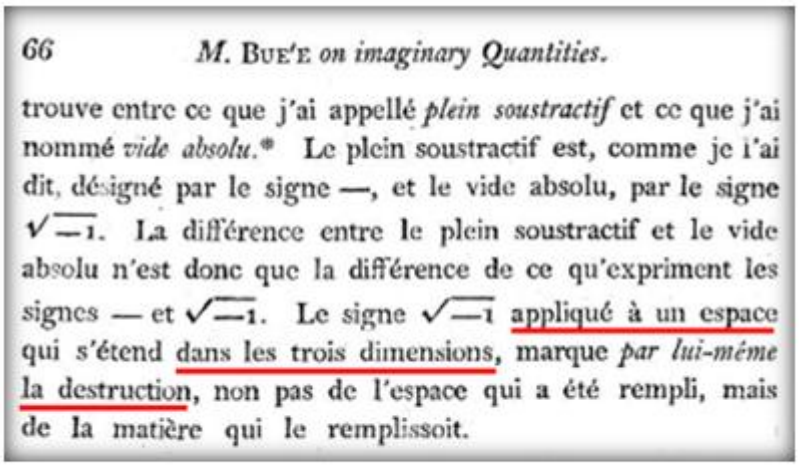
In closing, I may be permitted to make a remark on a note from M. Lacroix (Annales, Vol. IV, p. 367). This learned professor says that the Philosophical Transactions of 1806 contain a memoir from M. Buée on the very subject of which M. Francais and myself have written. Now, it was in this same year that my essay appeared, a pamphlet in which I explained the principles of the new theory, and of which the paper inserted in Vol. IV of the *Annales* (p. 133) is but an extract; it is well known, too, that the publications of academies can appear only after the date which they bear. This is sufficient to prove that if the contribution of M. Buée was wholly his own, as is quite possible, it is also quite certain that I could have had no knowledge of his paper when my treatise appeared.

HARDY, σελ. 133

Εικόνα 4

Υπάρχουν ισχυρές αποδείξεις ότι ο Hamilton δε γνώριζε τις παραπάνω εργασίες και συζητήσεις, όταν ανακάλυψε τα τετράνια το 1843. (Crowe, 1967, σελ. 10)

Ο ***Adrien Quentin Buee*** (1746-1826), Γάλλος ιερωμένος και μαθηματικός, έγραψε το "*Memoire sur les quantites imaginaires*", το οποίο διαβάστηκε στη Royal Society του Λονδίνου το 1805 και δημοσιεύτηκε το 1806 στις εκδόσεις *"Transactions of the Royal Society"*. Ο Hamilton αναφέρει στην εισαγωγή των *Lectures* (1853, σελ. 57) ότι ο Buee ερμηνεύοντας το σύμβολο $\sqrt{-1}$ έκανε την εικασία επέκτασης στον χώρο αλλά δεν πλησίασε αρκετά όσο ο Servois.

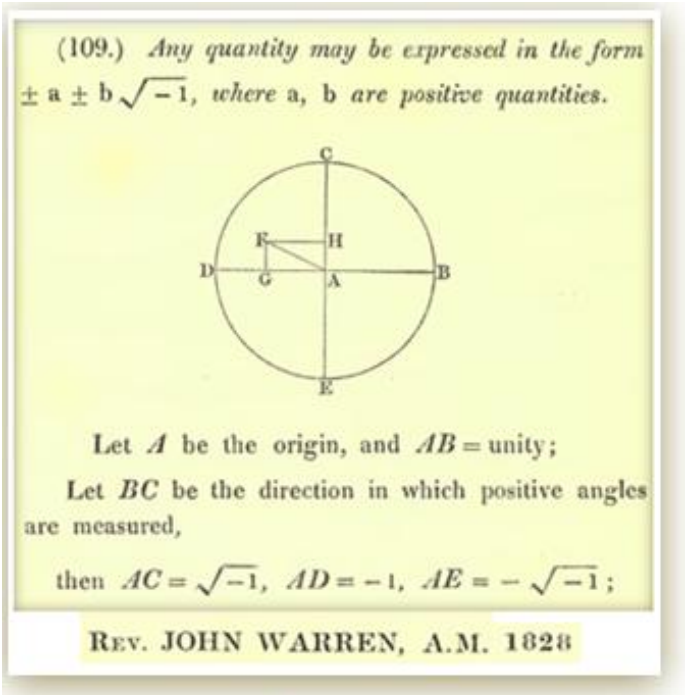


66 M. Buée on imaginary Quantities.

trouve entre ce que j'ai appellé *plein soustractif* et ce que j'ai nommé *vide absolu*.* Le plein soustractif est, comme je l'ai dit, désigné par le signe —, et le vide absolu, par le signe $\sqrt{-1}$. La différence entre le plein soustractif et le vide absolu n'est donc que la différence de ce qu'expriment les signes — et $\sqrt{-1}$. Le signe $\sqrt{-1}$ appliqué à un espace qui s'étend dans les trois dimensions, marque *par lui-même* la destruction, non pas de l'espace qui a été rempli, mais de la matière qui le remplissoit.

Εικόνα 5

Ο ***John Warren*** (1796–1852), Άγγλος ιερωμένος και μαθηματικός, έγραψε το «*A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*», Cambridge, 1828. Οι ιδέες του John Warren ήταν οι μόνες γνωστές στον Hamilton νωρίτερα από το 1829 και επηρέασαν τον τρόπο σκέψης του. Εδώ τα «φανταστικά σύμβολα» της άλγεβρας αποκτούν ένα είδος γεωμετρικής ερμηνείας μέσω των πράξεων των γραμμών, πχ. η πρόσθεση γραμμών αποδόθηκε με τους ίδιους κανόνες της σύνθεσης κινήσεων ή δυνάμεων, δηλαδή με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Το σύμβολο $\sqrt{-1}$ πήρε μια ξεκάθαρη ερμηνεία ως μια δεύτερη μοναδιαία γραμμή σε ορθή γωνία με τη θετική μοναδιαία ευθεία (εικ. 6).


(109.) *Any quantity may be expressed in the form* $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, *where* a, b *are positive quantities.*

Let A be the origin, and AB = unity;

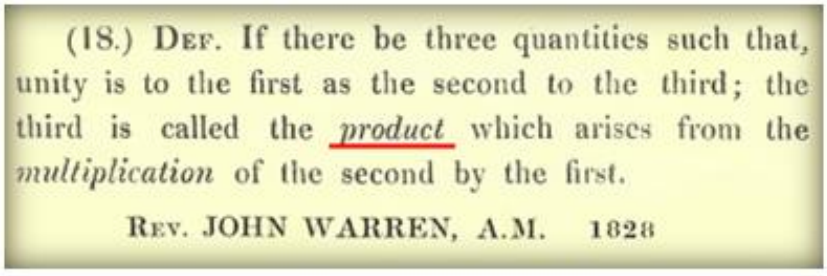
Let BC be the direction in which positive angles are measured,

then $AC = \sqrt{-1}$, $AD = -1$, $AE = -\sqrt{-1}$;

REV. JOHN WARREN, A.M. 1828

Εικόνα 6

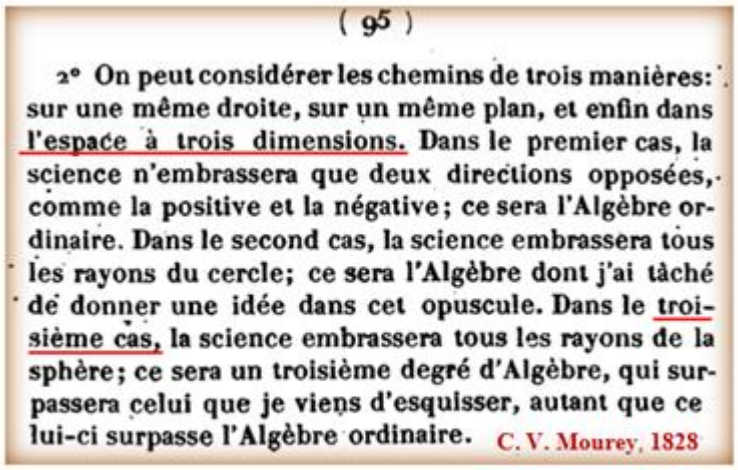
Σε αντίθεση με τους Buee και Argand, ο Warren είχε αντιληφθεί τη σημασία και σπουδαιότητα της αντιμεταθετικής, προσεταιριστικής και επιμεριστικής ιδιότητας στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό χωρίς όμως να χρησιμοποιεί τους συγκεκριμένους όρους. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σημαντικό, γιατί η «γέννηση» των τετρανίων εξαρτήθηκε σε ένα βαθμό από την αναγνώριση της σημαντικότητας αυτών των ιδιοτήτων. Ο Warren δεν επεκτάθηκε στον τρισδιάστατο χώρο. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο τρόπος που ορίζει το γινόμενο δε διαφέρει από αυτόν του Wessel (εικόνα 7).


(18.) DEF. If there be three quantities such that, unity is to the first as the second to the third; the third is called the *product* which arises from the *multiplication* of the second by the first.

REV. JOHN WARREN, A.M. 1828

Εικόνα 7

Ο ***C . V . Mourey*** (1791-1830), Γάλλος μαθηματικός, δημοσίευσε το 1828 τη διατριβή «*La vrai Theorie des quantites negatives et des quantites pretendues imaginaires*». Στον επίλογο του βιβλίου του αναφέρεται στην ύπαρξη μιας άλγεβρας που υπερβαίνει όχι μόνο τη συνηθισμένη άλγεβρα αλλά και τη δισδιάστατη άλγεβρα που ο ίδιος δημιούργησε. Πιθανότατα αναζητούσε μια τέτοια άλγεβρα αλλά δε δημοσίευσε ποτέ κάτι σχετικό.



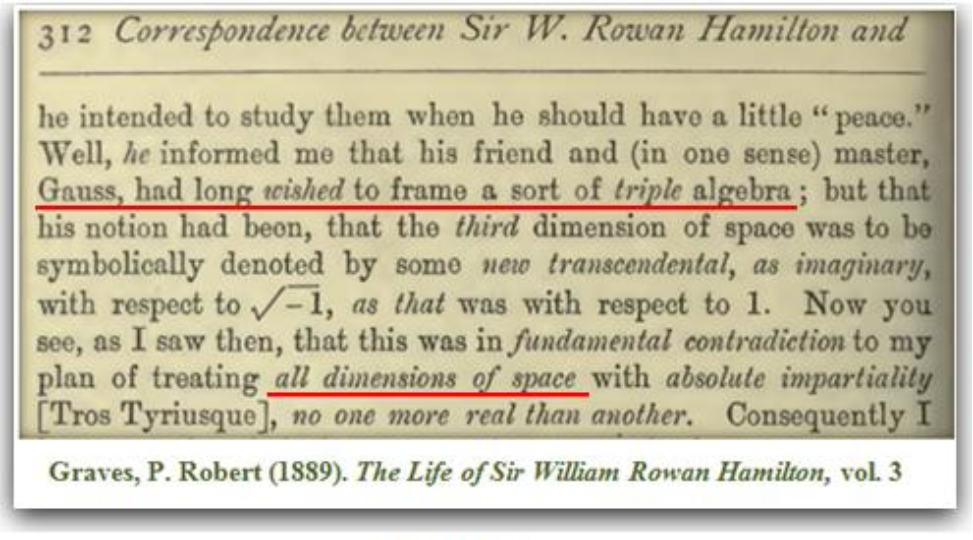
(95)

2° On peut considérer les chemins de trois manières: sur une même droite, sur un même plan, et enfin dans l'espace à trois dimensions. Dans le premier cas, la science n'embrassera que deux directions opposées, comme la positive et la négative; ce sera l'Algèbre ordinaire. Dans le second cas, la science embrassera tous les rayons du cercle; ce sera l'Algèbre dont j'ai tâché de donner une idée dans cet opuscule. Dans le troisième cas, la science embrassera tous les rayons de la sphère; ce sera un troisième degré d'Algèbre, qui surpassera celui que je viens d'esquisser, autant que celui-ci surpasse l'Algèbre ordinaire. C. V. Mourey, 1828

Εικόνα 8

***ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι Warren και Mourey απ΄ ότι φαίνεται δε γνώριζαν την εργασία του Argand, όταν δημοσίευαν τις δικές τους εργασίες* (Hardy, 1881, preface viii)**

Το 1831 δημοσιεύεται μελέτη του ***Johann Carl Friedrich Gauss*** (1777-1855). Ο Gauss είχε δώσει υπόμνημα στη Βασιλική Εταιρεία Επιστημών του Göttingen ή *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften* με θέμα τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Αυτή περιελάμβανε συμπεράσματα στα οποία ο Gauss είχε καταλήξει από το 1796 και πιθανότατα η ανακάλυψή του έγινε σχεδόν ταυτόχρονα με αυτή του Wessel. Η μελέτη του Gauss ήταν η τελευταία που δημοσιεύτηκε εκείνη την περίοδο και υπήρξε η συντομότερη, η πλέον ακριβής και σημαντικότερη όλων των υπολοίπων. Το 1845 ο Hamilton άκουσε (πριν ακόμα διαβάσει την εργασία του Gauss το 1852), ότι ο Gauss αναζητούσε μια "triple" άλγεβρα, δηλαδή μια «τριαδική άλγεβρα» αντίστοιχη της «δυαδικής» των Μιγαδικών αριθμών (εικ. 9).



312 *Correspondence between Sir W. Rowan Hamilton and*

he intended to study them when he should have a little "peace." Well, *he* informed me that his friend and (in one sense) master, Gauss, had long *wished* to frame a sort of *triple* algebra; but that his notion had been, that the *third* dimension of space was to be symbolically denoted by some *new transcendental, as imaginary*, with respect to $\sqrt{-1}$, *as that* was with respect to 1. Now you see, as I saw then, that this was in *fundamental contradiction* to my plan of treating *all dimensions of space* with *absolute impartiality* [Tros Tyriusque], *no one more real than another*. Consequently I

Graves, P. Robert (1889). *The Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 3

Εικόνα 9

Βλέπουμε λοιπόν ότι ως το 1831 πολλοί μαθηματικοί ταυτόχρονα και ανεξάρτητα εργάστηκαν πάνω στους φανταστικούς και μιγαδικούς αριθμούς και στη γεωμετρική αναπαράσταση αυτών, οι περισσότεροι με επιτυχία. Παρ΄ όλα αυτά, οι όποιες προσπάθειες έγιναν για επέκταση στο χώρο υπήρξαν αποτυχημένες (Wessel, Gauss, Argand, Mourey, Buee, Servois, Francais). Επίσης το γεγονός ότι όσοι ασχολήθηκαν με τη γεωμετρικη αναπαράσταση των μιγαδικών στο επίπεδο στη συνέχεια αναζήτησαν και ένα αντίστοιχο σύστημα ανάλυσης του τρισδιάστατου χώρου δηλώνει ότι αυτό ήταν μάλλον ένα φυσικό επακόλουθο. Ο Hamilton περιλαμβάνεται σε αυτούς που προβληματίστηκαν με αυτό μετά το 1831.

1.2. Από τους Μιγαδικούς στα Quaternions - W. R. Hamilton (1805-1865)

Η Επιστήμη της Άλγεβρας στις αρχές του 19ου αιώνα

Ενώ γύρω στο 1800 ο όρος Άλγεβρα αφορούσε κατά κύριο λόγο επίλυση εξισώσεων, έως το 1900 η έννοια του όρου άλλαξε και συμπεριέλαβε τη μελέτη διαφόρων μαθηματικών δομών, δηλαδή συνόλων στοιχείων με καλά ορισμένες πράξεις που ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα (Katz, 2009, σελ. 710).

Ο Ernst Kummer (1810-1893) για παράδειγμα προσπαθώντας να γενικεύσει στο σώμα των μιγαδικών την ιδιότητα των συνηθισμένων ακεραίων να αναλύονται με μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, οδηγήθηκε στη δημιουργία των "*ideal complex numbers*" που οδήγησε τον Dedekind (1831-1916) στα *"ιδεώδη"* των δακτυλίων. Γενικά η βασική προσπάθεια των μαθηματικών στις αρχές του 19ου αι. ήταν:

- Αξιωματικοποίηση των βασικών ιδεών της άλγεβρας
- Η δυνατότητα και ο τρόπος γενίκευσης των ιδιοτήτων των ακεραίων σε άλλα είδη μεγεθών.

Οι άγγλοι μαθηματικοί George Peacock (1791-1858) και Augustus De Morgan (1806-1871) υπήρξαν πρωτεργάτες στην αξιωματική θεμελίωση της άλγεβρας.

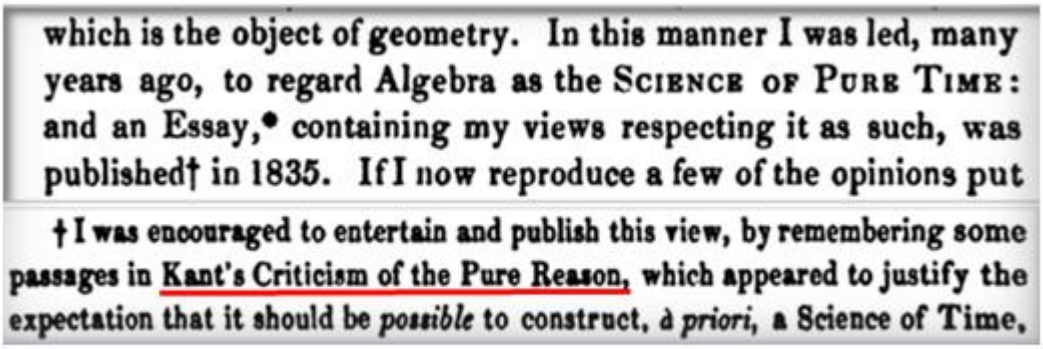
Ο George Peacock διέκρινε δύο είδη άλγεβρας , την «*Αριθμητική*» και τη «*Συμβολική*». Στην πρώτη γίνεται χρήση συμβόλων αλλά μόνο με πράξεις που έχουν νόημα στους μη αρνητικούς πραγματικούς. Για παράδειγμα η διαφορά α-β έχει νόημα, εφόσον β<α. Στη συμβολική άλγεβρα, η ισότητα α-(β-γ)=α+γ-β ισχύει καθολικά και χωρίς περιορισμούς. Στη δεύτερη υπάγονται οι αρνητικοί και πραγματικοί αριθμοί. Έτσι ένας αρνητικός αριθμός δεν είναι παρά ένα σύμβολο, το –α. Άρα και το $\sqrt{-1}$ είναι ένα σύμβολο που υπακούει στις ιδιότητες των ριζών, επομένως $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$.

Ο Augustus De Morgan υποστήριζε την ελευθερία δημιουργίας αλγεβρικών αξιωμάτων και κατά συνέπεια την ελευθερία κατασκευής αντίστοιχων αλγεβρικών συστημάτων, καταγράφοντας το 1841 τους βασικούς κατ΄εκείνον κανόνες της άλγεβρας, όπως η αντιμεταθετικότητα για τις δύο πράξεις και η επιμεριστική του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Δηλώνει την πεποίθησή του ότι τα αληθινά μαθηματικά πρέπει να έχουν πραγματικό περιεχόμενο και πως η σύνδεση ανάμεσα στα σύμβολα δεν προκύπτει τόσο από τους νόμους των πράξεων – πχ. δεν είναι απαραίτητο ο πολλαπλασιασμός να προκύπτει από την πρόσθεση – αλλά πολύ περισσότερο μέσα από μια αριθμητική ερμηνεία. Κι εδώ τίθεται το ερώτημα, αν η ερμηνεία δε λειτουργεί τελικά έξω από το λογικό πλαίσιο των αξιωμάτων αλλά είναι αυτή που προσδίδει στο μαθηματικό σύστημα τη σημασία και σπουδαιότητά του.

Κανείς όμως από τους προαναφερθέντες δεν επιχείρησε να φτιάξει ένα σύστημα που δε θα ακολουθούσε τους ως τότε γνωστούς κανόνες των αριθμών και των πράξεων.

Οι θέσεις του Hamilton για την Άλγεβρα

Μέσα στο πλάισιο αυτό ο Hamilton επιθυμούσε να ορίσει μια άλγεβρα με φυσική σημασία. Θεωρούσε πως για τη στέρεη θεμελίωση της άλγεβρας, κατ΄ αντιστοιχία με τη γεωμετρία, απαιτούνται κάποιες διαισθητικές αρχές. Έτσι προσπάθησε να θεμελιώσει τους πραγματικούς αριθμούς στο αισθητήριο της αντίληψης που έχουν οι άνθρωποι για το χρόνο, αναδεικνύοντας την Άλγεβρα ως την *«Επιστήμη του Καθαρού χρόνου»* και ερμήνευσε τους αρνητικούς αριθμούς ως χρονικά βήματα επηρεασμένος από τον Καντ, όπως γενικά πιστεύεται. (Katz, 2009, σελ.734). Άλλωστε ο ίδιος στην εισαγωγή των *"Lectures on Quaternions"* (1853), το πρώτο από τα δύο βασικά του συγγράματα όπου αναπτύσσει τη θεωρία των τετρανίων, αναφέρεται στην εργασία του Kant "*Kritik der reinen Vernunft*" (*Κριτική του καθαρού Λόγου*) και πώς επηρεάστηκε από αυτή:



which is the object of geometry. In this manner I was led, many years ago, to regard Algebra as the SCIENCE OF PURE TIME: and an Essay,* containing my views respecting it as such, was published† in 1835. If I now reproduce a few of the opinions put

† I was encouraged to entertain and publish this view, by remembering some passages in Kant's Criticism of the Pure Reason, which appeared to justify the expectation that it should be *possible* to construct, *à priori*, a Science of Time,

Εικόνα 10

Η ανακάλυψη των τετρανίων δεν αναπτύχθηκε μόνο στη βάση της προσπάθειας της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών αλλά και στην ανάπτυξη της μελέτης των μιγαδικών που

καταξιώθηκαν μέσα από την εργασία του *"Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time"* το 1837. Η εργασία του αυτή αποτελεί ίσως τη μεγαλύτερη συνεισφορά του ακόμα και από αυτή των τετρανίων. Η παραπάνω εργασία διέπεται από τις αρχές της γεωμετρίας, καθώς στόχος αλλά και «αγωνία» του Hamilton ήταν η ανάπτυξη της *Επιστήμης της Άλγεβρας* με έναν τρόπο που να την καθιστά ισότιμη της Γεωμετρίας πάνω σε αρχές οι οποίες θα είναι σαφείς και αδιαμφισβήτητες. Όπως γράφει και ο ίδιος: *"as a Science, in some sense analogous to Geometry"*. Πιστεύει επίσης ότι η ανοχή στην υπάρχουσα Άλγεβρα δε βοηθά στην ανάπτυξη μιας ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ της Άλγεβρας, και συνεχίζει:

> *«... μιας Επιστήμης που, όπως αρμόζει, θα καλείται αυστηρή, καθαρή και ανεξάρτητη.* [Μια επιστήμη] *που θα συνάγεται από έγκυρους συλλογισμούς μέσα από τις δικές της διαισθητικές αρχές. Και συνεπώς όχι λιγότερο από ένα αντικείμενο a priori στοχασμού από αυτό της Γεωμετρίας ή λιγότερο διαφορετικό – με τη δική του σημασία – από τους κανόνες που μπορεί να διδάξει ή να χρησιμοποιήσει, και από τα "σημάδια" που θα μπορούσαν να εκφράσουν τη σημασία του.»*
>
> (Hamilton 1837, Wilkins 2000, σελ.3, στ. 24-28)

Αναφερόμενος στην αποδοχή που έχουν οι αρχές της γεωμετρίας, λέει:

> *"No candid and intelligent person can doubt the truth of the chief properties of Parallel Lines, as set forth by Euclid in his Elements, two thousand years ago"*
>
> (Hamilton 1837, Wilkins 2000, σελ.3, στ. 7-8)

Το *"Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples"* περιλαμβάνει 3 ενότητες:

- ☑ "General Introductory Remarks"
- ☑ "On Algebra as the Science of Pure Time", που γράφτηκε το 1835
- ☑ "Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples" που γράφτηκε το 1833

Το τελευταίο μέρος θεωρείται το σημαντικότερο όλων κατά γενική ομολογία, γιατί σε αυτό ο Hamilton παρουσιάζει τους μιγαδικούς ως διατεταγμένα ζεύγη σχεδόν όπως και σήμερα.

Ο ίδιος δηλώνει στην εισαγωγή ότι ο σκοπός της εργασίας είναι θεωρητικός. Διαχωρίζει την άλγεβρα σε τρία είδη (schools), χωρίς όμως να θεωρεί ότι αυτά είναι ξένα μεταξύ τους, και ανάλογα με τον σκοπό που εξυπηρετείται κάθε φορά:

- "Practical" χρήση ως εργαλείο εφαρμογής και έρευνας (ease of operation),
- "Philological" ως χρήση της γλώσσας που εκφράζει τους κανόνες και εναρμονίζει τις εκφράσεις, σύμφωνα με τους κανόνες της γλώσσας, με άλλες αλγεβρικές εκφράσεις (symmetry of expression)
- "Theoretical" ως συλλογισμός-στοχασμός που συνάγει τα συμπεράσματα και διαπιστώνει την αλήθεια των θεωρημάτων (contemplation - clearness of thought)

ή αλλιώς

- *a* ***Rule*** *to apply*
- *a* ***Formula*** *to write*
- *a* ***Theorem*** *to meditate.*

Γλώσσα και *Σκέψη* αλληλοαντιδρούν, ενώ *Θεωρία* και *Πράξη* βοηθούν η μια την άλλη.

Hamilton και Μιγαδικοί αριθμοί

Όπως προαναφέραμε, στο "*Theory of Conjugate Functions or Algebric Couples*" (1837) ο Hamilton εκφράζει τους μιγαδικούς ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών σχεδόν όπως και σήμερα, χωρίς να αναφέρεται καθόλου στον Warren ή στη γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών. Πιθανώς πίστευε ότι η γεωμετρική αναπαράσταση στοχεύει κυρίως στη διαίσθηση και δεν αποτελεί μια ικανοποιητική αιτιολόγηση και ερμηνεία τους. Μία θέση παρόμοια με αυτή των Gauss και Janos Bolyai (1802-1860), οι οποίοι είχαν απορρίψει τη γεωμετρική αιτιολόγηση των μιγαδικών γιατί είχαν ήδη ανακαλύψει τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες,

Αυτό που έκανε ο Hamilton ήταν να θεωρήσει ζεύγη πραγματικών αριθμών (α,β) και να ορίσει πράξεις μεταξύ τους που υπακούουν στους κανόνες των πράξεων του Σώματος των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια έδειξε ότι τα ζεύγη είναι αντίστοιχα των μιγαδικών μέσω της σχέσης α+βi. Εμφανίζεται έτσι ο εναλλακτικός και αφηρημένος τρόπος αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

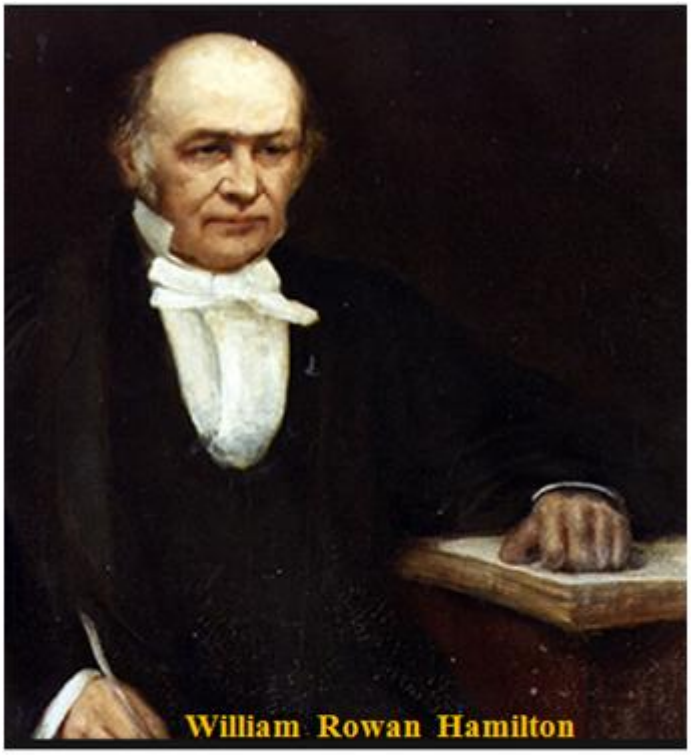
Στο τέλος ο Hamilton αναφέρει ότι μέσα από αυτή την εργασία μπόρεσε να δείξει ότι εκφράσεις, που φαίνονται να είναι απλώς συμβολικές και σχεδόν αδύνατο να ερμηνευτούν, μπορούν να αποκτήσουν πραγματική σημασία, αν αντιμετωπίσουμε την Άλγεβρα ως Επιστήμη του καθαρού χρόνου. Μέσα από τη μέθοδο των διατεταγμένων ζευγών ο Hamilton βεβαιώθηκε για τη νομιμότητα και αξιοπιστία των μιγαδικών και εξασφάλισε μια μέθοδο η οποία θα μπορούσε να επεκταθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να εξασφαλίζει τη νομιμότητα και σε μιγαδικούς «υψηλότερης τάξης». Για παράδειγμα, οι ιδιότητες της πρόσθεσης ζευγών μπορούν να ισχύσουν και για τα διανυσματικά αθροίσματα τριάδων, τετράδων κ.ο.κ. Το κρίσιμο ερώτημα ήταν το κατά πόσο θα μπορούσε να οριστεί με κατάλληλο τρόπο και ο πολλαπλασιασμός ν-άδων, ώστε το σύνολο που θα προέκυπτε, μαζί με την πρόσθεση ν-άδων να είναι Σώμα. Ταυτόχρονα ήλπιζε ότι θα ίσχυε σε αυτό το σύνολο και η ιδιότητα του γινομένου του μέτρου, δηλ. $\|zw\| = \|z\|\|w\|$. Κατ΄ αυτόν τον τρόπο ο Hamilton προετοιμάστηκε να ανακαλύψει και να αποδεχτεί τη νομιμότητα τετραδιάστατων μιγαδικών όπως τα τετράνια, χωρίς ωστόσο να υπάρχει διαθέσιμη γεωμετρική ερμηνεία.

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να πούμε ότι έως και τα μέσα του 19^{ου} αι. οι μιγαδικοί είχαν «κατοχυρώσει» τη θέση τους στο σύστημα των αριθμών, ενώ στη συνέχεια αποτέλεσαν το «μέσο» στην ανάπτυξη και εξέλιξη νέων θεωριών όπως Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό, Ελλειπτικές

Συναρτήσεις, Προβολική Γεωμετρία. Μετά το 1860, όταν οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες έγιναν γνωστές, η περαιτέρω ανάπτυξη των μιγαδικών βασίστηκε στη δυαδική τους αναπαράσταση, δηλαδή της αναπαράστασή τους μέσω διατεταγμένων ζευγών.

1.3. Η ανακάλυψη των Quaternions μέσω των απαιτήσεων του πολλαπλασιασμού

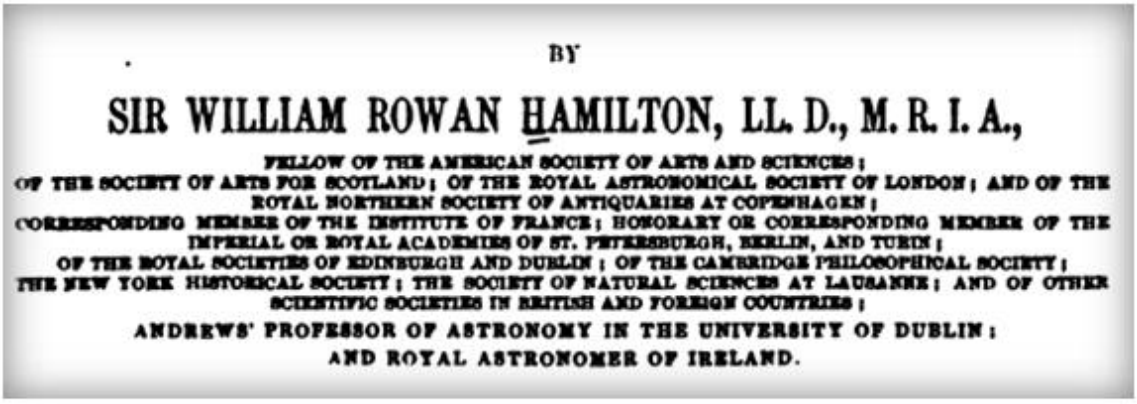
1.3.1. Η Θεωρία των *triplets*



Εικόνα 11

Ο Hamilton γεννήθηκε στο Δουβλίνο το 1805. Έως την ηλικία των 10 ετών γνώριζε πολλές σύγχρονες Ευρωπαϊκές γλώσσες καθώς και Λατινικά, Ελληνικά έως Περσικά, Αραβικά κ.α. Μελέτησε την Ευκλείδεια Γεωμετρία και στην αριθμητική εφάρμοσε μεθόδους δικής του επινόησης. Σπούδασε στο Trinity College στο Δουβλίνο. Η πρώτη του σημαντική εργασία ήταν στην οπτική. Του προσφέρθηκε η «υψηλή θέση» του Βασιλικού Αστρονόμου της Ιρλανδίας το 1827, μια θέση στην οποία παρέμεινε σε όλη την υπόλοιπη ζωή του. Για τη συνεισφορά του τόσο στα μαθηματικά όσο και στη Φυσική, ανακηρύχθηκε το 1865 ο πρώτος ξένος συνεργάτης και αντεπιστέλλον μέλος της νεοϊδρυθείσας Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής.

Όλοι οι τίτλοι του αναγράφονται στην εισαγωγή του βιβλίου του *Lectures* (1853):


BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES;
OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN;
CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN;
OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY;
THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES;
ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN;
AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.

Εικόνα 12

LL.D., M.R.I.A., FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES; OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN; CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN AND TURIN; OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY; THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES; ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN; AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND .

Από το 1830 ο Hamilton είχε ξεκινήσει μια προσπάθεια να ανακαλύψει τριάδες αντίστοιχες αυτών των δυάδων των μιγαδικών με φυσική ερμηνεία και ταυτόχρονα να κατασκευάσει μία νέα δομή αριθμών που θα ικανοποιούσαν όλες τις γνωστές ιδιότητες όπως οι μιγαδικοί. Αυτή η προσπάθεια παρέμεινε άκαρπη για 13 χρόνια. Αυτός ο προβληματισμός και η επιθυμία της επέκτασης, εκφράστηκε σε μία επιστολή προς τον Άγγλο μαθηματικό Augustus De Morgan (1806-1871), τον Μάιο του 1841 (2 χρόνια πριν ανακαλύψει τα τετράνια). Σε αυτή ο Hamilton έγραψε:

«*Όσον αφορά τις τριάδες (triplets) παραδέχομαι πως θα μου άρεσε κάποια στιγμή να είμαι σε θέση να έχω κάτι γύρω από αυτές που να αξίζει τον κόπο να δημοσιευτεί. Δεν μπόρεσα ποτέ να λύσω το πρόβλημα που μόλις υπέδειξες ως το πιο σημαντικό αυτού του κλάδου της άλγεβρας: να ορίσω δύο σύμβολα* Ω *και* ω, *ώστε η συμβολική εξίσωση* $a+b\Omega+c\omega = a_1+b_1\Omega+c_1\omega$ *να δίνει* $a = a_1$, $b = b_1$, *και* $c = c_1$. *Αλλά αν η άποψή μου για την άλγεβρα είναι η σωστή, θα πρέπει να είναι δυνατό με κάποιο τρόπο να θεσπίσουμε όχι μόνο τριάδες αλλά και πλειάδες (polyplets) ώστε κατά κάποιο τρόπο να ικανοποιούν τη συμβολική εξίσωση* $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu)$, *όπου το α δηλώνει έναν complex στοχασμό. Και* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ *υποδηλώνουν* ***ν*** *πραγματικούς αριθμούς ή με άλλα λόγια* ***ν χρονικές στιγμές*** *με τη χρονολογική έννοια των λέξεων.*»

R. P. Graves, *The Life of Sir William Rowan Hamilton*, Vol. 2., 1885, σελ.343

Εδώ βλέπουμε ότι ο Hamilton είναι έτοιμος να προχωρήσει σε διαστάσεις μεγαλύτερες από αυτές του τρισδιάστατου χώρου.

Αμέσως μετά αναλύουμε τη θεωρία των τριάδων, τις δυσκολίες που προέκυψαν και πώς αυτές οδήγησαν τελικά στη **«λύση του προβλήματος».**

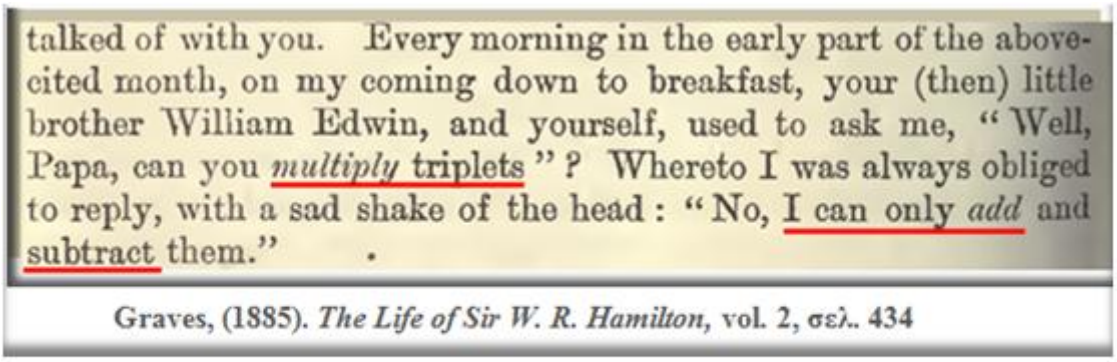
Το 1843 στη νέα και καθοριστική του προσπάθεια ο Hamilton γνώριζε πια το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα διενεργούσε την έρευνά του. Οι «νέοι» αριθμοί θα έπρεπε να ικανοποιούν όπως και οι μιγαδικοί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Την **προσεταιριστική** για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό
2. Την **αντιμεταθετική** ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό
3. Την **επιμεριστική** ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση
4. Τον **καλό ορισμό της πράξης της διαίρεσης**, δηλ. την ιδιότητα εκείνη που θα καθιστά τη διαίρεση σαφή και ξεκάθαρη πράξη: *δεδομένων δύο τέτοιων αριθμών* **z**,**w** *να μπορούμε πάντα να βρούμε ένα μοναδικό αριθμό* ***κ*** *της ίδιας μορφής, ώστε να ισχύει* $z\kappa = w$
5. Την ιδιότητα εκείνη που θα υπακούει στο **νόμο της νόρμας (moduli)**, δηλ. αν για δύο τριάδες $a_1+b_1i+c_1j$ και $a_2+b_2i+c_2j$ ισχύει $(a_1+ b_1i+c_1j)\cdot(a_2+b_2i+c_2j) = a_3+b_3i+c_3j$, τότε θα πρέπει να ισχύει η ισότητα $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=a_3^2+b_3^2+c_3^2$
6. Οι νέοι αυτοί αριθμοί θα πρέπει να έχουν μια **σημαίνουσα γεωμετρική ερμηνεία** με όρους του τρισδιάστατου χώρου.

Δηλαδή οι νέοι αριθμοί θα έπρεπε να «ακολουθούν» όλες τις ιδιότητες των μιγαδικών και την αντίστοιχη γεωμετρική τους ερμηνεία στο επίπεδο.

Σημείωση: Τα ***i, j, k*** είναι τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα, όπως τα γνωρίζουμε σήμερα, στους τρεις άξονες x, y και z, κάθετους ανά 2 στο χώρο με κοινή αρχή.

Ο ίδιος σε επιστολή του στο γιο του Archibald τον Αύγουστο του 1865, του θυμίζει το διάλογο που είχαν με τον ίδιο και τον μικρό του αδερφό, ότι δε μπορούσε να πολλαπλασιάσει τριάδες, μπορούσε μόνο να τις προσθέσει και να τις αφαιρέσει (εικ. 13). Κι αυτό γιατί, όπως θα δούμε παρακάτω, η διατήρηση της επιμεριστικής ιδιότητας και η «προαπαιτούμενη» συνθήκη, ο πολλαπλασιασμός τριάδων να δίνει ως αποτέλεσμα τριάδα, τον οδήγησαν σε αδιέξοδο.



talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me, "Well, Papa, can you *multiply* triplets"? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: "No, I can only *add* and subtract them."

Graves, (1885). *The Life of Sir W. R. Hamilton*, vol. 2, σελ.. 434

Εικόνα 13

Από τους αρνητικούς, στις δυάδες και τριάδες αριθμών

Στο έργο του *"Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples"* (1837), ο Hamilton εισάγει την έννοια του αριθμού θεωρώντας ότι υπάρχει ένα σύνολο διατεταγμένων χρονικών στιγμών, και με βάση αυτό κατασκευάζει τα σύνολα των ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια αναπτύσσει τη θεωρία ζευγών. Παραθέτουμε συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της θεωρίας:

- Η δυάδα (A,B) εκφράζει δύο στιγμές στο χρόνο, όπου η B μπορεί είτε να προηγείται, είτε να έπεται της A
- Ως χρονικό βήμα (*step*) a ορίζεται η διαφορά $B-A$ με a θετικό, όταν η στιγμή B έπεται της A, a αρνητικό, όταν η στιγμή B προηγείται της A και $a=0$, όταν οι στιγμές A,B συμπίπτουν
- Κάθε ζεύγος χρονικών βημάτων (a,b) ορίζεται ως η διαφορά δύο ζευγών χρονικών στιγμών (B_1-A_1, B_2-A_2)
- Οι θετικοί ακέραιοι ορίστηκαν ως πολλαπλάσια ενός βήματος a που έχει επιλεγεί ως μονάδα και οι αρνητικοί ως πολλαπλάσια του αντίθετου του μοναδιαίου βήματος a
- Ορίζει τους ρητούς αναμενόμενα, δηλ. αν το βήμα b ισούται με ν μοναδιαία βήματα a και το βήμα c ισούται με μ μοναδιαία βήματα a, τότε $b=\nu a$, $c=\mu a$ συνεπώς $c=\frac{\mu}{\nu}b$ ή ισοδύναμα $\frac{c}{b}=\frac{\mu}{\nu}$
- Αναφέρει και αποδεικνύει όλες τις γνωστές ιδιότητες των πράξεων, χωρίς όμως να τις ονομάζει
- Η προσπάθεια κατασκευής των πραγματικών από τους ρητούς χαρακτηρίζεται ανεπιτυχής αναλογικά με την αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind.
- Ο λόγος δύο ζευγών βημάτων $(\alpha a,\alpha b)$ και (a,b) ισούται με α, δηλαδή $\frac{(\alpha a,\alpha b)}{(a,b)}=\alpha=(\alpha,0)$ όπου α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός
- Συνέπεια της προηγούμενης σχέσης είναι οι ισότητες $(\alpha_1,0)(a_1,a_2)=(\alpha_1 a_1,\alpha_1 a_2)$ και $(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,0)=(\alpha_1 a_1,\alpha_2 a_1)$ και α_1 πραγματικός
- Ορίζει επίσης $\frac{(b_1,b_2)}{(a_1,0)}=\left(\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_1}\right)$ και $\frac{(\alpha_1 a_1,\alpha_2 a_1)}{(a_1,0)}=(\alpha_1,\alpha_2)$
- Επίσης εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις :

- $(\beta_1+\alpha_1,\beta_2+\alpha_2)(a_1,a_2)=(\beta_1,\beta_2)(a_1,a_2)+(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,a_2)$
- $(\alpha_1,\alpha_2)(b_1+a_1,b_2+a_2)=(\alpha_1,\alpha_2)(b_1,b_2)+(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,a_2)$

Ας δούμε τώρα πώς σε συμφωνία με τα παραπάνω ο Hamilton «χτίζει» το γινόμενο δυάδων, ώστε αντιστοιχίζοντας κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (α_1,α_2), με τον μιγαδικό $\alpha_1+\sqrt{-1}\cdot\alpha_2$, να προκύπτει το γνωστό γινόμενο μιγαδικών αριθμών $(\beta_1,\beta_2)(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1\alpha_1-\beta_2\alpha_2,\beta_2\alpha_1+\beta_1\alpha_2)$.

Αν (α_1,α_2) ζεύγος αριθμών και (a_1,a_2) ζεύγος βημάτων έχουμε:

$$(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,a_2)=\big[(\alpha_1,0)+(0,\alpha_2)\big](a_1,a_2)=(\alpha_1,0)(a_1,a_2)+(0,\alpha_2)(a_1,a_2)=$$

$$=(\alpha_1a_1,\alpha_1a_2)+(0,\alpha_2)\big[(a_1,0)+(0,a_2)\big]=(\alpha_1a_1,\alpha_1a_2)+(0,\alpha_2)(a_1,0)+(0,\alpha_2)(0,a_2)=$$

$$=(\alpha_1a_1,\alpha_1a_2)+(0,\alpha_2a_1)+(0,\alpha_2)(0,a_2)=(\alpha_1a_1,\alpha_1a_2+\alpha_2a_1)+(0,\alpha_2)(0,a_2).$$

Αν υποθέσουμε ότι $(0,\alpha_2)(0,a_2)=(c_1,c_2)$, για να ισχύουν οι ιδιότητες των πράξεων των δυάδων θα πρέπει τα c_1, c_2 να είναι ανάλογα του γινομένου α_2a_2. Άρα $(c_1,c_2)=(\gamma_1\alpha_2a_2,\gamma_2\alpha_2a_2)$ με γ_1, γ_2 ανεξάρτητα των α_2,a_2. Επομένως $(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,a_2)=$ $=(\alpha_1a_1,\alpha_1a_2+\alpha_2a_1)+(\gamma_1\alpha_2a_2,\gamma_2\alpha_2a_2)=$

$$=(\alpha_1a_1+\gamma_1\alpha_2a_2,\alpha_1a_2+\alpha_2a_1+\gamma_2\alpha_2a_2)$$

Επιλέγει το απλούστερο ζεύγος τιμών $\gamma_1=-1$ και $\gamma_2=0$, ώστε να ικανοποιείται η θεμελιώδης - όπως τη λέει - συνθήκη :

"….there shall be always one determined number-couple to express the ratio of any one determined step-couple to any other other, at least when the latter is not null".

Η συνθήκη αυτή αποτελεί τον ορισμό της διαίρεσης δύο ζευγών βημάτων. Πράγματι, έχοντας καταλήξει ότι για οποιαδήποτε επιλογή των γ_1 και γ_2, ο λόγος $\dfrac{(c,0)}{(0,c)}=\left(-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1},\dfrac{1}{\gamma_1}\right)$ με $\gamma_1<0$, «φαίνεται» ότι η απλούστερη επιλογή είναι η $\gamma_2=0$, $\gamma_1=-1$ οπότε $\dfrac{(c,0)}{(0,c)}=(0,-1)$.

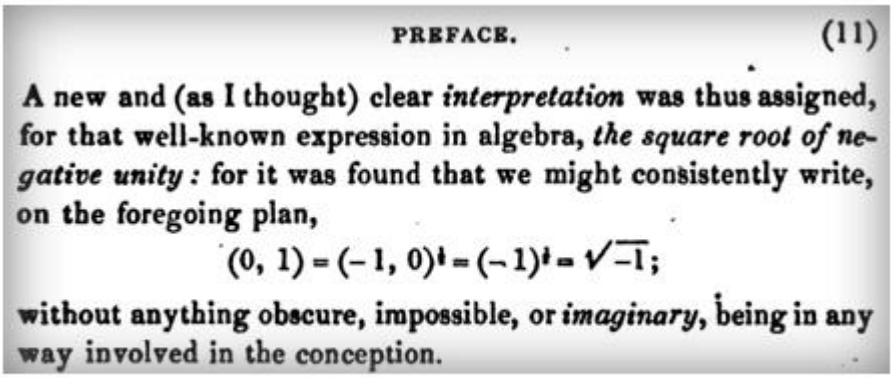
Έτσι το γινόμενο ενός γενικευμένου ζεύγους αριθμών (α_1,α_2) με το ζεύγος δυο βημάτων (a_1,a_2) δίνεται από την ισότητα: $(\alpha_1,\alpha_2)(a_1,a_2)=(\alpha_1a_1-\alpha_2a_2,\alpha_2a_1+\alpha_1a_2)$

Συνέπεια του τύπου του πολλαπλασιασμού δυάδων είναι η εδραίωση των τύπων:

- $(0,1)^2=(-1,0)=-1$ και $(0,1)=(-1,0)^{1/2}=(-1)^{1/2}=\sqrt{-1}$
- $(1,0)\,(a,b)=(a,b)$ και $(0,1)(a,b)=(-b,a)$

- (0,1)(-b,a) = (-a,-b) = (-1,0)(a,b)

Η σχέση (0,1) $=\sqrt{-1}$ είναι πολύ σημαντική καθώς για πρώτη φορά ο φανταστικός $\sqrt{-1}$ απεικονίζεται μέσω δυάδας. Αυτό το αντιλαμβάνεται και ο ίδιος καθώς στην εισαγωγή της εργασίας του *"Lectures On Quaternions"*(1853, σελ. 11) γράφει (εικ. 14):



PREFACE. (11)

A new and (as I thought) clear *interpretation* was thus assigned, for that well-known expression in algebra, *the square root of negative unity*: for it was found that we might consistently write, on the foregoing plan,

$$(0, 1) = (-1, 0)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1};$$

without anything obscure, impossible, or *imaginary*, being in any way involved in the conception.

Εικόνα 14

Το σύμβολο -1 δηλώνει την αρνητική μονάδα η οποία, όταν δρα ως παράγοντας, μεταβάλλει ένα απλό βήμα (+a) στο αντίθετό του (-a). Αυτό επιβεβαιώνει και την ισότητα $(-1)^2 = +1$. Αντίστοιχα το σύμβολο $\sqrt{-1}$ δρα πάνω σε ζεύγος βημάτων (a,b) αλλάζοντάς το σε ένα νέο ζεύγος το (-b, +a).

Ανεξαρτήτως των τιμών γ_1 και γ_2, ισχύουν:

- $\frac{(c,0)}{(c,0)} = (1,0), \qquad \frac{(0,c)}{(c,0)} = (0,1), \quad \frac{(0,c)}{(0,c)} = (1,0)$

Τέλος, ορίζει το πηλίκο δύο ζευγών βημάτων $\frac{(b_1,b_2)}{(a_1,a_2)} = \frac{(\beta_1 c,\beta_2 c)}{(\alpha_1 c,\alpha_2 c)} = \left(\frac{\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \frac{\beta_2\alpha_1-\beta_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right)$, το οποίο μεταφέρει και στους αριθμούς ($\frac{b_1}{c} = \beta_1$ πραγματικός, κοκ). Αφού έχει ορίσει και τις 4 πράξεις, ο Hamilton δηλώνει ότι, αν και όλες μαζί οι πράξεις δυάδων φαίνονται αυθαίρετες, τουλάχιστον δεν έρχονται σε αντίφαση μεταξύ τους ή με τις υπάρχουσες αρχές της Άλγεβρας.

Τριάδες αριθμών (1834-1835)

Στην εισαγωγή των *"Lectures On Quaternions"* (1853) ο Hamilton, αφού κάνει πάλι μια αναφορά στις δυάδες, προχωρά στις τριάδες στο χώρο με σκεπτικό ανάλογο των δυάδων. Περιγράφει την προσπάθεια, τις δυσκολίες που προέκυψαν, και πώς μέσα από αυτές οδηγήθηκε τελικά στην ανακάλυψη των τετρανίων. Αφού, λέει, μπορούμε να συγκρίνουμε δύο στιγμές A_1, A_2 με B_1, B_2 με τη δυάδα $(a_1,a_2) = (B_1,B_2) - (A_1,A_2) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2)$, γιατί να μη μπορούμε να συγκρίνουμε και

τρεις στιγμές B_1,B_2,B_3 με τρεις στιγμές $A_1,A_2,$ A_3 ή τουλάχιστον να το αντιληφθούμε κάπως έτσι. Έχουμε κατ΄ αυτόν τον τρόπο ένα συγκεκριμένο σύστημα τριάδων βημάτων *(step-triads)* διατακτικής συσχέτισης σύμφωνα με την εξίσωση $(B_1,B_2,B_3)-(A_1,A_2,A_3)=(B_1-A_1,B_2-A_2,B_3-A_3)=(a_1,a_2,a_3)$.

Σε υποσημείωση διευκρινίζεται από τον συγγραφέα ότι μιλά για βήματα που πραγματοποιούνται είτε στο χρόνο, είτε σε άξονα.

Η **πρόσθεση** και **αφαίρεση** τριάδων ορίστηκε όπως και στις δυάδες, δηλαδή όπως τη γνωρίζουμε σήμερα και προφανώς δεν αποτέλεσε πρόβλημα.

Ο **πολλαπλασιασμός** αριθμού με τριάδα βημάτων ορίστηκε κι αυτός κατά τα γνωστά:

$$\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)$$

Η **διαίρεση** τριάδων ορίστηκε στην περίπτωση των step-triads κατά περίπτωση ως εξής:.

1. Αν τα βήματα b_1,b_2,b_3 <u>είναι ανάλογα</u> των βημάτων a_1,a_2,a_3, τότε $(b_1,b_2,b_3)\div(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)\div(a_1,a_2,a_3)=\alpha$, α πραγματικός αριθμός
2. Στη γενική περίπτωση που τα βήματα b_1,b_2,b_3 <u>δεν είναι ανάλογα</u> των βημάτων a_1,a_2,a_3, τότε το πηλίκο θα πρέπει να ισούται με μια τριάδα αριθμών $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ τέτοια ώστε:
   I. Να ισχύουν οι ισοδύναμες σχέσεις $(b_1,b_2,b_3)\div(a_1,a_2,a_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και $(b_1,b_2,b_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(a_1,a_2,a_3)$
   II. Η τριάδα αριθμών $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ θα υπακούει σε συγκεκριμένους κανόνες, οι οποίοι <u>εξαρτώνται</u> από την αναλογία των έξι (6) βημάτων a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3.

Στην προσπάθεια να προσδιοριστεί το γινόμενο $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(a_1,a_2,a_3)$, προέκυψε η ανάγκη εισαγωγής τριών διακριτών και ανεξαρτήτων **μοναδιαίων βημάτων,** τα οποία δηλώνονται με τα σύμβολα I_1,I_2,I_3 και αντίστοιχα τριών **μοναδιαίων αριθμών** $x_1=(1,0,0)$, $x_2=(0,1,0)$, $x_3=(0,0,1)$, οι οποίοι «δρουν» ως ένα είδος αριστερού παράγοντα (*πολλαπλασιαστή-multiplier*).

Έτσι:

- κάθε **τριάδα βημάτων** (τριαδικό βήμα) μπορεί να τεθεί στη μορφή $rI_1+sI_2+tI_3$ όπου r,s,t είναι τρεις αριθμητικοί συντελεστές και
- κάθε **τριαδικός παράγοντας** (τριάδα αριθμών) (m,n,p) με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ένα τριαδικό βήμα μπορεί να τεθεί αναλογικά στη μορφή $mx_1+nx_2+px_3$.

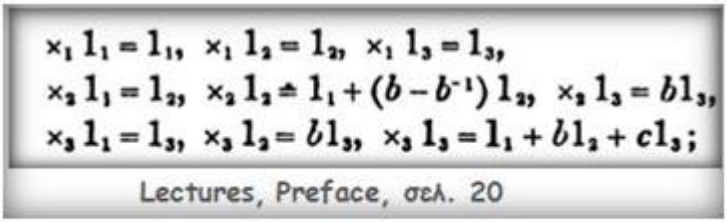
Για να **διατηρηθεί η επιμεριστική ιδιότητα** στον πολλαπλασιασμό τριάδων, έπρεπε να καθοριστεί η σημασία των 3X3=9 επιμέρους γινομένων $x_1I_1,\ x_1I_2,....,x_3I_3$ που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό $(mx_1+nx_2+px_3)(rI_1+sI_2+tI_3)=mrx_1I_1+msx_1I_2+....+ptx_3I_3$. Κάθε ένα από αυτά τα 9 γινόμενα θα πρέπει να θεωρηθεί ως τριαδικό βήμα (step-triad) ή τριάδες βημάτων (step-triplets) $x_1I_1=I_{1,1},\ x_1I_2=I_{2,1},\ ....,\ x_3I_2=I_{2,3},\ x_3I_3=I_{3,3}$, άρα θα έπρεπε κάθε ένα από αυτά να μπορεί να γραφεί στην τριωνυμική έκφραση $I_{f,g}=I_{f,g,1}I_1+I_{f,g,2}I_2+I_{f,g,3}I_3$. Προφανώς προκύπτουν συνολικά 3X9=27 σύμβολα της μορφής $I_{f,g,h}$, που θα πρέπει να παριστάνουν σταθερούς αριθμητικούς συντελεστές με προκαθορισμένες τιμές ή -1 ή 0, ώστε να εξασφαλιστεί ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού θα είναι μια απόλυτα καθορισμένη και σαφής τριάδα βημάτων (σε αντιστοιχία με τα γ_1,γ_2 που συναντήσαμε στον πολλαπλασιασμό δυάδων).

Αντίστροφα, εφόσον ο πολλαπλασιασμός ενός τριαδικού παράγοντα $(mx_1+nx_2+px_3)$ με ένα τριαδικό βήμα $(rI_1+sI_2+tI_3)$ πρέπει να έχει τη μορφή ενός νέου τριαδικού βήματος, θα ισχύει η ισότητα: $(mx_1+nx_2+px_3)(rI_1+sI_2+tI_3)=xI_1+yI_2+zI_3$, κι <u>εφόσον οι σταθερές είχαν καθοριστεί</u>. Από την ισότητα αυτή θα έπρεπε να προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα τριών αλγεβρικών εξισώσεων που θα συνέδεε τους συντελεστές m,n,p,r,s,t του πολλαπλασιαστέου step-triad και του πολλαπλασιαστή $(mx_1+nx_2+px_3)$ με τους συντελεστές x,y,z του γινομένου $xI_1+yI_2+zI_3$. δίνοντας άμεσα μια έκφραση για τους τελευταίους.

Αυτή ήταν η βασική θεωρία των τριάδων του Hamilton που προέκυψε στη διάρκεια των ετών 1834-1835. Ήταν όμως ξεκάθαρο ότι κατά την εφαρμογή τους όλα εξαρτώνταν από την επιλογή των 27 συντελεστών, οι οποίοι επιλέγονται αυθαίρετα, πριν προχωρήσουμε στη διαδικασία του πολλαπλασιασμού αλλά κατόπι θεωρούνται ως σταθεροί/καθορισμένοι. Θεώρησε φυσικό να δεχτεί την υπόθεση πως η αρχική αριθμητική μονάδα $x_1=(1,0,0)$ δεν επιδρά στο βήμα ή στην τριάδα στην οποία συμμετέχει όπως συμβαίνει και με την αντίστοιχη (1,0) στις δυάδες.

Θα ήταν επίσης επιθυμητό οι σταθερές να οριστούν έτσι, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $x_3x_2=x_2x_3$ σε συμφωνία με την άλγεβρα.

Άλλες προϋποθέσεις που θέτει για τα μοναδιαία τριαδικά βήματα I_i και τους μοναδιαίους τριαδικούς αριθμούς x_i με b,c αυθαίρετες σταθερές είναι (εικ. 15):

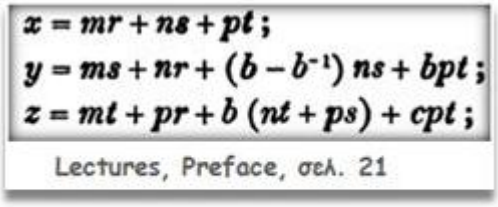


$$\times_1 1_1 = 1_1,\quad \times_1 1_2 = 1_2,\quad \times_1 1_3 = 1_3,$$
$$\times_2 1_1 = 1_2,\quad \times_2 1_2 = 1_1 + (b - b^{-1})\, 1_2,\quad \times_2 1_3 = b 1_3,$$
$$\times_3 1_1 = 1_3,\quad \times_3 1_2 = b 1_3,\quad \times_3 1_3 = 1_1 + b 1_2 + c 1_3;$$

Lectures, Preface, σελ. 20

Εικόνα 15

Οι προϋποθέσεις αυτές προκύπτουν μετά απο τον πολλαπλασιασμό πολλών συγκεκριμένων τριάδων. Το δε σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές του γινομένου δύο τριάδων συναρτήσει των συντελεστών των παραγόντων είναι (εικ. 16):



$$x = mr + ns + pt;$$
$$y = ms + nr + (b - b^{-1})\, ns + bpt;$$
$$z = mt + pr + b\,(nt + ps) + cpt;$$

Lectures, Preface, σελ. 21

Εικόνα 16

Στην προσπάθεια προσδιορισμού των 27 συμβόλων της μορφής $I_{f,g,h}$ που προείδαμε, καταλήγει να προσδιορίσει τιμές για 25 από αυτά όπως $\boxed{I_{321} = 0}$, $\boxed{I_{223} = 0}$, $\boxed{I_{321} = 0}$, $\boxed{I_{331} = 1}$, $\boxed{I_{322} = 0}$, $\boxed{I_{221} = 1}$

Υπήρξαν όμως δυσκολίες όπως:

- τα I_{323} και I_{333} φάνηκε να παραμένουν εντελώς αυθαίρετα
- Το παράδοξο, υπό ορισμένες συνθήκες (n=bm, r=-bs, t=0) ο πολ/σμός των τριάδων $(mx_1 + nx_2 + px_3)$ και $(rI_1 + sI_2 + tI_3)$ να δίνει $x = 0,\ y = 0$ και $z = 0$ άρα το γινόμενο $xI_1 + yI_2 + zI_3 = 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I = 0$ χωρίς κάποιος από τους παράγοντες να είναι ίσος με 0, κάτι αναπάντεχο και ασύμφωνο με τους γνωστούς κανόνες της άλγεβρας. Αυτό προήλθε πιθανότατα από την αποδοχή της σχέσης $x_3 x_2 = x_2 x_3$

Έτσι η προσπάθεια αυτή παρέμεινε ανολοκλήρωτη και ανεπιτυχής. Να σημειώσουμε ότι στην πρώτη προσπάθεια επέκτασης του γινομένου στο χώρο το 1831 από τον Hamilton, γίνεται μια απόπειρα κατασκευής του γινομένου στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας με συντεταγμένες στο χώρο και χρήση σφαιρικής τριγωνομετρίας, η οποία όμως δε διατηρούσε την επιμεριστική ιδιότητα γι αυτό και την εγκατέλειψε.

Ο Hamilton προσπάθησε να επεκτείνει τη θεωρία των τριάδων και σε ν-ιάδες στιγμών και βημάτων, τις οποίες ανέφερε και ως σύνολα ή συστήματα αριθμών. Διαχώρισε όμως τις νιάδες από τις τριάδες κι επικέντρωσε το ενδιαφέρον του στις τελευταίες. Στην προσπάθεια αυτή είχε τη στήριξη

και παρότρυνση του στενού του φίλου και καθηγητή *John T. Graves* με τον οποίο αντάλασσαν ιδέες, και μάλιστα ο Graves είχε διατυπώσει αρκετές γύρω από τις τριάδες.

Διαισθανόταν ότι οι τριάδες είχαν ιδιαίτερη αξία, γιατί πίστευε ότι μέσω αυτών θα μπορούσε να συνδεθεί ο αλγεβρικός λογισμός με τη γεωμετρία και μάλιστα με ένα νέο, χρήσιμο κι ενδιαφέροντα τρόπο. Συγκεκριμένα, αυτό θα γινόταν μέσα από κάποιο είδος επέκτασης (που ακόμα δεν είχε ανακαλυφθεί) στο χώρο των τριών διαστάσεων ή μέσω μιας μεθόδου κατασκευής ή αναπαράστασης, όπως με επιτυχία έχει εφαρμοστεί από τον Warren και άλλους με πράξεις στο επίπεδο, που έδωσε ένα είδος γεωμετρικής αναπαράστασης του φανταστικού συμβόλου της άλγεβρας ως μια δεύτερη μοναδιαία γραμμή (διάνυσμα) σε ορθή γωνία. (Hamilton, *Lectures*, 1853, preface σελ. 31)

1.3.2. Η ανακάλυψη των Quaternions

Νωρίτερα το 1843 ο Hamilton αποφασίζει να επαναλάβει το εγχείρημα της θεωρίας των τριάδων στον πολλαπλασιασμό γραμμών στο χώρο, αποφασισμένος μάλιστα να διατηρήσει την αρχή της επιμεριστικής και με βασική προϋπόθεση ότι ισχύει η αντιμετάθεση των παραγόντων. Εγκαταλείπει τα παλιά σύμβολα των triplets x_1, x_2, x_3 και υιοθετεί αντίστοιχα τα σύμβολα $1, i, j$ δηλώνοντας επανειλημμένα ότι αυτά δεν είναι δική του επινόηση.

Σε σχέση με τα σύμβολα αυτά αναφέρει στην εισαγωγή των *Lectures* (σελ. 38):

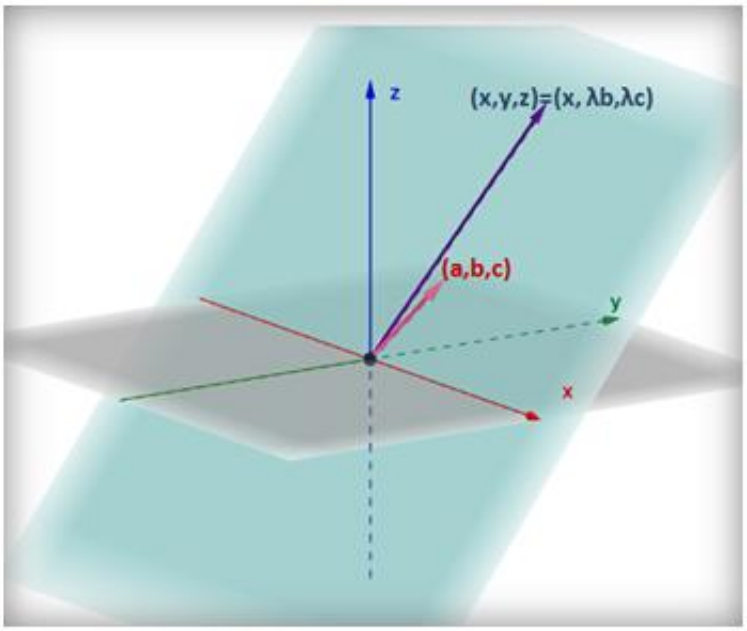
> *«Ο καθηγητής Graves εφάρμοσε ένα σύστημα δύο νέων φανταστικών **i** και **j** τέτοια, ώστε το **i** να προκαλεί περιστροφή (γενικά κωνική) 90° γύρω από τον άξονα **z,** ενώ το **j** να επιφέρει περιστροφή κατά ίση γωνία στο δικό του κατακόρυφο επίπεδο (δηλαδή αυτό της γραμμής και του **z**). ..... Αυτά τα σύμβολα **i** και **j,** ήταν το καθένα ένα είδος $4^{ης}$ τάξης ρίζας της μονάδας. Και το πρώτο [i] αλλά όχι το δεύτερο [j], έχει την ιδιότητα να επιδρά πάνω σε ένα άθροισμα, δρώντας σε κάθε του όρο χωριστά* [επιμεριστική ιδιότητα]. *Έτσι ο καθηγητής Graves επισήμανε ότι ο πολλαπλασιασμός τριάδων εδώ δεν είναι μια επιμεριστική πράξη, αλλά θα μπορούσε να είναι μια αντιμεταθετική πράξη »*

Με αυτούς τους συμβολισμούς, κάθε αριθμητική τριάδα x, y, z μπορεί να τεθεί στη μορφή $x + iy + jz$, τα δε x, y, z ερμηνεύονται ως οι 3 ορθογώνιες συντεταγμένες. Τέλος, κάθε τριάδα αναπαριστά μια γραμμή [διάνυσμα] στο χώρο. Σε αναλογία με τους μιγαδικούς, υπέθεσε ότι $i^2 = -1$. Στη συνέχεια θεωρώντας ότι και $j^2 = -1$ εξετάζει τις συνέπειες αυτής της εικασίας ερμηνεύοντάς την γεωμετρικά ως περιστροφή κατά 2 ορθές στο επίπεδο ***xz*** σε αντιστοιχία με το $\boldsymbol{i}^2$ που γεωμετρικά ερμηνεύεται ως περιστροφή κατά 2 ορθές στο επίπεδο ***xy.*** Αρχικά θεώρησε ότι

ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα μεταξύ των ***i, j*** δηλ. $i \cdot j = j \cdot i$ (σε συμφωνία με την άλγεβρα), οπότε το γινόμενο 2 τριάδων πήρε τη μορφή:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy).$$

Το γινόμενο ***ij*** θα έπρεπε κι αυτό, σύμφωνα με τη θεωρία των τριάδων, να έχει τη μορφή τριάδας, δηλ. $i \cdot j = \alpha + i\beta + j\gamma$ με α,β,γ σταθερές. Στόχος ήταν να οριστούν αυτές οι σταθερές με τέτοιο τρόπο, ώστε να οδηγούν σε κάποιες γεωμετρικές αναλογίες, δηλαδή να μπορούν να ερμηνευτούν γεωμετρικά..



Σχήμα 8

Αρχικά ο τέταρτος όρος $ij(bz + cy)$ φάνηκε περιττός, γιατί το αποτέλεσμα έπρεπε να είναι τριάδα. Μάλιστα για να διευκολυνθεί, θεωρεί την ειδική περίπτωση που οι δύο τριάδες-παράγοντες είναι συνεπίπεδοι με τον Ox, δηλαδή όταν b,c είναι ανάλογα των y,z, ή ισοδύναμα $bz - cy = 0$. Τότε οι συντεταγμένες της τέταρτης αναλόγου, [που έχει οριστεί όπως είδαμε (Wessel,Warren) ως το γινόμενο δύο διανυσμάτων στο επίπεδο], συνέπιπταν με τους συντελεστές των **+1, *i*, *j***, δηλαδή στην ειδική αυτή περίπτωση όπου ισχύει:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx),$$

η τριάδα $(ax - by - cz, ay + bx, az + cx)$ πληρεί τις προϋποθέσεις της τέταρτης αναλόγου των δύο παραγόντων $a + ib + jc$, $x + iy + jz$ και της θετικής μονάδας του άξονα Ox στο επίπεδό τους. Ο Hamilton προχωράει και στην απόδειξη του ισχυρισμού. Πράγματι, αν b,c είναι ανάλογα των y,z τότε $y = \lambda b$ και $z = \lambda c$ οπότε:

- $\|a + ib + jc\|^2 \cdot \|x + iy + jz\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2) =$

$= (ax - \lambda b^2 - \lambda c^2) + (\lambda a + x)^2 (b^2 + c^2) =$

$\|(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx)\|^2$

- Για την τριάδα-διάνυσμα
  - $a + ib + jc$, η εφαπτομένη της γωνίας φ_1 που σχηματίζει με τον άξονα Ox είναι $\tan\varphi_1 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} = \alpha$
  - ενώ για την $x + iy + jz = x + i\lambda b + j\lambda c$ αντίστοιχα παίρνουμε $\tan\varphi_2 = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} = \frac{\lambda\sqrt{b^2 + c^2}}{x} = \beta$ και
  - για την $(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx)$ αντίστοιχα έχουμε $\tan\varphi = \frac{\sqrt{(ay + bx)^2 + (az + cx)^2}}{ax - by - cz} = \frac{(\lambda a + x)\sqrt{b^2 + c^2}}{ax - \lambda(b^2 + c^2)} = \gamma$.

  Με τις κατάλληλες πράξεις διαπιστώνουμε ότι $\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = \gamma$, και με τη βοήθεια του τύπου $\arctan\alpha + \arctan\beta = \arctan\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$, έχουμε διαδοχικά:

  $$\varphi_1 + \varphi_2 = \arctan\alpha + \arctan\beta = \arctan\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = \arctan\gamma = \varphi$$

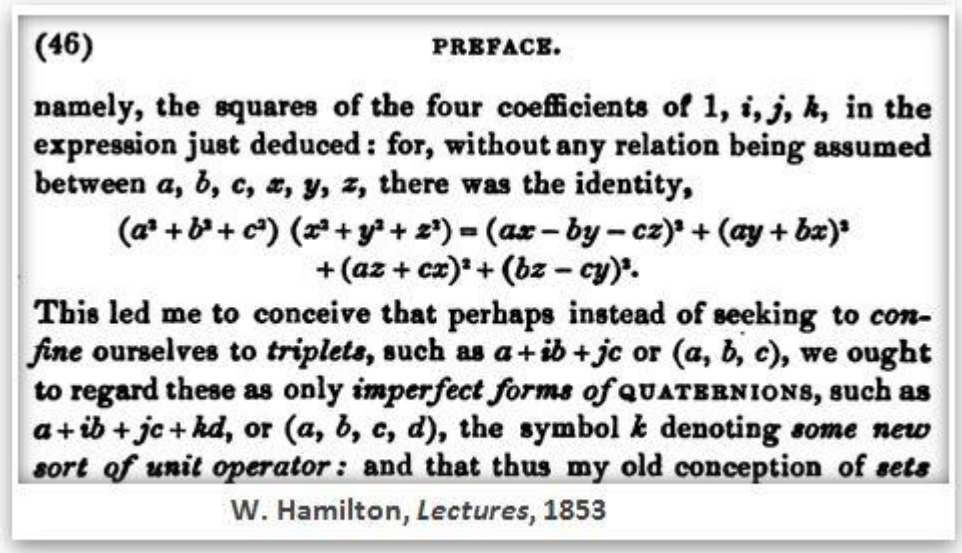
  Άρα η τριάδα-γινόμενο πληροί τις δύο προϋποθέσεις του μέτρου και της γωνίας κλίσης με τη θετική μονάδα.

Στη συγκεκριμένη λοιπόν περίπτωση το αποτελέσμα ήταν αποδεκτό και γεωμετρικά ερμηνεύσιμο, με συνέπεια ο Hamilton να υποθέσει πως ίσως το γινόμενο ***ij*** είναι μηδέν.

Κατόπιν όμως παρατηρεί ότι το γινόμενο $ij(bz + cy)$ ισούται με $ib \cdot jz + jc \cdot iy = ijbz + jicy$ (ουσιαστικά προέκυψε κατά την επιμεριστική από αυτό, θεωρώντας ότι ισχύει $ij = ji$). Το άθροισμα $ib \cdot jz + jc \cdot iy$ θα μπορούσε να εξαφανιστεί (=0), εάν υπέθετε ότι $ij = -ji$ και εφόσον ίσχυε η συνθήκη $bz - cy = 0$. Έτσι όρισε $ij = k$ και $ji = -k$, οπότε $ib \cdot jz + jc \cdot iy = ijbz + jicy = kbz - kcy = k(bz - cy)$, αφήνοντας προσωρινά την τιμή του γινομένου k απροσδιόριστη. Το γινόμενο λοιπόν των δύο τριάδων στη γενική περίπτωση (δηλ. χωρίς πλέον την υπόθεση της αναλογίας των b,c,y,z), θα δινόταν από την εξίσωση:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy)$$

Από την αρχή της προσπάθειας στόχος του ήταν να μπορέσει να βρει μια έκφραση της μορφής $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$, ώστε να ισχύει η διατήρηση της νόρμας στις τριάδες. Τώρα όμως ήταν η στιγμή, που παρατήρησε ότι το γινόμενο των αθροισμάτων των τετραγώνων των συντελεστών των δύο τριάδων $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$ (που εκφράζει το γινόμενο των τετραγώνων των μέτρων των δύο παραγόντων), μπορούσε να αναλυθεί σε άθροισμα τετραγώνων των τεσσάρων συντελεστών του αποτελέσματος, δηλαδή να πάρει τη μορφή: $\left(ax-by-cz\right)^2+\left(ay+bx\right)^2+\left(az+cx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2$ (εικ. 17):



(46) PREFACE.

namely, the squares of the four coefficients of 1, *i*, *j*, *k*, in the expression just deduced: for, without any relation being assumed between *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*, there was the identity,

$$(a^2+b^2+c^2)\,(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2.$$

This led me to conceive that perhaps instead of seeking to *confine* ourselves to *triplets*, such as $a+ib+jc$ or (a, b, c), we ought to regard these as only *imperfect forms of* QUATERNIONS, such as $a+ib+jc+kd$, or (a, b, c, d), the symbol k denoting *some new sort of unit operator*: and that thus my old conception of *sets*

W. Hamilton, *Lectures*, 1853

Εικόνα 17

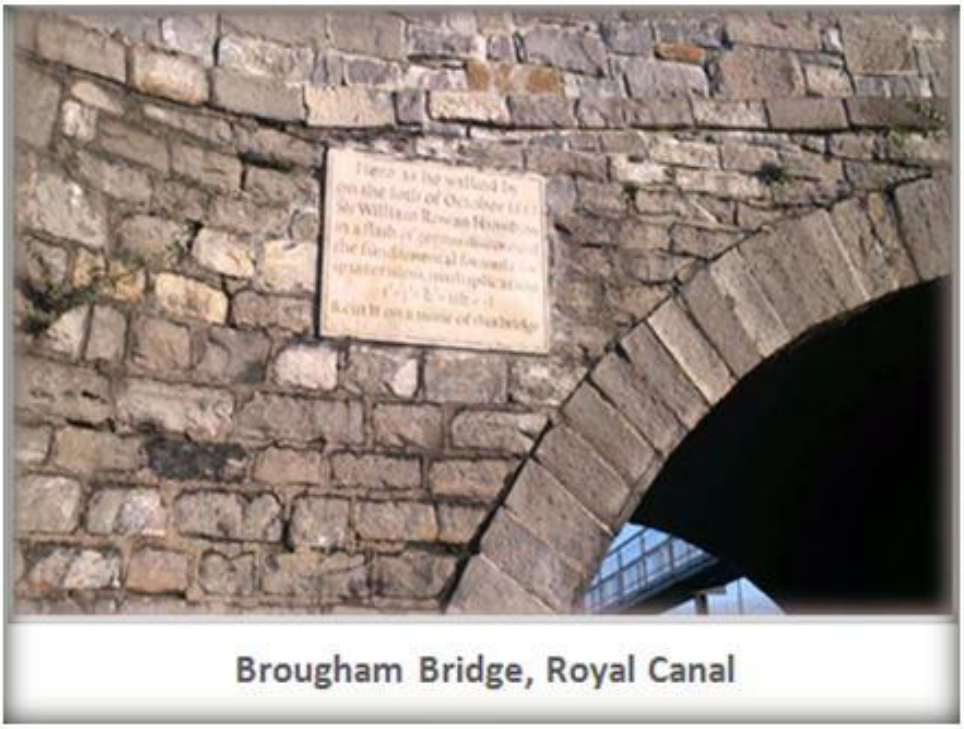
Έτσι προκύπτει η παρακάτω ισότητα για το γινόμενο των τετραγώνων των μέτρων δύο τριάδων:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(ax-by-cz\right)^2+\left(ay+bx\right)^2+\left(az+cx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2$$

Εδώ ο Hamilton κάνει την υπέρβαση ή θα λέγαμε είχε τη διορατικότητα να προτείνει να αντιμετωπίσουμε τις τριάδες ως ελλιπείς μορφές τετράδων που ονόμασε QUATERNIONS, δηλαδή αριθμούς της μορφής $a+ib+jc+kd$ ή (a,b,c,d), με το σύμβολο $\boldsymbol{k}$ να δηλώνει ένα νέο είδος μοναδιαίου τελεστή **(*unit operator*).**

Ο Hamilton ανακάλυψε τα τετράνια στις 16 Οκτωβρίου (Δευτέρα) του 1843, ενώ περπατούσε με τη γυναίκα του στο Βασιλικό κανάλι στη γέφυρα Brougham πηγαίνοντας στη Βασιλική Ιρλανδική

Ακαδημία όπου έπρεπε να παρίσταται για να προεδρεύσει. Σε γράμμα προς το γιό του Archibald, τον Αύγουστο του 1865, περιγράφει τη στιγμή αυτή της ανακάλυψης:

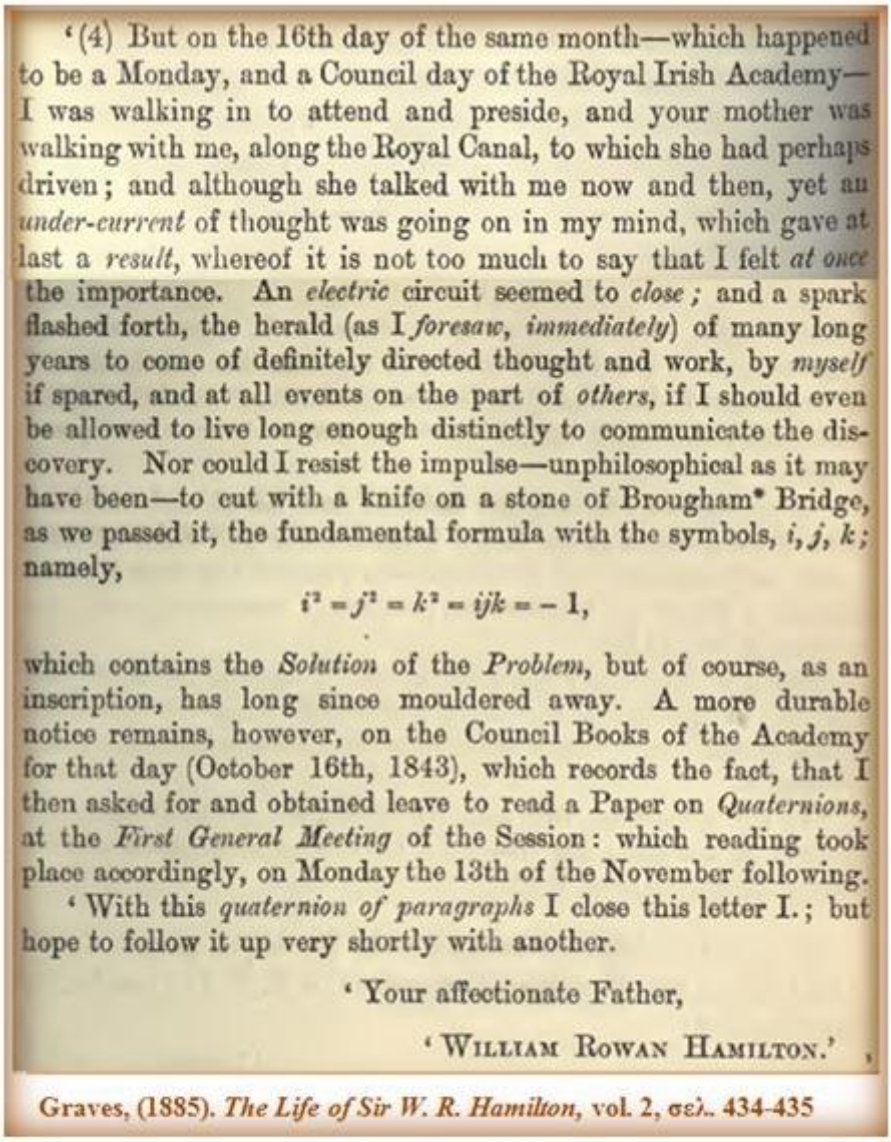


Brougham Bridge, Royal Canal

Εικόνα 18

«....*ένα υπόγειο ρεύμα σκέψης τριγυρνούσε στο μυαλό μου που τελικά έδωσε ένα αποτέλεσμα του οποίου δεν είναι υπερβολή να πω, ένιωσα αμέσως τη σπουδαιότητα..... ένα ηλεκτρικό κύκλωμα φάνηκε να κλείνει».*

Παραθέτουμε το αποσπασμα της αποστολής όπως έχει καταγραφεί από τον Robert Perceval Graves, συγγραφέα της ζωής του Hamilton (εικ. 19):



'(4) But on the 16th day of the same month—which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy—I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an *under-current* of thought was going on in my mind, which gave at last a *result*, whereof it is not too much to say that I felt *at once* the importance. An *electric* circuit seemed to *close*; and a spark flashed forth, the herald (as I *foresaw*, *immediately*) of many long years to come of definitely directed thought and work, by *myself* if spared, and at all events on the part of *others*, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse—unphilosophical as it may have been—to cut with a knife on a stone of Brougham* Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

which contains the *Solution* of the *Problem*, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on *Quaternions*, at the *First General Meeting* of the Session: which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.

'With this *quaternion of paragraphs* I close this letter I.; but hope to follow it up very shortly with another.

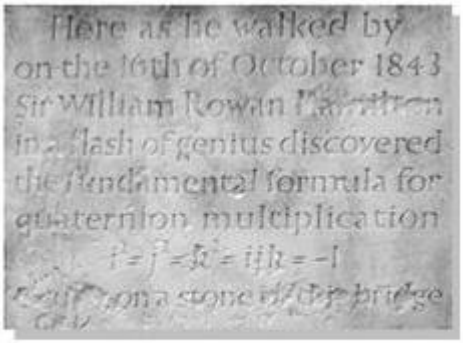
'Your affectionate Father,

'WILLIAM ROWAN HAMILTON.'

Graves, (1885). *The Life of Sir W. R. Hamilton*, vol. 2, σελ.. 434-435

Εικόνα 19

Ο ενθουσιασμός του ήταν τέτοιος που δεν άντεξε στην παρόρμηση και χάραξε με μαχαίρι σε μια πέτρα στη γέφυρα τη θεμελιώδη *εξίσωση* $\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$ (εικ. 20) που, όπως χαρακτηριστικά λέει, περιείχε τη λύση του προβλήματος. (Graves, 1885).

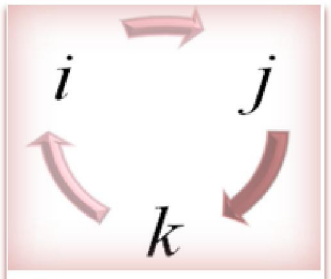


Εικόνα 20

Τα τετράνια θεωρούνται ως οι υπερμιγαδικοί αριθμοί (*hypercomplex*) της μορφής **a+b*i*+c*j*+d*k*,** όπου a,b,c,d είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ***i, j, k*** είναι μοναδιαία διανύσματα κατευθυνόμενα κατά μήκος των αξόνων x, y και z αντίστοιχα. Υπακούουν στους θεμελιώδεις νόμους:

$$ij = k,\quad ji = -k,\quad jk = i,\quad kj = -i,\quad ki = j,\quad ik = -j,\quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Το Διάγραμμα 1 δίνει ένα σχηματικό μνημονικό κανόνα:



Διάγραμμα 1

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Πίνακας 1

Ο Πίνακας 1 συνοψίζει τους θεμελιώδεις πολ/σμούς μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων ***i, j, k*** **.**

Έτσι το γινόμενο δύο τετρανίων ορίζεται ως εξής:

Αν $p = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ και $q = \alpha'+\beta' i+\gamma' j+\delta' k$, τότε

$$p \cdot q = pq = (\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)(\alpha'+\beta' i+\gamma' j+\delta' k) =$$
$$(\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta') + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\alpha\gamma' + \gamma\alpha' + \delta\beta' - \beta\delta')j + (\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta')k$$

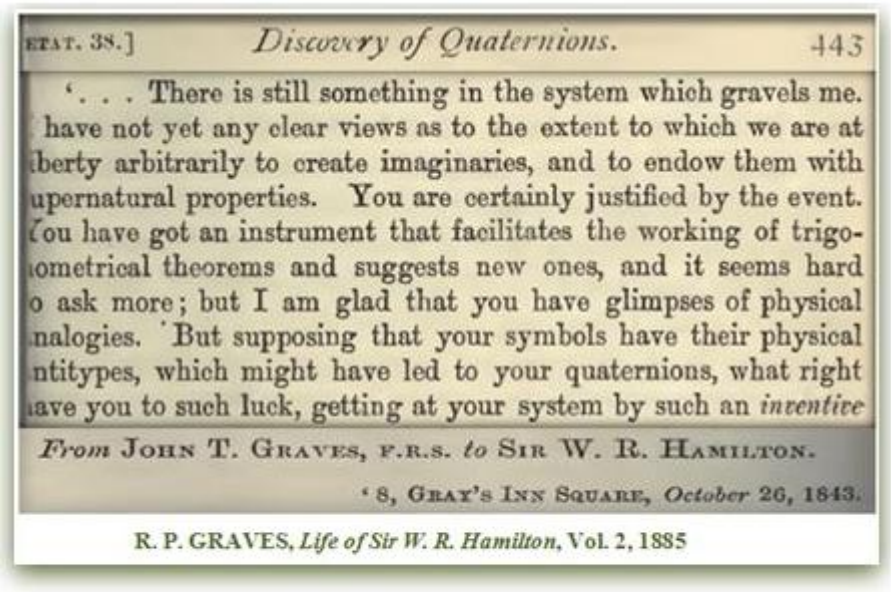
Η απομνημόνευση του τύπου του πολλαπλασιασμού είναι δύσκολη. Ένας σχετικά εύκολος τρόπος απομνημόνευσης είναι με τη βοήθεια ενός 4x4 πίνακα που σχηματίζεται με τους συντελεστές του

πρώτου τετρανίου ως εξής: $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ \delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ =A. Αν B= $\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας στήλη με στοιχεία τους συντελεστές του δεύτερου τετρανίου, τότε το γινόμενο AB είναι ένας πίνακας-στήλη 4x1, με στοιχεία τους συντελεστές του $p \cdot q$ (Buchmann, 2009, σελ. 4).

1.3.3. *“ Η εγκατάλειψη της αντιμεταθετικότητας”*: μια ριζοσπαστική ιδέα

Είναι σημαντικό ότι τα τετράνια διατηρούν την προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό, την ιδιότητα της *νόρμας* ή ***modulus*** (μέτρο διανύσματος) του πολλαπλασιασμού, και η διαίρεση είναι καλά ορισμένη. Η μη ικανοποίηση όμως της αντιμεταθετικής ιδιότητας στα τετράνια περιπλέκει τους υπολογισμούς με αυτά.

Η εγκατάλειψη της αντιμεταθετικότητας ήταν μια πραγματικά ριζοσπαστική επινόηση. Ο John Thomas Graves, Ιρλανδός νομικός και μαθηματικός, υποστηρικτής όπως είδαμε του Hamilton σε αυτή την προσπάθεια, ίσως ήταν ο πλέον έτοιμος να αποδεχτεί μια τέτοια νέα ιδέα. Παρ΄ όλα αυτά, σε επιστολή του προς τον Hamilton στις 26 Οκτωβρίου του 1843 δηλώνει τις αμφιβολίες του για το κατά πόσο δικαιούνται να ορίζουν αυθαίρετα «φανταστικούς» αριθμούς και να αποδίδουν σε αυτούς υπερφυσικές ιδιότητες (εικ. 21).


ETAT. 38.] *Discovery of Quaternions.* 443

‘. . . There is still something in the system which gravels me. I have not yet any clear views as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries, and to endow them with supernatural properties. You are certainly justified by the event. You have got an instrument that facilitates the working of trigonometrical theorems and suggests new ones, and it seems hard to ask more; but I am glad that you have glimpses of physical analogies. But supposing that your symbols have their physical intitypes, which might have led to your quaternions, what right have you to such luck, getting at your system by such an *inventive*

From JOHN T. GRAVES, F.R.S. *to* SIR W. R. HAMILTON.

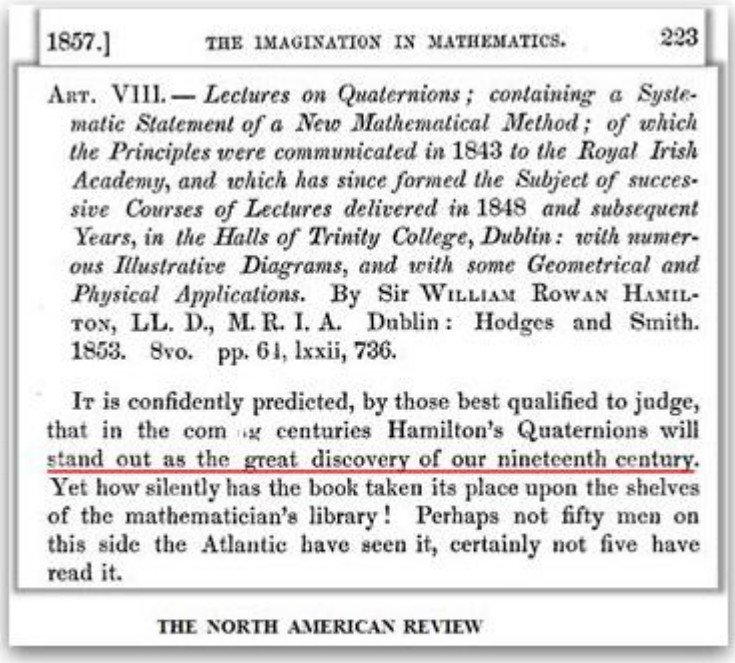
‘8, GRAY’S INN SQUARE, *October* 26, 1843.

R. P. GRAVES, *Life of Sir W. R. Hamilton*, Vol. 2, 1885

Εικόνα 21

Παραδέχεται όμως στη συνέχεια ότι το σύστημα των τετρανίων δικαιώνεται από το αποτέλεσμα, καθώς διευκολύνει στην εφαρμογή τριγωνομετρικών θεωρημάτων και υποδείχνει νέα θεωρήματα, όπως επίσης και από τη διαπίστωση ότι υπάρχουν «φυσικά αντίτυπα» που οδηγούν στα τετράνια.

Ο ίδιος ο Hamilton θεώρησε βέβαιο ότι ο λογισμός των τετρανίων θα βοηθούσε στην ανακάλυψη νέων θεωρημάτων της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Προχώρησε όμως περισσότερο και στη συνέχεια δηλώνει ότι οι αρχές των τετρανίων θα ήταν τόσο σημαντικές στον 19ο αι. όσο η ανακάλυψη της παραγώγου ως προς το χρόνο από τον Νεύτωνα, τον 17ο αι. και η ανακάλυψή τους ίσης αξίας με την ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Πράγματι τα τετράνια βρήκαν άμεσα εφαρμογή στη σφαιρική τριγωνομετρία, στην ηλεκτροδυναμική και στη θεωρίας της θερμότητας. Ο ίδιος παραπέμπει σε άρθρο του Αμερικάνικου Περιοδικού "North American Review" τον Ιούλιο του 1857 (vol. 85), πιθανότατα γραμμένο από τον Thomas Hill (Crowe, 1967), στο οποίο τα τετράνια αναφέρονται ως πιθανότατα την μεγαλύτερη ανακάλυψη του 19ου αι. (εικ. 22).



1857.] THE IMAGINATION IN MATHEMATICS. 223

ART. VIII. — *Lectures on Quaternions; containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method; of which the Principles were communicated in* 1843 *to the Royal Irish Academy, and which has since formed the Subject of successive Courses of Lectures delivered in* 1848 *and subsequent Years, in the Halls of Trinity College, Dublin: with numerous Illustrative Diagrams, and with some Geometrical and Physical Applications.* By Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A. Dublin: Hodges and Smith. 1853. 8vo. pp. 61, lxxii, 736.

IT is confidently predicted, by those best qualified to judge, that in the coming centuries Hamilton's Quaternions will stand out as the great discovery of our nineteenth century. Yet how silently has the book taken its place upon the shelves of the mathematician's library! Perhaps not fifty men on this side the Atlantic have seen it, certainly not five have read it.

THE NORTH AMERICAN REVIEW

Εικόνα 22

Άλλοι πάλι, όπως οι Augustus De Morgan και James Mac Cullagh, προβληματίστηκαν με αυτή τη ριζοσπαστική εγκατάλειψη της αντιμεταθετικότητας. Αυτό δηλώνει πως υπήρξε προβληματισμός στη μαθηματική κοινότητα, η οποία αρχικά αντέδρασε, αλλά στη συνέχεια τα αντιμετώπισε με περιέργεια και με πιο ανοιχτό μυαλό.

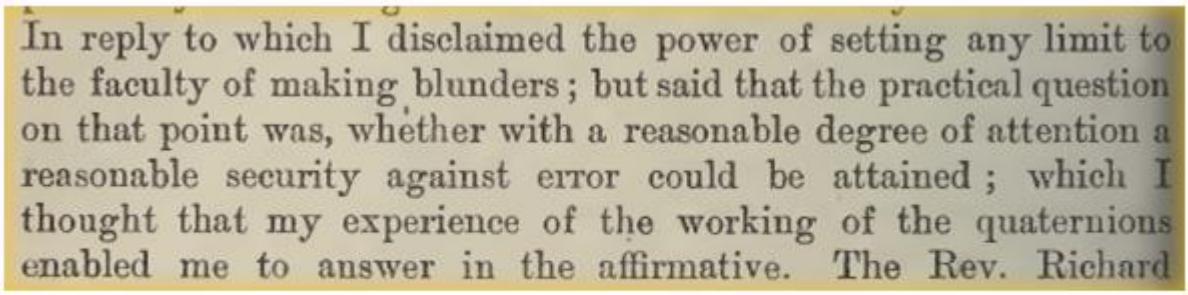
Το 1847 τα τετράνια ήταν πλέον αρκετά γνωστά. Τον Ιούλιο του ίδιου έτους ο Hamilton έλαβε μέρος στην ετήσια συνάντηση του British Scientific Association (Βρετανική Επιστημονική Ένωση). Στη συνάντηση αυτή, στην οποία παρευρισκόταν και ο George Peacock (1791-1858), προέκυψε συζήτηση που αφορούσε στην αξία των τετρανίων. Τη συζήτηση αυτή περιέγραψε ο ίδιος ο Hamilton σε επιστολή του στον R. P. Graves. Αναφέρεται στον Mr Jarrett, ο οποίος προέβαλε ενστάσεις και κυρίως επέμεινε στο ερώτημα πόσο πιθανό είναι να γίνουν λάθη (*blunders*) κατά τη χρήση του νέου αυτού λογισμού των τετρανίων. Απαντώντας ο Hamilton δηλώνει:

«Σε απάντηση αυτού, απέρριψα τη δυνατότητα να θέτουμε οποιαδήποτε όρια στο να κανουμε λάθη [γκάφες]*· είπα όμως ότι πρακτικά η ερώτηση σε αυτό το σημείο είναι εάν με έναν εύλογο-ικανοποιητικό βαθμό προσοχής, μπορεί να επιτευχθεί μια ικανοποιητική ασφάλεια κατά των*

λαθών· κάτι στο οποίο θεώρησα ότι η εμπειρία μου δουλεύοντας στα τετράνια με βοήθησε να απαντήσω καταφατικά.»

(R.P.Graves, σελ. 586, Life of sir W.H., Vol.2, 1885)

Παραθέτουμε το πρωτότυπο κείμενο μέσα από το βιβλίο (εικ. 23):


In reply to which I disclaimed the power of setting any limit to the faculty of making blunders; but said that the practical question on that point was, whether with a reasonable degree of attention a reasonable security against error could be attained; which I thought that my experience of the working of the quaternions enabled me to answer in the affirmative. The Rev. Richard

Εικόνα 23

Εδώ ο Hamilton υπερασπίζεται τη θέση του για τη θεωρία των τετρανίων με το επιχείρημα ότι παρέχει μία - σε λογικά πλαίσια - ασφάλεια ως προς την παραγωγή λάθους.

Η ιστορική ανάλυση δείχνει ότι η αποδοχή μιας καινοτόμου και επαναστατικής ιδέας απαιτεί πολύ χρόνο. Και το καίριο ερώτημα είναι από ποιούς παράγοντες εξαρτάται ο χρόνος αυτός. Τρεις φαίνεται να είναι οι καθοριστικοί παράγοντες που απαντούν στο ερώτημα:

- Η αποδοχή και προώθηση των ιδεών ενός ατόμου εξαρτάται άμεσα από τη **φήμη** του και την κοινωνική του θέση. Ο Hamilton είχε εξαίρετη φήμη και αυτό βοήθησε στη διάδοση των τετρανίων. Παρ΄ όλες τις αντικρουόμενες απόψεις που διατυπώθηκαν για τα τετράνια, το 1848 ο Hamilton παρασημοφορήθηκε για την ανακάλυψή του αυτή ταυτόχρονα από τη Βασιλική Ιρλανδική Ακαδημία και τη Royal Society του Εδιμβούργου.

  Κάτι αντίστοιχο συνέβη και με τους μιγαδικούς αριθμούς. Η εξέχουσα θέση του Gauss ως κορυφαίου μαθηματικού υπήρξε μια από τις αιτίες που οι μιγαδικοί έγιναν γρήγορα και ευρέως γνωστοί.
- Εξαρτάται σημαντικά από το κατά πόσο **προετοιμασμένη** είναι η επιστημονική κοινότητα να αποδεχθεί τη νέα έννοια, κάτι που με τη σειρά του εξαρτάται από το πλήθος των μελετών και δημοσιεύσεων πάνω στην νέα έννοια. Οι εργασίες όλων όσων προαναφέραμε (Wessel, Argand, Buee, Servois, Francais), που περιέγραφαν τις προσπάθειες επέκτασης στον χώρο, προετοίμασαν κατάλληλα την ιδέα για τη «σύλληψη» των τετρανίων. (Wessel, Gauss, Argand, Mourey, Buee, Servois, Francais και άλλων όπως του John Graves).

- Όταν η **αναγκαιότητα** της μεθόδου αναδεικνύεται ή αναγνωρίζεται για πρώτη φορά, όπως Copernicus (Ηλιοκεντρικό μοντέλο), Galileo (απέδειξε την ισχύ της ηλιοκεντρικής θεωρίας), Lavoisier, Lobachevski (Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες), Einstein. Στην περίπτωση των τετρανίων, η εργασίες των Giusto Bellavitis, August Mobius, Hermann Grassmann, και το γεγονός ότι οι Wessel, Gauss, Argand, Servois, Francais, Mourey, John T. Graves, De Morgan και Hamilton είχαν όλοι και σχεδόν ανεξάρτητα ερευνήσει για τριάδες, δείχνει ότι υπήρχε μια πραγματική ανάγκη για ένα τέτοιο σύστημα όπως των τετρανίων.

Εδώ αναδεικνύεται ένα ακόμα πιο κρίσιμο ερώτημα, αν η νέα αυτή ιδέα ανατρέπει τις προηγούμενες ή μπορεί κατά κάποια τρόπο να ενσωματωθεί σε αυτές και να αποτελέσει επέκτασή τους.

Ο Maxwell στο *"Maxwell´s address to the Mathematical and Physical sections of the British Association"*, Liverpool, September 15, (1870), διατυπώνει ένα αντίστροφο φιλοσοφικό ερώτημα για τις φυσικές επιστήμες:

> *"Προκύπτει ένα σημαντικό φιλοσοφικό ερώτημα να καθορίσουμε σε ποιό βαθμό η εφαρμοσιμότητα των παλαιότερων ιδεών στο νέο αντικείμενο, μπορεί να θεωρηθεί ως απόδειξη ότι τα νέα φαινόμενα παρομοιάζουν ως προς τη φύση τους με τα παλιά".*

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο G. Bellavitis (1803-1880) εισάγει την έννοια των ισοδύναμων γραμμών. Ο A. Mobius (1790-1868) είναι ο πρώτος που εισάγει την έννοια του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος. Ο H. Grassmann (1809-1877) εισήγαγε τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης και της βάσης ενός διανυσματικού χώρου.

1.4. Η άλγεβρα των Quaternions

1.4.1. Το σύνολο των Quaternions: Διαιρετικός Δακτύλιος

Πολλαπλασιασμός τετρανίων και αντιμεταθετικότητα

Γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ αντιστοιχίζεται στο διατεταγμένο ζεύγος $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, εφοδιασμένο με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελεί σώμα επομένως:

- Το σύνολο $(\mathbb{C},+)$ είναι αβελιανή προσθετική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το ζεύγος (0,0)
- Το σύνολο $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό όπου

- ❖ $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta,\beta\gamma+\alpha\delta)$
- ❖ κάθε ζεύγος $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ έχει αντίστροφο το ζεύγος $\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$ με $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\|\alpha+\beta i\|=\|z\|$ το μέτρο του μιγαδικού.

➢ ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

Στους μιγαδικούς ισχύουν επίσης:

✓ η ιδιότητα της **νόρμας** : $\|z_1\cdot z_2\|=\|z_1\|\cdot\|z_2\|$ με $\|z\|$ το μέτρο του μιγαδικού z. Με τη νόρμα θα ασχοληθούμε στην παράγραφο **2.1.**

✓ γιά κάθε μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$, ορίζεται μονοσήμαντα ο συζυγής του $\overline{z}=\alpha-\beta i$ και ισχύει $z\cdot\overline{z}=\alpha^2+\beta^2=\|z\|^2$.

Είδαμε στην παράγραφο **1.3.2.** ότι ο Hamilton αναγκάστηκε να «παραιτηθεί» από τις τριάδες και να υιοθετήσει τις τετράδες προκειμένου να διατηρήσει την ιδιότητα του modulus (ή νόρμας), την οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Στην ίδια προσπάθεια όμως αναγκάστηκε να εγκαταλείψει την **αντιμεταθετική** ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό. Αυτή ήταν και η μοναδική ιδιότητα στην οποία διαφοροποιήθηκε η αλγεβρική δομή των Quaternions σε σχέση με αυτή των Μιγαδικών.

Αρχικά αναφέρουμε ότι η ισότητα δύο τετρανίων ορίζεται όπως και στους μιγαδικούς:

- μέσω της ισότητας των αντίστοιχων συνετελεστών, δηλ. αν $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, $q'=\alpha'+\beta' i+\gamma' j+\delta' k$ με $q=q'$, τότε $\alpha=\alpha',\beta=\beta',\gamma=\gamma',\delta=\delta'$ ή
- ως ισότητα τετράδων, δηλ. αν $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ τότε $\alpha=\alpha',\beta=\beta',\gamma=\gamma',\delta=\delta'$

Είδαμε ότι δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό των τετρανίων, αφού για παράδειγμα είναι: $ij=(0,1,0,0)(0,0,1,0)=(0,0,0,1)=k\neq ji=-k=(0,0,0,-1)$.

Υπο ποιες προϋποθέσεις όμως θα μπορούσε να ισχύσει;

Έστω q,q_1 δύο τετράνια με $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ και $q_1=\alpha_1+\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k$. Τότε

$q\cdot q_1=(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)(\alpha_1+\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k)=$
$(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1-\delta\delta_1)+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1+\gamma\delta_1-\delta\gamma_1)i+(\alpha\gamma_1+\gamma\alpha_1+\delta\beta_1-\beta\delta_1)j+(\alpha\delta_1+\delta\alpha_1+\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)k$, ενώ

$q_1\cdot q=(\alpha_1+\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k)(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)=$
$(\alpha_1\alpha-\beta_1\beta-\gamma_1\gamma-\delta_1\delta)+(\alpha_1\beta+\beta_1\alpha+\gamma_1\delta-\delta_1\gamma)i+(\alpha_1\gamma+\gamma_1\alpha+\delta_1\beta-\beta_1\delta)j+(\alpha_1\delta+\delta_1\alpha+\beta_1\gamma-\gamma_1\beta)k$.

Θα πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι. Από τον ορισμό λοιπόν της ισότητας τετρανίων καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} \gamma\delta_1 = \delta\gamma_1 \\ \beta_1\delta = \delta_1\beta \\ \beta\gamma_1 = \gamma\beta_1 \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση που οι συντελεστές είναι μη μηδενικοί, τα διανύσματα $\beta i+\gamma j+\delta k$ και $\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k$ είναι συγγραμμικά ή παράλληλα.

Διαιρετικός Δακτύλιος

Να θυμίσουμε ότι Δακτύλιος $(R, \oplus, *)$ είναι ένα μη κενό σύνολο R εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $\oplus$ και $(*)$, ώστε:

- Η $\oplus: R\times R \to R$ και η δομή $(R, \oplus)$ είναι αβελιανή (μεταθετική) ομάδα
- Η $*: R\times R \to R$ και το ζεύγος $(R, *)$ είναι μονοειδές , δηλ.
  - κλειστό ως προς την πράξη $(*)$
  - ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα
  - υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο
- Η πράξη $(*)$ επιμερίζει την πράξη $(\oplus)$, δηλ.:
  - $a * (b + c) = a*b + a*c$
  - $(b + c) * d = b*d + c*d$

Εφόσον η πράξη $(*)$ είναι αντιμεταθετική, ο Δακτύλιος λέγεται **Αντιμεταθετικός Δακτύλιος,** όπως π.χ. τα γνωστά σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ εφοδιασμένα με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Παραδείγματα **μη αντιμεταθετικού δακτυλίου** είναι:

- το σύνολο F_A στο σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ των συναρτήσεων με μοναδιαίο στοιχείο τη σταθερή συνάρτηση f(x)=1 και ειδική περίπτωση τον δακτύλιο των πολυωνύμων .
- το σύνολο $M_\nu(\mathbb{C})$ των τετραγωνικών νxν πινάκων με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{C}$ και εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Τότε, γενικά ισχύει $AB\neq BA$ και ο πίνακας AB-BA ονομάζεται *πίνακας μεταθέτης (commutator)* ή *αγκύλη Lie (Lie bracket)* και συμβολίζεται [A,B]. Μια χαρακτηριστική ιδιότητα αυτών των πινάκων είναι η *ταυτότητα του Jacobi*: $[A,[B,\Gamma]]+[B,[\Gamma,A]]+[\Gamma,[A,B]]=0$.

Διαιρετικός δακτύλιος ή **στρεβλό σώμα (division ring** ή **skew field)** ονομάζεται ο δακτύλιος του οποίου κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει αντίστροφο, δεν ισχύει όμως η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό ή γενικότερα για τη δεύτερη πράξη ($*$).
Ένας Αντιμεταθετικός Δακτύλιος είναι **Σώμα** όταν η δομή $(R, *)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Ιδιότητες στο σύνολο $\mathbb{H}$ των τετρανίων

Να θυμίσουμε ότι το $\mathbb{R}^4$ είναι Ευκλείδιος Διανυσματικός Χώρος, εφοδιασμένος με την πράξη της πρόσθεσης $(x_1,x_2,x_3,x_4) + (y_1,y_2,y_3,y_4) = (x_1+ y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4)$, δηλ.:

- Το σύνολο $\left(\mathbb{R}^4,+\right)$ είναι αβελιανή ομάδα
- Το σύνολο $\left(\mathbb{R}^4,\cdot\right)$ με $(\cdot)$ εξωτερική πράξη από το $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ και συντελεστές από το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, γιά κάθε $x,y\in\mathbb{R}^4$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, έχει τις ιδιότητες:
  1. $\lambda\cdot\left(x+y\right)=\lambda x+\lambda y$
  2. $\left(\lambda+\mu\right)\cdot x=\lambda x+\mu x$
  3. $\left(\lambda\cdot\mu\right)\cdot x=\lambda\cdot\left(\mu\cdot x\right)$
  4. $1\cdot x=x$ με $1\in\mathbb{R}$
- Οι τετρανικές μονάδες **+1, *i, j, k*** ορίζονται αντίστοιχα ως οι τετράδες (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) και (0,0,0,1) και αποτελούν μια κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

Κάθε τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^4$, δηλαδή ως διατεταγμένη τετράδα $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Και αντίστροφα, αν έχω μια τετράδα $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$, τότε:
$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \alpha\cdot(1,0,0,0) + \beta\cdot(0,1,0,0) + \gamma\cdot(0,0,1,0) + \delta\cdot(0,0,0,1) = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k = q$.
Επίση για κάθε τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ και σε αντιστοιχία με τους μιγαδικούς, θεωρούμε $R(q)=\alpha$ το **πραγματικό** μέρος του τετρανίου και $P(q)=\beta i+\gamma j+\delta k$ το **φανταστικό** μέρος του τετρανίου. Έτσι κάθε τετράνιο δίνεται από την ισότητα: $\boxed{q=R(q)+P(q)}$.

Όταν $R(q)=0$, τότε το τετράνιο χαρακτηρίζεται **καθαρό** τετράνιο και παίρνει τη μορφή $q=\beta i+\gamma j+\delta k$. Το σύνολο των καθαρών τετρανίων αποτελεί **υπόχωρο** του $\mathbb{R}^3$.

Για κάθε τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, σε αντιστοιχία με τους μιγαδικούς, ορίζουμε ως το **συζυγές** αυτού το $\bar{q}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$ ή $\boxed{\bar{q}=R(q)-P(q)}$.

Ισχύουν οι παρακάτωιδιότητες με τετριμμένες αποδείξεις:

- $\bar{\bar{q}}=q$
- $\overline{p+q}=\bar{p}+\bar{q}$
- $\overline{p\cdot q}=\bar{p}\cdot\bar{q}$
- $q=\bar{q}\Leftrightarrow q\in\mathbb{R}\Leftrightarrow q^2\in\mathbb{R}_+$
- $q=-\bar{q}\Leftrightarrow q\in\mathbb{R}^3\Leftrightarrow q^2\in\mathbb{R}_-$
- $\|q\|=\|\bar{q}\|$
- $q\cdot\bar{q}=\bar{q}\cdot q$ δηλ. η αντιμεταθετικότητα διατηρείται στην περίπτωση των συζυγών τετρανίων.

  Η απόδειξη μπορεί να στηριχτεί και στην προηγούμενη συνθήκη της αντιμεταθετικότητας, αφού $\beta_1=-\beta$ $\gamma_1=-\gamma$ και $\delta_1=-\delta$. Άρα οι συντελεστές ικανοποιούν το Σύστημα $\begin{cases}\gamma\delta_1=\delta\gamma_1\\ \beta_1\delta=\delta_1\beta\\ \beta\gamma_1=\gamma\beta_1\end{cases}$.

Τέλος το **μέτρο** ή **νόρμα** ενός τετρανίου $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, ορίζεται ως $\boxed{\|q\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}$.

Θα αποδείξουμε την ιδιότητα $\|q\|^2=q\cdot\bar{q}=\bar{q}\cdot q$

Απόδειξη: $\|q\|^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, ενώ $\bar{q}\cdot q=q\cdot\bar{q}=(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)\ (\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k)=$

$=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)+\left(-\alpha\beta+\beta\alpha-\gamma\delta+\delta\gamma\right)i+\left(-\alpha\gamma+\gamma\alpha-\delta\beta+\beta\delta\right)j+\left(-\alpha\delta+\delta\alpha-\beta\gamma+\gamma\beta\right)k=$

$=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)+0i+0j+0k=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\|q\|^2$.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών εμπεριέχεται στο σύνολο $\mathbb{H}$ των τετρανίων. Πράγματι, αν αντιστοιχίσουμε κάθε $x \in \mathbb{R}$ στην τετράδα (x,0,0,0) που είναι μια προφανώς 1-1 απεικόνιση, τότε οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι όπως ορίστηκαν στο σύνολο των τετρανίων:

- x+y = (x,0,0,0) + (y,0,0,0) = (x+y,0,0,0)
- x·y = (x,0,0,0) ·(y,0,0,0) = (xy,0,0,0)

ακολουθούν τους κανόνες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

Το ίδιο συμβαίνει και με το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών, αντιστοιχίζοντας κάθε μιγαδικό $\alpha+\beta i$ =(α,β) στο τετράνιο $\alpha+\beta i+0j+0k$ =(α,β,0,0), με α,β πραγματικούς αριθμούς. Τότε η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός έτσι όπως ορίστηκαν στο σύνολο των τετρανίων, «σέβονται» τις γνωστές πράξεις των μιγαδικών. Πράγματι:

- (α,β)+(γ,δ)→(α,β,0,0)+(γ,δ,0,0)=(α+γ,β+δ,0,0)→ (α+γ,β+δ)
- (α,β)·(γ,δ)→(α,β,0,0)·(γ,δ,0,0) = (αγ-βδ-0-0,αδ+βγ+0-0,0+0+0-0,0+0+0-0) =
  = (αγ-βδ,αδ+βγ,0,0)→ (αγ-βδ,αδ+βγ).

Η αλγεβρική δομή του συνόλου $\mathbb{H}$ των τετρανίων

Αν $\mathbb{H}$ = {(α,β,γ,δ) με α,β,γ,δ $\in \mathbb{R}$ }, η δομή ($\mathbb{H}$, +) με εσωτερική πράξη την πρόσθεση, αποτελεί αβελιανή ομάδα. Πράγματι πληρούνται οι ιδιότητες:

- Προσεταιριστική
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου που είναι το **0**=(0,0,0,0)
- Ύπαρξη αντιθέτου: αν q = (α,β,γ,δ), τότε –q = (-α,-β,-γ,-δ)
- Αντιμεταθετική

Οι ιδιότητες αυτές είναι προφανείς κι εύκολο να αποδειχθούν, αφού τα στοιχεία των διατεταγμένων τετράδων είναι πραγματικοί αριθμοί. Σημειώνουμε ότι (α,β,γ,δ) + (ε,ζ,η,θ) = (α+ε, β+ζ, γ+η, δ+θ).

Η δομή ($\mathbb{H}$, ·) με εσωτερική πράξη τον πολλαπλασιασμό είναι **ομάδα,** καθώς πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Προσεταιριστική

Η προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολ/σμό, δηλαδή ότι για τρία οποιαδήποτε τετράνια q_1, q_2, q_3 ισχύει $q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3) = (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3$, αποδεικνύεται «εύκολα-τετριμμένα» αλλά με πολλή υπομονή. Θυμίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός τετρανίων έχει οριστεί στην **1.6.1.** ως εξής:

$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ =

$(\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma'-\delta\delta',\alpha\beta'+\beta\alpha'+\gamma\delta'-\delta\gamma',\alpha\gamma'+\gamma\alpha'+\delta\beta'-\beta\delta',\alpha\delta'+\delta\alpha'+\beta\gamma'-\gamma\beta')$.

- Ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου που είναι το **1**=(1,0,0,0)

Επίσης είναι σχεδόν προφανές ότι, αν q = (α,β,γ,δ) τότε q·**1** = q. Πράγματι:

q·**1** = (α,β,γ,δ) ·(1,0,0,0) = (α·1-0-0-0, 0+β·1+0-0, 0+γ·1+0-0,0+δ·1+0-0) = (α,β,γ,δ) = q.

Όμοια **1**· q = q.

- Κάθε μη μηδενικό στοιχείο ***q*** του $\mathbb{H}$ έχει αντίστροφο το $q^{-1}=\frac{\overline{q}}{\|q\|^2}=\overline{q}\left(q\overline{q}\right)^{-1}$

Είδαμε πως ισχύει $\|q\|^2=q\cdot\overline{q}=\overline{q}\cdot q$.

Αρκεί να δείξουμε $q\cdot q^{-1}=q^{-1}\cdot q$=**1**. Πράγματι, $q\cdot q^{-1}=q\cdot\frac{\overline{q}}{\|q\|^2}=\frac{q\cdot\overline{q}}{\|q\|^2}=\frac{\|q\|^2}{\|q\|^2}=1$

Ειδικά για τα μοναδιαία καθαρά τετράνια, ισχύει προφανώς: $q^{-1}=\overline{q}=-q$

Επομένως η Δομή ($\mathbb{H}$, +, ·) είναι ένας ***Διαιρετικός δακτύλιος*** ή ***στρεβλό σώμα*** **(*division ring*** ή ***skew field*) .**

Το σύνολο $\mathbb{H}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού Τετρανίων, όπως αυτές έχουν περιγραφεί, και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό λq, $\lambda\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{H}$ αποτελεί Διανυσματικό Χώρο διάστασης 4 πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Η διατήρηση της «ΝΟΡΜΑΣ»

Από τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών γνωρίζουμε την ιδιότητα διατήρησης του μέτρου σε σχέση με το πολλαπλασιασμό, δηλαδή $\|z_1\|\cdot\|z_2\|=\|z_1\cdot z_2\|$, που ισοδυναμεί με την ισότητα

$(\alpha_1^{\,2}+\beta_1^{\,2})\cdot(\alpha_2^{\,2}+\beta_2^{\,2})=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2$ και η οποία ικανοποιεί το μαθηματικό αίτημα της έκφρασης: $(\textit{άθροισμα 2 τετραγώνων})\times(\textit{άθροισμα 2 τετραγώνων})=\textit{άθροισμα 2 τετραγώνων}$.

Αυτή η αναζήτηση ξεκίνησε περίπου 2000 χρόνια πριν, όταν ο Διόφαντος (βιβλ. 3, πρόβλ. 19, Αριθμητικά) αναζήτησε τέτοιες σχέσεις για τους ακεραίους, χωρίς να αναφερθεί σε τριάδες αφού, όπως πλέον γνωρίζουμε, δεν υπάρχει αντίστοιχη ταυτότητα γι αυτές.

Μια αντίστοιχη έκφραση για το άθροισμα των τετραγώνων 4 πραγματικών αριθμών ανακάλυψε και απέδειξε ο Euler το 1748 (100 περίπου χρόνια πριν την ανακάλυψη των τετρανίων). Ο Hamilton προφανώς γνώριζε την ταυτότητα αυτή:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\cdot(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2) =$$
$$(\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma'-\delta\delta')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha'+\gamma\delta'-\delta\gamma')^2+(\alpha\gamma'+\gamma\alpha'+\delta\beta'-\beta\delta')^2+(\alpha\delta'+\delta\alpha'+\beta\gamma'-\gamma\beta')^2.$$

Αν λοιπόν έχουμε τα τετράνια $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, $q'=\alpha'+\beta' i+\gamma' j+\delta' k$ και $Q=q\cdot q'$, τότε:

- Για το μέτρο του $Q=q\cdot q'$ ισχύει:

  $$\|Q\|=\sqrt{(\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma'-\delta\delta')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha'+\gamma\delta'-\delta\gamma')^2+(\alpha\gamma'+\gamma\alpha'+\delta\beta'-\beta\delta')^2+(\alpha\delta'+\delta\alpha'+\beta\gamma'-\gamma\beta')^2}$$

- Επίσης $\|q\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$ και $\|q'\|=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2}$

  Συνεπώς $\|q\|\cdot\|q'\|=\|Q\|=\|q\cdot q'\|$

- Στην περίπτωση που $\delta=\delta'=0$ παίρνουμε την περίπτωση των τριάδων αφού θα είναι

  $q=\alpha+\beta i+\gamma j$, $q'=\alpha'+\beta' i+\gamma' j$, $\|q\|^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\|q'\|^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2$.

  Τότε, σύμφωνα με την ταυτότητα του Euler, έχουμε την ισότητα $\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)=(\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2+(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2$ ή ισοδύναμα $\|q\|^2\cdot\|q'\|^2=\|q\cdot q'\|^2$.

Ο Hamilton πιθανότατα παρατήρησε αυτή την αντιστοιχία (άλλωστε γνώριζε την ταυτότητα του Euler) και αποφάσισε να προχωρήσει στις τετράδες εγκαταλείποντας τις τριάδες.

1.4.2. Αναπαράσταση των τετρανίων με πίνακες

Αρχικά να θυμίσουμε την έννοια του ισομορφισμού.

Ισομορφισμός ονομάζεται κάθε καλά ορισμένη **γραμμική** απεικόνιση που είναι **μονομορφισμός** (1-1) και **επιμορφισμός** (επί) ταυτόχρονα.

Αν $M_2(\mathbb{C})$ είναι το σύνολο των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{C}$, θεωρούμε το υποσύνολο αυτού $M_{\mathbb{H}}=\left\{\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{C}\right\}$.

Η απεικόνιση $\varphi: \mathbb{H}\to M_{\mathbb{H}}$ με $\varphi(q) = \varphi(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k) = \begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix} = A$ είναι ισομορφισμός, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

- Προφανώς η σχέση είναι καλά ορισμένη, αφού για κάθε τεράνιο $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ ορίζεται μοναδικός πίνακας Α στο $M_{\mathbb{H}}$ ώστε $\varphi(q)=A$
- Η σχέση είναι γραμμική, αφού:
  - $\varphi(q_1+q_2) = \varphi[(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i+(\gamma_1+\gamma_2)j+(\delta_1+\delta_2)k] =$

    $\begin{bmatrix} (\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i & (\gamma_1+\gamma_2)+(\delta_1+\delta_2)i \\ -(\gamma_1+\gamma_2)+(\delta_1+\delta_2)i & (\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1+\beta_2)i \end{bmatrix} =$

    $= \begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 i & \gamma_1+\delta_1 i \\ -\gamma_1+\delta_1 i & \alpha_1-\beta_1 i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2+\beta_2 i & \gamma_2+\delta_2 i \\ -\gamma_2+\delta_2 i & \alpha_2-\beta_2 i \end{bmatrix} = \varphi(q_1)+\varphi(q_2)$
  - όμοια $\varphi(q_1\cdot q_2) = \varphi(q_1)\cdot\varphi(q_2)$
- Αν $\varphi(q_1)=\varphi(q_2)$ τότε $\begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 i & \gamma_1+\delta_1 i \\ -\gamma_1+\delta_1 i & \alpha_1-\beta_1 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2+\beta_2 i & \gamma_2+\delta_2 i \\ -\gamma_2+\delta_2 i & \alpha_2-\beta_2 i \end{bmatrix}$ και με τον τρόπο που ορίζεται η ισότητα πινάκων και μιγαδικών αριθμών προκύπτει πολύ εύκολα ότι $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1)=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta_2)$ δηλαδή $q_1=q_2$, άρα 1-1.
- Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}\in M_{\mathbb{H}}$, προφανώς υπάρχει τετράνιο $\boldsymbol{q}\in\mathbb{H}$ και $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, όπου α,β,γ,δ πραγματικοί αριθμοί.

Επομένως κάθε τετράνιο αναπαρίσταται από έναν 2×2 πίνακα του συνόλου $M_{\mathbb{H}}$ και αντίστροφα κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής αναπαριστά ένα τετράνιο.

Αν λοιπόν q → φ(q)=A, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι detA=det$\left[\varphi(q)\right]=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\|q\|^2$.

Έτσι μπορούμε να αποδείξουμε με ένα διαφορετικό τρόπο:

- την ιδιότητα $\|p\|\cdot\|q\|=\|p\cdot q\|$

  Έχουμε: $\|p\|^2\cdot\|q\|^2$ = detA·detB=det(A·B) = det[φ(p)·φ(q)] = det[φ(p·q)] = $\|p\cdot q\|^2$, άρα $\|p\|\cdot\|q\|=\|p\cdot q\|$

- Κάθε μη μηδενικό τετράνιο έχει αντίστροφο

  Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πίνακας A=$\begin{bmatrix}\alpha+\beta i & \gamma+\delta i\\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z & w\\ -\overline{w} & \overline{z}\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

  Είναι detA=$\|z\|^2+\|w\|^2>0$, αφού ο A αναπαριστά μη μηδενικό τετράνιο, άρα $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|>0$

  Επομένως detA≠0, άρα A αντιστρέψιμος. Ο adjA=B=$\begin{bmatrix}\overline{z} & \overline{w}\\ -w & z\end{bmatrix}$, $B^T=\begin{bmatrix}\overline{z} & -w\\ \overline{w} & z\end{bmatrix}$ και

  $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}\overline{z} & -w\\ \overline{w} & z\end{bmatrix}\overset{\det A=d}{=}\begin{bmatrix}d^{-1}\overline{z} & -d^{-1}w\\ d^{-1}\overline{w} & d^{-1}z\end{bmatrix}$. Αν θέσουμε $z_1=\overline{d^{-1}\overline{z}}$, $w_1=-d^{-1}w$, τότε

  $d^{-1}\overline{w}=\overline{d^{-1}w}=-\left(\overline{-d^{-1}\overline{w}}\right)=-\overline{w}_1$ και $d^{-1}z=\overline{d^{-1}\overline{z}}=\overline{z}_1$.

  Έτσι ο A^{-1} παίρνει τη μορφή $\begin{bmatrix}z_1 & w_1\\ -\overline{w}_1 & \overline{z}_1\end{bmatrix}\in M_{\mathbb{H}}$

- Αν $\overline{q}$ το συζυγές τετράνιο ενός τετρανίου q= $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, τότε $A_q=\begin{bmatrix}\alpha+\beta i & \gamma+\delta i\\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i\end{bmatrix}$

  και αφού $\overline{q}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$, θα είναι $A_{\overline{q}}=\begin{bmatrix}\alpha-\beta i & -\gamma-\delta i\\ \gamma-\delta i & \alpha+\beta i\end{bmatrix}$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A_{\overline{q}}$ προκύπτει από τον πίνακα A_q, αν διαδοχικά θεωρήσουμε τον ανάστροφο του A_q δηλ. τον

πίνακα $\left(\mathrm{A}_q\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta i & -\gamma+\delta i \\ \gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}$ και κατόπι αντικαταστήσουμε κάθε στοιχείο αυτού με τον συζυγή μιγαδικό. Συνεπώς $\mathrm{A}_{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha+\beta i} & \overline{-\gamma+\delta i} \\ \overline{\gamma+\delta i} & \overline{\alpha-\beta i} \end{bmatrix}$.

Είδαμε ότι τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ εμπεριέχονται στο σύνολο $\mathbb{H}$, καθώς η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός, έτσι όπως ορίστηκαν στο σύνολο των τετρανίων, διατηρούν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{C}$. Αυτό μας έχει δώσει το δικαίωμα να χαρακτηρίζουμε το σύνολο των **τετρανίων** ως ένα σύνολο **υπερμιγαδικών αριθμών**. Ο B. L. van der Waerden στο βιβλίο του "*A History of Algebra*", 1985, Κεφ. 10, αναπτύσσει τα *"hypercomplex number systems"* ή αλλιώς "*special algebras*", όπου εντάσσει τα τετράνια, τα οκτάνια (§1.6.1), τα διτετράνια**, τους πίνακες, άλγεβρες ομάδων κ.α.

Να σημειώσουμε ότι τα ***διτετράνια* ή ***biquaternions*** είναι τα τετράνια $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς, ή εναλλακτικά, είναι ισομορφικά με πίνακες της μορφής $\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$.

Μέσω της αναπαράστασης των τετρανίων με τη βοήθεια πινάκων μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τον χαρακτηρισμό των υπερμιγαδικών αριθμών για τα τετράνια. Αν **z** μιγαδικός αριθμός και **z=α+β*i*** , το αντίστοιχο τετράνιο είναι το $\boldsymbol{q_z}$ με $\boldsymbol{q_z = \alpha+\beta i+0j+0k}$ και $\boldsymbol{\varphi(q_z)}=\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & 0+0i \\ -0+0i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix}$.

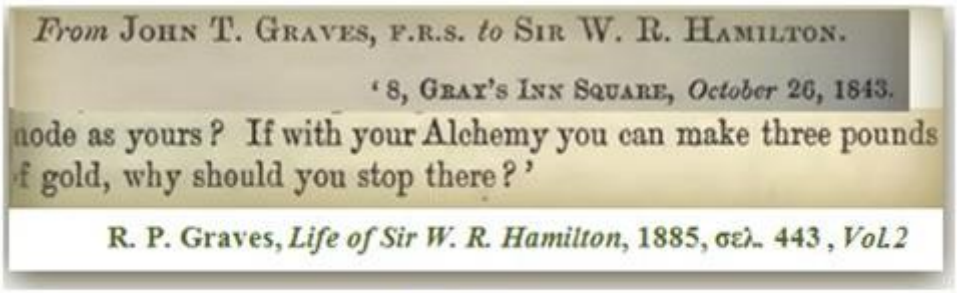
Έστω λοιπόν οι μιγαδικοί **z** και **w,** τότε η πρόσθεση των αντίστοιχων τετρανίων τους δίνει:

- $q_z+q_w = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z+w & 0 \\ 0 & \overline{z}+\overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z+w & 0 \\ 0 & \overline{z+w} \end{bmatrix}= q_{z+w}$
- $q_z \cdot q_w = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z\cdot w & 0 \\ 0 & \overline{z}\cdot\overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z\cdot w & 0 \\ 0 & \overline{z\cdot w} \end{bmatrix}= q_{z\cdot w}$

Μπορούμε να συμπεράνουμε από όλα τα παραπάνω ότι το σύνολο $M_{\mathbb{H}}$ αποτελεί έναν **διαιρετικό, μη μεταθετικό υποδακτύλιο** του $M_2(\mathbb{C})$ αφού είναι υποσύνολό του και έχει όλες τις ιδιότητες του δακτυλίου. (Πετρόπουλος, 2010, σελ. 154-155), (Μαρμαρίδης, 2014 ,σελ. 24-26)

Η **αναπαράσταση** των τετρανίων με **πίνακες** είναι σημαντική, καθώς χρησιμοποιείται για την ερμηνεία των **περιστροφών** στο χώρο μέσω **Γραμμικών Μετασχηματισμών.**

1.4.3. ΕΡΩΤΗΜΑ: *"Υπάρχουν άλλες Αλγεβρικές Δομές όπως αυτή των Quaternions;".*


From JOHN T. GRAVES, F.R.S. *to* SIR W. R. HAMILTON.

'8, GRAY'S INN SQUARE, *October* 26, 1843.

node as yours? If with your Alchemy you can make three pounds of gold, why should you stop there?'

R. P. Graves, *Life of Sir W. R. Hamilton*, 1885, σελ. 443, *Vol.2*

Εικόνα 24

Ο John Graves, το 1843 σε γράμμα του στον Hamilton τον παρακινεί να μη σταματήσει στα τετράνια (εικ. 24). Τρεις μήνες αργότερα την ίδια χρονιά στις 26 Δεκεμβρίου, ο John Graves γράφει στον Hamilton για την ανακάλυψή του, αυτή των Οκτανίων που αρχικά τα ονομάζει ***"octaves"*** ή ***"octonomials",*** ένα είδος «διπλών» τετρανίων, και με αλγεβρική δομή που διατηρεί τη διαίρεση αλλά όχι την προσεταιριστικότητα στον πολ/σμό και φυσικά όχι την αντιμεταθετικότητα.

Αυτό που αρχικά παρατήρησε ο J. Graves ήταν ότι αντίστοιχη ταυτότητα με αυτή του Euler (γινόμενο αθροίσματος 4 τετραγώνων επί ένα άλλο) θα μπορούσε να παράξει την ιδιότητα τη νόρμας στα οκτάνια. Μία τέτοια ταυτότητα "8 τετραγώνων" είχε ήδη παρουσιαστεί στην Ακαδημία της Αγ. Πετρούπολης το 1818 από τον Δανέζο μαθηματικό Carl Ferdinand Degen (1766-1825) και δημοσιεύθηκε το 1822. Ο John Graves ανακάλυψε την ταυτότητα αυτή το 1843 ανεξάρτητα από τον Degen. Μαζί με αυτή την ταυτότητα ανακάλυψε και την άλγεβρα των οκτανίων. Απέδειξε μάλιστα ότι είναι μία διαιρετική, μη αντιμεταθετική άλγεβρα, που ικανοποιεί το νόμο της νόρμας (*normed division algebra*). Τον Ιούλιο του 1844 ο Hamilton στέλνει επιστολή στον Graves, στην οποία αναφέρει ότι στα οκτάνια δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Ο Graves δεν περιορίστηκε στα

οκτάνια, αλλά σκέφτηκε την επέκταση σε μία 2^n διαστάσεων άλγεβρα (Baez, 2001). Η εργασία του J. Graves δεν έγινε ποτέ δημόσια γνωστή γιατί ο Hamilton αμέλησε να την κοινοποιήσει στην Ιρλανδική Βασιλική Ακαδημία (Irish Royal Academy). Δυστυχώς για τον πρώτο, δύο χρόνια μετά, το 1845, ο Βρετανός μαθηματικός Arthur Cayley (1821-1895) δημοσιεύει στο *Philosophical Magazine* μια εγασία "On Jacobi's Elliptic Functions" στην οποία αναφέρεται και στα οκτάνια (μία επαν-ανακάλυψη των οκτανίων που προέκυψε ανεξάρτητα από αυτή του Graves). Έτσι τα οκτάνια έγιναν γνωστά ως *"Cayley Numbers"* και η αντίστοιχη άλγεβρα ονομάστηκε προς τιμή του *"Cayley Algebra"*.

Αντίθετα με τα τετράνια, τα οκτάνια δε φάνηκε στην αρχή να έχουν ξεκάθαρα κάποιες γεωμετρικές ή φυσικές εφαρμογές, γι αυτό και παρέμειναν στην αφάνεια πολλά χρόνια. Μόλις το 1925 ο Γάλλος μαθηματικός Elie Joseph Cartan (1869-1951) περιέγραψε την "triality", τη συμμετρία ανάμεσα στα διανύσματα και τα spinors στον 8-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Οι Pascual Jordan, John von Neumann and Eugene Wigner σε μια εργασία* τους το 1934 σχετική με τη θεμελίωση της κβαντομηχανικής, αναφέρονται στη σχέση των οκτανίων με αυτή (*On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. Math.* **35,** σελ. 29-64).
Σχετικά πρόσφατα, τη δεκαετία του 1980, ανακαλύφθηκε ότι τα οκτάνια εξηγούν κάποια χαρακτηριστικά της θεωρίας των χορδών.

Η αλγεβρική δομή των Οκτανίων

- ✓ Ορίζουμε ως ***Άλγεβρα*** ένα **Διανυσματικό Χώρο πεπερασμένης διάστασης επί του Σώματος των πραγματικών αριθμών** εφοδιασμένο με μια διγραμμική απεικόνιση $m:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, την οποία καλούμε πολλαπλασιασμό με $m(a,b)=ab$ και με ένα μη μηδενικό στοιχείο 1, που καλούμε μονάδα, τέτοιο ώστε $m(1, a) = m(a, 1) = a$. Επίσης θεωρούμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι στοιχεία της άλγεβρας με α=α1. Δε θεωρούμε όμως ότι όλες οι άλγεβρες είναι προσεταιριστικές.
- ✓ Ορίζουμε ως ***Διαιρετική (devision) Άλγεβρα***, την άλγεβρα στην οποία:
  - o για κάθε δύο στοιχεία της α,β με αβ=0, θα ισχύει α=0 ή β=0 ή
  - o ισοδύναμα, όταν ο πολ/σμός από δεξιά ή από αριστερά, με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο, είναι αντιστρέψιμος
- ✓ Ορίζουμε ως ***Normed Devision Άλγεβρα***, τη διαιρετική άλγεβρα η οποία είναι εφοδιασμένη με μια μετρική σχέση για την οποία ισχύει $\|\alpha\beta\|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ (Baez, 2001, σελ. 149).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Κάθε στοιχείο *προσεταιριστικής* άλγεβρας έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (εκτός του μηδενικού), όταν η άλγεβρα είναι *διαιρετική*.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2: Υπάρχουν *μη διαιρετικές* άλγεβρες που τα στοιχεία τους έχουν πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (τα *Δεκαεξάνια* ή *Sedenions* δεν αποτελούν διαιρετική άλγεβρα, γιατί υπάρχουν μηδενικοί διαιρέτες πχ. $(e_3+e_{10})(e_6-e_{15})=0$, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_2$, ο δακτύλιος των 2X2 πινάκων κλπ.).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3: Υπάρχουν *διαιρετικές* άλγεβρες στις οποίες **δεν ορίζεται** πολλαπλασιαστικός αντίστροφος (υπάρχουν αριστερός και δεξιός αντίστροφος διαφορετικοί μεταξύ τους). Προϋπόθεση ύπαρξης αντιστρόφου σε μια διαιρετική άλγεβρα είναι η ισχύς της προσεταιριστικότητας.

Για παράδειγμα, αν στο σύνολο των τετρανίων ορίσουμε $i^2 = -1 + \kappa j$ με κ μη μηδενικό πραγματικό αριθμό και διατηρήσουμε ίδιο τον υπόλοιπο πίνακα του πολ/σμού, το στοιχείο i έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο, αλλά αυτοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους (Baez, 2001, σελ. 149).

Το σύνολο $\mathbb{O}$ των οκτανίων αποτελεί μια 8-διάστατη άλγεβρα **μη αντιμεταθετική.** Επίσης, όπως απέδειξε πρώτος ο Hamilton, είναι και **μη προσεταιριστική** (σε σχέση πάντα με την πράξη του πολλαπλασιασμού). Θα δούμε όμως ότι ικανοποιεί ένα πιο «αδύναμο» είδος προσεταιριστικότητας, που την καθιστά *εναλλάσσουσα*.. Είναι η **μεγαλύτερη σε διαστάσεις** άλγεβρα που **κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει** αντίστροφο και η **διαίρεση** είναι καλά ορισμένη. Θεωρούνται και αυτά ένα είδος *υπερμιγαδικών* αριθμών.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Πίνακας 2: Πολλαπλασιασμός Οκτανίων (Baez, 2001, σελ. 150)

Η μοναδιαία βάση του $\mathbb{O}$ είναι το σύνολο $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ με $e_i^2 = -1$. Τα γινόμενα των στοιχείων της δίνονται στον Πίνακα 2.

Κάθε «κουτάκι» δίνει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του

στοιχείου e_i της *i* γραμμής με το στοιχείο e_j της *j* στήλης, πχ. το γινόμενο $e_2 \cdot e_5$ βρίσκεται στο κουτάκι $2^{ης}$ γραμμής και $5^{ης}$ στήλης.

Από τον πίνακα 2 μπορούμε να συνάγουμε τα συμπεράσματα:

- $e_i e_j = -e_j e_i$
- $e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$ δηλ. ο κανόνας ισχύει κυκλικά, με τους δείκτες να «συμπεριφέρονται» σαν να ήταν στοιχεία του $\mathbb{Z}_7$, δηλ. $e_7 = e_0 = 1$, $e_8 = e_1$ κ.ο.κ.
- $e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$, δηλ. ισχύει ο διπλασιασμός των δεικτών

Συνδιάζοντας τα παραπάνω με τις σχέσεις $e_i^{\,2} = -1$, $1 \le i \le 7$ και $e_1 e_2 = e_4$ μπορούμε να παράξουμε όλα τα γινόμενα του πίνακα 2. Παρόλα αυτά ο πίνακας δεν είναι διαφωτιστικός.

Απεικονιστικές αναπαραστάσεις των οκτανίων

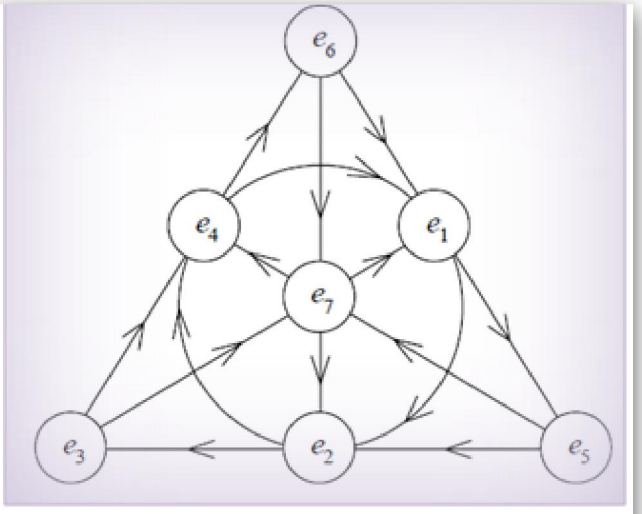
ΟΡΙΣΜΟΙ:

- Αν *p* πρώτος αριθμός, ορίζουμε το *Πεπερασμένο Σώμα Galois GF(p)* που απαρτίζεται από το σύνολο $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ή απλά $\mathbb{Z}_p$, όπου η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται με βάση το modulo *p*
- Έστω **V**(n+1,*p*) Διανυσματικός Χώρος με διάσταση **n+1** πάνω στο σώμα *GF(p)*. *Προβολικός Χώρος PG(n,p)* είναι η Γεωμετρία στην οποία τα σημεία, οι γραμμές, τα επίπεδα και τα υπερεπίπεδα είναι υπόχωροι του **V**(n+1,*p*) με διάσταση 1,2,..., n. Ο υπόχωρος *PG(n,p)* έχει διάσταση κατά 1 μικρότερη του **V**. (Ball & Weiner, 2011)
  - Ως *υπερεπίπεδο* ορίζεται ο υπόχωρος συνδιάστασης 1 (δηλαδή κατά 1 λιγότερο της διάστασης του **V**)
  - Αν H είναι υπερεπίπεδο και L μια γραμμή που δεν περιέχεται στο H, τότε η τομή τους είναι ένα σημείο

Το ***Fano plane*** προκύπτει για n=q=2, δηλαδή είναι ο Προβολικός Χώρος PG(2,2). Είναι το μικρότερο *πεπερασμένο πραγματικό* προβολικό επίπεδο (διάστασης 2). Αποτελείται από 7 σημεία και 7 γραμμές συμπεριλαμβανομένου του κύκλου. Κάθε γραμμή περιλαμβάνει 3 ακριβώς σημεία (Διαγρ. 2). Το **Διάγραμμα 2** περιγράφει πλήρως την αλγεβρική κατασκευή των οκτανίων αρκεί να λάβουμε υπόψη μας τα εξής:

- $e_i e_j = -e_j e_i$
- $e_i^2 = -1$ για κάθε i με $1 \le i \le 7$
- Αν $e_i e_j = e_k$ → $e_j e_k = e_i$

Τα βελάκια δείχνουν τη θετική φορά (σύμφωνη με αυτή των δεικτών του ρολογιού), και τον τρόπο να πολλαπλασιάζουμε ή κατά μήκος των πλευρών του τριγώνου ή κατά μήκος των υψών ή κατά την κυκλική διεύθυνση.

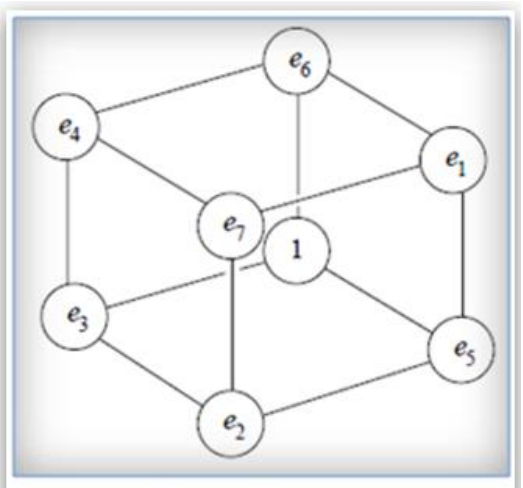


ΔΙΑΓΡ.2: The Fano plane –πολ/σμός Οκτανίων

(Baez, 2001, σελ. 152)

Αν περιστρέψουμε το τρίγωνο του Fano Plane κατά 120° αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή κατά 270° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού προκύπτει ένα νέο σχήμα, που ανταποκρίνεται στην ιδιότητα του διπλασιασμού των δεικτών, η οποία προέκυψε απο τον Πίν. 2. Συγκεκριμένα στη θέση του e_3 θα βρεθεί το $e_{2\cdot 3} = e_6$, στη θέση του e_2 το $e_{2\cdot 2} = e_4$ και στη θέση του e_5 το $e_{2\cdot 5} = e_{10} = e_{1\ \cdot 7+3} = e_3$.

Από τους ορισμούς προκύπτει ότι το ***Fano plane*** είναι το προβολικό επίπεδο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{Z}_2^3$ πάνω στο σώμα $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, δηλαδή αποτελείται από γραμμές που διέρχονται από την αρχή Ο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{Z}_2^3$. Αφού κάθε γραμμή περιέχει ένα μόνο μη μηδενικό στοιχείο, μπορούμε να σκεφτούμε επίσης ότι το επίπεδο Fano αποτελείται από τα 7 μη μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{Z}_2^3$. Θεωρώντας ότι η αρχή του $\mathbb{Z}_2^3$ αντιστοιχεί στο μοναδιαίο 1 του $\mathbb{O}$ παίρνουμε τον κύβο του Διαγρ. 3.



ΔΙΑΓΡ.3: Ο Κύβος των Οκτανίων

(Baez, 2001, σ. 152)

Να σημειώσουμε ότι:

i. τα επίπεδα που διέρχονται από την αρχή των αξόνων του τρισδιάστατου αυτού χώρου δίνουν υπο-άλγεβρες του $\mathbb{O}$, ισόμορφες του συνόλου των τετρανίων $\mathbb{H}$

ii. οι γραμμές που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνουν υποάλγεβρες ισόμορφες του συνόλου των μιγαδικών $\mathbb{C}$

iii. η αρχή των αξόνων δίνει υποάλγεβρα ισόμορφη του συνόλου των πραγματικών $\mathbb{R}$.

Οι συνέπειες της μη προσεταιριστικότητας των Οκτανίων:

- Από αλγεβρική σκοπιά δε μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα οκτάνια με Πίνακες, καθώς ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων
- Από γεωμετρικής άποψης δε μπορεί να υπάρξει οκτανικός προβολικός χώρος μεγαλύτερος των 2 διαστάσεων γιατί οι συντεταγμένες ενός προβολικού χώρου ικανοποιούν την προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό σύμφωνα με τον Hilbert (Stillwell, 2008, σελ.22). Αυτό οφείλεται στην πλήρη αλγεβροποίηση (πέρα του $\mathbb{R}$) της *προβολικής γεωμετρίας* την οποία εισηγήθηκε ο Hilbert.

1.4.4. Τα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ και $\mathbb{O}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Αν κάθε υποάλγεβρα, που παράγεται από δύο οποιαδήποτε στοιχεία μιας άλγεβρας $\mathcal{A}$, είναι προσεταιριστική τότε η άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται ***εναλλάσσουσα (alternative).*** Αποδεικνύεται ότι (θεώρημα Emil Artin) τα στοιχεία μιας εναλλάσσουσας άλγεβρας ικανοποιούν τις ισότητες:

i. $(aa)b = a(ab)$

ii. $(ba)a = b(aa)$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει και η τρίτη βασική σχέση $\boldsymbol{(ab)a = a(ba)}$ (*flexible identity*) η οποία ικανοποιείται σε κάθε εναλλάσσουσα άλγεβρα.

(Baez, 2001, σελ. 149)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: "***nicely normed***" άλγεβρα ονομάζεται μια άλγεβρα $\mathcal{A}$, αν:

- για κάθε στοιχείο της α υπάρχει ο συζυγής του α , ο $\overline{\alpha}$ ή α^*, που ορίζεται ως μια γραμμική απεικόνιση από το $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}$ με $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ και $\overline{(\alpha\beta)} = \overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}$ " $\alpha,\beta \in \mathcal{A}$
- $(\alpha + \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}$ και $\alpha\cdot\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\cdot\alpha > 0$ " $\alpha,\beta\neq 0$, $\alpha,\beta \in \mathcal{A}$
- $\|\alpha\|^2 = \alpha\cdot\overline{\alpha}$

(Baez, 2001, σελ. 154)

Σε κάθε ***nicely normed*** άλγεβρα ισχύουν:

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2} \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2} \qquad \alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{\|\alpha\|^2}$$

Επίσης ισχύει ότι:

Αν μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ***nicely normed*** και ***εναλλάσσουσα*** , τότε είναι μια ***normed division*** άλγεβρα.

Απόδειξη: Αν α, β στοιχεία της εναλλάσσουσας άλγεβρας $\mathcal{A}$, τα 4 στοιχεία α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ ανήκουν στην προσεταιριστική υπο-άλγεβρα που παράγεται από τα στοιχεία $\mathrm{Im}(\alpha)$ και $\mathrm{Im}(\beta)$. Επομένως:

$$\|\alpha\beta\|^2 = (\alpha\beta)\left(\overline{\alpha\beta}\right) = \alpha\beta\left(\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}\right) = \alpha\left(\beta\overline{\beta}\right)\overline{\alpha} = \alpha\|\beta\|^2\,\overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}\|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$$

Συνεπώς $\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|$, δηλαδή διατηρείται η νόρμα.

(Baez, 2001, σελ. 154)

Παραθέτουμε τα τρία πολύ σημαντικά θεωρήματα που διέπουν τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ και $\mathbb{O}$:

- τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ και $\mathbb{O}$ είναι οι **μόνες** διαιρετικές (*division*) άλγεβρες που διατηρούν τη νόρμα, δηλαδή $\|ab\| = \|a\|\cdot\|b\|$ (*normed division algebras*)
- τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ και $\mathbb{O}$ είναι οι **μόνες** διαιρετικές (*division*) άλγεβρες που είναι *εναλλάσσουσες* (*alternative division algebras*)
- **όλες** οι διαιρετικές άλγεβρες έχουν διαστάσεις **1, 2, 4 ή 8.**

(Baez, 2001, σελ. 150)

Σταδιακά η μετάβαση από κάθε «υπο-άλγεβρα» στην επόμενη περιγράφεται ως εξής:

- Το $\mathbb{R}$ είναι μια *πραγματική** $(\alpha = \overline{\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{R})$*, *αντιμεταθετική, προσεταιριστική* και *nicely normed* άλγεβρα
- Το $\mathbb{C}$ είναι μια *αντιμεταθετική* και *προσεταιριστική nicely normed* αλγεβρα
- Το $\mathbb{H}$ είναι μια προσεταιριστική *nicely normed* άλγεβρα
- Το $\mathbb{O}$ είναι μια *εναλλάσσουσα nicely normed* άλγεβρα.

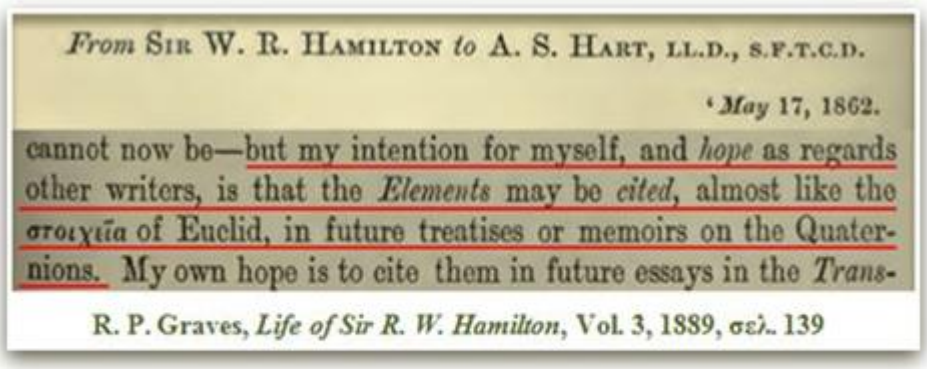
2. Γεωμετρική παράσταση – η Γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου

2.1. Από το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο στα Quaternions

2.1.1. Η Γεωμετρία των Τετρανίων κατά Hamilton - το Τετράνιο ως Γεωμετρικό Πηλίκο

"*ELEMENTS OF QUATERNIONS*", 1866 University of Dublin Press, εκδόθηκε από τον William Edwin Hamilton, γιο του αποθανόντος συγγραφέα.

Ο τίτλος *"Elements"* φανερώνει την επιθυμία του συγγραφέα William Rowan Hamilton να γράψει ένα βιβλίο ισάξιο με τα ***Στοιχεία*** του Ευκλείδη (εικ. 25). Το βιβλίο εκδόθηκε ένα χρόνο μετά τον θάνατο του Hamilton από τον γιο του, τον William Edwin Hamilton, και περιλαμβάνει σημειώσεις μιας εξελιγμένης θεωρίας των τετρανίων καθώς και προσδοκόμενες εφαρμογές αυτών στον Ηλεκτρισμό και την Πολικότητα, τις οποίες όμως δεν πρόλαβε να αναπτύξει πλήρως. Στην εισαγωγή ο William αναφέρει ότι ο πατέρας του δεν άφησε καμμιά οδηγία ως προς την έκδοση των *Elements* κι εκφράζει την αγωνία του με ποιό τρόπο θα μπορούσε να ανταποκριθεί, όσο το δυνατόν καλύτερα, σε αυτό το καθήκον τόσο απέναντι στον νεκρό πατέρα του και στο κοινό που απευθύνεται, όσο και στις επόμενες γενιές. Κατέληξε λοιπόν ότι θα τα εξέδιδε χωρίς καμμία παρέμβαση ή αλλαγή


From Sir W. R. Hamilton to A. S. Hart, ll.d., s.f.t.c.d.

'May 17, 1862.

cannot now be—but my intention for myself, and *hope* as regards other writers, is that the *Elements* may be *cited*, almost like the στοιχεῖα of Euclid, in future treatises or memoirs on the Quaternions. My own hope is to cite them in future essays in the *Trans-*

R. P. Graves, *Life of Sir R. W. Hamilton*, Vol. 3, 1889, σελ. 139

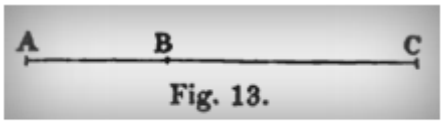
Εικόνα 25

διορθώνοντας μόνο κάποια τυπογραφικά λάθη. Η συγγραφή των *Elements* ήταν αποτέλεσμα μεγάλου πνευματικού και σωματικού κόπου του Hamilton που του κόστισε ακόμα και την υγεία του σύμφωνα με το γιό του. Στην εισαγωγή των σημειώσεών του ο ίδιος ο συγγραφέας δηλώνει ότι, ενώ οι βασικές αρχές των τετρανίων παρέμειναν ίδιες με αυτές στο *"Lectures on Quaternions"* (1853), ο σχεδιασμός και η οργάνωση τέθηκαν σε ένα εντελώς νέο πλαίσιο. Στόχος είναι μία **αυστηρή θεμελίωση** των βασικών αρχών των τετρανίων κυρίως μέσα από τη γεωμετρία και λιγότερο μέσω μιας συμβολικής αλγεβρικής γλώσσας. Ταυτόχρονα επιχειρεί νέους συμβολισμούς όπως Kq για το *συζυγές* τετρανίου q, το $\mathbf{U}_\alpha$ για το *μοναδιαίο διάνυσμα* (*Unit Vector*) που προκύπτει από τυχαίο διάνυσμα α, αν το διαιρέσουμε με το μέτρο του, δηλ. $\mathbf{U}_\alpha = \frac{\vec{\alpha}}{\|\alpha\|}$ και T_α για τον *τανυστή* (*tensor*) διανύσματος α που όπως αναφέρουμε και στη συνέχεια, δε χρησιμοποιείται με τη σύγχρονη έννοια του όρου άλλά εκφράζει το μήκος ή μέτρο του α. Αναλυτικά:

- Το 1ο βιβλίο σχετίζεται με την έννοια του διανύσματος ως μια *προσανατολισμένη ευθεία γραμμή στο χώρο*.
- Στο 2ο βιβλίο παρουσιάζεται η έννοια του τετρανίου ως *Πηλίκο δύο διανυσμάτων*
- Στο 3ο βιβλίο αναλύονται το γινόμενο και η δύναμη διανυσμάτων, ως μια *Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή* της έννοιας των τετρανίων στη γεωμετρία.

Στο **βιβλίο Ι** (σελ. 10,11) αναφέρει:

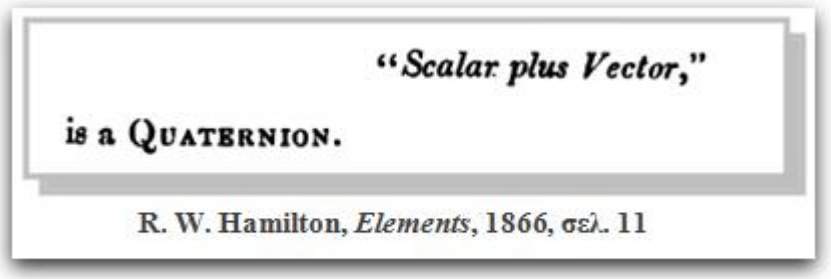
«Η θετική ή αρνητική ποσότητα $x = \frac{\beta}{a}$ *η οποία προκύπτει από το πηλίκο δύο παράλληλων διανυσμάτων α,β, περιλαμβάνοτας το 0 ως όριο, μπορεί επίσης να ονομαστεί και* ***SCALAR = ΒΑΘΜΩΤΟ*** *γιατί μπορεί πάντα να βρεθεί και υπό μια συγκεκριμένη λογική να κατασκευαστεί, μέσα από τη σύγκριση θέσεων, με τη βοήθεια μιας κοινής κλίμακας ή άξονα ή καθώς επίσης με τον τύπο* $x = \frac{C-A}{B-A} = \frac{AC}{AB}$ *όπου τα τρία σημεία A,B,C είναι συγγραμικά όπως στο σχήμα (Fig. 13)* (σχ. 9)



Σχήμα 9

Αυτά τα βαθμωτά μεγέθη είναι συνεπώς οι ***ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ*** *ή οι πραγματικές ποσότητες της Άλγεβρας. Σε συνδιασμό όμως με τα μη λιγότερο πραγματικά* ***ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ,*** *σχηματίζουν ένα από τα κύρια στοιχεία ενός Συστήματος ή ενός Λογισμού με τον οποίο σχετίζεται η παρούσα εργασία. Στην πραγματικότητα, θα αποδειχθεί αργότερα ότι υπάρχει μια σημαντική έννοια που μπορούμε να συλλάβουμε-φανταστούμε, αυτή της πρόσθεσης ενός βαθμωτού μεγέθους σε ένα*

διανυσματικό και το αποτέλεσμα αυτής της πρόσθεσης ή ο συνδιασμός "Βαθμωτό συν Διάνυσμα" είναι ένα ***ΤΕΤΡΑΝΙΟ"»*** (εικ. 26)



Εικόνα 26

Δηλαδή, το πηλίκο δύο παράλληλων διανυσμάτων ορίζεται ως εξής:

Αν $\vec{\alpha}||\vec{\beta}$ τότε $\frac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}}=x \Leftrightarrow \vec{\beta}=x\cdot\vec{\alpha}$ όπου $x>0$ αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα και $x<0$ αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ αντίρροπα.

Στο **βιβλίο ΙΙ** εισάγεται η έννοια του *Γενικού Πηλίκου δύο διανυσμάτων (γεωμετρικά κλάσματα)* που σχηματίζουν γωνία ω, με $0^o<\omega<180^o$. Δεδομένων ενός διανύσματος-διαιρετέου ***β***, ενός διανύσματος-διαιρέτη ***α*** και μιας γεωμετρικής ποσότητας (γεωμετρικό πηλίκο) ***q***, θα πρέπει να αποδεχθούμε - σύμφωνα με τον Hamilton - μια αντίστροφη πράξη, αυτή του *γεωμετρικού πολλαπλασιασμού* αντίστοιχη με αυτή που είδαμε στα παράλληλα διανύσματα. Συγκεκριμένα, αν ***β*:*α*** **= *q*,** τότε η ποσότητα-πηλίκο ***q***:

«μετατρέπεται σε παράγοντα ο οποίος επιδρά πάνω στην γραμμή ***α,*** *έτσι ώστε να παράξει τη γραμμή* ***β,*** *δηλαδή* $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ » .

(*Elements*, σελ. 104)

«Έτσι αντιμετωπίζουμε ως ταυτότητες τους τύπους $\frac{\beta}{a}\cdot\alpha=\frac{\beta\alpha}{\alpha}=\beta$ *και* $\frac{q}{a}\cdot\alpha=\frac{q\alpha}{\alpha}=q$,

όπου q το πηλίκο των διανυσμάτων α,β».

Ένα τέτοιο πηλίκο <u>δε θα μπορούσε να είναι βαθμωτό</u>, δηλαδή να ισούται με οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

Πράγματι, αν το ***x*** παρίστανε ένα τέτοιο πηλίκο $\frac{\beta}{\alpha}$ και ***x*** βαθμωτό μέγεθος τότε $\frac{\beta}{\alpha}=\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$, συνεπώς το γινόμενο $x\cdot a$ θα παρίστανε ένα διάνυσμα β', το οποίο θα είχει ή ίδια ή αντίθετη κατεύθυνση με το διάνυσμα a ανάλογα με τον βαθμωτό συντελεστή ***x***, <u>ταυτόχρονα</u> όμως θα μπορούσε να αντιπροσωπεύσει και οποιοδήποτε διάνυσμα β, που σχηματίζει με το διάνυσμα a

οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $\beta' = \beta$ ή $x\alpha = \beta$ κάτι που είναι αδύνατο με τις προϋποθέσεις που θέσαμε.

Έχοντας λοιπόν ο Hamilton ορίσει το πηλίκο δύο *παράλληλων διανυσμάτων* ως *βαθμωτό μέγεθος,* συνεχίζει την προσπάθεια να προχωρήσει στη δημιουργία της έννοιας του *πηλίκου δύο διανυσμάτων που δεν έχουν την ίδια διεύθυνση*, έχοντας δείξει ότι αυτό δε μπορεί να είναι βαθμωτό μέγεθος (για απλούστευση θεωρεί ότι τα δύο διανύσματα έχουν κοινή αρχή).

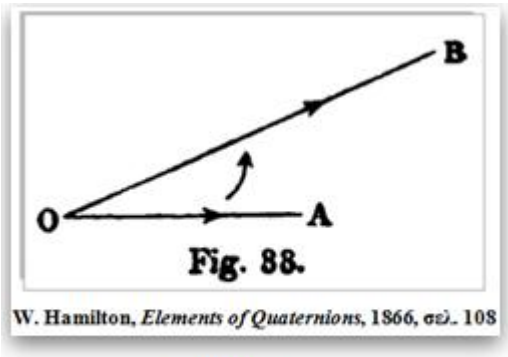
Σε αυτή την προσπάθεια λαμβάνει υπόψη τα *σχετικά μεγέθη* και τις *σχετικές κατευθύνσεις* αυτών. Συγκεκριμένα:

- Το πρώτο στοιχείο αυτής της σύνθετης σχέσης ανάμεσα σε δύο διανύσματα αναπαρίσταται μέσω ενός **απλού λόγου** ή ακόμα μέσω ενός **αριθμού** που εκφράζει αυτόν τον λόγο. Εδώ γίνεται για πρώτη φορά η εισαγωγή του όρου ***"τανυστής"*** αλλά όχι με τη σύγχρονη έννοια του όρου. Αναφέρεται ως *tensor of quotient* , δηλαδή τανυστής πηλίκου.

  Ο τανυστής μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός, κατ΄ ουσίαν μη σημασμένος, αφού **απλώς συγκρίνει μέτρα διανυσμάτων** και δεν αναφέρεται σε κατευθύνσεις. Με σύγχρονους όρους ο τανυστής είναι η απόλυτη τιμή αριθμού κι αυτό προκύπτει από την περιγραφή που κάνει ο Hamilton στην εργασία *"On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra"*, άρθρο 19, (Philosophical Magazine, (1844-1850), όπου αναφέρει ακριβώς:

  "The tensor of a positive scalar is equal to that scalar itself, but the tensor of a negative scalar is equal to the positive opposite thereof."

- Το δεύτερο στοιχείο αυτής της σχέσης θα αναπαρίσταται από μια **γωνία** (σχ. 10) κι όχι με ένα σημάδι (+) ή (-) όπως στα παράλληλα διανύσματα. Στα τελευταία, το (+) δηλώνει ότι ο αριθμός x "φέρει" τη θετική μονάδα +1 x φορές, όταν τα διανύσματα OA, OB είναι ομόρροπα, ενώ το (-) δηλώνει πόσες φορές ο x φέρει αντίστοιχα την αρνητική μονάδα -1, όταν τα διανύσματα OA,OB είναι αντίρροπα. (*Elements*, 1866, σελ.108)



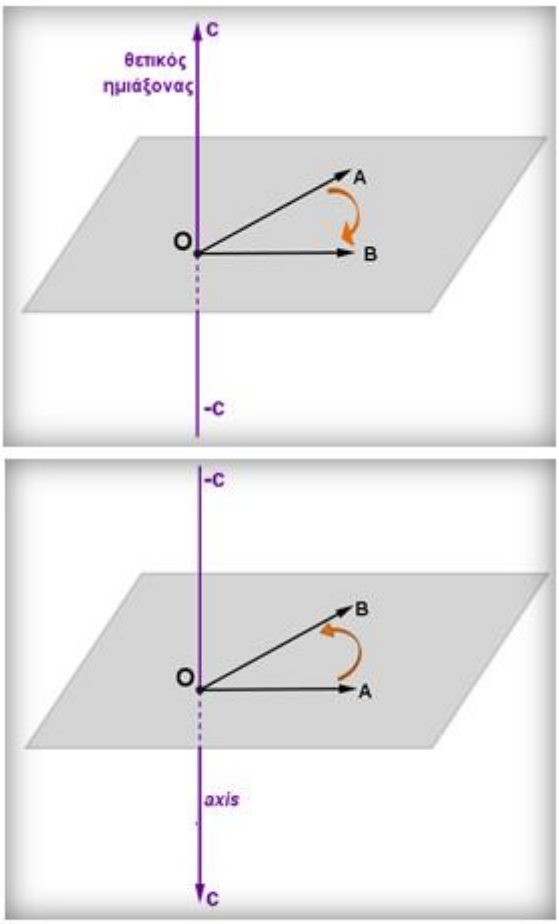
Σχήμα 10

Για να γνωρίζουμε όμως πλήρως τη *σχετική κατεύθυνση* των δύο διανυσμάτων στον χώρο, θα πρέπει να συνυπολογίσουμε όχι μόνο τα **μήκη** αυτών και το **μέτρο της γωνίας** που σχηματίζουν, αλλά επίσης το **επίπεδο** στο οποίο ανήκουν οι γωνίες καθώς και την ύπαρξη **αντίθετων γωνιών** του ίδιου

επιπέδου, δηλ. να διακρίνουμε δύο είδη γωνιών, δεξιόστροφες και αριστερόστροφες. Έτσι ορίζονται ως:

- *κατεύθυνση της περιστροφής*, αυτή του φορέα του ΟΑ, ώστε να συμπέσει στον φορέα του ΟΒ
- *επίπεδο της γωνίας*, το επίπεδο στο οποίο θα πραγματοποιηθεί η περιστροφή.

Θα μπορούσαμε επίσης να συμφωνήσουμε (όπως προτείνει ο Hamilton), ότι αν χρησιμοποιήσουμε μόνο το *δεξί χέρι*, τότε *θετικές* θα είναι όλες οι περιστροφές που κατευθύνονται σύμφωνα με αυτό (σχ. 11), δηλαδή όπως δικευκρινίζει ο ίδιος, σύμφωνα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Για τον προσδιορισμό των παραπάνω, δηλαδή επίπεδο και κατεύθυνση περιστροφής, χρησιμοποιείται ο προσανατολισμός ενός *΄Αξονα* που ισοδυναμεί με τον *προσανατολισμό επιπέδου* στη γλώσσα της σύγχρονης *Αναλυτικής Γεωμετρίας*.



Σχήμα 11

Συγκεκριμένα, ως <u>*θετικό ημιάξονα ενός τετρανίου ή γεωμετρικού πηλίκου* ΟΒ:ΟΑ</u> θεωρούμε έναν ημιάξονα Οc *κάθετο* στο επίπεδο των διανυσμάτων ΟΑ και ΟΒ στην κοινή τους αρχή Ο γύρω από τον οποίο η περιστροφή θεωρείται *θετική*. Αντίστοιχα ορίζεται ο αρνητικός ημιάξονας Οc΄ (-Οc), δηλαδή ο ημιάξονας της *αρνητικής* περιστροφής. Θα δούμε στη συνέχεια ότι ο ορισμός του *θετικού ημιάξονα* τετρανίου θα «αυστηροποιηθεί» μετατρέποντάς τον σε *μοναδιαίο* διάνυσμα.

Καταλήγοντας λοιπόν η περιστροφή ΟΑ→ΟΒ είναι πλήρως γνωστή, εφόσον ξέρουμε:

1. Το *μέγεθος* ή τον *λόγο* που μεταφέρεται κατά τη δεξιόστροφη περιστροφή
2. Την *κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα* Οc. Αν θεωρήσουμε θετική τη φορά του δεξιού χεριού, τότε η κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΟΒ με φορά πίσω από αυτό δηλ. ⊗, πάντα σύμφωνα με τον Hamilton.

Επομένως για τον πλήρη προσδιορισμό του *Γεωμετρικού Πηλίκου* δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή, απαιτείται ένα Σύστημα Τεσσάρων Στοιχείων που αποδέχονται αντίστοιχα **4 διακριτές αριθμητικές εκφράσεις:**

- Η πρώτη αριθμητική τιμή προσδιορίζει τη σχέση των μηκών των 2 διανυσμάτων (*ratio*)
- Οι τρεις άλλες τιμές προσδιορίζουν πλήρως τη σχετική κατεύθυνση:
  - η μία τιμή αντιπροσωπεύει την κοινή κλίση ή το μέτρο της μεταξύ τους γωνίας (*angle*) και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι μικρότερη από 2 ορθές. Με τα σύμβολα του Hamilton μπορούμε να γράψουμε $\angle \boldsymbol{q} > 0, \angle \boldsymbol{q} < \boldsymbol{\pi}$
  - οι δύο επόμενες τιμές καθορίζουν την κατεύθυνση του κάθετου στην κοινή αρχή τους άξονα, γύρω από τον οποίο μέσω περιστροφής σχηματίζεται η γωνία των δύο διανυσμάτων *(η θετική και αρνητική φορά έχουν ήδη καθοριστεί παραπάνω)*:
    - η πρώτη δηλώνει την κλίση ή γωνία του επιπέδου των δύο διανυσμάτων σε σχέση με ένα αρχικό δεδομένο επίπεδο αναφοράς συνήθως το οριζόντιο (*ledge*)
    - η δεύτερη δηλώνει την κλίση ή τη γωνία που σχηματίζει η τομή του επιπέδου των δύο διανυσμάτων με αρχική δεδομένη ευθεία του επιπέδου αναφοράς (*slope*).

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μεταβούμε από την κατεύθυνση του διαιρέτη (OA) στην κατεύθυνση του διαιρετέου (OB).

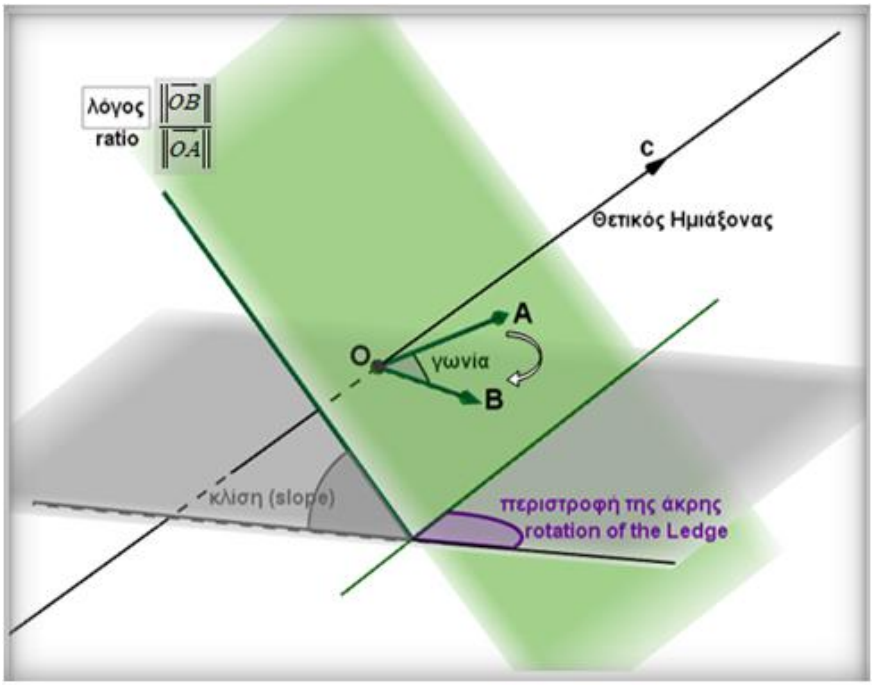
Τα τέσσερα αυτά στοιχεία και μόνο είναι αρκετά για τον προσδιορισμό καθώς:

- Το *σχετικό μήκος* **δε μεταβάλλεται,** όταν τα μήκη μεταβληθούν **ανάλογα**
- Η *σχετική κατεύθυνσή τους* **δεν αλλάζει**, όταν η μεταξύ τους γωνία **περιστραφεί** στο **ίδιο επίπεδο**

Η σύνθετη λοιπόν σχέση δύο γραμμών (διανυσμάτων) αποτελεί συνδιασμό δύο επιμέρους σχέσεων, μια αυτή των μηκών και μια των κατευθύνσεων. Αυτή τη σχέση ονομάσαμε ***γεωμετρικό πηλίκο μέσω ενός συστήματος 4 αριθμητικών στοιχείων***.

Η οποιαδήποτε αλλαγή σε κάποιο στοιχείο της τετράδας θα επέφερε στο τετράνιο ουσιαστική αλλαγή. Ερμηνεύοντας έτσι την έννοια του τετρανίου στη Γεωμετρία καταλήγουμε ότι κάθε τετράνιο προσδιορίζεται από τα εξής 4 στοιχεία (σχ. 12):

***RATIO** (αναλογία)* ***ANGLE** (γωνία)* ***LEDGE** (οριζόντια άκρη)* ***SLOPE** (κλίση)*



Σχήμα 12

Αυτό αποτελεί ένα κίνητρο να πούμε ότι:

Το γεωμετρικό πηλίκο δύο διανυσμάτων είναι εν γένει ένα ΤΕΤΡΑΝΙΟ.

Ένα τετράνιο θεωρώντας το ως πηλίκο δύο αμοιβαίως κεκλιμένων γραμμών στο χώρο περιλαμβάνει ως θεμελιώδες συστατικό κομμάτι του **ένα επίπεδο** απαραίτητο για την πληρότητά του ως έννοια. Σε υποσημείωση στη σελ. 111 των *Elements* η λέξη ***Quaternion*** συνδέεται με τη λατινική λέξη *Quaterni(o)* που σημαίνει 4 κάθε φορά (ανά τέσσερα) ή ένα σύνολο 4 στοιχείων ή μια τετράδα όπως επίσης και με την ελληνική λέξη ***τετρακτύς*.**

Ένα παράδειγμα ισότητας Γεωμετρικών Πηλίκων του Hamilton

Στο Σχήμα 13 τα σημεία C,D,E,F,G είναι 5 από τις 6 κορυφές ορθού πρίσματος, που καθορίζουν τις ακμές του και το επίπεδο G,C,D είναι οριζόντιο. Η γωνία HCD (για παράδειγμα εδώ θεωρούμε ότι ισούται με 30°) αντιπροσωπεύει μια αριστερόστροφη στροφή μέσω της οποίας προκύπτει η οριζόντια ακμή CD με μετατόπιση μιας αρχικής δεδομένης οριζόντιας ευθείας CH. Η γωνία GCF (ας υποθέσουμε εδώ ότι είναι 40°) αντιπροσωπεύει την κλίση της επιφάνειας FEDC σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο GCD.

Στην επιφάνεια FEDC είναι σχεδιασμένα δύο όμοια τρίγωνα OAB και Ο΄Α΄Β΄, τα οποία θεωρούνται ως τα μισά 2 αντίστοιχων **ισόπλευρων** τριγώνων με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε περιστροφή AOB και Α΄Ο΄Β΄ να είναι 60° και προσανατολισμένη δεξιόστροφα (ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού). Τα δε μήκη OB, Ο΄Β΄ ως προς τα OA, ΟΆ΄ ακολουθούν τη σχέση 2:1.

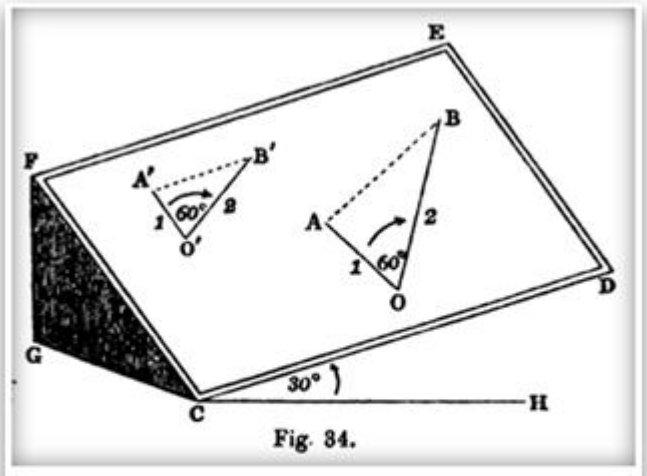


Fig. 34.

W. Hamilton, *Elements of Quaternions*, 1866, σελ.110

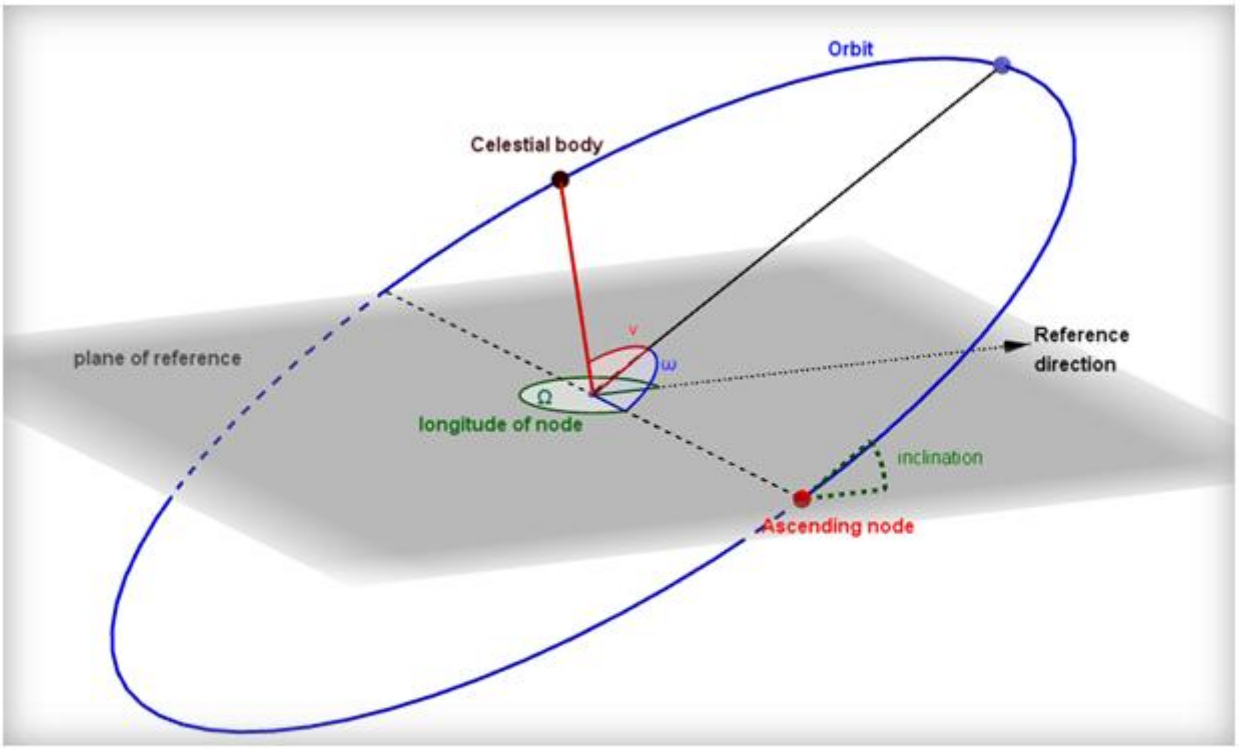
Σχήμα 13

Υπό αυτές τις συνθήκες κατασκευής θεωρούμε τα πηλίκα **OB:OA** και **Ο΄Β΄: ΟΆ΄** ίσα μεταξύ τους, καθώς οι γραμμές OA, OB και ΟΆ΄ και Ο΄Β΄ έχουν το ίδιο *σχετικό μήκος* (2:1), και την ίδια *σχετική κατεύθυνση*. Κάθε ένα από αυτά τα πηλίκα τα θεωρούμε ως Quaternions, γιατί ο πλήρης προσδιορισμός τους εξαρτάται - σε ότι αφορά τη βασική τους ιδέα και σύλληψη και το διαχωρισμό τους από άλλες έννοιες – από ένα σύστημα τεσσάρων αριθμητικών στοιχείων. Συγκεκριμένα στο παράδειγμά μας είναι η τετράδα 2, 60, 30 και 40, όπου:

- Το 2 δηλώνει ότι το μέτρο του διαιρετέου έχει διπλασιαστεί σε σχέση με το μήκος του διαιρέτη
- Οι 60° δηλώνουν τις γωνίες AOB και Α΄Ο΄Β΄ που ανταποκρίνονται σε περιστροφή σύμφωνη με τον κανόνα του χεριού (αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη, *εδώ του δεξιού χεριού*)
- Οι 30° δηλώνουν την περιστροφή που πραγματοποιείται στο οριζόντιο επίπεδο σε σχέση με μια δεδομένη ευθεία (CH) η οποία έχει απομακρυνθεί με αυτή τη γωνιακή ποσότητα σε μια γνωστή κατεύθυνση (*εδώ του αριστερού χεριού*)
- Οι 40° εκφράζουν την *«ανύψωση του desk»*, δηλ. του επιπέδου των διανυσμάτων σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο.

Ο Hamilton επιχειρεί τη σύνδεση των 4 στοιχείων που ορίζουν γεωμετρικά ένα τετράνιο με την αστρονομία. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε το επίπεδο αναφοράς με την εκλειπτική (*επίπεδο τροχιάς της γης*), τη γωνία HCD με το γεωγρ. μήκος ενός κόμβου (*longitude of node**) και τη γωνία GCF με την κλίση τροχιάς ενός πλανήτη ή κομήτη (*inclination*) (σχ. 14).

(* *node*: σημείο τομής μιας τροχιάς με το επίπεδο μιας άλλης)



Σχήμα 14

2.1.2. Ακτινικά πηλίκα – Η τετράγωνη δύναμη ενός Τετρανίου-Versors

Αν θεωρήσουμε την μοναδιαία σφαίρα με κέντρο Ο, τότε οποιοδήποτε διάνυσμα *ΟΑ*, όπου το Α βρίσκεται στην επιφάνεια αυτής της σφαίρας, μπορεί να θεωρηθεί ως *μοναδιαίο διάνυσμα ή μοναδιαία ακτίνα.*. Αυτά τα διανύσματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους, γιατί έχουν διαφορετική κατεύθυνση (εφόσον έχουν διαφορετικό πέρας).

Κάθε τετράνιο που προκύπτει από το *πηλίκο* δύο *μοναδιαίων διανυσμάτων* θα καλείται ***Radial Quotient (ακτινικό πηλίκο)*** ή απλώς ***Radial***. *(Elements,* σελ. 130)

Ο παραπάνω ορισμός ισχύει και στην περίπτωση που τα δύο διανύσματα είναι απλώς *ισομήκη*. Οι δύο βαθμωτές μονάδες, η θετική (+1) και η αρνητική (-1), μπορούν να θεωρηθούν ως *οριακές*

περιπτώσεις ακτινικών πηλίκων που αντιστοιχούν στις οριακές περιπτώσεις $\angle \boldsymbol{q} = 0,\ \angle \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\pi}$ δηλαδή, όταν $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$.

Κάθε ***ακτινικό πηλίκο*** μπορεί να θεωρηθεί και ως ***στροφέας (Versor).*** Αυτό γιατί, αν θεωρήσουμε το ακτινικό πηλίκο το τετράνιο $q=\frac{OB}{OA}$ (σχ. 15) με $OA=\alpha$, $OB=\beta$ μοναδιαία διανύσματα στη μοναδιαία σφαίρα, τότε $q=\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow q\alpha=\beta$ δηλ. το q "δρα" ως παράγοντας στο διάνυσμα $OA=\alpha$ και δίνει αποτέλεσμα το διάνυσμα $OB=\beta$, το οποίο προκύπτει από την *περιστροφή* του α κατά τη γωνία που ορίζεται από το τετράνιο.

Σχήμα 15

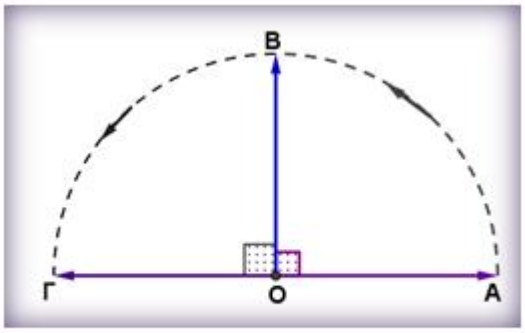
- Στην περίπτωση που η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ορθή (σχ. 15) το τετράνιο θα καλείται ***Right Radial Quotient*** ή απλά ***Right Radial*** ή ***Right Versor*** δηλ. ***Ορθογώνιο Ακτινικό Πηλίκο.*** Αυτά κατέχουν σημαντική θέση στη θεωρία των τετρανίων και καθοριστικό ρόλο στις εφαρμογές τους. Σε αυτή την περίπτωση το q επιφέρει περιστροφή 1 ορθής.

Αν q είναι ***Ορθογώνιο Ακτινικό Πηλίκο (Versor)***, τότε: $q\cdot q = qq = q^2 = -1$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε το ημικύκλιο $AB\Gamma$, τότε τα ορθογώνια τετράνια $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}$ και $\frac{\overrightarrow{O\Gamma}}{\overrightarrow{OB}}$ είναι ίσα (σχ. 16).

Επομένως $\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{OB}{OA}\cdot\frac{OB}{OA} = \frac{O\Gamma}{OB}\cdot\frac{OB}{OA} = \frac{O\Gamma}{OA} = -1$

όπου τα *OA* και *OB* μπορεί να είναι οποιαδήποτε ισομήκη και ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα.



Σχήμα 16

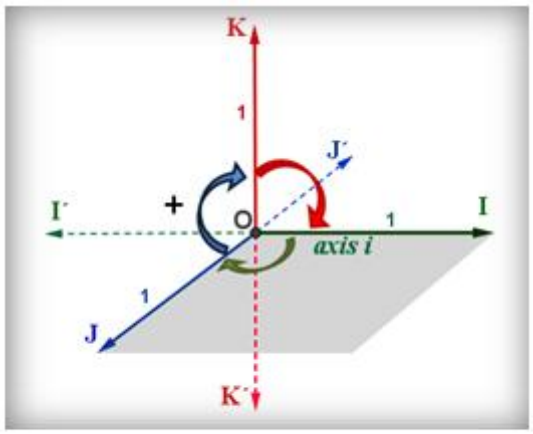
Βλέπουμε λοιπόν ότι στον Λογισμό (αλγεβρικές μέθοδοι εφαρμογής) των Τετρανίων η εξίσωση $q^2=-1$ έχει απροσδιόριστο πλήθος ριζών, οι οποίες έχουν γεωμετρική υπόσταση ως πηλίκα μοναδιαίων ορθογωνίων τετρανίων αλλά και ένα βαθμό ασάφειας, καθώς το επίπεδο του τετρανίου

q ως γεωμετρικό πηλίκο παραμένει αυθαίρετο. Τα δε Ορθογώνια Ακτινικά Πηλίκα αποτελούν μία τιμή του συμβόλου $\sqrt{-1}$.

Τα *Ορθογώνια Ακτινικά Πηλίκα* αποτελούν τον προάγγελο των ορθογώνιων μοναδιαίων διανυσμάτων $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Το σύστημα των τριών Ορθογώνιων Ακτινικών Πηλίκων *i, j, k*

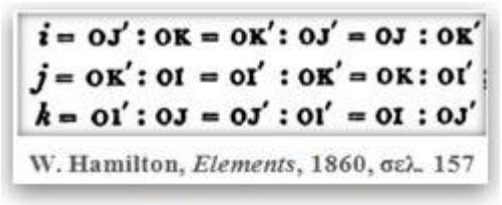
Για να ορίσει τα $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ο Hamilton αρχικά ορίζει τρία μοναδιαία διανύσματα OI, OJ, OK *(unit-lines)* με κοινή αρχή Ο και ανά δύο κάθετα μεταξύ τους στον χώρο. Επίσης θεωρεί ως *θετική* την περιστροφή που πραγματοποιείται με φορά από το δεύτερο διάνυσμα προς το τρίτο, δηλ. OJ→OK, γύρω από το πρώτο διάνυσμα OI. Συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό του άξονα τετρανίου, ο άξονας του $\boldsymbol{i}$ είναι ο OI, του $\boldsymbol{j}$ ο OJ και του $\boldsymbol{k}$ ο OK (σχ. 17).



Σχήμα 17

Έτσι ορίζει τα τετράνια $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ως εξής: $\boldsymbol{i} = \frac{\text{OK}}{\text{OJ}}$, $\boldsymbol{j} = \frac{\text{OI}}{\text{OK}}$, $\boldsymbol{k} = \frac{\text{OJ}}{\text{OI}}$. Επίσης $-\boldsymbol{i} = \frac{\text{OJ}}{\text{OK}}$, $-\boldsymbol{j} = \frac{\text{OK}}{\text{OI}}$ και $-\boldsymbol{k} = \frac{\text{OI}}{\text{OJ}}$.

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις (εικ. 27):



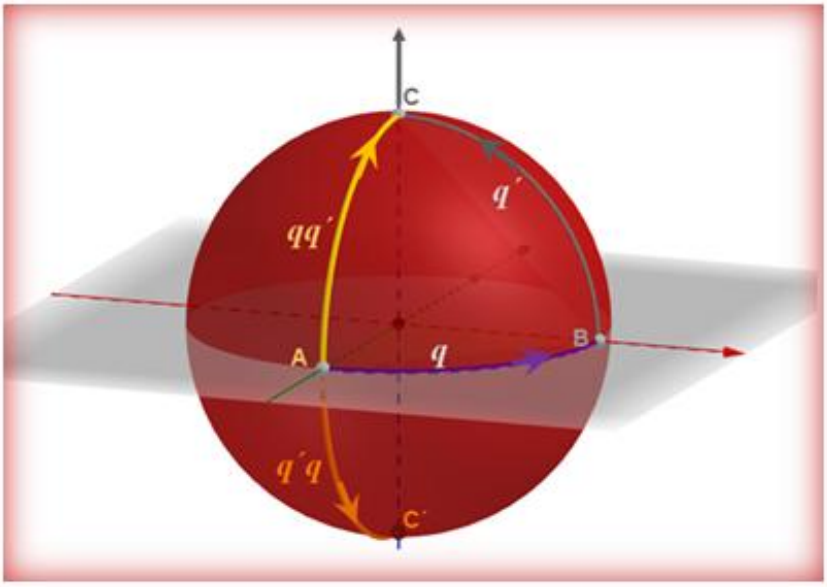
Εικόνα 27

Τα $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ είναι εξ ορισμού *Ορθογώνια Ακτινικά Πηλίκα*, για τα οποία αποδείξαμε ότι ισχύει $q^2 = -1$. Επομένως $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Επίσης $i \cdot j = \frac{OJ}{OK'} \cdot \frac{OK'}{OI} = \frac{OJ}{OI} = k$.

Προφανώς $i \cdot j \cdot k = k \cdot k = k^2 = -1$. Συνέπεια του ορισμού των *versors*, και εφόσον αυτά ανήκουν σε κάθετα επίπεδα, είναι η ιδιότητα $qq' = -q'q$, η οποία ερμηνεύεται στα *Elements* (σελ. 150) ως εξής:

> *"Κάθε δύο τεταρτοκυκλικές ή ορθές περιστροφές σε επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, συνθέτονται σε μία τρίτη ορθή περιστροφή, ως συνισταμένη, σε επίπεδο κάθετο σε κάθε ένα από αυτά. Και αυτή η τρίτη (συνισταμένη) περιστροφή έχει τη μία ή την άλλη από δύο αντίθετες κατευθύνσεις, σύμφωνα με τη σειρά με την οποία έχουν παρθεί οι δύο συνιστώσες περιστροφές, ώστε η μία να είναι διαδοχική της άλλης."*

Περιγραφικά στο σχήμα 18, αν το προσανατολισμένο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ στη μοναδιαία σφαίρα είναι η περιστροφή που αντιπροσωπεύει το Ορθογώνιο Ακτινικό Τετράνιο q και το προσανατολισμένο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ το q', τότε το προσανατολισμένο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ αντιπροσωπεύει το qq', ενώ το $\overset{\frown}{\mathrm{CA}} = \overset{\frown}{\mathrm{AC}'}$ αντιπροσωπεύει το $q'q$, κι επειδή $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = -\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$, συνεπάγεται η ισότητα $qq' = -q'q$.



Σχήμα 18

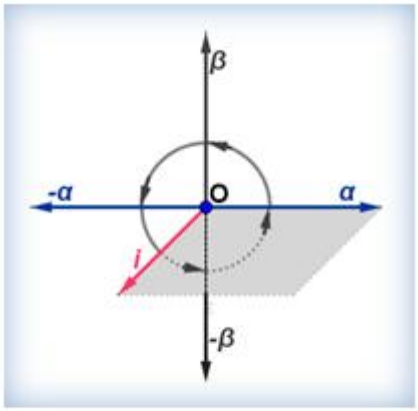
Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι γνωστές ισότητες: $ij = -ji$, $jk = -kj$, $ki = -ik$.

Οι σχέσεις $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ αποτελούν μια επαρκή συμβολική βάση του *Λογισμού των Τετρανίων*, καθώς «περιέχουν» όλους τους νόμους που διέπουν τα i, j, k και γιατί θα αποδειχθεί ότι κάθε τετράνιο q, μπορεί να αναχθεί στην **αλγεβρική τετρωνυμική μορφή**:

$q = \alpha + i\mathrm{x} + j\mathrm{y} + k\mathrm{z}$ με α, x, y, z βαθμωτά μεγέθη και i, j, k τρία *Right Versors*

Tait: Δυνάμεις μοναδιαίων διανυσμάτων και περιστροφές

Ο P. G. Tait στο βιβλίο του *"An Elementaruy Treatise on Quaternions"* (1890) στην §74 συνδέει τα *Versors* με τις δυνάμεις μοναδιαίων διανυσμάτων και στη συνέχεια με περιστροφές στο χώρο.



Σχήμα 19

Συγκεκριμένα, αν ***i*** είναι μοναδιαίο διάνυσμα, τότε το ***iα*** θα είναι ένα διάνυσμα ***β*** ίσου μήκους με το ***α*** αλλά κάθετο στα ***i*** και ***α.*** Διαδοχικά παίρνουμε (σχ. 19):

- $\boldsymbol{ia=\beta}$
- $\boldsymbol{i^2a=-a}$
- $\boldsymbol{i^3a=-ia=-\beta}$
- $\boldsymbol{i^4a=i\left(i^3a\right)=i\left(-\beta\right)=-i\beta=-i\left(ia\right)=-i^2a=a}$

Παρατηρούμε ότι, αν εφαρμόσουμε 4 φορές διαδοχικά το μοναδιαίο ***i*** στο διάνυσμα ***α,*** το ***α*** περιστρέφεται κατά 4 διαδοχικές ορθές γύρω από τον άξονα του ***i***.

Επομένως κάθε δύναμη μοναδιαίου διανύσματος με θετικό ακέραιο εκθέτη ν προκαλεί περιστροφή κατά τη θετική φορά κατά **ν-ορθές,** αν πολλαπλασιαστεί με διάνυσμα κάθετο σε αυτό. Αν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος, τότε η περιστροφή που προκαλεί έχει αρνητική φορά, δηλαδή αυτή των δεικτών του ρολογιού (*ο Tait υιοθετεί ως θετική φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού*).

Ας θεωρήσουμε ότι ο *στροφέας-versor* προκαλεί θετική περιστροφή κατά γωνία **θ**. Τότε, αφού ο εκθέτης 2 αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά 2ορθές=π, αναλογικά στη γωνία **θ** θα αντιστοιχεί εκθέτης **2θ/π**.

Έτσι προκύπτει η παρακάτω πρόταση με σημαντικές εφαρμογές στη φυσική:

Αν **u** *μοναδιαίο* διάνυσμα και ***α*** διάνυσμα κάθετο στο **u**, το $\mathbf{u}^{2\theta/\pi}\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένα νέο διάνυσμα ίσου μέτρου με το ***α***, που έχει περιστραφεί γύρω από από τον άξονα του **u** κατά γωνία **θ.**

Αναγωγή τετρανίου στην τετρωνυμική μορφή $q=\alpha+xi+yj+zk$ μέσω γεωμετρίας

Elements, σελ. 117,120, 118,191,233

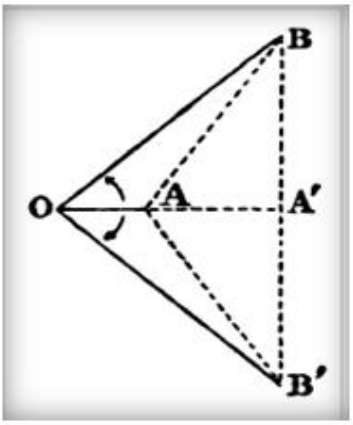
Ορισμός 1: *Άξονας (Positive Axis ή Axis)* τετρανίου $q=\frac{OB}{OA}$ είναι ένα *μοναδιαίο διάνυσμα* κάθετο στο επίπεδο των $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ στην κοινή τους αρχή Ο, γύρω από το οποίο θεωρείται θετική (κανόνας

δεξιού χεριού ή η φορά των δεικτών του ρολογιού) η περιστροφή του διαιρέτη $\overrightarrow{OA}$ με κατεύθυνση προς τον διαιρετέο $\overrightarrow{OB}$.

Ορισμός 2: *Δείκτης (Index) ορθογωνίου* τετρανίου $q=\frac{OB}{OA}$ είναι διάνυσμα OI πάνω στον άξονα Ox του τετρανίου q προς την κατεύθυνση του μοναδιαίου τέτοιο, ώστε ο λόγος του μήκους του OI προς το μήκος του μοναδιαίου του Ox να ισούται με το *λόγο του μήκους του διαιρετέου* OB *προς το μήκος του διαιρέτη* OA .

Ίσοι Δείκτες συνεπάγονται ίσα ορθογώνια τετράνια και αντίστροφα.

Ορισμός 3: *Συζυγές τετράνιο* $\mathrm{K}q$ *(conjugate)* ενός τετρανίου $q=\frac{OB}{OA}$ ορίζεται το γεωμετρικό πηλίκο $\mathrm{K}q=\frac{OB'}{OA}$, όπου OB' το συμμετρικό του OB ως προς την ευθεία OA (σχ. 20).



Σχήμα 20

Σχόλιο: Ο συμβολισμός $\mathrm{K}q$ του συζυγούς τετρανίου οφείλεται στον Hamilton.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το άθροισμα 2 συζυγών τετρανίων είναι αριθμός.

Απόδειξη: $q+\mathrm{K}q=\frac{OB}{OA}+\frac{OB'}{OA}=\frac{OB+OB'}{OA}=(*)\frac{2OA'}{OA}$

(*)από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Αλλά $\overrightarrow{OA}\,//\,\overrightarrow{OA'}$, άρα $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}=\lambda\in\mathbb{R}$. Συνεπώς $q+\mathrm{K}q=2\lambda\in\mathbb{R}$.

Ορισμός 4: *Βαθμωτό (Scalar)* μέρος ενός τετρανίου q είναι ο πραγματικός αριθμός λ, όπου $\lambda=\frac{1}{2}(q+\mathrm{K}q)$. Συμβολίζεται με $\mathrm{S}q$

Προφανώς τα συζυγή τετράνια έχουν ίδιο βαθμωτό μέρος, αφού ο συζυγής κάθε τετρανίου ορίζεται μονοσήμαντα και $\mathrm{K}(\mathrm{K}q)=q$

Ορισμός 5: *Right part ή Vector-Index part ή Vector part (ορθογώνιο ή διανυσματικό)* μέρος ενός τετρανίου q είναι το διάνυσμα *Index του τετρανίου* και συμβολίζεται με $\mathrm{V}q$

Όπως κάθε διάνυσμα του επιπέδου αναλύεται με μοναδικό τρόπο σε δύο κάθετες συνιστώσες, έτσι και για τα τετράνια ο Hamilton διατυπώνει το παρακάτω συμπέρασμα:

Κάθε τετράνιο μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο σε δύο προσθετέους, τον βαθμωτό Sq και τον διανυσματικό Vq. Έτσι για κάθε τετράνιο q ισχύει $q = Sq + Vq$

Όπως κάθε διάνυσμα του χώρου έτσι και ο *Δείκτης (Index)* ή αλλιώς διανυσματικό μέρος Vq ενός τετρανίου q μπορεί να αναλυθεί με μοναδικό τρόπο σε άθροισμα τριών προσθετέων, που είναι οι προβολές του σε τρία κάθετα μεταξύ τους επιπεδα. Αν λοιπόν $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ τα αντίστοιχα μοναδιαίαα διανύσματα στους τρεις κάθετους άξονες Ox, Oy, Oz (*right versors*) και x, y, z οι ορθογώνιες συντεταγμένες του πέρατος του Vq τότε $Vq = xi + yj + zk$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι: $q = Sq + Vq = \alpha + xi + yj + zk$ $\alpha,x,y,z \in \mathbb{R}$.

Επομένως κάθε τετράνιο μπορεί να αναχθεί στην παραπάνω τετρωνυμική μορφή.

Ερμηνεύοντας γεωμετρικά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός τετρανίου

Στο διάστημα 1843 έως 1847 ο Hamilton έγραψε και παρουσίασε (διάβασε) στο Συμβούλιο της Βασιλικής Ακαδημίας της Ιρλανδίας διάφορες εργασίες του πάνω στα τετράνια, οι οποίες δημοσιεύτηκαν στο *Philosophical Magazine* και φυσικά υπάρχουν στα "*Proceedings of the Royal Irish Academy*", δηλαδή στα Πρακτικά της Βασιλικής Ακαδημίας της Ιρλανδίας. Οι σημαντικότερες από αυτές φέρουν τον τίτλο «*On Quaternions*».

Ο M. J. Crowe στο "*History of Vector Analysis*" αναφέρει ότι σε αυτές τις εργασίες ο Hamilton διαπραγματεύεται την αντιστοιχία των *τετρανίων* με αυτή των *κλασσικών μιγαδικών* αριθμών και σχολιάζει ότι η δυσκολία να βρεθούν «αναλογίες» μεταξύ του πραγματικού και φανταστικού μέρους των αριθμών των δύο συνόλων βρίσκεται στο γεγονός ότι στους μεν μιγαδικούς στην έκφραση $\boldsymbol{\alpha+\beta i}$, το πραγματικό μέρος $\boldsymbol{\alpha}$ κατ΄ απόλυτη τιμή εκφράζει απόσταση στον άξονα των τετμημένων, ενώ το βαθμωτό (scalar) μέρος $\boldsymbol{\alpha}$ στην έκφραση $\boldsymbol{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k}$ των τετρανίων δεν δηλώνει απόσταση σε κάποιον άξονα εκτός αν θεωρήσουμε τα τετράνια ως τετραδιάστατα και τα $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ ως καρτεσιανές συν/νες. Αυτό όμως δε δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία.

Στην εργασία «*On Quaternions*» που διαβάστηκε από τον ίδιο τον συγγραφέα στις 11 Νοεμβρίου του 1844 και είχε υποβάλει στην Ακαδημία ένα χρόνο πριν [Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 3 (1847), σελ. 1-16], ο Hamilton αναλύει λεπτομερώς την τετρωνυμική μορφή των τετρανίων μιλώντας μάλιστα σε τρίτο πρόσωπο ("the author is..., the author has not seen…, occurred

to him…") και όχι σε πρώτο. Χρησιμοποιώντας όρους ανάλογους της συνήθους άλγεβρας, όπως λέει ο ίδιος, κάθε τετράνιο αποτελείται από δύο μέρη, το *πραγματικό* α και το *φανταστικό ή τριωνυμικό* $\beta i+\gamma j+\delta k$, το οποίο κατασκευάστηκε από μία ευθεία προσανατολισμένη γραμμή στο χώρο και έχοντας τα β,γ,δ ως ορθογώνιες συντεταγμένες δηλαδή ως προβολές της γραμμής στους τρεις άξονες x,y,z. Γι αυτό τον λόγο ονομάστηκε *διανυσματικό μέρος* ή απλά *διάνυσμα (VECTOR)*. Τα δε ***i,j,k*** δεν έχουν κανένα γραμμικό συσχετισμό (δηλ. είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους). Στην αρχική "σύλληψη" της ιδέας των τετρανίων οι αριθμοί β,γ,δ αντιμετωπίστηκαν ως τρεις διακριτοί συντελεστές ή σταθερές και σε πολλές εφαρμογές ως τρεις ορθογώνιες συντεταγμένες. Κι ενώ το τετράγωνο του *πραγματικού μέρους* α είναι πάντα θετικό, αφού $\alpha^2>0$ για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό, το τετράγωνο του *φανταστικού μέρους* είναι πάντα αρνητικό. Πράγματι:

$$\left(\alpha i+\beta j+\gamma k\right)^2=\left(\alpha i+\beta j+\gamma k\right)\cdot\left(\alpha i+\beta j+\gamma k\right)=\alpha^2 i^2+\alpha\beta ij+\alpha\gamma ik+\alpha\beta ji+\beta^2 j^2+\beta\gamma jk+\alpha\gamma ki+\beta\gamma kj+\gamma^2 k^2=$$
$$-\alpha^2+\alpha\beta k-\alpha\gamma j-\alpha\beta k-\beta^2+\beta\gamma i+\alpha\gamma j-\beta\gamma i-\gamma^2=-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)<0.$$

Αν $\mathrm{V}.q=\vec{q}=\alpha i+\beta j+\gamma k$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα: $\vec{q}^2=-\|\vec{q}\|^2$.

Στον χώρο, αντίστοιχα με ότι συμβαίνει στο επίπεδο, το άθροισμα $\beta i+\gamma j+\delta k$ θα μπορούσε να θεωρηθεί ίσο με ένα άλλο διάνυσμα, που έχει το ίδιο τελικό αποτέλεσμα με αυτό των επιμέρους επιδράσεων του κάθε διανυσματικού όρου ξεχωριστά, όπως η συνισταμένη ευθύγραμμη κίνηση αντιπροσωπεύει τις διαφορετικές γραμμικές κινήσεις που εκφράζονται από τους διαφορετικούς προσθετέους. Συγκεκριμένα ο Hamilton διατυπώνει την ακόλουθη πρόταση, που αποδίδει με σαφήνεια τη φυσική ερμηνεία του φανταστικού μέρους ως διανυσματικό άθροισμα:

> *"Vectors are therefore to be added to each other by a certain geometrical composition, exactly analogous to the composition of motions, or of forces, and following the same known rules."*
>
> (Wilkins, Proceedings of the R.I.A-[1847], 1999, σελ. 5)

Κι ενώ αυτό που αλγεβρικά αποκαλούμε *φανταστικό μέρος* τετρανίου έχει μια απλή και φυσική σημασία και αναπαράσταση στον χώρο, για το βαθμωτό μέρος δεν είναι το ίδιο εύκολο να βρεθεί μια αντίστοιχη γεωμετρική ή φυσική ερμηνεία. Για το πραγματικό μέρος λέει:

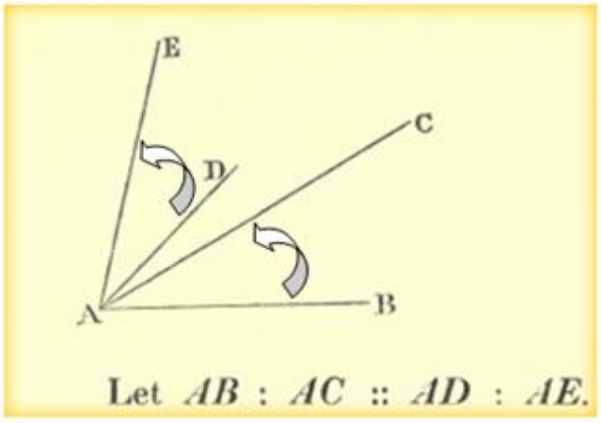
> *"the fourth proportional to any three rectangular vectors is a quantity distinct from every vector, and of the kind called real in this theory, as contrasted with the kind called imaginary."*
>
> (Wilkins, Proceedings of the R.I.A.-[1847], 1999, σελ. 2)

Εδώ ο Hamilton τονίζει τη «διαφορετικότητα» της φύσης του βαθμωτού μέρους σε σχέση με το διανυσματικό-φανταστικό και το προσδιορίζει ως την *τέταρτη ανάλογο* σε τρία ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα. Μάλιστα λέει πως η θετική πραγματική μονάδα **+1** ουδεμία σχέση έχει με οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα. Η επιχειρηματολογία του στηρίζεται στο ότι κάθε δύο κάθετα μεταξύ τους διανύσματα έχουν ως γινόμενο ένα τρίτο διάνυσμα κάθετο στα δύο πρώτα, αλλά η κατεύθυνσή του καθορίζεται από τη σειρά των παραγόντων, άρα μπορεί να είναι είτε θετική (+) είτε αρνητική (-). Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, σε κάθε τρία κάθετα μεταξύ τους διανύσματα αντιστοιχίζεται μία θετική ή αρνητική κατεύθυνση.

Οι John Warren και George Peacock είχαν ήδη βρει τρόπο να εκφράσουν την 4η ανάλογο τριών διανυσμάτων στο επίπεδο, η οποία σχετίστηκε άμεσα με τον ορισμό του γινομένου δύο προσανατολισμένων τμημάτων όπως είδαμε στην §1.1 στη θεωρία του Wessel και υιοθετήθηκε από τον Hamilton, ενώ ερευνούσε τη θεωρία τριάδων στον πολλαπλασιασμό στο χώρο.

Ο John Warren[1] ορίζει την τέταρτη ανάλογο τριών διανυσμάτων στο επίπεδο ως εξής (με σύγχρονους συμβολισμούς):

Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ διανύσματα με $\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \kappa$ >0 και $\widehat{BAC} = \omega$, η τέταρτη ανάλογος των τριών διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ για το οποίο ισχύουν:



Σχήμα 21

- $\frac{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AE}\right\|} = \kappa$
- $\widehat{DAE} = \omega$
- οι γωνίες $\widehat{BAC}$ και $\widehat{DAE}$ μετρώνται με την ίδια φορά, δηλ. αν η $\widehat{BAC}$ μετρήθηκε από το $\overrightarrow{AB}$ προς το $\overrightarrow{AC}$ (αριστερόστροφα), τότε πρέπει και η $\widehat{DAE}$ να μετρηθεί προς την ίδια κατεύθυνση από το $\overrightarrow{AD}$ προς το $\overrightarrow{AE}$. Αυτή η φορά καθορίζει και την τελική θέση της 4ης αναλόγου $\overrightarrow{AE}$ (σχ. 21).

[1] Treatise on the Geometrical Representations of the Square Roots of Negative Quantities, by the Rev. John Warren. Cambridge, 1828, σελ.7-8.

Στην ίδια εργασία ο Hamilton επιχειρεί να επεκτείνει την έννοια της *4ης αναλόγου 3 ορθογώνιων διανυσμάτων* στον χώρο. Με στόχο τη «γεωμετρική» κατανόηση και ερμηνεία αυτής της 4ης αναλόγου, παραθέτει το παρακάτω παράδειγμα:

Αν θεωρήσουμε τα 4 σημεία του ορίζοντα, N (*north*-βορράς), S (*south*-νότος), E (*east*-ανατολή) και W(*west*-δύση), τότε μια *αναλογία κατευθύνσεων* στο επίπεδο είναι η εξής:

Το W είναι για το S ό,τι είναι το S για το E, δηλαδή κάθε ένα υπολείπεται του άλλου κατά 90°, ή συμβολικά **W:S :: S:E.**

Με την ίδια λογική και κατ΄επέκταση στον χώρο, αν θεωρήσουμε την κατεύθυνση **U** (*up*-πάνω) κάθετη στις κατευθύνσεις **W** και **S**, τότε υπάρχει μια 4^{η} ανάλογος των **W, S, U**, η κατεύθυνση **F** (*forward*-εμπρός) τέτοια ώστε να μπορούμε να διατυπώσουμε την αναλογία: ***"το W για το S είναι ό,τι το U για το F"*** και αντίστροφα ***"το F για το U είναι ό,τι το S για το W*** και ***το W για το N".*** Συμβολικά **F:U :: S:W :: W:N**

Εικόνα 28

Αντίστοιχα για την τριάδα κατευθύνσεων **W, S, D** (*down*-κάτω) υπάρχει η 4^{η} ανάλογος με αντίθετη κατεύθυνση από την **F** (*forward*), γι αυτό θα ονομαστεί **B** (*backward*-προς τα πίσω), ώστε να ισχύει η αναλογία: ***"το B για το W είναι ό,τι το W για το S*** και ***το S για το D".*** Συμβολικά έχουμε **B:W :: W:S :: S:D.**

Οι κατευθύνσεις **F** (*forward*) και **B** (*backward*) αποτελούν ένα ζεύγος *αντίθετων* κατευθύνσεων και είναι εφοδιασμένες με την θετική και αρνητική πραγματική μονάδα +1 και -1.

Στη συνέχεια ο Hamilton γενικεύει για τρεις οποιεσδήποτε ορθογώνιες κατευθύνσεις στον χώρο:

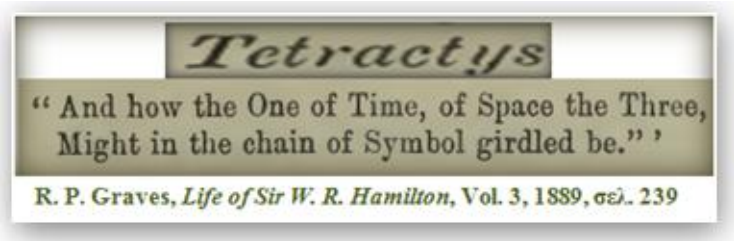
- αν **X** τυχαία κατεύθυνση (ημιάξονας)
- **Y** οποιαδήποτε κατεύθυνση με **Y** $\perp$ **X**
- **Z** κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο (**X,Y**) και
- η **Z** προκύπτει με **δεξιόστροφη** περιστροφή του **Y** γύρω από τον **X** κατά μια ορθή

τότε:

- η 4^{η} ανάλογος **A** των **X,Y,Z** είναι μια κατεύθυνση διαφορετική της **X**
- το **A** είναι για την **τυχαία** κατεύθυνση **X** ό,τι είναι η κατεύθυνση **Y** για το **Z** δηλ. **A:X :: Y:Z .** Επίσης ισχύει **Z:Y :: X:A**
- το **A** δεν μεταβάλλεται αν το σύστημα των 3 κατευθύνσεων στραφεί δεξιόστροφα ή μετατρέπεται σε **B** αν στραφεί αριστερόστροφα
- Τα **A** και **B** καθώς εναλάσσουν θετική-αρνητική κατεύθυνση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι δυνατό να «τοποθετηθούν» σε μια *βαθμολογημένη κλίμακα*, η

οποία δέχεται οποιονδήποτε προσανατολισμό ή θα μπορούσαμε να πούμε έχει απροσδιόριστο προσανατολισμό και είναι *μονοδιάστατη*

- Κάθε ποσότητα που "μεταφέρει" η κατεύθυνση **F** ονομάζεται *θετική ποσότητα* και μετριέται με την πραγματική θετική μονάδα **+1** *(positive unity)*, ενώ κάθε ποσότητα στην κατεύθυνση **B** ονομάζεται *αρνητική ποσότητα* και μετριέται με την πραγματική αρνητική μονάδα **-1** *(negative unity)*
- Μια ποσότητα που βρίσκεται στην θετική ή αρνητική κατεύθυνση των **A**, **B** και «μετακινείται» προοδευτικά από το αρνητικό άπειρο έως το θετικό άπειρο, συμβαδίζει περισσότερο με την έννοια του *χρόνου* απ΄ ότι με την έννοια του *χώρου*. Ο ίδιος «αποδίδει» στο βαθμωτό μέγεθος τη διάσταση του χρόνου στη σονάτα του με τίτλο "ΤΕΤΡΑΚΤΥΣ" (εικ. 29)



Εικόνα 29

- Αυτή η κλίμακα δεν μπορεί να συγκριθεί με διανύσματα με τον ίδιο τρόπο, που οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών δε μπορούν να συγκριθούν με αρνητικές ή θετικές ποσότητες.
- Η βαθμωτή ή scalar (μονοδιάστατη) κατεύθυνση είναι μια «εξω-χωρική» *(extra-spatial)* κατεύθυνση και θα μπορούσαμε να την κατατάξουμε από φιλοσοφικής άποψης περισσότερο ως ενα *εντατό (intensive)*[2] μέγεθος απ΄ ότι ως εκτατό *(extensive)*

---

[2] Ο όρος *"Intensive Magnitude"* εισάγεται από τον Γερμανό φιλόσοφο I. Kant (1724-1804) στο μνημιώδες έργο του *Critique of Rure Reason* (1787). Σε αυτό αναφέρει την *Αρχή των Εντατών Μεγεθών*. Σύμφωνα με αυτή, σε οποιοδήποτε αντικείμενο που μπορεί να γίνει αντιληπτό με τις αισθήσεις μας (αντικείμενο εμπειρίας ή φαινόμενο) υπάρχει το *πραγματικό*, το οποίο έχει ένα εντατό μέγεθος, δηλαδή ένα βαθμό εντάσεως. Ένα *εντατό* μέγεθος μετρά τον τρόπο που ένα αντικείμενο «γεμίζει» τον χώρο ή τον χρόνο και συνδέεται με την ποιότητα.

Αντίστοιχα, ο όρος *"Extensive Magnitude"* συνδέεται με την ποσότητα και μετρά τις χωροχρονικές διαστάσεις ενός αντικειμένου.

- Η 4η ανάλογος σε οποιαδήποτε κατεύθυνση του **X** στον χώρο και για οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις της κλίμακας **A** ή **B** είναι πάντα αντίθετη στο **X**. Έτσι, αν ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορισμένο στην κατεύθυνση του **X** θεωρηθεί ως θετική ολότητα τότε κάθε μια από τις βαθμωτές μονάδες στις κατευθύνσεις **A** και **B** θα μπορούσε να ονομαστεί «*τεραγωνική ρίζα της αρνητικής μονάδας*»
- Όλες οι κατευθύνσεις στο χώρο θεωρούνται ισοδύναμες σε σχέση με την κατεύθυνση της **A**. Υπό αυτή την έννοια ο λογισμός των τετρανίων διαφέρει ως προς τις μεθόδους από την Καρτεσιανή μέθοδο των συντεταγμένων. Φαίνεται να είναι πιο απλός και άμεσα εφαρμόσιμος σε γεωμετρικά προβλήματα, καθώς δεν προϋποθέτει προεπιλογή αξόνων, ορθογωνιότητας κλπ.

Η αντίληψη του Hamilton να συνδέσει τις έννοιες του χώρου και του χρόνου είναι σίγουρα πολύ μπροστά από την εποχή του. Η έννοια του χωρο-χρόνου είναι κυρίαρχη στη σύγχρονη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein. Παρ΄ όλα αυτά τα τετράνια δεν είναι κατάλληλα για να τον περιγράψουν (Penrose, 2004, σελ. 201).

2.1.3. Ανακαλύπτοντας το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο στα Quaternions

Στην παράγραφο 18, στην εργασία *"On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra"*, (*Philosophical Magazine*, July 1846 vol. xxix, σελ. 26-31), ο Hamilton αναφέρει:

> *"Ο διαχωρισμός του πραγματικού και του φανταστικού μέρους ενός τετρανίου είναι μια διαδικασία που προκύπτει πολύ συχνά και μπορεί να θεωρηθεί τόσο θεμελιώδης σε αυτή τη θεωρία* [των τετρανίων] *ώστε θα ήταν βολικό να εισαχθούν σύμβολα που θα δηλώνουν συνοπτικά τα δύο ξεχωριστά αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας."*
>
> (Wilkins, 2000)

Το πιο σημαντικό είναι ότι όλα τα παραπάνω θέτουν τα θεμέλια της σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης. (Crowe, 1985, σελ. 32). Πράγματι οι συμβολισμοί αυτοί επεξηγήθηκαν και αναδείχθηκαν μέσα από τον τρόπο που εφαρμόστηκαν στο γινόμενο που προέκυπτε από τον πολλαπλασιασμό 2 τετρανίων με βαθμωτό μέγεθος 0, δηλαδή δύο **καθαρών τετρανίων** και οδηγούν στο *εσωτερικό* και *εξωτερικό γινόμενο* διανυσμάτων του σύγχρονου διανυσματικού λογισμού. Συγκεκριμένα, στην παράγραφο 21 της προαναφερόμενης εργασίας, ο Hamilton λέει:

"Οι θεμελιώδεις κανόνες του πολλαπλασιασμού σε αυτόν τον λογισμό δίνουν με την πρόσφατη σημειογραφία [συμβολισμό] *για το βαθμωτό και διανυσματικό μέρος του γινομένου δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων τις εκφράσεις:*

- $S\,.aa' = -\,(\,x\,x' + y\,y' + z\,z'\,)$
- $V.aa' = i\,(\,y\,z' - z\,y'\,) + j\,(\,z\,x' - x\,z'\,) + k\,(\,xy' - y\,x'\,)$ *εαν πάρουμε* $a = xi + yj + zk$ *και* $a' = x'i + y'\,j + z'k$ .....

..... Το πρώτο από αυτά τα δύο σύμβολα $S.aa'$ *συνδέεται στενά με τη θεωρία των reciprocal polars, όπως είναι αναμενόμενο, αν παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση* $S\,.\,aa' = -\,d^2$ *αναφορικά με τη σφαίρα της οποίας η εξίσωση είναι* $a^2 = -\,d^2$, *δηλαδή τη σφαίρα της οποίας το κέντρο είναι η αρχή των διανυσμάτων και της οποίας η ακτίνα έχει μήκος d, το διάνυσμα a' έχει πέρας στο πολικό επίπεδο του πέρατος του διανύσματος α. Το δεύτερο από τα δύο σύμβολα, δηλαδή το V.aa', δηλώνει ή μπορεί να κατασκευαστεί ως μια ευθεία γραμμή της οποίας η κατεύθυνση είναι κάθετη και στις δύο γραμμές που δηλώνονται από τα α και α΄. Και είναι επίσης τέτοιο, ώστε η περιστροφή γύρω από αυτό από το α στο α΄ είναι θετική και φέρει μήκος, σε σχέση με τη μονάδα μήκους, στην ίδια αναλογία με το εμβαδό που φέρει το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τις δύο γραμμές-παράγοντες σε σχέση με τη μονάδα εμβαδού."*

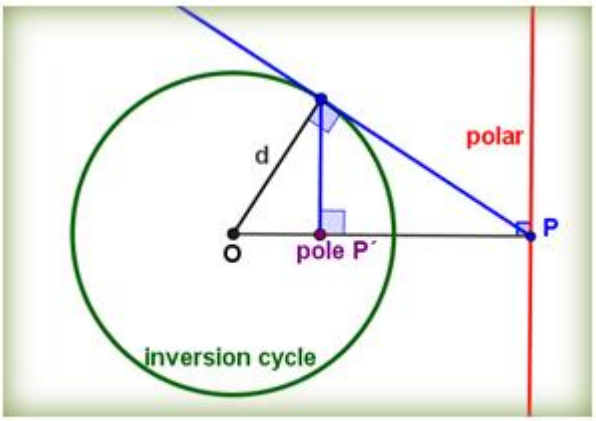
Προφανώς αναγνωρίζουμε στις ποσότητες

- $\mathbf{-\,S\,.aa' = xx' + yy' + zz'}$ και
- $\mathbf{V.aa' = i\,(yz' - zy') + j\,(zx' - xz') + k\,(xy' - yx')}$

με όρους διανυσματικής ανάλυσης την **αναλυτική έκφραση του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων** (x,y,z) και (x',y',z') του $\mathbb{R}^3$.

Αναλύοντας το παραπάνω απόσπασμα προκύπτουν πολλές ενδιαφέρουσες και αξιοσημείωτες παρατηρήσεις:

- Η ποσότητα $\mathbf{S.aa'}$ = -(xx'+yy'+zz'), συνδέεται με τη *θεωρία της αντιστροφής* όπως αυτή εφαρμόζεται στους *αντίστροφους πόλους* και τις *πολικές (reciprocal polars).*
  - ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο σημεία P, P΄ είναι *αντίστροφα ως προς έναν κύκλο* C



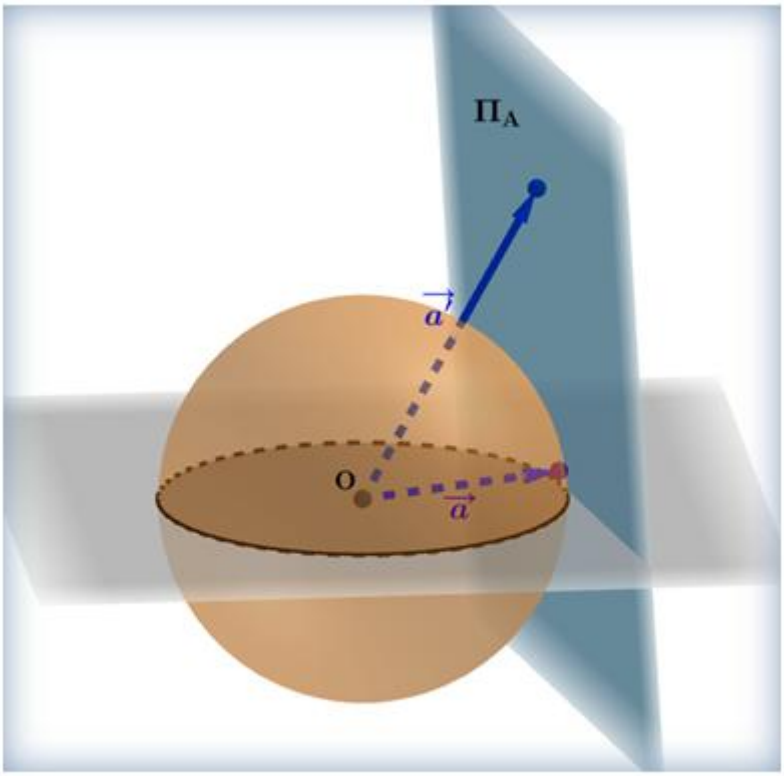
Σχήμα 22

(κύκλος αντιστροφής), όταν ικανοποιούν την ισότητα OP·OP΄=$\mathbf{d^2}$, όπου **d** η ακτίνα του κύκλου και O το κέντρο του. Τότε τα σημεία καλούνται *polar reciprocals. Πολική (polar)* του P΄ καλείται η ευθεία που είναι καθετη στην PP΄ στο P και το P΄ είναι ο *αντίστροφος πόλος (inversion pole)* της πολικής. Όμοια η ευθεία που είναι κάθετη στην PP΄ στο P΄ είναι η πολική του P και το P είναι ο αντίστροφος πόλος της πολικής (σχ. 22).

- Αν P σημείο του C, τότε P≡P΄ και η πολική ευθεία είναι η εφαπτόμενη στο P
- Αν P σημείο εκτός του C, η πολική ευθεία είναι η ευθεία που περνά από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων ευθειών προς τον κύκλο από το P
- Αν P σημείο εντός του C και διαφορετικό του O, η πολική ευθεία είναι ο γ. τόπος των σημείων που η πολική τους ευθεία περνάει από το P.
- Η εξίσωση της πολικής ευθείας οποιουδήποτε σημείου $P(x_1,y_1)$ είναι $\mathbf{x_1x+y_1y=d^2}$
- Αντίστοιχα ορίζονται τα αντίστροφα σημεία **ως προς σφαίρα** και στη θέση της πολικής ευθείας έχουμε το *πολικό επίπεδο*. Η εξίσωση του πολικού επιπέδου σημείου $P(x_1,y_{1,}z_1)$ είναι $\mathbf{x_1x+y_1y+z_1z=d^2}$, όπου **d** η ακτίνα της σφαίρας.

o Αν $\vec{\alpha}$=x*i*+y*j*+z*k* =(x,y,z) τότε $\vec{\alpha}^2$ = **-** $(x^2+y^2+z^2)$ = **-**d^2, όπου $d=\|\vec{\alpha}\|>0$. Η εξίσωση $\mathbf{x^2+y^2+z^2 = d^2}$ εκφράζει σφαίρα (S) με κέντρο O την αρχή του διανύσματος *a* και ακτίνα το μέτρο του, δηλαδή $\rho=d$. Αν A είναι το πέρας του διανύσματος *a*, τότε το A είναι σημείο της σφαίρας (S) με A=(x,y,z). Αντίστοιχα αν A΄ είναι το πέρας του διανύσματος *a΄*, τότε A΄= (x',y',z').

Η εξίσωση $xx'+yy'+zz' = \rho^2$, αν θεωρήσουμε *a* σταθερό και *a΄* μεταβλητό, παριστάνει την εξίσωση του *πολικού επιπέδου* του σημείου A(x,y,z) (Π_A), το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση εφάπτεται της σφαίρας S στο πέρας του διανύσματος *a*. Αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του πέρατος του *a΄* ανήκουν στο πολικό επίπεδο του A, δηλαδή το διάνυσμα *a΄* «τερματίζει» στο επίπεδο (Π_A) (σχ. 23).



Σχήμα 23

Η θεωρία των αντίστροφων σημείων, των πόλων και των πολικών, εντάσσεται στη *Γεωμετρία της Αντιστροφής*, η οποία πηγάζει από τα αρχαία χρόνια, αλλά θεμελιώνεται αξιωματικά στις αρχές του 19^{ου} αι. με την ανάπτυξη των *Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών*. Είναι στην ουσία η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών. Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί τα *ζεύγη σημείων* και οι *κύκλοι* του *πραγματικού επιπέδου αντιστροφής* δίνουν ένα **ισόμορφο μοντέλο** των *ευθειών* και των *επιπέδων* του *Υπερβολικού Χώρου*. (Κακούρης Μιχ., 2008, Εισαγωγή)

- Η περιγραφή που αφορά στο ***V.aa'*** είναι η σύγχρονη γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου, δηλαδή:
  - ο γνωστός τύπος του μέτρου $\left\|\vec{\alpha}\times\vec{\alpha'}\right\| = \left\|\vec{\alpha}\right\|\cdot\left\|\vec{\alpha'}\right\|\cdot\sin\theta$, που εκφράζει το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα δύο διανύσματα a και a'
  - η δε φορά ορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού ή όπως στη φυσική, του δεξιόστροφου κοχλία

Στην ίδια εργασία, στην παράγραφο 9 ο συγγραφέας παρατηρεί ότι, εάν αλλάξουμε τη σειρά στο γινόμενο δύο *γνησίως φανταστικών* παραγόντων (δηλ. των 2 καθαρών τετρανίων ή απλά διανυσμάτων), το μεν βαθμωτό μέρος του γινομένου παραμένει ίδιο, ενώ το φανταστικό μέρος αλλάζει πρόσημο, δηλ. $\boldsymbol{S.aa' = S.a'a}$ και $\boldsymbol{V.aa' = -V.a'a}$. Αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι τα γινόμενα $\boldsymbol{aa'}$ και $\boldsymbol{a'a}$ είναι συζυγή, αφού έχουν ίσα τα βαθμωτά τους μέρη και αντίθετα τα φανταστικά.

Στην ειδική περίπτωση που τα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{a'}$ είναι μοναδιαία ορθογώνια διανύσματα, τότε τα γινόμενα $\boldsymbol{aa'}$ και $\boldsymbol{a'a}$ είναι ταυτόχρονα αντίθετα και αντίστροφα. Πράγματι, αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τα μοναδιαία i και j τότε $ji=-k=-ij$ και $ij\cdot ji=k\cdot(-k)=-k^2=-(-1)=1$.

Σχόλιο 1: Η τριάδα $(\vec{\alpha},\vec{\alpha}',\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}')$ των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί ένα δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων, δηλαδή έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το σύστημα αξόνων $\{i,j,k\}$ στο οποίο η φορά του k συμπίπτει με τη φορά κίνησης του δεξιόστροφου κοχλία (ή του δεξιού χεριού) που είναι ίδια με τη φορά περιστροφής του i κατά γωνία $\left(\widehat{i,j}\right)$, ώστε να συμπέσει με το j. Αυτό άλλωστε μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από το πρόσημο της ορίζουσας των $\vec{\alpha},\vec{\alpha}',\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}'$. Πράγματι, $\det[\vec{\alpha},\vec{\alpha}',\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}']=\left\|\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}'\right\|^2>0$. Και υπό αυτή την έννοια τα τετράνια σχετίζονται με τον προσανατολισμό στο χώρο.

Η χρήση της **δεξιόστροφης** φοράς *(αντίθετη από αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού)* έχει επικρατήσει της αριστερόστροφης και θεωρείται ως η **θετική** φορά περιστροφής.

Σχόλιο 2: Ο J. W. Gibbs πρώτος απομόνωσε τα δύο γινόμενα, εισάγοντας για το μεν εσωτερικό γινόμενο τον όρο ***direct product*** το οποίο στη συνέχεια ονόμασε ***dot*** καθώς ανάμεσα στα διανύσματα-παράγοντες υιοθέτησε το σύμβολο της τελείας ($\bullet$). Επίσης όρισε το εσωτερικό γινόμενο όπως το γνωρίζουμε σήμερα, δηλ. $\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\cos\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$, δηλώνοντας μάλιστα ότι προφανώς ισχύει γι αυτό η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Το δε εξωτερικό γινόμενο το ονόμασε ***skew product*** και λόγω του συμβόλου ($\times$) που χρησιμοποίησε, το ονόμασε ***cross product.*** Επίσης το όρισε στη σύγχρονη μορφή του, δηλαδή ως διάνυσμα με μέτρο $\left\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right\|=\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\sin\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού

χεριού. Τέλος, επειδή είναι διανυσματικό μεγεθος, το χαρακτήρισε και ως ***vector product***. (Gibbs, 1901).

Γινόμενο καθαρών τετρανίων (διανυσμάτων)

Αν $q=\beta i+\gamma j+\delta k \in \mathbb{R}^3$ και $q_1=\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k \in \mathbb{R}^3$ δύο **καθαρά** τετράνια με $\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ και λαμβάνοντας υπόψη τον πίνακα πολλαπλασιασμού των ***i, j, k*** ή τον γενικό τύπο πολλαπλασιασμού τετρανίων έχουμε:

$$qq_1=\left(\beta i+\gamma j+\delta k\right)\left(\beta_1 i+\gamma_1 j+\delta_1 k\right)=-\left(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1+\delta\delta_1\right)+\left(\gamma\delta_1-\delta\gamma_1\right)i+\left(\delta\beta_1-\beta\delta_1\right)j+\left(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1\right)k.$$

Το **βαθμωτό**-πραγματικό μέρος του γινομένου qq_1, δηλ. η παράσταση $-(\beta\,\beta_1+\gamma\,\gamma_1+\delta\,\delta_1)$ ισούται με το αντίθετο του **εσωτερικό γινόμενο** $q\bullet q_1=\langle q,q_1\rangle$ των q,q_1, ενώ το διανυσματικό μέρος του γινομένου qq_1, δηλ. η παράσταση $(\gamma\delta_1-\delta\gamma_1)i+(\delta\beta_1-\beta\delta_1)j+(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)k$, ισούται με το **εξωτερικό γινόμενο** $q\times q_1$ των q,q_1, το οποίο μπορεί να τεθεί και στη μορφή $q\times q_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \beta & \gamma & \delta \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix}$.

Επομένως $\boxed{qq_1=-q\bullet q_1+q\times q_1}$ ή $\boxed{qq_1=-\langle q,q\rangle_1+q\times q_1}$

Προφανώς το γινόμενο δύο *καθαρών* τετρανίων <u>δεν είναι</u> εν γένει ένα καθαρό αλλά ένα *πλήρες* τετράνιο.

<u>Σημείωση 1</u>: Από την παραπάνω σχέση και εφόσον $q\perp q_1$, συνεπάγεται ότι $q\bullet q_1=0$. Άρα σε αυτή την περίπτωση ισχύει $qq_1=q\times q_1$, επομένως $qq_1\perp q$ και $qq_1\perp q_1$.

<u>Σημείωση 2</u>: Αν $q\times q_1=0$, τότε $qq_1=-q\bullet q_1=-\langle q,q_1\rangle\in\mathbb{R}$. Άρα, όταν τα q,q_1 είναι συγγραμικά ή παράλληλα, το γινόμενο qq_1 είναι βαθμωτό.

Δείξαμε ότι το γινόμενο δύο <u>οποιωνδήποτε</u> τετρανίων q,q_1 ισούται με: $\left(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1-\delta\delta_1\right)+\left(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1+\gamma\delta_1-\delta\gamma_1\right)i+\left(\alpha\gamma_1+\gamma\alpha_1+\delta\beta_1-\beta\delta_1\right)j+\left(\alpha\delta_1+\delta\alpha_1+\beta\gamma_1-\gamma\beta_1\right)k$.

Με πράξεις και κατάλληλους μετασχηματισμούς, το γινόμενο παίρνει τη μορφή:

$\alpha\alpha_1 - (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 + \delta\delta_1) + \alpha(\beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k) + \alpha_1(\beta i + \gamma j + \delta k) + [(\gamma\delta_1 - \delta\gamma_1)i + (\delta\beta_1 - \beta\delta_1)j + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)k] =$

$= \alpha\alpha_1 - \langle \vec{q}, \vec{q}_1 \rangle + \alpha\vec{q}_1 + \alpha_1\vec{q} + \vec{q} \times \vec{q}_1$.

Έτσι προκύπτει ο τύπος του γινομένου δύο τυχαίων τετρανίων σε συνάρτηση του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου των διανυσματικών τους μερών:

$q \cdot q_1 = \alpha\alpha_1 - \langle \vec{q}, \vec{q}_1 \rangle + \alpha\vec{q}_1 + \alpha_1\vec{q} + \vec{q} \times \vec{q}_1$ με

$S.q \cdot q_1 = \alpha\alpha_1 - \langle \vec{q}, \vec{q}_1 \rangle$ και $V.q \cdot q_1 = \alpha\vec{q}_1 + \alpha_1\vec{q} + \vec{q} \times \vec{q}_1$

Μια απλή εφαρμογή-παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα $v_1 = (1,1,1)$ και $v_2 = (3,2,1)$ του $\mathbb{R}^3$. Τα αντίστοιχα τετράνια θα είναι $q_1 = (0,1,1,1)$ και $q_2 = (0,3,2,1)$. Αν εφαρμόσουμε τον γνωστό πολλαπλασιασμό τετρανίων, θα πάρουμε $q_1 q_2 = (-6,-1,2,-1)$. Από την τετράδα του γινομένου προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο $v_1 \bullet v_2 = -(-6) = 6$ και το εξωτερικό γινόμενο $v_1 \times v_2 = (-1,2,-1)$

Να θυμήσουμε επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός τετρανίων εκτελείται πολύ γρήγορα και εύκολα μέσω πινάκων. Εδώ συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Περιγραφή μετασχηματισμών στον χώρο μέσω των τετρανίων

Γραμμικές απεικονίσεις και γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 1: Έστω V και U δύο διανυσματικοί χώροι πάνω σε ένα σώμα F. Μία απεικόνιση $T: V \to U$ καλείται **γραμμική,** όταν:

- ☑ $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$
- ☑ $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V$ με $\lambda \in F$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση στην ουσία διατηρεί την αλγεβρική δομή του διανυσματικού χώρου πάνω στον οποίο επιδρά.

Βασικό θεώρημα: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και το σύνολο $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ είναι μια βάση του, τότε κάθε γραμμική απεικόνιση $T: V \to U$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)$, δηλαδή οι εικόνες της βάσης του V μέσω της απεικόνισης T παράγουν τον χώρο U.

Έστω V ,U διανυσματικοί χώροι πάνω σε ένα σώμα F, διαστάσεων n και m αντίστοιχα. Αν $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μία βάση του V και $E' = \{e_1', e_2', ..., e_m'\}$ μία βάση του U, τότε υπάρχουν αριθμοί α_{ij} στο F, ώστε

- $T(e_1) = \alpha_{11} e'_1 + \alpha_{12} e'_2 + ... + \alpha_{1m} e'_m$
- .....
- $T(e_n) = \alpha_{n1} e'_1 + \alpha_{n2} e'_2 + ... + \alpha_{nm} e'_m$

Ορισμός 2: Ο $m \times n$ πίνακας με **στήλες τους συντελεστές** των διανυσμάτων $T(e_i)$ δηλ. ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$, καλείται **πίνακας της απεικόνισης T** ως προς τις βάσεις E και E'.

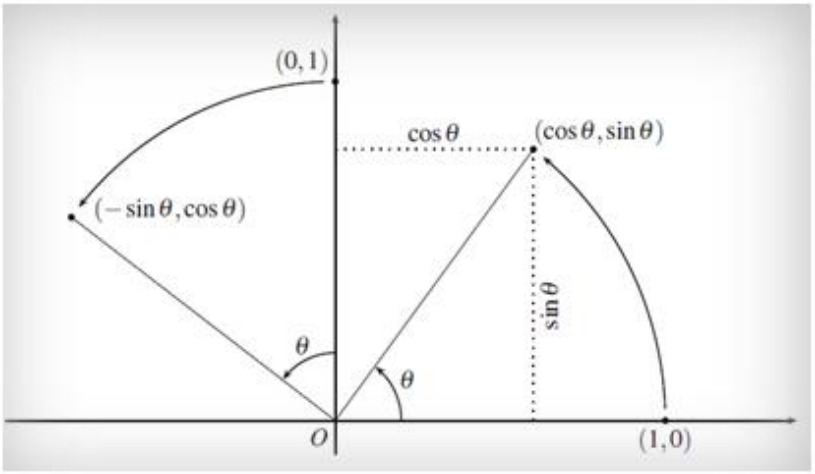
Το βασικό θεώρημα και ο ορισμός 2 οδηγούν στο προφανές συμπέρασμα, ότι ο πίνακας Α καθορίζει με μοναδικό τρόπο την απεικόνιση Τ. Σημειώνουμε ότι, αν αλλάξουν οι βάσεις Ε και Ε΄, τότε αλλάζει και ο πίνακας Α.

Θεώρημα 1: Αν $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ διάνυσμα του δ.χ. V, σε κάθε γραμμική απεικόνιση $T:V\to U$ αντιστοιχεί ένας **μοναδικός πίνακας** Α ως προς τις βάσεις Ε και Ε΄ τέτοιος, ώστε $T(v)=A\cdot v$.

Συμπέρασμα: Κάθε γραμμική απεικόνιση **αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό πίνακα** μέσω του οποίου μπορεί να αναπαρασταθεί και αντίστροφα κάθε πίνακας ορίζει μια γραμμική απεικόνιση.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί - Περιστροφές στο επίπεδο

Γνωρίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού **w** με τον μιγαδικό $\mathbf{z}=e^{i\cdot\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ($\|z\|=1$), έχει ως γεωμετρικό αποτέλεσμα την περιστροφή της διανυσματικής ακτίνας του μιγαδικού **w** κατά γωνία θ. Η περιστροφή ενός διανύσματος (x,y) στο μιγαδικό επίπεδο κατά γωνία θ γύρω από την αρχή των αξόνων Ο είναι μια γραμμική απεικόνιση R_θ.



Σχήμα 24

Από την περιστροφή του μοναδιαίου διανύσματος $(1,0)$ του άξονα των x γύρω από το Ο κατά γωνία θ, προκύπτει το διάνυσμα $(\cos\theta,\sin\theta)$ και αντίστοιχα από την περιστροφή του μοναδιαίου $(0,1)$ του άξονα των y προκύπτει το $(-\sin\theta,\cos\theta)$ (σχ. 24).

Έτσι, αν $w=x+yi$ μιγαδικός και $(x,y)=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)$ το αντίστοιχο διάνυσμα, τότε η εικόνα του μέσω της γραμμικής απεικόνισης R_θ θα είναι $R_\theta(x,y)=(x',y')=x\cdot(\cos\theta,\sin\theta)+y\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$ ή $R_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta-\sin\theta\\ \sin\theta+\cos\theta\end{pmatrix}$. Συνεπώς η γραμμική απεικόνιση R_θ με βάση τα μοναδιαία **1**=(1,0) και ***i*** =(0,1)

αναπαρίσταται από τον πίνακα A=$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Το σύνολο όλων αυτών των 2×2 πινάκων με detA=1 αποτελούν την **Ειδική Ορθογώνια Ομάδα SO(2).**

Στον πολ/σμό των πινάκων R_θ, R_φ **ισχύει η αντιμεταθετικότητα**

Συγκεκριμένα: $\boxed{R_\theta \cdot R_\varphi = R_\varphi \cdot R_\theta = R_{\theta+\varphi}}$

΄Ολοι οι μιγαδικοί της μορφής $e^{i\cdot\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και ακτίνα ρ=1, δηλ. στον μοναδιαίο κύκλο ή ισοδύναμα στη **μονοδιάστατη μοναδιαία σφαίρα** S^1 όπου $S^1=\{z : \|z\| = 1, z \in \mathbb{C}\}$. Το σύνολο όλων αυτών των μιγαδικών δεν αποτελεί μόνο ένα **γεωμετρικό αντικείμενο** αλλά είναι ταυτόχρονα και μια **αλγεβρική δομή**. Συγκεκριμένα είναι μια μονοδιάστατη αντιμεταθετική ομάδα, αφού ο πολ/σμός των μιγαδικών είναι αντιμεταθετικός (Stillwell, 2008), (Πετρόπουλος, 2010, σελ. 31).

Σύνοψη χρήσιμων βασικών εννοιών και αναπαραστάσεων των τετρανίων που σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς στον χώρο

Είδαμε στην παρ. **1.5.3.** ότι κάθε τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ αντιστοιχίζεται σε πίνακα A=$\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}$ της μορφής $\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$. Τότε **1**=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ και $q_A=\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Εναλλακτικά μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ και στον πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha+\delta i & -\beta-\gamma i \\ \beta-\gamma i & \alpha-\delta i \end{bmatrix}$ επίσης της μορφής $\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$ (Stillwell, 2008, σελ. 7).

Είδαμε πως κάθε τέτοιος πίνακας «συμπεριφέρεται» ακριβώς όπως ένα τετράνιο και όλες οι ιδιότητες των τετρανίων μπορούν να αποδειχθούν μέσω των αντίστοιχων πινάκων τους. Η αναπαράσταση των τετρανίων με πίνακες ανακαλύφθηκε το 1858 από τον Cayley.

Όμοια κάθε μιγαδικός $z=\alpha 1+\beta \boldsymbol{i}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τον 2×2 πίνακα $M_z=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$, ο οποίος «συμπεριφέρεται» ακριβώς όπως ο μιγαδικός z ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έτσι έχουμε για παράδειγμα:

- $\|z\|=\det M_z$
- $\|z_1z_2\|=\det\left(A_1A_2\right)=\det A_1\det A_2=\|z_1\|\|z_2\|$
- $z^{-1}\to M_z^{-1}=\dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$, $z\neq 0$

Ορίζουμε ως **μοναδιαίο** τετράνιο κάθε τετράνιο που το μέτρο του ισούται με 1. Δηλαδή, αν $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ μοναδιαίο, τότε $\|q\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=1$ ή ισοδύναμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1$.

Αν $GL\left(2,\mathbb{C}\right)$ η **Γενική Γραμμική ομάδα** (ομάδα αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^2$) των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$, δηλαδή $GL\left(2,\mathbb{C}\right)=\left\{A\in M_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right):\det\left(A\right)\neq 0\right\}$, τότε:

$SU\left(2\right)=\left\{W\in GL\left(2,\mathbb{C}\right):W^*\cdot W=W\cdot W^*=I_2\ \textit{και}\ det\left(W\right)=1\right\}$ με $W^*=\overline{W}^T$ η οποία σχετίζεται άμεσα με τις περιστροφές στο χώρο.

Πράγματι πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι $W^*\cdot W=W\cdot W^*=I_2$ και $det\left(W\right)=det\left(W^*\right)=1$, αν $W=\begin{bmatrix}\alpha+\beta i & \gamma+\delta i\\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i\end{bmatrix}$ και $W^*=\overline{W}^T=\begin{bmatrix}\alpha-\beta i & -\gamma+\delta i\\ \gamma-\delta i & \alpha+\beta i\end{bmatrix}$

Το σύνολο $S^3=\left\{q\in H:\|q\|=1\right\}$ των **μοναδιαίων τετρανίων** είναι προφανώς υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{H}$ και εφοδιασμένο με την πράξη $(\cdot)$ του πολλαπλασιασμού των τετρανίων αποτελεί **μη αντιμεταθετική ομάδα** ισόμορφη με την γνωστή $SU\left(2\right)$ (*special unitary group*), δηλαδή $S^3\cong SU\left(2\right)$.

Απόδειξη: Είδαμε ότι κάθε μοναδιαίο τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k \in S^3$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R})$ αναπαρίσταται μονοσήμαντα από τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$ με detA=1. Έτσι η ομάδα των μοναδιαίων τερανίων είναι ισομορφική με την ομάδα πινάκων $\left\{ A=\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} / \det A = 1 \right\}$.

Αν $Q \in SU(2)$, τότε detQ=1 και $Q^* = Q^{-1}$ (*unitary matrice*), όπου $Q^* = \overline{Q}^T$. Εστω $Q=\begin{bmatrix} z & w \\ x & y \end{bmatrix}$ με $z,w,x,y \in \mathbb{C}$, τότε $Q^{-1}=\begin{bmatrix} y & -w \\ -x & z \end{bmatrix}$.

Συνεπώς $Q^* = Q^{-1} \Leftrightarrow \overline{Q}^T = Q^{-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overline{z} & \overline{x} \\ \overline{w} & \overline{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y & -w \\ -x & z \end{bmatrix} \Leftrightarrow y=\overline{z},\ -\overline{w}=x$. Επομένως ο πίνακας Q έχει τη μορφή $Q=\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$ κι αφού detQ=1 → $Q \in S^3$

(Savage, 2015, σελ. 8)

Σε αντιστοιχία με το S^1, το S^3 αποτελεί την **τρισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα** του $\mathbb{R}^4$, όπως στον χώρο $\mathbb{R}^3$ το σύνολο $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}=S^2$ αποτελεί τη **δισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα** αυτού.

Ορίζουμε ως **καθαρό ή φανταστικό** τετράνιο, σε αντιστοιχία με τους μιγαδικούς, κάθε τετράνιο της μορφής $q=\beta i+\gamma j+\delta k$, και **πραγματικό** τετράνιο κάθε τετράνιο της μορφής $q=\alpha 1=\alpha$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$

Ταυτίζουμε τον υπόχωρο $\mathbb{R}\cdot 1=\mathbb{R}(1,0,0,0)=\{(\alpha,0,0,0):\alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Τον δε υπόχωρο $\mathbb{R}\cdot \boldsymbol{i}+\mathbb{R}\cdot \boldsymbol{j}+\mathbb{R}\cdot \boldsymbol{k}=\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}=\{(0,\beta,\gamma,\delta):\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ με τον διανυσματικό Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες των Μοναδιαίων και των Καθαρών Μοναδιαίων Τετρανίων

Κάθε μιγαδικός z με $\|z\|=1$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $z=\cos\theta+i\sin\theta$. Αντίστοιχη πρόταση ισχύει και στα τετράνια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Κάθε **μοναδιαίο** τετράνιο $q=\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k\in S^3$ γράφεται στη μορφή $q=\cos\theta+u_q\sin\theta$ με $0\le\theta\le\pi$ και u_q **μοναδιαίο καθαρό** τετράνιο του χώρου $\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$.

Απόδειξη: Αφού $\|q\|=1$, ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1\Leftrightarrow\alpha^2+\left(\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\right)^2=1$. Άρα υπάρχει γωνία $\theta\in[0,\pi]$ με $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=\sin\theta\geqslant 0$ και $\alpha=\cos\theta$ με $-1\le\alpha\le 1$. Έτσι $q=\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k=$

$$=\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}\cdot\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\,(\beta i+\gamma j+\delta k)=\cos\theta+\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}\cdot(\beta i+\gamma j+\delta k)\right)=$$

$$=\cos\theta+\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}\cdot(\beta i+\gamma j+\delta k)\right)\cdot\sin\theta$$

Θέτουμε $\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}\cdot(\beta i+\gamma j+\delta k)=u_q$ και $\|u_q\|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}\cdot\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=1\rightarrow\|u_q\|=1$.

Έτσι προκύπτει η ζητούμενη σχέση $q=\cos\theta+u_q\sin\theta$.

Παρατήρηση 1: $u_q==\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}}\cdot(\beta i+\gamma j+\delta k)=\lambda\cdot(\beta i+\gamma j+\delta k)=\lambda\cdot P(q)\rightarrow u_q=\lambda\cdot P(q)$, $\lambda>0$.

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το u_q είναι ομόρροπο του διανυσματικού μέρους του τετρανίου q, άρα κατά σύμβαση μπορούμε να γράψουμε $u_q\,//\,q$.

Παρατήρηση 2: Αφού u_q ομόρροπο του εαυτού του, το γινόμενο $u_qu_q=u_q^2$ θα ισούται με το αντίθετο του εσωτερικού γινομένου $u_q\bullet u_q$. Επομένως $u_q^2=-u_q\bullet u_q=-\|u_q\|^2=-1$. Κατά κάποιο τρόπο λοιπόν, κάθε μοναδιαίο τετράνιο u_q αποτελεί μία τετραγωνική ρίζα του -1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Ο πολλαπλασιασμός στον χώρο $\mathbb{R}^4$ ή ισοδύναμα στον χώρο $\mathbb{H}$ των τετρανίων με **μοναδιαίο** τετράνιο είναι **ισομετρία**, δηλαδή διατηρεί τις αποστάσεις.

Απόδειξη: Έστω u μοναδιαίο τετράνιο και v, w τετράνια. Το μέτρο της διαφοράς $\mathrm{v}-\mathrm{w}$, δηλ. $\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|$ εκφράζει την απόσταση των v και w. Τότε $\|u\,\mathrm{v}-u\,\mathrm{w}\| = \|u\|\cdot\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\| = 1\cdot\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\| = \|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|$.

Παρατήρηση: Η αρχή των αξόνων Ο παραμένει σταθερή, αφού $u\cdot 0=0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: Αν $q\in \mathrm{S}^3$ **μοναδιαίο** τετράνιο με $q=\cos\theta+u_q\sin\theta$, τότε $q^{-1}=\cos\theta-u_q\sin\theta$, όπου $0\le\theta\le\pi$ και u_q **μοναδιαίο καθαρό** τετράνιο του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $q^{-1}=\dfrac{\overline{q}}{\|q\|^2}$. Αφού q μοναδιαίο, $\|q\|=1$, άρα $q^{-1}=\dfrac{\overline{q}}{1}=\overline{q}=\cos\theta-u_q\sin\theta$.

Ας εξετάσουμε αρχικά αν το γινόμενο ενός **μοναδιαίου** τετρανίου v με ένα **καθαρό** τετράνιο $p=\alpha i+\beta j+\gamma k\in\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$ είναι στοιχείο του χώρου αυτού, δηλαδή καθαρό τετράνιο..

Αφού $\mathrm{v}\in\mathrm{S}^3$, υπάρχει u_v μοναδιαίο καθαρό τετράνιο, ώστε $\mathrm{v}=\cos\theta+u_\mathrm{v}\sin\theta$.

Έχουμε: $\mathrm{v}p=(\cos\theta+u_\mathrm{v}\sin\theta)\,p=p\cos\theta+(u_\mathrm{v}p)\sin\theta=$

$=p\cos\theta+(-u_\mathrm{v}\bullet p+u_\mathrm{v}\times p)\sin\theta=p\cos\theta+(-u_\mathrm{v}\bullet p)\sin\theta+(u_\mathrm{v}\times p)\sin\theta$ **(1)** .

Η παράσταση $(-u_\mathrm{v}\bullet p)\sin\theta$ είναι πραγματικός αριθμός, άρα το γινόμενο $\mathrm{v}p$ μπορεί να περιέχει και βαθμωτό μέρος. Επομένως το $\mathrm{v}p$ **δεν είναι πάντα καθαρό τετράνιο**.

Γινόμενο μοναδιαίου τετρανίου v με καθαρό τετράνιο p, κάθετα μεταξύ τους

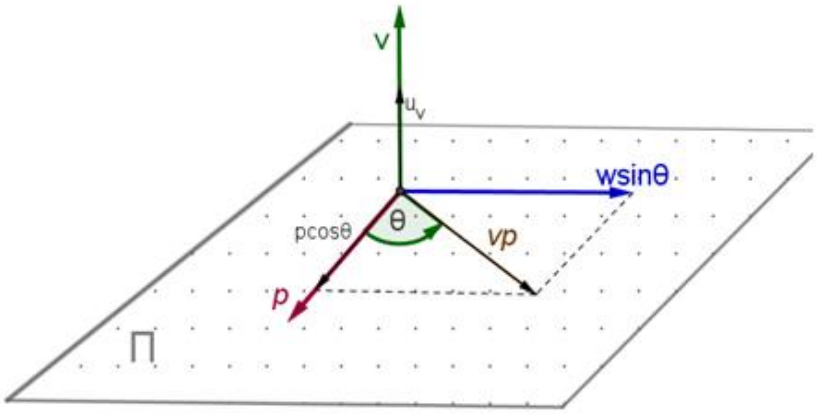
Αποδείξαμε ότι, αν v μοναδιαίο τετράνιο και p καθαρό τετράνιο, ισχύει $\mathrm{v}p=p\cos\theta+(-u_\mathrm{v}\bullet p)\sin\theta+(u_\mathrm{v}\times p)\sin\theta$. Αν το διανυσματικό μέρος του μοναδιαίου τετρανίου v είναι κάθετο στο καθαρό τετράνιο p, τότε κατά σύμβαση μπορούμε να γράψουμε $\mathrm{v}\perp p$. Και, αφού $u_\mathrm{v}\,//\,\mathrm{v}$, θα είναι και $u_\mathrm{v}\perp p$, συνεπώς $u_\mathrm{v}\bullet p=0$.

Σε αυτή την περίπτωση το γινόμενο vp είναι καθαρό τετράνιο και από τη σχέση **(1)** προκύπτει:

$vp = p\cos\theta + (u_v \times p)\sin\theta =$

$p\cos\theta + w\sin\theta$ με $w = u_v \times p$, άρα τα w και $w\sin\theta$ είναι κάθετα στο επίπεδο των u_v, p.

Αν Π το επίπεδο που ορίζεται από το p και το w, ισχύουν:



Σχήμα 25

- $vp \in \Pi$ και $v \perp \Pi$
- $\|vp\| = \|v\|\|p\| = 1 \cdot \|p\| = \|p\|$
- $vp = p\cos\theta + w\sin\theta$

Επομένως το γινόμενο vp γεωμετρικά εκφράζει διάνυσμα ίσου μέτρου με το p και με φορέα που έχει περιστραφεί κατά γωνία θ γύρω από την κοινή αρχή των v και p πάνω σε επίπεδο κάθετο στο v που περιλαμβάνει το p (σχ. 25).

Άρα, αν έχουμε ένα **μοναδιαίο** και ένα **καθαρό** τετράνιο, **κάθετα** το ένα στο άλλο, τότε ισχύει:

Μοναδιαίο τετράνιο επί Καθαρό τετράνιο → Στροφή του Καθαρού κατά τη γωνία του Μοναδιαίου

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζουμε την απεικόνιση ***conjugation (συζυγία) μέσω του*** v ως εξής: "κάθε τετράνιο p απεικονίζεται στο γινόμενο $v^{-1}pv$, όπου v μοναδιαίο τετράνιο" (Stillwell, 2008, σελ.14).

Ισχύουν τα παρακάτω:

- Η απεικόνιση ***conjugation μέσω μοναδιαίου τετρανίου*** είναι **ισομορφισμός** στο σύνολο $\mathbb{H}$ των τετρανίων (άρα γραμμική απεικόνιση)
- Η απεικόνιση ***conjugation μέσω μοναδιαίου τετρανίου*** είναι **ισομετρία** στα σύνολα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

- Αν $r\in\mathbb{R}$, η εικόνα του **r** μέσω της ***συζυγίας*** του v **,** δηλ. το γινόμεν**ο** $v^{-1}r\,v$, συμπίπτει με το r, επομένως ο περιορισμός της απεικόνισης ***conjugation*** στους **πραγματικούς** είναι η **ταυτοτική** απεικόνιση. Πράγματι, $v^{-1}r\,v = \left(\cos\theta-u_v\sin\theta\right)r\left(\cos\theta+u_v\sin\theta\right) = \left(\cos^2\theta-u_v^2\sin^2\theta\right)r = \left(\cos^2\theta+1\sin^2\theta\right)r = 1r = r$
- Αν $p\in\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$ δηλ. αν το p είναι καθαρό τετράνιο, τότε η "εικόνα" $v^{-1}pv$ του p μέσω της ***συζυγίας,*** είναι και αυτή καθαρό τετράνιο δηλ. $v^{-1}pv\in\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$.

Τα μοναδιαία τετράνια καθώς και τα καθαρά μοναδιαία τετράνια παίζουν καθοριστικό ρόλο στις περιστροφές στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Γινόμενα της μορφής $r^{-1}q\,r$ και $r\,q\,r^{-1}$ πρωτοεμφανίζονται στο "*Lectures*" (σελ. 268,269) όπου ο Hamilton διαπιστώνει ότι και τα δύο είναι εν γένει διαφορετικα από το q, αλλά σχετίζονται με αυτό μέσω κωνικής περιστροφής. Οι ερμηνείες γίνονται μέσω της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Στη σελ. 271 εισάγει την πράξη $q(\ )q^{-1}$ την οποία συνδέει με τις περιστροφές στο χώρο και με την αστρονομία (*μετάπτωση των ισημεριών*).

Μετασχηματισμοί στον χώρο - Αναπαράσταση τετρανίων μέσω περιστροφών στον R^3

Τα μοναδιαία τετράνια επιφέρουν περιστροφή στον χώρο $\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$ των φανταστικών τετρανίων. Συγκεκριμένα ισχύει:

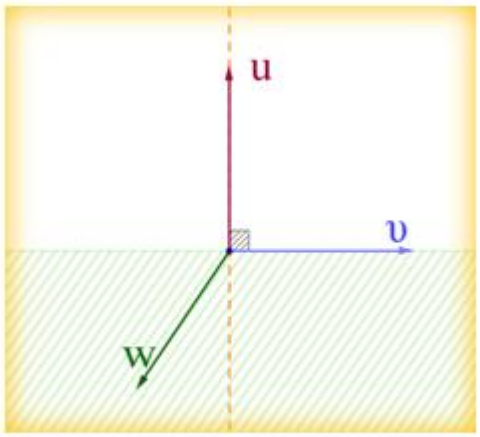
ΠΡΟΤΑΣΗ 4: Έστω $v=\cos\theta+u\sin\theta$ **μοναδιαίο** τετράνιο, όπου u **καθαρό μοναδιαίο** τετράνιο. Η ***συζυγία*** $v^{-1}(\ )v$ **περιστρέφει οποιοδήποτε καθαρό μη μηδενικό τετράνιο** p κατά γωνία 2θ γύρω από τον άξονα του u, δηλαδή το γινόμενο $v^{-1}p\,v$ είναι το αποτέλεσμα της περιστροφής του p γύρω από το u κατά γωνία 2θ. Η φορά της περιστροφής είναι **αρνητική** δηλαδή όπως αυτής των δεικτών του ρολογιού.

Απόδειξη:

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η συζυγία $\mathrm{v}^{-1}(\ )\mathrm{v}$ διατηρεί αναλλοίωτο το u, δηλ. $\mathrm{v}^{-1}u\mathrm{v}=u$. Θυμίζουμε ότι για κάθε καθαρό και μοναδιαίο τετράνιο u ισχύει $u^2=-1$. Έχουμε: $\mathrm{v}^{-1}u\mathrm{v}=$ $(\cos\theta-u\sin\theta)u(\cos\theta+u\sin\theta)$ = $(u\cos\theta-u^2\sin\theta)(\cos\theta+u\sin\theta)$ = $(u\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta+u\sin\theta)$ = $=u\cos^2\theta+u^2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+u\sin^2\theta=u(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-1\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=u\cdot 1+0=u$.

Επομένως η γραμμή $\mathbb{R}u$ (δηλ. ο φορέας του διανύσματος u), παραμένει σταθερή μέσω της ***συζυγίας*** του v.

Αν θεωρήσουμε καθαρό μοναδιαίο τετράνιο w (δηλαδή μοναδιαίο διάνυσμα) κάθετο στο u και καθαρό τετράνιο $\upsilon=u\times\mathrm{w}$ (σχ.26) τότε $\|\upsilon\|=1$ και το σύνολο $\{u,\mathrm{w},\upsilon\}$ αποτελεί **ορθοκανονική βάση** του $\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$, αφού τα u,w,υ ανά δύο είναι κάθετα μεταξύ τους και $\|u\|=\|\mathrm{w}\|=\|\upsilon\|=1$.



Σχήμα 26

Τα u,w,υ, με τον τρόπο που ορίστηκαν, ικανοποιούν τις ιδιότητες:

- $u\bullet\mathrm{w}=0$ και $u\,\mathrm{w}=-u\bullet\mathrm{w}+u\times\mathrm{w}=u\times\mathrm{w}=-\mathrm{w}\times u=-\mathrm{w}u$ άρα $u\mathrm{w}=-\mathrm{w}u$. Όμοια $\upsilon u=-u\upsilon$ και $\mathrm{w}\upsilon=-\upsilon\mathrm{w}$
- $u\mathrm{w}=u\times\mathrm{w}=\upsilon$, όμοια $\mathrm{w}\upsilon=u$, $\upsilon u=\mathrm{w}$.

Τα w και υ αποτελούν βάση του επιπέδου που ορίζουν, άρα τα w και υ "παράγουν" όλα τα διανύσματα αυτού του επιπέδου. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η ***συζυγία*** μέσω v περιστρέφει τα w και υ κατά γωνία 2θ στο επίπεδό τους (κάθετο στον άξονα του u).

Πράγματι, $\mathrm{v}^{-1}\cdot\mathrm{w}\cdot\mathrm{v}$ = $(\cos\theta-u\sin\theta)\cdot\mathrm{w}\cdot(\cos\theta+u\sin\theta)$ = $(\mathrm{w}\cdot\cos\theta-u\cdot\mathrm{w}\sin\theta)(\cos\theta+u\sin\theta)$ = $\mathrm{w}\cdot\cos^2\theta+\mathrm{w}u\cdot\cos\theta\sin\theta-u\mathrm{w}\cdot\sin\theta\cos\theta-u\mathrm{w}u\cdot\sin^2\theta=$ $\mathrm{w}\cdot\cos^2\theta-u\mathrm{w}\cdot\cos\theta\sin\theta-u\mathrm{w}\cdot\sin\theta\cos\theta-u(-u\mathrm{w})\cdot\sin^2\theta=\mathrm{w}\cdot\cos^2\theta-2u\mathrm{w}\cdot\cos\theta\sin\theta+u^2\mathrm{w}\cdot\sin^2\theta=$ $\mathrm{w}\cdot\cos^2\theta-2u\mathrm{w}\cdot\cos\theta\sin\theta-\mathrm{w}\cdot\sin^2\theta=\mathrm{w}\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-u\mathrm{w}\cdot 2\cos\theta\sin\theta=\mathrm{w}\cdot\cos 2\theta-\upsilon\cdot\sin 2\theta$. Άρα

$$\boxed{\mathrm{v}^{-1}\cdot\mathrm{w}\cdot\mathrm{v}=\mathrm{w}\cdot\cos 2\theta-\upsilon\cdot\sin 2\theta}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\boxed{\mathrm{v}^{-1}\cdot\upsilon\cdot\mathrm{v}=\mathrm{w}\cdot\sin 2\theta+\upsilon\cdot\cos 2\theta}$.

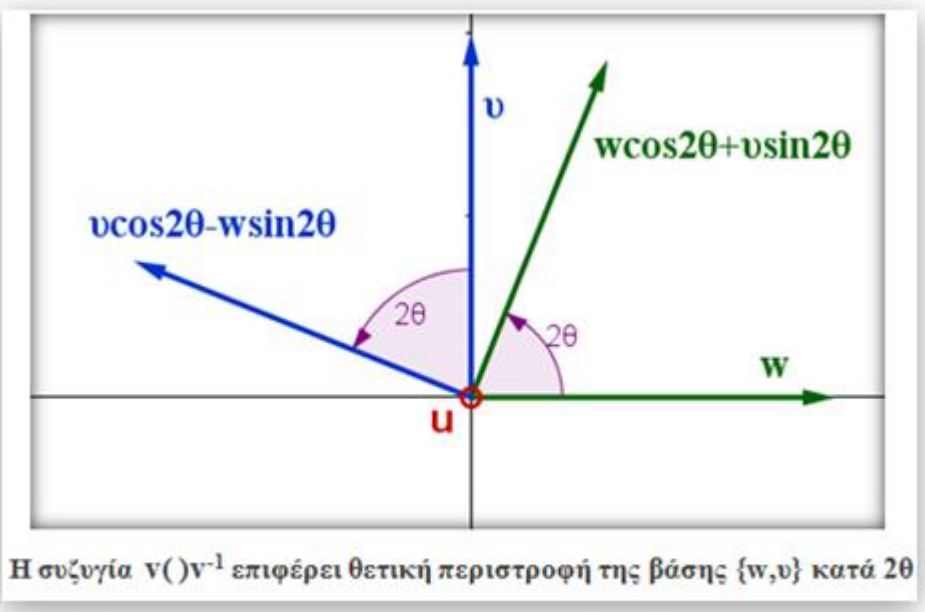
Άρα, μέσω της συζυγίας $v^{-1}(\ )v$ του μοναδιαίου τετρανίου **v** το ζεύγος της βάσης $\{w,\upsilon\}$ απεικονίζεται στο ζεύγος $\{w\cos 2\theta-\upsilon\sin 2\theta, w\sin 2\theta+\upsilon\cos 2\theta\}$

Επομένως, η **συζυγία μέσω** v **περιστρέφει <u>κάθε</u> διάνυσμα του επιπέδου των w,υ με κέντρο το Ο γύρω από τον φορέα του u, αφού περιστρέφει τη βάση του** $\{w,\upsilon\}$ **κατά γωνία** 2θ**.**

Γνωρίζουμε ότι οι <u>περιστροφές</u> τόσο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ όσο και στον χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι **ισομετρίες,** δηλαδή διατηρούν τις αποστάσεις. Αφού λοιπόν η ***συζυγία*** μέσω v είναι περιστροφή στο επίπεδο, θα είναι περιστροφή και στον $\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}=\mathbb{R}^3$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, αν $p\in\mathbb{R}\boldsymbol{i}+\mathbb{R}\boldsymbol{j}+\mathbb{R}\boldsymbol{k}$ καθαρό τετράνιο τότε αυτό μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της βάσης $\{u,w,\upsilon\}$, δηλ. $p=\lambda u+\mu w+\rho\upsilon=\lambda u+(\mu w+\rho\upsilon)=\lambda u+p_{w,\upsilon}$ με λ,μ,ρ∈ℝ και $\lambda u+p_{w,\upsilon}$ η προβολή του p στο επίπεδο των w,υ. Τότε η εικόνα του p μέσω της ***συζυγίας του*** v είναι $v^{-1}\cdot p\cdot v=v^{-1}(\lambda u+\mu w+\rho\upsilon)v=v^{-1}\lambda uv+v^{-1}p_{w,\upsilon}v=\lambda v^{-1}uv+v^{-1}p_{w,\upsilon}v$ $=\lambda u+v^{-1}p_{w,\upsilon}v$. Από την τελευταία έκφραση διαπιστώνουμε ότι το $v^{-1}\cdot p\cdot v$ διατηρεί την συνιστώσα του λu αναλλοίωτη πάνω στον φορέα u, ενώ, όπως ήδη αποδείξαμε, η συνιστώσα του $v^{-1}p_{w,\upsilon}v$ στο κάθετο στο u επιπεδο είναι αποτέλεσμα περιστροφής του $p_{w,\upsilon}$ γύρω από τον φορέα u .

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε, ότι η ***συζυγία*** $v(\ )v^{-1}$ ***μέσω*** v περιστρέφει ένα καθαρό τετράνιο κατά γωνία 2θ γύρω από τον άξονα u κατά τη **θετική** φορά. Σε αυτή την περίτωση το ζεύγος της βάσης $\{w,\upsilon\}$ απεικονίζεται στο ζεύγος $\{w\cos 2\theta+\upsilon\sin 2\theta, \upsilon\cos 2\theta-w\sin 2\theta\}$ (σχ. 27)



Σχήμα 27

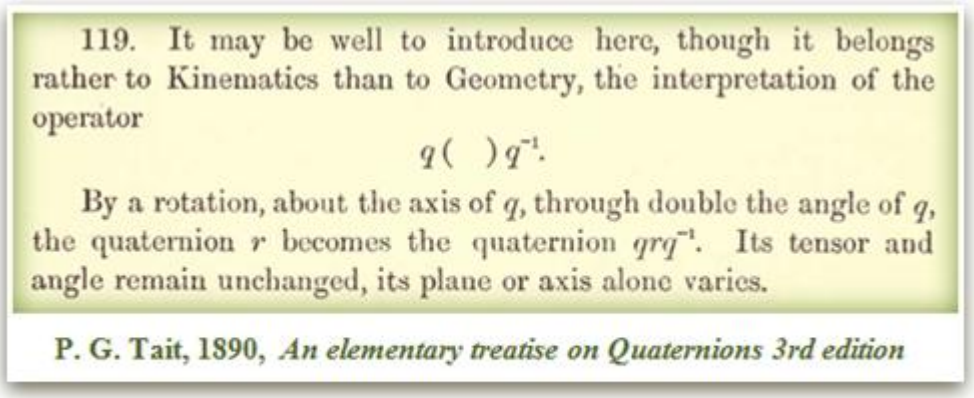
Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα (Stillwell, 2008, σελ. 15)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ: Κάθε περιστροφή στον $\mathbb{R}^3$ γύρω από δεδομένο άξονα u κατά γωνία **α**, είναι αποτέλεσμα εφαρμογής της ***συζυγίας* μέσω** του μοναδιαίου τετρανίου $v = \cos\frac{\alpha}{2} + u\sin\frac{\alpha}{2}$ και $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Όπως λέει ο Stillwell (σελ. 9):

> *«Η μη ικανοποίηση του αντιμεταθετικού νόμου είναι στην πραγματικότητα κάτι καλό, γιατί καθιστά τα τετράνια ικανά να αντιπροσωπεύσουν άλλα πράγματα που δεν αντιμετατίθενται, όπως οι περιστροφές στις 3 και 4 διαστάσεις».*

Ο Peter Guthrie Tait (1531-1901) Σκωτσέζος μαθηματικός, φίλος του Hamilton και «οπαδός» των τετρανίων κυρίως για τις εφαρμογές τους στη φυσική, αναφέρεται στη συζυγία ως *operator* (*τελεστής*) (εικ. 30) περιγράφοντας με ακρίβεια την ερμηνεία της περιστροφής. Λέει ότι ο *tensor* (*μέτρο*) του περιστρεφόμενου καθαρού τετρανίου και η *γωνία* (που σχηματίζει με τον άξονα περιστροφής) παραμένουν αναλλοίωτα, ενώ το επίπεδο (με τον άξονα περιστροφής) αλλάζει.



119. It may be well to introduce here, though it belongs rather to Kinematics than to Geometry, the interpretation of the operator

$$q(\ )q^{-1}.$$

By a rotation, about the axis of q, through double the angle of q, the quaternion r becomes the quaternion qrq^{-1}. Its tensor and angle remain unchanged, its plane or axis alone varies.

P. G. Tait, 1890, *An elementary treatise on Quaternions 3rd edition*

Εικόνα 30

Η ***συζυγία*** μέσω του $-\mathrm{v}$ δίνει: $(-\mathrm{v})^{-1}\,p(-\mathrm{v}) = \dfrac{\overline{(-\mathrm{v})}}{\|\mathrm{v}\|^2}\,p(-\mathrm{v}) = \dfrac{\bar{\mathrm{v}}}{1}\,p\,\mathrm{v} = \mathrm{v}^{-1}p\,\mathrm{v}$. Αφού κάθε μοναδιαίο τετράνιο εκφράζεται **μονοσήμαντα** στη μορφή $\cos\dfrac{\alpha}{2}+u\sin\dfrac{\alpha}{2}$, συμπεραίνουμε ότι τα μοναδικά μοναδιαία τετράνια που δίνουν τη συγκεκριμένη περιστροφή είναι τα v και $-\mathrm{v}$, τα οποία είναι αντιδιαμετρικά στη σφαίρα S^3 των μοναδιαίων τετρανίων. Επίσης, αφού κάθε περιστροφή καθορίζεται πλήρως και μονοσήμαντα από τον άξονα και τη γωνία περιστροφής, θα καθορίζεται πλήρως και μονοσήμαντα από τα ζεύγη (u,α) και $(-u,-\alpha)$. Έτσι καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση, η οποία αποτελεί μια αναδιατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος:

Οι περιστροφές στον $\mathbb{R}^3$ αντιστοιχούν σε αντιδιαμετρικά ζεύγη μοναδιαίων τετρανίων.

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των περιστροφών στον χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελεί ομάδα.

Ο πίνακας της γραμ/κής απεικόνισης *"συζυγία μέσω μοναδιαίου τετρανίου* v", δηλ. $c(p) = \mathrm{v}^{-1}p\mathrm{v}$

Όπως είδαμε, οι γραμμικές απεικονίσεις από ένα διανυσματικό χώρο σε έναν άλλο μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω πινάκων. Εδώ θα αναζητήσουμε τον 3×3 πίνακα της γραμμικής απεικόνισης **«c:*συζυγία μέσω μοναδιαίου τετρανίου*** $\mathrm{v}=\cos(\alpha/2)+u\sin(\alpha/2)$**»,** η οποία είναι μια γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που περιστρέφει κάθε φανταστικό τετράνιο, δηλαδή κάθε διάνυσμα, γύρω από τον φορέα του u **.**

Αν λοιπόν $\mathrm{c}(p)=\mathrm{v}^{-1}p\,\mathrm{v}=\overline{\mathrm{v}}\,p\,\mathrm{v}$ με $\mathrm{v}=(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)\in \mathrm{S}^3$ μοναδιαίο τετράνιο, για να βρούμε τον πίνακα της απεικόνισης c, αρκεί να βρούμε τις "εικόνες" των μοναδιαίων διανυσμάτων της βάσης $\{i,j,k\}$ του $\mathbb{R}^3$ μέσω αυτής:

- $\mathrm{c}(i+0j+0k)=\overline{\mathrm{v}}\,i\,\mathrm{v}=(\alpha 1-\beta i-\gamma j-\delta k)\,i\,(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)=(\alpha i-\beta i^2-\gamma ji-\delta ki)(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)$
  $=(\alpha i+\beta+\gamma k-\delta j)(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)i+(2\beta\gamma-2\alpha\delta)j+(2\alpha\gamma-2\beta\delta)k$
- $\mathrm{c}(0i+j+0k)=\overline{\mathrm{v}}\,j\,\mathrm{v}=(\alpha 1-\beta i-\gamma j-\delta k)\,j\,(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)=(\alpha j-\beta ij-\gamma j^2-\delta kj)(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)$
  $=(\alpha j-\beta k+\gamma+\delta i)(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)=(2\beta\gamma+2\alpha\delta)i+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)j+(2\gamma\delta-2\alpha\beta)k$
- $\mathrm{c}(0i+0j+k)=\overline{\mathrm{v}}\,k\,\mathrm{v}=(\alpha 1-\beta i-\gamma j-\delta k)k\,(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)=(\alpha k-\beta ik-\gamma jk-\delta k^2)$
  $(\alpha 1+\beta i+\gamma j+\delta k)=(2\beta\delta-2\alpha\gamma)i+(2\alpha\beta+2\gamma\delta)j+(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)k$

Σχηματίζουμε τον πίνακα με 1η στήλη τους συντελεστές των i,j,k της 1ης εξίσωσης, 2η στήλη τους συντελεστές των i,j,k της 2ης εξίσωσης και 3η στήλη τους συντελεστές των i,j,k στην 3η εξίσωση. Έτσι παίρνουμε τον πίνακα περιστροφής της συζυγίας $\mathrm{c}(p)=\mathrm{v}^{-1}p\,\mathrm{v}$:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma+2\alpha\delta & 2\beta\delta-2\alpha\gamma\\ 2\beta\gamma-2\alpha\delta & \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\alpha\beta+2\gamma\delta\\ 2\alpha\gamma-2\beta\delta & 2\gamma\delta-2\alpha\beta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2\end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα βρίσκουμε ότι ο πίνακας περιστροφής της συζυγίας $\mathrm{v}\,p\,\overline{\mathrm{v}}=\mathrm{v}\,p\,\mathrm{v}^{-1}$ είναι ο

$$A'=\begin{bmatrix}\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma-2\alpha\delta & 2\beta\delta+2\alpha\gamma\\ 2\beta\gamma+2\alpha\delta & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2\gamma\delta-2\alpha\beta\\ 2\beta\delta-2\alpha\gamma & 2\gamma\delta+2\alpha\beta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2\end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα περιστροφής μέσω *συζυγίας* και μέσω του Πίνακα Γραμμικής Απεικόνισης

Θεωρούμε το διάνυσμα $(2,2,4)$ του $\mathbb{R}^3$ ή στη γλώσσα των τετρανίων το καθαρό (φανταστικό) τετράνιο $p=0+2i+2j+4k$, το οποίο θέλουμε να περιστρέψουμε κατά τη θετική φορά γύρω από τον άξονα z του μοναδιαίου k κατά γωνία $\boldsymbol{\alpha=120^o}$.

- **Μέσω *συζυγίας*:** Σύμφωνα με το Θεώρημα Περιστροφής, κατασκευάζουμε τη συζυγία $\mathrm{v}(\ )\mathrm{v}^{-1}$ με **v** μοναδιαίο τετράνιο της μορφής $\mathrm{v}=\cos\frac{\alpha}{2}+k\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{120^o}{2}+k\sin\frac{120^o}{2}=$

$=\cos 60^o+k\sin 60^o=\left(\frac{1}{2},0,0,0\right)+(0,0,0,1)\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Εφαρμόζουμε τη συζυγία στο τετράνιο $p=0+2i+2j+4k$. Η νέα θέση του p μετά την περιστροφή θα είναι $p'=\mathrm{v}p\mathrm{v}^{-1}=$

$=\left(\cos 60^o+k\sin 60^o\right)(0+2\mathrm{i}+2\mathrm{j}+4\mathrm{k})\left(\cos 60^o-k\sin 60^o\right)=$

$\left(\frac{1}{2}+k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2i+2j+4k)\left(\frac{1}{2}-k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(i+j+2k+\sqrt{3}ki+\sqrt{3}kj+2\sqrt{3}k^2\right)\left(\frac{1}{2}-k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(i+j+2k+\sqrt{3}j-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}-k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

=...=

$=\left(-1-\sqrt{3}\right)i+\left(-1+\sqrt{3}\right)j+4k$. Παρατηρούμε ότι η προβολή του p' στον άξονα z του μοναδιαίου k δεν μεταβάλλεται, όπως είναι αναμενόμενο, και παραμένει $4k$. Η προβολή του p' στο επίπεδο των i,j είναι $\left(-1-\sqrt{3}\right)i+\left(-1+\sqrt{3}\right)j=\delta_1$, ενώ πριν την περιστροφή ήταν $2i+2j=\delta$. Η γωνία $\left(\widehat{\delta,\delta_1}\right)$ είναι 120°, αφού από τον ορισμό του εσωτερικού εσωτερικό γινομένου ισχύει $\delta\bullet\delta_1=\langle\delta,\delta_1\rangle=\|\delta\|\|\delta_1\|\cos\left(\widehat{\delta,\delta_1}\right)\Rightarrow\cos\left(\widehat{\delta,\delta_1}\right)=\frac{\langle\delta,\delta_1\rangle}{\|\delta\|\|\delta_1\|}$

$=\frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ και το διάνυσμα δ_1 είναι διάνυσμα του $2^{ου}$ τεταρτημορίου ή γιατί $\left(\widehat{\delta,\delta_1}\right)\le 180^o$.

- **Μέσω του Πίνακα Γραμμικής Απεικόνισης:** Σχηματίζουμε τον πίνακα της δεξιόστροφης περιστροφής με $\alpha=0,\ \beta=2,\ \gamma=2,\ \delta=4$, οπότε

$$A'=\begin{bmatrix}\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma-2\alpha\delta & 2\beta\delta+2\alpha\gamma\\ 2\beta\gamma+2\alpha\delta & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2\gamma\delta-2\alpha\beta\\ 2\beta\delta-2\alpha\gamma & 2\gamma\delta+2\alpha\beta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τον πίνακα στο διάνυσμα $(2,2,4)$ κι έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \\ 4 \end{bmatrix} = p'$$ όπως και προηγουμένως.

Η εκ των υστέρων δικαίωση μέσω της Άλγεβρας

Ο Ρώσος Μαθηματικός Vladislav V. Kravchenko στην εισαγωγή στο βιβλίο του *"Applied Quaternionic Analysis"* (2003) αναφέρεται στην «*τετρανιακή ανάλυση*» ως:

> *"….the most natural and close generalization of complex analysis that preserves many of its important features."*

Η παραπάνω πρόταση είναι σύμφωνη με όλα όσα παραθέσαμε σχετικά με την άλγεβρα των τετρανίων και περιγράφει με ακρίβεια τον αρχικό στόχο του Hamilton. Ο Kravchenko τονίζει πως το μεγαλύτερο ενδιαφέρον της «*τετρανιακής ανάλυσης*» είναι ότι προσφέρει εργαλεία που μας επιτρέπουν να οδηγηθούμε σε αποτελέσματα εκεί που άλλες πιο παραδοσιακές μέθοδοι αποτυγχάνουν. Μάλιστα η ιδιαιτερότητα της μη μεταθετικότητας των τετρανίων αποτελεί σε κάποιες περιπτώσεις το «κλειδί» που μπορεί να μας εξασφαλίσει κάποια από αυτά τα ποτελέσματα.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η ανάπτυξη και εξέλιξη των Μιγαδικών ακολούθησε αντίστροφη πορεία από αυτή των Τετρανίων. Οι Μιγαδικοί υπήρξαν μια «αλγεβρική» ανακάλυψη, ενώ χρειάστηκαν πολλές και διαφορετικές προσπάθειες, ώσπου να βρεθεί μια ικανοποιητική και κοινά αποδεκτή φυσική και γεωμετρική ερμηνεία τους. Αντίθετα, η ανακάλυψη των Τετρανίων «γεννήθηκε» μέσα από τη συγκεκριμένη ανάγκη να περιγραφεί αλγεβρικά-αναλυτικά η γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου και η αναζήτηση αυτή οδήγησε στην άλγεβρα των τετρανίων, η οποία εξυπηρετούσε ακριβώς αυτό τον σκοπό.

3. Εφαρμογές των Quaternions στις Φυσικές Επιστήμες

Τα Μαθηματικά ως εργαλείο έρευνας στις Φυσικές Επιστήμες:Hamilton, Tait

Ο όρος *mathematical physics* αναφέρεται στην ανάπτυξη κατάλληλων μαθηματικών μεθόδων τόσο για την εφαρμογή τους σε προβλήματα στη φυσική όσο και για την ανάπτυξη και διαμόρφωση των φυσικών θεωριών. Θα μπορούσαμε δίκαια να αποκαλέσουμε την *"Ανάλυση των Τετρανίων"* σημαντικό κομμάτι των *mathematical physics* καθώς μερικά από τα πεδία εφαρμογής της είναι:

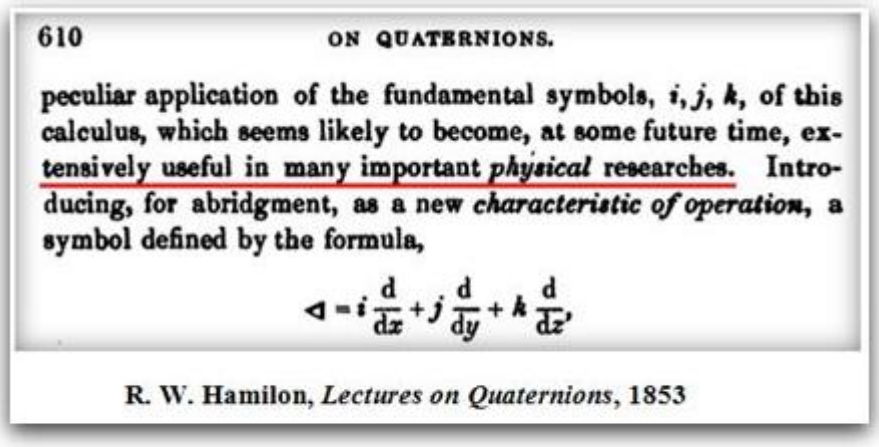
- Κλασική Μηχανική
- Εφαρμοσμένη Ηλεκτροδυναμική
- Ηλεκτρομαγνητισμός
- Κβαντομηχανική ή Hamiltonian (μερικές διαφορικές εξισώσεις)
- Κβαντική Θεωρία
- Κβαντική Σχετιστική Θεωρία (relativistic quantum theory)
- Σωματιδιακή Φυσική (particle [*electron, proton, neutron, neutrino, quark*] physics) κ.α.

Ο John C. Baez (Octonions, 2001) γράφει για τα τετράνια:

> *"This makes them nicely suited to the study of rotations and angular momentum, particularly in the context of quantum mechanics"*

αναφερόμενος στη χαρακτηριστική ιδιότητα των μοναδιαίων τετρανίων που ήδη αναφέραμε, να σχηματίζουν δηλαδή την ομάδα των περιστροφών SU(2).

Ο Hamilton είχε βρει εφαρμογές των μιγαδικών στη μηχανική. Όσον αφορά όμως τα τετράνια, αν και είχε ιδέες για πιθανές εφαρμογές τους στη Φυσική, ποτέ στην πραγματικότητα δεν τις ανέπτυξε επαρκώς. Στην ενότητα του *Διαφορικού Λογισμού* των τετρανίων εισάγει με τη βοήθεια των θεμελιωδών συμβόλων των τετρανίων ***i, j, k*** τον τελεστή



610 ON QUATERNIONS.

peculiar application of the fundamental symbols, i, j, k, of this calculus, which seems likely to become, at some future time, extensively useful in many important *physical* researches. Introducing, for abridgment, as a new *characteristic of operation*, a symbol defined by the formula,

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

R. W. Hamilon, *Lectures on Quaternions*, 1853

Εικόνα 31

$\triangleleft$ με $\triangleleft = i\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + j\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + k\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}$ και x,y,z τις ανεξάρτητες βαθμωτές μεταβλητές (εικ. 31).

Ο τελεστής $\triangleleft$ είναι το γνωστό μας *ανάδελτα* ∇ *(Del operator* ή *Διανυσματικός Διαφορικός Τελεστής)* των μερικών παραγώγων στο χώρο. Ο ίδιος έχει αντιληφθεί τη σημαντικότητα αυτού του τελεστή. Επισημαίνει την εκτεταμένη χρήση που θα μπορούσε να έχει στις έρευνες της φυσικής και στη μαθηματική μελέτη της φύσης, όταν ο λογισμός των τετρανίων θα λάβει τη δέουσα προσοχή και επεκταθεί, ώστε αυτά να γίνουν εργαλεία έρευνας σε πιο ικανά χέρια. Το $\triangleleft$, σύμφωνα με τον Hamilton, μπορεί να εφαρμοστεί σε βαθμωτά ή διανυσματικά μεγέθη καθώς και σε τετράνια. Αν θεωρήσουμε τρεις συναρτήσεις ***t***,***u***,***υ*** που εξαρτώνται αντίστοιχα από τις τρεις μεταβλητές x,y,z, τότε εφαρμόζοντας το $\triangleleft$ στη διανυσματική συνάρτηση $it + ju + k\upsilon$ με i, j, k τα μοναδιαία διανύσματα και με βάση το γινόμενο διανυσμάτων $qq_1 = -q \bullet q_1 + q \times q_1$ προκύπτει:

$$\triangleleft\left(it + ju + k\upsilon\right) = -\left(\frac{\partial t}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{z}}\right) + i\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial u}{\partial \mathrm{z}}\right) + j\left(\frac{\partial t}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right).$$

- Το διανυσματικό μέρος αυτού του γινομένου, δηλαδή το $i\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial u}{\partial \mathrm{z}}\right) + j\left(\frac{\partial t}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right)$ ορίζεται ως ο ***στροβιλισμός*** μιας διανυσματικής συνάρτησης ή ενός διανυσματικού πεδίου F. Συμβολίζεται ***curl*F** ή ***rot*F** και μαθηματικά εκφράζεται μέσω του εξωτερικού γινομένου $\nabla \times \vec{\mathrm{F}}$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτός ο όρος προτάθηκε αρχικά από τον James Clerk Maxwell.

  Αν $\nabla \times \vec{\mathrm{F}} = 0$, λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{\mathrm{F}}$ είναι ***αστρόβιλο***, που σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο έχει μια βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού, ή ισοδύναμα ότι ***απορρέει από δυναμικό,*** ή ότι είναι ***συντηρητικό***.

  Αν λοιπόν $\mathrm{F}\left(x, y, z\right) = \left\langle f\left(x, y, z\right), g\left(x, y, z\right), h\left(x, y, z\right)\right\rangle$ τότε

$$\boxed{curl\vec{\mathrm{F}} = \nabla \times \vec{\mathrm{F}} = i\left(\frac{\partial h}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial g}{\partial \mathrm{z}}\right) + j\left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ f & g & h \end{vmatrix}.$$

Το διανυσματικό μέγεθος ***curl*F** εκφράζει τον **ρυθμό στροβιλισμού ανά μονάδα επιφάνειας** σε ένα σημείο του διανυσματικού πεδίου **F** (πχ. σε ένα βαρυτικό ή ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο). Ο φορέας του συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής και το μέτρο του δείχνει τη "δύναμη" ή την ταχύτητα περιστροφής.

- Το αντίθετο του βαθμωτού μέρους του ίδιου γινομένου, δηλαδή το άθροισμα $\frac{\partial t}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial u}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{z}}$, ορίζεται ως ***απόκλιση (divergence)*** μιας διανυσματικής συνάρτησης **F,** συμβολίζεται ***div*F** και εκφράζεται μαθηματικά μέσω του εσωτερικού γινομένου $\nabla\bullet\vec{\mathrm{F}}$ Αν λοιπόν **F** διανυσματική συνάρτηση με $\mathrm{F}(x,y,z)=\langle f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\rangle$, τότε $div\vec{\mathrm{F}}=\nabla\bullet\vec{\mathrm{F}}=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial g}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial h}{\partial \mathrm{z}}$.

  Η ***απόκλιση*** ενός διανυσματικού μεγέθους εκφράζει τον ρυθμό παραγωγής σωματιδίων ανά μονάδα όγκου, σε ένα σημείο ενός διανυσματικού πεδίου

- Αν $f=f(\mathrm{x,y,z})$ **<u>βαθμωτή</u>** συνάρτηση τότε ορίζεται η διανυσματική ποσότητα ***gradient*** ή ***κλίση*** συνάρτησης που συμβολίζεται ***gradf*** και ισούται με $\nabla f=gradf=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}i+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}j+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}}k$.

  Η ***κλίση*** βαθμωτής συνάρτησης αποτελεί την επέκταση της γνωστής «παραγώγου» συνάρτησης μιας μεταβλητής αλλά είναι διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο του ∇f εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο της, ενώ η φορά του δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά την οποία η συνάρτηση έχει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης.

Ο Hamilton συνεχίζει και υπολογίζει το γινόμενο $\triangleleft\triangleleft'$ (εικ. 32):

$$\triangleleft\triangleleft'=-\left(\frac{d^3}{dxdx'}+\frac{d^3}{dydy'}+\frac{d^3}{dzdz'}\right)+i\left(\frac{d^3}{dydz'}-\frac{d^3}{dzdy'}\right)+j\left(\frac{d^3}{dzdx'}-\frac{d^3}{dxdz'}\right)+k\left(\frac{d^3}{dxdy'}-\frac{d^3}{dydx'}\right)$$

R. W. Hamilon, *Lectures on Quaternions*, 1853, σελ.. 610

Εικόνα 32

Ο παραπάνω τύπος οδηγεί στη σχέση: $\triangleleft^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ η οποία ορίζει τον *δεύτερης τάξης βαθμωτό διαφορικό τελεστή* ***Laplace*** $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\triangleleft^2$.

Έτσι, αν f οποιαδήποτε βαθμωτή, διανυσματική ή τετρανιακή συνάρτηση που εξαρτάται από τρεις βαθμωτές μεταβλητές x, y, z , παίρνουμε τον τύπο: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\triangleleft^2 f$.

Παράδειγμα

Το πρώτο παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή $\triangleleft$ που αναφέρει ο Hamilton συνδέεται με τη θερμοκρασία:

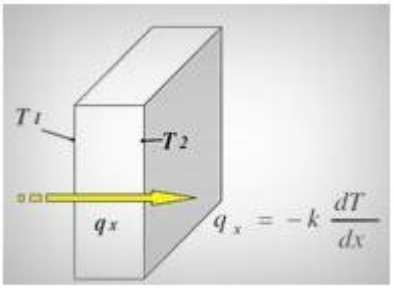
> *"Αν* ***υ*** *είναι η θερμοκρασία σημείου ενός στερεού σώματος με συντεταγμένες x,y,z τότε το σύμβολο* $-\triangleleft \upsilon$ *μπορεί να εκφράζει τη ροή της θερμότητας στο σημείο αυτό (heat flux ή thermal flux)".* (*Lectures*, σελ. 611)

Πράγματι, αν έχουμε μια λεπτή επίπεδη πλάκα πάχους **h** με άπειρες τις δύο άλλες διαστάσεις και υπάρχει διαφορά θερμοκρασίας $\mathbf{\Delta T=T_2-T_1}$ μεταξύ των δύο επιφανειών της, τότε παρατηρείται μεταφορά θερμικής ενέργειας από τη θερμότερη επιφάνεια προς την ψυχρότερη.

Η θερμική ροή **q** δια μέσου της ψυχρότερης επιφάνειας (θερμοκρασίας $\mathbf{T_2}$) που μεταφέρεται από τη θερμότερη επιφάνεια (θερμοκρασίας $\mathbf{T_1}$), δίνεται από τον τύπο $\mathbf{q= -k\cdot\Delta T/h}$, όπου **k** σταθερά που ονομάζουμε θερμική αγωγιμότητα του υλικού.

Η *ροή θερμότητας* μέσω μιας επιφάνειας σε ένα σημείο της, ορίζεται ως το <u>όριο του ρυθμού θερμικής ροής</u> όταν το πάχος **h** τείνει να μηδενιστεί.

- Όταν η μεταφορά θερμότητας πραγματοποιείται σε μια διάσταση, δηλ. **T= T(x)** και η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι γραμμική και ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας ή *(πυκνότητα) ροής θερμότητας* δίνεται από τον τύπο $q(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-k\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) = -k\frac{dT}{dx}$ *(Νόμος Fourier)*. Το (-) του τύπου δηλώνει ότι η μετάδοση της θερμότητας πραγματοποιείται από τις υψηλότερες προς τις



Εικόνα 33

χαμηλότερες θερμοκρασίες. Μετριέται σε W/m^2 και εκφράζει τη θερμική ενέργεια που περνά από τη μοναδιαία επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου.

- Εάν γενικεύσουμε στις 3 διαστάσεις x,y,z, δηλ. **T= T(x,y,z),** τότε ο τύπος παίρνει τη μορφή

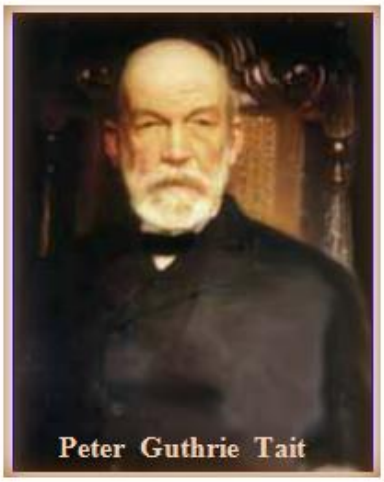
$$\vec{q}=-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}i+\frac{\partial T}{\partial y}j+\frac{\partial T}{\partial z}k\right)=-k\nabla T.$$

Η *ροή θερμότητας* είναι **διανυσματικό** μέγεθος με διεύθυνση κάθετη στις ισοθερμικές επιφάνειες.

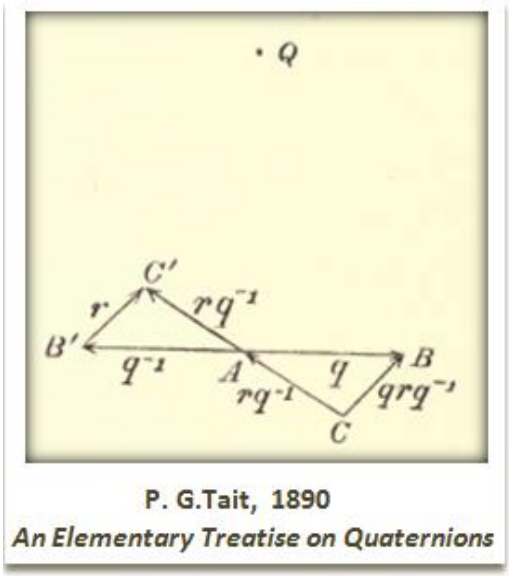
Ένα δεύτερο παράδειγμα που αναφέρει ο Hamilton είναι αυτό της *επιταχυντικής δύναμης* σε ένα σύστημα σωμάτων που έλκονται. Αν το σύστημα είναι αστρόβιλο (δηλ. $\nabla\times\vec{F}=0$) τότε το πεδίο απορρέει από δυναμικό U και το διανυσματικό μέγεθος $\lhd U=-\nabla U$ εκφράζει την επιταχυντική δύναμη $\vec{F}$ που συνδέεται με την κινητή ενέργεια του συστήματος, δηλαδή $\lhd U=-\nabla U=\vec{F}$.

Peter Guthrie Tait

Ο Peter Guthrie Tait (1831-1901) ήταν Σκωτσέζος φυσικός και μαθηματικός. Γνώρισε τα τετράνια όταν διάβασε το *"Lectures on quaternions"* το 1853 και έγινε ένθερμος υποστηρικτής τους. Ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε την ανάλυση των τετρανίων ως εργαλείο εφαρμογής στα προβλήματα και την έρευνα της Φυσικής. Δημιούργησε θεωρήματα που μπορούν να μεταφραστούν στη σύγχρονη διανυσματική ανάλυση, αν και ο ίδιος ήταν μάλλον αντίπαλός της. Χρησιμοποίησε κυρίως τη γεωμετρία των τετρανίων. Προβλήματα φυσικής που σήμερα θα μπορούσαν να λυθούν με Διανυσματικό Λογισμό, ο Tait τα αντιμετώπισε με την βοήθεια των τετρανίων, ένας χειρισμός που απήλλαξε την επίλυση προβλημάτων από τα συστήματα σταθερών συντεταγμένων και σε κάποιες περιπτώσεις την επιτάχυνε (Crowe, 1967, σελ. 117, Famillton, 2015, σελ. 94).



Εικόνα 34



Σχήμα 28

Στο βιβλίο του Tait *An Elementary Treatise on Quaternions, 3rd edition* (1890) όλα τα γεωμετρικά και φυσικά μεγέθη εκφράζονται μέσω των τετρανίων. Στην §119 εισάγει τον τελεστή $\boldsymbol{q(\ )q^{-1}}$ και αποδεικνύει (σχ. 28), ότι η εφαρμογή του επιφέρει περιστροφή ενός διανσματικού μεγέθους κατά γωνία 2θ σε ένα καθαρό τετράνιο γωνίας θ. Δηλώνει μάλιστα ότι ο τελεστής αυτός ανήκει περισσότερο στην κινηματική παρά στη γεωμετρία. Παραθέτει μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του τελεστή $\boldsymbol{q(\ )q^{-1}}$ στην αστρονομία (§121) και αναδεικνύει τη χρήση του κατάλληλα μέσα από την περιστροφή στερεού σώματος γύρω από άξονα (§408).

Εφαρμόζει τους τελεστές ∇ και ∇^2 και παράγει κανόνες με τους συμβολισμούς των τετρανίων, ισοδύναμους με τους σημερινούς νόμους του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου. Για τον τελεστή ∇ αναφέρει:

> *«Η επίδραση του διανυσματικού τελεστή ∇ πάνω σε μια βαθμωτή συνάρτηση είναι να παράξει το διάνυσμα που αναπαριστά σε μέγεθος και κατεύθυνση την πιο ταχεία αλλαγή στην τιμή της συνάρτησης.»*
>
> Tait, *An Elementary Treatise on Quaternions,* 1873, σελ. 216

Παραδείγματα από τη 3η έκδοση (1890)

- Αν α δεδομένο σταθερό διάνυσμα, η εξίσωση $S.\alpha\rho=0$ είναι εξίσωση επιπέδου ***Π*** που περιλαμβάνει όλα τα διανύσματα ρ τα οποία είναι κάθετα στο α στην αρχή του. Αν χρησιμοποιήσουμε συντεταγμένες στο επίπεδο αυτό x,y, τότε το $\vec{\rho}=x\vec{\beta}+y\vec{\gamma}$ με $\vec{\beta},\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ ως διανύσματα του επιπέδου ***Π.*** Αν εφαρμόσουμε και στα 2 μέλη της τελευταίας το $V.\beta$, έχουμε $V.\beta\rho=V.\beta x\beta+V.\beta y\gamma = xV.\beta^2+yV.\beta\gamma$, κι επειδή, όπως έχουμε δει το β^2 είναι βαθμωτό, θα είναι $V.\beta^2 = 0$. Συνεπώς $V.\beta\rho = yV.\beta\gamma$.
  Κι αφού $V.\beta\gamma=\beta\times\gamma \perp \alpha$, παίρνουμε τελικά $V.\beta\rho = yV.\beta\gamma = \lambda\alpha$, όπου λ βαθμωτό (§218).
- Παρόμοια, αν α δεδομένο σταθερό διάνυσμα, ρ, β τυχαία διανύσματα, τότε η εξίσωση $S.\alpha(\rho-\beta)=0$ παριστάνει επίπεδο που διέρχεται από το πέρας του β και είναι κάθετο στο διάνυσμα α.
- Στην §119, ο Tait επεκτείνει την *περιστροφή διανύσματος* γύρω από άξονα τετρανίου μέσω του τελεστή $\boldsymbol{q(\ )q^{-1}}$ σε *περιστροφή συστήματος σωμάτων.*
  Είδαμε στις περιστροφές στο χώρο (Προτ. 4), ότι κάθε καθαρό τετράνιο ***r*** μέσω της συζυγίας $\boldsymbol{q(\ )q^{-1}}$ αντιστοιχίζεται σε ένα νέο καθαρό τετράνιο το $\boldsymbol{q(r)q^{-1}= qrq^{-1}}$ (***q*** μοναδιαίο τετράνιο), το οποίο έχει περιστραφεί γύρω από τον άξονα του ***q*** κατά το διπλάσιο της γωνίας θ του ***q***. Κατά την

περιστροφή παραμένουν αμετάβλητα το μέτρο του ***r*** και η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα του ***q***.

Ο Tait διαπιστώνει ότι ο τελεστής – συζυγία ικανοποιεί την επιμεριστικη ιδιότητα, δηλαδή ισχύει $\boldsymbol{q(r+s)q^{-1}= qrq^{-1}+ qsq^{-1}}$.

Έτσι, αν το **B** αντιπροσωπεύει ένα άθροισμα διανυσμάτων ή ένα σύστημα σωμάτων, δηλ. $\mathbf{B}=\boldsymbol{r_1+r_2+\ldots+r_n}$, το διάνυσμα $\boldsymbol{qBq^{-1}}$ είναι η <u>νέα θέση του **B**</u> μετά από περιστροφή γύρω από τον άξονα του ***q***, διπλασιάζοντας τη γωνία του. Επομένως ο τελεστής $\boldsymbol{q(\ )q^{-1}}$ μπορεί να εφαρμοστεί στην περιστροφική κίνηση στερεού σώματος ή συστήματος σωμάτων αν $\boldsymbol{r_i}$ είναι η διανυσματική ακτίνα ή διάνυσμα θέσης της στοιχειώδους μάζας $\boldsymbol{m_i}$.

- Στη συνέχεια περνάμε στην §369 σελ. 289, όπου ο Tait επιχειρεί την αναπαράσταση *περιστροφής ενός συστήματος σωμάτων γύρω από δεδομένο άξονα.*

Αν α είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα περιστροφής του στερεού και ρ η διανυσματική ακτίνα οποιουδήποτε σημείου του σώματος αναφορικά με ένα συγκεκριμένο σημείο του άξονα, τότε για το τετράνιο $\alpha\rho$,όπως και για κάθε τετράνιο, ισχύει $\alpha\rho = \mathrm{S}\alpha\rho+\mathrm{V}\alpha\rho$. Αφού α μοναδιαίο καθαρό τετράνιο, θα είναι $\alpha^{-1} = \overline{\alpha} = -\alpha$. Άρα η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί $\rho = \alpha^{-1}\mathrm{S}\alpha\rho+\alpha^{-1}\mathrm{V}\alpha\rho = -\alpha\mathrm{S}\alpha\rho - \alpha\mathrm{V}\alpha\rho$.

- Το κομμάτι $-\alpha\mathrm{S}\alpha\rho$ παραμένει αμετάβλητο από την περιστροφή, γιατί ανήκει στον άξονα περιστροφής, αφού είναι συγγραμμικό του α.
- Το δεύτερο μέρος $-\alpha\mathrm{V}\alpha\rho$ κατά την περιστροφή κατά 2θ μεταβάλλεται σε:

$$\alpha^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(-\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}+\alpha\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(-\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\right) =$$

$$\left(\cos\frac{2\theta}{\pi}\frac{\pi}{2}+\alpha\sin\frac{2\theta}{\pi}\frac{\pi}{2}\right)\left(-\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\right) = \left(\cos\theta+\alpha\sin\theta\right)\left(-\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\right)$$

$$= -\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\cos\theta - \alpha^2\mathrm{V}\alpha\rho\sin\theta = -\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\cos\theta - \left(-1\right)\mathrm{V}\alpha\rho\sin\theta = -\alpha\mathrm{V}\alpha\rho\cos\theta+\mathrm{V}\alpha\rho\sin\theta,$$ αφού $\alpha^2 = -1.$

- Έτσι προκύπτει η νέα ακτίνα θέσης $\rho_1 = -\alpha\mathrm{S}\alpha\rho - \alpha\mathrm{V}\alpha\rho\cos\theta+\mathrm{V}\alpha\rho\sin\theta$ μέσα από μια τετρανιακή έκφραση.
- Επίσης, αφού η νέα ακτίνα είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή $\boldsymbol{q(\ )q^{-1}}$ στην ακτίνα **ρ,** κι η περιστροφή μπορεί να θεωρηθεί αριστερόστροφη (θετική) κατά γωνία θ

γύρω από τον φορέα του α, το μοναδιαίο τετράνιο ***q*** θα ισούται με $\cos\frac{\theta}{2}+\alpha\sin\frac{\theta}{2}$ και η ακτίνα ρ_1 αντίστοιχα με:

$$\rho_1 = = \left(\cos\frac{\theta}{2}+\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right)\rho\left(\cos\frac{\theta}{2}-\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right) = \alpha^{\frac{\theta}{\pi}}\rho\alpha^{-\frac{\theta}{\pi}}.$$

Η εξίσωση λοιπόν της νέας διανυσματικής ακτίνας μετά από περιστροφή **θ** είναι:

$$\rho_1 = \alpha^{\frac{\theta}{\pi}}\rho\alpha^{-\frac{\theta}{\pi}}$$

Σχόλιο: Η έκφραση της νέας διανυσματικής ακτίνας δίνεται σε απλή μορφή, ελεύθερη από συντεταγμένες, και είναι σημαντική καθώς χαρακτηριστικά μεγέθη της περιστροφικής κίνησης στερεού σώματος ή συστήματος σωμάτων εκφράζονται μέσω αυτής, όπως η ***Ροπή Αδρανείας*** **I** με $I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$.

James Clerk Maxwell

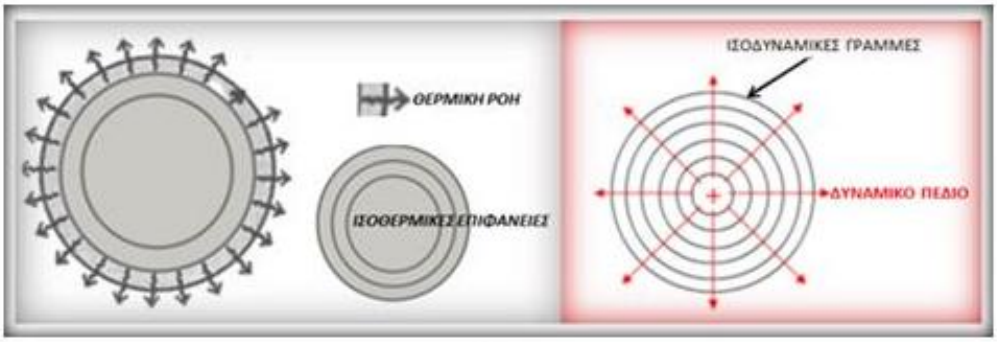
Ο James Clerk Maxwell (1831-1879) ήταν Σκωτσέζος όπως ο Tait και συνομήλικός του. Υπήρξαν φίλοι, συμμαθητές και συμφοιτητές. Κοινό τους ενδιαφέρον ο τομέας των *mathematical physics*, τον οποίο προσέγγισαν κι οι δύο με παρόμοιο τρόπο, δηλαδή με στόχο τα μαθηματικά να αποτελούν μια όσο το δυνατόν κοντινότερη αναπαράσταση των φυσικών οντοτήτων.

Τη δεκαετία 1856-1865 συνέθεσε τις εργασίες του πάνω στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιλαμβάνοντας μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπισε με την τετρανιακή ανάλυση. Ο Maxwell άρχισε να μαθαίνει για τις μεθόδους των τετρανίων γύρω στο 1870 με αφορμή τον Tait, διαβάζοντας το βιβλίο του *An Elementary Treatise on Quaternions* του οποίου η αρχική έκδοση έγινε το 1867 και στο οποίο τράβηξαν την προσοχή του οι τελεστές ∇ και ∇^2 (Crowe, σελ. 129).

Στο έργο του *"A Treatise on Electricity and Magnetism"* (1873), ο Maxwell συγκρίνει την Καρτεσιανή μέθοδο των συντεταγμένων στο χώρο με αυτόν του Λογισμού των τετρανίων και επιχειρηματολογεί υπέρ του δεύτερου. Εκφράζει τα φυσικά αποτελέσματα των συλλογισμών του και σε Καρτεσιανές συντεταγμένες καθώς οι σπουδαστές είναι εξοικειωμένοι με αυτές, αλλά δεν τις αναλύει. Κι αυτό, γιατί είναι επιθυμητό να μπορούμε κάποιες φορές στον συλλογισμό της φυσικής

να επικεντρωθούμε σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου αντί των τριών συντεταγμένων του, όπως επίσης στο μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης αντί των τριών συνιστωσών της (σελ. 9-10). Κάτι που προσφέρει ο Λογισμός των τετρανίων.

Το ενδιαφέρον του Maxwell για τα τετράνια έγινε ακόμα μεγαλύτερο λόγω των ανακαλύψεων του Ιρλανδού φυσικού Sir William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) στη θερμοδυναμική. Σύμφωνα με την ερμηνεία που δίνει ο Maxwell, ο Thomson παρατήρησε την αναλογία μεταξύ ενός διανυσματικού πεδίου *ηλεκτροστατικών δυνάμεων* και του διανυσματικού πεδίου της *θερμικής ροής* σε στερεό σώμα. Με τα δύο παραπάνω διανυσματικά πεδία σχετίζονται δύο βαθμωτά πεδία, αυτό των *ισοδυναμικών γραμμών* και αυτό των *ισοθερμικών γραμμών* αντίστοιχα. Η αναλογία λοιπόν βρίσκεται στο γεγονός, ότι και στις δύο περιπτώσεις συνυπάρχουν διανυσματικό και βαθμωτό πεδίο.



Εικόνα 35

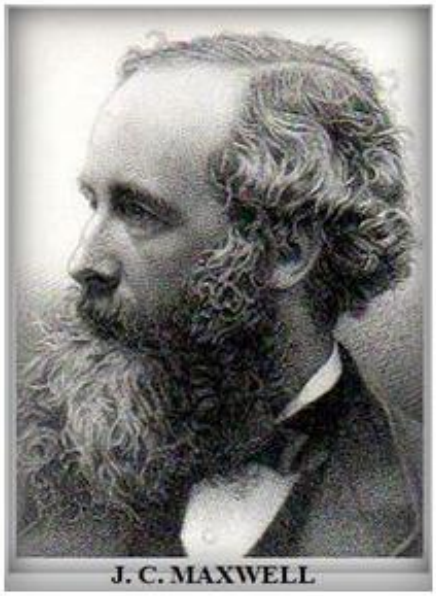
Ο Maxwell θεωρούσε θεμελιώδη αρχή της μαθηματικής αναπαράστασης φυσικών μεγεθών, τη *συστηματική ταξινόμηση* και *μαθηματική κατηγοριοποίηση* αυτών. Επιχειρηματολόγησε υπέρ αυτής της άποψης στο "*Maxwell´s address to the Mathematical and Physical sections of the British Association*", Liverpool, September 15, (1870) όπου αναφέρει:

- Ως μαθηματικοί μέσα από απλές ή πιο σύνθετες διαδικασίες, εκφράζουμε με διαφορετικούς αλλά ισοδύναμους τύπους ή τρόπους το ίδιο πράγμα. Η ισοδυναμία των εκφράσεων δεν είναι πάντα προφανής και αυτονόητη στο μυαλό μας κι ας προκύπτει μέσα από λογικές διαδικασίες που στηρίζονται σε αξιώματα και θεωρήματα. Η εμπειρία όμως όπως και η εξοικείωση των μαθηματικών σε τέτοιες διαδικασίες τους δίνει τη δυνατότητα να μετασχηματίσουν μια περίπλοκη έκφραση σε μια ισοδύναμη που είναι όμως πιο απλή και κατανοητή
- Ως μελετητές της φυσικής παρατηρούμε κάτω από πολλές διαφορετικές συνθήκες ένα φυσικό φαινόμενο, ώστε να συνάγουμε τους νόμους που το διέπουν. Θεωρώντας κάθε τέτοιο φαινόμενο ως αποτέλεσμα ενός σύνθετου συστήματος συνθηκών προσπαθούμε

να τις αναλύσουμε, ξεκινώντας από αυτή που μας φαίνεται κυρίαρχη. Έτσι σταδιακά μπορούμε να βλέπουμε το φαινόμενο με μεγαλύτερη καθαρότητα και σαφήνεια

- Ο μαθητής ή ο φοιτητής γνωρίζοντας πολλά διαφορετικά είδη και κλάδους των φυσικών επιστημών διαπιστώνει ότι οι μαθηματικές διαδικασίες αιτιολόγησης μοιάζουν μεταξύ τους σε πολλούς από αυτούς. Αυτή η γνώση σε μια επιστήμη βοηθά πολύ στην κατανόηση μιας άλλης. Αυτό συμβαίνει, γιατί και στις δύο επιστήμες διαπραγματεύεται με συστήματα ποσοτήτων των οποίων οι μαθηματικές εκφράσεις των σχέσεών τους είναι ίδιες, αν και η φύση των ποσοτήτων μπορεί να είναι εντελώς διαφορετική. Έτσι οδηγείται στο να αναγνωρίζει κλάσεις ποσοτήτων πάνω σε μια νέα αρχή σύμφωνα με την οποία η φύση μιας ποσότητας υπόκειται σε ένα μαθηματικό τύπο.
- Για να μπορέσουμε λοιπόν να κατανοήσουμε μια έννοια ή ένα νόμο σε ένα κλάδο της επιστήμης, χρησιμοποιούμε μια έννοια ή ένα νόμο από έναν άλλο κλάδο, και αγνοώντας τη διαφορετική φύση των φαινομένων που μελετάμε, προσπαθούμε να οδηγηθούμε σε μια κοινή μαθηματική μορφή, εφόσον αυτή υπάρχει, δηλαδή έναν αναλογικό τύπο.

Στην εργασία του *Remarks On the Mathematical Classification on Physical Quantities* (1871), καταγεγραμμένο στα Πρακτικά του *London Mathematical Society*, (s1-3, σελ.224-233) προτείνει ένα είδος κατηγοριοποίησης που στηρίζεται σε μαθηματικές αναλογίες τύπου ή μορφής, με άλλα λόγια μιας *μαθηματικής* κατηγοριοποίησης παράλληλα με αυτή της αντίστοιχης *φυσικής*, εφόσον πρόκειται για φυσικά μεγέθη.



Εικόνα 36

Ο Maxwell θεωρεί κορυφαίο παράδειγμα κατηγοριοποίησης τον διαχωρισμό των ποσοτήτων σε βαθμωτές και διανυσματικές, έναν διαχωρισμό που οφείλεται στον Hamilton. Κι ενώ οι βαθμωτές ποσότητες καθορίζονται πλήρως από έναν αριθμό, οι διανυσματικές ποσότητες χρειάζονται τρεις. Χαρακτηρίζει την ανακάλυψη του λογισμού των τετρανίων σαν ένα βήμα προς τη γνώση των

ποσοτήτων στον χώρο εξίσου σημαντική με την ανακάλυψη των καρτεσιανών συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^3$ και πιστεύει ότι οι ιδέες αυτού του λογισμού πέρα από τις πράξεις και τα σύμβολά του μπορούν να εφαρμοστούν σε όλες τις επιστήμες.

Τονίζει την ανάγκη ταξινόμησης των φυσικών ποσοτήτων καθώς στα τέλη του 19ου αι. οι επιστήμονες ήδη γνωρίζουν μεγάλο αριθμό από αυτές. Διαχωρίζει λοιπόν την ταξινόμηση των ποσοτήτων σε δύο είδη:

- Τη φυσική
- Τη μαθηματική

Θεωρεί πως η δεύτερη παίζει βασικό ρόλο στην έρευνα ενός νέου κλάδου της επιστήμης, εφόσον διαπιστωθεί ότι σε αυτόν υπάρχει ένα σύστημα ποσοτήτων που υπακούει στις ίδιες μαθηματικές σχέσεις με ένα σύστημα ποσοτήτων σε έναν παλαιότερο και ήδη γνωστό κλάδο στον οποίο οι σχέσεις έχουν αναχθεί σε μαθηματικούς τύπους και τα προβλήματα λύνονται από μαθηματικούς.

Παραθέτουμε μερικές ακόμα ενδιαφέρουσες αναφορές του Maxwell, από το ίδιο κείμενο, στις οποίες χρησιμοποιεί την ορολογία των τετρανίων:

- το έργο W μιας δύναμης F, γνωστό σήμερα ως $W=\vec{F}\bullet\vec{s}$ το περιγράφει ως *"the scalar part of the product of the force and the displacement"* το γνωστό μας ΔΥΝΑΜΗ x ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ
- Το παράδειγμα του έργου ή της ενέργειας γενικεύεται, όπως λέει, και σε άλλα γινόμενα διανυσμάτων που δίνουν ενέργεια. Έτσι η κινητική ενέργεια $E_{κιν}=\frac{1}{2}mυ^2$ (το $υ^2$ δεν έχει κάποια φυσική ερμηνεία) μπορεί να γραφεί $E_{κιν}=\frac{1}{2}mυυ=\frac{1}{2}\vec{p}\bullet\vec{υ}$, άρα η κινητική ενέργεια είναι το ½ του βαθμωτού μέρους του γινομένου της ορμής επί την ταχύτητα του σώματος
- Διαχωρίζει τα διανύσματα που αναφέρονται στο μοναδιαίο μήκος και τα ονομάζει *Forces* (*Δυνάμεις*) με την ευρεία έννοια, ενώ αυτά που αναφέρονται στη μοναδιαία επιφάνεια τα ονομάζει *Fluxes* (*Flux*=ροή).
- Όταν ένα διάνυσμα είναι συνάρτηση ενός άλλου διανύσματος, ο <u>λόγος</u> του πρώτου προς το δεύτερο είναι γενικά ένα τετράνιο το οποίο είναι συνάρτηση του δεύτερου
- Εφόσον το δεύτερο διάνυσμα μεταβάλλεται <u>μόνο ως προς το μέγεθος</u> (μήκος), το πρώτο είναι πάντα ανάλογο του δεύτερου και διατηρεί σταθερή κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη *γραμμική διανυσματική συνάρτηση* (*linear vector function*). Πιο συγκεκριμένα λέμε ότι το πρώτο διάνυσμα είναι μια γραμμική διανυσματική συνάρτηση του δεύτερου.

Αυτή χαρακτηρίζεται ως μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση από τον Maxwell και ο πρώτος που την ανέπτυξε ήταν ο Tait.

- Για τον τελεστή ∇^2 δέχεται ότι η ανακάλυψή του οφείλεται στον Hamilton, αναγνωρίζει όμως τη μεγάλη συνεισφορά του Tait, όσον αφορά στις εφαρμογές του τελεστή και την ανάπτυξη της θεωρίας που συνδέεται με αυτόν στη φυσική. Επίσης δίνει μία ενδιαφέρουσα ερμηνεία και εφαρμογή του ∇^2:

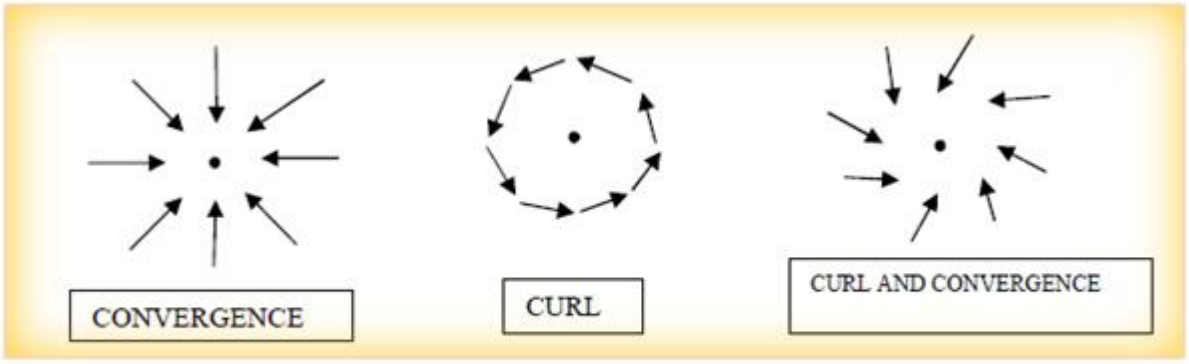
  "Αρχικά προτείνω να ονομάσουμε το αποτέλεσμα του ∇^2 με το (-) ***συγκέντρωση (Concentration)*** *της ποσότητας στην οποία εφαρμόζεται. Κι αυτό, γιατί, αν Q είναι μια ποσότητα βαθμωτή ή διανυσματική, η οποία είναι συνάρτηση της θέσης ενός σημείου, και αν βρούμε το ολοκλήρωμα της Q κατ΄ όγκο μιας σφαίρας ακτίνας r και στη συνέχεια διαιρέσουμε με τον όγκο της σφαίρας, παίρνουμε το* $\overline{Q}$ *δηλ. τη μέση τιμή του Q εντός της σφαίρας. Αν* Q_0 *είναι η τιμή του Q στο κέντρο της σφαίρας, τότε, αν η ακτίνα r είναι είναι μικρή, ισχύει* $Q_0 - \overline{Q} = \frac{r^2}{10}\nabla^2 Q$, *δηλ. η τιμή του Q στο κέντρο της σφαίρας υπερβαίνει της μέσης τιμής του Q μέσα στη σφαίρα κατά μια ποσότητα που εξαρτάται από την ακτίνα και από το* $\nabla^2 Q$. *Συνεπώς, αφού το* $\nabla^2 Q$ *δείχνει το πλεόνασμα της τιμής του Q στο κέντρο σχετικά με τη μέση τιμή στη σφαίρα, θα το ονομάσω συγκέντρωση του Q. ..... Έτσι, αν Q είναι ένα ηλεκτρικό δυναμικό, το* $\nabla^2 Q$ *είναι η πυκνότητα της ύλης που παράγει το δυναμικό."*

- Ως προς τον διανυσματικό τελεστή ∇ ή $V.\nabla$ του Hamilton:
  - Όταν εφαρμόζεται σε διανυσματική συνάρτηση, μετατρέπει τη *μεταφορά* σε *περιστροφή* κι αντίστροφα την *περιστροφή* σε *μεταφορά*, ανάλογα με το είδος του διανύσματος στο οποίο εφαρμόζεται
  - αν **P** είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, το ∇P είναι ένα διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία μειώνεται ταχύτερα το **P** και ταυτόχρονα «μετρά» τον ρυθμό αυτής της μείωσης.

    Ως ονομασία για το ∇P προτείνει τη λέξη *slope* = κλίση επεκτείνοντας τη γνωστή έννοια από το επίπεδο στο χώρο. Αντιστοιχεί στον σύγχρονο όρο *gradient*.
  - αν **σ** είναι μια διανυσματική συνάρτηση, τότε $\nabla\sigma = S.\nabla\sigma + V.\nabla\sigma$. Οι ονομασίες που προτείνει ο Maxwell είναι:

- για το $S.\nabla\sigma$ → *Convergence* = *σύγκλιση* της **σ**, αυτό που σήμερα χωρίς το (-) καλούμε *divergence* (απόκλιση)
- για το $V.\nabla\sigma$ →*Curl* = στροβιλισμός (περιστροφή) της **σ.** Ο όρος διατηρείται έως σήμερα.

Με το σχήμα 29, που περιλαμβάνεται στην εργασία *Remarks On the Mathematical Classification on Physical Quantities*, δίνει τη φυσική ερμηνεία των όρων *Convergence* και *Curl*.



Σχήμα 29

Pauli spin matrices

Τα τετράνια παραγκωνίστηκαν για πολλα χρόνια και επανήλθαν μέσα από τη δουλειά του Αυστριακού φυσικού Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) που εισήγαγε τους *spin matrices* ή *spinners* στην Κβαντομηχανική (*quantum mechanics*). Το *spin* ή *ιδιοστροφορμή* ενός στοιχειώδους σωματιδίου έχει τρεις συνιστώσες Sx, Sy, Sz και το *spin* $\vec{S}$ δίνεται από τη σχέση $\vec{S}=\vec{S}_x+\vec{S}_y+\vec{S}_z=\hat{x}\frac{h}{2}\sigma_1+\hat{y}\frac{h}{2}\sigma_2+\hat{z}\frac{h}{2}\sigma_3$ (h η σταθερά του Planck) όπου $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ είναι οι πίνακες *spin (ιδιοστροφορμής)* του Pauli με:

$\sigma_1=\sigma_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\sigma_2=\sigma_y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$, $\sigma_3=\sigma_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ και ικανοποιούν τη σχέση $A=A^*$, όπου $A^*=\overline{A}^T$.

Τα τετράνια είναι ισομορφικά με τους Πίνακες Pauli, αφού είναι ισομορφικά με την SU(2) (Familton, 2015, σελ. 80, Savage, 2015, σελ. 24) και ισχύει:

$$Spin(1)=\left\{\begin{bmatrix}\alpha+\delta i & -\beta-\gamma i\\ \beta-\gamma i & \alpha-\delta i\end{bmatrix}/\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1\right\}=SU(2).$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Annales de Gergonne, Vol. 4, 1813-1814, Lettre de M. Servois, p. 228-235. Ανακτήθηκε τον Μάρτιο 2017 από: http://www.numdam.org/item/AMPA
2. Argand, J. R. (1806) (1881). *Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques*, 2nd Edition, GAUTHIER-VILLARS, 1874
3. Argand, J. R. (1806). (1881). *Imaginary Quantities: Their Geometrical Representation*, translation by A. S. Hardy, publisher D. Van Nostrand, New York
4. Baez, John C. (2001). The octonions, BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 39, Number 2, Pages 145-205, article electronically published on December 21
5. Ball Simeon and Weiner Zsuzsa, (2011). An Introduction to Finite Geometry Zsuzsa Weiner. Ανακτήθηκε τον Ιανουάριο 2017 από: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.500.6165&rep=rep1&type=pdf
6. Buchmann, Amy. (2009). A Brief History of Quaternions and the Theory of Holomorphic Functions of Quaternionic Variables, Department of Mathematics and Computer Sciences, Schmid College of Science, Chapman University, USA. Ανακτήθηκε τον Μάρτιο 2017 από: https://arxiv.org/pdf/1111.6088.pdf
7. Buee, A. Quentin.(1805). *Memoire sur les quantites imaginaires*
8. Crowe, M. J. (1967). *A HISTORY OF VECTOR ANALYSIS , The Evolution of the Idea of a Vectorial System* , University of Notre Dame, Dover Publications, New York, New material Copyright by M. J. Crowe, 1985
9. Familton, Johannes C. (2015). QUATERNIONS: A HISTORY OF COMPLEX NONCOMMUTATIVE ROTATION GROUPS IN THEORETICAL PHYSICS, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Ph.D Columbia University
10. Gibbs, J.W. (1901). *Vector Analysis,* Founded upon the lectures of J. W. Gibbs, by Edwin Bidwell Wilson, Yale University, USA
11. Graves, Robert Perceval (1885). *The Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 2, Hodges, Figgis & CO, Dublin
12. Graves, Robert Perceval (1889). *The Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 3, Hodges, Figgis & CO, Dublin

13. Hamilton, W. R. (1837), (2000). THEORY OF CONJUGATE FUNCTIONS, OR ALGEBRAIC COUPLES; with a preliminary and elementary essay on Algebra as the science of Pure Time, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 17, part 1, 1837, pp. 293-422, edited by David R. Wilkins, 2000
14. Hamilton, W. R. (1844-1850), (2000). ON QUATERNIONS, OR ON A NEW SYSTEM OF IMAGINARIES IN ALGEBRA, Philosophical Magazine, (1844-1850),edited by David R. Wilkins 2000
15. Hamilton, W. R. (1845-1847). "On Quaternions" in *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol.3, (1845 - 1847) , 1-16, edited by David R. Wilkins 1999
16. Hamilton, W. R. (1853). *LECTURES ON QUATERNIONS*, Hodges & Smith, Dublin, Whittaker & CO,London, MacMillan & CO, Cambridge
17. Hamilton, W. R. (1866). *Elements of Quaternions*, edited by his son William Edwin Hamilton, LONDON: LONGMANS, GREEN & CO.
18. Κακούρης, Μ. (2008). Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ, Διπλωματική εργασία του ΠΜΣ «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών
19. Katz, V. J. (2009). *A History of MATHEMATICS, An Introduction*, Third Edition, University of the District of Columbia, Addison-Wesley, Boston, San Francisco, New York, Copyright 2009 by Pearson Education, Inc.
20. Kelland, P., Tait, P. G. (1873). *INTRODUCTION TO QUATERNION WITH NUMEROUS EXAMPLES*, Cambridge, University Press, London, MacMillan & CO
21. Kravchenko, V. Vladislav. (2003), *Applied Quaternionic Analysis,* Heldermann Verlag, Langer Graben 17, Lemgo, Germany
22. Loria, Gino. (1929-1935). *Storia delle matematiche*, 3 vol., Torino 1929-1933, Milano 1950. Τόμος 3ος, Μετάφραση Μιχαήλ Κ.Κωβαίου, Ε.Μ.Ε. 1971-1974
23. Μαρμαρίδης, Νίκος.(2014).Σημειώσεις στη Θεωρία Δακτυλίων, Ιωάννινα
24. Maxwell, James C. (1870) MAXWELL'S ADDRESS TO THE MATHEMATICAL AND PHYSICAL SECTIONS OF THE BRITISH ASSOCIATION, Liverpool, September 15, 1870.
25. Maxwell, James C. (1871) *On the Mathematical Classification on Physical Quantities*, Paper to the London Mathematical Society where he suggests the word 'curl' for a vector quantity (Proceedings of the London Mathematical Society, s1-3, 224-233)
Ανακτήθηκε τον Μάρτιο 2017 από:
http://www.clerkmaxwellfoundation.org/MathematicalClassificationofPhysicalQuantities_Maxwell.pdf

26. Maxwell, James C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism* Vol. 2, Clarendon Press, Oxford
27. Penrose, Roger. (2004). *Road to Reality,* published by Jonathan Cape, LONDON
28. Πετρόπουλος, Θ. (2010). Κανονικά σχήματα και συμμετρίες, από τα Πλατωνικά Στερεά ως την ιδιαιτερότητα της SO(4), σελ. 150-161
29. Savage, Alistair, (2015). *Introduction to Lie Groups,* University of Ottawa
30. Stillwell, John. (2008). *Naive Lie Theory* **,** SPRINGER**,** New York (σελ. 1-22)
31. Tait, P. G. (1873). *An Elementary Treatise on Quaternions, 2nd Edition, Enlarged,* Cambridge, University Press
32. Tait, P. G. (1890). *An elementary treatise on Quaternions 3rd edition,* Cambridge, University Press
33. Ταμβάκης, Κυριάκος. ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ-Ι, Συνοπτικές πρόχειρες σημειώσεις 6. Ανακτήθηκε τον Μάρτιο 2017 από: http://www.ucy.ac.cy/phy/documents/physics/FYS225-6.pdf
34. *THE PROCEEDINGS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY,* (1847),VOL. 3, Dublin, printed by M. H. GILL
35. Van der Waerden, B. L. (1976). Hamilton's Discovery of Quaternions. Mathematics Magazine, vol. 49, No5, Mathematical Association of America, σελ. 227-234
36. Van der Waerden, B. L. (1985). *A History of Algebra,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg
37. Warren, John. (1828). *"A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities"*, TURNER COLLECTION, THE LIBRARY UNIVERSITY OF KEELE, C.W. TURNER, 1968
38. Wessel, Caspar. (1799). *Essai sur la representation analytique de la direction,* ed. H. Valentiner and T. N. Thiele, Copenhagen, 1897
39. Wessel, Caspar. (1799). *On the Analytical Representation of Direction,* edited by BODIL BRANNER & JESPER LUTZEN, The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, trans. H. G. Zeuthen and others Copenhagen 1999
40. Wilkins, R. David, (2000). On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra, (The Mathematical Papers of Sir W.R. Hamilton, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1967) edited by Wilkins R. D., Dublin