ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

"Διαδικασίες μοντελοποίησης διερευνητικών δραστηριοτήτων στη σχολική τάξη"

Λυκοφρίδη Ευπραξία

Δ201315

Επιβλέπων Καθηγητής

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από την **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης(επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητή	_____
2) Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια	_____
3) Γεώργιος Ψυχάρης	Λέκτορα	_____

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας

πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής**

αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
4) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (Επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητή	_____
5) Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια	_____
6) Γεώργιος Ψυχάρης	Λέκτορα	_____

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο που μου έκανε την τιμή να είναι ο επιβλέπων καθηγητής μου. Οι πολύτιμες συμβουλές του, η βοήθειά του και η καθοδήγησή του σε όλα τα στάδια της παρούσας εργασίας ήταν πολύτιμα.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα και το Λέκτορα κ. Ψυχάρη Γεώργιο για τη τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στη τριμελή επιτροπή.

Ευχαριστώ την ομάδα του mascil που συμμετείχε στην παρούσα έρευνα και με έκανε να αισθανθώ μέλος αυτής της ομάδας.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τη φίλη μου, Μαρία Κασσωτάκη για τη στήριξή της και τις συμβουλές της σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού.

Τέλος ευχαριστώ τους γονείς μου και τον αδερφό μου που είναι δίπλα μου σε κάθε μου βήμα και με στηρίζουν ώστε να πραγματοποιηθούν τα όνειρά μου.

Περίληψη

Η μοντελοποίηση μιας δραστηριότητας καθώς και η διερεύνηση των πτυχών της λύσης της αποτελούν τους βασικούς πυλώνες επίλυσης προβλήματος. Οι δυο αυτές διαδικασίες συνεχώς καταλαμβάνουν πιο ισχυρή θέση στη μαθηματική κοινότητα, χωρίς όμως οι μαθητές να έχουν τη ευκαιρία να έρθουν συχνά σε επαφή με αυτές. Στην έρευνα αυτή, μέσα από την υλοποίηση μιας διερευνητικής δραστηριότητας μελετήθηκαν οι στρατηγικές μοντελοποίησης που ακολούθούν οι μαθητές καθως και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. Παράλληλα εξετάστηκαν τα οφέλη που αποκτούν μέσα από την διερευνητική διαδικασία εύρεσης της λύσης προβλήματος. Συγκεκριμένα στην έρευνα συμμετείχαν δυο εκπαιδευτικοι με τις τάξεις τους, οι οποίοι υλοποίησαν την ίδια διερευνητική δραστηριότητα. Η βιντεοσκόπηση των διδασκαλιών, τα φύλλα εργασίας με τα οποία εργάστηκαν οι μαθητές, οι παρατηρήσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων καθώς και οι ηχογραφήσεις των συναντήσεων των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων, αποτέλεσαν τα δεδομένα της έρευνας. Τα δεδομένα επεξεργάστηκαν και αναλύθηκαν με τη μέθοδο των κρίσιμων συμβάντων για να εξάγουμε τα αποτελέσματα της έρευνας, τα οποία παρουσιάζονται στο πέμπτο κεφάλαιο. Τα αποτελέσματα της έρευνας κάνουν φανερή τη δυσκολία των μαθητών να μοντελοποιήσουν μια διερευνητική δραστηριότητα. Παράλληλα γίνονται ορατά τα οφέλη της διερευνητικής μάθησης και πως αυτή συμβάλει στην διαμόρφωση στρατηγικών επίλυσης ενός προβλήματος. Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil.

Λέξεις κλειδιά: Μοντελοποίηση, Κύκλος Μοντελοποίησης, Δυσκολίες Μοντελοποίησης, Διερεύνηση,Διερευνητική Δραστηριότητα

Abstract

Activity modelling and searching for solution's aspects are the main mathematical problem solving processes. Although these two processes are becoming more popular amongst mathematicians, students don't use them often. In this research study, modelling strategies used by students as well as the difficulties they face were examined through the implementation of an inquiry activity. At the same time, benefits gained through the exploratory process of finding solution to the problem were examined. More specifically, during the survey two teachers and their classes implemented the same inquiry activity. Research data included videos of the teachings, students' worksheets, comments made during the teaching and recordings from teacher meetings about activity planning. Data were processed and analyzed using the method of critical events to export study results, which are presented in the fifth chapter. What is clear from study results is the difficulty students face while modelling an inquiry activity. Furthermore, the study showed the benefits of inquiry-based learning on how this method contributes to the formulation of problem solving strategies. This research study was conducted under the European Mascil program.

Keywords: Modelling, Modelling Cycle, Modelling Difficulties, Inquiry, Inquiry Activity

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 8

Κεφάλαιο 1: Μαθηματική Μοντελοποίηση 11

1.1 Ορισμός 11

1.2 Ο Κύκλος της Μοντελοποίησης 12

1.3 Είδη Μαθηματικών Μοντέλων 16

1.4 Εκπαιδευτικοί Στόχοι και Μαθηματική Μοντελοποίηση 18

Κεφάλαιο 2: Διερευνητική Μάθηση - Ιστορική Αναδρομή 20

2.1 Διερευνητική Μάθηση 20

2.2 Dewey: Ο πατέρας της Διερεύνησης 21

2.3 Διδασκαλία μέσω της επίλυσης Προβλήματος 23

2.4 Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων 25

2.5 Ρεαλιστικά Μαθηματικά 27

2.6 Ορισμός Διερευνητικής Μάθησης 30

2.7 Μορφές Διερευνητικής Μάθησης 31

2.8 Χαρακτηριστικά της Διερευνητικής Μάθησης 32

2.9 Οφέλη της Διερευνητικής Μάθησης 34

2.10 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού 36

Κεφάλαιο 3: Η Έρευνα 39

3.1 Εισαγωγή 39

3.2 Ερευνητικό Πρόβλημα – Ερευνητικά Ερωτήματα 40

3.3 Ερευνητική Διαδικασία 41

3.4 Η Δραστηριότητα 43

3.4.1 Η Δραστηριότητα του εκπαιδευτικού Α 45

3.4.2 Η δραστηριότητα του εκπαιδευτικού Β 46
3.4.3 Βασικά Σημεία Δραστηριότητας 49
3.4.4 Κύκλος Μοντελοποίησης Προβλήματος 53
3.5 Συλλογή Δεδομένων 54
3.6 Ανάλυση Δεδομένων 55
Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα 57
4.1 Εισαγωγή 57
4.2 Ανάλυση 1ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Α 57
4.2.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση 57
4.2.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση 71
4.3 Ανάλυση 2ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Α 75
4.3.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση Προβλήματος 75
4.3.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση 85
4.4 Ανάλυση 1ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Β 88
4.4.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση 88
4.4.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση 101
4.5 Ανάλυση 2ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Β 106
4.5.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση 106
4.5.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση 110
Παράρτημα 124
1. Φύλλο Εργασίας Εκπαιδευτικού Α 124
2. Φύλλο Εργασίας Εκπαιδευτικού Β 125
3. Μαθηματική Λύση Προβλήματος 130
Βιβλιογραφία 134

Ελληνική Βιβλιογραφία 134

Ξένη Βιβλιογραφία 134

Ιστοσελίδες..... 137

Εισαγωγή

Η μαθηματική μοντελοποίηση διερευνητικών δραστηριοτήτων με ρεαλιστικό περιεχόμενο καταλαμβάνει συνεχώς όλο και πιο σπουδαία θέση τόσο στη μαθηματική κοινότητα όσο και στην εκπαίδευση γενικότερα. Η έρευνα , όπως έχουμε ήδη επισημάνει, έχει αναδείξει την αξία της μοντελοποίησης στην προετοιμασία των μαθητών ώστε να ανταποκριθούν καλύτερα σε προβλήματα της σύγχρονης κοινωνίας και σε μελλοντικά επαγγελματικά τους εμπόδια (Lesh & Zawojewski, 2007).

Αν και η έρευνα εδώ και χρόνια έχει αναδείξει τις αξίες της μαθηματικής μοντελοποίησης και της λύσης διερευνητικών προβλημάτων, το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας που επικρατεί στην εκπαίδευση δεν έχει διαφοροποιηθεί. Η δομή του εκπαιδευτικού συστήματος, τα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και η μορφή της εκπαιδευτικής διαδικασίας ωθεί τις περισσότερες φορές τους μαθητές στην απόκτηση στείρας γνώσης, αποκομμένης από τον πραγματικό κόσμο. Τυποποιημένες αλγοριθμικές διαδικασίες και ψευτο – προβλήματα με ρεαλιστικά στοιχεία αποτελούν το κύριο αντικείμενο μελέτης των σχολικών μαθηματικών. Στόχος του κάθε μαθητή είναι να καταστρώσει ένα αλγοριθμικό σχέδιο επίλυσης για να αντιμετωπίσει μια προβληματική κατάσταση που του έχει τεθεί.

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκαν οι στρατηγικές μοντελοποίησης που ακολουθούν οι μαθητές στην επίλυση μιας διερευνητικής δραστηριότητας καθώς και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. Η έρευνα βασίζεται στη μελέτη δυο διαφορετικών τάξεων με τους εκπαιδευτικούς τους, οι οποίες καλούνται να εμπλακούν με την ίδια ρεαλιστική δραστηριότητα. Η επίλυση της δραστηριότητας αυτής απαιτεί μοντελοποίηση τόσο των δεδομένων, όσο και των ερωτημάτων καθώς και διερεύνηση των πτυχών της λύσης.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του ευρωπαικού προγράμματος Mascil, (*mathematics and science for life ή Ανακαλύπτοντας τα Μαθηματικά και τις Φυσικές επιστήμες στη καθημερινή ζωή και στους χώρους εργασίας*). Το πρόγραμμα αυτό αποτελεί ένα Ευρωπαϊκό Πρόγραμμα επιμόρφωσης και επαγγελματικής εξέλιξης εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και σύμφωνα με την ιστοσελίδα του στοχεύει να εισάγει στην τάξη ένα νέο τρόπο διδασκαλίας, κατά τον οποίο οι μαθητές θα εμπλέκονται με διερευνητικές δραστηριότητες, συνδεδεμένες με το χώρο εργασίας. Στόχος του είναι να φέρει στο επίκεντρό της εκπαιδευτικής διαδικασίας τους μαθητές και να καλλιεργήσει τη διερευνητική τους σκέψη. Ουσιαστικά θέλει να προετοιμάσει τους μαθητευόμενους για τη ζωή μετά το σχολείο δείχνοντάς τους την άμεση σχέση της γνώσης του σχολείου με τον έξω κόσμο. Παράλληλα θέλει να συμβάλει στην κατανόηση της φύσης της επιστημονικής γνώσης, αλλά και να συνδέσει τη γνώση με το χώρο εργασίας .

Το πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας εστιάζει στη μαθηματική μοντελοποίηση. Συγκεκριμένα μέσα από μελέτη ερευνών προσδιορίζεται ο ορισμός της καθώς και η διαδικασία μοντελοποίησης που ακολουθούμε σε ένα πρόβλημα ώστε να επιτύχουμε τη λύση του (Κύκλος μοντελοποίησης). Παράλληλα αναλύονται τα μαθηματικά μοντέλα καθώς γίνεται αναφορά και στους εκπαιδευτικούς στόχους που επιτυγχάνονται μέσα από την εμπλοκή των μαθητών με μια διερευνητική δραστηριότητα μοντελοποίησης.

Το δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αφορά στο δεύτερο θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας έρευνας, που είναι η διερεύνηση. Στο κεφάλαιο δυο, μέσα από μια ιστορική αναδρομή, γίνεται αναφορά των περισσότερων θεωριών που συνέβαλαν ώστε να θεμελιωθεί η διερευνητική μάθηση. Παράλληλα, καθώς ολοκληρώνεται η αναδρομή αυτή, περνάμε στο επόμενο κεφάλαιο, όπου η δίνεται ο ορισμός της διερευνητικής μάθησης καθώς και τα χαρακτηριστικά της. Επιπλέον αναφέρονται τόσο τα οφέλη των μαθητών μέσα από μια διερευνητική

διαδικασία, όσο και η προσέγγιση που πρέπει να έχει ένας εκπαιδευτικός σε μια τέτοια κατάσταση ώστε να δημιουργηθεί πρόσφορο έδαφος για την υλοποίηση των στόχων του.

Τα κεφάλαια που ακολουθούν αποτελούν το κύριο μέρος της διπλωματικής. Συγκεκριμένα στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται η μεθοδολογία της έρευνας και διατυπώνεται και το ερευνητικό ερώτημα. Παράλληλα δίνονται στοιχεία για το πληθυσμό που μελετήθηκε καθώς και τη πορεία της έρευνας.

Στο επόμενο κεφάλαιο (πέμπτο κεφάλαιο), μέσα από τη μελέτη των στοιχείων που συλλέχθηκαν εξάγονται τα αποτελέσματα της έρευνας και αναλύονται στους δύο βασικούς άξονες: «μοντελοποίηση και διερεύνηση». Επιπλέον στο κεφάλαιο έξι πραγματοποιείται η τελική αποτίμηση της έρευνας, μέσα από την εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Τέλος η δομή της ολοκληρώνεται με το παράρτημα. Στο τμήμα αυτό της εργασίας υπάρχουν τα φύλλα εργασίας με τα οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές κατά την έρευνα καθώς και η μαθηματική λύση του προβλήματος που τέθηκε.

Κεφάλαιο 1: Μαθηματική Μοντελοποίηση

1.1 Ορισμός

Οι μαθητές έχουν στο μυαλό τους δυο κόσμους: τον κόσμο των μαθηματικών και τον πραγματικό κόσμο. Η πεποίθηση αυτή μάλιστα των μαθητών, δε σταματά στο διαχωρισμό τους, αλλά επεκτείνεται στο γεγονός ότι οι κόσμοι αυτοί έχουν μια παράλληλη πορεία και δεν αλληλεπιδρούν. Η άποψη αυτή όμως δε θα μπορούσε να απέχει περισσότερο από την αλήθεια (Pollak, 1979). Στην πραγματικότητα οι δυο αυτοί κόσμοι συνυπάρχουν και αλληλεξαρτώνται. Τα μαθηματικά υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο και πρέπει να λειτουργούν ως εργαλείο για τη λήψη αποφάσεων, την ερμηνεία φαινομένων, την πρόβλεψη μιας κατάστασης και την αντιμετώπιση ενός εμποδίου.

Ένας από τους πρώτους υποστηρικτές αυτής της άποψης ήταν ο Pollak, ο οποίος εισήγαγε τον όρο της *μαθηματικής μοντελοποίησης* ως εργαλείο για την αμοιβαία γονιμοποίηση των κόσμων αυτών (Κόσυβας, 1996). Η μαθηματική μοντελοποίηση ορίζεται ως η αμφίδρομη διαδικασία μετάφρασης μεταξύ του πραγματικού κόσμου και του κόσμου των μαθηματικών (Blum & Ferri, 2009). Μέσα από αυτή τη διαδικασία εκφράζουμε καταστάσεις της πραγματικής μας ζωής με μαθηματικά σύμβολα και σχέσεις ώστε να προβλέψουμε τη μελλοντική τους συμπεριφορά (http://www.businessdictionary.com/definition/mathematical-model.html).

Σύμφωνα με τον Jozef Sekerak (2010) η *μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί μια γνωστική μέθοδο*, κατά την οποία αντικαθίσταται το αρχικό αντικείμενο ή η κατάσταση με ένα μοντέλο, εξετάζεται το μοντέλο και εξάγονται πληροφορίες χρήσιμες για το αρχικό αντικείμενο ή κατάσταση. Η λέξη μοντέλο ισοδυναμεί με τη μαθηματική περιγραφή της αρχικής προβληματικής μας κατάστασης.

Ο Bahmaei (2011) στο άρθρο του με τίτλο: «Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges» αναφέρει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να οριστεί ως μια *μαθηματική διαδικασία.* Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την παρατήρηση ενός φαινόμενου, την πιθανολογογία και εφαρμογή σχέσεων και μαθηματικών αναλύσεων, όπως εξισώσεις, συμβολικές δομές, συναρτήσεις, κ.α., την εξαγωγή μαθηματικών αποτελεσμάτων, και τέλος τον επαναπροσδιορισμό του μοντέλου (Swetz και Hartzler, 1991, Lingefjärd, 2006, Bahmaei, 2011). Παράλληλα βασισμένος στην Ang (2009) επισημαίνει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να θεωρηθεί ως μια εσωτερική διαδικασία, η οποία περιέχει μια αλυσίδα δραστηριοτήτων, η εκτέλεση των οποίων θα οδηγήσει το λύτη σε μια λογική αναπαράσταση του πραγματικού κόσμου (Ang, 2009, Bahmaei, 2011).

1.2 Ο Κύκλος της Μοντελοποίησης

Η αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου αναδείχθηκε από τον Pollak, ο οποίος έκανε λόγο για ένα κυκλικό σχεσιακό σύστημα που το ονόμασε «κύκλο μοντελοποίησης» (Voskoglou, 2006). Ο κύκλος της μοντελοποίησης απασχόλησε αρκετούς ερευνητές, οι οποίοι μελέτησαν τα στάδια του. Μάλιστα οι Ok-Ki Kang & Jihwa Noh (2012) μέσα από τον ορισμό της μαντολοποίησης αναδεικνύουν την κυκλική της δομή. Συγκεκριμένα αναφέρουν ότι είναι *μια κυκλική διαδικασία δημιουργίας και αλλαγής μοντέλων ώστε ο εμπλεκόμενος να κατανοήσει καλύτερα τις καταστάσεις που εμπλέκεται και να βελτιώσει τις αποφάσεις του (*Ok-Ki Kang & Jihwa Noh, 2012).

Τα επιμέρους στάδια αυτού του κύκλου συνήθως διαφέρουν από ερευνητή σε ερευνητή. Σε όλες τις περιπτώσεις συμφωνούν όμως, ότι ο κύκλος πάντα ξεκινά

με τα δεδομένα του προβλήματος, ακολουθεί η μοντελοποίηση τους, η επεξεργασίας τους και τέλος η ερμηνεία τους στον πραγματικό κόσμο. Η ροή αυτή είναι αλληλένδετη και πιθανόν να χρειαστεί να υλοποιηθεί πάνω από μια φορά η κυκλική διαδικασία για να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα.

Ο Sekerak διαιρεί τη διαδικασία της μοντελοποίησης σε τρεις φάσεις. Η διαδικασία ξεκινά με τον εμπλεκόμενο ν*α εντοπίζει τα σημεία εκκίνησης*, τα οποία θα του είναι απαραίτητα στο συγκεκριμένο μοντέλο κατάστασης. Σε αυτή τη φάση ο λύτης πρέπει να επιλέξει τις πληροφορίες που θα του φανούν χρήσιμες και να απορρίψει τις επιπλέον. Στη συνέχεια καλείται να *κατασκευάσει ένα μαθηματικό μοντέλο,* έχοντας επιλέξει τα χρήσιμα δεδομένα του από την προηγούμενη φάση και τα κωδικοποιεί με τη γλώσσα των μαθηματικών. Η διαδικασία ολοκληρώνεται με τη τρίτη φάση, με την *επαλήθευση του μοντέλου* κατά την οποία ελέγχεται η καταλληλότητα του μοντέλου που επέλεξε και την επίλυση του προβλήματος (Sekerak, 2010).

Από την άλλη μεριά μέσα από το διαγωνισμό PISA (2003) γίνεται λόγος για πέντε βήματα που ακολουθούνται σε αυτό το κύκλο, τα οποία είναι τα εξής:

1ο Βήμα: Ξεκινάμε από ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την πραγματικότητα.

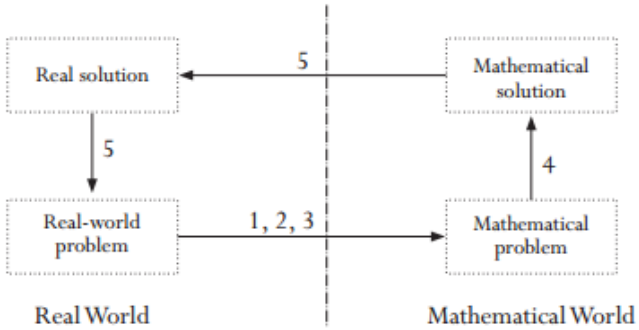
2ο Βήμα: Οργανώνουμε το πρόβλημα σύμφωνα με τις μαθηματικές έννοιες και αναγνωρίζουμε τα σχετικά μαθηματικά που εμπλέκονται.

3ο Βήμα: Απομακρυνόμαστε σταδιακά, απ ’ το πραγματικό πρόβλημα μέσα από διάφορες διαδικασίες, όπως κάνοντας υποθέσεις, γενικεύοντας και διαμορφώνοντας σχέδια και αποφάσεις που προωθούν τα μαθηματικά χαρακτηριστικά της κατάστασης και ακόμη μετατρέποντας το αυθεντικό-πραγματικό πρόβλημα σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο θα αναπαριστά πιστά την κατάσταση.

4ο Βήμα: Λύνουμε το μαθηματικό πρόβλημα.

5ο Βήμα: Εξάγουμε νόημα από τη μαθηματική λύση σύμφωνα με το πλαίσιο της πραγματικής κατάστασης. (PISA, 2003, p. 38)

Figure 1.3 ■ **The mathematisation cycle**



Εικόνα 1. 1: Pisa 2003

Τα πρώτα τρία στάδια (1, 2, 3) στοχεύουν να μετατρέψουν τα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις και σύμβολα. Οι φάσεις αυτές περιλαμβάνουν:

- *Αναγνώριση των μαθηματικών εννοιών στο συγκεκριμένο πλαίσιο του πραγματικού προβλήματος.*
- *Αναπαράσταση του προβλήματος με διαφορετικό τρόπο, οργανώνοντάς το σύμφωνα με τις μαθηματικές έννοιες και τη διατύπωση κατάλληλων υποθέσεων.*
- *Κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στη γλώσσα του προβλήματος, τη συμβολικής και τη τυπική γλώσσα, ώστε να γίνει μαθηματικά κατανοητό.*
- *Εντοπισμός σχέσεων και μοτίβων.*
- *Αναγνώριση των πτυχών που το κάνουν να μοιάζει με άλλα γνωστά προβλήματα.*
- *Μετάφραση του αρχικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα, π.χ. σε ένα μαθηματικό μοντέλο.*

(de Lange, 1987, p. 43 , PISA, 2003, p. 39)

Στο τέταρτο στάδιο είμαστε εστιασμένοι στον κόσμο των Μαθηματικών και η φάση αυτή περιέχει:

- *Χρήση και εναλλαγή μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων.*
- *Χρήση συμβολικής, τυπικής και τεχνικής γλώσσας και διαδικασιών*
- *Βελτίωση και προσαρμογή του μαθηματικού μοντέλου*
- *Συνδυασμός και ερμηνεία των μοντέλων*
- *Επιχειρηματολογία*
- *Γενίκευση*

  (PISA, 2003, p. 39)

Το πέμπτο και τελευταίο στάδιο αφορά τη τελική μετάβαση στο πραγματικό κόσμο. Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματά που εξάγαμε στο τέταρτο στάδιο με τη μορφή μαθηματικών σχέσεων αποκωδικοποιούνται, εξηγούνται και ελέγχονται στον πραγματικό κόσμο. Τα στοιχεία που περιλαμβάνει είναι τα εξής:

- *Κατανόηση της έκτασης και των περιορισμών των μαθηματικών εννοιών*
- *Αναστοχασμός των μαθηματικών επιχειρημάτων, για την επεξήγηση και αιτιολόγηση των αποτελεσμάτων*
- *Σύνδεση της διαδικασίας και της λύσης μέσω της επικοινωνίας*
- *Άσκηση κριτικής στο μοντέλο και των περιορισμών του*

  (PISA, 2003, p. 39)

Οι Blum & Ferri (2009), όπως φαίνεται και στο σχήμα παρακάτω αναφέρονται σε εφτά στάδια του κύκλου μοντελοποίησης. Έχοντας ως αφετηρία το πραγματικό πρόβλημα περνάνε στην *κατασκευή* ενός μοντέλου, το οποίο στη συνέχεια πρέπει να *απλοποιηθεί* και να αποκτήσει *δόμηση*. Στη συνέχεια περνάμε στη *μαθηματικοποίησης των δεδομένων* και ακολουθεί η *μαθηματική επεξεργασία των πληροφοριών.* Τα τρία τελευταία στάδια είναι η *ερμηνεία, η επικύρωση* και η *έκθεση* κατά τα οποία από τον κόσμο των συμβόλων και των αριθμών επιστρέφουμε στον πραγματικό κόσμο.

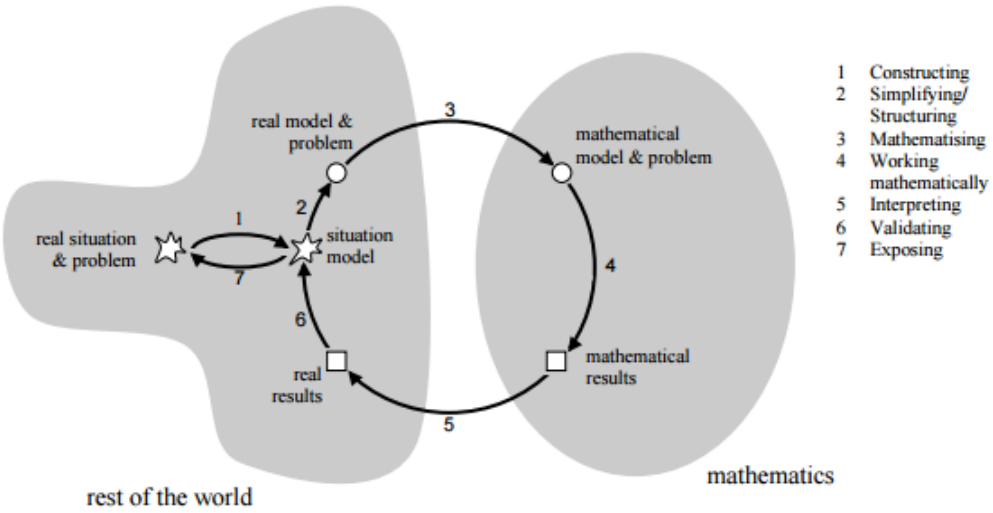


Figure 1 – Modelling cycle

1.3 Είδη Μαθηματικών Μοντέλων

Τα διάφορα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος μπορούν να κατανεμηθούν σε έξι κατηγορίες (Meyer, 1984) ανάλογα με τα γενικά χαρακτηριστικά τους. Οι κατηγορίες είναι οι εξής:

- Ακριβές (*Accurate*)*:* αν τα συμπεράσματα που καταλήγουμε μέσω του μοντέλου είναι σωστά ή πολύ κοντά στα σωστά.

Εικόνα 1. 2: Blum & Ferri, 2009

- Περιγραφικά Ρεαλιστικό (*Descriptively realistic*): αν βασίζεται σε παραδοχές οι οποίες είναι σωστές.
- Υπέρ - *Ακριβές* (*Precise*): αν τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ορισμένοι αριθμοί (ή άλλα ορισμένα είδη μαθηματικών: συναρτήσεις, γεωμετρικά σχήματα, κ.λ.π.). Αντίθετα, αν τα αποτελέσματα ενός μοντέλου είναι ένα σύνολο αριθμών (ή ένα σύνολο συναρτήσεων, μια σειρά από στοιχεία, κ.λ.π.), το μοντέλο είναι ανακριβές.

- Στιβαρό (*Robust*): αν είναι σχετικά αδιάβλητο από σφάλματα στα δεδομένα εισόδου.
- Γενικό (*General*): αν εφαρμόζεται σε ένα εύρος καταστάσεων.
- Γόνιμο (*Fruitful*): αν τα συμπεράσματά του είναι χρήσιμα ή εμπνέουν ή δείχνουν το δρόμο για άλλα μοντέλα. (Meyer, 1984, Ok-Ki Kang & Jihwa Noh, 2012).

Ο Sekerak (2010) αναφερόμενος ειδικά στα μαθητικά μοντέλα κάνει λόγω για πέντε κατηγορίες μοντέλων. Η διάκριση αυτή επιτυγχάνεται ανάλογα με τα δεδομένα που έχει ο λύτης ως εισροές στο αρχικό του πρόβλημα. Οι τύποι αυτοί είναι οι εξής:

- *Αριθμητικό Μοντέλο*: Η αρχική πληροφορία κωδικοποιείται με κάποιο αριθμό.
- *Αλγεβρικό-Αναλυτικό* Μοντέλο: Η αρχική πληροφορία εκπροσωπείται από κάποιο είδος εξίσωσης ή ανίσωσης ή ένα σύστημα εξισώσεων ή ανισώσεων, τα στοιχεία των οποίων είναι οι μεταβλητές, σύνολα, συναρτήσεις, διανύσματα, ή κάτι παρόμοιο.
- *Γραφικό Μοντέλο*: Η αρχική πληροφορία αντιπροσωπεύεται από κάποια γραφική παράσταση ή διάγραμμα
- *Γεωμετρικό Μοντέλο*: Η αρχική πληροφορία εκπροσωπείται από κάποιο κατάλληλο γεωμετρικό σχήμα.
- *Συνδυαστικό Μοντέλο*: Η αρχική πληροφορία αντιπροσωπεύεται από ένα συνδυασμό των τεσσάρων παραπάνω μοντέλων. (Sekerak, 2010)

1.4 Εκπαιδευτικοί Στόχοι και Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μαθηματική μοντελοποίηση λειτουργεί σαν γέφυρα διασύνδεσης του Κόσμου των Μαθηματικών και του Πραγματικού Κόσμου. Παράλληλα συνδέει τις προβληματικές καταστάσεις που εμφανίζονται στο φυσικό και κοινωνικό κόσμο, με τις αφηρημένες μαθηματικές δομές (Μουσουλίδης, Κάττου, Πιττάλης & Χρίστου, 2013, Mascil, 2015). Οι μαθητές συνεχώς δημιουργούν γνωστικές γέφυρες ανάμεσα στα μαθηματικά ως εργαλείο κατανόησης του κόσμου και ως μια αφηρημένη δομή (Κόσυβας, 1996). Η σύνδεση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τα μαθηματικά να γίνονται όλο και πιο σημαντικά για τους μαθητές (Blum & Ferri, 2009), αλλά και πλήθος εκπαιδευτικών στόχων να υλοποιούνται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Η εμπλοκή των μαθητών με τη διαδικασία της Μαθηματικής Μοντελοποίησης συμβάλει στην ουσιαστική κατανόηση του αντικειμένου που πραγματεύεται η προβληματική κατάσταση που έχουν να αντιμετωπίσουν. Παράλληλα το γνωστικό αυτό αντικείμενο κατακτά τη «δική» του θέση στους δυο κόσμους. Η κατανόησης της αρχικής προβληματικής κατάστασης με αυτό τον τρόπο ενισχύεται (Κόσυβας, 1996) και συνάμα η ικανότητα αυτή μεταβαίνει και στον πραγματικό κόσμο (Blum & Ferri, 2009). Η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με το πραγματικό κόσμο παρέχουν πλούσιες ευκαιρίες μάθησης, νοηματοδότησης και εννοιολογικής επεξεργασίας (Lesh, & Doerr 2003a, Mousoulidis et al. 2010, Κόσυβας,1996). Συνάμα συμβάλουν στη ανάπτυξη νέων μαθηματικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων και στη δημιουργία νέων εικόνων και διασυνδέσεων (Blum & Ferri, 2009).

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης πέρα από τη γνώση του γνωστικού αντικειμένου για τους μαθητευόμενους αποτελούν κοινωνικές εμπειρίες (Zawojewski, Lesh, & English , 2002,) και περιλαμβάνουν κοινωνικές αρετές. Ο σχεδιασμός τους αφορά κυρίως μικρές ομάδες εργασίας, στις οποίες οι μαθητές εργάζονται συλλογικά για την ανάπτυξη κοινόχρηστων προϊόντων που

περιλαμβάνουν περιγραφές, εξηγήσεις, δικαιολογίες, και μαθηματικές παραστάσεις (English & Watters, 2004). Οι εμπλεκόμενοι αναπτύσσουν ομαδοσυνεργατικό πνεύμα, συζητούν, ανταλλάσσουν απόψεις και καταλήγουν συλλογικά σε κάποιο συμπέρασμα. Η δημιουργία μοντέλου, αλλά και η εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν την επιχειρηματολογία τους και να γενικεύσουν κάποιο συμπέρασμά τους (PISA, 2003). Επιπλέον η όλη διαδικασία επιτρέπει τη ύπαρξη πολλαπλών προσεγγίσεων από τους λύτες, με αποτέλεσμα να δίνει τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να έχουν πρόσβαση σε ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών ιδεών που πραγματεύεται (English & waters, 2005, Bahmaei, 2011). Το γεγονός αυτό παρέχει ευκαιρίες συνεργασίας στους μαθητές και ανταλλαγής απόψεων.

Κεφάλαιο 2: Διερευνητική Μάθηση - Ιστορική Αναδρομή

2.1 Διερευνητική Μάθηση

Η διερευνητική μάθηση είναι ένας όρος που έχει απασχολήσει τους ερευνητές της διδακτικής και την εκπαιδευτική κοινότητα τη τελευταία δεκαετία (Artigue & Blomhøj, 2013). Η διερεύνηση σαν όρος όμως, δεν είναι καινούριος, αναδείχθηκε και ορίστηκε τη δεκαετία του 1960, ως ένα κίνημα το οποίο εναντιωνόταν στις παραδοσιακές μορφές διδασκαλίας. Μέχρι εκείνη τη χρονική περίοδο εφαρμοζόταν κυρίως το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας (Teacher-centred) , κατά το οποίο ο δάσκαλος παρουσίαζε τη νέα γνώση, μέσω ορισμών, κανόνων, πλαισίων και μεθόδων. Οι μαθητές με τη σειρά τους γίνονταν παθητικοί αποδέκτες της νέας γνώσης – πληροφορίας που τους «μετέφερε» ο καθηγητής τους. Τη περίοδο εκείνη, το μοντέλο αυτό παραγκωνίζεται και τη θέση του κατακτά ένα νέο μοντέλο διδασκαλίας με επίκεντρο το μαθητή (Student-centred). Με τη νέα αυτή θεωρία ο μαθητής καλείται να ανακαλύψει τη νέα γνώση μέσα από δικιά του εμπλοκή με τη βοήθεια ή την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού του (Bruder, Prescott, 2013).

Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία θα διαπιστώσουμε ότι πολλοί ήταν οι ερευνητές, τα κινήματα, αλλά και οι θεωρίες που τοποθέτησαν ένα λιθαράκι για να πραγματοποιηθεί η στροφή αυτή στη διδασκαλία. Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένα ονόματα ερευνητών: Comenius (1592-1670), Rousseau (1712-1778), Pestalozzi (1746-1827), Dewey (1859-1952), ο μαθηματικός Polya, οι ψυχολόγοι Piaget, Vygotsky, Ausubel, Bruner, οι οποίοι μέσα από τις θεωρίες τους προσπαθούσαν να τοποθετήσουν το μαθητή ως το κεντρικό πρόσωπο του μαθήματος και να αναδείξουν την αξία της ανακάλυψης της γνώσης. Πέρα από μεμονωμένους ερευνητές, ολόκληρα κινήματα και θεωρίες συνέβαλαν ώστε να

διαμορφώσει η διερευνητική μάθηση τη σημερινή της μορφή. Ως βασικούς πυλώνες οικοδόμησης αυτής της θεωρίας μπορούμε να θεωρήσουμε τη λύση προβλήματος (problem-solving, PS),τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Theory of didactical situations) , τα ρεαλιστικά μαθηματικά (Realistic mathematics education), την προοπτική της μοντελοποίησης και την ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (Artigue & Blomhøj, 2013).

2.2 Dewey: Ο πατέρας της Διερεύνησης

Πατέρας και εδραιωτής του όρου «διευρεύνηση» θεωρείται ένας από τους προοδευτικότερους Αμερικανούς φιλοσόφους και παιδαγωγούς ο John Dewey (1859-1952). Ο Dewey ανήκε στους πραγματιστές, οι οποίοι θεωρούσαν ότι αληθής μπορεί να χαρακτηριστεί η γνώση που είναι επωφελής και εφαρμόσιμη στην καθημερινή ζωή. Επηρεασμένος από τον Darwin, τον Rousseau, τον Pestalozzi, τον Herbart και τον Frobel, ο Dewey αντικατέστησε την αλήθεια με την έρευνα. *Για τον Dewey η έρευνα είναι ο ρυθμιστικός και κατευθυνόμενος μετασχηματισμός μιας ακαθόριστης κατάστασης σε μια έτσι καθορισμένη ως προς τις συνιστώσες κατευθύνσεις της και σχέσεις, ώστε να μετατρέπει τα στοιχεία της αρχικής κατάστασης σε ένα ενοποιημένο σύνολο.(*Β. Russel, History of Western Philosophy, σελ. 777 από μεταπτυχιακές σημειώσεις μαθήματος, Σπύρου).

Σύμφωνα με τους Hiebert et all. (. 1996, σελ. 14) ο Dewey έδωσε μεγάλη έμφαση στην επιστημονική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Θέλοντας να γεφυρώσει τη γνώση και την πράξη αναφέρθηκε στις μεθόδους με διάφορα ονόματα, συμπεριλαμβανομένου της «πειραματική πρακτική της γνώσης» (1929) και της «αντανακλαστικής έρευνας» (1933) (Artigue & Blomhøj, 2013). Πίστευε ότι η αντανακλαστική έρευνα ήταν το κλειδί για να ξεπεραστεί η διάκριση μεταξύ γνώσης και πράξης, παρέχοντας έτσι ένα νέο τρόπο θέασης της

ανθρώπινης συμπεριφοράς. Βασική αρχή της θεωρίας του αποτέλεσε η έκφραση «*μαθαίνεις μέσα από τις πράξεις*» και υποστήριζε πως η έρευνα, η ερμηνεία και η ανάλυση του προβλήματος παρεμβαίνουν για να δώσουν μια θεμελιωμένη απάντηση (Dewey 1938). «*Για το Dewey (1938), η διερεύνηση αποτελεί τη βάση τόσο της ανακάλυψης όσο και της μάθησης» (Artigue & Blomhøj, 2013).*

Παράλληλα χαρακτηρίζεται ως θερμός υποστηρικτής της άρρηκτης σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στο σχολείο και την καθημερινή ζωή. Θεωρούσε ότι η εκπαιδευτική διαδικασία δεν είναι μια προετοιμασία για τη ζωή, αλλά είναι η ίδια η ζωή. Συνάμα τοποθετούσε το μαθητή στο κέντρο της εκπαιδευτικής διαδικασία και απέρριπτε το φορμαλιστικό χωρισμό σε τάξεις με καθορισμένη διδακτέα ύλη. Για το Dewey οι εμπειρίες των μαθητών μέσα από εμπλοκή με δραστηριότητες εντός και εκτός σχολείου συνδεδεμένες με τον έξω κόσμο θα είναι αυτές που θα παρέχουν τη γνώση.

Παραθέτουμε τα σημεία, τα οποία επισημαίνουν οι Artigue & Blomhøj (2013) σχετικά με τον Dewey και τις αναφορές του γύρω από τη διερεύνηση :

- *ο κεντρικός ρόλος που δίδεται στις αναστοχαστικές διαδικασίες διερεύνησης στη μάθηση*
- *ένα όραμα διερεύνησης ως μια διαδικασία η οποία περιλαμβάνει τον προσδιορισμό του αντικειμένου ή πρόβλημα για διερεύνηση*
- *όραμα: η διερεύνηση είναι μια γενική διαδικασία που αφορά την καθημερινή ζωή και την επαγγελματική πρακτική, καθώς και επιστημονική δραστηριότητα*
- *η αξία που αποδίδεται στην πραγματιστική μετάδοσης της γνώσης τίθεται σε δράση*
- *τονίζει τη σημασία της εμπλοκής των μαθητών σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής μέσα από διαδραστικές - διερευνητικές δραστηριότητες*

- *το όραμα της διερευνητικής μάθησης πρέπει να αναπτυχθεί στις συνήθειες του κάθε μαθητή και η διαδικασία της διερεύνησης να ενταχθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία ως πρακτική που προωθεί τη μάθηση*
- *φιλοδοξία της διερευνητικής μάθησης να εξυπηρετεί τη δημοκρατία.*

2.3 Διδασκαλία μέσω της επίλυσης Προβλήματος

Το σχολείο αποτελεί μια μικρογραφία της κοινωνίας μας. Στόχος του εκπαιδευτικού συστήματος θα πρέπει να είναι η παροχή γνώσεων και πληροφοριών στους μαθητές, οι οποίες θα τους είναι χρήσιμες στη μελλοντική τους ζωή και απαραίτητες για αντιμετώπιση καταστάσεων. Παρόλα αυτά, παρά τα δώδεκα ή και παραπάνω έτη υποχρεωτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, τα περισσότερα παιδιά στον αναπτυγμένο κόσμο τελειώνουν το σχολείο, έχοντας περιορισμένη πρόσβαση σε μαθηματικές ιδέες (Noss and Hoyles 1996). Η γνώση παρέχεται στους μαθητές μέσα από τυποποιημένες αλγοριθμικές διαδικασίες και απομονώνεται στο κόσμο εντός σχολείου, χωρίς να συνδέεται με τον έξω κόσμο.

Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε αρκετά χρόνια πριν από τους ερευνητές, οι οποίοι προσπάθησαν να το αντιμετωπίσουν κάνοντας λόγο για τη διδασκαλίας μέσω επίλυσης προβλήματος. Η διδασκαλία επίλυσης προβλήματος είναι διαφορετική από τη διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος (Lester et al, 1994). Η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, αποτελεί μια μορφή διδασκαλίας, όπου ο μαθητής εμπλέκεται με ένα πρόβλημα και καλείται να το λύσει. Η λύση του προβλήματος καθρεφτίζει μια άγνωστη, μη οικεία κατάσταση στο μαθητή για την οποία πρέπει να βρει λύση. Η εμπλοκή του με αυτή τη διαδικασία θα παράξει τη νέα γνώση. Όπως αναφέρουν χαρακτηριστικά οι Lester et al (1994) *«η διδασκαλία μαθηματικών θεμάτων μέσα σε πλαίσια επίλυσης προβλήματος και σε περιβάλλοντα ερευνητικά προσανατολισμένα, (τα*

οποία δημιουργούνται από το δάσκαλο) με στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών δεσμεύοντας τους να "κατασκευάσουν" μαθηματικά με εικασίες, εξερευνήσεις, δοκιμές και επαληθεύσεις» (Βερύκιος, 2009).

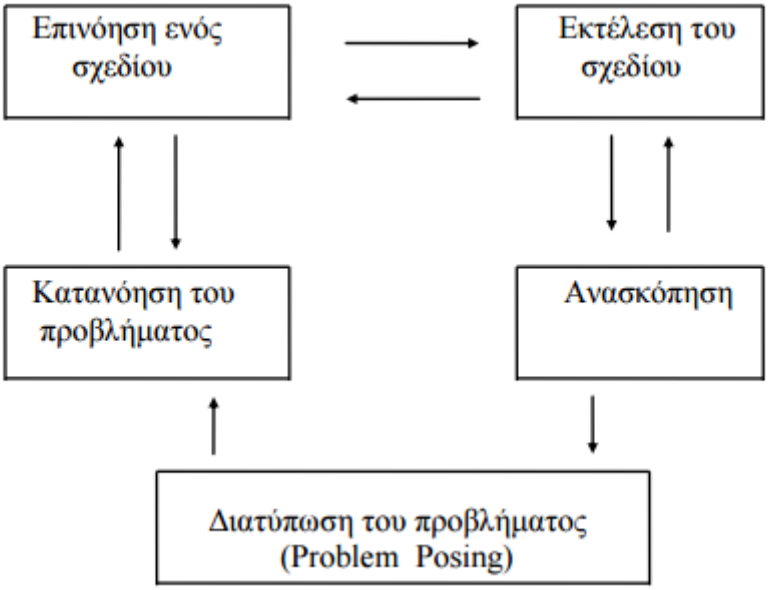
Η θεωρία της Λύσης Προβλήματος (Problem Solving) είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το όνομα του George Polya (1887 – 1985) και το βιβλίο του How to solve it (1945). Στο βιβλίο αυτό ο Polya παρουσίασε τα τέσσερα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να λύσει ένα πρόβλημα:

- *Κατανόηση του Προβλήματος*
- *Επινόηση Σχεδίου Επίλυσης*
- *Εκτέλεση Σχεδίου*
- *Ανασκόπηση*

Η διαδικασία επίλυσης ξεκινά με την *Κατανόηση του προβλήματος*. Στη φάση αυτή ο λύτης, ο μαθητής δηλαδή, πρέπει να διαβάσει προσεκτικά τις πληροφορίες που του δίνονται και να «αποσπάσει» τα στοιχεία , τα οποία θα του φανούν χρήσιμα στην πορεία της λύσης του (Κλαουδάτος, 2011). Στη συνέχεια θα πρέπει να «αποκωδικοποιήσει» σε βάθος το πρόβλημα και να το κάνει δικό του. Το στάδιο αυτό θα έχει ολοκληρωθεί όταν ο μαθητής θα είναι σε θέση να περιγράψει με δικά του λόγια το πρόβλημα που του έχει τεθεί. Το δεύτερο στάδιο ονομάζεται *Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης*. Εδώ ο εμπλεκόμενος θα πρέπει να ανακαλέσει από τη μνήμη του τις στρατηγικές επίλυσης που γνωρίζει και να επιλέξει αυτή που θεωρεί κατάλληλη ώστε να αντιμετωπίσει το πρόβλημα. Η μέθοδος που θα επιλέξει θα εφαρμοστεί στην τρίτη φάση, την *Εκτέλεση Σχεδίου*. Η διαδικασία επίλυσης ολοκληρώνεται με την φάση της *Ανασκόπησης*, κατά την οποία ο μαθητής ξαναγυρίζει στη λύση που παρουσίασε και αναστοχάζεται την όλη πορεία.

Αυτή η μορφή διδασκαλίας αγκαλιάζει την άποψη ότι «μαθαίνω μαθηματικά» σημαίνει ότι «κάνω μαθηματικά». Μάλιστα ο Balacheff (1990) επισημαίνει ότι η

μαθηματική γνώση δημιουργείται κάνοντας μαθηματικά, μέσα από λύση προβλήματος. Η άποψη αυτή δε διαφέρει σε τίποτα από τη θέση του Owers δυο χρόνια αργότερα (1992), ο οποίο επισημαίνει ότι η εμπλοκή των μαθητών με προβλήματα, αλλά και η διαδικασία επίλυσής, τους δημιουργούν πρόσφορο έδαφος για την κατασκευή της γνώσης.



Εικόνα 2. 1: Δυναμική και κυκλική φύση της λύσης προβλήματος (Wilson 1994, Κλαουδάτος 2011)

2.4 Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το όνομα του Guy Brousseau και αναπτύχθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 60. Η θεωρία αυτή εστιάζει στον τρόπο που παράγεται η γνώση μέσα στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Για τον Brousseau θα πρέπει για κάθε έννοια να σχεδιάζεται μια κατάλληλη διδακτική κατάσταση, κατά την οποία να δημιουργείται πρόσφορο έδαφος για την παροχή της νέας πληροφορίας (Brousseau, 1991). Σύμφωνα με τον Balacheff (1984, 1989), η διδακτική κατάσταση αποτελεί ένα σύνολο

σχέσεων μεταξύ μαθητή ή μαθητών και τον εκπαιδευτή τους, έχοντας ως στόχο τη μάθηση (Κλαουδάτος, 2011).

Ο καθηγητής είναι υπεύθυνος να αναλάβει το σχεδιασμό τέτοιων δραστηριοτήτων που θα προκαλεί το μαθητή να προσεγγίσει και οικοδομήσει μόνος του τη νέα γνώση (Brousseau 1996). Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία ο καθηγητής αναλαμβάνει ενεργό ρόλο σε δυο φάσεις. Αρχικά καλείται να επιλέξει και να σχεδιάσει τις δραστηριότητες με τις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές. Κατά το σχεδιασμό του πρέπει να λάβει υπόψιν του τα πιθανά εμπόδια που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές του, αλλά και ενδεχόμενες συμπεριφορές. Η δεύτερη φάση αποτελεί τη φάση της παρατήρησης των δράσεων των παιδιών μέσα στη τάξη. Η δράση αυτή θα συμβάλει ώστε να διαπιστωθεί αν συμβαδίζουν οι προβλέψεις που έκανε κατά το σχεδιασμό με αυτό που πραγματικά συμβαίνει.

Μέσα σε αυτά τα πλαίσια οι διδακτικές καταστάσεις παίρνουν διαφορετικές μορφές στην μαθησιακή διαδικασία. Έτσι έχουμε:

- *Καταστάσεις Δράσης: Οι καταστάσεις αυτές συμβάλουν στην ανάπτυξη διαισθητικών αντιλήψεων για μια έννοια, οι οποίες σχετίζονται με αυτή.*
- *Καταστάσεις Διατύπωσης: Εστιάζουν στην προσπάθεια του υποκειμένου για ρητή περιγραφή ή ανακοίνωση προς τους άλλους των αντιλήψεων ή των αποφάσεων του.*
- *Καταστάσεις Επικοινωνίας: Αναδεικνύεται η κοινωνική διάσταση της γνώσης, μέσω συζήτησης και ανταλλαγής απόψεων.*
- *Καταστάσεις Επικύρωσης: Δημιουργούν πρόσφορο έδαφος ώστε ο μαθητής να θεμελιώσει και να αποδείξει τους ισχυρισμούς του, παράλληλα να εκφράσει με ακρίβεια τις σχέσεις διαδικασίας που χρησιμοποιεί για την επίλυση του προβλήματος.*
- *Καταστάσεις Απόφασης: Αποτελούν καταστάσεις επικύρωσης κατά τις οποίες αναδεικνύεται μια εσωτερική ανάγκη για ακρίβεια και σαφήνεια, χωρίς όμως να κρίνεται αναγκαία μια απόδειξη.*

- *Καταστάσεις Θεσμοποίησης: Η γνώση που κατασκευάστηκε στην τάξη επιδιώκεται να πάρει πιο θεσμοθετημένη μορφή, η οποία θα είναι αποδεκτή στη Μαθηματική κοινότητα* (Κλαουδάτος 2011).

2.5 Ρεαλιστικά Μαθηματικά

Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά αποτελούν μια μορφή διδασκαλία, οι ρίζες της οποίας εντοπίζονται στο Ινστιτούτο Freudenthal στην Ολλανδία και οικοδομήθηκαν με βασικό άξονα ότι «τα μαθηματικά αποτελούν μια ανθρώπινη δραστηριότητα» (Freudenthal, 1973). Η φιλοσοφία που τα διέπει είναι ότι οι ίδιοι οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν τα μαθηματικά αντικείμενα δουλεύοντας σε περιβάλλοντα που έχουν νόημα για αυτούς (Dickinson & Hough, 2012). Επιπλέον χαρακτηριστικό τους αποτελεί το γεγονός ότι τα μαθηματικά αντικείμενα θα πρέπει να προέρχονται από την πραγματικότητα και να είναι συνάμα εφαρμόσιμα σε αυτήν (Verhage H. & J. de Lange, 1996).

Οι μαθητές από παθητικοί αποδέκτες πρέπει να μετατραπούν σε ενεργητικοί κατασκευαστές της γνώσης. Μέσα από κατάλληλες ευκαιρίες και σε ένα ενθαρρυντικό περιβάλλον μάθησης οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλύπτουν τα μαθηματικά, όπως αναφέρει και στην ιστοσελίδα του το ινστιτούτο Freudenthal. Ο ίδιος ο Freudenthal επισήμανε ότι τα μαθηματικά νοήματα πρέπει να ανακαλύπτονται από τους ίδιους μαθητευόμενους, μέσα από «*καθοδηγούμενες ευκαιρίες*» μάθησης. Τη διαδικασία μάλιστα αυτή την ονόμασε «*αρχή της επανεφεύρεσης*» (*reinvention principle)* (Freudenthal,1973) και αρκετά χρόνια αργότερα το 1991 έκανε λόγο για την *«καθοδηγούμενη επανεφεύρεση» (guided re-invention)* (Heleen, V.& Lange, J., 1996).

Ο Zulkardi (2010) διακρίνει τα εξής πέντε χαρακτηριστικά της Ρεαλιστικής εκπαίδευσης:

i. *Φαινομενολογική Διερεύνηση ή Χρήση Πλαισίων*: Οι μαθητές έχοντας ως όπλο τις εμπειρίες τους θα τις συνδέσουν με τη μαθηματική γνώση και φτάνουν σε ένα μοντέλο. Ο προβληματισμός και ο αναστοχασμός λειτουργούν ενισχυτικά ώστε να επέλθει η γενίκευση του συμπεράσματός τους.

ii. *Χρήση Μοντέλων ή Γεφύρωση με Κάθετες Πράξεις:* Οι μαθητές κατά την επίλυση ενός προβλήματος αναπτύσσουν μαθηματικά μοντέλα τα οποία μπορεί να είναι:

Α) *Περιστασιακά*: Αφορούν τη συγκεκριμένη περίπτωση που οι μαθητές έχουν να διαχειριστούν.

Β) *Αναφορικά* (μοντέλα της περίσταση): Τα μοντέλα και οι στρατηγικές αναφέρονται στην κατάσταση που παρουσιάζει το πρόβλημα που έχουν να διαχειριστούν.

Γ) *Γενικά μοντέλα στρατηγικής*: Οι μαθητές εστιάζουν στις στρατηγικές που κυριαρχούν χωρίς να εστιάζουν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Δ) *Τυπικά μοντέλα μαθηματικών*: Εδώ εργάζονται με αυστηρές διαδικασίες και συμβολισμούς και έχουν ως στόχο την ανακάλυψη του αλγορίθμου επίλυσης.

iii. *Κατασκευές Μαθητών:* Σε αυτό το κομμάτι οι μαθητές σχεδιάζουν μια στρατηγική επίλυσης, την εφαρμόζουν, πειραματίζονται, προβληματίζονται, τη βελτιώνουν, ανακαλύπτουν.

iv. *Ο Διαδραστικός Χαρακτήρας της Εκπαιδευτικής Διαδικασίας* : Η φάση αυτή αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα κομμάτια της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Μέσα από εποικοδομητικό διάλογο και ανταλλαγή απόψεων επιτυγχάνεται ο αναστοχασμός και η ανατροφοδότηση των μαθητευομένων.

v. *Διασύνδεση Διαφορετικών Κλάδων Μάθησης*: Η μάθηση είναι μια σύνθετη διαθεματική διαδικασία. Τα γνωστικά αντικείμενα τα οποία πραγματεύεται κάθε φορά δεν γίνεται να αντιμετωπίζονται ως ξεχωριστές οντότητες. Για

αυτό το λόγο τα μαθηματικά, όπως και οι άλλες επιστήμες, δε θα πρέπει να απομονώνονται και να εξετάζονται αποσπασματικά.

Σύμφωνα με τον Freudenthal τα μαθηματικά δεν αποτελούν το σώμα της μαθηματικής γνώσης, αλλά είναι μια δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων και γενικότερα μια δραστηριότητα οργάνωσης ενός πραγματικού ή ενός μαθηματικού προβλήματος (Αυγερινός, Σκούφη, 2007). Η δραστηριότητα αυτή ονομάστηκε «*μαθηματικοποίηση*». Η διαδικασία αυτή είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κατανόηση των μαθηματικών και μάλιστα τονίζεται ότι «*Δεν υπάρχουν μαθηματικά, χωρίς μαθηματικοποίηση*» (Freudenthal,1991). Δύο είναι οι βασικοί στόχοι της μαθηματικοποίησης: Αρχικά στοχεύει στο να εισάγει και να δημιουργήσει πρόσφορο έδαφος για κατανόηση μιας νέας μαθηματικής έννοιας («εννοιολογική μαθηματικοποίηση»- de Lange 1987) και επιπλέον να ενισχύσει γνωστικά μια έννοια μέσω επίλυσης προβλημάτων (Αυγερινός, Σκούφη, 2007).

Ο Treffers (1978) προχώρησε τη θεωρία της μαθηματικοποίησης λίγο περισσότερο, κάνοντας διάκριση δυο επιπέδων μαθηματικοποίησης: της *κάθετης* και της *οριζόντιας*. Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση οι μαθητές αναζητούν τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία ώστε να μετατρέψουν ένα πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό. Σε αυτή τη φάση πραγματοποιείται μια μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των μαθηματικών. Τα πραγματικά δεδομένα και στοιχεία κωδικοποιούνται με σχέσεις και συμβολισμούς. Στην κάθετη μαθηματικοποίηση το μαθηματικό πια πρόβλημα επαναδιοργανώνεται και επεξεργάζεται με μαθηματικά εργαλεία. Η επεξεργασία αυτή θα οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη νέων σχέσεων και δεδομένων.

2.6 Ορισμός Διερευνητικής Μάθησης

Ο όρος διερευνητική μάθηση ή inquiry based learning (IBL), όπως υπάρχει στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία, αποτελεί μια μορφή μαθησιακής διαδικασίας που έχει στο επίκεντρο της τους μαθητές. Απαλλαγμένη από κάθε είδους δασκαλοκεντρικά στοιχεία, εμπλέκει τους μαθητές με ένα περιβάλλον αναζήτησης, όπου αναλαμβάνουν ενεργό ρόλο και κατακτούν τη γνώση μέσα από δικιά τους εμπλοκή και έρευνα. Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με τους German, et al. (1996) αναφερόμαστε σε ένα μαθητοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας, η εφαρμογή του οποίου δημιουργεί πρόσφορο έδαφος ώστε οι μαθητές να διερευνήσουν καταστάσεις, να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, να διατυπώσουν δικά τους επιστημονικά προσανατολισμένα ερωτήματα, να δώσουν προτεραιότητα σε ενδείξεις και αποδεικτικά στοιχεία προκειμένου να τεκμηριώνουν επιστημονικά και να απαντήσουν σε ερωτήματα. Το πανεπιστήμιου του Manchester στην επίσημη ιστοσελίδα του, την περιγράφει σαν *«ένα περιβάλλον, στο οποίο η μάθηση οδηγείται μέσα από μία διαδικασία έρευνας από τους μαθητές»* .

Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας (NRC) (1996, σ. 23):

«η διερεύνηση αποτελεί μια πολύπλευρη δραστηριότητα που συνίσταται στη διάθεση της παρατήρησης, θέτει ερωτήματα, εξετάζει βιβλία και άλλες πηγές πληροφοριών για να δούμε τι είναι ήδη γνωστό από τις έρευνες σχεδιασμού, αναθεωρεί τι είναι ήδη γνωστό υπό το φως των πειραματικών στοιχείων με τη χρήση εργαλείων για τη συλλογή, την ανάλυση, και την ερμηνεία δεδομένων, προτείνει απαντήσεις, εξηγήσεις και προβλέψεις και την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων. Η διερεύνηση απαιτεί ταυτοποίηση των υποθέσεων, τη χρήση κρίσιμων και λογικών σκέψεων, και την εξέταση των εναλλακτικών εξηγήσεων και η επιστημονική διερεύνηση αναφέρεται στους ποικίλους τρόπους με τους οποίους οι επιστήμονες μελετούν τον φυσικό κόσμο και προτείνουν εξηγήσεις με βάση τα στοιχεία που προκύπτουν από την εργασία τους» .

Μέσα από τους παραπάνω ορισμούς γίνεται φανερό ότι η διερευνητική μάθηση δεν αποτελεί ένα τρόπο διδασκαλίας που απευθύνεται μόνο στη διδακτική των μαθηματικών. Η έννοια της διερεύνησης αγκαλιάζει όλο τον κλάδο των επιστημών και αναδεικνύει μάλιστα την άρρηκτη σχέση που τις συνδέει, προσπαθώντας να εισάγει τους μαθητές στον ευρύτερο κόσμο της επιστήμης (Kremer και Schlüter, 2006). Όπως αναφέρουν οι Maaß & Artigue (2013) στο άρθρο τους *«Αυτή η προσέγγιση της διδασκαλίας συζητείται όχι μόνο στη μαθηματική εκπαίδευση (Artigue και Blomhøj 2013), αλλά επίσης, ίσως και περισσότερο, στην επιστήμη της εκπαίδευσης (Minner et al., 2010)»*. Μάλιστα στα πλαίσια του Primas Project η διερευνητική μάθηση αντιμετωπίζεται *«ως κλειδί για την επίλυση πιο σφαιρικών προβλημάτων, ιδιαίτερα στην επιστήμη και τα μαθηματικά της εκπαίδευσης»* (Bruder & Prescott, 2013).

2.7 Μορφές Διερευνητικής Μάθησης

Η διερευνητική μάθηση δεν έχει μια μορφή, *«αλλά διαφοροποιείται ανάλογα με τον τύπο και την πολυπλοκότητα του προβλήματος, το βαθμό μαθητοκεντρικής μάθησης και επίσης τη σειρά του προβλήματος και την παρουσίαση των πληροφοριών»* (Engelen et αl, 2013) . Επιπλέον η οπτική του εκάστοτε ερευνητή μπορεί να χαρακτηρίσει διαφορετική την κάθε διερευνητική δραστηριότητα (Bruder & Prescott, 2013). Στη πλειοψηφία των άρθρων υιοθετούνται τρεις ή τέσσερις τύπους της.

Οι Kremer και Schluter (2006) κάνουν λόγο για τρεις τύπους διερευνητικής μάθησης: *τη δομημένη (Structural Inquiry)*, *την ελεγχόμενη (Guided Inquiry)* και *την ανοικτή διερεύνηση (Open Inquiry)* (Bruder & Prescott, 2013). Το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας (NRC) (2000) προσθέτει μια ακόμα μορφή *τη συνδυαστική διερεύνηση (Coupled Inquiry)* (Rooney, 2009).

Η δομημένη διερεύνηση εμπλέκει τους μαθητευόμενους με ένα πρόβλημα ή ερώτημα που τους έχει τεθεί από τον εκπαιδευτικό, παρέχοντας τους τις κατάλληλες μεθόδους κι εργαλεία ώστε να φτάσουν στο στόχο τους (Kremer & Schluter, 2006). Ο καθηγητής έχει σχεδιάσει με τέτοιο τρόπο τη δραστηριότητα ώστε να παρέχει στους μαθητές του όλα τα επιμέρους βήματα για την επίλυσή της.

Η ελεγχόμενη αποτελεί την πιο συνηθισμένη μορφή διερευνητικής παρέμβασης (Bruder & Prescott, 2013). Εδώ ο εκπαιδευτικός παρέχει στους μαθητές του το πρόβλημα και ένα εύρος από ερωτήσεις και πληροφορίες, αλλά είναι αυτοί που θα αναζητήσουν τις κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης .

Η ανοιχτή διερεύνηση τοποθετεί το μαθητή ως το σκηνοθέτη του μαθήματος (NRC, 2000). Έχοντας μόνο όπλο στα χέρια τους οι μαθητές το φύλλο εργασίας, αναζητούν τη σκαλωσιά που θα τους οδηγήσει στην επίλυσή του. Κάνουν εικασίες, θέτουν ερωτήματα, παίρνουν μόνοι τους αποφάσεις για το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή της έρευνας και τη δημοσιοποίηση των αποτελεσμάτων (NRC, 2000).

Η τελευταία μορφή διερεύνησης, η συνδυαστική, για την οποία κάνει λόγο το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας αποτελεί ένα συνδυασμό, όπως λέει και η ονομασία της, δυο από τους παραπάνω τύπους διερεύνησης. Η διεξαγωγή μιας παρέμβασης βασισμένη σε αυτού του τύπου τη διερεύνηση θα χαρακτηρίζεται από εναλλαγή ρόλων και μορφών.

2.8 Χαρακτηριστικά της Διερευνητικής Μάθησης

Τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν μια δραστηριότητα ως διερευνητική είναι ποικίλα και αξιοσημείωτα. Στις περισσότερες μελέτες, μάλιστα, δεν συναντάμε

ορισμούς για τη διερευνητική μάθηση, αλλά ένα πλήθος από χαρακτηριστικά που την συντροφεύουν.

Το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας (2000, σ.27) επισημαίνει ότι μέσα από μια διερευνητική δραστηριότητα οι μαθητές δημιουργούν τις δικές τους επιστημονικά προσανατολισμένες ερωτήσεις, παραχωρούν προτεραιότητα στα αποδεικτικά στοιχεία για την αντιμετώπιση των ερωτήσεων, διατυπώνουν τεκμηριωμένες εξηγήσεις που βασίζονται σε στοιχεία, αλλά και συνδέονται με την επιστημονική γνώση και τέλος επικοινωνούν. Μια ακόμα άποψη είναι ότι η μάθηση μέσω διερεύνησης παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές για τη δημιουργία διάφορων οπτικών και λύσεων, ευκαιρίες για ανταλλαγή απόψεων, αλλά και ευκαιρίες για λήψη αποφάσεων και την αιτιολόγησής τους (Chan, 2006).

Το πανεπιστήμιο του Manchester στην επίσημη ιστοσελίδα του, κάνει λόγο για μια μορφή διδασκαλίας όπου οι καθηγητές έχουν διεπεραιωτικό ρόλο και οι μαθητές είναι αυτοί που αναλαμβάνουν την ευθύνη για ό, τι και το πώς μαθαίνουν. Η ομαδική εργασία και η διερεύνηση ερωτημάτων είναι τα δυο βασικά εργαλεία ανακάλυψης της γνώσης. Συνάμα αναφέρει ότι η διαδικασία αυτή συμβάλει τόσο στη βαθιά κατανόηση του αντικειμένου, αλλά και στην ανάπτυξη και ηγετικών ικανοτήτων που απαιτούνται για την αντιμετώπιση των πολύπλοκων προβλημάτων που παρατηρούνται στον πραγματικό κόσμο.

Μια αναζήτηση για τη διερευνητική μάθηση θα αναδείξει με νέες λέξεις τα χαρακτηριστικά της. Η δημιουργία ερωτήσεων από τους μαθητές αποτελεί την πρώτη αναφορά της. Ακολουθούν η αναζήτηση, η αιτιολόγηση, η εξήγηση, η δημιουργία επιχειρημάτων για ανταπόκριση σε κάποιο ερώτημα.

Οι αναφορές για τα χαρακτηριστικά της είναι πολλές, όλες όμως με το ίδιο ουσιαστικό νόημα. Τοποθετώντας στο κέντρο της μαθησιακής διαδικασίας το μαθητευόμενο, προσπαθούν να αποδώσουν τα χαρακτηριστικά της μάθησης αυτής εστιασμένες όμως πάντα στις κινήσεις, ενέργειες του υποκειμένου. Λέξεις που τη χαρακτηρίζουν και χρησιμοποιούν οι ερευνητές είναι η ανακάλυψη, η

διατύπωση εικασιών, ο προβληματισμός, η αμφισβήτηση, η διατύπωση επιχειρημάτων, η ανταλλαγή απόψεων, η συνεργασία, η ανάγκη για αιτιολόγηση και για επιχειρηματολογία.

2.9 Οφέλη της Διερευνητικής Μάθησης

Τα οφέλη της διερευνητικής μάθησης αποτελούν αντικείμενο μελέτης και σημείο αναφοράς αρκετών ερευνητών, στοχεύοντας να τα αναδείξουν και να τα εντάξουν ως στόχους στα προγράμματα σπουδών. Τα οφέλη αυτής της διαδικασίας μάθησης, για τους υποστηρικτές της είναι τόσο μεγάλα που πολλές φορές θεωρούν περιττό να τα αναφέρουν. Θεωρούν πως τα χαρακτηριστικά της καθρεφτίζουν εμφανώς και τα θετικά της αποτελέσματα.

Οι Bruder & Prescott (2013) ξεκινούν το άρθρο τους με μια κινέζικη παροιμία, η οποία λέει: «Tell me and I forget, show me and I remember, involve me and I understand», η οποία μεταφράζεται «Πες μου και εγώ θα ξεχάσω, δείξε μου και εγώ θα θυμηθώ, ενέπλεξέ με σε μια κατάσταση και εγώ θα μάθω». Πραγματικά τίποτα δε θα μπορούσε να περιγράψει καλύτερα αυτό που πρεσβεύει η διερευνητική μάθηση.

Η μάθηση εδώ έρχεται μέσω της ανακάλυψης από τους ίδιους τους μαθητές, με αποτέλεσμα να αποτελεί βίωμα για αυτούς. Η εμπλοκή τους με αυτή τη βιωματική εμπειρία αποτελεί το κλειδί για άμεση αφομοίωση της νέας γνώσης. Η μορφή αυτών των δραστηριοτήτων τους δημιουργεί το αίσθημα ευθύνης, οι οποίοι νιώθουν σα «μικροί επιστήμονες» που ανακαλύπτουν κάτι νέο. Η αναζήτηση, η δημιουργία εικασιών, η επιβεβαίωση ή απόρριψή τους για την έννοια την οποία πραγματεύεται η δραστηριότητα δημιουργεί πρόσφορο έδαφος, ώστε οι μαθητές αναπτύσσουν ένα σύνολο από νοητικά πεδία (Κλαουδάτος, 2011) στα οποία η έννοια αυτή έχει κεντρικό ρόλο. Σύμφωνα με

το Papert οι ερχόμενοι σε επαφή με ένα μαθησιακό περιβάλλον που είναι πλούσιο σε ευκαιρίες ανάπτυξης νοημάτων (Κυνηγός, 2014),οι μαθητές μαθαίνουν να λειτουργούν ως ερευνητές και εφοδιάζονται με στρατηγικές για μελλοντική μάθηση είτε μαθηματικού, είτε επιστημονικού περιεχομένου. Σε μια τέτοια δραστηριότητα δηλαδή, ο μαθητής είναι υπεύθυνος για την κατασκευή και την κατανόηση της νέας γνώσης μέσα από δραστηριότητες μάθησης (Rooney, 2009). Η κατάκτηση μάλιστα της νέας πληροφορίας μέσα από την αλληλεπίδραση με διερευνητικά εργαλεία αποτελεί ένα από τους πιο ισχυρούς φαινομενικά τρόπους μάθησης (Alfieri et al., 2011).

Η ανακάλυψη αυτή, πέρα από την βαθύτερη και ουσιαστικότερη αφομοίωση της γνώσης από τους μαθητές, παρέχει και τη δημιουργία κινήτρου για εμπλοκή. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις διερευνητικές δραστηριότητες σαν πρόκληση που καλούνται να ανταποκριθούν. Η εμπλοκή τους σε τέτοιες δραστηριότητες, τους δημιουργεί συναισθήματα θέλησης για την κατάκτηση της λύσης, πείσμα για ανταπόκριση και τη χαρά της ανακάλυψης. Αντιμετωπίζουν τη νέα αυτή κατάσταση σαν ένα γρίφο που πρέπει να διερευνήσουν και αναθεωρούν τη γνώμη που είχαν διαμορφώσει για το βαρετό παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας των μαθηματικών.

Παράλληλα γίνεται εμφανής στους μαθητευόμενους η σύνδεση της γνώσης του σχολείου με τον έξω κόσμο. Η σύνδεση αυτή δημιουργεί πρόσφορο έδαφος για εμπλοκή και κατανόηση μιας γνώσης που μέχρι τώρα αποδέχονταν στείρα και άκριτα. Όσο αφορά μάλιστα τη διερευνητική μάθηση στη μαθηματική εκπαίδευση οι Bruder & Prescott(2013) τονίζουν ότι παρέχει κίνητρα για βαθύτερη και καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών, σύνδεση του μαθηματικού αντικειμένου με την κοινωνία και λόγω αυτού μεγαλύτερο ενδιαφέρον για το γνωστικό αντικείμενο και τον κόσμο των μαθηματικών.

Οι μαθητές αποτελούν τους αυριανούς πολίτες της κοινωνίας μας, οι οποίοι θα δρουν συλλογικά, θα πρέπει να πάρουν αποφάσεις και να κάνουν επιλογές. Το

σχολείο, ως μικρογραφία της κοινωνίας θα πρέπει να προετοιμάσει κατάλληλα τους μαθητές ώστε να ανταποκριθούν στις μελλοντικές επιταγές της κοινωνίας μας. Η διερευνητική μάθηση θα συμβάλει σε αυτή την κατεύθυνση.

Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία που υπάρχει στις περισσότερες διερευνητικές παρεμβάσεις, σύμφωνα με τον Davidson (1990) δημιουργεί ένα κλίμα συνεργασίας, αμοιβαίας βοήθειας και ατομικής ευθύνης. Η συλλογική δημιουργία και η συνεργατική διαδικασία συμβάλει στην προετοιμασία για ενεργητική συμμετοχή στον σύγχρονο κόσμο, των έξω από τα σχολικά πλαίσια και τη δια βίου μάθηση (mascil) .

2.10 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Η διερευνητική μάθηση, αν και όπως έχουμε αναφέρει, αποτελεί μια μαθητοκεντρική μορφή διδασκαλίας, όχι μόνο δεν υποβαθμίζει το ρόλο του εκπαιδευτικού, αλλά τον χαρακτηρίζει και ως δυναμικό. Φαινομενικά ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει ένα αφανή ρόλο, αφήνοντας στο μαθητή τον έλεγχο της πορείας του μαθήματος. Στην πραγματικότητα όμως είναι αυτός που τοποθετεί τα θεμέλια για τη πορεία της εκπαιδευτικής διαδικασίας και ο έμμεσος ελεγκτής της. «*Σε ένα περιβάλλον IBL η δουλειά του δασκάλου δεν είναι να παρέχει γνώση, αλλά να βοηθά τους μαθητές να προχωρήσουν τον δρόμο της ανακάλυψης της γνώσης*» (MASCIL). Στόχος του θα πρέπει να είναι η βελτιστοποίηση των συνθηκών μάθησης ώστε να εισάγει τους μαθητές του στη μαθηματική κουλτούρα, δίνοντάς τους εφόδια ώστε να σκέφτονται σαν εμπειρογνώμονες και να αντιμετωπίζουν τα προβλήματα ως ζωτικής σημασίας της μαθηματικής παιδείας (Bruder , Prescott 2013).

Ο ρόλος του είναι διττός. Από τη μια μεριά αναλαμβάνει ρόλο σχεδιαστή, δηλαδή είναι υπεύθυνος ώστε να διαμορφώσει τη δραστηριότητα με την οποία θα

εμπλακούν οι μαθητές. Σε δεύτερο χρόνο αναλαμβάνει ρόλο οργανωτικό και υποστηρικτικό ώστε να διεξαχθεί ομαλά και με επιτυχία η εκπαιδευτική διαδικασία.

Στη φάση του σχεδιασμού ο εκπαιδευτικός μετατρέπεται σε ένα σχεδιαστή δραστηριοτήτων που προσπαθεί να περικλύσει όλες τις αρχές και τις αξίες που χαρακτηρίζουν τη διερευνητική μάθηση. Σκοπός του είναι να κατασκευάσει μια δραστηριότητα που να παρέχει κίνητρο στους μαθητές του για εμπλοκή και να είναι πλούσια σε ευκαιρίες για νοηματοδότηση. Η προβληματική κατάσταση που θα τεθεί στους μαθητές θα πρέπει να είναι δύσκολη αλλά όχι αρκετά περίπλοκη ώστε να τους αποθαρρύνει (Bruder , Prescott 2013). Επιπλέον ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν του τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών του κατά το σχεδιασμό. Παράλληλα η δραστηριότητα που θα δημιουργήσει θα πρέπει να συνάδει με τα ενδιαφέροντα των μαθητών του ώστε το θέμα της να αποτελέσει κίνητρο για εμπλοκή.

Κατά την υλοποίηση της εκπαιδευτικής διαδικασίας ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει ρόλο οργανωτικό και υποστηρικτικό. Απαλλαγμένος από την απρόσωπη αυθεντία και ξεχνώντας το ρόλο του τεχνικού διεκπεραιωτή, σκοπός του είναι οι ίδιοι οι μαθητές να φτάσουν στη λύση του προβλήματος που τους έχει τεθεί. Οι παρεμβάσεις του στην πορεία του μαθήματος πρέπει είναι στοχευμένες και συμβουλευτικές ώστε να παρέχει ήπια βοήθεια στους μαθητές. Μέσα από αυτές του τις ενέργειες θα πρέπει να δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να προβληματιστούν, να ανταλλάξουν ιδέες με τους συμμαθητές τους και να αναδειχθεί η ανάγκη για αιτιολόγηση και επιχειρηματολογία. Η διαδικασία της ανακάλυψης θα καθοδηγείται από τον εκπαιδευτικό μόνο όταν έχει φτάσει σε ένα τέλμα (Neber 2001). Στις αρμοδιότητές του παράλληλα εντάσσεται ο έλεγχος για την ορθότητα των συμπερασμάτων, χωρίς όμως να τονίζει τυχόν λανθασμένα σημεία.

Σε όλη την διαδικασία και κατά τον σχεδιασμό και κατά την υλοποίηση, ο εκπαιδευτικός αλλάζει ρόλο. Η παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός γνωρίζει σε ένα μεγάλο βαθμό τις αναμενόμενες απαντήσεις των μαθητών του, αλλά και τα πιθανά εμπόδια που θα αντιμετωπίσουν δίνει τη θέση της σε μια νέα μορφή. Το αίσθημα που κυριαρχεί εδώ είναι η *αβεβαιότητα* (Leikin & Rota 2006, Phelan 2005), αβεβαιότητα στις συμπεριφορές των μαθητών, στις απαντήσεις και τις απορίες τους. Σε μια παραδοσιακή διδασκαλία αν και υπάρχει πάντα το αίσθημα αυτό, τις περισσότερες φορές είναι ελεγχόμενο. Λίγες είναι οι φορές που δε ξέρει ένας εκπαιδευτικός που θα τον οδηγήσει μια απάντηση. Σε μια διερευνητική παρέμβαση όμως κάθε λεπτό εμπεριέχει το αίσθημα αυτό (Leikin & Rota 2006, Phelan 2005). Οι ιδέες των μαθητών οδηγούν το μάθημα και όχι ο προγραμματισμός του εκπαιδευτικού (Nelson & Moscovici, 1998).

Παράλληλα η εφαρμογή της διερευνητικής μάθησης αποτελεί πρόκληση των εκπαιδευτικών ως προς την επαγγελματική τους εξέλιξη. Η επαγγελματική εξέλιξη κα η βελτίωση των πρακτικών του αποτελεί στόχο κάθε επαγγελματία, πόσο μάλλον και του εκπαιδευτικού. Η εξέλιξη αυτή στο επάγγελμα του εκπαιδευτικού έρχεται μέσα από προϋπηρεσιακή και ενδοϋπηρεσιακή εκπαίδευση (Ponte 2008). Η εφαρμογή της διερευνητικής μάθησης δίνει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να εξελίξουν τον τρόπο διδασκαλία τους και αποτελεί ένα σκαλοπάτι βελτίωσης. Η σχέση μεταξύ της επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και της εφαρμογής της διερευνητικής μάθησης είναι θετική (Kahle et al. 2000). Μάλιστα η προοπτική της επαγγελματικής εξέλιξης αποτελεί κινητήρια δύναμη ώστε οι εκπαιδευτικοί να εμπλακούν και να βελτιώσουν τις τεχνικές τους.

Κεφάλαιο 3: Η Έρευνα

3.1 Εισαγωγή

Η παρούσα έρευνας πραγματοποιήθηκε με στόχο να μελετήσει τις ενέργειες και τις πρακτικές των μαθητών σε ένα διερευνητικό πρόβλημα με ρεαλιστικά στοιχεία. Παράλληλα προς διερεύνηση τίθονται οι διαδικασίες και τα βήματα μοντελοποίησης που ακολουθούν οι μαθητές σε ένα τέτοιο πρόβλημα για να φτάσουν στην επίλυσή του.

Συγκεκριμένα, παρακολουθούμε την εφαρμογή μιας διερευνητικής δραστηριότητας σε δυο διαφορετικές τάξεις της Β' Λυκείου, και εστιάζουμε στον τρόπο προσέγγισης και μοντελοποίησης της από τους μαθητές. Η προαναφερθείσα δραστηριότητα είχε κοινό θέμα για τις δυο τάξεις, αλλά το φύλλο εργασίας που δόθηκε σε καθεμιά διαμορφώθηκε και σχεδιάστηκε από τον εκάστοτε καθηγητή της τάξης. Οι απαντήσεις των μαθητών, οι χειρονομίες τους, οι αντιδράσεις τους και η γενική εικόνα στις τάξεις καταγράφηκαν και διερευνήθηκαν. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με επιλεγμένο υποσύνολο του δείγματος σε κάθε τάξη με σκοπό να αποκτήσουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τη γενικότερη αίσθηση των μαθητών μέσα από αυτή τη δραστηριότητα.

Οι ηχογραφήσεις και οι βιντεοσκοπήσεις των παρεμβάσεων, τα φύλλα εργασίας των μαθητών, οι φωτογραφίες από κρίσιμα στιγμιότυπα του μαθήματος, και η ηχογράφηση των συνεντεύξεων αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό της συγκεκριμένης μελέτης. Επιπλέον υλικό που αξιοποιήθηκε αποτέλεσε μια μικρή έκθεση αποτίμησης που συνέγραψαν οι δυο εκπαιδευτικοί μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασή τους, παρουσιάζοντας τα όσα είχαν

πραγματοποιηθεί στις τάξεις τους αλλά και δικές τους παρατηρήσεις, σκέψεις και προβληματισμούς.

3.2 Ερευνητικό Πρόβλημα – Ερευνητικά Ερωτήματα

Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφία διαπιστώσαμε ότι η επίλυση προβλήματος έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές εδώ και πολλές δεκαετίες καθώς συνδέει τα μαθηματικά του σχολείου με τον έξω κόσμο. Η επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης, μάλιστα, διαπιστώσαμε ότι είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της διερεύνησης αλλά και της μοντελοποίησης. Συγκεκριμένα για να λύσουμε ένα πρόβλημα πρέπει να διερευνήσουμε καταστάσεις, να κάνουμε εικασίες, να τις ελέγξουμε, να τις απορρίψουμε ή να τις δεχτούμε. Παράλληλα για να μπορέσουμε να εμπλακούμε με το πρόβλημα που μας έχει τεθεί πρέπει πρώτα να εντοπίσουμε τις χρήσιμες πληροφορίες και να τις μετατρέψουμε από στοιχεία της καθημερινότητας σε μαθηματικές σχέσεις.

Ο κύκλος διαδικασιών που περιγράφουμε όμως και σε αυτό το σημείο αλλά και στη βιβλιογραφία μας, «φοβίζει» την πλειοψηφία των μαθητών, οι οποίοι δυσκολεύονται να ανταποκριθούν σε μια τέτοια κατάσταση, καθώς είναι συνηθισμένοι σε εκμάθηση και αναπαραγωγή αλγοριθμικών διαδικασιών και ενεργειών. Συνηθισμένοι στο μοντέλο διδασκαλίας «παρουσίαση στον πίνακα-απομνημόνευση – αναπαραγωγή της γνώσης», οι μαθητές εκδηλώνουν αδυναμία και έλλειψη ευελιξίας στην αντιμετώπιση μιας τέτοιας κατάστασης.

Μέσα σε αυτούς τους άξονες η έρευνά μας θα εστιάσει στην εφαρμογή μιας διερευνητικής δραστηριότητες σε δυο διαφορετικές τάξεις της Β΄ Λυκείου. Θα μελετήσουμε τις ενέργειές των μαθητών, τις σκέψεις και τους προβληματισμούς τους κατά τη διαδικασία του προβλήματος που θα κληθούν να αντιμετωπίσουν. Επιπλέον θα ασχοληθούμε με το κομμάτι της μοντελοποίησης του

προβλήματος, παρατηρώντας τις στρατηγικές που θα αναπτύξουν οι μαθητές. Θα δώσουμε αυξημένη βαρύτητα στον τρόπο και τις διαδικασίες που θα ακολουθήσουν για να επιτύχουν μοντελοποιήση της δραστηριότητας, τα βήματα αιτιολόγησης της σκέψης τους και παράλληλα έμφαση θα δοθεί σε τυχόν δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουν.

Συγκεκριμένα η έρευνα αυτή επιδιώκει να διερευνήσει τα εξής ερωτήματα:

1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Ποια είναι τα στάδια που ακολουθούν οι μαθητές για να μοντελοποιήσουν μια κατάσταση και ποιες οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν;
2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Ποιες είναι οι ενέργειες των μαθητών ενώ εργάζονται σε μια διερευνητική δραστηριότητα;

3.3 Ερευνητική Διαδικασία

Τρία είναι τα στάδια τα οποία περιλαμβάνει η παρούσα ερευνητική διαδικασία στην έρευνά μας. Αρχικά πραγματοποιήθηκε η παρακολούθηση – παρατήρηση των παρεμβάσεων που διαδραματίστηκαν στις τάξεις, ακολούθησε η συλλογή των αντικειμένων, με τα οποία εργάστηκαν οι μαθητές (φύλλα εργασίας) και τέλος ακολούθησε ο αναστοχασμός. (Seidel, 1998).

Συγκεκριμένα στηριχθήκαμε στην υλοποίηση μιας διερευνητικής δραστηριότητας από δυο εκπαιδευτικούς (εκπαιδευτικός Α, εκπαιδευτικός Β) στις τάξεις τους. Και οι δυο εκπαιδευτικοί υπηρετούν σε Λύκεια της Αττικής και η τάξη που εφαρμόστηκε η δραστηριότητα ήταν η Β Λυκείου.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις που σχεδιάστηκαν και πραγματοποιήθηκαν ήταν τέσσερις συνολικά (δυο ο κάθε εκπαιδευτικός), και ήταν όλες δίωρες. Το χρονικό διάστημα που πραγματοποιήθηκαν οι παρεμβάσεις και κατά συνέπεια υλοποιήθηκε η έρευνα είναι από το Δεκεμβρίου 2014 μέχρι και το Μάρτιο 2015.

Συγκεκριμένα η πρώτη παρέμβαση του εκπαιδευτικού Α πραγματοποιήθηκε στις 12 Δεκεμβρίου 2014 και η δεύτερη στις 27 Φεβρουαρίου 2015. Ο εκπαιδευτικός Β πραγματοποίησε τις δυο παρεμβάσεις του στις 5 Φεβρουαρίου 2015 και στις 12 Μαρτίου 2015 αντίστοιχα.

Η τάξη του εκπαιδευτικού Α αποτελούνταν από 13 μαθητές Β΄ Λυκείου. Οι συγκεκριμένοι μαθητές ήταν μια συνηθισμένη τάξη και δεν είχαν αντιμετωπίσει ξανά κάποια παρόμοια δραστηριότητα. Η διαδικασία της βιντεοσκόπησης τους ξάφνιασε στην αρχή, καθώς ήταν κάτι πρωτόγνωρο για αυτούς. Από την άλλη μεριά η τάξη του εκπαιδευτικού Β ήταν στην πλειοψηφία τους μαθητές με εμπειρία σε αυτού του είδους τις παρεμβάσεις, με αποτέλεσμα η όλη διαδικασία να είναι οικεία σ' αυτούς. Η τάξη αυτού του εκπαιδευτικού απαρτιζόταν από 27 μαθητές.

Και οι δυο εκπαιδευτικοί επέλεξαν να χωρίσουν του μαθητές τους σε ομάδες εργασίας καθώς είχαν ως στόχος οι απαντήσεις των ερωτημάτων να έρθουν μέσα από διερεύνηση, πειραματισμό και ανταλλαγή απόψεων ανάμεσα στα μέλη των ομάδων. Παράλληλα γνώριζαν ότι η δραστηριότητα σε πολλά σημεία απαιτούσε αφαιρετική σκέψη και συνδυασμό πληροφοριών, γεγονός που η δημιουργία ομάδων θα συνέβαλε εποικοδομητικά στο να ξεπεράσουν αρκετά εμπόδια. Ένα ακόμα σημείο που τους οδήγησε στην απόφαση αυτή ήταν ότι σε μια διερευνητική δραστηριότητα η συνεργασία των μαθητών στο πλαίσιο μιας ομάδας διευκολύνει τη διαδικασία της μοντελοποίησης. Η ανταλλαγή απόψεων για το σχεδιασμό του μοντέλου συμβάλει ώστε να εντοπιστούν δυσκολίες και αδυναμίες, να κατανοήσουν τους περιορισμούς, καθώς και να αναθεωρήσουν ένα μοντέλο για την εύρεση του βέλτιστου (Bahmaei, 2011).

Ο εκπαιδευτικός Α στην πρώτη παρέμβασή του σχημάτισε 3 ομάδες εργασίας. Οι δυο ομάδες απαρτίζονταν από 4 μαθητές και μια ομάδα από 5. Στη δεύτερη παρέμβαση προστέθηκαν δυο μαθητές, ένας σε κάθε ομάδα των τεσσάρων. Το

γεγονός αυτό δημιούργησε τρεις ομάδες των 5 ατόμων. Ο χωρισμός των μαθητών στις ομάδες έγινε από τον ίδιο τον καθηγητή με δικά του κριτήρια.

Ο εκπαιδευτικός Β ξεκίνησε την παρέμβασή του με 6 ομάδες εργασίας και συγκεκριμένα τρεις ομάδες των 5 ατόμων και τρείς ομάδες των 4. Την επόμενη φορά προσθέσεις νέων μελών στις ήδη υπάρχουσες ομάδες οδήγησαν πάλι στο σχεδιασμό 6 ομάδων, αυτή τη φορά όμως είχαμε τρεις ομάδες των 4, δυο ομάδες των 5 και μια ομάδα των 3. Η κατανομή των μαθητών στις ομάδες του εκπαιδευτικού Β, όπως ο ίδιος ανέφερε, πραγματοποιήθηκε με στοχευμένο τρόπο. Η διαδικασία είχε πραγματοποιηθεί σε προηγούμενο χρόνο, όπου ο ίδιος είχε επιλέξει 6 άτομα με την υψηλότερη βαθμολογία, τα οποία τα όρισε και ως αρχηγούς των ομάδων. Προχωρώντας οι αρχηγοί επέλεξαν το επόμενο μέλος της ομάδας του από τους υπόλοιπους μαθητές, στη συνέχεια το νέο μέλος της ομάδας το επόμενο. Η διαδικασία αυτή συνεχίστηκε μέχρι να σχηματιστούν οι παραπάνω ομάδες εργασίας. Με αυτό τον τρόπο θέλησε να δημιουργήσει ομάδες φίλων ώστε να συνεργαστούν και να αλληλοβοηθηθούν. Οι ομάδες ήταν σχεδόν ισάξιες καθώς όλοι οι μαθητές είχαν πολύ υψηλούς βαθμούς στο μάθημα των μαθηματικών, όπως τόνισε ο ίδιος.

3.4 Η Δραστηριότητα

Η δραστηριότητα με την οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές έχει ως θέμα τη φύτευση ενός ορθογώνιου χωραφιού με δέντρα. Η βασική ιδέα είναι ότι η μορφή του κάθε δέντρου στο επίπεδο μοντελοποιείται με κύκλο. Μάλιστα οι γεωπόνοι, κατά τη φύτευση, αυτό το λαμβάνουν υπόψη τους και δίνουν μια διάμετρο κόμης ή διάμετρο ανάπτυξης που θα έχει το δέντρο μελλοντικά. Οπότε όταν θέλουμε να φυτέψουμε πυκνά ένα ορθογώνιο χωράφι με δέντρα, ουσιαστικά θέλουμε να τοποθετήσουμε το μέγιστο δυνατό αριθμό κύκλων σε μια ορθογώνια κάτοψη.

Η δραστηριότητα αυτή αποτέλεσε ιδέα του εκπαιδευτικού Α, ο οποίος αξιοποίησε επικοδομητικά μια παρόμοια δραστηριότητα που υπάρχει στην ιστοσελίδα του προγράμματος mascil, τοποθέτησης κύκλων στο επίπεδο. Στο πρόγραμμα η δραστηριότητα εμπλέκει τους μαθητές με την τοποθέτηση κύκλων στο επίπεδο ώστε να αφήνουν το μικρότερο δυνατό κενό. Η αλλαγή του βασικού ερωτήματος στάθηκε αφορμή για την εν λόγω δραστηριότητα.

Με αυτή τη δραστηριότητα ως αφετηρία, πραγματοποιήθηκαν τέσσερις δίωρες διδασκαλίες, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, δύο από τον εκπαιδευτικό Α και δύο από τον εκπαιδευτικό Β. Στον αρχικό σχεδιασμό τους οι καθηγητές θεώρησαν ότι σε ένα δίωρο οι μαθητές θα κατάφερναν να ολοκληρώσουν με επιτυχία τη δραστηριότητα, γεγονός που δεν πραγματοποιήθηκε. Στην πρώτη εφαρμογή των καθηγητών και στα δυο τμήματα δεν κατάφεραν να ασχοληθούν με το μαθηματικό κομμάτι της δραστηριότητα. Το γεγονός αυτό οδήγησε και τους δυο καθηγητές να πραγματοποιήσουν μια ακόμα δίωρη παρέμβαση ώστε να την ολοκληρώσουν.

Παράλληλα να σημειώσουμε ότι οι καθηγητές συνεργάζονταν μεταξύ τους και η παρέμβαση του ενός λειτουργούσε σαν ανατροφοδότηση για την παρέμβαση του άλλου. Μάλιστα έπειτα από την πρώτη παρέμβαση του εκπαιδευτικού Α παρακολούθησαν μαζί οι δυο καθηγητές το βίντεο της παρέμβασής του ώστε να εντοπίσουν κρίσιμα σημεία και να βελτιώσουν την αρχική ιδέα.

3.4.1 Η Δραστηριότητα του εκπαιδευτικού Α

Η δραστηριότητα που διαμόρφωσε και υλοποίησε ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός ακολουθούσε τις αρχές της ανοικτής διερεύνησης (Open Inquiry) (Bruder & Prescott, 2013). Ο καθηγητής επέλεξε να θέσει στο φύλλο εργασίας του τα δυο βασικά ερωτήματα της δραστηριότητάς του και οι μαθητές έπρεπε να δημιουργήσουν τα επιμέρους σκαλοπάτια και να αναζητήσουν κατάλληλες στρατηγικές προς επίλυση ώστε να φτάσουν στη λύση (Παράρτημα, σελ. 124).

Τα φύλλα εργασίας τοποθετούσαν τους μαθητές στο επάγγελμα του αρχιτέκτονα τοπίων σε ένα γραφείο μελετών στη Λακωνία. Εργαζόμενοι σε αυτό το γραφείο καλούνταν να δημιουργήσουν μια ολοκληρωμένη χωρική πρόταση, για ένα πελάτη τους. Ο συγκεκριμένος πελάτης ήταν κάτοχος ενός κτήματος διαστάσεων 24m x46m και ήθελε να φυτέψει την πιο συμφέρουσα ποικιλία δέντρου. Σύμφωνα με τα δεδομένα που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές, δυο είναι οι ποικιλίες που καρποφορούν στην περιοχή, η πορτοκαλιά και η νάνα-πορτοκαλιά. Η κάθε ποικιλία για να αναπτυχθεί πρέπει να τηρεί συγκεκριμένες αποστάσεις , αλλά και παράγει διαφορετική ποσότητα καρπών. Οι μαθητές κλήθηκαν, λοιπόν, να συνεχίσουν τη μελέτη και να απαντήσουν στα δυο ακόλουθα ερωτήματα του φύλλου εργασίας:

Α) Σε ποια διάταξη πρέπει να φυτευτούν τα δέντρα;

Β) Να παραδώσετε ολοκληρωμένη πρόταση στον πελάτη για το ποια ποικιλία είναι συμφέρουσα.

Στη δεύτερη εφαρμογή οι μαθητές ασχολήθηκαν καθαρά με το μαθηματικό μέρος της δραστηριότητας. Απαλλαγμένοι από το πλαίσιο του προβλήματος, έπρεπε να αποφασίσουν ποια είναι η διάταξη των κύκλων που θα χωρέσει τους περισσότερους κύκλους και πόσοι είναι αυτοί. Ο καθηγητής θεώρησε δεδομένο ότι οι μαθητές είχαν δει τις πιθανές διατάξεις στην προηγούμενη παρέμβαση και ξεκινούσαν πια τη νέα δραστηριότητα με αυτό ως εφόδιο.

3.4.2 Η δραστηριότητα του εκπαιδευτικού Β

Το φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 125), το οποίο σχεδίασε ο εκπαιδευτικός Β είχε ως τίτλο του, το σχεδιασμό ενός σύγχρονου οπωρώνα και συγκεκριμένα εστιαζόταν στη χωρική μελέτη φύτευσης. Αρχικά υπήρχε μια εισαγωγή, η οποία τόνιζε τη σημασία της καλλιέργειας καρποφόρων δέντρων και επιπλέον ανέφερε παράγοντες που μελετάμε για μια τέτοια καλλιέργεια. Η εισαγωγή αυτή είχε ως στόχο να εντάξει τους μαθητές στο πλαίσιο - πνεύμα των δραστηριοτήτων που θα ακολουθούσαν. Παράλληλα το φύλλο εργασίας απευθυνόταν σε μαθητές της πόλης και πιθανόν να μην τους έχει απασχολήσει το συγκεκριμένο θέμα ξανά. Γι' αυτό ακριβώς το λόγο ο διδάσκων ένταξε αυτή την εισαγωγή στην παρέμβασή του ώστε να δημιουργηθεί πρόσφορο έδαφος και κίνητρο στους μαθητές για εμπλοκή.

Το κύριο μέρος του φύλλου εργασίας απαρτιζόταν από τρεις δραστηριότητες. Η πρώτη και η δεύτερη δραστηριότητα αποτελούσαν ένα βοηθητικό σκαλί για τους μαθητές ώστε να βοηθηθούν κατά τη διεξαγωγή της τρίτης. Ο σχεδιασμός της δηλαδή ακολουθούσε τις αρχές της ελεγχόμενης διερεύνησης (Guided Inquiry) (Bruder & Prescott, 2013). Με υπόδειξη του καθηγητή οι μαθητές ολοκλήρωναν τη δραστηριότητα που είχαν μπροστά τους για να περάσουν στην επόμενη. Στόχος της ενέργειας αυτής ήταν να μη δουν οι μαθητές τη συνέχεια του φύλλου εργασίας και εξάγουν σε κάποια φάση συμπεράσματα, τα οποία θα τα «πρόδιδε» η εκφώνηση της επόμενη.

Η πρώτη δραστηριότητα με την οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές, είχε ως τίτλο «Διάταξη Δέντρων». Σκοπός της φάσης αυτής ήταν να ανακαλύψουν οι μαθητές τις πρώτες εικόνες για τις θέσεις των δέντρων σε ένα χωράφι και παράλληλα να δουν με πιο σχήμα μοντελοποιούμε ένα δέντρο στο επίπεδο κοιτώντας το από ψηλά. Εδώ κεντρικό χειραπτικό εργαλείο αποτελούσε ένα τετραγωνισμένο χαρτί. Η αξιοποίησή του καθώς και οι πληροφορίες – προϋποθέσεις για τη

φύτευση μιας ποικιλίας δέντρων (απόσταση 2μ από το φράχτη και 4μ μεταξύ τους) αποτέλεσαν τα όπλα των μαθητών για να εντοπίσουν πιθανές θέσεις των δέντρων. Στη συνέχεια ως βοηθητικό βήμα το φύλλο εργασίας τους ζητούσε να οριοθετήσουν τη θέση του δέντρου και έπειτα να βρουν το βέλτιστο σχήμα που μπορούμε να το προσομοιάσουμε. Τα ερωτήματα της δραστηριότητας αυτής ήταν τα εξής:

- Να αναπαραστήσετε στο πλέγμα τη θέση ενός δενδρυλλίου.
- Να αποτυπώσετε στο πλέγμα τη μορφή που θα έχει η κάτοψη του κτήματος αφού φυτευτούν τα δενδρύλλια που είναι δυνατόν.
- Να αναπαραστήσετε στο πλέγμα την κάτοψη ενός δέντρου στην πλήρη ανάπτυξή του. Με τι προσομοιάζει η κάτοψή του;
- Να αποτυπώσετε τη μορφή που θα έχει η κάτοψη του κτήματος με τα δέντρα στην πλήρη ανάπτυξή τους.

Περνάμε στη δεύτερη δραστηριότητα, «Πιθανές Διατάξεις», όπου με δεδομένο ότι η αναπαράσταση του δέντρου στο επίπεδο είναι κύκλος οι μαθητές έπρεπε να εντοπίσουν πιθανές θέσεις τους. Σε αυτή τους τη προσπάθεια ενισχυτικά λειτούργησαν τα διαφορετικά μεγεθών κυκλικά καπάκια που μοιράστηκαν, με τα οποία μέσω πειραματισμού εξήγαγαν συμπεράσματα, θεωρώντας ότι η κάτοψη του χωραφιού ήταν μια κόλλα Α4. Τέλος στη φάση αυτή οι μαθητές πέρα από τις δυο διατάξεις κλήθηκαν να παρατηρήσουν ότι στη τριγωνική διάταξη είναι διαφορετική η εικόνα που παίρνουμε αν ξεκινήσουμε το γέμισμα κατά μήκος και διαφορετική κατά πλάτος. Ερωτήματα που συνόδευαν τη δραστηριότητα αυτή:

- Να χρησιμοποιήσετε καπάκια / πούλια για να μοντελοποιήσετε την κάτοψη δέντρων σε πλήρη ανάπτυξη.
- Να μελετήσετε διατάξεις των καπακιών που μοντελοποιούν την κάτοψη του κτήματος που αναπαριστάνεται με το φύλλο Α4.
- Να κάνετε ένα σχέδιο του μοντέλου της κάθε διάταξης.

- Για κάθε διάταξη να βρείτε το πλήθος των «δένδρων» και να σημειώσετε τη θέση του στο σχέδιο του μοντέλου της διάταξης.
- Να συντάξετε μια γραπτή αναφορά των συμπερασμάτων σας και να την κοινοποιήσετε στην τάξη σας .

Στη συνέχεια ακολουθούσε η Τρίτη δραστηριότητα, η οποία δεν ολοκληρώθηκε στη πρώτη παρέμβαση και υλοποιήθηκε στην δεύτερη. Ο τίτλος που τη συνοδεύει είναι «Βέλτιστη Διάταξη», όπου οι μαθητές εδώ εργαζόμενοι ως γεωπόνοι σε μια εταιρία έπρεπε να κάνουν μια πλήρη μελέτη για τη δενδροφύτευση ενός χωραφιού. Βασικές πληροφορίες που τους δινόταν ήταν ότι η κάτοψη του χωραφιού είχε διαστάσεις 240x460 μ και ήταν σχήματος ορθογωνίου. Παράλληλα έπρεπε να μελετήσουν τη φύτευση της πορτοκαλιάς, ποικιλία με την οποία ασχολιόντουσαν από την αρχή της παρέμβασης. Τα ερωτήματα που συνόδευαν τη δραστηριότητα ήταν:

- Μελετήσετε τα μοντέλα των διατάξεων φύτευσης.
- Αναζητείστε κάποιο μοτίβο που επαναλαμβάνεται και σχετίζεται με τον τρόπο της θέσης φύτευσης και του πλήθους των δέντρων.
- Καταστρώστε ένα σχέδιο για να υπολογίσετε τον αριθμό των σειρών φύτευσης των δενδρυλλίων καθώς και του αριθμού των δενδρυλλίων σε κάθε σειρά στην περίπτωση που η μια- προς- μια καταμέτρηση δεν είναι δυνατή, όπως αυτή που γινότανε στην δραστηριότητα 2.
- Να συντάξετε μια γραπτή αναφορά που να εξηγείτε τη στρατηγική που ακολουθήσατε στη λύση του προβλήματός σας. Παρουσιάστε τη λύση του προβλήματος.

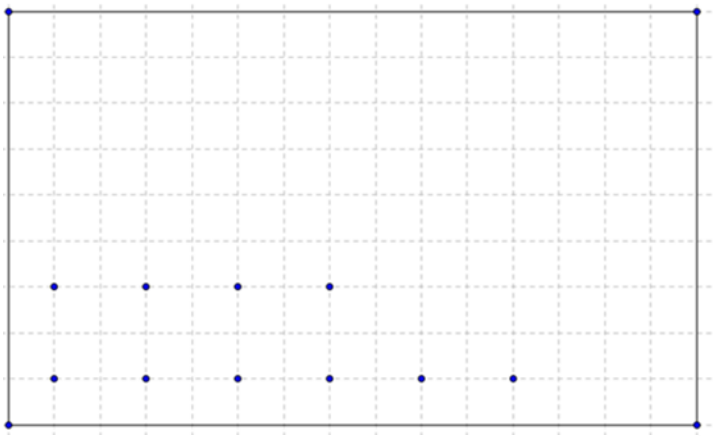
Το φύλλο εργασίας, σε όλες τις φάσεις εμπλουτιζόταν με πραγματικές εικόνες δέντρων και οπωροφόρων καλλιεργειών. Σκοπός του εκπαιδευτικού ήταν οι εικόνες αυτές να συμβάλουν υποστηρικτικά σε σημεία που οι μαθητές θα συναντούσαν κάποιο εμπόδιο.

3.4.3 Βασικά Σημεία Δραστηριότητας

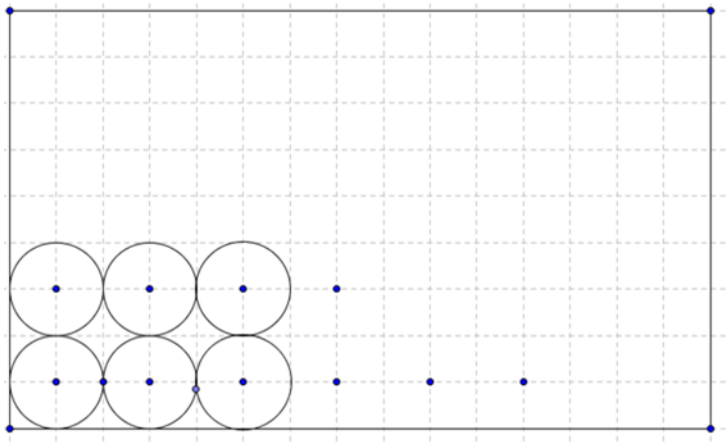
Η δραστηριότητα αυτή περιέχει έξι βασικά σκαλοπάτια ώστε να φτάσει ο λύτης στη λύση του προβλήματος. Ας δούμε τη λύση της βήμα προς βήμα.

Το πρώτο βασικό σημείο στη λύση του προβλήματος είναι η μοντελοποίηση του δέντρου, η αναζήτηση δηλαδή του κατάλληλου γεωμετρικού σχήματος που θα μας μοντελοποιήσει την αρχική πληροφορία. Και τα δυο φύλλα εργασίας για μια συγκεκριμένη ποικιλία δέντρου ανέφεραν ότι για να αναπτυχθεί θα πρέπει να απέχει από το διπλανό του 4μ και 2μ από το φράκτη. Η διερεύνηση και επεξεργασία των πληροφοριών αυτών πρέπει να οδηγήσουν τους μαθητές στην εύρεση του μοντέλου του κύκλου (γεωμετρικό μοντέλο) και μάλιστα να το αιτιολογήσουν από τον ορισμό του κύκλου ως γεωμετρικό τόπο σημείων που ισαπέχουν από το κέντρο του.

Οι μαθητές εδώ το πιο πιθανό είναι να ξεκινήσουν να μετρούν αποστάσεις και να τοποθετούν σημεία σε μια κάτοψη(Εικόνα 3.1), τα οποία θα ικανοποιούν τον δοθέν περιορισμό. Η τοποθέτηση αυτή των σημείων θα αποτελέσει το σκαλοπάτι εύρεσης του κύκλου ως το βέλτιστο σχήμα μοντελοποίησης του δέντρου στο επίπεδο (Εικόνα 3.2).

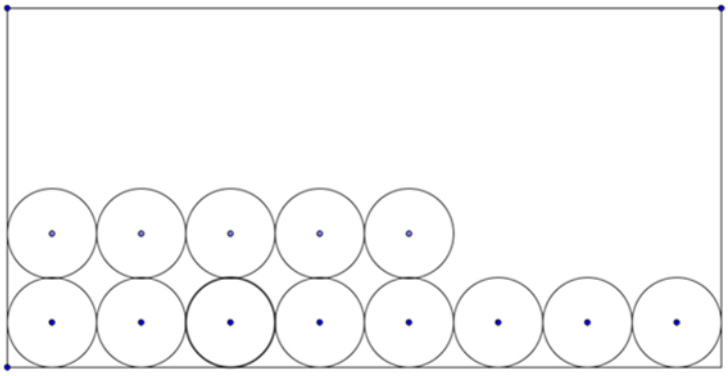


Εικόνα 3. 1

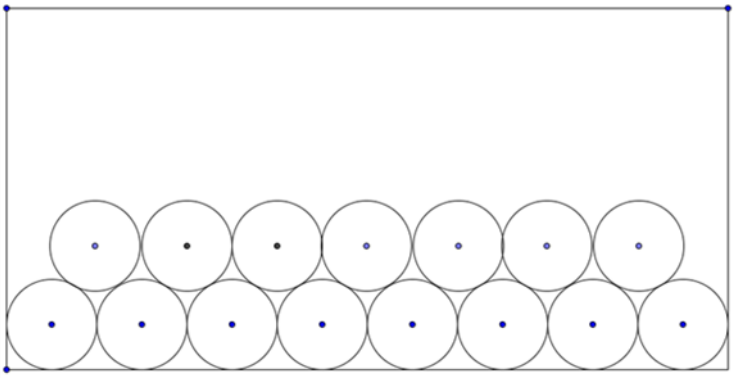


Εικόνα 3. 2

Έχοντας ως δεδομένο ότι η εικόνα του δέντρου στο επίπεδο μοντελοποιείται με κύκλο προχωράμε στο δεύτερο στάδιο της εύρεσης πιθανών διατάξεων. Η φύτευση ενός χωραφιού με δέντρα θέλουμε να μας παρέχει το μέγιστο αριθμό. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στην αναζήτηση των διατάξεων των κύκλων στο επίπεδο. Οι διατάξεις αυτές είναι δυο (Εικόνα 3.3, Εικόνα 3.4). Η εύρεση αυτών των διατάξεων για τους μαθητές αναμένεται να επέλθει μέσα από πειραματισμό με τα χειραπτικά εργαλεία (καπάκια) που θα τους διαθέσουν οι καθηγητές τους.

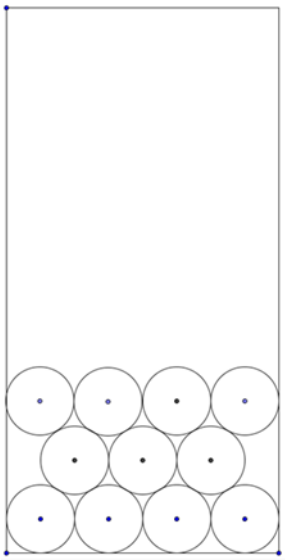


Εικόνα 3. 3: Διάταξη Τύπου Α

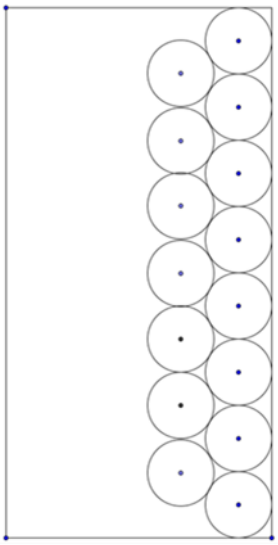


Εικόνα 3. 4: Διάταξη Τύπου Β

Η διαδικασία του πειραματισμού, της διερεύνησης και της εύρεσης των πιθανών διατάξεων των κύκλων θα συμβάλει πιθανόν και σε μια ακόμα χρήσιμη παρατήρηση για την επίλυση της δραστηριότητας. Η παρατήρηση αυτή αφορά την εικόνα που θα έχει το χωράφι μας αν επιλέξουμε την διάταξη τύπου Β. Η εικόνα της κάτοψης που θα πάρουμε στην διάταξη αυτή καθώς και το πλήθος των δέντρων διαφέρουν ανάλογα με την πλευρά (οριζόντια ή κάθετη) που θα επιλέξουμε να αρχίσουμε το γέμισμα (Εικόνα 3.5, Εικόνα 3.6). Η πληροφορία αυτή πιθανόν να μας εμποδίσει να φτάσουν στη σωστή απάντηση της δραστηριότητας αν δεν εντοπιστεί.



Εικόνα 3. 1

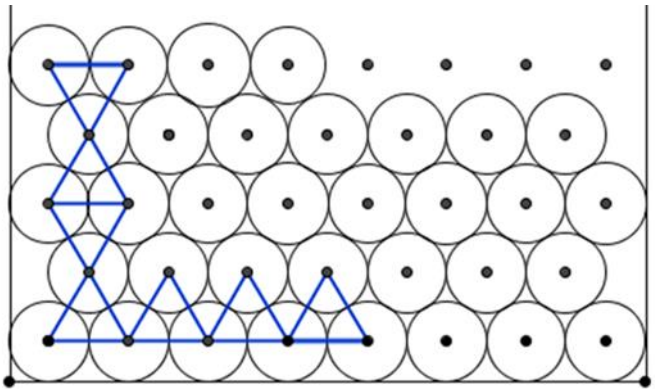


Εικόνα 3. 6

Στη συνέχεια ακολουθεί η αναζήτηση των μαθηματικών μοντέλων για την εύρεση της λύσης. Στη διάταξη τύπου Α, η εύρεση του πλήθους θα έλθει σχετικά άμεσα. Σε αυτή την περίπτωση αρκεί να δούμε πόσους κύκλους χωράει η μια σειρά και στη συνέχεια να δούμε πόσες σειρές έχουμε. Τέλος ένας απλός πολλαπλασιασμός θα μας δώσει τη λύση.

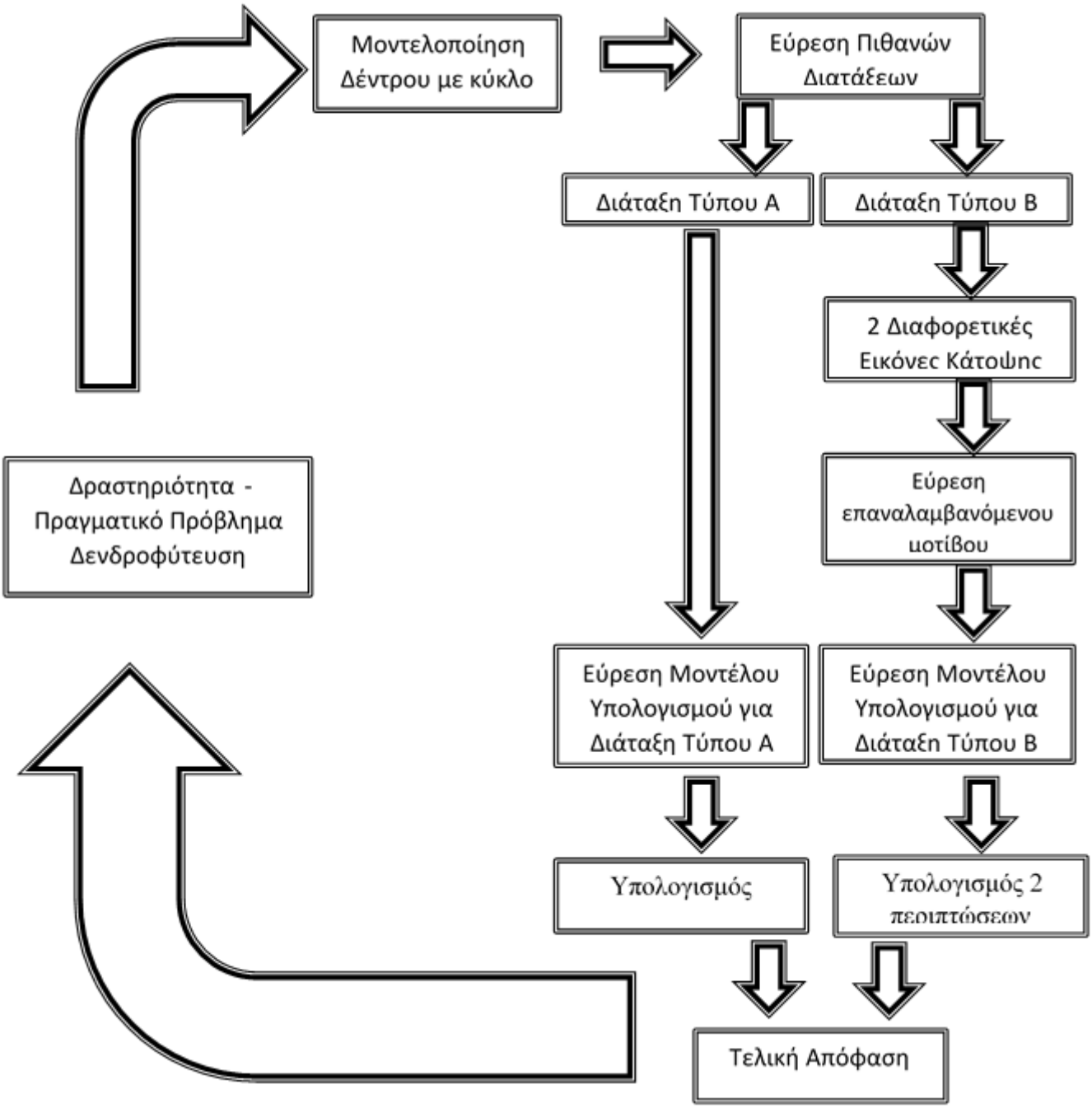
Η περίπτωση που είναι αξιοσημείωτη είναι η εύρεση του μοντέλου υπολογισμού για τη διάταξη τύπου Β. Για να δημιουργήσουν οι μαθητές το κατάλληλο αριθμητικό μοντέλο υπολογισμού, θα πρέπει να εντοπίσουν ένα μοτίβο που επαναλαμβάνεται στο σχήμα ώστε να δουν πόσα τέτοια μοτίβα χωρούν και να δώσουν τη λύση. Εδώ τα κέντρα των κύκλων σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα, το οποίο αποτελεί το μοτίβο κλειδί, ώστε να προχωρήσουν (Εικόνα 3.7). Στη συνέχεια θα έλθει ο αλγόριθμος υπολογισμού του πλήθος των κύκλων μέσα από διερεύνηση των παραμέτρων και των επιμέρους περιπτώσεων (Παράρτημα, σελ. 130-135).

Ο κύκλος της μαθηματικής μοντελοποίησης θα ολοκληρωθεί με την τελική απόφαση των μαθητών. Έχοντας περάσει από τα επιμέρους βήματα πρέπει να ξαναγυρίζουν στο πραγματικό πρόβλημα και να δημιουργήσουν, να αιτιολογήσουν και να παρουσιάσουν μια ολοκληρωμένη πρόταση για τον πελάτη τους.



Εικόνα 3. 1

3.4.4 Κύκλος Μοντελοποίησης Προβλήματος



3.5 Συλλογή Δεδομένων

Η παρούσα έρευνα στηρίχθηκε σε δεδομένα που μπορούμε να τα χωρίσουμε σε τρεις φάσεις, στη φάση του σχεδιασμού, στη φάση υλοποίησης και τέλος στην αποτίμηση των όσων έγιναν. Αρχικά παρακολουθήσαμε την πορεία και τις φάσεις σχεδιασμού που ακολούθησαν οι δυο καθηγητές για τη διαμόρφωση του φύλλου εργασίας. Είδαμε τους στόχους που έθεσαν και τους προβληματισμούς τους για τις αναμενόμενες δυσκολίες των μαθητών. Στη συνέχεια τα ερευνητικά δεδομένα συλλέχθηκαν από την παρακολούθηση της υλοποίησης της δραστηριότητας μέσα στις τάξεις, κομμάτι που έχει και το βαρύτερο ρόλο στην έρευνά μας. Τέλος έχουμε το υλικό αποτίμησης τόσο από τους καθηγητές μέσα από αναφορές που έγραψαν μετά το πέρας των παρεμβάσεών τους.

Πιο συγκεκριμένα τα ερευνητικά μας δεδομένα είναι τα εξής:

- Καταγραφή Ομιλίας Συναντήσεων Σχεδιασμού Δραστηριότητας

Πραγματοποιήθηκε ηχογράφηση όλων των συναντήσεων των εκπαιδευτικών στο κομμάτι του σχεδιασμού (περίπου 10 ώρες).

- Βιντεοσκόπηση και Καταγραφή Ομιλίας Παρεμβάσεων

Οι διδακτικές παρεμβάσεις των δυο εκπαιδευτικών βιντεοσκοπήθηκαν και ηχογραφήθηκαν.

- Φύλλα Εργασίας Καθηγητών

Δεδομένο αποτέλεσαν τα φύλλα εργασίας που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί.

- Φύλλα Εργασίας Μαθητών

Τα φύλλα εργασίας με τις απαντήσεις των μαθητών συλλέχθηκαν και συνέβαλαν για να απαντηθούν τα ερευνητικά μας ερωτήματα.

- Αναφορές καθηγητών

Οι δυο εκπαιδευτικοί έπειτα από την υλοποίηση της παρέμβαση τους σύγγραψαν μια αναφορά για την παρέμβαση που πραγματοποίησαν.

- Σημειώσεις ερευνήτριας

Δεδομένο αποτέλεσαν και οι σημειώσεις που κρατούσε η ερευνήτρια σε όλες τις φάσεις.

3.6 Ανάλυση Δεδομένων

Μετά το πέρας της διαδικασίας συλλογής των δεδομένων ακολούθησε η φάση της ανάλυσης τους. Οι παρεμβάσεις των δυο εκπαιδευτικών μελετήθηκαν και αναλύθηκαν ξεχωριστά έχοντας όμως ως βασικό άξονα τα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Η ανάλυση των παρεμβάσεων βασίστηκε στη μέθοδο των κρίσιμων συμβάντων (critical incidents) (Maher, 2002) που εμφανίστηκαν κατά την ενασχόληση των μαθητών με τη διερευνητική δραστηριότητα. Οι σκέψεις των μαθητών, οι διάλογοι που αναπτύχθηκαν, οι αντιδράσεις τους, οι χειρονομίες τους, η θέλησή τους να φτάσουν στη λύση, τα σχέδια στο χαρτί τους, είναι μερικά από τα στοιχεία που συνέβαλαν στο να εντοπίσουμε τα κρίσιμα περιστατικά και αυτά με τη σειρά τους να συμβάλουν στα αποτελέσματά της παρούσας έρευνας.

Η διαδικασία ξεκίνησε με την απομαγνητοφώνηση των παρεμβάσεων. Στη συνέχεια, θέση είχε η μελέτη των βιντεοσκοπημένων παρεμβάσεων, η οποία βασίστηκε στο μοντέλο ανάλυσης που προτείνουν οι Powell, Francisco και Maher (2003). Πιο συγκεκριμένα ακολουθήθηκαν τα εξής βήματα μελέτης:

- *Προσεκτική επισκόπηση των δεδομένων του βίντεο*
- *Περιγραφή των δεδομένων του βίντεο*
- *Προσδιορισμός των κρίσιμων συμβάντων*
- *Μεταγραφή*
- *Κωδικοποίηση*

- *Κατασκευή ιστορίας*
- *Σύνθεση της αφήγησης* (Powell, Francisco και Maher, 2003).

Κατά την υλοποίηση των παραπάνω βημάτων ανάλυσης μελετήθηκαν παράλληλα τα φύλλα εργασίας στα οποία είχαν εργαστεί οι μαθητές, αλλά και τις σημειώσεις της ερευνήτριας. Παράλληλα οι αναφορές των δυο εκπαιδευτικών ενίσχυσαν τη σύνθεση της αφήγησης.

Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τα στοιχεία τα οποία συλλέξαμε στην έρευνά μας ώστε να εξάγουμε αποτελέσματα και συμπεράσματα. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τη διδασκαλία του κάθε εκπαιδευτικού ξεχωριστά ακολουθώντας και αναλύοντας τα δυο βασικά μας ερευνητικά ερωτήματα. Στον πρώτο άξονα της έρευνά μας θα εστιάσουμε στη πορεία μοντελοποίησης που ακολούθησαν οι μαθητές σε κάθε φάση της δραστηριότητας ώστε να φτάσουν στην επίλυσή της και στο δεύτερο άξονα της έρευνάς μας θα ασχοληθούμε με τη διερευνητική πλευρά των παρεμβάσεων.

4.2 Ανάλυση 1ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Α

4.2.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση

Η μοντελοποίηση των δεδομένων της παρούσας δραστηριότητας ήταν το κομμάτι που δυσκόλεψε περισσότερο τους συμμετέχοντες. Οι μαθητές μη έχοντας ανάλογη εμπειρία από τέτοια προβλήματα μοντελοποίησης άρχισαν να λύνουν το πρόβλημα προσπαθώντας να εφαρμόσουν τυποποιημένες αλγοριθμικές διαδικασίες. Καμία ομάδα δεν ασχολήθηκε, αλλά ούτε καν προβληματίστηκε για την εύρεση βέλτιστου σχήματος μοντελοποίησης του δέντρου σε μια κάτοψη, το οποίο ήταν το πρώτο και καθοριστικό βήμα μοντελοποίησης αυτού του προβλήματος. Ο καθηγητής αφού άφησε τους μαθητές να προβληματιστούν και να δράσουν μόνοι τους τα πρώτα 18 περίπου λεπτά του μαθήματος στη συνέχεια επενέβη με καθοριστικές ερωτήσεις. Οι

ερωτήσεις του στην αρχή δε βοήθησαν και πολύ τους μαθητές που διατηρούσαν τους προβληματισμούς τους. Η εύρεση του κύκλου ως βέλτιστου σχήματος μοντελοποίησης του κύκλου ήρθε μετά από αρκετή καθοδήγηση από το καθηγητή και χωρίς στο τέλος να εξηγηθεί αναλυτικά το πώς συνδέονται τα δεδομένα του προβλήματος με τον ορισμό του κύκλου, πέρα μόνο από μια μικρή νύξη.

Στη συνέχεια ακολουθούν αναλυτικά τα στάδια που πέρασαν οι μαθητές για να μοντελοποιήσουν τα δεδομένα και να φτάσουν στη λύση του προβλήματος.

- <u>1η Απόπειρα Επίλυσης</u>

Οι ομάδες εργασίας από την αρχή του μαθήματος μέχρι και τα 18 περίπου πρώτα λεπτά δούλευαν μόνες τους χωρίς τη παραμικρή υποστήριξη από το καθηγητή τους. Ο προβληματισμός τους στην αρχή ήταν φανερός καθώς δεν είχαν ξανά ανάλογη εμπειρία με μια τέτοια δραστηριότητα. Ξεκίνησαν, λοιπόν, να εργάζονται αγνοώντας το ρεαλιστικό κομμάτι του προβλήματος, το οποίο θα τους οδηγούσε μέσα από προβληματισμό στη μοντελοποίηση της δοθείσης κατάστασης. Η ενέργειά τους αυτή, οδήγησε όλες τις ομάδες να αρχίσουν να καταστρώνουν αλγεβρικά σχέδια επίλυσης, ακολουθώντας αλγοριθμικές διαδικασίες.

Το πρόβλημα έγινε φανερό μετά τα 18 πρώτα λεπτά τις παρέμβασης, όπου οι ομάδες ισχυρίστηκαν ότι έφτασαν στη λύση του προβλήματος και παρουσίασαν τις ιδέες τους στο πίνακα. Ο καθηγητής πρότεινε να ασχοληθούν μόνο με τη μια ποικιλία δέντρων, αυτών που είχαν διάμετρο κόμης 4m καθώς παρατήρησε ότι είχαν βγει εκτός προγραμματισμού από θέμα χρόνου.

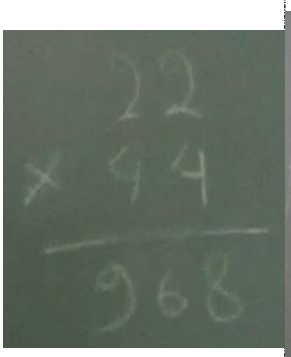
Όλες οι ομάδες ξεκίνησαν να μιλούν για τοποθετήσεις δέντρων χωρίς να τους έχει απασχολήσει ουσιαστικά για το πώς θα τοποθετηθεί το ένα δέντρο στη κάτοψη, ποια θα είναι η εικόνα του δηλαδή. Η πληροφορία για το πόσο πρέπει να απέχει ένα δέντρο από φράχτη ή δέντρο για να αναπτυχθεί, αποκωδικοποιήθηκε από τους μαθητές σαν ένας χώρος που δεν πρέπει να

υπάρχει κάτι και αφαιρέθηκε για να βρουν όπως χαρακτηριστικά είπαν τον «ωφέλιμο χώρο».

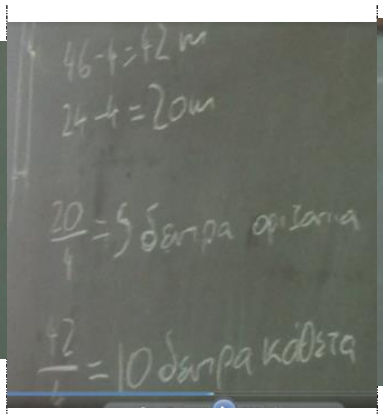
Ξεκινά η ομάδα 2 να παρουσιάσει τη λύση της στο πίνακα, η οποία φαίνεται ότι αρχίζει να εργάζεται με τη τετραγωνική διάταξη χωρίς όμως να έχει κατανοήσει απόλυτα ότι ασχολείται με μια διάταξη. Συγκεκριμένα τα μέλη της εργάστηκαν ως εξής: αφαίρεσαν 2m από τις πλευρές του χωραφιού και στη συνέχεια βρήκαν πόσα δέντρα χωράνε κατά μήκος και πόσα κατά πλάτος διαιρώντας το «ωφέλιμο μέρος» με το 4. Τέλος πολλαπλασίασαν τα πόσα δέντρα βρήκαν ότι χωράνε κατά μήκος και τα πόσα κατά πλάτος και έβγαλαν το τελικό τους αποτέλεσμα (Εικόνα 4.2). Χαρακτηριστικά το μέλος της ομάδας που παρουσίαζε τη λύση στο πίνακα ανέφερε: « *Ε… πήραμε τους περιορισμούς που λέει… λέει 2m από το φράχτη και 4m μεταξύ τους. Μετρήσαμε τα μέσα. Πήραμε τις αποστάσεις από το φράχτη και τις αποστάσεις… Μετρήσαμε πόσα δέντρα είναι οριζόντια και πόσα δέντρα κάθετα. Και πολλαπλασιάσαμε τις δυο πλευρές.*»

Ακολούθησε η ομάδα 3, η οποία αντίστοιχα με την ομάδα 1 ασχολήθηκε και αυτή με το «ωφέλιμο έδαφος του χωραφιού», με το ίδιο σκεπτικό της ομάδας 2. Στη συνέχεια όμως η ομάδα αυτή διαίρεσε το εμβαδόν του «ωφέλιμου χωραφιού» με την απόσταση (4m) που πρέπει να έχουν μεταξύ τους τα δέντρα για να αναπτυχθούν (Εικόνα 4.3).

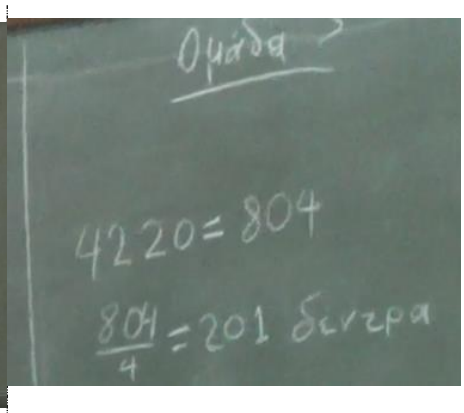
Τέλος η ομάδα 1 εργάστηκε ανάλογα με την ομάδα 3. Η διαφορά στις δυο ομάδες είναι ότι η συγκεκριμένη ομάδα αφαίρεσε 2m από τις πλευρές του χωραφιού για να βρει το «ωφέλιμο έδαφος» ενώ η ομάδα 3 αφαίρεσε 4m (Εικόνα 4.1). Το μέλος της ομάδας 1 που παρουσίασε τη δικιά τους σκέψη τόνισε: *« Βασικά στο μόνο που βρήκαμε κάποιο αποτέλεσμα που δε θεωρούμε ακόμα σωστό είναι που αφαιρέσαμε… αφαιρέσαμε 2m απ' τη μια πλευρά 22 και κάναμε 22 επί 44… για να βρούμε το εμβαδόν…. Το διαιρέσαμε δια 4 για να βρούμε την απόσταση μεταξύ τους…»*



Εικόνα 4. 1: Ομάδα 1



Εικόνα 4. 2: Ομάδα 2



Εικόνα 4. 3: Ομάδα 3

Η εύρεση του βέλτιστου γεωμετρικού μοντέλου ώστε να μοντελοποιήσουν τη δραστηριότητα αυτή εδώ ήταν απαραίτητη ώστε να φτάσουν ή έστω να προσεγγίσουν οι μαθητές τη λύση της δραστηριότητας. Οι μαθητές όμως και μετά τη παρουσίαση των διαφορετικών λύσεων των ομάδων, δε μπορούσαν να καταλάβουν τι δε πάει καλά και ούτε να δουν ότι πρέπει να γυρίσουν πίσω στα δεδομένα τους.

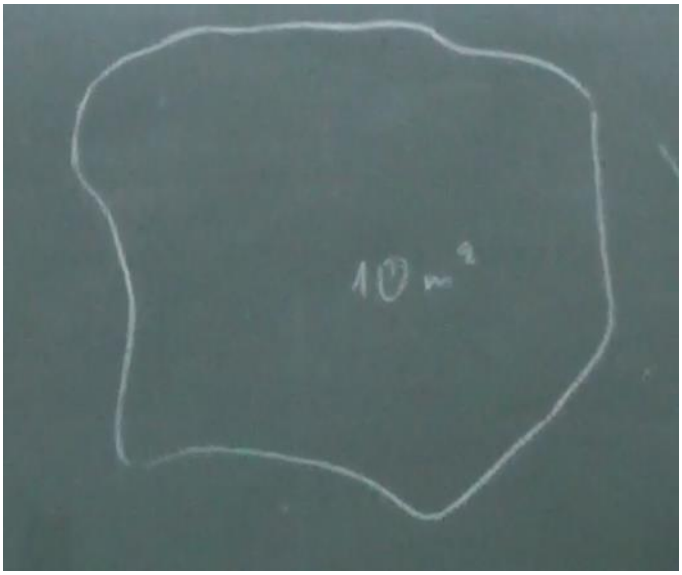
- <u>Η παρέμβαση του καθηγητή</u>

Η έκθεση των απόψεων και των λύσεων των ομάδων στο πίνακα, αλλά και το τέλμα που είχαν βρεθεί, ώθησαν το καθηγητή να παρέμβει με καθοριστικές ερωτήσεις για την εξέλιξη της παρέμβασης. Οι ερωτήσεις του είχαν σκοπό να αναδείξουν το εμπόδιο της μοντελοποίησης του σχήματος του δέντρου σε μια κάτοψη και στη συνέχεια να τους προβληματίσει για την επίλυσή του. Μια ανασκόπηση στα δεδομένα του προβλήματος σχετικά με τη διάταξη και τις αποστάσεις- περιορισμούς που είχε η δραστηριότητα επέλεξε να είναι τα όπλα του για να κάνει φανερή την ανάγκη εύρεσης κατάλληλου γεωμετρικού μοντέλου.

Παράλληλα θέλοντας να τους κάνει να απορρίψουν μόνοι τους τις λύσεις που δόθηκαν με το εμβαδόν (λύσεις ομάδων 1 και 3), σχεδίασε στον πίνακα ένα χαλί

ακανόνιστου σχήματος και τους τόνισε ότι είναι 10m^2 και τους ρώτησε πόσα χωράνε σε μια αίθουσα 30 m^2. Η ενέργειά του αυτή στόχευε στο να καταλάβουν οι μαθητές ότι η εικόνα που έχει ένα αντικείμενο σε μια κάτοψη παίζει καθοριστικό ρόλο για το πόσα τέτοια αντικείμενα μπορούμε να τοποθετήσουμε στη δοθέν κάτοψη. Χαρακτηριστικό είναι το σχετικό απόσπασμα.

Καθηγητής: « Για να θέσω ένα ερώτημα. Έχω αυτή την αίθουσα, η οποία είναι ορθογώνια και μας φέρουν ένα χαλί ή ένα δέρμα από ζώο… που έχει περίεργο σχήμα είναι τέτοιου σχήματος.»



Εικόνα 4.4: Χαλί ακανόνιστου σχήματος

Κ: «… και έχει εμβαδόν 10m^2 . Είναι αρκετά μεγάλο. Έχετε την αίσθηση; Όλη η αίθουσα 30m^2. Πόσα θα χωρέσουνε; Απαντάμε έτσι εύκολα; Πόσα μπορούμε να απλώσουμε εδώ χωρίς να πέσει το ένα πάνω στο άλλο; Μπορούμε ν' απαντήσουμε;

Μ: «Το χαλί είναι σ' αυτό το σχήμα;»

Κ: «Ναι, είναι περίεργο σχήμα; Και αυτό εύκολα το απαντάς; Τι είναι σίγουρο ότι δεν χωράνε;»

Μ: «Τρία.»

Κ: «Συμφωνούμε; Άρα γίνεται να μη λάβουμε υπόψιν τις διαστάσεις που θα μπουν τα δέντρα και να διαιρέσουμε; Να διαιρέσεις δηλαδή πόσα χωράνε πλάτος ή πόσα χωράνε στο εμβαδόν; Δε γίνεται ν' αδιαφορήσουμε για αυτό. Καταλάβατε τι λέω;»

Κ: «Πρώτο ερώτημα, λοιπόν, είναι πως βάζουμε τα δέντρα.»

Σιγή 12 δευτερολέπτων.

Κ: «Να θέσω ένα άλλο ερώτημα. Με τι σχήμα θα δώσω εικόνα στο κάθε δέντρο το όποιο σχήμα θα μου γεμίσει το κτήμα; Δεν είναι τέτοιο (Δείχνει το χαλί). Τι σχήμα είναι η εικόνα του κάθε δέντρου που θα προσπαθήσω να γεμίσω το κτήμα;»

Καμία αντίδραση.

Κ: «Το ερώτημα είναι κατανοητό; Γιατί είναι προφανές ότι τα δέντρα δεν θα… ότι θα μείνει πάντα ακάλυπτος χώρος. Το καταλαβαίνετε αυτό;»

Δεν απαντούν.

Κ: «Άρα έχει νόημα να διαιρέσω;»

Σιγή.

Κ: «Δε μπορώ να διαιρέσω. Αφού έχει κάποιο σχήμα. Θα μείνει και χώρος νεκρός ανάμεσα στα δέντρα. Άρα ερώτημα. Τι σχήμα είναι αυτό που μου δίνει την εικόνα του δέντρου και μ' αυτό θα προσπαθήσω να γεμίσω το ορθογώνιο.»

Μ_Ο2: «Να πω κάτι;»

Κ: «Ναι.»

Μ_Ο2: «Εμείς είχαμε βάλει το κενό…»

Κ: «Είναι σίγουρο ότι χωράει ακριβώς και δε μένει κενό ανάμεσα;»

Κ: « Έχετε δει φυτεμένα χωράφια; Έτσι όπως είναι… Το ένα εδώ και το άλλο…δε μένει καθόλου κενός χώρος;»

Μ_Ο1: «Έχει.»

Κ: «Αυτό το έχετε λάβει υπόψη και με τη μια λύση και με την άλλη; Εσείς λάβατε μόνο ότι περισσεύει στο τέλος γιατί δε χωράει ολόκληρο αλλά ανάμεσα στα δέντρα;»

Μ_Ο1: «Υπάρχει περίπτωση τα κιλά να χρησιμεύουν;»

Κ: «Όχι…όχι… αυτό είναι μετά. Τα κιλά μας νοιάζουν τώρα; Το θέμα είναι τι δέντρο μπορώ να φυτέψω απ' το κάθε είδος και μετά…»

Μ_Ο2: Σηκώνει χέρι. « Κύριε εμείς δε λάβαμε. Είπαμε ότι ανά 4m το κενό που είναι…. Είναι 4m.

Κ: «Στο έτσι (Δείχνει οριζόντια), ωραία. Στο έτσι όμως ταιριάζει; (Δείχνει κάθετα).

Μ_Ο2: Πάλι 4m θα είναι.

Κ: «Ακούω. Στην Ο2 το έχουμε λάβει υπόψιν τις αποστάσεις και τα κενά;»

Μ_Ο2: «Μήπως επειδή παίρνουμε οριζόντια. Μήπως κάθετα θα είναι 9 επειδή το πρώτο θα είναι κοινό;»

Κ: (Κίνηση χεριών : Δε ξέρω) Αυτό είναι το ερώτημα. Προσπαθήστε να βγάλετε μια άκρη. Οι υπόλοιποι είστε στο ίδιο σημείο; Καταλαβαίνετε τι λέμε; Ότι δεν είναι απλά αφαιρώ…»

Από το απόσπασμα αυτό γίνεται φανερό ότι οι μαθητές δε μπορούν να κατανοήσουν τι ακριβώς εννοεί ο καθηγητής τους. Ο καθηγητής κάνει συνεχώς ερωτήσεις που μένουν αναπάντητες και δημιουργούν περισσότερη σύγχυση στους μαθητές. Χαρακτηριστική είναι η ερώτηση μάλιστα για το αν χρησιμεύουν σε αυτό το σημείο τα κιλά που παράγει κάθε δέντρο.

Η αμηχανία και η δυσκολία των μαθητών ωθεί το καθηγητή να κάνει τη κρίσιμη ερώτηση «*Δηλαδή πώς να παραστήσω ένα δέντρο;*», ερώτηση την οποία φαίνεται ότι ήθελε να παροτρύνει τους ίδιους τους μαθητές να σκεφτούν και να θέσουν. Η ερώτηση αυτή ήταν καθοριστική για να ανοίξει ένας διάλογος για τη τοποθέτηση και τις αποστάσεις. Μια πρόταση από την ομάδα 2 ήταν να παραστήσουμε τα δέντρα με τελίτσες τοποθετώντας τα σε διάταξη τύπου Α (εικόνα 4.5). Η τοποθέτηση αυτή ουσιαστικά ήταν τοποθέτηση των κέντρων των κύκλων, της απεικόνισης του δέντρου.

Εικόνα 4.5

Καθώς η συζήτηση προχωρά μια μαθήτρια θέτει το προβληματισμό για το πόση έκταση θα καταλαμβάνει κάθε δέντρο. Ο καθηγητής με έναυσμα αυτό το προβληματισμό προσπαθεί να τους παροτρύνει να κατανοήσουν ότι ένα δέντρο πρέπει να έχει κάποια έκταση και δε γίνεται να παρασταθεί με τελίτσες. Για μια ακόμα φορά όμως οι μαθητές δε μπορούν να κάνουν το επόμενο βήμα μόνοι τους.

Μ_Ο1: «Να ρωτήσω κάτι; Δε πρέπει να ξέρουμε πόσο χώρο καταλαμβάνει κάθε δέντρο;»

Κ: «Δε ξέρω… εσείς; Στην ουσία ξέρουμε; Μας είπε ο γεωπόνος;»

Μ_Ο1: «Όχι.»

Κ: «Δε μας είπε;»

Μ_Ο2: 4m.

Κ: «Το ένα θέλει 4m…Το ένα από το άλλο..»

Μ_Ο1: «Δε ξέρω.»

Φαίνεται σα να μην καταλαβαίνουν οι μαθητές.

Κ: «Όχι… όχι. Έχει ενδιαφέρον η ερώτηση…. Από αυτό μπορώ να συμπεράνω τι έκταση πρέπει να του δώσουμε;»

Μ_Ο1: «Αφού είναι και κορμός. Κορμός – Απόσταση – Κορμός.

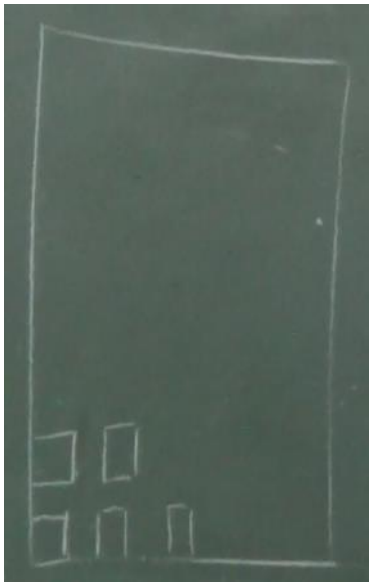
Κ: «Δε ξέρω. Κάντε κάποιο σχήμα.»

Η πρώτη διδακτική ώρα έχει ήδη τελειώσει και με το χτύπημα του κουδουνιού ο καθηγητής βλέποντας ότι οι μαθητές χρειάζονται λίγη ακόμα βοήθεια ξαναθέτει το βασικό ερώτημα της απεικόνισης λίγο εμπλουτισμένο: *« Τι σχήμα θα έχει το κάθε δέντρο το οποίο θα δίνει τα χαρακτηριστικά που θέλω; Τι σχήμα πρέπει να έχει κύκλο; Τετράγωνο; Τρίγωνο; Τι σχήμα;…. Τι θέλω; Τις αποστάσεις. Να φαίνονται οι αποστάσεις.»* Μια μαθήτρια τότε της ομάδας 1 αμέσως αποκρίνεται ότι θα είναι μικρά ορθογώνια και ο καθηγητής χωρίς να απορρίψει τον ισχυρισμό της σχεδιάζει ορθογώνια στην κάτοψη το ένα δίπλα στο άλλο (Εικόνα 4.6). Η μαθήτρια παρεμβαίνει άμεσα τότε και ζητά να τοποθετήσει τα ορθογώνια μακριά το ένα από το άλλο (Εικόνα 4.7).

Αμέσως έρχεται δεύτερη πρόταση για απεικόνιση του δέντρου στη κάτοψη από άλλη μαθήτρια της ομάδας 1, η οποία προτείνει να σχεδιάσουν ένα δέντρο (Εικόνα 4.8). Η μαθήτρια μάλιστα εξηγεί προφορικά ότι οι αποστάσεις θα είναι

2+2. Δείχνει με τα χέρια της ότι θα είναι 2m από τον κορμό μέχρι το τέλος του φυλλώματος και 2m από την αρχή μέχρι τον κορμό.

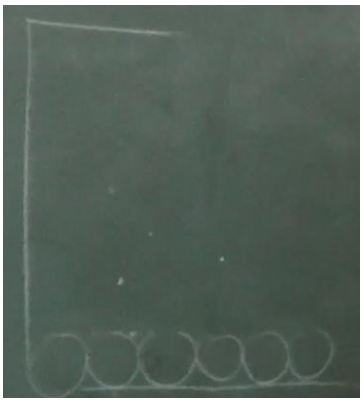
Εικόνα 4. 4



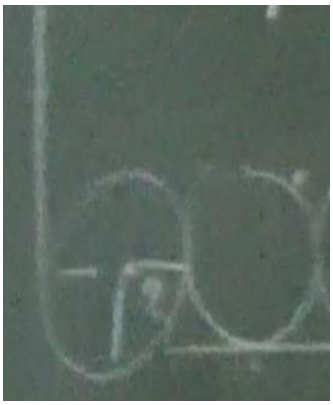
Εικόνα 4. 5

Εικόνα 4. 6

Η πρόταση της μαθήτριας αυτής σε δευτερόλεπτα μετατρέπεται σε ερώτηση από το καθηγητή: *«Ποιο σχήμα είναι αυτό που έχει 2m γύρω γύρω;»* , ο οποίος καθώς θέτει το ερώτημα μηχανικά κινεί τα χέρια του στο σχήμα του κύκλου. Άμεσα ένας μαθητής της ομάδας 1 ψιθυρίζει ότι θα είναι κύκλος το βέλτιστο σχήμα και το επιβεβαιώνει κατευθείαν ο καθηγητής, σχεδιάζοντας κύκλους στο πίνακα. Παράλληλα τοποθετεί τις αποστάσεις (Εικόνα 4.9 & 4.10). Μάλιστα ο καθηγητής επισημαίνει προφορικά ότι στο ορθογώνιο αυτό που δεν φαινόταν ήταν ο κενός χώρος που έμενε και σηκώνει ένα μαθητή να το δείξει (Εικόνα 4.11). Το γεγονός αυτό τονίζει τέλος ο καθηγητής ότι μας αποκλείει τη μέθοδο των εμβαδών και έτσι ολοκληρώνεται η πρώτη διδακτική ώρα.



Εικόνα 4. 7

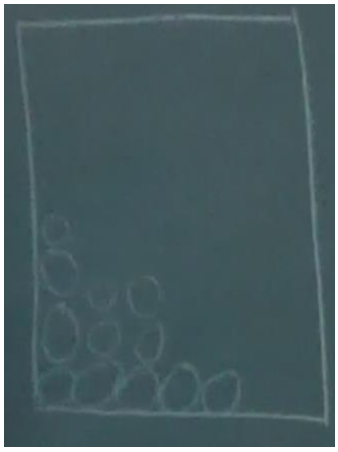


Εικόνα 4. 8

Εικόνα 4. 9

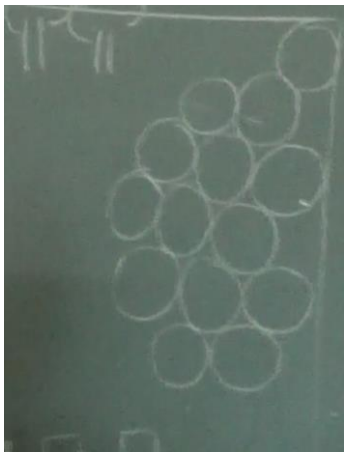
Η δεύτερη ώρα ξεκινά με το καθηγητή να έχει ήδη μοιράσει καπάκια ίδιου μεγέθους στα θρανία και τη προτροπή του: *« Αφού καταλήξαμε ότι με κύκλο ταιριάζει το σχήμα του δέντρου έχετε αυτά τα καπάκια να σκεφτείτε πως μπορώ να τα διατάξω ώστε να χάνω όσο το δυνατόν γίνεται λιγότερο σε ένα ορθογώνιο. Το ορθογώνιο μπορεί να είναι ας πούμε και το θρανίο σας ή η εικόνα, το χαρτί σας.»*

Οι ομάδες αρχίζουν να πειραματίζονται για να βρουν πιθανές διατάξεις των κύκλων. Τα πρώτα δευτερόλεπτα τα καπάκια δε κεντρίζουν το ενδιαφέρον των ομάδων με τον ίδιο τρόπο. Συγκεκριμένα τα μέλη της ομάδας ένα αρχικά τα αγνοούν και αρχίζουν να σχεδιάζουν κύκλους στο χαρτί της, η ομάδα δυο τα χρησιμοποιεί για να φτιάξει και αυτή κύκλους, ενώ η ομάδα τρία επιλέγει να τα τοποθετήσει στο θρανίο και όχι στην κάτοψη. Γρήγορα όμως γίνονται εργαλείο πειραματισμού όλων. Και οι τρεις ομάδες είδαν τη διάταξη τύπου Α, την «*Απλή*» όπως τη χαρακτήρισαν (Εικόνα 4.12)και έφτασαν κοντά και στη διάταξη τύπου Β αλλά μόνο η ομάδα ένα τη διέκρινε και την πρότεινε στο πίνακα(Εικόνα 4.13). Μάλιστα για να γίνει πιο φανερή η τριγωνική ο καθηγητής ζήτησε από μια μαθήτρια να γεμίσει το σχήμα της και με άλλους κύκλους και πια έγινε εμφανής από όλες τις ομάδες (Εικόνα 4.14).



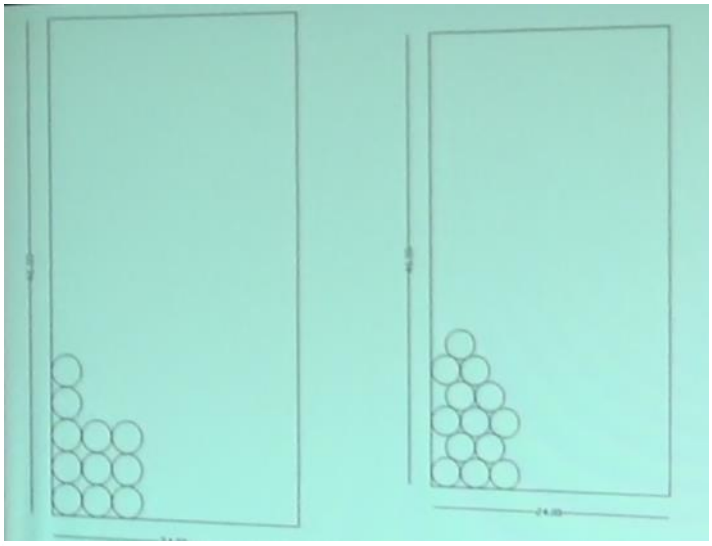
Εικόνα 4. 10

Εικόνα 4. 11



Εικόνα 4. 12

Ο καθηγητής δείχνοντας στο προτζέκτορα τις δυο διατάξεις (Εικόνα 4.15) παροτρύνει τους μαθητές να ξεκινήσουν από τη πρώτη διάταξη για να δουν πόσα δέντρα χωράει και στη συνέχει να ασχοληθούν με τη δεύτερη. Παράλληλα μοιράζει στους μαθητές κατόψεις με τη τριγωνική και τετραγωνική διάταξη που φαίνονται στο προτζέκτορα.

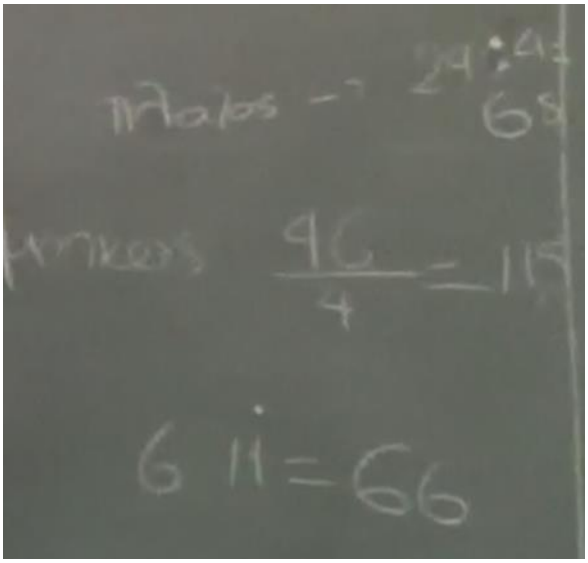


Εικόνα 4.15

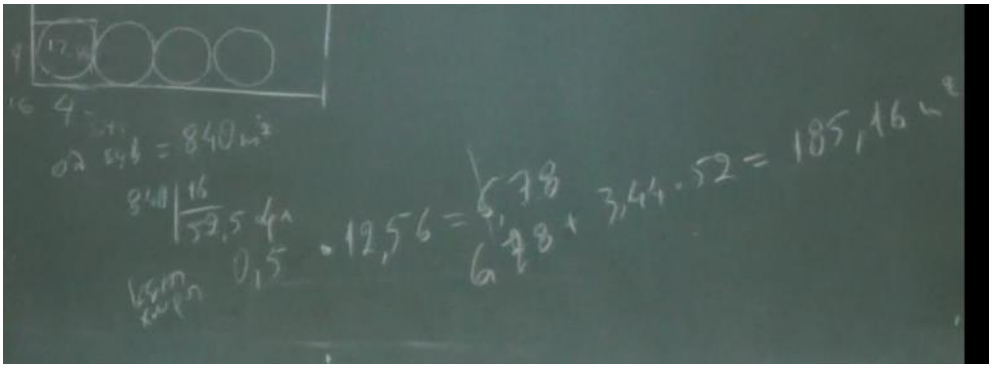
- <u>Υπολογισμός Κύκλων Για Τετραγωνική Διάταξη</u>

Οι ομάδες 2 και 3 άμεσα έκαναν τον υπολογισμό των κύκλων που χωράνε στη τετραγωνική διάταξη. Και οι δυο ομάδες μάλιστα αρχικά έφτασαν στη λύση και συμφώνησαν ότι χωράνε 66 κύκλοι με πρακτικό τρόπο. Η ομάδα 2 ασχολήθηκε αρχικά με το σχήμα, έφτιαχνε κύκλους και μέτραγε αποστάσεις και η ομάδα 3 τοποθετούσε καπάκια στο θρανίο της. Το αποτέλεσμα όμως αυτό και οι δυο ομάδες το εξήγησαν, το τεκμηρίωσαν και με μαθηματική λογική. Συγκεκριμένα βρήκαν πόσοι κύκλοι χωράνε κατά μήκος και πόσοι κατά πλάτος και πολλαπλασίασαν τους δυο αριθμούς για να βρούνε το σύνολο.

Η ομάδα 1 εργάστηκε τελείως διαφορετικά για αυτή τη διάταξη. Θέλησε να βρει το κενό ανεκμετάλλευτο χώρο και από εκεί να δει πόσοι κύκλοι χωράνε. Αρχικά είπαν ότι με αυτή τη διάταξη χωράνε 57, αλλά ότι ακόμα δεν είχαν τελειώσει τους υπολογισμούς τους. Η συμφωνία του αποτελέσματος των άλλων δυο ομάδων ότι χωράνε 66, τους ώθησε να ξανακάνουν τους υπολογισμούς τους χωρίς να αλλάξουν στρατηγική επίλυσης. Μετά από αρκετούς υπολογισμούς συμφώνησαν ότι οι κύκλοι θα είναι 66 αλλά χωρίς να έχει λογική η σκέψη τους. Προσπάθησαν να βρουν το κενό χώρο του κτήματος και δεν επικεντρώθηκαν στην εύρεση του αριθμού των κύκλων. Ξεκίνησαν παρατηρώντας ότι σε αυτή τη διάταξη ο κάθε κύκλος περικλείεται από ένα τετράγωνο, αλλά στη πορεία ασχολήθηκαν με το εμβαδόν του χωρίου και των κύκλων και δεν κατάφεραν να κάνουν μια σωστή πορεία σκέψης. Συγκεκριμένα η μαθήτρια που παρουσίασε τη λύση είπε: «Σκεφτήκαμε να βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου που είναι αυτό (Δείχνει στο πίνακα). Υποθέσαμε ότι είναι 4 εδώ και 4 εδώ γιατί είναι 2 και 2. … Βρήκαμε ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι 12,56 και του τετραγώνου 16. Η διαφορά είναι 3,44… και μετά κάναμε το 840 που είναι το ολικό εμβαδόν δια του 16 και βρήκαμε 52,5. Το 0,5 το πολλαπλασιάσαμε επί 12,56…Επειδή είναι δέντρα και είναι ακέραιος αριθμός είπαμε ότι το 0,5 είναι κενός χώρος και το πολλαπλασιάσαμε με 12,56…». Και συνεχίζει με αρκετούς υπολογισμούς που δεν έχουν κάποια μαθηματική λογική (Εικόνα 4.16 & 4.17)



Εικόνα 4.16



Εικόνα 4.17

- <u>Υπολογισμός Κύκλων Για Διάταξη Τύπου Β</u>

Η διάταξη τύπου Β ήταν αυτή που δυσκόλεψε και προβλημάτισε κυρίως τις ομάδες. Με αυτή ασχολήθηκαν μόνο οι ομάδες 2 και 3 σε ένα πρώτο επίπεδο καθώς υπήρξε έλλειψη χρόνου, χωρίς όμως να ολοκληρώσουν τη μαθηματική λύση. Από τη πρώτη στιγμή που ξεκίνησαν να δουλεύουν πάνω σε αυτή διατυπώθηκαν ερωτήματα όπως: «Μαθητής Ομάδας 2: « Είναι σίγουρα σωστή αυτή η διάταξη;» ή σκέψεις όπως ότι θα μπορούσαν να μετρήσουν πόσοι κύκλοι χωράνε, ακόμα και εικασίες ότι θα είναι σίγουρα

λιγότερα. Ο καθηγητής όταν διαπίστωσε αυτό το κλίμα προσπάθησε να τους προτρέψει να το βρουν με κάποιο σχέδιο επίλυσης.

Οι ομάδες δε κατάφεραν όμως στο μικρό χρονικό διάστημα που είχαν να ολοκληρώσουν με επιτυχία τη δραστηριότητα. Τα τελευταία μόνο λεπτά διατυπώθηκαν σκέψεις, παρατηρήσεις και εικασίες που είχαν κάνει οι ομάδες για τη διάταξη αυτή. Παρατήρησαν ότι σίγουρα στη πρώτη γραμμή θα χώραγαν έξι κύκλοι και ότι μάλλον μετά θα χώραγε ένας λιγότερος. Επιπλέον τονίστηκε ότι θα είχαμε πιθανόν περισσότερες σειρές κύκλων σε αυτή τη διάταξη καθώς οι σειρές μπαίνουν πιο μέσα από το πώς τοποθετούνται στη διάταξη τύπου Α.

4.2.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση

Η μορφή της παρούσας δραστηριότητας σε συνδυασμό με το γενικό ύφος του μαθήματος ανέδειξαν το διερευνητικό χαρακτήρας της παρέμβασης. Από το πρώτο λεπτό της που μοιράστηκαν τα φύλλα εργασίας ο καθηγητής επισήμανε ότι οι μαθητές θα εργαστούν χωρίς την καθοδήγησή του (Open Inquiry), και ότι μέσα από συνεργασία στις ομάδες τους θα επέλθει η λύση. Τοποθέτησε δηλαδή, τους μαθητές στο κέντρο του μαθήματος και τους έθετε ρόλο διεκπεραιωτή μιας προβληματικής κατάστασης. Στη πορεία του μαθήματος βέβαια αναδείχθηκε η ανάγκη να επέμβει ο καθηγητής, συμβάλλοντας καθοριστικά ώστε οι μαθητές να ξεπεράσουν κάποια εμπόδια *(*Coupled Inquiry*)*. Όμως και σε αυτά τα σημεία η συμβολή του ήταν μέσα από καίρειες ερωτήσεις, στοχεύοντας στο προβληματισμό των μαθητών.

Τα πρώτα πέντε λεπτά έχουν κυλήσει, οι ομάδες έχουν διαβάσει την εκφώνηση και η αμηχανία και ο προβληματισμός που επικρατεί είναι πλέον φανεροί. Η αίσθηση αυτή όμως γρήγορα μετατρέπεται σε κίνητρο για εμπλοκή και εύρεση

της λύσης. Η δραστηριότητα, όπως φαίνεται, έχει κερδίσει το ενδιαφέρον των περισσότερων μαθητών και ο πρώτος στόχος της διερευνητικής μάθησης έχει ήδη κατακτηθεί. Οι μαθητές ανέλαβαν αμέσως ρόλο και την ευθύνη για την πορεία του μαθήματος και άρχισαν άλλοι περισσότερο και άλλοι λιγότερο, να εργάζονται μέσα στις ομάδες τους για την εύρεση της λύσης. Τα μέλη συζητούν, εκφράζουν σκέψεις και προβληματισμούς, άλλους τους δέχονται και άλλους τους απορρίπτουν, στοιχεία που μας δείχνουν ολοφάνερα ότι η διερεύνηση γεννήθηκε ως ανάγκη στους μαθητές ώστε να εμπλακούν με τη παρούσα προβληματική κατάσταση.

- Διερεύνηση και «Κόσμος των Μαθηματικών» - «Πραγματικός Κόσμος»

Η διερεύνηση από μόνη της έθετε τους μαθητές σε ρόλο επαγγέλματος. Παρουσίαζε μια προβληματική κατάσταση που μπορεί να συμβεί σε έναν επαγγελματία, ο οποίος καλείται να πάρει απόφαση. Συγκεκριμένα συνδυάζει το επάγγελμα του γεωπόνου όπως έχουμε αναφέρει, και τη βέλτιστη διάταξη δέντρων με τη βέλτιστη τοποθέτηση κύκλων σε ένα ορθογώνιο. Το στοιχείο αυτό της δραστηριότητας όμως δε φάνηκε να κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι μαθητές το προσπέρασαν και ξεκίνησαν να λύνουν ένα πρόβλημα καθαρά μαθηματικό. Το γεγονός αυτό μάλιστα γίνεται φανερό με το που ξεκινάει η δραστηριότητα και οι μαθητές δεν προβληματίζονται για το σχήμα αναπαράστασης ενός δέντρου στο επίπεδο.

- Διερεύνηση και Συνεργασία

Τα μέλη των ομάδων 1 και 2 αξιοποίησαν με τον καλύτερο τρόπο τις αρχές και αξίες της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης οι μαθητές συνεργάζονταν, αντάλλασσαν ιδέες, απόψεις, προβληματισμούς. Οι πιο «δυνατοί» μαθητές προσπαθούσαν να εξηγήσουν στα πιο «αδύναμα» μέλη της ομάδας τους τη σκέψη τους και να τους υποστηρίξουν ενισχυτικά, ώστε όλα τα μέλη να κατανοήσουν το πρόβλημα και να συμμετάσχουν στη εκπαιδευτική διαδικασία.

Επιπλέον θετικό στοιχείο που παρατηρήθηκε στις ομάδες αυτές ήταν η έλλειψη - απουσία φόβου να εκφράσουν όλα τα μέλη τις ιδέες τους και τις απόψεις τους, ανεξάρτητα από το γνωστικό τους επίπεδο. Το κάθε μέλος παρουσίαζε στους συμμαθητές του τις σκέψεις του, οι οποίες συνήθως ή βελτιωνόταν ή συμπληρωνόταν από τη σκέψη κάποιου άλλου μέλους της ομάδας, για να εξάγουν κάποιο συμπέρασμα. Η αλληλουχία και ο συνδυασμό των σκέψεων των μελών ήταν αυτά που οδηγούσαν τα μέλη στην εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος.

Από την άλλη μεριά η ομάδα 3, η οποία αποτελούταν από δυο αγόρια και δυο πιο «αδύναμα» στα μαθηματικά κορίτσια, συνεργάστηκε σε ελάχιστο βαθμό. Την πρώτη ώρα τα αγόρια καθόντουσαν απέναντι από τα κορίτσια και παρά τις αρκετές προτροπές του καθηγητή για συνεργασία, αυτοί δεν αντάλλαξαν λέξη. Οι μαθήτριες δυσκολεύονταν να μπουν στο πνεύμα της δραστηριότητας και μάταια ήλπιζαν σε κάποια βοήθεια από τους συμμαθητές τους. Τη δεύτερη ώρα ο καθηγητής σε μια ύστατη προσπάθεια αντιστροφής του κλίματος έβαλε τους μαθητές να καθίσουν χιαστί, αγόρι – κορίτσι εναλλάξ, όμως ούτε αυτό επέφερε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Τα δυο αγόρια ορισμένες φορές συζητούσαν κάτι και όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν οι κοπέλες, αφού δεν μπορούσαν να βοηθήσουν κρατούσαν σημειώσεις.

- **Διερεύνηση και Λύση Προβλήματος**

Στη παρούσα δραστηριότητα τρία ήταν τα βασικά σημεία που γίνεται φανερή η αξία και η ανάγκη εμπλοκής με τη διερευνητική διαδικασία, ώστε να επιλύσουν οι ομάδες το πρόβλημα. Το πρώτο βασικό σημείο εντοπίζεται στην εύρεση κατάλληλου σχήματος μοντελοποίησης, ενός δέντρου σε μια κάτοψη. Η ανάγκη αυτή δεν αναδείχθηκε από τους συμμετέχοντες στις ομάδες, αλλά μέσα από την προτροπή και τη συμβολή του καθηγητή τους. Οι μαθητές δεν προβληματίστηκαν καθόλου για το πώς θα αναπαραστήσουν ένα δέντρο σε μια κάτοψη και άρχισαν να διερευνούν και να καταστρώνουν αλγοριθμικές –

μαθηματικές λύσεις. Η διερεύνηση του βέλτιστου σχήματος έγινε στο πίνακα σε συνεργασία με τον καθηγητή τους από όλους τους μαθητές.

Παρόλο το γεγονός ότι η εύρεση του βέλτιστου σχήματος μοντελοποίησης δεν παρουσιάστηκε ως ανάγκη στους μαθητές για την εύρεση της λύσης, τους προβλημάτισε αρκετά. Αναφέρθηκαν αρκετές προτάσεις για τη μοντελοποίηση του δέντρου, όπως τελεία, τετράγωνο, η ζωγραφιά ενός κανονικού δέντρου, σχήματα τα οποία μέσα από συνεργασία και διάλογο απορρίφθηκαν και κατέληξαν στο κύκλο. Πρέπει να επισημάνουμε βέβαια ότι η επιλογή του κύκλου δεν αιτιολογήθηκε με μαθηματικά επιχειρήματα. Η βασική ιδιότητα του (σύνολο σημείων που ισαπέχει από ένα σταθερό σημείο), μπορεί να οδήγησε τους μαθητές στην επιλογή, χωρίς όμως αυτό να τονιστεί ρητά κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

Το δεύτερο σημείο ήταν η εύρεση πιθανών διατάξεων των κύκλων (δέντρων), η οποία ήλθε μέσα από πειραματισμό και αναζήτηση. Οι μαθητές εφοδιασμένοι με καπάκια από μπουκάλια ξεκινούν τις ενέργειες αναζήτησης. Τοποθετούσαν τα καπάκια με αποστάσεις ή χωρίς είτε σε ορθογώνια είτε σε διαγώνια διάταξη, άναρχα στο χαρτί ή στο θρανίο τους. Οι ενέργειες τους αυτές σε συνδυασμό με τη παρουσίαση των σκέψεων τους στο πίνακα οδήγησαν στις δυο διατάξεις.

Το τελευταίο σημείο σε αυτή τη παρέμβαση ήταν η εύρεση της μαθηματικής λύσης του προβλήματος. Ο περιορισμένος χρόνος που είχε απομείνει επέτρεψε στους μαθητές να προβληματιστούν μόνο για τη διάταξη τύπου Α και να κάνουν μερικές σκέψεις για τη διάταξη τύπου Β.

4.3 Ανάλυση 2ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Α

4.3.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση Προβλήματος

Η δεύτερη παρέμβαση του εκπαιδευτικού Α ξεκινά σαν συνέχεια της προηγούμενης, με τον ίδιο τον εκπαιδευτικό να τονίζει ότι σε αυτή τη δραστηριότητα θα ασχοληθούν καθαρά με το μαθηματικό κομμάτι του προβλήματος. Χαρακτηριστικά ο καθηγητής ανέφερε: « Ξεχνάμε ότι είναι δέντρα ή οτιδήποτε σχετικό και το πρόβλημά μας είναι πια γεωμετρία. Είναι πιο μαθηματικά και είναι αυτό εδώ.» Μοιράζονται στις ομάδες εργασίας οι δυο πιθανές διατάξεις και τους τίθεται το ερώτημα: «Ποια από τις δυο θα χωρέσει περισσότερα δέντρα… περισσότερους κύκλους συγνώμη με αυτά τα δεδομένα. Οι κύκλοι έχουν ακτίνα 2. Λοιπόν από εδώ και πέρα μόνοι σας…». Ο καθηγητής προβάλει τις δυο διατάξεις στο προτζέκτορα και οι ομάδες αρχίζουν να διερευνούν τη μαθηματική καθαρά πια λύση της δραστηριότητας.

- **Υπολογισμός Κύκλων Για Διάταξη Τύπου Α**

Οι ομάδες αφού εργάστηκαν για 17 περίπου λεπτά παρουσίασαν στο πίνακα τις προτεινόμενες λύσεις τους για τη διάταξη αυτή. Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι η λύση για τη διάταξη τύπου Α είχε δοθεί στην πρώτη παρέμβαση. Παρόλα αυτά οι ομάδες 1 και 3 δεν έφτασαν άμεσα σε λύση και παρουσιάστηκε πάλι μια σύγχυση με το εμβαδόν, σημείο που είχε συζητηθεί αρκετά τη προηγούμενη φορά. Αντίθετα τα μέλη της ομάδας 2 σε λιγότερο από πέντε λεπτά ολοκλήρωσαν τη στρατηγική επίλυσής τους για αυτή τη διάταξη και ήταν και η ομάδα που επιχειρηματολόγησε ώστε να πείσει τις άλλες ομάδες για το λάθος τους.

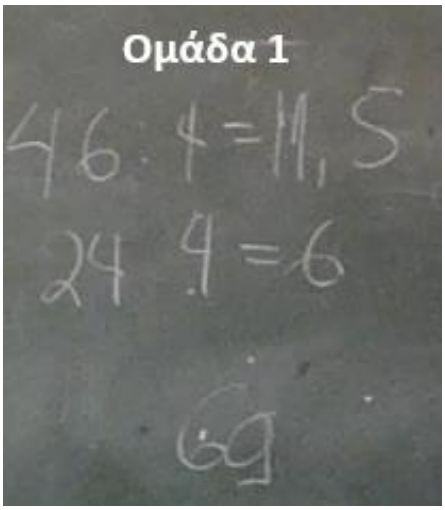
Τη λύση της παρουσίασε πρώτη στο πίνακα η ομάδα 3, η οποία σκέφτηκε ότι στη διάταξη αυτή κάθε κύκλος εγγράφεται σε ένα τετράγωνο. Στη συνέχεια υπολόγισε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου

και για την εύρεση του πλήθους των κύκλων έκαναν τη διαίρεση εμβαδόν ορθογωνίου δια εμβαδόν τετραγώνου (Εικόνα 4.19).

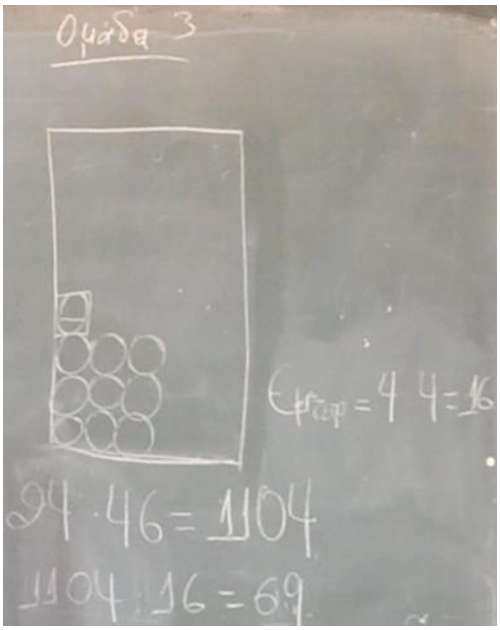
Ακολούθησε η ομάδα 2, η οποία εργάστηκε ανάλογα με την προηγούμενη φορά. Βρήκαν πόσοι κύκλοι χωράνε κατά μήκος και πόσοι κατά πλάτος και πολλαπλασίασαν τους δυο αριθμούς για να βρουν το πλήθος των κύκλων που γεμίζουν την επιφάνεια. Συγκεκριμένα διαίρεσαν τις διαστάσεις του ορθογωνίου με τη διάμετρο του κύκλου και πολλαπλασίασαν τα αποτελέσματά τους. Παράλληλα διαπίστωσαν ότι στη πλευρά των 46m χάνονται 2m χωρίς εκμετάλλευση καθώς βρήκαν ότι 46/4=11,5, άρα οι κύκλοι που χωράνε σε αυτή τη πλευρά είναι 11 (Εικόνα 4.20).

Η ομάδα 1, έχοντας απαλλαγεί από τη σύγχυση τις εύρεσης του κενού ανεκμετάλλευτου χώρου από τη προηγούμενη φορά, εστίασε τη λύση της στο να βρει πόσοι κύκλοι χωράνε κατά μήκος και πόσα κατά πλάτος και πολλαπλασίασε τα δυο αποτελέσματα. Το λάθος της εντοπίζεται στο γεγονός ότι δε παρατήρησε όπως η ομάδα 2 ότι δε γίνεται να χωράνε 11,5 κύκλοι στη μια διάσταση, άρα ότι έπρεπε να πάρει το ακέραιο αποτέλεσμα της διαίρεσης (Εικόνα 4.18).

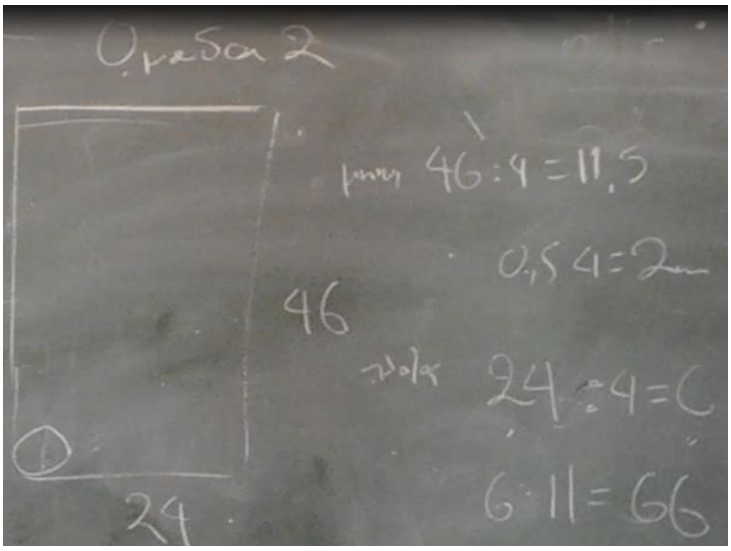
Έχοντας παρουσιάσει οι τρεις ομάδες τις λύσεις τους ο καθηγητής τους ζήτησε να επιχειρηματολογήσουν για το ποια θεωρούν σωστή ώστε να καταλήξουν σε αποτέλεσμα. Αμέσως ένας αρκετά δραστήριος μαθητής της ομάδας 2 σηκώνει το χέρι του και αναφέρει ότι η δική του ομάδα έχει το σωστό αποτέλεσμα καθώς οι άλλες δυο ομάδες τοποθέτησαν κάποιο κύκλο στα δυο μέτρα που περισσεύουν και εκεί δε μπορεί να μπει κάποιος. Επισημαίνει ότι στο κενό αυτό μπαίνει μισό κύκλος που δε πρέπει να μετρήσουν, καθώς με τη καταμέτρηση του μισού μετρήθηκαν παραπάνω έξι μισοί κύκλοι, δηλαδή τρεις ολόκληροι. Η θέση και η επιχειρηματολογία του συγκεκριμένου μαθητή έπεισε τις άλλες δυο ομάδες, οι οποίες δέχτηκαν το λάθος σκεπτικό τους και προχώρησαν στη διάταξη τύπου Β.



Εικόνα 4. 13: Ομάδα 1



Εικόνα 4. 14: Ομάδα 3



Εικόνα 4. 15: Ομάδα 2

- **Προβληματισμοί και Σκέψεις Για Τη Διάταξη τύπου Β.**

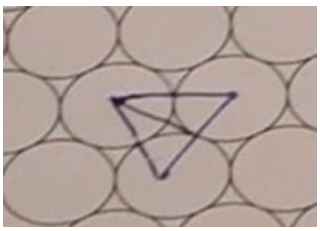
Οι ομάδες εργάστηκαν σχεδόν δυο διδακτικές ώρες μόνες τους πάνω σε αυτή τη διάταξη. Ο καθηγητής ήταν απλός παρατηρητής και ελάχιστα ήταν τα σημεία που επενέβη. Όλες οι ομάδες ξεκίνησαν το γέμισμα του ορθογώνιο από τη πλευρά με τα 24m και καμία δε προβληματίστηκε για το τι γίνεται αν ξεκινήσουμε

το γέμισμα από την άλλη πλευρά σε αυτή τη διάταξη. Θα εστιάσουμε τη προσοχή μας στην ομάδα 2 καθώς ήταν αυτή με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον σκέψεων και ιδεών.

- <u>Ομάδα 1</u>

Η ομάδα 1 δυσκολεύτηκε αρκετά να αντιμετωπίσει τη δραστηριότητα αυτή. Τα μέλη άμεσα παρατήρησαν ότι ο αριθμός των κύκλων σε κάθε σειρά δεν θα είναι ο ίδιος και προσπάθησαν να δουν τι γίνεται με τις σειρές. Δυστυχώς δε μπόρεσαν να κάνουν κάποια σκέψη που θα τους βοηθούσε να προχωρήσουν.

Βέβαια μέσα από πειραματισμό και σχέδια που έκαναν στο χαρτί τους παρατήρησαν το τριγωνικό μοτίβο (Εικόνα 4.21) χωρίς να μπορέσουν να προχωρήσουν παραπέρα. Έφεραν το ύψος το οποίο όπως ανέφεραν το βρήκαν 4m, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα με το μυαλό. Έπειτα από παρότρυνση του παρατηρητή εφάρμοσαν τις πράξεις και το βρήκαν $2\sqrt{3}$m. Στην ομάδα αυτή παρατηρήθηκε δυσκολία τόσο στις πράξεις όσο και στη μαθηματική λογική για να μπορέσουν να εξάγουν κάποιο αποτέλεσμα.

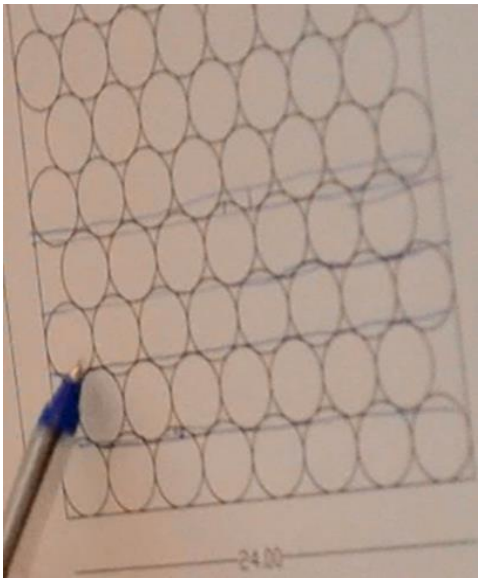


Εικόνα 4.21

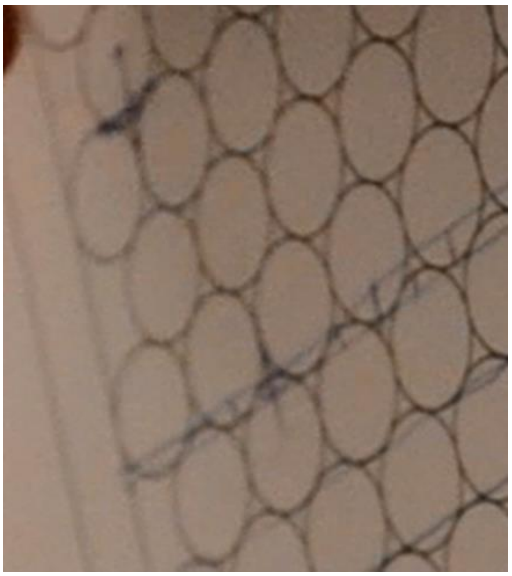
- <u>Ομάδα 2</u>

Η ομάδα 2 αμέσως ξεπερνά το εμπόδιο του πόσοι κύκλοι χωράνε σε κάθε σειρά. Έχει παρατηρήσει, αλλά και έχει επιχειρηματολογήσει μέσα στην ομάδα ότι στις ζυγές γραμμές χωράει ένας λιγότερος κύκλος από ότι στις μονές. Τονίζουν ότι στις ζυγές γραμμές χάνουν 2m στην αρχή, και άρα χωράει ένας κύκλος λιγότερος από ότι στις μονές καθώς το κενό που περισσεύει δεν τους επιτρέπει την τοποθέτηση άλλου κύκλου.

Το ενδιαφέρον τους λοιπόν άμεσα εστιάζεται στο πόσες σειρές χωράνε στο ορθογώνιο. Προβληματίζονται για το γεγονός ότι οι κύκλοι σε αυτή τη διάταξη από σειρά σε σειρά μπαίνουν πιο μέσα. Ξεκινούν να κάνουν κάποια σκέψη γύρω από τη διαγώνιο αλλά δε τους βγαίνει και αποφασίζουν να εκμεταλλευτούν τη κάτοψη που τους έχει δοθεί. Αρχικά τραβούν γραμμές για να δουν πόσο πιο μέσα μπαίνουν οι κύκλοι (Εικόνα 4.22 & Εικόνα 4.23).



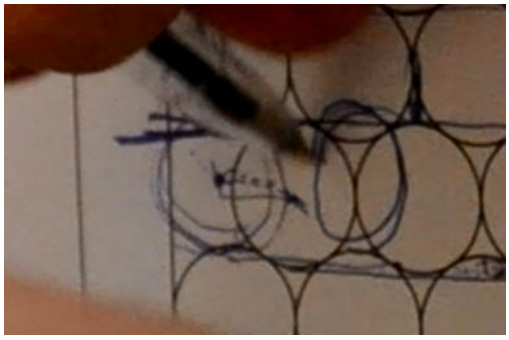
Εικόνα 4. 16



Εικόνα 4. 17

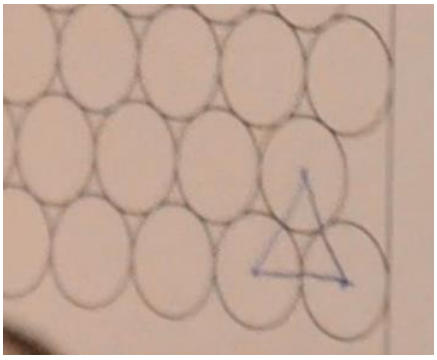
Η σκέψη τους προχωρά προτείνοντας να βρουν τις θέσεις των κέντρων των κύκλων ώστε να δουν πόσο μπαίνουν πιο μέσα τα κέντρα της δεύτερης γραμμής. Ένα μέλος της ομάδας, αμέσως μόλις μίλησαν για κέντρα τόνισε ότι τους ενδιαφέρει το ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο του κύκλου στης 2ης γραμμής που τέμνει κάθετα τη διάκεντρο των κύκλων της 1ης γραμμής, τμήμα το οποίο το σχεδιάζει αντί να το περιγράψει με λόγια. Παράλληλα σχεδιάζει και μια κάθετη γραμμή όπως αυτή φαίνεται παραπάνω και ισχυρίζεται ότι η γραμμή αυτή το διχοτομεί. Έχοντας φτάσει πολύ κοντά στο κλειδί της λύσης, η ομάδα διακρίνει ότι κάτι γίνεται με τρίγωνα και αμέσως χωρίς να εξετάσει αυτή τη στρατηγική επίλυσης την απορρίπτει.

Έχοντας προσπεράσει την ιδέα που θα τους βοηθούσε να προχωρήσουν εικάζουν ότι σε αυτή τη διάταξη είναι λιγότεροι οι κύκλοι που χωράνε γιατί χάνετε όπως αναφέρουν το ευθύγραμμο τμήμα που σχεδίασαν παραπάνω. Παράλληλα προσπαθούν να δουν που θα ήταν οι κύκλοι τις 2ης γραμμής αν είχαν τη διάταξη τύπου Α (Εικόνα 4.24).

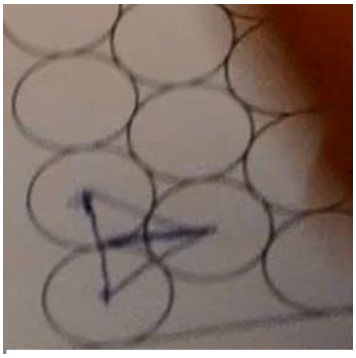


Εικόνα 4.24

Έχοντας περάσει μερικά λεπτά σκέψης και χωρίς η σκέψη τους να προχωρά ο μαθητής που είχε αναφέρει την ιδέα για το τρίγωνο, παίρνει ένα καθαρό χαρτί και σχεδιάζει το τριγωνάκι (Εικόνα 4.25). Αναφέρει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο με πλευρά δυο και επισημαίνει ότι δε ξέρει που θα τους οδηγήσει αλλά μπορεί να βοηθήσει. Τα μέλη της ομάδας σκέφτονται την ιδέα του συμμαθητή τους, χωρίς όμως να συμφωνούν όλοι μεταξύ τους, άλλοι λένε ότι δεν έχει καμία σχέση με την απόσταση που θέλουν να βρουν και άλλοι ότι έχει. Ο μαθητής που επέμενε για το κενό φέρνει το ύψος του τριγώνου (Εικόνα 4.26).

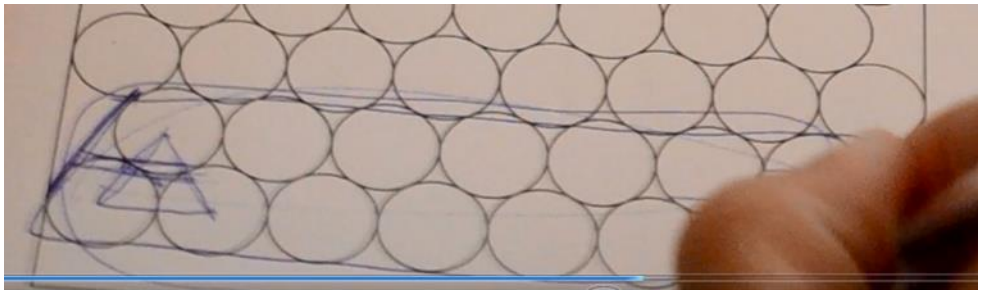


Εικόνα 4.25



Εικόνα 4.26

Μη έχοντας κάποιο πλάνο επίλυσης και μαζεύοντας παρατηρήσεις και εικασίες που δεν μπορούν να συνδέσουν για να προχωρήσουν αλλάζουν πάλι στρατηγική επίλυσης. Αυτή τη φορά στρέφονται σε ένα παραλληλόγραμμο (Εικόνα 4.27) , που όπως λένε σχηματίζεται από τις δυο σειρές κύκλων, σχέδιο που βρίσκει αντίθετους κάποια μέλη από την ομάδα. Οι δυο παράλληλες πλευρές του σχήματος που εστιάζουν περνάν τελικά από τα κέντρα των κύκλων και τονίζουν ότι έχει ύψος δυο ακτίνες άρα 4m. Έτσι θεωρούν ότι αν βρουν το ύψος και λάβουν υπόψιν τους το 2m που χάνουν στην αρχή θα μπορέσουν να δουν πόσα παραλληλόγραμμα χωράνε, άρα πόσες δυάδες γραμμών.



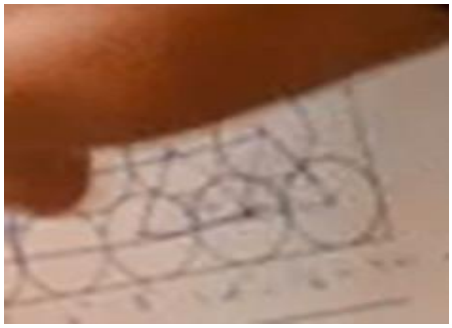
Εικόνα 4. 18

Εικόνα 4. 19

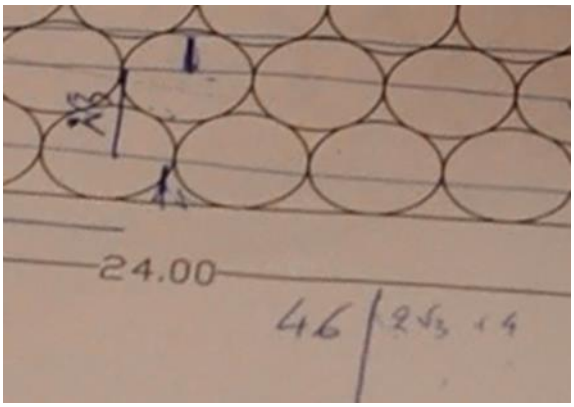
Στο σημείο αυτό ο καθηγητής για να τους αποτρέψει από ένα λάθος αλλά και να τους βοηθήσει να κινηθούν πιο σωστά παρεμβαίνει ενισχυτικά. Μέσα από μια μικρή συνομιλία τα μέλη διαπιστώνουν από μόνα τους το λάθος της σκέψης τους για το μήκους του ύψους και ξεκινούν να κάνουν υπολογισμούς για το ύψος (Εικόνα 4.28).

Άμεσα το τραπέζιο τους δημιουργεί προβλήματα αντί να τους διευκολύνει και αποφασίζουν να στρέψουν ξανά τη προσοχή τους στο ισόπλευρο τρίγωνο. Ο διάλογος και η εναλλαγή ιδεών τους κάνει να δουν ότι το τρίγωνο στις γραμμές 2 και 3 γυρίζει. Επιπλέον με πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουν το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου.

Μια ιδέα με εμβαδά που πήγε να ξεκινήσει απορρίπτεται άμεσα από ένα μαθητή ο οποίο προτείνει αφού έχουν το ύψος να δουν πόσα χωράνε κατά πλάτος (στη πλευρά των 46m). Χαρακτηριστικά αναφέρει: «Ε αφού βρήκαμε πόσο είναι το ύψος, το βρήκαμε 2 ρίζα 3 πρόσθεσα και το 4..εε… 2 από εδώ και 2 από εδώ. Άρα ουσιαστικά βγήκε $2\sqrt{3}+4$ και αυτό το διαίρεσα με το 46 που είναι όλη η πλευρά. Και ουσιαστικά βρήκα αυτό εδώ το κομμάτι. Βασικά μια δεσμίδα αυτή χωράει 6, τόσο φορές» (Εικόνα 4.29 & 4.30). Και η σκέψη τους ξαναγυρνά στο παραλληλόγραμμο, το οποίο πια έχει γίνει τραπέζιο και τονίζουν ότι έχουν βρει έξι τραπέζια και το κάθε τραπέζιο χωράει δυο σειρές άρα έχουν 2 επί 6, σύνολο 12 σειρές. Τρόπο με τον οποίο καταλήγουν ότι χωράνε 66 κύκλοι.



Εικόνα 4. 20



Εικόνα 4. 21

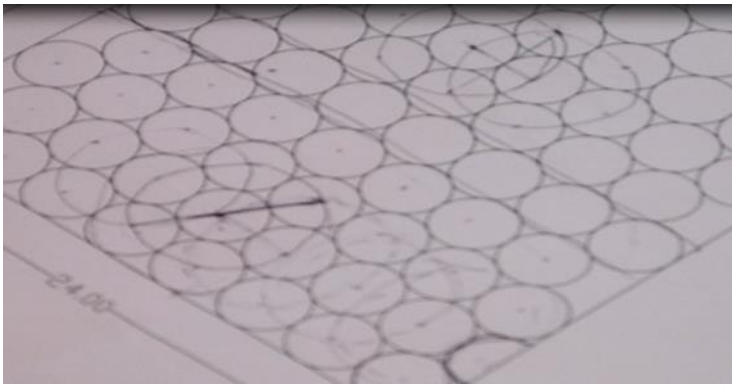
- ***Ομάδα 3***

Η ομάδα 3 ξεκινά να ασχολείται με τη διάταξη τύπου Β, εκφράζοντας τους προβληματισμούς της για το πόσους κύκλους χωράει η δεύτερη γραμμή. Παρατηρούν ότι η πρώτη γραμμή θα χωράει τον ίδιο αριθμό με την

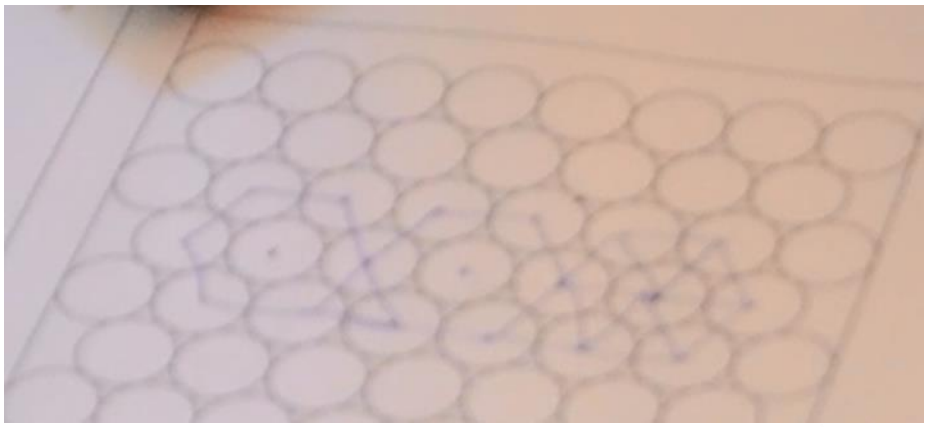
προηγούμενη διάταξη και το ενδιαφέρον της στρέφεται στην από πάνω γραμμή. Διατυπώνουν την εικασία ότι μάλλον χωράει ένας λιγότερος, χωρίς από ότι φαίνεται να την στοιχειοθετούν με επιχειρήματα.

Το δεύτερο βασικό ερώτημα που τους προβληματίζει είναι το κενό που δημιουργείται στην αρχή της δεύτερης γραμμής, δηλαδή το μέρος του κύκλου της δεύτερης γραμμής που μπαίνει ανάμεσα στους κύκλους της πρώτης. Εικάζουν πως πιθανόν να είναι μισός κύκλος ή το ένα τρίτο του κύκλου. Ένας μέλος της ομάδας παρατηρεί και επισημαίνει ότι στη διάταξη αυτή οι κύκλοι μπαίνουν πιο μέσα άρα θα έχουν περισσότερες σειρές από την προηγούμενη διάταξη.

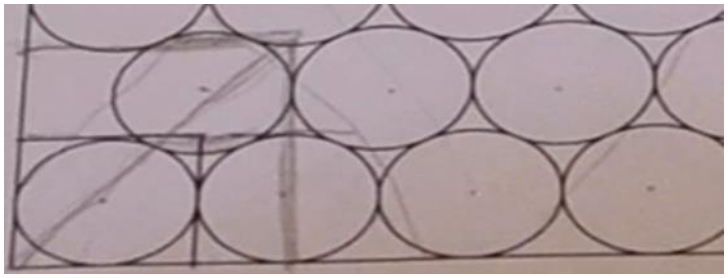
Η ομάδα έχει μπερδευτεί και δε ξέρει πώς να προχωρήσει. Σχεδιάζει αρχικά κύκλους που διέρχονται από τα κέντρα κάποιων κύκλων (Εικόνα 4.31) και παράλληλα προσπαθεί να εντοπίσει κάποια επαναλαμβανόμενα μοτίβα έπειτα από υπόδειξη του καθηγητή της (Εικόνα 4.32 & Εικόνα 4.33). Οι προσπάθειές της όμως δεν κατέληξαν σε κάποιο αποτέλεσμα ή σχέδιο επίλυσης.



Εικόνα 4.31



Εικόνα 4.32



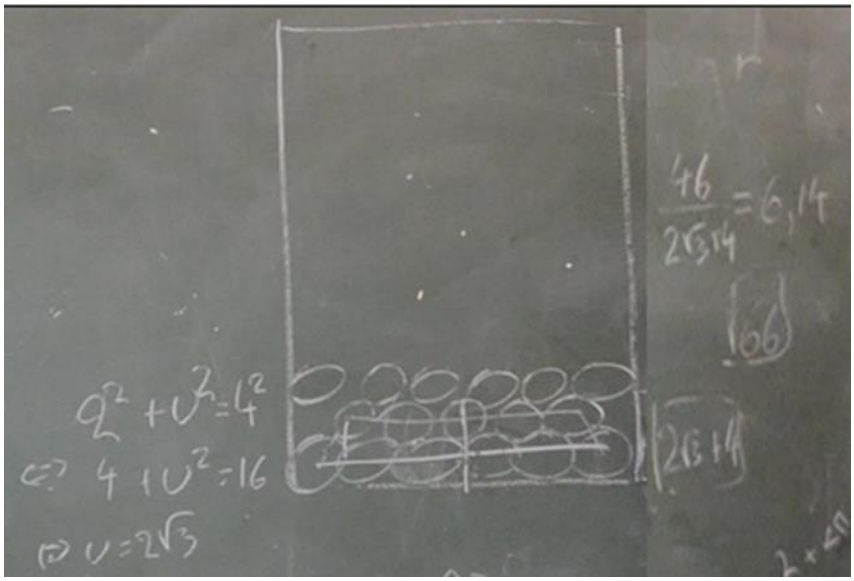
Εικόνα 4.33

- **Παρουσίαση Λύσης Για Διάταξη Τύπου Β Από Την Ομάδα 2**

Η ομάδα 2 ήταν η μόνη ομάδα που κατάφερε να καταλήξει σε κάποιο σχέδιο επίλυσης και αποτέλεσμα για τη διάταξη αυτή. Την πορεία της σκέψης της την περιγράψαμε πριν αναλυτικά. Οι μαθητές βρήκαν το ύψος του τριγώνου, και στη συνέχεια προσπάθησαν να βρουν τον αριθμό των τραπεζίων που χωράει το ορθογώνιο. Τέλος έκαναν υπολογισμό λαμβάνοντας υπόψιν τους ότι οι μονές γραμμές χωράνε ένα κύκλο παραπάνω από τις ζυγές.

Συγκεκριμένα το μέλος της ομάδας που παρουσίασε τη λύση στο πίνακα ανέφερε: «… σχηματίσαμε ένα τραπέζιο. Από αυτό εδώ το τραπέζιο βρήκαμε αυτό εδώ το ύψος. Βρήκαμε το ύψος, το οποίο το βρίσκουμε μέσω πυθαγορείου…Στη συνέχεια προσθέσαμε τους μισούς κύκλους από κάτω. Το χαμένο δηλαδή… τις χαμένες πλευρές…Πήραμε το $2\sqrt{3}+4$ και το διαιρέσαμε με το 46». Έτσι από τη διαίρεση βρήκαν 6,14 αλλά κράτησαν το 6 γιατί όπως

ανέφεραν στο 0,14 δε χωράει τραπέζιο. Παράλληλα παρατήρησαν ότι μέσα στο τραπέζιο χωράνε 11 κύκλοι καθώς είναι δυο σειρές και η πρώτη χωράει 6 και η δεύτερη 5. Και με αυτό τον τρόπο κατέληξαν στο τελικό τους αποτέλεσμα, δηλαδή 66 κύκλους (Εικόνα 4.34).



Εικόνα 4.34

4.3.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση

Το κομμάτι της διερεύνησης σε αυτή τη παρέμβαση αφορά καθαρά την εύρεση μαθηματικής λύσης σε ένα πρόβλημα. Η αρχική δραστηριότητα έχει «απαλλαγεί» από την αρχική – πραγματική προβληματική κατάσταση και οι μαθητές πια διερευνούν μια καθαρά μαθηματική δραστηριότητα.

Η παρέμβαση αυτή σε όλη τη διάρκειά της είχε χαρακτήρα ανοικτής διερεύνησης. Ο καθηγητής άφησε τους μαθητές να καταστρώνουν σχέδια επίλυσης μέσα στις ομάδες εργασίας τους, να κάνουν εικασίες, πειραματισμούς καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης και έπειτα ζήτησε από τις ομάδες να παρουσιάσουν τις σκέψεις τους στο πίνακα. Στη συνέχεια ακολουθούσε η

επόμενη ομάδα και μετά την παρουσίαση των σκέψεων καλούσε τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για το ποια λύση θεωρούν περισσότερο ή λιγότερο σωστή.

Οι ενέργειές του στόχευαν στο να αφήσει τους μαθητές να διερευνήσουν από μόνοι τους τις πιθανές οπτικές του προβλήματος αλλά και να τους γεννηθεί η ανάγκη να επιχειρηματολογήσουν τους ισχυρισμούς τους και όχι να τους καθοδηγήσει στη σωστή απάντηση. Χαρακτηριστικά μας ανέφερε ο καθηγητής στο τέλος της παρέμβασης πως είναι πιο σπουδαίο ορισμένες φορές οι μαθητές να ακολουθούν το λάθος δρόμο καθώς αναδεικνύονται σημεία που είναι αξιοσημείωτα.

Οι μαθητές σε αυτή τη παρέμβαση έδειξαν ακόμα μεγαλύτερο ενθουσιασμό για εμπλοκή από τη πρώτη. Είναι φανερό ότι η δραστηριότητα είχε κεντρίσει το ενδιαφέρον τους και σε όλη τη διάρκειά της διερευνούσαν τις πτυχές του προβλήματος ώστε να φτάσουν στη λύση του.

- Διερεύνηση και Συνεργασία

Οι ομάδες εργασίας παρέμειναν κατά βάση οι ίδιες από την πρώτη παρέμβαση. Συγκεκριμένα, η σύνθεση της ομάδας 1 δεν άλλαξε και οι ομάδες 2 και 3 ενισχύθηκαν με ένα ακόμα μέλος, με αποτέλεσμα στην παρέμβαση αυτή να έχουμε πάλι 3 ομάδες των πέντε όμως ατόμων.

Η εικόνα συνεργασίας δεν άλλαξε σε μεγάλο βαθμό από την προηγούμενη επαφή των μαθητών με τη δραστηριότητα. Για μια ακόμα φορά τα μέλη των ομάδων 2 και 3 συνεργάστηκαν και μέσα από ανταλλαγή απόψεων προσπάθησαν να φτάσουν στη λύση του προβλήματος. Έγινε φανερό μάλιστα ότι μέσα από την πρώτη παρέμβαση κατανόησαν την θετική αξία της συνεργασίας και τη συμβολή της ώστε να φτάσουν στη λύση του προβλήματος. Το κάθε μέλος, χωρίς φόβο, παρουσίαζε τις σκέψεις στα υπόλοιπα μέλη της

ομάδας, και στη συνέχεια η πρότασή του γινόταν ζήτημα αξιολόγησης και διερεύνησης από τους υπόλοιπους.

Η θετική επίδραση της διερευνητικής μάθησης και της συνεργασίας αναδείχθηκε στα μέλη της ομάδας 3. Αξίζει να σημειωθεί πως τα μέλη της εν λόγω ομάδας, ήταν αρκετά αδύναμα στα μαθηματικά και αρνητικά στην αρχή να εμπλακούν. Το ύφος όμως της δραστηριότητας, η διαφορετικότητα της μορφής του μαθήματος και η αναστροφή των ρόλων «καθηγητή – μαθητή» τους κέντρισε το ενδιαφέρον να ασχοληθούν και να αναζητήσουν λύση. Παράλληλα ο διερευνητικός της χαρακτήρας τους έδιωξε κάθε φόβο έκθεσης των σκέψεων τους, τόσο μέσα στα μέλη της ομάδας, όσο και σε ολόκληρη την τάξη.

Από την άλλη μεριά τα μέλη της ομάδας 1 δεν μπόρεσαν να ανταποκριθούν στο κομμάτι της συνεργασίας. Το καινούριο μέλος της ομάδας τους δεν επέφερε καμία αλλαγή στις ισορροπίες της ομάδας και η όποια συνεργασία ήταν μηδαμινή ή ανύπαρκτη. Τα δυο μέλη που εργάστηκαν κατά την πρώτη παρέμβαση, συνέχισαν να εργάζονται σε ατομικό κυρίως βαθμό χωρίς να εξηγούν τις σκέψεις τους στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Χαρακτηριστικό σημείο είναι η απάντηση μια κοπέλα - μέλος που δεν ήταν στη δυάδα που εργαζόταν - από την ομάδα όταν κάποια στιγμή ο καθηγητής της ζήτησε να παρουσιάσει στο πίνακα τη λύση της ομάδας αναφέρει : «Δεν το βρήκα εγώ!». Και αμέσως έγινε φανερό πως δεν είχαν κατανοήσει όλα τα μέλη την πορεία σκέψης της ομάδας.

- **Διερεύνηση και Λύση Προβλήματος**

Η διερεύνηση της μαθητικής λύσης εστιάστηκε στη διάταξη τύπου Β την περισσότερη διδακτική ώρα. Οι ομάδες ασχολήθηκαν με τη διάταξη τύπου Α τα πρώτα λεπτά της παρέμβασης και προχώρησαν στη άλλη διάταξη καθώς για τη πρώτη είχαν αφιερώσει αρκετό χρόνο στη περασμένη παρέμβαση.

Η μαθηματική λύση δεν παρουσιάστηκε ολοκληρωμένη από καμία ομάδα, όμως σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης, αλλά οι μαθητές κατέληξαν σε αξιοσημείωτες σκέψεις και προτάσεις. Είναι πιθανό η παροχή λίγο περισσότερου χρόνου να οδηγούσε τουλάχιστον τη μια ομάδα (ομάδα 2), την εύρεση της ολοκληρωμένης λύσης.

Οι μαθητές εργάστηκαν σαν να μην υπήρχε καθηγητής, αφοσιωμένοι στις σκέψεις τους, αξιολογούσαν και διερευνούσαν τις πτυχές του προβλήματος και αξιολογούσαν στρατηγικές επίλυσης. Η διερεύνηση σε κάθε σκέψη των μελών αναδεικνυόταν σαν ανάγκη για να προχωρήσουν σε κάποιο συμπέρασμα ή στην αναθεώρηση μιας σκέψης τους. Οι μαθητές είχαν καταλάβει σε μεγάλο βαθμό από την πρώτη παρέμβαση πως κάθε σκέψη τους δεν γινόταν να απορριφθεί χωρίς να αξιολογηθούν οι πτυχές της. Με αυτό ως εφόδιο η διερεύνηση έγινε ο συνδετικός κρίκος ανάμεσα στην αναζήτηση και την εύρεση απαντήσεων στους προβληματισμούς τους.

4.4 Ανάλυση 1ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Β

4.4.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση

Το φύλλο εργασίας που σχεδιάστηκε από τον εκπαιδευτικό Β αποτελούταν, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, από μια εισαγωγή και τρεις επιμέρους δραστηριότητες. Η παρέμβαση ξεκινά με τους μαθητές να διαβάζουν την εισαγωγή και να σημειώνουν λέξεις οι οποίες πιθανόν τους ήταν άγνωστες. Μετά από μερικά λεπτά ακολούθησε μια συζήτηση μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή γύρω από τη καλλιέργεια ενός οπωρώνα και τους παράγοντες που πρέπει να λαμβάνει κάποιος υπόψιν του για τη κατασκευή του. Ο διάλογος είχε

θετικά αποτελέσματα καθώς συνέβαλε στο να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να μεταβούν εύκολα στις κεντρικές δραστηριότητες του φύλλου εργασίας. Ακολούθησε το κύριο μέρος της παρέμβασης με το οποίο θα ασχοληθούμε επιμέρους παρακάτω.

Δραστηριότητα 1 – Μοντελοποίηση Δεδομένων

Η πρώτη δραστηριότητα στόχευε στη μοντελοποίηση των δεδομένων του προβλήματος. Μέσα από δομημένα ερωτήματα, οι μαθητές κλήθηκαν να αναζητήσουν το κατάλληλο σχήμα για την αναπαράσταση του δέντρου στο επίπεδο. Οι ομάδες εργασίας επεξεργάστηκαν τα δεδομένα και μέσα από παρατήρηση και δικές τους σκέψεις έγινε φανερή η δυσκολία τους και οι προβληματισμοί τους στη φάση αυτή.

- Έμπόδια - Προβληματισμοί στη διαδικασία μοντελοποίησης

Τα πρώτα εμπόδια στη διαδικασία μοντελοποίησης έγιναν φανερά μέσα από κάποιες εκφράσεις στην εκφώνηση. Συγκεκριμένα σύγχυση προκάλεσαν οι λέξεις «δενδρύλλιο» και «δέντρο». Ο καθηγητής στοχευμένα είχε επιλέξει τις λέξεις αυτές, καθώς με τη λέξη «δενδρύλλιο» ήθελε οι μαθητές αρχικά να τοποθετήσουν σημεία στην κάτοψη του χωραφιού και να προσεγγίσουν αρχικά σημειακά το πρόβλημα. Σαν συνέχεια της σκέψης αυτής η λέξη «δέντρο» θα οδηγούσε, σύμφωνα με τη σκέψη της, ήπια τις ομάδες εργασίας στη μοντελοποίηση του δέντρου με το σχήμα του κύκλου.

Οι συγκεκριμένες λέξεις όμως αντί να δράσουν υποστηρικτικά προς τους μαθητές αντίθετα τους προκάλεσαν σύγχυση. Συγκεκριμένα άρχισε να τους προβληματίζει το μέγεθος του κορμού του δενδρυλλίου και κατά πόσο γίνεται να αναπαραστήσουν σημειακά ένα κορμό όσο μικρός και αν είναι αυτός. Αποτέλεσμα αυτού το γεγονότος ήταν οι μισές ομάδες στο πλέγμα να σημειώνουν ολόκληρα τετραγωνάκια για τη θέση των δενδρυλλίων, άλλες σημεία και άλλες να τοποθετούν το γράμμα «Χ» μέσα σε ολόκληρα τετράγωνα.

Ένα ακόμα εμπόδιο που έγινε ορατό είχε σχέση με το τετραγωνικό πλέγμα που δόθηκε. Οι ομάδες εργασίας δεν μπορούσαν να δουν που θα τοποθετηθούν τα

δεντρύλλια και επικράτησε μια σύγχυση. Άλλες ομάδες τοποθέτησαν τα δενδρύλλια στο ένωμα των τετραγώνων και άλλες μέσα στα τετράγωνα. Οι μαθητές που επέλεξαν να τοποθετήσουν τα δενδρύλλια μέσα στα τετράγωνα χαρακτηριστικά επισήμαναν τον προβληματισμό τους, πώς γίνεται ένα δενρδύλλιο όσο μικρό και να είναι να έχει κορμό με μηδενική διάμετρο.

Η απόσταση που πρέπει να έχει ένα δέντρο από το φράχτη ήταν ένας επιπλέον προβληματισμός των μαθητών. Περισσότερες από τις μισές ομάδες δεν αποκωδικοποίησαν σωστά την πληροφορία ότι ο φράχτης πρέπει να απέχει 2μ από το κορμό και αφαιρούσαν ένα μέρος του χωραφιού περιμετρικά. Θεωρούσαν δηλαδή, ότι υπήρχε κάποιος περιορισμός στο ωφέλιμο χωράφι. Η ενέργειά τους αυτή ήταν ορατή είτε άμεσα είτε έμμεσα. Συγκεκριμένα δυο ομάδες από τις 6 άφησαν περιμετρικά του χωραφιού χώρο κενό ενώ άλλες άφηναν μεγαλύτερες αποστάσεις από τα δεδομένα για να είναι σίγουροι, όπως ανέφεραν.

Το τελευταίο εμπόδιο αφορούσε την αναπαράσταση του κύκλου. Εδώ οι μισές ομάδες θεωρούσαν ότι το δέντρο αναπαριστάνεται με κύκλο και οι υπόλοιπες με τετράγωνο. Κοινό χαρακτηριστικό όλων των ομάδων βέβαια ήταν το γεγονός ότι καμία ομάδα δεν προσπάθησε να αιτιολογήσει με μαθηματικά επιχειρήματα την επιλογή του σχήματός της. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ένα διαλόγου, ένα για την επιλογή του κύκλου σαν μοτίβο αναπαράστασης:

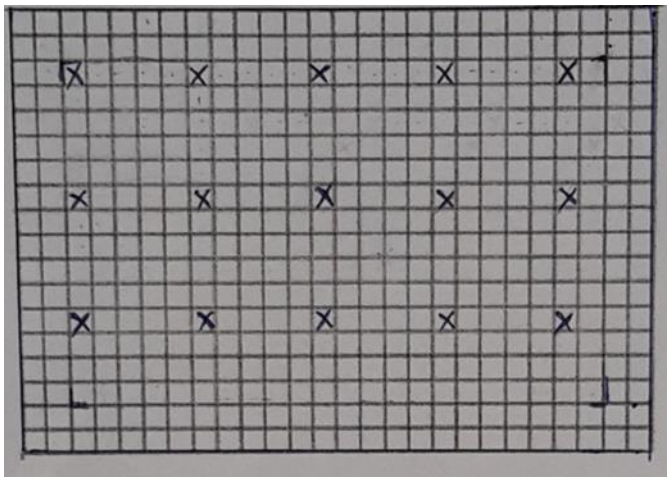
Μ1: «Με κύκλους θα τα κάνουμε τα δεντράκια;»

Μ2: «Ναι με κύκλους έχει πιο πολύ πλάκα.»

- **Παρουσίαση προτάσεων στο πίνακα**

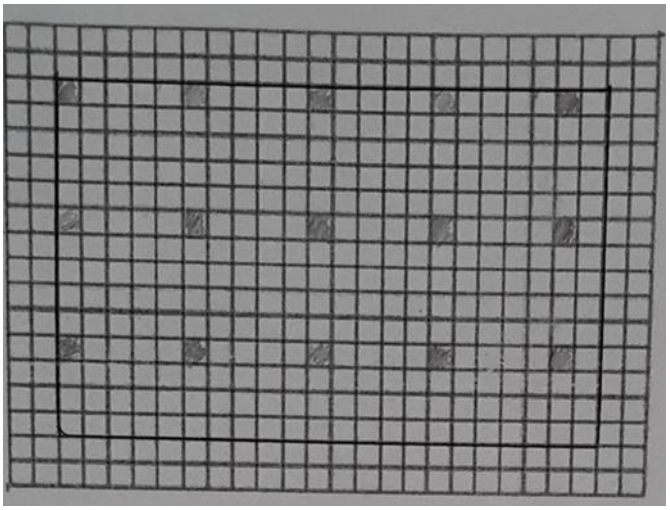
Μετά από μισή ώρα επεξεργασίας των δεδομένων παρουσιάστηκαν στον πίνακα οι προτάσεις των μαθητών, με ένα εκπρόσωπο από κάθε ομάδα να παρουσιάζει τις σκέψεις της ομάδας του.

Ομάδα 1: «Έχουμε αφήσει από το φράχτη 2 απόσταση από πάνω και από κάτω και μετά προσπαθήσαμε να βάλουμε τα υπόλοιπα δέντρα σε απόσταση τέτοια που να κρατάμε την απόσταση 2 από το φράχτη. Και μας βγήκαν 15 συνολικά.» (Εικόνα 4.35)



Εικόνα 4.35: Ομάδα 1

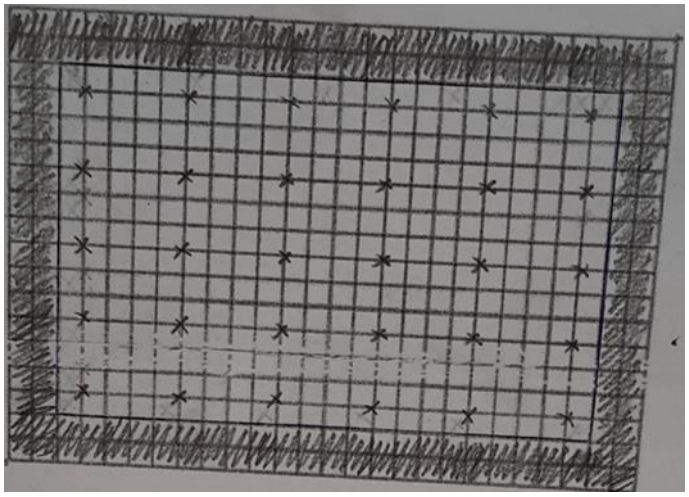
Ομάδα 2:« …δουλέψαμε παρόμοια. φτιάξαμε το φράχτη και αφήσαμε δυο τετραγωνάκια, τα οποία είναι του ενός μέτρου στις άκρες και φτιάξαμε το φράχτη γύρω γύρω. Και μέσα βρήκαμε ότι χωράνε 15 δέντρα. Και καταλάβαμε ότι δεν είναι δυνατόν το ένα δέντρο να είναι ένα σημείο γιατί στην πρακτική… στα πρακτικά μαθηματικά δεν είναι δυνατόν να καταλαμβάνει μόνο ένα σημείο το δέντρο και αφού κάνουμε μια πρακτική εργασία αυτή τη στιγμή τα βάλαμε μέσα σε κουτάκια το δέντρο. Και για αυτό και μας βγήκαν 15.» (Εικόνα 4.36)



Εικόνα 4.36: Ομάδα 2

Ομάδα 3: «Στην αρχή είχαμε σκεφτεί και εμείς να τα βάλουμε μέσα στο πλέγμα… μέσα στα κουτάκια αλλά μετά δεν μετράς μέτρα…μετράς τετραγωνικά μέτρα. Μετράς εμβαδόν. Δεν είναι ότι θα μετρήσεις αποστάσεις ενός μέτρου. Πλέον….

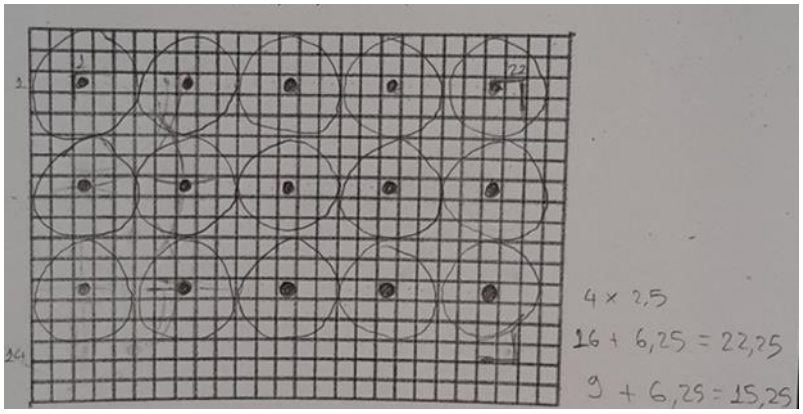
Έτσι δηλαδή τα βάλαμε πάνω στις γωνίες και βγήκαν πολλά παραπάνω δέντρα. Τελικά έχουν 3 μέτρα απόσταση από το φράχτη και 4 κανονικά μεταξύ τους…»
« Είναι 2 μέτρα από το φράχτη συν 1 για να βγει πιο σωστό..» (Εικόνα 4.37)



Εικόνα 4.37: Ομάδα 3

Ομάδα 4: « εμείς βγάλαμε ότι είναι 15. Εε… ξεκινήσαμε με την πρώτη… το πρώτο δέντρο το οποίο είναι σε απόσταση 2μ από το φράχτη…»
Κ: «Πού το τοποθετήσατε;»
«Σε τετραγωνάκι. Για να είμαστε σίγουροι ότι θα έχει 4m σίγουρα…. Βρήκαμε κάποια στιγμή και κάποια άλλα σημεία όπου θα μπορούσε να είναι απ' τη τελευταία σειρά μας έμεινε πολύς χώρος… βρήκαμε κάποια σημεία αλλά κάναμε πυθαγόρειο θεώρημα και μας βγήκε κάτι λιγότερο από 4 η απόσταση οπότε δεν τα βάλαμε αυτά.»
Κ: «Να ρωτήσω κάτι; Εγώ βλέπω εκεί πέρα ότι έχετε κυκλώσει…»
Μ: «Τα κυκλάκια είναι για εκεί που λέει να αποτυπώσετε τη μορφή που θα έχει η κάτοψη του κτήματος με τα δέντρα στην πλήρη ανάπτυξή τους.»
Κ: «Δηλαδή;»
Μ: «Σκεφτήκαμε ότι για να μπαίνει το όριο… για να οριοθετείτε 4m απόσταση μεταξύ των δέντρων σημαίνει ότι στην πλήρη ανάπτυξή τους τα δέντρα θα έχουν το μέγιστο 4m διάμετρο.»
Κ: «Α! Το είδατε σαν…»

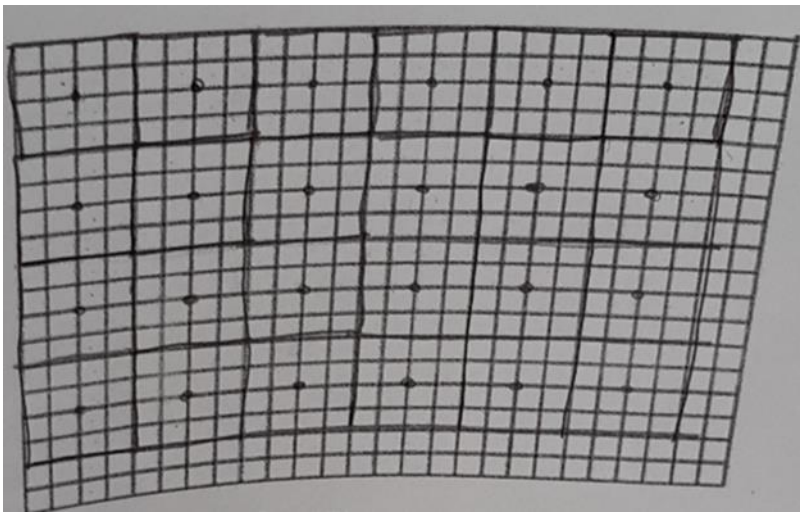
Μ: «το είδαμε το όριο έχει σχέση με την πλήρη ανάπτυξη του δέντρου.» (Εικόνα 4.38)



Εικόνα 4.38: Ομάδα 4

Ομάδα 5: «Είναι το ίδιο πρακτικά … Καταρχάς και εμείς 24 δέντρα θεωρήσαμε ότι θα έχει το κτήμα. Θεωρήσαμε ως φράχτη το γύρω γύρω το…(Δείχνει στον πίνακα) τις πλευρές του σχήματος που ήδη έχουμε και τοποθετήσαμε τα δέντρα στους κόμβους του πλέγματος. Και εφόσον μας λέει στην αρχή ότι τη στιγμή που τα φυτεύουμε ότι απέχουν απόσταση από το φράχτη 2m ακολουθήσαμε και εμείς την ίδια διαδικασία και το κάθε δέντρο μεταξύ τους…»

Μ: «… οπότε το δέντρο θα αναπτυχθεί σε χώρο που θα έχει 2m θα πιάνει θα καταλαμβάνει 2m κάθε φορά. Οπότε εφόσον η απόσταση μεταξύ τους είναι 4m δια δυο θα καταλαμβάνει ένα χώρο τέτοιο.» (Εικόνα 4.39)



Εικόνα 4.39: Ομάδα 5

Ομάδα 6: Μ: «Εμείς ακολουθήσαμε την ίδια στρατηγική με το προηγούμενο σχήμα οπότε τοποθετήσαμε τους κορμούς στις γωνίες των τετραγώνων…»

Μ: «…Βγήκανε 24»

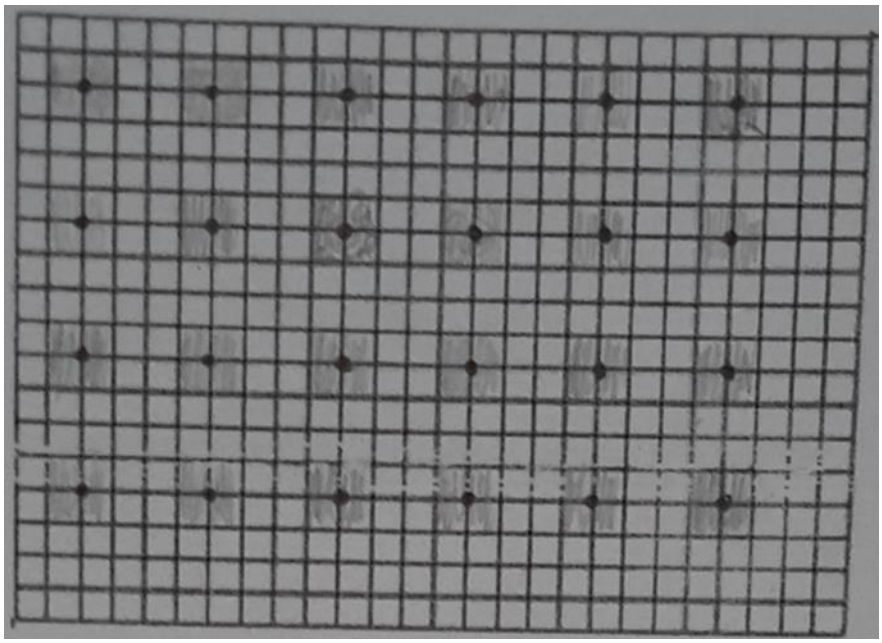
Μ: «Τώρα που το ξανασκεφτόμασταν με την ομάδα μου θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε τα δέντρα ένα κουτάκι προς τα κάτω και ένα κουτάκι προς τα δεξιά έτσι ώστε τα φύλλα των δέντρων να μπορούσαν να έχουν μια μεγαλύτερη έκταση που θα μπορούσε να φτάσει μέχρι τα 16 τετραγωνικά μέτρα. Τώρα τα έχουμε βάλει στα 4 τετραγωνικά να είναι η maximum έκταση…»

Κ: «Αυτό δεν το κατάλαβα. Για εξήγησέ το μου. Πώς προέκυψε το 16 τετραγωνικά μέτρα;»

Μ: «Τοποθετώντας τα ένα προς τα δω και ένα προς τα εκεί (δείχνει με τα χέρια δεξιά και κάτω)… απλώς τα φύλλα του θα μπορούσαν να επεκταθούν και προς τα εκεί.»

Κ: «Α! επειδή τα φύλλα τα περιορίσατε σε ένα χώρο 2 επί 2. Ενώ κατά τη γνώμη σου είναι…»

Μ: «4 επί 4. …εδώ θα ακούμπαγαν το φράχτη και πιθανόν να υπήρχε ένα πρόβλημα.» (Εικόνα 4.40)



Εικόνα 4.40: Ομάδα 6

- **Επιλογή βέλτιστου σχήματος αναπαράστασης δενδρυλλίου**

Ο καθηγητής προσπάθησε να βοηθήσει τους μαθητές να επιλέξουν το βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης. Εστίασαν αρχικά στην επιλογή του του μοτίβου αναπαράστασης για το δενδρύλλιο και έπειτα για το δέντρο. Η σημειακή αναπαράσταση για το δενδρύλλιο σαν επιλογή ήρθε λίγο αυθαίρετα και βιαστικά με αποτέλεσμα να μην πεισθούν όλοι οι μαθητές και να διατηρούν τις αμφιβολίες τους καθ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος. Συγκεκριμένα η απάντηση ενός μαθητή ήταν αρκετή για να κατοχυρωθεί το σημείο ως απάντηση και να προχωρήσουν παρακάτω:

Κ: «Να αναπαραστήσετε στο πλέγμα τη θέση ενός δεντρυλλίου. Πώς φαίνεται ότι μπορείτε να αναπαραστήσουμε ένα δεντρύλλιο στο πλέγμα; Σαν τι; Τι είναι πιο αντικειμενικό; Με ποιο αντικειμενικό τρόπο θα μπορούσατε να το αναπαραστήσετε;»

Μ1: «Εμείς όπως είπαμε και πριν…»

Κ: «Με κουτάκι ή με σημείο;

Μ2: «Με κουτάκι. Είναι πιο ρεαλιστικό.»

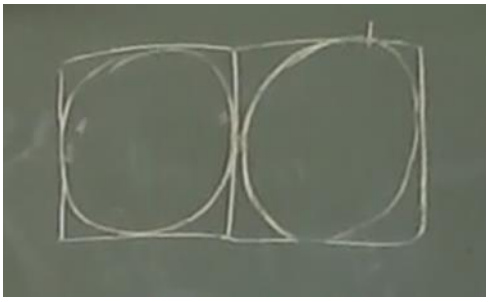
Μ3: «Πιστεύω δεν μπορεί να είναι σημείο, διότι όπως είπε και ο Α, θα απέχουν κάτι λιγότερο. Δεν γίνεται να είναι μηδενικής διαμέτρου. Οπότε και πλάγια και οριζόντια θα απέχουν κάτι λιγότερο από 4 μέτρα.»

Άλλος μαθητής: «…Το κάθε κουτάκι είναι 1 τετραγωνικό μέτρο, ο κορμός δεν θα μπορούσε να φτάσει το 1 τετραγωνικό μέτρο οπότε το σημείο θα μπορούσε να δώσει μια καλύτερη ιδέα.»

- **Επιλογή βέλτιστου σχήματος αναπαράστασης του δέντρου**

Το επόμενο σημείο που έπρεπε να εστιάσουν ήταν η επιλογή του βέλτιστου σχήματος αναπαράστασης του δέντρου στο επίπεδο. Οι αντιδράσεις εδώ ήταν αρκετές. Οι μισές ομάδες θεωρούσαν πως το τετράγωνο είναι το βέλτιστο σχήμα και οι άλλες μισές πως είναι ο κύκλος. Ο καθηγητής για να πείσει τους μαθητές σχεδιάζει στο πίνακα ένα κύκλο μέσα σε ένα τετράγωνο (Εικόνα 4.41), θέλοντας να τους εξηγήσει ότι ο κύκλος πληροί όλες τις προδιαγραφές και καταλαμβάνει

και το λιγότερο δυνατό χώρο στο επίπεδο και τους προτρέπει να σκεφτούν τις ιδιότητες του κύκλου.



Εικόνα 4.41

Οι αντιδράσεις όμως των μαθητών ήταν αρκετές για να καταρριφθεί αυτή η προσπάθεια. Συγκεκριμένα αναφέρουμε κάποιες:

Μ1: «Πιστεύω ότι δεν είναι απαραίτητο να βγει κύκλος το δέντρο γιατί ένα κλαδί μπορεί να αναπτυχθεί περισσότερο από κάποια άλλα οπότε να καταλάβει μεγαλύτερο εμβαδόν από ακτίνα 2 μέτρων.»

Μ2: «Με απλή λογική ούτε με τετράγωνο δε μπορεί να μοιάζει ένα δέντρο…»

Μ3: «Με το κύκλο κάθε κλαδί θα ισαπέχει από τον κορμό απλά εμείς χρησιμοποιήσαμε τα τετράγωνα γιατί είναι ο δυνατός χώρος που δίνεται στο δέντρο. Από το δέντρο δε περιμένουμε να είναι ένα τέλειο σχήμα. Έτσι εντάξει ούτε τετράγωνο θα σχηματιστεί βέβαια απλά μπορεί να βγει έξω από τον κύκλο. Και έτσι με το τετράγωνο θα έχουμε το μέγιστο δυνατό χώρο που θα δίνεται στο κάθε δέντρο.»

Μ4: «Εδώ πέρα λέει ότι θα πρέπει να υπάρχουν αποστάσεις μεταξύ των δέντρων προκειμένου να διευκολύνονται οι καλλιεργητικές εργασίες που θα πραγματοποιούνται. Οπότε θα πρέπει να υπάρχουν αποστάσεις. Δε μπορεί τα φύλλα να είναι το ένα πάνω στ' άλλα.»

Στο σημείο αυτό ο καθηγητής, παρατηρώντας ότι έχει περάσει παραπάνω από μια διδακτική ώρα, δείχνει στο προτζέκτορα μια φωτογραφία (Εικόνα 4.42) , στην οποία φαινόταν η σκιά δέντρων. Η ενέργειά του αυτή ήταν αρκετή για να καταλήξουν ότι ένα δέντρο αναπαριστάνεται με κύκλο, χωρίς όμως η απάντηση

αυτή να αιτιολογηθεί με μαθηματικά επιχειρήματα. Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να μην γίνει αποδεκτό από όλες τις ομάδες αυτό το συμπέρασμα.

Εικόνα 4.42

Παρόλο που προχώρησαν παρακάτω έχοντας αυτό ως δεδομένο, οι αντιδράσεις υπήρχαν σε όλη την παρέμβαση. Ορισμένοι μαθητές μάλιστα μόλις κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εικόνα αναπαριστάνεται με κύκλο συνέχισαν να ισχυρίζονται ότι το τετράγωνο είναι καλύτερη επιλογή γιατί με τον κύκλο μπορείς να κάνεις λάθος: «Βολεύει πολύ περισσότερο άμα είναι σε τετράγωνο.» Μάλιστα οι ενδοιασμοί ορισμένων ομάδων έρχονταν στην επιφάνεια αν έφταναν σε κάποιο σημείο της παρέμβασης που δυσκολεύονταν τόνιζαν χαρακτηριστικά πως αν είχαν διαλέξει το τετράγωνο θα είχαν αποφύγει πολλά προβλήματα.

Δραστηριότητα 2

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές εφοδιασμένοι με καπάκια κλήθηκαν να εντοπίσουν πιθανές διατάξεις των δέντρων. Τα διαφορετικά μεγεθών καπάκια που είχαν οι ομάδες, έγιναν το πολύτιμο διερευνητικό τους εργαλείο ώστε να εξάγουν συμπεράσματα για τις ζητούμενες πιθανές διατάξεις.

- **Διάταξη τύπου Α**

Τα χειραπτικά αυτά υλικά έδρασαν υποστηρικτικά και όλες οι ομάδες εντόπισαν άμεσα τη διάταξη τύπου Α (Εικόνα 4.43). Μάλιστα στην αρχή υπήρξαν και ομάδες που τοποθέτησαν τα καπάκια με αυτή τη διάταξη αλλά αραιά στο χαρτί τους, καθώς θεωρούν ότι για να είναι ρεαλιστικό το πρόβλημα θα πρέπει τα

δέντρα να έχουν αποστάσεις (Εικόνα 4.44). Στο σημείο αυτό γίνεται φανερό ότι δεν είχε γίνει κατανοητή από όλους τους μαθητές η μοντελοποίηση των δεδομένων του προβλήματος. Οι αποστάσεις που δίνονταν είχαν να κάνουν με τη διάμετρο ανάπτυξης όλου του δέντρου, ενώ από ορισμένους αποκωδικοποιήθηκε σαν τις διαστάσεις μόνο του κορμού.

Εικόνα 4. 22

Εικόνα 4. 23

- **Διάταξη τύπου Β**

Η παρατήρηση της διάταξης τύπου Β ήρθε άμεσα από μια ομάδα μέσα από πειραματισμό και ανακάλυψη με τη χρήση των χειραπτικών εργαλείων. Η διαφορετικότητα της εικόνας που έπαιρναν καθώς έβαλαν τα καπάκια σε διάταξη «ζικ ζακ», όπως ανέφεραν τους οδήγησε στη διάταξη τύπου Β. Στη συνέχεια ακολούθησαν και άλλες ομάδες στην ανακάλυψη τις πιθανής αυτής διάταξης (Εικόνα 4.45 & Εικόνα 4.46).

Εικόνα 4.45

Εικόνα 4.46

- Παρουσίαση Διατάξεων - Συζήτηση

Οι ομάδες εργασίας παρουσίασαν τις πιθανές λύσεις τους στο πίνακα και όπως ήταν αναμενόμενο η προσοχή όλων των ομάδων στράφηκε στη διάταξη τύπου Β, καθώς η διάταξη τύπου Α είχε εντοπιστεί από όλες τις ομάδες. Στο πίνακα σηκώθηκε και παρουσίασε τη διάταξη τύπου Β ένα μέλος της ομάδας που την εντόπισε πρώτη. Μάλιστα το μέλος επεσήμανε ότι ξεκίνησαν από την πρώτη διάταξη αλλά προχώρησαν στη δεύτερη γιατί είχαν λιγότερα κενά τοποθετώντας έτσι τα καπάκια.

Σε αυτό το σημείο ο καθηγητής θέλοντας να τους βοηθήσει επεμβαίνει υποστηρικτικά και προτρέπει τους μαθητές να εξετάσουν αν θα διαφέρει η εικόνα της κάτοψης επιλέγοντας τη διάταξη τύπου Β αλλά ξεκινώντας το γέμισμα από την άλλη πλευρά από αυτή που ξεκίνησαν. Οι ομάδες ξεκινούν άμεσα μετά την παρότρυνση του καθηγητή τους να διερευνούν την νέα πτυχή. Πειραματίζονται καταμετρούν το πόσα καπάκια χωράει η κάτοψή τους και εξάγουν συμπεράσματα μέσα από παρατήρηση και τριβή με τα χειραπτικά τους εργαλεία. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίστηκαν ως εξής στη τάξη:

- ✓ Στη διάταξη τύπου Β η δεύτερη σειρά χωράει ένα λιγότερο ή τον ίδιο αριθμό κύκλων με τη πρώτη.
- ✓ Στη διάταξη τύπου Β η εικόνα της κάτοψης αλλάζει αναλόγως από ποια πλευρά θα ξεκινήσουμε το γέμισμα.
- ✓ Υπάρχει πιθανότητα η διάταξη τύπου Β να χωράει τον ίδιο αριθμό με τη διάταξη τύπου Α.
- ✓ Συνήθως συμφέρει η διάταξη τύπου Β.
- ✓ Η επιλογή της διάταξης εξαρτάται από την επιφάνεια που καλύπτει το κάθε δέντρο και την επιφάνεια του κτήματος.

Η δραστηριότητα αυτή ολοκληρώνεται με τη παρουσίαση μια πραγματικής εικόνας από χωράφι στη Μεσσηνία από τον καθηγητή (Εικόνα 4.47), όπου φαίνονται από πραγματική φωτογραφία οι δυο διατάξεις. Η ενέργεια αυτή, στόχευε στο να πείσει τους μαθητές με πραγματικά στοιχεία για την ορθότητα των μέχρι τώρα συμπερασμάτων τους. Παράλληλα θέλησε να τους

προβληματίσει ώστε να μεταβούν με ενδιαφέρον και ενθουσιασμό στη τρίτη δραστηριότητα που αφορούσε την καταμέτρηση των δέντρων σε κάθε περίπτωση.

Εικόνα 4.47

<u>Δραστηριότητα 3</u>

Οι μαθητές σε αυτή την παρέμβαση δεν είχαν το χρόνο να εμπλακούν με τη δραστηριότητα αυτή. Έπειτα από παρότρυνση του καθηγητή, έχοντας χτυπήσει το κουδούνι για το σχόλασμα, οι ομάδες απλά διάβασαν την εκφώνησή της και ειπώθηκαν κάποιες αρχικές σκέψεις στον πίνακα.

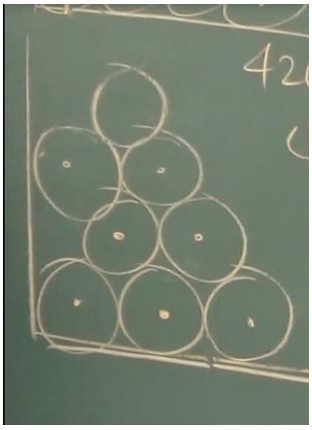
- **Σκέψεις για Διάταξη τύπου Α**

Για τη διάταξη τύπου Α, τους προβλημάτισε ο «ανεκμετάλλευτος χώρος» όπως ανέφεραν και ορισμένοι πρότειναν να τον αφαιρέσουν από τις διαστάσεις του οικοπέδου. Άλλη σκέψη αφορούσε τα εμβαδά, συγκεκριμένα πρότειναν να βρουν το εμβαδόν του κάθε κύκλου και το εμβαδόν του οικοπέδου και να δουν πόσοι κύκλοι χωράνε.

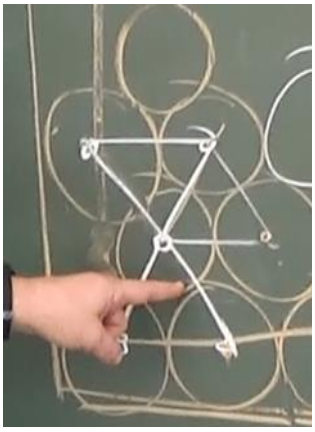
- **Σκέψεις για Διάταξη τύπου Β**

Για τη διάταξη τύπου Β ο καθηγητής έχοντας σχεδιάσει κάποιους κύκλους στο πίνακα με τα κέντρα τους, παρότρυνε τους μαθητές να κάνουν δυο σκέψεις πριν

τελειώσουν (Εικόνα 4.48). Η πρόταση ενός μαθητή να ενώσουν τα κέντρα γίνεται η γέφυρα για να περάσουν τη σκέψη τους λίγο πιο πέρα στη λύση (Εικόνα 4.49). Οι απόψεις αρκετές και μπερδεμένες, καθώς ο χρόνος έχει περάσει, άλλοι μιλούσαν για εμβαδά, άλλοι για παραλληλόγραμμα. Σε ένα καταιγισμό σκέψεων κάπου ακούγεται η ιδέα για τρίγωνο, η οποία αρπάζεται άμεσα από τον καθηγητή και γίνεται παρότρυνση για να συνεχίσουν. Ορισμένοι ανέφεραν πως κάπου θα τους οδηγήσει το ύψος του τριγώνου, αλλά σε μια αναστάτωση λήξης του μαθήματος δε γίνεται κατανοητό από όλους (Εικόνα 4.50). Η δραστηριότητα σταμάτησε εδώ και ακολούθησε η δεύτερη παρέμβαση που αφορούσε καθαρά τη μαθηματική λύση του προβλήματος.



Εικόνα 4. 24



Εικόνα 4. 25

Εικόνα 4. 26

4.4.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση

Ο σχεδιασμός της παρέμβασης αυτής, η μορφή του φύλλου εργασίας καθώς και η γενική εικόνα της τάξης που παρατηρήθηκε έκανε εμφανή τα στοιχεία μια διερευνητικής διαδικασίας. Τα μέρη και οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να έχουν στη διάθεσή τους κατάλληλες και στοχευμένες πληροφορίες καθώς και επιμέρους ερωτήματα ώστε η επεξεργασία αυτών να τους οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος (δομημένη διερεύνηση/ Structural Inquiry).

Ο καθηγητής από την αρχή της παρέμβαση, φάνηκε ότι ήταν πολύ καλά προετοιμασμένος για τη διεξαγωγή της, καθώς και για τις πιθανές απαντήσεις των μαθητών. Είχε αναλάβει ρόλο οργανωτή του διαλόγου που διεξαγόταν στη τάξη και παράλληλα δρούσε υποστηρικτικά, όπου χρειαζόταν, καθ' όλη τη διάρκεια. Άφηνε τους μαθητές να προβληματιστούν, να διερευνήσουν και να πειραματιστούν ώστε να εξάγουν μόνοι τους συμπεράσματα και πιθανές στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος. Οι μαθητές τοποθετημένοι στο κέντρο του μαθήματος, ήταν αυτοί που αναζητούσαν απαντήσεις στα ερωτήματα που τους είχαν τεθεί μέσα από συνεργασία και συζήτηση στις ομάδες τους. Ο καθηγητής ακόμα και σε στιγμές που εμφανιζόταν κάποιο εμπόδιο επέλεξε να ακούει όλες τις απαντήσεις και τις παρατηρήσεις με προσοχή και προσπαθούσε να τους δώσει τις κατάλληλες πληροφορίες ώστε να βοηθήσει τα μέλη των ομάδων να εξάγουν μόνα τους τη σωστή απάντηση *(*Coupled Inquiry*)*.

- **Διερεύνηση και «Κόσμος των Μαθηματικών» - «Πραγματικός Κόσμος»**

Είναι φανερό ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα δημιουργήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε η σύνδεση του «κόσμου των μαθηματικών» με τον «πραγματικό κόσμο» ήταν από τους βασικούς της στόχους. Η μορφή και η εικόνα του φύλλου εργασίας παρέπεμπε σε μια ρεαλιστική μαθηματική κατάσταση προς λύση και τίποτα δε θύμιζε ένα στείρο πρόβλημα μαθηματικών. Η εισαγωγή που υπήρχε αρχικά στο φύλλο εργασίας, κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών και παράλληλα συνέβαλε ώστε να τους εισάγει ομαλά στη διερευνητική διαδικασία ενασχόληση με το συγκεκριμένο θέμα. Παράλληλα οι εικόνες με τις οποίες είχαν εμπλουτισθεί οι δραστηριότητες λειτούργησαν υποστηρικτικά για τη σύνδεση αυτή.

Σε όλες τις δραστηριότητες που ακολούθησαν η σύνδεση των μαθηματικών συμπερασμάτων με την πραγματική πλευρά ήταν κεντρικό σημείο συζήτησης σε όλες τις ομάδες εργασίας. Οι μαθητές καθώς επεξεργάζονταν τα δεδομένα τους είχαν δοθεί πάντα στο μυαλό τους ότι ασχολούνται με ένα ρεαλιστικό

πρόβλημα και αναζητούσαν λύσεις που θα ανταποκρίνονται στη πραγματικότητα. Η κατανόηση σύνδεσης των δυο «κόσμων» έγινε άμεσα φανερή από τους προβληματισμούς που εξέφρασαν κατά τη εύρεση κατάλληλου σχήματος μοντελοποίησης τόσο του δέντρου όσο και του δενδρυλλίου. Η διάσταση του κορμού του δενδρυλλίου, τα φυλλώματα των δέντρων καθώς και οι αποστάσεις μεταξύ των δέντρων, αλλά και των δέντρων από το φράχτη αποτέλεσαν προβληματισμούς των ομάδων που έδειξαν ότι κατανοούσαν και λάμβαναν υπόψιν τους τη ρεαλιστικότητα της κατάστασης που είχαν να διαχειριστούν. Ορισμένες σκέψεις τους παραθέτονται παρακάτω:

«Τα φύλλα εδώ θα ακούμπαγαν το φράχτη και πιθανόν να υπήρχε ένα πρόβλημα.»

«Δεν είναι σημείο…Δεν γίνεται να είναι μηδενικής διαμέτρου. Οπότε και πλάγια και οριζόντια θα απέχουν κάτι λιγότερο από 4 μέτρα.»

«…Το κάθε κουτάκι είναι 1 τετραγωνικό μέτρο, ο κορμός δεν θα μπορούσε να φτάσει το 1 τετραγωνικό μέτρο οπότε το σημείο θα μπορούσε να δώσει μια καλύτερη ιδέα.»

«Πιστεύω ότι δεν είναι απαραίτητο να βγει κύκλος το δέντρο γιατί ένα κλαδί μπορεί να αναπτυχθεί περισσότερο από κάποια άλλα οπότε να καταλάβει μεγαλύτερο εμβαδόν από ακτίνα 2 μέτρων.»

«Εδώ πέρα λέει ότι θα πρέπει να υπάρχουν αποστάσεις μεταξύ των δέντρων προκειμένου να διευκολύνονται οι καλλιεργητικές εργασίες που θα πραγματοποιούνται. Οπότε θα πρέπει να υπάρχουν αποστάσεις. Δε μπορεί τα φύλλα να είναι το ένα πάνω στ' άλλα.»

- Διερεύνηση και Συνεργασία

Τα μέλη των ομάδων από τα πρώτα μάλιστα λεπτά εκδήλωσαν έντονο ενδιαφέρον για τη δραστηριότητα που τους μοιράστηκε. Οι ομάδες φίλων που είχε δημιουργήσει ο χωρισμός σε ομάδες έδρασε θετικά στην εξέλιξη της

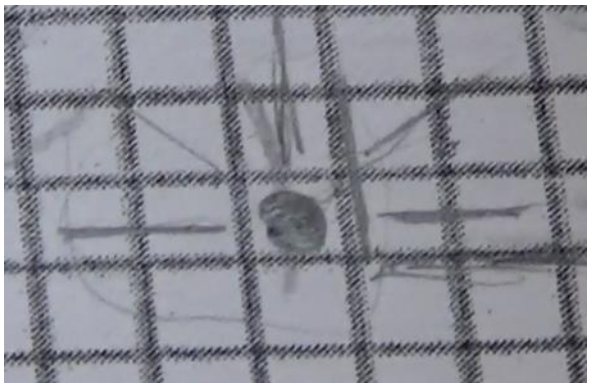
παρέμβασης. Όλες οι ομάδες συνεργάστηκαν με δημιουργικό και συλλογικό τρόπο. Είχαν αναλάβει ρόλους και δρούσαν συλλογικά για την επίλυση της δραστηριότητάς που τους είχε δοθεί. Αντάλλασσαν απόψεις και μέσα από δημιουργικό διάλογο εξαγόταν η απάντηση. Σε όλες τις ομάδες αξιοποιήθηκαν με το καλύτερο δυνατό τρόπο οι αρχές της ομαδοσυνεργατικής διαδικασίας. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δούλευαν, όπως ανέφερε ο καθηγητής τους, συχνά σε ομάδες εργασίας και αυτό έγινε φανερό. Από την αρχή της παρέμβασης έδειχναν να γνωρίζουν πως για να αντιμετωπίσουν μια τέτοια διερευνητική δραστηριότητα έπρεπε να δράσουν συλλογικά, να αξιοποιήσουν όλες τις ιδέες και να συνεργαστούν. Η πολυφωνία των σκέψεων, των απόψεων, των επιχειρημάτων καθώς και η διάθεση των μελών να βοηθήσουν όποιο μέλος δεν καταλάβαινε κάτι οδήγησαν στη βέλτιστη δυνατή λειτουργία των ομάδων.

- Διερεύνηση και Λύση Προβλήματος

Τα συμπεράσματα και η κατάστρωση σχεδίων επίλυσης της δραστηριότητας ήλθαν μέσα από διερεύνηση και πειραματισμό από τις ομάδες. Οι μαθητές επεξεργάζονταν τα δεδομένα, διερευνούσαν τις πτυχές των ερωτημάτων και κατέστρωναν στρατηγικές επίλυσης. Μετά την ολοκλήρωση μιας ενότητας ένας εκπρόσωπος από κάθε ομάδα παρουσίαζε τις προτάσεις της ομάδας του, οι οποίες γίνονταν αντικείμενο διερεύνησης και διαλόγου σε όλη την τάξη ώστε να καταλήξουν σε ένα τελικό συμπέρασμα.

Το πρώτο κομμάτι με το οποίο ασχολήθηκαν ήταν η μοντελοποίηση του δενδρυλλίου και του δέντρου. Η αναζήτηση βέλτιστων σχημάτων αναπαράστασής τους στο επίπεδο προβλημάτισε τις ομάδες εργασίες, οι οποίες άμεσα άρχισαν να αναζητούν λύσεις. Σκέψεις, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ήταν η τελεία ή ολόκληρο τετράγωνο για το δενδρύλλιο και ένα κύκλος ή ένα μεγαλύτερο τετράγωνο για το δέντρο. Οι ομάδες καθώς προσπαθούσαν να καταλήξουν στην επιλογή βέλτιστου σχήματος συζητούσαν, απέρριπταν ή

δέχονταν ιδέες και σκέψεις, πειραματίζονταν με σχέδια στις κατόψεις τους (Εικόνα 4.51).



Εικόνα 4.51

Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιλογή σχήματος σε όλες τις ομάδες ήταν κυρίως διαισθητική. Η διερευνητική διαδικασία εύρεσης βέλτιστου μοτίβου αποτύπωσης δεν τους δημιούργησε την ανάγκη επιχειρηματολογίας των λεγόμενών τους με μαθηματικά επιχειρήματα. Το κομμάτι αυτό μάλιστα προσπεράστηκε βεβιασμένα και κατά την επιλογή σχημάτων από όλη την τάξη. Σε ένα πλήθος απόψεων και σε συνδυασμό με την πίεση χρόνου ο καθηγητής δεν καθοδήγησε τους μαθητές στη μαθηματική επιχειρηματολογία επιλογής των σχημάτων, κυρίως του κύκλου για το δέντρο. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος ήταν να μη πεισθούν όλες οι ομάδες για την καταλληλότητα του κύκλου ως βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης ενός δέντρου στο επίπεδο.

Η εύρεση πιθανών διατάξεων ήταν ένα ευχάριστο κομμάτι της διερευνητικής διαδικασίας για τους μαθητές. Τα καπάκια διαφορετικών μεγεθών έδρασαν υποστηρικτικά και αποτέλεσαν ένα δημιουργικό διερευνητικό εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Από το πρώτο λεπτό που μοιράστηκαν στις ομάδες αξιοποιήθηκαν με το καλύτερο δυνατό τρόπο προς την αναζήτηση τόσο των πιθανών διατάξεων όσο και την εξαγωγή παρατηρήσεων, πολύτιμων για τη μαθηματική λύση.

4.5 Ανάλυση 2ης Παρέμβασης Εκπαιδευτικού Β

4.5.1 1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Μοντελοποίηση

Η παρέμβαση αυτή αποτέλεσε συνέχεια της πρώτης παρέμβασης του εκπαιδευτικού Β, με στόχο την ολοκλήρωση της δραστηριότητας 3 και την εύρεση της μαθηματικής λύσης του προβλήματος. Οι ομάδες εργασίας έχοντας ως δεδομένα τα συμπεράσματα που είχαν εξάγει στην προηγούμενη φάση κλήθηκαν να καταστρώσουν ένα μαθηματικό σχέδιο επίλυσης του προβλήματος. Μέσα από την εμπλοκή τους έγινε εμφανής η δυσκολία τους κατά τη μοντελοποίηση των τα δεδομένων, αν και ήταν η δεύτερη φορά που έρχονταν σε επαφή.

- **Εμπόδια κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος**

Από την αρχή της παρέμβασης πάνω από τις μισές ομάδες προβληματίστηκαν πάλι με την εκφώνηση: ο κορμός κάθε δέντρου απέχει 2μ από το φράχτη και 4μ από το άλλο. Παρά το γεγονός ότι θυμούνταν ότι η εικόνα του δέντρου στο επίπεδο αναπαριστάνεται με κύκλο, δυσκολεύονταν να τοποθετήσουν το πρώτο δέντρο στην κάτοψη που τους είχε δοθεί. Σημεία που αποτελούσαν εμπόδιο για αυτούς ήταν η απόσταση που θα έχει ένα δέντρο από το φράχτη ή πόσο θα απέχει το ένα από το άλλο. Τα ερωτήματα αυτά είχαν διευκρινιστεί στη προηγούμενη φάση και τώρα χρειάστηκε περίπου ένα τέταρτο για να τα ξεκαθαριστούν από την αρχή. Βέβαια δε μπορούμε να γνωρίζουμε αν η παρανόηση αυτή δημιουργήθηκε από τον αρκετό καιρό που πέρασε ή οφείλεται σε μια παρανόηση που δε εξηγήθηκε την προηγούμενη φορά και ήρθε τώρα στην επιφάνεια.

Το δεύτερο εμπόδιο αφορούσε την ισχυρή πεποίθηση της πλειοψηφίας των ομάδων να βρουν την κλίμακα του χωραφιού. Οι ομάδες έχασαν πολύ χρόνο προσπαθώντας να ασχοληθούν με τη κλίμακα και πόση πρέπει να είναι η ακτίνα

του κύκλου τους στη συγκεκριμένη κλίμακα. Μάταια η καθηγήτρια προσπαθούσε να τους βοηθήσει μέσα από υποστηρικτικές ερωτήσεις ώστε να εγκαταλείψουν αυτή την ιδέα. Συγκεκριμένα εργαλείο αποτέλεσε ένα αρχείο geogebra με τρεις δρομείς, όπου άλλαζαν τις διαστάσεις του οικοπέδου και την ακτίνα του κύκλου. Η ενέργεια στόχευε να παροτρύνει τους μαθητές να σκεφτούν πιο αφαιρετικά και γενικά τη δομή της λύσης, χωρίς όμως να φέρει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Τελικά το εμπόδιο αυτό ξεπεράστηκε όταν η καθηγήτρια πλησιάζοντας μια ομάδα άρχισε να τις κάνει ερωτήσεις για το πόσους κύκλους χωράνε στη πρώτη σειρά. Παράλληλα τους άλλαζε τις διαστάσεις του οικοπέδου, συγκεκριμένα τους ρώτησε τι γίνεται αν η διάσταση είναι 8, 10,11, 12. Η ενέργεια αυτή οδήγησε αυτή την ομάδα να διαπιστώσει ότι έπρεπε να καταστρώσουν ένα σχέδιο επίλυσης και όχι να γεμίσουν το συγκεκριμένο χωράφι με κύκλους. Το συμπέρασμα αυτό ανακοινώθηκε σε όλη την τάξη και προχώρησε η διαδικασία.

Παράλληλα ένα ακόμα σημείο που δυσκόλεψε τη μαθηματική εύρεση της λύσης αποτέλεσε η εύρεση των σειρών που χωράνε στο οικόπεδο στη διάταξη τύπου Β. Από τις 6 ομάδες εργασίας έχουμε την εικόνα μόνο των 4 καθώς η 2η ομάδα δε παρουσίασε κανένα αποτέλεσμα και η 6η ομάδα απλά ανέφερε ένα αποτέλεσμα χωρίς να αιτιολογήσει τη σκέψη της. Οι 2 από τις 4 ομάδες που απάντησαν λοιπόν, έκαναν το ίδιο λάθος, θέλοντας να βρουν τον αριθμό των σειρών διαίρεσαν τη διάσταση του οικοπέδου με τη διάμετρο του κύκλου. Βέβαια μια μαθήτρια από αυτές τις ομάδες παρατήρησε και επεσήμανε ότι κάτι γίνεται με τους κύκλους, καθώς οι στη διάταξη αυτή οι σειρές μπαίνουν πιο μέσα από την άλλη διάταξη. Η παρατήρησή της όμως αυτή δεν αξιοποιήθηκε κατάλληλα από την ομάδα της, με αποτέλεσμα να μην τους προβληματίσει.

- **Πρόταση ομάδας 4**

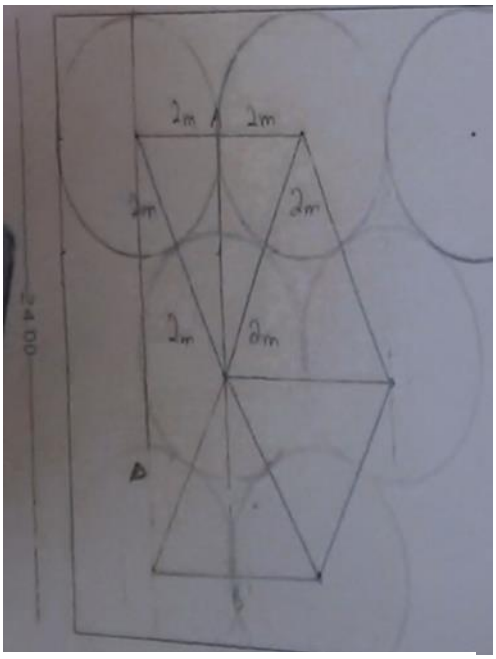
Η 4η ομάδα ήταν αυτή που έφτασε πιο κοντά στη βέλτιστη λύση της δραστηριότητας. Τα μέλη της ομάδας αυτής θυμούνταν από τη προηγούμενη τη συζήτηση που είχαν κάνει στη τάξη για το ισόπλευρο τρίγωνο. Η πληροφορία

αυτή, η οποία βεβιασμένα είχε αναφερθεί την προηγούμενη φορά, αξιοποιήθηκε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο από τους μαθητές. Το ισόπλευρο τρίγωνο που σχημάτισαν έγινε το εργαλείο τους για τη κατάστρωση της μαθηματικής λύσης.

Οι ενέργειές τους ξεκίνησαν θέλοντας να υπολογίσουν το ύψος από το ισόπλευρο τρίγωνο. Στη συνέχεια εντόπισαν το μοτίβο του τριγώνου που επαναλαμβάνεται (συμμετρικό τρίγωνο κατά την κορυφή του πρώτου) και ασχολήθηκαν με τις τριάδες των σειρών. Δηλαδή εστίασαν σε δυο τρίγωνα, με αποτέλεσμα ενώ είχαν εντοπίσει το μικρότερο δυνατό μοτίβο να εργάζονται σαν να είχαν επιλέξει το ρόμβο. Παράλληλα οι ενέργειες τους δεν συνέβαλαν στο να λάβουν υπόψιν τους τη ακτίνα που υπάρχει ανάμεσα στη γραμμή του ορθογωνίου και τη βάση του τριγώνου. Τέλος δεν εξετάζεται καθόλου η πιθανή ύπαρξη σειράς στο τέλος, η οποία δε μπορεί να συμπεριληφθεί στο τριγωνικό μοτίβο.

Η μαθήτρια που σηκώθηκε στο πίνακα περιγράφει το σκεπτικό της ομάδας της: «Λοιπόν είπαμε αυτό που λέγαμε την προηγούμενη φορά ότι στους εφαπτόμενους κύκλους δημιουργείται ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Οπότε είπαμε ότι θα βρούμε το ΑΒ το οποίο είναι ίσο με το ΓΔ. Βρήκαμε το ΑΒ και βγήκε 4√3. Οπότε διαιρέσαμε το 24 με το 4√3…. Μετά βρήκαμε ότι η κάθε σειρά είναι 10.. εεε 11. Αυτή είναι 11…εδώ θα είναι 2μ όμως οπότε θα χωρέσουν και εδώ 11. Οπότε θα ναι όλες οι σειρές 11 και θα είναι 6 κάθετα οπότε θα είναι 6 επί 11…66.» (Εικόνα 4.52)

Η συγκεκριμένη ομάδα ήταν η μόνη που προβληματίστηκε και ασχολήθηκε και με την άλλη εικόνα που δημιουργεί η τριγωνική διάταξη αν αλλάξουμε τη πλευρά όπου θα αρχίσουμε το γέμισμα. Η πίεση χρόνου όμως δεν τους έδωσε τη δυνατότητα ολοκλήρωσης της σκέψης τους. Παρόλα αυτά αυτή η πρόταση λύσης δεν είχε μεγάλη απόκλιση από το σωστό αποτέλεσμα. Η δικιά τους προτεινόμενη λύση θα απείχε λίγο από τη πραγματικότητα ή και καθόλου, αν ήταν τυχεροί!

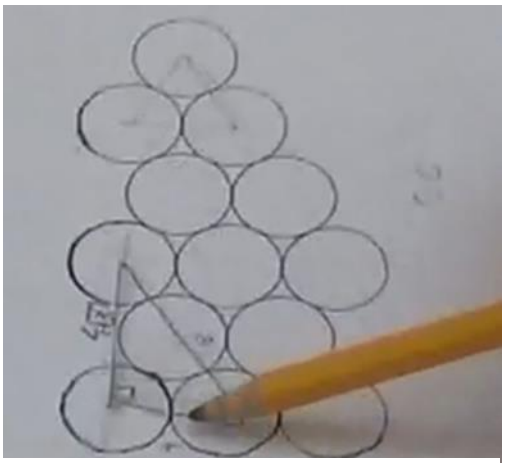


Εικόνα 4.52

- **Πρόταση ομάδας 5**

Η 5η ομάδα ασχολήθηκε με ένα ορθογώνιο τριγωνικό μοτίβο (Εικόνα 4.53). Συγκεκριμένα ένωσαν τα κέντρα τεσσάρων κύκλων και σχημάτισαν ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Στο μοτίβο αυτό ξεκίνησαν συλλέγοντας πληροφορίες για τις πλευρές του, συγκεκριμένα ανέφεραν ότι η μια πλευρά είναι 4μ και η άλλη 8μ και με πυθαγόρειο θεώρημα βρήκαν την άλλη κάθετη πλευρά $4\sqrt{3}$. Έχοντας συλλέξει τις παραπάνω πληροφορίες προχώρησαν να εξετάσουν πόσα τέτοια μοτίβα χωράνε κατά μήκος τα κάτοψης, δηλαδή πόσες τριάδες γραμμών, διαιρώντας το μήκος του οικοπέδου με τη μια κάθετη πλευρά $(4\sqrt{3}+4)$. Η ενέργειά τους αυτή τους οδήγησε σε 66 δέντρα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η ομάδα είχε εντοπίσει το μικρότερο δυνατό μοτίβο (ισόπλευρο τρίγωνο) που θα τους οδηγούσε πιο εύκολα στη μαθηματική λύση. Η απόρριψη της ιδέας αυτής έφερε το ορθογώνιο τρίγωνο με το οποίο ασχολήθηκαν αρχικά χωρίς όμως να γνωρίζουμε τους λόγους αλλαγής μοτίβου.



Εικόνα 4.53

- **Η αυθαίρετη απόρριψη της λύσης**

Αξίζει να σημειωθεί ότι μερικές ομάδες εργασίας αφιέρωσαν ελάχιστο εως καθόλου χρόνο για τη διάταξη τύπου Α. Οι παρατηρήσεις μέσα από την εύρεση των πιθανών διατάξεων, την προηγούμενη φορά,πιθανόν να τους είχαν οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι συνήθως συμφέρει η διάταξη τύπου Β. Με αυτό ως δεδομένο πιθανόν να απέρρριψαν τη διάταξη τύπου Α.

4.5.2 2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Διερεύνηση

Η διερευνητική διαδικασία σε αυτή τη παρέμβαση εστίαζε στην κατάστρωση σχεδίου υπολογισμού των κύκλων που χωράνε σε μια ορθογώνια διάταξη και τη βέλτιστη επιλογή της λύσης. Η δραστηριότητα λειτούργησε σαν συνέχεια της προηγούμενης παρέμβασης, με τις ομάδες εργασίας να παίρνουν ως νέα δεδομένα τα συμπεράσματα που είχαν εξάγει στη προηγούμενη φάση.

Οι ομάδες εργασίας σε όλο το δίωρο επεξεργασίας και διερεύνησης των πτυχών του προβλήματος λειτούργησαν ανεξάρτητες η μια από την άλλη. Το φύλλο εργασίας καθώς και η στάση του εκπαιδευτικού έδωσαν χαρακτήρα πια ανοικτής διερεύνησης (open inquiry). Τα μέλη της κάθε ομάδας, έχοντας το

κεντρικό ρόλο της διερευνητικής διαδικασίας, επεξεργάστηκαν τα στοιχεία, εξέτασαν τις πτυχές του προβλήματος, εξήγαγαν τα συμπεράσματά τους και στα τελευταία δέκα λεπτά ανακοίνωσαν τις λύσεις τους σε όλη την τάξη.

- **Διερεύνηση και Συνεργασία**

Η σύνθεση των ομάδων εργασίας δεν άλλαξε σε μεγάλο βαθμό από την προηγούμενη παρέμβαση. Οι ομάδες κατά βάση παρέμειναν οι ίδιες με ορισμένες προσθέσεις μελών. Τα νέα μέλη βέβαια προστέθηκαν με την ίδια λογική που είχε ακολουθήσει ο εκπαιδευτικός στον αρχικό του συνδυασμό.

Σε αυτή την παρέμβαση δεν εργάστηκαν όλοι οι μαθητές με τον ίδιο ενθουσιασμό που είχαν εργαστεί στη προηγούμενη. Αρκετές ήταν οι ομάδες στις οποίες παρατηρήθηκε ότι δεν υπήρχε συμμετοχή όλα τα μέλη. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα με την 4η ομάδα, η οποία έφτασε κοντά στο τρόπο λύσης, όπου από τα 4 μέλη της εργάζονταν μόνο τα δυο. Μια ομάδα εργασίας μάλιστα, ασχολήθηκε επιφανειακά (ομάδα 2) και δεν κατάφερε να εξάγει κανένα συμπέρασμα για τη λύση καθώς αν και πενταμελής μόνο το ένα μέλος της φάνηκε ενεργό. Θα ήταν άδικο όμως να μην αναφέρουμε ότι υπήρξαν και μαθητές που εργάστηκαν με ενδιαφέρον και ενθουσιασμό.

Η αλλαγμένη και όχι τόσο ζωηρή εικόνα της τάξης που αντικρίσαμε την προηγούμενη φορά ίσως να οφείλεται στο μεγάλο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε ανάμεσα στις δυο δραστηριότητες. Οι μαθητές στην αρχή που έγινε μια σύνοψη των όσων είχαν δει στη προηγούμενη φάση δε θυμούνταν όλα τα συμπεράσματα. Πιθανόν ο χρόνος που μεσολάβησε ώστε να θυμηθούν κάποια πράγματα και να κάνουν κάποιες περεταίρω σκέψεις τους κούρασε και για αυτό αποστασιοποιήθηκαν.

Παρόλα αυτά η συνεργασία στις ομάδες που έδειξαν λίγο περισσότερο ενθουσιασμό ήταν άριστη, δημιουργική και συνέβαλε θετικά στην εξέλιξη της διερευνητικής διαδικασίας. Το κάθε μέλος της ομάδας παρουσίαζε στα

υπόλοιπα μέλη τις ιδέες του, οι οποίες γίνονταν αντικείμενο διερεύνησης, συζήτησης και επεξεργασίας. Τέλος οι μαθητές μέσα από διάλογο απέρριπταν ή δέχονταν ιδέες, μέθοδος που τους οδήγησε στη εύρεση της μαθηματικής λύσης.

- Διερεύνηση και Λύση Προβλήματος

Αντικείμενο διερεύνησης αυτής της παρέμβασης, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αποτέλεσε η κατάστρωση σχεδίου εύρεσης της μαθηματικής λύσης της δραστηριότητας. Οι μαθητές εστίασαν και ασχολήθηκαν κατά βάση με τη διάταξη τύπου Β.

Οι ομάδες εργασίας, έχοντας κεντρικό ρόλο και σε αυτή την παρέμβαση, εργάστηκαν αυτόνομα για την αναζήτηση της λύσης του προβλήματος. Τα μέλη των ομάδων επεξεργάζονταν τα δεδομένα και αναζητούσαν πιθανές στρατηγικές επίλυσης της δραστηριότητας. Οι ιδέες του κάθε μέλους γινόταν αντικείμενο διερεύνησης και διαπραγμάτευσης μέσα στη κάθε ομάδα και η αποδοχή τους ή η απόρριψή τους γινόταν το σκαλοπάτι για την επόμενη σκέψη τους. Η συνεργασία και ο πλουραλισμός των προτάσεων αποτέλεσε το βασικό λίθος για την κατάστρωση των στρατηγικών επίλυσης του προβλήματος.

Αξιοσημείωτο κομμάτι της διερευνητικής διαδικασίας επίλυσης είναι κάποιες από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές για να περιγράψουν τις δυο διατάξεις. Τη διάταξη τύπου Α τη περιέγραφαν σαν κανονική ή διάταξη που βρίσκεται σε τάξη. Από την άλλη μεριά τη διάταξη τύπου Β σαν ζικ ζακ , διαγώνια ή σκορπισμένη. Η επιλογή των λέξεων αυτών κάνουν φανερή την ανάγκη των μαθητών να συνδέσουν ένα καινούριο – διαφορετικό πρόβλημα με προγενέστερες εμπειρίες τους και γνώσεις. Να σημειώσουμε ότι η αφαιρετική αυτή διαδικασία διαχωρισμού του πραγματικού προβλήματος από το μαθηματικό αποτελεί ένα τεράστιο βήμα για την εύρεση της λύσης.

- Διερεύνηση και Αιτιολόγηση

Στην παρέμβαση αυτή έγινε φανερή η ανάγκη δυο ομάδων να αιτιολογήσουν κάποια συμπεράσματά τους. Μέσα από τη διερευνητική διαδικασία αναζήτησης της λύσης, στις ομάδες 1 και 4 γεννήθηκε η ανάγκη να εξηγήσουν πότε στη δεύτερη γραμμή στη διάταξη τύπου Β χωράει ένας κύκλος λιγότερος. Η απόδειξη τους στηρίχθηκε σε μια ολοκληρωμένη μαθηματική σκέψη με λογικά επιχειρήματα. Μάλιστα η ομάδα 4 ήταν αυτή που πρώτη παρατήρησε ότι στη διάταξη αυτή, αν ξεκινήσουμε το γέμισμα από την πλευρά με τα 24m η δεύτερη γραμμή θα χωράει ένα λιγότερο κύκλο από τη πρώτη, ενώ αν ξεκινήσουμε από την πλευρά των 46m θα έχουν όλες οι γραμμές τον ίδιο αριθμό κύκλων.

Κεφάλαιο 5: Συζήτηση και Συμπεράσματα

Στόχος της έρευνας ήταν να μελετηθούν οι διαδικασίες μοντελοποίησης που ακολουθούν οι μαθητές σε μια διερευνητική δραστηριότητα. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν δυο. Το πρώτο αφορούσε τα βήματα που ακολουθούν οι μαθητές για να μοντελοποιήσουν ένα πρόβλημα καθώς και τα εμπόδια που θα συναντήσουν και το δεύτερο εστίαζε στις πρακτικές που ακολουθούν ενώ εργάζονται σε μια διερευνητική δραστηριότητα.

Η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε δυο τάξεις με διαφορετικούς εκπαιδευτικούς. Ο κάθε εκπαιδευτικός διαμόρφωσε το δικό του φύλλο εργασίας, και τα δυο όμως είχαν το ίδιο θεματικό περιεχόμενο. Ο εκπαιδευτικός Α σχεδίασε ένα φύλλο εργασίας στηριγμένος καθαρά στις αρχές της ανοικτής διερεύνησης (Open Inquiry), ενώ ο εκπαιδευτικός Β ακολούθησε τις αρχές της δομημένης διερεύνησης (Structural Inquiry).

Η κεντρική ιδέα των παρεμβάσεων στηρίχθηκε στο ότι το βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης ενός δέντρου στο επίπεδο είναι ο κύκλος. Η ιδιότητα αυτή συνέβαλε στο να μετατραπεί ένα ρεαλιστικό πρόβλημα σε μαθηματικό. Συγκεκριμένα το ρεαλιστικό ερώτημα ήταν: «Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός δέντρων που μπορώ να φυτέψω σε ένα ορθογώνιο χωράφι και με ποιο τρόπο;», χάρη στη παραπάνω ιδιότητα μπορούσε να μοντελοποιηθεί στο εξής ερώτημα: «Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός κύκλων που χωράνε σε ένα ορθογώνιο και με ποια διάταξη;». Με αυτά τα ερωτήματα ως αφετηρία σχεδιάστηκαν οι τέσσερις δίωρες παρεμβάσεις (δυο για κάθε εκπαιδευτικό), οι οποίες παρακολουθήθηκαν και βιντεοσκοπήθηκαν με στόχο να απαντήσουμε στα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Και οι δυο εκπαιδευτικοί επέλεξαν να χωρίσουν τους μαθητές σε ομάδες εργασίας καθώς πίστευαν πώς σε ένα διερευνητικό πρόβλημα η ομαδοσυνεργατική διαδικασία θα συμβάλει ώστε να φτάσουν πιο εύκολα στη μαθηματική λύση. Οι μαθητές, σε όλες τις παρεμβάσεις, κατείχαν κεντρικό ρόλο. Πήραν στα χέρια τους τη πορεία της εκπαιδευτικής διαδικασίας, επεξεργάζονταν τα δεδομένα στις ομάδες τους, διερευνούσαν τις ιδέες των μελών και η απόρριψη ή η αποδοχή τους, οδηγούσε την κάθε ομάδα σε κάποιο συμπέρασμα. Οι εκπαιδευτικοί επενέβαιναν υποστηρικτικά όταν αυτό κρινόταν απολύτως απαραίτητο. Παράλληλα μετά την ολοκλήρωση ενός κρίσιμου ερωτήματος ή μιας σειράς κρίσιμων ερωτημάτων οι ομάδες παρουσίαζαν τις λύσεις τους στο πίνακα, οι οποίες γίνονταν αντικείμενο συζήτησης και διερεύνησης από όλη τη τάξη.

Ο κάθε εκπαιδευτικός υλοποίησε στη τάξη του δυο δίωρες διδακτικές παρεμβάσεις (τέσσερις συνολικές παρεμβάσεις). Στον αρχικό τους σχεδιασμό και οι δυο εκπαιδευτικοί θεώρησαν ότι η δραστηριότητα θα ολοκληρωνόταν σε μια παρέμβαση. Τα εμπόδια, όμως, που αντιμετώπισαν οι μαθητές καθυστέρησαν την εκπαιδευτική διαδικασία με αποτέλεσμα να κριθεί απαραίτητη άλλη μια παρέμβαση ώστε να ολοκληρωθεί η δραστηριότητα. Οι ομάδες εργασίας αφιέρωσαν αρκετό χρόνο για την εύρεση του βέλτιστου σχήματος αναπαράστασης του δέντρου στο επίπεδο, με αποτέλεσμα μην υλοποιηθεί ο αρχικός σχεδιασμός των εκπαιδευτικών.

Οι δυο τάξεις σε γενικές γραμμές έφτασαν στο ίδιο σημείο της λύσης σε καθεμία από τις δυο παρεμβάσεις. Συγκεκριμένα στην πρώτη παρέμβαση κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τα δεδομένα του προβλήματος –να δουν ότι το δέντρο παριστάνεται με κύκλο στο επίπεδο- και να εντοπίσουν πιθανές διατάξεις. Παράλληλα ασχολήθηκαν με την εύρεση αλγορίθμου επίλυσης για τη διάταξη τύπου Α και διατύπωσαν κάποιες αρχικές σκέψεις για τη διάταξη τύπου Β. Στη δεύτερη παρέμβαση οι ομάδες εργασίας κατά βάση ασχολήθηκαν με τη διάταξη

τύπου Β, διερεύνησαν τις πτυχές της και προσπάθησαν να καταστρώσουν ένα σχέδιο υπολογισμού των κύκλων που χωράνε σε μια ορθογώνια κάτοψη με τη διάταξη αυτή.

Στη πρώτη παρέμβασή του ο εκπαιδευτικός Α σχεδίασε μια δραστηριότητα, η οποία τοποθετούσε τους μαθητές στο επάγγελμα του αρχιτέκτονα τοπίων και τους ζητούσε να δημιουργήσουν μια ολοκληρωμένη χωρική πρόταση για ένα πελάτη. Το κτήμα, για το οποίο θα γινόταν η μελέτη, είχε διαστάσεις 24x46m, και ο «φανταστικός πελάτης» ήθελε να το αξιοποιήσει και να φυτέψει μια συμφέρουσα ποικιλία δέντρου. Η επιλογή θα γινόταν ανάμεσα στη πορτοκαλιά και τη νάνα-πορτοκαλιά, με την κάθε ποικιλία δέντρου να τηρεί συγκεκριμένες αποστάσεις φύτευσης, αλλά και να παράγει διαφορετική ποσότητα καρπών. Οι μαθητές, λοιπόν, έπρεπε να κάνουν μια ολοκληρωμένη μελέτη για να παρουσιάσουν την πιο συμφέρουσα λύση στο πελάτη τους.

Στη παρέμβαση αυτή οι μαθητές τελικά, ασχολήθηκαν μόνο με τη μια ποικιλία (πορτοκαλιά). Η σύνθετη διαδικασία μοντελοποίησης, οι ελλιπείς εμπειρίες των μαθητών με τέτοιου είδους διερευνητικά προβλήματα, ο περιορισμένος χώρος καθώς και ο μεγάλος όγκος των ερωτημάτων ήταν κάποιοι από τους παράγοντες που ώθησαν τον καθηγητή να παροτρύνει τους μαθητές να ασχοληθούν με τη μια ποικιλία.

Αρχικά οι ομάδες εργασίας ξεκίνησαν να αναζητούν αλγοριθμικές διαδικασίες εύρεσης της λύσης. Η μη αξιοποίηση των ρεαλιστικών στοιχείων που τους δόθηκαν, συνέβαλε στο να μην αντιμετωπίσουν τη δραστηριότητα σαν μια ρεαλιστική κατάσταση για λύση αλλά σαν ένα απλό μαθηματικό πρόβλημα.

Η μορφή που θα έχει ένα δέντρο σε μια κάτοψη δεν απασχόλησε καθόλου τους μαθητές, με αποτέλεσμα να ακολουθήσουν λανθασμένες στρατηγικές επίλυσης. Οι αποστάσεις που έπρεπε να έχουν τα δέντρα μεταξύ τους καθώς και οι αποστάσεις από το φράχτη του κτήματος χρησιμοποιήθηκαν για να εντοπίσουν οι ομάδες το ωφέλιμο φυτεύσιμο μέρος, όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν. Η

λανθασμένη μοντελοποίση αυτής της πληροφορίας ήταν καθοριστική για το λανθασμένο τρόπο σκέψης που ακολούθησαν οι ομάδες.

Ο προβληματισμός για την αναπαράσταση ενός δέντρου στο επίπεδο ήλθε έπειτα από την παρέμβαση του εκπαιδευτικού, ο οποίος μέσα από στοχευμένες ερωτήσεις προσπάθησε να βοηθήσει τους μαθητές. Αφιερώθηκε αρκετός χρόνος ώστε οι μαθητές να καταλάβουν, γιατί πρέπει να περάσουν από αυτό το σκαλοπάτι της λύσης και το που θα τους χρησιμεύσει. Η επιλογή του κύκλου σαν βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης προέκυψε μέσα από συζήτηση με όλη την τάξη χωρίς όμως να τεκμηριωθεί με μαθηματικούς ορισμού, ώστε από την εικασία να περάσουν στη μαθηματική θεμελίωση.

Η εύρεση των πιθανών διατάξεων ήταν αποτέλεσμα πειραματισμού και διερεύνησης. Οι ομάδες εργασίας, αξιοποιώντας τα χειραπτικά εργαλεία (καπάκια) που τους είχαν δοθεί έφτασαν άμεσα στη διάταξη τύπου Α. Η εύρεση της διάταξης τύπου Β ήταν αυτή που δυσκόλεψε περισσότερο τις ομάδες εργασίας, η οποία όμως εντοπίστηκε μέσα από παρατήρηση. Βέβαια οι μαθητές δε παρατήρησαν τη διαφορετική εικόνα που παίρνουμε στη διάταξη τύπου Β ανάλογα από ποια πλευρά θα αρχίσουμε να γεμίζουμε την επιφάνεια (μήκος ή πλάτος) με κύκλους.

Τα τελευταία λεπτά της παρέμβασης αφιερώθηκαν στην κατάστρωση σχεδίου για την εύρεση της μαθηματικής λύσης του προβλήματος. Η εύρεση της λύσης για τη διάταξη τύπου Α σχεδιάστηκε άμεσα από τις δυο ομάδες εργασίας. Η λύση για τη διάταξη τύπου Β, δεν προχώρησε καθώς δεν υπήρξε ο απαιτούμενος χρόνος. Βέβαια παρουσιάστηκαν στο πίνακα κάποιες αρχικές σκέψεις, οι οποίες αξιοποιήθηκαν στην επόμενη παρέμβαση για την εύρεση της ολοκληρωμένης λύσης. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι στη δεύτερη γραμμή μάλλον θα χωράει ένας κύκλος λιγότερος και ότι πιθανόν τώρα να έχουμε περισσότερες σειρές κύκλων.

Αξιοσημείωτο σημείο της παρέμβασης είναι ότι η πιο «αδύναμη» στα μαθηματικά ομάδα (ομάδα ένα), αν και δεν κατάφερε να φτάσει στη λύση ούτε της διάταξης τύπου Α, ήταν αυτή η ομάδα που σε σημεία κρίσιμα είχε το θάρρος να εκφράσει τη γνώμη της και να παίξει καθοριστικό ρόλο για την εξέλιξη της πορείας του μαθήματος. Σε διερευνητικά ερωτήματα που έθετε ο καθηγητής παρατηρήθηκε ότι οι καλοί μαθητές έδειχναν αδυναμία. Η αδυναμία αυτή πιθανόν οφείλεται σε φόβο για την ορθότητα της απάντησής τους.

Στη δεύτερη παρέμβαση του εκπαιδευτικού Α, οι μαθητές ασχολήθηκαν με το καθαρά μαθηματικό κομμάτι της δραστηριότητας. Το πραγματικό πλαίσιο αφαιρέθηκε και οι μαθητές κλήθηκαν να αποφασίσουν ποια από τις δυο πιθανές διατάξεις θα χωρέσει τους περισσότερους κύκλους και πόσοι είναι αυτοί.

Η διάταξη τύπου Α παρόλο που είχε συζητηθεί στην πρώτη παρέμβαση απασχόλησε αρκετά τις δύο από τις τρεις ομάδες. Οι ομάδες αυτές ασχολήθηκαν με το εμβαδόν τόσο του οικοπέδου, όσο και των κύκλων με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε λανθασμένα συμπεράσματα. Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι η ιδέα με τα εμβαδά είχε συζητηθεί και απορριφθεί στην προηγούμενη παρέμβαση μέσα από διάλογο της τάξης με τον καθηγητή. Η ομάδα ένα άμεσα έφτασε στην εύρεση του αριθμού των κύκλων για αυτή τη διάταξη.

Η διάταξη τύπου Β ήταν αυτή που δυσκόλεψε περισσότερο τις ομάδες εργασίας. Οι μαθητές επεξεργαζόμενοι τα δεδομένα σε αυτή την προβληματική κατάσταση, έκαναν εικασίες, τις διερευνούσαν και προσπαθούσαν να φτάσουν σε κάποιο συμπέρασμα. Όλες οι ομάδες έκαναν κάποιες σκέψεις και ανακάλυψαν βασικά σημεία της μαθητικής λύσης. Παρατηρήθηκε όμως δυσκολία στη διαχείριση και στο συνδυασμό των πληροφοριών ώστε να δημιουργήσουν ένα ολοκληρωμένο σχέδιο επίλυσης.

Η ομάδα δυο μόνο κατάφερε να φτάσει κοντά στη μαθηματική λύση του προβλήματος. Τα μέλη αυτής της ομάδας εντόπισαν το τριγωνάκι ως το

μικρότερο μοτίβο που επαναλαμβάνεται στο σχήμα και υπολόγισαν το ύψος του. Παράλληλα παρατήρησαν ότι κάθε 2η , 4η , 6η , κ.τ.λ. σειρά χωράει ένας κύκλος λιγότερος και προσπάθησαν να εντοπίσουν πόσες σειρές χωράνε κατά μήκος. Οι ενέργειές τους αυτές στόχευαν στον τελικό υπολογισμό των κύκλων. Η σκέψη τους ήταν σωστή κατά βάση, λεπτομέρειες όμως, τους εμπόδισαν να φτάσουν σε μια ολοκληρωμένη μαθηματική λύση. Δυο ήταν τα βασικά σημεία που δεν εξέτασαν. Συγκεκριμένα δεν διερεύνησαν αν μετά την τελευταία δυάδα γραμμών χωράει άλλη μια γραμμή και ποια είναι η εικόνα που θα έπαιρναν αν άλλαζαν την πλευρά που θα ξεκινούσαν το γέμισμα και κατά πόσο αυτό σύμφερε.

Σε γενικές γραμμές οι ομάδες εργασίας πάντως δούλεψαν με ενδιαφέρον και ενθουσιασμό. Η ευθύνη που ανέλαβαν να καταστρώσουν σχέδιο επίλυσης έγινε κίνητρο για εμπλοκή και διερεύνηση. Καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης ακούστηκαν ενδιαφέρουσες ιδέες και προτάσεις οι οποίες διερευνήθηκαν από την κάθε ομάδα και αξιοποιήθηκαν.

Η πρώτη παρέμβαση του εκπαιδευτικού Β είχε ως θέμα του το σχεδιασμό ενός σύγχρονου οπωρώνα και συγκεκριμένα εστίαζε στη χωρική μελέτη φύτευσης των δέντρων. Στα αρχικά ερωτήματα του φύλλου εργασίας οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν κατάλληλο σχήμα αναπαράστασης ενός δενδρυλλίου και ενός δέντρου στο επίπεδο, μέσα από μια συλλογή δεδομένων και στη συνέχεια να εντοπίσουν πιθανές διατάξεις. Οι απαντήσεις των ερωτημάτων αυτών συνέβαλαν στην κατάστρωση σχεδίου υπολογισμού των δέντρων, η οποία ήταν και το βασικό ερώτημα της δραστηριότητας.

Στη παρέμβαση αυτή, η επιλογή του εκπαιδευτικού να δουν το πρόβλημα πρώτα σημειακά μέσα από τη λέξη «δενδρύλλιο» και στη συνέχεια σαν κύκλο στη πλήρη ανάπτυξή του με τη λέξη «δέντρο» προκάλεσε σύγχυση. Οι λέξεις αυτές αντί να δράσουν υποστηρικτικά, σύμφωνα με τον αρχικό σχεδιασμό του καθηγητή, δυσκόλεψαν τους μαθητές και δημιούργησαν επιπλέον εμπόδια.

Συγκεκριμένα προβληματίστηκαν για το μέγεθος του κορμού και κατά πόσο γίνεται να αναπαραστήσουν σημειακά ένα κορμό όσο μικρό και αν είναι το δέντρο.

Οι πληροφορίες που δίνονταν για την απόσταση από το φράχτη καθώς και η επιλογή των παραπάνω λέξεων δυσκόλεψαν τις ομάδες εργασίας ώστε να επιλέξουν το βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης του δέντρου στο επίπεδο. Ορισμένες ομάδες υποστήριζαν ότι πρέπει να αναπαρασταθεί με κύκλο και άλλες με τετράγωνο. Για την επιλογή του βέλτιστου σχήματος καθοριστική ήταν η ενέργεια του καθηγητή, να δείξει στο προτζέκτορα μια φωτογραφία με ένα δέντρο και τη σκιά του. Η κυκλική σκιά οδήγησε την τάξη να επιλέξει τον κύκλο σαν το βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης.

Ο κύκλος επιλέχθηκε σαν το βέλτιστο σχήμα αναπαράστασης του δέντρου στο επίπεδο χωρίς όμως να τεκμηριωθεί η επιλογή του με μαθηματικά επιχειρήματα (μαθηματικό ορισμό). Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να μην πεισθούν όλες οι ομάδες εργασίας για την επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος.

Η εύρεση των πιθανών διατάξεων ήταν αποτέλεσμα πειραματισμού και διερεύνησης. Μέσα από την αξιοποίηση των χειραπτικών εργαλείων (καπάκια διαφορετικών μεγεθών), οι ομάδες εργασίας εντόπισαν τις δυο διατάξεις αλλά και εξήγαγαν χρήσιμα συμπεράσματα για τη διάταξη τύπου Β. Συγκεκριμένα είδαν ότι στη διάταξη τύπου Β η δεύτερη σειρά χωράει ένα λιγότερο ή τον ίδιο αριθμό κύκλων με τη πρώτη. Παράλληλα παρατήρησαν ότι αλλάζει η εικόνα της κάτοψης αναλόγως από ποια πλευρά θα ξεκινήσουμε το γέμισμα στη διάταξη αυτή και ότι υπάρχει πιθανότητα οι δυο διατάξεις να χωρέσουν τον ίδιο αριθμό κύκλων.

Για την κατάστρωση σχεδίων καταμέτρησης των κύκλων με τις δυο διατάξεις αφιερώθηκε ελάχιστος χρόνος στο πίνακα. Οι μαθητές άμεσα πρότειναν σχέδιο λύσης για τη διάταξη τύπου Α και έκαναν δυο σκέψεις για τη διάταξη τύπου Β.

Η κατάστρωση σχεδίου υπολογισμού των κύκλων για τις δυο διατάξεις ολοκληρώθηκε στην επόμενη παρέμβαση.

Στη δεύτερη παρέμβασης του εκπαιδευτικού Β, οι ομάδες εργασίας αφιέρωσαν το μεγαλύτερο μέρος της εκπαιδευτικής διαδικασίας για την κατάστρωση σχεδίου εύρεσης των κύκλων για τη διάταξη τύπου Β. Σημεία της μοντελοποίησης που δεν είχαν γίνει κατανοητά στην πρώτη παρέμβαση έκαναν και πάλι την εμφάνισή τους. Η απόσταση από το φράχτη, η τοποθέτηση του πρώτου δέντρου στη κάτοψη ήταν δυο από τα στοιχεία που εξετάστηκαν σε νέα βάση.

Οι ομάδες εργασίας αναζήτησαν στρατηγικές επίλυσης για την εύρεση των λύσεων. Όλες οι ομάδες παρατήρησαν ότι υπάρχει επαναλαμβανόμενο μοτίβο στο σχήμα και κατάλαβαν ότι αυτό αποτελεί το συνδετικό κρίκο για να προχωρήσουν περαιτέρω τη σκέψη τους. Άλλες ομάδες εντόπισαν το τριγωνάκι, το μικρότερο δηλαδή επαναλαμβανόμενο μοτίβο, άλλες ένα παραλληλόγραμμο και άλλες ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Η ομάδα 4 μάλιστα ήταν αυτή που έφτασε αρκετά κοντά στη μαθηματική λύση. Μάλιστα η συγκεκριμένη ομάδα διερεύνησε και την εικόνα που παίρνουμε αν ξεκινήσουμε το γέμισμα του χωραφιού από την άλλη πλευρά, στη διάταξη αυτή.

Σε γενικές γραμμές παρατηρήθηκε έντονο ενδιαφέρον και ενθουσιασμός και στις τέσσερις παρεμβάσεις. Οι ομάδες εργασίας, άλλες σε περισσότερο και άλλες σε λιγότερο βαθμό, ασχολήθηκαν με τη δραστηριότητα. Η αναζήτηση της λύσης και ο ρόλος που κατείχαν στο μάθημα αποτέλεσε κίνητρο για εμπλοκή.

Στο κομμάτι της μοντελοποίησης παρατηρήθηκαν δυσκολίες στο χειρισμό των πραγματικών δεδομένων και την μοντελοποίησή τους σε μαθηματικά δεδομένα. Τα προβλήματα με τα οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές χαρακτηρίζονται από αποκλεισμό ρεαλιστικών εκτιμήσεων και στοιχείων, καθώς και αναστολή της αίσθησης λήψης αποφάσεων (Verschaffel et al., 2000). Τα μαθηματικά με τα οποία συνήθως έρχονται σε επαφή αποτελούν ένα κλειστό σύστημα συμβόλων

με σταθερούς κανόνες χωρίς να αφήνει περιθώρια για αλλαγή και δημιουργικότητα (Aiken 1970, Boaler 1999, Williams 1997, Papageorgiou 2009). Για αυτό ακριβώς το λόγο οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αντιμετωπίσουν τη συγκεκριμένη διερευνητική δραστηριότητα.

Η δυσκολία τους παρατηρήθηκε στη μοντελοποίηση του δέντρου σε κύκλο, σημείο της δραστηριότητας που έπρεπε να δουν πιο σφαιρικά, σκεπτόμενοι πέρα από στείρες μεθοδολογίες. Η αρχική τόσο και η τελική επιλογή του σχήματος αναπαράστασης έγινε αυθαίρετα. Οι μαθητές δεν επιχειρηματολόγησαν με μαθηματικά επιχειρήματα για την επιλογή τους, βασικό σημείο της διαδικασίας μοντελοποίησης. Επιπλέον εμπόδιο αποτέλεσε για όλες τις ομάδες ο συνδυασμός των πληροφοριών ώστε να φτάσουν σε ένα ολοκληρωμένο σχέδιο επίλυσης. Συνεχώς οι μαθητές παρατηρούσαν νέα δεδομένα, έκαναν εικασίες και σκέψεις, τις οποίες όμως δυσκολεύονταν είτε να ελέγξουν είτε να προχωρήσουν.

Το κομμάτι της διερεύνησης ήταν σε ένα μεγάλο βαθμό ικανοποιητικό. Οι ομάδες αξιοποίησαν σε μεγάλο βαθμό τις αρχές της ομαδοσυνεργατικής διαδικασίας για να εξάγουν τα συμπεράσματά τους. Τα μέλη των ομάδων διατύπωναν τις ισχυρισμούς τους, οι οποίοι γίνονταν αντικείμενο διερεύνησης από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Η γενική πορεία της διερευνητικής διαδικασίας που παρατηρήθηκε ήταν: επεξεργασία δεδομένων, παρουσίαση ιδεών των μελών, διερεύνηση και αξιολόγηση, απόρριψη ή αποδοχή των σκέψεων και τέλος εξαγωγή συμπερασμάτων. Το κομμάτι της διερεύνησης φάνηκε σαν ανάγκη των μαθητών μέσα από την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα ώστε να φτάσουν στη λύση.

Η παρούσα δραστηριότητα, λοιπόν, ανέδειξε τις δυσκολίες των μαθητών στη μοντελοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος και τη διαχείρισή του. Οι μειωμένες εμπειρίες εμπλοκής των μαθητών με τέτοιου είδους διερευνητικές δραστηριότητες αποτέλεσαν το βασικό κομμάτι επίλυσής της.

Το σχολείο, ως μικρογραφία της κοινωνίας θα πρέπει να δίνει τη δυνατότητα εμπλοκής των μαθητών με ρεαλιστικές διερευνητικές δραστηριότητες τόσο στα μαθηματικά όσο και στα άλλα μαθήματα. Μέσα από τις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές θα κατανοήσουν ότι αυτά που μαθαίνουν στη σχολική τους διαδρομή δεν είναι ανεφάρμοστα από τον πραγματικό κόσμο. Η χρήση διερευνητικών δραστηριοτήτων θα αναδείξει την ανάγκη χρήσης των μαθηματικών τους γνώσεων για την επίλυση ενός προβλήματος και η μάθηση θα αποκτήσει μια πιο κονστρουβιστική μορφή καθώς προέρχεται μέσω οικοδόμηση.

Παράρτημα

1. Φύλλο Εργασίας Εκπαιδευτικού Α

Το κτήμα

Κληρονομήσατε κτήμα στη Λακωνία διαστάσεων 24x46 m, το οποίο θέλετε να αξιοποιήσετε. Ο γεωπόνος που ρωτήσατε σας πρότεινε για την συγκεκριμένη περιοχή δύο επιλογές:

Α. Ποικιλία πορτοκαλιάς της οποίας κάθε δέντρο φυτεύεται σε απόσταση 4m από άλλο δέντρο ή φράχτη και δίνει κατά μέσο όρο 80kg καρπό.
Β. Ποικιλία νάνας πορτοκαλιάς της οποίας τα δέντρα αρκούν 3m απόσταση, αλλά δίνει 50kg κατά μέσο όρο καρπό.

Καλείστε να πάρετε δυο αποφάσεις:

1. Σε ποια διάταξη πρέπει να φυτέψετε τα δέντρα ώστε το κτήμα σας να χωρέσουν όσο μπορεί περισσότερα δέντρα;
2. Ποια από τις δύο ποικιλίες σας συμφέρει να φυτεύσετε;

2. Φύλλο Εργασίας Εκπαιδευτικού Β

Σχεδιασμός και μέγεθος σύγχρονου οπωρώνα

Εισαγωγικό πλαίσιο δραστηριότητας.

Η καλλιέργεια καρποφόρων δέντρων έχει μεγάλη οικονομική σημασία για τους κατοίκους που διαμένουν στα διάφορα είδη περιοχών (πεδινά /ημιορεινά/ ορεινά), αφού μπορεί να τους εξασφαλίζει ένα ικανοποιητικό κύριο ή συμπληρωματικό εισόδημα, αλλά είναι και ένας σημαντικός παράγοντας συγκράτησης του πληθυσμού στον τόπο τους.

Μια καλλιέργεια θεωρείται επιτυχής εφόσον, ο καλλιεργητής έχει **ποσοτική** και **ποιοτική** παραγωγή σε λίγο χρόνο και με το χαμηλότερος κόστος. Η δημιουργία ενός σύγχρονου και βιώσιμου οπωρώνα επιβάλλεται να γίνεται με προσεκτικό σχεδιασμό λαμβάνοντας υπόψη αρκετούς παράγοντες όπως:

- *Τοποθεσία(κλιματολογικές συνθήκες)*
- *Έδαφος (ελαφριάς και μέσης σύστασης εδάφη, τουλάχιστον 1 μέτρο βάθος και καλή αποστράγγιση*
- *Εκλογή της κατάλληλης ποικιλίας (χαρακτηριστικά: χρόνος άνθισης και ωρίμανσης καρπών, μέγεθος και ποιότητα, απόδοση δέντρων , χρήση καρπού, ανθεκτικότητα, ευπάθεια σε εχθρού και ασθένειες, αυτογόνιμη ή , απαιτήσεις της σε χαμηλές θερμοκρασίες για τη διακοπή του λήθαργου των οφθαλμών)*
- *Διάταξη επικονιαστών*
- ***Μέγεθος φυτείας και Σχεδιασμός οπωρώνα***
- *Αποστάσεις φύτευσης (λαμβάνεται υπόψη η ζωηρότητα της ανάπτυξης και καρποφορίας σε συνδυασμό με τη ζωηρότητα του υποκειμένου και τη*

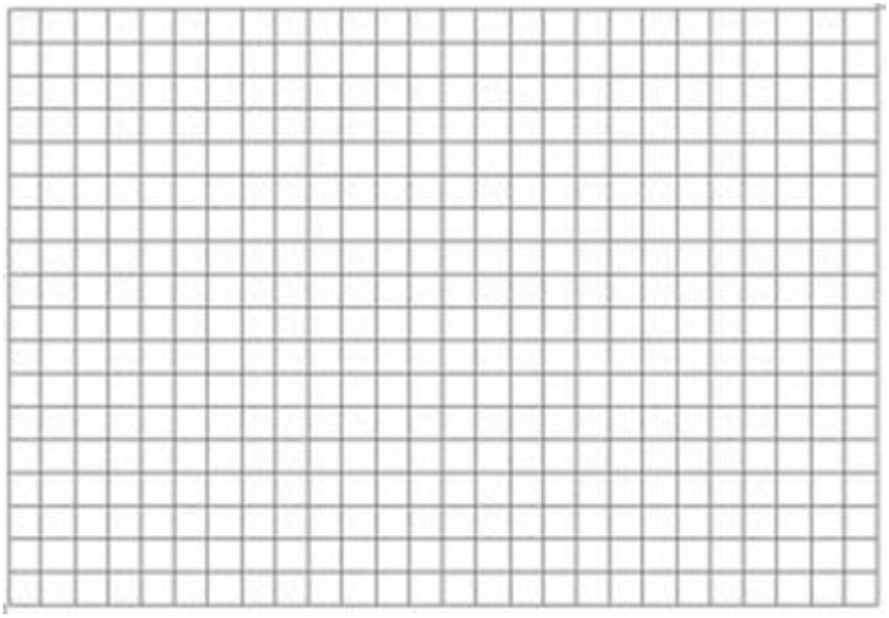
γονιμότητα του εδάφους . Στα ελαφρά αμμώδη εδάφη τα δέντρα φυτεύονται πιο πυκνά, ενώ σε βαριά γόνιμα σε πιο μεγάλες αποστάσεις.

- *Πρόβλημα επαναφυτεύσεων*
- *Προμήθεια και φύτευση δενδρυλλίων -καλλιεργητικές φροντίδες*
- *Σχήματα διαμόρφωσης κώμης*

Δραστηριότητα 1η –Διάταξη δένδρων

Ένας από τους παράγοντες μιας βιώσιμης καλλιέργειας είναι η διάταξη των δέντρων και οι μεταξύ τους αποστάσεις, προκειμένου να διευκολύνονται οι διάφορες καλλιεργητικές εργασίες που απαιτούνται. Για το λόγο αυτό, λαμβάνεται υπόψη η ζωηρότητα ανάπτυξης (η διάμετρος κόμης)και καρποφορίας του δένδρου σε συνδυασμό με την ποικιλία του δένδρου και τη γονιμότητα του εδάφους .

Το τετραγωνισμένο πλέγμα αναπαριστά την κάτοψη κτήματος, στο οποίο πρόκειται να φυτευτούν δενδρύλλια μιας ποικιλίας ενός είδους δέντρου. Το κάθε δενδρύλλιο για να αναπτυχθεί θα πρέπει να απέχει από το διπλανό του 4 m και από το φράκτη 2 m. (Το κάθε τετραγωνάκι θεωρείται ότι έχει πλευρά 1m).



Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται:

- να αναπαραστήσετε στο πλέγμα τη θέση ενός δενδρυλλίου
- να αποτυπώσετε στο πλέγμα τη μορφή που θα έχει η κάτοψη του κτήματος αφού φυτευτούν τα δενδρύλλια που είναι δυνατόν.
- να αναπαραστήσετε στο πλέγμα την κάτοψη ενός δέντρου στην πλήρη ανάπτυξή του. Με τι προσομοιάζει η κάτοψή του;
- να αποτυπώσετε τη μορφή που θα έχει η κάτοψη του κτήματος με τα δέντρα στην πλήρη ανάπτυξή τους.

Συνοψίστε τα συμπεράσματά σας

Δραστηριότητα 2η : Πιθανές διατάξεις

- Να χρησιμοποιήσετε καπάκια / πούλια για να μοντελοποιήσετε την κάτοψη δέντρων σε πλήρη ανάπτυξη.
- Να μελετήσετε διατάξεις των καπακιών που μοντελοποιούν την κάτοψη του κτήματος που αναπαριστάνεται με το φύλλο Α4.
- Να κάνετε ένα σχέδιο του μοντέλου της κάθε διάταξης.
- Για κάθε διάταξη να βρείτε το πλήθος των «δένδρων» και να σημειώσετε τη θέση του στο σχέδιο του μοντέλου της διάταξης.
- Να συντάξετε μια γραπτή αναφορά των συμπερασμάτων σας και να την κοινοποιήσετε στην τάξη σας .

Δραστηριότητα 3η : Βέλτιστη διάταξη

Εργάζεστε ως γεωπόνοι τμήματος εταιρείας, το οποίο αναλαμβάνει μελέτες βιώσιμων γεωργικών καλλιεργειών. Ένα από τα θέματα που συχνά σας αναθέτουν είναι η μελέτη της εγκατάστασης σύγχρονου και βιώσιμου οπωρώνα συστηματικής εκμετάλλευσης, για την εγκατάσταση του οποίου λαμβάνετε υπόψη όλους τους αναγκαίους παράγοντες που αναφέρθηκαν και θεωρούνται ότι αποτελούν τη βάση της επιτυχίας της καλλιέργειας.

Ένας νέος γεωργός ενδιαφέρεται να δημιουργήσει ένα σύγχρονο και βιώσιμο οπωρώνα σε περιφραγμένο κτήμα που κληρονόμησε στην πεδιάδα του ποταμού Πάμισου στο νομό Μεσσηνίας. Η κάτοψη του κτήματος που διαθέτει είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 240 x 460 μέτρα.

Ο γεωργός απευθύνθηκε στο τμήμα της εταιρείας σας και ζήτησε μια μελέτη – πρόταση που αφορά την ανάπτυξη της μεγαλύτερης καρποφόρας επιφάνειας

οπωροφόρων δένδρων στον ελάχιστο δυνατό χρόνο που θα του επιφέρει μεγάλες αποδόσεις σε καρπό με χαμηλό κόστος.

Έπειτα από μελέτες που πραγματοποιήσατε και αφορούσαν παράγοντες, όπως το έδαφος, το κλίμα κτλ. διαπιστώσατε ότι, η κλασική ποικιλία πορτοκαλιάς ενδείκνυται ως η πιο καρποφόρα και αποδοτική στην περιοχή αυτή, αφού το κάθε δέντρο, όταν ολοκληρωθεί η ανάπτυξή του, έχει τη μεγαλύτερη καρποφόρα επιφάνεια και παράγει 80kg καρπό κατά μέσο όρο). Οι μελέτες έδειξαν ότι, προκειμένου η καρποφορία να είναι σημαντική σε σύντομο χρόνο, πρέπει να φυτευτούν δενδρύλλια της ποικιλίας με τρόπο ώστε το κάθε δενδρύλλιο να φυτεύεται σε απόσταση 4m από το διπλανό του και 2m από το φράχτη.

Ποια διάταξη φύτευσης θα προτείνατε ως βέλτιστη προκειμένου το κτήμα, όταν ολοκληρωθεί η ανάπτυξη των δενδρυλλίων, να αποκτήσει τη μεγαλύτερη καρποφόρα επιφάνεια και να έχει τη μέγιστη απόδοση σε καρπό.

- Μελετήσετε τα μοντέλα των διατάξεων φύτευσης. Αναζητείστε κάποιο μοτίβο που επαναλαμβάνεται και σχετίζεται με τον τρόπο της θέσης φύτευσης και του πλήθους των δέντρων.
- Καταστρώστε ένα σχέδιο για να υπολογίσετε τον αριθμό των σειρών φύτευσης των δενδρυλλίων καθώς και του αριθμού των δενδρυλλίων σε κάθε σειρά στην περίπτωση που η μια- προς- μια καταμέτρηση δεν είναι δυνατή, όπως αυτή που γινότανε στην δραστηριότητα 2.

- Να συντάξετε μια γραπτή αναφορά που να εξηγείτε τη στρατηγική που ακολουθήσατε στη λύση του προβλήματός σας. Παρουσιάστε τη λύση του προβλήματος.

3. Μαθηματική Λύση Προβλήματος

Γενική Μελέτη

Προβληματική κατάσταση: Θέλω να τοποθετήσω πυκνά κύκλους διαμέτρου δ σε μια ορθογώνια κάτοψη διαστάσεων x,y. Ποια είναι η βέλτιστη διάταξη και πόσοι κύκλοι θα χωρέσουν σε αυτή;

- Διάταξη Τύπου Α

  1ο Βήμα: Υπολογίζω πόσοι κύκλοι χωράνε στην κάθε πλευρά.

  Κατά μήκος της πλευράς x χωράνε [x:δ]=α κύκλοι.

  Κατά μήκος της πλευράς y χωράνε [y:δ]=β κύκλοι.

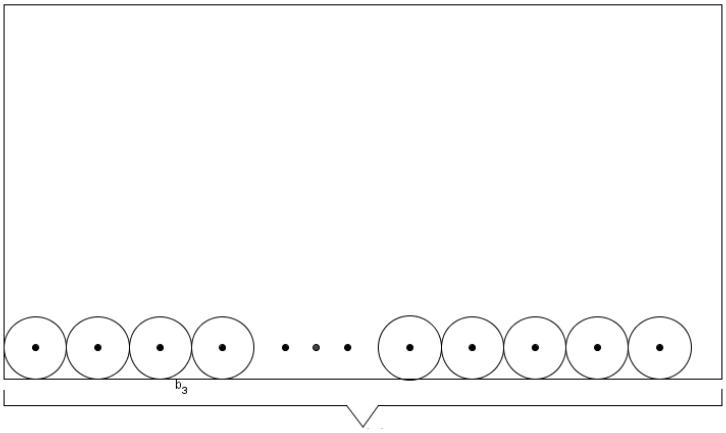
  2ο Βήμα: Βρίσκω συνολικά πόσοι κύκλοι χωράνε.

  Συνολικά με τη διάταξη αυτή έχουμε $\alpha \cdot \beta = \gamma$ κύκλους.

- Διάταξη Τύπου Β – 1η Περίπτωση

1ο Βήμα: Ξεκινάω από μια πλευρά. Έστω ότι επιλέγω την πλευρά x και γεμίζω την 1η γραμμή της.

Στην 1η γραμμή χωράνε [x:δ]=α κύκλοι (Εικόνα 1).

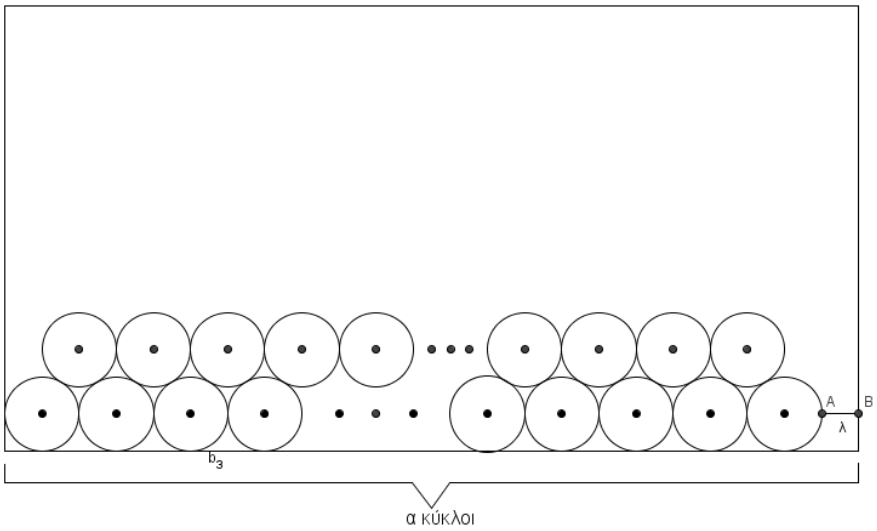


Εικόνα 1

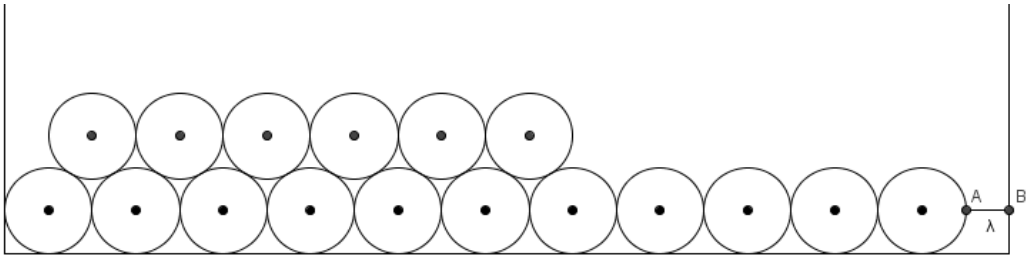
<u>2ο Βήμα:</u> Βρίσκω πόσοι κύκλοι χωράνε στη 2η γραμμή.

Σίγουρα χωράνε α-1 κύκλοι. Πρέπει όμως να ελέγξουμε αν χωράει και άλλος στο υπόλοιπο κενό που μένει. Για να χωράει και άλλος πρέπει για το κενό μήκους λ που μένει στη πρώτη γραμμή (Εικόνα 2 & 3) να ισχύει: $\frac{\delta}{2} \leq \lambda < \delta$.

Έστω λοιπόν ότι χωράνε β κύκλοι στη 2η γραμμή.

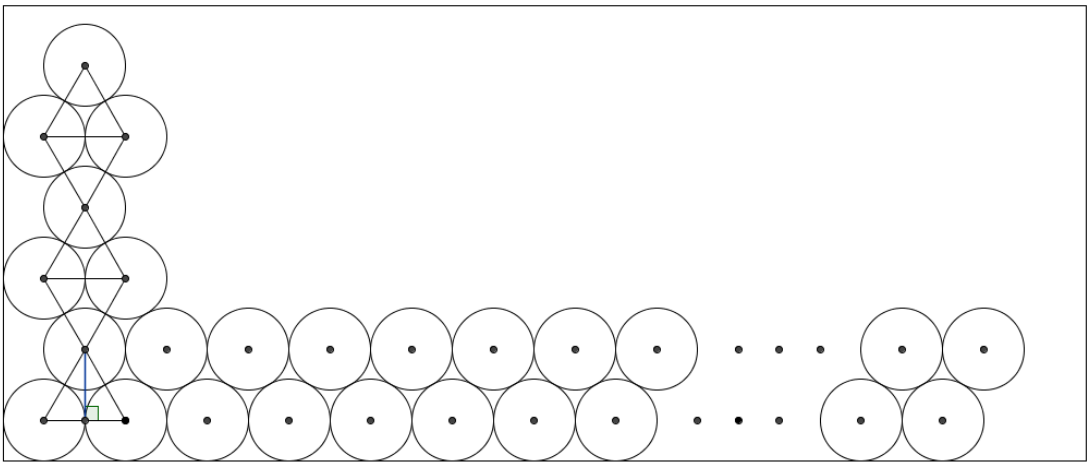


Εικόνα 2



Εικόνα 3

<u>3ο Βήμα:</u> Βρίσκω πόσα ισόπλευρα τρίγωνα χωράνε στη πλευρά των y μέτρων (Εικόνα 4).



Εικόνα 4

- Αρχικά πρέπει να βρω το ύψος h του κάθε ισοπλεύρου τριγώνου.

$$h = \sqrt{\delta^2 - (\frac{\delta}{2})^2} = 2\sqrt{3}$$

- Ελέγχω πόσα τριγωνάκια (ν, ν φυσικός) χωράνε λύνοντας την ανίσωση: $\nu h + \delta \leq y$
- Αφού βρω το ν διαπιστώνω ότι χωράνε ν+1 σειρές κύκλων στο ορθογώνιο.

<u>3ο Βήμα:</u> Τελικός υπολογισμός κύκλων.

- Αν ν+1 άρτιος αριθμός τότε ο συνολικός αριθμός δέντρων υπολογίζεται από το τύπο: $\frac{\nu+1}{2} \cdot \alpha + \frac{\nu+1}{2} \cdot \beta$.
- Αν ν+1 περιττός αριθμός τότε ο συνολικός αριθμός δέντρων υπολογίζεται από το τύπο: $(\frac{\nu}{2} + 1) \cdot \alpha + \frac{\nu}{2} \cdot \beta$.

  ‼ α→αριθμός πρώτης γραμμής , β→ αριθμός κύκλων δεύτερης γραμμής , ν→ πλήθος ισοσκελών τριγώνων κατά μήκος

- Διάταξη Τύπου Β – 2η Περίπτωση

Επαναλαμβάνω όλη τη μελέτη που έκανα στη διάταξη τύπου Β-1η περίπτωση, ξεκινώντας τώρα το γέμισμα από τη πλευρά y.

Σχόλια - Παρατηρήσεις

Όταν ολοκληρωθούν και οι τρεις περιπτώσεις μελέτης είμαι σε θέση να πάρω τη τελική απόφαση στη προβληματική μου κατάσταση.

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

Αργυρόπουλος Η. , Βλάμος Π. , Κατσούλης Γ. , Μαρκάτης Σ. , Σίδερης Π.(2001). *Σχολικό Βιβλίο Ευκλείδειας Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου* ΟΕΔΒ, Αθήνα

Αυγερινός, Ε. & Σκούφη, Α. (2007). *Didactics of Mathematics via the Realistic Approach, in Current Trends on Mathematics Education.* Proceedings of *5th Mediterannean Conference on Mathematics Education,* Ρόδος, 485-504.

Κλαουδάτος Ν. (2011) *Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Διδακτικής Μαθηματικών*. Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ.

Κόσυβας, Γ.,(1996). *Η Πρακτική του Ανοιχτού Προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο*, Gutenberg, 24

Κυνηγός Χ. (2014). *Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙ*. Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ.

Μουσουλίδης, Ν., Κάττου, Μ., Πιττάλης, Μ. & Χρίστου, Κ. (2013). *Η ικανότητα μοντελοποίησης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος*. 9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, 259-270

Πόταρη Δ. (2014). Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Έρευνα στη Διδακτική Μαθηματικών και Διδακτική πράξη. Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ.

Ξένη Βιβλιογραφία

Artigue - Morten Blomhøj (2013). *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics*. ZDM Mathematics Education, 797 – 810

Bahmaei, F., (2011). Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, 9, 3-13.

Balacheff, N., (1984). *French Research Activities in Didactics of Mathematics – Some keywords and related references*. in Steiner et al (eds).

Balacheff, N., (1989). *Construction and observation of a didactical situation: the sum of the angles of a triangle*. in A. Bell et al (eds).

Balacheff, N., (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 4, 258-272.

Blum, W., Ferri, R. B., (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application* , 1, 1, 45-58.

Boaler, J., (2001). *Mathematical Modelling and New Theories of Learning*. Teaching Mathematics and its Applications, 20, 3, 121-128.

Brousseau, G., (1980). *Problèmes de l' enseignement des dècimaux*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 1(1), 11-59.

Brousseau, G., (1981). *Problèmes de didactique des dècimaux*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(1), 37-127.

Brousseau, G. (1996). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dortrecht/ Boston/ London,Kluwer Academic Publishers.

Davidson, N.(ed.) (1990). *Cooperative Learning in Mathematics: A Handbook for Teachers*, Menlo Park: Addison Wesley

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). *Connecting mathematics problem solving to the real world. In: Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (pp. 66-73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development.

Dickinson P. & Hough, S. (2012). *Using Realistic Mathematics Education in UK classrooms.*

English, L., D., Watters, J., J., (2004). *Mathematically modelling with young children*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 335–342.

Jaworski B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 187-211

Heleen, V., Lange, J., (1996). *Mathematics education and assessment.* Freudenthal Institute.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). *Problem solving and modeling.* In F.K. Lester (Ed.), The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 763-804). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Mariotti . *Proof and proving in Mathematics Education*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, 173-204

Ok-Ki Kang, Jihwa Noh, (2012). *Teaching mathematical modelling in school mathematics.* 12th International Congress on Mathematical Education Program Name XX-YY-zz (pp. abcde-fghij)

Owens, J. E., (1995). *Cooperative learning in secondary education. London: Routledge*

Papert S. (1975). Teaching Children Thinking. *Journal of Structural Learning*, 219-229

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A., (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 405-435.

Polya, G., (1957). *How to Solve It?*. Princeton University Press

Seidel, J. V., (1998). *Appendix E: Qualitative Data Analysis*, Copyright (c), 1-15.

Voskoglou M. (2006). *The use of mathematical modelling as a tool for learning mathematics.* "Quaderni di Ricerca in Didattica", n16, 2006. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Wilson, J., Fernandez, M., L., and Hadaway, N., (1994). *Problem Solving: Managing it all*. The Mathematics Teacher, 87, 3, 195-199.

Zulkardi, (2010). *How to Design Mathematics Lesson Based on The Realistic Approach.*

Ιστοσελίδες

http://www.ceebl.manchester.ac.uk/

http://www.mascil-project.eu/

http://nrich.maths.org/2148