ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Τμημα Επιστήμων Αγωγής

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ CABRI 3D

ΣΟΥΙΚΛΙΩΤΗ ΕΛΠΙΣ

Δ201418

Επιβλέπων Επικ. Καθ. : Γεώργιος Ψυχάρης

ΑΘΗΝΑ 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

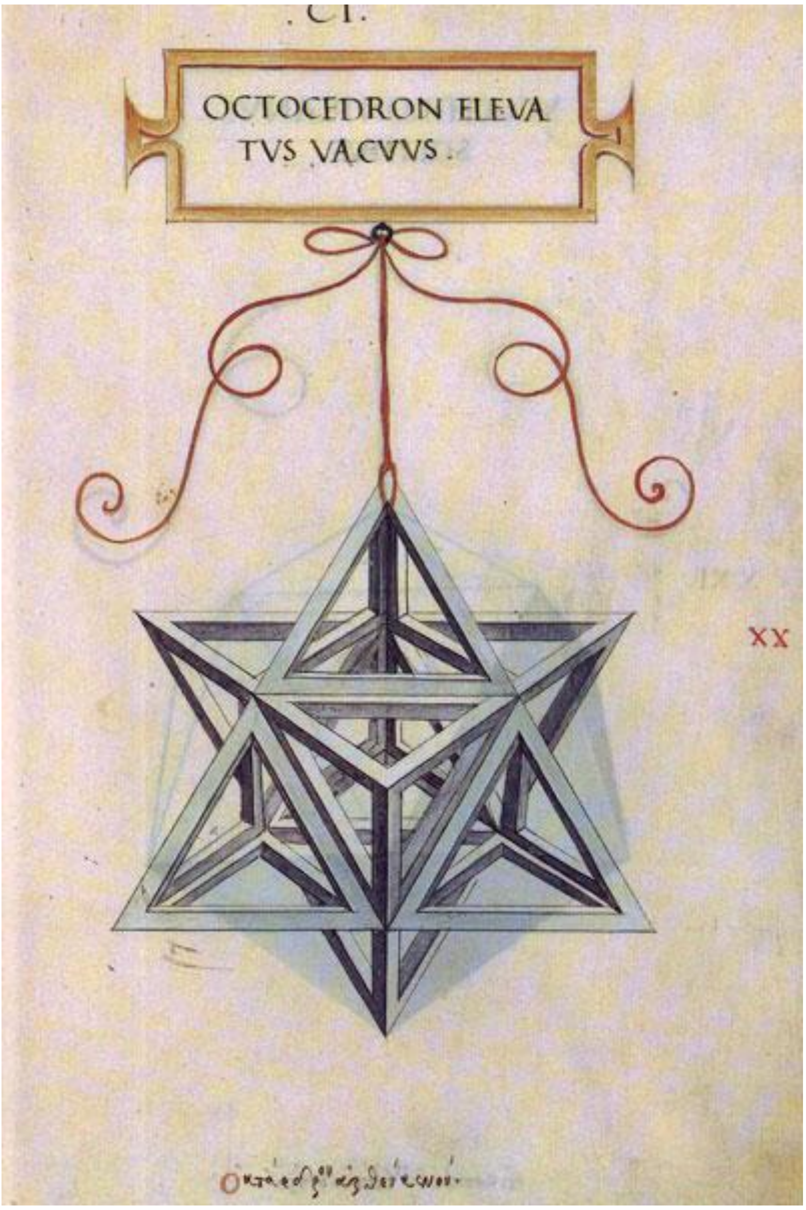
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 22η Σεπτεμβρίου 2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Μ. Πιττάλη	Εξωτ. Συνεργάτη Παν. Κύπρου



Εικόνα 1: Το σχέδιο του Leonardo da Vinci για το αστεροειδές οκτάεδρο ή stella octangula (octocedron elevatus vacuus) για το βιβλίο του Luca Pacioli: 'De divina proportione'.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας Επίκουρο Καθηγητή κ. Ψυχάρη Γεώργιο για την πολύτιμη καθοδήγησή του, τις στοχευμένες παρατηρήσεις και τον χρόνο που αφιέρωσε κατά τη διάρκεια αυτού του εγχειρήματος.

Την Καθηγήτρια, Κα Πόταρη Δέσποινα και τον Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών, Εξωτ. Συνεργάτη Παν. Κύπρου κ. Πιττάλη Μάριο, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή. Την Καθηγήτρια, Κα Φαρμάκη Βασιλική, που με τίμησε με τη συμμετοχή της στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος για τις γνώσεις που προσέφεραν.

Όλους τους συμφοιτητές για τη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια του προγράμματος και τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας.

Τις κυρίες Διονυσία Μπακογιάννη και Ελένη Κλη για την πολύτιμη υποστήριξή τους από τη θέση της γραμματείας του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Τους μαθητές, που εθελοντικά συμμετείχαν στην έρευνα, καθώς και τη διεύθυνση και τους συναδέλφους του σχολείου μου, που υποστήριξαν αυτή τη δημιουργική προσπάθεια.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου, για την πολύτιμη στήριξη που μου προσέφεραν μέχρι το πέρας της διπλωματικής εργασίας.

Σουικλιώτη Ελπίδα, Σεπτέμβριος 2017.

Πίνακας Περιεχομένων

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΦΥΛΛΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

1ο Φύλλο εργασίας – Κατασκευή σημείου εκτός επιπέδου.

2ο Φύλλο εργασίας – Καθετότητα στον χώρο.

1Η ΟΜΑΔΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ: ΣΦΑΙΡΑ

1ο Φύλλο εργασίας – Ο Γεωμετρικός τόπος της σφαίρας.

2ο Φύλλο εργασίας – Σύγκριση ακτίνων.

3ο Φύλλο εργασίας – Καμπύλη τομής σφαίρας με επίπεδο.

2Η ΟΜΑΔΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ: ΚΥΒΟΣ

1ο Φύλλο εργασίας – Κατασκευή κύβου.

2ο Φύλλο εργασίας – Αναγνώριση κύβου.

3ο Φύλλο εργασίας – Τετράεδρα μέσα σε κύβο.

4ο Φύλλο εργασίας – Κατασκευή κανονικού τετραέδρου.

3Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ & ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Φύλλο εργασίας - Stella Octungula

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκαν οι διαδικασίες νοηματοδότησης εννοιών της τρισδιάστατης γεωμετρίας, εστιάζοντας στην διασύνδεση δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων, στο πλαίσιο δραστηριοτήτων που ευνοούσαν τη μετάβαση από το επίπεδο στον χώρο με χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος Cabri-3D. Στο πλαίσιο αυτής της διερεύνησης συνεξετάστηκε ο ρόλος των διαθέσιμων ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες νοηματοδότησης. Η μελέτη του ερευνητικού ερωτήματος έγινε μέσα από την ανάλυση των διαλόγων τριών ομάδων μαθητών που εργάστηκαν σε τέσσερεις ενότητες δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν και τα δεδομένα αναλύθηκαν υπό το πρίσμα των θεωρητικών πλαισίων του Duval για τη γεωμετρία και της σημειωτικής διαμεσολάβησης για τον ρόλο του ψηφιακού εργαλείου. Σε συνάφεια με ευρήματα προηγούμενων ερευνών, η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες διερεύνησης και ανοιχτά προβλήματα στο υπολογιστικό περιβάλλον ευνόησε διαδικασίες μη εικονικής οπτικοποίησης οδηγώντας τους μαθητές σε διαφορετικά επίπεδα σύλληψης για τους γεωμετρικούς σχηματισμούς και τις έννοιες. Σημειώθηκε ωστόσο σημαντική αδυναμία σε διαδικασίες κατασκευής που υπογράμμισε τις δυσκολίες της σειριακής και λεκτικής σύλληψης τρισδιάστατων σχηματισμών και εμφανίστηκε μέσα από τον αρνητικό ρόλο των ασαφών λεκτικών δηλώσεων και την επιλογή συμμετρικών ή χωρίς μαθηματική χρήση των ψηφιακών εργαλείων κατασκευαστικών διαδικασιών.

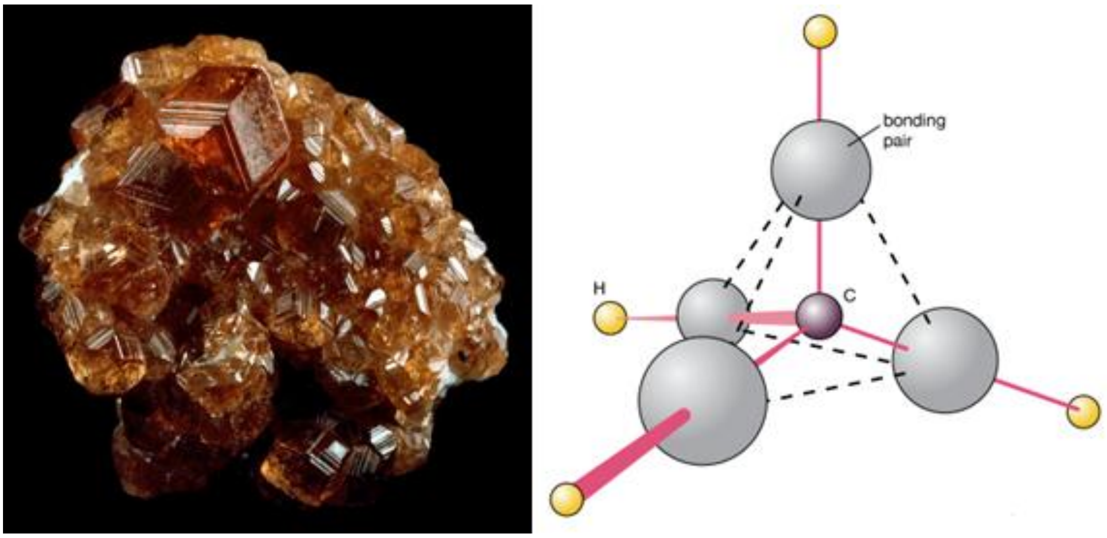
Λέξεις κλειδιά: γεωμετρία του χώρου, επίπεδα νοηματοδότησης, Cabri-3D, Duval, σημειωτική διαμεσολάβηση.

In the present study we investigated the conceptualization procedures for 3D geometry concepts, focusing on the interconnection of two-dimensional and three-dimensional geometric objects, in tasks that promoted the transition from plane to space, using the Cabri 3D digital environment. In the context of this investigation the role of the available digital tools in the conceptualization process was co-examined. To study the research question, the dialogues of three groups of students who worked in four groups of tasks, were analysed. The tasks were designed and the data analyzed in the light of Duval's theoretical framework for geometry and the theory of semiotic mediation for the role of the digital tool. In conjunction with past research findings, students' engagement in investigative tasks and open problems, in the computing environment, favored non-iconic visualization procedures leading students to different conceptualization levels for geometric formations and concepts. However, there was a significant weakness in construction processes that highlighted the difficulties of sequential and discursive apprehension of three-dimensional formations and emerged through the negative role of unclear verbal statements and the choice of symmetrical or non mathematical use of digital tools in construction processes.

Keywords: 3D-geometry, conceptualization levels, Cabri-3D, Duval, semiotic mediation.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γεωμετρία, αν και διατηρεί την αυτονομία της ως θεωρητικό αντικείμενο, ταυτόχρονα μπορεί να θεωρηθεί ως η μελέτη και η μοντελοποίηση του χώρου. Στα φυσικά αντικείμενα του εξωτερικού υλικού κόσμου, αν και περίπλοκα, συχνά συναντώνται δομές που φαίνεται να υπακούουν σε κανόνες, οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν με μαθηματικούς όρους. ¨*Η γεωμετρία αποτελεί μία από τις καλύτερες ευκαιρίες που υπάρχουν για να μάθεις πως να μαθηματικοποιείς την πραγματικότητα*¨ Freudenthal (1973)[1].



Εικόνα 2: Αριστερά ο λυχνίτης εμφανίζει κρυσταλλική δομή ρομβικού δωδεκάεδρου. Δεξιά παρατηρείται η τετραεδρική δομή του μεθανίου (Πηγές: en.wikipedia.org/wiki/Patterns_in_nature, www.britannica.com /science/methane).

Η χωρική πραγματικότητα, που ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται αισθητηριακά και στην οποία δρα, είναι τουλάχιστον τριών διαστάσεων και οι ανθρώπινες προσομοιώσεις για αρκετά αντικείμενα του εξωτερικού κόσμου, φυσικές ή νοερές, στηρίζονται στην Ευκλείδεια γεωμετρία, αποτελώντας ένα δόμημα, που συγκροτείται καθώς θεμελιακά γεωμετρικά αντικείμενα μικρότερης διάστασης συνδέονται οικοδομώντας αντικείμενα μεγαλύτερης διάστασης. Η αναγνώριση των μαθηματικών αρχών, που ικανοποιούν οι συνδεσεις των επιμέρους σχηματικών μονάδων μικρότερης διάστασης καθώς συνθέτουν το γεωμετρικό σώμα, αποτελεί βασική συνιστώσα στην κατεύθυνση της οργάνωσης της γνώσης για αυτό.

Διάσταση 0	Διάσταση 1	Διάσταση 2	Διάσταση 3
Σημείο	Ευθεία	Επίπεδες καμπύλες Πολύγωνα	Σφαίρα Κύβος Πρίσματα Πολύεδρα Κύλινδρος- Κώνος

[1] Αναφορά στο: Encyclopedia of Mathematics Education (2014), p. 542, Rina Hershkowitz: Shape and Space -Geometry Teaching and Learning.

Αναλογιζόμενοι την πληθώρα εφαρμογών της στερεομετρίας στις θετικές επιστήμες, τη μηχανική, την τέχνη, αλλά και την καθημερινή ζωή, η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες τρισδιάστατης γεωμετρίας καθίσταται απαραίτητο εφόδιο ανάπτυξης των χωρικών δεξιοτήτων τους. Στη σχολική πραγματικότητα, αλλά και σε επιστημονικά εγχειρίδια, τεχνικά σχέδια ή την οθόνη του υπολογιστή εργαζόμενοι σε ένα σχεδιαστικό πρόγραμμα, τα στερεά γεωμετρικά αντικείμενα αναπαριστώνται από τα δισδιάστατα διαγράμματά τους. Ο τρόπος ανάγνωσης της πληροφορίας των δισδιάστατων αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων αντικειμένων, αφενός συναντά εφαρμογές σε πρακτικούς τομείς, όπως ο κατασκευαστικός, αφετέρου έρευνες συνηγορούν ότι συνεισφέρει στην προώθηση της μαθηματικής σκέψης. Ωστόσο, παρά τη σημασία της διδασκαλίας της στερεομετρίας για τη μελλοντική επαγγελματική και επιστημονική δραστηριότητα των μαθητών, η διδασκαλία της έχει παραγκωνιστεί από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το διαμορφωμένο αναλυτικό πρόγραμμα, δεν προβλέπει, ούτε επιτρέπει δεδομένης της ύλης, άναθεση ωρών για τη διδασκαλία του αντικειμένου.

Η στερεομετρία θεωρείται από μαθητές, αλλά και εκπαιδευτικούς, ένα απαιτητικό γνωστικό και διδακτικό αντικείμενο, καθώς για την επιτυχή κατασκευή και ανάγνωση των δισδιάστατων αναπαραστάσεων για τα τρισδιάστατα αντικείμενα απαιτούνται πιο σύνθετες διαδικασίες οπτικοποίησης που υπερβαίνουν το αντιληπτικό επίπεδο. Στη βιβλιογραφία έχει επισημανθεί ότι η αποκλειστική χρήση στατικών δισδιάστατων αναπαραστάσεων για τα στερεά γεωμετρικά αντικείμενα στη σχολική πραγματικότητα, οι οποίες συνήθως ακολουθούν μία συγκεκριμένη προοπτική, αυτή της διατήρησης της παραλληλίας, συνιστά εμπόδιο στις διαδικασίες νοηματοδότησής τους. Ανακλώντας τη δυναμική φύση της εξωτερικής πραγματικότητας είναι σημαντική για τη μαθησιακή διαδικασία της γεωμετρίας του χώρου, η μελέτη της συμπεριφοράς των γεωμετρικών σωμάτων και των ανασχηματισμών τους, μέσα από την παρατήρηση των μεταβολών που παρατηρούνται σε αυτά, τροποποιώντας, νοερά ή φυσικά, τη θέση και τον προσανατολισμό τους.

Λαμβάνοντας υπόψη τις πρακτικές δυσκολίες της διδασκαλίας της στερεομετρίας με παραδοσιακά στατικά μέσα, τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας αποτελούν ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο, στη διάθεση των εκπαιδευτικών, που συνεισφέρει στη οικοδόμηση της γνώσης. Το ψηφιακό περιβάλλον επιτρέπει την παρατήρηση των τρισδιάστατων αντικειμένων από διαφορετικές οπτικές γωνίες οδηγώντας σε πλουσιότερες νοερές εικόνες για αυτά. Ωστόσο ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων δεν περιορίζεται στη μεταφορά ενός χειραπτικού μοντέλου στην οθόνη του υπολογιστή. Ο δυναμικός χειρισμός των τρισδιάστατων σχηματισμών επιτρέπει τη διερεύνηση των μεταβολών που προκαλούνται σε αυτούς, καθώς τροποποιούνται θεμελιώδη δομικά στοιχεία τους. Επιπλέον ευνοούνται διερευνήσεις της εσωτερικής δομής των στερεών γεωμετρικών αντικειμένων, καθώς παρέχεται η δυνατότητα ανάλυσης του στερεού σε επιμέρους σχηματικές μονάδες μικρότερης διάστασης, ώστε να ανακαλυφθούν από τους μαθητές, οι μαθηματικές αρχές που ανακλώνται στον τρόπο με τον οποίο αυτές οι μονάδες συνδέονται συγκροτώντας το σύνθετο γεωμετρικό αντικείμενο.

Στην παρούσα εργασία, μέσα από ένα σχεδιασμό δραστηριοτήτων σε ψηφιακό περιβάλλον, που εστιάζει σε διαδικασίες μετάβασης από την επίπεδη γεωμετρία στον χώρο, ερευνώνται τα επίπεδα νοηματοδότησης που ανέπτυξαν οι μαθητές για τις έννοιες και τα γεωμετρικά αντικείμενα του τρισδιάστατης γεωμετρίας.

Μέρος της υπάρχουσας έρευνας στο πεδίο της διδακτικής της στερεομετρίας, εστιάζοντας στον ρόλο των οπτικών αναπαραστάσεων για τα τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα και των ψηφιακών εργαλείων στη νοηματοδότηση εννοιών του χώρου, αναπτύσσεται στο δεύτερο κεφάλαιο.

Υϊοθετώντας την κονστρουκτιβιστική θεώρηση της οικοδόμησης της γνώσης, στην οποία είναι κεντρική η θέση των εργαλείων και των συμβολικών συστημάτων, στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφονται οι αρχές της θεωρίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης που υιοθετήθηκε για τον ρόλο της ψηφιακής τεχνολογίας στη διαδικασία κατασκευής νοημάτων. Ακολουθεί συνοπτική περιγραφή της σημειωτικής δυνατότητας των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας, στα οποία εντάσσεται το Cabri-3D, που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα. Έπειτα αναλύονται πτυχές του γνωστικού μοντέλου του Duval για τη γεωμετρική σκέψη, στο οποίο βασίστηκε ο σχεδιασμός και η ανάλυση των δραστηριοτήτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά οι αρχές σχεδιασμού και οι λειτουργίες του λογισμικού Cabri-3D. Ακολουθούν κάποιες κατασκευές στο λογισμικό, ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να παρακολουθήσει το σκεπτικό των δραστηριοτήτων που ακολουθούν.

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφονται οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Επίσης το πλαίσιο, στο οποίο διενεργήθηκε, και οι αρχές, με τις οποίες σχεδιάστηκε. Έπειτα αναλύονται οι δραστηριότητες της έρευνας, και καταγράφονται τα είδη δεδομένων και η μέθοδος ανάλυσης τους.

Τα ευρήματα της έρευνας παρουσιάζονται στο έκτο κεφάλαιο. Η ανάλυση στηρίχθηκε σε κρίσιμα επεισόδια και εστιάζει στα επίπεδα νοηματοδότησης που ανέπτυξαν οι μαθητές για τους γεωμετρικούς σχηματισμούς και τις έννοιες. Παράλληλα διερευνείται ο ρόλος του ψηφιακού περιβάλλοντος σε αυτή την κατεύθυνση.

Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο καταγράφονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας.

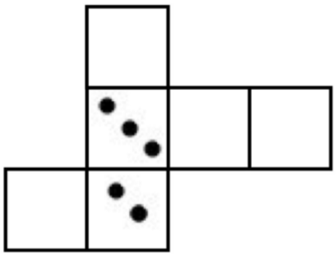
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΥΠΑΡΧΟΥΣΑ ΕΡΕΥΝΑ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

2.1 Έρευνα για τον χωρικό συλλογισμό

Η έρευνα στη γεωμετρία συνδιαστικά με τον χωρικό συλλογισμό, εξελίχθηκε από μελέτες στην ψυχολογία. Ο Gardner (1983) θεωρεί τη χωρική νοημοσύνη (spatial intelligence) ως ένα από τα επτά είδη νοημοσύνης, ορίζοντάς την, ως την ικανότητα κατασκευής και χειρισμού νοητικών εικόνων στην κατεύθυνση της επίλυσης προβλημάτων. Υπάρχει διαφωνία μεταξύ των ερευνητών σχετικά με την κατηγοριοποίηση των παραγόντων της χωρικής ικανότητας (spatial ability). Κοινό τόπο όμως, αποτελεί η αναγνώριση του παράγοντα της χωρικής οπτικοποίησης (spatial visualization) και του χωρικού προσανατολισμού (spatial orientation). Στο μοντέλο του Lohman (1988) προστίθενται και οι χωρικές σχέσεις (spatial relations). Αναγνωρίζοντας τη σημασία των χωρικών δεξιοτήτων, όχι μόνο για τη μαθηματική επάρκεια, αλλά και για άλλα επιστημονικά πεδία όπως η χημεία, η βιολογία, η αρχιτεκτονική ή η μηχανική, έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον σχετικά με τους μηχανισμούς νοηματοδότησης εννοιών της γεωμετρίας του χώρου στην κατεύθυνση της βελτίωσης του χωρικού συλλογισμού. Ωστόσο οι Clements και Sarama (2011) παρατηρούν ότι οι περιοχές των μαθηματικών που συνδέονται με χωρικές δεξιότητες είτε αγνοούνται είτε διδάσκονται στο ελάχιστο στα πρώτα σχολικά χρόνια.

Οι χωρικές δεξιότητες μελετήθηκαν αρχικά κύριως για τη σχέση τους με τη μαθηματική παιδεία, συνδεόμενες με πολιτισμικούς και διδακτικούς παράγοντες και στρατηγικές μέτρησης εμβαδού και όγκου (Owens & Outhred, 2006). Το ενδιαφέρον για τη μελέτη των χωρικών δεξιοτήτων καθεαυτών, τον ορισμό τους, τον ρόλο τους σε ένα Αναλυτικό Πρόγραμμα, ή την ανάπτυξη τους στο σχολικό περιβάλλον, ήταν αρχικά περιορισμένο. Η έρευνα έγινε πιο συστηματική, καθώς η εξέλιξη των τεχνολογικών μέσων, αφενός απαιτεί μεγαλύτερη επάρκεια στον τομέα των χωρικών δεξιοτήτων, αφετέρου προσφέρει τα μέσα για την εξέλιξη τους. Η πλειοψηφία της έρευνας σχετικά με τον συλλογισμό και διδακτικές προσεγγίσεις στην κατεύθυνση της βελτίωσής του, έχει επικεντρωθεί σε μαθητές κατώτερης και μέσης ανώτερης εκπαίδευσης. Οι Sinclair και Bruce (2014) συντόνισαν μία σειρά από έρευνες, που διενεργήθηκαν από μαθηματικούς και ψυχολόγους από ΗΠΑ και Καναδά, εστιάζοντας στον χωρικό συλλογισμό νεαρών μαθητών. Εξέτασαν την πραγματικότητα και τις δυνατότητες για χωρικό συλλογισμό στα σύγχρονα σχολικά μαθηματικά. Η σύνδεση των χωρικών δεξιοτήτων με την επίδοση στα μαθηματικά αποτελεί επίσης αντικείμενο έρευνας. Οι Πιττάλης και Χρήστου (2010) διενέργησαν έρευνα σε 269 μαθητές δημοτικών και γυμνασίων της Κύπρου. Αναλύοντας τα συγκριτικά αποτελέσματα δύο τεστ, που μετρούσαν τον συλλογισμό στην τρισδιάστατη γεωμετρία και τις χωρικές ικανότητες αντίστοιχα, συμπέραναν ότι οι χωρικές δεξιότητες συνιστούν παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης στον συλλογισμό στην τρισδιάστατη γεωμετρία.

Αυξανόμενο ενδιαφέρον καταγράφεται στην έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών σε διαδικασίες που στοχεύουν στη βελτίωση του οπτικοχωρικού συλλογισμού (visuospatial reasoning), εστιάζοντας στην ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής αναπτυγμάτων. Η αναπαράσταση των τρισδιάστατων αντικειμένων από δισδιάστατα αναπτύγματα συνδέεται με την ικανότητα των μαθητών να αναλύουν μία εικόνα στα επιμέρους μέρη που τη συγκροτούν και έπειτα να επανασυνδιάζουν αυτά τα μέρη δημιουργώντας νέες εικόνες. Ειδικότερα η Mariotti (1989) υποστήριξε ότι η κατασκευή αναπτυγμάτων προϋποθέτει τον συντονισμό νοητής αναπαραστασης του αντικειμένου ως όλο και ανάλυσης του στα συστατικά του στοιχεία. Σε έρευνα των Mariotti και Fischbein (1997) σε μαθητές έκτης δημοτικού χρησιμοποιώντας αναπτύγματα στερεών, καταγράφονται οι δυσκολίες ταξινόμησης στερεών και η πολυπλοκότητα της διαδικασίας παραγωγής ορισμών για αυτά. Οι Taylor και Hutton (2013) εφαρμόζοντας ένα πρόγραμμα που ενέπλεκε 52 μαθητές του δημοτικού σε δραστηριότητες χαρτοδιπλωτικής (origami) και κατασκευών μέσα από τη δημιουργία οπών σε χαρτί για origami και επαναδιπλώματός του, παρατήρησαν βελτίωση στον οπτικοχωρικό συλλογισμό των παιδιών, ενεργοποιώντας έναν κύκλο οπτικοποίησης, κατασκευής και αξιολόγησης.



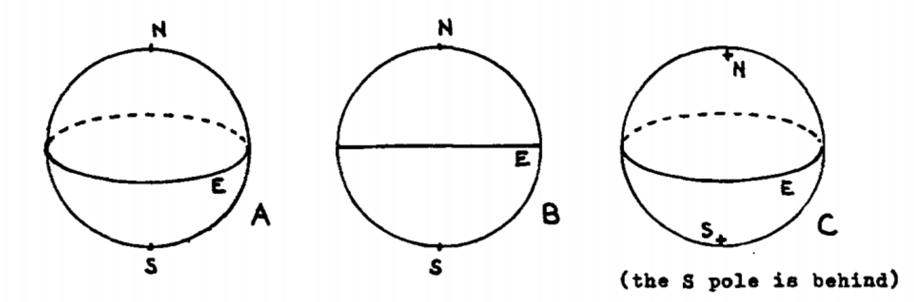
Εικόνα 3: Στη δραστηριότητα "Φτιάξε ένα ζάρι" οι μαθητές δίπλωσαν νοερά το ανάπτυγμα του κύβου και έπειτα συμπλήρωσαν κατάλληλα τους αριθμούς (Taylor & Hutton, 2013)

Έχει επισημανθεί στην έρευνα η αδυναμία των μαθητών στην κατασκευή τρισδιάστατων διατάξεων κύβων (Clements & Sarama, 2011). Η κατασκευή της δομής ενός αντικειμένου στον χώρο προϋποθέτει την αναγνώριση των επιμέρους δομικών στοιχείων του, το συνδιασμό τους σε συνθέσεις ως αντικείμενα στον χώρο και τη θεμελίωση συσχετισμών μεταξύ των δομικών στοιχείων και σύνθεσης τους. Συμφωνα με Battista και Clements (1996) η αδυναμία των μαθητών να απαριθμήσουν το πλήθος κυβικών μονάδων που συνθέτουν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μπορεί να εξηγηθεί από την απουσία δραστηριοτήτων κατασκευής δομών στον χώρο και την έλλειψη ικανότητας οργάνωσης και ενσωμάτωσης σε ένα ενιαίο νοητικό μοντέλο διαφορετικών προσεγγίσεων της δομής.

Οι Hung, Hwang, Lee και Su (2012) εστίασαν στη γνωστική προσέγγιση της ανάπτυξης εκπαιδευτικών εργαλείων για τη διδακτική της γεωμετρίας του χώρου που βασίζονται στο παιχνίδι. Η έρευνα τους αφορούσε μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού. Μέσα από τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων, συμπέραναν ότι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες τύπου tangram, κυβικές δομές ή τομές τραπεζοειδών βελτίωσε τη χωρική αντίληψη τους. Επίσης οι Lewis, Winer, Kellert και Chao (Proceedings of PMENA 37, p.309, 2013) υποστήριξαν το περιβάλλον Minecraft, ως διδακτικό και ερευνητικό εργαλείο που προωθεί τον χωρικό συλλογισμό, μέσα από έρευνα σε μαθητές δημοτικού σε δραστηριότητες κατασκευών με κυβικές μονάδες.

2.2 Ο ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων στη νοηματοδότηση εννοιών του χώρου

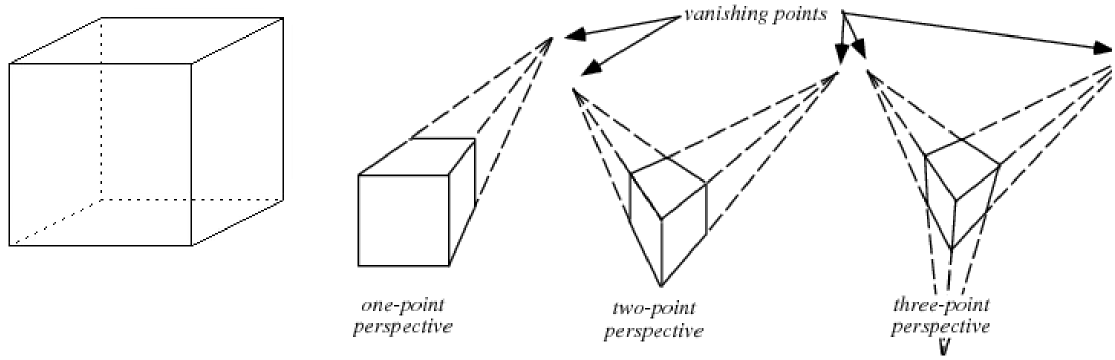
Ο ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων (visual representations)[2] στη νοηματοδότηση των αντικειμένων της Στερεομετρίας σε σχολικό επίπεδο, είναι καθοριστικός. Λειτουργώντας κατά κύριο λόγο ως μέσο επίδειξης του αντίστοιχου γεωμετρικού αντικειμένου, οι οπτικές αναπαραστάσεις συχνά είναι τυποποιημένες και απογυμνωμένες από το μαθηματικό περιεχόμενό τους (Parzysz, 1991), περιέχοντας έμμεσες συμβάσεις που μπορεί να οδηγήσουν τους μαθητές σε παρανοήσεις. Σε έρευνα του διαπίστωσε ότι οι αποδεκτές από τους μαθητές δισδιάστατες αναπαραστάσεις της σφαίρας και του κυλίνδρου δε διέθεταν μαθηματική διάσταση. Παρατήρησε ότι οι αναπαραστάσεις των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως διαχειρίζονται στη καθημερινή πράξη, είναι περισσότερο προϊόν παράδοσης παρά αποτέλεσμα εφαρμογής γεωμετρικών ιδιοτήτων. Επισήμανε ότι αφού ο ρόλος της αναπαράστασης ενός τρισδιάστατου αντικειμένου δεν περιορίζεται στη δημιουργία εικόνων (ορθών ή λανθασμένων) αλλά επεκτείνεται, ώστε να επιτρέπει χειρισμούς όπως οι κατασκευές ή οι μετρήσεις, απαραίτητα οι αναπαραστάσεις πρέπει να έχουν μαθηματικό περιεχόμενο (Parzysz, 1991).



Εικόνα 4 Από τις τρεις αναπαραστάσεις της σφαίρας η 1η είναι μαθηματικά λάθος αν και η πλέον αποδεκτή από τους μαθητές.

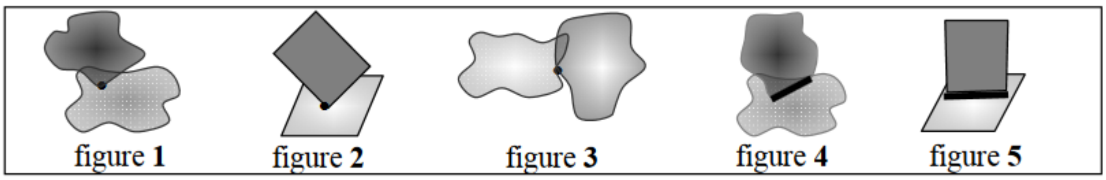
Μεταξύ άλλων, σε έρευνα σε μαθητές ηλικίας 11-15 ετών, ο Parzysz συμπέρανε ότι η σχεδόν αποκλειστική χρήση cavalière προοπτικής (προοπτική διατήρησης της παραλληλίας) έναντι της κεντρικής προοπτικής, ευθυνόταν για τη δυσκολία αναγνώρισης του κύβου σε άλλες αναπαραστάσεις πέρα από αυτή της προοπτικής διατήρησης παραλληλίας, υπογραμμίζοντας τον κρίσιμο ρόλο των γραφικών αναπαραστάσεων για τα τρισδιάστατα αντικείμενα, όπως αυτές έχουν καθιερωθεί από την εμπειρία, στη νοηματοδότηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές.

[2] Οι οπτικές αναπαραστάσεις είναι όλα τα είδη αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά και στη διδακτική τους, για την εκπλήρωση λειτουργιών όπως η μαθηματική επεξεργασία, ή η ευρετική εξερεύνηση στην επίλυση προβλημάτων και ως εκπαιδευτικό εργαλείο για την υποβοήθηση της απόκτησης μαθηματικών γνώσεων (Duval, 2014).



Εικόνα 5 Ο κύβος αριστερά σε cavalière προοπτική και δεξιά σε κεντρική ενός, δύο ή τριών σημείων φυγής.

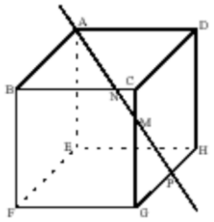
Έχει επίσης καταγραφεί στην έρευνα η δυσκολία σχεδιασμού τρισδιάστατων αντικειμένων και αναπαράστασης παράλληλων και καθέτων ευθειών στον χώρο. Αυτές οι δυσκολίες ερμηνεύτηκαν κυρίως από τον Parzysz (1988) και τον Duval (1998). Η Cohen (2008) σε έρευνα σε φοιτητές του παιδαγωγικού και καθηγητές της μέσης εκπαίδευσης διερεύνησε την απόσταση μεταξύ τυπικών γνώσεων και νοερών εικόνων για αφηρημένες γεωμετρικές έννοιες. Ανέλυσε τα αποτελέσματα υπό το πρίσμα μίας ικανότητας για οπτικο-αναλυτική ενσωμάτωση που συνίσταται στις ικανότητες ανάλυσης της οπτικής πληροφορίας, δημιουργίας οπτικών εικόνων που αντιστοιχούν στις αναλυτικές ιδέες και μετάβασης μεταξύ αναλυτικών διαδικασιών και νοερών εικόνων.



Εικόνα 6 Οι δυσκολίες στην αντίληψη του άπειρου της φύσης ευθείων γραμμών και επιπέδων, όπως αποτυπώθηκε στα σχήματα των συμμετέχοντων στην έρευνα. Σε ερώτημα για το είδος των πιθανών τομών δύο επιπέδων, τα πρώτα τρία σχήματα εμφανίζουν ένα κοινό σημείο (36%), ενώ τα δύο τελευταία ευθύγραμμο τμήμα (29%). Cohen (2008).

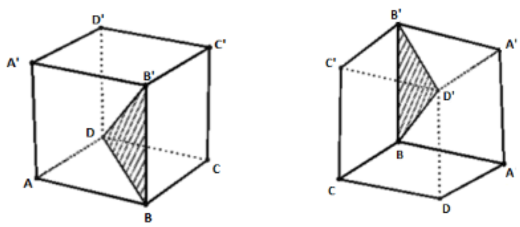
Ευρήματα ερευνών συνηγορούν στο συμπέρασμα ότι οι στατικές δισδιάστατες αναπαραστάσεις αποτελούν τροχοπέδη στις διερευνήσεις τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων. Σε ερωτηματολόγιο που δώθηκε σε 333 πρωτοετείς φοιτητές των τμημάτων Μαθηματικού, Φυσικού και Πληροφορικής στην Πίζα στο ερώτημα ποια είναι η καμπύλη τομής σφαίρας με επίπεδο μόνο το 49,6% έδωσαν τη σωστή απάντηση (Mariotti, 1995). Η πλειοψηφία των φοιτητών που έδωσαν λάθος απάντηση θεώρησαν ότι όταν το επίπεδο είναι οριζόντιο η καμπύλη θα είναι κύκλος ενώ ότι όταν είναι πλάγιο η καμπύλη θα είναι έλλειψη. Οι Jones, Fujita και Kunimune (2012) σε έρευνα τους σε μαθητές 12-15 ετών με τρεις δραστηριότητες σε κύβο, σε μία δοσμένη στατική αναπαράσταση σε cavalière προοπτική, παρατήρησαν ότι όσοι απάντησαν σωστά το έκαναν λειτουργώντας αφαιρετικά πέρα από την αναπαράσταση, κάνοντας νοερές περιστροφές. Συμπέραναν ότι η επιλογή στατικής αναπαράστασης αποτέλεσε εμπόδιο στην εύρεση αποδεικτικής διαδικασίας.

Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές όταν καλούνται να σχεδιάσουν το συμμετρικό ενός σημείου ή ευθύγραμμου τμήματος ως προς ένα επίπεδο, διερευνήθηκαν σε έρευνα του Cooper (1992), σε 394 μαθητές γυμνασίου και λυκείου του Sydney, σε στατική αναπαράσταση κύβου. Επίσης, το φαινόμενο της διαχείρισης των δισδιάστατων αναπαραστάσεων για τα τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα με όρους επίπεδης γεωμετρίας, αναδύθηκε σε έρευνα καθηγητών του IREM του Στρασβούργου (Bayart et al.,2000, αναφορά σε: Bakó, 2003).



Εικόνα 7 Οι μαθητές θεώρησαν ότι τα σημεία A,M,N,P στον κύβο είναι συνευθειακά (Bayart et al.,2000).

Οι Widder, Berman και Koichu (2014) αναζητώντας μία καλύτερη κατανόηση των οπτικών εμποδίων που προβάλουν οι αναπαραστάσεις των τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων από ευρήματα έρευνας τους σε μαθητές Λυκείου οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι οι δυνητικά παραπλανητικές πληροφορίες που παρέχουν οι τυποποιημένες δισδιάστατες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών στερεών είναι περισσότερες των ενδεχομένως χρήσιμων πληροφοριών για αυτά. Συμπληρώνουν ότι ενώ οι καθιερωμένες αναπαραστάσεις κύβων βοηθούν στον σχηματισμό μίας νοερής εικόνας, αρκετές φορές δεν παρέχουν αρκετή ευελιξία και παρεμποδίζουν την αναγνώριση και τον χειρισμό μίας τρισδιάστατης γεωμετρικής κατάστασης σε μη «κανονικά» σκίτσα.



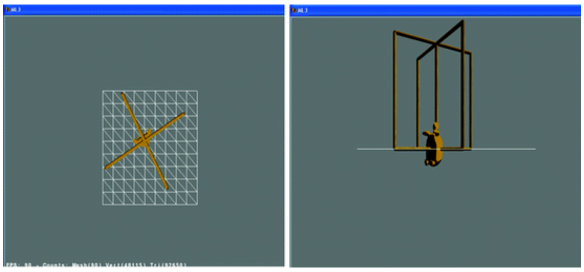
Εικόνα 8 Το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο δείχνει ισοσκελές ενώ δεν είναι, ενώ δε δείχνει ορθογώνιο ενώ είναι. Widder, Berman και Koichu (2014).

2.3 Νοηματοδότηση εννοιών του χώρου σε ψηφιακά περιβάλλοντα

2.3.1 Έρευνες που συνδέονται ευρύτερα με ψηφιακά μέσα

Οι Güçler et al. (2013) διενέργησαν έρευνα σε 182 μαθητές περίπου 10 ετών, χρησιμοποιώντας συσκευές κιναισθητικής επικοινωνίας (haptic devices) σε δυναμικά περιβάλλοντα για την κατηγοριοποίηση στερεών και τη διερεύνηση τομών τους με επίπεδα. Συμπέραναν ότι τέτοιες τεχνολογίες «έχουν τη δυνατότητα να παρουσιάσουν στους μαθητές τις ευκαιρίες να εξερευνήσουν 3D αντικείμενα μέσω πολλαπλών αντιλήψεων, υποστηρίζοντας τον ουσιαστικό διάλογο, καθώς οι μαθητές εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες όπως η εξερεύνηση, η εικασία, η διαπραγμάτευση των νοημάτων και η νοηματοδότηση» (p. 97).

Οι Λάτση και Κυνηγός (2012) στον μικρόκοσμο της τρισδιάστατης γεωμετρίας χελώνας (turtle 3D geometry) σε έρευνα σε 23 μαθητές 12 ετών συμπέραναν ότι οι διαδικασίες κατασκευής που ακολούθησαν οι μαθητές μπορούσαν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες. Κατασκευαστικές διαδικασίες μέσα από την εσωγενή οπτική γωνία της χελώνας και την εξωγενή οπτική γωνία του παρατηρητή, ανάλογα με το σημείο εστίασης και τον τρόπο που αντιλαμβάνονταν οι μαθητές τον προσομοιασμένο τρισδιάστατο κόσμο. Επισήμαναν ότι αυτές οι δύο κατηγορίες ανακλούν τις δύο κυρίαρχες κατά Tversky (2005) οπτικές του ανθρώπου για τον χώρο. Την εξωτερικά προσανατολισμένη (external), καθώς ο άνθρωπος παρατηρεί τον χώρο και χειρίζεται αντικείμενα σε αυτόν και την εσωτερικά προσανατολισμένη (internal) όταν εξερευνεί ένα περιβάλλον και προσανατολίζεται σε αυτό (Latsi & Kynigos, 2012).



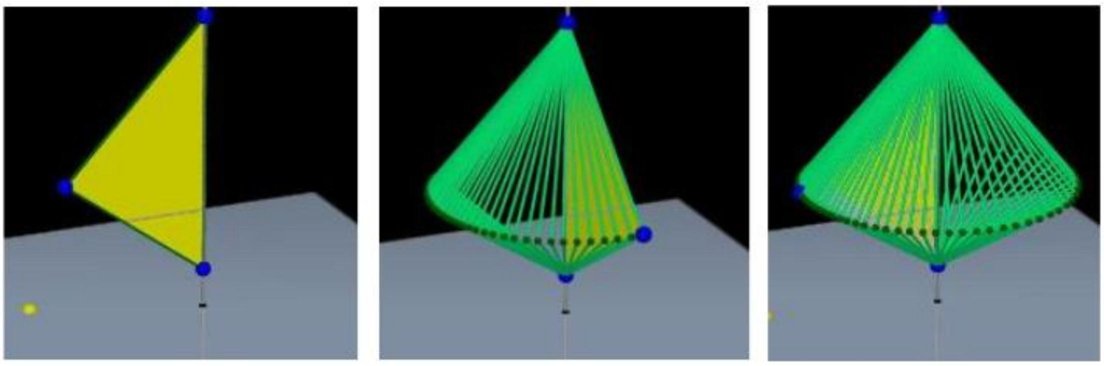
Εικόνα 9 Διαφορετικές οπτικές γωνίες του προσομοιασμένου τρισδιάστατου χώρου της χελώνας (Latsi & Kynigos, 2012).

Σε έρευνα σε μαθητές 14 ετών, η Bakó, συνέκρινε τα αποτελέσματα δύο ομάδων μαθητών που αναζητούσαν τις τομές κύβου με επίπεδο. Η πρώτη ομάδα εργάστηκε σε ένα διαφανές χειραπτικό μοντέλο του κύβου ενώ η δεύτερη σε υπολογιστικό περιβάλλον. Ενώ η δεύτερη ομάδα ανακάλυψε περισσότερες τομές, παρατηρώντας ότι το χειραπτικό μέσο ευνοούσε την εύρεση της θέσης του επιπέδου, η Bakó πρότεινε το συνδιασμό της τεχνολογίας με παραδοσιακά μέσα όπως τα χειραπτικά μοντέλα ως τη βέλτιστη προσέγγιση.

2.3.2 Έρευνες που εστιάζουν στα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας για τη μελέτη του τρισδιάστατου χώρου (3D-DGEs)

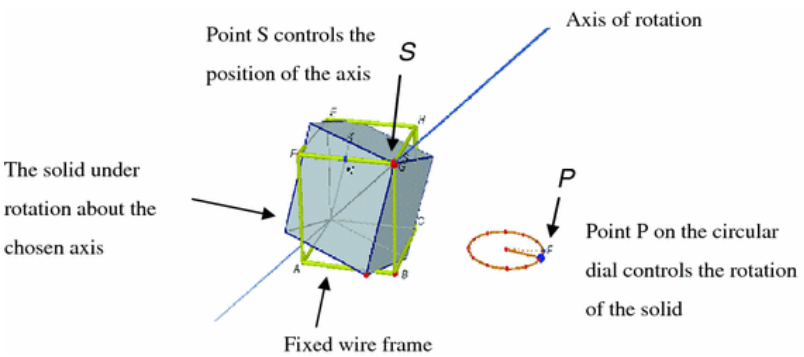
Ευρήματα ερευνών ενισχύουν τη θέση, ότι τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (Dynamic Geometric Environments, DGE), παρέχουν ένα επιστημονικό πεδίο, στο οποίο η κίνηση και η κύμανση με οπτική και αισθητοκινητική επανατροφοδότηση μπορεί να κατευθύνει την αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων σχηματισμών. Με τον όρο δυναμική γεωμετρία αναφερόμαστε στον σε πραγματικό χρόνο χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων στο περιβάλλον του λογισμικού, μέσω της λειτουργίας συρσίματος (dragging). Το δυναμικό σχήμα μπορεί να θεωρηθεί η αντικειμενοποιημένη αναπαράσταση (materialized representation) του ιδανικού γεωμετρικού σχήματος, που χαρακτηρίζεται μόνο από τις εσωτερικές του σχέσεις.

Ειδικότερα για τα 3D-DGEs πειραματιζόμενοι με διδακτικές προσεγγίσεις οι Miyazaki et al. (2007) πρότειναν ένα πρόγραμμα διδασκαλίας τρισδιάστατης γεωμετρίας με χρήση 3D λογισμικών στην κατώτερη μέση εκπαίδευση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των πειραματικών ομάδων με του μέσου όρου στην Ιαπωνία, προέκυψαν θετικά αποτελέσματα όσον αφορά την κατασκευή τρισδιάστατων δομών από επίπεδες και τις επεξηγήσεις που έδιναν οι μαθητές για τις δισδιάστατες αναπαραστάσεις των τρισδιάστατων αντικειμένων. Επισήμαναν μεταξύ άλλων, ότι η ενσωμάτωση των 3D-DGEs στη διδασκαλία μπορεί να επεκτείνει το διδασκόμενο μαθηματικό περιεχόμενο της Στερεομετρίας και να ισχυροποιήσει τη σύνδεση των μαθηματικών με τον φυσικό κόσμο στα μάτια των μαθητών.



Εικόνα 10 Παραγωγή στερεού εκ περιστροφής (Miyazaki et al., 2007).

Οι Leung και Or (2009)[3] μέσα από έρευνα σε τελειόφοιτους λυκείου του Hong Kong υποστήριξαν ότι στο περιβάλλον του Cabri 3D ευνοείται η διερεύνηση των συμμετριών ενός στερεού. Οργάνωσαν μία σειρά από δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές αναγνώριζαν τις συμμετριές που εμφανίζονταν μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό του άξονα περιστροφής.



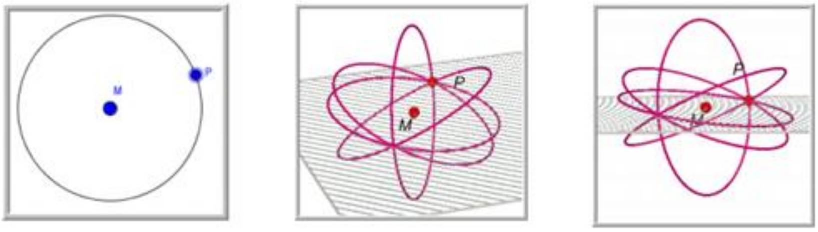
Εικόνα 11 Περιστρεφόμενος κύβος στο Cabri 3D (Leung, A., 2011).

Οι Mammana et al. (2012) στο περιβάλλον του Cabri 3D πρότειναν τη νοηματοδότηση εννοιών του τρισδιάστατου χώρου χτίζοντας μία σχέση αναλογίας ορισμών μεταξύ τετραέδρων και τετραπλεύρων για τις έδρες και τις ακμές τους αντίστοιχα. Η έρευνα διεξήχθηκε σε φοιτητές και οι ερευνήτριες συμπέραναν ότι η

[3] Αναφορά στο: Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 43*(3), 325–336

εμπλοκή των φοιτητών σε διαδικασίες αναζήτησης ομοιότητων και διαφορών, αναλλοίωτων και μεταβαλλόμενων μορφών μεταξύ των δύο σχημάτων βοήθησε τους φοιτητές να νοηματοδοτήτουν τα γεωμετρικά στερεά εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες του 3D-DGE.

Την εξέλιξη των βασικών εννοιών του κύκλου και της καθετότητας δύο ευθειών κατά τη μετάβαση από τη δισδιάστατη στην τρισδιάστατη γεωμετρία μελέτησε ο Hattermann (2012) σε έρευνα του σε φοιτητές. Υπογράμμισε το πλεονέκτημα του τεχνολογικού εργαλείου (Cabri 3D) όσον αφορά τις διαδικασίες οπτικοποίησης, συνεισφέροντας στην επανανοηματοδότηση των υφιστάμενων ιδεών τους.



Εικόνα 12 Μετάβαση από τον κύκλο στη σφαίρα (Hattermann, 2012).

Σε δύο προηγούμενες έρευνές του ο Hattermann (2007 & 2008) πάλι σε φοιτητές εξετάζοντας τη λειτουργία συρσίματος σε περιβάλλοντα 3D-DGEs παρατήρησε ότι για την αναγνώριση τομών κύβου με επίπεδο η χρήση του πραγματικού μοντέλου επικράτησε από τη χρήση του περιβάλλοντος υπολογιστή, οδηγώντας σε φτωχότερα συμπεράσματα ενώ κατά τη διάρκεια της κατασκευής κύβου, προτιμήθηκαν στοιχεία από την επίπεδη γεωμετρία (κύκλοι, ευθ.τμήματα, ευθείες γραμμές) αντί σφαιρών ή επιπέδων.

Η δυνατότητα σχεδιασμού αδιδακτικών καταστάσεων, που ενώ η εικονική οπτικοποίηση είναι άστοχη, η αποδόμηση του γεωμετρικού σχηματισμού σε επιμέρους σχηματικές μονάδες αποτελεί το εργαλείο της ανάλυσης του, μέσα από τη μελέτη των ιδιοτήτων τους, σε περιβάλλον τρισδιάστατης δυναμικής γεωμετρίας υποστηρίχθηκε από τον Mithalal (2010) (σε: Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2014)).

Οι Chang et al. (2014) διενέργησαν έρευνα σε δύο τμήματα ενός λυκείου της Taipei. Το ένα τμήμα αποτελούσε την πειραματική ομάδα 31 μαθητών που εργάστηκαν σε δραστηριότητες τρισδιάστατης γεωμετρίας σε tablet PCs με εγκατεστημένο το Cabri 3D, ενώ το δεύτερο ήταν η ομάδα ελέγχου. Τα συγκριτικά αποτελέσματα έδειξαν προβάδισμα της πειραματικής ομάδας στις δραστηριότητες τρισδιάστατης γεωμετρίας, κυρίως όσον αφορα στα επίπεδα σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων όπως αυτά περιγράφονται από τον Duval.

Συνοψίζοντας, από τη μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας αναδύονται οι δυσκολίες νοηματοδότησης εννοιών του χώρου, σε στατικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα. Όμως ευρήματα ερευνών υποστηρίζουν τον σημαντικό ρόλο των ψηφιακών εργαλείων, που βασίζονται στις αρχές της αλληλεπίδρασης, στη διδακτική της στερεομετρίας, προσφέροντας αφενός δυνατότητες δυναμικού χειρισμού, σε ένα μη στατικό αναπαραστασιακά περιβάλλον, και αφετέρου αυτενέργειας στους μαθητές ώστε να κατασκευάσουν μαθηματική γνώση για τα τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

3.1 Κατασκευή μαθηματικού νοήματος

Η νοηματοδότηση εμπλέκει διαδικασίες οργάνωσης και αναδιοργάνωσης της γνώσης μέσα από την αντίληψη και τον αναστοχασμό συγκεκριμένων εμπειριών. Η δυσκολία της κατασκευής μαθηματικών νοημάτων συνίσταται στην αφηρημένη φύση των μαθηματικών οντοτήτων και την πρόκληση εξαγωγής γενικεύσεων. Αφηρημένα νοήματα δύσκολα γίνονται αντιληπτά από τους μαθητές μέσω ενός ορισμού. Αντίθετα, πρέπει να υποστηρίζονται διδακτικά από μαθηματικές και ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις, για τη διαχείρηση των οποίων, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν αυτές τις έννοιες. Στη διδακτική των μαθηματικών η ιδέα ότι η γνώση οικοδομείται είναι κεντρική, με μία από τις κυρίαρχες προσεγγίσεις, την κονστρουκτιβιστική. Γενικές αρχές του κονστρουκτιβισμού (von Glasersfeld, 1984, 1996) είναι:

- Η γνώση δε συλλαμβάνεται μέσα από μία παθητική αποτύπωση εξωτερικών ερεθισμάτων από το περιβάλλον, αλλά κατασκευάζεται ενεργητικά από το άτομο.
- Η οικοδόμηση της γνώσης αποτελεί μία διαδικασία προσαρμογής στο φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον.
- Το άτομο εξελίσσεται πνευματικά μέσα από τη διαρκή μεταβολή των νοητικών δομών, που έχει αναπτύξει για να οργανώσει και να προσαρμόσει το περιβάλλον του και όχι κάποια «αντικειμενική πραγματικότητα».

Ο κονστρουκτιβισμός, ως θεωρία μάθησης δεν εξετάζει μόνο τη γνώση, αλλά και τους μηχανισμούς οικοδόμησής της. Διαχωρίζεται σε πολλαπλές μορφές και έχει καταλυτική επίδραση στον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τις ιδέες του κονστρουκτιβισμού η μαθηματική γνώση δεν λαμβάνεται από αισθητηριακά δεδομένα, αλλά οικοδομείται μέσα από την εμπλοκή σε νοητικές δραστηριότητες, που προϋποθέτουν συλλογισμό και αφαίρεση. Ο μαθητής παύει να είναι παθητικός δέκτης και ο εκπαιδευτικός απλά μεταφορέας της γνώσης. Αντίθετα ο εκπαιδευτικός οφείλει να παρέχει ευκαιρίες για μαθηματικές δραστηριότητες στους μαθητές, ενθαρρύνοντάς τους να κατασκευάσουν οι ίδιοι τα μαθηματικά νοήματα μέσα από την εμπλοκή τους σε αυτές. Στην κονστρουκτιβιστική θεώρηση το κοινωνικό πλαίσιο θεωρείται σημαντικό για τη διαδικασία της μάθησης, καθώς μέσα από τον διάλογο επαναδιοργανώνεται η υπάρχουσα γνώση και δημιουργείται νέα. Ο σχεδιασμός μίας κονστρουκτιβιστικής διδασκαλίας στηρίζεται στις δραστηριότητες των μαθητών. Εμπλέκει διαδικασίες επίλυσης διερευνητικών δραστηριοτήτων ή ανοιχτών προβλημάτων. Ο εκπαιδευτικός καλείται να έχει βαθιά γνώση του αντικειμένου, ώστε να είναι σε θέση να προσεγγίσει ένα γνωστικό αντικείμενο από διαφορετικές σκοπιές, περιλαμβάνοντας όχι μόνο δικές του αλλά και των μαθητών. Τα ψηφιακά περιβάλλοντα προσφέρουν δυνατότητες σχεδιασμού τέτοιων δραστηριοτήτων και μπορούν να αξιοποιηθούν στο πλαίσιο μίας κονστρουκτιβιστικής διδασκαλίας.

Ο υπολογιστής, ως τεχνούργημα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό, ώστε ο μαθητής να κατευθυνθεί σε κατασκευή νοημάτων που να είναι μαθηματικά συνεπή. Σύμφωνα με τη Mariotti (2002), τα νοήματα στηρίζονται στη φαινομενολογική εμπειρία, που είναι οι δράσεις του υποκειμένου και η ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος, του οποίου συνιστώσα είναι το τεχνούργημα. Η εξέλιξή τους επιτυγχάνεται στο περιβάλλον της τάξης, υπό την καθηδήγηση του εκπαιδευτικού. Συνεπώς, ενώ μέσα από τη δραστηριότητα σε ένα τεχνούργημα οι μαθητές μπορούν να παράξουν νοήματα, η μαθηματική συνέπεια αυτών των νοημάτων δεν είναι εκ των προτέρων εξασφαλισμένη. Οικοδομείται, καθώς ο εκπαιδευτικός συνδιάζει τις δραστηριότητες στον μικρόκοσμο με κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, στοχεύοντας στην κατασκευή μαθηματικών πλέον νοημάτων.

3.2 Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης

3.2.1 Οι επιρροές της θεώρησης του Vygotsky

Με αφόρμηση την έννοια της σημειωτικής (δια)μεσολάβησης (semiotic mediation), που εισήχθηκε από τον Vygotsky (1978), επιχειρείται μία ανάλυση του ρόλου των εργαλείων και των λειτουργιών τους, στην πραγματοποίηση συγκεκριμένων δραστηριοτήτων. Σκιαγραφείται ένα μοντέλο περιγραφής του τρόπου αξιοποίησης συγκεκριμένων εργαλείων, από τον εκπαιδευτικό, ως μέσα βελτίωσης της διαδικασίας μάθησης, η οποία θεωρείται προϊόν κοινωνικής και πολιτισμικής αλληλεπίδρασης.

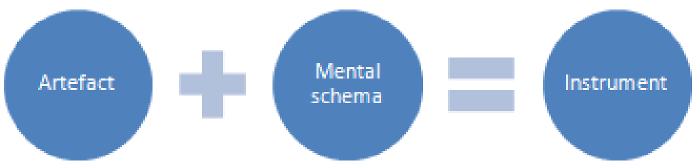
Η προσέγγιση του Vygotsky εντάσσεται στο ρεύμα του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, λαμβάνοντας υπόψη ιστορικές και πολιτισμικές συνιστώσες, και εστιάζει στους τρόπους με τους οποίους οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις επηρεάζουν τη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης. Υιοθετώντας τη σημειωτική προσέγγιση του Vygotsky η κατασκευή ατομικής γνώσης περιγράφεται με όρους εσωτερίκευσης (internalization). Η βασική παραδοχή αφορά στον ισχυρισμό ότι η εσωτερίκευση αποτελεί μία κοινωνική διαδικασία που βασίζεται στην επικοινωνιακή διάσταση και τον ασύμμετρο ρόλο των συμμετεχόντων δηλαδή του εκπαιδευτικού και των μαθητών. Κεντρική θέση κατέχουν τα εργαλεία και τα συμβολικά συστήματα στη γνωστική ανάπτυξη, δίνοντας έμφαση στη γλώσσα ως το πρώτο σύστημα διαμεσολάβησης της κοινωνίας στον ατομικό νου και μέσο οργάνωσης της αντίληψης. Συγκεκριμένα μέσα από τη συλλογική χρήση εργαλείων αναδύονται νοήματα, τα οποία επικοινωνούνται στην ομάδα με διαφορετικά σημειωτικά μέσα (γλώσσα, χειρονομίες κλπ). Τα νοήματα αφορούν το εργαλείο και τη χρήση του στο περιεχόμενο της δραστηριότητας.

Στο θεωρητικό πλάισιο της σημειωτικής διαμεσολάβησης εξετάζεται η σχέση μεταξύ τεχνουργήματος, εστιάζοντας στα ψηφιακά μέσα, και μαθηματικής γνώσης σε διδακτική βάση, υπογραμμίζοντας τον κρίσιμο ρόλο της ανθρώπινης διαμεσολάβησης.

3.2.2 Διάκριση εργαλείου-τεχνουργήματος: η εργαλειακή διάσταση

Η ιδέα του τεχνουργήματος είναι πολύ γενική και περιλαμβάνει διαφορετικά προϊόντα του ανθρώπινου πολιτισμού ανά τους αιώνες. Από τα σκεύη, τα εργαλεία ή τα βιβλία στα σύγχρονα ψηφιακά μέσα επικοινωνίας και πληροφορίας. Αναφερόμενοι κυρίως στα ψηφιακά μέσα κεντρική προσέγγιση στη βιβλιογραφία είναι η εργαλειακή (instrumental). Ακολουθώντας την ορολογία του Rabardel (1995) η έννοια του τεχνουργήματος (artefact) διαχωρίζεται από αυτή του εργαλείου (instrument). Το τεχνούργημα είναι ένα, υλικό ή μη, αντικείμενο καθεαυτό. Σχεδιασμένο, εξ'ολοκλήρου ή τμηματικά, για να εξυπηρετήσει ένα συγκεκριμένο στόχο, ενσωματώνοντας συγκεκριμένη γνώση. Όπως ένα μουσικό όργανο ή ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Όμως ο τρόπος που θα χρησιμοποιηθεί το τεχνούργημα είναι καθοριστικός. Όταν μαθαίνουμε να γράφουμε, το μολύβι παύει να είναι τεχνούργημα αποκλειστικά ζωγραφικής αλλά εξελίσσεται σε εργαλείο παραγωγής γραπτού λόγου, καθώς αναπτύσσονται οι δεξιότητες μας. Οδηγούμαστε σε μία νέα μικτή οντότητα, το εργαλείο (instrument), που γεννιέται εξίσου από το υποκείμενο και το αντικείμενο (το τεχνούργημα) και έχει ψυχολογικό χαρακτήρα. Τότε υπάρχει μία σκόπιμη σχέση μεταξύ τεχνουργήματος και χρήστη για κάποια συγκεκριμένη δραστηριότητα. Το εργαλείο πλέον αποτελεί μία ενιαία οντότητα που συνθέτεται από τεχνουργηματικές και σχηματικές συνιστώσες που αποκαλούνται σχήματα ενεργοποίησης (utilization schemes).

Ένα σχήμα ενεργοποίησης σύμφωνα με τον Rabardel (1995) αποτελεί μία ενεργή δομή στην οποία ενσωματώνονται και οργανώνονται οι προηγούμενες εμπειρίες, καθιστώντας το σημείο αναφοράς κατά την ερμηνεία νέων δεδομένων. Τα σχήματα ενεργοποίησης αποτελούν δομές που μεταβάλλονται καθώς προσαρμόζονται σε ένα επεκτεινόμενο εύρος καταστάσεων και εξαρτώνται από τα νοήματα που αποδίδει το υποκείμενο σε αυτές τις καταστάσεις. Διακρίνονται σε σχήματα χρήσης (usage schemes) και σχήματα ενορχηστρωμένων ενεργειών (instrumented action schemes) και προσανατολίζονται στις λειτουργίες του τεχνουργήματος και στην πραγματοποίηση δραστηριοτήτων αντίστοιχα.



Διάγραμμα 1 Από το τεχνούργημα (artefact) στο εργαλείο (instrument).

Η διαδικασία που ένα τεχνούργημα μετατρέπεται σε εργαλείο καλείται εργαλειακή δημιουργία (instrumental genesis) και περιλαμβάνει συλλογισμούς μετατροπής ή και αλλαγής του τεχνουργήματος, καθιστώντας τη μία ουσιαστική διαδικασία διαρκώς σε εξέλιξη. Εδραιώνεται μία διμερής δυναμική σχέση μεταξύ του τεχνουργήματος και του χρήστη. Οι εξελισσόμενες δεξιότητες του χρήστη καθοδηγούν τον τρόπο χρήσης ή τη μορφή του τεχνουργήματος (instrumentalization), ενώ τα πλεονεκτήματα και οι περιορισμοί του τεχνουργήματος επηρεάζουν τις στρατηγικές που θα ακολουθήσει ο χρήστης και τις αναδυόμενες αντιλήψεις του (instrumentation).

3.2.3 Η σημειωτική διάσταση

Επειδή τα μαθηματικά αντικείμενα δεν προσεγγίζονται μέσω των αισθήσεων, η οντολογική διάστασή τους προϋποθέτει τη χρήση μαθηματικών σημείων (signs) για την επικοινωνία των νοημάτων. Με τον όρο μαθηματικό σημείο αναφερόμαστε σε «οτιδήποτε μπορεί να υποκαταστήσει κάτι άλλο» Colapietro (1993), με έναν νέο τρόπο. Έτσι με αυτόν τον όρο δεν αναφερόμαστε μόνο στα συμβατικά και κοινώς αναγνωρίσιμα μαθηματικά σύμβολα αλλά και σε, αυτοσχέδιους ιδιοσυγκρασιακούς μαθηματικούς συμβολισμούς, σχέδια κλπ, εφόσον στοχεύουν στην κωδικοποίηση, αναπαράσταση και επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης. Η σημείωση (semiosis) είναι «ένας όρος που αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τον Charles S. Peirce για να προσδιορίσει οποιαδήποτε ενέργεια ή διαδικασία, γενικότερα τη δραστηριότητα ενός σημείου». Με τον όρο σημειωτική (semiotics) αναφόμαστε «στη μελέτη ή τη θεωρία των σημείων, στη συστηματική διερεύνηση της φύσης, των ιδιοτήτων και των κατηγοριών των σημείων, ιδιαίτερα όταν επιχειρούνται ενσυνείδητα», (Colapietro 1993)[4].

Ο όρος διαμεσολάβηση (mediation) χρησιμοποιείται συχνά στη βιβλιογραφία με διαφορετικό περιεχόμενο. Αναφορικά με τη χρήση νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση, η διαμεσολάβηση, όπως παρουσιάζεται στη σύγχρονη έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών Hasan (2002), Maracci & Mariotti (2012), αποτελεί μία διαδικασία η οποία συγκροτείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

- Τον διαμεσολαβητή (mediator). Κάποιος ο οποίος διαμεσολαβεί, συνηθέστερα ο εκπαιδευτικός.
- Κάτι το οποίο διαμεσολαβείται. Όπως μία μαθηματική έννοια.
- Τον διαμεσολαβούμενο (mediatee), μαθητή.
- Τις συνθήκες διαμεσολάβησης, εννοώντας αφενός τα μέσα διαμεσολάβησης και αφετέρου την τοποθεσία που έλαβε χώρα.

3.2.4 Μετατροπή ενός τεχνουργήματος σε εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης

Σε κάθε τεχνούργημα ενυπάρχει μία σημειωτική δυνατότητα (semiotic potential) που συνίσταται στη διπλή σημειωτική σχέση που έχει το τεχνούργημα, τόσο με τα προσωπικά νοήματα, που αναμένεται να αναδυθούν από τη χρήση του κατά την πραγματοποίηση μίας δραστηριότητας, όσο και με τα μαθηματικά νοήματα, που εκμαιεύονται από τη χρήση του και αναγνωρίζονται από έναν ειδικό, συνηθέστερα τον εκπαιδευτικό (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Η εκμετάλλευση της σημειωτικής δυνατότητας ενός τεχνουργήματος από έναν εκπαιδευτικό, συνίσταται στην αναγνώριση μαθηματικών αλλά και προσωπικών

[4] Αναφορά στο: Encyclopedia of Mathematics Education (2014), pp 538-542, Norma Presmeg: Semiotics in Mathematics Education,

νοημάτων που δυνητικά μπορούν να αναδυθούν από τη χρήση του. Ο εκπαιδευτικός καλείται να οργανώσει διδακτικές καταστάσεις με στόχους, αφενός η εμπλοκή των μαθητών σε ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες, να κινητοποιήσει συγκεκριμένα σχήματα ενεργοποίησης (utilization schemes), ώστε να παράξουν προσωπικά νοήματα, εφετέρου να ενορχηστρώσει κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, ώστε τα προσωπικά νοήματα που αναδύθηκαν κατά τις δραστηριότητες με το τεχνούργημα να εξελιχθούν στα επιδιωκόμενα μαθηματικά. Σύμφωνα με τις Bartolini και Mariotti (2002) οποιοδήποτε τεχνούργημα μπορεί να θεωρηθεί εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης, εφόσον χρησιμοποιηθεί εκούσια από τον εκπαιδευτικό για να διαμεσολαβήσει ένα μαθηματικό περιεχόμενο μέσα από μία ειδικά σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση.

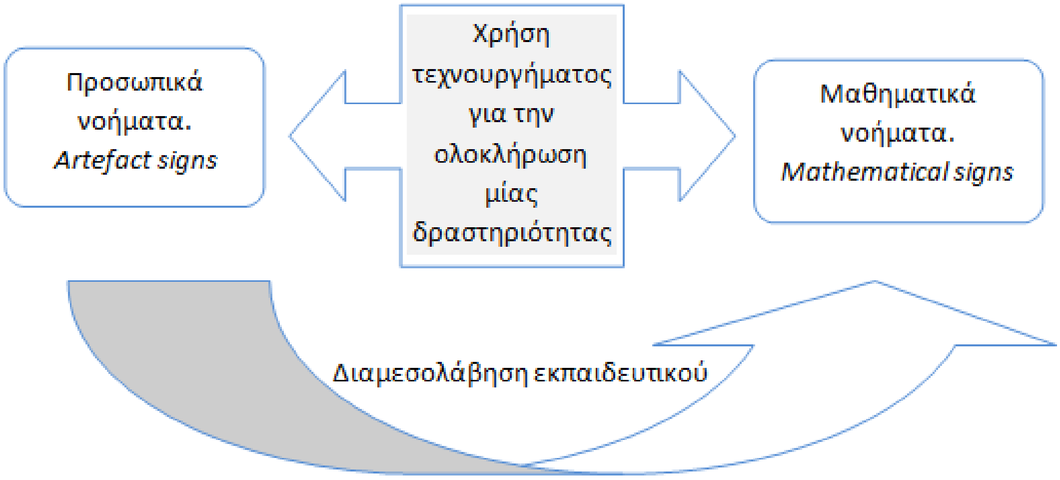
Κρίσιμες είναι οι διαδικασίες μέσα από τις οποίες ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει τα αναδυόμενα νοήματα από τη χρήση του τεχνουργήματος και να τα συνδέσει με τα αντίστοιχα μαθηματικά. Η σημειωτική προσέγγιση αναφέρεται στην ερμηνεία της διδασκαλίας και της μάθησης αναγνωρίζοντας τον κεντρικό ρόλο των σημείων τόσο ως προϊόν όσο και ως μέσο, στην κατασκευή της γνώσης.

Σύμφωνα με τη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης η διδακτική διαδικασία ξεκινά με την εμφάνιση προσωπικών νοημάτων, μέσα από τη χρήση του τεχνουργήματος, η οποία παρατηρείται από την εμφάνιση συγκεκριμένων σημείων. Πρόκειται για τεχνουργηματικά σημεία (artefact signs) που συνδέονται αποκλειστικά με το τεχνούργημα. Αναφέρονται στο περιεχόμενο της χρήσης του τεχνουργήματος, συχνά σε ένα τμήμα του ή μία δραση που επιτυγχάνεται μέσω αυτού. Αυτά τα σημεία είναι άμεσα και σχετίζονται με την εμπειρία του υποκειμένου. Τα μαθηματικά σημεία όμως, αναφέρονται στο μαθηματικό περιεχόμενο και σχετίζονται με τα μαθηματικά νοήματα και μπορούν να εκφραστούν με τρόπο σύμφωνο με τα πρότυπα της μαθηματικής κοινότητας (πχ: ορισμός, θεώρημα, απόδειξη). Σύμφωνα με τις Maracci και Mariotti η εξέλιξη των τεχνουργηματικών σε μαθηματικά σημεία δεν είναι αυθόρμητη αλλά χρειάζεται ανθρώπινη διαμεσολάβηση, αφού πρέπει να προαχθεί από τον εκπαιδευτικό μέσα από συγκεκριμένες συλλογικές δραστηριότητες. Αποδίδοντας ιδιαίτερη προσοχή στη διαδικασία παραγωγής σημείων και στον μετασχηματισμό τους, που θεωρείται απόδειξη της μάθησης, μία τέτοια εξέλιξη μπορεί να ενθαρρυνθεί μέσω της επανάληψης διδακτικών κύκλων με διαφορετικές κατηγορίες δραστηριοτήτων, που συνεισφέρουν διαφορετικά αλλά συμπληρωματικά στην κατεύθυνση της εξέλιξης της διαδίκασίας της σημειωτικής μεσολάβησης.

- Δραστηριότητες με το τεχνούργημα. Οι δραστηριότητες αυτές σχεδιάζονται ώστε να προωθούν την ανάδειξη προσωπικών νοημάτων που σχετίζονται με την ολοκλήρωση της δραστηριότητας με το τεχνούργημα. Πρόκειται για δραστηριότητες στο πεδίο φαινομενολογικής εμπειρίας, όπου υποθέτουν οι ερευνήτριες ότι παράγονται τα νοήματα.
- Δραστηριότητες παραγωγής ατομικού γραπτού ή προφορικού λόγου, που αφορούν τις δραστηριότητες επίλυσης στις οποίες ενεπλάκησαν. Τα

τεχνουργηματικά σημεία που αναδύθηκαν και καταγράφονται θα αποτελέσουν τη βάση του συλλογικού διαλόγου.

- Συζήτηση μέσα στην τάξη. Ο εκπαιδευτικός επιχειρεί να καθοδηγήσει την τάξη σε από κοινού κατασκευή νοημάτων, που είναι συνεπή με τους διδακτικούς στόχους.



Διάγραμμα 2 Μετάβαση από τα προσωπικά στα μαθηματικά νοήματα.

Δεδομένου ότι η αφηρημένη φύση των μαθηματικών οντοτήτων καθιστά άτοπη την άμεση σχέση του μαθητή με αυτές, οι μαθηματικές οντότητες υποστασιοποιούνται μέσα από άλλες σαφείς και αντιληπτές οντότητες, τις αναπαραστάσεις. Αναγνωρίζοντας τον κεντρικό ρόλο των αναπαραστάσεων στην απόκτηση μαθηματικής γνώσης, οι δυνατότητες διαμεσολάβησης που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες σε αυτή την κατεύθυνση αποτελούν αντικείμενο έρευνας στον χώρο της διδακτικής.

3.2.5 Σημειωτική Δυνατότητα Περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας

Προσεγγίζοντας τη διδασκαλία ως μία δυναμική διαδικασία, τα ψηφιακά εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, και βασίζονται στις αρχές της αλληλεπίδρασης, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και τα λογισμικά συμβολικής έκφρασης.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στοχεύουν στην ανάπτυξη της χωρικής αίσθησης (spatial sense) και της γεωμετρικής αιτιολόγησης, προσφέροντας έξυπνα κοστρουκτιβιστικά εργαλεία με τα οποία οι χρήστες κατασκευάζουν ή χειρίζονται γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία υπακούουν σε μαθηματικούς κανόνες (Mariotti, 2002) και προάγοντας την ανάπτυξη θεωρητικών επιχειρημάτων από τους μαθητές (Noss & Hoyles, 1996).

Κοινά χαρακτηριστικά όλων των DGE, ανεξάρτητα από τον σχεδιασμό τους είναι:

- ✓ Η δυναμική μοντελοποίηση των εργαλείων της παραδοσιακής γεωμετρίας (dragmode).
- ✓ Η λειτουργία ίχνους σημείου, που εμφανίζει την πορεία που ακολουθεί το σημείο μετακινώντας κάποιο άλλο σημείο της κατασκευής εφόσον υπάρχει σχέση εξάρτησης.
- ✓ Οι μακροεντολές, που αποτελούν συμπύκνωση ακολουθίας εντολών σε μία.

Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας προσφέροντας δυνατότητες δυναμικού χειρισμού των σχημάτων, οδηγούν σε ισχυρότερες αναπαραστάσεις συγκριτικά με το στατικό περιβάλλον του χαρτιού ή του πίνακα. Κεντρική, στις δυναμικές κατασκευές σε DGE, είναι η λειτουργία συρσίματος, αποκαλύπτοντας τις αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ των επιμέρους σχηματικών μονάδων. Διαχωρίζοντας τις τροπικότητες συρσίματος (dragging modalities), που συνίστανται σε ότι παρατηρείται εξωτερικά ως ένας συγκεκριμένος τρόπος συρσίματος, από τα σχήματα ενεργοποίησης συρσίματος (dragging utilization schemes), που συνίστανται στην περιγραφή μίας εσωτερικής νοητικής κατασκευής από τον λύτη, οι Baccaglini-Frank και Mariotti (2010), δίεκριναν τις ακόλουθες τροπικότητες dragging:

- o Wandering dragging: σύρσιμο περιπλάνησης ενός σημείου βάσης[5] αναζητώντας ενδιαφέροντες σχηματισμούς ή κανονικότητες ενος σχήματος.
- o Maintaining dragging: Η προσπάθεια συρσίματος ενός σημείου βάσης ώστε να διατηρείται μία συγκεκριμένη ιδιότητα στο σχήμα. Το maintaining dragging συνεπαγεται την αναγνώριση ενός συγκεκριμένου σχηματισμού ως ενδιαφέροντα, και την προσπάθεια του χρήστη ώστε η συγκεκριμένη ιδιότητα να διατηρηθεί κατά το σύρσιμο. Αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως dymmy locus dragging (σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου)
- o Dragging with trace activated: Το σύρσιμο ενός σημείου βάσης με ενεργό ίχνος. Έρευνες έχουν συνδέσει τον συνδιασμό maintaining dragging και ενεργοποιημένο ίχνος με τη διαδικασία παραγωγής υποθέσεων.
- o Dragging test: Το σύρσιμο σημείων βάσης ώστε να δούμε αν το κατασκευασμένο σχήμα διατηρεί ή όχι τις επιθυμητές ιδιότητες. Στην τρέχουσα βιβλιογραφία το dragging test θεωρείται εργαλείο ελέγχου εγκυρότητας των κατασκευών στο λογισμικό (robust constractions).

Η λειτουργία συρσίματος έχει μελετηθεί ως παιδαγωγικό εργαλείο και θεωρείται ότι συμβάλει στον μαθηματικό λογισμό. Η ανεξάρτητη (direct) κίνηση ενός στοιχείου βάσης παρουσιάζει την κίνηση του στοιχείου στο επίπεδο. Η εξαρτημένη (indirect) κίνηση ενός στοιχείου επέρχεται όταν η κίνηση του σημείου είναι αποτέλεσμα της κίνησης ενός άλλου στοιχείου βάσης. Ο μαθητής αρχικά παρατηρεί την εξάρτηση της κίνησης, την οποία έπειτα πρέπει να ερμηνεύσει σε μαθηματικό πλαίσιο. Οι διαδικασίες της γεωμετρικής νοηματοδότησης προκύπτουν παρατηρώντας τις αναδυόμενες αναλλοίωτες που είναι, είτε πτυχές του δυναμικού σχήματος που

[5] Σημείο βάσης θεωρείται το ελεύθερο σημείο (ή ημιελεύθερο αν συνδέεται με ένα αντικείμενο) που μπορεί να κινηθεί οπουδήποτε στην οθόνη (ή κατα μήκος του αντικειμένου στο οποίο ανήκει).

μπορούμε να τις αντιληφθούμε ως σταθερές ενώ το σχήμα μεταβάλλεται μέσω dragging πχ: ΑΒ//ΔΓ και s//r (αναλλοίωτες $1^{ου}$ επιπέδου), είτε αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ των αναλλοίωτων $1^{ου}$ επιπέδου, πχ: ΑΒ//ΓΔ συνεπάγεται s//r (αναλλοίωτες $2^{ου}$ επιπέδου). Η σημειωτική δυνατότητα της λειτουργίας συρσίματος έγκειται στις δυνατότητες γεωμετρικής νοηματοδότησης των παρατηρούμενων φαινομένων αναγνωρίζοντας αναλλοίωτες και ερμηνεύοντας τις μέσα από αξιώματα ή γεωμετρικές προτάσεις.

Συνεπώς, ενώ στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η χρήση του κανόνα και του διαβήτη παράγει ένα σύνολο αξιωμάτων, καθορίζοντας ένα θεωρητικό σύστημα, εντός του οποίου η εγκυρότητα μίας κατασκευής επικυρώνεται από ένα θεώρημα, αντίστοιχα, στην ψευδοπραγματικότητα των περιβάλλοντων δυναμικής γεωμετρίας, οι γεωμετρικοί σχηματισμοί κατασκευάζονται με τα εργαλεία του λογισμικού και η εγκυρότητα τους ελέγχεται μέσω της δοκιμής συρσίματος “dragging test”. Εάν στα τεχνουργηματικά σημεία των σχηματισμών στο λογισμικό αποδοθούν μαθηματικά νοήματα, γεωμετρικής φύσης στο πλαίσιο της Ευκλείδειας γεωμετρίας, τότε το τεχνολογικό μέσο έχει χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό ως εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης.

3.3 Το γνωστικό μοντέλο του Duval για τη γεωμετρία

3.3.1 Σημειωτικές Αναπαραστάσεις

Ο Duval (1995) προσεγγίζει τη γεωμετρία από γνωστική και εννοιολογική άποψη. Παρατηρεί ότι η διαφορά της γνωστικής δραστηριότητας, που απαιτείται για τα μαθηματικά σε σχέση με άλλους επιστημονικούς κλάδους, εντοπίζεται στα ακόλουθα τρία χαρακτηριστικά. Τον κεντρικό ρόλο των σημειωτικών αναπαραστάσεων, το γνωστικό παράδοξο της πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα και τη μεγάλη ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται.

Αρχικά παρατηρεί ότι καμία μαθηματική διαδικασία, επομένως ούτε γεωμετρική, δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς τη χρήση ενός σημειωτικού συστήματος αναπαραστάσεων, με τρόπο που απαιτεί αντικατάσταση της μίας αναπαράστασης από μία άλλη. Καθώς στη μαθηματική διαδικασία τα μαθηματικά σημεία (signs) δεν υποκαθιστούν αντικείμενα, αλλά άλλα μαθηματικά σημεία, ο μετασχηματισμός των αναπαραστάσεων και των σημείων είναι κεντρικός.

Προσεγγίζοντας τα επιστημολογικά, τα μαθηματικά αντικείμενα σε αντίθεση με άλλα επιστημονικά αντικείμενα, δεν γίνονται αντιληπτά ούτε μέσα από την εμπειρία ούτε με τη χρήση οργάνων. Γίνονται αντιληπτά μέσω των σημειωτικών αναπαραστάσεων τους. Ο μαθητής αντιμετωπίζει δύο αντιθετικές προκλήσεις. Αφενός για τη μαθηματική δραστηριότητα απαραίτητη είναι η επιλογή κάποιου είδους σημειωτικής αναπαράστασης, αφετέρου οι σημειωτικές αναπαραστάσεις δεν πρέπει να παρανοηθούν ως τα μαθηματικά αντικείμενα. Αυτό οδηγεί στο ερώτημα, πως μπορούν οι μαθητές να διακρίνουν το αναπαραστόμενο αντικείμενο από τη σημειωτική αναπαράσταση που χρησιμοποιείται, αν δεν έχουν πρόσβαση στο μαθηματικό αντικείμενο έξω από τις αναπαραστάσεις του.

Τέλος στη μαθηματική δραστηριότητα χρείαζονται διαφορετικά σημειωτικά συστήματα αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται ανάλογα με το είδος της δραστηριότητας. Στη γεωμετρία απαιτείται ο συνδιασμός τουλάχιστον δύο συστημάτων αναπαραστάσεων. Ένα για τη λεκτική περιγραφή των ιδιοτήτων ή την αριθμητική έκφραση των μεγεθών και ένα για την οπτικοποίηση. Η μαθηματική οντότητα που καλείται «γεωμετρικό σχήμα» συνδέεται με λεκτικές και οπτικές αναπαραστάσεις και οι μαθητές καλούνται να μεταβαίνουν από τη μία στην άλλη.

Καθώς τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν πολλές σημειωτικές αναπαραστάσεις ο μαθητής είναι δύσκολο να αναγνωρίσει πότε πρόκειται για το ίδιο αναπαριστόμενο αντικείμενο όταν η αναπαράσταση του παράγεται σε διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα. Με τον όρο μητρώο αναπαραστάσεων (register of representations) ο Duval αναφέρεται (1999, p.6) σε ένα σημειωτικό σύστημα που διαθέτει συγκεκριμένα μέσα αναπαράστασης και επεξεργασίας της μαθηματικής σκέψης. Διακρίνει δύο είδη μετασχηματισμού των σημειωτικών αναπαραστάσεων (Duval, 2006, pp. 111-112), που είναι απαραίτητα στη μαθηματική δραστηριότητα:

- Την επεξεργασία (treatment).

Η διαδικασία μετασχηματισμού μίας αναπαράστασης σε μία άλλη στο ίδιο μητρώο, όπως για παράδειγμα ο λεκτικός ορισμός του «παραλληλογράμμου» μπορεί να μετασχηματιστεί σε «το τετράπλευρο του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται». Οι επεξεργασίες που μπορούν να πραγματοποιηθούν εξαρτώνται από τις δυνατότητες σημειωτικού μετασχηματισμού στο χρησιμοποιούμενο μητρώο.

- Τη μετατροπή (conversion).

Η αλλαγή μητρώου αναπαράστασης, χωρίς να μεταβάλλονται τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφερόμαστε, για παράδειγμα η μετάβαση από την αλγεβρική μορφή μίας εξίσωσης στη γραφική της αναπαράσταση. Ο μετασχηματισμός μετατροπής αποτελεί πιο περίπλοκη διαδικασία, καθώς προϋποθέτει την αναγνώριση του ίδιου αναπαριστώμενου αντικείμενου σε δύο αναπαραστάσεις με ετερογενή περιεχόμενα.

3.3.2 Γνωστική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος

Αναγνωρίζοντας ότι από τα μαθηματικά αντικείμενα, τα γεωμετρικά σχήματα έχουν τη δική τους οργάνωση και σύλληψη, ο Duval προσδιορίζει τέσσερα είδη γνωστικής σύλληψης (cognitive apprehension) ενός γεωμετρικού σχήματος, που κάθεμία έχει τους δικούς της τρόπους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος.

- <u>Αντιληπτική σύλληψη (perceptual apprehension).</u>

Συνίσταται σε ότι αναγνωρίζεται με τη πρώτη ματιά. Ο μαθητής αντιλαμβάνεται τη συνολική μορφή του σχήματος και τη διάκριση του σε επιμέρους στοιχεία, τα υποσχήματα, όχι όμως απαραίτητα με τρόπο που να επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία, όπως αιτιολόγηση ή ανακατασκευή με χρήση γεωμετρικών οργάνων ή υπολογιστή. Η αντιληπτική σύλληψη είναι άμεση και στατική, ενώ δεν αρκεί για να φτάσει ο μαθητής σε επαρκές επίπεδο μαθηματικοποίησης, αφού τα αναγνωριζόμενα υποσχήματα συνήθως είναι περισσότερα από όσα απαιτούνται για την κατασκευή του γεωμετρικού αντικειμένου.

- Σειριακή σύλληψη (sequential apprehension).

Συνίσταται στην κατανόηση του τρόπου σύνδεσης των επιμέρους στοιχείων ενός γεωμετρικού σχήματος. Η σειριακή σύλληψη απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός γεωμετρικού αντικειμένου. Η αλληλουχία σύνδεσης των επιμέρους στοιχείων δεν εξαρτάται από οπτικές ενδείξεις αλλά συνδέεται άμεσα με κατασκευαστικούς περιορισμούς που επιβάλει η χρήση κανόνα και διαβήτη στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ή τα εργαλεία ενός λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας. Αυτοί οι περιορισμοί αλλάζουν, καθώς μεταβάλλονται τα εργαλεία, και ανακλούν μαθηματικές ιδιότητες, των οποίων η γνώση είναι απαραίτητη σε αυτό το είδος σύλληψης. Προσφέρουν ανατροφοδότηση, καθώς η κατασκευή δεν μπορεί να ολοκληρωθεί όσο δεν τηρούνται οι σχέσεις μεταξύ τεχνικών περιορισμών και μαθηματικών ιδιοτήτων. Οι δράσεις και τα παρατηρούμενα αποτελέσματα τους στο γεωμετρικό σχέδιο σχετίζονται με λειτουργίες του αναπαριστάμενου γεωμετρικού σχήματος.

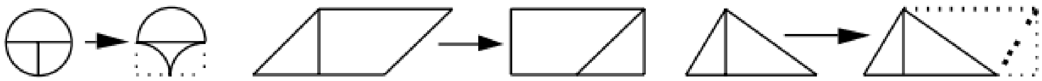
- Λεκτική σύλληψη (discursive apprehension).

Συνδέεται με την ανάγκη λεκτικής περιγραφής των μαθηματικών σχέσεων ενός γεωμετρικού σχήματος, αφού οι γεωμετρικές ιδιότητες που αναπαριστώνται στο σχήμα δεν γίνονται κατανοητές μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αλλά απαιτείται να καθοριστούν μέσω λεκτικών δηλώσεων. Σημειώνεται ότι η λεκτική περιγραφή είναι εκείνη που προσδιορίζει τι αναπαριστά η εικόνα, καθώς μπορεί να υπάρχει ασυμφωνία με αυτό που «δείχνει» η εικόνα.

- Λειτουργική σύλληψη (operative apprehension).

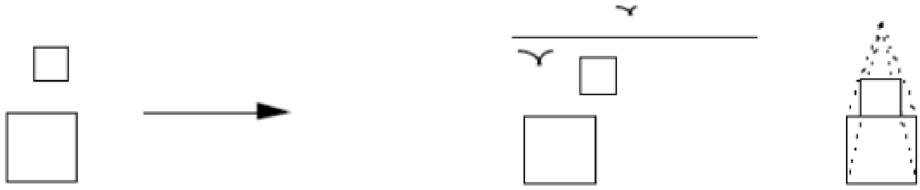
Αποτελεί την ευρετική εξερεύνηση του σχήματος. Εκφράζεται μέσω του απαγωγικού συλλογισμού, που έγκειται στον περιορισμό των υποθέσεων, και εμπλέκει μετασχηματισμούς στο σχήμα, νοερούς ή φυσικούς, που μπορεί να διαφωτίσουν τη λύση ενός προβλήματος. Το δοσμένο σχήμα αποτελεί την αφετηρία, στο οποίο το άτομο παρεμβαίνει φυσικά ή νοερά αναδιοργανώνοντάς το οπτικά ή θεσιακά, ώστε να ανακαλύψει σχέσεις μη προφανείς από την αντιληπτική σύλληψη. Η δυσκολία που ενυπάρχει σε αυτή τη σύλληψη έγκειται στην ποικιλία δυνατών μετασχηματισμών ενός δοθέντος σχήματος. Τα είδη μετασχηματισμών ενός σχήματος στα οποία αναφέρεται ο Duval είναι:

- Ο μερολογικός (mereologic), όπου το αρχικό σχήμα διασπάται σε επιμέρους υποσχήματα και ή εμφανίζεται με νέα υποσχήματα ή αυτά αναδιοργανώνονται σε ένα νέο σχήμα (reconfiguration).



Εικόνα 13 Μερολογικοί μετασχηματισμοί διάσπασης και επέκτασης (Duval, 1999)

- Ο οπτικός (optic) που αφορά στην μεταβολή κλίμακας ή προσανατολισμού του σχήματος. Αυτός ο μετασχηματισμός ευνοεί τη θεώρηση επίπεδων σχημάτων ως τοποθετημένα στον τρισδιάστατο χώρο και την αναγνώριση ομοιοθεσίας.



Εικόνα 14: Σχηματικοί μετασχηματισμοί με επικάλυψη σε βάθος ομοίων σχημάτων (Duval, 1999)

- Ο μετασχηματισμός αλλαγής θέσης (place away) που αφορά στην αλλαγή προσανατολισμού του σχήματος μόνο στο επίπεδο της εικόνας και είναι ο ασθενέστερος μετασχηματισμός. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, που οπτικά σχηματίζονται από οριζόντιες και κάθετες.

Κάθε ένας από τους μετασχηματισμούς μπορεί να υλοποιηθεί φυσικά ή νοερά, συνιστώντας στο σύνολο τους μία συγκεκριμένη σχηματική επεξεργασία, που παρέχει στα σχήματα μία ευρετική λειτουργία (heuristic function), (Duval, 1995). Κύρια θέση του Duval είναι ότι η εργασία σε υπολογιστικά περιβάλλοντα μπορεί να προωθήσει την ανάπτυξη όχι μόνο της σειριακής σύλληψης, καθώς οι εντολές του λογισμικού συνιστούν ταυτόχρονα εργαλειακούς περιορισμούς, αλλά και της λειτουργικής σύλληψης, την οποία θεωρεί απαραίτητη για τη δημιουργία νοημάτων.

3.3.3 Γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη

Ο Duval διέκρινε τρεις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική σκέψη, κατά την επίλυση προβλημάτων, υποστηρίζοντας συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες. Την οπτικοποίηση (visualization), την κατασκευή (construction) και τον συλλογισμό (reasoning). Σύμφωνα με τον Duval οι διαδικασίες αυτές πρέπει να αναπτύσσονται ανεξάρτητα, ενώ η συνέργειά τους είναι απαραίτητη στην ανάπτυξη γεωμετρικών δεξιοτήτων.

➢ Διαδικασία οπτικοποίησης[6].

Αφορά την χωρική αναπαράσταση για την μετατροπή σε εικόνα μίας μαθηματικής πρότασης με στόχο την ευρετική εξερεύνηση, μία συνοπτική ματιά ή μία υποκειμενική επιβεβαίωση. Ο Duval διακρίνει δύο διαδικασίες οπτικοποίησης, την εικονική και τη μη εικονική.

→ Η *εικονική οπτικοποίηση (iconic visualization)* συνίσταται στην διαισθητική αναγνώριση ενός σχήματος με βάση το περίγραμμα του, δηλαδή συνδέοντας το με το αρχετυπικό σχήμα που έχει διαμορφωθεί για μία γεωμετρική οντότητα. Το γεωμετρικό σχέδιο αντιμετωπίζεται από τους μαθητές όπως οποιαδήποτε άλλη εικόνα (πχ. μία φωτογραφία) εδραιώνοντας καθολικές αντιστοιχίες μεταξύ του σχεδίου και του γεωμετρικού σχήματος που αναπαριστά. Οι μαθητές που επιμένουν σε αυτού του είδους οπτικοποίηση δύσκολα προχωρούν σε αναγνώριση σχέσεων μεταξύ διαφορετικών ιδιοτήτων των δύο σχημάτων.

→ Ως *μη εικονική οπτικοποίηση (non-iconic visualization),* ο Duval (2005)[7], ορίζει την ακολουθία διαδικασιών που μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε γεωμετρικές ιδιότητες από το αδύνατο της εμφάνισης κάποιων σχηματισμών ή από το αναλλοίωτο των εμφανιζόμενων σχηματισμών. Ο προσδιορισμός του σχήματος έπεται νοερών συλλογισμών διάσπασης, επανασύνδεσης ή μετασχηματισμού με στόχο τον εντοπισμό των ιδιοτήτων του. Η μη εικονική οπτικοποίηση καθιστά δυνατή την αναδιοργάνωση του σχήματος, γεγονός που συνεισφέρει σημαντικά στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

➢ Κατασκευαστική διαδικασία.

Με χρήση εργαλείων κατασκευάζεται ένας σχηματισμός που μπορεί να λειτουργήσει ως πρότυπο, αφού οι δράσεις και τα παρατηρούμενα συμπεράσματα αντιστοιχούν σε μαθηματικές έννοιες του γεωμετρικού αντικειμένου που αναπαριστάται.

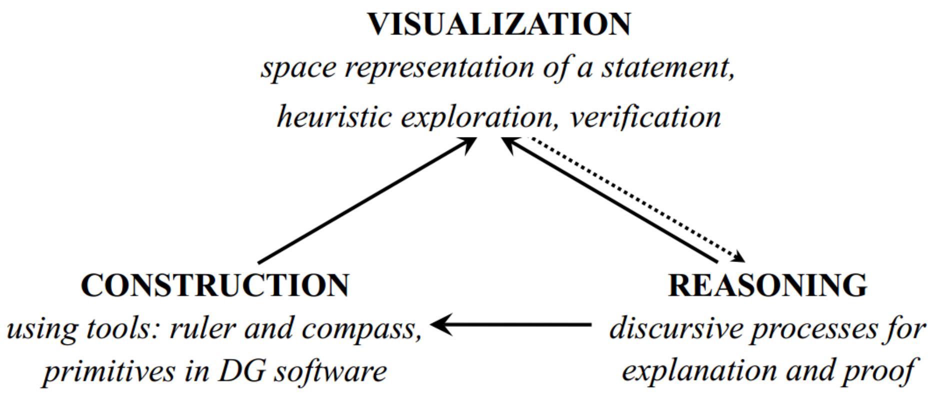
➢ Συλλογιστική διαδικασία.

Συνδέεται με λεκτικές διαδικασίες αιτιολόγησης στην κατεύθυνση της επέκτασης της μαθηματικής γνώσης, καθώς οι μαθητές από ένα σύνολο πληροφοριών μπορούν να εξάγουν νέες, της απόδειξης ή επεξήγησης.

---

[6] Η οπτικοποίηση (visualisation) δε συνδέεται απλά με την εικονογράφηση, αλλά θεωρείται η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, μετάφρασης, χρήσης και αναστοχασμού εικόνων, ειδώλων, διαγραμμάτων στο νου ή στο χαρτί με στόχο την αναπαράσταση ή την επικοινωνία πληροφοριών (Arcavi, 2003).
Ο Duval διακρίνει την οπτικοποίηση (visualisation) από την οπτική αντίληψη (visual perception*). Μία σημειωτική αναπαράσταση δεν παρουσιάζει τα αντικείμενα όπως είναι στον 3D χώρο ή όπως προβάλλονται φυσικά στο 2D επίπεδο υποστήριξης. Αυτό αποτελεί ζήτημα οπτικής αντίληψης. Μία σημειωτική αναπαράσταση εμφανίζει τις σχέσεις ή καλύτερα την οργάνωση των σχέσεων μεταξύ των αναπαριστώμενων μονάδων[...]Η οπτικοποίηση καθιστά εμφανή όσα δεν είναι προσβάσιμα από την οπτική αντίληψη.* (Duval, 1999).

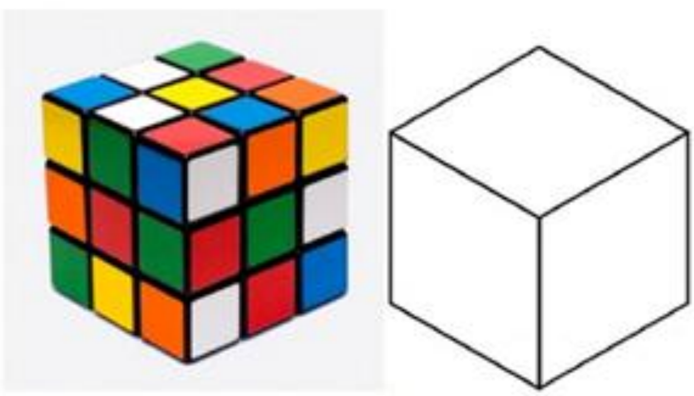
[7] Αναφορά στο: The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools: A Modeling perspective, Herbst, Fujita, Halverscheid, Weiss, Routledge, 2017, p.86.



Διάγραμμα 3 Αλληλεπιδράσεις των τριών γνωστικών διαδικασιών σύμφωνα με τον Duval (1998).

Στο παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζονται οι υποκείμενες γνωστικές αλληλεπιδράσεις που εμπλέκονται στη γεωμετρική δραστηριότητα (Duval, 1998). Οι διαδικασίες μπορούν να διεξαχθούν ξεχωριστά. Η οπτικοποίηση δεν εξαρτάται από την κατασκευαστική διαδικασία, καθώς μπορούμε να έχουμε πρόσβαση στο σχήμα ανεξάρτητα από τη μέθοδο κατασκευής του. Επίσης αν και η οπτικοποίηση μπορεί να βοηθήσει διαισθητικά στην εύρεση μίας αποδεικτικής διαδικασίας η συλλογιστική διαδικασία αποτελεί μία τυπική μαθηματική διαδικασία αξιοποιώντας τις ισχύουσες μαθηματικές προτάσεις, ενώ υπάρχουν περιπτώσεις που είτε προκαλεί παρανοήσεις ή είναι αδύνατη. Ωστόσο ο συνδιασμός των τριών διαδικασιών θεωρείται από τον Duval απαραίτητος στη γεωμετρική δραστηριότητα.

Η μη εικονική οπτικοποίηση συνδέεται με την αναγνώριση των υποκείμενων σχηματικών μονάδων και των μεταξύ τους σχηματισμών συνδιάζοντας τον ευρετικό και διαστατικά αποδομητικό τρόπο που βλέπουμε το σχήμα. Η μεταβαση από την εικονική στη μη εικονική οπτικοποίηση είναι ιδιαίτερα κρίσιμη όταν οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα. Αριστερά ο κύβος του Rubik άμεσα αναγνωρίζεται ως τρισδιάστατο αντικείμενο. Όμως δεξιά ο κύβος σε ισομετρική προβολή θα ερμηνευτεί από αρκετούς μαθητές ως τρία παραλληλόγραμμα.



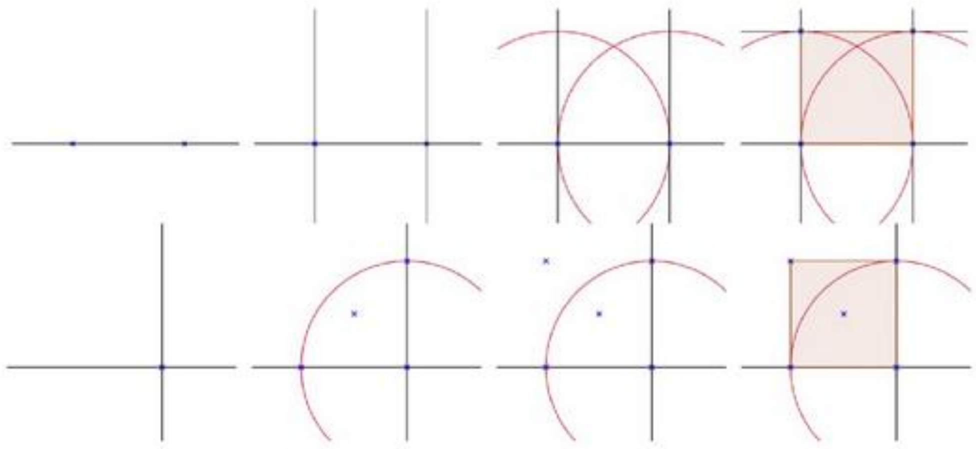
Εικόνα 15 Κύβος του Rubik και ισομετρική προβολή κύβου.

3.3.4 Ο κεντρικός ρόλος της διαστατικής αποδόμησης στη μη εικονική οπτικοποίηση

Στην τρισδιάστατη γεωμετρία η εικονική οπτικοποίηση συχνά αποτυγχάνει. Για την κατανόηση τρισδιάστατων σχηματισμών είναι απαραίτητες οι γνωστικές διαδικασίες μη εικονικής οπτικοποίησης, όπου το σχήμα αναλύεται πλέον ως θεωρητικό αντικείμενο, που αντιπροσωπεύεται από το σχέδιο, χρησιμοποιώντας τρεις βασικές διαδικασίες:

- Την εργαλειακή αποδόμηση (instrumental deconstruction).
- Την ευρετική διάσπαση σε υποσχήματα (heuristic breaking down in shapes)
- Τη διαστατική αποδόμηση (dimensional deconstruction)

Η εργαλειακή αποδόμηση ορίζεται από τον Mithalal (2010)[8] , ως ο προσδιορισμός της ομάδας των ανεξάρτητων σχηματικών μονάδων, τα θεμελιακά στοιχεία (primitives), και της αλληλουχίας δράσεων που πραγματοποιούνται χάρη στη χρήση εργαλείων, επιτρέποντας την ανακατασκευή του σχήματος ή της γραφικής αναπαράστασης του.



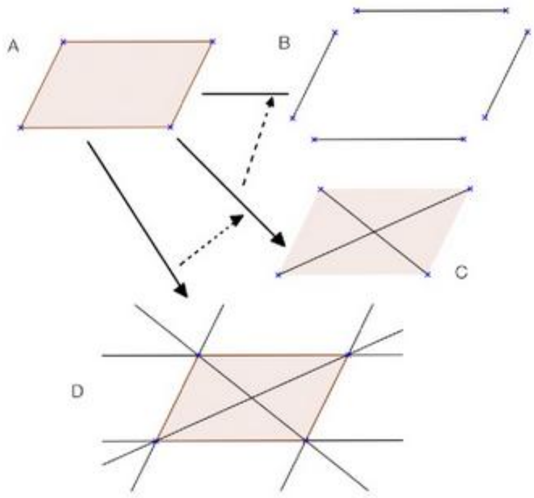
Εικόνα 16 Δύο εργαλειακές αποδομήσεις ενός τετραγώνου, όπως προτείνονται από τον Mithalal, 2010.

Η ευρετική διάσπαση αναφέρεται στη θεώρηση του γεωμετρικού αντικειμένου σαν παζλ, όπως η διαμέριση ενός παραλληλογράμμου σε δύο τρίγωνα κατασκευάζοντας μία διαγώνιο.

Η διαστατική αποδόμηση εισάγεται από τον Duval (2005) ως κεντρική διαδικασία της μη εικονικής οπτικοποίησης. Συνίσταται στην αναγνώριση των επιμέρους σχηματικών μονάδων μικρότερης διάστασης που συγκροτούν έναν δοθέντα γεωμετρικό σχηματισμό και τις μεταξύ τους γεωμετρικές σχέσεις. Το γεωμετρικό σχήμα ως θεωρητικό αντικείμενο αναπαριστάται από κάποιο διάγραμμα το οποίο αναλύεται σε επιμέρους οντότητες διάστασης 0 έως 3. Θεωρώντας το παράδειγμα του κύβου, ένα τρισδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο, οι έδρες και οι γωνίες του αποτελούν δισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα, οι ακμές μονοδιάστατα ενώ οι

8 Αναφορά στο: Interactions on Digital Tablets in the Context of 3D Geometry Learning, David Bertolo,Wiley, 2016, p.22

κορυφές μηδενικής διάστασης. Ο Duval υποστηρίζει ότι κεντρικό ρόλο στην ολοκλήρωση γεωμετρικών δραστηριοτήτων έχει η ικανότητα της αποδόμησης του σχήματος σε επιμέρους σχηματικές μονάδες μικρότερης διάστασης από αυτή του αρχικού αντικειμένου και αναγνώρισης των γεωμετρικών ιδιοτήτων τους. Στην περίπτωση του κύβου αυτός μπορεί να θεωρηθεί ώς μία ενιαία τρισδιάστατη οντότητα, ένα σύνολο εδρών (3D→2D αποδόμηση), ένα σύνολο ακμών (3D→1D αποδόμηση) ή ένα σύνολο κορυφών (3D→0D αποδόμηση).



Εικόνα 17 Τρεις διαστατικές αποδομήσεις 2D σε 1D ενός παραλληλογράμμου, Duval 2005.

Για την ανάλυση των γνωστικών χαρακτηριστικών των οπτικών αναπαραστάσεων στη γεωμετρία, δηλαδή είτε των εικόνων που συνδέονται με την αντίληψη των αντικειμένων και των κινήσεων στο φυσικό χώρο είτε των στοιχείων που κατασκευάζονται με τη χρήση εργαλείων, είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη:

- Η διάσταση των αναπαριστόμενων αντικειμένων.
- Η διάσταση της φυσικής υποστήριξής της αναπαράστασης. 2D για μια επίπεδη υποστήριξη όπως το χαρτί ή οθόνη του υπολογιστή, οπότε έχουμε nD/2D αναπαράσταση. 3D για φυσικά αντικείμενα ή χειραπτικά μοντέλα που τα άτομα μπορούν να χειριστούν με τα χέρια τους, οπότε έχουμε nD/3D αναπαράσταση.

Σύμφωνα με τον Duval (2014) η μη εικονική οπτικοποίηση που συνίσταται στη διαστατική αποδόμηση υπερβαίνει τα όρια οποιασδήποτε φυσικής εμπειρίας και συχνά έρχεται σε αντίθεση με την εμπειρική αντίληψη.

<table>
<tr><td rowspan="3">Αντιληπτική αναγνώριση σχημάτων βασιζόμενη στη φυσική εμπειρία</td><td colspan="2">Συγκεκριμένες κινήσεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν με φυσικά αντικείμενα υπό συνθήκες.</td></tr>
<tr><td>2D/3D→ 3D/3D
3D/3D→ 2D/3D</td><td>Παραγωγή στερεού εκ περιστροφής
Τομές κώνου.</td></tr>
<tr><td>2D/3D→ 2D/3D</td><td>Ανακάλυψη αξονικής συμμετρίας στην επίπεδη γεωμετρία με διαφάνειες</td></tr>
</table>

	nD/3D→ nD/2D	Μετάβαση από την αντιληπτική αναγνώριση μορφών στη σχεδιασμένη κατασκευή τους με εργαλεία που ικανοποιούν συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες.
Μαθηματική αναγνώριση σχηματικών μονάδων βασιζόμενη στη	Διαστατική αποδόμηση των αντιληπτικά αναγνωρισμένων αντικειμένων σε δομήματα σχηματικών μονάδων μικρότερης διάστασης	
	3D/2D→ 2D/2D	Από το πολύεδρο στην πολυγωνική έδρα ή την τομή στερεού με επίπεδο.
	2D/2D→ 1D/2D	Από το πολύγωνο στο δίκτυο των ευθειών και τις μεταξύ τους σχέσεις.
	1D/2D→ 0D/2D	Από ευθείες σε σημεία τομής.

Θεωρώντας ότι ο περιορισμός από τα πρώτα σχολικά χρόνια σε διαδικασίες αναγνώρισης μεμονομένων σχημάτων καθηλώνει τους μαθητές στο επίπεδο της εικονικής οπτικοποίησης, υποστηρίζει ότι η εμπλοκή τους σε γεωμετρικές δραστηριότητες που απαιτούν αποδόμηση ή διάσπαση του σχήματος προωθεί τη μη εικονική οπτικοποίηση που είναι απαραίτητη για τη διαχείρηση περίπλοκων γεωμετρικών δραστηριοτήτων.

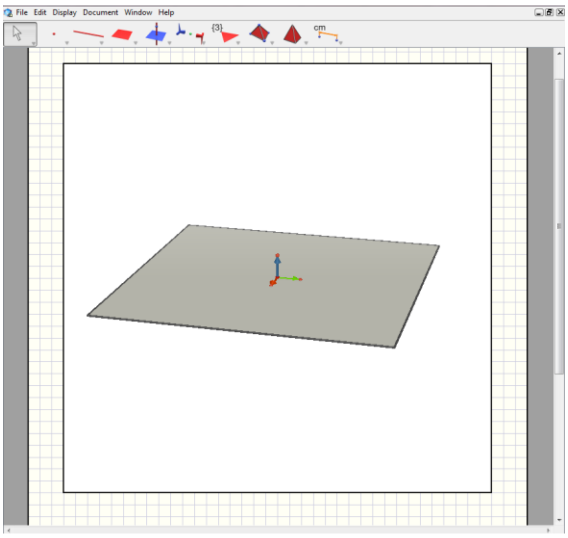
Στην παρούσα έρευνα υιοθετείται το αρχικά εστιασμένο στην επίπεδη γεωμετρία γνωστικό πλαίσιο του Duval για τη γεωμετρική σκέψη. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν ώστε να προωθούν ξεχωριστά αλλά συμπληρωματικά τις υποκείμενες γνωστικές διαδικασίες οπτικοποίησης, κατασκευής και συλλογισμού, ενώ τα επίπεδα νοηματοδότησης που ανέπτυξαν οι μαθητές για τους τρισδιάστατους σχηματισμούς διερευνήθηκαν σε συνάφεια με τα επίπεδα σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Καθοριστικός παράγοντας επιλογής του συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου, στάθηκε η κεντρική θέση της διαδικασίας διαστατικής αποδόμησης, ως εργαλείο ανάλυσης ενός τρισδιάστατου γεωμετρικού σχηματισμού. Σε εργαλειακό επίπεδο επιλέχτηκε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας για τη διδασκαλία εννοιών του χώρου, συγκεκριμένα το Cabri 3D, γιατί υποστηρίζει τη διαδικασία διαστατικής αποδόμησης. Ο ρόλος του ψηφιακού εργαλείου στην κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων συνεξετάστηκε υπό το πρίσμα της θεωρίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης, εστιάζοντας στις διαδικασίες μετατροπής των προσωπικών νοημάτων, που αναδύθηκαν από τη χρήση του, σε μαθηματικά, στο περιβάλλον της πειραματικής ομάδας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ CABRI 3D

4.1 Αρχές λειτουργίας του Cabri 3D

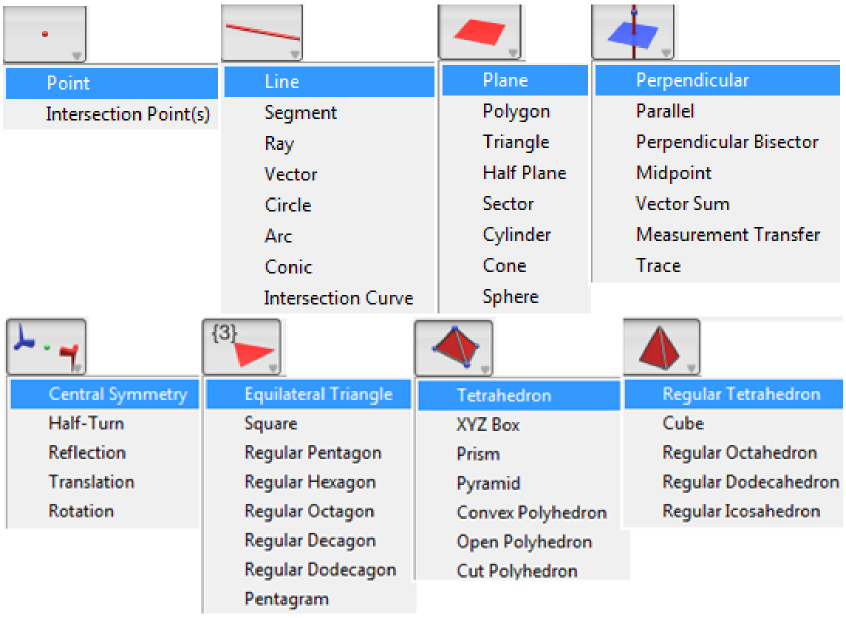
Σε αυτή την έρευνα χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον τρισδιάστατης δυναμικής γεωμετρίας Cabri 3D. "Cahier de BRouillon Interactif" είναι η ανάλυση του ακρωνύμιου στην οποία δηλώνεται ο διαδραστικός χαρακτήρας του λογισμικού. Η τεχνολογία του Cabri σχεδιάστηκε αρχικά στα ερευνητικά εργαστήρια του CNRS (Εθνικό Κέντρο Επιστημονικής Έρευνας της Γαλλίας) και στο Πανεπιστήμιο Joseph Fourier της Grenoble. Ο σχεδιασμός του Cabri ξεκίνησε το 1985, από τον Jean Marie Laborde, που αναζητούσε τρόπους για τη διευκόλυνση της διδασκαλίας και της εκμάθησης της δισδιάστατης γεωμετρίας, και το εγχείρημα επεκτάθηκε οδηγώντας στη δημιουργία λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας για τον χώρο Cabri 3D.

Ανοίγοντας το κεντρικό παράθυρο του λογισμικού εμφανίζεται ένα γκρι τετράγωνο, το οποίο αποτελεί το ορατό τμήμα του βασικού επιπέδου και τα τρία μοναδιαία διανύσματα του τρισορθογώνιου ορθοκανονικού συστήματος. Το mouse κινούμενο στο επίπεδο στήριξης του moysepad, προσομοιώνει μια μετατόπιση στο βασικό ή σε παράλληλο του βασικού επίπεδο. Αν ο χρήστης πατήσει το πλήκτρο Shift Key η κίνηση του mouse ερμηνεύεται ως μια κίνηση κατά μήκος ενός κατακόρυφου άξονα. Στο Cabri3D δεν επιτρέπεται οποιαδήποτε αυθαίρετη περιστροφή της σκηνής (όπως κοιτώντας την εικόνα με κάποιο ανάποδο τρόπο). Διατίθεται περιορισμένος «χώρος» για την αντιμετώπιση όλων των ιδιαιτεροτήτων της απόδοσης των 3D μαθηματικών αντικειμένων (όπως γραμμές ή επίπεδα), μερικά από τα οποία είναι άπειρα σε έκταση. Τέλος, το πρόγραμμα υϊοθετεί ως προεπιλεγμένη προοπτική την «φυσική» (natural) ενός σημείου. Τα χαρακτηριστικά της ταιριάζουν με τη θεώρηση ενός αντικειμένου μήκους περίπου 40 εκατοστών σε απόσταση 50 εκατοστών (όπως στο χέρι του χρήστη), ενώ όσο πιο απομακρυσμένα είναι τα αντικείμενα τόσο πιο αχνά φαίνονται (τεχνική fogging).



Εικόνα 18 Αρχικό παράθυρο του Cabri 3D

Η βασική εργαλειοθήκη του λογισμικού Cabri 3D περιλαμβάνει εργαλεία για την κατασκευή γεωμετρικών αντικειμένων επίπεδης γεωμετρίας, όπως ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα ή κύκλος, εργαλεία κατασκευής γεωμετρικών αντικειμένων τρισδιάστατης γεωμετρίας όπως επίπεδο ή σφαίρα. Επίσης προσομοιώνει την καθετότητα, την παραλληλία και τους μετασχηματισμούς μεταφοράς στροφής και ανάκλασης στον χώρο. Μεταξύ άλλων παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής κανονικών πολυέδρων, πρισμάτων ή αναπτυγμάτων καθώς και καμπύλων τομών γεωμετρικών στερεών με επίπεδο.



Εικόνα 19 Εργαλεία σχεδιασμού στο Cabri3D.

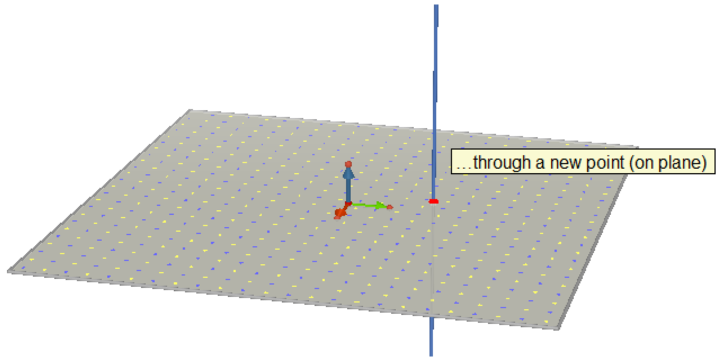
Κάθε μία από τις παραπάνω αναφερθείσες κατασκευή, για να πραγματοποιηθεί πρέπει ο χρήστης να ακολουθήσει κάποια ακολουθία βημάτων, τα οποία αντιστοιχούν στους λογικομαθηματικούς περιορισμούς, ώστε η κατασκευή να είναι υλοποιήσιμη στο λογισμικό, που σημαίνει μαθηματικά μονοσήμαντα ορισμένη. Έτσι για παράδειγμα για να σχεδιάσει ο χρήστης έναν κύκλο πρέπει να ακολουθήσει μία από τις ακόλουθες διαδικασίες ώστε να διασφαλιστεί μαθηματικά η μοναδικότητα της κατασκευής, ισοδύναμα και η υλοποίηση της στο περιβάλλον του λογισμικού. Πρέπει ή να ορίσει πρώτα το επίπεδο του κύκλου και έπειτα κέντρο και σημείο της περιφέρειας ή να ορίσει τρία σημεια της περιφέρειας οπότε έμμεσα έχει καθορίσει το επίπεδο στο οποίο ανήκει ο κύκλος, ή να ορίσει φορέα και σημείο εκτός αυτού, από το οποίο θα διέρχεται ο κύκλος σε επίπεδο κάθετο προς τον φορέα. Στα εργαλεία του Cabri 3D αναγνωρίζεται μία διπλή σχέση. Αφενός σχετίζονται με την κατασκευαστική δραστηριότητα, η οποία πραγματοποιείται μέσω αυτών οδηγώντας στον σχεδιασμό του σχηματισμού στην οθόνη. Αφετέρου τα εργαλεία του λογισμικού σχετίζονται με γεωμετρικά αξιώματα και θεωρήματα τα οποία θα εγκυροποιήσουν την αντίστοιχη κατασκευή στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Σημειώνεται τέλος, ότι το λογισμικό παρέχει τη δυνατότητα εμφάνισης συντεταγμένων σημείου καθώς και εργαλείων μέτρησης μήκους, γωνίας, εμβαδού και όγκου διασυνδέοντας τη γεωμετρία με την άλγεβρα.

4.2 Παραδείγματα κατασκευών στο Cabri 3D

4.2.1 Κατασκευή ευθείας κάθετης σε δοσμένο επίπεδο

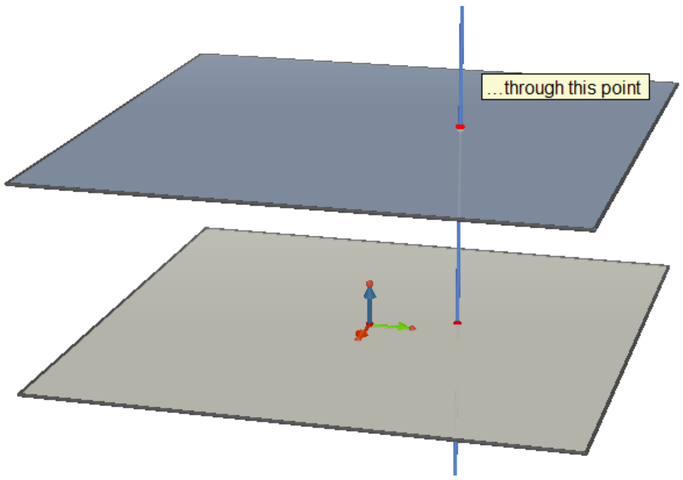
Ο μαθητής επιλέγει την εντολή «καθετότητα (perpendicular)» και έπειτα ορίζει πρώτα επίπεδο και μετά σημείο του επιπέδου στο οποίο θα σχεδιαστεί η κάθετη ευθεία.



Εικόνα 20 Κατασκευή κάθετης ευθείας στο Cabri 3D.

4.2.2 Κατασκευή επιπέδου κάθετου σε δοσμένη ευθεία

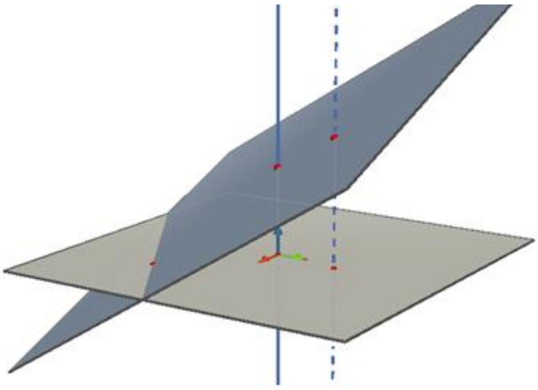
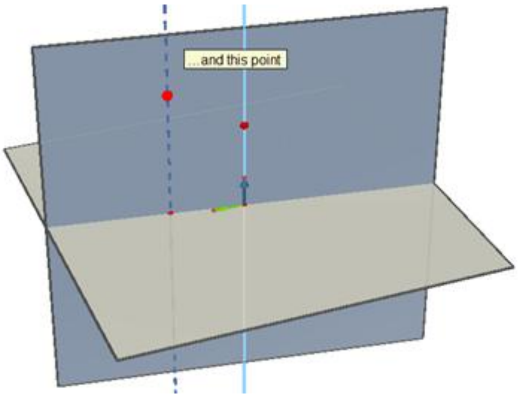
Ο μαθητής επιλέγει την εντολή «καθετότητα (perpendicular)» και έπειτα ορίζει πρώτα ευθεία και μετά σημείο της ευθείας στο οποίο θα σχεδιαστεί το κάθετο επίπεδο.



Εικόνα 21 Κατασκευή κάθετου επιπέδου στο Cabri 3D.

4.2.3 Κατασκευή επιπέδου

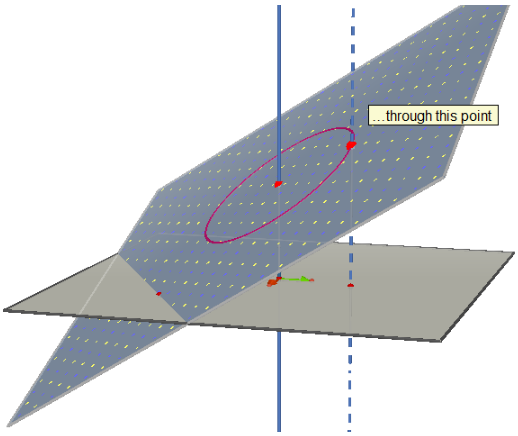
Ο μαθητής επιλέγει την εντολή «επίπεδο (plane)» και έπειτα τρία σημεία (μη συνευθειακά) στον χώρο. Εναλλακτικά επιλέγει την εντολή «επίπεδο (plane)» και έπειτα μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής στον χώρο. Σε κάθε περίπτωση η κατασκευή επιπέδου πρέπει να υπακούει στα αξιώματα. Δηλαδή άμεσα ή έμμεσα, όπως στη δεύτερη κατασκευή, να επιλέγονται τρία μη συνευθειακά σημεία που θα το ορίζουν μονοσήμαντα.

Εικόνα 22 Κατασκευές επιπέδου στο Cabri 3D.

4.2.4 Κατασκευή κύκλου

Ο μαθητής επιλέγει την εντολή «κύκλος (circle)» και έπειτα ορίζει πρώτα το επίπεδο του κύκλου και μετά το κέντρο και το σημείο της περιφέρειας του κύκλου.

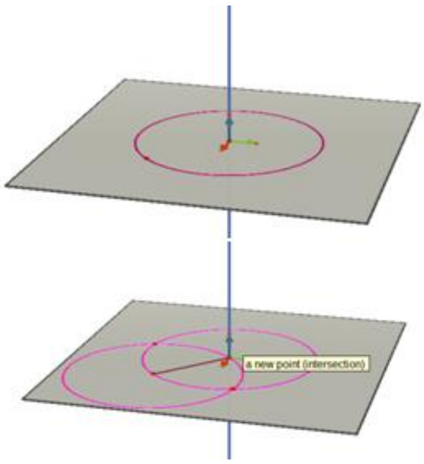


Εικόνα 23 Κατασκευή κύκλου στο Cabri 3D.

4.2.5 Ενδεικτική κατασκευή κανονικού τετράεδρου

Βήμα 1^{o}: Κατασκευή ευθείας κάθετης στο σημείο αναφοράς του βασικού επιπέδου. Κατασκευή κύκλου στο βασικό επίπεδο με κέντρο το σημείο αναφοράς.

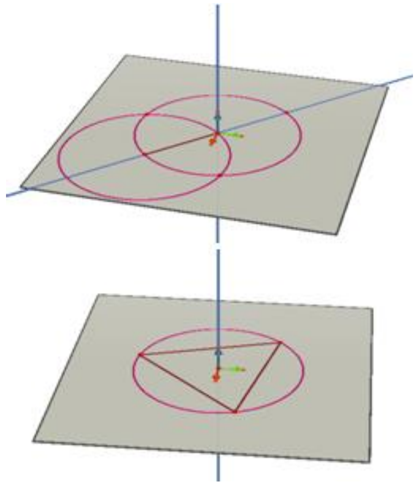
Βήμα 2^{o}: Θεώρηση σημείου στην περιφέρεια του κύκλου και κατασκευή του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο με το κέντρο. Κατασκευή κύκλου στο βασικό επίπεδο με κέντρο το σημείο της περιφέρειας του κύκλου και ακτίνα την ακτίνα το προηγούμενο ευθύγραμμο τμήμα.



Εικόνα 24 Βήματα 1&2.

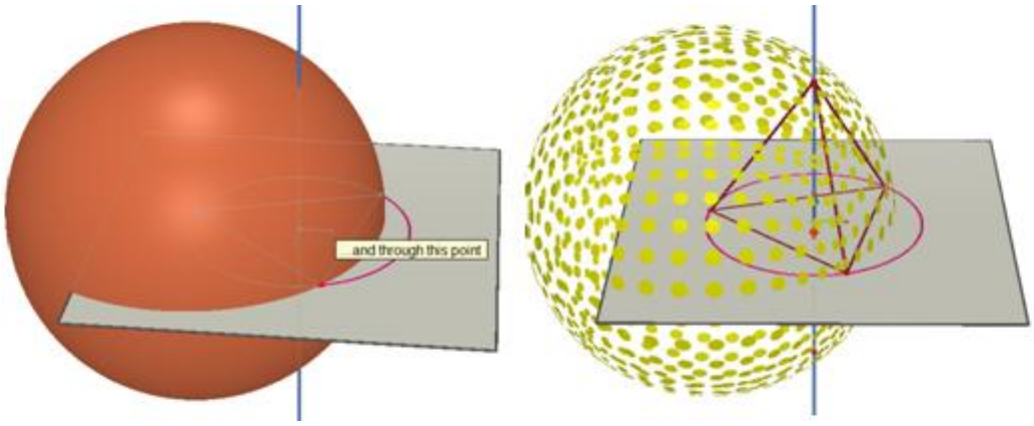
Βήμα 3^{o}: Κατασκευή των σημείων τομής των δύο κύκλων και του σημείου τομής του αρχικού κύκλου με την ευθεία που ορίζεται από το κατασκευασμένο ευθύγραμμο τμήμα.

Βήμα 4^{o}: Απόκρυψη όλων των στοιχείων εκτός των τριών σημείων τομών και κατασκευή του ισόπλευρου τριγώνου.



Εικόνα 25 Βήματα 3&4.

Βήμα 5^{o}: Κατασκευή σφαίρας με κέντρο την μία κορυφή του ισόπλευρου τριγώνου βάσης και ακτίνα ίση με την πλευρά του τριγώνου. Η τέταρτη κορυφή είναι η τομή της σφαίρας με την κάθετη ευθεία στο βαρύκεντρο του τριγώνου βάσης.



Εικόνα 26 Βήμα 5 Κατασκευή σφαίρας και εμφάνιση του κανονικού τετράεδρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

5.1 Σκοποί έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Στο δεύτερο κεφάλαιο, καταγράφηκε μέρος της υπάρχουσας έρευνας. Εστιάζοντας στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, κατά τη μετάβαση από την επίπεδη γεωμετρία στον χώρο, αναδύονται τα εμπόδια που συνιστούν οι στατικές και οι χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο δισδιάστατες αναπαραστάσεις για τα τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα. Ωστόσο, ευρήματα ερευνών συνηγορούν στην υπόθεση ότι η χρήση υπολογιστικών περιβάλλοντων για την τρισδιάστατη γεωμετρία μπορεί να εξισορροπήσει τους περιορισμούς που προέρχονται από τις στατικές αναπαραστάσεις των θεωρητικών στερεών αντικειμένων, καθώς οι μαθητές αποκτούν περισσότερη οπτική πληροφορία μέσα από τον δυναμικό χειρισμό των αντικειμένων στην ψευδοπραγματικότητα του υπολογιστικού μικρόκοσμου.

Με επιρροές από τις κοινωνικοπολιτισμικές θεωρήσεις για την κατασκευή της γνώσης, η παρούσα έρευνα επιχειρεί να συνεισφέρει στο πεδίο της έρευνας για τις διαδικασίες νοηματοδότησης εννοιών της γεωμετρίας του χώρου σε ψηφιακό περιβάλλον, υϊοθετώντας το αρχικά σχεδιασμένο για τη δισδιάστατη γεωμετρία γνωστικό μοντέλο του Duval. Μέσα από δραστηριότητες, που εμπλέκουν στοιχεία τρισδιάστατης και επίπεδης γεωμετρίας, και σχεδιάστηκαν ώστε να προάγουν γνωστικές διαδικασίες οπτικοποίησης, κατασκευής ή συλλογισμού, διερευνούνται τα επίπεδα σύλληψης που μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές για τους τρισδιάστατους γεωμετρικούς σχηματισμούς και καταστάσεις.

Κεντρικό Ερευνητικό Ερώτημα : Μελέτη των διαδικασιών νοηματοδότησης εννοιών της τρισδιάστατης γεωμετρίας εστιάζοντας στην διασύνδεση δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων στο πλαίσιο δραστηριοτήτων που ευνοούν την μετάβαση από το επίπεδο στον χώρο με χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος Cabri 3D. Στο πλαίσιο της διερεύνησης του ερωτήματος αυτού μελετάται επίσης ο ρόλος των διαθέσιμων ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες νοηματοδότησης.

Η μελέτη του ερευνητικού ερωτήματος έγινε μέσα από την ανάλυση των διαλόγων τριών ομάδων μαθητών που εργάστηκαν σε τέσσερεις ενότητες δραστηριοτήτων. Κεντρικά σημεία στα οποία επικεντρώθηκε η έρευνα ήταν:

- Επίπεδα νοηματοδότησης εννοιών που επεκτείνονται ή αναθεωρούνται κατά τη μετάβαση από τη δισδιάστατη γεωμετρία στον χώρο.
- Επίπεδα σύλληψης για τους γεωμετρικούς σχηματισμούς που μπορούν να αναπτυχθούν σε περιβάλλον που επιτρέπει τον δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων μέσα από μία σειρά δραστηριοτήτων που προωθούν ξεχωριστά διαδικασίες οπτικοποίησης, κατασκευής και συλλογισμού.
- Νοηματοδότηση σύνθετων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχηματισμών μέσα από διαδικασίες διαστατικής αποδόμησης στο ψηφιακό περιβάλλον.

- Διερεύνηση του ρόλου των καθιερωμένων από την εμπειρία νοερών εικόνων για τα τρισδιάστατα αντικείμενα στη διαδικασία νοηματοδότησής τους.

5.2 Ερευνητική διαδικασία

Η ερευνητική προσέγγιση που υιοθετήθηκε επηρεάστηκε από τις αρχές της έρευνας σχεδιασμού (Design-based Research) (Cobb et al. 2003). Η έρευνα σχεδιασμού αποτελεί μία σχετικά νέα ερευνητική διαδικασία που γεφυρώνει τις θεωρητικές προσεγγίσεις με την εκπαιδευτική πρακτική, εστιάζοντας στη σχέση ανάμεσα στη θεωρία, στα τεχνουργήματα που έχουμε αναπτύξει και στην πρακτική. Τα αποτελέσματα δεν είναι γενικεύσιμα αλλά σχετίζονται με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και τα χαρακτηριστικά του πλαισίου πάνω στο οποίο εφαρμόστηκε (Wang & Hannafin, 2005).

Κεντρικά χαρακτηριστικά της έρευνας με βάση τον σχεδιασμό είναι τα ακόλουθα:

- ✓ Είναι επαναληπτική. Η έρευνα διεξάγεται μέσω κύκλων επανάληψης σχεδιασμού, εφαρμογής, ανάλυσης και ανατροφοδότησης.
- ✓ Είναι εστιασμένη στη διαδικασία. Στοχεύει στην κατανόηση εξίσου της διαδικασίας μάθησης και των επιπτώσεων των σχεδιασμένων παρεμβάσεων σε αυτή.
- ✓ Είναι παρεμβατική. Εμπλέκει σχεδιασμένα διδακτικά περιβάλλοντα τα οποία συστηματικά διερευνούνται. Εξετάζει την αναμενόμενη σχέση ανάμεσα στις πτυχές του σχεδιασμού με τη μάθηση, στοχεύοντας στην εξέλιξη της διδακτικής θεωρίας και πρακτικής.
- ✓ Είναι συνεργατική. Η γνώση στη διδασκαλία και τη μάθηση δομούνται από τη συνεργασία ερευνητή και συμμετεχόντων.
- ✓ Είναι προσανατολισμένη στη χρηστικότητα. Στοχεύει στην παραγωγή γνώσης για εκπαιδευτικές καινοτομίες επεξηγώντας τον τρόπο λειτουργίας των σχεδιασμένων παρεμβάσεων στα εκάστοτε πλαίσια.
- ✓ Στηρίζεται στη θεωρία. Οι θεωρητικές υποθέσεις που στηρίζεται ο σχεδιασμός των παρεμβάσεων, ελέγχονται στοχεύοντας στην εξέλιξη της εκπαιδευτικής θεωρίας μέσα από επαναληπτικούς κύκλους σχεδιασμού, εφαρμογής, ανάλυσης και επανασχεδιασμού των δραστηριοτήτων και τεχνουργημάτων.

Οι φάσεις της έρευνας που ακολουθήθηκαν ήταν οι εξής:

- ➢ Φάση 1: Επισκόπιση του ερευνητικού πεδίου.
  Αναλύθηκαν τα πρακτικά προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη μετάβαση των μαθητών από την επίπεδη γεωμετρία στη γεωμετρία του χώρου, όπως προέκυψαν από την επισκόπιση του πεδίου της έρευνας στη διδακτική της Στερεομετρίας και από συζητήσεις με εκπαιδευτικούς και μαθητές. Διατυπώθηκε το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα.
- ➢ Φάση 2: Επιλογή θεωρητικού πλαισίου και αρχικός σχεδιασμός.
  Σχεδιάστηκε μία αρχική ακολουθία εκπαιδευτικών παρεμβάσεων ώστε να συνδιάζει την υπάρχουσα τεχνολογική καινοτομία με το υπάρχον θεωρητικό

πλαίσιο. Οι δραστηριότητες ήταν βάσει σχεδιασμού συνεργατικές και αξιοποιώντας το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του Cabri 3D ως εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης του μαθηματικού περιεχομένου στόχευαν στη διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης των γεωμετρικών εννοιών και γεωμετρικών σχημάτων υπό το πρίσμα του γνωστικού μοντέλου του Duval.

- Φάση 3: Πιλοτική εφαρμογή.
  Διεξήχθει πιλοτική εφαρμογή της παρέμβασης. Οι συμμετέχοντες της πιλοτικής εφαρμογής ήταν δύο μαθητές που είχαν αποφοιτήσει προηγούμενο σχολικό ετος και είχαν εισαχθεί σε σχολές που δε σχετίζονταν με μαθηματικά ή θετικές επιστήμες.
- Φάση 4: Ανατροφοδότηση.
  Από τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων της πιλοτικής εφαρμογής προέκυψε επανασχεδιασμός των αρχικών δραστηριοτήτων, ώστε να εξυπηρετούν περισσότερο τους σκοπούς της έρευνας και να αφήνουν σημαντικά περιθώρια αυτενέργειας στους μαθητές.

Τα δεδομένα της έρευνας συλλέχθηκαν από τρεις ομάδες, συνολικά δέκα μαθητών. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν μαθητές Β΄ Λυκείου που φοιτούσαν σε Γενικό Λύκειο της Αθήνας. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν εθελοντική, με την έγγραφη συναίνεση των κηδεμόνων τους. Το επίπεδο των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας ήταν από μέτριο έως πολύ καλό. Η έρευνα διεξήχθη στο εργαστήριο φυσικών επιστημών του Λυκείου που φοιτούσαν. Επιλέχθηκε ο συγκεκριμένος χώρος, έναντι του εργαστηρίου πληροφορικής, γιατί η διάταξη του χώρου ευνοούσε τη συνεργασία των μαθητών κάθε ομάδας αλλά και την οπτική επικοινωνία και τον διάλογο μεταξύ των ομάδων. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες, δύο τριών και μία τεσσάρων ατόμων. Κάθε ομάδα μαθητών εργάστηκε σε δικό της laptop στο οποίο είχε εγκατασταθεί το λογισμικό Cabri 3D και τα απαραίτητα αρχεία σε κάθε ενότητα δραστηριοτήτων. Η αίθουσα ηταν εξοπλισμένη με πίνακα μαρκαδόρου, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε όταν οι μαθητές χρειάστηκε να ανατρέξουν σε έννοιες επίπεδης γεωμετρίας, και προτζέκτορα συνδεδεμένο με το laptop της ερευνήτριας στο οποίο ήταν επίσης εγκατεστημένο το λογισμικό και τα αντίστοιχα αρχεία.

Η ερευνήτρια είχε τον ρόλο της εκπαιδευτικού και ενορχήστρωνε τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις των μαθητών ώστε να παραχθούν τα επιδιωκόμενα μαθηματικά νοήματα. Κατά την εμπλοκή των μαθητών ανά ομάδα με τις δραστηριότητες περιφέροταν μεταξύ των ομάδων βοηθώντας σε ζητήματα χειρισμού του λογισμικού. Ταυτόχρονα, παρακολουθώντας την πορεία των μαθητών, παρενέβαινε όταν οι μαθητές είχαν καταλήξει σε κάποια συμπερασματα, ζητώντας από τους μαθητές να αναπτύξουν το συλλογισμό τους. Όταν ο συλλογισμός ήταν λάθος με προσοχή έθετε ερωτήματα στοχεύοντας την επανεξέταση απο τους μαθητές της πορείας που ακολούθησαν ή των μαθηματικών νοημάτων στα οποία κατέληξαν χωρίς όμως να προδίδει η διατύπωση των ερωτημάτων την απάντηση. Στο πέρας κάθε δραστηριότητας η ερευνήτρια συντόνιζε έναν διάλογο μεταξύ των ομάδων όπου οι μαθητές συζητούσαν τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίστηκαν τη δραστηριότητα και τα μαθηματικά συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν. Μέσα από αυτές τις συζητήσεις, η ερευνήτρια, αφενός στόχευε στην επικοινωνία των μαθηματικών νοημάτων μέσα από τις διαφορετικές προσεγγίσεις κάθε ομάδας και αφετέρου στον έλεγχο της ορθότητας των συμπερασμάτων και της πληρότητας των αιτιολογήσεων στην ολομέλεια. Σε περιπτώσεις που ακολουθήθηκαν μαθηματικά λάθος στρατηγικές, η ερευνήτρια ενεπλεκόμενη μαζί με τους μαθητές και αξιοποιώντας την ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος, για παράδειγμα υποβάλλοντας την κατασκευή σε δοκιμή συρσίματος, συντόνιζε νέα συζήτηση σε δύο κατευθύνσεις. Την αναγνώριση και μαθηματική ερμηνεία του λάθους και την αναζήτηση ορθής μαθηματικά και εργαλειακά προσέγγισης.

5.3 Συλλογή δεδομένων

Ο κύριος όγκος των δεδομένων στην παρούσα έρευνα προήλθε από την απομαγνητοφώνηση των εξαγόμενων video από το λογισμικό καταγραφής οθόνης, που είχε εγκατασταθεί σε κάθε ένα από τα τρία laptop, που αντιστοιχούσαν σε κάθε ομάδα. Το συγκεκριμένο λογισμικό παρέχει τη δυνατότητα ταυτόχρονης καταγραφής της δραστηριότητας των μαθητών στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri 3D και ηχογράφησης των διαλόγων τους.

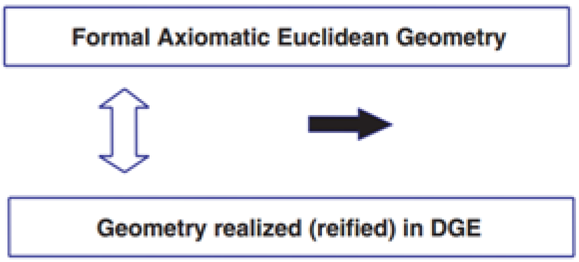
Επιπλέον δεδομένα συλλέχτηκαν από την απομαγνητοφώνηση δίωρης συνάντησης - απολογισμού με τους μαθητές, που πραγματοποιήθηκε μετά το πέρας των δραστηριοτήτων και στην οποία συζητήθηκαν εσφαλμένες στρατηγικές ή παρανοήσεις οι οποίες προέκυψαν κατά την εμπλοκή των μαθητών στις δραστηριότητες. Επίσης κρατήθηκαν σημειώσεις για την πορεία δραστηριοτήτων κάθε ομάδας στο πέρας κάθε συνάντησης. Τέλος δεδομένα συλλέχθηκαν από τα αρχεία λογισμικού που δούλεψε κάθε ομάδα και τις σημειώσεις τους στα φύλλα εργασίας.

5.4 Δραστηριότητες έρευνας

5.4.1 Συνοπτική περιγραφή του σκεπτικού των δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν έχοντας υπόψη το γνωστικό μοντέλο του Duval για τη γεωμετρική σκέψη. Εναλλάσσονται δραστηριότητες διερεύνησης ενός στερεού ή μίας κατάστασης, με κυρίαρχη γνωστική διαδικασία την οπτικοποίηση, δραστηριότητες κατασκευής και δραστηριότητες σε μορφή ανοιχτού προβλήματος με κυρίαρχη γνωστική διαδικασία τη συλλογιστική. Στόχος του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων ήταν η ανάπτυξη πολυεπίπεδων συλλήψεων για τους αναδυόμενους σχηματισμούς από τους μαθητές.

Σε εργαλειακό επίπεδο επιλέχτηκε το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας Cabri 3D ως συνδετικός κρίκος του φορμαλιστικού μαθηματικού κόσμου της Ευκλείδειας γεωμετρίας με τον φαινομενολογικό κόσμο της εμπειρίας. Έχοντας υπόψη ότι μία μαθηματική δραστηριότητα, μπορεί να εντάσσεται σε μόνο έναν από τους δύο κόσμους, όπως για παράδειγμα η εφαπτομένη ενός κύκλου μπορεί να κατασκευαστεί με βάση τα εμπειρικά χαρακτηριστικά της, δηλαδή περιστρέφοντας μία τέμνουσα ή με βάση τις γεωμετρικές ιδιότητες της κατασκευάζοντας την κάθετα στην ακτίνα στο σημείο επαφής (Laborde et al. 2004), θεωρείται απαραίτητη για τη μαθησιακή διαδικασία η μετάβαση από τον ένα κόσμο στον άλλο, ώστε να συντελεστεί η «μαθηματικοποίηση», για την οποία σύμφωνα με τον Broussaeu[9], απαιτούνται οι μαθηματικές αποδείξεις που σχετίζονται με τα θεωρητικά μαθηματικά που εμπλέκονται.



Εικόνα 27: Παράλληλη σχέση αξιωματικής και δυναμικής γεωμετρίας, Lopez-Real & Leung, 2006.

Σημαντική παράμετρο επιλογής λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας για τη διαπραγμάτευση των εννοιών του τρισδιάστατου χώρου, αποτέλεσαν δύο είδη δραστηριοτήτων, που πραγματοποιούνται αποκλειστικά στο συγκεκριμένο περιβάλλον. Αυτές οι δραστηριότητες απαιτούν τον προσδιορισμό των γεωμετρικών ιδιότητων ως χωρικές αναλλοίωτες κατά τη λειτουργία συρσίμαρτος και πιθανώς την εκτέλεση πειραμάτων με τα εργαλεία του λογισμικού στις κατασκευές. Πρόκειται για δραστηριότητες που για τη διαπραγμάτευση τους το περιβάλλον επιτρέπει αποτελεσματικές στρατηγικές, οι οποίες δεν είναι δυνατές στο στατικό περιβάλλον του τετραδίου ή του πίνακα. Εμφανίζονται στις ακόλουθες μορφές:

- Καταστάσεις μαύρου κουτιού (black box situations).
  Οι μαθητές εξερευνούν μία κατασκευή, ώστε να ανακατασκευάσουν ένα δυναμικό σχήμα. Οι αναλλοίωτες ιδιότητες και σχέσεις γίνονται το εργαλείο των μαθητών ώστε να προσδιορίσουν τη δομή της κατασκευής.
- Δραστηριότητες πρόβλεψης (prediction tasks).
  Οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν τη συμπεριφορά μίας κατασκευής. Τα DGEs επιτρέπουν την αντιπαράθεση αυτού που προβλέπεται και αυτού που παρατηρείται (Laborde 2001).

Κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων λήφθηκαν υπόψη οι ακόλουθες πτυχές ώστε να προωθηθεί η διαδικασία μάθησης:

- Σε επιστημολογικό επίπεδο, διερευνήθηκαν το πρόβλημα που έπρεπε να επιλυθεί και το απαιτούμενο είδος μαθηματικής γνώσης για την επίλυσή του σε κάθε δραστηριότητα. Επιδίωξη κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων ήταν

[9] Αναφορά στο: Allen Leung, Anna Baccaglini-Frank eds. Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks, Potential and Pitfalls (p.23)

η πιο ικανοποιητική στρατηγική επίλυσης να βασιζεται στη μαθηματική γνώση την οποία θέλαμε να ανακαλύψουν οι μαθητές.

- Σε γνωστικό επίπεδο, εξετάστηκε το είδος μάθησης που προάγοταν σε κάθε δραστηριότητα, έχοντας λάβει υπόψη την προϋπάρχουσα γνώση επίπεδης γεωμετρίας και τις εγκαθιδρυμένες αντιλήψεις των μαθητών.
- Σε διδακτικό επίπεδο, λήφθηκαν υπόψη τα είδη μέσων δράσης που παρέχονταν από το περιβάλλον για να επιλυθεί η δραστηριότητα. Επίσης ο σχεδιασμός του, απενεργοποιώντας εντολές μέτρησης, ώστε να προαχθεί η επιθυμητή γνώση και να αξιοποιηθεί η ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος στην κατεύθυνση της ακύρωσης εσφαλμένων στρατηγικών.
- Σε εργαλειακό επίπεδο, λήφθηκε υπόψη η γνώση των μαθητών για τη χρήση των εργαλείων περιβάλλοντος ώστε να λύσουν τη δραστηριότητα. Επίσης αν η μαθηματική γνώση που είχαν οι μαθητές τους επέτρεπε να διαπραγματευτούν τη δραστηριότητα χρησιμοποιώντας εργαλεία του περιβάλλοντος τα οποία δεν τους ήταν οικεία ή αντίστροφα αν ήταν εφικτό να χτίσουν νέα στρατηγική επίλυσης που να πηγάζει από την εξοικείωση τους με τα εργαλεία.

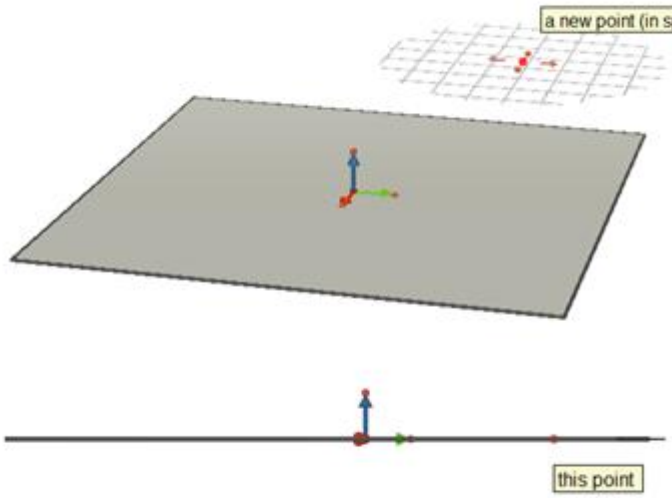
Για το παρόν εγχείρημα σχεδιάστηκαν τέσσερεις ενότητες δραστηριοτήτων με αντίστοιχα φύλλα εργασίας. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν λαμβάνοντας υπόψη τις τέσσερεις πτυχές που προαναφέρθηκαν και ώστε να ανταποκρίνονται στο κεντρικό Ερευνητικό Ερώτημα. Η εισαγωγική ομάδα δραστηριοτήτων στόχευε στη γνωριμία των μαθητών με το λογισμικό, μέσα από τη διαπραγμάτευση των εννοιών καθετότητας ευθείας επιπέδου και γωνίας δύο ευθειών στον χώρο. Η 1η ομάδα δραστηριοτήτων εστίασε στη μεταφορά και επέκταση βασικών γνώσεων επίπεδης γεωμετρίας των μαθητών στον χώρο, μέσα από την επέκταση του κύκλου σε σφαίρα και δύο δραστηριότητες πρόβλεψης. Στη $2^{η}$ ομάδα δραστηριοτήτων οι μαθητές κλήθηκαν να συνδυάσουν τις υφιστάμενες γνώσεις της επίπεδης γεωμετρίας με τις νεοαποκτειθείσες επεκτάσεις τους στον χώρο, μέσα από διερευνητικές και κατασκευαστικές δραστηριότητες στον κύβο, αξιοποιώντας τα γεωμετρικά εργαλεία του λογισμικού. Η $3^{η}$ ήταν δραστηριότητα μαύρου κουτιού, διερεύνησης και ανακατασκευής δοσμένου στερεού. Η διάρκεια της εισαγωγικής ομάδας δραστηριοτήτων ήταν μία διδακτική ώρα, της δεύτερης και της τρίτης ομάδας δύο, ενώ της τελευταίας τρεις. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν είναι να συγκροτούν μία ακολουθία με αφετηρία τις στοιχειώδεις έννοιες ευθείας, επιπέδου και καθετότητας, γενικεύοντας από τον κύκλο στη σφαίρα, αποδομώντας τον κύβο σε τετράεδρα, και συνθέτοντας τα τετράεδρα σε ένα νέο γεωμετρικό αντικείμενο.

5.4.2 Εισαγωγική ομάδα δραστηριοτήτων

Δραστηριότητα 0.1: « Κατασκευή σημείου εκτός επιπέδου».

Η δραστηριότητα 0.1 έχει καθαρά εισαγωγικό χαρακτήρα. Αποτελεί την αρχική επαφή εξοικείωσης των μαθητών με το περιβάλλον του λογισμικού, στοχεύοντας παράλληλα στην εδραίωση κοινής ορολογίας.

Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα σημείο εκτός του βασικού επιπέδου. Αναμένεται οι μαθητές να κάνουν ορίσουν σημείο στη λευκή περιοχή, αλλά μεταβάλοντας τη γωνία θέασης, να διαπιστώσουν οι ίδιοι ότι το σημείο ανήκει στο (μη ορατό) βασικό επίπεδο. Σε αυτό το σημείο σε συλλογικό διάλογο συμφωνούμε με τους μαθητές σε κοινούς κώδικες επικοινωνίας για το «βασικό επίπεδο» και «ορατό βασικό επίπεδο».



Εικόνα 28 Σημείο στο βασικό επίπεδο.

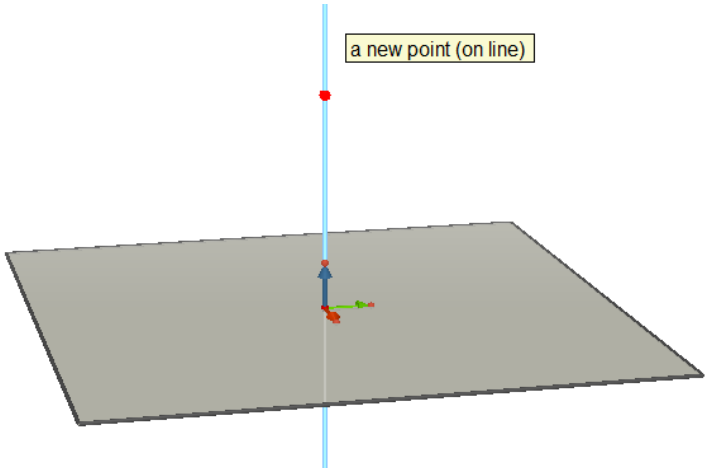
Έπειτα ζητείται από τους μαθητές να εξερευνήσουν την εργαλειοθήκη του λογισμικού ώστε να ορίσουν σημείο στον χώρο. Σημειώνεται ότι σκοπίμως δεν αναφέρεται στους μαθητές η λειτουργία του shift για κατασκευή σημείου εκτός του βασικού επιπέδου, ώστε οι κατασκευές τους να είναι ελεγχόμενες και να ανακλούν γεωμετρικές ιδιότητες

Δραστηριότητα 0.2: «Καθετότητα στον χώρο»

Πρόκειται για δραστηριότητα διερεύνησης που στοχεύει, μέσα από διαδικασίες μη εικονικής οπτικοποίησης, στην αναδιοργάνωση της γνώσης για την έννοια της καθετότητας μεταβαίνοντας από το επίπεδο στον χώρο. Αναμένουμε οι μαθητές αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον, να ερμηνεύσουν το αδύνατο κατασκευών, όπως ευθεία κάθετη σε ευθεία, ή από το αναλλοίωτο εμφανιζόμενων σχηματισμών, όπως το επίπεδο που περιέχει όλες τις κάθετες ευθείες σε σημείο ευθείας, σε γεωμετρικό πλαίσιο. Στοχεύουμε μέσα από τη δυναμική αναδιοργάνωση των σχηματισμών, οι μαθητές να αναπτύξουν πολλαπλές συλλήψεις για την έννοια της καθετότητας, υπερβαίνοντας το αντιληπτικό επίπεδο και μεταβαίνοντας λεκτικό, νοηματοδοτώντας τη μοναδικότητα και την άρση της. Επιπλέον στόχοι της δραστηριότητας 0.2 είναι· σε γνωστικό επίπεδο η αναγνώριση των σχέσεων λογικής εξάρτησης των σχηματικών μονάδων μίας κατασκευής και σε εργαλειακό επίπεδο η διαφοροποίηση λειτουργίας απόκρυψης (hide) και διαγραφής (delete). Τέλος διερευνούνται οι απόψεις των μαθητών για την έννοια της γωνίας δύο (ημι)ευθείων στον χώρο.

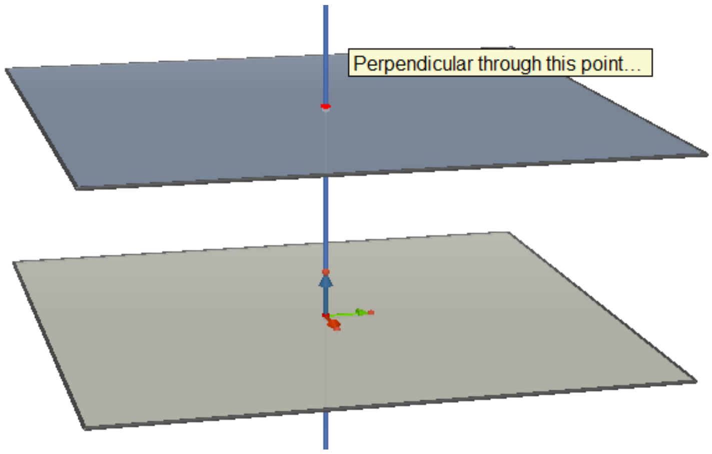
Αρχικά ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία κάθετη ευθεία (ζ) στο βασικό επίπεδο και να ορίσουν σε αυτή ένα ελεύθερο σημείο. Σε αυτό το σημείο ο εκπαιδευτικός θα προκαλέσει μία συζήτηση σχετικά με τους λόγους, που όταν ζητείται κατασκευή σημείου εκτός επιπέδου οι μαθητές θα το κατασκευάζουν σε ευθεία κάθετη σε σημείο του βάσικού, ώστε να έχουν τον έλεγχο της θέσης του σημείου στον χώρο, καθορίζοντας την απόστασή του από το βασικό επίπεδο.

Έπειτα με αφορμή την κατασκευή ελεύθερου σημείου στην ευθεία ζ, χρήσιμο είναι να γίνει ένας διάλογος για τη λειτουργία του ελεύθερου σημείου πάνω σε αντικείμενο και τους κατασκευαστικούς περιορισμούς που τη συνοδεύουν, τονίζοντας ότι διαγράφοντας ένα αντικείμενο διαγράφονται και όσα εξαρτώνται από αυτό.



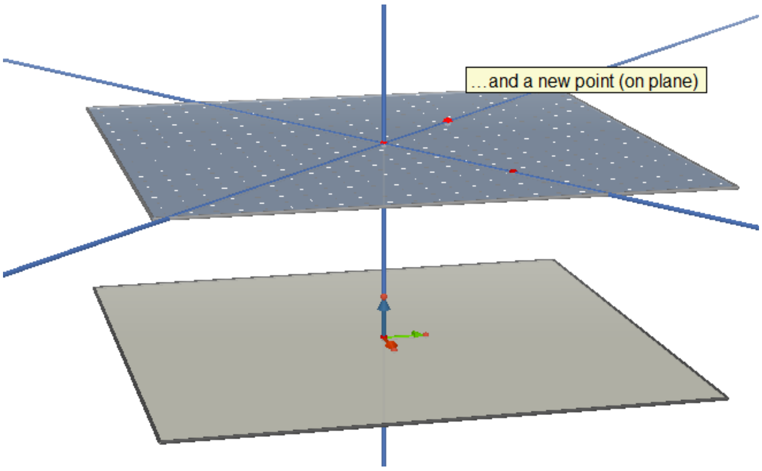
Εικόνα 29 Διαπραγμάτευση δραστηριότητας 0.2. Βήμα1.

Το πρώτο ερώτημα που τίθεται είναι πόσα είναι τα κάθετα επίπεδα στην ευθεία (ζ) στο ελεύθερο σημείο. Αναμένουμε οι περισσότεροι μαθητές να απαντήσουν σωστά γιατί από πολύ νωρίς στην εκπαιδευτική διαδικασία έχει συνδεθεί η καθετότητα με τη μοναδικότητα. Μετά ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν το κάθετο επίπεδο χρησιμοποιώντας το εργαλείο: «καθετότητα».



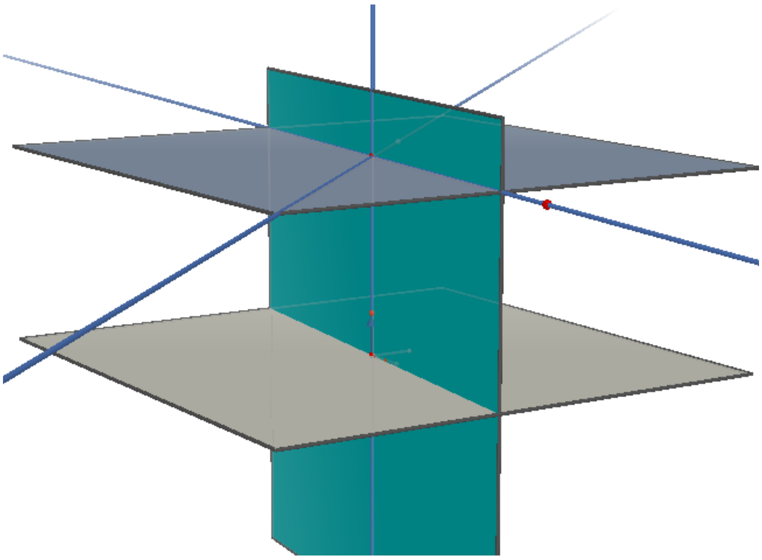
Εικόνα 30 Διαπραγμάτευση δραστηριότητας 0.2. Βήμα2.

Έπειτα ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν δύο ευθείες στο 2ο επίπεδο, οι οποίες διέρχονται από το σημείο τομής επιπέδου-ευθείας και να προσδιορίσουν το είδος της γωνίας σχηματίζουν οι νέες ευθείες με την αρχική ευθεία (ζ). Αναμένεται οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι η γωνία και στις δύο περιπτώσεις είναι ορθή και να επαληθεύσουν εποπτικά τον ισχυρισμό τους μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης.



Εικόνα 31 Διαπραγμάτευση δραστηριότητας 0.2. Βήμα3.

Οι μαθητές μετά κατασκευάζουν το επίπεδο που ορίζεται από το ελεύθερο σημείο μίας από τις ευθείες που κατασκευάσανε στο 2ο επίπεδο και την αρχική ευθεία (ζ) και περιστρέφοντας την ελεύθερη ευθεία γύρω από την ευθεία (ζ), καλούνται να παρατηρήσουν τη γωνία μεταξύ των επιπέδων που κατασκευάσανε. Οι μαθητές αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι τα επίπεδα είναι πάντα κάθετα.



Εικόνα 32 Διαπραγμάτευση δραστηριότητας 0.2. Βήμα4.

Κρίσιμο είναι σε αυτό το σημείο να γίνει ένας διάλογος εστιασμένος σε δύο ερωτήματα. Πρώτο ερώτημα, από σημείο σε ευθεία πόσες είναι οι κάθετες ευθείες προς αυτή. Οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι είναι άπειρες όπως προέκυψε και από την περιστροφή μίας από τις ευθείες στο παράλληλο προς το βασικό επίπεδο. Δεύτερο ερώτημα, από σημείο επιπέδου πόσα είναι τα κάθετα προς αυτό επίπεδα Οι μαθητές από την προηγούμενη διερεύνηση θα αναγνωρίσουν ότι άγονται άπειρα κάθετα προς αυτό επίπεδα που έχουν κοινή την κάθετη ευθεία στο αρχικό επίπεδο.

Επισημαίνοντας στους μαθητές ότι το λογισμικό για να εκτελέσει μία κατασκευή πρέπει να μοναδικά ορισμένη θέτουμε ως τελικό ερώτημα η εντολή «καθετότητα» τι μπορεί να κατασκευάσει και αναμένουμε οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι τα συμβαλόμενα μέλη πρέπει να ευθεία και επίπεδο αφού σε κάθε άλλη περίπτωση η κατασκευή δεν είναι μοναδική.

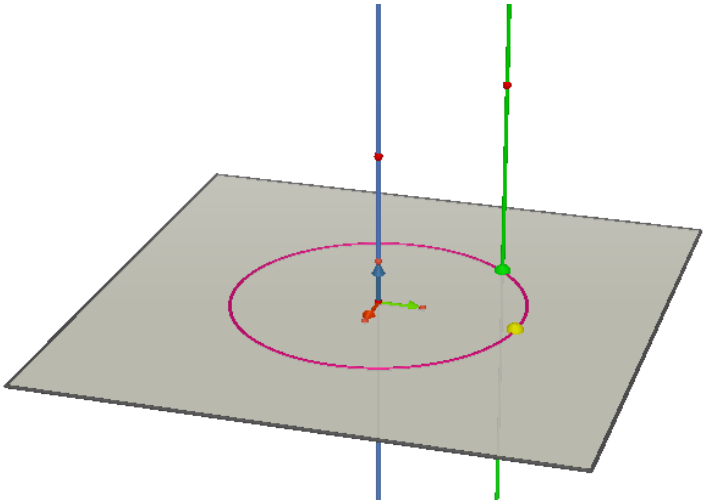
Τέλος, ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία ευθεία που να μη σχηματίζει γωνία με την (ζ) και καλούνται να διερευνήσουν αν δύο ευθείες στον χώρο σχηματίζουν πάντα γωνία. Συμφωνούμε με τους μαθητές ότι η γωνία ορίζεται μεταξύ δύο ημιευθειών και όχι δύο ευθειών και αναμένουμε οι μαθητές, να ανακαλέσουν, τον ορισμό της επίπεδης γωνίας, ως το τμήμα του επιπέδου που ορίζεται από δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, και να συμπεράνουν ότι για να μην ορίζεται γωνία δύο ευθειών στον χώρο αρκεί ή να μην ορίζεται επίπεδο που να περιέχει αυτές τις δύο ευθείες ή να είναι παράλληλες. Αν όμως οι μαθητές δεν κάνουν αυτό τον συνειρμό, θα τους ρωτήσουμε τι γωνία σχηματίζουν οι ακμές του κατά προσέγγιση ορθογώνιου παραλληλεπίδου της τάξης. Αναμένουμε οι μαθητές να αναγνωρίσουν την περίπτωση των ασύμβατων ευθειών. Σε αυτό το σημείο ενδιαφέρον έχει να συζητηθεί η περίπτωση των «αντιδιαμετρικών» ακμών του παραλληλεπιπέδου, αν οι μαθητές τις θεωρούν συνεπίπεδες ή όχι. Επειδή δεν εξυπηρετεί κάποια σκοπιμότητα στην έρευνα δεν κάνουμε λόγο για τον ορισμό γωνίας ασύμβατων ευθειών.

5.4.3 1η ομάδα δραστηριοτήτων: «σφαίρα»

Δραστηριότητα 1.1: «Ο Γεωμετρικός τόπος της σφαίρας»

Κεντρικό ερευνητικό ερώτημα της δραστηριότητας διερεύνησης 1.1 είναι αφενός να εξεταστεί αν επαληθεύονται ευρήματα αντίστοιχων ερευνών (Hattermann, 2012), που υποδεικνύουν τη δυσκολία των μαθητών στην αναγνώριση περιπτώσεων που η μοναδικότητα δε διατηρείται. Αφετέρου εξετάζεται αν το λογισμικό, και ιδιαίτερα η τροπικότητα σύρσιμο με ενεργό ίχνος, συνεισφέρει στη νοηματοδότηση του γεωμετρικού τόπου της σφαίρας επεκτείνοντας τις υφιστάμενες ιδέες των μαθητών για τον γεωμετρικό τόπο του κύκλου στην επίπεδη γεωμετρία.

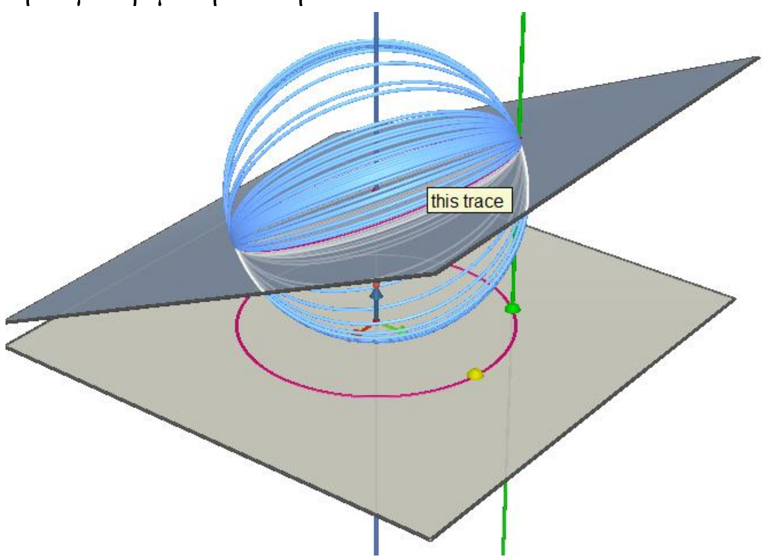
Αρχικά ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν στο βασικό επίπεδο έναν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων, και να αλλάξουν το χρώμα σε κίτρινο, του σημείου που καθορίζει την ακτίνα του κύκλου. Επίσης να κατασκευάσουν ένα ελεύθερο σημείο που θα κινείται στην περιφέρεια του κύκλου και να το χρωματίσουν πράσινο. Έπειτα να κατασκευάσουν τις κάθετες ευθείες προς το βασικό επίπεδο στο κέντρο και στο πράσινο σημείο και να ορίσουν από ένα ελεύθερο σημείο σε αυτές.



Εικόνα 33 Διαπραγμάτευση δραστηριότητας 1.1. Βήμα1.

Στο ερώτημα πόσοι κύκλοι, με κέντρο το σημείο στην μπλε ευθεία, θα διέρχονται από το ελευθερο σημείο στην πράσινη, αν επιβεβαιώνονται ευρήματα προηγούμενων ερευνών οι μαθητές αναμένεται να απαντήσουν ένας. Όπως είναι αναμενόμενο το λογισμικό δεν θα τον κατασκευάσει, αφού δεν θα έχουν ορίσει το επίπεδο του κύκλου. Αφού οι μαθητές κατασκευάσουν ένα επιπεδο που να περιέχει τα δύο σημεία και τον ζητούμενο κύκλο, μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό του επιπέδου από το ελεύθερο σημείο του και ενεργοποιώντας το ίχνος της περιφέρειας του κύκλου, αναμένεται να αναγνωρίσουν την παραγόμενη σφαίρα.

Μέσα από τον δυναμικό χειρισμό του επιπέδου και την εμφάνιση των άπειρων κύκλων αναμένουμε οι μαθητές να περάσουν από την αντιληπτική στην λεκτική σύλληψη, νοηματοδοτώντας τον γεωμετρικό τόπο της σφαίρας ως απειρία κύκλων με τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

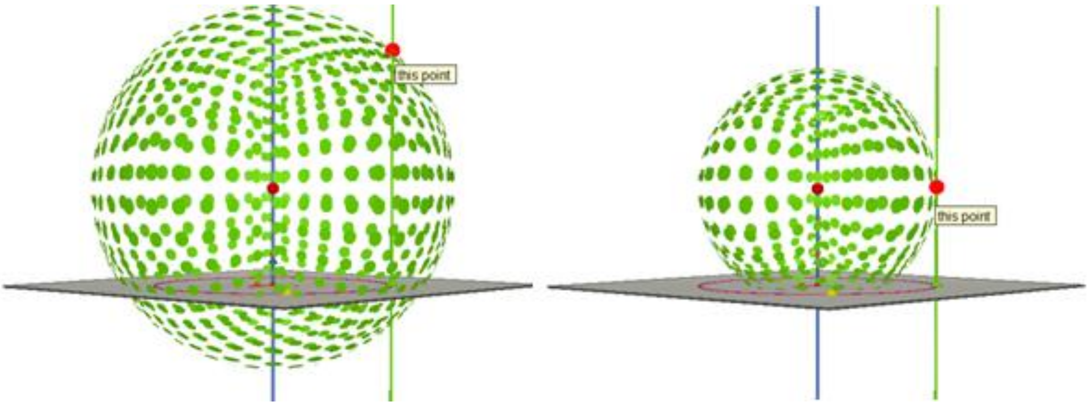


Εικόνα 34 Διαπραγμάτευση δραστηριότητας 0.2. Βήμα2.

Δραστηριότητα 1.2: « Σύγκριση ακτίνων»

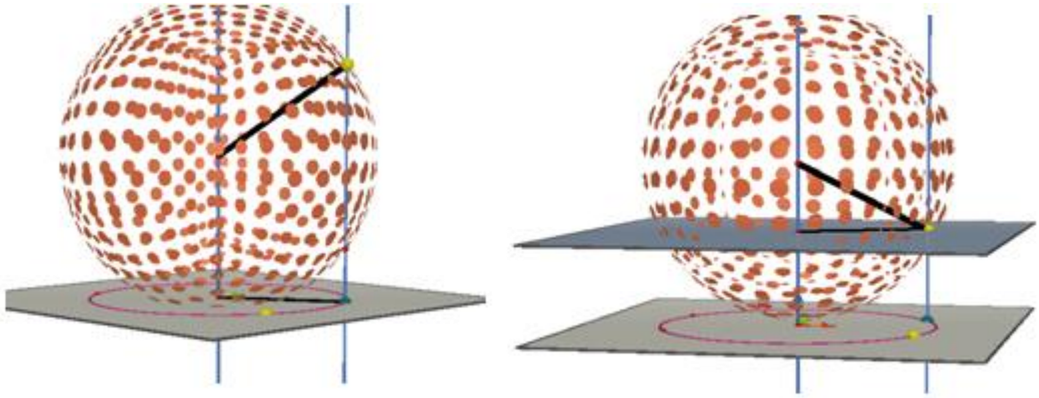
Πρόκειται για μία δραστηριότητα πρόβλεψης που κυρίως εμπλέκει τη συλλογιστική γνωστική διαδικασία. Μέσα από ένα πρόβλημα ελαχίστου στον χώρο διερευνείται ο βαθμός που οι μαθητές μπορούν να νοηματοδοτήσουν τη συμμεταβολή δύο γεωμετρικών μεγεθών, μεταφέροντας γνώση και αποδεικτικές πρακτικές της επίπεδης γεωμετρίας. Για να ολοκληρωθεί επιτυχώς η δραστηριότητα απαιτείται η συνεργασία αντιληπτικής, λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης του δυναμικού σχηματισμού.

Ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν τη σφαίρα που ήταν ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος της προηγούμενης δραστηριότητας και να διερευνήσουν τη σχέση της ακτίνας της σφαίρας με την ακτίνα του κύκλου στο βασικό επίπεδο Οι μαθητές αναμένεται, πειραματιζόμενοι στο λογισμικό, να παρατηρήσουν ότι ενώ ο κύκλος στο βασικό επίπεδο παραμένει σταθερός, η σφαίρα μεταβάλεται. Αναμένεται επίσης να παρατηρήσουν ότι η ανισοτική σχέση των δύο ακτίνων εξαρτάται από τη διαφορά ύψους μεταξύ του κέντρου της σφαίρας και του σημείου της επιφάνειας της, που ορίζει την ακτίνα. Αν αυτά τα δύο σημεία είναι στο ίδιο ύψος οι ακτίνες θα είναι ίσες, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση η ακτίνα της σφαίρας θα είναι μεγαλύτερη. Το περιβάλλον του λογισμικού ευννοεί αυτή την εξερεύνηση (αντιληπτική σύλληψη) αφού μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης μπορούν να παρατηρήσουν πότε η ορθή προβολή της σφαίρας στο βασικό επίπεδο ταυτίζεται με τον σχεδιασμένο κυκλικό δίσκο.



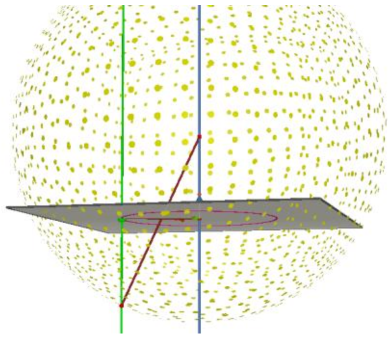
Εικόνα 35 Παρατήρηση της μεταβολής του μεγέθους της σφαίρας.

Ωστόσο για να αποδείξουν τον ισχυρισμό τους θα πρέπει να σκεφτούν μία κατάλληλη κατασκευή. Αναμένουμε οι μαθητές να κατασκευάσουν τις ακτίνες σφαίρας και κύκλου και αναδιοργανώνοντας οπτικά τον σχηματισμό (λειτουργική σύλληψη) να παρατηρήσουν ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι τραπέζιο ή ορθογώνιο. Από αυτό το σημείο η απόδειξη είναι εύκολη καθώς το πρόβλημα ανάγεται σε σχέση κάθετης και πλάγιας από σημείο προς ευθεία (λεκτική σύλληψη).



Εικόνα 36: Δύο ενδεικτικές διαπραγματεύσεις της απόδειξης που αναμένουμε από τους μαθητές.

Σημειώνουμε ωστόσο ότι δεν είναι σίγουρο ότι οι μαθητές θα διερευνήσουν και για την περίπτωση που το ελεύθερο σημείο στη σφαίρα είναι «κάτω» από το βασικό επίπεδο (εικόνα 37). Το συμπέρασμα επεκτείνεται, αφού η ακτίνα της σφαίρας είναι το άθροισμα των δύο υποτεινουσών και η ακτίνα του κύκλου το άθροισμα των δύο καθέτων πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται.

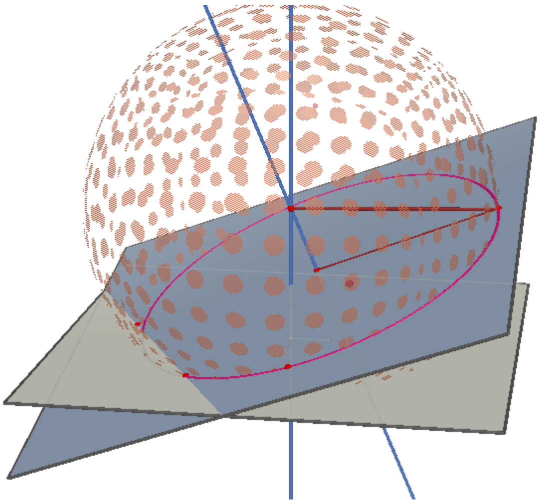


Εικόνα 37

Δραστηριότητα 1.3: «Καμπύλη τομής σφαίρας με επίπεδο»

Σε συνάφεια με την προηγούμενη, σε αυτή τη δραστηριότητα πρόβλεψης, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το είδος της καμπύλης τομής, της σφαίρας με ένα επίπεδο, στοχεύοντας στην ανάπτυξη πολλαπλών συλλήψεων για την καμπύλη τομής.

Στο ερώτημα για το είδος της καμπύλης τομής, αν επιβεβαιωθούν ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Mariotti, 1995) πιθανό είναι να λάβουμε λάθος απάντηση πριν τον σχεδιασμό στο λογισμικό. Κατασκευάζοντας όμως την καμπύλη τομής και μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης αναμένουμε οι μαθητές να αναγνωρίσουν αντιληπτικά ότι πρόκειται για κύκλο. Επιμένοντας ότι η εποπτεία δεν αποτελεί απόδειξη, ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το κέντρο συμμετρίας της καμπύλης, ενώ για να αποδείξουν ότι πρόκειται για κύκλο και όχι έλλειψη. Οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν γεωμετρικά και να δείξουν ότι η απόσταση του κέντρου της καμπύλης από κάθε σημείο της καμπύλης παραμένει σταθερή. Αναμένεται με τη συμβολή του λογισμικού, οι μαθητές να περάσουν σε σειριακό και λειτουργικό επίπεδο αφού πρέπει να κατασκευάσουν το κέντρο της καμπύλης τομής και να αναδιοργανώσουν οπτικά τον σχηματισμό εμφανίζοντας το εσωτερικό ορθογώνιο τρίγωνο. Επίσης διερευνείται και σε αυτή τη δραστηριότητα ο βαθμός που οι μαθητές μπορούν να μεταφέρουν αποδεικτικές πρακτικές της επίπεδης γεωμετρίας (Πυθαγόρειο θεώρημα) στον χώρο, μεταβαίνοντας σε λεκτικό επίπεδο σύλληψης της τομής. Αυτή η δραστηριότητα απαιτεί πιο προχωρημένη σκέψη από την προηγούμενη, καθώς για την ολοκλήρωση της απαιτούνται και τα τέσσερα επίπεδα σύλληψης του γεωμετρικού σχηματισμού.

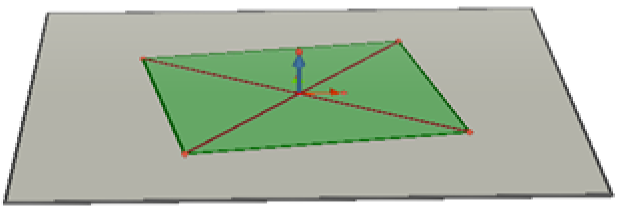


Εικόνα 38: Διαπραγμάτευση της δραστηριότητας 1.3

5.4.4 2η ομάδα δραστηριοτήτων: «κύβος και τετράεδρα»

Δραστηριότητα 2.1: «Κατασκευή κύβου»

Στη δραστηριότητα κατασκευής 2.1, ανοίγοντας το έγγραφο cube1 εμφανίζεται στους μαθητές ένα σχεδιασμένο τετράγωνο στο ορατό τμήμα του βασικού επιπέδου, του οποίου τις διαστάσεις μπορούν να μεταβάλουν. Από τους μαθητές ζητείται να κατασκευάσουν κύβο με βάση το πράσινο τετράγωνο στο βασικό επίπεδο.

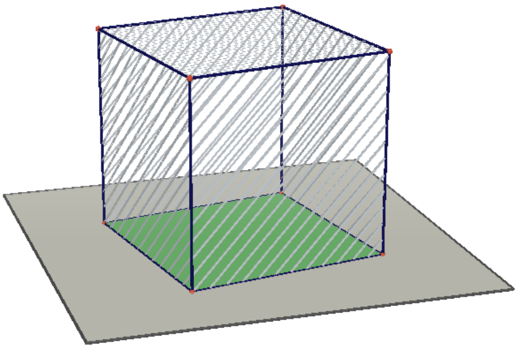


Εικόνα 39: Παράθυρο λογισμικού δραστηριότητας 2.1.

Οι κεντρικοί στόχοι της δραστηριότητας είναι δύο. Πρώτον να διερευνήσουμε αν οι μαθητές θα αξιοποιήσουν με μαθηματικό τρόπο τα ψηφιακά εργαλεία στην κατεύθυνση της σειριακής σύλληψης του κύβου και τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν. Δεύτερον αν κατά την κατασκευή και τη διερεύνηση στο λογισμικό θα προτιμήσουν τη χρήση του κύκλου, ως αντίστοιχο του διαβήτη όπως διαφαίνεται από την υπάρχουσα έρευνα (Hattermann, 2007, 2008) ή θα περάσουν στη χρήση του τρισδιάστατου αντικειμένου της σφαίρας.

Δραστηριότητα 2.2: «Αναγνώριση κύβου»

Ανοίγοντας το αρχείο cube2 εμφανίζεται στους μαθητές ένα στερεό κατασκευασμένο με τρόπο ώστε οι μαθητές να έχουν πρόσβαση στο εσωτερικό του και του οποίου τις διαστάσεις μπορούν να μεταβάλουν. Ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν αν το γεωμετρικό στερεό είναι κύβος.



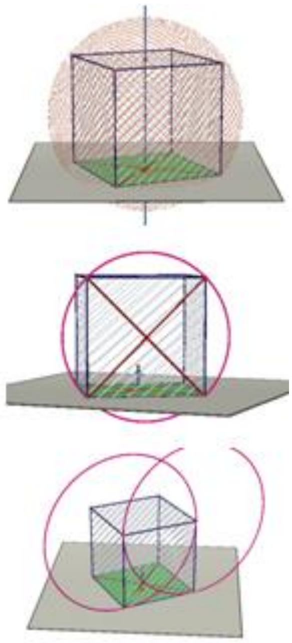
Εικόνα 40: Παράθυρο λογισμικού στη δραστηριότητα 2.2.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερευνητική μέθοδος που θα ακολουθήσουν οι μαθητές για τον προσδιορισμό του είδους του εξαέδρου και ο τρόπος που θα αξιοποιήσουν τα ψηφιακά εργαλεία σε αυτή την κατεύθυνση. Στόχος της δραστηριότητας είναι μέσα από τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι μαθητές να διερευνήσουμε τις υφιστάμενες αντιλήψεις των μαθητών για τη συμπεριφορά του στερεού.

Μία πορεία που αναμένεται να ακολουθήσουν είναι φέρουν το κέντρο του κύβου, που και αυτό αποτελεί ανοιχτό ερώτημα πως θα το κατασκευάσουν και να δείξουν ότι εγγράφεται σε σφαίρα. Ωστόσο δεν είναι σίγουρο ότι παρατηρήσουν το ότι η εγγραφή σε σφαίρα δεν εξασφαλίζει ότι το παραλληλεπίπεδο είναι κύβος.

Επίσης μπορεί να διαλέξουν να δείξουν ότι οι έδρες είναι τετράγωνα. Εδώ υπάρχουν πολλές περιπτώσεις ατελών διερευνήσεων, που και αυτές παρουσιάζουν ενδιαφέρον σχετικά με παρανοήσεις των μαθητών στο πεδίο της επίπεδης Γεωμετρίας.

Ίσως θεωρήσουν αρκετό να δείξουν ότι οι ακμές είναι ίσες αγνοώντας την ανάγκη απόδειξης της καθετότητας, γιατί δεν έχουν συναντήσει πλάγια παραλληλεπίπεδα.



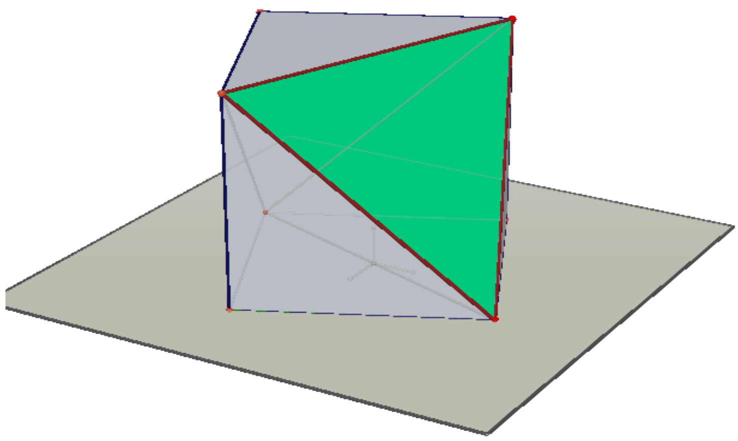
Εικόνα 41 Αναμενόμενες διαπραγματεύσεις της δραστηριότητας 2.2.

Σε κάθε περίπτωση οι στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι μαθητές θα συζητηθούν στην τάξη ώστε αν είναι ελλιπείς να αποτελέσουν έναυσμα συλλογικών διερευνήσεων μεταξύ των ομάδων των μαθητών. Πρόκειται για μία δραστηριότητα διερεύνησης στην οποία οι μαθητές καλούνται να παρέμβουν στον υπάρχοντα σχηματισμό αναδιοργανώνοντάς τον οπτικά ώστε να εμφανιστούν οι ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων, οι καθετότητες ή οι συμμετρίες ανάλογα με τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν. Για την ολοκλήρωσή της απαιτείται η συνεργασία της λειτουργικής σύλληψης στο επίπεδο της επιτυχούς αναδιοργάνωσης και λεκτικής σύλληψης στην κατεύθυνση της επαρκούς τεκμήριωσης.

Δραστηριότητα 2.3: «Τετράεδρα μέσα σε κύβο»

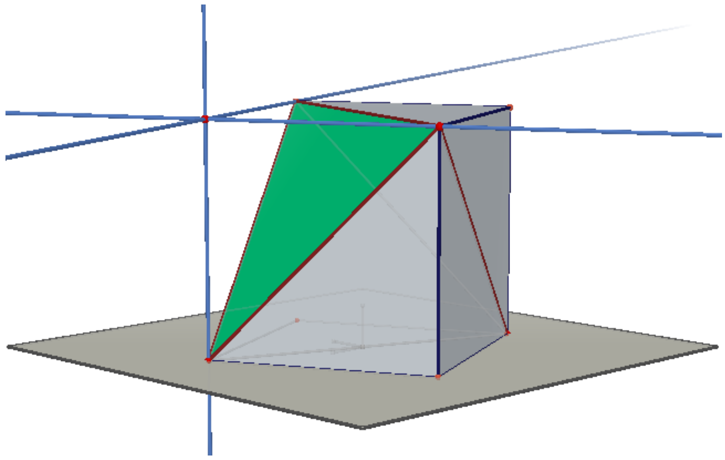
Η δραστηριότητα διερεύνησης 2.3 αποτελεί μια πρώτη γνωριμία των μαθητών με τα τετράεδρα. Πρώτος ερευνητικός στόχος της δραστηριότητας είναι να εξετάσουμε τον βαθμό που οι μαθητές έχουν νοηματοδοτήσει την καθετότητα. Δεύτερος στόχος είναι να διερευνήσουμε αν οι μαθητές περάσουν από την αρχική, και ενδεχόμενα λάθος, αντιληπτική σύλληψη για το είδος των τετραέδρων, στη σειριακή και λεκτική. Αναμένουμε αποδομώντας διαστατικά τα δύο τετράεδρα σε έδρες και ακμές να διακρίνουν τις πλευρές των τριγωνικών εδρών σε ακμές και διαγωνίους του εξωτερικού κύβου και αναγνωρίζοντας τον τρόπο σύνδεσης τους να κατηγοριοποιήσουν τα τετράεδρα.

Στο 1ο βήμα της δραστηριότητας, στο αρχείο cube3, ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν την 8η κορυφή του κύβου, χωρίς να χρησιμοποιήσουν κανένα εργαλείο που σχεδιάζει επίπεδα και να φέρουν τις ακμές που λείπουν. Αφού δεν μπορούν να φέρουν επίπεδα για να βρουν την κορυφή οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν τους φορείς των ακμών που λείπουν. Σχεδόν αναγκαστικά πρέπει να εργαστούν με το εργαλείο καθετότητα και κατάλληλα να θεωρήσουν έδρα και κορυφή στην οποία θα κατασκευάσουν κάθετη ευθεία κάθε φορά. Ωστόσο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ενδεχόμενο οι μαθητές να ακολουθήσουν άλλες στρατηγικές, όπως κατασκευή με τομή κάθετης ευθείας και σφαίρας ή μεταφορά του στερεού.



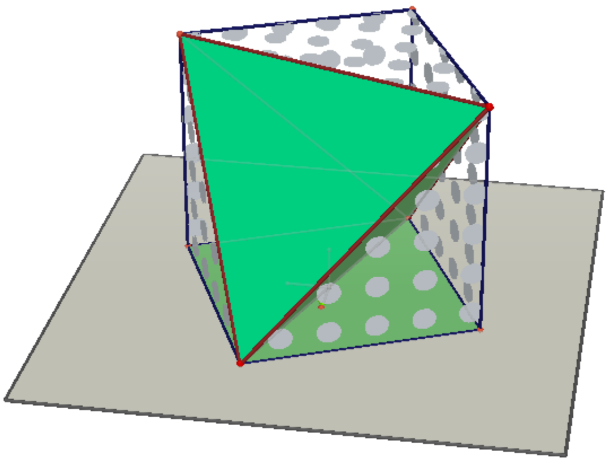
Εικόνα 42: Παράθυρο λογισμικού δραστηριότητας 2.3.

Έπειτα καλούνται οι μαθητές να εξερευνήσουν το στερεό που περικλείεται από τις τρεις ακμές που έφεραν και την πράσινη βάση. Ίσως αρχικά θεωρήσουν ότι όλα τα τρίγωνα είναι ίσα, όμως μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης αναμένεται να ανακαλύψουν το λάθος και να αιτιολόγησουν την απάντηση τους. Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μία συζήτηση για το ποια στερεά ονομάζονται πυραμίδες και ειδικότερα τριγωνικές πυραμίδες, ώστε να εδραιωθεί μία κοινη ορολογία.



Εικόνα 43: Κατασκευή 8ης κορυφής.

Στο 2ο βήμα της δραστηριότητας ζητάμε από τους μαθητές να κλείσουν χωρίς να σώσουν το αρχείο, να το ανοίξουν ξανά και να αλλάξουν την επιφάνεια του στερεού σε large dots. Εμφανίζεται ένα νέο στερεό εσωτερικά, το οποίο οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν ως προς το πλήθος και το είδος των εδρών του. Αναμένουμε οι μαθητές να διαπιστώσουν με ευκολία ότι οι 4 έδρες είναι (ίσα) ισόπλευρα τρίγωνα και να αιτιολογήσουν τον ισχυρισμό τους παρατηρώντας ότι οι πλευρές των τριγώνων είναι διαγώνιοι των εδρών του κύβου. Στη συλλογική συζήτηση επισημαίνουμε τις διαφορές μεταξύ αυτού του τετραέδρου από το τετράεδρο της προηγούμενης διερεύνησης, διαχωρίζοντας τα κανονικά από τα υπόλοιπα πολύεδρα.



Εικόνα 44: Εμφάνιση εσωτερικού κανονικού τετραέδρου.

Τέλος ζητείται από τους μαθητές να αποκρύψουν τις έδρες του εξωτερικού στερεού και να εξερευνήσουν το κανονικό τετράεδρο, ώστε να μπορούν να το ανακατασκευάσουν χωρίς να κατασκευάσουν πρώτα τον εξωτερικό κύβο.

Δραστηριότητα 2.4: «Κατασκευή κανονικού τετραέδρου»

Στόχος αυτής της κατασκευαστικής δραστηριότητας είναι οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του λογισμικού με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες, για να κατασκευάσουν ένα κανονικό στερεό. Ο τρόπος που θα χρησιμοποιήσουν τα ψηφιακά εργαλεία θα αντανακλά το επίπεδο σειριακής σύλληψης για το τρισδιάστατο αντικείμενο.

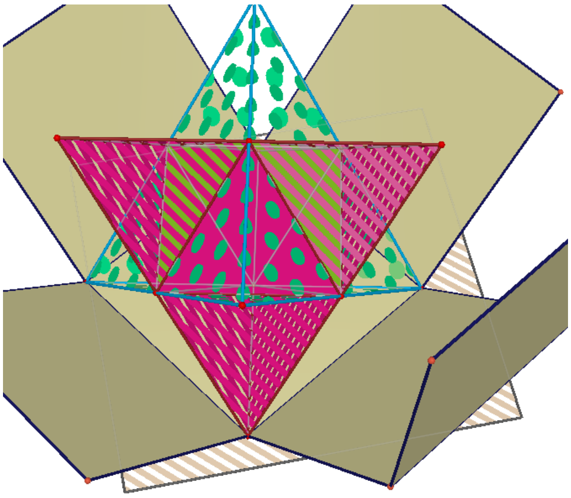
Ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα κανονικό τετράεδρο με τη μία έδρα του στο βασικό επίπεδο. Μία ενδεικτική διαπραγμάτευση της κατασκευής παρουσιάζεται αναλυτικά στην παράγραφο 4.2. Αναμένουμε όλοι οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι η $4^{η}$ κορυφή θα είναι σημείο της κάθετης ευθείας στο βασικό επίπεδο στο κέντρο βάρους του τριγώνου. Ως πιθανό λάθος αναμένουμε οι μαθητές να κατασκευάσουν τη σφαίρα με κέντρο το κέντρο βάρους του τριγώνου βάσης και να θεωρήσουν ότι η τέταρτη κορυφή θα είναι η τομή της σφαίρας και της προηγούμενης ευθείας.

5.4.5 3η δραστηριότητα: «Stella Octungula»

Πρόκειται για μία δραστηριότητα μαύρου κουτιού. Οι μαθητές καλούνται αρχικά να διερευνήσουν τις ιδιότητες της δοσμένης δυναμικής κατασκευής του αστεροειδούς οκτάεδρου, και έπειτα να αναπτύξουν δικές τους στρατηγικές έγκυρης (άρα σύμφωνης με τις γεωμετρικές ιδιότητες) ανακατασκευής του στερεού.

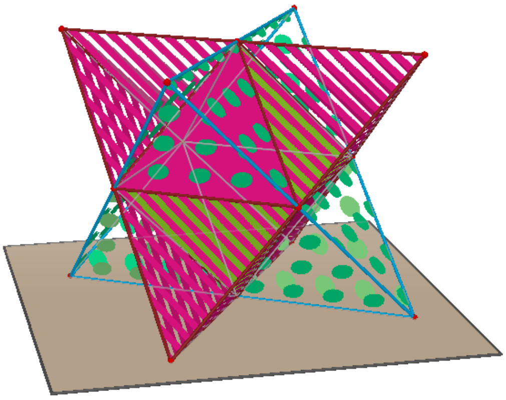
Κεντρικό ερευνητικό ερώτημα της δραστηριότητας είναι η διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης του σύνθετου στερεού τόσο κατά τη διαδικασία διαστατικής αποδόμησης για την αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων των επιμέρους συνδεόμενων μονάδων του στερεού αλλά και τα νοήματα που θα αναδυθούν κατά την ανακατασκευή του.

Αρχικά πριν οι μαθητές ανοίξουν το λογισμικό κάνουμε μία εισαγωγή. Στον προτζέκτορα ανοίγουμε ένα δικό μας αρχείο στο οποίο είναι κατασκευασμένος ένας κύβος. «Ξεδιπλώνοντας» το ανάπτυγμα του εμφανίζεται το στερεό που καλούνται να εξερευνήσουν οι μαθητές.



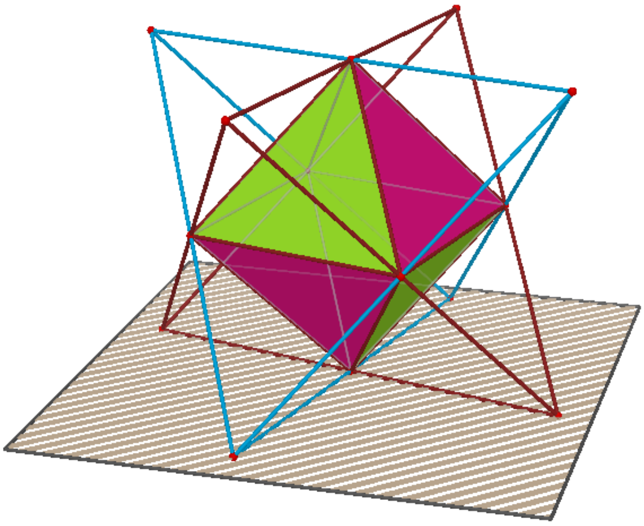
Εικόνα 45: Το στερεό όπως εμφανίζεται από το ανάπτυγμα του κύβου στον προτζέκτορα.

Έπειτα ζητάμε από τους μαθητές να ανοίξουν το έγγραφο stella octungula, στον υπολογιστή τους, στο οποίο έχουμε αποκρύψει τον κύβο και το ανάπτυγμα του.



Εικόνα 46: Παράθυρο λογισμικού δραστηριότητας 3.

Οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν τη δομή του στερεού και έπειτα να το ανακατασκευάσουν σε ένα νέο αρχείο λογισμικού. Στο στάδιο της διερεύνησης αναμένουμε οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι πρόκειται για δύο κανονικά τετράεδρα, που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο βάρους της κατασκευής. Αναμένουμε επίσης αξιοποιώντας τη γνώση ότι το στερεό εντάσσεται σε κύβο να αιτιολογήσουν λεκτικά τον ισχυρισμό τους καθώς οι ακμές των τετραέδρων είναι οι διαγώνιοι των εδρών του εξωτερικού κύβου. Αποδομώντας τον σχηματισμό αναμένουμε να αναγνωρίσουν ότι συγκροτείται από 8 κανονικά τετράεδρα περιμετρικά ενός εσωτερικού κανονικού οκταέδρου. Ο τρόπος που οι μαθητές θα αιτιολογήσουν τους παραπάνω ισχυρισμούς θα ανακλά τα επίπεδα σύλληψης τους για τον σχηματισμό.



Εικόνα 47: Στάδιο διαστατικής αποδόμησης του αστεροειδούς οκτάεδρου.

Ως κατασκευή αποτελεί επέκταση της κατασκευής κανονικού τετραέδρου. Ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η πορεία κατασκευής που θα ακολουθήσουν οι μαθητές, αν θα είναι αφαιρετική ή συνθετική, και αυτός είναι ένας δεύτερος λόγος που αρχικά δείχνουμε ότι το στερεό είναι μέσα σε κύβο. Διευκρινίζουμε στους

μαθητές ότι μπορούν να κατασκευάσουν το στερεό με όποιο προσανατολισμό επιθυμούν, ώστε αν θέλουν αξιοποιώντας την κατασκευή κανονικού τετραέδρου της προηγούμενης δραστηριότητας να κατασκευάσουν πρώτα το τετράεδρο με τη μία έδρα του στο βασικό επίπεδο.
Οι μαθητές αναμένουμε να κατασκευάσουν το στερεό με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

- κατασκευάζοντας πρώτα τον κύβο και μετά εμφανίζοντας τα εσωτερικά κανονικά τετράεδρα που ορίζονται από τις διαγώνιους των εδρών του.
- κατασκευάζοντας εξαρχής δύο κανονικά τετράεδρα.
- κατασκευάζοντας αρχικά κανονικό οκτάεδρο και έπειτα τα οκτώ κανονικά τετράεδρα περιμετρικά του όπως στη δραστηριότητα 2.4 ή θεωρώντας τις τομές των επιπέδων που ορίζονται από τις έδρες του εσωτερικού οκταέδρου.

5.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Αμέσως μετά τη συλλογή δεδομένων, ακολούθησε μία πρώτη εκτίμηση της εξέλιξης των διερευνήσεων κάθε ομάδας και προσδιορίστηκαν σημεία που απαντούσαν στα ερευνητικά ερωτήματα.

Για την επεξεργασία των δεδομένων ακολουθήθηκε το πλαίσιο της ανάλυσης κρίσιμων συμβάντων (critical events). Με τον όρο «κρίσιμα συμβάντα» εννοούμε αποσπάσματα διαλόγων ή ενέργειες των μαθητών, που στο πλαίσιο του ερευνητικού ερωτήματος απαιτούν ανάλυση. Αφορούν στρατηγικής σημασίας στιγμιότυπα που μπορεί να περιγράφουν νοητικά άλματα ή αντιφάσεις σε σχέση με τις υποθέσεις της έρευνας. Η πορεία της ανάλυσης (A.B.Powell et al., 2003) που ακολουθήθηκε ήταν:

- 1η φάση: Παρακολούθηση των video του λογισμικού καταγραφής οθόνης, με στόχο την εξοικείωση με το περιεχόμενο των δεδομένων στα video συνολικά. Καταγραφή της χρονικής εξέλιξης της κατασκευής μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές κάθε ομάδας.
- 2η φάση: Εντοπισμός κρίσιμων επεισοδίων. Ο προσδιορισμός των κρίσιμων επεισοδίων πρόεκυψε από τη σύνδεση με το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα και περαιτέρω συγκριτική ανάλυση των δεδομένων από κάθε ομάδα.
- 3η φάση: Απομαγνητοφώνηση των διαλόγων και καταγραφή σε φύλλα απομαγνητοφώνησης για την καταχώρηση σχολίων.
- 4η φάση: Κωδικοποίηση. Εκτός από την κωδικοποίηση που αφορούσε στα επίπεδα σύλληψης των γεωμετρικών σχηματισμών, μέσα από την παρακολούθηση της αλληλεπίδρασης των μαθητών με το περιβάλλον αναδύθηκαν υποκατηγορίες που αφορούσαν: στη χρήση αποκλειστικά συμμετρικών κατασκευαστικών διαδικασιών, σε κατασκευές χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο και στη χρήση ασαφών λεκτικών δηλώσεων.
- 5η φάση: Διαμόρφωση υποκατηγοριών των δραστηριοτήτων με βάση τις υποκείμενες γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται για την πραγματοποίησή

τους. Σε συνάφεια με το μοντέλο του Duval, για την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι δραστηριότητες κατηγοριοποιήθηκαν σε:

1. Διερευνητικές.

   Κυρίαρχη γνωστική διαδικασία η (μη εικονική) οπτικοποίηση.

Οι διερευνητικές διακρίθηκαν σε τρεις επιμέρους υποκατηγορίες, οι οποίες αντιστοιχούν στις δράσεις του υποκειμένου προκειμένου να μεταβεί από διαδικασίες εικονικής σε διαδικασίες μη εικονικής οπτικοποίησης για τη νοηματοδότηση των γεωμετρικών σχηματισμών. Στις δραστηριότητες που η κατασκευή νοημάτων προϋποθέτει:

→ Την ερμηνεία κατασκευαστικών περιορισμών και αναλλοίωτων ώστε να νοηματοδοτηθούν έννοιες της τρισδιάστατης γεωμετρίας.

→ Τη διαστατική αποδόμηση ενός δοθέντος σχηματισμού ώστε να διερευνηθούν οι ιδιότητες των επιμέρους υποσχηματισμών του και να οργανωθεί η γνώση για αυτόν.

→ Την ευρετική εξερεύνηση ενός δοθέντος σχηματισμού ώστε να επικυρωθούν ιδιότητές του μέσα από διαδικασίες διάσπασής του.

2. Κατασκευής.

   Κυρίαρχη γνωστική διαδικασία η κατασκευαστική.

3. Ανοιχτά προβλήματα.

   Κυρίαρχη γνωστική διαδικασία η συλλογιστική.

- 6η φάση: Διαμόρφωση υποκατηγοριών με βάση το επίπεδο σύλληψης του γεωμετρικού σχηματισμού. Η πορεία νοηματοδότησης και το επίπεδο μαθηματικοποίησης στο οποίο έφτασαν οι μαθητές για τους τρισδιάστατους γεωμετρικούς σχηματισμούς κατά την αλληλεπίδραση τους με το περιβάλλον, διερευνήθηκε υπό το πρίσμα των επιπέδων σύλληψης, κατά Duval, που αναδύθηκαν:

  Αντιληπτικό (P.A)
  Σειριακό (S.A)
  Λεκτικό (D.A)
  Λειτουργικό (O.A)

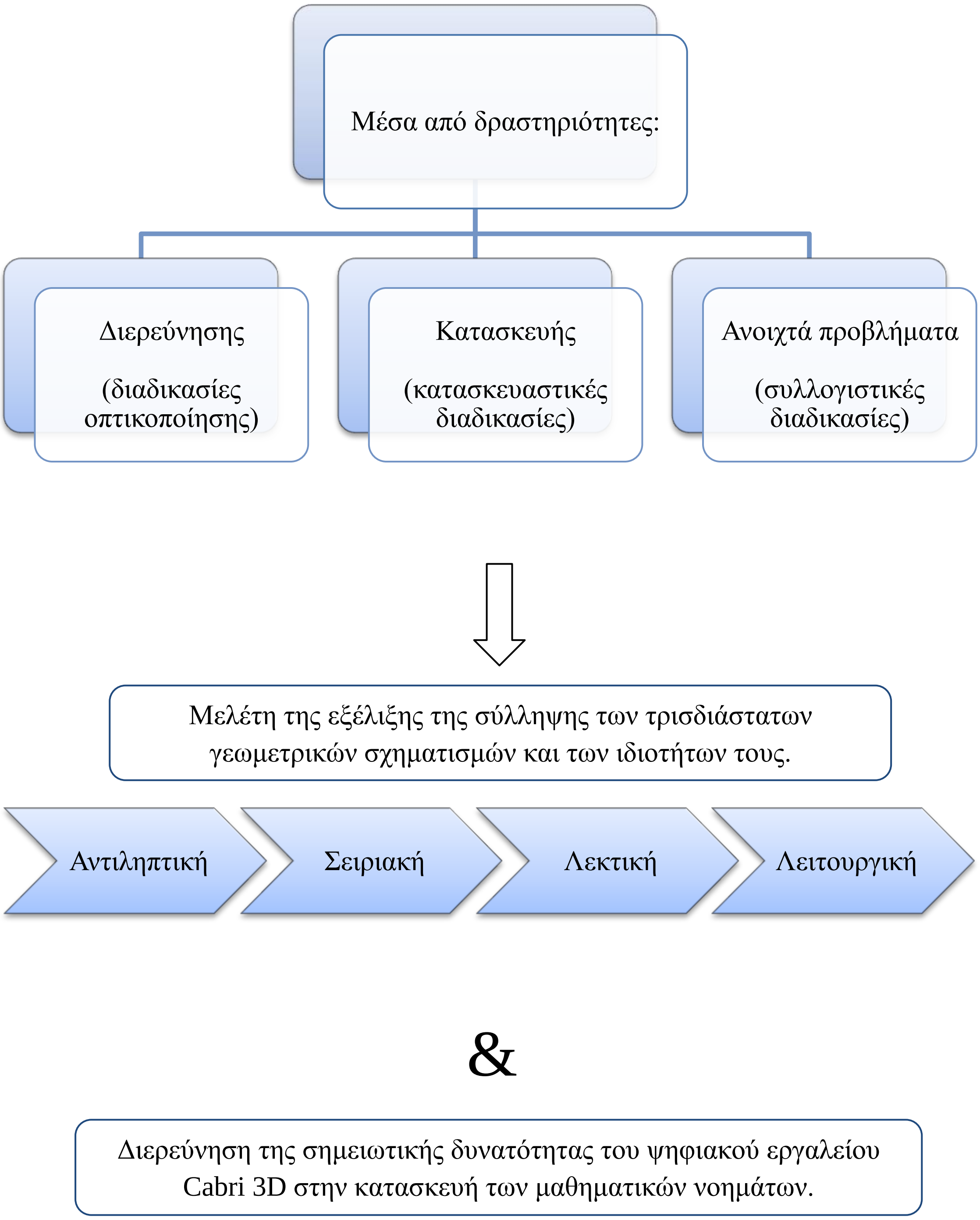
  Σε αυτή τη φάση έγινε μία αποτίμηση του επίπεδου σύλληψης ανά ομάδα και ανά τύπο δραστηριότητας.

- 7η φάση: Σύνθεση αφήγησης. Επιλέχθηκαν διάλογοι από τις τρεις ομάδες ανά ομάδα επεισοδίων. Αναλύθηκαν τα επίπεδα νοηματοδότησης που αναπτύχθηκαν στις ομάδες, ενώ παράλληλα διερευνήθηκε ο ρόλος του ψηφιακού εργαλείου στην κατασκευή γεωμετρικών νοημάτων και συγκροτήθηκε το τελικό κείμενο ανάλυσης δεδομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 Δομή της ανάλυσης των αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της έρευνας όπως αυτά προκύπτουν από τα δεδομένα σύμφωνα με τη μέθοδο ανάλυσης κρίσιμων συμβάντων. Ο κύριος στόχος της έρευνας και η κατηγοριοποίηση η οποία ακολουθήθηκε κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων συνοψίζεται στο παρακάτω διάγραμμα.



6.2 Κατασκευή νοημάτων μέσα από δραστηριότητες διερεύνησης

Σε αυτή την υποπαράγραφο εντάχθηκαν οι διαδικασίες κατασκευής νοημάτων μέσα από δραστηριότητες αναγνώρισης της δομής και ανάλυσης των ιδιοτήτων γεωμετρικών σχηματισμών. Τα κρίσιμα επεισόδια καταμερίστηκαν σε τρεις άξονες:

- $1^{ος}$ άξονας: Η παρατήρηση του αναλλοίωτου ή του αδύνατου σχηματισμών ως εργαλείο επαναδιαπραγμάτευσης βασικών εννοιών από το επίπεδο στον χώρο.
- $2^{ος}$ άξονας: Η διαστατική αποδόμηση σε ψηφιακό περιβάλλον ως εργαλείο ανάλυσης ενός γεωμετρικού σχηματισμού.
- $3^{ος}$ άξονας: Η ευρετική εξερεύνηση ενός αρχετυπικού στερεού σε ψηφιακό περιβάλλον ως εργαλείο αναδιοργάνωσης της γνώσης για το αντικείμενο.

Η διαστατική αποδόμηση και η ευρετική εξερεύνηση αποτελούν κατά Duval κεντρικές συνιστώσες των διαδικασιών μη εικονικής οπτικοποίησης για τα γεωμετρικά στερεά. Η ερμηνεία των παρατηρούμενων αναλλοίωτων ή των κατασκευαστικά αδύνατων σχηματισμών σε γεωμετρικό επίπεδο μπορεί να συνεισφέρει στην κατεύθυνση της οπτικοποίησης αφηρημένων εννοιών, που εμφανίζονται ως ιδιότητες των παραγόμενων σχηματισμών στο λογισμικό.

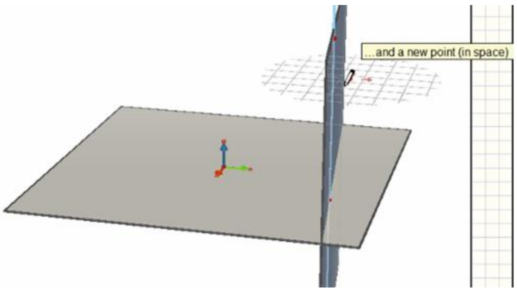
6.2.1 Νοηματοδότηση εννοιών του χώρου

<u>$1^{ο}$ Κρίσιμο Επεισόδιο: Νοηματοδότηση καθετότητας</u>

Η έννοια της καθετότητας είναι κεντρική στην επίπεδη γεωμετρία. Αφορά δύο μονοδιάστατα αντικείμενα, δύο ευθείες, και συνδέεται με τη μοναδικότητα και την απόσταση. Μεταβαίνοντας όμως από το επίπεδο στον χώρο η έννοια της καθετότητας απαιτεί διερεύνηση καθώς η μοναδικότητα διατηρείται μόνο στην περίπτωση που τα εμπλεκόμενα μέλη είναι ζεύγη ευθείας και επιπέδου.

Στη δραστηριότητα 0.2, οι μαθητές αρχικά παρατήρησαν, ότι σε ένα σημείο του επιπέδου το λογισμικό κατασκευάζει (μοναδική) κάθετη ευθεία, ενώ σε αντίθεση με αρχική υπόθεσή τους, από αυτό το σημείο διέρχονται άπειρα κάθετα επίπεδα, που προκύπτουν από την περιστροφή ενός γύρω από την μοναδική κάθετη ευθεία που κατασκεύασαν, μέσα από τη λειτουργία συρσίματος.

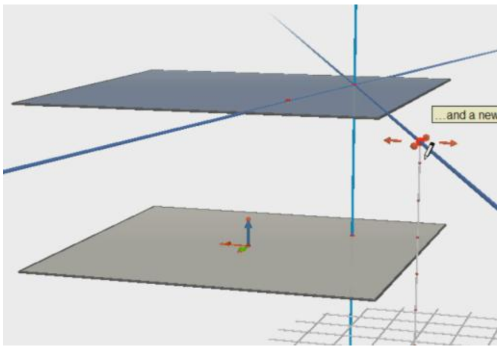
Μ2 Ναι. Δεν υπάρχει μόνο ένα επίπεδο... — *Ομάδα 1, Δραστηριότητα 0.2, Στίχοι 76-77*



Μ3 Άπειρα.. — *Περιστρέφει το επίπεδο.*

Στο ερώτημα: «Πόσα είναι τα κάθετα επίπεδα στην ευθεία (ζ) στο ελεύθερο σημείο της» οι ομάδες αυθόρμητα απάντησαν άπειρα όμως μέσα από πειράματα με χειρονομίες και αυτοσχέδια χειραπτικά μέσα (στυλό και μία κόλλα χαρτί) κατέληξαν ότι είναι ένα. Επίσης παρατήρησαν ότι από σημείο ευθείας άγονται άπειρες κάθετες ευθείες που προκύπτουν από την περιστροφή μίας ευθείας γύρω από το σημείο.

Μ7	*Να το, γυρίζοντας την ευθεία..*	*Ομάδα 3, Δραστηριότητα 0.2, Στίχοι 76-77*
Ε	*Τελικά, από ένα σημείο μίας ευθείας άγεται μία ή περισσότερες κάθετες στον χώρο;*	
Μ7	*Είναι άπειρες.. όλες στο παράλληλο επίπεδο*	
Ε	*Όλες οι ευθείες του παράλληλου επιπέδου εννοείς;*	
Μ4	*Όχι όλες. Αυτές που περνάνε από το σημείο.*	*Περιστρέφει την ευθεία*



2ο Κρίσιμο Επεισόδιο: Νοηματοδότηση σφαίρας

Σε αντίθεση με τα ευρήματα προϋπάρχουσας έρευνας οι μαθητές όλων των ομάδων (της τρίτης αφού έκαναν αρκετές προσπάθειες να κατασκευάσουν τον κύκλο) πρίν ολοκληρώσουν την κατασκευή της δραστηριότητας 1.1 στο λογισμικό, αναγνώρισαν την επέκταση του γεωμετρικού τόπου από κύκλο σε σφαίρα. Η τροπικότητα «σύρσιμο με ενεργό ίχνος» επιβεβαίωσε τον ισχυρισμό των δύο ομάδων και ενίσχυσε τη νοηματοδότηση της σφαίρας ως στερεό που συγκροτείται από άπειρους κύκλους της τρίτης, στην κατεύθυνση της λεκτικής σύλληψης για το στερεό. Το παρακάτω απόσπασμα είναι ενδεικτικό:

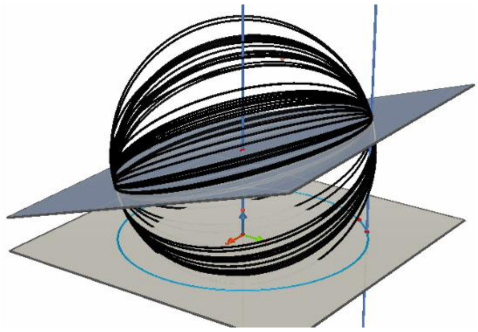
Ε	*Λοιπόν. Έχουμε αυτά τα δύο σημεία. Το ερώτημα είναι το εξής. Βρείτε έναν τρόπο να κατασκευάσετε έναν κύκλο με κέντρο το 1ο σημείο –αυτό- που να διέρχεται από αυτό το σημείο. Σκεφτήτε πως κατασκευάσατε κύκλο στο λογισμικό. Μετα θα αποφασίσετε αν αυτός ο κύκλος είναι μοναδικός.*	*Ομάδα 2, Δραστηριότητα 1.1 «Ο Γεωμετρικός τόπος της σφαίρας», Στίχοι 48 - 55*
Μ6	*Καταρχάς για να είναι μοναδικός θα πρέπει το επίπεδο να είναι στην ίδια φορά με τα δύο σημεία.*	
Ε	*Το επίπεδο;*	
Μ6	*Του κύκλου*	
Ε	*Κρατάμε το επίπεδο. Κατασκευάστε πρώτα έναν κύκλο και*	

μετά τσεκάρουμε. Είναι μοναδικός;

M5 *Ώπα ! Μοναδικός κύκλος που να έχει αυτό το κέντρο και να περνάει από αυτό το σημείο;*

E *Ναι. Έχω δύο σημεία στον χώρο. Αν ο κύκλος που έχει κέντρο το ένα σημείο και περνάει από το άλλο είναι μοναδικός.*

M4 *Όχι, να πω γιατί; Πολλοί κύκλοι μαζί μας δίνουν μία σφαίρα.*



Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Οι μαθητές ερμήνευσαν γεωμετρικά τους κατασκευαστικούς περιορισμούς, που καθιστούν αδύνατες τις κατασκευές ευθείας κάθετης σε ευθεία σε σημείο της και κύκλου με γνωστό κέντρο και ένα σημείο της περιφέρειας του, στο λογισμικό συνδέοντας τους με την άρση της μοναδικότητας. Σε αυτή την κατεύθυνση συνεισέφερε και η λειτουργία συρσίματος. Η τροπικότητα περιπλανόμενο σύρσιμο (wandering dragging) στο επίπεδο που ήταν κάθετο στο βασικό και στην ευθεία που ήταν κάθετη σε ευθεία, σε ένα σημείο του καθενός, είχε κρίσιμο ρόλο στη νοηματοδότηση της καθετότητας. Αφενός επέτρεψε στους μαθητές να οπτικοποιήσουν την απειρία επιπέδων και ευθειών με την ιδιότητα της καθετότητας αντίστοιχα. Αφετέρου, παρατηρώντας τις κατασκευαστικές αναλλοίωτες, να διαπιστώσουν και εποπτικά ότι στην στην πρώτη περίπτωση όλα τα επίπεδα διέρχονται από την κάθετη ευθεία στο επίπεδο που κατασκεύασε το λογισμικό, ενισχύοντας τη νοηματοδότηση της μοναδικότητας της κάθετης ευθείας σε επίπεδο που είχε προκύψει μέσα από τη λειτουργία του λογισμικού. Ομοίως παρατηρώντας ότι όλες οι κάθετες ευθειες σε ευθεία, σε σημείο της, ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, και συγκροτούν το επίπεδο, ενίσχυσε τη νοηματοδότηση της μοναδικότητας του κάθετου επιπέδου σε ευθεία, που είχε προκύψει με χειραπτικά μέσα.

Ωστόσο σημειώνουμε ότι σε μετέπειτα δραστηριότητα μία ομάδα μαθητών κατά την κατασκευή του κύβου προσπάθησε με το εργαλείο «καθετότητα» να κατασκευάσει επίπεδο κάθετο σε επίπεδο και ερμήνευσε την αδυναμία κατασκευής ως σφάλμα του λογισμικού. Παρατήρηση που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η υφιστάμενη σύνδεση της καθετότητας με τη μοναδικότητα δεν άρεται εύκολα.

6.2.2 Η διαστατική αποδόμηση σε ψηφιακό περιβάλλον ως εργαλείο ανάλυσης του γεωμετρικού σχηματισμού.

Σε αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές κλήθηκαν να μελετήσουν τις ιδιότητες ενός κατασκευασμένου στερεού στο λογισμικό. Αποδόμησαν τους τρισδιάστατους σχηματισμούς σε επιμέρους δισδιάστατες σχηματικές μονάδες, των οποίων τις ιδιότητες διερεύνησαν με όρους επίπεδης γεωμετρίας. Η δραστηριότητα 2.3: «τετράεδρα μέσα σε κύβο» αφορούσε αποτομές κύβου από επίπεδα και οι μαθητές κλήθηκαν να διερευνήσουν το είδος των σχηματιζόμενων τρισδιάστατων τετραέδρων αναγνωρίζοντας το είδος των δισδιάστατων εδρών τους (3D→2D αποδόμηση) μέσα από τη σχέση των μονοδιάστατων ακμών (3D→1D αποδόμηση). Ανάλογα στη δραστηριότητα 3: «Stella Octungula» οι μαθητές αποδόμησαν διαστατικά έναν περίπλοκο γεωμετρικό σχηματισμό. Το λογισμικό συνεισέφερε σημαντικά παρέχοντας τη δυνατότητα άμεσου χειρισμού των σχηματισμών ώστε να λάβει χώρα η αποδόμηση, προωθώντας διαδικασίες μη εικονικής οπτικοποίησης.

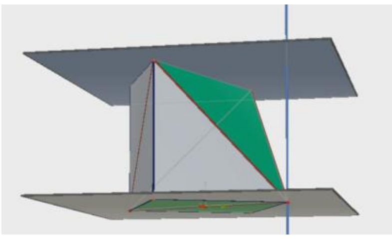
1^{ο} Κρίσιμο Επεισόδιο: Κατηγοριοποίηση τετραέδρων

Στις διερευνήσεις της δραστηριότητας 2.3: «Τετράεδρα μέσα σε κύβο» οι μαθητές κλήθηκαν να εξερευνήσουν τα δύο στερεά που προέκυψαν από συνδέσεις κορυφών κύβου. Και οι τρεις ομάδες αναγνώρισαν ότι πρόκειται για τετράεδρα, πυραμίδες όπως τα αποκάλεσαν. Σε αυτό το σημείο και για να εδραιωθεί μία κοινή μαθηματική ορολογία έγινε συζήτηση κατάταξης των στερεών πυραμίδες, πολύεδρα και κανονικά πολύεδρα. Υπενθυμίζουμε ότι το τετράεδρο στην πρώτη διερεύνηση είναι κανονική τριγωνική πυραμίδα ενώ στη δεύτερη κανονικό τετράεδρο.

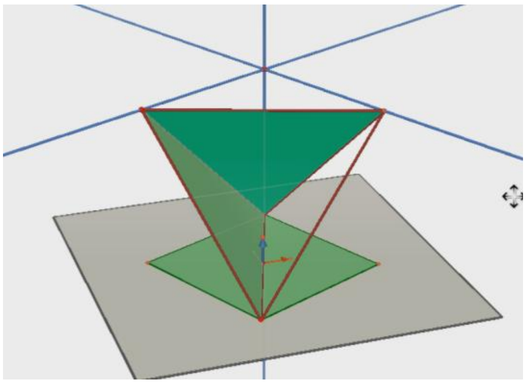
Οι μαθητές διερεύνησαν το είδος των τριγωνικών εδρών του κάθε τετραέδρου παρατηρώντας τη διάταξη των κορυφών σε σχέση με τις έδρες του κύβου. Αρχικά μαθητές από δύο ομάδες υπέθεσαν ότι το τετράεδρο της πρώτης διερεύνησης είναι κανονικό, όμως μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης οι μαθητές όλων των ομάδων διαπίστωσαν ότι είχε τρεις έδρες ορθογώνια τρίγωνα και βάση ισόπλευρο ενώ και οι τρεις ομάδες αναγνώρισαν αντιληπτικά ότι το τετράεδρο της δεύτερης διερεύνησης ήταν κανονικό. Όλες οι ομάδες αιτιολόγησαν μαθηματικά τις απαντήσεις τους με γνώσεις επίπεδης γεωμετρίας.

Η δυνατότητα μεταβολής γωνίας θέασης και επέμβασης εμφανίζοντας ή αποκρύπτοντας επιφάνειες ευνόησαν την μετάβαση από το επίπεδο αντιληπτικής σύλληψης για τους σχηματισμούς, στην σειριακή αναγνώριση του γεωμετρικού τρόπου σύνδεσης των επιμέρους μονοδιάστατων ακμών τους, οδηγώντας σε μαθηματικά αποδεκτές αιτιολογήσεις στην κατεύθυνση λεκτικής σύλληψης. Ενδεικτικά αποσπάσματα των διαπραγματεύσεων καταγράφονται στους διαλόγους που ακολουθούν.

Απόσπασμα διαλόγου 1ης διερεύνησης, κανονική τριγωνική πυραμίδα:

	Πόσες έδρες έχει;	*Ομάδα 3, Δραστηριότητα 2.3, 1ο βήμα, Στίχοι 158-168*
Ε		
Μ8	*Τέσσερις*	
Ε	*Οι έδρες του τι είναι;*	
Μ8	*Ορθογώνια τρίγωνα αφού είναι στα πλάγια του κύβου.*	
Ε	*Άρα και οι τέσσερις έδρες ορθογώνια τρίγωνα;*	
Μ8	*Μισό λεπτό*	
Μ9	*Οι τρεις γύρω γύρω σίγουρα*	
Μ8	*Το μέσα είναι ισόπλευρο*	*Αλλάζουν τη γωνία θέασης*
Μ9	*Ναι, φαίνεται!*	
Ε	*Και το ότι έτσι φαίνεται μας αρκεί;*	
Μ8	*Μισό λεπτό αυτή είναι πλευρά του κύβου και αυτή και αυτή..άρα τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.. ισοσκελή ορθογώνια και είναι και ίσα..οι πλευρές του μέσα τριγώνου είναι υποτείνουσες ίσων ορθογωνίων τριγώνων άρα ίσες!*	

Απόσπασμα διαλόγου 2ης διερεύνησης, κανονικό τετράεδρο:

Μ1	*Τι είναι αυτό; Ισοσκελές... Ισόπλευρο.* 	*Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2.3, 2ο βήμα, Στίχοι 165-171*
Μ2	*Πυραμίδα*	
Μ3	*Τετράέδρο*	
Ε	*Αυτό τι πολύεδρο είναι;*	
Μ1	*Τετράεδρο.*	
Ε	*Τι είδους τρίγωνα είναι οι έδρες του;*	
Μ1	*Ισόπλευρα, αφού οι πλευρές ισούνται με τις διαγώνιους. Κανονικό τετράεδρο*	

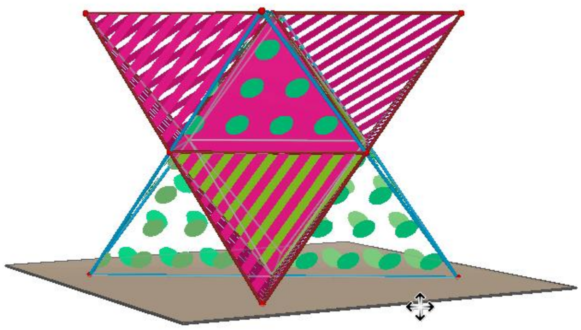
2° Κρίσιμο Επεισόδιο: Επίπεδα νοηματοδότησης δομής αστεροειδούς οκτάεδρου

Στο 1° στάδιο της δραστηριότητας 3: «Stella Octungula» οι μαθητές κλήθηκαν να εξερευνήσουν τη δομή του αστεροειδούς οκτάεδρου. Μία τρισδιάστατη δομή που εντάσσεται σε κύβο και συγκροτείται από κανονικά πολύεδρα. Πριν ανοίξουν το αρχείο του λογισμικού προηγήθηκε μία παρουσίαση όπου οι μαθητές είδαν το στερεό να εμφανίζεται ανοίγοντας το ανάπτυγμα ενός κύβου.

Άμεσα όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν οπτικά ότι πρόκειται για δύο κανονικά τετράεδρα. Σε ερώτηση της εκπαιδευτικού γιατί κανονικά και όχι τυχαία αρχικά οι μαθητές της τρίτης ομάδας είπαν «γιατί λογικά υπάρχει συμμετρία». Διαισθητικά σωστή απάντηση, αλλά αναζητώντας συλλογικά μια πιο έγκυρη μαθηματικά τεκμηρίωση, μαθητές από την πρώτη και τη δεύτερη ομάδα δικαιολόγησαν τον ισχυρισμό τους παρατηρώντας ότι οι ακμές των τετραέδρων είναι διαγώνιοι των τετράγωνων εδρών του εξωτερικού κύβου άρα ίσες. Το επόμενο απόσπασμα είναι ενδεικτικό της ελλιπούς διαπραγμάτευσης της 3ης ομάδας:

M8 Έχεις εδω μία πυραμίδα. Πυραμίδα 1

Ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, Φάση 1, Στίχοι 14-16



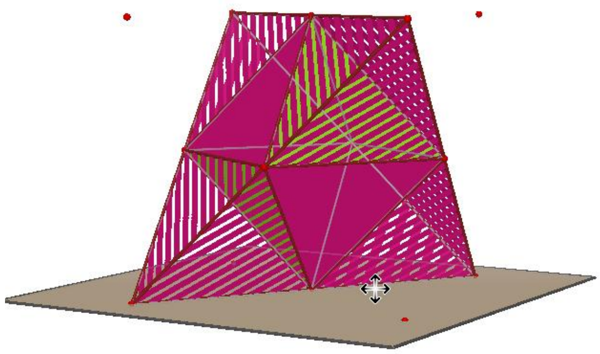
M9 Δεν το λες πυραμίδα..

M8 Κάνε hide να δούμε τον σκελετό

[....]

Ε Παιδιά αυτό τι στερεό είναι; Έχετε καταλήξει κάπου;

Ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, Φάση 1, Στίχοι 42-50



M8 Πυραμίδα.. τρίγωνη..

Ε Πόσες έδρες έχει;

M8 Ε.. τέσσερις. Είναι τετράεδρο. Κανονικό τετράεδρο

Ε Δηλαδή; Τι εννοείς όταν λες κανονικό τετράεδρο;

M8 Όλες οι έδρες είναι ίσες

M10 Ισόπλευρα τρίγωνα ...

Ε Και πως καταλήξατε στο συμπέρασμα ότι είναι κανονικό;

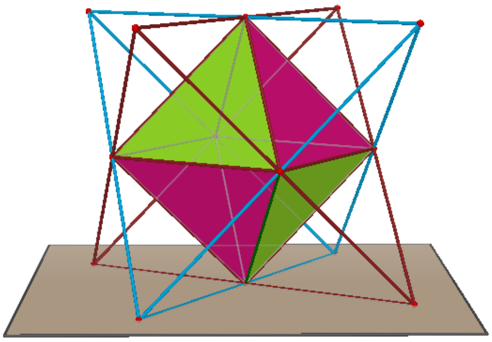
Μ8	*Γιατί λογικά υπάρχει συμμετρία... Απο παντού είναι ίδιο*	*Μεταβάλλει τη γωνία θέασης.*

Οι μαθητές και των τριών ομάδων προχώρησαν σε αποδόμηση του στερεού. Εμφανίστηκε το εσωτερικό οκτάεδρο. Αναγνώρισαν οι μαθητές όλων των ομάδων ότι συγκροτείται από δύο τετράγωνες πυραμίδες. Και οι τρεις ομάδες συμπέραναν ότι το οκτάεδρο είναι κανονικό ακολουθώντας όμως διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες.

Η τρίτη ομάδα παρέμεινε στο επίπεδο της μη εικονικής οπτικοποίησης εξάγοντας τα συμπεράσματα της βασιζόμενη σε οπτικές ενδείξεις που συνδέονται με την αρχετυπική νοερή εικόνα που έχουν διαμορφώσει για το κανονικό πολύεδρο και τη συμμετρία.

Η δεύτερη ομάδα μέσα από μεταβολές της γωνίας θέασης κατέληξε επίσης στο σωστό συμπέρασμα, το οποίο επαλήθευσε με τα εργαλεία του λογισμικού σε σειριακό επίπεδο. Σημειώνεται ωστόσο ότι δεν ερμήνευσε γεωμετρικά το αποτέλεσμα στο πλαίσιο της αξιωματικής γεωμετρίας. Στα παρακάτω αποσπάσματα φαίνεται μέρος των διερευνήσεων της 2ης ομάδας:

Μ4 *Λοιπόν, έχουμε να κάνουμε αυτό τώρα!* *Ομάδα 2, Δραστηριότητα 3, Φάση 1, Στίχοι 55-62*



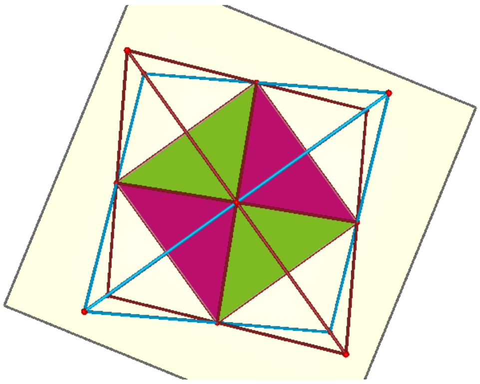
Μ5 *Έχουμε έναν ρόμβο. Βασικά δύο ανάποδες πυραμίδες. Ο ρόμβος είναι σαν δύο πυραμίδες ανάποδες. Η μία πάνω στην άλλη.*

Μ4 *Ρωτάει τι στερεά είναι...*

Μ5 *Ωραία. Τα έξω είναι κανονικά τετράεδρα.*

Μ4 *Το μέσα .... κάτσε καταρχάς οκτάεδρο*

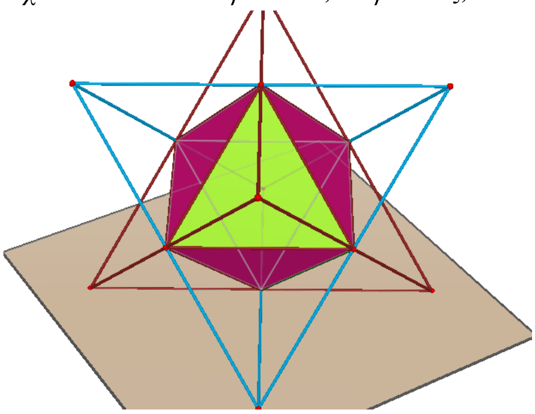
Μ5 *Δεν είναι κανονικό, βλέπεις τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.* *Μεταβάλλει τη γωνία θέασης*



Για γύρνα το πάλι.. όχι...

M4 *Να διώξω και το μπλε.....;*

M5 *Όχι κάτσε...Ισόπλευρα είναι, να βλέπεις;* *Μεταβάλλει τη γωνία θέασης*



Αν το δεις αυτά είναι 4 ίδια τρίγωνα. Αφού το έξω είναι ισόπλευρο δε θα είναι και τα μέσα το ίδιο;

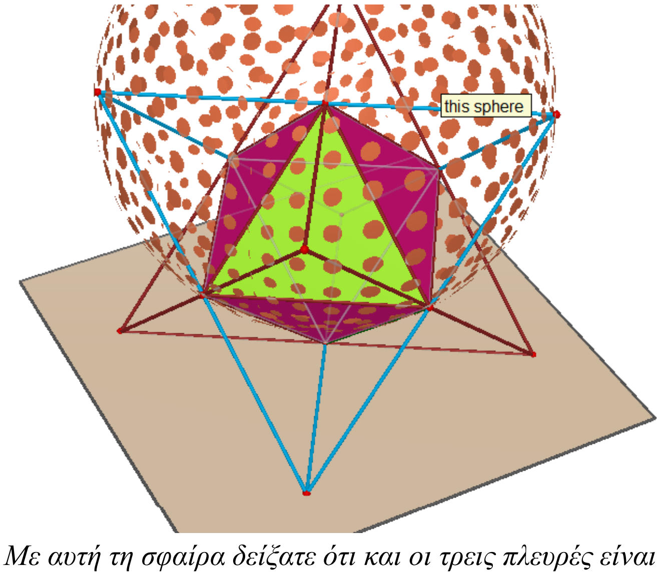
Αρχικά οι μαθητές διερεύνησαν τον σχηματισμό σε αντιληπτικό επίπεδο και κατέληξαν σε σωστή υπόθεση αξιοποιώντας τη δυνατότητα μεταβολής της γωνίας θέασης. Η επαλήθευση του ισχυρισμού μέσα από τα εργαλεία του λογισμικού της 2^{ης} ομάδας φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

Ε *Τελικά τι στερεό είναι το εσωτερικό;* *Ομάδα 2, Δραστηριότητα 3, Φάση 1, Στίχοι 78- 85*

M4 *Κανονικό οκτάεδρο*

Ε *Πως το δείξατε;*

M4 *Με σφαίρα όλες είναι ίσες με την ακτίνα*



Ε *Με αυτή τη σφαίρα δείξατε ότι και οι τρεις πλευρές είναι ίσες;*

M5 *Όχι. Οι δύο, αλλά θα πάρουμε και άλλη σφαίρα από την κορυφή και αυτή η πλευρά ίση με αυτή από την1η σφαίρα και αυτή με αυτή από τη 2^{η} άρα όλες μεταξύ τους*

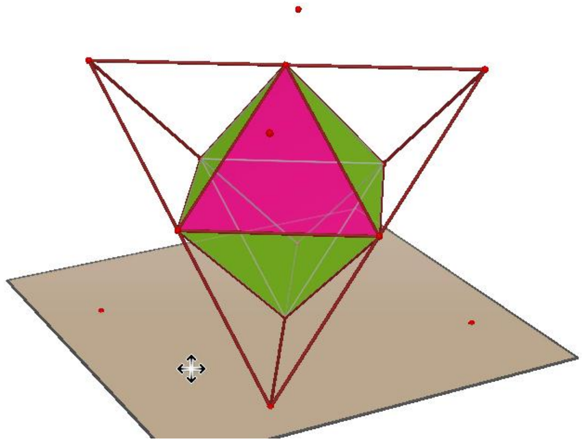
Ε *Ωραία. Και πως θα το αιτιολογήσετε μαθηματικά;*

M5 *Ε; ... με σφαίρα...*

Η πρώτη ομάδα έφτασε στο υψηλότερο επίπεδο μαθηματικοποίησης, εκτελώντας νοερές επεκτάσεις σε λειτουργικό επίπεδο, ενώ σε λεκτικό τεκμηριώνοντας τα ευρήματα των διερευνήσεών τους με γνώσεις επίπεδης γεωμετρίας, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:.

Ομάδα 1, Δραστηριότητα 3, Φάση 1, Στίχοι 74-80

Ε *Παιδιά, τα συμπεράσματα σας για τα στερεά μέχρι στιγμής;*



Μ1 *Λοιπόν έχουμε καταλήξει. Έχουμε δύο κανονικά τετράεδρα, το ένα μέσα στο άλλο.*

Ε *Γιατί κανονικά;*

Μ1 *Όλες οι πλευρές τους είναι οι διαγώνιοι του κύβου. Εδώ προεκτεινόταν..*

Ε *Οι διαγώνιοι του κύβου;*

Μ1 *Των εδρών εννοώ.. όπως και στο προηγούμενο...*

Ε *Και το εσωτερικό;*

Μ1 *Κανονικό οκτάεδρο.. να πω.. γιατί αυτά είναι τα μέσα των πλευρών, το ξέρουμε γιατί οι διαγώνιοι διχοτομούνται.. Άρα είναι το μικρό τρίγωνο το κόκκινο είναι όμοιο με το μεγάλο, με λόγο ομοιότητας 2.*

Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Στην περίπτωση της αναγνώρισης και κατηγοριοποίησης τετραέδρων οι μαθητές όλων των ομάδων προσπέρασαν το επίπεδο αντιληπτικής σύλληψης για τα στερεά, αναγνωρίζοντας οπτικά και αποδίζοντας τη σωστή ονομασία στους σχηματισμούς. Ευνοήθηκε η σειριακή και η λεκτική σύλληψη των σχημάτων από όλες τις ομάδες επιχειρηματολογώντας με βάση την προϋπάρχουσα γνώση τους από την επίπεδη γεωμετρία για το είδος των τριγωνικών εδρών κάθε τετράεδρου.

Η σταδιακή διαστατική αποδόμηση του αστεροειδούς οκτάεδρου εμφάνισε σχέσεις που με στατικά αναπαραστασιακά μέσα δεν είναι εμφανείς, διαφωτίζοντας τον τρόπο σύνδεσης των μονοδιάστατων ακμών του στην κατεύθυνσης της σειριακής σύλληψης του σχηματισμού. Ωστόσο, μόνο δύο από τις τρεις ομάδες έφτασαν στο επίπεδο της λεκτικής σύλληψης, τεκμηριώνοντας γεωμετρικά ότι τα τετράεδρα είναι όλα κανονικά. Επίσης ενώ και οι δύο ομάδες αναγνώρισαν ότι το εσωτερικό οκτάεδρο είναι επίσης κανονικό μόνο η πρώτη ομαδα το τεκμηρίωσε με γεωμετρικούς όρους ενώ η δεύτερη μόνο το διαπίστωσε μέσα από τα εργαλεία του λογισμικού. Η τρίτη ομάδα θεώρησε αυθαίρετα ότι όλα τα εμπλεκόμενα πολύεδρα είναι κανονικά στηριζόμενη σε οπτικές ενδείξεις συμμετρίας.

Η δυνατότητα μεταβολής γωνίας θέασης ευνόησε τη διαδικασία παραγωγής υποθέσεων. Παρέχοντας τη δυνατότητα περιστροφής των στερεών, οι έδρες μελετήθηκαν από διαφορετικές οπτικές γωνίες, κάτι που θα ήταν αδύνατο με στατικά παραδοσιακά μέσα. Επίσης η λειτουργία «απόκρυψη» που οι μαθητές εφάρμοσαν σε κάποιες έδρες των στερεών, επέτρεψε να έχουν πρόσβαση στο εσωτερικό τους και ευνόησε τη διαδικασία αναγνώρισης των σχέσεων μεταξύ των ακμών τους. Ωστόσο παρόλο που οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα αυξομοίωσης της κλίμακας των σχηματισμών σε καμία περίπτωση δεν αξιοποίησαν αυτή τη δυνατότητα για να επαληθεύσουν τις υποθέσεις τους.

6.2.3 Η ευρετική εξερεύνηση του κύβου.

Στη δραστηριότητα 2.2: «Αναγνώριση κύβου» οι μαθητές κλήθηκαν να διερευνήσουν με τα εργαλεία που τους παρέχει το λογισμικό το είδος ενός κατασκευασμένου εξαέδρου. Αφού τα εργαλεία μέτρησης είχαν αποσυρθεί οι μαθητές για να ελένξουν αν οι έδρες είναι ανα δύο κάθετες και οι ακμές ίσες, αναγκαστικά έπρεπε να προβούν σε κάποιας μορφής αναδιοργάνωση του σχήματος.

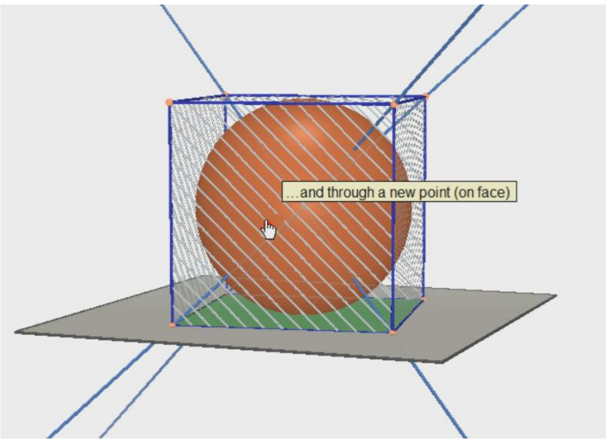
Η αυτόματη απάντηση όλων των μαθητών ήταν πως πρόκειται για κύβο και όντως ήταν αναπαράσταση κύβου. Όπως ήταν αναμενόμενο αρχικά οι μαθητές έδειξαν ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες. Σημειώνουμε ότι και οι τρεις ομάδες το έδειξαν με εργαλείο τη σφαίρα και όχι τον κύκλο. Στην ερώτηση το συμπέρασμα αυτό τι καθιστά τις έδρες του, οι μαθητές μετά από σκέψη συμπλήρωσαν ότι έπρεπε και όλες οι γωνίες να είναι ορθές. Αφού το εργαλείο μέτρησης είχε αποσυρθεί αναζήτησαν διαφορετικές στρατηγικές.

<u>1^{ο} Κρίσιμο Επεισόδιο: Αποτυχία στην επιλογή στρατηγικής</u>

Επηρεασμένοι από συζήτηση που είχε προηγηθεί στη δραστηριότητα 2.1: «Κατασκευή κύβου» και ίσως έχοντας κάποιες υφιστάμενες στερεοτυπικές εικόνες για τα γεωμετρικά αντικείμενα, οι μαθητές εκτίμησαν ότι αρκούσε να δείξουν ότι εγγράφεται σφαίρα μέσα στο στερεό, στρατηγική που δεν είχε εμφανιστεί στην πιλοτική εφαρμογή. Μάλιστα θεώρησαν ότι αποκλειστικά η εγγραφή της σφαίρας στο στερεό αποδείκνυε ότι πρόκειται για κύβο αφού «οι απέναντι έδρες απέχουν εξίσου» όπως είπαν χαρακτηριστικά. Εδώ προέκυψαν δύο κρίσιμα ζητήματα. Το πρώτο είναι ότι αφού έφεραν το κέντρο της σφαίρας η μία από τις τρεις ομάδες κατασκεύασε τη σφαίρα «στο περίπου» δηλαδή χωρίς να ορίσουν ακτίνα αλλά με σύρσιμο του σημείου της επιφάνειας της σφαίρας ώστε αυτή να φαίνεται ότι εφάπτεται στις έδρες του στερεού. Επίσης ενώ το λογισμικό παρείχε εργαλείο τομής επιφάνειας με επίπεδο, που χρησιμοποιώντας το έβλεπαν αν η σφαίρα και οι έδρες έχουν κοινά σημεία, κοινή καμπύλη ή αν δεν τέμνονται, και οι μαθητές το είχαν χρησιμοποιήσει σε προηγούμενη δραστηριότητα, θεώρησαν ότι η οπτική επιβεβαίωση ήταν αρκετή. Το δεύτερο ζήτημα που εμφανίστηκε έχει να κάνει με την επιστημονική ορθότητα αυτού του συλλογισμού. Το παρακάτω απόσπασμα είναι ενδεικτικό της τελικής διαπραγμάτευσης των μαθητών:

Μ1 Το σημείο τομής των διαγωνίων.. το κάνω... *Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2.2, Στίχοι 139-147*

Μ2 Όχι να χωράει μέσα και να εφάπτεται...



Μ3 Κυρία το κλείσαμε!

Ε Και αν εγγράφεται σφαίρα γιατί είναι κύβος το στερεό;

Μ1 Γιατι οι απέναντι πλευρές απέχουν όσο η διάμετρος

Ε Ναι, η απόσταση των εδρών ανα δύο είναι η διάμετρος της σφαίρας. Αυτό σημαίνει ότι έχω κύβο;

Μ1 Ε.. ναι αφού ολες απέχουν το ίδιο...

Ε Αν πάρω μία σφαίρα φέρω τρεις διαμέτρους και τα κάθετα επίπεδα στα άκρα των διαμέτρων θα έχω κύβο;;

Μ1 Ναι. Αφού οι απέναντι έδρες θα ισαπέχουν

2ο Κρίσιμο Επεισόδιο: Διαπραγμάτευση συνθηκών εγγραφής σφαίρας σε εξάεδρο

Στην 1η ώρα της τελευταίας συνάντησης-απολογισμού που πραγματοποιήθηκε τέθηκε προς διερεύνηση το ερώτημα:

- Αν σε ένα εξάεδρο εγγράφεται σφαίρα τότε το εξάεδρο είναι απαραίτητα κύβος;

Αρχικά το ερώτημα προσεγγίστηκε κατεβαίνοντας μία διάσταση και διατυπώνοντας ένα συναφές ερώτημα επίπεδης γεωμετρίας:

- Αν σε ένα τετράπλευρο εγγράφεται κύκλος τότε το τετράπλευρο είναι απαραίτητα τετράγωνο;

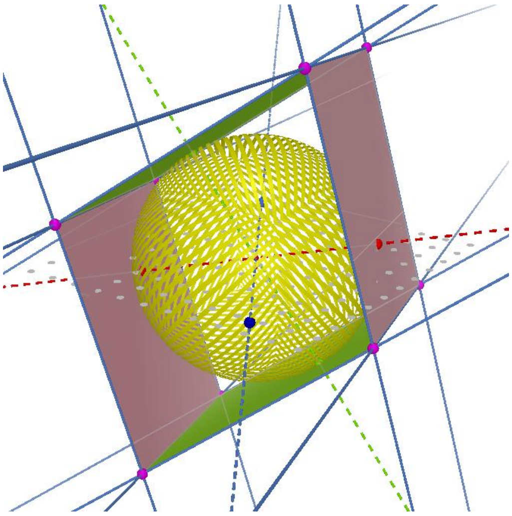
Οι μαθητές έπειτα από μεταξύ τους συζήτηση σχεδίασαν έναν κύκλο και δύο σημεία εξωτερικά (εδώ δεν έγινε λόγος για τους περιορισμούς ως προς τη θέση των σημείων γιατί δεν ήταν το ζητούμενο) έφεραν τα εφαπτόμενα τμήματα και σχεδίασαν ένα κυρτό τετράπλευρο, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το τετράπλευρο μπορεί να είναι «τυχαίο».

Έπειτα τέθηκε ένα δεύτερο ερώτημα επίπεδης πάλι γεωμετρίας από την ερευνήτρια:

- Αν σε ένα τετράπλευρο με ίσες πλευρές εγγράφεται κύκλος τότε το τετράπλευρο είναι απαραίτητα τετράγωνο;

Εδώ ένας μαθητής της 1ης ομάδας κατευθείαν είπε ότι το τετράπλευρο αφού έχει ίσες πλευρές θα είναι ρόμβος. Αν και οι μαθητές αρχικά είπαν οτι λογικά θα είναι το τετράγωνο, ενεπλάκησαν στη διαδικασία διερεύνησης αν και σε ρόμβο εγγράφεται κύκλος ή μόνο σε τετράγωνο καταλήγοντας στο σωστό συμπέρασμα με γνώσεις ισότητας τριγώνων.

Κρατώντας τα συμπεράσματα από την προηγούμενη διερεύνηση επανήλθαμε στο αρχικό ερώτημα. Εκτιμώντας ότι μία τέτοιου είδους διερεύνηση είναι αρκετά προχωρημένη για μαθητές που είχαν οχτώ ώρες εμπειρίας τόσο με τις γεωμετρικές έννοιες της τρισδιάστατης γεωμετρίας αλλά κυρίως με το λογισμικό η κεντρική κατασκευή έγινε από την ερευνήτρια μπροστά στους μαθητές. Μετά οι μαθητές είχαν πρόσβαση στο ασύρματο mouse για να κάνουν όποιους χειρισμούς επιθυμούσαν στην κατασκευή. Η ερευνήτρια αρχικά κατασκεύασε μία σφαίρα, τρεις διαμέτρους της και τα κάθετα επίπεδα στα άκρα των διαμέτρων. Οι μαθητές παρακολουθούσαν την διαδικασία κατασκευής. Έπειτα χειριζόμενοι τον παραγόμενο σχηματισμό επιβεβαίωσαν ότι το εξάεδρο δεν είναι κύβος, και από την κατασκευή ήταν σε θέση να συμπεράνουν ότι η εικασία τους: «αφού οι απέναντι έδρες απέχουν εξίσου το εξάεδρο είναι κύβος» ήταν λάθος. Ένας μαθητής της 1ης ομάδας παρατήρησε ότι για να είναι κύβος οι τρεις διαγώνιοι θα πρέπει να «σχηματίζουν σταυρό», δηλαδή να είναι κάθετες μεταξύ τους.



Εικόνα 48 Κατασκευή εξάεδρου στο οποίο εγγράφεται σφαίρα.

Ο ίδιος μαθητής ρώτησε: Αν είχαμε δείξει ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες και επιπλέον ότι εγγράφεται σφαίρα αυτά αρκούν για να είναι κύβος ή δεν ξέρουμε; Αυτό είναι δύσκολο ερώτημα και μετασχηματίστηκε από την ερευνήτρια στο ακόλουθο: Εκτός από τον κύβο υπάρχουν άλλα εξάεδρα με όλες τις ακμές ίσες; Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ένα αυτοσχέδιο κυβικό πλέγμα από καλαμάκια αναγνώρισαν την περίπτωση του κυβοειδούς που έχει δύο απέναντι έδρες ρόμβους και τις υπόλοιπες τετράγωνα και προκύπτει στρέφοντας το ένα ζεύγος απέναντι εδρών. Με τις υφιστάμενες γνώσεις επίπεδης γεωμετρίας και τριγωνομετρίας απέδειξαν ότι οι απέναντι έδρες δεν ισαπέχουν, και συμπέραναν ότι στο στερεό δεν εγγράφεται σφαίρα. Όμως δεν προχώρησαν σε περαιτέρω μετασχηματισμούς του αρχικού κυβικού πλέγματος, δηλαδή σε ταυτόχρονες στροφές περισσότερων του ενός ζεύγους απέναντι εδρών, οπότε δε βρήκαν το ρομβικό κυβοειδές που έχει όλες τις έδρες του ρόμβους, και ήταν ο στόχος όταν τέθηκε το ερώτημα αν σε ρόμβο εγγράφεται κύκλος. Ωστόσο αν και οι μαθητές δεν έφτασαν σε τέτοιο επίπεδο μαθηματικοποίησης, ακολούθησαν μία πορεία με υψηλά στάδια νοηματοδότησης. Σε διαφορετικό σχεδιασμό δραστηριοτήτων που θα ενέπλεκαν στροφές και ανακλάσεις είναι πιθανό να μπορούσαν να νοηματοδοτήσουν τους μετασχηματισμούς του κύβου.

Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Σε αυτή τη δραστηριότητα, αν και η στρατηγική των μαθητών δεν ήταν αναμενόμενη κατά τον σχεδιασμό της δραστηριότητας, εμφανίστηκαν αντιλήψεις των μαθητών που παρουσιάζουν ερευνητικό ενδιαφέρον και δείχνουν να συνδέουν τη σφαίρα με αποκλειστικά συμμετρικές δομές. Μέσα από τη συζήτηση στην ολομέλεια, παράλληλες διερευνήσεις συναφών καταστάσεων επίπεδης γεωμετρίας και εξερευνήσεις στο δυναμικό τρισδιάστατο σχήμα, οι μαθητές οδηγήθηκαν σε γενικεύσεις για τα εξάεδρα που περιγράφονται σε σφαίρα.

Ο δυναμικός χειρισμός των διαμέτρων της εγγεγραμμένης σφαίρας και η παρατήτηρηση της μεταβολής του σχηματισμού, που προκύπτει από την εξαρτώμενη κίνηση των αντιδιαμετρικών εδρών του εξωτερικού εξαέδρου, οδήγησε όλους τους μαθητές σε γενικεύσεις που έρχονταν σε αντίθεση με την προηγούμενη διαισθητική αντίληψη τους, και στον προσδιορισμό από έναν μαθητή της συνθήκης ώστε το εξάεδρο να είναι κύβος. Τα συμπεράσματα αυτής της διερεύνησης δύσκολα θα ήταν εμφανή σε ένα στατικό αναπαραστασιακά περιβάλλον.

6.3 Κατασκευή νοημάτων μέσα από δραστηριότητες κατασκευής

Σε αυτή την παράγραφο διερευνήθηκαν τα νοήματα που αναδύθηκαν μέσα από τη γεωμετρική ερμηνεία των κατασκευαστικών περιορισμών ενός σχηματισμού. Οι κατασκευαστικές διαδικασίες απαιτούν από τον μαθητή σε κάθε βήμα να ελέγχει αν αυτό είναι σύμφωνο με το μαθηματικό πλαίσιο της δομής, γιατί αλλιώς η κατασκευή στη δοκιμή συρσίματος καταρρέει. Συνεπώς η νοηματοδότηση σε αντιληπτικό επίπεδο καθίσταται ανεπαρκής. Οι κατασκευαστικές δραστηριότητες στοχεύουν στην ανακάλυψη των οργανωτικών περιορισμών του γεωμετρικού αντικειμένου, οι οποίοι δεν είναι εμφανείς στο σχέδιο ή το φυσικό αντικείμενο. Ευνοείται η ανάπτυξη όχι μόνο της σειριακής αλλά και της λεκτικής σύλληψης του παραγόμενου σχηματισμού, καθώς μεταβαίνοντας από το εμπειρικό στο θεωρητικό επίπεδο οι μαθητές έμμεσα εμπλέκονται σε διαδικασίες απόδειξης. Αυτό σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας συνίσταται στη μετατόπιση της εστίασης από το παραγόμενο σχέδιο που επικυρώνεται μέσω της δοκιμής συρσίματος στη διαδικασία που το παρήγαγε και επικυρώνεται με όρους αξιωματικής γεωμετρίας..

Εστιάζοντας στις στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές κατά την κατασκευή των γεωμετρικών στερεών, γενική παρατήρηση είναι ότι όλες οι ομάδες για να κατασκευάσουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα κατασκεύασαν σφαίρες και όχι κύκλους. Συμπέρασμα αντίθετο με έρευνα του Hattermann 2008. Ωστόσο δημιουργείται το ερώτημα μήπως οφείλεται σε αδυναμία μεταφοράς γνώσης, δηλαδή σε κάποια πεποίθηση ότι οι κατασκευές τρισδιάστατων αντικειμένων πρέπει να γίνονται αποκλειστικά με τρισδιάστατα μέσα.

<u>$1^{ο}$ Κρίσιμο Επεισόδιο: Επιλογή συμμετρικών κατασκευαστικών διαδικασιών</u>

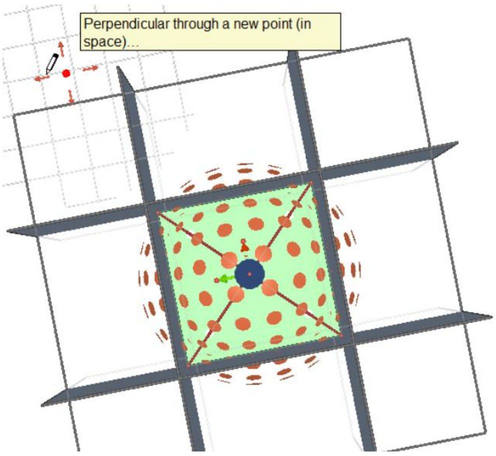
<u>$1^{ο}$ συμβάν:</u>

Στη δραστηριότητα 2.1: «Κατασκευή κύβου» ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν έναν κύβο με βάση δοσμένο τετράγωνο στο βασικό επίπεδο. Αυτή η δραστηριότητα αν και προφανής στα μάτια ενός εκπαιδευτικού δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές.

Άμεσα οι μαθητές όλων των ομάδων κατασκεύασαν τα κάθετα επίπεδα στις πλευρές του τετραγώνου της βάσης και αναγνώρισαν ότι το κεντρικό πρόβλημα ήταν να βρουν το ύψος του κύβου. Απέκρυψαν τα επίπεδα και αναζήτησαν τρόπο έυρεσης του ύψους. Οι μαθητές των δύο πρώτων ομάδων αρχικά κατασκεύασαν σφαίρα με κέντρο το κέντρο του τετραγώνου και διάμετρο τη διαγώνιό του.

Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2.1, Στίχοι 10 - 24

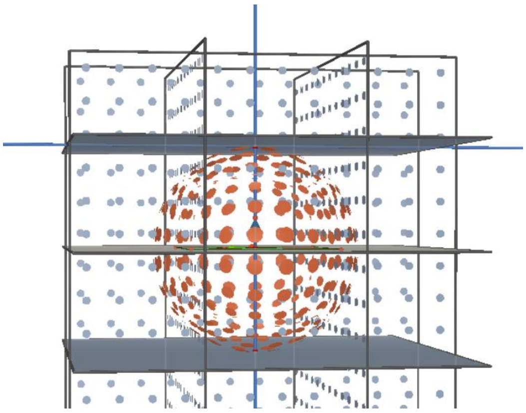
M1 Κάτι με σφαίρα πρέπει να κάνουμε
M2 Είστε σίγουροι ότι θα βοηθήσει η σφαίρα;
M1 Πρέπει να φέρουμε επίπεδα
M2 Πήγες να το κάνεις πριν
E Παιδιά αλλάξτε την επιφάνεια της σφαίρας για να βλέπετε μέσα
M1 Λοιπον συνεχίζουμε;
M2 Φέρε τα κάθετα
M1 Έγινε!!



M2 Τέλειο.. άλλαξε το surface να βλέπουμε μέσα και πάρε ένα point στην κάθετη
M2 Θα πάρουμε την κάθετη..
M1 Στην κορυφή της σφαίρας
M1 Το κανα, βλέπεις;
M2 Έβαλες το point
M1 Ναι... το κάναμε.

M2 Φέρνεις και από κάτω...

M1 Κυρία το έκανα...



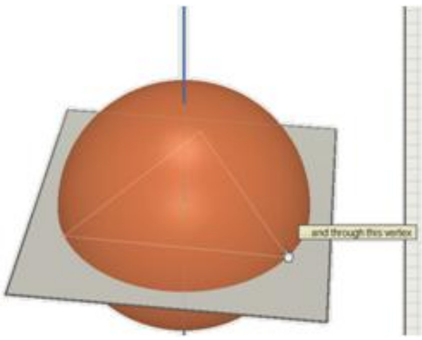
<u>2^{ο} συμβάν:</u>

Αντίστοιχα οι μαθητές λειτούργησαν στην δραστηριότητα 2.4: «Κατασκευή κανονικού τετραέδρου». Σε αυτή τη δραστηριότητα καταγράφηκαν διαφορετικές στρατηγικές μεταξύ των ομάδων για την κατασκευή του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης, οι οποίες δεν αφορούν όμως στην έρευνα, και όλες οι ομάδες αναγνώρισαν ότι η τέταρτη κορυφή θα ανήκει στην ευθεία που είναι κάθετη στο βασικό επίπεδο στο κέντρο βάρους του τριγώνου.

Στις αρχικές όμως κατασκευές, οι μαθητές της πρώτης και της δεύτερης ομάδας θεώρησαν ότι η τέταρτη κορυφή θα είναι η τομή της κάθετης ευθείας με τη σφαίρα κέντρου το κέντρο βάρους του τριγώνου της βάσης που ακτίνας την απόσταση του κέντρου από μία κορυφή του. Η τρίτη ομάδα έχοντας κατασκευάσει το ισόπλευρο τρίγωνο στο βασικό επίπεδο μέσα από κανονικό εξάγωνο θεώρησε ότι η τέταρτη κορυφή θα ήταν το σημείο τομής της κάθετης ευθείας με τη σφαίρα που «ορίζεται» από τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου, αλλά δεν μπορούσε να εξηγήσει γιατί το λογισμικό δεν κατασκεύαζε τη σφαίρα.

M2 Αν πάρεις έναν κύκλο (εννοεί σφαίρα) που να εφάπτεται στα τρία.. ναι αυτό — *Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2.4, Στίχοι 183-184*

M1 Τώρα διώχνουμε τη σφαίρα! Κυρία το κάναμε!



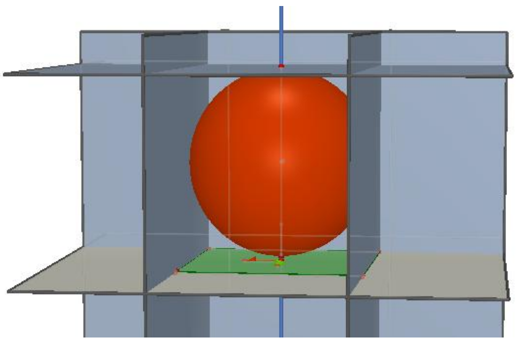
3^o συμβάν:

Στη δραστηριότητα 3: «stella octangula», καταγράφεται ξανά η επιμονή σε συμμετρικές διαδικασίες και δοθείσης της επιλογής συνθετικά από το εσωτερικό προς το εξωτερικό και όχι το αντίστροφο.

Οι μαθητές αν και είχαν παρατηρήσει ότι το στερεό προκύπτει από τομές κύβου με επίπεδα, και ενώ είχε προηγηθεί η δραστηριότητα 2.3: «Τετράεδρα μέσα σε κύβο» δεν επέλεξαν τον τρόπο κατασκευής μέσα από τις διαγωνίους των τετράγωνων εδρών του κύβου. Από τους δέκα συμμετέχοντες μόνο ένας πρότεινε το «κόψιμο του κύβου», αλλά θεώρησε και αυτός ότι η κατασκευή από τα εσωτερικά του δομικά στοιχεία είναι πιο εύκολη. Επίσης, αν και είχε προηγηθεί και η κατασκευή του κανονικού τετραέδρου στη δραστηριότητα 2.4, και ενώ οι μαθητές είχαν αναγνώρισει κατά την διερεύνηση του στερεού ότι πρόκειται για δύο συμμετρικά κανονικά τετράεδρα, σε καμία ομάδα δεν προτάθηκε αυτή η μέθοδος κατασκευής. Αυτό αφενός ενισχύει την υπόθεση ότι οι μαθητές προτιμούν να εργάζονται με δομές που παρουσιάζουν αξονική συμμετρία, αφετέρου υποδηλώνει ότι οι μαθητές δεν ήθελαν να μεταβάλουν τον προσανατολισμό του κατασκευαζόμενου στερεού σε σχέση με τον αρχικό, παρόλο που είχε ειπωθεί ρητά ότι μπορούσαν να αλλάξουν και προσανατολισμό και θέση. Όλες οι ομάδες επέλεξαν να κατασκευάσουν το κεντρικό κανονικό οκτάεδρο και τα κανονικά τετράεδρα περιμετρικά του, επιλέγοντας να εργαστούν από το εσωτερικό προς το εξωτερικό και αντιμετωπίζοντας το στερεό σαν ένα παζλ χτίζοντας προοδευτικά από μέσα προς τα έξω τις επιμέρους δισδιάστατες σχηματικές μονάδες.

2^o Κρίσιμο Επεισόδιο: Κατασκευές χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο

Στη δραστηριότητα 2.1: «Κατασκευή κύβου», οι μαθητές της τρίτης ομάδας κατασκεύασαν εξαρχής σφαίρα με κέντρο σε ευθεία κάθετη στο βασικό επίπεδο στο κέντρο του τετραγώνου της βάσης και ακτίνα ώστε να «εφάπτεται» στις έδρες που ήταν κάθετες στης πλευρες του τετραγώνου και μέ σύρσιμο του κέντρου τη σφαίρας την έφεραν σε θέση που να «δείχνει ότι εφάπτεται» στο βασικό επίπεδο. Δηλαδή δεν κατασκεύασαν τη σφαίρα με όρους γεωμετρικούς αλλά αρκέστηκαν στην οπτική επιβεβαίωση, γεγονός που υποδειλώνει μία αδυναμία της συγκεκριμένης ομάδας στη μετάβαση από την αντιληπτική στη σειριακή σύλληψη.



Εικόνα 49 Στάδιο της κατασκευής κύβου της 3ης ομάδας.

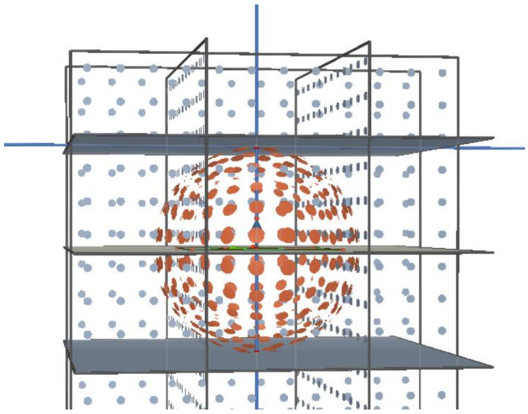
Επίσης, στην κατασκευή του εσωτερικού κανονικού οκτάεδρου για τη δραστηριότητα 3: «stella octangula», οι μαθητές και των τριών ομάδων δεν αξιοποίησαν επαρκώς τη μαθηματική διάσταση των ψηφιακών εργαλείων, κατασκευάζοντας ένα οκτάεδρο με όλες τις έδρες του ίσα αλλά ισοσκελή τρίγωνα

3^{ο} Κρίσιμο Επεισόδιο: Νοηματοδοτήσεις που προέκυψαν από την ανατροφοδότηση του εργαλείου

1^{ο} συμβάν:

Στην περίπτωση της κατασκευής κύβου οι δύο ομάδες, που σχεδίασαν σφαίρα με κέντρο το κέντρο του τετραγώνου στο βασικό επίπεδο, αντιλήφθηκαν το λάθος της κατασκευής τους μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης χωρίς παρέμβαση του εκπαιδευτικού. Η ερευνήτρια παρενέβει για να υπογραμμίσει ότι αν θέλουν να χρησιμοποιήσουν σφαίρα για την κατασκευή ίσων μηκών πρέπει να σκεφτούν ποια μήκη θέλουν να είναι ίσα, ώστε να τοποθετήσουν κατάλληλα το κέντρο της. Έπειτα και χωρίς επιπλέον παρέμβαση οι μαθητές της πρώτης και της δεύτερης ομάδας κατασκεύασαν τον κύβο με σφαίρα κέντρου την μία κορυφή του τετραγώνου και ακτίνα την πλευρά του. Στο ακόλουθο απόσπασμα φαίνεται η απόρριψη της αρχικής κατασκευής από τους μαθητές της πρώτης ομάδας.

Μ2 Τώρα ουσιαστικά έχεις κάνει δύο κύβους — *Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2.1, Στίχοι 25 - 35*

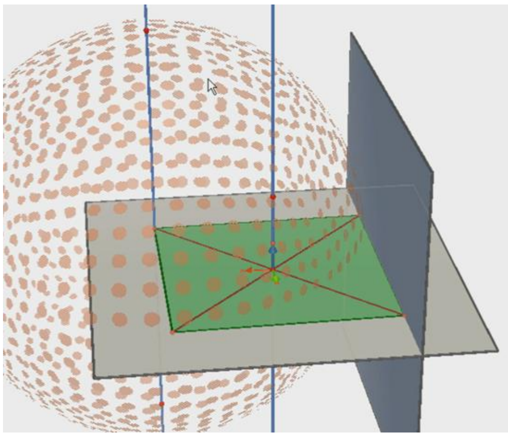


Μ1 Δεν είναι δύο οι κύβοι. Ένας είναι. Αυτός...μισό λεπτό — *Αλλάζει τη γωνία θέασης*
Μ2 Δεν έχεις έναν εδώ και έναν από κάτω;
Μ1 Μισό... — *Αλλάζει τη γωνία θέασης*
Μ3 Δεν είναι κύβος
Μ2 Δεν έπρεπε να είναι πιο κάτω η σφαίρα,
Μ1 Έχω κάνει λάθος τη σφαίρα παιδιά
Μ2 Η σφαίρα έπρεπε να είναι πιο μικρή;
Μ3 Δεν έπρεπε να χωράει μέσα στον κύβο;
Μ2 Ναι αυτό περισσεύει...

Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται η νέα στρατηγική της ίδιας ομάδας. Οι μαθητές πλέον τοποθέτησαν το κέντρο της σφαίρας όχι σε νοητό άξονα συμμετρίας του στερεού αλλά στη μία κορυφή της τετράγωνης βάσης.

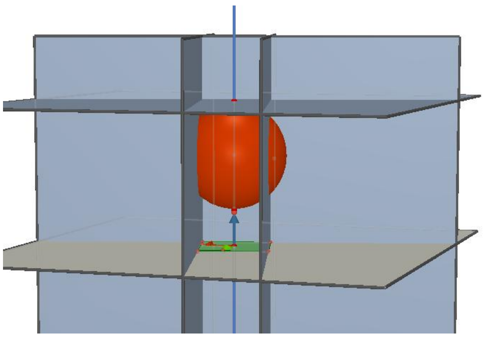
M3	*Να βάλουμε τη σφαίρα μέσα στον κύβο;*	*Ομάδα 1,* *Δραστηριότητα 2.1,* *Στίχοι 79 - 86*

M2 *Αυτό το κάναμε και δε βγήκε...*
M1 *Λοιπόν. Θα πρέπει να φέρουμε μία κάθετη από εδώ*
M2 *Θα περνάει από το κέντρο της σφαίρας...*
M1 *Ναι ακριβώς*
M2 *Στο endpoint*
M1 *Έγινε. Λοιπόν, το κάνουμε;*
M2 *Ναι, το ύψος είναι αυτό.*



2° συμβάν:

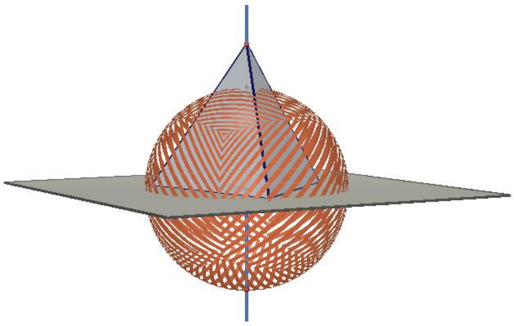
Στη δραστηριότητα 2.1: «κατασκευή κύβου», η κατασκευή της τρίτης ομάδας κατέρρευσε στη δοκιμή συρσίματος. Οι μαθητές της τρίτης ομάδας αναγνώρισαν την ανάγκη προσδιορισμού του κέντρου και της ακτίνας της εγγεγραμμένης σφαίρας. Στη συζήτηση που ακολούθησε στην ολομέλεια οι μαθητές συνεργαζόμενοι βρήκαν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το κέντρο της εγγεγραμμένης σφαίρας και προτείναν μία μαθηματικά συνεπή κατασκευή.



Εικόνα 50 Κατάρρευση της κατασκευής της 3ης ομάδας στη δοκιμή συρσίματος.

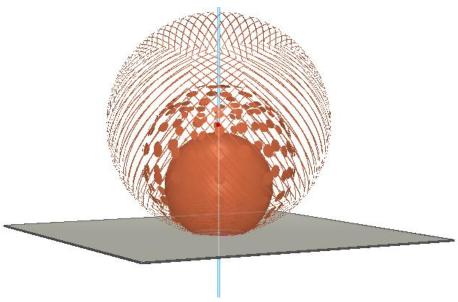
3° & 4° συμβάν:

Για την κατασκευή κανονικού τετραέδρου στην πρώτη περίπτωση, η ερευνήτρια στο laptop που ήταν συνδεδεμένο στον προτζέκτορα, επανέλαβε τα βήματα της κατασκευής των μαθητών των δύο πρώτων ομάδων και έπειτα με το εργαλείο κατασκευής κανονικών πολυέδρων κατασκεύασε το κανονικό τετράεδρο με έδρα το ισόπλευρο τρίγωνο στο βασικό επίπεδο. Οι μαθητές παρατήρησαν ότι η τέταρτη κορυφή ήταν εκτός της σφαίρας και αναζήτησαν τον λόγο που η κατασκευή ήταν λάθος. Έπειτα από προτροπή της ερευνήτριας να σκεφτούν με το κέντρο βάρους, στο οποίο συνεχώς αναφέρονταν κατά τη διαδικασία κατασκευής, διαπίστωσαν ότι η κατασκευή δεν ήταν σωστή καθώς το κέντρο βάρους του κανονικού τετραέδρου είναι εσωτερικό σημείο του, και λόγω συμμετρίας θα ισαπέχει από τις κορυφές του στερεού. Παρατήρησαν ότι σύμφωνα με την κατασκευή τους, το σημείο που απείχε εξίσου από τις τέσσερις κορυφές ήταν το κέντρο της σφαίρας, το οποίο όμως ήταν σημείο της μίας έδρας του στερεού.



Εικόνα 51 Επαλήθευση αστοχίας στην κατασκευή της 4ης κορυφής του κανονικού τετραέδρου.

Για τη δεύτερη περίπτωση αναζητήθηκε ερμηνεία για το γεγονός ότι το λογισμικό δεν μπορούσε να κατασκευάσει τη σφαίρα που «ορίζεται» από έναν κύκλο. Αυτό στάθηκε αφορμή για υπενθύμιση ότι το λογισμικό εκτελεί κατασκευές όταν είναι μονοσήμαντα ορισμένες, στην κατεύθυνση της ερμηνείας των περιορισμών του λογισμικού με όρους μαθηματικούς. Οι μαθητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι οι σφαίρες που διέρχονται από έναν κύκλο είναι άπειρες σκεφτόμενοι αντίστοιχα με το ότι από δύο σημεία διέρχονται άπειροι κύκλοι. Σε αυτή την κατεύθυνση αξιοποιήθηκε η ανατροφοδότηση του λογισμικού δεύτερη φορά. Η εκπαιδευτικός θεώρησε σημείο στην κάθετη ευθεία στο κέντρο του κύκλου και κατασκεύασε τη σφαίρα που ορίζεται με κέντρο αυτό το σημείο και δεύτερο σημείο ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου. Οι μαθητές μετακινώντας το σημείο επιβεβαίωσαν ότι οι σφαίρες είναι άπειρες.



Εικόνα 52 Τρεις διαφορετικές σφαίρες που "ορίζονται" από έναν κύκλο.

Έπειτα τονίζοντας για δεύτερη φορά ότι η θέση του κέντρου της σφαίρας καθορίζεται από τα ποια ευθύγραμμα τμήματα θέλουμε να είναι ίσα οι μαθητές και των τριών ομάδων στη δεύτερη προσπάθεια τους κατασκεύασαν με επιτυχία την τέταρτη κορυφή. Η αναζήτηση της γεωμετρικής ερμηνείας του λάθους των αρχικών κατασκευών οδήγησε τους μαθητές σε πιο στέρεες νοηματοδοτήσεις για τα στερεά και ενίσχυσε όχι μόνο τη σειριακή αλλά και τη λεκτική σύλληψη για αυτά.

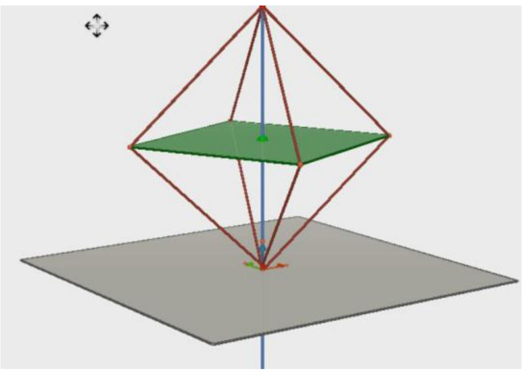
4ο Κρίσιμο Επεισόδιο: Το εμπόδιο που συνιστά η παρασκηνιακή λειτουργία ασαφών λεκτικών δηλώσεων στην επικοινωνία των μαθηματικών νοημάτων

Στη δραστηριότητα 3: «stella octungula» οι ομάδες ξεκίνησαν κατασκευάζοντας το εσωτερικό οκτάεδρο. Το οκτάεδρο όμως, δεν πληρούσε τους κατασκευαστικούς περιορισμούς ώστε να είναι κανονικό. Αυτό συνέβει γιατί η κατασκευαστική διαδικασία και των τριών ομάδων ήταν η ακόλουθη. Έφεραν κάθετη ευθεία στο σημείο αναφοράς του βασικού επιπέδου, θεώρησαν σημείο πάνω στην ευθεία, κατασκεύασαν τετράγωνο με κέντρο αυτό το σημείο σε επίπεδο παράλληλο προς το βασικό και κατασκεύασαν τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονταν από τις κορυφές του τετραγώνου και το σημείο αναφοράς ή το συμμετρικό του ως προς το κέντρο του τετραγώνου. Στη συνέχεια οι δύο από τις τρεις ομάδες μετακινώντας το κέντρο του τετραγώνου αυξομοίωσαν τον σχηματισμό ώστε να προσομοιάζει τον αρχικό. Σημειώνεται ότι κατά τη φάση της διερεύνησης και οι τρεις ομάδες αναγνώρισαν και αιτιολόγησαν ότι όλες οι έδρες του ήταν ισόπλευρα τρίγωνα. Σε ερώτηση της ερευνήτριας για το είδος του στερεού που κατασκεύσαν και οι τρεις ομάδες απαντούσαν κανονικό οκτάεδρο. Επιμένοντας στην ερώτηση ζητώντας να χαρακτηριστεί το είδος των τριγώνων του κατασκευασμένου οκταέδρου οι μαθητές απαντούσαν ισόπλευρα τρίγωνα. Υπόθεση της εκπαιδευτικού είναι ότι οι λεκτικές δηλώσεις των μαθητών για να επικοινωνήσουν μεταξύ τους τα γεωμετρικά νοήματα έπαιξαν αρνητικό ρόλο. Και οι τρεις ομάδες όταν αναφέρονταν στο οκτάεδρο, στους μεταξύ τους διαλόγους, το αποκαλούσαν ρόμβο ή διαμαντάκι. Αυτό ίσως λειτούργησε παρασκηνιακά στη διαδικασία κατασκευής, γιατί η νοερή εικόνα που έχουμε για αυτά τα δύο αντικείμενα επικεντρώνεται στην αξονική συμμετρία με αποτέλεσμα οι έδρες να είναι ισοσκελή αλλά οχί απαραίτητα ισόπλευρα τρίγωνα. Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι ενδεικτικό.

Ομάδα 1, Δραστηριότητα 3, Φάση 2, Στίχοι 40-54

M2 Σκέψου ότι αυτός θα είναι ο κορμός...

M1 Θα το κάνω έτσι, τόσο.. θέλω να κάνω hide σε αυτό εδώ



M2 Μετάφέρνεις τις κάθετες..

E Διακόπτω λίγο... έχετε βλέπω ξεκινήσει την κατασκευή.. ποια βήματα θα ακολουθήσετε;

M1 Κάνουμε τον ρόμβο.. και μετά θα φέρουμε ισοσκελή.. όχι κανονικούς ρόμβους, κανονικά τρίγωνα, κανονικές πυραμίδες

Ε	*Να τα βάλουμε σε μία σειρά.. Αυτό το στερεό τι στερεό είναι;*
Μ1	*Κανονικό οκτάεδρο, και τα γύρω θα φέρουμε τα κανονικά τετράεδρα, η μία πλευρά υπάρχει.*
Ε	*Πάντως όλοι ξεκινάτε από το εσωτερικό του...*
Μ1	*Υπάρχει περίπτωση, ακούστε.. άμα κάναμε τον κύβο, κοιτάχτε πως το σκέφτηκα, βρίσκουμε τα μέσα των κάθε πλευρών και τα ενώνουμε και από κει κόβουμε.. αλλά δεν είχα σκεφτεί εκείνη την ώρα πως θα τα κόβαμε... να το κάνουμε αλλιώς;*
Ε	*Παιδιά, όπως θέλετε το κατασκευάζετε...* *Μία ερώτηση: το τετράγωνο το κατασκευάσατε ώστε να έχει συγκεκριμένες διαστάσεις;*
Μ1	*Όχι εμείς αποφασίσαμε..*
Ε	*Δηλαδή οι διαστάσεις του δεν επηρεάζουν την κατασκευή;*
Μ1	*Ναι, αφού θα φέρουμε τα κανονικά τετράεδρα με βάση τις πλευρές του*
Ε	*Αυτό είναι σίγουρα κανονικό οκτάεδρο; Οι έδρες τι τρίγωνα είναι;*
Μ1	*Ναι. Ισόπλευρα, το έχουμε κατασκευάσει.*

5ο Κρίσιμο Επεισόδιο: Νοηματοδοτήσεις που προέκυψαν από την ανακατασκευή του αστεροειδούς οκτάεδρου

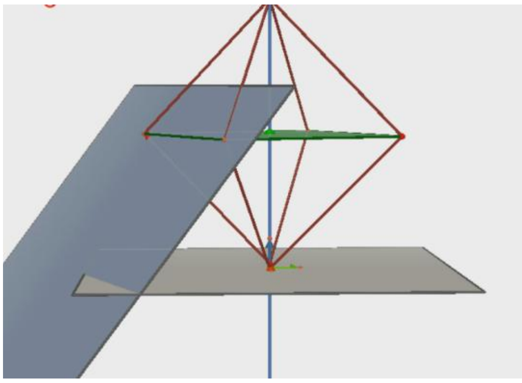
Οι μαθητές αρχικά κατασκεύασαν το εσωτερικό οκτάεδρο. Μετά από κάποιες διερευνήσεις, οι μαθητές κατασκεύασαν «σωστά» την κορυφή του ενός από τα οκτώ περιμετρικά τετράεδρα. Τα εισαγωγικά στο σωστά γιατί το οκτάεδρο δεν είναι κανονικό καθώς η μία έδρα του είναι ισοσκελές τρίγωνο, οπότε επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία της δραστηριότητας 2.4: «Κατασκευή κανονικού τετραέδρου» απλά η τέταρτη κορυφή είναι σε ευθεία κάθετη στο κέντρο βάρους.

Ένα λάθος το οποίο παρατηρήθηκε στις δύο πρώτες ομάδες ήταν η κατασκευή της κορυφής του περιμετρικού κανονικού τετραέδρου ως συμμετρικό του κέντρου του οκταγώνου, ως προς την έδρα του. Στο ακόλουθο απόσπασμα εμφανίζεται μέρος της αρχικής διαπραγμάτευσης της πρώτης ομάδας.

<table>
<tr><td>Μ1</td><td>Ακούστε τι θα κάνουμε. Σκεφτήκαμε ότι αυτό που θέλουμε να φέρουμε θα έχει το ίδιο εμβαδό με το μέσα αυτό αυτό....</td><td>Ομάδα 1, Δραστηριότητα 3, Φάση 2, Στίχοι 98-118</td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>Εννοείς εμβαδό ή όγκο;</td><td></td></tr>
<tr><td>Μ1</td><td>Όγκο, αν φέρουμε το επίπεδο αυτουνού και φέρουμε το αντιδιαμετρικό σημείο ως προς το επίπεδο, το ίδιο δε θα είναι;</td><td></td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>Ναι. Τα συμμετρικά στερεά έχουν τον ίδιο όγκο..</td><td></td></tr>
<tr><td>Μ1</td><td>Ναι, το συμμετρικό του κέντρου ως προς το επίπεδο..</td><td></td></tr>
<tr><td>Μ2</td><td>Η κορυφή δε θα περνάει από το κέντρο του ρόμβου;</td><td></td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>Τι ακριβώς εννοείς; Η κορυφή είναι ένα σημείο..</td><td></td></tr>
<tr><td>Μ2</td><td>Στην ευθεία του κέντρου του ρόμβου με το κέντρο βάρους (του τριγώνου)</td><td></td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>Εννοείς του οκταέδρου. Ναι.</td><td></td></tr>
</table>

M2 Επομένως φέρε τη διαγώνιο (εννοεί την ευθεία που είπε)
M1 Το ίδιο κάνω.. έτσι θα έχω και το σημείο ακριβώς..
M1 Γιατί δεν προχωράει πιο πάνω.. δε χρειάζεται

Εννοεί ότι φαίνεται μόνο το ορατό τμήμα του επιπέδου

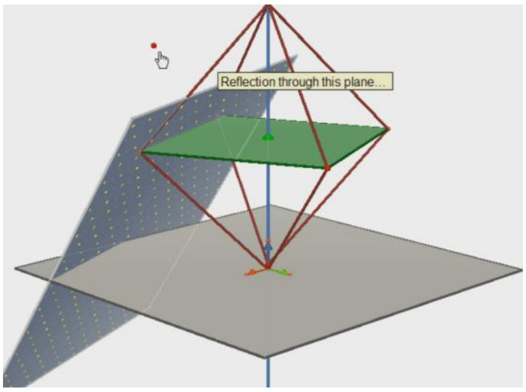


M2 Θέλεις το συμμετρικό
M1 Αντιδιαμετρικό είναι αυτό..

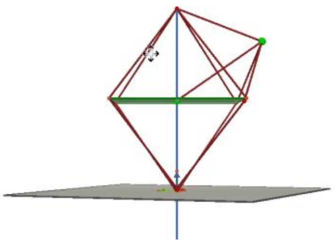
Δείχνει central symmetry

M2 Λέει κεντρική central
M1 Αντιδιαμετρικό σημείο ως προς το επίπεδο
E Έτσι κατασκευάζεις συμμετρικό σημείου ως προς κέντρο
M1 Τι είναι αυτό.. half turn.. α! reflection
E Αυτό είναι ανάκλαση.. σα να κατασκευάζεις το είδωλο του αντικειμένου μέσα από καθρέφτη
M1 Άρα συμμετρία ως προς επίπεδο..Αυτό θέλουμε

Οι μαθητές θεωρούν οτι η κορυφή του τετραέδρου πρέπει να είναι το συμμετρικό του κέντρου βάρους του στερεού ως προς το επίπεδο της έδρας



Οι μαθητές και των δύο ομάδων απέρριψαν την κατασκευή. Στη δεύτερη ομάδα με σύγκριση πλευρών με εργαλείο τη σφαίρα, ενώ στην πρώτη παρατηρώντας ότι με αλλαγή γωνίας θέασης γίνεται φανερό ότι η κορυφή δεν είναι στο ίδιο ύψος με την κορυφή του οκταέδρου, όπως θα έπρεπε γιατί ανήκουν στην ίδια έδρα του νοητού περιμετρικού κύβου. Και οι δύο ομάδες προχώρησαν σε κατασκευή της τέταρτης κορυφής όπως στη δραστηριότητα 2.4: «Κατασκευή κανονικού τετραέδρου». Αφού επέλεξαν αυτό τον τρόπο κατασκευής και λόγω συμμετρίας της δομής δε χρειαζόταν να επαναλάβουν τη διαδικασία άλλες εφτά φορές.

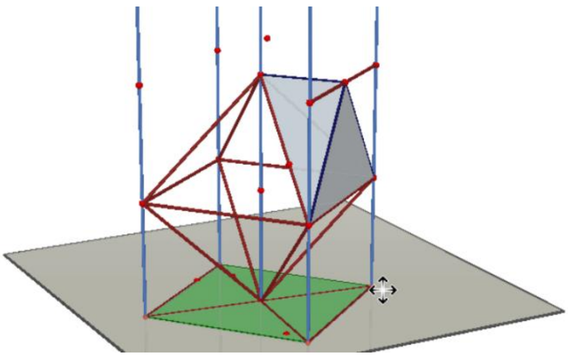


Εικόνα 53 Απόρριψη αρχικής κατασκευής από την 1η ομάδα.

Αφού ολοκληρώθηκε η κατασκευή του εσωτερικού οκταέδρου και του ενός περιμετρικού τετραέδρου ένας μαθητής από την πρώτη ομάδα παρατήρησε ότι και πάλι η κορυφή του περιμετρικού τετραέδρου δεν ήταν στο ίδιο ύψος με την κορυφή του οκταέδρου και αναστοχαζόμενος την κατασκευή είπε ότι το λάθος αναγκαστικά έπρεπε να βρίσκεται στην κατασκευή του οκταέδρου. Μετά από την επανάληψη του ερωτήματος για το είδος του οκτάεδρου που κατασκεύασε η ομάδα, αφού αρχικά είπε κανονικό μετά κάνοντας dragging στο κέντρο του τετραγώνου είπε ότι αυτό ήταν το λάθος. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας θεώρησαν ότι η κατασκευή ήταν σωστή.

Οι μαθητές της τρίτης ομάδας ακολούθησαν διαφορετική στρατηγική. Αρχικά παρατηρώντας τον αρχικό σχηματισμό κατασκεύασαν το περιμετρικό τετράεδρο με τέταρτη κορυφή το μέσο της πλευράς του τετραγώνου στην άνω κορυφή του οκταέδρου που προκύπτει από παράλληλη μετατόπιση του τετραγώνου της βάσης, αξιοποιώντας το εργαλείο «τετράεδρο». Το σκεπτικό της κατασκευής δεν ήταν σωστό, καθώς οι μαθητές θεώρησαν ότι η ορθή προβολή του εσωτερικού οκταέδρου ταυτίζοταν με τη βάση του νοητού εξωτερικού κύβου. Δηλαδή ότι ο νοητός εξωτερικός κύβος έχει βάση το πράσινο τετράγωνο στο ορατό βασικό επίπεδο. Ωστόσο μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης παρατήρησαν ότι οι ακμές του περιμετρικού τετράεδρου δεν ήταν ίσες και απέρριψαν την κατασκευή, θεωρώντας πάντα ότι το οκτάεδρο ήταν σωστά κατασκευασμένο. Ακολουθεί απόσπασμα του διαλόγου στο οποίο φαίνεται η διαδικασία απόρριψης της κατασκευής:

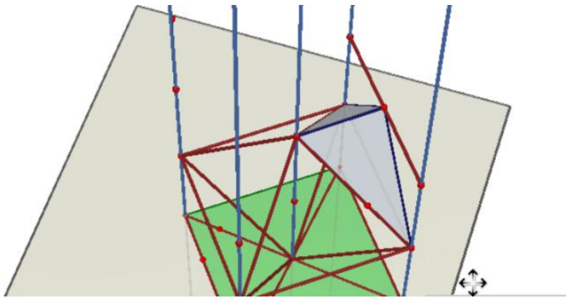
Μ8 *Εδώ!* *Ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, Φάση 2, Στίχοι 67-72*



Μ9 *Ναι.*

Μ8 *Έχουμε ένα πρόβλημα.. Αυτό δεν είναι ίσο με αυτό..* *Δείχνει τις ακμές του τετραέδρου*

Μ9 *Πρέπει να μεγαλώσουμε αυτή την απόσταση* *Δείχνει την απόσταση που ισούται με το μισό του μήκους της τετράγωνης έδρας του νοητού κύβου*

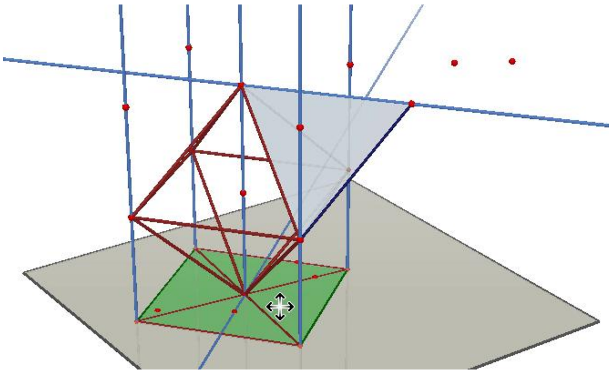


Μ10 *Άρα είναι λάθος το αρχικό μας σχήμα..*

Μ8 *Το διαμαντάκι είναι σωστό. Πρέπει να βρούμε άλλο τρόπο για να πάρουμε την ευθεία.. Αυτό πάει πιο έξω..*

Η δεύτερη προσπάθεια τους κατασκευαστικά και μαθηματικά ήταν σωστή καθώς εκμεταλλεύτηκαν τη διερεύνηση που είχαν κάνει προηγούμενα για το στερεό και θεώρησαν την τομή του επιπέδου της μίας έδρας του εσωτερικού οκταγώνου με την ευθεία που ουσιαστικά είναι η διαγώνιος του εξωτερικού νοητού κύβου.

Μ8	*Κυρία. Με βάση το σχήμα έχουμε παρατηρήσει ότι πρέπει να κάνουμε οκτώ πυραμίδες. Οι κορυφές των πυραμίδων μαζί με την κορυφή από το διαμαντάκι είναι συνευθειακά*	*Ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, Φάση 2, Στίχοι 122-126*

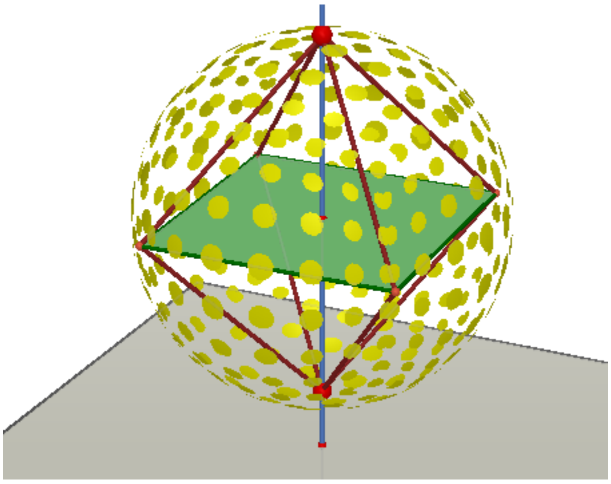


Ε	*Αυτή την ευθεία πως την κατασκεύασες;*	
Μ8	*Περνάει από την κορυφή του οκτάεδρου και το μέσο αυτών των δύο σημείων. Είναι παράλληλη με το κάτω επίπεδο.*	
Ε	*Και το σημείο;*	
Μ10	*Πήρα το επίπεδο γιατί είναι στη συνέχεια του και βρήκα που τέμνονται..*	*Δείχνει το επίπεδο της κάτω δεξιά έδρας του οκταέδρου*

Παρατηρείται ότι και η τρίτη ομάδα που σε προηγούμενες διερευνήσεις παρέμενε στο αντιληπτικό επίπεδο άρχισε να λειτουργεί σε σειριακό και λειτουργικό εκτελώντας νοερές επεκτάσεις.

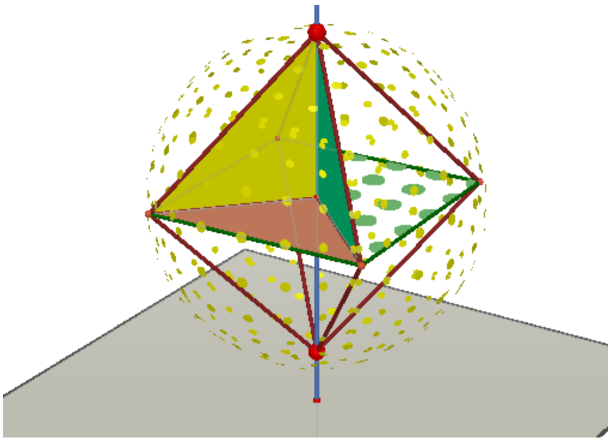
Στην τελευταία συνάντηση η αστοχία στην κατασκευή του εσωτερικού κανονικού οκταέδρου ήταν το ένα από τα δύο κεντρικά θέματα που συζητήθηκαν. Σημειώνεται ότι μόνο ένας μαθητής αντιλήφθηκε το λάθος στην κατασκευή του κεντρικού οκταέδρου. Η ερευνήτρια επανέλαβε την κατασκευή του εσωτερικού οκταέδρου και υπέβαλε σε δοκιμή συρσίματος. Οι μαθητές συμπέραναν ότι τα βήματα της κατασκευής που είχαν ακολουθήσει δεν εξασφάλιζαν την κανονικότητα του πολυέδρου. Μετά από αρκετές συζητήσεις μεταξύ τους και πειραματισμό στο λογισμικό κατέληξαν σε μία εύστοχη διόρθωση της προηγούμενης κατασκευής.

Πρότειναν να κρατηθεί το τετράγωνο αλλά να κατασκευαστεί η σφαίρα με κέντρο το κέντρο του τετραγώνου που διέρχεται από μία κορυφή του. Οι δυο κορυφές του οκταγώνου ήταν τα σημεία τομής της σφαίρας με την κάθετη ευθεία στο βασικό επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο του τετραγώνου. Επαλήθευσαν εποπτικά τον ισχυρισμό τους μέσα από τη λειτουργία συρσίματος στο κέντρο του τετραγώνου, οπότε όλη η κατασκευή μετατοπιζόταν κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα, και στη συνέχεια στην κορυφή του τετραγώνου που καθόριζε το μέγεθος τους παρατηρώντας ότι απλά «άλλαξε η κλίμακα».



Εικόνα 54 Επαναδιαπραγμάτευση κατασκευής εσωτερικού οκταέδρου.

Ακολούθησε ερώτηση της ερευνήτριας ζητώντας από τους μαθητές να τεκμηριώσουν ότι η νέα κατασκευή είναι σωστή. Οι μαθητές ενεπλάκηκαν σε μία διαδικασία αναζήτησης αιτιολόγησης. Είπαν ότι έπρεπε να δείξουν ότι τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα. Αρχικά κάποιοι μαθητές προσπάθησαν να αιτιολογήσουν με συμμετρία αλλά πάλι έδειχναν ότι τα τρίγωνα ήταν ισοσκελή. Επειδή ο χρόνος ήταν περιορισμένος η ερευνήτρια παρενέβει και ρώτησε πόσα τρίγωνα αρκούσε να δείξουμε ότι είναι ισόπλευρα. Μετά από σύντομο χρονικό διάστημα οι μαθητές απάντησαν ένα και αιτιολόγησαν με συμμετρία. Έπειτα η ερευνήτρια υπενθύμισε ότι μία στρατηγική απόδειξης ισότητας δύο ή περισσότερων πλευρών είναι να ανήκουν σε ίσα τρίγωνα. Όμως αυτό έδειχνε να μπερδεύει τους μαθητές αφού «δεν υπήρχαν άλλα τρίγωνα». Σε αυτό το σημείο οι μαθητές ρωτήθηκαν αν έχουν εκμεταλλευτεί τις ιδιότητες της σφαίρας. Μετά από αρκετές συζητήσεις μεταξύ των μαθητών, ένας ένωσε το κέντρο της σφαίρας με τις τρεις κορυφές του τριγώνου και είπε ότι τα τρία τρίγωνα είναι ισοσκελή, με τις δύο ίσες πλευρές να είναι οι ακτίνες της σφαίρας, αλλά δεν μπορούσε να αποδείξει ότι είναι και ίσα μεταξύ τους γιατί «δεν γνώριζε αν οι περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες». Για να διευκολύνει τους μαθητές, η ερευνήτρια παρενέβει στην κατασκευή και χρωμάτισε τις επιφάνειες των τριών τριγώνων. Οι μαθητές παρατήρησαν ότι τα τρίγωνα εκτός από ισοσκελή είναι και ορθογώνια αιτιολογώντας τυπικά την κατασκευή τους και νοηματοδοτώντας σε επίπεδο όχι μόνο σειριακό αλλά και λεκτικό το κανονικό οκτάεδρο.



Εικόνα 55 Τα εσωτερικά ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα του κανονικού οκταέδρου.

Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Μέσα από την εμπλοκή σε δραστηριότητες κατασκευής και την αξιοποίηση της ανατροφοδότησης του ψηφιακού εργαλείου, ευνοήθηκε σε σημαντικό βαθμό η σύλληψη των γεωμετρικών σχηματισμών σε επίπεδο σειριακό, λεκτικό μέσα από την επιχειρηματολογία για την απόρριψης λανθασμένων και την τεκμηρίωση ορθών κατασκευαστικών στρατηγικών αλλά και λειτουργικό μέσα από την εκτέλεση νοερών επεκτάσεων και περιορισμών. Περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη ομάδα δραστηριοτήτων όμως, ήταν απαραίτητη η παρέμβαση της εκπαιδευτικού, οργανώνοντας συλλογικό διάλογο, ώστε οι μαθητές να κατευθυνθούν στην εξαγωγή μαθηματικά συνεπών συμπερασμάτων.

Σε αρκετές περιπτώσεις οι κατασκευές των μαθητών στερούνταν μαθηματικού περιεχομένου. Αρνητικό ρόλο διαδραμάτισαν οι λεκτικές δηλώσεις που προέρχονταν από την εμπειρία για την επικοινωνία μαθηματικών νοημάτων καθώς παρέπεμψαν σε νοερές εικόνες με απώλεια πληροφορίας σε σχέση με το γεωμετρικό αντικείμενο. Σημαντική παράμετρος επίσης είναι η έλλειψη κατασκευαστικών δραστηριοτήτων στη σχολική πραγματικότητα, όχι μόνο στα μαθηματικά

Ιδιαίτερα σημαντική φάνηκε η συνεισφορά της ανατροφοδότησης του λογισμικού και η ενορχήστρωση συλλογικού διαλόγου, στην κατεύθυνση της απόρριψης λάθους κατασκευαστικών διαδικασιών. Οι μαθητές, ενεπλάκηκαν σε μεταξύ τους συζητήσεις αναζητώντας τη γεωμετρική ερμηνεία του λάθους στις κατασκευές τους, οικοδομώντας σε πιο στέρεα βάση τα μαθηματικά νοήματα που σχετίζονταν με τη δομή και τις ιδιότητες των γεωμετρικών στερεών που εμπλέκονταν στις δραστηριότητες, μέσα από την τεκμηριωμένη επιλογή ορθών κατασκευαστικών στρατηγικών. Επίσης μέσα από τους συλλογικούς διαλόγους αναδύθηκαν νοηματοδοτήσεις για γεωμετρικά αντικείμενα που δεν είχαν προβλεφθεί κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, όπως το κέντρο βάρους του κανονικού τετράεδρου.

6.4 Κατασκευή νοημάτων μέσα από ανοιχτά προβλήματα

Σε αυτή την παράγραφο διερευνείται ο βαθμός που οι μαθητές κατασκεύασαν μαθηματικά νοήματα κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες πρόβλεψης με δομή ανοιχτών προβλημάτων. Σε αυτού του είδους τις δραστηριότητες, κυρίαρχη γνωστική διαδικασία είναι η συλλογιστική. Οι μαθητές εξερεύνησαν μία δυναμική κατασκευή, την αναδιαμόρφωσαν οπτικά και μέσα από την παρατήρηση των εμφανιζόμενων αναλλοίωτων και των μεταξύ τους σχέσεων διατύπωσαν υποθέσεις, τις οποίες κλήθηκαν να τεκμηριώσουν σε φορμαλιστικό επίπεδο.

<u>$1^{ο}$ Κρίσιμο Επεισόδιο: Επίπεδα νοηματοδότησης συμμεταβολής δύο γεωμετρικών μεγεθών στα πλαίσια ενός προβλήματος ελαχίστου</u>

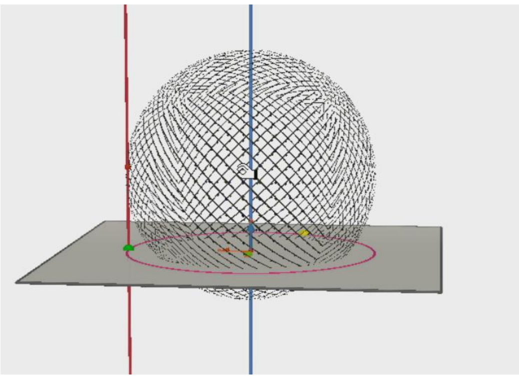
Στη δραστηριότητα 1.2: «Σύγκριση ακτίνων» ουσιαστικά καταγράφεται η πορεία νοηματοδότησης της συμμεταβολής δύο γεωμετρικών μεγεθών. Της ακτίνας της σφαίρας και του σχετικού ως προς το κέντρο της σφαίρας ύψους του σημείου της επιφάνειας της σφαίρας που την ορίζει.

Οι μαθητές αρχικά πειραματιζόμενοι στο Cabri 3D παρατήρησαν ότι το μέγεθος της σφαίρας μεταβάλλεται καθώς το σημείο πάνω στη σφαίρα διατρέχει την ευθεία στην οποία ανήκει. Έπειτα από πειραματισμούς στο λογισμικό βρήκαν τη θέση του σημείου της επιφάνειας της σφαίρας ώστε οι δύο ακτίνες να «φαίνονται» ίσες. Επαλήθευσαν τον ισχυρισμό τους σε αντιληπτικό επίπεδο μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης και παρατηρώντας ότι όταν το κέντρο και το σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας είναι στο ίδιο ύψος η προβολή της σφαίρας στο βασικό επίπεδο είναι ο κυκλικός δίσκος, αν και δεν το διατύπωσαν με αυτά τα λόγια. Σημειώνεται ωστόσο ότι καμία ομάδα δεν διερεύνησε την περίπτωση που το ελεύθερο σημείο της επιφάνειας της σφαίρας κινείται «κάτω» από το βασικό επίπεδο (βλ. σελ: 52).

Ομάδα 1,
Δραστηριότητα 1.2,
Στίχοι 50 - 55

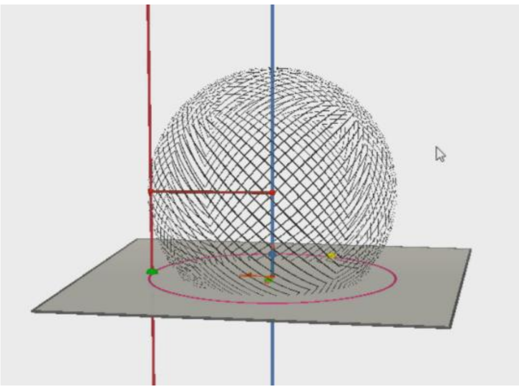
Μ3 *Ωραία επίπεδο να φτιάξουμε. Ουσιαστικά να είναι στο ίδιο επίπεδο με τις τελίτσες που έχουμε βάλει*

Μ1 *Έτσι όπως το έχετε ακριβώς δεν είναι ίσα.... να το κατεβάσετε .. ε.. να έχουν την ίδια γωνία .. να είναι παράλληλο με το επίπεδο, η ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία σε παράλληλο επίπεδο.*



Μ2 *Φέρε την ακτίνα*

Μ3 *Παραλληλεπίπεδο είναι...*



Μ2 *Ανέβασε το*

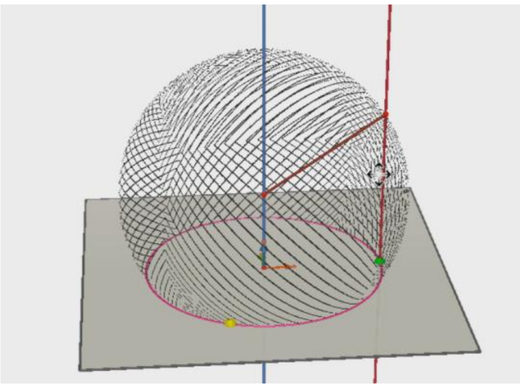
Μ3 *Εδώ είναι πλάγια...*
Ουσιαστικά αν αυτές οι δύο είναι παράλληλες η απόσταση των δύο παραλλήλων δεν θα είναι ίση; Ναι.
Εδώ είναι μεγαλύτερη. Κυρία εδώ είναι ίσες.

Αναζητώντας αποδεικτική στρατηγική, οι μαθητές των δύο πρώτων ομάδων κατασκεύασαν τις ακτίνες, ενώ η τρίτη μετά από σχετική υπόδειξη της εκπαιδευτικού. Αναδιοργανώνοντας το σχήμα σε λειτουργικό επίπεδο και εμφανίζοντας το ορθογώνιο τραπέζιο (οι δύο ομάδες) και το ορθογώνιο τρίγωνο (η τρίτη ομάδα) απέδειξαν τυπικά τον ισχυρισμό τους, νοηματοδοτώντας τη συμμεταβολή και σε λεκτικό επίπεδο. Στο παρακάτω απόσπασμα εμφανίζεται ενδεικτικά η διαπραγμάτευση της πρώτης ομάδας.

Μ3 Ορθογώνιο και αποδεικνύεται από τον κανόνα του ορθογωνίου ότι αυτές οι δύο παράλληλες είναι ίσες

Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1.2, Στίχοι 57 - 59

Ε Ενώ εδώ;;;



Μ3 Ε.. έχει δύο παράλληλες.. τραπέζιο και αυτή είναι πλάγια άρα μεγαλύτερη.

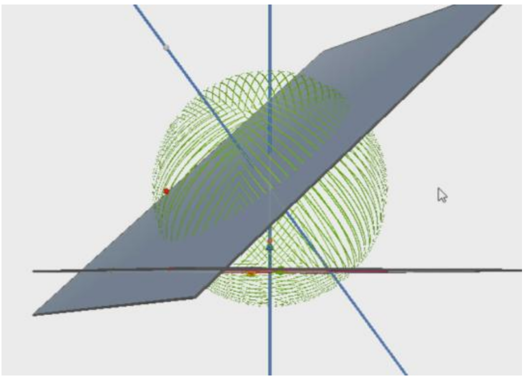
2ο Κρίσιμο Επεισόδιο: Νοηματοδότηση καμπύλης τομής σφαίρας επιπέδου

Στη δραστηριότητα 1.3: «Καμπύλη τομής σφαίρας» με επίπεδο οι μαθητές διερεύνησαν το είδος της καμπύλης τομής τυχαίου επιπέδου (που να μην είναι εφαπτόμενο από κατασκευή) με μία σφαίρα.

Αρχικά, και σύμφωνα με προηγούμενη έρευνα (Mariotti,1995), υπήρξαν μαθητές που υπέθεσαν ότι πρόκειται για έλλειψη. Μεταβάλλοντας όμως τη γωνία θέασης όλοι οι μαθητές παρατήρησαν οπτικά ότι πρόκειται για κύκλο. Ωστόσο καμπύλη με κέντρο συμμετρίας δεν είναι μόνο ο κύκλος. Σε ερώτηση της ερευνήτριας γιατί κύκλος και όχι έλλειψη οι μαθητές ενεπλάκησαν σε μία διαδικασία αναζήτησης του κέντρου συμμετρίας της καμπύλης τομής. Αρχικά δύο ομάδες εξέτασαν αν το κέντρο της καμπύλης ήταν το σημείο τομής του επιπέδου με την ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα της σφαίρας και του κύκλου στο βασικό επίπεδο. Μεταβάλλοντας τη γωνία θέασης και πειραματιζόμενοι με τη θέση του επιπέδου απέρριψαν αυτή την εικασία. Μετά από διερευνήσεις και οι τρεις ομάδες, η τρίτη με μικρή βοήθεια, κατασκεύασαν σωστά το κέντρο συμμετρίας φέρνοντας κάθετη από το κέντρο της σφαίρας στο επίπεδο της καμπύλης και επαλήθευσαν την κατασκευή εποπτικά στο λογισμικό. Ακολουθεί απόσπασμα της διερεύνησης της πρώτης ομάδας για το είδος της καμπύλης τομής και την κατασκευή του κέντρου συμμετρίας.

M1 Τι ψάχνουμε; *Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1.3, Στίχοι 63 - 75*

Ε Το είδος της καμπύλης τομής της σφαίρας με το επίπεδο
Μ1 Για γύρισε το λίγο.. κύκλος
Μ2 Ναι...
Μ1 Πρέπει να είναι κωνική τομή για να βγαίνει έλλειψη
Ε Όχι απαραίτητα. [...]
Μ1 Άμα δείξουμε ότι η απόσταση είναι σταθερή;
Ε Μία σωστή σκέψη.. πρέπει όμως να προσδιορίσετε τη θέση του κέντρου
Μ2 Να είναι κάθετο με την επιφάνεια και να περνάει από το μέγιστο...
Μ1 Και να περνάει από το κέντρο της σφαίρας
Ε Κατασκευάστε το
Μ1 Perpendicular να το



Καθώς είχε ζητηθεί ρητά απόδειξη, κάποιοι μαθητές κάνοντας σκαριφήματα στο φύλλο εργασίας, αποφάσισαν ότι έπρεπε να εξετάσουν αν η απόσταση του κέντρου της καμπύλης από τα σημεία της περιφέρειας της παραμένει σταθερή. Μαθητές από δύο ομάδες ρώτησαν αν είναι αρκετό να μετρήσουν το μήκος και να δείξουν ότι είναι σταθερό, γεγονός που στάθηκε αφορμή για διάλογο για τις αιτίες που μία τέτοια στρατηγική αποτελεί επαλήθευση και όχι απόδειξη. Επειτα οι μαθητές αναζήτησαν αποδεικτικές πρακτικές ώστε να δείξουν ότι η καμπύλη είναι κύκλος.

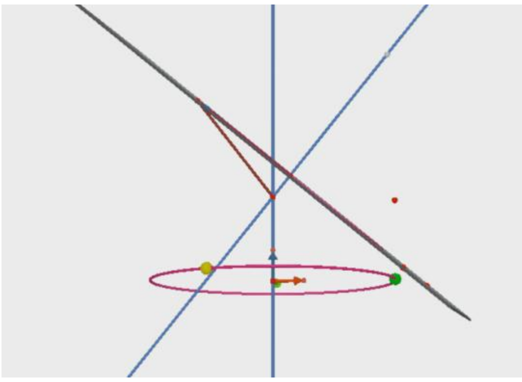
Από τις τρεις ομάδες οι δύο αναγνώρισαν το ορθογώνιο τρίγωνο που εμφανίζεται και επαλήθευσαν το αναλλοίωτο του σχηματισμού για τις διάφορες θέσεις του σημείου στην καμπύλη και τις διάφορες θέσεις του επιπέδου μέσα από τη λειτουργία συρσίματος, ενώ και η τρίτη ομάδα οδηγήθηκε σε σωστά συμεράσματα μετά από μικρές υποδείξεις της εκπαιδευτικού. Και οι τρεις ομάδες απόδειξαν τυπικά τον ισχυρισμό τους με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το παρακάτω απόσπασμα είναι ενδεικτικό της αποδεικτικής διαδικασίας που ακολούθησαν οι ομάδες.

Ε Και για ποιο λόγο είναι σταθερή η ακτίνα; Σκεφτείτε το.. *Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1.3, Στίχοι 97 - 104*

Μ1 Επειδή είναι υποτείνουσα; Κάνε Hide στη σφαίρα
Μ2 Αυτό αλλάζει;

M1 Ναι.. *Η γωνία της κάθετης στο οριζόντιο με την κάθετη στο επίπεδο τομής*

M3 Η υποτείνουσα τι είναι;
M1 Είναι η ακτίνα της σφαίρας
M3 Ναι... δεν είναι η υποτείνουσα
M1 Αλλά τα τρίγωνα είναι ίσα ορθογώνια έχουν ίσες υποτείνουσες και αυτή κοινή



Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Οι μαθητές σε αυτές τις δραστηριότητες έφτασαν σε υψηλά επίπεδα μαθηματικοποίησης. Στη δραστηριότητα 1.2: «Σύγκριση ακτίνων» παρατηρώντας οπτικά τη μεταβολή του μεγέθους της σφαίρας στο λογισμικό νοηματοδότησαν αντιληπτικά τη συμμεταβολή. Έπειτα, σε λειτουργικό επίπεδο, κατασκεύασαν την ακτίνα της σφαίρας και εμφάνισαν το εσωτερικό τραπέζιο. Τέλος σε λεκτικό επίπεδο ερμήνευσαν την εξαρτημένη κίνηση της ακτίνας κατά τη διαδικασία συρσίματος του σημείου βάσης στην επιφάνεια της με όρους ευκλείδειας γεωμετρίας. Στη δραστηριότητα αναζήτησης του είδους της καμπύλης τομής σφαίρας-επιπέδου, οι μαθητές αρχικά νοηματοδότησαν αντιληπτικά την καμπύλη αναγνωρίζοντας ότι πρόκειται για κύκλο, σειριακά κατασκευάζοντας, (στη δεύτερη προσπάθεια οι δύο ομάδες) σωστά το κέντρο και στα πλαίσια της λειτουργικής σύλληψης του σχηματισμού αναδιοργάνωσαν το σχήμα εμφανίζοντας το εσωτερικό (ορθογώνιο) τρίγωνο. Σε λεκτικό επίπεδο απέδειξαν τον ισχυρισμό τους με γνώσεις επίπεδης γεωμετρίας. Παρατηρείται ότι σε αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές ανέπτυξαν ποικίλα και ολοκληρωμένα επίπεδα σύλληψης για τους παραγόμενους γεωμετρικούς σχηματισμούς.

Η μεταβολή γωνίας θέασης, και η τροπικότητα σύρσιμο περιπλάνησης (wandering dragging) αρχικά οδήγησε τους μαθητές στη διατύπωση των σωστών υποθέσεων. Ερμηνεύοντας τα τεχνουργηματικά σημεία, τους αναλλοίωτους σχηματισμούς, σε γεωμετρικό επίπεδο διαφωτίστηκε η αποδεικτική στρατηγική που έπρεπε να ακολουθήσουν. Ιδιαίτερα η διερεύνηση της καμπύλης τομής θα ήταν πολύ δύσκολη χωρίς τις δυνατότητες οπτικοποίησης που παρέχει το ψηφιακό περιβάλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, μέσα από τον σχεδιασμό τεσσάρων ομάδων δραστηριοτήτων που συνέδεαν την επίπεδη με την τρισδιάστατη γεωμετρία στο περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Cabri 3D, διερευνήθηκαν τα επίπεδα νοηματοδότησης γεωμετρικών εννοιών και στερεών στο χώρο, που αναδύθηκαν από την εφαρμογή σε τρεις ομάδες μαθητών της Β Λυκείου.

Τα επίπεδα νοηματοδότησης αναλύθηκαν κατά αντιστοιχία με τα επίπεδα σύλληψης για το γεωμετρικό σχήμα, όπως αυτά αναπτύχθηκαν, κατά κύριο λόγο για την επίπεδη γεωμετρία, από τον Duval. Οι δραστηριότητες εναλλάσσονταν σε διερεύνησης, κατασκευής και ανοιχτά προβλήματα, με κυρίαρχα υποστηριζόμενες διαδικασίες την οπτικοποίηση, την κατασκευή και τον συλλογισμό αντίστοιχα.

Οι μαθητές αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ανέπτυξαν συλλήψεις για τις έννοιες και τους τρισδιάστατους σχηματισμούς που υπερέβαιναν τη στατική και άμεση φύση της αντιληπτικής. Προωθήθηκαν η λειτουργική σύλληψη, εκτελώντας στο λογισμικό ή νοερά μετασχηματισμούς διάσπασης και επέκτασης, και η λεκτική αιτιολογώντας τυπικά τα ευρήματά τους με γνώσεις επίπεδης γεωμετρίας, ενώ σημειώθηκε αυξημένη δυσκολία στη σειριακή σύλληψη των στερεών.

Σε συνάφεια με ευρήματα προηγούμενων ερευνών η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες διερεύνησης στο υπολογιστικό περιβάλλον φάνηκε ότι ενισχύει διαδικασίες μη εικονικής οπτικοποίησης, ευνοώντας τη μετάβαση από την αντιληπτική στη λεκτική και τη λειτουργική σύλληψη των σχηματισμών. Οι μαθητές στις δραστηριότητες «0.2: καθετότητα στον χώρο» και «1.1: ο γεωμετρικός τόπος της σφαίρας» ερμήνευσαν σε γεωμετρικό πλαίσιο τις παρατηρούμενες αναλλοίωτες και τους κατασκευαστικούς περιορισμούς του λογισμικού προχωρώντας στην επαναδιαπραγμάτευση της υφιστάμενης σύνδεσης της καθετότητας με την μοναδικότητα και την επέκταση του γεωμετρικού τόπου του κύκλου. Επιβεβαιώνοντας ευρήματα προηγούμενης έρευνας, η επαναδιαπραγμάτευση της έννοιας της καθετότητας μεταβαίνοντας από το επίπεδο στον χώρο, αποδείχθηκε μη τετριμένη υπόθεση, αντίθετα με την περίπτωση της σφαίρας. Κατά τη διερεύνηση της δομής δυναμικών αναπαραστάσεων στερεών, το ψηφιακό περιβάλλον ευνόησε διαδικασίες διαστατικής αποδόμησης, οι οποίες λειτούργησαν ως εργαλείο ανάλυσης των μαθηματικών ιδιοτήτων των συνδεόμενων υποσχηματισμών των γεωμετρικών αντικειμένων στην κατεύθυνση της οργάνωσης της γνώσης για τα στερεά. Οι μαθητές κατηγοριοποίησαν επιτυχώς, νοηματοδοτώντας και σε λεκτικό επίπεδο, τα τετράεδρα που εμφανίστηκαν ως συνδέσεις κορυφών κύβου. Ωστόσο τα επίπεδα νοηματοδότησης στα οποία έφτασαν οι ομάδες κατά τη διερεύνηση του αστεροειδούς οκτάεδρου διέφεραν, καθώς η μία παρέμεινε στο αντιληπτικό επίπεδο ενώ οι άλλες δύο προχώρησαν σε λειτουργικό και λεκτικό. Στη δραστηριότητα «2.2: αναγνώριση κύβου» παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές έχουν ήδη διαμορφώσει εικόνες από την εμπειρία τους για τη συμπεριφορά των γεωμετρικών αντικειμένων, οι οποίες λειτουργούν ως πρότυπα. Συγκεκριμένα η παρεμβολή της νοερής εικόνας της σφαίρας εγγεγραμμένης σε κύβο οδήγησε στη γενίκευση ότι κάθε εξάεδρο στο οποίο εγγράφεται σφαίρα είναι κύβος και την επιλογή λανθασμένης στρατηγικής επίλυσης.

Κατά την εμπλοκή τους οι μαθητές σε δραστηριότητες πρόβλεψης που είναν διατυπωθεί με μορφή ανοιχτών προβλημάτων, αξιοποιώντας τις δυνατότητες, που προσέφερε ο δυναμικός χειρισμός του περιβάλλοντος, οδηγήθηκαν σε εύστοχες υποθέσεις και κατασκευαστικές στρατηγικές, τις οποίες τεκμηρίωσαν με όρους αξιωματικής γεωμετρίας. Η αλληλεπίδραση των μαθητών με το περιβάλλον φάνηκε να ενισχύει όχι μόνο τη σειριακή αλλά και τη λεκτική και λειτουργική σύλληψη των τρισδιάστατων σχηματισμών οδηγώντας σε πλούσιες νοηματοδοτήσεις για τη συμμεταβολή σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα ελαχίστου στον χώρο και την αναγνώριση της καμπύλης τομής σφαίρας με επίπεδο.

Από τα ευρήματα της έρευνας αναδύεται μία αυξημένη αδυναμία των μαθητών σε κατασκευαστικές διαδικασίες, που ανακλά την αυξημένη δυσκολία της σειριακής σύλληψης των τρισδιάστατων σχηματισμών. Με δεδομένο τον γνωστικό ρόλο της κατασκευής στον γεωμετρικό συλλογισμό και την απόδειξη ειδικότερα, ευνοώντας τη νοηματοδότηση σε σειριακό αλλά και λεκτικό επίπεδο των τρισδιάστατων σχηματισμών, είναι ένα εύρημα που προβληματίζει. Ενδεχόμενα συνδέεται με την απουσία κατασκευών στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος στη σχολική πραγματικότητα. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε μία επιμονή για επιλογή συμμετρικών κατασκευαστικών διαδικασιών για τα συμμετρικά στερεά. Υπήρξαν επίσης μαθητές που προχώρησαν σε κατασκευές χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο, οι οποίες κατέρρεαν στη δοκιμή συρσίματος, στηριζόμενοι σε οπτικές ενδείξεις για τον έλεγχο ορθότητας του σχηματισμού και όχι στη γεωμετρική χρήση των εργαλείων του λογισμικού. Καθοριστικής σημασίας ήταν η χρήση της ανατροφοδότησης του ψηφιακού εργαλείου στην κατεύθυνση ακύρωσης λανθασμένων στρατηγικών, για παράδειγμα στην κατασκευή κανονικού τετραέδρου, ενώ κρίσιμος ήταν και ο ρόλος των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στην αναζήτηση νέων, μαθηματικά συνεπών, κατασκευών, προσφέροντας ευκαιρίες αναδιοργάνωσης και εμπλουτισμού της γνώσης για το κατασκευαζόμενο γεωμετρικό αντικείμενο. Καταγράφηκε τέλος, ο αρνητικός ρόλος των ασαφών λεκτικών δηλώσεων στη μαθηματική δραστηριότητα, όπως η αναφορά στο κανονικό οκτάεδρο ως ρόμβο ή διαμάντι, καθώς παρέπεμψαν σε νοερές εικόνες που είχαν παραπλανητική πληροφορία.

Κάνοντας έναν απολογισμό της συνολικής πορείας κατασκευής νοημάτων από τους μαθητές, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το λογισμικό αποτέλεσε ένα ισχυρό εργαλείο διαμεσολάβησης του μαθηματικού περιεχομένου, ευνοώντας διαδικασίες αναδιοργάνωσης της γνώσης κατά τη μετάβαση από την επίπεδη στην τρισδιάστατη γεωμετρία. Οι δυνατότητες οπτικοποίησης, που παρέχει το λογισμικό, συνεισέφεραν στην επεξεργασία της πληροφορίας των τρισδιάστατων σχηματισμών και στη δημιουργία συνδέσεων κατά την επίλυση των προβληματικών καταστάσεων, όπως αυτή της αναγνώρισης της καμπύλης τομής σφαίρας επιπέδου, που θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολες σε ένα στατικό αναπαραστασιακά περιβάλλον. Ο δυναμικός χειρισμός των τρισδιάστατων σχηματισμών επέτρεψε τη διερεύνησή τους μέσα από διαδικασίες διαστατικής αποδόμησης ή εκτέλεσης άλλων μετασχηματισμών και η μαθηματική ερμηνεία των τεχνουργηματικών σημείων, συνεισέφερε στη βελτίωση της συλλογιστικής διαδικασίας των μαθητών. Σημειώνεται ότι και οι μαθητές της τρίτης ομάδας, που στήριζαν κυρίως σε οπτικές ενδείξεις τις αιτιολογήσεις τους, στην τελευταία δραστηριότητα κατά την κατασκευή του αστεροειδούς οκτάεδρου απομακρύνθηκαν από την αντιληπτική σύλληψη μεταβαίνοντας σε σειριακό και λειτουργικό επίπεδο. Η σημειωτική δυνατότητα του λογισμικού επεκτείνεται στη στοχευμένη χρήση της ανατροφοδότησής του και την ενορχήστρωση συλλογικών συζητήσεων μεταξύ των ομάδων ώστε να παραχθούν τα επιδιωκόμενα μαθηματικά νοήματα. Σε εργαλειακό επίπεδο σημειώνεται ωστόσο ότι, σε συμφωνία με προηγούμενη έρευνα, οι μαθητές ενώ χρησιμοποιούσαν τη λειτουργία συρσίματος κατά τις διερευνήσεις τους δεν έκαναν χρήση της δοκιμής συρσίματος για να επικυρώσουν τις κατασκευές τους, παρά μόνο όταν η εκπαιδευτικός το πρότεινε ή το ζητούσε.

Η γνωστική ανάλυση των δραστηριοτήτων μπορεί να αποτελέσει εργαλείο στα χέρια ενός εκπαιδευτικού για να ερμηνεύσει και να περιορίσει την απόκλιση μεταξύ του αναμενόμενου βάσει σχεδιασμού και του πραγματικού τρόπου διαπραγμάτευσης των δραστηριοτήτων από τους μαθητές. Επίσης μπορεί να αποτελέσει σημείο εκκίνησης για βελτίωση και επανασχεδιασμό των δραστηριότητων ώστε να προωθούνται πυκνότερες νοηματοδοτήσεις.

Οι περιορισμοί της παρούσας έρευνας συνίστανται αφενός στην απουσία αρκετών επαναληπτικών κύκλων ώστε μέσα από ανατροφοδοτήσεις να πραγματοποιηθεί περαιτέρω επανασχεδιασμός των δραστηριοτήτων, αφετέρου στο δείγμα, το οποίο δεν ήταν τυχαίο.

Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να διερευνηθεί ο βαθμός κατανόησης των μετασχηματισμών στον χώρο μέσα από αυθεντικές δραστηριότητες σε ρεαλιστικό πλαίσιο και σε συνεργασία με άλλα επιστημονικά πεδία όπως αυτό της χημείας, της βιολογίας ή της αρχιτεκτονικής, μοντελοποιώντας πραγματικά προβλήματα. Τέτοιου είδους σχεδιασμένες δραστηριότητες θα ενίσχυαν τη σχέση των μαθηματικών με την πραγματική ζωή στα μάτια των μαθητών, χωρίς να υποβαθμίζεται η θεωρητική διάσταση του αντικειμένου της γεωμετρίας. Αντίθετα παρέχεται το υπόβαθρο στον ερευνητή να χρησιμοποιήσει την τεχνολογία, ώστε να διερευνήσει την κατασκευή νοημάτων στο συγκεκριμένο πλαίσιο, εστιάζοντας σε δραστηριότητες που εξετάζουν παράλληλα τις χωρικές δεξιότητες των μαθητών.

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία της εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες τρισδιάστατης γεωμετρίας, αναλογιζόμενοι την πληθώρα εφαρμογών της στις επιστήμες αλλά και την καθημερινή ζωή, η μετάβαση από το επίπεδο στον χώρο είναι εφικτή στη σχολική πραγματικότητα, στα πλαίσια ενός κατάλληλα διαμορφωμένου αναλυτικού προγράμματος, και παρέχει ευκαιρίες όχι μόνο ανάπτυξης του χωρικού συλλογισμού αλλά και αναστοχασμού της υφιστάμενης γνώσης για την επίπεδη γεωμετρία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274.

Artigue, M., & Mariotti, M. A. (2014). Networking theoretical frames: the ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 329–355.

Bako M., Different projecting methods in teaching spatial geometry, European Research in Mathematics Education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3, February 28 – March 3, 2003). Bellaria, Italy: University of Pisa and ERME

Bartolini Bussi, M. G. (2007). Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 63–71.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English et al. (Eds.), *Handbook of international research in mathematical education* (pp. 746–783). Routledge.

Bartolini Bussi, M. G., & Bazzini, L. (2003). Research, practice and theory in didactics of mathematics: Towards dialogue between different fields. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 203–223.

Battista, M., & Clements, D. H. (1996). Finding the number of cubes in rectangular cube buildings. *Teaching Children Mathematics, 4*(5), 258–264.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching* (pp. 420–464). N.C.T.M.-Macmillan

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 133–148.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational Researcher, v.32, 9-13.

Cohen, N. (2000). Misconceptions in 3-D Geometry Basic Concepts, in Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychological of Mathematical Education, Hiroshima, Japan, V.1, p.149.

Cohen, N. (2008). How do a plane and a straight line look like? Inconsistencies between formal knowledge and mental images. Proceedings of PME 32 and PME-NA 30, 2, 345-352

Cooper, M. (1992). Three-dimensional symmetry. *Educational Studies in Mathematics, 23*(2), 179–202.

David, M., & Tomaz, V. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 413–431.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Procedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 55–69). Hiroshima: Hiroshima University.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

Duval, R.: 1995a, 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing', in R. Suttherland and J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlin, pp. 142–157.

Duval, R.: 1998b, 'Geometry from a cognitive point a view', in C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.

Duval, R.: 2000a, 'Basic issues for research in mathematics education', in T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of PME,* 1, Nishiki Print Co. Ltd., Hiroshima, pp. 55–69.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317–333.

Güçler, B., Hegedus, S., Robidoux, R., & Jackiw, N. (2013). Investigating the mathematical discourse of young learners involved in multi-modal mathematical investigations: the case of haptic technologies. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 97–118). Berlin: Springer.

Hasan, R. (2002). Semiotic mediation, language and society: Three exotripic theories - Vygotsky, Halliday and Bernstein. In J. Webster (Ed.), *Language, society and consciousness: The collected works of Ruqaiya Hasan, vol 1*. London: Equinox.

Hegedus S., Laborde C., Brady C., Dalton S., Siller H.S., Tabach M., Trgalova J., & Moreno-Armella L. (2015). Uses of Technology in Upper Secondary Mathematics Education, Part of the series ICME-13 Topical Surveys pp 1-36, Date: 04 November 2016.

Hegedus, S. J. (2013). Investigating how young children make sense of mathematical objects in a multimodal environment: A phenomenological approach. Proceedings of PME 37, 3, 33–40.

Hoyles, C. & Noss, R.: 1996, *Windows on Mathematical Meanings,* Kluwer Academic Press.

Hung, P. H., Hwang, G. J., Lee, Y. H., & Su, I. (2012). A cognitive component analysis approach for developing game-based spatial learning tools. *Computers & Education*, *59*(2), 762–773.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283–317.

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2014). Dynamic and tangible representations in mathematics education. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation: A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 187–202). New York: Springer.

Latsi, M., & Kynigos, C. (2012). Experiencing 3D simulated space through different perspectives. In A. Jimoyiannis (Ed.), *Research on e-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Issues* (pp. 183–196). Berlin: Springer.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 325–336.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: The 22nd ICMI study* (pp. 191–225). New York, NY: Springer.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 439–460.

Mammana, M. F., Micale, B., & Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(6), 818–830.

Maracci, M., Cazes, C., Vandebrouck, F., & Mariotti, M. A. (2013). Synergies between theoretical approaches to mathematics education with technology: A case study through a cross-analysis methodology. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 461–485.

Mariotti M.A. (1995) Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In: Sutherland R., Mason J. (eds) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 138. Springer, Berlin, Heidelberg.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25–53.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the CABRI environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 257–281.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies, 41*(4), 427–440.

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *45*(3).

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 219–248.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2012). Resources for the teacher from a semiotic mediation perspective. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources:*

Mathematics curriculum materials and teacher development (pp. 59–76). Berlin: Springer.

Maschietto, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2009). Working with artefacts: Gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 143–157.

Maschietto, M., & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: The productive notion of mathematics laboratories. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 33–47.

Miyazaki, M., Kimiho, C., Katoh, R., Arai, H., Ogihara, F., Oguchi, Y., & . Komatsu, K. (2012). Potentials for Spatial Geometry Curriculum Development with Three-Dimensional Dynamic Geometry Software in Lower Secondary Mathematics. *International Journal For Technology In Mathematics Education*, *19(2),* 73-79

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Special issue of Educational Studies in Mathematics: Democratizing Access to Mathematics Through Technology—Issues of Design and Implementation, 68*(2), 99–111.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 83–116). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. Seeing, Problems of representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79–92.

Parzysz, B. (1991). Representations of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 575–593.

Peirce, C. S. (1955). Logic as semiotic: The theory of signs. In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (Chapter 7). New York, NY: Dover.

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 191–212.

Powell A. B., Francisco J. M., Maher C. A. (2003), An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data, The Robert B. Davis Institute for learning, Graduate School of Education, Rutgers University, 10 Seminary Pl., New Brunswick, NJ, USA, *Journal of Mathematical Behavior,* 22 pp. 405 –435

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Rotterdam, the Netherlands: Sense.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.

Sinclair, N., & Bruce, C. (2014). Spatial reasoning for young learners. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36*, *1*, 173–203.

Sinclair, N., & Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education, 51*(3), 319–329.

Taylor, H.,& Hutton, A. (2013). Think 3d! Training spatial thinking fundamental to STEM education. *Cognition and Instruction, 31*(4), 434–455.

Vérillon, P.,& Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts. A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77–101.

von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality* (pp. 17-40). New York: Norton.

von Glasersfeld, E. (1996). Introduction: Aspects of constructivism. In Fosnot, C. T. (Ed.), *Constructivism: Theory, perspective, and practice* (pp. 3-7). New York: Teachers College Press.

Vygotskij, L.S.: 1978, *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press.

Widder, M., Berman, A., & Koichu, B. (2014). Dismantling visual obstacles to comprehension of 2-D sketches depicting 3-D objects. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 5*, 369–376.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

1^{o} Φύλλο εργασίας – Κατασκευή σημείου εκτός επιπέδου.

Γνωρίζουμε το Cabri

Καλησπέρα!

Ανοίξτε το Cabri 3D.

- Κατασκευάστε σημείο εκτός του βασικού επιπέδου.

  Ελένξτε αν το σημείο που κατασκευάσατε ανήκει όντως στο βασικό επίπεδο.

> – *Με δεξί κλικ πατημένο μεταβάλετε τη γωνία θέασης,*
> – *Με διπλό κλικ πάνω σε σημείο εμφανίζονται οι συντεταγμένες του στον χώρο.*

- Εξερευνήστε τα εργαλεία στην 4^{η} και 5^{η} στήλη της γραμμής εργαλείων, και κατασκευάστε ένα σημείο που να μην ανήκει στο βασικό επίπεδο.

2^{o} Φύλλο εργασίας – Καθετότητα στον χώρο.

Γνωρίζουμε το Cabri

- Δημιουργήστε ένα νέο έγγραφο.

- Κατασκευάστε μία κάθετη ευθεία (ζ) στο βασικό επίπεδο και ορίστε σε αυτή ένα ελεύθερο σημείο.

- Πόσα είναι τα κάθετα επίπεδα στην ευθεία (ζ) στο ελεύθερο σημείο;

  ____

- Κατασκευάστε το κάθετο επίπεδο χρησιμοποιώντας το εργαλείο: **«καθετότητα».**

- Κατασκευάστε δύο ευθείες στο 2^{o} επίπεδο, οι οποίες διέρχονται από το σημείο τομής επιπέδου-ευθείας. Τι γωνία σχηματίζουν οι νέες ευθείες με την αρχική ευθεία (ζ);

  ____

- Κατασκευάστε το επίπεδο που ορίζεται από το ελεύθερο σημείο μίας από τις ευθείες που κατασκευάσατε στο 2^{o} επίπεδο και την αρχική ευθεία (ζ).
  Περιστρέψτε την ελεύθερη ευθεία γύρω από την ευθεία (ζ),παρατηρώντας τη γωνία μεταξύ των επιπέδων που κατασκευάσατε.
  Αναγνωρίζετε αν τα δύο επίπεδα σχηματίζουν κάποια γωνία, και ποια;

- Μπορείτε να κατασκευάσετε μία ευθεία που να μη σχηματίζει γωνία με την (ζ);
  Δύο ευθείες στον χώρο σχηματίζουν πάντα γωνία;

  ____

...Θυμάστε πως ορίζεται
η γωνία δύο ημιευθειών
στο επίπεδο;

$1^{Η}$ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΣΦΑΙΡΑ

$1^{ο}$ Φύλλο εργασίας – Ο Γεωμετρικός τόπος της σφαίρας.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 1.1

- Δημιουργήστε ένα νέο έγγραφο.
- Στο βασικό επίπεδο κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

  Αλλάξτε το μέγεθος σε μεγάλο και το χρώμα σε κίτρινο, του σημείου που καθορίζει την ακτίνα του κύκλου.
- Ορίστε ένα νέο (ελεύθερο) σημείο στον κύκλο και χρωματίστε το πράσινο. Κατασκευάστε τις δύο κάθετες ευθείες στο βασικό επίπεδο, που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου και από το πράσινο σημείο.
  Ορίστε σε αυτές από ένα ελεύθερο σημείο.
- Σώστε το αρχείο με το όνομα **first**.

  Μπορείτε να κατασκευάσετε έναν κύκλο με κέντρο το ελεύθερο σημείο της 1ης καθέτου, που θα διέρχεται από το ελεύθερο σημείο της 2ης;

  Διερευνήστε αν αυτός ο κύκλος είναι μοναδικός.
- Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου, που απέχουν από σταθερό σημείο σταθερή απόσταση;

  ____

- *Δημιουργία νέου εγγράφου: file → new*
- *Με δεξί κλικ πατημένο μεταβάλετε τη γωνία θέασης.*
- *Αλλαγή εμφάνισης γεωμετρικών αντικειμένων: δεξί κλικ πάνω στο αντικείμενο.*
- *Κατασκευή κύκλου: γραμμή εργαλείων → 3η στήλη → circle (κύκλος)*

- *Ενεργοποίηση ίχνους: γραμμή εργαλείων → trace (ίχνος)*

Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στο αντικείμενο που θέλουμε να αφήσει ίχνος και μετακινούμε το ελεύθερο σημείο.
- *Για να σβήσουμε το ίχνος, το επιλέγουμε, δεξί κλικ, delete.*

Σώστε το αρχείο με ένα νέο όνομα.

2^{o} Φύλλο εργασίας – Σύγκριση ακτίνων.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 1.2

- Ανοίξτε το αρχείο που ονομάσατε **first** και κατασκευάστε τη σφαίρα που ήταν ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

- Διερευνήστε τη σχέση της ακτίνας της σφαίρας με την ακτίνα του κύκλου στο βασικό επίπεδο.

- Πότε οι ακτίνες είναι ίσες;

- Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

- Σώστε το έγγραφο με το όνομα **sphere1.**

- *Άνοιγμα εγγράφου:*
  file → open

- *Κατασκευή σφαίρας:*
  γραμμή εργαλείων →
  *$4^{η}$ στήλη → **sphere** (σφαίρα)*
  
  Με δεξί κλικ πάνω στη σφαίρα μπορείτε να αλλάξετε την εμφάνιση της.
  *Χρήσιμη είναι η επιλογή **surface style** που επιλέγοντας **small dots** ή **large dots** μπορείτε να δείτε μέσα στη σφαίρα.*

- *Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος:*
  *γραμμή εργαλείων → $3^{η}$ στήλη → **segment***
  

$3^{ο}$ Φύλλο εργασίας – Καμπύλη τομής σφαίρας με επίπεδο.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 1.3

Στο έγγραφο: sphere1

- Κατασκευάστε ένα επίπεδο *(plane)* που θα ορίζεται από δύο σημεία στο βασικό επίπεδο και ένα τρίτο ελεύθερο σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας.

  Αλλάξτε την εμφάνιση στο τελευταίο σημείο και κάντε το γαλάζιο για να το ξεχωρίζετε.

- Κατασκευάστε την καμπύλη τομής *(intersection curve)* του επιπέδου με τη σφαίρα.

- Τι είδους καμπύλη είναι;

  ____

- Κατασκευάστε το κέντρο της καμπύλης και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

– *Κατασκευή τομής επιφάνειας με επίπεδο:*
  γραμμή εργαλείων→
  *$3^{η}$ στήλη→**intersection curve***
  (καμπύλη τομής)
  
  Διπλό κλικ μόλις εμφανιστεί η καμπύλη που θέλετε.

– *Για να ορίσουμε το ή τα σημεία τομής: γραμμή εργαλείων→$2^{η}$ στήλη →**intersection point(s)***
  *(σημείο/α τομής)*
  και κάνουμε διπλό κλικ.

2Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΚΥΒΟΣ

1ο Φύλλο εργασίας – Κατασκευή κύβου.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 2.1

- Ανοίξτε το έγγραφο **cube1**.
- Κατασκευάστε έναν κύβο με βάση το πράσινο τετράγωνο στο βασικό επίπεδο.
- Σώστε το έγγραφο σας.

- *Άνοιγμα εγγράφου: file → open και επιλέγετε*
- *Με δεξί κλικ πατημένο μεταβάλετε τη γωνία θέασης.*
- *Αλλαγή εμφάνισης γεωμετρικών αντικειμένων: δεξί κλικ πάνω στο αντικείμενο.*

2ο Φύλλο εργασίας – Αναγνώριση κύβου.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 2.2

- Ανοίξτε το έγγραφο **cube2**.
- Εξετάστε αν το γεωμετρικό στερεό που έχει κατασκευαστεί είναι κύβος.

____

Σώστε το αρχείο και κλείστε το.

- *Άνοιγμα εγγράφου: file → open και επιλέγετε*
- *Με δεξί κλικ πατημένο μεταβάλετε τη γωνία θέασης.*
- *Αλλαγή εμφάνισης γεωμετρικών αντικειμένων: δεξί κλικ πάνω στο αντικείμενο.*

3ο Φύλλο εργασίας – Τετράεδρα μέσα σε κύβο.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 2.3

Βήμα 1ο

- Ανοίξτε το έγγραφο **cube3**.

- Κατασκευάστε την 8η κορυφή του κύβου, χωρίς να χρησιμοποιήσετε κανένα εργαλείο που σχεδιάζει επίπεδα.

- Κατασκευάστε τις ακμές του κύβου που λείπουν.

- Εξερευνήστε το στερεό που περικλείεται από τις τρεις ακμές που φέρατε και την πράσινη βάση.
  • πόσες έδρες έχει; ___________
  • τι είδους τρίγωνο είναι κάθε έδρα;
  ____

> – *Άνοιγμα εγγράφου:*
> *file → open και επιλέγετε*
> – *Με δεξί κλικ πατημένο μεταβάλετε τη γωνία θέασης.*
> – *Αλλαγή εμφάνισης γεωμετρικών αντικειμένων: δεξί κλικ πάνω στο αντικείμενο.*

Βήμα 2ο

- Με δεξί κλικ αλλάξτε την επιφάνεια του στερεού σε large dots.

- Εμφανίζεται εσωτερικά ένα νέο στερεό.
  Μελετήστε το ως προς το είδος των τριγώνων των εδρών του.

- Αποκρύψτε τις έδρες του εξωτερικού στερεού.

- Εξερευνήστε το τετράεδρο με όποια εργαλεία θέλετε, ώστε μετά να είστε σε θέση να το ανακατασκευάσετε αν δεν έχετε το δικαίωμα να κατασκευάσετε πρώτα τον κύβο.

Σώστε το έγγραφο με το όνομα: **cube4.**

4ο Φύλλο εργασίας – Κατασκευή κανονικού τετραέδρου.

Φύλλο Δραστηριοτήτων 2.4

- Ανοίξτε ένα νέο αρχείο.
- Κατασκευάστε ένα κανονικό τετράεδρο με τη μία έδρα του στο βασικό επίπεδο.
- Σώστε το αρχείο με το όνομα: **Κανονικό Τετράεδρο.**

3Η **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ & ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Φύλλο εργασίας - Stella Octungula

Φύλλο Δραστηριοτήτων 3

- Ανοίξτε το έγγραφο **Stella octungula**.
- Εξερευνήστε το στερεό.
- Ανακατασκευάστε το στερεό σε ένα νέο αρχείο που θα ονομάσετε: **mystellar**.

Μπορείτε να αποκρύπτετε σταδιακά μέρη της κατασκευής, ώστε να εξερευνήσετε τη δομή του.
Χρήσιμο είναι να σώζετε τα αρχεία με διαφορετικά ονόματα στην πορεία.