Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Μελέτη της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης στην Α΄ Γυμνασίου μέσω μοτίβων».

Σουκαράς Ευθύμιος

Α.Μ. 201406

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Ψυχάρης Γεώργιος – Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ

Αθήνα - Σεπτέμβριος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 22η Σεπτεμβρίου 2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Αφιερώνεται στη Μαρίνα
στη Χρυσάνθη και τον Σωτήρη.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα Καθηγητή αυτής της διπλωματικής κ. Γιώργο Ψυχάρη για την αμέριστη συμπαράσταση, την έμπνευση και την καθοδήγηση σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου και την ουσιαστική παρέμβαση με τα σχόλιά του για την εκπόνησή της.

Τον Καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη για την τιμή που μου έκανε να συμμετέχει στην συμβουλευτική επιτροπή, αλλά πιο πολύ γιατί με τις συζητήσεις στο μάθημα του, μας άνοιξε τους ορίζοντες που βλέπαμε την Διδακτική των Μαθηματικών μέσα από το πρίσμα της Επιστημολογίας και της Φιλοσοφίας τους.

Την Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα ως υπεύθυνη σπουδών και για την τιμή που μου έκανε να μετέχει τόσο στην συμβουλευτική όσο και την εξεταστική επιτροπή.

Τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόση για την τιμή που μου έκανε να μετέχει στην εξεταστική επιτροπή.

Τους καθηγητές του μεταπτυχιακού γιατί μας έδωσαν απίστευτα εφόδια για να μπορούμε να ασκήσουμε το λειτούργημα του εκπαιδευτικού με μεγαλύτερη αφοσίωση γνώση αλλά και ανοικτό πνεύμα.

Την κ. Κλή από την γραμματεία για την βοήθεια της σε όλη την διάρκεια των σπουδών μας.

Τους συναδέλφους και συμφοιτητές μου που ήμασταν συνοδοιπόροι σε αυτό το όμορφο ταξίδι κατά την διάρκεια των σπουδών μας.

Τους μαθητές μου από το 3^{ο} Γυμνάσιο Πετρούπολης γιατί χωρίς αυτούς δεν θα είχε πραγματοποιηθεί η έρευνα αυτή.

Τέλος να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που μου συμπαραστάθηκε σε όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού αυτού, την σύζυγό μου Μαρίνα για την υπομονή της και τα παιδιά μου Χρυσάνθη και Σωτήρη, με μια συγγνώμη για τις ώρες που τους στέρησα.

Περίληψη

Η μελέτη γύρω από την διδασκαλία των μοτίβων (patterns) στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει δείξει ερευνητικά ότι ενισχύει την αλγεβρική σκέψη των μαθητών , αφού οδηγεί σε γενικεύσεις που είναι βαθμιαίες (graded) (Rivera 2013) και για αυτό διακριτές και παρατηρήσιμες. Μελέτες έχουν γίνει σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια καθώς και στην ειδική αγωγή με ιδιαίτερα αποτελέσματα σε μαθητές που υπάρχει αδυναμία έκφρασης προφορικού λόγου (Healy 2003).

Σύμφωνα με την έρευνα οι γενικεύσεις που μπορούν να κάνουν οι μαθητές είναι σε τρία επίπεδα: η αναγνώριση μιας ομοιότητας σε ένα μοτίβο, η επέκταση της σε όλους τους επακόλουθους όρους και η εύρεση συμβολικού τύπου που το αναπαράγει (Radford 2003). Η έρευνα έχει δώσει προτεραιότητα στο πώς θα βρούμε τρόπους ώστε να συνδεθεί το τι βλέπουν, το τι κάνουν και τι εκφράζουν οι μαθητές μέσα από κατάλληλα φτιαγμένα ψηφιακά εργαλεία και αν αυτά μπορούν η όχι να αφήσουν το ίχνος τους στη νοηματοδότηση των αλγεβρικών εννοιών όπως αυτές περιγράφονται στα αναλυτικά προγράμματα (Noss,Healy @ Hoyles 1997).

Η παρούσα διπλωματική εργασία μέσα από μελέτη περίπτωσης θα ερευνήσει το πώς ενισχύεται η γενίκευση και κατά συνέπεια η αλγεβρική σκέψη μέσα από το ψηφιακό περιβάλλον του **eXpresser**, τι δυνατότητες επέκτασης έχει στην έννοια της συνάρτησης, καθώς και πως χρησιμοποίηση του ίδιου του εργαλείου σαν τεχνούργημα βοηθά στη νοηματοδότηση δύσκολων αλγεβρικών εννοιών όπως η μεταβλητή και η συνάρτηση ως συμμεταβολή μεγεθών.

Η μελέτη έχει επικεντρωθεί ειδικά στα σημεία όπου ένα Ψηφιακό Αλγεβρικό Περιβάλλον όπως το eXpresser ανοίγει δρόμους αλγεβρικής σκέψης όπως ισχυρίζονται οι μέχρι τώρα ερευνητές καθώς και στο πως μπορεί ο συνδυασμός εργασιών με ψηφιακά εργαλεία και τον παραδοσιακό τρόπο χαρτί και μολύβι μπορεί να δράσει σαν ενισχυτής της αλγεβρικής σκέψης.

Λέξεις κλειδιά : Μοτίβα, ψηφιακά εργαλεία, γενίκευση, τοπική αφαίρεση, αλγεβρικός τρόπος σκέψης.

Abstract

The study of pattern teaching in primary and secondary education has shown research to reinforce students' algebraic thinking as it leads to graded generalizations (Rivera 2013) and therefore distinct and observable. Studies have been conducted throughout the whole range of primary and secondary education as well as in special treatment with special results for students who are unable to express oral (Healy 2003). According to the survey, the generalizations that students can make are three levels: recognizing a similarity in a pattern, extending it to all subsequent terms, and finding a symbolic type that replicates it (Radford 2003).

Research has prioritized how to find ways to link what pupils see, what they do and what they express through appropriately constructed digital tools, and whether or not they can leave their trace in understanding the algebraic concepts as described In curricula (Noss, Healy @ Hoyles 1997). The proposed diploma thesis, through a case study, will explore how the generalization and hence the algebraic thinking through the expresser’s digital environment are enhanced, what extension possibilities it has to the concept of function, and the use of the tool itself as an artifact for Ensuring difficult algebraic concepts such as variable and function as size aggregation.

The study will focus specifically on where a Digital Algebraic Environment such as the eXpresser opens Algebraic Way Of Thinking as claimed by the researchers so far and how it can combine work with digital tools and the traditional paper and Pencil can act as an amplifier of algebraic thinking.

Key words: patterns, digital tools, generalization, situated abstraction, algebraic way of thinking.

Πίνακας περιεχομένων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9

2. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΑ (PATTERNS) 12

2.1. Τι είναι η αλγεβρική σκέψη 12

2.2 Η ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (Early Algebra) 15

2.3 Αλγεβρική Γενίκευση και μοτίβα 16

2.3.1 Γιατί είναι σημαντική η ενασχόληση με μοτίβα 22

2.3.2 Τα Μοτίβα και ο ρόλος τους στην Εκπαίδευση 24

2.4 Ψηφιακά περιβάλλοντα κατασκευής μοτίβων 27

3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 29

3.1 Θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism) 29

3.2 Μικρόκοσμοι και Κατασκευές 32

3.3 Θεωρία της αντικειμενικοποίησης (objectification) 34

3.4 Τοπική αφαιρετική διαδικασία (Situated abstraction) 38

3.5 Αφαίρεση εντός Πλαισίου-(Abstraction In Context) 38

4. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ EXPRESSER 41

5. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ 44

5.1 Στόχοι της έρευνας- Ερευνητικά ερωτήματα 44

5.2 Ερευνητικός σχεδιασμός 45

5.3. Μέθοδος 45

5.4. Συμμετέχοντες 46

5.5 Δραστηριότητες-Περιγραφή 47

5.6. Δεδομένα 58

5.7 Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων 59

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ 60

6.1 Εισαγωγή 60

6.2 Κρίσιμα συμβάντα που νοηματοδοτούν αλγεβρική σκέψη ως αφαιρετική διαδικασία 61

6.2.1Η έννοια της μεταβλητής 61

6.2.2 Αλγεβρικά ισοδύναμες εκφράσεις 64

6.2.3 Η συμμεταβολή μεγεθών 64

6.2.4 Κρίσιμα συμβάντα αναλυτικότητας (analyticity) 66

6.2.5 Αναγνώριση δομικού στοιχείου μοτίβου 72

6.2.6 Αναγνώριση ομοιότητας και παγιοποίηση της γενίκευσης - (consolidation) 74

6.2.7 Τοπική αφαιρετική διαδικασία 77

6.2.8 Ανάλυση στρατηγικής των μαθητών και παρατηρήσεις 78

6.3 Προσφορά του λογισμικού 79

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 81
7.1. Απάντηση στο 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα. 81
7.2 Απάντηση στο 2^{ο} ερευνητικό ερώτημα 82
8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....85
9. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 90

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι κοινός τόπος όπως εξάλλου αποδεικνύει και η έρευνα τα τελευταία 30 χρόνια, η ιδιαίτερη αξία που έχουν τα διερευνητικά ψηφιακά περιβάλλοντα στην διδασκαλία και στη μάθηση γενικότερα. Η εισαγωγή τους όμως στην διδασκαλία απαιτείται να υπακούει σε καινούργια πλαίσια αφού αλλάζει τον ίδιο τον ρόλο του δασκάλου. Ταυτόχρονα δίνει την δυνατότητα μέσω ενός δυναμικού επανασχεδιασμού των μαθημάτων να οδηγεί σε πιο εξατομικευμένη μάθηση, έτσι ώστε ο μαθητής να έχει τον πρώτο ρόλο στο πως κατασκευάζει την μαθηματική γνώση με τον δικό του αυτόνομο τρόπο, ανακαλώντας την προηγούμενη και χτίζοντας από αυτήν την καινούργια.

Το κύριο ερευνητικό ερώτημα που έρχεται να συμπληρώσει η παρούσα έρευνα είναι πως ένα τέτοιο ψηφιακό περιβάλλον μάθησης όπως είναι ο eXpresser μπορεί με κατάλληλα σχεδιαζόμενες εργασίες που αφορούν την δημιουργία μοτίβων, να βοηθήσει τους μαθητές να νοηματοδοτούν αλγεβρικές έννοιες ως αποτέλεσμα αφαιρετικής διαδικασίας. Από την άποψη της έρευνας, έχουμε κάποια παραδείγματα λογισμικού (Δυναμική Γεωμετρία, Net Logo, Logo, SimCalc, Tabletop για να αναφέρουμε μόνο μερικά) -που μετασχηματίζουν τους όρους μάθησης αλλά και της δυνατότητάς τους να αλλάξουν όχι απλώς το πώς μαθαίνονται τα μαθηματικά, αλλά ποια είναι τα μαθηματικά που πρέπει να μαθαίνουν (Βλ. Papert, 2006, Noss & Hoyles, 1996).

Στην παρούσα έρευνα μας ενδιαφέρει η μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα και εδώ έρχεται να μας βοηθήσει η μέχρι τώρα έρευνα που μας δείχνει ότι ο πιο ενδεδειγμένος τρόπος είναι η διδασκαλία της άλγεβρας μέσω μοτίβων (Ainley, Wilson, & Bills, 2003, Mason, 1996).

Επιπλέον, οι επιστήμες της μάθησης δεν έχουν ακόμη δώσει απάντηση πώς οι ατομικές διαφορές μεταξύ των εκπαιδευομένων μπορούν να ενσωματωθούν πλήρως στο σχεδιασμό ενός τεχνικού εξοπλισμού και ενός παιδαγωγικού συστήματος, όπου μπορεί να συνυπάρχουν εικονικά ή πραγματικά υλικά ώστε να παίρνουν υπόψη τις διαφορετικές τροχιές μάθησης που ακολουθούν οι μαθητές.

Ο μικρόκοσμος (micro world) **eXpresser**, επιλέχθηκε ως ένας κόσμος που ήταν ταυτόχρονα πλούσιος και αρκετά απλός για να μελετήσει τη μαθησιακή συμπεριφορά σε ότι αφορά την επαφή των μαθητών με βασικές αλγεβρικές έννοιες.

Η ηλιακή ομάδα που κέντρισε το ενδιαφέρον μας για να ασχοληθούμε ήταν μαθητές της πρώτης γυμνασίου. Η επιλογή αυτή έγινε γιατί οι μαθητές σε αυτή την τάξη δεν έχουν "μυηθεί "από το αναλυτικό πρόγραμμα στην έννοια της μεταβλητής, βρίσκονται σε προ-αλγεβρικό στάδιο και θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα θα γίνει μέσω της ενασχόλησης με τα εικονιστικά (figural) μοτίβα που παράγει το λογισμικό. Το ενδιαφέρον μας στρέφεται στο πως μπορεί μέσω ενός κατάλληλα σχεδιασμένου ψηφιακού μικρόκοσμου, οι μαθητές να έρθουν σε πρώτη επαφή με αλγεβρικές έννοιες και πως τις νοηματοδοτούν όταν εμπλέκονται σε δραστηριότητες κατασκευής μοτίβων με αυτόν.

Ξεκινώντας μια μελέτη-έρευνα γύρω από τα μοτίβα-κανονικότητες (patterns) πρέπει να υπογραμμίσουμε τα ακόλουθα σημεία. *Ολόκληρη η μαθηματική σκέψη δεν είναι τίποτε άλλο από κανονικότητες της σκέψης* (Keith Devlin 1994)[1]. *Το ανθρώπινο μυαλό ψάχνει εναγωνίως για να βρει μοτίβα (patterns) εκεί που υπάρχουν* (Marcus Du Satoy 2009)[2]. Ο ρόλος τους τα κάνει να έχουν κεντρικό ρόλο στη μαθηματική γενίκευση και αφαιρετική σκέψη. Είναι φυσικό στην πορεία ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης ως προϊόν της ανθρώπινης κουλτούρας τα μοτίβα να νοηματοδοτούν το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η εισαγωγή στην άλγεβρα δεν είναι μόνο ο λογισμός των συμβόλων και ιδίως τα τρία τελευταία γράμματα της αλφαβήτου (Blair 2003), ούτε αλγεβρικά προβλήματα είναι αυτά που ξεκινάνε αποκλειστικά από την προσταγή " βρείτε τον άγνωστο χ" . Αυτό που βγήκε μέσα από την παρούσα έρευνα είναι αυτό που συνδέει την ενασχόληση με τα μοτίβα και την αλγεβρική σκέψη δεν είναι τίποτε άλλο από την γενίκευση.

Η γενίκευση με την αυστηρή της έννοια σημαίνει την ανακάλυψη μέσω της πρόσβασης σε έναν συγκεκριμένο αριθμό περιπτώσεων, στην εύρεση μιας γενικής

---

1 Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind and the Universe Paperback – 1994 by Keith Devlin

2 Finding Moonshine: A Mathematician's Journey through Symmetry Paperback – 14 by Marcus Du Sautoy-May 2009

περιγραφής που έχει καθολική ισχύ για όλες τις περιπτώσεις. Αυτό είναι το είδος της κίνησης της σκέψης πού αποκαλείται τυπική υπόθεση (formal hypothesis) και παράγει την αιτιολόγηση από το ορισμένο στο γενικό. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η κατανόηση όχι σε έκταση αλλά σε βάθος (Pierce 1960).

Κεντρικό ρόλο στην παρούσα έρευνα έχει η αλγεβρική σκέψη και πως παράγεται αυτή μέσα από την ενασχόληση με τα μοτίβα. Ο ορισμός της αλγεβρικής σκέψης, η γενίκευση μέσω μοτίβων και πως διαμεσολαβείτε αυτή μέσω ενός ψηφιακού μικρόκοσμου καθώς και η επισκόπηση της έρευνας γύρω από αυτά παρουσιάζονται στο δεύτερο κεφάλαιο. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο για την έρευνα όπου τον κύριο ρόλο έχει η θεωρία της δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (constructionism) και πώς έχουν επηρεαστεί από αυτήν στο σχεδιασμό τους ανάλογα ψηφιακά περιβάλλοντα. Περιγράφεται η θεωρία με την οποία συντελείται η αφαιρετική σκέψη μέσα σε αυτά τα πλαίσια (θεωρία AIC), πως επιτυγχάνεται αυτή τοπικά (Situated abstraction) και τέλος πως οι μαθητές επηρεάζονται από τα ψηφιακά εργαλεία και τα αλλάζουν κατασκευάζοντας τα δικά τους νοητικά αντικείμενα μέσα από αυτά (Instrumental genesis).

Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται μια αναλυτική περιγραφή του ψηφιακού μικρόκοσμου eXpresser , των λειτουργιών του και τι καινούργιο προσφέρει στην αλγεβρική νοηματοδότηση μέσω των λειτουργιών του.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας, οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν, τα δεδομένα της έρευνας και η μέθοδος ανάλυσης αυτών.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης .

Στο έβδομο κεφάλαιο συνοψίζουμε τα συμπεράσματα από την έρευνα δίνεται η απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα και γίνεται μια συζήτηση για νέα ερωτήματα που προκύπτουν.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφία και τέλος στο παράρτημα παρατίθενται αυτούσιες οι εργασίες που απασχολήθηκαν οι μαθητές με τα ανάλογα φύλλα εργασίας.

2. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΙ ΜΟΤΙΒΑ (PATTERNS)

2.1. Τι είναι η αλγεβρική σκέψη

Αν θέλουμε να είμαστε αποτελεσματικοί στο τι θέλουμε να πετύχουμε κάθε φορά χρησιμοποιώντας η όχι ένα ψηφιακό εργαλείο και πάντα μέσα στα πλαίσια της εκπαιδευτικής διαδικασίας πρέπει να είμαστε όσο το δυνατόν πιο ακριβείς με τη περιγραφή των στόχων μας.

Αν ο στόχος μας είναι η ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης πρέπει αυτήν να μπορούμε να την ορίσουμε, να την περιγράψουμε, να την κατηγοριοποιήσουμε για να μπορούμε να την μετρήσουμε με ποιοτικό τρόπο στη συνέχεια.

Η αλγεβρική σκέψη αποτελεί σύνθεση πέντε αλληλοσχετιζόμενων μορφών σκέψης: γενίκευση επέκταση και κατασκευή μοτίβων, διαχείριση συμβολικών και αλγεβρικών εκφράσεων, μελέτη των δομών που προκύπτουν από υπολογισμούς, μελέτη συναρτήσεων και διακύμανσης και κατάλληλη λεκτική ερμηνεία συμβολικών δομών (Kaput, 1998).

Πιο συγκεκριμένα οι στόχοι για την επίτευξη της αλγεβρικής σκέψης όπως περιγράφονται στα στάνταρ για τα σχολικά μαθηματικά (NCTM-2000) με τον τίτλο Άλγεβρα για όλους είναι οι ακόλουθοι:

1. Οι μαθητές **να κατανοούν** μοτίβα-κανονικότητες σχέσεις και συναρτήσεις.

2. Να αναπαριστούν και να αναλύουν μαθηματικές καταστάσεις και δομές χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό.

3. **Να χρησιμοποιούν** μαθηματικά μοντέλα και να κατανοούν ποσοτικές σχέσεις και

4. Να αναλύουν καταστάσεις σε διάφορα πλαίσια.

Η Kieran (2004) κατηγοριοποιεί τις αλγεβρικές δραστηριότητες σε τρία είδη:

α. Δραστηριότητες παραγωγής-(generational) σχετιζόμενες με τυποποίηση των εκφράσεων και των εξισώσεων. Εξισώσεις που περιέχουν έναν άγνωστο και αναπαριστούν καταστάσεις, εκφράζουν γενικεύσεις που προκύπτουν από γεωμετρικά μοτίβα ή αριθμητικές ακολουθίες και κανόνες που ορίζουν μαθηματικές σχέσεις.

β. Δραστηριότητες μετασχηματισμών (transformational): που έχουν σχέση με

πράξεις παραγοντοποίηση πολυωνύμων, λύση εξισώσεων, ισοδυναμία εκφράσεων κ.τ.λ.

γ. Σφαιρικές (**global/meta-level)** όπου η Άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο για επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, παρατήρηση δομής, μελέτη μεταβολών ,γενίκευση, ανάλυση σχέσεων, δικαιολόγηση, παρουσίαση αποδείξεων και πρόβλεψη.

Δύο κύριες διαδικασίες του αλγεβρικού συλλογισμού είναι η γενίκευση και η χρήση συμβόλων για την αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών και η αναπαράσταση και επίλυση προβλημάτων (Carpenter & Levi, 2000).

Στην άλγεβρα επικεντρωνόμαστε στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων με τη χρήση κατάλληλων συμβολικών εκφράσεων. Ερευνητές υποστηρίζουν ότι υπάρχει σημαντικό γνωστικό κενό μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας γιατί οι μαθητές δεν μπορούν χωρίς διδασκαλία να κατανοήσουν τον άγνωστο ή να τον χρησιμοποιήσουν. Στις περισσότερες χώρες οι μαθητές δεν διδάσκονται έννοιες της άλγεβρας στο δημοτικό ενώ στο γυμνάσιο εισάγονται αμέσως σε έννοιες όπως η επίλυση εξισώσεων. Για να γεφυρωθεί αυτό το κενό, ερευνητές υποστηρίζουν ότι χρειάζεται να γίνει διδασκαλία εννοιών της άλγεβρας με στόχο την ανάπτυξη της προ-αλγεβρικής σκέψης των μαθητών από το δημοτικό σχολείο.

Ερευνητές υποστηρίζουν ακόμη και τη συστηματική διδασκαλία εννοιών της άλγεβρας από τις μικρές τάξεις του δημοτικού (Stephens, 2008; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007). Προς υπεράσπιση μιας προσέγγισης για εισαγωγή **πρώιμης άλγεβρας (early algebra)** ακόμα και σε μικρές τάξεις του δημοτικού θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι υπάρχει κάτι εγγενώς αριθμητικό στην άλγεβρα και κάτι που είναι εγγενώς αλγεβρικό στην αριθμητική και ότι η δραστηριότητα μέσω των patterns φέρνει μαζί αυτές τις δύο πτυχές.

Στον πυρήνα της αλγεβρικής σκέψης βρίσκεται η διαδικασία της γενίκευσης.

Η **γενίκευση** περιλαμβάνει την αναζήτηση κάποιας αμετάβλητης ιδιότητας μέσα σε μια ομάδα αντικειμένων. Αναζητείται ο γενικός όρος, ως κάτι επαναλαμβανόμενο αλλά σταθερό. Ο γενικός όρος είναι ένα ορισμένο αμετάβλητο των διαφόρων ιδιοτήτων ενός δεδομένου τύπου αντικειμένων . Δηλαδή είναι απαραίτητο. σε πολλές εργασίες με μοτίβα οι όροι «γενικοί» και «βασικοί» να χρησιμοποιούνται εναλλακτικά: «για να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά που είναι απαραίτητα για την

παραγωγή τους .Αυτό που καθορίζει την γενίκευση είναι να βρεθούν γενικά ή κοινά σε ένα ορισμένο σύνολο αντικειμένων, αλλά όχι σε κάποια άλλη ομάδα αντικειμένων » Davydov (2008 σελ. 74) .

Ακόμα πρέπει να υπογραμμίσουμε την άποψη του Davydov σχετικά με την ισχυρή σχέση μεταξύ γενίκευσης και της αφαίρεσης (abstraction), ως εξής: "η γενίκευση θεωρείται αδιαχώριστα συνδεδεμένη με τη λειτουργία του αφαίρεσης. Η διατύπωση κάποιας βασικής ποιότητας ως γενικής ή συνηθισμένης σημαίνει να την αφαιρέσουμε από άλλες ιδιότητες. Αυτό επιτρέπει στο παιδί να μεταμορφώσει τη γενική ποιότητα σε μια ανεξάρτητη και το ειδικό αντικείμενο των επακόλουθων ενεργειών (η γενική ποιότητα χαρακτηρίζεται με κάποια λέξη). Η γνώση του γενικού, αφού είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης και της καταγραφής του αποτελέσματος με τη χρήση μιας λέξης, είναι πάντα κάτι αφηρημένο, εξαγόμενο, διακριτό ".

Σύμφωνα με τον Radford υπάρχουν τρείς κατηγορίες γενίκευσης (generalizations): η πραγματική (**Factual)** ,η γενίκευση περιεχομένου (**contextual**), και η συμβολική (**Symbolic)**.

Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές πραγματοποιούν πραγματολογικές γενικεύσεις (factual generalizations) που βασίζονται στην εύρεση του συνολικού αριθμού των στοιχείων ενός μοτίβου για συγκεκριμένο κάθε φορά αριθμό επαναλήψεων συνήθως μέσω λεκτικών περιγραφών και χειρονομιών.

Στο δεύτερο επίπεδο της γενίκευσης σε πλαίσιο (contextual generalization), τα γενικευμένα αντικείμενα ονομάζονται αλλά δεν συμβολίζονται και παίρνουν μορφή μέσα από δεικτικές εκφράσεις που περιγράφουν τη θέση τους στο χώρο, όπως π.χ. «το επόμενο σχήμα» (δηλ. ο επόμενος όρος ενός μοτίβου) ή αλλιώς «στην από πάνω γραμμή».

Στο τρίτο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης (symbolic generalization), οι γενικεύσεις εκφράζονται μέσω της χρήσης του αλφαριθμητικού σημειωτικού συστήματος της άλγεβρας (Ζούπα- Ψυχάρης 2015).

Σύμφωνα με τις έρευνές του Radford κατά την διάρκεια των τελευταίων είκοσι χρόνων το πλαίσιο μέσα στο οποίο συντελείται η γενίκευση και οδηγούμαστε στην αλγεβρική σκέψη βρίσκεται η θεωρία της αντικειμενικοποίησης **(objectification).**

Κατά τον Radford (2014) η **αλγεβρική σκέψη** πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

(1) **Απροσδιοριστία (**indeterminacy): το πρόβλημα να περιλαμβάνει μη γνωστούς αριθμούς (άγνωστες, μεταβλητές, παραμέτρους κ.λπ.).

(2) **Συμβολικότητα (** denotation): οι απροσδιόριστοι αριθμοί που εμπλέκονται στο πρόβλημα πρέπει να ονομάζονται ή να συμβολίζονται. Τώρα αυτός ο συμβολισμός μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους. Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει αλφαριθμητικά σήματα - αλλά όχι απαραίτητα. Η αναφορά των απροσδιόριστων ποσοτήτων μπορεί επίσης να συμβολίζεται με τη φυσική γλώσσα, τις χειρονομίες, μη συμβατικά σημεία ή ακόμη και ένα μείγμα αυτών.

(3) **Αναλυτικότητα** (analyticity)**:** οι απροσδιόριστες ποσότητες αντιμετωπίζονται σαν να ήταν γνωστοί αριθμοί. Δηλαδή αν και δεν είναι γνωστοί, ξεκινάει από τι απροσδιόριστες ποσότητες και προσθέτει, αφαιρεί, πολλαπλασιάζει, διαιρεί σαν να ήταν γνωστοί.

2.2 Η ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (Early Algebra)

Η πρώιμη αλγεβρική σκέψη αναφέρεται στην σκέψη και την οπτική στον αριθμό από μια πιο δομική σκοπιά. Αυτό εστιάζεται στην ικανότητα των μαθητών να βλέπουν την δομή ενός μοτίβου και τη δομή της αριθμητικής (Mason,Stephens ,&Watson 2009).Η πρώιμη αλγεβρική συλλογιστική (reasoning) συνεπάγεται την ενθάρρυνση οι νέοι μαθητές να γνωρίζουν φυσικά τις γενικεύσεις σε αριθμητικά και μη- αριθμητικά πλαίσια και να εκφράζουν αυτές τις γενικεύσεις χρησιμοποιώντας μια ποικιλία σημειωτικών συμβόλων (Radford, 2006).

Παραδοσιακά, η άλγεβρα έχει διδαχθεί σε μαθητές μόνο μετά από όταν έχουν αποκτήσει ένα σημαντικό υπόβαθρο αριθμητικής γνώσης, με την παραδοχή ότι αυτό παρέχει τη βάση για την οικοδόμηση της αλγεβρικής γνώσης. Αλλά όπως αποδεικνύεται από την τρέχουσα έρευνα που διεξήχθη από τους ερευνητές του PME, πολλοί μαθητές των πρώτων χρόνων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (13-14 ετών) δυσκολεύονται πολύ σε αυτόν τον τομέα και οι περισσότερες από αυτές τις δυσκολίες μπορούν να αναχθούν στις προηγούμενες εμπειρίες τους στην αριθμητική. Έτσι το ερευνητικό επίκεντρο για το μέλλον μετατοπίζεται στο πώς θα μπορούσε η αριθμητική και η αλγεβρική σκέψη να αλληλεπικαλύπτονται και να υποστηρίζουν η μία την άλλη κατά τα πρώτα 10 χρόνια του σχολείου.

Υπογραμμίζουμε ότι η έρευνα έχει κατατάξει σαν πρώιμη άλγεβρα το νόημα που της δίνουν οι μαθητές προερχόμενο από τα αριθμητικά θεμέλιά τους. Συγκεκριμένα, το επίκεντρο της έρευνας κατά τη διάρκεια αυτής της τελευταίας δεκαετίας έχει διερευνήσει τις προκλήσεις των καλά τεκμηριωμένων ασυνεπειών που η αριθμητική έχει δημιουργήσει για τους μαθητές που αρχίζουν να ανακαλύπτουν κανονικά τις διάφορες αλγεβρικές έννοιες (Kieran,2006).

Για παράδειγμα, η προηγούμενη αριθμητική χρήση των γραμμάτων από τους μαθητές σε τύπους και ως ετικέτες μπορεί να έχει αρνητικό αντίκτυπο στην κατανόησή της έννοιας της μεταβλητής (π.χ. Kuchemann,1981, Clement, 1982).Ακόμα πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν (α) ερμηνεύουν εξισώσεις με αριθμητικούς όρους και άγνωστους (π.χ. Linchevski & Linveh, 1999), (β) στον χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων (π.χ. Kirshner, 1989), και (γ) στην περιγραφή της δομής ενός μοτίβου ή μιας κανονικότητας σε φυσική γλώσσα (Macgregor & Stacey, 1993).

Παραδοσιακά η πρώιμη άλγεβρα τείνει να συνδέεται με τα στοιχειώδη έτη σχολικής φοίτησης. Δεδομένου ότι τα πρόσφατα ευρήματα έδειξαν ότι πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών αντανακλούν τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές καθώς αρχίζουν την τυπική άλγεβρα, αυτή η ενότητα έχει επεκταθεί για να συμπεριλάβει και τις δύο αυτές ομάδες μαθητών , δηλαδή τους μαθητές δημοτικού σχολείου - ηλικίας 5 έως 12 ετών και μαθητές ηλικίας 13 έως 14 ετών.

2.3 Αλγεβρική Γενίκευση και μοτίβα

Οι δραστηριότητες μοτίβων (patterns -tasks) έχουν θεωρηθεί ως ένας από τους κύριους τρόπους εισαγωγής μαθητών στην άλγεβρα (Ainley, Wilson, & Bills, 2003, Mason, 1996). Με αυτή την οπτική, η άλγεβρα σχετίζεται άμεσα με την γενίκευση (generalization) (Radford, 2006). Η προηγούμενη έρευνα έχει αποδείξει ότι οι οπτικές προσεγγίσεις που δημιουργούνται σε εργασίες που αφορούν τη γενίκευση των γεωμετρικών και των αριθμητικών μοτίβων, μπορούν να προσφέρουν ισχυρή υποστήριξη για την ανάπτυξη αλγεβρικών εκφράσεων, μεταβλητών και εννοιολογικού πλαισίου για τις συναρτήσεις (Healy & Hoyles, 1999).

Ωστόσο όλες οι δραστηριότητες δεν οδηγούν πάντα σε αλγεβρική σκέψη. Για παράδειγμα, δίνοντας έμφαση στην κατασκευή πινάκων τιμών από διαδοχικά μοτίβα

μπορεί να οδηγηθεί ο μαθητής στην ανάπτυξη κλειστών τύπων, τύπων που οι μαθητές δεν μπορούν να συσχετίσουν με την πραγματική φυσική κατάσταση από την οποία προήλθαν (Amit &Neria,2008, Hino, 2011,Warren, 2005).

Αυτό επηρεάζει την ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν το φάσμα των ισοδύναμων εκφράσεων που μπορούν να αναπαρασταθούν από μια φυσική κατάσταση. Τα πρότυπα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα 2005-2015 περιλάμβαναν τόσο γραμμικές όσο και τετραγωνικές συναρτήσεις που εκπροσωπούνταν ως μια σειρά οπτικών μοτίβων ή αριθμητικών ακολουθιών . Οι δραστηριότητες των μαθητών έχουν σχέση με την αναζήτηση για τη σχέση μεταξύ των διακριτών συναφών μονάδων του μοτίβου (patterrn) , συνήθως αποκαλούμενες όροι και οι όροι καθορίζονται από τη θέση στο μοτίβο.

Αυτά αντικατοπτρίζουν τους τύπους δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στο πλαίσιο των τρεχόντων προγραμμάτων σπουδών για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της μεταβλητής και των ισοδυνάμων αλγεβρικών εκφράσεων. Οι μαθητές παρατηρούν και αντιπροσωπεύουν τη δομή του μοτίβου. Θεμελιώδες για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων είναι η αναζήτηση μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών. Σε αυτήν την αναζήτηση, ο Rivera (2013) προτείνει ότι οι μαθητές πρέπει να συντονίσουν δύο βασικές ικανότητες, για την εκμάθηση και διδασκαλία της άλγεβρας, της αντιληπτικής ικανότητας και της συμβολικής τους ικανότητας. Αυτός ο συνδυασμός παράγεται καταγράφοντας πρώτα το τι είναι κοινό με ορισμένους όρους και, αφετέρου, σχηματίζοντας μια γενική ιδέα, παρατηρώντας το κοινό σε όλους τους όρους (Radford, 2006, Rivera,2013).

Τέλος, οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν την υπογεγραμμένη αλγεβρική δομή που εξηγεί μια επαναληπτική κανονικότητα που θα μπορούσε να μεταφερθεί ως τύπος (Rivera, 2013). Σε αυτό το στάδιο, η εστίαση δεν είναι πλέον στους ίδιους τους όρους αλλά μάλλον στις σχέσεις μεταξύ τους (Kaput, 1995).

Ενώ η έρευνα 2005-2015 αφορούσε την εξερεύνηση της έννοιας των μεταβλητών, τα ευρήματα υποδηλώνουν ότι άλλα σημεία εκτός από τα συμβατικά αλφαριθμητικά σύμβολα της άλγεβρας μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσει κάποιος μεταβλητές (Radford, 2010). Δεδομένης αυτής της επισήμανσης ,τα ευρήματα αυτής της έρευνας δείχνουν ότι η αλγεβρική σκέψη μπορεί να εμφανιστεί στους μαθητές

σε πολύ μικρή ηλικία (Radford, 2010 · Anthony & Hunter, 2008 · Rivera, 2011 · Warren,Miller, & Cooper, 2011).

Η ενασχόληση των μαθητών σε διεργασίες με οιονεί μεταβλητές οδηγεί σε οιονεί γενικεύσεις, σε όρους συγκεκριμένων μεγάλων αριθμών των μοτίβων, ως παραδείγματα "οποιουδήποτε αριθμού". Με αυτόν τον τρόπο βοηθιούνται σημαντικά οι μαθητές να παρατηρούν και να αναπαριστούν την δομή του μοτίβου, καθώς παρέχουν μια γενίκευση στη γλώσσα και με άλλα σημάδια που περιλαμβάνουν αλφαριθμητικά σύμβολα (Cooper & Warren, 2011).

Αναδυόμενες δυσκολίες που προκύπτουν από τα ευρήματα της τρέχουσας έρευνας, είναι ότι ενώ οι νέοι μαθητές είναι ικανοί να παρατηρήσουν τη δομή του προτύπου και τη συμμετοχή στη γενίκευση του, παρουσιάζουν δυσκολίες στην έκφραση της δομής. Συγκεκριμένα οι νέοι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες μετάβασης από μια αναπαράσταση στην άλλη , από την εικόνα στον αλγεβρικό τύπο που συνδέει την σχέση μεταξύ δύο εικόνων (Becker & Rivera, 2007). Οι μαθητές τείνουν να δίνουν απαντήσεις όταν ψάχνουν για την δομή των μοτίβων (Becker και Rivera 2008,Warren 2005), αποτυγχάνουν όμως να καταλάβουν την γενική αλγεβρική φόρμουλα (Warren 2006,Radford 2006), ενώ επιπλέον έχουν δυσκολίες να εκφράσουν την δομή στην καθομιλουμένη γλώσσα (Warren 2005).

Επιπρόσθετα οι αρχικές αναπαραστάσεις ενός pattern (εικονιστικές, προφορικές, και συμβολικές) μπορεί να επηρεάσουν την ικανότητα των μαθητών για γενίκευση. Αυτό γίνεται στην ηλικία των 10-11 χρόνων όταν οι μαθητές εξερευνούν πιο πολύπλοκα μοτίβα (Stall, Gagatsis, Theoklitou & Savva 2006). Σε αυτή την ηλικία τα εικονιστικά μοτίβα οδηγούν πιο εύκολα τους μαθητές να αναγνωρίσουν όρους σε συγκεκριμένες θέσεις και να διατυπώσουν γενικεύσεις.

Η έρευνα δίνει μια περιγραφή των τύπων των στρατηγικών που βοηθούν νέους μαθητές να πλησιάσουν τις γενικεύσεις. Συγκεκριμένα ένας τύπος είναι η ικανότητά τους να βλέπουν τι παραμένει σταθερό μεταξύ εικονιστικών μοτίβων . Αυτό είναι κυρίαρχο για την επιτυχία στη γενίκευση (Becker & Rivera 2006 ,Stalo et all ,2006).

Η ανάπτυξη μιας συγκεκριμένης γλώσσας βοηθά τους μαθητές να περιγράψουν ένα μοτίβο. (πχ θέση, κανονική γλώσσα, σειρές ,ρυθμικές κινήσεις) ,(Warren,2006Miller

& Cooper 2011).Ακόμα η ικανότητα να χειρίζονται μεταβλητές βοηθά τους μαθητές να εκφράζουν και να δικαιολογούν την γενίκευσή τους (Becker & Rivera 2006).

Αντίθετα, μαθητές που αποτυγχάνουν να γενικεύουν είναι αυτοί που ξεκινούν με αριθμητικές στρατηγικές (πχ. δοκιμής και ελέγχου) και έτσι χάνουν την ικανότητά τους να είναι ευέλικτοι σε άλλες προσεγγίσεις (Becker & Rivera 2005).Αυτό έχει συνέπειες για τους τύπους των εκπαιδευτικών πρακτικών που συμβαίνουν σε περιβάλλοντα της τάξης. Προτείνεται αυτές να περιλαμβάνουν λεκτικές, μορφοποιητικές και αριθμητικές παραστάσεις σχεδίων, και να τονίζονται οι συνδέσεις μεταξύ αυτών των παραστάσεων για να βοηθιούνται οι μαθητές να προσεγγίζουν τις γενικεύσεις (Becker & Rivera, 2006).

Έχει επίσης αποδειχθεί ότι βοηθά τους μαθητές να κάνουν πολλαπλή γενίκευση σε εικονιστικά μοτίβα που παριστάνουν γραμμικά pattern (Rivera, 2013). Θεωρίες που αφορούν τη παρατήρηση της δομής και την επίτευξη γενικεύσεων σαν αποτέλεσμα από τη διαχρονική μελέτη του Radford της 7ης -8ης τάξης (συνήθως 13-14 ετών) κατά τη διάρκεια μιας τριετούς ερευνητικής περιόδου περιγράφουν τρεις τύπους γενίκευσης (Radford, 2006).

Ο πρώτος τύπος είναι η **πραγματολογική** γενίκευση (**factual**): Η γενίκευση αυτή παραμένει συνδεδεμένη σε αριθμητικό επίπεδο. Η έκφραση μιας γενίκευσης ως πραγματολογικής δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αυτή είναι η έκταση της ικανότητας του σπουδαστή. Μπορεί απλώς να μπορεί σε αυτό το επίπεδο να απαντήσει στην ερώτηση που τίθεται από άλλους ή να είναι αυτή η άλγεβρα που απαιτείται σε αυτό το πλαίσιο (Lozano, 2008).

Ο δεύτερος τύπος γενίκευσης είναι η **πλαισιωμένη** γενίκευση **(contextual**) . Λέγοντας πλαισιωμένη αναφερόμαστε σε πλαίσιο που περιέχει συμφραζόμενα που ενσωματώνουν γλωσσικά αντικείμενα για να περιγράφουν το pattern με τη χρήση της γλώσσας με εκφράσεις όπως πχ. το σχήμα και το επόμενο σχήμα.

Τέλος, **συμβολική** (**symbolic**) γενίκευση αυτή που συνεπάγεται την γενίκευση μέσω αλφαριθμητικών συμβόλων.

Τα προτεινόμενα κριτήρια που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν τους δασκάλους να διακρίνουν αυτά τα επίπεδα της αλγεβρικής δικαιολόγησης (reasoning) είναι : η παρουσία οντοτήτων που έχουν τον χαρακτήρα γενικότητας, τον

τύπο της χρησιμοποιούμενης γλώσσας και αντικείμενα που εφαρμόζονται για να δείξουν οποιεσδήποτε δομικές ιδιότητες του μοτίβου (Ake, Godino, Gonzaro & Wilhelmi,2013).

Το τελευταίο αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές εκφράζουν αυτή τη γενικότητα. Ο Ake και άλλοι ερευνητές (2013) αναφέρουν ότι η αλγεβρική πρακτική περιλαμβάνει δύο κρίσιμες πτυχές. Την ονομαστική που μπορεί να χρησιμοποιήσει τα σύμβολα ως γενική έκφραση και να συσχετίσει αυτή την έκφραση με το οπτικό πλαίσιο από το οποίο προέρχεται. Επιπλέον, με τα αυξανόμενα μοτίβα η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών (π.χ. όρος προτύπου, ποσότητα προτύπου) σε συνδυασμό με εικονικές ενδείξεις για να αντιπροσωπεύουν και τις δύο μεταβλητές (π.χ., μετρητές για τον όρο πρότυπο και κάρτες για την ποσότητα του προτύπου) βοήθησαν τους μαθητές ηλικίας 7-9 ετών να προσδιορίσουν τον γενικό κανόνα (Miller & Warren, 2015).

Ο Rivera (2013) από τα αποτελέσματα της διαχρονικής μελέτης του από την 2η τάξη μέχρι την 7η τάξη, μας πληροφορεί για το πώς γίνονται αυτές οι μετατοπίσεις στη σκέψη από τη φανταστική αναπαράσταση έως το πραγματικό, από τα συμφραζόμενα έως και τις συμβολικές γενικεύσεις. Θεωρεί ότι αυτές οι μετατοπίσεις έχουν σχέση από τη δημιουργία και αναδημιουργία μεταξύ σκέψεων και προτύπων καθώς θεμελιώδες σε αυτή τη κίνηση είναι ο ρόλος της απαγωγής και της επαγωγής. Στο αρχικό στάδιο, από ένα περιορισμένο σύνολο δειγμάτων, διατυπώνεται μια εικασία μέσω της απαγωγής (abstraction).

Από την έρευνα για την εκμάθηση και διδασκαλία της άλγεβρας συνάγεται και κατασκευάζεται μια υπόθεση με αυτόν τον τρόπο. Η επαγωγή περιλαμβάνει τη δοκιμή αυτής της υπόθεσης μέσω εντατικών πειραματισμών. Καθώς οι μαθητές λαμβάνουν όρους για μεγαλύτερες θέσεις (Π.χ., βήμα 10 και βήμα 100), επανεξετάζουν τη γενίκευση τους και καθιστούν αναγκαίες αναπροσαρμογές. Έτσι μια συνδυασμένη διαδικασία επαγωγής απαγωγής επιτρέπει στους μαθητές να δηλώνουν τη γενίκευση τους.

Ο Rivera προσθέτει αυστηρότητα σε αυτή τη διαδικασία προτείνοντας τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να βοηθήσουν τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν τις γενικεύσεις τους. Αυτές είναι:

1) Η γενίκευση πρέπει να είναι **μη -μονοτονική** (**non -monotonic**) .Δηλαδή μια γενίκευση που προσφέρει την καλύτερη εξήγηση μπορεί ακόμα να αποδειχθεί λανθασμένη γι αυτό πρέπει να γίνουν επιπρόσθετες ή διαφορετικές υποθέσεις.

2) Να βρίσκεται το σημείο αποκοπής (**cut off point)**. Δηλαδή η γενίκευση να μπορεί να εξηγήσει γιατί η δηλωμένη γενίκευση που βασίζεται σε λίγα παραδείγματα μπορεί να αφορά το σύνολο του πληθυσμού.

3) Να επιτρέπει την κάθετη προέκταση (**vertical extrapolation**) με την έννοια η γενίκευση να υποστηρίζει συμπεράσματα για ακολουθίες τιμών πέρα από τις τιμές που είναι ήδη γνωστές.

4) Να γίνεται εφαρμογή της αποκλειστικής (**eliminative)** διάστασης με την έννοια η γενίκευση να έχει επιλεγεί από πολλές αξιόλογες και να παρέχει την καλύτερη κατανόηση του προτύπου πέρα από αυτό που είναι επιφανειακά εμφανές. Αυτές οι συνθήκες προέρχονται από την έρευνα των Psillos (1996) και Peirce (1960).

Η επίτευξη γενίκευσης από εικονιστικά (figural) μοτίβα είναι μια πολύπλοκη και δύσκολη διαδικασία για πολλούς νέους μαθητές. Από τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν με επτάχρονους μαθητές-Rivera (2011), διερευνήθηκε ο τρόπος επεξεργασίας ώστε να αρχίσουν να εξηγούν τις διαφορές και να γενικεύουν τη δομή που είναι εγγενής στα σχέδια των μοτίβων. Υποστηρίζοντας από τη γνωσιακή θεωρία για την μάθηση ότι «η γνώση αναδύεται και αποθηκεύεται σε συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων- όπως μονάδες επεξεργασίας με εμπειρίες και μαθησιακές αλλαγές, ενισχύουν και συνεχώς προσαρμόζουν τις συνδέσεις μεταξύ των μονάδων » (Rivera, 2013,p. 100).

Η πολυπλοκότητα του μοντέλου αντικατοπτρίζει την πολυπλοκότητα των μαθητών να σκέπτονται καθώς αναζητούν γενικεύσεις. Ένα πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι αυτό αρχίζει να λαμβάνει υπόψη την έννοια του πλαισίου της προηγούμενης μάθησης και των συνδέσεων καθώς εξηγούμε τις διαφορές μεταξύ των ικανοτήτων των μαθητών. Επιπλέον, έδειξε ότι οι μαθητές ενεργοποιούν και συντονίζουν διαφορετικά σημειωτικά συστήματα όταν εξερευνούν εικονιστικά μοτίβα. Συμμετέχουν σε προφορικές ομιλίες (δηλώσεις), κάνουν σχήματα πάνω στα μοτίβα και χρησιμοποιούν εικονικές χειρονομίες (π.χ. Chen & Leung, 2012; Sabena, Radford, & Bardini, 2005).

Ο συγκεκριμένος ρόλος αυτός και ο συγχρονισμός αυτών των σημείων (signs) παίζουν ρόλο στην αντικειμενικοποίησης της γνώσης. Ιδιαίτερα ότι οι μαθητές κινούνται μέσω των τριών τύπων γενίκευσης χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση ιδίως όταν γίνεται η μετάβαση στην παρατήρηση της δομής των τετραγωνικών μοτίβων. Οι δυσκολίες που

οι μαθητές επιδεικνύουν ότι όταν γενικεύονται τα γραμμικά μοτίβα των σχημάτων φαίνονται να μεγαλώνουν υπερβολικά καθώς κινούνται σε τετραγωνικά μη γραμμικά μοτίβα.

Σε μια εμπειρική μελέτη που περιελάμβανε 50 ταλαντούχους μαθητές ηλικίας 12-14 ετών Amit και Neria (2008) διαπίστωσαν ότι 23 μαθητές χρησιμοποίησαν μια επιπρόσθετη στρατηγική για να βρουν διαδοχικούς όρους στο πρότυπο. Αυτή η στρατηγική συμπεριλάμβανε την κατάρτιση άλλων όρων στο πρότυπο και την καταμέτρηση ή τη χρήση πινάκων και λιστών, καθώς τείνουν να έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία αναδρομικών γενικεύσεων (E. Warren 2008).

Ευθυγραμμίζοντας με τα ευρήματα της έρευνας σχετικά με γραμμικά μοτίβα, οι μαθητές σε ποσοστό 28% πετυχαίνουν μια γενίκευση από μια οπτική προσέγγιση (δηλαδή απεικόνιση της ανάπτυξης του μοτίβου στο σχέδιο).

Σε αντίθεση οι Chua και Hoyles (2012, 2013, 2014) ανέφεραν ότι το 56% των μαθητών παρόμοιων ηλικιών, που ερευνούν ένα παρόμοιο τετραγωνικό εικονιστικό μοτίβο έφτασαν σε ένα σωστό σφαιρικό επίπεδο γενίκευσης. Υπολόγισαν ότι αυτό είναι το αποτέλεσμα των προηγούμενων εμπειριών των μαθητών από την άλγεβρα, συγκεκριμένα τη διδασκαλία αριθμητικών μοτίβων ακολουθούμενη από εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής.

Αυτή η εικασία ευθυγραμμίζεται με τους Sigley, Maher και Wilkison(2013) που δείχνουν ότι αυτό επιτυγχάνεται όταν κάποιος εισάγεται στην τεχνική γλώσσα της άλγεβρας σε συνδυασμό με την επίσημη συμβολική γλώσσα. Αυτό παρατηρήθηκε ότι βοήθησε 11χρονους μαθητές, οι οποίοι ηλικιακά ήταν το επίκεντρο της μελέτης τους, να διατυπώσουν σωστά την σφαιρική γενίκευση και να την συνδέσουν με συμβολικό τρόπο.

2.3.1 Γιατί είναι σημαντική η ενασχόληση με μοτίβα

Συνοψίζοντας τα ευρήματα της έρευνας 2005-2015 όσον αφορά την παρατήρηση και αντιπροσωπεύοντας τη δομή των **μοτίβων (patterns)** συνάγεται ότι η **ενασχόληση** με αυτά είναι σημαντική για τέσσερις λόγους:

Πρώτον ενώ παρατηρώντας και αντιπροσωπεύοντας τη δομή των μοτίβων είναι μια σύνθετη διαδικασία, αυτά τα ευρήματα δείχνουν ότι οι νέοι μαθητές είναι ικανοί να

ασχολούνται με δραστηριότητες σχεδίων και να εκφράζουν τη δομή του μοτίβου ως γενίκευση. Αυτή η πρακτική περιλαμβάνει δύο κρίσιμες πτυχές, που είναι η δημιουργία μιας γενικής έκφρασης για το μοτίβο και η σύνδεση αυτής της έκφρασης με το οπτικό πλαίσιο από το οποίο προέρχεται αυτό.

Διαφορετικές αναπαραστάσεις του μοτίβου π.χ. πίνακες τιμών και οπτικές ενδείξεις που είναι συνυφασμένες αριθμητικά με το μοτίβο μπορούν να επηρεάσουν αρνητικά αυτήν την ίδια την γενίκευση . Επιπλέον, η ανάπτυξη ειδικής γλώσσας για την περιγραφή του μοτίβου και η αύξηση της ευχέρειας χρήσης των μεταβλητών μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να εκφράσουν με επιτυχία τις γενικεύσεις τους με συμβολικό τρόπο .

Δεύτερον η μέχρι τώρα έρευνα έχει δημιουργήσει μια σειρά θεωρητικών πλαισίων που καθοδηγούν την μελλοντική έρευνα. Οι δύο κύριες διαστάσεις αναπτύχθηκαν περαιτέρω σε αυτή την έρευνα σχετίζονται με:

(α) τα επίπεδα γενίκευσης των μαθητών που φτάνουν καθώς παρατηρούν δομές μοτίβων και όταν εκφράζουν αυτές τις δομές σε μια συμβολική μορφή (πραγματική, συμφραζόμενη, συμβολική) και

(β) ο ρόλος των συνδυασμένων διαδικασιών απαγωγής και επαγωγής που βοηθά τους μαθητές να περάσουν από αυτά τα επίπεδα.

Οι δύο αυτές διαστάσεις όχι μόνο βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν τι γνωρίζουν οι μαθητές αλλά και να ενημερώσουν τους τύπους εκπαιδευτικών πρακτικών που συμβαίνουν μέσα στο περιβάλλον της τάξης.

Τρίτον, η έρευνα αυτή επιβεβαίωσε την διαπίστωση ότι η έκφραση γενικεύσεων στη συμβολική γλώσσα δεν είναι απαραίτητη κατάσταση της αλγεβρικής σκέψης . Η άλγεβρα μπορεί να «ασκηθεί κάνοντας χρήση άλλων σημειωτικών συστημάτων και με σημάδια «signs » (Radford, 2006). Τα ευρήματα δείχνουν επίσης ότι προηγούμενες εμπειρίες με λιγότερο περίπλοκα πρότυπα (π.χ. αριθμός και γραμμικά πρότυπα) επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν τη δομή πιο σύνθετων προτύπων(Π.χ., τετραγωνικά μοτίβα).

Τέταρτον, αυτή η έρευνα δημιούργησε μια σειρά ερωτημάτων για μελλοντική έρευνα στον τομέα αυτό: πώς βοηθούμε τους νέους μαθητές από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση να αναπτύξουν τη μαθηματική τους γλώσσα και τις οπτικές ικανότητες

καθώς προχωρούν μέσα στα αρχικά στάδια; πώς βοηθάμε τους ίδιους μαθητές στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου να μεταφέρουν αυτή τη γνώση σε περισσότερες ερευνητικές δραστηριότητες σχετικά με την εκμάθηση και τη διδασκαλία αλγεβρικών σύνθετων μοτίβων, συμπεριλαμβανομένων μη γραμμικών ; ποιες παραστάσεις και ακολουθίες σχεδίων βοηθούν αυτές τις διαδικασίες;

2.3.2 Τα Μοτίβα και ο ρόλος τους στην Εκπαίδευση

Στη χώρα μας η συστηματική ενασχόληση με τα μοτίβα (**patterns**) έχει περάσει στα αναλυτικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σαν προοίμιο της αλγεβρικής σκέψης.

Πότε όμως κάποιος "κάνει άλγεβρα"; Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα ο Usiskin (NCTM Yearbook 1988) δίνει τα παρακάτω κριτήρια. Η άλγεβρα κατανοείται ως :

1. **Γενικευμένη αριθμητική** η οποία περιλαμβάνει την τυποποίηση σχέσεων και μοτίβων στα οποία κάθε μεταβλητή συμβολίζει γενικευμένο αριθμό.

2.**Μελέτη των διαδικασιών λύσης προβλημάτων** στα οποία η μεταβλητή λαμβάνεται ως άγνωστος που πρέπει να βρεθεί.

3. **Μελέτη των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων** καθώς συμμεταβάλονται. Σε αυτήν την περίπτωση η μεταβλητή λαμβάνεται ως συστατικό της συνάρτησης την οποία προσδιορίζει.

4. **Μελέτη των δομών** , όπου η εμπλοκή των μαθητών στρέφεται στα αλγεβρικά μοτίβα στα οποία οι μεταβλητές λαμβάνονται ως σύμβολα μιας παράστασης και οι οποίες αντικαθιστούν τα ονόματα των στοιχείων ενός συνόλου. Τέτοια μοτίβα συναντάμε στον αλγεβρικό συλλογισμό, στην παραγοντοποίηση και πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

Στη δευτεροβάθμια όμως υπάρχει μια ουσιώδης ασυνέχεια αφού η ενασχόληση με μοτίβα εγκαταλείπεται με στόχο η άλγεβρα να συνδεθεί μόνο με την χρήση συμβόλων και ας έχουν οι μαθητές σοβαρές αδυναμίες στην έννοια της μεταβλητής πράγμα που αποτελεί σοβαρό επιστημολογικό εμπόδιο. Με αυτόν τον τρόπο η άλγεβρα από εργαλείο μαθηματικής γενίκευσης (γενικευμένη αριθμητική) παροπλίζεται σε μια γενικευμένη

διαδικαστική χρήση συμβόλων ξεκομμένη από τα προβλήματα που έρχεται να λύσει και που την κάνουν απαραίτητη.

Το μοτίβο είναι η αναζήτηση μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών. Ο προσδιορισμός και η εφαρμογή μοτίβων συμβάλλει στην τάξη, τη συνοχή και την προβλεπτικότητα σε φαινομενικές καταστάσεις και μας επιτρέπει να κάνουμε γενικεύσεις πέρα από τις πληροφορίες που βρίσκονται μπροστά από εμάς. Αν και μπορεί να θεωρηθεί ως "περιοχή περιεχομένου", το μοτίβο είναι κάτι περισσότερο από μια "περιοχή περιεχομένου". Είναι μια διαδικασία, ένας τομέας μελέτης και μια συνήθεια του νου (Clements & Sarama, 2009,σελ. 190).

Η μελέτη γύρω από την διδασκαλία των μοτίβων (patterns) στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει δείξει ερευνητικά ότι ενισχύει την αλγεβρική σκέψη των μαθητών , αφού οδηγεί σε γενικεύσεις που είναι βαθμιαίες (graded) (Rivera 2013) και για αυτό διακριτές και παρατηρήσιμες. Μελέτες έχουν γίνει σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης πρωτοβάθμια , δευτεροβάθμια καθώς και στην ειδική αγωγή με ιδιαίτερα από αποτελέσματα σε μαθητές που υπάρχει αδυναμία έκφρασης προφορικού λόγου (Healy 2003).

Ο Rivera περιγράφει τη γενίκευση των μοτίβων με τον ακόλουθο τρόπο: όταν οι μαθητές εκτελούν μια γενίκευση των προτύπων, αυτή βασικά προϋποθέτει αμοιβαίο συντονισμό στις αντιληπτικές και συμβολικές τους ικανότητες, έτσι ώστε να είναι σε θέση να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν μια εύλογη και αλγεβρικά χρήσιμη δομή που θα μπορούσε να μεταφερθεί με τη μορφή άμεσης φόρμουλας (τύπος). (Rivera, 2010, σελ. 147)

Σύμφωνα με την έρευνα οι γενικεύσεις που μπορούν να κάνουν οι μαθητές είναι σε τρία επίπεδα : η **αναγνώριση** μιας ομοιότητας σε ένα μοτίβο, η **επέκταση** της σε όλους τους επακόλουθους όρους και η **εύρεση συμβολικού τύπου** που το αναπαράγει (Radford 2003) . Η έρευνα έχει δώσει προτεραιότητα στο πώς θα βρούμε τρόπους ώστε να συνδεθεί το τι βλέπουν, το τι κάνουν και τι εκφράζουν οι μαθητές μέσα από κατάλληλα φτιαγμένα ψηφιακά εργαλεία και αν αυτά μπορούν η όχι να αφήσουν το ίχνος τους στη νοηματοδότηση των αλγεβρικών εννοιών όπως αυτές περιγράφονται στα αναλυτικά προγράμματα (Noss,Healy @ Hoyles 1997).

Από την άλλη μεριά υπάρχουν έρευνες που έχουν δείξει πως μπορούν τα ψηφιακά περιβάλλοντα να μπορούν να δημιουργήσουν εμπόδια στους μαθητές να κάνουν συνδέσεις σε δύσκολα προβλήματα, και να μεταφέρουν ιδέες από το ψηφιακό περιβάλλον στην τυπική άλγεβρα (Gurtner -1992). Κεντρικά κατά τον Noss υπάρχουν δύο θεωρητικά ερωτήματα. Το πρώτο αφορά την φύση της υποστήριξης που παρέχει ένα Ψηφιακό Αλγεβρικό Σύστημα (**Digital Algebric System**).

Αν πιστεύουμε ότι είναι χρήσιμο να κτίσουμε υποστήριξη σε αυτό το περιβάλλον πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο πως δουλεύει, πως οι μαθητές πετυχαίνουν η αποτυχαίνουν χρησιμοποιώντας αυτήν την υποστήριξη με την έννοια πως εκφράζεται μαθηματικά αυτό. Η δεύτερη ιδέα αναφέρεται στα νοήματα της γενίκευσης και της αφαίρεσης, τι είδους διαδικασίες είναι αυτές και πως μπορούν να χωρέσουν σε νόρμες μαθηματικής έκφρασης και πως θα μπορούσαμε να ενισχύσουμε τις προσπάθειες των μαθητών να τις επιτύχουν.

Αυτό μας δείχνει ότι η έρευνα πρέπει να στραφεί στο πώς μπορούν να σχεδιαστούν κατάλληλα τα ψηφιακά περιβάλλοντα και οι δραστηριότητες που υποστηρίζουν, ώστε να ελέγχεται όταν μεταφέρονται οι δραστηριότητες στο περιβάλλον χαρτί -μολύβι και να γίνεται εμφανής η ενίσχυση των μαθητών στη γενίκευση και στο πέρασμα στην τυπική άλγεβρα (Eirini Geraniou and Manolis Mavrikis 1998) .

Η σχεδιαζόμενη διπλωματική εργασία μέσα από μελέτη περίπτωσης ερεύνησε το πώς νοματοδοτείται η αλγεβρική σκέψη μέσα από το ψηφιακό περιβάλλον του **eXpresser** , τι δυνατότητες επέκτασης έχει στην έννοια της συνάρτησης, καθώς και η χρησιμοποίηση του ίδιου του εργαλείου σαν τεχνούργημα για την κατοχύρωση δύσκολων αλγεβρικών εννοιών όπως η μεταβλητή και η συνάρτηση ως συμμεταβολή μεγεθών.

Οι δραστηριότητες βιντεοσκοπήθηκαν με καταγραφέα οθόνης ώστε να υπάρχει λεπτομέρεια στις ενέργειες που έκαναν οι μαθητές και μαγνητοφωνήθηκαν οι διάλογοι μεταξύ τους καθώς απαντούσαν στα ερωτήματα, με στόχο να απομονωθούν τα κρίσιμα συμβάντα σχετικά με την δημιουργία αλγεβρικού τρόπου προσέγγισης του κάθε προβλήματος.

2.4 Ψηφιακά περιβάλλοντα κατασκευής μοτίβων

Ένα πρόβλημα που είχαν να απαντήσουν οι προϋπάρχουσες έρευνες ήταν με ποιο τρόπο θα μπορούσαν οι μαθητές να περάσουν από την οπτικοποίηση μιας αλγεβρικής δομής ενός μοτίβου στην συμβολική έκφρασή της. Θα μας έδιναν μεγαλύτερο δυναμικό κατάλληλα ψηφιακά εργαλεία και ποιο θα ήταν το παιδαγωγικό κέρδος από την χρησιμοποίησή τους ;

Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα που οδήγησε σε κατασκευή ανάλογου λογισμικού είναι το λεγόμενο πρόβλημα με τα σπιρτόξυλα (mathstics,1990). Συγκεκριμένα αναζητάμε τον αριθμό των σπιρτόξυλων που θα χρειαστούμε για να φτιάξουμε 1,2,3,4 τετράγωνα και προσπαθούμε να γενικεύσουμε στο νιοστό τετράγωνο στο οποίο πολύ μικρό ποσοστό μαθητών φτάνει. Συγκεκριμένα η ακολουθία που παράγεται είναι 4,7,11,…. αλλά στη συμβολική έκφραση 3ν+1 υπάρχει μεγάλη δυσκολία να καταλήξει ένας μαθητής.

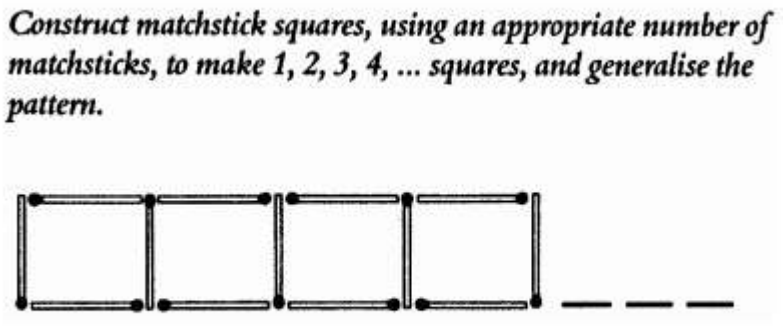
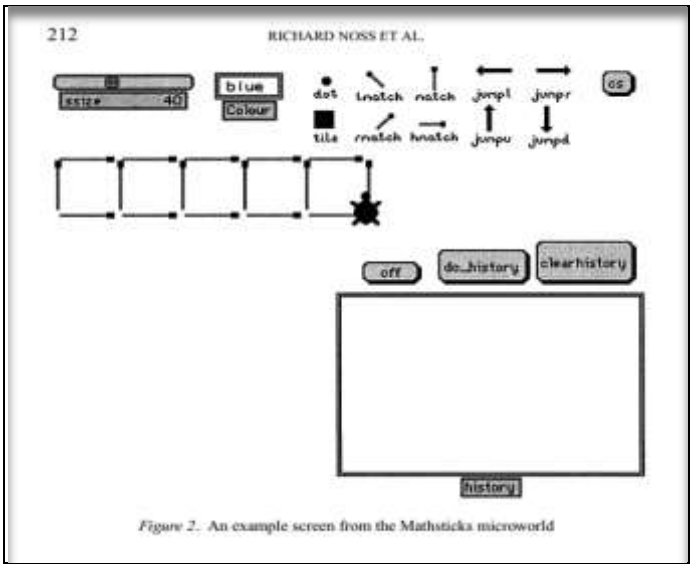


Figure 1. An Example from the English National Curriculum (DES 1991, p. 10)

Εικόνα 1 : Παράδειγμα μοτίβου από το Αγγλικό Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το λογισμικό που φτιάχτηκε από τους Hoyles, Noss, Healy το 1997 καθιερώνοντας τον όρο του Ψηφιακού Αλγεβρικού Συστήματος (Digital Algebraic System) ήταν το λεγόμενο Mathstikcs που ήταν γραμμένο σε μια γλώσσα παραλλαγή της Logo είχε την παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 2:Μκρόκοσμος Mathstics

Ένα πρόβλημα που έδειξε η έρευνα σε σχέση με την χρησιμοποίηση των μικρόκοσμων ήταν ότι πολλές φορές δεν αξιοποιούμε το δυναμικό τους για να κάνουμε την μεταφορά στην τυπική αλγεβρική σκέψη. Ο Gurdner (1992) για παράδειγμα περιγράφει πως σύνθετα προβλήματα στο περιβάλλον της γλώσσας Logo δεν μεταφέρουν αντίστοιχα προβλήματα εντός μαθηματικού πλαισίου, αλλά παραμένουν προβλήματα που έχουν να κάνουν με την αυτοτελή χρήση του λογισμικού. Το συμπέρασμα που έβγαλε ο Gurdner τον οδήγησε στην θέση ότι το πρόβλημα είναι να φτιάξουμε γέφυρες που θα οδηγούν από το ψηφιακό περιβάλλον στην μαθηματική σκέψη με κατάλληλα διαμορφωμένες εργασίες.

Η μεταφορά αυτή απασχόλησε την ομάδα των ερευνητών Geraniou E., Mavrikis M., Hoyles C. & Noss R (2011) που κατασκεύασαν το λογισμικό eXpresser στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος MIGEN. Το πρόγραμμα είχε στόχο να παρέχει υποστηρίξη στους μαθητές μέσα από ένα διερευνητικό ψηφιακό περιβάλλον, ώστε να φτάνουν στη γενίκευση χρησιμοποιώντας τον μικρόκοσμο μέσα από τις συνηθισμένες εργασίες με χαρτί και μολύβι που υπάρχουν στα αναλυτικά προγράμματα. Ταυτόχρονα παρείχε και ένα εργαλείο στον δάσκαλο ώστε να μπορεί να καταλάβει τις δυσκολίες των μαθητών του να φτάσουν στην συμβολική έκφραση κανονικοτήτων μέσα από μοτίβα που κατασκεύαζαν στο λογισμικό και να δίνεται εξατομικευμένη βοήθεια από αυτό.

3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

3.1 Θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism)

Έχοντας ως αφετηρία αυτό που ο ίδιος χαρακτήριζε «Πιαζετιανό τρόπο μάθησης», ο Papert (1980) υποστηρίζει ότι οι άνθρωποι μαθαίνουν καλύτερα όταν δημιουργούν πράγματα. Μέσα από μια διαδικασία κατασκευής και συσχετισμών με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες δομείται η νέα μαθηματική γνώση.

Ο Papert εισήγαγε την ιδέα των μικρόκοσμων για τη μάθηση στα μαθηματικά.

Οι Healy και Kynigos (2010) παρατηρούν ότι στο βιβλίο Mindstorms το 1980 ο Papert παρουσιάζει την ιδέα μικρόκοσμων εφοδιασμένων με υπολογιστικά αντικείμενα τα οποία ενσωματώνουν τα μαθηματικά όχι μόνο στην τυπική τους μορφή αλλά ταυτόχρονα είναι άμεσα σχετιζόμενα και με τους ίδιους τους εκπαιδευόμενους. Αυτό επιτρέπει τη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων σε αρμονία με το σώμα (body syntonic) αλλά και το "εγώ" (ego syntonic).

Σύμφωνα με το όραμα του Papert οι εκπαιδευόμενοι θα πρέπει να μπορούν να συντονίσουν τα αντικείμενα του μικρόκοσμου με τη "γνώση του σώματός τους". Επιπλέον θα πρέπει να αντιληφθούν αυτά τα αντικείμενα με τρόπους που είναι εναρμονισμένοι με την αίσθηση που έχουν οι ίδιοι όντας άνθρωποι με προθέσεις στόχους, επιθυμίες, συμπάθειες και αντιπάθειες. Αυτές οι δύο δομές διαμορφώνουν το θεωρητικό πλαίσιο που τροφοδότησε αρχικά την ιδέα της θεωρίας δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Healy και Kynigos, 2010).

Αντιλαμβανόμαστε, επομένως, ότι η μάθηση στο πλαίσιο της παραπάνω θεωρίας ξεφεύγει από τη λογική της μεταφοράς γνώσεων. Σύμφωνα με την Bruckman (1999) η μάθηση μέσα από την πράξη, τον σχεδιασμό και τις δραστηριότητες κατασκευής της βήμα προς βήμα, είναι περισσότερο αποτελεσματική από τη διδασκαλία μέσω οδηγιών.

Αντίστοιχα η Ackermann (1996) παρατηρεί ότι, όπως μας δίδαξε ο Piaget, η γνώση δεν είναι εμπόρευμα για να μεταφέρεται. Ούτε είναι πληροφορία για να παραδίδεται στο ένα άκρο κωδικοποιημένη και να αποθηκεύεται και να επαναχρησιμοποιείται στο άλλο άκρο. Αντιθέτως η γνώση είναι η εμπειρία, υπό την έννοια ότι κατασκευάζεται ενεργά και ανακατασκευάζεται μέσα από εμπειρίες, πειραματισμό, αλληλεπίδραση.

Κατά συνέπεια η δημιουργία συνδυασμένη με το μοίρασμα είναι αυτή που θα δώσει καλύτερα γνωστικά αποτελέσματα (Luckin, Bligh, Manches, Ainsworth, Crook καιNoss, 2012; Peppler και Kafai, 2007).

Η θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών, επομένως, τονίζει εξίσου το ρόλο του ατόμου αλλά και της κοινωνικής συμμετοχής. Εδώ το αντικείμενο, η κατασκευή, η συμμετοχή και το μοίρασμα διαμορφώνουν τη μάθηση. Αναφερόμαστε, επομένως, στην κατασκευή ενός αντικειμένου που έχει νόημα όσο για τον δημιουργό του όσο και για τους γύρω του.

Πιθανόν να πρόκειται για την κατασκευή ενός κάστρου στην άμμο ή μιας μηχανής ή για τη δημιουργία ενός προγράμματος στον υπολογιστή ή ενός εικονικού αντικειμένου (Bruckman και Resnick, 1996). Σε κάθε περίπτωση, όποια και αν είναι η μορφή της, θα πρέπει ο κατασκευαστής να μπορεί να την εξωτερικεύσει και να τη μοιραστεί με άλλους (Shaw, 1996). Τα συμπεράσματά του, οι γνώσεις και οι εμπειρίες που αποκόμισε από την όλη προσπάθεια στη συνέχεια εσωτερικεύονται για να ξαναχρησιμοποιηθούν εκ νέου σε επόμενη κατασκευή.

Τα οφέλη από μια τέτοια διαδικασία είναι σε κάθε περίπτωση πολλαπλά. Το να μοιράζεται κάποιος μια δημιουργία μπορεί να οδηγήσει όχι μόνο στη βελτίωσή της αλλά και στη βαθύτερη κατανόηση των απόψεων των άλλων ανθρώπων, τόσο σε σχέση με το ίδιο το αντικείμενο όσο και με τις ιδέες με τις οποίες αυτό σχετίζεται (Evard, 1996). Η τέχνη της μάθησης είναι, επομένως, μια σύνθετη διαδικασία που αφορά στην ανάπτυξη της ικανότητας των ανθρώπων να κατανοούν τον κόσμο αλλά και τον εαυτό τους και να κατασκευάζουν προοδευτικά βαθύτερα επίπεδα κατανόησης.

Η γνώση κατασκευάζεται μέσα από μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στο άτομο και το περιβάλλον (Achermann, 1996). Αυτή η αλληλεπίδραση σε συνδυασμό με τη δημιουργικότητα και τη φαντασία δίνουν νόημα στη γνώση και πνοή στη μάθηση.

Ολοκληρώνουμε τη σύντομη αυτή επισκόπηση με ένα παράδοξο και ένα ερώτημα, με τον τρόπο που τα θέτει ο Papert:

στο σχολείο τα παιδιά διδάσκονται περισσότερα σε σχέση με τους αριθμούς και τη γραμματική παρά για το πώς να σκέφτονται. Παρόλα αυτά θεωρείται συνήθως καλή πρακτική να δίνουμε στους ανθρώπους οδηγίες για τις επαγγελματικές τους

δραστηριότητες. Η βασική «επαγγελματική» δραστηριότητα των παιδιών είναι να μαθαίνουν, να σκέφτονται, να παίζουν.

Εντούτοις, δεν τους λέμε τίποτα για αυτά. Αντιθέτως, προσπαθούμε απλώς να τους μεταφέρουμε γνώσεις, ελπίζοντας κατά κάποιο τρόπο ότι τα πραγματικά σημαντικά πράγματα θα προκύψουν από μόνα τους. Το παράδοξο παραμένει: γιατί δεν τους διδάσκουμε πώς να σκέφτονται, να μαθαίνουν και να παίζουν;

Η θεωρία κατασκευής της γνώσης , επομένως, τονίζει εξίσου το ρόλο του ατόμου αλλά και της κοινωνικής συμμετοχής. Εδώ το αντικείμενο, η κατασκευή, η συμμετοχή και η συζήτηση διαμορφώνουν τη μάθηση.

Για πολλά χρόνια, η κοινότητα της εκπαίδευσης των μαθηματικών έχει διερευνήσει τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με την άλγεβρα. Διαφορετικές πτυχές της αλγεβρικής σκέψης που θεωρούνται θεμελιώδεις για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών, έχουν αναλυθεί από ερευνητές που χρησιμοποιούν μια ποικιλία θεωρητικών πλαισίων.

Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνητικών μελετών σηματοδότησαν ότι για να προωθηθεί η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών είναι απαραίτητο να τους βοηθήσουν: να βελτιώσουν την αίσθηση και τη δυναμική αντίληψη των μεταβλητών (μεταβλητές ως μεταβαλλόμενες οντότητες),να αναπτύξουν την ικανότητά τους να γενικεύουν και να εκφράζουν τις δικές τους γενικεύσεις, να γνωρίζουν τη δυναμική σχέση που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών και τέλος να προσδιορίζουν την αλγεβρική δομή (π.χ., Kieran, 2006, Radford, 2008, 2011, Mason Stephens, & Watson, 2009;Ursini & Trigueros, 2011;Cooper & Warren, 2008).

Από όλα αυτά φαίνεται ο πρωταρχικός ρόλος που παίζει η άλγεβρα στο γυμνάσιο. Οι ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι όσο υψηλότερο επίπεδο άλγεβρας παρακολουθήσουν οι μαθητές στο γυμνάσιο, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να παρακολουθήσουν προχωρημένη άλγεβρα με επιτυχία στο πανεπιστήμιο μαθήματα και να αποφοιτήσουν από το πανεπιστήμιο και τόσο μεγαλύτερες πιθανότητες έχουν για εξεύρεση καλύτερης αμειβόμενης απασχόλησης μετά την αποφοίτησή τους (Carnevale & Desrochers, 2003).

Η έρευνα μας οδήγησε στην κατανόηση ότι από την εισαγωγή της πρώιμης άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο προέκυψαν πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών των γυμνασίων όταν ξεκίνησαν την μελέτη της άλγεβρας. Δυσκολίες που προήλθαν από τη

συνήθεια των μαθητών να λειτουργούν μέσα σε ένα αριθμητικό πλαίσιο αναφοράς με έμφαση στον υπολογισμό (Kieran, 2006, σελ. 25).

Έτσι, ο θεμελιώδης σκοπός της έρευνας για την πρώιμη άλγεβρα επικεντρώθηκε στην περαιτέρω θεωρητική διερεύνηση για την αποκατάσταση αυτού του ζητήματος (π.χ., να σκεφτόμαστε τις αριθμητικές ισότητες ως σχεσιακές, συμβολίζοντας τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, αναπτύσσοντας τη λειτουργική σκέψη).

Τα ερευνητικά θέματα που έχουν δει μια αύξηση του ενδιαφέροντος τα τελευταία δέκα χρόνια είναι: η αλγεβρική σκέψη στο δημοτικού (πρώιμη άλγεβρα), η γενίκευση, η αίσθηση της δομής, η προηγμένη άλγεβρα και η χρήση τεχνολογικών εργαλείων για την υποστήριξη της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών της, δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

3.2 Μικρόκοσμοι και Κατασκευές

Οι Papert και Harel (1991) έβαλαν τις βάσεις για τις θεωρητικές ιδέες που διέπουν τους εκπαιδευτικούς στόχους των μικρόκοσμων – microworlds (π.χ. το περιβάλλον της χελώνας στη γλώσσα Logo) στην οικοδόμηση της έννοιας "μαθαίνω κάνοντας" (learning by doing). Από τη βάση του τρίπτυχου Δάσκαλος-Εργαλείο-Μαθητής (Tutor-Tool-Tutee) είμαστε τώρα σε λειτουργία μαθητή (Tutee). Οι Papert και Harel (1972) έχουν περιγράψει τον Κονστραξιονισμό ως εξής: – ο κόσμος Ν σε αντιδιαστολή με τον κόσμο V - μοιράζεται τη συνεκτικότητα της μάθησης ως δομή γνώσης ανεξάρτητα από τις συνθήκες της μάθησης. Στη συνέχεια προσθέτει την ιδέα ότι αυτό συμβαίνει ιδιαίτερα ευτυχώς σε ένα πλαίσιο όπου ο εκπαιδευόμενος συνειδητά ασχολείται με την κατασκευή μιας δημόσιας οντότητας, είτε είναι κάστρο άμμου στην παραλία ή σε μια θεωρία του σύμπαντος.

Ο μικρόκοσμος των Χελωνών ήταν ένας μικρός κόσμος, ένας "τόπος", μια "επαρχία του Mathland", όπου ορισμένα είδη της μαθηματικής σκέψης μπορούσαν να εκκολαφθούν και να αναπτυχθούν με ιδιαίτερη ευκολία (Papert 1980). Η χελώνα καθορίζει έναν αυτόνομο κόσμο στον οποίο ορισμένα ερωτήματα είναι σχετικά και άλλα δεν είναι ... αυτή η ιδέα μπορεί να αναπτυχθεί με την κατασκευή πολλών τέτοιων «μικρών κόσμων», το καθένα με το δικό του σύνολο υποθέσεων και

περιορισμών. Τα παιδιά γνωρίζουν τι είναι να διερευνήσει τις ιδιότητες ενός επιλεγμένου μικροσκοπικού κόσμου που δεν διαταράσσεται από ξένες ερωτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο μαθαίνουν να μεταφέρουν συνήθειες εξερεύνησης από την προσωπική τους ζωή στο τυπικό τομέα της κατασκευής επιστημονικών θεωριών. (Papert 1980,)

Ορισμένοι επικριτές (π.χ., Becker 1987) πρότειναν ότι η θεωρία του Papert χρειάζεται περαιτέρω επεξεργασία. Η μεταγενέστερη ανάπτυξη της έννοιας του «μικρού κόσμου» δεν θα περιορίσει την έννοια σε περιβάλλον Logo ή ακόμα και σε περιβάλλον υπολογιστών (Edwards1998; Hoyles and Noss 2003).

Σε ένα έγγραφο που προετοιμάστηκε για τη μελέτη ICMI 17, Ainley και Pratt (2006) περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο εφάρμοζαν τις ιδέες του Κονστραξιονισμού για την ανάπτυξη ενός πλαισίου το σχεδιασμό εργασιών που περιελάμβανε τις συνδεδεμένες κατασκευές με τις έννοιες του σκοπού (**purpose**) και της χρησιμότητας(**utility**).

Ο Pea (1987) επανεξέτασε την ψυχολογική έννοια των γνωστικών εργαλείων για την υπόθεση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση. Οι υπολογιστές έχουν τη δυνατότητα και για την ενίσχυση και την αναδιοργάνωση της μαθηματικής σκέψης. Ωστόσο, ο Pea υποστήριξε ότι η μονόδρομη προοπτική ενίσχυσης, όπου τα εργαλεία επιτρέπουν στον χρήστη να είναι πιο αποτελεσματικός και να αυξήσει την ταχύτητα της μάθησης, να χάσει την πιο βαθιά αμφίδρομη αναδιοργάνωση, δυνατότητες που προσφέρει η τεχνολογία. Με αυτό εννοούσε ότι όχι μόνο ότι οι υπολογιστές επηρεάζουν τους ανθρώπους, αλλά και ότι οι άνθρωποι επηρεάζουν τους υπολογιστές με τον τρόπο που αποφασίζουν σχετικά με τους κατάλληλους τρόπους χρησιμοποίησής τους και τον τρόπο με τον οποίο βελτιώνουμε την εκπαίδευση. Οι στόχοι αλλάζουν την τεχνολογία για να ανταποκρίνονται καλύτερα σε αυτούς τους στόχους .

Ο Meagher (2006) παρόλα αυτά περιέγραψε τον τρόπο με τον οποίο η ψηφιακή τεχνολογία που εισάγεται στο περιβάλλον της τάξης μπορεί να φέρει τα αντίθετα αποτελέσματα που είναι απρόβλεπτα και μπορεί να οδηγήσουν σε ακούσια ανατροπή των εκπεφρασμένων στόχων ενός συγκεκριμένου προγράμματος σπουδών.

Η θεωρητική εργασία του Pea περιλάμβανε επίσης την ανάπτυξη μιας ταξινόμησης που περιλαμβάνει δύο τύπους λειτουργιών με τις οποίες οι τεχνολογίες

πληροφοριών μπορούν να προωθήσουν την ανάπτυξη της μαθηματικές δεξιότητες και σκέψης: λειτουργίες σκοπού και λειτουργίες διαδικασίας. Ο λειτουργίες του σκοπού υποχρεώνουν τους μαθητές να σκέφτονται μαθηματικά. Οι λειτουργίες του σκοπού εστιάζουν σε κατασκευές όπως η ιδιοκτησία, η αυτοπεποίθηση, και τη χρήση παρακινητικών «πραγματικών» πλαισίων και περιβάλλον συνεργατικής μάθησης.

Οι λειτουργίες της διαδικασίας περιλαμβάνουν, σύμφωνα με το Pea, πέντε κατηγορίες του: " για την ανάπτυξη εννοιολογικής ευχέρειας, εργαλεία για μαθηματική εξερεύνηση εργαλεία, εργαλεία για την ενσωμάτωση διαφορετικών μαθηματικών παραστάσεων, εργαλεία για μάθηση για μάθηση και εργαλεία για την εκμάθηση μεθόδων μέσω επίλυσης προβλημάτων " .Ορισμένες από αυτές τις εργασίες τροφοδοτήθηκαν στην ανάπτυξη θεωριών σχετικά με την κατανεμημένη γνώση (Pea 1989) και στην εντοπιζόμενη γνώση (π.χ., Brown et al., 1989).

Στους μαθηματικούς μικρόκοσμους οι μαθητές εμπλέκονται με μαθηματικές έννοιες ανακαλύπτοντας τα αντικείμενα του μικρόκοσμου από τη μια και από την άλλη κατασκευάζοντας τα δικά τους αντικείμενα που φανερώνουν τη μαθηματική σχέση ανάμεσα σε αυτά και διαμέσου αυτών όπως μας λένε οι Thompson(1987) και Hoyles (1993).

Επιπλέον είναι δυνατόν να αναπτυχθεί ο μικρόκοσμος ως σκαλωσιά για να εφοδιάσει τους μαθητές με την δυνατότητα έκφρασης και ενίσχυσης της μαθηματικής σκέψης με την δυνατότητα στον καθηγητή να σχεδιάζει εργασίες κατάλληλα που θα επικεντρώνουν σε σημαντικές μαθηματικές έννοιες με καλύτερο τόπο από αντίστοιχες εργασίες με χαρτί και μολύβι (Noss & Hoyles 1996).

Οι μικρόκοσμοι είναι συνδεδεμένοι άμεσα με τη κονστραξιονιστική θεωρία του Papert και τη αντίληψή του ότι οι κατάλληλα σχεδιασμένες εργασίες σε αυτούς αποτελούν τα λεωφορεία μεταφοράς της μαθηματικής σκέψης (Papert 1972).

3.3 Θεωρία της αντικειμενικοποίησης (objectification)

Ο Radford (2010) καθιέρωσε τη θεωρία της αντικειμενικοποίησης προκειμένου να δώσει θεωρητικό υπόβαθρο στην μετάβαση των μαθητών από την παρατήρηση μιας ομοιότητας σε μια κανονικότητα, στην γενίκευσή της μέσω σημειωτικών τρόπων σε μια

δομική σχέση που περιγράφεται με μαθηματικό τρόπο. Δίνοντας ένα πιο γενικό πλαίσιο περιέγραψε την θεωρία αυτή σαν αντικειμενικοποίηση της γνώσης.

Με την εστίαση στη φαινομενολογική μαθηματική εμπειρία των μαθητών, τονίζει την υποκειμενική διάσταση της γνώσης. Αλλά αυτό είναι μόνο το μισό της ιστορίας. Δεδομένου ότι είμαστε κοινωνικοπολιτικοί γνώστες, η αντικειμενικότητα λαμβάνει επίσης υπόψη τις κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της γνώσης. Η έννοια της αντικειμενικοποίησης της γνώσης στηρίζεται στην ιδέα ότι οι τάξεις δεν είναι απλώς μια δέσμη εξωτερικών συνθηκών στις οποίες πρέπει να προσαρμοστούν οι μαθητές.

Οι τάξεις θεωρούνται ως αλληλεπιδραστικές ζώνες διαμεσολαβούμενων δραστηριοτήτων που μεταφέρουν επιστημονικές, δεοντολογικές, αισθητικές και άλλες πολιτισμικά και ιστορικά διαμορφούμενες αξίες που οι μαθητές κάνουν αντικειμενικοποίηση της γνώσης μέσω της αντανακλαστικής και ενεργού συμμετοχής (Radford, 2010).

Σε αυτές τις δραστηριότητες, οι οποίες ενσωματώνονται σε πολιτισμικές, ιστορικές παραδόσεις, οι μαθητές δεν σχετίζονται μόνο με τα αντικείμενα της γνώσης, αλλά και με άλλους μαθητές μέσω προσωπικών, εικονικών ή δυνητικών επικοινωνιακών δράσεων .

Στο πλαίσιο του προηγούμενου θεωρητικού πλαισίου, η διερεύνηση της χρήσης των σημείων και των μαθητών από τους μαθητές. Οι διαδικασίες της σημασιολογικής παραγωγής στην άλγεβρα επικεντρώθηκαν σε μια λεπτομερή μελέτη των μαθητών .

Την αντικειμενικοποίηση της γνώσης καθώς μετακινούνταν σε διαφορετικά στρώματα γενικότητας και ευαισθητοποίησης. Με γνώμονα τον ορισμό μας της αλγεβρικής γενίκευσης και του θεωρητικού πλαισίου, η θεωρία αυτή απαντά στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Πώς οι μαθητές κατανοούν την ομοιότητα σε ένα μοτίβο;

2. Ποιοι είναι οι μηχανισμοί (γλωσσικοί ή άλλοι) μέσω των οποίων οι μαθητές μπορούν να γενικεύουν την τοπικά παρατηρούμενη ομοιότητα σε όλους τους όρους της ακολουθίας;

3. Πώς εκφράζουν γενικότητα;

Αυτοί οι σημειωτικοί τρόποι δεν είναι τίποτε άλλο παρά τα τρία είδη γενικεύσεων που είναι και διακριτά επίπεδα στα οποία μπορούν να φτάσουν οι μαθητές

σταδιακά. Αυτά τα επίπεδα όπως έχουν περιγραφτεί από την επισκόπηση της έρευνας είναι: **πραγματολογική** γενίκευση (**factual) ,**η γενίκευση **περιεχομένου (contextual),** και η **συμβολική (Symbolic).**

Αφελής Επαγωγή	**Γενίκευση**			
Δοκιμή σωστού-λάθους	**Αριθμητική**	**Αλγεβρική**		
		Factual	**Contextual**	**Symbolic**

Πίνακας 1.Στρατηγικές μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με μοτίβα και κατηγορίες της αλγεβρικής γενίκευσης σε σχέση με τα επίπεδα της αφαίρεσης.

Χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από τους υπολογιστές η ιδέα της αντικειμενικοποίησης μοιάζεις με τις macro ενέργειες που χρησιμοποιούμε στα ψηφιακά εργαλεία, με την έννοια ότι είναι σύνολο ενεργειών που από τυποποιημένες και επαναλαμβανόμενες διαδικασίες που κάνουμε και είναι απαραίτητες για την επιτυχή ολοκλήρωσή μιας εργασίας.

Αυτές οι εργασίες που οδηγούν στις γενικεύσεις μπορούμε να τις διακρίνουμε με σημειωτικό τρόπο. Κάθε διαφορετικό είδος γενίκευσης αντικειμενικοποιείται γίνεται macro εργασία με διαφορετικούς τρόπους που τους μελετάμε με διαφορετικά σημεία μέσω σημειωτικών αναπαραστάσεών τους.

Στην **πραγματολογική** γενίκευση των μοτίβων οι μαθητές βγάζουν τον κανόνα που έχουν μπροστά τους από μια σειρά κοντινών μοτίβων όπου μπορεί να ερμηνευτεί ο κανόνας του επόμενου όρου συνήθως με έναν αναδρομικό τύπο. Εδώ η αφαίρεση πραγματοποιείται όταν μεταφερόμαστε από τον διακριτό όρο στον τυχαίο. Η αντικειμενικοποίηση πραγματώνεται βγάζοντας τον κανόνα.

Στην γενίκευση αυτού του είδους η αντικειμενικοποίηση γίνεται όταν σημειωτικά χρησιμοποιούνται οι λέξεις «επόμενος όρος» η το επίρρημα «πάντα» η υπάρχει κάποιος ρυθμός μια αριθμητική ακολουθία που την χρησιμοποιεί σαν σημάδι ο μαθητής.

Στην **γενίκευση πλαισίου** οι αναπαραστάσεις είναι ρητές αλλά όχι συμβολικές ακόμα. Είναι σε ένα αφαιρετικό επίπεδο παραπάνω από την πραγματολογική γενίκευση αφού ο κανόνας αντικειμενικοποιείται με ρητό τρόπο φεύγοντας από το διακριτό όρο και προχωρά σε έναν γενικό όρο της ακολουθίας του μοτίβου.

Το ανώτερο επίπεδο γενίκευσης αντικειμενικοποιείται φτιάχνοντας ο μαθητής τα δικά του σύμβολα για να περιγράψει την ανάπτυξη του μοτίβου . Σε αυτό το επίπεδο γενικεύσεις όπως n+(n+1) και 2n+1 κατανοούνται σαν διαφορετικές αφού οι μαθητές τις αντιλαμβάνονται ως διαφορετικές ενέργειες.

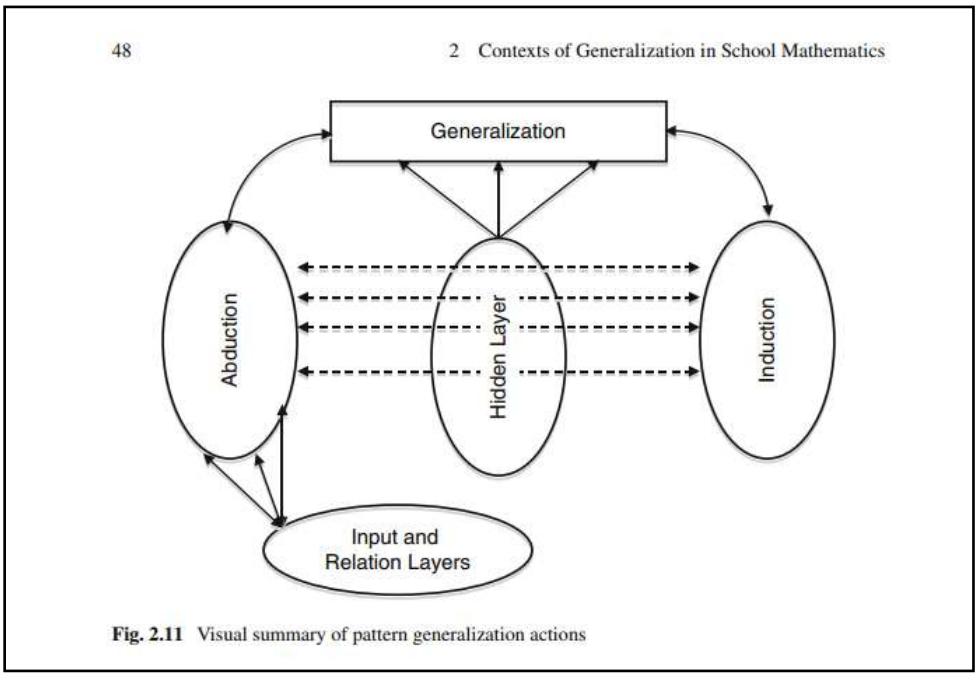
Στην θεωρία των σημειωτικών τρόπων αντικειμενικοποίησης ο Radford διέκρινε τρείς στρατηγικές με τις οποίες φτάνουν στην γενίκευση οι μαθητές.

Στην **1η στρατηγική** οι μαθητές ακολουθούν την μέθοδο trial and error και ανάλογα με την δυσκολία του μοτίβου.

Στην **2η στρατηγική** οι μαθητές χρησιμοποιούν γενικές εκφράσεις (λεκτικές) για να εκφράσουν αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των όρων της κανονικότητας.

Στην **3η στρατηγική** βασίζονται περισσότερο στη γεωμετρική μορφή στην ουσία αποδομούν και ανακατασκευάζουν το μοτίβο και μετά οδηγούνται στην γενίκευση.

Αναλυτικός είναι ο πίνακας του Rivera για την γενίκευση και τα επίπεδά της (layers) στις ενέργειες που κάνουμε όταν ασχολούμαστε με patterns στα σχολικά βιβλία :



Εικόνα 3: ενέργειες γενίκευσης στα μοτίβα

3.4 Τοπική αφαιρετική διαδικασία (Situated abstraction)

Η τοπική αφαιρετική διαδικασία αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο που περιγράφει τον τρόπο που οι μαθητές σχηματίζουν νοητικά εργαλεία όταν έρχονται σε επαφή με έναν ψηφιακό μικρόκοσμο. Η έννοια της τοπικότητας έχει να κάνει με το ότι η αφαίρεση πραγματώνεται εντός του τεχνουργήματος που χρησιμοποιείται.

Κάποιος βέβαια θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι όλες οι αφαιρέσεις ξεκινούν τοπικά άρα η έννοια αυτή της situated αφαίρεσης είναι πολύ γενική για να περιγράψει κάτι. Προφανώς κάτι τέτοιο έχει βάση αλλά εδώ οι Noss και Hoyles (1987) χρησιμοποιούν τον όρο αυτό για να περιγράψουν τις συνδέσεις μεταξύ των ενεργειών που κάνουν οι μαθητές με τα ψηφιακά εργαλεία και κατά πόσο με αυτά παράγουν μαθηματικά νοήματα εξαιτίας και μόνο του μικρόκοσμου.

Η κύρια διαφορά εδώ είναι η διαδικασία νοηματοδότησης και πώς αυτή ιεραρχείται σε επίπεδα . Με αυτή την οπτική δίνεται έμφαση σαν ένας τρόπος αντικατάστασης ενός συγκεκριμένου νοήματος πχ συγκεκριμένου και αναφορικού με άλλο αφηρημένο και αποσαφηνισμένου. Είναι φανερό ότι κάτω από αυτή την οπτική οι υπολογιστικοί μικρόκοσμοι λειτουργούν ως πεδία αφαίρεσης.

Η αντίληψή μας για αυτοεκφραστικούς κόσμους, όπως ο **eXpresser** , είναι ότι αυτός μπορεί να είναι ένας ιδιαίτερα παραγωγικός τομέας της τοπικής αφαίρεσης, ενός περιβάλλοντος όπου μπορούμε να δούμε την εξωτερική όψη των σχημάτων των μαθηματικών αντικειμένων και να κατασκευάσουμε μαθηματικά νοήματα χρήσιμα για την κατανόηση των μαθητών ανά πάσα στιγμή.

Ακόμα έχουν την δυνατότητα να προσφέρουν μια παγκόσμια δομή υποστήριξης η οποία παρέχεται από ισχυρές συνδέσεις μεταξύ των χρηστών με την μορφή ενός δικτύου συνεργασίας..

3.5 Αφαίρεση εντός Πλαισίου-(Abstraction In Context)

Ο σχεδιασμός και η ανάλυση της δραστηριότητάς μας στηρίζεται στο θεωρητικό μοντέλο του Dreyfus: Abstraction in Context. Το θεωρητικό αυτό μοντέλο είναι επηρεασμένο από τα Ρεαλιστικά μαθηματικά και την οριζόντια μαθηματικοποίηση

(οργάνωση και λύση προβλήματος εξωτερικά) και την θεωρία του Davydov που υπήρξε συνεχιστής της κοινωνικοπολιτικής θεωρίας του Vygotsky.

Η κάθετη μαθηματικοποίηση (Vertical mathematization) στοχεύει σε μια διαδικασία που τυπικά αποτελεί την αναδιοργάνωση της προηγούμενης μαθηματικής γνώσης εντός των μαθηματικών και με στόχο τα μαθηματικά νοήματα μέσω των οποίων οι μαθητές κατασκευάζουν τη νέα αφηρημένη γνώση.

Στην κάθετη αναδιοργάνωση, προηγούμενες κατασκευές χρησιμεύουν ως δομικά στοιχεία κατά τη διαδικασία κατασκευής των νέων κατασκευών. Συχνά αυτά τα νέα δομικά στοιχεία δεν αναδιοργανώνονται απλώς αλλά είναι ενσωματωμένες και συνυφασμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προσθέτουν μια βαθιά γνώση στο μαθητή και να δώσουν έκφραση και νόημα στη σύνθετη φύση των μαθηματικών. Η διαδικασία αυτή είναι απαραίτητα κατάλληλα πλαισιωμένη (in context) .

Στοιχεία του πλαισίου μπορεί να είναι:

Α) Δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν για την επίτευξη συγκεκριμένου μαθησιακού αποτελέσματος.

Β) Ένα ιστορικό πλαίσιο που συμπεριλαμβάνει τις προηγούμενες μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών

Γ) Υπολογιστικά περιβάλλοντα με τεχνολογικά εργαλεία

Δ) Ένα κοινωνικό πλαίσιο.

Η διαδικασία της αφαίρεσης αποτελείται από τρία στάδια:

Ι) **Recognizing** (R):

Αυτό το στάδιο περιλαμβάνει την αναγνώριση των προηγούμενων γνωστών διαδικασιών, βημάτων, στρατηγικών. Είναι δηλαδή η διαδικασία κατανόησης των μαθηματικών σχέσεων ή η συνειδητοποίησή τους. Ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι μια προηγούμενη ειδική κατασκευή συσχετίζεται με την ανά χείρας κατάσταση που καλείται να αντιμετωπίσει. Η διαδικασία του Recognizing εμφανίζεται με δύο μορφές: αναλογία και ειδίκευση.

ΙΙ**) Building with** (B) (επαναδόμηση):

Σ’ αυτό το στάδιο χρησιμοποιούνται οι υπάρχουσες μαθηματικές ιδέες, έννοιες και στρατηγικές σε ένα ασυνήθιστο συνδυασμό ή ακολουθία, για να λυθεί ένα πρόβλημα.

Επίσης περιλαμβάνεται η αναγνώριση των μοτίβων (patterns) και ταυτόχρονα η ικανότητα να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα από διάφορες σκοπιές.

III) **Constructing** (C):

Περιέχει την ενσωμάτωση και τη συναρμολόγηση των προηγούμενων μαθηματικών εννοιών, διά μέσου της κάθετης μαθηματικοποίησης , για να σχηματιστεί μια νέα μαθηματική δομή. Επίσης περιέχει την άμεση αναγνώριση της σχέσης που έχει η πρόσφατα κατακτηθείσα αφηρημένη έννοια για τον επόμενο μαθησιακό στόχο (αξιολόγηση, εκτίμηση) . Εμφανίζεται όταν ο μαθητής έρχεται σε πρώτη επαφή με το νέο κατασκεύασμα. Επομένως υπάρχει η πιθανότητα ο μαθητής να μην έχει συνειδητοποιήσει την ύπαρξη της νέας δομής και να μη μπορεί να την επαναλάβει. Προφανώς το νοητικό προϊόν δεν έχει κατακτηθεί από το μαθητή και εξαρτάται άμεσα από το πλαίσιο. Η διαδικασία της αφαίρεσης έχει ολοκληρωθεί όταν ο μαθητής ολοκληρώσει και το στάδιο της παγίωσης της νέας γνώσης (Consolidation) .

Σ' αυτό το στάδιο συμβαίνουν τα εξής:

Α) Ο μαθητής συνειδητοποιεί τις νοητικές κατασκευές που έχει κατακτήσει.

Β) Η χρήση τους γίνεται περισσότερο άμεση και αυταπόδεικτη.

Γ) Αυξάνεται η αυτοπεποίθησή του κατά την εφαρμογή τους σε διαφορετικά πλαίσια

Δ) Παρουσιάζει ευελιξία όταν την εφαρμόζει σε διαφορετικά πλαίσια.

(Dreyfus,2007)

Στη διαδικασία του abstraction οι επιστημονικές δράσεις είναι εμφωλιασμένες.

Οι C-δράσεις εξαρτώνται από τις R&B.Τα R&B είναι οι δομικές μονάδες του C και ταυτόχρονα το C είναι κάτι παραπάνω από τα R&B μαζί, όπως το όλο είναι κάτι παραπάνω από το άθροισμα των επιμέρους. Το C αντλεί τη δύναμή του από τις αλληλένδετες μαθηματικές έννοιες, στη συνέχεια ενοποιεί αυτές τις δομικές μονάδες .

Έτσι τα R&B είναι συστατικά στοιχεία του C και είναι εμφωλιασμένες σ' αυτήν.

Επίσης με παρόμοιο τρόπο, οι R ενέργειες είναι εμφωλιασμένες στις B αφού χτίζοντας το καινούργιο με τις υπάρχουσες γνώσεις απαιτεί αναγνώριση της δομής.

Η χρήση της τεχνολογίας ως πλαίσιο για την αφαίρεση είναι σχεδόν αναπόφευκτη γιατί οι μαθητές μπορούν με δυναμικό τρόπο να κατακτήσουν τη νέα

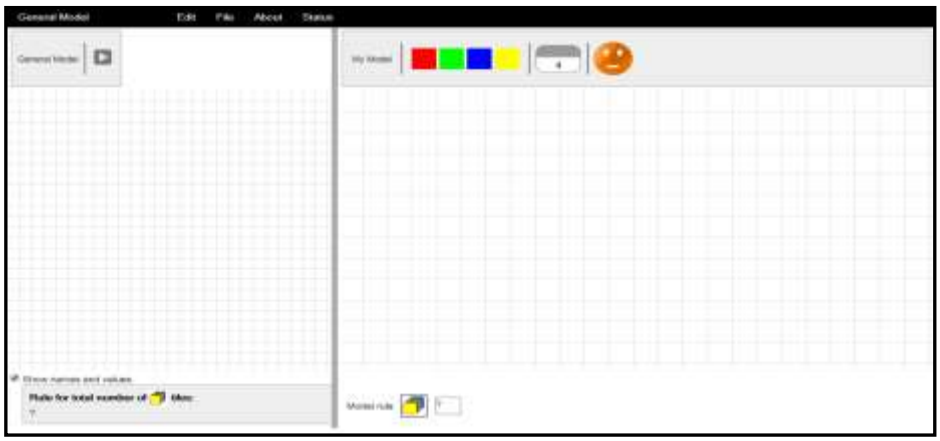
γνώση και από το στάδιο της εξερεύνησης να φθάνουν στο στάδιο της διερεύνησης και της ερμηνείας μαθηματικών φαινομένων.

4. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ EXPRESSER

Το λογισμικό –μικρόκοσμος eXpresser είναι μια διαδικτυακή ελεύθερη έκδοση που έχει ως βάση το πρόγραμμα MIGEN που έχει σχεδιαστεί στο Institute of Education, London με στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να ενισχύσουν την αλγεβρική γενίκευση μέσα από ένα ψηφιακό κονστραξιονιστικό (constructionist) περιβάλλον.

Τα πρόγραμμα αυτό που δοκιμάστηκε πιλοτικά στην αρχή επεκτάθηκε και μπήκε στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων αφού εξελίχθηκε σε ένα διαδραστικό περιβάλλον που είχε την δυνατότητα να παρέχει ατομική υποστήριξη σε κάθε μαθητή βοηθώντας τον με άμεσα συμβουλευτικό τρόπο και δίνοντας την γενική εικόνα στον καθηγητή για την ατομική εξέλιξη κάθε μαθητή και την πρόοδό του σε σχέση με την αντίστοιχη εργασία που είχε να ολοκληρώσει στα πλαίσια ομαδοσυνεργατικών ασκήσεων κατάλληλα σχεδιασμένων.

Η διαδικτυακή εφαρμογή του eXpresser παρουσιάζει την παρακάτω εικόνα που εύκολα έχει πρόσβαση κάθε μαθητής στην διεύθυνση http://eXpresser.appspot.com/

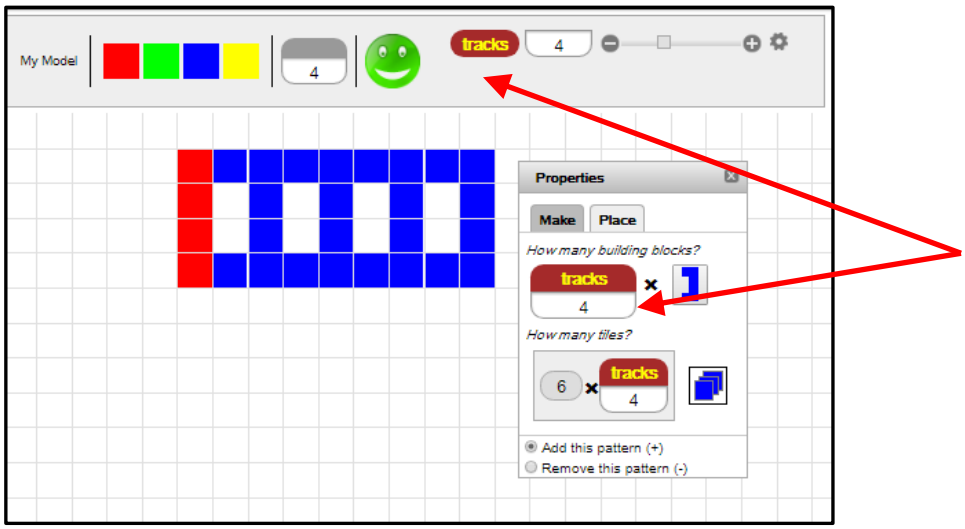


Εικόνα 4:Αρχική εικόνα του eXpresser

Αυτό που διακρίνουμε αμέσως είναι οι δύο κόσμοι **my model** δεξιά και **general model** αριστερά που στην αρχή είναι κενοί. Ο μαθητής πρέπει να φτιάξει ένα μοτίβο

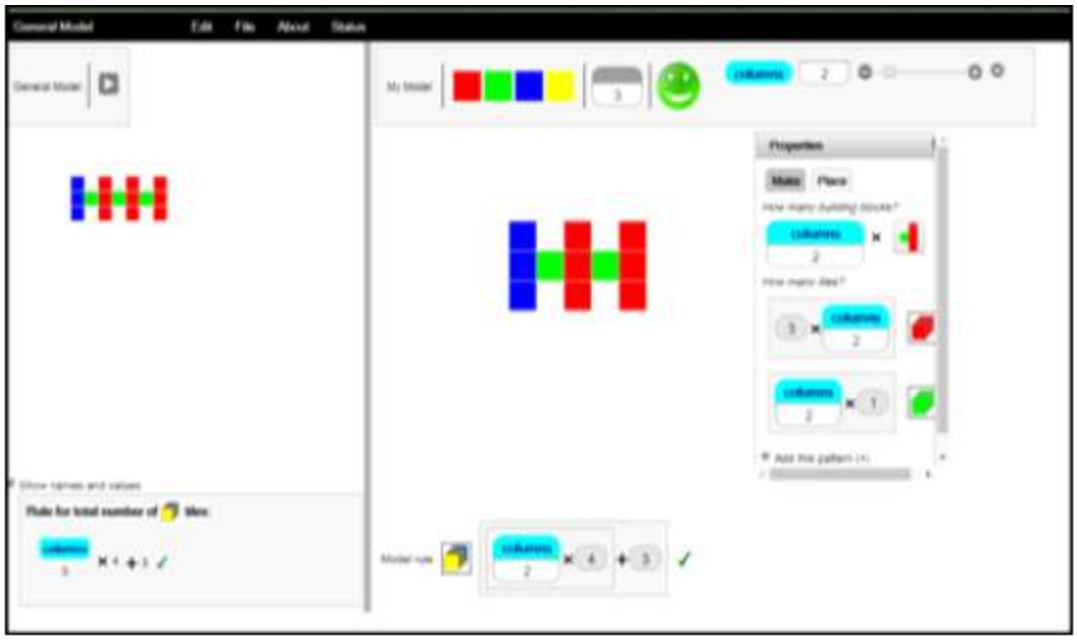
φτιάχνοντας το δομικό του στοιχείο παίρνοντας ένα ένα τα χρωματιστά τετραγωνάκια από την κορυφή του my model και να τα τοποθετεί στον καμβά της οθόνης.

Για να το πετύχει αυτό πρέπει να φτιάξει αμέσως μετά το δομικό στοιχείο (**building blog**) πατώντας πάνω του και με αριστερό κλικ να επιλέξει την εντολή **make a pattern** . Με αυτόν τον τρόπο αναπαράγεται το δομικό στοιχείο του μοτίβου σε έναν συγκεκριμένο τυχαίο αλλά σταθερό αριθμό. Για να αναπαραχθεί αυτό σε τυχαίο αριθμό πρέπει να ξεκλειδωθεί ο αριθμός των μοτίβων με την κατάλληλη εντολή . Είναι προφανές ότι ο ξεκλειδωμένος αριθμός γίνεται μεταβλητή και εμφανίζεται αντίστοιχος μεταβολέας στην οθόνη.



Εικόνα 5: Ξεκλειδωμένος αριθμός και μεταβολέας.

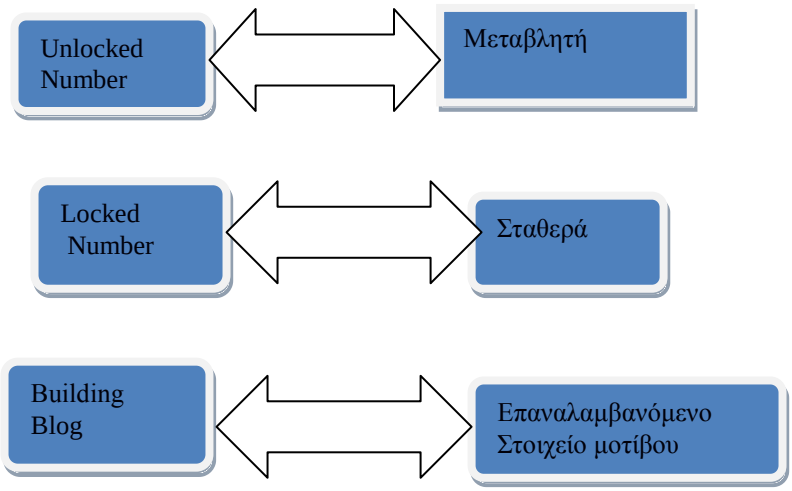
Το αριστερό κομμάτι της οθόνης περιέχει το γενικό μοντέλο και αναπαράγει για τυχαίους αριθμούς επανάληψης το μοτίβο. Τα τετραγωνάκια πρέπει να χρωματιστούν σωστά για οποιαδήποτε τιμή του ξεκλειδωμένου αριθμού . Αυτό επιτυγχάνεται όταν βρεθεί ο σωστός κανόνας (**model rule)** και τοποθετηθεί στο αντίστοιχο πεδίο.

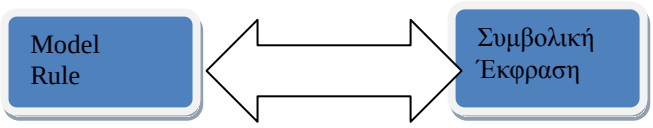


Εικόνα 6 :Επιτυχής ολοκλήρωση εργασίας μοτίβου.

Η τοποθέτηση αριθμών στον τύπο και η μεταφορά τύπων γίνεται με την επιλογή συρσίματος από την περιοχή του my world είτε από το πλαίσιο show properties που εμφανίζει τον ξεκλειδωμένο αριθμό.

Ειδικότερα οι ισοδυναμίες των λειτουργιών του λογισμικού με τις αλγεβρικές έννοιες περιγράφονται από το παρακάτω διάγραμμα:





5. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

5.1 Στόχοι της έρευνας- Ερευνητικά ερωτήματα

Οι ερευνητικοί στόχοι αφορούν την διαδικασία ενίσχυσης της αλγεβρικής σκέψης όπως αυτή κατασκευάζεται μέσω των μοτίβων μέσω του μικρόκοσμου eXpresser . Ο μικρόκοσμος εδώ είναι το μέσο με το οποίο οι μαθητές περνάνε από την αριθμητική στην άλγεβρα νοηματοδοτώντας μέσα από τα εργαλεία του λογισμικού βασικές αλγεβρικές έννοιες όπως η έννοια της μεταβλητής, κατασκευάζοντας συμβολικά όρους ακολουθιών ,αιτιολογώντας με αφαιρετικούς συλλογισμούς και πραγματοποιούν αλγεβρικές γενικεύσεις καθώς παράγουν τους όρους συγκεκριμένων μοτίβων.

Βασιζόμαστε κυρίως στα πορίσματα της έρευνας των Warren και English (1998) που εισηγούνται να γίνεται η εισαγωγή των αλγεβρικών εννοιών αποκλειστικά με την χρήση των μοτίβων.

Ταυτόχρονα σε άλλες εργασίες χρησιμοποιούμε τον μικρόκοσμο σαν εργαλείο για την επίλυση προβλήματος κάνοντας την αντίστοιχη μοντελοποίηση με την χρήση του eXpresser . Μας ενδιαφέρουν κυρίως οι έρευνες που δείχνουν ότι το περιβάλλον κατάλληλων ψηφιακών μικρόκοσμων λειτουργεί σαν ενισχυτής της αλγεβρικής σκέψης.

Πιο συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει να πάρουμε απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα :

α. Αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές νοηματοδοτούν αλγεβρικές έννοιες μέσω αφαιρετικών διαδικασιών κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες κατασκευής και ερμηνείας μοτίβων στον expresser;

β. . Ποιός είναι ο ρόλος των διαθέσιμων ψηφιακών εργαλείων του eXpresser στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών;

5.2 Ερευνητικός σχεδιασμός

Η έρευνα βασίστηκε στην μελέτη περίπτωσης (case study) σε δυο ομάδες μαθητών Α Γυμνασίου. Οι ομάδες δούλεψαν εναλλάξ, μια ομάδα δύο αγοριών Α1Α2 και μια ομάδα κοριτσιών Κ1Κ2. Σε κάθε εργασία έγινε καταγραφή της οθόνης και μαγνητοφώνηση των διαλόγων μεταξύ των παιδιών και του ερευνητή καθηγητή. Ο ρόλος του καθηγητή εδώ προσδιορίσθηκε σαν ρόλος συμμετοχικού παρατηρητή. Η διάρκεια της έρευνας ήταν περίπου 2 μήνες κατά το πρώτο εξάμηνο του 2017. Η προσέγγιση των ερευνητικών ερωτημάτων έγινε με φύλλα εργασίας, με μοτίβα που συμπεριλάμβαναν θέματα από διεθνείς διαγωνισμούς όπως ο TIMSS και μοτίβα από βιβλία σε αναλυτικά προγράμματα ευρωπαϊκών χωρών .

Η διαβάθμιση των εργασιών ξεκινούσε από 2 εργασίες εκμάθησης του λογισμικού με εικονιστικά αναπτυσσόμενα μοτίβα, πέρασε σε πιο σύνθετα που μελετούσαν συμμεταβολή μοτίβων και κατέληξε σε προβλήματα που μπορούσαν να λυθούν με την χρήση του λογισμικού αλλά και χωρίς αυτό για να διερευνηθεί η διαφορά .

5.3. Μέθοδος

Η μέθοδος έρευνας στηρίζεται στο μοντέλο της έρευνας σχεδιασμού (design research, Cobb et al., 2003). Η μέθοδος αυτή συνδυάζει την εμπειρική έρευνα με την εκπαιδευτική θεωρία που καθοδηγεί την σχεδίαση περιβαλλόντων μάθησης. Είναι μια σημαντική μεθοδολογία για να κατανοήσουμε πως, πότε και με ποιο τρόπο οι εκπαιδευτικές καινοτομίες δουλεύουν στην πράξη.

Ποιό συγκεκριμένα συνδέει τις θεωρητικές αναφορές για την διδασκαλία και μάθηση και μας βοηθά να καταλάβουμε πως πραγματώνεται η μάθηση μέσα από ειδικά σχεδιασμένα τεχνουργήματα (εργαλεία) και ειδικές πρακτικές που τα χρησιμοποιούν.

Η παραπάνω ερευνητική μέθοδος έχει πέντε **βασικά χαρακτηριστικά**:

i. Οι κεντρικοί στόχοι του σχεδιαζόμενου μαθησιακού περιβάλλοντος και οι πρωτογενείς θεωρίες μάθησης είναι αλληλένδετες.

ii. Η ανάπτυξη έρευνας γίνεται έπειτα από συνεχείς κύκλους σχεδιασμού, υλοποίησης ,επικύρωσης ,ανάλυσης και επανασχεδιασμού.(Cobb 2001, Collins 1992)

iii. Η έρευνα πρέπει να οδηγεί σε συναφείς θεωρίες που συμβάλλουν στην επικοινωνία και στις σχετικές επιπτώσεις που μπορεί να χει ανάμεσα σε επαγγελματίες της εφαρμογής τους και άλλους εκπαιδευτικούς σχεδιαστές.

iv. Η έρευνα πρέπει να εφαρμόζεται σε αυθεντικές καταστάσεις .Δεν πρέπει μόνο να τεκμηριώνει το σωστό ή το λάθος αλλά να εστιάζει στις αλληλεπιδράσεις που βελτιώνουν την κατανόησή μας για τα μαθησιακά ζητήματα που προκύπτουν.

v. Πρέπει να αναπτύσσουν και να καθιερώνουν μεθόδους που συνδέουν διαδικασίες εμπλοκής και εφαρμογής σε ερευνητικά ενδιαφέροντα πεδία.

΄Η παρούσα εργασία βασίζεται στο περιβάλλον του λογισμικού **eXpresser** που είναι μια εξέλιξη του προγράμματος **Migen**. Οι μαθητές έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με το λογισμικό. Οι πρώτες δραστηριότητες είναι δραστηριότητες εξοικείωσης με το λογισμικό. Δόθηκαν φύλλα εργασίας και δούλεψαν σε 2 ομάδες. Η εργασία τους με το λογισμικό βιντεοσκοπήθηκε με καταγραφέα οθόνης και η συνομιλία τους ηχογραφήθηκε επιπρόσθετα για να υπάρχει υλικό επεξεργασίας αν η οθόνη δεν κατέγραφε σωστά.

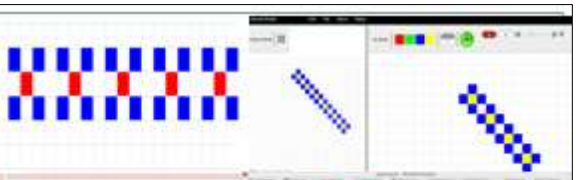
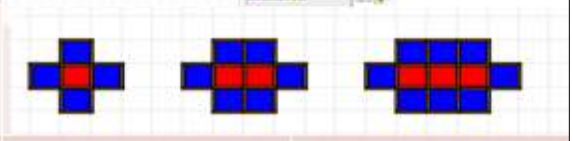
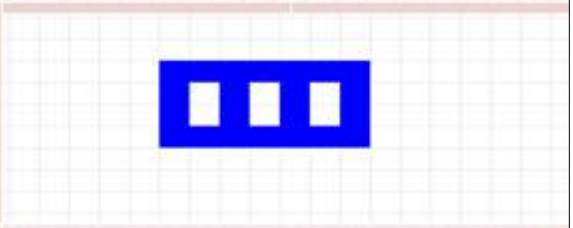
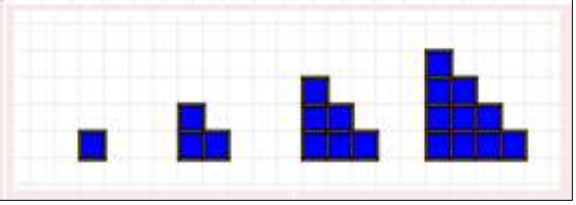
5.4. Συμμετέχοντες

Επιλέχθηκαν 2 ομάδες μαθητών από το ίδιο τμήμα α γυμνασίου. Για λόγους ομοιογένειας αλλά και συνεργατικότητας η μια ομάδα αποτελούταν από αγόρια και η δεύτερη ομάδα από κορίτσια. Το επίπεδο τους ήταν πάνω από το μέσο όρο της τάξης χωρίς να έχουν κάποιο γνωστικό μαθησιακό έλλειμμα από τις αριθμητικές μεθόδους του δημοτικού. Η σχέση τους ήταν μηδενική με το λογισμικό με το οποίο ήρθαν σε επαφή για πρώτη φορά,αλλά μετά από 2 εργασίες εξοικειώθηκαν γρήγορα με αυτό.

Η ενασχόληση με την έρευνα ήταν εναλλάξ η κάθε ομάδα Δευτέρα-Τετάρτη Παρασκευή στο τέλος του σχολικού προγράμματος. Τα παιδιά ασχολήθηκαν με 5 φύλλα εργασίας στο σχολείο , διάρκειας περίπου μιας διδακτικής το καθένα και επιπλέον με 2 φύλλα εργασίας που συμπληρώθηκαν στο σπίτι με χρήση του λογισμικού του **eXpresser.**

Ακόμα η μία ομάδα, το κάθε παιδί χωριστά, απάντησε επιπλέον σε ένα φύλλο εργασίας για να διαπιστωθεί η γενίκευση σε δραστηριότητα που δεν απατούσε λογισμικό, παρά μόνο μολύβι και χαρτί .

5.5 Δραστηριότητες-Περιγραφή

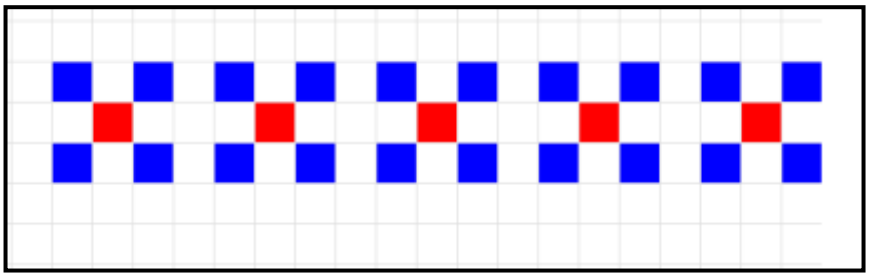
1η Φάση - Εξοικείωσης	Εισαγωγική- Crosstar	
2η φάση- Αναπτυσσόμενα Μοτίβα	L-Letter και Βοηθήστε τον Γιάννη	
3η φάση Problem Solving	Τραπέζια Καλεσμένοι	
4η Φάση Σύνθετες-εργασίες	Traintrack	
5η Φάση – Χαρτί μολύβι	Τρίγωνοι αριθμοί	

Εικόνα 7 Συνοπτική περιγραφή δραστηριοτήτων.

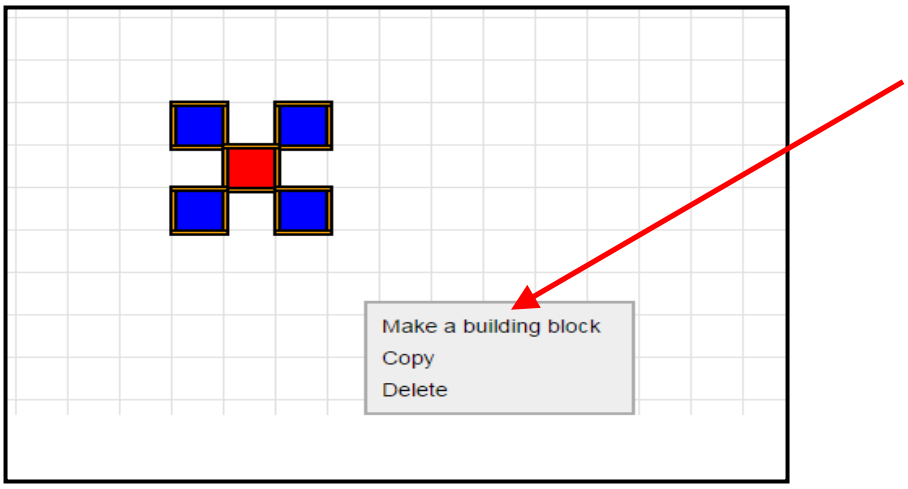
1η Φάση δραστηριότητες εξοικείωσης (Familiarization)

1η Εργασία εισαγωγική

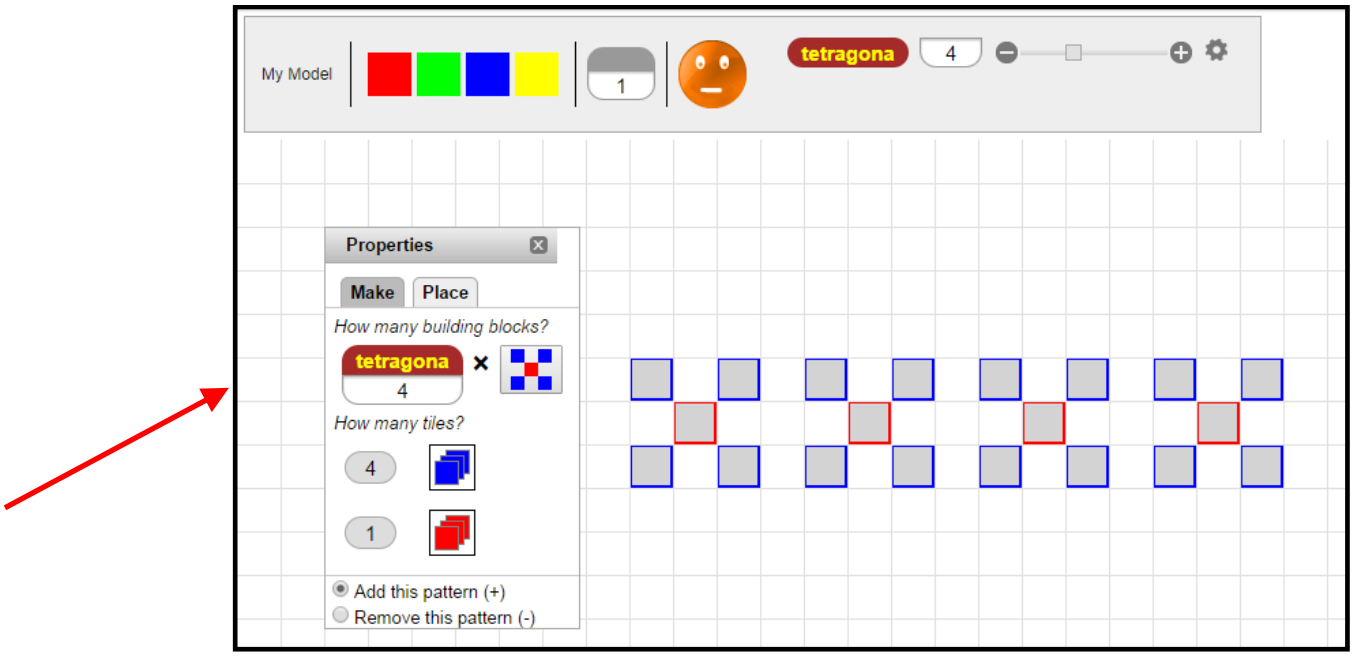
Η πρώτη εργασία παρέχει την δυνατότητα για πρώτη γνωριμία με το λογισμικό και είναι πολύ αναλυτική ώστε να επιτύχουν την γενίκευση με λεκτικό και συμβολικό τρόπο ενός απλού μοτίβου. Επιπλέον πρέπει να συνηθίσουν οι μαθητές με τις λειτουργίες των τριών κόσμων του λογισμικού φτιάχνοντας ένα απλό μοτίβο σαν το παρακάτω:



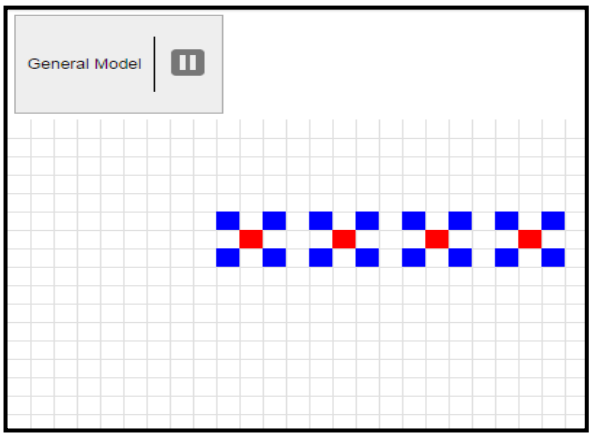
Αυτό γίνεται παρατηρώντας και φτιάχνοντας το δομικό στοιχείο του μοτίβου



Η αναπαραγωγή του γίνεται φτιάχνοντας το μοτίβο και ξεκλειδώνοντας τον αριθμό των τετραγώνων



Επόμενο βήμα η επαλήθευση αν αναπαράγεται το μοτίβο σωστά στον γενικό μοντέλο και η διατύπωση του κανόνα .



Το φύλλο εργασίας συμπληρώνεται με τρείς ερωτήσεις που περιμένουμε να μας δώσουν την αρχική νοηματοδότηση των αντίστοιχων λειτουργιών που παίρνουν δίνουν οι μαθητές σε μια πρώτη γνωριμία με το πρόγραμμα **:**

1.Τι αντιπροσωπεύει για σας ο ξεκλειδωμένος αριθμός του μοτίβου?

2.Τι εκφράζει κατά την γνώμη σας ο γενικός κόσμος που έχει το πρόγραμμα?

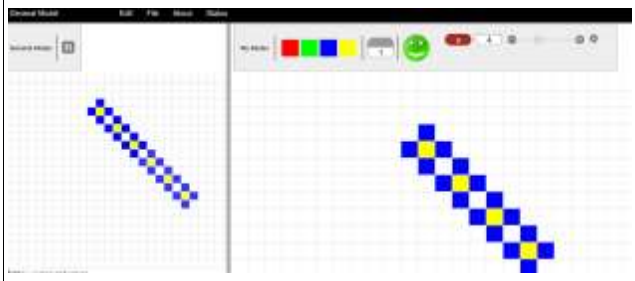
3. Τι αντιπροσωπεύει κατά την γνώμη σας ο μεταβολέας στο πρόγραμμα και τι ο γενικός τύπος?

2η Δραστηριότητα- Crosstar

Στην 2η δραστηριότητα η ενασχόληση είναι πιο ελεύθερη χωρίς παρέμβαση η εντελώς διακριτική του καθηγητή μόνο στα σημεία δυσκολίας, με στόχο οι μαθητές να

μπορούν να αντεπεξέλθουν σε ένα εικονιστικό μοτίβο που αναπτύσσεται στο χώρο όχι οριζόντια αλλά διαγώνια .

Ακόμα οι ερωτήσεις οδηγούν τους μαθητές σε διαφορετικές αναπαραστάσεις των μερών του pattern. Συγκεκριμένα συμπληρώνεται ένας πίνακας τιμών ώστε οι μαθητές να φτάσουν τόσο στην συμβολική γενίκευση αλλά και στη συσχέτιση μεγεθών με συναρτησιακό τρόπο.

<table>
<tr><th>Εργασία</th><th>Αναμενόμενα αποτελέσματα</th></tr>
<tr><td>1. .Το μοτίβο που πρέπει να φτιάξουμε είναι το παρακάτω:
  </td><td>Οι μαθητές θα πρέπει να αναλύσουν το αναπτυσσόμενο μοτίβο, να παρατηρήσουν ποιό είναι το δομικό στοιχείο, τι μένει ίδιο δηλαδή και τί επαναλαμβάνεται.
Ταυτόχρονα δοκιμάζεται η ικανότητά τους με το λογισμικό να χρησιμοποιούν το ξεκλείδωμα αριθμού ώστε να εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής και να αναπαριστούν το μοτίβο με αλγεβρική φόρμουλα (συμβολική γενίκευση).</td></tr>
<tr><td>2.Πόσα κίτρινα τετράγωνα έχει το 1ο μοτίβο, πόσα το 2ο και πόσα το 3ο ;</td><td>Σκοπός να πάμε από την κοντινή στην μακρινή γενίκευση απορρίπτοντας έτσι την περίπτωση μιας αφελούς επαγωγής.</td></tr>
<tr><td>3.Φτιάξτε δύο στήλες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό μοτίβων η 1η και τον αριθμό κίτρινων τετραγώνων η 2η με 5 γραμμές.
<table>
<tr><td>(αριθμός μοτίβου)</td><td>(κίτρινα τετράγωνα)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>.....</td></tr>
<tr><td>2
.....</td><td>.....
10</td></tr>
</table></td><td>Συμπλήρωση του πίνακα τιμών ώστε να προκύψει η συσχέτιση των δύο μεταβλητών:
αριθμός μοτίβου και αριθμός των κίτρινων τετραγώνων.</td></tr>
</table>

.....	100

4.Μπορείτε να περιγράψετε λεκτικά τη σχέση που συνδέει τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων και τον αριθμό του μοτίβου; 5.Πόσα μπλε τετράγωνα έχει το 1ο μοτίβο πόσα το 2ο και ποσά το 3ο ?	Περιμένουμε από τους μαθητές να αποδώσουν την ισότητα αριθμός μοτίβου ίσον με τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων χωρίς να χρειάζεται αλγεβρικός συμβολισμός.

6.Φτιάξτε δύο στήλες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό μοτίβων η 1η και τον αριθμό μπλε τετραγώνων η 2η με 5γραμμές.

(αριθμός μοτίβου)	(αριθμός μπλέ τετραγώνων)
1	4
2	.....
.....	12
.....	20

Η συμπλήρωση του πίνακα με εποπτεία από το μοτίβο θα βοηθήσει ώστε να προκύψει η συναρτησιακή γενίκευση του μοντέλου.

7.Περιγράψτε τη σχέση που συνδέει τον αριθμό των μπλε τετραγώνων με τον αριθμό του μοτίβου.

Περιμένουμε από τους μαθητές την απάντηση **ότι κάθε φορά τα μπλε τετράγωνα είναι 4πλάσια του αριθμού του μοτίβου**

8.Πόσα τετράγωνα συνολικά έχει το 1ο μοτίβο πόσα το 2ο και πόσα το 3ο?

9.Φτιάξτε δύο στήλες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό μοτίβων η 1η και τον αριθμό τετραγώνων η 2η με 5γραμμές.

Αριθμός μοτίβου	**Συνολικός αριθμός τετραγώνων**
1	.....
2	.....
.....	50
.....	1000

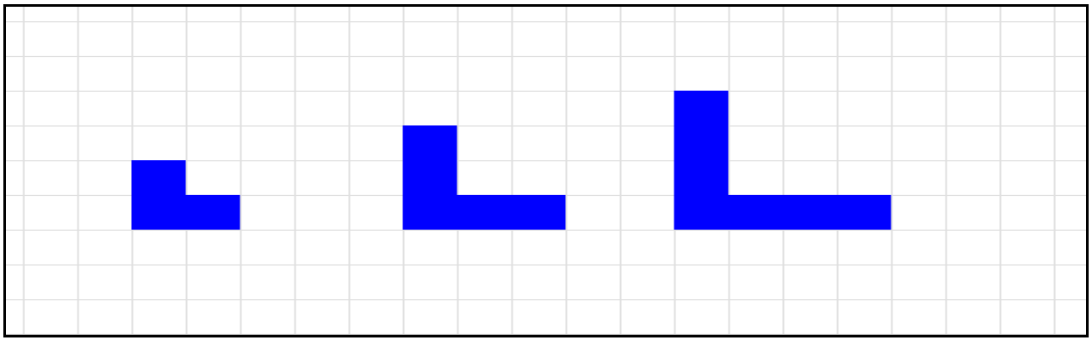
10.Ποιά σχέση συνδέει συμβολίστε τον αριθμό των συνολικών τετραγώνων με μ τον αριθμό του μοτίβου?	Περιμένουμε από τους μαθητές την απάντηση *ότι πάντοτε ο αριθμός των συνολικών τετραγώνων είναι 5πλάσιος του αριθμού του μοτίβου* .

2η Φάση- Αναπτυσσόμενα μοτίβα

3η Δραστηριότητα L letter

Το μοτίβο που πρέπει να φτιάξουμε είναι το παρακάτω:

Σχήμα	1	Σχήμα 2	Σχήμα 3
Τετράγωνα:	3	5	7



Διδακτικός στόχος:

1. Η επίλυση ενός εικονιστικού μοτίβου και η γενίκευση μέσω εύρεσης μιας γενικής έκφρασης αναπαραγωγής του με λεκτικό τρόπο.

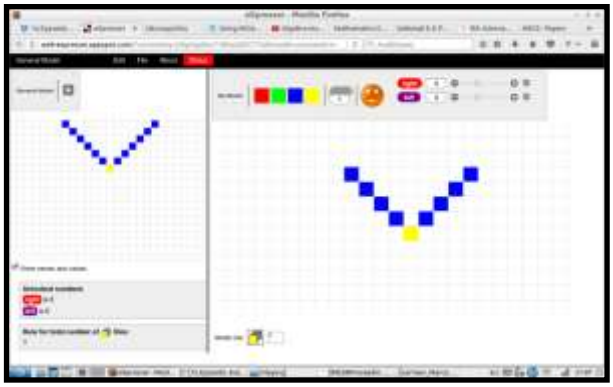
2. Η εξακρίβωση του τι είναι σταθερό και τι μεταβάλλεται στο μοντέλο.

3. Ο χειρισμός του αλγεβρικού ισοδύναμου ώστε να μπορεί να δουλέψει το μοντέλο.

4. Η μαθηματική εξήγηση με την διατύπωση εικασίας για τη σχέση που διαπερνάει το μοτίβο και ο έλεγχός της αν δουλεύει στη γενίκευσή της.

Εργασία 4η -Βοηθώντας τον Γιάννη!

Το μοτίβο που έχει φτιάξει ο Γιάννης είναι το παρακάτω:



Στην προσπάθεια του να φτιάξει το μοντέλο χρησιμοποίησε δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς.Έναν για την δεξιά κεραία (right) και έναν για την αριστερή (left) .

Αντικείμενα του Λογισμικού	Επιλύοντας προβλήματα με δύο μεταβλητές
Μαθηματικό αντικείμενο	Δημιουργία μεταβλητών που συμμεταβάλλονται.
Διδακτικός στόχος	Η συγκεκριμένη δραστηριότητα παρουσιάζει αρχικά δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς. Εάν οι

μεταβολείς κινηθούν χειροκίνητα το μοντέλο φαίνεται να δουλεύει, πχ στο τόξο στην αρχή και στο τέλος. Οι μαθητές πολλές φορές ξεκλειδώνουν διαφορετικούς αριθμούς και προσπαθούν μετά να βρουν πώς συνδέονται τα δομικά στοιχεία και τα μοτίβα μεταξύ τους. Αυτή η διαδικασία έχει σχεδιαστεί ώστε να γίνει φανερή αυτή η σύνδεση με τη θεώρηση του πώς συνδέονται οι δυο κλάδοι ενός πτυσσόμενου μοτίβου και η συσχέτιση μεταξύ τους. Αυτό επιτυγχάνεται εξετάζοντας τις αλλαγές που όταν προκαλούνται στο ένα μοτίβο τι επιπτώσεις έχει στο άλλο μοτίβο και πως αριθμητικά συνδέονται τα δυο μοτίβα μεταξύ τους.

3η Φάση – Επίλυση προβλήματος με μοντελοποίηση

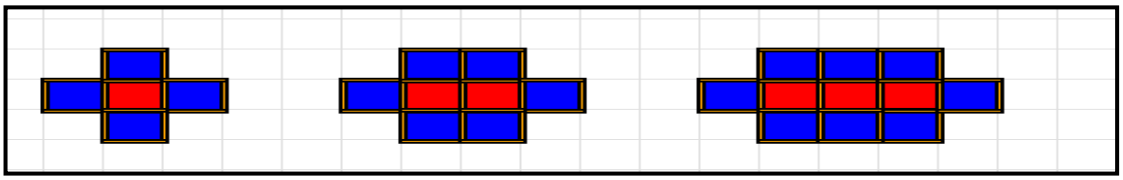
5η Εργασία : **Τραπέζια -Καλεσμένοι**

Η εργασία αυτή επειδή ήταν ιδιαίτερα απαιτητική με το λογισμικό γιατί αρχικά υπήρχε η σκέψη να δοθεί έτοιμη ,μιας και ο στόχος είναι η διευκόλυνση των μαθητών στην αλγεβρική γενίκευση και όχι στην εκμάθηση ενός λογισμικού που πρέπει να λειτουργήσει ενισχυτικά.

Όμως στη συνέχεια δόθηκε η δυνατότητα οι μαθητές να φτιάξουν το μοντέλο στο λογισμικό η κατασκευή τους βοήθησε να φτάσουν στη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας την στρατηγική αποδόμησης του μοτίβου.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

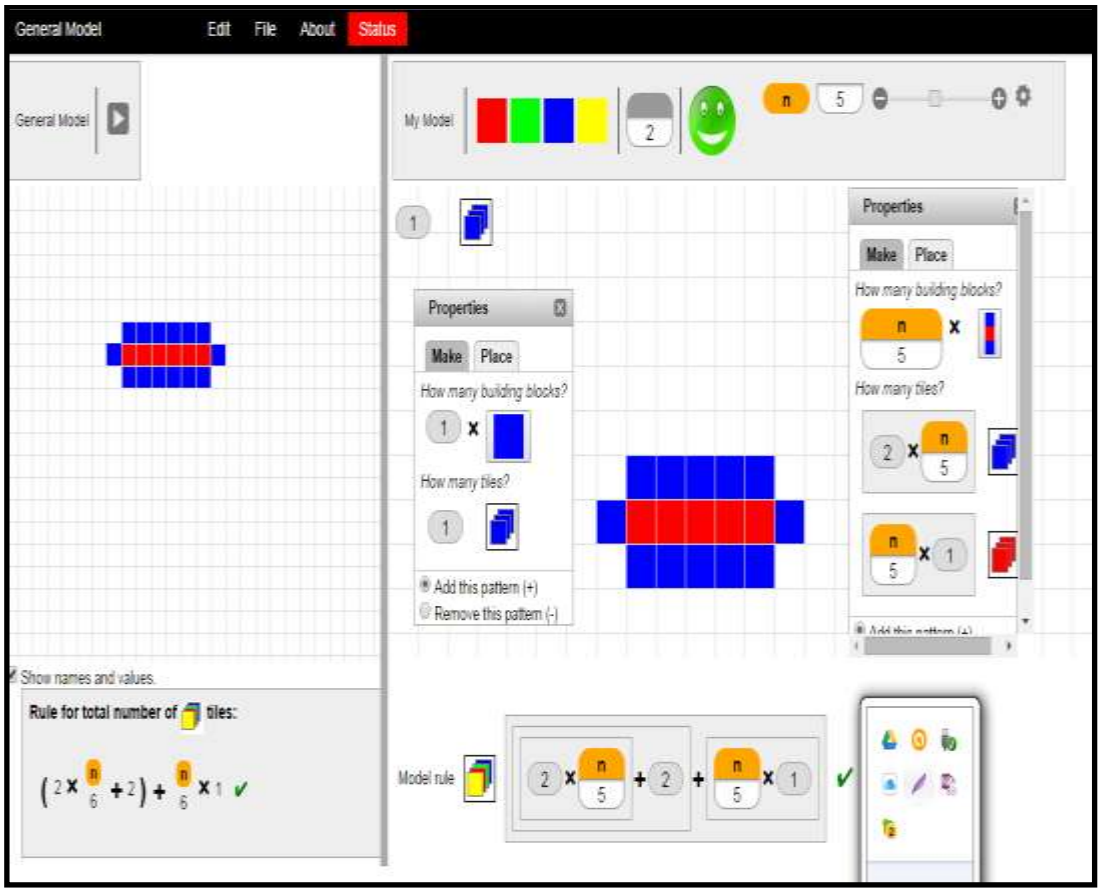
Τα κόκκινα τετράγωνα αντιπροσωπεύουν τα τραπέζια που διαθέτουμε για ένα γεύμα και τα μπλε τετράγωνα αντιπροσωπεύουν τους πελάτες που μπορούν να κάτσουν περιμετρικά την κάθε φορά.



Κόκκινα:	1	2	3
Μπλε :	4	6	8

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:

1. Πόσοι πελάτες θα καθίσουν στα 5 τραπέζια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
2. Πόσοι πελάτες θα καθίσουν στα 15 τραπέζια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας
3. .Πόσοι πελάτες θα καθίσουν στα ν τραπέζια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
4. Αν μια μέρα έχουμε 150 πελάτες πόσα τραπέζια θα χρειαστούμε; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

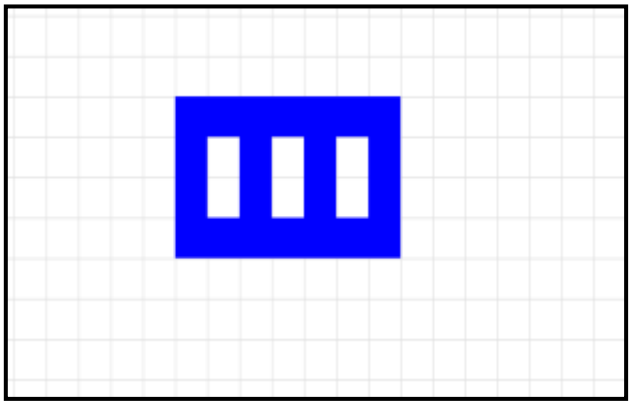


Εικόνα 8: Δραστηριότητα τραπέζια καλεσμένοι

4η Φάση –Σύνθετες εργασίες

6η Εργασία -Train-Track (Consolidation task)

Περιγραφή



Κατασκεύασε το μοντέλο "train-track".

Χρησιμοποίησε περισσότερα από ένα pattern για να φτιάξεις το μοντέλο .Χρησιμοποίησε διαφορετικά χρώματα για το κάθε pattern για να δείξεις πως κατασκεύασες το μοντέλο .Βρες έναν κανόνα για τον αριθμό των τετραγώνων για κάθε μοντέλο . Να μοιραστείς τον κανόνα σου και να τον αντιστοιχήσεις με το μοντέλο σου.

Συνεργατική άσκηση

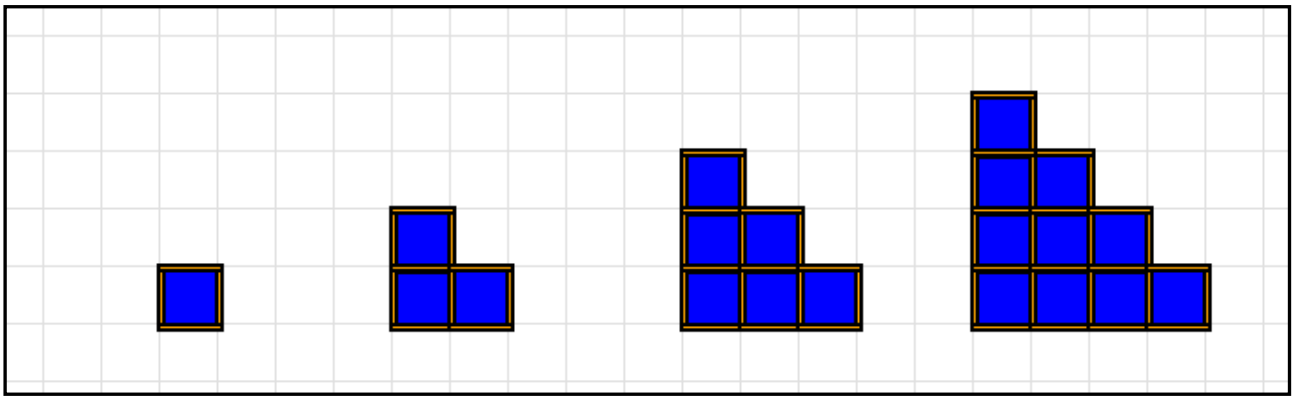
Προσπάθησε να πείσεις τον/την συμμαθητή /συμμαθήτριά σου ότι το μοντέλο κι ο κανόνας σου είναι σωστά.

Μπορείτε να εξηγήσετε ο ένας στον άλλο γιατί οι κανόνες σας φαίνονται διαφορετικοί , αλλά είναι ισοδύναμοι;

Συζητήστε και γράψτε τις εξηγήσεις σας.

5η Φάση Εργασία με χαρτί μολύβι

7η Εργασία –Τρίγωνοι αριθμοί



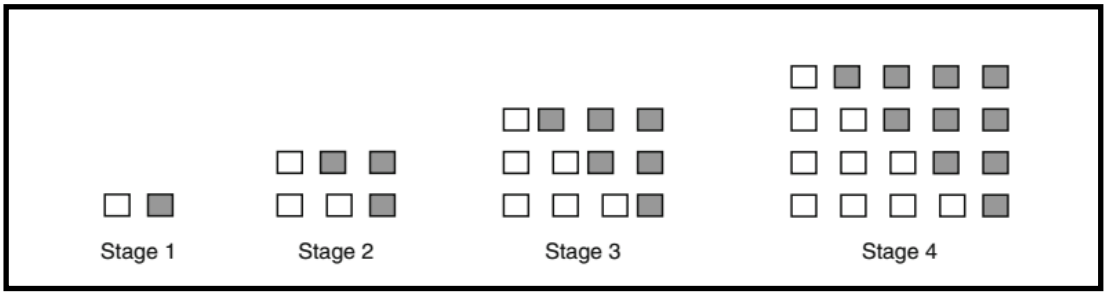
ΕΙΚΌΝΑ:	1	2	3	4
ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ:	1	3	6	10

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:

Πόσα τετράγωνα έχει η 5η εικόνα;

Πόσα τετράγωνα έχει η 100η εικόνα;

Πόσα τετράγωνα έχει η τυχαία ν εικόνα ;



5.6. Δεδομένα

Τα δεδομένα αποτελούνται από τις απαντήσεις σε 6 φύλλα εργασίας για τους 4 μαθητές με την χρήση του λογισμικού και 2 φύλλα εργασίας για την 7η προαιρετική εργασία της ομάδας των κοριτσιών που δούλεψαν χωρίς το λογισμικό.

Κατεγράφησαν οι συναντήσεις των ομάδων κατά την επεξεργασία των φύλλων αυτών στην οθόνη του υπολογιστή και ηχογραφήθηκαν οι συνομιλίες .

Τέλος στην τελευταία εργασία δόθηκε συνέντευξη από τις μαθήτριες (ομάδα Κ1Κ2) για το πως κατέληξαν στα συγκεκριμένα αποτελέσματα.

Αναλυτικά τα δεδομένα προέκυψαν από την ακόλουθη διαδικασία:

1.Εισαγωγική δραστηριότητα ομάδων Α1Α2-Κ1Κ2 καταγραφή οθόνης και ηχογράφηση.

2.Δραστηριότητα Crosstar καταγραφή οθόνης και ηχογράφηση.

3.Δραστηριότητα : L_letter καταγραφή οθόνης και ηχογράφηση.

4.Δραστηριότητα : Βοηθήστε τον Γιάννη καταγραφή οθόνης και ηχογράφηση.

5. Δραστηριότητα : Τραπέζια –Καλεσμένοι καταγραφή οθόνης και ηχογράφηση.

6. Δραστηριότητα : Train-track.

7.Συνέντευξη ομάδας Κ1Κ2-ηχογράφηση.

8.Δραστηριότητα : Τρίγωνοι αριθμοί.

9. Συζήτηση ομάδας Κ1Κ2-ηχογράφηση για την στρατηγική της εργασίας τρίγωνοι αριθμοί.

Οι ομάδες δούλευαν εναλλάξ πρώτα η ομάδα των αγοριών Α1Α2 και μετά των κοριτσιών Κ1Κ2 εκτός τάξης όταν τελείωνε το ημερήσιο πρόγραμμά τους.

5.7 Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Η αναζήτηση από την ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε στη θεωρία των κρίσιμων συμβάντων. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να δοθεί ένας ορισμός για το τι εννοούμε όταν λέμε **κρίσιμο συμβάν .**Με τον όρο «κρίσιμα συμβάντα» εννοούμε αποσπάσματα διαλόγων των μαθητών τα οποία αφορούν σε στρατηγικής σημασίας στιγμιότυπα από τους διαλόγους μεταξύ τους. Δηλαδή φάσεις καθοριστικής σημασίας για τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν τόσο για τη διατύπωση μιας εικασίας όσο και για την προσπάθεια αιτιολογίας της.

Σε τέτοιου τύπου συμβάντα συνήθως διακρίνουμε ένα σημαντικό εννοιολογικό άλμα που προκύπτει από μια προηγούμενη κατάσταση (Kiczek, 2000; Maher, 2002, Maher & Martino, 1996a; Maher, Pantozzi, Martino, Steencken, & Deming, 1996; Steencken, 2001).

Επιπλέον είναι δυνατό να συμβαίνει και το ακριβώς αντίθετο: δηλαδή ένα σημαντικό διαισθητικό λάθος το οποίο όμως είναι δυνατό να συνδράμει στο ερευνητικό μας πεδίο με επικυρωτικό ή ακόμη και ακυρωτικό τρόπο.

Ένα συμβάν καλείται κρίσιμο όταν δείχνει μια σημαντική αλλαγή ή μια αλλαγή που οδηγεί σε αντιπαραβολή σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση, ένα γνωστικό άλμα σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση προκαλεί ένα διαισθητικό λάθος, «ένα αξιοσημείωτο λάθος άλμα».

Ένα κρίσιμο συμβάν μπορεί να αποτελέσει μέρος ενός διδακτικού φαινομένου αν είναι ένα καθημερινό συμβάν στην πρακτική του εκπαιδευτικού που τον κάνει να αμφισβητεί τις διδακτικές του αποφάσεις και να σκεφτεί πώς να βελτιώσει την διδασκαλία του.

Το άλμα που θέλαμε να ερευνήσουμε είταν πως τα μοτίβα μπορούν να βοηθήσουν στο να περάσει η σκέψη του μαθητή από την αριθμητική στην άλγεβρα ερμηνεύοντας την διαδοχή των

εικονιστικών μοτίβων που παράγει το λογισμικό και επιπλέον να χρησιμοποιήσουν την άλγεβρα εργαλειακά για να υποστηρίξουν και να δικαιολογήσουν τις εικασίες γενίκευσης όπου απαιτούνται. Τα παραπάνω κρίσιμα συμβάντα αποτελούν και την θεματική μονάδα της ανάλυσης των δεδομένων. Μέσα από τους διαλόγους και τις εργασίες των μαθητών αναζητήθηκαν οι τρόποι που νοηματοδότησαν οι μαθητές αλγεβρικές έννοιες, πώς αυτές οι νοηματοδοτήσεις τους οδήγησαν σε αφαιρετικές γενικεύσεις καθώς και το πώς βοήθησε το περιβάλλον του λογισμικού να φτάσουν σε αυτές.

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

6.1 Εισαγωγή

Ξεκινώντας την ανάλυση των δεδομένων κρίνεται σκόπιμο να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις σε σχέση με το λογισμικό και ιδίως την διαδικτυακή του εκδοχή. Η μέχρι τώρα εφαρμογή του λογισμικού στην σταθερή εγκατάστασή του, περιέχει λειτουργίες που έχουν ενσωματώσει πιθανές δυσκολίες μαθητών και ξεμπλοκαρίσματός τους με τυποποιημένο τρόπο κάτι που το κάνει πιο λειτουργικό εντός τάξης, ενσωματώνοντας τον ρυθμό που μαθαίνει η κάθε ομάδα και αφήνοντας τον καθηγητή ελεύθερο σε ρόλο παρατηρητή η εμψυχωτή κατά την Artigue. Εδω το λογισμικό απαιτεί από τον καθηγητή πιο κατάλληλες εργασίες tasks, ώστε να αφήσει στους μαθητές την πρωτοβουλία να συνεργαστούν και να ανακαλύψουν μόνοι τους τι τους παρέχει το λογισμικό.

Η εξοικείωση που ήρθε μέσα από τις 2 πρώτες εργασίες, την εισαγωγική και την 2^{η}-(Crosstar) βοήθησε τους μαθητές αφενός να έρθουν γρήγορα σε επαφή με τις λειτουργίες του λογισμικού και αφετέρου να ασχοληθούν απερίσπαστοι με τα διάφορα προβλήματα που αφορούσαν τα ίδια τα φύλλα εργασίας. Στην παρουσίαση των κρίσιμων συμβάντων θα παρουσιάσουμε τους διαλόγους με την παρακάτω κωδικοποίηση. Ο καθηγητής θα παριστάνεται με Κ και η ομάδα των αγοριών Α1-Α2 ενώ των κοριτσιών Κ1-Κ2.

Ανάλυση κρίσιμων συμβάντων	
Συμβάντα νοηματοδότησης αλγεβρικών εννοιών **1ο Επίπεδο**	**Νοηματοδότηση αλγεβρικών εννοιών ως αφαιρετικής διαδικασίας** **2ο Επίπεδο**
Έννοια της μεταβλητής	Αναγνώριση δομικού στοιχείου (Recognition)
Αλγεβρικά ισοδύναμες εκφράσεις	Κατασκευή (Building with)
Συμμεταβολή μεγεθών	Αναγνώριση και παγιοποίηση γενίκευσης (Construction) (Consolitation)
Αναλυτικότητα	

Πίνακας 1-Κατηγορίες κρίσιμων συμβάντων

6.2 Κρίσιμα συμβάντα που νοηματοδοτούν αλγεβρική σκέψη ως αφαιρετική διαδικασία

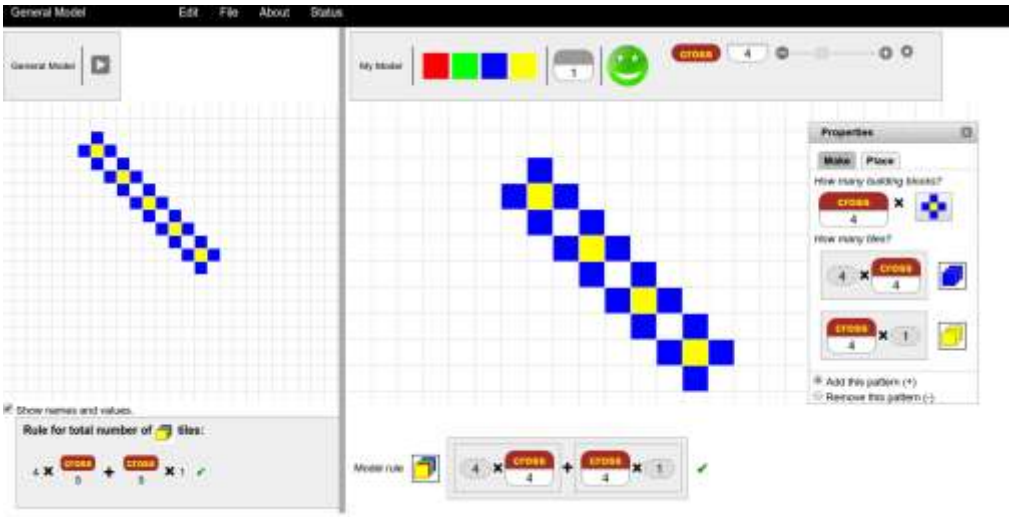
6.2.1Η έννοια της μεταβλητής

Κεντρικό σημείο στην αλγεβρική νοηματοδότηση παίζει μέσω του λογισμικού η έννοια της μεταβλητής αφού νοηματοδοτείται με τον ξεκλειδωμένο αριθμό (unlocked number) αρχικά.Στη συνέχεια η μεταβλητή αναγνωρίζεται σαν δομικό στοιχείο του μοτίβου, στην συνέχεια αντικειμενικοποιείται και χρησιμοποιείται στον κανόνα αναπαρωγής (general rule) του μοτίβου. Ο ξεκλειδωμένος αριθμός παίζει κυρίαρχο ρόλο αφού με αυτόν αναγνωρίζεται η επαναλητική δομή του μοτίβου η κανονικότητά του δηλαδή και μεταφέρεται το νόημα στις σχέσεις μεταξύ των όρων του μοτίβου ώστε να βρεθεί κάθε φορά ο σωστός αριθμός που συνδέει την μεταβλητή με τα χρωματισμένα τετράγωνα. Αποτελεί την αρχή και το τέλος δηλαδή κάθε δραστηριότητας. Πολλές φορές στις διάφορες εργασίες η επιλογή δεύτερης μεταβλητής ανεξαρτητης είταν λανθασμένη στρατηγική, αλλά από την ανάπτυξη του μοτίβου βρέθηκε η συμμεταβολή.

Στη χρησιμοποίηση του λογισμικού στην εργασία Crosstar οπτικοποιείται για πρώτη φορά έννοια της μεταβλητής με 2 τρόπους. Ο πρώτος αφορά τον γενικό κανόνα (general rule) και ο

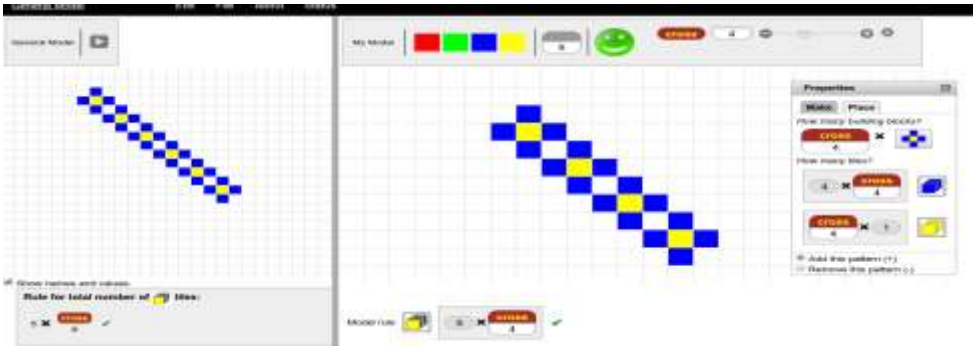
δεύτερος μέσω του my model. Ταυτόχρονα η μεταβλητή cross συσχετίζει πάντα 2 μεγέθη που κάθε φορά διαφέρουν. Συγκεκριμένα συσχετίζεται ο αριθμός cross με τα κίτρινα τετράγωνα ταυτοτικά αφού οι δύο αριθμοί παραμένουν ίσοι σύμφωνα με την ισότητα ***κίτρινα τετράγωνα =crossX1***. Ο αριθμός των μπλε τετραγώνων με την σχέση : ***μπλε τετράγωνα =crossx4*** και ο συνολικός αριθμός με την σχέση ***συνολικά τετράγωνα =cross x5.***

Οι μαθητές εύκολα φτάνουν στην γενίκευση 1 που περιγράφεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα3: Crossstar-Γενίκευση 1

Κατόπιν από τον πίνακα τιμών φτάνουν και στον δεύτερο κανόνα που προκύπτει από την ισοδυναμία 5χ=4χ+χ όταν παρατηρούν ότι μπορούν να γράψουν πιο σύντομα τον γενικό κανόνα αφού περιγράφουν το μοτίβο με την γενίκευση πλαισίου ότι πάντα το μοτίβο προσθέτει 5 –άδες τετραγώνων. Εδώ η ισοδύναμη αλγεβρική έκφραση που είναι σημαντικό στοιχείο αλγεβρικής σκέψης δεν προκύπτει αυτόματα αλλά έπειτα από κατάλληλη ερώτηση του εκπαιδευτικού αν θα μπορούσαμε να γράψουμε πιο σύντομα τον γενικό κανόνα. Η εικόνα βοηθάει στην εξαγωγή του γενικού κανόνα αφού μας ενδιαφέρει ο αριθμός των συνολικών τετραγώνων ανεξαρτήτου χρώματος καθώς και η πινακοποίηση των συνολικών τετραγώνων στον πίνακα τιμών που κάνουν οι μαθητές.



Εικόνα4 :Crosstar- Γενίκευση 2

Ενδιαφέρον παρουσιάζει σε αυτήν την δραστηριότητα η ερώτηση 15:

|*K: "Τι αντιπροσωπεύει κατά την γνώμη σας ο μεταβολέας στο πρόγραμμα και τι ο γενικός τύπος?"*

K1: Ο αριθμός αυτός δεν είναι σταθερός αλλά αλλάζει κάθε φορά.

K: Τι μας δείχνει κάθε φορά αφού αλλάζει;

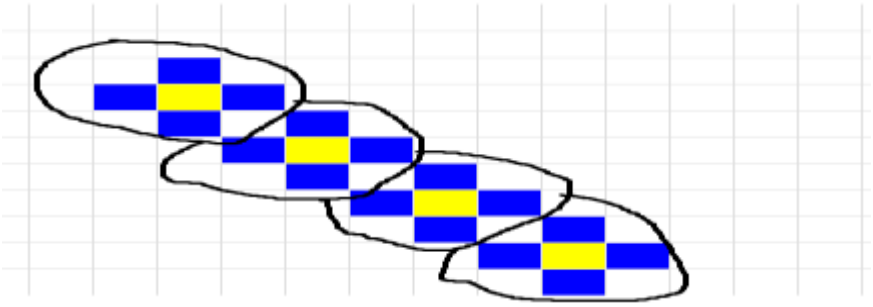
K2: Μας δείχνει τον αριθμό των σταυρών που θα έχουμε στο μοτίβο.

K1: Στο συγκεκριμένο σε κάποιο άλλο συνδέει το σταθερό μπλοκ που επαναλαμβάνεται και μας δείχνει τις επαναλήψεις του.

Η εργασία crosstar δίνει μια απάντηση στο πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές την σύνδεση ανάμεσα στην μεταβλητή και την ανάπτυξη του μοτίβου.

Στον μικρόκοσμο του eXpresser η μεταβλητή δεν εισάγεται θεωρητικά , αυτό εξάλλου είναι και το πλεονέκτημα του λογισμικού αλλά αποτελεί λειτουργικό στοιχείο στην ανάπτυξη ενός απλού μοτίβου στη συγκεκριμένη περίπτωση .

Το απλό μοτίβο εδώ μας βοηθά να εστιάσουμε σε αυτή ακριβώς την έννοια της μεταβλητής αφού τα δομικά στοιχεία του μοτίβου είναι ανεξάρτητα χωρικά και δεν έχουμε επικαλύψεις.



Εικόνα 5 :ομαδοποίηση των δομικών μονάδων

Οι μαθητές παρατηρούν εύκολα ότι το σχετικά απλό αυτό μοτίβο παράγει 3 διαφορετικές ακολουθίες:

1,2,3,…μ,…

4,8,12,…4μ,…

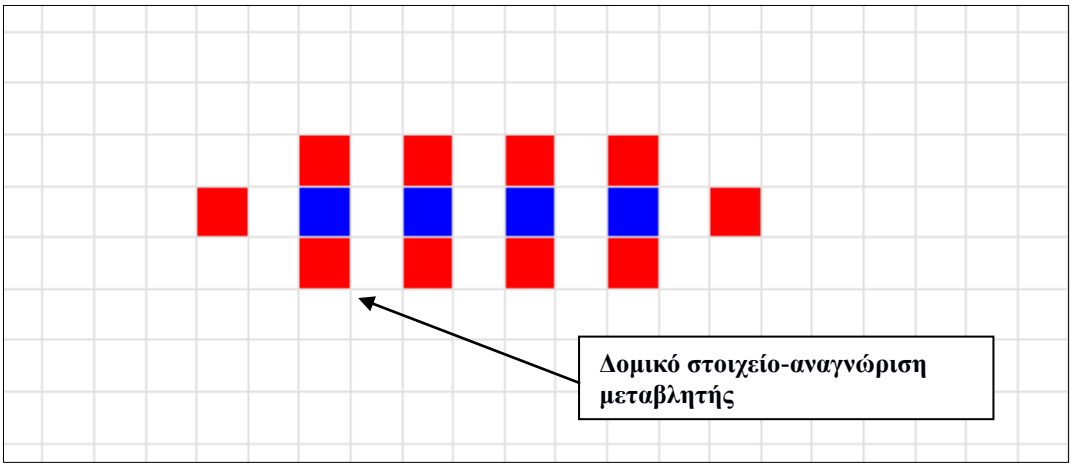
5,10,15,…5μ,… όπου μ είναι ο αριθμός του μοτίβου και ταυτόχρονα του ξεκλειδωμένου αριθμού(cross). Αυτό διαπιστώνεται με την ερώτηση ποιος είναι ο αριθμός μοτίβου που έχει συνολικά 501 τετράγωνα και ποιος αυτός με 1000. Στην ερώτηση αυτή εύκολα οι μαθητές απάντησαν ότι δεν έχει λύση η πρώτη ερώτηση γιατί το 501 δεν είναι πολλαπλάσιο του 5 αντίθετα στο $2^{ο}$ η απάντηση είναι 200 όσο και το αποτέλεσμα της διαίρεσης 1000:5.

Στην εργασία βοηθήστε τον Γιάννη η αρχική κατασκευή έχει δύο μεταβλητές ανεξάρτητες .Αυτή είναι η αιτία που το μοτίβο αναπτύσσεται λανθασμένα και οι μαθητές καλούνται να

«επισκευάσουν». Γρήγορα αντιλαμβάνονται ότι το κλειδί για την συμμετρική ανάπτυξή του μοτίβου είναι ενοποίηση των δύο μεταβλητών σε μία .

Αυτή ακριβώς η αντίληψη της συγχώνευσης μεταβλητών τους οδηγεί στο να φτιάξουν το γράμμα L στην εργασία L-letter.

Στο πρόβλημα τραπέζια καλεσμένοι η μεταβλητή ταυτίζεται με την αναγνώριση του επαναλαμβανόμενου στοιχείου στην διάταξη των καλεσμένων.



Εικόνα 9: Αναγνώριση μεταβλητής στην εργασία τραπέζια-καλεσμένοι

6.2.2 Αλγεβρικά ισοδύναμες εκφράσεις

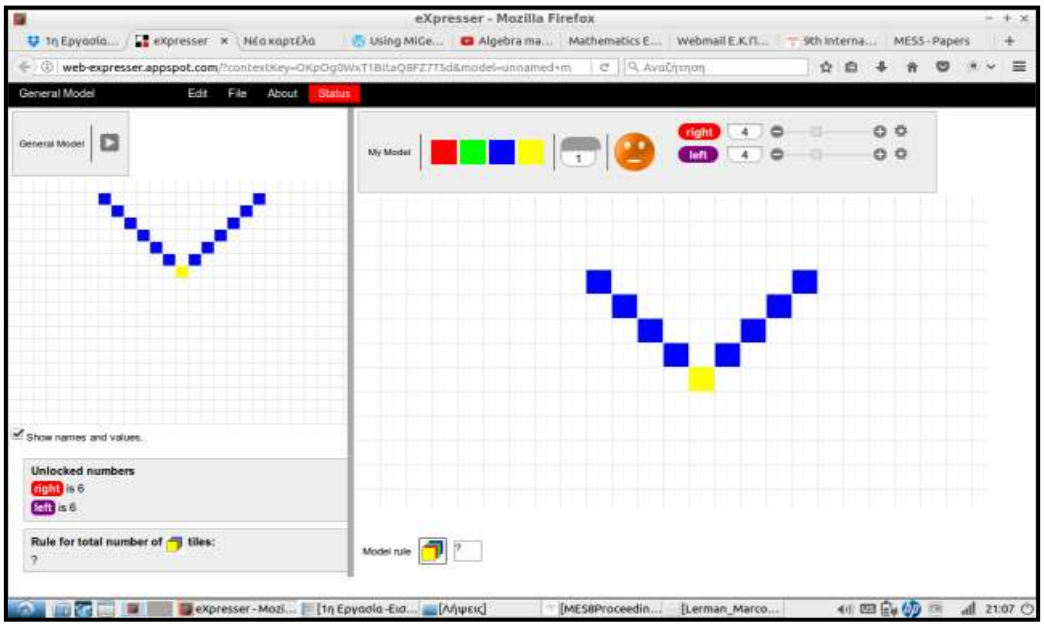
Το πρώτο κρίσιμο συμβάν που οι μαθητές εξάγουν συμπεράσματα για αλγεβρικά ισοδύναμες εκφράσεις είναι στην εργασία Crosstar που προχωρούν σε πινακοποίηση του μοτίβου συνδέοντας τον αριθμό των δομικών μονάδων με συνολικό αριθμό τετραγώνων διαφόρων χρωμάτων.

Η πινακοποίηση που αποτελεί μια επιπλέον αναπαράσταση της ακολουθίας του μοτίβου δεν προσθέτει τίποτα επιπλέον στην εξήγηση του μοτίβου από δομική σκοπιά , όμως βοηθάει στη συμβολική γενίκευση και έκφραση του κανόνα που αναπαράγεται. Στη συνέχεια οι μαθητές κατανοούν ότι το 5μ είναι ισοδύναμο με το 4μ+μ συνδέοντας το 5μ με τον συνολικό αριθμό τετραγώνων με το 4μ +μ που είναι το άθροισμα των μπλε και των κίτρινων τετραγώνων. Μπορεί να ακολουθεί την λεκτική διατύπωση ότι το μοτίβο πάντα συμπληρώνει πεντάδες τετραγώνων βοηθάει όμως στην επίλυση απλών προβλημάτων όπως στην συμπλήρωση του πίνακα όταν δίνεται το αντίστροφο ερώτημα ποιο μοτίβο έχει 50 τετράγωνα;

6.2.3 Η συμμεταβολή μεγεθών

Κατά την 4η εργασία «βοηθήστε τον Γιάννη» ,η ομάδα K1K2, έχουν ξεκινήσει και φτιάχνουν ένα αναπτυσσόμενο μοτίβο με δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς , right και left , που δεν

αναπτύσσεται ομοιόμορφα και πρέπει να το διορθώσουν. Σε αυτό τους βοηθάει ο γενικός κόσμος του προγράμματος .



Εικόνα 10: εργασία -Βοηθήστε τον Γιάννη

Στην εργασία αυτή σχεδιάστηκε ένα μοτίβο που λανθασμένα είχε προέλθει από δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς για να δείξουμε ότι δύο μεταβλητές **ανεξάρτητες** σημαίνει ότι δεν υπάρχει καμία δέσμευση των τιμών της μίας με την άλλη και πολλές φορές το πρόβλημα απαιτεί ακριβώς αυτό, την συμμεταβολή δύο μεταβλητών και μάλιστα όταν απαιτούμαι ταύτιση τότε μιλάμε για μία μεταβλητή μόνο, δηλαδή έναν ξεκλειδωμένο αριθμό που τον χρησιμοποιούμαι δύο φορές.

Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος των μαθητών που δείχνει πως φτάνουν να διαπιστώσουν την συμμεταβολή για να διορθώσουν το μοτίβο:

Κ: Πατήστε τον general world παιδιά. Τι παρατηρείται?

Κ2: Δεν αναπτύσσεται ομοιόμορφα

Κ: Πως το εξηγείται αυτό?

Κ1: Οι δύο κεραίες μπορεί να μεταβάλλονται αλλά το πόσο θα μεταβάλλεται η μία είναι ανεξάρτητο από την μεταβολή της άλλης

Κ: Ναι αλλά γιατί γίνεται αυτό;

Κ2: Μα γιατί δεν έχει καμία δέσμευση η μια με την άλλη μεταβλητή είναι ανεξάρτητες. Άρα η μεταβολή γίνεται με τυχαίο τρόπο και έτσι δεν μας λέει κανείς αν θα συμπίπτουν παρά μόνο τυχαία.

K: Μπορεί να διορθωθεί αυτό;

K1: Ναι αν γίνουν εξαρτημένες οι μεταβλητές η μία από την άλλη

K: Αυτό πως μπορεί να γίνει;

K2: Αν γίνουν οι ίδιες μεταβλητές δηλαδή στην ουσία όπως στο γράμμα L να έχουμε έναν ξεκλειδωμένο αριθμό.

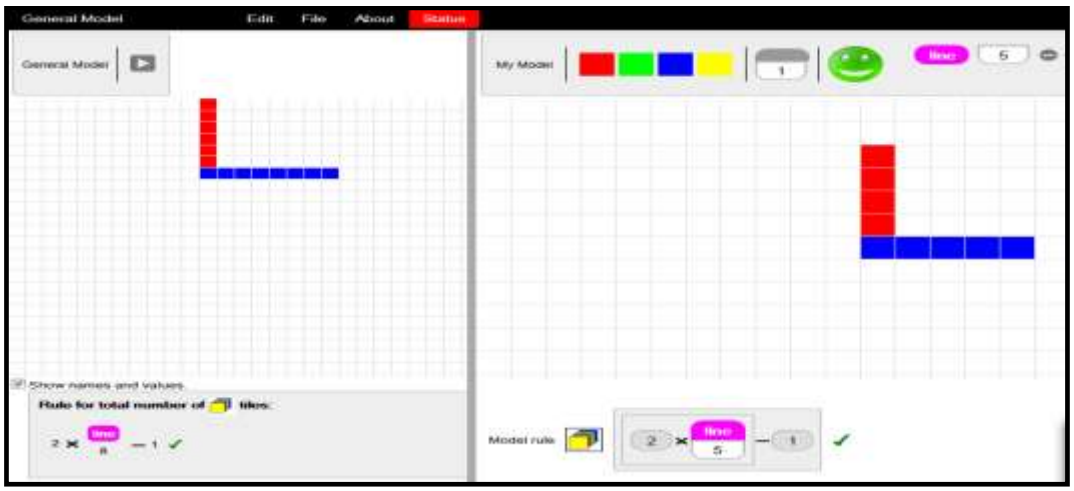
Εδώ ο γενικός κόσμος προβάλλει το μοτίβο σε τυχαία επανάληψη και αποτελεί εργαλείο επαλήθευσης αν το μοτίβο δουλεύει όπως περιμένουμε στην γενική του μορφή. Στη συνέχεια οι μαθητές παρατηρούν την εξάρτηση η αλλιώς την **συμμεταβολή** των ξεκλειδωμένων αριθμών και προχωρούν στη διόρθωση συγχωνεύοντας τις δύο μεταβλητές σε μία.

6.2.4 Κρίσιμα συμβάντα αναλυτικότητας (analyticity)

Στην εργασία **L-Letter** τα κρίσιμα συμβάντα ανήκαν σε μια επιπλέον κατηγορία,. Εδώ η ομάδα K1K2 έφτασε σε γενίκευση χρησιμοποιώντας αναλυτικό τρόπο σκέψης όσον αφορά τον χειρισμό του ξεκλειδωμένου αριθμού (μεταβλητής).

Η ομάδα των κοριτσιών παρατήρησε και αυτή ότι δομικά το μοτίβο βγαίνει με την γενίκευση line +line +1 ακριβώς όπως τα αγόρια επειδή όμως η έρευνα σχεδίασης έχει το στοιχείο της συμπλήρωσης από εργασία σε εργασία προστέθηκε στο τέλος η ερώτηση αν υπήρχε και άλλος τρόπος κατασκευής του μοτίβου.

Η ομάδα αυτή τη φορά βρήκε ακόμα μια διαφορετική στρατηγική βλέποντας ότι η αναπαραγωγή του μοτίβου μπορεί να γίνει θεωρώντας την οριζόντια γραμμή σαν μια μεταβλητή δηλαδή ξεκλειδωμένο αριθμό και το κάθετο σκέλος του γράμματος σαν τον ίδιο αριθμό ελαττωμένο κατά ένα . Εδώ επειδή υπήρχε πρόβλημα στην τιμή 1 που έβγαζε ερωτηματικό το λογισμικό γιατί το κάθετο έπαιρνε την τιμή 0, τα παιδία διόρθωσαν το εύρος της μεταβλητής να ξεκινάει από 2 και στον γενικό κόσμο έφτασαν στη γενίκευση line+(line -1) ή την ισοδύναμη έκφραση της (2xLine)-1.

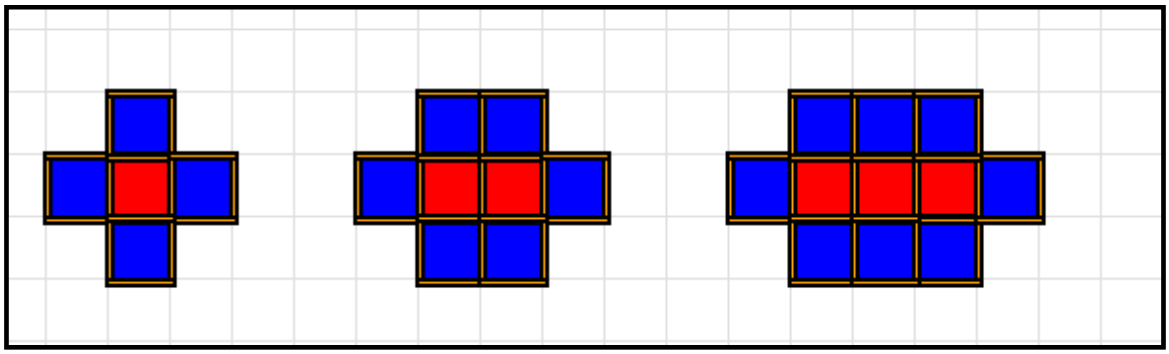


Εικόνα 11 :L-letter κανόνας 2xline-1

Είναι προφανής εδώ η νοηματοδότηση ότι μια μεταβλητή , εδώ ο ξεκλειδωμένος αριθμός ,μπορεί να ελέγχεται στο εύρος των τιμών της μέσα από ένα διαφορετικό σύνολο. Ακόμα μπορεί να συσχετίζει μεταβλητές και να παρατηρεί την συμμεταβολή τους όχι με ταυτοτικό τρόπο που γινόταν με την προηγούμενη γενίκευση αφού οι μεταβλητές δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

Ακόμα είναι στοιχείο αναλυτικότητας (analicity) κατά Radford του αλγεβρικού τρόπου σκέψης αφού χειρίζεται τον άγνωστο (μπλε γραμμή) σαν γνωστό αφαιρώντας του το 1 για να προκύψει η κόκκινη γραμμή.

Οι μαθητές στην εργασία **τραπέζια καλεσμένοι** ξέφυγαν λίγο από τα τετριμμένα tasks και ήρθαν αντιμέτωποι με την **διαδικασία επίλυσης προβλήματος**.Η χρησιμοποίηση του μικρόκοσμου σαν εργαλείο αλλά και η αντικειμενικοποίηση που εκφράστηκε με την ανάλυση, αναδιοργάνωση του συγκεκριμένου μοτίβου μας έδωσε πλούσιο υλικό σε αυτό που λέμε σημειωτικές αναπαραστάσεις που οδηγούν σε γενικεύσεις.



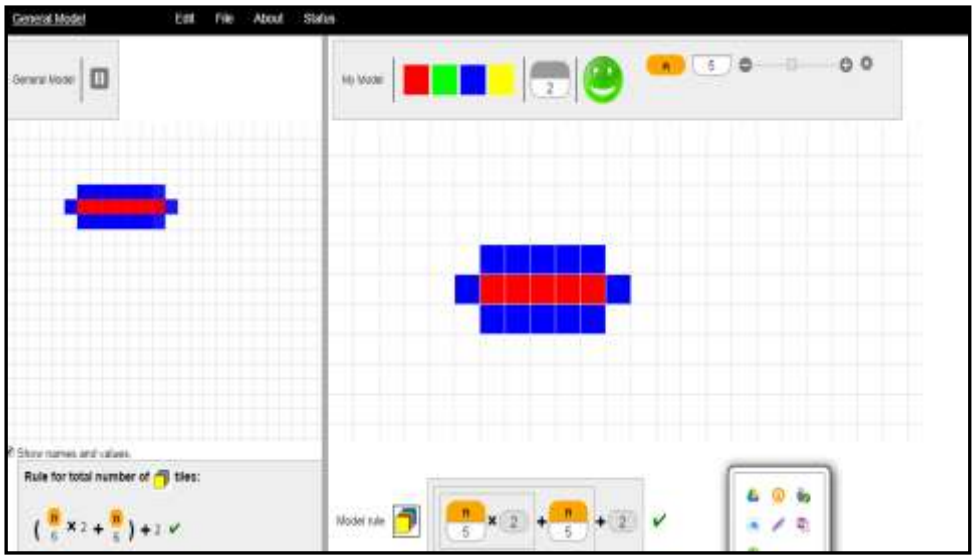
Ένα σημαντικό κρίσιμο σημείο που βοήθησε και στην κατασκευή του μοτίβου, που να σημειωθεί δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση, είναι η ανακάλυψη ότι στο μοτίβο μένουν σταθερά

τα άκρα αριστερά και δεξιά. Αυτό που ευρηματικά οι μαθητές το ονόμασαν «οι οικοδεσπότες» και κάθε φορά το μοτίβο προσθέτει ένα τραπέζι με δύο καλεσμένους πάνω και κάτω.

Οι μαθητές με αυτόν τον τρόπο πέρασαν αμέσως στην contextual γενίκευση λέγοντας κάθε φορά την φράση ότι στους δύο καλεσμένους προσθέτω άλλους δύο για κάθε τραπέζι. Το πόσες δυάδες θα προσθέσουμε εξαρτάται ακριβώς από τον αριθμό των τραπεζιών . Ο μικρόκοσμος βοήθησε στο να επαληθεύσουν την εικασία αυτή σε κοντινές γενικεύσεις για μικρό αριθμό τραπεζιών.

Όμως η αποδόμηση και ανακατασκευή του μοτίβου ήταν δομικά τόσο ισχυρή που σαν συλλογισμός βοήθησε στο να αντιμετωπίσουν γρήγορα οποιοδήποτε αριθμητικό ερώτημα. Αυτό επιβεβαίωσε την αντίληψή μας ότι η αλγεβρική σκέψη είναι αυτή που εξηγεί την δομή και τις συνδέσεις που την συγκροτούν και όχι η ίδια η συμβολική τους έκφραση.

Επιπλέον η παρατήρηση ότι μπορούμε να καλύψουμε πάντα άρτιο αριθμό καλεσμένων δεν βγήκε από την αριθμητική ακολουθία 4,6,8,10 ,..και κατά συνέπεια έναν επαγωγικό συλλογισμό αλλά βλέποντας ότι προσθέτουμε πάντα δυάδες άρα κατά συνέπεια μπορούμε να εξυπηρετήσουμε χωρίς να μείνει κενή θέση άρτιο πλήθος καλεσμένων.



Εικόνα 12 : Τραπέζια καλεσμένοι

Κ: Να ρωτήσω κάτι ακόμα παιδιά, πόσα τραπέζια μας χρειάζονται για 2017 καλεσμένους;

Α1: Θα αστειεύεστε με το τρόπο αυτό δεν μπορούμε να βολέψουμε περιττό αριθμό καλεσμένων αφού παράγεται διαδοχή από άρτιο πλήθος καλεσμένων 2 στα άκρα και προσθέτω 2αδες!

Κ: Συμφωνούμε και οι 2 σε αυτό;

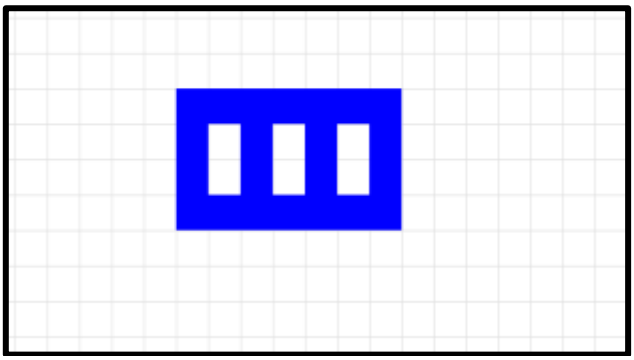
Α2: Συμφωνούμε γιατί 2017-2=2015 και 2015 :2 =1007,5 τραπέζια.

Α1: Θα μπορούσαμε όμως να βάλουμε 1008 τραπέζια και ας έμενε μια θέση κενή.

Α2: Άρα όλοι χωράνε άπλα σε ένα τραπέζι το τελευταίο ας πούμε θα είχαμε 1 καλεσμένο μόνο πάνω ή κάτω και η άλλη θέση κενή.

Κ: Εντάξει έπρεπε να πούμε να μην μείνει κενή θέση αλλιώς πολύ σωστά όλοι βολεύονται αλλά το μοτίβο δεν είναι πλήρως συμπληρωμένο και χαλάει στο τέλος.

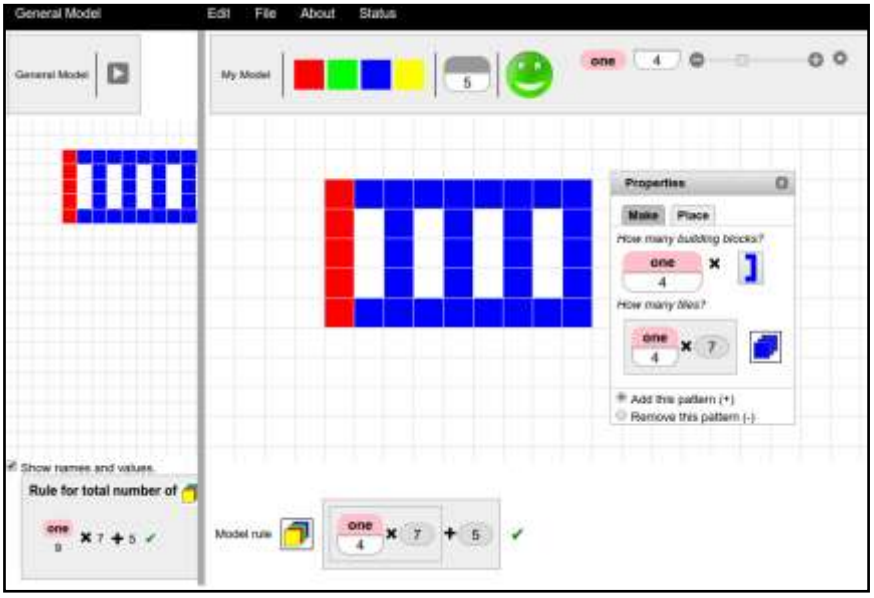
Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε το μοτίβο που έπρεπε να φτιαχτεί στην δραστηριότητα train-track και θα αναλύσουμε τις στρατηγικές που έφτασαν με επιτυχία αλλά και όχι στην τελική αναπαραγωγή και με συμβολικό τρόπο της παρακάτω κατασκευής



Εικόνα 13: Δραστηριότητα traintrack

Η εργασία είχε στόχο να διερευνηθεί με ένα φύλλο εργασίας κατά πόσο η ενασχόληση με τα μοτίβα είχε οδηγήσει σε μια παγιοποίηση (consolidation) της χρήσης του λογισμικού και της νοηματοδότησης της γενίκευσης μέσα από μια τελική εργασία που θα μπορούσε να λυθεί τόσο σε περιβάλλον ψηφιακό όσο και στο κλασσικό περιβάλλον του χαρτιού και μολυβιού. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η ομάδα Κ1Κ2 (μαθήτριες) έκαναν τρία είδη γενικεύσεων. Οι δύο στρατηγικές οδήγησαν σε επιτυχείς συμβολικές γενικεύσεις.

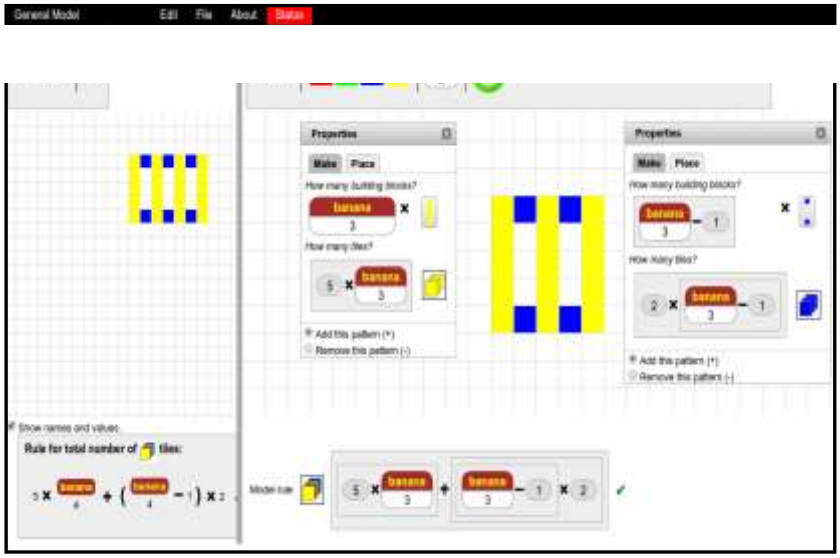
Η πρώτη γενίκευση είναι σωστή αφού περιγράφει το μοντέλο σωστά δηλαδή **7xOne+5** και επαληθεύτηκε από το λογισμικό.



Εικόνα 14: Train-track Στρατηγική 1-{7x One+5}

Στην δεύτερη στρατηγική που ακολούθησαν τα κορίτσια διάλεξαν πάλι έναν ξεκλειδωμένο αριθμό που τον ονόμασαν «μπανάνα» και είδαν το μοτίβο να δομείται από οριζόντιες στήλες που χρωμάτισαν κίτρινες και μία μεμονωμένη στήλη με 2 τετράγωνα μπλε πάνω και κάτω που σκοπό είχε να καλύψει τα κενά μεταξύ των κίτρινων στηλών. Έκαναν ταυτόχρονα μια πετυχημένη παρατήρηση, ότι για να κλείνει το μοτίβο πρέπει το pattern με τα μπλε τετράγωνα να είναι πάντα ένα λιγότερο από τα κίτρινα . Οδηγήθηκαν με αυτό τον τρόπο στο συμπέρασμα ότι η συμμεταβολή δεν είναι ταυτοτική αλλά συσχετίζεται με μια λιγότερη επανάληψη για τα μπλε τετράγωνα σε σχέση με τον αριθμό των μοτίβων.

Ενδιαφέρον σημείο προέκυψε πάλι από την οριακή τιμή 1 που δημιουργούσε πρόβλημα στο μοτίβο καθώς τα μπλε μοτίβα έπαιρναν την τιμή 0 που το λογισμικό έχει την αντίδραση του ερωτηματικού πάνω στα μπλε τετράγωνα. Επειδή είχε ξαναπαρουσιαστεί το ίδιο φαινόμενο η λύση που έδωσαν τα παιδιά ήταν στο εύρος του ξεκλειδωμένου αριθμού ώστε να ξεκινά πάντα από την τιμή 2. Η συμβολική έκφραση που οδήγησε η στρατηγική αυτή ήταν **5xbanana+(banana-1)x2.** Σημαντικό παραμένει το σημείο για το εύρος της μεταβλητής δηλαδή του ξεκλειδωμένου αριθμού που παρέχει το λογισμικό κάτι που συμπληρώνει την εικόνα που πρέπει να έχουν οι μαθητές για το σύνολο αναφοράς μιας μεταβλητή που ενώ στο σύνολο του το λογισμικό μπορεί να δώσει ένα οποιοδήποτε υποσύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς κατά ανάγκη να ξεκινάει από το ένα.



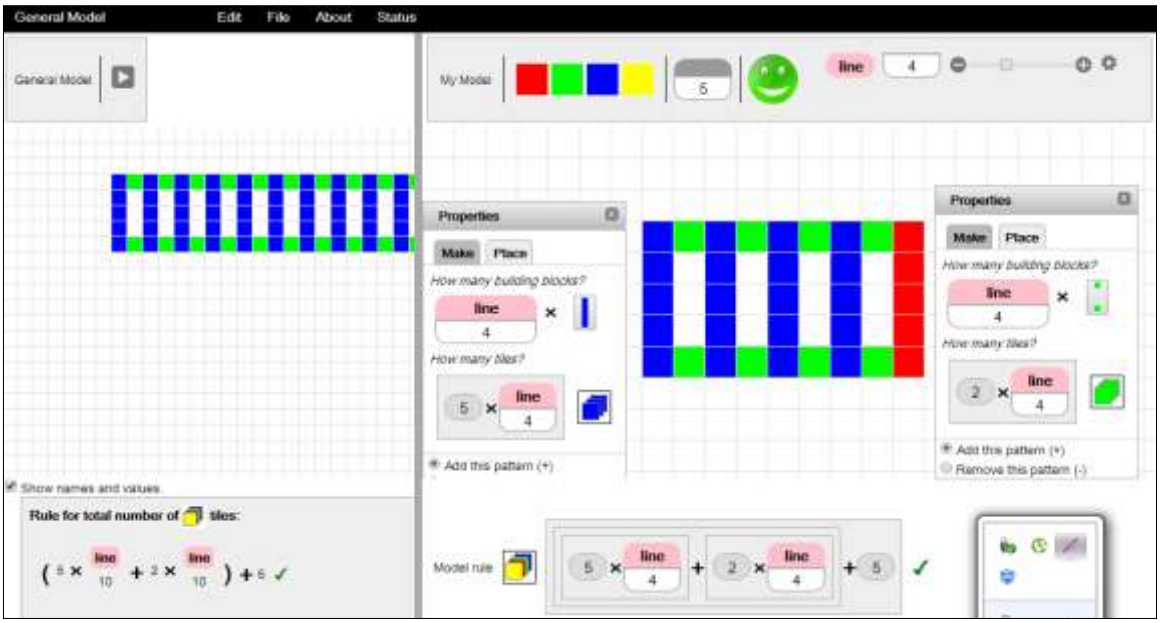
Εικόνα 15:στρατηγική 5xbanana+(banana-1)x2.

Στις στρατηγικές που ακολούθησε η ομάδα των αγοριών έχουμε να παρατηρήσουμε τα παρακάτω.

Η 1η στρατηγική ήταν ακριβώς η ίδια με την στρατηγική των κοριτσιών **7xone+5.**

Η 2η ήταν στρατηγική που έσπασαν το μοτίβο σε 3 κομμάτια. Μια στήλη που την παρουσιάζουμε χρωματισμένη μπλε. Μια δεύτερη στήλη με δύο τετράγωνα πράσινα πάνω και κάτω που συμμεταβάλονται με τον ίδιο ξεκλειδωμένο αριθμό της μπλε στήλης και ένα σταθερό μπλοκ 5 κόκκινων τετραγώνων που κλείνει την κατασκευή στο τέλος.

Η συμβολική έκφραση που κατέληξαν ήταν 5**x**line+2**x**line+5.



Εικόνα 16:Train track στρατηγική 5xline+2xline+5

Συνολικά είχαμε μία κοινή στρατηγική που οδήγησε σε επιτυχή λύση του μοντέλου από τις δύο ομάδες και δύο ακόμα επιτυχείς άρα συνολικά τρείς από 4 μαθητές! Είναι ένας ικανοποιητικός αριθμός που περισσότερο έχει να κάνει με το υψηλό επίπεδο των μαθητών και πόσο γρήγορα αφομοίωσαν τις διάφορες λειτουργίες του λογισμικού και τις ενσωμάτωσαν στις νοητικές τους δεξιότητες.

6.2.5 Αναγνώριση δομικού στοιχείου μοτίβου

Το πρώτο κρίσιμο συμβάν που εντοπίζεται η διαδικασία της αντικειμενικοποίησης ως αφαιρετικής διαδικασίας συνέβη κατά την διάρκεια της εργασίας Crosstar.

Οι μαθητές αρχικά έχουν ένα πρόβλημα με την χωρική ανάπτυξή του μοτίβου αφού πρέπει να το αναπαράγουν διαγώνια.

Η χωροταξική διάταξη του μοτίβου γίνεται με ειδική καρτέλα που εμφανίζει το λογισμικό μετά την εντολή make a pattern. Πιο συγκεκριμένα έχουμε δεξιά θετικό πρόσημο και αριστερά αρνητικό ενώ για το κάτω το έχουμε θετικό πρόσημο ενώ πάνω αρνητικό. Στην αρχή αυτό μπερδεύει τα παιδιά λίγο όπως αυτό φαίνεται στον παρακάτω διάλογο :

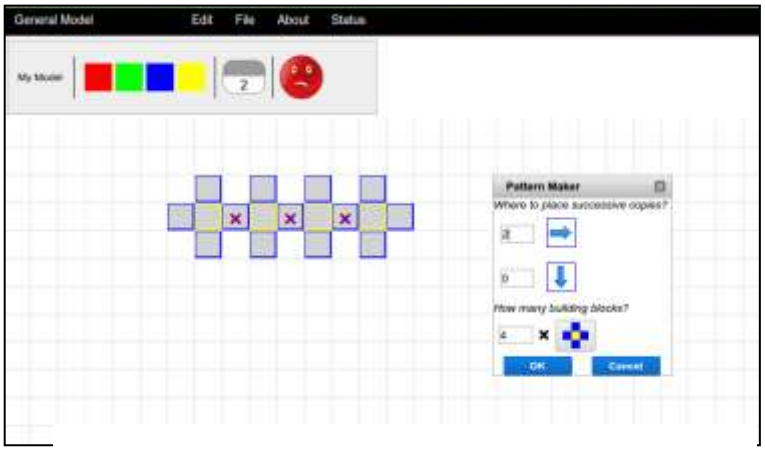
K1: Νομίζω ότι δεν πρέπει να αναπτύσσεται τόσο μακριά με 3 τετράγωνα ούτε με 2 γιατί επικαλύπτεται .

K2: Μάλλον 1 τετράγωνο

K1: Πάλι επικαλύπτεται

K2: Μάλλον 2 και 1 κάτω για να ακουμπάει το ένα στα αριστερά με το προηγούμενό του

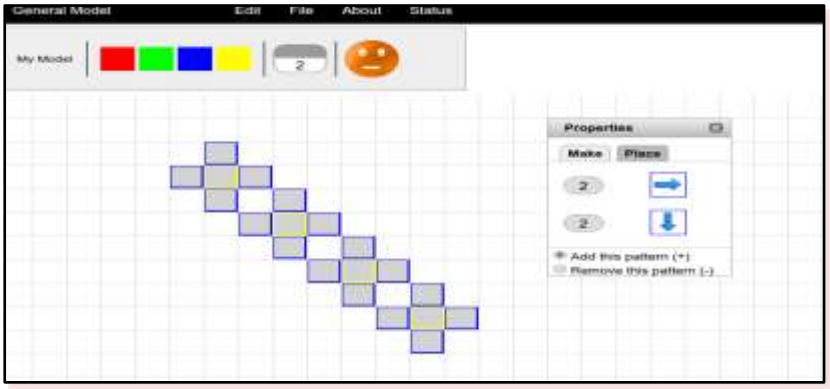
K1: Και 2 κάτω



Εικόνα 17: mess-up

Η παραπάνω εικόνα μας δίνει την αρχική κατασκευή όπου το δομικό στοιχείο λανθασμένα επικαλύπτει το ένα το άλλο (**mess-up**).

Όμως οι μαθήτριες γρήγορα προσδιορίζουν την θέση του δομικού στοιχείου και ξεπερνάνε το πρόβλημα όπως δείχνει η παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 18: επιτυχής χωρική ανάπτυξη Crosstar

Θεωρούμε κρίσιμο σημείο την επιτυχή χωρική ανάπτυξη του μοτίβου αφού αυτό είναι το πρώτο στάδιο για την επιτυχή ολοκλήρωση της γενίκευσης. Αν δεν ξεπεράσει την διαδικασία της επικάλυψης (mess-up) δεν μπορεί με επιτυχία να διακρίνει πως χρωματίζονται τα τετράγωνα στο δομικό στοιχείο και έτσι η γενίκευση στην αναπαραγωγή του γενικού όρου είναι αδύνατη από την οπτική αναπαράσταση του μοτίβου. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής δεν έχει διακρίνει με επιτυχία την δομή του μοτίβου και κατά συνέπεια δεν μπορεί να προχωρήσει σε αλγεβρική νοηματοδότηση.

Αναγνώριση δομικού στοιχείου μέσω αποδόμησης του μοτίβου είχαμε στην εργασία **τραπέζια καλεσμένοι** .

Η αναγνώριση αυτή ως αφαιρετική διαδικασία οδήγησε σε επιτυχή γενίκευση και αναπαραγωγή του μοτίβου. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος της ομάδας :

Κ: Πριν το φτιάξετε για παρατηρείστε τι μένει σταθερό στο

Μοτίβο

Α1: Έχω τη γνώμη ότι μένουν σταθερά τα άκρα

Α2: Άρα ένα μοτίβο!

Α1: Μάλλον πρέπει να το κάνουμε πάλι από την αρχή

Α2: Λοιπόν έχουμε ένα δομικό στοιχείο ένα τραπέζι κάθε φορά και από έναν καλεσμένο πάνω και κάτω.

A1: Αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε φορά που θα προσθέτουμε τραπέζι

K: Ας δούμε τώρα πως χρωματίζονται τα τετράγωνα

A1: Το 1ο επί ένα (Κόκκινο =τραπέζι)

A2: Το 2ο επί δύο (Μπλε δυάδα πάνω και κάτω)

K: Ο γενικός τύπος ποιός είναι; A1: TablesX1+TablesX2

A2: Μια στιγμή για να δουλέψει θέλει και 2 τους σταθερούς στην άκρη

Η **contextual** γενίκευση έχει επιτύχει να οδηγήσει αυτόματα στη συμβολική και να ολοκληρώσει την συμπλήρωση με το σταθερό στοιχείο του μοτίβου.

6.2.6 Αναγνώριση ομοιότητας και παγιοποίηση της γενίκευσης - (consolidation)

Οι μαθητές στην κατασκευή του μοτίβου της εργασίας **L-Letter** ,παρατηρούν ότι το γράμμα L μπορεί να κατασκευαστεί από δύο μοτίβα. Στην παρατήρηση αυτή οδηγούνται γιατί οπτικοποιούν το τι μένει ίδιο και τί σταθερό.

Η ανεπιτυχής οπτικοποίηση για τα δύο μοτίβα περιέχει όμως και μια επιτυχημένη οπτικοποίηση της σταθερότητας του βασικού κομματιού του γράμματος που δεν θα το συμπεριλάβουν σε κανένα μοτίβο.

Ο γενικός κόσμος τους βοηθάει αφού βλέπουν το γενικό που παράγεται από το μοτίβο των δύο ξεκλειδωμένων αριθμών που δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητοι αλλά συμμεταβάλλονται. Μάλιστα το ίδιο το λογισμικό τους παρέχει την δυνατότητα να ταυτοποιούν τις δύο μεταβλητές line1 και line2 μία (line) με απλό σύρσιμο.

Η συμβολική γενίκευση είναι σχεδόν προφανής από την λειτουργικότητα των properties του λογισμικού και οδηγούνται πολύ εύκολα στον τύπο line1+line1+1 αλλιώς χ+χ+1 και στην ισοδύναμη έκφραση 2χ+1.

Η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος στο τέλος παγιώνει (**consolidation**) την αλγεβρική γενίκευση της δομικής σχέσης του μοτίβου χωρίς να λύνει εξίσωση ο μαθητής, εξάλλου δεν την ξέρει, χρησιμοποιώντας την κατασκευή του μοτίβου .

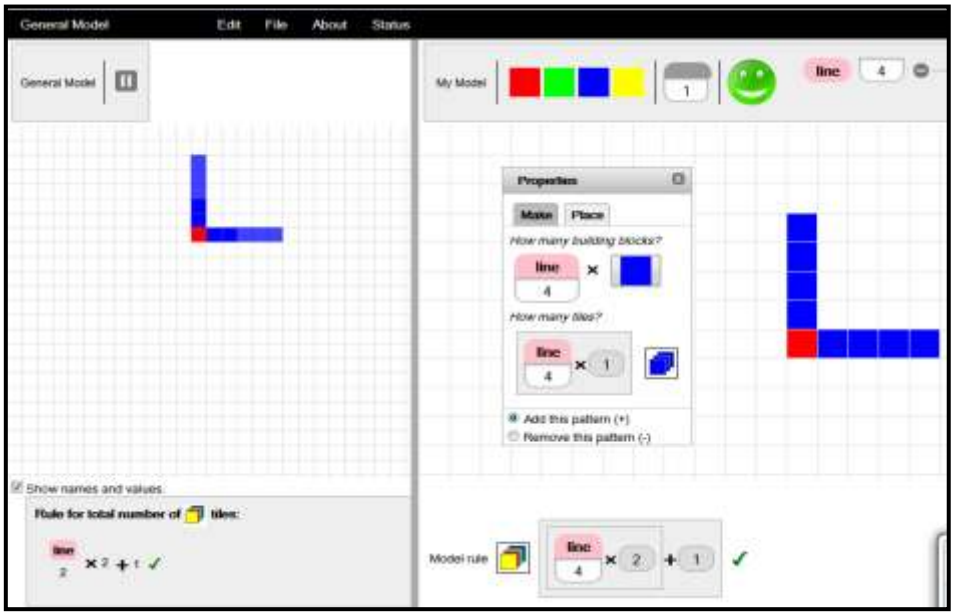
Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος:

K : Αν είχαμε όπως λέει στο φύλλο εργασίας γράμμα L με σύνολο 2017 τετράγωνα ποια θα ήταν η σειρά του γράμματος;

A1 Εύκολο 2017-1 =2016 και 2016:2=1003 άρα 1003 θα ήταν η σειρά του!

:

Κ:	*Το 1 γιατί το αφαίρεσες;*
Α2 :	Το 1 είναι το σταθερό που δεν το μετράμε πουθενά. Όσα για τα υπόλοιπα είναι 2 φορές επί τον αριθμό line1 το χ δηλαδή ,να γιατί και διαιρούμε με το 2!

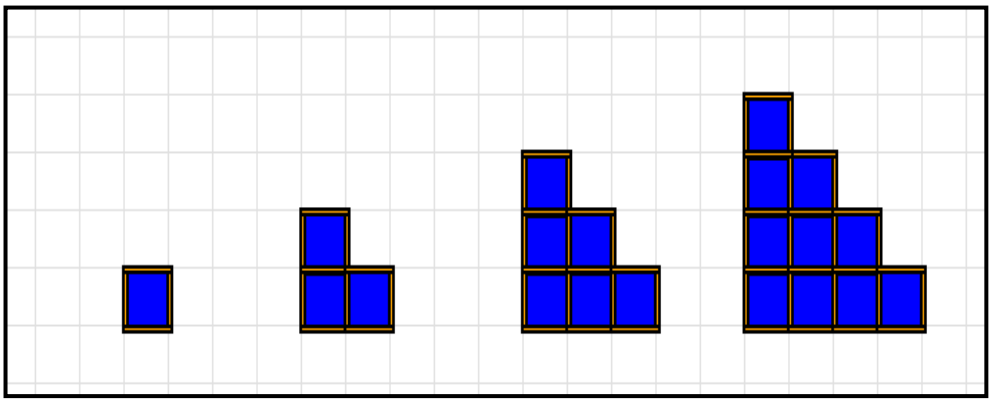


Εικόνα 19 : αποτέλεσμα εργασίας Line

Συγκεντρωτικός Πίνακας της αλγεβρικής νοηματοδότησης ως αφαιρετικής διαδικασίας.

Recognizing	***Building up***	***Constructing***	***Consolitation***
Βοηθήστε τον Γιάννη-αναγνώριση δομικού στοιχείου	***Κατασκευή της συμμεταβολής των κεραιών σαν συστατικό στοιχείο της ανάπτυξης του μοτίβου***	***Ανάπτυξη του μοτίβου και διαπίστωση ότι αναπτύσσεται συμμετρικά πλέον***	
Αναγνώριση2 μεταβλητών για το γράμμα L	***Κατασκευή με 2 διαφορετικούς τρόπους ανάπτυξης***	***Ανάπτυξη του γράμματος***	***Κατασκευή του γράμματος με παραμετροποίηση της μεταβλητής***
Αναγνώριση δομικού στοιχείου στην εργασία τραπέζια καλεσμένοι	***Κατασκευή με 2 κομμάτια που συγκροτούν το μοτίβο το τραπέζι με 2 καλεσμένους και τους 2 οικοδεσπότες***	***Ανάπτυξη του μοντέλου χωρίς επικάλυψη.***	***Ερμηνεία και επίλυση του προβλήματος με μοντελοποίηση στον eXpresser***
Αναγνώριση δομικής μονάδας train track	***Επιλογή πολλαπλών κατασκευών με διαφορετικούς τρόπους αποδόμησης του μοτίβου***	***Κατασκευή και ανάπτυξη του μοτίβου με ισοδύναμους τρόπους***	***Εύρεση γενικού τύπου για κάθε ισοδύναμη κατασκευή παγιοποιώντας την σωστή ανάπτυξη του μοτίβου αλλά και την συμβολική αναπαράστασή του***
Αναγνώριση ομοιότητας αναπαραγωγής του μοτίβου (τρίγωνοι αριθμοί).	***Κατασκευή του μοτίβου από τον αναδρομικό τύπο και κατασκευή του από την ερμηνεία διπλασιασμού του.***	***Εξήγηση της δομής με την εικονική ερμηνεία διπλασιασμού του.***	***Γενίκευση του νιοστού τρίγωνου αριθμού είτε με γενικό είτε με αναδρομικό τύπο της ακολουθίας.***

6.2.7 Τοπική αφαιρετική διαδικασία



Στην εργασία **τρίγωνοι αριθμοί** που ήταν προαιρετική, θέλαμε να εξετάσουμε αν η αφαιρετική διαδικασία ήταν τοπική (situated abstraction) εντός του περιβάλλοντος του λογισμικού και αν μπορούσε να ξεφύγει εκτός του πλαισίου αυτού και οι μαθητές να διατηρήσουν τις ικανότητες γενίκευσης. Η εργασία αυτή οδηγεί σε τετραγωνικό μοτίβο και η γενίκευση που έφτασαν οι μαθήτριες ήταν δύο ειδών. Η μία μαθήτρια μπόρεσε να φτάσει μόνο σε contextual γενίκευση αποδίδοντας λεκτικά τον αναδρομικό τύπο κάνοντας όμως μια αφελή γενίκευση στον προσδιορισμό ενός μακρινού τρίγωνου αριθμού. Πιο συγκεκριμένα οι απαντήσεις που έδωσε στις παρακάτω ερωτήσεις είναι :

Ερώτηση 1η: Πόσα τετράγωνα έχει η 5^{η} εικόνα (5^{ος} τρίγωνος αριθμός);

Απάντηση Κ2 : Η 5η εικόνα θα έχει 15 τετράγωνα γιατί κάθε φορά μεγαλώνουν ανά 2,3,4,5 τετράγωνα όσο και η σειρά που προστίθεται στο προηγούμενο άθροισμα.

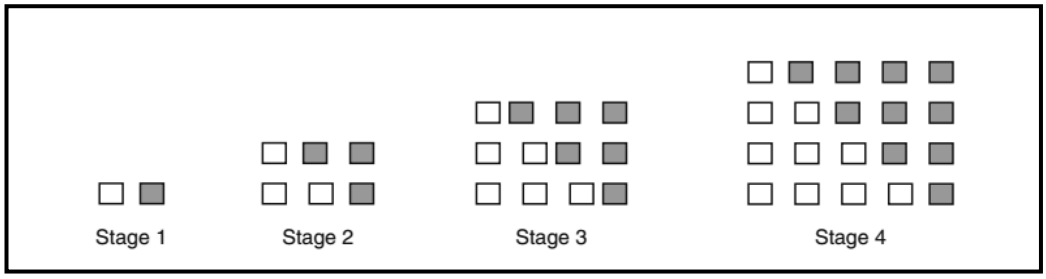
Ερώτηση 2η: Πόσα τετράγωνα θα έχει η 100η εικόνα ;

Απάντηση: Η 100^{η} εικόνα θα χει 115 όσα η 100^{η} σειρά συν 15 που είχε η προηγούμενη (εννοεί την 5η !)

Ερώτηση 3η : Πόσα τετράγωνα έχει η εικόνα ν;

Απάντηση :Θα έχει ν συν τον αριθμό του προηγούμενου μοτίβου (σωστά!),δηλαδή ν συν 115 τετράγωνα! (λανθασμένη απάντηση)

Στους μαθητές είχε δοθεί στο τέλος ένα σχέδιο με διπλασιασμένο το μοτίβο το οποίο δεν ήταν τίποτε άλλο από οπτικοποιημένη την απόδειξη του μοτίβου των τριγώνων αριθμών.



Η δεύτερη μαθήτρια παρατήρησε την εικόνα αυτή και έφτασε στην γενίκευση απατώντας πρώτα στο τελευταίο ερώτημα και μετά έκανε εφαρμογή του τύπου αναδρομικά στα πρώτα 2 ερωτήματα . Πιο συγκεκριμένα :

Ερώτηση 3η : Πόσα τετράγωνα έχει η εικόνα ν;

Απάντηση Κ2: Με τη βοήθεια των παραπάνω σχημάτων καταλαβαίνουμε πως για να βρούμε το σχήμα που θέλουμε, το οποίο είναι σαν τρίγωνο αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τη βάση επί το ύψος για να βρούμε πόσα τετραγωνάκια έχει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (που είναι διπλάσιο από το τρίγωνο) και το αποτέλεσμα το διαιρούμε με το 2.

Η συγκεκριμένη μαθήτρια δίνει την απάντηση

Μαθήτρια Κ2 : Αν ν=αριθμός εικόνας τότε τα συνολικά τετράγωνα είναι ν(ν+1)/2!!!

6.2.8 Ανάλυση στρατηγικής των μαθητών και παρατηρήσεις

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας αξιολογώντας τα φύλλα εργασίας ως προς την κατηγορία της **στρατηγικής** που ακολούθησαν οι μαθητές.:

. Διακρίναμε τρείς στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές **Σ1,Σ2, Σ3** τις οποίες τις ερμηνεύουμε ως εξής:

Στρατηγική Σ1

Σε αυτή τη στρατηγική η τεκμηρίωση της συμβολικής γενίκευσης προκύπτει από τις τιμές που επαληθεύουν συγκεκριμένα παραδείγματα και αντίστροφα τα συγκεκριμένα παραδείγματα χρησιμεύουν για να παράγουν και να δικαιολογούν το γενικό μοτίβο με τη μέθοδο trial and error.

Στρατηγική Σ2

Σε αυτή τη στρατηγική προκύπτει ο γενικός τύπος δομικά από τα παραδείγματα παράγοντας μια ισχυρή εικασία που περιγράφεται με ρητή σχέση (προφορική μορφή) και έχει να κάνει με το πως αναπαράγονται οι όροι του μοτίβου από τους προηγούμενους. Η στρατηγική αυτή είναι ανώτερου επιπέδου από την πρώτη που στην ουσία ελέγχει με δοκιμή σωστού λάθους αν δουλεύει η συμβολική έκφραση.

Στρατηγική Σ3

Στην στρατηγική αυτή οι μαθητές φτάνουν στη γενίκευση χρησιμοποιώντας αναλύοντας την εικόνα του μοτίβου με γεωμετρικό τρόπο. Αναλύουν τα δομικά του μέρη και το ειδικό μέρος μεταφέρει στο γενικό την δομή χρησιμοποιώντας τα διάφορα τμήματα του μοτίβου. Παραδείγματος χάριν στο πρόβλημα του L-Letter έφτασαν στη δομή (L+L)+1, εδώ η παρένθεση δεν χρειάζεται αλλά δείχνει την αντιμετώπιση του μοτίβου από τους μαθητές σαν δύο ισοδύναμα κομμάτια και ένα τετράγωνο σταθερό.

Παρατηρήσεις:

Ως προς το είδος της γενίκευσης φαίνεται ότι οι μαθητές σε όλες τις εργασίες κατέκτησαν και τις τρείς. Αυτό εξηγείται κυρίως λόγω του ότι το λογισμικό βοηθάει με τις λειτουργίες του να έρθουν οι μαθητές και να παρατηρήσουν το γενικό μέσα στο ειδικό μέσω των δύο κόσμων που περιέχει tmy model και το general model.

Πιο συγκεκριμένα η ενέργεια μέσω του ξεκλειδωμένου αριθμού στο my model βοηθάει να χρησιμοποιούν σαν αντικείμενο άμεσα την μεταβλητή οι μαθητές και να ορίζουν με βάση αυτή τον αριθμό του μοτίβου ως στοιχείο καταμέτρησης της επανάληψης του δομικού στοιχείου του . Μέσω του general model έρχεται άμεσα η εικόνα του μοτίβου στην τυχαία επανάληψη και αυτό βοηθά και να διατυπώνουν ρητά τον κανόνα αλλά και να επιβεβαιώνουν τον κανόνα παρεμβαίνοντας άμεσα στον τοπικό κόσμο αλλάζοντας χειροκίνητα τον ξεκλειδωμένο αριθμό.

Έτσι έχουν την ικανότητα μέσω του λογισμικού να βλέπουν το ειδικό και το γενικό ταυτόχρονα. Στο τελικό στάδιο της συμβολικής γενίκευσης η φόρμουλα έρχεται σχεδόν αβίαστα από την καρτέλα show properties αλλά και ισοδύναμες εκφράσεις συντομεύσεις που φτιάχνουν οι μαθητές αλλάζοντας την φόρμουλα αυτή, αυτό απαιτήθηκε σχεδόν καθολικά στις διάφορες εργασίες.

Στη συμβολική γενίκευση χαρακτηριστικό είναι ότι δεν κατέληξαν όλοι οι μαθητές στην εργασία τρίγωνοι αριθμοί που είχε σχεδιαστεί μόνο με μολύβι χαρτί.

Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αυτές οι εργασίες που είναι σχεδόν αναγκαστικές για πιο σύνθετα μοτίβα μη γραμμικά δεν επιτυγχάνουν τον στόχο τους να καταλήξουν όλοι οι μαθητές στο συμβολικό επίπεδο της γενίκευσης και να γίνει με αυτόν τον τρόπο η παγιοποίηση (consolidation) της νέας γνώσης. Ακόμα βγαίνει αβίαστα το συμπέρασμα ότι ο μικρόκοσμος του eXpresser είναι ιδανικός για γραμμικά μοτίβα και γραμμικές συναρτήσεις σαν εισαγωγικό πλαίσιο βασικών αλγεβρικών εννοιών στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου καθώς εισάγονται με τον πιο ομαλό τρόπο σε εργασίες που περισσότερο μοιάζουν με παιγνίδι αλλά και πιο απαιτητικές σαν και αυτές που εισάγονται με τη μορφή προβλήματος, όπως στο πρόβλημα τραπέζια καλεσμένοι.

6.3 Προσφορά του λογισμικού

Τα προβλήματα που λύνονται με την κατάλληλη αξιοποίηση του λογισμικού περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα :

Προβλήματα	**Επίλυση μέσω του eXpresser**
1.Οι μαθητές πολλές φορές μένουν στην αριθμητική αιτιολόγηση του μοτίβου και αδυνατούν να ερμηνεύσουν την δομή του σε	Δραστηριότητες επέκτασης που προσφέρονται για πιο μακρινές γενικεύσεις και αξιοποιούν τον general world του λογισμικού.

εργασίες με χαρτί και μολύβι.	
2.Οι μαθητές αδυνατούν να δουν πίσω από το ειδικό και χρειάζονται την ενίσχυση του δασκάλου για να υποστηρίξει με κατάλληλες ενέργειες να καταφέρουν να εστιάσουν στο γενικό μέρος του μοτίβου την επανάληψη της δομής δηλαδή.	Η ταυτόχρονη οπτικοποίηση του general world και του my world δίνει την δυνατότητα να εξετάσουν το γενικό μέσα στο ειδικό αλλά και το ειδικό μέσα στο γενικό. Οι μαθητές διακρίνουν το μοτίβο δομικά και την αναπαραγωγή του είτε μηχανικά χωρίς την παρέμβασή τους είτε επιλεγμένα επεμβαίνοντας άμεσα στον αριθμό των επαναλήψεων πειραματιζόμενοι με αυτόν.
3.Η μη προηγούμενη εμπειρία με την μαθηματική γλώσσα τους αποτρέπει από το να φτάσουν στην συμβολική γενίκευση και να εκφράσουν την γενικότητα αυστηρά.	Η λειτουργία show properties νοηματοδοτεί την αλγεβρική έκφραση δείχνοντας άμεσα τη μεταβλητή καθώς μεταβάλλεται και έτσι μπορούν να την ονομάσουν όπως θέλουν δείχνοντας πρακτικά ότι το όνομα δεν κάνει την πραγματική διαφορά αλλά η ικανότητα αλλαγής (μεταβολής) με βάση τον ξεκλειδωμένο αριθμό.
4.Οι δυσκολίες των μαθητών να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων τους εμποδίζει στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης.	Οι τρείς ενσωματωμένοι λειτουργικοί κόσμοι του eXpresser εκφράζουν τις τρείς αναπαραστάσεις που έχουν άμεση πρόσβαση οι μαθητές: τον my world ως ειδικό μέρος ενός μοτίβου για κοντινή γενίκευση, τον general world που είναι η προβολή του μοτίβου για πιο μακρινές γενικεύσεις και αναπαράγεται αυτόματα και ο my rule που είναι η καρδιά της αλγεβρικής έκφρασης που αναπαριστά την δομή ενός μοτίβου σαν γενικευμένος κανόνας.

Μειονεκτήματα

Ένα σοβαρό μειονέκτημα που παρατηρείται στην χρησιμοποίηση του λογισμικού είναι ότι τον επαγωγικό συλλογισμό για τον αν λειτουργεί σωστά η γενίκευση που επιτυγχάνουν οι μαθητές στον γενικό κόσμο και άρα η επιβεβαίωση του κανόνα παρέχεται από το ίδιο το λογισμικό στερώντας ένα βασικό κομμάτι της ερμηνείας του μοτίβου που είναι το γιατί αναπαράγεται σωστά

με την συγκεκριμένη γενίκευση. Η ερμηνεία του σημείου αποκοπής δηλαδή που αναφέρει η έρευνα (Rivera)

Αυτό ως ένα βαθμό ερμηνεύεται από το ότι η λειτουργία του λογισμικού απαιτεί την συμβολική γενίκευση ως αφετηρία της εργασίας , σε αντίθεση με την εργασία με μοτίβα σε μολύβι χαρτί που είναι το τέλος της. Αυτή η παρατήρηση δεν μειώνει καθόλου την λειτουργία του λογισμικού για την εισαγωγή σε βασικές αλγεβρικές έννοιες με στόχο την μετάβαση από την πρώιμη άλγεβρα και την αριθμητική στην άλγεβρα.

Η πλούσια αλγεβρική νοηματοδότηση ως αφαιρετική διαδικασία μέσα στο περιβάλλον του eXpresser είναι δυνατόν να αποτελέσει την ιδανική γέφυρα για την μεταφορά από την αριθμητική στην άλγεβρα με κατάλληλες επιλεγμένες δραστηριότητες που θα βοηθούν να τεκμηριώνει ο μαθητής παράλληλα με το λογισμικό το κάθε βήμα από την αναγνώρισή ενός μοτίβου μέχρι το πέρασμα στην συμβολική γενίκευση του γενικού του όρου .

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1. Απάντηση στο 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που μας ενδιέφερε να απαντήσουμε είναι με ποιους τρόπους οι μαθητές νοηματοδοτούν αλγεβρικές έννοιες κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες κατασκευής και ερμηνείας μοτίβων ως αφαιρετική διαδικασία σε ένα ψηφιακό περιβάλλον.

Όπως προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων οι μαθητές αναγνώρισαν τα δομικά στοιχεία των μοτίβων σαν στοιχείο ομοιότητας κάθε φορά στο συγκεκριμένο μοτίβο σε όλες τις εργασίες στο ψηφιακό κόσμο του μικρόκοσμου. Αυτό εξάλλου είναι και το πρωταρχικό βήμα ώστε να προχωρήσουν στην χρησιμοποίησή του ως αντικείμενο για την εξήγηση της αναπαραγωγής του τόσο σε κοντινό επίπεδο δηλαδή δύο τρείς πέντε επαναλήψεις όσο και σε μακρινό όταν υπήρχε ερώτηση για την τυχαία επανάληψη.

Στη συνέχεια πέρασαν με την έννοια του ξεκλειδωμένου αριθμού ,πολλές φορές παραπάνω από έναν λανθασμένα αφού η συμμεταβολή δεν ήταν άμεσα αναγνωρίσιμη, στο να κατασκευάσουν το ίδιο το μοτίβο από έναν γενικό κανόνα. Κυριάρχησε εδώ η ανακάλυψη του αναδρομικού τύπου και η μεταφορά του στον γενικό κόσμο όπου από το γενικό παρατήρησαν το ειδικό που είναι ο τρόπος που αναπτύσσεται το μοτίβο.

Οι μαθητές αναγνώρισαν πιο εύκολα την συμμεταβολή των ξεκλειδωμένων αριθμών συσχετίζοντας εξαρτημένες μεταβλητές άλλες φορές ταυτοτικά και άλλες φορές δίνοντας τους τιμές από διαφορετικά σύνολα (περίπτωση L- letter). Η συμμεταβολή αυτή έδωσε ευελιξία στην στρατηγική που ακολούθησαν , αφού πολλές φορές η ανάπτυξη του ίδιου μοτίβου δομήθηκε με

πολλούς διαφορετικούς τρόπους από τις ομάδες των μαθητών όπως στην περίπτωση train-track όπου από τέσσερις μαθητές βρέθηκαν τρείς διαφορετικοί τρόποι ανάπτυξης του μοτίβου.

Η κατασκευή κάθε φορά του μοτίβου δεν βρέθηκε με δοκιμές σωστού λάθους αλλά η αριθμητική καταμέτρηση για λίγους όρους των μοτίβων συνδέθηκε με τον ξεκλειδωμένο αριθμό την μεταβλητή δηλαδή, ώστε οι μαθητές να φτάνουν εύκολα στην συμβολική γενίκευση κάτι που είναι η αντίστροφη πορεία από τις εργασίες σε μολύβι χαρτί όπου η αριθμητική καταμέτρηση δεν οδηγεί σε γενικεύσεις όπως δείχνουν οι έρευνες μέχρι στιγμής.

Αυτό εγγράφεται σε κέρδος του λογισμικού όπου το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα γίνεται άμεσα συσχετίζοντας τον αριθμό των χρωματισμένων τετραγώνων με την μεταβλητή που δείχνει τον όρο του μοτίβου.

Τέλος οι μαθητές στην ενασχόλησή τους με μοτίβα στο περιβάλλον του eXpresser χρησιμοποιούν τις διαδικασίες κατασκευής των μοτίβων μεταγνωστικά για την κατασκευή πιο σύνθετων μοτίβων , επίλυση προβλημάτων όπου μπορούν να περάσουν σε μη γραμμικά μοτίβα και παγιοποιήσουν στρατηγικές που έχουν προηγούμενα ανακαλύψει. Εδώ τους είναι πιο εύκολα να αποδομήσουν ένα μοτίβο στα συστατικά του και να το μελετήσουν και πιο δύσκολα να βρουν προσθετικούς τρόπους όπου το μοτίβο είναι κομμάτι ενός μεγαλύτερου όπως οι τρίγωνοι αριθμοί.

Γενικά επιβεβαιώνεται ότι το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα δίνει επιπλέον δυνατότητες για εννοιολογική μετάβαση όταν γίνεται με εργασίες μέσω μοτίβων, συνδυαστικά με μολύβι χαρτί και ψηφιακό περιβάλλον ώστε η παγιοποίηση της νέας γνώσης να μην εξαρτάται από το περιβάλλον αν είναι ψηφιακό ή όχι. Σε αυτό βοηθάει οι εργασίες να είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε να μπορούν να λειτουργήσουν και προς τις δύο κατευθύνσεις όπως η δραστηριότητα train-track, η προβλήματα όπως τα τραπέζια καλεσμένοι και προβλήματα κάλυψης επιφανειών που υπάρχουν σε βιβλία του Δημοτικού. Παρατηρήθηκε ότι εδώ υπάρχει και η μεγάλη ανάγκη γεφύρωσης των αναλυτικών προγραμμάτων και των διδακτικών βιβλίων όπου η υστέρηση στην ενασχόληση με τα μοτίβα είναι τεράστια από την μεριά των γυμνασίων αφού στο δημοτικό έχουν ενταχθεί συστηματικά.

7.2 Απάντηση στο 2^{ο} ερευνητικό ερώτημα

Στο δεύτερο ερώτημα είταν να διερευνήσουμε τον ρόλο των διαθέσιμων ψηφιακών εργαλείων του eXpresser στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών.Μια πρώτη αποτίμηση από τις εργασίες που ήταν βασισμένες στο λογισμικό eXpresser και σχεδιάστηκαν ώστε να μελετήσουν την νοηματοδότηση αλγεβρικών εννοιών δείχνει ότι το λογισμικό μπορεί να εμπλουτίσει εργασίες με τα παρακάτω θέματα:

1.Αντικατάσταση τιμών σε εκφράσεις με άμεση οπτικοποίηση της διαδικασίας αυτής.

2.Αναγνώριση μεταβλητών.

3.Έκφραση σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών με αλγεβρικό τρόπο.

4.Χρησιμοποίηση και νοηματοδότηση εκφράσεων , εξισώσεων, όρων ,παραγόντων κλπ.

5.Μοντελοποίηση προβληματικών καταστάσεων με μετάφρασή τους σε αλγεβρικές εκφράσεις με συμβολικό τρόπο.

6.Απλοποίηση και χειρισμός αλγεβρικών παραστάσεων και μετατροπή τους σε ισοδύναμες.

7.Αναπαραγωγή όρων ακολουθιών.

Οι εργασίες αυτές δημιουργούν ένα πλαίσιο που το λογισμικό μπορεί να λειτουργήσει σαν εργαλείο για την εισαγωγή στην άλγεβρα, μιας και οι λειτουργίες του παρέχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις των «δύσκολων» αλγεβρικών εννοιών, σε συνδυασμό με το δυναμικό χειρισμό που αισθητοποιεί την κίνηση από το ειδικό στο γενικό και αντίστροφα.

Η συστηματική ενασχόληση με τα μοτίβα δημιουργεί τους όρους ώστε οι μαθητές να μπουν σε πιο βαθιά θέματα της άλγεβρας να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολής μεγεθών, να μάθουν την έννοια της ακολουθίας με πρακτικό τρόπο σαν μια απλή μορφή συνάρτησης . Ακόμη η επαφή με τα εικονιστικά μοτίβα τους δίνει την δυνατότητα να αναπτύξουν την μαθηματική σκέψη να διατυπώνουν εικασίες να φτάνουν σε γενικεύσεις που μπορούν να τις επαληθεύσουν με επαγωγικό αλλά και παραγωγικό τρόπο .

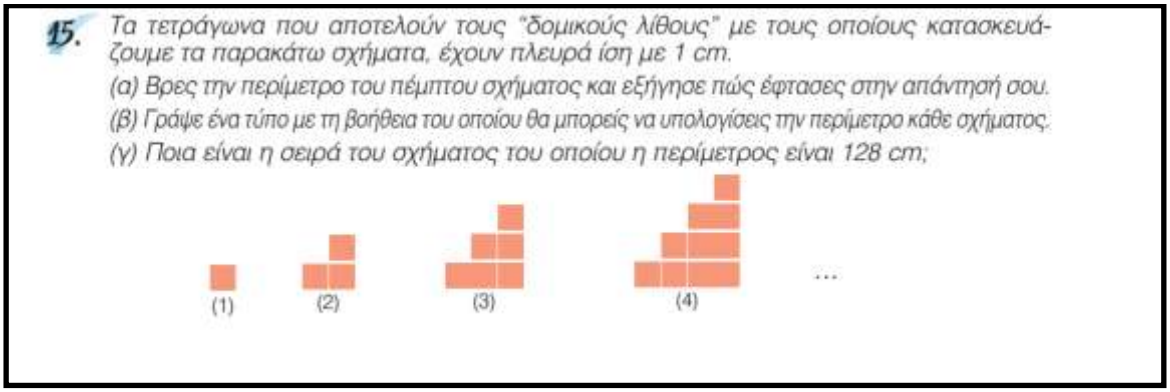
Η δυσκολία βέβαια να διατηρήσουν αυτές τις μαθηματικές δεξιότητες όταν φεύγουν από τον ψηφιακό μικρόκοσμο και έρθουν σε πιο σύνθετα προβλήματα παραμένει και δικαιολογεί τα συμπεράσματα των ερευνών για τον τοπικό χαρακτήρα της αφαίρεσης που επιτυγχάνουν (situated abstraction), πράγμα όμως που δεν μειώνει καθόλου την χρησιμότητά του για την εισαγωγή στις αλγεβρικές έννοιες.

Μια πρόταση για την χρήσιμη εισαγωγή τους στην μαθησιακή διδασκαλία μέσα στα αναλυτικά προγράμματα όπως έχει δείξει η αντίστοιχη εμπειρία στο αντίστοιχο Αγγλικό Αναλυτικό Πρόγραμμα, θα ήταν η προσφορά τους στο εργαστήριο των υπολογιστών κάτω από την ετικέτα εργαστήριο μαθηματικής σκέψης, όπου οι μαθητές του γυμνασίου για τουλάχιστον μια ώρα κάθε βδομάδα θα μπορούσαν να έρθουν σε επαφή με το λογισμικό αυτό με κατάλληλες διαμορφωμένες εργασίες.

Χαρακτηριστικός είναι ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια της μεταβλητής στο κεφάλαιο των εξισώσεων στην Α΄ γυμνασίου:

Στην ισότητα $2\cdot 6=12$ το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιβεβαιώσουμε ότι είναι σωστή. Η ισότητα όμως $2\cdot x=12$ δεν είναι η ίδια. Αυτό το x που περιέχει "κρύβει" έναν αριθμό που αν τον βάλουμε στη θέση του, "επαληθεύει" αυτή την ισότητα. Αν βάλουμε οποιαδήποτε άλλη τιμή στη θέση του x, η ισότητα $2\cdot x=12$ δεν ισχύει. Γι' αυτό τη σχέση δεν τη λέμε ισότητα, αλλά **εξίσωση**. Και ο x είναι ο **άγνωστος** αυτής της σχέσης. Όταν εμφανίζεται αυτός ο περίφημος **άγνωστος** x, ακολουθεί κι ένα **πρόβλημα**. Τώρα, η σχέση η δική μας με τέτοιον είδους "σχέσεις" δεν θα είναι καθόλου προβληματικές αν προσέξουμε καλά όσα ακολουθούν.

Ακολούθως για να συμπληρώσουμε πόσο φτωχή είναι η παρουσίαση αυτή δίνουμε και το μοναδικό μοτίβο που υπάρχει στο βιβλίο στην ίδια σελίδα:


15. Τα τετράγωνα που αποτελούν τους "δομικούς λίθους" με τους οποίους κατασκευάζουμε τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με 1 cm.
(α) Βρες την περίμετρο του πέμπτου σχήματος και εξήγησε πώς έφτασες στην απάντησή σου.
(β) Γράψε ένα τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος.
(γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι 128 cm;

Εικόνα 20: άσκηση από το βιβλίο της Ά Γυμνασίου

Εδώ μια κραυγαλέα παρατήρηση εκτός του ότι δεν υπάρχει η αναζήτηση του μοτίβου που δίνει τον αριθμό των τετραγώνων που είναι οι τρίγωνοι αριθμοί και σαφώς είναι ένα δύσκολο μοτίβο που θα μπορούσε να είναι ένα ανοικτό πρόβλημα διαπραγμάτευσης από όλη την τάξη, το πρόβλημα της περιμέτρου οδηγεί με αριθμητικό τρόπο μόνο στην ακολουθία 4,8,12,14 και στη συμβολική γενίκευση 4ν η οποία παράγεται με επαγωγικό συλλογισμό.

Η ενασχόληση με τα μοτίβα δεν είναι συστηματική και ο στόχος εδώ του συγγραφέα δεν ήταν η αλγεβρική σκέψη γενικά αλλά μόνο ο συμβολικός τρόπος της μεταβλητής που παράγει την παραπάνω ακολουθία περιμέτρων και αυτό μέσα στα πλαίσια ενός μαθήματος για το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Τέτοιες ασκήσεις παρόλο που είναι λίγες , στην συγκεκριμένη περίπτωση η μοναδική , οδηγούν μόνο σε στρατηγικές δοκιμής σωστού λάθους όπως αναφέρθηκε στην έρευνα με τον κωδικό στρατηγική Σ1.

Στα σχολικά μαθηματικά κυρίαρχη είναι η άλγεβρα, αλλά δεν αντιλαμβάνεται κανείς την άλγεβρα με σχεσιακούς όρους, παρά θεωρώντας την ως γενικευμένη αριθμητική. Η σχολική άλγεβρα δεν έχει πραγματικές μεταβλητές και τα σχολικά μαθηματικά αναγνωρίζουν την έννοια με την επαλήθευση και δεν ενδιαφέρονται για γενίκευση.

Υπήρξαν επίσης λιγότερες αντί-διδακτικές προσεγγίσεις στην αλγεβρική σκέψη. Ο Davydov για παράδειγμα, είχε πάντα τονίσει την έγκαιρη και σωστή μετάβαση των παιδιών στην ικανότητα

να προσανατολίζονται στις σχέσεις των ποσοτήτων και των ίδιων των καταστάσεων ... ως μια βασική προϋπόθεση της [κατανόησής τους] για τη μαθηματική σκέψη και επομένως πρότεινε να ξεκινάει η μαθηματική διδασκαλία της άλγεβρας με την εισαγωγή αυτών των σχέσεων (Otte, 2011, σελ. 316). Σχέσεις που είναι κυρίαρχες στην διδασκαλία μέσω μοτίβων.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14, 24–35.
2. Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. Proceedings of PME 29, 2, 129–136.
3. Celia Hoyles • Jean-Baptiste Lagrange : Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain
4. Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational Researcher, v.32, 9-13
5. Chua @ Hoyles (2014) Generalization of Linear Figural Patterns in Secondary School Mathematics
6. Chua, B. L., & Hoyles, C. (2014). Modalities of rules and generalizing strategies of year 8 students for aquadratic pattern. Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 2, 305–312.
7. diSessa, A.: 1995, ‘The many faces of a computational medium: Teaching the mathematics of motion’, in A. diSessa, C. Hoyles, & R. Noss (Eds.), Computers for Exploratory Learning, Springer-Verlag, Berlin
8. Dreyfus, T.: 1990, ‘Advanced mathematical thinking’, Nesher, P., & Kilpatrick, J. (Eds.), Mathematics and Cognition, Cambridge University Press, Cambridge
9. Dreyfus, T.: 1993, ‘Didactic design of computer-based learning environments’, Keitel, C., &Ruthven, K. (Eds), Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, pp. 100–130.

10. Eisenberg, T. and Dreyfus, T.: 1991, ‘On the reluctance to visualize in mathematics’

11. Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, Mathematical Association of America, Providence, RI, pp. 25–38

12. Eirini Geraniou and Manolis Mavrikis (2014) CROSSING THE BRIDGE: FROM A CONSTRUCTIONIST LEARNING ENVIRONMENT TO FORMAL ALGEBRA

13. Richard Noss - Celia Hoyles -Manolis Mavrikis
Eirini Geraniou ,Sergio Gutierrez-Santos ,Darren Pearc (2009) Broadening the sense of ‘dynamic’: a microworld to support students’ mathematical generalization

14. Geraniou, E., Mavrikis, M., Hoyles, C., & Noss, R. (2011). Students’ justification strategies on the equivalence of quasi-algebraic expressions. Proceedings of PME 35, 2, 393–400.

15. Ζούπα Αγγελική -Ψυχάρης Γιώργος : Διαδικασία νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης μέσω μοτίβων (ΕΝΕΔΙΜ 2014)

16. Ζούπα Αγγελική -Ψυχάρης Γιώργος : Διαδικασία νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης ως δραστηριότητα αλγεβρικής σκέψης (ΕΝΕΔΙΜ 2015)

17. Harel, I., & Papert, S. (1991). Constructionism: Research reports and essays. Norwood, US

18. Healy, L. and Hoyles, C.: 1997, Linking Visual and Symbolic Approaches to Algebra: the Influence of Task Design.

19. Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? Mathematical Thinking and Learning, 1, 59–68.

20. Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 195-222.

21. Hoyles, C.: 1987, ‘Tools for learning: Insights for the mathematics educator from a Logo programming environment’, For the Learning of Mathematics 7 (2), 32–37.

22. Hoyles, C. and Sutherland R.: 1989, Logo Mathematics in the Classroom, Routledge, London.

23. Kaput, J.: 1986, ‘Information technology and mathematics: Opening new representational windows’, Journal of Mathematical Behavior 5, 187–207

24. Kaput, J. J.: 1989, ‘Linking representations in the symbol systems of algebra’, Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

25. KIERAN C -ELLICE FORMAN-ANNA SFARD PME 2001: Discursive approaches to research in mathematics education

26. Kilpatrick, & F. K. Z. Leung (Eds.), Third international handbook of mathematics education (pp. 597–641).New York, NY: Springer.

27. Κόσσυβας Γιώργος (2014): Εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρόβλημα εικονιστικής κανονικότητας για την εισαγωγή στην άλγεβρα -Πειραματική διδασκαλία στο 2ο ΠΓΑ

28. .Maria L. Blanton and James J. Kaput Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades.

29. Mavrikis, M., Noss, R., Hoyles, C., & Geraniou, E. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: Designing epistemic affordances for an intelligent micro world. Journal of Computer Assisted Learning.

30. Lee, L., and Wheeler, D. H.: 1987, Algebraic Thinking in High School Students: Their Conceptions of Generalization and Justification, Concordia University, Montreal.

31. Macgregor, M. and Stacey, K.: 1992, ‘Seeing a pattern and writing a rule’, Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 181–188. New Hampshire: Program Committee of the 16th PME Conference.

32. Noss, R. and Hoyles, C.: 1996a, ‘The visibility of meanings: Designing for understanding the mathematics of banking’, International Journal of Computers for Mathematical Learning 1(1), 3–31.
33. Noss, R. and Hoyles, C.: 1996b, Windows on Mathematical Meanings, Dordrecht, Kluwer.

34. Noss, R. and Hoyles, C.: 1992, ‘Looking back and looking forward’, Hoyles, C., & Noss,R. (Eds.), Learning Mathematics and Logo, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 431–468.

35. Noss, R.: 1997, ‘On static and dynamic algebra systems’, in: Kaput, J. (in press). Early Algebra., SUNY Press, New York.

36. Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S. & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of ‘dynamic’: a micro world to Support students’ generalization. ZDM, 41, pp. 493-503.

37. Orton, A. and Orton, J.: 1994, ‘Students’ perception and use of pattern and generalization ’,Da Ponte, J. P., & Matos, J. F. (Eds.), Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Program Committee of the18th PME Conference, University of Lisbon, Portugal.

38. Papert, S.: 1972, ‘Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics’, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 3,249–262.

39. Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-Cultural approach to students’ types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.

40. Radford, L. (PME 2006) ALGEBRAIC THINKING AND THE GENERALIZATION OF PATTERNS: A SEMIOTIC PERSPECTIVE

41. Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of

Algebraic generalizations of patterns in different contexts. ZDM: International Journal in Mathematics Education, 40, 83 – 96.

42. Radford, L. (PME 2010) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective

43. Radford, L. (2012)The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking

44. Rivera, F. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive Perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving Linear figural patterns. ZDM, 40(1), 65-82

45. Rivera F. 2013 Teaching and_ Learning Patterns

46. Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. Educational Studies in Mathematics, 7(3), 297 – 328.

47. Solange Hassan Ahmad Ali Fernandez, Lulu Healy (PME 2003) ALGEBRAIC EXPRESSIONS OF DEAF STUDEND CONNECTING VISUO-GESTURAL AND DYNAMIC REPRESENTATIONS

48. Tall David the Transition from Arithmetic to Algebra: Number Patterns, or Perceptual Programming?

9. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Δραστηριότητες -Φύλλα εργασίας

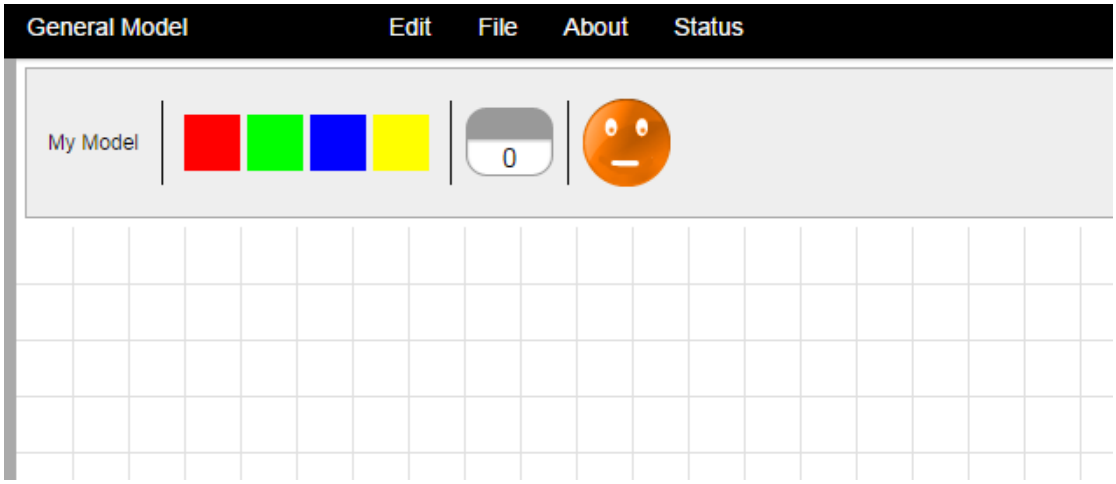
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ- ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Πατήστε στον παρακάτω υπερσύνδεσμο για να οδηγηθούμε στο περιβάλλον του eXpresser :

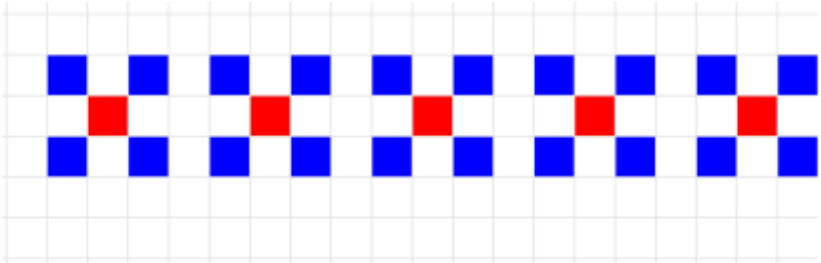
αρχική σελίδα eXpresser

Πατάμε edit restart ώστε να «καθαρίσει» η οθόνη του προγράμματος.

Η εικόνα που βλέπουμε στην αρχική οθόνη είναι η παρακάτω:



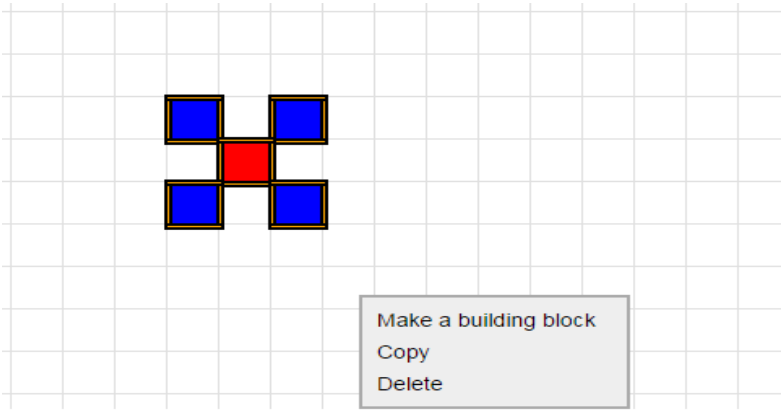
Το μοτίβο που θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε είναι το παρακάτω:



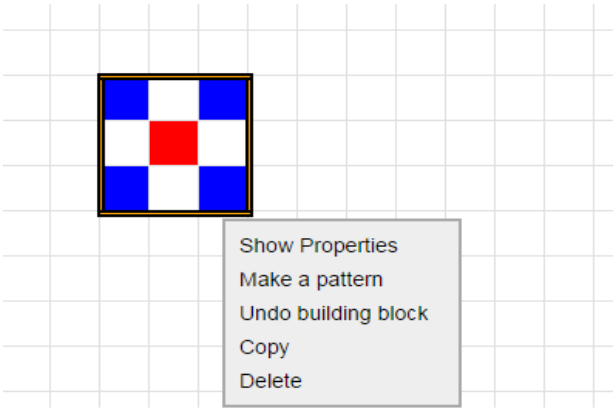
Παρατηρείστε το μοτίβο και κυκλώστε στη παραπάνω εικόνα ποιο είναι το βασικό στοιχείο που επαναλαμβάνεται.

Αυτό το στοιχείο το κατασκευάζουμε παίρνοντας ένα ένα τα χρωματιστά τετράγωνα από την αρχική γραμμή και τοποθετώντας το στον καμβά της οθόνης

Κρατώντας πατημένο το αριστερό κλικ στο ποντίκι επιλέγουμε όλα τα τετραγωνάκια και εμφανίζεται το παρακάτω πλαίσιο:

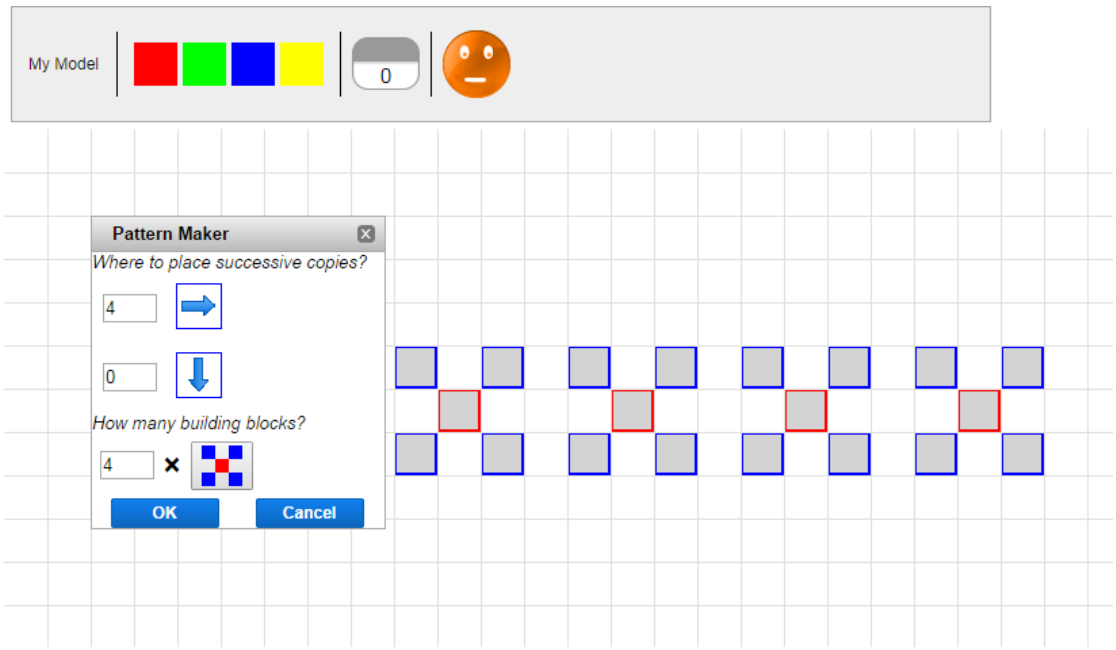


και πατάμε την 1η επιλογή.

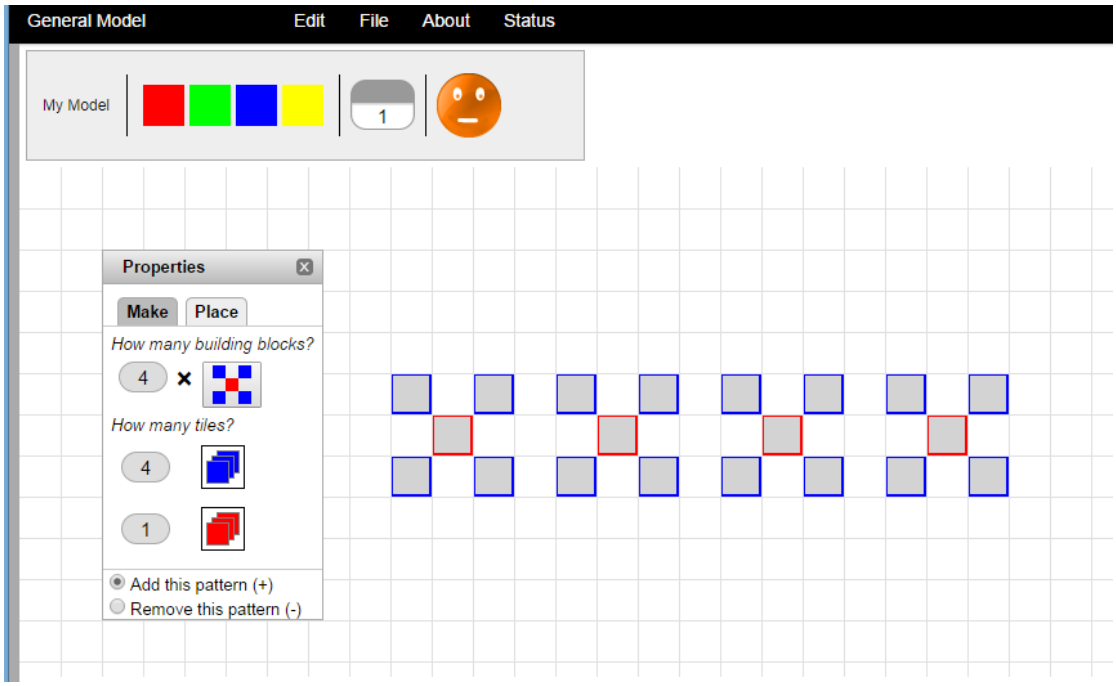


Επιλέγουμε το block που έχουμε φτιάξει και με αριστερό κλικ θα μας βγάλει τις παρακάτω επιλογές όπου από αυτές επιλέγουμε make a pattern:

Θα εμφανιστεί η παρακάτω εικόνα:



Εδώ πρέπει να πληκτρολογήσουμε στον πρώτο αριθμό την απόσταση των δομικών στοιχείων εδώ είναι το 4 και την κάθετη θέση που εδώ είναι 0 γιατί θέλουμε την οριζόντια διάταξη. Πατάμε ok και θα μας βγάλει την παρακάτω εικόνα:

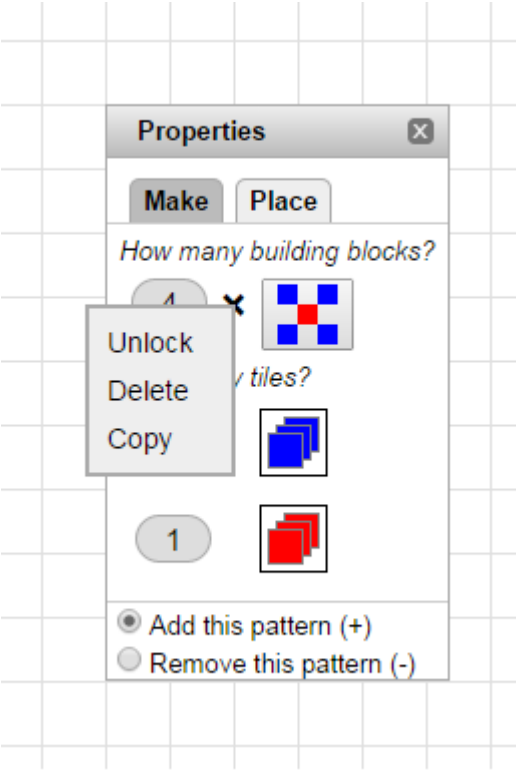


10.

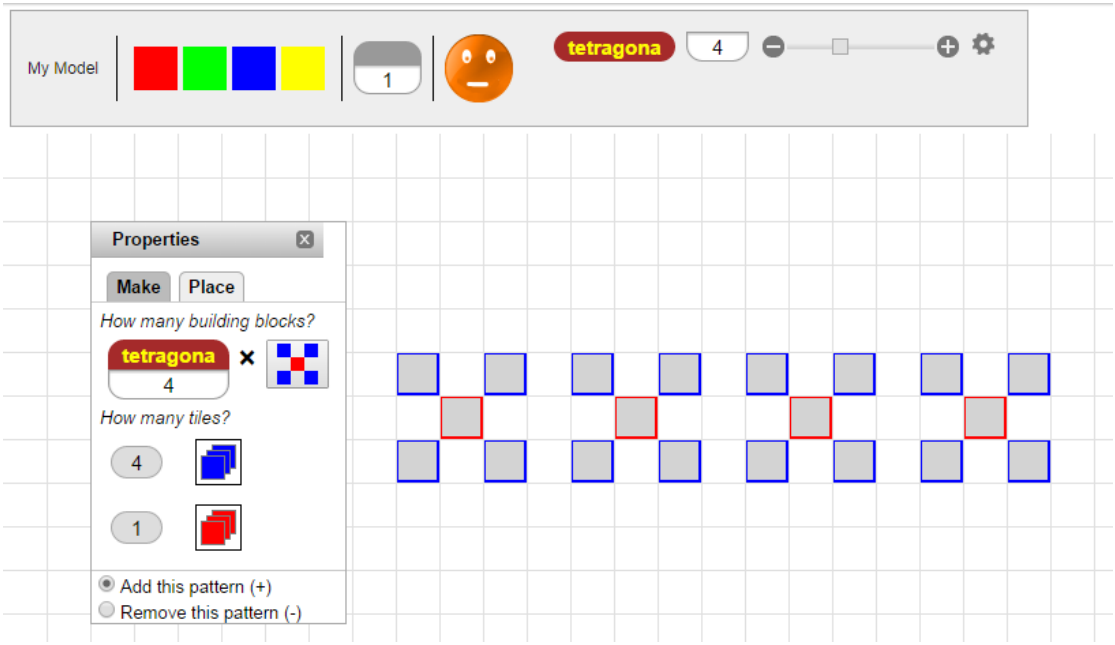
Εδώ γράφοντας όποιον αριθμό θέλουμε στην γραμμή my model τον σέρνουμε σε όποιο πλαίσιο θέλουμε που αρχικά έχει ερωτηματικό. Εδώ πρέπει να συμπληρώσουμε το 4 για τον αριθμό μπλε τετραγώνων και το 1 για τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων του ενός δομικού στοιχείου.

Παρατηρείστε ότι τα τετράγωνα δεν χρωματίζονται και αυτό γιατί δεν έχουμε βάλει τον σωστό αριθμό των τετραγώνων για τον αριθμό των μοτίβων που έχουμε. Σκοπός μας είναι να χρωματίζονται για σωστά για οποιοδήποτε αριθμό μοτίβων έχουμε κάθε φορά.

Αυτό θα γίνει ξεκλειδώνοντας τον αριθμό των μοτίβων. .Αυτό γίνεται ως εξής. Στην καρτέλα show properties πατάμε στον αριθμό που θέλουμε να ξεκλειδώσουμε και με αριστερό κλικ βγαίνει το ακόλουθο παράθυρο από όπου

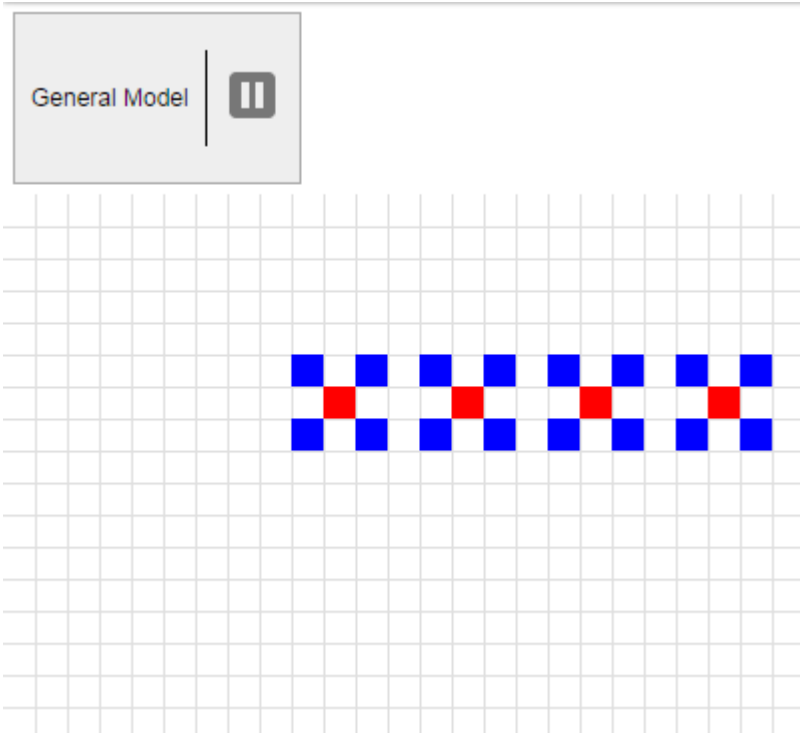


επιλέγουμε unlock number . Πατώντας το unlock ο αριθμός των μοτίβων ξεκλειδώνεται. Εδώ θα του δώσουμε την τιμή n και την ονομασία tetragona, Παρατηρούμε ότι έχει εμφανιστεί και ένας μεταβολέας (slider)με τον οποίον μπορούμε χειροκίνητα να αλλάζομε τον αριθμό που έχουμε ξεκλειδώσει.

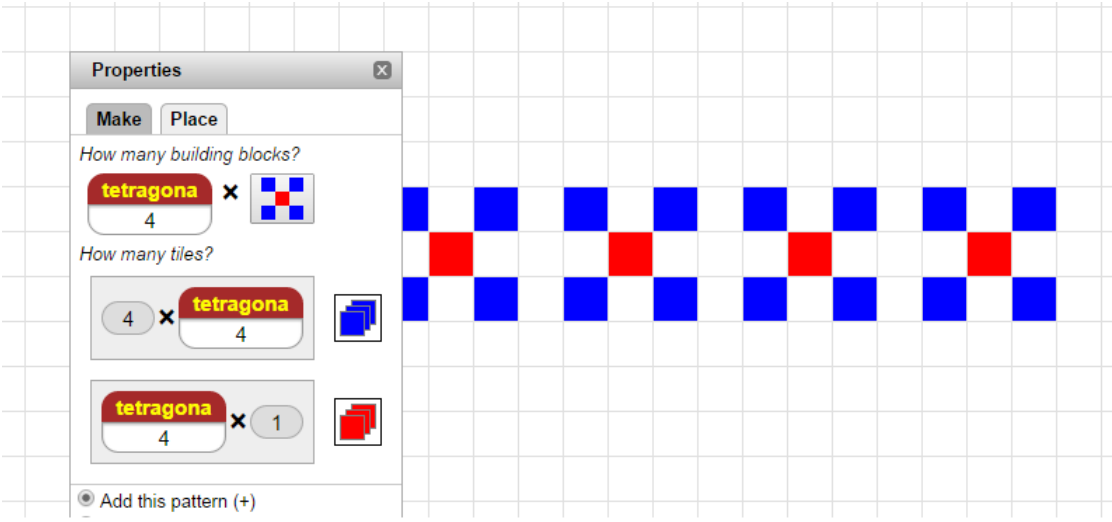


11.

Ακόμα έχει ανοίξει και η περιοχή γενικό μοντέλο (general model) που αναπαράγει το μοτίβο για τυχαίες τιμές του n.

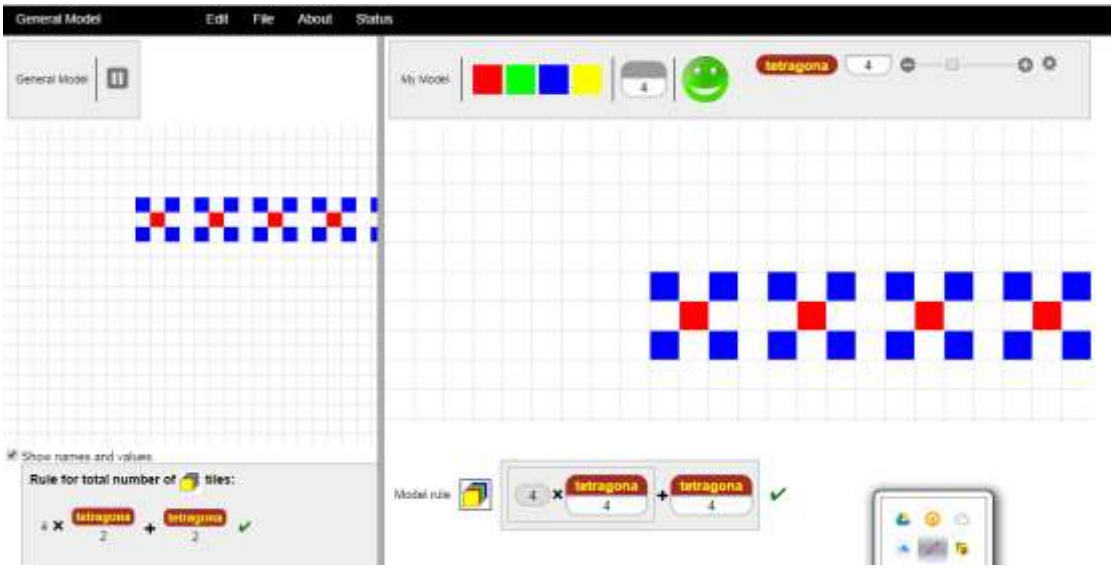


Για να χρωματιστούν όλα τα τετράγωνα πρέπει στον αριθμό τους να σκεφτούμε τι πρέπει να βάλουμε που να εξαρτάται από τον αριθμό που ξεκλειδώσαμε.



12.Για να ολοκληρωθεί το μοτίβο πρέπει να μεταφέρουμε την φόρμουλα για τον συνολικό αριθμό τετραγώνων με drag and drop από την καρτέλα show properties στη θέση model rule:

Η συνολική εικόνα πρέπει να είναι η παρακάτω :



13. Τι αντιπροσωπεύει για σας ο ξεκλειδωμένος αριθμός του μοτίβου?

14.Τι εκφράζει κατά την γνώμη σας ο γενικός κόσμος που έχει το πρόγραμμα?

---

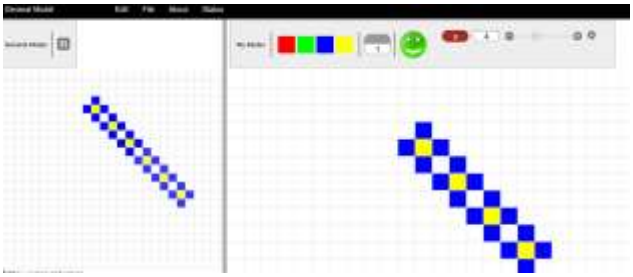
15. Τι αντιπροσωπεύει κατά την γνώμη σας ο μεταβολέας στο πρόγραμμα και τι ο γενικός τύπος?

ΤΕΛΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ ΠΟΛΥ !

Ο ΦΙΛΟΣ ΣΑΣ EXPRESSER

2η Δραστηριότητα-Crosstar

Εργασία	Ερμηνεία
1.Ανοίξτε την εισαγωγική σελίδα του eXpresser http://eXpresser.appspot.com/ και πατήστε restart.	
2.Το μοτίβο που πρέπει να φτιάξουμε είναι το παρακάτω: 	Οι μαθητές θα πρέπει να αναλύσουν το αναπτυσσόμενο μοτίβο, να παρατηρήσουν ποιό είναι το δομικό στοιχείο, τι μένει ίδιο δηλαδή και τί επαναλαμβάνεται. Ταυτόχρονα δοκιμάζεται η ικανότητά τους με το λογισμικό να χρησιμοποιούν το ξεκλείδωμα αριθμού ώστε να εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής και να αναπαριστούν το μοτίβο με αλγεβρική φόρμουλα (συμβολική γενίκευση).
3.Πόσα κίτρινα τετράγωνα έχει το 1ο μοτίβο, πόσα το 2ο και πόσα το 3ο ;	Σκοπός να πάμε από την κοντινή στην μακρινή γενίκευση που μπορεί να περιλαμβάνει και μια αφελή επαγωγή.
4.Φτιάξτε δύο στήλες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό μοτίβων η 1η και τον αριθμό κίτρινων τετραγώνων η 2η με 5 γραμμές. (αριθμός μοτίβου) (κίτρινα τετράγωνα)	Συμπλήρωση του πίνακα τιμών ώστε να προκύψει η συσχέτιση των δύο μεταβλητών: αριθμός μοτίβου και αριθμός των κίτρινων τετραγώνων.

1	.....
2	.....
.....	10
.....	100

5.Μπορείτε να περιγράψετε λεκτικά τη σχέση που συνδέει τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων και τον αριθμό του μοτίβου;

.....

.....

.....

Περιμένουμε από τους μαθητές να αποδώσουν την ισότητα αριθμός μοτίβου ίσον με τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων χωρίς να χρειάζεται αλγεβρικός συμβολισμός.

6.Πόσα μπλε τετράγωνα έχει το 1ο μοτίβο πόσα το 2ο και πόσα το 3ο ?

.....

.....

.....

7.Φτιάξτε δύο στήλες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό μοτίβων η 1η και τον αριθμό μπλε τετραγώνων η 2η με 5γραμμές.

(αριθμός μοτίβου)	(αριθμός μπλέ τετραγώνων)

Η συμπλήρωση του πίνακα με εποπτεία από το μοτίβο θα βοηθήσει ώστε να προκύψει η συναρτησιακή γενίκευση του μοντέλου.

1	4
2	.....
.....	12
.....	20

8.Περιγράψτε τη σχέση που συνδέει τον αριθμό των μπλε τετραγώνων με τον αριθμό του μοτίβου.

Περιμένουμε από τους μαθητές την απάντηση **ότι κάθε φορά τα μπλε τετράγωνα είναι 4πλάσια του αριθμού του μοτίβου**

9.Πόσα τετράγωνα συνολικά έχει το 1ο μοτίβο πόσα το 2ο και πόσα το 3ο?

.....

.....

.....

10.Φτιάξτε δύο στήλες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό μοτίβων η 1η και τον αριθμό τετραγώνων η 2η με 5γραμμές.

Αριθμός μοτίβου	**Συνολικός αριθμός τετραγώνων**
1	.....
2	.....
.....	50
.....	1000

11.Ποιά σχέση συνδέει συμβολίστε τον αριθμό των συνολικών τετραγώνων με μ τον αριθμό του μοτίβου?	Περιμένουμε από τους μαθητές την απάντηση *ότι πάντοτε ο αριθμός των συνολικών τετραγώνων είναι 5πλάσιος του αριθμού του μοτίβου* .

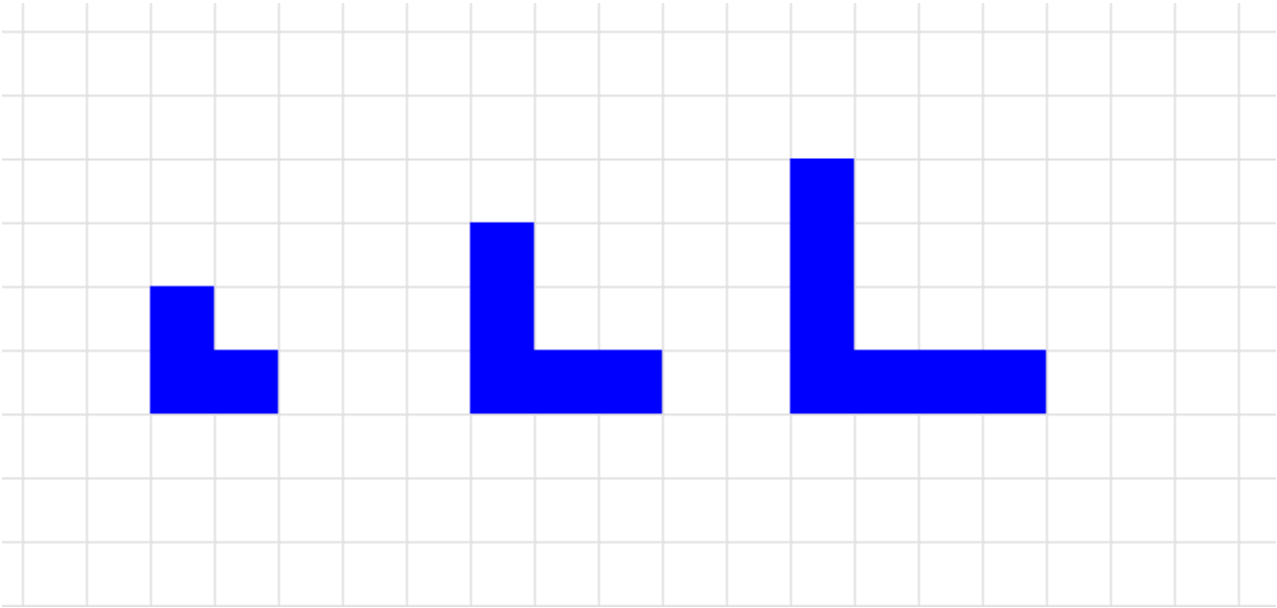
ΕΡΓΑΣΙΑ 3η -L letter

1.Ανοίξτε την εισαγωγική σελίδα του eXpresser

http://eXpresser.appspot.com/

και πατήστε restart.

2..Το μοτίβο που πρέπει να φτιάξουμε είναι το παρακάτω:



Σχήμα 1	Σχήμα 2	Σχήμα 3
Τετράγωνα: 3	5	7

<u>Διδακτικός στόχος:</u>

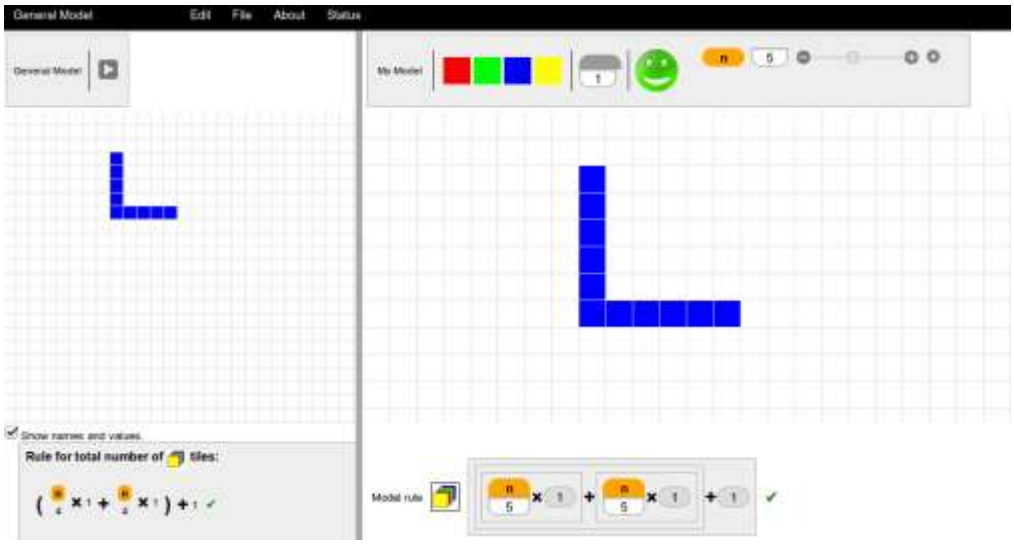
1. Η επίλυση ενός εικονιστικού μοτίβου και η γενίκευση μέσω εύρεσης μιας γενικής έκφρασης αναπαραγωγής του με λεκτικό τρόπο.

2. Η εξακρίβωση του τι είναι σταθερό και τι μεταβάλλεται στο μοντέλο.

3. Ο χειρισμός του αλγεβρικού ισοδύναμου ώστε να μπορεί να δουλέψει το μοντέλο.

4. Η μαθηματική εξήγηση με την διατύπωση εικασίας για τη σχέση που διαπερνάει το μοτίβο και ο έλεγχός της αν δουλεύει στη γενίκευσή της.

.....


General Model
Edit
File
About
Status
General Model
My Model
n
5
Show names and values.
Rule for total number of tiles:
Model rule

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η -Βοηθώντας τον Γιάννη!

Τίτλος	Βοηθήστε τον Γιάννη!
Αντικείμενα του Λογισμικού	Επιλύοντας προβλήματα με δύο μεταβλητές
Μαθηματικό αντικείμενο	Δημιουργία μεταβλητών που συμμεταβάλλονται.
Διδακτικός στόχος	Η συγκεκριμένη δραστηριότητα παρουσιάζει αρχικά δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς. Εάν οι μεταβολείς κινηθούν χειροκίνητα το μοντέλο φαίνεται να δουλεύει, πχ στο τόξο στην αρχή και στο τέλος. Οι μαθητές πολλές φορές ξεκλειδώνουν διαφορετικούς αριθμούς και προσπαθούν μετά να βρουν πώς συνδέονται τα δομικά στοιχεία και τα μοτίβα μεταξύ τους. Αυτή η διαδικασία έχει σχεδιαστεί ώστε να γίνει φανερή αυτή η σύνδεση με τη θεώρηση του πώς συνδέονται οι δυο κλάδοι ενός πτυσσόμενου μοτίβου και η συσχέτιση μεταξύ τους. Αυτό επιτυγχάνεται εξετάζοντας τις αλλαγές που όταν προκαλούνται στο ένα μοτίβο τι επιπτώσεις έχει στο άλλο μοτίβο και πως αριθμητικά συνδέονται τα δύο μοτίβα μεταξύ τους.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

1.Ανοίξτε την εισαγωγική σελίδα του eXpresser

http://eXpresser.appspot.com/

και πατήστε restart.

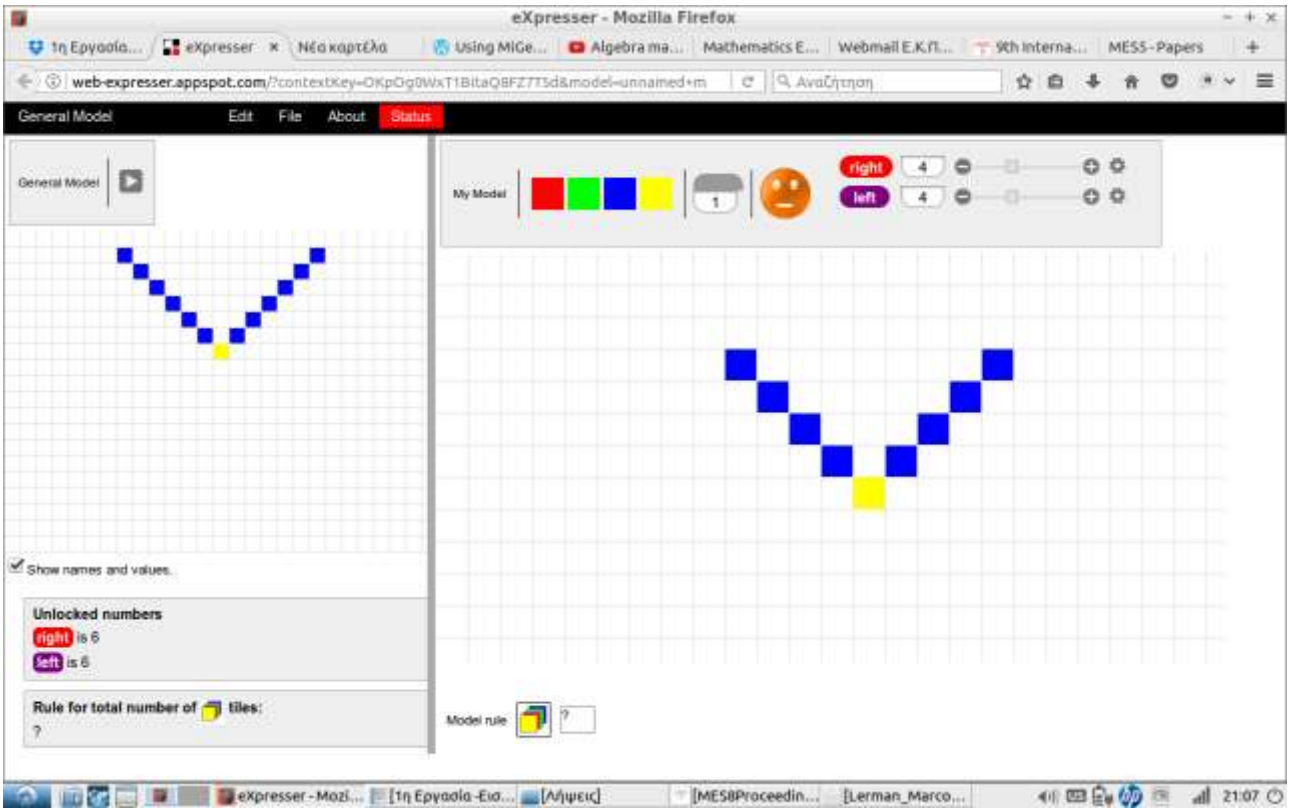
2.Το μοτίβο που έχει φτιάξει ο Γιάννης είναι το παρακάτω:

Στην προσπάθεια του να φτιάξει το μοντέλο χρησιμοποίησε δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς.

Έναν για την δεξιά κεραία (right) και έναν για την αριστερή (left) .

Αυτή η ενέργεια του δημιουργεί προβλήματα στον γενικό κόσμο όπου δεν αναπτύσσει με τον ίδιο τρόπο τις δύο κεραίες. Μπορείτε να βοηθήσετε τον Γιάννη φτιάχνοντας το μοτίβο στην ανάγκη από την αρχή?

<u>Διδακτικός στόχος:</u>



1. Η επίλυση ενός εικονιστικού μοτίβου και η γενίκευση μέσω εύρεσης μιας γενικής έκφρασης αναπαραγωγής του με λεκτικό τρόπο.

2. Η εξακρίβωση του τι είναι σταθερό και τι μεταβάλλεται στο μοντέλο.

3. Ο χειρισμός του αλγεβρικού ισοδύναμου ώστε να μπορεί να δουλέψει το μοντέλο.

4. Η μαθηματική εξήγηση με την διατύπωση εικασίας για τη σχέση που διαπερνάει το μοτίβο και ο έλεγχός της αν δουλεύει στη γενίκευσή της.

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η -Βοηθώντας τον Γιάννη!

Τίτλος	Βοηθήστε τον Γιάννη!
Αντικείμενα του Λογισμικού	Επιλύοντας προβλήματα με δύο μεταβλητές
Μαθηματικό αντικείμενο	Δημιουργία μεταβλητών που συμμεταβάλλονται.
Διδακτικός στόχος	Η συγκεκριμένη δραστηριότητα παρουσιάζει αρχικά δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς. Εάν οι μεταβολείς κινηθούν χειροκίνητα το μοντέλο φαίνεται να δουλεύει, πχ στο τόξο στην αρχή και στο τέλος. Οι μαθητές πολλές φορές ξεκλειδώνουν διαφορετικούς αριθμούς και προσπαθούν μετά να βρουν πώς συνδέονται τα δομικά στοιχεία και τα μοτίβα μεταξύ τους. Αυτή η διαδικασία έχει σχεδιαστεί ώστε να γίνει φανερή αυτή η σύνδεση με τη θεώρηση του πώς συνδέονται οι δυο κλάδοι ενός πτυσσόμενου μοτίβου και η συσχέτιση μεταξύ τους. Αυτό επιτυγχάνεται εξετάζοντας τις αλλαγές που όταν προκαλούνται στο ένα μοτίβο τι επιπτώσεις έχει στο άλλο μοτίβο και πως αριθμητικά συνδέονται τα δύο μοτίβα μεταξύ τους.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

1.Ανοίξτε την εισαγωγική σελίδα του eXpresser

http://eXpresser.appspot.com/

και πατήστε restart.

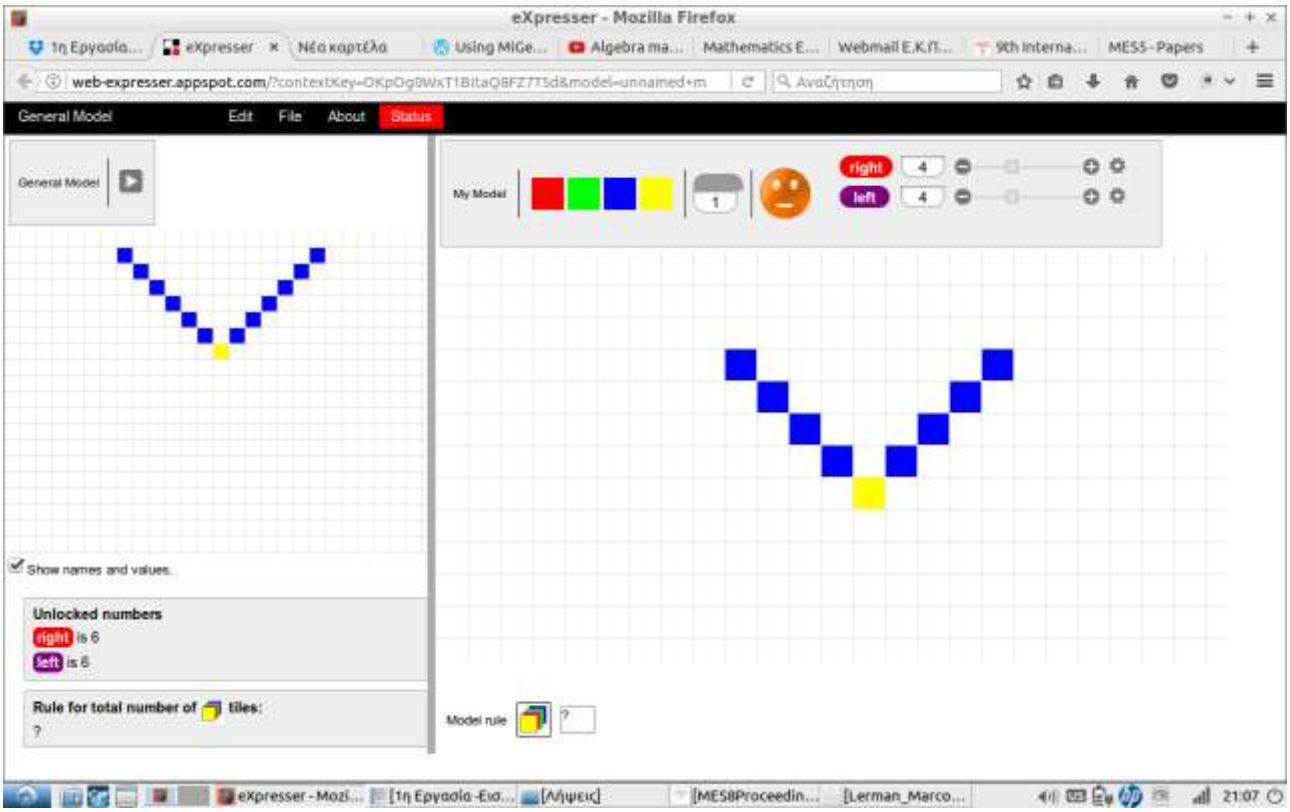
2.Το μοτίβο που έχει φτιάξει ο Γιάννης είναι το παρακάτω:

Στην προσπάθεια του να φτιάξει το μοντέλο χρησιμοποίησε δύο ξεκλειδωμένους αριθμούς.

Έναν για την δεξιά κεραία (right) και έναν για την αριστερή (left) .

Αυτή η ενέργεια του δημιουργεί προβλήματα στον γενικό κόσμο όπου δεν αναπτύσσει με τον ίδιο τρόπο τις δύο κεραίες. Μπορείτε να βοηθήσετε τον Γιάννη φτιάχνοντας το μοτίβο στην ανάγκη από την αρχή?

<u>Διδακτικός στόχος:</u>



1. Η επίλυση ενός εικονιστικού μοτίβου και η γενίκευση μέσω εύρεσης μιας γενικής έκφρασης αναπαραγωγής του με λεκτικό τρόπο.

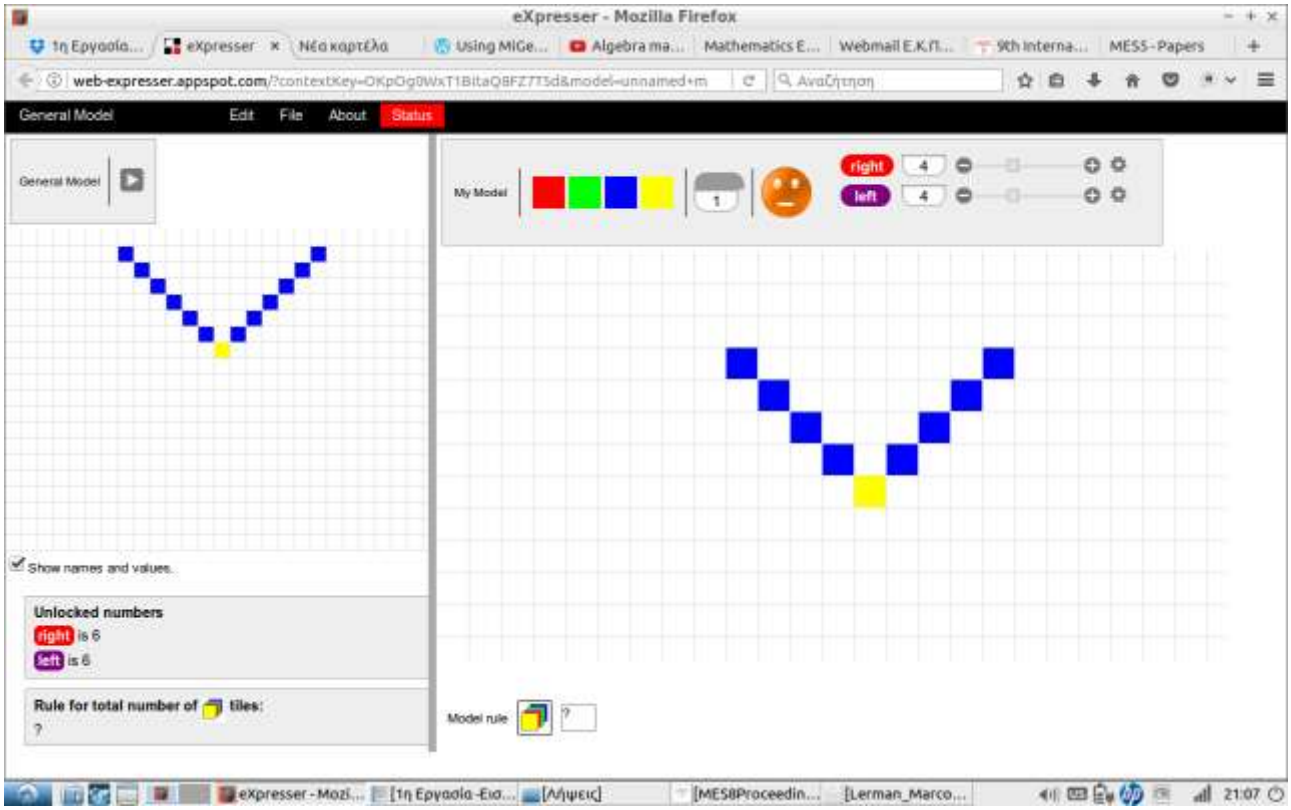
2. Η εξακρίβωση του τι είναι σταθερό και τι μεταβάλλεται στο μοντέλο.

3. Ο χειρισμός του αλγεβρικού ισοδύναμου ώστε να μπορεί να δουλέψει το μοντέλο.

4. Η μαθηματική εξήγηση με την διατύπωση εικασίας για τη σχέση που διαπερνάει το μοτίβο και ο έλεγχός της αν δουλεύει στη γενίκευσή της.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Κατασκευάστε στον eXpresser το παραπάνω μοντέλο που έφτιαξε ο Γιάννης.



2. Ενεργοποιήστε τον γενικό κόσμο και παρατηρείστε τι συμβαίνει. Περιγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.Τώρα χρησιμοποιείστε τους μεταβολείς. Τι συμβαίνει όταν και οι δύο μεταβολείς είναι στο 2; Τι συμβαίνει όταν είναι στο 3; Τί συμβαίνει όταν ο ένας είναι στο 4 και ο άλλος στο 5? Υπάρχει τρόπος οι κλάδοι (κεραίες)να αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο ? Περιγράψτε τί κατά την γνώμη σας δεν λειτουργεί σωστά.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. Μπορείτε να διορθώσετε το πρόβλημα?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. Τώρα ενεργοποίησε τον Γενικό κόσμο. Έχει διορθωθεί το πρόβλημα; Αρχίζει το μοντέλο και τελειώνει διατηρώντας ίσες τις κεραίες?

.....
.....
.....

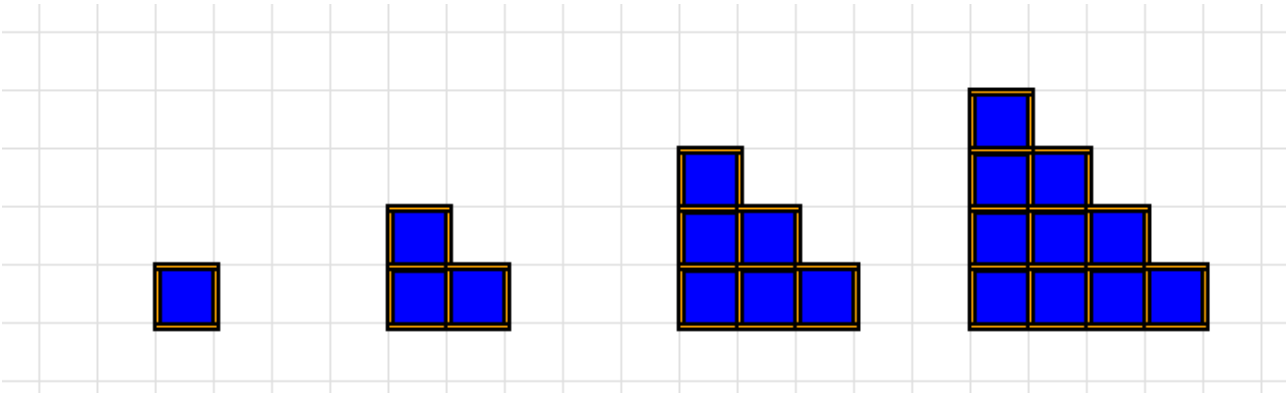
.....
.....
.....
.....

6. Συμπλήρωσε την δραστηριότητα με το Model rule (χαμογελάει ο φίλος μας ο eXpresser ;)

Γράψε τον γενικό κανόνα εδώ.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ΕΡΓΑΣΙΑ 7η-ΤΡΙΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



ΕΙΚΌΝΑ: 1 2 3 4

ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ: 1 3 6 10

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:

- Πόσα τετράγωνα έχει η $5^{η}$ εικόνα;

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

- Πόσα τετράγωνα έχει η $100^{η}$ εικόνα;

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

- Πόσα τετράγωνα έχει η τυχαία ν εικόνα ;

.....
.....
.....
.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

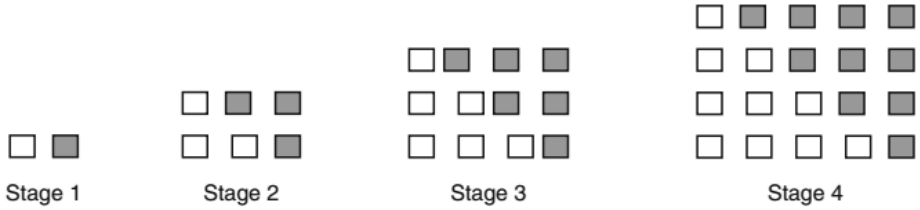
.....

.....

.....

.....

.....


Stage 1
Stage 2
Stage 3
Stage 4