ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Διαδικασίες νοηματοδότησης γεωμετρικών εννοιών στην Α' Λυκείου μέσα από την χάραξη πορείας στο ναυτικό χάρτη με χρήση αυθεντικών εργαλείων και πρακτικών»

[Βρούτσης Νικόλαος]
[Δ201405]

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

[Ψυχάρης Γεώργιος] [Επίκουρος Καθηγητής]

Αθήνα
Μάιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 2α Ιουνίου 2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπληρωτή Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Γ. Ψυχάρης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Χ. Τριανταφύλλου	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Αφιερώνεται στον πατέρα μου,
μάστρο- Στέφανο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Ψυχάρη Γεώργιο, τόσο γιατί το μάθημα του, «Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Διδακτική των Μαθηματικών», ήταν η αφορμή για το θέμα της παρούσας εργασίας, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές που μου έδωσε και τον χρόνο που μου αφιέρωσε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της.

Την Καθηγήτρια, Κα Πόταρη Δέσποινα, και τη Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών, Κα. Τριανταφύλλου Χρυσαυγή, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στη συμβουλευτική επιτροπή.

Τον Καθηγητή, κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, για την υποστήριξή του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών ως συμβούλου καθηγητή.

Όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος για τις γνώσεις που μου προσέφεραν.

Όλους τους συμφοιτητές μου από το πρόγραμμα και ιδιαίτερα τον φίλο μου Θανάση, για τη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια του προγράμματος, τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας και τη συμπαράσταση που μου παρείχε.

Τις κυρίες Διονυσία Μπακογιάννη και Ελένη Κλη από τη γραμματεία του προγράμματος, για την πολύτιμη υποστήριξή τους.

Τον πλοίαρχο του Εμπορικού Ναυτικού, κ. Σάλτα Κωνσταντίνο για την αμέριστη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη γυναίκα μου, Νέλλη, και τα παιδιά μου, Στέφανο και Κορίνα, για όλη τη στήριξη που μου προσέφεραν. Η αγάπη και η κατανόηση τους σε όλες τις δύσκολες στιγμές, ήταν αναγκαία συνθήκη για την ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Περίληψη

Η σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών με ρεαλιστικά πλαίσια και καταστάσεις αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια αντικείμενο έρευνας στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στο πλαίσιο αυτό κατά την τελευταία δεκαετία το ενδιαφέρον των ερευνητών έχει στραφεί στη μελέτη της αξιοποίησης αυθεντικών χώρων εργασίας για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που στοχεύουν στη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών από την πλευρά των μαθητών. Η παρούσα έρευνα εστιάζει στη σύνδεση του επαγγελματικού χώρου των πλοιάρχων του εμπορικού ναυτικού με τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών στο Λύκειο. Σχεδιάστηκαν δραστηριότητες που εμπλέκουν τους μαθητές στη χάραξη πορείας στον ναυτικό χάρτη μέσα από τη συνδυαστική χρήση αυθεντικών εργαλείων και πρακτικών από τον συγκεκριμένο χώρο εργασίας και λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας. Η έρευνα στηρίζεται στο έργο Mascil που είχε στόχο τη σύνδεση των μαθηματικών και φυσικών επιστημών με τον πραγματικό κόσμο. Κατά τη συμμετοχή τους στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές ενεπλάκησαν και σε ανοιχτά γεωμετρικά προβλήματα αναπτύσσοντας στρατηγικές μέσα από τη δημιουργία συνδέσεων με τον χώρο εργασίας. Επίσης, δημιουργήθηκε και πλούσια δραστηριότητα στο Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας Geogebra. Η διαδικασία αυτή χαρακτηρίζεται ως «πέρασμα συνόρων» (*boundary crossing),* συνδέεται με τη Θεωρία Δραστηριότητας *(Activity theory)* και, μέσω αυτής, ερευνήσαμε με ποιο τρόπο οι μαθητές νοηματοδοτούν τις μαθηματικές έννοιες και πρακτικές που βρίσκονται ενσωματωμένες στις ενέργειες του πλοιάρχου και τα εργαλεία που χρησιμοποιεί. Τόσο στο σχεδιασμό όσο και στην εφαρμογή των δραστηριοτήτων, συμμετείχε επαγγελματίας από τον χώρο εργασίας. Στα αποτελέσματα της έρευνας καταγράψαμε αρκετά συμβάντα στα οποία οι μαθητές, με τη βοήθεια των εργαλείων και πρακτικών του χώρου εργασίας, νοηματοδότησαν γεωμετρικές μαθηματικές έννοιες και σχέσεις μέσω των διαδικασιών νοηματοδότησης κατά τη διέλευση γνωστικών συνόρων, κυρίως του συντονισμού και λιγότερο της αναγνώρισης και του αναστοχασμού, ενώ υπήρξαν και ενδείξεις μετασχηματισμού.

Λέξεις κλειδιά: θεωρία δραστηριότητας, συστήματα δραστηριότητας, γνωστικά σύνορα, νοηματοδότηση, μαθηματικά του χώρου εργασίας.

Abstract

The connection between the teaching of mathematics and realistic contexts and situations has been a subject of research in the field of Mathematics Teaching for many years. In this context, over the last decade, the interest of researchers has been focused on studying the use of authentic workplaces to design activities aimed at the understanding of mathematical concepts by students. This research focuses on linking the merchant navy occupational space with the teaching of geometric concepts in Lyceum. The research is based on the Mascil project that aimed to link mathematical and natural sciences to the real world. Activities were designed to involve students in mapping the nautical map through the combination of authentic tools and practices. In engaging in these activities, students have been involved in open geometric problems and they have developed strategies through the creation of links to the workplace. A rich activity in Geogebra Dynamic Geometry Software was also created. This process is characterized as "crossing borders", it is connected with Activity Theory and through this we have investigated how students understand the mathematical concepts and practices that are incorporated into the actions of a captain and the tools he uses. Both the design and the implementation of the activities involved a professional from the workplace. In the survey results we recorded several incidents in which students, using the tools and practices of the workplace, understood geometric mathematical concepts and relationships through cognitive processes during boundary crossing, mainly coordination and less identification and reflection, and there were also transformation signs.

Key words: activity theory, systems of activity, boundary crossing, conceptualization, workplace mathematics.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο Εισαγωγή ..... **- 9 -**

Κεφάλαιο 2ο Θεωρητικό πλαίσιο ..... **- 13 -**

2.1 Εισαγωγή ..... - 13 -

2.2 Θεωρία Δραστηριότητας *(Activity Theory)* ..... - 17 -

2.2.1 Δραστηριότητα ..... - 18 -

2.2.2 Οι τρεις γενιές της Θεωρίας Δραστηριότητας ..... - 19 -

2.3 Γνωστικά σύνορα ..... - 24 -

2.3.1 Οι κύριοι όροι ..... - 25 -

2.3.2 Διέλευση γνωστικών συνόρων στην εκπαιδευτική έρευνα ..... - 26 -

2.3.3 Διαδικασίες νοηματοδότηδηε κατά τη διέλευση των γνωστικών συνόρων ..... - 28 -

2.4 Αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα ..... - 33 -

2.5 Μαθηματικά και μαύρα κουτιά ..... - 35 -

2.6 Η παρούσα έρευνα ..... - 37 -

Κεφάλαιο 3ο Μεθοδολογία της έρευνας ..... **- 40 -**

3.1 Εισαγωγή ..... - 40 -

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα ..... - 41 -

3.3 Συμμετέχοντες ..... - 41 -

3.4 Μέσα συλλογής δεδομένων ..... - 44 -

3.5 Διαδικασία σχεδιασμού και διεξαγωγής της έρευνας ..... - 44 -

3.6 Ανάλυση δραστηριοτήτων ..... - 46 -

3.6.1 Φάση Α. Εισαγωγική δραστηριότητα ..... - 47 -

3.6.2 Φάση Β Γραμμές θέσεις πλοίου ..... - 49 -

3.6.3 Φάση Γ Εύρεση θέσης πλοίου με τη χρήση γραμμών θέσης ..... - 53 -

3.7 Μέθοδος ανάλυσης ..... - 55 -

Κεφάλαιο 4ο Αποτελέσματα ..... **- 57 -**

4.1 Εισαγωγή ..... - 57 -

4.2 Αναγνώριση *(identification)* ..... - 59 -

4.3 Συντονισμός *(coordination)* ..... - 65 -

4.4 Αναστοχασμός (*reflection)* ..... - 89 -

4.5 Μετασχηματισμός (*transformation)* ..... - 102 -

Κεφάλαιο 5ο Συμπεράσματα ..... - 106 -

5.1 Διδακτική αξιοποίηση της έρευνας ..... - 110 -

Βιβλιογραφία ..... - 113 -

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία ..... - 113 -

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία ..... - 117 -

Παράρτημα 1. Δραστηριότητες της έρευνας ..... - 118 -

Παράρτημα 2. Εργαλεία πλοιάρχου ..... - 122 -

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή

Στα πλαίσια της παγκοσμιοποίησης και των γρήγορων κοινωνικών, οικονομικών, και περιβαλλοντικών αλλαγών, ειδικά σε σχέση με τις συνεχείς τεχνολογικές εξελίξεις, οι εργαζόμενοι είναι αναγκασμένοι συνεχώς να αποκτούν νέες δεξιότητες. Πρέπει να παραγάγουν νέες μορφές γνώσης ή να χρησιμοποιήσουν υπάρχουσες μορφές σε νέα πλαίσια (FitzSimons, 2014). Παράλληλα, διαδεδομένη είναι η αντίληψη των εργοδοτών περί της ύπαρξης έλλειψης ικανοτήτων (*skills gap*) σύμφωνα με την οποία αρχάριοι εργαζόμενοι που αποφοιτούν από τη βασική εκπαίδευση σε όλο το φάσμα της ή μετακινούνται από άλλα επαγγέλματα, θεωρούνται να υστερούν σε απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που χρειάζονται για να είναι αποδοτικοί στο χώρο της εργασίας . Οι Akkerman et al. (2010) θεωρούν πως η πρόκληση για την εκπαίδευση είναι η δημιουργία συνθηκών για συμμετοχή και συνεργασία σε μια ποικιλομορφία γνωστικών και επαγγελματικών πεδίων. Οι παραπάνω προκλήσεις έχουν στρέψει τις τελευταίες δεκαετίες ένα μέρος της έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών στα εκτός σχολείου μαθηματικά και ειδικότερα στα μαθηματικά του χώρου εργασίας.

Σε πρώτη φάση η έρευνα ασχολήθηκε με τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν οι επαγγελματίες (Millroy, 1992; Noss, Hoyles et. al, 1996), τον τρόπο που αυτά εμφανίζονται στον χώρο εργασίας και το βαθμό αναγνώρισης και κατανόησής τους από τους εργαζομένους. Σε δεύτερη φάση, εμφανίστηκε μια νέα τάση στην έρευνα και αφορά τη μελέτη σπουδαστών και εκπαιδευτικών που εμπλέκονται σε δραστηριότητες, σε αυθεντικά περιβάλλοντα χώρων εργασίας (Williams & Wake, 2007; Triantafillou, 2010; Akkerman & Baker, 2011). Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ακολουθεί το δεύτερο ρεύμα της έρευνας. Στα πρότυπα του προγράμματος MASCIL[1] τέσσερις μαθητές της Α' Λυκείου, ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες εμπνευσμένες από τον επαγγελματικό χώρο των πλοιάρχων του εμπορικού ναυτικού. Πιο συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες είχαν ως

[1] Το MASCIL http://www.mascil-project.eu/ είναι ένα πρόγραμμα που συμμετείχαν 18 εταίροι, από 13 χώρες με σκοπό την προώθηση της ευρείας χρήσης της διδασκαλίας της επιστήμης με βάση την διερευνητική μάθηση (IBST) στα σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, στόχο έχει τη σύνδεση των μαθηματικών και της επιστήμης με τον κόσμο της εργασίας.

πλαίσιο αναφοράς το ναυτικό χάρτη, τη χάραξη πορείας, τη παρουσίαση των γραμμών θέσεως και τον εντοπισμό του γεωγραφικού στίγματος του πλοίου. Αφορούσαν αυθεντικές πρακτικές του επαγγελματία πλοιάρχου στο ναυτικό χάρτη, μελέτη πορείας κατά τη διάρκεια ταξιδιού αλλά και καταστάσεις μη αυτοματοποιημένων ενεργειών *(routine breakdowns),* όπως αποφυγή εμποδίων, ασφαλής διέλευση από επικίνδυνες περιοχές και εύρεση της νέας πορείας, κατά την πορεία του πλοίου.

Ως θεωρητικό πλαίσιο χρησιμοποιήθηκε η Θεωρία Δραστηριότητας *(Cultural historical activity theory CHAT)* (Engestrom, 1987) και η θεωρία που στηρίζεται στην ιδέα ότι μαθαίνουμε καλύτερα ό,τι λαμβάνει χώρα στο ίδιο πλαίσιο στο οποίο εφαρμόζεται *(situated learning theory)* και μπορεί δυναμικά να συνδεθεί με τη μάθηση (Wenger, 1998). Οι υπάρχουσες έρευνες στηρίζονται κυρίως στη δεύτερη γενιά Triantafillou και Potari (2010) της Θεωρίας Δραστηριότητας, μελετώντας ένα σύστημα, ή στην τρίτη γενιά της θεωρίας, ερευνώντας την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο συστημάτων δραστηριότητας (Wenger, 1998; Akkerman, 2006; Walker & Nocon (2007).

Ειδικότερα, οι έρευνες που στηρίζονται στην τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας εστιάζουν στη διέλευση γνωστικών συνόρων *(boundary crossing)* και το ρόλο των αντικειμένων στα γνωστικά σύνορα *(boundary objects).* Το σημαντικό ζήτημα που ανακύπτει από την έρευνα είναι ο τρόπος που η συνύπαρξη ή η μετάβαση ανάμεσα από διάφορες περιοχές οδηγεί τους ανθρώπους να εισέλθουν σε μη γνωστούς τομείς και τις ευκαιρίες μάθησης που αυτή παρέχει (Engestrom et al. 1995).

Όπως προκύπτει από το θεωρητικό πλαίσιο, ως αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα θεωρούνται τα τεχνουργήματα, εργαλεία, όργανα και στρατηγικές που ιστορικά έχουν αποκρυσταλλώσει μαθηματικές έννοιες (Wenger, 1998) Για να περιγραφεί η δυσκολία αναγνώρισης του μαθηματικού περιεχομένου σε δραστηριότητες στο χώρο εργασίας χρησιμοποιήθηκε ο όρος μαύρα κουτιά *(black boxes)* (Hall et. al, 2002). Παράλληλα, ο όρος μαύρα κουτιά έχει χρησιμοποιηθεί για να αποτυπώσει τον τρόπο που η τεχνολογία μπορεί να αποκρύψει το μαθηματικό περιεχόμενο ενώ, παράλληλα, οι ερευνητές επιδίωξαν να ερμηνεύσουν πώς αυτή μπορεί να εξυπηρετήσει και ως μέσο για να διαφωτίσει τι κρύβεται στα μαύρα κουτιά (Noss, Hoyles et. al, 1996, 2002).

Καθώς στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία οι μαθητές ενεπλάκησαν με ανοιχτά γεωμετρικά προβλήματα. η έρευνα έχει δείξει πως η χρήση λογισμικού Δυναμικής

Γεωμετρίας κρίνεται ουσιώδους σημασίας (Hoyles & Noss 2004). Κλειδί σε κάθε DGS είναι το γεγονός ότι παρέχουν ένα περιβάλλον και τα μέσα για άμεσο χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων ειδικά με τη διαδικασία κατά την οποία τα σχήματα σύρονται *(dragging)* ολόκληρα ή μέρη τους με τη χρήση του ποντικιού. Επιπλέον, η δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων που παρέχουν τα λογισμικά εμπλουτίζουν τη διδασκαλία με ένα είδος ανατροφοδότησης που δεν είναι εύκολα εμφανές στις κατασκευές με χαρτί-και-μολύβι (Laborde &Laborde, 1995). Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας αφορούν τη φύση των μαθηματικών νοημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές και το ρόλος των διαθέσιμων εργαλείων του χώρου εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα. Αρχικά, γίνεται σύντομη αναφορά στη μέχρι τώρα έρευνα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τρεις γενιές της Θεωρίας Δραστηριότητας *(Cultural historical activity theory CHAT)* και ειδικά η τρίτη γενιά στην οποία στηρίζει το θεωρητικό της υπόβαθρο η έρευνα αυτή. Η Θεωρία Δραστηριότητας συνδυάζεται με τη διέλευση γνωστικών συνόρων *(boundary crossing)* η οποία και αναπτύσσεται στη συνέχεια όπως και τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα *(boundary objects)*. Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση των δύο συστημάτων δραστηριότητας που ενεπλάκησαν στην έρευνα.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται η μεθοδολογία της έρευνας, με αναφορά στα ερευνητικά ερωτήματα, το προφίλ των συμμετεχόντων, τα μέσα συλλογής των δεδομένων την ανάλυση του σχεδιασμού και της εκτέλεσης της έρευνας και τέλος στη μέθοδο ανάλυσης των δεδομένων. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας. Η ανάλυση στηρίχτηκε σε κρίσιμα επεισόδια. Αρχικά, γίνεται αναφορά στον τρόπο με τον οποίο ο ναυτικός χάρτης βοήθησε στη διέλευση των γνωστικών μαθητών. Επίσης, παρουσιάζονται και αλλαγές που παρατηρήθηκαν στη γλώσσα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, καθώς αυτή εμπλουτίστηκε με ορολογία από τον χώρο εργασίας για να περιγράψουν τόσο καθημερινούς όσο και μαθηματικούς όρους. Τα αποτελέσματα που αφορούν τη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών όσο και τη χρήση των αυθεντικών εργαλείων και

πρακτικών κατηγοριοποιήθηκαν σε τέσσερις ομάδες αντίστοιχες με τις διαδικασίες νοηματοδότησης που καταγράφει η έρευνα στα γνωστικά σύνορα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της έρευνας και τον τρόπο με τον οποίο αυτά συνδέονται με τη βιβλιογραφία.

Στο έκτο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνεται η βιβλιογραφία στην οποία βασίστηκε η έρευνα.

Κεφάλαιο 2ο
Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Εισαγωγή

Σε όλη την ιστορία η ανθρωπότητα αγωνίστηκε να κατανοήσει τις θεμελιώδεις εργασίες του υλικού κόσμου. Έχουμε προσπαθήσει να ανακαλύψουμε τους κανόνες και τα πρότυπα που καθορίζουν τις ιδιότητες των αντικειμένων που μας περιβάλλουν και την πολύπλοκη σχέση τους με εμάς καθώς και του ενός με το άλλο. Για χιλιάδες χρόνια, οι κοινωνίες σε όλο τον κόσμο διαπίστωσαν ότι μια επιστήμη πάνω από όλες δίνει σίγουρη γνώση για την κατανόηση της πραγματικότητας του φυσικού κόσμου. Η επιστήμη αυτή είναι τα μαθηματικά. Λόγω της χρησιμότητάς τους τα μαθηματικά κατέχουν διαχρονικά σημαντική θέση στην εκπαίδευση. Πέρα από την κλασική εκπαίδευση όμως, πλήθος ερευνών που έχει διεξαχθεί σε ένα εύρος διαφορετικών πλαισίων δείχνει πως τα μαθηματικά των χώρων εργασίας μπορούν να διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό από τα παραδοσιακά σχολικά μαθηματικά (Jurdak & Shahin, 2001; Masingila, 1993; Noss, Hoyles, & Pozzi, 2000; Triantafillou & Potari, 2010; Williams & Wake, 2007; Zevenbergen & Zevenbergen, 2009). Επιπλέον, τα σχολικά μαθηματικά μπορούν ακόμα και να εμποδίζουν τους επαγγελματίες να αντιληφθούν τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στους χώρους εργασίας (Forman & Steen, 2000).

Πλέον αναγνωρίζεται πως οι μαθηματικές πρακτικές στους χώρους εργασίας διαμορφώνονται από τις άμεσες και πρακτικές απαιτήσεις της παραγωγής, το οποίο σημαίνει πραγμάτωση συγκεκριμένων στόχων, με αποτελεσματική χρήση των πόρων. Οι χώροι εργασίας μας παρέχουν ευκαιρίες να διερευνήσουμε θέματα που αφορούν την κατασκευή και τη χρήση των μαθηματικών εννοιών και τον τρόπο που τα εργαλεία και οι στόχοι της κουλτούρας των χώρων εργασίας τις επηρεάζουν και τις διαμορφώνουν (Millroy, 1992; Pozzi Noss & Hoyles, 1998). Οι περισσότερες έρευνες, της πρώτης περιόδου, στον τομέα αυτό επικεντρώνονται στην κουλτούρα των μαθηματικών σε διάφορες πρακτικές και σε ειδικευμένους πλήρως ή μη επαγγελματίες. Όλες συμφωνούν ότι η μαθηματική γνώση που παρατηρείται στις περιπτώσεις «βλάβης» *(routine brakedown)* στον επαγγελματικό χώρο είναι ενσωματωμένη στη δραστηριότητα του χώρου εργασίας. Επιπλέον, υπάρχει γνωστικός και πολιτιστικός μετασχηματισμός στο

χαρακτήρα αυτών των μαθηματικών (Noss ,2002;Pozzi et. al 1998).

Πολλές έρευνες εστιάζουν στο ρόλο που παίζουν πολιτιστικά τεχνουργήματα, όπως γραφικές παραστάσεις (Roth, 2005), γραφήματα (Pozzi et. al 1998), γλωσσικά εργαλεία, όπως μεταφορά και μοντελοποίηση (William & Wake, 2007) στην κατασκευή και έκφραση των μαθηματικών εννοιών. Άλλο ένα θέμα που ερευνάται είναι οι στρατηγικές επίλυσης προβλήματος που αναπτύσσουν οι διάφοροι επαγγελματίες. Οι στρατηγικές αυτές είναι συνδεδεμένες με τον απώτερο στόχο της κάθε δραστηριότητας είναι ανεπίσημες ιδιοσυγκρασιακές προσωπικές και ενστικτώδεις (Noss, Hoyles & Pozzi ,2000). Έρευνες έχουν δείξει πως, οι στρατηγικές αυτές, διαφέρουν από τις στρατηγικές στη σχολική τάξη (Magajna & Monaghan, 2003) και συχνά είναι αρκετά πιο πολύπλοκες από αυτές που συναντάμε στο σχολικό πλαίσιο (Jurdak & Shahin, 2001).Αυτά βέβαια έρχονται σε αντίθεση με τους στόχους και τις νόρμες της γενίκευσης, του φορμαλισμού και τη εσωτερικής συνέπειας που συνάδουν με τα σχολικά μαθηματικά (Noss et al., 2000; Williams &Wake, 2007). Επιπλέον, αναγνωρίζεται πως συχνά τα μαθηματικά αποκρύπτονται από τους στόχους, την τεχνολογία, τα τεχνουργήματα και τις καθιερωμένες ρουτίνες της επαγγελματικής δραστηριότητας (Williams & Wake, 2007a).

Η υπόθεση της άμεσης μεταφοράς από το σχολείο στην εργασία προδίδει την κάπως απλοϊκή κατανόηση της σχέσης μεταξύ της τυπικής και της άτυπης μαθηματικής γνώσης (Fitzsimons, 2014). Η επαγγελματική εκπαίδευση μαθηματικών εξ ορισμού απαιτεί την αλληλεπίδραση της μαθηματικής εκπαίδευσης με τον ρεαλιστικό κόσμο. Παρόλα αυτά οι έννοιες εργασία, μαθηματικά και εκπαίδευση υπόκεινται σε διαρκή εξέλιξη επηρεασμένες από -και με τη σειρά τους επηρεάζοντας- κοινωνικές, πολιτισμικές, οικονομικές, πολιτικές και τεχνολογικές εξελίξεις της εποχής μας (Radford, 2003; Restivo, 1992; Salling Olesen, 2010). Το πλαίσιο της συνεχούς αλλαγής και της ραγδαίας εξέλιξης, στον χώρο της εργασίας, επηρεάζει τη φύση των εργασιακών δραστηριοτήτων και την οργάνωσή τους, καθώς και τα εργαλεία, υλικά και τεχνικές που χρησιμοποιούνται. Μελετώντας τη βιβλιογραφία, παρατηρούμε πως η έρευνα έχει στραφεί κυρίως στη μετάβαση από την επαγγελματική εκπαίδευση ή την τριτοβάθμια εκπαίδευση στον χώρο εργασίας. Αντίθετα, είναι περιορισμένες οι έρευνες που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο μαθητές της γενικής εκπαίδευσης (Wake & Williams, 2007β) νοηματοδοτούν μαθηματικές έννοιες μέσα από την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες του χώρους εργασίας. Οι Bakker

και Akkerman (2014) προτείνουν πως η εμπλοκή μαθητών γενικής εκπαίδευσης σε αυθεντικές δραστηριότητες από το χώρο εργασίας, θα έχει επίσης θετικά αποτελέσματα.

Ένα άλλο ζήτημα αναφοράς των φορέων χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής είναι η ευρέως κοινοποιημένη αντίληψη των εργοδοτών περί της ύπαρξης του περίφημου κενού ικανοτήτων (*skills gap*) σύμφωνα με την οποία αρχάριοι εργαζόμενοι που αποφοιτούν από τη βασική εκπαίδευση σε όλο το φάσμα της, ή μετακινούνται ανάμεσα σε επαγγέλματα, θεωρούνται να υστερούν σε απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που χρειάζονται, για να είναι έτοιμοι για το χώρο της εργασίας (Fitzsimons, 2014). Το πρόβλημα είναι πολύπλοκο, από πολιτικής, κοινωνικής και οικονομικής σκοπιάς, με τις ευθύνες να εκτείνονται πολύ πέρα από τον τομέα της εκπαίδευσης. Αν και είναι αλήθεια πως πολλοί υποψήφιοι προς εργασία, όλων των ηλικιών, έχουν τελειώσει το σχολείο με λίγα μαθηματικά προσόντα και υστερούν σε βαθιά εννοιολογική μαθηματική κατανόηση, πιθανότατα έχουν αναπτύξει αρνητική προδιάθεση προς το αντικείμενο, το πρόβλημα της έλλειψης ικανοτήτων είναι αρκετά πιο πολύπλοκο από την παραπάνω θεώρηση.

Πολλοί άνθρωποι από όλα τα κοινωνικά στρώματα, συμπεριλαμβανομένων και των εργοδοτών, τείνουν να θεωρούν πως τα σχολικά μαθηματικά, τα οποία και θεωρούν ως επίσημοι φορείς της επιστημονικής γνώσης, είναι τα μοναδικά μαθηματικά. Επίσης, συχνά οι άνθρωποι δέχονται πως οι σχολικές μέθοδοι τις οποίες διδάχτηκαν είναι οι μόνες σωστές (Cockcroft, 1982). Από την άλλη, οι μαθηματικές δραστηριότητες που πραγματοποιούνται σε καθημερινή βάση σε όλα τα επαγγέλματα παραμένουν κατά βάση αόρατες εξαιτίας της κρυσταλλοποίησης με τεχνολογικά τεχνουργήματα (Williams & Wake, 2007a, 2007b). Αυτό συμβαίνει στους περισσότερους εξωτερικούς παρατηρητές συμπεριλαμβανομένων και των μελλοντικών ή των εξασκούμενων μαθηματικών (Nicol, 2002). Η ηγεμονική κληρονομιά των μαθηματικών στη σχολική εκπαίδευση καθιστά δύσκολη την αναγνώριση τους στους επαγγελματικούς χώρους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως στους χώρους εργασίας εμφανίζονται ως πλήρως ενσωματωμένα στο πλαίσιο. Επίσης, αρκετές φορές οι αντιφατικές παράμετροι και οι περιορισμοί του πλαισίου που ρυθμίζουν το στόχο, καθιστούν δύσκολη την αναγνώριση των μαθηματικών.

Κατά τη διάρκεια και μετά από την απόκτηση των απαραίτητων προσόντων για την είσοδο στην εργασία, οι νέοι εργαζόμενοι πρέπει να προσαρμοστούν στη συχνά σιωπηρή κοινωνική και πολιτιστική οργάνωση των χώρων εργασίας τους. Για πολλούς,

αυτή η περίοδος μετάβασης μπορεί να είναι προβληματική δεδομένου ότι υπάρχουν εντάσεις και αντιφάσεις μεταξύ του γνωστού ρόλου σπουδαστών και του προσδοκώμενου ρόλου εργαζομένων. Άρθρα από τους Bakker and Akkerman, Hahn, Roth, Wake εστιάζουν σε αυτό το ζήτημα της μεταφοράς της τυπικής μαθηματικής γνώσης, αλλά από διάφορες διαφορετικές θεωρητικές προοπτικές. Σε όλες αυτές, η θεωρητική μαθηματική γνώση, καθώς και η πρακτική γνώση που αποκτάται στο πλαίσιο του χώρου εργασίας, παίζουν κρίσιμο ρόλο.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρουμε κάποιες από τις σημαντικότερες έρευνες που έγιναν τα τελευταία χρόνια, από το 1990 και μετά, και αφορούν τα μαθηματικά στους χώρους εργασίας. Θα θέλαμε να παρατηρήσουμε πως ενώ αρχικά οι έρευνες αφορούν τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν οι έμπειροι επαγγελματίες, τα τελευταία χρόνια υπάρχει μια στροφή της έρευνας στον τρόπο με τον οποίο νέοι επαγγελματίες ή μαθητευόμενοι επαγγελματικών χώρων διαχειρίζονται επαγγελματικές πρακτικές στις οποίες κρυφά ή φανερά χρησιμοποιούν μαθηματική γνώση.

Πίνακας 1. Κύριες έρευνες που αφορούν μαθηματικά του χώρου εργασίας

Ερευνητές	**Εργασιακός Χώρος**
Millroy, 1992	Τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν οι ξυλουργοί.
Masingila, 1994	Οι μαθηματικές έννοιες των κατασκευαστών χαλιών.
Noss et. Al, 2000	Τραπεζικές επενδύσεις, νοσηλεύτριες και αεροπλοΐα.
Eberhard, 2000	Μαθητές τεχνικής εκπαίδευσης που κάνουν μετρήσεις για την κατασκευή γκαράζ.
Jurdak και Shahin, 2001	Κατασκευαστές σωλήνων για υδραυλική χρήση.
Williams, Wake και Boreham 2001	Φοιτητής χημείας που ερμηνεύει την γραφική παράσταση μιας μηχανής δοκιμής υλικών σε ένα βιομηχανικό εργαστήριο.
Roth, 2005	Ιχθυοτροφείο.
Martin, LaCroix και Fownes, 2005	Μαθητευόμενος που εργάζεται σε κατασκευή σωλήνων, χρησιμοποιώντας κλάσματα.
FitzSimons, Mlcek, Hull και Wright 2005	Εφαρμογές χημικού ψεκασμού και κατάρτιση νέων εργαζομένων στο πλαίσιο ποικιλίας κηπευτικών,

	γεωργικών και υπαίθριων χώρων αναψυχής
Williams και Wake, 2007a	Βιομηχανική χημική μονάδα.
Martin και LaCroix, 2008	Μαθητευόμενοι σιδηρουργοί επιλύουν αυθεντικό πρόβλημα από τον χώρο εργασίας.
Triantafillou και Potari, 2010	Τεχνικοί επισκευής τηλεπικοινωνιακών βλαβών.
Hoyles et al. ,2010	Τεχνό-μαθηματικός εγγραμματισμός.
Hahn, 2011	Μαθητευόμενοι που έχουν εγγραφεί σε ένα πανεπιστημιακό μεταπτυχιακό πρόγραμμα εφαρμόζουν έννοιες στατιστικών στοιχείων στο πλαίσιο του χώρου εργασίας
Zevenbergen και Zevenbergen, 2009	Νέοι εργαζόμενοι στο λιανεμπόριο
Bakker, Akkerman, Wijers, Gravemeijer και Groenveld, 2012	Σπουδαστές επαγγελματικής εκπαίδευσης χρησιμοποιούν αναλογίες σε σχέση με τη συγκέντρωση και την αραίωση υγρών.
Bakker και Akkerman ,2013	Χρήση στατιστικών εννοιών κατά τη διάρκεια πρακτικής άσκησης σπουδαστών στο ιατρικό εργαστήριο δοκιμών.

2.2 Θεωρία Δραστηριότητας *(Activity Theory)*

Για πολύ καιρό η μάθηση θεωρούνταν ατομική διαδικασία. Παρόλα αυτά, τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί μια μεταστροφή των ερευνητών στις θέσεις που υποστηρίζουν πως η μάθηση προκύπτει μέσα από τη συμμετοχή του ατόμου σε κοινωνικό-πολιτισμικές ομάδες και την αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται μέσα σ' αυτές. Έτσι, η μάθηση ξεφεύγει από τη θεώρηση του δίπολου ερέθισμα-αντίδραση καθώς η νέα προσέγγιση αναγνωρίζει την ουσιαστική σχέση ανάμεσα στην πνευματική δραστηριότητα του ατόμου και την αλληλεπίδραση του με κοινωνικά, πολιτισμικά, ιστορικά και θεσμικά πλαίσια (Hoyles, 2001 ; Kieran, Forman, Sfard 2003). Οι θεωρίες αυτές έχουν επηρεάσει και την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών, αναγνωρίζοντας τη σημασία του κοινωνικό-πολιτισμικού πλαισίου ανάπτυξης της μάθησης και απόκτησης μαθηματικής

γνώσης (Van Oers, 1998; Jaworski & Potari, 2009). Η Θεωρία Δραστηριότητας είναι το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο καθώς αντιμετωπίζει τη γνωστική διαδικασία ως ενσώματη προκαλούμενη από δράσεις που στηρίζονται σε στόχους - κίνητρα και διαμεσολαβούνται με εργαλεία. Παράλληλα, ερμηνεύει της τακτικές του ατόμου και της ομάδας με συστηματική προσέγγιση.

Η παραπάνω θεωρητική προσέγγιση είναι σαφώς επηρεασμένη από τις θέσεις του Ρώσου παιδαγωγού Vygotsky και των συνεχιστών του Leont'ev και Luria. Ο Vygotsky επιχειρηματολογούσε υπέρ της ανάγκης ανάπτυξης της πλαισίου που οργανισμοί και περιβάλλον είναι μέρη της πολύπλοκου συστήματος που από κοινού δημιουργούν την ανθρώπινη συνείδηση μέσω της συμμετοχής σε κοινωνικές δραστηριότητες (Vygotsky, 1978 ; Luria 1979; Galperin 1992). Ο Vygotsky εισήγαγε τις διαμεσολαβητικές δράσεις ως μια έννοια για να εξηγήσει τη σημειωτική διαδικασία που επιτρέπει την ανάπτυξη της ανθρώπινης συνείδησης με αλληλεπίδραση τεχνουργημάτων, εργαλείων και κοινωνικών μέσων σε ένα περιβάλλον που έχει ως αποτέλεσμα τη νέα νοηματοδότηση του κόσμου. Οι σχέσεις μεταξύ των παραπάνω δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο. Στην αλληλεπίδραση αυτή τα άτομα δεν είναι παθητικοί συμμετέχοντες (Scribner, 1997).

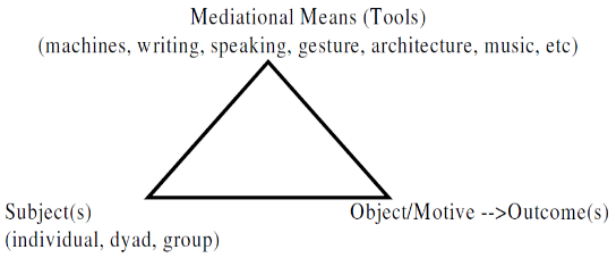
2.2.1 Δραστηριότητα

Σημαντικό ρόλο της κοινωνικό-πολιτισμικές θεωρίες παίζει η Δραστηριότητα (*Activity)*. Δραστηριότητα είναι σύμφωνα με τον Van Oers (2001, p. 71) «οποιαδήποτε ανθρώπινη ενέργεια που υποκινείται από ένα κίνητρο και οδηγείται σε ένα αντικειμενικό σκοπό, έχει δε της ρίζες της στην πολιτισμική ιστορία και η πραγματοποίησή της εξαρτάται από ειδικές στοχευμένες δράσεις». Εξάλλου, σύμφωνα με τον Daniels (2001, pp. 84-86) «δραστηριότητα είναι κάθε ανθρώπινη ενέργεια η οποία καθοδηγείται από ένα κίνητρο, διαθέτει μια συλλογική και δομημένη διαμόρφωση, έχει μια περίπλοκη διαμεσολαβητική δομή και συγχρόνως παρουσιάζει εξελικτική μορφή, δηλαδή χαρακτηρίζεται από συνεχείς αλλαγές και μεταμορφώσεις». Τέλος, η Δραστηριότητα επηρεάζεται από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες. Πολλοί ερευνητές θεωρούν μια εκπαιδευτική προσέγγιση της Δραστηριότητας μελετώντας μαθηματικές πρακτικές στο χώρο εργασίας (Pozzi et al. 1998; Jurdak & Shahin, 2001; Williams & Wake, 2007a).

Ο Leont'ev θεωρεί την προσανατολισμένη από το αντικείμενο Δραστηριότητα ως τη μονάδα ανάλυσης που οι ερευνητές ενδιαφέρονται να μελετήσουν. Αυτού του τύπου οι δραστηριότητες πρέπει να περιλαμβάνουν αλληλεπίδραση ανάμεσα στα υποκείμενα, τα αντικείμενα, τα κίνητρα, τις δράσεις, της στόχους, το κοινωνικό- ιστορικό περιεχόμενο και τις συνέπειες των δραστηριοτήτων. Ο Leont'ev ορίζει ως Δραστηριότητα τη μονάδα πραγματικότητας διαμεσολαβούμενης από πνευματικό αναστοχασμό που η πραγματική λειτουργία της είναι να προσανατολίζει το υποκείμενο στον κόσμο των αντικειμένων. Είναι, λοιπόν, η Δραστηριότητα ένα σύστημα με δομή, εσωτερικό μετασχηματισμό, συζήτηση και ανάπτυξη. Η εξέλιξη της Δραστηριότητας μπορεί ποιοτικά να αλλάξει της συμμετέχοντες, της στόχους της, τα κίνητρά της, το περιβάλλον ακόμα και την ίδια τη δραστηριότητα (Kaptelinin, 2005; Rogoff, 1995). Η προσέγγιση του Leont'ev επιτρέπει στους ερευνητές να ερμηνεύσουν την ανθρώπινη μάθηση ως μια σειρά προσανατολισμένων από το αντικείμενο δραστηριοτήτων, απομακρυσμένη από διανοητικές προσεγγίσεις (Bendy & Harris 2005; Lazarev 2004).

2.2.2 Οι τρεις γενιές της Θεωρίας Δραστηριότητας

Κεντρικό ρόλο στη Θεωρία Δραστηριότητας αποτελεί η διαμεσολάβηση (*mediation)* υπό τη Βιγκοτσκιανή προσέγγιση (Cole, 1996). Η βασική γραφική αναπαράσταση των διαμεσολαβητικών δράσεων είναι ένα τρίγωνο (Cole & Engestrom, 1993), *(εικόνα 1),* μέσω του οποίου ο Vygotsky συνδέει τα πολιτισμικά τεχνουργήματα με τις ανθρώπινες δράσεις προκειμένου να απαλλαγεί από το δίπολο ατομικό-κοινωνικό. Οι περισσότερες έρευνες της πρώτης περιόδου είναι στραμμένες στις ατομικές δραστηριότητες. Το υποκείμενο *(subject)* είναι το άτομο ή τα άτομα που συμμετέχουν στη δραστηριότητα. Τα διαμεσολαβητικά τεχνουργήματα, εργαλεία *(mediated artifact/ tool)* μπορούν να περιλαμβάνουν εργαλεία, τεχνουργήματα, κοινωνικούς εταίρους και προηγούμενη γνώση που συμβάλλουν στη διαμεσολαβητική δράση του υποκειμένου και στην απόκτηση

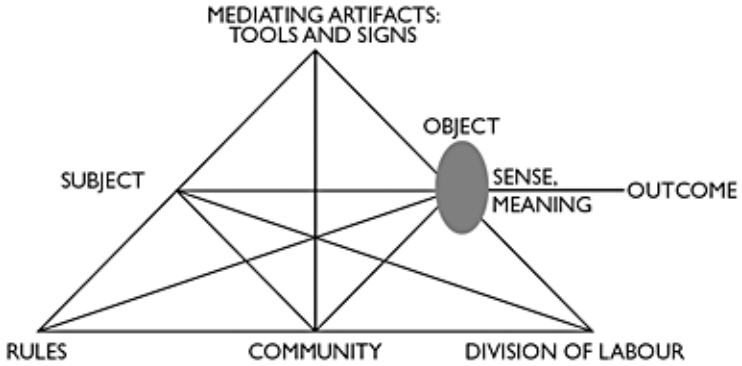


Εικόνα 1. Πρώτη Γενιά Θεωρίας Δραστηριότητας

εμπειρίας μέσω της. Το αντικείμενο *(object)* είναι ο στόχος της δραστηριότητας. Τα σύμβολα δεν αναπαρίστανται στο διαμεσολαβητικό τρίγωνο αλλά περιέχονται στα εργαλεία και τα τεχνουργήματα. Ως εργαλείο ο Vygotsky θεωρεί και τη γλώσσα.

Η δεύτερη γενιά αποδίδεται στο έργο του Leont'ev ο οποίος εστιάζει στην συλλογική διάσταση της ανθρώπινης δραστηριότητας μαζί με το έργο του Engestrom (1987) που εισηγήθηκε το μοντέλο του συστήματος δραστηριότητας και την ανάλυση συστημάτων δραστηριότητας *(Activity Systems Analysis)*, για να χαρτογραφήσει την παράλληλη αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων ή ομάδων ατόμων και του περιβάλλοντος και τον τρόπο που επηρεάζουν το ένα το άλλο. Αντιλαμβάνεται τη Δραστηριότητα ως ένα Σύστημα Δραστηριότητας (*Activity System)* και γραφικά αναπαρίσταται από μια σειρά τριγωνικών διαγραμμάτων. Βοηθά στην τεκμηρίωση ιστορικών σχέσεων ανάμεσα σε διάφορες δραστηριότητες αναγνωρίζοντας πως η προγενέστερη δραστηριότητα επηρεάζει τη μεταγενέστερη. Οι ερευνητές μπορούν να αναγνωρίσουν δραστηριότητες κρίσιμες για να απαντήσουν τα ερευνητικά ερωτήματα και να εξετάσουν τη διαδικασία παραγωγής συλλογικού νοήματος (Yamagata Lynch 2007).

Ο Engestrom συμπληρώνει το αρχικό τρίγωνο, *(εικόνα 2)* ώστε να μπορεί να ερευνήσει τα Συστήματα Δραστηριότητας στο μάκρο-επίπεδο της κοινότητας. Θεωρεί τα τεχνουργήματα ως λειτουργίες εργαλείων που δεν είναι «βολικά» στο υποκείμενο. Εφευρίσκονται, αποκτώνται, απορρίπτονται και αντικαθίστανται στη δραστηριότητα (Engestrom & Middleton 1996). Το διαμεσολαβητικό τρίγωνο συμπεριλαμβάνει ακόμα την κατανομή εργασίας *(division of labor)*, την κοινότητα *(community)* και τους κανόνες *(rules)*. Οι κανόνες αναφέρονται στους επίσημους ή ανεπίσημους κανονισμούς που μπορούν να περιορίσουν ή να διευρύνουν τα όρια των δραστηριοτήτων παρέχοντας στο υποκείμενο καθοδήγηση σε σωστές διαδικασίες και αποδεκτές αλληλεπιδράσεις με άλλα μέλη της κοινότητας

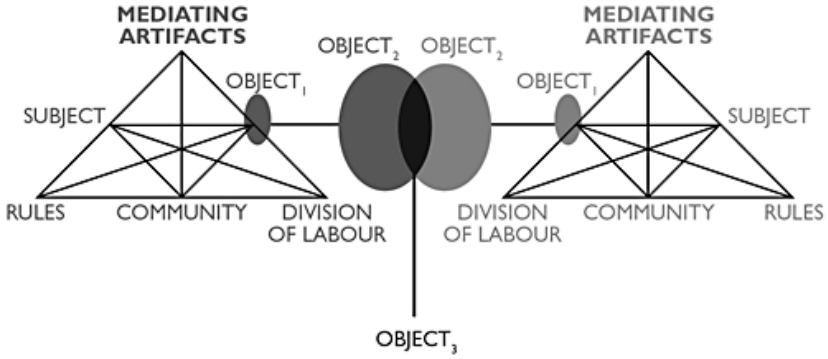


Εικόνα 2. Δεύτερη Γενιά Θεωρίας Δραστηριότητας

(Engestrom 1993). Η κοινότητα είναι η κοινωνική ομάδα στην οποία αναγνωρίζεται ότι ανήκει το υποκείμενο συμμετέχοντας στη δραστηριότητα. Η κατανομή εργασίας καθορίζει τον τρόπο που οι στόχοι της δραστηριότητας κατανέμονται μέσα στην κοινότητα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον δίνεται στην ανάλυση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των συμμετεχόντων στη δραστηριότητα. Οι ανθρώπινες δραστηριότητες και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών της κοινότητας, μπορούν να πυροδοτήσουν εντάσεις που οφείλονται σε συστημικές αντιφάσεις (Cole & Engestrom 1987, 1993). Αυτές οι εντάσεις *(tensions)* εμφανίζονται όταν οι συνθήκες μιας δραστηριότητας φέρνουν το υποκείμενο σε αντιφατική κατάσταση και μπορούν να αποκλείσουν την επίτευξη του στόχου, ή να αλλάξουν τη φύση της συμμετοχής του υποκειμένου στη δραστηριότητα όσο προσπαθεί να επιτύχει το αποτέλεσμα. Από την άλλη, μπορεί να έχουν το ρόλο της θετικής επίδρασης στην επίτευξη του τελικού σκοπού.

Προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα ο Engestrom (1999) θεωρεί ότι οι συμμετέχοντες και οι ερευνητές της Θεωρίας Δραστηριότητας πρέπει να ερευνήσουν της αλληλεπιδράσεις που διαμοιράζονται ανάμεσα σε πολλαπλές δραστηριότητες και στα γνωστικά σύνορα των δραστηριοτήτων αυτών, για να αναγνωρίσουν την πιθανή ανάπτυξη και τις αλλαγές τόσο της ανθρώπινες δραστηριότητες όσο και στα κοινωνικά συστήματα. Αναγνωρίζοντας οριοθετημένα, απομονωμένα συστήματα σε πραγματικά πλαίσια η ανθρώπινη δραστηριότητα και το περιεχόμενό της μπορεί να είναι δύσκολα κατανοητά και μη διαχειρίσιμα. Ο Engestrom κάνει λόγο για δύο ή περισσότερα ανεξάρτητα Συστήματα Δραστηριότητας τα οποίο μοιράζονται από κοινού το αντικείμενο ή τουλάχιστον ένα τμήμα του αντικειμένου της δραστηριότητας *(εικόνα 3)*. Τα αλληλεπιδρώντα Συστήματα Δραστηριότητας αποτελούν τη μονάδα ανάλυσης για την Τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας (Engestrom, 1999). Ο ερευνητής ενδιαφέρεται για τη διαδικασία του κοινωνικού μετασχηματισμού και



Εικόνα 3. Τρίτη Γενιά Θεωρίας Δραστηριότητας

περιλαμβάνει τη δομή της κοινωνικής ομάδας στην ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη τη συγκρουσιακή φύση της κοινωνίας. Δεν είναι μόνο το αντικείμενο, αλλά και το περιβάλλον που τροποποιεί τη διαμεσολαβούμενη δραστηριότητα. Βλέπει τη «στοχαστική διάθεση των προηγμένων μοντέλων και εργαλείων» ως «τρόπους εξόδου από εσωτερικές αντιφάσεις» που οδηγούν σε νέα συστήματα δραστηριότητα (Cole & Engestrom, 1993). Η Τρίτη γενιά της θεωρίας δραστηριότητας της προτάθηκε από Engestrom σκοπεύει να αναπτύξει εννοιολογικά εργαλεία προκειμένου να κατανοήσουμε τους διαλόγους, τις πολλαπλές οπτικές γωνίες και τα δίκτυα αλληλεπιδρώντων συστημάτων δραστηριότητας. Αντλεί ιδέες από τη διαλογικότητα και την πολυφωνία, προκειμένου να επεκτείνει το πλαίσιο της δεύτερης γενιάς της Θεωρίας Δραστηριότητας με την ιδέα των αλληλεπιδρώντων συστημάτων δραστηριότητας.

Πίνακας 2. Οι τρεις γενιές της Θεωρίας Δραστηριότητας

ΘΕΩΡΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		
Πρώτη Γενιά	Vygotsky	Έμφαση της ατομικές δραστηριότητες.
Δεύτερη Γενιά	Leont'ev 1987	Έμφαση στην αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων ή ομάδων ατόμων και του περιβάλλοντος.
Τρίτη Γενιά	Engestrom 1993	Έμφαση στην αλληλεπίδραση μεταξύ συστημάτων δραστηριότητας.

Συνοψίζοντας, ο Engestrom (1999) προτείνει πέντε βασικές αρχές για να περιγράψει τη Θεωρία Δραστηριότητας. Η πρώτη αρχή είναι ότι μια συλλογική, διαμεσολαβούμενη από τεχνουργήματα, προσανατολισμένη από το αντικείμενο δραστηριότητα λαμβάνεται ως η πρωταρχική μονάδα ανάλυσης. Κατευθυνόμενες από το στόχο ατομικές και ομαδικές δράσεις, γίνονται τελικά κατανοητές μόνο όταν ερμηνεύονται μέσα στο πλαίσιο ολοκληρωμένων συστημάτων δραστηριότητας. Τα συστήματα δραστηριότητας συνειδητοποιούν και αναπαράγουν τον εαυτό τους, παράγοντας δράσεις και ενέργειες.

Η δεύτερη αρχή είναι η πολυφωνία των συστημάτων δραστηριότητας. Ένα σύστημα δραστηριότητα είναι πάντα μια κοινότητα πολλαπλών απόψεων, παραδόσεων και ενδιαφερόντων. Ο καταμερισμός της εργασίας σε μια δραστηριότητα δημιουργεί

διαφορετικές θέσεις για τους συμμετέχοντες, οι οποίοι φέρουν της δικές τους διαφορετικές ιστορίες, ενώ και το ίδιο το σύστημα δραστηριότητας φέρει πολλαπλά στρώματα ιστορίας χαραγμένα στα αντικείμενα, τους κανόνες και τις συμβάσεις του. Η πολυφωνία είναι μια πηγή προβλήματος αλλά και καινοτομίας, απαιτώντας δράσεις μεταφράσεις και διαπραγματεύσεις.

Η τρίτη αρχή είναι η ιστορικότητα. Τα συστήματα δραστηριότητας παίρνουν μορφή και μετασχηματίζονται κατά τη διάρκεια μακρών χρονικών περιόδων. Η ιστορία πρέπει να μελετηθεί ως τοπική ιστορία της δραστηριότητας και των αντικειμένων της, αλλά και ως η ιστορία των θεωρητικών ιδεών και εργαλείων που έχουν διαμορφώσει τη δραστηριότητα.

Η τέταρτη αρχή είναι ο κεντρικός ρόλος των αντιθέσεων ως πηγών της αλλαγής και της ανάπτυξης. Λέγοντας αντιφάσεις *(tensions)* δεν εννοούμε προβλήματα ή συγκρούσεις. Αντιφάσεις είναι ιστορικά συσσωρευμένες διαρθρωτικές εντάσεις εντός και μεταξύ των Συστημάτων Δραστηριότητας. Οι δραστηριότητες είναι ανοικτά συστήματα. Όταν ένα Σύστημα Δραστηριότητας υιοθετεί ένα νέο στοιχείο από το εξωτερικό (για παράδειγμα, μια νέα τεχνολογία ή ένα νέο αντικείμενο), αυτό συχνά οδηγεί σε μια διακεκριμένη δευτερεύουσα αντίφαση. Κάποιο παλιό στοιχείο (για παράδειγμα, οι κανόνες ή ο καταμερισμός της εργασίας) συγκρούεται με το νέο.

Η πέμπτη αρχή διακηρύσσει τη δυνατότητα επεκτατικών μετασχηματισμών σε Συστήματα Δραστηριότητας. Καθώς οι αντιφάσεις του συστήματος δραστηριότητας κλιμακώνονται, κάποιοι μεμονωμένοι συμμετέχοντες αρχίζουν να αμφισβητούν και να αποκλίνουν από της καθιερωμένους κανόνες της. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτό μετασχηματίζεται σε συνεργατική και εσκεμμένη συλλογική προσπάθεια αλλαγής. Ο επεκτατικός μετασχηματισμός είναι ολοκληρωμένος όταν το αντικείμενο και το κίνητρο της δραστηριότητας αποκτούν νέο νόημα ώστε να αγκαλιάσουν ένα ριζικά ευρύτερο ορίζοντα δυνατοτήτων, σε σχέση με τον προηγούμενο τρόπο λειτουργίας της δραστηριότητας. Ο πλήρης κύκλος επεκτατικής μεταμόρφωσης μπορεί να γίνει κατανοητός ως ένα συλλογικό ταξίδι μέσα από τη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης της δραστηριότητας. Συνοπτικά οι βασικές αρχές παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 3. Βασικές αρχές της τρίτης γενιάς της Θεωρίας Δραστηριότητας

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΡΙΤΗΣ ΓΕΝΙΑΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ Engestrom
1. Η συλλογική δραστηριότητα λαμβάνεται ως η πρωταρχική μονάδα ανάλυσης.
2. Πολυφωνία των συστημάτων δραστηριότητας
3. Ιστορικότητα των συστημάτων δραστηριότητας
4. Οι εντάσεις είναι οι βασικές πηγές της αλλαγής και της ανάπτυξης
5. Δυνατότητα επεκτατικών μετασχηματισμών σε Συστήματα Δραστηριότητας.

2.3 Γνωστικά σύνορα

Όπως είδαμε στην τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας ο Engestrom μελετά τη διαμεσολάβηση ανάμεσα σε δύο διακεκριμένα Συστήματα Δραστηριότητας. Επεκτείνοντας την παραπάνω θεώρηση μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η διασύνδεση που επέφερε η παγκοσμιοποίηση έχει καταστήσει ασαφή και έχει επεκτείνει τα παραδοσιακά όρια, γεωπολιτικά, κοινωνικά και πολιτιστικά (Albrow, 1990 ; Giddens, 1990, 2000). Δεν είναι πλέον επαρκές για ένα άτομο να αποκτήσει την εμπειρία μέσα στο πλαίσιο του επαγγέλματος του, ούτε είναι δυνατόν να γνωρίζει κανείς τα πάντα, ακόμη και στο δικό του πεδίο. Έτσι, τα υποκείμενα καλούνται να ανταποκριθούν σε καταστάσεις στις οποίες δεν είναι γνωστικά εξοικειωμένα. Κατά τον Wenger (1998) η μάθηση είναι μια βιωματική διαδικασία κατά την οποία η γνώση παράγεται ενώ δρούμε, σκεφτόμαστε και συνομιλούμε με τους άλλους συμμετέχοντες. Συνεπώς, οι άνθρωποι αναζητούν τρόπους να μπορούν να κινούνται ανάμεσα σε διαφορετικές κοινωνικές και πολιτιστικές πρακτικές αποφεύγοντας τον θρυμματισμό και τη διαμερισματοποίηση της γνώσης τους (Hermans & Konopka, 2010). Τα παράλληλα πλαίσια, στα οποία αναγκάζονται να κινούνται, απαιτούν και παρέχουν τα μέσα για τη χρήση διαφορετικών και μερικές φορές αντικρουόμενων διαμεσολαβητικών εργαλείων και μοτίβων κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Tyomi-Grohn, Engestrom & Young, 2003). Για να το πετύχουν αυτό θα πρέπει να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα μεταξύ των δύο συστημάτων. Αυτό το νέο τοπίο πραγματογνωμοσύνης έχει χαρακτηριστεί ως πολλαπλή ενπλαισίωση (*polycontextuality)* και Διέλευση Γνωστικών Συνόρων (*Boundary Crossing)* (Tyomi-Grohn et. αl, 2003).

Ως Γνωστικά Σύνορα *(boundaries)* ορίζονται οι κοινωνικές πολιτισμικές διαφορές που οδηγούν τις δράσεις ή αλληλεπιδράσεις του ανθρώπου σε ασυνέχεια (Akkerman & Baker, 2011). Παρόμοια θεώρηση για τα γνωστικά σύνορα έχουν και οι Engestrom, (1995) και Star, (1989). Για να ερμηνευθεί η ασυνέχεια αυτή και η προσπάθεια αποκατάστασης της χρησιμοποιούνται οι όροι «διέλευση των γνωστικών συνόρων» (*boundary crossing)* και «αντικείμενα στα σύνορα» *(boundary objects)*. Η διέλευση των γνωστικών συνόρων αναφέρεται στη μετάβαση του ατόμου και την αλληλεπίδραση σε διάφορα γνωστικά πεδία (Suchman, 1994). Από την άλλη, τα αντικείμενα αναφέρονται σε τεχνουργήματα *(artifacts)* που δημιουργούν τις γέφυρες για να πραγματοποιηθεί η μετάβαση που προαναφέραμε (Star, 1989).

Οι Wenger (1998), Engestrom & Katkaainen (1995) ισχυρίζονται ότι τα γνωστικά σύνορα εμφανίζονται σε πολλές διαδικασίες στη σχολική τάξη και στον εργασιακό χώρο. Παρέχουν δε ευκαιρίες μάθησης καθώς αναγκάζουν το άτομο να αναθεωρήσει απόψεις και να κινηθεί πέρα από αυτό που τους είναι γνωστό ή συνηθισμένο. Οι επαγγελματίες μπορούν να διέλθουν τα όρια μεταξύ των διαφορετικών προοπτικών και των πρακτικών, ιδιαίτερα όταν εργάζονται ή συνεργάζονται ταυτόχρονα σε διάφορες πρακτικές.

Το παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο συνδέεται με δύο διαδεδομένες θεωρίες, την Θεωρία Δραστηριότητας *(cultural historical activity theory)* (Engestrom, 1987) και τη θεωρία που στηρίζεται στην ιδέα ότι μαθαίνουμε καλύτερα ό,τι λαμβάνει χώρα στο ίδιο πλαίσιο στο οποίο εφαρμόζεται *(situated learning theory)* (Wenger, 1998) και μπορούν δυναμικά να συνδεθούν με τη μάθηση. Στην τρίτη γενιά Θεωρίας Δραστηριότητας τα γνωστικά σύνορα ως αντίφαση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων συστημάτων δραστηριοτήτων είναι ζωτικής σημασίας παράγοντες για αλλαγή και εξέλιξη (Roth & Lee, 2007).

2.3.1 Οι κύριοι όροι

Ο όρος «Διέλευση γνωστικών συνόρων» *(boundary crossing)* αναφέρεται, όπως καταγράφηκε, στη διαπραγμάτευση ανάμεσα σε διαφορετικά πλαίσια και την ανάμειξη των περιεχομένων τους με αποτέλεσμα την επίτευξη μιας υβριδικής κατάστασης (Engestrom et. αl, 1995) Η διέλευση των γνωστικών συνόρων μπορεί να γίνει από ανθρώπους και αντικείμενα, με αλληλεπιδράσεις συμμετεχόντων σε διαφορετικές πρακτικές. Η «Διέλευση γνωστικών συνόρων» εισήλθε ως όρος για να περιγράψει πώς οι

επαγγελματίες αναγκάζονται να κινηθούν σε διαφορετικές περιοχές εφαρμογής της γνώσης τους, με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι και ως εκ τούτου χωρίς τα απαραίτητα γνωστικά προσόντα (Suchman, 1994).

Ο όρος «Ζώνη Συνόρων» (*boundary zone)* έχει προταθεί για να περιγράψει ένα μέρος όπου συνυπάρχουν τα στοιχεία από τις δύο Συστήματα Δραστηριότητας (Konkola, 2001). Η έννοια του Τρίτου Χώρου (*third space)* έχει προταθεί εναλλακτικά για να περιγράψει τη μάθηση που λαμβάνει χώρα όταν ιδέες από διαφορετικούς πολιτισμούς συναντώνται και να σχηματίσουν νέες έννοιες (Gutierrez, Baquedano- Lopez, και Tejeda, 1999). Μια Ζώνη Συνόρων χαρακτηρίζεται από πολλαπλά πλαίσια και πολυφωνία. Ως εκ τούτου, συνοδεύεται από εναλλακτικές ή ανταγωνιστικές προσεγγίσεις και τοποθετήσεις που παρέχουν ευκαιρίες για το μετασχηματισμό των συγκρούσεων και εντάσεων. Ο Engestrom (2001) συχνά αναφέρεται στη γνώση που παράγεται σε αυτές τις ζώνες ως Επεκτεταμένη Γνώση (*expansive learning).* Η επεκτεταμένη γνώση συνήθως ενεργοποιείται από την αμφισβήτηση των υφιστάμενων πρακτικών (Engestrom, 1999).

Επιπλέον, οι Star και Griesemer (1989) εισήγαγαν τον όρο του «αντικειμένου» στο γνωστικό σύνορο (*boundary object)* προκειμένου να δηλώσουν πως τα τεχνουργήματα μπορούν να γεφυρώσουν πρακτικές από διαφορετικά επαγγέλματα, δρώντας ως κοινός τόπος. «…Είναι αρκετά εύπλαστα ώστε να προσαρμόζονται στις τοπικές ανάγκες και περιορισμούς των επιμέρους περιοχών που εφαρμόζονται και, από την άλλη, αρκετά εύρωστα για να διατηρούν την ταυτότητά τους χρησιμοποιούμενα σε διαφορετικά πλαίσια. Είναι ασθενώς κατασκευασμένα για κοινή χρήση αλλά αποκτούν ισχυρή χρηστική αξία κατά τη χρήση τους σε συγκεκριμένα πλαίσια*…» (*Star & Griesemer, 1989). Διάφοροι όροι έχουν χρησιμοποιηθεί για να γίνει αναφορά στον τρόπο με τον οποίο η συνέχεια μεταξύ διαφορετικών πλαισίων μπορεί να εγκαθιδρυθεί, όπως μεσιτεία *(brokering),* αλληλεπίδραση *(boundary interaction),* πρακτικές *(boundary practices)* και ζώνες *(boundary zones)* γνωστικών συνόρων.

2.3.2 Διέλευση γνωστικών συνόρων στην εκπαιδευτική έρευνα

Η εκπαιδευτική έννοια που περισσότερο πλησιάζει την ιδέα της έρευνας πέρα από έναν ή περισσότερους απομονωμένους τομείς είναι η έννοια της μεταφοράς *(transfer).* Η μεταφορά είναι η μελέτη του τι μαθαίνουμε και ο τρόπος που αυτή η γνώση εφαρμόζεται

σε ένα διαφορετικό πλαίσιο (Saljo, 2003). Η βιβλιογραφία στη διέλευση γνωστικών συνόρων και στα αντικείμενα συνόρων έχει μια διαφορετική εστίαση από τη αυτή της μεταφοράς. Η μεταφορά αφορά συνήθως μονόπλευρες μεταβάσεις, που γίνονται μια φορά και έχουν επιπτώσεις σε ένα άτομο που κινείται από ένα πλαίσιο της μάθησης σε μια εφαρμογή. Από την άλλη, οι έννοιες διέλευσης γνωστικών συνόρων και τα αντικείμενα γνωστικών συνόρων χρησιμοποιούνται για να αναφερθούν σε αμφίδρομες ενέργειες και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συστημάτων ανάλυσης. Αυτές οι ενέργειες και αλληλεπιδράσεις στις περιοχές υποστηρίζεται ότι έχουν επιπτώσεις όχι μόνο στο άτομο αλλά και στις διαφορετικές κοινωνικές πρακτικές. Επιπλέον, ενώ η μεταφορά απαιτεί συνάφεια μεταξύ των πρακτικών, η διέλευση γνωστικών συνόρων αφορά την εύρεση παραγωγικών τρόπων συσχέτισης επικοινωνούντων διαφορετικών επαγγελματικών πρακτικών.

Οι Akkerman και Bakker, (2011) προτείνουν τη διαλεκτική *(dialogicality)* ως μια χρήσιμη έννοια για να υποστηρίξει τις παραπάνω αιτιάσεις. Η διαλεκτική είναι το οντολογικό χαρακτηριστικό του ανθρώπινου μυαλού που συλλαμβάνει, δημιουργεί και επικοινωνεί κοινωνικές πραγματικότητες μέσω της αμοιβαίας επικοινωνίας του ατόμου και των άλλων (Markova, 2003). Αυτή η θεώρηση είναι διαφορετική από τις περισσότερες θεωρίες που επικεντρώνονται σε μια κάθετη διαδικασία απόκτησης γνώσης ή δεξιότητας σε έναν συγκεκριμένο τομέα και δε λαμβάνουν υπόψη στοιχεία ανομοιογένειας και ποικιλομορφίας στη μαθησιακή διαδικασία. Εν κατακλείδι, τα γνωστικά σύνορα είναι δυναμικές ευκαιρίες απόκτησης γνώσης και όχι εμπόδια.

Οι τεχνολογικές καινοτομίες συνήθως περιλαμβάνουν οριζόντιες διελεύσεις συνόρων και αλληλεπιδράσεις στα σύνορα (Engestrom et. al., 1995; Wenger et a., 2002). Σε ορισμένες περιπτώσεις, η εισαγωγή και η δημιουργία νέων αντικειμένων στα γνωστικά σύνορα μπορεί να οδηγήσει σε βαθιές αλλαγές στο Σύστημα Δραστηριότητας. Ως εκ τούτου, τα υποκείμενα θα πρέπει να συμμετέχουν στην εκπαίδευση η οποία αναπτύσσει την ικανότητά τους να διέρχονται τα γνωστικά σύνορα, να διαπραγματεύονται το αντικείμενο ενός Συστήματος Δραστηριότητας (ακόμα και όταν είναι ασαφές), και να επιλύσουν τις αντιφάσεις με μέλη του πολλαπλών κοινωνικών και επαγγελματικών πρακτικών. Οι Engestrom και Vahaalo (1999) ισχυρίζονται ότι η μελέτη των γνωστικών συνόρων απαιτεί ανάλυση όλων των χαλαρά συνδεδεμένων συστημάτων τα οποία

εμπλέκονται. Αυτή η εκτεταμένη μελέτη της ανάλυσης συνδέει τα γνωστικά σύνορα με την τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας (Engestrom, 2001 Roth, 2007). Βασική θέση της θεωρίας είναι η θεώρηση των ατομικών στοχευμένων δράσεων στο πλαίσιο ενός ευρύτερου συλλεκτικού συστήματος δραστηριοτήτων μέσα στο οποίο αυτές νοηματοδοτούνται (Roth & Lee, 2007).

Οι περισσότερες έρευνες μελετούν τα γνωστικά σύνορα στον χώρο εργασίας και τον τρόπο που οι επαγγελματίες ή επαγγελματικές ομάδες συνεργάζονται κατά τη διάρκεια της εργασίας. Οι τομείς που κυρίως μελετώνται είναι η επιστημονικός και ακαδημαϊκός κόσμος, ο τομέας της υγείας, ο τεχνολογικός σχεδιασμός και η διδασκαλία. Ένας μικρότερος αριθμός ερευνών έχει επικεντρωθεί στα γνωστικά σύνορα στο σχολείο και αφορά τα γνωστικά σύνορα στον τρόπο έκφρασης και στις πεποιθήσεις από τη μια των μαθητών και από την άλλη των εκπαιδευτικών ή του σχολείου. Μετά τη δημοσίευση του βιβλίου *Between School and Work* (Tuomi-Grohn & Engestrom 2003) πολλές έρευνες ασχολήθηκαν με τον τρόπο που μαθητές διαχειρίζονται τα γνωστικά σύνορα ανάμεσα στο σχολείο και τον χώρο εργασίας. Τα γνωστικά σύνορα ερευνώνται ανάμεσα στην επαγγελματική εκπαίδευση και στις επαγγελματικές πρακτικές (Harreveld & Smith, 2009), μεταξύ δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και επιστημονικών πρακτικών (van Eijck Hsu & Roth, 2009), ανάμεσα στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών και εκπαιδευτικών πρακτικών (Gorodetsky & Barak, 2008) καθώς και μεταξύ ανώτερης εκπαίδευσης και επαγγελματικών χώρων (Cristiansen & Rump, 2008). Οι παραπάνω έρευνες δηλώνουν το γεγονός πως οι μαθητές πρέπει να συνδυάσουν διαφορετικές αξίες και νόρμες και να βρουν τη δικιά τους θέση στον κοινωνικό- επαγγελματικό χώρο.

2.3.3 Διαδικασίες νοηματοδότησης κατά τη διέλευση των γνωστικών συνόρων

Αναγνώριση *(Identification)*

Όλες οι έρευνες εστιάζουν στο γεγονός ότι η διέλευση γνωστικών συνόρων, ως διαδικασία στην οποία οι προηγούμενες γραμμές οριοθεσίας μεταξύ των πρακτικών, είναι αβέβαιες ή αποσταθεροποιημένες, λόγω της ασυνέχειας ή λόγω των αυξανόμενων ομοιοτήτων ή της επικάλυψης μεταξύ των πρακτικών. Οι διαδικασίες αφορούν τον προσδιορισμό της ταυτότητας του πυρήνα κάθε ενός από τους συντρέχοντες τομείς, οι

οποίες οδηγούν στον επαναπροσδιορισμό και την εκ νέου επίγνωση των τομέων αυτών. Αυτό που είναι χαρακτηριστικό στις διαδικασίες αναγνώρισης είναι ότι τα όρια μεταξύ των πρακτικών αντιμετωπίζονται και αναδημιουργούνται, χωρίς απαραιτήτως να υπερνικούν τις ασυνέχειες. Η δυνατότητα μάθησης εμφανίζεται ως μια ανανεωμένη παραγωγή νοήματος διαφορετικών πρακτικών.

Η αναγνώριση περιλαμβάνει δύο διαδικασίες. Αρχικά, η διαφοροποίηση *(othering)* διαδικασία κατά την οποία έχουμε την αναγνώριση μιας πρακτικής σκιαγραφώντας πώς αυτή διαφέρει από μια άλλη (Hughes & Greenhough, 2008). Επιπλέον, γίνεται λόγος για νομιμοποίηση της συνύπαρξης *(legitimating coexistence)*. Περιγράφοντας τον παραπάνω όρο οι Bogenrieder και van Baalen (2007) αναφέρουν πως οι άνθρωποι όταν εργάζονται ταυτόχρονα σε διαφορετικές ομάδες, πρέπει να νομιμοποιήσουν τη συμμετοχή τους επιδιώκοντας την αποδοχή τους στις διάφορες ομάδες.

Συντονισμός *(Coordination)*

Οι έρευνες αναλύουν τον τρόπο που τα μέσα και οι διαδικασίες επιτρέπουν σε ποικίλες πρακτικές να συνεργάζονται ικανοποιητικά σε διαφορετικά εργασιακά περιβάλλοντα (Star, 2010). Σ' αυτές τις περιπτώσεις, ο διάλογος μεταξύ των επιμέρους συμμετεχόντων επιτυγχάνεται και είναι απαραίτητος για την ομαλή εξέλιξη της δράσης. Η δυναμική του συντονισμού στηρίζεται όχι στην ανάπλαση αλλά στην υπέρβαση των συνόρων, από την άποψη ότι η επιθυμητή συνέχεια των πρακτικών επιτυγχάνεται διευκολύνοντας απροβλημάτιστες μελλοντικές διαδρομές μεταξύ τους. Στα πλαίσια του διαλόγου έχουν καταγραφεί τέσσερις επιμέρους διαδικασίες.

Συντονισμός επικοινωνίας *(communicative connection)*. Η επικοινωνία που είναι απαραίτητη μεταξύ των διαφορετικών πρακτικών (Landa, 2008) μπορεί να επιτευχθεί με αντικείμενα - όργανα *(instrumentalities)* που μοιράζονται από κοινού τα διάφορα μέρη (Christansen & Varnes, 2007).

Προσπάθειες μετάφρασης *(efforts of translation)* μεταξύ διαφορετικών χώρων. Στις προσπάθειες αυτές συμβάλλουν τα αντικείμενα τα οποία έχουν ισχυρή σύνδεση με την ασάφεια των γνωστικών συνόρων. Η μετάφραση επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη διαθεματικότητα όσο και την ποικιλία των πιθανών πεποιθήσεων.

Ενίσχυση διαπερατότητας συνόρου *(enhancing boundary permeability).* Πολλές φορές οι συμμετέχοντες σε διαφορετικές πρακτικές δεν αντιλαμβάνονται τη διαφορετικότητα των διαδικασιών απλώς επειδή οι δράσεις και αλληλεπιδράσεις εξελίσσονται ομαλά, χωρίς να απαιτούνται προμελετημένες παρεμβάσεις (Bimber, Flanagin, & Stohl, 2005) .

Αυτοματοποίηση *(routinization).* Είναι η επινόηση διαδικασιών μέσω των οποίων ο συντονισμός γίνεται αυτόματος ή διαδικαστικού χαρακτήρα. Αν και τα αντικείμενα ενισχύουν την αυτοματοποίηση μπορούν ακόμα να παραμείνουν εύπλαστα στη χρήση τους εξαιτίας των ερμηνειών που τους δίνουν τα άτομα με αναφορά στις ιστορικές και τις τωρινές σχέσεις μεταξύ των πρακτικών.

Αναστοχασμός *(reflection)*

Οι σχετικές έρευνες δίνουν έμφαση όχι μόνο στην κατανόηση αλλά και στη σχηματοποίηση των διαφορετικών θεωρήσεων. Οι Boland και Tenkasi (1995) στις έρευνές τους κάνουν λόγο για κατασκευή θεωρήσεων *(perspective making)* ως τη σαφή και πλήρη κατανόηση και γνώση ενός συγκεκριμένου θέματος. Αυτή η διαδικασία επιτυγχάνεται καθώς τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα διευκολύνουν την επικοινωνία ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα δραστηριοτήτων, καθιστώντας σαφείς τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις που κινητοποιούνται κατά την ερμηνεία του αντικειμένου (Hoyles, Bakker, Kent, & Noss ,2007) .

Επιπλέον, τα γνωστικά σύνορα μας επιτρέπουν μια εσωτερική ματιά στον κόσμο μας μέσα από τις θεωρήσεις ενός άλλου διαφορετικού κόσμου (Williams & Wake, 2007). Ο όρος που χρησιμοποιούν οι Boland και Tenkasi (1995) είναι «υιοθέτηση θεωρήσεων» *(perspective taking).* Υποστήριξαν ότι τα αντικείμενα στα γνωστικά όρια είναι τεχνουργήματα που μπορούν να χρησιμεύσουν ως μια υιοθέτηση προοπτικής για εκείνους που εμπλέκονται, στα πλαίσια ενός διαφορετικού από το δικό τους κόσμου.

Και οι δύο διαδικασίες, αναγνώριση και αναστοχασμός, είναι διαλογικές και δημιουργικές. Έχουμε επί της ουσίας εμπλουτισμό των θεωρήσεων για τις πρακτικές που συμμετέχουμε. Ενώ η αναγνώριση εστιάζει στη νέα ερμηνεία και την αναδόμηση της παρούσας κατάστασης ο αναστοχασμός έχει ως αποτέλεσμα ένα εκτεταμένο πεδίο

θεωρήσεων μέσω του οποίου κατασκευάζεται νέα ταυτότητα η οποία συνδέεται με νέες πρακτικές.

Μετασχηματισμός *(transformation)*

Οδηγεί σε προφανείς αλλαγές στις παρούσες πρακτικές ακόμα και στη δημιουργία νέων, τις οποίες και ονομάζουμε πρακτικές στα γνωστικά σύνορα *(boundary practices).* Αρχικά, στις έρευνες γίνεται λόγος για τη διαδικασία της αντιπαράθεσης *(confrontation)* η οποία οφείλεται σε ελλείψεις ή προβλήματα που αναγκάζουν τα άτομα που εμπλέκονται στις πρακτικές να αλλάξουν τις τακτικές τους. Αν τα κείμενα μοντέλα παραμείνουν αμετάβλητα, τότε τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα δεν αναγνωρίζονται ως τέτοια (Buxton et. al. 2005). Σύμφωνα με τα 2ο και 3ο μοντέλο Θεωρίας Δραστηριότητας μπορούν να εμφανιστούν αντιπαραθέσεις και στη δομή των συστημάτων δραστηριοτήτων, αντανακλώντας εντάσεις και συγκρούσεις μέσα και ανάμεσα στα συστήματα.

Μια δεύτερη διαδικασία είναι η αναγνώριση κοινόχρηστου χώρου προβλημάτων (*recognizing a shared problem space).* Είναι μια διαδικασία που έρχεται σε αντιδιαστολή με την προηγούμενα αναφερόμενη διαδικασίας αντιπαράθεσης. Το αντικείμενο ερμηνεύεται σύμφωνα με τη Θεωρία Δραστηριότητας, ως το κίνητρο για την προκύπτουσα δραστηριότητα και η αφορμή για από κοινού δραστηριότητες ανάμεσα σε διαφορετικά Συστήματα Δραστηριοτήτων (Edwards & Fowler, 2007). Έτσι έχουν είτε τοπικό χαρακτήρα στην κορυφή του τριγώνου που περιγράφει το 2ο μοντέλο Θεωρίας Δραστηριότητας (Star), είτε ως του εν δυνάμει από κοινού κατασκευασμένου αντικειμένου ανάμεσα σε δύο Συστήματα Ανάλυσης (Engestrom, 2001).

Παραγωγή μεικτών υβριδικών διαδικασιών *(hybridization).* Κατά τη διέλευση γνωστικών συνόρων προκύπτουν υβριδικές διαδικασίες. Συστατικά από διαφορετικές περιοχές συνδυάζονται σε κάτι νέο και μη σύνηθες. Αυτό μπορεί να είναι νέο εργαλείο ή σύμβολο, όπως και η συγκρότηση μιας νέας έννοιας (Engestrom et. al, 1995) ή ένα νέο αναλυτικό μοντέλο (Postlethwaite, 2007). Ακόμα μπορεί να σχηματοποιηθεί μια εντελώς νέα πρακτική, όπως η συνεργασία σχολείου και χώρου εργασίας (Konkola et. al, 2007) ή ένα διεπιστημονικό πεδίο (Palmer, 1999). Έτσι, σταδιακά προκύπτουν νέοι χώροι με τα δικά τους γνωστικά σύνορα.

Κρυσταλλοποίηση *(Crystallization).* Η διαδικασία αυτή δηλώνει πως ο μετασχηματισμός είναι πιο ακραίας εκδοχής από ό,τι στις προηγούμενες μορφές της. Είναι κάτι διαφορετικό να δημιουργήσεις κάτι υβριδικό και τελείως άλλο να το ενσωματώσεις στις καθημερινές πρακτικές. Ο Wenger, (1998) αναφέρει τον όρο πραγμοποίηση (*reification)* που σημαίνει ενσωμάτωση εμπειρίας σε αντικείμενα. Τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα είναι παραδείγματα μιας τέτοιας πραγμοποίησης. Η αποκρυστάλλωση, επιπλέον, λαμβάνει χώρα στην ανάπτυξη νέων ρουτίνων ή διαδικασιών που ενσωματώνουν ό,τι νέο δημιουργήθηκε και τη νέα γνώση που αποκτήθηκε (Corodetsky & Barak, 2008). Αν και δίνεται έμφαση στην αποκρυστάλλωση σε πολλές έρευνες ως κύριος στόχος του μετασχηματισμού, σπάνια επιτυγχάνεται.

Διατήρηση μοναδικότητας συντρεχουσών πρακτικών *(maintaining uniqueness of the intersecting practices)* Σύμφωνα με τον Palmer (1999) η διεπιστημονική έρευνα απαιτεί μια ισορροπία ανάμεσα στην καθιερωμένη κεντρική γνώση και τη νέα. Καθώς οι ερευνητές εξερευνούν νέες περιοχές, δεν εγκαταλείπουν την εστίαση στην επιστήμη τους. Οι περισσότεροι έχουν ατζέντα πολλαπλών θεωρήσεων. Παρόλα αυτά στηρίζονται σε μια κεντρική εξειδικευμένη γνώση καθώς κινούνται προς μια νέα υβριδική κατάσταση.

Συνεχείς συνδυασμένες εργασίες στα γνωστικά σύνορα *(continuous joint work at the boundary).* Είναι απαραίτητες για να διατηρηθεί η παραγωγική διαδικασία κατά τη διέλευση των γνωστικών συνόρων. Σε αυτή τη διαδικασία είναι που ο μετασχηματισμός δείχνει να είναι τελείως αντίθετος του συντονισμού, όπου η εστίαση είναι η εγκαθίδρυση τρόπου διέλευσης των γνωστικών συνόρων χωρίς δυσκολίες (Bimber et. Al, 2005).

Περισσότερο από όλες τις διαδικασίες ο μετασχηματισμός απαιτεί διάλογο και συνεργασία. Εκτός από την έλλειψη της αποκρυστάλλωσης η έλλειψη συνεχούς συνδυασμένης εργασίας μπορεί να ερμηνεύσει την αδυναμία παραγωγής μόνιμου μετασχηματισμού κατά τα ευρήματα πολλών εμπειρικών ερευνών. Όπως τονίζουν οι Edwards και Mutton (2207), μόλις η νέα διαδικασία ενταχθεί ως εργαλείο στο σύστημα δραστηριότητας αντί για συνδετικό αντικείμενο, η δυναμική της χάνεται. Συνοπτικά αναφέρουμε τους μηχανισμούς στα γνωστικά σύνορα στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4. Διαδικασίες νοηματοδότησης κατά τη διέλευση Γνωστικών Συνόρων.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΛΕΥΣΗ ΓΝΩΣΤΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΩΝ	
Αναγνώριση	**Αναστοχασμός**
Διαφοροποίηση	Κατασκευή θεωρήσεων
Νομιμοποίηση συνύπαρξης	Υιοθέτηση θεωρήσεων
Συντονισμός	**Μετασχηματισμός**
Συντονισμός επικοινωνίας	Αντιπαράθεση
Προσπάθειες μετάφρασης	Αναγνώριση κοινόχρηστου χώρου προβλημάτων
Ενίσχυση διαπερατότητας συνόρου	Παραγωγή υβριδικών διαδικασιών
Αυτοματοποίηση	Κρυσταλλοποίηση
	Διατήρηση μοναδικότητας συντρεχουσών πρακτικών
	Συνεχείς συνδυασμένες εργασίες στα γνωστικά σύνορα

2.4 Αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα

Εκτός όμως από τα άτομα στη βιβλιογραφία γίνεται αναφορά και για αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα. Οι Star και Griesemer (1989) αναγνωρίζουν το αντικείμενο στα γνωστικά σύνορα ως ένα αντικείμενο που έχει διαφορετικό νόημα σε διαφορετικά Συστήματα Δραστηριότητας ενώ διατηρεί κοινή ουσία. Τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα μπορεί να είναι αφηρημένα νοητικά ή υλικά. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, αυτά έρχονται να γεφυρώσουν διαφορετικά Συστήματα Δραστηριότητας, ενισχύοντας την μεταξύ τους επικοινωνία δρώντας ως κοινός τόπος. Δεν είναι, ωστόσο, χρήσιμα σε οποιοδήποτε επίπεδο ή κλίμακα χρήσης ή εκτός της θεώρησης ολόκληρου του μοντέλου.

Στο άρθρο των Star και Griesemer (1989) το μοντέλο των αντικειμένων στα γνωστικά σύνορα χαρακτηρίζεται από τρεις διαστάσεις. Αρχικά, γίνεται λόγος για ερμηνευτική ευελιξία. Η διαφοροποίηση των αντικειμένων, ανάμεσα στις διάφορες πρακτικές, οφείλεται στο διαφορετικό τρόπο ερμηνείας και χρήσης του οργάνου. Η

διάσταση αυτή αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο της κοστρουκτιβιστικής προσέγγισης, ενώ ταυτόχρονα έχει γίνει σχεδόν συνώνυμη με τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα. Οι δύο άλλες διαστάσεις είναι η υλική-οργανωτική δομή τους και το ερώτημα κατά πόσο χαρακτηρίζονται από διακριτότητα. Η μορφή που παίρνουν δεν είναι αυθαίρετη. Είναι οργανικές δομές που αναπτύχθηκαν εξαιτίας απαίτησης πληροφοριών και συνεργασίας.

Τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα, λοιπόν, είναι τεχνουργήματα που κάνουν ευκρινή τα νοήματα και απευθύνονται σε ποικίλες προοπτικές. Δεν είναι όμως μόνο αυτή η ευελιξία που τα χαρακτηρίζει. Είναι οργανικές διατάξεις που επιτρέπουν σε διαφορετικές ομάδες να συνεργάζονται στηριζόμενοι σε μια μπρος πίσω κίνηση ανάμεσα σε χαλαρά δομημένη χρήση στην εργασία δια μέσου επαγγελματικών περιοχών και καλά δομημένη χρήση στην τοπική εργασία (Star, 2010). Ως εκ τούτου περικλείουν πολλαπλά νοήματα και προοπτικές. Τονίζεται ότι τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα είναι μόνο μερικώς επικοινωνιακά και, επομένως, δεν μπορούν ποτέ να αποκαταστήσουν πλήρως την επικοινωνία και τη συνεργασία. Ο κίνδυνος με τα τεχνουργήματα είναι ότι αυτά, ειδικά εξαιτίας της «υλικής και διαδικαστικής τους φύσης» (Star, 2010), εμφανίζονται να είναι ανεξάρτητα αντικείμενα. Επιπλέον, έχει υποστηριχθεί ότι τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα μπορούν να προσλάβουν διαφορετικές σημασίες, καθώς μπορεί κάποια περίοδο να επιτρέπουν την αλληλεπίδραση και συνεργασία μεταξύ διαφορετικών πεδίων, ενώ κάποια άλλη περίοδο να χάνουν αυτή τη λειτουργία (Barrent & Oborn, 2010).

Οι Kent, Noss, Guile, Hoyles, και Bakker (2007) αναφέρονται σε μια ιδιαίτερη κατηγορία αντικειμένων στα γνωστικά σύνορα. Κάνουν λόγο για ανάγκη να παραχθούν εργαλεία και δραστηριότητες με στόχο την ανάπτυξη στους εργαζομένους τεχνό-μαθηματικού γραμματισμού, ανακατασκευάζοντας τα τεχνουργήματα των χώρων εργασίας με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων ανοικτών για διερεύνηση και συζήτηση. Η διέλευση γνωστικών συνόρων λαμβάνει χώρα σε δύο κατευθύνσεις. Από τη μια, αποκτάται γνώση για τις επαγγελματικές πρακτικές συζητώντας για τους σκοπούς των τεχνουργημάτων. Από την άλλη, οι επαγγελματίες αποκτούν τεχνό-μαθηματικές δεξιότητες και αναπτύσσουν διαφορετική συνειδητοποίηση του επιστημολογικού υπόβαθρου των τεχνουργημάτων- αντικειμένων στα γνωστικά σύνορα.

Οι Hoyles et al. (2010) μελέτησαν πώς ενισχυμένες μαθηματικές ή στατιστικές πρακτικές στις επαγγελματικές διαδικασίες, μπορούν να βελτιώσουν την παραγωγική

διαδικασία και επικοινωνία με τους πελάτες. Δημιούργησαν και χρησιμοποίησαν τεχνό-ενισχυμένα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα *(technology-enhanced boundary objects TEBOs)*. Τα TEBOs είναι επανασχηματισμοί τεχνουργημάτων από χώρους εργασίας σχεδιασμένα να βοηθήσουν τους εργαζόμενους να καταλάβουν κάποια από τα μαθηματικά που κρύβονται στα τεχνουργήματα. Είναι εργαλεία σε υπολογιστές που αναμειγνύουν περιεχόμενα από τα μαθηματικά και τους χώρους εργασίας για να διευκολύνουν τη διέλευση γνωστικών συνόρων (Bakker, Kent, Hoyles, & Noss, 2011), ή οπτικές αναπαραστάσεις των στατιστικών γραφικών παραστάσεων που χρησιμοποιούνται στις στρατηγικές βελτίωσης βιομηχανικής διαδικασίας (Bakker, Kent, Noss, & Hoyles, 2009).

Τέλος, τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα ως μαύρα κουτιά *(black boxes)* τείνουν να περνούν απαρατήρητα ή να θεωρούνται δεδομένα εργαλεία διαμεσολαβήσεις αλλά αν μελετηθούν προσεκτικά μπορούν να παρέχουν ευκαιρίες μάθησης (Williams & Wake, 2007). Σύμφωνα με τους ερευνητές η Θεωρία Δραστηριότητας παρέχει καλύτερη ενόραση στον τρόπο που τα μαθηματικά αποκρύπτονται από μαύρα κουτιά καθώς ενσωματώνονται και αποκρύπτονται στους χώρους εργασίας προκαλώντας κενά αναγνώρισης και δυσκολίες στους εξωτερικούς παρατηρητές. Περιγράφει τις εκτεταμένες κατανεμημένες και συντονισμένες εργασίες και τα απαιτούμενα δίκτυα εργαλείων, πρακτικών, άρθρων και επιστημονικών κοινοτήτων που χρειάζονται για να παραχθούν και να διατηρηθούν.

2.5 Μαθηματικά και μαύρα κουτιά

Ειδικότερα, όσο αφορά την έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση υπάρχουν αρκετές έρευνες όπως των Pozzi et. Al (1998) που κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι απαιτούνται αυξημένες μαθηματικές γνώσεις όταν στο χώρο εργασίας παρουσιάζεται διάσπαση τυποποιημένων διαδικασιών. Ταυτόχρονα, πολλοί εργοδότες κάνουν λόγο για το γνωστικό κενό που εμφανίζεται όταν νέοι εργαζόμενοι έρχονται σε επαφή με το χώρο εργασίας και προσπαθούν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της επαγγελματικής τους πρακτικής. Επίσης, παρατηρήθηκε η δυσκολία στην αναγνώριση του μαθηματικού περιεχομένου σε δραστηριότητες στο χώρο εργασίας γιατί αυτό περιορίζεται ή αποκρύπτεται από μαύρα κουτιά (black boxes) (Hall et. Al, 2002). Παράλληλα, ο όρος «μαύρα κουτιά» έχει χρησιμοποιηθεί για να αποτυπώσει πώς η τεχνολογία μπορεί να αποκρύψει το μαθηματικό

περιεχόμενο ενώ παράλληλα οι ερευνητές επιδίωξαν να ερμηνεύσουν τον τρόπο που η τεχνολογία μπορεί να εξυπηρετήσει και ως μέσο για να διαφωτίσει τι κρύβεται στα μαύρα κουτιά (Noss, Hoyles et. Al, 1996, 2002).

Επίσης, στην έρευνα συχνά τα μαύρα κουτιά συνδέονται με τη Θεωρία Δραστηριότητας και το μηχανισμό της κρυσταλλοποίησης (crystallization) που συνδέεται με τους μετασχηματισμούς που παρατηρούνται κατά τη διέλευση των γνωστικών συνόρων. Οι Williams και Wake, (2007) διαπίστωσαν ότι υπάρχουν δύο διαδικασίες παραγωγής μαύρων κουτιών. Η πρώτη αποκρυσταλλώνει τη μαθηματική εργασία απομονώνοντας την από την δραστηριότητα στα όργανα και εργαλεία. Αυτά χρησιμεύουν ως τα αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα τόσο ιστορικά στο σχεδιασμό τους όσο και στην τωρινή χρήση τους από τους χειριστές. Συνεπώς, η διαμεσολαβημένη μέσω εργαλείων εργασία ενεργοποιεί ένα μαθηματικό είδος μαθηματικών, αυτά των εργασιακών χώρων που διαμεσολαβούνται από εξατομικευμένες νόρμες, η μαθηματική προέλευση και η σημασία των οποίων μπορεί ακόμη και να είναι χαμένη σε βάθος χρόνου. Το δεύτερο είδος μαύρου κιβωτίου περιλαμβάνει τους εργαζομένους σε ένα υποσύστημα που απομονώνεται λίγο πολύ μέσα στο ευρύτερο σύστημα από την κατανομή της εργασία και τους κανόνες που είναι σε ισχύ.

Οι Williams και Wake, (2007) θεωρούν ότι υπάρχουν γενετικές σχέσεις μεταξύ αυτών των δύο ιστορικών διαδικασιών παραγωγής μαύρων κουτιών. Η απόκρυψη των μαθηματικών μπορεί να περιλαμβάνει μια ιστορική πρόοδο της αυτοματοποίησης σχετική με την κατανομή εργασίας και τους κανόνες. Αρχικά εμφανίζεται μια μορφή γνώσης που προκύπτει από τον καταμερισμό της εργασίας και μέσω των δυναμικών σχέσεων της παρούσας κοινότητας, έπειτα αυτή ρυθμίζεται όλο και περισσότερο από τους κανόνες, αποκρυσταλλώνεται στα τεχνουργήματα που ελέγχουν τις διαδικασίες, και, τελικά, οι διαδικασίες αυτοματοποιούνται στις μηχανές. Αφετέρου, δια μέσου του χρόνου η ανάπτυξη των αποδοτικών μηχανών αποτελεί απαραιτήτως μια κατανομή της εργασίας μεταξύ εκείνων που σχεδιάζουν, επισκευάζουν τις μηχανές και εκείνων που τις χρησιμοποιούν. Επιπλέον, ο Straesser, (2000) κάνει λόγο για την ύπαρξη μιας αυξανόμενης μαθηματικής κοινωνικότητας κρυμμένης στα μαύρα κουτιά, ενώ παράλληλα επαγγελματίες και μαθηματικοί κάνουν λόγο για απόκρυψη των μαθηματικών και «εξαφάνισή» τους από τους χώρους εργασίας.

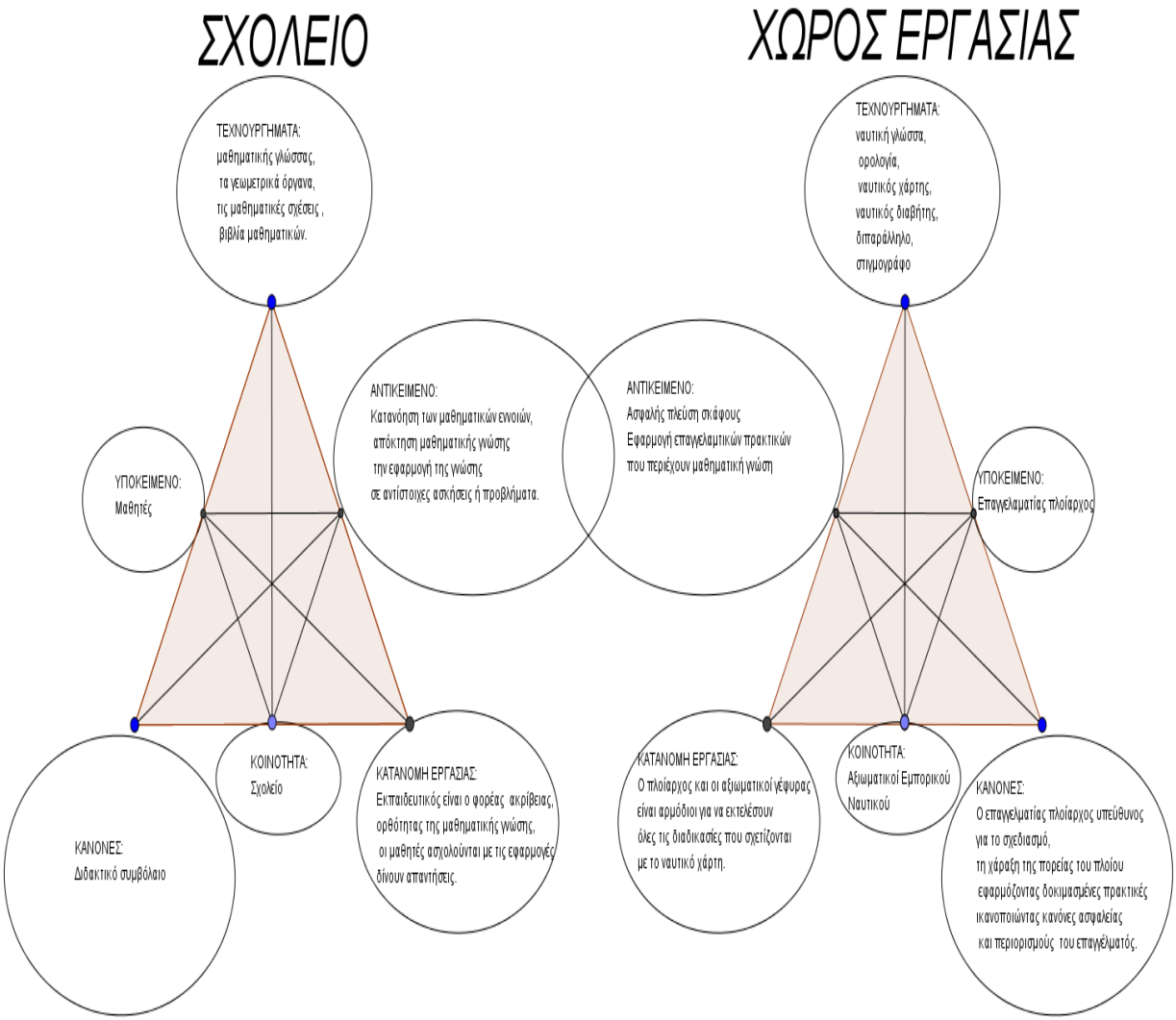
2.6 Η παρούσα έρευνα

Στην παρούσα έρευνα υιοθετούμε το μοντέλο της τρίτης γενιάς της Θεωρίας Δραστηριότητας. Η τρίτη γενιά Θεωρίας Δραστηριότητας συνδέεται άμεσα με τη διέλευση των γνωστικών συνόρων (*Boundary Crossing)* ανάμεσα στα αλληλοεπιδρώντα Συστήματα Δραστηριότητας και τις ευκαιρίες μάθησης που αυτή προσφέρει, όπως η διέλευση αυτή προσεγγίζεται από τον Engestrom. Πιο συγκεκριμένα, από τη μια έχουμε μέλη της σχολική κοινότητας και από την άλλη την επαγγελματική κοινότητα των πλοιάρχων εμπορικού ναυτικού *(εικόνα 4).* Τα υποκείμενα των δύο συστημάτων είναι οι μαθητές και ο πλοίαρχος αντίστοιχα. Όσον αφορά τα εργαλεία- τεχνουργήματα για το σύστημα των μαθητών αναγνωρίζουμε ως τέτοια τη χρήση μαθηματικής γλώσσας, τα γεωμετρικά όργανα, τις μαθηματικές σχέσεις και έννοιες καθώς και τα βιβλία μαθηματικών. Από την άλλη, ο επαγγελματίας χρησιμοποιεί ναυτική γλώσσα, ορολογία, το ναυτικό χάρτη, το ναυτικό διαβήτη, το διπαράλληλο και το στιγμογράφο. Αναφορικά με τους κανόνες οι μαθητές υπόκεινται στους όρους του διδακτικού συμβολαίου της σχολικής τάξης. Ο επαγγελματίας πλοίαρχος είναι υπεύθυνος για το σχεδιασμό και τη χάραξη της πορείας του πλοίου εφαρμόζοντας δοκιμασμένες πρακτικές του χώρου εργασίας και ικανοποιώντας κανόνες ασφαλείας και περιορισμούς της φύσης του επαγγέλματός του. Επίσης, σε σχέση με την κατανομή εργασίας για τους μαθητές ο εκπαιδευτικός είναι ο φορέας της ακρίβειας και της ορθότητας της μαθηματικής γνώσης, ενώ οι ίδιοι ασχολούνται με τις εφαρμογές που τους παρουσιάζονται προσπαθώντας να δώσουν τις σωστές απαντήσεις. Για τον επαγγελματικό χώρο ο πλοίαρχος και οι αξιωματικοί γέφυρας είναι αρμόδιοι για να εκτελέσουν όλες τις διαδικασίες που σχετίζονται με το ναυτικό χάρτη. Τέλος, όσον αφορά το τελικό σκοπό των δύο συστημάτων, οι μαθητές στοχεύουν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, την απόκτηση μαθηματικής γνώσης και την εφαρμογή της γνώσης σε αντίστοιχες ασκήσεις ή προβλήματα. Ο επαγγελματίας έχει ως τελικό σκοπό τον ασφαλή πλου του σκάφους χρησιμοποιώντας ναυτικές πρακτικές, στις οποίες λιγότερο ή περισσότερο αποκρύπτονται μαθηματικές έννοιες και σχέσεις. Η μαθηματική γνώση που περιέχεται στις επαγγελματικές πρακτικές είναι το κοινά διαμοιρασμένο αντικείμενο των δύο συστημάτων. Οι μαθητές αναμένεται να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα προκειμένου να ανταποκριθούν στις ενέργειες του πλοιάρχου του εμπορικού ναυτικού, λειτουργώντας ως

εκπαιδευόμενοι. Η αναπτυξιακή μεταφορά (*developmental transfer)* (Engestrom, 2001) μέσω της διέλευσης γνωστικών συνόρων προσεγγίζει όχι μόνο τον τρόπο που το σχολείο προετοιμάζει τους σπουδαστές αλλά και τους τρόπους που το σχολείο και εργασιακοί χώροι μπορούν από κοινού να οργανώσουν κατάλληλο πλαίσιο μαθητείας των μελλοντικών επαγγελματιών.

Πίνακας 5. Τα αλληλεπιδρώντα συστήματα δραστηριότητας της έρευνας.

	Σχολικά μαθηματικά	Πλοίαρχοι εμπορικού ναυτικού
Υποκείμενο	Μαθητές Α Λυκείου	Επαγγελματίας Πλοίαρχος
Αντικείμενο	Κατανόηση μαθηματικών εννοιών, απόκτηση μαθηματικής γνώσης, και εφαρμογή της σε δραστηριότητες	Ασφαλής πορεία πλοίου, εφαρμογή πρακτικών που περιέχουν και μαθηματική γνώση
Κοινότητα	Σχολική τάξη	Αξιωματικοί γέφυρας εμπορικού ναυτικού
Εργαλεία	Μαθηματική ορολογία, γεωμετρικά όργανα, μαθηματική γνώση, βιβλία μαθηματικών	Ναυτική γλώσσα και ορολογία ναυτικός χάρτης, ναυτικός διαβήτης, στιγμογράφος, διπαράλληλο
Κανόνες	Διδακτικό συμβόλαιο	Ο επαγγελματίας είναι υπεύθυνος για τη χάραξη της πορείας του πλοίου εφαρμόζοντας δοκιμασμένες πρακτικές που ικανοποιούν κανόνες ασφαλείας και περιορισμούς του επαγγέλματος
Καταμερισμός εργασίας	Ο εκπαιδευτικός είναι ο φορέας της ακρίβειας και τη ορθότητας της μαθηματικής γνώσης. Οι μαθητές ασχολούνται με τις δραστηριότητες που τους δίνονται, δίνουν απαντήσεις	Οι αξιωματικοί γέφυρας υπεύθυνοι για να εκτελέσουν τις διαδικασίες που σχετίζονται με τη χάραξη και την πορεία του πλοίου



Εικόνα 4. Τριγωνική αναπαράσταση των δύο Συστημάτων Δραστηριότητας της Έρευνας

Κεφάλαιο 3ο
Μεθοδολογία της έρευνας

3.1 Εισαγωγή

Ο σχεδιασμός τη παρούσας έρευνας στηρίχτηκε στα πρότυπα του προγράμματος MASCIL *(mathematics and science for life).* Όπως αναφέραμε και παραπάνω, από τη μελέτη της μέχρι τώρα έρευνας παρατηρήθηκε ότι τα τελευταία χρόνια αυτή εστιάζει στη μετάβαση από την επαγγελματική ή τριτοβάθμια εκπαίδευση στο χώρο εργασίας. Το κεντρικό ερώτημα της παρούσας έρευνας αφορά τον τρόπο νοηματοδότησης των μαθηματικών νοημάτων που αναπτύσσουν μαθητές γενικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την εμπλοκή τους σε αυθεντικές καταστάσεις εμπνευσμένες από το χώρο εργασίας. Όσον αφορά το συγκεκριμένο ερώτημα παρατηρούμε ένα έλλειμα στις έρευνες που μελετήσαμε, όσον αφορά τη γενική εκπαίδευση. Στο πλαίσιο της Θεωρίας Δραστηριότητας εξετάζουμε δύο συστήματα δραστηριότητας. Τα δύο συστήματα που αλληλεπιδρούν είναι το σχολείο και οι πλοίαρχοι του εμπορικού ναυτικού. Στην παρούσα έρευνα τέσσερις μαθητές της Α Λυκείου ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες εμπνευσμένες από τον επαγγελματικό χώρο των πλοιάρχων του εμπορικού ναυτικού.. Η ανάλυση των αλληλεπιδράσεων γίνεται μέσα από τη θεώρηση της διέλευσης γνωστικών συνόρων (*boundary crossing).* Πιο συγκεκριμένα οι δραστηριότητες είχαν ως πλαίσιο αναφοράς το ναυτικό χάρτη και αναφέρονται στη χάραξη πορείας και την εύρεση της θέσης (στίγμα) του πλοίου. Στις δραστηριότητες οι μαθητές χρησιμοποίησαν τόσο αυθεντικά όσο και ψηφιακά εργαλεία του χώρου εργασίας καθώς και πρακτικές του επαγγελματία. Τόσο στο σχεδιασμό όσο και σε όλες τις φάσεις της έρευνας συμμετείχε και ένας επαγγελματίας του χώρου. Οι δραστηριότητες βιντεοσκοπήθηκαν και αναλύθηκαν μέσω κρίσιμων συμβάντων. Ως κρίσιμα συμβάντα χαρακτηρίσαμε τα επεισόδια κατά τα οποία υπήρξε, μέσω των δραστηριοτήτων, αλληλεπίδραση μεταξύ των σχολικών μαθηματικών και των πρακτικών του επαγγελματία πλοιάρχου.

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Το ερευνητικό θέμα της παρούσας εργασίας εστιάζεται στη σύνδεση του επαγγελματικού χώρου των πλοιάρχων του εμπορικού ναυτικού με την διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών στο Λύκειο. Συγκεκριμένα, στα ερευνητικά ερωτήματα περιλαμβάνονται τα παρακάτω:

1. Με ποιο τρόπο νοηματοδότησαν οι μαθητές τη διασύνδεση μαθηματικών εννοιών και αυθεντικών καταστάσεων του χώρου εργασίας;
2. Ποιος ο ρόλος των διαθέσιμων μέσων (εργαλεία ψηφιακά και αυθεντικά) και πρακτικών στη διαδικασία νοηματοδότησης.

3.3 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα πήραν μέρος τέσσερις μαθητές, όλοι αγόρια, της Α΄ τάξης Λυκείου της Ηλιούπολης. Το γνωστικό επίπεδο των μαθητών στα μαθηματικά ποικίλει. Δύο από τους μαθητές (Γ και Σ) έχουν σχετικά υψηλό επίπεδο μαθηματικής γνώσης, ενώ επιδεικνύουν και έντονο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, γενικότερα. Επίσης, ο ένας από τους δύο μαθητές (Γ) έχει και πλούσιες εγκυκλοπαιδικές γνώσεις κάτι που στην πορεία της έρευνας φάνηκε να τον βοηθά να προσαρμοστεί ευκολότερα στον χώρο εργασίας. Ο τρίτος μαθητής (Κ) έχει αρκετά καλό μαθηματικό υπόβαθρο αλλά δεν επιδεικνύει αντίστοιχα ισχυρό ενδιαφέρον για το μάθημα των μαθηματικών. Ο τελευταίος μαθητής (Δ) έχει μέτριο επίπεδο μαθηματικής γνώσης αλλά επέδειξε έντονο ενδιαφέρον για όλες τις δραστηριότητες της έρευνας και συμμετείχε καταβάλλοντας μεγάλη προσπάθεια να ανταποκριθεί. Όσον αφορά στις προγενέστερες γνώσεις των μαθητών αυτές περιορίζονται στις γεωμετρικές έννοιες της ευθείας, του κύκλου, της εφαπτομένης κύκλου και της εγγεγραμμένης γωνίας, όπως τις έχουν διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Στην εμπλοκή τους στην έρευνα επιδιώχθηκε να

Εικόνα 5. Οι μαθητές δουλεύουν στο ναυτικό χάρτη

ξεφύγουν από το ρόλο του μαθητή. Η πρόθεση ήταν οι μαθητές να νιώσουν οικεία με τον επαγγελματικό χώρο, ώστε να ευνοηθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών και του επαγγελματία. Έγινε προσπάθεια ώστε η εμπλοκή στις δραστηριότητες να μη θυμίζει παραδοσιακό μάθημα αλλά εκπαίδευση σε πρακτικές των πλοιάρχων του εμπορικού ναυτικού, διατηρώντας το ρεαλισμό και την εμπλοκή του χώρου εργασίας κατά το δυνατό περισσότερο διαρκή *(εικόνα 5)*.

Ο επαγγελματίας του χώρου που συμμετείχε στην έρευνα έχει μεγάλη εμπειρία από ταξίδια στην ακτοπλοΐα. Παράλληλα όμως έχει και διδακτική εμπειρία καθώς έχει διδάξει επί σειρά ετών σε ναυτικά γυμνάσια. Το μάθημα που κυρίως δίδασκε ήταν αυτό της «Ναυτιλίας». Η χάραξη πορείας του πλοίου στο ναυτικό χάρτη και η εύρεση της θέσης του είναι αντικείμενο του παραπάνω μαθήματος. Ο επαγγελματίας συμμετείχε σε όλες τις φάσεις της έρευνας. Αρχικά σε συναντήσεις με τον εκπαιδευτικό του παρουσίασε τις επαγγελματικές πρακτικές οι οποίες αποτέλεσαν έμπνευση για τις δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές. Η συμβολή του στη φάση του σχεδιασμού ήταν καθοριστική. Εκτός από την παρουσίαση των επαγγελματικών πρακτικών αποτέλεσε ελεγκτή της ορθότητας και κυρίως του ρεαλισμού των δραστηριοτήτων που προετοίμασε ο εκπαιδευτικός. Στην κυρίως φάση της έρευνας είχε το ρόλο του εκπαιδευτή των μαθητών. Τους παρουσίαζε τις έννοιες και τις πρακτικές του χώρου εργασίας για να ακολουθήσουν στη συνέχεια τα ερωτήματα και οι δραστηριότητες με τη συμμετοχή του εκπαιδευτικό. Κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης της φάσης επέδειξε έντονο ενδιαφέρον και για το μαθηματικό περιεχόμενο των δραστηριοτήτων.

Τέλος, ο εκπαιδευτικός έχει σχεδόν εικοσαετή εμπειρία διδασκαλίας μαθηματικών τόσο σε φροντιστήρια μέσης εκπαίδευσης όσο και στη δημόσια εκπαίδευση. Στις συναντήσεις που είχε με τον πλοίαρχο του ζήτησε να του παρουσιάσει πρακτικές που χρησιμοποιεί όταν εργάζεται πάνω στο ναυτικό χάρτη, όπως και τη χρήση των αντίστοιχων οργάνων. Βιντεοσκοπώντας τις συναντήσεις ανέλυσε το υλικό διερευνώντας ρεαλιστικές καταστάσεις μέσα από τις οποίες μπορούν να αναδειχθούν μαθηματικές έννοιες. Παράλληλα, μελέτησε τα αντίστοιχα εγχειρίδια της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού, προκειμένου να διαμορφώσει ένα υπόβαθρο εξοικείωσης με το χώρο εργασίας. Η δημιουργία των δραστηριοτήτων που δόθηκαν στους μαθητές, ήταν το αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας.

Προχωρώντας στην κύρια φάση της έρευνας η συνεργασία με τον επαγγελματία συνεχίστηκε. Πριν από κάθε φάση παρουσίαζε στον πλοίαρχο τα εργαλεία και τις πρακτικές που έπρεπε ο επαγγελματίας να παρουσιάσει στους μαθητές. Επίσης, του παρουσίαζε τις αντίστοιχες δραστηριότητες που είχαν δημιουργηθεί. Γίνονταν συζήτηση για τα κρίσιμα μαθηματικά νοήματα που δεν έπρεπε να αποκαλύψει ο πλοίαρχος στους μαθητές. Τις στιγμές που ο επαγγελματίας παρουσίαζε τις πρακτικές και τα όργανα του χώρου εργασίας στους μαθητές διατήρησε ρόλο παρατηρητή. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων ο ρόλος του ήταν παρεμβατικός. Στη φάση που οι μαθητές εμπλέκονταν με τις δραστηριότητες, με ερωτήσεις και μικρές παρεμβάσεις προσπάθησε να διερευνήσει τη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών και σχέσεων από τους μαθητές. Οι παρεμβάσεις του γίνονταν με σκοπό κυρίως να ενισχύσει τη διερεύνηση του μαθηματικού περιεχομένου των δραστηριοτήτων από τους μαθητές και όχι να τους κατευθύνουν σε μια σωστή απάντηση. Σε καμία στιγμή δεν υπήρξε το αίσθημα στους μαθητές πως υπάρχει μία σωστή απάντηση που πρέπει να δοθεί. Επίσης, σε κάποιες περιπτώσεις ήταν αυτός που ανακεφαλαίωνε τα δεδομένα και ευρήματα της δραστηριότητας, προκειμένου να συνεχίσουν οι μαθητές. Στη δραστηριότητα με το αρχείο λογισμικού βοήθησε αρκετά τους μαθητές στη χρήση του, καθώς δεν είχαν καμία προηγούμενη εμπειρία. Η βοήθεια περιορίστηκε στο τεχνικό κομμάτι του λογισμικού. Ακόμα, στις δραστηριότητες που εμπλέκονταν μαθηματικές έννοιες ή σχέσεις που απαιτούσαν γνωστικό άλμα από τους μαθητές, πάλι μέσω ερωτήσεων, προσπάθησε να συνδέσει τις υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών με τη νέα έννοια. Τέλος, κάποιες από τις ερωτήσεις που απηύθυνε στους μαθητές είχαν στόχο να διερευνήσουν τις αντιλήψεις των μαθητών για τη χρήση των οργάνων του επαγγελματία.

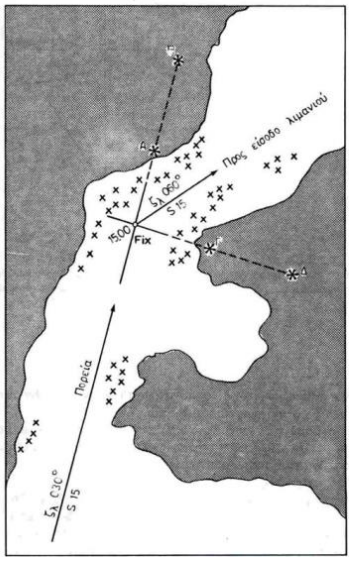
3.4 Μέσα συλλογής δεδομένων

Ως μέσα συλλογής των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το βίντεο οι σημειώσεις του ερευνητή εκπαιδευτικού. όπως και η εργασία που έκαναν οι μαθητές στο ναυτικό χάρτη. Η χρήση βίντεο για την παρατήρηση στην εκπαίδευση των μαθηματικών θεωρείται ότι υπερτερεί σε σχέση με την καταγραφή παρατηρήσεων ή άλλες μεθόδους καταγραφής δεδομένων. Όλες οι φάσεις της έρευνας και οι συναντήσεις με τον επαγγελματία, καταγράφηκαν σε βίντεο. Επίσης, απομαγνητοφωνήθηκαν όλες οι βιντεοσκοπήσεις, πλην αυτών που αφορούν τις συναντήσεις εκπαιδευτικού και επαγγελματία. Καθώς οι μαθητές δεν απάντησαν σε φύλλα εργασίας οι απαντήσεις που έδωσαν στις δραστηριότητες και τα προβλήματα είναι συγκεντρωμένες στους ναυτικούς χάρτες, πάνω στον οποίο εργάστηκαν *(εικόνα 6)*.

Εικόνα 6. Απάντηση μαθητών σε δραστηριότητα

3.5 Διαδικασία σχεδιασμού και διεξαγωγής της έρευνας

Η φάση του σχεδιασμού χωρίζεται σε δύο επιμέρους φάσεις. Στο πρώτο μέρος έγιναν δύο συναντήσεις του εκπαιδευτικού με τον επαγγελματία πλοίαρχο. Ο σκοπός των συναντήσεων ήταν η εξοικείωση του εκπαιδευτικού με τον, χώρο εργασίας προκειμένου να εντοπιστούν τα εργαλεία και οι πρακτικές του χώρου εργασίας που θα χρησιμοποιούσε για την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων της έρευνας. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός μελέτησε βιβλία «Ναυτιλίας» της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού *(εικόνα 7)*. Στις συναντήσεις αυτές ο πλοίαρχος παρουσίασε αναλυτικά στον εκπαιδευτικό τις ενέργειες που κάνει στο ναυτικό χάρτη και τα όργανα που χρησιμοποιεί. Ο εκπαιδευτικός με τη σειρά



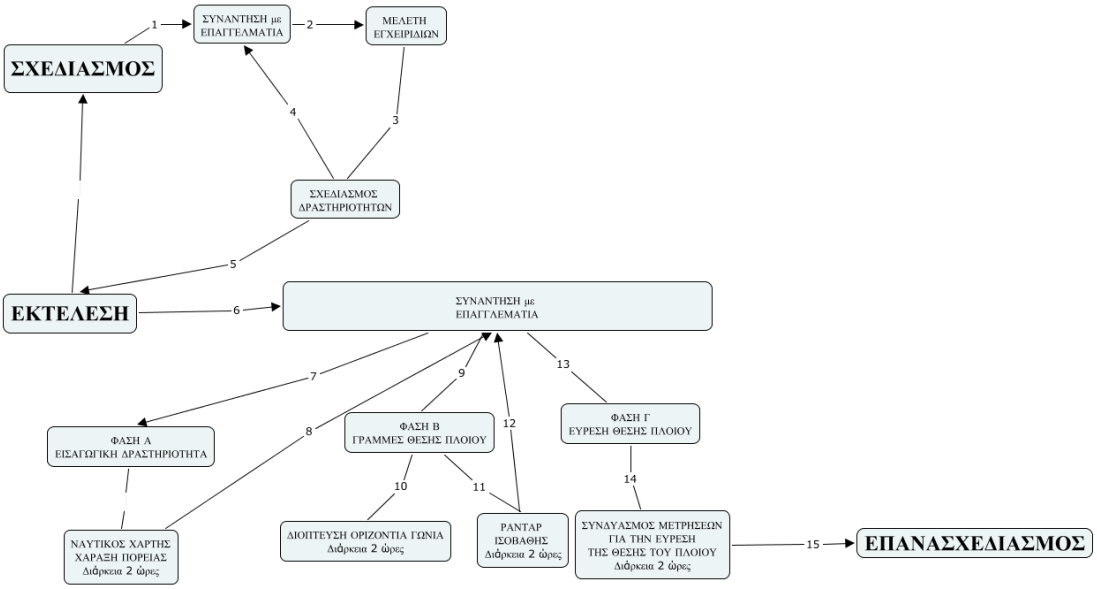
Εικόνα 7. Εύρεση στίγματος με δύο ευθυγραμμίσεις από βιβλίο Ναυτιλίας ΑΕΝ

του εντόπισε τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις που κρύβονται στις ενέργειες αυτές και αφορούν τόσο την Άλγεβρα όσο και τη Γεωμετρία. Τελικά, οι δραστηριότητες που επιλέχτηκαν αφορούσαν κυρίως τη Γεωμετρία με λίγες εξαιρέσεις. Επίσης, ο εκπαιδευτικός παρατήρησε πως στα βασικά εργαλεία του πλοιάρχου, ναυτικός διαβήτης, διπαράλληλο, στιγμογράφος, έχουν ενσωματωθεί μαθηματικές έννοιες, κάποιες από τις οποίες δεν αναγνωρίζει ούτε ο ίδιος ο επαγγελματίας. Μέσα από τις δραστηριότητες έγινε προσπάθεια να αναδειχθούν τα κρυμμένα στα εργαλεία και τις πρακτικές μαθηματικά. Στη συνέχεια δημιούργησε τις δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές. Πάλι σε συνεργασία με τον επαγγελματία οι δραστηριότητες ελέγχθηκαν ως προς την ακρίβεια και το ρεαλισμό τους και επανασχεδιάστηκαν. Δεν παρήχθησαν φύλλα εργασίας. Θεωρήθηκε πως η συμπλήρωση των φύλλων εργασίας από τους μαθητές θα έβαζε το χώρο εργασίας σε δεύτερο ρόλο, καθώς η όλη διαδικασία θα τους θύμιζε κλασική διδασκαλία. Επίσης, στη δεύτερη φάση έγινε χρήση αρχείου λογισμικού *Geogebra*. Προκειμένου να διατηρηθεί η σύνδεση με τον χώρο εργασίας τα ευρήματα που προκύπτουν από τις δραστηριότητες σε αυτό το αρχείο, αποτελούν μέρος της λύσης προβλημάτων που αντιμετωπίζει ο επαγγελματίας πλοίαρχος κατά την πορεία του πλοίου, όπως η ασφαλής διέλευση από επικίνδυνα νερά και αποφυγή εμποδίου.

Η συμμετοχή ή όχι του επαγγελματία στην εκτέλεση της έρευνας αποτέλεσε ένα σοβαρό δίλλημα. Η παρουσία του από τη μια προσέδιδε στο ρεαλισμό και την διαρκή εμπλοκή του χώρου εργασίας. Από την άλλη υπήρχε ο κίνδυνος ο επαγγελματίας να αποκαλύψει άθελά του στους μαθητές στοιχεία των δραστηριοτήτων που αποτελούσαν αντικείμενο διερεύνησης της έρευνας. Για να αποφευχθεί αυτό πριν από κάθε φάση ο εκπαιδευτικός παρουσίαζε στον επαγγελματία τους ναυτικούς όρους τις αντίστοιχες πρακτικές και το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που θα παρουσίαζε στους μαθητές. Η όλη διαδικασία έγινε με σεβασμό στην εμπειρία του πλοιάρχου παρέχοντας του σχετική ευελιξία. Αποτέλεσμα της ευελιξίας αυτής ήταν σε δύο περιπτώσεις ο πλοίαρχος να θέσει ερωτήματα εκτός σχεδιασμού στους μαθητές. Τα ερωτήματα αυτά εντάχθηκαν από τον εκπαιδευτικό άμεσα στις δραστηριότητες που είχε προετοιμάσει εμπλουτίζοντας τις.

Το κεντρικό μέρος της έρευνας περιλαμβάνει τρεις φάσεις, *(διάγραμμα 1)* συνολικά οκτώ διδακτικές ώρες. Η πρώτη φάση, που διήρκησε ένα δίωρο, αφιερώθηκε στη γνωριμία και εξοικείωση των μαθητών με τον επαγγελματικό χώρο και ιδιαίτερα με το ναυτικό

χάρτη. Στη δεύτερη φάση, ενεπλάκησαν οι μαθητές, υπό την καθοδήγηση του επαγγελματία, σε επαγγελματικές πρακτικές εύρεσης της θέσεως του πλοίου (προσδιορισμός στίγματος), χωρίς τη χρήση GPS. Η δεύτερη φάση διήρκησε τέσσερις διδακτικές ώρες, οι οποίες μοιράστηκαν σε δύο δίωρα. Στην τρίτη φάση δόθηκαν στους μαθητές μετρήσεις (γραμμές θέσης) αντίστοιχες με αυτές που θα είχε στη διάθεσή του ο πλοίαρχος κατά τη διάρκεια του πλου και τους ζητήθηκε να προσδιορίσουν τη θέση του πλοίου, χρησιμοποιώντας κάποιες από τις πρακτικές που τους παρουσιάστηκαν στη δεύτερη φάση.



Διάγραμμα 1. Συνοπτική εικόνα σχεδιασμού και εκτέλεσης της έρευνας

3.6 Ανάλυση δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν έχουν ως πλαίσιο αναφοράς τις ενέργειες του επαγγελματία πλοιάρχου, πρακτικές και επίλυση προβλημάτων, στον ναυτικό χάρτη κατά τον προγραμματισμό και τη διάρκεια του ταξιδιού. Βασική επιδίωξη του σχεδιασμού ήταν στις δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές, ο χώρος εργασίας να εμφανίζεται όσο το δυνατό περισσότερο, διατηρώντας τη αυθεντικότητα και το ρεαλισμό. Επίσης, έγινε προσπάθεια οι δραστηριότητες να διατηρούν το ενδιαφέρον των μαθητών χωρίς να τους φορτώνουν με κουραστικές πληροφορίες.

Στην κατασκευή και τη χρήση του ο ναυτικός χάρτης κρύβει πολλές μαθηματικές έννοιες και σχέσεις. Για τις δραστηριότητες της έρευνας περιοριστήκαμε κυρίως σε γεωμετρικές έννοιες και σχέσεις. Οι δραστηριότητες, δημιουργήθηκαν, αφορούν τη χάραξη πορείας πλοίου και τις μεθόδους εύρεσης της θέσης του (στίγμα σκάφους). Η χάραξη πορείας χρησιμοποιείται ως εισαγωγική δραστηριότητα εξοικείωσης των μαθητών με το ναυτικό χάρτη και τα όργανα που χρησιμοποιεί ο πλοίαρχος. Προκειμένου να συμβεί αυτό αποφασίστηκε η αρχική δραστηριότητα να είναι αρκετά πλούσια και να αποτελέσει αντικείμενο ολόκληρης της πρώτης φάσης. Οι μέθοδοι εύρεσης του στίγματος, που παρουσιάστηκαν στους μαθητές είναι οι ίδιες που χρησιμοποιούν και οι επαγγελματίες όπως αυτές παρουσιάζονται στο βιβλίο που διδάσκονται οι μαθητές στα ναυτικά λύκεια («Ναυτιλία», Δημαράκης Α., Ντούνης Χ., Ίδρυμα Ευγενίδου), ανεξάρτητα από τη χρήση του Παγκόσμιου Συστήματος Στιγματοθέτησης (*GPS)*. Για να μεταφερθούν τα ευρήματα του ναυτικού χάρτη στον πραγματικό κόσμο απαιτούνται σύνθετοι αλγεβρικοί υπολογισμοί, απόκλιση και παρεκτροπή πυξίδας. Καθώς οι παραπάνω υπολογισμοί, εκτός της πολυπλοκότητας τους, δεν εξυπηρετούν τα ερωτήματα της εργασίας εξαιρέθηκαν.

3.6.1 Φάση Α. Εισαγωγική δραστηριότητα

Βασικός στόχος της εισαγωγικής δραστηριότητας είναι να εξοικειωθούν οι μαθητές με το ναυτικό χάρτη, με τη βοήθεια του επαγγελματία πλοιάρχου. Η εισαγωγική φάση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος οι δραστηριότητες αφορούν τις γεωγραφικές συντεταγμένες, εύρεσης συντεταγμένων θέσης και αντίστροφα και τη μέτρηση απόστασης στη θάλασσα. Το δεύτερο μέρος αφορά τη χάραξη πορείας. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη φάση είχε ο επαγγελματίας, ενώ ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει στις στιγμές που κρίνει κατάλληλες προκειμένου να προκαλέσει συζήτηση για θέματα που συνδέουν τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας με μαθηματικές έννοιες.

Γεωγραφικές συντεταγμένες- Ναυτικό μίλι

Στην εισαγωγική δραστηριότητα ο επαγγελματίας πλοίαρχος, προκειμένου να εξοικειωθούν οι μαθητές με το ναυτικό χάρτη, τους εξηγεί τη χρήση των γεωγραφικών συντεταγμένων. Επίσης, γίνεται αναφορά στο ναυτικό μίλι το οποίο, δεν έχει σταθερό

μέγεθος, αλλά εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του τόπου. Οι δύο πρώτες δραστηριότητες αφορούν την εύρεση των γεωγραφικών συντεταγμένων τριών τοποθεσιών και την εύρεση του τόπου με γνωστές γεωγραφικές συντεταγμένες. Στόχος των δύο πρώτων ερωτημάτων είναι η περαιτέρω εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση τω γεωγραφικών συντεταγμένων. Επίσης, οι μαθητές θα εξασκηθούν στον υπολογισμό των δεύτερων λεπτών της μοίρας των γεωγραφικών συντεταγμένων, καθώς στο ναυτικό χάρτη ο υπολογισμός προκύπτει ως κλάσμα του πρώτου λεπτού.

Η τρίτη δραστηριότητα αφορά τον υπολογισμό με τη χρήση του ναυτικού διαβήτη αποστάσεων πάνω στο χάρτη *(εικόνα 8)*. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το ναυτικό μίλι δεν έχει σταθερό μέγεθος ως εκ τούτου πρέπει να επιλεγεί η κατάλληλη μονάδα μέτρησης (άνοιγμα ναυτικού διαβήτη) προκειμένου να γίνουν οι μετρήσεις. Καθώς στη χρήση του, ο ναυτικός διαβήτης διαφέρει από τη παραδοσιακή χρήση του διαβήτη στην τάξη, μπορεί να προκληθεί σχετική συζήτηση.

Εικόνα 8. Μέτρηση απόστασης στο χάρτη

Το κεντρικό θέμα της εργασίας αφορά τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών σε μαθητές Α΄ Λυκείου. Παρόλα αυτά, ο ναυτικός χάρτης κρύβει πολλές μαθηματικές έννοιες. Η όλη συζήτηση για τις γεωγραφικές συντεταγμένες δίνει αφορμή για την τέταρτη ερώτηση σκοπός της οποίας είναι να προκαλέσει συζήτηση με τους μαθητές για τις ομοιότητες και τις διαφορές του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και του συστήματος γεωγραφικών συντεταγμένων.

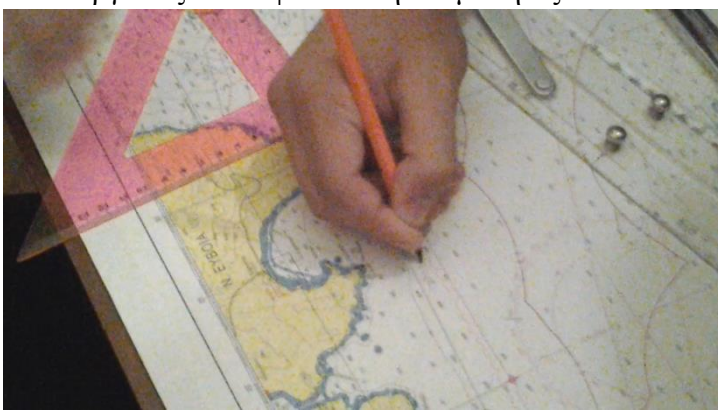
Ακτοπλοϊκό ταξίδι

Συνεχίζοντας την εισαγωγική δραστηριότητα ακολουθούν τρεις δραστηριότητες με στόχο την περαιτέρω εξοικείωση των μαθητών με τον ναυτικό χάρτη και συγκεκριμένα με τη χάραξη πορείας. Στο πέμπτο ερώτημα, λοιπόν, ζητάμε από τους μαθητές να χαράξουν πορεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα, να βρουν την κλίση της πορείας με το διπαράλληλο, όπως

και να υπολογίσουν την απόστασης που θα διανύσει το πλοίο. Δίνοντας την ταχύτητα του σκάφους και ζητώντας το στίγμα αναμετρήσεως (θέση σκάφους ανά ακέραια ώρα) ζητάμε από τους μαθητές να εξομοιώσουν μια διαδικασία που συμβαίνει στη γέφυρα του πλοίου κατά τη διάρκεια του ταξιδιού. Με τη δραστηριότητα αυτή, δίνεται ευκαιρία για τη χρήση του διπαράλληλου, ένα από τα βασικά όργανα του κυβερνήτη στην εύρεση της κλίσης της πορείας του πλοίου.

Στο έκτο ερώτημα αντιστρέφεται το ερώτημα, δίνεται σημείο εκκίνησης και κλίση πορείας και ζητάμε από τους μαθητές να εντοπίσουν τον προορισμό. Στόχος του ερωτήματος να εμπλακούν οι μαθητές και στην αντίστροφη χρήση του οργάνου του διπαράλληλου, γνωστή κλίση και εύρεση πορείας.

Η τελευταία δραστηριότητα λειτουργεί ως ανακεφαλαίωση. Οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν όσα τους έχει δείξει ο επαγγελματίας ενώ παράλληλα χρειάζεται να πάρουν αποφάσεις με βάση ρεαλιστικά δεδομένα. Η πορεία που ζητάμε από τους μαθητές να χαράξουν είναι μια τεθλασμένη γραμμή *(εικόνα 9)*. Με τη βοήθεια του επαγγελματία θα χρειαστεί να λάβουν υπόψη τους την απόσταση ασφαλείας από τις ακτές, βάθος πυθμένα και βύθισμα πλοίου. Επίσης, θα πρέπει να συνυπολογίσουν το γεγονός πως σε πραγματικές συνθήκες ο κυβερνήτης στρίβει το σκάφος σε σημείο παραλλαγής, όταν η ευθεία που συνδέει σκάφος με καταφανές σημείο στην στεριά, είναι κάθετη στην πορεία του πλοίου. Πέρα από τον ανακεφαλαιωτικό χαρακτήρα της δραστηριότητας οι μαθητές θα χρειαστεί να διαχειριστούν και μαθηματικές έννοιες και σχέσεις όπως, να υπολογίσουν το μήκος της τεθλασμένης γραμμής, άθροισμα μηκών τμημάτων, όπως και να κάνουν πράξεις μεταξύ γωνιών.



Εικόνα 9. Μαθητές χαράζουν πορεία στο χάρτη

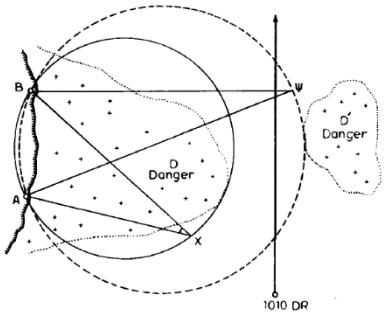
3.6.2 Φάση Β. Γραμμές θέσεις πλοίου

Μέρος Α. Διόπτευση- Οριζόντια γωνία.

Στο πρώτο μέρος της δεύτερης φάσης, οι δραστηριότητες αφορούν τις δύο γραμμές θέσεις του πλοίου και τη χρήση τους για την εύρεση της θέσεως (στίγματος) του σκάφους στο ναυτικό χάρτη. Μια γραμμή θέσης περιγράφει όλες τις πιθανές θέσεις του πλοίου μια δεδομένη στιγμή. Σε αυτή τη φάση οι μαθητές θα ασχοληθούν με τις δύο διοπτεύσεις (αντιστοιχία και ευθυγράμμιση) καθώς και με την οριζόντια γωνία. Οι δύο διοπτεύσεις αντιστοιχούν σε ευθείες, ενώ η οριζόντια γωνία είναι η εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που διέρχεται από τη θέση του σκάφους και δύο καταφανή σημεία στο ναυτικό χάρτη.

Οι δύο πρώτες ερωτήσεις αφορούν τις δύο διοπτεύσεις. Οι μαθητές με τη χρήση του διπαράλληλου θα χαράξουν τις ευθείες που θα περιγράψουν τις πιθανές θέσεις του σκάφους ενώ στην τρίτη ερώτηση καλούνται να επιλέξουν την πιο αξιόπιστη από τις δύο. Στόχος της δραστηριότητας, πέρα από τη γνωριμία των πρακτικών του πλοιάρχου, είναι να προκληθεί συζήτηση για τις σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο.

Η επόμενη δραστηριότητα ζητάει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το αρχείο λογισμικού Geogebra «Οριζόντια Γωνία» με τις αντίστοιχες δραστηριότητες, προκειμένου να μελετηθεί πως η οριζόντια θέση συνδέεται με την εγγεγραμμένη γωνία. Η ανάλυση των αντίστοιχων δραστηριοτήτων δίνεται παρακάτω.



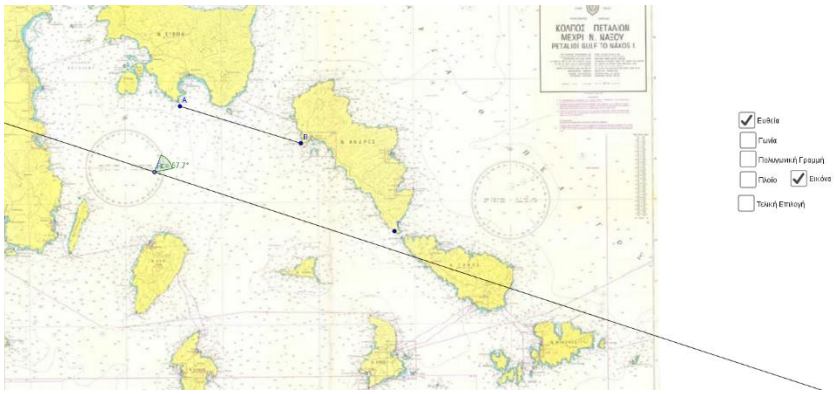
Εικόνα 10. Οριζόντιες γωνίες ασφάλειας.

Στη συνέχεια στους μαθητές θα δοθεί ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, πορεία σκάφους σε επικίνδυνα νερά. Καταρχάς, το ερώτημα αυτό εξυπηρετεί τη σύνδεση των μαθητών με την επαγγελματική πρακτική, κάτι το οποίο είναι ζητούμενο για όλες τις δραστηριότητες. Οι μαθητές χρειάζεται να εφαρμόσουν τα ευρήματα της προηγούμενης δραστηριότητας σε μια ρεαλιστική κατάσταση. Τα βιβλία ναυτιλίας ως λύση στο πρόβλημα παραθέτουν τη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας με έλεγχο, ώστε αυτή να είναι ανάμεσα στις τιμές των εγγεγραμμένων γωνιών χ και ψ του εσωτερικού και του εξωτερικού κύκλου αντίστοιχα *(εικόνα 10)*.

Μέρος Α. Οριζόντια γωνία - Λογισμικό Geogebra

Η μέτρηση με τον εξάντα της οριζόντιας γωνίας μεταξύ δύο σημείων Α και Β του ναυτικού χάρτη είναι 60° . Το βασικό ερώτημα για τους μαθητές είναι να βρουν ποια

γραμμή πορείας θα πρέπει να ακολουθήσει το σκάφος προκειμένου η οριζόντια γωνία να παραμείνει 60°. Στο πρώτο βήμα τους ζητάμε να δοκιμάσουν διαφορετικές πορείες (*εικόνα 11)* , ευθεία, γωνία και πολυγωνική γραμμή όπου θα διαπιστώσουν ότι καμία από τις παραπάνω δε διατηρεί σταθερή τη γωνία. Επίσης, τους ζητάμε να ελέγξουν ποια γραμμή από τις παραπάνω δίνει τις μικρότερες αλλαγές στη γωνία.



Εικόνα 11. Λογισμικό

Στο δεύτερο βήμα τους ζητάμε να κινήσουν το σημείο που αντιστοιχεί στο σκάφος. Το σημείο έχει ενεργοποιημένο το ίχνος. Ιδανικά, στην προσπάθειά τους οι μαθητές να διατηρήσουν σταθερή οριζόντια γωνία το ίχνος του σημείου θα δημιουργήσει μια καμπύλη, ένα ενδιάμεσο στάδιο ανάμεσα στην πολυγωνική γραμμή, που θα πρέπει να επιλέξουν στο παραπάνω ερώτημα, και στο τόξο κύκλου που είναι η επιλογή, στην οποία θέλουμε να καταλήξουν.

Στην τρίτη ερώτηση τους δίνουμε στο λογισμικό πέντε τόξα διαφορετικών κύκλων με κοινά άκρα και την οριζόντια γωνία ενός σημείου σε κάθε τόξο με τα σημεία Α και Β. Κινώντας τα σημεία πάνω στα τόξα θα παρατηρήσουν ότι η γωνία παραμένει σταθερή μόνο στο τόξο το οποίο διέρχεται και από τα σημεία Α και Β καταλήγοντας έτσι στην εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που διέρχεται από τα σταθερά σημεία στο ναυτικό χάρτη.

Οι επαγγελματίες πλοίαρχοι έχουν στη διάθεσή τους το στιγμόμετρο, ένα όργανο που τους επιτρέπει να υπολογίσουν τη θέση του πλοίου με τη μέτρηση δύο εφεξής οριζόντιων γωνιών. Στην ιστορική διαδρομή το όργανο έχει ενσωματώσει τα μαθηματικά σε τέτοιο βαθμό, ώστε η χρήση του γίνεται μηχανικά από τους πλοιάρχους χωρίς να αναζητούν τους αντίστοιχους κύκλους. Το στιγμόμετρο, περισσότερο από τα άλλα δύο βασικά όργανα ναυσιπλοΐας, ναυτικός διαβήτης και διπαράλληλο, κρύβει μαθηματικές έννοιες. Στο τελευταίο ερώτημα θα προσπαθήσουμε με τους μαθητές να κατασκευάσουμε στο λογισμικό τον κύκλο για τον οποίο γνωρίζουμε δύο σημεία και την εγγεγραμμένη γωνία του αντίστοιχου τόξου. Στόχος είναι η κατασκευή να λειτουργήσει ως εργαλείο για

την κατασκευή στο ναυτικό χάρτη κύκλων με τα αντίστοιχα δεδομένα. Η διαδικασία κατασκευής προσφέρεται για συζήτηση σχετικά με τη σχέση κέντρου κύκλου και μεσοκαθέτου χορδής, όπως και τη σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας.

Μέρος Β. Απόσταση- Ισοβαθής καμπύλη

Στο δεύτερο μέρος της δεύτερης φάσης συνεχίζεται και ολοκληρώνεται η παρουσίαση των δύο τελευταίων γραμμών θέσης. Πρόκειται για την ισοβαθή καμπύλη και την απόσταση από καταφανές σημείο. Η ισοβαθής καμπύλη είναι μια γραμμή που περιγράφει τα σημεία του ναυτικού χάρτη με το ίδιο βάθος. Από την άλλη, η απόσταση από καταφανές σημείο ως γραμμή θέσης αντιστοιχεί σε κύκλο με κέντρο το σημείο και ακτίνα ίση με την απόσταση.

Στο πρώτο ερώτημα ζητάμε από τους μαθητές να βρουν τη γραμμή που περιγράφει τις πιθανές θέσεις του πλοίου όταν γνωρίζουν την απόστασή του από καταφανές σημείο στη στεριά. Στόχος του ερωτήματος οι μαθητές να συνδέσουν την έννοια του κύκλου με τον ορισμό του ως γεωμετρικό τόπο, σύνολο σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο. Επιπλέον, με το δεύτερο ερώτημα οι μαθητές πρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι με δεδομένη μόνο μια απόσταση δεν μπορούν να εντοπίσουν ακριβώς τη θέση του σκάφους καθώς μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε πάνω στην περιφέρεια του κύκλου.

Στην δεύτερη δραστηριότητα ζητάμε από τους μαθητές να επιλύσουν ένα ανοικτό πρόβλημα. Οι μαθητές θα πρέπει να τροποποιήσουν την πορεία του σκάφους προκειμένου να αποφύγουν εμπόδιο. Η ενδεδειγμένη λύση εμπλέκει εφαπτόμενες από σημείο εκτός κύκλου. Μπορεί στο σημείο αυτό να προκληθεί συζήτηση και να γίνει σύγκριση ανάμεσα στη μέθοδο των μαθητών, χρήση εφαπτομένης, και την πρακτική του επαγγελματία. Επίσης, μέσα από τη μελέτη των λύσεων των μαθητών ευελπιστούμε να παρατηρήσουμε το βαθμό που η εμπλοκή των μαθητών στις πρακτικές του επαγγελματία επηρεάζουν τις αποφάσεις τους.

Στο τελευταίο ερώτημα ζητάμε από τους μαθητές να βρουν τις πιθανές θέσεις του σκάφους γνωρίζοντας την ισοβαθή καμπύλη και μια διόπτευση αντιστοιχίας. Επί της ουσίας ζητήθηκαν τα κοινά σημεία ευθείας και ακανόνιστης καμπύλης. Το συγκεκριμένο ερώτημα δεν το διαχειρίζονται στην ύλη της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου. Παρόλα αυτά

προσφέρει στο ρεαλισμό των δραστηριοτήτων, ενώ ταυτόχρονα προσφέρεται και για συζήτηση προκειμένου να διερευνηθούν τυχών παρανοήσεις που μπορούν να προκύψουν από τη μελέτη σχετικής θέσης κύκλου ή κωνικών τομών γενικότερα και ευθείας.

3.6.3 Φάση Γ. Εύρεση θέσης πλοίου με τη χρήση γραμμών θέσης

Στην τελευταία φάση οι μαθητές καλούνται να συνδυάσουν τις γνώσεις και δεξιότητες που απέκτησαν μέχρι εδώ προκειμένου να εντοπίσουν τη θέση του πλοίου. Ως καταφανή σημεία χρησιμοποιήθηκαν πέντε φάροι. Αρχικά, δίνοντας τον πίνακα αναλαμπών οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν την περιοδικότητα αναλαμπών των φάρων, την ταυτότητά τους επί της ουσίας. Η διαδικασία ανακάλυψης σαφώς δεν εμπλέκει γεωμετρικές έννοιες. Εκτός από το γεγονός ότι προσβλέπει στη σύνδεση της δραστηριότητας με το χώρο εργασίας, είχε ενδιαφέρον η μελέτη του τρόπου που θα διαχειριστούν τη δραστηριότητα οι μαθητές. Κατά τη γνώμη μας, αποτελεί μια καλή δραστηριότητα για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της περιοδικότητας. Στη συνέχεια δίνονται στους μαθητές τα δεδομένα και οι μετρήσεις, που έχουν στη διάθεσή τους προκειμένου να βρουν τη θέση του σκάφους. Η όλη εργασία θα γίνει στο ναυτικό χάρτη.

Στο δεύτερο ερώτημα ζητάμε από τους μαθητές να σκεφτούν αν μπορούν με μία μόνο γραμμή θέσης να εντοπίσουν το στίγμα του σκάφους. Με το ερώτημα αυτό και τη σχετική συζήτηση οι μαθητές θα θυμηθούν τη γραμμή είναι η κάθε γραμμή θέσης όπως και το γεγονός ότι κάθε μια από μόνη της περιγράφει τις άπειρες πιθανές θέσεις του πλοίου μια δεδομένη στιγμή.

Η κεντρική δραστηριότητα στην τελευταία φάση είναι η τρίτη. Ζητάμε από τους μαθητές με χρήση δύο η τριών μετρήσεων να εντοπίσουν το στίγμα του σκάφους. Ζητάμε πιθανούς τρόπους- συνδυασμούς που μπορούν να σκεφτούν. Η επιλογή των μετρήσεων έχει γίνει έτσι ώστε κάποιοι συνδυασμοί, δύο κύκλοι, τρεις ευθείες, ευθεία και κύκλος, να δίνουν δύο ή περισσότερα πιθανά σημεία ως στίγμα του πλοίου. Στην καθημερινή πρακτική, ο επαγγελματίας πλοίαρχος επιλέγει το σημείο που είναι πιο κοντά στη χαραχθείσα πορεία του πλοίου. Στη δραστηριότητα αυτή δε δίνεται η χαραχθείσα πορεία. Προκαλώντας συζήτηση οι μαθητές θα διερευνήσουν ποιες σχετικές θέσεις των κύκλων, ευθείας και κύκλου, ευθειών, είναι προτιμότερες ως προς την αξιοπιστίας του

υπολογισμού, ένα πιθανό σημείο. Επίσης, ποιες είναι οι αντίστοιχες σχετικές θέσεις που καθιστούν αδύνατη την εύρεση στίγματος. Ενδιαφέρον έχει η μελέτη των στρατηγικών και θεωρήσεων που θα αναπτύξουν οι μαθητές καθώς και των παραγόντων που επηρεάζουν τις επιλογές τους.

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές έχουν να διαχειριστούν ένα ανοιχτό πρόβλημα. Έχουν αρκετά δεδομένα. Με βάση αυτά και τις γνώσεις που θα αποκτήσουν μέχρι εδώ θα πρέπει να τα ερμηνεύσουν και να τα συνδυάσουν. Πρέπει να καταστρώσουν στρατηγικές, να τις εφαρμόσουν, να τις τεκμηριώσουν και να τις αξιολογήσουν. Η δουλειά των μαθητών κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος τους θα τους δώσει την ευκαιρία να κάνουν εικασίες να συμμετέχουν στη δημιουργία νέας γνώσης και να παράγουν επιχειρήματα για αυτή την εικασία. Με τη χρήση ανοιχτού προβλήματος αλλάζει η κλασική διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η διδασκαλία αυτή περιέχει την αναφορά ορισμών αξιωμάτων και θεωρημάτων βάση των οποίων οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν αυστηρές αποδείξεις χρησιμοποιώντας τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους. Επιπλέον, η μετάδοση της γνώσης απαιτεί έναν πολύ ενεργό ρόλο του εκπαιδευτικού ως αυτού που παρουσιάζει τη νέα γνώση. Η χρήση του προβλήματος μπορεί να διαταράξει αυτόν τον όρο του διδακτικού συμβολαίου. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει, περιορίζεται η μετωπική διδασκαλία και καλούνται οι μαθητές να ενεργήσουν μόνοι και να αξιοποιήσουν δημιουργικά την ήδη υπάρχουσα γνώση προκειμένου να παραχθεί η νέα. Η παραγωγή της νέας γνώσης στηρίζεται λιγότερο στις προγενέστερες γνώσεις των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός στοχεύει περισσότερο στο πώς θα τους δώσει τις εντελώς απαραίτητες υποδείξεις σε ποια σημεία και πώς οι μαθητές θα τις χρησιμοποιήσουν για να προχωρήσουν. Αυτό σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός παίζει καθοριστικό ρόλο ως σχεδιαστής της λύσης του προβλήματος και της ενορχήστρωσης της συλλογικής συζήτησης στην οποία εμπλέκει τους μαθητές του. Στον *Πίνακα 6.* παρουσιάζουμε τις δραστηριότητες ανά φάση καθώς και τις μαθηματικές έννοιες ή σχέσεις που μελετάμε σε κάθε μια.

Πίνακας 6 . Δραστηριότητες της έρευνας

Φάση Α (δύο ώρες) Εισαγωγική δραστηριότητα	
1. Γεωγραφικές συντεταγμένες- ναυτικό μίλι	Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

2. Ακτοπλοϊκό ταξίδι	Τεθλασμένη γραμμή, στροφή κατά γωνία, παράλληλη μεταφορά
Φάση Β (τέσσερις ώρες) Γραμμές θέσης πλοίου	
1. Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση	Ευθεία, σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο
2. Οριζόντια γωνία[2]	Εγγεγραμμένη γωνία, σχετικές θέσεις κύκλων στο επίπεδο
3. Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων	Μεταβολή εγγεγραμμένης γωνίας
4. Δύο ασύγχρονες διοπτεύσεις του ίδιου καταφανούς σημείου. [3]	Παράλληλη μεταφορά, παραλληλόγραμμο
5. Απόσταση ραντάρ	Κύκλος
6. Αποφυγή εμποδίου	Εφαπτόμενες κύκλου
7. Ισοβαθής καμπύλη	Εφαπτόμενες καμπύλης
Φάση Γ (δύο ώρες) Εύρεση θέσης πλοίου με τη χρήση γραμμών θέσης	
1. Περιοδικότητα αναλαμπής φάρων	Περιοδικότητα
2. Εύρεση θέσης πλοίου	Σχετικές θέσεις κύκλων , κύκλου και ευθείας στο επίπεδο, περίκεντρο και έκκεντρο τριγώνου

3.7 Μέθοδος ανάλυσης

Αφού μελετήθηκαν προσεκτικά οι βιντεοσκοπημένες δραστηριότητες και οι αντίστοιχες απομαγνητοφωνήσεις ακολούθησε ο προσδιορισμός των σημαντικών στιγμών ή αλλιώς των κρίσιμων επεισοδίων. Ένα γεγονός, σύμφωνα με το Maher, (2002) θεωρείται κρίσιμο όταν καταδεικνύει μια ουσιαστική αλλαγή ή μια εννοιολογική πρόοδο σε σχέση με την προηγούμενη κατάσταση, ή λανθασμένη μετάβαση (Bruner, 1960, 1977). Βέβαια, αυτό που χαρακτηρίζει ένα συμβάν κρίσιμο είναι η σχέση που έχει με τα ερευνητικά

[2] Στη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιείτε αρχείο λογισμικού Geogebra.
[3] Η δραστηριότητα αυτή δεν υπήρχε στον αρχικό σχεδιασμό. Προέκυψε ως πρωτοβουλία του επαγγελματία. Ο εκπαιδευτικός με κατάλληλες ερωτήσεις αξιοποίησε την πρωτοβουλία του πλοιάρχου, παρουσιάζοντας μια ρεαλιστική προβληματική κατάσταση στους μαθητές.

ερωτήματα. Σε κάθε κύκλο δραστηριοτήτων τα κρίσιμα επεισόδια επιλέχθηκαν και χαρακτηρίστηκαν ακολουθώντας την *grounded* (βασισμένη στα δεδομένα) *theory, (*Charmaz, 2006). Η θεώρηση έγινε με βάση τις μαθηματικές έννοιες που αναδύονταν μέσα από τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών με τα διαθέσιμα εργαλεία και τις πρακτικές του επαγγελματία πλοιάρχου.

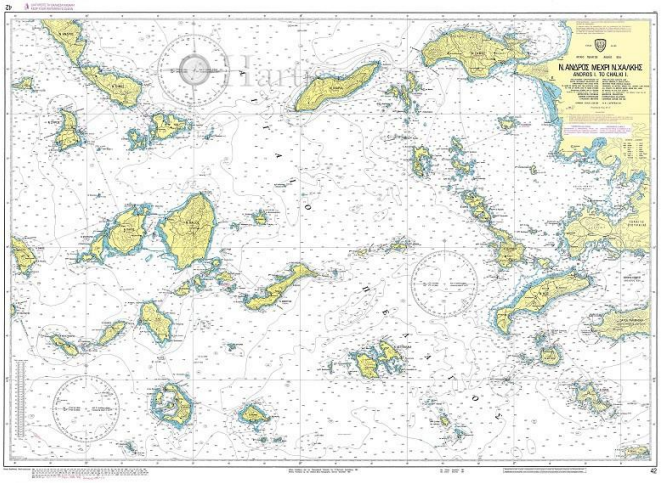
Ως κρίσιμα συμβάντα επιλέχθηκαν στιγμές κατά τις οποίες μέσω της δραστηριότητας παρατηρήθηκε αλληλεπίδραση των σχολικών μαθηματικών με τα μαθηματικά που εφαρμόζονται σε αυθεντικές επαγγελματικές πρακτικές και εργαλεία. Μέσα από τα επεισόδια αυτά περιγράφεται ο τρόπος νοηματοδότησης μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και ο τρόπος που τα εργαλεία και οι πρακτικές ευνοούν ή δυσκολεύουν τη μεταφορά της σχολικής μαθηματικής γνώσης στον χώρο εργασίας. Έτσι, επιλέχθηκαν στιγμές αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο συστημάτων δραστηριότητας και ομαδοποιήθηκαν σε κατηγορίες ανάλογα με τις διαδικασίες νοηματοδότησης που παρατηρούνται κατά τη διέλευση των γνωστικών συνόρων. Οι τέσσερις διαδικασίες νοηματοδότησης, όπως τις παρουσιάσαμε στο θεωρητικό πλαίσιο, είναι οι αναγνώριση, ο συντονισμός ο αναστοχασμός κα ο μετασχηματισμός. Για τις τρεις πρώτες καταγράφηκαν επεισόδια που να αντιστοιχούν σε αυτές τις διαδικασίες, ενώ υπάρχουν και ενδείξεις για μια ελλιπή περίπτωση μετασχηματισμού. Τέλος, στην ανάλυση λάβαμε υπόψη τον βαθμό εμπλοκής των δύο συστημάτων και τον βαθμό που οι μαθητές ενσωμάτωσαν τις πρακτικές του χώρου εργασίας εμπλεκόμενοι στις δραστηριότητες.

Κεφάλαιο 4ο
Αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγή

Όπως περιγράψαμε στη μεθοδολογία η έρευνα αποτελείται από τρεις φάσεις στις οποίες οι μαθητές ενεπλάκησαν σε αυθεντικές καταστάσεις και ρεαλιστικά προβλήματα από τον χώρο εργασίας. Όλες οι δραστηριότητες είχαν πλαίσιο αναφοράς το ναυτικό χάρτη και πραγματοποιήθηκαν πάνω σε αυτόν. Εξαίρεση αποτελεί η δεύτερη δραστηριότητα της Φάσης Β στην οποία χρησιμοποιήθηκε αρχείο λογισμικού Geogebra. Όπως αναφέραμε και στη μεθοδολογία η ομαδοποίηση και ταξινόμηση των κρίσιμων επεισοδίων στηρίχτηκε στις διαδικασίες νοηματοδότησης αντίστοιχες με τους μηχανισμούς μάθησης στα γνωστικά σύνορα, όπως αυτοί κατηγοριοποιήθηκαν από τους Akkerman και Bakker (2011) και παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο. Παράλληλα, μέσα από τα επεισόδια αυτά παρατηρούμε και τον τρόπο που τα εργαλεία και οι πρακτικές του χώρου εργασίας επηρεάζουν τη διαδικασία νοηματοδότησης των μαθηματικών εννοιών. Ο κύριος όγκος των κρίσιμων επεισοδίων εμπίπτει στη διαδικασία νοηματοδότησης του συντονισμού. Καταγράφηκαν κάποια συμβάντα, κυρίως στην εισαγωγική δραστηριότητα, που ομαδοποιήθηκαν στη διαδικασία της αναγνώρισης. Επίσης, κάποια από τα συμβάντα, ειδικά στις δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος, κατηγοριοποιήθηκαν στη διαδικασία του αναστοχασμού. Όσον αφορά στη διαδικασία του μετασχηματισμού μπορούν να αναγνωριστούν μόνο ενδείξεις ύπαρξης.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα θέλαμε να κάνουμε μια αναφορά στο πλαίσιο εφαρμογής των δραστηριοτήτων. Ο ναυτικός χάρτης αποτέλεσε τον κοινό τόπο επικοινωνίας των δύο χώρων που αλληλεπίδρασαν στην παρούσα εργασία. Πρόκειται για ναυτικό μερκατορικό χάρτη *(εικόνα 12)* που

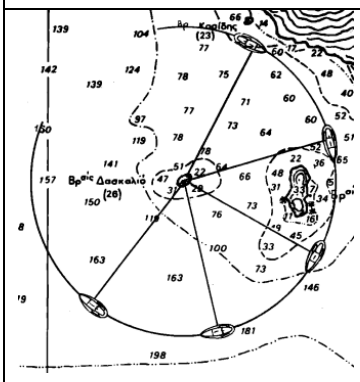
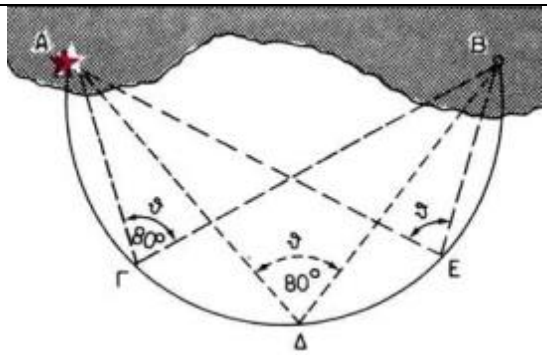


Εικόνα 12. Ναυτικός Χάρτης

χρησιμοποιείται στην ακτοπλοΐα. Είναι ο πιο συνηθισμένος χάρτης στην ναυσιπλοΐας και αναπαριστά ένα τμήμα της επιφάνειας της γης, χωρίς να διατηρεί την καμπυλότητά της. Διαφέρει από τον κλασικό γεωγραφικό χάρτη καθώς κάθε ναυτικός χάρτης παρέχει όλες τις πληροφορίες που ο κυβερνήτης χρειάζεται για τη σωστή και ασφαλή πλεύση, με μεγάλη λεπτομέρεια και ακρίβεια. Μερικές σημαντικές πληροφορίες είναι οι εξής: τα βάθη, ισοβαθείς, ακτογραμμές, φανάρια, ναυάγια, απαγορευμένες περιοχές. Η πορεία του πλοίου αναπαρίσταται με ευθείες ή τεθλασμένες γραμμές. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές αφορούν στις γραμμές θέσεις του πλοίου από τις οποίες ο πλοίαρχος βρίσκει την ακριβή θέση του σκάφους. Η κάθε γραμμή θέσης αποτελεί το σύνολο των πιθανών θέσεων του πλοίου. Οι γραμμές θέσης πλοίου, όπως φαίνεται και στον *Πίνακα 7.*, αντιστοιχούν σε ευθεία, κύκλο και εγγεγραμμένη γωνία, έννοιες τις οποίες και νοηματοδότησαν οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που τους δόθηκαν.

Ο ναυτικός χάρτης από τη μια έχει σαφή και ξεκάθαρο χαρακτήρα, όσο αφορά στην επαγγελματική πρακτική του πλοιάρχου. Από την άλλη, είναι αρκετά ευπροσάρμοστο ως πλαίσιο αναφοράς, ώστε να μπορούν να το χρησιμοποιούν και οι μαθητές. Δε λειτουργεί ως διαχωριστικό σύνορο μεταξύ των δύο πρακτικών αλλά έρχεται να αποκαταστήσει την επικοινωνία μεταξύ των δύο διαφορετικών Συστημάτων Δραστηριότητας, προάγοντας το συντονισμό της επικοινωνίας. Σε όλες τις φάσεις της έρευνας οι δραστηριότητες γίνονται πάνω στο ναυτικό χάρτη. Ως πλαίσιο αναφοράς της έρευνας, η εξοικείωση των μαθητών με τις πρακτικές του επαγγελματία που εκτελούνται πάνω στο χάρτη, αποτελεί το πρώτο και κύριο κίνητρο που τους ωθεί να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα, ερχόμενοι σε επαφή με ένα νέο σύστημα δραστηριότητας, αυτό του πλοιάρχου. Όπως περιγράφουμε παρακάτω, οι μαθητές προκειμένου να ανταπεξέλθουν στις δραστηριότητες που συμμετέχουν, αναγκάζονται να μεταφέρουν τις γνώσεις από τα σχολικά μαθηματικά και να τις εφαρμόσουν πάνω στο χάρτη. Αποτέλεσμα αυτής της μεταφοράς είναι η εκ νέου νοηματοδότηση γνωστών εννοιών, όπως αυτή της ευθείας, αλλά και η νοηματοδότηση νέων, όπως η κατασκευή εφαπτομένης από σημείο εκτός κύκλου. Φυσικά, όπως θα δούμε και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων, δεν έλλειψαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι δραστηριότητες στο ναυτικό χάρτη δυσχέραιναν ή εμπόδισαν τη διαδικασία νοηματοδότησης.

Πίνακας 7 . Γραμμές θέσης πλοίου

Γραμμή θέσης	**Μαθηματική έννοια**
Διόπτευση Αντιστοιχία	Ευθεία γραμμή που συνδέει το μάτι του παρατηρητή με ένα καταφανές σημείο στη στεριά.
Διόπτευση ευθυγράμμιση	Ευθεία γραμμή που συνδέει το μάτι του παρατηρητή με ένα καταφανές σημείο στη στεριά, ώστε τα τρία σημεία να είναι συνευθειακά.
Απόσταση ραντάρ *(εικόνα 13)*	Κύκλος με κέντρο τον παρατηρητή και ακτίνα ίση με τη μέτρηση.
Οριζόντια γωνία *(εικόνα 14)*	Εγγεγραμμένη γωνία με κορυφή το μάτι του παρατηρητή σε χορδή με άκρα δύο καταφανή σημεία στη στεριά.
 *Εικόνα 13. Απόσταση Ραντάρ*	 *Εικόνα 14. Οριζόντια Γωνία*

4.2 Αναγνώριση *(identification)*

Όπως είδαμε και στο θεωρητικό πλαίσιο, με τον όρο «αναγνώριση» εννοούμε τον προσδιορισμό της ταυτότητας των διαφορετικών συστημάτων δραστηριότητας υπό το πρίσμα της μιας και της άλλης. Καθώς οι δύο πρακτικές συναντιούνται τα σύνορά μεταξύ τους καθίστανται ασαφή προκαλώντας τους μαθητές να αναθεωρήσουν την ταυτότητας του κάθε συστήματος. Παρακάτω παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά επεισόδια κατά τα οποία η εμπλοκή των μαθητών στις αυθεντικές καταστάσεις του χώρου εργασίας προκαλεί αυτή την αναθεώρηση.

Επεισόδιο 1ο. Νοηματοδότηση ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων

Στην εισαγωγική δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να συγκρίνουν το ορθοκανονικό σύστημα που γνωρίζουν από τα μαθηματικά με το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που τους παρουσίασε ο πλοίαρχος. Οι μαθητές νοηματοδοτούν το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων μέσα από τη σύγκρισή του με το σύστημα γεωγραφικών συντεταγμένων που χρησιμοποίησαν στον ναυτικό χάρτη. Εύκολα οι μαθητές αναγνώρισαν ομοιότητες, όπως την καθετότητα των αξόνων και τη χρήση δύο συντεταγμένων για την αναπαράσταση κάθε σημείου. Ακόμα εντόπισαν σαν «αρχή των αξόνων» στο σύστημα γεωγραφικών συντεταγμένων το σημείο τομής του Ισημερινού και του μεσημβρινού του Greenwich. Επίσης, παρατήρησαν ότι διαφέρει η σειρά με την οποία αναφέρονται οι συντεταγμένες κάθε σημείου (τετμημένη-τεταγμένη, γεωγραφικό πλάτος-γεωγραφικό μήκος).

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη τεταρτημορίων και στις γεωγραφικές συντεταγμένες. Από τη στιγμή που έγινε σαφής η ύπαρξη τεταρτημορίων και στις δύο περιπτώσεις αναγνώρισαν διαφορές στον τρόπο διαφοροποίησης των τεταρτημορίων, (+/- στα μαθηματικά, Β/Ν και Δ/Α στις γεωγραφικές συντεταγμένες).

Γ *Στα μαθηματικά όμως δεν έχουμε, πώς το λένε… τεταρτημόρια;*

Ερ. *Εδώ έχουμε τεταρτημόρια;*

Ν *Όχι*

…

Σ *Δε χωρίζει ο Ισημερινός;*

Γ *Και ο μεσημβρινός;…*

Ερ. *Το πλάτος πώς το χώρισε;*

Ν *Με παραλλήλους.*

Γ *Σε βόρειο και νότιο.*

Ερ. *Και το μήκος;*

Γ *Ανατολικά και δυτικά.*

…

Ερ. *Πόσα τεταρτημόρια έχει λοιπόν;*

Γ *Τέσσερα.*

Τέλος, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν τη μη κανονικότητα του συστήματος γεωγραφικών συντεταγμένων όπως και το γεγονός ότι η μονάδα μέτρησης γεωγραφικού πλάτους (ναυτικό μίλι) δεν παραμένει σταθερή.

Σ *Ομοιότητα έχουμε δύο άξονες ορθοκανονικούς και στις δύο περιπτώσεις.*

Ερ. *Είναι ορθοκανονικοί και στις δύο περιπτώσεις;*

Σ *Ναι.*

Ερ. *Τι σημαίνει ορθοκανονικοί;*

Σ *Κάθετοι μεταξύ τους.*

Ερ. *Τι άλλο;*

Γ *Ίδια μονάδα μέτρησης*

Σ *Στο χάρτη δεν έχουν. Άρα διαφορά.*

Ερ. *Ποια άλλη διαφορά υπάρχει; Σε σχέση με τις μονάδες μέτρησης. Τι σας είπε ο Captain για το μίλι…*

Σ *Ότι το μίλι αλλάζει.*

Γ *Άρα η μονάδα δεν είναι σταθερή.*

Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά διαδικασίες νοηματοδότησης στα γνωστικά σύνορα στον διάλογο μπορούμε να αναγνωρίσουμε την ενεργοποίηση της *διαφοροποίησης* (*othering),* μια από τις δύο διαδικασίες της αναγνώρισης. Οι μαθητές διαπιστώνουν διαφορές ανάμεσα στις γεωγραφικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούμαι στο ναυτικό χάρτη και το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά. Αποτέλεσμα της διαλογικής διαδικασίας είναι ο εμπλουτισμός των θεωρήσεων και για τις δύο πρακτικές. Αν και το παραπάνω συμβάν δεν επαναλήφθηκε, καθώς οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές αφορούν γεωμετρικές έννοιες, είναι ενδεικτικό των πλούσιων ευκαιριών που προσφέρει η εμπλοκή των μαθητών στο ναυτικό χάρτη για τη νοηματοδότηση πολλών μαθηματικών εννοιών.

Διαφορές ναυτικού και μαθηματικού διαβήτη.

Από την αρχή της εισαγωγικής δραστηριότητας οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με τα δύο βασικά όργανα του πλοιάρχου, το ναυτικό διαβήτη (κουμπάσο) και το διπαράλληλο.

Όσον αφορά το ναυτικό διαβήτη τους προκαλεί εντύπωση η έλλειψη μολυβιού και αναγνωρίζουν αμέσως τη χρήση του για τη μέτρηση αποστάσεων.

Ερ. *Να το δούμε λίγο αυτό. Τι θυμίζει;*

Κ *Διαβήτη.*

Ερ. *Είναι ακριβώς ο διαβήτης που ξέρετε;*

Όχι. (Όλοι μαζί)

Ερ. *Τι διαφορές έχει;*

Ν *Δεν έχει μολύβι.*

Ερ. *Γιατί δεν έχει μολύβι;*

Σ *Το χρησιμοποιούμε για να σημαδέψουμε μόνο…(Εννοεί να μετράει αποστάσεις).*

Κ *Μετράμε μόνο αποστάσεις.*

Από την ανάλυση των δραστηριοτήτων διαπιστώνουμε πως όσον αφορά τη χρήση του ναυτικού διαβήτη, οι μαθητές περιορίστηκαν στη χρήση του μόνο ως όργανο μέτρησης αποστάσεων. Στα σχολικά μαθηματικά ο διαβήτης χρησιμοποιείται κατ' εξοχήν για τη χάραξη κύκλων. Μέσα από την εμπλοκή τους με το ναυτικό χάρτη οι μαθητές αναγνωρίζουν το διαβήτη ως όργανο μέτρησης και σύγκρισης αποστάσεων. Μάλιστα σε ερώτηση του εκπαιδευτικού προς τους μαθητές αυτό που παρατηρήθηκε στη χρήση του ναυτικού διαβήτη στις δραστηριότητες, διατυπώνεται σαφώς από τους μαθητές. Θεωρούν πως η χρήση του ναυτικού διαβήτη περιορίζεται στη μέτρηση των αποστάσεων. Στην επίλυση των προβλημάτων, όπου χρειάζεται κύκλος, προτιμούν να το χαράζουν με τον κλασικό διαβήτη. Η απεικόνιση του κύκλου πάνω στο χάρτη τους παρέχει αίσθηση ακρίβειας που, όπως θα δούμε, συνδέεται με το ζητούμενο της ασφάλειας.

Ερ. *Ποιον προτιμάτε τον ναυτικό ή τον κανονικό διαβήτη για χρήση πάνω εδώ; (Εννοεί το ναυτικό χάρτη).*

Κ *Και τα δύο.*

Γ *Τον κανονικό, γιατί έχει μολύβι. Κατά τα άλλα, είναι το ίδιο.*

Σ *Για κάποιο λόγο δεν έχει μολύβι;*

Κ *Χωρίς μύτη δεν μπορείς να κάνεις με αυτό. (Εννοεί το ναυτικό)*

Γ *Μια χαρά μπορείς.*

Κ *Δε φεύγει κάπως; Δεν είναι σταθερός.*

Σ *Όχι, αλλά γιατί αυτό δεν έχει μολύβι;*

Ερ. *Πού σας βοηθάει περισσότερο ο άλλος;* *(Εννοεί τον κλασικό διαβήτη)*

Γ *Στους κύκλους. Ο ναυτικός είναι πιο πολύ για αποστάσεις. Αυτός είναι πιο ακριβής. (Συμφωνούν οι Ν και Σ).*

Επεισόδιο 2ο. Νοηματοδότηση σχετικής θέσης ευθειών στο επίπεδο μέσα από τη δραστηριότητα «Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση»

Στη δραστηριότητα *«Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση»* της δεύτερης φάσης τέθηκε το ερώτημα από τον εκπαιδευτικό αν δύο ευθείες που έχουν κοινό σημείο μπορεί να είναι παράλληλες. Παρόλο που οι μαθητές γνωρίζουν τις πιθανές σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο, παρατηρούμε μια σύγχυση. Δυσκολεύονται να αντιληφθούν πως δύο παράλληλες ευθείες από το ίδιο σημείο στην ουσία σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.

Ερ. *Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις;*

Σ *Παράλληλες ή τέμνονται.*

Ε *Είναι δυνατό στο θέμα μας να βγουν οι διοπτεύσεις παράλληλες;*

Ν *Όχι.*

Πλ. *Θα μπορούσαν να τείνουν στο παράλληλο, αν τα σημεία που μετράμε στις διοπτεύσεις ήταν πολύ κοντά. Γιατί αυτό;*

Γ *Όχι αν ήταν απέναντι;*

Πλ. *Όχι. Αν τα σημεία ήταν κοντά τότε οι δύο ευθείες τι τείνουν να κάνουν;*

Σ *Τείνουν να ανοίγουν;*

Γ *Όχι κλείνουν πολύ.*

Πλ. *Και τι κάνουν;*

Ν *Σχηματίζουν γωνία;*

Κ *Κάνουν μια ευθεία ταυτίζονται.*

Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο προκύπτει και στην τρίτη φάση. Εξαιτίας λανθασμένης μέτρησης οι μαθητές βρίσκουν δύο ευθείες οι οποίες είναι πάλι «σχεδόν παράλληλες». Αυτή τη φορά με μεγάλη ευκολία διαπιστώνουν ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο καθώς και οι δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο το μάτι του παρατηρητή.

Ερ. *Ναι κάποιο λάθος πρέπει να έχει γίνει στη μέτρηση. Γίνεται να βγάλω από το πλοίο με δύο απέναντι σταθερά σημεία παράλληλες διοπτεύσεις;*

Όχι. (Όλοι μαζί)

Ερ. *Γιατί δε γίνεται;*

Γ *Γιατί θα φτιάχνουν σίγουρα μια γωνία.*

Σ *Τα σημείο του πλοίου είναι το κοινό σημείο. Αυτές όμως δεν είναι παράλληλες.*

Γ *Είναι σχεδόν παράλληλες…*

Επίσης, στην τελευταία φάση προκύπτει το ερώτημα πόσα σταθερά σημεία στη στεριά χρειάζονται για να έχουμε δύο διαφορετικές ευθυγραμμίσεις. Πλέον είναι σαφές στους μαθητές πως αν οι δύο ευθυγραμμίσεις έχουν ένα κοινό σημείο τότε ταυτίζονται καθώς έχουν και δεύτερο κοινό σημείο, τον παρατηρητή.

Γ *Εγώ εννοώ ότι θα χρειαστώ τέσσερα σημεία για τις μετρήσεις. Δύο σημεία για τη μια ευθυγράμμιση και άλλα δύο για την άλλη.*

Σ *Ναι, για να τις τραβήξουμε, αφού από δύο σημεία περνάει πάντα μόνο μια ευθεία.*

Ερ. *Σίγουρα θέλουμε τέσσερα; Μήπως γίνεται και με λιγότερα;*

Ν *Τέσσερα θέλουμε.*

Κ *Τρία, αν έχουν κοινό.*

Ερ. *Ναι, αλλά αν έχουν κοινό σημείο στην στεριά;*

Κ *Την κάτσαμε πέφτουμε πάνω…*

Ερ. *Μπορούν να έχουν κοινό σημείο στη θάλασσα;*

Σ *Όχι γιατί θα πηγαίνουν έτσι… Άρα δε γίνεται. (Δείχνει ταυτίζονται).*

Βλέπουμε πως ο χώρος εργασίας αρχικά δυσκολεύει τους μαθητές. Μάλιστα, πρόκειται για γεωμετρική έννοια την οποία γνωρίζουν από το γυμνάσιο. Σταδιακά όμως μέσα από την εμπλοκή τους στις επαγγελματικές πρακτικές καταφέρνουν να άρουν την παρερμηνεία που δημιουργήθηκε αρχικά. Στον πρώτο διάλογο παρατηρούμε και παρέμβαση του πλοιάρχου. Είναι μια προσπάθεια να μιλήσει μαθηματικά, «*…τείνουν στο παράλληλο…*», εννοώντας ότι οι ευθείες θα ταυτιστούν. Η εμπειρία της πρακτικής του έχει δείξει ότι οριζόντια γωνία μικρότερη των 30° δεν παρέχει ασφαλείς μετρήσεις. Η εμπλοκή του όμως στη δραστηριότητα οδηγεί και αυτόν σε μια διάβαση γνωστικών συνόρων.

Επιδιώκει να μιλήσει χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία. Μπορούμε να πούμε ότι ο πλοίαρχος επιδιώκει τη *νομιμοποίηση συνύπαρξης (legitimating coexistence)* χαρακτηριστικό της διαδικασίας της *αναγνώρισης (identification)*. Από την άλλη, κάποιοι από τους μαθητές δυσκολεύονται να μεταφέρουν γεωμετρικές ιδιότητες που γνωρίζουν (σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο) στο πλαίσιο του χώρου εργασίας.

4.3 Συντονισμός *(coordination)*

Βασική επιδίωξη της διαδικασίας του συντονισμού είναι η αναζήτηση τρόπων αποκατάστασης της επικοινωνίας και της απρόσκοπτης συνεργασίας μεταξύ των δύο συστημάτων δραστηριότητας. Τα περισσότερα από τα κρίσιμα συμβάντα που καταγράφηκαν στην έρευνα έχουν ταξινομηθεί σ' αυτή τη διαδικασία νοηματοδότησης. Γενικά μπορούμε να πούμε πως παρατηρήθηκε διαρκής προσπάθεια των μαθητών να ανταπεξέλθουν στις δραστηριότητες που τους δόθηκαν νοηματοδοτώντας μαθηματικές έννοιες εξ αρχής ή νοηματοδοτώντας εκ νέου την ήδη υπάρχουσα γνώση ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες του χώρου εργασίας.

Πριν παραθέσουμε τα κρίσιμα συμβάντα που αφορούν τη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών θα θέλαμε να κάνουμε μια αναφορά στη γλώσσα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της έρευνας. Οι αλλαγές που παρουσιάστηκαν στη γλώσσα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές αποτελούν θεωρούμε από μόνες τους μια μορφή συντονισμού το δύο πρακτικών. Σταδιακά η γλώσσα εμπλουτίστηκε με όρους ναυτικής ορολογίας, όπως τους την παρουσίασε ο πλοίαρχος.

Πίνακας 8. Χρήση ναυτικής ορολογίας από τους μαθητές

Για το ακρωτήριο	*Ν Ανάλογα πως βλέπουμε τον **κάβο**…*
Για το πόσο έχει βυθιστεί το πλοίο στο νερό σε σχέση με το βάθος του πυθμένα.	*Γ Το **βύθισμα** μας παίρνει. Είναι 80 , 79,…*
Για την ασφαλή διέλευση	*Σ Λέει να πάμε εδώ, να φτάσουμε στα δύο μίλια που; Δύο είναι το **safe mode** .*

Όσον αφορά τη χρήση ναυτικών όρων για να περιγράψουν μαθηματικές έννοιες η αλλαγή είναι πιο έντονη όσο εξελίσσεται η έρευνα. Προκειμένου να περιγράψουν τη μέτρηση που αντιστοιχεί σε εγγεγραμμένη γωνία δε χρησιμοποιούν ποτέ τον αντίστοιχο μαθηματικό όρο αν και γνωρίζουν τη σύνδεση. Αντίθετα, χρησιμοποιούν τον ναυτικό όρο «οριζόντια γωνία». Τέτοια παραδείγματα μπορούμε να συναντήσουμε από την αρχή της δεύτερης φάσης μέχρι την ολοκλήρωση της έρευνας.

Ερ. *Τι έχουμε μετρήσει τότε;*

Κ *Τα επικίνδυνα νερά*

Γ *Και μια οριζόντια γωνία.*

…

Ερ. *Τι θα πάρετε για δεύτερο στοιχείο; Επιλέξτε.*

Σ *Λέω να πάρω την οριζόντια γωνία μεταξύ 3 και 4.*

Ερ. *Πόσο είναι η γωνία;*

Σ *20°*

Ερ. *Ωραία 20° . Πώς θα τη φτιάξετε αυτή; Τι σχήμα είπαμε δίνει η οριζόντια γωνία;*

Σ *Κύκλο.*

Κ *Άρα θέλουμε το κέντρο του κύκλου.*

Πιο χαρακτηριστικά όμως είναι τα παραδείγματα που αφορούν την έννοια της ευθείας. Στη δραστηριότητα *«Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση»* βλέπουμε τους μαθητές να χρησιμοποιούν ακόμα καθαρά μαθηματικούς όρους, όπως «απόσταση», «ευθεία», «γραμμή».

Σ *Θα ενώσουμε με μια γραμμή (Ο Γιώργος κρατάει το ναυτικό διαβήτη).*

Ν *Βρες εδώ την απόσταση. (Δείχνει στο Γιώργο τις μετρήσεις μιλίων στο πλάι του χάρτη).*

Γ *Όχι, θα τραβήξουμε μια ευθεία που ενώνει αυτά τα δύο σημεία. (Ενώνει το αρχικό σημείο με το σημείο στόχο που έδωσε ο Εκπαιδευτικός).*

Αργότερα όμως στη δραστηριότητα *«Ακτοπλοϊκό ταξίδι»* το νόημα του όρου γραμμή αποδίδουν και στον όρο «πορεία».

Πλ. *Ερώτημα. Έστω ότι έχουμε έναν κάβο, κάβος είναι η άκρη ενός νησιού, και θέλουμε να βρούμε ακριβώς πού βρισκόμαστε όχι ευθεία θέσεως, όχι κάπου εδώ θα είμαστε.*

Ν *Ανάλογα πώς βλέπουμε τον κάβο…*

Κ *Δεν έχουμε δύο σημεία να σημαδέψουμε, έχουμε μόνο μια διόπτευση.*

Ν *Δεν έχουμε δύο σημεία ένα που είμαστε εμείς και ένα που είναι ο κάβος;*

…

Γ *Μήπως ήμασταν εκτός πορείας εξ αρχής;*

Ειδικά για την ευθεία γραμμή ή ευθύγραμμο τμήμα δεν καλύπτονται από το μαθηματικό όρο. Καθώς στις μετρήσεις στην καθημερινή πρακτική του ο πλοίαρχος χρησιμοποιεί δύο όρους για την ευθεία, διόπτευση- ευθυγράμμιση, οι μαθητές υιοθετούν τους παραπάνω όρους για να αποφύγουν τη σύγχυση. Έτσι στην τελική φάση βλέπουμε τους μαθητές να κάνουν σαφή διαχωρισμό των δύο όρων.

Ν *Εγώ λέω διόπτευση*

Γ *Μήπως να πάρουμε ευθυγράμμιση φάρου 5 με 3;*

Μάλιστα για να καθορίσουν την ευθεία της διόπτευσης δε χρειάζονται δύο αλλά ένα σταθερό σημείο στη στεριά καθώς θεωρούν αυτονόητο ότι το δεύτερο σημείο θα είναι η πιθανή θέση του πλοίου. Ως δεύτερο στοιχείο χρησιμοποιούν και την κλίση της ευθείας, με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου του χάρτη για το οποίο επίσης χρησιμοποιούν το ναυτικό όρο «ανεμολόγιο», για τη χάραξη της πορείας του πλοίου.

Σ *Για να πάμε στο ανεμολόγιο;*

Κ *Ο φάρος 1 έχει διόπτευση 344°*

Σ *Πάμε σ' αυτό. Τώρα όμως πώς… Να το ευθυγραμμίσουμε από πριν; (Δείχνει ένα ανεμολόγιο. Τοποθετεί το διπαράλληλο).*

Από τα σχολικά μαθηματικά οι μαθητές έχουν νοηματοδοτήσει την ευθεία τόσο στο μάθημα της Γεωμετρίας όσο και της Άλγεβρας. Εμπλεκόμενοι στις δραστηριότητες στο ναυτικό χάρτη αντιλαμβάνονται την ευθεία με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Αρχικά η πορεία είναι μια ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο (λιμάνι) και έχει γνωστή κλίση. Εν προκειμένω ως κλίση δε λαμβάνεται η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με το

θετικό ημιάξονα των τετμημένων, αλλά με το θετικό άξονα των τεταγμένων[4]. Επιπλέον, νοηματοδοτούν γεωμετρικά την ευθεία με ακόμα δύο τρόπους (ένα σταθερό ή δύο συνευθειακά σημεία στη στεριά και τη θέση του πλοίου). Ειδικά η δεύτερη περίπτωση (ευθυγράμμιση) θεωρούμε ότι είναι ένα πέρασμα συνόρων καθώς τέτοιο τρόπο καθορισμού ευθείας δε συναντούν οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά. Το συγκεκριμένο παράδειγμα, το θεωρούμε σημαντικό καθώς οι νέοι τρόποι νοηματοδότησης εμφανίζονται συνεχώς και ενσυνείδητα από τους μαθητές και είναι χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο ο χώρος εργασίας επηρεάζει τους μαθητές.

Επεισόδιο 3ο . Νοηματοδότηση της ευθείας μέσα από τη χάραξη πορείας και τις διοπτεύσεις του πλοίου.

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να κάνουμε αναφορά στο ζήτημα της ακρίβειας. Η παράμετρος της ακρίβειας αναλύεται στα συμβάντα που εμπίπτουν στη διαδικασία του αναστοχασμού. Ένας από τους λόγους που ο διαχωρισμός μεταξύ διόπτευσης και ευθυγράμμισης υιοθετήθηκε από τους μαθητές ήταν η προσπάθεια να είναι περισσότερο ακριβείς στις επιλογές τους. Από την αρχή της δεύτερης φάσης, το θέμα της ακρίβειας δείχνει να απασχολεί τους μαθητές. Δείχνουν να προτιμούν την διόπτευση της ευθυγράμμισης καθώς η ευθεία που ξεκινά από το πλοίο διέρχεται από δύο σταθερά σημεία στη στεριά. Επίσης βλέπουμε ότι αντιμετωπίζουν τη γραμμή θέσης του πλοίου ως το γεωμετρικό τόπο των πιθανών θέσεων του πλοίου χωρίς να κάνουν αναφορά στο μαθηματικό όρο. Η αναγνώριση της διόπτευσης ως το σύνολο των πιθανών θέσεων του πλοίου επαναλαμβάνεται σε όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων.

Ερ. *Τι πλεονέκτημα έχει η ευθυγράμμιση σε σχέση με τη διόπτευση με ένα σημείο; Σκέφτονται…*

Σ *Είμαι σίγουρος…*

Ερ. *Γιατί είμαι σίγουρος; Σκέφτονται…*

Σ *Γιατί η ευθεία ισαπέχει από δύο σημεία;*

Ερ. *Όχι. Από ένα σημείο πόσες ευθείες περνάνε;*

[4] Η πορεία του πλοίου θεωρούμε πως είναι μια πολύ καλή δραστηριότητα για εισαγωγή στα διανύσματα. Η αντίστοιχη δραστηριότητα δημιουργήθηκε κατά τη διάρκεια του επανασχεδιασμού της έρευνας.

Κ Μία

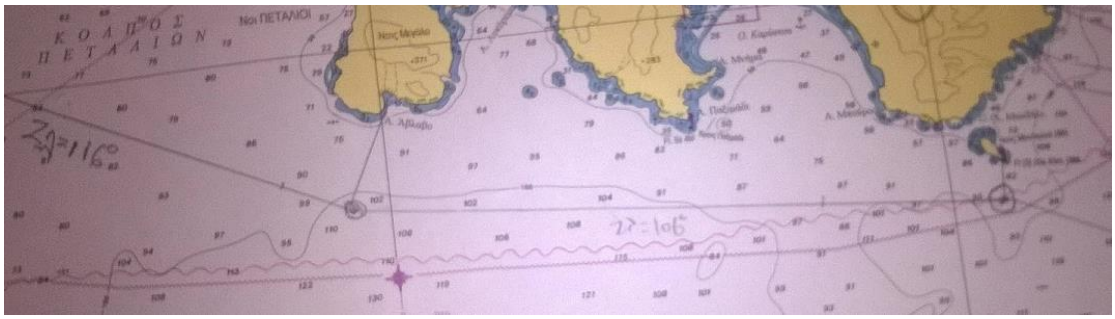
Γ Και από δύο σημεία μία μόνο ευθεία.

...

Σ Αυτή η γραμμή τη συμβολίζει; (Δείχνει την ευθυγράμμιση)

Γ Όλα τα πιθανά σημεία αλλά σίγουρα ήμαστε πάνω σ αυτή την ευθεία.

Εκτός όμως από την ευθεία γραμμή στις δραστηριότητες εμφανίζεται και η έννοια της τεθλασμένης γραμμής. Στη δραστηριότητα *«Ακτοπλοϊκό ταξίδι»* ο πλοίαρχος δείχνει στους μαθητές πως να χαράζουν πορεία μεταξύ λιμανιών διατηρώντας απόσταση



Εικόνα 15. Χάραξη πορείας

ασφαλείας από τη στεριά. Αυτό έχει ως συνέπεια να πρέπει οι μαθητές να μετατρέψουν πορεία ευθείας γραμμής σε τεθλασμένη *(εικόνα 15).* Δουλεύουν με γωνίες χαράζουν ευθείες και κάθετα τμήματα. Επίσης μετράνε το μήκος τεθλασμένης γραμμής. Τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει, κυρίως στο Γυμνάσιο, για τις παραπάνω έννοιες ή διαδικασίες τις μεταφέρουν, προσαρμόζοντας τες, στη νέα πρακτική. Να παρατηρήσουμε πως για τη χάραξη κάθετων τμημάτων οι μαθητές ακολουθούν τη σχολική πρακτική, χάρακας και τρίγωνο.

Ερ. *Μισό πριν πάμε παρακάτω. Πήραμε το εργαλείο το διπαράλληλο τι κάνει αυτό καταλαβαίνεται;*

Γ Κάνει συνέχεια παράλληλες…

Ν Βρίσκει πόσο απέχουν δύο παράλληλοι

Σ Οι δύο χάρακες είναι πάντα παράλληλοι (Οι μαθητές χρησιμοποιούν το διπαράλληλο με τη βοήθεια του πλοιάρχου και δοκιμάζουν τη λειτουργεία του).

Ερ. *Τι κίνηση είναι αυτή που κάνετε;*

Γ Βήμα, βήμα;

Γ Παράλληλα.

Ερ. *Αφού μεταφέρω τις ευθείες;*

Σ *Παράλληλη μεταφορά;*

Ερ. *Τι σχήμα δημιουργείτε στην ουσία;*

Σ *Παραλληλόγραμμο…*

Η διαδικασία νοηματοδότησης που ενεργοποιείται είναι ο *συντονισμός επικοινωνίας (communicative connection)* μεταξύ των δύο πρακτικών. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το διπαράλληλο και το ναυτικό διαβήτη. Οι μαθητές αναγνωρίζουν στη βασική χρήση του διπαράλληλου τη γεωμετρική έννοια της παράλληλης μεταφοράς. Βέβαια η έννοια της τεθλασμένης γραμμής είναι μια σχετικά απλή για τους μαθητές έννοια. Παρόλα αυτά η εμπλοκή του χώρου εργασίας αλλάζει το πλαίσιο διαχείρισης. Οι μαθητές διαχειρίζονται μια ρεαλιστική κατάσταση νοηματοδοτούν μέσα από την εμπλοκή τους *(learning by doing)*, κάτι το οποίο διαφέρει από το παραδοσιακό διδακτικό συμβόλαιο. Η έννοια της τεθλασμένης γραμμής δε εμφανίζεται περεταίρω στις δραστηριότητες οπότε και το επίπεδο σημαντικότητας του επεισοδίου κρίνεται χαμηλό.

Επεισόδιο 4ο. Νοηματοδότηση της στροφής γωνίας μέσα από το πρόβλημα αλλαγής πορείας του πλοίου

Στην δραστηριότητα «Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση» ,φάση Β, δίνεται στους μαθητές η πρώτη προβληματική κατάσταση. Το πλοίο βρίσκεται εκτός πορείας και πρέπει να βρουν τη νέα πορεία (γωνία) με την οποία θα αποφύγουν ένα εμπόδιο που βρίσκεται μπροστά τους. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να προβλέψουν τη στροφή (νέα γωνία) πριν χαράξουν τη νέα πορεία στο χάρτη και τη μετρήσουν στο ανεμολόγιο. Αν και οι μαθητές εύκολα χαράζουν την πορεία στο χάρτη με βάση όσα τους είχε δείξει ο πλοίαρχος και κάνουν τις μετρήσεις, δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι η πορεία στην ουσία είναι μια γωνία (σε σχέση με το πραγματικό Βορρά) και οι αλλαγές πορείας στροφή κατά γωνία.

Ερ. *Άρα το νούμερο έχει αλλάξει. Πριν το δείτε, θα δείχνει περισσότερο η λιγότερο από πριν.*

Κ *Περισσότερο*

Ερ. *Γιατί;*

Ν Λιγότερο.

Ερ. *Τι λέτε τελικά;*

Σ Πάμε προς τα πάνω δεν αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος;

Ερ. *Πόσο λέει τελικά;*

Γ 67° . Ορίστε περισσότερο.

Ερ. *Ναι αλλά γιατί;*

Γ Γιατί απομακρυνθήκαμε από την πορεία; Αλλά γιατί να μην ήταν και μικρότερο…

Ερ. *Αν αποκλίναμε προς τα κάτω θα ήταν πάλι μεγαλύτερο;*

Σ Όχι θα ήταν μικρότερο.

Σ Ναι αλλά γιατί.

Γ Γιατί πρέπει να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε γωνίες για να γυρίσουμε στην αρχική γωνία πορείας.

Η ευκολία με την οποία οι μαθητές «αντέγραψαν» τις κινήσεις του πλοιάρχου στη χάραξη πορείας μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα ακόμα στοιχείο που δείχνει *συντονισμό (coordination)* των δύο πρακτικών και πιο συγκεκριμένα *αυτοματοποίηση (routinization)* των πρακτικών. Η αυτοματοποίηση υποδηλώνεται από το σχεδόν διαδικαστικό χαρακτήρα των κινήσεων των μαθητών. Επιπλέον, η αρχική αδυναμία τους να προβλέψουν τη στροφή της γωνίας ενισχύει την παραπάνω διαπίστωση. Τελικά όμως παρατηρούμε πως νοηματοδοτούν τη στροφή ευθείας κατά γωνία συνδυάζοντας τη στροφή αυτή με την αυξομείωση του γεωγραφικού πλάτους. Το συμβάν είναι μεμονωμένο. Παρόλα αυτά η χρήση όρων του ναυτικού χάρτη προκειμένου να μιλήσουν η μαθητές για τη στροφή της γωνίας είναι χαρακτηριστική της βοήθεια που προσφέρει ο χώρος εργασίας μέσω της διέλευσης των γνωστικών συνόρων στην νοηματοδότηση μιας έννοιας την οποία οι μαθητές δεν έχουν καν πραγματευθεί στο σχολείο.

Επεισόδιο 5°. Νοηματοδότηση παραλλήλων μέσα από το πρόβλημα της εύρεσης της σωστής πορείας του πλοίου

Στη δραστηριότητα *«Δύο ασύγχρονες διοπτεύσεις του ίδιου καταφανούς σημείου»*, φάση Β, ο πλοίαρχος θέτει στους μαθητές ένα πρόβλημα προς επίλυση. Η δραστηριότητα

αυτή ήταν εκτός αρχικού σχεδιασμού και αποτελεί μια πρωτοβουλία του επαγγελματία. Τους ζητά να βρουν τη θέση του πλοίου χρησιμοποιώντας δύο ασύγχρονες διοπτεύσεις του ίδιου σημείου και όχι δύο σύγχρονες μετρήσεις δύο διαφορετικών σημείων. Για να εντοπίσει τη θέση του πλοίου, το οποίο έχει εκτραπεί της πορείας του χρησιμοποιεί ως δεδομένο και την ταχύτητά του. Αναλύοντας το μαθηματικό περιεχόμενο της πρακτικής βλέπουμε ότι ο πλοίαρχος θεωρεί πως το πλοίο ακολουθεί πορεία παράλληλη προς την αρχική, το οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν στην αρχή. Αντ' αυτού λανθασμένα συνδέουν την απόσταση που διανύει το πλοίο με τόξα κύκλου.

Ερ. *Την πρώτη στιγμή είναι εδώ και τη δεύτερη εδώ και έχουν μεσολαβήσει δέκα μίλια πορείας στο ενδιάμεσο.*

Γ *Δύο κύκλοι με ακτίνα δέκα;*

Ερ. *Όχι*

Σ *Εκεί που τέμνονται, όχι εντάξει…*

…

Σ *Θα κάνουμε κύκλο από εδώ και από εδώ (εννοεί τα δύο σημεία πάνω στην αρχική πορεία)*

Ερ. *Καταρχάς δεν είναι σίγουρο ότι είναι πάνω στη γραμμή της πορείας. Αλλά είναι σίγουρο ότι είναι μια γραμμή, πώς;*

Γ *Παράλληλη στην αρχική πορεία;*

Από τη στιγμή που οι μαθητές αντιλαμβάνονται πως η τελική πορεία του πλοίου είναι παράλληλη στην αρχική ο πλοίαρχος χρησιμοποιώντας το διπαράλληλο τους δείχνει πώς να εντοπίσουν τη θέση χρησιμοποιώντας παράλληλη μεταφορά. Στη συνέχεια, ο μαθητής Γ είναι σε θέση να δικαιολογήσει την ορθότητα του προσδιορισμού. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές νοηματοδοτούν την έννοια του παραλληλόγραμμου. Η νοηματοδότηση γίνεται με διαφορετικό τρόπο απ' ό,τι θα γίνονταν στα σχολικά μαθηματικά. Η χρήση του διπαράλληλου εξασφαλίζει στους μαθητές την παραλληλία των πλευρών μέσω της παράλληλης μεταφοράς. Η χρήση του ως εργαλείο παράλληλης μεταφοράς είναι διαρκής και στις τρεις φάσεις της έρευνας.

Ερ. *Ωραία, και ξέρετε ότι από το ένα σημείο στο άλλο έχουν μεσολαβήσει δέκα μίλια. Μπορείτε να μετρήσετε δέκα μίλια στο χάρτη;*

Κ Ναι. (Οι μαθητές ανοίγουν το διαβήτη σε άνοιγμα δέκα μίλια μετρώντας σωστά αριστερά στο χάρτη και μετράνε)

Πλ. *Πού υποτίθεται ότι βρίσκεται το πλοίο; Ωραία, υποτίθεται εδώ έτσι;*

Γ Ναι, αλλά δεν μπορεί να βρίσκεται σε όλο αυτό το τόξο;

Πλ. *Προσέξτε λίγο. Αυτό ονομάζεται μεταφορά, τι; Πώς μεταφέρουμε την ευθεία;*

Ν Παράλληλα.

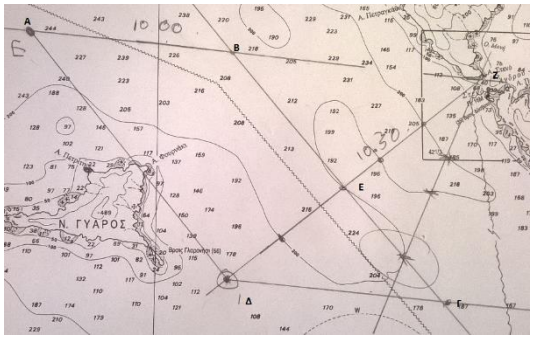
Πλ. *Για κοιτάχτε. πού είμαστε;*

Γ Εδώ. Αυτό είναι παράλληλο με αυτό.

Σ Είναι παράλληλα αυτά;

Γ Ναι, αυτά είναι παράλληλα, άρα φτιάχνουμε παραλληλόγραμμο, και αυτή είναι η ευθεία που θέλουμε αυτή τη στιγμή.

Οι τρεις μαθητές συνεχίζουν να έχουν αμφιβολίες για την ορθότητα του προσδιορισμού της θέσης και ο εκπαιδευτικός ζητά να τεκμηριώσουν την ορθότητα. Μάλιστα τίθεται και το επιπλέον ερώτημα της εύρεσης της σωστής αρχικής θέσης του πλοίου (σημείο Α). Οι μαθητές ακολουθούν την πρακτική που τους έδειξε ο πλοίαρχος, αλλά την εφαρμόζουν και αντίστροφα για να βρουν την αρχική θέση *(εικόνα 16).* Αρχικά οι μαθητές δυσκολεύονται να εντοπίσουν το σωστό κέντρο για τη χάραξη του κύκλου, τοποθετώντας το στην αρχική πορεία. Στη συνέχεια θεωρούν λανθασμένα ότι το πλοίο βρίσκονταν σε πρώτη φάση στην αρχική πορεία αγνοώντας την παράλληλη μεταφορά. Στο σημείο αυτό επίσης παρατηρούμε πως εξασφαλίζουν την ισότητα των απέναντι πλευρών βασιζόμενοι στην κατασκευή τους (ακτίνες ίσων κύκλων). Επίσης, ο τρόπος που δικαιολογείται διαφέρει από τις παραδοσιακές μεθόδους απόδειξης ισότητας πλευρών που χρησιμοποιούν οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά.



Εικόνα 16. Ασύγχρονες Διοπτεύσεις

Γ Καταρχάς θέλουμε δέκα μίλια (Ο Σ μετράει δέκα μίλια με το κουμπάσο και χαράζει νοητό κύκλο με κέντρο το τελικό σημείο.) Μπορεί να ήταν εδώ, εδώ . (Δείχνει σημεία σε τόξο)

Ν Ναι ισχύει άρα πρέπει να ήταν στη διόπτευση πάνω.

Σ Εκεί. (Ο Γ βρίσκει σημείο τομής πρώτης διόπτευσης και κύκλου, με λάθος κέντρο.)

Κ Μα είναι τελικά εκεί. Αν ήμασταν στην αρχική πορεία θα έπρεπε να είναι εδώ αλλά δεν είναι, άρα να πάρουμε το σωστό σημείο. (Δείχνει το σωστό κέντρο)

Ερ. *Πού ξεκίνησε για να φτάσει εκεί όμως;*

Σ Δέκα μίλια από πού; (Βάζει το διαβήτη στο σωστό κέντρο)

Ν Από εκεί. (Δείχνει σημείο τομής πιθανής πορείας και πρώτης διόπτευσης)

Ερ. *Αν ήταν εκεί θα είχε διανύσει δέκα μίλια;*

Σ Όχι.

Γ Μήπως ήμασταν εκτός πορείας εξ αρχής; ...Σε μια ευθεία που συνεχίζεται εδώ πάνω; (Δείχνει προέκταση της πρώτης διόπτευσης) Να κάνουμε μεταφορά της δεύτερης διόπτευσης ....

Μόλις διαπιστώνουν τα σφάλματά τους, αναπαριστώντας την αρχική μέθοδο του πλοιάρχου καταφέρνουν να αναλύσουν τη μέθοδο εντοπίζοντας τις σωστές θέσεις του πλοίου και την πορεία του ακολούθησε.

Γ Περίμενε ρε φίλε (στην παρέμβαση του Ν). Πριν ήταν η μεταφορά από εδώ προς τα εδώ (αναπαριστά τις κινήσεις του πλοιάρχου στην εφαρμογή της μεθόδου)

Κ Τώρα κάνε ανάποδα από εδώ προς τα εκεί(Τοποθετεί το διπαράλληλο και το ανοίγει)

Σ Να πάρουμε να μετρήσουμε δέκα μίλια (Τοποθετεί κουμπάσο σε λάθος σημείο, προσπαθεί να ανοίξει το κουμπάσο άνοιγμα ίσο με του διαβήτη.)

Γ Πού είσαι Σ... Εδώ είναι το σημείο ρε αγόρι (Δείχνει το σωστό κέντρο)

...

Ερ. *Πάμε ξανά. Πρέπει το σημείο να απέχει δέκα μίλια από που;*

Γ Εδώ. (Δείχνει το τελικό σημείο σωστά).

Ερ. *Και να βρίσκεται πάνω που;*

Γ Εδώ. (Δείχνει την πρώτη διόπτευση σωστά. Προεκτείνει την πρώτη διόπτευση).

Ν Άρα εδώ. (Δείχνει το σημείο τομής κύκλου και πρώτης διόπτευσης σωστά).

Γ Αυτό είχα κάνει πριν, αλλά δεν είχε την προέκταση

Τελειώνοντας τη δραστηριότητα οι μαθητές οι μαθητές μπορούσαν να δικαιολογήσουν μαθηματικά την ορθότητα του προσδιορισμού της θέσης. Αναλύοντας μάλιστα το μαθηματικό περιεχόμενο της εργασίας που έκανε ο πλοίαρχος προχώρησαν περισσότερο, παρατήρησαν ότι τα τρίγωνα ΒΖΕ και ΑΖΔ είναι όμοια λόγο της παράλληλης μεταφοράς της μιας πλευράς τους.

Για τον πλοίαρχο η παραπάνω πρακτική αποτελεί μια μηχανική διαδικασία. Οι μαθητές μπορούν αρχικά να την αναπαράγουν μηχανικά, αδυνατώντας να επιχειρηματολογήσουν για την ορθότητα της πρακτικής. Η μέθοδος δρώντας ως μαύρο κουτί (*black box)* για τον επαγγελματία έχοντας προκαλέσει κρυσταλλοποίηση (*crystallization)* της μαθηματικής γνώσης που χρησιμοποιείται. Για τους μαθητές, όμως έχουμε νοηματοδότηση παραλλήλων ευθειών και του παραλληλογράμμου μέσα από μια προσπάθεια μετάφρασης (*effort of translation)* της επαγγελματικής πρακτικής.

Επεισόδιο 6ο. Νοηματοδότηση της κατασκευής εφαπτομένης κύκλου από σημείο εκτός του κύκλου μέσα από τη δραστηριότητα της «Αποφυγής εμποδίου»

Στη δραστηριότητα «*Αποφυγή Εμποδίου»* οι μαθητές χρειάζεται να χαράξουν εφαπτομένη στον κύκλο, από σημείο εκτός κύκλου. Είναι μια κατασκευή την οποία οι μαθητές δε διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η βασική γνώση των μαθητών, πάνω στην οποία στηρίχτηκε ο εκπαιδευτικός για να τους οδηγήσει μέσα από ερωτήσεις στην κατασκευή της εφαπτομένης, είναι πως η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Την παραπάνω ιδιότητα την έχουν διδαχθεί οι μαθητές στο Γυμνάσιο. Από εκεί και πέρα φάνηκε οι μαθητές να έχουν ευχέρεια στην κατασκευή της μεσοκαθέτου τμήματος για την εύρεση του κέντρου του κύκλου, καθώς την είχαν διδαχθεί λίγες μέρες πριν στο σχολείο.

Ερ. *Πάμε λοιπόν, κρατάμε αυτό που είπατε ότι πρέπει η πορεία να φτιάχνει με την ακτίνα γωνία 90ο . Πού έχετε συνδυάσει κύκλους και ορθές γωνίες;*

Ν *Αποστήματα;*

Κ *Εγγεγραμμένες γωνίες.*

Ερ. *Ωραία, άρα θέλω μια εγγεγραμμένη γωνία που θα είναι πόσο;*

Ν *228ο ;(Έχει μπερδευτεί με την κλίση της χαραχθείσας πορείας).*

Κ *90º .*

Ερ. *Πού βαίνει η γωνία;*

Κ *Σε ημικύκλιο.*

Ερ. *Άρα τι είναι το τμήμα που βλέπει;*

Σ *Διάμετρος.*

Ερ. *Ποια είναι η διάμετρος;*

Σ *Η πορεία από εδώ μέχρι εδώ.(Δείχνει την εκκίνηση και το εμπόδιο)*

Η κατασκευή της εφαπτομένης αποτελεί ακόμα ένα παράδειγμα συντονισμού (*coordination)* ανάμεσα στις δύο πρακτικές. Παρατηρούμε μια μεταφορά και επέκταση της γνώσης που απέκτησαν στο σχολείο προκειμένου να επιλύσουν μια προβληματική κατάσταση που αντιμετωπίζουν στον χώρο εργασίας. Παρόλο που ο επαγγελματίας πλοίαρχος δεν επικεντρώνεται στην ακρίβεια της κατασκευής, αυτό δεν ισχύει για τους μαθητές. Το πρόβλημα αποφυγής του εμποδίου φέρνει στο προσκήνιο την ανάγκη της γεωμετρικής κατασκευής. Παρακολουθώντας την εξέλιξη ολόκληρου του συμβάντος παρατηρούμε πως οι μαθητές ψάχνουν τρόπο να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα ικανοποιώντας και το αίτημα ακρίβειας που έχουν συνηθίσει στα σχολικά μαθηματικά, αλλά και τους περιορισμούς του χώρου εργασίας. Οι μαθητές επιμένουν στο ζητούμενο της ακρίβειας. Η πρακτική που τους παρουσίασε ο πλοίαρχος και κατ' επέκταση ο χώρος εργασίας ενεργοποιούν μια γεωμετρική κατασκευή, η οποία μάλιστα δεν ανήκει στο επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα. Η παραπάνω κατασκευή είναι η μόνη γεωμετρική κατασκευή που εμφανίζεται στα αποτελέσματα της έρευνας.

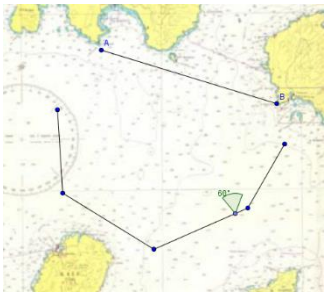
Επεισόδιο 7º. Νοηματοδότηση της εγγεγραμμένης γωνίας μέσα από τη δραστηριότητα της «Οριζόντιας γωνίας».

Η δραστηριότητα *«Οριζόντια γωνία»,* φάση Β, αφορούσε την οριζόντια γωνία. Όπως αναφέραμε παραπάνω η οριζόντια γωνία, ως γραμμή θέσης, αντιπροσωπεύει έναν κύκλο

Εικόνα 17. Αρχείο Λογισμικού.

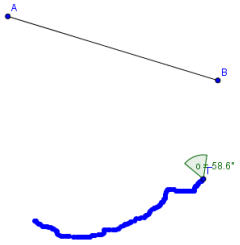
που διέρχεται από δύο σταθερά σημεία ώστε η εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο που δημιουργούν τα δύο σημεία να ισούται με τη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας. Προκειμένου οι μαθητές να δημιουργήσουν την παραπάνω σύνδεση χρησιμοποιήθηκε αρχείο λογισμικού Geogebra *(εικόνα 17)*. Είναι η μόνη στιγμή στο σύνολο των δραστηριοτήτων που οι μαθητές δεν εργάστηκαν στο ναυτικό χάρτη. Παρόλο που αυτό αποτελεί μια έκπτωση στην αυθεντικότητα που προσφέρει ο χώρος εργασίας, κρίθηκε απαραίτητο να εμπλακούν οι νέες τεχνολογίες, θεωρώντας πως μέσα από το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας θα μπορούσαν πιο εύκολα να διερευνήσουν την σχέση οριζόντιας γωνίας και εγγεγραμμένης γωνίας κύκλου. Η όλη συζήτηση γίνονταν πάντα με αναφορά στο χώρο εργασίας.

Αρχικά παρατηρούν πως, από όλες τις γραμμές θέσεις που τους προτείνει το αρχείο λογισμικού, αυτή που προκαλεί τις μικρότερες αλλαγές στη γωνία είναι μια πολυγωνική γραμμή *(εικόνα 18)*. Η παρατήρηση γίνεται με το *σύρσιμο (dragging)* ενός σημείου πάνω στις πιθανές γραμμές θέσεις και την παρακολούθηση της τιμής της γωνίας .



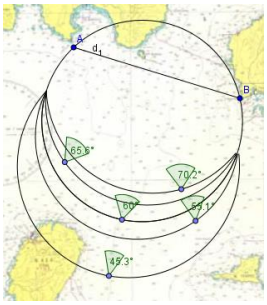
Εικόνα 18. Πορεία

Στη συνέχεια κινώντας ένα σημείο με ενεργό ίχνος προσπαθούν να διατηρήσουν τη γωνία σταθερή. Οι δύο πρώτοι μαθητές αποτυγχάνουν ο τρίτος όμως δημιουργεί μια καμπύλη που οδηγεί σε μια πρώτη εικασία γίνεται ότι το σχήμα που θα προκύψει είναι κύκλος *(εικόνα 19)*. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται πως η οριζόντια γωνία είναι στην ουσία μια εγγεγραμμένη γωνία.



Εικόνα 19. Δοκιμή μαθητή

Αφού διατυπώνεται η εικασία στην τρίτη φάση οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν ανάμεσα σε έξι επιλογές ποιο είναι το σωστό τόξο κύκλου διαπιστώνοντας πως ο κύκλος πρέπει να διέρχεται τόσο από τα δύο σημεία στη στεριά όσο και από τα κοινά άκρα των έξι τόξων *(εικόνα 20)*.



Εικόνα 20. Επιλογή του σωστού τόξου

Ερ. *Ωραία τώρα θέλω να κινήσετε το σημείο προσπαθώντας να κρατήσετε τη γωνία σταθερά ίση με 60° . Όσο πιο σταθερή γίνεται.*

….

Σ *Κάνε μια στροφή.*

(Δοκιμάζει ο Κ)

Ν *Καμπύλη.*

Ερ. *Τι καμπύλη;*

Γ *Κύκλο. Αν κάναμε δηλαδή ένα κύκλο θα ήταν 60° σε όλες τις θέσεις.*

Ερ. *Θα το δούμε περίμενε. Ο εκπαιδευτικός ενεργοποιεί την οθόνη του αρχείου λογισμικού με πολλούς κύκλους (τόξα κύκλων με κοινά άκρα).*

(Οι μαθητές δοκιμάζουν όλα τα τόξα.)

Κ *Μόνο στον τρίτο κύκλο παραμένει σταθερό.*

Γ *Ναι, αλλά γιατί;*

Γ *6 φορές το 6 =36;* *(Οι μαθητές το απορρίπτουν και σκέφτονται).*

Γ *Γιατί περνάει από τα δύο σταθερά σημεία;*

Σ *Όλοι περνάνε.*

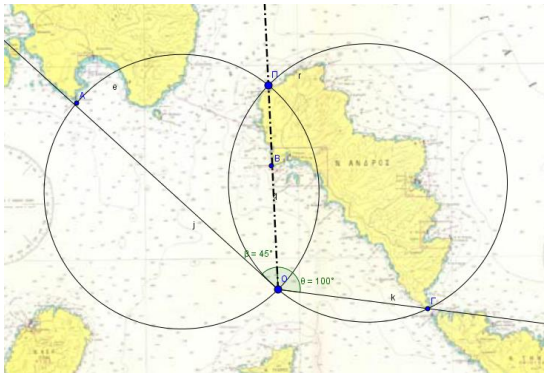
Ερ. *Περίμενε να δοκιμάσετε (Δείχνει στους μαθητές πώς να κατασκευάζουν κύκλο από τρία σημεία).*

Οι μαθητές παρατηρούν ότι μόνο ο ένας διέρχεται από τα σημεία της στεριάς και τα κοινά άκρα όλων των τόξων. Δοκιμάζουν όλα τα τόξα διαπιστώνοντας έστω και μικρές αποκλίσεις.

Οι μαθητές μεταφέρουν υπάρχουσες γνώσεις από τα μαθηματικά στο χώρο εργασίας ενεργοποιώντας ξανά τη διαδικασία νοηματοδότησης του *συντονισμού επικοινωνίας (communicative connection).* Η οριζόντια γωνία λειτουργεί ως κοινά διαμοιραζόμενο αντικείμενο ανάμεσα στα σχολικά μαθηματικά και τον χώρο εργασίας. Οι μαθητές έχουν διδαχθεί την εγγεγραμμένη γωνία στη Β' γυμνασίου. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε και πάλι τη διέλευση των γνωστικών συνόρων από τους μαθητές. Μέσα από τη ρεαλιστική κατάσταση στην οποία ενεπλάκησαν νοηματοδοτούν ξανά τη βασική ιδιότητα της εγγεγραμμένης γωνίας, διατήρηση ισότητας όταν το τόξο που βαίνει παραμένει σταθερό. Αν και η γνώση προϋπάρχει θεωρούμε πως οι εικόνες που σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας εμπλουτίζονται. Όπως

θα δούμε και παρακάτω, η έννοια της οριζόντιας γωνίας επανέρχεται συχνά στο προσκήνιο, οπότε η νοηματοδότηση που γίνεται στο συμβάν που περιγράψαμε κρίνεται σημαντική. Η αναγνώριση της έννοιας της εγγεγραμμένης γωνίας στον όρο οριζόντια γωνία αποκαθιστά την επικοινωνία ανάμεσα στις δύο πρακτικές. Η όλη διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσπάθεια μετάφρασης *(efforts of translation)* μεταξύ των δύο διαφορετικών χώρων.

Η οριζόντια γωνία ως μέτρηση συνδέεται με το στιγμόμετρο[5]**.** Στη δραστηριότητα για την οριζόντια γωνία οι μαθητές με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, αναπαριστούν στο λογισμικό τη χρήση του στιγμόμετρου *(εικόνα 21).* Ο στόχος είναι να αναδειχθούν οι μαθηματικές έννοιες πάνω στην οποίες στηρίζεται η λειτουργία του οργάνου.



Εικόνα 21 Στιγμογράφος στο Λογισμικό

Σε πρώτη φάση οι μαθητές, αν και δυσκολεύονται κάπως, προσαρμόζουν το εργαλείο σωστά ώστε να βρουν τη θέση του πλοίου(Ο). Σε αυτή τη φάση οι κύκλοι δεν είναι ορατοί στους μαθητές. Στις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού συνδυάζουν την οριζόντια γωνία με γωνία εγγεγραμμένη σε κύκλο. Έτσι καταλήγουν στο συμπέρασμα πως το στιγμόμετρο στην ουσία στηρίζεται σε δύο τεμνόμενους κύκλους.

Ερ. *Ωραία τη βρήκαμε τη θέση με δύο οριζόντιες γωνίες. Αυτό μαθηματικά πώς εξηγείται γιατί είναι όντως αυτή η θέση του πλοίου; Τι γωνίες είναι αυτές;*

Γ *Οριζόντιες γωνίες.*

Ερ. *Τι σχήμα μου δίνει η οριζόντια γωνία τι είπαμε πριν;*

Κ *Κύκλο.*

Γ *Ένα κύκλο που περνάει από τα Α και Ε*

Ν *Τρεις. Ένα στο Α ένα στο Β και ένα στο Ε*

Σ *Και όπου τέμνονται είναι το σημείο που βρίσκεται το πλοίο;*

Ερ. *Πόσους κύκλους έχουμε; Πόσες γωνίες έχουμε;*

[5] Ο στιγμόμετρο χρησιμοποιείται όταν γνωρίζουμε τις δύο οριζόντιες γωνίες που δημιουργεί το μάτι του παρατηρητή με τρία καταφανή σημεία στη στεριά, που σημειώνονται στο χάρτη.

Κ *Έχουμε δύο γωνίες*

Ν *Η κάθε γωνία είναι ένας κύκλος*

Ερ. *Άρα πόσοι κύκλοι*

Δύο *Όλοι μαζί.*

…

Ερ. *Ναι. Άρα έχω δύο κύκλους. Οι κύκλοι που έχω φτιάξει τέμνονται σε πόσα σημεία;* *(Οι κύκλοι δε φαίνονται)*

Σ *Δύο… Δεν το ξέρουμε, πρέπει να φτιάξουμε τους κύκλους.*

Ν *Το ένα είναι το Π. Το άλλο είναι από κάτω…Αυτό πού συνεχίζει ο κύκλος; (Εννοεί την κοινή κορυφή που είναι η θέση του πλοίου.)*

Γ *Όχι το Ε. (Βρίσκει σωστά και το δεύτερο κοινό σημείο χωρίς να υπάρχουν ακόμα οι κύκλοι.)*

Ο εκπαιδευτικός εμφανίζει τους κύκλους και επιβεβαιώνει τις απαντήσεις των Ν και Γ.

Στο στιγμόμετρο έχουν αποκρυσταλλωθεί και αποκρύπτονται μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες. Να σημειωθεί πως στη συζήτηση με τον πλοίαρχο και ο επαγγελματίας έκανε αυτοματοποιημένη χρήση του οργάνου χωρίς να αναγνωρίζει το μαθηματικό περιεχόμενο που κρύβεται στο στιγμόμετρο. Το εργαλείο λειτουργεί έτσι, για τον επαγγελματία, ως ένα *μαύρο κουτί (black box).* Παράλληλα μέσα από αυτή τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία να γίνει συζήτηση για τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων στο επίπεδο με αφορμή τους περιορισμούς βέβαια του οργάνου και του χώρου εργασίας. Η αποκάλυψη των μαθηματικών που κρύβει το στιγμόμετρο εμπίπτει στη διαδικασία νοηματοδότησης του *συντονισμού (coordination)* και ειδικότερα της *προσπάθειας μετάφρασης (efforts of translation)*, καθώς γίνεται προσπάθεια ερμηνείας ενός αντικειμένου που συνδέεται άμεσα με την ασάφεια που έχει για τους μαθητές οι πρακτικές του χώρου εργασίας.

Επεισόδιο 8ο. Νοηματοδότηση της μεταβολής της εγγεγραμμένης γωνίας μέσα από τη δραστηριότητα «Ασφαλούς διέλευσης επικίνδυνων υδάτων»

Στο πρόβλημα *«Ασφαλούς διέλευσης επικίνδυνων υδάτων»* οι μαθητές διαπίστωσαν ότι η οριζόντια γωνία ασφαλούς διέλευσης κυμαίνεται σε ένα εύρος τιμών και δεν έχει σταθερή τιμή. Οι μαθητές όχι μόνο εφαρμόζουν τη γνώση που απέκτησαν μελετώντας την οριζόντια γωνία αλλά προχωρούν ακόμα περισσότερο μιλώντας για τη μεταβολή της εγγεγραμμένης γωνίας αντιστρόφως ανάλογα προς την ακτίνα του κύκλου, διατηρώντας το τόξο που βαίνουν σταθερό.

Ερ. *Ωραία. Η γωνία είναι περίπου 45ο. Με 45ο είμαι οριακά. Για να είμαι ασφαλής πιο λίγο ή πιο πολύ;*

Κ *Πιο μεγάλη… (Λανθασμένη απάντηση)*

Σ *Όχι πιο μακριά πιο μικρή γωνία.*

Ερ. *Ωραία τη βρήκατε 35ο . Άρα η μέτρηση μου τι πρέπει να είναι πάντα;*

Οι μαθητές συζητάνε για το μέγεθος της μέτρησης. Είναι σίγουροι για το μικρότερη από 45ο . Διαφωνούν(ο Ν, προσωρινά) για τη σχέση με τη γωνία 35ο .

Σ *Μεγαλύτερη των 35ο .*

Το παραπάνω συμβάν επαναλαμβάνεται και στη συνέχεια. Το ίδιο ερώτημα επαναδιατυπώνεται από τον πλοίαρχο στην τρίτη φάση. Η διατύπωση είναι διαφορετική, καθώς ζητά από τους μαθητές να κρίνουν αν το πλοίο προσεγγίζει ή απομακρύνεται από την ακτή με βάση τη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας, με δύο σταθερά σημεία στη στεριά. Ο πειραματισμός στο ναυτικό χάρτη οδηγεί τους μαθητές να επιβεβαιώσουν την αρχική σκέψη τους, η γωνία μεγαλώνει, όσο πλησιάζουμε στη στεριά, όσο δηλαδή μικραίνει η ακτίνα του κύκλου.

Πλ. *Στην πρώτη περίπτωση είναι 50ο η οριζόντια γωνία στη δεύτερη 15ο . Σε ποια περίπτωση είμαστε πιο κοντά στη στεριά;*

Σ *Στη δεύτερη.*

Γ, Ν *Στην πρώτη.*

Σ *Εγώ νομίζω στη δεύτερη. Έχει λιγότερη απόσταση…*

Οι μαθητές σκέφτονται Ο Γ πειραματίζεται στο χάρτη.

Κ *Θα έχει πλησιάσει στις 15ο στα σίγουρα.*

Σ Ωχ, η γωνία πλησιάζει όταν μεγαλώνουμε. Όσο πηγαίνουμε πίσω μικραίνει η γωνία και όσο πάμε μπροστά μεγαλώνει.

Γ Άρα στις 50° θα είμαστε πιο κοντά.

Πλ. *Να σας πω. Έστω ότι οι δύο φανοί είναι τα δύο κάδρα. Όταν πλησιάσω η γωνία που τα βλέπω είναι μεγαλύτερη και όταν απομακρυνθώ μικρότερη. Αυτή είναι η πεμπτουσία να βρούμε αν είμαστε κοντά η μακριά από τη στεριά επί του πρακτέου.*

Στο σημείο αυτό ενεργοποιείται ακόμα μια φορά ο μηχανισμός μάθησης του συντονισμού *επικοινωνίας (communicative connection)* των δύο χώρων. Η ανάγκη ασφαλούς διέλευσης οδηγεί στους μαθητές στη νοηματοδότηση της μεταβολής της εγγεγραμμένης γωνίας και της διαπίστωσης του τρόπου μεταβολής της. Το παραπάνω ζήτημα οι μαθητές δεν το πραγματεύονται στα σχολικά μαθηματικά, όπου γίνεται αναφορά στις συνθήκες ισότητας εγγεγραμμένων γωνιών. Η διέλευση των γνωστικών συνόρων μέσα από την εμπλοκή τους στο ναυτικό χάρτη συμβάλλει στην εμβάθυνση και τον εμπλουτισμό της έννοιας της εγγεγραμμένης γωνίας.

Δυσκολίες νοηματοδότησης

Δεν υπήρχαν όμως μόνο επιτυχημένες προσπάθειες συντονισμού των δύο πρακτικών. Καταγράφηκαν και περιπτώσεις που οι μαθητές απέτυχαν να νοηματοδοτήσουν μαθηματικές έννοιες σε πρακτικές ή χρήση εργαλείων. Ως πρώτο παράδειγμα θα αναφέρουμε τη χρήση του διπαράλληλου ως μοιρογνωμόνιο. Ο διπαράλληλος έχει ως βασική χρήση τη παράλληλη μεταφορά ευθειών. Έχει όμως και μια δευτερεύουσα χρήση ως μοιρογνωμόνιο *(εικόνα 22)*. Αντί για το ανεμολόγιο χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε μεσημβρινό του χάρτη με το χαρακτηριστικό σημείο S του οργάνου να δείχνει προς το Νότο. Ο πλοίαρχος παρουσίασε την παραπάνω χρήση του οργάνου. Οι μαθητές δεν υιοθέτησαν τη χρήση αυτή σε καμία περίπτωση. Εξακολούθησαν να χρησιμοποιούν ως μοιρογνωμόνιο το ανεμολόγιο σε όλες τις δραστηριότητες. Δεν αναζήτησαν την εξήγηση για τη δεύτερη χρήση του διπαράλληλου. Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι έντονα αποκρυσταλλωμένο στο όργανο από την κατασκευή του. Αντίθετα από την εισαγωγική δραστηριότητα

Εικόνα 22. Διπαράλληλος-μοιρογνωμόνιο

μπορούμε να παρατηρήσουμε πως οι μαθητές αναγνωρίζουν στη χρήση του διπαράλληλου την παράλληλη μεταφορά.

Ερ. *Μισό λεπτό πριν πάμε παρακάτω. Πήραμε το εργαλείο το διπαράλληλο. Τι κάνει αυτό, καταλαβαίνετε;*

Γ *Κάνει συνέχεια παράλληλες…*

Ν *Βρίσκει πόσο απέχουν δύο παράλληλοι*

Σ *Οι δύο χάρακες είναι πάντα παράλληλοι*

Ερ. *Τι κίνηση είναι αυτή που κάνετε;*

Γ *Βήμα, βήμα;*

Ερ. *Πώς κινούνται;*

Γ *Παράλληλα.*

Ερ. *Αφού μεταφέρω τις ευθείες;*

Σ *Παράλληλη μεταφορά;*

Ερ. *Τι σχήμα δημιουργείται στην ουσία;*

Σ *Παραλληλόγραμμο…*

Στη φάση Γ, σε σχετική ερώτηση του εκπαιδευτικού οι μαθητές αναγνωρίζουν, ξανά, στη χρήση του την παράλληλη μεταφορά ευθειών. Πρέπει να τον κρατάνε με τα δύο χέρια και να ασκούν πίεση προκειμένου να διατηρείται η παραλληλία, κάτι που δυσκολεύει αρχικά τη χρήση του. Η χρήση του οργάνου για τη χάραξη παραλλήλων είναι διαρκής και από ένα σημείο και η εξοικείωση των μαθητών με το εργαλείο πολύ μεγάλη. Μάλιστα, σταδιακά η ευχέρεια των μαθητών στη χρήση του οργάνου είναι σε τέτοιο βαθμό, που προτιμούν το διπαράλληλο από το χάρακα και το γνώμονα στη χάραξη κάθετων και παραλλήλων ευθειών.

Στη *δραστηριότητα «Εύρεση θέσης πλοίου»* οι μαθητές καταλήγουν σε αδιέξοδο καθώς αναζητώντας τη θέση του πλοίου αντί για ένα σημείο καταλήγουν σε τρία διαφορετικά σημεία. Ένας μαθητής κάνει λόγο για μέση απόσταση για να καταλήξουν με την παρέμβαση του πλοιάρχου να αναζητούν το κέντρο του τριγώνου. Οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τα κέντρα του τριγώνου, παρά μόνο τις βασικές ιδιότητες διχοτόμου και μεσοκαθέτου. Σ' αυτές στηρίζονται και μιλούν κυρίως για σημείο τομής διχοτόμων και μεσοκαθέτων.

Πλ. *Για να βρούμε λοιπόν το κέντρο του τριγώνου, τι πρέπει να κάνουμε;*

Ν *Να τραβήξουμε διχοτόμο.*

Κ *Διάμεσο.*

Σ, Γ *Μεσοκάθετο.*

Σ *Μεσοκάθετο στη βάση.*

Γ *Τρεις μεσοκάθετοι*

Πλ. *Και οι διχοτόμοι δε δίνουν κέντρο;*

Ερ. *Ωραία μισό λεπτό. Με τις μεσοκαθέτους θα βρούμε ένα σημείο. Το οποίο …(Οι μαθητές έχουν διδαχθεί μεσοκάθετο και διχοτόμο ως γεωμετρικούς τόπους).*

Σ *Ισαπέχει από τις γωνίες. Όχι από τις κορυφές…(Συμφωνεί και ο Ν)*

Ερ. *Ωραία από τις κορυφές. Με τις διχοτόμους θα βρούμε άλλο κέντρο που…*

Σ *Ισαπέχει από τις πλευρές.*

Ερ. *Ποιο από τα δύο να πάρω;*

Σ *Αυτό με τις κορυφές επειδή έχω τα τρία σημεία.*

Κ *Όχι με τις πλευρές;*

Ερ. *Εσείς τι λέτε;*

Συμφωνούν όλοι μεσοκαθέτους, εκτός του Ν

Γ *Να ισαπέχει από τις κορυφές. Αυτά τα τρία σημεία που έχουμε βρει.*

Ερ. *Εσύ Ν γιατί διχοτόμο; Μόνος είπες διχοτόμο από την αρχή και επιμένεις.*

Ο Ν σκέφτεται…

Ν *Επειδή είχαμε πει ισαπέχει από τις πλευρές.*

Παρατηρούμε πως η επιλογή των μαθητών δεν συνάδει με την επίσημη πρακτική του χώρου εργασίας. Όπως φαίνεται και παρακάτω σε αυτό συμβάλλει και ο επαγγελματίας. Γνωρίζει πως πρέπει να επιλέξει το έκκεντρο αλλά θεωρεί το συγκεκριμένο σημείο ως την τομή των τριών μεσοκαθέτων του τριγώνου.

Ερ. *Ας ακούσουμε και τη γνώμη του Captain. Τι από τα δύο;*

Πλ. *… Παντελώς πρακτικά λέμε ότι είναι εδώ. Παίρνει το μολύβι και σημαδεύει σημείο εσωτερικό στο νοητό τρίγωνο.*

Ερ. *Για εσένα Captain τι είναι αυτό τι αντιπροσωπεύει;*

Πλ. *Αυτό θα μπορούσε να βρεθεί από τις διχοτόμους και μεσοκαθέτους. (Σκέφτεται όσο μιλάει, δείχνει όχι σίγουρος).*

Ερ. *Δε θα είναι το ίδιο όμως…*

Πλ. *Όχι αλλά κοντινά, κάτι μέτρα η διαφορά τους… Αλλά αυτό που έφτιαξα εγώ προκύπτει από τις διχοτόμους. Ναι αυτό. Η διαφορά μας τώρα εδώ ανάμεσα στο ένα σημείο και το άλλο είναι…1,5 μίλι. Πάλι 1,5 μίλι και πάλι 1,5 μίλι.(Μετράει την απόσταση του σημείου που επέλεξε από τις κορυφές του νοητού τριγώνου).*

Κ *Αν είναι πάλι 1,5 θα είναι σχεδόν ισόπλευρο το τρίγωνο*

Ερ. *Μέτρησες απόσταση από τις κορυφές…*

Σ *Άρα μεσοκάθετοι δηλαδή..*

Γ *Ναι.*

Στο παραπάνω συμβάν αυτό παρατηρούμε αδυναμία νοηματοδότησης μέσω του συντονισμού (*coordination*) ανάμεσα στα σχολικά μαθηματικά και το χώρο εργασίας. Σε αντίθεση με την προηγούμενη κατασκευή οι μαθητές αδυνατούν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους και να επιτύχουν νοηματοδότηση του έκκεντρου και του περίκεντρου εν προκειμένω. Παρόλο που γνωρίζουν τις ιδιότητες διχοτόμου και μεσοκαθέτου αποτυγχάνουν να επιλέξουν το σωστό κέντρο, έκκεντρο, ως λύση. Όπως είδαμε την ίδια αδυναμία δείχνει και ο επαγγελματίας.

Όταν στη συνέχεια οι μαθητές χρησιμοποιούν ως μετρήσεις τρεις διοπτεύσεις, ευθείες, προκύπτουν ξανά τρία πιθανά σημεία αντί για ένα. Πάλι μιλούν για το κέντρο του τριγώνου. Βέβαια στη φάση αυτή βλέπουμε πως ένας μαθητής έχει αναπτύξει κριτική ικανότητα, παρατηρώντας πως μια τέτοια κατάσταση δεν είναι δυνατό να υπάρξει πραγματικά.

Ερ. *Εντάξει το τρίτο σημείο βγαίνει πολύ ψηλά και θα έχουμε πάλι ένα…*

Κ *Ένα τρίγωνο*

Σ *Πολύ μεγάλο όμως τρίγωνο και θα πρέπει να φτιάξουμε το κέντρο; Δε στέκει…*

Στην ίδια δραστηριότητα, οι μαθητές, για να βρουν τη θέση του πλοίου, επιλέγουν δύο οριζόντιες γωνίες. Από όλες τις πιθανές θέσεις δύο κύκλων στο επίπεδο στο χώρο εργασίας έχουμε μόνο τεμνόμενους κύκλους. Διαπιστώνουν εύκολα ότι οι κύκλοι δε γίνεται να μην έχουν κοινό σημείο ούτε απλά να εφάπτονται.

Ερ. *Με δύο οριζόντιες γωνίες τι θα φτιάξουμε;*

Σ *Δύο κύκλους που θα τέμνονται.*

Ερ. *Πάλι θα έχουμε δύο σημεία;*

Γ Εκτός αν εφάπτονται.

Σ Όχι δεν πρέπει να είναι όχι αντίθετοι…Δεν μπορούν να εφάπτονται. Ένα κοινό σημείο το πλοίο και ένα η στεριά

Ερ. *Οκ, αν δεν εφάπτονται; Να είναι εξωτερικοί γίνεται;*

Γ Όχι γιατί υπάρχει το κοινό σημείο (Εννοεί τον παρατηρητή).

Στη συνέχεια προκύπτει το ζητούμενο της σχετικής θέσης κύκλου και ευθείας. Οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά να διαπιστώσουν πως η ευθεία μπορεί να τέμνει τον κύκλο σε δύο κοινά σημεία, ενώ κάνουν λόγο και για εφαπτομένη του κύκλου.

Ερ. *Ωραία και ας πούμε ότι η ευθυγράμμιση διέρχεται και από τα δύο κοινά σημεία…*

Γ Δε γίνεται…

Ερ. *Γιατί δε γίνεται μια ευθεία να έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο;*

Γ Γίνεται.

Σ Α! διάμετρος… Όχι εφαπτομένη… Όχι τέμνει…

Όταν η κατάσταση περιπλέκεται και οι μαθητές έχουν να διερευνήσουν τις πιθανές σχετικές θέσεις τριών κύκλων στο επίπεδο οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλέξουν τα σημεία που αντιστοιχούν στη θέση του πλοίου. Βέβαια η κατάσταση είναι αρκετά πολύπλοκη, γεγονός που παρατηρεί και ο πλοίαρχος. Με τη βοήθεια του επαγγελματία καταλήγουν στην επιλογή τριών σημείων που δημιουργούν και πάλι ένα τρίγωνο.

Ερ. *Όντως. Αν έχω τρεις κύκλους; Τι μπορεί να συμβεί;*

(Οι μαθητές σκέφτονται)

Οι μαθητές μετράνε την ακτίνα με το διαβήτη στο δεξί πλάι και κατασκευάζουν το νέο κύκλο με κέντρο το φάρο 1. Εντοπίζουν τέσσερα κοινά σημεία. Προβληματίζονται και ζητάνε να χρησιμοποιήσουν και τέταρτη μέτρηση.

Πλ. *Πού συναντιούνται όλα αυτά; Εδώ είναι ένα αλαλούμ. Πάρτε και τον προηγούμενο κύκλο. (Δείχνουν στον πλοίαρχο τα σημεία τομής) .*

Πλ. *Άρα έχουμε ένα, δύο, τρία.(Έχει εντοπίσει με τη βοήθεια των μαθητών τρία πολύ κοντινά σημεία).*

Γ Αυτά τα απορρίπτουμε;

Πλ. *Εφόσον είμαστε μακριά από τη στεριά, ναι. Θα έπρεπε να βλέπουμε τη στεριά στο ένα μίλι. Για τον ίδιο λόγο φεύγει και αυτό, θα έπρεπε αν βλέπαμε τη στεριά στα τρία μίλια. Άρα βρισκόμαστε στα τρία αυτά σημεία. (Δείχνει τα κοντινά σημεία)*

Κ *Πάλι τρίγωνο.*

Σ *Αυτό είναι που έλεγε ο Captain, πολύ μικρούλη πολύ συγκεκριμένο.*

Στη ερώτηση του εκπαιδευτικού σχετικά με το μέγιστο πλήθος των δυνατών κοινών σημείων τριών κύκλων οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ να απαντήσουν. Μόνο με την αναπαράσταση των κύκλων πάνω στο χάρτη δείχνουν να καταλήγουν σε κάποιο συμπέρασμα. Κάνουν επίσης λόγο για την περίπτωση που οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο ή εσωτερικά.

Ερ. *Τρεις κύκλοι πόσα κοινά σημεία λέτε να έχουν;*

Ν, Κ *Δύο.*

Σ *Έξι.*

Ερ. *Το περισσότερο πόσα έχουν;*

Κ *Τρία.*

Ν *Τέσσερα.*

Σ *Τρία εφάπτονται.*

Γ *Τέσσερα.*

Ερ. *Εφάπτονται, τι εννοείς εφάπτονται;*

Κ *Ανά δύο.*

Γ *Δύο έτσι και ένας από πάνω εξωτερικά (Εννοεί εξωτερικά ανά δύο)*

Σ *Τρία κοινά σημεία.*

Σ *Αν είναι ο ένας ο ένας μέσα στον άλλο; Πάλι τρία α… δύο…*

Ν *Ένα.*

Σ *Τρία το λιγότερο.*

Γ *Άπειρα ξέρω εγώ… Όλοι μαζί σε πόσα;*

Κ *Α! ένα το είπε ο Ν*

Ερ. *Οκ αν δεν εφάπτονται και τέμνονται πόσα το περισσότερο;*

Σ *Έξι. Ο Α με το Γ ο Β με το Γ και ο Α με το Β*

Ν *Έξι είναι αυτά; 1,2,3,4 (Μετράει τα σημεία στο χάρτη)*

Σ *Όχι 1,2,3,4,5,6 (Μετράει τα σημεία στο χάρτη)*

Στα παραπάνω συμβάντα έχουμε ακόμα μια προσπάθεια συντονισμού (*coordination)* των σχολικών μαθηματικών με το χώρο εργασίας. Το διάστημα που εξελίχθηκε η τρίτη φάση οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί στο σχολείο τις σχετικές θέσεις κύκλων ή κύκλου και ευθείας. Την περίπτωση δε, που έχουμε τρεις κύκλους δε τη διδάσκονται καθόλου. Στα σχολικά μαθηματικά οι πιθανές σχέσεις προκύπτουν μετρώντας τη διάκεντρο των δύο κύκλων και το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων. Όπως βλέπουμε μέσα από τη δραστηριότητα στο ναυτικό χάρτη, δε γίνεται καμιά σχετική αναφορά. Μπορούμε να μιλήσουμε για δυσκολία συντονισμού *επικοινωνίας (communicative connection)* των δύο χώρων. Πρέπει όμως να παρατηρήσουμε πως παρόλο που νοηματοδοτείται η έννοια των τεμνόμενων κύκλων ο περιορισμός που επιβάλει ο χώρος εργασίας μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνείες, καθώς οι μαθητές δε θα συναντήσουν σε καμιά περίπτωση εφαπτόμενους κύκλους ή κύκλους χωρίς κοινά σημεία. Το παραπάνω γεγονός θεωρούμε πως πρέπει αν ληφθεί σοβαρά υπόψη στη φάση του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων.

Αναγνώριση των μαθηματικών στο χώρο εργασίας από τους μαθητές

Ολοκληρώνοντας τα επεισόδια που σχετίζονται με τη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών μέσω του συντονισμού θα θέλαμε να κάνουμε αναφορά στον βαθμό αναγνώρισης της χρήσης των μαθηματικών από τους μαθητές. Σε σχετική ερώτηση του εκπαιδευτικού οι μαθητές αναγνωρίζουν τη χρήση των μαθηματικών στις περισσότερες από τις δραστηριότητες, αν και όπως λέει χαρακτηριστικά ο ένας δεν μπορεί να προσδιορίσει ακριβώς το είδος των μαθηματικών και τις στιγμές που χρησιμοποιήθηκαν. Η χρήση των μαθηματικών έρχεται αβίαστα ως ανάγκη για να μπορέσουν οι μαθητές να εμπλακούν με επιτυχία στις δραστηριότητες του χώρου εργασίας. Επίσης, ο τρόπος νοηματοδότησης των μαθηματικών εννοιών και η εφαρμογή τη μαθηματικής γνώσης διαφέρει από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών. Αυτός ίσως είναι ο λόγος που οι μαθητές δεν μπορούν να μιλήσουν με σαφήνεια για το είδος των μαθηματικών και τη στιγμή που τα χρησιμοποιούν. Με βάση την ενίσχυση διαπερατότητας των συνόρων *(enhancing boundary permeability)* θα μπορούσαν οι μαθητές να μην αντιλαμβάνονται τις διαφορετικές πρακτικές επειδή η αλληλεπίδραση των δύο

συστημάτων γίνεται ομαλά. Κάτι τέτοιο δε βλέπουμε να συμβαίνει πλήρως καθώς οι μαθητές αναγνωρίζουν μεν την ύπαρξη των μαθηματικών αλλά παράλληλα οι στιγμές εμπλοκής των μαθηματικών δεν είναι ξεκάθαρες.

Ερ. *Τα μαθηματικά που ξέρετε μέχρι τώρα σας χρησίμευσαν για να βγάλετε άκρη, τι γίνεται;*

Σ *Κυρίως οι εφαπτόμενες. Γενικά αυτά που ξέρουμε, ναι.(Συμφωνεί και ο Γ)*

Ερ. *Νιώσατε την ανάγκη να τα χρησιμοποιήσετε ή ήρθαν από μόνα τους;*

Ν *Ήρθε από μόνη της η ανάγκη.*

Σ *Δεν υπήρχε τίποτα χωρίς μαθηματικά*

Γ *Υπήρχαν και στιγμές που δε χρειαστήκαμε μαθηματικά.*

Ερ. *Νιώσατε ποτέ ότι χωρίς τα μαθηματικά δεν μπορείτε να πάτε παρακάτω;*

Σ *Ναι, αλλά δε μπορώ να πω αυτό, αυτό και αυτό. Όλα είναι μαθηματικά που κάναμε ειδικά σήμερα.*

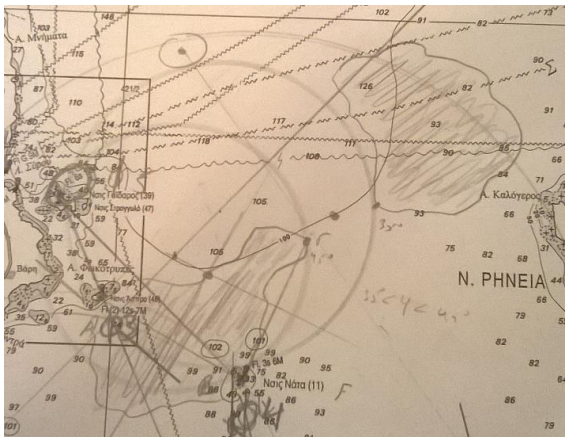
4.4 Αναστοχασμός (*reflection)*

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο κατά τη διέλευση τω γνωστικών συνόρων διευκολύνεται η κατανόηση και η ερμηνεία διαφορών μεταξύ των πρακτικών και κατά συνέπεια η επέκταση των υπαρχουσών θεωρήσεων. Η υιοθέτηση των επαγγελματικών θεωρήσεων καθώς και η κατασκευή μεικτών θεωρήσεων από τους μαθητές παρατηρείται κατά τη διάρκεια επίλυσης ανοικτών προβλημάτων, όπως στη δραστηριότητα «*Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων» και «Αποφυγή Εμποδίου» της δεύτερης φάσης.*

Στα προβλήματα που τους τέθηκαν οι μαθητές έπρεπε να εφαρμόσουν πρακτικές από τον χώρο εργασίας, σε συνδυασμό με μαθηματικές γνώσεις, που ήδη είχαν ή διαπραγματεύτηκαν κατά τη διάρκεια των συναντήσεων. Κατά τη διάρκεια επίλυσης των προβλημάτων αναδείχθηκαν ζητήματα που απασχόλησαν τους μαθητές, πέρα από το μαθηματικό περιεχόμενο της επίλυσης. Ένα από αυτά ήταν το θέμα της ακρίβειας των μετρήσεων και του προσδιορισμού της πορείας ή της θέσης του πλοίου. Ένα δεύτερο ζήτημα ήταν η απόρριψη λύσεων οι οποίες, αν και μαθηματικά σωστές, δεν ικανοποιούσαν περιορισμούς του χώρου εργασίας, απόσταση ασφαλείας, συντομία διαδρομής, μη συμβατή με πλοίο πορεία.

Επεισόδιο 9ο. Κατασκευή θεωρήσεων μέσα από τη δραστηριότητα «Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων»

Στη δραστηριότητα «*Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων»* ως μέτρηση στους μαθητές δόθηκαν μόνο οριζόντιες γωνίες. Την έννοια της οριζόντιας γωνίας την είχαν διαπραγματευθεί λίγο νωρίτερα. Η όλη προσπάθεια οδηγεί στη χάραξη ενός μηνίσκου ως ασφαλή περιοχή διέλευσης χωρίς όμως να γίνει περεταίρω αναφορά στο μαθηματικό όρο του μηνίσκου *(εικόνα 23)*.



Εικόνα 23. Ασφαλής διέλευση

Πλ. *Λοιπόν πείτε ότι ξεκινάω από αρκετά μακριά και θέλω να περάσω με ασφάλεια. Θέλω να περάσω ανάμεσα με μόνη μέτρηση την οριζόντια γωνία. (Ο πλοίαρχος χαράζει μια ασφαλή πορεία διέλευσης).*

…

Γ Έχουμε δύο τόξα;

Ερ. *Τι εννοείς;*

Γ Ένα από αυτό το σημείο και ένα από αυτό το σημείο; (Δείχνει τις δύο βραχονησίδες)

Ν Ώπα, ο κύκλος θα πρέπει να περνάει και από τα τρία. (Δείχνει τις δύο βραχονησίδες και το ασφαλές σημείο).

Ερ. *Ωραία, ο κύκλος να περνάει και από τα τρία σημεία. Ωραία, το κρατάμε. Ο κύκλος αυτός από που δεν πρέπει να περνάει;*

Ν Από τη στεριά.

Γ Από τα επικίνδυνα νερά.

Ερ. *Πώς μπορώ να καθορίσω εγώ τα επικίνδυνα νερά;*

Γ Σαν τόξο; Από εδώ, εδώ και εδώ. (Δείχνει τις δύο βραχονησίδες και το πιο μακρινό σημείο στις βραχονησίδες από την εσωτερική καμπύλη)

Σ Ωραία, μπορούμε να φτιάξουμε κύκλο με τρία σημεία. (Οι μαθητές γνωρίζουν την κατασκευή από το σχολείο).

Για να δώσουν την τελική λύση χρειάζεται να λάβουν υπόψη τους και το δεύτερο τμήμα του χάρτη που έχει σημαδευτεί ως επικίνδυνο. Πάλι οι μαθητές καταφεύγουν στο σχεδιασμό κύκλου για ακρίβεια στη λύση τους.

Ερ. *Ωραία, πιο μικρή. Όσο θέλω πιο μικρή; Έχω και άλλο εμπόδιο. (Δείχνει την εξωτερική καμπύλη).*

Σ *Να το μετρήσουμε και αυτό.*

Κ *Πώς;*

Σ *Θα πάρουμε πάλι ένα σημείο και θα κάνουμε κύκλο. (Δείχνει το πιο κοντινό στις βραχονησίδες σημείο της εξωτερικής καμπύλης. Μετράνε πάλι την αντίστοιχη γωνία, πιο εύκολα αυτή τη φορά).*

Να σημειώσουμε ότι ο πλοίαρχος στην καθημερινή πρακτική ακολουθεί την ίδια διαδικασία χωρίς όμως να κάνει λόγο ή να χαράζει κύκλους. Απλώς παρακολουθεί την οριζόντια γωνία να κυμαίνεται μεταξύ των τιμών ασφαλείας. Η πρακτική που ακολουθεί ο πλοίαρχος χωρίς τη χάραξη των κύκλων δεν ικανοποιεί τους μαθητές. Για χάρη της ακρίβειας οι μαθητές από τη στιγμή που αντιλαμβάνονται την πορεία λύσης του προβλήματος χαράζουν κύκλους ώστε να βλέπουν στο χάρτη το τμήμα (μηνίσκο) το οποίο τους επιτρέπει την ασφαλή διέλευση.

Οι ενέργειες των μαθητών μπορούμε να πούμε ότι εμπίπτει στη διαδικασία νοηματοδότησης του *αναστοχασμού (reflection)*. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε κατασκευή θεωρήσεων *(perspective making)*. Οι μαθητές δεν ενστερνίζονται τη θεώρηση του χώρου εργασίας για την επίλυση του προβλήματος, απλά μέτρηση οριζόντιας γωνίας. Με τη χάραξη κύκλων, προκειμένου να έχουν πλήρη κατανόηση της λύσης και επιβεβαίωση της ορθότητας της λύσης, δημιουργούν μια νέα μεικτή θεώρηση.

Επεισόδιο 10ο. Νοηματοδότηση της εφαπτομένης από σημείο εκτός κύκλου μέσα από τη δραστηριότητα «Αποφυγή Εμποδίου»

Εικόνα 24. Αποφυγή εμποδίου

Στη δραστηριότητα «*Αποφυγή Εμποδίου*» ζητήθηκε από τους μαθητές να χαράξουν νέα πορεία με τα ίδια σημεία εκκίνησης και προορισμού αποφεύγοντας όμως ένα εμπόδιο που βρίσκονταν πάνω στην πορεία. Ως απόσταση ασφαλείας τέθηκαν τα 2 ναυτικά μίλια. Αρχικά ως λύση προτάθηκαν τεθλασμένες γραμμές. Γρήγορα οι μαθητές διαπίστωσαν ότι τέτοιες πορείες δεν είναι επιθυμητές για ένα πλοίο. Η πρώτη λύση που παρουσιάστηκε απορρίφθηκε καθώς δεν ικανοποιούσε το κριτήριο ασφάλειας, απόσταση 2 ν. μ. από το εμπόδιο σε όλο το μήκος της διαδρομής *(εικόνα 24)*. Από την πρώτη λύση οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο αλλά προς το παρόν δεν κάνουν καμία αναφορά στον όρο.

Ερ. *Εδώ είναι ασφαλές τώρα; Αν πας κατευθείαν;*

Σ *Θα πέσει πάλι πάνω στη βραχονησίδα. Περνάει μέσα στο όριο. Θέλει δύο μίλια.*

Γ *Πρέπει να κάνει έξτρα κινήσεις φιλαράκι μου.*

Ν *Για να δω…*

Γ *Κοίτα ο κύκλος είναι εδώ το βλέπεις; (Δείχνει, με το διπαράλληλο, του Ν ότι το τελευταίο τμήμα της πορείας τέμνει τον κύκλο)*

Ν *Κάτσε ο κύκλος πάει έτσι. (Προσπαθεί να δει αν ο Γ έχει δίκιο).*

Γ *Ο κύκλος να τος έχει μπει ήδη στα δύο μίλια η πορεία.*

Ν *Ε' και τι έγινε δεν πρέπει να περάσουμε μέσα στον κύκλο;*

Σ *Ναι, αυτό δεν είπαμε; Δεν πρέπει να περάσουμε. Θέλουμε απόσταση μόνιμα 2ν.μ. Μέτρα τα δύο μίλια εκεί.(Με ένταση. Του δείχνει σημείο της πορείας εσωτερικό του κύκλου). Έχουμε κάνει τον κύκλο ήδη και τον κόβει.*

Η δεύτερη λύση που προτείνεται παραλλαγή της πρώτης ικανοποιεί το κριτήριο ασφάλειας. Στη φάση αυτή τίθεται το θέμα της συντομότερης διαδρομής. Επίσης, παρατηρούν οι μαθητές ότι μια διαδρομή με συχνές στροφές σε γωνίες 90° δεν είναι φυσιολογική για ένα πλοίο *(εικόνα 25).*

Εικόνα 25. Αποφυγή εμποδίου

Ν Τότε από εδώ να πάμε κάτω. (Προτείνει δεύτερο εφαπτόμενο τμήμα χωρίς να το ονομάζει έτσι.)

Ερ. *Πόσο;*

Ν Μέχρι εδώ που τελειώνει ο κύκλος. (Δείχνει περίπου το μήκος μιας διαμέτρου).

Γ Δεν είναι εκεί που τελειώνει ο κύκλος. Καταλαβαίνω αυτό που λες είναι από εδώ να κάνουμε μια ... εφαπτομένη και μετά να κόψουμε κάτω.

Ν Και μετά να γυρίσουμε πάλι στην πορεία.

Γ Θα σου πω όμως κάτι φίλε, οι ευθείες είναι ο πιο σύντομος δρόμος.

Ν Ε' ευθείες δεν κάναμε;

Ερ. *Η άλλη ιδέα του Ν ποια ήταν;*

Γ Να κάνουμε τετράγωνο.

Ν Ναι αλλά αυτή είναι καλύτερη. Το άλλο είναι χρονοβόρο.

Γ Ναι καις τα καύσιμα εκεί…

Ήδη έχει τεθεί το ζητούμενο η διαδρομή να είναι η συντομότερη δυνατή. Από τις πρώτες λύσεις που δόθηκαν εμφανίζεται η έννοια της εφαπτομένης κύκλου αν και οι μαθητές δε χρησιμοποιούν πάντα τον όρο. Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς και τις παραμέτρους που τους επιβάλει ο χώρος εργασίας οι μαθητές οδηγούνται στη λύση της χάραξης της εφαπτομένης από το σημείο εκκίνησης προς τον κύκλο. Στο σημείο αυτό πλέον οι μαθητές μιλούν για εφαπτομένη. Η πορεία που επιλέγουν σε αυτή τη φάση είναι ίδια με την πορεία που θα επέλεγε και ο επαγγελματίας σε πραγματική κατάσταση. Ακόμα η χάραξη της εφαπτομένης γίνεται «στο περίπου»

Γ Λοιπόν πας από εδώ, μισό να βρω την ευθεία τραβάς…(Προσπαθεί να φέρει εφαπτομένη στον κύκλο).

Ερ. *Τι τραβάς;*

Σ Την εφαπτομένη

Γ Ναι μια που να εφάπτεται του τόξου του κύκλου και φτάνεις μέχρι εδώ (Δείχνει σημείο μετά το σημείο επαφής)

Το επόμενο ερώτημα που τίθεται από τον εκπαιδευτικό αφορά το σημείο στροφής του πλοίου προς τον προορισμό. Οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά να εντοπίσουν το σημείο. Πάλι προτείνουν λύσεις. Για ακόμα μια φορά προκύπτει το θέμα της διατήρησης της απόστασης ασφαλείας και η πρώτη λύση απορρίπτεται.

Ερ. *Πότε στρίβει να πάει στο Π (Π ο προορισμός)*

Κ Μόλις φτάσει στην περιφέρεια του κύκλου.

Γ Μόλις φτάσει στην περιφέρεια του κύκλου βρε άνθρωπε; Μόλις φτάσει στο τέλος της περιφέρειας, αλλιώς κόβει τον κύκλο.(Δείχνει τα δύο σημεία)

Σ Ναι είναι λάθος.

Γ Οπότε μόλις φτάσει στο τέλος της περιφέρειας.

Ερ. *Βάλε εσύ το σημείο. Ωραία για ένωσέ το με το Π. Περνάει μέσα από τον κύκλο; (Ο Γ σημαδεύει το σημείο)*

Γ Όχι.

Ερ. *Για ένωσέ το με το Π. Περνάει μέσα από τον κύκλο;*

Γ Να λέω εδώ. Εδώ δεν τελειώνει η περιφέρεια του κύκλου σε σχέση με την ευθεία; (Δείχνει σημείο της ευθείας μετά το σημείο επαφής).

Στην επόμενη λύση που προτείνεται πάρει προκύπτει το ζήτημα της συντομότερης διαδρομής, με συνέπεια οι μαθητές να την απορρίψουν και αυτή.

Σ Θα κάνουμε μια προέκταση μισό μίλι και μετά

Γ Ναι γίνεται και αυτό. Μισό μίλι; Ας πούμε μέχρι εδώ.

Ερ. *Ωραία που θα στρίψει;*

Γ Εδώ.(Δείχνει το τέλος της τυχαίας προέκτασης)

Σ Μήπως κάνει μεγάλη απόσταση τώρα;

Κ Ναι γιατί ξεφεύγει.

Ερ. *Ποια είναι η ιδανική θέση; Σκεφτείτε… Μέχρι το σημείο επαφής είναι ο συντομότερος δρόμος που μπορείτε να κάνετε σε σχέση με τις άλλες λύσεις.*

Ναι Όλοι μαζί.

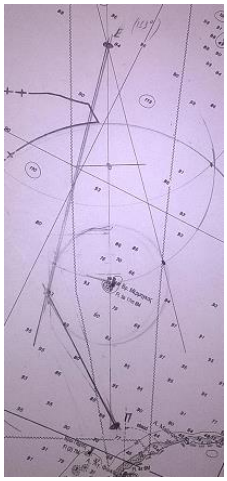
Ερ. *Γιατί;*

Γ Γιατί είναι ευθεία και όλα τα άλλα ήταν… Ευθύγραμμα τμήματα…

Ερ. *Και όλα μαζί τι φτιάχνουν;*

Κ Τεθλασμένη γραμμή.

Οι μαθητές εξακολουθούν να αναζητούν λύση που ικανοποιεί δύο παραμέτρους, ασφάλεια και συντομία. Η μαθηματική ορθότητα των λύσεων απασχολεί τους μαθητές, αλλά δεν είναι η προτεραιότητά τους. Τελικά, διατυπώνεται και εγκρίνεται η ιδέα το πλοίο να στρίψει στο σημείο που η δεύτερη εφαπτομένη του κύκλου, από το σημείο προορισμού, τέμνει την πρώτη. Οι εφαπτόμενες χαράζονται «στο περίπου» από τους μαθητές με την καθοδήγηση του επαγγελματία ακολουθώντας την επαγγελματική πρακτική *(εικόνα 26).*



Εικόνα 26. Αποφυγή εμποδίου

Γ Να ρωτήσω κάτι. Θα ήταν λάθος να προσθέσουμε στην ακτίνα μισό μίλι; (Με το κουμπάσο ανοίγει ακτίνα μεγαλύτερη του κύκλου ασφαλείας και ψάχνει που τέμνει την πορεία).

Ερ. Λάθος δεν είναι, απλά ψάχνουμε το ιδανικό…

Ν Το λιγότερο δυνατό.

Ν Λοιπόν ένα μίλι πιο πέρα…

Γ Όχι, είσαι σοβαρός; Η ακτίνα είναι εδώ ας πούμε, εμείς θέλουμε λίγο πιο εδώ. (Ανοίγει το κουμπάσο ελάχιστα περισσότερο από την ακτίνα και ψάχνει σημείο τομής με την πορεία).

Ν Ωραία κάνε ακτίνα δυόμισι μίλια για να μην ξαναμπεί στον κύκλο.

Γ 2.1;

Κ Να περάσει από τον κύκλο ελάχιστα. (Εννοεί μετά τη στροφή).

Σ Να είναι εφαπτόμενη. Ώπα κοίτα ξέρεις τι… αρχίζουμε από εδώ κάνουμε μια εφαπτόμενη και βλέπουμε που ενώνονται. (Δείχνει εφαπτόμενη από τον προορισμό στον κύκλο).

Γ Μπράβο, ωραίος! Οπότε εδώ θα στρίψει…(Σχεδιάζει την εφαπτόμενη. Δείχνει το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων)

Το πρόβλημα αποφυγής εμποδίου ήταν για τους μαθητές ένα ανοιχτό πρόβλημα. Τους απασχόλησε αρκετή ώρα και έγινε αρκετή συζήτηση σχετικά με την "ιδανικότερη" λύση. Τα κριτήρια για την επιλεγείσα λύση ήταν κυρίως η ασφάλεια και η συντομία της διαδρομής. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές υιοθετούν τη θεώρηση (*perspective taking)* του χώρου εργασίας. Η μαθηματική επαλήθευση της ορθότητας δε δείχνει να τους απασχολεί ιδιαίτερα. Η αναδόμηση της προβληματικής κατάστασης που αντιμετωπίζουν οι μαθητές έχει ως αποτέλεσμα την κατασκευή νέας ταυτότητας που συνδέεται με την εμπλοκή στη νέα πρακτική.

Το ζητούμενο της ακρίβειας

Στο πρόβλημα αποφυγής εμποδίου που είδαμε παραπάνω, αναδύεται ξανά το ζητούμενο της ακρίβειας. Οι μαθητές ζητάνε και σχεδιάζουν κύκλο προκειμένου να καθορίσουν την απαγορευμένη περιοχή γύρω από το εμπόδιο. Στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι ο πλοίαρχος στην καθημερινή πρακτική δε χαράζει κύκλο. Επίσης. όσο αφορά τα εργαλεία οι μαθητές ζητάνε να χρησιμοποιήσουν τον κλασικό διαβήτη προκειμένου να έχουν οπτική αναπαράσταση του κύκλου σε αντίθεση με τον πλοίαρχο, που στηρίζει την πρακτική του σε νοητό κύκλο, άρα μεγαλύτερη ακρίβεια.

Σ Κάνε ένα κυκλάκι. (Δείχνει τη βραχονησίδα ως κέντρο)

Γ Να μετρήσουμε ένα μίλι. (Ανοίγει το κουμπάσο στην αριστερή κάτω πλευρά του χάρτη για να μετρήσει ένα μίλι).

Σ Δύο, δύο.

Σ Μπορούμε να πάρουμε διαβήτη με μολύβι; (Ο εκπαιδευτικός συμφωνεί).

Γ Άρα δύο μίλια. (Έχει ανοίξει το κουμπάσο)

Σ Βάλε ένα σημαδάκι κάπου.

Κ Πού; Γιατί να βάλει σημάδι; Είναι πολλαπλές οι θέσεις που μπορεί να περάσει.

Σ Περίμενε θα φέρει κανονικό διαβήτη.

... Οι μαθητές παίρνουν τον κανονικό διαβήτη και ξεκινούν τις μετρήσεις από την αρχή. Χαράζουν κύκλο με κέντρο τη βραχονησίδα και ακτίνα 2ν. μ.

Επιπλέον, το αίτημα της ακρίβειας παραμένει φανερό στις επιλογές των μαθητών. Ολοκληρώνοντας την αποφυγή εμποδίου ο πλοίαρχος λέει:*«...Όχι δεν κάνουμε κύκλους αλλά βασίζεται πάνω στον κύκλο. Τον θεωρούμε δεδομένο ότι υπάρχει κύκλος. Φέρνουμε περίπου εφαπτομένη...».* Η διατύπωση αυτή του επαγγελματία αποτελεί το έναυσμα για τη γεωμετρική κατασκευή της εφαπτομένης από σημείο εκτός κύκλου, που είδαμε παραπάνω.

Βρίσκοντας τα σημεία επαφής παρατηρεί ο εκπαιδευτικός ότι από τη μια πλευρά που έχουν ήδη φτιάξει το σχήμα νωρίτερα έχουν φέρει όντως την εφαπτομένη.

Πλ. Τώρα είμαι περίεργος να δω αν είναι 138°. Είμαι περίεργος να το δω και εκεί κλείνει και κουμπώνει.

Ν 139° μοίρες.

Πλ. Βέβαια χρειαστήκατε ώρα για την κατασκευή και θα είχαμε σκάσει πάνω στο εμπόδιο. Με τις κινήσεις μας στην πράξη επιταχύνουμε όλη αυτή τη διαδικασία.

Γ Ναι, αλλά τα μαθηματικά τα έχετε στο μυαλό σας στην πρακτική σας.

Βλέπουμε ότι έδειξε και ο ίδιος ο πλοίαρχος έντονο ενδιαφέρον να δει αν επικυρώνεται η δική του χάραξη, νομιμοποίηση συνύπαρξης (legitimating coexistence). Τελικά, αποδείχθηκε ότι η εμπειρική χάραξη του είχε απόκλιση μόλις 1ο από την κατασκευή που έκαναν οι μαθητές. Στο σημείο αυτό, για πρώτη φορά ένας από τους μαθητές αναγνωρίζει, σαφώς, τη χρήση των μαθηματικών στην επαγγελματική πρακτική. Απευθυνόμενος στον πλοίαρχο παρατηρεί ότι και ο επαγγελματίας έστω και ασυναίσθητα τα χρησιμοποιεί: *«...Ναι αλλά τα μαθηματικά τα έχετε στο μυαλό σας στην πρακτική σας...».*

Ξεκινώντας την τρίτη φάση ο εκπαιδευτικός θέτει το ερώτημα στους μαθητές αν τελικά θα επέλεγαν τη μαθηματική λύση, η οποία εξασφαλίζει την ακρίβεια, ή την πρακτική του πλοιάρχου, όπως τη χρησιμοποιεί στην καθημερινότητά του. Ένα θέμα που απασχολεί τους μαθητές φαίνεται ότι είναι και ο χρόνος που θα έχουν στη διάθεσή τους για να αντιδράσουν. Παρόλο που η ακρίβεια παραμένει κυρίαρχο ζητούμενο, βλέπουμε ότι η επιλογή τους διαφοροποιείται ανάλογα με την απόσταση από το εμπόδιο, δηλαδή με το χρόνο που έχουν διαθέσιμο να αντιδράσουν, ενδεικτικό μιας πιο επιτηδευμένης θεώρησης. Ο ένας από του τέσσερις μαθητές επιμένει να προτιμά τη ακρίβεια της μαθηματικής κατασκευής, συνδέοντας τη με την ασφάλεια της πορείας.

Ερ. *...Αυτό που θέλω να ρωτήσω είναι τι θα προτιμούσατε να κάνετε την κατασκευή, με το χέρι όπως έκανε ο Captain ή με μια ακριβή κατασκευή όπως κάνατε εδώ;*

Ν Ακριβή.

Σ Το ακριβές παίρνει χρόνο (Συμφωνεί και ο Γ)

Ερ. *Αν τα συνυπολογίσετε όλο χρόνο και όλες τι παραμέτρους;*

Ακριβή. (Όλοι μαζί)

Ερ. *Γιατί;*

Σ Γιατί είναι ακριβής. Το χέρι είναι ανακριβές.

Γ Και η ακριβής μπορεί να αποδειχθεί ανακριβής γιατί χάνεις χρόνο και μπορεί στο ενδιάμεσο να αλλάξουν τα στοιχεία.

Κ Θα το χρησιμοποιούσαμε αν ήμασταν πολύ μακριά και ξέραμε εκ των προτέρων ότι στην πορεία θα υπάρχει εμπόδιο. (Εννοεί την ακριβή κατασκευή)

Πλ. *Ναι, αλλά στην απόσταση να αλλάξεις μισή μοίρα είναι άνοιγμα μεγάλο.*

Κ Ναι αν είμαστε κοντά στη 1^{ο} το άνοιγμα είναι μικρό. Αν είμαστε μακριά η 1^{ο} σε άνοιγμα είναι πολύ. (Εννοεί το τόξο)

Σ Το θέμα είναι ότι εμείς δεν έχουμε εμπειρία.

Ερ. *Ακριβώς επειδή δεν έχετε εμπειρία, για αυτό ρωτάω. Εσύ Κ;*

Κ Ακριβής, για να είμαι σίγουρος.

Σ Αν είμαστε εδώ, δε θα κάναμε ακριβή. (Δείχνει σχετικά κοντά στο εμπόδιο)

Ν Το ίδιο, ανάλογα με την τοποθεσία. (Συμφωνεί και ο Γ).

Το ίδιο συμβαίνει και στο τέλος της τρίτης φάσης όταν οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν το κέντρο ενός τριγώνου. Παρόλο που το τρίγωνο είναι πολύ μικρό και τίθεται πάλι το ζητούμενο της ταχύτητας ένας από τους μαθητές επιμένει στη μαθηματική κατασκευή την οποία είναι πιο ακριβής.

Ερ. *Παιδιά εδώ θα βρίσκατε το σημείο με το μάτι ή θα κάνατε πάλι μεσοκαθέτους;*

Σ, Κ Με το μάτι είναι πολύ μικρό.

Ν Με μεσοκάθετο για ακρίβεια.

Πλ. *Για λόγους ταχύτητας εδώ με το μάτι βάζω μια τελεία στη μέση. Θα είναι η διαφορά στα 10-15 μέτρα. Πέρα αυτού για να σιγουρευτούμε αφού έχουμε φανάρια παίρνουμε και μια διόπτευση. Περίπου στις 15° και είμαστε οκ.*

Παράλληλα, ο πλοίαρχος εξηγεί το χρονοβόρο της μέτρησης της οριζόντιας γωνίας, άρα το ασύμφορο από άποψη χρόνου.

Βλέπουμε από τις παραπάνω συνομιλίες πως οι μαθητές δεν υιοθέτησαν πλήρως τις θεωρήσεις και πρακτικές του χώρου εργασίας. Από την άλλη, πλην ενός, δεν έμειναν και πλήρως προσκολλημένοι στη θεώρηση των σχολικών μαθητών, που απαιτεί ακρίβεια και σαφήνεια. Οι μαθητές στα πλαίσια του αναστοχασμού (*reflection)* υιοθετούν τη δικιά τους προοπτική (*perspective making)* η οποία αποτελεί μια μείξη των πρακτικών και των δύο χώρων. Να παρατηρήσουμε βέβαια ότι το θέμα της ακρίβειας παραμένει κρίσιμο για τους μαθητές. Το παρακάμπτουν μόνο όταν τίθεται θέμα ταχύτητας αντίδρασης, κάτι που συνδέεται με την ασφάλεια του πλοίου.

Στην κυρίως δραστηριότητα της τελευταίας φάσης *«Εύρεση θέσης πλοίου»* λοιπόν, δόθηκαν στους μαθητές κάποιες μετρήσεις. Επιλέγοντας δύο ή τρεις μετρήσεις θα πρέπει να προσδιορίσουν τη θέση του πλοίου με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια και βεβαιότητα. Αρχικά, οι μαθητές αρχικά επιλέγουν οριζόντιες γωνίες, αν και ως γραμμή θέσης είναι η πολυπλοκότερη στη χρήση της από τις άλλες δύο, διόπτευση και απόσταση ραντάρ. Για ακόμη μια φορά, εμφανίζεται το ζητούμενο της ακρίβειας το οποίο τους οδηγεί να χρησιμοποιήσουν τη διόπτευση της ευθυγράμμισης, ευθεία που διέρχεται από δύο σταθερά σημεία στη στεριά και το μάτι του παρατηρητή.

(Οι μαθητές διαφωνούν μεταξύ οριζόντιας γωνίας και διόπτευσης.)

Σ Να πάρουμε οριζόντια επειδή είναι κοντά 1 με 2.

Ν Εγώ λέω καλύτερα διόπτευση.

Γ Μήπως να πάρουμε ευθυγράμμιση φάρου 5 με 3 είναι πιο σίγουρο; (Συμφωνούν οι Ν, Γ και Κ)

Ν Αυτή εδώ είναι την κάναμε από την αρχή.

Σ Προέκτεινέ την. (Ο Γ προεκτείνει την ευθυγράμμιση).

Η επιλογές των μαθητών δεν τους δίνουν σαφές αποτέλεσμα. Όταν τίθεται το ερώτημα σφάλματος οι μαθητές είναι σίγουροι ότι στη μόνη μέτρηση, στην οποία δεν μπορεί να υπάρχει σφάλμα είναι αυτή της ευθυγράμμισης ενδεικτικό της εμπιστοσύνης

που δείχνουν στην ακρίβεια αυτής τη μέτρησης. Αντίθετα, δεν εμπιστεύονται τόσο την οριζόντια γωνία καθώς για τη μέτρησή της χρησιμοποιείται ο εξάντας, όργανο με το οποίο δεν έχουν εξοικείωση.

Ερ. *Λοιπόν, εδώ πήρατε, μία ευθυγράμμιση… Καταρχάς την ευθυγράμμιση την εμπιστεύεστε ή όχι;*

Ναι. (Όλοι μαζί.)

Γ Ναι, αλλά χρειαζόμαστε και κάτι ακόμα.

Ερ. *Όχι σαν μέτρηση αν την εμπιστεύεστε, γιατί είπαμε ότι εδώ προκύπτει σφάλμα από κάποια μέτρηση. Πού μπορεί να είναι αυτό το σφάλμα;*

Σ Όχι στην ευθυγράμμιση στα άλλα θα είναι…(Συμφωνεί και ο Κ)

Ερ. *Το ένα είναι ραντάρ το ένα είναι ευθυγράμμιση και το άλλο οριζόντια γωνία. Πού θεωρείτε ότι έχει γίνει το λάθος;*

Κ Στη γωνία λέω εγώ. (Συμφωνεί και ο Ν)

Σ Τη μετράμε εμείς με τον εξάντα…

Στο δεύτερο μέρος της τελικής δραστηριότητας ξανά ο εκπαιδευτικός ρωτάει τους μαθητές ποια μέτρηση εμπιστεύονται περισσότερο. Αυτή τη φορά η σύγκριση γίνεται μεταξύ απλών διοπτεύσεων, ευθειών με ένα σταθερό σημείο στη στεριά και ευθυγράμμισης. Για ακόμα μια φορά η ευθυγράμμιση επιλέγεται από τους μαθητές ως η περισσότερο ασφαλής μέτρηση. Μάλιστα είναι τόσο βέβαιοι ώστε προτιμούν να επιλέξουν δύο μετρήσεις στις οποίες περιέχεται η ευθυγράμμιση αντί τριών που δεν την περιέχουν.

Ερ. *Από όλες τις διοπτεύσεις ποια είναι η πιο σίγουρη;*

Ν Η ευθυγράμμιση.

Ερ. *Τι θα προτιμάγατε ευθυγράμμιση και διόπτευση ή τρεις διοπτεύσεις;*

Σ Με τις τρεις διοπτεύσεις δε βγήκε που περίμεναν όλοι…

Κ Δε βγήκε επειδή ήταν λάθος τα δεδομένα.

Ερ. *Εντάξει αυτό. Εσείς τι θα προτιμάγατε;*

Σ Το πρώτο ευθυγράμμιση και μια διόπτευση. (Συμφωνούν και οι άλλοι)

Χωρίς να το γνωρίζουν οι μαθητές υιοθετούν την τακτική του επαγγελματία στο συγκεκριμένο ζήτημα. Σε ερώτηση που απευθύνει σχετικά στον πλοίαρχο ο εκπαιδευτικός, αργότερα, η απάντηση του επαγγελματία ταυτίζεται με των μαθητών.

Ερ. *Αν οι τρεις διοπτεύσεις δίνουν ένα σημείο και η ευθυγράμμιση με τη διόπτευση άλλο σημείο τι θα προτιμούσες.*

Πλ. *Το δεύτερο.*

Η χρήση του διπαράλληλου

Στην αρχή της τρίτης φάσης στα πλαίσια συζήτησης με τους μαθητές τέθηκε το θέμα της χρήσης των εργαλείων του πλοιάρχου. Η πρώτη ερώτηση αφορούσε τη χρήση του ναυτικού διαβήτη.

Από την εισαγωγική δραστηριότητα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως οι μαθητές αναγνωρίζουν στη χρήση του διπαράλληλου την παράλληλη μεταφορά.

Ερ. *Μισό πριν πάμε παρακάτω. Πήραμε το εργαλείο το διπαράλληλο τι κάνει αυτό καταλαβαίνεται;*

Γ *Κάνει συνέχεια παράλληλες…*

Ν *Βρίσκει πόσο απέχουν δύο παράλληλοι.*

Σ *Οι δύο χάρακες είναι πάντα παράλληλοι.*

Ερ. *Τι κίνηση είναι αυτή που κάνετε;*

Γ *Βήμα, βήμα;*

Ερ. *Πώς κινούνται;*

Γ *Παράλληλα.*

Ερ. *Αφού μεταφέρω τις ευθείες;*

Σ *Παράλληλη μεταφορά;*

Ερ. *Τι σχήμα δημιουργείτε στην ουσία;*

Σ *Παραλληλόγραμμο…*

Η τελευταία ερώτηση, σχετικά με τη χρήση των εργαλείων στην τρίτη φάση, αφορούσε τη χρήση του διπαράλληλου. Οι μαθητές αναγνωρίζουν, ξανά, στη χρήση του την παράλληλη μεταφορά ευθειών. Όπως αναφέραμε και παραπάνω η χρήση του οργάνου για τη χάραξη παραλλήλων είναι διαρκής και από ένα σημείο και η εξοικείωση των μαθητών με το εργαλείο πολύ μεγάλη. Πρέπει να τον κρατάνε με τα δύο χέρια και να ασκούν πίεση προκειμένου να διατηρείτε η παραλληλία, κάτι που δυσκολεύει αρχικά τη χρήση του. Μάλιστα σταδιακά η ευχέρεια των μαθητών, στη χρήση του οργάνου, είναι σε

τέτοιο βαθμό που προτιμούν το διπαράλληλο από το χάρακα και το γνώμονα στη χάραξη κάθετων και παραλλήλων ευθειών. Όπως αναφέραμε, δεν αναγνωρίζουν τη χρήση του ως μοιρογνωμόνιο και στη σχετική αναφορά από τον πλοίαρχο, δεν ανταποκρίνονται σε καμία περίπτωση.

Ερ. *Το διπαράλληλο πώς το είδατε; Η χρήση του πώς σας φάνηκε;*

Σ *Εύκολο είναι ανοίγει κλείνει…Απλά δε μπορείς να το κρατάς με το ένα χέρι.*

Ερ. *Προτιμάτε αυτό ή τρίγωνο και χάρακα;*

Κ *Αυτό το άλλο χάνεσαι. (Εννοεί το διπαράλληλο)*

Ν *Και εγώ αυτό, για παράλληλες είναι πιο εύκολο.*

Πλ. *Πέρα από αυτό το διπαράλληλο (που δε χρησιμοποιείται στο σχολείο έτσι;) έχει πάνω τις μοίρες που μπορείς ανά πάσα στιγμή να πάρεις το ένα σημάδι με το άλλο . (Εννοεί διόπτευση)*

4.5 Μετασχηματισμός (*transformation)*

Όπως είδαμε και στο θεωρητικό πλαίσιο ο μετασχηματισμός αναφέρεται στην παραγωγή νέων πρακτικών μέσω της συνεργασίας κατά τη διέλευση των γνωστικών συνόρων. Αν και ο μετασχηματισμός είναι το επιθυμητό τελικό αποτέλεσμα, δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί. Στην παρούσα έρευνα υπήρξαν ενδείξεις μετασχηματισμού σε μία περίπτωση. Εν προκειμένω αναφερόμαστε στην κατασκευή κύκλου με γνωστή χορδή και την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία που πραγματοποίησαν οι μαθητές μέσα από το ένα αρχείο λογισμικού Geogebra.

Επεισόδιο 11ο. Νοηματοδότηση κατασκευής κύκλου μέσα από τη δραστηριότητα «Οριζόντια γωνία».

Τελειώνοντας τη δραστηριότητα που αναφέρεται στην οριζόντια γωνία, φάση Β, προκύπτει η ανάγκη να κατασκευαστεί κύκλος γνωρίζοντας δύο σημεία του και την εγγεγραμμένη στο αντίστοιχο τόξο γωνία. Μάλιστα πριν προλάβει να θέσει το ερώτημα ο εκπαιδευτικός, αναφέρει σχετικό προβληματισμό ένας από τους μαθητές. Οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί καμία από τις κατασκευές κύκλου. Γνωρίζουν να κατασκευάζουν τη μεσοκάθετο τμήματος. Επίσης, αντιλαμβάνονται πως τα δύο σημεία θα αποτελούν χορδή

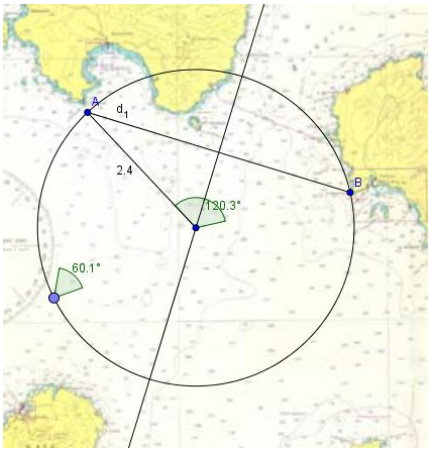
του κύκλου, στη μεσοκάθετο της οποίας θα βρίσκεται το κέντρο του κύκλου. Η χρήση του λογισμικού διευκολύνει ακόμα περισσότερο την κατασκευή καθώς με τη χρήση του αντίστοιχου εργαλείου κατασκευάζουν αυτόματα τη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ. Στη συνέχεια παίρνουν ένα σημείο πάνω στη μεσοκάθετο και δημιουργούν τη γωνία που σχηματίζει με τα σημεία Α και Β. Κινούν το σημείο ώστε η γωνία να γίνει διπλάσια της δεδομένης γωνίας(120° =2x60^o). Αφού βρουν το κέντρο κατασκευάζουν τον κύκλο και μια ακτίνα του προκειμένου να βρουν το μήκος της *(εικόνα 27).*

Ν *Αυτός ο κύκλος τι χαρακτηρίζει; Πώς θα βρούμε τη θέση του κύκλου;*

Ερ. *Ξέρω ακτίνα;*

Σ *Όχι ξέρω μόνο αυτά τα δύο, τη χορδή. (Δείχνει τα σημεία Α και Β)*

Ερ. *Τι χρειάζομαι για να φτιάξω τον κύκλο;*



Εικόνα 27. Κατασκευή κύκλου στο λογισμικό

Κ *Ακτίνα και διάμετρο*

Ν *Ακτίνα και τόξο.*

Γ *Το κέντρο.*

Ν *Στη μέση της χορδής.*

Σ *Στο απόστημα.*

Ερ. *Τι είναι το απόστημα για τη χορδή;*

Σ *Κάθετη στο μέσο της*

Κ *Εδώ πάνω (Δείχνει τη μεσοκάθετο)*

Ερ. *Το θέμα είναι ότι θέλουμε γωνία 60° . Αυτή συνδέεται με το κέντρο;*

Όχι. (Όλοι μαζί).

Ερ. *Ποια γωνία συνδέεται με το κέντρο;*

Σ *Η επίκεντρη.*

Ερ. *Ωραία, η γωνία 60° , η επίκεντρη πόσο θα είναι;*

Γ *Το μισό ή το διπλάσιο;*

Σ *Το διπλάσιο.*

Ερ. *Μπορώ να έχω μέτρημα αυτής της γωνίας (Δείχνει την επίκεντρη και την επιλογή μέτρησης από το λογισμικό).*

Οι μαθητές κινούν το κέντρο μέχρι να γίνει η επίκεντρη 120° . Κατασκευάζουν τον κύκλο μετρώντας και την ακτίνα του κύκλου. Ο εκπαιδευτικός τους βοηθά στη χρήση του λογισμικού.

Στην ουσία γίνεται προσπάθεια να αναδημιουργηθεί το στιγμόμετρο, ένα τεχνούργημα-όργανο του χώρου εργασίας. Ο σχεδιασμός έγινε με στόχο οι μαθητές να καταλάβουν τη λειτουργεία του οργάνου και τα μαθηματικά που κρύβονται σ αυτό. Στο αρχείο αυτό έχουμε μια ανάμειξη του μαθηματικού περιεχομένου και του χώρου εργασίας, διευκολύνοντας έτσι τη διέλευση των γνωστικών συνόρων.

Στο σημείο αυτό το λογισμικό παίζει κρίσιμο ρόλο καθώς τους επιτρέπει κινώντας το κέντρο πάνω στη μεσοκάθετο χορδής και μετρώντας την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία να εντοπίσουν το κέντρο και αντίστοιχα την ακτίνα του ζητούμενου κύκλου. Κινούν το σημείο πάνω στη μεσοκάθετο της χορδής μέχρι να δουν τη μέτρηση της γωνίας ίση με την δοσμένη οριζόντια γωνία. Στην τελική φάση της δεύτερης δραστηριότητας οι μαθητές χρησιμοποίησαν την παραπάνω μέθοδο στην κατασκευή κύκλων.

Στην τρίτη φάση έρχεται πάλι στο προσκήνιο το ίδιο πρόβλημα. Οι μαθητές επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν ως μέτρηση οριζόντιες γωνίες οπότε προκύπτει η ανάγκη κατασκευής κύκλου με γνωστή εγγεγραμμένη γωνία και το αντίστοιχο τόξο. Για ακόμη μια φορά οι μαθητές χρησιμοποιούν την τεχνική που ανέπτυξαν με τη χρήση του λογισμικού. Με τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού εύκολα κάνουν τη σύνδεση με τις έννοιες που πραγματεύτηκαν στην αρχή της δεύτερης φάσης και κατασκευάζουν τον κύκλο. Την ίδια πρακτική ακολουθούν και τις υπόλοιπες φορές που χρησιμοποιούν οριζόντια γωνία ως μέτρηση.

Σ Λέω να πάρω την οριζόντια γωνία μεταξύ 3 και 4 (Εννοεί τους φάρους 3 και 4)

Ερ. *Πόσο είναι η γωνία;*

Σ 20° .

Ερ. *Ωραία 20° . Πώς θα τη φτιάξετε αυτή;*

Σ Θα πάρουμε αυτό και θα κινηθούμε παράλληλα (Δείχνει το διπαράλληλο).

Ερ. *Τι σχήμα είπαμε δίνει η οριζόντια γωνία;*

Σ Κύκλο.

Κ Άρα θέλουμε το κέντρο του κύκλου.

Ν *Το κέντρο θα είναι στη μεσοκάθετο πάνω.*

Ερ. *Θα βάλετε το κέντρο ώστε η γωνία να είναι πόσο;*

Ν *20° . Όχι 40° .*

Ερ. *Γιατί;*

Σ *Εγγεγραμμένη…και η επίκεντρη θα είναι διπλάσια. (Συμφωνεί και ο Γ)*

Οι μαθητές φτιάχνουν τον κύκλο, βρίσκοντας την ακτίνα με τη χρήση του λογισμικού.

Καταρχάς, να σημειωθεί ότι στην πρακτική του επαγγελματία πλοιάρχου δεν γίνεται κατασκευή του κύκλου. Όπως βλέπουμε στην αρχή του πρώτου επεισοδίου μόλις γίνει αναφορά στην κατασκευή κύκλοι οι μαθητές αμέσως μιλάνε για κέντρο και ακτίνα. Οι μαθητές διερχόμενοι τα γνωστικά σύνορα νοηματοδοτούν τον κύκλο μέσω της εγγεγραμμένης γωνίας και της αντίστοιχης χορδής που η γωνία βαίνει. Έτσι λοιπόν οι εικόνες που έχουν οι μαθητές για την έννοια του κύκλου εμπλουτίζονται ποσοτικά και ποιοτικά. Στο σημείο αυτό μια ένδειξη νοηματοδότησης μέσω της αναγνώρισης κοινόχρηστου χώρου προβλημάτων (*recognizing a shared problem space)*. Η κατασκευή του κύκλου ερμηνεύεται, σύμφωνα με τη Θεωρία Δραστηριότητας, ως το κίνητρο για την δραστηριότητα στην οποία εμπλέκονται οι μαθητές και η αφορμή για από κοινού δραστηριότητες ανάμεσα σε διαφορετικά Συστήματα Δραστηριοτήτων.

Κεφάλαιο 5ο
Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε τον τρόπο νοηματοδότησης της διασύνδεσης μαθηματικών εννοιών και αυθεντικών καταστάσεων του χώρου εργασίας από τους μαθητές. Επίσης, διερευνήσαμε τον ρόλο των διαθέσιμων μέσων (εργαλεία ψηφιακά και αυθεντικά) και πρακτικών στη διαδικασία νοηματοδότησης. Η έρευνα όσον αφορά το θεωρητικό πλαίσιο στηρίχτηκε στην τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας, η οποία συνδέεται με τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρει η διέλευση των γνωστικών συνόρων ανάμεσα στα αλληλεπιδρώντα συστήματα δραστηριότητας. Η έρευνα αφορά τέσσερις μαθητές τη Α' Λυκείου που ενεπλάκησαν σε αυθεντικές καταστάσεις του χώρου εργασίας των πλοιάρχων εμπορικού ναυτικού. Όλες οι δραστηριότητες είχαν σαν πλαίσιο αναφοράς το ναυτικό χάρτη και οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν αυθεντικά εργαλεία και πρακτικές του χώρου εργασίας. Επίσης, χρησιμοποίησαν και ψηφιακά εργαλεία στην προσπάθειά τους να αποκωδικοποιήσουν τις μαθηματικές έννοιες που αποκρύπτονται στα εργαλεία που χρησιμοποιεί ο επαγγελματίας. Σε όλες τις φάσεις της έρευνας συμμετείχε και ένας επαγγελματίας πλοίαρχος του εμπορικού ναυτικού. Στη φάση του σχεδιασμού έγιναν συναντήσεις με τον επαγγελματία προκειμένου ο εκπαιδευτικός να εξοικειωθεί με τον χώρο εργασίας και να δημιουργήσει τις δραστηριότητες στις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές. Οι βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες απομαγνητοφωνήθηκαν. Τα κρίσιμα επεισόδια αναλύθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν με βάση βασισμένη στα δεδομένα θεωρία *(grounded theory).*

Όσον αφορά τα ερευνητικά ερωτήματα, τα ευρήματα της έρευνας διαπιστώνουν την ισχύ της Θεωρίας Δραστηριότητας και της διέλευσης των γνωστικών συνόρων στη νοηματοδότηση μαθηματικών νοημάτων. Αρχικά, να παρατηρήσουμε πως οι διαδικασίες νοηματοδότησης ταξινομούνται κυρίως στις δύο πρώτες, «αναγνώριση» *(identification)* και «συντονισμό» *(coordination).* Λίγες αλλά σημαντικές περιπτώσεις αντιστοιχούν στον «αναστοχασμό» *(reflection).* Η σημαντικότητά τους έγκειται στην κατασκευή μεικτών θεωρήσεων ή στην υιοθέτηση θεωρήσεων του χώρου εργασίας κάτι που συμβάλλει στην ποιοτική αλλαγή που παρατηρήσαμε στην τελική φάση της έρευνας. Όσον αφορά το μετασχηματισμό, μόνο ενδείξεις έχουμε σε αντίθεση με την έρευνα των Bakker και

Akkerman (2014) όπου παρατηρούν περιπτώσεις μετασχηματισμού *(transformation)* ως αποτέλεσμα του αναστοχασμού. Οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών είναι πιο πλούσιες στο χώρο εργασίας σε σχέση με τη σχολική τάξη. Για παράδειγμα, οι μαθητές νοηματοδοτούν την έννοια της ευθείας γραμμής με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Αρχικά γνωρίζοντας ένα σταθερό σημείο και τη γωνία που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ένα σταθερό σημείο στη στεριά και τη θέση του πλοίου, η οποία μεταβάλλεται. Τέλος, θεωρώντας δύο σταθερά σημεία στη στεριά και το μεταβλητό σημείο της θέσης του πλοίου. Τελικά, καταγράφηκαν σαφείς διαφορές σε περιορισμούς και παραμέτρους τις οποίες έλαβαν υπόψη τους οι μαθητές, πραγματοποιώντας τις δραστηριότητες , σε σχέση με τις αυθεντικές επαγγελματικές πρακτικές. Για παράδειγμα, ένα ζήτημα που προέκυψε έντονα από τους μαθητές, ήταν αυτό της ακρίβειας στην δραστηριότητα «Αποφυγή εμποδίου», ή στην «Ασφαλή διέλευση επικίνδυνων υδάτων» αλλά και γενικότερα σε όλη τη διάρκεια της έρευνας.

Εξάλλου, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην παρούσα έρευνα. όπως και σε αυτή των Hoyles et. al (2007), ουσιαστικό ρόλο παίζει η κατανόηση των συστημάτων και όχι η δυνατότητα εκτέλεσης σύνθετων νοητικών διαδικασιών. Για αυτό το λόγο στις δραστηριότητες αποφύγαμε να εμπλέξουμε τους μαθητές σε πολύπλοκους υπολογισμούς, απόκλιση και παρεκτροπή πυξίδας, αλλά να επικεντρωθούμε στην ουσία των αυθεντικών καταστάσεων. Η ύπαρξη πολύπλοκων υπολογισμών θα απομάκρυνε τους μαθητές από το αυθεντικό πλαίσιο και το ρεαλισμό του χώρου εργασίας. Αντίθετα με τις δραστηριότητες να επικεντρώνονται στις πρακτικές του πλοιάρχου, οι μαθητές υιοθετούν θεωρήσεις του επαγγελματία, ή παράγουν μεικτές θεωρήσεις. Προσθέτοντας στην παραπάνω άποψη, θα θέλαμε να παρατηρήσουμε πως φτάνοντας στην τελευταία φάση, όπου οι μαθητές έπρεπε να εφαρμόσουν πρακτικές που μελέτησαν στις δύο πρώτες φάσεις, επέδειξαν μια εννοιολογική πρόοδο και κατανόηση του χώρου εργασίας. Έδειξαν επίγνωση για αυτά που έκαναν ή που δεν μπορούσαν να κάνουν. Χαρακτηριστικά ο μαθητής Σ παρατηρεί πως εξαιτίας λανθασμένων μετρήσεων το τρίγωνο που προκύπτει, ως αποτέλεσμα πιθανών θέσεων του πλοίου, δε θα μπορούσε να υπάρξει σε πραγματική κατάσταση.

Συμφωνώντας με την έρευνα των Jurdan και Shahin (2001) όπως και των Fitzsimons (2002), Zevenbergen (2011) και Roth (2012), διαπιστώσαμε δομικές διαφορές

όταν η δραστηριότητα εκτελείται σε διαφορετικά πολιτισμικά πλαίσια (επαγγελματικό και σχολικό). Καταρχάς, εκτός από την ουσιώδη διαφορά στο πολιτισμικό πλαίσιο που εξελίσσεται η δραστηριότητα, υπάρχει διαφορετικό κίνητρο για αυτή. Επίσης, τα διαθέσιμα εργαλεία του χώρου εργασίας είναι διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιούν οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά. Ακόμα όμως και παρόμοια εργαλεία είχαν διαφορετική χρήση. Χαρακτηριστική είναι η διαφορετική χρήση του ναυτικού διαβήτη, ως εργαλείου μέτρησης και σύγκρισης αποστάσεων σε σχέση με το σχολικό διαβήτη, που χρησιμοποιείται για τη χάραξη κύκλου.

Όσον αφορά τη χρήση των εργαλείων θα συμφωνήσουμε με την έρευνα των Wake, Swan και Foster (2016) και των Triantafillou και Potari (2014) καθώς και στην παρούσα έρευνα αυθεντικά, ψηφιακά εργαλεία και αυθεντικές πρακτικές λειτούργησαν θεμελιωδώς στη, νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Καταρχάς, προσέφεραν ευκαιρίες πλούσιων αλλά και διαφορετικών νοηματοδοτήσεων. Για παράδειγμα, ο ναυτικός διαβήτης ανέδειξε τη χρήση του διαβήτη ως εργαλείου μέτρησης και σύγκρισης αποστάσεων και όχι μόνο κατασκευής κύκλου, όπως τον έχουν συνηθίσει οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά. Εργαλεία όπως το στιγμόμετρο αλλά και επαγγελματικές πρακτικές, όπως η διέλευση επικίνδυνων υδάτων ή η αποφυγή εμποδίου λειτούργησαν ως αντικείμενα στα γνωστικά σύνορα. Αποτέλεσαν το μέσο αλληλεπίδρασης των μαθητών με το χώρο εργασίας. Βέβαια δεν έλειψαν οι εξαιρέσεις όπου η κρυσταλλοποίηση μαθηματικών εννοιών σε αυθεντικά όργανα ήταν τόσο ισχυρή που δεν μπόρεσαν να την αποκωδικοποιήσουν οι μαθητές, π.χ. τη χρήση διπαράλληλου ως μοιρογνωμόνιο. Μάλιστα σε κάποιες από αυτές τις περιπτώσεις η επαγγελματική πρακτική λειτουργεί ως μαύρο κουτί (*black box)* και για τον ίδιο τον πλοίαρχο, όπως επισημαίνουν και οι Williams και Wake (2007). Κάτι τέτοιο παρατηρήσαμε στη δραστηριότητα «Εύρεση θέσης του πλοίου», όπου υπήρξε σαφής σύγχυση και για το επαγγελματία σε σχέση με το έκκεντρο και το περίκεντρο του τριγώνου.

Επίσης, τα ευρήματα της έρευνας υποστηρίζουν τα αντίστοιχα ευρήματα άλλων ερευνών όσον αφορά στο νόημα που αποκτά το πρόβλημα για τους μαθητές στον χώρο εργασίας (Pozzi et. al, 1998; Jurdak & Shahin, 1999). Οι στρατηγικές επίλυσης είναι πιο πλούσιες σε νοήματα καθώς οι μαθητές εξοικειωμένοι σταδιακά με το σύστημα του

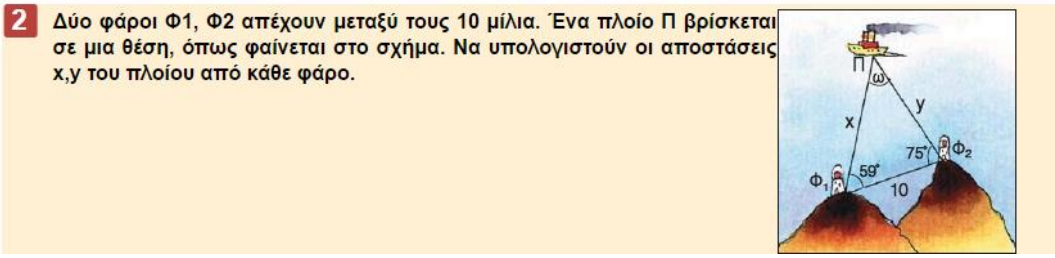
επαγγελματικού χώρου λαμβάνουν υπόψη τους όχι μόνο την ορθότητα του μαθηματικού συλλογισμού τους αλλά και την ικανοποίηση παραμέτρων του χώρου εργασίας. Κάτι τέτοιο παρατηρήσαμε και στη δραστηριότητα «Αποφυγή εμποδίου», όπου οι μαθητές προσπάθησαν να δώσουν λύση ικανοποιώντας και τα αιτήματα της ασφάλειας και της συντομίας της διαδρομής. Οι νέες στρατηγικές που αναπτύχθηκαν είχαν ισχυρή σύνδεση με το πλαίσιο της δραστηριότητας και βοήθησαν τους μαθητές να αναπτύξουν διαδικασίες νοηματοδότησης. Όπως παρατηρούν στην έρευνά τους και οι Triantafillou και Potari (2014) σχολικές εμπειρίες αλλά και γενικότερες γνώσεις, χαρακτηριστική περίπτωση ο μαθητής Γ, βοηθούν και επηρεάζουν την νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών και τη διαμόρφωση στρατηγικών επίλυσης προβλήματος.

Συνοψίζοντας με γενικότερα συμπεράσματα για τη συσχέτιση σχολικών μαθηματικών και μαθηματικών του χώρου εργασίας τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν με τα αντίστοιχα των Bakker και Akkerman (2014) για την αξιοποίηση αυθεντικών προσεγγίσεων τόσο στη γενική εκπαίδευση πέρα από την επαγγελματική, στην οποία έχουν επικεντρωθεί οι περισσότερες έρευνες. Από την ανάλυση των τριών φάσεων της έρευνας φαίνεται πως η μαθηματική εργασία στο χώρο εργασίας είναι πιο πλούσια νοημάτων, όπως παρατηρούν οι Jurdan και Shahin (2001) στη δική τους έρευνα. Παρόλα αυτά θεωρούμε πως απαιτείται η επίτευξη κρίσιμης ισορροπίας μεταξύ της νοητικής αφαίρεσης και της νοηματοδότησης σε ρεαλιστικά πλαίσια των μαθηματικών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα έλλειψης τέτοιας ισορροπίας είναι οι δραστηριότητες που οι μαθητές έπρεπε να διαχειριστούν τα κοινά σημεία τριών κύκλων ή το έκκεντρο και το περίκεντρο τριγώνου, όπου παρατηρήθηκε δυσκολία ή αδυναμία νοηματοδότησης, καθώς το ρεαλιστικό πλαίσιο απαιτούσε γνώση σύνθετων μαθηματικών εννοιών ή σχέσεων.

Τέλος, θα θέλαμε να αναφερθούμε στις περιορισμούς της παρούσας έρευνας. Όπως και σε άλλες έρευνες (Bakker & Akkerman, 2014) το μικρό πλήθος των συμμετεχόντων μαθητών, τέσσερις, δυσχεραίνει την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Περισσότερα πειράματα διδασκαλίας με μεγαλύτερες ομάδες μαθητών εμπλεκόμενους σε περισσότερους χώρους εργασίας είναι επομένως επιθυμητά. Εξάλλου, περιορισμό στην έρευνα αποτελεί και η έλλειψη ομάδας ελέγχου ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με την ομάδα εργασίας.

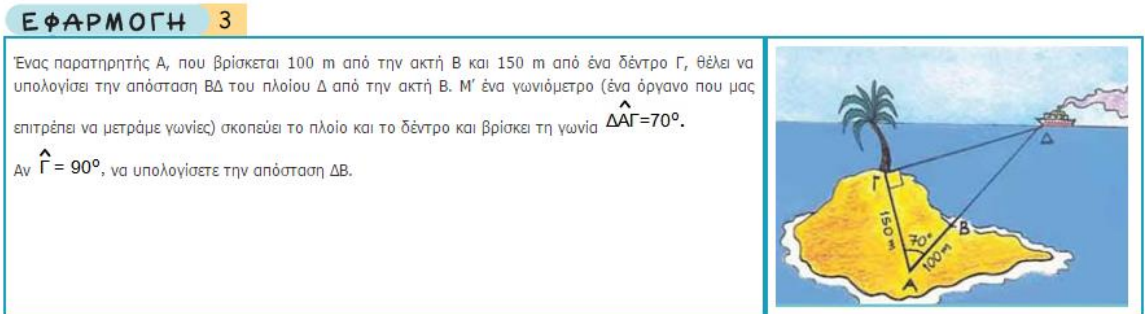
5.1 Διδακτική αξιοποίηση της έρευνας

Η ενσωμάτωση του χώρου εργασίας στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι απλή υπόθεση και απαιτείται να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις προκειμένου να έχει αποτελέσματα. Σημαντικό ρόλο παίζει η προσεκτική επιλογή του χώρου εργασίας. Θα πρέπει επαγγελματικός χώρος να προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα. Στο πλαίσιο του ναυτικού χάρτη υπάρχουν πολλές αυθεντικές πρακτικές που κρύβουν πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Όμως, επιλέχθηκε να δημιουργηθούν δραστηριότητες που από τη μια να είναι αυθεντικές αλλά από την άλλη να μην απαιτούν πολύπλοκους υπολογισμούς. Η κατασκευή πολύπλοκων δραστηριοτήτων κρύβει τον κίνδυνο της απώλειας του ενδιαφέροντος των μαθητών, κάτι που θα στερούσε ένα από τα πλεονεκτήματα της εμπλοκής των μαθητών με δραστηριότητες του χώρου εργασίας. Επίσης, κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να αποκτήσει εξοικείωση με τον χώρο εργασίας ώστε να δημιουργηθούν δραστηριότητες που να ανταποκρίνονται σε αυθεντικές καταστάσεις του χώρου εργασίας. Τέλος, η συμμετοχή του επαγγελματία όχι μόνο στο σχεδιασμό αλλά και κατά τη διάρκεια της έρευνας αποτελεί πλεονέκτημα. Ένα από τα ζητούμενα είναι η διαρκής παρουσία του χώρου εργασίας. Η συμμετοχή του πλοιάρχου, εν προκειμένω, κατέστησε τον χώρο εργασίας ουσιαστικά το πλαίσιο στο οποίο εργάστηκαν οι μαθητές.



Εικόνα 28. Άσκηση Γ Γυμνασίου

Τέλος, όσον αφορά τις διδακτικές προεκτάσεις της έρευνας υπήρξαν ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι η σχολική πρακτική μπορεί να κερδίσει από την εμπλοκή των μαθητών σε ρεαλιστικές καταστάσεις από χώρους εργασίας. Δραστηριότητες που μοντελοποιούν αυθεντικές καταστάσεις από τον χώρο εργασίας μπορούν να

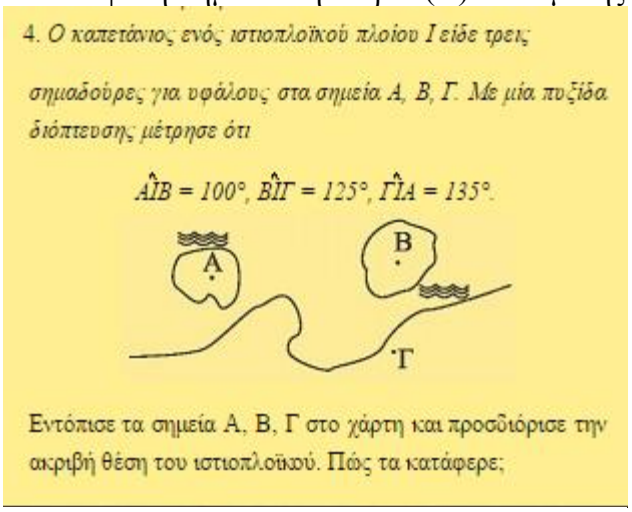

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένας παρατηρητής Α, που βρίσκεται 100 m από την ακτή Β και 150 m από ένα δέντρο Γ, θέλει να υπολογίσει την απόσταση ΒΔ του πλοίου Δ από την ακτή Β. Μ' ένα γωνιόμετρο (ένα όργανο που μας επιτρέπει να μετράμε γωνίες) σκοπεύει το πλοίο και το δέντρο και βρίσκει τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma=70^o$.

Αν $\hat{\Gamma} = 90^o$, να υπολογίσετε την απόσταση ΔΒ.

Εικόνα 29. Άσκηση Β' Γυμνασίου

αποτελέσουν χρήσιμη επέκταση στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολικών μαθηματικών. Παρόλα αυτά στην παρούσα φάση η δυνατότητα αυτή δεν αξιοποιείται. Μελετώντας τα σχολικά βιβλία μαθηματικών του Γυμνασίου και του Λυκείου εντοπίσαμε ασκήσεις και εφαρμογές που έχουν σαν πλαίσιο το ναυτικό χάρτη και την πορεία του πλοίου ή την εύρεση της θέσης του. Παρόλα αυτά οι εφαρμογές αυτές αποτελούν μαθηματικά προβλήματα με αναφορά στον χώρο εργασίας και όχι αυθεντικές καταστάσεις του χώρου από όπου μπορούν να αναδειχθούν μαθηματικές έννοιες. Πιο συγκεκριμένα, στο βιβλίο μαθηματικών της Β' Γυμνασίου *(εικόνα 28)* στους μαθητές δίνεται ως δεδομένο η γωνία που σχηματίζει η διόπτευση ενός σημείου στη στεριά με το τμήμα που ενώνει δύο καταφανή σημεία στη στεριά (Α). Δεδομένης αυτής της μορφής, δε θα μπορούσε να υπάρξει σε ρεαλιστική κατάσταση. Αντίθετα, οι μαθητές θα μπορούσαν να γνωρίζουν την οριζόντια γωνία (Δ) που σχηματίζει το μάτι του παρατηρητή με τα δύο σημεία στη στεριά. Αντίστοιχο πρόβλημα υπάρχει και σε εφαρμογή στο βιβλίο μαθηματικών της Γ Γυμνασίου *(εικόνα 29)*. Ως

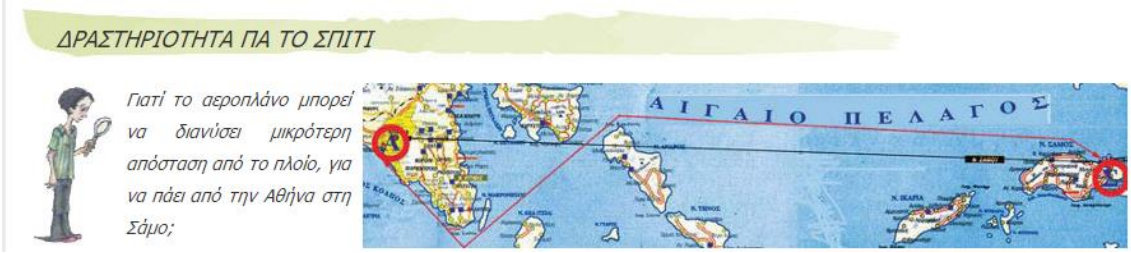

4. Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ. Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι

$A\hat{I}B = 100°$, $B\hat{I}\Gamma = 125°$, $\Gamma\hat{I}A = 135°$.

Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Εικόνα 30. Άσκηση Α Λυκείου

δεδομένα δε θα μπορούσαν να υπάρξουν οι γωνίες που σχηματίζει το τμήμα που ενώνει τους δύο φάρους με τις διοπτεύσεις των δύο σταθερών σημείων. Αντίθετα, θα μπορούσε κάλλιστα να δοθεί σαν δεδομένο η οριζόντια γωνία που σχηματίζει το πλοίο με τους δύο φάρους, όπως και η απόστασή του από έναν από τους δύο. Τέλος, στο βιβλίο Γεωμετρίας της Α' Λυκείου *(εικόνα 30)* το πρόβλημα που δίνεται προς λύση αντιστοιχεί σε αυθεντική πρακτική εντοπισμού θέσης τους πλοίου. Αν όμως ανατρέξουμε στην πρακτική του επαγγελματία, όπως την εφάρμοσαν και οι μαθητές



Εικόνα 31. Δραστηριότητα Α Γυμνασίου

στην δραστηριότητα «*Οριζόντια γωνία*», θα δούμε ότι αρκούν δύο από τις τρεις γωνίες για τον εντοπισμό της θέσης του πλοίου ως το κοινό σημείο δύο τεμνόμενων κύκλων. Αντίθετα, μια χρήσιμη δραστηριότητα προτείνεται στο βιβλίο της Α' Γυμνασίου *(εικόνα 31)*. Πιο συγκεκριμένα, η δραστηριότητα έχει στόχο τη νοηματοδότηση της τεθλασμένης γραμμής μέσα από την χάραξη της πορείας ενός πλοίου στο ναυτικό χάρτη.

Δεδομένων, λοιπόν, των δυνατοτήτων νοηματοδότησης που προσφέρουν οι δραστηριότητες αυθεντικών καταστάσεων από χώρους εργασίας, θεωρούμε πως θα ήταν χρήσιμη η ένταξη τους στη διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη. Μάλιστα ο ναυτικός χάρτης κρύβει πλούσιο περιεχόμενο μαθηματικών εννοιών όχι μόνο Γεωμετρικών αλλά σε όλο το φάσμα των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

1. Akkerman, S. F. (2011). Learning at boundaries. *International Journal of Educational Research*, 50(1), 21–25
2. Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research*, *81*(2), 132–169
3. Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Learning at the boundary: An introduction. *International Journal of Educational Research*, *50*(1), 1–5.
4. Bakker, A., & Akkerman, S. F. (2014). A boundary-crossing approach to support students' integration of statistical and work-related knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 223–237.
5. Bakker, A. (2014). Characterising and developing vocational mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 151–156.
6. Bakker, A., Kent, P., Hoyles, C., & Noss, R. (2011). Designing for communication at work: A case for technology-enhanced boundary objects. *International Journal of Educational Research*, *50*(1), 26–32.
7. Bakker, A., Groenveld, D., Wijers, M., Akkerman, S. F., & Gravemeijer, K. P. E. (2014). Proportional reasoning in the laboratory: an intervention study in vocational education. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 211–221.
8. Buxton, C. A., Carlone, H. B., & Carlone, D. (2005). Boundary spanners as bridges of student and school discourses in an urban science and mathematics high school. *School Science and Mathematics*, *105*(6), 302–312.
9. Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory*. London ; Thousand Oaks, Calif: Sage Publications.
10. Civil, M. (2002). Chapter 4: Everyday Mathematics, Mathematicians' Mathematics, and School Mathematics: Can We Bring Them Together? *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *11*, 40.
11. Damlamian, A., Rodrigues, J. F., & Sträßer, R. (Eds.). (2013). *Educational Interfaces between Mathematics and Industry* (Vol. 16). Cham: Springer International

12. FitzSimons, G. E. Coben D. O' Donoghue J. (2003). Lifelong Mathematics Education In Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherlands.
13. *FitzSimons G. E.* Doing Mathematics in the Workplace: A Brief Review of Selected Literature International Conference of Adults Learning Mathematics. (2013). In Hector-Mason, A., Coben, D., AUT University, National Centre of Literacy and Numeracy for Adults (N.Z.), & International Conference of Adults Learning Mathematics (Eds.). *Synergy: working together to achieve more than the sum of the parts : proceedings of the 19th International Conference of Adult Learning Mathematics : a research forum (ALM-19), Auckland, New Zealand, 26-29 June, 2012*.
14. FitzSimons, G. E. (2014). Commentary on vocational mathematics education: where mathematics education confronts the realities of people's work. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 291–305.
15. Guile, D. (2011). Learning at the boundary: A commentary. *International Journal of Educational Research*, *50*(1), 55–61.
16. Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematical education? In Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherlands.
17. Hoyles, C., Noss, R., & Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 309–326.
18. Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., Bakker, A., & Bhinder, C. (2007). *Techno-mathematical literacies in the workplace: a critical skills gap*. Teaching and Learning Research Programme (TLRP). Jorgensen Zevenbergen, R. (2011). Young workers and their dispositions towards mathematics: tensions of a mathematical habitus in the retail industry. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 87–100.
19. Jurdak, M., & Shahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: The case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(3),

297–315.

20. LaCroix, L. (2014). Learning to see pipes mathematically: preapprentices' mathematical activity in pipe trades training. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 157–176.
21. Leigh Star, S. (2010). This is Not a Boundary Object: Reflections on the Origin of a Concept. *Science, Technology & Human Values*, *35*(5), 601–617.
22. Kent, P., Noss, R., Guile, D., Hoyles, C., & Bakker, A. (2007). Characterizing the Use of Mathematical Knowledge in Boundary-Crossing Situations at Work. *Mind, Culture, and Activity*, *14*(1–2), 64–82.
23. Konkola, R., Tuomi-Gröhn, T., Lambert, P., & Ludvigsen, S. (2007). Promoting learning and transfer between school and workplace. *Journal of Education and Work*, *20*(3), 211–228.
24. Maher, C. A. (2002). *How students structure their own investigations and educate us: what we've learned from a fourteen year study*. In: A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Sixth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31–46). Norwich, UK: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.
25. Masingila, J. O. (2002). Chapter 3: Examining Students' Perceptions of Their Everyday Mathematics Practice. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *11*, 30.
26. Millroy W. L. (1991). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Learnind and Individual Differences 3(1) 1-25.*
27. Psycharis, G. & Potari, D. (to appear). Mathematics teachers' learning at the boundaries of teaching, research and workplace. In G. Wake, G. A. Stillman, W. Blum & M. North (Eds.) International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (Volume: Crossing and Researching Boundaries in Mathematical Modelling Education). Springer Book Series.Swanson, D., & Williams, J. (2014). Making abstract mathematics concrete in and out of school. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 193–209.
28. Sannino, A. (2011). Activity theory as an activist and interventionist theory. *Theory & Psychology*, *21*(5), 571–597.

29. Triantafillou, C., & Potari, D. (2006). Mathematical Activity in a Technological Workplace Results from an Ethnologic Study *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, pp. 297-304. Prague
30. Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(3), 275–294.
31. Triantafillou, C., & Potari, D. (2014). Revisiting the place value concept in the workplace context: the issue of transfer development. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 337–358.
32. Tuomi-Gröhn, T. (2007). Developmental transfer as a goal of collaboration between School and Work: a case study in the training of daycare interns.
33. Wager, A. A. (2012). Incorporating out-of-school mathematics: from cultural context to embedded practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(1), 9–23.
34. Wake Geoff. (2013). Drawing on Understanding of Workplace Practice to Inform Design Mathematics Curricula. In A. R. Damlamian, *Educational Interfaces between Mathematics and Industry (Vol. 16)* (pp. 309-316). Damlamian, A., Rodrigues, J. F., & Sträßer, R. (Eds.). (2013). Educational Interfaces betweCham: Springer International Publishing.
35. Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271–290.
36. Ward, C. J., Nolen, S. B., & Horn, I. S. (2011). Productive friction: How conflict in student teaching creates opportunities for learning at the boundary. *International Journal of Educational Research*, *50*(1), 14–20.
37. Wiegand P. (2006). How children learn with maps. In Wiegand, P. (2006). *Cartography and Children.* Hoboken: Taylor & Francis Ltd.
38. Williams, J., & Wake, G. (2007). Black Boxes in Workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 317–343.
39. Williams, J. S., Wake, G. D., & Boreham, N. C. (2001). School or College Mathematics and Workplace practise: An Activity Theory Perspective. *Research*

in Mathematics Education, *3*(1), 69–83.

40. Wood, L. N. (2012). Practice and conceptions: communicating mathematics in the workplace. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 109–125.
41. Yamagata-Lynch. (2010). Understanding Cultural Historical Activity Theory. In Yamagata-Lynch, L. C. (2010). *Activity Systems Analysis Methods*. Boston, MA: Springer US.

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

42. Δεμερούτη Γ. Μηλονώπουλου Δ. (2010). *Ναυτιλιακές Γνώσεις.* Ίδρυμα Ευγενίδου Αθήνα.
43. Καλογερία, Ε., Μάλλιαρης, Χ. & Ψυχάρης, Γ. (2015). Συνεργατικός σχεδιασμός και εφαρμογή διερευνητικών δραστηριοτήτων που συνδέουν τα μαθηματικά με χώρους εργασίας. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος & Μ. Τζεκάκη (Επιμ.) Πρακτικά του 6ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ) (σελ. 489-498). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.
44. Ντούνη Χρ. Δημαράκη Α. (2006). *Ναυτιλία* Ίδρυμα Ευγενίδου Αθήνα.
45. Τριανταφύλλου Χ. (2010). *Τα μαθηματικά στο χώρο εργασίας και η σύνδεσή τους με την τυπική εκπαίδευση.* Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Παράρτημα 1.
Δραστηριότητες της έρευνας

Πρώτη Φάση: Εισαγωγική δραστηριότητα

1. Γεωγραφικές συντεταγμένες- ναυτικό μίλι

- Εντοπίστε στο χάρτη τις παρακάτω θέσεις και δώστε το στίγμα τους.

Θέση	Γεωγραφικό πλάτος (φ)	Γεωγραφικό μήκος (λ)
Ραφήνα		
Κάρυστος (Εύβοια)		
Μπατσί (Άνδρος)		

- Με βάση τα παρακάτω στίγματα εντοπίστε τη θέση πάνω στο χάρτη και δώστε τις ονομασίες τους.

Γεωγραφικό πλάτος (φ)	Γεωγραφικό μήκος (λ)	Θέση
37° 45’ 24’’ N	24° 08’ 48’’ E	
37° 39’ 30’’ N	24° 17’ 36’’ E	
37° 37’ 00’’ N	25° 01’ 6’’ E	

- Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ αναχώρησης και προορισμού σε ναυτικά μίλια.

Αναχώρηση	Προορισμός	Απόσταση
Ραφήνα	Κάρυστος	
Κάρυστος	Μπατσί	
Γαύριο	Ραφήνα	

- Μπορείτε να εντοπίσετε ομοιότητες και διαφορές των γεωγραφικών συντεταγμένων με τις συντεταγμένες στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων;

2. Ακτοπλοϊκό ταξίδι

- Ξεκινάμε από το λιμάνι της Ραφήνας με προορισμό το λιμάνι Κορησσία στην Κέα. Να χαράξετε στο χάρτη την αληθή πορεία και να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το πλοίο.

- Πλοίο αναχωρεί από το λιμάνι της Ραφήνας με προορισμούς διαδοχικά τα λιμάνια Κόρθιο Άνδρου, Χώρα Τήνου, Χώρα Μυκόνου και Χώρα Νάξου. Χαράξτε τις επιμέρους πορείες της διαδρομής . Βρείτε το στίγμα αλλαγής για κάθε πορεία. Υπολογίστε το μήκος ολικής διαδρομής που θα διανύσει το πλοίο.

Δεύτερη Φάση: Γραμμές θέσης Διόπτευση- Οριζόντια γωνία

1. **Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση**
   - Η διόπτευση του πλοίου με τον ακρωτήρι Σταυρός (βόρειο τμήμα Νάξου) είναι 130° . Ποια γραμμή περιγράφει τις πιθανές θέσεις του σκάφους; Χαράξτε τη γραμμή στο χάρτη σας.
   - Η διόπτευση των φάρων στο Ακρωτήριο Κόρακα και στη Νάουσα της Πάρου δίνει ευθυγράμμιση 142° . Ποια γραμμή περιγράφει τις πιθανές θέσεις του σκάφους; Χαράξτε τη γραμμή στο χάρτη σας.
   - Ποια από τις δύο γραμμές των ερωτημάτων 1 και 2 θεωρείτε πιο αξιόπιστη για την εύρεση του στίγματος του πλοίου και γιατί;
2. **Αρχείο λογισμικού- Οριζόντια γωνία.**

   Ανοίξτε το αρχείο *«Οριζόντια Γωνία».* Ο στόχος είναι να βρούμε τη γραμμή θέσης του πλοίου αν η οριζόντια γωνία με την οποία βλέπει τα σημεία Α και Β παραμένει σταθερή και ίση με 60°. Στο δεξί μέρος της οθόνης βλέπετε επιλογές πορείας (*«Ευθεία», «Γωνία», «Πολυγωνική Γραμμή»).*

2.1 Επιλέξτε μία, μία τις πιθανές γραμμές θέσεις και ελέγξτε, κινώντας το σημείο, αν η οριζόντια γωνία με τα σημεία Α και Β παραμένει σταθερά ίση με 60°. Σε ποια από τις πιθανές γραμμές θέσης νομίζετε ότι έχει τις μικρότερες αυξομειώσεις;

2.2 Επιλέξτε τα κουμπιά *«Πλοίο»* και *«Εικόνα»*. Προσπαθήστε να κινήσετε το σημείο *«Πλοίο»* διατηρώντας την οριζόντια γωνία με τα σημεία Α και Β γωνία σταθερή και ίση με 60°. Τι γραμμή προκύπτει από το ίχνος που αφήνει το σημείο καθώς το κινείτε;

2.3 Επιλέξτε το κουμπί *«Τελική Επιλογή».* Για κάθε τόξο κινείστε το σημείο και παρατηρήστε τη γωνία. Σε ποιο ή ποια τόξα η γωνία παραμένει σταθερή; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;

2.4 Ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τη γραμμή θέσης του πλοίου για οριζόντια γωνία 55°.

3. **Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων.**

- Πλέοντας στα ανοικτά Δυτικά της Άνδρου ενημερωνόσαστε για επικίνδυνη περιοχή (γραμμοσκιασμένη περιοχή). Σκεφτείτε τρόπο να διέλθετε ασφαλώς της επικίνδυνης περιοχής. Έχετε διαθέσιμες μετρήσεις, την οριζόντια γωνία που σχηματίζει το μάτι του παρατηρητή με το δυτικό φάρο στο Γαύριο και το φάρο στο Μπατσί καθώς και τη διόπτευση των δύο σημείων.

Δεύτερη Φάση: Γραμμές θέσεις Απόσταση –Ισοβαθής καμπύλη

4. **Απόσταση ραντάρ**

- Το ραντάρ μας δίνει απόσταση του πλοίου από το λιμάνι της Νάξου οκτώ ναυτικά μίλια. Ποια γραμμή περιγράφει τις πιθανές θέσεις του σκάφους; Χαράξτε τη γραμμή στο χάρτη σας.
- Μπορείτε με τα παραπάνω δεδομένα να εντοπίσετε στο χάρτη το ακριβές στίγμα του σκάφους; Τα στοιχεία που σας δόθηκαν παραπάνω επαρκούν ή όχι και γιατί;

5. **Αποφυγή εμποδίου**

- Η πορεία του πλοίου είναι από το ανοικτά Νότια της Σύρου προς τα ανοικτά του λιμανιού της Παροικιάς στην Πάρο. Σημείο εκκίνησης με στίγμα 36° 18’, 25° 6’ και πορεία ζλ=153° . Στην πορεία πρέπει να περάσουμε να ασφάλειας **ένα ναυτικό μίλι** από όλα τα νησάκια και βραχονησίδες που βρίσκονται στη χαραχθείσα πορεία. Ποιο εμπόδιο υπάρχει στην πορεία που έχουμε επιλέξει Χαράξτε κατάλληλη πορεία ώστε να αποφύγετε το εμπόδιο και να φτάσετε στο λιμάνι της Παροικιάς.

6. **Ισοβαθής καμπύλη**

- Βρίσκεστε ανατολικά της Μυκόνου σε σημείο με βάθος 100 μέτρα. Η διόπτευση του βόρειου ακρωτηρίου στο νησί Τραγονήσι είναι 310°. Μπορείτε να εντοπίσετε στο χάρτη τις πιθανές θέσεις του σκάφος και να δώσετε το στίγμα του;

Τρίτη Φάση: Εύρεση θέσης πλοίου με τη χρήση γραμμών θέσης

Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού προκειμένου να υπολογίσουμε το στίγμα του πλοίου με χρήση γραμμών θέσης έχουμε διαθέσιμα τα παρακάτω στοιχεία:

1. **Περιοδικότητα αναλαμπής φάρων**

- Η περιοδικότητα φάσεων των φάρων είναι οι εξής. Βρείτε ποιοι είναι οι παρακάτω φάροι.

Φ																				
1				W											W					
2			W					W					W					W		
3		W	W											W	W					
4		W			W			W			W			W			W			W
5				W						W						W				

- Από τη πυξίδα διόπτευσης έχουμε ευθυγράμμιση Φάρου 5 με Φάρο 3
- Από τον εξάντα υπολογίσαμε τις παρακάτω οριζόντιες γωνίες

Θέση 1	**Θέση 2**	**Οριζόντια γωνία**
Φάρος 3	Φάρος 4	20°
Φάρος 1	Φάρος 2	50°

- Από τις πυξίδες διόπτευσης υπολογίσαμε τις παρακάτω αντιστοιχίες

Αντιστοιχία	**Διόπτευση**
Φάρος 1	344°.
Φάρος 2	182°.
Φάρος 3	127°.

- Από το ραντάρ έχουμε τις παρακάτω αποστάσεις

Σημείο	**Απόσταση**
Φάρος 1	10,5 M
Φάρος 4	5,5 M

2. **Εύρεση θέσης πλοίου**

- Με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς δύο ή τριών γραμμών θέσης εντοπίστε την ακρίβεια του πλοίου. Περιγράψτε τις μεθόδους που ακολουθήσατε και δικαιολογήστε την ακρίβεια και ορθότητα του εντοπισμού του στίγματος.

Παράρτημα 2.
Εργαλεία πλοιάρχου

Ναυτικός χάρτης

Είναι η περιληπτική παρουσίαση της παράκτιας και θαλάσσιας περιοχής που περιλαμβάνει απαραίτητες πληροφορίες για ασφαλή ναυσιπλοΐα. Τα κυριότερα χαρακτηριστικά των ναυτικών χαρτών είναι η χωρική διευθέτηση των γεωγραφικών πληροφοριών , η απεικόνιση της ξηράς και της ακτογραμμής, του θαλάσσιου πυθμένα και σύμβολα ναυσιπλοΐας. Ειδικότερα ένας ναυτικός χάρτης αποτυπώνει:

- Το σχήμα και το είδος της ακτογραμμής (απόκρημνη, ομαλή κοκ)
- Τη διαμόρφωση του εδάφους με τις ισοϋψείς και τη θέση και ύψος κορυφών.
- Την ύπαρξη κτισμάτων ή άλλων εύκολα αναγνωρίσιμων αντικειμένων.
- Τους φάρους με τα διακριτικά τους και τα τόξα που είναι ορατοί.
- Τα ονόματα νησιών, ακρωτηρίων, όρμων κοκ.
- Υφάλους ναυάγια ή άλλα επικίνδυνα για τη ναυσιπλοΐα σημεία
- Τη διαμόρφωση του βυθού με τις αντίστοιχες ισοβαθείς.
- Το βάθος της θάλασσας σε διάφορα σημεία.
- Το είδος του βυθού (Βραχώδης, Λάσπη, Άργιλος κοκ)
- Τα τυχόν ρεύματα.
- Τις επικίνδυνες και απαγορευμένες για τη ναυσιπλοΐα περιοχές.
- Τις ζώνες κυκλοφορίας μεγάλων πλοίων στα λιμάνια.

Ναυτικός διαβήτης (κουμπάσο) *(divider)*

Ο ναυτικός διαβήτης (κουμπάσο) διαφέρει από τον κοινό σχολικό διαβήτη. Τα δύο μεταλλικά σκέλη του έχουν μεγαλύτερο μήκος και καταλήγουν και τα δύο σε οξείες αιχμές. Σε μερικές περιπτώσεις υπάρχει η δυνατότητα στο ένα άκρο να προστεθεί μολύβι αλλά επί του πρακτέου δεν χρησιμοποιείται η παραπάνω πρακτική. Ο ναυτικός διαβήτης χρησιμοποιείται για τη μέτρηση αποστάσεων και συντεταγμένων στο ναυτικό χάρτη. Η σχετική δυσκολία που παρουσιάζουν τα δύο σκέλη στην

κίνησή τους εμποδίζουν την αυξομείωση του ανοίγματός του κάτι που συμβάλλει στην αξιοπιστία του ως όργανο μέτρησης και σύγκρισης μηκών.

Διπαράλληλος

Διάφοροι τύποι διπαράλληλων κυκλοφορούν. Παρόλα αυτά ο πιο διαδεδομένος είναι ο κοινός διπαράλληλος κανόνας που αποτελείται από δύο ίσους κανόνες ενωμένους έτσι ώστε να πλησιάζουν και να απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, διατηρώντας πάντα παράλληλη θέση μεταξύ τους. Οι σύγχρονοι διπαράλληλοι κανόνες έχουν και ανεμολόγιο με χαραγμένες στην επιφάνειά τους διαιρέσεις μοιρών (000°-359°). Οι συνηθισμένες διαστάσεις του είναι 46x8 cm ή 30x8 cm.

Στιγμογράφος *(station pointer)*

Ο στιγμογράφος χρησιμοποιείται όταν γνωρίζουμε τις δύο οριζόντιες γωνίες που δημιουργεί το μάτι του παρατηρητή με τρία καταφανή σημεία στη στεριά, που σημειώνονται στο χάρτη. Για τη μέτρηση των γωνιών χρησιμοποιείται η διόπτρα ή ο εξάντας. Ο στιγμογράφος αποτελείται από τρεις βραχίονες, που στερεώνονται στο κέντρο του και μια ορειχάλκινη κυκλική βάση. Η περιφέρεια της βάσης χωρίζεται σε δύο μέρη, 0°-180° δεξιά και αριστερά. Ο μεσαίος βραχίονας αντιστοιχεί στις 0° και παραμένει ακίνητος. Οι άλλοι δύο βραχίονες κινούμενοι μπορούν να σχηματίζουν γωνίες 0°-180° με τον κεντρικό. Στο κέντρο του κύκλου, που συνδέονται οι τρεις βραχίονες υπάρχει οπή για την υποτύπωση του στίγματος με το μολύβι.

Ορολογία στο ναυτικό χάρτη

Γεωγραφικές συντεταγμένες

Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε με απόλυτο τρόπο τη θέση μας, δηλαδή χωρίς να εξαρτάται από άλλα γνωστά σημεία χρειαζόμαστε ένα σύστημα συντεταγμένων. Αν

και το σχήμα της γης δεν είναι σφαιρικό μπορούμε να το θεωρήσουμε ως τέτοιο. Με ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της γης κάθετο στον άξονά της τη χωρίζουμε σε δύο ημισφαίρια. Τα δύο ημισφαίρια τα ονομάζουμε **Βόρειο (N) και Νότιο (S)** και το επίπεδο που κόψει τη γη κάθετα στον άξονά της **Ισημερινό.** Μια οποιαδήποτε τομή της γης με ένα επίπεδο παράλληλο στον ισημερινό μας δίνει έναν **Παράλληλο.** Από την άλλη, αν θεωρήσουμε την τομή της γης με ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της κάθετο στον ισημερινό έχουμε φτιάξει έναν **Μεσημβρινό**. Ο κάθε μεσημβρινός περιέχει τον άξονα της γης.

Από κάθε σημείο της επιφάνειας της γης διέρχεται μόνο ένας μεσημβρινός και ένας παράλληλος. Το ζευγάρι **παράλληλος- μεσημβρινός** το ονομάζουμε **γεωγραφικές συντεταγμένες ή στίγμα.** Ο παράλληλος καθορίζει το **γεωγραφικό πλάτος (φ)** ενώ ο μεσημβρινός το **γεωγραφικό μήκος (λ).** Το στίγμα ενός πλοίου δίνεται σε σχέση με το χρόνο.

Θεωρούμε ως πρώτο το μεσημβρινό που διέρχεται από το Αστεροσκοπείο Γκρήνουιτς στην Αγγλία και χωρίζουμε έτσι τη γη σε δύο μέρη, το **Ανατολικό (0°-180°) (Ε) και το Δυτικό (0°-180°)(W)**. Ο τελευταίος μεσημβρινός διέρχεται κοντά στα νησιά Φίτζι στον Ειρηνικό. Το γεωγραφικό μήκος είναι η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο του μεσημβρινού που διέρχεται από τον τόπο με το επίπεδο του πρώτου μεσημβρινού. Η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα που περνά από τον τόπο με τον Ισημερινό και έχουμε βρει το γεωγραφικό πλάτος.

Το γεωγραφικό πλάτος σημειώνεται στο αριστερό και το δεξί άκρο του χάρτη, ενώ το γεωγραφικό μήκος στο πάνω και στο κάτω μέρος του. Στην κλίμακα μήκους οι υποδιαιρέσεις έχουν σταθερό πάχος σε αντίθεση με την κλίμακα του πλάτους. Η ακρίβεια θέσης δίνεται με υποδιαιρέσεις μέχρι και δεύτερα λεπτά της μοίρας.

Το ναυτικό μίλι

Με βάση την κλίμακα του πλάτους στο δεξί και αριστερό μέρος του ναυτικού χάρτη μετριούνται όλες οι αποστάσεις πάνω του. Η μία μοίρα (1°) αντιστοιχεί σε 60 ναυτικά μίλια οπότε κάθε ένα πρώτο λεπτό της μοίρας (1’) αντιστοιχεί σε ένα ναυτικό μίλι. Η μέση τιμή του ναυτικού μιλίου είναι 1,852 χλμ. Τις αποστάσεις στο ναυτικό χάρτη τις μετράμε με ένα όργανο που μοιάζει με διαβήτη και ονομάζεται **κουμπάσο.**

Φάροι

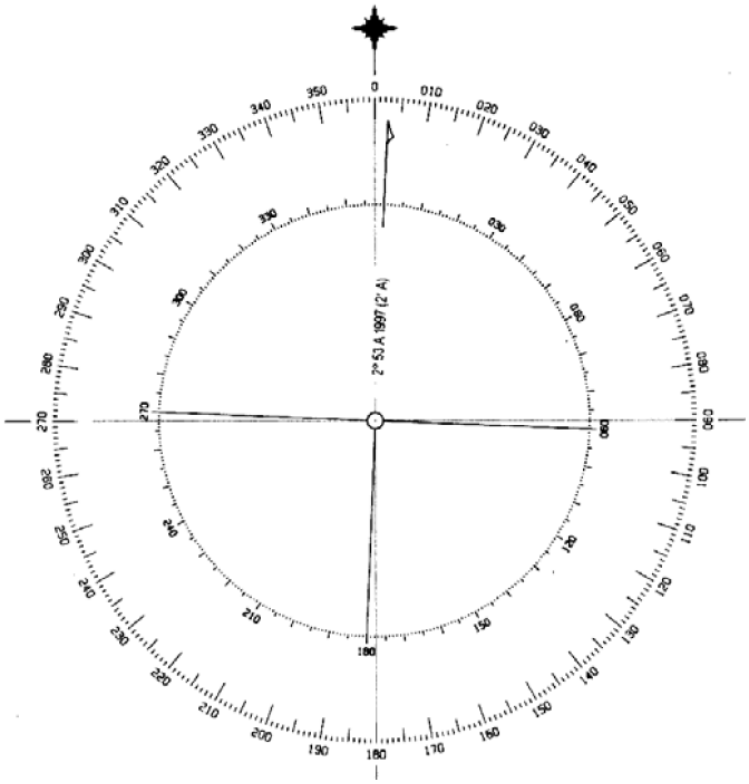
Πυρσός ονομάζεται η συσκευή που εκπέμπει φως ώστε να επισημαίνεται από τους ναυτιλομένους είτε βρίσκεται σε σταθερό έδαφος είτε επιπλέει. Αυτοί που βρίσκονται σε σταθερό έδαφος είναι οι φάροι, τα φανάρια των λιμένων και οι φανοί ευθυγράμμισης. Ο **φάρος** είναι ένας πυρσός που χρησιμοποιείται για την ακτοπλοΐα με φωτοβολία έως 25 ναυτικά μίλα. **Ποτέ ένας φάρος δεν παρουσιάζει το ίδιο σήμα με κάποιον άλλο στην ίδια γεωγραφική περιοχή**. Το βασικό χαρακτηριστικό του κάθε φάρου είναι οι αναλαμπές του, μία ή περισσότερες μετά από διάστημα παρατεταμένου σκότους. Κάθε αναλαμπή ή αλλαγή χρώματος ονομάζεται **φάση** και η διάρκειά της σε δευτερόλεπτα, μέσα στην οποίαν αποδίδεται το πλήρες χαρακτηριστικό του φάρου ονομάζεται **περίοδος.**

Ανάλογα του χαρακτηριστικού τους οι Φάροι του χάρτη μας διακρίνονται σε

- Σταθερού φωτός **(Fixed/F)**: Είναι οι Φάροι με συνεχές φως και σταθερής έντασης.
- Αναλάμποντες **(Flashing/Fl)**: Εκείνοι με περιοδικό ζωηρό φως διάρκειας μικρότερης του σκότους.
- Εκλάμποντες **(Quick Flashing/Qk.Fl):** ή τάχιστα αναλάμποντες, κοινώς "σπίθες". Ο αριθμός των αναλαμπών τους υπερβαίνει τις 60/λεπτό.
- Τέλος υφίστανται και οι φάροι που εκπέμπουν με βραχείες αναλαμπές μακράς διάρκειας καλούμενοι ως βραχειών και μακρών αναλαμπών **(Short-long Flashing/S-L Fl).**

Παράδειγμα ανάγνωσης φάρου: Στο Νησάκι Πρασονήσι κοντά στην Ηγουμενίτσα η περιγραφή του φάρου, είναι η εξής: Fl(2)9s30m8M. Η επεξήγηση είναι: Fl=Αναλάμπος φάρος, (2)=δύο αναλαμπές, 9s=εκπομπή κάθε 9 δευτερόλεπτα, 30m=ύψος του φάρου από την επιφάνεια της θάλασσας 30μέτρα, 8M=Η μέγιστη απόσταση απ’ όπου διακρίνεται ο φάρος 8 Ν. Μίλια. Εάν ο φάρος δεν αναφέρει χρωματισμό, τότε θεωρούμε ότι είναι λευκός. Αν στο παράδειγμα ο φάρος ήταν κόκκινος, τότε η αναγραφή θα ήταν η ακόλουθη: Fl R (2)9s30m8M και αν ο φάρος ήταν πράσινος τότε θα είχαμε: Fl G (2)9s30m8M.

Η πυξίδα το ανεμολόγιο του χάρτη το διπαράλληλο, το ραντάρ και ο εξάντας

Η γη είναι ένας τεράστιος μαγνήτης. Το μαγνητικό της πεδίο είναι σχεδόν παράλληλο στον άξονά της. Η **πυξίδα** είναι ένας μικρός μαγνήτης που κινείται ελεύθερα πάνω στον άξονά της ή μέσα σε υγρό δείχνοντας πάντα το Βορρά. Όμως ο μαγνητικός

άξονας της γης δεν είναι ίδιος με το γεωγραφικό, ούτε σταθερός αλλά μετακινείται με την πάροδο του χρόνου. Η διαφορά αυτή ονομάζεται **απόκλιση** διαφέρει από τόπο σε τόπο και θα τη βρούμε σημειωμένη πάνω στα **ανεμολόγια** του χάρτη. Ο εσωτερικός κύκλος ονομάζεται Μαγνητικό Ανεμολόγιο. Στις 0ο και 360ο του εσωτερικού κύκλου βρίσκεται ο μαγνητικός Βορράς της γης. Στο ανατολικό ημισφαίριο η απόκλιση αυξάνει, θετική, ενώ στο δυτικό μειώνεται, αρνητική.