ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη μαθηματικής δημιουργικότητας διαμέσου προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στη Γεωμετρία

Γρίδος Παναγιώτης
Δ201632

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής
Γαγάτσης Αθανάσιος Καθηγητής

Αθήνα

Ιούνιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 1η Ιουνίου 2018 από **Εξεταστική επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Α. Γαγάτση (Επιβλέπων)	Καθηγητή
• Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
• Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Α. Γαγάτση (Επιβλέπων)	Καθηγητή
• Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
• Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

- Τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Γαγάτση Αθανάσιο για όλα όσα έμαθα από αυτόν για την επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος, για την διαρκή υποστήριξη του, για τις πολύτιμες συμβουλές του αλλά και για τις ευχάριστες συζητήσεις που είχαμε καθ΄ όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας.
- Την κα. Δέσποινα Πόταρη τόσο για την συμμετοχή της στην τριμελή συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή όσο και για όσα έμαθα από αυτήν κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.
- Τον κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη για την συμμετοχή του στην τριμελή συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή και τις συμβουλές του.
- Τον κ. Γεώργιο Ψυχάρη για της συμβουλές του κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος αλλά κυρίως για όσα έμαθα από αυτόν κατά τις προπτυχιακές σπουδές μου και την ενθάρρυνση του να συνεχίσω στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα.
- Τους Δρ. Μάριο Πιττάλη και Δρ. Ελένη Δεληγιάννη για τις πολύτιμες συμβουλές τους κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.
- Τους Δρ. Κώστα Στουραΐτη, κ. Σπύρο Γλένη, Υπ. Δρ. Καλλιόπη Σιώπη, Δρ. Κυριάκο Καμπούκο, κ. Κώστα Κούστα για την παραχώρηση των μαθητών τους κατά την συλλογή δεδομένων αλλά και για τις κρίσιμες παρατηρήσεις τους.
- Την γραμματέα του προγράμματος κα. Ελένη Κλη για την πολύ καλή συνεργασία που παρέχει.
- Τους συμφοιτητές και φίλους που έκανα κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος για αυτό το υπέροχο ταξίδι γνώσεων.
- Την οικογένεια μου που με στηρίζει όλα αυτά τα χρόνια σε ότι και αν χρειαστώ.

Αφιερώνεται στους γονείς μου
Αντώνη και Ζωή

Περίληψη

Περισσότερο από άλλες περιοχές των μαθηματικών, η γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψη και ανάπτυξη διαφόρων τρόπων σκέψης. Για τους λόγους αυτούς η μελέτη κατανόησης μάθησης και διδασκαλίας της γεωμετρίας δεν μπορεί παρά να είναι πολυδιάστατη. Η εργασία αυτή παρουσιάζει ακριβώς μια πολυδιάστατη μελέτη της κατανόησης της μάθησης της γεωμετρίας. Οι τέσσερις διαστάσεις που προτείνονται είναι: (α) η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, (β) η χωρική ικανότητα, (γ) η μαθηματική δημιουργικότητα, και (δ) η ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία.

Διάφορες έρευνες έχουν δείξει τον σημαντικό ρόλο των έργων πολλαπλών λύσεων στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης. Η παρούσα έρευνα ασχολείται με την επίδοση μαθητών της Β΄ λυκείου σε έργα γεωμετρίας πολλαπλών λύσεων. Μελετούμε τις τρεις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας, δηλαδή ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Για το σκοπό αυτό προτείνονται στους μαθητές για επίλυση 4 κλασσικά γεωμετρικά προβλήματα τα οποία δέχονται διάφορες λύσεις και στα δύο από τα οποία δίνεται το σχήμα, ενώ στα άλλα δύο δεν δίνεται, καθώς θεωρούμε ότι η κατάσταση είναι διαφορετική όταν ζητείται να κατασκευαστεί το σχήμα. Επιπλέον, η έρευνα στοχεύει στην διερεύνηση της σχέσης κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος με την παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 149 μαθητές Β΄ λυκείου από 5 σχολεία του νομού Αττικής, από τους οποίους 147 έλαβαν μέρος σε γραπτή δοκιμασία ενώ 2 σε προφορική συνέντευξη. Τα αποτελέσματα της έρευνας ενισχύουν την υπόθεσή μας ότι η ευχέρεια και η ευελιξία των μαθητών στις λύσεις τους ενισχύεται όταν το σχήμα δίνεται στο πρόβλημα. Ακόμα, η έρευνα υποστηρίζει την άποψη ότι η καινοτομία δεν φαίνεται να επηρεάζεται από το αν δίνεται ή όχι το σχήμα, καθώς είναι πιο εγγενές χαρακτηριστικό και είναι πιο στενά συνδεδεμένη με την δημιουργικότητα. Η ανάλυση ομοιότητας ως προς το πλήθος λύσεων των μαθητών έδωσε τρεις ομάδες: (α) ομάδα μηδενικής ευχέρειας, (β) ομάδα χαμηλής ευχέρειας και ευελιξίας, και (γ) ομάδα υψηλής ευχέρειας και ευελιξίας με τις δύο πρώτες ομάδες να συγκεντρώνουν το μεγαλύτερο πλήθος μαθητών, κατάσταση η οποία από τα ποιοτικά δεδομένα φαίνεται ότι μπορεί να μεταβληθεί. Τέλος, φαίνεται ότι η σύνδεση των τεσσάρων ειδών κατανόησης γεωμετρικού σχήματος (αντιληπτική, ακολουθιακή, λεκτική, λειτουργική) είναι προαπαιτούμενο για υψηλά επίπεδα δημιουργικότητας στη γεωμετρία.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματική δημιουργικότητα, προβλήματα πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία, κατανόηση γεωμετρικού σχήματος, χωρική ικανότητα.

Abstract

Further to the rest areas of mathematics, geometry can be used to discover and develop different ways of thinking. Due to this, the study of understanding the learning and teaching of geometry can only be multi-dimensional. The present thesis presents such an analysis of the understanding of geometry learning. The four dimensions which are proposed are: (a) Geometrical figure apprehension; (b) spatial ability; (c) mathematical creativity; and (d) the ability to produce multiple solutions in geometry problems.

Several studies have shown the important role of multiple solution tasks in the development of geometric thinking and especially in the development of creative thinking. This research studies the performance of high school students in multiple solution geometry problems. The three dimensions of mathematical creativity, namely, fluency, flexibility and originality are examined. Towards this, students are asked to solve 4 classical geometrical problems which are subjected to different solutions. In two of them, the shape is provided, while this not the case for the other two and subsequently we assume that that the conditions are totally different. In addition, the research aims at exploring the relationship of understanding the geometric shape with the production of multiple solutions to a geometric problem. The sample of the survey consisted of 149 high school students from 5 schools in the prefecture of Attica, of whom 147 took part in a written test and 2 in an oral interview. The results of the research reinforce our hypothesis that the fluency and flexibility of the students in their solutions is enhanced when the shape is given to the problem. At the same time, research supports the view that originality does not seem to be influenced by whether or not the shape is given, as it is more inherent in and more closely related to creativity. The similarity analysis in the number of student's solutions resulted in three groups: (a) a zero - fluency ability group; (b) a low – fluency and flexibility ability group; and (c) a group of high fluency and flexibility, with the first two groups gathering the largest number of students, a situation which, from the qualitative data, seems to be varying. Finally, it seems that the connection of the four types of geometric figure apprehension (perceptual, sequential, discursive, and operative) is a prerequisite for high levels of creativity in geometry.

Key words: Mathematical creativity, multiple solution tasks in geometry, geometrical figure apprehension, spatial ability.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή ……1

2. Θεωρητικό πλαίσιο ……..4

2.1 Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος ……4

2.2 Χωρική Ικανότητα ……..…….…..7
2.2.1 Χωρική ικανότητα και κατανόηση γεωμετρικού σχήματος ……9

2.3 Δημιουργικότητα ……... 11
2.3.1 Η δημιουργικότητα τον 21ο αιώνα …… 11
2.3.2 Πτυχές Δημιουργικότητας ……12
2.3.3 Μαθηματική Δημιουργικότητα ……. 13
2.3.4 Μαθηματική δημιουργικότητα και προβλήματα πολλαπλών λύσεων …… 16
2.3.4α Προβλήματα πολλαπλών λύσεων και χώροι λύσεων ……...18
2.3.4β Σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας ……..19

2.4 Χωρική Ικανότητα και προβλήματα πολλαπλών λύσεων ……..25

3. Η έρευνα ……... 31
3.1 Δείγμα της έρευνας …….. 31
3.2 Μεθοδολογία έρευνας και συλλογή δεδομένων …….. 32
3.3 Ανάλυση αποτελεσμάτων …… 33

4. Αποτελέσματα ……...…35
4.1 Αποτελέσματα περιγραφικής στατιστικής ……35
4.1.1 Ευχέρεια λύσεων…… 36
4.1.2 Ευελιξία λύσεων ……..….. 40
4.1.3 Σκορ δημιουργικότητας ενσωματωμένο σε κάθε πρόβλημα ……. 58
4.2 Αποτελέσματα διαγραμμάτων ομοιότητας - συνεπαγωγικών διαγραμμάτων …. 60
4.3 Αποτελέσματα επαγωγικής στατιστικής …….. 65
4.4 Ποιοτικά Αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις ……... 68

5. Συμπεράσματα …….. 86

6. Βιβλιογραφία …… 88

7. Παράρτημα ……... 94

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γεωμετρία είναι ένας από τους πιο μελετημένους χώρους των μαθηματικών τόσο από την πλευρά της μαθηματικής επιστήμης όσο και από την πλευρά της γνωστικής ψυχολογίας και της διδακτικής των μαθηματικών. Η σπουδαιότητα της γεωμετρίας τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών τονίζεται έντονα στα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών (NCTM, 2000). Στη Γεωμετρία εμπλέκονται τρία συστήματα αναπαράστασης, αυτό της φυσικής γλώσσας, των συμβόλων και το σχηματικό (Mesquita, 1996). Κατά την μάθηση της γεωμετρίας συντελείται μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στην γεωμετρική θεωρία και στις γραφικές χωρικές ολότητες, δηλαδή έχουμε μια συνεχή αλληλεπίδραση θεωρίας και αναπαραστάσεων. Η θεωρία στηρίζει τη γνώση και το θεωρητικό έλεγχο, ενώ τα σχήματα ενισχύουν την οπτική αντίληψη με την πιθανή βοήθεια γεωμετρικών οργάνων ή άλλων μέσων. Για τους λόγους αυτούς η μελέτη κατανόησης της μάθησης και διδασκαλίας της γεωμετρίας δεν μπορεί παρά να είναι πολυδιάστατη.

Τέσσερις "γνωστικοί πόλοι" είναι σημαντικοί στην μάθηση της γεωμετρίας και θα προσδιοριστούν λιγότερο ή περισσότερο στο παρών κείμενο:

1. Η κατανόηση γεωμετρικού σχήματος.

2. Η χωρική ικανότητα.

3. Η μαθηματική δημιουργικότητα, και ειδικότερα:

4. Η μέθοδος των πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία.

Κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, καθώς παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995). Η γεωμετρική διαίσθηση ενισχύεται από τα σχήματα κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου (Panaoura, Gagatsis, & Lemonidis, 2007). Οι Fischbein και Nachlieli (1998), αναφέρουν ότι όλα τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοερές κατασκευές, οι οποίες κατέχουν ταυτοχρόνως εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Σύμφωνα με αυτούς, όταν οι έννοιες και τα σχήματα εναρμονίζονται τέλεια σε εννοιολογικό σχήμα, δηλαδή το νόημα και οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί υπαγορεύονται ολοκληρωτικά από τυπικούς περιορισμούς (αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα), τότε φτάνουμε στο ψηλότερο σημείο του γεωμετρικού συλλογισμού.

Η χωρική ικανότητα είναι ένας σύνθετος ερευνητικός τομέας με διάφορες ερμηνείες και αποτελεί ένα σημαντικό γνωστικό παράγοντα στην εκμάθηση της γεωμετρίας (Tso & Liang, 2002). Ο Battista (1990) διαπίστωσε ότι η οπτικοποίηση του χώρου και ο λογικός συλλογισμός σχετίζονταν σημαντικά κατά την επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία. Οι Kell, Lubinski, Benbow και Steiger (2013) υποδηλώνουν ότι η χωρική ικανότητα παίζει ένα μοναδικό ρόλο στην ανάπτυξη νέων γνώσεων. Όπως επισημαίνουν χωρίς χωρική ικανότητα, η ψυχολογική αρχιτεκτονική που υποστηρίζει τη δημιουργική σκέψη και την καινοτόμο

παραγωγή είναι ελλιπής. Γι΄ αυτό το National Council of Mathematics (2000) έχει θέσει ως κεντρικό στόχο στα μαθηματικά του σχολείου, την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας.

Η δημιουργικότητα είναι η ικανότητα παραγωγής εργασίας που είναι τόσο καινοφανής (δηλαδή πρωτότυπη, απροσδόκητη) όσο και κατάλληλη (δηλαδή χρήσιμη) (Stenberg, 2000). Η δημιουργικότητα είναι ένα θέμα ευρείας εμβέλειας που είναι σημαντικό τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο για ένα ευρύ φάσμα τομέων. Στο ατομικό επίπεδο, η δημιουργικότητα είναι σημαντική, για παράδειγμα, όταν κάποιος επιλύει προβλήματα στην εργασία και στην καθημερινή ζωή. Σε κοινωνικό επίπεδο, η δημιουργικότητα μπορεί να οδηγήσει σε νέα επιστημονικά ευρήματα, νέα κινήματα στην τέχνη, νέες έρευνες και νέα κοινωνικά προγράμματα. Η σημασία της δημιουργικότητας στην οικονομία είναι σαφής επειδή νέα προϊόντα ή υπηρεσίες δημιουργούν νέες θέσεις εργασίας. Επιπλέον, τα άτομα, οι οργανώσεις και οι κοινωνίες πρέπει να προσαρμόσουν τους υπάρχοντες πόρους στις μεταβαλλόμενες απαιτήσεις της εποχής μας, για να καταφέρουν να παραμείνουν ανταγωνιστικές (Stenberg, 2000).

Η μαθηματική δημιουργικότητα είναι ένας συγκεκριμένος τύπος δημιουργίας, η σημασία του οποίου είναι προφανής. Από τη μία πλευρά, η πρόοδος σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών μέσα από τις ανακαλύψεις των ερευνητών των μαθηματικών, αντικατοπτρίζει την ανθρώπινη διάνοια. Από την άλλη πλευρά, τα μαθηματικά είναι ένας από τους κεντρικούς επιστημονικούς τομείς που επιτρέπουν τη διατήρηση της κοινωνικής τεχνολογικής και επιστημονικής προόδου σε διάφορους τομείς, προσφέροντας στους επιστήμονες και στους ειδικούς υψηλής τεχνολογίας μια ισχυρή δύναμη και μοντέλα για την ανάλυση καταστάσεων, προγνώσεων και διαδικασιών. Τα σχολικά μαθηματικά πρέπει να παρέχουν σε κάθε μαθητή ευκαιρίες να αποκτήσει μια γεύση από τη μαθηματική δημιουργικότητα και να συνειδητοποιήσει το δημιουργικό του δυναμικό στα μαθηματικά (Leikin, 2013). Η εκπλήρωση του στόχου αυτού συνδέεται άμεσα με την κατανόηση των παραγόντων που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα και τη διασαφήνιση του ρόλου τους.

Πολλοί ερευνητές έχουν συνδέσει την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας με την επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους (Multiple solutios tasks) (όπως, Ervynck, 1991, Kwon et. All, 2006, Leikin, 2009). Η επίλυση μιας άσκησης με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους, σύμφωνα με τους Leikin και Lev (2007), παρέχει ένα καλό πλαίσιο για την μέτρηση και ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, αλλά και της δημιουργικότητας στην γεωμετρία ειδικότερα (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων προσφέρουν στους μαθητές πολλαπλές μαθηματικές εμπειρίες καθώς τους κινητοποιούν να σκεφτούν πέρα από τα συνηθισμένα όρια που θέτει ένα πρόβλημα κατά το οποίο ψάχνουν για μοναδική λύση. Τέλος, η χρήση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων αυξάνει την ποιότητα του μαθήματος, καθώς βοηθούν στην διερεύνηση, στην δημιουργία συλλογισμών και αποδείξεων, οδηγούν στην βαθιά κατανόηση αναγκάζοντας τον μαθητή να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ των γνώσεών του, προσφέροντας του πνευματική ευελιξία και δημιουργικότητα.

Σε προηγούμενη έρευνα (Γαγάτσης, Γρίδος & Σαμαρτζής, 2017), την οποία παρουσιάζουμε στο παρών κείμενο και στάθηκε η αφορμή για την παρούσα έρευνά μας, εξετάστηκαν οι

χωρικές ικανότητες και η μαθηματική δημιουργικότητα στη γεωμετρία μέσω προβλήματος πολλαπλών λύσεων σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου. Παρουσιάστηκαν σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών χωρικής ικανότητας και ικανότητας παραγωγής πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία. Στην παρούσα έρευνα εξετάζεται η μαθηματική δημιουργικότητα (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία) που επιδεικνύουν οι μαθητές Β΄ λυκείου κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, καθώς και η επίδραση κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία. Στις μέχρι τώρα έρευνες στο πεδίο της γεωμετρίας για την μέτρηση των μεταβλητών της δημιουργικότητας μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων οι ερευνητές (π.χ Leikin, 2012; Lev & Leikin, 2013; Einav Aizikovitsh-Udi, 2014), στις ασκήσεις που έδιναν το σχήμα δινόταν στην εκφώνηση, κάτι το οποίο εικάζουμε ότι επηρεάζει την παραγωγή πολλαπλών λύσεων. Για τον λόγο αυτό προτείνονται στους μαθητές για επίλυση με πολλούς τρόπους, δύο προβλήματα που δίνονται με σχήμα και δύο χωρίς σχήμα. Τέλος, η έρευνα στοχεύει στην διερεύνηση της σχέσης κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος όπως προτείνεται από τον Duval (1995, 1999) και μαθηματικής δημιουργικότητας διαμέσου προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ένα γεωμετρικό σχήμα απασχόλησε πολλούς ερευνητές στο χώρο της γνωστικής ψυχολογίας αλλά και στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών. Ο Duval (1995), αναφέρεται στην χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός προβλήματος στην γεωμετρία καθώς παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση. Έρευνες του ίδιου όμως έχουν δείξει ότι οι μαθητές πολλές φορές παρουσιάζονται να μη βοηθιούνται από το σχήμα, ώστε να καταλήξουν προς τη λύση του προβλήματος.

Ο Duval (2004), επισημαίνει ότι υπάρχουν δύο τρόποι προσέγγισης ενός γεωμετρικού αντικειμένου, "δια του σχήματος" όπου η γνωστική προσέγγιση επικεντρώνεται στην εξεικόνιση (visualization), δηλαδή πως βλέπει κανείς τις σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα ώστε να διευκολύνεται η επεξεργασία του γεωμετρικού προβλήματος και "δια του λόγου", όπου επικεντρώνεται στη γεωμετρική έννοια με βάση ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα. Ο ίδιος (2011), αναφέρεται στην ύπαρξη δύο επιπέδων αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων.

1. Αναγνώριση του σχήματος: ο φυσικός αντιληπτός τρόπος για αντικείμενα ή χωρικές οντότητες (εικόνες, διαγράμματα κτλ.).

2. Αναγνώριση του αντικειμένου: σε σχέση με το μαθηματικό τρόπο αιτιολόγησης, ορισμού, επίλυσης προβλήματος και απόδειξης.

Στη γεωμετρία υπάρχει ένα κενό ανάμεσα στα δύο επίπεδα αναγνώρισης. Ως εκ τούτου συχνά συμβαίνει μια ισχυρή ασυμφωνία ανάμεσα σε αυτό που βλέπουμε και αυτό που ονομάζεται ή δηλώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος (Duval, 2014). Δημιουργείται ένα μεγάλο χάσμα σε αυτήν την περίπτωση, προκαλώντας επαναλαμβανόμενες και πολύ συχνά ανυπέρβλητες δυσκολίες για τους περισσότερους μαθητές. Κοντά σε αυτή την άποψη, ο Mesquita (1998), διακρίνει τα γεωμετρικά σχήματα ως προς τη φύση τους, με βάση την δυνατότητα συναγωγής γεωμετρικών σχέσεων από αυτά. Διακρίνει:

1. Το σχήμα ως αντικείμενο: είναι δυνατή η εξαγωγή γεωμετρικών σχέσεων από την κατασκευή ενός σχήματος, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις αποδεικτικές διαδικασίες. Τότε η οπτική αντίληψη του σχήματος είναι σύμφωνη με τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος.

2. Το σχήμα ως εικόνα: Δεν είναι δυνατή η εξαγωγή σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος. Το σχήμα "παραπλανεί" και η οπτική του σύλληψη έρχεται σε σύγκρουση με την εκφώνηση του προβλήματος.

Σύμφωνα με τον Duval (2004), διακρίνονται δύο τύποι εξεικόνισης: εικονική και μη εικονική εξεικόνιση. Στην εικονική εξεικόνιση γίνεται αναγνώριση του σχήματος με βάση την ομοιότητά του με το τυπικό μοντέλο. Βλέπουν το σχήμα ως μορφή, ανεξάρτητα από τις πράξεις σ' αυτό. Αντίθετα, στη μη εικονική εξεικόνιση η αναγνώριση του σχήματος στηρίζεται στις νοερές, εσωτερικές πράξεις οι οποίες θα βοηθήσουν στον εντοπισμό των

ιδιοτήτων για προσδιορισμό του σχήματος. Αυτές οι πράξεις πραγματοποιούνται είτε μέσω της κατασκευής, είτε μέσω του μετασχηματισμού ενός σχήματος.

Μέσα από την γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας που επιχειρείται από τον Duval (Duval, 1995), παρουσιάζεται ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών εικόνων, με βάση το οποίο εντοπίζονται τέσσερις τύποι γνωστικής κατανόησης: αντιληπτική κατανόηση, ακολουθιακή κατανόηση, λεκτική κατανόηση και λειτουργική κατανόηση. Το κάθε είδος κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος. Τα είδη κατανόησης που προτείνονται είναι τα ακόλουθα:

1. Αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension): σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του.

2. Ακολουθιακή ή Σειριακή κατανόηση (sequential apprehension): απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες.

3. Λεκτική κατανόηση (discursive apprehension): συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Σε κάθε γεωμετρική αναπαράσταση η αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων πρέπει να παραμένει κάτω από τον έλεγχο των λεκτικών δηλώσεων (ονομασίες, ορισμοί).

4. Λειτουργική κατανόηση (operative apprehension): Μας εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος. Εξαρτάται από τους διάφορους τύπους τροποποίησης ενός γεωμετρικού σχήματος και καθένας από τους μετασχηματισμούς μπορεί να γίνει φυσικά ή νοερά.

Ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα πρέπει να υπάρχει σίγουρα η αντιληπτική σύλληψη και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη σύλληψης (Duval 1995, 1999). Αναφέρονται, επίσης από τον Duval (1999) τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος, τα οποία συνιστούν τη λειτουργική κατανόηση:

1. Μερολογικές (mereologic): αφορά στη διάσταση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στον συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων. Συνεπώς, προκύπτει μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο το σχήμα παρουσιάζεται με την πρώτη ματιά. Την πιο τυπική λειτουργία σε αυτό το είδος τροποποίησης αποτελεί η αναδιαμόρφωση του σχήματος (reconfiguration).

2. Οπτικές (optic): επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με αυτόν τον τρόπο, τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Επίπεδα σχήματα δύναται να θεωρηθούν ως τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο.

Επιπλέον, μια τυπική λειτουργία είναι να παρουσιάσεις δύο όμοια σχήματα επικαλυμμένα, στο βάθος, ώστε το μικρότερο σχήμα να φαίνεται σαν να ήταν το μεγαλύτερο από απόσταση.

3. Αλλαγή θέσης (place way): αλλάζει ο προσανατολισμός του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας. Αποτελεί τον ασθενέστερο μετασχηματισμό. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες οπτικός σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές.

Οι λειτουργίες αυτές συνιστούν συγκεκριμένες διαδικασίες που προσδίδουν στο σχήμα μια ευρετική λειτουργία. Σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, μία ή περισσότερες από αυτές τις λειτουργίες μπορούν να οδηγήσουν σε μετασχηματισμούς που ανοίγουν το δρόμο για τη λύση (Γαγάτσης, 2010).

Οι Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura (2010), ανακάλυψαν ένα ιεραρχικό μοντέλο τριών επιπέδων για το ρόλο της αντιληπτικής (perceptual), λεκτικής (discursive) και λειτουργικής (operative) κατανόησης στην εννοιολογική σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων. Στόχος της έρευνάς τους ήταν να διερευνηθεί ο ρόλος της αντιληπτικής, λεκτικής και λειτουργικής κατανόησης στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (EQS) επιβεβαίωσε την ύπαρξη έξι διαφορετικών παραγόντων πρώτης τάξης, τριών παραγόντων δεύτερης τάξης (αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική κατανόηση) και ενός παράγοντα τρίτης τάξης (κατανόηση γεωμετρικού σχήματος). Η δομή αυτή φάνηκε ότι μένει αμετάβλητη στο δημοτικό και στο γυμνάσιο. Γι αυτό οι ερευνητές προτείνουν ότι στη διδασκαλία και μάθηση πρέπει να δίνεται έμφαση σε όλες τις διαστάσεις της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο.

Σε μια δεύτερη σειρά ερευνών (Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Michael, 2009; Michael, Gagatsis, Deliyianni, Elia & Monoyiou, 2009), διερευνήθηκε ο ρόλος των διαφόρων ειδών τροποποίησης γεωμετρικού σχήματος στη λειτουργική κατανόηση των μαθητών ηλικίας 11-14 χρονών. Επιβεβαιώθηκε η ύπαρξη τριών παραγόντων πρώτης τάξης (μερολογικές, οπτικές και τροποποιήσεις αλλαγής θέσης) και ενός δεύτερης τάξης παράγοντα, ο οποίος αντιπροσώπευε τη λειτουργική κατανόηση του σχήματος. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο, οι ερευνητές αναφέρουν ότι ενισχύεται η αντίληψη του Duval (1995), όσον αφορά στις γνωστικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται και εμπλέκονται στη λειτουργική κατανόηση σχήματος. Επιπλέον, μέσα από αυτές τις έρευνες, προκύπτει ότι για την ανάπτυξη της λειτουργικής κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο, καθίσταται απαραίτητο να δοθεί έμφαση και στα τρία είδη τροποποίησης του σχήματος, τα οποία προσδίδουν μια χειριστική (heuristic) λειτουργία στο σχήμα.

2.2 Χωρική Ικανότητα

Η χωρική ικανότητα (spatial ability) είναι ένα θέμα το οποίο απασχόλησε τόσο ψυχολόγους όσο και ερευνητές της μαθηματικής παιδείας. Από την φύση της η χωρική ικανότητα αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα, με διαφορετικές ερμηνείες από κάθε ερευνητή (Kalogirou & Gagatsis, 2011). Οι χωρικές ικανότητες είναι γνωστικές λειτουργίες που επιτρέπουν στους ανθρώπους να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά χωρικές σχέσεις, οπτικά χωρικά έργα και προσανατολισμούς αντικειμένων στο χώρο (Reber, 1985)

Δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός λειτουργικός ορισμός για την χωρική αντίληψη. Σύμφωνα με τους Lean και Clements (1981), χωρική αντίληψη ορίζεται ως η ικανότητα δημιουργίας νοερών εικόνων και ο χειρισμός αυτών των εικόνων στο μυαλό. Για τον Lohman (1996), η χωρική ικανότητα μπορεί να ορισθεί ως η ικανότητα γένεσης, διατήρησης, ανάκλησης και μετασχηματισμού καλώς δομημένων νοητικών εικόνων. Ο Carroll (1993) αναφέρεται στη χωρική ικανότητα, ως την ικανότητα του ατόμου να αναζητά σε ένα οπτικό πεδίο, να κατανοεί τις μορφές, τα σχήματα και τις θέσεις των αντικειμένων, να κατασκευάζει τις νοητικές αναπαραστάσεις αυτών των μορφών, σχημάτων και θέσεων και να χειρίζεται αυτές τις αναπαραστάσεις νοερά. Πιο πρόσφατα ο όρος καλύπτει αφ’ ενός τις «δυναμικές χωρικές ικανότητες», αφ’- ετέρου την κίνηση του ατόμου σε ένα μεγάλης κλίμακας περιβάλλον, οπότε έχουμε «τις ευρείας κλίμακας περιβαλλοντικές χωρικές ικανότητες» (Hegarty & Waller, 2005).

Όσον αφορά την δομή της χωρικής αντίληψης, έχουν γίνει πολλές έρευνες και προσπάθειες για να την προσδιορίσουν. Παρόλα αυτά, επειδή οι απόψεις των ερευνητών διίστανται δεν υπάρχει μία αποδεχτή δομή της χωρικής ικανότητας. Από την μία μεριά υπάρχουν ερευνητές (Johnson & Meade, 1987; Burton & Fogarty, 2003), που αναφέρουν ότι η χωρική αντίληψη είναι μια μονοδιάστατη οντότητα και αμφισβητούν τους ερευνητές που διακρίνουν διαφορετικές ικανότητες αντίληψης του χώρου. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών (Lohman, 1988; Carrol, 1993) που υποστηρίζουν ότι η χωρική ικανότητα δεν μπορεί να έχει μια μοναδιαία δομή αλλά είναι πολυδιάστατη. Χαρακτηριστικά, ο Lohman (1993) αναφέρει ότι υπάρχουν διάφορες χωρικές ικανότητες, που η καθεμιά δίνει έμφαση σε διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας οπτικής δημιουργίας, αποθήκευσης, ανάκλησης και μετασχηματισμού των νοερών εικόνων (στο Kalogirou & Gagatsis, 2011).

Σύμφωνα με τον Carrol (1993), η χωρική αντίληψη αποτελείται από πέντε παράγοντες:

1. Ο πρώτος παράγοντας αφορά την οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου (spatial visualization), δηλαδή την ικανότητα αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο και στην ικανότητα νοερού χειρισμού αντικειμένων.

2. Ο δεύτερος παράγοντας αφορά τις σχέσεις εννοιών στο χώρο (spatial relations), δηλαδή την ικανότητα νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια.

3. Ο τρίτος παράγοντας σχετίζεται με την ταχύτητα διεκπεραίωσης (closure speed) και αφορά ατομικές διαφορές στη δυνατότητα πρόσβασης χωρικών αναπαραστάσεων στην

μακροπρόθεσμη μνήμη, όταν παρουσιάζονται ελλιπείς ή κρυμμένες νύξεις αυτών των αναπαραστάσεων.

4. Ο τέταρτος παράγοντας αφορά την ευελιξία διεκπεραίωσης (flexibility of closure) και προυποθέτει την εύρεση σχημάτων ή φιγούρων σε μια πιο σύνθετη εικόνα όταν τα άτομα είναι ενήμερα για την φιγούρα ή το σχήμα που ψάχνουν.

5. Ο πέμπτος και τελευταίος παράγοντας αφορά την αντιληπτική ταχύτητα (perceptual speed) και χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα στον εντοπισμό μιας δοσμένης φιγούρας σε μια ποικιλία διαφορετικών αντικειμένων.

Σε μια ευρείας κλίμακας έρευνα στην οποία συμμετείχαν 400.000 μαθητές από λύκεια, τους οποίους παρακολουθούσαν για 11 χρόνια, οι Wai, Lubinski και Benbow (2009), αναφέρουν ότι η χωρική ικανότητα παίζει κρίσιμο ρόλο στην ανάπτυξη της εξειδικευμένης επίδοσης στους τομείς του STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Τα ευρήματα της έρευνας οδηγούν σε τουλάχιστον τρεις γενικεύσεις: Πρώτον, η χωρική ικανότητα είναι ένα πολύ διακριτό ψυχολογικό χαρακτηριστικό μεταξύ των εφήβων που στη συνέχεια προχωρούν και πετυχαίνουν ανεπτυγμένες εκπαιδευτικές επιδόσεις και επαγγελματικές προόδους στους τομείς του STEM. Δεύτερον, η χωρική ικανότητα παίζει κρίσιμο ρόλο στη διαμόρφωση εκπαιδευτικών και επαγγελματικών αποτελεσμάτων στο γενικό πληθυσμό, καθώς και στα ταλαντούχα νοητικά άτομα και τρίτον ότι οι σύγχρονες έρευνες αναζήτησης ταλέντων χάνουν πολλούς νοητικά ταλαντούχους μαθητές περιορίζοντας τα κριτήρια επιλογής σε μετρήσεις της μαθηματικής και λεκτικής ικανότητας. Τα κριτήρια επιλογής δείχνουν ότι πρέπει να συμπεριλάβουν και την χωρική αντίληψη.

Η χωρική ικανότητα σχετιζόμενη με τα μαθηματικά, ορίζεται, από τον Smith (1998), ως «η ικανότητα του ατόμου να λύνει προβλήματα, που έχουν κυρίως οπτικό-χωρικό περιεχόμενο, χρησιμοποιώντας τουλάχιστον κάποιο εικονικό ή γεωμετρικό στυλ νοητικών αναπαραστάσεων και / ή δραστηριότητες που σχετίζονται λειτουργικά με το οπτικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο των έργων» (Olkun & Knaupp, 1999 στο Γαγάτσης, Καλογύρου & Πετρίδου, 2013). Ο Bishop (1983), επισήμανε ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την κατανόηση της γεωμετρίας, ενώ οι Kalogirou και Gagatsis (2012), έδειξαν ότι η χωρική ικανότητα σχετίζεται θετικά με την επιτυχία στη Γεωμετρία. Επίσης, έρευνα των Panaoura, Gagatsis και Lemonidis (2007), έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών σε τεστ χωρικής αντίληψης ήταν ο πιο σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στην γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνάς τους ότι ο χειρισμός των εικόνων και η νοερή περιστροφή αποτελούν παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου στην γεωμετρία. Στην έρευνα τους, οι Xistouri και Pitta-Pantazi (2006) εξέτασαν τις σχέσεις μεταξύ χωρικών ικανοτήτων (νοητή περιστροφή και οπτικοποίηση) και γεωμετρικής σκέψης που σχετίζεται με την συμμετρία. Τα αποτελέσματα της έρευνας τους υποδηλώνουν ότι η μαθηματική απόδοση των μαθητών σε αντανακλαστικά έργα συμμετρίας μπορεί να προβλεφθεί από τη γενική μαθηματική ικανότητα των μαθητών, τις ικανότητες οπτικοποίησης και τις σχέσεις εννοιών περιστροφής του χώρου, κατά φθίνουσα σειρά σπουδαιότητας. Τέλος, τα άτομα με υψηλού επιπέδου

χωρική αντίληψη είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English &Warren, 1995).

2.2.1 Χωρική ικανότητα και κατανόηση γεωμετρικού σχήματος

Η αντιληπτική σύλληψη, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, σύμφωνα με τον Duval (1995, 1999), αναφέρεται στην ικανότητα ονομασίας και αναγνώρισης των σχημάτων και υποσχημάτων. Η ικανότητα αυτή είναι όμοια με αυτή που απαιτείται στον παράγοντα ευελιξία διεκπεραίωσης (Carrol, 1993), της χωρικής αντίληψης, όπου τα υποκείμενα καλούνται να εντοπίσουν ένα σχήμα ή μια φιγούρα, σε μια πιο σύνθετη εικόνα.

Επίσης, όπως αναφέρουν οι Fischbein και Nachlieli (1998) (στο Καλογήρου, 2014), οι γεωμετρικές φιγούρες έχουν ταυτόχρονα σχηματικές και εννοιολογικές ιδιότητες (χωρικές αναπαραστάσεις). Δεν είναι απλές εικονικές αναπαραστάσεις, αλλά σημειωτικές. Η σημειωτική αναπαράσταση παρουσιάζει την οργάνωση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων που αναπαρίστανται. Στην περίπτωση των γεωμετρικών φιγούρων τα στοιχεία που αναπαρίστανται μπορεί να είναι δύο ή τριών διαστάσεων. Ωστόσο, στη μάθηση της γεωμετρίας δεν είναι αρκετή η αναγνώριση με την πρώτη ματιά. Εδώ εμφανίζεται και η διαφορά μεταξύ της οπτικής αντίληψης και της οπτικοποίησης. Αν και η οπτική αντίληψη είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για την αναγνώριση επίπεδων σχημάτων (αντιληπτική σύλληψη), προσφέρει άμεση πρόσβαση στο σχήμα αλλά όχι πλήρης κατανόηση του. Αντίθετα, η οπτικοποίηση βασίζεται στην παραγωγή της σημειωτικής αναπαράστασης της έννοιας και δίνει άμεσα μια ολοκληρωμένη εικόνα για την κατανόηση των σχέσεων (Duval, 1999).

Εκτός από την αντιληπτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, η οπτικοποίηση σχετίζεται άμεσα και με τη λειτουργική σύλληψη. Η οπτική επεξεργασία αποτελεί βασική συνιστώσα της οπτικοποίησης (Gutiérrez, 1996). Η Yakimanskaya (1991), αναφέρει ότι η οπτική επεξεργασία περιλαμβάνει τις πιο κάτω διαδικασίες νοερών εικόνων:

1. Αλλαγή στη θέση των αντικειμένων που αναπαρίστανται (π.χ περιστροφή αντικειμένων),

2. Αλλαγή στη δομή των αντικειμένων που αναπαρίστανται. Η εικόνα μετασχηματίζεται έτσι ώστε να έχει μόνο μια μικρή ομοιότητα με την αρχική μορφή του αντικειμένου.

3. Συνδυασμός των πιο πάνω αλλαγών.

Σύμφωνα με τον Duval (1999), ομοίως η λειτουργική σύλληψη, είναι μια μορφή οπτικής επεξεργασίας των γεωμετρικών σχημάτων. Ο ίδιος ερευνητής αναφέρεται στην οπτικοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων μέσα από τρία είδη τροποποιήσεων της λειτουργικής σύλληψης (μερολογική τροποποίηση, αλλαγής θέσης και οπτική τροποποίηση). Τα τρία είδη τροποποιήσεων της λειτουργικής σύλληψης επιτρέπουν την αλλαγή της αρχικής μορφής του σχήματος, διατηρώντας παράλληλα τις ιδιότητες του αρχικού σχήματος. Στη λειτουργική σύλληψη, η δοσμένη φιγούρα γίνεται σημείο εκκίνησης, προκειμένου να διερευνηθούν διαμορφώσεις της φιγούρας που μπορεί να προκύψουν μέσα από τις τροποποιήσεις. Ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να διαμορφωθεί με πολλούς τρόπους, ένας από τους οποίους μπορεί να μας οδηγήσει στην λύση ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, η

σχεδίαση μιας βοηθητικής γραμμής, είναι ένδειξη λειτουργικής κατανόησης και μπορεί να μας βοηθήσει σε κάποιο πρόβλημα. Όμως, απαιτείται προηγουμένως η οπτικοποίηση του αποτελέσματος της διαμόρφωσης.

Οι Kalogirou, Elia και Gagatsis (2013) διερεύνησαν τον τρόπο με τον οποίο η οπτικοποίηση και η νοερή περιστροφή μπορεί να σχετίζονται με τη γεωμετρική κατανόηση του σχήματος (αντιληπτική και λειτουργική) όπως προτείνεται από τον Duval (1999) . Χρησιμοποιώντας δεδομένα από μεγάλα δείγματα μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αυτές οι μελέτες έδειξαν σημαντικές σχέσεις μεταξύ των χωρικών ικανοτήτων και των επιδόσεων σε συμμετρία, ικανότητα προσανατολισμού στο χώρο καθώς και στη γεωμετρική κατανόηση του σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της πρώτης μελέτης έδειξαν ότι η ικανότητα προσανατολισμού στο χώρο σχετίζεται περισσότερο με την απόδοση στη συμμετρία από την περιστροφή του χώρου, καθιστώντας έτσι μια πρόβλεψη της απόδοσης των μαθητών σε ανακλαστική συμμετρία, ενώ τα δεδομένα από τη δεύτερη έρευνα έδειξαν ότι η χωρική ικανότητα συνδέεται με υψηλές επιδόσεις στην γεωμετρία και την επίλυση προβλημάτων. Εξετάζοντας τα δεδομένα από το δείγμα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι συγγραφείς πρότειναν ότι καθώς οι μαθητές μεγαλώνουν και λαμβάνουν πιο προχωρημένη διδασκαλία στη γεωμετρία, τείνουν να χρησιμοποιούν τα σχήματα όχι μόνο ως χωρικές αναπαραστάσεις αλλά και ως σημειωτικές αναπαραστάσεις γεωμετρικών αντικειμένων.

2.3 Δημιουργικότητα

2.3.1 Η δημιουργικότητα τον 21ο αιώνα.

Η δημιουργικότητα στις μέρες μας έχει αυξήσει ραγδαία τη σημασία της όσον αφορά την κοινωνία και συνάμα την εκπαίδευση. Η δημιουργικότητα είναι ένας όρος που επινοήθηκε πρόσφατα, εμφανίστηκε στην βιβλιογραφία το 1950, αλλά εξακολουθούσε να λείπει από πολλά δημοφιλή περιοδικά μέχρι το 1960 (Piirto, 2004). Ωστόσο, μέχρι το τέλος του 20ου αιώνα, μια δίτομη εγκυκλοπαίδεια δημιουργικότητας από τους Runco & Pritzker (1999), είχε δημοσιευθεί με συνεισφορά από δεκάδες επιστήμονες από διάφορους τομείς. Παρόλα αυτά, η σημασία της δημιουργικότητας είναι δύσκολο να εκτιμηθεί. Αυτό το αυξανόμενο ενδιαφέρον αντιστοιχεί σε μια αυξημένη οικονομική ανάγκη για δημιουργικότητα. Σε έναν κόσμο που αλλάζει σε μεγάλο βαθμό και στον οποίο οι τεχνολογικές και επιστημονικές εξελίξεις αλλάζουν τα κοινωνικά δίκτυα και τη ζωή των ατόμων, η δημιουργικότητα είναι απαραίτητη τόσο για την προσαρμογή σε αυτόν τον μεταβαλλόμενο κόσμο όσο και για τη συνέχιση αυτών των εξελίξεων.

Στο βιβλίο του, A Whole New Mind, ο Pink (2005) κάνει μια ισχυρή υπόθεση ότι η δημιουργικότητα παίζει έναν όλο και πιο σημαντικό ρόλο στην οικονομία. Υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα, που κάποτε θεωρήθηκε λιγότερο σημαντική από τις μαθηματικές-λογικές ικανότητες στην εκπαίδευση, είναι απαραίτητη στην εποχή του διαδικτύου και της εξωτερικής ανάθεσης εργασίας σε τρίτους. Σύμφωνα με την Pink, δεν αρκεί να είναι απλά κάποιος δικηγόρος ή μηχανικός. Πολλές συνήθεις νομικές λειτουργίες, όπως η σύνταξη εγγράφων διαζυγίου ή ο σχεδιασμός μιας βασικής κατασκευής, μπορούν να γίνουν μέσω διαδικτύου σε ένα κλάσμα του κόστους είτε να ανατεθούν σε χώρες με λιγότερο δαπανηρές αγορές εργασίας. Κάποιος πρέπει να είναι όχι μόνο κατάλληλος αλλά και δημιουργικός για να είναι απαραίτητος στην αγορά. Ο δικηγόρος πρέπει να είναι σε θέση να ανταποκρίνεται σε καταστάσεις που δεν είναι συνηθισμένες, ενώ ένας μηχανικός πρέπει να είναι σε θέση να δημιουργεί μοναδικές και καινοτόμες κατασκευές. Το εκπαιδευτικό μας σύστημα θα πρέπει να αντικατοπτρίζει αυτή την τάση, αλλά φαίνεται να εμποδίζει τη δημιουργικότητα.

Ο Robinson (2006) υπαινίσσεται ότι το χειρότερο πράγμα που κάνουν τα σχολεία για την δημιουργικότητα είναι ότι δημιουργούν μια αίσθηση φόβου στα παιδιά να μην κάνουν λάθος, με αποτέλεσμα αυτά να αποφεύγουν πρωτότυπες λύσεις με αντάλλαγμα σίγουρες και συμβατικές απαντήσεις. Το σημερινό κλίμα που επικεντρώνεται στην εκμάθηση ρόλων με ερωτήσεις κλειστού τύπου που επιδέχονται μια ενιαία απάντηση, αντί για πιο ανοιχτές ερωτήσεις ή επίλυση προβλημάτων με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, πιθανώς επιδεινώνει το φόβο των μαθητών να κάνουν λάθος. Ο Piirto (2004) χαρακτηριστικά αναφέρει “try to be the teacher that the creative child will remember as encouraging, not as discouraging” (p. 84), δηλαδή οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προσπαθούν να γίνουν οι δάσκαλοι που το δημιουργικό παιδί μελλοντικά θα θυμάται ενθαρρυντικά και όχι αποθαρρυντικά. Πράγματι, αυτό μπορεί να είναι προφανές, αλλά επιδεικνύει το σημαντικό ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν οι εκπαιδευτικοί στην ενθάρρυνση της ανάπτυξης δημιουργικών ταλέντων.

2.3.2 Πτυχές της δημιουργικότητας.

Δεν υπάρχει ενιαία, επίσημη άποψη ή ορισμός της δημιουργικότητας (Mann, 2006). Υπάρχει μια ποικιλία απόψεων για τη δημιουργικότητα, οι οποίες συνεχίζουν να αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Με βάση την βιβλιογραφία, ο Mann (2006) υποστηρίζει ότι υπάρχουν περισσότεροι από 100 σύγχρονοι ορισμοί της δημιουργικότητας. Ο Guilford (1967) διέκρινε τη συγκλίνουσα και την αποκλίνουσα σκέψη. Η συγκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει την επιδίωξη μιας ενιαίας και σωστής λύσης σε ένα πρόβλημα, ενώ η αποκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει τη δημιουργική παραγωγή πολλαπλών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα και περιγράφεται πιο συχνά ως ευέλικτη σκέψη. Ο Runco (1993) περιέγραψε τη δημιουργικότητα ως ένα πολύπλευρο κατασκεύασμα που περιελάμβανε "αποκλίνουσες και συγκλίνουσες σκέψεις, εύρεση προβλημάτων και επίλυση προβλημάτων, αυτο-έκφραση, εσωτερικά κίνητρα, στάση αμφισβήτησης και αυτοπεποίθηση". Ο Haylock (1987) συνόψισε πολλές από τις προσπάθειες καθορισμού της δημιουργικότητας. Μια άποψη "περιλαμβάνει την ικανότητα να βλέπει κανείς νέες σχέσεις μεταξύ τεχνικών και εφαρμογών και να κάνει συσχετίσεις μεταξύ πιθανώς άσχετων ιδεών". Οι Bolden, Harries and Newton, 2010, ορίζουν την δημιουργικότητα κυρίως ως μια ατομική δραστηριοποίηση που στοχεύει στο να παράξει κάτι νέο ως «πολυδιάστατη ικανότητα ή δεξιότητα του ανθρώπου να σκεφτεί κάτι καινούριο».

Ο Torrance (1994) ορίζει τη δημιουργικότητα ως πολυδιάστατη. Ευχέρεια (fluency), ευελιξία (flexibility), πρωτοτυπία (originality) και επεξήγηση (elaboration), είναι όλες πτυχές της δημιουργικότητας. Η ευχέρεια αναφέρεται στη ροή των ιδεών, τον αριθμό των ορθών λύσεων, και στη χρήση βασικών γνώσεων. Η ευελιξία συνδέεται με την εναλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς ποιοτικά τρόπους και από διαφορετικές προοπτικές. Η πρωτοτυπία, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με καινούριο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει αντισυμβατική και μη αναμενόμενη λύση. Η επεξήγηση, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει τη δοσμένη ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να προχωρά σε γενικεύσεις, να καταλήγει σε σύνθετες απαντήσεις.

Πολλοί είναι αυτοί που υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα συνδέεται με την ιδιοφυία, και είναι χαρακτηριστικό ατόμων που έχουν δημιουργήσει κάτι καινοτόμο (Lilly & Bramwell-Rejskind, 2004). Η Τριαρχική Θεωρία της Νοημοσύνης (Sterenberg, 1997; Sternberg & Lubart, 2000) ορίζει τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα κάποιου να παράγει απροσδόκητο, πρωτότυπο έργο χρήσιμο και προσαρμοστικό και υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα είναι ένα από τα κεντρικά συστατικά της έξυπνης ανθρώπινης συμπεριφοράς. Αυτή η συμπεριφορά προκύπτει από την ισορροπία μεταξύ αναλυτικών, δημιουργικών και πρακτικών ικανοτήτων που λειτουργούν συλλογικά για να επιτρέψουν στα άτομα να επιτύχουν μέσα σε συγκεκριμένα κοινωνικοπολιτιστικά πλαίσια (Sternberg, 1997).

Ωστόσο, άλλες έρευνες υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα σχετίζεται στενά με βαθιά ευέλικτη γνώση στα γνωστικά πεδία, με μεγάλο διάστημα εργασίας και όχι με μια στιγμιαία έμπνευση (Ericsson, 1999). Επίσης, επηρεάζεται από τη διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Silver, 1997). Συνεπώς, η διδασκαλία που καλλιεργεί και ενισχύει τη

δημιουργικότητα μπορεί να είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος μαθητών, και όχι μόνο για μερικές εξαιρέσεις. Τέλος, μέσα στη σχολική τάξη, η δημιουργικότητα θεωρείται ότι μπορεί να βελτιώσει τη συμπεριφορά, τις κοινωνικές δεξιότητες, την αυτοεκτίμηση, τα κίνητρα και τις επιδόσεις (Bolden et al., 2010).

2.3.3 Μαθηματική δημιουργικότητα.

Το National Council of Teachers of Mathematics (2000), τονίζει το πόσο σημαντική είναι η σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών, να σκέφτονται δημιουργικά, ευέλικτα και καινοτόμα όταν αντιμετωπίζουν κάποιο μαθηματικό πρόβλημα. Όπως συμβαίνει με την δημιουργικότητα γενικά, έτσι και για την μαθηματική δημιουργικότητα ειδικότερα υπάρχουν πολλοί ορισμοί που προέρχονται από τις διάφορες προσεγγίσεις της δημιουργικότητας (Haylock, 1987; Leikin, 2009). Ορισμένοι ορισμοί αφορούν τα στάδια των δημιουργικών διαδικασιών (Ervynck, 1991), ενώ άλλοι αφορούν τις ιδιότητες των δημιουργικών πράξεων και του προϊόντος που παράγεται (Silver, 1997). Ο Ervynck (1991) σύνδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την προηγμένη μαθηματική σκέψη και θεωρούσε ότι είναι η ικανότητα κάποιου να διατυπώνει μαθηματικούς στόχους και να βρίσκει ενυπάρχουσες σχέσεις μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον ίδιο, η μαθηματική κατανόηση, η διαίσθηση και η διορατικότητα αποτελούν τη βάση της μαθηματικής δημιουργίας, με αποτελέσματα τα δημιουργικά προϊόντα να βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και αποκαλύπτουν κρυφές σχέσεις. Η Leikin (2009) διακρίνει την γενική (general) και τη συγκεκριμένη (specific) μαθηματική δημιουργικότητα. Η γενική δημιουργικότητα συνδέεται με τη χρήση προτύπων επίλυσης προβλημάτων από ένα πεδίο των μαθηματικών σε άλλα πεδία των μαθηματικών. Η συγκεκριμένη δημιουργικότητα, συνδέεται με την δημιουργικότητα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο. Στην έρευνα αυτή θα εστιάσουμε στην συγκεκριμένη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών.

Ο Sriraman (2005) παρουσίασε ένα μοντέλο μαθηματικής δημιουργικότητας και χαρισματικότητας που περιλαμβάνει επτά επίπεδα μαθηματικών ικανοτήτων. Τα επίπεδα έξι και επτά είναι εκείνα των εξαιρετικά δημιουργικών μαθηματικών που εκτελούν έρευνα και προετοιμάζουν το έδαφος για άλλους μαθηματικούς. Ο ίδιος ερευνητής, κάνει μια διάκριση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας που αφορά το σχολικό περιβάλλον και της δημιουργικότητας των επαγγελματιών μαθηματικών. Ενώ ένας επαγγελματίας μαθηματικός διακατέχεται συχνά από αβεβαιότητα, τα έργα που δίνουμε στους μαθητές δεν εμπεριέχουν αυτό το στοιχείο. Κοντά σε αυτή τη άποψη, η Leikin (2009) και Leikin & Lev (2013) επισημαίνουν ότι η δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά διαφέρει από εκείνη των επαγγελματικών μαθηματικών. Η μαθηματική δημιουργικότητα στο περιβάλλον του σχολείου αξιολογείται με αναφορά στις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και στις επιδόσεις άλλων μαθητών που έχουν παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Η Leikin (2009), προτείνει ότι η προσωπική δημιουργικότητα ως δυναμικό χαρακτηριστικό (τόσο ως προσωπική όσο και ως κοινωνική) απαιτεί μια διάκριση μεταξύ σχετικής (relative) και απόλυτης (absolute) δημιουργικότητας. Η απόλυτη δημιουργικότητα συνδέεται με τις ανακαλύψεις που προωθούν τα μαθηματικά ως επιστήμη. Η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται σε ανακαλύψεις από ένα συγκεκριμένο άτομο μέσα σε μια συγκεκριμένη ομάδα

αναφοράς. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να προσφέρουν ιδέες που είναι καινοτόμες σε σχέση με τα μαθηματικά που έχουν μάθει και τα προβλήματα που έχουν λύσει.

Η μαθηματική δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά συνδέεται συνήθως με την επίλυση προβλημάτων (problem solving) ή την δημιουργία προβλημάτων (problem posing) (Silver, 1997). Ο ίδιος προτείνει, ότι η δημιουργικότητα μπορεί να αναπτυχθεί μέσω της επίλυσης προβλημάτων, με τα άτομα να αναπτύσσουν τις ικανότητες ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Δημιουργώντας πολλαπλές ιδέες, πολλαπλές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα (όταν υπάρχουν) και διερευνώντας καταστάσεις, τα άτομα αναπτύσσουν ευχέρεια. Η δημιουργία νέων λύσεων όταν τουλάχιστον μία έχει ήδη παραχθεί αναπτύσσει την ευελιξία, ενώ η εξερεύνηση πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα και η δημιουργία ενός νέου προωθεί την πρωτοτυπία. "Τόσο η διαδικασία όσο και το αποτέλεσμα της επίλυσης προβλημάτων μπορούν να αξιολογηθούν για να καθοριστεί ο βαθμός στον οποίο είναι εμφανής η δημιουργικότητα" (Silver, 1997: σελ. 76).

Ο Sriraman (2005), υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα στο σχολικό επίπεδο μπορεί να ορισθεί ως μια διαδικασία που οδηγεί σε πρωτότυπες (διορατικές) λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα ή / και προσεγγίσεις σε ένα παλιό πρόβλημα από μια νέα προοπτική. Οι Kwon, Park και Park (2006), πρότειναν δύο σημαντικούς ορισμούς της μαθηματικής δημιουργικότητας: πρώτον, τη δημιουργία νέων γνώσεων και δεύτερον την ικανότητα ευελιξίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Οι ερευνητές, ανέπτυξαν ένα πρόγραμμα για να βοηθήσουν στην καλλιέργεια αποκλίνουσας σκέψης στα μαθηματικά με βάση την επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου, τα οποία αποδείχθηκαν χρήσιμα για την ενίσχυση των δεξιοτήτων δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Ο Chiu (2009), συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα ρουτίνας (routine) και μη συμβατικά προβλήματα (non-routine). Σύμφωνα με τους Posamentier, Smith & Steperleman, (2010), η επίλυση προβλημάτων αφορά στην δημιουργία κάποιου καινούργιου αποτελέσματος και γι’ αυτό το λόγο τα προβλήματα που δίνουμε στους μαθητές πρέπει να εμπεριέχουν το στοιχείο της πρόκλησης και της ανακάλυψης.

Οι Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou (2012), διερεύνησαν εάν υπάρχει σχέση μεταξύ μαθηματικής ικανότητας και μαθηματικής δημιουργικότητας και εξέτασαν τη δομή αυτής της σχέσης. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τη χορήγηση δύο δοκιμίων, ενός δοκιμίου μαθηματικής ικανότητας και ενός μαθηματικού τεστ δημιουργικότητας, σε 359 μαθητές δημοτικού. Η μαθηματική ικανότητα θεωρήθηκε ως ένα πολυδιάστατο κατασκεύασμα, συμπεριλαμβανομένης της ποσοτικής ικανότητας (αίσθηση των αριθμών και προ-αλγεβρική λογική), της αιτιώδους ικανότητας (εξέταση των σχέσεων αιτίου-αποτελέσματος), της χωρικής ικανότητας (αναδίπλωση χαρτιού, δυνατοτήτων περιστροφής αντικειμένων στο χώρο), της ποιοτικής ικανότητας (των σχέσεων ομοιότητας και διαφοράς) καθώς και επαγωγικών και παραγωγικών ικανοτήτων. Η μαθηματική δημιουργικότητα ορίστηκε ως χαρακτηριστικό γνώρισμα του τομέα, επιτρέποντας στα άτομα να χαρακτηρίζονται από ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία στον τομέα των μαθηματικών. Μετά από ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι υπάρχει μια θετική συσχέτιση μεταξύ της

μαθηματικής δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας, με την μαθηματική δημιουργικότητα να αποτελεί υποσυστατικό της μαθηματικής ικανότητας.

Σε άλλη έρευνα τους οι Πίττα – Πανταζή & Χρίστου (2011), που σκοπό είχε να μελετήσουν τις γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται για την δημιουργική δραστηριότητα, εξέτασαν την σχέση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας 96 υποψήφιων εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης με τα γνωστικά τους στυλ (οπτικό-χωρικό, οπτικό-εικονικό και λεκτικό). Η ανάλυση των δεδομένων τους έδειξε ότι το οπτικό-χωρικό γνωστικό στυλ και το οπτικό-εικονικό γνωστικό στυλ αποτελούν στατιστικά σημαντικούς δείκτες πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικότητας, αλλά με διαφορετικούς και αντίθετους συντελεστές. Ακόμη, βρήκαν το οπτικό-χωρικό γνωστικό στυλ να είναι στατιστικά σημαντικός δείκτης πρόβλεψης και των τριών χαρακτηριστικών της δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία). Το οπτικό-εικονικό γνωστικός στυλ βρέθηκε να προβλέπει μόνο την πρωτοτυπία στα μαθηματικά έργα και το λεκτικό γνωστικό στυλ μόνο την ευελιξία.

Η Einav Aizikovitsh-Udi (2014), διερεύνησε την μαθηματική δημιουργικότητα μεταξύ 57 ταλαντούχων μαθητών στο Μαθηματικά, εξετάζοντας τους συλλογισμούς που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, το βαθμό της μαθηματικής δημιουργικότητας και αισθητικής που επιδεικνύουν κατά την επίλυση ενός μη-συνηθισμένου μαθηματικού προβλήματος καθώς και αν η μαθηματική σκέψη των μαθητών εξαρτάται αποκλειστικά από τις προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η πλειονότητα των μαθητών βασίστηκε σε τεχνικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος. Αν και οι ταλαντούχοι μαθητές αντιμετώπιζαν καλά τα προκλητικά προβλήματα που χρειάζονταν σκέψη, οι περισσότεροι λειτουργούσαν στο βασικό επίπεδο δημιουργικότητας.

Σε άλλη έρευνα, οι Klavir και Gorodetsky (2009), μέτρησαν και σύγκριναν τις μεταβλητές της δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία ανάμεσα σε χαρισματικούς και μη-χαρισματικούς μαθητές στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους έδειξαν την ύπαρξη σημαντικής διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών, όσον αφορά την ικανότητά τους να εμπλακούν στη δημιουργική διαδικασία, την ικανότητα τους να σκέφτονται εναλλακτικές μαθηματικές ιδέες σχετικές με το ερέθισμα, τον βαθμό επεξεργασίας των ιδεών καθώς και την πρωτοτυπία των λύσεων τους.

Οι Sophocleous, Kalogirou & Gagatsis (2009) διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ του τύπου των κριτηρίων που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αναγνωρίσουν τις γεωμετρικές μορφές και τις δημιουργικές τους ικανότητες να συμπληρώνουν σχήματα χρησιμοποιώντας διάφορα είδη γεωμετρικών σχημάτων. Ένα σύνολο μαθητών πέμπτης και έκτης τάξης (N = 201) ολοκλήρωσε ένα τεστ τριών μερών. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν διαφορετικό τύπο κριτηρίων για την αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων διέφεραν ως προς τις λύσεις των εργασιών δημιουργικότητας. Πιο συγκεκριμένα, η μέση απόδοση στις εργασίες δημιουργικότητας των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις βασισμένες στα κρίσιμα χαρακτηριστικά των σχημάτων ήταν πολύ καλύτερη από την απόδοση των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις με βάση τις οπτικές ιδιότητες των σχημάτων.

2.3.4 Μαθηματική δημιουργικότητα και προβλήματα πολλαπλών λύσεων.

Ένας από τους αναγνωρισμένους τρόπους ανάπτυξης των συνδέσεων των μαθηματικών γνώσεων είναι η επίλυση προβλημάτων με διάφορους τρόπους (Leikin & Levav-Waynberg 2009, NCTM, 2000, Polya, 1981, Silver, 1997). Επιπλέον, οι Stigler και Hiebert (1999), υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της επίγνωσης των μαθητών ότι τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να έχουν πολλαπλές λύσεις και η ενθάρρυνση των μαθητών να κάνουν πολλαπλές λύσεις σε ένα πρόβλημα αυξάνουν την ποιότητα του μαθήματος των μαθηματικών (στο Leikin, 2012). Κατά τον Polya (1981), όταν οι μαθητές επιλύουν τα προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους μοιράζοντας και συζητώντας τις ιδέες τους στην τάξη, προωθούν τη μαθηματική τους γνώση με μετατοπίσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, κάνουν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και συνδέουν διαφορετικές έννοιες και ιδέες.

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (όπως, Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009, Ervynck, 1991, Kwon, Park, & Park, 2006, Leikin, 2006) η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους αναπτύσσει τη διανοητική τους ευελιξία και δημιουργικότητα. Οι Levav-Waynberg και Leikin (2012, 2013), τονίζουν ότι τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων είναι αποτελεσματικά τόσο ως διδακτικό όσο και ως ερευνητικό εργαλείο και είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση της γνώσης και της δημιουργικότητας των μαθητών. Η χρήση των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων ως ερευνητικού εργαλείου επιτρέπει την εξερεύνηση της δυνητικής απόδοσης των μαθητών, η οποία συνήθως δεν μπορεί να παρατηρηθεί όταν οι μαθητές είναι ικανοποιημένοι με μια στρατηγική όταν φθάσουν σε μια λύση.

Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων μπορούν να εφαρμοστούν αποτελεσματικά κατά την μάθηση και διδασκαλία της γεωμετρίας. Η ουσία των μαθηματικών είναι να κάνουν αφηρημένα επιχειρήματα σχετικά με τα γενικά αντικείμενα και να επαληθεύσουν αυτά τα επιχειρήματα με αποδείξεις (Herbst & Brach, 2006). Το γεγονός ότι η απόδειξη είναι μια σημαντική συνιστώσα της γεωμετρίας κάνει την εργασία σε αυτό το πεδίο παρόμοια με αυτή των μαθηματικών. Η γεωμετρία συνδυάζει την αναγκαιότητα των οπτικών δεξιοτήτων (Clements & Battista , 1992) με την απαίτηση για αφηρημένους και λογικούς συλλογισμούς. Παρέχει ευκαιρίες για διερεύνηση και απόδειξη δραστηριοτήτων που μοιάζουν με το έργο των ερευνητικών μαθηματικών (Herbst, 2002). Ένα περιβάλλον το οποίο προάγει την έρευνα, βοηθάει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτονομία στην σκέψη τους καταλήγοντας σε γενικεύσεις (Christou, Mousoulidis, Pittalis & Pitta Pantazi, 2004).

Ένας ακόμα λόγος που το πλαίσιο της γεωμετρίας μας επιτρέπει την εφαρμογή προβλημάτων πολλαπλών λύσεων είναι ότι σχεδόν κάθε πρόβλημα γεωμετρίας που βρίσκεται σε ένα τυπικό σχολικό εγχειρίδιο μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα πολλαπλών λύσεων (Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2013, 2017). Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία επιτρέπουν την επίτευξη ποικίλων λύσεων χρησιμοποιώντας έννοιες και ιδιότητες μέσα από το σχολικό πρόγραμμα σπουδών γεωμετρίας χωρίς να απαιτούν εξωσχολικές γνώσεις από μαθητές και καθηγητές (Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2017). Επιπλέον, οι λύσεις των προβλημάτων γεωμετρίας δεν βασίζονται ποτέ πλήρως σε αλγοριθμικές διαδικασίες και περιλαμβάνουν ευρετικές διαδικασίες (Polya, 1981), ενώ τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων

στην γεωμετρία απαιτούν ακόμη πιο εκτεταμένη χρήση αυτών των ευρετικών. Για τον λόγο αυτό και η έρευνα μας περιλαμβάνει ασκήσεις που βρίσκονται στο σχολικό εγχειρίδιο ή είναι συναφείς αυτών και οι μαθητές τις έχουν λύσει με έναν τρόπο.

Υπάρχουν έρευνες σχετικά με τις γεωμετρικές γνώσεις και την ικανότητα απόδειξης με πολλούς τρόπους στα σχολικά μαθήματα γεωμετρίας (όπως, Guberman & Leikin, 2013, Gurevich & Meddnikov, 2006, Leikin, 2007, 2008, Leikin & Levav-Waynberg, 2008, Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2013, 2017).

Σε έρευνά τους, υπό την προσέγγιση της συγκεκριμένης μαθηματικής δημιουργικότητας, οι Levav-Waynberg και Leikin (2012), εξετάζουν τις μεταβολές στις γεωμετρικές γνώσεις και την μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών καθώς αυτοί εμπλέκονται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία. Στην έρευνα συμμετείχαν 303 μαθητές από 14 τάξεις. Από αυτούς οι 229 μαθητές παρακολουθούσαν μαθήματα γεωμετρίας επί έναν χρόνο κάνοντας χρήση έργων πολλαπλών λύσεων ενώ οι υπόλοιποι 74 δεν είχαν κάποια διαφοροποίηση στην διδασκαλία τους. Οι επιδόσεις τους μετρήθηκαν στην αρχή και στο τέλος του σχολικού έτους με 4 ασκήσεις πολλαπλών λύσεων (2 στην αρχή και δύο στο τέλος), στις οποίες το σχήμα δινόταν. Αυτή η μελέτη συγκρίνει την εξέλιξη της γνώσης και της δημιουργικότητας μεταξύ των πειραματικών ομάδων και των ομάδων ελέγχου όπως αντικατοπτρίζεται στις γραπτές εξετάσεις των μαθητών. Η γνώση της γεωμετρίας μετρήθηκε με την ορθότητα (correctness) και τη συνάφεια (connectedness) των λύσεων που παρουσιάστηκαν, ενώ τα κριτήρια δημιουργικότητας ήταν: ευχέρεια (fluency), ευελιξία (flexibility) και πρωτοτυπία (originality). Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η συνάφεια των μαθητών καθώς και η ευχέρεια και ευελιξία των λύσεων επωφελήθηκαν με την εφαρμογή των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Η μελέτη υποστηρίζει την ιδέα ότι η πρωτοτυπία είναι ένα πιο εσωτερικό χαρακτηριστικό από την ευχέρεια και την ευελιξία και ως εκ τούτου σχετίζεται περισσότερο με τη δημιουργικότητα και είναι λιγότερο δυναμική. Η cluster ανάλυση της πειραματικής ομάδας προσδιόρισε τρεις ομάδες που αντιστοιχούν σε τρία επίπεδα μαθησιακών επιδόσεων, σύμφωνα με τα πέντε μετρούμενα κριτήρια στα προ-τεστ και μετά-τεστ και έδειξαν ότι, με εξαίρεση την πρωτοτυπία, οι επιδόσεις και στις τρεις ομάδες βελτιώθηκαν γενικά με βάση τα διάφορα κριτήρια.

Σε άρθρο τους, υπό την προσέγγιση της γενικής μαθηματικής δημιουργικότητας, οι Stupel & Ben-Chaim (2013), με τον χαρακτηριστικό τίτλο “One problem, multiple solution: How multiple proofs can connect several arias of mathematics”,παρουσιάζουν ένα συγκεκριμένο και ενδιαφέρον πρόβλημα γεωμετρίας και 9 διαφορετικές αποδείξεις από διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών, όπως Ευκλείδεια γεωμετρία, τριγωνομετρία, αναλυτική γεωμετρία κ.α. Τονίζουν ότι η ενθάρρυνση των μαθητών των τελευταίων τάξεων του λυκείου, να επιλύσουν προβλήματα με διάφορους τρόπους, θα ενισχύσει την εκτίμησή τους για τα μαθηματικά και θα τους δώσει το έναυσμα να αντλήσουν ακόμα πιο κομψές λύσεις από μόνοι τους. Μετά τη διεξαγωγή μιας μελέτης περιπτώσεων που περιελάμβανε ένα μάθημα για το θέμα αυτό ως μέρος ενός προγράμματος εκπαίδευσης εκπαιδευτικών μαθηματικών πριν από τον διορισμό τους (συμπεριλαμβανομένης της ανατροφοδότησης των μαθητών μέσω ερωτηματολογίου και συνεντεύξεων), συνήχθη το συμπέρασμα ότι οι εκπαιδευτικοί

των μαθηματικών πρέπει να ενθαρρύνονται να εισαγάγουν πολλούς διαφορετικούς τρόπους αποδείξεων κατά την διδασκαλία τους. Η άποψη αυτή, συμφωνεί με τα ευρήματα από αρκετές έρευνες των Leikin & Levav-Waynberg (2008, 2009, 2013), που υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει συνεχώς να ενθαρρύνονται ώστε να προωθούν συστηματικά τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στο μάθημά τους, καθώς δημιουργώντας ευκαιρίες για τους μαθητές να λύσουν προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, οι εκπαιδευτικοί επέκτειναν και οι ίδιοι τους δικούς τους χώρους προσωπικών λύσεων. Συντελείτε έτσι μια συνεχείς αύξηση της ποιότητας του μαθήματος αλλά και μια προσωπική ανάπτυξη γνώσεων, μαθηματικών συνδέσεων και δημιουργικών ικανοτήτων τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών.

2.3.4$^{\alpha}$ Προβλήματα πολλαπλών λύσεων και χώροι λύσεων.

Ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων (multiple solution task), είναι ένα πρόβλημα το οποίο καλείται ο μαθητής να λύσει με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους (Leikin, 2009). Βασιζόμενοι στην Leikin (2006), η διαφορά των λύσεων μπορεί να αντικατοπτρίζεται με τη χρήση:

(α) Διαφορετικών απεικονίσεων μιας μαθηματικής έννοιας.

(β) Διαφορετικών ιδιοτήτων (ορισμών ή θεωρημάτων) των μαθηματικών εννοιών από ένα ιδιαίτερο μαθηματικό θέμα.

(γ) Διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

Η Leikin (2007), πρότεινε την έννοια των χώρων λύσεων που επιτρέπει στους ερευνητές να εξετάσουν τις διάφορες πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας, κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους. Χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) Οι εξειδικευμένοι χώροι λύσεων (Expert solution spaces), περιλαμβάνουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο λύσεων σε ένα πρόβλημα που είναι γνωστό σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως ένα σύνολο λύσεων που οι εμπειρογνώμονες μαθηματικοί μπορούν να προτείνουν στο πρόβλημα. Οι εξειδικευμένοι χώροι λύσεων χωρίζονται σε συμβατικούς χώρους λύσεων (conventional solution spaces), οι οποίοι στο περιβάλλον των σχολικών μαθηματικών περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες συνιστώνται από το αναλυτικό πρόγραμμα, βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια και διδάσκονται από τον εκπαιδευτικό, καθώς και τους μη συμβατικούς χώρους λύσεων (unconventional solution spaces), οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες δεν συνίστανται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.

(β) Οι ατομικοί χώροι λύσεων (Individual solution spaces), είναι συλλογές λύσεων που παράγονται από ένα άτομο σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι ατομικοί χώροι λύσεων χωρίζονται σε προσωπικούς χώρους λύσεων (available individual solution spaces), οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες μπορούν να παρουσιαστούν από ένα άτομο άμεσα, χωρίς κάποια βοήθεια, και τους ενδεχόμενους χώρους λύσεων (potential solution spaces), οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις που μπορούν να δοθούν από ένα άτομο με την βοήθεια κάποιου άλλου. Οι λύσεις που προέρχονται από τους ενδεχόμενους χώρους λύσεων, αντιστοιχούν

στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (Zone of proximal development, ZPD) του Vygotsky (1978), όπου ZPD είναι η διαφορά ανάμεσα σε αυτό που από μόνο του ένα παιδί μπορεί να πετύχει κι αυτό που θα κατακτήσει αν το βοηθήσουν.

(γ) Οι ομαδικοί χώροι λύσεων (Collective solution spaces), είναι ένας συνδυασμός των λύσεων που παράγονται από μια ομάδα ατόμων. Οι χώροι ομαδικών χώρων λύσεων, είναι συνήθως ευρύτεροι από τους ατομικούς χώρους λύσεων μέσα σε μια συγκεκριμένη κοινότητα και αποτελούν μία από τις κύριες πηγές για την ανάπτυξη ατομικών χώρων λύσης. Τόσο οι ατομικοί όσο και οι ομαδικοί χώροι λύσεων είναι υποσύνολα των εξειδικευμένων χώρων λύσεων.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διαστήματα λύσεων ως εργαλείο το οποίο επιτρέπει τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Συγκρίνοντας τα ατομικά και ομαδικά διαστήματα λύσεων των μαθητών από διαφορετικές ομάδες με ειδικά διαστήματα λύσεων, εκτιμούμε τη μαθηματική γνώση και δημιουργικότητα των μαθητών (Leikin, 2009).

2.3.4$^{\beta}$ Σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων.

Με βάση στις διάφορες θεωρίες που συνδέουν την μαθηματική δημιουργικότητα με την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων με πολλούς τρόπους, οι Leikin και Lev (2007) εξέτασαν τις διαφορές στη δημιουργικότητα των ταλαντούχων και μη ταλαντούχων μαθητών στα μαθηματικά. Ανέπτυξαν ένα εργαλείο που περιλάμβανε ένα σύνολο μαθηματικών προβλημάτων και ένα σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών σχετικά με την επίδοση σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Εξέτασαν την πρωτοτυπία (Originality) των λύσεων σύμφωνα με τη συμβατικότητά, τη διαθεσιμότητα και την επανάληψή τους. Η πρωτοτυπία των ατομικών λύσεων των μαθητών (που παράγονται χωρίς συμβουλές) βαθμολογήθηκε με 2, 4 και 6 σύμφωνα με το επίπεδο της συμβατικότητάς, ενώ οι λύσεις που παράχθηκαν με υποδείξεις έλαβαν βαθμολογίες 1, 2 και 3. Η ευελιξία (flexibility) αξιολογήθηκε με τον αριθμό των μη επαναλαμβανόμενων λύσεων στους ενδεχόμενους και στους επιμέρους ατομικούς χώρους λύσης. Η ευχέρεια (fluency) αξιολογήθηκε σε σχέση με το χρόνο που αφιέρωσαν οι μαθητές για να παράγουν τις λύσεις. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο απέδειξαν ότι η δημιουργικότητα των ταλαντούχων μαθητών ήταν υψηλότερη από εκείνη των μέσων μαθητών σε κάθε είδος εργασίας.

Οι Leikin και Lev (2007), έθεσαν στην μελέτη τους τις ακόλουθες υποθέσεις ως αναγκαίες για περαιτέρω εξέταση:

(α) Η δημιουργικότητα των μαθητών που σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, μπορεί να διαμορφωθεί ως συνδυασμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας.

(β) Η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας έργα πολλαπλών λύσεων εξαρτάται από αυτά τα έργα.

Στην συνέχεια ανακάλυψαν κάποια προβλήματα του μοντέλου που έπρεπε να επιλυθούν, το πώς ενσωματώνεται η δημιουργικότητα σε αυτά τα έργα (υπόθεση β), αλλά και κάποιους

περιορισμούς στο σύστημα βαθμολόγησης που εφάρμοσαν. Κατά την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας τα στοιχεία πρωτοτυπίας, ευχέρειας και ευελιξίας και το σχήμα βαθμολόγησης που παρουσιάστηκε παραπάνω, δεν ήταν δυνατή η αναπαραγωγή των λεπτομερειών αυτών των στοιχείων με βάση την τελική βαθμολογία που πέτυχαν οι μαθητές. Ο στόχος τους ήταν να αναπτυχθεί ένα σύστημα βαθμολόγησης που θα επέτρεπε την ανάλυση της απόδοσης των μαθητών ποιοτικά, βάση των βαθμολογιών τους. Συνειδητοποίησαν επιπλέον, ότι πρέπει να δημιουργήσουν ακριβέστερους ορισμούς όσο αφορά την μεταβλητή στις ευελιξίας.

Η Leikin (2009) παρουσίασε ένα εκλεπτυσμένο μοντέλο για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Αυτό το μοντέλο καθιστά δυνατή όχι μόνο την αξιολόγηση της προσωπικής μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών αλλά και την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στην αξιολόγηση της δημιουργικότητας. Το μοντέλο περιέχει λειτουργικούς ορισμούς και ένα αντίστοιχο σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας με βάση τρεις διαστάσεις (πρωτοτυπία, ευχέρεια και ευελιξία), όπως τις πρότεινε ο Torrance (1974). Για να αξιολογηθεί η πρωτοτυπία χρησιμοποιεί τα επίπεδα διορατικότητας του Ervynck (1991) σε συνδυασμό με τη συμβατικότητα των λύσεων.

Η δημιουργικότητα μπορεί να αξιολογηθεί για μεμονωμένα άτομα και ομάδες ατόμων για τα ίδια έργα. Το μοντέλο διακρίνει διάφορους τύπους χώρων, που βασίζονται στην κατάσταση επίλυσης προβλημάτων (προφορική συνέντευξη ή γραπτή εξέταση) και στο μέγεθος και τη φύση μιας ομάδας. Αυτές οι διαφορές επηρεάζουν την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας και της ευελιξίας σε λειτουργικό επίπεδο. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται αυτές οι διακρίσεις.

<table>
<tr><td colspan="2">Κατάσταση</td><td>Εστίαση στο χώρο λύσης</td><td colspan="2">Χώρος λύσης αναφοράς για την αξιολόγηση στις πρωτοτυπίας</td></tr>
<tr><td colspan="2">Το έργο (Ανεξάρτητα από το θέμα)</td><td colspan="3">Εξειδικευμένοι</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προφορικά (Συνέντευξη)</td><td>Ατομικά</td><td>Ατομικοί</td><td rowspan="2">Διαθέσιμοι & Ενδεχόμενοι</td><td rowspan="3">Εξειδικευμένοι</td></tr>
<tr><td>Σε ομάδες</td><td>Ομαδικοί</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Γραπτά (τεστ)</td><td>Μικρές Ομάδες(≤ 10)</td><td>Ατομικοί</td><td rowspan="2">Διαθέσιμοι</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ομάδες(>10)</td><td>(α) Ατομικοί
(β) Ομαδικοί</td><td>(α) Ομαδικοί
(β) Εξειδικευμένοι</td></tr>
</table>

Σχήμα 1: Χώροι λύσεων για την αξιολόγηση στις δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα που ενσωματώνεται σε ένα έργο, αξιολογείται με βάση τους εξειδικευμένους χώρους λύσεων του. Μια εξέταση προφορική (ατομική ή ομαδική συνέντευξη) επιτρέπει την αξιολόγηση τόσο των διαθέσιμων όσο και των ενδεχόμενων χώρων λύσεων, διότι σε αυτό το πλαίσιο βρίσκουμε τρόπους να παροτρύνουμε τους συμμετέχοντες με συμβουλές και ερωτήσεις, σε αντίθεση με μια γραπτή εξέταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για την αξιολόγηση των διαθέσιμων χώρων λύσης. Οι χώροι για μεμονωμένα άτομα και μικρές ομάδες απαιτούν αξιολόγηση της πρωτοτυπίας βάσει προκαταρκτικής αξιολόγησης των εξειδικευμένων χώρων λύσεων. Αντίθετα, σε σχετικά μεγάλες ομάδες (n> 10) συμμετεχόντων που έχουν ένα κοινό εκπαιδευτικό ιστορικό (ομάδες αναφοράς), η πρωτοτυπία εξετάζεται με βάση τη συχνότητα μιας λύσης στους χώρους ομαδικών λύσεων. Κατά τη σύγκριση διαφορετικών ομάδων ατόμων αξιολογούμε και συγκρίνουμε τους χώρους ομαδικών λύσεων των ομάδων.

Ευχέρεια (Fluency)

Η ευχέρεια (N) αναφέρεται στον ρυθμό με τον οποίο προχωρά η επίλυση, καθώς και στις εναλλαγές που γίνονται μεταξύ των διαφορετικών λύσεων:

- Η ευχέρεια εξετάζοντας τα έργα πολλαπλών λύσεων, αναφέρεται στον αριθμό των λύσεων που παράγει ο λύτης.
- Η ευχέρεια ενός μαθητή σε μια γραπτή δοκιμασία, ανιχνεύεται από τον αριθμό των λύσεων στο χώρο ατομικών λύσεων.
- Η ευχέρεια ενός μαθητή σε μια ατομική συνέντευξη είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον χώρο ατομικών λύσεων που παράγεται μέσα σε μια μονάδα χρόνου.

Ευελιξία (Flexibility)

Για την αξιολόγηση της ευελιξίας (Flx), δημιουργήθηκαν οι ομάδες λύσεων για προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Δύο λύσεις ανήκουν σε ξεχωριστές ομάδες λύσεων, αν χρησιμοποιούν στρατηγικές επίλυσης βασισμένες σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, σε διαφορετικές ιδιότητες (θεωρήματα, ορισμοί ή βοηθητικές κατασκευές), καθώς και σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

- Η ευελιξία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων αξιολογείται βάσει των ομάδων λύσεων στο χώρο των εξειδικευμένων λύσεων.
- Κατά την επίλυση ενός προβλήματος πολλαπλών λύσεων από τον μαθητή, η ευελιξία αξιολογείτε με βάση τις λύσεις του, μέσα στον ατομικό χώρο λύσεων. Όσον αφορά τους αντίστοιχους χώρους λύσης, οι Leikin και Lev αξιολογούν την ευελιξία ως εξής:

i. $Flx_1 = 10$, για την πρώτη κατάλληλη λύση.

Για κάθε επόμενη λύση:

ii. $Flx_i = 10$, αν ανήκει σε μια ομάδα διαφορετικών λύσεων από την (τις) προηγούμενη (ές) λύση (εις).
iii. $Flx_i = 1$, αν η λύση ανήκει σε μία από τις ομάδες που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως αλλά έχει μια σαφή μικρή διάκριση.
iv. $Flx_i = 0.1$, αν η λύση είναι σχεδόν πανομοιότυπη με προηγούμενες λύσεις.

- Η συνολική βαθμολογία ευελιξίας ενός μαθητή για ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα της ευελιξίας του στις λύσεις του ατομικού χώρου λύσης του μαθητή. Η συνολική ευελιξία που ενσωματώνεται σε ένα έργο είναι το άθροισμα των βαθμών ευελιξίας όλων των λύσεων στον εξειδικευμένο χώρο λύσεων.

- $Flx = \sum_{i=1}^{n} Flxi$, όπου n είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον αντίστοιχο χώρο.

Πρωτοτυπία (Originality)

Κατά την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας (Or), γίνεται διάκριση μεταξύ προφορικών ή γραπτών περιβαλλόντων και μεταξύ μικρών ή μεγάλων ομάδων, ως εξής:

- Για ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων ή έναν μεμονωμένο μαθητή σε μια μικρή ομάδα ($1 \leq g < 10$, g είναι ο αριθμός των μαθητών σε μια ομάδα) με παρόμοιο ιστορικό μάθησης, βαθμολογείτε η πρωτοτυπία μιας λύσης βασισμένη στη συμβατικότητά της και το επίπεδο γνώσης (βλ. Ervynck, 1991), και η συμβατότητα της λύσης σύμφωνα με το ιστορικό εκμάθησης των συμμετεχόντων (απόλυτη αξιολόγηση):

i. $Or_i = 10$, για μια λύση βασισμένη στην διορατικότητα (insight-based solution) ή για μια μη συμβατική λύση.
ii. $Or_i = 1$, για μια λύση που είναι εν μέρει αντισυμβατική (που αποκτάται σε διαφορετικό πλαίσιο).
iii. $Or_i = 0.1$, για μια λύση βασισμένη σε αλγόριθμο ή συμβατική λύση.

- Σε μια μεγάλη ομάδα μαθητών ($g \geq 10$) με κοινό εκπαιδευτικό υπόβαθρο, αξιολογείται η πρωτοτυπία με τη σύγκριση των επιμέρους χώρων λύσεων με το χώρο συλλογικής λύσης της ομάδας αναφοράς. Αν P είναι το ποσοστό των μαθητών της ομάδας που παράγει μια συγκεκριμένη λύση, τότε (σχετική αξιολόγηση):

i. $Or_i = 10$, όταν $P < 15\%$.
ii. $Or_i = 1$, όταν $15\% \leq P < 40\%$.
iii. $Or_i = 0.1$, όταν $P \geq 40\%$.

- Ο συνολικός βαθμός πρωτοτυπίας ενός μαθητή για ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα της πρωτοτυπίας του μαθητή στις λύσεις του ατομικού χώρου λύσεων του. Η συνολική πρωτοτυπία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα των βαθμολογιών πρωτοτυπίας όλων των λύσεων στο χώρο των εξειδικευμένων λύσεων.

- $Or = \sum_{i=1}^{n} Ori$, όπου n είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον αντίστοιχο χώρο.

Δημιουργικότητα (Creativity)

Η δημιουργικότητα (Cr) μιας συγκεκριμένης λύσης είναι το προϊόν της πρωτοτυπίας και της ευελιξίας της λύσης:

$$Cr_i = Flx_i * Or_i.$$

Το συνολικό σκορ δημιουργικότητας σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων είναι το άθροισμα των βαθμών δημιουργικότητας σε κάθε λύση στο χώρο του προβλήματος ενός ατόμου:

$$Cr = \sum_{i=1}^{n} Flx_i * Or_i .$$

Τέλος, ο ρυθμός παραγωγής της λύσης και η ορθότητα της αντικατοπτρίζονται στην βαθμολογία της ευχέρειας. Το μοντέλο δημιουργικότητας που προτείνεται εδώ περιλαμβάνει ότι η ευχέρεια είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι της δημιουργικότητας και υποδηλώνει ότι το τελικό σκορ δημιουργικότητας είναι το αποτέλεσμα της συνολικής βαθμολογίας δημιουργικότητας και της βαθμολογίας της ευχέρειας.

$$CR = n * (\sum_{i=1}^{n} Flx_i * Or_i)$$

Στο παρακάτω σχήμα 2, παρουσιάζεται σχηματικά το μοντέλο της Leikin (2009) για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας το οποίο παρουσιάστηκε αναλυτικά πιο πριν.

		Δημιουργικότητα			
		Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	
Σκορ ανά λύση	Για ένα πρόβλημα ανεξάρτητα από την απόδοση ή για έναν μεμονωμένο φοιτητή από μια μικρή ομάδα	1	$Flx_1 = 10$ για την πρώτη λύση $Flx_i = 10$ λύσεις από μια διαφορετική ομάδα στρατηγικών $Flx_i = 1$ παρόμοια στρατηγική, αλλά μια διαφορετική αναπαράσταση	$Or_i = 10$ για διορατικότητα / μη συμβατική λύση $Or_i = 1$ για μοντέλο / εν μέρει αντισυμβατική λύση $Or_i = 0.1$ για αλγόριθμο / συμβατική λύση	$Flx_i \times Or_i$
	Για την απόδοση των σπουδαστών σε μια μεγάλη ομάδα		$Flx_i = 0.1$ η ίδια στρατηγική, η ίδια αναπαράσταση	$Or_i = 10 \quad P < 15\%$ $Or_i = 1 \quad 15\% \le P < 40\%$ $Or_i = 0.1 \quad P \ge 40\%$	
Συνολικό σκορ		n	$Flx = \sum_{i=1}^{n} Flx_i$	$Or = \sum_{i=1}^{n} Or_i$	$\sum_{i=1}^{n} Flx_i \times Or_i$
Συνολικό σκορ δημιουργικότητας		$Cr = n\left(\sum_{i=1}^{n} Flx_i \times Or_i\right)$			

n είναι ο συνολικός αριθμός των κατάλληλων λύσεων

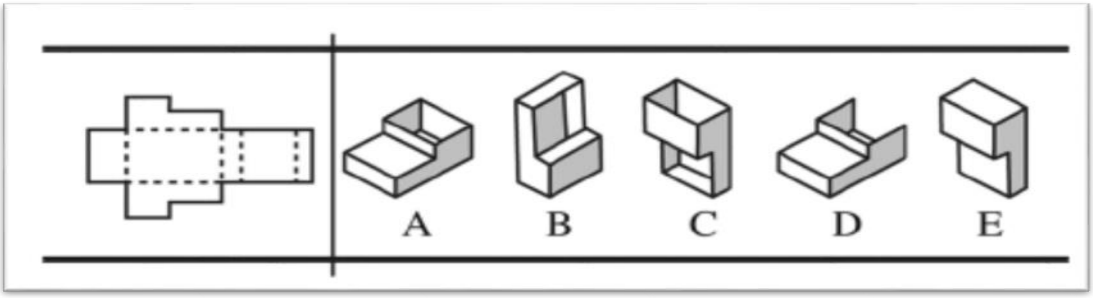
$P = (m_j / n) \cdot 100\%$ όπου m_j είναι ο αριθμός των μαθητών που χρησιμοποίησαν την στρατηγική j

Σχήμα 2. Αξιολόγηση της δημιουργικότητας σε διαφορετικά πλαίσια.

2.4 Χωρική Ικανότητα και Ικανότητα Πολλαπλών Λύσεων στην Γεωμετρία.

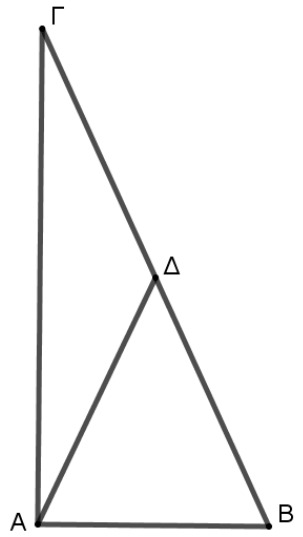
Για την εύρεση συνδέσεων μεταξύ χωρικής ικανότητας και ικανότητας παραγωγής πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία οι Γαγάτσης, Γρίδος και Σαμαρτζής (2017), πραγματοποιήσαν έρευνα σε 94 μαθητές Γ' Γυμνασίου. Τα μέσα συλλογής των δεδομένων ήταν ένα δοκίμιο χωρικής ικανότητας και ένα πρόβλημα γεωμετρίας, τα οποία χορηγήθηκαν στους ίδιους μαθητές σε δύο φάσεις.

Η πρώτη φάση αφορούσε στη χωρική ικανότητα και δόθηκαν 12 λεπτά για την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου που περιείχε εννέα έργα. Το ερωτηματολόγιο ήταν δομημένο σύμφωνα με το μοντέλο του Carroll (1993) και διακρίνεται από δύο επίπεδα παραγόντων: Αρχικά, χωρίζονται σε τρεις παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν τρεις επιμέρους ικανότητες: οπτικοποίηση (Vz), σχέσεις εννοιών στο χώρο (Sr) και ευελιξία διεκπεραίωσης (Cf). Στη συνέχεια, οι τρεις αυτοί παράγοντες χωρίζονται επιμέρους σε άλλους τρεις και οι εννέα αυτοί παράγοντες αποτελούν τις μεταβλητές του μοντέλου: για την οπτικοποίηση (VZ) διακρίνουμε [σύνθεση σχήματος (Fb), δίπλωση σχήματος (Pf), ανάπτυγμα σχήματος (Sd), για τις σχέσεις εννοιών στο χώρο (SP) διακρίνουμε [σύγκριση κύβων (Cc), περιστροφή καρτών (Cr), χέρια (Ha)] και για την ευελιξία διεκπεραίωσης (CF) διακρίνουμε [κρυμμένες φιγούρες (Hf), κρυμμένα μοτίβα (Hp), επικάλυψη σχήματος (Of)]. Οι σωστές και οι λανθασμένες απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1 ή 0 αντίστοιχα. Στην πιο κάτω εικόνα φαίνεται ένα παράδειγμα έργου από το δοκίμιο χωρικής ικανότητας.

Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται στα αριστερά ένα κομμάτι χαρτόνι το οποίο θα διπλωθεί κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών. Πιο από τα διπλανά στερεά θα σχηματισθεί;
Wai, Lubinski, & Benbow (2009) 

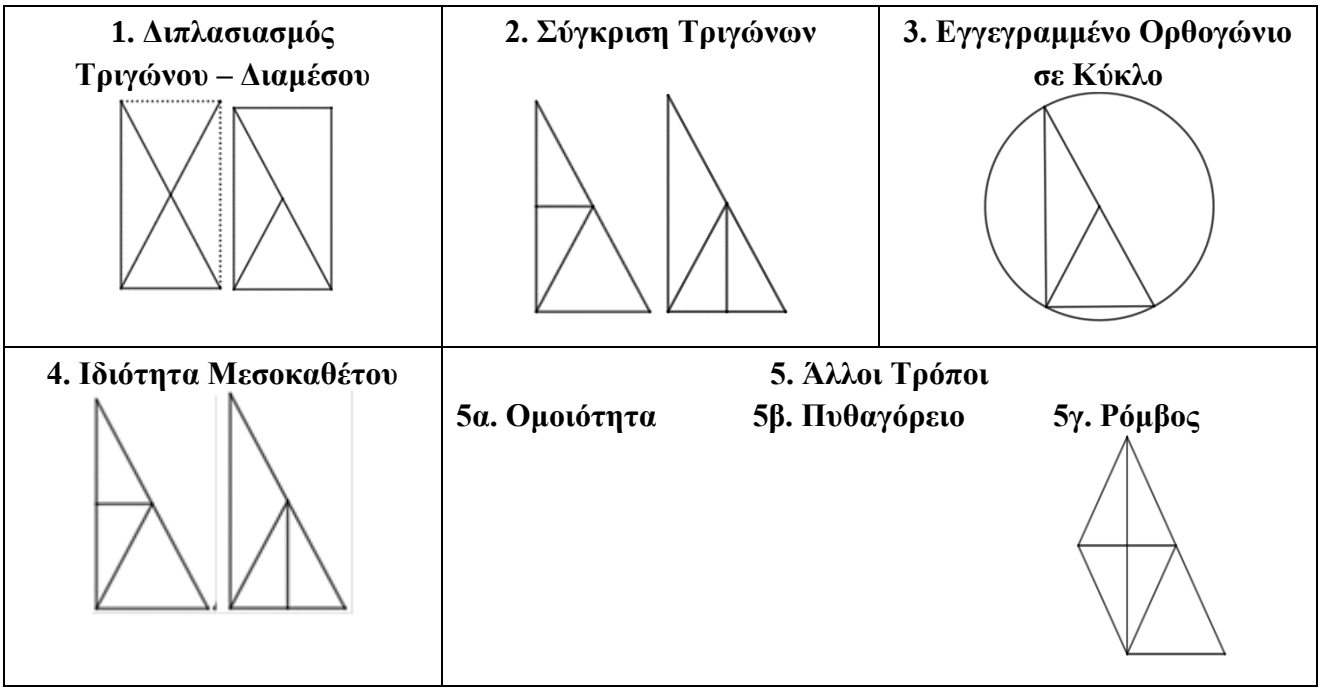
Εικόνα 1: Έργο χωρικής ικανότητας (ανάπτυγμα σχήματος).

Η δεύτερη φάση αφορούσε στη δημιουργικότητα των μαθητών σε σχέση με την επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος, το οποίο λυνόταν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους με τα εργαλεία που διέθεταν οι μαθητές και απαιτούσε υψηλό βαθμό συγκέντρωσης τους.

Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{O}$), να δείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΑΔ=ΒΓ/2.


Εικόνα 2. Το γεωμετρικό πρόβλημα.

Τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας, που μετρήθηκαν σύμφωνα με το μοντέλο του Torrance (1966), ήταν η Ευχέρεια (Flu) και η Ευελιξία (Fle). Η Ευχέρεια (Flu) βαθμολογήθηκε με βάση το πλήθος των σωστών λύσεων που έδωσε ο κάθε μαθητής, απάντηση η οποία έπαιρνε 0 όταν ο μαθητής δεν είχε καμία λύση (Geo0), 0,2-1 όταν ο μαθητής έλυνε την άσκηση με έναν τρόπο (Geo1) έως 5^{+} τρόπους (Geo5^{+}). Η κατασκευή των χώρων λύσεων (Leikin, 2006), χρησιμοποιήθηκε για να μετρηθεί η ευελιξία. Η Ευελιξία (Fle) βαθμολογήθηκε με βάση τις διαφορετικές ποιοτικά λύσεις που έδωσε ο κάθε μαθητής. Διακρίνουμε 5 κατηγορίες λύσεων και βαθμολογούμε αρχικά με 0/1 αν ο μαθητής έλυσε την άσκηση με τον τρόπο που περιλαμβάνει η κάθε κατηγορία και στην συνέχεια με βάση το πλήθος των διαφορετικών ποιοτικά τρόπων που έδωσε ο κάθε μαθητής, απάντηση που έπαιρνε 0 όταν ο μαθητής δεν είχε λύσει με κανέναν τρόπο την άσκηση, 0,2 όταν ο μαθητής είχε λύση την άσκηση με μία κατηγορία λύσεων έως 1 όταν ο μαθητής έλυνε την άσκηση και με τις 5 ποιοτικά διαφορετικές κατηγορίες λύσεων. Η πέμπτη κατηγορία λύσεων, όπως διακρίνεται και στην παρακάτω εικόνα, περιέχει τρεις διαφορετικές ποιοτικά λύσεις επειδή κανένας μαθητής δεν κατάφερε να λύσει ταυτόχρονα το πρόβλημα με δύο από αυτούς τους τρεις τρόπους.



Εικόνα 3. Ομαδικοί χώροι λύσεων.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της καταγραφής των απαντήσεων των παιδιών στα έργα που αφορούν στη χωρική ικανότητα ανά κατηγορία. Παρατηρούνται υψηλά ποσοστά στην κατηγορία «σχέσεις εννοιών στο χώρο (Sr)», μέτριας επιτυχίας ποσοστά στην «οπτικοποίηση (Vz)» και χαμηλά ποσοστά στην κατηγορία «ευελιξία διεκπεραίωσης (Cf)». Το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας (15%) εμφανίζεται στη έργο «κρυμμένα μοτίβα (Hp)», ενώ αντίστοιχα το μεγαλύτερο ποσοστό (93%) εμφανίζεται στη έργο «περιστροφή καρτών (Cr)».

Κατηγορία	Μεταβλητές	Ποσοστό (%)
Οπτικοποίηση	Σύνθεση σχήματος (Fb)	28%
(Vz)	Δίπλωση σχήματος (Pf)	70%
	Ανάπτυγμα σχήματος (Sd)	53%
Σχέσεις εννοιών στο χώρο	Σύγκριση κύβων (Cc)	80%
(Sr)	Περιστροφή καρτών (Cr)	93%
	Χέρια (Ha)	70%
Ευελιξία διεκπεραίωσης	Κρυμμένες Φιγούρες (Hf)	41%
(Cf)	Κρυμμένα Μοτίβα (Hp)	15%
	Επικάλυψη σχήματος (Of)	73%

Πίνακας 1. Ποσοστά επιτυχίας στα έργα χωρικής αντίληψης.

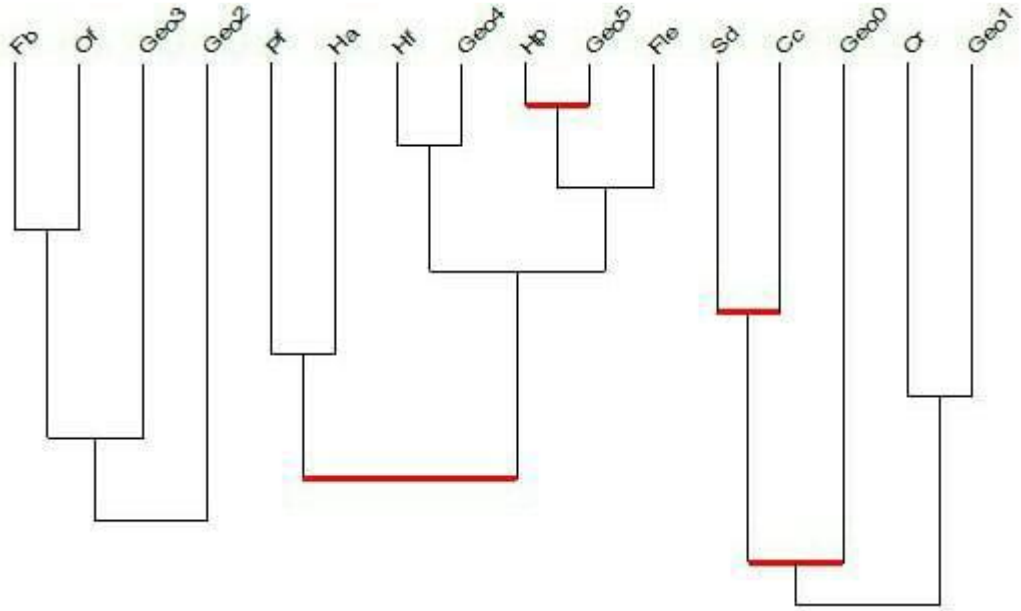
Αναφορικά με την χωρική ικανότητα, ενδείκνυνται σημαντικές αποκλίσεις στο ποσοστό επιτυχίας ανάλογα την μεταβλητή μέτρησης, γεγονός που αμφισβητεί τις αντιλήψεις των ερευνητών που ισχυρίζονται ότι η χωρική ικανότητα είναι μια μονοδιάστατη οντότητα (Johnson & Meade, 1987, Burton & Fogarty, 2003).

Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της καταγραφής των απαντήσεων των μαθητών που αφορούν την ευχέρεια και ευελιξία των λύσεων. Παρατηρούμε ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές (48%) έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με 2 ή 3 τρόπους, ενώ υψηλό είναι και το ποσοστό των μαθητών που έλυσαν με πάνω από 4 τρόπους το πρόβλημα (18%). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ευχέρεια (Flu) των μαθητών είναι σε σχετικά υψηλά επίπεδα. Παρατηρούμε επίσης, ότι η ευχέρεια (Fle) των μαθητών είναι σε αρκετά υψηλά επίπεδα, με τα αντίστοιχα ποσοστά ευχέρειας και ευελιξίας να είναι αρκετά κοντά, όπως αναμέναμε καθώς στις περισσότερες έρευνες οι δύο έννοιες εμφανίζονται σαν δίπολο (Leikin, 2009), με την ευελιξία των λύσεων των μαθητών να κυμαίνεται σε χαμηλότερα επίπεδα.

Ευχέρεια	**Ποσοστό (%)**	**Ευελιξία**	**Ποσοστό (%)**
Geo0	10%	Fle0(0)	10%
Geo1	24%	Fle1(0.2)	34%
Geo2	32%	Fle2(0.4)	32%
Geo3	16%	Fle3(0.6)	16%
Geo4	10%	Fle4(0.8)	5%
Geo5	8%	Fle5(1)	3%

Πίνακας 2. Ποσοστά ευχέρειας και ευελιξίας λύσεων.

Για τον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της δημιουργικότητας των μαθητών με την μαθηματική απόδειξη, στα έργα του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε η ανάλυση ομοιότητας (Lerman, 1981) με το λογισμικό C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive), από την οποία προέκυψε το διάγραμμα ομοιότητας 1.



Διάγραμμα ομοιότητας 1: Περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας, το πλήθος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές στο γεωμετρικό πρόβλημα και την ολική Ευελιξία.

Στο διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε τρεις ομάδες. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας (Fb, Of) και τα άτομα που έλυσαν την άσκηση γεωμετρίας με δυο και τρεις τρόπους (Geo2, Geo3), η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας (Pf, Ha, Hf, Hp), τα άτομα που έλυσαν την άσκηση γεωμετρίας με τέσσερις ή πέντε τρόπους (Geo4, Geo5) και την ευελιξία (Fle), ενώ η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας (Sd, Cc, Cr) και τα άτομα που δεν έλυσαν ή έλυσαν με έναν τρόπο την άσκηση (Geo0, Geo1).

Στην πρώτη ομάδα παρατηρούμε δύο υποομάδες. Η πρώτη περιλαμβάνει άτομα που έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με δύο τρόπους (Geo2) ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει άτομα που το έλυσαν με τρεις τρόπους (Geo3) και συνδέεται με δύο έργα χωρικής ικανότητας, αυτά της σύνθεσης σχήματος (Fb) και επικάλυψης σχήματος (Of).

Η δεύτερη ομάδα κατά την άποψη μας είναι η πιο σημαντική καθώς φαίνεται η σύνδεση της ευχέρειας με την ευελιξία και χωρίζεται σε 2 υποομάδες. Η μεγάλη υποομάδα χωρίζεται με την σειρά της σε υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα χωρικής ικανότητας (Pf, Ha), δηλαδή δίπλωση σχήματος και χέρια, ενώ στην δεύτερη υποομάδα παρεμβαίνουν οι μεταβλητές (Geo4, Geo5), δηλαδή τα άτομα που έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με τέσσερις ή πέντε τρόπους, τα έργα χωρικής ικανότητας (Hp, Hf), δηλαδή κρυμμένα μοτίβα και κρυμμένες φιγούρες και η Ευελιξία (Fle). Η δεύτερη αυτή υποομάδα είναι πολύ σημαντική γιατί συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές που πετυχαίνουν τέσσερις ή πέντε λύσεις έχουν και μεγάλη ευελιξία λύσεων καθώς και υψηλή αντιληπτική ικανότητα και πιο συγκεκριμένα, έχουν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα χωρικής ικανότητας κρυμμένες φιγούρες (Hf) και κρυμμένα μοτίβα (Hp).

Η πρακτική σημασία αυτού του ευρήματος είναι πολύ σημαντική, καθώς συμπεραίνουμε πως για να βελτιώσουμε την ικανότητα μαθηματικής απόδειξης των μαθητών χρειάζεται να έχουμε βελτίωση προς δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά την ευελιξία λύσεων, δηλαδή πρέπει να αυξηθεί η ποικιλία λύσεων και η μετάβαση από την μια λύση στην άλλη. Η δεύτερη κατεύθυνση αφορά την βελτίωση της αντιληπτικής ικανότητας των μαθητών σε σχέση με τα σχήματα, δηλαδή η αντιληπτική ικανότητα διάκρισης ενός γεωμετρικού σχήματος ως ολότητα δεν αρκεί σε καμία περίπτωση. Αντιθέτως, απαιτείται η διάκριση υποσχημάτων εντός ενός σχήματος, δεξιότητα που συνδέεται με τις δύο μεταβλητές: κρυμμένες φιγούρες (Hf) και κρυμμένα μοτίβα (Hp). Μια δεύτερη συσχέτιση αυτής της ισχυρής δεύτερης υποομάδας αφορά την πρώτη υποομάδα [δίπλωση σχήματος (Pf) και χέρια (Ha)] που είναι κλασσικά έργα χωρικής ικανότητας.

Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει (Geo1, Cr), δηλαδή τα άτομα που έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με έναν τρόπο και το έργο χωρικής ικανότητας περιστροφή καρτών. Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τα άτομα που δεν έλυσαν καθόλου το γεωμετρικό πρόβλημα (Geo0) και συνδέεται με τα έργα χωρικής ικανότητας (Sd, Cc), δηλαδή ανάπτυγμα σχήματος και σύγκριση κύβων. Το συμπέρασμα που παίρνουμε από την τρίτη υποομάδα είναι ότι η ικανότητα μαθηματικής απόδειξης απαιτεί δεξιότητες πολύ περισσότερο από απλή αίσθηση του χώρου.

Η ικανότητα λοιπόν, να αποδεικνύει κανείς με πολλούς τρόπους απαιτεί πιο σύνθετες δεξιότητες όπως, να μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν τα σχήματα όχι μόνο ως ολότητες, αλλά και ως αποτελούμενα από υποσχήματα (μερεολογική αντίληψη του σχήματος) (Duval, 1999). Κατά τον τρόπο αυτό εστιάζουν σε διαφορετικά σχήματα κάθε φορά, αναγνωρίζουν νέες ιδιότητες και οδηγούνται σε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης (Michael – Chrysanthou & Gagatsis, 2015). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια αποτελεσματική στρατηγική για τον εκπαιδευτικό, ώστε οι μαθητές όχι μόνο να κατανοήσουν, αλλά και να κατασκευάσουν μαθηματικές αποδείξεις, μπορεί να βασιστεί σε δραστηριότητες που στοχεύουν οι μαθητές να ξεπεράσουν την αντιληπτική αναγνώριση του σχήματος και να οδηγηθούν στην λειτουργική σύλληψη του σχήματος δια μέσου μερεολογικής τροποποίησης του.

Βεβαίως, εξακολουθεί να υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση των διδακτικών επιπτώσεων του θέματος. Συγκεκριμένα, θα ήταν ενδιαφέρον και χρήσιμο να εξεταστούν τα αποτελέσματα των παρεμβατικών προγραμμάτων που στοχεύουν στην ανάπτυξη ευελιξίας λύσεων και λειτουργικής κατανόησης του σχήματος σχετικά με τη γεωμετρική απόδειξη των μαθητών. Επιπλέον, η επικύρωση ενός θεωρητικού μοντέλου που εξετάζει τη δομή και τη σχέση των διαφόρων συνιστωσών χωρικής ικανότητας και δημιουργικότητας θα συνέβαλε επίσης σε αυτόν τον τομέα της έρευνας.

3. Η ΈΡΕΥΝΑ

Η επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους είναι κάτι πρωτόγνωρο για τους μαθητές στα Ελληνικά σχολεία, καθώς οι συνηθισμένες παραδοσιακές διδακτικές μέθοδοι αρκούνται στην επίλυση με έναν μοναδικό τρόπο. Επιπλέον, από τον Ελλαδικό χώρο απουσιάζουν σχετικές έρευνες που να αφορούν την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα με πολλαπλούς τρόπους στην γεωμετρία. Σε σχετικές έρευνες κυρίως στις χώρες των Η.Π.Α και στο Ισραήλ (πχ. Levav-Waynberg & Leikin, 2012), οι ερευνητές που συνδέουν την μαθηματική δημιουργικότητα με τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία, προτείνουν στους μαθητές για επίλυση προβλήματα στα οποία το σχήμα είναι δοθέν. Για τους παραπάνω λόγους σκοπό της παρούσας έρευνας αποτέλεσε η εξέταση της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία) που επιδεικνύουν οι μαθητές Β΄ λυκείου κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, καθώς και η επίδραση κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν είναι:

1. Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές Β΄ λυκείου σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων Γεωμετρίας;
2. Τι είδους δημιουργικότητα (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία) επιδεικνύουν σε προβλήματα που δίνεται ή δεν δίνεται το σχήμα;
3. Ποιες είναι οι διαφορετικές ομάδες μαθητών ως προς τον αριθμό των λύσεων σε προβλήματα γεωμετρίας;
4. Ποια είναι η επίδραση κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε προβλήματα γεωμετρία;

3.1 Δείγμα έρευνας

Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 149 μαθητές (77 αγόρια και 72 κορίτσια). Όλοι οι μαθητές προέρχονται από τον νομό Αττικής και φοιτούν στην Β΄ τάξη του γενικού λυκείου. Επιλέχθηκε η τάξη της Β΄ λυκείου καθώς οι μαθητές έχουν πολλά γνωστικά εργαλεία στην διάθεσή τους όσον αφορά την γεωμετρία και μπορούν να καταλήξουν σε πολλαπλές λύσεις βασιζόμενοι σε υποθέσεις και παραγωγικούς συλλογισμούς. Τα σχολεία επιλέχθηκαν τυχαία με βάση την δυνατότητα πρόσβασης του ερευνητή σε αυτά. Οι 147 μαθητές έλαβαν μέρος σε ατομική γραπτή δοκιμασία, ενώ δύο μαθητές συμμετείχαν σε ατομική συνέντευξη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

- 21 μαθητές Β΄ Λυκείου από το 1ο Πειραματικό Λύκειο Αθηνών (τμήμα Β1).
- 23 μαθητές Β΄ Λυκείου από το 2ο Πειραματικό Λύκειο Αθηνών (τμήμα Β5).
- 22 μαθητές Β΄ Λυκείου από το Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής (τμήμα Β4).

- 42 μαθητές Β΄ Λυκείου από το Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Αθηνών (21 τμήμα Ε1 και 21 τμήμα Ε2).

- 42 μαθητές Β΄ Λυκείου από το 4ο Γενικό Λύκειο Γαλατσίου (21 τμήμα Β2 και 21 τμήμα Β4- Δύο μαθητές σε ατομική συνέντευξη).

Από τους μαθητές που συμμετείχαν σε ατομική συνέντευξη, ο μαθητής 1 σύμφωνα με τον καθηγητή του είναι ένας καλός μαθητής και αρκετά έξυπνος που μέχρι την 1η λυκείου διάβαζε πολύ μαθηματικά και γεωμετρία και ήταν ένας δυνατός λύτης. Το ίδιο και την φετινή χρονιά, με την μόνη διαφορά, ότι ο στόχος του είναι η Ιατρική σχολή οπότε δεν δίνει πολύ μεγάλη βάση στα μαθηματικά και την γεωμετρία. Ο μαθητής 2, είναι και αυτός πολύ έξυπνος και δυνατός στα μαθηματικά καθώς πηγαίνει και σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και θέλει να περάσει στο πολυτεχνείο ηλεκτρολόγος μηχανικός και αν δεν τα καταφέρει στο φυσικό τμήμα. Στις συνεντεύξεις με τους μαθητές προκύπτουν εκτός από τους διαθέσιμους χώρους λύσεων των μαθητών και οι ενδεχόμενοι χώροι λύσεων που προκύπτουν με βοήθεια κάποιου άλλου.

Η ύλη στην οποία εξετάστηκαν αφορά όσα είχαν διδαχτεί την προηγούμενη χρονιά μαζί με τα όσα είχαν διδαχτεί αυτή τη χρονιά, μέχρι την ημέρα συλλογής των δεδομένων. Η περίοδος συλλογής των δεδομένων ήταν το Νοέμβριο του 2017.

3.2 Μεθοδολογία Έρευνας και Συλλογή Δεδομένων

Για τους σκοπούς της έρευνας, σε όλους τους μαθητές που έλαβαν μέρος, χορηγήθηκε ένα δοκίμιο το οποίο περιελάμβανε τέσσερις ασκήσεις γεωμετρίας και ζητήθηκε από τους μαθητές να τις επιλύσουν με όσο περισσότερους τρόπους μπορούν. Στην αρχή του δοκιμίου υπήρχε ένα ερώτημα στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν αν τους δινόταν η ευκαιρία να επιλέξουν δύο από τα τέσσερα προβλήματα ποια θα ήταν αυτά, καθώς και να αναφέρουν έναν βασικό λόγο για την επιλογή τους. Οι ασκήσεις που δόθηκαν ήταν κλασσικές ασκήσεις γεωμετρίας και στις δύο από αυτές δινόταν το σχήμα ενώ στις άλλες δύο έπρεπε οι κατασκευές να γίνουν από τους μαθητές. Η διάρκεια της δοκιμασίας ήταν δύο διδακτικές ώρες, περίπου 25 λεπτά για την κάθε άσκηση, καθώς η επίλυση με πολλούς τρόπους απαιτεί υψηλό βαθμό συγκέντρωσης.

Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από την γραπτή δοκιμασία κατηγοριοποιήθηκαν σε πίνακα excel, με βάση το πλήθος των λύσεων που έδιναν οι μαθητές αλλά και την κατηγορία λύσης που έδιναν σε κάθε πρόβλημα. Χρησιμοποιήθηκε η έννοια των χώρων λύσεων της Leikin (2006), για την ομαδοποίηση των λύσεων που δόθηκαν από τους μαθητές με βάση την στρατηγική που χρησιμοποίησαν. Στην συνέχεια, οι μεταβλητές της δημιουργικότητας (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία – συνολική δημιουργικότητα), υπολογίστηκαν με βάση το σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. της Leikin (2009) το οποίο παρουσιάστηκε λεπτομερώς στο θεωρητικό πλαίσιο. Τα αποτελέσματα από τις προσωπικές συνεντεύξεις με τους δύο μαθητές απομαγνητοφωνήθηκαν και εξετάστηκαν ποιοτικά.

3.3 Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε αρχικά περιγραφική στατιστική από την οποία προέκυψαν τα περιγραφικά στοιχεία, όπως τα ποσοστά του αριθμού των λύσεων σε κάθε ένα από τα τέσσερα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, τα ποσοστά εμφάνισης κάθε κατηγορίας λύσεων, τα ποσοστά επιλογής κάθε προβλήματος από τους μαθητές, καθώς και η δημιουργικότητα που είναι ενσωματωμένη σε κάθε πρόβλημα.

Στην συνέχεια, για να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα - ποιες είναι οι διαφορετικές ομάδες μαθητών ως προς τον αριθμό των λύσεων σε προβλήματα γεωμετρίας; - χρησιμοποιήθηκε η στατιστική συνεπαγωγική μέθοδος ανάλυσης του R. Gras και η ανάλυση ομοιότητας του Lerman (1981) με το λογισμικό πρόγραμμα C.H.I.C (Classification, Hiérarchique, Implicative ET Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000), από τις οποίες προέκυψαν συνεπαγωγικά διαγράμματα και διαγράμματα ομοιότητας αντίστοιχα. Τα διαγράμματα ομοιότητας παρουσιάζουν τις μεταβλητές ανάλογα με την ομοιότητα που παρουσιάζουν. Σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο.

Η αναγκαιότητα της χρήσης της μεθόδου R. Gras έγκειται στο γεγονός ότι αποτελεί «έναν ακριβή, μηχανισμό συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων κατάλληλων να ενισχύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, να εξάγουν συμπεράσματα» (Gras, 1995, σ. 97). Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας σύμφωνα με τα στάδια της γενετικής ψυχολογίας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στην σκέψη των υποκειμένων. Οι σχέσεις στις οποίες καταλήγουμε δεν είναι σχέσεις αιτιότητας. Αντίθετα, πρόκειται για έναν δείκτη ποιότητας που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται. Με ανάλογο τρόπο η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται.

Η συνεπαγωγική μέθοδος δίνει τα εξής διαγράμματα: Συνεπαγωγικό διάγραμμα, δενδροδιάγραμμα ομοιότητας και δενδροδιάγραμμα ιεράρχησης. Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατόν να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (χοντρό βέλος) ή 95% (λεπτό βέλος). Σε περίπτωση που εμφανίζεται η συνεπαγωγή: (Έργο 1 → Έργο 2) αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο έργο 1 συνεπάγεται την επιτυχία στο έργο 2 και η αποτυχία στο έργο 2 συνεπάγεται την αποτυχία στο έργο 1. Με άλλα λόγια, αν το υποκείμενο επιτύχει στο έργο 1 θα επιτύχει και στο έργο 2, ενώ αν το υποκείμενο αποτύχει στο έργο 2 θα αποτύχει και στο έργο 1. Στο διάγραμμα ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Οι οριζόντιες συνδέσεις με κόκκινο χρώμα υποδηλώνουν την ύπαρξη ομοιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Τέλος, το δενδροδιάγραμμα ιεράρχησης παρουσιάζει τις συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα σε όλες τις μεταβλητές κατά σειρά προτεραιότητας. Οι συνεπαγωγές με έντονο μαύρο χρώμα ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (Γαγάτσης & Σιακαλλή, 2000).

Στην συνέχεια για να κάνουμε συγκρίσεις μεταξύ αγοριών και κοριτσιών όσον αφορά την δημιουργικότητα χρησιμοποιήθηκε independent t-test σε επίπεδο σημαντικότητας μεγαλύτερο από 95% με το λογισμικό Spss, αλλά και για να εξετάσουμε τυχόν στατιστικές διαφορές στις μεταβλητές της δημιουργικότητας (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία – συνολική δημιουργικότητα) στα προβλήματα που δινόταν το σχήμα και σε αυτά που δεν δινόταν το σχήμα πραγματοποιήθηκε paired samples t-test σε επίπεδο σημαντικότητας 95% με το στατιστικό πρόγραμμα Spss.

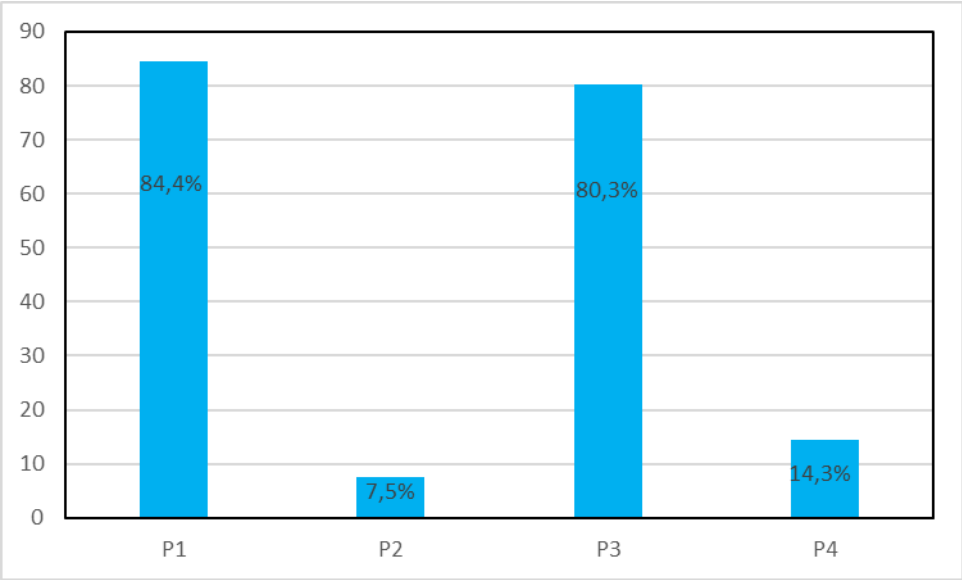
Οι συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν με τους δύο μαθητές, μας επιτρέπουν την αξιολόγηση τόσο των διαθέσιμων όσο και των ενδεχόμενων χώρων λύσεων των μαθητών, διότι σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές παροτρύνθηκαν με συμβουλές και ερωτήσεις, σε αντίθεση με τις γραπτές εξετάσεις που χρησιμοποιήθηκαν μόνο για την αξιολόγηση των διαθέσιμων χώρων λύσης. Μέσα από αυτές τις συνεντεύξεις εξετάστηκε η δημιουργικότητα που υποδεικνύουν οι μαθητές καθώς και οι μαθηματικές συνδέσεις που δημιουργούν μεταξύ των γνώσεών τους κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Αποτελέσματα Περιγραφικής Στατιστικής

Στην αρχή του ερωτηματολογίου, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν αν τους δινόταν η ευκαιρία να επιλέξουν να λύσουν 2 από τα 4 προβλήματα, ποια 2 θα επέλεγαν καθώς και να αναφέρουν ένα βασικό λόγο. Στον παρακάτω πίνακα 3 εμφανίζονται τα ποσοστά των επιλογών των μαθητών για κάθε πρόβλημα.

Ερώτημα: Με μία γρήγορη ματιά στα τέσσερα παρακάτω προβλήματα, αν σας ζητούσαν να επιλέξετε να λύσετε δύο από τα τέσσερα ποια θα ήταν αυτά; Αναφέρετε ένα βασικό λόγο.



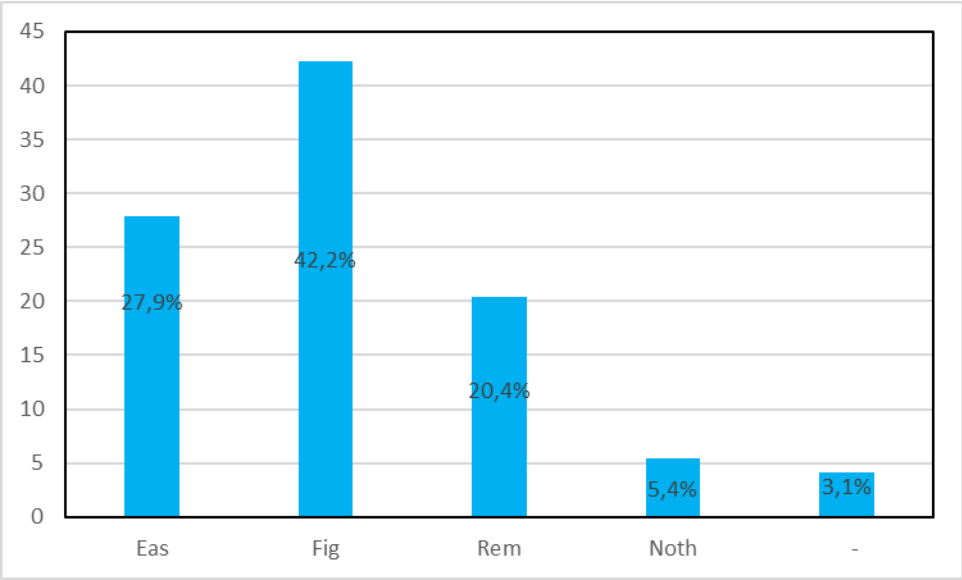
Πίνακας 3. Ποσοστά επιλογής του κάθε προβλήματος από το σύνολο των μαθητών.

Παρατηρούμε ότι τα ποσοστά επιλογής των προβλημάτων 1 και 3, στα οποία το σχήμα δινόταν, είναι αρκετά υψηλά 84,4% και 80,3% αντίστοιχα, ενώ τα ποσοστά επιλογής των προβλημάτων 2 και 4, στα οποία δεν δινόταν σχήμα, κυμαίνονται σε χαμηλά επίπεδα 7,5% και 14,3% αντίστοιχα. Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται τα ποσοστά των λόγων για τους οποίους οι μαθητές επέλεξαν το κάθε πρόβλημα. Συμβολίζουμε με:

- Eas: Την επιλογή των προβλημάτων για τον λόγο ότι μου φαίνονται πιο εύκολα.
- Fig: Την επιλογή των προβλημάτων επειδή δίνεται το σχήμα στην εκφώνηση και δεν κινδυνεύω να κάνω λάθος στην κατασκευή του σχήματος.
- Rem: Την επιλογή των προβλημάτων επειδή την θεωρία που χρειάζονται στην επίλυσή τους την θυμάμαι καλύτερα.

- Noth: Επιλογή κυρίως του προβλήματος 4 επειδή χρειάζεται λιγότερη θεωρία και είναι πιο ελεύθερο.
- - : Οι μαθητές δεν ανέφεραν κάποιον λόγο επιλογής.

Παρατηρούμε ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών 42,2%, θα επέλεγε τα προβλήματα στα οποία το σχήμα δίνεται φοβούμενοι μήπως κάνουν λάθος στην κατασκευή και αποτύχουν στην επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον, το 27,9% κάνει επιλογή των προβλημάτων επειδή του φαίνονται πιο εύκολα ενώ το 20,4% λόγο του ότι θυμάται καλύτερα την θεωρία. Τέλος, αξιοσημείωτο είναι ότι ένα 5,4% των μαθητών θα επέλεγε το πρόβλημα 4, επειδή η εκφώνηση του δεν περιέχει κάποια θεωρία και η επίλυση του είναι πιο ελεύθερη. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές που έκαναν αυτή την επιλογή χαρακτηρίζονται από χαμηλή ευχέρεια παραγωγής γεωμετρικών αποδείξεων.



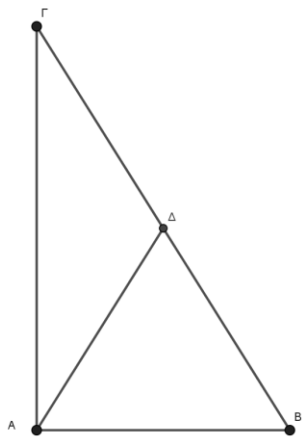
Πίνακας 4. Ποσοστά των λόγων επιλογής των προβλημάτων.

4.1.1 Ευχέρεια Λύσεων

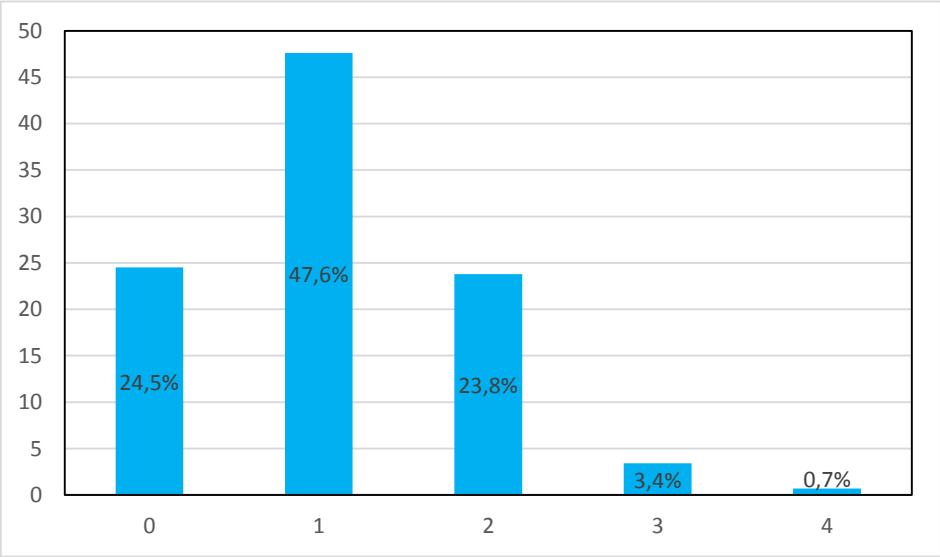
Η ευχέρεια εξετάζοντας τα έργα πολλαπλών λύσεων, αναφέρεται στον αριθμό των λύσεων που παράγει ο λύτης. Για τον λόγο αυτό, για να υπολογιστεί η ευχέρεια ενός μαθητή κατά την επίλυση των προβλημάτων υπολογίσαμε των αριθμό των ορθών λύσεων που έδωσε σε καθένα από τα 4 προβλήματα.

Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται τα ποσοστά του πλήθους των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές, δηλαδή η ευχέρεια τους, στο πρώτο πρόβλημα πολλαπλών λύσεων. Το πρόβλημα 1, ήταν η απόδειξη βασικής πρότασης την οποία οι μαθητές είχαν διδαχθεί στην Α΄ λυκείου και το εύρος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές κυμαίνεται από 0 έως 4 λύσεις.

Πρόβλημα 1
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) και ΑΔ διάμεσος του τριγώνου. Να αποδείξετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε ότι ΑΔ = ½ ΒΓ.



Σχήμα 3. Το πρόβλημα 1 όπως δόθηκε στους μαθητές.



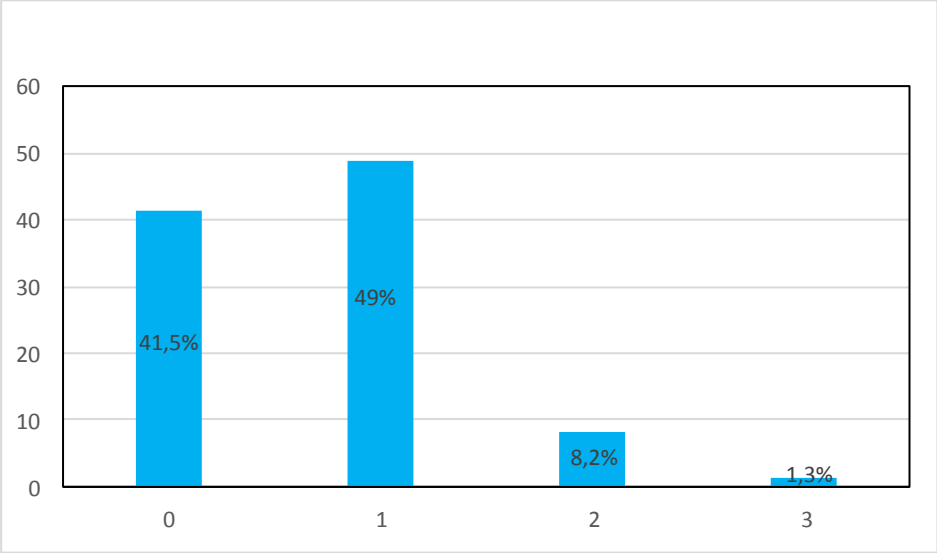
Πίνακας 5. Πλήθος λύσεων στο πρόβλημα 1.

Παρατηρούμε ότι το 24,5% δεν μπόρεσε να επιλύσει το πρόβλημα, σχεδόν το 50% βρήκε έναν τρόπο επίλυσης (47,6%), το 23,8% το έλυσε με 2 τρόπους, ενώ μόλις το 4,1% κατάφερε να λύσει το πρόβλημα με πάνω από τρεις τρόπους.

Στον πίνακα 6 παρουσιάζονται τα ποσοστά του πλήθους των λύσεων που επέδειξαν οι μαθητές στο πρόβλημα 2, δηλαδή η ευχέρεια των μαθητών στο πρόβλημα αυτό. Το πρόβλημα αυτό, είναι ένα κλασσικό πρόβλημα γεωμετρίας και το οποίο δόθηκε στους μαθητές χωρίς το σχήμα.

Πρόβλημα 2
Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Δ και Ε σημεία του κύκλου και ΔΟ//ΕΒ, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ.
Να δείξετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε ότι ΓΒ=ΑΒ.

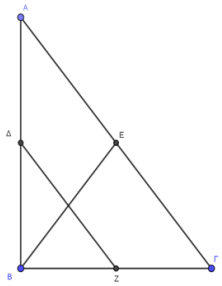
Σχήμα 4. Το πρόβλημα 2 όπως δόθηκε στους μαθητές.



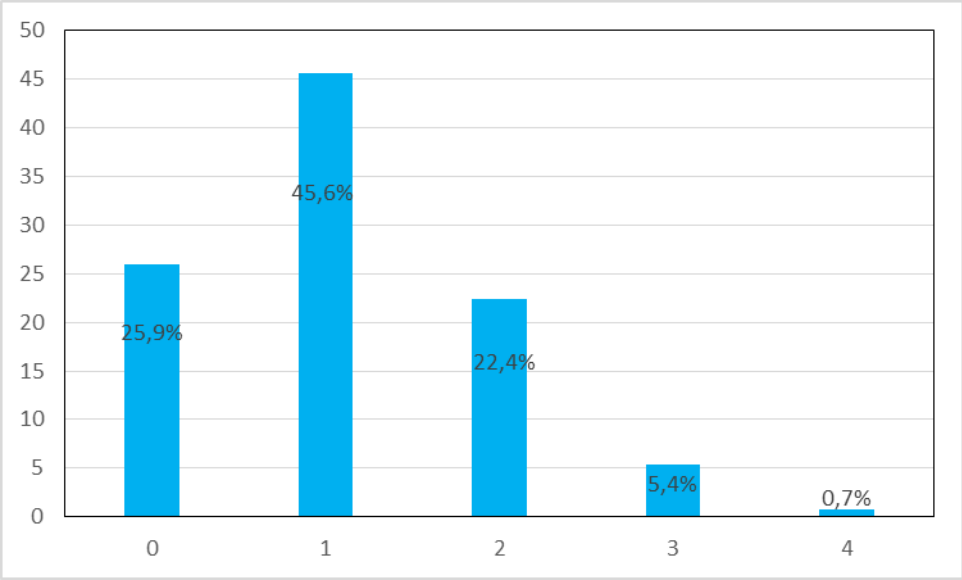
Πίνακας 6. Πλήθος λύσεων στο πρόβλημα 2.

Το εύρος λύσεων των μαθητών για αυτό το πρόβλημα κυμαίνεται μεταξύ 0 έως 3 λύσεις. Παρατηρούμε ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών 41,5% δεν κατάφερε να επιλύσει το πρόβλημα, ενώ εξίσου μεγάλο ποσοστό 49% βρήκε έναν τρόπο επίλυσης. Το ποσοστό των μαθητών που κατάφεραν να βρουν 2 ή 3 τρόπους ανέρχεται σε 9,5%.
Στον πίνακα 7 παρουσιάζονται τα ποσοστά του πλήθους των λύσεων που επέδειξαν οι μαθητές στο πρόβλημα 3, δηλαδή η ευχέρεια των μαθητών στο πρόβλημα αυτό. Το πρόβλημα αυτό ήταν και αυτό κλασσικό και δόθηκε στους μαθητές με το σχήμα.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Β=90°), Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ και Ζ μέσο ΒΓ. Να δείξετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε ότι ΔΖ=ΕΒ.



Σχήμα 5. Το πρόβλημα 3 όπως δόθηκε στους μαθητές.



Πίνακας 7. Πλήθος λύσεων στο πρόβλημα 3.

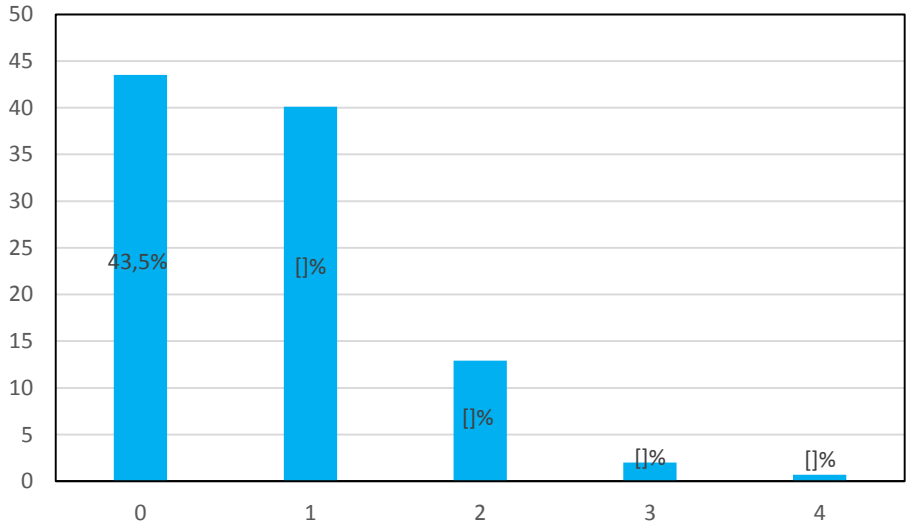
Για αυτό το πρόβλημα, όπως και για το πρόβλημα 1 το εύρος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές κυμαίνεται από 0 έως 4 λύσεις. Παρατηρούμε ότι το 25,9% δεν κατάφερε να βρει έστω και μία λύση στο πρόβλημα, το 45,6% των μαθητών βρήκε έναν τρόπο επίλυσης, το 22,4% των μαθητών κατάφεραν να βρουν 2 τρόπους, ενώ 3 ή 4 τρόπους επίλυσης πραγματοποίησε το 6,1% των μαθητών.

Στον πίνακα 8 παρουσιάζονται τα ποσοστά του πλήθους των λύσεων που επέδειξαν οι μαθητές κατά την επίλυση του προβλήματος 4. Το πρόβλημα αυτό το οποίο δόθηκε και αυτό χωρίς κάποιο σχήμα, είναι λίγο διαφορετικό από αυτά που έχουν λύσει οι μαθητές μέχρι τώρα, είναι αυτό που τους κίνησε πιο πολύ την περιέργεια και ασχολήθηκαν και μαθητές οι οποίοι δεν κατάφεραν να επιλύσουν τα προηγούμενα 3 προβλήματα χωρίς ωστόσο οι απαντήσεις τους να ήταν πάντα σωστές.

Πρόβλημα 4
Γνωρίζοντας μόνο το περίγραμμα του κύκλου, να προσδιορίσετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε το κέντρο του.

Σχήμα 6. Το πρόβλημα 4 όπως δόθηκε στους μαθητές.

Το εύρος λύσεων των μαθητών για το 4 πρόβλημα κυμαίνεται από 0 έως 4 λύσεις. Παρατηρούμε ότι μεγάλο ποσοστό 43,5% δεν κατάφερε να προσδιορίσει καμία λύση στο πρόβλημα 4, το 40,1% βρήκε έναν τρόπο επίλυσης, το 12,9% 2 τρόπους, ενώ το 2,7% 3 ή 4 τρόπους.



Πίνακας 8. Πλήθος λύσεων στο πρόβλημα 4.

Όπως φαίνεται και από τους πίνακες 5 έως 8, το εύρος του πλήθους λύσεων των προβλημάτων κυμαίνεται από 0 έως 4, με εξαίρεση το πρόβλημα 2 που το εύρος κυμαίνεται από 0 έως 3 λύσεις. Στα προβλήματα 2 και 4 τα οποία δόθηκαν χωρίς το σχήμα παρατηρούμε μεγάλα ποσοστά των μαθητών 41,5% και 43,5% αντίστοιχα, οι οποίοι δεν μπόρεσαν να επιλύσουν το πρόβλημα.

Στον παρακάτω πίνακα 9, παρουσιάζεται ο μέσος όρος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές και για τα 4 προβλήματα. Παρατηρούμε, ότι ο μέσος όρος είναι 3,60, δηλαδή οι μαθητές στο σύνολό τους έδωσαν κάτι λιγότερο από μία λύση για κάθε πρόβλημα, ενώ η διάμεσος είναι 3 λύσεις. Η ελάχιστη τιμή είναι 0 λύσεις ενώ η μέγιστη τιμή είναι 12 και πρόκειται για ένα πολύ μεγάλο πλήθος λύσεων και ο μαθητής που τις έδωσε χαρακτηρίζεται από υψηλή ικανότητα γεωμετρικής απόδειξης.

Πλήθος Μαθητών	**Μέσος όρος**	**Διάμεσος**	**Τυπική Απόκλιση**	**Ελάχιστη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
147	3,60	3	2,21	0	12

Πίνακας 9. Μέσος όρος ευχέρειας λύσεων των μαθητών και για τα 4 προβλήματα.

4.1.2 Ευελιξία Λύσεων – Χώροι λύσεων

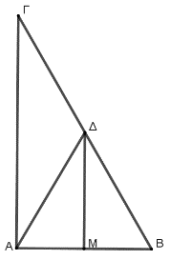
Με βάση την θεωρία των χώρων λύσεων της Roza Leikin (2006), από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές κατά την επίλυση των 4 προβλημάτων, δημιουργήθηκαν οι ομαδικοί χώροι λύσεων των μαθητών για κάθε πρόβλημα ξεχωριστά. Χρησιμοποιώντας τους χώρους λύσεων και το μοντέλο υπολογισμού της ευελιξία λύσεων της Leikin (2009), υπολογίστηκε η ευελιξία των μαθητών.

Στο πρόβλημα 1, παρατηρήθηκαν 10 διαφορετικές ποιοτικά λύσεις οι οποίες διαφέρουν ως προς τις στρατηγικές επίλυσης, χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις, διαφορετικές ιδιότητες (θεωρήματα, ορισμούς ή βοηθητικές κατασκευές), και χωρίστηκαν σε 5 ομάδες λύσεων όπως παρουσιάζονται στην συνέχεια. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, το οποίο όλοι οι μαθητές είχαν αντιμετωπίσει την περασμένη χρονιά παρατηρήθηκαν ανάλογα το σχολείο, διαφορετικά ποσοστά εμφάνισης διαφορετικών κατηγοριών λύσεων καθώς δεν είχαν χρησιμοποιήσει όλοι οι καθηγητές την απόδειξη που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο. Για παράδειγμα, στο 2ο Πειραματικό λύκειο Αθηνών, τα ποσοστά εμφάνισης της λύσης με διπλασιασμό διαμέσου ήταν πιο υψηλά σε σχέση με άλλα σχολεία, λόγο των προηγούμενων εμπειριών των μαθητών αφού είχαν διδαχθεί την απόδειξη με διπλασιασμό της διαμέσου.

<u>Πρώτη ομάδα λύσεων</u> (Διάμεσος και ύψος + Σύγκριση τριγώνων)

<u>1α Λύση</u> (P1med1)

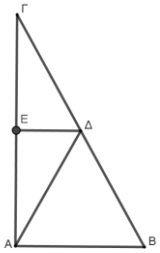
Φέρουμε την διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΒ.
Το ΔΜ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΜ//ΑΓ.
Αφού ΑΓ⊥ΑΒ τότε και ΔΜ ⊥ΑΒ.



Άρα, ΔΜ διάμεσος και ύψος τριγώνου ΑΔΒ, οπότε ΑΔΒ ισοσκελές.
Άρα, ΑΔ=ΔΒ=$\frac{ΒΓ}{2}$.

<u>1β Λύση</u> (P1med2)

Φέρουμε την διάμεσο ΔΕ του τριγώνου ΑΔΓ.
Το ΔΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΑΒ.
Αφού ΑΒ⊥ΑΓ τότε και ΔΕ ⊥ΑΒ.

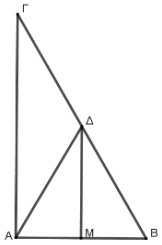


Άρα, ΔΕ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΑΔΓ, οπότε ΑΔΓ ισοσκελές.
Άρα, ΑΔ=ΔΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$.

<u>1γ Λύση</u> (P1com1)

Φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΒ.

Το ΔΜ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου οπότε ΔΜ//ΑΒ.
Αφού ΑΓ⊥ΑΒ τότε και ΔΜ ⊥ΑΒ.

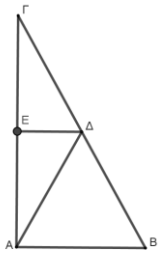


Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΔ:
(ι) Ορθογώνια στο Μ.
(ιι) ΔΜ κοινή.
(ιιι) ΑΜ=ΜΒ.

Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ ίσα τα τρίγωνα. Άρα, και ΑΔ=ΔΒ=$\frac{ΒΓ}{2}$.

<u>1^{δ} Λύση</u> (P1com2)
Φέρουμε τη διάμεσο ΔΕ του τριγώνου ΑΔΓ.
Το ΔΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΑΒ.

Αφού ΑΒ⊥ΑΓ τότε και ΔΕ⊥ΑΒ.



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΕΑ και ΔΕΓ:
(ι) Ορθογώνια στο Ε.
(ιι) ΔΕ κοινή.
(ιιι) ΑΕ=ΓΕ.

Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ ίσα τα τρίγωνα. Άρα, και ΑΔ=ΔΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι φανερό ότι οι μαθητές, για να παράγουν αυτή την ομάδα λύσεων κατέχουν τουλάχιστον τρία είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος (Duval, 1995): αντιληπτική (εφόσον αντιλαμβάνονται πλήρως τα διάφορα υποσχήματα του ορθογωνίου τριγώνου), λειτουργική (εφόσον φέρνοντας την βοηθητική ευθεία βρίσκουν τη λύση του προβλήματος) και λεκτική (εφόσον αποδεικνύουν το ζητούμενο βασιζόμενοι σε θεωρήματα με την βοήθεια του μετασχηματισμού που έχει γίνει λόγο της λειτουργικής κατανόησης).

<u>Δεύτερη ομάδα λύσεων</u> (Τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο) – (P1cir)

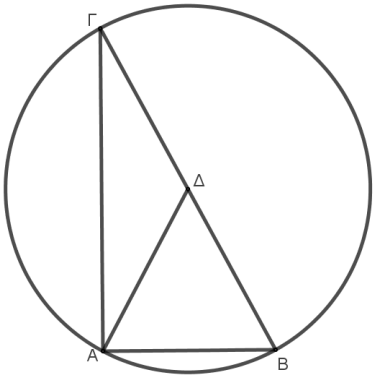
Α=90^{ο}

Εγγράφουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ σε κύκλο.

Αφού, η γωνία Α=90^{ο} το τρίγωνο θα βαίνει σε ημικύκλιο.

Άρα, ΒΓ διάμετρος και Δ κέντρο του κύκλου.

Τελικά, ΑΔ=ΔΒ=ΔΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$.



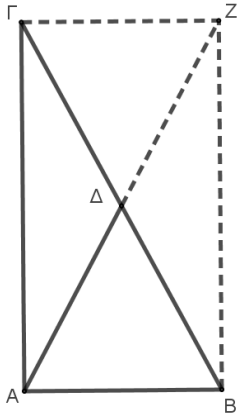
<u>Σχόλιο</u>

Οι μαθητές, για να παράγουν αυτή την λύση κατέχουν τουλάχιστον τρία είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος: αντιληπτική (εφόσον αντιλαμβάνονται πλήρως τα διάφορα υποσχήματα του ορθογωνίου τριγώνου), λειτουργική (εφόσον φέρνοντας τον κύκλο βρίσκουν τη λύση του προβλήματος) και λεκτική (εφόσον αποδεικνύουν το ζητούμενο βασιζόμενοι σε θεωρήματα με την βοήθεια του μετασχηματισμού που έχει γίνει λόγο της λειτουργικής κατανόησης).

<u>Τρίτη ομάδα λύσεων</u> (Παραλληλόγραμμο)

<u>3^{α} Λύση</u> (P1dom)

Διπλασιάζουμε την διάμεσο ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ.



Οι διαγώνιες διχοτομούνται, άρα ΑΒΖΓ παραλληλόγραμμο.

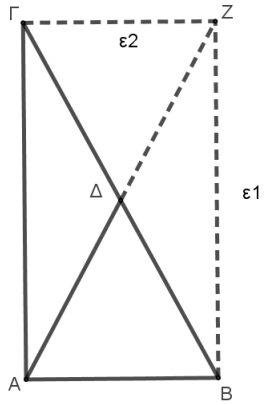
Όμως, Α=90^{ο}, άρα ΑΒΖΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Άρα, ΑΖ=ΒΓ ως διαγώνιες ορθογωνίου και επειδή διχοτομούνται:

$A\Delta=\Delta Z=\Delta B=\Delta\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$.

<u>3$^{\beta}$ Λύση</u> (P1dot)

Από το Β φέρουμε παράλληλη στην ΑΓ, έστω (ε1)//ΑΓ.
Από το Γ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, έστω (ε2)//ΑΒ.
Έστω Ζ το σημείο τομής των (ε1) και (ε2).



Το ΑΒΖΓ είναι ορθογώνιο, αφού Α=90°.
Άρα, ΑΕ=ΒΓ ως διαγώνιες και επειδή διχοτομούνται:
$A\Delta=\Delta Z=\Delta B=\Delta\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι φανερό ότι οι μαθητές, για να παράγουν αυτή την ομάδα λύσεων κατέχουν τουλάχιστον τρία είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος: αντιληπτική (εφόσον αντιλαμβάνονται πλήρως τα διάφορα υποσχήματα του ορθογωνίου τριγώνου), λειτουργική (εφόσον φέρνοντας τις βοηθητικές ευθείες για την κατασκευή του ορθογωνίου βρίσκουν τη λύση του προβλήματος) και λεκτική (εφόσον αποδεικνύουν το ζητούμενο βασιζόμενοι σε θεωρήματα με την βοήθεια του μετασχηματισμού που έχει γίνει λόγο της λειτουργικής κατανόησης).

<u>4$^{\alpha}$ Λύση</u> (P1sim1)

Φέρω τη διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΒ.

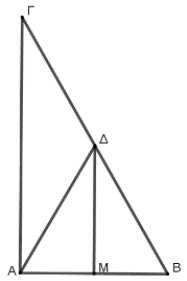
Το ΔΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα $\Delta M//=\frac{1}{2}A\Gamma$.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΜΑ:

(ι) Α = Μ =90° .

(ιι) $MA=\frac{1}{2}AB$.

(ιιι) $\Delta M=\frac{1}{2}A\Gamma$.



Άρα, τα ΑΒΓ και ΔΜΑ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση, άρα είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. Άρα, ΑΔ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ.

<u>4$^{\beta}$ Λύση</u> (P1sim2)

Φέρω τη διάμεσο ΔΕ του τριγώνου ΑΔΓ.

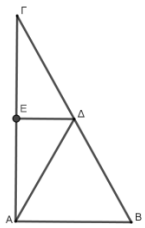
Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΔΕ//=$\frac{1}{2}$ ΑΒ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ:

(ι) Α = Ε =90° .

(ιι) ΕΔ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ.

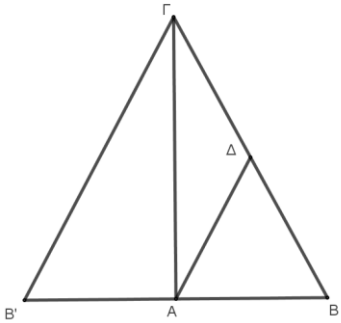
(ιιι) ΕΑ=$\frac{1}{2}$ ΑΓ.



Άρα, τα ΑΒΓ και ΑΕΔ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση, άρα είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. Άρα, ΑΔ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ.

<u>Πέμπτη ομάδα λύσεων</u> (midline) – (P1ext)

Επεκτείνω την ΑΒ κατά τμήμα ΑΒ΄ με ΑΒ=ΑΒ΄.

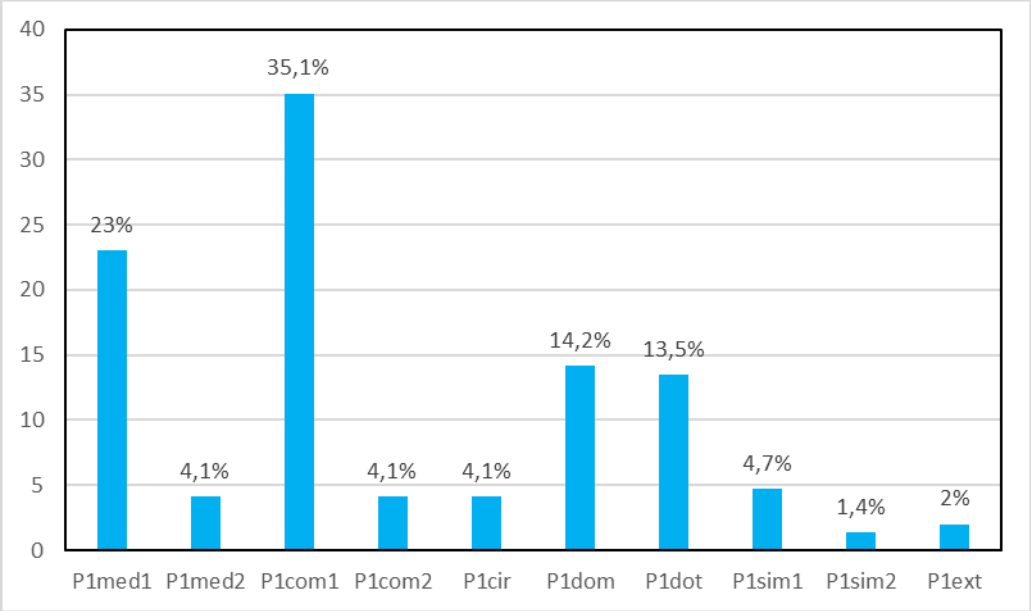


Από την στιγμή που Δ μέσο ΒΓ και Α μέσο Β΄Β έχουμε: $\Delta A // = \frac{B'\Gamma}{2}$. (1)

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα Β΄ΓΑ και ΒΑΓ:
(ι) Α= κοινή =90° .
(ιι) ΓΑ κοινή.
(ιιι)Β΄Α=ΒΑ.
Άρα, τα τρίγωνα ΒΆΓ=ΒΑΓ.
Άρα, Β΄Γ=ΒΓ και Β΄ΓΒ ισοσκελές. (2)
Από (1), (2): $A\Delta = \frac{B'\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$.

<u>Σχόλιο</u>

Με το ίδιο σκεπτικό για τις ομάδες λύσεων 4 και 5 παρατηρούμε ότι οι μαθητές, για να παράγουν αυτές τις ομάδες λύσεων κατέχουν τουλάχιστον τρία είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος: αντιληπτική – λειτουργική – λεκτική. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι σε όλες τις κατηγορίες λύσεων χρειάστηκε η σχεδίαση μιας βοηθητικής γραμμής, η οποία είναι ένδειξη λειτουργικής κατανόησης και βοήθησε στην επίλυση του προβλήματος. Όμως, σίγουρα πριν την σχεδίαση αυτής της βοηθητικής γραμμής απαιτείται η οπτικοποίηση του αποτελέσματος της διαμόρφωσης. Τέλος, μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να διαμορφωθεί με πολλούς τρόπους (μερολογική τροποποίηση), καθ΄ ένας από τους οποίους μπορεί να μας οδηγήσει σε διαφορετικές λύσεις ενός προβλήματος. Παρόλα αυτά, για την ίδια βοηθητική ευθεία, παρατηρούμε διαφορετικές λύσεις, δηλαδή για την ίδια λειτουργική κατανόηση του σχήματος οι μαθητές εμφανίζουν διαφορετική λεκτική κατανόηση, καθώς για την ίδια βοηθητική κατασκευή χρησιμοποιούν διαφορετικές ιδιότητες για να καταλήξουν στην λύση.



Πίνακας 10. Ποσοστό εμφάνισης της κάθε λύσης στο σύνολο των μαθητών.

Στον πίνακα 10, παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης της κάθε μίας από τις παραπάνω 10 λύσεις που έδωσαν οι μαθητές για το πρόβλημα 1. Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό 39,2% αντιστοιχεί στην λύση με σύγκριση τριγώνων (P1com1, P1com2), η οποία απαιτεί να φέρεις την διάμεσο του τριγώνου που ενώνει δύο μέσα πλευρών και να συγκρίνεις τα δύο τρίγωνα, ενώ το μικρότερο ποσοστό 2% στην λύση (P1ext), η οποία απαιτεί από τους μαθητές αυξημένη αφαιρετική σκέψη αλλά και ικανότητα οπτικοποίησης του αποτελέσματος διαμόρφωσης μέσω μερεολογικής τροποποίησης του σχήματος, δηλαδή απαιτεί και υψηλή λειτουργική κατανόηση του σχήματος.

Στο δεύτερο πρόβλημα, οι μαθητές έδωσαν 5 διαφορετικές ποιοτικά λύσεις, οι οποίες διάφεραν ως προς τις στρατηγικές και τις ιδιότητες που χρησιμοποίησαν. Οι πέντε αυτές λύσεις χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες λύσεων ανάλογα την στρατηγική που ακολουθούν. Στην πρώτη ομάδα, η κεντρική στρατηγική είναι ότι η ευθεία γραμμή που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών (midline) ενός τριγώνου, είναι παράλληλη και ίση με το μισό της απέναντι πλευράς, και περιλαμβάνει δύο λύσεις (P2mid1, P2mid2). Στην δεύτερη ομάδα λύσεων, η κύρια στρατηγική είναι ότι προκύπτουν ίσες αντίστοιχες γωνίες, και περιλαμβάνει δύο λύσεις (P2iso, P2sim), ενώ η τρίτη ομάδα λύσεων περιλαμβάνει μία λύση και επιλύεται με σχηματισμό και ιδιότητες ρόμβου.

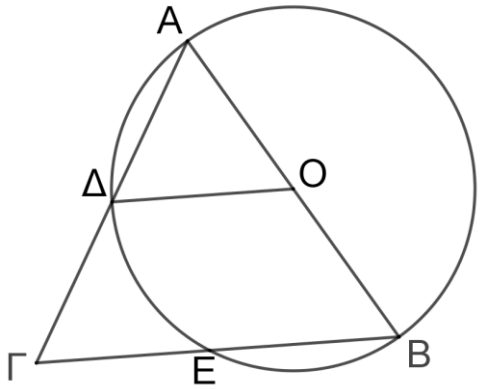
<u>Πρώτη ομάδα λύσεων</u> (Midline)

<u>1α Λύση</u> (P2mid1)

Το ΔΟ=$\frac{1}{2}$ΑΒ ως ακτίνα, αφού ΑΒ διάμετρος.

Το ΔΟ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών Δ και Ο των ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα (παράλληλη με την ΓΒ και διχοτομεί την ΑΒ).

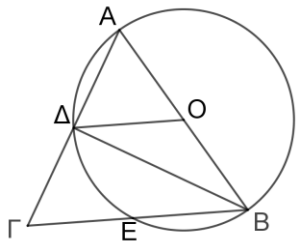
Τότε ΔΟ=$\frac{1}{2}$ΑΒ=$\frac{1}{2}$ΒΓ.



Άρα, ΑΒ=ΒΓ.

<u>1β Λύση</u> (P2mid2)

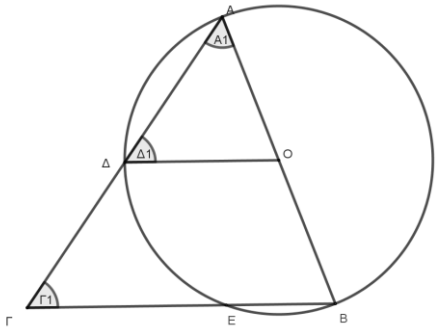
Το Δ είναι μέσο του ΑΓ, αφού ΔΟ ενώνει το μέσο Ο με το Δ και ΟΔ//ΒΓ.
Φέρουμε ΔΒ διάμεσος του τριγώνου.



Η γωνία Δ1 βαίνει σε ημικύκλιο, άρα Δ1=90°, άρα ΔΒ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.
Άρα, το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα ΑΒ=ΓΒ.

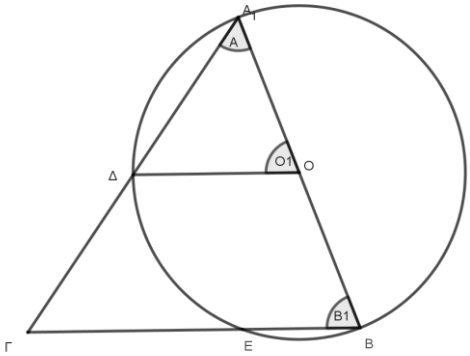
<u>Δεύτερη ομάδα λύσεων</u> (ίσες αντίστοιχες γωνίες)

<u>2^{α} Λύση</u> (P2iso)
ΔΟ=ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισοσκελές.
Άρα, οι γωνίες Δ1=Α1. (1)



Επιπλέον, ΔΟ//ΕΒ→ ΔΟ//ΓΒ, άρα οι γωνίες Δ1=Γ1 ως εντός εκτός και επί τα αυτά. (2)
Από (1), (2): Α1=Δ1=Γ1.
Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ΑΒ = ΓΒ.

<u>2β Λύση</u> (P2sim)
ΔΟ=ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισοσκελές.

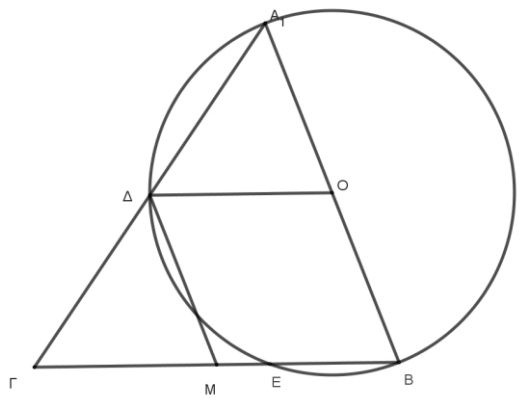


Επιπλέον, ΔΟ//ΕΒ→ ΔΟ//ΓΒ, άρα οι γωνίες Ο1=Β1 ως εντός εκτός και επί τα αυτά.
Άρα, τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΒΓ έχουν δύο οξείες γωνίες ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.
Άρα, ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο αφού είναι όμοιο με το ισοσκελές ΑΟΔ.
Άρα, ΑΒ=ΓΒ.

<u>Τρίτη ομάδα λύσεων</u> (Ρόμβος) – (P2rho)

Φέρουμε παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ.

Τότε αφού διέρχεται από το μέσο Δ της ΑΓ, θα διέρχεται και από το μέσο Μ της ΒΓ και ΜΔ=$\frac{1}{2}$ΑΒ.



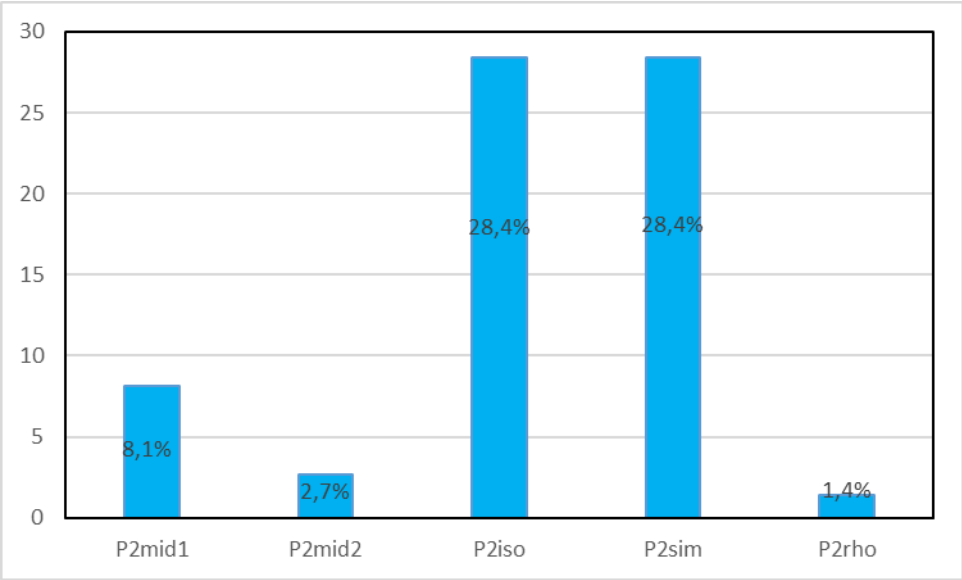
ΕΒ//ΔΟ →ΜΒ//ΔΟ. Άρα, ΜΒ=ΔΟ=$\frac{1}{2}$ΒΓ και ΟΔ=ΟΒ ως ακτίνες του κύκλου.

Άρα, το ΔΟΜΒ ρόμβος → ΟΒ=ΜΒ → $\frac{1}{2}$ΑΒ=$\frac{1}{2}$ΒΓ → ΑΒ=ΒΓ.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι φανερό ότι οι μαθητές, για να παράγουν τις λύσεις 1, 3 & 4 κατέχουν τουλάχιστον τρία είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος: ακολουθιακή (εφόσον κατασκευάζουν το σχήμα από την αρχή οργανώνοντάς τις στοιχειώδεις μονάδες του σχήματος μέσα από κατασκευαστικούς περιορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες), αντιληπτική (εφόσον αντιλαμβάνονται πλήρως τα διάφορα υποσχήματα του κύκλου και του εγγεγραμμένου τριγώνου) και λεκτική (εφόσον αποδεικνύουν το ζητούμενο βασιζόμενοι σε θεωρήματα), ενώ για να φτάσουν στις λύσεις 2 και 5 εκτός από τα άλλα τρία είδη σύλληψης απαιτείται και η λειτουργική κατανόηση (εφόσον φέρνοντας τις βοηθητικές ευθείες για την κατασκευή της διαμέσου τριγώνου και σχηματισμού ρόμβου, βρίσκουν τη λύση του προβλήματος).

Στον πίνακα 11, παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης της κάθε μίας από τις παραπάνω 5 λύσεις που έδωσαν οι μαθητές για το πρόβλημα 2. Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό 28,4% αντιστοιχεί σε δύο λύσεις (P2iso, P2sim), οι οποίες ανήκουν και οι δύο στην ίδια ομάδα λύσεων «ίσες αντίστοιχες γωνίες», στην οποία δεν απαιτείται να φέρουμε νέα στοιχεία στο σχήμα, αλλά χρειάζεται απλή εφαρμογή ιδιοτήτων κύκλου και παραλλήλων ευθειών, ενώ το μικρότερο ποσοστό 1,4% εμφανίζεται στην λύση (P2rho), η οποία απαιτεί από τους μαθητές αυξημένη γεωμετρική διαίσθηση αλλά και λειτουργική κατανόηση του σχήματος, καθώς απαιτεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν νέα στοιχεία στο σχήμα τους τα οποία δεν είναι εμφανή για να σχηματίσουν τον ρόμβο και να εφαρμόσουν ιδιότητες του.



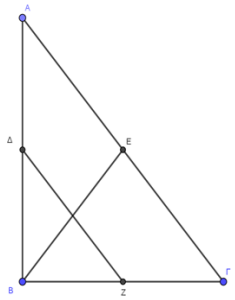
Πίνακας 11. Ποσοστό εμφάνισης της κάθε λύσης στο σύνολο των μαθητών.

Στο τρίτο πρόβλημα, οι μαθητές έδωσαν 5 διαφορετικές ποιοτικά λύσεις, οι οποίες διάφεραν ως προς τις στρατηγικές και τις ιδιότητες που χρησιμοποίησαν. Οι πέντε αυτές λύσεις χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες λύσεων ανάλογα την στρατηγική που ακολουθούν. Στην πρώτη ομάδα, η κεντρική στρατηγική είναι ότι η ευθεία γραμμή που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών (midline) ενός τριγώνου, είναι παράλληλη και ίση με το μισό της απέναντι πλευράς, και περιλαμβάνει δύο λύσεις (P3the, P3par), οι οποίες θα μπορούσαμε να πούμε ότι προκύπτουν έμμεσα. Η δεύτερη ομάδα λύσεων, περιλαμβάνει μία λύση και η κύρια στρατηγική είναι η αναλογία των πλευρών (P3sim), ενώ η τρίτη ομάδα λύσεων περιλαμβάνει δύο λύσεις (P3rec, P3com), οι οποίες θα μπορούσαμε να πούμε ότι προκύπτουν άμεσα.

<u>Πρώτη ομάδα λύσεων</u> (Έμμεσα)

<u>1α Λύση</u> (P3the)

Από υπόθεση Δ μέσο ΑΒ και Ζ μέσο ΒΓ.



Άρα, από γνωστή πρόταση $\Delta Z // = \frac{1}{2}$ ΑΓ. (1)

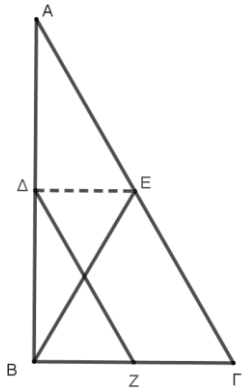
Από γνωστή πρόταση έχω ΒΕ=$\frac{1}{2}$ΑΓ. (2)

Από (1), (2): ΔΖ=ΒΕ.

<u>1^{β} λύση</u> (P3par)

Από το Δ φέρω παράλληλη στην ΒΓ, αυτή θα περνάει από το Ε, αφού Δ και Ε μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Άρα, ΔΕ//ΒΓ και ΔΖ//ΑΓ.



Άρα, ΔΖΓΕ παραλληλόγραμμο.

Τότε ΔΖ=ΕΓ και ΕΓ=$\frac{1}{2}$ΑΓ. Άρα, ΔΖ=$\frac{1}{2}$ΑΓ.

Όμως, ΒΕ=$\frac{1}{2}$ΑΓ. Άρα, ΒΕ=ΔΖ.

<u>Δεύτερη ομάδα λύσεων</u> (Ομοιότητα) – (P3sim)

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΖ:

(ι) Γωνία Β κοινή = 90^{ο}.

(ιι) ΒΖ=$\frac{1}{2}$ΒΓ.

(ιιι) ΒΔ=$\frac{1}{2}$ΒΑ.

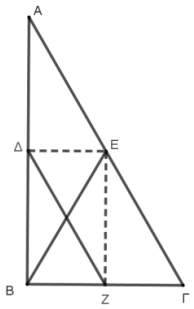
Άρα, ΑΒΓ όμοιο με ΒΔΖ, με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$. Άρα, ΒΕ =$\frac{1}{2}$ΑΓ.

Όμως, ΒΕ =$\frac{1}{2}$ΑΓ. Άρα, ΔΖ =ΒΕ.

<u>Τρίτη Ομάδα Λύσεων</u> (Άμεσα)

<u>3^{α} Τρόπος</u> (P3rec)

Φέρω ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ (Δ, Ε, Ζ μέσα).

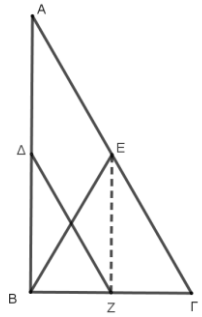


Το ΔΕΖΒ παραλληλόγραμμο και αφού Β = 90° τότε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Άρα, οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή ΔΖ = ΕΒ.

<u>3$^{\beta}$ Τρόπος</u> (P3Com)

Φέρω, ΕΖ//=$\frac{1}{2}$ ΑΒ.



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΒ:

(ι) Β=Ζ=90°

(ιι) ΒΖ κοινή

(ιιι) ΕΖ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ=ΔΒ

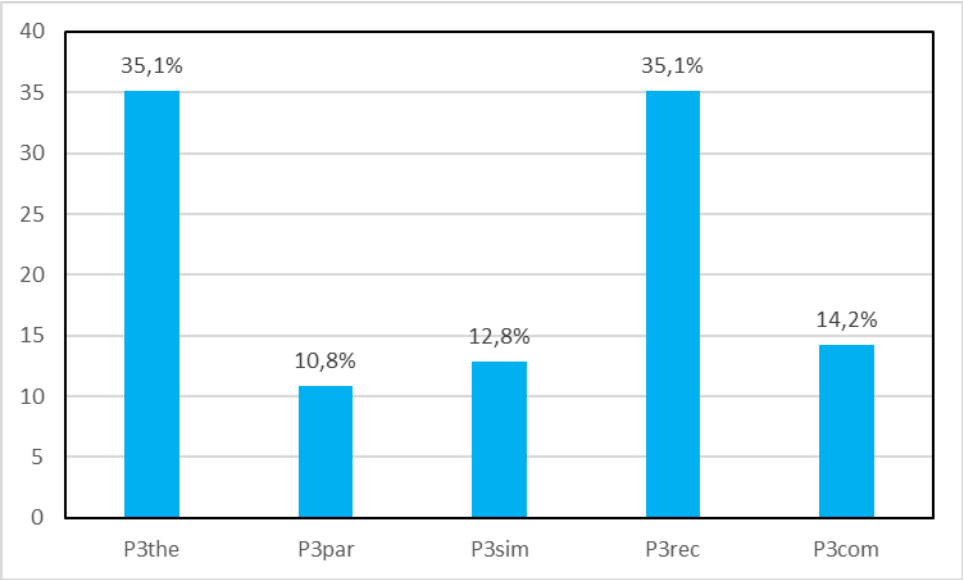
Άρα, τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΒ είναι ίσα.

Άρα, ΔΖ = ΒΕ.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι φανερό ότι οι μαθητές, για να παράγουν τις λύσεις 1 &3 κατέχουν τουλάχιστον 2 είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος: αντιληπτική (εφόσον αντιλαμβάνονται πλήρως τα διάφορα υποσχήματα του ορθογωνίου τριγώνου) και λεκτική (εφόσον αποδεικνύουν το ζητούμενο βασιζόμενοι σε θεωρήματα), ενώ οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα με τους τρόπους 2, 4 & 5 κατέχουν επιπλέον και την λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (εφόσον φέρνοντας τις βοηθητικές ευθείες για την κατασκευή του πλαγίου παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ορθογωνίου τριγώνου βρίσκουν τη λύση του προβλήματος).

Στον πίνακα 12, παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης της κάθε μίας από τις παραπάνω 5 λύσεις που έδωσαν οι μαθητές για το πρόβλημα 3. Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό 35,1% αντιστοιχεί σε δύο λύσεις (P3the, P3rec), οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες λύσεων. Ενώ το μικρότερο ποσοστό 10.8% εμφανίζεται στην λύση (P3par), στην οποία οι μαθητές καλούνται να απομονώσουν τα επιμέρους στοιχεία του τριγώνου, να φέρουν την βοηθητική ευθεία για σχηματισμό του παραλληλογράμμου (ένδειξη λειτουργικής κατανόησης) και στην συνέχεια να εμφανίσουν το υποσχήμα (μερολογική τροποποίηση) για να εφαρμόσουν τις ιδιότητες του.



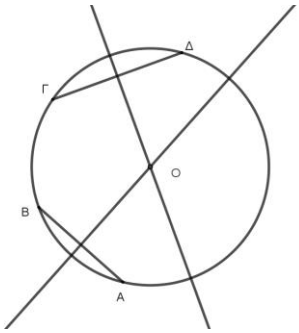
Πίνακας 12. Ποσοστό εμφάνισης της κάθε λύσης στο σύνολο των μαθητών.

Στο τέταρτο πρόβλημα, οι μαθητές έδωσαν 7 διαφορετικές ποιοτικά λύσεις, οι οποίες διάφεραν ως προς τις στρατηγικές και τις ιδιότητες που χρησιμοποίησαν. Οι 7 αυτές λύσεις χωρίστηκαν σε τέσσερις ομάδες λύσεων ανάλογα την στρατηγική που ακολουθούν. Στην πρώτη ομάδα, η κεντρική στρατηγική είναι ότι η μεσοκάθετος σε μια χορδή του κύκλου διέρχεται από το κέντρο του και περιλαμβάνει τρεις λύσεις (P4cho, P4par, P4egt). Η δεύτερη ομάδα λύσεων, περιλαμβάνει μία λύση και η κύρια στρατηγική είναι ότι η ορθή γωνία βαίνει σε ημικύκλιο (P4orm). Η τρίτη ομάδα λύσεων περιλαμβάνει δύο λύσεις (P4bis, P4squ), και κύρια στρατηγική είναι η κατασκευή διχοτόμων περιγεγραμένων σχημάτων οι οποίες περνούν από το κέντρο του κύκλου, ενώ η τέταρτη ομάδα περιλαμβάνει μία λύση (P4tan) και αφορά την κατασκευή εφαπτομένων του κύκλου και τις καθέτους στο σημείο επαφής οι οποίες διέρχονται από το κέντρο του.

<u>Πρώτη ομάδα λύσεων</u> (Χορδή & Μεσοκάθετος)

<u>1α Λύση</u> (P4cho)

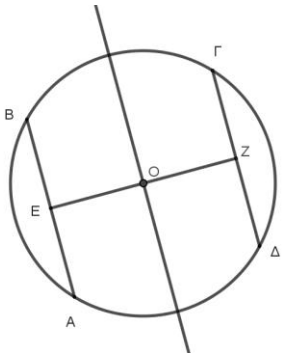
Έστω δύο μη παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ του κύκλου. Φέρω τις μεσοκαθέτους τους (ε1) και (ε2) αντίστοιχα.



Το σημείο τομής τους Ο, θα είναι το κέντρο του κύκλου.

<u>1$^{\beta}$ Τρόπος</u> (P4par)

Σχεδιάζουμε δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ παράλληλες και ίσες.

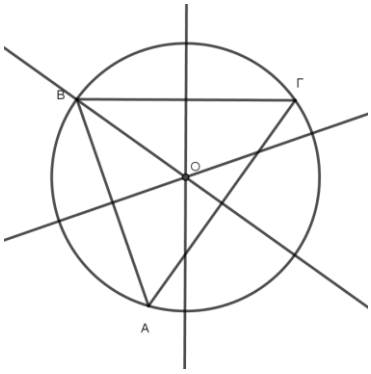


Ενώνουμε τα Ε και Ζ, τα οποία είναι μέσα των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ θα περνάει από το κέντρο του κύκλου. Φέρω μεσοκάθετη στο ΕΖ. Το σημείο τομής των δύο ευθειών θα είναι το κέντρο Ο του κύκλου.

<u>1^{Y} Τρόπος</u> (P4egt)

Εγγράφουμε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ στον κύκλο και φέρουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τις (ε1), (ε2), (ε3) αντίστοιχα.

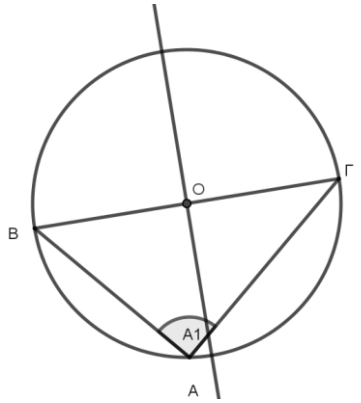


Το σημείο τομής τους Ο θα είναι το κέντρο του κύκλου (περίκεντρο).

<u>Δεύτερη Ομάδα Λύσεων</u> (Ορθή) – (P4orm)

Έστω δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΑΓ του κύκλου.

Αφού η Γωνία A_1 είναι 90° η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου.



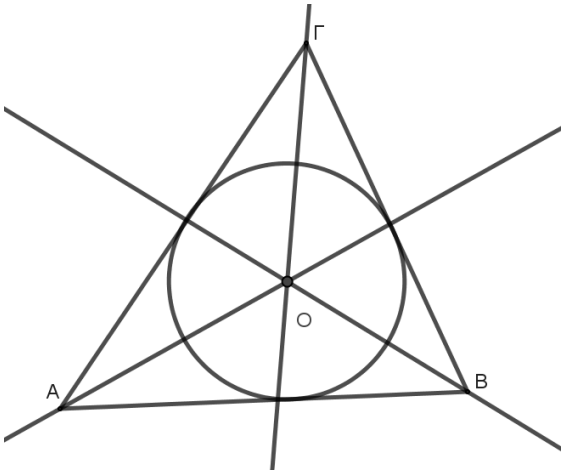
Φέρουμε τη μεσοκάθετο (ε1) της ΒΓ.

Το σημείο τομής τους Ο θα είναι το κέντρο του κύκλου.

<u>Τρίτη Ομάδα Λύσεων</u> (Διχοτόμος)

<u>$3^α$ Τρόπος</u> (P4bis)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ που και οι τρεις πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.



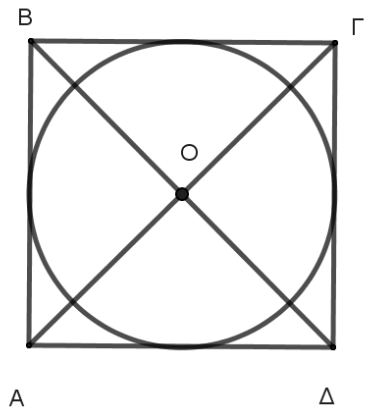
Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών Α, Β, Γ. Τότε αυτές θα διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο θα είναι το κέντρο του κύκλου (έγκεντρο).

<u>$3^β$ Τρόπος</u> (P4squ)

Έστω ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο τετράγωνο του κύκλου.

Φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ που θα είναι και διχοτόμοι των γωνιών.

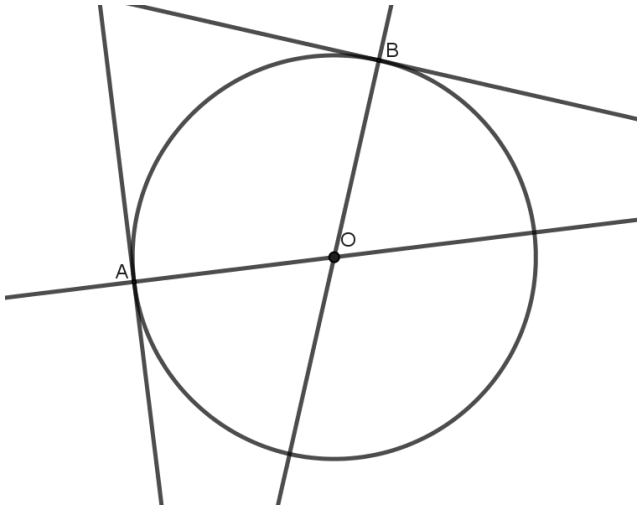
Το σημείο τομής τους Ο θα είναι το κέντρο του κύκλου.



<u>Τέταρτη Ομάδα Λύσεων</u> (Εφαπτομένη) – (P4tan)

Φέρνουμε μια τυχαία εφαπτομένη (ε1) του κύκλου και έστω Α το σημείο επαφής.

Φέρουμε κάθετη (ε3) στην (ε1) στο σημείο Α. Αυτή θα περνάει από το κέντρο του κύκλου.



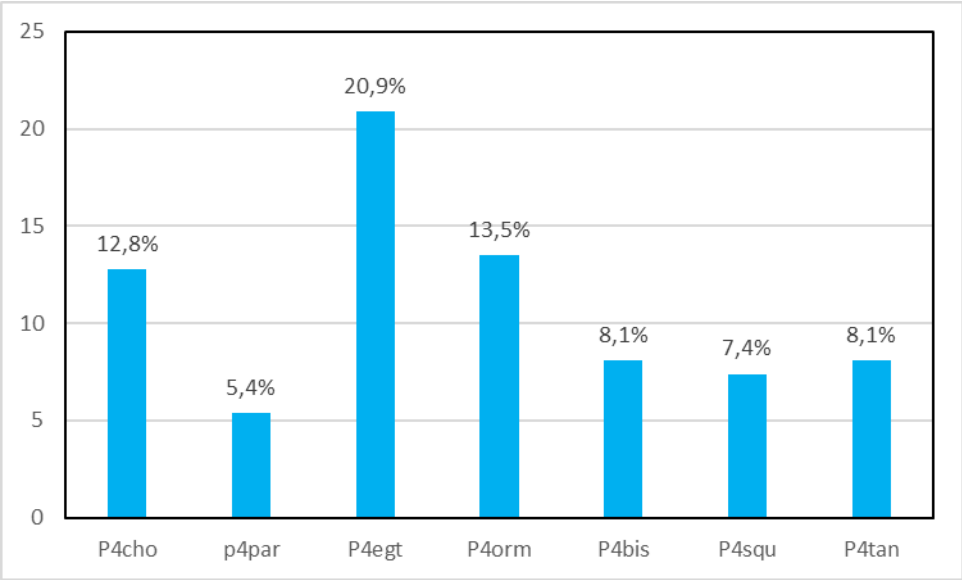
Ομοίως, έστω (ε2) μια άλλη εφαπτομένη και φέρουμε κάθετη (ε4) στο σημείο επαφής Β.

Το σημείο τομής Ο των (ε3) και (ε4) θα είναι το κέντρο του κύκλου.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι φανερό ότι οι μαθητές, για να παράγουν όλες τις λύσεις κατέχουν και τα 4 είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος: ακολουθιακή (εφόσον κατασκευάζουν το σχήμα από την αρχή οργανώνοντάς τις στοιχειώδεις μονάδες του σχήματος μέσα από κατασκευαστικούς περιορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες), αντιληπτική (εφόσον αντιλαμβάνονται πλήρως τα διάφορα υποσχήματα που εμφανίζονται στον κύκλο), λεκτική (εφόσον αποδεικνύουν το ζητούμενο βασιζόμενοι σε ιδιότητες και θεωρήματα), και λειτουργική κατανόηση (εφόσον φέρνοντας τις βοηθητικές κατασκευές καταλλήγουν στην λύση του προβλήματος).

Στον πίνακα 13, παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης της κάθε μίας από τις παραπάνω 7 λύσεις που έδωσαν οι μαθητές για το πρόβλημα 4. Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό 20,9% αντιστοιχεί στην λύση (P3egt), η οποία είναι εφαρμογή γνωστού θεωρήματος το οποίο είχαν διδαχθεί την προηγούμενη χρονιά, ενώ το μικρότερο ποσοστό 5,4% εμφανίζεται στην λύση (P4par) η οποία είναι μια μη συμβατική λύση.



Πίνακας 13. Ποσοστό εμφάνισης της κάθε λύσης στο σύνολο των μαθητών.

Στον παρακάτω πίνακα 14, παρουσιάζεται ο μέσος όρος ευελιξίας των μαθητών και για τα 4 προβλήματα. Παρατηρούμε, ότι ο μέσος όρος είναι 33,81, ενώ η διάμεσος είναι 30. Η ελάχιστη τιμή είναι 0 ενώ η μέγιστη τιμή είναι 111 και πρόκειται για μια πολύ μεγάλη τιμή και ο μαθητής που συγκέντρωσε αυτή την τιμή χαρακτηρίζεται από υψηλή ικανότητα γεωμετρικής απόδειξης και μεγάλη ευελιξία στις λύσεις του.

Αριθμός Μαθητών	**Μέσος Όρος**	**Τυπική Απόκλιση**	**Διάμεσος**	**Ελάχιστη Τιμή**	**Μέγιστη Τιμή**
147	33,81	20,27	30	0	111

Πίνακας 14. Μέσος όρος ευελιξίας λύσεων των μαθητών και στα 4 προβλήματα.

Συμπέρασμα: Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων σε προβλήματα γεωμετρίας, ενισχύεται από την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου. Η ένδειξη λειτουργικής κατανόησης του σχήματος από τους μαθητές, φαίνεται να τους βοηθά να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ των γεωμετρικών γνώσεών τους και είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας για την κατασκευή πολλαπλών γεωμετρικών αποδείξεων. Τέλος, οι μαθητές με αυξημένη λειτουργική κατανόηση του σχήματος αφού έχουν οπτικοποιήσει το αποτέλεσμα, φέρνοντας βοηθητικές κατασκευές στο σχήμα τους, παράγουν πιο καινοτόμες και μη συμβατικές λύσεις.

4.1.3 Σκορ δημιουργικότητας ενσωματωμένο σε κάθε πρόβλημα.

Στους παρακάτω τέσσερις πίνακες 15, 16, 17 & 18 παρουσιάζεται το σκορ της δημιουργικότητας, το οποίο είναι ενσωματωμένο σε κάθε ένα από τα τέσσερα προβλήματα και προήλθε από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές.

Πρόβλημα 1					
		Ευχέρεια	Ευελιξία Flx_i	Πρωτοτυπία Or_i	Δημιουργικότητα $Cr_i = Flx_i * Or_i$
1.1	P1med1	1	10	0.1	1
1.2	P1med2	1	1 ή (0.1)	0.1	0.01
1.3	P1com1	1	1	0.1	0.1
1.4	P1com2	1	1 ή (0.1)	0.1	0.01
1.5	P1cir	1	10	10	100
1.6	P1dom	1	10	1	10
1.7	P1dot	1	1	1	1
1.8	P1sim1	1	10	10	100
1.9	P1sim2	1	1	10	1
1.10	P1ext	1	10	10	100
	Σύνολο	10	53.2	42.4	313.12
	Μέγιστη δημιουργικότητα για το πρόβλημα				3131.2

Πίνακας 15. Δημιουργικότητα ενσωματωμένη στο πρόβλημα 1.

Πρόβλημα 2					
		Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Δημιουργικότητα
2.1	P2mid1	1	10	10	100
2.2	P2mid2	1	1	10	10
2.3	P2iso	1	10	0.1	1
2.4	P2sim	1	1	0.1	0.1
2.5	P2rho	1	10	10	100
	Σύνολο	5	32	30.2	211.1
	Μέγιστη δημιουργικότητα για το πρόβλημα				1055.5

Πίνακας 16. Δημιουργικότητα ενσωματωμένη στο πρόβλημα 2.

Πρόβλημα 3					
		Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Δημιουργικότητα
3.1	P3the	1	10	0.1	1
3.2	P3par	1	1	0.1	0.1
3.3	P3sim	1	10	10	100
3.4	P3rec	1	10	0.1	1
3.5	P3com	1	1	0.1	0.1
	Σύνολο	5	32	10.4	102.2
	Μέγιστη δημιουργικότητα για το πρόβλημα				511

Πίνακας 17. Δημιουργικότητα ενσωματωμένη στο πρόβλημα 3.

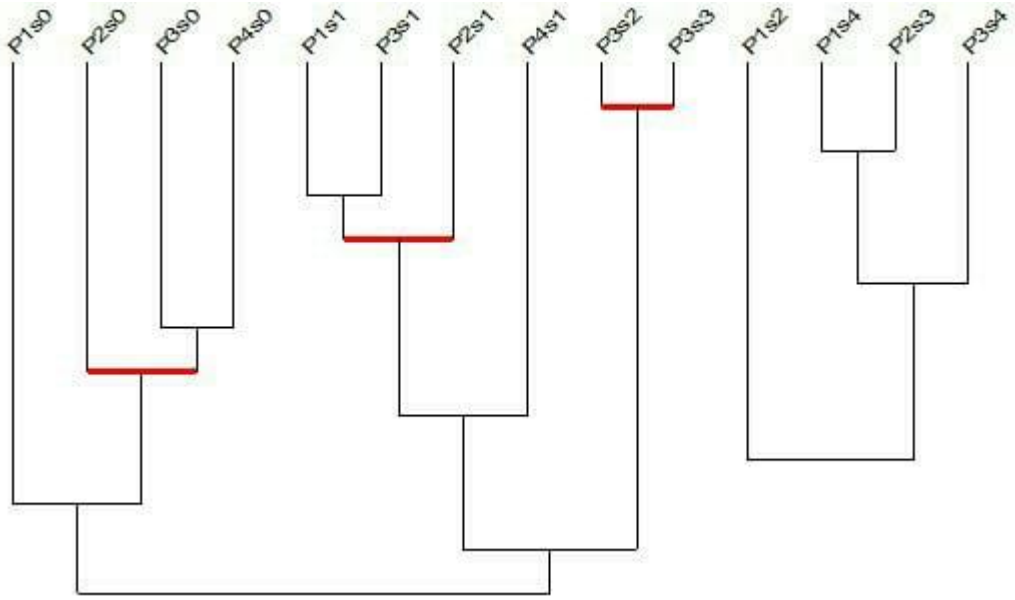
Πρόβλημα 4					
		Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Δημιουργικότητα
4.1	P4cho	1	10	1	10
4.2	P4par	1	1	1	1
4.3	P4egt	1	1	1	1
4.4	P4orm	1	10	10	100
4.5	P4bis	1	10	1	10
4.6	P4squ	1	1	1	1
4.7	P4tan	1	10	10	100
	Σύνολο	7	43	25	223
	Μέγιστη δημιουργικότητα για το πρόβλημα				1561

Πίνακας 18. Δημιουργικότητα ενσωματωμένη στο πρόβλημα 4.

Παρατηρούμε ότι το πιο δημιουργικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα 1, καθώς συγκεντρώνει βαθμολογία 3131.2 και οφείλεται κυρίως στην ευχέρεια των λύσεων καθώς παρουσιάστηκαν 10 διαφορετικές λύσεις που στην ουσία είναι 5 και οι υπόλοιπες 5 χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις στο τρίγωνο. Το λιγότερο δημιουργικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα 3, καθώς συγκεντρώνει βαθμολογία 511 και θα λέγαμε ότι είναι το πιο εύκολο για τους μαθητές σε σχέση με τα υπόλοιπα.

4.2 Αποτελέσματα Διαγραμμάτων Ομοιότητας και Συνεπαγωγικών Διαγραμμάτων

Στο παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας 2, το οποίο αφορά την ικανότητα παραγωγής λύσεων των μαθητών, παρατηρούνται δύο σημαντικές ομάδες ομοιότητας, οι οποίες ουσιαστικά είναι τρεις.



Διάγραμμα Ομοιότητας 2

Η πρώτη ομάδα αποτελείται από δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s0, P2s0, P3s0, P4s0), δηλαδή η πρώτη υποομάδα είναι η πιο σαφής απ' όλες και αφορά τους μαθητές που χαρακτηρίζονται από μειωμένη ικανότητα απόδειξης. Δεν γίνεται καμία διάκριση ως προς τις ασκήσεις που δίνεται το σχήμα (1 & 3) και τις ασκήσεις που δεν δίνεται το σχήμα (2 & 4). Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται και αυτή από δυο άλλες υποομάδες. Η πρώτη περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s1, P2s1, P3s1, P4s1), ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P3s2, P3s3). Η πρώτη αυτή υποομάδα έχει επίσης σαφή χαρακτήρα και περιλαμβάνει τους μαθητές που επιλύουν και τις τέσσερις ασκήσεις με έναν τρόπο, ανεξάρτητα αν τους δίνεται το σχήμα ή όχι στην άσκηση. Η υποομάδα αυτή συνδέεται με μια μικρή υποομάδα (P3s2, P3s3) που αφορά τους μαθητές οι οποίοι έλυσαν την τρίτη άσκηση όπου δίνεται το σχήμα, με δύο ή τρεις τρόπους. Αυτή η δεύτερη μεγάλη υποομάδα αντιπροσωπεύει την ομάδα μαθητών μιας λύσης με μια μικρή επέκταση σε μαθητές δύο και τριών λύσεων σε μια συγκεκριμένη άσκηση.

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s2, P1s4, P2s3, P3s4) και αντιστοιχεί στους μαθητές που χαρακτηρίζονται από μεγάλη ευχέρεια και πιθανόν από μεγάλη ευελιξία στις λύσεις τους. Πράγματι, εφόσον δίνουν 2, 3 ή 4 λύσεις σημαίνει ότι έχουν ευχέρεια στην παραγωγή λύσεων, ενώ από την άλλη πλευρά προφανώς μεταβαίνουν από την μια λύση στην άλλη, χρησιμοποιώντας διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες και αναπαραστάσεις, άρα χαρακτηρίζονται από υψηλή ευελιξία λύσεων.

Από το διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε ότι έχουν δημιουργηθεί 12 κόμβοι ομοιότητας:

- Κόμβος 1: (P3s2 P3s3) ομοιότητα: 1
- Κόμβος 2: (P1s4 P2s3) ομοιότητα: 0.998966
- Κόμβος 3: (P1s1 P3s1) ομοιότητα: 0.998164
- Κόμβος 4: ((P1s1 P3s1) P2s1) ομοιότητα: 0.991318
- Κόμβος 5: ((P1s4 P2s3) P3s4) ομοιότητα: 0.980015
- Κόμβος 6: (P3s0 P4s0) ομοιότητα: 0.974375
- Κόμβος 7: (P2s0 (P3s0 P4s0)) ομοιότητα: 0.925971
- Κόμβος 8: (((P1s1 P3s1) P2s1) P4s1) ομοιότητα: 0.897859
- Κόμβος 9: (P1s2 ((P1s4 P2s3) P3s4)) ομοιότητα: 0.709037
- Κόμβος 10: (P1s0 (P2s0 (P3s0 P4s0))) ομοιότητα: 0.635455
- Κόμβος 11: ((((P1s1 P3s1) P2s1) P4s1) (P3s2 P3s3)) ομοιότητα: 0.548296
- Κόμβος 12: ((P1s0 (P2s0 (P3s0 P4s0))) ((((P1s1 P3s1) P2s1) P4s1) (P3s2 P3s3))) ομοιότητα: 0.02276

Σημαντικοί κόμβοι:

- στο επίπεδο: 1
- στο επίπεδο: 4
- στο επίπεδο: 7

Ο πιο σημαντικός κόμβος είναι στο επίπεδο 1.

Σχηματικά θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης με το παρακάτω σχήμα.

Ομάδα 1: Μηδενική ευχέρεια και ευελιξία λύσεων
Ομάδα 2: Μέτρια ευχέρεια λύσεων
Ομάδα 3: Υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων

Σχήμα 4. Ομάδες ευχέρειας – ευελιξίας.

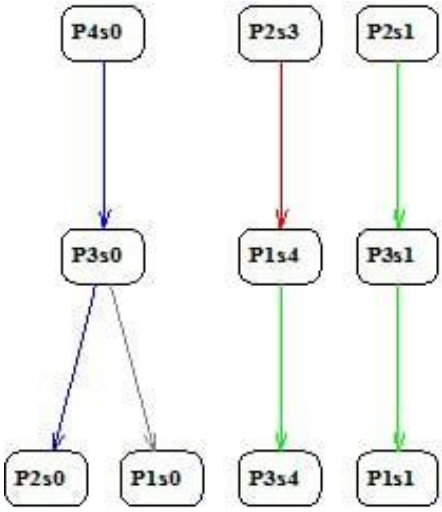
Παρατηρείται διαφορά ως προς τον αριθμό των μαθητών που ανήκουν σε κάθε μια από τις παραπάνω ομάδες, με τους περισσότερους μαθητές να συγκεντρώνονται στις ομάδες μηδενικής και μέτριας ευχέρειας. Ο αριθμός των μαθητών με μηδενική ευχέρεια σε τουλάχιστον 1 πρόβλημα είναι 50, ο αριθμός μαθητών μέτριας ευχέρειας και ευελιξίας (μία λύση) σε τουλάχιστον 1 πρόβλημα είναι 66, ο αριθμός μαθητών με δύο λύσεις σε τουλάχιστον 1 πρόβλημα είναι 25, ενώ ο αριθμός μαθητών με υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων σε τουλάχιστον 1 πρόβλημα είναι 6. Στόχος της διδασκαλίας είναι να περάσουν όσο το δυνατόν περισσότεροι μαθητές από τις ομάδες 1 και 2 στην ομάδα 3, δηλαδή την ομάδα με υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων. Αυτό είναι πιο εύκολο να γίνει καταρχήν με προβλήματα στα οποία δίνεται το γεωμετρικό σχήμα. Πράγματι, παρατηρούμε ότι από το προηγούμενο διάγραμμα ομοιότητας απουσιάζουν και η άσκηση 2 και η άσκηση 4 με μαθητές να παρουσιάζουν 4 τουλάχιστον λύσεις.

Τα συνεπαγωγικά διαγράμματα που ακολουθούν διαμορφώθηκαν με βάση το πλήθος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές στα 4 προβλήματα που τους δόθηκαν.

Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 1

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα 1 διακρίνουμε μια ισχυρή συνεπαγωγική αλυσίδα, η οποία ισχύει σε επίπεδο σημαντικότητας 99% και είναι η (P2s3 → P1s4). Αυτή η αλυσίδα μας λέει ότι οι μαθητές οι οποίοι έχουν υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων και επιτυγχάνουν τρεις λύσεις στο δεύτερο πρόβλημα που δίνεται χωρίς το σχήμα, επιδεικνύουν επίσης και υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων στο πρώτο πρόβλημα το οποίο δίνεται με το σχήμα, καθώς επιτυγχάνουν τέσσερις λύσεις. Βλέπουμε λοιπόν να σχηματίζεται μια ισχυρή συνεπαγωγική σχέση των μαθητών οι οποίοι επιδεικνύουν αυξημένη ικανότητα γεωμετρικής απόδειξης.

Στο παρακάτω συνεπαγωγικό διάγραμμα 2, δεχόμαστε συνεπαγωγές σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (κόκκινο χρώμα), 95% (μπλε χρώμα), 90% (πράσινο χρώμα), 80% (μαύρο χρώμα).



Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 2

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα αυτό διακρίνονται σαφώς τρεις ανεξάρτητες συνεπαγωγικές αλυσίδες, που αντιστοιχούν:

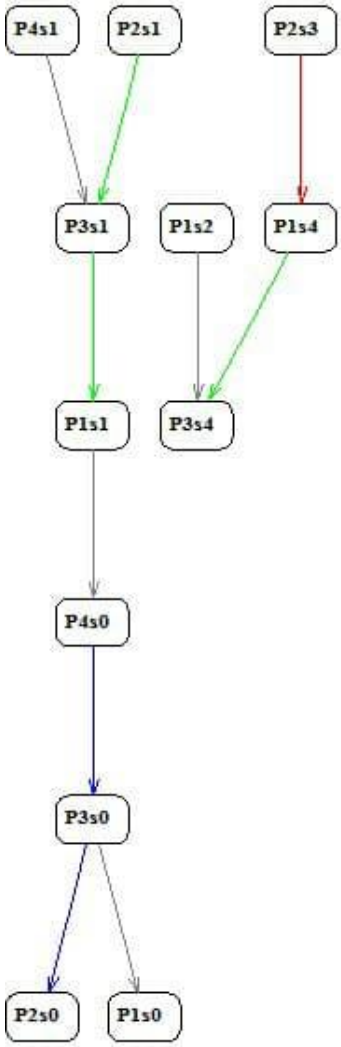
- Η πρώτη (P4s0 → P3s0 → P2s0, P1s0) που αντιστοιχεί στην μηδενική λύση.
- Η δεύτερη (P2s3 → P1s4 → P3s4) που αντιστοιχεί σε τρεις ή τέσσερις λύσεις.
- Η τρίτη (P2s1 → P3s1 → P1s1) που αντιστοιχεί στην μοναδική λύση.

Αυτές οι τρεις συνεπαγωγικές αλυσίδες αντιστοιχούν ουσιαστικά στα τρία διαφορετικά "γνωστικά στυλ απόδειξης", δηλαδή το γνωστικό στυλ μηδενικής ευχέρειας, το γνωστικό στυλ μέτριας ευχέρειας και το γνωστικό στυλ υψηλής ευχέρειας και ευελιξίας λύσεων.

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να εξάγουμε από το συνεπαγωγικό διάγραμμα 2, είναι ότι και οι τρεις αλυσίδες έχουν ως αφετηρία πρόβλημα που δεν δίνεται το σχήμα, δηλαδή τα προβλήματα 2 και 4. Η πρώτη αλυσίδα ξεκινά με την μεταβλητή P4s0, δηλαδή τα άτομα που δεν μπόρεσαν να λύσουν το πρόβλημα 4, η δεύτερη αλυσίδα ξεκινά με την μεταβλητή P2s3, δηλαδή τα άτομα που έλυσαν το δεύτερο πρόβλημα με 3 τρόπους, ενώ η τρίτη αλυσίδα ξεκινά με την μεταβλητή P2s1, δηλαδή τα άτομα που έλυσαν το πρόβλημα 2 με έναν τρόπο.

Υποβιβάζοντας τον δείκτη συνεπαγωγής από 80 σε 75 (μαύρο χρώμα) και κρατώντας τους άλλους δείκτες σταθερούς, καταλήγουμε σε δύο συνεπαγωγικές αλυσίδες οι οποίες παρουσιάζονται το συνεπαγωγικό διάγραμμα 3.

- Η πρώτη αλυσίδα περιλαμβάνει: (P4s1, P2s1 → P3s1 → P1s1 →P4s0 → P3s0 → P2s0, P1s0).
- Η δεύτερη αλυσίδα περιλαμβάνει: (P2s3 → P1s4, P1s2 →P3s4).



Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 3

Επομένως, με βάση το συνεπαγωγικό διάγραμμα 3, όπου οι συνδέσεις είναι πιο ισχυρές από τις συνδέσεις ομοιότητας, παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο αλυσίδες οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο «γνωστικά στυλ» απόδειξης. Η πρώτη αλυσίδα αντιστοιχεί στους μαθητές με μηδενική ή χαμηλή ευχέρεια λύσεων και παρατηρούμε ότι έχει ως αφετηρία μαθητές που έλυσαν τα προβλήματα 2 και 4 (που δόθηκαν χωρίς σχήμα) με έναν τρόπο. Η δεύτερη αλυσίδα περιλαμβάνει τους μαθητές με υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων καθώς ξεκινά με τους μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα 2 με 3 τρόπους και μπορούμε να εξάγουμε τον ισχυρισμό ότι οι μαθητές αυτοί έχουν την ικανότητα να επιλύσουν το πρόβλημα 1 με 4 τρόπους και το πρόβλημα 3 πάλι με 4. Επιπλέον μας λέει ότι οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα 1 με 2 τρόπους καταφέρνουν να λύσουν το πρόβλημα 3 με 4 τρόπους. Φαίνεται λοιπόν, ότι η ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων στο πρόβλημα 2, συνεπάγεται πολλαπλές λύσεις και στα υπόλοιπα προβλήματα, αλλά και η ικανότητα παραγωγής πολλών λύσεων στο πρόβλημα 1 που δίνεται το σχήμα είναι παράγοντας πρόβλεψης για την παραγωγή πολλαπλών λύσεων στο πρόβλημα 3 όπου και εκεί δίνεται το τρίγωνο.

4.3 Αποτελέσματα Επαγωγικής Στατιστικής

Με βάση τα αποτελέσματα του στατιστικού ελέγχου t τα οποία παρουσιάζονται στον πίνακα 19, διαφαίνεται ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές (t=2.281, df=145, p<0.05) στο μέσο όρο της επίδοσης των αγοριών (M=164,6453, SD=252,97992) από τον μέσο όρο της επίδοσης των κοριτσιών (M=85.5565, SD=153.32107) στη δημιουργικότητα στα 4 προβλήματα πολλαπλών λύσεων σε επίπεδο p=0.05. Μάλιστα, αυτή η διαφορά στην δημιουργικότητα ανάμεσα στα δύο φύλλα, οφείλεται στο ότι τα αγόρια είναι πιο πρωτότυπα στις λύσεις τους (M=8.751, SD=9.7150) σε σχέση με τα κορίτσια (M=4.799, SD=7.1657) σε επίπεδο p=0.05 (t=2.798, df=145, p=0.006), ενώ η ευχέρεια και η ευελιξία στα δύο φύλλα δεν παρουσιάζει στατιστικά σημαντικές διαφορές (p>0.05).

	$\bar{x}$	SD	t	df	p
Αγόρια	164.64	252.97	2.881	145	P<0.05
Κορίτσια	85.55	153.32			

Πίνακας 19. Μέση επίδοση δημιουργικότητας αγοριών και κοριτσιών στα 4 προβλήματα.

Στην συνέχεια πραγματοποιήθηκε ανάλυση διακύμανσης (Analysis of Variance – ANOVA), με σκοπό να δούμε αν υπάρχει διαφορά στην δημιουργικότητα των μαθητών μεταξύ των 5 σχολείων από τα οποία συλλέξαμε το δείγμα. Ο έλεγχος Anova μας δείχνει ότι δεν υπάρχει ομοιογένεια μεταξύ των σχολείων (F=2.056, p=0.090), οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε σε έλεγχο για να δούμε αν υπάρχει διαφορά μεταξύ των σχολείων.

Στον πίνακα 20 ύστερα από ανάλυση Paired samples t-test παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών ως προς το πλήθος των λύσεων (ευχέρεια) που έδωσαν στα προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 1 και 3 (M=2.16, SD=1.422), και στα προβλήματα που δόθηκαν χωρίς σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 2 και 4 (M=1.442, SD=1.2057). Όπως προκύπτει από την ανάλυση, παρουσιάζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στο πλήθος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές ανάλογα αν τους δινόταν το σχήμα ή όχι, με εμφανώς καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα όπου το σχήμα είχε δοθεί (t=6.021, df=146, p<0.001).

	$\bar{x}$	SD	t	df	p
Flu1_3	2.16	1.422	6.021	146	P<0.001
Flu2_4	1.442	1.2057			

Πίνακας 20. Μέση επίδοση ευχέρειας λύσεων σε προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα και χωρίς σχήμα.

Στον πίνακα 21 ύστερα από ανάλυση paired samples t-test παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών ως προς την ευελιξία των λύσεων στα προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 1 και 3 (M=19.881, SD=12.6513), και στα προβλήματα που δόθηκαν χωρίς σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 2 και 4 (M=13.93, SD=11.370). Όπως προκύπτει από την ανάλυση, παρουσιάζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην ευελιξία των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές ανάλογα αν τους δινόταν το σχήμα ή όχι, με εμφανώς καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα όπου το σχήμα είχε δοθεί (t=5.571, df=146, p<0.001).

	x̄	**SD**	**t**	**df**	**p**
Fle1_3	19.881	12.6513	5.571	146	P<0.001
Fle2_4	13.93	11.370			

Πίνακας 21. Μέση επίδοση ευελιξίας λύσεων σε προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα και χωρίς σχήμα.

Στον πίνακα 22 ύστερα από ανάλυση paired samples t-test παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών ως προς την πρωτοτυπία των λύσεων στα προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 1 και 3 (M=2.891, SD=5.0019), και στα προβλήματα που δόθηκαν χωρίς σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 2 και 4 (M=3.925, SD=5.9893). Όπως προκύπτει από την ανάλυση, δεν παρουσιάζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην πρωτοτυπία των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές ανάλογα αν τους δινόταν το σχήμα ή όχι (t=-1.868, df=146, p=0.064). Παρόλο που παρατηρήσαμε ότι η ευχέρεια και η ευελιξία των μαθητών κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα όταν τους δίνετε το σχήμα, δεν συμβαίνει το ίδιο και με την πρωτοτυπία των λύσεων, γεγονός που οφείλεται στο ότι η πρωτοτυπία είναι πιο εγγενές χαρακτηριστικό και δεν επηρεάζεται από το αν δίνετε ή όχι το γεωμετρικό σχήμα στην εκφώνηση της άσκησης.

	x̄	**SD**	**t**	**df**	**p**
Or1_3	2.891	5.0019	-1.868	146	p>0.05
Or2_4	3.925	5.9893			

Πίνακας 22. Μέση επίδοση πρωτοτυπίας λύσεων σε προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα και χωρίς σχήμα.

Στον πίνακα 23 ύστερα από ανάλυση paired samples t-test, παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών ως προς την δημιουργικότητα των λύσεων στα προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 1 και 3 (M=58.7018, SD=121.93243), και στα προβλήματα που δόθηκαν χωρίς σχήμα, δηλαδή στα προβλήματα 2 και 4 (M=67.274, SD=136.4838). Όπως

προκύπτει από την ανάλυση, δεν παρουσιάζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στην δημιουργικότητα των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές ανάλογα αν τους δινόταν το σχήμα ή όχι (t=-0.708, df=146, p>0.05). Παρόλο που παρατηρήσαμε ότι η ευχέρεια και η ευελιξία των μαθητών κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα όταν τους δίνετε το σχήμα, δεν συμβαίνει το ίδιο και με την πρωτοτυπία των λύσεων και την δημιουργικότητα, γεγονός που οφείλεται στο ότι η δημιουργικότητα των μαθητών φαίνεται να συνδέεται στενά με την πρωτοτυπία των λύσεων.

	x̄	**SD**	**t**	**df**	**p**
Cr1_3	58.701	121.932	-0.708	146	p>0.05
Cr2_4	67.274	136.483			

Πίνακας 23. Μέση επίδοση δημιουργικότητας μαθητών σε προβλήματα που δόθηκαν με σχήμα και χωρίς σχήμα.

4.4 Ποιοτικά Αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις.

Επιλέξαμε δύο μαθητές σε συνέντευξη για να ελέγξουμε πως αναπτύσσεται η γεωμετρική τους σκέψη και οι δημιουργικές τους ικανότητες (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία), κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους στη γεωμετρία. Οι δύο αυτοί μαθητές σύμφωνα με τους δασκάλους τους είναι δυνατοί λύτες στα μαθηματικά. Οι μαθητές αυτοί προέρχονται από το ίδιο σχολείο και από σχολείο που συμμετείχε στην έρευνα, οπότε οι επιδόσεις τους στις συνεντεύξεις είναι ενδεικτικές με τις αποδόσεις των άλλων μαθητών που έλαβαν μέρος στην γραπτή δοκιμασία. Η διαδικασία επίλυσης με πολλαπλούς τρόπους ήταν πρωτόγνωρη για τους μαθητές, καθώς μας είπαν ότι συνήθως επιλύουν προβλήματα στα οποία η μια λύση είναι αρκετή. Στην αρχική ερώτηση για το ποια δύο προβλήματα θα επέλεγαν αν τους δινόταν η ευκαιρία, ο μαθητής 1 επέλεξε τα προβλήματα 1 και 3 για τον λόγο ότι του δίνεται το σχήμα και δεν υπάρχει κίνδυνος να κάνει λάθος, ενώ ο μαθητής 2 επέλεξε τα προβλήματα 2 και 4, το 4 γιατί του φάνηκε εύκολο και σκέφτηκε αμέσως έναν τρόπο και το πρόβλημα 2 γιατί του κινείσαι την περιέργεια και θα ήθελε να δει πως λύνεται.

<u>Μαθητής 1</u>

* Μ: Μαθητής, **Π: Παναγιώτης

Ο μαθητής 1, ξεκίνησε από το πρόβλημα 1 και προσπάθησε να κάνει κάποια σύγκριση τριγώνων στο σχήμα που είχε. Δεν μπορούσε να βγάλει κάτι και στην συνέχεια θέλησε να τα παρατήσει.

10. Μ: Δεν είμαι και τόσο καλός στην γεωμετρία.

11. Μ: Εδώ, το θυμάμαι αυτό σαν θεωρία αλλά δεν θυμάμαι την απόδειξή του, η πρώτη σκέψη που μου ήρθε είναι να συγκρίνω τα τρίγωνα.

12. Π: Ποια τρίγωνα;

13. Μ: Τα ΑΔΓ και ΑΔΒ.

14. Π: Τι θα μπορούσες να βγάλεις από αυτό;

15. Μ: Καταρχάς έχουν κοινή την ΑΔ, έχουν αυτή την γωνία ……όχι, όχι. (Παύση)

Στην συνέχεια ύστερα από παρότρυνση αποφάσισε να συνεχίσει με το πρόβλημα 3. Σε αυτό το πρόβλημα ύστερα από μια αρχική σκέψη που δεν οδήγησε κάπου, ο μαθητής κατάφερε να βρει τον πρώτο του τρόπο ο οποίος αφορά εφαρμογή δύο θεωρημάτων, δηλαδή ότι η διάμεσος σε ορθογώνιο τρίγωνο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της καθώς και ότι αν ενώσεις τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου τότε το ευθύγραμμο τμήμα θα είναι παράλληλο προς την άλλη πλευρά και ίσο με το μισό της. Αυτή η πρώτη λύση του μαθητή χαρακτηρίζεται ως συμβατική καθώς είναι αυτή που προτείνεται και από το πρόγραμμα σπουδών.

19. Μ: Ωραία, πάω στο τρίτο πρόβλημα.

20. Μ: Εδώ, άμα ένωνα το Ε με το Ζ, θα μπορούσα να τα συγκρίνω τα τρίγωνα;; ή μάλλον έτσι όπως τα βλέπω μου έρχεται το θεώρημα του Θαλή, να φέρω την παράλληλη από το Α στη ΒΓ και μετά την παράλληλη του κέντρου, ΔΕ…Εεεεε….. (παύση).

21. Π: Προσπάθησε να σκεφτείς τι γνωρίζεις και τι έχεις πει μέχρι τώρα και θα το βρεις.

22. Μ: Θυμήθηκα ένα θεώρημα, αφού έχουμε μέσα πλευρών εδώ, που λέει ότι αν ενώσεις τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου τότε το ευθύγραμμο τμήμα θα είναι παράλληλο προς την άλλη πλευρά και ίσο με το μισό της.

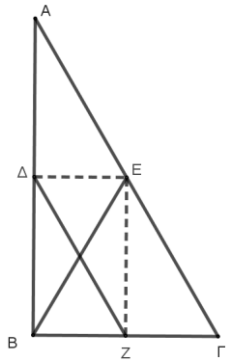
23. Π: Πολύ ωραία, και πως μπορούμε να το εφαρμόσουμε αυτό στο πρόβλημά μας;;

24. Μ: Εεε, θα πούμε ότι η ΑΓ με την ΔΖ είναι παράλληλες και ότι η ΔΖ ισούται με το μισό της ΑΓ.

Στην συνέχεια ο μαθητής παροτρύνθηκε να σκεφτεί έναν δεύτερο τρόπο. Δεν φάνηκε να δυσκολεύεται να αποσυνδέσει την σκέψη του από την πρώτη του λύση, και κοιτώντας το σχήμα σκέφτηκε να φέρει νέα στοιχεία τα οποία θα τον βοηθούσαν για δεύτερο τρόπο. Φέρνοντας δύο βοηθητικά ευθύγραμμα σχήματα, σχηματίζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και καταλήγει στον δεύτερο τρόπο επίλυσης.

28. Μ: Έτσι όπως βλέπω τις ΔΖ και ΕΒ μου έρχεται στο μυαλό να φέρω την κάθετη και να συγκρίνω τα τρίγωνα και αν τα βγάλω ίσα σημαίνει θα είναι και αυτές ίσες.

29. Π: Ωραία, για φέρε την κάθετη να δούμε.



31. Μ: Χμ, δεν μπορώ να τα συγκρίνω.. Α! Θα μπορούσα να ενώσω και αυτή (εννοεί την ΔΕ) για να φτιάξω τετράγωνο.

32. Π: Για πες μου τι έχουμε πετύχει τώρα.

33. Μ: Ότι ΕΖ//=ΔΒ και όμοια επειδή Δ και Ε μέσα, η ΔΕ θα είναι παράλληλη και ίση με την ΒΖ.

34. Π: Ωραία, άρα τώρα τι έχουμε;

35. Μ: Ένα ορθογώνιο, βασικά ένα παραλληλόγραμμο και επειδή η γωνία Β είναι ορθή θα είναι ορθογώνιο.

36. Π: Ωραία και;

37. Μ: Επειδή είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται και θα είναι και ίσες. Άρα το αποδείξαμε γιατί οι διαγώνιες είναι οι ΒΕ και οι ΔΖ που είναι το ζητούμενο.

Έχοντας ολοκληρώσει και την δεύτερη απάντηση του ο μαθητής καλείται να προχωρήσει σε έναν ακόμη τρόπο. Κοιτώντας το σχήμα, και τα εσωτερικά τρίγωνα που έχουν σχηματιστεί μετά τους μετασχηματισμούς φαίνεται να θέλει να κάνει κάποια σύγκριση τριγώνων. Τελικά, ύστερα από λίγη σκέψη καταφέρνει να φτάσει στον τρίτο τρόπο με ομοιότητα τριγώνων.

40. Π: Τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;

41. Μ: Θα μπορούσα να συγκρίνω τα ΕΒΓ με ΑΕΒ , όχι…

42. Π: Θυμήσου όλες τις σκέψεις που έκανες από την αρχή.

43. Μ: Να το δούμε με το θεώρημα του Θαλή;

44. Π: Να το δούμε.

45. Μ: Ή μάλλον θα μπορούσα να συγκρίνω τα ΒΔΖ και ΑΒΓ. Είναι και τα δύο ορθογώνια στο Β και ΑΒ/ΔΒ = ΒΓ/ΒΖ. Από αυτό μπορούμε να βγάλουμε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια;;; ναι μπορούμε και έχουν την ίδια αναλογία.

46. Π: Και πως θα προχωρήσουμε;

47. Μ: Μετά λέω πως η ΔΖ είναι το 1/2ΑΓ και λόγο του θεωρήματος η ΒΕ είναι και εκείνη το 1/2 ΑΓ άρα ΔΖ=ΒΓ.

Ο μαθητής 1 τελικά κατάφερε να λύσει το πρόβλημα 3 με 3 διαφορετικούς τρόπους οι οποίοι ανήκουν σε 3 διαφορετικές κατηγορίες χώρων λύσεων, όπως προέκυψαν από το σύνολο των μαθητών. Για αυτό το πρόβλημα ο μαθητής μπορεί να χαρακτηριστεί από υψηλή ευχέρεια και ευελιξία στις λύσεις του. Στην συνέχεια προχώρησε στο πρόβλημα 2. Ο μαθητής διαβάζοντας αρχικά το πρόβλημα, φαίνεται να αντιμετωπίζει πρόβλημα στον σχεδιασμό του σχήματος. Τελικά ύστερα από συζήτηση με τον ερευνητή καταφέρνει να σχεδιάσει σωστά το ζητούμενο.

53. Μ: Τυχαία σημεία το Δ και το Ε του κύκλου;

54. Π: Διάβασε τι σου λέει.

55. Μ: Α, κάπως εδώ το ένα και κάπως εδώ το άλλο;

56. Π: Τι σου λέει διάβασε.

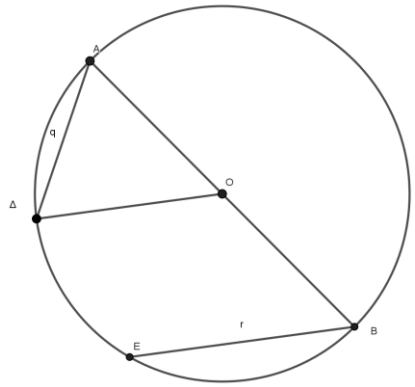
57. Μ: Α, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ.

58. Μ: Να το κάνω έτσι;

59. Π: Κάνε το.

60. Μ: Και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ, που τέμνονται αυτά;; Δεν τέμνονται.

(ο μαθητής έχει σχεδιάσει μέχρι αυτό το σημείο)



61. Π: Δεν τέμνονται;;

62. Μ: Όχι.

63. Π: Άρα, θα είναι παράλληλες;;

64. Μ: Όχι, δεν γίνεται να είναι παράλληλες εκτός και δεν το έχω σχεδιάσει σωστά.

65. Π: Σωστά το έχεις σχεδιάσει. Σκέψου.

66. Μ: Α, πρέπει να τις προεκτείνουμε για να δούμε που τέμνονται.

Ο μαθητής αφού διαβάζει το πρόβλημα διατυπώνει την σκέψη του ότι πρέπει να δείξει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές για να αποδείξει το ζητούμενο. Παρόλο την σωστή αρχική του σκέψη ο μαθητής φαίνεται να δυσκολεύεται να αποδείξει ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες. Τελικά, ύστερα από κάποιες διαφορετικές σκέψεις καταλήγει στην μια και μοναδική λύση που έδωσε, η οποία βασίζεται σε ίσες αντίστοιχες γωνίες. Παρατηρούμε, ότι ενώ ο μαθητής στο προηγούμενο πρόβλημα που το σχήμα δινόταν κατάφερε να βρει 3 τρόπους, εδώ υλοποίησε έναν τρόπο απόδειξης.

72. Μ: Το πρώτο πράγμα που σκέφτομαι είναι επειδή σχηματίζεται αυτό το τρίγωνο άμα δείξω ότι είναι ισοσκελές τότε αυτά τα δύο θα είναι ίσα.

73. Π: Ωραία σκέψη, πως θα το δείξουμε;;

74. Μ: Για να είναι ισοσκελές πρέπει να έχουμε αυτές τις δύο γωνίες ίσες (δείχνει την γωνία Α και την γωνία Γ).

75. Π: Χρειάζεσαι κάτι άλλο;

76. Μ: Όχι.

77. Π: Ωραία, απόδειξέ το.

78. Μ: Τα δεδομένα μου είναι ότι ΑΟ = ΟΒ γιατί είναι ακτίνες.. και με την ΟΔ πάλι ως ακτίνα.

79. Π: Και τι βγαίνει από αυτό;;

80. Μ: Θα μπορούσαμε να πάρουμε την γωνία αυτή (εννοεί την Δ1) και να την βγάλουμε ίση με την Α επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

81. Π: Ωραία συνέχισε.

82. Μ: Μετά, αν ένωνα το Δ με το Ε και δημιουργούσα αυτό το τρίγωνο, όχι… δεν βγαίνει κάτι..

83. Π: Τι θες να αποδείξεις;

84. Μ: Ότι η Α γωνία είναι ίση με την Γ. Και έβγαλα ότι Α γωνία ίση με την Δ1…Α! αρκεί να δείξω ότι η Γ είναι ίση με την Δ1 και τελείωσα.

85. Π: Σωστά.

86. Μ: Για να δούμε…. Ξέρουμε ότι Γ είναι το σημείο τομής και…. ΔΟ//ΕΒ.. Δεν βγαίνει κάτι.. Μήπως να πάρουμε αυτό το τραπέζιο;;

87. Π: Αν νομίζεις ότι θα σε βοηθήσει.

88. Μ: Α! Θα είναι και ΔΟ//ΒΓ και η ΑΓ τις τέμνει θα μπορούσαμε να κάνουμε το θεώρημα του Θαλή.

89. Π: Σκέψου πιο απλά, για τις γωνίες που θες να αποδείξεις ότι είναι ίσες.

90. Μ: Εε… Ά μπορώ να πω ότι επειδή ΔΟ//ΒΓ και η ΑΓ τις τέμνει, η γωνία Δ2 θα ισούται με την Γ, Εε όχι η Δ1 θα ισούται με την Γ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες.

91. Π: Άρα;

92. Μ: Και άρα, η γωνία Γ = Δ1 και επειδή Δ1 = Α τότε και η Α = Γ και άρα ΓΒ = ΑΒ.

Αφού ο μαθητής δεν μπόρεσε να βρει άλλον τρόπο προχώρησε στο πρόβλημα 4. Η πρώτη του αντίδραση ήταν: «*Πως θα το λύσω αυτό δεν μου δίνει τίποτα;*». Η εκφώνηση φάνηκε να παραξένεψε τον μαθητή, καθώς το μόνο δεδομένο που είχε ήταν το περίγραμμα ενός κύκλου και ζητήθηκε να προσδιορίσει το κέντρο του, κάτι που αν όχι σε όλα στα περισσότερα προβλήματα του δινόταν σαν δεδομένο. Στην συνέχεια, έκανε μια πολύ σωστή σκέψη ότι αφού ψάχνουμε σημείο θα το βρούμε ως τομή δύο ευθειών.

101. Μ: Το μόνο που μου έρχεται είναι ότι αν βρω έναν τρόπο να βρω τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα εκεί που θα τέμνονται να είναι το κέντρο του.

102. Π: Ωραία σκέψη αλλά εδώ δεν έχουμε άξονα, τι αρκεί να βρεις;

103. Μ: Α, μήπως να βρούμε δύο ευθείες που τέμνονται και το σημείο τομής τους να είναι το κέντρο του; Γιατί ένα σημείο είναι σημείο τομής δύο ευθειών.

Ο μαθητής μετά από αυτή την παρατήρηση που κάνει και μέσα από συζήτηση καταφέρνει τελικά να προσδιορίσει το κέντρο του κύκλου με τρεις διαφορετικούς τρόπους: (α) Ως σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο χορδών κύκλου, (β) Σχεδιάζοντας δύο εγγεγραμμένα ορθογώνια τρίγωνα στο κύκλο, και προσδιορίζοντας το κέντρο ως σημείο τομής των δύο υποτεινουσών (διαμέτρων) των τριγώνων, και (γ) Ως σημείο τομής διαγώνιων εγγεγραμμένου ορθογώνιου παραλληλογράμμου στον κύκλο. Τον δεύτερο τρόπο δεν τον παρουσίασε άλλος μαθητής στην γραπτή δοκιμασία, αν και κάποιοι μαθητές σκέφτηκαν να εγγράψουν το ορθογώνιο και να φέρουν μετά την μεσοκάθετο στην υποτείνουσα.

104. Π: Ωραία, σκέψου τι ευθείες έχουμε στον κύκλο.

105. Μ: Όλες οι ευθείες περνούν από το κέντρο οι διάμετροι, οι ακτίνες…. Άρα, αρκεί να βρω δύο διαμέτρους και να πάρω το σημείο τομής τους. Αν ενώσω αυτό με το απέναντί του δεν θα πάρω την διάμετρο;;

106. Π: Πως είσαι σίγουρος ότι θα είναι διάμετρος;

107. Μ: Σωστά πρέπει να περνάει από το κέντρο του κύκλου για να είναι που είναι και το ζητούμενο.

108. Π: Άρα τι μπορείς να φέρεις εύκολα στον κύκλο;

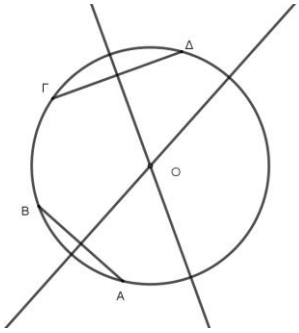
109. Μ: Α, χορδή.. Μπορώ να φέρω δύο χορδές, αλλά το σημείο τομής τους δεν θα είναι το κέντρο… Α, θυμάμαι ότι μια ευθεία που έρχεται από το κέντρο της χορδής περνάει από το κέντρο του κύκλου αλλά δεν θυμάμαι πως την λένε.. Ήταν και κάθετη στην χορδή.

110. Π: Ωραία, μάλλον εννοείς το απόστημα χορδής που είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την χορδή. Αλλά αφού περνάει από το κέντρο της χορδής και είναι κάθετη τι θα είναι;

111. Μ: Μεσοκάθετος.

112. Π: Οπότε τι αρκεί να κάνω;

113. Μ: Να φέρω μια χορδή ΑΒ (την σχεδιάζει) και να φέρω την μεσοκάθετό της την οποία θυμάμαι πως μπορώ να την κατασκευάσω με τον διαβήτη αλλά επειδή δεν έχω θα μετρήσω με τον χάρακα και θα βρω το μέσο.



114. Π: Ωραία, και μετά;

115. Μ: Ε, θα κάνω το ίδιο για μια άλλη χορδή και εκεί που τέμνονται θα είναι το κέντρο του κύκλου.

Για να περάσει από την πρώτη στην δεύτερη λύση ο μαθητής φαίνεται να αντιμετώπισε κάποια δυσκολία καθώς πέρασε αρκετός χρόνος. Ο μαθητής σκέφτηκε ότι πρέπει να βρει δύο διαμέτρους και να πάρει την τομή τους, αλλά δυσκολεύτηκε να βρει έναν τρόπο να τις προσδιορίσει. Τελικά, μετά από συζήτηση κατάφερε να σχεδιάσει τις διαμέτρους εγγράφοντας δύο ορθογώνια τρίγωνα στον κύκλο.

119. Μ: Δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι. Σκέφτομαι ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

120. Π: Τι μας βοηθάει αυτό.

121. Μ: Ότι άμα βρω την διάμετρο επειδή περνάει από το κέντρο του κύκλου θα βρω κάπως το κέντρο. Α, μπορώ να βρω άλλη μία και να πάρω το σημείο τομής τους.

122. Π: Πως μπορούμε να βρούμε την διάμετρο;

123.Μ: (Παύση για 3 λεπτά)

124. Π: Σκέψου τις γνωστές κατασκευές στην γεωμετρία.

125. Μ: Κάτι που μου ήρθε είναι η ορθή γωνία λόγω του ότι βαίνει σε ημικύκλιο.

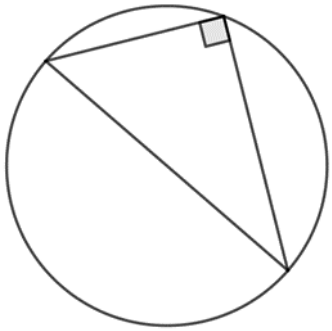
126. Π: Ωραία σκέψη, ποια γωνία είναι αυτή σε σχέση με τον κύκλο;

127. Μ: Η εγγεγραμμένη.. Αλλά δεν μπορώ να βγάλω κάτι…..... Α! Αν προσδιορίσω μια ορθή γωνία θα σχηματίσω την διάμετρο.

128. Π: Πολύ ωραία, για κάνε το.

129. Μ: Σχεδιάζει.

130. Μ: Αν ενώσω τα δύο σημεία θα σχηματίσω την διάμετρο.

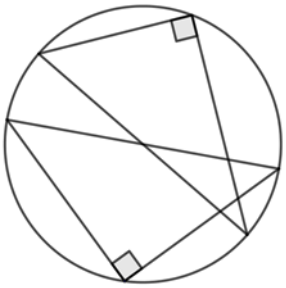


131. Π: Ωραία, τι μένει.

132. Μ: Να βρω το κέντρο.

133. Μ: Χμ, θα κάνω το ίδιο για μια άλλη ορθή για να βρω την νέα διάμετρο και θα βρω την τομή τους. Θα το σχεδιάσω μισό λεπτό.

134. Μ: Άρα, τώρα το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του κύκλου Ο.



Η τρίτη λύση που σκέφτηκε ο μαθητής 1, φαίνεται να είναι άμεσα επηρεασμένη από την λύση 2. Βλέποντας το σχήμα που έχει δημιουργήσει ο μαθητής, στο μυαλό του κάνει την μερολογική τροποποίηση, και περιστρέφοντας το ένα από τα δύο τρίγωνα θέλει να δημιουργήσει ορθογώνιο (αρχικά υποστηρίζει τετράγωνο).

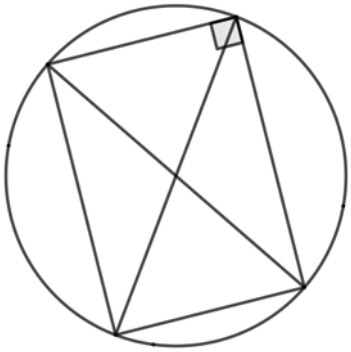
135. Μ: Τώρα έτσι όπως το κάναμε αν έχουμε μόνο το τριγωνάκι αυτό (εννοεί το ένα από τα δύο) ..

136. Π: Κάνε νέο σχήμα.

137. Μ: Άμα κάνουμε λοιπόν το ίδιο και δημιουργήσω τετράγωνο και φέρω τις διαγώνιες, εκεί που θα τέμνονται οι διαγώνιες δεν θα είναι το κέντρο του κύκλου;

138. Π: Για απόδειξέ το.

139. Μ: Άρα, άμα τις φέρω τις ευθείες, τις παράλληλες, θα σχηματιστεί το τετράγωνο.. ή μάλλον ορθογώνιο δεν ξέρουμε αν είναι τετράγωνο..



140. Π: Ναι καλύτερα ορθογώνιο. Και πως ξέρεις ότι το κέντρο θα είναι το σημείο τομής των διαγώνιων; Είσαι σίγουρος;

141. Μ: Ξέρουμε ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου τέμνονται και διχοτομούνται, δηλαδή σίγουρα θα τέμνονται. Α, και βάση του ότι είναι ορθές όλες οι γωνίες οι διαγώνιες θα είναι και διάμετροι.

142. Π: Άρα;

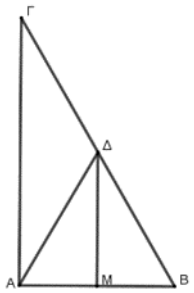
143. Μ: Επειδή διχοτομούνται θα είναι το κέντρο του κύκλου λόγο ακτίνων.

Ο μαθητής αφού παρουσίασε τις τρεις λύσεις, δεν μπόρεσε να σκεφτεί κάτι άλλο γύρισε στο πρόβλημα 1 το οποίο είχε αφήσει στην αρχή της συνέντευξης. Ο μαθητής έχοντας επιλύσει τα άλλα τρία προβλήματα, ενώ στην αρχή δεν μπορούσε να σκεφτεί κανέναν τρόπο κατάφερε να βρει σε μικρό χρονικό διάστημα 6 τρόπους (στην ουσία είναι 4, τους άλλους δύο που μοιάζουν με δύο τρόπους που προτείνει, τους αντιλαμβάνεται με βοήθεια του ερευνητή) στο πρόβλημα 1. Παρατηρούμε, μια αύξηση της ευελιξίας λύσεων του μαθητή κάνοντας χρήση αναφορών στα προηγούμενα 3 προβλήματα, η οποία αποδεικνύεται από τις γρήγορες εναλλαγές που έκανε ανάμεσα στις ιδέες.

149. Μ: Αν φέρω κάθετες από το Δ προς την ΑΒ και την ΑΓ δεν θα είναι τα μέσα;

150: Π: Για πιο λόγο;

151. Μ: Βασικά καλύτερα να πούμε ότι αν φέρουμε παράλληλη από το Δ στην ΑΓ τότε θα αυτή η καινούργια ευθεία έστω ΔΜ θα είναι κάθετη στην ΑΒ και από το θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε και πριν επειδή το Δ είναι μέσο τότε και το Μ θα είναι μέσο της ΑΒ. Όμοια, μπορούμε να το ισχυριστούμε και να φέρουμε παράλληλη από το Δ στην ΑΒ. (Σχεδιάζει)



153. Μ: Από αυτό μπορούμε να πούμε ότι το ΔΜ είναι διάμεσος και ύψος. Θα συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΔΒ. Βρίσκουμε πως είναι ίσα (έχουν Μ=90° ίση, ΔΜ=κοινή και ΑΜ=ΜΒ), άρα όλα τα στοιχεία τους θα είναι ίσα άρα και ΑΔ=ΔΒ.

154. Π: Πολύ ωραία. Κατάλαβες ότι έκανες δύο τρόπους μαζί λίγο διαφορετικούς;

155. Μ: Όχι, τι έκανα;

156. Π: Κοίτα λίγο την απάντηση που έδωσες. Είπες ότι ΔΜ διάμεσος και ύψος.

157. Μ: Α! Ναι! Όταν η διάμεσος και το ύψος είναι κοινά τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και άρα θα ήταν ίσες οι πλευρές. Άρα, δεν χρειαζόταν σύγκριση.

158. Π: Πολύ ωραία, δύο τρόποι που μοιάζουν αρκετά αλλά είναι διαφορετικοί. Πως θα συνεχίσουμε;

159. Μ: Να σκεφτώ λίγο…Να συγκρίνουμε τα ΑΔΓ και ΑΔΒ και να… όχι το είδα στην αρχή αυτό δεν βγάζει κάτι…. Α, μήπως να κάνουμε τα ίδια και την παράλληλη που φέραμε στην ΑΒ;

160. Π: Να το κάνουμε και τι θα βρούμε;

161. Μ: Θα βρούμε άλλους δύο τρόπους που μοιάζουν με τους άλλους δύο.

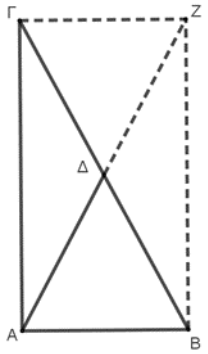
162. Π: Ωραία, απλά γράψε κάνω τα ίδια στο άλλο τρίγωνο.

163. Μ: (ο μαθητής γράφει τα ίδια για το άλλο τρίγωνο).

164. Π: Θα βρούμε άλλο τρόπο τι λες;

165. Μ: Για να δούμε…Κάτι μου έρχεται, μισό λεπτό να δω κάτι στο τέταρτο θέμα.

166. Μ: Να φέρουμε παράλληλη από το Γ στο ΑΒ και από το Β στο ΑΓ και θα δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γιατί Α = 90° (ο μαθητής σχεδιάζει το νέο σχήμα). Από αυτό θα πούμε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται και άρα ΑΔ=1/2ΒΓ.



170. Μ: Σκέφτηκα και κάτι άλλο.

171. Π: Για πες.

172. Μ: Θα μπορούσα να κάνω κύκλο;; όπως κάναμε στο 4 θέμα. Επειδή η ορθή βαίνει σε ημικύκλιο, να πούμε ότι η ΒΓ θα είναι διάμετρος και το κέντρο θα είναι το Δ. Οπότε οι ΔΓ, ΔΒ και ΔΑ θα είναι ακτίνες, οπότε θα είναι και ίσες. Σωστό είναι;

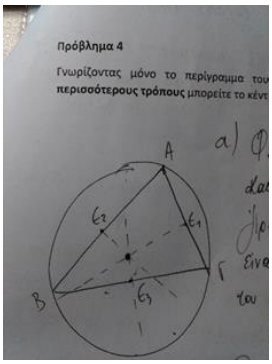
<u>Μαθητής 2</u>

* Μ: Μαθητής, **Π: Παναγιώτης

Ο μαθητής 2 έχοντας διαβάσει και τις 4 ασκήσεις αποφάσισε να ξεκινήσει από την τέταρτη άσκηση καθώς είχε σκεφτεί ήδη έναν τρόπο.

8. Μ: Να σχεδιάσω τον κύκλο πρώτα.

9. Μ: Θυμάμαι το θεώρημα που οι μεσοκάθετες ενός εγγεγραμμένου τριγώνου σε κύκλο τέμνονται στο κέντρο του. Άρα, αρκεί να φέρω εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους των πλευρών του. Τότε το σημείο τομής τους θα είναι το κέντρο του κύκλου. Κάπως το λέμε αυτό το σημείο αλλά δεν το θυμάμαι τώρα.



10. Μπράβο, το σημείο αυτό το λέμε περίκεντρο. Γράψε α΄ τρόπος και γράψε την απάντησή σου

Έχοντας τελειώσει με τον πρώτο τρόπο ο μαθητής 2, συνέχισε για να βρει και δεύτερο τρόπο. Ο μαθητής σκέφτηκε χωρίς δυσκολία να εγγράψει τώρα ορθογώνιο τρίγωνο στον κύκλο ώστε να έχει μια διάμετρο και στην συνέχεια μέσα από δύο ερωτήσεις σκέφτηκε να φέρει την μεσοκάθετο για να βρει το σημείο τομής.

13. Μ: Να φτιάξω έναν κύκλο να τον βλέπω.

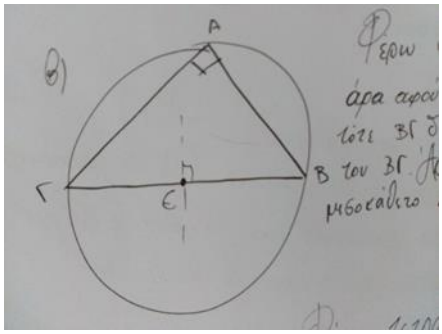
13. Μ: Μμ., να φέρω την παράλληλη…. Α! Να πάρουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο τώρα όχι τυχαίο και άρα η ορθή γωνία θα βαίνει σε ημικύκλιο. Και αν φέρουμε την διάμεσο το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του κύκλου.

14. Π: Την διάμεσο πως θα την σχεδιάσουμε;

15. Μ: Εεε…..

16, Π: Μπορούμε να φέρουμε κάποια άλλη ευθεία εκτός από την διάμεσο που θα μας δώσει το ζητούμενο;

17: Μ: Α! Να φέρουμε την μεσοκάθετο όπως πριν.



20. Π: Την μεσοκάθετο θυμάσαι πως την σχεδιάζουμε;

21. Μ: Νομίζω ναι, έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα έστω το ΒΓ που έχουμε εδώ στο σχήμα μας και σχεδιάζω δύο κύκλους έναν με κέντρο το Γ και έναν με κέντρο το Β.

22. Π: Τυχαίους κύκλους;

23. Μ: Όχι, πρέπει να είναι ίσοι μεταξύ τους.

24. Π: Και η ακτίνα;

25. Μ: Εεε, θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από μισό του ευθυγράμμου τμήματος;;

26. Π: Σωστά, και μετά τι κάνουμε;

27. Μ: Ενώνουμε τα δύο σημεία που τέμνονται οι δύο κύκλοι και αυτή θα είναι η μεσοκάθετος.

Στην συνέχεια, πέρασε στην τρίτη του λύση με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που πέρασε και ο μαθητής 1. Βλέποντας το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει σχεδιάσει σκέφτηκε να το διπλασιάσει και να γίνει τετράγωνο, κάνοντας και το ίδιο ακριβώς λάθος με τον μαθητή 1 που και αυτός πίστεψε ότι με τον διπλασιασμό θα γίνει τετράγωνο και όχι ορθογώνιο.

29. Μ: Να φέρουμε τώρα ένα τετράγωνο; Όπως το βλέπω μπορούμε να διπλασιάσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο.

30. Π: Και αν το διπλασιάσουμε θα είναι τετράγωνο;

31. Μ: Ε ναι.

32. Π: Πως είσαι σίγουρος;

33. Μ: Α, όχι ορθογώνιο θα είναι όχι τετράγωνο. Μπερδεύτηκα από το προηγούμενο σχήμα που οι πλευρές μοιάζουν να είναι ίσες.

34. Π: Άρα τι θα κάνουμε;

35. Μ: Να φέρουμε πρώτα ένα τετράγωνο και μετά να εγγράψουμε στον κύκλο. Με βάση τις ιδιότητες του τετραγώνου οι γωνίες του όλες είναι ορθές και θα βαίνουν πάντα σε ημικύκλιο. Άρα, οι διαγώνιοι θα είναι διάμετροι και το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του κύκλου.

35. Π: Καλή η σκέψη σου αλλά δεν είναι απόλυτα σωστή γιατί έχουμε το περίγραμμα. Μπορείς να σκεφτείς τι θα έπρεπε να ξέρουμε για εγγράψουμε το τετράγωνο;

36. Μ: Όχι δεν μου έρχεται κάτι.

37. Π: Αν γνωρίζαμε την διάμετρο του κύκλου θα μπορούσαμε να φέρουμε και μια διάμετρο κάθετη σε αυτήν και μετά ενώνοντας τα 4 σημεία που βρίσκονται στον κύκλο θα είχαμε το τετράγωνο, αλλά εδώ δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό ή τουλάχιστον δεν μου έρχεται κάποιος άλλος τρόπος.

38. Μ: Μάλιστα, νομίζω κατάλαβα τι λέτε.

39. Π: Ωραία, γράψε τον τρόπο που σκέφτηκες εσύ.

Στην συνέχεια παροτρύνεται ο μαθητής να βρει και άλλον τρόπο και σύμφωνα με τα λεγόμενα του έχει σκεφτεί κάτι αμέσως αλλά δεν είναι σίγουρος αν διαφέρει από τον πρώτο τρόπο που βρήκε ή είναι το ίδιο. Ο τρόπος που σκέφτηκε είναι διαφορετικός και αφορά την κατασκευή δύο μη παράλληλων χορδών και την κατασκευή των μεσοκαθέτων τους.

41. Π: Άλλον τρόπο θα βρούμε τι λες;

42. Μ: Για να δούμε, βασικά κάτι έχω σκεφτεί αλλά ίσως είναι ίδιος τρόπος.

43. Π: Για πες.

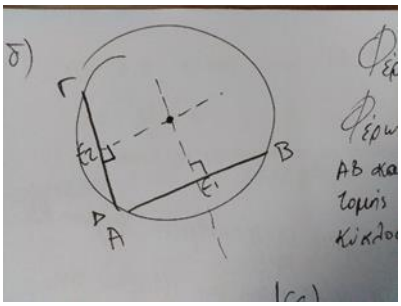
44. Μ: Όπως στον πρώτο τρόπο που φέραμε στο τρίγωνο τις μεσοκαθέτους αλλά να μην πάρουμε τρίγωνο να πάρουμε απλά μια χορδή και να φέρουμε την μεσοκάθετο;

45. Π: Σωστή σκέψη. Μια χορδή αρκεί;

46. Μ: Όχι πρέπει να πάρουμε δύο χορδές ώστε να βρούμε σημείο τομής.

47. Π: Ωραία, αυτές οι χορδές μπορούν να είναι οποιεσδήποτε χορδές του κύκλου;

48. Μ: Ναι τυχαίες. Μισό λεπτό να κάνω το σχήμα.



49. Π: Σωστά, με την μόνη διαφορά ότι δεν πρέπει να είναι παράλληλες γιατί τότε οι μεσοκάθετες τους θα συμπίπτουν και δεν θα έχουμε σημείο τομής.

50. Μ: Α, δεν το είχα σκεφτεί αυτό.

Γράφοντας ακόμα την προηγούμενη απάντησή του σκέφτεται και νέα κατασκευή που αφορά την εφαπτομένη κύκλου.

53. Μ: (ενώ γράφει ακόμα την προηγούμενη απάντηση): Με την ίδια λογική δεν μπορώ να κάνω το ίδιο και με τις εφαπτόμενες του κύκλου;

54. Π: Δηλαδή, τι εννοείς; Βασικά τελείωνε πρώτα.

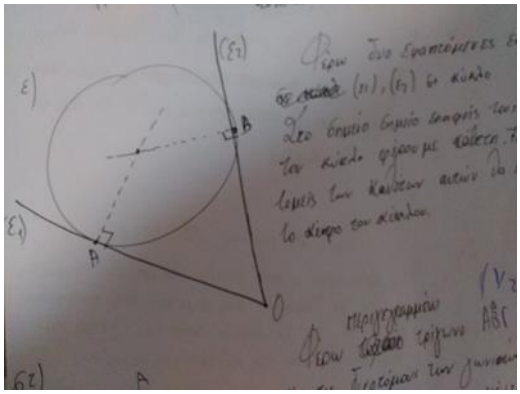
55. Μ: Εννοώ να φέρουμε πάλι δύο εφαπτόμενες του κύκλου και να φέρουμε τις μεσοκαθέτους και αυτές θα τέμνονται στο κέντρο του κύκλου.

56. Π: Τις μεσοκαθέτους σε πιο σημείο;

57. Μ: Στο σημείο επαφής;;

58. Π: Για σχεδίασε το να δούμε.

59. Μ: (Ο μαθητής σχεδιάζει)



60. Π: Άρα είναι σωστό αυτό που είπες πριν;

61. Μ: Ναι, δεν είναι;

62. Π: Δεν ξέρω έφερες κάποια μεσοκάθετο;

63. Μ: Αα, απλά κάθετες φέραμε όχι μεσοκάθετο.

Πριν περάσει και στα επόμενα προβλήματα ο μαθητής, έχοντας μια εικόνα στο μυαλό του από την περσινή χρονιά, σκέφτεται να σχεδιάσει τον κύκλο και στην συνέχεια το «γύρω-γύρω» τρίγωνο και να φέρει τις διαμέσους. Αυτό είναι ένα συχνό λάθος που παρατηρήσαμε και στους μαθητές που εξετάστηκαν στην γραπτή δοκιμασία κάνοντας το ίδιο λάθος να πουν ότι φέρνω τις διαμέσους ή τα ύψη στο περιγεγραμμένο τρίγωνο. Αφού εξήγησα στον μαθητή ότι δεν είναι ούτε οι διάμεσοι, ούτε τα ύψη αλλά οι διχοτόμοι, περάσαμε στην επίλυση του προβλήματος 2. Διαβάζει τα δεδομένα του και φαίνεται να μπερδεύεται στην αρχή στην κατασκευή του σχήματος. Φαίνεται πως και οι δύο μαθητές αντιμετωπίζουν με φοβία την κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος.

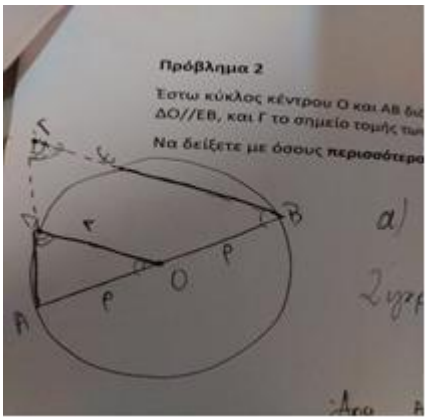
83. Μ: Μπορείτε να μου κάνετε το σχήμα;

84. Π: Διάβασε καλά τι σου ζητάει δεν είναι δύσκολο.

85. Μ: (Ο μαθητής ξαναδιαβάζει την εκφώνηση). Α κατάλαβα, πρέπει να προεκτείνω τις ΑΔ και ΕΒ για να τέμνονται.

Στην συνέχεια ο μαθητής κάνοντας και αυτός την παρατήρηση ότι πρέπει να δείξει ότι το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ισοσκελές και με μικρή βοήθεια καταφέρνει να βρει τρεις τρόπους, με ίσες αντίστοιχες γωνίες, με ομοιότητα τριγώνων και με εφαρμογή γνωστού θεωρήματος. Τον έναν από τους τρεις τρόπους ενώ τον έχει πει δεν έχει καταλάβει ότι είναι διαφορετικός. Ακόμη, επισημαίνει ότι ενώ στην αρχή του φαίνεται δύσκολο να βρει ακόμα και έναν τρόπο επίλυσης, όταν βρει τον πρώτο μετά τον βοηθάει να βρει και τους επόμενους.

89. Μ: Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



90. Π: Ωραία, πως θα το κάνουμε;

91. Μ: Η ΑΒ είναι διάμετρος άρα ΟΑ = ΟΒ = ρ. Πως θα προχωρήσω τώρα;

92. Π: Ξεκίνα με την αρχική σου σκέψη ότι θες να δείξεις ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

93. Μ: Μπορώ να συγκρίνω αυτό το τρίγωνο (εννοεί ΑΟΔ) με το μεγάλο (εννοεί ΑΒΓ), εεε όχι να τα συγκρίνω να πω ότι είναι όμοια, και μετά να πω ότι η γωνία Α είναι ίση με την Γ.

94. Π: Όταν τα βγάλεις όμοια τι θα ισχύει;

95. Μ: Θα έχουν την γωνία Α κοινή και την γωνία Β ίση με την Ο επειδή είναι παράλληλες οι ΒΓ με την ΟΔ. Άρα, και η Γ = Δ. Όμως δεν βγαίνει αυτό που θέλουμε. Πρέπει να βγάλω την Γ ίση με την Α. Άρα, πρέπει να βγάλω ότι η Δ είναι ίση με την Α.

97. Μ: (Ο μαθητής γράφει) : Συγκρίνω τα ΑΒΓ και ΑΟΔ. Αυτά έχουν: (ι) Α = Α γωνίες κοινές (ιι) Β = Ο , Ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΟΔ//ΒΓ με ΟΒ τέμνουσα. Και ΑΟ = ΟΒ. Αάα, θα είναι και ΑΟ=1/2 ΑΒ. Άρα, θα είναι όμοια τα τρίγωνα με λόγο ομοιότητας ½.

98. Π: Το μικρό τρίγωνο τι είναι;

99. Μ: Εεε, Α! Θα είναι ισοσκελές γιατί και η ΔΟ είναι ακτίνα. Άρα, αφού θα είναι όμοιο το ΑΒΓ με το μικρό θα είναι και αυτό ισοσκελές. Άρα, έπεται το ζητούμενο ΓΒ=ΑΒ.

100. Π: Πολύ ωραία, γράψε τα.

101. Μ: (Ο μαθητής γράφει αυτά που είπε).

102. Π: Πάμε να δούμε άλλον τρόπο.

102. Μ: Στην αρχή έτσι όπως το βλέπεις δυσκολεύεσαι να βρεις και την μία απάντηση, αλλά μόλις βρεις την μια σε βοηθάει να βρεις και τις επόμενες.

103. Μ: Για να δω λίγο τα δεδομένα πάλι….. Ξέρω ότι ΔΟ // ΕΒ αλλά δεν ξέρω κάτι για το Δ…

104. Π: Το Ο ξέρεις τι είναι;

105. Είναι το κέντρο του κύκλου.

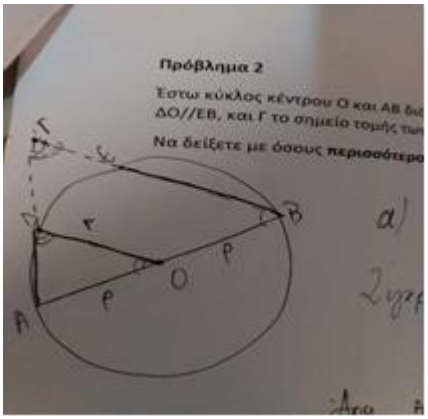
106. Π: Και τι άλλο;

107. Μ: Εεε, το μέσο της ΑΒ;;

108. Π: Πολύ σωστά. Μήπως σε βοηθάει αυτό;

109. Μ: Ξέρουμε ότι η γωνία Γ είναι ίση με την Δ και η Δ ίση με την Α. Και ΔΟ//ΒΓ.

110. Μ: Δεν ξέρω…



111. Π: Είπες ότι ΔΟ//ΒΓ και Ο μέσο. Για επικεντρώσου εκεί.

112. Μ: Ναι… Α, να το δω στο τρίγωνο ΑΒΓ, επειδή Ο μέσο και ΔΟ//ΒΓ θα είναι και το Δ μέσο.. Και η ΔΟ θα είναι η μισή της ΒΓ.

113. Π: Και άρα;

114. Μ: Άρα, έχουμε ΟΔ=ΒΓ/2 → 2ΟΔ=ΒΓ → 2ρ=ΓΒ →ΑΒ=ΓΒ.

115. Π: Μπράβο, πολύ σωστά. Άλλος τρόπος σου έρχεται;

116. Μ: Δεν νομίζω, δεν μου έρχεται κάτι άλλο.

117. Π: Έχεις βρει άλλον έναν τρόπο, τον είπες πριν αλλά δεν το κατάλαβες.

Τελειώνοντας με την δεύτερη άσκηση ο μαθητής επιλέγει να συνεχίσει με την τρίτη, στην οποία καταφέρνει να βρει τέσσερις τρόπους. Τον πρώτο τρόπο τον βρίσκει αμέσως με εφαρμογή γνωστών θεωρημάτων, ενώ στην συνέχεια αποφασίζει να φέρει δύο βοηθητικές ευθείες, οι οποίες όπως λέει κάπου θα τον βοηθήσουν χωρίς να ξέρει αρχικά. Τελικά, αυτές οι δύο βοηθητικές ευθείες τον βοηθούν στους δύο από τους τρεις επόμενους τρόπους.

128.Μ: Ξέρουμε σίγουρα ότι ΒΕ=ΑΓ/2=ΕΓΑ, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα. Άρα, μπορώ να βγάλω και την ΔΖ με κάποιον τρόπο ίση με ΑΓ/2.

129. Π: Πολύ σωστά, για σκέψου.

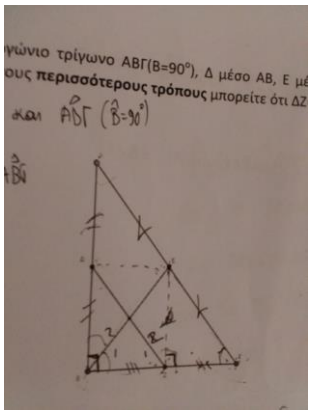
130. Μ: Από εκφώνηση έχω ότι Δ μέσο ΑΒ και Ζ μέσο ΒΓ. Άρα από το θεώρημα που χρησιμοποίησα και πριν ισχύει ΔΖ=ΑΓ/2.

131. Μ: Άρα, από τις 2 αυτές σχέσεις έδειξα ότι ΔΖ=ΕΒ.

132. Π: Πολύ ωραία, ολοκλήρωσε την.

133. Μ: Ωραία, να δω τι άλλο μπορώ να κάνω. Θα φέρω τις ΕΔ και ΕΖ… Κάπως θα με βοηθήσει.

134. Μ: (Ο μαθητής φέρει τις ΔΕ και ΕΖ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



135. Μ: Μπορώ να πω ότι τα ΒΕΓ και ΒΕΑ είναι ισοσκελή σύμφωνα με το θεώρημα που είπαμε πριν ότι ΒΕ=ΑΓ/2. Άρα, αφού στο ΕΒΓ το Ζ είναι μέσο της ΒΓ, τότε η ΕΖ θα είναι διάμεσος αλλά και ύψος επειδή είναι ισοσκελές. Άρα, η γωνία Ζ θα είναι ορθή.

136. Π: Σωστά. Τι άλλο έχουμε;

137. Μ: Σκέφτομαι έτσι όπως τα βλέπω να συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΕ και ΔΒΖ, που είναι ορθογώνια έχουν κοινή την ΒΖ και ΕΖ=ΒΔ.

138. Π: Γιατί είναι ίσες οι ΕΖ και ΒΔ;

139. Μ: Επειδή Ε,Ζ είναι μέσα των ΑΓ, ΓΒ αντίστοιχα, άρα ΕΖ=ΑΒ/2=ΒΔ.

140. Μ: Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα άρα θα έχουν και τα άλλα στοιχεία τους ίσα, άρα ΒΕ=ΔΖ.

143. Μ: Μετά μπορούμε να πούμε, αντί να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ότι το ΒΖΕΔ θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αφού ξέρουμε ότι η Β είναι ορθή και δείξαμε ότι ΕΖ//= ΒΔ.

144. Π: Άρα, τι λείπει;

145. Μ: Να πούμε ότι ΔΕ//=ΒΖ με το ίδιο σκεπτικό επειδή τα Δ και Ε μέσα.

146. Π: Και πως θα δείξουμε το ζητούμενο;

147. Μ: Ε, επειδή είναι ορθογώνιο οι διαγώνιες του θα είναι ίσες. Άρα, ΒΕ=ΔΖ.

---

157. Μ: Υπάρχει κι άλλο;

158. Π: Υπάρχει, κοίταξε το σχήμα.

159. Μ: Για να δω, μπορώ να βγάλω την ΓΖ, ίση με .....όχι δεν μπορώ.

160. Μ: Μπορώ να πω ότι αυτό το τρίγωνο (εννοεί ΔΒΖ) είναι όμοιο με το μεγάλο; Και να πω ότι αυτή (εννοεί ΔΖ) είναι η μίση αυτής (εννοεί ΑΓ);

161. Π: Μπορείς, αρκεί να δείξεις ότι είναι όμοια.

162. Μ: Ε εύκολα βγαίνει, αφού είναι και τα δύο ορθογώνια στο Β, και θα πούμε ότι αυτή είναι μισή αυτής (εννοεί ΔΒ=1/2ΑΒ) και αυτή μισή αυτής (εννοεί ΒΖ=1/2ΒΓ), οπότε θα είναι όμοια επειδή η Β είναι η περιεχόμενη, με λόγο λ=1/2. Πρέπει να τα αποδείξω πάλι γιατί ισχύουν αυτά;

Χωρίς πολύ χρόνο στην διάθεση του ο μαθητής ξεκινάει το τέταρτο πρόβλημα και παρόλα αυτά βρίσκει 5 τρόπους, τους δύο τρόπους τους βρίσκει αμέσως φέρνοντας τις διαμέσους και αποδεικνύοντας ότι τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, ενώ τους άλλους τρεις τρόπους τους καταφέρνει μέσα από αναφορές στα προηγούμενα πρόβλημα. Μάλιστα, η μια λύση που καταφέρνει δεν έχει εμφανιστεί στο σύνολο των μαθητών που εξετάστηκαν στην γραπτή δοκιμασία και είναι άμεσα επηρεασμένη από την επίλυση του προβλήματος 3.

167. Μ: Να φέρω την μεσοκάθετο του ΑΒ και να πω μετά ότι αυτό είναι ισοσκελές (εννοεί το ΑΔΒ).

168. Π: Και γιατί αυτό;

169. Μ: Επειδή η διάμεσος είναι ίση με το ύψος άρα θα είναι ισοσκελές. Άρα, το ΑΔ=ΔΒ που το ΔΒ είναι το μισό της υποτείνουσας.

170. Π: Και πως ξέρεις ότι η μεσοκάθετος περνάει από το Δ;

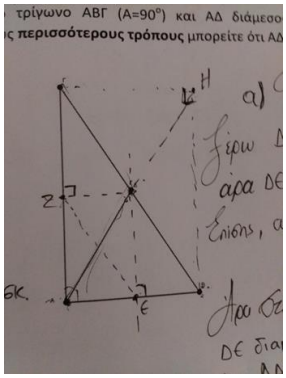
171. Μ: Όμοια με πριν επειδή το Δ είναι και αυτό μέσο.

172. Π: Εντάξει, άρα αρκεί να φέρουμε παράλληλη από το Δ στην ΓΑ, γράψε τον τρόπο σου.

173. Μ: (Ο μαθητής γράφει τον τρόπο που μόλις είπε – σχεδιάζοντας την ΔΕ).

174: Μ: Τώρα, ομοίως θα μπορούσα στο άλλο τρίγωνο (εννοεί ΑΔΓ) να φέρω ΔΖ//ΒΑ και να κάνω ακριβώς το ίδιο; Είναι άλλος τρόπος αυτός;

175. Π: Ναι, διαφέρουν ελαφρώς χρησιμοποιούμε διαφορετικές αναπαραστάσεις, γράψε τον.



179. Μ: Επιτρέπεται να κοιτάξω λίγο τα προηγούμενα;

180. Π: Βεβαίως.

181. Μ: (Κοιτάει τις προηγούμενες ασκήσεις).

182. Μ: Α, μπορώ να φέρω κύκλο που να περνάει από τα ΑΒΓ με κέντρο το Δ, και διάμετρο την ΒΓ επειδή η Α είναι ορθή γωνία και ΑΔ θα είναι ακτίνα αφού Α σημείο του κύκλου και Δ το κέντρο. Και αφού ΒΓ ισούται με 2 ακτίνες θα έχουμε το ζητούμενο.

---

185. Π: Αν δεν είχαμε κάνει τα προηγούμενα πιστεύεις θα τον σκεφτόσουνα αυτόν το τρόπο;

186. Μ: Πιστεύω δύσκολα.

187. Μ: Τώρα, αν φέρω από το Β παράλληλη στην ΑΓ και μετά φέρω από την Γ παράλληλη στην ΑΒ, θα σχηματιστούν δύο ίσα τρίγωνα, και μετά αν φέρω και ΔΗ θα έχω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που οι διαγώνιες του θα είναι ίσες.. Αλλά και επειδή διχοτομούνται θα έχουμε αυτό που θέλουμε.

---

195. Μ: Αν φέρω ΕΖ που θα είναι παράλληλης την ΒΓ επειδή Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τότε όπως στο τρίτο πρόβλημα ΕΖ=ΒΓ/2. Άρα, στο ορθογώνιο ΑΕΔΖ θα έχουμε ότι οι διαγώνιες ΑΔ=ΕΖ και άρα ΑΔ=ΒΓ/2.

Παρατήρηση

Μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα από την συνέντευξη με τους μαθητές για την μάθηση της γεωμετρίας με χρήση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Μέσα από την επίλυση τέτοιων προβλημάτων φαίνεται να αναδεικνύεται η ευελιξία στην γεωμετρική γνώση των μαθητών κάνοντας συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών τρόπων επίλυσης. Αρχικά, παρατηρήσαμε από τις ομάδες ευχέρειας και ευελιξίας που σχηματίστηκαν ότι οι περισσότεροι μαθητές ανήκουν στις ομάδες μηδενικής και χαμηλής ευχέρειας, παρόλα αυτά μέσα από τις συνεντεύξεις φαίνεται να χτίζουν εύκολα τις αντιλήψεις τους για το τι σημαίνει επίλυση ενός προβλήματος γεωμετρίας με διάφορους τρόπους και φαίνεται ότι η κατάσταση και η κατανομή μπορεί σαφώς να αλλάξει. Παρατηρήθηκαν αλλαγές στην ευχέρεια και ευελιξία λύσεων του μαθητή 1 μετά από επίλυση των τριών προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, καθώς από μηδενική ευχέρεια και ευελιξία στο πρόβλημα 1 αρχικά, μεταβήκαμε σε υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων στο τέλος της συνέντευξης μέσα από αναφορές στα προηγούμενα 3 προβλήματα, ενώ και ο μαθητής 2 κατάφερε μέσα από αναφορές στα προηγούμενα προβλήματα να φτάσει σε υψηλά επίπεδα ευχέρειας και ευελιξίας. Τέλος, η συνέντευξη έρχεται να ενισχύσει τα αποτελέσματα από τα ποσοτικά δεδομένα, καθώς φαίνεται ότι το σημαντικότερο εργαλείο για την παραγωγή νέων τρόπων λύσης και επίτευξης υψηλών επιπέδων δημιουργικότητας στην γεωμετρία είναι οι αναπαραστάσεις και η λειτουργική κατανόηση του σχήματος.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπό της παρούσας έρευνας αποτέλεσε η εξέταση της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία) που επιδεικνύουν οι μαθητές Β΄ λυκείου κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων πολλαπλών λύσεων σε προβλήματα τα οποία το σχήμα ήταν δοθέν ή όχι, καθώς και η επίδραση κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων στην γεωμετρία;

Κατά την επίλυση των 4 προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους, είδαμε από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές να αναπτύσσεται η διανοητική ευελιξία και δημιουργικότητα τους, εύρημα που συμφωνεί με τις μέχρι τώρα έρευνες (π.χ Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009, Ervynck, 1991, Kwon, Park, & Park, 2006, Leikin, 2006, 2009, 2012). Στις μέχρι τώρα έρευνες στο πεδίο της γεωμετρίας για την μέτρηση των μεταβλητών της δημιουργικότητας μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων οι ερευνητές (π.χ Leikin, 2012; Lev & Leikin 2013; Einav Aizikovitsh-Udi, 2014), στις ασκήσεις που έδιναν το σχήμα δινόταν στην εκφώνηση. Θεωρούμε, ότι η κατάσταση είναι διαφορετική όταν ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι το σχήμα, κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και από την έρευνα. Παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην ευχέρεια και ευελιξία λύσεων των μαθητών ανάλογα με το αν δινόταν στην άσκηση ή όχι το σχήμα, με τους μαθητές να αναδεικνύουν υψηλότερη ευχέρεια και ευελιξία όταν το σχήμα δινόταν. Οι δύο αυτές μεταβλητές της δημιουργικότητας και σε άλλες έρευνες (πχ. Leikin, 2009) φαίνεται να εμφανίζονται σαν δίπολο και να παρουσιάζουν την ίδια δυναμική. Παρόλα αυτά, η πρωτοτυπία λύσεων των μαθητών δεν επηρεάστηκε και δεν παρουσίασε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις δύο κατηγορίες προβλημάτων, γεγονός που οφείλεται στο ότι η πρωτοτυπία είναι πιο εγγενές χαρακτηριστικό και δεν επηρεάζεται τόσο από το αν δίνεται ή όχι το σχήμα στην εκφώνηση της άσκησης. Επιπλέον, η συνολική δημιουργικότητα δεν παρουσίασε στατιστικά σημαντικές διαφορές για τις δύο κατηγορίες προβλημάτων παρόλο που οι δύο μεταβλητές της ευχέρεια και ευελιξία παρουσίασαν σημαντικές στατιστικά διαφορές. Το εύρημα αυτό ταιριάζει με τη συχνή θεωρητική θέση ότι η πρωτοτυπία είναι ο κύριος δείκτης της δημιουργικότητας (π.χ. Ervynck, 1991, Levav-Waynberg & Leikin, 2012).

Μέσα από την έρευνα έγινε φανερό ότι θα πρέπει να συνδεθεί η κατανόηση γεωμετρικού σχήματος με την μαθηματική δημιουργικότητα στην γεωμετρία. Πιστεύουμε ότι τα άτομα που έχουν μόνο αντιληπτική (εικονική σύλληψη) ενός σχήματος δεν μπορούν να εμφανίσουν πολλαπλές λύσεις, δηλαδή να εμφανίσουν αυξημένη μαθηματική δημιουργικότητα στην γεωμετρία. Θα πρέπει να έχουν και λειτουργική σύλληψη του σχήματος. Παρόλο που η λειτουργική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος φαίνεται να είναι η πηγή της δημιουργικότητας στην γεωμετρία, παρατηρήθηκε ότι μαθητές με ίδια λειτουργική κατανόηση (π.χ κατασκευή μιας κοινής βοηθητικής κατασκευής), μπορούν να εμφανίσουν διαφορετική λεκτική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, δηλαδή για την ίδια βοηθητική κατασκευή να επιλύσουν το πρόβλημα βασισμένοι σε διαφορετικές ιδιότητες και θεωρήματα. Συμπερασματικά, η σύνδεση των τεσσάρων ειδών κατανόησης όπως προτείνονται από τον Duval (1995, 1999), είναι προαπαιτούμενο για εμφάνιση πολλαπλών

διαφορετικών λύσεων, δηλαδή για εμφάνιση υψηλής μαθηματικής δημιουργικότητας στην γεωμετρία.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων ως προς τον αριθμό των λύσεων έδωσε τρεις ομάδες ομοιότητας: (α) ομάδα μηδενικής ευχέρειας, (β) ομάδα χαμηλής ευχέρειας και ευελιξίας και (γ) ομάδα υψηλής ευχέρειας και ευελιξίας λύσεων. Παρατηρήσαμε ότι οι περισσότεροι μαθητές ανήκουν στις δύο πρώτες ομάδες, δηλαδή χαρακτηρίζονται από χαμηλή ευχέρεια και ευελιξία στις λύσεις τους. Παρόλα αυτά, στις προσωπικές συνεντεύξεις φάνηκε ότι οι μαθητές από μηδενική ευχέρεια, πολύ γρήγορα κατάφεραν να περάσουν σε υψηλή ευχέρεια και ευελιξία λύσεων μέσα από αναφορές σε προηγούμενα προβλήματα που αντιμετώπισαν. Αυτό το εύρημα συνδέεται και με τα ευρήματα των Levav-Waynberg & Leikin (2012), καθώς παρατήρησαν ότι μετά από εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος που στηριζόταν σε εργασίες με πολλαπλές λύσεις, η ευχέρεια και η ευελιξία των μαθητών αυξήθηκε. Στόχος της διδασκαλίας για να ενισχυθεί η μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών θα πρέπει να είναι να περάσουν όσο το δυνατόν περισσότερα άτομα από τις δύο πρώτες ομάδες στην τρίτη. Αυτό εικάζουμε ότι μπορεί να γίνει με συστηματική εφαρμογή τέτοιων προβλημάτων, καθώς η δημιουργικότητα επηρεάζεται από την διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Silver, 1997), αλλά και με προβλήματα στα οποία το σχήμα δίνεται.

Η επιλογή κατάλληλων προβλημάτων για την μέτρηση και ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, τα οποία πρέπει να δίνουν κίνητρα στους μαθητές να εμπλακούν είναι πολύ σημαντικός παράγοντας (Levenson, 2013). Παρόλο που οι μαθητές δεν ήταν συνηθισμένοι σε επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους και παρατηρήσαμε ότι ο μέσος όρος των μαθητών για τα 4 προβλήματα εμφανίζει λιγότερο από μία λύση για το καθένα, σε κάθε πρόβλημα εμφανίστηκε ένας πλούσιος χώρος λύσεων. Συνολικά και για τα 4 προβλήματα εμφανίστηκαν 26 διαφορετικές λύσεις, αριθμός αρκετά μεγάλος ο οποίος μας επιτρέπει να εικάσουμε ότι τα προβλήματα ήταν κατάλληλα για εμφάνιση πολλαπλών τρόπων γεωμετρικής απόδειξης. Παρατηρήσαμε ακόμα ότι τα αγόρια εμφανίζουν μια αισθητά πιο υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα από ότι τα κορίτσια. Μάλιστα, αυτή η διαφορά έγκειται στο ότι τα αγόρια είναι πιο καινοτόμα στις λύσεις τους και εμφανίζουν μη συμβατικές λύσεις. Οι άλλες δύο μεταβλητές της μαθηματικής δημιουργικότητας, δηλαδή ευχέρεια και ευελιξία δεν παρουσιάζουν σημαντικές στατιστικές διαφορές για τα δύο φύλα.

Βεβαίως, εξακολουθεί να υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση των διδακτικών επιπτώσεων του θέματος. Συγκεκριμένα, θα ήταν ενδιαφέρον και χρήσιμο να εξεταστούν τα αποτελέσματα παρεμβατικών προγραμμάτων που να στοχεύουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας και κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος σχετικά με τις πολλαπλές γεωμετρικές αποδείξεις των μαθητών. Επιπλέον, η επικύρωση ενός θεωρητικού μοντέλου που εξετάζει τη δομή και τη σχέση των διαφόρων συνιστωσών κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος, χωρικής ικανότητας, μαθηματικής δημιουργικότητας και επίλυσης προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους στην γεωμετρία θα συνέβαλε επίσης σε αυτόν τον τομέα της έρευνας.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aizikovitsh-Udi, E. (2014). The Extent of Mathematical Creativity and Aesthetics in Solving Problem among Students Attending the Mathematically Talented Youth Program. *Creative Education, 5,* 228-241.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 47-60.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). CHIC: *Classification Hiérarchique Implicative ET Cohésive-Version sous Windows* – CHIC 1.2. Association pour la recherche en Didactique des Mathématiques Rennes.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Concepts and Processes* (pp. 176-203). New York: Academic Press.

Bolden, D.S., Harries, A.V. & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teacher's conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73* (2), 143-157.

Burton, L. J., & Fogarty, G. J. (2003). The factor structure of visual imagery and spatial abilities. *Intelligence, 31*, 289–318.

Carroll, J.B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytical studies*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7,* 55–79.

Christou, C., Mousoulidis, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 339–352.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York, NY: Macmillan.

Γαγάτσης, Α. (2010). *Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος από μαθητές δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου.* Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση. Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Γαγάτσης, Α., Γρίδος, Π., Σαμαρτζής, Π. (2017*). Χωρική ικανότητα και δημιουργικότητα: Σύμμαχοι στην μαθηματική απόδειξη.* Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ. Ιστοσελίδα: http://enedim7.gr/.

Γαγάτσης, Α , Καλογήρου, Π & Ανδρούλλα Πετρίδου (2013). *Χωρική Ικανότητα και κατανόηση Γεωμετρικού σχήματος*. Πρακτικά 15ο συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης.

Γαγάτσης, Α., Σιακαλλή, Μ. (2000). *CHIC: Ένα στατιστικό πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων σε σχέση με την διδακτική των Μαθηματικών – εφαρμογή στις συναρτήσεις.*

Πρακτικά 17ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά Κλειδί ανάπτυξης (σ. 602-612). Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). *A theoretical model of students' geometrical figure understanding.* Proceedings of CERME 6. Lyon, France.

Duval, R. (2004). Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings. Notes from Lecture.

Duval, R. (1999). Representations, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol. 1, pp. 3–26). Morelos, Mexico.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education.* Berlin, Springer, pp. 142-157.

Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41,* 605–618.

Ericsson, K., A., (1999). Creative Expertise as Superior Reproducible Performance: Innovative and Flexible Aspects of Expert Performance. *Psychological Inquiry Vol. 10, No. 4, 1999,* pp. 329-333.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking (pp. 42–53)*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20(10),* 1193-1211.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 33–56. Doi: 10.1007/s10857-012-9210-7.

Guilford, J. P. (1967). The *n*ature of *h*uman *i*ntelligence. McGraw-Hill: New York.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a Framework. In L. Puig and A. Gutiérrez (Eds), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* (1), 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Education Studies in Mathematics, 18*(1), 59–74.

Hegarty, M. and Waller, D.A (2005). *Individual differences in spatial abilities.* The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking (pp. 121-169).

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33,* 176–203.

Herbst, P. & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction, 24,* 73–122.

Johnson, E. S., & Meade, A. C. (1987). Developmental patterns of spatial ability: An early sex difference. *Child Development, 58,* 725 – 740.

Kalogirou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2013*). The relationship between visualization, spatial rotation, perceptual and operative apprehension*. Proceedings of PME 37, 3, 129–136.

Kalogirou, P. & Gagatsis, A. (2012). The relationship between students'spatial ability and geometrical figure apprehension. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 11 (1-2),* 133-146.

Kalogirou, P., Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, Issue 11, 2011, pp. 27-39.*

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM Mathematics Education, 45,* 167-181.

Kell, H. J., Lubinski, D., Benbow, C. P., Steiger, J. H. (2013). Creativity and technical innovation: Spatial ability's unique role. *Psychological Science, 24,* 1831–1836.

Klavir, R., & Gorodetsky, M. (2009). On Excellence and Creativity: A study of Gifted and Expert Students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 221-242). Rotterdam: Sense Publishers.

Kwon, O.N., Park, J.S. & Park, J.H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pasific Education Review, 7 (1), 51-61.*

Καλογήρου, Π. (2014). *Η χωρική αντίληψη και η εννοιολογική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών ηλικίας 10-13 ετών.* (Ανέκδοτη διδακτορική διατριβή). Πανεπιστήμιου Κύπρου, Κύπρος.

Lean G, Clements M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics.*

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, Volume 55, 2013 (4),* 385-400.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher (Chapter 9).

Leikin, R. (2007). *Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks*. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.),

Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME-5 (pp. 2330–2339).

Leikin, R. (2006). About four types of mathematical connections and solving problems in different ways. *Aleh - The (Israeli) Senior School Mathematics Journal, 36,* 8–14.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A., (2008). Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8:3,* 233-251.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). *Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity.* In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 161–168). Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Meddnikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 28,* 1–12.

Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données.* Paris: Dunod.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematics Behavior, 31,* 73-90.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2013). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12:4,* 311-333.

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices. *Journal Mathematical Teacher Education, 16,* 269-291.

Lilly, F. & Bramwell-Rejskind, G. (2004). The dynamics of creative teaching. *The Journal of Creative Behavior, 38 (2),* 102-124.

Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 40, pp. 181-248). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lohman, D.F. (1996). Spatial ability and g. In I. Dennis & P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: their nature and measurement* (pp. 97-116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Mesquita, A. L. (1996). On the utilization of encoding procedures on the treatment of geometrical problems. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. III, pp. 399- 406). Valencia.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior, 17(2),* 183-195.

Michael – Chrysanthou, P., Gagatsis, A. (2015). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime, 17* (*4-I*), 165-180.

Michael, P., Gagatsis, A., Elia, I., Deliyianni, E., & Monoyiou, A. (2009). Operative Apprehension of Geometrical Figures of Primary and Secondary School Students'. In A. Gagatsis & S. Grozdev (Eds.), *Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp.67-78). Plovdiv, Bulgaria: University of Plovdiv, Cyprus Mathematical Society.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Panaoura, G., Gagatsis, A., Lemonidis, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta Pantazi D. Pitta Pantazi & Philippou (Eds), *Proceedings of the fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062 – 1072). Larnaka, Cyprus: ERME, http://www.cyprusisland.com/cerme/.

Piirto, J. (2004). *Understanding creativity*. Scottsdale, AZ: Great Potential Press.

Pink, D. (2005). *A whole new mind*. New York, NY: Penguin.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Posamentier, A. S., Smith, B. S. & Steelman, J. (2010). *Teaching secondary mathematics: techniques and enrichment units*. (8th Ed.). Columbus, Ohio: Merrill Prentice Hall

Reber, A. S. (1985). *The penguin dictionary of psychology*. England: Clays Ltd.

Robinson, K. (2006). *Schools kill creativity. TED: Ideas worth spreading*. Retrieved from http://www.ted.com/speakers/sir_ken_robinson.html

Runco, M. A. (1993). *Creativity as an educational objective for disadvantaged students* (RBDM 9306). Storrs: University of Connecticut. The National Research Center on the Gifted and Talented.

Runco, M. & Pritzker, S. (1999). *Encyclopedia of Creativity*. Academic press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 3*, 75–80.

Sophocleous, P., Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2009). Creative ability and criteria in recognising geometric figures. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 153 - 160). Thessaloniki, Greece: PME.

Sriraman, B. (2005). Are Giftedness and Creativity Synonyms in Mathematics*? The Journal of secondary Gifted Education, XVII(1),* 20-36.

Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and practice. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (2nd ed., pp. 43–53). Boston: Allyn and Bacon.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93–115). New York: Cambridge University Press.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematics Education (FJME), 11*(2), 129–161.

Stupel, M. & Ben-Chaim, D. (2017): Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Torrance, E.P. (1994). Creativity: *Just wanting to know*. Pretoria, South Africa: Benedic books.

Tso, T., & Liang, Y.N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and Van Hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University, 46* (2), 1-20.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press. Published originally in Russian in 1930.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C., P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies its Importance. *Journal of Educational Psychology, Vol. 101, No 4*, 817-835

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). *Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks*. Proceedings of PME 30, 5, 425–432.

7. Παράρτημα

Ερωτηματολόγιο Συλλογής Δεδομένων

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών – Πανεπιστήμιο Κύπρου

Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών:

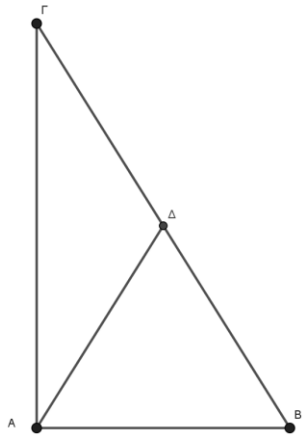
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Ονοματεπώνυμο :

Ερώτημα: Με μία γρήγορη ματιά στα τέσσερα παρακάτω προβλήματα, αν σας ζητούσαν να επιλέξετε να λύσετε δύο από τα τέσσερα ποια θα ήταν αυτά; Αναφέρετε ένα βασικό λόγο**.**

Πρόβλημα 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) και ΑΔ διάμεσος του τριγώνου. Να αποδείξετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε ότι ΑΔ = ½ ΒΓ.



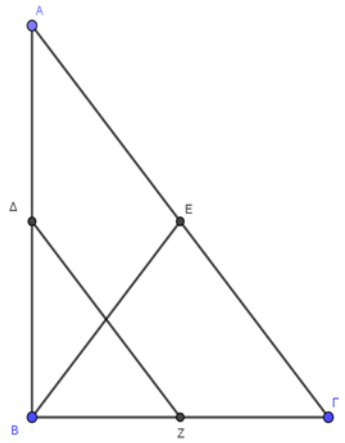
Πρόβλημα 2

Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Δ και Ε σημεία του κύκλου και ΔΟ//ΕΒ, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ.

Να δείξετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε ότι ΓΒ=ΑΒ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Β=90°), Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ και Ζ μέσο ΒΓ. Να δείξετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε ότι ΔΖ=ΕΒ.



Πρόβλημα 4

Γνωρίζοντας μόνο το περίγραμμα του κύκλου, να προσδιορίσετε με όσους **περισσότερους τρόπους** μπορείτε το κέντρο του.

Μεταβλητές

Ερώτημα

S1 = Επιλογή προβλήματος 1 για επίλυση

S2 = Επιλογή προβλήματος 2 για επίλυση

S3 = Επιλογή προβλήματος 3 για επίλυση

S4 = Επιλογή προβλήματος 4 για επίλυση

Eas = Επιλογή λόγο ευκολίας

Fig = Επιλογή λόγο ότι δίνεται το σχήμα

Rem = Επιλογή λόγο γνώσεων – Θυμούνται καλύτερα την θεωρεία

Noth = Επιλογή του 4 επειδή δεν θέλει θεωρία

Ευχέρεια

P1s0 = 0 Λύσεις στο πρόβλημα 1

P1s1 = 1 Λύση στο πρόβλημα 1

P1s2 = 2 Λύσεις στο πρόβλημα 1

P1s3 = 3 Λύσεις στο πρόβλημα 1

P1s4 = 4 Λύσεις στο πρόβλημα 1

P2s0 = 0 Λύσεις στο πρόβλημα 2

P2s1 = 1 Λύση στο πρόβλημα 2

P2s2 = 2 Λύσεις στο πρόβλημα 2

P2s3 = 3 Λύσεις στο πρόβλημα 2

P3s0 = 0 Λύσεις στο πρόβλημα 3

P3s1 = 1 Λύση στο πρόβλημα 3

P3s2 = 2 Λύσεις στο πρόβλημα 3

P3s3 = 3 Λύσεις στο πρόβλημα 3

P3s4 = 4 Λύσεις στο πρόβλημα 3

P4s0 = 0 Λύσεις στο πρόβλημα 4

P4s1 = 1 Λύση στο πρόβλημα 4

P4s2 = 2 Λύσεις στο πρόβλημα 4

P4s3 = 3 Λύσεις στο πρόβλημα 4

P4s4 = 4 Λύσεις στο πρόβλημα 4

Flu1 = Αριθμός λύσεων στο πρόβλημα 1

Flu2 = Αριθμός λύσεων στο πρόβλημα 2

Flu3 = Αριθμός λύσεων στο πρόβλημα 3

Flu4 = Αριθμός λύσεων στο πρόβλημα 4

Flu1_3 = Αριθμός λύσεων στα προβλήματα 1 και 3

Flu2_4 = Αριθμός λύσεων στα προβλήματα 2 και 4

<u>Ευελιξία</u>

P1com1 = Σύγκριση τριγώνων ΑΜΔ – ΒΜΔ, ΔΜ διάμεσος του ΑΔΒ

P1com2 = Σύγκριση τριγώνων ΑΔΕ – ΓΔΕ, ΔΕ διάμεσος ΑΔΓ

P1med1 = Φέρνω ΔΜ στο ΑΔΜ, διάμεσος + ύψος = ισοσκελές

P1med2 = Φέρνω ΔΕ στο ΑΔΓ. διάμεσος και ύψος στο ΑΔΒ.

P1sim1 = Ομοιότητα ΑΒΓ – ΔΜΒ.

P1sim2 = Ομοιότητα ΑΒΓ - ΓΔΕ

P1dom = Διπλασιασμός διαμέσου ΑΔ, σχηματισμός παραλληλογράμμου.

P1dot = Διπλασιασμός τριγώνου ΑΒΓ, σχηματισμός παραλληλογράμμου

P1ext = Επεκτείνω ΑΒ κατά ΑΒ΄, με ΑΒ = ΑΒ΄

P1cir = Εγγεγραμμένο σε κύκλο

P2sim = Επίλυση με ομοιότητα τριγώνων ΑΒΓ – ΟΒΕ

P2mid1 = Τότε η ΔΟ ενώνει τα μέσα Δ και Ο. Τότε ΔΟ = ½ ΑΒ = ½ ΒΓ

P2mid2 = Φέρνω ΔΒ, διάμεσος και ύψος επειδή βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα ΑΒΓ ισοσκελές.

P2iso = Ισοσκελές το ΑΟΔ, και μετά ισοσκελές το ΑΒΓ

P2rho = Φέρνω ΔΜ //=ΑΒ/2 και ΔΟΒΜ ρόμβος.

P3rec = Σχηματισμός ΒΔΕΖ ορθογωνίου – ίσες διαγώνιες

P3the = Χρήση 2 Θεωρημάτων ΖΕ//=ΑΒ/2 και ΒΕ=ΑΓ/2

P3sim = Ομοιότητα τριγώνων ΒΔΖ – ΑΒΓ

P3par = ΔΖΓΕ παραλληλόγραμμο και ΒΕ =ΑΓ/2

P3com = Σύγκριση τριγώνων ΔΒΖ - ΕΖΒ

P4orm = Ορθή βαίνει σε ημικύκλιο και μεσοκάθετη

P4tan = εφαπτομένη και μεσοκάθετο

P4egt = Σχηματίζουμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε τις τρεις μεσοκαθέτους

P4cho = Σημείο τομής μεσοκαθέτων δύο χορδών κύκλου

P4bis = Σημείο τομής διχοτόμων τριγώνου τέμνονται στο κέντρο του κύκλου που εφάπτ

P4par = Φέρνω δύο παράλληλες – Φέρνω ευθεία από τα μέσα τους και μετά μεσοκάθετο

P4squ = Περιγεγραμμένο τετράγωνο

Fle1 = Ευελιξία λύσεων προβλήματος 1

Fle2 = Ευελιξία λύσεων προβλήματος 2

Fle3 = Ευελιξία λύσεων προβλήματος 3

Fle4 = Ευελιξία λύσεων προβλήματος 4

Fle1_3 = Ευελιξία λύσεων στα προβλήματα 1 και 3

Fle2_4 = Ευελιξία λύσεων στα προβλήματα 2 και 4

<u>Πρωτοτυπία</u>

Or1 = Πρωτοτυπία προβλήματος 1

Or2 = Πρωτοτυπία προβλήματος 2

Or3 = Πρωτοτυπία προβλήματος 3

Or4 = Πρωτοτυπία προβλήματος 4

Or1_3 = Πρωτοτυπία λύσεων στα προβλήματα 1 και 3

Or2_4 = Πρωτοτυπία λύσεων στα προβλήματα 2 και 4

<u>Συνολική Δημιουργικότητα</u>

Cr1 = Δημιουργικότητα προβλήματος 1

Cr2 = Δημιουργικότητα προβλήματος 2

Cr3 = Δημιουργικότητα προβλήματος 3

Cr4 = Δημιουργικότητα προβλήματος 4

Cr1_3 = Δημιουργικότητα στα προβλήματα 1 και 3

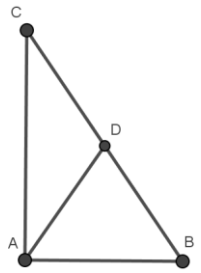
Cr2_4 = Δημιουργικότητα στα προβλήματα 2 και 4

Απομαγνητοφωνήσεις

Μαθητής 1

Π: Παναγιώτης , Μ: Μαθητής

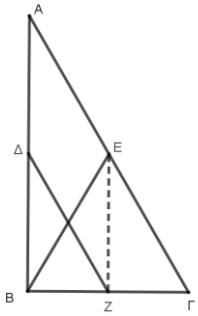
1. Π: Λοιπόν, σου έχω δώσει ένα φύλλο εργασίας το οποίο περιέχει 4 ασκήσεις γεωμετρίας με στόχο να τις λύσεις με όσο περισσότερους τρόπους μπορείς. Έχεις ξανά κάνει κάτι τέτοιο;
2. Μ: Όχι, ποτέ.
3. Π: Ωραία, στην αρχή σου έχει ένα ερώτημα και σου λέει αν είχες την δυνατότητα να λύσεις δύο από τα τέσσερα προβλήματα ποια θα ήταν αυτά καθώς και να αναφέρεις έναν λόγο. Κοίταξέ τα και απάντηση.
4. Μ: Θα επέλεγα νομίζω σίγουρα το πρώτο, και…. το τρίτο.
5. Π: Και ο λόγος ποιος είναι;
6. Μ: Λόγου του σχήματος που δίνεται και γιατί νομίζω ότι είμαι καλύτερος με τα τρίγωνα.
7. Π: Ωραία. Από πού θα ξεκινήσεις;
8. Μ: Από την πρώτη άσκηση.
9. Π: Εντάξει, πάρε τον χρόνο σου.
10. Μ: Δεν είμαι και τόσο καλός στην γεωμετρία.
11. Μ: Εδώ, το θυμάμαι αυτό σαν θεωρία αλλά δεν θυμάμαι την απόδειξή του, η πρώτη σκέψη που μου ήρθε είναι να συγκρίνω τα τρίγωνα.
12. Π: Ποια τρίγωνα;
13. Μ: Τα ΑΔΓ και ΑΔΒ.



14. Π: Τι θα μπορούσες να βγάλεις από αυτό;
15. Μ: Καταρχάς έχουν κοινή την ΑΔ, έχουν αυτή την γωνία ……όχι, όχι. (παύση)
16. Π: Προσπάθησε να σκεφτείς τα θεωρήματα και τις ιδιότητες που ισχύουν στα τρίγωνα..
17. Μ: Καλύτερα να βρείτε έναν άλλο μαθητή που να τα ξέρει καλύτερα. Εγώ δεν τα θυμάμαι καθόλου.
18. Π: Συνέχισε, προσπάθησε να σκεφτείς. Αν δεν σου έρχεται κάτι σε αυτό το πρόβλημα μπορείς να πας και στα επόμενα.

19. Μ: Ωραία, πάω στο τρίτο πρόβλημα.

20. Μ: Εδώ, άμα ένωνα το Ε με το Ζ, θα μπορούσα να τα συγκρίνω τα τρίγωνα;; ή μάλλον έτσι όπως τα βλέπω μου έρχεται το θεώρημα του Θαλή, να φέρω την παράλληλη από το Α στη ΒΓ και μετά την παράλληλη του κέντρου, ΔΕ…Εεεεε….. (Παύση).



(σχεδιάζει την ΕΖ με το χέρι)

21. Π: Προσπάθησε να σκεφτείς τι γνωρίζεις και τι έχεις πει μέχρι τώρα και θα το βρεις.

22. Μ: Θυμήθηκα ένα θεώρημα, αφού έχουμε μέσα πλευρών εδώ, που λέει ότι αν ενώσεις τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου τότε το ευθύγραμμο τμήμα θα είναι παράλληλο προς την άλλη πλευρά και ίσο με το μισό της.

23. Π: Πολύ ωραία, και πως μπορούμε να το εφαρμόσουμε αυτό στο πρόβλημά μας;;

24. Μ: Εεε, θα πούμε ότι η ΑΓ με την ΔΖ είναι παράλληλες και ότι η ΔΖ ισούται με το μισό της ΑΓ.

25. Π: Ωραία, προσπάθησε να το αποδείξεις πλήρως τώρα. Γράψε πρώτος τρόπος.

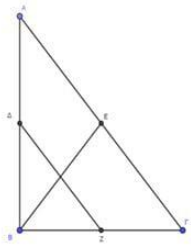
26. Μ: (Ο μαθητής ξεκινάει τον τρόπο τρόπο)

Από υπόθεση Δ μέσο ΑΒ και Ζ μέσο ΒΓ.

Άρα από γνωστή πρόταση ΔΖ // = ½ ΑΓ. (1)

Από γνωστό θεώρημα ΒΕ = ½ ΑΓ. (2)

Από (1) και (2) : ΔΖ = ΒΕ.



(δεν χρειάζεται να σχεδιάσει κάτι)

27. Π: Πολύ ωραία, μπράβο, είδες απλά σκέφτηκες και το έβγαλες. Προσπάθησε να βρεις έναν δεύτερο τρόπο τώρα.

28. Μ: Έτσι όπως βλέπω τις ΔΖ και ΕΒ μου έρχεται στο μυαλό να φέρω την κάθετη και να συγκρίνω τα τρίγωνα και αν τα βγάλω ίσα σημαίνει θα είναι και αυτές ίσες.

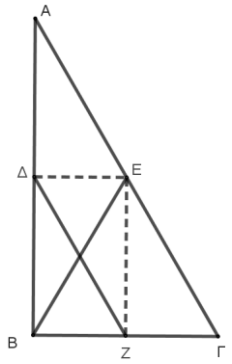
29. Π: Ωραία, για φέρε την κάθετη να δούμε.

30. Μ: (Σχηματίζει ένα νέο τρίγωνο από την αρχή χρησιμοποιώντας χάρακα)

31. Μ: Χμ, δεν μπορώ να τα συγκρίνω.. Α! Θα μπορούσα να ενώσω και αυτή (εννοεί την ΔΕ) για να φτιάξω τετράγωνο.

32. Π: Για πες μου τι έχουμε πετύχει τώρα.

33. Μ: Ότι ΕΖ//=ΔΒ και όμοια επειδή Δ και Ε μέσα, η ΔΕ θα είναι παράλληλη και ίση με την ΒΖ.



(σχηματίζει νέο τρίγωνο και μετά την σκέψη του φέρει τις βοηθητικές ευθείες χρησιμοποιώντας χάρακα)

34. Π: Ωραία, άρα τώρα τι έχουμε;

35. Μ: Ένα ορθογώνιο, βασικά ένα παραλληλόγραμμο και επειδή η γωνία Β είναι ορθή θα είναι ορθογώνιο.

36. Π: Ωραία και;

37. Μ: Επειδή είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται και θα είναι και ίσες. Άρα το αποδείξαμε γιατί οι διαγώνιες είναι οι ΒΕ και οι ΔΖ που είναι το ζητούμενο.

38. Π: Μπράβο, γράψε τον τώρα τον δεύτερο τρόπο.

39. Μ: Γράφει: Ενώνοντας τα μέσα Ε, Ζ καταλήγω στο ότι ΕΖ, ΔΒ ίσες και παράλληλες. Μετά ενώνω τα μέσα Δ, Ε και κατέληξα πάλι στο ότι ΔΕ, ΒΖ ίσες και παράλληλες. Αφότου τα ένωσα, το σχήμα που δημιουργήθηκε είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο καθώς Β= 90° από τα δεδομένα. Βάση θεωρήματος οι διάμετροι ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα ΔΖ=ΕΒ.

40. Π: Τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;

41. Μ: Θα μπορούσα να συγκρίνω τα ΕΒΓ με ΑΕΒ , όχι…

42. Π: Θυμήσου όλες τις σκέψεις που έκανες από την αρχή.

43. Μ: Να το δούμε με το θεώρημα του Θαλή;

44. Π: Να το δούμε.

45. Μ: Ή μάλλον θα μπορούσα να συγκρίνω τα ΒΔΖ και ΑΒΓ. Είναι και τα δύο ορθογώνια στο Β και ΑΒ/ΔΒ = ΒΓ/ΒΖ. Από αυτό μπορούμε να βγάλουμε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια;;; ναι μπορούμε και έχουν την ίδια αναλογία.

(δεν σχηματίζει κάτι νέο, κοιτάζει τα προηγούμενα σχήματα)

46. Π: Και πως θα προχωρήσουμε;

47. Μ: Μετά λέω πως η ΔΖ είναι το 1/2ΑΓ και λόγο του θεωρήματος η ΒΕ είναι και εκείνη το 1/2 ΑΓ άρα ΔΖ=ΒΓ.

48. Π: Μπράβο, ήθελε λίγο παραπάνω αιτιολόγηση αλλά εντάξει, ας προχωρήσουμε και στα άλλα. Τρεις τρόποι είναι εντάξει σε πρώτη φάση.

49. Μ: Πάμε στο θέμα 2. Δεν έχω διαβήτη πως θα το κάνω;

50. Π: Χρησιμοποίησε το μπουκαλάκι με το νερό ή κάνε το με το χέρι σου.

(τον κύκλο τον κάνει με το χέρι και τις ευθείες με τον χάρακα)

51. Μ: Η διάμετρος δεν είναι όλη;

52. Π: Ναι.

53. Μ: Τυχαία σημεία το Δ και το Ε του κύκλου;

54. Π: Διάβασε τι σου λέει.

55. Μ: Α, κάπως εδώ το ένα και κάπως εδώ το άλλο;

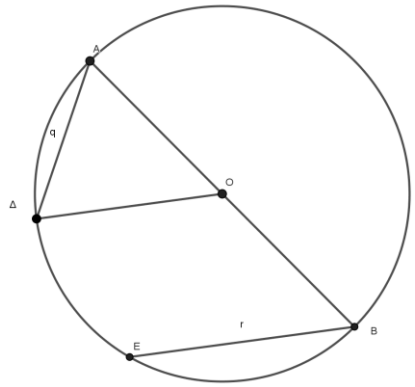
56. Π: Τι σου λέει διάβασε.

57. Μ: Α, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ.

58. Μ: Να το κάνω έτσι;

59. Π: Κάνε το.

60. Μ: Και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ, που τέμνονται αυτά;; Δεν τέμνονται.



(ο μαθητής έχει σχεδιάσει μέχρι αυτό το σημείο)

61. Π: Δεν τέμνονται;;

62. Μ: Όχι.

63. Π: Άρα, θα είναι παράλληλες;;

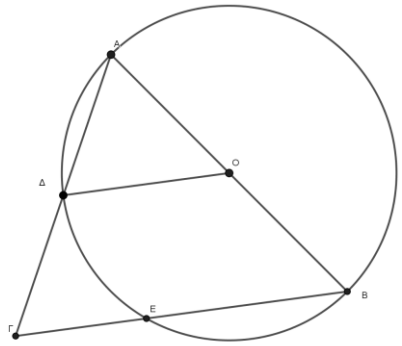
64. Μ: Όχι, δεν γίνεται να είναι παράλληλες εκτός και δεν το έχω σχεδιάσει σωστά.

65. Π: Σωστά το έχεις σχεδιάσει. Σκέψου.

66. Μ: Α, πρέπει να τις προεκτείνουμε για να δούμε που τέμνονται.

67. Π: Πολύ ωραία, κάνε το.

68. Μ: (Ο μαθητής σχεδιάζει το παρακάτω σχήμα).



69. Π: Τι σου ζητάει τώρα να αποδείξεις;

70. Μ: Να δείξω με όσους περισσότερους τρόπους μπορώ ότι ΓΒ = ΑΒ.

71. Π: Ωραία, σκέψου.

72. Μ: Το πρώτο πράγμα που σκέφτομαι είναι επειδή σχηματίζεται αυτό το τρίγωνο άμα δείξω ότι είναι ισοσκελές τότε αυτά τα δύο θα είναι ίσα.

73. Π: Ωραία σκέψη, πως θα το δείξουμε;;

74. Μ: Για να είναι ισοσκελές πρέπει να έχουμε αυτές τις δύο γωνίες ίσες (δείχνει την γωνία Α και την γωνία Γ).

75. Π: Χρειάζεσαι κάτι άλλο;

76. Μ: Όχι.

77. Π: Ωραία, απόδειξέ το.

78. Μ: Τα δεδομένα μου είναι ότι ΑΟ = ΟΒ γιατί είναι ακτίνες.. και με την ΟΔ πάλι ως ακτίνα.

79. Π: Και τι βγαίνει από αυτό;;

80. Μ: Θα μπορούσαμε να πάρουμε την γωνία αυτή (εννοεί την Δ1) και να την βγάλουμε ίση με την Α επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

81. Π: Ωραία συνέχισε.

82. Μ: Μετά, αν ένωνα το Δ με το Ε και δημιουργούσα αυτό το τρίγωνο, όχι… δεν βγαίνει κάτι..

83. Π: Τι θες να αποδείξεις;

84. Μ: Ότι η Α γωνία είναι ίση με την Γ. Και έβγαλα ότι Α γωνία ίση με την Δ1…Α! αρκεί να δείξω ότι η Γ είναι ίση με την Δ1 και τελείωσα.

85. Π: Σωστά.

86. Μ: Για να δούμε…. Ξέρουμε ότι Γ είναι το σημείο τομής και…. ΔΟ//ΕΒ.. Δεν βγαίνει κάτι.. Μήπως να πάρουμε αυτό το τραπέζιο;;

87. Π: Αν νομίζεις ότι θα σε βοηθήσει.

88. Μ: Α! Θα είναι και ΔΟ//ΒΓ και η ΑΓ τις τέμνει θα μπορούσαμε να κάνουμε το θεώρημα του Θαλή.

89. Π: Σκέψου πιο απλά, για τις γωνίες που θες να αποδείξεις ότι είναι ίσες.

90. Μ: Εεε… Ά μπορώ να πω ότι επειδή ΔΟ//ΒΓ και η ΑΓ τις τέμνει, η γωνία Δ2 θα ισούται με την Γ, Εεε όχι η Δ1 θα ισούται με την Γ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες.

91. Π: Άρα;

92. Μ: Και άρα, η γωνία Γ = Δ1 και επειδή Δ1 = Α τότε και η Α = Γ και άρα ΓΒ = ΑΒ.

93. Π: Είδες τη ωραία είναι η γεωμετρία;;

94. Μ: Ε, είναι η νοοτροπία ότι δεν θα μου χρησιμεύσει κάπου, αλλά είναι ωραίο γιατί παιδεύεσαι να το βρεις και όταν το βρεις είναι σαν να λυτρώνεσαι στην γεωμετρία.

95. Π: Γράψε τώρα τον πρώτο τρόπο που βρήκες.

96. Π: Σκέφτεσαι άλλο τρόπο;

97. Μ: Εε, μάλλον όχι μισό λεπτό… Καλύτερα πάμε στην 4 να δούμε.

98. Π: Ωραία για διάβασε.

99. Μ: Πως θα το λύσω αυτό δεν μου δίνει τίποτα;

100. Π: Προσπάθησε να σκεφτείς.

101. Μ: Το μόνο που μου έρχεται είναι ότι αν βρω έναν τρόπο να βρω τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα εκεί που θα τέμνονται να είναι το κέντρο του.

102. Π: Ωραία σκέψη αλλά εδώ δεν έχουμε άξονα, τι αρκεί να βρεις;

103. Μ: Α, μήπως να βρούμε δύο ευθείες που τέμνονται και το σημείο τομής τους να είναι το κέντρο του; Γιατί ένα σημείο είναι σημείο τομής δύο ευθειών.

104. Π: Ωραία, σκέψου τι ευθείες έχουμε στον κύκλο.

105. Μ: Όλες οι ευθείες περνούν από το κέντρο οι διάμετροι, οι ακτίνες…. Άρα, αρκεί να βρω δύο διαμέτρους και να πάρω το σημείο τομής τους. Αν ενώσω αυτό με το απέναντί του δεν θα πάρω την διάμετρο;;

106. Π: Πως είσαι σίγουρος ότι θα είναι διάμετρος;

107. Μ: Σωστά πρέπει να περνάει από το κέντρο του κύκλου για να είναι που είναι και το ζητούμενο.

108. Π: Άρα τη μπορείς να φέρεις εύκολα στον κύκλο;

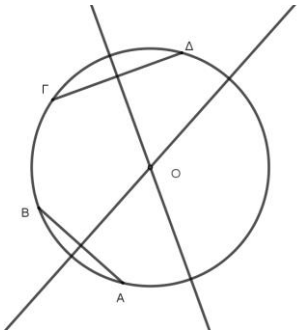
109. Μ: Α, χορδή.. Μπορώ να φέρω δύο χορδές, αλλά το σημείο τομής τους δεν θα είναι το κέντρο… Α, θυμάμαι ότι μια ευθεία που έρχεται από το κέντρο της χορδής περνάει από το κέντρο του κύκλου αλλά δεν θυμάμαι πως την λένε.. Ήταν και κάθετη στην χορδή.

110. Π: Ωραία, μάλλον εννοείς το απόστημα χορδής που είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την χορδή. Αλλά αφού περνάει από το κέντρο της χορδής και είναι κάθετη τι θα είναι;

111. Μ: Μεσοκάθετος.

112. Π: Οπότε τι αρκεί να κάνω;

113. Μ: Να φέρω μια χορδή ΑΒ (την σχεδιάζει) και να φέρω την μεσοκάθετό της την οποία θυμάμαι πως μπορώ να την κατασκευάσω με τον διαβήτη αλλά επειδή δεν έχω θα μετρήσω με τον χάρακα και θα βρω το μέσο.



(ο μαθητής σχεδιάζει το σχήμα που περιγράφει).

114. Π: Ωραία, και μετά;

115. Μ: Ε, θα κάνω το ίδιο για μια άλλη χορδή και εκεί που τέμνονται θα είναι το κέντρο του κύκλου.

116. Π: Ωραία, σκεφτήκαμε έναν τρόπο. Τι λες θα βρούμε άλλον;

117. Μ: Για ν δούμε. Μισό να φτιάξω έναν κύκλο.

118. Π: Ωραία, και προσπάθησε να σκεφτείς τι έχουμε πει μέχρι τώρα.

119. Μ: Δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι. Σκέφτομαι ότι η διάμετρο χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

120. Π: Τι μας βοηθάει αυτό.

121. Μ: Ότι άμα βρω την διάμετρο επειδή περνάει από το κέντρο του κύκλου θα βρω κάπως το κέντρο. Α, μπορώ να βρω άλλη μία και να πάρω το σημείο τομής τους.

122. Π: Πως μπορούμε να βρούμε την διάμετρο;

123.Μ: (Παύση για 3 λεπτά)

124. Π: Σκέψου τις γνωστές κατασκευές στην γεωμετρία.

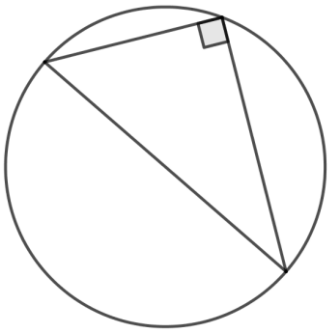
125. Μ: Κάτι που μου ήρθε είναι η ορθή γωνία λόγω του ότι βαίνει σε ημικύκλιο.

126. Π: Ωραία σκέψη, ποια γωνία είναι αυτή σε σχέση με τον κύκλο;

127. Μ: Η εγγεγραμμένη.. Αλλά δεν μπορώ να βγάλω κάτι…….. Α! Αν προσδιορίσω μια ορθή γωνία θα σχηματίσω την διάμετρο.

128. Π: Πολύ ωραία, για κάνε το.

129. Μ: Σχεδιάζει.



(σχεδιάζει την εγγεγραμμένη γωνία με το γνώμονα σχεδιάζοντας πρώτα μια χορδή και στην συνέχεια φέρνοντας κάθετη)

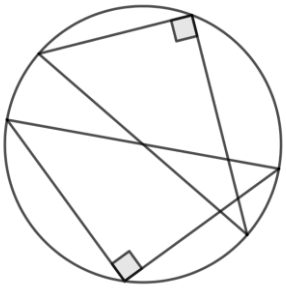
130. Μ: Αν ενώσω τα δύο σημεία θα σχηματίσω την διάμετρο.

131. Π: Ωραία, τι μένει.

132. Μ: Να βρω το κέντρο.

133. Χμ, θα κάνω το ίδιο για μια άλλη ορθή για να βρω την νέα διάμετρο και θα βρω την τομή τους. Θα το σχεδιάσω μισό λεπτό.

134. Μ: Άρα, τώρα το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του κύκλου Ο.



135. Μ: Τώρα έτσι όπως το κάναμε αν έχουμε μόνο το τριγωνάκι αυτό (εννοεί το ένα από τα δύο) ..

136. Π: Κάνε νέο σχήμα.

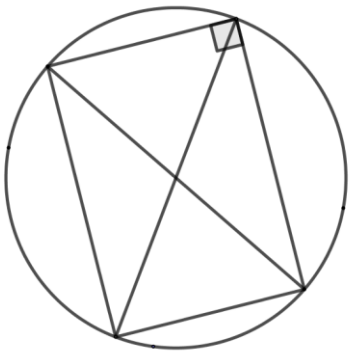
137. Μ: Άμα κάνουμε λοιπόν το ίδιο και δημιουργήσω τετράγωνο και φέρω τις διαγώνιες, εκεί που θα τέμνονται οι διαγώνιες δεν θα είναι το κέντρο του κύκλου;

138. Π: Για απόδειξέ το.

139. Μ: Άρα, άμα τις φέρω τις ευθείες, τις παράλληλες, θα σχηματιστεί το τετράγωνο.. ή μάλλον ορθογώνιο δεν ξέρουμε αν είναι τετράγωνο..

140. Π: Ναι καλύτερα ορθογώνιο. Και πως ξέρεις ότι το κέντρο θα είναι το σημείο τομής των διαγώνιων; Είσαι σίγουρος;

141. Μ: Ξέρουμε ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου τέμνονται και διχοτομούνται, δηλαδή σίγουρα θα τέμνονται. Α, και βάση του ότι είναι ορθές όλες οι γωνίες οι διαγώνιες θα είναι και διάμετροι.



142. Π: Άρα;

143. Μ: Επειδή διχοτομούνται θα είναι το κέντρο του κύκλου λόγο ακτίνων.

144. Π: Εντάξει. Σκέφτεσαι κάτι άλλο;

145. Μ: Όχι, καλύτερα πάμε στο 1 πρόβλημα.

146. Π: Για ξαναδιάβασέ το.

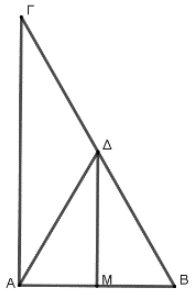
147. Μ: Είναι στην ουσία το γνωστό θεώρημα που χρησιμοποίησα στην άσκηση 3.

148. Π: Ναι αλλά εδώ σου ζητάει να το αποδείξεις.

149. Μ: Αν φέρω κάθετες από το Δ προς την ΑΒ και την ΑΓ δεν θα είναι τα μέσα;

150: Π: Για πιο λόγο;

151. Μ: Βασικά καλύτερα να πούμε ότι αν φέρουμε παράλληλη από το Δ στην ΑΓ τότε θα αυτή η καινούργια ευθεία έστω ΔΜ θα είναι κάθετη στην ΑΒ και από το θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε και πριν επειδή το Δ είναι μέσο τότε και το Μ θα είναι μέσο της ΑΒ. Όμοια, μπορούμε να το ισχυριστούμε και να φέρουμε παράλληλη από το Δ στην ΑΒ. (Σχεδιάζει)



(ο μαθητής σχεδιάζει με τον χάρακα τα νέα στοιχεία στο αρχικό σχήμα που του έχει δοθεί)

152. Π: Πολύ ωραία, τώρα;

153. Μ: Από αυτό μπορούμε να πούμε ότι το ΔΜ είναι διάμεσος και ύψος. Θα συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΔΒ. Βρίσκουμε πως είναι ίσα (έχουν Μ=90° ίση, ΔΜ=κοινή και ΑΜ=ΜΒ), άρα όλα τα στοιχεία τους θα είναι ίσα άρα και ΑΔ=ΔΒ.

154. Π: Πολύ ωραία. Κατάλαβες ότι έκανες δύο τρόπους μαζί λίγο διαφορετικούς;

155. Μ: Όχι, τι έκανα;

156. Π: Κοίτα λίγο την απάντηση που έδωσες. Είπες ότι ΔΜ διάμεσος και ύψος.

157. Μ: Α! Ναι! Όταν η διάμεσος και το ύψος είναι κοινά τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και άρα θα ήταν ίσες οι πλευρές. Άρα, δεν χρειαζόταν σύγκριση.

158. Π: Πολύ ωραία, δύο τρόποι που μοιάζουν αρκετά αλλά είναι διαφορετικοί. Πως θα συνεχίσουμε;

159. Μ: Να σκεφτώ λίγο…Να συγκρίνουμε τα ΑΔΓ και ΑΔΒ και να… όχι το είδα στην αρχή αυτό δεν βγάζει κάτι…. Α, μήπως να κάνουμε τα ίδια και την παράλληλη που φέραμε στην ΑΒ;

160. Π: Να το κάνουμε και τι θα βρούμε;

161. Μ: Θα βρούμε άλλους δύο τρόπους που μοιάζουν με τους άλλους δύο.

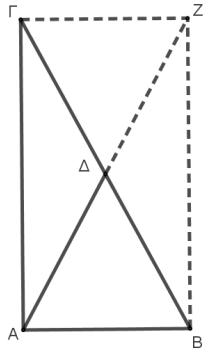
162. Π: Ωραία, απλά γράψε κάνω τα ίδια στο άλλο τρίγωνο.

163. Μ: (ο μαθητής γράφει τα ίδια για το άλλο τρίγωνο).

164. Π: Θα βρούμε άλλο τρόπο τι λες;

165. Μ: Για να δούμε…Κάτι μου έρχεται, μισό λεπτό να δω κάτι στο τέταρτο θέμα.

166. Μ: Να φέρουμε παράλληλη από το Γ στο ΑΒ και από το Β στο ΑΓ και θα δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γιατί Α = 90° (ο μαθητής σχεδιάζει το νέο σχήμα). Από αυτό θα πούμε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται και άρα ΑΔ=1/2ΒΓ.



(ο μαθητής με τον χάρακά του σχεδιάζει τα νέα βοηθητικά στοιχεία στο ήδη υπάρχον σχήμα που του έχει δοθείς την αρχή)

167. Π: Είδες τη ωραία που είναι; Το φανταζόσουν ότι θα έβρισκες τόσα;

168. Μ: Με τίποτα!!

169. (Χτυπάει το κουδούνι)

170. Μ: Σκέφτηκα και κάτι άλλο.

171. Π: Για πες.

172. Μ: Θα μπορούσα να κάνω κύκλο;; όπως κάναμε στο 4 θέμα. Επειδή η ορθή βαίνει σε ημικύκλιο, να πούμε ότι η ΒΓ θα είναι διάμετρος και το κέντρο θα είναι το Δ. Οπότε οι ΔΓ, ΔΒ και ΔΑ θα είναι ακτίνες, οπότε θα είναι και ίσες. Σωστό είναι;

(ο μαθητής δεν κάνει κάποιο σχήμα εδώ λόγο έλλειψης χρόνου)

173. Π: Πολύ σωστό!!

174. Μ: Μάλλον θα αλλάξω γνώμη για την γεωμετρία!!

Μαθητής 2

Π: Παναγιώτης, Μ: Μαθητής

1. Π: Σου έχω δώσει ένα φυλλάδιο το οποίο περιλαμβάνει 4 γεωμετρικά προβλήματα. Ο στόχος είναι να τα λύσεις με όσο περισσότερους τρόπους μπορείς. Έχεις ξανακάνει κάτι τέτοιο;

2. Μ: Όχι, δεν έχει τύχει.

3. Π: Ωραία, θα το κάνεις σήμερα. Στην αρχή του φυλλαδίου έχει μια ερώτηση διάβασε την και ξεκίνα πρώτα από αυτήν. Θεωρούνται σωστά όλες οι προτάσεις που έχετε κάνει μέχρι τώρα και όλες οι κατασκευές.

4. Μ: Θα διάλεγα το τέταρτο πρόβλημα, γιατί μου φάνηκε εύκολο και το δεύτερο πρόβλημα, γιατί μου κίνησε την περιέργεια να μάθω πως λύνεται.

5. Π: Ωραία, από πού θες να ξεκινήσεις;

6. Μ: Θα ξεκινήσω από το 4 πρόβλημα γιατί μου φάνηκε εύκολο και έχω σκεφτεί έναν τρόπο ήδη.

7. Π: Εντάξει για πες.

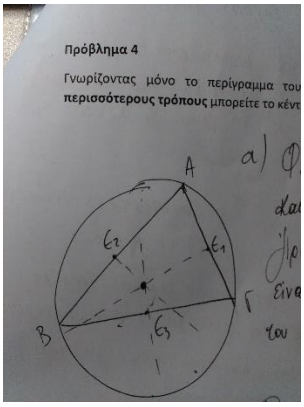
8. Μ: Να σχεδιάσω τον κύκλο πρώτα.

(σχεδιάζει έναν κύκλο με το χέρι του)

9. Μ: Θυμάμαι το θεώρημα που οι μεσοκάθετες ενός εγγεγραμμένου τριγώνου σε κύκλο τέμνονται στο κέντρο του. Άρα, αρκεί να φέρω εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους των πλευρών του. Τότε το σημείο τομής τους θα είναι το κέντρο του κύκλου. Κάπως το λέμε αυτό το σημείο αλλά δεν το θυμάμαι τώρα.

10. Μπράβο, το σημείο αυτό το λέμε περίκεντρο. Γράψε α΄ τρόπος και γράψε την απάντησή σου.

11. Μ: (Ο μαθητής γράφει την απάντησή του)



(Ο μαθητής έχει σχεδιάσει και αυτό το σχήμα)

12. Π: Πολύ ωραία, σκέφτεσαι κάποιον άλλο τρόπο;;

13. Μ: Να φτιάξω έναν κύκλο να τον βλέπω.

(Ο μαθητής σχεδιάζει έναν κύκλο)

13΄. Μ: Μμ., να φέρω την παράλληλη…. Α! Να πάρουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο τώρα όχι τυχαίο και άρα η ορθή γωνία θα βαίνει σε ημικύκλιο. Και αν φέρουμε την διάμεσο το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του κύκλου.

14. Π: Την διάμεσο πως θα την σχεδιάσουμε;

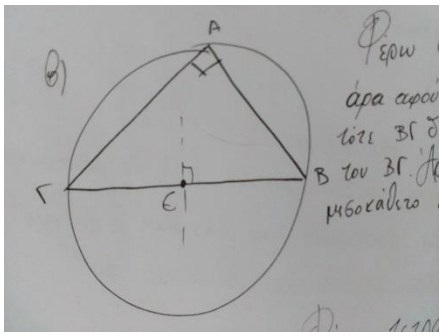
15. Μ: Εεε…..

16, Π: Μπορούμε να φέρουμε κάποια άλλη ευθεία εκτός από την διάμεσο που θα μας δώσει το ζητούμενο;

17: Μ: Α! Να φέρουμε την μεσοκάθετο όπως πριν.

18: Π: Μπράβο! Σχεδίασε το και γράψε τον δεύτερο τρόπο που βρήκες.

19: Μ: (Ο μαθητής σχεδιάζει και γράφει τον δεύτερο τρόπο).



(Ο μαθητής σχεδιάζει αυτό το σχήμα)

20. Π: Την μεσοκάθετο θυμάσαι πως την σχεδιάζουμε;

21. Μ: Νομίζω ναι, έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα έστω το ΒΓ που έχουμε εδώ στο σχήμα μας και σχεδιάζω δύο κύκλους έναν με κέντρο το Γ και έναν με κέντρο το Β.

22. Π: Τυχαίους κύκλους;

23. Μ: Όχι, πρέπει να είναι ίσοι μεταξύ τους.

24. Π: Και η ακτίνα;

25. Μ: Εεε, θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από μισό του ευθυγράμμου τμήματος;;

26. Π: Σωστά, και μετά τι κάνουμε;

27. Μ: Ενώνουμε τα δύο σημεία που τέμνονται οι δύο κύκλοι και αυτή θα είναι η μεσοκάθετος.

28. Π: Ωραία, τελείωνε την απάντησή σου.

29. Μ: Να φέρουμε τώρα ένα τετράγωνο; Όπως το βλέπω μπορούμε να διπλασιάσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο.

30. Π: Και αν το διπλασιάσουμε θα είναι τετράγωνο;

31. Μ: Ε ναι.

32. Π: Πως είσαι σίγουρος;

33. Μ: Α, όχι ορθογώνιο θα είναι όχι τετράγωνο. Μπερδεύτηκα από το προηγούμενο σχήμα που οι πλευρές μοιάζουν να είναι ίσες.

34. Π: Άρα τι θα κάνουμε;

35. Μ: Να φέρουμε πρώτα ένα τετράγωνο και μετά να εγγράψουμε στον κύκλο. Με βάση τις ιδιότητες του τετραγώνου οι γωνίες του όλες είναι ορθές και θα βαίνουν πάντα σε ημικύκλιο. Άρα, οι διαγώνιοι θα είναι διάμετροι και το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του κύκλου.

35. Π: Καλή η σκέψη σου αλλά δεν είναι απόλυτα σωστή γιατί έχουμε το περίγραμμα. Μπορείς να σκεφτείς τι θα έπρεπε να ξέρουμε για εγγράψουμε το τετράγωνο;

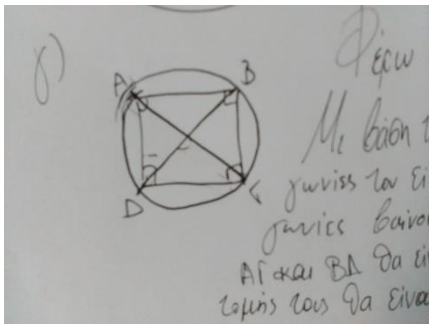
36. Μ: Όχι δεν μου έρχεται κάτι.

37. Π: Αν γνωρίζαμε την διάμετρο του κύκλου θα μπορούσαμε να φέρουμε και μια διάμετρο κάθετη σε αυτήν και μετά ενώνοντας τα 4 σημεία που βρίσκονται στον κύκλο θα είχαμε το τετράγωνο, αλλά εδώ δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό ή τουλάχιστον δεν μου έρχεται κάποιος άλλος τρόπος.

38. Μ: Μάλιστα, νομίζω κατάλαβα τι λέτε.

39. Π: Ωραία, γράψε τον τρόπο που σκέφτηκες εσύ.

40.: Μ: Ο μαθητής γράφει: Φέρω τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Με βάση τις ιδιότητές του τετραγώνου ξέρουμε πως οι γωνίες του είναι ορθές και οι εγγεγραμμένες ορθές βαίνουν πάντα σε ημικύκλιο. Άρα, οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ θα είναι οι διάμετροι του κύκλου και το σημείο τομής θα είναι το κέντρο του.



(κατασκευάζει και αυτό το σχήμα ενώ γράφει την απάντησή του)

41. Π: Άλλον τρόπο θα βρούμε τι λες;

42. Μ: Για να δούμε, βασικά κάτι έχω σκεφτεί αλλά ίσως είναι ίδιος τρόπος.

43. Π: Για πες.

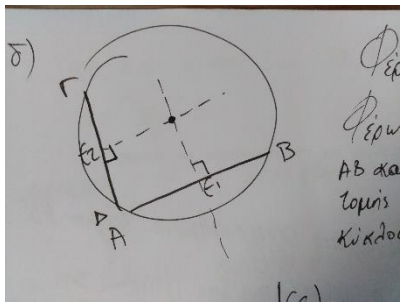
44. Μ: Όπως στον πρώτο τρόπο που φέραμε στο τρίγωνο τις μεσοκαθέτους αλλά να μην πάρουμε τρίγωνο να πάρουμε απλά μια χορδή και να φέρουμε την μεσοκάθετο;

45. Π: Σωστή σκέψη. Μια χορδή αρκεί;

46. Μ: Όχι πρέπει να πάρουμε δύο χορδές ώστε να βρούμε σημείο τομής.

47. Π: Ωραία, αυτές οι χορδές μπορούν να είναι οποιεσδήποτε χορδές του κύκλου;

48. Μ: Ναι τυχαίες. Μισό λεπτό να κάνω το σχήμα.



(ο μαθητής κάνει αυτό το σχήμα)

49. Π: Σωστά, με την μόνη διαφορά ότι δεν πρέπει να είναι παράλληλες γιατί τότε οι μεσοκάθετες τους θα συμπίπτουν και δεν θα έχουμε σημείο τομής.

50. Μ: Α, δεν το είχα σκεφτεί αυτό.

51. Π: Γράψε τώρα τον τρόπο σου.

52. Μ: Ο μαθητής γράφει: Φέρω τυχαίες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Φέρω τις μεσοκαθέτους Ε1, Ε2 των ΑΒ και ΓΔ και το σημείο τομής τους θα είναι το κέντρο του κύκλου.

53. Μ: (ενώ γράφει ακόμα την προηγούμενη απάντηση): Με την ίδια λογική δεν μπορώ να κάνω το ίδιο και με τις εφαπτόμενες του κύκλου;

54. Π: Δηλαδή, τι εννοείς; Βασικά τελείωνε πρώτα.

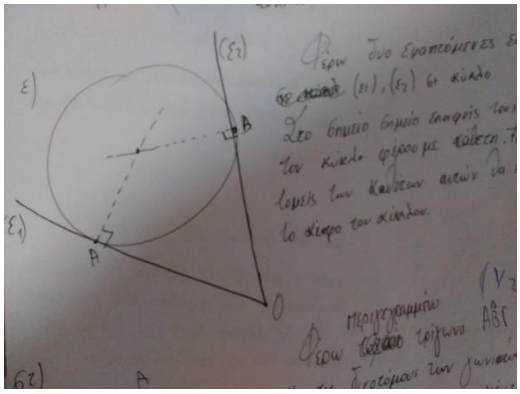
55. Μ: Εννοώ να φέρουμε πάλι δύο εφαπτόμενες του κύκλου και να φέρουμε τις μεσοκαθέτους και αυτές θα τέμνονται στο κέντρο του κύκλου.

56. Π: Τις μεσοκαθέτους σε πιο σημείο;

57. Μ: Στο σημείο επαφής;;

58. Π: Για σχεδίασε το να δούμε.

59. Μ: (Ο μαθητής σχεδιάζει)



(ο μαθητής σχεδιάζει αυτό το σχήμα)

60. Π: Άρα είναι σωστό αυτό που είπες πριν;

61. Μ: Ναι, δεν είναι;

62. Π: Δεν ξέρω έφερες κάποια μεσοκάθετο;

63. Μ: Ααα, απλά κάθετες φέραμε όχι μεσοκάθετο.

64. Π: Σωστά, γιατί έχουμε ημιευθεία και όχι κάποιο ευθύγραμμο τμήμα. Για γράψε την απάντησή σου.

65. Μ: (Ο μαθητής γράφει): Φέρω δύο εφαπτόμενες ευθείες (ε1), (ε2) σε κύκλο. Στο σημείο. Στο σημείο επαφής τους με τον κύκλο φέρουμε κάθετη. Το σημείο τομής των καθέτων αυτών θα είναι το κέντρο του κύκλου.

66. Π: Ίσως έχει ένα μικρό πρόβλημα αυτή η κατασκευή επειδή δεν ξέρουμε που είναι το κέντρο αλλά ας το δεχτούμε για να προχωρήσουμε και στα άλλα.

67. Μ: Ναι είναι αρκετά νομίζω αυτά. Μου ήρθε βέβαια και κάτι άλλο από πέρυσι. Να φτιάξουμε τον κύκλο και μετά ένα τρίγωνο γύρω γύρω και να φέρουμε τις διαμέσους οι οποίες θα περνούν από το κέντρο του.

68. Π: Καλή σκέψη, εσύ λες να φέρουμε το περιγεγραμμένο τρίγωνο του κύκλου και τις διαμέσους.

69. Μ: Ναι.

70. Π: Είσαι σίγουρος για τις διαμέσους;

71. Μ: Ναι.

72. Π: Δεν είναι οι διάμεσοι.

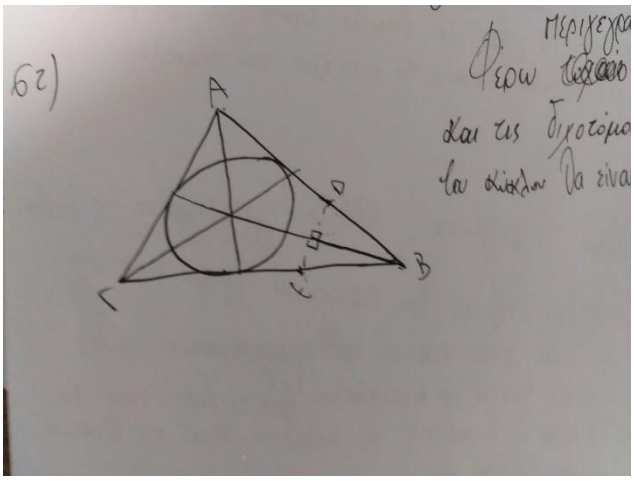
73. Μ: Εεε, τα ύψη μήπως είναι;

74. Π: Όχι, είναι οι διχοτόμοι.

75. Μ: Χαχα, ωραία. Δεν το θυμόμουν καλά το θεώρημα, απλά είχα αυτήν την εικόνα με το τρίγωνο στο μυαλό μου.

76. Π: Εντάξει δεν πειράζει, γράψε μια απάντηση.

77. Μ: (Ο μαθητής σχεδιάζει και γραφεί) : Φέρω περιγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ του κύκλου και τις διχοτόμους των γωνιών. Το έκκεντρο του τριγώνου θα είναι το κέντρο του κύκλου.



(Ο μαθητής σχεδιάζει το παραπάνω σχήμα)

78. Π: Ωραία, πάμε να δούμε άλλο πρόβλημα;

79. Μ: Ναι πάμε στο 2. Πόσες λύσεις έχει αυτό;

80. Π: Εγώ έχω βρει 25.

81. Μ: Τι; Τόσες πολλές;;;

82. Π: Πλάκα κάνω, άλλα 5-6 έχει σίγουρα! Για διάβασε να δούμε τι ζητάει.

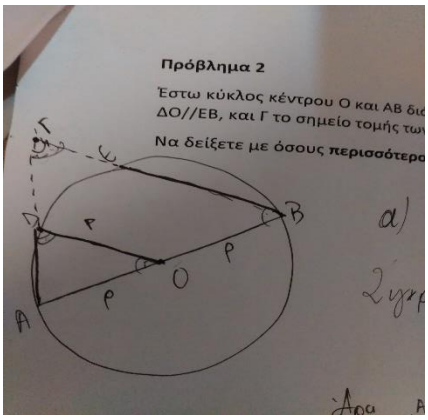
83. Μ: (Ο μαθητής διαβάζει και φαίνεται να μπερδεύεται στο σχήμα). Μπορείτε να μου κάνετε το σχήμα;

84. Π: Διάβασε καλά τι σου ζητάει δεν είναι δύσκολο.

85. Μ: (Ο μαθητής ξαναδιαβάζει την εκφώνηση). Α κατάλαβα, πρέπει να προεκτείνω τις ΑΔ και ΕΒ για να τέμνονται.

86. Π: Σωστά, και τι μας ζητάει να δείξουμε;

87. Μ: Ότι ΓΒ = ΑΒ.



(Ο μαθητής σχεδιάζει το σωστό σχήμα όπως φαίνεται – χωρίς να σύμβολα ρ και τα σημαδάκια για ισότητα γωνιών)

88. Π: Διάβασε τα δεδομένα σου και απόδειξέ το.

89. Μ: Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

90. Π: Ωραία, πως θα το κάνουμε;

91. Μ: Η ΑΒ είναι διάμετρος άρα ΟΑ = ΟΒ = ρ. Πως θα προχωρήσω τώρα;

92. Π: Ξεκίνα με την αρχική σου σκέψη ότι θες να δείξεις ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

93. Μ: Μπορώ να συγκρίνω αυτό το τρίγωνο (εννοεί ΑΟΔ) με το μεγάλο (εννοεί ΑΒΓ), εεε όχι να τα συγκρίνω να πω ότι είναι όμοια, και μετά να πω ότι η γωνία Α είναι ίση με την Γ.

94. Π: Όταν τα βγάλεις όμοια τι θα ισχύει;

95. Μ: Θα έχουν την γωνία Α κοινή και την γωνία Β ίση με την Ο επειδή είναι παράλληλες οι ΒΓ με την ΟΔ. Άρα, και η Γ = Δ. Όμως δεν βγαίνει αυτό που θέλουμε. Πρέπει να βγάλω την Γ ίση με την Α. Άρα, πρέπει να βγάλω ότι η Δ είναι ίση με την Α.

96. Π: Πολύ ωραία μέχρι τώρα, για γράψε τα να δούμε τι έχουμε.

97. Μ: (Ο μαθητής γράφει) : Συγκρίνω τα ΑΒΓ και ΑΟΔ. Αυτά έχουν: (ι) Α = Α γωνίες κοινές (ιι) Β = Ο , Ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΟΔ//ΒΓ με ΟΒ τέμνουσα. Και ΑΟ = ΟΒ. Αα, θα είναι και ΑΟ=1/2 ΑΒ. Άρα, θα είναι όμοια τα τρίγωνα με λόγο ομοιότητας ½.

98. Π: Το μικρό τρίγωνο τι είναι;

99. Μ: Εεε, Α! Θα είναι ισοσκελές γιατί και η ΔΟ είναι ακτίνα. Άρα, αφού θα είναι όμοιο το ΑΒΓ με το μικρό θα είναι και αυτό ισοσκελές. Άρα, έπεται το ζητούμενο ΓΒ=ΑΒ.

100. Π: Πολύ ωραία, γράψε τα.

101. Μ: (Ο μαθητής γράφει αυτά που είπε).

(Ο μαθητής καθ΄ όλη την διάρκεια επίλυσης του δεύτερου προβλήματος κοιτάζει το αρχικό και μικρές συμπληρώσεις κάθε φορά, όπως να ονομάζει ρ τις ακτίνες και να σημειώσει τις ίσες γωνίες.)

102. Π: Πάμε να δούμε άλλον τρόπο.

102. Μ: Στην αρχή έτσι όπως το βλέπεις δυσκολεύεσαι να βρεις και την μία απάντηση, αλλά μόλις βρεις την μια σε βοηθάει να βρεις και τις επόμενες.

103. Μ: Για να δω λίγο τα δεδομένα πάλι….. Ξέρω ότι ΔΟ // ΕΒ αλλά δεν ξέρω κάτι για το Δ…

104. Π: Το Ο ξέρεις τι είναι;

105. Είναι το κέντρο του κύκλου.

106. Π: Και τι άλλο;

107. Μ: Εεε, το μέσο της ΑΒ;;

108. Π: Πολύ σωστά. Μήπως σε βοηθάει αυτό;

109. Μ: Ξέρουμε ότι η γωνία Γ είναι ίση με την Δ και η Δ ίση με την Α. Και ΔΟ//ΒΓ.

110. Μ: Δεν ξέρω…

111. Π: Είπες ότι ΔΟ//ΒΓ και Ο μέσο. Για επικεντρώσου εκεί.

112. Μ: Ναι… Α, να το δω στο τρίγωνο ΑΒΓ, επειδή Ο μέσο και ΔΟ//ΒΓ θα είναι και το Δ μέσο.. Και η ΔΟ θα είναι η μισή της ΒΓ.

113. Π: Και άρα;

114. Μ: Άρα, έχουμε ΟΔ=ΒΓ/2 →2ΟΔ=ΒΓ →2ρ=ΓΒ →ΑΒ=ΓΒ.

115. Π: Μπράβο, πολύ σωστά. Άλλος τρόπος σου έρχεται;

116. Μ: Δεν νομίζω, δεν μου έρχεται κάτι άλλο.

117. Π: Έχεις βρει άλλον έναν τρόπο, τον είπες πριν αλλά δεν το κατάλαβες.

118. Μ: Α ναι δεν το κατάλαβα.

119. Π: Ναι είπες ότι Α=Δ επειδή είναι ισοσκελές το ΑΔΟ και Δ=Γ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΟ και ΓΒ.

120. Π: Από αυτό τι έπεται;

121. Μ: Ότι Α=Γ και άρα ισοσκελές το ΑΒΓ, αλλά δεν το αποδείξαμε στον πρώτο τρόπο έτσι;;

122. Π: Για κοίτα να δεις.

123. Μ: Α χρησιμοποιήσαμε την ομοιότητα εκεί, άρα είναι άλλος τρόπος αυτός;

124. Π: Ναι, συμπλήρωσέ τον ως τρίτο τρόπο.

125. Μ: (Ο μαθητής συμπληρώνει και τον τρίτο τρόπο).

126. Μ: Πάμε στην τρίτη άσκηση.

127. Π: Εντάξει, διάβασε την.

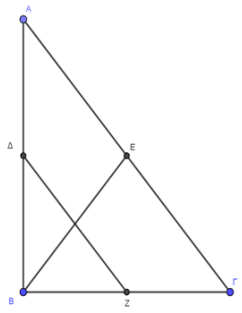
128.Μ: Ξέρουμε σίγουρα ότι ΒΕ=ΑΓ/2=ΕΓΑ, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα. Άρα, μπορώ να βγάλω και την ΔΖ με κάποιον τρόπο ίση με ΑΓ/2.

129. Π: Πολύ σωστά, για σκέψου.

130. Μ: Από εκφώνηση έχω ότι Δ μέσο ΑΒ και Ζ μέσο ΒΓ. Άρα από το θεώρημα που χρησιμοποίησα και πριν ισχύει ΔΖ=ΑΓ/2.

131. Μ: Άρα, από τις 2 αυτές σχέσεις έδειξα ότι ΔΖ=ΕΒ.

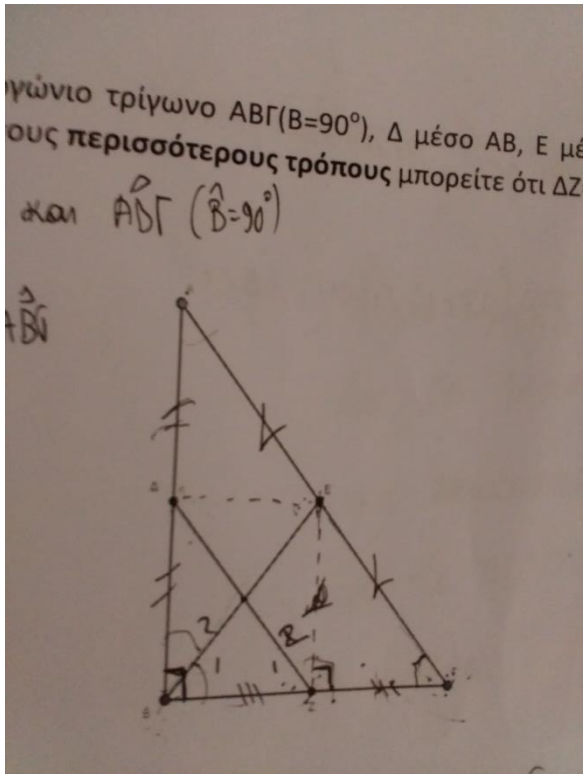
132. Π: Πολύ ωραία, ολοκλήρωσε την.



(χρησιμοποιεί το σχήμα όπως του έχει δοθεί δεν φέρει κάτι επιπλέον)

133. Μ: Ωραία, να δω τι άλλο μπορώ να κάνω. Θα φέρω τις ΕΔ και ΕΖ… Κάπως θα με βοηθήσει.

134. Μ: (Ο μαθητής φέρει τις ΔΕ και ΕΖ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα)



135. Μ: Μπορώ να πω ότι τα ΒΕΓ και ΒΕΑ είναι ισοσκελή σύμφωνα με το θεώρημα που είπαμε πριν ότι ΒΕ=ΑΓ/2. Άρα, αφού στο ΕΒΓ το Ζ είναι μέσο της ΒΓ, τότε η ΕΖ θα είναι διάμεσος αλλά και ύψος επειδή είναι ισοσκελές. Άρα, η γωνία Ζ θα είναι ορθή.

136. Π: Σωστά. Τι άλλο έχουμε;

137. Μ: Σκέφτομαι έτσι όπως τα βλέπω να συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΕ και ΔΒΖ, που είναι ορθογώνια έχουν κοινή την ΒΖ και ΕΖ=ΒΔ.

138. Π: Γιατί είναι ίσες οι ΕΖ και ΒΔ;

139. Μ: Επειδή Ε,Ζ είναι μέσα των ΑΓ, ΓΒ αντίστοιχα, άρα ΕΖ=ΑΒ/2=ΒΔ.

140. Μ: Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα άρα θα έχουν και τα άλλα στοιχεία τους ίσα, άρα ΒΕ=ΔΖ.

141. Π: Πολύ σωστά, γράψε τώρα σαν δεύτερο τρόπο.

142. Μ: (Ο μαθητής ολοκληρώνει την σκέψη του).

143. Μ: Μετά μπορούμε να πούμε, αντί να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ότι το ΒΖΕΔ θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αφού ξέρουμε ότι η Β είναι ορθή και δείξαμε ότι ΕΖ//= ΒΔ.

144. Π: Άρα, τι λείπει;

145. Μ: Να πούμε ότι ΔΕ//=ΒΖ με το ίδιο σκεπτικό επειδή τα Δ και Ε μέσα.

146. Π: Και πως θα δείξουμε το ζητούμενο;

147. Μ: Ε, επειδή είναι ορθογώνιο οι διαγώνιες του θα είναι ίσες. Άρα, ΒΕ=ΔΖ.

148. Π: Μπράβο, γράψε το τρίτο τρόπο.

149. Μ: (Ο μαθητής γράφει χωρίς να σχεδιάσει κάτι άλλο)

150. Π: Διαβάζεις φέτος γεωμετρία;

151. Μ: Όχι και τόσο, πέρυσι διάβαζα αρκετά.

152. Π: Σκέψου και να διάβαζες. Τι θες να περάσεις;

153 Μ: Ο αρχικός μου στόχος ήταν, βασικά ακόμα είναι ηλεκτρολόγος μηχανικός αλλά επειδή έχει υψηλή βάση 19000 μόρια, αν δεν το πιάσω θέλω φυσικό.

154. Π: Μαθηματικό όχι;

155. Μ: Μ αρέσουν και τα μαθηματικά, αλλά είναι ο αδερφός μου στο φυσικό οπότε ίσος το προτιμήσω.

156. Π: Θα πιάσεις την πρώτη σου επιλογή να είσαι σίγουρος. Πάμε παρακάτω θα βρούμε άλλον τρόπο;

157. Μ: Υπάρχει κι άλλο;

158. Π: Υπάρχει, κοίταξε το σχήμα.

159. Μ: Για να δω, μπορώ να βγάλω την ΓΖ, ίση με …..όχι δεν μπορώ.

160. Μ: Μπορώ να πω ότι αυτό το τρίγωνο (εννοεί ΔΒΖ) είναι όμοιο με το μεγάλο; Και να πω ότι αυτή (εννοεί ΔΖ) είναι η μίση αυτής (εννοεί ΑΓ);

161. Π: Μπορείς, αρκεί να δείξεις ότι είναι όμοια.

162. Μ: Ε εύκολα βγαίνει, αφού είναι και τα δύο ορθογώνια στο Β, και θα πούμε ότι αυτή είναι μισή αυτής (εννοεί ΔΒ=1/2ΑΒ) και αυτή μισή αυτής (εννοεί ΒΖ=1/2ΒΓ), οπότε θα

είναι όμοια επειδή η Β είναι η περιεχόμενη, με λόγο λ=1/2. Πρέπει να τα αποδείξω πάλι γιατί ισχύουν αυτά;

163. Π: Όχι, εντάξει επειδή δεν έχουμε και πολύ χρόνο γράψε τον τέταρτο τρόπο. Γράψε τον σε αυτή τη σελίδα για να τον βλέπεις το σχήμα.

164. Μ: (Γράφει αυτά που είπε δίπλα από το σχήμα).

165. Π: Πάμε και στο τελευταίο, διάβασε το.

166. Μ: Α, είναι αυτό που πήραμε πριν σαν δεδομένο, είναι η απόδειξή του.

167. Μ: Να φέρω την μεσοκάθετο του ΑΒ και να πω μετά ότι αυτό είναι ισοσκελές (εννοεί το ΑΔΒ).

168. Π: Και γιατί αυτό;

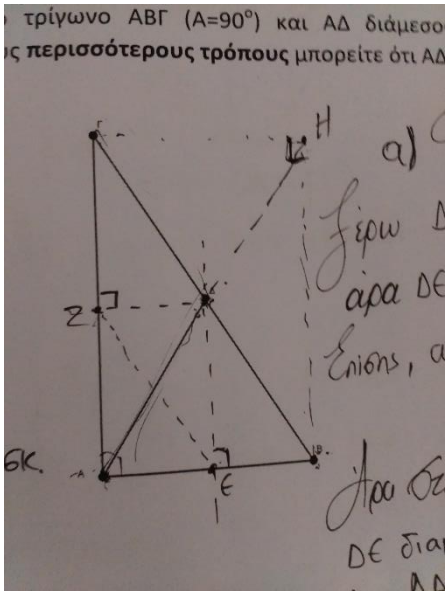
169. Μ: Επειδή η διάμεσος είναι ίση με το ύψος άρα θα είναι ισοσκελές. Άρα, το ΑΔ=ΔΒ που το ΔΒ είναι το μισό της υποτείνουσας.

170. Π: Και πως ξέρεις ότι η μεσοκάθετος περνάει από το Δ;

171. Μ: Όμοια με πριν επειδή το Δ είναι και αυτό μέσο.

172. Π: Εντάξει, άρα αρκεί να φέρουμε παράλληλη από το Δ στην ΓΑ, γράψε τον τρόπο σου.

173. Μ: (Ο μαθητής γράφει τον τρόπο που μόλις είπε – σχεδιάζοντας την ΔΕ).



(Ο μαθητής σε όλες τις λύσεις χρησιμοποίησε το αρχικό σχήμα που του είχε δοθεί φέρνοντας κάθε φορά εκεί τα απαραίτητα συμπληρωματικά στοιχεία)

174: Μ: Τώρα, ομοίως θα μπορούσα στο άλλο τρίγωνο (εννοεί ΑΔΓ) να φέρω ΔΖ//ΒΑ και να κάνω ακριβώς το ίδιο; Είναι άλλος τρόπος αυτός;

175. Π: Ναι, διαφέρουν ελαφρώς χρησιμοποιούμε διαφορετικές αναπαραστάσεις, γράψε τον.

176. Μ: Να γράψω ομοίως και στο άλλο τρίγωνο;

177. Π: Ναι γράψε ότι θες.

178. Μ: (Ο μαθητής γράφει την απάντησή του – φέρνει ΔΖ).

179. Μ: Επιτρέπεται να κοιτάξω λίγο τα προηγούμενα;

180. Π: Βεβαίως.

181. Μ: (Κοιτάει τις προηγούμενες ασκήσεις).

182. Μ: Α, μπορώ να φέρω κύκλο που να περνάει από τα ΑΒΓ με κέντρο το Δ, και διάμετρο την ΒΓ επειδή η Α είναι ορθή γωνία και ΑΔ θα είναι ακτίνα αφού Α σημείο του κύκλου και Δ το κέντρο. Και αφού ΒΓ ισούται με 2 ακτίνες θα έχουμε το ζητούμενο.

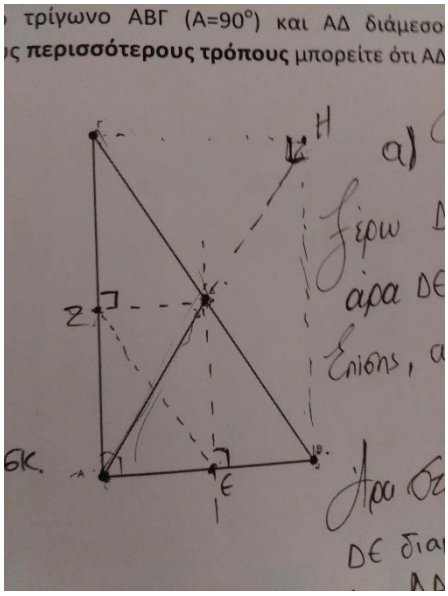
183. Π: Εξαιρετικά γράψε τον τρόπο σου. Μπράβο.

184. Μ: (Ο μαθητής γράφει όλα όσα είπε χωρίς να φέρει τον βοηθητικό κύκλο τα έκανε νοητικά όλα).

185. Π: Αν δεν είχαμε κάνει τα προηγούμενα πιστεύεις θα τον σκεφτόσουνα αυτόν το τρόπο;

186. Μ: Πιστεύω δύσκολα.

187. Μ: Τώρα, αν φέρω από το Β παράλληλη στην ΑΓ και μετά φέρω από την Γ παράλληλη στην ΑΒ, θα σχηματιστούν δύο ίσα τρίγωνα, και μετά αν φέρω και ΔΗ θα έχω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που οι διαγώνιες του θα είναι ίσες.. Αλλά και επειδή διχοτομούνται θα έχουμε αυτό που θέλουμε.



(Ο μαθητής φέρει αρχικά την ΒΗ//ΑΓ και μετά την ΓΗ//ΑΒ και στην συνέχεια προεκτείνει την ΑΔ μέχρι το Η)

188. Π: Μπράβο, σωστά.

189. Μ: Να γράψω ότι φέρνω παράλληλες ή σχηματίζω ορθογώνιο;

190. Π: Γράψε ότι φέρνω παράλληλες και σχηματίζεται το ορθογώνιο.

191. Μ: (Ο μαθητής γράφει αυτά που είπε).

192. Π: Άλλον τρόπο;

193. Μ: Σίγουρα υπάρχει κι άλλος τρόπος;

194. Π: Ναι έχεις βρει αρκετούς αλλά προσπάθησε έχουμε λίγο χρόνο.

Χτυπάει το κουδούνι.

195. Μ: Αν φέρω ΕΖ που θα είναι παράλληλης την ΒΓ επειδή Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τότε όπως στο τρίτο πρόβλημα ΕΖ=ΒΓ/2. Άρα, στο ορθογώνιο ΑΕΔΖ θα έχουμε ότι οι διαγώνιες ΑΔ=ΕΖ και άρα ΑΔ=ΒΓ/2.

(Ο μαθητής σχεδιάζει την ΕΖ)

196. Π: Εξαιρετικά, μπράβο.

Αποτελέσματα Στατιστικών Προγραμμάτων

1. Μέσος όρος ευελιξίας λύσεων των μαθητών και στα 4 προβλήματα.

Case Processing Summary

	Cases					
	Included		Excluded		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Flu	147	99,3%	1	0,7%	148	100,0%

Report

Flu

Mean	N	Std. Deviation	Minimum	Maximum	Median
3,60	147	2,210	0	12	3,00

2. Μέσος όρος ευχέρειας λύσεων και στα 4 προβλήματα.

Case Processing Summary

	Cases					
	Included		Excluded		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Fle	147	99,3%	1	0,7%	148	100,0%

Report

Fle

Mean	N	Std. Deviation	Minimum	Maximum	Median
33,813	147	20,2743	,0	111,0	30,000

3. Paired Samples t-test – Για ευχέρεια λύσεων μεταξύ προβλημάτων (1-3) & (2-4).

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Flu1_3	2,16	147	1,422	,117
	Flu2_4	1,442	147	1,2057	,0994

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Flu1_3 & Flu2_4	147	,411	,000

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1 Flu1_3 - Flu2_4	,7143	1,4382	,1186	,4798	,9487	6,021	146	,000

4. Paired Samples t-test – Για την ευελιξία λύσεων μεταξύ προβλημάτων (1-3) & (2-4).

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Fle1_3	19,881	147	12,6513	1,0435
	Fle2_4	13,93	147	11,370	,938

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Fle1_3 & Fle2_4	147	,423	,000

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1 Fle1_3 - Fle2_4	5,9490	12,9471	1,0679	3,8385	8,0594	5,571	146	,000

5. Paired Samples t-test–Για την πρωτοτυπία λύσεων μεταξύ προβλημάτων (1-3)&(2-4).

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Or1_3	2,891	147	5,0019	,4126
	Or2_4	3,925	147	5,9893	,4940

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Or1_3 & Or2_4	147	,264	,001

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1 Or1_3 - Or2_4	-1,0340	6,7128	,5537	-2,1282	,0602	-1,868	146	,064

6. Paired Samples t-test – Για την Δημιουργικότητα λύσεων μεταξύ προβλημάτων (1-3) & (2-4)

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Cr1_3	58,7018	147	121,93243	10,05682
	Cr2_4	67,274	147	136,4838	11,2570

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Cr1_3 & Cr2_4	147	,359	,000

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1 Cr1_3 - Cr2_4	-8,57231	146,83428	12,11069	-32,50722	15,36259	-,708	146	,480

7. Independent Samples t-test – Για σύγκριση Αγοριών – Κοριτσιών ως προς την Δημιουργικότητα στα 4 προβλήματα.

Group Statistics

	Gen	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Cr	1,0	75	164,6453	252,97992	29,21161
	2,0	72	85,5565	153,32107	18,06906

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Cr	Equal variances assumed	6,749	,010	2,281	145	,024	79,08881	34,67649	10,55212	147,62549
	Equal variances not assumed			2,303	122,733	,023	79,08881	34,34835	11,09689	147,08072

8. Anova Analysis – Για σύγκριση δημιουργικότητας ανάμεσα στα 5 σχολεία.

ANOVA

Cr

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	363163,846	4	90790,962	2,056	,090
Within Groups	6271549,135	142	44165,839		
Total	6634712,981	146			

9. Αποτελέσματα διαγραμμάτων ομοιότητας – συνεπαγωγικών διαγραμμάτων.

	Occurrence	Average	Standard deviations
P1s0	**70.00**	**0.48**	**0.50**
P1s1	**35.00**	**0.24**	**0.43**
P1s2	**5.00**	**0.03**	**0.18**
P1s3	**1.00**	**0.01**	**0.08**
P1s4	**61.00**	**0.41**	**0.49**
P2s0	**72.00**	**0.49**	**0.50**
P2s1	**12.00**	**0.08**	**0.27**
P2s2	**2.00**	**0.01**	**0.12**
P2s3	**38.00**	**0.26**	**0.44**
P3s0	**67.00**	**0.46**	**0.50**
P3s1	**33.00**	**0.22**	**0.42**
P3s2	**8.00**	**0.05**	**0.23**
P3s3	**1.00**	**0.01**	**0.08**
P3s4	**64.00**	**0.44**	**0.50**
P4s0	**59.00**	**0.40**	**0.49**
P4s1	**19.00**	**0.13**	**0.34**
P4s2	**3.00**	**0.02**	**0.14**
P4s3	**1.00**	**0.01**	**0.0.8**
P4s4	**75.00**	**0.51**	**0.60**