

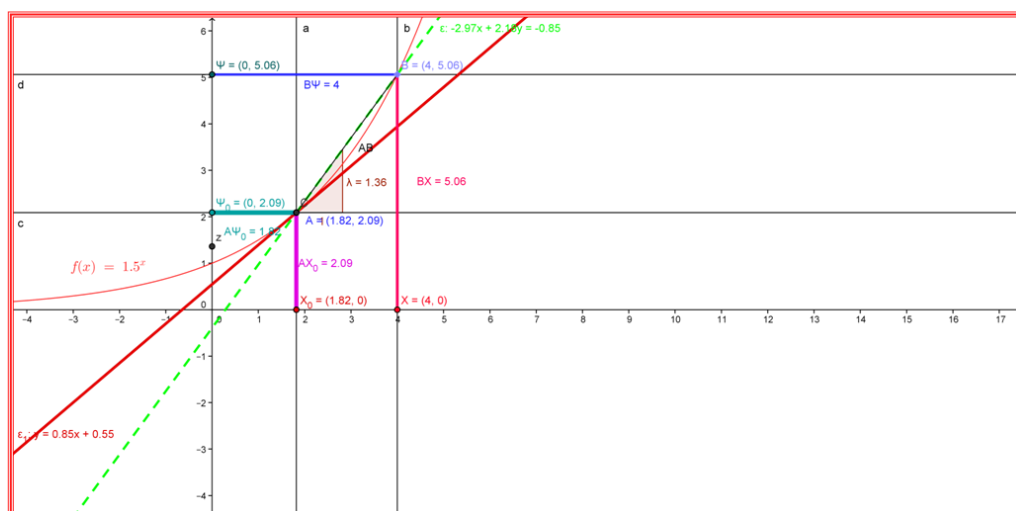


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διπλωματική Εργασία

“ΛΟΓΙΣΜΟΣ : ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ”



Κοντού Ισιδώρα

Επιβλέπων καθηγητής :

Διονύσιος Λάππας

Αθήνα
Μάρτιος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1).....(επιβλέπων Καθηγητής)		
2).....		
3).....		

Στον Δημήτρη

και

Στον Επαμεινώνδα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

- Τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα , ο οποίος με τίμησε με την προθυμία του να τεθεί Επιβλέπων Καθηγητής , καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές , την καθοδήγηση, αλλά και την ολόπλευρη στήριξή του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.
- Τους καθηγητές κ. Παναγιώτη Σπύρου και κ. Ευάγγελο Ράπτη οι οποίοι με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή.
- Ιδιαίτερα την οικογένεια μου , τον σύζυγο μου και τον γιο μου , για τη συμπαράσταση τους και τη στήριξη τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κοντού Ισιδώρα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτός που σήμερα έχει καθιερωθεί ως Απειροστικός (και Διαφορικός) Λογισμός είναι ένας διαμορφωμένος μαθηματικός κλάδος που δύσκολα ανιχνεύονται οι ιστορικές του καταβολές, ενώ στην διδασκαλία του μετέρχονται σύγχρονες θεωρίες με στόχο να γίνουν κατανοητές οι πολύ λεπτές και δύσκολες έννοιες.

Σε ότι αφορά την ελληνική σχολική πραγματικότητα ο Απειροστικός λογισμός διδάσκεται πλέον στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ως ένα τμήμα των μαθηματικών Γενικής παιδείας στην Γ' Λυκείου με έκταση έως και απλών εφαρμογών των ορίων και των παραγώγων, ενώ, στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου διδάσκονται βασικά θεωρήματα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού με εκτενέστερες εφαρμογές και δύσκολες ασκήσεις.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία συνδέονται περιοχές της Ιστορίας με αντίστοιχες της Διδακτικής των Μαθηματικών, παρουσιάζοντας καίρια ζητήματα του "Λογισμού" μέσα από ιστορικές προσεγγίσεις. Η διπλωματική εργασία στοχεύει στη διδακτική αξιοποίηση των ιστορικών κειμένων στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού όπου σε συνδυασμό με τις νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση θα οδηγήσουν στη διαμόρφωση νέων απόψεων στους μαθητές γύρω από δύσκολες έννοιες, όπως, το όριο, η παράγωγος, το ολοκλήρωμα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ : Όριο, Παράγωγος, Εφαπτομένη.

ABSTRACT

What today has been enstablished as Calculus is a mathematical branch whose historical background is hard to determine while in the teaching process several contemporary theories come into force aim at rendering very difficult concepts comprehensible .

As for the Greek school context , Calculus is already taught in the secondary education as part of mathematics in general education of the third form of senior – high school with simple implementation of limits and derivatives .

In the present dissertation areas of history are connected with equivalent didactics of mathematics and significant Calculus issues are presented through historical approaches. The present dissertation aims at combining historical texts with new technologies , so that pupils can better comprehend concepts such as the limits , the derivatives , the tangent .

KEY WORDS : Limit , Derivative , Tangent .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u>	Σελ. 15
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 . ΑΙΓΥΠΤΟΣ - ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ</u>	Σελ. 17
1.1 ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ	Σελ. 17
1.2 ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ	Σελ. 20
1.2.1 πάπυρος Rhind πρόβλημα 48	Σελ. 23
1.2.2 πάπυρος μόσχας πρόβλημα 14	Σελ. 26
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 . ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ 6^{ος}π.Χ-3^{ος}π.Χ</u>	Σελ. 27
2.1 ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ	Σελ. 28
2.1.1 πρόταση VII .1-VII.2 (Ευκλείδιος Αλγόριθμος)	Σελ. 29
2.1.2 πρόταση X.2	Σελ. 29
2.1.3 διδακτική προσέγγιση ορίου μέσω πλευρικών –διαμετρικών αριθμών.	Σελ. 31
2.2 ΕΥΔΟΞΟΣ Ο ΚΝΙΔΙΟΣ	Σελ. 37
2.2.1 ορισμός V Στοιχείων του Ευκλείδη	Σελ. 38
2.2.2 πρόταση X.1 Στοιχείων του Ευκλείδη	Σελ. 39
2.2.3 πρόταση XII .2 Στοιχείων του Ευκλείδη	Σελ. 41
2.2.4 διδακτική προσέγγιση ορίου	Σελ. 44
2.3 ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ	Σελ. 45
2.3.1 βιογραφία – έργο	Σελ. 45
2.3.2 <<Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης >>	Σελ. 48
2.3.2.1 Πρόταση 7	Σελ. 51
2.3.3 διδακτική προσέγγιση στην τριγωνομετρία με λογισμικό Geogebra	Σελ. 57
2.3.3.1 τριγωνομετρικοί άξονες	Σελ. 58
2.3.3.2 γραφική παράσταση του ημιτόνου	Σελ. 60
2.4 ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ Ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ	Σελ. 62
2.4.1 βιογραφία –έργο – μέθοδος εξάντλησης	Σελ. 62
2.4.2 θεώρημα I – θεώρημα II – θεώρημα III	Σελ. 69
2.4.3 διδακτική προσέγγιση με τη μέθοδο της εξάντλησης	Σελ. 79

2.5 BONAVENTURA FRANCESCO CAVALIERI	Σελ.	89
2.5.1 αρχή Cavalieri για επίπεδα σχήματα και στερεά	Σελ.	90
2.5.2 όγκος κυκλικού κώνου	Σελ.	92
2.5.3 όγκος στερεού παραγόμενο με περιστροφή της $\psi = \chi^2$ περί βάσης χ	Σελ.	94
2.5.4 διδακτική προσέγγιση	Σελ.	96
2.5.4.1 παραλληλόγραμμο	Σελ.	96
2.5.4.2 $\int_0^a x^{n+1} dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$	Σελ.	97
2.5.4.3 εμβαδά σχημάτων που περικλείονται από τις γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων.	Σελ.	100

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (16^{ος}-17^{ος} αιώνας)

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ	Σελ.	103
3.2 PIERRE DE FERMAT	Σελ.	104
3.2.1 βιογραφία και έργο	Σελ.	104
3.2.2 μέθοδος εύρεσης εφαπτομένης	Σελ.	106
3.3 ISSAC BARROW	Σελ.	108
3.3.1 βιογραφία και έργο	Σελ.	111
3.3.2 αποτίμηση του έργου	Σελ.	115
3.3.3 το θεμελιώδες θεώρημα	Σελ.	116
3.3.4 μέθοδος εύρεσης εφαπτομένης: το χαρακτηριστικό τρίγωνο	Σελ.	121
3.4 GOTTFRIED LEIBNIZ	Σελ.	125
3.4.1 βιογραφία και έργο	Σελ.	126
3.4.2 εφαπτομένη καμπύλης σε σημείο	Σελ.	128
3.4.3 θεώρημα μετασχηματισμού	Σελ.	132
3.4.3.1 εφαρμογή του θεωρήματος μετασχηματισμού	Σελ.	134

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ GEOGEBRA

4.1 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	Σελ.	135
4.1.1 θεωρητικό πλαίσιο	Σελ.	135
4.1.2 φάσεις προβλήματος	Σελ.	141
4.1.2.1 φάση 1	Σελ.	141
4.1.2.2 φάση 2	Σελ.	146
4.1.2.3 φάση 3	Σελ.	150

4.2 JAMES BOND 007 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ	Σελ.	154
4.2.1. <i>φάσεις προβλήματος</i>	Σελ.	154
4.2.1.1. <i>φάση 1</i>	Σελ.	154
4.2.1.2. <i>φάση 2</i>	Σελ.	155
4.2.1.3 <i>φάση 3</i>	Σελ.	157
4.2.1.4. <i>φάση 4</i>	Σελ.	160
 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	Σελ.	162

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο Απειροστικός (διαφορικός) λογισμός είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που δύσκολα ανιχνεύονται οι ιστορικές του καταβολές , ενώ στη διδασκαλία του μετέρχονται σύγχρονες θεωρίες με στόχο να γίνουν κατανοητές δύσκολες έννοιες .

Σε ότι αφορά την ελληνική σχολική πραγματικότητα ο Απειροστικός λογισμός διδάσκεται πλέον στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση . Κάνοντας μια ιστορική αναδρομή σε σχέση με τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού στην Ελλάδα θα πρέπει να θυμηθούμε ότι πριν από μερικές δεκαετίες οι πρωτοετείς φοιτητές του μαθηματικού τμήματος εισέρχονταν στο πρώτο έτος σπουδών τους έχοντας γνώση μέχρι και τη θεωρία των λογαρίθμων , ενώ στη συνέχεια ο Απειροστικός Λογισμός μπήκε στα λύκεια και στα πρώτα βήματα της διδασκαλίας του έφτανε μέχρι απλούς υπολογισμούς ορίων.

Έπειτα κοντά στο 1968 εμφανίστηκαν τα πρώτα βιβλία που είχαν ως βάση τις ακολουθίες και τους έψιλον – δέλτα ορισμούς (Η. Ντζιώρας , Β. Στάικος) , ενώ λίγα χρόνια αργότερα υπήρχαν στην εξεταστέα ύλη προβλήματα μεγιστοποίησης – ελαχιστοποίησης. Φτάνοντας σημερινή κατάσταση οι απαιτήσεις είναι μεγαλύτερες , καθώς , ένας στοιχειώδης Απειροστικός Λογισμός με έκταση έως και απλές εφαρμογές των παραγώγων , διδάσκεται πλέον ως ένα τμήμα των μαθηματικών Γενικής παιδείας ενώ στην Γ' Λυκείου στα μαθηματικά κατεύθυνσης διδάσκονται έως και βασικά θεωρήματα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού με εκτενέστερες εφαρμογές και δύσκολες ασκήσεις .

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι ανεξάρτητα από τις οδηγίες στο αναλυτικό μας πρόγραμμα σπουδών για την διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού , το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών προσκολλάται στην μηχανική επίλυση σκήσεων , χωρίς να έχει αντιληφθεί , στοιχειωδώς , βασικότερες έννοιες όπως το εμβαδόν χωρίου ή η εφαπτομένη συνάρτησης σε σημείο .

Ποιος όμως τρόπος μπορεί να θεωρηθεί ως καταλληλότερος για μια πρώτη προσέγγιση και για τη διδασκαλία γενικότερα του Απειροστικού Λογισμού ;

Ποιοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι σκέψης που αναπτύχθηκαν ταυτόχρονα με την εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού ;

Ο Απειροστικός Λογισμός ξεκίνησε από ένα απλό ερώτημα γύρω στο 1600 μ.Χ. ,

«Τι είναι ταχύτητα και πως μπορούμε να την υπολογίσουμε;»

όταν μελετήθηκαν κάθε είδους κινούμενα αντικείμενα , από τους πλανήτες ως το εκκρεμές ή μπορούμε να βρούμε τις ρίζες του πολύ πιο παλιά ;

Η παρούσα διπλωματική εργασία συνδέει περιοχές της Ιστορίας με αντίστοιχες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Παρουσιάζονται καίρια ζητήματα του "Λογισμού" μέσα από ιστορικές προσεγγίσεις . Η διπλωματική εργασία στοχεύει στη διδακτική αξιοποίηση των ιστορικών κειμένων στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού καθώς και στη διαμόρφωση νέων απόψεων στους μαθητές γύρω από τις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού , όπως το όριο , η παράγωγος , το ολοκλήρωμα .

Ξεκινώντας από τα απλά ερωτήματα που έθεσαν οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι γίνεται μια αναφορά στα επιτεύγματα τους καθαρά για το ιστορικό ενδιαφέρον και όχι για την άμεση προσφορά τους στην εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού.

Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στις κατακτήσεις των αρχαίων Ελλήνων και στην ανάπτυξη της επιστήμης μέσω της σχολής των Πυθαγορείων , και του μεγαλύτερου , ίσως , μαθηματικού της αρχαιότητας του Αρχιμήδη και έπειτα στη μετάβαση και μεταφορά των γνώσεων των Ελλήνων στην Δυτική Ευρώπη .

Οι έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν αποδείξει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στο να αντιληφθούν τις διάφορες εκφάνσεις της έννοιας συνάρτηση , ώστε να μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν σε μαθηματικά προβλήματα. Επίσης , η έννοια της παραγώγου και του ολοκληρώματος παριστάνονται με στατικά μέσα στη σχολική ζωή και έτσι οι μαθητές αποτυγχάνουν να συνδέσουν τις σχέσεις που περιγράφονται από τις παραπάνω έννοιες μέσα από τις αναπαραστάσεις τους με την χρήση μαθηματικών εκφράσεων .

Οπότε στη συνέχεια της διπλωματικής , οι παραπάνω ιστορικές αναφορές συνδυάζονται με τη χρήση νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση , με στόχο να γίνουν πιο κατανοητές οι παραπάνω μαθηματικές έννοιες στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης . Με τον τρόπο αυτό θα οδηγηθούμε στην τροποποίηση της κλασικής παραδοσιακής διδακτικής μεθοδολογίας κάποιων δύσκολων μαθηματικών εννοιών και θα την μετατρέψουμε σε σύγχρονη και περισσότερο ελκυστική .

Στο τέλος της παρούσας διπλωματικής θα παρουσιαστεί ένα πρόβλημα και μια διδακτική πρόταση , μέσω της οποίας θα προκαλέσω τις διαισθήσεις των μαθητών και θα τους εμπλέξω με δραστηριότητες ερμηνείας εποικοδομητικής χρήσης και κατασκευής μαθηματικών εκφράσεων .

Με τη βοήθεια της διδακτικής πρότασης οι μαθητές θα μπορέσουν να χτίσουν την αφαιρετική σκέψη τους με τις αιτιολογήσεις και τους περιορισμούς που θα προβάλλουν και θα συνδυάσουν γνωστές για αυτούς έννοιες , όπως η μέση ταχύτητα, η στιγμιαία ταχύτητα και η θέση με στοιχεία της Ανάλυσης εμπλέκοντας δύο βασικά ιστορικά θέματα με έναν τελείως έμμεσο τρόπο . Αφενός , η μαθηματική συμβολή του μεγάλων μαθηματικών της Δυτικής Ευρώπης , μέσω της μελέτης της στιγμιαίας ταχύτητας στην εξέλιξη των θεμελιωδών εργαλείων του Απειροστικού και αφετέρου από τον Lagrange το Θ.Μ.Τ , ένα καθοριστικό θεώρημα για τον Απειροστικό λογισμό.

ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ – ΑΙΓΥΠΤΟΣ

Μέχρι τον 6^{ος} π.Χ οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου , το εμβαδόν ενός κύκλου , τον όγκο μιας πυραμίδας , το μήκος ενός τόξου και πολλά ακόμα όπως αυτά διασώζονται στις Βαβυλωνιακές πινακίδες στους Αιγυπτιακούς πάπυρους .

ΟΙ ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

Σε ότι αφορά τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων , γνωρίζουμε ότι βρέθηκαν πεντακόσιες περίπου Βαβυλωνιακές πινακίδες που έχουν έχουν καθαρά μαθηματικό ενδιαφέρον και ανάγονται σε δυο κύριες περιόδους:

- 1) την Παλαιοβαβυλωνιακή (2000 – 1600 π.Χ. περίπου) και
- 2) των Σελευκιδών (3ος αι. – 1ος αι. π.Χ.)¹,

ενώ το πλήθος των πήλινων πινακίδων , τις οποίες έχουν ανακαλύψει οι αρχαιολόγοι, ανέρχεται περίπου στο μισό εκατομμύριο και η γραφή τους είναι η σφηνοειδής γραφή η οποία αποκρυπτογραφήθηκε στα μέσα του 19ου αιώνα . Αξιοσημείωτο είναι το κολοσσιαίο ερευνητικό έργο του Otto Neugebauer (1899 - 1990) , ενός εκ των κορυφαίων ερευνητών των Βαβυλωνιακών μαθηματικών και της αστρονομίας της Μεσοποταμίας , απετέλεσε την έναρξη της διεξοδικής μελέτης , αποκρυπτογράφησης και ερμηνείας των σφηνοειδών μαθηματικών κειμένων στα τέλη της τρίτης δεκαετίας του εικοστού αιώνα.

Στα σωζόμενα κείμενα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών δεν υπάρχουν εξηγήσεις ούτε αποδείξεις αλλά μόνο διατυπώσεις και λύσεις προβλημάτων. Υπάρχουν κείμενα καθαρά τεχνικού περιεχομένου (σκάψιμο αγωγών, κατασκευή φραγμάτων και άλλα παρόμοια προβλήματα) στα οποία βρίσκουμε τύπους ακριβείας ή προσέγγισης για όγκους , οι οποίοι σχετίζονται με τα προς κατασκευή έργα.

Οι Βαβυλώνιοι ήξεραν να υπολογίζουν όγκους και εμβαδά και γνώριζαν τις μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα και τραπέζια . Κατείχαν , επίσης , την έννοια της ομοιότητας, η χρήση της οποίας παρατηρείται σε μεγάλο πλήθος παραδειγμάτων.² Σχετικά με τα εμβαδά και τους όγκους , οι Βαβυλώνιοι διέθεταν γνώσεις υπολογισμού του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου τριγώνου, καθώς και του τραapeζίου στο οποίο η μια εκ των μη παραλλήλων πλευρών είναι κάθετη στις βάσεις , επίσης , του υπολογισμού του όγκου πρισμάτων και κυλίνδρων μέσω του γινομένου του εμβαδού της βάσης επί το ύψος.

Το 1936 στην περιοχή Σούσα 200 μίλια από τη Βαβυλώνα, η αρχαιολογική σκαπάνη έφερε στο φως μια πινακίδα της οποίας η μετάφραση δημοσιεύτηκε σταδιακά μόλις το 1950³ και αναφέρεται σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Μέσα σε αυτά αναφέρεται και το ότι ο λόγος της περιμέτρου ενός κανονικού εξαγώνου προς την περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου, είναι ίσος με :

$$\frac{56}{60} + \frac{36}{60^2}$$

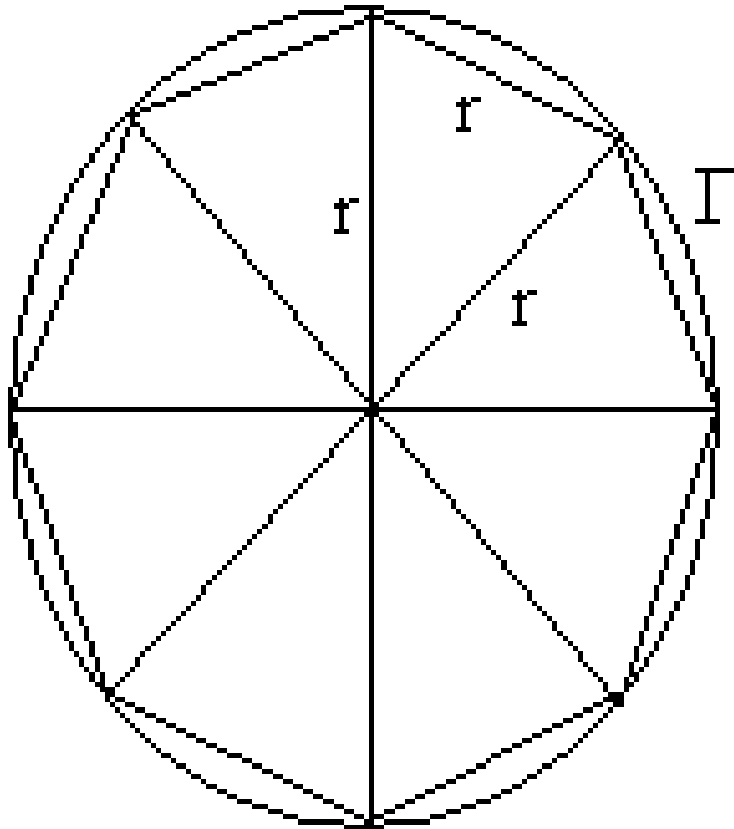
¹ Χριστιανίδης, Γ., *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών – Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003, σελ. 29 - 30.

² Neugebauer, O., *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα*, Αθήνα, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 2003, σελ. 81.

³ Beckmann, P., (1974) *A history of pi*, 3rd ed., New York: Golem Press.

(οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα, και έτσι η βάση τους ήταν το 60 αντί για το 10).

Προφανώς , οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν ότι η περίμετρος ενός κανονικού εξαγώνου είναι ίση με ακριβώς έξι φορές την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, όπως φαίνεται και στην εικόνα 1 .



Σχήμα 1

Εικόνα 1

Σύμφωνα , λοιπόν , με τα παραπάνω η πινακίδα περιγράφει το λόγο $\frac{6r}{\Gamma}$, όπου το r είναι η ακτίνα, και Γ είναι η περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου . Γνωρίζουμε όμως ότι $\Gamma = 2\pi r$, οπότε πράγματι , προκύπτει :

$$\frac{3}{\pi} = \frac{56}{60} + \frac{36}{60^2}$$

Κάνοντας τις πράξεις, η τιμή του π που προκύπτει είναι : $\pi = 3\frac{1}{8} = 3.125$

Βέβαια σε όλα τα άλλα μέχρι σήμερα γνωστά βαβυλωνιακά κείμενα χρησιμοποιείται η τιμή $\pi = 3$.

Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν να υπολογίζουν τους όγκους πρισμάτων και κυλίνδρων πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης αυτών επί το ύψος⁴. Γνώριζαν να υπολογίζουν, επίσης, τους όγκους κώλουρου κώνου και κώλουρης πυραμίδας (με βάσεις τετράγωνα) κάνοντας, όμως, χρήση λανθασμένων τύπων.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός του όγκου της κώλουρης πυραμίδας όπου οι Βαβυλώνιοι εύρισκαν κάνοντας το γινόμενο του ύψους επί τον αριθμητικό μέσο των εμβαδών των βάσεων αντί του σωστού τύπου, ο οποίος ισούται με το ένα τρίτο του γινομένου του ύψους επί το μέσο των εμβαδών των βάσεων⁵:

$$V = \frac{1}{3} \cdot U \cdot (B_1 + \sqrt{B_1 + B_2} + B_2).$$

Κάποιοι ενδεικτικοί υπολογισμοί όγκων παρατίθενται στα ακόλουθα κείμενα :

BM 85194 (MKT, τόμος I, σελ. 176, 187) στα οποία :

✚ Υπολογίζεται ο όγκος κώλουρου κώνου από το ημιγινόμενο του ύψους επί το άθροισμα των εμβαδών των βάσεων, κάτι που είναι ασφαλώς λανθασμένο.

✚ Υπολογίζεται ο όγκος κώλουρης πυραμίδας με τετραγωνικές βάσεις, αλλά μετά τον υπολογισμό του τετραγώνου του ημιαθροίσματος των πλευρών των βάσεων και της διαφοράς αυτών, ακολουθώντας εσφαλμένους υπολογισμούς⁶.

Σύμφωνα με τον O. Neugebauer, ο τύπος στον οποίο στηρίζεται ο συγκεκριμένος υπολογισμός είναι :

$$V = \left[\left(\frac{a + \beta}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \right] \cdot h$$

ο οποίος είναι σωστός για την περίπτωση όπου η κώλουρη πυραμίδα έχει τετραγωνικές βάσεις.

⁴ Van der Waerden, B. L., *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, 2η έκδοση, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003, σελ. 76.

⁵ Eves, H., *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών*, Αθήνα, Τροχαλία, 1989, 2 τόμοι, σελ. 26.

⁶ Van der Waerden.

ΟΙ ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Κάνοντας μια ιστορική αναδρομή διαπιστώνουμε ότι έχουμε σαφείς πληροφορίες για τους λαούς που έζησαν κατά μήκος του Νείλου και στα «γόνιμα εδάφη» του Τίγρη και του Ευφράτη . Για τα Αιγυπτιακά μαθηματικά γνωρίζουμε τα περισσότερα πράγματα σε σχέση με άλλους αρχαίους πολιτισμούς της προελληνικής περιόδου.

Οι αρχαίοι Έλληνες συγγραφείς εκτιμούσαν τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων όπως αυτό επιβεβαιώνεται από πολλά αποσπάσματα .

«Ο Όσιρις ...μοίρασε τα εδάφη της Αιγύπτου στους κατοίκους της ...Αν ο ποταμός παρέσυρε με τα νερά του κάποιο τμήμα γης που ανήκε σε κάποιο κάτοικο ...ο βασιλιάς έστελνε ανθρώπους να ελέγξουν και να μετρήσουν την έκταση της ζημιάς... Πιστεύω, ότι εξαιτίας αυτής της τακτικής η γεωμετρία αναπτύχθηκε στην Αίγυπτο, από όπου πέρασε στην Ελλάδα»

Ηρόδοτος (Ιστορίαι, II 109).

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω απόσπασμα , ο Ηρόδοτος αναφέρει στο έργο του ότι οι φορολογικές υποχρεώσεις των Αιγυπτίων γεωργών στο Ραμσή Β' (περίπου το 1300 π.Χ) καθορίζονταν με βάση τη μέτρηση της γης, αφού οι πλημμύρες του ποταμού Νείλου μετέτρεπαν το μέγεθος των χωραφιών τους . Αυτό απετέλεσε την κύρια αιτία εφεύρεσης της γεωμετρίας , η οποία αργότερα μεταδόθηκε στην Ελλάδα. Ενώ σε άλλο απόσπασμα :

«Κανένας δε με ξεπέρασε στην κατασκευή των γραμμών μετά αποδείξεων ούτε, ακόμη, οι καλούμενοι αρπεδονάπτες, μεταξύ των Αιγυπτίων»

Δημόκριτος (Κλήμης ό Αλεξανδρεύς, Στρωματείς, I 15).

Ο Δημόκριτος γράφει ότι κανείς δεν τον ξεπέρασε στην κατασκευή γραμμών μετά αποδείξεων ούτε, ακόμη, οι αποκαλούμενοι αρπεδονάπτες (οι Αρπεδονάπτες ήταν επόπτες που είχαν ως κύριο όργανο μέτρησης, το τεντωμένο σκοινί) των Αιγυπτίων.⁷ Στο σημείο αυτό, επειδή υπήρχε διχασμός απόψεων κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε στην άποψη του Αριστοτέλη⁸ :

«Γι' αυτό οι μαθηματικές τέχνες γεννήθηκαν πρώτα πρώτα στην Αίγυπτο, γιατί αφέθηκε διαθέσιμος χρόνος στην τάξη των ιερέων».

Αριστοτέλης (Μεταφυσικά, Α 1 981b).

Σύμφωνα με αυτήν, η Γεωμετρία προήλθε από μια αργόσχολη ιερατική τάξη της κοινωνίας της Αιγύπτου, όπου οι Αιγύπτιοι ιερείς ήταν οι αληθινοί φορείς της μαθηματικής προόδου (όπως οι Αρχαίοι Έλληνες στη δική του εποχή) και όχι η

⁷ Κλήμης ο Αλεξανδρεύς, Στρωματείς, I, 15 (όπως αναφέρεται στο Van der Waerden, B. L., *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003, σελ. 1).

⁸ Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, Α 1 981b.

ανάγκη για φορολόγηση της γης. Η διχογνωμία αυτή παρουσιάζεται και στις τοποθετήσεις των σύγχρονων ιστορικών της επιστήμης.

Σε ότι αφορά τους Αιγυπτιακούς παπύρους γνωρίζουμε τα παρακάτω :

- Στον πάπυρο «Αναστάση I» (1250 π.Χ. περίπου), παρουσιάζεται ένα πρόβλημα

υπολογισμού όγκου (ή λόγων όγκων) με στόχο την εκπαίδευση νεαρών γραφέων.

- Στον πάπυρο της Μόσχας (1783 - 1640 π.Χ. περίπου) περιλαμβάνονται 25

προβλήματα δυο από τα οποία αναφέρονται στην εύρεση του εμβαδού του ημισφαιρίου (ή του ημικυλίνδρου) [πρόβλημα 10] και την εύρεση του όγκου της κόλουρης πυραμίδας [πρόβλημα 14].

- Στον πάπυρο του Kahun (1850 π. Χ. περίπου) περιλαμβάνεται ένα πρόβλημα υπολογισμού όγκου κυλινδρικής σιταποθήκης.

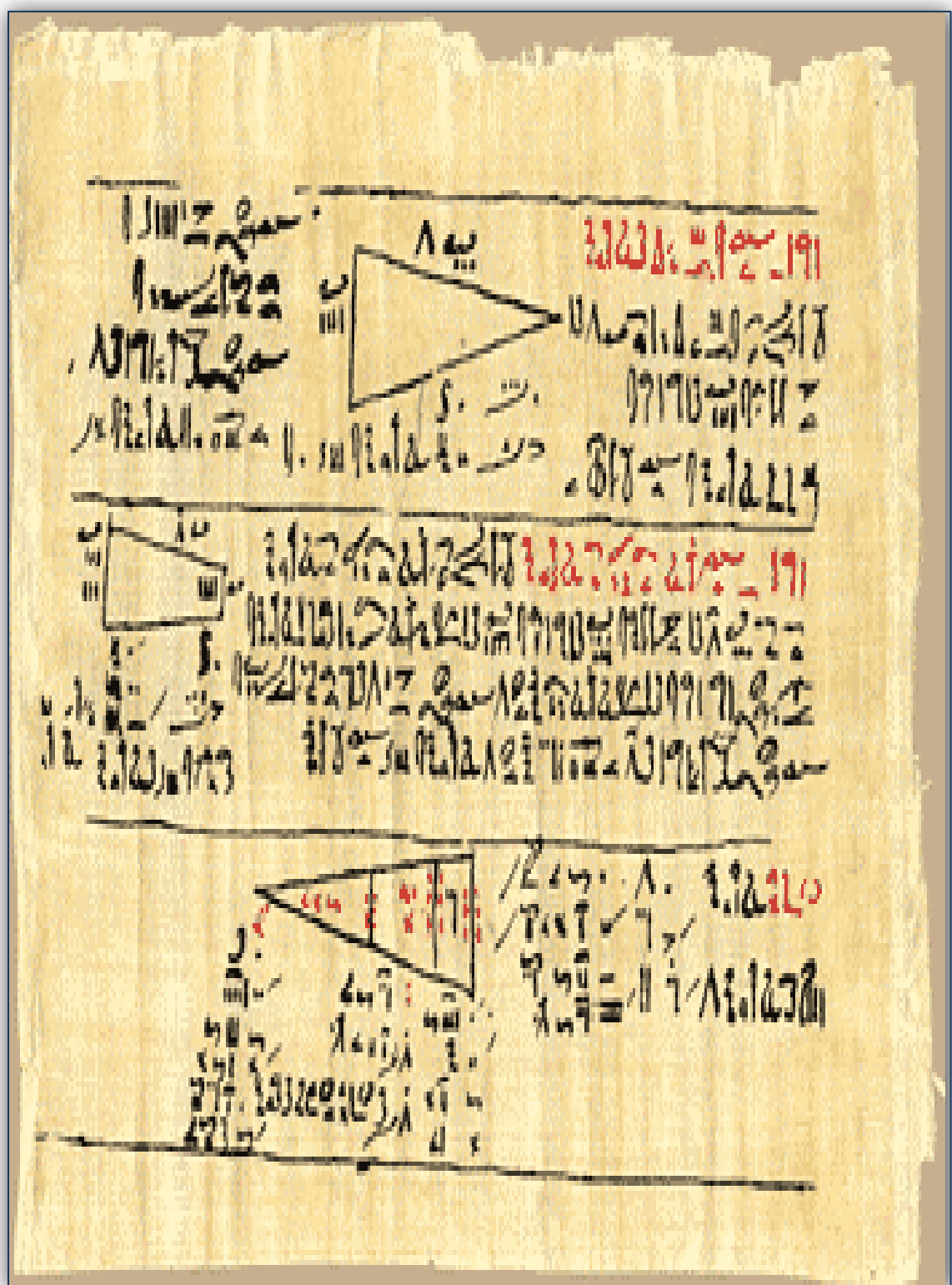
■ Το παλαιότερο αιγυπτιακό έγγραφο που σχετίζεται με τα μαθηματικά είναι ένας πάπυρος, ονομαζόμενος πάπυρος Rhind ή πάπυρος Ahmes (εικόνα 2) . Είναι ο πιο εκτενής πάπυρος με ύψος 33cm και μήκος 6 m, που βρίσκεται σήμερα στο Βρετανικό Μουσείο (και κάποια τμήματά του στο μουσείο Brooklyn) σε ιερατική γραφή. Ένας Σκωτσέζος συλλέκτης ο Henry Rhind, τον αγόρασε το 1858 από μια απομακρυσμένη περιοχή του Νείλου το Λούξορ και από τότε έχει το όνομα «πάπυρος του Rhind» ή «πάπυρος του Αχμή», προς τιμή του γραφέα που τον αντέγραψε το 1650 π.Χ. και ο οποίος μας πληροφορεί, ότι το κείμενο αυτό προέρχεται, από ένα πρωτότυπο του Μέσου Βασιλείου (2000 – 1800 π.Χ.) που γράφτηκε στην εποχή της κυριαρχίας της Αιγύπτου από τους Υξώς .

Ο πάπυρος αυτός περιέχει 84 προβλήματα με τις λύσεις τους χωρίς να δίνονται αποδείξεις , αλλά μόνο υπολογιστικές διαδικασίες . Το έγγραφο ξεκινάει με πληροφορίες τις οποίες δίνει ο γραφέας Ahmes, ο οποίος αντέγραψε το κείμενο αυτό. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο Αιγυπτιακός προσεγγιστικός τύπος εύρεσης του εμβαδού του κύκλου καθώς θεωρείται από τα σημαντικότερα εργαλεία της εποχής.

Έβρισκαν το τετράγωνο των $\frac{8}{9}$ της διαμέτρου, δηλαδή μια πολύ καλή προσέγγιση

του

$$\pi \sim 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1605...$$



εικόνα 2

Το πρόβλημα 48 , μας δίνει κάποια ιδέα για το πως κατέληξαν στον κανόνα εύρεσης του εμβαδού κύκλου .

Ο Ahmes δημιουργεί ένα κανονικό οκτάγωνο τριχοτομώντας τις πλευρές ενός τετραγώνου με πλευρά 9 μονάδες και αφαιρώντας τα γωνιακά τρίγωνα όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (εικόνα 3 , εικόνα 4) . Το εμβαδόν του οκταγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘ δεν διαφέρει πολύ από το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στο τετράγωνο, και είναι ίσο με το εμβαδόν των 5 μικρών γραμμοσκιασμένων τετραγώνων και 4 μισών τετραγώνων ακόμα.

Το εμβαδόν ενός ολόκληρου μικρού τετραγώνου είναι ίσο με 9 τετραγωνικές μονάδες και το εμβαδόν του μισού τετραγώνου είναι ίσο με $4\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες .

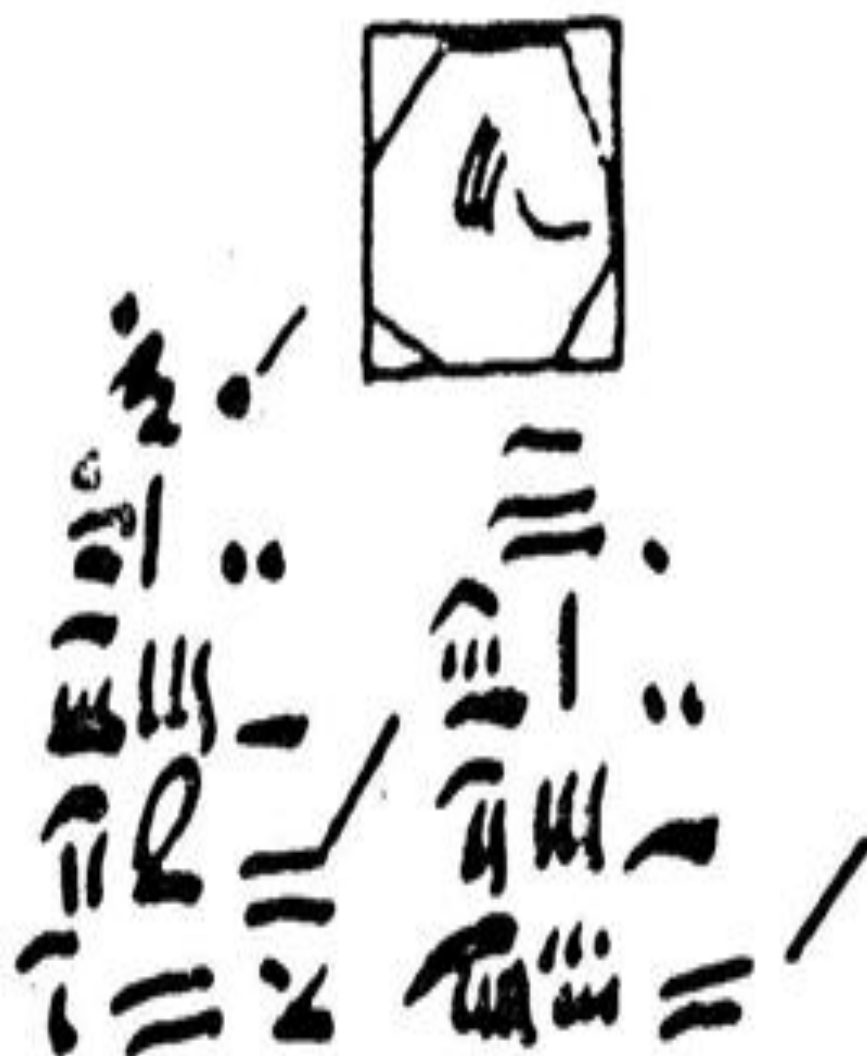
Άρα το συνολικό εμβαδόν του οκταγώνου είναι ίσο με 63 τετραγωνικές μονάδες, ή περίπου 64. Το 64 όμως είναι το τετράγωνο του 8, άρα το εμβαδόν ενός κύκλου με διάμετρο 9 είναι περίπου ίσο με 64 τετραγωνικές μονάδες ή το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά 8, το οποίο οδηγεί στη σχέση :

$$\pi \sim 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1605\dots$$

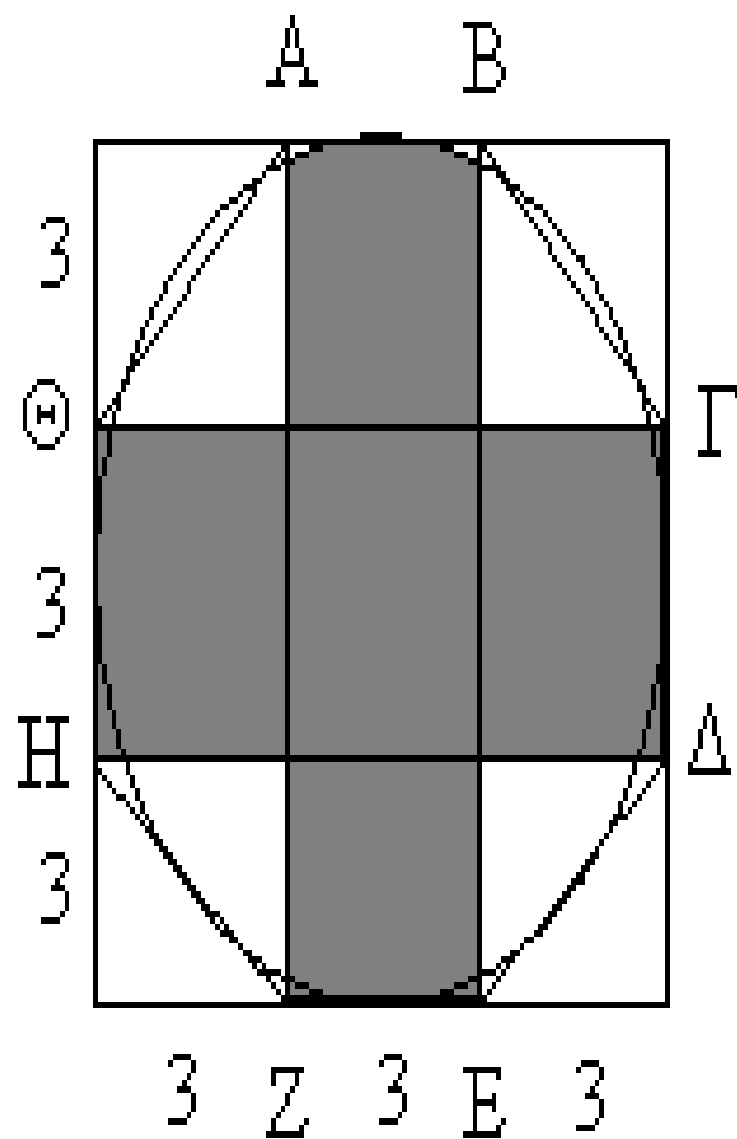
Βέβαια ο Ahmes έκανε δύο παραδοχές, η μια ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν του οκταγώνου και η άλλη ότι $63 \approx 64$. Πιθανότατα λοιπόν η επιφάνεια του κύκλου για τους αρχαίους Αιγυπτίους να ήταν ίση με :

$$E = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$$

Ο Αιγυπτιακός κανόνας για το μήκος του κύκλου είναι ότι ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς το μήκος του είναι ίσος με το λόγο του εμβαδού του περιγεγραμμένου τετραγώνου προς την περίμετρο του.



Το πρόβλημα 48 του πάπυρου Rhind.



**Ανακατασκευή του προβλήματος 48 του
πάπυρου Rhind**

Πρόβλημα 14 του παπύρου της Μόσχας

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπολογίζεται ο όγκος μιας κόλουρης πυραμίδας με τετραγωνική βάση.

Ο Struven⁹ ήταν εκείνος ο οποίος μετέφρασε πρώτος το πρόβλημα (στα γερμανικά) και η μετάφραση στα Ελληνικά δίνεται παρακάτω:

Διατύπωση¹⁰:

1. Μέθοδος υπολογισμού μιας κόλουρης πυραμίδας.
2. Εάν σου δώσουν, μια κόλουρη πυραμίδα με ύψος 6 κύβιτα,
3. Με βάση 4 κύβιτα, με κορυφή 2 κύβιτα,
4. Υπολόγισε εσύ με αυτό το 4, τετραγωνίζοντας. Αποτέλεσμα 16.
5. Διπλασίασε εσύ αυτό το 4. Αποτέλεσμα 8.
6. Υπολόγισε εσύ με αυτά τα 2, τετραγωνίζοντας. Αποτέλεσμα 4.
7. Πρόσθεσε μαζί αυτό το 16, με αυτό το 8, και με αυτό το 4. Αποτέλεσμα 28.
8. Υπολόγισε εσύ το $3\left[\frac{1}{3}\right]$ του 6. Αποτέλεσμα 2.
9. Υπολόγισε εσύ με αυτό το 28 δυο φορές. Αποτέλεσμα 56.
10. Κοίτα! Είναι 56! Το έχεις βρει σωστά.

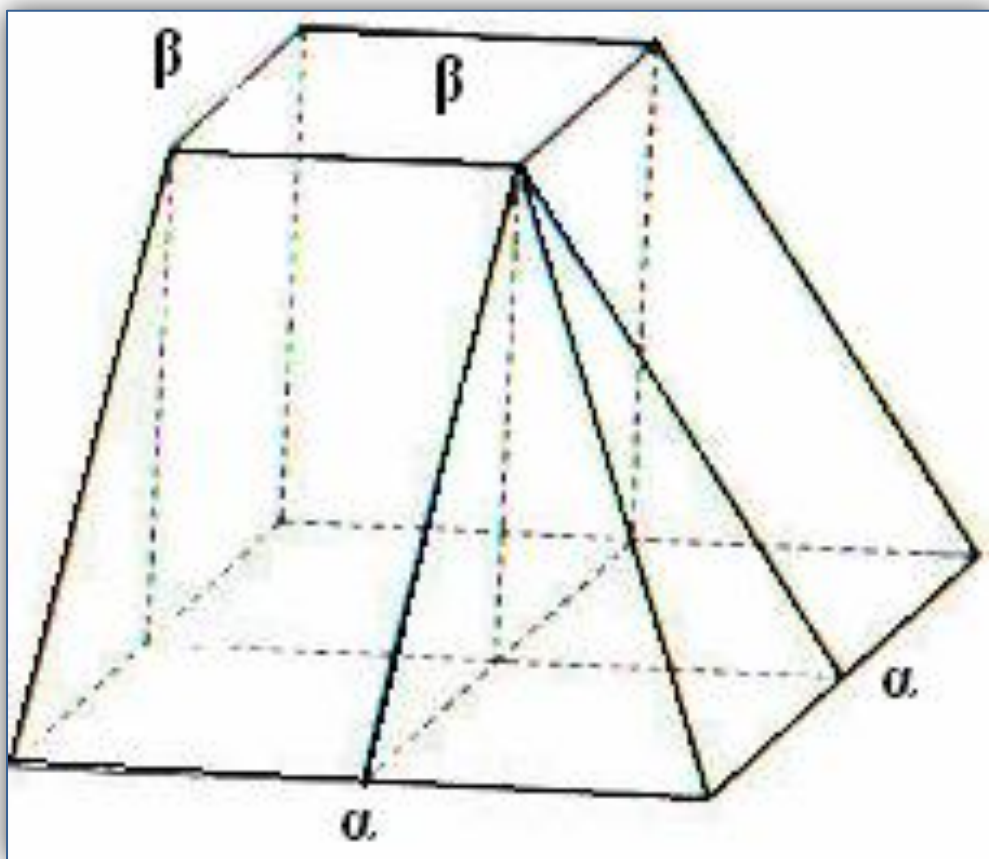
Μεταφράζοντας με τύπους την παραπάνω διαδικασία για τα βήματα 2-10 έχουμε τον σωστό τύπο υπολογισμού του όγκου της κόλουρης πυραμίδας :

$$V = (\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2) \frac{\upsilon}{3} ,$$

με υ ύψος της πυραμίδας α πλευρά κάτω βάσης και β πλευρά πάνω βάσης .

⁹ Struve, W. W., “Mathematisch Papyrus des Museums in Moskau”, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Ser. A, Vol. I, 1930, p. 135.

¹⁰ Η μετάφραση του Struven δημοσιεύθηκε στα γερμανικά και αποδόθηκε από τον γράφοντα στα ελληνικά μέσω της αγγλικής μετάφρασης του Gillings (όπως αναφέρεται στο Gillings, R. J., *Mathematics in the time of the Pharaohs*, New York, Dover Publications, 1982, p. 188).



Εικόνα 5

Εάν σου δώσουν, μια κόλουρη πυραμίδα με ύψος 6 κύβιτα.	(ύψος) $v=6$
Με βάση 4 κύβιτα, με κορυφή 2 κύβιτα	(πλευρά κάτω βάσης) $\alpha=4$ (πλευρά πάνω βάσης) $\beta=2$
Υπολόγισε εσύ με αυτό το 4, τετραγωνίζοντας. Αποτέλεσμα 16.	$\alpha^2 = 16$
Διπλασίασε εσύ αυτό το 4. Αποτέλεσμα 8.	$\beta \cdot \alpha = 8$
Υπολόγισε εσύ με αυτά τα 2, τετραγωνίζοντας. Αποτέλεσμα 4.	$\beta^2 = 4$
Πρόσθεσε μαζί αυτό το 16, με αυτό το 8, και με αυτό το 4. Αποτέλεσμα 28.	$\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2 = 28$
Υπολόγισε εσύ το $\bar{3} \left[\frac{1}{3} \right]$ του 6. Αποτέλεσμα 2.	$\frac{v}{3} = \bar{3} \cdot 6 = 2$
Υπολόγισε εσύ με αυτό το 28 δυο φορές. Αποτέλεσμα 56.	$V = (\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2) \frac{v}{3} = 56$

Η ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΠΟ 6^{ος} π.Χ – 3^{ος} μ.Χ

Οι πληροφορίες και οι υπολογιστικές μέθοδοι των Αιγυπτίων και των Βαβυλώνιων μεταφέρθηκαν σαν υλικό στους Αρχαίους Έλληνες και αποτέλεσαν το δομικό λίθο πάνω στον οποίο οικοδομήθηκαν τα Ελληνικά μαθηματικά .

<<...στιδήποτε παραλαμβάνουν οι Έλληνες από τους ξένους, το μετατρέπουν τελικώς σε κάτι καλύτερο>>.

Πλάτων , *Επινομίς* , 987 , d.9 – e.1.

Οι Έλληνες δεν αρνήθηκαν την καταγωγή ή προέλευση του υλικού της γεωμετρίας και της αστρονομίας το οποίο διέθεταν ότι βρίσκονταν στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα . Αυτό γίνεται μέσα από ένα πλήθος αναφορών στα ταξίδια που έκαναν ο Θαλής , ο Πυθαγόρας , ο Δημόκριτος , ο Εύδοξος και ο Πλάτωνας.¹¹

Η καινοτομία βρίσκεται στην μορφή που πήρε το οικοδόμημα της παραπάνω γνώσης. Η νέα μορφή δόθηκε τον 6^ο π.Χ. αιώνα καθώς τότε τέθηκε το ερώτημα:

«Πώς μπορούν να αποδειχθούν όλα αυτά;»

Πράγματι , ο 6^{ος} π.Χ. αιώνας ήταν ο αιώνας “ορόσημο” για την ανθρωπότητα διότι μέχρι τότε ο άνθρωπος προσπαθούσε να κατανοήσει την προέλευσή του κόσμου που τον περιβάλλει , δίνοντας μυθολογικές εξηγήσεις οι οποίες με το χρόνο άρχισαν να συγκρούονται με τη λογική . Έτσι η επινόηση όλο και λιγότερων μύθων , οδήγησε στην εμφάνιση της επιστημονικής σκέψης.

Οι πρώτες φιλοσοφικές έννοιες στην προσπάθεια ερμηνείας του κόσμου καταγράφονται από τους Μιλήσιους στοχαστές . Προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα μεγάλα διλήμματα της ύπαρξης του κόσμου αναζητήθηκε μια σταθερή υλική αρχή πάνω στην οποία θα μπορούσαν να στηριχθούν οι απαντήσεις για τη δομή της σύστασης του κόσμου .

<<Ο κόσμος περιγράφεται από το στατικό είναι ή το διαρκές γίνεσθαι¹²;>>

Οι Πυθαγόρειοι μη αποδεχόμενοι τον υλιστικό μονισμό των Μιλησίων, ερμήνευσαν τον κόσμο πάνω στην έννοια του αριθμού. Υποστήριζαν ότι η δομή του όντος , τα δομικά υλικά του κόσμου , είναι αριθμοί (φυσικοί αριθμοί) . Για να το επιτύχουν αυτό έπρεπε πρώτα να μελετήσουν τους ίδιους τους αριθμούς. Έτσι αρχίζει η θεμελίωση της αριθμητικής .

Σύμφωνα με τον Federico Enriquez , η Πυθαγόρεια θεωρία , ήταν ένας γεωμετρικός «ατομισμός», δηλαδή η ύλη και ο χώρος συνίστανται από απειροελάχιστες ενότητες

¹¹ Van der Waerden, B. L., *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, 2η έκδοση, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003, σελ. 87.

¹² (Δημόκριτος, *Μαθηματικά - Φυσικές Επιστήμες, Αστρονομία-Κοσμολογία Της Ατομικής Θεωρίας.*, πρόλογος Θεόπης Παρισάκη, σελ. 9-11., εκδ . Ζήτρος., Θεσ/κη 2004 .)

ή μονάδες , σημεία με διάσταση , έτσι ώστε π.χ. κάθε γραμμή να αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων¹³ .

Συνεπώς , μια γραμμή αποτελείται από μικρές σφαίρες (μονάδες) , δηλαδή , από ορισμένο αριθμό σημείων.

Με την έννοια αυτή , θεωρούσαν ότι δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή, έχουν κοινή μονάδα μέτρησης .

Όμως , στην προσπάθεια τους να επιλύσουν το πρόβλημα της κατασκευής ενός τετράγωνου με διπλάσιο εμβαδόν από ένα άλλο δοθέν τετράγωνο γνωστής πλευράς a βρήκαν με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος ότι η πλευρά a και η διαγώνιος d είναι μεγέθη ασύμμετρα (δεν έχουν κοινό μέτρο) . Το πρόβλημα της προσέγγισης του λόγου της διαγωνίου και της πλευράς με τη βοήθεια ρητών είχε προταθεί ήδη από τους Βαβυλωνίους, όπως μας πληροφορεί ο Van der Waerden αλλά οι Πυθαγόρειοι προχώρησαν το παλαιό αυτό πρόβλημα και ανέπτυξαν ολόκληρη επιστημονική θεωρία σε ότι αφορά τις προσεγγίσεις του λόγου αυτού .

Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν τη μέθοδο της <<ανθυφαίρεσης>> ή <<ανταναίρεση >>για να προσδιορίσουν το Μ.Κ.Μ.(μέγιστο κοινό μέτρο) δύο σύμμετρων μεγεθών .

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη στο *έβδομο βιβλίο* βρίσκουμε την παρακάτω πρόταση που αποδίδεται στους Πυθαγόρειους.

ΠΡΟΤΑΣΗ VII.1 – VII.2 (Ευκλείδειος αλγόριθμος)

Αν a, β είναι δυο αριθμοί $a > \beta$ τότε η διαδικασία της ανθυφαίρεσης τελειώνει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων και ο τελευταίος αριθμός είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των a, β .

Δηλαδή αν a, β είναι δυο αριθμοί με $a > \beta$ τότε :

$$a = \kappa_1 \beta + \gamma_1 \quad \text{με} \quad \gamma_1 < \beta$$

$$\beta = \kappa_2 \gamma_1 + \gamma_2 \quad \text{με} \quad \gamma_2 < \gamma_1$$

$$\gamma_1 = \kappa_3 \gamma_2 + \gamma_3 \quad \text{με} \quad \gamma_3 < \gamma_2$$

.

.

.

Υπάρχει n ώστε :

$$\gamma_{n-1} = \kappa_{n+1} \gamma_n + \gamma_{n+1} \quad \text{με} \quad \gamma_{n+1} < \gamma_n$$

$$\gamma_n = \kappa_{n+2} \gamma_{n+1} . \quad \text{Με} \quad a > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots$$

Συνεπώς ο γ_{n+1} είναι το Μ.Κ.Μ ή Μ.Κ.Δ των a, β .

¹³ Federico Enriques & Manlio Mazzioti, *Οι Θεωρίες του Δημόκριτου του Αβδηρίτη, 1948, σε μετάφραση Α.Α.Παπαιωάννου, κεφ. II, σελ.21-22., εκδόσεις του Διεθνούς Δημοκριτείου Ιδρύματος, Ξάνθη 1982) .*

Ενώ επίσης στα Στοιχεία του Ευκλείδη στο δέκατο βιβλίο βρίσκουμε την πρόταση X.2 όπου αναφέρει ότι αν τα μεγέθη είναι ασύμμετρα τότε η διαδικασία της ανθυφαίρεσης είναι άπειρη :

ΠΡΟΤΑΣΗ X.2

Αν η ανθυφαίρεση δυο άνισων μεγεθών $\alpha > \beta$ είναι άπειρη τότε τα α, β είναι ασύμμετρα.

Στη συνέχεια έχουμε την ανακάλυψη των «πλευρικών και διαμετρικών αριθμών». Αρχαίες πηγές που αναφέρονται στους πλευρικούς –διαμετρικούς αριθμούς έχει ο Ιάμβλιχος , ο Θέων ο Σμυρνέως και η σημαντικότερη είναι από τα σχόλια του Πρόκλου για το χωρίο 546b-c (περίπου 10 στίχοι) στη *Πολιτεία του Πλάτωνος* .

Ο Πλάτων αναφέρεται στον αριθμό 7 ως τη «ρητή διαγώνιο» που συνδέεται με την πλευρά 5. Ο Πρόκλος στα σχόλια του δίνει τον ακόλουθο ορισμό των «πλευρικών και διαμετρικών αριθμών» τον οποίο και αποδίδει στους Πυθαγορείους¹⁴:

«Ως απαρχή όλων των αριθμών η μονάδα είναι δυνάμει και πλευρά και διαγώνιος. Λαμβάνουμε τώρα δύο μονάδες, μία πλευρική και μια διαγώνιο και κατασκευάζουμε τη νέα πλευρά προσθέτοντας τη διαγώνιο μονάδα στην πλευρική. Τη δε νέα διαγώνιο κατασκευάζουμε προσθέτοντας το διπλάσιο της πλευρικής μονάδας στη διαγώνιο μονάδα. Έτσι βρίσκουμε τον πλευρικό αριθμό 2 και το διαγώνιο αριθμό 3. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο με τους αριθμούς που βρήκαμε προηγουμένως.»

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία έχουμε :

$$2+3=5$$

$$2 \cdot 2 + 3 = 7$$

.

.

.

$$\text{Συνεπώς : } P_{n+1} = P_n + q_n \quad , \quad q_{n+1} = 2P_n + q_n \quad , \quad n=1,2,\dots$$

Δηλαδή , ο ορισμός που δίνουν για τους πλευρικούς –διαμετρικούς αριθμούς με σημερινή ορολογία είναι μια διπλή ακολουθία (p_n, q_n) φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$P_1=1 \quad , \quad q_1=1$$

$$P_n \quad , \quad q_n$$

$$P_{n+1}=P_n+q_n \quad , \quad q_{n+1}=2P_n+q_n \quad , \quad n=1,2,\dots$$

¹⁴ Ε.Γιαννακούλιας . Σύνοψη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού .

Ενώ η βασική ιδιότητα στους πλευρικούς – διαμετρικούς αριθμούς είναι ότι για κάθε $n=1,2,\dots$ ισχύει $q_n^2=2 \cdot p_n^2+(-1)^n$

Η θεμελιώδης προσεγγιστική ιδιότητα είναι ότι αποτελούν ρητές προσεγγίσεις λόγου της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου. Πράγματι, αν θα μπορούμε να

θεωρήσουμε το κλάσμα (δεν είχε έννοια στην αρχαιότητα) $\frac{q_n^2}{p_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{p_n^2}$ από τη σχέση :

$$2 q_n^2 = 2 \cdot p_n^2 + (-1)^n$$

Τότε καθώς n τείνει στο άπειρο και p_n τείνει στο άπειρο, άρα το κλάσμα $\frac{q_n^2}{p_n^2}$

τείνει στον αριθμό 2 οπότε το κλάσμα $\frac{q_n}{p_n}$ τείνει στο λόγο της διάμετρο προς την πλευρά τετραγώνου.

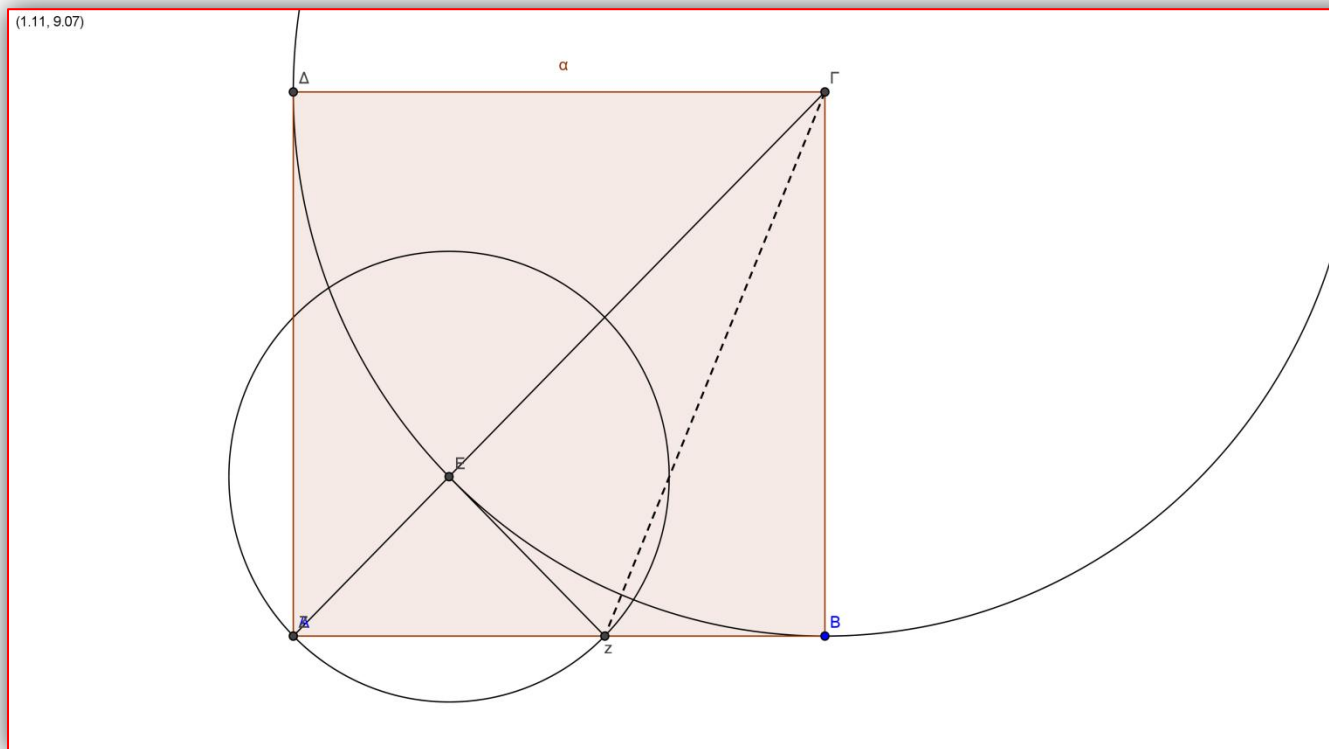
Συνεπώς, αφού προσεγγίζουν το λόγο της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου είναι αναμενόμενο η παραπάνω προσέγγιση να είναι η ανθυφαίρεση $\text{An}\theta(q_n, p_n)$.

Η σημασία των πλευρικών – διαμετρικών αριθμών αριθμών στην κατανόηση του τρόπου ανακάλυψης της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους είναι πολύ σημαντική αφού έτσι αντιλαμβανόμαστε τη σύνδεσή τους με την άπειρη ανθυφαίρεση.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανθυφαίρεσης καθώς και τους πλευρικούς – διαμετρικούς αριθμούς θα μπορούσαμε να βοηθήσουμε τους μαθητές μας στην τάξη της Α΄ Λυκείου μέσα από τις προσεγγίσεις του ρίζα 2 να γνωρίσουν την έννοια του ορίου ακολουθίας.

Διδακτική προσέγγιση του ορίου ακολουθίας με τη χρήση των πλευρικών –διαμετρικών αριθμών :

Ας θεωρήσουμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a και διαγωνίου δ (εικόνα 6) .
Αν από τη διαγώνιο $A\Gamma=\delta$ αφαιρέσουμε τμήμα ίσο με την πλευρά δηλαδή a , τότε όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι $AE=\delta-a$. Στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (E, EA) που τέμνει την AB στο σημείο Z .



Εικόνα 6

Με την σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων $\triangle EZ\Gamma$, και $\triangle Z\Gamma B$, έχουμε :

- i) Την πλευρά ΓZ κοινή
- ii) $E\Gamma = \Gamma B = \alpha$.

Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle EZ\Gamma$, και $\triangle Z\Gamma B$ είναι ίσα διότι έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες, οπότε και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα και απέναντι από ίσες πλευρές θα βρίσκονται ίσες γωνίες και το αντίστροφο, επομένως :

$$EZ = ZB = AE = \delta - \alpha.$$

Αν θέσουμε $AE = \alpha_1 = \delta - \alpha$ και $AZ = \beta_1$, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα α_1 , β_1 θα είναι αντίστοιχα η πλευρά και η διαγώνιος του μικρότερου τετραγώνου.

$$\text{Επίσης, } \beta_1 = AZ = \alpha - BZ = \alpha - (\delta - \alpha) = 2\alpha - \delta \quad (1)$$

$$AE = \alpha_1 = \delta - \alpha \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \delta = 2\alpha - \beta_1 \xRightarrow{(2)} \delta = 2(\delta - \alpha_1) - \beta_1 \Rightarrow \delta = 2\delta - 2\alpha_1 - \beta_1 \Rightarrow \delta = 2\alpha_1 + \beta_1$$

$$\text{και } AB = \alpha = AZ + ZB = \alpha_1 + \beta_1.$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, καταλήγουμε σε τύπους της μορφής :

$$P_{n+1} = p_n + q_n, \quad q_{n+1} = 2p_n + q_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αν ζητήσουμε από τους μαθητές να συνεχίσουν να κατασκευάζουν πλευρικούς – διαμετρικούς αριθμούς, όπως τους είχε θεωρήσει ο Θέων ο Σμυρναίος, θα οδηγηθούν στον παρακάτω πίνακα :

ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ		ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	
Πλευρά 1 ^{ου} τετραγώνου	1	Διάμετρος 1 ^{ου} τετραγώνου	1
Πλευρά 2 ^{ου} τετραγώνου	1+1=2	Διάμετρος 2 ^{ου} τετραγώνου	2 · 1+1=3
Πλευρά 3 ^{ου} τετραγώνου	2+3=5	Διάμετρος 3 ^{ου} τετραγώνου	2 · 2+3=7
Πλευρά 4 ^{ου} τετραγώνου	5+7=12	Διάμετρος 4 ^{ου} τετραγώνου	2 · 5+7=17
Πλευρά 5 ^{ου} τετραγώνου	12+17=29	Διάμετρος 5 ^{ου} τετραγώνου	2 · 12+17=41
Πλευρά 6 ^{ου} τετραγώνου	29+41=70	Διάμετρος 6 ^{ου} τετραγώνου	2 · 29+41=99
Πλευρά 7 ^{ου} τετραγώνου	70+99=169	Διάμετρος 7 ^{ου} τετραγώνου	2 · 70+99=239
.....			

Στην συνέχεια , κατασκευάζουμε τους λόγους των διαμέτρων προς τις αντίστοιχες πλευρές και έχουμε :

$\frac{1}{1} = 1 = \lambda_1$
$\frac{3}{2} = 1,5 = \lambda_2$
$\frac{7}{5} = 1,4 = \lambda_3$
$\frac{17}{12} = 1,4166... = \lambda_4$
$\frac{41}{29} = 1,4137913... = \lambda_5$
$\frac{99}{70} = 1,41428571... = \lambda_6$
.....

Παρατηρώντας , τους όρους με περιττούς δείκτες και εκείνους με άρτιους δείκτες συμπεραίνουμε ότι , κάθε όρος με περιττό δείκτη είναι μικρότερος από όλους τους επόμενους , ενώ κάθε όρος με άρτιο δείκτη είναι μεγαλύτερος από όλους τους επόμενους .

Σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους , αν πάρουμε δυο διαδοχικά πηλίκα , τότε ο $\sqrt{2}$ (με το σημερινό συμβολισμό) θα είναι μεγαλύτερος από τον όρο περιττής τάξης και μικρότερος από τον όρο άρτιας τάξης . Παρατηρούμε , δηλαδή , ότι μπορούμε να βρούμε καλύτερες προσεγγίσεις για το $\sqrt{2}$, αν συνεχίσουμε την παραπάνω διαδικασία .

Μπορούμε να αποδώσουμε την παραπάνω διαδικασία των Πυθαγορείων με τη σημερινή σύγχρονη ορολογία στους μαθητές μας ανιχνεύοντας έτσι τις έννοιες του απείρου , της αύξουσας και φθίνουσας ακολουθίας καθώς και την έννοια του ορίου.

Καθώς η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται , δηλαδή αυξάνει το n , τότε οι όροι περιττής τάξης , δηλαδή :

οι όροι της ακολουθίας λ_{2n+1} αυξάνουν και για πολύ μεγάλο n πλησιάζουν το $\sqrt{2}$,
ώστε η διαφορά $\sqrt{2} - \lambda_{2n+1}$, γίνεται οσοδήποτε μικρή επιθυμούμε .

Ενώ , τότε οι όροι άρτιας τάξης , δηλαδή :

οι όροι της ακολουθίας λ_{2n} ελαττώνουν και για πολύ μεγάλο n πλησιάζουν το $\sqrt{2}$,
ώστε η διαφορά $\lambda_{2n} - \sqrt{2}$, γίνεται οσοδήποτε μικρή επιθυμούμε .

Θα μπορούσαν οι μαθητές μας να ανακαλύψουν ότι το κοινό όριο των ακολουθιών

$$\lambda_{2n+1}, \lambda_{2n} \text{ είναι το } \sqrt{2} .$$

Συνεπώς , θα έκαναν μια εισαγωγή στην έννοια του ορίου με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{2n}) = \sqrt{2} .$$

Εύδοξος ο Κνίδιος (περίπου 408 – 354 ή 353 π.Χ.)

Ο Εύδοξος ¹⁵ μνημονεύεται ως η μεγαλύτερη προσωπικότητα της προεγκλείδειας γεωμετρίας . Γεννήθηκε περί το 408 π.Χ στην Κνίδα (απέναντι από την Κω) και μαθήτευσε κοντά στον Αρχύτα τον Ταραντίνο . Το 378 π.Χ. αναφέρεται ότι ίδρυσε την περίφημη Σχολή της Κυζίκου και γύρω στο 370 π.Χ. - 356 π.Χ. ανέλαβε την οργάνωση και διεύθυνση του φυσικομαθηματικού τμήματος της Ακαδημίας του Πλάτωνα . Διακρίθηκε στα μαθηματικά , την αστρονομία , τη γεωγραφία , τη μηχανική και την ιατρική . Από αυτά τα έργα σώθηκε μόνο το V βιβλίο των <<Στοιχείων του Ευκλείδη >> , το έργο του <<Φαινόμενα >> στιχουργημένο από τον Άρατο καθώς και ένα απόσπασμα παπύρου με τίτλο <<Τέχνη Ευδόξου >> . Για τα γεωμετρικά του επιτεύγματα έχουμε :

1. Η μελέτη των αναλογιών συμμετρων και ασυμμέτρων μεγεθών (V βιβλίο των <<Στοιχείων του Ευκλείδη >>) .
2. Η μελέτη της αναλογίας της <<Χρυσής Τομής >> .
3. Η επινόηση τριών ακόμα αναλογιών εκτός αυτών του Αρχύτα .
4. Η λύση του <<Δηλίου προβλήματος >> .
5. Η μελέτη των κανονικών πολυέδρων (των Πλατωνικών)
6. Η ανακάλυψη της μεθόδου της εξάντλησης .

Κοντά σε αυτά μνημονεύονται :

1. Η επινόηση του μοντέλου των <<ομόκεντρων σφαιρών >> .
2. Η μέτρηση της περιμέτρου της γης .
3. Μέτρηση του έτους και η διόρθωση του ημερολογίου.

Πράγματι , ο Carl B. Boyer¹⁶, αναφερόμενος στις ρίζες του απειροστικού λογισμού, εκφράζει την άποψη ότι αυτές συνδέονται άμεσα με τις λογικές δυσκολίες των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών στην προσπάθειά τους να εκφράσουν τους λόγους των γραμμών, τις οποίες αναγνώριζαν κατά ακαθόριστο τρόπο ως συνεχείς αντίθετα με τους αριθμούς , τους οποίους θεωρούσαν διακριτούς .

Αυτό οδήγησε αφενώς στη μη ικανοποιητική σύλληψη του απειροστού, αφετέρου στη αυστηρότητα της σκέψης τους σε ότι αφορά την έννοια του απείρως μικρού από τις γεωμετρικές αποδείξεις και στην εισαγωγή της μεθόδου της εξάντλησης στην αποδεικτική διαδικασία.

Η μέθοδος της εξάντλησης, η οποία αποδίδεται στον Εύδοξο, αποτελεί μια γενίκευση της θεωρίας αναλογιών του ιδίου, αφού ακριβώς όπως ένα ασύμμετρο μήκος καθορίζεται από σύμμετρα μήκη εκατέρωθεν αυτού, με τον ίδιο τρόπο άγνωστα μεγέθη προσδιορίζονται από αυθαίρετα στενές προσεγγίσεις δια της χρήσεως γνωστών μεγεθών¹⁷.

¹⁵ Τσιμπουράκης .Η Τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα .Εκδ.Ανθρακός,σελ.128-129

¹⁶ Boyer, C. B., *The history of the calculus and its conceptual development*, New York, Dover Publications, 1959, p. 4.

¹⁷ Stillwell, J., *Mathematics and its History*, New York, Springer – Verlag, 1989, p.40.

Έτσι , ο Εύδοξος σύγκρινε μόνο δύο λόγους (σύμμετρων ή ασύμμετρων μεγεθών) ορίζοντας πότε είναι ίσοι και στην αντίθετη περίπτωση ποιος είναι ο μεγαλύτερος . Η θεωρία αυτή έδωσε στους Έλληνες ένα λογικό θεμέλιο για τους λόγους των ασύμμετρων μεγεθών και άνοιξε κατά κάποιο τρόπο το δρόμο για την εξέλιξη της Γεωμετρίας από τον 4ο π.Χ. αιώνα και μετά. Το σημείο αναφοράς του Ευδόξου ήταν ο ορισμός του 5ου βιβλίου του Ευκλείδη :

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 V ΒΙΒΛΙΟ (ΕΥΚΛΕΙΔΗ)

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἡ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα.

Δηλαδή ,

Δύο ομοειδή μεγέθη έχουν λόγο (δηλαδή ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ υπάρχει) εάν μπορούμε να βρούμε δύο φυσικούς αριθμούς μ και ν τέτοιους ώστε $\mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta$ και $\nu \cdot \beta > \mu \cdot \alpha$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο ορισμός 5 του πέμπτου βιβλίου του Ευκλείδη αποτελεί το ισοδύναμο ορισμό των τομών Dedekind και αν χρησιμοποιήσουμε σημερινούς συμβολισμούς έχουμε :

Έστω $A = \frac{\alpha}{\beta}$ και $\Gamma = \frac{\gamma}{\delta}$ και έστω ότι για όλους τους ακέραιους μ, ν ισχύει η

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \cdot \alpha > \mu \cdot \beta \\ \nu \cdot \alpha < \mu \cdot \beta \\ \nu \cdot \alpha = \mu \cdot \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu \cdot \gamma > \mu \cdot \delta \\ \nu \cdot \gamma < \mu \cdot \delta \\ \nu \cdot \gamma = \mu \cdot \delta \end{array} \right\}$$

τότε :

$$A \Rightarrow \Gamma$$

Ο παραπάνω ορισμός όμως χρησιμοποιείται εκτενώς από τον Αρχιμήδη ο οποίος τον χαρακτηρίζει ως αξίωμα . Τελικά η πρόταση αυτή αποδόθηκε στον Εύδοξο αλλά είναι σήμερα γνωστή ως **αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη** . Η βάση της **μεθόδου εξάντλησης** περιέχεται στην ακόλουθη πρόταση, όπως διατυπώνεται ως Θεώρημα 1 του Βιβλίου X των **Στοιχείων** του Ευκλείδη :

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι (ΒΙΒΛΙΟ Χ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ)

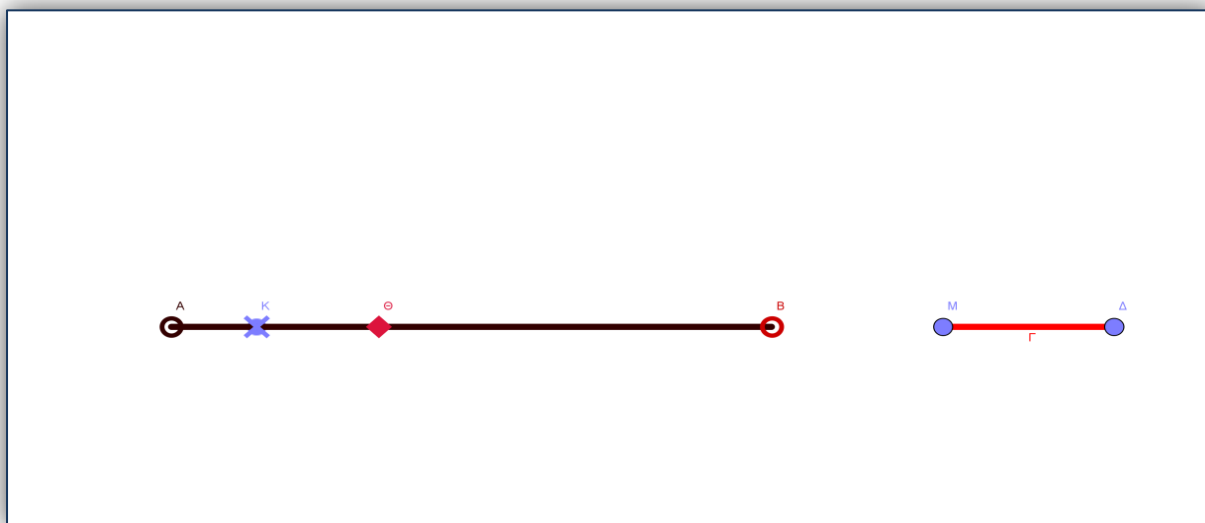
« Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐάν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους».

Μεταφράζοντας :

«Όταν παρουσιάζονται δύο μεγέθη άνισα (σε ελεύθερη απόδοση: για οποιοδήποτε άνισα μεγέθη), εάν από το μεγαλύτερο τμήμα αφαιρεθεί ένα τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του και από αυτό που απομένει ένα τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του, και αυτό γίνεται διαρκώς, θα απομείνει ένα μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο από το αρχικά μικρότερο μέγεθος».

Απόδειξη¹⁸ (κατά τον Ευκλείδη)

Έστω δύο μεγέθη άνισα AB και Γ και έστω το AB μεγαλύτερο από το Γ.



Εικόνα 7

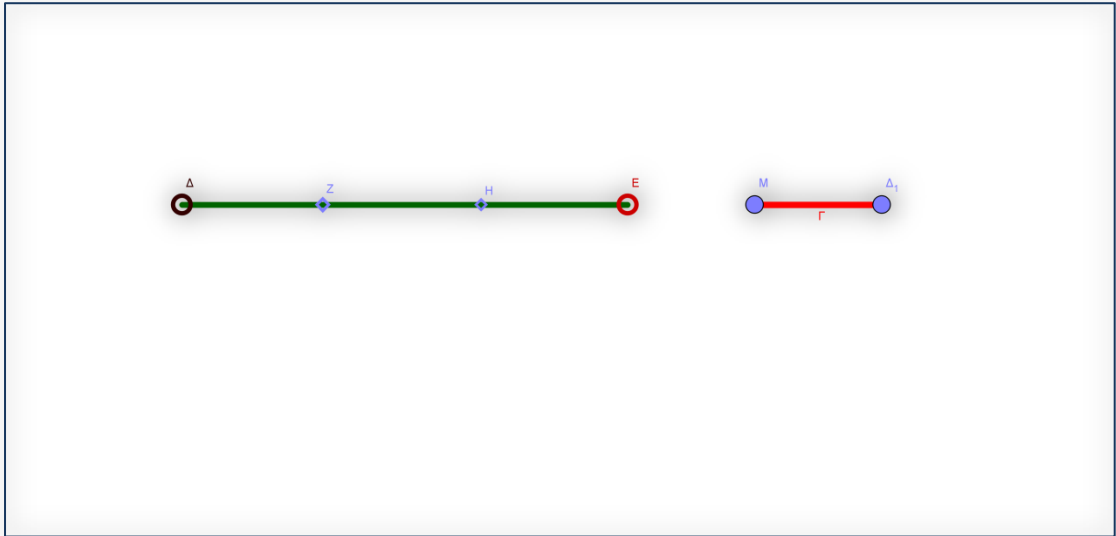
Λέγω , ότι αν από το AB αφαιρεθεί μεγαλύτερο του ημίσεως, και από του υπολοίπου μεγαλύτερο του ημίσεως και τούτο γίνεται πάντοτε, θα υπολειφθεί κάποιο μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικροτέρου μεγέθους.

Διότι το Γ πολλαπλασιαζόμενο θα γίνει κάποτε μεγαλύτερο του AB.

Ας πολλαπλασιαστεί και έστω το ΔΕ του μεν Γ πολλαπλάσιο , του δε AB μεγαλύτερο και ας διαιρεθεί το ΔΕ στα ίσα προς το Γ μεγέθη ΔΖ , ΖΗ , ΗΕ και ας αφαιρεθεί από το μεν AB μεγαλύτερο του ημίσεως το ΒΘ , από δε το ΑΘ μεγαλύτερο

¹⁸ Ε.Γιαννακούλιας . Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού .

του ημίσεως το ΘK και τούτο ας γίνεται πάντοτε μέχρις ότου οι διαιρέσεις του AB γίνονται ισοπληθείς προς τις διαιρέσεις του ΔE .



Εικόνα 8

Έστω λοιπόν οι διαιρέσεις AK , $K\Theta$, ΘB ισοπληθείς προς τις διαιρέσεις ΔZ , ZH , HE . Επειδή $\Delta E > AB$ και αφαιρέθηκε από μὲν το ΔE μικρότερο από του ημίσεως το EH , από δε το AB μεγαλύτερο του ημίσεως το $B\Theta$, το υπόλοιπο, άρα το $H\Delta$ θα είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου ΘA .

Και επειδή $H\Delta > \Theta A$ και αφαιρέθηκε από μὲν το $H\Delta$ ήμισυ το HZ , από δε το ΘA μεγαλύτερο του ημίσεως το ΘK , άρα το υπόλοιπο ΔZ είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου AK .

Είναι δε $\Delta Z = \Gamma$.

Άρα $\Gamma > AK$. Άρα το AK είναι μικρότερο του Γ .

Απομένει, άρα, από το μέγεθος AB το μέγεθος AK , το οποίο είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου Γ .

Ακολουθεί η πρόταση II καθώς και η απόδειξη της που βρίσκεται στο *XII Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*, όπου, μπορεί να δώσει στον μαθητή την δυνατότητα να κατανοήσει πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της εξάντλησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ, (ΤΟΥ ΧΙΙ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ)

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ
ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

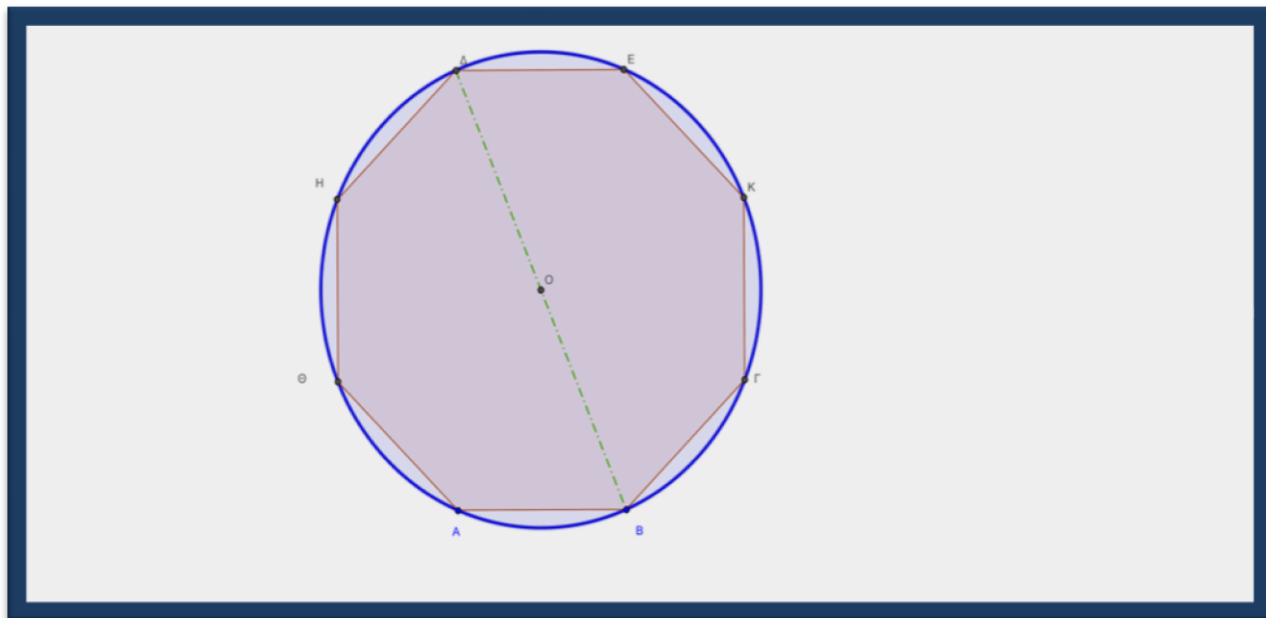
Οἱ κύκλοι εἶναι μεταξύ τους ὅπως
τα τετράγωνα τῶν διαμέτρων τους.

(Δηλαδή, τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.)

Η απόδειξη¹⁹ έχει ως εξής:

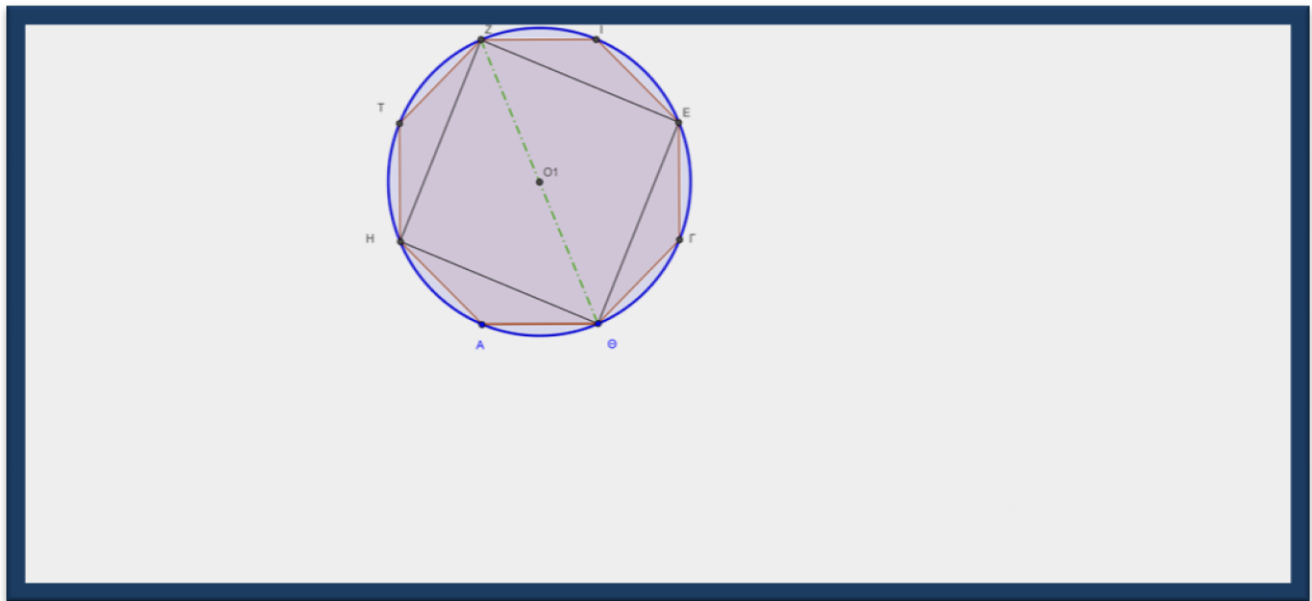
Ἐστω ὅτι οἱ δύο κύκλοι δεν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τα τετράγωνα τῶν διαμέτρων ΒΔ καὶ ΖΘ.

Τότε ὁ λόγος $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος με τὸ λόγὸ τοῦ πρώτου κύκλου πρὸς μιὰ ἐπιφάνεια Σ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μεγαλύτερη ἢ μικρότερη τοῦ δεύτερου κύκλου .



Εικόνα 9

¹⁹ Ε.Γιαννακούλιας . Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού .



Εικόνα 10

Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι η Σ είναι μικρότερη (οπότε αν συμβολίσουμε με E , ε τα εμβαδά των δύο κύκλων, τότε θα έχουμε $\frac{E}{\Sigma} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$, όπου $\Sigma < \varepsilon$ (1)).

Εγγράφουμε στο δεύτερο κύκλο, που έχει εμβαδόν ε , ένα τετράγωνο $EZH\Theta$. Το τετράγωνο αυτό είναι μεγαλύτερο από το μισό του κύκλου.

Διχοτομούμε τα τόξα EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE στα σημεία I , T , A , Γ και κατασκευάζουμε το οκτάγωνο $ZTHA\Theta\Gamma E I$.

Το καθένα από τα τρίγωνα THZ , $HA\Theta$, TIE , $E\Gamma\Theta$ είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου κυκλικού τμήματος.

Αν αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται, διχοτομώντας κάθε φορά τα τόξα, τότε από την *Πρόταση I (Αρχή της Εξάντλησης)* πρέπει τελικά να απομείνουν κυκλικά τμήματα, το άθροισμα των οποίων είναι μικρότερο της διαφοράς μεταξύ του κύκλου με εμβαδόν ε και της επιφάνειας Σ .

Δηλαδή στην παραπάνω πρόταση εφαρμόζεται η αρχή της εξάντλησης για τα μεγέθη ε , $\varepsilon - \Sigma$.

Το εγγεγραμμένο πολύγωνο που έχει προκύψει είναι μεγαλύτερο της επιφάνειας Σ και αν συμβολίσουμε με (P_2) το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου τότε ισχύει:

$$(\varepsilon - \Sigma) + (P_2) > \varepsilon \Rightarrow (P_2) > \Sigma.$$

Πράγματι, αν συμβολίσουμε με ε^* το εμβαδόν που μένει τελικά, έχουμε $\varepsilon^* < \varepsilon - \Sigma$ και $\varepsilon + \varepsilon^*$ εμβαδόν εγγεγραμμένου πολυγώνου ισούται με το εμβαδόν ε .

Έτσι το εγγεγραμμένο πολύγωνο που θα προκύψει θα έχει εμβαδόν (P_2) και $(P_2) > \Sigma$

Κατασκευάζουμε στον πρώτο κύκλο πολύγωνο με εμβαδόν (P_1) όμοιο προς αυτό του δευτέρου κύκλου. Τότε $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{(P_1)}{(P_2)}$ (2).

Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{E}{\Sigma} = \frac{(P_1)}{(P_2)} \Rightarrow \frac{E}{(P_1)} = \frac{\Sigma}{(P_2)}, \text{ που είναι άτοπο, αφού } E > (P_1) \text{ και } \Sigma < (P_2).$$

Η περίπτωση που $\Sigma > \varepsilon$ ανάγεται στην προηγούμενη με εναλλαγή των δύο κύκλων.

Συνεπώς, ισχύει το συμπέρασμα.

Διδακτική προσέγγιση για την έννοια του ορίου με τη μέθοδο της εξάντλησης :

Έτσι, αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη α και ε και έστω $\alpha > \varepsilon$ και από το α αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, τότε θα μείνει κάποιο μέγεθος που είναι μικρότερο από το ε .

Αν συμβολίσουμε με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$, τα μεγέθη που κάθε φορά αφαιρούνται κατά την παραπάνω διαδικασία, και θέσουμε :

$$S_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k, \text{ με } k=1, 2, \dots, n, \dots,$$

τότε κατά την πρώτη αφαίρεση θα αφαιρεθεί μια ποσότητα :

$$S_1 = \alpha_1$$

μετά τη ν-οστή αφαίρεση θα έχει αφαιρεθεί συνολικά ποσότητα:

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n.$$

Σύμφωνα με την αρχή της εξάντλησης, θα υπάρχει κάποιο n για το οποίο η διαφορά

$$\alpha - S_n$$

θα γίνει μικρότερη από το ε για οποιοδήποτε ε , οσοδήποτε μικρό.

Έτσι για την ακολουθία $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων, η μέθοδος της εξάντλησης με σημερινή ορολογία και συμβολισμό διατυπώνεται ως εξής:

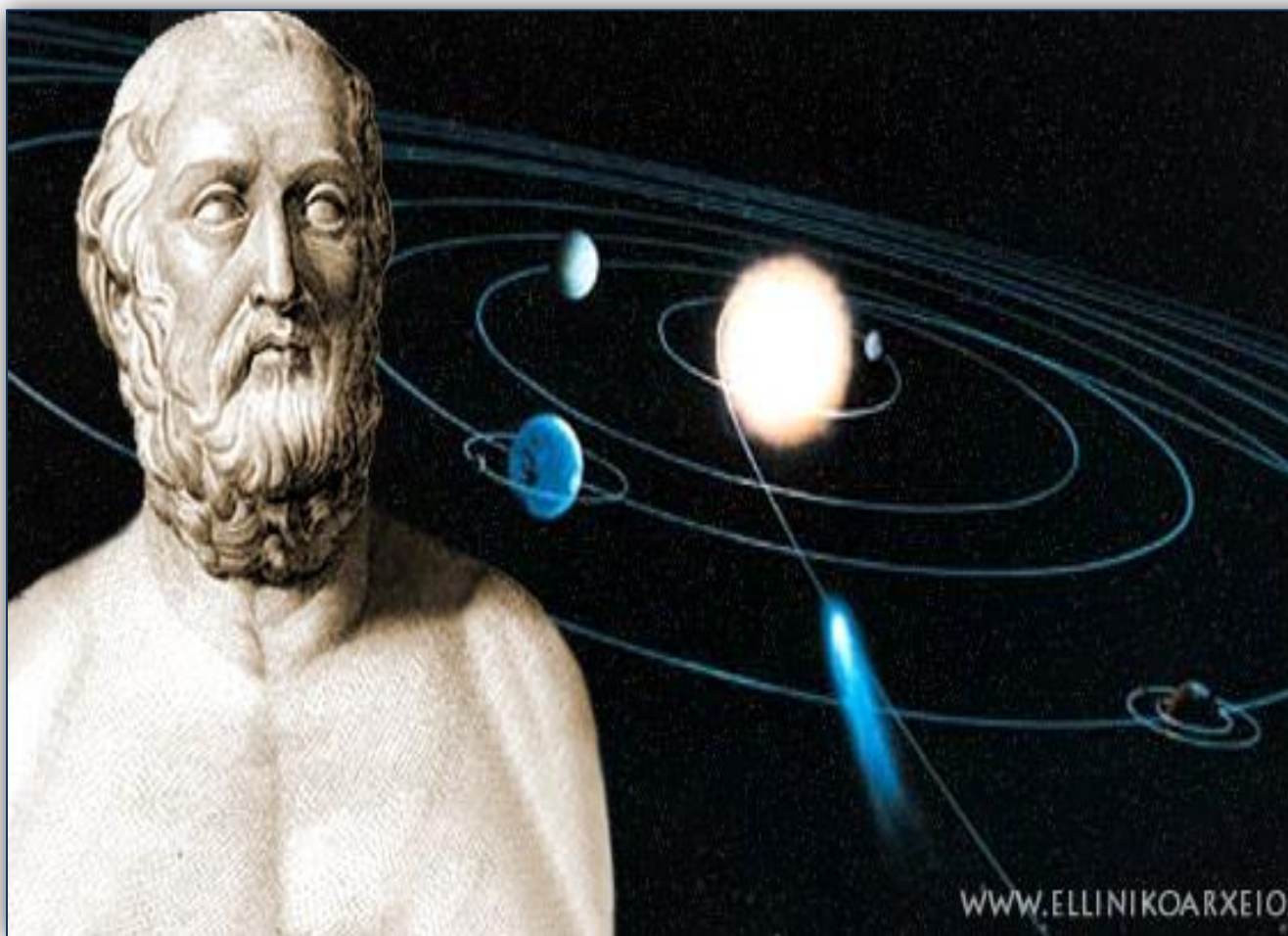
Για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ έτσι ώστε για κάθε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - \alpha| < \varepsilon, \text{ δηλαδή, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \alpha.$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο Εύδοξος και οι Έλληνες μαθηματικοί που ακολούθησαν, ποτέ δε θεώρησαν ότι στη μέθοδο της εξάντλησης η διαδικασία συνεχίζεται επ'άπειρον άλλα πίστευαν ότι υπήρχε πάντα μια ποσότητα που έμενε, που μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε.

Χρειάστηκε να περάσει περισσότερο από έναν αιώνα από την εποχή που έζησε ο **Εύδοξος (408 – 355 π.Χ.)** για να εμφανισθεί ο **Αρχιμήδης των Συρακουσών (287 – 212 π.Χ.)** η μεγαλύτερη φυσιογνωμία των μαθηματικών της αρχαιότητας, και, χωρίς αμφιβολία, όλων των εποχών έβαλε το θεμέλιο λίθο στο οικοδόμημα του Λογισμού του Απείρου και άνοιξε το δρόμο στους Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz και Newton για την ανάδυση των εννοιών της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Αρίσταρχος ο Σάμιος



Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (310-230 π.Χ.) θεωρείται ο πρώτος μεγάλος αστρονόμος στην ιστορία. Δυο γεγονότα μας δίνουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε την εποχή του Αρίσταρχου , μια μελέτη του , το 281/280 π.Χ. σχετικά με το θερινό ηλιοστάσιο και ένα βιβλίο του , που εκδόθηκε πριν από την εποχή κατά την οποία ο Αρχιμήδης έγραψε το έργο του «Ψαμμίτης » ένα έργο που γράφτηκε πριν το 216 π.Χ.

Ο Αρίσταρχος , επομένως , φαίνεται να έζησε γύρω στο 310-230 π.Χ. , ήταν δηλαδή 25 χρόνια μεγαλύτερος από τον Αρχιμήδη .²⁰

Σπούδασε στη Αθήνα στην σχολή του Αριστοτέλη , όταν αυτή διεύθυνε ο Στράτων ο Λαμψακηνός (ανέλαβε το 288 π.Χ. μετά το θάνατο του Θεόφραστου)

Μέχρι τον Αρίσταρχο τον Σάμιο η εικόνα του σύμπαντος στηρίζονταν σε αισθητικές αρχές και μυθολογικά στοιχεία, ενώ , αυτός χρησιμοποίησε όλα τα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα για να καταλήξει στις θεωρίες του. Για παράδειγμα, επισήμανε ότι η κίνηση των πλανητών θα μπορούσε να ερμηνευθεί καλύτερα αν θεωρήσουμε ότι ο Ήλιος και όχι η Γη βρίσκεται στο κέντρο του Σύμπαντος.

Οι ιστορικοί , που ασχολήθηκαν με την πορεία των Μαθηματικών έχουν , κατά κανόνα , δώσει πολύ λίγη σημασία στον Αρίσταρχο τον Σάμιο , διότι ήταν αστρονόμος και το έργο του δεν θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους μαθηματικούς. Οι Έλληνες , όμως , είχαν διαφορετική γνώμη , για αυτό του είχαν δώσει την προσωνυμία «Αρίσταρχος ο Μαθηματικός», για να τον διακρίνουν από άλλους Αρίσταρχους.²¹

Πολλά επαινετικά επίσης σχόλια για τον Αρίσταρχο γράφει ο Βιτρούβιος :

«Άνθρωποι αυτού του είδους είναι σπάνιοι , όπως ήταν , στο παρελθόν ο Αρίσταρχος ο Σάμιος , ο Φιλόλαος και ο Αρχύτας από τον Τάραντα , ο Απολλώνιος από την Πέργα , ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος , ο Αρχιμήδης και ο Σκοπίνας ο Συρακούσιος , οι οποίοι κληροδότησαν στους απογόνους τους πολλές μηχανικές εφαρμογές και εφαρμογές σχετικά με ωροδείκτες , τις οποίες εφεύραν και επεξήγησαν με βάση μαθηματικούς κανόνες . »

« De Architectura», I. 1.16.

Κατά τον Sir Thomas L. Heath , στον Αρίσταρχο ανήκει η μεγάλη τιμή , ότι ήταν ο πρώτος , που διατύπωσε την υπόθεση του Κοπέρνικου , η οποία εγκαταλείφθηκε , έως ότου αναβίωσε από τον ίδιο τον Κοπέρνικο , για αυτό και του αποδίδεται ο τίτλος «Αρχαίος Κοπέρνικος» παρά τις επίμονες αιτιάσεις που πράθεσε ο Schiaparelli για να αποδείξει , ότι ο Ηρακλείδης ο Ποντικός ήταν εκείνος που συνάβαλε στην ηλιοκεντρική ιδέα.

Σύμφωνα , με τον Αρίσταρχο :

- I. Η Γη στρέφεται γύρω από τον άξονα της και γύρω από τον Ήλιο.
- II. Το μέγεθός της , καθώς και εκείνο της τροχιάς της , είναι ασήμαντο σε σχέση με το μέγεθος του σύμπαντος .

²⁰ <<Ιστορία των Ελλήνων Μαθηματικών>>Σελ.14 .Τόμος II .Sir Thomas L.Heath

²¹ <<Ιστορία των Ελλήνων Μαθηματικών>>Σελ.13 .Τόμος II .Sir Thomas L.Heath

Η θεωρία αυτή πρέπει να διατυπώθηκε μετά το 281 π.Χ. και να προκάλεσε τη οργή των << ευσεβών Αθηναίων>>. Το αποτέλεσμα ήταν να κατηγορηθεί ο Αρίσταρχος από τον Στωικό φιλόσοφο Κλεάνθη <<επί ασεβεία >>και στη συνέχεια να καταφύγει στην Αλεξάνδρεια στην οποία έζησε για μεγάλο χρονικό διάστημα .

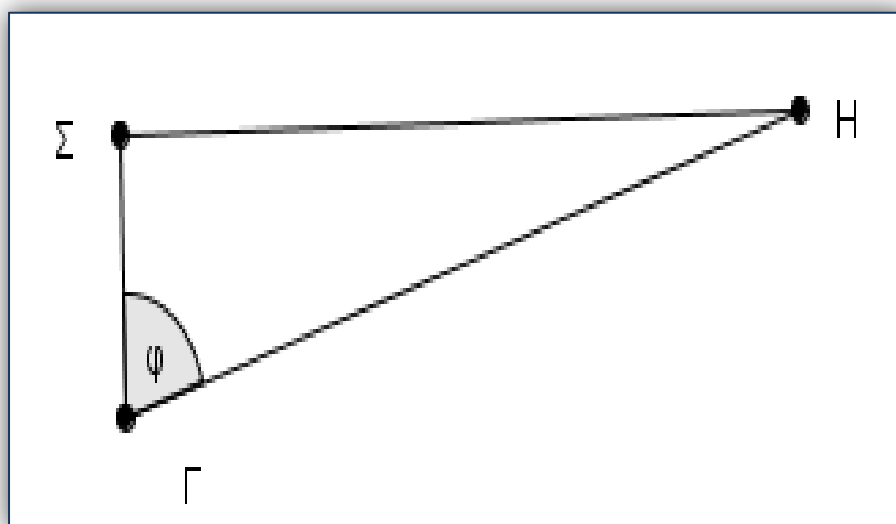
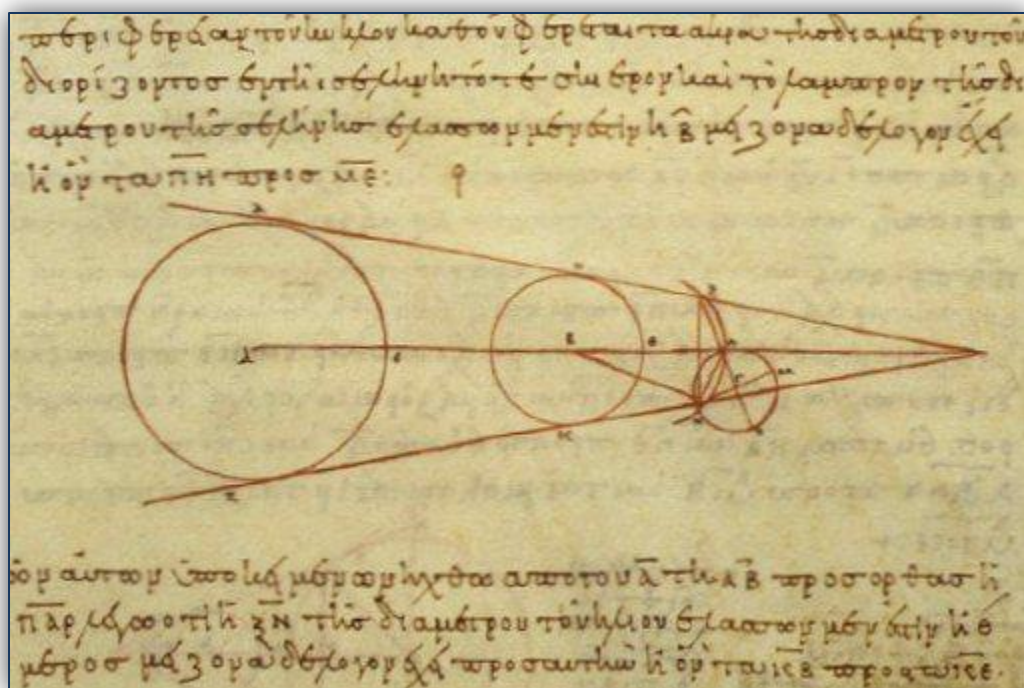
Επίσης , κατά το Αρίσταρχο τον Σάμιο η απόσταση Γης – Κέντρου Ήλιου βρίσκεται σε αναλογία προς την ακτίνα της σφαίρας επί της οποίας κινείται η Σελήνη , όπως φαίνεται στο έργο του Αρχιμήδη «Ψαμμίτης» που περιλαμβάνεται το παρακάτω απόσπασμα:

«Εσύ (βασιλία Γέλωνα)γνωρίζεις ότι το Σύμπαν είναι το όνομα που δίνουν οι περισσότεροι αστρονόμοι στη σφαίρα , της οποίας το κέντρο είναι το κέντρο της Γης , ενώ η ακτίνα της είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ του κέντρου του Ηλίου και του κέντρου της Γης . Αυτή είναι η συνηθισμένη περιγραφή όπως την ακούμε από τους αστρονόμους . Ο Αρίσταρχος , όμως , παρέθεσε ένα βιβλίο , που συνίσταται από συγκεκριμένες υποθέσεις , στο οποίο φαίνεται , ως συνέπεια των υποθέσεων αυτών , ότι το σύμπαν είναι κατά πάρα πολύ μεγαλύτερο από το Σύμπαν που μόλις αναφέρθηκε. Οι υποθέσεις του είναι ότι οι απλανείς αστέρες και ο ήλιος παραμένουν ακίνητοι , ότι η Γη περιφέρεται γύρω από Ήλιο κατά μήκος ενός κύκλου , με τον Ήλιο να βρίσκεται στο 'μέσον' της τροχιάς , και η σφαίρα των απλανών αστερών , η οποία έχει το ίδιο κέντρο με αυτό του Ήλιου , είναι τόσο μεγάλη , όσο και η ακτίνα του κύκλου , στον οποίο υποτίθεται περιφέρεται η Γη , έχει τέτοιο λόγο προς την απόσταση των απλανών αστερών όση έχει το κέντρο της σφαίρας προς την επιφάνεια της .»

Ένα αστρονομικό , μαθηματικό έργο του Αρίσταρχου του Σάμιου , το οποίο έχει διασωθεί , είναι το «Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης». Στο βιβλίο αυτό (συγκεκριμένα στο Θεώρημα ζ') περιλαμβάνεται μια εργασία, που μπορεί να θεωρηθεί ως ένα από τα πρώτα βήματα προς την Τριγωνομετρία. Το περιεχόμενο , από μαθηματικής απόψεως , έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον αφού είναι το πρώτο αντιπροσωπευτικό δείγμα Γεωμετρίας σε τριγωνομετρικό αντικείμενο και είναι και ένα είδος προαγγελίας για το «Κύκλου Μέτρησις » του Αρχιμήδη .

Στην πραγματικότητα αυτή ο Αρίσταρχος επιδιώκει να υπολογίσει την τιμή του λόγου:

$$\frac{\text{απόσταση : Γης – Ηλίου}}{\text{απόσταση : Γης – Σελήνης}}$$



Εικόνα 11

Έτσι επινοεί μια μέθοδο, όπου έχει να επιλύσει ένα τεράστιο (μέσα στο Διάστημα) «ορθογώνιο ευθύγραμμο τρίγωνο», του οποίου κορυφές είναι το κέντρο (Γ) της Γης, το κέντρο (Σ) της Σελήνης και το κέντρο (Η) του Ηλίου (εικόνα 11).

Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή :

Ο Αρίσταρχος στην αρχή του έργου του κάνει μερικές παραδοχές , ώστε να έχει αριθμητικά δεδομένα κατά την εφαρμογή της μεθόδου που πρόκειται να παρουσιάσει²²:

Αρίσταρχος «Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης»
 «...τὴν σελήνην παρὰ τοῦ ἡλίου τὸ φῶς λαμβάνειν» (υπόθεση α')

[...ἡ Σελήνη παίρνει (δέχεται) τὸ φῶς ἀπὸ τὸν ἥλιο...]

«...Ἡ σελήνη κατώτερον φέρεται τοῦ ἡλίου, καὶ διχοτόμος οὕσα ἔλασσον τεταρτημορίου ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἡλίου...» (πρόταση 6)

[...ἡ Σελήνη κινεῖται χαμηλότερα ἀπὸ τὸν ἥλιο (πλησιέστερα στὴ γῆ), καὶ ὅταν εἶναι φωτισμένη κατὰ τὸ μισό, ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἥλιο λιγότερο ἀπὸ μίαν ὀρθή...]

«...Ὅταν ἡ σελήνη διχοτόμος ἡμῖν φαίνεται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου τῷ τοῦ τεταρτημορίου τριακοστῷ...» (υπόθεση δ')

[...ὅταν ἡ Σελήνη εἶναι φωτισμένη κατὰ τὸ μισό, τότε αὐτὴ ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἥλιο (γωνιακὴ ἀπόσταση) λιγότερο ἀπὸ μίαν ὀρθή κατὰ τὸ ἓνα τριακοστό τῆς ($90^\circ - \frac{1}{30} 90^\circ = 87^\circ$)...]

«...τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδέκατον μέρος ζωδίου...» (υπόθεση στ')

[...ἡ σελήνη ἔχει φαινομένη διάμετρο ἴση με τὸ $\frac{1}{15}$ ενός ζωδίου ($\frac{1}{15} 30^\circ = 2^\circ$)...]

«Τὸ τῆς σκιάς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο» (υπόθεση ε')

[Τὸ πλάτος τῆς σκιάς τῆς γῆς (στὴν ἀπόσταση τῆς Σελήνης) εἶναι διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς Σελήνης]

«Τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν» (υπόθεση β')

[Τὸ μέγεθος τῆς γῆς εἶναι ἀσήμαντο (σημεῖο) σὲ σχέση με τὴ σφαῖρα τῆς σελήνης]

Αμέσως , μετά ανακοινώνει ὅτι θα αποδείξει ὅτι :

- i. Ἡ ἀπόσταση Γῆς – Ἡλίου εἶναι : $18 \Gamma\text{Σ} < \Gamma\text{Η} < 20 \Gamma\text{Σ}$, ὅπου ΓΗ καὶ ΓΣ οἱ ἀποστάσεις τῆς Γῆς ἀπὸ τὸν ἥλιο καὶ τὴ Σελήνη ἀντίστοιχα .
- ii. Ἡ διάμετρος τοῦ Ἡλίου πρὸς τὴ διάμετρο τῆς Σελήνης ἔχει λόγον τὸν ἴδιον ,
δηλαδή : $18 < \frac{d_H}{d_\Sigma} < 20$.
- iii. Ἡ διάμετρος τοῦ Ἡλίου ἔχει λόγον πρὸς τὴ διάμετρο τῆς Γῆς : $\frac{18}{3} < \frac{d_H}{d_\Gamma} < \frac{43}{6}$.

²² Δ. Τσιμπουράκης .Ἡ Τριγωνομετρία στὴν Αρχαία Ελλάδα .Εκδ.Ανθρακός,σελ.109.

Οπότε συμπεραίνουμε :

$$\text{δηλαδή, } d_H \cong 19d_{\Sigma}, d_H \cong 7d_{\Gamma}, d_{\Gamma} \cong 2,8d_{\Sigma}.$$

Πριν όμως , παρουσιάσουμε τις σχέσεις θα αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις : ²³

- Το πλάτος της γήινης σκιάς στο σημείο που χάνεται η πανσέληνος , κατά τις εκλείψεις της είναι , σύμφωνα με τον Ίππαρχο , 2,5 φορές η διάμετρος της σελήνης (πραγματικότητα 2,55) και όχι μόνο δυο φορές που τη δίνει ο Αρίσταρχος .
- Η φαινομενική διάμετρος της σελήνης είναι 30' και όχι 2⁰ , που την δίνει ο Αρίσταρχος .

Είναι λοιπόν , παράδοξες οι τιμές που δίνει ο Αρίσταρχος στην εποχή που οι μετρήσεις αυτές ήταν καθημερινή υπόθεση , γνωρίζοντας ότι τον 4⁰π.Χ. η Ακαδημία του Πλάτωνος είχε αποκτήσει την περίφημη Κλεψύδρα (Υδραυλικό χρονόμετρο) με την οποία οι αστρονόμοι μετρούσαν τη μέγιστη μέρα του έτους , το πλάτος της σκιάς κατά τις εκλείψεις (χρονομετρώντας τη διάρκεια εξαφάνισης της πανσελήνου) , ακόμα και την διάμετρο του Ήλιου (χρονομετρώντας τη διάρκεια που αυτός κάνει να χαθεί από τον θαλάσσιο ορίζοντα).

Επίσης , αξιοπερίεργο είναι ότι αρχικά θεωρεί τη Γη σαν σημείο , ενώ αργότερα αποδεικνύει ότι είναι 2,5 φορές μεγαλύτερη από τη Σελήνη . Μάλλον θεώρησε ως σημείο το μάτι του παρατηρητή και όχι τη Γη.

Το καινούργιο , πάντως στις παραδοχές του αστρονόμου είναι ότι οι ακτίνες του Ηλίου δεν φτάνουν στη Γη και τη Σελήνη παράλληλα , αλλά ότι αυτές της Γης σχηματίζουν γωνία 3⁰ με εκείνες της Σελήνης (το γιατί θεώρησε αυτή τη γωνία δεν το γνωρίζουμε).

²³ Δ. Τσιμπουράκης .*Η Τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα .Εκδ.Ανθρακός.σελ.110-112*

ΠΡΟΤΑΣΗ 7²⁴

Αρίσταρχος «Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης» (πρόταση 7)
«Τὸ ἀπόστημα ὃ ἀπέχει ὁ ἥλιος ἀπὸ τῆς γῆς τοῦ ἀποστήματος οὗ ἀπέχει ἡ
σελήνη ἀπὸ τῆς γῆς μείζον μὲν ἐστὶν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλάσιον, ἔλασσον δὲ ἢ
εἰκοσαπλάσιον»

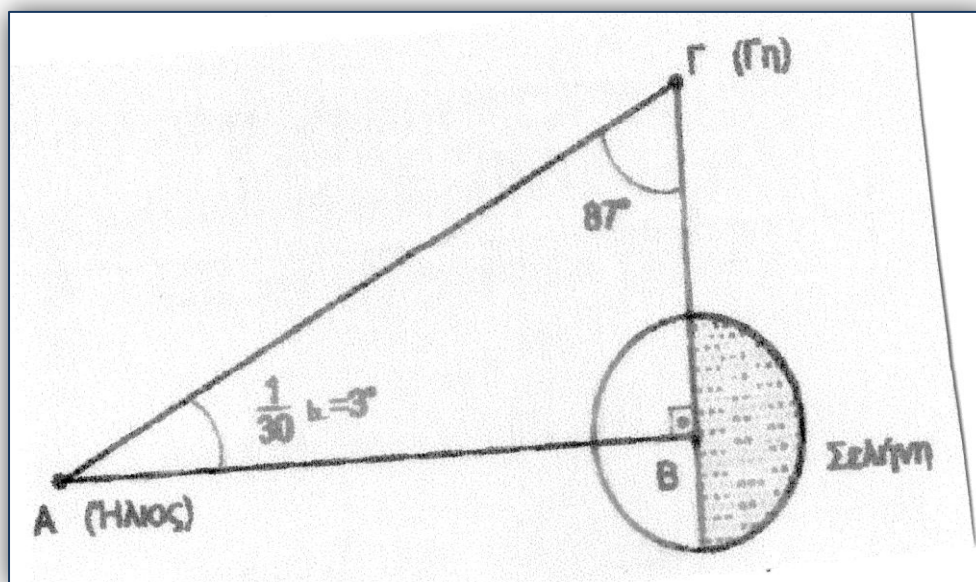
[Η απόσταση Γης - Ηλίου είναι μεγαλύτερη του 18-πλάσιου της απόστασης
Γης - Σελήνης, μικρότερη δε του 20-πλάσιου της].

Δηλαδή ο Αρίσταρχος ανακοινώνει ότι η απόσταση ΓΗ, της γης από τον ήλιο είναι :

$$18 \Gamma\Sigma < \Gamma\text{Η} < 20 \Gamma\text{Σ} .$$

Ουσιαστικά λύνει το εξής πρόβλημα :

<< Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Β= ορθή) δοθεί η γωνία $A = \frac{1}{30} L$, να
υπολογισθεί ο λόγος : $\frac{\Gamma\text{Α}}{\Gamma\text{Β}}$. >> (εικόνα 12)



Εικόνα 12

²⁴ Δ. Τσιμπουράκης .Η Τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα .Εκδ.Ανθρακός,σελ.112.

(Οι γωνίες από τον Αρίσταρχο αναφέρονται σε μέρη ορθής ή τεταρτημορίου .Οι μοίρες εισήχθησαν πολύ αργότερα περί το 150 π.Χ. από τον Ίππαρχο . Όμως παρακάτω χρησιμοποιούνται μοίρες για καλύτερη κατανόηση του προβλήματος .)

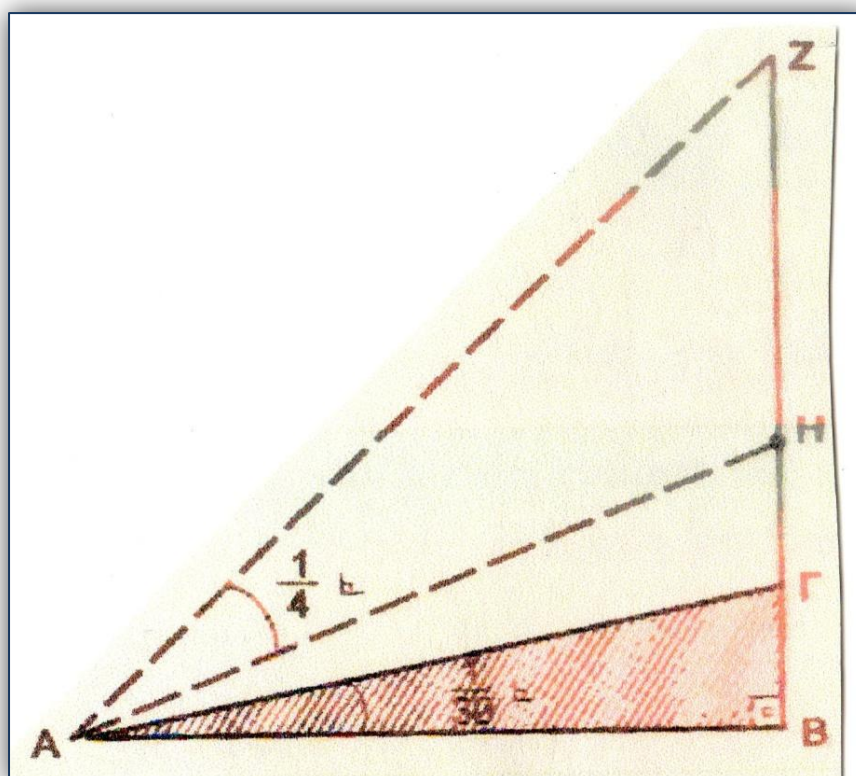
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η τιμή της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}=87^0$ είναι μια από τις παραδοχές του και πουθενά στο κείμενο δεν αναφέρεται ο τρόπος που την υπολόγισε ή την εκτίμησε .

Η λύση που δίνει ο Αρίσταρχος καθώς και τα βήματα που ακολουθεί είναι τα παρακάτω :

1. Θεωρεί ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABZ και μέσα του το τρίγωνο $AB\Gamma$ (Γης -Ήλιου- Σελήνης). Μετά εφαρμόζει σε αυτά μια παλαιότερη πρόταση

σύμφωνα με την οποία : $\frac{B\Gamma}{BZ} < \frac{\widehat{\Gamma A B}}{\widehat{Z A B}}$ όπου $\widehat{\Gamma A B} < \widehat{Z A B}$, οξείες γωνίες.

Στη συνέχεια οδηγείται στη σχέση: $\frac{B\Gamma}{BZ} < \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{15}$ ή $\frac{B\Gamma}{BA} = \frac{1}{15}$.



Εικόνα 13

2. Η προσέγγιση δεν την θεωρεί ικανοποιητική και διχοτομεί τη γωνία ZAB . Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το θεώρημα διχοτόμων υπολογίζει τη BH και τη BZ .

$$\frac{BH}{HZ} = \frac{BA}{AZ} = \frac{BA}{\sqrt{2}BA} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{BH}{HZ+BH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{BH}{BZ} = \frac{5}{12} \text{ χρησιμοποιεί}$$

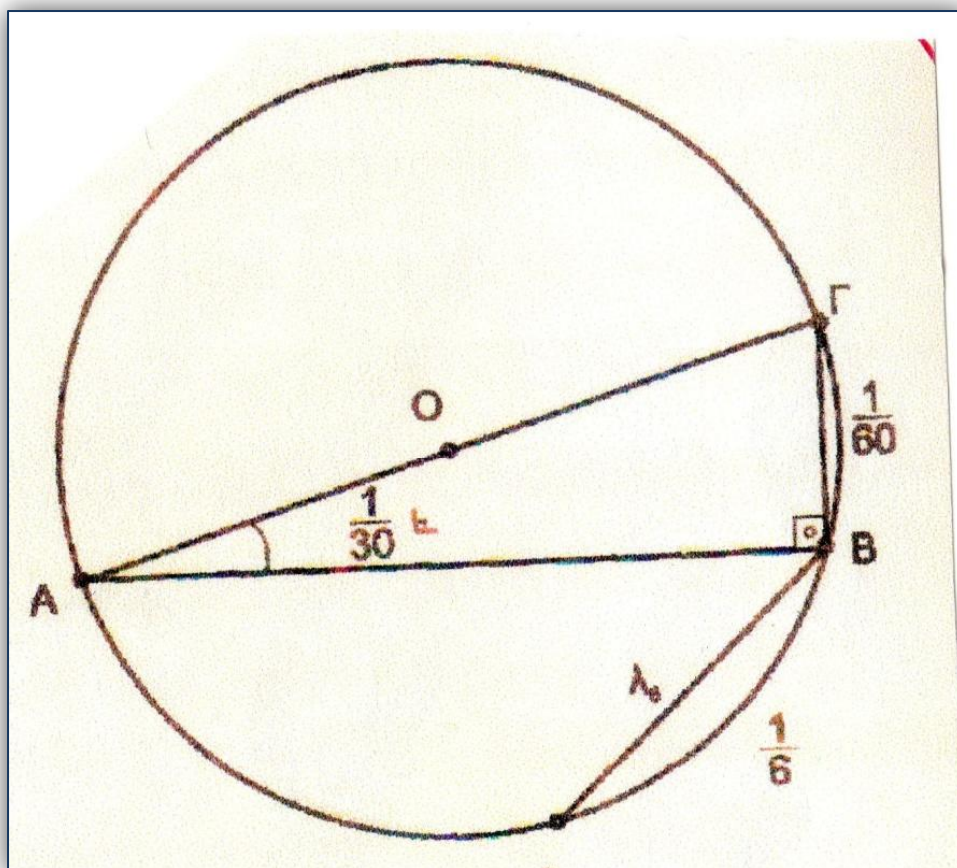
$$\text{προσέγγιση, για } \sqrt{2} = \frac{7}{5}, \text{ ενώ, γνώριζε } \frac{99}{70} \text{ ή } \frac{17}{12}$$

3. Εφαρμόζει ξανά το παραπάνω ανισοτικό θεώρημα για τις γωνίες ΓAB και HAB και βρίσκει: $\frac{B\Gamma}{BH} < \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow B\Gamma < \frac{2}{15}BH \Rightarrow B\Gamma < \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{12}BA = \frac{1}{18}BA$.

Και έτσι οδηγείται στην $A\Gamma > AB > 18B\Gamma$, άρα, $A\Gamma > 18B\Gamma$.

4. Στη συνέχεια κατασκευάζει τον περιγεγραμμένο κύκλο $(O, O\Gamma)$ στο ορθογώνιο $AB\Gamma$ και παίρνει χορδή BL , τόξου $\widehat{BL} = \frac{1}{6}$ περιφέρειας. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί μια άλλη παλιά πρόταση, σύμφωνα με την οποία:

$$\frac{BL}{B\Gamma} < \frac{\widehat{BL}}{\widehat{B\Gamma}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{2} < \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{60}} = 10 \text{ ή } A\Gamma < 20 \cdot B\Gamma \text{ (εικόνα 14)}$$



Εικόνα 14

Απέδειξε τελικά , ότι : $18 < \frac{A\Gamma}{B\Gamma} < 20$.

Σχολιάζοντας την παραπάνω μέθοδο επίλυσης , ο Τσιμπουράκης στο βιβλίο του <<Η τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα >> κάνει κάποιες εύστοχες παρατηρήσεις και για τις τέσσερις φάσεις του προβλήματος .

Η πρόταση 7 της πραγματείας του Αρίσταρχου δόθηκε για να διδάξει περισσότερο τη μέθοδο προσέγγισης των λόγων των εφαπτομένων και όχι τόσο για να βρει τον λόγο των αποστάσεων Ηλίου και Σελήνης από τη Γη , γιατί οι παραδοχές είναι πρόχειρες και ψευδείς και ακόμα γιατί δεν προχώρησε σε ακριβέστερες τιμές .

Ο Αρίσταρχος έτσι , με εκπληκτικό τρόπο δίδαξε τον υπολογισμό των λόγων των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνεται μια οξεία γωνία , δηλαδή , όπως λέμε σήμερα τον υπολογισμό ημιτόνου και εφαπτομένης οξείας γωνίας , ενώ μέχρι τότε η επίλυση των ορθογωνίων τριγώνων γινόταν μόνο με τη βοήθεια μηκών πλευρών και μετρικών θεωρημάτων . Εγκαινίασε , λοιπόν , την πρώτη Ελληνική Τριγωνομετρία .

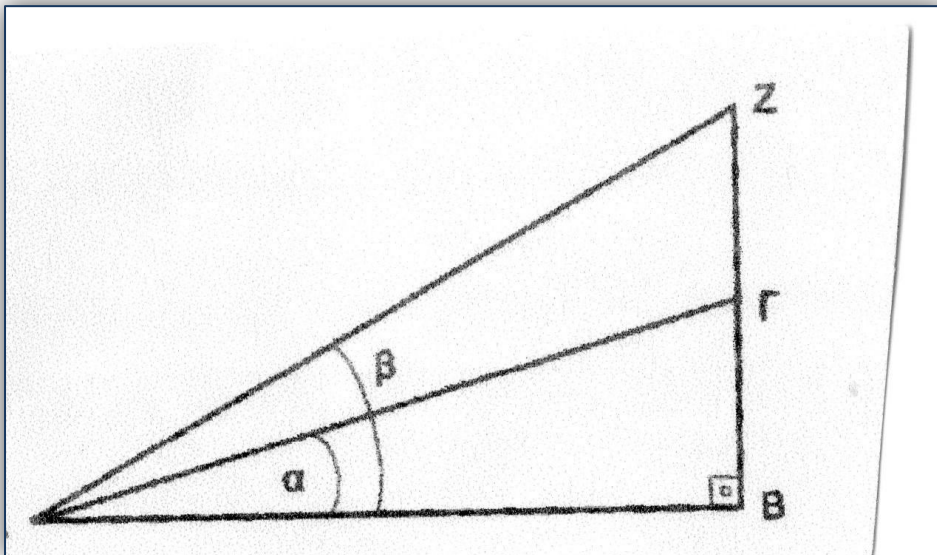
Πράγματι , στην πρώτη , δεύτερη , τρίτη φάση στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ζητείται ο λόγος $\frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\text{B}}$ και αυτός βρίσκεται μέσω του λόγου $\frac{\Gamma\text{B}}{\text{B}\Lambda}$. Οι λόγοι αυτοί εύκολα αναγνωρίζονται ότι αποτελούν την $\varepsilon\phi 3^0$ και το $\eta\mu 3^0$ αντίστοιχα και είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιούνται και συνδέουν πλευρές και γωνίες .

Επίσης , το πρώτο από τα ανισοτικά θεωρήματα παρόλο , που δεν το βρίσκουμε στα *Στοιχεία του Ευκλείδη* , που γράφτηκαν πριν από 20 χρόνια φαίνεται να είναι γνωστή πρόταση , όπου σε σύγχρονη μορφή έχει ως εξής :

$$<< \text{Αν}, \hat{\alpha} < \hat{\beta} < 90^0, \text{τότε}, \frac{\text{B}\Gamma}{\text{BZ}} < \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} >>$$

ή

$$\frac{\varepsilon\phi\alpha}{\varepsilon\phi\beta} < \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$$



Εικόνα 15

Με το θεώρημα αυτό ο Αρίσταρχος υπολογίζει το $\frac{\text{B}\Gamma}{\text{B}\Lambda} < \frac{1}{18} < \frac{1}{15}$.

Αν συνέχιζε να διχοτομούσε η γωνία ΗΑΒ και υπολόγιζε τα νέα τμήματα θα έβρισκε καλύτερη προσέγγιση του λόγου , δηλαδή : $\frac{\text{B}\Gamma}{\text{B}\Lambda} < \dots < \frac{1}{18,75} < \frac{1}{18} < \frac{1}{15}$.

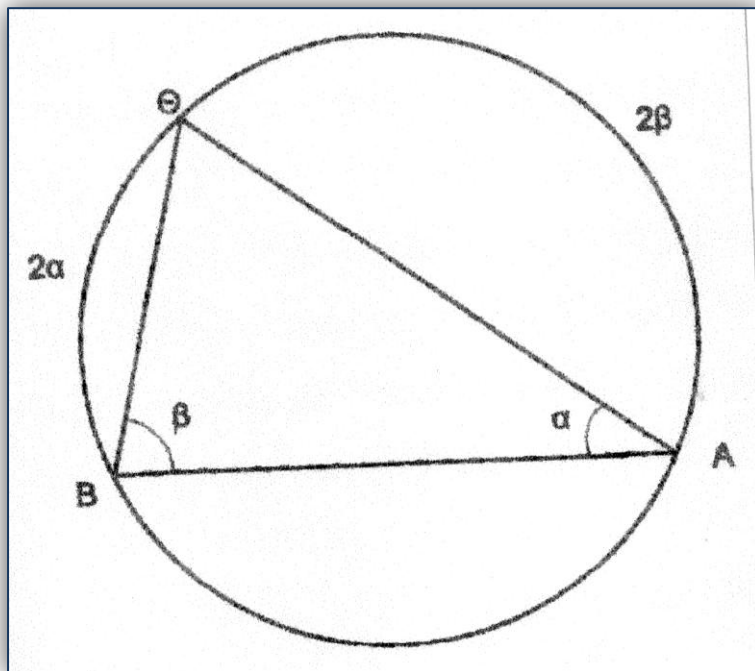
Στην τέταρτη φάση χρησιμοποιεί ένα παλαιότερο θεώρημα για να παρεμβάλει το λόγο $\frac{\text{B}\Gamma}{\text{A}\Gamma}$ ανάμεσα σε δυο τιμές .

Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται για πρώτη φορά και βέβαια δεν περιέχεται στα *Στοιχεία του Ευκλείδη*, ενώ η διατύπωση του είναι η εξής :

<< Αν σε κύκλο έχω άνισες χορδές ΒΓ και ΒΛ (ΒΓ<ΒΛ) , τότε ισχύει $\frac{ΒΛ}{ΒΓ} < \frac{(\hat{ΒΛ})}{(\hat{ΒΓ})}$ >>.

Δηλαδή , αν το εφαρμόσουμε σε τρίγωνο έχουμε :

$$\frac{ΑΘ}{ΒΘ} < \frac{(\hat{ΑΘ})}{(\hat{ΒΘ})} \Rightarrow \frac{ΑΘ}{ΒΘ} < \frac{2\hat{\beta}}{2\hat{\alpha}} \Rightarrow \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} < \frac{ΒΘ}{ΑΘ}, \text{ δηλαδή, } \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} < \frac{2\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\beta} \Rightarrow \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}.$$



Εικόνα 16

Διδακτική προσέγγιση των τριγωνομετρικών αριθμών με τη βοήθεια λογισμικού Geogebra :

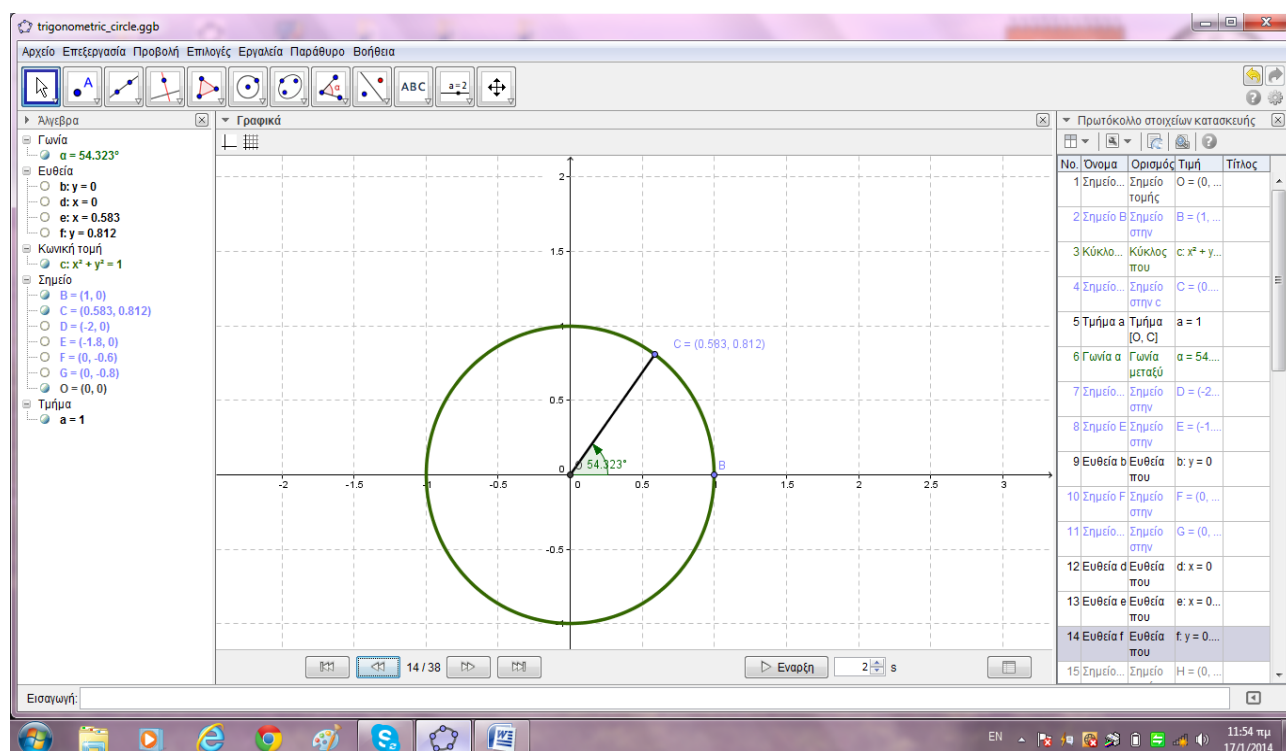
Έχοντας , αναφέρει ως ιστορική πηγή το «Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης» του Αρίσταρχου του Σάμιου θα υποβάλλω μια διδακτική πρόταση , μέσω της οποίας θα προκαλέσω τις διαισθήσεις των μαθητών μου , θα τους εμπλέξω με δραστηριότητες ερμηνείας εποικοδομητικής χρήσης και κατασκευής μαθηματικών εκφράσεων θέτοντας του μικρούς ερευνητές . Έτσι , θα ανακαλύψουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο , συνημίτονο , εφαπτομένη και συνεφαπτομένη γωνίας μέσα από την κατασκευή ενός τριγώνου . Θα δουλέψουν με τον τριγωνομετρικό κύκλο και θα βρουν τους άξονες των τριγωνομετρικών αριθμών μέσα από τη δυναμική που παρέχει η χρήση του λογισμικού.

Επίσης , θα μπορούν να δουν και τις καμπύλες που παράγονται κατά την δυναμική μετακίνηση των σημείων , δηλαδή τις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων .

Παραθέτω στιγμιότυπα από τις φάσεις του προβλήματος.

ΦΑΣΗ 1

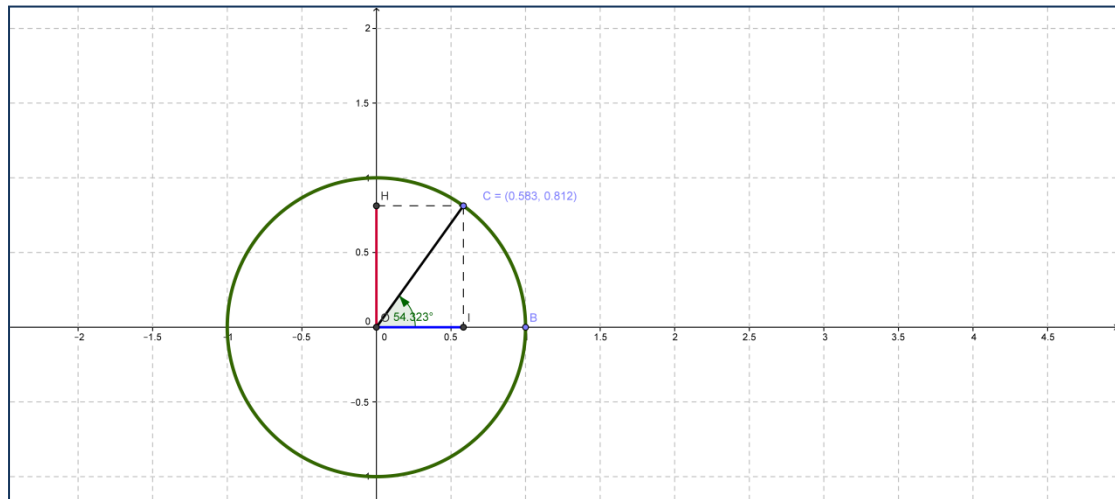
Οι μαθητές ορίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο και θεωρούν μια γωνία της αρεσκειάς τους .



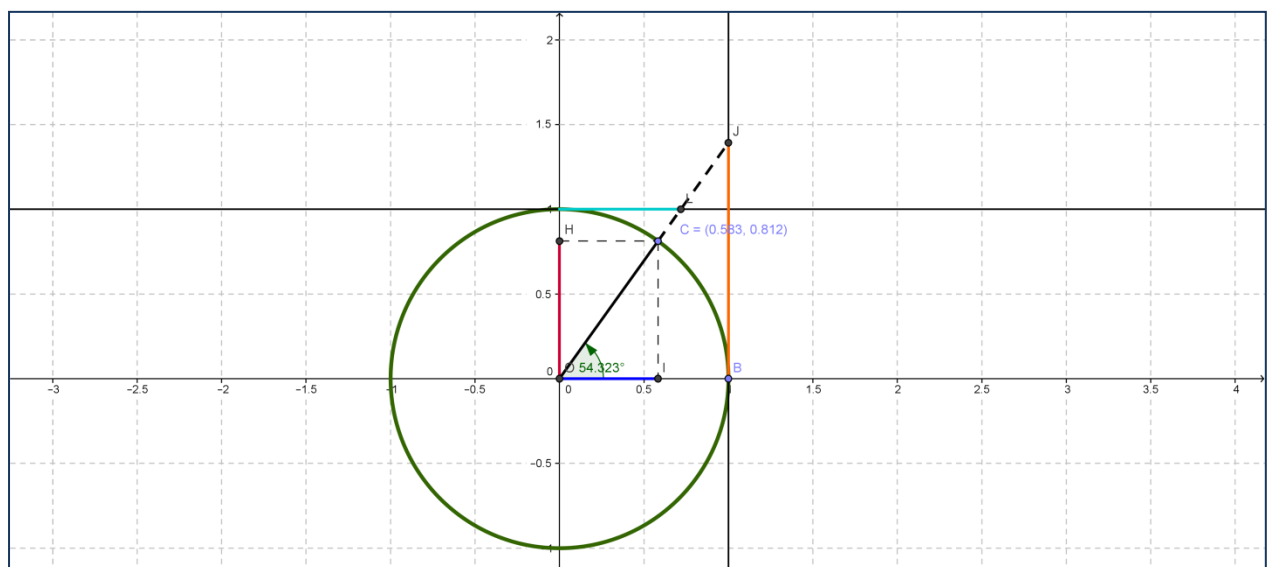
Εικόνα 17 (στιγμιότυπο 1)

ΦΑΣΗ 2

Στη φάση αυτή οι μαθητές βρίσκουν τις προβολές του σημείου C στους άξονες $\chi\chi'$ και $\psi\psi'$, έστω H , I καθώς και τα σημεία τομής της ευθείας (OC) με τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία B και K και στη συνέχεια ορίζουν τα αντίστοιχα τρίγωνα, όπως φαίνεται στα στιγμιότυπα των εικόνων 18, 19.



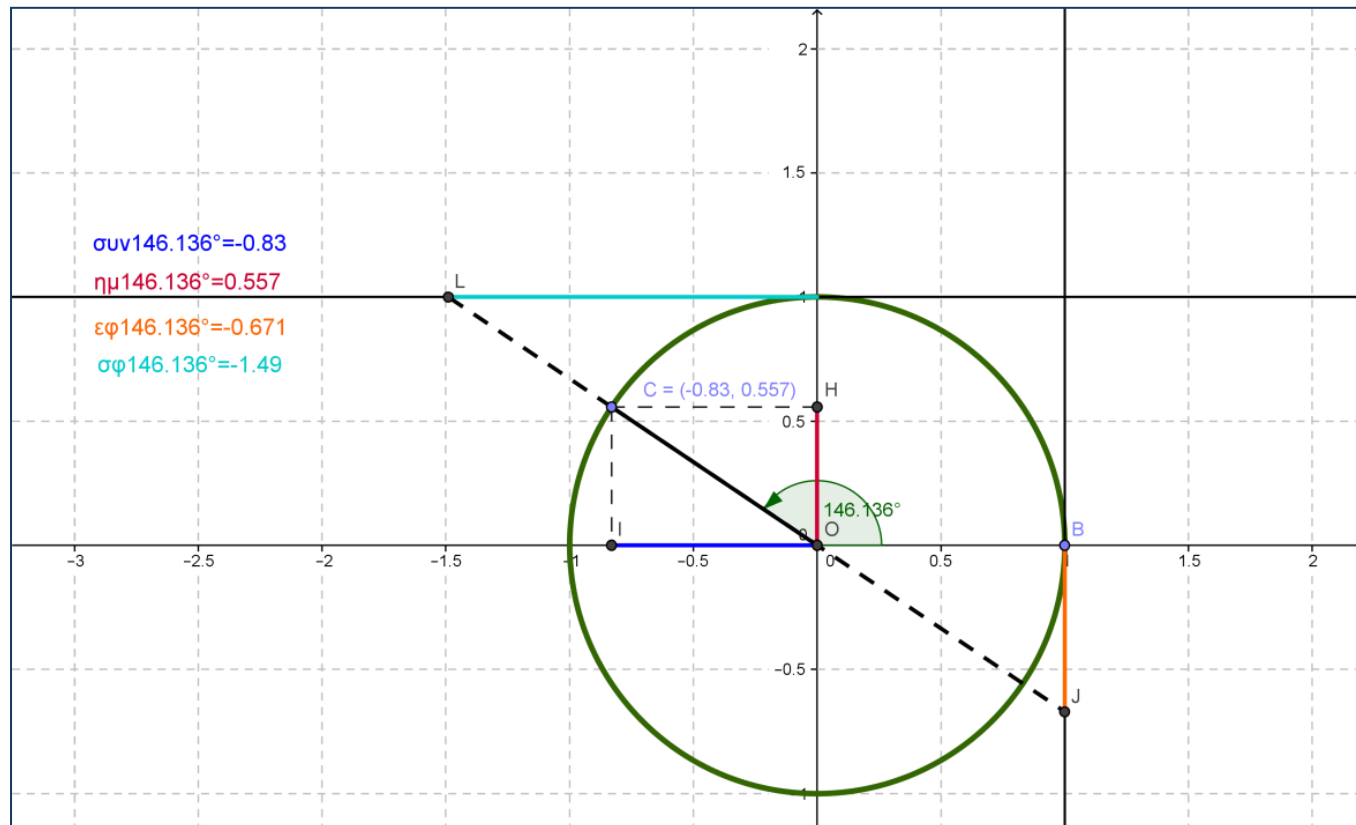
Εικόνα 18 (στιγμιότυπο 2)



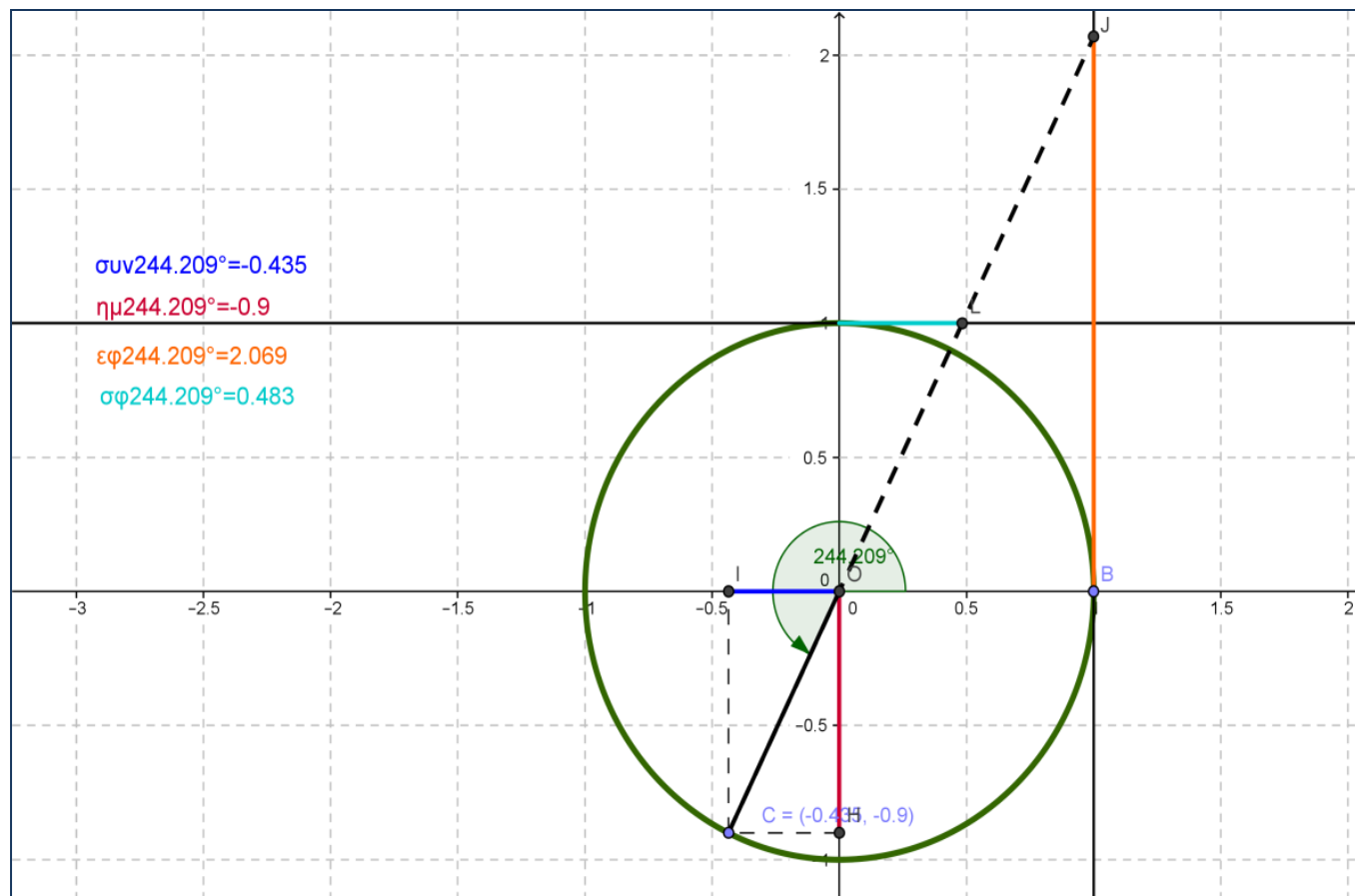
Εικόνα 19 (στιγμιότυπο 3)

ΦΑΣΗ 3

Στη τελική φάση παρατηρούμε ότι κατά τις δυναμικές μετακινήσεις του σημείου C , οι προβολές H , I βρίσκονται στους άξονες $\chi\chi'$ και $\psi\psi'$ λαμβάνοντας τιμές από -1 έως 1 , καθώς και στις δυο εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία B και K . Οπότε οι μαθητές έχουν ταυτόχρονα ορίσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας , και τους αντίστοιχους άξονες κίνησης τους , όπως φαίνεται στα στιγμιότυπα των εικόνων 20 , 21.



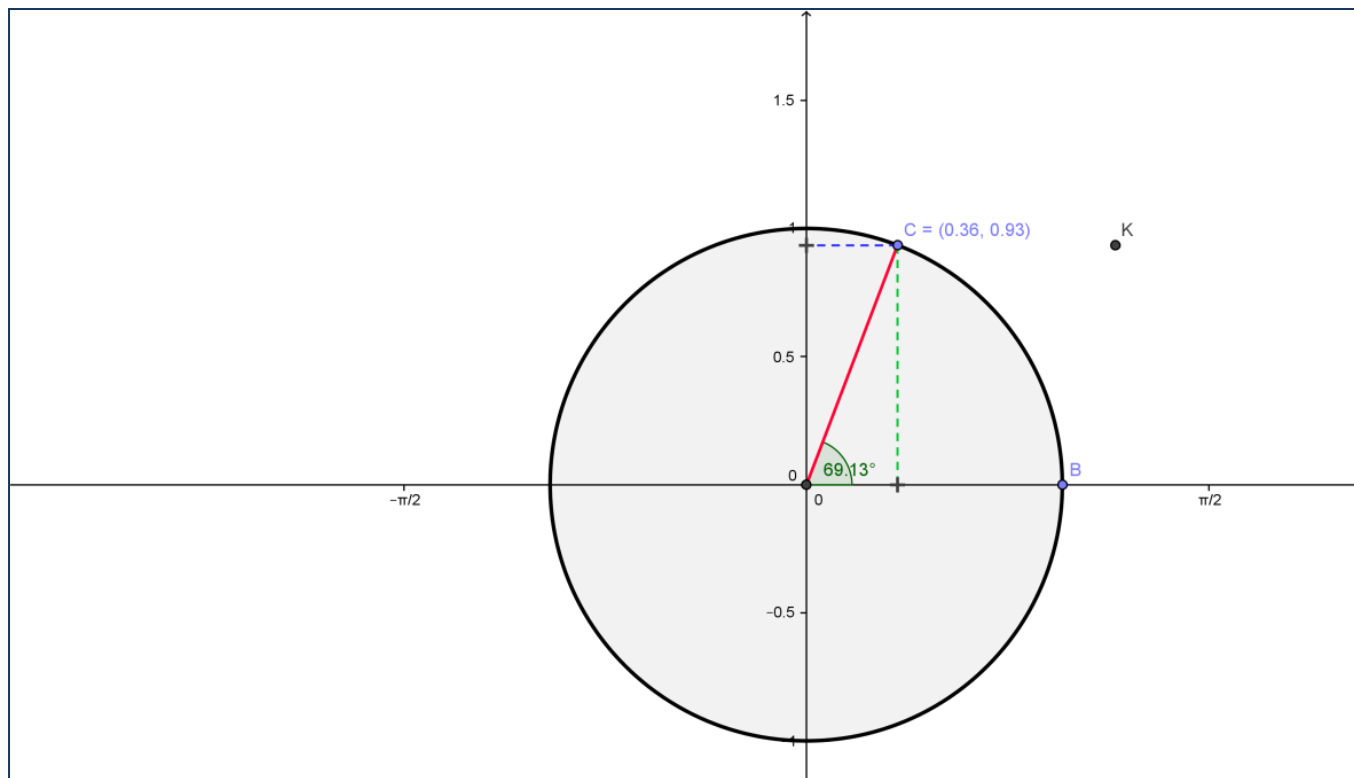
Εικόνα 20 (στιγμιότυπο 4)



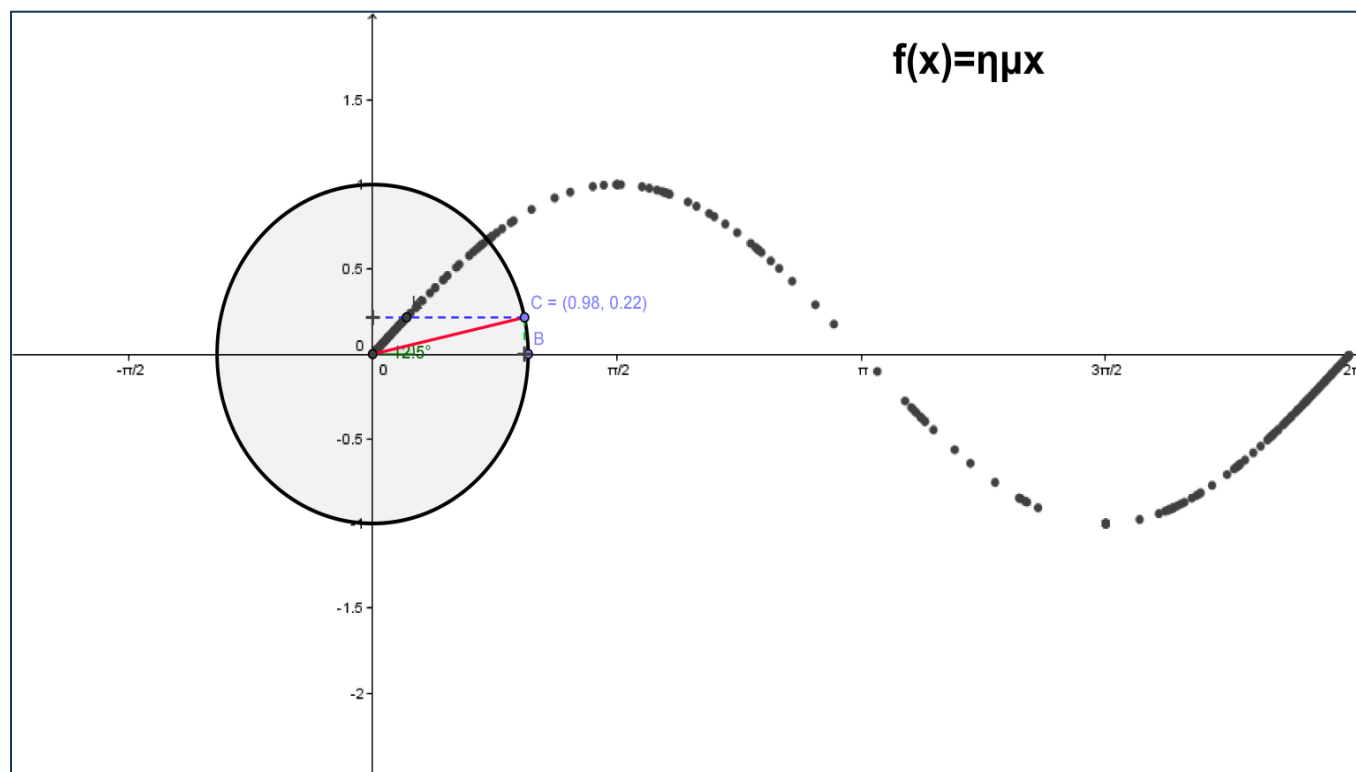
Εικόνα 21 (στιγμιότυπο 5)

Σε συνέχεια της προηγούμενης δραστηριότητας οι μαθητές με την παρακάτω διδακτική πρόταση θα μπορούν μετακινώντας δυναμικά σημείο C , να δουν την καμπύλη που διαγράφουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών κατά την ενεργοποίηση του ίχνους από το λογισμικό .

Στο παρακάτω στιγμιότυπο φαίνεται η καμπύλη που διαγράφει το ημίτονο , παρατηρώντας την κίνηση του σημείου K . (εικόνες 22 , 23)



Εικόνα 22



Εικόνα 23

Αρχιμήδης των Συρακουσών (287 – 212 π.Χ.)



Εικόνα 24

Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε το 287 π.χ. Η ημερομηνία γέννησης του βρίσκεται με κάποιον έμμεσο τρόπο, από την ημερομηνία θανάτου του, η οποία χρονολογείται γύρω στο 212 π.Χ.²⁵.

Αυτή την πληροφορία μας δίνει ο ιστοριοδίφης Ιωάννης Τζέτζης ²⁶, σύμφωνα με την οποία ο Αρχιμήδης ήταν 75 χρονών όταν τον φόνευσε κάποιος Ρωμαίος στρατιώτης κατά τη διάρκεια της άλωσης της πόλεως των Συρακουσών ²⁷. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι γεννήθηκε περίπου το 287 π.Χ.

«Ο Αρχιμήδης ο σοφός, μηχανητής εκείνος, τω γένει Συρακούσιος ην, γέρων γεωμέτρης, χρόνους τε εβδομήκοντα και πέντε παρελαύνων [...]».

Δηλαδή, μεταφράζοντας είναι :

(Ο Αρχιμήδης, ο σοφός, ο μηχανικός εκείνος που καταγόταν από τις Συρακούσες, γέρος γεωμέτρης, έζησε εβδομήντα πέντε χρόνια[...]).

Ήταν γιος του αστρονόμου Φειδία ο οποίος είχε υπολογίσει το πηλίκο των διαμέτρων του ήλιου και της σελήνης, σύμφωνα με μαρτυρία του ίδιου, στην εισαγωγή της πραγματείας του «Ψαμμίτης» ²⁸.

Από ένα απόσπασμα του Διόδωρου φαίνεται ότι έζησε κάποιο χρονικό διάστημα στην Αίγυπτο και κατά την παραμονή του εκεί ανακάλυψε τον αποκαλούμενου Αρχιμήδειο κοχλία ως μέσου άντλησης νερού. Επίσης κατά την παραμονή του στην Αλεξάνδρεια συναναστράφηκε με σπουδαίους μαθηματικούς όπως ο Κώνων ο Σάμιος, ο Ερατοσθένης, ο Κυρηναίος και ο Δοσίθεος.

²⁵ Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ενάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α, σελίς 1

²⁶ Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ενάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 182.

²⁷ Οι Συρακούσες ήταν αποικία των Κορινθίων στη Σικελία που έχει ιδρυθεί τον 80 π.Χ. αιώνα.

²⁸ . 'Αρχιμήδους Άπαντα', εκδότης Ενάγγελος Σ. Σταμάτης, Τόμος Α - Μέρος Α – Μαρτυρία 43



Ρωμαϊκό ψηφιδωτό του 1ου μ.Χ. αιώνα, όπου απεικονίζεται η σκηνή του φόνου του Αρχιμήδη από ένα Ρωμαίο στρατιώτη.

Εικόνα 25



Ο τάφος του Αρχιμήδη όπως απεικονίζεται στο Λεξικό του Α. Ρ. Ραγκαβή²⁹. Ο Ε. Σταμάτης αναφέρει ότι ο τάφος του Αρχιμήδη ανακαλύφθηκε από τον Κικέρωνα το 75 π.Χ. Με την πάροδο των χρόνων ο τάφος ξεχάστηκε και καλύφθηκε από χώματα. Ανακαλύφθηκε δε εκ νέου το 1966 μετά από ανασκαφές της Ιταλικής Αρχαιολογικής Υπηρεσίας.

Εικόνα 26

²⁹ Χρήστος Δ. Λάζος, «Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός», Εκδ. Αίολος, σελίς 24

Ο Αρχιμήδης θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας ο οποίος χαρακτηρίζεται και ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών λόγω της πρωτότυπης σκέψης , της ικανότητας στην τεχνική των υπολογισμών σε συνδυασμό με την αυστηρότητα στην αποδεικτική διαδικασία των προτάσεων του .

Τα σωζόμενα έργα του Αρχιμήδη είναι :

1. Περί σφαίρας και κυλίνδρου α' και β' βιβλίο.
2. Κύκλου μέτρησις.
3. Περί κωνοειδών και σφαιροειδών.
4. Περί ελίκων.
5. Μηχανικά ή Επίπεδων Ισορροπιών ή Κέντρα Βαρών Επιπέδων α' και β' βιβλίο.
6. Στομάχιον (Stomachion).
7. Περί οχουμένων α' και β' βιβλίο.
8. Τετραγωνισμός ορθογώνιου κώνου τομής.
9. Ψαμμίτης.
10. Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος.
11. Βιβλίο λημμάτων (μόνο στα Αραβικά).
12. Βοεικόν πρόβλημα.
13. Αρχαί γεωμετρίας (στα Αραβικά).
14. Περί κύκλων εφαπτόμενων αλλήλων (στα Αραβικά).
15. Ωρολόγιον υδραυλικόν (στα Αραβικά).
16. Εγγραφή κανονικού επταγώνου (στα Αραβικά).

Αναφερόμενοι στο επιστημονικό έργο του Αρχιμήδη μπορούμε να συνοψίσουμε στα ακόλουθα:

- 1) Στην προσοικείωση των «απειροστικών» μεθόδων του Ευδόξου και στην επιτυχή εφαρμογή τους για την απόδειξη των τύπων που δίνουν τα εμβαδά και τους όγκους πολλών σχημάτων.
- 2) Στην ανάπτυξη ευρετικών μεθόδων βάσει των οποίων ήταν σε θέση να γνωρίζει πολλά μαθηματικά αποτελέσματα προτού τα αποδείξει με αυστηρό (γεωμετρικό) τρόπο. Ευρετικές μεθόδους χρησιμοποιούσαν , ασφαλώς , και οι άλλοι Έλληνες μαθηματικοί, ο Αρχιμήδης όμως διαφοροποιείται από εκείνους ως προς το ότι δεν δίσταζε να κοινοποιεί τις ευρετικές μεθόδους του ενώ ένα άλλο στοιχείο που τον χαρακτηρίζει είναι ότι δεν απαξιούσε να εκτελεί περίπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς και να παραθέτει τα αποτελέσματα τους.
- 3) Τέλος ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος μαθηματικός στην ιστορία που επεξεργάστηκε μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή φυσικών φαινομένων, ενώ διακρίθηκε επίσης στην επινόηση διάφορων μηχανικών κατασκευών , η λειτουργία των οποίων βασίζεται στην εφαρμογή φυσικών αρχών .

Ο T. L. Heath αναφέρει για τον γενικό χαρακτήρα των έργων του Αρχιμήδη τα εξής:

«Όλες χωρίς εξαίρεση οι πραγματείες είναι μνημεία μαθηματικής του , σαν να είναι απρόθυμος ν' αποδώσει στην αιωνιότητα τα μυστικά της μεθόδου του , ενώ συγχρόνως επιθυμεί ν' αποσπάσει απ' αυτήν την επιδοκιμασία για τ' αποτελέσματα του».

Επίσης ο T. L. Heath αναφερόμενος στις εργασίες του Αρχιμήδη τονίζει , ότι τόσο δυνατά και καθαρά υποδεικνύουν τις νεότερες μεθόδους Ανάλυσης , ώστε το 17^ο αιώνα ο Torricelli και ο Wallis ριψοκινδύνευσαν την άποψη ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί έκρυψαν εσκεμμένα , κάτω από τις συνθετικές αποδείξεις τους τα αναλυτικά τους τεχνάσματα, με τα οποία οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη της «Ανάλυσης».

Ο Δανός φιλόλογος J.L. Heiberg ανακάλυψε το 1906 στην Κωνσταντινούπολη ένα χειρόγραφο στο οποίο ήταν γραμμένο το πιο εκπληκτικό έργο του Αρχιμήδη που είχε τίτλο :

«Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Έφοδος »

όπου απευθυνόμενος προς τον Ερατοσθένη περιγράφει όχι την απόδειξη αλλά πως συνέλαβε τα αποτελέσματα του , και φαίνεται να αποκαλύπτει ότι ακολουθούσε μια μέθοδο απειροστικού λογισμού όμοια μ' εκείνη των αδιαιρέτων την οποία ανακάλυψε 2000 χρόνια αργότερα ο Cavalieri.

Πράγματι , ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την μέθοδο της εξάντλησης σε συνδυασμό με έξυπνα τεχνάσματα , ενώ απέφευγε τη χρήση του απείρου και του απειροστού, καθώς και τη χρησιμοποίηση της έννοιας του απείρου .

Η μέθοδος της εξάντλησης ήταν μια παραγωγική μέθοδος , όπου αφενώς ήταν κατάλληλη για την απόδειξη αποτελεσμάτων, τα οποία ήταν γνωστά εκ των προτέρων, αφετέρου ήταν ακατάλληλη για ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων , για αυτό το λόγο ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε διάφορες «μηχανικές μεθόδους», όπως ο ίδιος τις αποκαλούσε, για να καταλήξει στη λύση του προβλήματος που τον απασχολούσε και στη συνέχεια το έλυνε με τη μέθοδο της εξάντλησης.

Σημαντική ήταν η συνεισφορά του Αρχιμήδη στον τομέα των μαθηματικών που σήμερα αποκαλούμε «ολοκληρωτικό λογισμό».

Ασχολήθηκε με θεωρήματα για τα εμβαδά επιπέδων σχημάτων και όγκους στερεών σωμάτων.

Στο βιβλίο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις» βρίσκουμε προσεγγίσεις για το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και είναι μια ολοκληρωμένη μελέτη η οποία έχει διασωθεί μέχρι σήμερα . Το συγκεκριμένο έργο του Αρχιμήδη είναι μικρό σε έκταση και περιέχει τρεις μόνον προτάσεις. Θεωρείται πιθανόν να αποτελεί το σωζόμενο κομμάτι ενός μεγαλύτερου και άκρως σημαντικού έργου, το οποίο αφορά στον τετραγωνισμό του κύκλου.

Στο βιβλίο αυτό περιέχονται οι αποδείξεις των εξής τριών θεωρημάτων :

- 1) Κάθε κύκλος είναι ίσος προς ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά ισούται με την ακτίνα και η άλλη με την περίμετρο του κύκλου.
- 2) Ο λόγος ενός κύκλου προς το τετράγωνο που έχει πλευρά τη διάμετρο είναι ίδιος με το λόγο του 11 προς το 14.
- 3) Η περίμετρος κάθε κύκλου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο και ένα έβδομο της διαμέτρου και μεγαλύτερη από το τριπλάσιο και δέκα εβδομηκοστά πρώτα αυτής.

Τα τρία θεωρήματα έχουν ως εξής :

1^ο Θεώρημα

Κάθε κύκλος είναι ίσος με ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετος είναι ίση με την ακτίνα και η δε άλλη είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου.

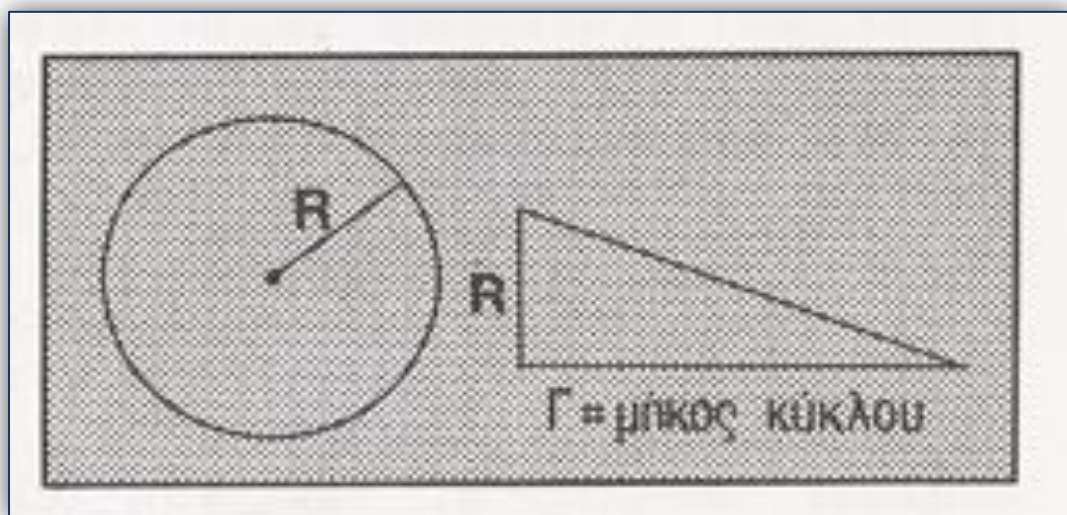
Απόδειξη

(Βασίζεται στη μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου που διατυπώνεται με την πρόταση I του X^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη).

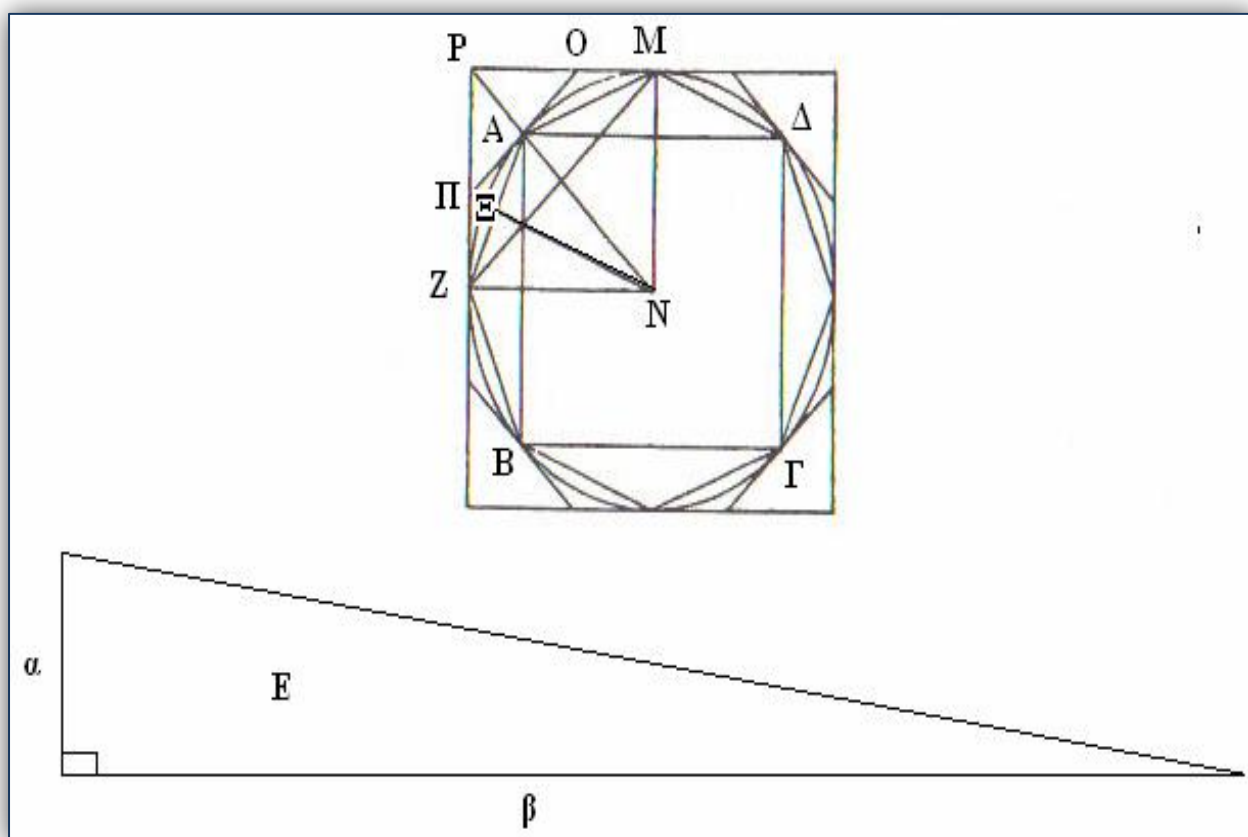
Διατύπωση της πρότασης I:

«Δοθέντων δύο ανίσων μεγεθών, εάν από του μεγαλύτερου αφαιρεθεί μεγαλύτερον του του ημίσεως και από του υπολοίπου μεγαλύτερον του ημίσεως και τούτο γίνεται πάντοτε, θα υπολειφθεί μέγεθος τι, το οποίον θα είναι μικρότερον του δοθέντος μικρότερου μεγέθους».

Συμβολίζουμε με E την επιφάνεια ενός κύκλου ακτίνας R και με e την επιφάνεια ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα R του κύκλου αυτού και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με το μήκος Γ της περιφέρειας του.



Εικόνα 27



Εικόνα 28

Θεωρούμε δύο κανονικά πολύγωνα με n πλευρές, το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο στον κύκλο. Ας συμβολίσουμε τις επιφάνειές τους με I_n και C_n , αντίστοιχα. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι $E = \varepsilon$. Η απόδειξη θα γίνει με την διπλή αντίφαση.

Έστω ότι $E > \varepsilon$. Τότε ισχύει ότι $E - \varepsilon > 0$.

Επομένως υπάρχει I_n τέτοιο ώστε :

$$0 < E - I_n < E - \varepsilon \Rightarrow -I_n < -\varepsilon \Rightarrow I_n > \varepsilon.$$

Όμως, η επιφάνεια του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου με n πλευρές I_n είναι ίση με την επιφάνεια ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με το απόστημα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περίμετρο του πολυγώνου.

Δεδομένου ότι το απόστημα αυτό είναι μικρότερο από την ακτίνα του κύκλου και η περίμετρος του πολυγώνου είναι μικρότερη από το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, η επιφάνεια I_n θα είναι μικρότερη από την επιφάνεια ε .

Δηλαδή, $I_n < \varepsilon$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

Έστω τώρα ότι $E < \varepsilon$. Τότε ισχύει ότι $\varepsilon - E > 0$.

Επομένως, υπάρχει C_n τέτοιο ώστε $0 < C_n - E < \varepsilon - E \Rightarrow C_n < \varepsilon$.

Όμως, η επιφάνεια του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου με n πλευρές C_n είναι ίση με την επιφάνεια ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περίμετρο του πολυγώνου.

Δεδομένου ότι η περίμετρος του πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, η επιφάνεια C_n θα είναι μεγαλύτερη από την επιφάνεια ε .

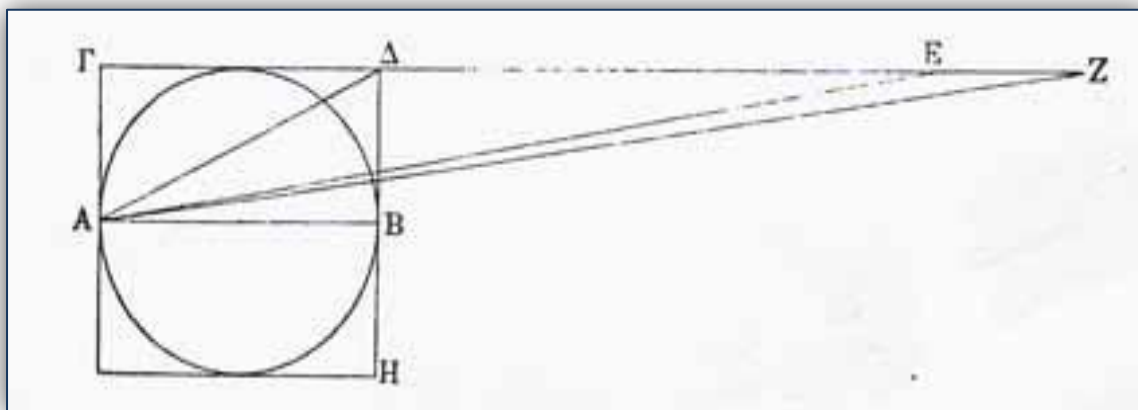
Δηλαδή, $C_n > \varepsilon$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

2^ο Θεώρημα

Ο κύκλος έχει προς το τετράγωνο της διαμέτρου του λόγο ίσο με τον λόγο του 11 προς το 14 .

Απόδειξη :

Έστω κύκλος που έχει διάμετρο AB και το τετράγωνο διαγωνίου $ΓΗ$ περιγεγραμμένο σε αυτόν. Έστω επίσης η $ΔΕ$ διπλάσια από τη $ΓΔ$ και η $ΕΖ$ ίση με το ένα έβδομο της $ΓΔ$. Τότε³⁰:



Εικόνα 29

Επειδή το τρίγωνο $ΑΓΕ$ προς το τρίγωνο $ΑΓΔ$ έχει τον λόγο $\frac{21}{7}$ και

επειδή το τρίγωνο $ΑΓΔ$ προς το τρίγωνο $ΑΕΖ$ έχει τον λόγο του $\frac{7}{1}$, ο λόγος του

τριγώνου $ΑΓΖ$ προς το $ΑΓΔ$ θα είναι ίσος με τον λόγο του $\frac{22}{7}$.

Αλλά το τετράγωνο $ΓΗ$ είναι τετραπλάσιο του τριγώνου $ΑΓΔ$, ενώ το τρίγωνο $ΑΓΖ$ είναι ισοδύναμο με τον κύκλο (επειδή το ύψος του $ΑΓ$ ισούται με την ακτίνα και η βάση του είναι ίση με με το τριπλάσιο της διαμέτρου συν ένα τμήμα ελάχιστα μεγαλύτερο από το ένα έβδομο της)³¹.

Άρα ο κύκλος έχει προς το τετράγωνο $ΓΗ$ λόγο ίσο με τον λόγο του $\frac{11}{14}$.

³⁰ Στοιχεία, VI.1.

³¹ Στο σημείο αυτό υποτίθεται ότι ο Αρχιμήδης αιτιολογεί την (3) λέγοντας ότι στο τρίγωνο $ΑΓΖ$ το ύψος $ΑΓ$ ισούται με την ακτίνα του κύκλου και η βάση $ΓΖ$ με την περιφέρεια του κύκλου αφού, όπως θα αποδειχθεί στην πρόταση 3, η περιφέρεια κάθε κύκλου είναι ίση με το τριπλάσιο της διαμέτρου του συν ένα τμήμα το οποίο είναι μικρότερο από το $1/7$ της και μεγαλύτερο από τα $22/7$ της.

Ο Heath παρατηρεί ότι το κείμενο της συγκεκριμένης πρότασης δεν είναι ικανοποιητικό και ο Αρχιμήδης δεν θα την τοποθετούσε ποτέ πριν την πρόταση 3, διότι το αποτέλεσμα της χρησιμοποιείται για την απόδειξη της παρούσης. Στα Μετρικά του Ήρωνος, όπου και μνημονεύονται οι τρεις προτάσεις της απόδειξης του Αρχιμήδη, η σειρά αυτών είναι διαφορετική, ήτοι πρώτα η 2, έπειτα η 3 και καταληκτική η 1 (όπως αναφέρεται στο Σταμάτης, Ε. Σ., *Επιστημονικά Εργασία - Άρθρα*, Αθήνα, 1972, σελ. 115).

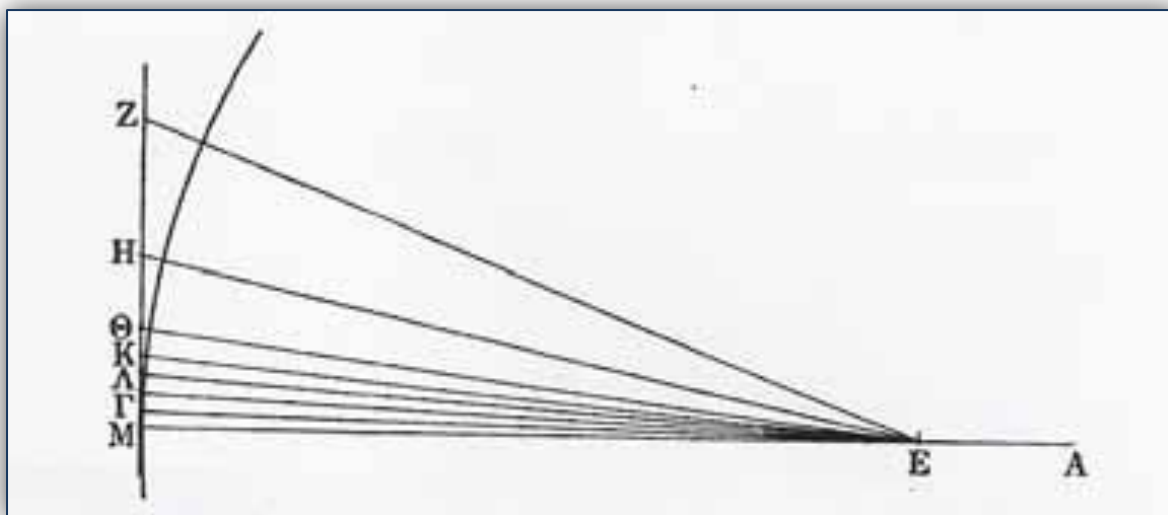
3^ο Θεώρημα

Η περιφέρεια κάθε κύκλου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο και το ένα έβδομο της διαμέτρου και μεγαλύτερη από το τριπλάσιο και δέκα εβδομηκοστά πρώτης αυτής.

Απόδειξη

Έστω κύκλος με διάμετρο την ΑΓ και κέντρο το Ε. Έστω η εφαπτόμενη αυτού ΓΛΖ και έστω ότι η γωνία ΖΕΓ ισούται με το ένα τρίτο της ορθής. Άρα ισχύει

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} = \frac{306}{253} \text{ και } \frac{E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{265}{153}.$$



εικόνα 30

Διχοτομούμε την γωνία ΖΕΓ με την ΕΗ και συνεπάγεται ότι ο λόγος της ΖΕ προς την ΕΓ ισούται με τον λόγο της ΖΗ προς την ΗΓ, δηλαδή, $\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{ZH}{H\Gamma}$.

Επομένως, ο λόγος του αθροίσματος των ΖΕ και ΕΓ προς τη ΖΓ ισούται με το λόγο της ΕΓ προς τη ΓΗ, δηλαδή, $\frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{H\Gamma}$. Άρα, ο λόγος $\frac{E\Gamma}{H\Gamma}$ είναι

μεγαλύτερος του λόγου $\frac{571}{153}$. Ο λόγος $\left(\frac{EH}{H\Gamma}\right)^2 = \frac{349.450}{23.409}$.

Συνεπώς, ισχύει ότι: $\frac{EH}{H\Gamma} = \frac{591\frac{1}{8}}{153}$.

Διχοτομούμε πάλι τη γωνία ΗΕΓ με την ΕΘ και με το ίδιο σκεπτικό, συνεπάγεται

ότι ο λόγος $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta}$ θα είναι μεγαλύτερος του λόγου $\frac{1.162\frac{1}{8}}{153}$.

Επομένως, ο λόγος $\frac{ΕΓ}{ΓΘ}$ είναι μεγαλύτερος του λόγου $\frac{1.172\frac{1}{8}}{153}$. Για άλλη μια φορά

διχοτομούμε τη γωνία $ΘΕΓ$ με την $ΕΚ$ και έχουμε ότι ο λόγος της $\frac{ΕΓ}{ΓΚ}$ είναι

μεγαλύτερος του λόγου $\frac{2.334\frac{1}{4}}{153}$ και ακόμα ότι ο λόγος $\frac{ΕΚ}{ΓΚ}$ θα είναι μεγαλύτερος

του λόγου $\frac{2.339\frac{1}{4}}{153}$.

Διχοτομούμε πάλι, τη γωνία $ΚΕΓ$ με τη $ΛΕ$ και έχουμε ότι ο λόγος $\frac{ΕΓ}{ΓΛ}$ θα είναι

μεγαλύτερος του λόγου $\frac{4.673\frac{1}{4}}{153}$.

Εφ' όσον λοιπόν η γωνία $ΖΕΓ$ η οποία ισούται με το ένα τρίτο της ορθής διχοτομήθηκε τέσσερις φορές, τότε η γωνία $ΛΕΓ$ θα ισούται με το ένα τεσσαρακοστό όγδοο της ορθής. Με κορυφή το $Ε$ γράφουμε τη γωνία $ΓΕΜ$ ίση με τη $ΛΕΓ$. Τότε, η γωνία $ΛΕΜ$ θα ισούται με το ένα εικοστό τέταρτο της ορθής.

Συνεπάγεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα $ΛΜ$ αποτελεί πλευρά περιγεγραμμένου στον κύκλο πολυγώνου με 96 πλευρές.

Επειδή όμως δείξαμε ότι ο λόγος $\frac{ΕΓ}{ΓΔ}$ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο $\frac{4.673\frac{1}{4}}{153}$ και

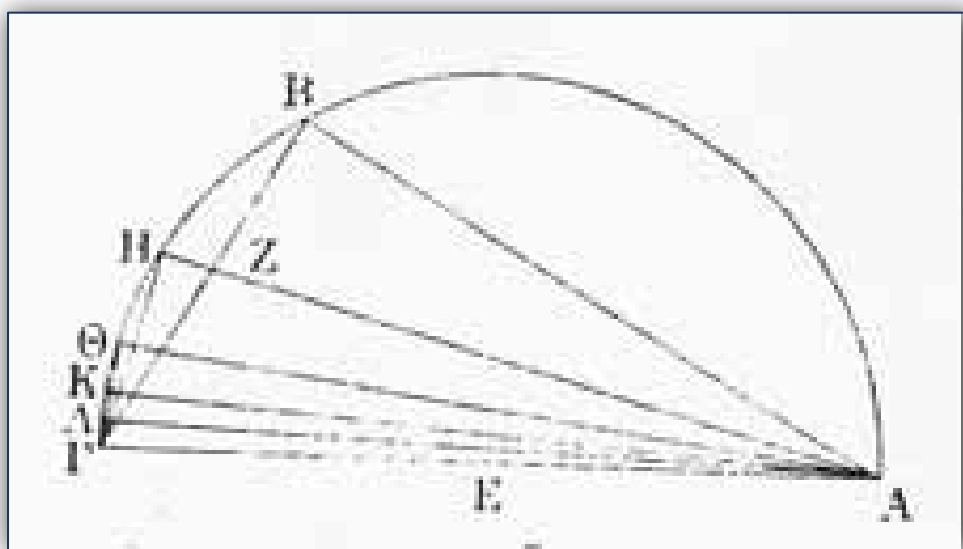
επειδή η $ΑΓ$ είναι το διπλάσιο της $ΕΓ$ και η $ΛΜ$ το διπλάσιο της $ΓΛ$, τότε ο λόγος της $ΑΓ$ προς την περίμετρο του πολυγώνου με τις 96 πλευρές θα είναι μεγαλύτερος

από τον λόγο $\frac{4.673\frac{1}{4}}{14.688}$. Το 14.688 είναι το τριπλάσιο του $4.673\frac{1}{2}$ συν ένα υπόλοιπο

ίσο με $677\frac{1}{2}$ που είναι μικρότερο από το ένα έβδομο του $4.673\frac{1}{2}$ 4.6.

Συνεπώς, η περίμετρος του περιγεγραμμένου στον κύκλο πολυγώνου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένης κατά ένα διάστημα που είναι μεγαλύτερο από το ένα έβδομο της διαμέτρου.

Δηλαδή, η περίμετρος του κύκλου θα είναι μικρότερη από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένης κατά πρισσότερο από ένα έβδομο.



εικόνα 31

Έστω κύκλος με διάμετρο την ΑΓ και γωνία ΒΑΓ ίση με το ένα τρίτο της ορθής . Τότε ο λόγος $\frac{AB}{BG}$ είναι μικρότερος από τον λόγο $\frac{1.351}{780}$ και ο λόγος $\frac{AG}{BG} = \frac{1.560}{780}$.

Διχοτομούμε τη $\hat{BAG}$ με την ΑΗ. Εφ' όσον η $\hat{BAH}$ ισούται με τη $\hat{HGB}$ και με τη $\hat{HAG}$, $\hat{HGB}$ θα είναι ίση και με την $\hat{HAG}$.

Δεδομένου ότι η ορθή γωνία $\hat{AHG}$ είναι κοινή, συνεπάγεται ότι και η τρίτη γωνία η $\hat{HZG}$ θα είναι ίση με την τρίτη γωνία, την $\hat{AGH}$. Άρα το τρίγωνο $\hat{AHG}$ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο $\hat{ZHG}$ και επομένως ο λόγος $\frac{AH}{HG}$ ισούται με τον λόγο $\frac{GH}{HZ}$ τη

και με τον λόγο $\frac{GA}{GZ}$. Όμως ο λόγος $\frac{GA}{GZ}$ είναι και λόγος $\frac{GA+AB}{BG}$ των ΓΑ και ΑΒ .

Συνεπώς, ο λόγος $\frac{GA+AB}{BG}$ ισούται με τον λόγο $\frac{AH}{HG}$. Επομένως , ο λόγος $\frac{AH}{HG}$

είναι μικρότερος του λόγου $\frac{2.911}{780}$ και ο λόγος $\frac{GA}{HG}$ είναι μικρότερος του λόγου

$$\frac{3.013 \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780} .$$

Διχοτομούμε τη γωνία $\hat{GAH}$ με την ΑΘ και έχουμε ότι ο λόγος $\frac{A\Theta}{\Theta G}$ είναι

μικρότερος του λόγου $\frac{5.924 \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780}$ ή του λόγου του $\frac{1.823}{240}$ (επειδή ο κάθε ένας από

τους όρους αυτούς είναι τα $\frac{4}{13}$ των αντίστοιχων όρων του προηγούμενου λόγου).

Επομένως, ο λόγος $\frac{ΑΓ}{ΘΓ}$ είναι μικρότερος του λόγου $\frac{1.838\frac{9}{11}}{240}$.

Διχοτομούμε και τη γωνία $\hat{\Gamma\hat{A}\Theta}$ με την ΚΑ και έχουμε ότι ο λόγος $\frac{ΚΑ}{ΚΓ}$ είναι μικρότερος του λόγου $\frac{1.007}{66}$. Άρα, ο λόγος $\frac{ΑΓ}{ΚΓ}$ είναι μικρότερος από τον λόγο

$\frac{1.009\frac{1}{6}}{66}$. Διχοτομούμε τώρα τη γωνία $\hat{\Gamma\hat{A}Κ}$ με την ΑΛ. Ο λόγος $\frac{ΑΛ}{ΛΓ}$ είναι

μικρότερος του λόγου $\frac{2.016\frac{1}{6}}{66}$, αλλά ο λόγος $\frac{ΑΓ}{ΛΓ}$ είναι μικρότερος από τον λόγο

$\frac{2.017\frac{1}{4}}{66}$ του 2.017. Με αντιστροφή των ανισοτήτων προκύπτει ότι ο λόγος της περιμέτρου του πολυγώνου προς τη διάμετρο είναι μεγαλύτερος από τον λόγο $\frac{6.336}{2.017\frac{1}{4}}$, ενώ το 6.336 είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο $3\frac{1}{71}\epsilon\pi\acute{\iota}2.017\frac{1}{4}$.

Συνεπάγεται ότι ο λόγος της περιμέτρου του εγγεγραμμένου 96γώνου προς τη διάμετρο του κύκλου είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο της διαμέτρου αυξημένο κατά $\frac{10}{71}$. Άρα και η περίμετρος του κύκλου είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της

διαμέτρου αυξημένο κατά $\frac{10}{71}$.

Επομένως, ο λόγος της περιμέτρου του κύκλου προς τη διάμετρο είναι μικρότερος του $3\frac{1}{7}$ και μεγαλύτερος του $3\frac{10}{71}$.

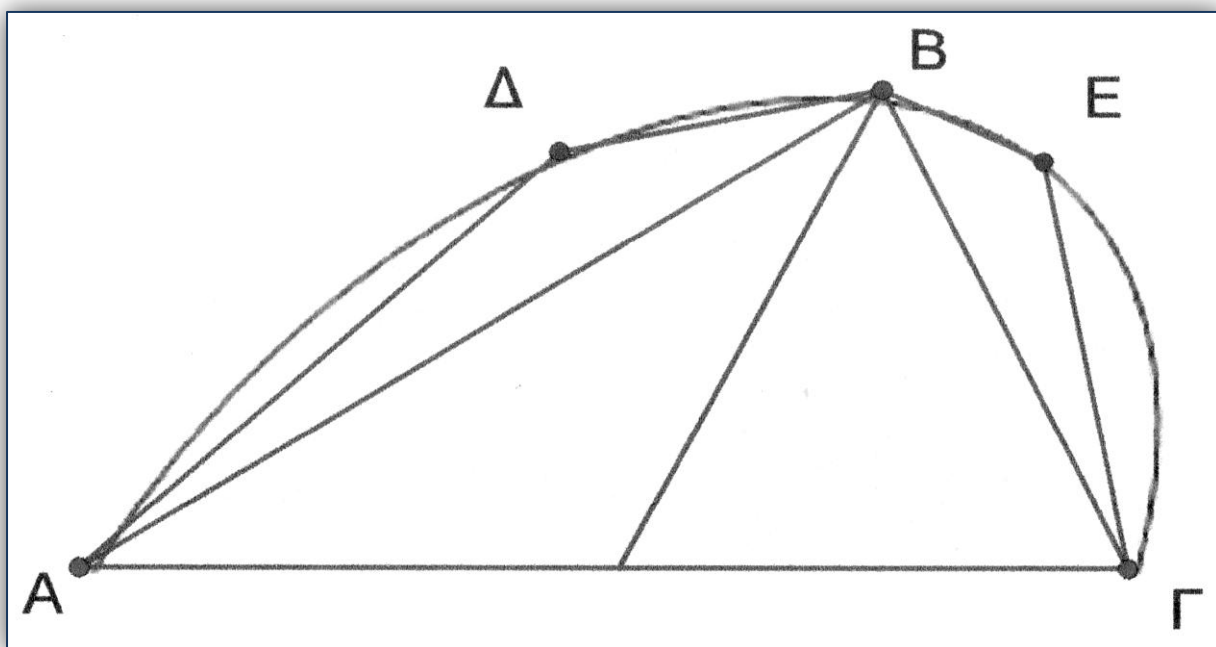
Με σημερινό συμβολισμό $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 24

Πᾶν τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτρίτον ἐστὶ τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Δηλαδή, μεταφράζοντας :

Κάθε τμήμα που περιέχεται μεταξύ ευθείας και παραβολῆς ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και ὕψος ἴσο με το τμήμα.



εικόνα 32

Απόδειξη

Έστω το τμήμα ΑΔΒΕΓ που περιέχεται μεταξύ ευθείας και παραβολῆς και έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει την ίδια βάση και ἴσο ὕψος με το τμήμα .

Έστω ότι η επιφάνεια Κ είναι ἴση με τα τέσσερα τρίτα της επιφάνειας του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρέπει να δειχθεί ότι η επιφάνεια Κ είναι ἴση με την επιφάνεια του τμήματος ΑΔΒΕΓ, διότι εάν δεν είναι ἴση θα είναι είτε μεγαλύτερη ή μικρότερη .

Έστω πρώτα ότι είναι δυνατόν το τμήμα ΑΔΒΕΓ να είναι μεγαλύτερο από την επιφάνεια Κ.

Ενέγραψα λοιπόν τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$, και $\triangle B\epsilon \Gamma$, όπως έχουμε πει και στα τμήματα που παραλείφθησαν ενέγραψα άλλα τρίγωνα που να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ὕψος με τα τμήματα , και συνέχισα να εγγράφω απο ένα τρίγωνο με την ίδια βάση και το ίδιο ὕψος στο καθένα από τα δύο τμήματα που παραλείπονταν κάθε φορά , τα

απομένοντα τμήματα θα φτάσουν να είναι μικρότερα από την διαφορά κατά την οποία υπερέχει το τμήμα $A\Delta BE\Gamma$ από την επιφάνεια K .

Συνεπώς το πολύγωνο που έχει εγγραφεί θα είναι μεγαλύτερο από την επιφάνεια K πράγμα αδύνατον . Διότι, επειδή έχουμε μια φθίνουσα γεωμετρική σειρά επιφανειών με λόγο τέσσερα και η πρώτη ,το τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$, είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{4} [(A\Delta B) + (BE\Gamma)]$$

στη συνέχεια το άθροισμα αυτό είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα των τριγώνων που έχουν εγγραφεί στα επόμενα τμήματα και το ίδιο συμβαίνει συνεχώς , είναι προφανές ότι το άθροισμα όλων των επιφανειών είναι μικρότερο από τα $\frac{4}{3}$ της μεγαλύτερης (δηλαδή του τριγώνου $AB\Gamma$) .Άρα το τμήμα $A\Delta BE\Gamma$ δεν είναι μεγαλύτερο από την επιφάνεια K .

Έστω τώρα ότι είναι δυνατόν $(A\Delta BE\Gamma) < K$.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια επιφάνεια Z ίση με το τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB\Gamma) = Z$, μια επιφάνεια H , $H = \frac{1}{4} Z$, το δε $\Theta = \frac{1}{4} H$ και ούτω καθεξής , μέχρι που η τελευταία επιφάνεια φτάνει να είναι μικρότερη από την διαφορά κατά την οποία υπερέχει η επιφάνεια K από το τμήμα .

Έστω ότι η μικρότερη αυτή επιφάνεια είναι η I .

Άρα το $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z$.

Είναι δε και το $K = \frac{4}{3} Z$.

Συνεπώς $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I$.

Επειδή λοιπόν η επιφάνεια K υπερέχει από το άθροισμα των επιφανειών Z, H, Θ και I κατά μια διαφορά μικρότερη από το I και από το τμήμα κατά μια διαφορά μεγαλύτερη από το I είναι προφανές ότι το άθροισμα των επιφανειών Z, H, Θ και I είναι μεγαλύτερο από το τμήμα πράγμα αδύνατον.

Διότι αποδείχθηκε ότι εάν έχουμε μια σειρά οσωνδήποτε τον αριθμό επιφανειών με λόγο τέσσερα και η μεγαλύτερη από αυτές είναι ίση με το τρίγωνο το εγγεγραμμένο στο τμήμα , το άθροισμα των επιφανειών θα είναι μικρότερο από την επιφάνεια του τμήματος .

Άρα το τμήμα $A\Delta BE\Gamma$ δεν είναι μικρότερο από την επιφάνεια K .

Αποδείξαμε όμως ότι ούτε μεγαλύτερο είναι.

Άρα , η επιφάνεια K ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα και το τμήμα $A\Delta BE\Gamma$

ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Αρχικά θα περιγράψουμε τη μέθοδο της εξάντλησης η οποία αποτελείται από τρία βήματα και στη συνέχεια με τη βοήθεια των νέων τεχνολογιών θα οδηγήσουμε τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν της παραβολής συνδυάζοντας και κατανοώντας την μέθοδο του Αρχιμήδη μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον Geogebra .

Περιγραφή της μεθόδου της εξάντλησης :

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα εμβαδόν E .

Βήμα 1^ο:

Περικλείουμε το εμβαδόν σε γνωστά εμβαδά , ένα μέσα (το εγγεγραμμένο) και ένα έξω (το περιγεγραμμένο).

Κατασκευάζουμε γνωστά εμβαδά $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $A_n \leq E \leq B_n$ και για $\forall \varepsilon > 0$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B_n - A_n < \varepsilon$.

Βήμα 2^ο:

Προσπαθούμε να βρούμε έναν πραγματικό αριθμό α , $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι : $A_n \leq \alpha \leq B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Βήμα 3^ο:

Αποδεικνύουμε ότι $E = \alpha$.

Από το αξίωμα της τριχοτομίας έχουμε ότι : $E < \alpha$ ή $E > \alpha$ ή $E = \alpha$.

➤ Έστω $E > \alpha$. Τότε θέτουμε $\varepsilon = E - \alpha > 0$.

Από το πρώτο βήμα , $\exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B_n - A_n < \varepsilon$.

Συνεπώς , $B_n < A_n + \varepsilon$.

Από το δεύτερο βήμα , $B_n < A_n + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon = \alpha + E - \alpha = E$. Άρα , $B_n < E$.

Όμως αυτό είναι άτοπο λόγω του πρώτου βήματος .

➤ Έστω $E < \alpha$. Τότε για $\varepsilon = \alpha - E > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $B_n - A_n < \varepsilon$.

Συνεπώς , $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-A_n < \varepsilon - B_n$, δηλαδή $A_n > B_n - \varepsilon$.

Από το δεύτερο βήμα έχουμε $\alpha \leq B_n$ και $\alpha - \varepsilon \leq B_n - \varepsilon$.

Άρα : $A_n > \alpha - \varepsilon$ για $\varepsilon = \alpha - E > 0$.

Επομένως, $A_n > \alpha - (\alpha - E)$ και $A_n > E$.

Αλλά , αυτό είναι άτοπο λόγω του πρώτου βήματος.

Συνεπώς , αναγκαστικά θα πρέπει $E = \alpha$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΜΕΣΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ GEOGEBRA.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν E της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^2$, που περικλείεται μεταξύ των ευθειών $x=0$ και $x=\lambda$, με $\lambda>0$.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το παραβολικό τμήμα στο παρακάτω σχήμα δεν είναι ακριβώς το ίδιο με εκείνο που θεώρησε ο Αρχιμήδης καθώς και οι λεπτομέρειες στους συλλογισμούς που ακολουθούν δεν είναι ομοιότυπες με εκείνες που χρησιμοποίησε, αλλά οι ιδέες, ανήκουν στον Αρχιμήδη και αυτό που παρουσιάζουμε εδώ μπορεί να θεωρηθεί ως η μέθοδος της εξάντλησης σε σύγχρονη διατύπωση.

Η βασική ιδέα είναι η εξής:

Κόβουμε το σχήμα σ' ένα πλήθος κατακόρυφες ταινίες με το ίδιο πλάτος και βρίσκουμε έτσι δύο προσεγγίσεις του ζητούμενου εμβαδού. Μία κατά έλλειψη και μία κάθε υπεροχή.

Σύμφωνα, λοιπόν, με την άποψη του Αρχιμήδη το ζητούμενο εμβαδόν δεν είναι δυνατόν να είναι μικρότερο από το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών ορθογωνίων ούτε μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών ορθογωνίων.

Αν αυξήσουμε το πλήθος των ταινιών τότε το πρώτο άθροισμα αυξάνει, ενώ το δεύτερο ελαττώνεται. Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των ταινιών, τόσο καλύτερη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού θα έχουμε. Μπορούμε δηλαδή να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν με οποιοδήποτε βαθμό ακριβείας επιθυμούμε αρκεί να θεωρήσουμε ένα επαρκές πλήθος ταινιών.

Θα χρησιμοποιήσουμε το λογισμικό Geogebra και μέσω της διδακτικής πρότασης θα προκαλέσω τις διαισθήσεις των μαθητών μου, να τους εμπλέξω με δραστηριότητες ερμηνείας εποικοδομητικής χρήσης και κατασκευής μαθηματικών εκφράσεων μέσα από την ιστορία των μαθηματικών. Επίσης, η έννοια του ολοκληρώματος παριστάνονται με στατικά μέσα στη σχολική ζωή και έτσι οι μαθητές αποτυγχάνουν να συνδέσουν τις σχέσεις που περιγράφονται από τις παραπάνω έννοιες μέσα από τις αναπαραστάσεις τους με την χρήση μαθηματικών εκφράσεων.

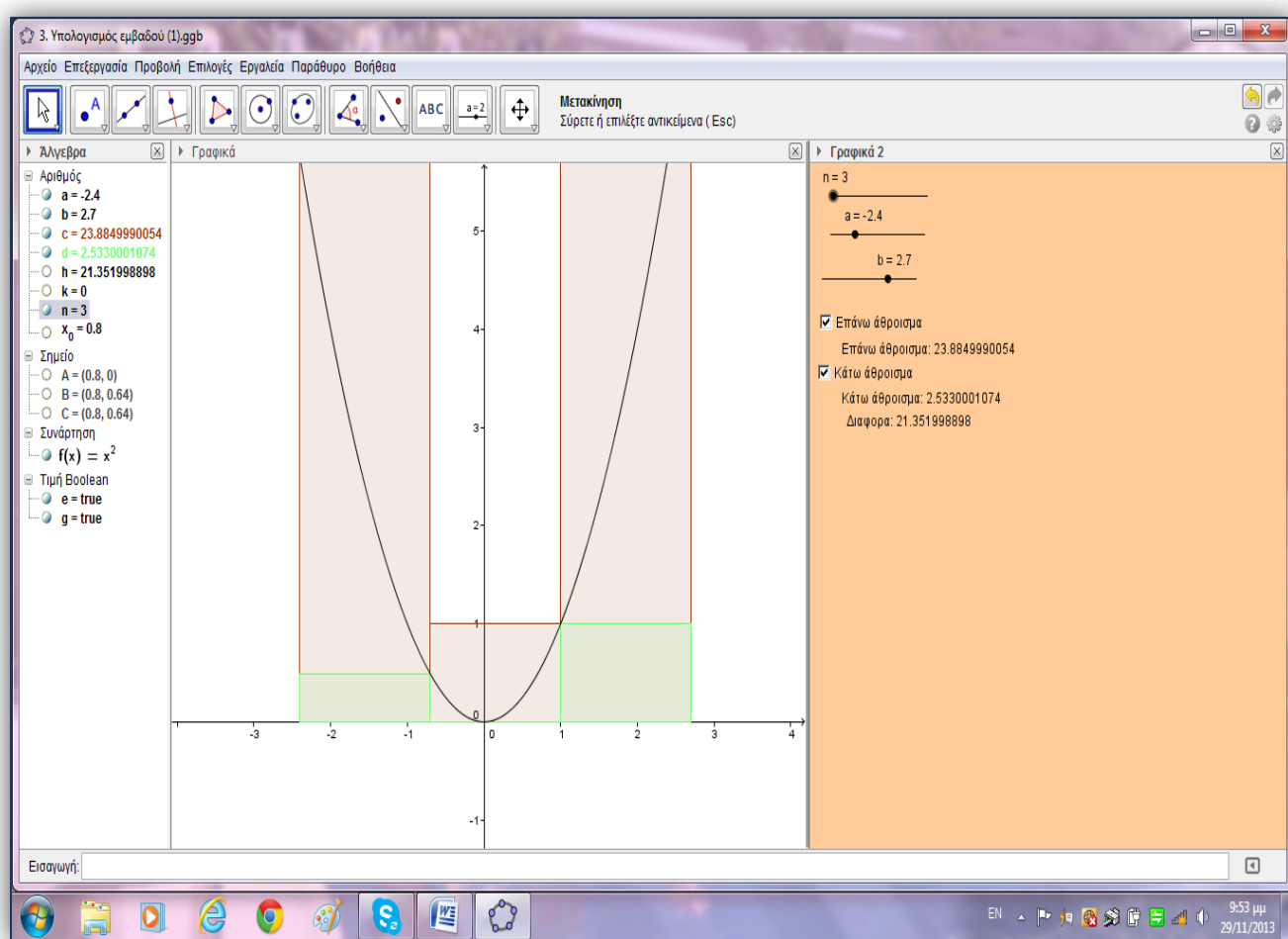
Με την παρακάτω πρόταση οι μαθητές μου θα μπορούν να ανακαλύψουν τις διασυνδέσεις γραφήματος και μαθηματικών σχέσεων και θα δουν την δυναμική τους εξάρτηση. Θα χτίσουν την αφαιρετική σκέψη τους με τις αιτιολογήσεις και τους περιορισμούς που θα προβάλλουν.

Η παρούσα δραστηριότητα έχει και ευρύτερες επιρροές:

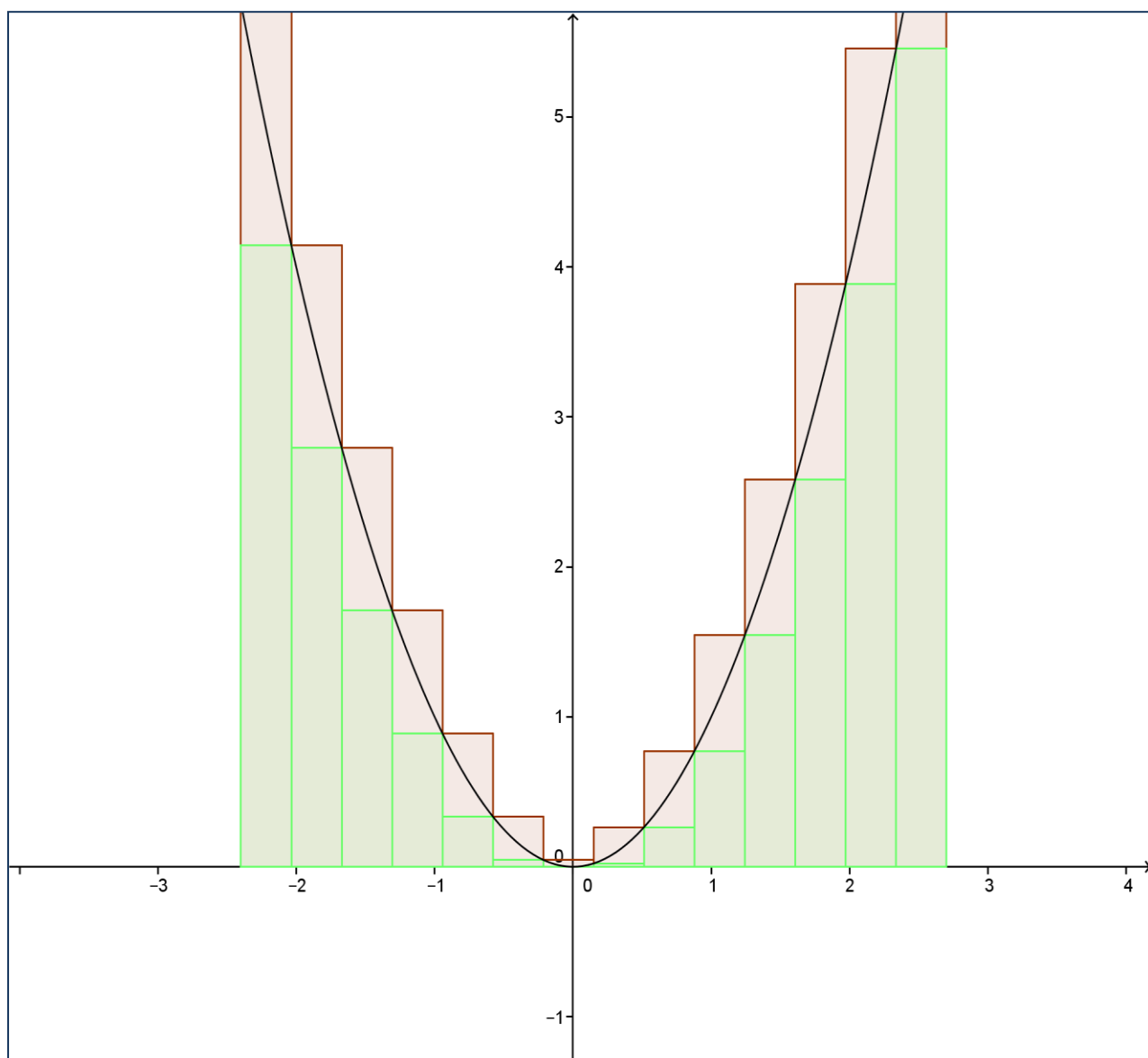
Φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή – βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους καθώς και την σύνδεσή τους με μεγάλους μαθηματικούς. Οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά

μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και να δοκιμάσουν με δικές τους ιδέες, να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα, δηλαδή, θα λειτουργήσουν σαν μικροί επιστήμονες και ερευνητές. Έτσι τα παραπάνω θα συμβάλλουν στο να διδαχθούν βασικές μαθηματικές έννοιες μέσα σε ατμόσφαιρα μαθηματικού ερευνητικού εργαστηρίου.

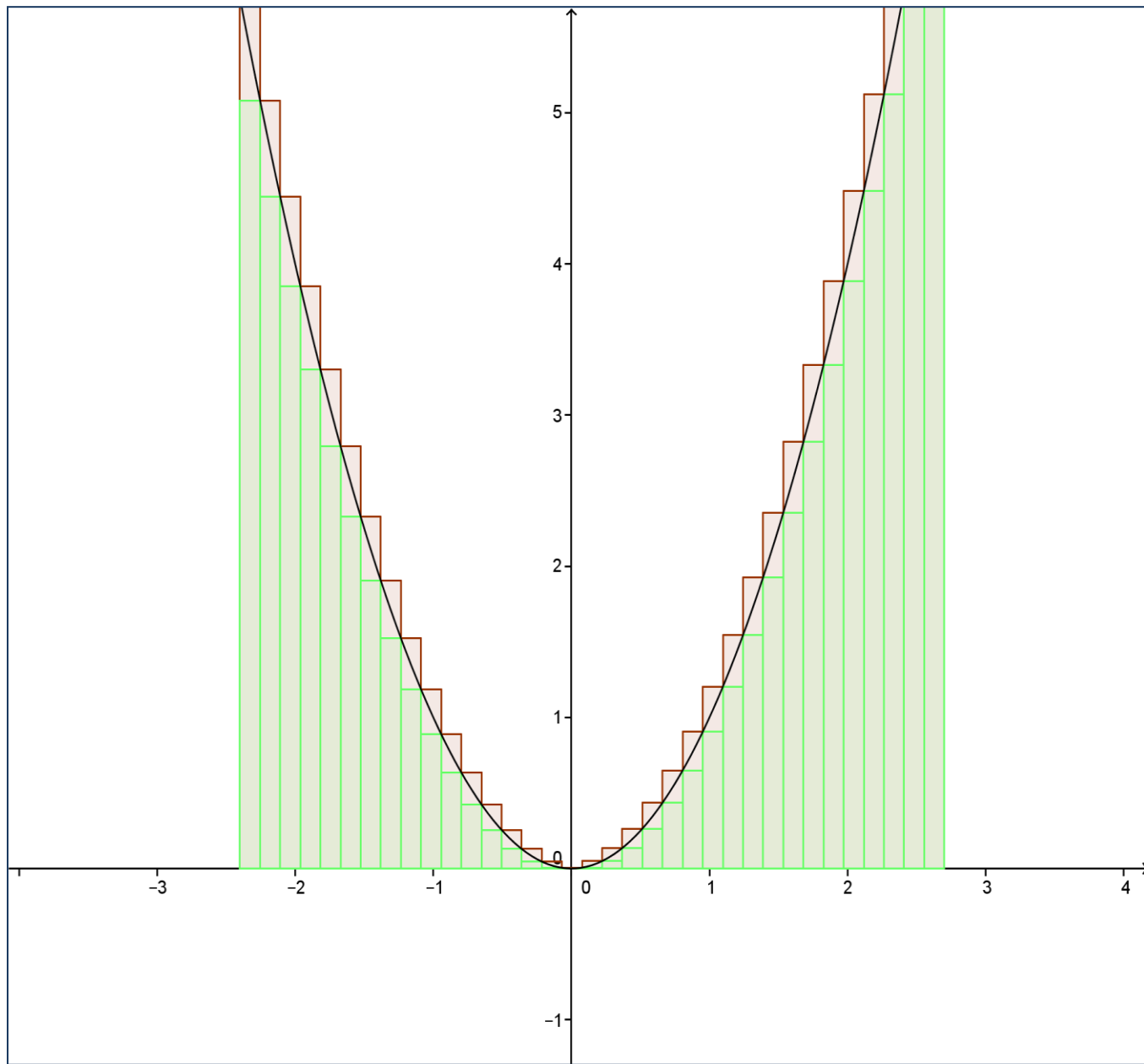
Θα ακολουθήσουν τα στιγμιότυπα 1, 2, 3, 4, 5, 6 από το λογισμικό, όπου οι μαθητές θα έχουν την δυνατότητα να ορίσουν κάτω και άνω ορθογώνια παραλληλόγραμμα ξεκινώντας για $n=1$ και φτάνοντας μέχρι $n=5000$.



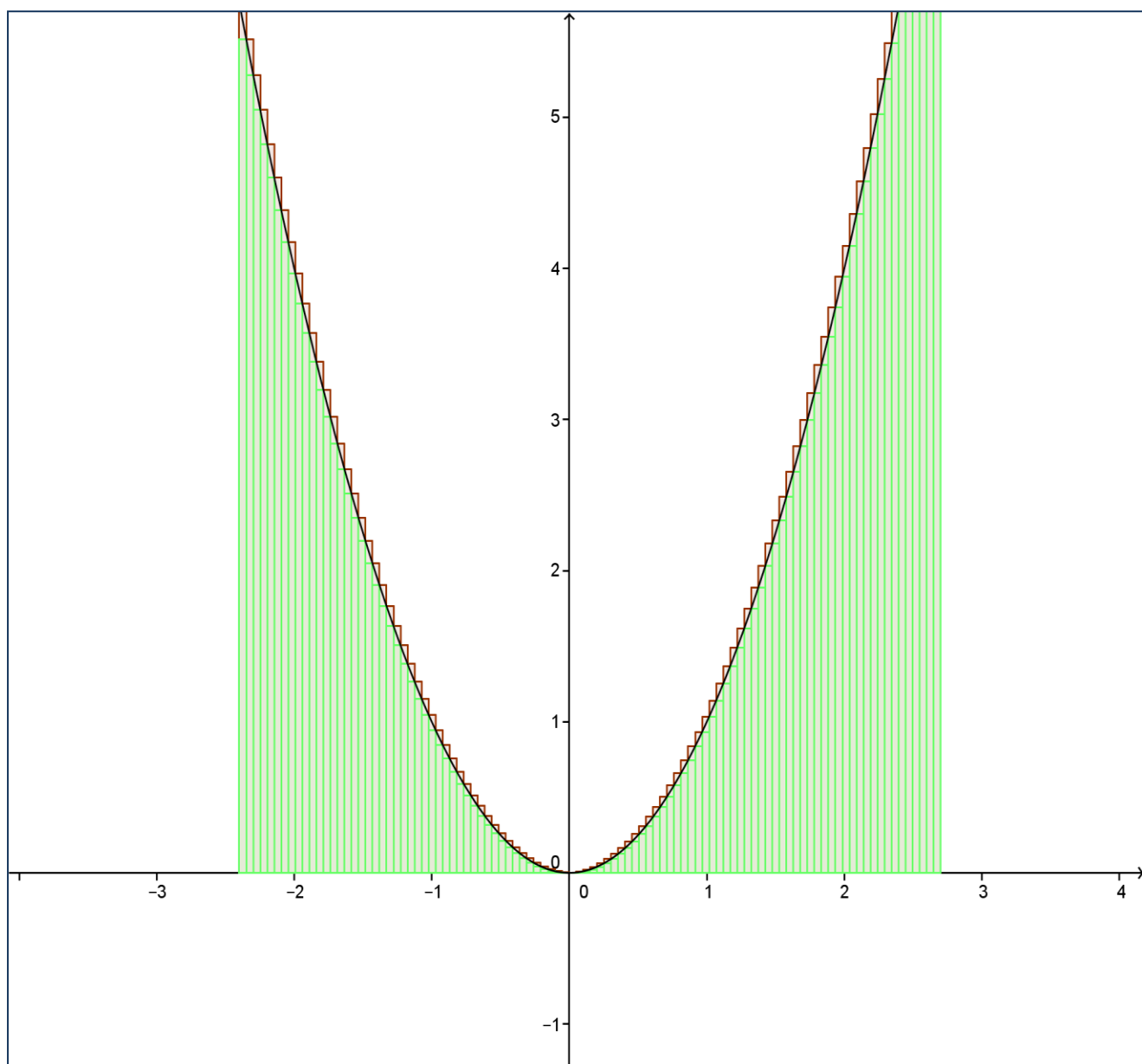
εικόνα 33 (στιγμιότυπο 1)



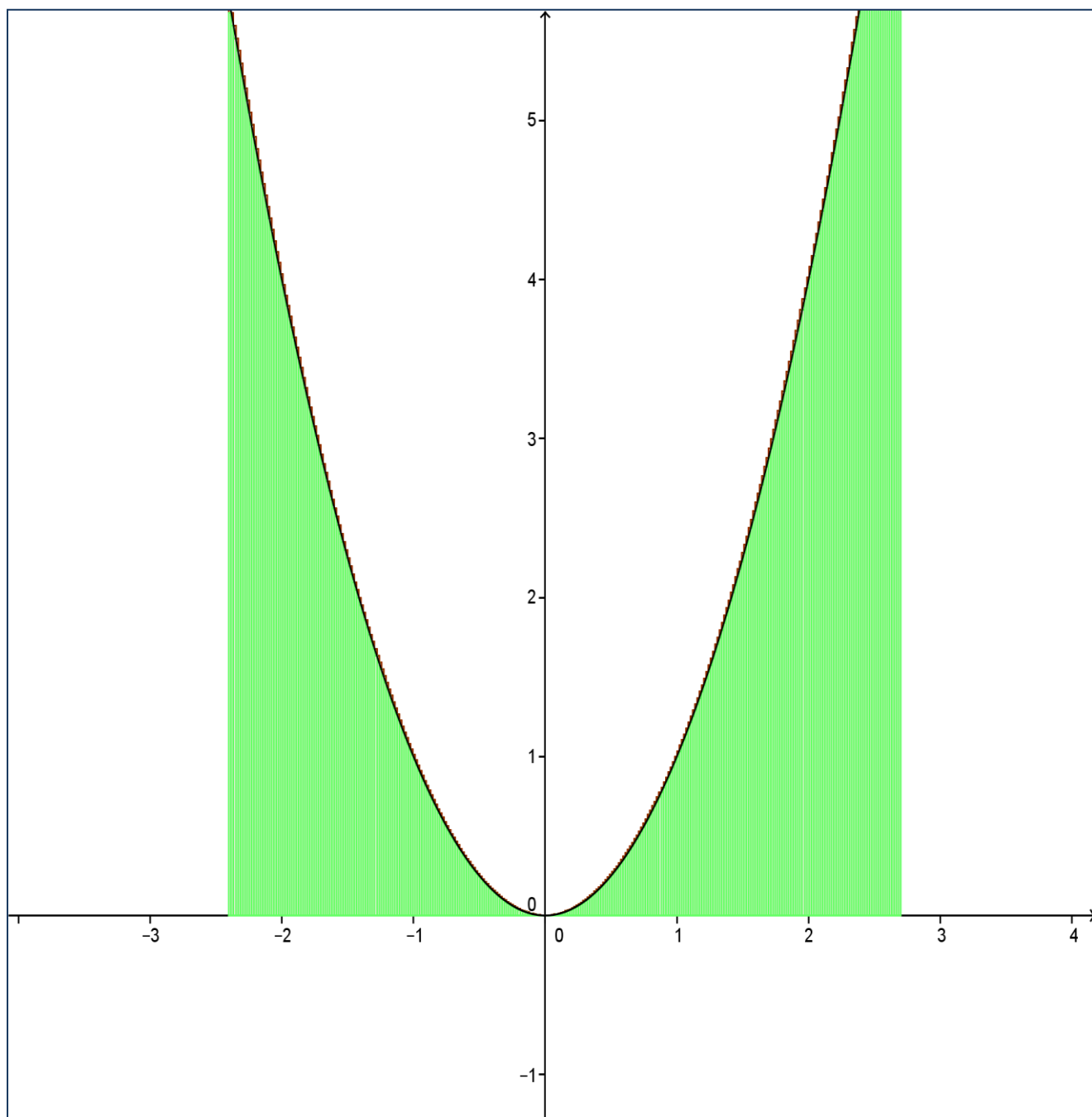
εικόνα 34 (στιγμιότυπο 2 για $n=14$)



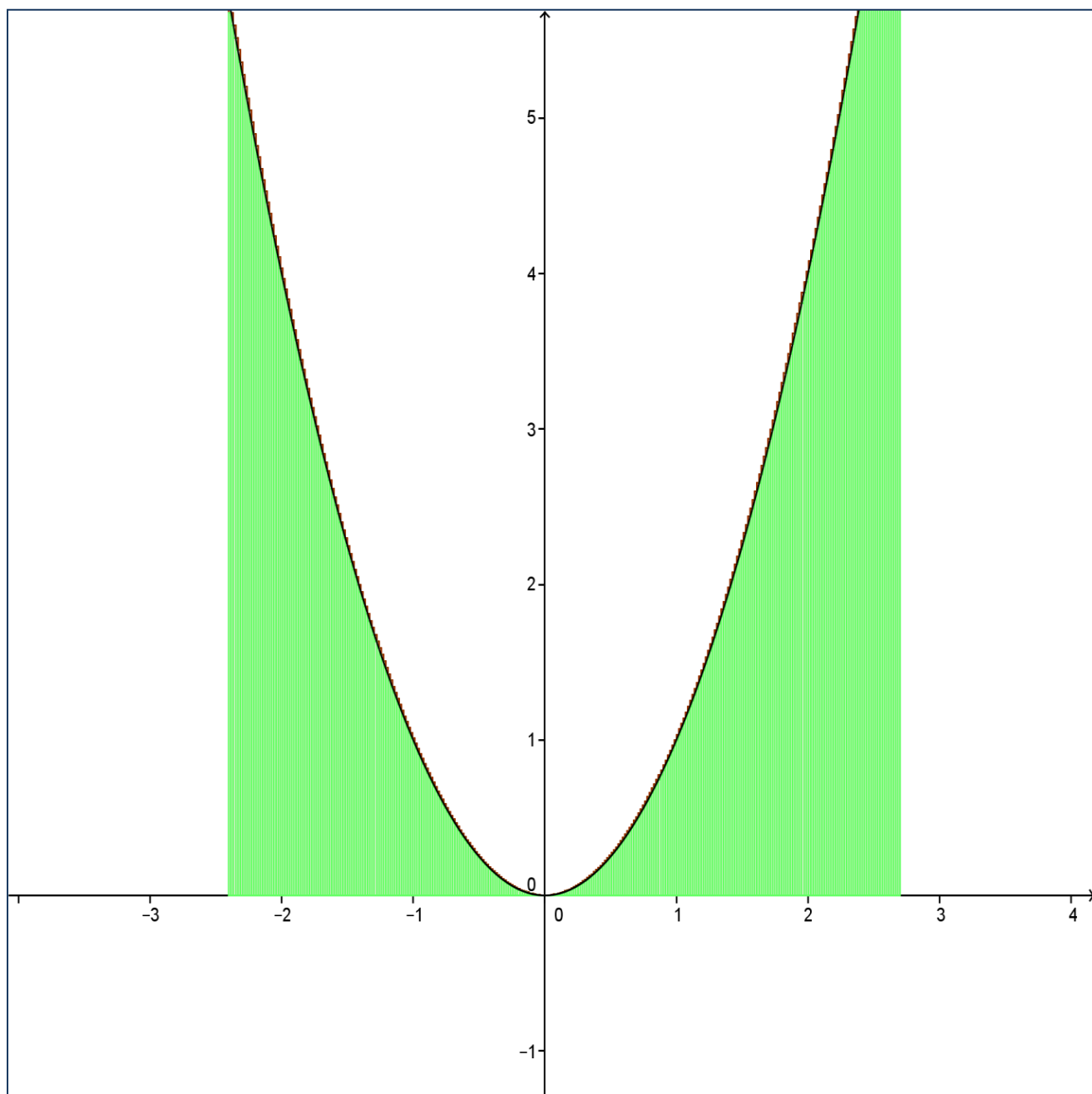
εικόνα 35 (στιγμιότυπο 3 για $n=35$)



εικόνα 36 (στιγμιότυπο 4 για $n=100$)



εικόνα 37 (στιγμιότυπο 5 για $n=300$)



εικόνα 38 (στιγμιότυπο 6 για $n=5000$)

Οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν σε αλγεβρική μορφή την παραπάνω διαδικασία , έτσι , οι παραπάνω γενικές κατευθύνσεις με μαθηματικό τρόπο έχουν ως εξής :

1^ο ΣΤΑΔΙΟ

Χωρίζουμε το διάστημα OA' σε ν -ίσα τμήματα ,ως εξής :

$\chi_0 = 0, \chi_1 = \frac{\lambda}{\nu}, \chi_2 = \frac{2\lambda}{\nu}, \dots, \chi_{\nu-1} = \frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}, \chi_\nu = \frac{\nu\lambda}{\nu} = \nu$, ξεκινώντας από το O και καταλήγοντας στο A' .

Τα εσωτερικά ορθογώνια έχουν βάσεις ίσες με $\frac{\lambda}{\nu}$ και ύψη

$$Y_0 = 0, Y_1 = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2, Y_2 = \left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2, \dots, Y_{\nu-1} = \left(\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}\right)^2.$$

ενώ τα εξωτερικά ορθογώνια έχουν βάσεις ίσες με $\frac{\lambda}{\nu}$ και ύψη

$$Y_1 = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2, Y_2 = \left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2, \dots, Y_\nu = \left(\frac{\nu\lambda}{\nu}\right)^2.$$

αντιστοίχως .

Η κατ' έλλειψη προσέγγιση λοιπόν του ζητούμενου εμβαδού δίνεται από το άθροισμα.

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{\lambda}{\nu} (Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\nu-1}) \\ A_\nu &= \frac{\lambda}{\nu} \left[0^2 + \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}\right)^2 \right] \\ A_\nu &= \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (\nu-1)^2] \end{aligned}$$

Ενώ η καθ' υπεροχή προσέγγιση αυτού από το άθροισμα :

$$\begin{aligned} B_\nu &= \frac{\lambda}{\nu} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\nu) \\ B_\nu &= \frac{\lambda}{\nu} \left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\nu\lambda}{\nu}\right)^2 \right] \\ B_\nu &= \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2]. \end{aligned}$$

Άρα,είναι : $A_\nu < E < B_\nu$

2⁰ ΣΤΑΔΙΟ

A' τρόπος

Ζητούμε από τους μαθητές να μαντέψουν τον $c = \frac{\lambda^3}{3}$, δηλαδή, $A_n < \frac{\lambda^3}{3} < B_n$,

όπως έκανε ο Αρχιμήδης ο οποίος είχε υποψιαστεί αυτόν τον αριθμό με την μέθοδο του που έχουμε αναφέρει.

B' τρόπος

Ένας άλλος τρόπος που θα μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές μας και είναι παρόμοιος με αυτόν του σχολικού βιβλίου είναι ο εξής:

Από την ταυτότητα:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2$$

$$\text{Ισχύει : } \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} > \frac{n^3}{3}$$

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n^3}{3} - \frac{n(3n-1)}{6} < \frac{n^3}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Συνεπώς, } A_n < \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^3}{3} < B_n, \text{ δηλαδή, } A_n < \frac{\lambda^3}{3} < B_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι : } E = \frac{\lambda^3}{3}.$$

3⁰ ΣΤΑΔΙΟ

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : B_n - A_n < \varepsilon$

Πράγματι,

$$B_n - A_n = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = \frac{\lambda^3}{n}$$

Από θεώρημα Αρχιμήδους- Ευδόξου για τους $\lambda^3, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$:

$$n \cdot \varepsilon > \lambda^3, \text{ δηλαδή, } \frac{\lambda^3}{n} < \varepsilon, \text{ άρα, } B_n - A_n < \varepsilon.$$

$$\text{Άρα, } \forall \varepsilon > 0, \exists n = \frac{\lambda^3}{\varepsilon} + 1, \text{ τέτοιο, ώστε : } B_n - A_n < \varepsilon. \text{ Δηλαδή, } E = \frac{\lambda^3}{3}.$$

BONAVENTURA FRANCESCO CAVALIERI



εικόνα 39

Ο Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) γεννήθηκε στο Μιλάνο και από το 1615 άνηκε στο τάγμα των Ιησουϊτών. Το 1621 ενώ βρισκόταν στην Πίζα παρακολούθησε μαθήματα του Benedetto Castelli και γνωρίστηκε με τον Γαλιλαίο που ήταν στην Φλωρεντία, ενώ το 1629 διορίστηκε καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια, όπου κατείχε τη θέση μέχρι το θάνατό του.

Την μεγάλη φήμη του την οφείλει στο έργο του «*Geometria Indivisibilibus*» (Γεωμετρία των αδιαίρετων) το οποίο δημοσιεύτηκε για φορά το 1635, προσπαθούσε να βρει μια μέθοδο για να αντικαταστήσει την αρχή της εξάντλησης του Αρχιμήδη. Το έργο αυτό αποτελούνταν από επτά βιβλία και διατυπώνει μια θεωρία σύμφωνα με την οποία κάθε αδιαίρετο με την κίνηση του γεννά το επόμενο ανώτερο συνεχές.

Το σημείο καθώς κινείται παράγει μια γραμμή και με τη σειρά της η γραμμή κινούμενη παράγει μια επιφάνεια η οποία αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων ευθειών.

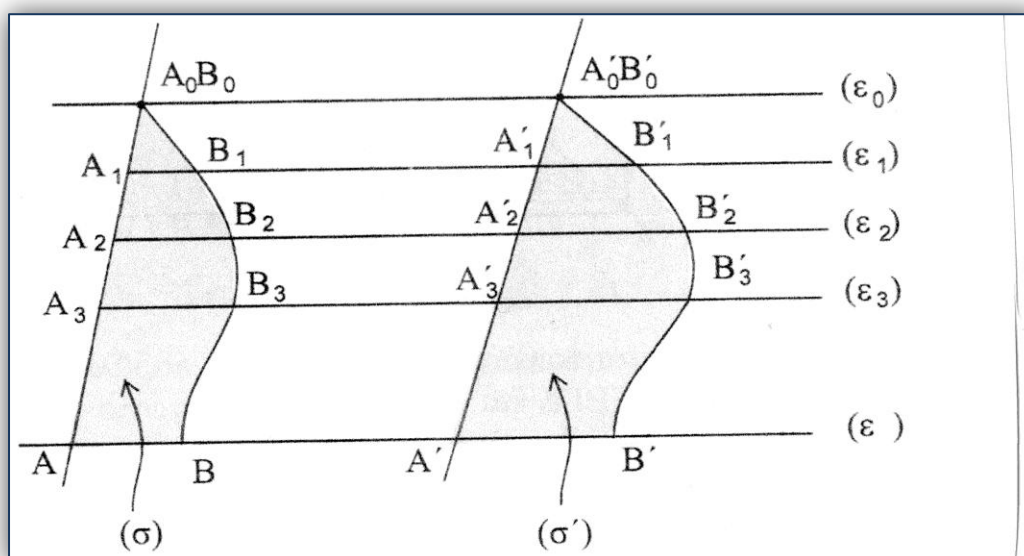
Με το ίδιο σκεπτικό, η επιφάνεια κατά την κίνησή της γεννά ένα στερεό που αποτελείται από παράλληλα επίπεδα.

Στη συνέχεια ο Cavalieri έθετε τα αδιαίρετα δύο δεδομένων γεωμετρικών σχημάτων σε μια 1-1 αντιστοιχία, έτσι, αν τα αδιαίρετα στοιχεία των δύο γεωμετρικών σχημάτων είχαν ένα σταθερό λόγο, τότε συμπεράνε ότι και τα εμβαδά ή οι όγκοι αυτών των σχημάτων είχαν τον ίδιο λόγο. Υπολόγιζε το εμβαδόν ή τον όγκο του ενός εκ των δύο σχημάτων ή στερεών, αν γνώριζε το εμβαδόν ή τον όγκο του άλλου σχήματος ή στερεού αντίστοιχα.

Η μέθοδος του Cavalieri να συγκρίνει δύο γεωμετρικά σχήματα, συγκρίνοντας τα αδιαίρετα του ενός με τα αδιαίρετα του άλλου, βασίζεται σε μια αρχή αναπόδεικτη μεν, αλλά με μεγάλη επιτυχία εφαρμοσμένη που είναι γνωστή ως :

«*Αρχή του Cavalieri*»

Ειδικότερα η «*Αρχή του Cavalieri*» σε ότι αφορά τα επίπεδα σχήματα³² :



σχήμα 40

³² Λάμπας Διονύσιος. «*Ευκλείδη Στοιχεία*». Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος III. Η Γεωμετρία του χώρου, βιβλία XI, XII, XIII. (Κ.Ε.Ε.ΕΠ.ΕΚ : ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ). Σελ. 118

“Αν δυο επίπεδα σχήματα $(\sigma), (\sigma')$ τέμνονται από παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_0), (\varepsilon_1), (\varepsilon_2), \dots, (\varepsilon_n)$ κατά αντίστοιχα ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων $(A_0B_0, A_0'B_0'), (A_1B_1, A_1'B_1'), (A_2B_2, A_2'B_2'), \dots, (AB, A'B')$ έτσι ώστε :

$$(A_0'B_0') = \lambda(A_0B_0)$$

$$(A_1'B_1') = \lambda(A_1B_1)$$

$$(A_2'B_2') = \lambda(A_2B_2)$$

.

.

.

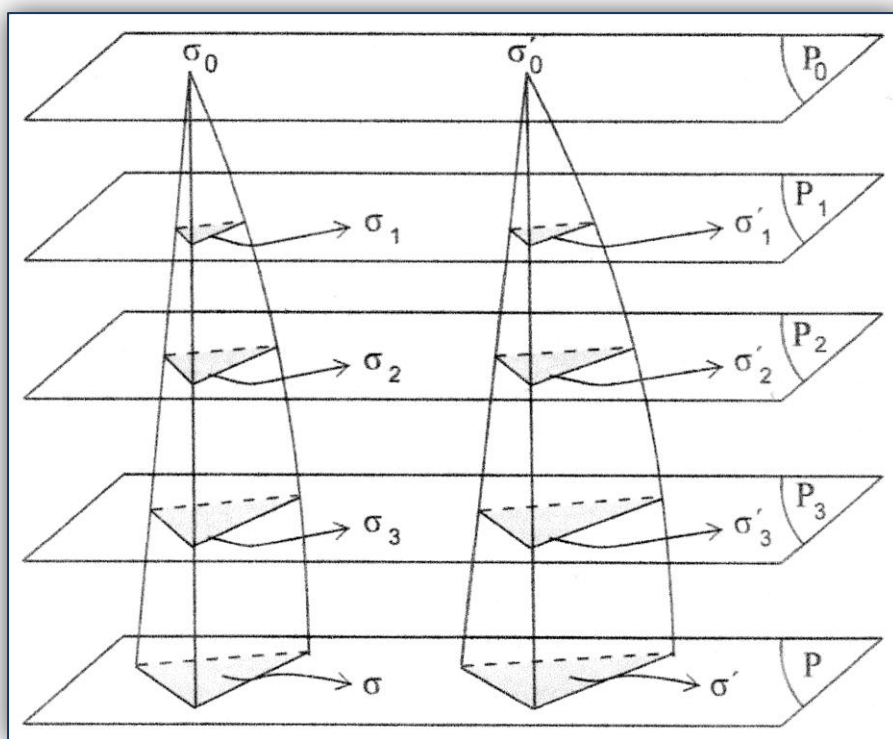
$$(A'B') = \lambda(AB)$$

Τότε ισχύει $(\sigma') = \lambda(\sigma)$.

Πράγματι, είναι σαν να θεωρεί τα σχήματα $(\sigma'), (\sigma)$ ως σύνολα ευθυγράμμων τμημάτων δηλαδή ως σχήματα με μηδενικό εμβαδόν και ισχύει ότι :

$$(\sigma) = \sum(A_iB_i), \text{ και } (\sigma') = \sum(A_i'B_i') = \sum(\lambda \cdot A_iB_i) = \lambda \cdot \sum(A_iB_i) = \lambda \cdot (\sigma)$$

Ενώ η «Αρχή του Cavalieri» για τα στερεά³³:



Εικόνα 41

³³ Λάμπας Διονύσιος . “Ευκλείδη Στοιχεία” . Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό . Τόμος ΙΙΙ . Η Γεωμετρία του χώρου , βιβλία ΧΙ, ΧΙΙ, ΧΙΙΙ. (Κ.Ε.Ε.ΕΠ.ΕΚ : ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ).Σελ.121

''Αν δυο στερεά $(V), (V')$ τέμνονται από παράλληλα επίπεδα $(\Pi_0), (\Pi_1), (\Pi_2), \dots, (\Pi)$ κατά αντίστοιχα επιπέδων σχημάτων $(\sigma_0, \sigma_0'), (\sigma_1, \sigma_1'), (\sigma_2, \sigma_2'), \dots, (\sigma, \sigma')$ έτσι ώστε :

$$(\sigma_0') = \lambda(\sigma_0)$$

$$(\sigma_1') = \lambda(\sigma_1)$$

$$(\sigma_2') = \lambda(\sigma_2)$$

.

.

.

$$(\sigma') = \lambda(\sigma)$$

Τότε ισχύει $(V') = \lambda(V)$.

Πράγματι , είναι σαν να θεωρεί τα στερεά $(V'), (V)$ ως σύνολα επιπέδων σχημάτων δηλαδή ως σχήματα με μηδενικό όγκο και ισχύει ότι :

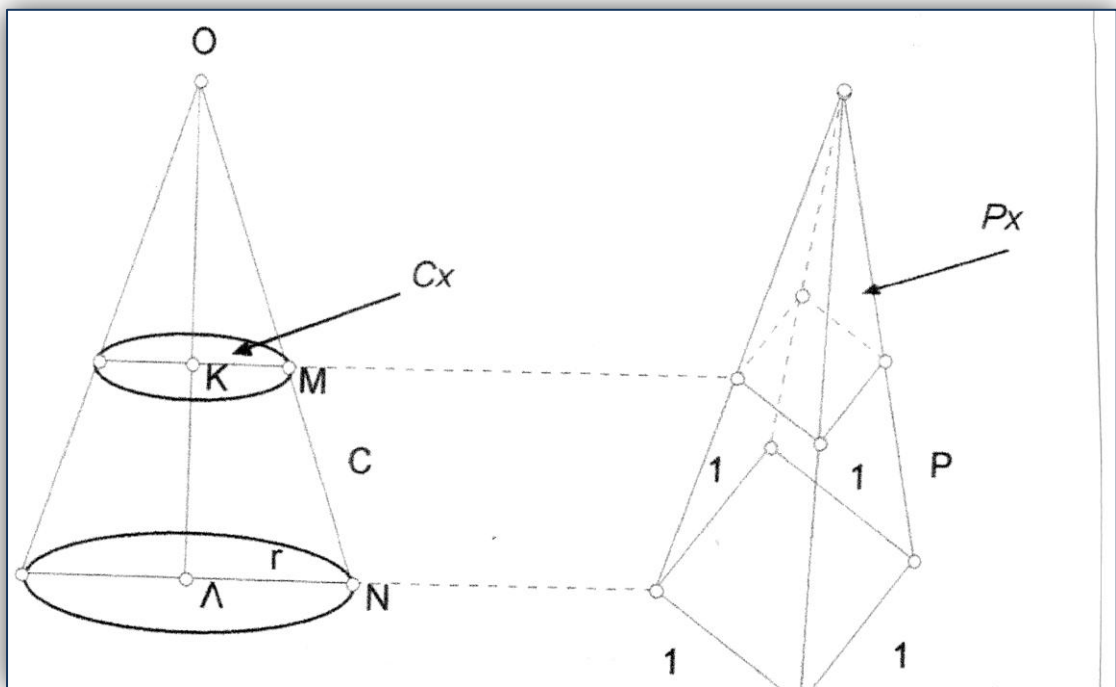
$$(V') = \Sigma(\sigma_i'), \text{ και } (V') = \Sigma(\sigma_i') = \Sigma(\lambda \cdot \sigma_i) = \lambda \cdot \Sigma(\sigma_i) = \lambda \cdot (V) .$$

Η παραπάνω αρχή δίνει ορθά αποτελέσματα παρόλο την παραδοξολογία της , ότι δηλαδή , μια κίνηση φαίνεται σαν ένα σύνολο ακινησιών , ή ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα σαν ένα σύνολο από ποσότητες με μηδενικό μήκος (τα σημεία) ,για αυτό βρήκε και πολλούς υποστηρικτές όπως ο Leibniz που την εφάρμοσε σε πολλές περιπτώσεις.

Στην προσπάθειά του ο Cavalieri να αποδείξει την ορθότητα της μεθόδου του, πειραματίστηκε με ήδη γνωστά για την εποχή αποτελέσματα . Παρακάτω θα γίνουν οι περιγραφές τέτοιων υπολογισμών .

 Η περιγραφή του τύπου που μας υπολογίζει τον όγκο κυκλικού κώνου C με ακτίνα βάσης r και ύψος h .

Ο Cavalieri θεώρησε και μια πυραμίδα P με ύψος h και μοναδιαία τετραγωνική βάση μαζί με τον κυκλικό κώνο .



Εκόνα 42

Θεώρησε τις τομές σε ύψος x και της πυραμίδας και του κώνου, έστω C_x , P_x . Τότε από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων OKM και OLN προκύπτει η παρακάτω αναλογία: $\frac{x}{h} = \frac{r_1}{r}$, άρα, $r_1 = \frac{xr}{h}$,

άρα το εμβαδόν της τομής C_x είναι: $E(C_x) = \pi r_1^2 = \frac{\pi x^2 r^2}{h^2}$.

$$E(P_x) = \frac{x^2}{h^2}, \text{ τότε:}$$

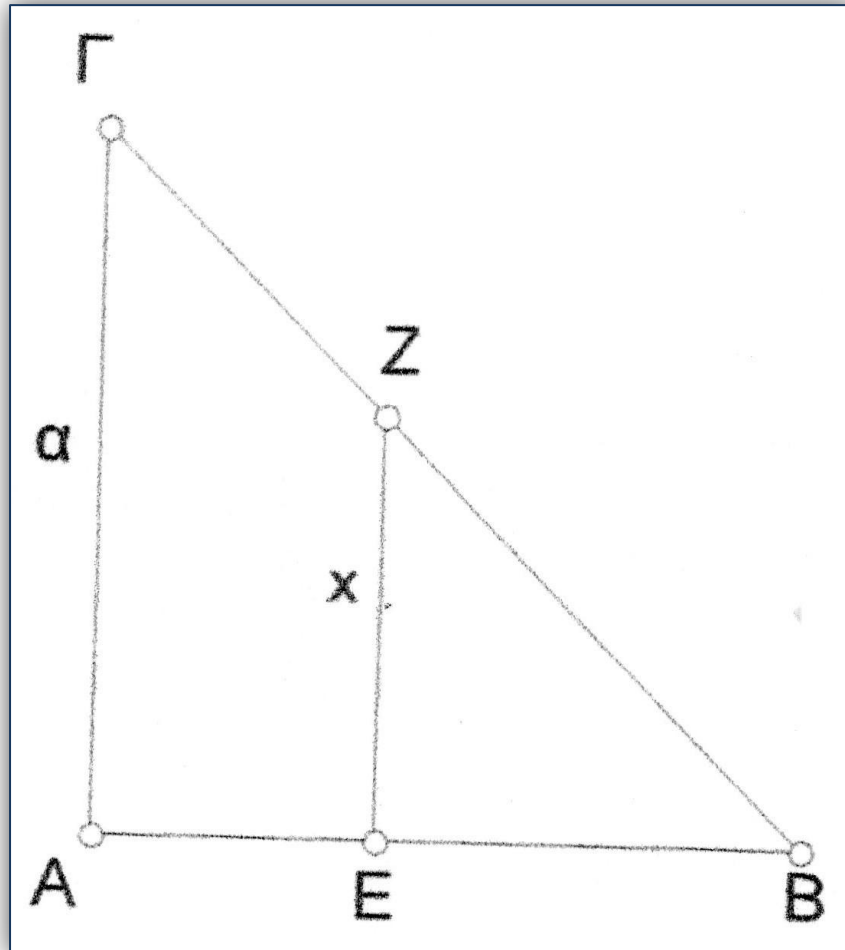
Και το εμβαδόν της τομής P_x είναι: $\frac{E(C_x)}{E(P_x)} = \frac{\frac{\pi x^2 r^2}{h^2}}{\frac{x^2}{h^2}} = \pi r^2$.

Από την αρχή του Cavalieri προκύπτει ο λόγος των όγκων κώνου και πυραμίδας θα είναι: $\frac{V(C)}{V(P)} = \pi r^2 \Rightarrow V(C) = V(P) \pi r^2$ και αφού ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$$V(P) = \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} h, \text{ τότε, } V(C) = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

✚ Ο όγκος $V(Q)$ ενός στερεού που παράγεται από την περιστροφή της παραβολής $\psi=\chi^2$ περί τη βάση χ .

Έστω τώρα το ορθογώνιο και ισοσκελές $\hat{AB}\Gamma$ με βάση a και ύψος a , και έστω EZ κάθετο τμήμα μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εικόνα 43

Σύμφωνα με τη θεωρία των αδιαιρέτων του Cavalieri, το τρίγωνο είναι το άθροισμα των ευθυγράμμων τμημάτων EZ , και άρα το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι :

$$(\hat{AB}\Gamma) = \sum_B^A \chi.$$

Όμως το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου είναι γνωστό ότι δίνεται από τον τύπο

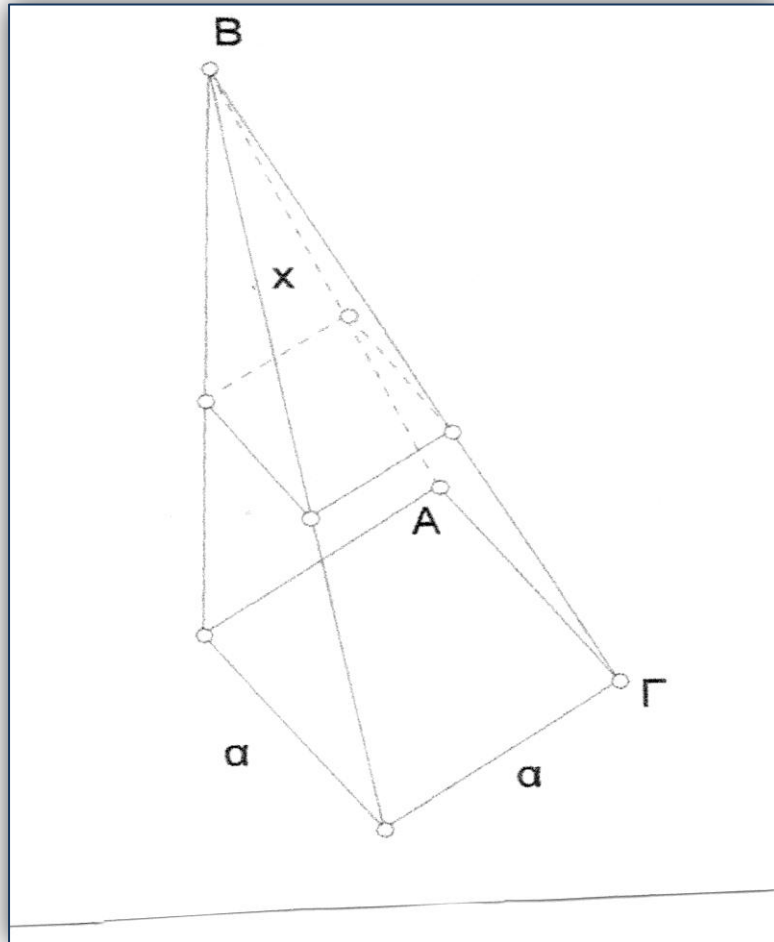
$$(\hat{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}a^2 \text{ επομένως : } \frac{1}{2}a^2 = \sum_B^A \chi.$$

Στο επόμενο βήμα ο Cavalieri προσπαθεί να προσδιορίσει το : $\sum_B^A \chi^2$.

Για αυτό το λόγο θεωρήσε πυραμίδα P με κορυφή το B και βάση τετράγωνο πλευράς ΑΓ .

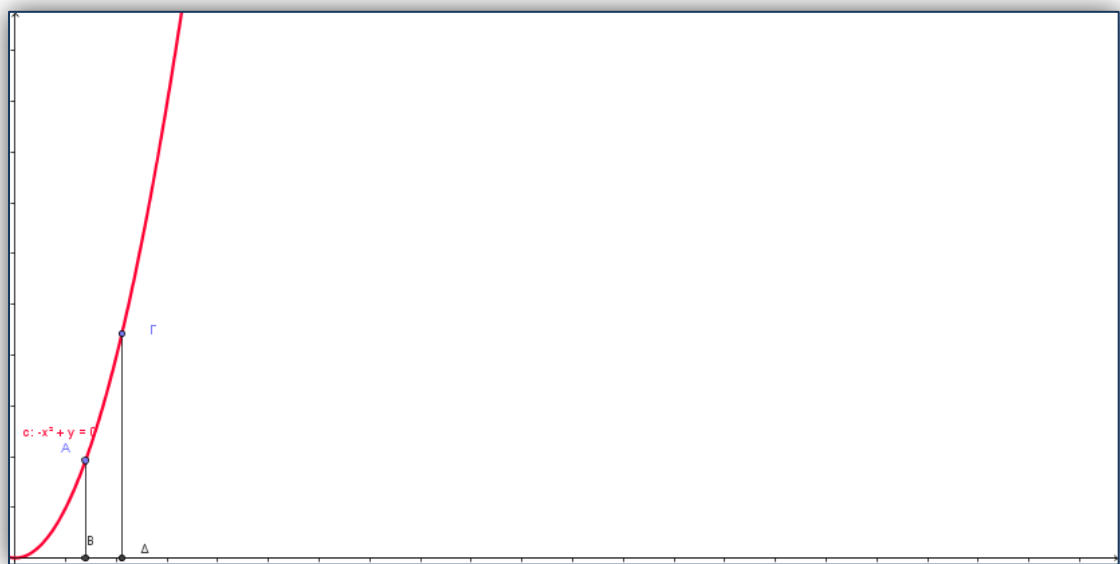
Τότε η κάθετη τομή σε απόσταση x από την κορυφή έχει εμβαδόν χ^2 , επομένως σύμφωνα με τη θεωρία των αδιαιρέτων ο όγκος της πυραμίδας θα είναι το άθροισμα των τομών , δηλαδή :

$$V(P) = \sum_B^A \chi^2 .$$



Εικόνα 44

Όμως το ίδιο άθροισμα $\sum_B^A \chi^2$ παριστάνει το εμβαδόν κάτω από την παραβολή με εξίσωση $\psi = \chi^2$, εφόσον η κάθετη τομή έχει μήκος χ^2 .



Εικόνα 45

Αν Q είναι το στερεό που παράγεται από την περιστροφή της παραβολής περί τη βάση BA , τότε η τομή σε απόσταση χ από την κορυφή B έχει εμβαδόν $\pi\chi^4$, και άρα

$$V(Q) = \sum_B^A \pi\chi^4 .$$

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ CAVALIERI

➤ Μια απλή επαλήθευση της αρχής Cavalieri, ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές την εφαρμογή της είναι στην περίπτωση των δύο ίσων τριγώνων που χωρίζει η διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου ³⁴.



Εικόνα 46

Τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$, και $\triangle B\Gamma\Delta$ έχουν ίσα ύψη BB' και $\Delta\Delta'$.

Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελούνται από ίσα ευθύγραμμα τμήματα A_iB_i , $\Gamma_i\Delta_i$ τα οποία είναι παράλληλα προ τις βάσεις AB , $\Gamma\Delta$ απέχουν εξίσου από αυτές.

Άρα, $A_iB_i = \Gamma_i\Delta_i$ θα ισχύει $:\Sigma(A_iB_i) = \Sigma(\Gamma_i\Delta_i)$ συνεπώς και τα εμβαδά των τριγώνων $\triangle AB\Delta$, και $\triangle B\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

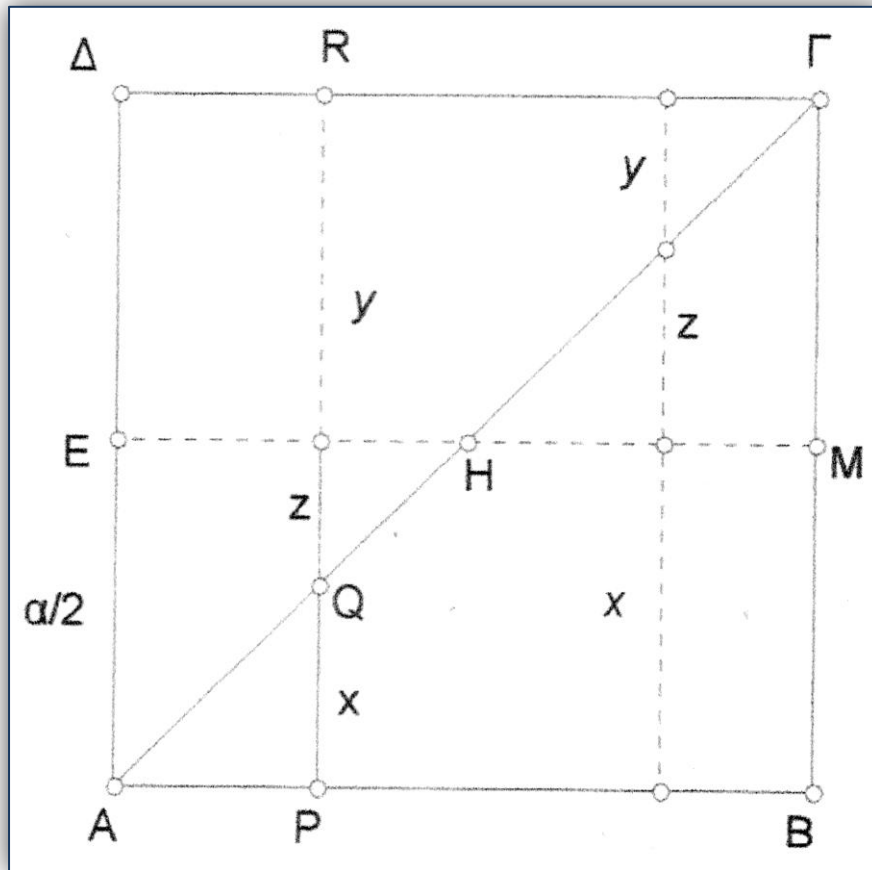
➤ Στην συνέχεια της παραπάνω διδακτικής εφαρμογής οι μαθητές μας θα μπορούν να αντιληφθούν την αρχή του Cavalieri στις περιπτώσεις του τύπου:

$$\sum_A^B x^n = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

που ισοδυναμεί στον τύπο $\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$ που γνωρίζουν μηχανικά και χρησιμοποιούν μόνο σε υπολογισμούς.

Αρχικά θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευρά a και έστω $A\Gamma$ η διαγώνιο του που το χωρίζει σε δύο τρίγωνα. Αν x και y είναι τα μήκη των τομών PQ και QR , τότε $x+y=a$ επομένως:

³⁴ Λάμπας Διονύσιος. "Ευκλείδη Στοιχεία". Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος III. Η Γεωμετρία του χώρου, βιβλία XI, XII, XIII. (Κ.Ε.Ε.ΕΠ.ΕΚ : ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ). Σελ. 119



Εικόνα 47

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + \psi) = \sum_A^B x + \sum_A^B \psi = 2 \sum_A^B x, \text{ όμως } \sum_A^B x = \sum_A^B \psi, \text{ άρα}$$

$$\sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a = \frac{1}{2} \alpha^2$$

Το $\sum_A^B a$ παριστάνει το εμβαδόν του τετραγώνου .

Συνεχίζοντας , υπολογίζουμε το $\sum_A^B x^2$, ως εξής :

$$\sum_A^B \alpha^2 = \sum_A^B (x + \psi)^2 = \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B x\psi + \sum_A^B \psi^2 = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B x\psi (\text{λόγω, συμμετρίας})$$

$$\Rightarrow \sum_A^B \alpha^2 = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B \left(\frac{\alpha^2}{4} - \zeta^2 \right), \text{ όπου, } x = \frac{\alpha}{2} - \zeta, \psi = \frac{\alpha}{2} + \zeta$$

$$\text{άρα, } \sum_A^B \alpha^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \sum_A^B \zeta^2 (\text{σχέση -1}^{\text{η}})$$

Οι διαστάσεις του τριγώνου $\triangle EHA$ έχουν λόγο $\frac{1}{2}$ οι μισές από αυτές του $\triangle AB\Gamma$. Στα τρίγωνα $\triangle EHA$ και $\triangle H\Gamma M$ το άθροισμα $\sum_A^B \zeta^2$ όπως είδαμε παριστάνει τον όγκο μιας πυραμίδας με διαστάσεις ίσες με το μισό των διαστάσεων εκείνων της πυραμίδας όπου ο όγκος είναι : $\sum_A^B \chi^2$.

ο λόγος των όγκων είναι :

$$\frac{V(\zeta^2)}{V(\chi^2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Έχουμε δυο τρίγωνα οπότε : $\sum_A^B \zeta^2 = 2 \cdot \frac{1}{8} \sum_A^B \chi^2 = \frac{1}{4} \sum_A^B \chi^2$.

Από την σχέση-1^η έχουμε: $\sum_A^B \alpha^2 = 4 \sum_A^B \chi^2 - 4 \sum_A^B \zeta^2$, άρα

$$\sum_A^B \alpha^2 = 4 \sum_A^B \chi^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \sum_A^B \chi^2 \Rightarrow \sum_A^B \chi^2 = \frac{1}{3} \sum_A^B \alpha^2 = \frac{1}{3} \alpha^3.$$

Όμως, το $\sum_A^B \alpha^2$ παριστάνει τον όγκο κύβου με ακμή α . Και με το προηγούμενο σκεπτικό έχουμε :

$$\sum_A^B \alpha^3 = \sum_A^B (\chi + \psi)^3 = \sum_A^B \chi^3 + 3 \sum_A^B \chi^2 \psi + 3 \sum_A^B \chi \psi^2 + \sum_A^B \psi^3 = 2 \sum_A^B \chi^3 + 6 \sum_A^B \chi^2 \psi \text{ (λόγω, συμμετρίας)}$$

Για να υπολογίσουμε το $\sum_A^B \chi^2 \psi$ ακολουθούμε ένα τέχνασμα :

$$\begin{aligned} \sum_A^B \alpha^3 &= \alpha \sum_A^B \alpha^2 = \alpha \left(2 \sum_A^B \chi^2 + 2 \sum_A^B \chi \psi \right) = \alpha \left(\frac{2}{3} \sum_A^B \alpha^2 + 2 \sum_A^B \chi \psi \right) = \left(\frac{2}{3} \sum_A^B \alpha^3 + 2 \sum_A^B (\chi + \psi) \chi \psi \right) \\ &\stackrel{\text{λόγω, συμμετρίας}}{\Rightarrow} \sum_A^B \alpha^3 = \frac{2}{3} \sum_A^B \alpha^3 + 4 \sum_A^B \chi^2 \psi \Rightarrow \sum_A^B \chi^2 \psi = \frac{1}{12} \sum_A^B \alpha^3 \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς : } \sum_A^B \chi^3 = \frac{1}{4} \sum_A^B \alpha^3 = \frac{1}{4} \alpha^4.$$

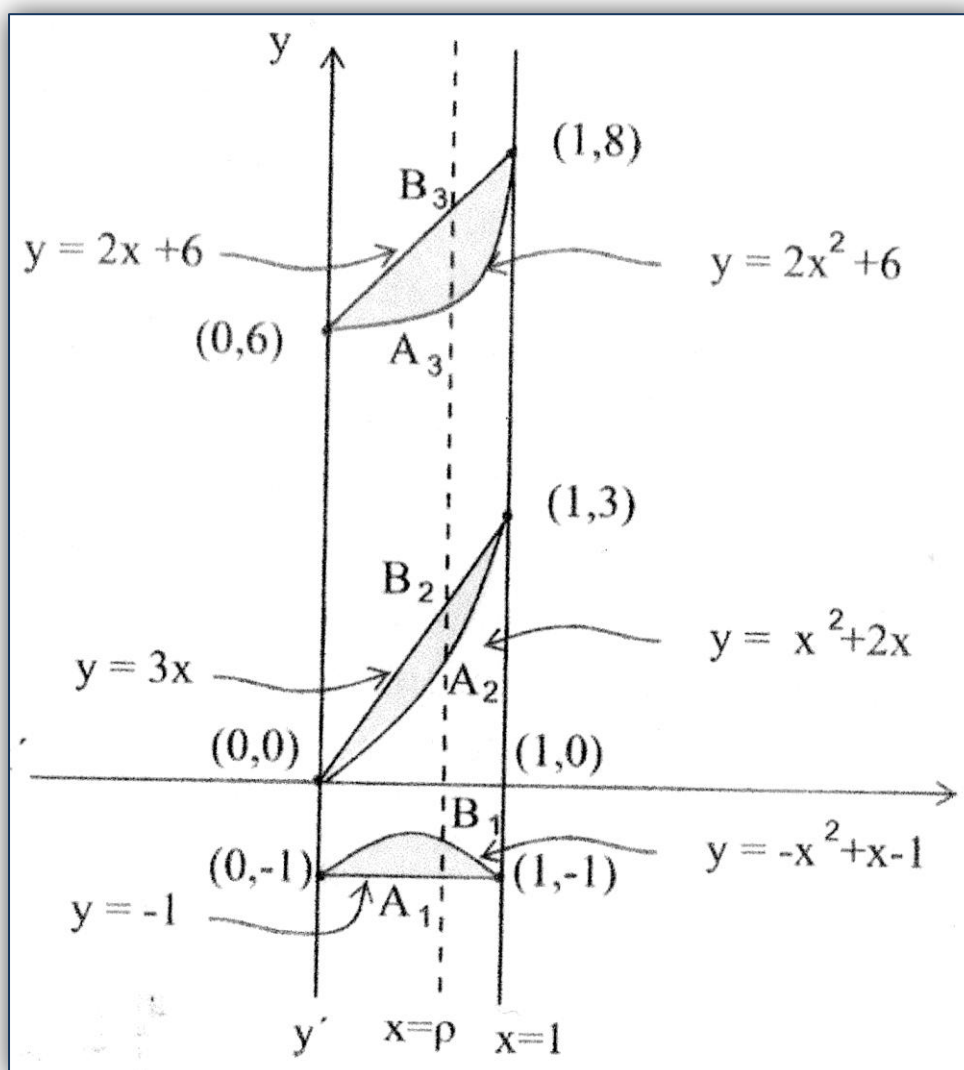
Δηλαδή, οι τύποι $\sum_A^B \chi = \frac{1}{2} \alpha$, $\sum_A^B \chi^2 = \frac{1}{3} \alpha^2$, $\sum_A^B \chi^3 = \frac{1}{4} \alpha^3$ είναι μερικές περιπτώσεις

του τύπου :

$$\sum_A^B x^n = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

➤ Εφαρμόζοντας , την αρχή Cavalieri ,σε εμβαδά σχημάτων που περικλείονται μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων θα μπορούν να αντιληφθούν οι μαθητές μας , την έννοια του εμβαδού από διαφορετική οπτική γωνία .

Αν επίσης , γνωρίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα θα τους δοθεί η δυνατότητα να επαληθεύσουν τα αποτελέσματα³⁵ .



Εικόνα 48

³⁵ Λάμπας Διονύσιος . “Ευκλείδη Στοιχεία” . Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό . Τόμος ΙΙΙ . Η Γεωμετρία του χώρου , βιβλία ΙΙ, ΙΙΙ, ΙΙΙΙ. (Κ.Ε.Ε.ΕΠ.ΕΚ : ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ).Σελ.120

Ας θεωρήσουμε τα σχήματα (σ_1) , (σ_2) , (σ_3) , όπως φαίνονται στο σχήμα, τα οποία ορίζονται από τα ζεύγη συναρτήσεων :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = -1 \\ \psi = -\chi^2 + \chi - 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \psi = 3\chi \\ \psi = \chi^2 + 2\chi \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2\chi + 6 \\ \psi = 2\chi^2 + 6 \end{array} \right.$$

όπου βρίσκονται μεταξύ των ευθειών $\chi=0$, $\chi=1$.

Τότε κάθε ευθεία τέμνει τα σχήματα (σ_1) , (σ_2) , (σ_3) κατά τα τμήματα

A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 και ισχύει $A_2B_2 = A_1B_1$ και $A_3B_3 = 2 A_1B_1$.

Πράγματι, με την γνώση του ορισμένου ολοκληρώματος εύκολα έχουμε τους υπολογισμούς :

$$(\sigma_1) = \int_0^1 |-\chi^2 + \chi - 1 - (-1)| dx = \int_0^1 (-\chi^2 + \chi) dx.$$

$$(\sigma_2) = \int_0^1 |3\chi - (\chi^2 + 2\chi)| dx = \int_0^1 |\chi - \chi^2| dx = \int_0^1 (\chi - \chi^2) dx$$

$$(\sigma_3) = \int_0^1 |2\chi + 6 - (2\chi^2 + 6)| dx = \int_0^1 |2\chi - 2\chi^2| dx = 2 \int_0^1 |\chi - \chi^2| dx = 2 \int_0^1 (\chi - \chi^2) dx$$

Και εύκολα συμπεραίνουμε ότι : $(\sigma_3) = 2(\sigma_2)$, και $(\sigma_2) = (\sigma_1)$.

Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ (16^{ος} μ.Χ-17^{ος} μ.Χ)

Η δεύτερη περίοδος της ιστορικής εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού³⁶ αρχίζει λίγο μετά την εποχή που οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί εξοικειώθηκαν και πάλι με τα ελληνικά μαθηματικά, έμαθαν την Ισλαμική άλγεβρα, συνέθεσαν τις δύο παραδόσεις και επιχείρησαν δικό τους ξεκίνημα.

Στη δεκαετία του 1630, ο Καρτέσιος και ο Fermat ανακαλύπτουν την αναλυτική γεωμετρία δηλαδή, ότι οι καμπύλες μπορούσαν να αναπαρασταθούν με εξισώσεις, σήμαινε όμως και, αντίστροφα, ότι κάθε εξίσωση προσδιόριζε μια καμπύλη.

Η Καρτεσιανή έννοια του μεταβλητού μεγέθους αποτέλεσε κομβικό σημείο για τα μαθηματικά. Μέσα από αυτήν, η κίνηση, και άρα η διαλεκτική, εισήλθαν στα μαθηματικά και κατέστησαν αναγκαίο τον Απειροστικό Λογισμό.

Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα στις αρχές του 17^{ου} αιώνα οι φοιτητές να έλθουν αντιμέτωποι με έναν εκρηκτικό αριθμό καμπυλών προς εξέταση. Όμως για τις νέες καμπύλες οι παλιές ελληνικές μέθοδοι της συνθετικής γεωμετρίας ήταν πλέον ανεπαρκείς για τη μελέτη π.χ. εμβαδών, μήκους τόξου, και οι λύσεις επρόκειτο να δοθούν με τη χρησιμοποίηση των νέων εργαλείων: της συμβολικής άλγεβρας και της αναλυτικής γεωμετρίας.

Το πρόβλημα της εφαπτομένης έπαιρνε ολοένα και πιο εξέχουσα θέση. Στην έρευνα διακρίνονται δύο τάσεις, μια γεωμετρική και μια αλγεβρική.

Την εποχή εκείνη υπήρχαν τέσσερις τύποι προβλημάτων:

(i) Αν δοθεί ο τύπος της απόστασης που καλύπτει ένα σώμα ως συνάρτηση του χρόνου, να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε κάθε στιγμή, και αντίστροφα. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει άμεσα στη μελέτη της κίνησης και οι δυσκολίες ήταν ότι οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις που ενδιέφεραν το 17^ο αιώνα μεταβάλλονταν από στιγμή σε στιγμή.

(ii) Η εύρεση της εφαπτομένης μιας καμπύλης προέκυψε από πολλές πηγές. Ήταν ένα καθαρό πρόβλημα γεωμετρίας, ήταν όμως μεγάλης σημασίας για τις επιστημονικές εφαρμογές. Η οπτική, για παράδειγμα, ήταν μια από τις κύριες επιστημονικές επιδιώξεις του 17^{ου} αιώνα. Ο σχεδιασμός φακών ενδιέφερε άμεσα τους Fermat και Descartes. Για να μελετήσει κάποιος τη διέλευση του φωτός μέσα από ένα φακό, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία υπό την οποία το φως «χτυπάει» το φακό, ώστε να εφαρμόσει το νόμο της διάθλασης.

³⁶ Ε. Γιαννακούλιας, Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού σελ.20-22.

Επίσης ένα επιστημονικό πρόβλημα που ενέπλεκε την εφαπτομένη σε μια καμπύλη προέκυψε στη μελέτη της κίνησης. Η κατεύθυνση της κίνησης ενός κινούμενου σώματος σε κάθε σημείο της τροχιάς του είναι η κατεύθυνση της εφαπτομένης στην τροχιά.

(iii) Εύρεση της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης.

Όταν ένα βλήμα βάλλεται από ένα κανόνι, η απόσταση που θα διανύσει οριζοντίως – το βεληνεκές – εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζει το κανόνι με το έδαφος. Ένα πρακτικό πρόβλημα, ήταν η εύρεση της γωνίας που θα πραγματοποιούσε το μέγιστο βεληνεκές.

Η μελέτη των κινήσεων των πλανητών, επίσης, περιελάμβανε προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, όπως η εύρεση της μεγαλύτερης και της μικρότερης απόστασης ενός πλανήτη από τον ήλιο.

(iv) Εύρεση του μήκος καμπυλών, για παράδειγμα, της απόστασης που καλύπτει ένας πλανήτης σε μια δεδομένη χρονική περίοδο.

PIERRE DE FERMAT



Pierre de Fermat

Εικόνα 49

Ο Pierre de Fermat γεννήθηκε στις 17 Αυγούστου του 1601 σε μία μικρή πόλη της Νοτιοδυτικής Γαλλίας, την Beaumont-de-Lomange κοντά στην Toulouse. Ο πατέρας του ήταν ευκατάστατος έμπορος δερμάτων και κατείχε το αξίωμα "second consul" στο "παλαιό καθεστώς" (ancien regime) της Γαλλίας, κυβερνητική θέση ισοδύναμη με του σημερινού δημάρχου. Ο πατέρας του νυμφεύτηκε δύο φορές, αρχικά την Françoise Cazeueneuve και στην συνέχεια την Claire de Long. Δεν είναι εξακριβωμένο ποια από τις δύο ήταν η μητέρα του, φαίνεται όμως πιθανότερο να ήταν η Claire de Long. Δεν είναι επίσης σαφής η χρονολογία γέννησής του, καθώς έχουν ανευρεθεί στα αρχεία της Μοντωμπάν και της γενέτειράς του δύο εγγραφές με το όνομα Pierre Fermat, η μία χρονολογούμενη το 1601 και η άλλη το 1607. Άφησε μόνο ένα γιο που έγραψε βιβλία νομικής και εξέδωσε τις εργασίες του πατέρα του.

Δεν είναι γνωστές πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τα πρώτα στάδια της μόρφωσης του. Πιθανόν να έλαβε τη στοιχειώδη εκπαίδευση στο μοναστήρι των Φραγκισκανών "Grandselve" που βρισκόταν στην περιοχή της γενέτειράς του.

Ξεκίνησε από το πανεπιστήμιο της Toulouse πριν μετακομίσει στην όμορφη παραλιακή πόλη Bordeaux το δεύτερο μισό του 1620.

Μετά πήγε στη Orléans όπου σπούδασε και πήρε πτυχίο Νομικής, ενώ ακολούθησε καριέρα ως δικαστικός και εργάστηκε για λογαριασμό της τοπικής κυβέρνησης, παίρνοντας τον τίτλο του συμβούλου στο Ανώτατο Δικαστήριο της Toulouse, θέση την οποία κράτησε μέχρι το τέλος της ζωής του. Το 1631, έχοντας το επάγγελμα του δικηγόρου, το οποίο του εξασφάλιζε κοινωνική άνοδο αλλά και άνοιγε τους δρόμους της πολιτικής εξουσίας και κυβερνητικό αξίωμα, άλλαξε το όνομα του από Pierre Fermat σε Pierre de Fermat. Μιλούσε Λατινικά, Ελληνικά, Ιταλικά και Ισπανικά και επαινέθηκε για τα εδάφια που έγραψε σε πολλές γλώσσες, και έγινε περιζήτητος σε όσους ασχολούνταν με την διόρθωση Ελληνικών εδαφίων.

Ασχολήθηκε με την αναλυτική γεωμετρία (πρωτοποριακή εργασία Ad Locos Planos et Solidos Isagoge-1636).

Η πρωτοπόρος εργασία του Fermat στην Αναλυτική Γεωμετρία κυκλοφόρησε σε χειρόγραφη μορφή το 1636, πριν ο Descartes κυκλοφορήσει την περίφημη *Γεωμετρία* (La Géométrie) του.

Ο Fermat ασχολήθηκε με την θεωρία αριθμών, ενώ μελέτησε την ειδική περίπτωση της διοφαντικής εξίσωσης που αποκλήθηκε "εξίσωση του Πελ":

$$x^2 - ny^2 = 1$$

τους τέλειους αριθμούς, τους "φιλικούς" (amicable) αριθμούς και τους αριθμούς που θα γίνουν αργότερα γνωστοί ως "αριθμοί του Fermat":

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

όπου n είναι μη αρνητικός ακέραιος.

Ενώ ερευνούσε τους τέλειους αριθμούς, επινόησε και το αντίστοιχο θεώρημα. Επινόησε επίσης μέθοδο παραγοντοποίησης και την τεχνική της "κατάβασης εις άπειρο", μια ειδική περίπτωση της απαγωγής σε άτοπο, την οποία χρησιμοποίησε για να αποδείξει το τελευταίο Θεώρημα για $n=4$.

Αν και ο ίδιος ισχυριζόταν ότι είχε αποδείξει όλα του τα θεωρήματα, έχουμε ελάχιστες καταγραφές αυτών των αποδείξεων. Πολλοί μαθηματικοί, ανάμεσά τους και Carl Friedrich Gauss αμφέβαλλαν για αρκετούς από τους ισχυρισμούς του, ειδικά αν λάμβανε κανείς υπόψη τόσο τη δυσκολία ορισμένων από τα προβλήματα που αντιμετώπισε όσο και τα περιορισμένα μαθηματικά "εργαλεία" που ήταν γνωστά στην εποχή του.

Το περίφημο θεώρημα του ανακαλύφθηκε από τον γιο του στα περιθώρια μιας έκδοσης του Διόφαντου, με την παρατήρηση ότι το περιθώριο ήταν πολύ μικρό για να χωρέσει και την απόδειξή του. Τελικά το θεώρημα αποδείχθηκε μόλις το 1994, με μαθηματικές τεχνικές άγνωστες στον Fermat.

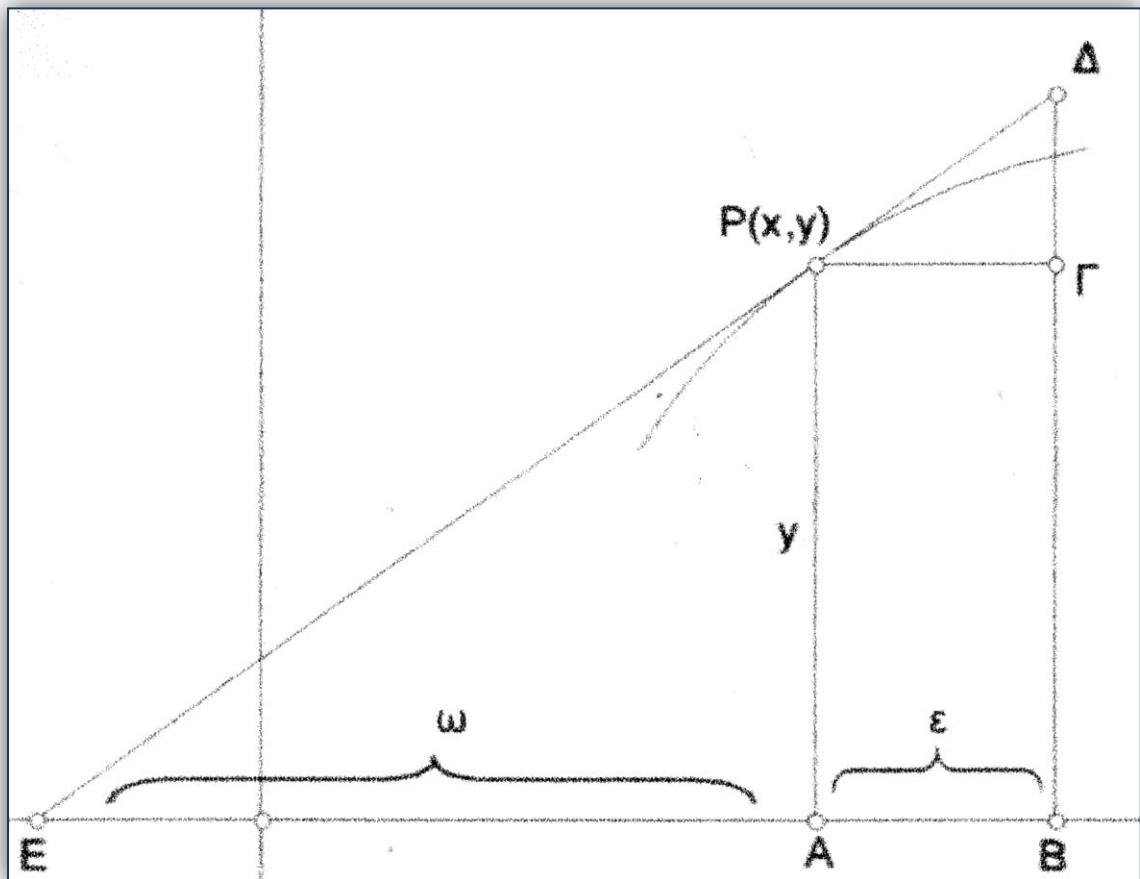
Σημαντική ήταν η συμβολή του στον ολοκληρωτικό λογισμό, αφού κατόρθωσε να επινοήσει τύπο υπολογισμού του ολοκληρώματος ανάγοντάς το σε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου. Ο τύπος αυτός πιθανότατα χρησίμευσε τόσο στον Newton όσο και στον Leibniz οι οποίοι, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, παρουσίασαν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Στο έργο του *In Methodus ad disquirendam maximam et minima and in De tangentibus linearum curvarum* ο Fermat να αναπτύσσει μια μέθοδο προσδιορισμού των ελαχίστων, μεγίστων και εφαπτομένων σε καμπύλες ποικίλων συναρτήσεων, ισοδύναμη με αυτή του διαφορικού λογισμού.

Πιο συγκεκριμένα, στα 1634 ο Fermat προσπαθώντας να λύσει προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, παρατήρησε ότι στα σημεία όπου η συνάρτηση έπαιρνε μέγιστο ή ελάχιστο, η εφαπτομένη ήταν παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα. Εισάγει τότε μια καινούργια ιδέα που για πρώτη φορά παρουσιάζεται στην ιστορία του διαφορικού λογισμού:

«Αυξάνει ελάχιστα τη μεταβλητή και μετά τις πράξεις αφήνει την αύξηση να εξαφανίζεται.»

Περιγράφουμε παρακάτω τη μέθοδο εύρεσης της εφαπτομένης από το Fermat :



Εικόνα 50

Το τμήμα AE λέγεται υποεφαπτομένη στο σημείο P.

Από την ομοιότητα των $\triangle PAE, \triangle P\Gamma\Delta$ έχω :

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Psi} = \frac{\varepsilon}{\omega} \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{\Psi \cdot \varepsilon}{\omega} \text{ και συνεπώς } B\Delta = \Psi + \frac{\Psi \cdot \varepsilon}{\omega} \quad (1)$$

Καθώς ε γίνεται πολύ μικρό τότε $B\Delta = f(\chi + \varepsilon) \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) καθώς και με καμπύλη της μορφής $\Psi = \chi^2 + 3\chi$ προκύπτει :

$$f(\chi + \varepsilon) = \psi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega} \right), \text{οπότε}$$

$$(\chi + \varepsilon)^2 + 3(\chi + \varepsilon) = \psi + \frac{\varepsilon \cdot \psi}{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 + 2\chi \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 + 3\chi + 3\varepsilon = \psi + \frac{\varepsilon \cdot \psi}{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon \cdot \psi}{\omega} = 2\chi \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 + 3\varepsilon$$

Στην μέθοδό του ο Fermat παραλείπει το ε^2 και έχουμε :

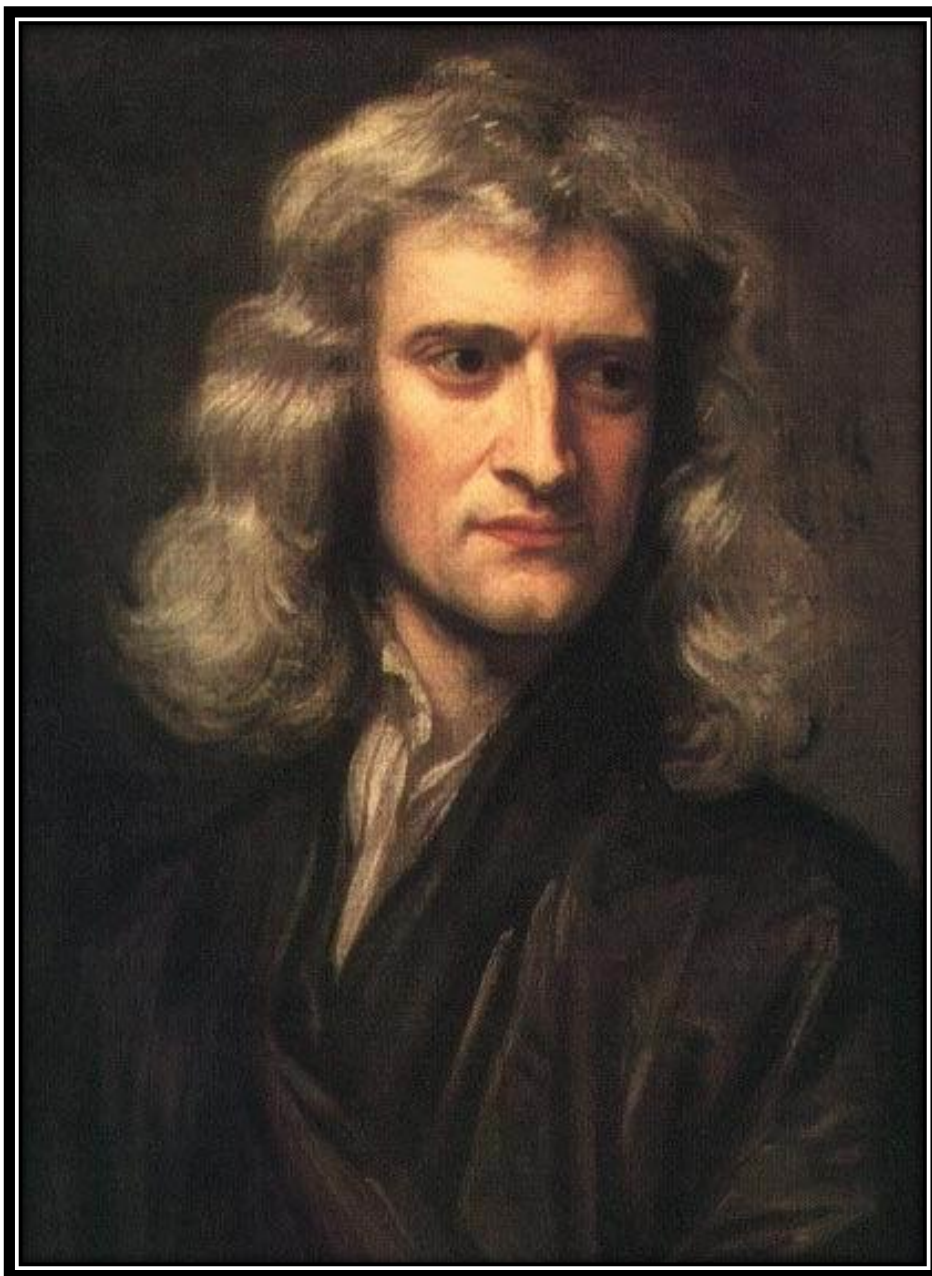
$$\frac{\varepsilon \cdot \psi}{\omega} = 2\chi \cdot \varepsilon + 3\varepsilon \text{ και διαγράφει το } \varepsilon \text{ και προκύπτει } \frac{\psi}{\omega} = 2\chi + 3, \text{BA} = \frac{4}{5}$$

Συνεχίζει για $\chi=1$ και $\psi=4$ προκύπτει $\omega = \frac{4}{5}$.

Και ο Fermat επισημαίνει ότι εφόσον γνωρίζω ότι : $\omega = \frac{4}{5}$, τότε γνωρίζω και την κλίση .

Η εφαπτομένη (ε) ορίζεται από το σημείο $A\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ και το σημείο P.

ISSAC BARROW



Εικόνα 51



Εικόνα 52

Ο Isaac Barrow (Οκτωβρίου 1630 - 4 Μαΐου 1677) γεννήθηκε και πέθανε στο Λονδίνο άγαμος στην ηλικία των 47, ενώ θάφτηκε στο Αβαείο του Γουέστμινστερ (Westminster Abbey).

Σπούδασε στα κολλέγια Charterhouse , Felsted και Trinity του Cambridge και για λόγους θρησκείας ταξίδεψε στο εξωτερικό για μια τριετία και έτσι επισκέφθηκε διάφορες πόλεις όπως το Παρίσι, τη Φλωρεντία, τη Σμύρνη, την Κωνσταντινούπολη καθώς και τη Βενετία. Αν και κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου των ταξιδιών του τα μαθηματικά δεν μονοπώλησαν το ενδιαφέρον του ,παρόλο αυτά η αλληλογραφία του με το Cambridge προδίδει ότι έλαβε πολλά ερεθίσματα από την επικοινωνία την οποία είχε με επιφανείς μαθηματικούς της εποχής του τόσο από τη Γαλλία όσο και από την Ιταλία³⁷.

Με την επιστροφή του στην Αγγλία ανέλαβε την έδρα των Ελληνικών στο Cambridge και λόγω του χαμηλού μισθού του δέχθηκε να διδάξει παράλληλα Γεωμετρία στο κολλέγιο Gresham του ιδίου Πανεπιστημίου.

Κατά τη διετία 1662 –1663 δίδαξε Γεωμετρία και Αστρονομία ενώ το 1663 διορίστηκε καθηγητής Μαθηματικών στο Cambridge και κατείχε αυτή τη θέση αυτή για έξι χρόνια . Ο Newton ήταν μαθητής και φίλος του και τον διαδέχτηκε στην έδρα των μαθηματικών στο Cambridge μετά από την παραίτηση του Issac Barrow ενώ εκείνος ανεκηρύχθηκε διδάκτωρ θεολογίας το 1670.

Ο Barrow κατά τη διετία 1664 – 1665 έδωσε διαλέξεις οι οποίες είχαν κυρίως φιλοσοφικό περιεχόμενο και αφορούσαν έννοιες του χώρου, του χρόνου και της κίνησης , ενώ , μελέτησε τις καμπύλες ως διαδρομές κινουμένων σημείων και οι πέντε πρώτες διαλέξεις τις οποίες συμπεριέλαβε στο έργο του με τίτλο : <<Lectiones geometricae>> πιθανότατα χρονολογούνται σε αυτήν την περίοδο.

Στην πρώτη διάλεξη διαπραγματεύεται τη φύση του χρόνου και της κίνησης .

Ο Barrow αναφέρει ότι:

- ❑ Ο χρόνος και η κίνηση αλληλομετρώνται.
- ❑ Ο χρόνος αποτελεί ή από άθροισμα ανερχομένων στιγμών ή από τη συνεχή ροή μιας στιγμής.
- ❑ Μια γραμμή μπορούμε να την αντιληφθούμε ως το ίχνος μιας συνεχώς ρέουσας στιγμής.
- ❑ Επομένως , ο χρόνος μπορεί να αναπαρασταθεί από μια ευθεία γραμμή.
- ❑ Η διαιρετότητα είναι πάντοτε δυνατή είτε απείρως ή επ' αόριστον. Οι στιγμές είναι απείρως μικρά χρονικά μέρη στα οποία διανύονται απείρως μικρά διαστήματα.
- ❑ Κάθε τάξη ταχύτητας μπορεί να παραχθεί από τις υπόλοιπες ή τη χαμηλότερη

³⁷ Baron, M. E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon Press, 1969, p. 239.

από αυτές μέσω της αυξήσεως ή της συνεχούς ροής κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο τόσο μια γραμμή μπορεί να παραχθεί ή μέσω της συμπαράθεσης σημείων ή δια της κίνησης όσο και ο χρόνος δια της διαδοχής στιγμών.

- Οι ταχύτητες μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω ευθειών καθέτων στην γραμμή που αναπαριστά το χρόνο.
- Το εγκλειόμενο χωρίο αναπαριστά το συνολικό διάστημα που διανύθηκε κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Στη δεύτερη διάλεξη ο Barrow μελετά την παραγωγή καμπυλών και επιφανειών μέσω της σύνθεσης κινήσεων.

Κατά τον Barrow μια καμπύλη παράγεται από την κίνηση ενός σημείου κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, ενώ συγχρόνως η γραμμή κινείται παράλληλως στον εαυτό της.

Ένας κώνος παράγεται από την περιστροφή ενός ευθυγράμμου τμήματος γύρω από το ένα άκρο του, ενώ ένας κύκλος από την περιστροφή μιας γραμμής στο επίπεδο επί του οποίου αυτή κείται. Οι προαναφερθείσες ιδέες περί κίνησης ταιριάζουν με την έννοια των αδιαιρέτων του Cavalieri. Πράγματι, μια καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως αποτελούμενη από αναρίθμητες τέτοιες γραμμές απείρως μικρές.

Για παράδειγμα, ο κυκλικός δίσκος αποτελείται από ομόκεντρους κύκλους το πλήθος των οποίων ισούται με αυτό των σημείων της ακτίνας, και η επιφάνεια κώνου από άπειρα στο πλήθος τρίγωνα.

Ο Barrow εκτός του ότι αποδέχεται τη χρήση των μεθόδων των αδιαιρέτων, πιστεύει ότι παράλληλα προσφέρουν στο επίπεδο των εφαρμογών τους στην ταχύτητα³⁸.

Στην τρίτη διάλεξη ο Barrow παράγει καμπύλες δια της συνθέσεως ευθυγράμμων και παραλλήλων ή περιστροφικών κινήσεων.

Εάν μια ευθεία γραμμή ΑΚ κινείται με σταθερή ταχύτητα, παράλληλα στον εαυτό της και σε διεύθυνση κάθετη στην αρχική της θέση, ενώ ταυτόχρονα ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος αυτής από το Α προς το Κ, τότε οι διαδοχικές θέσεις του Μ παράγουν μια καμπύλη.

Ομοίως, εάν η γραμμή ΑΚ περιστραφεί ομαλά περί το Α, ενώ ένα σημείο Μ κινείται επ' αυτής από το Α προς το Κ, τότε παράγεται μια έλικα.

Εφόσον μια εκ των δύο κινήσεων είναι ομαλή, τότε αυτή μπορεί να αναπαριστά το χρόνο της κίνησης. Επομένως, οι ιδιότητες των παραγομένων καμπύλων μπορούν να εξετασθούν μέσω της διερεύνησης των διαφορών οι οποίες παράγονται από την μεταβαλλόμενη ταχύτητα της άλλης κίνησης.

Η εφαρμογή των εννοιών του χρόνου και της κίνησης στην παραγωγή των καμπυλών απετέλεσαν για τον ίδιο τον Barrow απλά και μόνο μια εισαγωγή στη μελέτη τους, ενώ έχουν τεράστια σημασία για τις γεωμετρικές αποδείξεις οι οποίες περιέχονται στις διαλέξεις VII – X.

³⁸ Baron, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon Press, 1969, p. 241.

Στις διαλέξεις αυτές αποδεικνύει τα θεμελιώδη θεωρήματα, που σχετίζονται με τις έννοιες της εφαπτομένης, του τόξου, του εμβαδού και της επιφανείας κάνοντας χρήση τόσο των αξονικών όσο και των πολικών συντεταγμένων.

Στην διάλεξη X ο Barrow παραθέτει την γεωμετρική απόδειξη του *θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού λογισμού*.

LECTIONES Geometricæ;

In quibus (præsertim)
GENERALIA CURVARUM Linearum SYMPTOMATA
DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW Collegii
SS. Trinitatis in Acad. Cantab. Socio, & Societatis Re-
giæ Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπ' οὐκ ἔπ' οὐκ, ὁξὺς φαί-
νονται· οἷτι βροδοῦν, αὐτὸ ἐν τούτῳ παιδιδάσκῃ· καὶ γυμνάσωνται, καὶ
μηδὲν ἄλλο ἐπιδιδάσκῃ, ὅμως εἴσῃ τὸ ὁξὺτερον αὐτοῖς αὐτῶν γίγνεται
πάντες ἐπιδιδάσκῃ. Plato de Repub. VII.

UNIVERSITY
LIBRARY
CAMBRIDGE



LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud
Johannem Danmore, & Octavianum Pulleyn Juniores.
M. D. C. L. X. X.

Note the absence of the usual words "Habitæ Cantabrigiæ," which on the title-pages of his other works indicate that the latter were delivered as Lucasian Lectures.—J. M. C.

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΤΟΥ BARROW

Σύμφωνα με την Barron το έργο του Barrow αποτελεί την κορύφωση των γεωμετρικών ερευνών του 17^{ου} αιώνα ενώ ο συστηματικός τρόπος αντιμετώπισης των ιδιοτήτων των καμπυλών, όπως για παράδειγμα των εφαπτομένων, των τόξων και των εμβαδών παρέδωσαν στους Newton και Leibniz υλικό το οποίο έδωσε την ώθηση για την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού³⁹.

Ο Barrow κατανόησε καλύτερα από όλους τους προγενέστερους και σύγχρονους σε σχέση με εκείνον ερευνητές την σημασία της σχέσης μεταξύ των προβλημάτων εύρεσης εφαπτομένων και των προβλημάτων τετραγωνισμών.⁴⁰

Σύμφωνα με την γνώμη του ιστορικού των μαθηματικών V. Katz⁴¹, ο Barrow δεν μπορεί να θεωρηθεί από τους πρωτοπόρους στο πεδίο του απειροστικού λογισμού, αφού δεν διαφαίνεται πουθενά στο έργο του η γνώση του αντιστρόφου των διαδικασιών διαφορίσης και ολοκλήρωσης, ενώ τα εξαγόμενα των ερευνών του δεν χρησιμοποιούνται στον προσδιορισμό εμβαδών.

Θα αναφερθεί όμως και η άποψη μιας μειοψηφίας σύμφωνα με την οποία ο Barrow γνώριζε τον αλγεβρικό χειρισμό του απειροστικού λογισμού και έκανε χρήση συμβόλων αλλά, δεν δημοσίευε τα αποτελέσματά του παρά μόνο σε αμιγώς γεωμετρική μορφή⁴².

Ο Barrow ήταν ένας εξαιρετικός γεωμέτρης ο οποίος για να μελετήσει τις ιδιότητες των καμπυλών επιστράτευσε τα αδιαίρετα του Cavalieri, ενώ δεν χρησιμοποίησε κανένα συμβολισμό.⁴³

Η παραίτησή του από την Λουκασιανή έδρα πιθανότατα συνδέεται με τον πολύ χαμηλό αντίκτυπο του έργου του στην μαθηματική κοινότητα της εποχής του, αν και σύμφωνα με κάποιους άλλους την αιτία αυτής της αποχώρησής του απετέλεσαν οι τεραστίου διαμετρήματος δυνατότητες ενός μαθητή του, ο οποίος και τον διαδέχθηκε, του Isaac Newton.

³⁹ Baron, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon Press, 1969, p. 251

⁴⁰ Boyer, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, Dover Publications, 1959, p. 181.

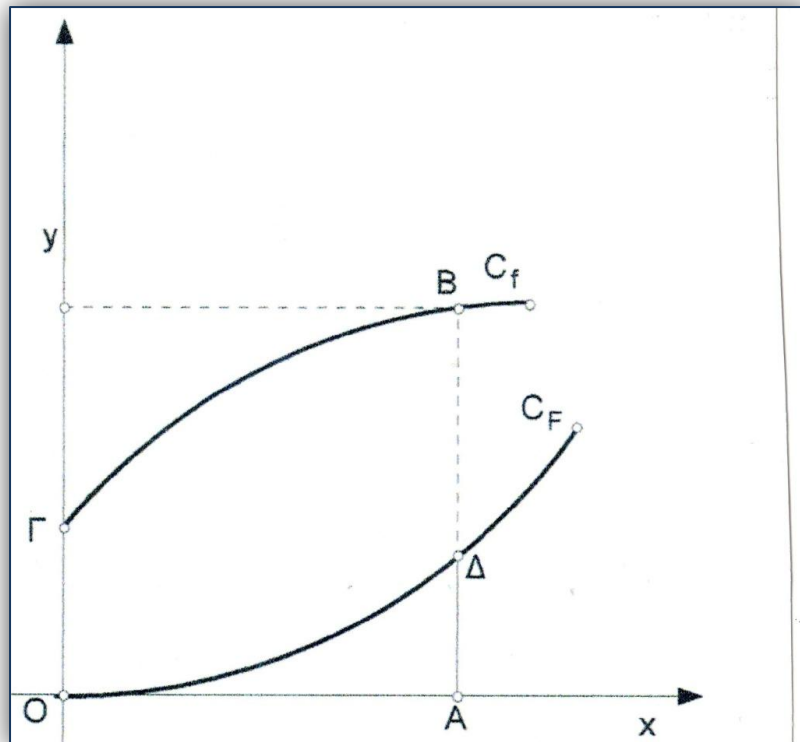
⁴¹ V. J. Katz, *A History of Mathematics*, New York, HarperCollins College Publishers, 1993, p. 459.

⁴² Barrow, I., *The Geometrical Lectures*, μτφρ. – επιμ.: Child J. M., New York, Dover Publications, 2006, pp. 28 - 29.

⁴³ Boyer, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, Dover Publications, 1959, p. 179.

**Το θεμελιώδες θεώρημα
(Γεωμετρική απόδειξη του Barrow)⁴⁴**

Έστω f αύξουσα συνάρτηση, με γραφική παράσταση C_f . Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi = F(x)$ του εμβαδού, δηλαδή, τη συνάρτηση που σε κάθε x αντιστοιχίζει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , από τον άξονα $O\psi$, τον άξονα Ox και την κάθετη σ' αυτόν ευθεία από το σημείο με τετμημένη x , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εικόνα 53

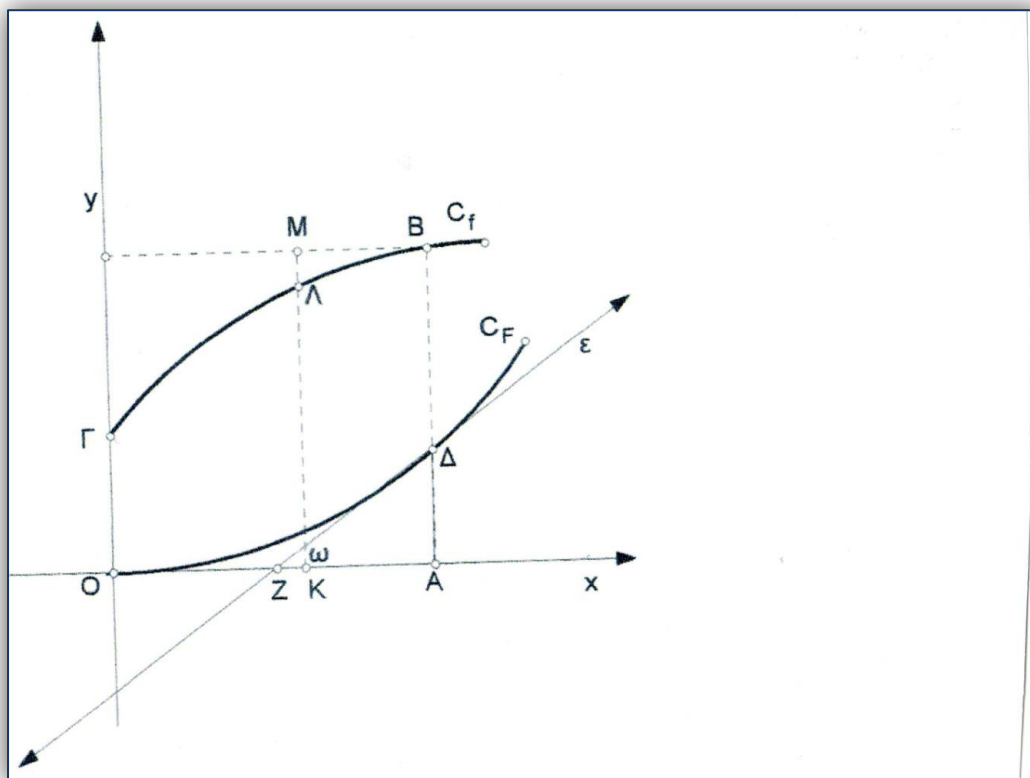
Αν θεωρήσουμε σημείο A του άξονα Ox με τετμημένη x_0 και έστω η κάθετη στο A ότι τέμνει την C_f στο B και την C_F στο Δ .

Τότε $F(x_0) = A\Delta = (OAB\Gamma)$, δηλαδή, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. (αν χρησιμοποιήσουμε τη σημερινή ορολογία).

Ο Barrow θέλει να αποδείξει ότι: $F'(x_0) = f(x_0)$ ότι δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης της C_F στο Δ είναι ίση με το $f(x_0)$.

Η διαφορετικά: $εφ\omega = f(x_0) = AB$.

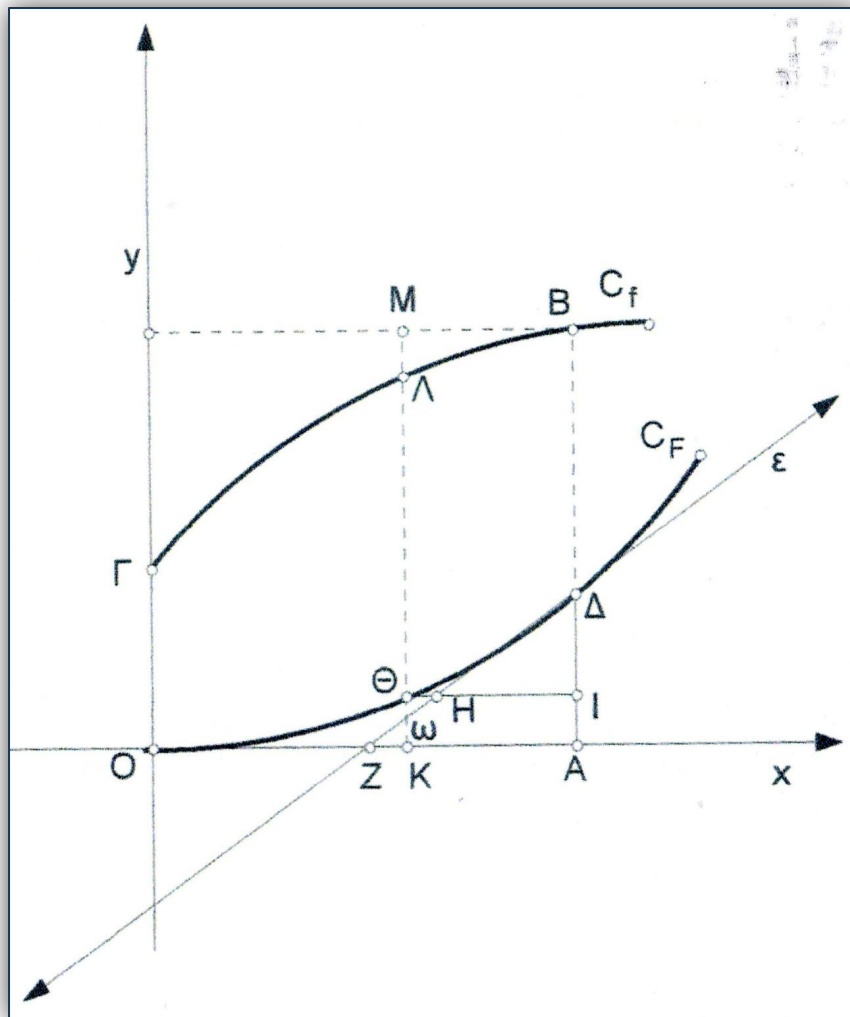
⁴⁴ Γιαννακούλιας Ε. *Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού*. Αθήνα 2005.



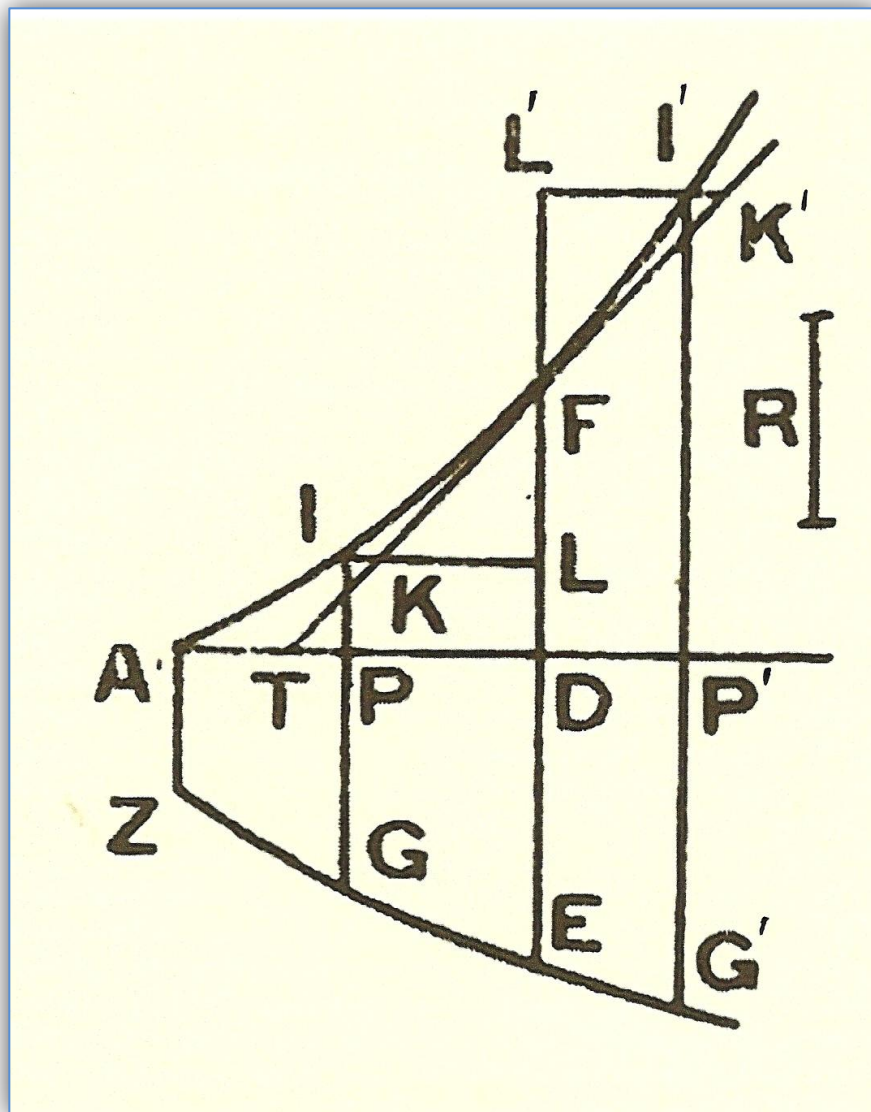
Εικόνα 54

Αλλά , αφού $\varepsilon\varphi\omega = \frac{A\Delta}{AZ}$ αρκεί να αποδείξει ότι : $\frac{A\Delta}{AZ} = AB$.

Θεωρεί , σημείο Z στον άξονα Ox ώστε $\frac{A\Delta}{AZ} = AB$ και αποδεικνύει ότι η ΔZ είναι η εφαπτομένη της C_f .



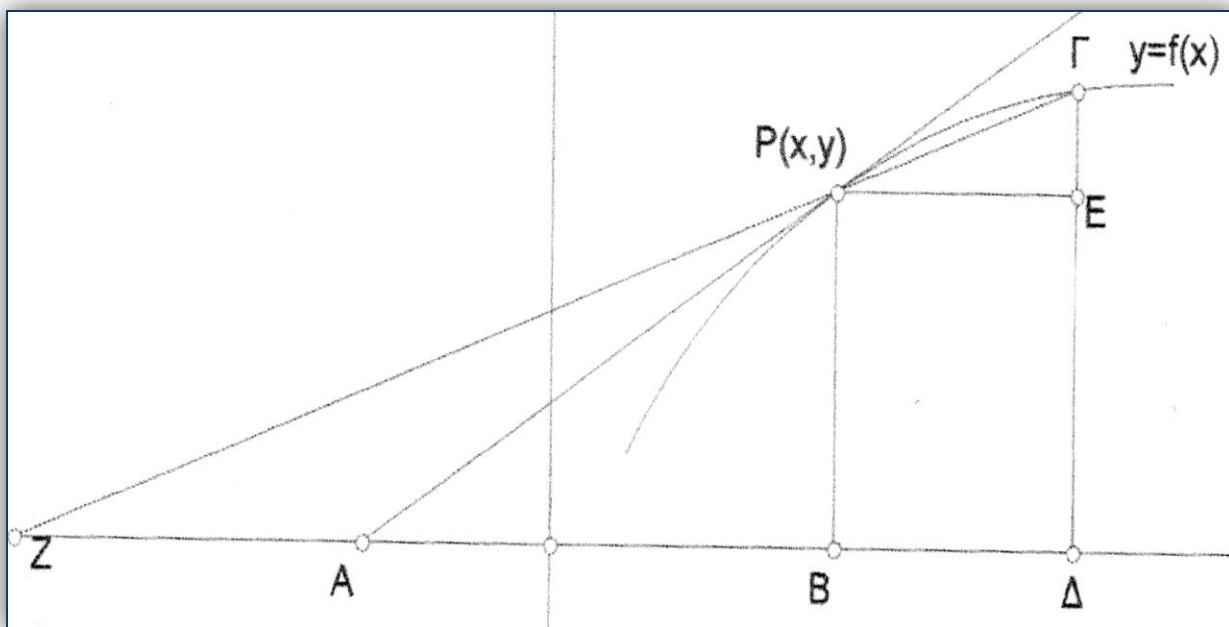
Εικόνα 41



Barrow's diagram for Proposition 11, Lecture 10. For clarity, Prime superscripts have been added to labels that appear repeated in the original diagram.

Στη διάλεξη 10 των *Lectioes* καταφεύγει σε υπολογισμούς για να υπολογίσει την εφαπτομένη μιας καμπύλης . Παραθέτουμε τη διαδικασία για την εύρεση εφαπτομένη σε σημείο της γραφικής παράστασης της καμπύλης $\psi = \chi^2 + 3\chi$.

Στον άξονα $\chi\chi'$ θεωρούμε σημείο Δ και έστω ε η απόσταση του από το B (οσοδήποτε μικρή) . Τότε :



Εικόνα 58

Τα τρίγωνα $\triangle PBZ$ και $\triangle P\Gamma E$ είναι όμοια και ισχύει :

$$\frac{\Gamma E}{PE} = \frac{PB}{ZB} \Rightarrow BZ = \psi \cdot \frac{\varepsilon}{\Gamma E}$$

Ο Issac Barrow υποστηρίζει ότι το $\triangle P\Gamma E$ γίνεται ολοένα μικρότερο καθώς το Γ πλησιάζει το P και η $P\Gamma$ γίνεται εφαπτομένη όταν το Z συμπίπτει με το A τότε :

$$BA = \psi \frac{\varepsilon}{\Gamma E} \quad (1).$$

Προσδιορίζουμε τη θέση του σημείου A στον άξονα xx' άρα και την εφαπτομένη PA .

Για το παράδειγμα έχω :

$$\begin{aligned} \psi + \beta &= (\chi + \varepsilon)^2 + 3 \cdot (\chi + \varepsilon) \Leftrightarrow \\ \psi + \beta &= \chi^2 + 2\chi \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 + 3 \cdot \chi + 3 \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \\ \psi + \beta - \chi^2 - 2\chi \cdot \varepsilon - \varepsilon^2 - 3 \cdot \chi - 3 \cdot \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

Παραλείπεται το ε^2 , όταν η δύναμη είναι μεγαλύτερη του 1.

$$\begin{aligned} \psi + \beta - \chi^2 - 2\chi \cdot \varepsilon - 3 \cdot \chi - 3 \cdot \varepsilon &= 0 \\ \psi - \chi^2 + (\beta - 2 \cdot \chi \cdot \varepsilon - 3 \cdot \varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

Παραλείπεται τους όρους που δεν έχουν ε .

$$\beta - 2 \cdot \chi \cdot \varepsilon - 3 \cdot \varepsilon = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2 \cdot \chi + 3} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{1}{2 \cdot \chi + 3} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\Gamma\text{E}} = \frac{1}{2 \cdot \chi + 3}, \text{ και}$$

$$\text{BA} = \psi \frac{1}{2 \cdot \chi + 3}$$

Για $\chi=1$, $\psi=4$ τότε $\text{BA} = \frac{4}{5}$.

Άρα , η ευθεία (ε) ορίζεται από τα σημεία Α και Ρ .

GOTTFRIED LEIBNITZ



Εικόνα 59

Ο Gottfried Leibniz γεννήθηκε στις 21 Ιουνίου (σύμφωνα με το Γρηγοριανό Ημερολόγιο που είχε υιοθετήσει η Γερμανική Αυτοκρατορία στις 1 Ιουλίου το 1700) 1646 στη Λειψία. Ο πατέρας του ήταν νομικός και καθηγητής της ηθικής φιλοσοφίας ενώ , η μητέρα του ήταν κόρη νομικού . Έτσι , ο Leibniz από μικρή ηλικία ήρθε σε επαφή με νομικά και φιλοσοφικά προβλήματα . Ο Leibniz ήταν σε μεγάλο βαθμό αυτοδίδακτος διαβάζοντας στην περιεκτική βιβλιοθήκη του πατέρα του και μελετώντας τα Ελληνικά και τα Λατινικά από μόλις οχτώ ετών. Στα δώδεκά του ανέπτυξε ήδη τις αρχές μιας μαθηματικής νοηματικής γλώσσας εξετάζοντας λογικά προβλήματα.

Φοίτησε στο πανεπιστήμιο της Λειψίας και άρχισε να ασχολείται με φιλοσοφικές σπουδές κοντά στον θεολόγο Adam Scherzer και τον φιλόσοφο Jakob Thomasius . Με την κατοπινή μεταγραφή του στο πανεπιστήμιο της Ιένα ασχολήθηκε με πυθαγόρεια προβλήματα κοντά στον μαθηματικό, φυσικό και αστρονόμο Erhard Weigel . Ήδη στα είκοσι του χρόνια ήθελε να γίνει διδάκτορας των Νομικών, όμως οι καθηγητές της Λειψίας του το απαγόρευσαν εξαιτίας της μικρής του ηλικίας. Έτσι αναγκάστηκε να πάρει για δεύτερη φορά μεταγραφή στο πανεπιστήμιο της Νυρεμβέργης . Η διατριβή του των Νομικών τράβηξε την προσοχή του αρχιεπισκόπου του Μάιντς, ο οποίος του ανέθεσε την αναθεώρηση του νομικού κώδικα και τον εισήγαγε σε θέματα πολιτικής και διπλωματίας. Έτσι του δόθηκε και η ευκαιρία για ταξίδια, στα οποία έκανε και μερικές ιδιαίτερες γνωριμίες. Μια από αυτές ήταν η γνωριμία με τον φιλόσοφο Σπινόζα . Στη διδακτορική του διατριβή το 1666 , παρουσιάζει μια μάλλον επιφανειακή γνώση της μαθηματικής βιβλιογραφίας αντλώντας παραδείγματα από τη στοιχειώδη θεωρία αριθμών (μεταθέσεις και συνδυασμοί), ενώ διαφαίνεται η άγνοια των μαθηματικών έργων της εποχής του⁴⁵.

Διαβάζοντας , γύρω στα 1667 τα έργα των Cavalieri και Leotaud με τίτλους *Geometria indivisibilibus* και *Examen circuli quadraturae* αντίστοιχα έρχεται σε επαφή με την έννοια των αδιαίρετων ποσοτήτων και γράφει το έργο του *Hypothesis physica nova* πέντε χρόνια αργότερα όπου διαφαίνεται μια ασαφή άποψη περί αδιαιρετικών μεθόδων (κάτι το οποίο πιθανότατα οφείλεται στις πολυποίκιλες δραστηριότητές του .)

Το 1672 επισκέφθηκε το Παρίσι όπου ήλθε σε επαφή με τον Huygens , ο οποίος αποτέλεσε την αφορμή να ξεκινήσει τις μαθηματικές έρευνες , ενώ το 1673 επισκέφθηκε για πρώτη φορά το Λονδίνο ως διπλωμάτης, όπου έγινε επισήμως μέλος της Royal Society. Οι μαθηματικοί ερευνητές στο Λονδίνο θεωρούν τον Leibniz μάλλον, φιλόδοξο και υπερφίαλο ερευνητή , έτσι , τα γραπτά του εκείνης της περιόδου προδίδουν ότι δεν επωφελήθηκε στο ελάχιστο από τις επισκέψεις του στο Λονδίνο σε σχέση με τη φύση του σημαντικού μαθηματικού έργου το οποίο λάμβανε χώρα τόσο στο Cambridge όσο και στο St. Andrews.

Στη συνέχεια ο Leibniz επιστρέφει στο Παρίσι όπου μελετά τα έργα *Philosophical Transactions* του Huygens , *Logarithmotechnia* του Mercator και του επιτόμου *Optical and Geometrical Lectures* του Barrow.

Ειδικά , σε ότι αφορά το έργο του Barrow έχει ειπωθεί ότι τόσο ο Newton όσο και ο

⁴⁵ Baron, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon Press, 1969, p. 269.

Leibniz απλώς μετέφραζαν σε αλγεβρική μορφή το έργο του Barrow (και μάλιστα κάποιοι χρεώνουν στον Leibniz απλά και μόνο την ανάπτυξη ενός νέου συμβολισμού) θεωρώντας τον τελευταίο ως εκείνον ο οποίος πραγματικά επινόησε τον απειροστικό λογισμό.

Ο Leibniz , βρισκόμενος πλέον στο Παρίσι αντιλαμβάνεται την έκταση και το μέγεθος της άγνοιας του και ωθείται σε μελέτη έργων των Pascal, Fabri, Gregoire de Saint-Vincent και Sluce.

Τα βιβλία των παραπάνω ερευνητών απέτέλεσαν πηγή έμπνευσης για τον Leibniz , ενώ ταυτόχρονα και σημείο αφετηρίας των δικών του ερευνών.

Το 1673, εμπνευσμένος από τους χειρισμούς του Pascal ανέπτυξε έναν γενικό μετασχηματισμό μέσω του οποίου το εμβαδόν ενός τεταρτοκυκλίου εκφραζόταν ως άπειρη σειρά.

Το έργο του Pascal ήταν πιο ευκολονόητο από άλλα αντίστοιχα και μέσω της ανάγνωσής του ο Leibniz διδάχθηκε τη χρήση της αρχής των ροπών στην γεωμετρία και τις εφαρμογές αυτής στον προσδιορισμό των κέντρων βαρών στερεών εκ περιστροφής.

Ο Leibniz έχοντας κατανοήσει τα απλά τριγωνικά και πυραμιδικά αθροίσματα του Pascal προχώρησε στην ερμηνεία αυτών με βάση τις δικές του εξελικτικές ιδέες επί των διαφορών, των αθροισμάτων και των αθροισμάτων των αθροισμάτων.

Ο Leibniz καθιερώνει μια νέα ορολογία με απλό συμβολισμό και δημιούργησε ένα μεθοδικό διαφορικό λογισμό καθώς ο ίδιος ο Leibniz έλεγε⁴⁶:

Το μυστικό της ανάλυσης είναι η καθιέρωση κατάλληλης ορολογίας και συμβολισμού και η τέχνη της καλής χρήσης των συμβόλων.

Έτσι ασχολήθηκε με την ανεύρεση μιας οικουμενικής γλώσσας για τη μεταβολή και ιδιαίτερα για την κίνηση και δημιούργησε έναν καινούργιο λογισμό στο Παρίσι, μεταξύ 1673 και 1676.

Όπως ο ίδιος αναφέρει, γύρω στα 1673, μελετώντας το έργο του Pascal :

«*Traité des sinus du quart de cercle*» αντιλήφθηκε ότι ο καθορισμός της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης εξαρτάται από το λόγο των διαφορών της συνάρτησης και της μεταβλητής, καθώς οι διαφορές αυτές γίνονται απείρως μικρές.

Ο Leibniz θεώρησε χρήσιμο εργαλείο το “χαρακτηριστικό τρίγωνο” και παρατήρησε ότι ο καθαρισμός της εφαπτομένης στο P εξαρτάται από το λόγο των διαφορών της συνάρτησης και της μεταβλητής καθώς αυτές οι διαφορές γίνονται απείρως μικρές .

Όρισε ότι :

«εφαπτομένη μιας καμπύλης είναι η ευθεία η οποία συνδέει δύο διαδοχικά σημεία της καμπύλης τα οποία απέχουν μεταξύ τους απείρως μικρή απόσταση»,

⁴⁶ Ε. Γιαννακούλιας, Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού

Αφού όρισε ότι :

«εφαπτομένη μιας καμπύλης είναι η ευθεία η οποία συνδέει δύο διαδοχικά σημεία της καμπύλης τα οποία απέχουν μεταξύ τους απείρως μικρή απόσταση».

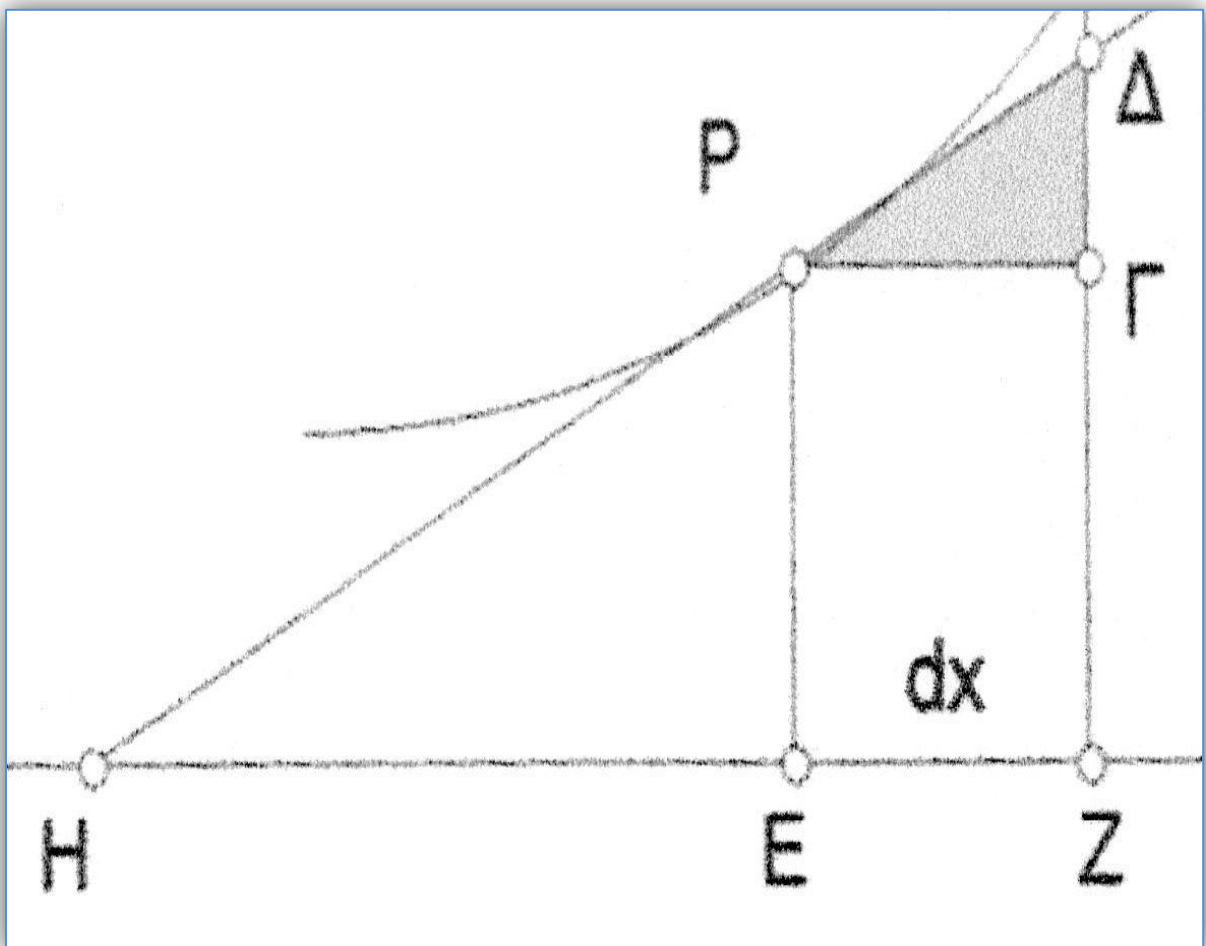
με την έννοια ότι η διαφορά dx είναι απείρως μικρή, θεώρησε ως βασική έννοια το διαφορικό.

Στο έργο του *Nova Methodus* αναφέρεται μόνο στο διαφορικό λογισμό και θεωρώντας ότι μια μεταβλητή ποσότητα x αυξάνεται ή ελαττώνεται συνεχώς και συμβολίζοντας με y τη συνάρτηση της x και με dx την απείρως μικρή μεταβολή της x , ορίζει το διαφορικό ως εξής:

Το διαφορικό dy της τεταγμένης y ενός σημείου P είναι μια ποσότητα, η οποία έχει λόγο προς τη διαφορά dx της τετμημένης x του P , ίσο με το λόγο της y προς την υποεφαπτομένη της καμπύλης στο P . η διαφορά dx μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε ποσότητα.

Συμβολίζουμε με ψ τη συνάρτηση του χ και $d\chi$ την απείρως μικρή μεταβολή στο χ και ορίζει το διαφορικό $d\psi$ της τεταγμένης .

Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα έχουμε :



Εικόνα 60

Τα τρίγωνα $\triangle P\Gamma\Delta$ *όμοια* $\triangle PHE$: $\frac{\Gamma\Delta}{P\Gamma} = \frac{PE}{HE} \Rightarrow \frac{\Gamma\Delta}{d\chi} = \frac{\psi}{HE}$.

Οπότε για τη διαφορά $d\chi$ το διαφορικό είναι $d\psi = \Gamma\Delta$ και κατά συνέπεια είναι :

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\psi}{HE}.$$

Όταν το $d\chi$ γίνεται ολοένα και μικρότερο και το σημείο Δ τείνει να γίνει σημείο της καμπύλης και η απείρως μικρή μεταβολή στο ψ θα αντιπροσωπεύει το μήκος του $\Gamma\Delta$ και το Δ θα τείνει να συμπίπτει με το σημείο P , δηλαδή, όπως θα το αναφέραμε σήμερα θα είχαμε :

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \lim_{d\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi + \Delta\chi) - f(\chi)}{d\chi}.$$

Στο σημείο αυτό υπάρχουν αντιφάσεις .

Αφ' ενός μεν το $\frac{d\psi}{d\chi}$ είναι ο λόγος των απειροστών μεταβολών dx και dy των μεταβλητών x, y , αντίστοιχα, και αφ' ετέρου το $\frac{d\psi}{d\chi}$ αντιπροσωπεύει το όριο του λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$, καθώς, $\Delta\chi \rightarrow 0$.

Με τα έργα του ο Leibniz αναπτύσσει μια νέα θεωρία διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Καθορίζει κανόνες διαφορίσης, εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων και συνδέει τα σημεία ακροτάτων (για πρώτη φορά) με το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου. Συνδέει επίσης το μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου με τα σημεία καμπής της καμπύλης και αποδεικνύει διάφορες προτάσεις και θεωρήματα που υπήρξαν βασικά για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας.

Σε χειρόγραφο της 11^{ης} Νοεμβρίου του 1675 ο Leibniz ⁴⁷θέτει το ερώτημα αν ισχύουν

οι τύποι :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(u \cdot v) = d(u) \cdot d(v) \\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d(u)}{d(v)} \end{array} \right\}$$

Απαντά αρνητικά, παρατηρώντας ότι : $d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 = 2xdx$ (εξαλείφοντας το $(dx)^2$, που το θεωρεί απειροστό ανώτερης τάξης) , ενώ είναι $d(x) \cdot dx = (x + dx - x) \cdot (x + dx - x) = (dx)^2$.

Όμως σε χειρόγραφό του με ημερομηνία 11 Ιουλίου 1677, ο Leibniz δίνει αποδείξεις για το γινόμενο και το πηλίκο. Για να αποδείξει ότι :

$$d(x \cdot y) = xdy + ydx$$

γράφει:

$$d(x \cdot y) = (x + dx) \cdot (y + dy) - xy = xdy + ydx + dx dy$$

και απαλείφοντας τον όρο $dx dy$, διότι είναι απείρως μικρός σε σχέση με τους υπόλοιπους , παίρνει την σχέση :

$$d(x \cdot y) = xdy + ydx .$$

Ενώ , για να αποδείξει ότι :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

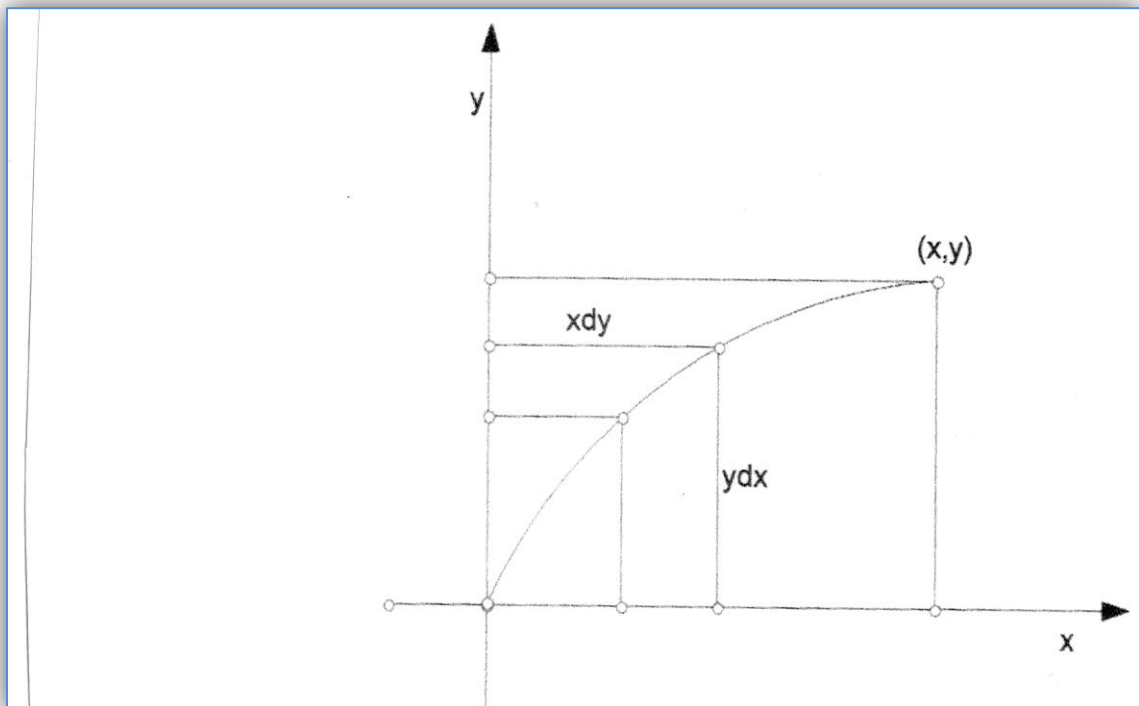
γράφει :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + xdx} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

⁴⁷ Ε. Γιαννακούλιας, Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού σελ.46

(παραλείπει τον όρο $x dx$, τον οποίο θεωρεί απείρως μικρό σε σύγκριση με το x^2).

Επίσης, ο Leibniz, σε αρκετές περιπτώσεις επαλήθευε και με γεωμετρικά επιχειρήματα τα αποτελέσματά που αποδείκνυε με το νέο λογισμό του. Έτσι το αποτέλεσμα (κανόνας γινομένου) συμφωνεί με την πρόσθεση εμβαδών του παρακάτω σχήματος :



Εικόνα 61

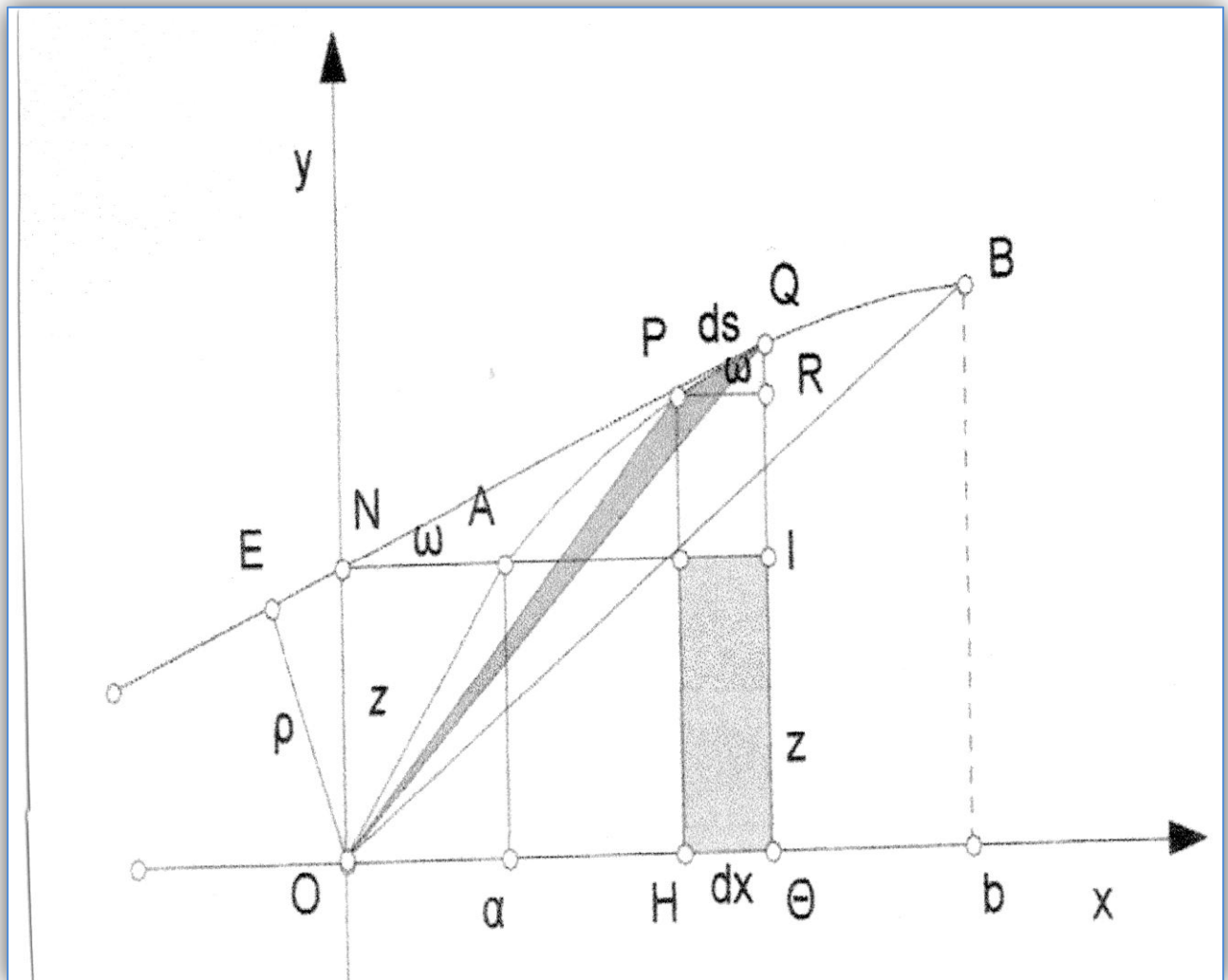
Στα τέλη του 1673 με αρχές του 1674, ο Leibniz ανακάλυψε μια γενική μέθοδο μετασχηματισμού με την οποία μπόρεσε να αποδείξει όλα τα προηγούμενα γνωστά αποτελέσματα που αφορούσαν τετραγωνισμούς επιπέδων σχημάτων.

Θεώρημα μετασχηματισμού

Έστω καμπύλη $y = f(x)$ και $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ δύο σημεία της, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείουν το γράφημα της f , ο xx' , η $x = \alpha$ και η $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο :

$$\int_a^b y dx = \frac{1}{2} \left([xy]_a^b + \int_a^b z dx \right), \text{όπου, } z = y - x \frac{dy}{dx}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Εικόνα 62

Αν $P(x, y), Q(x+dx, y+dy)$ δύο γειτονικά σημεία της καμπύλης $y = f(x)$, με $x \in [a, b]$, ο Leibniz προκειμένου να μελετήσει το εμβαδόν του $(AabB)$ θεώρησε τα απειροστά τρίγωνα (OPQ) .

Από το σχήμα προκύπτει ότι για το εμβαδόν $(AabB)$ ισχύει :

$$(AabB) = (ObB) + (OBAO) - (OaA) = \frac{1}{2}b \cdot f(b) + (OBAO) - \frac{1}{2}a \cdot f(a) \quad . \quad (1)$$

Όμως, το εμβαδόν $(OBAO)$ αποτελείται από ένα άθροισμα εμβαδών απειροστών τριγώνων (OPQ) .

Εφόσον, $(OPQ) = \frac{1}{2}ds \cdot p$ και από τα όμοια τρίγωνα $\triangle O\hat{E}Z$ και $\triangle P\hat{Q}R$ προκύπτει ότι:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{z}{p} \quad (\Leftrightarrow pds = zdx) \quad \text{προκύπτει ότι :}$$

$$(OPQ) = \frac{1}{2}dx \cdot z \quad \text{και άρα}$$

$$(OBAO) = (\text{άθροισμα απειροστών εμβαδών } (OPQ)) = \frac{1}{2} \int_a^b z \cdot dx.$$

$$\text{Συνεπώς, } (AabB) = \int_a^b y \cdot dx = \frac{1}{2}b \cdot f(b) - \frac{1}{2}a \cdot f(a) + \frac{1}{2} \int_a^b z \cdot dx = \frac{1}{2} \left([xy]_a^b + \int_a^b zdx \right).$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι :

$$ON = Z = \Theta I = \Theta Q - IQ = y - IN \cdot \varepsilon\varphi\omega = y - x \frac{dy}{dx}$$

(εφόσον τα P, Q έχουν απειροστή απόσταση, ο Leibniz θεωρεί ότι :

$$\Theta Q \simeq PH = y \text{ και } IN = x + dx \simeq x.$$

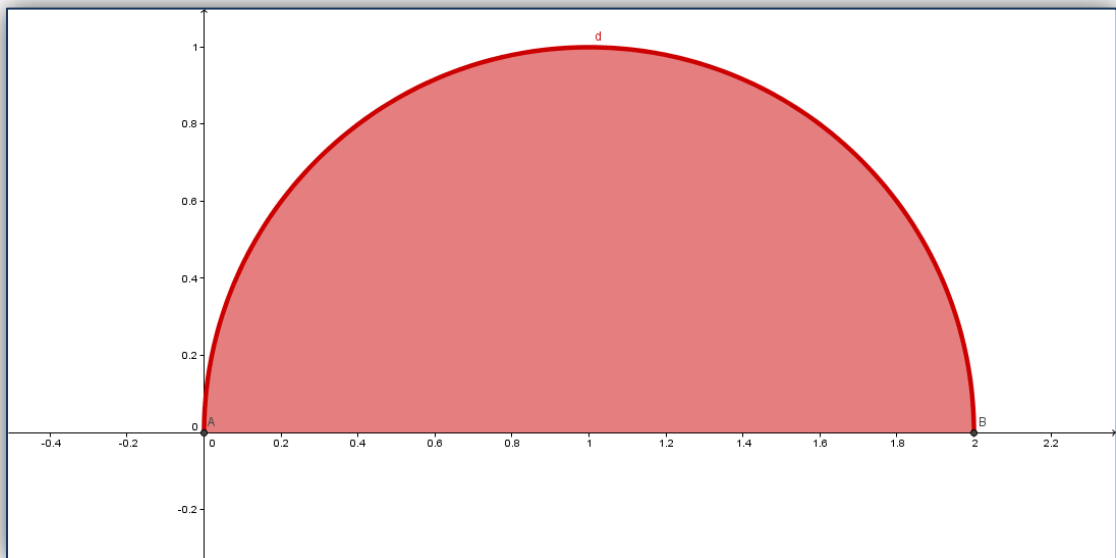
Η πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος είναι ο υπολογισμός του αθροίσματος της σειράς : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ (γνωστή και ως σειρά Leibniz).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (του θεωρήματος μετασχηματισμού)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Απόδειξη

Ο Leibniz θεωρεί το μοναδιαίο κύκλο που εφάπτεται στον άξονα $\psi\psi'$ στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και υπολογίζει το ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\chi\chi'$.



Εικόνα 63

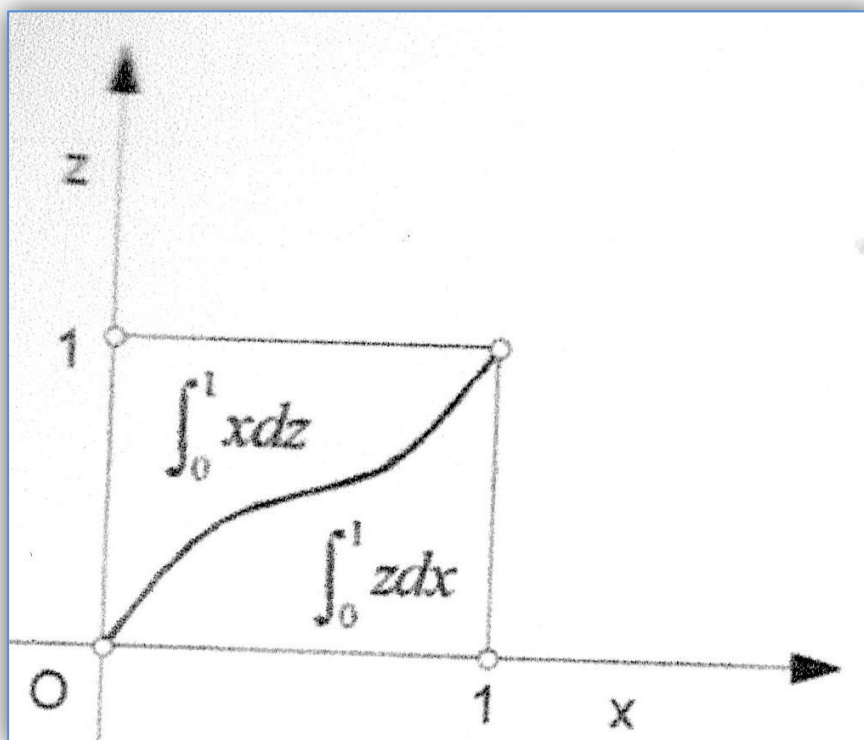
Από την εξίσωση του κύκλου $(\chi - 1)^2 + y^2 = 1$, προκύπτει, ότι, $y = \sqrt{2\chi - \chi^2}$.

Είναι : $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\chi}{y}$, ενώ, $z = y - \chi \frac{dy}{dx} = y - \chi \frac{1-\chi}{y} = \sqrt{\frac{\chi}{2-\chi}}$, οπότε, $\chi = \frac{2z^2}{1+z^2}$.

Ο Leibniz στη συνέχεια εφαρμόζει το θεώρημα μετασχηματισμού για να υπολογίσει το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y dx = \frac{1}{2} \left(\left[x \cdot \sqrt{2x - x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 z dx \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \int_0^1 x dz \right) \right] = \\
&= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} dz = 1 - \int_0^1 z^2 (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots) dz \stackrel{\text{γεωμετρική σιγή}}{=} \\
&= 1 - \left[\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 - \dots \right]_0^1 \stackrel{\text{ολοκληρώνοντας κάθε όρο}}{=} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots
\end{aligned}$$

Αφού ισχύει :



Εικόνα 64

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Έχοντας , αναφέρει ιστορικές πηγές από όπου αντλούμε πληροφορίες για τον απειροστικό λογισμό θα υποβάλλω μια διδακτική πρόταση , μέσω της οποίας θα προκαλέσω τις διαισθήσεις των μαθητών μου , θα τους εμπλέξω με δραστηριότητες ερμηνείας εποικοδομητικής χρήσης και κατασκευής μαθηματικών εκφράσεων θέτοντας του μικρούς ερευνητές , όπως ακριβώς έγινε και στα πρώτα χρόνια εμφάνισης του λογισμού .

Οι έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν αποδείξει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στο να αντιληφθούν τις διάφορες εκφάνσεις της έννοιας συνάρτηση , ώστε να μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν σε μαθηματικά προβλήματα. Επίσης , η έννοια της παραγώγου και του ολοκληρώματος παριστάνονται με στατικά μέσα στη σχολική ζωή και έτσι οι μαθητές αποτυγχάνουν να συνδέσουν τις σχέσεις που περιγράφονται από τις παραπάνω έννοιες μέσα από τις αναπαραστάσεις τους με την χρήση μαθηματικών εκφράσεων .

Με την παρακάτω διδακτική πρόταση οι μαθητές θα μπορούν να ανακαλύψουν τις διασυνδέσεις γραφήματος και μαθηματικών σχέσεων και θα δουν την δυναμική τους εξάρτηση . Θα χτίσουν την αφαιρετική σκέψη τους με τις αιτιολογήσεις και τους περιορισμούς που θα προβάλλουν. Θα συνδυάσουν γνωστές για αυτούς έννοιες , όπως η ταχύτητα και η θέση ενός κινητού με στοιχεία της ανάλυσης .

Χρησιμοποιώντας μια σκηνή από μια ταινία με μεγάλη εισπρακτική επιτυχία οι μαθητές μου θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουν πως ο Javier Bardem στη ταινία Skyfall 007 κατάφερε να γνωρίζει πως το τρένο θα έφτανε στο σημείο που αυτός επιθυμούσε κατά τον εκτροχιασμό του ώστε να χτυπήσει τον Daniel Craig (James Bond) , έτσι οι τιμές των θέσεων από τις οποίες πέρασε το τρένο (στην αντίστοιχη σκηνή της ταινίας Skyfall 007) και ενός τυχαίου παρατηρητή (σημείου) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (συνάρτηση θέσης) θα μπορούν να μεταβληθούν μέσω του λογισμικού εργαλείου και να οπτικοποιηθούν . Οι μαθητές θα μπορούν να πειραματιστούν , να αντιληφθούν και να διερευνήσουν εποπτικά τις ταχύτητες (εφαπτόμενες). Να συνδέσουν τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε σημείο της με την παράγωγο στο σημείο αυτό (συνήθως οι μαθητές δυσκολεύονται στην παραπάνω διαδικασία και περιορίζονται μόνο σε υπολογισμούς και εφαρμογή τύπων που συνήθως απομνημονεύουν χωρίς να εμβαθύνουν).

Στο πλαίσιο του παραπάνω περιβάλλοντος οι μαθητές μπορούν να 'χτίσουν' πάνω στις διαισθήσεις τους εκμεταλλευόμενοι την γνώση που ήδη έχουν και να 'μάθουν' τις βασικές έννοιες και του διαφορικού λογισμού .

Δηλαδή, η βασική ιδέα της παραπάνω δραστηριότητας βασίζεται στην *αναστοχαστική αφαίρεση*⁴⁸, σε ένα μηχανισμό όπου οι μαθητές μου μπορούν να κατασκευάζουν εννοιολογική γνώση. Κατά τον Piaget οι δυο βασικές λειτουργίες του ανθρώπινου οργανισμού είναι η οργάνωση και η προσαρμογή. Η οργάνωση αναφέρετε στην ικανότητα των όντων να διευθετούν τις σωματικές ή ψυχολογικές τους δυνατότητες σε συναφή συστήματα για να ανταποκρίνονται καλύτερα στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος, ενώ η προσαρμογή είναι η ισορροπία ανάμεσα σε δυο συμπληρωματικές διαδικασίες του οργανισμού, την αφομοίωση και την συμμόρφωση. Η αφομοίωση αναφέρετε στη διαδικασία με βάση την οποία οργανισμός χρησιμοποιεί μια υπάρχουσα γνώση για να αντιμετωπίσει τα προβλήματα που συναντά στο περιβάλλον, ενώ συμμόρφωση είναι η διαδικασία εκείνη κατά την οποία ένας οργανισμός τροποποιεί τις υπάρχουσες γνωστικές δομές για να ανταποκριθεί καλύτερα στις νέες απαιτήσεις. Η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο γίνεται μέσω της *αναστοχαστικής αφαίρεσης*.

Οι μαθητές μου μπορούν να "κτίσουν" την νέα γνώση μέσα από την επίτευξη της προσωπικής τους ισορροπίας και του μαθησιακού περιβάλλοντος που θα δημιουργηθεί.

Στο πλαίσιο αυτού του μαθησιακού περιβάλλοντος οι μαθητές θα οδηγηθούν ευκολότερα στην "εννοιολογική αλλαγή", ένας από τους βασικότερους λόγους πίσω από την τόσο συχνά παρατηρούμενη αποτυχία των μαθητών να κατανοήσουν έννοιες της φυσικής και των μαθηματικών. Οι μαθητές δεν έρχονται από την μία τάξη στην επόμενη χωρίς ή καθόλου προϋπάρχουσα γνώση ή ακόμα η νέα γνώση δεν μπορεί πάντα να δομηθεί στην προϋπάρχουσα μέσω μηχανισμών εμπλουτισμού, αλλά μπορεί η προϋπάρχουσα γνώση να σταθεί εμπόδιο στην περαιτέρω μάθηση. Στοχεύω στο ότι οι μαθητές μου έχοντας προηγούμενες γνώσεις σε θέματα κίνησης σωμάτων από την εμπειρία τους ή από το μάθημα της φυσικής, με τη παρούσα πρόταση, όχι μόνο θα εμπλουτίσουν αλλά θα αναδιοργανώσουν τις γνώσεις τους και θα προκύψουν νέες εννοιολογικές δομές⁴⁹.

Και σύμφωνα με τον Papert (1980)⁵⁰, στοχεύω να δημιουργήσω τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον πλούσιο σε δυνατότητες, ώστε να παρέχεται στους μαθητές μου ευκαιρία για δημιουργία νέων μαθηματικών νοημάτων.

Τέλος, η ιδέα της έννοιας της συνάρτησης με την έννοια της συμμεταβολής (co-variation) θα μπορούσε να διαφαίνεται στην παραπάνω δραστηριότητα, ώστε να περάσω στους μαθητές μου το νόημα της μεταβλητής ως μεταβλητό μέγεθος.

⁴⁸ Piaget 1970b, 1985

⁴⁹ *Η εννοιολογική αλλαγή*. Στέλλα Βοσνιάδου

⁵⁰ *Νοητικές θύελλες*. Seymour Papert (εκδόσεις Οδυσσέας)

Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να δουν :

-  τη συνάρτηση ως δράση (Action) : Συνδέοντας την θέση του κινητού με την ταχύτητά του , δηλαδή μέσω ενός προβληματισμού .
-  τη συνάρτηση ως διαδικασία (process) : Εύρεση εφαπτόμενων σε σημεία της .
-  τη συνάρτηση ως συμμεταβολή : Μέσω της σχέσης της συνάρτησης με την παράγωγό της .
-  την δυναμική της Ανάλυσης μέσω της μετακίνησης .
-  Να ερμηνεύουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης και τα αποτελέσματα που παράγονται στην οθόνη μέσα από τον αλγεβρικό φορμαλισμό (π.χ σχέση εφαπτομένης – ταχύτητας).
-  Να κατανοήσουν την γεωμετρική ερμηνεία της πρώτης παραγώγου μέσω μιας δυναμικής διαδικασίας , ξεπερνώντας την στατικότητα και τις παρανοήσεις του σχολικού βιβλίου . Με τη δυναμική αναπαράσταση ερμηνεύεται καλύτερα η έννοια της εφαπτομένης (εννοιολογική αλλαγή) ξεπερνώντας οι μαθητές το εμπόδιο που τους έχει δημιουργηθεί από προηγούμενες γνώσεις ότι καμπύλη και εφαπτομένη έχουν ένα μόνο κοινό σημείο (εφαπτομένη σε σημείο του κύκλου) , διότι θα δουν την εφαπτομένη ως την καλύτερη προσέγγιση για την συνάρτηση (για τιμή του ε οσοδήποτε μικρή) , όπως φαίνεται παρακάτω.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon$$

$$\text{Θέτω, } \psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } \left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| < \varepsilon, \text{ με}$$

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon |x - x_0|.$$

Η παρούσα διδακτική πρόταση έχει και ευρύτερες επιρροές :

Φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή – βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισή τους . Οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και να δοκιμάσουν με δικές τους ιδέες , να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα τα οποία θα πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης). Η εργασία των μαθητών σε ομάδες είναι στενή και συγκροτημένη. Θα έχω την ευκαιρία να δοκιμάσω καινοτόμες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους , να γίνω συνεργάτρια και καθοδηγήτρια ταυτόχρονα . Έτσι τα παραπάνω θα συμβάλλουν στο να διδαχθούν βασικές μαθηματικές έννοιες μέσα σε ατμόσφαιρα μαθηματικού ερευνητικού εργαστηρίου.

Οι μαθητές μου θα εργάζονται ομαδικά (κοινωνικομαθηματικές νόρμες σε πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον) σε ομάδες 3-4 μαθητών και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να αξιοποιήσουν τις δυνατότητες του ψηφιακού εργαλείου το οποίο διαθέτουν και συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα.

Ενδιαφέρομαι , οι μαθητές να δουλέψουν αφαιρετικά , αλλά σύμφωνα με τους ερευνητές Noss&Hoyles (1996) επιδιώκω να κάνουν <<εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις>> , δηλαδή αφαιρετικές σκέψεις που θα αναδύονται μέσω μη λεκτικών αλληλεπιδράσεων (που πραγματοποιούνται με την επαφή με τον υπολογιστή –το λογισμικό), μέσω λεκτικών αλληλεπιδράσεων , διαλόγους , επιχειρηματολογία , διαφωνίες , συλλογή συμπερασμάτων .

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου θα ελέγχω τα συμπεράσματα των μαθητών μου, θα συνεργάζομαι μαζί τους, θα τους καθοδηγώ ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και θα τους ενθαρρύνω να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στην συνεργασία και την διαπραγμάτευση των ιδεών τους, ώστε η γνώση να αποκτήσει έναν διωποκειμενικό χαρακτήρα.

Ως καθηγήτρια τους θα προσπαθώ να συνεργάζομαι και να τους καθοδηγώ . Όλοι μαζί θα θέσουμε νόρμες που θα στηρίζουν την κουλτούρα της τάξης θα βοηθούν την ομαδοσυνεργατικότητα και δεν θα έχουν σαν κύριο στόχο την σωστή απάντηση , αλλά την εξήγηση και την επιχειρηματολογία . Συγκεκριμένα πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον σημαίνει :

☛ Ομαδοσυνεργατική εργασία .

☛ Ανάπτυξη υποθέσεων και εικασιών .

- ☞ Έλεγχος , επαλήθευση ή απόρριψη εικασιών .
- ☞ Ανάπτυξη διαλογικών πρακτικών και επιχειρηματολογίας .
- ☞ Δάσκαλος (Καθηγήτρια) , συνεργάτης , καθοδηγητής , μεσολαβητής ώστε να ⁵¹:
 - 🌈 *Intensifying engagement* : εξασφαλίζει τη συμμετοχή των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος .
 - 🌈 *Effecting activity* : εξασφαλίζει τη διατήρηση του ρυθμού και της παραγωγικότητας των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος.
 - 🌈 *Establishing ideas* : υποστηρίζει την ανάπτυξη της κατανόησης και της ικανότητας των μαθητών .
 - 🌈 *Accentuating features* : παρέχει ζωντανές εικόνες και αποτελέσματα που υπογραμμίζουν ιδιότητες και σχέσεις .
 - 🌈 *Improving motivation* : προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και να χτίζει την εμπιστοσύνη στις δυνατότητές τους.
 - 🌈 *Alleviating restraints*: μετριάζει τους παράγοντες που αναστέλλουν τη συμμετοχή των μαθητών.
 - 🌈 *Raising attention* : δημιουργεί τις συνθήκες για να εστιάσουν οι μαθητές σε κύρια θέματα .

Γνωρίζοντας , βέβαια την δυσκολία εφαρμογής των παραπάνω καινοτομιών στην σημερινή Ελληνική πραγματικότητα της παιδείας μας με τις ιδιαίτερες συνθήκες (Πανελλήνιες εξετάσεις ,άλλος τρόπος αντιμετώπισης των μαθηματικών τα προηγούμενα 6 έτη) και την έλλειψη διαθέσιμων μέσων (υλικοτεχνικών υποδομών) πιστεύω ότι αποτελεί ένα πρώτο βήμα για την ουσιαστική κατανόηση δύσκολων μαθηματικών εννοιών , όπως η συνάρτηση , η παράγωγος συνάρτησης , η εφαπτομένη συνάρτησης .

⁵¹ *Teachers ,Technologies and the Structures of Schooling* . Kenneth Ruthven University of Cambridge.

ΦΑΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

ΦΑΣΗ 1

Στην πρώτη φάση θα ζητήσω από τους μαθητές να προσομοιώσουν την κίνηση του τρένου (δηλαδή την διαδρομή που θα ακολουθήσει το κινητό) , μπορούν να επιλέξουν όποια συνάρτηση επιθυμούν ώστε οι μαθητές να επικεντρωθούν περισσότερο στην διερεύνηση και λιγότερο στις τεχνικές κατασκευής. Θα πρότεινα την $f(x)=(2,5)^x$.

Θα ζητήσω να θεωρήσουν δυο τυχαία σημεία της συνάρτησης

$A(\epsilon, f(\epsilon))$ και $B(\zeta, f(\zeta))$ ως τυχαίες θέσεις διέλευσης του τρένου και να ορίσουν το ευθύγραμμο τμήμα AB από το κουτί της αντίστοιχης επιλογής παρατηρώντας ότι έτσι ορίζουν την κλίση του ευθυγράμμου τμήματος AB

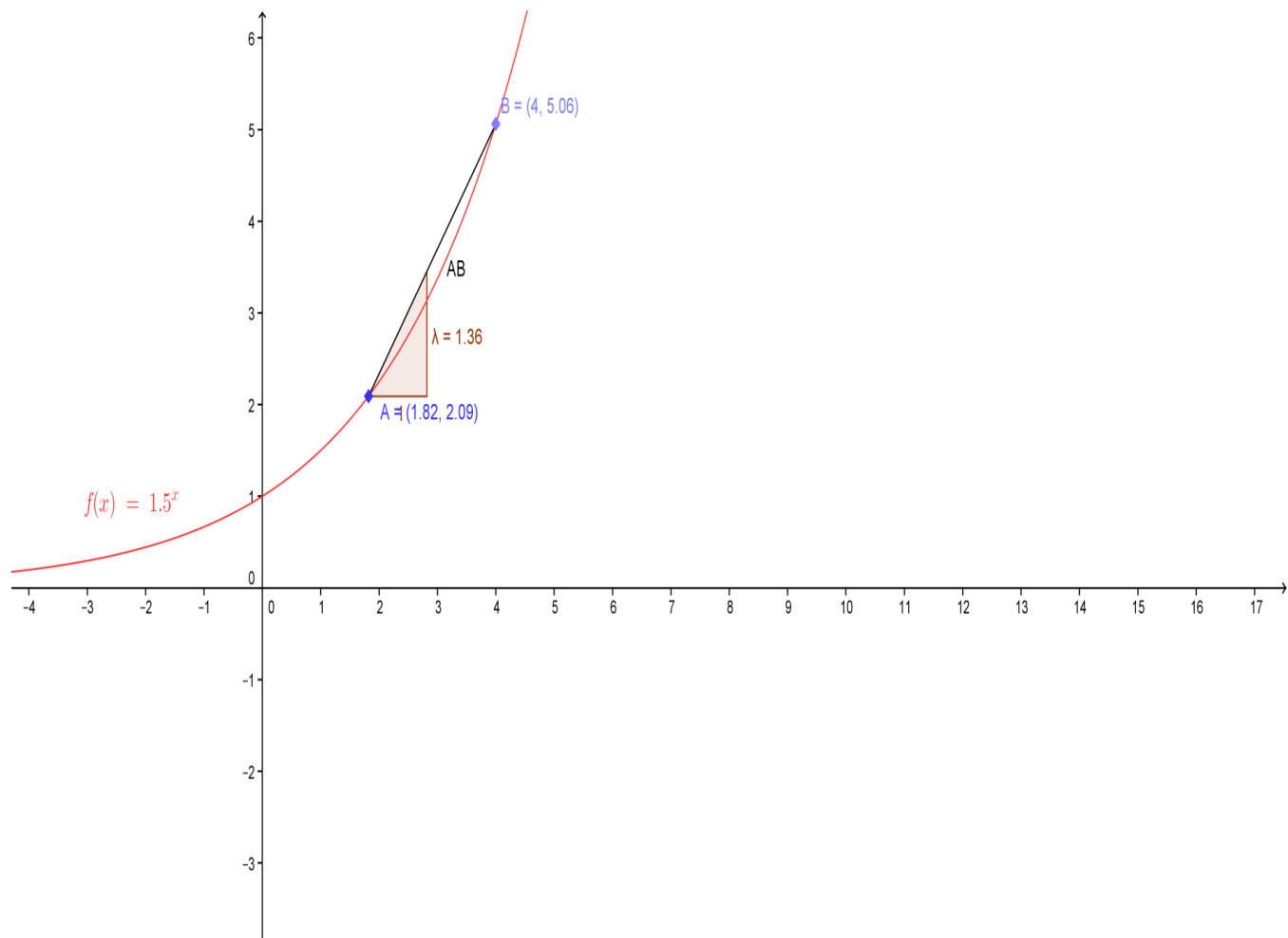
Στο σημείο αυτό επιδιώκω οι μαθητές μου να συνδυάσουν τις υπάρχουσες γνώσεις τους για την κλίση ευθυγράμμου τμήματος με την μέση ταχύτητα του κινητού δηλαδή

να χρησιμοποιήσουν τον τύπο $\frac{f(a)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$

και να τον συνδυάσουν με την

$$\bar{U} = \frac{S(a)-S(\beta)}{\alpha-\beta}.$$

Αναμένω οι απαντήσεις στο ερώτημα αυτό αν δοθούν μετά από συζήτηση , διότι τίθεται το θέμα της υπάρχουσας γνώσης , δηλαδή κατά πόσο έχουν κατανοήσει οι μαθητές μου την έννοια της φυσικής και την κλίση ενός ευθυγράμμου τμήματος (από αναλυτική γεωμετρία).



Σχήμα 1 (στιγμιότυπο Α)

Στη συνέχεια θα ζητήσω από τους μαθητές μου να υπολογίσουν (από εντολές του λογισμικού) τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων

$$A\chi_0, B\psi_0, A\chi, B\psi \text{ με } \chi, \psi, \chi_0, \psi_0 ,$$

οι συντεταγμένες των σημείων τομής των Α , Β με τους άξονες $\chi\chi'$, $\psi\psi'$ αντίστοιχα

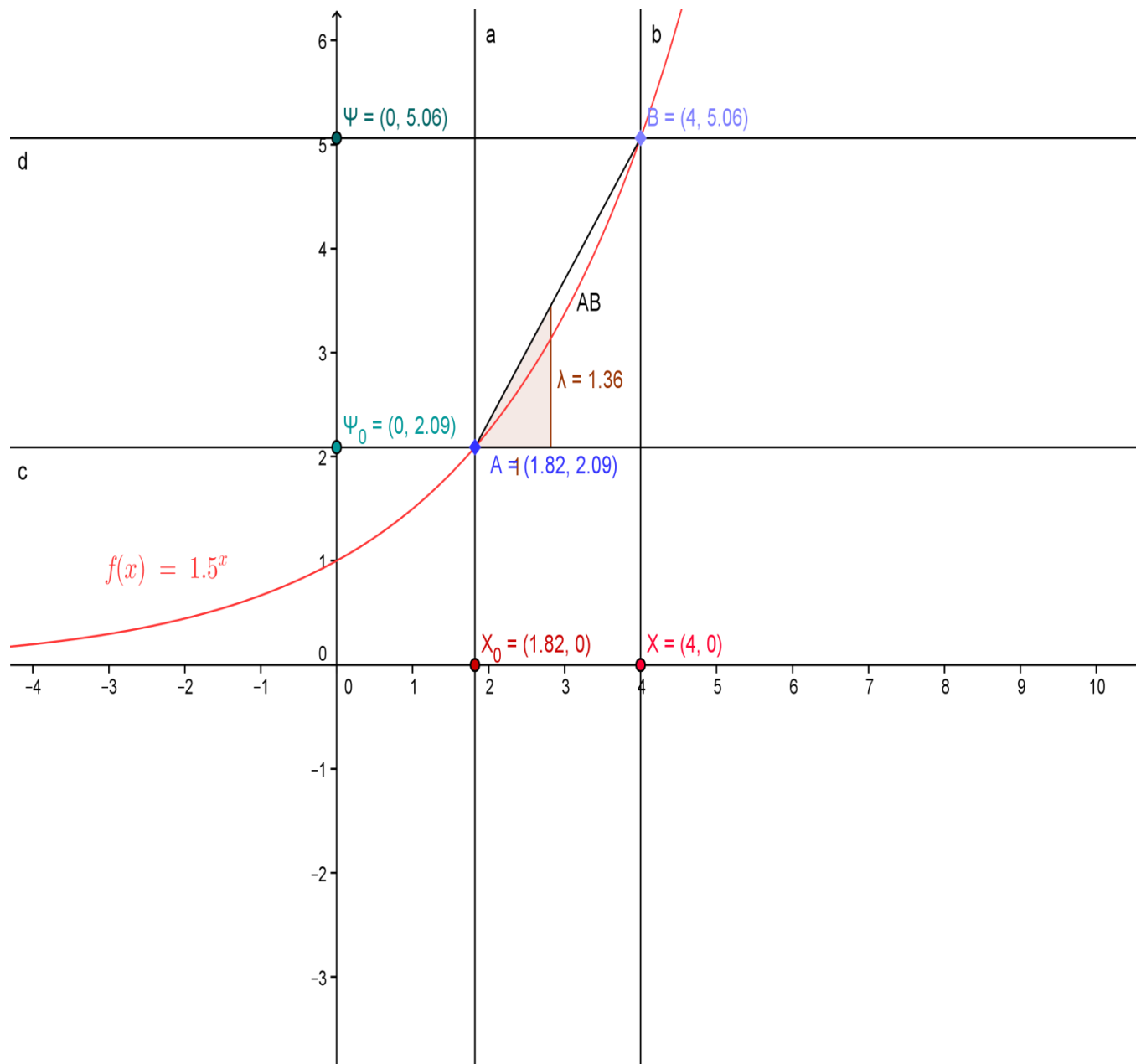
και το λόγο

$$\frac{B\psi - B\psi_0}{A\chi - A\chi_0}$$

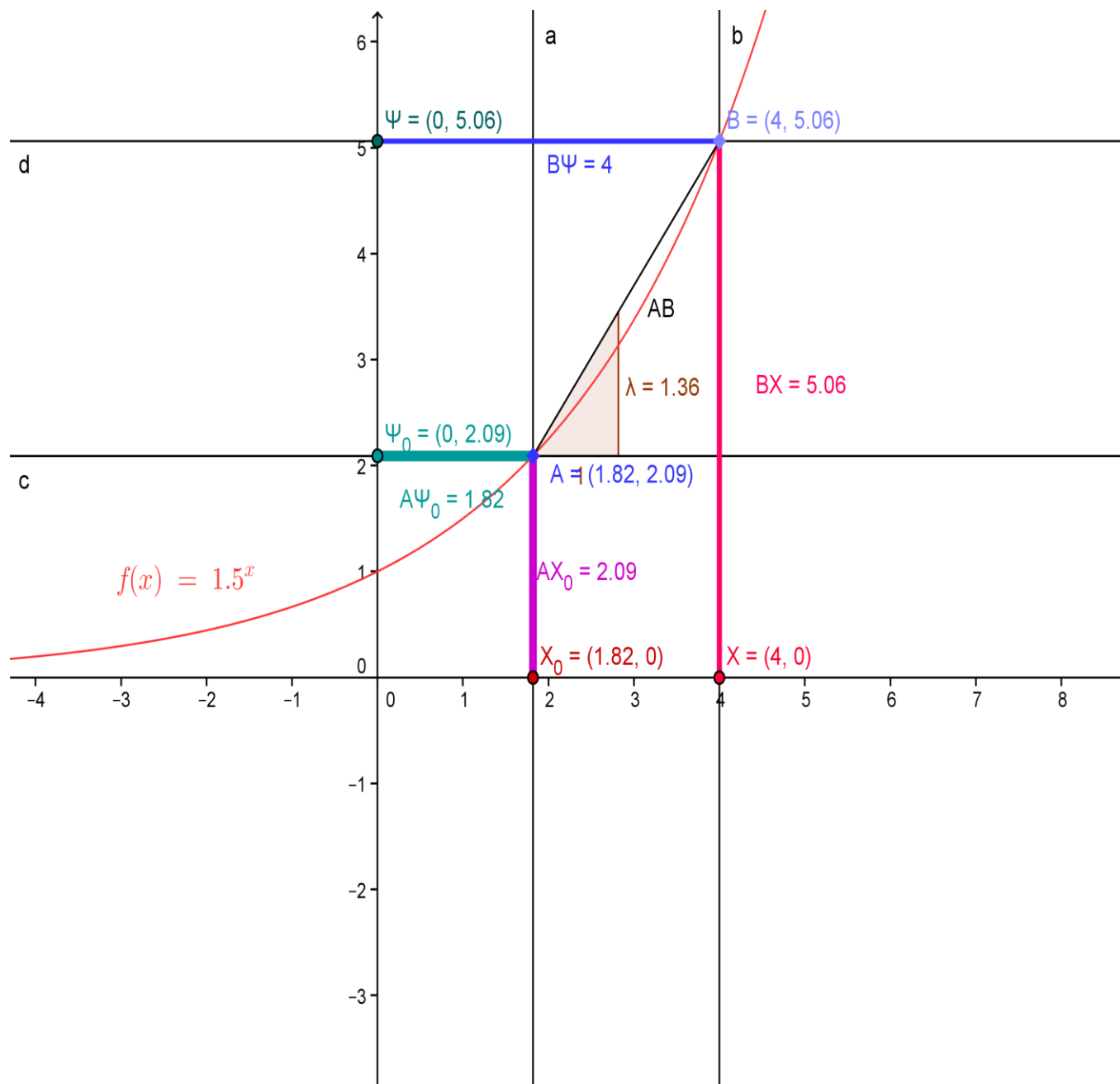
όπως φαίνεται στα σχήματα που αποτελούν στιγμιότυπα από το λογισμικό Geogebra.

Αναμένω να μην δημιουργηθεί πρόβλημα στην κατασκευή των καθέτων και στην εύρεση των σημείων τομής με τους άξονες $\chi\chi'$ και $\psi\psi'$.

Οι μαθητές ακόμα και σε αυτή την ηλικία δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν γραφικά αυτό που εύκολα χειρίζονται φορμαλιστικά .



Σχήμα 2 (στιγμιότυπο Β)



Σχήμα 3 (στιγμιότυπο Γ)

ΦΑΣΗ 2

Στη φάση αυτή έχω πρωταρχικό στόχο να εκμαιεύσω από τους μαθητές την σχέση που έχει η ταχύτητα με την εξίσωση θέσης .

Οι μαθητές θα συνεργαστούν ομαδικά και θα πειραματιστούν , ώστε να ανακαλύψουν την προϋπάρχουσα γνώση .

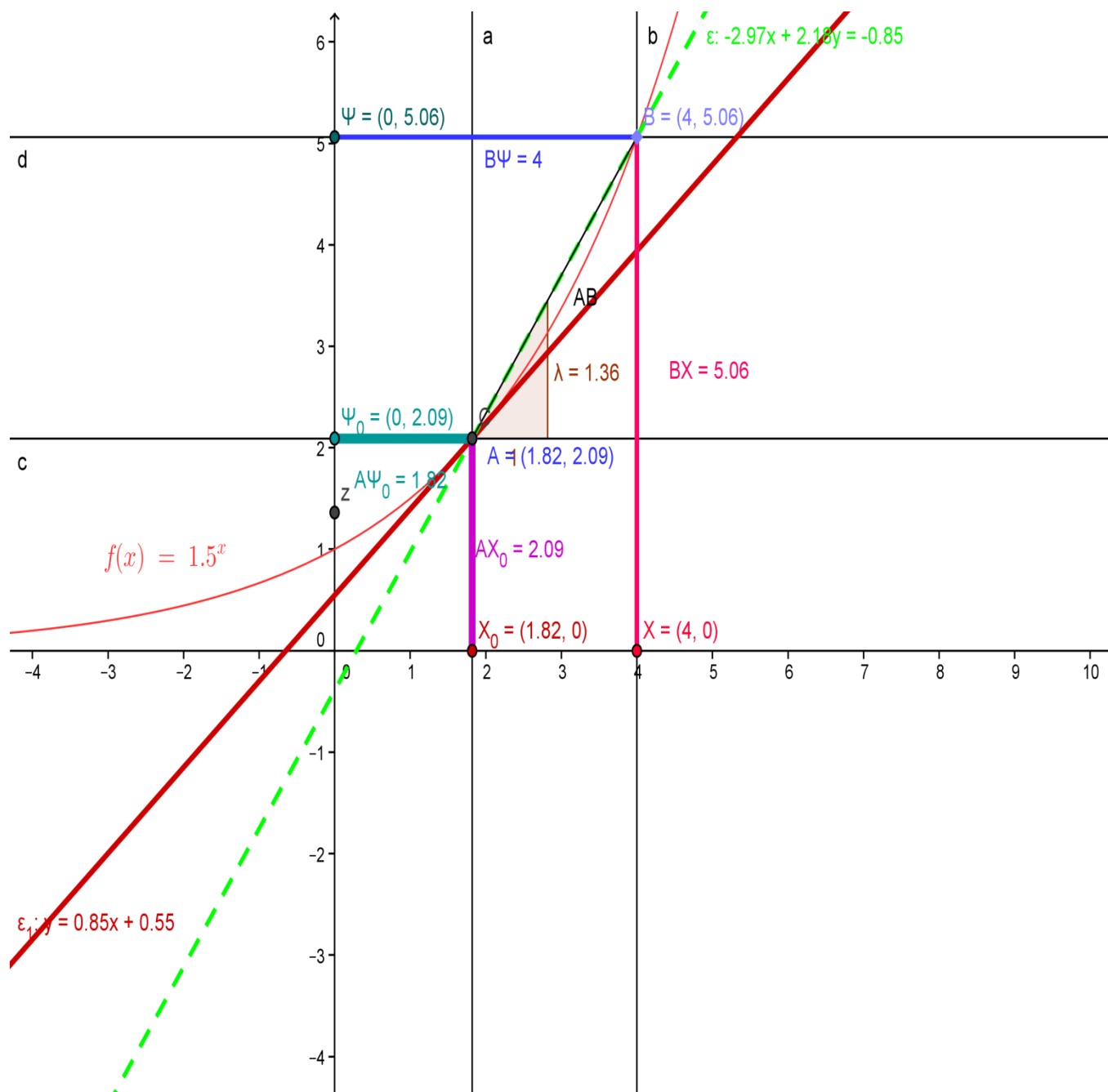
Θεωρώ , ότι θα υπάρχουν μαθητές ή ομάδα μαθητών όπου δεν θα χρειαστεί να πειραματιστεί με σημεία αλλά θα μεταφέρει αμέσως ότι η τιμή της ταχύτητας σε κάθε σημείο θα δίνεται από την τιμή της μια άλλη συνάρτηση (την πρώτη παράγωγο) , γιατί πιθανόν γνωρίζουν ότι η πρώτη παράγωγος της μετατόπισης είναι η ταχύτητα. Επιδιώκω να εστιάσουν την προσοχή τους στην τοπική ιδιότητα (εφαπτομένη σε σημείο).

Αφού χαράξουν την εφαπτομένη στο Α θα τους ζητήσω να μετακινήσουν δυναμικά το σημείο Β και να παρατηρούν την θέση της ευθείας που δημιουργείται από τα Α , Β με την εφαπτομένη στο Α , παρατηρώντας και το τρίγωνο που δημιουργείται κάτι σαν το χαρακτηριστικό τρίγωνο .

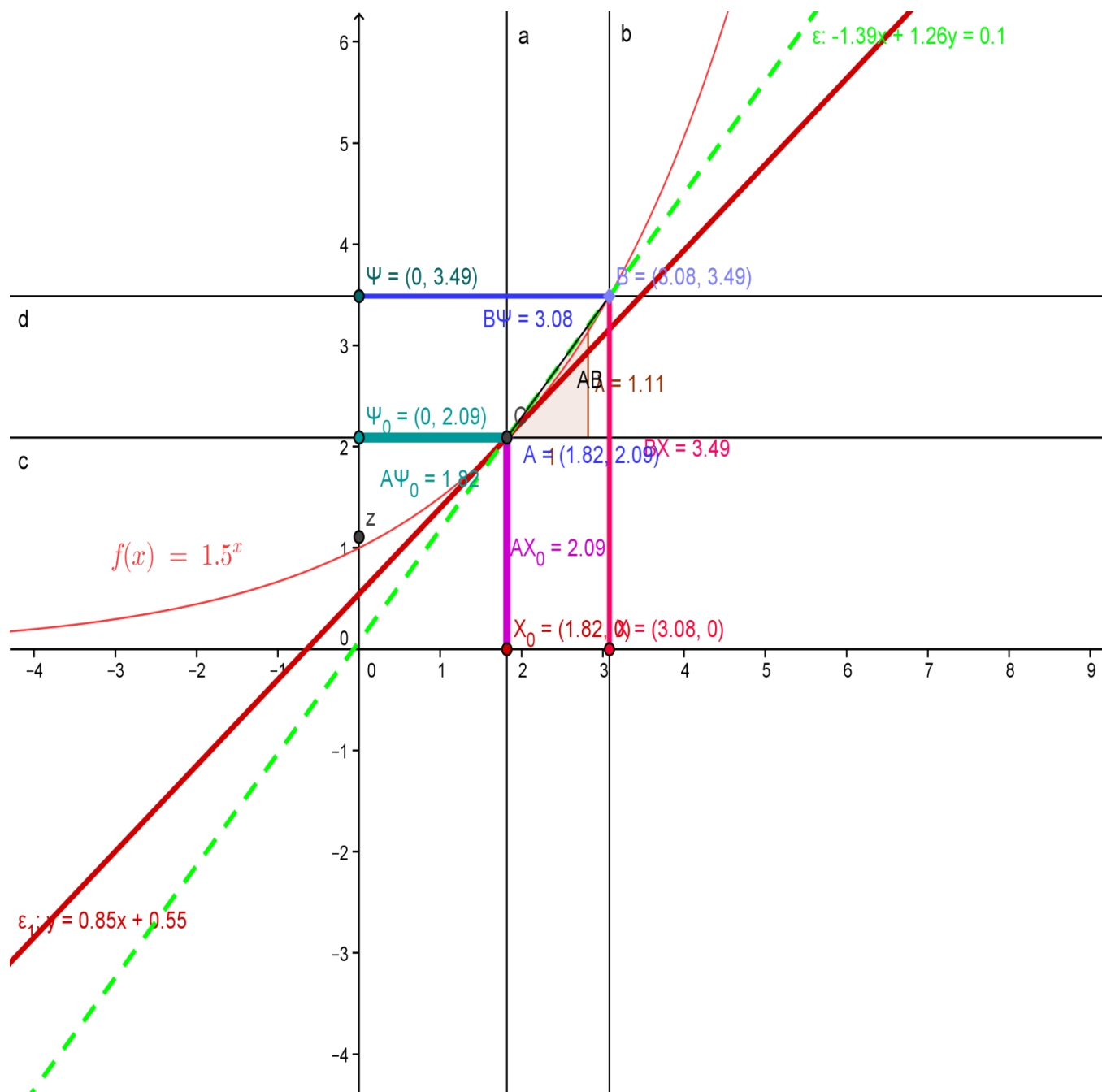
Από το κουτί επιλογής ``άλγεβρα ``δώστε την εντολή ``ορισμό``για παράγωγο συνάρτησης και υπολογίστε την $f'(x_0)$.

Στο τέλος της παραπάνω φάσης επιδιώκω οι μαθητές να έχουν αντιληφθεί και κατανοήσει τον ορισμό της πρώτης παραγώγου και την ύπαρξη εφαπτομένης σε σημείο συνάρτησης (γεωμετρική ερμηνεία) καθώς και τη σχέση στιγμιαίας ταχύτητας και θέσης ενός κινητού .

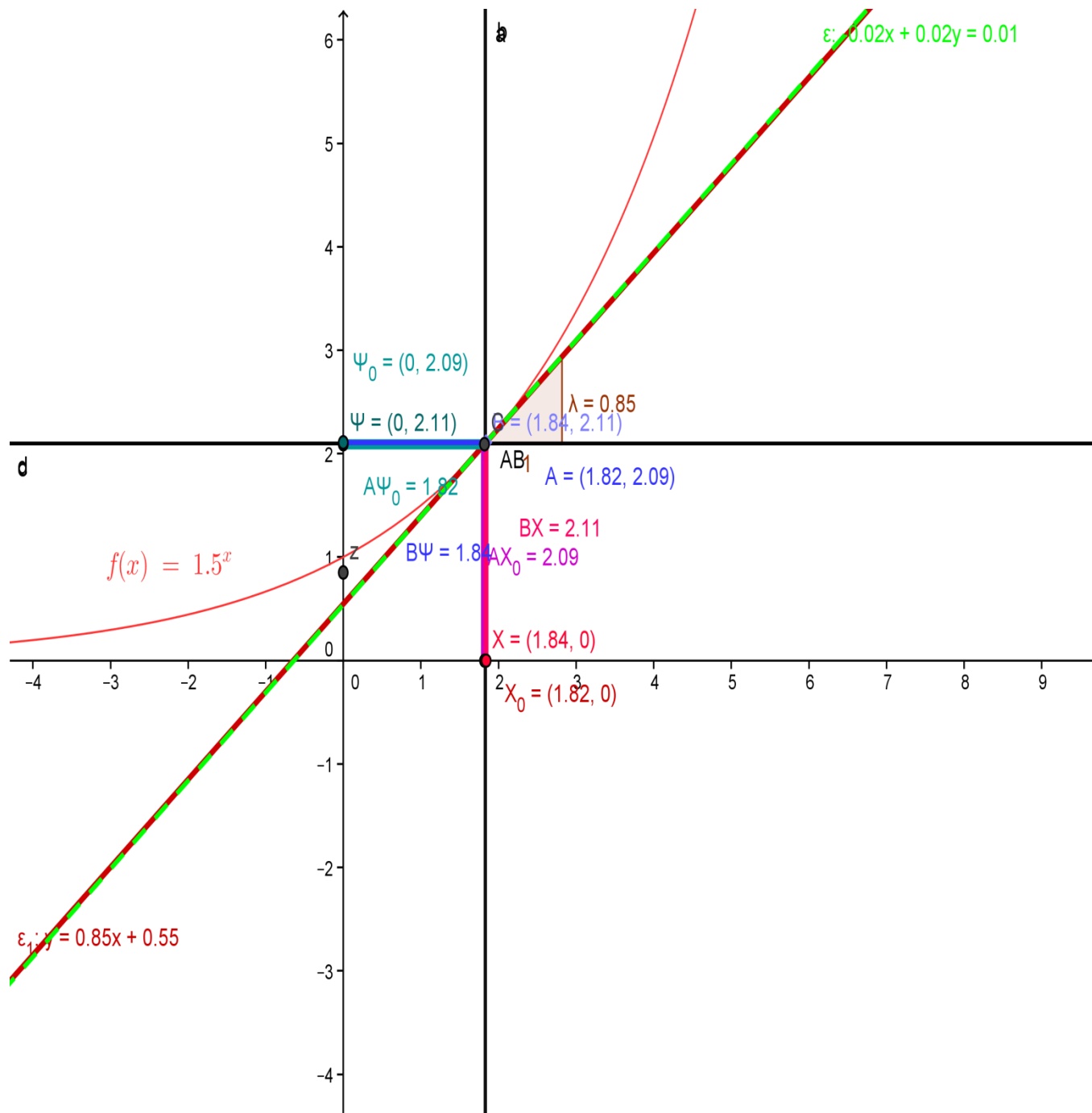
Δηλαδή ,
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad U(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



Σχήμα 4(στιγμιότυπο Δ)



Σχήμα 5 (E)



Σχήμα 6 (ΣΤ)

ΦΑΣΗ 3

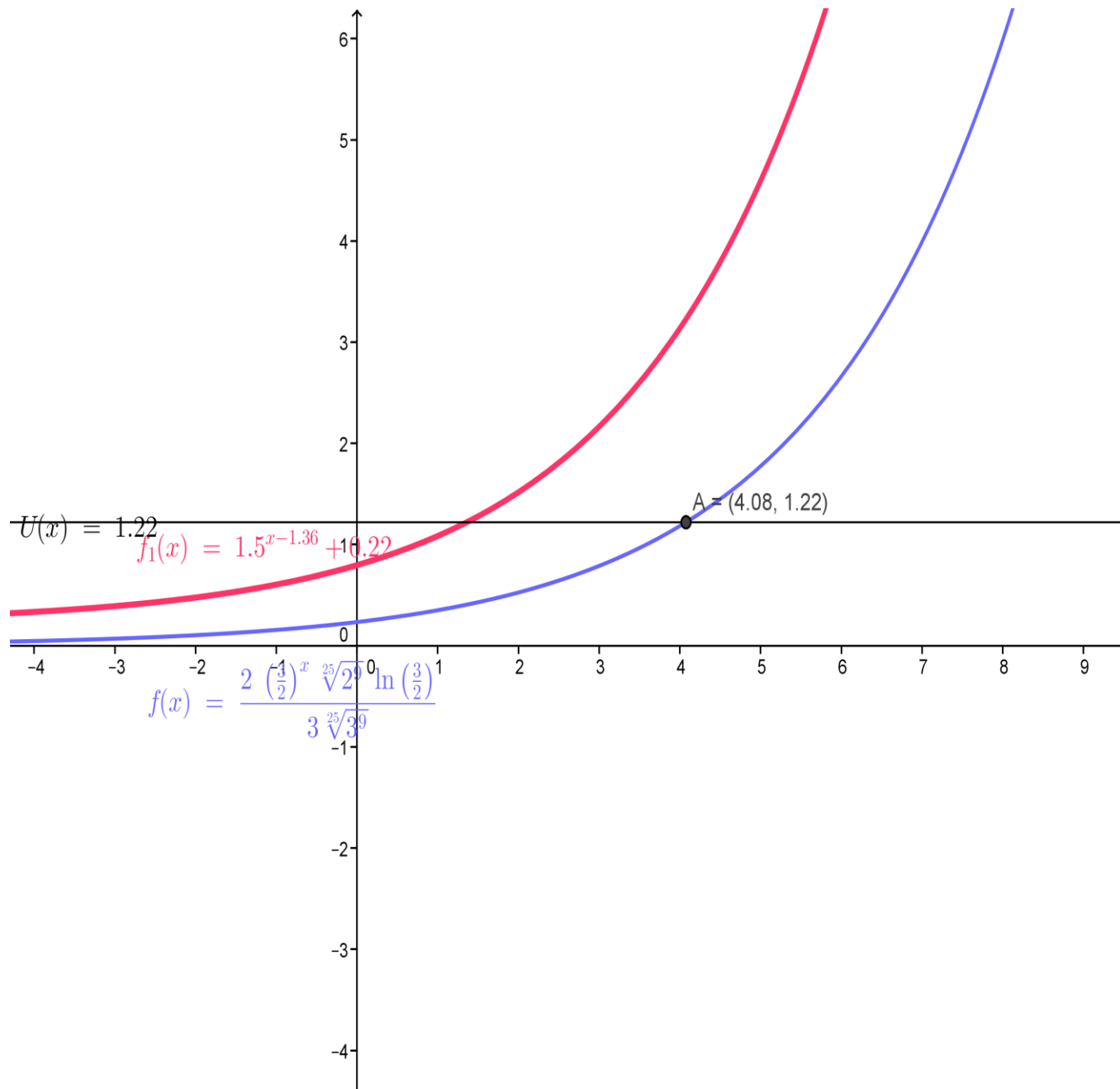
Στην τρίτη φάση της διδακτικής πρότασης θέτω τον αρχικό προβληματισμό σε μια νέα βάση , δηλαδή , πώς ο Javier Bardem κατάφερε να γνωρίζει πως το τρένο θα έφτανε στο σημείο που αυτός επιθυμούσε κατά τον εκτροχιασμό του ώστε να χτυπήσει τον James Bond.

Συνεπώς αναζητούμε , γνωρίζοντας την ταχύτητα του τρένου σε ποιο σημείο της τροχιάς του θα πρέπει να εκτροχιαστεί μέσω ενός εκρηκτικού μηχανισμού ώστε να χτυπήσει τον στόχο του ; Στο σημείο αυτό , αναμένω ότι οι περισσότερες απαντήσεις να είναι καθαρά αλγεβρικές , δηλαδή εξισώσουν την τιμή της ταχύτητας με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης :

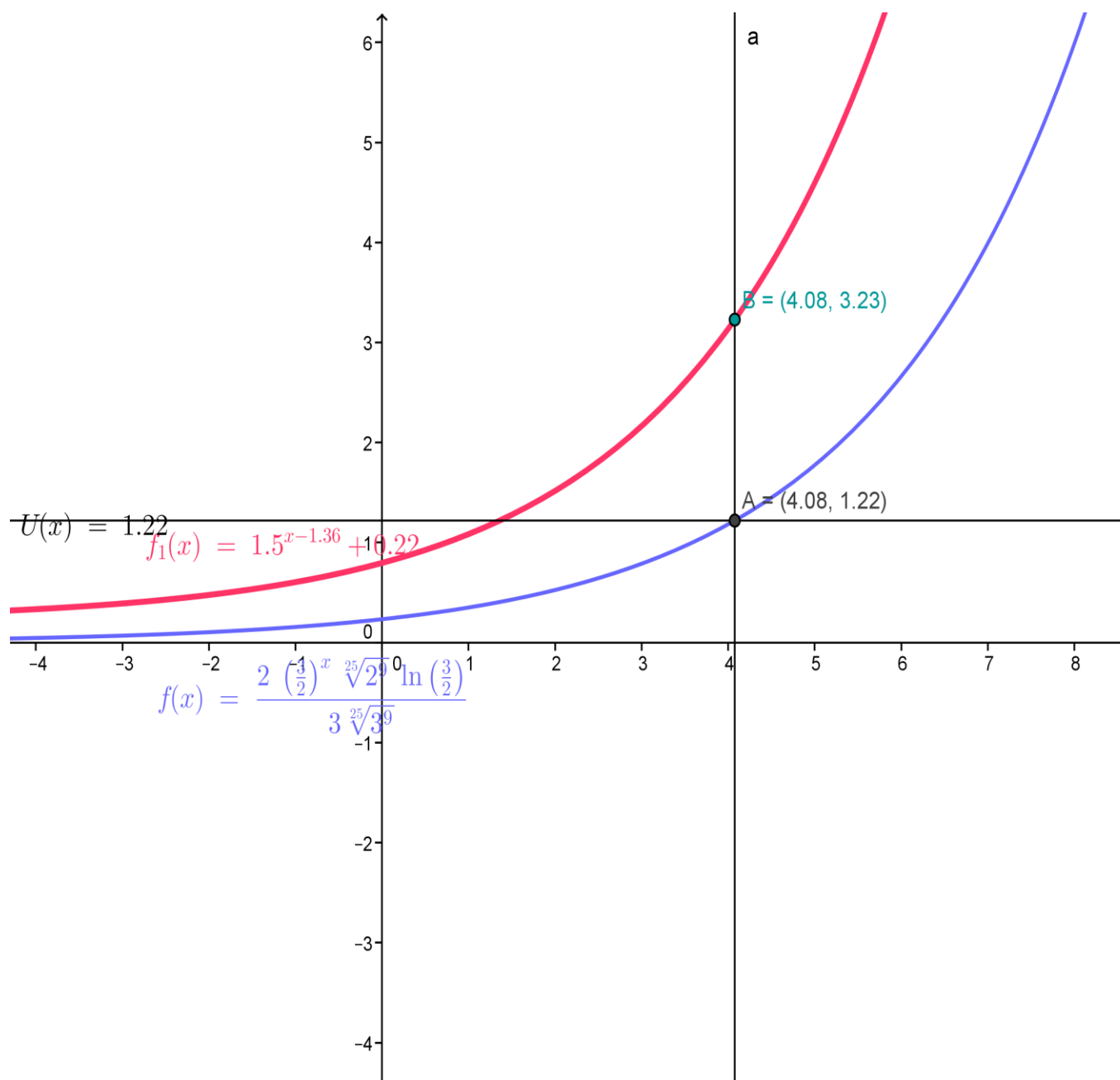
$$f'(x)=U.$$

Για αυτό το λόγο θα θέσω το ερώτημα , μέσω να το παραστήσουν γραφικά επιδιώκοντας οι μαθητές μου να καταφέρουν να κατανοήσουν σε βάθος αυτά που ήδη γνωρίζουν και λύνουν με μηχανικό τρόπο προβάλλοντας τους το παραπάνω εμπόδιο .

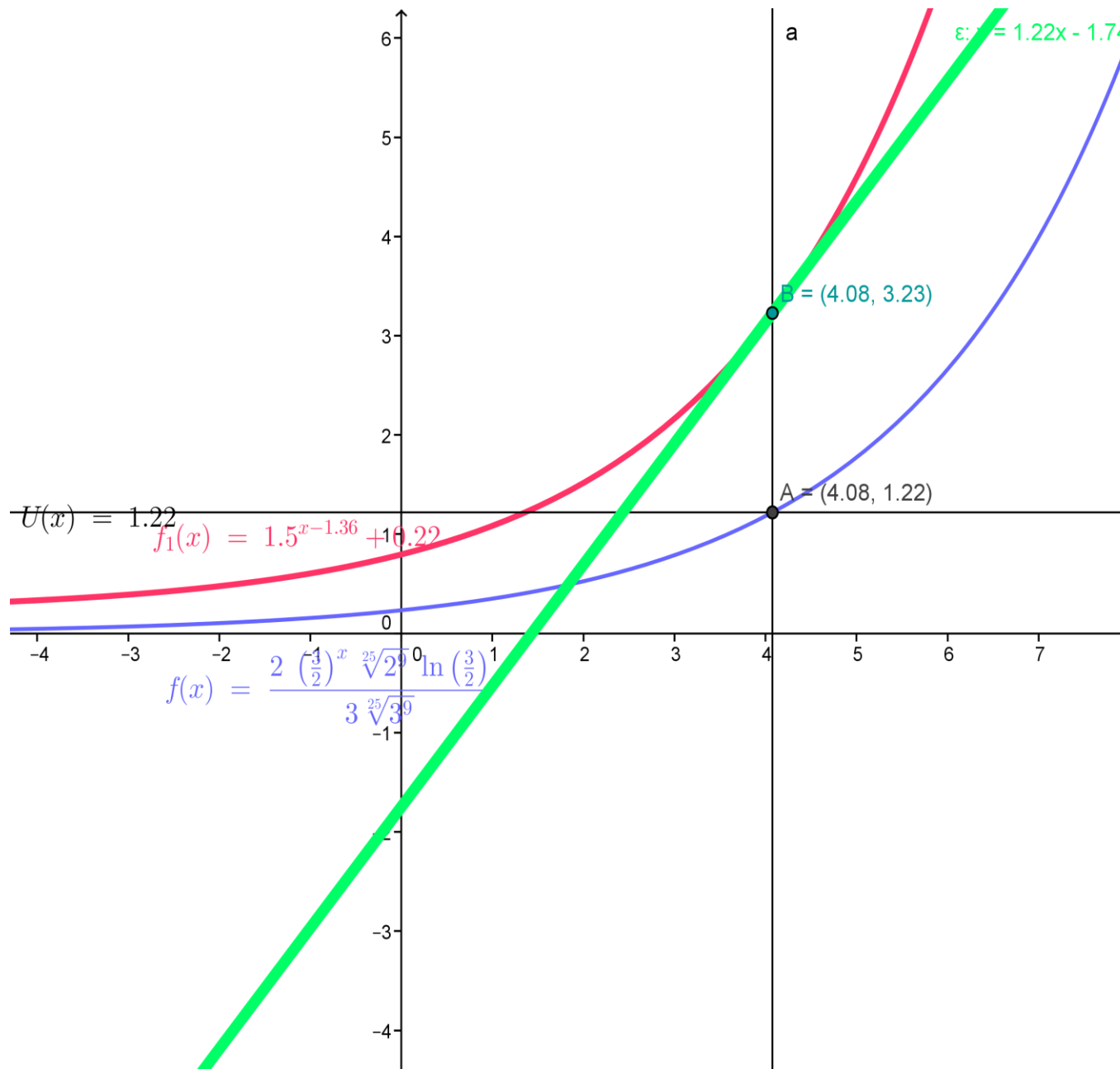
Οι γραφικές αναπαραστάσεις και οι επίλυση εξισώσεων μέσω αυτών προκαλούν πάντα δυσκολίες στους μαθητές μου , ακόμα και αν βρίσκονται στην τελευταία τάξη του Λυκείου . Θα τους αφήσω να πειραματιστούν και αναμένω την παρακάτω απάντηση να ορίσουν την ευθεία $\psi=U$.



Σχήμα 7 (στιγμιότυπο Z)



Σχήμα 8 (στιγμιότυπο Η)



Σχήμα 9 (στιγμιότυπο Ι)

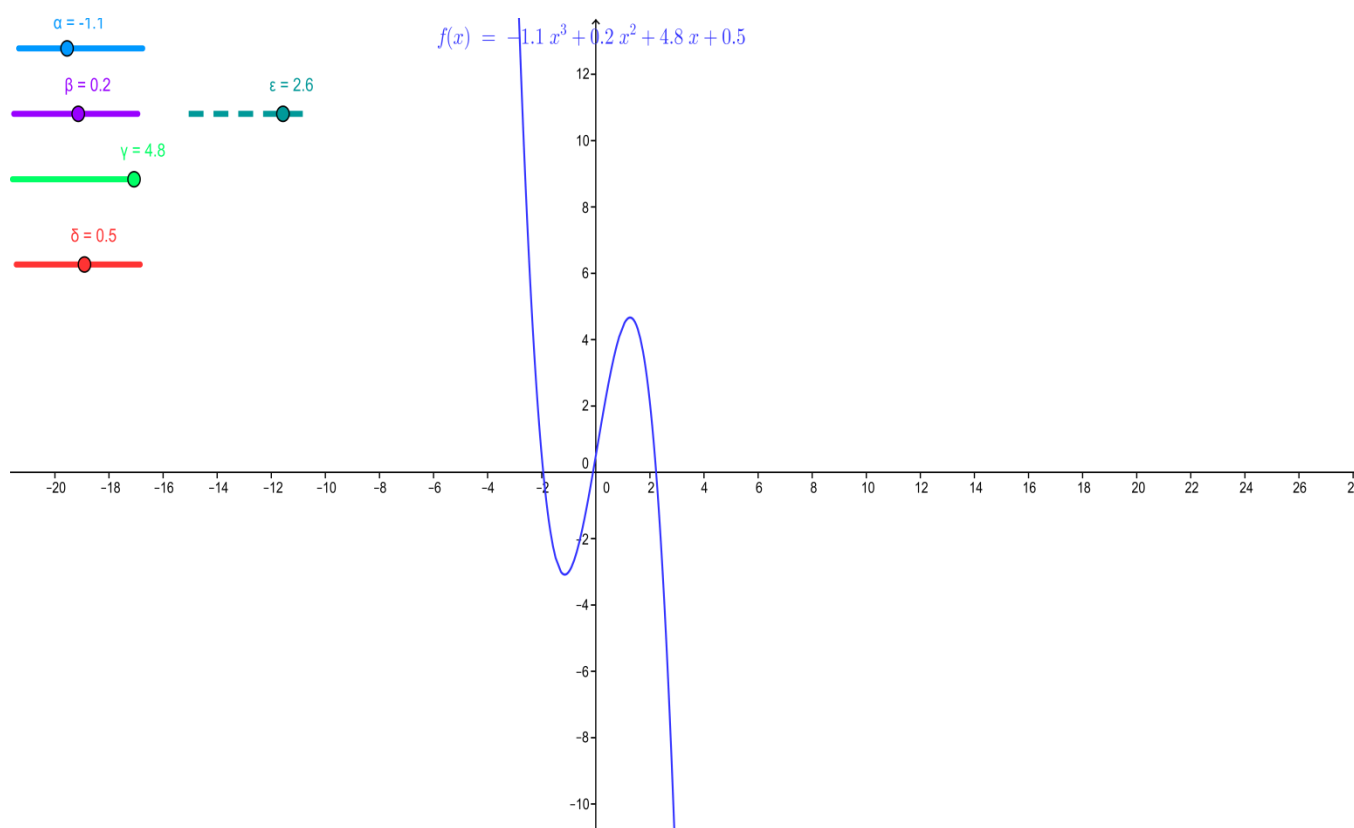
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΓΕΟΓΕΒΡΑ

Ως συνέχεια της προηγούμενης διδακτικής πρότασης θα είναι να απαντήσουν οι μαθητές σε ένα νέο ερώτημα :

Υπάρχει κάποιο σημείο της διαδρομής του τρένου, όπου η μέση ταχύτητά του θα γίνει ίση με την στιγμιαία ταχύτητα ;

ΦΑΣΗ 1

Αρχικά οι μαθητές μπορούν μετακινώντας τους δρομείς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κατασκευάσουν μια εξίσωση κίνησης της αρεσκείας τους (π.χ $f(x)=5x^3+6x^2-4x+10$).



Σχήμα 10 (στιγμιότυπο Α)

ΦΑΣΗ 2

Στη συνέχεια να θεωρήσουν δυο τυχαία σημεία γραφικής παράστασης της συνάρτησης $A(\epsilon, f(\epsilon))$ και $B(\zeta, f(\zeta))$ ως σημεία εκκίνησης και αφετηρίας του κινητού και να ορίσουν το ευθύγραμμο τμήμα AB από το κουτί της αντίστοιχης επιλογής από το λογισμικό πρόγραμμα καθώς και να ορίσουν την κλίση του AB από το κουτί της αντίστοιχης επιλογής.

Στο σημείο αυτό επιδιώκω οι μαθητές μου να συνδυάσουν τις υπάρχουσες γνώσεις τους για την κλίση ευθυγράμμου τμήματος με την μέση ταχύτητα του κινητού δηλαδή να χρησιμοποιήσουν τον

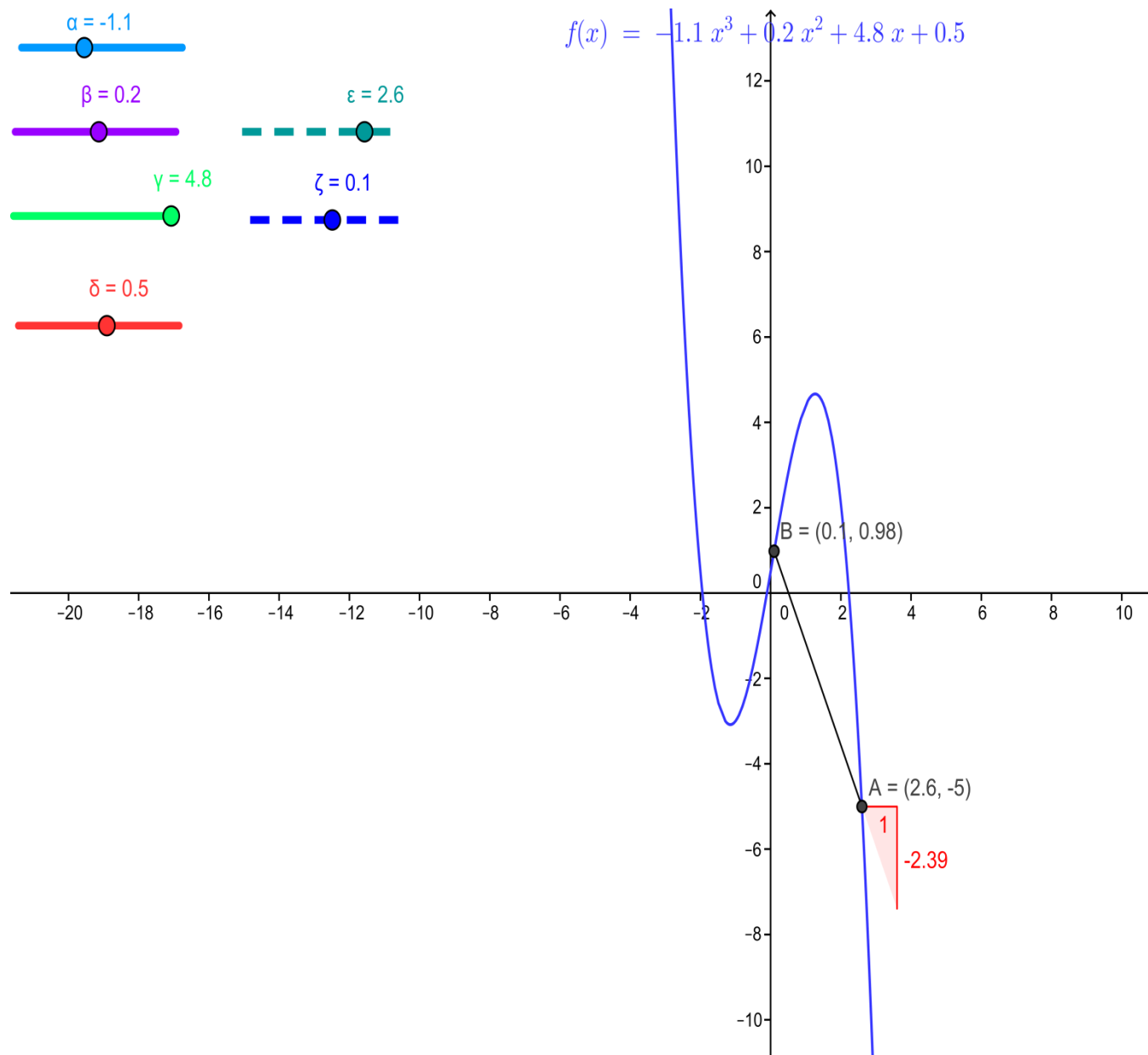
$$\text{τύπο} \quad \frac{f(a) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

και να τον συνδυάσουν με τον

$$\text{τύπο} \quad \bar{U} = \frac{S(a) - S(\beta)}{\alpha - \beta}$$

της μέσης ταχύτητας .

Αναμένω οι απαντήσεις στο ερώτημα αυτό αν δοθούν μετά από συζήτηση , διότι τίθεται το θέμα της υπάρχουσας γνώσης ,δηλαδή κατά πόσο έχουν κατανοήσει οι μαθητές μου την έννοια της φυσικής και την κλίση ενός ευθυγράμμου τμήματος (από αναλυτική γεωμετρία).



σχήμα 11 (στιγμιότυπο Β)

ΦΑΣΗ 3

Στην τρίτη φάση της δραστηριότητας ξαναθέτουμε τον αρχικό μας προβληματισμό σε μια νέα βάση , δηλαδή , αν υπάρχει κάποιο σημείο της διαδρομής του τρένου όπου η μέση ταχύτητά του θα γίνει ίση με την στιγμιαία .

Αναμένω από τις απαντήσεις τους και τις συζητούμε στην τάξη . Δεν μελετούμε την τριτοβάθμια συνάρτηση για να επιμείνουμε στα λεπτομερή συμπεράσματα (Η παραπάνω ερώτηση θα μπορούσε να αποτελέσει μια νέα δραστηριότητα). Αρκεί οι μαθητές να αντιληφθούν την σχέση θέσης – χρόνου ($f(x)$ - x) .Ίσως κάποιοι δουν την γραφική παράσταση σαν μια προσομοίωση της τροχιάς του τρένου .

Στο σημείο αυτό , αναμένω ότι οι περισσότερες απαντήσεις να είναι καθαρά αλγεβρικές , δηλαδή εξισώσουν την τιμή του λ_{AB} με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης :

$$f'(x)=\lambda_{AB}.$$

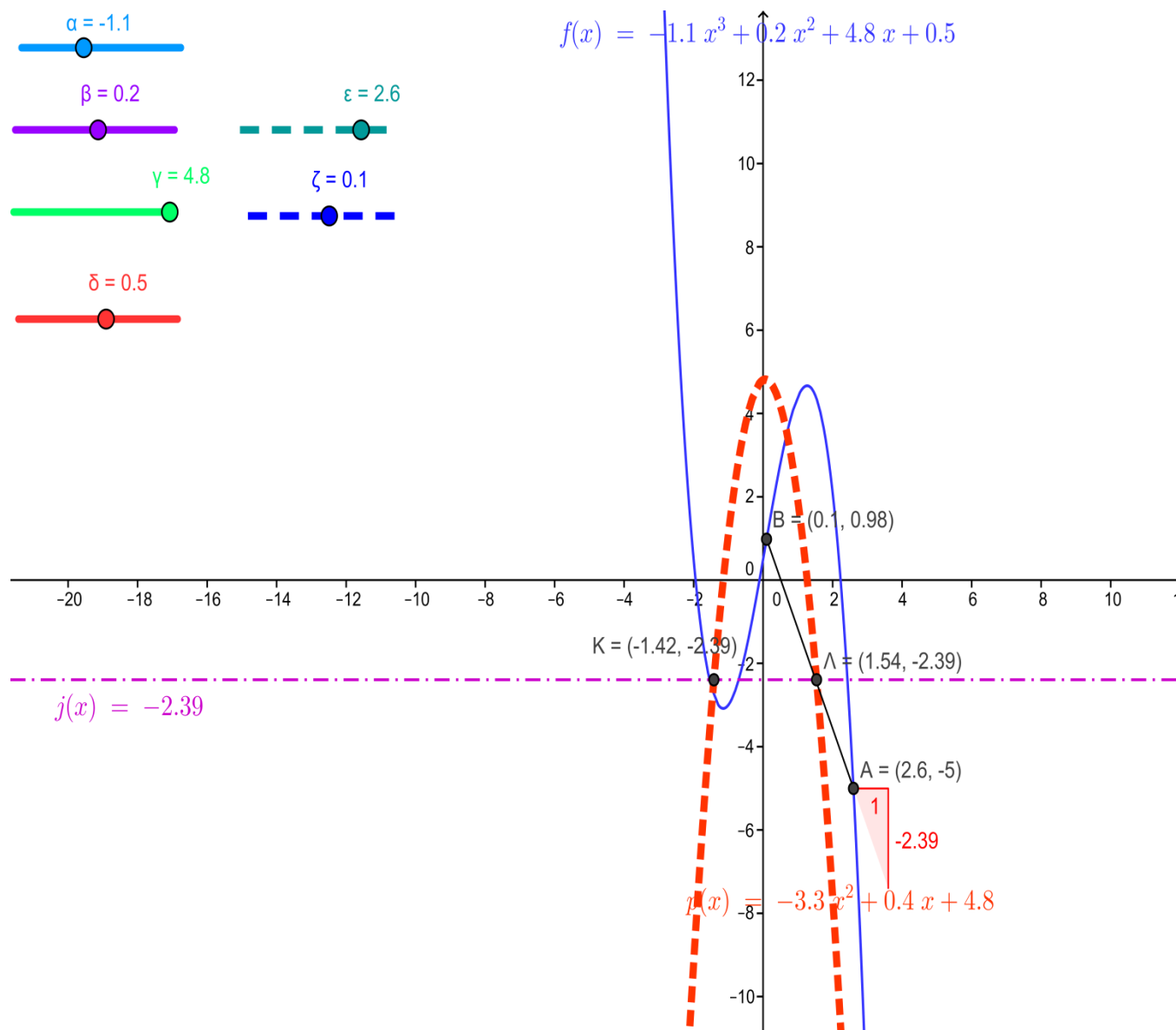
Για αυτό το λόγο θα τους ζητήσω το παρακάτω ερώτημα να απαντηθεί μέσα από το υπολογιστικό πρόγραμμα.

Με το ερώτημα αυτό επιδιώκω οι μαθητές μου να καταφέρουν να κατανοήσουν σε βάθος αυτά που ήδη γνωρίζουν και λύνουν με μηχανικό τρόπο προβάλλοντας τους το παραπάνω εμπόδιο . Οι γραφικές αναπαραστάσεις και οι επίλυση εξισώσεων μέσω αυτών προκαλούν πάντα δυσκολίες στους μαθητές μου , ακόμα και αν βρίσκονται στην τελευταία τάξη του Λυκείου . Θα τους αφήσω να πειραματιστούν σε ομάδες των τριών και αναμένω την παρακάτω απάντηση να ορίσουν την ευθεία.

$$\psi=\lambda_{AB}.$$

Στη συνέχεια να ορίσουν σημεία μέσω του λογισμικού , ώστε :

$$f'(x)=\psi=\lambda_{AB}.$$



Σχήμα 12 (στιγμιότυπο Γ)

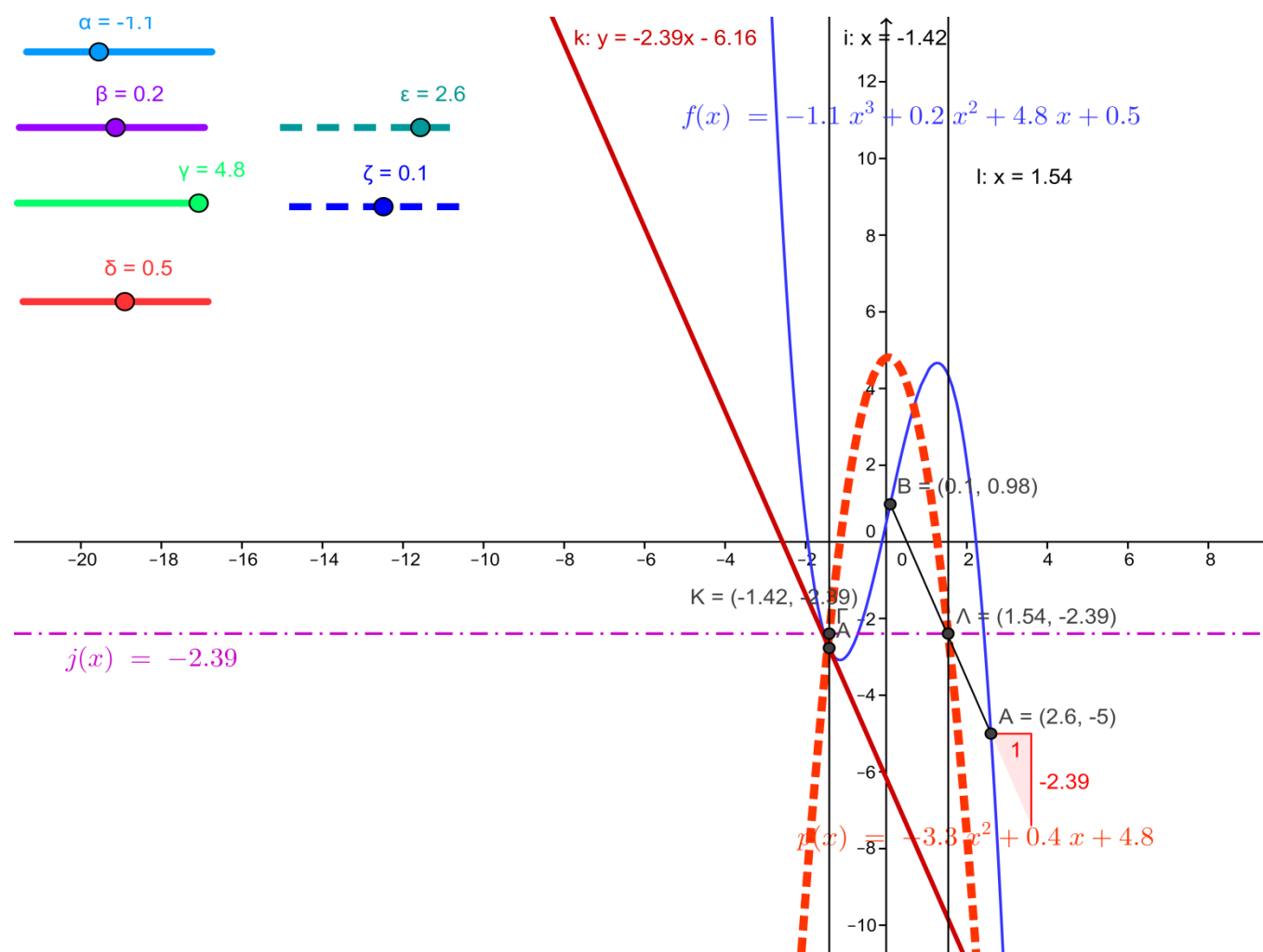
Η απάντηση της προηγούμενης ερώτησης είναι πολύ σημαντική , γιατί έδωσα τα προηγούμενα βήματα με τέτοια σειρά , ώστε μετά την εμφάνιση του εμποδίου οι μαθητές , να έχουμε μια εξελικτική πορεία που θα βασίζεται στην προϋπαρχουσα γνώση .

Δηλαδή ,οι μαθητές έχουν καταφέρει να συνδυάσουν μαθηματικές αλγεβρικές έννοιες με γραφικές αναπαραστάσεις

μετατόπιση – ταχύτητα

παράγωγο συνάρτησης σε σημείο – εφαπτομένη σε σημείο .

Όταν οι μαθητές φέρουν την κάθετη (τις κάθετες)από το σημείο τομής (τα σημεία τομής) στον άξονα x , βρούν τα σημεία τομής της κάθετης (των καθέτων) με την συνάρτηση $f(x)$ και τα ονομάσουν θα μπορούν να φέρουν την εφαπτομένη (ή τις εφαπτομένες) στα προηγούμενα σημεία (από την επιλογή του περιβάλλοντος Geobebra).



Σχήμα 13 (στιγμιότυπο Δ)

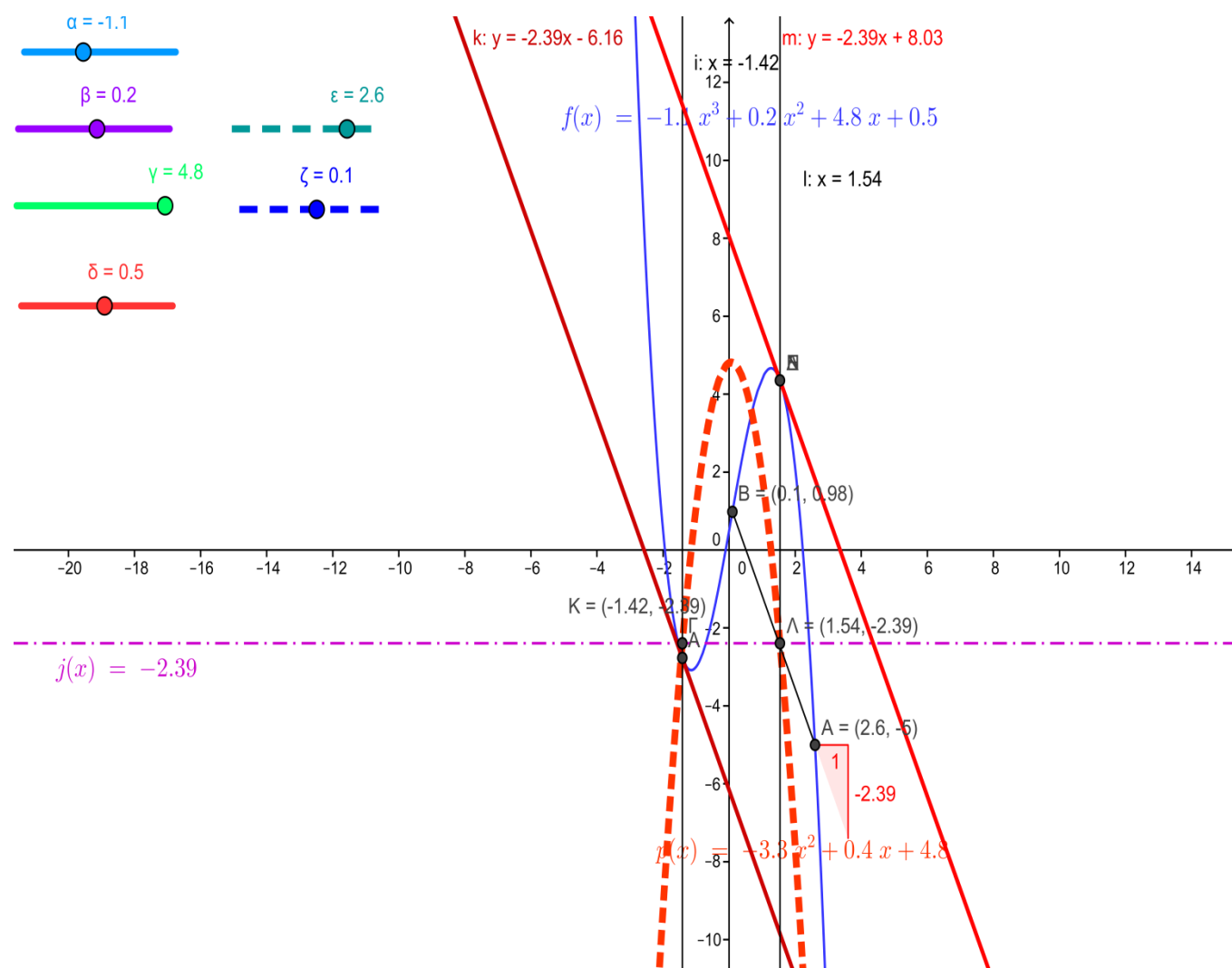
ΦΑΣΗ 4

Κινώντας κατάλληλα τους δρομείς θα ζητηθεί από τους μαθητές να κάνουν γενικότερα τις παρατηρήσεις τους, δηλαδή, να δουν ότι υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτομένη σε σημείο στο $[a,b]$, ώστε να είναι παράλληλη στην χορδή AB.

Έτσι, μπορούν πλέον οι μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους το Θ.Μ.Τ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f με τον παραπάνω τύπο $f(x)$, και έστω ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, όπου

- f συνεχής στο $[a,b]$
- f παραγωγίσιμη στο (a,b) .



Σχήμα 14 (στιγμιότυπο Ε)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Baron M. E.. *The Origins of the Infinitesimal Calculus* . Oxford Pergamon Press 1969.
2. Barrow Issac . *The Geometrical Lectures of Issac Barrow* . (*The open court Series of Classics of Science and Philosophy* , No.3). Chicago and London . The open court publishing company 1916 . Translated , with notes and proofs , and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus by J.M . Child . New York . Dover Publications 2006.
3. Beckmann P. *A history of pi* 3rd edition . New York : Golem Press (1974).
4. Boyer C. B. *The history of the calculus and its conceptual development* . New York . Dover Publications 1959.
5. Γιαννακούλιας Ε . *Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού*. Αθήνα 2005.
6. Δημόκριτος, *Μαθηματικά - Φυσικές Επιστήμες, Αστρονομία-Κοσμολογία Της Ατομικής Θεωρίας*. Εκδόσεις Ζήτρος. Θεσσαλονίκη 2004 .
7. Eves H. *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών* . Αθήνα . Τροχαλία . 1
8. Francesca Ferrata , Dave Pratt, Ornella Robutti. *The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and calculus*.
9. Federico Enriques & Manlio Mazzioti . *Οι Θεωρίες του Δημόκριτου του Αβδηρίτη 1948* , σε μετάφραση Α.Α.Παπαιωάννου . Εκδόσεις του Διεθνούς Δημοκρατείου Ιδρύματος . Ξάνθη 1982) .
10. Healy &Kynigos *Charting the microworld territory over time: desing and construction in mathematics education*.
11. Katz V. J. *A History of Mathematics* . New York Harper Collins College Publishers 1993.
12. Kenneth Ruthven University of Cambridge. *Teachers ,Technologies and the Structures of Schooling*.
13. Κυνηγός Χρόνης . *Το μάθημα της Διερεύνησης* . (εκδόσεις Τόπος 2011).

14. Λάζος . Δ . Χρήστος . *Αρχιμήδης ο ευφυής μηχανικός* . Εκδόσεις Αίολος 1995 .
15. Λάμπας Διονύσιος . “Ευκλείδη Στοιχεία” . Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό . Τόμος ΙΙΙ . *Η Γεωμετρία του χώρου* , βιβλία XI, XII, XIII. (Κ.Ε.Ε.ΕΠ.ΕΚ : ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ).
16. Νεγρεπόντης Σ. - Γιωτόπουλος Σ.- Γιαννακούλιας Ε. (1999) . *Απειροστικός λογισμός* . Τόμος Ι - Τόμος ΙΙ . Εκδόσεις Συμμετρία –Αθήνα .
17. Νεγρεπόντης Σ. *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών – Στοιχεία Ευκλείδη* . Σημειώσεις μαθήματος του Π.Μ.Σ . Αθήνα (2011) .
18. Neugebauer . *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα* . Ο Αθήνα, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης 2003 .
19. Otto Toeplitz . *The calculus : A genetic Approach* .Published in Association with the Mathematical Association of America . The University of Chicago Press . Chicago – London .
20. Papert Seymour. *Νοητικές θύελλες* (εκδόσεις Οδυσσέας) .
21. Polya G . *How to Solve It A New Aspect of Mathematical Method* (With a new foreword by john H. Conway) . Princeton University Press Princeton and Oxford .
22. Priestley William Mc Gowen. *Calculus: A Liberal Art* . Second Edition With 242 illustrations . Springer .
23. Rina Hershkowitz and Baruch Schwarz . *The emergent perspective in reach learning environments*.
24. Σταμάτης Σ. Ευάγγελος *Αρχιμήδους Άπαντα* (Τόμος Α) . Εκδότης Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας . 1970 .
25. Stillwell J. *Mathematics and its History* . New York Springer – Verlag 1989 .
26. Struve, W. W. “Mathematisch Papyrus des Museums in Moskau”. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Ser. A, Vol. I, 1930. (Αγγλική

μετάφραση : *Mathematics in the time of the Pharaohs* Gillings, R. J . New York. Dover Publications 1982).

27. Τσιμπουράκης Δ. *Η τριγωνομετρία στην Αρχαία Ελλάδα* . Εκδόσεις Ατραπός .
28. Van der Waerden, B. L. *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, 2η έκδοση, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2003.
29. Χριστιανίδης Γ. *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών – Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά* . Ηράκλειο Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης . 2003.