ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΡΑΛΛΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Αθήνα
Ιούνιος, 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 24/06/2009 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ευστάθιος Βασιλείου (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	…….
2) Διονύσιος Λάππας	Αν. Καθηγητής	……
3)Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αν. Καθηγητής	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

- Τον επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή κ. Ευστάθιο Βασιλείου για τη συνεχή και αδιάλειπτη βοήθειά του καθώς και για την αποτελεσματική καθοδήγηση του σε όλα τα στάδια της εκπόνησης αυτής της εργασίας. Οι επισημάνσεις και οι διορθώσεις του συνέβαλλαν ώστε η εργασία να παρουσιαστεί στην αρτιότερη μορφή της.
- Τους αναπληρωτές καθηγητές κ. Λάππα Διονύσιο και κ. Γιαννακούλια Ευστάθιο.
- Την οικογένεια μου, που μου συμπαραστάθηκε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και πίστεψε στην επιτυχή ολοκλήρωση τους.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κράλλης Ιωάννης

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών

στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

που απονέμει

το Μαθηματικό Τμήμα

Αθήνα, Ελλάδα

Ιούνιος 2009

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Αναμφίβολα η Γεωμετρία αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της μαθηματικής επιστήμης, από τη στιγμή της δημιουργίας της μέχρι και σήμερα, της οποίας η εξέλιξη συνεχίζεται χωρίς διακοπή και υπόσχεται σημαντικές κατακτήσεις στο μέλλον. Η σπουδαιότητα της, μπορούμε να πούμε, πηγάζει πρωταρχικά από το φυσικό κόσμο και εν συνεχεία από τον άνθρωπο. Κατά τη διάρκεια της ιστορίας, ο ανθρώπινος νους προσαρμόζεται, εξελίσσεται και προσπαθεί να μελετήσει όλες τις πτυχές του φυσικού περιβάλλοντος. Έτσι, η αναζήτηση απαντήσεων για την ερμηνεία του «χώρου» δημιούργησε τις βάσεις για τη σύγχρονη επιστήμη.

Η έννοια του χώρου αποτέλεσε ένα από τα κίνητρα, ώστε ο άνθρωπος να οδηγηθεί στα μαθηματικά. Οι Αρχαίοι Έλληνες με την απαράμιλλη μέθοδό τους παρήγαγαν το μοναδικό δημιούργημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν το πρώτο σύστημα γνώσεων που έθεσε σε επιστημονικό πλαίσιο τα εμπειρικά δεδομένα, τα οποία αντλούσε ο ανθρώπινος νους από την αίσθηση του χώρου.

Ωστόσο, χρειάστηκαν περίπου δυο χιλιετίες, ώστε να συνειδητοποιήσει ο άνθρωπος ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν ήταν η μοναδική Γεωμετρία που περιγράφει το χώρο. Η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών σηματοδοτεί την αρχή μιας νέας εποχής για την περαιτέρω μελέτη του φυσικού κόσμου.

Οι δύο κλάδοι της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η Υπερβολική και η Ελλειπτική, ειδωμένες μέσα από ένα πρίσμα αναλυτικής προσέγγισης αποτελούν το αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας. Με βασικό άξονα τους μετασχηματισμούς του Möbius, θα αναπτύξουμε στο μιγαδικό επίπεδο μερικά μοντέλα αναπαράστασης της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

2. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ- ΣΤΑΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ 10

2.1. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ-ΑΙΤΗΜΑΤΑ 10

2.2. ΟΙ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ 5ου ΑΙΤΗΜΑΤΟΣ 12

2.3. Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ 14

2.4. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 18

2.5. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 21

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 23

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 24

3.1. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 25

3.1.1. Μεταφορά (translation) 25

3.1.2. Περιστροφή (rotation) 25

3.2. ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 26

3.2.1. Ομοιοθεσία (Homothetic transformation) 26

3.2.2. Αντιστροφή (Inversion) 26

3.3. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ (conformality) 27

3.4. ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ 27

4. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ERLANGER 31

4.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ 31

4.1.1. Ισότητα (Congruence) 31

4.1.2. Μετασχηματισμός και Ισότητα 32

4.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΤΑ KLEIN 32

4.3. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ (Invariants) 35

4.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ 37

4.5. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ KLEIN 38

ΜΕΡΟΣ Β

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ - ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ERLANGER

5. MÖBIUS, ΜΙΑ ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 40

5.1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS 40

5.2. ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ MÖBIUS 42

5.3. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ MÖBIUS 44

5.4. ΟΜΑΔΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ MÖBIUS 45

5.5. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ MÖBIUS 46

5.6. ΑΝΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ (cross-ratio) 50

5.7. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ (invariants) 51

5.7.1. Μέτρο Γωνίας 51

5.7.2. Αναρμονικός λόγος (Cross Ratio) 52

5.7.3. Γενικευμένοι Κύκλοι (Generalized circles ή Clines) 55

5.7.4. Συμμετρία 56

6. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 62

6.1. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΔΙΣΚΟΥ (POINCARÉ) 62

6.2. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ 63

6.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 64

6.4. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 65

6.5. ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ 68

6.5.1. Γωνία παραλληλίας 69

6.6. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΜΗΚΟΣ 70

6.6.1. Θεμελιώδεις ιδιότητες της απόστασης 70

6.6.2. Τύποι Απόστασης 76

6.6.3. Υπερβολικοί κύκλοι 81

6.7. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟΥ (POINCARÉ) 84

6.7.1. Μήκος στο Άνω Ημιεπίπεδο 85

6.7.2. Σύνδεση μοναδιαίου δίσκου (D) με το άνω ημιεπίπεδο (U) 85

6.8. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ 86

6.9. ΕΜΒΑΔΟΝ 88

6.10. ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 90

7. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 94

7.1. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ 97

7.2. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 99

7.2.1. Διπλή ελλειπτική γεωμετρία 99

7.3. ΑΠΛΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 101

7.3.1. Επίπεδο μοντέλο απλής ελλειπτικής γεωμετρίας 101

7.4. Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 104

7.5. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ 109

Βιβλιογραφία 111

Ευρετήριο 113

ΜΕΡΟΣ Α

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διάρθρωση και η δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με βάση τους ορισμούς, τις κοινές έννοιες και τα αξιώματα, της αποδίδουν το χαρακτήρα της *συνθετικής γεωμετρίας*. Η συνθετική γεωμετρία, στηριζόμενη στα παραπάνω στοιχεία και με βάση τον καθαρό συλλογισμό, μας δίνει τη δυνατότητα να συνάγουμε και να αποδείξουμε τα θεωρήματα.

Βέβαια, με τη συνθετική προσέγγιση, είναι αναπόφευκτη η εμπλοκή του νου με έννοιες αφηρημένες και όχι σαφώς προσδιορισμένες. Αν όμως επιχειρήσουμε τη μελέτη της γεωμετρίας μέσω συγκεκριμένων αναπαραστάσεων, όπως είναι ένα μοντέλο τοποθετημένο στο επίπεδο ή το μοντέλο της σφαίρας, τότε αντιμετωπίζουμε μια νέα διαδικασία ανάπτυξης. Οι γεωμετρικοί όροι συνυπάρχουν και αλληλεπιδρούν με άλλους κλάδους των μαθηματικών ή και με το φυσικό κόσμο, παρουσιάζοντας τη γεωμετρία με αναλυτικό τρόπο. Η αναλυτική προσέγγιση της γεωμετρίας εμπεριέχει, συνήθως, τη χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, θα αναπτυχθούν στην εργασία οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Με αφετηρία την Αρχαία Ελλάδα και την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αρχικά, θα εξετάσουμε συνοπτικά την πορεία των ερευνών για την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος και έπειτα, θα δούμε πώς η αναίρεσή του δημιουργεί την Υπερβολική και την Ελλειπτική Γεωμετρία.

Από το ιστορικό μέρος περνάμε στο μαθηματικό, όπου θα αναλυθούν τα βασικά εργαλεία για το κύριο τμήμα της εργασίας. Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί από τη μια και το Πρόγραμμα Erlanger από την άλλη, θα λειτουργήσουν ως θεμέλιοι λίθοι για τη βασική μελέτη της γεωμετρίας μας. Αξίζει να αναφέρουμε ότι χρειάστηκαν δυο χιλιετίες μέχρι να εμφανιστεί η ριζοσπαστική και καινοτόμος θεωρία του F. Klein, ο οποίος αντιμετώπισε τη γεωμετρία αλγεβρικά και την εμπλούτισε με νέα αποτελέσματα.

Με βασικό κορμό το πρόγραμμα του Klein, θα μελετήσουμε μια ευρύτερη εφαρμογή του στη Γεωμετρία Möbius. Διαμέσου της ομάδας των μετασχηματισμών και των αναλλοίωτων της Γεωμετρίας Möbius, θα αναλύσουμε τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Το σύγχρονο πρίσμα του προγράμματος Erlanger επιτρέπει μια κατηγοριοποίηση των γεωμετριών σε

τέτοιο βαθμό, ώστε η Γεωμετρία Möbius να δέχεται ως «υπογεωμετρίες» (subgeometries) της, την Υπερβολική και την Ελλειπτική Γεωμετρία.

Η μελέτη της Υπερβολικής Γεωμετρίας θα πραγματοποιηθεί μέσω του δίσκου του Poincaré. Σε αυτό το μοντέλο αναπαράστασης θα αναλυθούν βασικές έννοιες, όπως το μήκος, η γωνία και το εμβαδόν. Παράλληλα, θα δούμε με ποιον τρόπο παραλλάσσονται οι παραπάνω έννοιες με τις αντίστοιχες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Με ανάλογη μέθοδο, θα αναπτυχθεί και η Ελλειπτική Γεωμετρία. Στα μοντέλα αναπαράστασης που θα εξετάσουμε, ανήκει η επιφάνεια της σφαίρας καθώς και η προβολή της στο επίπεδο.

2. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ- ΣΤΑΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ

2.1. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ-ΑΙΤΗΜΑΤΑ

Περίπου στο 300 π.Χ., ο Ευκλείδης συστηματοποίησε, σε ένα εκτενές σύγγραμμα με τίτλο «Στοιχεία», το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής γνώσης που είχε συντελεστεί μέχρι την εποχή του. Ξεκινώντας από το 600 π.Χ. με το Θαλή και τις πρώτες ιδέες γεωμετρίας και συνεχίζοντας με τον Πυθαγόρα και την Πλατωνική σχολή, άντλησε ένα μεγάλο αριθμό δεδομένων και δημιούργησε ένα οργανωμένο και ομαδοποιημένο σύνολο αποτελούμενο από 13 βιβλία με 465 προτάσεις. Το περιεχόμενο των βιβλίων διαρθρώνεται κυρίως με Γεωμετρία, στοιχειώδη γεωμετρική Άλγεβρα και θεωρία Αριθμών. Το κείμενο αυτό έμεινε απαράλλαχτο, και με τη μορφή του εγχειριδίου Γεωμετρίας μεταφερόταν ανά τους αιώνες, είτε για διδασκαλία, είτε για έρευνα.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του Ευκλείδη είναι πως απέδειξε τόσες προτάσεις στηριζόμενος ουσιαστικά σε πέντε κοινές έννοιες και πέντε αιτήματα. Οι κοινές έννοιες αναφέρονται σε συμπεράσματα που αφορούν κυρίως τη λογική, ενώ τα αιτήματα είναι προτάσεις που αφορούν μόνο τη Γεωμετρία. Προκειμένου να είναι άρτιος ο σχολιασμός και η ανάλυση όλων των ζητημάτων που παρουσιάζονται παρακάτω, παραθέτουμε τα πέντε αιτήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

Αίτημα 1ο. Από οποιοδήποτε σημείο προς οποιοδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή.

Δηλαδή δυο σημεία ορίζουν μια ευθεία. Εννοείται εδώ, ότι αναφέρεται σε μια και μοναδική ευθεία.

Αίτημα 2ο. Και είναι δυνατόν πεπερασμένη ευθεία να εκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Με άλλα λόγια μια ευθεία έχει άπειρο μήκος. Όπως θα δούμε παρακάτω, το αίτημα αναιρείται στην περίπτωση της Σφαιρικής Γεωμετρίας.

Αίτημα 3ο. Από κάθε κέντρο και με κάθε διάστημα γράφεται κύκλος.

Η λέξη διάστημα εκφράζει την έννοια της ακτίνας.

Αίτημα 4ο. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Αίτημα *5ο*. Αν μια ευθεία τέμνει δυο άλλες, έτσι ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών να είναι μικρότερο των δύο ορθών, τότε αυτές οι ευθείες μπορούν να προεκταθούν μέχρι να τέμνονται προς το μέρος των γωνιών που είναι μικρότερες των δύο ορθών.

Το 5ο αίτημα είναι φανερό ότι ξεφεύγει νοηματικά από τα υπόλοιπα, αφού διατυπώνεται σε γλώσσα ανάλογη των προτάσεων των Στοιχείων. Η πολυπλοκότητα της έκφρασής του, αποτέλεσε την αφετηρία για επίπονες έρευνες, οδηγώντας αρκετούς μελετητές στην προσπάθεια να το αποδείξουν. Ωστόσο, το αποτέλεσμα ήταν να δοθούν διαφορετικές ερμηνείες. Παραθέτουμε κάποιες ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα:

(1) Αξίωμα του Playfair: *Από σημείο εκτός ευθείας ακριβώς μια ευθεία μπορεί να διέλθει από αυτό που να είναι παράλληλη στην αρχική.*
Σύμφωνα με τον Heath (βλ [βιβλίο I, σ. 220]) η διατύπωση αυτή απαντάται πρώτα στον Πρόκλο.

(2) Ποσειδώνειος, Γέμινος: *Υπάρχουν ευθείες γραμμές παντού ισαπέχουσες η μία από την άλλη.*

(3) Legendre: *Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το άθροισμα των τριών γωνιών του να ισούται με δύο ορθές.*

(4) Legendre, W. Bolyai: *Δοθέντων τριών μη συνευθειακών σημείων υπάρχει κύκλος που διέρχεται από αυτά.*

Ένας ακόμη λόγος που ώθησε την έρευνα πάνω στο 5ο αίτημα, προέρχεται από την άποψη ότι, όπως το αντίστροφό του αιτήματος αποδεικνύεται στην Πρόταση I.27 των Στοιχείων μέσω των άλλων αιτημάτων, έτσι, πρέπει ανάλογα και το ευθύ να αποδεικνύεται. Με τη σκέψη αυτή ως οδηγό, το αποτέλεσμα ήταν να καταλήξουν από τη μια σε ισοδύναμες διατυπώσεις και από την άλλη σε αρκετά ενδιαφέροντα και κρίσιμα συμπεράσματα. Την πορεία των συμπερασμάτων και τον τρόπο που επηρέασαν τους μελετητές αναφέρουμε στην επόμενη παράγραφο.

2.2. ΟΙ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ 5ου ΑΙΤΗΜΑΤΟΣ

Για περίπου δύο χιλιετίες επιχειρήθηκαν αξιόλογες προσπάθειες για την απόδειξη του 5ου αιτήματος μέσω των υπόλοιπων αξιωμάτων, συμπεριλαμβανομένων και αναγνωρισμένων γεωμετρών. Στην προσπάθεια αυτή έλαβαν μέρος πολλοί γνωστοί μαθηματικοί (όπως οι Saccheri, Legendre, Wallis, Gauss, κ.α). Αυτό αποδεικνύει περίτρανα ότι η επιλογή του Ευκλείδη να το συμπεριλάβει στο έργο του, ως απαραίτητο για την θεμελίωση της θεωρίας του, του δίνει το χαρακτηρισμό ενός μοναδικά ευφυούς ατόμου.

Οι προσπάθειες που επιχειρήθηκαν κατά την αρχαιότητα κρύβουν ιδιαίτερο ζήλο, καθώς φάνταζε δεδομένη η ύπαρξη απόδειξης του αιτήματος. Ωστόσο, την πιο σημαντική συμβολή είχαν οι σύγχρονοι γεωμέτρες, ώστε τελικά να οδηγηθούν στην ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Το τελικό αποτέλεσμα για τους μελετητές, μέχρι τα μέσα του 18ου αιώνα, ήταν να αντικαταστήσουν το 5ο αίτημα με ισοδύναμες προτάσεις, λαμβάνοντας ως υπόθεση τα τέσσερα πρώτα αιτήματα. Στη συνέχεια, παρατίθενται με χρονολογική σειρά μερικές αξιοσημείωτες απόπειρες και οι συντελεστές τους.

Όπως σημειώνει ο Heath, πρώτος εμφανίζεται ο **Πτολεμαίος** ο Αλεξανδρινός (100-178 μ.Χ.). Σημαντικές πληροφορίες για το έργο του μας δίνει ο Πρόκλος, που αναφέρει ότι ο Πτολεμαίος συνέγραψε ένα βιβλίο πάνω στην πρόταση: *Οι ευθείες γραμμές που σχηματίζονται από γωνίες μικρότερες των δυο ορθών τέμνονται αν προεκταθούν*, στηριζόμενος ουσιαστικά στην πρόταση του Ευκλείδη (Ι.28)[1].

Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις Ι.28 και Ι.29, οδηγείται να συμπεράνει το 5ο αίτημα ως εξής:

> *Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες γραμμές που σχηματίζουν με την τέμνουσα γωνίες μικρότερες των δυο ορθών δεν τέμνονται στη μεριά που βρίσκονται αυτές οι γωνίες. Τότε δεν θα τέμνονται ούτε στην άλλη μεριά που οι γωνίες είναι μεγαλύτερες από δυο ορθές. Συνεπώς, δεν θα τέμνονται σε καμία από τις δύο μεριές, και άρα είναι παράλληλες. Τότε όμως, οι γωνίες που σχηματίζονται από την τέμνουσα είναι ορθές (Ι.29). Δηλαδή οι γωνίες αυτές είναι ταυτόχρονα ίσες και μικρότερες από δυο ορθές. Άτοπο, άρα οι ευθείες τέμνονται.*

[1] Σύμφωνα με την Πρόταση Ι.28, *αν δυο ευθείες γραμμές συναντούν μια τέμνουσα που σχηματίζει τις εντός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες με δυο ορθές, οι ευθείες γραμμές δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν.*

Αρκετά αργότερα, ο **Πρόκλος** (410-485 μ.Χ.) προσπαθεί εντονότερα να εντοπίσει τη λύση. Όπως αναφέρει ο Heath (βλ. [βιβλίο I, σ. 204]), στηρίζεται σε ένα αξίωμα που χρησιμοποίησε ο Αριστοτέλης[1], και μέσω της πρότασης:

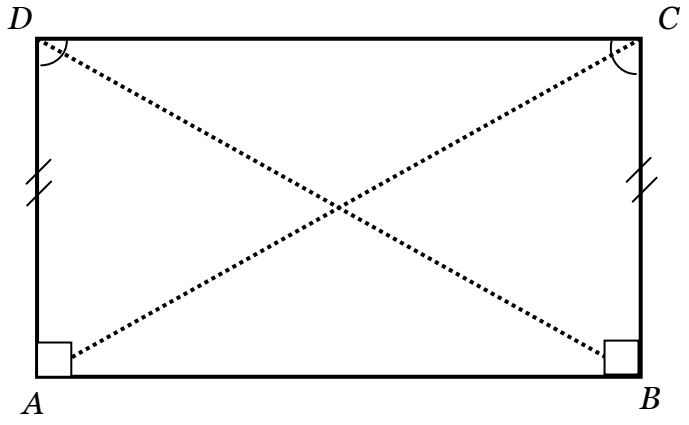
> *αν μια ευθεία γραμμή τέμνει τη μια από δυο παράλληλες, τότε θα τέμνει και την άλλη,*

προχωράει στην απόδειξη του 5ου αιτήματος.

Με τον Πρόκλο σταματάει η έρευνα του ζητήματος για περίπου μια χιλιετία, οπότε και εμφανίζεται ο Πέρσης **Nasiraddin at Tusi** (1201-1274), ο οποίος μελετώντας τις παράλληλες, οδηγείται σε μια δική του απόδειξη.

Στη συνέχεια ο **John Wallis** (1616-1703), ισχυριζόμενος ότι: *με δοθέν τρίγωνο και ευθύγραμμο τμήμα είναι πάντα δυνατόν να βρεθεί τρίγωνο όμοιο με το δοσμένο και πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα*, καταλήγει στο ποθητό συμπέρασμα. Ο Heath (βλ. [βιβλίο I, σ. 211), αναφέρει ότι ο Saccheri σχολιάζει τη προσπάθεια αυτή ως μια χωρίς συνθήκες υπόθεση του 5ου αιτήματος.

Φτάνουμε έτσι στα τέλη του 17ου αιώνα, όπου ο **Gerolamo Saccheri** (1667-1733) κάνει μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα απόπειρα για την απόδειξη του 5ου αιτήματος, τη σημαντικότερη έως τότε. Κατά τον Heath, αυτό οφείλεται στο ότι σκέφτηκε την πιθανότητα των «υποθέσεων», καθώς και στο ότι ανέπτυξε πολλές συνέπειες των υποθέσεων αυτών.



Σχήμα 2.1. Τετράπλευρο Saccheri.

[1] Επιχειρηματολογώντας ότι το σύμπαν είναι πεπερασμένο, ο Αριστοτέλης λέει ότι: *η απόσταση ενός σημείου της πλευράς μιας γωνίας από την άλλη πλευρά της, μεγαλώνει απεριόριστα όσο το σημείο απομακρύνεται από την κορυφή της και συνεπώς θα υπερβαίνει την οποιαδήποτε απόσταση μεταξύ των παραλλήλων.*

Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί ένα τετράπλευρο στο οποίο οι γωνίες της βάσης είναι ορθές και οι κάθετες πλευρές είναι ίσες (Σχήμα 2.1).

Οι γωνίες της πάνω βάσης θα καθορίσουν τις τρεις υποθέσεις ως εξής:(1) *υπόθεση της ορθής γωνίας,* (2) *υπόθεση της αμβλείας γωνίας,* (3) *υπόθεση της οξείας γωνίας*. Με βάση τη θεωρία του, είχε σκοπό να αποκλείσει τις υποθέσεις (2) και (3) ώστε να καταλήξει στην υπόθεση της ορθής, που αυτόματα θα σήμαινε την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος μόνο με τη χρήση των αρχικών αξιωμάτων του Ευκλείδη.

Στο πνεύμα του Saccheri πορεύεται και ο **Johann H. Lambert** (1728-1777), στο τρίτο μέρος του έργου του «*Theorie der Parallellinien*», όπου, με βασικό σχήμα ένα τετράπλευρο με τρεις ορθές γωνίες, παραθέτει τις ίδιες τρεις *υποθέσεις, της ορθής, της αμβλείας και της οξείας γωνίας*. Για κάθε μια από αυτές θέλει να αποδείξει ότι, το είδος της τέταρτης γωνίας του τετραπλεύρου είναι ορθή, αμβλεία ή οξεία, αντίστοιχα.

Λίγο αργότερα, ο **Adrien M. Legendre** (1752-1833), ερευνώντας τη θεωρία των παραλλήλων, γράφει ένα εγχειρίδιο επιπεδομετρίας με τίτλο «*Eléments de Géométrie*». Το βιβλίο του δημοσιεύεται σε 12 διαφορετικές εκδόσεις, σε κάθε μια από τις οποίες διορθώνει προηγούμενες απόψεις. Βασική του έρευνα αποτελεί η συσχέτιση της θεωρίας των παραλλήλων με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, αποδεικνύοντας ότι είναι ίσο με 180°.

Καθώς πλησιάζαμε στο κλείσιμο του 18^{ου} και στην αυγή του 19^{ου} αιώνα, μαζί με τον Lambert και τον Legendre αξιομνημόνευτη κρίνεται η συμβολή τριών ακόμη μαθηματικών, των Klugel (1763), Schweikart (1816) και Taurinus (1826). Με τις μελέτες τους αρχίζουν να συνειδητοποιούν πως η απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος δεν είναι εφικτή και πιθανόν μια διαφορετική γεωμετρία επρόκειτο να αναδυθεί. Έτσι, διαμορφώνεται το πρώτο στάδιο στην ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

2.3. Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ

Το δεύτερο στάδιο, που θα σημάνει τη θεμελίωση και αξιωματικοποίηση της νέας γεωμετρίας, οριοθετούν οι προσπάθειες τριών κορυφαίων μαθηματικών.

Αρχικά, ο **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), στην ενασχόληση του με την θεωρία των παραλλήλων, οδηγείται σε συμπεράσματα στα οποία αμφισβητείται η ισχύς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αρνείται όμως τη δημοσίευση των αποτελεσμάτων του επηρεασμένος από την τάση της εποχής του, που θεωρούσε κυρίαρχη την Ευκλείδεια άποψη. Βασική πηγή της γνώσης μας για το έργο του Gauss είναι οι επιστολές που αντάλλασε με άλλους

μαθηματικούς της περιόδου εκείνης. Απαντώντας σε μια επιστολή του Taurinus, αναφέρει μεταξύ άλλων:

> *«…Όλες μου οι προσπάθειες να ανακαλύψω μια ανακολουθία, μια ασυνέπεια, σε αυτή τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν χωρίς επιτυχία…».*

Στον Gauss αποδίδεται η πρόταση ότι το εμβαδό ενός τριγώνου της Υπερβολικής Γεωμετρίας έχει άνω φράγμα. Όπως επίσης και ο τύπος που δίνει το εμβαδό ενός τριγώνου στην Υπερβολική Γεωμετρία.

Παράλληλα με τον Gauss, εργάζεται ακόμη ένας μαθηματικός, ο Ρώσος **Nikolai I. Lobachevsky** (1792-1856) και δημοσιεύει το 1829 το βιβλίο του «*Περί των θεμελίων της Γεωμετρίας*» πάνω στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ουσιαστικά, είναι η πρώτη κοινοποίηση που επισήμως αντιτίθεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία προκαλώντας την Καντιανή θέση για το χώρο, η οποία πλέον θεωρείται ως υποκειμενική διαίσθηση. Ο τίτλος «*Πανγεωμετρία*» είναι αυτός που αποδίδει ο συγγραφέας στο νέο κατασκεύασμα του, αφού προηγουμένως την είχε ονομάσει «*Φανταστική Γεωμετρία*», και αυτό διότι θεωρούσε την γεωμετρία του ως τη δυνατή θεωρία των σχέσεων του χώρου.

Σχολιάζοντας τα τελευταία αποτελέσματα, ο Gauss σε ένα γράμμα του προς τον Schumacher το 1846, επαναλαμβάνει τη δική του προτεραιότητα στην ανάπτυξη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά παραδέχεται ότι ο Lobachevsky διεκπεραίωσε το ζήτημα με τρόπο αριστοτεχνικό και με αληθινά γεωμετρικό πνεύμα. (βλ. [Greenberg, σ. 182]).

Ο Lobachevsky περιγράφει ένα νέο τρισδιάστατο χώρο με άψογη λογική, διαφορετικό από τον Ευκλείδειο και το πετυχαίνει με την εισαγωγή δυο βασικών σχημάτων: του *ορόκυκλου* (horocycle) και της *ορόσφαιρας* (horosphere). Ο ορόκυκλος και η ορόσφαιρα είναι αντίστοιχα, ο κύκλος και η σφαίρα με άπειρη ακτίνα. Στη συνήθη Γεωμετρία, αυτοί οι όροι αντιστοιχούν στην ευθεία και στο επίπεδο. Άπειροι ορόκυκλοι συνιστούν την ορόσφαιρα στην επιφάνεια της οποίας ισχύει μια γεωμετρία ανάλογη με τη συνήθη Γεωμετρία, όπου οι ορόκυκλοι έχουν αντικαταστήσει τις Ευκλείδειες ευθείες. Επίσης, έκανε παρατηρήσεις σε αστρονομικά δεδομένα με στόχο τη σύνδεση των παράλληλων γραμμών και των αθροισμάτων γωνιών τριγώνων, αφού θεωρούσε ότι σε τέτοιες αποστάσεις (μεταξύ άστρων) μπορούν να γίνουν μετρήσεις που να επιβεβαιώνουν την απόκλιση του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου από τις 180° (βλ. [Davis, σ. 120]).

Λίγο αργότερα, το 1832, ο νεαρός Ούγγρος **Janos Bolyai** (1802-1860) δημοσιεύει την εργασία του ως Παράρτημα (*Appendix*) στο βιβλίο του πατέρα του: «*Πραγματεία επί των στοιχείων των Μαθηματικών για μελετηρούς*

νέους». Ο τίτλος του παραρτήματος ήταν: «*Συμπλήρωμα που περιέχει την απολύτως αληθή επιστήμη του χώρου, ανεξάρτητη από την αλήθεια ή το ψεύδος του 5ου Αξιώματος του Ευκλείδη (η οποία δεν μπορεί να αποφασιστεί a priori)*».

Μέχρι να φτάσει στο σημείο αυτό, ο Bolyai δεν ενθαρρύνθηκε από τον Gauss, ο οποίος ήταν φίλος του πατέρα του, ενώ αρνήθηκε να τον βοηθήσει όταν του το ζήτησε αποστέλλοντας του μέρος της δουλειάς του. Παρόλο που ο Gauss και ο Wolfgang Bolyai ήταν φίλοι από το πανεπιστήμιο, η συνειδητοποίηση του πρώτου ότι δεν είναι ο μόνος που καταλήγει στα ίδια συμπεράσματα, τον οδήγησε να απαξιώσει τη δημιουργικότητα του νεαρού Janos και προσπάθησε να τον αποτρέψει να δημοσιεύσει. Τελικά, ο Bolyai προχώρησε το έργο του και κατάφερε να αποδείξει τα περισσότερα αποτελέσματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Σε μια αλληλογραφία με τον πατέρα του το 1823, ο Janos γράφει μεταξύ άλλων:

«*…Έχω δημιουργήσει ένα καινούργιο σύμπαν από το τίποτα…*».

Στο καθαρά μαθηματικό μέρος, ανέπτυξε τις έννοιες της *παράσφαιρας* και του *παράκυκλου*, εντελώς ανάλογα με τις έννοιες ορόσφαιρα και ορόκυκλος του Lobachevsky. Ακόμη, εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια της «Απόλυτης» ή «Ουδέτερης» Γεωμετρίας ορίζοντάς την ως τη γεωμετρία που κατασκευάζεται με βάση τα τέσσερα πρώτα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δηλαδή χωρίς τη χρήση του 5ου αξιώματος ή κάποιας άρνησής του.

Είναι ξεκάθαρο πλέον ότι, μέσα σε μικρό χρονικό διάστημα δυο εργασίες με θέμα τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία βλέπουν το φως της δημοσιότητας και είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι ο Lobachevsky και ο Bolyai καταλήγουν σε κοινά αποτελέσματα της νέας θεωρίας, χωρίς ο ένας να γνωρίζει την εργασία του άλλου. Είχε πλέον έρθει η στιγμή για την ωρίμανση της νέας ιδέας και εφόσον, ο Gauss με την τελειομανία του αντιστάθηκε στην ολοκλήρωση της, οι άλλοι δυο έκαναν το τολμηρό βήμα. Ανεξαρτητοποίησαν, δηλαδή, το 5ο αξίωμα από τα υπόλοιπα τέσσερα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Πρέπει εδώ να τονίσουμε την κοινή πορεία των Lobachevsky και Bolyai, οι οποίοι με παρόμοιες προσεγγίσεις ξεπέρασαν κατά πολύ τον Gauss και βέβαια διαφοροποιήθηκαν σημαντικά από τις προηγούμενες έρευνες. Όπως αναφέρει ο Greenberg (βλ. [6, σ. 185]), έδειξαν και οι δυο ότι η Ευκλείδεια Σφαιρική Τριγωνομετρία είναι έγκυρη στην Ουδέτερη Γεωμετρία,

ενώ κατασκεύασαν μια αντιστοίχηση από τη σφαίρα στο μη Ευκλείδειο επίπεδο, ώστε να παράγουν τους τύπους της μη Ευκλείδειας τριγωνομετρίας.

Το μεγάλο βήμα είχε πραγματοποιηθεί. Τώρα ήταν η σειρά της επόμενης γενιάς να εμπλουτίσει τη νέα θεωρία και να ανακαλύψει το εύρος της. Σε αυτήν τη γενιά ανήκουν μερικοί από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του 19ου αιώνα.

Με τον **George F. B. Riemann** (1826-1866) επιτυγχάνεται μια νέα ανακάλυψη: Η παρατήρησή του ότι η Σφαιρική Γεωμετρία συνιστά μια άλλη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, στην οποία δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες, οδηγεί στην Ελλειπτική Γεωμετρία.

Η ιδέα του Riemann αποτελούσε μια εναλλακτική πρόταση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και διατυπώθηκε αρχικά στην περίφημη διάλεξη του το 1854, με θέμα: «*Επί των θεμελιωδών Υποθέσεων της Γεωμετρίας*». Βασικός κορμός της ήταν οι έννοιες του *απεριόριστου* και του *απείρου*. Δηλαδή, εφαρμόζοντας τη γεωμετρία στο μακρόκοσμο, πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ του απεριόριστου κατά την έκταση και του απείρου κατά το μέτρο. Αργότερα, μια περαιτέρω γενίκευση αυτής της ιδέας, παρέσχε στον Αϊνστάιν τη γεωμετρία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Κατά την διάρκεια του 19ου αιώνα, η Γεωμετρία αναπτύχθηκε πολύπλευρα. Εκτός από τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, ανακαλύφθηκε η Προβολική Γεωμετρία, η Αφινική ή Ομοπαραλληλική Γεωμετρία (affine geometry) και η Διαφορική γεωμετρία.

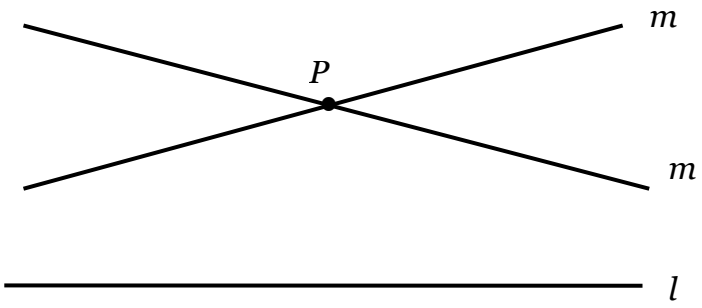
Επηρεασμένος από τις νέες τάσεις, ο Γερμανός μαθηματικός **Felix Klein** (1848-1925) προσανατολίζεται σε μια νέα θεώρηση, σύμφωνα με την οποία, οι διάφορες γεωμετρίες ενοποιούνται με βάση την ιδέα του *αναλλοίωτου* σε κάποια ομάδα μετασχηματισμών. Στη θεωρία του, που ονομάζεται *Πρόγραμμα Ερλάνγκερ (Erlanger Programme),* η Ευκλείδεια και η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της Προβολικής Γεωμετρίας. Το κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ότι αφορούν ένα σύνολο σημείων, που αποκαλείται χώρος και μια ομάδα μετασχηματισμών, που επιτρέπει την κίνηση των σχημάτων μέσα στο χώρο, χωρίς να αλλάζουν οι βασικές τους ιδιότητες.

2.4. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η έκθεση χωρίζεται σε δύο μέρη. Σκοπός του πρώτου μέρους είναι η σύντομη αξιωματική παρουσίαση των μοντέλων με τα χαρακτηριστικά τους. Στο δεύτερο μέρος γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση των μετασχηματισμών στο μιγαδικό επίπεδο.

Στην αξιωματική θεμελίωση της Υπερβολικής Γεωμετρίας χρησιμοποιούμε τα τέσσερα πρώτα αιτήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την επόμενη άρνηση του πέμπτου αξιώματος, την οποία καλούμε *Υπερβολικό αξίωμα*:

Δοθέντος ενός σημείου P εκτός ευθείας l υπάρχουν περισσότερες από μια ευθείες m, διερχόμενες από το σημείο P, οι οποίες όσο και αν προεκταθούν δεν τέμνουν την δοθείσα ευθεία l.



Σχήμα 2.2. Υπερβολικό αξίωμα.

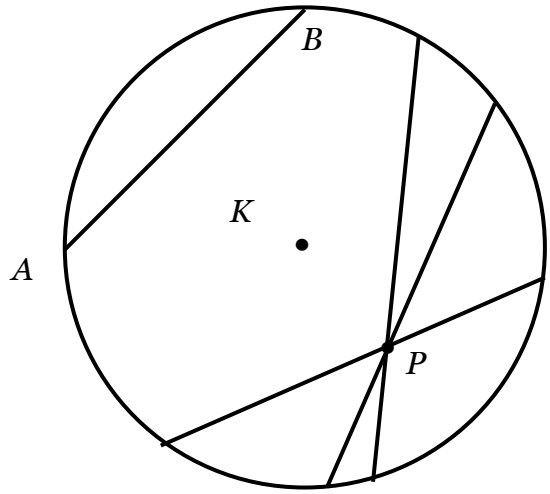
Επειδή το νέο αξίωμα φάνταζε περίεργο, χρειάστηκαν μερικά χρόνια για να εντοπίσει η μαθηματική κοινότητα τις εφαρμογές του. Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι αναζητείτο ένα μοντέλο που να συνδέει την έννοια του απείρου με την εποπτεία. Πρώτος το κατάφερε ο **Eugenio Beltrami** το 1868, με το μοντέλο της ψευδοσφαίρας.

Αργότερα το 1871, εμφανίστηκε το μοντέλο των **Klein** και **Beltrami**, στο οποίο κατέληξαν και οι δύο ταυτόχρονα, με ανεξάρτητο τρόπο. Το μοντέλο τους αναπαριστά την Υπερβολική Γεωμετρία σε ένα δίσκο του Ευκλείδειου επιπέδου.

Θα ορίσουμε για κάθε μοντέλο τα πρωταρχικά στοιχεία από τα οποία αυτό αποτελείται.

Στο μοντέλο **Klein-Beltrami** το *σημείο* δηλώνει ένα οποιοδήποτε σημείο εσωτερικό του Ευκλείδειου κύκλου. Έτσι, δεν ανήκουν στην περιγραφή τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου. Με τον όρο *ευθεία*

εννοούμε μια οποιαδήποτε ανοιχτή χορδή του κύκλου, δηλαδή δεν ανήκουν σε αυτήν τα σημεία της χορδής πάνω στην περιφέρεια. Άρα, η *AB* είναι η ευθεία του μοντέλου που περιέχει όλα τα σημεία ανάμεσα στα άκρα *A* και *B*, αλλά χωρίς αυτά (Σχήμα 2.3). Με τον όρο *επίπεδο* ορίζουμε το εσωτερικό του Ευκλείδειου κύκλου.



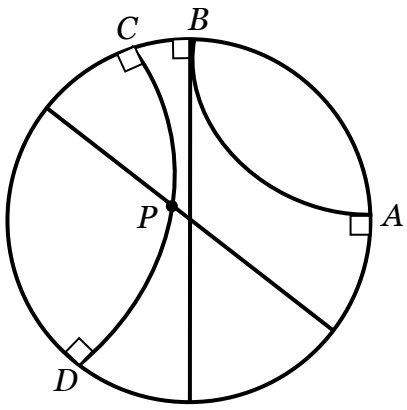
Σχήμα 2.3. Μοντέλο Klein-Beltrami.

Όπως γίνεται αντιληπτό από το σχήμα, από το σημείο *P* μπορούν να περάσουν άπειρες ευθείες παράλληλες προς την *AB*. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι στο μοντέλο αυτό δεν ισχύει η έννοια του μήκους και η έννοια του μέτρου γωνιών με την έννοια που ισχύει στο Ευκλείδειο επίπεδο.

Οι δυσκολίες που παρουσίαζε το μοντέλο των Klein-Beltrami στη μέτρηση των γωνιών ήταν το κίνητρο για να κατασκευάσει ο **Henri Poincaré** το δικό του μοντέλο το 1881, το οποίο αποτέλεσε μια βελτιωμένη εκδοχή του πρώτου.

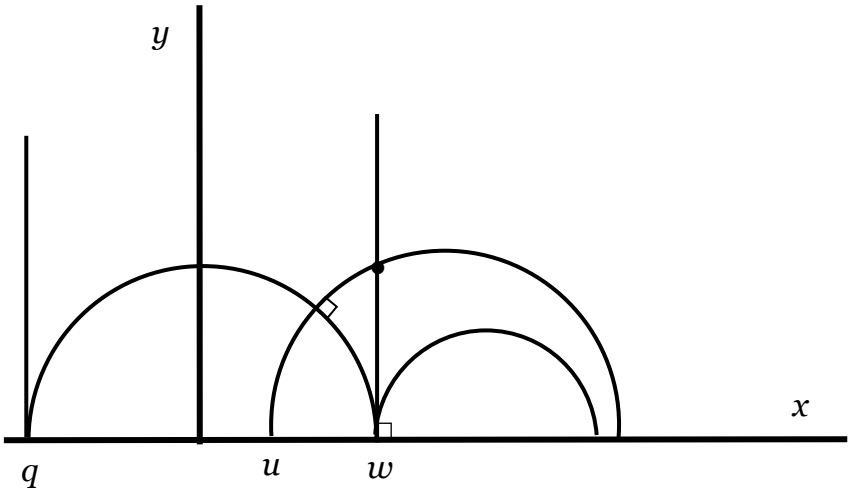
Στο μοντέλο του Poincaré, ως *σημείο* ορίζουμε κάθε εσωτερικό σημείο του δίσκου, όμοια με το προηγούμενο μοντέλο. Η *ευθεία* είναι, είτε διάμετρος του κύκλου, είτε τόξο κύκλου που τέμνει ορθογώνια τον αρχικό. Όπως και στο προηγούμενο μοντέλο, τα σημεία της περιφέρειας δεν ανήκουν στο δίσκο, συνεπώς μιλάμε για ανοικτά σύνολα (ανοικτή διάμετρος ή ανοικτό τόξο Ευκλείδειου κύκλου). Ως *επίπεδο,* δεχόμαστε το εσωτερικό του δίσκου.

Είναι φανερό ότι από σημείο *P* διέρχονται περισσότερες από μια ευθείες παράλληλες προς μια άλλη ευθεία όπως είναι η *AB* (βλ. Σχήμα 2.4). Επιπλέον, όταν δυο ευθείες τέμνονται στο σύνορο του δίσκου καλούνται *παράλληλες*, ενώ όταν δεν συναντώνται στο εσωτερικό του δίσκου καλούνται *αποκλίνουσες* (ultra-parallels).



Σχήμα 2.4. Μοντέλο Poincaré.

Η έννοια του μήκους διαφοροποιείται από την αντίστοιχη Ευκλείδεια, κάτι που είναι λογικό προκειμένου να ισχύει το δεύτερο αξίωμα. Εδώ, καθώς κινούμαστε πάνω σε μια ευθεία και προς το σύνορο του δίσκου, το υπερβολικό μήκος μεγαλώνει ώστε να φτάνει οποιονδήποτε δοθέντα αριθμό.



Σχήμα 2.5. Μοντέλο του ημιεπιπέδου (Poincaré).

Το μοντέλο του δίσκου του Poincaré, θα αποτελέσει το κύριο αντικείμενο ανάλυσης στο δεύτερο μέρος. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Poincaré δημιούργησε ακόμη ένα μοντέλο, μέσω ενός μετασχηματισμού που αντιστοιχεί το δίσκο στο θετικό ημιεπίπεδο ($y>0$) του μιγαδικού επιπέδου (Σχήμα 2.5).

Στην πραγματικότητα το μοντέλο αναπαριστά το δίσκο του Poincaré όταν «ανοίγει» και η περιφέρειά του λαμβάνει το ρόλο του άξονα των πραγματικών $x'x$. Οι *ευθείες* είναι είτε τόξα ευκλείδειων κύκλων ορθογώνιων προς τον οριζόντιο άξονα είτε ημιευθείες κάθετες στο $x'x$.

2.5. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Αντίστοιχα με την Υπερβολική Γεωμετρία, η Ελλειπτική Γεωμετρία ορίζεται μέσω της ακόλουθης άρνησης του 5ου αιτήματος, που αποτελεί το *Ελλειπτικό αξίωμα*:

Δύο ευθείες γραμμές τέμνονται πάντα.

Βέβαια, η αντικατάσταση του πέμπτου αιτήματος με το ελλειπτικό αξίωμα δεν αρκεί για να ορίσουμε την Ελλειπτική Γεωμετρία, αφού η αποδοχή των τεσσάρων πρώτων αιτημάτων και του Ελλειπτικού αξιώματος μας οδηγεί σε ένα μη συνεπές[1] αξιωματικό σύστημα. Δηλαδή, τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν ισχύουν αυτούσια στο σύστημα και συνεπώς είναι απαραίτητο να κάνουμε διαφορετικές παραδοχές για κάποια αιτήματα.
Το πρώτο αίτημα γίνεται:

Δύο σημεία ανήκουν σε μοναδική ευθεία εκτός κι αν είναι αντιδιαμετρικά, οπότε ανήκουν σε πολλές ευθείες.

Το δεύτερο αίτημα τροποποιείται ως εξής:

Ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί σε μια ευθεία. Η ευθεία αυτή μπορεί να είναι χωρίς όρια αλλά όχι απαραιτήτως με άπειρο μήκος.

Άλλωστε, αυτός ήταν ο κύριος άξονας της διάλεξης του Riemann στην περιγραφή της γεωμετρίας του χώρου. Ο δημιουργός της Ελλειπτικής Γεωμετρίας μελέτησε τη σφαιρική επιφάνεια και την ανέδειξε ως μοντέλο της.

Όμως, ας εξετάσουμε τί σημαίνει η διόρθωση των δυο αιτημάτων. Ανάλογα με τις παρακάτω υποθέσεις, θα οδηγηθούμε σε δυο είδη Ελλειπτικής Γεωμετρίας, τη διπλή ελλειπτική και την απλή ελλειπτική.

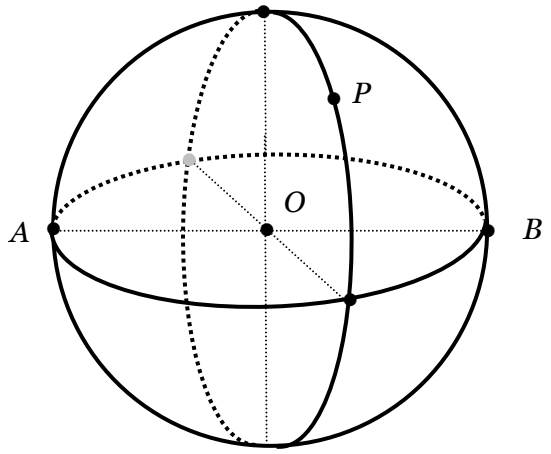
Υπόθεση 1η .

Υποθέτουμε ότι δύο σημεία δεν ανήκουν σε μοναδική ευθεία και ότι μια ευθεία διαχωρίζει το επίπεδο.

---

[1] Ένα αξιωματικό σύστημα καλείται *συνεπές* όταν τα αξιώματα ή τα θεωρήματα που περιέχει δεν έρχονται σε αντίφαση μεταξύ τους, δηλ. δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα μια πρόταση και η άρνησή της.

Έστω *σημείο* οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας και έστω *ευθεία* κάθε μέγιστος κύκλος. Η υπόθεση μας οδηγεί στο μοντέλο της διπλής ελλειπτικής γεωμετρίας. Έτσι, για σημείο *P* στην επιφάνεια της σφαίρας δεν υπάρχει μέγιστος κύκλος που να διέρχεται από το *P* παράλληλος στον ισημερινό (Σχήμα 2.6).

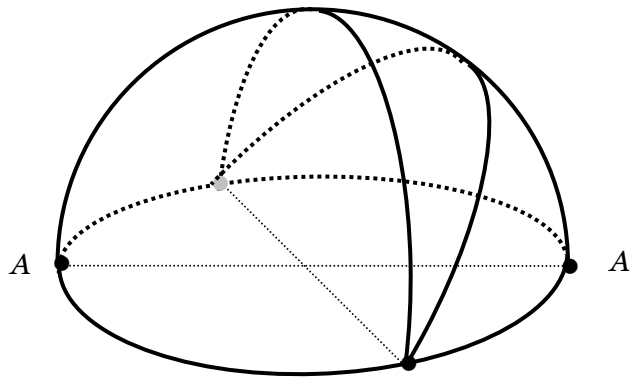


Σχήμα 2.6. Μοντέλο διπλής ελλειπτικής γεωμετρίας.

Υπόθεση 2η.

> *Δεχόμαστε ότι δυο σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία και ότι δεν υπάρχει ευθεία που διαχωρίζει το επίπεδο.*

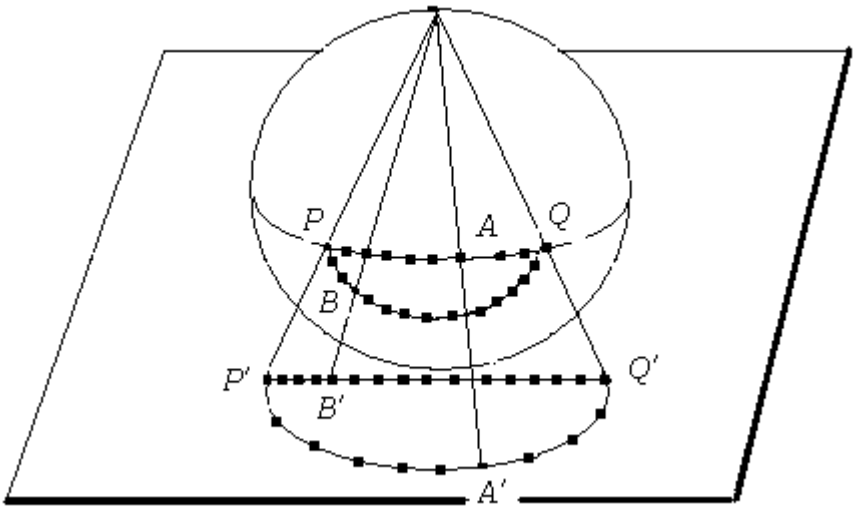
Έστω ως *σημείο* κάθε σημείο στην επιφάνεια ενός Ευκλείδειου ημισφαιρίου αν αυτό δεν ανήκει στον ισημερινό, ενώ αν είναι σημείο του ισημερινού θα αναγνωρίζεται ως ταυτόσημο με το αντιδιαμετρικό του. Ως *ευθεία* ορίζουμε το μισό μέγιστο κύκλο. Δεδομένης της υπόθεσης, λαμβάνουμε το μοντέλο της απλής ελλειπτικής γεωμετρίας. Στο Σχήμα 2.7, φαίνεται ότι το σημείο *A* στο σύνορο ταυτίζεται με το αντιδιαμετρικό του και συνεπώς λαμβάνεται ως ένα.



Σχήμα 2.7. Μοντέλο απλής ελλειπτικής γεωμετρίας.

Εκτός όμως από τα προηγούμενα δυο μοντέλα, μπορούμε να αποκτήσουμε εικόνα για την Ελλειπτική Γεωμετρία στο επίπεδο μέσω ενός ιδιαίτερου τρόπου απεικόνισης.

Ο μετασχηματισμός που επιτυγχάνει την προβολή της σφαίρας στο επίπεδο, ονομάζεται *στερεογραφική προβολή,* στην οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια εκτενέστερα. Αυτό που επιτυγχάνουμε είναι μια διδιάστατη εικόνα της σφαιρικής επιφάνειας (Σχήμα 2.8). Διαμέσου της προβολής, φαίνεται ότι η κίνηση πάνω σε ένα μέγιστο κύκλο είναι συντομότερη από την κίνηση σε κάποιο άλλο κύκλο. Έτσι η διαδρομή PAQ είναι μικρότερη από τη PBQ, αφού η προβολή της πρώτης, $PA'Q$, αποτελείται από λιγότερα «μέτρα» (απόσταση ανάμεσα σε δυο κουκίδες) από ότι η $PB'Q'$. Αυτό συμβαίνει διότι τα «μέτρα» πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας είναι ίσου μήκους, ενώ οι προβολές τους διαφέρουν. Σημειώνουμε εδώ, ότι οι προβολές των μέγιστων κύκλων είναι οι γεωδαισιακές του επιπέδου.



Σχήμα 2.8. Προβολή ενός μέγιστου κύκλου και μιας καμπύλης της επιφάνειας της σφαίρας στο επίπεδο.

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών του μιγαδικού επιπέδου, αλλά και με τη συνάρτηση της στερεογραφικής προβολής, έναν ειδικό μετασχηματισμό. Η θεωρία των μετασχηματισμών είναι απαραίτητη για τη μελέτη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας και θα αποτελέσει τη βάση πάνω στην οποία θα αναπτυχθεί στη συνέχεια η Υπερβολική και η Ελλειπτική Γεωμετρία. Θα γίνει μια κατηγοριοποίηση, ανάλογα με τις ιδιότητες και τα αποτελέσματα της εφαρμογής των μετασχηματισμών.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, βασικός μελετητής των μετασχηματισμών ήταν ο Felix Klein, ο οποίος έθεσε τα θεμέλια για μια συστηματική θεώρηση των Γεωμετριών, από αλγεβρική άποψη.

Πριν προχωρήσουμε, είναι απαραίτητο να οριοθετήσουμε το χώρο που θα μελετήσουμε και θα αντλήσουμε πληροφορίες. Εδώ αναφερόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς οι συναρτήσεις μας θα είναι μιγαδικής μεταβλητής. Με τον όρο *μιγαδικό επίπεδο* ορίζουμε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, όπου το $\mathbb{R}^2$ ταυτίζεται με το Ευκλείδειο επίπεδο.

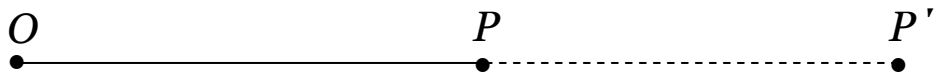
Ορισμός 3.1.: *Έστω M το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου.* Ως ***μετασχηματισμό*** *του M ορίζουμε μια 1-1 και επί απεικόνιση:*

$$f : M \longrightarrow M$$

Ουσιαστικά, πρόκειται για εκείνες τις συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών, είναι το ίδιο σύνολο.

Παράδειγμα 3.2. *Έστω O ένα σταθερό σημείο του επιπέδου M. Ορίζουμε ένα μετασχηματισμό T, έτσι ώστε για κάθε σημείο $P \in M$, να βρίσκουμε το T(P) αν ενώσουμε το O με το P και προεκτείνουμε την OP κατά ίσο τμήμα* (Σχήμα 3.1). *Τότε,*

$$T: M \longrightarrow M : \ P \mapsto T(P) := P', \ \text{με } PP' = OP \ .$$



Σχήμα 3.1. Μετασχηματισμός του σημείου P στο P'.

3.1. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ως Ευκλείδειους μετασχηματισμούς θεωρούμε τους επόμενους μετασχηματισμούς:

3.1.1. Μεταφορά (translation)

Είναι ο μετασχηματισμός που περιγράφει την οριζόντια και κάθετη μετατόπιση ενός σημείου στο επίπεδο. Ο εν λόγω μετασχηματισμός έχει τη μορφή:

$$T\colon\ z \mapsto T(z) := z+b, \quad z \in M, \quad b \in M\,.$$

Προφανώς, ο T είναι μια μεταφορά του Ευκλείδειου επιπέδου. Αλλά και αντίστροφα, κάθε μεταφορά εκφράζεται με αυτόν τον τρόπο.

3.1.2. Περιστροφή (rotation)

Ο μετασχηματισμός της στροφής περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$T\colon\ z \mapsto T(z) := e^{i\theta}z, \quad z \in M, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Το θ είναι η γωνία της στροφής.

Το επίπεδο περιστρέφεται ανάλογα με την τιμή του θ και έχοντας ως σταθερό σημείο την αρχή των αξόνων. Αντίστροφα, κάθε στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων μπορεί να εκφραστεί με τη συνάρτηση T.

> *Κοινό γνώρισμα των Ευκλείδειων μετασχηματισμών είναι η ιδιότητα τους να διατηρούν τις αποστάσεις μεταξύ των αρχικών σημείων και των εικόνων τους.*

Κατά συνέπεια, τα σχήματα διατηρούνται αναλλοίωτα ως προς το μέγεθος τους. Είναι χρήσιμο να αναφέρουμε πως πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο «*άκαμπτες κινήσεις*» (rigid motions) όταν αναφέρονται στους Ευκλείδειους μετασχηματισμούς, συμπεριλαμβάνοντας και τον μετασχηματισμό της ανάκλασης. Κατά τον Stahl (βλ. [2, σ. 35]) με τον όρο «*άκαμπτες κινήσεις*» ορίζονται οι μετασχηματισμοί του επιπέδου που δεν παραλλάσσουν ή παραμορφώνουν τη δομή του Ευκλείδειου χώρου. Αντίθετα, οι μη Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί καλούνται και «*μη άκαμπτες κινήσεις*» (non-rigid motions).

3.2. ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Στην κατηγορία των μη Ευκλείδειων μετασχηματισμών ανήκουν η ομοιοθεσία και η αντιστροφή.

3.2.1. Ομοιοθεσία (Homothetic transformation)

Ο μετασχηματισμός της ομοιοθεσίας δίνεται με τον τύπο:

$$T\colon z \mapsto T(z) = k \cdot z, \quad z \in M, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Δημιουργεί σχήματα *όμοια* με τα αρχικά. Αν $k > 1$, το σχήμα διαστέλλεται, ενώ για $k < 1$ το σχήμα συστέλλεται.

3.2.2. Αντιστροφή (Inversion)

Αποτελεί ένα μετασχηματισμό με ιδιαίτερο ενδιαφέρον, που θα μας απασχολήσει και στη συνέχεια, αφού με την βοήθειά του θα μετασχηματίζουμε σημεία και ευθείες στην Υπερβολική Γεωμετρία.

Ο τύπος που την περιγράφει είναι:

$$T\colon z \mapsto T(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{για } z \neq 0.$$

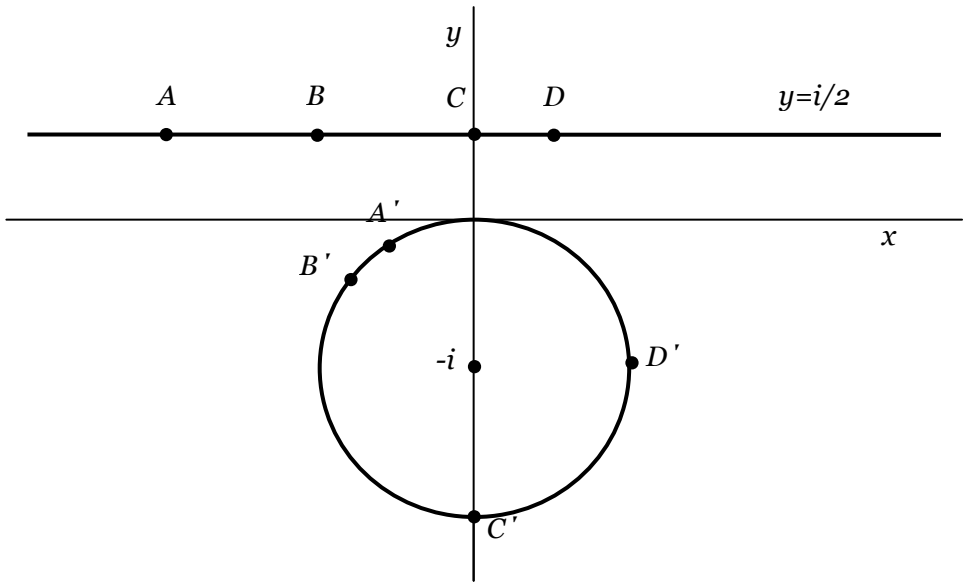
Η αντιστροφή έχει την δυνατότητα να απεικονίζει ευθείες γραμμές σε κύκλους, αλλά και κύκλους σε ευθείες γραμμές.

Για να γίνει αντιληπτή η λειτουργία της συνάρτησης θα δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω τα σημεία:

$$A = -2 + \frac{1}{2}i, \quad B = -1 + \frac{1}{2}i, \quad C = \frac{1}{2}i \quad \text{και} \quad D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,,$$

του μιγαδικού επιπέδου που κείται στην ίδια ευθεία. Θα υπολογίσουμε τις αντιστροφές τους. Παρατηρούμε ότι οι εικόνες των σημείων μέσω της συνάρτησης, ανήκουν πλέον σε έναν κύκλο. Προφανώς, αν επιλέγαμε περισσότερα σημεία της ευθείας θα λαμβάναμε αντίστοιχες εικόνες στον κύκλο ενώ αν περιορίζαμε το πεδίο ορισμού σε ένα ευθύγραμμο τμήμα το αποτέλεσμα θα ήταν ένα τόξο κύκλου. Γίνεται αντιληπτό ότι με τον αντίστροφο μετασχηματισμό και πεδίο ορισμού σημεία του κύκλου, θα είχαμε ως εικόνα την ευθεία (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2. Η ευθεία $y=i/2$ απεικονίζεται μέσω αντιστροφής, στον κύκλο κέντρου $(0,-i)$ και ακτίνας 1.

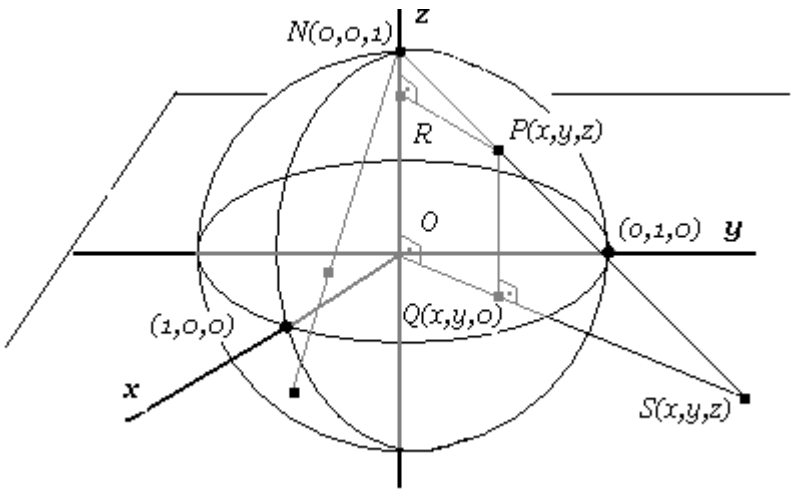
3.3. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ (conformality)

Όπως ήδη αναφέραμε, οι Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί διατηρούν τις αποστάσεις όταν επιδρούν στα μεγέθη, ενώ αυτό δεν συμβαίνει και με τους μη Ευκλείδειους μετασχηματισμούς. Ωστόσο, υπάρχει μια αρκετά σημαντική ιδιότητα που μοιράζονται τα δυο είδη μετασχηματισμών. Πρόκειται για τη διατήρηση των μέτρων των γωνιών. Την παραπάνω ιδιότητα πληρούν η μεταφορά, η στροφή, η ομοιοθεσία και η αντιστροφή και γι' αυτό τους καλούμε *σύμμορφους μετασχηματισμούς* (conformal transformations).

3.4. ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ

Η συνάρτηση που περιγράφει τη στερεογραφική προβολή διαφέρει από τους μετασχηματισμούς του επιπέδου, διότι απεικονίζει την επιφάνεια μιας σφαίρας στο μιγαδικό επίπεδο. Η χρησιμότητα της απεικόνισης έγκειται στο γεγονός ότι θα εξυπηρετήσει την έρευνα και τη μελέτη της Σφαιρικής Γεωμετρίας, μέσω της προβολής της στο επίπεδο. Μιλάμε λοιπόν για μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού την επιφάνεια της σφαίρας $S^2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και πεδίο τιμών το μιγαδικό επίπεδο.

Θα βασιστούμε στο Σχήμα 3.3, για να βρούμε τον τύπο που περιγράφει τη στερεογραφική προβολή. Το επίπεδο στο οποίο γίνεται η προβολή είναι το $z = 0$, ή αλλιώς το επίπεδο του ισημερινού. Η σφαίρα είναι μοναδιαία με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και η τομή του επιπέδου προβολής με την σφαίρα είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.



Σχήμα 3.3. Στερεογραφική προβολή με κέντρο προβολής το βόρειο πόλο και επίπεδο προβολής το επίπεδο του ισημερινού.

Το τυχαίο σημείο $P(x, y, z)$ προβάλλεται από το βόρειο πόλο $N(0, 0, 1)$ στο σημείο $S(x, y, z)$ του επιπέδου $z = 0$. Η ορθογώνια προβολή του P στο επίπεδο είναι το σημείο $Q(x, y, 0)$. Εφόσον το S κείται επί της ευθείας OQ υπάρχει αριθμός λ, τέτοιος ώστε:

$$S(x,y,z) = \lambda \cdot (x, y, 0)$$

Από τα όμοια τρίγωνα NSO *και* NPR συνάγεται ότι

$$\frac{(ON)}{(RN)} = \frac{(OS)}{(RP)} = \frac{(OS)}{(OQ)}$$

και από την προηγούμενη σχέση έχουμε,

$$\frac{(OS)}{(OQ)} = \lambda$$

Ακόμη από το σχήμα, επειδή είναι *R(0, 0, z)* ισχύει,

$$\frac{(ON)}{(RN)} = \frac{1}{1-z}$$

και έτσι έχουμε, $\lambda = 1/(1-z)$, ώστε να καταλήξουμε ότι

$$S(x, y, z) = \frac{1}{1-z}\cdot(x, y, 0) = \frac{x+iy}{1-z}$$

ή αλλιώς,

$$S(x, y, z) = \frac{x}{1-z}+\frac{y}{1-z}i \equiv \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

Επομένως, αν συμβολίσουμε με P_N την στερεογραφική προβολή από το βόρειο πόλο, έχουμε ότι:

$$P_N : S^2 \setminus N(0, 0, 1) \longrightarrow R^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

Η αντίστροφη της P_N δίνεται από το τύπο:

$$P_N^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2}\right), \ (a, b) \in R^2$$

Ανάλογα ορίζεται και η στερεογραφική προβολή, αν θεωρήσουμε ως κέντρο προβολής το νότιο πόλο *S(0, 0, -1)*,

$$P_S : S^2 \setminus S(0, 0, -1) \longrightarrow R^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right),$$

και έχει αντίστροφη την:

$$P_S^{-1}(a, b) = \left(\frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2}\right), \ (a, b) \in R^2.$$

Σχόλιο: Καθώς προσπαθούμε να επιτύχουμε μια 1-1 αντιστοιχία της σφαίρας με το μιγαδικό επίπεδο, κρίνεται σημαντικό και αναγκαίο να ορίσουμε καλύτερα το σημείο στο οποίο προβάλλεται ο βόρειος πόλος. Όσο τα σημεία

της σφαίρας πλησιάζουν το βόρειο πόλο, τόσο η προβολή τους στο επίπεδο απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων και συνεπώς η προβολή του *N* τείνει στο άπειρο. Λόγω αυτής της συμπεριφοράς της προβολής του σημείου *N* προσθέτουμε στο μιγαδικό επίπεδο ένα νέο σημείο, το οποίο καλούμε *επ' άπειρον σημείο* (*point-at-infinity)*, το συμβολίζουμε ∞ και σε αυτό αντιστοιχούμε το *N*.

Σύμφωνα με την παραπάνω αντιστοιχία, στα σημεία *z* του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|z| > 1$, αντιστοιχούν σημεία του βορείου ημισφαιρίου. Στα σημεία *z* του επιπέδου για τα οποία $|z| < 1$, αντιστοιχούν σημεία του νότιου ημισφαιρίου. Εάν $|z| = 1$ τότε το αντίστοιχο του *z* είναι επίσης *z*. Στην αρχή των συντεταγμένων *(0, 0)* του επιπέδου *z = 0* αντιστοιχεί το σημείο *(0, 0, -1)*, δηλαδή ο νότιος πόλος της σφαίρας.

4. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ERLANGER

Το *Πρόγραμμα Erlanger* αποτελεί μια πολλή σημαντική συμβολή στη μελέτη της σύγχρονης γεωμετρίας. Το 1872, ο **Felix Klein** πρότεινε έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο για να μελετήσουμε τις διάφορες γεωμετρίες, δίνοντας έμφαση στη δομή τους. Δημιούργησε δηλαδή, ένα είδος πρίσματος με βάση το οποίο μπορούμε να θέτουμε σε αντιπαράθεση τις προς μελέτη γεωμετρίες και να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά τους. Είναι μια ενοποιημένη μέθοδος για την κατηγοριοποίηση των γεωμετριών και για την εύρεση των σχέσεων ανάμεσά τους. Ο Klein, στηριζόμενος στις μελέτες του για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, κατάφερε να τις συνδέσει με τη Θεωρία Ομάδων. Τελικώς, παρήγαγε μια ενιαία μαθηματική δομή με τεράστια σημασία για την εξέλιξη της γεωμετρίας, αλλά και των μαθηματικών γενικότερα.

Κεντρική έννοια στη θεωρία του Klein έχουν οι *μετασχηματισμοί*, η χρήση των οποίων επιτρέπει την κατασκευή του εκάστοτε γεωμετρικού χώρου. Όπως γνωρίζουμε, ένας μετασχηματισμός είναι μια 1-1 αντιστοιχία του γεωμετρικού μοντέλου επί του εαυτού του, δηλαδή ένας *αυτομορφισμός*. Η ομάδα των αυτομορφισμών μιας μαθηματικής δομής καθώς και η ιδιότητα τους να αφήνουν *αναλλοίωτα* ένα σχήμα ή μια συνάρτηση, είναι οι θεμέλιοι λίθοι για τον Klein. Θα παρουσιάσουμε το πρόγραμμα ξεκινώντας από τις κυριότερες έννοιες.

4.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πριν προχωρήσουμε, ας εξετάσουμε την έννοια της *ισότητας* και τον τρόπο που σχετίζεται με τους μετασχηματισμούς στο πρόγραμμα του Klein.

4.1.1. Ισότητα (Congruence)

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η έννοια της ***ισότητας*** (congruence) παίζει θεμελιώδη ρόλο, κάτι που αντίστοιχα συμβαίνει και στη θεώρηση του Klein. Αν πάρουμε ως παράδειγμα την ισότητα σχημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, για την περίπτωση των τριγώνων θα δούμε ότι ορίζουμε ισότητα όταν ταυτίζονται κάποια από τα χαρακτηριστικά τους, όπως το μήκος των πλευρών ή το μέτρο των γωνιών. Όμως, εδώ η έννοια της ισότητας μετατοπίζεται προς την έννοια της μέτρησης, αφού για να είναι ίσα τα δυο τρίγωνα πρέπει τα μέτρα των αντίστοιχων πλευρών τους να είναι ίσα, και συνεπώς, η ισότητα έχει δευτερεύοντα χαρακτήρα. Ανάλογο αποτέλεσμα

έχουμε και για τα μέτρα των αντίστοιχων γωνιών του τριγώνου. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι γεωμετρικές ιδιότητες που αφορούν ένα σχήμα (figure) επαληθεύονται για κάθε σχήμα ίσο με το αρχικό.

Όμως, ο Klein διατύπωσε διαφορετικά τη σκέψη του για την *ισότητα* και απέδωσε στην έννοια πρωτεύοντα ρόλο. Απομακρύνθηκε απόλυτα από την κατασκευαστική θεωρία των αξιωμάτων και των αιτημάτων και τοποθέτησε τη μέτρηση σε θέση που συμπληρώνει την *ισότητα*. Ξεκίνησε τη μελέτη του θεωρώντας το επίπεδο χωρίς αξιώματα και μέτρηση, σαν *σύνολο* εφοδιασμένο απλώς με μια *σχέση ισότητας*. Κάθε γεωμετρία τώρα, θα καθορίζεται πλήρως από τον τρόπο που ορίζεται κάθε φορά η ισότητα. Έτσι, η μέτρηση θα εμφανίζεται στη γεωμετρία, μόνο αν παράγει ταυτόσημα αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σε ίσα σχήματα.

4.1.2. Μετασχηματισμός και Ισότητα

Αφού η μέτρηση δε μας χρειάζεται όπως είπαμε, πρέπει να καταφύγουμε σε κάποια διαφορετική μέθοδο, που να επιτρέπει την ισχύ της έννοιας της *ισότητας*. Το Πρόγραμμα Erlanger δίνει απάντηση σε αυτό το ζήτημα μέσω της χρήσης συναρτήσεων, δηλαδή μετασχηματισμών που στόχο έχουν τη μη αναφορά σε προηγούμενες γεωμετρικές έννοιες. Έτσι, ο Klein επαναφέρει την μέθοδο της ***εναπόθεσης***, σύμφωνα με την οποία για να επαληθεύσουμε την *ισότητα* δύο *σχημάτων* μεταφέρουμε το ένα πάνω στο άλλο ώστε να ταυτιστούν. Πρώτος ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μέθοδο αυτή για την απόδειξη της Πρότασης Ι.4 στα Στοιχεία.

Συνεπώς, τώρα έχουμε μετασχηματισμούς *ισότητας* που δρουν με τρόπο τέτοιο που να παράγουν τα ίδια αποτελέσματα με την έννοια της *ισότητας*. Όπως αναφέραμε οι μετασχηματισμοί είναι συναρτήσεις 1-1, οπότε η *ισότητα* δυο σχημάτων θα σημαίνει την ισότητα του ενός σχήματος με την εικόνα του άλλου, μέσω της συνάρτησης.

4.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΤΑ KLEIN

Για να αποδώσουμε τον ορισμό της Γεωμετρίας Klein είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε αρχικά τον ορισμό της *ομάδας μετασχηματισμών*.

Ορισμός 4.2.1. *Το σύνολο G όλων των μετασχηματισμών της μορφής:*

$$T : X \longrightarrow X ,$$

όπου X μη κενό σύνολο, καλείται ***ομάδα μετασχηματισμών*** *όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες*:

1. *Το G είναι κλειστό ως προς την πράξη της σύνθεσης, δηλαδή, αν* $S, T \in G$ *τότε* $S \circ T \in G$ *(κλειστότητα της πράξης).*

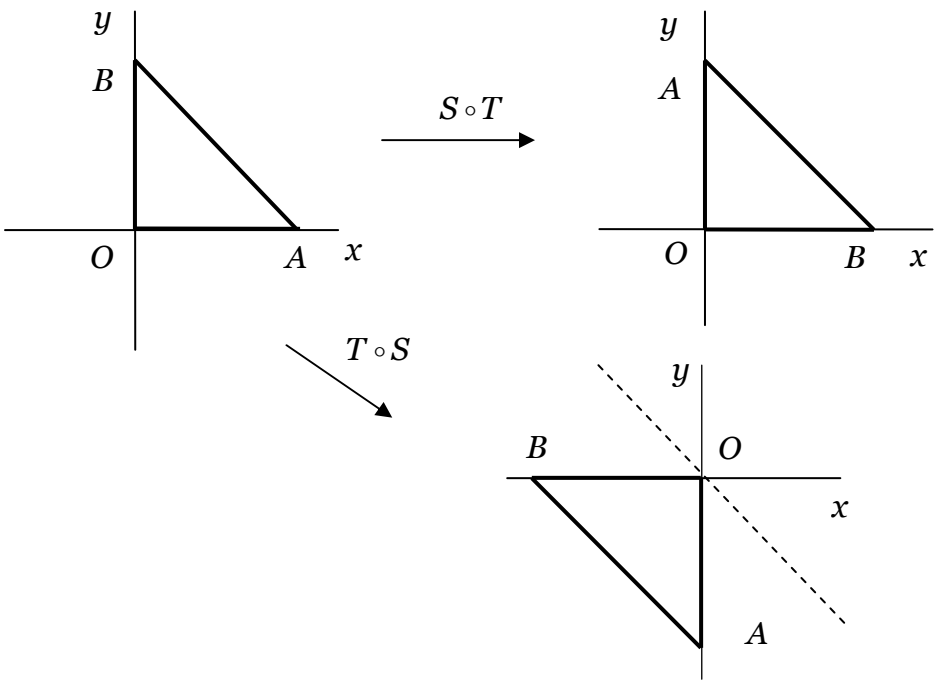
2. *Το G* περιέχει τον *ταυτοτικό* μετασχηματισμό $I \in G$ που έχει την ιδιότητα $I \circ T = T = T \circ I$, για κάθε $T \in G$ *(ουδέτερο στοιχείο).*

3. *Για κάθε μετασχηματισμό* $T \in G$ *υπάρχει ο αντίστροφός του* $T^{-1} \in G$, *ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση* $T \circ T^{-1} = I = T^{-1} \circ T$ *(αντίστροφο στοιχείο).*

4. *Για οποιουσδήποτε μετασχηματισμούς* $S, T, U \in G$ *ισχύει, ότι* $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$ *(προσεταιριστικός νόμος).*

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν ότι το σύνολο των μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα. Όμως, δεν είναι αντιμεταθετική, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2.2. *Έστω ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο AOB* $(\hat{O} = 90^o)$, *τοποθετημένο έτσι, ώστε το O να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.*



Σχήμα 4.1. Αναπαράσταση τριγώνου μέσω της σύνθεσης των μετασχηματισμών της στροφής και της ανάκλασης.

Αν υποθέσουμε ότι T είναι μια στροφή (rotation) 90°, αντίθετα στη φορά του ρολογιού γύρω από το O και αν S είναι μια ανάκλαση (reflection) ως προς άξονα y΄y, τότε η σύνθεση $S \circ T$ θα αφήσει σταθερό το O και θα αντιστρέψει τα A και B. Δηλαδή, $(S \circ T)(A) = B$. Ενώ ο μετασχηματισμός $T \circ S$ αναπαριστά την ανάκλαση του τριγώνου ως προς άξονα τη διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημόριου.

Στο παραπάνω παράδειγμα, βλέπουμε ότι δεν ταυτίζονται οι δυο μετασχηματισμοί $S \circ T$ και $T \circ S$, δηλαδή δεν ισχύει η μεταθετικότητα της σύνθεσης. Εκτός από την επισήμανση αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα και σε επόμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την ομάδα των μετασχηματισμών για να ορίσουμε τη *Γεωμετρία*. Ακριβέστερα, έχουμε:

Ορισμός 4.2.3. *Ως **Γεωμετρία** ορίζεται το ζευγάρι (X, G) που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο X και μια ομάδα μετασχηματισμών G του X. Το σύνολο X αντιπροσωπεύει το χώρο αναφοράς της Γεωμετρίας, ενώ το G την ομάδα των μετασχηματισμών της Γεωμετρίας.*

Το αντικείμενο έρευνας της Γεωμετρίας Klein αφορά στη μελέτη συγκεκριμένων ιδιοτήτων των σχημάτων, και ειδικότερα, στην συμπεριφορά των σχημάτων κάτω από το πρίσμα της έννοιας της ισότητας. Για να γίνει αυτό αντιληπτό ακολουθεί ο ορισμός του *σχήματος*.

Ορισμός 4.2.4. *Έστω (X, G) μια γεωμετρία. Ορίζουμε ως **σχήμα** (figure) της γεωμετρίας κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου X.*

*Δυο σχήματα A και B είναι **ίσα** αν υπάρχει ένας μετασχηματισμός $T \in G$ τέτοιος ώστε:*

$$T(A) = B,$$

όπου, τώρα:

$$T(A) = \{T(z) : z \text{ είναι σημείο του } A\}.$$

Ο ορισμός του *σχήματος* στον Klein εμπερικλείει όλα τα βασικά ευθύγραμμα σχήματα του Ευκλείδη, καθώς και οποιοδήποτε σύνολο που περιέχεται στο χώρο που ορίσαμε. Όμως, με τη διαφορά ότι το *σχήμα* του Klein έχει περισσότερο θεωρητική φύση και δεν είναι τόσο «απτό» όσο το Ευκλείδειο σχήμα.

Μετά τον ορισμό της ισότητας σχημάτων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σχέση ισότητας είναι σχέση ισοδυναμίας. Έτσι, όπως γνωρίζουμε από την Άλγεβρα, θα εξηγήσουμε πως όταν η G είναι μια ομάδα μετασχηματισμών της γεωμετρίας μας, πρέπει επακόλουθα και *η σχέση ισότητας* που ορίζεται σε αυτή να είναι *σχέση ισοδυναμίας*. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι η σχέση "$\cong$" είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

1. Είναι *ανακλαστική* (ή αυτοπαθής). $A \cong A$, διότι $I(A) = A$, για κάθε σχήμα $A \in X$ και $I : X \longrightarrow X$ τον ταυτοτικό μετασχηματισμό του X.

2. Είναι *συμμετρική*. *Εφόσον* $A \cong B$, θα υπάρχει $T \in G$ με $B = T(A)$. *Άρα* $A = T^{-1}(B)$, που αποδεικνύει *ότι* $B \cong A$, αφού $T^{-1} \in G$.

3. Είναι *μεταβατική:* Αν $A \cong B$ και $B \cong \Gamma$ τότε θα υπάρχουν $T_1, T_2 \in G$ με $T_1(A) = B$ και $T_2(B) = \Gamma$, οπότε $\Gamma = T_2(B) = T_2(T_1(A)) = (T_2 \circ T_1)(A)$, δηλαδή, $A \cong \Gamma$, αφού $T_2 \circ T_1 \in G$.

Μετά την έννοια της *Γεωμετρίας* και τον ορισμό της *ισότητας σχημάτων,* ακολουθεί η πολύ σημαντική έννοια των *αναλλοιώτων*.

4.3. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ (Invariants)

Η ουσιαστικότερη έννοια που εισήγαγε ο Klein με το πρόγραμμα του είναι η έννοια των *αναλλοιώτων*. Βασικός στόχος του προγράμματος είναι η κατηγοριοποίηση των γεωμετριών, η οποία προκύπτει από τον προσδιορισμό των ομάδων των μετασχηματισμών του Ευκλείδειου και του μη Ευκλείδειου επιπέδου. Γι' αυτό το λόγο, χρειάστηκε να ομαδοποιήσει τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, ή αλλιώς τα *αναλλοίωτά* τους.

Μπορούμε να πούμε ότι, τα *αναλλοίωτα* είναι οι έννοιες που περιγράφουν τη σταθερότητα και τη μη αλλαγή των *σχημάτων* όταν δρουν πάνω τους οι μετασχηματισμοί ισότητας. Δηλαδή, σύμφωνα με την περιγραφή του Greenberg (βλ. [9, σελ. 313]) μια ιδιότητα ή μια σχέση καλείται *αναλλοίωτο* κάτω από την δράση ενός μετασχηματισμού ή μιας ομάδας μετασχηματισμών, αν η ιδιότητα ή η σχέση διατηρείται και μετά την εφαρμογή των μετασχηματισμών. Σχετικώς, παραθέτουμε τον ακριβή ορισμό της έννοιας.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω (X, G) μια Γεωμετρία. Έστω D ένα σύνολο από σχήματα που ανήκουν στην (X, G) και έστω T ένας μετασχηματισμός της G* ($T \in G$)*. Τότε:*

1. *Το σύνολο D είναι* ***αναλλοίωτο*** *ως προς T, αν για κάθε μέλος B του D ισχύει ότι* $T(B) \in D$.

2. *Μια συνάρτηση f ως προς T, που ορίζεται στο D, καλείται* ***αναλλοίωτη****, αν* $f\left(T\left(B\right)\right) = f\left(B\right)$.

Από τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι, για ένα *σχήμα* που ανήκει στο σύνολο *D* και στο οποίο εφαρμόζουμε ένα μετασχηματισμό, το σχήμα διατηρεί τη δομή του αναλλοίωτη και κατ' επέκταση η εικόνα του (διαμέσου του μετασχηματισμού *ισότητας*) ανήκει πάλι στο σύνολο *D*. Άρα, ένα σύνολο από σχήματα είναι ένα αναλλοίωτο της γεωμετρίας, όταν μαζί με ένα στοιχείο *B* περιέχει και όλα τα *ίσα* με αυτό σχήματα που προκύπτουν μέσω των μετασχηματισμών. Ανάλογα, μια συνάρτηση είναι *αναλλοίωτη* όταν για ίσα σχήματα (*ισότητα* μέσω μετασχηματισμών) δίνει πάντα την ίδια τιμή.

Ας δούμε όμως τι εκφράζει ο ορισμός στην πράξη:

1. Όπως εκθέσαμε παραπάνω, στο παράδειγμα με το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού της στροφής, της ανάκλασης ή της σύνθεσης αυτών στο τρίγωνο, διατηρήθηκε αναλλοίωτη η δομή του παρά τη μετακίνηση στο επίπεδο. Συνεπώς, το τρίγωνο ορισμένο ως ένα σύνολο που αποτελείται από τρία μη συνευθειακά σημεία και από τα ευθύγραμμα τμήματα που τα συνδέουν, είναι ένα *αναλλοίωτο σύνολο*. Βέβαια, η διατύπωση αυτή έχει ισχύ στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και όταν χρησιμοποιείται ο παραπάνω μετασχηματισμός. Τι σημαίνει όμως αυτό; Προφανώς, εάν αναφερόμασταν στην Υπερβολική Γεωμετρία ή χρησιμοποιούσαμε άλλο μετασχηματισμό, τότε τα αποτελέσματα ίσως να ήταν διαφορετικά. Αν δηλαδή, υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός της αντιστροφής ανήκει στη γεωμετρία μας, τότε όπως αναφέραμε σε προηγούμενο παράδειγμα, οι ευθείες γραμμές μετατρέπονται σε κύκλους. Έτσι, και οι πλευρές του τριγώνου (ως ευθύγραμμα τμήματα) μετασχηματίζονται σε τόξα κύκλων, με αποτέλεσμα το σχήμα να αλλάζει δομή.

2. Ποιά συνάρτηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να ικανοποιήσει τον ορισμό της *αναλλοίωτης*; Επιλέγουμε το σύνολο των τριγώνων του ευκλείδειου επιπέδου για να εφαρμόσουμε τη συνάρτηση μέτρησης του εμβαδού τους. Με αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μια αναλλοίωτη συνάρτηση

της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεδομένου ότι τα *ίσα* τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

3. Μελετώντας στη συνέχεια το μοντέλο του δίσκου του Poincaré (υπερβολικό επίπεδο), θα διαπιστώσουμε ότι το μήκος ενός υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος είναι ένα βασικό *αναλλοίωτο* της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Αφού παρουσιάσαμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας του Klein, θα δούμε μερικά παραδείγματα Γεωμετριών.

4.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ

Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα, για να εφαρμοστεί το σχέδιο του Klein, είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Έστω ότι το σύνολο αναφοράς είναι το μιγαδικό επίπεδο *C*. Επίσης, έστω ότι η ομάδα των μετασχηματισμών είναι το σύνολο *E,* το οποίο αποτελείται από τους μετασχηματισμούς της μορφής

$$T(z) = e^{i\theta} z + b,$$

όπου $\theta \in R$ και $b \in C$ είναι σταθερές. Ο μετασχηματισμός *T* είναι ένας συνδυασμός μετασχηματισμών και καλείται άκαμπτη κίνηση (rigid motion), διότι, όπως προαναφέραμε, διατηρεί αναλλοίωτη τη δομή του χώρου (βλ. Παράγραφος 3.1.2). Ο *T* δημιουργείται από μια στροφή ($z \to e^{i\theta} z$), η οποία ακολουθείται από μια μεταφορά ($z \to e^{i\theta} z + b$).

Το ζεύγος (*C*, *E*) αναπαριστά την **Ευκλείδεια Γεωμετρία**.

Επιπλέον, οι ακόλουθες γεωμετρίες ταξινομήθηκαν από τον Klein ως υπογεωμετρίες (subgeometries) της επίπεδης Προβολικής Γεωμετρίας:

1. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία αφορά στη μελέτη των *αναλλοιώτων,* της υποομάδας των μετασχηματισμών που διατηρούν το μήκος (όπως προαναφέραμε στην Παράγραφο 3.1, καλούνται *άκαμπτες κινήσεις).*

2. Η Υπερβολική Γεωμετρία αφορά στη μελέτη των *αναλλοιώτων*, της υποομάδας εκείνων των προβολικών μετασχηματισμών που αφήνουν αναλλοίωτη μια δοσμένη πραγματική κωνική τομή.

3. Η Ελλειπτική Γεωμετρία αφορά στη μελέτη των *αναλλοιώτων,* της υποομάδας εκείνων των προβολικών μετασχηματισμών που αφήνουν

αναλλοίωτη μια δοσμένη φανταστική κωνική τομή (βλ. Greenberg [9, σελ. 313]).

4.5. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ KLEIN

Από την παραπάνω έκθεση γίνεται φανερό ότι ο Klein, με οδηγό του τις ομάδες μετασχηματισμών, οι οποίες είχαν αναλυθεί εκτενώς μέχρι τότε και είχαν λάβει χαρακτήρα τυπικής εφαρμογής για τις Γεωμετρίες (Ευκλείδειες και μη), δημιούργησε ένα σύστημα που κινείται σε διαφορετικό πλαίσιο από τα ήδη υπάρχοντα. Στο σύστημα αυτό, έδωσε πρωτεύοντα ρόλο στις ομάδες μετασχηματισμών και τις κατεύθυνε να λειτουργούν με τρόπο τέτοιο, που να εξυπηρετείται η ανεύρεση *αναλλοίωτων* για την εκάστοτε Γεωμετρία.

Το πρόγραμμα του, αποτέλεσε την εναλλακτική πορεία στην ισχύουσα νοοτροπία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία στηριζόταν στην εποπτεία. Η εποπτεία απομακρύνεται πλέον αισθητά και τη θέση της λαμβάνουν συνολοθεωρητικές έννοιες, όπως τα *σχήματα*. Αυτό αποτελεί ένα αρκετά ισχυρό πλεονέκτημα με δυναμική και καθολικότητα, αφού επιτρέπει την αφαιρετικότητα της σκέψης και δεν περιορίζεται στα υπάρχοντα Ευκλείδεια σχήματα, καθώς η ισότητα αφορά εκφράσεις συνόλων (και όχι μόνο τρίγωνα κα.).

ΜΕΡΟΣ Β

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ
ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ERLANGER

5. MÖBIUS, ΜΙΑ ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Χρησιμοποιούμε τον όρο *καθολική* γεωμετρία, διότι θέλουμε να αναδείξουμε τη σημασία, το μέγεθος, αλλά και τη γενικότητα που χαρακτηρίζει τη Γεωμετρία Möbius. Αποτελεί μια γενικευμένη θεώρηση με ιδιαιτέρως ευρύ πεδίο εφαρμογής, καθώς η ομάδα των μετασχηματισμών που δρα στη Γεωμετρία Möbius είναι τόσο εκτεταμένη, ώστε να εφαρμόζεται τόσο στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, όσο και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ακολουθώντας το *Πρόγραμμα Erlanger*, θα ορίσουμε το μετασχηματισμό Möbius και στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της Γεωμετρίας Möbius.

5.1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS

Όπως αναφέραμε στη Παράγραφο 3.4, μελετώντας τη στερεογραφική προβολή, το σύνολο των μιγαδικών μπορεί να επεκταθεί αν του προσθέσουμε το επ' άπειρον σημείο. Τότε, κατασκευάζουμε ένα νέο σύνολο που καλείται *εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο* και συμβολίζεται με C^+. Δηλαδή, $C^+ = C \cup \{\infty\}$.

Ορισμός 5.1.1. *Ο **μετασχηματισμός Möbius** είναι μια συνάρτηση της μορφής:*

$$T : C^+ \longrightarrow C^+ : \quad z \mapsto T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

*όπου τα a, b, c, και d είναι μιγαδικές σταθερές, και η ποσότητα ad-bc (η ορίζουσα του T) είναι διάφορη του μηδενός. Αν επιπλέον, θεωρήσουμε ως M το σύνολο των μετασχηματισμών με την παραπάνω μορφή, τότε ορίζουμε το ζεύγος (C^+, M) ως **Γεωμετρία Möbius**.*

Παρατηρήσεις:

1. Αφού αναφερόμαστε στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, δεχόμαστε τις επόμενες συνθήκες:

   α) Το επ' άπειρο σημείο δρα μέσω του μετασχηματισμού T και δίνει $T(\infty) = \infty$, όταν $c = 0$, ενώ

β) αν $c \neq 0$, έχουμε τη συνθήκη $T(\infty) = \frac{a}{c}$ και $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.

2. Αν στον τύπο του μετασχηματισμού Möbius, θέσουμε $c = 0$ και $d = 1$, βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός λαμβάνει τη μορφή μιας συσχετισμένης συνάρτησης. Συνεπώς, κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ένας μετασχηματισμός Möbius.

Η καθολικότητα της Γεωμετρίας Möbius εξηγείται ακόμη και από τη φύση των μετασχηματισμών της, οι οποίοι συμπεριλαμβάνουν όλους τους μετασχηματισμούς που έχουμε αναφέρει: μεταφορά, στροφή, ομοιοθεσία και αντιστροφή. Συνεπώς, κάθε μετασχηματισμός Möbius μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση των παραπάνω συναρτήσεων.

Έστω λοιπόν ο μετασχηματισμός Möbius που περιγράφεται στον ορισμό 5.1.1.
(i) Αν $c=0$, οδηγούμαστε στον τύπο $T(z) = (a/d)\, z + b/d$. Δηλαδή, έχουμε συνδυασμό μεταφοράς, στροφής και ομοιοθεσίας. Το συμπέρασμα γίνεται κατανοητό μέσω συγκεκριμένων επιλογών για τις σταθερές a, b και d. Πράγματι, έστω $d \neq 0$.

Αν $a = d$, προκύπτει η συνάρτηση της μεταφοράς $T(z) = z + b/d$.

Αν $\theta = -i \ln(a/d)$ και $b = 0$, λαμβάνουμε τη συνάρτηση της στροφής με τύπο $T(z) = e^{-i\theta} z$.

Αν $b = 0$, παίρνουμε το μετασχηματισμό της ομοιοθεσίας.

(ii) Αν $c \neq 0$, και με τον περιορισμό $z \in C \setminus \{-d/c\}$, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$T(z) = \frac{a(cz+d) - ad + bc}{c(cz+d)}$$

$$= -\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)\left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right) + \frac{a}{c}.$$

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι, ο T αποτελείται από τη σύνθεση των παρακάτω απεικονίσεων, με τη σειρά που παραθέτονται:

Μεταφορά, κατά $\frac{d}{c}$,

Αντιστροφή, κατά $\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$,

Ομοιοθεσία και στροφή, με συντελεστή $k=-\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)$,

Μεταφορά, κατά $\frac{a}{c}$.

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε μια ιδιότητα του μετασχηματισμού Möbius, που προκύπτει από την ανάλυση του στους προηγούμενους μετασχηματισμούς.

Θεώρημα 5.1.2. *Κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι σύμμορφος.*

Απόδειξη: Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, με τον όρο σύμμορφος ορίζεται ο μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο των γωνιών. Έστω ο γενικός τύπος που περιγράφει το μετασχηματισμό Möbius. Στηριζόμενοι στη μορφή:

$$T(z)=-\left(\frac{ad-bc}{c^2}\right)\left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right)+\frac{a}{c},$$

και στην ανάλυση που προηγήθηκε της εκφώνησης του θεωρήματος, έχουμε ότι ο T είναι σύνθεση τεσσάρων μετασχηματισμών. Συνεπώς, έχουμε αμέσως το αποτέλεσμα, αφού οι παραπάνω μετασχηματισμοί, όπως έχουμε αναφέρει στην Παράγραφο 3.3, έχουν όλοι την ιδιότητα να διατηρούν το μέτρο των γωνιών. □

5.2. ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΜΌBIUS

Έστω T_1 και T_2 δύο μετασχηματισμοί Möbius με αντίστοιχους τύπους

$$T_1(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{και} \qquad T_2(z)=\frac{ez+f}{gz+h}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν αντιστοιχίσουμε ένα μετασχηματισμό Möbius

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

στον πίνακα,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

τότε η σύνθεση δύο μετασχηματισμών T_1 και T_2, όπως παραπάνω, αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων πινάκων,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Η σύνθεση $T_1 \circ T_2$ είναι προφανώς μια απεικόνιση 1-1 από το C^+ στο C^+ (αφού αυτό συμβαίνει και για τους μετασχηματισμούς T_1 και T_2). Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} T_1 \circ T_2(z) &= T_1\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) \\ &= \frac{\alpha\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+d} \\ &= \frac{\alpha(ez+f)+b(gz+h)}{c(ez+f)+d(gz+h)} \\ &= \frac{(\alpha e+bg)z+(\alpha f+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)} \end{aligned}$$

Άρα ορίζεται ένας μετασχηματισμός Möbius.

Πραγματικά, από την παραπάνω έκφραση του μετασχηματισμού $T_1 \circ T_2$ έχουμε την ορίζουσα:

$$\begin{aligned} (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) &= det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\ &= det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$det(T_1 \circ T_2) = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \neq 0. \qquad \square$$

5.3. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ MÖBIUS

Μέσω της σύνθεσης μετασχηματισμών μπορούμε να παράγουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ενός δοσμένου. Όπως γνωρίζουμε, όταν η σύνθεση δυο μετασχηματισμών Möbius μας δίνει τον ταυτοτικό, τότε ο ένας είναι ο αντίστροφος του άλλου.

Η αντίστροφη συνάρτηση T^{-1} προφανώς υπάρχει αφού, ο μετασχηματισμός T είναι 1-1 από το C^+ στο C^+.

Αν $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ και $T^{-1}(w) = \dfrac{ew+f}{gw+h}$, τότε η σύνθεση τους δίνει

$$\left(T^{-1} \circ T\right)(z) = \frac{(\alpha e + bg)z + (\alpha f + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}.$$

Οι αντίστοιχοι πίνακες των μετασχηματισμών T και T^{-1} είναι,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Τότε, αναζητούμε τον πίνακα B για τον οποίο ισχύει:

$$A \cdot B = I.$$

Άρα,

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, από την παραπάνω ισότητα έχουμε δύο συστήματα εξισώσεων,

$$\begin{pmatrix} ae + bg = 1 \\ ce + dg = 0 \end{pmatrix} (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad \begin{pmatrix} af + bh = 0 \\ cf + dh = 1 \end{pmatrix} (2)$$

Θεωρώντας ως άγνωστους τα e, g, f και h, και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών, έχουμε ότι

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,,$$

και

$$D_e = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = d, \quad D_g = \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -c, \quad D_f = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} = -b, \quad D_h = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = a.$$

Άρα, αφού $D \neq 0$, τα συστήματα (*1*) και (*2*) έχουν μοναδική λύση. Για το σύστημα (*1*) η λύση (*e, g*) είναι,

$$e = \frac{D_e}{D} = \frac{d}{D} \qquad \text{και} \qquad g = \frac{D_g}{D} = \frac{-c}{D}\,,$$

ενώ για το σύστημα (*2*) η λύση (*f, h*) είναι,

$$f = \frac{D_f}{D} = \frac{-b}{D} \qquad \text{και} \qquad h = \frac{D_h}{D} = \frac{a}{D}\,.$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος πίνακας *B* είναι ο εξής:

$$B=\begin{pmatrix} \frac{d}{D} & \frac{-b}{D} \\ \frac{-c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Υποθέτουμε ότι, οποιοδήποτε μη μηδενικό πολλαπλάσιο του *B* συνδέεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό T^{-1} και μπορούμε να γράψουμε ότι

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz - a}\,. \qquad \square$$

5.4. ΟΜΑΔΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ MÖBIUS

Βασιζόμενοι στο *Πρόγραμμα Erlanger,* θα δείξουμε ότι η Γεωμετρία Möbius αποτελεί πράγματι γεωμετρία. Για να συμβαίνει το παραπάνω, πρέπει να αποδείξουμε ότι οι μετασχηματισμοί Möbius κατέχουν τις απαραίτητες ιδιότητες, που συνιστούν μια ομάδα.

Θεώρημα 5.4.1. *Το σύνολο **M** όλων των μετασχηματισμών Möbius, αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι πληροί τις τέσσερεις ιδιότητες της ομάδας.

1. (*κλειστότητα*) Αποδείχθηκε προηγουμένως στην Παράγραφο 5.2, ότι

$$T_1, T_2 \in M \Rightarrow T_1 \circ T_2 \in M .$$

2. (*ουδέτερο στοιχείο)* Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός Möbius δίνεται από τον τύπο

$$T(z) = \frac{1z+0}{0z+1}.$$

3. (*αντίστροφο στοιχείο*) Όπως είδαμε από την Παράγραφο 5.3, για κάθε μετασχηματισμό Möbius *T*, υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός T^{-1} με τύπο

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz-\alpha}.$$

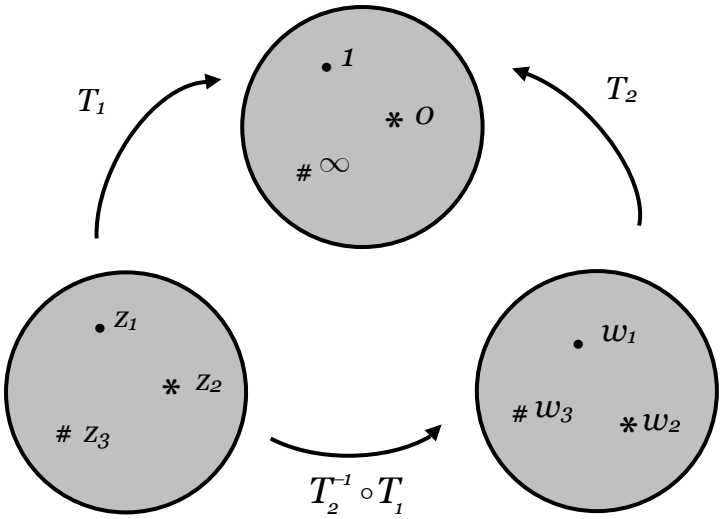
4. (*προσεταιριστικός νόμος*) Η ιδιότητα αυτή ισχύει, διότι η σύνθεση συναρτήσεων είναι πράξη προσεταιριστική. □

5.5. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜÖBIUS

Με τη συμπλήρωση των απαραίτητων εργαλείων για τους μετασχηματισμούς Möbius, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ένα πολύ βασικό θεώρημα της γεωμετρίας αυτής.

Θεώρημα 5.5.1. (**Το θεμελιώδες θεώρημα της Γεωμετρίας Möbius**) *Έστω* (z_1, z_2, z_3) *και* (w_1, w_2, w_3) *δύο τριάδες σημείων στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο* C^+. *Τότε, υπάρχει ένας μοναδικός μετασχηματισμός Möbius T με την ιδιότητα* $T(z_i) = w_i$, $(i = 1, 2, 3)$.

Απόδειξη: Για να δείξουμε το ζητούμενο, θα χρησιμοποιήσουμε μια τριάδα σημείων που θα αποτελέσει το ενδιάμεσο στάδιο για την απεικόνιση της τριάδας (z_1, z_2, z_3) στην τριάδα (w_1, w_2, w_3). Έτσι, θεωρούμε τα σημεία *1, 0* και ∞, και αναζητούμε ένα μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα z_1, z_2 και z_3 στα *1, 0* και ∞, αντίστοιχα. Ανάλογα, θα υπάρχει ένας δεύτερος μετασχηματισμός Möbius που αντιστοιχεί τα σημεία w_1, w_2 και w_3 στα *1, 0* και ∞ (Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1. Απεικόνιση των z_1, z_2 και z_3 στα w_1, w_2 και w_3, μέσω της τριάδας 1, 0 και ∞.

Επομένως, αν T_1 είναι ο μετασχηματισμός με την ιδιότητα:

$$T_1(z_1) = 1, \quad T_1(z_2) = 0, \quad T_1(z_3) = \infty,$$

και ανάλογα, T_2 είναι ο μετασχηματισμός Möbius με την ιδιότητα:

$$T_2(w_1) = 1, \quad T_2(w_2) = 0, \quad T_2(w_3) = \infty,$$

προφανώς, ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι η σύνθεση $T = T_2^{-1} \circ T_1$, εφόσον,

$$T(z_1) = T_2^{-1} T_1(z_1) = T_2^{-1}(1) = w_1,$$

$$T(z_2) = T_2^{-1} T_1(z_2) = T_2^{-1}(0) = w_2,$$

$$T(z_3) = T_2^{-1} T_1(z_3) = T_2^{-1}(\infty) = w_3.$$

Ο μετασχηματισμός T, βρίσκεται ως εξής:

$$T(z_1) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 1 \;\Rightarrow\; (a-c)z_1 = d - b \;\Rightarrow\; z_1 = \frac{d-b}{a-c},$$

$$T(z_2)=0 \;\Rightarrow\; \frac{az_2+b}{cz_2+d}=0 \;\Rightarrow\; az_2+b=0 \;\Rightarrow\; z_2=\frac{-b}{a},$$

$$T(z_3)=\infty \;\Rightarrow\; \frac{az_3+b}{cz_3+d}=\infty \;\Rightarrow\; cz_3+d=0 \;\Rightarrow\; z_3=\frac{-d}{c}.$$

Με τροποποίηση του μετασχηματισμού T και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για τα z_2 και z_3, έχουμε ότι

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a\left(z+\frac{b}{a}\right)}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}=\left(\frac{a}{c}\right)\cdot\frac{z-\left(-\frac{b}{a}\right)}{z-\left(-\frac{d}{c}\right)}=\left(\frac{a}{c}\right)\cdot\frac{z-z_2}{z-z_3}.$$

Τώρα, μετασχηματίζοντας το συντελεστή a/c παίρνουμε

$$\frac{a}{c}=\frac{a(ad-bc)}{c(ad-bc)}=\frac{a^2d-abc+acd-acd}{acd-c^2b+acb-acb}=$$

$$=\frac{ac(d-b)+ad(a-c)}{ac(d-b)+cb(a-c)}=\frac{a\left[c(d-b)+d(a-c)\right]}{c\left[a(d-b)+b(a-c)\right]}=$$

$$=\frac{\frac{c(d-b)+d(a-c)}{c}}{\frac{a(d-b)+b(a-c)}{a}}=\frac{\frac{c(d-b)+d(a-c)}{c(a-c)}}{\frac{a(d-b)+b(a-c)}{a(a-c)}}=$$

$$=\frac{\frac{d-b}{a-c}+\frac{d}{c}}{\frac{d-b}{a-c}+\frac{b}{a}}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}.$$

Συνεπώς,

$$T(z)=\frac{z-z_2}{z-z_3}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}.$$

Για να επιβεβαιώσουμε τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο βοηθητικό συμπέρασμα:

Ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει καθένα από τα σημεία 1, 0 και ∞ *στον εαυτό τους είναι ο ταυτοτικός.*

Πράγματι, αν $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ είναι ένας μετασχηματισμός Möbius που αντιστοιχεί το ∞ στον εαυτό του, τότε $c = 0$. Επίσης, αν ο S απεικονίζει το 0 στον εαυτό του, τότε $S(0) = b/d$, και άρα $b = 0$.

Αφού, $c = 0$ και $b = 0$, συνάγεται ότι $S(z) = (a/d)z$. Τέλος, αφού ο S αντιστοιχεί το 1 στον εαυτό του, ισχύει $S(1) = a/d = 1$, που σημαίνει ότι $a = d$. Άρα, ο απαιτούμενος μετασχηματισμός S είναι ο ταυτοτικός $S(z) = z$.

Επανερχόμενοι στην απόδειξη του θεωρήματος, ας υποθέσουμε ότι εκτός από τον T υπάρχει και ένας T' διαφορετικός μετασχηματισμός Möbius, που ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος. Τότε, οι συνθέσεις $T_2 \circ T \circ T_1^{-1}$ και $T_2 \circ T' \circ T_1^{-1}$ συμβολίζουν ταυτόχρονα μετασχηματισμούς Möbius που απεικονίζουν καθένα από τα σημεία 1, 0 και ∞ στον εαυτό τους. Δεδομένου όμως του προηγούμενου συμπεράσματος, συνεπάγεται ότι οι δυο συνθέσεις είναι ίσες με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, άρα

$$T_2 \circ T \circ T_1^{-1} = T_2 \circ T' \circ T_1^{-1},$$

απ' όπου έχουμε ότι

$$T = T'. \qquad \square$$

Συνέπεια του Θεωρήματος. *Όλα τα σχήματα, που αποτελούνται από τρία διαφορετικά σημεία, είναι ίσα στη Γεωμετρία Möbius.*

Υπενθυμίζουμε ότι, στη Γεωμετρία Klein ως *σχήμα* ορίζουμε οποιοδήποτε υποσύνολο του χώρου στον οποίο δρούμε, εδώ του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου. Άρα, έστω σχήματα $A, B \subset C^+$, με

$$A = \{z_1, z_2, z_3\} \text{ και } B = \{w_1, w_2, w_3\}.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι δυο σχήματα είναι ίσα όταν υπάρχει μετασχηματισμός T τέτοιος, ώστε $T(A) = B$. Συνεπώς, χρειαζόμαστε ένα μετασχηματισμό Möbius για τον οποίο θα ισχύει:

$$T(A) = \{T(z_1), T(z_2), T(z_3)\} = \{w_1, w_2, w_3\}.$$

Βάσει του θεμελιώδους θεωρήματος, υπάρχει ένας μοναδικός μετασχηματισμός Möbius T, που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

5.6. ΑΝΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ (cross-ratio)

Στο θεμελιώδες θεώρημα ο μετασχηματισμός Möbius που χρησιμοποιήσαμε για να απεικονίσουμε τα z_1, z_2 και z_3 στα 1, 0 και ∞, είναι ιδιαίτερα σημαντικός και έχει εξέχουσα θέση στη Γεωμετρία Möbius, ώστε να λαμβάνει ξεχωριστό όνομα και ορισμό.

Ορισμός 5.6.1. *Ο* ***αναρμονικός λόγος*** (*cross-ratio*) *είναι μια συνάρτηση τεσσάρων μιγαδικών μεταβλητών της μορφής:*

$$\left(z_0, z_1, z_2, z_3\right) := \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \, \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Η εφαρμογή που ακολουθεί, δείχνει ότι ο αναρμονικός λόγος είναι ο μετασχηματισμός Möbius, που επαληθεύει τις συνθήκες του θεμελιώδους θεωρήματος.

Εφαρμογή 5.6.2. Έστω $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ η συνάρτηση του *αναρμονικού λόγου* ως προς μεταβλητή το z, θεωρώντας ότι οι άλλες τρείς παραμένουν σταθερές. Τότε, από τον ορισμό του αναρμονικού λόγου, είναι

$$T(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 1,$$

$$T(z_2) = \frac{z_2 - z_2}{z_2 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0,$$

$$T(z_3) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \infty.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο προηγούμενος T είναι ακριβώς ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα z_1, z_2 και z_3 στα 1, 0 και ∞, αντιστοίχως.

Παράδειγμα 5.6.3. Όταν μια από τις μεταβλητές του αναρμονικού λόγου είναι το ∞, τότε η τιμή του αναρμονικού λόγου μπορεί να καθοριστεί

υπολογίζοντας το όριο στο άπειρο. Με αυτήν την υπόθεση υπάρχουν τέσσερεις διαφορετικές τιμές. Έτσι, έχουμε:

$$(\infty, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}, \text{ αφού } \lim_{z_0 \to \infty} \left(\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \right) = 1,$$

$$(z_0, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}, \text{ αφού } \lim_{z_1 \to \infty} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right) = 1,$$

$$(z_0, z_1, \infty, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}, \text{ αφού } \lim_{z_2 \to \infty} \left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} \right) = 1,$$

$$(z_0, z_1, z_2, \infty) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2}, \text{ αφού } \lim_{z_3 \to \infty} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} \right) = 1.$$

5.7. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ (invariants)

Το κυριότερο χαρακτηριστικό της θεωρίας του Klein, όπως προαναφέραμε, είναι η έννοια των αναλλοιώτων. Κάθε γεωμετρία, που μελετάται μέσω του Προγράμματος Erlanger, έχει ως ιδιότητές της τα αναλλοίωτα της ομάδας των μετασχηματισμών της. Έπεται λοιπόν ότι, και η Γεωμετρία Möbius έχει τα δικά της αναλλοίωτα. Παράλληλα, αφού η Γεωμετρία Möbius είναι ένα υπερσύνολο των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, τα αναλλοίωτα της θα ισχύουν και στα υποσύνολά της. Παραθέτουμε στη συνέχεια τα κυριότερα από αυτά.

5.7.1. Μέτρο Γωνίας

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, προσδιορίσαμε το χαρακτήρα των μετασχηματισμών Möbius και συμπεριλάβαμε με αυτόν τον τρόπο και την ιδιότητα τους να διατηρούν το μέτρο των γωνιών. Από το Θεώρημα 5.1.2, έχουμε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι σύμμορφος. Επομένως, βλέπουμε ότι το μέτρο γωνίας αποτελεί ένα πρώτο αναλλοίωτο για τη Γεωμετρία Möbius. Συμπερασματικά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η διατήρηση του μέτρου γωνίας είναι επίσης αναλλοίωτο και για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

5.7.2. Αναρμονικός λόγος (Cross Ratio)

Από τον ορισμό που δώσαμε στη Γεωμετρία Klein, δεχόμαστε ως αναλλοίωτη τη συνάρτηση για την οποία ισχύει $T(A) = B$, όπου A και B είναι σχήματα της γεωμετρίας μας. Έτσι, ο αναρμονικός λόγος είναι μια αναλλοίωτη συνάρτηση της Γεωμετρίας Möbius. Αναφέρουμε στη συνέχεια δύο θεωρήματα που αφορούν στον αναρμονικό λόγο και θα βοηθήσουν στην ανάπτυξη των δυο επόμενων αναλλοιώτων της Γεωμετρίας Möbius.

Θεώρημα 5.7.1. *Ο αναρμονικός λόγος* (z_0, z_1, z_2, z_3) *είναι πραγματικός (αριθμός), αν και μόνο αν τα τέσσερα σημεία* z_0, z_1, z_2, z_3 *ανήκουν σε έναν κύκλο ή σε μια Ευκλείδεια ευθεία.*

Απόδειξη: Έστω $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ και εφόσον ο T είναι μετασχηματισμός Möbius, εκφράζεται με τον τύπο

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

για κάποιες μιγαδικές σταθερές a, b, c και d. Γνωρίζουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός, αν και μόνο αν, το φανταστικό μέρος του είναι μηδέν. Δηλαδή αν,

$$T(z) = \overline{T(z)},$$

ή αλλιώς,

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\overline{a}\overline{z}+\overline{b}}{\overline{c}\overline{z}+\overline{d}}.$$

Κάνοντας τις πράξεις, παίρνουμε

$$(a\overline{c}-c\overline{a})z\overline{z}+(a\overline{d}-c\overline{b})z+(b\overline{c}-d\overline{a})\overline{z}+(b\overline{d}-d\overline{b})=0. \qquad (1)$$

Αν $(a\overline{c}-c\overline{a}) \neq 0$, έχουμε

$$z\overline{z}+\left(\frac{a\overline{d}-c\overline{b}}{a\overline{c}-c\overline{a}}\right)z+\left(\frac{b\overline{c}-d\overline{a}}{a\overline{c}-c\overline{a}}\right)\overline{z}+\left(\frac{b\overline{d}-d\overline{b}}{a\overline{c}-c\overline{a}}\right)=0.$$

Θα κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου της παραπάνω σχέσης με τη βοήθεια του επόμενου συμπεράσματος.

$$|z-k|^2-|k|^2=(z-k)\overline{(z-k)}-k\bar{k}=$$

$$=z\bar{z}-\bar{k}z-k\bar{z}+k\bar{k}-k\bar{k}=$$

$$=z\bar{z}-\bar{k}z-k\bar{z}.$$

Οπότε,

$$z\bar{z}-\overline{\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)}z-\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)\bar{z}+\left(\frac{b\bar{d}-d\bar{b}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)+\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)\overline{\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)}-\left|\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right|^2=0,$$

$$\left[z-\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)\right]\left[\bar{z}-\overline{\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)}\right]=\frac{d\bar{b}-b\bar{d}}{a\bar{c}-c\bar{a}}+\left|\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right|^2.$$

Τελικά, καταλήγουμε στην σχέση που αναπαριστά την εξίσωση του κύκλου.

$$\left|z-\left(\frac{d\bar{a}-b\bar{c}}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right)\right|^2=\left|\frac{ad-bc}{a\bar{c}-c\bar{a}}\right|^2.$$

Στην περίπτωση που ισχύει $(a\bar{c}-c\bar{a})=0$ η σχέση (1) γίνεται:

$$(a\bar{d}-c\bar{b})z+(b\bar{c}-d\bar{a})\bar{z}+(b\bar{d}-d\bar{b})=0,$$

$$(a\bar{d}-c\bar{b})z-\overline{(a\bar{d}-c\bar{b})}\,\bar{z}+(b\bar{d}-d\bar{b})=0.$$

Τότε, θέτοντας

$$A=(a\bar{d}-c\bar{b})\quad \kappa\alpha\iota\quad B=b\bar{d}\,,$$

παίρνουμε τη σχέση

$$(Az+B)=\overline{(Az+B)},$$

ή αλλιώς,

$$Im(Az+B)=0\,,$$

που είναι η εξίσωση μιας ευθείας.

Πράγματι, έστω A, B και z, τρεις αριθμοί του μιγαδικού επιπέδου με τη μορφή

$$A = a_1 + ia_2, \quad B = b_1 + ib_2 \quad \kappa\alpha\iota \quad z = x + iy.$$

Τότε,

$$Im(Az + B) = 0 \Leftrightarrow Im(a_1x + ia_1y + ia_2x - a_2y + b_1 + ib_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1y + a_2x + b_2 = 0.$$

Η τελευταία σχέση είναι προφανώς, η εξίσωση μιας ευθείας. □

Θεώρημα 5.7.2. *Αν T είναι ένας μετασχηματισμός Möbius και z_0, z_1, z_2, z_3 είναι τέσσερα διαφορετικά σημεία του μιγαδικού επιπέδου, που ανήκουν στο σχήμα $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$* τότε,

$$\left(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right) = \left(z_0, z_1, z_2, z_3\right).$$

Απόδειξη: Έστω $T'(z) = \left(z, z_1, z_2, z_3\right)$. Δηλαδή, ο T' είναι ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα $z_1 \to 1$, $z_2 \to 0$, $z_3 \to \infty$. Επομένως, ο μετασχηματισμός $T' \circ T^{-1}$ απεικονίζει τα $T(z_1) \to 1$, $T(z_2) \to 0$, $T(z_3) \to \infty$. Όμως, ο μετασχηματισμός που κάνει την προηγούμενη αντιστοίχηση δίνεται και από τον τύπο του αναρμονικού λόγου:

$$\left(z, T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right).$$

Με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος, έχουμε ότι

$$\left(T' \circ T^{-1}\right)(z) = \left(z, T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right).$$

Συνεπώς,

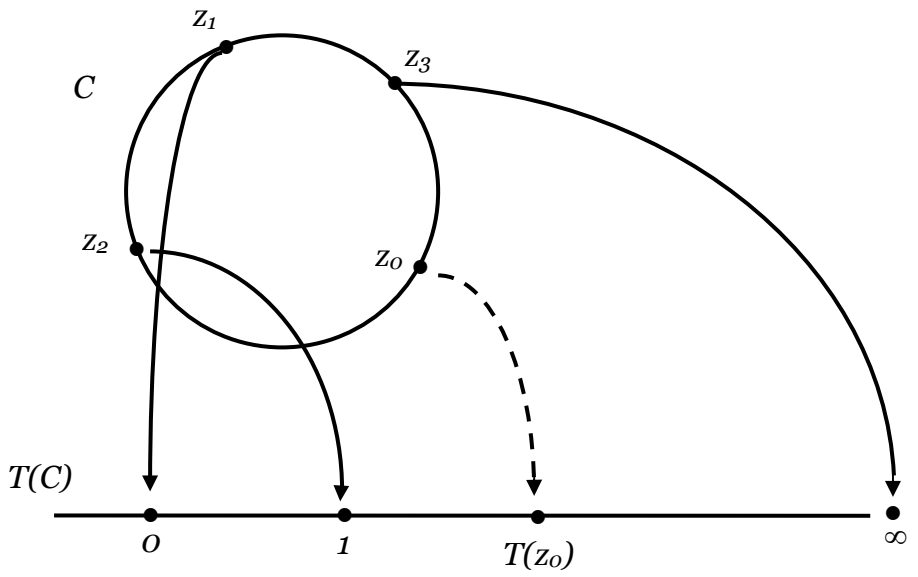
$$\left(z_0, z_1, z_2, z_3\right) = T'(z_0) = \left(T' \circ T^{-1}\right)\left(T(z_0)\right) = \left(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right).$$

□

Το τελευταίο θεώρημα επιβεβαιώνει ότι οι μετασχηματισμοί Möbius διατηρούν τον αναρμονικό λόγο, ώστε να αποτελεί ένα αναλλοίωτο της γεωμετρίας.

5.7.3. Γενικευμένοι Κύκλοι (Generalized circles ή Clines)

Ορισμός 5.7.3. *Ένα υποσύνολο C του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου καλείται* ***γενικευμένος κύκλος****, αν το C είναι Ευκλείδειος κύκλος ή Ευκλείδεια ευθεία γραμμή.*



Σχήμα 5.2. Ο γενικευμένος κύκλος *C* μετασχηματίζεται από ευκλείδειος κύκλος σε ευκλείδεια ευθεία.

Ο ακόλουθος συλλογισμός, αποδεικνύει ότι *το σύνολο των γενικευμένων κύκλων αποτελεί ένα αναλλοίωτο της Γεωμετρίας Möbius.*

Υποθέτουμε την ύπαρξη ενός γενικευμένου κύκλου *C*, που διέρχεται από τα σημεία z_1, z_2 και z_3. Έστω ότι υπάρχει ένα τέταρτο σημείο z_0. Το z_0 ανήκει στο γενικευμένο κύκλο *C*, αν και μόνο αν, ο αναρμονικός λόγος (z_0, z_1, z_2, z_3) είναι πραγματικός αριθμός. Από το Θεώρημα 5.7.2, γνωρίζουμε ότι

$$\left(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right) = (z_0, z_1, z_2, z_3),$$

και λόγω του αναλλοίωτου του αναρμονικού λόγου, αρκεί να δείξουμε ότι, ο $\left(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right)$ είναι πραγματικός αριθμός. Ή αλλιώς, αρκεί το

$T(z_o)$ να ανήκει στον κύκλο ή στην ευθεία που διέρχεται από τα $T(z_1), T(z_2)$ *και* $T(z_3)$. Συνεπώς, το z_o ανήκει στον *C,* αν και μόνο αν, το $T(z_o)$ ανήκει στον $T(C)$. Όμως, εξ' ορισμού:

$$T(C) = \{T(z) : z \text{ είναι σημείο του } C\},$$

που είναι γενικευμένος κύκλος.

Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα θα οπτικοποιήσουμε το προηγούμενο συμπέρασμα (βλ. Σχήμα 5.2). Έστω ο μετασχηματισμός Möbius *T*, που απεικονίζει τα z_1, z_2 και z_3 στα *1, 0* και ∞, αντίστοιχα. Μέσω του *T,* η εικόνα του γενικευμένου κύκλου *C,* είναι ο εκτεταμένος άξονας των πραγματικών αριθμών (μαζί με το $+\infty$ και το $-\infty$, δηλαδή $R \cup \{+\infty, -\infty\}$). Τότε, ο *T(C)* είναι ο μοναδικός γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα *0, 1 και* ∞. Επομένως, αν ένα τέταρτο σημείο z_o ανήκει στον *C*, τότε αναγκαστικά η εικόνα του, μέσω του μετασχηματισμού, θα είναι σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών, που προφανώς ανήκει στο σύνολο των γενικευμένων κύκλων.

Με τον παραπάνω τρόπο, περιγράψαμε ότι υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius *T* τέτοιος, ώστε αν *C* είναι ένας γενικευμένος κύκλος τότε, ο *T(C)* είναι επίσης γενικευμένος κύκλος. Δηλαδή, βλέπουμε ότι διατηρείται η ιδιότητα του αναλλοίωτου για σχήματα. Βέβαια, δεν είναι απαραίτητο η εικόνα κύκλου να είναι κύκλος, αφού από τον ορισμό μπορεί να είναι και ευθεία.

5.7.4. Συμμετρία

Μετά τις τρεις πρώτες αναλλοίωτες παρουσιάζουμε και την έννοια της συμμετρίας, που προκύπτει από το μετασχηματισμό του αναρμονικού λόγου. Αυτή η έννοια της συμμετρίας έχει εφαρμογή στους γενικευμένους κύκλους, δηλαδή μπορούμε να μιλήσουμε για συμμετρικότητα μεταξύ δύο σημείων ως προς κάποιο κύκλο ή ευθεία.

Ορισμός 5.7.4. *Δυο σημεία z και* z' *ονομάζονται* ***συμμετρικά*** *αναφορικά με ένα γενικευμένο κύκλο C αν*

$$(z', z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

όπου z_1, z_2 και z_3 είναι τρία διαφορετικά σημεία τα οποία ανήκουν στο γενικευμένο κύκλο C.

Η συμμετρία αποτελεί ένα ακόμα αναλλοίωτο της Γεωμετρίας Möbius. Ο ισχυρισμός αυτός αποτυπώνεται στη επόμενη πρόταση:

Έστω z και z' συμμετρικά σημεία ως προς γενικευμένο κύκλο C και έστω μετασχηματισμός Möbius T. Τότε, τα σημεία $T(z)$ και $T(z')$ είναι συμμετρικά ως προς το γενικευμένο κύκλο $T(C)$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\left(T(z'),\, T(z_1),\, T(z_2),\, T(z_3)\right) &= \left(z', z_1, z_2, z_3\right)\\ &= \overline{\left(z, z_1, z_2, z_3\right)}\\ &= \overline{\left(T(z),\, T(z_1),\, T(z_2),\, T(z_3)\right)},\end{aligned}$$

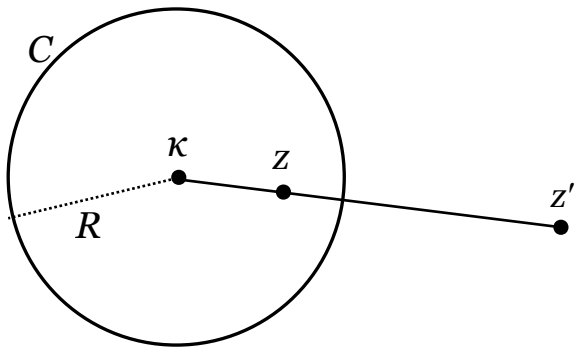
δεδομένου ότι, ο $T(C)$ είναι ο γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $T(z_1)$, $T(z_2)$ και $T(z_3)$.

Ας δούμε πως εξαρτάται το z από το z' στην περίπτωση που το C είναι κύκλος (Σχήμα 5.3). Τότε η εξίσωση του κύκλου με κέντρο κ και ακτίνα R είναι:

$$C = \left\{z : |z-\kappa|^2 = R^2\right\} = \left\{z : \overline{z-\kappa} = \frac{R^2}{z-\kappa}\right\}, \qquad (1)$$

αφού,

$$|z-\kappa|^2 = (z-\kappa)\overline{(z-\kappa)}.$$



Σχήμα 5.3. Δυο σημεία z και z' συμμετρικά ως προς κύκλο $C(\kappa, R)$.

Έστω z_1, z_2 και z_3 τρία σημεία που ανήκουν στον C και έστω z' το συμμετρικό του z. Τότε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συμμετρικού σημείου και την ιδιότητα του αναρμονικού λόγου να διατηρείται αναλλοίωτος μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού της μεταφοράς: $z \to z - \kappa$, προκύπτει ότι

$$\left(z', z_1, z_2, z_3\right) = \overline{\left(z, z_1, z_2, z_3\right)} = \overline{\left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right)} =$$

$$= \overline{\left(\frac{z - \kappa - \left(z_2 - \kappa\right)}{z - \kappa - \left(z_3 - \kappa\right)} \cdot \frac{z_1 - \kappa - \left(z_3 - \kappa\right)}{z_1 - \kappa - \left(z_2 - \kappa\right)}\right)}$$

$$= \overline{\left(z - \kappa, z_1 - \kappa, z_2 - \kappa, z_3 - \kappa\right)}$$

$$= \left(\overline{z - \kappa}, \overline{z_1 - \kappa}, \overline{z_2 - \kappa}, \overline{z_3 - \kappa}\right).$$

Με το τελευταίο συμπέρασμα και με τη βοήθεια της σχέσης (1), έχουμε ότι

$$\left(z', z_1, z_2, z_3\right) = \left(\overline{z} - \overline{\kappa}, \frac{R^2}{z_1 - \kappa}, \frac{R^2}{z_2 - \kappa}, \frac{R^2}{z_3 - \kappa}\right).$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό της αντιστροφής: $z \to \frac{R^2}{z}$, η σχέση γίνεται

$$\left(z', z_1, z_2, z_3\right) = \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{\kappa}}, \frac{R^2}{\overline{z_1 - \kappa}}, \frac{R^2}{\overline{z_2 - \kappa}}, \frac{R^2}{\overline{z_3 - \kappa}}\right) =$$

$$= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{\kappa}}, z_1 - \kappa, z_2 - \kappa, z_3 - \kappa\right).$$

Τέλος, με την εφαρμογή του μετασχηματισμού μεταφοράς: $z \to z + \kappa$, παίρνουμε ότι

$$\left(z', z_1, z_2, z_3\right) = \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{\kappa}} + \kappa, z_1, z_2, z_3\right).$$

Η τελευταία ισότητα, δίνει

$$z' = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{\kappa}} + \kappa = \left(\frac{R^2}{\left|z - \kappa\right|^2}\right)\left(z - \kappa\right) + \kappa .$$

Τότε, με διαδοχικές πράξεις, έχουμε ότι

$$z' - \kappa = \left(\frac{R^2}{\left|z - \kappa\right|^2}\right)\left(z - \kappa\right) \Leftrightarrow \left|z' - \kappa\right| = \left|\left(\frac{R^2}{\left|z - \kappa\right|^2}\right)\left(z - \kappa\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|z' - \kappa\right| = \frac{R^2}{\left|z - \kappa\right|^2} \cdot \left|z - \kappa\right| \Leftrightarrow \left|z' - \kappa\right| = \frac{R^2}{\left|z - \kappa\right|}.$$

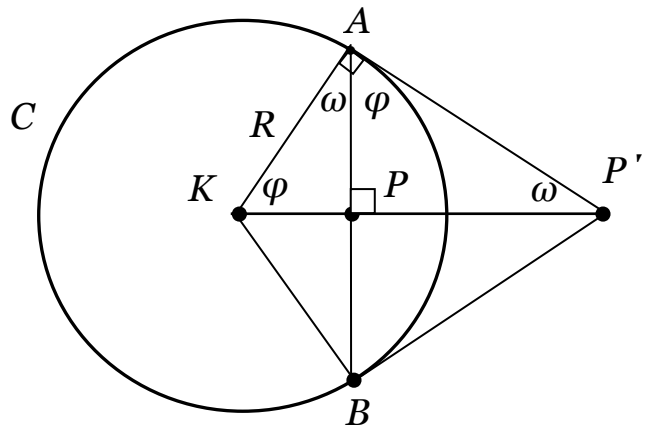
Συνεπώς, από την ανάλυση που προηγήθηκε, η παρακάτω σχέση συνδέει ένα σημείο z και το συμμετρικό του z', όταν αναφερόμαστε σε κύκλο ακτίνας R και κέντρου κ.

$$\left|z' - \kappa\right| \left|z - \kappa\right| = R^2 . \qquad \square$$

Μπορούμε ανάλογα να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα, κατασκευάζοντας το συμμετρικό σημείο ως προς κύκλο, μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έτσι, με την επόμενη εφαρμογή έχουμε ως σκοπό την αντιπαράθεση της Γεωμετρίας Möbius με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Εφαρμογή 5.7.5. *Γεωμετρική κατασκευή του συμμετρικού σημείου όταν έχουμε* ***ευκλείδειο*** *κύκλο C.*

Έστω C ο κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R και έστω σημείο P στο εσωτερικό του C. Ενώνουμε το K με το P. Φέρνουμε την κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα KP στο P. Τότε, η κάθετη τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία A και B. Ενώνουμε τα A και B με το κέντρο και φέρνουμε τις εφαπτόμενες του C στα σημεία αυτά. Το σημείο τομής των εφαπτόμενων ευθειών είναι το συμμετρικό σημείο P' του P (Σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4. Γεωμετρική κατασκευή του συμμετρικού σημείου ως προς κύκλο.

Τα τρίγωνα KAP και APP' είναι όμοια. Αυτό συμβαίνει διότι, είναι ορθογώνια και έχουν τις άλλες δυο γωνίες τους, κάθετες μεταξύ τους. Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{AP}{PP'} = \frac{KP}{AP} = \frac{AK}{AP'}.$$

Από την σχέση

$$\frac{KP}{AP} = \frac{AP}{PP'},$$

προκύπτει ότι

$$(KP)(PP') = (AP)^2.$$

Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο KAP έχουμε

$$(AP)^2 = R^2 - (KP)^2.$$

Οι δυο τελευταίες σχέσεις δίνουν την

$$(KP)(PP') = R^2 - (KP)^2.$$

Αν τώρα, θέσουμε $KP = x$ και $KP' = y$, τότε $PP' = y - x$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση, έχουμε ότι

$$R^2 = xy.$$

Δηλαδή, αν P είναι το σημείο z και P' το σημείο z', έχουμε ότι

$$|z' - \kappa||z - \kappa| = R^2 .$$

Όμοια, αν υποθέσουμε ότι το z είναι εξωτερικά του κύκλου τότε, το z' με αντίστροφη διαδικασία κατασκευής θα βρίσκεται εσωτερικά.

Στην περίπτωση που ο γενικευμένος κύκλος C είναι η ευκλείδεια ευθεία, τότε το συμμετρικό ενός σημείου «καθρεφτίζεται» μέσω της ευθείας και τα δυο σημεία βρίσκονται εκατέρωθεν των ημιεπιπέδων που ορίζονται.

6. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στην Παράγραφο 2.4, είδαμε τα βασικά χαρακτηριστικά των μοντέλων που αναπαριστούν την Υπερβολική Γεωμετρία. Με οδηγό μας τη Γεωμετρία Möbius, επανερχόμαστε στο δεύτερο μέρος της εργασίας για να αναπτύξουμε αναλυτικότερα την Υπερβολική Γεωμετρία. Ενώ η αφηρημένη φύση της Γεωμετρίας Möbius δεν επιτρέπει το σχηματισμό μιας ξεκάθαρης εικόνας για τον τρόπο μοντελοποίησης της, η Υπερβολική Γεωμετρία αναπαριστάται σε ένα περιβάλλον καθορισμένο και αρκετά οικείο. Μοντελοποιείται, όπως είδαμε, σε συνθήκες που προσεγγίζουν τις Ευκλείδειες, με χαρακτηριστικά όπως είναι οι ευθείες γραμμές, οι κύκλοι ή τα τρίγωνα.

Στο παρόν κεφάλαιο, μέσω του μοντέλου του μοναδιαίου δίσκου του Poincaré, θα αναπτύξουμε γεωμετρικές έννοιες, όπως η γωνία, το μήκος, το εμβαδόν, η παραλληλία κ.ά., με χρήση μη Ευκλείδειων μετασχηματισμών. Επιπροσθέτως, θα επιχειρήσουμε συσχετισμούς των παραπάνω εννοιών, με το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου (upper half plane), επίσης δημιούργημα του Poincaré. Παράλληλα, θα παραθέτονται και συγκρίσεις των μοντέλων της Υπερβολικής Γεωμετρίας με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ξεκινάμε τη παρουσίαση με την ανάλυση του μοναδιαίου δίσκου.

6.1. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΔΙΣΚΟΥ (POINCARÉ)

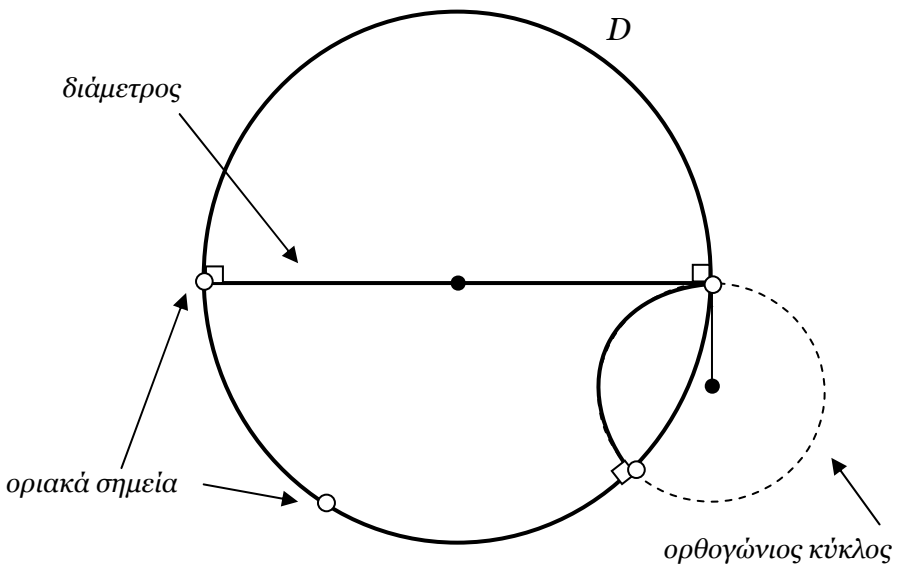
Στην παράγραφο αυτή ορίζουμε το μοντέλο του δίσκου του Poincaré μαζί με τα χαρακτηριστικά του. Ο μοναδιαίος δίσκος χρησιμοποιείται ως το σύνολο αναφοράς, πάνω στο οποίο αναπαρίσταται η Υπερβολική Γεωμετρία.

Αν συμβολίσουμε με D το **μοναδιαίο δίσκο**, τότε

$$D = \{z \in C : |z| < 1\} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Δηλαδή, το σύνολο D απεικονίζει το εσωτερικό του δίσκου, που έχει κέντρο στην αρχή των αξόνων, χωρίς να περιλαμβάνονται σε αυτόν τα σημεία της περιφέρειας. Τα σημεία στο σύνορο του D, καλούνται *οριακά σημεία*.

Υπερβολική ευθεία ονομάζεται κάθε τμήμα γενικευμένου κύκλου που τέμνει κάθετα το σύνορο του δίσκου και ανήκει στο D. Στην πραγματικότητα, αναφερόμαστε στα τόξα των Ευκλείδειων κύκλων και στις διαμέτρους του D (βλ. Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1. Μοναδιαίος δίσκος Poincaré.

6.2. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε μια σημαντική μορφή ενός μη Ευκλείδειου μετασχηματισμού, η οποία είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές μας. Ουσιαστικά, διαφοροποιείται ο κλασσικός τύπος του μετασχηματισμού Möbius για να προσαρμοστεί κατάλληλα στις συνθήκες της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Για κάθε γεωμετρία που ορίζουμε, αναζητούμε την ομάδα των μετασχηματισμών Möbius, που απεικονίζουν το σύνολο αναφοράς της γεωμετρίας στον εαυτό του. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι το επίπεδο του μοναδιαίου δίσκου είναι το σύνολο αναφοράς της Υπερβολικής Γεωμετρίας, τότε, αυτό αποτελείται από την ομάδα των μετασχηματισμών Möbius που απεικονίζουν το δίσκο στον εαυτό του. Ο μετασχηματισμός που ικανοποιεί την παραπάνω απαίτηση, γράφεται με τη μορφή:

$$T(z) = \lambda \frac{z - z_o}{1 - \bar{z}_o z}, \qquad (6.1.1.)$$

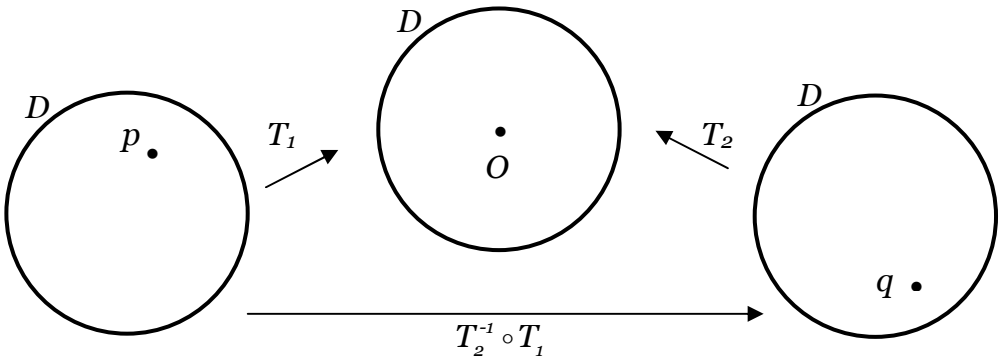
όπου λ και z_o είναι μιγαδικοί αριθμοί με $|\lambda| = 1$ *και* $|z_o| < 1$. Το λ αντιπροσωπεύει το συντελεστή $e^{i\theta}$ και έχει μοναδιαίο μέτρο, ενώ το z_o είναι το τυχαίο σημείο του δίσκου. Είναι φανερό ότι, με το μετασχηματισμό αυτό μπορούμε να απεικονίσουμε ένα δοσμένο σημείο z_o του D στο κέντρο του

δίσκου. Ενώ, αν εφαρμόσουμε με κατάλληλο τρόπο δυο φορές το μετασχηματισμό, μπορούμε να επιτύχουμε την απεικόνιση οποιουδήποτε δοθέντος σημείου του D σε οποιοδήποτε δοθέν σημείο του D. Πρακτικά, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Έστω ότι θέλουμε να απεικονίσουμε το σημείο p του D στο σημείο q του D. Τότε:

1. Γράφουμε το μετασχηματισμό T_1 που απεικονίζει το p στο O,
2. Γράφουμε το μετασχηματισμό T_2 που απεικονίζει το q στο O, και
3. Σχηματίζουμε τη σύνθεση $T_2^{-1} \circ T_1$,

ώστε να πετύχουμε τη ζητούμενη απεικόνιση (Σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2. Απεικόνιση του σημείου p στο σημείο q.

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς ο μοναδιαίος δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο και ο μη Ευκλείδειος μετασχηματισμός 6.1.1. οδηγούν στον ορισμό της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

6.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Όπως γνωρίζουμε, για να ορίσουμε τη γεωμετρία στο πλαίσιο του Προγράμματος Erlanger, είναι απαραίτητο να έχουμε ένα σύνολο αναφοράς και μια ομάδα μετασχηματισμών.

Ορισμός 6.3.1. *Έστω* $D = \{z : |z| < 1\}$ *ο μοναδιαίος δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω H το σύνολο των μετασχηματισμών του D της μορφής*

$$T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

όπου $|z_o| < 1$. *Το ζεύγος (D, H) αναπαριστά την* ***Υπερβολική Γεωμετρία***.

Ο δίσκος *D* ως υποσύνολο του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου και η ομάδα *H* ως υποομάδα του συνόλου *M* των μετασχηματισμών Möbius, συμπληρώνουν τις προϋποθέσεις, ώστε η Υπερβολική Γεωμετρία να είναι ένα κομμάτι της Γεωμετρίας Möbius. Επιπλέον, ικανοποιούνται οι συνθήκες που θέτει το Πρόγραμμα Erlanger και έτσι, ο *D* είναι το υπερβολικό επίπεδο και η *H* είναι η υπερβολική ομάδα.

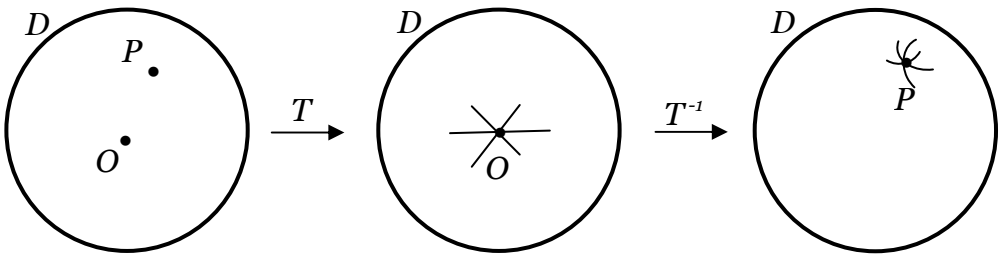
6.4. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Αφού ορίσαμε τη γεωμετρία, είμαστε σε θέση τώρα να αναπτύξουμε το πρώτο χαρακτηριστικό της, την υπερβολική ευθεία. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού 6.1.1, θα αντιμετωπίσουμε μερικά από τα προβλήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας που σχετίζονται με το ρόλο των ευθειών. Έτσι, αποδεικνύουμε το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.4.1. *Έστω P ένα σημείο στο δίσκο D. Τότε υπάρχουν άπειρες υπερβολικές ευθείες που διέρχονται από το P.*

Απόδειξη: (i) Έστω ότι το *P* είναι το κέντρο του *D*. Προφανώς, κάθε μια από τις άπειρες διαμέτρους του *D* διέρχεται από το κέντρο και κάθε μια από αυτές είναι υπερβολική ευθεία.
(ii) Έστω ότι το *P* είναι διάφορο του κέντρου *O*. Τότε, υπάρχει μετασχηματισμός *T* της Υπερβολικής Γεωμετρίας, ο οποίος απεικονίζει το *P* στο *O*. Από το *O* διέρχονται άπειρες διάμετροι του *D*. Αφού, ο αντίστροφος του *T* είναι επίσης μη Ευκλείδειος μετασχηματισμός, τότε οι εικόνες των διαμέτρων θα είναι υπερβολικές ευθείες και θα διέρχονται από το *P* (βλ. και το επόμενο σχήμα).

□



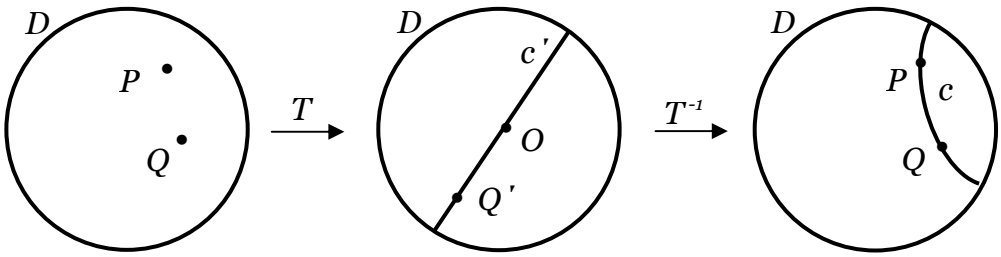
Σχήμα 6.3. Από σημείο *P* του δίσκου *D*, διέρχονται άπειρες ευθείες.

Με την προηγούμενη πρόταση δείξαμε με ποιόν τρόπο μια ιδιότητα που γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει εφαρμογή στην Υπερβολική Γεωμετρία. Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της ευθείας, που ορίζεται με τη βοήθεια δυο σημείων. Αποτελεί επίσης, το πρώτο αξίωμα *σύμπτωσης* (congruence) σύμφωνα με την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert. Ακριβέστερα έχουμε το,

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω P και Q δύο διαφορετικά σημεία στο D. Τότε, ορίζεται μια μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα P και Q.*

Απόδειξη: Αρχικά, θα δείξουμε την ύπαρξη της ευθείας. Έστω T μη Ευκλείδειος μετασχηματισμός. Τότε, το σημείο P μπορεί να απεικονίζεται στο κέντρο O. Έστω ότι, η εικόνα του Q μέσω του T είναι το σημείο Q' του D. Τότε, υπάρχει μια μοναδική υπερβολική ευθεία c' (εν προκειμένω, μια διάμετρος του D) που διέρχεται από τα O και Q'. Όμως, υπάρχει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός του T, ο οποίος δίνει ότι $c = T^{-1}(c')$. Η c είναι επίσης υπερβολική ευθεία και διέρχεται από τα P και Q.

Θα δείξουμε τώρα τη μοναδικότητα της ευθείας αυτής. Έστω ότι υπάρχει και μια δεύτερη υπερβολική ευθεία c_1 που διέρχεται από τα P και Q. Τότε, η εικόνα της μέσω του T, είναι επίσης υπερβολική ευθεία και διέρχεται από τα O και Q'. Συνεπώς, $T(c_1) = c'$ και έτσι, η c_1 συμπίπτει με την $T^{-1}(c') = c$. □

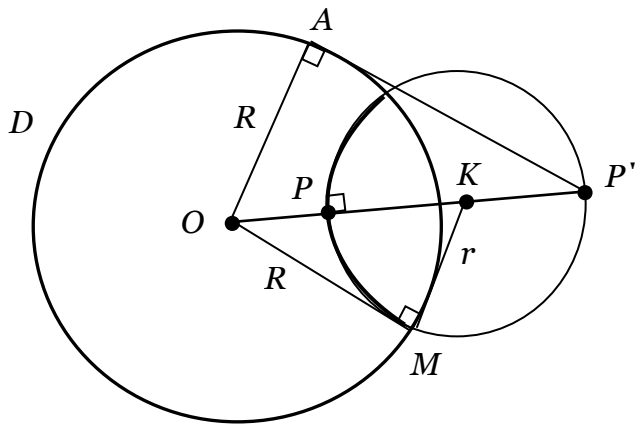


Σχήμα 6.3. Δύο σημεία ορίζουν μοναδική υπερβολική ευθεία.

Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να βρούμε πάντα τον κατάλληλο μετασχηματισμό για να μεταφέρουμε τα σημεία ή τις ευθείες στη πιο βολική θέση, για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος. Παρακάτω παραθέτουμε μια εφαρμογή για την κατασκευή υπερβολικής ευθείας, με χρήση Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Εφαρμογή 6.4.3. *Γεωμετρική κατασκευή υπερβολικής ευθείας.*

Στο μοναδιαίο δίσκο έχουμε δύο ειδών υπερβολικές ευθείες: τις διαμέτρους και τα τόξα των ορθογώνιων κύκλων. Θα κατασκευάσουμε τον ορθογώνιο κύκλο που διέρχεται από το τυχαίο σημείο P . Το ζήτημα ανάγεται στην εύρεση του κέντρου του ορθογώνιου κύκλου (Σχήμα 6.4).



Σχήμα 6.4. Κατασκευή υπερβολικής ευθείας που διέρχεται από σημείο *P*.

Αρχικά, κατασκευάζουμε το συμμετρικό του σημείου *P*, όπως είδαμε στην Παράγραφο 5.7.4. Αφού το P' είναι το συμμετρικό του *P*, ισχύει η σχέση:

$$(OP)(OP') = R^2,$$

ή αλλιώς,

$$OP^2 + OP \cdot PP' = R^2, \qquad (1)$$

όπου *O* το κέντρο και *R* η ακτίνα του δίσκου *D*.

Σχηματίζουμε τον κύκλο που περνάει από τα σημεία *P* και P' με κέντρο το μέσο του PP'. Τότε ισχυριζόμαστε ότι ο κύκλος με κέντρο *K* και ακτίνα *r=KP* είναι ορθογώνιος στο δίσκο *D*. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι η γωνία $\hat{M}$ είναι ορθή. Πράγματι, εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο *KMO*, έχουμε ότι:

$$(OP + KP)^2 = r^2 + R^2,$$

δηλαδή,

$$(OP + r)^2 = r^2 + R^2,$$

$$OP^2 + 2 \cdot OP \cdot r = R^2.$$

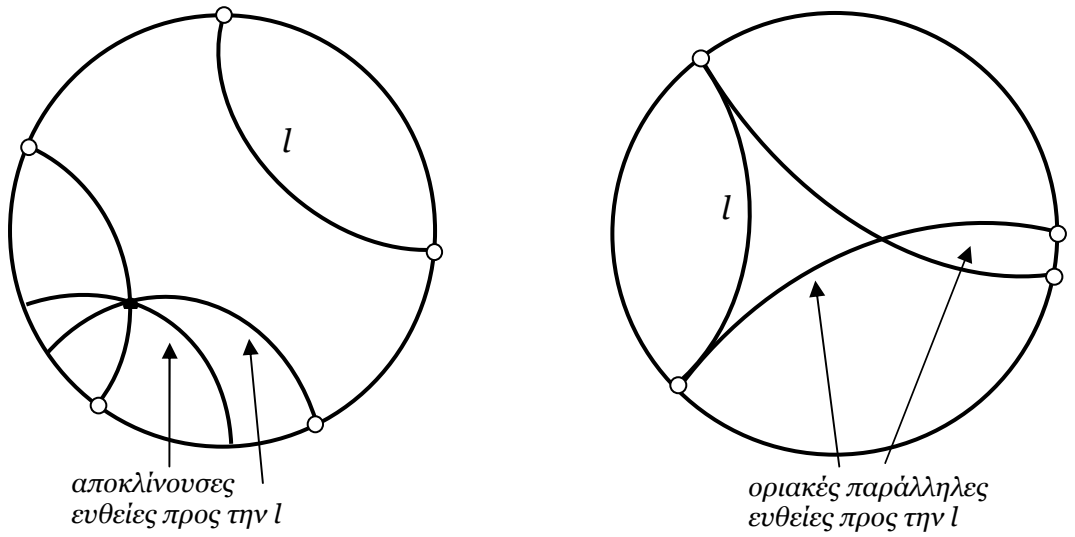
Όμως,

$$PP' = 2 \cdot r,$$

και τότε λαμβάνουμε τη σχέση (1). Συνεπώς, ο κύκλος, που διέρχεται από το P και είναι ορθογώνιος προς τον D, έχει κέντρο το μέσο της απόστασης PP'. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιαδήποτε υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τυχαίο σημείο, διαφορετικό του κέντρου του δίσκου.

6.5. ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

Στην Υπερβολική Γεωμετρία η έννοια της παραλληλίας αποκτά διπλό ρόλο, αφού ορίζονται δυο είδη παραλληλίας. Ωστόσο, διατηρείται η ουσιαστική ιδιότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σύμφωνα με την οποία, δυο ευθείες καλούνται παράλληλες αν δεν τέμνονται όσο κι αν προεκταθούν. Ο επόμενος ορισμός εξηγεί τα δύο είδη παραλληλίας.



Σχήμα 6.4. Οριακές παράλληλες και αποκλίνουσες ευθείες, στο δίσκο D.

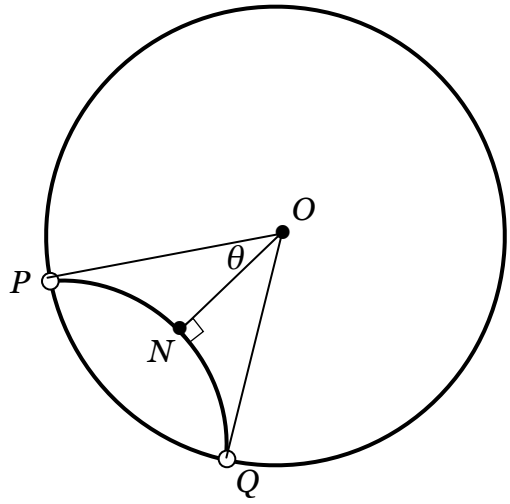
Ορισμός 6.5.1. *Δυο υπερβολικές ευθείες καλούνται* ***οριακές παράλληλες*** *(ideal parallel) αν δεν τέμνονται στο εσωτερικό του δίσκου D, αλλά έχουν ένα κοινό οριακό σημείο. Ενώ, καλούνται* ***αποκλίνουσες*** *(hyperparallel) αν δεν*

τέμνονται στο εσωτερικό του δίσκου D και δεν έχουν κανένα κοινό οριακό σημείο (βλ. Σχήμα 6.4).

6.5.1. Γωνία παραλληλίας

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραλληλίας που παρουσιάσαμε, θα εξετάσουμε το Σχήμα6.5. Έστω *PQ* μια υπερβολική ευθεία και έστω *O* ένα σημείο εκτός αυτής. Τότε, υπάρχουν δυο οριακές παράλληλες από το σημείο *O* προς την *PQ*, η *OP* και η *OQ*. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε την κάθετο από το *O* προς την *PQ*.

Δεδομένων των παραπάνω υποθέσεων, μπορούμε να ορίσουμε ως **γωνία παραλληλίας** τη γωνία *θ,* που σχηματίζεται από την κάθετο *ON* και από τη μια εκ των δυο οριακών παραλλήλων *OP* ή *OQ*.



Σχήμα 6.5. Γωνία παραλληλίας *θ*.

Εφόσον, η *OP* είναι η οριακή παράλληλος της *PQ* τότε, δεν υπάρχει άλλη ευθεία που να διέρχεται από το *O* και στο εσωτερικό της *θ,* παράλληλη προς την *PQ*. Δηλαδή, η ευθεία που διέρχεται από το *O* με γωνία *θ* είναι παράλληλη προς την *PQ* και γι' αυτόν το λόγο η *θ* καλείται γωνία παραλληλίας. Προφανώς, κάθε ευθεία διερχόμενη από το *O,* που σχηματίζει με την *ON* γωνία μεγαλύτερη από *θ* είναι αποκλίνουσα της *PQ*.

6.6. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΜΗΚΟΣ

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, ως απόσταση μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου ορίζεται ο μη αρνητικός αριθμός, που δίνεται από τον τύπο:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \qquad z_1, z_2 \in C$$

Σ' αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζουμε έναν ανάλογο τύπο της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας για την απόσταση δύο σημείων του μοναδιαίου δίσκου *D*. Επίσης, θα δούμε πώς εφαρμόζεται η θεωρία καμπυλών για την εύρεση του μήκους μιας καμπύλης στο υπερβολικό επίπεδο. Πρώτα όμως δίνουμε τον ακριβή ορισμό της απόστασης.

Ορισμός 6.6.1. *Έστω z_1 και z_2 δυο σημεία του μοναδιαίου δίσκου. Ως* ***απόσταση από το z_1 στο z_2*** *ορίζεται το μήκος του τμήματος της υπερβολικής ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία. Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με $d(z_1, z_2)$.*

6.6.1. Θεμελιώδεις ιδιότητες της απόστασης

Παραθέτουμε μερικές βασικές ιδιότητες, που έχει η συνάρτηση απόστασης *d* σε οποιαδήποτε γεωμετρία του μιγαδικού επίπεδου (άρα και στην Υπερβολική Γεωμετρία). Προφανώς, η Ευκλείδεια απόσταση ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες.

Έστω z_1, z_2 και z_3 τρία σημεία του υπερβολικού επιπέδου. Τότε,

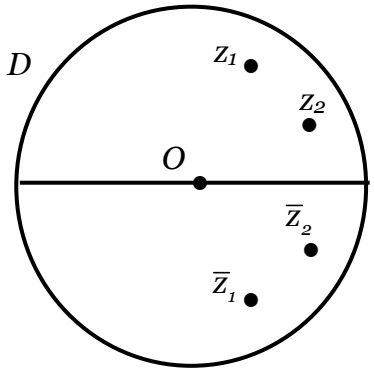
1. $d(z_1, z_2) \geq 0$
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
3. $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$, *αν και μόνο αν τα σημεία z_1, z_2 και z_3 είναι συνευθειακά με αυτή τη σειρά.*

Η πρώτη ιδιότητα δηλώνει ότι η απόσταση μεταξύ δυο σημείων στη γεωμετρία είναι πάντα θετική, εκτός και αν τα δυο σημεία ταυτίζονται, οπότε μηδενίζεται. Σύμφωνα με τη δεύτερη ιδιότητα, η απόσταση από το z_1 στο z_2 είναι ίδια με την απόσταση από το z_2 στο z_1. Η τρίτη ιδιότητα υποδεικνύει την προσθετικότητα της συνάρτησης απόστασης κατά μήκος μιας ευθείας.

Ωστόσο, μπορούμε να προσθέσουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες τις οποίες κατέχει η συνάρτηση απόστασης στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Έτσι έχουμε,

4. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$, *αν τα σημεία z_1, z_2 και z_3 είναι μη συνευθειακά (Τριγωνική ανισότητα), και*
5. $d(z_1, z_2) = d(\overline{z}_1, \overline{z}_2)$

Η τριγωνική ιδιότητα δηλώνει ότι η απόσταση από το z_1 στο z_2, είναι πάντοτε μικρότερη (ή ίση) από το άθροισμα της απόστασης του z_1 από κάποιο σημείο z_3 και της απόστασης του z_2 από το z_3. Η τελευταία ιδιότητα δείχνει ότι οι μη Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί του μοναδιαίου δίσκου δε μεταβάλλουν την απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία, δεδομένου ότι τα συμμετρικά σημεία ανήκουν πάλι στο δίσκο (Σχήμα 6.6).



Σχήμα 6.6. Η απόσταση δυο σημείων και των συμμετρικών τους είναι ίδια.

Συνεχίζουμε με το υπολογιστικό μέρος της μη Ευκλείδειας απόστασης. Από τη θεωρία καμπυλών γνωρίζουμε ότι ένας τρόπος για να ορίσουμε το μήκος τόξου μιας καμπύλης στο **ευκλείδειο** επίπεδο $\mathbb{R}^2$, είναι μέσω της χρήσης παραμετρικών εξισώσεων.

Πιο συγκεκριμένα, έστω γ μια ομαλή καμπύλη του R^2 και έστω

$$x = x(t) \text{ και } y = y(t), \quad t \in [a, b] \subset R$$

οι παραμετρικές εξισώσεις της. Τότε, η παραμετρική εξίσωση της γ είναι,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Έτσι, ορίζεται ως μήκος τόξου της καμπύλης γ στο διάστημα $[a, b]$ το μέγεθος

$$L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\,.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια καμπύλη στο **υπερβολικό** επίπεδο. Ανάλογα με το ευκλείδειο επίπεδο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια καμπύλη γ δίνεται με την παραμετρική μορφή,

$$z(t)=x(t)+iy(t),$$

όπου το t είναι πραγματική μεταβλητή.

Τώρα, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που δίνει το ευκλείδειο μήκος τόξου, για τον υπολογισμό του μήκους μιας υπερβολικής καμπύλης, θα αντιμετωπίσουμε ένα σημαντικό πρόβλημα. Δεν θα μπορούμε να εκφράσουμε την απόσταση στο μοναδιαίο δίσκο. Εφόσον, το υπερβολικό επίπεδο είναι ο μοναδιαίος δίσκος (χωρίς το σύνορο του δίσκου) τότε, όταν θα κινούμαστε σε μια υποτιθέμενη καμπύλη και με κατεύθυνση προς την περιφέρεια του δίσκου (για $|z(t)|\to 1$) θα πρέπει το μήκος της καμπύλης να αυξάνεται, πλησιάζοντας το άπειρο (αφού, μια υπερβολική ευθεία είναι απεριόριστη σε μήκος). Αυτό, όμως, δεν συμβαίνει με τον ευκλείδειο τύπο του μήκους καμπύλης. Έτσι, οδηγούμαστε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.6.2. *Στο υπερβολικό επίπεδο, το **μήκος** μιας ομαλής καμπύλης γ με παραμέτρηση* $z(t)=x(t)+iy(t)$ *(όπου* $t\in[a,\,b]$*), δίνεται από τον τύπο,*

$$L(\gamma)=2\int_a^b \frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}\,dt\,,$$

όπου $z'(t)=\big(x'(t),\,y'(t)\big)$ και $|z'(t)|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$.

Ο παρονομαστής του ολοκληρώματος ικανοποιεί τη συνθήκη που περιγράψαμε πριν τον ορισμό. Καθώς πλησιάζουμε στο σύνορο του δίσκου ο παρονομαστής τείνει στο μηδέν και το ολοκλήρωμα απειρίζεται. Επομένως, με τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να μετρήσουμε την απόσταση δύο σημείων του υπερβολικού επιπέδου.

Στο μοναδιαίο δίσκο αναζητούμε την απόσταση δυο σημείων, όταν αυτά ενώνονται μέσω καμπύλης που είναι είτε τμήμα κύκλου, είτε τμήμα ευθείας. Αν υποθέσουμε ότι η καμπύλη γ είναι τόξο κύκλου, τότε θα δέχεται μια παραμέτρηση της μορφής,

$$z(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ο κύκλος αυτός έχει ως κέντρο το υπερβολικό σημείο $a = a_1 + ia_2$ και ως ακτίνα τον υπερβολικό αριθμό r. Θα βρούμε τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ της παραμέτρησης. Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned} z(t) &= a + re^{it} \\ &= a_1 + ia_2 + r(\cos t + i \sin t) \\ &= (a_1 + r\cos t) + i(a_2 + r\sin t) \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$x(t) = a_1 + r\cos t, \quad y(t) = a_2 + r\sin t.$$

Οι συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες, αφού

$$x'(t) = -r\sin t, \quad y'(t) = r\cos t,$$

και έτσι η παραμέτρηση είναι ομαλή. □

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει το αναλλοίωτο του υπερβολικού μήκους.

Θεώρημα 6.6.3. *Έστω T ένας μετασχηματισμός της Υπερβολικής Γεωμετρίας και έστω γ μια ομαλή καμπύλη. Τότε η συνάρτηση L του μήκους είναι ένα αναλλοίωτο της γεωμετρίας και ισχύει ότι $L(T(\gamma)) = L(\gamma)$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός T δίνεται από τον τύπο:

$$w = T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Έστω, επίσης, μια παραμέτρηση $z(t)$ της καμπύλης γ. Τότε, ο μετασχηματισμός T μέσω της παραμέτρησης $z(t)$, γίνεται

$$w(t)=T\big(z(t)\big)=e^{i\theta}\frac{z(t)-z_o}{1-\overline{z}_o z(t)}.$$

Η παράγωγος της συνάρτησης με χρήση του κανόνα αλυσίδας δίνει,

$$w'(t)=\frac{dw}{dt}=\frac{dT}{dz}\frac{dz}{dt}=e^{i\theta}\frac{(z-z_o)'(1-\overline{z}_o z)-(1-\overline{z}_o z)'(z-z_o)}{(1-\overline{z}_o z)^2}\cdot z'(t)$$

$$=e^{i\theta}\frac{(1-\overline{z}_o z)-(-\overline{z}_o)(z-z_o)}{(1-\overline{z}_o z)^2}\cdot z'(t)$$

$$=e^{i\theta}\frac{1-\overline{z}_o z_o}{(1-\overline{z}_o z)^2}\cdot z'(t)$$

$$=e^{i\theta}\frac{1-|z_o|^2}{\big(1-\overline{z}_o z(t)\big)^2}\cdot z'(t).$$

Η παράσταση αυτή είναι η $T(\gamma)$, δηλαδή η εικόνα της καμπύλης μέσω του μετασχηματισμού. Θα υπολογίσουμε το $L(T(\gamma))$.

$$L\big(T(\gamma)\big)=2\int_a^b\frac{|w'(t)|}{1-|w(t)|^2}dt=2\int_a^b\frac{\left|e^{i\theta}\dfrac{\left(1-|z_o|^2\right)z'(t)}{\big(1-\overline{z}_o z(t)\big)^2}\right|}{1-\left|e^{i\theta}\dfrac{z(t)-z_o}{1-\overline{z}_o z(t)}\right|^2}dt$$

$$=2\int_a^b\frac{\left|e^{i\theta}\right|\dfrac{\left|\left(1-|z_o|^2\right)z'(t)\right|}{\left|\big(1-\overline{z}_o z(t)\big)^2\right|}}{1-\left|e^{i\theta}\right|^2\dfrac{|z(t)-z_o|^2}{|1-\overline{z}_o z(t)|^2}}dt.$$

Εφόσον $\left|e^{i\theta}\right|=1$ και $\left|z^2\right|=|z|^2$, έχουμε ότι

$$L\left(T(\gamma)\right)=2\int_a^b \frac{\dfrac{\left|\left(1-|z_o|^2\right)z'(t)\right|}{\left|\left(1-\overline{z}_o z(t)\right)^2\right|}}{\dfrac{\left|1-\overline{z}_o z(t)\right|^2-\left|z(t)-z_o\right|^2}{\left|1-\overline{z}_o z(t)\right|^2}}dt$$

$$=2\int_a^b \frac{\left(1-|z_o|^2\right)\left|z'(t)\right|}{\left|1-\overline{z}_o z(t)\right|^2-\left|z(t)-z_o\right|^2}dt.$$

Τέλος, αναλύοντας τον παρονομαστή του ολοκληρώματος, παίρνουμε τη σχέση,

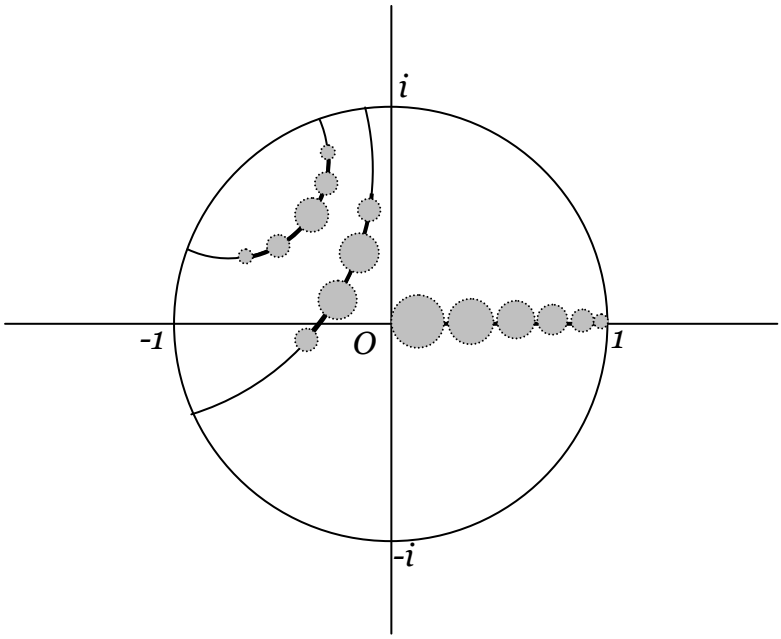
$$\begin{aligned}
\left|1-\overline{z}_o z\right|^2-\left|z-z_o\right|^2 &= \left(1-\overline{z}_o z\right)\left(1-z_o\overline{z}\right)-\left(z-z_o\right)\left(\overline{z}-\overline{z}_o\right)\\
&= \left(1-\overline{z}_o z-z_o\overline{z}+\overline{z}_o z z_o\overline{z}\right)-\left(z\overline{z}-z_o\overline{z}-\overline{z}_o z+\overline{z}_o z_o\right)\\
&= 1+|z_o|^2|z|^2-|z|^2-|z_o|^2\\
&= \left(1-|z_o|^2\right)\left(1-|z|^2\right),
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε ότι,

$$L\left(T(\gamma)\right)=2\int_a^b \frac{\left|z'(t)\right|}{1-\left|z(t)\right|^2}dt=L(\gamma). \qquad \square$$

Για να προσεγγίσουμε καλύτερα τις συνθήκες που ισχύουν στην Υπερβολική Γεωμετρία, θα φανταστούμε το μοναδιαίο δίσκο με ένα διαφορετικό τρόπο. Θα φανταστούμε ότι η περιφέρεια του κυκλικού δίσκου έχει την ιδιότητα να είναι απεριόριστα «παγωμένη». Με αυτήν την συνθήκη, καθώς τα όντα του σύμπαντος του υπερβολικού επιπέδου πλησιάζουν στο σύνορο, η πτώση της θερμοκρασίας τα αναγκάζει να συσταλούν. Έτσι, οι κάτοικοι αυτής της περίεργης χώρας αντιλαμβάνονται ότι απαιτείται περισσότερος χρόνος για να διασχίσουν μια απόσταση σε μια ευθεία πλησιέστερη στο σύνορο, απ' ότι μια απόσταση πάνω σε μια ευθεία που είναι πιο κοντά στο κέντρο του δίσκου. Στο Σχήμα 6.7, σχεδιάσαμε τα όντα του δίσκου να έχουν μορφή κύκλων. Με αυτόν τον τρόπο φαίνεται η συρρίκνωση

τους όταν πλησιάζουν στην περιφέρεια ή η μεγέθυνση τους όταν απομακρύνονται από αυτήν.



Σχήμα 6.7. Όντα του υπερβολικού επιπέδου καθώς κινούνται πάνω σε ευθείες.

6.6.2. Τύποι Απόστασης

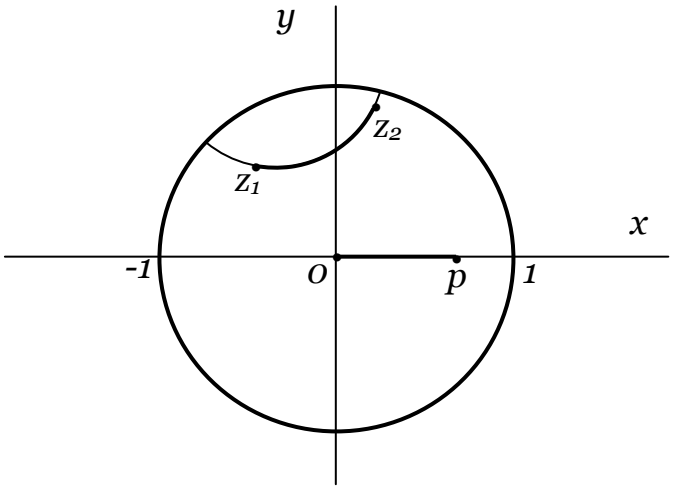
Για να βρούμε τον τύπο της απόστασης δύο σημείων z_1 και z_2 που ανήκουν σε μια υπερβολική ευθεία, θα μεταφέρουμε το πρόβλημα τοποθετώντας τα σημεία σε μια πιο βολική θέση. Για να το πετύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}, \quad \text{όπου } |z_1| < 1 .$$

Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει το z_1 στο O και το z_2 στο $T(z_2) = e^{i\theta}\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}$. Με κατάλληλη επιλογή του θ, περιστρέφουμε το δίσκο D μέχρι το z_2 να πέσει στο θετικό ημιάξονα των πραγματικών έτσι, ώστε η εικόνα του z_2 να είναι το σημείο

$$p = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right| .$$

Εφόσον, ο μετασχηματισμός T διατηρεί τις αποστάσεις, θα βρούμε το $d(z_1, z_2)$ υπολογίζοντας την απόσταση ανάμεσα στο o και στο p (Σχήμα 6.8).



Σχήμα 6.8. Απεικόνιση των σημείων z_1 και z_2 στα o, p, αντίστοιχα.

Τότε, η παραμέτρηση του ευθύγραμμου τμήματος από το o στο p, γίνεται μέσω της $z(t) = t$, για $t \in [o, p]$. Επομένως,

$$d(o,p) = 2\int_o^p \frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}dt = \int_o^p \frac{2}{1-t^2}dt = \int_o^p \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt.$$

Δηλαδή,

$$d(o,p) = ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right) \qquad \text{(I)}$$

Άρα, ο τύπος της απόστασης δυο τυχαίων σημείων του υπερβολικού επιπέδου είναι

$$d(z_1,z_2) = ln\left(\frac{1+\left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}\right).$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το p τείνει στο σύνορο του μοναδιαίου κύκλου η απόσταση $d(o, p)$ μεγαλώνει απεριόριστα. Δηλαδή,

$$\lim_{p\to 1}\left(d(o,p)\right)=\lim_{p\to 1}\left(ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\right)\to +\infty .$$

Θα μετασχηματίσουμε τον τύπο της απόστασης ενός σημείου z από το o, για να οδηγηθούμε σε μια εναλλακτική σχέση, η οποία συνδέεται με την υπερβολική εφαπτομένη ($tanh$). Έχουμε ότι:

$$d(o,z)=ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την εκθετική συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι,

$$e^{d(o,z)}=\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

ή αλλιώς,

$$e^{d(o,z)}\left(1-|z|\right)=1+|z|.$$

Δηλαδή,

$$e^{d(o,z)}-1=|z|\left(e^{d(o,z)}+1\right).$$

Συνεπώς, με τη βοήθεια των τύπων της υπερβολικής τριγωνομετρίας, παίρνουμε ότι

$$|z|=\frac{e^{d(o,z)}-1}{e^{d(o,z)}+1}$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}d(o,z)}-e^{-\frac{1}{2}d(o,z)}}{e^{\frac{1}{2}d(o,z)}+e^{-\frac{1}{2}d(o,z)}}$$

$$=\frac{sinh\left(\frac{1}{2}d(o,z)\right)}{cosh\left(\frac{1}{2}d(o,z)\right)}$$

$$=tanh\left(\frac{1}{2}d(o,z)\right).$$

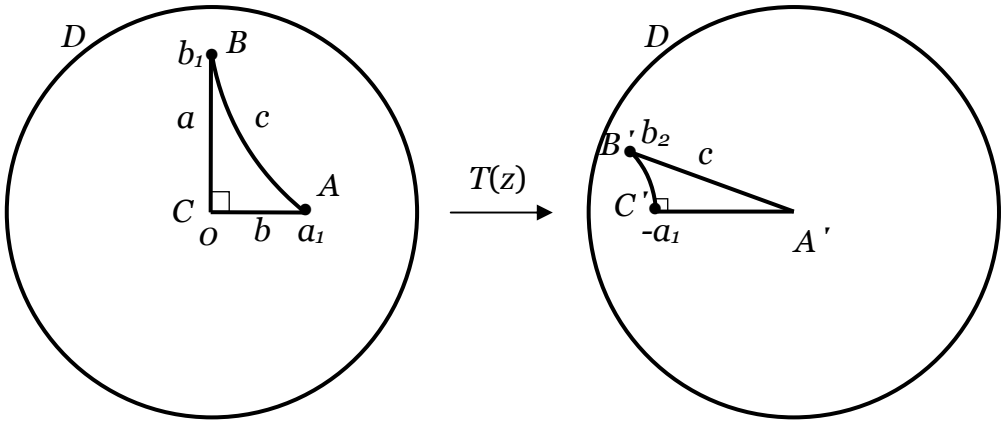
Επομένως, καταλήγουμε στη σχέση:

$$d(o, z) = 2\tanh^{-1}(|z|) \qquad \text{(II)}$$

Η τελευταία σχέση είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη, διότι συνδέει την απόσταση με την υπερβολική τριγωνομετρία. Με αυτόν τον τύπο είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο μοναδιαίο δίσκο.

Εφαρμογή 6.6.4. *Πυθαγόρειο θεώρημα του υπερβολικού επιπέδου.*

Έστω *a, b* και *c* τα υπερβολικά μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου *ABC*, όπου το *c* βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία *C*. Θα δείξουμε ότι, $\cosh(c) = \cosh(a)\cdot\cosh(b)$.



(α) (β)

Σχήμα 6.9. Ορθογώνιο τρίγωνο στο δίσκο *D* και η απεικόνιση του μέσω του *T*.

Υποθέτουμε ότι το *C* είναι το κέντρο του δίσκου *D*, το *A* βρίσκεται στο σημείο a_1 της οριζόντιας διαμέτρου και το σημείο *B* βρίσκεται στο σημείο ib_1 της κάθετης διαμέτρου, όπως στο Σχήμα 6.9.(α). Τα a_1 και b_1 είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί.

Τότε, από τον τύπο απόστασης (II), έχουμε ότι

$$a = 2\tanh^{-1}(b_1) \quad \text{και} \quad b = 2\tanh^{-1}(a_1).$$

Για να απεικονίσουμε το δίσκο στον εαυτό του, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$T(z) = \frac{z - a_1}{1 - a_1 z}.$$

Αυτό έχει ως συνέπεια το A να απεικονιστεί στο κέντρο του δίσκου (τώρα A'), το B στο B', που είναι το

$$b_2 = T(ib_1) = \frac{ib_1 - a_1}{1 - ia_1 b_1},$$

και το C στο C', που αντιστοιχεί στο $-a_1$. Έτσι, μεταφέραμε την υποτείνουσα του τριγώνου σε μια διάμετρο του δίσκου (βλ. Σχήμα 6.9.(β)). Επιπλέον, ο μετασχηματισμός T διατηρεί τα υπερβολικά μήκη, ώστε το c να είναι ίσο με το $A'B'$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα υπερβολικά συνημίτονα του ζητούμενου τύπου του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Αρχικά, θα χρειαστούμε τον τύπο:

$$cosh\left(2 tanh^{-1} t\right) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad (\alpha)$$

ο οποίος προκύπτει από την αντικατάσταση $d = 2 tanh^{-1} t$ στον τύπο απόστασης (ΙΙ) και από τον ορισμό του *cosh*. Επομένως, με τη βοήθεια του τύπου (α), έχουμε ότι

$$cosh(a) = cosh\left(2 tanh^{-1} b_1\right) = \frac{1+b_1^2}{1-b_1^2},$$

$$cosh(b) = cosh\left(2 tanh^{-1} a_1\right) = \frac{1+a_1^2}{1-a_1^2},$$

και εφόσον $c = tanh^{-1}\left(|b_2|\right)$, παίρνουμε ότι

$$cosh(c) = cosh\left(2 tanh^{-1}\left(|b_2|\right)\right) = \frac{1+|b_2|^2}{1-|b_2|^2}.$$

Επίσης,

$$|b_2|^2 = \frac{|ib_1 - a_1|^2}{|1 - ia_1 b_1|^2} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{1 + a_1^2 b_1^2}.$$

Άρα,

$$cosh(c)=\frac{1+|b_2|^2}{1-|b_2|^2}=\frac{1+\frac{a_1^2+b_1^2}{1+a_1^2b_1^2}}{1-\frac{a_1^2+b_1^2}{1+a_1^2b_1^2}}$$

$$=\frac{1+a_1^2+b_1^2+a_1^2b_1^2}{1-a_1^2-b_1^2+a_1^2b_1^2}$$

$$=\frac{1+b_1^2}{1-b_1^2}\cdot\frac{1+a_1^2}{1-a_1^2}$$

$$=cosh\left(2tanh^{-1}b_1\right)\cdot cosh\left(2tanh^{-1}a_1\right).$$

Οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$cosh(c)=cosh(a)\cdot cosh(b).$$

6.6.3. Υπερβολικοί κύκλοι

Στην παρούσα παράγραφο θα δείξουμε ότι ο κύκλος, ως γεωμετρικό σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, διατηρεί τις ιδιότητες του αναλλοίωτες στο πλαίσιο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Επιπροσθέτως, θα παρουσιάσουμε τα είδη των υπερβολικών κύκλων που εμφανίζονται στο μοναδιαίο δίσκο.

Ορισμός 6.6.5. *Ως **Υπερβολικό κύκλο** με υπερβολικό κέντρο κ και υπερβολική ακτίνα r, ορίζουμε το σύνολο των σημείων z με την ιδιότητα:*

$$d(\kappa, z)=r.$$

Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων στο μοναδιαίο δίσκο. Δηλαδή, αν *κ=0* η σχέση

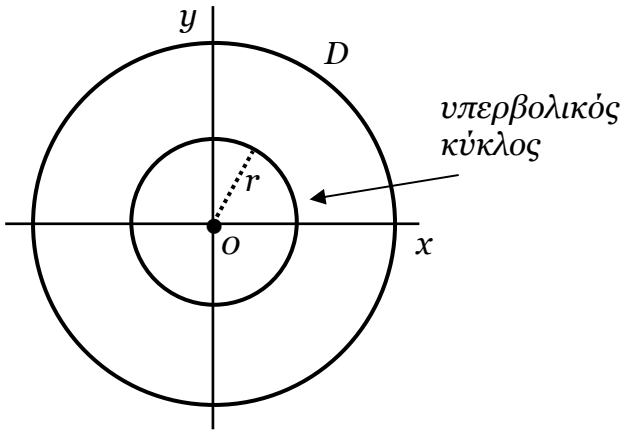
$$d(0,z)=r$$

δίνει ότι

$$ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)=r \quad\Leftrightarrow\quad ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)=r \quad\Leftrightarrow\quad 1+|z|=e^r\left(1-|z|\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ |z| = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} \ \Leftrightarrow \ |z| = \frac{1 - e^{-r}}{1 + e^{-r}}.$$

Η τελευταία σχέση ορίζει Ευκλείδειο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $(1-e^{-r})/(1+e^{-r})$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $|z|$, διότι αυτή είναι η απεικόνιση του z στο θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.



Σχήμα 6.10. Υπερβολικός κύκλος στον *D*.

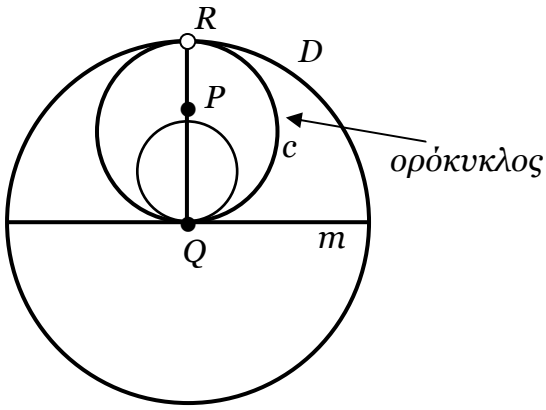
Στο μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου υπάρχουν τέσσερεις διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός Ευκλείδειου κύκλου:

1. *Υπερβολικός κύκλος:* αν κείται ολόκληρος στο εσωτερικό του *D*.
2. *Ορόκυκλος (horocycle):* αν κείται στο εσωτερικό του *D,* με εξαίρεση ένα σημείο στο οποίο είναι εφαπτόμενος στο σύνορο του *D*.
3. *Ισαπέχουσα καμπύλη ή υπερκύκλος (equidistant curve or hypercycle):* αν τέμνει το σύνορο του *D* μη ορθογώνια σε δύο σημεία.
4. *Υπερβολική ευθεία:* αν τέμνει το σύνορο του *D* ορθογώνια.

Θα περιγράψουμε τώρα το δεύτερο και το τρίτο είδος κύκλων.

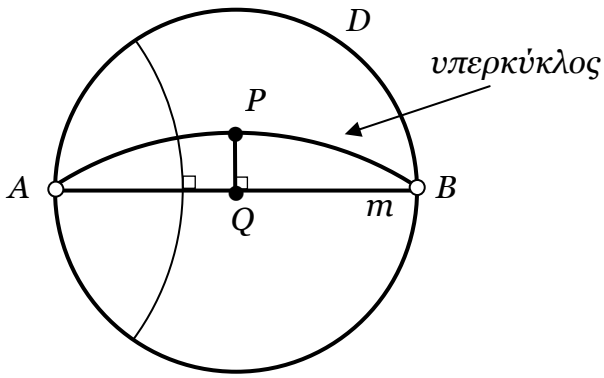
Ορόκυκλος: Για να κατασκευάσουμε έναν ορόκυκλο ξεκινάμε από μια ευθεία *m* του δίσκου (έστω μια διάμετρος) και ένα σημείο *P* εκτός αυτής, και φέρνουμε κάθετη *PQ* στην *m*. Τότε, με κέντρο το *P* και ακτίνα *PQ* γράφουμε κύκλο *c,* που είναι εφαπτόμενος στην *m στο Q*. Μετακινώντας το *P* στην *PQ* αλλάζουμε την απόσταση *PQ* έτσι ώστε, ο κύκλος *c* να παραμένει εφαπτόμενος στην *m*. Μ' αυτόν τον τρόπο, καθώς το *P* απομακρύνεται από το *Q,* ο κύκλος *c* αυξάνεται σε μέγεθος και πλησιάζει μια οριακή θέση στο σύνορο του *D*. Είναι φανερό ότι η ακτίνα του *ορόκυκλου* τείνει στο άπειρο και

συνεπώς, εφάπτεται με τον D στο οριακό σημείο R. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ότι ο *ορόκυκλος* αναπαρίσταται ως Ευκλείδειος κύκλος.



Σχήμα 6.11. Ορόκυκλος στο δίσκο D.

Ισαπέχουσα καμπύλη ή υπερκύκλος: Για αυτήν την περίεργη καμπύλη της Υπερβολικής Γεωμετρίας δεν υπάρχει αντίστοιχη στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Για την κατασκευή της θα ξεκινήσουμε με μια ευθεία m (έστω διάμετρος) και ένα σημείο P εκτός της m (βλ. Σχήμα 6.12). Αναζητούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο με το P και έχουν την ίδια κάθετη απόσταση την οποία έχει το P από την m. Τώρα, την κάθετη απόσταση την υπολογίζουμε σε κάθε υπερβολική ευθεία που τέμνει ορθογώνια την m. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων αυτών καλείται *ισαπέχουσα καμπύλη* από το P προς την m, και είναι το τόξο του Ευκλείδειου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, *και* P. Προφανώς, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία την παραπάνω ιδιότητα πληροί η παράλληλη ευθεία από το σημείο P προς την m.



Σχήμα 6.12. Ισαπέχουσα καμπύλη ή υπερκύκλος.

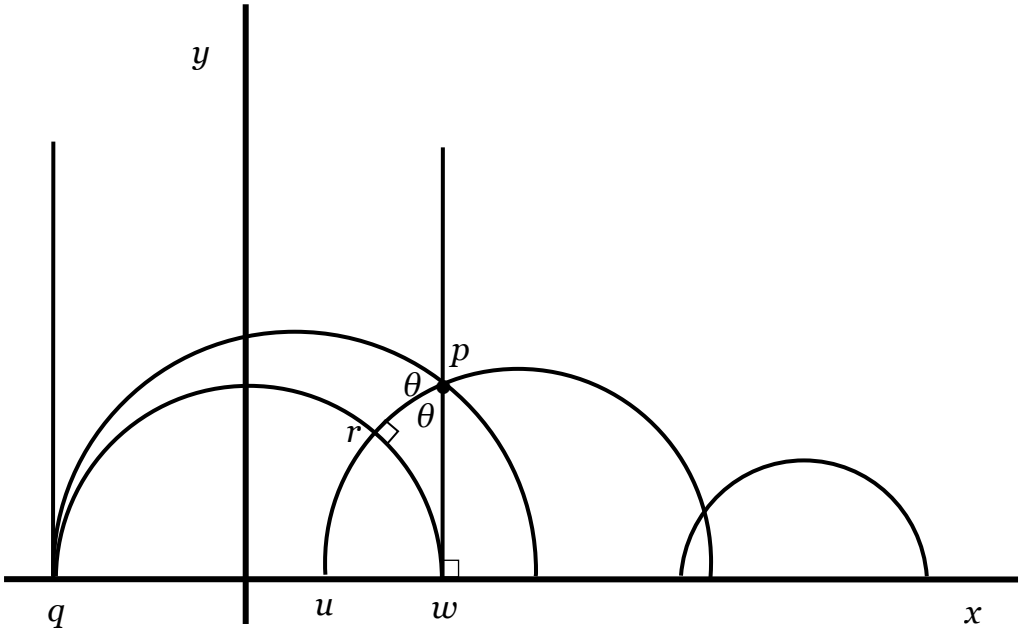
6.7. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟΥ (POINCARÉ)

Η Υπερβολική Γεωμετρία μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί με το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου, με τρόπο ανάλογο με αυτόν του μοντέλου του μοναδιαίου δίσκου. Σύμφωνα με τη Γεωμετρία Möbius, η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορεί να παρασταθεί στο εσωτερικό κάθε γενικευμένου κύκλου, και με αυτή την οπτική αντιμετωπίζεται το άνω ημιεπίπεδο. Αρχικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.7.1. *Το σύνολο* $U = \{z \in C : Im(z) > 0\}$ *των σημείων του μιγαδικού επιπέδου, καλείται* ***άνω ημιεπίπεδο*** *(upper halfplane)****.*** *Η ομάδα των μετασχηματισμών του U συμβολίζεται με* $\bar{H}$ *και είναι της μορφής:*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ ,$$

όπου τα a, b, c και d είναι πραγματικοί αριθμοί και (ad-bc) > 0. Το ζεύγος $(U, \bar{H})$ *παρέχει ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας.*



Σχήμα 6.5. Ευθείες στο άνω ημιεπίπεδο, με τη μορφή κατακόρυφων ημιευθειών και ημικυκλίων με κέντρο στον άξονα $x'x$.

Στο υπερβολικό επίπεδο η Ευκλείδεια ευθεία που ενώνει δυο σημεία, προφανώς δε συνιστά την ελάχιστη υπερβολική απόσταση ανάμεσα σε αυτά

τα σημεία. Συνεπώς, πρέπει να αναζητήσουμε εκείνη την καμπύλη της οποίας το υπερβολικό μήκος είναι το ελάχιστο, ανάμεσα στις καμπύλες που ενώνουν ένα ζεύγος σημείων. Όπως γνωρίζουμε, αυτό το είδος των καμπυλών καλείται *γεωδαισιακή*.

Στο μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου το ρόλο των γεωδαισιακών έχουν οι διάμετροι του δίσκου και τα τόξα των ορθογώνιων προς το σύνορο κύκλων. Αντίστοιχα, οι γεωδαισιακές του άνω ημιεπιπέδου (Σχήμα 6.5) είναι:

1. τόξα Ευκλείδειων ημικυκλίων με κέντρο στον άξονα $x'x$, ή
2. τμήματα Ευκλείδειων ευθειών που είναι κάθετα στον άξονα $x'x$.

Επομένως, οι ευθείες στο μοντέλο αυτό ορίζονται ανάλογα με το μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου. Είναι ο περιορισμός, στο U, των κατακόρυφων ημιευθειών του επιπέδου καθώς και οι κύκλοι με κέντρο στον άξονα των πραγματικών αριθμών του C, περιορισμένοι στο U. Προφανώς, τα σημεία του άξονα δεν ανήκουν στο μοντέλο και μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως οριακά σημεία.

6.7.1. Μήκος στο Άνω Ημιεπίπεδο

Στο άνω ημιεπίπεδο, το μήκος μιας καμπύλης γ δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma)=\int_a^b \frac{|z'(t)|}{y(t)}dt,$$

όπου $z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in(a,b)$ μια παραμέτρηση της γ.

Το μήκος $L(\gamma)$ αποτελεί ένα αναλλοίωτο της γεωμετρίας και επιπλέον ισχύει ότι η απόσταση δύο σημείων του μοντέλου είναι ίδια με την αντίστοιχη στο μοντέλο του δίσκου.

Είναι χρήσιμο να δούμε με ποιον τρόπο συσχετίζονται τα δυο μοντέλα του Poincaré και πώς οι ιδιότητες του ενός μεταφέρονται στο άλλο.

6.7.2. Σύνδεση μοναδιαίου δίσκου (D) με το άνω ημιεπίπεδο (U)

Τα δύο μοντέλα μπορούν να συνδεθούν μέσω ενός μετασχηματισμού Möbius. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός:

$$T(z)=i\cdot\frac{1+z}{1-z},$$

μετασχηματίζει το μοναδιαίο δίσκο D στο άνω ημιεπίπεδο U. Η απεικόνιση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να έχουμε μια εύχρηστη μέθοδο για να μεταφέρουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες του D στις αντίστοιχες του U.

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του T θέτουμε

$$w = T(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}.$$

Λύνουμε ως προς z και έχουμε με τη σειρά τις πράξεις:

$$w = i \cdot \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow (1-z)w = i + iz \Leftrightarrow w - zw - i - iz = 0$$

$$\Leftrightarrow (w-i) - (w+i)z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{w-i}{w+i}.$$

Τότε, ο μετασχηματισμός Möbius

$$S(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

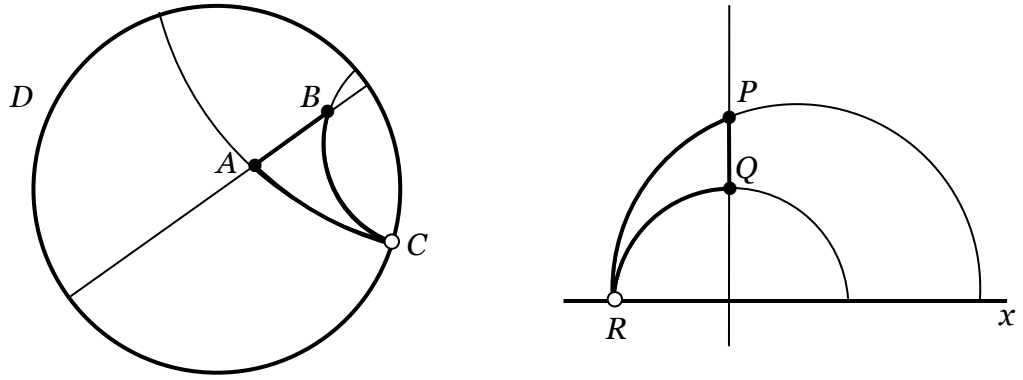
είναι ο αντίστροφος του T. Αυτό σημαίνει ότι ορίζεται μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία του άνω ημιεπιπέδου και στα σημεία του εσωτερικού του μοναδιαίου δίσκου. Έτσι, οι υπερβολικές ευθείες του άνω ημιεπιπέδου μετασχηματίζονται σε κυκλικά τόξα ή σε ευθείες, μέσα στο D. Οι γεωδαισιακές του ημιεπιπέδου είναι κάθετες στον άξονα $x'x$ και, δεδομένου ότι ο U είναι σύμμορφος μετασχηματισμός, απεικονίζονται σε διαμέτρους και κυκλικά τόξα ορθογώνια στο μοναδιαίο κύκλο.

6.8. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Η ενότητα αυτή αφορά στα τρίγωνα της Υπερβολικής Γεωμετρίας και στις ιδιότητες τους. Είδαμε προηγουμένως, στην εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος, ότι ένα τρίγωνο στο μοναδιαίο δίσκο σχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο που σχηματίζεται και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δηλαδή, αποτελείται από τρία (μη συνευθειακά) σημεία του μοναδιαίου δίσκου μαζί με τα τμήματα των υπερβολικών ευθειών που τα συνδέουν.

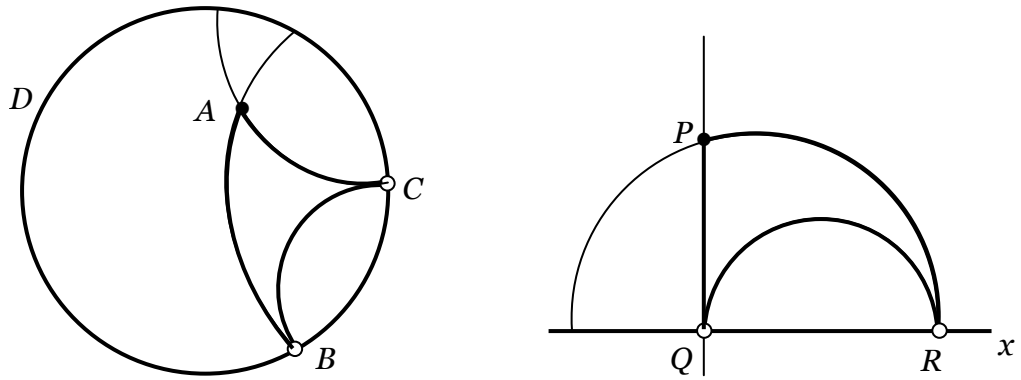
Τώρα εκτός από τα τρίγωνα που ορίζονται με τον Ευκλείδειο τρόπο υπάρχουν και κάποια είδη τριγώνων που συναντάμε μόνο στο υπερβολικό

επίπεδο. Σε αυτά τα τρίγωνα, ενώ οι πλευρές τους ανήκουν στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου, είναι δυνατόν η κορυφή τους να ανήκει στο σύνορο του δίσκου. Συνεπώς, με αυτήν την έννοια, όταν μια ή περισσότερες κορυφές ενός τριγώνου ανήκουν στο σύνορο του δίσκου, τότε αυτό καλείται **ασυμπτωτικό τρίγωνο.**



Σχήμα 6.14. Απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα *ABC* και *PQR*.

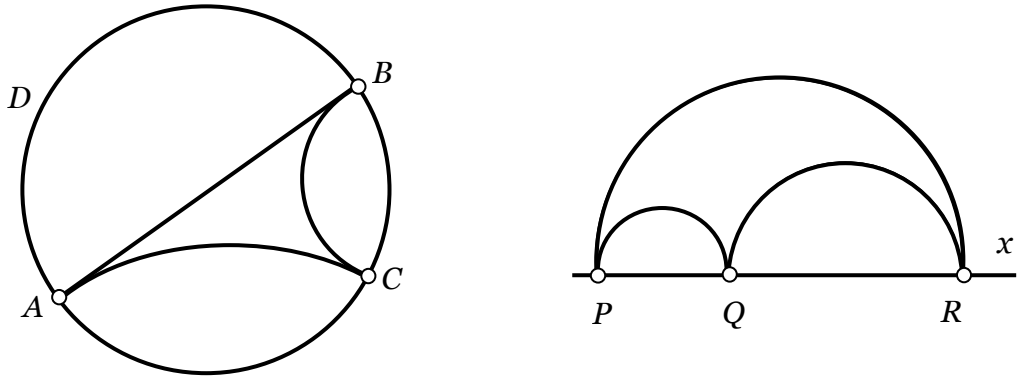
Πιο συγκεκριμένα, αν ένα τρίγωνο έχει τη μια κορυφή του στο σύνορο του δίσκου (δηλ. είναι ένα οριακό σημείο) καλείται **απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο.** Αντίστοιχα, στο άνω ημιεπίπεδο ορίζουμε ως απλά ασυμπτωτικό το τρίγωνο το οποίον έχει μια μόνο κορυφή του στον άξονα $x'x$.



Σχήμα 6.15. Διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα.

Στο Σχήμα 6.15, το τρίγωνο *ABC* έχει τις δυο κορυφές του στο σύνορο του δίσκου *D,* αφού οι πλευρές *AC* και *AB* είναι οριακές παράλληλες της *BC*. Τα τρίγωνα αυτής της μορφής καλούνται **διπλά ασυμπτωτικά.** Παρόμοια, το τρίγωνο *PQR* κατέχει τις ίδιες ιδιότητες στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου.

Τέλος, όταν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις κορυφές του στο σύνορο του δίσκου, που σημαίνει ότι κάθε πλευρά του είναι οριακή παράλληλη των άλλων δυο, ονομάζεται **τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο.** Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το τρίγωνο *ABC* στο μοναδιαίο δίσκο καθώς και το αντίστοιχο τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο *PQR* του άνω ημιεπιπέδου. Το τρίγωνο *PQR* έχει τις τρεις κορυφές του στον άξονα x΄x.



Σχήμα 6.16. Τριπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα.

6.9. ΕΜΒΑΔΟΝ

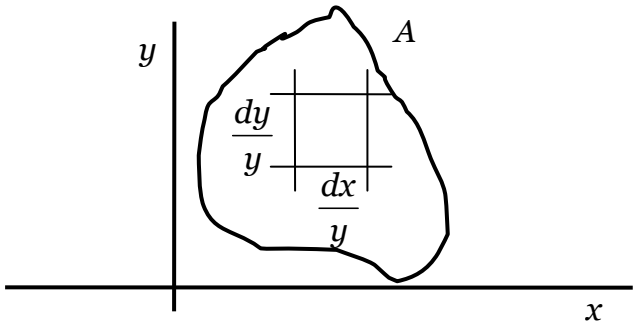
Μετά την έννοια του μήκους μπορούμε να αναπτύξουμε ένα ακόμη σημαντικό μέγεθος, το εμβαδόν. Ένα από τα πιο αξιοσημείωτα αποτελέσματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι το γεγονός ότι υπάρχει ένα άνω όριο στο εμβαδόν ενός τριγώνου τη στιγμή που δεν υπάρχει ανώτερο όριο στα μήκη των πλευρών του τριγώνου. Το ανώτατο όριο και ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού ενός υπερβολικού τριγώνου θα μας απασχολήσουν σ' αυτήν την παράγραφο.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία για να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός τριγώνου ξεκινάμε από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το διαιρούμε σε τετραγωνικές μονάδες και χωρίζουμε ένα από αυτά τα τετράγωνα σε δυο ίσα ορθογώνια τρίγωνα, φέρνοντας τη διαγώνιο του. Η ίδια μέθοδος δε μπορεί να εφαρμοστεί στην Υπερβολική Γεωμετρία αφού δεν υπάρχουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα (και πιο συγκεκριμένα τετράγωνα) στα μοντέλα της.

Για να υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού μεταφερόμαστε στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου και υποθέτουμε την ύπαρξη ενός χωρίου. Όπως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, έτσι και τώρα χρησιμοποιούμε διπλό ολοκλήρωμα για τη μέτρηση του εμβαδού ενός χωρίου.

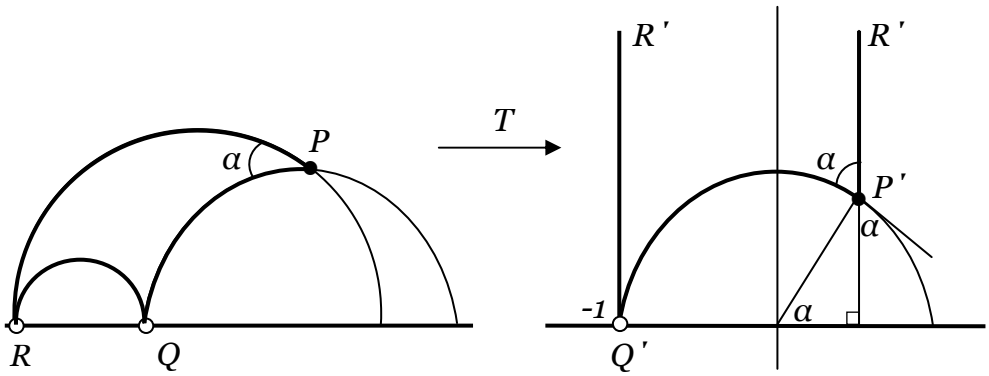
Ορισμός 6.9.1. *Το* ***εμβαδόν*** *ενός χωρίου A στο υπερβολικό άνω ημιεπίπεδο δίνεται από τον τύπο*

$$E = \iint_A \frac{dxdy}{y^2}.$$



Σχήμα 6.17. Υπερβολικό εμβαδόν στο άνω ημιεπίπεδο.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο του οποίου οι δύο κορυφές είναι οριακά σημεία και η τρίτη κορυφή ανήκει στο εσωτερικό του επιπέδου. Με κατάλληλο μετασχηματισμό *T* μπορούμε να απεικονίσουμε το αρχικό τρίγωνο σε ένα άλλο που εξυπηρετεί τους υπολογισμούς μας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.18. Συγκεκριμένα, η πλευρά *QR* απεικονίζεται στην κατακόρυφη πλευρά που διέρχεται από το *-1*, ενώ η πλευρά *PR* μετασχηματίζεται στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το *P'*, διατηρώντας ταυτόχρονα το μέτρο της γωνίας *α* αναλλοίωτο. Τώρα, το τρίγωνο έχει το ένα οριακό σημείο του πάνω στον x'x, ενώ το δεύτερο οριακό σημείο του το υποθέτουμε στις προεκτάσεις των δυο κατακόρυφων πλευρών (αφού απειρίζονται).



Σχήμα 6.18. Υπολογισμός του εμβαδού ενός διπλά ασυμπτωτικού τριγώνου.

Το σημείο P' έχει συντεταγμένες (*cosa, sina)* και η κάτω πλευρά του τριγώνου είναι το τόξο ημικυκλίου. Έτσι, για την μεταβλητή x έχουμε ότι $-1 < x < cosa$, ενώ για τη μεταβλητή y έχουμε $\sqrt{1-x^2} < y < \infty$. Τότε, με ολοκλήρωση στο τρίγωνο $P'Q'R'$, παίρνουμε ότι

$$E = \iint \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_{-1}^{\cos a} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy\,dx}{y^2} = \int_{-1}^{\cos a} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{\cos a} \left(\left[\frac{-1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \right) dx = \int_{-1}^{\cos a} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left[-arccos(x) \right]_{-1}^{\cos a} = -arccos(\cos a) + arccos(-1)$$

$$= \pi - a.$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος του εμβαδού ενός τριγώνου είναι μια συνάρτηση με μεταβλητή τη γωνία του a. Ανάλογα με την τιμή της γωνίας αλλάζει και το εμβαδόν. Τώρα, στην περίπτωση που έχουμε τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο η τρίτη κορυφή γίνεται οριακό σημείο, που σημαίνει ότι η γωνία a τείνει στο μηδέν. Τότε προφανώς, το εμβαδόν του τριγώνου έχει μέτρο το π.

6.10. ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Το μήκος ενός υπερβολικού κύκλου και το εμβαδό τυχαίου υπερβολικού τριγώνου, αποτελούν δυο σημαντικά αποτελέσματα που ολοκληρώνουν το παρόν κεφάλαιο.

Εφαρμογή 6.10.1. *Υπολογισμός του μήκους της περιφέρειας υπερβολικού κύκλου.*

Έστω ένας υπερβολικός κύκλος στο εσωτερικό του D. Για να απλοποιήσουμε την διαδικασία, υποθέτουμε ότι έχει κέντρο στην αρχή των αξόνων. Τότε, έστω R το μήκος της υπερβολικής ακτίνας του και έστω r το μήκος της Ευκλείδειας ακτίνας του.

Μια παραμέτρηση του κύκλου είναι η $z(t)=re^{it}$, για $t\in[0,2\pi]$. Αν C είναι το μήκος της περιφέρειας του, χρησιμοποιούμε τον τύπο για το υπερβολικό μήκος (βλ. Παράγραφος 6.6.1) και έχουμε ότι

$$C=2\int_{0}^{2\pi}\frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^{2}}dt\,.$$

Αφού

$$z'(t)=r(sint-icost)\quad \text{και}\quad |z'(t)|=\sqrt{r^{2}sin^{2}t+r^{2}cos^{2}t}=r\,,$$

το ολοκλήρωμα γίνεται

$$C=2\int_{0}^{2\pi}\frac{r}{1-r^{2}}dt=\left(\frac{2r}{1-r^{2}}\right)\cdot[t]_{0}^{2\pi}=2\pi\left(\frac{2r}{1-r^{2}}\right).$$

Τώρα από τον τύπο απόστασης (βλ. Παράγραφος 6.6.2) γνωρίζουμε ότι η υπερβολική ακτίνα είναι $R=d(0,r)$. Έτσι, θα βρούμε το Ευκλείδειο μήκος r συναρτήσει του υπερβολικού μήκους R. Από τον τύπο

$$d(0,r)=ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

έχουμε ότι

$$r=\frac{e^{d(0,r)}-1}{e^{d(0,r)}+1}\,.$$

Αντικαθιστούμε την προηγούμενη σχέση στην παράσταση του ολοκληρώματος και έχουμε ότι

$$\frac{2r}{1-r^{2}}=\frac{2\left(\frac{e^{d}-1}{e^{d}+1}\right)}{1-\left(\frac{e^{d}-1}{e^{d}+1}\right)^{2}}=\frac{\frac{2\left(e^{d}-1\right)}{e^{d}+1}}{\frac{e^{2d}+1+2e^{d}-e^{2d}-1+2e^{d}}{\left(e^{d}+1\right)^{2}}}$$

$$=\frac{2\left(e^{d}-1\right)}{\frac{4e^{d}}{e^{d}+1}}=\frac{e^{2d}-1}{2e^{d}}\,,$$

δηλαδή

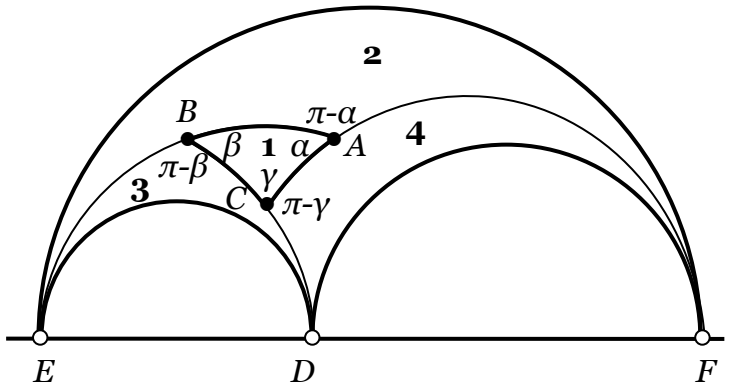
$$\frac{2r}{1-r^2}=\frac{e^d-e^{-d}}{2}.$$

Η τελευταία παράσταση αντιστοιχεί στο υπερβολικό ημίτονο, $sinh(d(o, r))$ ή αλλιώς $sinh(R)$. Επομένως, το μήκος της περιφέρειας ενός υπερβολικού κύκλου είναι,

$$C=2\pi\, sinh(R).$$

Εφαρμογή 6.10.2. *Υπολογισμός του εμβαδού τυχαίου υπερβολικού τριγώνου.*

Θεωρούμε ένα τυχόν υπερβολικό τρίγωνο *ABC,* όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.19. Προεκτείνουμε τις πλευρές του τυχαίου τριγώνου *ABC* ώστε να συναντήσουν τον άξονα $x'x$ με τρόπο τέτοιο, ώστε στην προέκταση της πλευράς *BC* να βρίσκεται το οριακό σημείο *D,* στην προέκταση της *CB* το οριακό σημείο *F* και στην προέκταση της *AB* το οριακό σημείο *E.* Κατασκευάζουμε το τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο με κορυφές τα οριακά σημεία *E, D* και *F.* Έτσι, δημιουργούνται επιπλέον τρία διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα. Θα στηριχτούμε στις γωνίες των τριγώνων για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν.



Σχήμα 6.19. Υπολογισμός εμβαδού τριγώνου *ABC* μέσω γωνιών.

Προφανώς, το τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο *EDF* περιέχει το τρίγωνο *ABC* και τα τρία διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα *EBD, DCF* και *FAE.* Επομένως, αν *E* είναι το εμβαδόν του τριγώνου *EDF,* E_1 το εμβαδόν του *ABC,* E_2 το εμβαδόν του *EBD,* E_3 το εμβαδόν του *DCF* και E_4 το εμβαδόν του *FAE,* τότε

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 .$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.9., έχουμε ότι

$$E = \pi, \qquad E_2 = \pi - (\pi - \alpha),$$

$$E_3 = \pi - (\pi - \beta), \qquad E_4 = \pi - (\pi - \gamma),$$

οπότε

$$\pi = E_1 + [\pi - (\pi - \alpha)] + [\pi - (\pi - \beta)] + [\pi - (\pi - \gamma)].$$

Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδό E_1 του τριγώνου ABC είναι

$$E_1 = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Η παραπάνω διαφορά καλείται **έλλειμμα** του τριγώνου ABC .

Για τον προηγούμενο υπολογισμό δεχτήκαμε ότι η συνάρτηση εμβαδού έχει δύο σημαντικές ιδιότητες:

1. Τη διατήρηση του αναλλοίωτου της συνάρτησης όταν εφαρμόζεται σε ίσα τρίγωνα. Δηλαδή ίσα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν.
2. Την προσθετικότητα: Αν ένα τρίγωνο E χωρίζεται σε δύο τρίγωνα E_1 και E_2 μέσω ενός ευθύγραμμου τμήματος που διέρχεται από μια κορυφή του, τότε το εμβαδό του E ισούται με το άθροισμα των εμβαδών E_1 και E_2.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει τη διαφορετικότητα της Υπερβολικής Γεωμετρίας έναντι της Ευκλείδειας, σε ένα σημαντικό μέγεθος όπως το εμβαδόν τριγώνου. Εδώ το εμβαδόν είναι συνάρτηση του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου και όχι συνάρτηση της πλευράς και του ύψους του.

7. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη Σφαιρική Γεωμετρία. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός, ότι οι Bolyai και Lobachevsky, στη διάρκεια της προσπάθειάς τους να δημιουργήσουν την Υπερβολική Γεωμετρία, επέμειναν στο στόχο τους λόγω της ομοιότητας που συνάντησαν ανάμεσα στους μη Ευκλείδειους τριγωνομετρικούς τύπους και στους τύπους της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Αυτό αναδεικνύει την αξία της σφαίρας ως ένα μοντέλο γεωμετρίας, που διαφοροποιείται από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Στο πλαίσιο των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, η γεωμετρία της σφαιρικής επιφάνειας καλείται επίσης και Ελλειπτική Γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την αναπαράσταση της σφαιρικής επιφάνειας στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο μέσω της στερεογραφικής προβολής. Θα επικεντρωθούμε δηλαδή στη διδιάστατη Ελλειπτική Γεωμετρία με οδηγό μας τη σφαίρα. Όπως αναφέραμε και στην Παράγραφο 2.5, η στερεογραφική προβολή είναι ο μετασχηματισμός που συνδέει τη σφαίρα με το επίπεδο, επιτυγχάνοντας μια απεικόνιση που διατηρεί αναλλοίωτα το μέτρο των γωνιών και τους γενικευμένους κύκλους. Θα δούμε ακόμη πώς αναλύονται στο μιγαδικό επίπεδο τα δύο είδη της Ελλειπτικής Γεωμετρίας, η διπλή και η απλή ελλειπτική. Ο παραπάνω διαχωρισμός ήταν μια ακόμη συμβολή του Klein στον τομέα των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η μεταφορά της σφαιρικής επιφάνειας στο επίπεδο οδηγεί σε συγκεκριμένες δυσκολίες, οι οποίες μπορούν να ξεπεραστούν με την εισαγωγή της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Για τη διευκόλυνση της μελέτης μας δεχόμαστε ότι η σφαίρα είναι μοναδιαίας ακτίνας (Σχήμα 7.1). Ορίζουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο ($\mathbb{R}^3$) και τοποθετούμε το κέντρο της σφαίρας στην αρχή των αξόνων. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο S^2 για να περιγράψουμε την επιφάνεια της σφαίρας, δηλαδή

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

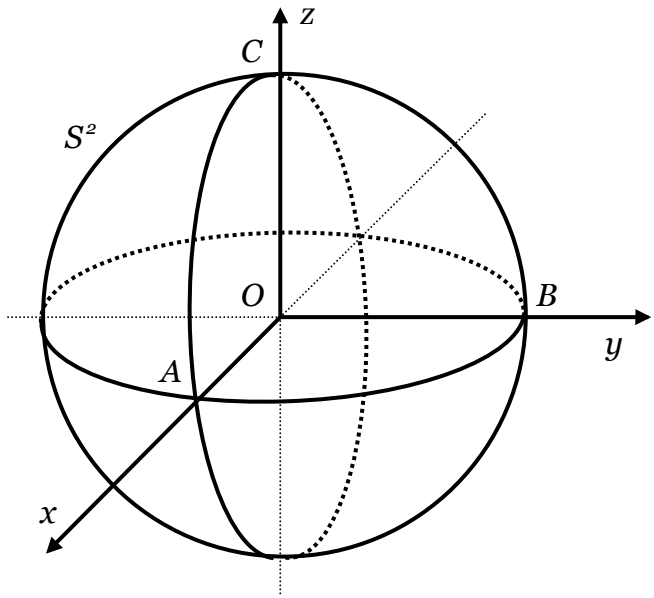
Οι θετικοί άξονες x, y, z συναντούν τη σφαίρα S^2 στα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$ και $C(1, 0, 0)$ αντίστοιχα.

Η μοναδιαία σφαίρα S^2 μπορεί να απεικονιστεί στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο με το μετασχηματισμό της στερεογραφικής προβολής

$$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}^+,$$

μέσω του οποίου ένα σημείο P (a, b, c) της σφαίρας απεικονίζεται στο σημείο

$$f(P) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-c} + \dfrac{b}{1-c} i, & \text{αν } c \neq 1, \\ \infty, & \text{αν } c = 1. \end{cases}$$



Σχήμα 7.1. Μοναδιαία σφαίρα στο Καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

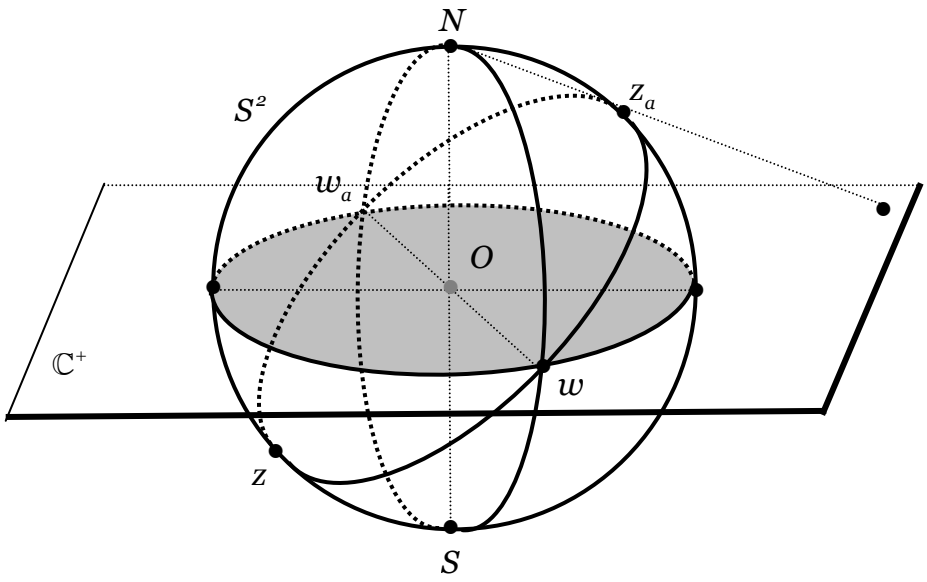
Δύο σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας καλούνται **αντιδιαμετρικά** αν ανήκουν στην ίδια διάμετρο της σφαίρας. Αν P (a, b, c) είναι ένα σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας, τότε το αντιδιαμετρικό του είναι το Q $(-a, -b, -c)$.

Έστω τα αντιδιαμετρικά σημεία $P(a, b, c)$ και $Q(-a, -b, -c)$. Τότε οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο, μέσω της στερεογραφικής προβολής, θα είναι οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με

$$z = f(P) = \frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-c} i,$$

και

$$w = f(Q) = \frac{-a}{1+c} - \frac{b}{1+c} i.$$



Σχήμα 7.2. Απεικόνιση της σφαίρας στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο.

Ορισμός 7.1. *Δυο σημεία z και w του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου* $\mathbb{C}^+$ *καλούνται* ***αντιδιαμετρικά*** *αν ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$z \cdot \overline{w} = -1 .$$

Αν δύο σημεία P και Q είναι αντιδιαμετρικά στη σφαιρική επιφάνεια, τότε και οι εικόνες τους, μέσω της στερεογραφικής προβολής, είναι αντιδιαμετρικά σημεία στο μιγαδικό επίπεδο. Στην περίπτωση του βόρειου πόλου N $(0, 0, 1)$ και του νότιου πόλου S $(0, 0, -1)$, παρατηρούμε ότι έχουμε δυο αντιδιαμετρικά σημεία, τα οποία η συνάρτηση f απεικονίζει στο ∞ και στο 0, αντίστοιχα. Στην περίπτωση δύο τυχαίων αντιδιαμετρικών σημείων, με βάση τις προηγούμενες σχέσεις, έχουμε ότι

$$f(P) \cdot \overline{f(Q)} = z \cdot \overline{w} = \left[\frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-c} i \right] \cdot \left[\frac{-a}{1+c} - \frac{b}{1+c} i \right]$$

$$= \frac{-a^2}{1-c^2} + \frac{ab}{1-c^2} i - \frac{ab}{1-c^2} i - \frac{b^2}{1-c^2}$$

$$= -\frac{a^2 + b^2}{1-c^2}$$

$$= -1,$$

αφού στην επιφάνεια της σφαίρας ισχύει ότι $a^2+b^2+c^2=1$.

7.1. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Αναζητούμε εκείνους τους μετασχηματισμούς Möbius T του μιγαδικού επιπέδου, οι οποίοι διατηρούν τα αντιδιαμετρικά σημεία. Δηλαδή, αν P και Q είναι δυο αντιδιαμετρικά σημεία και z και w είναι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο, μέσω της στερεογραφικής προβολής, τότε οι $T(z)$ και $T(w)$ πρέπει, επίσης, να είναι εικόνες αντιδιαμετρικών σημείων στο μιγαδικό επίπεδο. Επομένως, αν για δυο σημεία z και w, που είναι οι προβολές των άκρων μιας διαμέτρου της σφαίρας, ισχύει ότι $z\overline{w}=-1$, τότε και για τις εικόνες τους, μέσω του μετασχηματισμού T, θα ισχύει ότι

$$T(z)\overline{T(w)}=-1.$$

Έστω λοιπόν ο μετασχηματισμός Möbius της μορφής

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

Αφού $w=\frac{-1}{\overline{z}}$ και $T(z)=\frac{-1}{\overline{T(w)}}$, έχουμε ότι

$$T(z)=\frac{-1}{\overline{T}\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο του μετασχηματισμού, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{-1}{\left(\frac{\overline{a\left(\frac{-1}{\overline{z}}\right)+b}}{\overline{c\left(\frac{-1}{\overline{z}}\right)+d}}\right)}=-\frac{\overline{c\left(\frac{-1}{\overline{z}}\right)+d}}{\overline{a\left(\frac{-1}{\overline{z}}\right)+b}}=-\frac{-\frac{\overline{c}}{z}+\overline{d}}{-\frac{\overline{a}}{z}+\overline{b}}=\frac{\overline{d}z-\overline{c}}{-\overline{b}z+\overline{a}}.$$

Από την παραπάνω ισότητα, προκύπτει ότι $a=\overline{d}$ και $b=-\overline{c}$. Οπότε, ο μετασχηματισμός T γράφεται με τη μορφή

$$T(z)=\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}.$$

Για τη δημιουργία του μετασχηματισμού της Υπερβολικής Γεωμετρίας, δεχτήκαμε τη συνθήκη με την οποία δύο σημεία ταυτίζονται όταν είναι συμμετρικά ως προς το μοναδιαίο δίσκο. Για να επιτευχθεί αυτό, ήταν απαραίτητη η χρήση μιας σταθεράς, που είχε το ρόλο της περιστροφής. Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε και στην Ελλειπτική Γεωμετρία, ώστε να προσαρμόσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό Möbius. Η συνθήκη σε αυτή την περίπτωση, αφορά στη διατήρηση των αντιδιαμετρικών σημείων στο μιγαδικό επίπεδο. Με τη διαδικασία αυτή θα οριστεί η ομάδα των μετασχηματισμών της Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Επομένως, έχουμε ότι

$$T(z)=\frac{a\left(z-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)}{\bar{a}\left(-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}z+1\right)}=e^{i\theta}\left(\frac{z-z_o}{\bar{z}_o z+1}\right),$$

όπου $e^{i\theta}=\frac{a}{\bar{a}}$ και $z_o=-\frac{b}{a}$.

Κατά συνέπεια, έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.1.1. *Το σύνολο S των μετασχηματισμών Möbius της παραπάνω μορφής καλείται* ***ελλειπτική ομάδα.*** *Το ζεύγος (C⁺, S) αναπαριστά την* ***Ελλειπτική Γεωμετρία.***

Θα δείξουμε ότι το σύνολο S αποτελεί πράγματι ομάδα μετασχηματισμών με πράξη τη σύνθεση.

1. (*κλειστότητα*) Έστω οι μετασχηματισμοί

$$T_1=\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} \quad \text{και} \quad T_2=\frac{ez+f}{-\bar{f}z+\bar{e}}.$$

Τότε

$$(T_1\circ T_2)(z)=T_1(T_2(z))=\frac{a\left(\frac{ez+f}{-\bar{f}z+\bar{e}}\right)+b}{-\bar{b}\left(\frac{ez+f}{-\bar{f}z+\bar{e}}\right)+\bar{a}}=\frac{\left(ae-b\bar{f}\right)z+\left(af+b\bar{e}\right)}{-\left(\bar{a}\bar{f}+\bar{b}e\right)z+\left(\bar{a}e-\bar{b}f\right)},$$

που ανήκει στο S.

2. (*ουδέτερο στοιχείο)* Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός Möbius δίνεται από τον τύπο

$$T(z) = \frac{1z+0}{0z+1}.$$

3. (*αντίστροφο στοιχείο*) Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός T^{-1} με τύπο

$$T^{-1}(z) = \frac{\bar{a}z - \bar{b}}{\bar{b}z + \alpha}.$$

Δεχόμαστε ότι η ορίζουσα του T είναι ίση με την μονάδα, δηλαδή $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$.

4. (*προσεταιριστικός νόμος*) Αν $T_1, T_2, T_3 \in S$ τότε $T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει διότι η σύνθεση συναρτήσεων είναι πράξη προσεταιριστική.

7.2. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Αφού αναφερθήκαμε στα σημεία της επιφάνειας και ορίσαμε την ομάδα των μετασχηματισμών της Ελλειπτικής Γεωμετρίας, συνεχίζουμε με την παρουσίαση των ευθειών της. Ακόμη, θα αναλύσουμε τα δύο μοντέλα της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Για να βρούμε τον ελλειπτικό μετασχηματισμό χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε δυο αντιδιαμετρικά σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας. Με τη βοήθεια αυτού του επιχειρήματος θα ορίσουμε και τις ευθείες της Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Διαχωρίζουμε την παρουσίαση στην διπλή ελλειπτική και στην απλή ελλειπτική γεωμετρία.

7.2.1. Διπλή ελλειπτική γεωμετρία

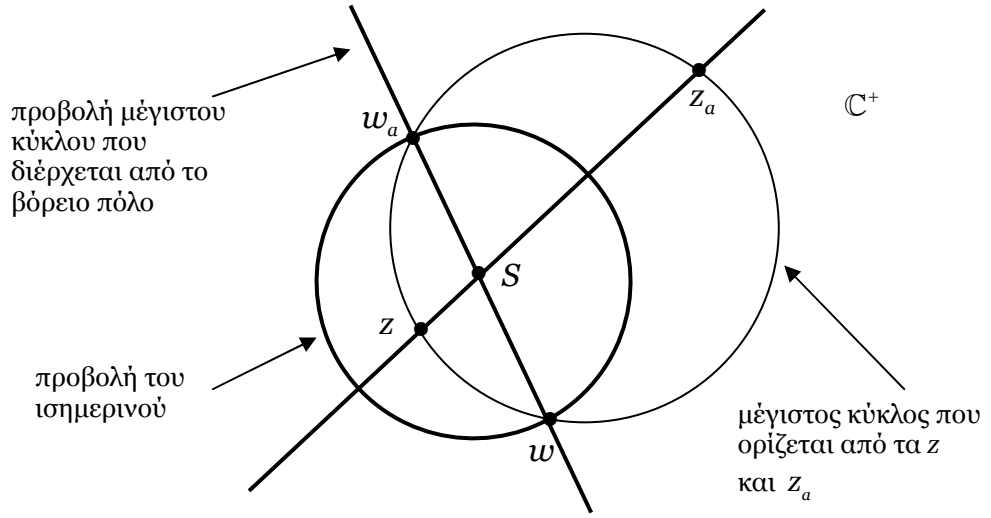
Η εικόνα του μοντέλου της διπλής ελλειπτικής γεωμετρίας, μπορούμε να πούμε ότι προκύπτει άμεσα από τη Σφαιρική Γεωμετρία.

Στη Σφαιρική Γεωμετρία, ορίζουμε ως γεωδαισιακή μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας της σφαίρας το τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Αν τώρα προβάλλουμε ένα μέγιστο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο θα διαπιστώσουμε ότι η στερεογραφική εικόνα του είναι επίσης

κύκλος. Επιπλέον, όταν ο μέγιστος κύκλος διέρχεται από το βόρειο πόλο τότε η στερεογραφική εικόνα του είναι μια Ευκλείδεια ευθεία. Στο πλαίσιο της μελέτης της Ελλειπτικής Γεωμετρίας μέσω του επίπεδου μοντέλου έχουμε τους επόμενους ορισμούς.

Ορισμός 7.2.1. *Στο μοντέλο (C^+, S) της Ελλειπτικής Γεωμετρίας, ως* ***μέγιστος κύκλος*** *ορίζεται ο κύκλος c του μιγαδικού επιπέδου με την ιδιότητα: όταν ο c περιέχει ένα σημείο z τότε θα περιέχει και το αντιδιαμετρικό σημείο του $z_a = -1/\overline{z}$.*

Ορισμός 7.2.2. *Το τόξο ενός μέγιστου κύκλου καλείται* ***ελλειπτική ευθεία γραμμή****.*



Σχήμα 7.3. Απεικόνιση μέγιστων κύκλων της σφαιρικής επιφάνειας του Σχήματος 7.2 στο μιγαδικό επίπεδο.

Παρατηρώντας το Σχήμα 7.3, βλέπουμε ότι όλα τα σημεία και οι μέγιστοι κύκλοι της σφαιρικής επιφάνειας μπορούν να μελετηθούν στο επίπεδο. Ο ορισμός της ελλειπτικής ευθείας επαληθεύεται, αφού η προβολή ενός μέγιστου κύκλου περιλαμβάνει πάντα το ζεύγος δυο αντιδιαμετρικών σημείων. Η προβολή του ισημερινού και το εσωτερικό του αποτελούν το δίσκο αναφοράς. Αυτό συμβαίνει διότι όλα τα σημεία του νότιου ημισφαιρίου προβάλλονται στο εσωτερικό του δίσκου, ενώ τα αντιδιαμετρικά τους, που ανήκουν στο βόρειο ημισφαίριο, προβάλλονται στο εξωτερικό του δίσκου. Έτσι, το σημείο z βρίσκεται εντός του δίσκου και το αντιδιαμετρικό του z_a εκτός του δίσκου. Με το γράμμα S σημειώνουμε το σημείο στο οποίο

προβάλλεται ο νότιος πόλος της σφαίρας. Τέλος, φαίνεται ότι από το σημείο w διέρχονται τρείς ελλειπτικές ευθείες, ενώ δύο διέρχονται από το σημείο z.

Ωστόσο, δημιουργείται μια σημαντική διαφορά προς την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Το πρώτο αξίωμα δεν ισχύει, καθώς δυο σημεία ορίζουν περισσότερες από μια ευθείες. Οδηγούμαστε έτσι στο μοντέλο της απλής ελλειπτικής γεωμετρίας μέσα από το οποίο θα άρουμε την δυσκολία που παρουσιάζεται.

7.3. ΑΠΛΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Το δεύτερο μοντέλο της Ελλειπτικής Γεωμετρίας αποτελεί την εναλλακτική λύση στην αδυναμία σχετικά με το πρώτο αξίωμα. Το γεγονός ότι δύο σημεία δεν ορίζουν πάντοτε μοναδική ευθεία, οφείλεται στην ύπαρξη των αντιδιαμετρικών σημείων.

Πράγματι, αν πάρουμε δυο τυχαία σημεία στην επίπεδη επιφάνειας της σφαίρας, υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος που διέρχεται από αυτά, ενώ αυτό δεν συμβαίνει όταν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά. Στη δεύτερη περίπτωση, από δύο σημεία διέρχονται άπειρες ελλειπτικές ευθείες.

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα θα φανταστούμε την ύπαρξη μιας χώρας, η οποία αποτελείται από τη σφαιρική επιφάνεια S^2 και τα όντα της είναι διδιάστατα. Επιπλέον, μπορούμε να φανταστούμε ότι κάθε κάτοικος αυτής της χώρας αποτελείται από δύο μέρη, τα οποία πάντα κατέχουν αντιδιαμετρικές θέσεις στην επιφάνεια. Αλλά, αυτά τα δύο μέρη πάντα βλέπουν τον εαυτό τους ως μια ολοκληρωμένη οντότητα, μη γνωρίζοντας το διαχωρισμό τους. Έτσι, κάθε μετακίνηση ενός τέτοιου φανταστικού όντος σημαίνει ταυτόχρονη μετακίνηση των μερών του, ώστε να παραμένουν αντιδιαμετρικά. Συνεπώς, ο κάτοικος αυτός αντιμετωπίζει κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων στην επιφάνεια της σφαίρας ως μια θέση.

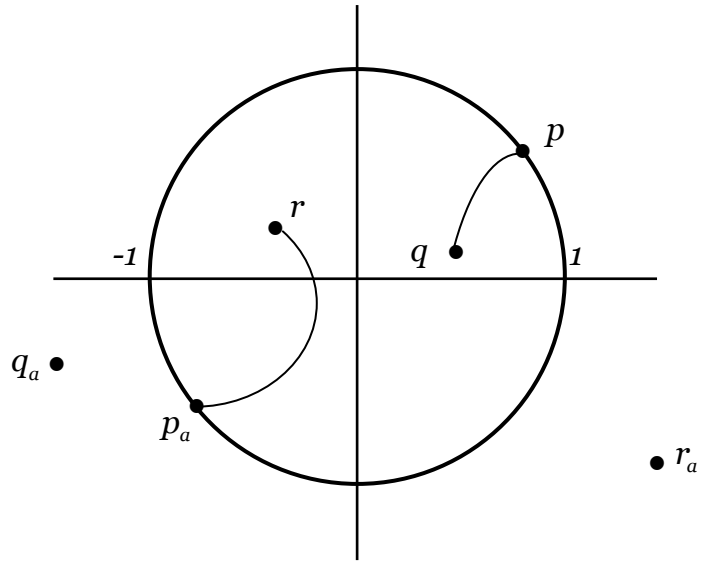
Για να αντιληφθούμε τις υποθέσεις αυτές χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες, αναλύουμε στη συνέχεια το επίπεδο μοντέλο της απλής ελλειπτικής γεωμετρίας.

7.3.1. Επίπεδο μοντέλο απλής ελλειπτικής γεωμετρίας

Η διαδικασία που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη περιγραφή της επιπεδοχώρας, ονομάζεται ***ταυτοποίηση*** *(identification),* και ο χώρος που δημιουργείται είναι το εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^+$ μαζί με τα *ταυτοποιημένα* αντιδιαμετρικά σημεία. Στο χώρο της απλής ελλειπτικής γεωμετρίας κάθε σημείο ταυτοποιείται με ένα άλλο σημείο, το αντιδιαμετρικό του. Για παράδειγμα, το σημείο $z = (1+i)/2$ έχει *ταυτοτικό* το αντιδιαμετρικό

του z_a = -($1+i$), αφού $z \cdot \overline{z}_a = -1$. Στο χώρο της γεωμετρίας μας, τα σημεία αυτά αντιμετωπίζονται ως ένα και το αυτό σημείο. Για να αποκτήσουμε την κατάλληλη οπτικοποίηση, θα περιοριστούμε σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου που περιέχει έναν αντιπρόσωπο για κάθε ζεύγος.

Έστω ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος που αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, τέτοιους ώστε $|z| \leq 1$. Για κάθε σημείο z που βρίσκεται στο εσωτερικό του δίσκου, το αντιδιαμετρικό του z_a θα ανήκει στο εξωτερικό του δίσκου (βλ. Σχήμα 7.4). Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται η κάλυψη ολόκληρου του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου, αφού ο μοναδιαίος δίσκος περιέχει έναν αντιπρόσωπο από κάθε ζεύγος {z, z_a}. Βέβαια, υπάρχει και η περίπτωση το σημείο z να ανήκει στο σύνορο του δίσκου ($|z| = 1$), όπου τότε το αντιδιαμετρικό του z_a ανήκει επίσης στο σύνορο. Ανάλογα, δεχόμαστε ότι κάθε σημείο στο σύνορο του δίσκου ταυτίζεται με το αντιδιαμετρικό του.



Σχήμα 7.4. Επίπεδο μοντέλο απλής ελλειπτικής γεωμετρίας.

Η υπόθεση που αναφέραμε ανήκει αποκλειστικά στον Klein. Λόγω της ιδέας του, ο Klein κατάφερε να αλλάξει το νόημα που έχει η λέξη *σημείο* και να ονομάσει ένα τέτοιο ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων, ως *ένα σημείο*. Με αυτήν τη διαδικασία ταυτοποίησης, η Σφαιρική Γεωμετρία τροποποιήθηκε σε Ελλειπτική Γεωμετρία. Την ταυτοποίηση του z με το αντιδιαμετρικό του z_a, ή την αντίστοιχη ταυτοποίηση των απεικονίσεων τους P και P_a στη σφαίρα, μπορούμε να την αντιληφθούμε γεωμετρικά, ενώνοντας τα δύο σημεία P και P_a. Προφανώς, το ευθύγραμμο τμήμα PP_a διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας. Αυτό συνεπάγεται μια 1-1 αντιστοίχηση ανάμεσα στα σημεία του

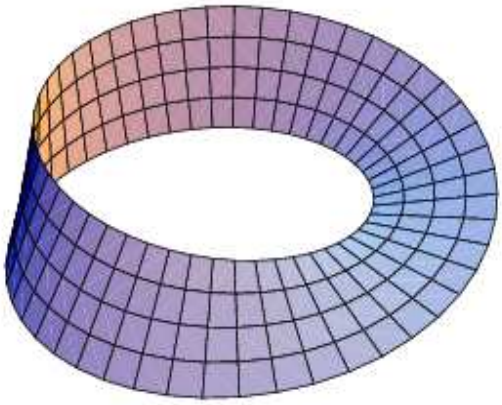
ελλειπτικού επιπέδου και στα στοιχεία όλων των διαμέτρων της σφαίρας (βλ. Σχήμα 7.3, 7.4).

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούν να συμπεριληφθούν στον επόμενο ορισμό, όπου το μιγαδικό επίπεδο κατέχει διττό ρόλο.

Ορισμός 7.3.1. *Έστω C^{α} το μιγαδικό επίπεδο, όπου τα αντιδιαμετρικά σημεία ταυτίζονται. Η γεωμετρία (C^{α}, S) καλείται* ***απλή ελλειπτική γεωμετρία.*** *Η γεωμετρία (C^{+}, S) όπως ορίστηκε στην παράγραφο 7.2.1, καλείται* ***διπλή ελλειπτική γεωμετρία.***

Συνεπώς, στην απλή ελλειπτική γεωμετρία τα σημεία απεικονίζονται, μέσω στερεογραφικής προβολής, στις διαμέτρους της σφαίρας. Τα σημεία στη διπλή ελλειπτική γεωμετρία απεικονίζονται, μέσω στερεογραφικής προβολής, στα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας.

Σχόλιο: Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη διαφορά ανάμεσα στη διπλή ελλειπτική και στην απλή ελλειπτική γεωμετρία, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε δύο είδη επιφανειών: την επιφάνεια *δύο όψεων* (*two-sided*) και την επιφάνεια *μιας όψης* (*one-sided*). Οι παραπάνω έννοιες συνδέονται περισσότερο με τις τοπολογικές ιδιότητες των επιφανειών. Ωστόσο, είναι χρήσιμες στην παρούσα φάση, αφού παρέχουν πληρέστερη γνώση για το χώρο της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.



Σχήμα 7.5. Λωρίδα του Möbius.

Η σφαιρική επιφάνεια και γενικότερα οι επιφάνειες που εμπερικλείουν γεωμετρικά στερεά, είναι παραδείγματα επιφανειών δύο όψεων. Από την

άλλη, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα επιφάνειας μιας όψης, είναι η *λωρίδα του Möbius*.

Η κατασκευή αυτής της λωρίδας είναι τέτοια, που ο διαχωρισμός ανάμεσα στις δύο όψεις είναι αδύνατος. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημείο στην επιφάνεια της λωρίδας και αρχίσουμε να το κινούμε έως ότου ολοκληρώσει μια κλειστή διαδρομή χωρίς να αφήσει την επιφάνεια, τότε το σημείο θα επιστρέψει στην αρχική του θέση, έχοντας προσανατολισμό αντίθετο στον αρχικό. Το αντίστοιχο σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας, έχει προσανατολισμό ίδιο με τον αρχικό.

Επομένως, σύμφωνα με την παραπάνω διάκριση των επιφανειών, το σφαιρικό επίπεδο (άρα και η προβολή του - διπλή ελλειπτική γεωμετρία) έχει το χαρακτήρα της επιφάνειας δύο όψεων και το ελλειπτικό επίπεδο (απλή ελλειπτική γεωμετρία) έχει αυτόν της μιας όψης.

Λόγω της προηγούμενης ιδιότητας, το επίπεδο της απλής ελλειπτικής γεωμετρίας δεν διαχωρίζεται από τις ευθείες του. Δηλαδή, παρά την ύπαρξη ευθειών, μπορούμε να κινηθούμε οπουδήποτε στο εσωτερικό του επιπέδου. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία r και q δεν χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη, καθώς η ένωση της γίνεται μέσω των αντιδιαμετρικών σημείων p και p_a. Βέβαια, στηριζόμενοι στην Ευκλείδεια οπτική μας, νομίζουμε ότι βλέπουμε δυο τμήματα διαφορετικά μεταξύ τους, γεγονός που μας αποτρέπει να διαισθανθούμε αρχικά το μη διαχωρισμό του επιπέδου.

7.4. Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σε αναλογία με τις υποθέσεις που θέσαμε στην Υπερβολική Γεωμετρία, μπορούμε να παράγουμε και τις σχέσεις των βασικών μετρήσεων στην Ελλειπτική Γεωμετρία. Στην παράγραφο αυτή, θα αναφέρουμε τους ορισμούς του μήκους τόξου και του εμβαδού χωρίου, ενώ θα δούμε πως το μήκος αποτελεί ένα αναλλοίωτο της γεωμετρίας μας.

Ορισμός 7.4.1. *Αν γ είναι μια ομαλή καμπύλη στον ελλειπτικό χώρο, το* ***μήκος της γ*** *δίνεται από τον τύπο*

$$L(\gamma)=\int_a^b \frac{2|z'(t)|}{1+|z(t)|^2}dt\,.$$

Το ***εμβαδόν ενός επίπεδου χωρίου R****, που εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες στον ελλειπτικό χώρο, δίνεται από τη σχέση*

$$A = \iint_R \frac{4r}{\left(1+r^2\right)^2} dr d\theta .$$

Θεώρημα 7.4.2. *Έστω T ένας μετασχηματισμός της Ελλειπτικής Γεωμετρίας και έστω γ μια ομαλή καμπύλη. Τότε η συνάρτηση L του μήκους είναι ένα αναλλοίωτο της γεωμετρίας και ισχύει ότι* $L\left(T\left(\gamma\right)\right) = L\left(\gamma\right)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός *T* δίνεται από τον τύπο:

$$w = T\left(z\right) = e^{i\theta} \frac{z - z_o}{1 + \overline{z}_o z} .$$

Έστω, επίσης, μια παραμέτρηση $z\left(t\right)$ της καμπύλης *γ*. Τότε ο μετασχηματισμός *T* μέσω της παραμέτρησης $z\left(t\right)$, γίνεται

$$w\left(t\right) = T\left(z\left(t\right)\right) = e^{i\theta} \frac{z\left(t\right) - z_o}{1 + \overline{z}_o z\left(t\right)} .$$

Η παράγωγος της συνάρτησης με χρήση του κανόνα αλυσίδας δίνει,

$$w'\left(t\right) = \frac{dw}{dt} = \frac{dT}{dz}\frac{dz}{dt} = e^{i\theta} \frac{\left(z - z_o\right)'\left(1 + \overline{z}_o z\right) - \left(1 + \overline{z}_o z\right)'\left(z - z_o\right)}{\left(1 + \overline{z}_o z\right)^2} \cdot z'\left(t\right)$$

$$= e^{i\theta} \frac{\left(1 + \overline{z}_o z\right) - \left(\overline{z}_o\right)\left(z - z_o\right)}{\left(1 + \overline{z}_o z\right)^2} \cdot z'\left(t\right)$$

$$= e^{i\theta} \frac{1 + \overline{z}_o z_o}{\left(1 + \overline{z}_o z\right)^2} \cdot z'\left(t\right)$$

$$= e^{i\theta} \frac{1 + \left|z_o\right|^2}{\left(1 + \overline{z}_o z\left(t\right)\right)^2} \cdot z'\left(t\right).$$

Η παράσταση αυτή είναι η *T*(*γ*), δηλαδή η εικόνα της καμπύλης μέσω του μετασχηματισμού. Θα υπολογίσουμε το *L*(*T*(*γ*)).

$$L\left(T(\gamma)\right)=2\int_a^b \frac{\left|w'(t)\right|}{1+\left|w(t)\right|^2}dt=2\int_a^b \frac{\left|e^{i\theta}\dfrac{\left(1+\left|z_o\right|^2\right)z'(t)}{\left(1+\overline{z}_o z(t)\right)^2}\right|}{1+\left|e^{i\theta}\dfrac{z(t)-z_o}{1+\overline{z}_o z(t)}\right|^2}dt$$

$$=2\int_a^b \frac{\left|e^{i\theta}\right|\dfrac{\left|\left(1+\left|z_o\right|^2\right)z'(t)\right|}{\left|\left(1+\overline{z}_o z(t)\right)^2\right|}}{1+\left|e^{i\theta}\right|^2\dfrac{\left|z(t)-z_o\right|^2}{\left|1+\overline{z}_o z(t)\right|^2}}dt.$$

Εφόσον $\left|e^{i\theta}\right|=1$ και $\left|z^2\right|=\left|z\right|^2$, έχουμε ότι

$$L\left(T(\gamma)\right)=2\int_a^b \frac{\dfrac{\left|\left(1+\left|z_o\right|^2\right)z'(t)\right|}{\left|\left(1+\overline{z}_o z(t)\right)^2\right|}}{\dfrac{\left|1+\overline{z}_o z(t)\right|^2+\left|z(t)-z_o\right|^2}{\left|1+\overline{z}_o z(t)\right|^2}}dt$$

$$=2\int_a^b \frac{\left(1+\left|z_o\right|^2\right)\left|z'(t)\right|}{\left|1+\overline{z}_o z(t)\right|^2+\left|z(t)-z_o\right|^2}dt.$$

Τέλος, αναλύοντας τον παρονομαστή του ολοκληρώματος, παίρνουμε τη σχέση

$$\left|1+\overline{z}_o z\right|^2+\left|z-z_o\right|^2=\left(1+\overline{z}_o z\right)\left(1+z_o\overline{z}\right)+\left(z-z_o\right)\left(\overline{z}-\overline{z}_o\right)$$

$$=\left(1+\overline{z}_o z+z_o\overline{z}+\overline{z}_o z z_o\overline{z}\right)+\left(z\overline{z}-z_o\overline{z}-\overline{z}_o z+\overline{z}_o z_o\right)$$

$$=1+\left|z_o\right|^2\left|z\right|^2+\left|z\right|^2+\left|z_o\right|^2$$

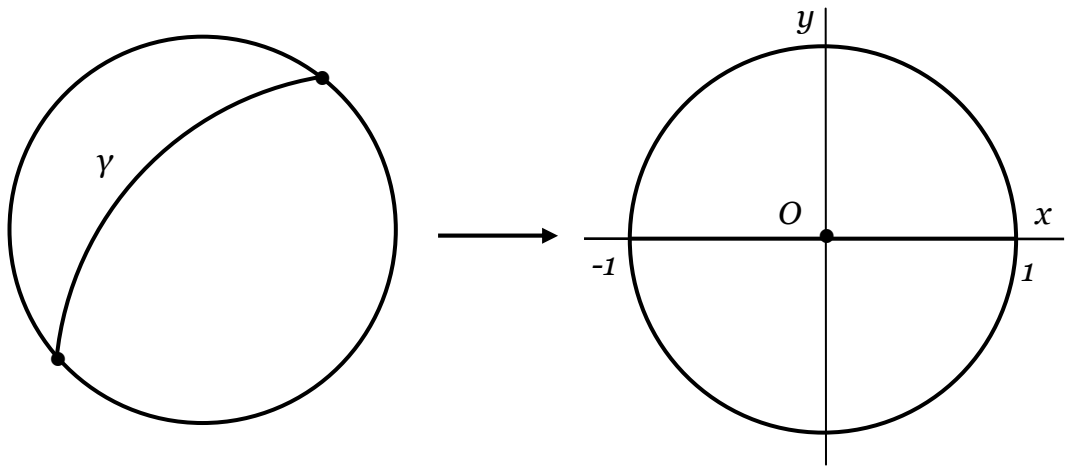
$$=\left(1+\left|z_o\right|^2\right)\left(1+\left|z\right|^2\right),$$

οπότε, αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι

$$L\big(T(\gamma)\big) = 2\int_a^b \frac{|z'(t)|}{1+|z(t)|^2}\,dt = L(\gamma). \qquad \square$$

Εφαρμογή 7.4.3. *Υπολογισμός του μήκους ελλειπτικής ευθείας.*

Για τον υπολογισμό του μήκους μιας ελλειπτικής ευθείας θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του μήκους καμπύλης γ, όπως ορίστηκε προηγουμένως. Επιλέγουμε μια θέση στην οποία θα τοποθετήσουμε την ελλειπτική ευθεία, ώστε να εξυπηρετεί τη διαδικασία. Υποθέτουμε ότι μεταφέρεται επάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Σχήμα 7.6. Μεταφορά ελλειπτικής ευθείας στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Έστω $z(t) = t$, όπου $t \in [-1, 1]$, μια παραμέτρηση της καμπύλης γ. Τότε έχουμε ότι

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \Big[2\arctan(t)\Big]_{-1}^{1}$$

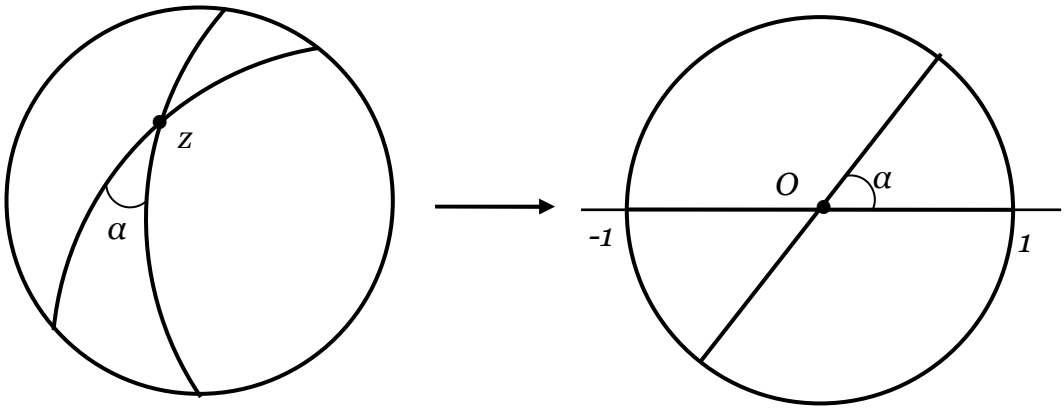
$$= 2\frac{\pi}{4} - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι το μήκος μιας ελλειπτικής ευθείας είναι πεπερασμένο. Είναι ένα συμπέρασμα αντίθετο στην Ευκλείδεια και στην Υπερβολική Γεωμετρία, όπου το μήκος μιας ευθείας είναι άπειρο. Όμως, οι ευθείες της σφαίρας είναι μέγιστοι κύκλοι και έχουν πεπερασμένο μήκος.

Συνεπώς, και οι προβολές τους στο μιγαδικό επίπεδο έχουν ανάλογη συμπεριφορά.

Εφαρμογή 7.4.4. *Υπολογισμός εμβαδού μηνίσκου του ελλειπτικού επιπέδου.*

Ο μηνίσκος του ελλειπτικού επιπέδου είναι ο χώρος που βρίσκεται ανάμεσα σε δυο ελλειπτικές ευθείες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.7. Το σχήμα αυτό έχει μόνο μια κορυφή.



Σχήμα 7.7. Μηνίσκος στο επίπεδο της απλής ελλειπτικής γεωμετρίας.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού αυτού του μηνίσκου, αρχικά μεταφέρουμε την κορυφή του στην αρχή των αξόνων, έτσι ώστε η μια πλευρά να κείται στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, μπορούμε να περιγράψουμε το ήμισυ του χωρίου του μηνίσκου. Δηλαδή, για $0 \le r \le 1$ και $0 \le \theta \le a$, το εμβαδόν είναι

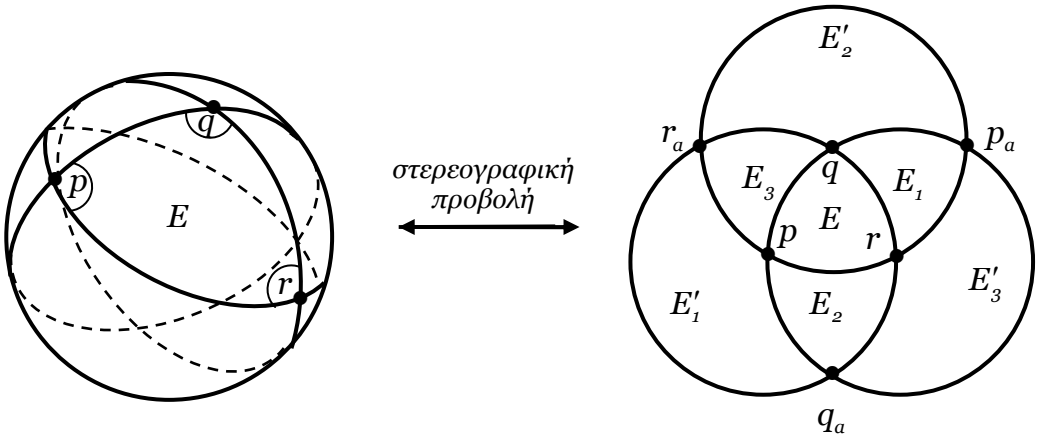
$$A = 2\int_0^a \int_0^1 \frac{4r}{\left(1+r^2\right)^2}\, dr d\theta,$$

ή θέτοντας $u = 1 + r^2$,

$$A = 2\int_0^a \left[\frac{-2}{1+r^2}\Bigg|_0^1 \right] d\theta = 2\int_0^a 1\, d\theta = 2a.$$

7.5. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Στο Σχήμα 7.8, ένα σφαιρικό τρίγωνο απεικονίζεται στην αριστερή εικόνα, ενώ οι μέγιστοι κύκλοι που το δημιουργούν, μέσω της στερεογραφικής προβολής, φαίνονται στη δεξιά εικόνα.



Σχήμα 7.8. Το άθροισμα των γωνιών ενός ελλειπτικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180°.

Και στις δύο εικόνες του Σχήματος 7.8, σημειώνουμε με E το ελλειπτικό τρίγωνο και με p, q, και r τις εσωτερικές του γωνίες. Θα αποδείξουμε το

Θεώρημα. 7.5.1. *Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στην Ελλειπτική Γεωμετρία είναι μεγαλύτερο από 180°.*

Απόδειξη: Για να δείξουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό θα χρησιμοποιήσουμε τον υπολογισμό ενός μηνίσκου της σφαίρας (είναι το μέρος της σφαιρικής επιφάνειας που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο μεσημβρινούς). Υποθέτουμε ότι οι δύο μεσημβρινοί σχηματίζουν γωνία α. Τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το εμβαδόν του σφαιρικού μηνίσκου είναι 2α.

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας είναι 4π. Έτσι, αν σκεφτούμε ένα μεσημβρινό της σφαίρας, βλέπουμε ότι δημιουργεί δυο σφαιρικούς μηνίσκους, καθένας εκ των οποίων έχει γωνία π. Οπότε, το εμβαδόν του καθενός είναι το μισό ολόκληρης της επιφάνειας, δηλαδή 2π. Ανάλογα, συμπεραίνουμε ότι στο σφαιρικό μηνίσκο με γωνία α, αντιστοιχεί εμβαδόν 2α.

Υποθέτουμε τώρα, ότι τέμνουμε το σφαιρικό μηνίσκο με τον ισημερινό, ο οποίος είναι κάθετος στους δυο μεσημβρινούς. Με αυτόν τον τρόπο, σχηματίζονται δυο τρίγωνα με ίδιο εμβαδόν και με γωνίες $\pi/2$, $\pi/2$, και α.

Τότε, το άθροισμα των γωνιών του ενός τριγώνου γίνεται $\pi + \alpha > 180^o$, αποδεικνύοντας το θεώρημα για τρίγωνα αυτής της μορφής.

Γενικεύοντας, θα μιλήσουμε για τυχαία τρίγωνα. Παρατηρούμε ότι, το τρίγωνο E περιέχεται σε τρείς σφαιρικούς μηνίσκους, οι οποίοι έχουν αντίστοιχα, γωνίες p, q, και r. Σημειώνουμε με E_1 το συμπλήρωμα του τριγώνου E στο σφαιρικό μηνίσκο με γωνία p, με E_2 το συμπλήρωμα του τριγώνου E στο σφαιρικό μηνίσκο με γωνία q και με E_3 το συμπλήρωμα του τριγώνου E στο σφαιρικό μηνίσκο με γωνία r. Εφόσον, βρήκαμε ότι το εμβαδόν ενός σφαιρικού μηνίσκου είναι 2α, οδηγούμαστε στις επόμενες σχέσεις:

$$E + E_1 = 2p, \quad E + E_2 = 2q \quad \text{και} \quad E + E_3 = 2r,$$

οπότε, αθροίζοντας, έχουμε ότι

$$3E + E_1 + E_2 + E_3 = 2(p + q + r). \tag{1}$$

Στη δεξιά εικόνα του Σχήματος 7.8, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ένας εκ των τριών κύκλων αποτελεί την προβολή του ημισφαιρίου στο επίπεδο, και άρα έχει εμβαδόν 2π. Δηλαδή,

$$2\pi = E + E_1 + E_2' + E_3 = E + E_1 + E_2 + E_3.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) παίρνουμε ότι

$$2E + 2\pi = 2(p + q + r),$$

ή αλλιώς

$$p + q + r = \pi + E. \tag{*}$$

Εφόσον το εμβαδόν του τριγώνου E είναι θετική ποσότητα, η τελευταία αποδεικνύει πλήρως το θεώρημα. □

Η σχέση (*) του προηγούμενου θεωρήματος οδηγεί ταυτόχρονα και στο επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 7.5.2. *Το άθροισμα των γωνιών ενός ελλειπτικού τριγώνου προσδιορίζει το εμβαδόν του. Αν το E έχει εσωτερικές γωνίες p, q, και r, τότε το εμβαδόν του ισούται με τη* ***γωνιακή υπεροχή*** *του:*

$$E = p + q + r - \pi.$$

Βιβλιογραφία

[1] Brannan, D. A., Esplen, M. F., Gray, J. : *Geometry,* Cambridge University Press, 1999.

[2] Cederberg, J. : *A Course in Modern Geometries,* Springer, New York, 1989.

[3] Coxeter, H. S. M. : *Non-Euclidean Geometry,* The Mathematical Association of America, 1998.

[4] Davis, D. M. : *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών,* Μετάφραση Καραγιαννάκης Δ., Μαγειρόπουλος Μ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2005.

[5] Galarza, A. I. R., Seade, J. : *Introduction to Classical Geometries,* Birkhauser Basel, 2007.

[6] Greenberg, M. J. : *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History,* W. H. Freeman, New York, 1993.

[7] Heath, T. L. : *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Dover Publications, New York, 1956.

[8] Henle, M. : *Modern Geometries, The Analytic Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[9] Hitchman, M. P. : *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology,* Jones and Bartlett Publishers, Boston, 2008.

[10] Kline, M. : *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press, New York, 1990.

[11] Schwerdtfeger, H. : *Geometry of Complex Numbers, Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry,* Dover Publications, New York, 1979.

[12] Stahl, S. : *The Poincaré Half Plane, A Gateway to Modern Geometry,* Jones and Bartlett Publishers, New York, 1993.

[13] Martin, G. E. : *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane,* Springer, New York, 1997.

[14] Αρτεμιάδης, Ν. Κ. : *Μιγαδική Ανάλυση,* Αθήνα, 1998.

[15] Βασιλείου, Ε. Ε. : Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος: *Γεωμετρία για τη Διδακτική,* Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α., 2003.

[16] Δρόσος, Κ. Α. : *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη, Τόμος 1ος: Μαθηματικές Περιηγήσεις,* Πάτρα, 2000.

[17] Λάππας, Δ. : *Ιστορία Νεώτερων Μαθηματικών,* Παραδόσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος, Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α., 2006.

[18] Στράτζαλος, Χ. : *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών,* Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1989.

Ευρετήριο

B

Beltrami Eugenio · 17
Bolyai Janos · 14

G

Gauss Carl Friedrich · 13
Greenberg · 13, 15, 35, 38, 117

H

Heath T.L. · 8, 11, 117

K

Klein Felix · 16, 31

L

Lambert Johann · 12
Legendre Adrien · 12
Lobachevsky Nikolai I. · 13

P

Poincaré Henri · 18

R

Riemann Bernhard · 15

S

Saccheri Gerolamo · 11

W

Wallis John · 11

Α

αίτημα 5ο · 8, 10
άκαμπτη κίνηση (rigid motion) · 26
αναλλοίωτα · 35, 52
αναρμονικός λόγος (cross-ratio) · 50, 51
αντιδιαμετρικά σημεία · 22, 98, 99, 100, 102, 105, 106
αξίωμα
  Ελλειπτικό · 21
  του Playfair · 8
  Υπερβολικό · 17
αποκλίνουσες · 70
απόσταση
  Ευκλείδεια · 72
  υπερβολική · 78, 79, 81
Αριστοτέλης · 11

Γ

γενικευμένος κύκλος (generalized circle) · 55
γεωδαισιακή · 87
Γεωμετρία Klein · 32, 34
Γεωμετρία Möbius · 5, 40, 46, 50, 52, 63, 86
γωνία παραλληλίας · 70, 71
γωνιακή υπεροχή · 115

Ε

εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο · 40
έλλειμμα (τριγώνου) · 96
ελλειπτική γεωμετρία
  απλή · 4, 22, 97, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 112, 115
  διπλή · 22, 97, 103, 107, 108, 115
Ελλειπτική Γεωμετρία · 5, 6, 15, 21, 23, 24, 38, 97, 101, 106, 108, 113, 115
ελλειπτική ευθεία · 103, 111
εμβαδόν
  στο ελλειπτικό επίπεδο · 108
  στο υπερβολικό επίπεδο · 91, 93
επ' άπειρον σημείο · 30
Ευκλείδεια Γεωμετρία · 37
Ευκλείδης · 7, 10, 12, 14, 35

Θ

Θαλής · 7
θεώρημα
  θεμελιώδες της Γεωμετρίας Möbius · 46

Λ

λωρίδα του Möbius · 107

Μ

μέγιστος κύκλος · 22, 103, 105, 115

μετασχηματισμός · 24
Möbius · 40, 44
αντιστροφή · 26, 27, 41
Ελλειπτικής Γεωμετρίας · 101, 109
Ευκλείδειος · 25
μεταφορά · 25, 27, 37, 41, 97
μη Ευκλείδειος · 26
ομοιοθεσία · 26, 27, 41
στροφή · 25, 27, 34, 37, 41, 42
σύμμορφος · 28
Υπερβολικής Γεωμετρίας · 64
μη άκαμπτη κίνηση (non-rigid motion) · 26
μη Ευκλείδεια Γεωμετρία · 13, 15, 16, 72, 86
μήκος
ελλειπτικής καμπύλης · 108
υπερβολικής καμπύλης · 74
μήκος ελλειπτικής ευθείας · 111
μιγαδικό επίπεδο · 24
μοντέλο
Klein-Beltrami · 17
της ψευδοσφαίρας · 17
του άνω ημιεπιπέδου · 63, 86
του δίσκου του Poincaré · 19, 37
του μοναδιαίου δίσκου του Poincaré · 63

Ο

ομάδα μετασχηματισμών · 33
οριακά σημεία · 64, 87, 92, 95
ορόκυκλος · 84, 85

Π

παράλληλες οριακές · 70, 90
Προβολική Γεωμετρία · 15
Πρόγραμμα Erlanger · 5, 31, 32, 40, 46, 66
Πρόκλος · 11
Πτολεμαίος · 10
Πυθαγόρας · 7
Πυθαγόρειο θεώρημα
στο υπερβολικό επίπεδο · 81

Σ

στερεογραφική προβολή · 23, 24, 28, 97, 98, 99, 100, 107, 113
Στοιχεία · 7, 32
συμμετρικά σημεία · 57
Σφαιρική Γεωμετρία · 15, 97, 103, 106
σχήμα Klein · 34

Τ

ταυτοποίηση · 105, 106
τρίγωνο
απλά ασυμπτωτικό · 89, 90
διπλά ασυμπτωτικό · 90, 95
ελλειπτικό · 113, 114
τριπλά ασυμπτωτικό · 90, 93, 95

Υ

Υπερβολική Γεωμετρία · 13, 17, 21, 26, 36, 38, 63, 66, 67, 69, 72, 77, 86, 91, 97, 108, 112, 115
υπερβολική ευθεία · 64, 66, 67, 68, 69, 70, 74, 78, 84, 85
υπερβολικός κύκλος · 83, 84