ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ , ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ :

Οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία

ΑΡΓΥΡΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΑΘΗΝΑ , ΙΟΥΝΙΟΣ 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος …….....……...……..5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 …….....9

1.1 Προσδιορισμός της έννοιας των πεποιθήσεων……..…….....9

1.2 Διάκριση των πεποιθήσεων…….....9

1.3 Δομή των πεποιθήσεων για τα μαθηματικά…….....12

1.4.1Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και η διδακτική πρακτική……...……14

1.4.2 Ο ρόλος των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών στη μάθηση και την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης…….....16

1.5.1 Οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά…….....18

1.5.2. Συσχετισμοί των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την απόδειξη στη γεωμετρία. …….....21

1.5.3 Ο ρόλος των πεποιθήσεων των μαθητών σε σχέση με την απόδειξη στη γεωμετρία …….....22

1.6 Η σημασία και η αναγκαιότητα της διερεύνησης της δομής του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την απόδειξη στη γεωμετρία…….....24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2…….....29

2.1 Η απόδειξη στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης …….....30

2.1.2 Ιστορική αναδρομή στις διαφορετικές επιστημολογικές προσεγγίσεις και θέσεις για την απόδειξη στα μαθηματικά και τη γεωμετρία.....30

2.1.3 Οι επιστημολογικές απόψεις που διατυπώθηκαν στην βιβλιογραφία της ιστορίας των μαθηματικών για την γεωμετρική απόδειξη…….....36

2.2 Η απόδειξη στην μαθηματική σχολική τάξη ……40

2.2.1 Η αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας για τη γεωμετρία.....40

2.2.2 Ορισμός της απόδειξης στα μαθηματικά……...42

2.2.3 Τύποι γεωμετρικών αποδείξεων……....45

2.2.4 Ο ρόλος της απόδειξης στην σχολική τάξη διδασκαλίας του μαθήματος της γεωμετρίας…….....47

2.2.5 Η απόδειξη μέσω της επίλυσης προβλήματος……52
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3…….....54
3.1 Οι πεποιθήσεις των μαθητών για την φύση, τη δομή , την οργάνωση και την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία…….....54
3.2 Οι δυσκολίες των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία……..62
3.3 Οι αιτίες για τις δυσκολίες των μαθητών με την απόδειξη στη γεωμετρία….....66
3.3.1 Ο μαθηματικός συλλογισμός ως απαραίτητο συστατικό στοιχείο της αποδεικτικής διαδικασίας…….....67
3.3.2 Θεωρίες ανάπτυξης του γεωμετρικού συλλογισμού. ……....69
3.3.3. Έρευνες από τη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με τα επίπεδα γεωμετρικού συλλογισμού των Van Hiele……....74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4…….....78
4.1. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την φύση και για τον τρόπο μάθησης της απόδειξης στη γεωμετρία. …….....78
4.2 Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και η πρακτική διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία. …….....85
4.3. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και η επιλογή του τύπου της γεωμετρικής απόδειξης ….....87
4.4 Η αποδεικτική μέθοδος που υιοθετείται από τους εκπαιδευτικούς και η επίδραση στις πεποιθήσεις των μαθητών …….....88
4.5 Συσχετισμοί μεταξύ των μορφών διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας και των θεωριών μάθησης της που ενεργοποιούνται στη σχολική τάξη 89
4.6 Επικρατούσες πεποιθήσεις για τη γεωμετρική απόδειξη στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα…….....91
4.6.1 Οι οδηγίες του αναλυτικού προγράμματος σπουδών του παιδαγωγικού ινστιτούτου (Π.Ι) για την απόδειξη στο μάθημα της γεωμετρίας…….....92
4.6.2. Η τρέχουσα σχολική πραγματικότητα για την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και η επίδραση στις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών…….....93
4.6.3. Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην διαμόρφωση των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών…….....94
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5…….....99

5.1 Σύγχρονοι προβληματισμοί για την διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία..99
5.2 Προτάσεις για τη διδασκαλία της απόδειξης στη Γεωμετρία……....100
5.2.1 Η προώθηση της κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας……..100
5.2.2 Η προώθηση και η ανάδειξη των λειτουργιών της απόδειξης μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη…….....102
5.3. Η διδασκαλία της απόδειξης μέσα σε υπολογιστικά προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας (ΥΠΔΓ)……...…….....105
5.3.1 Η προώθηση των λειτουργιών της απόδειξης μέσα σε ΥΠΔΓ……....106
5.3.2 Η απόδειξη ως επεξήγηση μέσα σε ΥΠΔΓ……...107
5.3.3 Η διαδικασία της εξερεύνησης για την ανακάλυψη νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων μέσα σε ΥΠΔΓ…….....108
5.3.4 Η καλλιέργεια της διανοητικής πρόκλησης μέσα σε ΥΠΔΓ……109
5.3.5 Η συστηματοποίηση των αποτελεσμάτων μέσα σε ΥΠΔΓ……...110
5.3.6. Οι νέοι ρόλοι που αναλαμβάνουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί μέσα σε ΥΠΔΓ και επίδραση τους στην αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία. ……111
5.3.7 Ο ρόλος των ανοιχτών γεωμετρικών προβλημάτων των ΥΠΔΓ στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές …….....116
5.3.8 Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης ή μη των ΥΠΔΓ για την αποδεικτική διαδικασία– Μία κριτική θεώρηση …….....120
5.4 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην αποτελεσματική διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία…….....122
5.4.1 Η προώθηση της διδακτικής και γνωστικής επάρκειας του εκπαιδευτικού …122
5.4.2. Η αποτελεσματική διαχείριση των σχολικών εγχειριδίων από τον εκπαιδευτικό…….....126
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ…….....128
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…….....136

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η απόδειξη κατέχει κεντρική θέση και διαδραματίζει εδώ και αιώνες σημαντικό ρόλο στη μαθηματική επιστήμη και ειδικότερα στη γεωμετρία. Η αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας επιβάλει την απόδειξη των εμπειρικών παρατηρήσεων των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων. Η σχετική με την απόδειξη βιβλιογραφία έχει ασχοληθεί με ιστορικές, φιλοσοφικές και εκπαιδευτικές πτυχές της απόδειξης. Η παρούσα θεωρητική εργασία μελετά την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο της μαθηματικής σχολικής κοινότητας.

Η αποδεικτική διαδικασία των θεωρημάτων ή των προτάσεων της γεωμετρίας αναλύεται, δομείται, οργανώνεται και αναπαράγεται μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη. Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούν και συνεργάζονται για την οικοδόμηση της γεωμετρικής γνώσης μέσα από την κατασκευή των αποδείξεων.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο. Από τη μία οι πεποιθήσεις των μαθητών καθορίζουν τον τρόπο δράσης και εμπλοκής τους με τις διδασκόμενες γεωμετρικές καταστάσεις και τον τρόπο κατανόησης της έννοιας της απόδειξης. Από την άλλη οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών καθορίζουν και επηρεάζουν τον τρόπο διδασκαλίας της απόδειξης (Ernest 1989, Thomson 1992, Furinghetti 2007).

Η απόδειξη αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της διδασκαλίας της γεωμετρίας και εμφανίζεται να διαδραματίζει διαφορετικούς ρόλους για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς, ενώ παράλληλα η διδασκαλία της εξυπηρετεί και διαφορετικούς διδακτικούς σκοπούς για κάθε κεφάλαιο του μαθήματος της γεωμετρίας. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο κάθε διδακτική πράξη και δραστηριότητα για την αποδεικτική διαδικασία επηρεάζει και επηρεάζεται από τις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για αυτήν.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να αναδείξει τις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την αποδεικτική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα εργασία εξετάζει τις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για

τη φύση της απόδειξης, για το τι αποτελεί απόδειξη, από πού προέρχεται, πώς δομείται και με ποιο τρόπο αναπτύσσεται η κατασκευή της.

Επιπλέον η παρούσα μελέτη εξετάζει την διαμόρφωση των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών κάτω από τη δυναμική επίδραση των διαφορετικών μορφών διδασκαλίας που εφαρμόζονται στη μαθηματική σχολική τάξη. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο θα εξεταστούν και οι παράγοντες που επηρεάζουν την μορφή διδασκαλίας, που υιοθετεί ο εκπαιδευτικός για την αποδεικτική διαδικασία στο μάθημα της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, οι οδηγίες του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, που αποτυπώνονται κυρίως στο σχολικό εγχειρίδιο της γεωμετρίας αποτελούν βασικούς συντελεστές της μαθησιακής διαδικασίας και της διδασκαλίας της απόδειξης στην γεωμετρία. Με άλλα λόγια η θέση της απόδειξης μέσα στα σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου και του Λυκείου αποτελεί έναν δυναμικό συντελεστή της μάθησης και της διδασκαλίας της απόδειξης και επιδρά στο σύστημα των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Πιο αναλυτικά, η παρούσα η εργασία αναπτύσσεται στα ακόλουθα κεφάλαια :

Στην αρχή του πρώτου κεφαλαίου προσδιορίζεται η έννοια, η φύση και η δομή των πεποιθήσεων μαθητών και εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά γενικά. Η συνοπτική παράθεση απόψεων από τη βιβλιογραφία για τις πεποιθήσεις των μαθητών είναι αναγκαία, προκειμένου να τονιστούν κρίσιμα συστατικά στοιχεία του συστήματος των πεποιθήσεων, να διατυπωθούν συμπεράσματα και κριτικές που μπορούν να επεκταθούν στο ζητούμενο, που είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία.

Εν συνεχεία στο κεφάλαιο αυτό η βιβλιογραφική επισκόπηση παρουσιάζει και επιβεβαιώνει την άρρηκτη και αμφίδρομη σχέση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών με την πρακτική της διδασκαλίας, που εφαρμόζουν. Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό τονίζεται η σημασία της διερεύνησης των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία, καθώς γίνεται εκτενής αναφορά στον τρόπο που η δομή του συστήματος των πεποιθήσεων τους επηρεάζει την συμπεριφορά τους, μέσα από την ανάλυση του ρόλου που αυτή διαδραματίζει κατά την διδασκαλία των μαθηματικών και της γεωμετρίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο θέτει επιστημολογικά ζητήματα για την απόδειξη και χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται μία σύντομη ιστορική αναδρομή για την απόδειξη. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αναλυτικά οι επιστημολογικές απόψεις για την θέση και τον ρόλο της απόδειξης, όπως εμφανίζονται στην ιστορία των μαθηματικών. Στο δεύτερο μέρος ορίζεται η έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά γενικότερα, έτσι όπως παρουσιάζεται μέσα από τη βιβλιογραφία. Επίσης, για τη συμπλήρωση μίας πλήρους εικόνας της φύσης, της έννοιας και της διαδικασίας της απόδειξης στη γεωμετρία αναφέρονται οι τύποι των μαθηματικών αποδείξεων που χρησιμοποιούνται στο σχολικό εγχειρίδιο της γεωμετρίας. Η εκτενής ανάλυση των λειτουργιών της απόδειξης που παρατίθεται στη συνέχεια, έχει ως στόχο μία πρώτη προσέγγιση των επιστημολογικών πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθενται οι πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία μέσα από την βιβλιογραφική επισκόπηση των διαφόρων σχετικών ερευνών. Στη συνέχεια, γίνεται προσπάθεια σύνδεσης των πεποιθήσεων με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με τη γεωμετρική απόδειξη.

Προς την κατεύθυνση αυτή παρουσιάζεται και αναλύεται η στενή σύνδεση της αποδεικτικής διαδικασίας με την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων παραγωγικού και αφαιρετικού συλλογισμού μέσα από τη θεωρία των επιπέδων Van Hiele και τη θεωρία του Piaget.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζονται οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την γεωμετρική απόδειξη, όπως αυτές προκύπτουν κυρίως μέσα από την διδασκαλία τους. Στην συνέχεια αναλύεται εκτενώς η αλληλεπίδραση της δομής των συστήματος των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών με τις διαφορετικές μορφές διδασκαλίας που υιοθετούνται για την απόδειξη, τους τύπους των μαθηματικών αποδείξεων που εφαρμόζονται και τις διαδικασίες μάθησης που υποστηρίζονται από τους εκπαιδευτικούς για την απόδειξη . Μέσα από την ανάλυση αυτή παρουσιάζεται και η επίδραση της διδασκαλίας της γεωμετρικής απόδειξης στη δομή του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών σχετικά με την μάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας

Επίσης στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται και πώς διαμορφώνονται οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών μέσα στις συνθήκες μάθησης και διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας που καθορίζονται από την παρουσίαση της απόδειξης στα σχολικό εγχειρίδιο και κατεπέκταση από τις οδηγίες που προτείνει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Τέλος στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζεται ο τρόπος που επηρεάζονται οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών του Γυμνασίου και του Λυκείου για την απόδειξη στη γεωμετρία, λόγω της θέση που κατέχει και τον ρόλο που διαδραματίζει στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια των δύο βαθμίδων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο συνοψίζονται τα κύρια ευρήματα αυτής της βιβλιογραφικής ανασκόπησης σχετικά με τις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την γεωμετρική απόδειξη και την αλληλεπίδραση τους. Επίσης, παρουσιάζονται διδακτικές προτάσεις σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρικής απόδειξης. Τέλος να σημειωθεί ότι στην παρουσίαση των διδακτικών προτάσεων δίνεται ιδιαίτερη σημασία, αναλύεται εκτενώς και κρίνεται ο ρόλος που διαδραματίζουν τα υπολογιστικά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (ΥΠΔΓ) στην προώθηση μίας αποτελεσματικότερης διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1. 1. Προσδιορισμός της έννοιας των πεποιθήσεων

Η έννοια των πεποιθήσεων (πιστεύω) συνδυάζει στοιχεία ή συνιστώσες από το γνωστικό και από το συναισθηματικό τομέα (Φιλίππου,2002). Οι πεποιθήσεις ενός ατόμου μπορούν να οριστούν ως οι <<υποκείμενες γνώσεις >> του για ένα συγκεκριμένο θέμα (Pehkonen, 2001), δηλαδή είναι το εκάστοτε σύνολο των συμπερασμάτων, των παραδοχών, των προσδοκιών, των εικασιών κ.τ.λ, και ο συνδυασμός τους (Φιλίππου,2002). Κάποιοι μελετητές έχουν καθορίσει τις πεποιθήσεις ως μεταγνωστικά κατασκεύασμα (π.χ., Garofalo & Lester, 1985)

Με βάση την παραπάνω προσέγγιση της έννοιας των πεποιθήσεων, κατά ανάλογο τρόπο, ορίζεται ότι οι πεποιθήσεις ενός ατόμου για την απόδειξη στη γεωμετρία μπορούν να θεωρηθούν ως οι προσωπικές εκτιμήσεις, οι κρίσεις και οι απόψεις που διαμορφώνουν την υποκειμενική γνώση του για τη διαδικασία και την έννοια της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία. Με άλλα λόγια ,αυτό σημαίνει ότι το σύστημα των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την αποδεικτική διαδικασία δεν επιδέχεται αντικειμενική τεκμηρίωση, σε αντίθεση με τις γνώσεις, για τις οποίες υπάρχουν κοινά αποδεκτά κριτήρια επαλήθευσης ή απόδειξης.

1.2 Διάκριση των πεποιθήσεων

Οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά, σύμφωνα με τον Φιλίππου (2002), διακρίνονται :

α) σε πεποιθήσεις ως προς τη φύση των μαθηματικών (επιστημολογικές πεποιθήσεις), όπου προσδιορίζουν θέματα, όπως το τι είναι μαθηματική γνώση, ποια είναι η δομή και η προέλευσή της, πώς αναπτύσσεται, πώς ελέγχεται η εγκυρότητα της κ.λπ..

β) σε πεποιθήσεις ως προς τη σχέση του υποκειμένου με τα μαθηματικά, δηλαδή πώς νοιώθει το άτομο για τα μαθηματικά (η αυτό-εκτίμηση του) και πόσο σημαντική θεωρεί για τον εαυτό του τη μάθηση των μαθηματικών, κ.τ.λ.

γ) σε πεποιθήσεις ως προς τη διδασκαλία των μαθηματικών και τέλος

δ) σε πεποιθήσεις ως προς τη μάθηση των μαθηματικών.

Η παραπάνω διάκριση των πεποιθήσεων φανερώνει την πολυπλοκότητα του ζητήματος των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη και την αναγκαιότητα πολύπλευρης προσέγγισής του. Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί σχηματίζουν διαφορετικές πεποιθήσεις για το τι αποτελεί απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος και για τον τρόπο που σχεδιάζεται μία αποδεικτική διαδικασία.

Όσον αφορά στις πεποιθήσεις του ατόμου για τον εαυτό του είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι, οι μαθητές κατά τη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας αναπτύσσουν πεποιθήσεις αυτοεκτίμησης, ανάλογα με την ικανότητα τους να παράγουν επιχειρήματα και λογικούς συλλογισμούς για την αποδεικτική διαδικασία, αλλά και μέσα από τη δυνατότητα να κατανοήσουν την ίδια την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας από τον εκπαιδευτικό και το σχολικό εγχειρίδιο. Παράλληλα, και οι εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν πεποιθήσεις αυτοεκτίμησης ανάλογα με την εμπειρία τους στη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας και ανάλογα με την επίδοση των μαθητών τους σε γραπτές εξετάσεις αξιολόγησης.

Ο Ernest (1998) αναφέρει τις παρακάτω κατηγορίες επιστημολογικών πεποιθήσεων εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά : α) οι εκπαιδευτικοί που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος (ΛΠ), θεωρώντας τα μαθηματικά μία δυναμική θεώρηση μέσω μιας διαδικασίας συνεχούς αναζήτησης και επέκτασης της γνώσης, τα αποτελέσματα της οποίας δε θεωρούνται αναμφισβήτητα, β) οι εκπαιδευτικοί που υιοθετούν την πλατωνική άποψη (Π), δηλαδή την στατική θεώρηση των μαθηματικών ως σώμα γνώσης αληθειών που συνδέονται μεταξύ τους με βάση τους κανόνες της λογικής και για αυτούς τα μαθηματικά δεν παράγονται, αλλά ανακαλύπτονται και γ) οι εκπαιδευτικοί που ασπάζονται την εργαλειακή άποψη (Ε), και σύμφωνα με αυτούς τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά ως ένα σύνολο γεγονότων, κανόνων και δεξιοτήτων που εξυπηρετούν συγκεκριμένες ανάγκες και λειτουργίες.

Οι παραπάνω πεποιθήσεις συνδέονται άμεσα με τιςπρακτικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία. Συγκεκριμένα , αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι οι εκπαιδευτικοί που υιοθετούν την πλατωνική άποψη ως πρακτική διδασκαλίας, έχουν ως βασικό στόχο την προσέγγιση της

αποδεικτικής διαδικασίας από τους ίδιους τους μαθητές μέσω της ενεργής συμμετοχής τους στην διδασκαλία της. Η εργαλειακή άποψη διδασκαλίας των μαθηματικών εκδηλώνεται μέσα στη σχολική τάξη ως μονόλογος του εκπαιδευτικού, που παρουσιάζει κατά αυστηρό μεθοδικό τρόπο την απόδειξη ενός θεωρήματος, με στόχο οι μαθητές να είναι ικανοί στη συνέχεια να αναπαράγουν τη μέθοδο αυτή σε ασκήσεις γεωμετρίας. Η αποδεικτική διαδικασία μέσω της επίλυσης προβλήματος αναλύεται εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο, όταν παρουσιάζονται οι λειτουργίες της μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη.

Ο απώτερος στόχος των διαφορετικών πρακτικών της διδασκαλίας της απόδειξης, που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί, είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τον ρόλο και τη διαδικασία της απόδειξης στα μαθηματικά. Μέσα όμως από την διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας αποκαλύπτεται και ο τρόπος, με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται την μάθηση της απόδειξης.

Αναφορικά με τις πεποιθήσεις για τη μάθηση των μαθηματικών οι Tsatsaroni et al. (1997) διακρίνουν τρεις κατηγορίες πεποιθήσεων που γίνονται αντιληπτές στους εκπαιδευτικούς μέσα από τη διδασκαλία τους:

(α) ως διαδικασία διερεύνησης (ΔΔ), όπου δίνεται έμφαση στη μαθησιακή χειραφέτηση του μαθητή από τους εκπαιδευτικούς, καθώς ο μαθητής εμπλέκεται στην διαδικασία της κριτικής θεώρησης της γνώσης,

(β) ως διαδικασία κατασκευής (ΔΚ) που χαρακτηρίζεται από την ενεργή εμπλοκή του μαθητή στη διαδικασία μάθησης, με στόχο την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος και

(γ) ως διαδικασία αναπαραγωγής (ΔΑ), όπου δίνεται έμφαση στην αναπαραγωγή της γνώσης και η απομνημόνευση αποτελεί βασικό μέσο μάθησης.

Στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας μελέτης θα διερευνηθεί και θα αναλυθεί εκτενώς ο τρόπος που η πρακτική διδασκαλίας που υιοθετεί ο εκπαιδευτικός , οδηγεί τους μαθητές σε διαφορετικές πεποιθήσεις για τον τρόπο μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας.

Επιπλέον, σε σχέση με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη, ο Balacheff (1991) εντοπίζει ότι μία μερίδα εκπαιδευτικών αντιμετωπίζει την απόδειξη ως εργαλείο εγκυρότητας κάποιου ισχυρισμού και μία άλλη μερίδα θεωρεί ότι η απόδειξη είναι ένα μέσο επικοινωνίας με τους άλλους μαθηματικούς. Τέλος,

διατυπώνεται η άποψη ότι η διδασκαλία της αποδεικτική διαδικασίας έχει ως μακροπρόθεσμο στόχο οι μαθητές να καταστούν ικανοί, να μπορούν να επιβεβαιώσουν με την αποδεικτική διαδικασία την αλήθεια των νέων μαθηματικών γνώσεων, που προκύπτουν μέσα από την ανακαλυπτική προσέγγιση της διδασκαλίας της γεωμετρίας. (Yackel και Cobb, 1996).

1.3 Δομή των πεποιθήσεων για τα μαθηματικά

Η διερεύνηση των πεποιθήσεων για την απόδειξη συνδέεται στενά με το γενικότερο σύστημα των πεποιθήσεων του ατόμου αναφορικά με τα μαθηματικά. Ως εκ τούτου, κρίνεται αναγκαία αρχικά η εξέταση της δομής των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά, μέσα από την βιβλιογραφική επισκόπηση.

Από τη μελέτη της Schommer (1990) σε σπουδαστές της Β. Αμερικής προκύπτουν τέσσερις διαστάσεις για τις πεποιθήσεις, που αφορούν στη φύση της γνώσης και της μάθησης. Αυτές συνδέονται με την πηγή, τη βεβαιότητα, τη δομή και τον έλεγχο της γνώσης και την ταχύτητα της μάθησης.

- Η "πηγή της γνώσης" κυμαίνεται (μεταξύ δύο άκρων): στο ένα άκρο θεωρείται ότι "προσφέρεται από μια αυθεντία που τα ξέρει όλα" και στο άλλο ότι η γνώση προέρχεται από αιτιολόγηση με υποκειμενικά και αντικειμενικά μέσα, δηλαδή δημιουργείται από την κριτική και εμπειρική απόδειξη.
- Η "σταθερότητα της γνώσης" κυμαίνεται από το “η γνώση είναι απόλυτη” μέχρι το “η γνώση μετεξελίσσεται σταθερά”.
- Η "οργάνωση-δομή της γνώσης" κυμαίνεται από μικρά τμήματα μέχρι ολοκληρωμένα κομμάτια.
- Ο "έλεγχος της γνώσης" κυμαίνεται από την άποψη ότι η ικανότητα για μάθηση είναι γενετικά προσδιορισμένη (έμφυτη), μέχρι την άποψη ότι ικανότητα για μάθηση αποκτιέται μέσα από την εμπειρία (σταδιακά βελτιώσιμη) .

Σχετικά με τη δομή των πεποιθήσεων, οι έρευνες του Hofer (2000, 2004) περιλαμβάνουν υφιστάμενα μοντέλα που οι συνιστώσες τους χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: Τη φύση της γνώσης (τι είναι γνώση) και τη διαδικασία μάθησης. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει δύο συνιστώσες: Τη βεβαιότητα και την

απλότητα της γνώσης. Η δεύτερη περιλαμβάνει άλλες δύο: Την προέλευση της γνώσης και την αιτιολόγηση της γνώσης.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις πρώτες κατηγορίες αντιστοιχούν με αυτές της μελέτης της Schommer (1990), ενώ η τέταρτη κατηγορία ονομάστηκε 'αιτιολόγηση της γνώσης' και δίνει μία νέα διάσταση της δομής των πεποιθήσεων. Ακολουθεί μια σύντονη ανάλυση των εννοιών αυτών:

- "Βεβαιότητα της Γνώσης "(Certainty of knowledge): Είναι ο βαθμός κατά τον οποίο η γνώση βρίσκεται ανάμεσα σε δυο άκρα από σταθερή, μέχρι ευέλικτη και σταδιακά μεταβαλλόμενη. Δύναται να παρασταθεί ως συνεχές φάσμα, όπου με την πάροδο του χρόνου μετακινείται ανάμεσα στα δύο άκρα. Από τη θεώρηση ότι η γνώση είναι αμετάβλητη έως του ότι η γνώση είναι αρκετά ευέλικτη.
- "Απλότητα της Γνώσης" (Simplicity of knowledge): Σε αρχικό επίπεδο τα άτομα βλέπουν τη γνώση ως συσσώρευση διακριτών, ανεξάρτητων μεταξύ τους τρημάτων πληροφοριών, ενώ όσο ανεβαίνουν και προχωρούν τα επίπεδα, η γνώση φαίνεται να μετατρέπεται σε ενοποιημένο σώμα γνώσης, το οποίο αποτελείται από ισχυρά συσχετισμένες και συναφείς μεταξύ τους έννοιες.
- "Προέλευση της Γνώσης" (Source of Knowledge): Αναφέρεται στην προέλευση της γνώσης, δηλαδή από που πηγάζει η γνώση. Αναπαρίσταται και πάλι να κινείται ανάμεσα στα άκρα ενός συνεχούς. Στο ένα γίνεται αποδεκτή η δημιουργία της έξω από το άτομο, με τη συμβολή ειδικών/ αυθεντιών, ενώ στο άλλο φαίνεται η ενεργητική κατασκευή της από τα ίδια τα άτομα με βάση την αλληλεπίδραση από το περιβάλλον.
- "Αιτιολόγηση για τη Μάθηση" (Justification for knowing): Δείχνει τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα αφενός αιτιολογούν αυτά που ήδη γνωρίζουν και αφετέρου αξιολογούν αυτή τους τη γνώση. Για παράδειγμα, τα άτομα μπορεί να αιτιολογούν τις πεποιθήσεις τους επικαλούμενοι τους ειδικούς, δηλαδή, στη βάση ότι αυτό υποστηρίζουν οι θεωρούμενοι και ως 'αυθεντίες'.

Τέλος , η μελέτη των Chan και Elliott (2002) χρησιμοποίησε στοιχεία του ερωτηματολογίου της Schommer, προσαρμοσμένα στο κινέζικο πολιτισμικό πλαίσιο και μέσα από παραγοντική ανάλυση διέκρινε τέσσερις διαστάσεις για τις επιστημολογικές πεποιθήσεις:

- " Έμφυτη/ καθορισμένη ικανότητα."

- "Προσπάθεια/ διαδικασία μάθησης".
- "Γνώση αυθεντιών/ ειδικών".
- "Βεβαιότητα της γνώσης".

Η συγκεκριμένη μελέτη παραθέτει άλλη μία διάσταση των πεποιθήσεων, την 'έμφυτη/ καθορισμένη ικανότητα', ενώ οι άλλες τρεις διαστάσεις είναι απόλυτα σχετικές με τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων ερευνών.

Κάθε μία από τις διαστάσεις μπορούμε να την αντιληφθούμε κάτω από το πρίσμα δύο άκρων.

- Η "έμφυτη/καθορισμένη" ικανότητα αναφέρεται από τη μία στη δυνατότητα που είναι έμφυτη και σταθερή και από την άλλη στη δυνατότητα που είναι συνολικά μεταβλητή.
- Η "προσπάθεια/ διαδικασία μάθησης" αναφέρεται από τη μία στην εργασία και στην πρακτική που γίνεται ή την κατανόηση στο άλλο άκρο.
- Η "γνώση αυθεντιών/ ειδικών" αναφέρεται στη γνώση που μεταδίδεται από τους ειδικούς ή τη γνώση που κατασκευάζεται από το ίδιο το άτομο ενεργητικά μέσω της αλληλεπίδρασης του περιβάλλοντος.
- Η "βεβαιότητα της γνώσης" αναφέρεται στη φύση της γνώσης, η οποία μπορεί να είναι σίγουρη, μόνιμη και αμετάβλητη ή στη γνώση εκείνη που είναι δοκιμαστική (υπό εξέταση) και συνεχώς μεταβαλλόμενη.

Οι παραπάνω μελέτες φανερώνουν ότι, η προσωπική επιστημολογία του κάθε μαθητή και του κάθε εκπαιδευτικού είναι σύνθετη και αποτελείται από περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταξύ τους πεποιθήσεις, που καθεμιά από αυτές έχει τον δικό της ρόλο στον τρόπο αντιμετώπισης των γεωμετρικών αποδείξεων και στον τρόπο προσέγγισης της γνώσης τους.

1.4.1 Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και η διδακτική πρακτική

Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά μπορούν να εξεταστούν μέσα από τις εφαρμοζόμενες πρακτικές διδασκαλίας τους. Οι μελέτες για την διερεύνηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών επιβεβαιώνουν ότι ο τρόπος

διδασκαλίας είναι η πηγή πληροφοριών και ο εκφραστής του συστήματος των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών.

Πιο αναλυτικά, η Furinghetti (2007) επισημαίνει ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αποτελούν μέρος της γνώσης για τη διδασκαλία τους. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών οργανώνονται σε ένα δυναμικό σύστημα, που βρίσκεται σε μία συνεχή διαλεκτική σχέση με την πρακτική διδασκαλίας τους .

Σύμφωνα επίσης με την Thompson (1992) είναι αδύνατο να διακριθούν οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών από τη φύση της γνώσης που αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί, επειδή όπως διευκρινίζει «οι εκπαιδευτικοί μεταχειρίζονται τις πεποιθήσεις τους ως γνώση» (σελ. 127).

Αναφέρει επίσης ότι στην περίπτωση των εκπαιδευτικών είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη δύο είδη πεποιθήσεων:

(α) οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και

(β) οι πεποιθήσεις για τη μαθηματική διδασκαλία και την εκμάθηση.

Αυτά τα δύο είδη πεποιθήσεων συνδέονται προφανώς με την επάρκεια και το παιδαγωγικό περιεχόμενο της γνώσης του εκπαιδευτικού και - όπως εξηγεί - μπορούν να επηρεάσουν σε μεγάλο βαθμό την εκπαιδευτική πρακτική που υιοθετούν και εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί.

Τέλος και ο Ernest (1989) επιβεβαιώνει την άρρηκτη σχέση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών με την πρακτική διδασκαλίας, καθώς αναφέρει χαρακτηριστικά ότι ‘ η διδασκαλία των μαθηματικών καθορίζεται από τρεις παράγοντες που εξαρτώνται απόλυτα μεταξύ τους και οι οποίοι είναι : α) οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους β) οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την εκμάθηση των μαθηματικών και γ) το κοινωνικό πλαίσιο’ .

Η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας φανερώνει επιπλέον ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και οι πρακτικές διδασκαλίας αλληλεπιδρούν με έναν δυναμικό, μη γραμμικό τρόπο και η συμβατότητά τους εμφανίζεται άλλοτε υψηλή και άλλοτε όχι. Πολλοί ερευνητές, αναγνωρίζοντας την πολυπλοκότητα αυτής της σχέσης υποστηρίζουν την αναγκαιότητα διερεύνησης της τόσο σε συλλογικό όσο και σε ατομικό επίπεδο (μελέτες περίπτωσης).

Επομένως, η μελέτη των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών έχει ως στόχο να εντοπίσει και να κατανοήσει τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται και

εφαρμόζουν το διδακτικό έργο τους. Όμως να τονιστεί ότι ισχύει και το αντίστροφο, καθώς η προσέγγιση του τρόπου διδασκαλίας των εκπαιδευτικών είναι η κατανόηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για την φύση της γνώσης και του τρόπου μάθησης της.

Αυτό ισχύει και στην περίπτωση της διδασκαλίας της απόδειξης στη γεωμετρία, καθώς οι πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού για τη φύση της και τη διαδικασία μάθησης της αντικατοπτρίζονται πάνω στις αρχές που οικοδομεί την διδασκαλία της. Αυτό σημαίνει, ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αποτελούν κομβικό σημείο για την εξέταση και για την οργάνωση της εκπαιδευτικής και μαθησιακής διαδικασίας, που έχει ως στόχο την πρόσβαση στην γνώση των αποδείξεων του μαθήματος της γεωμετρίας .

1.4.2. Ο ρόλος των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών στη μάθηση και την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης

Ο Schoenfeld (1998) διατυπώνει την άποψη ότι οι πεποιθήσεις ενός ατόμου ασκούν ισχυρή διαμορφωτική επίδραση επάνω στη συμπεριφορά του. Η Thomson (1992) συμπληρώνει ότι για την περίπτωση των εκπαιδευτικών, οι πεποιθήσεις τους διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της συμπεριφοράς τους κατά την διδασκαλία μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη. Το ίδιο πιστεύουν και οι Clark και Yinger (1987) όταν αναφέρουν ‘ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών έχουν καθοριστική επίδραση στις διδακτικές πρακτικές τους, που υιοθετούν και εφαρμόζουν’

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη τις αναφορές αυτές, στην περίπτωση της διδασκαλίας της απόδειξης στη γεωμετρία γίνεται αντιληπτό ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών ρυθμίζουν απόλυτα την πορεία διδασκαλίας της. Επεκτείνοντας τη διαπίστωση αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο τρόπος διδασκαλίας επηρεάζει τους μαθητές στον τρόπο μάθησης και απόκτηση της γνώσης της αποδεικτικής διαδικασίας. Δηλαδή, οι πεποιθήσεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για την απόδειξη δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών. Ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει στο πλαίσιο της διδασκαλίας της γεωμετρίας να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την απόδειξη ενός θεωρήματος, οπότε οι μαθητές ως

άμεσοι αποδέκτες των μηνυμάτων του επηρεάζονται και στο τι θα θεωρούν ότι αποτελεί απόδειξη στη γεωμετρία, άλλα και στον τρόπο μάθησης αυτής της διαδικασίας.

Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών καθορίζουν απόλυτα τις ενέργειες τους στην πορεία διδασκαλίας , καθώς όπως αναφέρεται από τους McDiarmid, Ball και Anderson (1989), οι αποφάσεις των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο της διδασκαλίας συνδέονται στενά με τις πεποιθήσεις που έχουν διαμορφώσει για το γνωστικό αντικείμενο που διδάσκουν. Οπότε, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν κατανοήσει πλήρως το περιεχόμενο του γνωστικού αντικείμενο, προτού το διδάξουν (Schorr, 2000).

Όμως μέσα από την ουσιαστική μελέτη και βαθύτερη ενδοσκόπηση του γνωστικού αντικειμένου διαμορφώνονται και διαφορετικές πεποιθήσεις μεταξύ των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο του και κατ΄επέκταση για την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία.

Έτσι για κάποιους εκπαιδευτικούς το γνωστικό αντικείμενο της αποδεικτικής διαδικασίας ενός θεωρήματος αποτελείται από ένα σύνολο μαθηματικών δεξιοτήτων, που πρέπει να καλλιεργήσουν οι μαθητές μέσα από την πορεία διδασκαλίας. Κάποιοι άλλοι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι είναι ένα σύνολο από ιδέες ή γεωμετρικές έννοιες, που πρέπει να μεταδοθούν στους μαθητές. Τέλος υπάρχουν και οι εκπαιδευτικοί που θεωρούν ότι η αποδεικτική διαδικασία είναι ένας τρόπος σκέψης για συγκεκριμένα είδη γεωμετρικών προβλημάτων, που οφείλουν να καλλιεργήσουν και να αναπτύξουν οι μαθητές μέσα από την πορεία διδασκαλίας της.

Επίσης η ουσιαστική μελέτη του γνωστικού αντικειμένου από την πλευρά του εκπαιδευτικού επηρεάζει και την ποιότητα διδασκαλίας, καθώς και την αποτελεσματικότητά της (Thomson, 1992). Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η διερεύνηση και η κατανόηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών ή της εννοιολογικής τους βάσης θα συμβάλλει σημαντικά στην προώθηση της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών, καθώς και στην αποτελεσματική διδασκαλία (Fang, 1996).

Επιπλέον όμως, η διδακτική πρακτική που εφαρμόζεται κατά την διδασκαλία της γεωμετρίας και των άλλων μαθημάτων κάποιες φορές αναθεωρείται και αλλάζει. Αυτό μπορεί να συμβεί κατά την διάρκεια του σχολικού έτους διδασκαλίας, αλλά και

μέσα σε μία διδακτική ώρα διδασκαλίας. Για το θέμα αυτό, ο Bailey (1992) θεωρεί ότι οι αλλαγές στα πιστεύω των εκπαιδευτικών προηγούνται των αλλαγών στις πρακτικές που εφαρμόζουν.

Μ' αυτό συμφωνεί και η Thomson(1992), ο οποίος ισχυρίζεται πως οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αποτελούν δυναμικά συστήματα τα οποία μπορούν να διαφοροποιηθούν και κατ' επέκταση να αλλάξουν, εφόσον έρθουν σε ρήξη με την διδακτική τους εμπειρία. Ο Lawrenz (1984) επιπλέον πιστεύει, πως η αλλαγή νοοτροπίας των εκπαιδευτικών είναι ένας σημαντικός παράγοντας για διαμόρφωση της διδασκαλίας και των πρακτικών που υιοθετούν και χρησιμοποιούν, για την μετάδοση της γνώσης της γεωμετρικής απόδειξης. Πιο συγκεκριμένα, όταν μετά την αλλαγή πεποιθήσεων, ακολουθήσει αλλαγή των πρακτικών διδασκαλίας των εκπαιδευτικών και διαπιστωθεί ότι ικανοποιούνται οι επιδιωκόμενοι διδακτικοί στόχοι του μαθήματος της γεωμετρίας, τότε αυτό σαφέστατα τους κινητοποιεί προς την αλλαγή της νοοτροπίας τους.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω απόψεις καταλήγουμε στο ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν, όχι μόνο τις πρακτικές και τις παιδαγωγικές επιλογές τους, αλλά και την επιλογή του περιεχομένου της διδασκαλίας της απόδειξης στη γεωμετρία. Μπορούν να αναθεωρηθούν και να αλλάξουν, ανάλογα με τα διδακτικά αποτελέσματα

1.5.1 Οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά

Ένας σχετικά μεγάλος αριθμός ερευνών έχουν εξετάσει την δομή των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, η μελέτη του Garofalo (1989) διερεύνησε τις πεποιθήσεις μαθητών Γυμνασίου για τα μαθηματικά. Στα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι οι μαθητές θεωρούν ότι σχεδόν όλα τα προβλήματα μαθηματικών μπορούν να λυθούν με βάση γνωστούς ορισμούς, προτάσεις και θεωρήματα, κανόνες, τύπους, και μεθοδολογίες που έχουν διδαχτεί από τον εκπαιδευτικό ή παρουσιάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο. Όμως όπως τονίζεται οι μαθητές θεωρούν ότι η προαπαιτούμενη γνώση για την λύση των μαθηματικών προβλημάτων κάποιου κεφαλαίου ή κάποιας διδακτικής ενότητας αναφέρεται σε ότι

διδάχτηκε και οφείλουν να γνωρίζουν από αυτό μόνο το συγκεκριμένο κεφάλαιο ή από αυτήν μόνο την συγκεκριμένη ενότητα.

Σχετικά με την δομή και την οργάνωση της μαθηματικής γνώσης, οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα ιδιαίτερα τεμαχισμένο σύνολο κανόνων και διαδικασιών και λιγότερο ένα σύνθετο και αλληλένδετο εννοιολογικά αντικείμενο.

Όσον αφορά την διαδικασία μάθησης των μαθηματικών, η αποστήθιση των μεθόδων, των ορισμών, των κανόνων και των τύπων αναγνωρίζεται ως μία κοινή πεποίθηση των μαθητών. Ενώ ως πηγή γνώσης των μαθητών θεωρούν τους εκπαιδευτικούς και τα σχολικά εγχειρίδια. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές θεωρούν ιδιαίτερα ταλαντούχους και χαρισματικούς τους μαθητές που μπορούν να παράγουν μαθηματικά συμπεράσματα και να επιλύουν ασκήσεις μαθηματικών.

Ο Frank (1988) εξέτασε τις πεποιθήσεις των μαθητών Γυμνασίων που θεωρήθηκαν από μαθηματική άποψη ταλαντούχοι (βασισμένοι στα αποτελέσματα μίας τυποποιημένης διαγνωστικής αξιολόγησης). Η έρευνα αυτή προσθέτει στα αποτελέσματα της μελέτης του Garofalo (1989) για την δομή των πεποιθήσεων των μαθητών και την ‘‘ταχύτητα της μάθησης’’. Αναφέρει ότι οι μαθητές θεωρούν ότι τα προβλήματα των μαθηματικών πρέπει να λυθούν γρήγορα και με μία συγκεκριμένη μεθοδολογία. Για την διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών, οι μαθητές θεωρούν ότι εξαρτάται από την δέουσα προσοχή που θα δώσουν κατά την διδασκαλία της μαθηματικής γνώσης από τον εκπαιδευτικό.

Σύμφωνα με τις πεποιθήσεις τους για την πηγή της γνώσης, ο δάσκαλος είναι αρμόδιος για να καθορίσει εάν οι απαντήσεις τους είναι σωστές ή λάθος. Στον εκπαιδευτικό αναγνωρίζουν και τον ρόλο του διαβιβαστή της μαθηματικής γνώσης. Συγκεκριμένα οι μαθητές πιστεύουν ότι εάν ο εκπαιδευτικός μεταδώσει την γνώση με αποτελεσματικό τρόπο τότε οι μαθητές με τη σειρά τους θα καταστούν ικανοί να παράγουν γρήγορα και ορθά απαντήσεις σε μαθηματικά καταστάσεις. Τέλος, στον εκπαιδευτικό αποδίδουν και τον ρόλο του αξιολογητή για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης, καθώς θεωρούν ότι ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα διαπιστώσει με την γραπτή ή την προφορική εξέταση των μαθητών, εάν αυτοί έχουν λάβει την νέα διδασκόμενη μαθητική γνώση και μπορούν να την αναπαράγουν στην διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Με τα παραπάνω συμφωνεί και μελέτη των Diaz-Obando και λοιποί (2003) που βασίστηκε στην παρατήρηση της διδασκαλίας σε σχολική τάξη μαθηματικών και σε συνέντευξη με δύο από τους μαθητές της σχολικής τάξης. Από τη συνέντευξη προκύπτει ότι ο μαθητής πιστεύει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών απαιτεί την γνώση μία μόνο μεθοδολογίας, που περιλαμβάνει τις διαδικασίες των τεσσάρων βασικών πράξεων, ενώ όλες οι μαθηματικές καταστάσεις αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας. Έτσι, σύμφωνα με τα πιστεύω του είναι αναγκαίο οι μεθοδολογίες και οι στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων να παρουσιάζονται, να εξηγούνται και να αναλύονται από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία στην τάξη των μαθηματικών. Οι πεποιθήσεις του άλλου μαθητή για την μάθηση των μαθηματικών, που αποτυπώνονται στη συνέντευξη, συνίστανται στη μίμηση και την εξάσκηση των προτεινομένων διδασκόμενων μεθοδολογιών επίλυσης προβλημάτων.

Η αποστήθιση ως μέθοδος μάθησης των μαθηματικών, συγκαταλέγεται στα αποτέλεσμα για τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και στην έρευνα του Spangler (1992). Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές προτιμούν να εξασκηθούν με μία μόνο μεθοδολογία επίλυσης ενός προβλήματος, διότι πιστεύουν ότι κατά αυτό τον τρόπο μειώνεται ο όγκος των γνώσεων που οφείλουν να απομνημονεύσουν. Εκδήλωσαν αρνητική στάση στην μάθηση διαφορετικών μεθόδων επίλυσης προβλημάτων, που θα τους δώσει τη δυνατότητα να επιλέξουν κατά την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος εκείνη τη μέθοδο που θεωρούν ως πιο αποτελεσματική, αλλά και θα τους βοηθήσει να ελέγξουν τις απαντήσεις τους, επιλύοντας το μαθηματικό πρόβλημα με περισσότερους από έναν τρόπους.

Τέλος στη μελέτη του Fleener (1996) υπήρχε διαφωνία στις πεποιθήσεις των μαθητών για την ‘έμφυτη ικανότητα μάθησης των μαθητών’. Οι απόψεις τους διίστανται στο εάν οι ταλαντούχοι μαθητές από πλευράς μαθηματικής επίδοσης, μπορούν να αντεπεξέλθουν με επιτυχία κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, όταν ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί με διαφορετικούς τρόπους και η απάντηση του αποτελείται από περισσότερες από μία λύσεις.

1.5.2. Συσχετισμοί των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την απόδειξη στη γεωμετρία.

Οι παραπάνω βιβλιογραφικές αναφορές αυτές μπορούν να επεκταθούν και να εξάγουμε βασικές παρατηρήσεις για τη δομή των πεποιθήσεων των μαθητών για την απόδειξη στο μάθημα της γεωμετρίας. Έχοντας λοιπόν υπόψη τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών , διαπιστώνουμε ότι όσον αφορά 'τη βεβαιότητα της μαθηματικής γνώσης' οι μαθητές θεωρούν ότι η γνώση είναι αμετάβλητη. Άρα, από όλους τους μαθητές αναγνωρίζεται ότι ένα γεωμετρικό θεώρημα αποτελεί μία σταθερή και αμετάβλητη γνώση για την γεωμετρική κατάσταση, στην οποία αναφέρεται.

Από την άλλη, οι μαθητές θεωρούν ότι ο στόχος της επίλυσης προβλήματος μαθηματικών είναι να βρεθεί πάντα μία σωστή απάντηση, όπου η ορθότητά της θα επιβεβαιωθεί από τον διδάσκοντα. Σύμφωνα με αυτή την πεποίθηση, όταν διατυπωθεί λεκτικά ή γραπτά στους μαθητές: «αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα», θεωρούν ότι ο στόχος είναι να ανταποκριθούν επιτυχώς στην ανάπτυξη της διαδικασίας που θα επαληθεύει το θεώρημα. Επιπλέον αυτό πρέπει να πραγματοποιηθεί γρήγορα, χωρίς να δώσουν βαρύτητα στην κατανόηση του θεωρήματος .

Όσον αφορά 'την ταχύτητα μάθησης' της αποδεικτικής διαδικασίας οι μαθητές επιπλέον θεωρούν ότι αν δεν έχουν αποδείξει ένα γεωμετρικό θεώρημα σε χρονικό διάστημα 5 ή 10 λεπτών, τότε δεν θα είναι σε θέση να αντεπεξέλθουν στο ζητούμενο. Πιστεύουν ότι αυτό συμβαίνει, είτε επειδή δεν διαθέτουν έμφυτες μαθηματικές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων ή επειδή το ίδιο το θεώρημα έχει διατυπωθεί με λανθασμένο τρόπο ή ακόμα επειδή οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι ελλιπείς .

Είναι κοινή πεποίθηση των μαθητών ότι η γνώση των μαθηματικών, όποτε και η γνώση που της αποδεικτικής διαδικασίας, παρέχεται από κάποια αρχή, που είναι ο εκπαιδευτικός η το σχολικό εγχειρίδιο. Επιπλέον, θεωρούν ότι μόνο οι ταλαντούχοι μαθητές από πλευράς μαθηματικής επίδοσης μπορούν να αναπτύξουν την αποδεικτική διαδικασία των θεωρημάτων της γεωμετρίας.

Στα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών διαπιστώνεται ότι οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν ότι η δομή της μαθηματικής γνώσης είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους στοιχείων. Η πεποίθηση αυτή ίσως ανατρέπεται στην περίπτωση της

απόδειξης, διότι όταν οι μαθητές έρθουν αντιμέτωποι με την απόδειξη ενός θεωρήματος διαπιστώνουν ότι η διαδικασία αποτελείται από τη σύνδεση απόλυτα εξαρτημένων ορισμών, αξιωμάτων και ήδη γνωστών γεωμετρικών εννοιών.

1.5.3 Ο ρόλος των πεποιθήσεων των μαθητών σε σχέση με την απόδειξη στη γεωμετρία .

Τα παραδείγματα που ακολουθούν προκύπτουν ως συμπερασματικές επισημάνσεις των βιβλιογραφικών απόψεων που διατυπώθηκαν παραπάνω για τον ρόλο του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών.

Εάν ένας μαθητής πιστεύει ότι η δομή και η οργάνωση της γνώσης συνίσταται από απομονωμένα και ανεξάρτητα μεταξύ τους τμήματα (γεγονότα ή πληροφορίες) τότε, ενδεχομένως να υιοθετήσει ως τρόπο μάθησης της αποδεικτικής διαδικασία την απομνημόνευση των ορισμών, των θεωρημάτων και των προτάσεων, από ενότητες του μαθήματος της γεωμετρίας, που η καθεμία αναφέρεται σε διαφορετικές ιδιότητες γεωμετρικών αντικειμένων. Στην συνέχεια, κάτω από την διαμόρφωση τέτοιων πεποιθήσεων, αργότερα κατά ακαδημαϊκή του πορεία ως φοιτητής είναι πολύ δύσκολο να αντεπεξέλθει στις απαιτήσεις των παραδόσεων. Σε ακαδημαϊκό επίπεδο καλείται να εφαρμόσει την δια θεματική προσέγγιση της ύλης της γεωμετρίας, καθώς αντιμετωπίζει και συσχετίζει έννοιες, γεγονότα και πληροφορίες από διάφορες γνωστικές περιοχές. Αντίθετα, ο φοιτητής που πιστεύει ότι η γνώση οργανώθηκε με την οικοδόμηση και σύνδεση άκρως συνασμένων εννοιών μπορεί να πετύχει μία υψηλή βαθμολογική ακαδημαϊκή επίδοση, καθώς είναι σε θέση να μεταφέρει και να εφαρμόζει γεωμετρικές έννοιες από διάφορα μαθήματα, που διδάσκονται.

Επίσης, μαθητές και φοιτητές που έχουν διαμορφώσει την πεποίθηση ότι υπάρχει πάντα μία απάντηση σε συγκεκριμένο τύπο γεωμετρικών προβλημάτων, είναι πιθανό να αποτύχουν όταν η αποδεικτική διαδικασία εκτελείται επιτυχώς με περισσότερους από έναν τρόπους. Η πλήρης κατανόηση μίας ενότητας ίσως σημαίνει για αυτούς απλά μία γρήγορη ανάγνωση των όσων αναφέρονται, πράγμα το οποίο δεν μπορεί να έχει βάση για ένα μάθημα γεωμετρίας, που η μελέτη του απαιτεί χρόνο, συστηματική επανάληψη ήδη αποδεδειγμένων προτάσεων ή θεωρημάτων.

Αντίθετα, μαθητές που πιστεύουν στη σταδιακή μάθηση ενδέχεται πρωτίστως να εξετάσουν το υλικό που έχουν να μελετήσουν και στη συνέχεια να αποφασίσουν πόσος χρόνος χρειάζεται, χωρίς όμως αυτό να είναι δεσμευτικό, καθώς θα εξαρτηθεί από την πρόοδο ως προς την κατανόηση του θέματος. Διαφορετικές πεποιθήσεις φαίνεται ότι διαμορφώνουν διαφορετικές στρατηγικές μάθησης, άλλοτε λιγότερο και άλλοτε περισσότερο ωφέλιμες για την επίδοση του μαθητή.

Επιπλέον, η πίστη της ταχύτητας διεξαγωγής των γεωμετρικών αποδείξεων μπορεί να επηρεάσει τον χρόνο που αφιερώνουν οι μαθητές για τη μελέτη του μαθήματος της γεωμετρίας. Αυτοί που ισχυρίζονται ότι ένα πρόβλημα των μαθηματικών πρέπει να λύνεται γρήγορα, είναι αναμενόμενο όταν θα αναλάβουν τη διεξαγωγή μίας αποδεικτικής διαδικασίας, η οποία από τη φύση της χαρακτηρίζεται από πολυπλοκότητα και γενικά οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες, θα ορίσουν ένα ανώτατο χρονικό όριο για την εκτέλεσή της και πιθανόν να αποτύχουν με το να προσπαθήσουν να αναπτύξουν συλλογισμούς πολύ γρήγορα.

Τέλος, οι πεποιθήσεις των μαθητών για τον έλεγχο της μάθησης είναι πιθανό να επηρεάσουν ερμηνείες λαθών και την επιμονή που δείχνουν για την αντιμετώπιση της δυσκολίας μάθησης των διαδικασιών των γεωμετρικών αποδείξεων. Ισχυρές πεποιθήσεις στη σταθερότητα της ικανότητας είναι πιθανό να οδηγήσουν τους μαθητές στην πίστη ότι τα λάθη αντικατοπτρίζουν την γνωστική ανεπάρκειά τους. Έτσι, μπορεί να αισθανθούν απογοήτευση και αναμένεται να εγκαταλείψουν τις προσπάθειες ανέρευσης δικαιολογιών μπροστά στις δυσκολίες που ανακύπτουν σε μία αποδεικτική διαδικασία.

Αντίθετα, οι ισχυρές πεποιθήσεις σε οριακή ικανότητα πιθανόν να κάνουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τα λάθη τους ως ευκαιρίες για μάθηση. Μπορεί τότε να επιδείξουν αυξημένη ένταση ενδιαφέροντος για αποδεικτικές διαδικασίες ή για την επίλυση προβλημάτων, μέσα από τις οποίες μπορούν να επιχειρήσουν διαφορετικές στρατηγικές για τη μελέτη και όχι απλά να εγκαταλείψουν στην πρώτη δυσκολία παραγωγής επιχειρήματος.

1.6 Η σημασία και η αναγκαιότητα της διερεύνησης της δομής του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την απόδειξη στη γεωμετρία.

Οι έρευνες που εξετάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την γνώση και τον τρόπο μάθησης της σε σχέση με τη μαθηματική συμπεριφορά τους, αποκαλύπτουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Οι πεποιθήσεις καθορίζουν τον βαθμό της ενεργής συμμετοχής των μαθητών στην διδασκόμενη κατάσταση, που έχει ως αποτέλεσμα την επίτευξη μίας υψηλής βαθμολογικής επίδοσης. Συγκεκριμένα, ποιοτικά προσανατολισμένες μελέτες δείχνουν ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την εμπλοκή τους στη μάθηση μιας μαθηματικής κατάστασης, καθώς καθορίζουν το χρονικό διάστημα που εργάζονται σε ένα πρόβλημα, τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να το λύσουν και τις αιτιολογήσεις που αναπτύσσουν για να εξηγήσουν και να επαληθεύσουν τη σωστή απάντηση.

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, η έρευνα στον τομέα των πεποιθήσεων επικεντρώνεται στο πως οι πεποιθήσεις που έχουν διαμορφώσει οι μαθητές ενεργοποιούν συγκεκριμένες γνωστικές λειτουργίες και υποκινούν σημαντικούς συντελεστές της πορείας της μαθησιακής διαδικασίας, δίνοντας ως αποτέλεσμα την επίδοση του κάθε μαθητή.

Η μελέτη της Schommer (1998) έδειξε ότι μαθητές που πιστεύουν ότι η μαθηματική γνώση είναι αμετάβλητη, έχουν χαμηλότερες βαθμολογίες στο επίτευγμα των μαθηματικών από μαθητές που πιστεύουν ότι οι μαθηματικές γνώσεις εξελίσσονται. Επίσης, οι μαθητές που πίστευαν ότι οι μαθηματικές γνώσεις αποτελούνται από μεμονωμένα μέρη πληροφοριών έχουν γενικά χαμηλότερα αποτελέσματα επιτεύγματος μαθηματικών από μαθητές, οι οποίοι πίστευαν ότι οι μαθηματικές γνώσεις πρέπει να είναι αλληλένδετες. Σαν βασικό συμπέρασμα των αποτελεσμάτων από την έρευνα της είναι ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών έχουν άμεσες συνέπειες στην μαθηματική επίδοση.

Ο Schoenfeld (1983) εξέτασε τη συμπεριφορά των μαθητών όταν έρχονται σε επαφή με τη νέα γνώση, με βάση το διαμορφωμένο σύστημα των πεποιθήσεων τους. Υποστήριξε ότι μέσα σε μία μαθησιακή κατάσταση λαμβάνουν χώρα γνωστικές συμπεριφορές που διαμορφώνονται από ένα ευρύ κοινωνικό-γνωστικό (τάξη διδασκαλίας της γεωμετρίας) και μεταγνωστικό πλαίσιο.

Συγκεκριμένα, η συμπεριφορά ενός μαθητή συχνά στηρίζεται σε πεποιθήσεις σχετικά με: (α) γραπτές πληροφορίες που αναφέρονται στο θέμα μελέτης,
(β) το κοινωνικό περιβάλλον που συντελείται η μαθησιακή διαδικασία και
(γ) τον εαυτό του και την σχέση του με το γνωστικό αντικείμενο που μελετάται.

Για να διερευνηθεί το θέμα αυτό, εξετάστηκαν οι πεποιθήσεις των μαθητών Γυμνασίου μέσα από τις ενέργειες τους όταν τους δίνεται να μελετηθεί και να λυθεί ένα πρόβλημα γεωμετρίας. Στα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι στις πεποιθήσεις των μαθητών αναγνωρίζεται η εμπειρική φύση της γνώσης. Συγκεκριμένα όταν επιλύουν προβλήματα γεωμετρίας, οι μαθητές πειραματίζονται με τις υποθέσεις και τις μεθοδολογίες με την ελπίδα να βρουν την λύση . Επιπλέον, οι μαθητές θεωρούν ότι η αιτιολόγηση της απάντησή τους προκύπτει από αυτά που έχουν αποτυπωθεί στην κατασκευή του γεωμετρικού αντικειμένου. Η λύση του προβλήματος βασίζεται στην εμπειρική προσέγγιση. Οι μαθητές αγνοούν την ορθολογική και λογική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος, που περιλαμβάνει τη ανάπτυξη των παραγωγικών και αναλυτικών αποδείξεων για την επαλήθευση και την αιτιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Η έρευνα των Lester &Garofalo (1987) για την διερεύνηση των πεποιθήσεων των μαθητών Γυμνασίων σε σχέση με την συμπεριφορά τους δίνει παρόμοια αποτελέσματα. Συγκεκριμένα οι μαθητές αιτιολογούν την γνώση με βάση την εμπειρία, πειραματίζονται να δοκιμάσουν και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις (δηλαδή, πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση) κατά την διαδικασία επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος. Στην συνέχεια επιλέγουν την απάντηση που θεωρούσαν πιο λογική με βάση τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος.

Οι μαθητές που πιστεύουν ότι όλα τα προβλήματα των μαθηματικών λύνονται μετά από την εκτέλεση μίας σειράς υπολογισμών, οδηγούνται σε μια μεταγενέστερη έλλειψη μεταγνωστικών συμπεριφορών. Επιπλέον, οι μαθητές που θεωρούν ότι τα μαθηματικά προβλήματα πρέπει να επιλυθούν γρήγορα, δεν μπορούν να εκτιμήσουν την ορθότητα των απαντήσεων τους μέσα από μία λογική διαδικασία επαλήθευσης.

Πολλοί είναι οι μελετητές που επιβεβαιώνουν ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά επηρεάζουν τον τρόπο αντιμετώπισης τους και της κατανόησης των μαθηματικών καταστάσεων .

Οι Mtetwa και Garofalo (1989) θεωρούν ότι οι πεποιθήσεις επηρεάζουν τη συναισθηματική προσέγγιση των μαθηματικών από τους μαθητές, δηλώνοντας ότι: «οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις εργασίες των μαθηματικών μπορούν ευθέως να αποδοθούν σε μη υγιείς πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών, τις σχολικές εργασίες και τη μαθηματική συμπεριφορά» (σελ 111).

Ο Cobb (1986) θεωρεί ότι οι πεποιθήσεις είναι κρίσιμα συστατικά της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς οδηγούν τον κάθε μαθητή στην θέσπιση στόχων, μέσα από τον ρόλο και την σημασία που αποδίδει στην κάθε γεωμετρική κατάσταση. Η επινόηση ενός στόχου οριοθετεί και τις πιθανές ενέργειες για την πραγματοποίηση του. Οι ενέργειες του μαθητή είναι ουσιαστικά η έκφραση των πεποιθήσεων και των προσδοκιών του για την ολοκλήρωση του σχεδιασμού της αποδεικτικής διαδικασίας.

Οι Schutz, Pintrich, και Young (1993) διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές με ισχυρές πεποιθήσεις αυτοαποτελεσματικότητας και αυτεπάρκειας του γνωστικού αντικειμένου της γεωμετρίας, είναι πιο πιθανό να υιοθετήσουν συγκεκριμένους στόχους για την εκμάθηση αποδεικτικών διαδικασιών και να διεισδύσουν στην ουσία του συλλογισμού που θα τους δώσει και την κατανόηση της απόδειξης.

Ο Coler (2001) αναφέρει ότι οι διαστάσεις των πεποιθήσεων των μαθητών είναι προάγγελοι των επιτυχιών τους στα μαθηματικά, καθώς έχουν άμεση σχέση με την υλοποίηση των στόχων που θέτουν οι μαθητές. Οι πεποιθήσεις τους για την προσπάθεια και την διαδικασία της μάθησης επηρεάζουν θετικά τη διαδικασία προσέγγισης της νέας γνώσης από τους μαθητές, καθώς τους ενεργοποιούν να συμμετέχουν οι ίδιοι στην κατασκευή της νέας γνώσης, με τη μετάβαση από το απλό στο σύνθετο και με τη σύνδεση προγενέστερων γνώσεων.

Συμπερασματικά, μπορούμε να διατυπώσουμε οτι οι πεποιθήσεις ενός μαθητή μπορούν να καθορίσουν τις επιλογές προσέγγισης και στρατηγικής μίας αποδεικτικής διαδικασίας, τις τεχνικές που θα χρησιμοποιήσει ή θα αποφύγει, τον χρόνο που θα αφιερώσει, το πόσο επίμονα θα εργαστεί. Δημιουργεί δηλαδή, το πλαίσιο μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται οι γνώσεις, οι ευρετικές, ο έλεγχος των αποφάσεων, η επαλήθευση και γενικά κάθε βήμα προς τη διαδικασία αναπαραγωγής παραγωγικού και αφαιρετικού συλλογισμού για την παροχή ικανοποιητικών αιτιολογήσεων, που θα επιβεβαιώνουν ότι ένα γεωμετρικό θεώρημα είναι αληθές .

Οι πεποιθήσεις γύρω από τη φύση της μαθηματικής απόδειξης, την ανάπτυξή της και την προσέγγιση του τρόπου μάθησης της μαθηματικής απόδειξης μεταφράζονται σε πεποιθήσεις για το τι είναι μαθηματική απόδειξη, τι σημαίνει να παράγω και να κατανοώ μαθηματικές αποδείξεις στη γεωμετρία. Επομένως, είναι καθοριστικές για τον τρόπο εμπλοκής του μαθητή με τα μαθηματικά, δηλαδή της ανάπτυξής της εννοιολογικής κατανόησης και της ικανότητάς του στο αντικείμενο.

Τα τελευταία χρόνια, η διδασκαλία των μαθηματικών έχει επηρεαστεί έντονα από τις μεταρρυθμίσεις που υπογραμμίζουν τη σημασία για τους μαθητές και τους σπουδαστές να συμμετέχουν πιο ενεργά στις διαδικασίες για την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης. Μέσα σε αυτόν τον κυκεώνα των μεταρρυθμίσεων η ανάγκη για τη μελέτη των πεποιθήσεων που διαμορφώνουν οι μαθητές γίνεται επιτακτικότερη, καθώς καθορίζουν τις πτυχές για την εκμάθηση της μαθηματικής απόδειξης και τη μαθηματική δραστηριότητα στην τάξη της γεωμετρίας.

Ο ρόλος των πεποιθήσεων είναι καθοριστικός στον επιδιωκόμενο στόχος της εκπαίδευσης και ειδικά της διδασκαλία της γεωμετρίας, δηλαδή στην κατασκευή νέας γνώσης μέσω των αποδείξεων προτάσεων και θεωρημάτων και την επιτυχή διαδικασία της μάθησης αυτών.

Εν κατακλείδι, από τις παραπάνω αναφορές γίνεται αντιληπτή η πολυπλοκότητα του ζητήματος των πεποιθήσεων ενός ατόμου. Όταν μάλιστα αυτό επικεντρώνεται στο υψίστης από πλευράς μαθηματικής σημασίας θέμα, που είναι η απόδειξη στη γεωμετρία, τότε χρειάζεται μεγαλύτερη προσοχή και σύνεση.

Αναμφισβήτητα το πολυδιάστατο σύστημα των πεποιθήσεων ενός ατόμου και ειδικότερα το σύστημα των πεποιθήσεων που διαμορφώνεται για την απόδειξη στη γεωμετρία, επηρεάζει τον τρόπο δράσης του και εμπλοκής του με τις διδασκόμενες

γεωμετρικές καταστάσεις, τον τρόπο προσέγγισης κάθε γνωστικής κατάστασης και τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης. Αυτό κατ' επέκταση δημιουργεί πεποιθήσεις αυτεπάρκειας και αυτό-αποτελεσματικότητας για τον μαθητή και τον εκπαιδευτικό. Οι πεποιθήσεις αυτές με τη σειρά τους λειτουργούν εν μέρει προγνωστικά για την επίδοση του μαθητή και την αποτελεσματικότητα διδασκαλίας του εκπαιδευτικού.

Κάθε συνιστώσα του συστήματος των πεποιθήσεων επηρεάζει και επηρεάζεται από τις άλλες. Όσο και αν αυτό κάνει το ζήτημα πιο πολύπλοκο αξίζει μία προσέγγισή τους, προκειμένου να βελτιώσουμε και να εξαλείψουμε δυσκολίες, φοβίες και αρνητικά συναισθήματα που βιώνουν οι μαθητές κατά την απόδειξη μίας πρότασης της γεωμετρίας και να αναθεωρήσουμε πρακτικές διδασκαλίας που δεν προάγουν παραγωγικό συλλογισμό, δεν καλλιεργούν την κριτική σκέψη και δε βοηθούν στην έκφραση δημιουργικότητας μέσα από την ανακάλυψη νέων γνώσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 Η απόδειξη στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης

Η μελέτη της φιλοσοφίας και της ιστορίας των μαθηματικών φέρνει στο φως την ύπαρξη δύο αντικρουόμενων απόψεων για τον ρόλο και τον χαρακτήρα της απόδειξης (Hanna , 2000, σ.6). Η μία άποψη υποστηρίζει τον εμπειρικό χαρακτήρα της απόδειξης, όπου στην περίπτωση αυτή βασίζεται σε πληροφορίες και εξηγήσεις , που προέρχονται από τις αισθήσεις. Ενώ η άλλη άποψη υποστηρίζει τον φορμαλιστικό χαρακτήρα της απόδειξης, όπου έχει σκοπό να πείσει για την αλήθεια των προτάσεων και των θεωρημάτων που διατυπώνονται με αυστηρούς κανόνες της μαθηματικής λογικής και της μαθηματικής γλώσσας.

Χρονολογικά η διαμάχη αυτή εμφανίστηκε σε δύο διαφορετικές ιστορικές περιόδους. Αρχικά, στην Ελληνική περίοδο από τον 6ο έως τον 3ο αιώνα π.Χ. και έπειτα στην περίοδο από τον 17ο έως τον 19ο αιώνα.(Δημητριάδου , 2006).

Συνοπτικά :

(α) Κατά το α΄ μέρος της Ελληνικής περιόδου, τον 6ο -5ο αιώνα η ανάπτυξη της φιλοσοφίας στην Ελλάδα χαρακτηρίζεται από τα λεγόμενα 'λογικά μαθηματικά', δηλαδή αυτά που ακολουθούν τους κανόνες της λογικής. Οι πρώτες αποδεικτικές μέθοδοι, κάτω από την επίδραση των σοφιστών και των Πυθαγορείων, είναι διαισθητικές και εμπειρικές (Lloyd, 1979), και προτεραιότητα είχε η οπτική αναπαράσταση (Szabó, 1973). Η πρώτη επιστημολογική ρήξη στον χώρο της απόδειξης και της αξιωματικής θεμελίωσης της συνέβη κατά το β΄ μέρος της Ελληνικής περιόδου τον 4ο – 3ο αιώνα, όπου κάνουν την εμφάνισή τους τα λεγόμενα 'παραγωγικά και αξιωματικά μαθηματικά'. Τότε, λόγω της επίδρασης της Ελεατικής φιλοσοφίας και του Πλάτωνα, αναδείχθηκε η ανάγκη χειρισμού ιδεατών αντικειμένων και οι μέθοδοι αποδείξεων χάνουν τον εμπειρικό τους χαρακτήρα και ακολουθούν την αυστηρότητα των κανόνων της λογικής και της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας. Επιπλέον, η απόδειξη που βασίζεται σε λογικούς κανόνες κυριάρχησε ενάντια στην οπτική αναπαράσταση (Szabó, 1973, Lloyd, 1979, Hoyrup 1990).

(β) Μια παρόμοια επιστημολογική ρήξη εμφανίστηκε και πολλούς αιώνες αργότερα. Κατά τον 17ο αιώνα η απόδειξη γίνεται αποδεκτή, γιατί βασίζεται στις μαρτυρίες των αισθήσεων και στα προφανή αποτελέσματα (Barbin, 1989). Η ρήξη όσον αφορά τη σημασία της απόδειξης άρχισε από τον Bolzano (1817). Σε όλη τη διάρκεια του 18ου - 19ου η άλγεβρα και η ανάλυση θεμελιώνονται με περισσότερο αυστηρές μεθόδους και έχουμε και την εμφάνιση των μη Ευκλειδείων γεωμετριών (Υπερβολική, Ελλειπτική). Η τυπική στάση που εκδηλώνεται απέναντι στα μαθηματικά του 18ου αιώνα ήταν: «δεν υπάρχει λόγος να αποδείξουμε με αυστηρές λογικές διαδικασίες γεωμετρικά θεωρήματα, για τα οποία ουδέποτε αμφιβάλουμε ή γιατί να αποδείξουμε προφανή αποτελέσματα με μέσα, τα οποία είναι λιγότερο προφανή;» (Kline, 1972, σ. 618).

Τον 19ο αιώνα στην αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας του Hilbert (1899) η οπτική αναπαράσταση και τα προφανή αποτελέσματα που βασίζονται στην εμπειρία των αισθήσεων δεν έχουν καμία θέση και κανένα νόημα. Στις αρχές του 20ου αιώνα και μέχρι τις τρείς πρώτες δεκαετίες, πολλοί μαθηματικοί και φιλόσοφοι, οι οποίοι έδειχναν ενδιαφέρον για τη λογική και τα θεμέλια των μαθηματικών, σχημάτισαν τρεις σχολές: τους λογικιστές, τους φορμαλιστές και τους ενορατιστές (Snapper, 1979, Αναπολιτάνος ,1985) για να απελευθερώσουν τη μαθηματική απόδειξη από τα επικίνδυνα αποτελέσματα των παραδόξων. Αυτή η περίοδος χαρακτηρίζεται από την αισιόδοξη άποψη, που δηλώνει τη δυνατότητα να τακτοποιηθεί το σύνολο της μαθηματικής γνώσης σε ένα τυπικό σύστημα, το οποίο να μπορεί να αποφανθεί αν κάθε μαθηματική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής.

2.1.2 Ιστορική αναδρομή στις διαφορετικές επιστημολογικές προσεγγίσεις και θέσεις για την απόδειξη στα μαθηματικά και τη γεωμετρία.

Η ανασκόπηση της ιστορίας κατατάσσει και προσδιορίζει την απόδειξη ως 'ψυχολογική προσέγγιση' (psychological approach) (πλατωνισμός, αισθησιαρχία), ως 'δομική προσέγγιση' (structural approach) (λογικισμικός, φορμαλισμός, ιντουσιονισμός) και ως 'κοινωνική προσέγγιση' (social aproach) (οντολογία, αξιωματικά συστήματα) (Lee, 2002).

Η απόδειξη, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην πορεία εξέλιξης των Μαθηματικών, ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειου. Συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και κυρίως από τον Αριστοτέλη, οι οποίοι αποτελούν και τους εκφραστές της ψυχολογικής άποψης (Δοξιάδης, 2002).

Η έννοια της απόδειξης αναπτύχθηκε μέσα στο ρεύμα της φιλοσοφίας του πλατωνισμού. Τα αντικείμενα μέσα στο πλατωνικό σύμπαν είναι αφηρημένες μαθηματικές οντότητες, όπου υπάρχουν ανεξάρτητα από κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα, και καθένα από αυτά έχει μία αμετάβλητη φύση, ως ουσία (Popper, 1950).

Για τον Πλάτωνα, μια αληθής μαθηματική πρόταση είναι αναγκαία αληθής, γιατί η λεκτική της διατύπωση αποτελεί ακριβή περιγραφή δομικών χαρακτηριστικών της πραγματικότητας του αναλλοίωτου και άχρονου κόσμου των μαθηματικών Ιδεών. Η μέθοδος για την εκμαίευση των μαθηματικών αληθειών μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε άμεσα, με την αισθητηριακή αντίληψη, είτε έμμεσα με τη διέγερση της φαντασίας που μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια της σωκρατικής διαλεκτικής μεθόδου (Αναπολιτάνος, 1985).

Ο Αριστοτέλης διατύπωσε την άποψη ότι οι βασικές αρχές της απόδειξης δεν αποδεικνύονται, αλλά λαμβάνονται ως αληθείς, επειδή δεν μπορούν όλες οι προτάσεις να αποδειχθούν. Επίσης διαπίστωσε ότι η αποδεικτική διαδικασία αναγκαστικά σταματά σε ορισμένα «αξιώματα», που αν και είναι αναπόδεικτα, είναι προφανή. Τέτοια λογικά αξιώματα είναι, για παράδειγμα, ο νόμος της μη αντίφασης, ο νόμος του αποκλειομένου τρίτου κ.α. Τα «αξιώματα», κατά τον Αριστοτέλη, τα συλλαμβάνει ο νους «ενορατικά», «άμεσα».(Βανδουλάκη 2001α.)

Οι θέσεις του λογικισμού, του φορμαλισμού και του ενορορατισμού εκπροσωπούν την δομική άποψη (structural approach) της απόδειξης κατά την διάρκεια του 20ου αιώνα. Ο κεντρικός ισχυρισμός του λογικισμού είναι ότι τα μαθηματικά είναι μέρος της λογικής. Όλες οι μαθηματικές αλήθειες κατά τους λογικιστές μπορούσαν να προκύψουν από τους νόμους της λογικής. Επομένως, ο σκοπός των λογικιστών ήταν να θεμελιώσουν τα μαθηματικά με την εισαγωγή εννοιών που προσδιορίζονται από λογικούς όρους ή με θεωρήματα που μπορούσαν να αποδειχθούν μόνο από στοιχειώδεις προτάσεις μιας λογικής ανάλυσης,

χρησιμοποιώντας λογικούς συμπερασματικούς κανόνες απόδειξης (Ηρακλείδης , 2006). Έτσι η τυπική απόδειξη έπαιξε κεντρικό ρόλο στο πρόγραμμα των λογικιστών. Για τους λογικιστές δεν ήταν επιτρεπτό, λόγου χάριν, να χρησιμοποιούν μαθηματικές μεθόδους απόδειξης - όπως πχ. τη μαθηματική επαγωγή - χωρίς προηγουμένως να δώσουν μια αυστηρώς λογική περιγραφή τους. Το βασικό ενδιαφέρον των λογικιστών είναι να παράγουν θεωρήματα από ένα συγκεκριμένο αξιωματικό σύστημα. Επομένως, η λειτουργία της απόδειξης για τους λογικιστές είναι να δείξει επίσης την ισχύ του αξιωματικού τους συστήματος (Lee, 2003).

Η τυπική απόδειξη έπαιξε κεντρικό ρόλο και στο πρόγραμμα των φορμαλιστών. Η βασική θέση της φορμαλιστικής σχολής ήταν ακριβώς ότι όλες οι μαθηματικές ιδέες μπορούσαν να αναχθούν σε αφηρημένα αξιωματικά συστήματα, η εγκυρότητα των οποίων ήταν δυνατό να αποδειχθεί με εσωτερικά μόνο μέσα. Δηλαδή, η εγκυρότητα μιας μαθηματικής πρότασης στηριζόταν στη δυνατότητα απόδειξης της αλήθειας της με τυπικό τρόπο μέσα σε ένα κατάλληλο μαθηματικό σύστημα μέσω μιας τυπικής απόδειξης. Οι φορμαλιστές πιστεύαν ότι ένα αντικειμενικό πρότυπο απόδειξης θα μπορούσε να επιτευχθεί ανάγοντας την αποδεικτική διαδικασία σε χειρισμό συμβόλων (Lee, 2003). Επιπλέον, προσπαθούσαν να εκφράσουν τα μαθηματικά σε σχέση με αυστηρά τυπικά λογικά συστήματα και να τα μελετήσουν χωρίς να αναφέρονται στο νόημά τους. Αυτό τους ξεχωρίζει από τους λογικιστές, που αναζητούν να θεμελιώσουν το νόημα των μαθηματικών εννοιών με το να τις ορίζουν σε σχέση με έννοιες της λογικής.

Μία από τις βασικές θέσεις των ενορατιστών (ιντουισιονιστών) σχετίζεται με την αυτονομία της αποδεικτικής διαδικασίας και την ανεξαρτησία της από συγκεκριμένα γλωσσικά συστήματα και από την τυπική λογική που αυτά συνεπάγονται. Σε απόλυτη αντίθεση με τους Λογικιστές, θεωρούν πως η αποδεικτική διαδικασία είναι προγλωσσική και προλογική, με την έννοια πως η φύση της δεν εξαρτάται και ούτε ανάγεται σε κάποιο λογικό υπόβαθρο με κάποιο συγκεκριμένο σύστημα μαθηματικού συμβολισμού. Για τους ενορατιστές δεν υπάρχει η έννοια αλήθειας ορισμένη σε κάποιο μεταγλωσσικό επίπεδο ανεξάρτητα από οποιαδήποτε έννοια απόδειξης. Σύμφωνα με την φιλοσοφία τους, η απόρριψη όλων των συστημάτων μαθηματικού συμβολισμού σημαίνει ταύτιση της έννοιας της αλήθειας με την έννοια της αποδειξιμότητας. Υπαρκτό για αυτούς σημαίνει κατασκευαστικά

υπαρκτό. Η έννοια της κατασκευαστικότητας της απόδειξης και της αλήθειας στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά πηγάζει από την διαίσθηση – ενόραση , δηλαδή από άμεση μη εμπειρική επίγνωση. Η θέση αυτή προβάλλει ταυτόχρονα το αίτημα για εξοβελισμό όλων εκείνων των αποδείξεων που κάνουν χρήση της απαγωγής σε άτοπο.(Αναπολιτάνος (1985), σελ.273-285)

Η βασική διαφορά της φιλοσοφίας τους από τα κλασσικά μαθηματικά εντοπίζεται στον τρόπο που περιχαρακώνεται η λειτουργία των λογικών συνδέσμων και των ποσοδεικτών. Για να γίνει λοιπόν περισσότερο σαφής ο καθορισμός της έννοιας της κατασκευαστικότητας της απόδειξης και της αλήθειας στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά απαιτείται να αναλυθεί πως λειτουργούν τα διάφορα λογικά σύμβολα σε σχέση με την παραπάνω έννοια, μέσω του ακόλουθου παραδείγματος : Στα πλαίσια των κλασσικών μαθηματικών μία γεωμετρική πρόταση της μορφής (A)→(B) θεωρείται ότι έχει αποδειχτεί, αν υπάρχει μία απόδειξη της άρνησης της (A) ή υπάρχει μία απόδειξη της (B). Στα πλαίσια των ιντουισιονιστικών μαθηματικών μία απόδειξη μια γεωμετρική πρόταση της μορφής (A)→(B), οφείλει και πρέπει να είναι η εύρεση ενός ελέγξιμου αλγορίθμου μετάβασης από οποιαδήποτε απόδειξη της πρώτης σε κάποια απόδειξη της δεύτερης. Έτσι το πρόβλημα της αποδειξιμότητας της πρότασης (A)→(B), μεταφέρεται και ανάγεται, με αναδρομικό τρόπο, στην αναγνωρισιμότητα αποδείξεων των προτασιακών συνιστωσών της, οι οποίες αποδείξεις διασυνδέονται με κάποια κατασκευαστικά αναγνωρίσιμη διαδικασία μετάβασης από οποιοδήποτε μέρος της ολότητας των αποδείξεων της πρώτης προτασιακής συνιστώσας, σε κάποιο τυχαίο και διαφορετικό κατά περίπτωση, μέλος της ολότητας των αποδείξεων της δεύτερης.

Οι ενορατιστές (ή ιντουϊσιονιστές) επικεντρώνονται στη θεμελιώδη διαισθητική νοητική κατασκευή της απόδειξης. Οι σχολές των λογικιστών και των φορμαλιστών επικεντρώνονται στα μέσα της απόδειξης που θα έπρεπε να γίνουν αποδεκτά ως έγκυρα, ενώ οι ενορατιστές υιοθετούν μια άκρως περιοριστική θέση, ότι τα μόνα επιτρεπτά μέσα είναι τα κατασκευαστικά. Σύμφωνα με τους ενορατιστές, τα μαθηματικά και η γλώσσα των μαθηματικών είναι δυο ξεχωριστές οντότητες. Τα μαθηματικά είναι εξωγλωσσική δραστηριότητα του νου, δηλαδή γίνονται αντιληπτά ως μία διανοητική πράξη στην οποία οι μαθηματικές σκέψεις αντιμετωπίζονται ως νοητικά κατασκευάσματα. Μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής μόνον όταν μπορεί

να κατασκευαστεί στον νου. Τέλος, διαπιστώνεται από την παραπάνω ανάλυση οτι μια από τις πιο σοβαρότερες διαφωνίες ανάμεσα στους ενορατιστές και τους φορμαλιστές αφορά στη χρήση των αφηρημένων αποδείξεων ύπαρξης, οι οποίες δεν υποδεικνύουν τρόπο για την κατασκευή του μαθηματικού αντικειμένου, του οποίου αποδεικνύουν. Οι αποδείξεις αυτές δεν είναι αποδεκτές από τους ενορατιστές, οι οποίοι θεωρούν ως κριτήριο εγκυρότητας της αποδεικτικής μεθόδου την κατασκευασιμότητά της.

Στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, οι αλγοριθμικές αποδείξεις αρχίζουν να γίνονται διαδεδομένες. Ένα σημαντικό γεγονός αυτής της περιόδου είναι η απόδειξη του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων (4CP) το 1976, η οποία αποτέλεσε το υπόβαθρο για τη συμφιλίωση ανάμεσα στα εμπειρικά μαθηματικά και τα παραγωγικά. Η μετάβαση από τα επαγωγικά συμπεράσματα σε διαδικασίες με την χρήση του αφαιρετικού και παραγωγικού συλλογισμού, προβάλλει έντονα την απαίτηση για τη διαμόρφωση του πλαισίου μέσα στο οποίο η έννοια της απόδειξης μπορεί να λειτουργεί, να αναπτύσσεται, να εξελίσσεται, να διαμορφώνει τάσεις, στάσεις και αντιλήψεις, να μεταβάλλεται και να μετασχηματίζεται. Ένα τέτοιο πλαίσιο ικανοποιείται από τη θεμελίωση ενός αξιωματικού συστήματος.

Ένα σύγχρονο αξιωματικό σύστημα για τη θεμελίωση της γεωμετρίας περιέχει τα εξής στοιχεία:

• Απροσδιόριστους όρους (δηλαδή μη οριζόμενες αρχικές έννοιες,όπως σημείο, ευθεία κλπ.).

• Ορισμούς (όπως παραλληλία ευθειών, κύκλος, τρίγωνο κλπ.).

• Αξιώματα (όπως τα αξιώματα του Ευκλείδη, του Hilbert).

• Ένα λογικό σύστημα (όπως αυτό της Αριστοτέλειας Λογικής).

• Θεωρήματα, Προτάσεις κλπ. (που συνάγονται από τα τρία πρώτα στοιχεία, μεσώ του λογικού συστήματος).

Ταυτόχρονα, πρέπει το σύστημα να ικανοποιεί και τις ακόλουθες απαιτήσεις :

1. Να είναι συνεπές (consistent), δηλαδή να μην υπάρχουν αξιώματα ή θεωρήματα που αντιφάσκουν μεταξύ τους. Η σημασία της συνέπειας είναι προφανής .Ποιά αξία θα είχε ένα σύστημα στο οποίο θα μπορούσαν να ισχύουν ταυτόχρονα ένα συμπέρασμα και η άρνησή του;

2. Να είναι ανεξάρτητο (independent), δηλαδή κανένα αξίωμα να μην προκύπτει (αποδεικνύεται) από άλλα αξιώματα. Τέτοια αξιώματα καλούνται επίσης *ανεξάρτητα*.
3. Να είναι πλήρες (complete), δηλαδή, για κάθε πρόταση που μπορεί να διατυπωθεί με τους όρους και τα αξιώματα του συστήματος, θα πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε για την ισχύ ή όχι της πρότασης. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε στο σύστημα κι ένα άλλο ανεξάρτητο αξίωμα. (Βασιλείου, 2009-2010)

Η οριοθέτηση ενός σύγχρονου αξιωματικού συστήματος αντικατοπτρίζει την κοινωνική πτυχή των μαθηματικών, όπου η αλήθεια μίας πρότασης εξαρτάται από την κυρίαρχη θεωρία της μαθηματικής κοινότητας μέσα στην οποία εξετάζεται. Σύμφωνα με την κοινωνιολογική άποψη, η απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος προκύπτει μέσα από διεργασίες κοινωνικής διαλεκτικής, δηλαδή πρέπει να παράγεται και να γίνεται αντιληπτή μέσα από τις ανθρώπινες πρακτικές. Η πρακτική της απόδειξης φαίνεται να αφορά σε τρεις διαφορετικές αλλά στενά συνδεδεμένες διεργασίες:
α) την αναζήτηση της μεθοδολογίας επίτευξης της διαδικασίας της απόδειξης,
β) την οργάνωση της δομής της επιχειρηματολογίας της αποδεικτικής διαδικασίας και
γ) στο τέλος την παροχή και διατύπωση των απαραίτητων εξηγήσεων και αιτιολογήσεων για να πείσουμε τους άλλους ανθρώπους.

Οι διαδικασίες αυτές επικαλύπτονται και επηρεάζει η μία την άλλη. Μάλιστα κάποιες φορές κάθε μία από αυτές τις διαδικασίες καλείται απόδειξη.

Επομένως η κοινωνιολογική άποψη της απόδειξης ισχυρίζεται ότι εξηγώντας την απόδειξη μίας πρότασης σε άλλους ανθρώπους δεν απαιτείται απλά η παρουσίασή της, αλλά πρέπει να προσπαθήσουμε να πείσουμε και τους άλλους ανθρώπους για την ισχύ της. Εδώ χρειάζεται προσοχή ως προς το κοινωνικό πλαίσιο που εξηγείται και αναλύεται η απόδειξη. Η αρχική πρόταση που πρέπει να αποδειχθεί μπορεί να τροποποιηθεί μέσω της αλληλεπίδρασης με τα άλλα μέλη της μαθηματικής κοινότητας.

2.1.3 Οι επιστημολογικές απόψεις που διατυπώθηκαν στην βιβλιογραφία της ιστορίας των μαθηματικών για την απόδειξη.

Σε συνέπεια των παραπάνω διαπιστώνεται ότι η απόδειξη στο χώρο της γεωμετρίας αποτέλεσε σημείο διαμάχης, καθώς η ιστορία των μαθηματικών παρουσιάζει την απόδειξη μέσα απο το πρίσμα διαφορετικών επιστημολογικών απόψεων και τάσεων. Για να γίνει περισσότερο σαφής η θέση και ο ρόλος της απόδειξης στην εξέλιξη της γεωμετρίας παρακάτω παρατίθενται οι διαφορετικές οπτικές θεωρήσεις της, όπως συλλέχθηκαν μέσα απο την βιβλιογραφία.

Ο Descartes ασπάζεται τις πλατωνικές απόψεις σχετικά με την έννοια της απόδειξης. Η γεωμετρική γνώση και γενικότερα η γνώση των απόλυτων αληθειών, είναι βέβαιη λόγω της ευκρίνειας και της σαφήνειας της εσωτερικής μας εποπτείας. Στο ερώτημα τι συμβαίνει με τις ιδιότητες των γεωμετρικών οντοτήτων, των οποίων η πολυπλοκότητα τους δεν επιτρέπει μίας άμεσης αναγνώρισης τους, ο Descartes θεωρεί οτι υπάρχουν δύο τρόποι απόκτησης της γεωμετρικής γνώσης : Ο άμεσος τρόπος που σχετίζεται με την εποπτεία και ο έμμεσος τρόπος σχετίζεται με παραγωγικές διαδικασίες του νου.(Αναπολιτάνος, 1995). Ο Descartes προτείνει τη μέθοδο της ανάλυσης και της σύνθεσης στη θέση του παραγωγικού συλλογισμού, η οποία έχει μια αποδεικτική αξία, εφόσον οδηγεί σε βεβαιότητα (Δημητριάδου, 2006).

Εκφραστές της ψυχολογικής τάσης για την απόδειξη, όπως ο Torricelli, ο Pascal, ο Nagel, ο Wallis και ο Arnaud αντιτίθενται στην εκτεταμένη χρήση αποδείξεων με απαγωγή στο άτοπο και στην έλλειψη μιας γενικής αποδεικτικής μεθόδου. Οι εκπρόσωποι αυτής της τάσης, όπως ο Pascal θεωρεί ότι η προσπάθεια του να πείσει κάποιος για την αλήθεια των επιχειρημάτων του είναι μία διαδικασία που οφείλει να δομείται με συγκεκριμένα στάδια. Η τεχνική της μεθοδικής απόδειξης αποτελείται από τρία βασικά μέρη και η διδασκαλία της θα ακολουθεί :

α) τον καθορισμό των όρων που θα χρησιμοποιηθούν και προέρχονται από σαφείς ορισμούς,

β) τις κοινές έννοιες ή προφανή αξιώματα ή άλλες γνωστές και αποδεδειγμένες προτάσεις και θεωρήματα που βασίζονται οι μαθητές για να αποδείξουν το νέο ζητούμενο και

γ) τέλος την ανάκληση στη μνήμη του κατάλληλου ήδη αποδεδειγμένου θεωρήματος ή πρότασης που παρέχει τις αναγκαίες πληροφορίες, ώστε να προχωρήσει η αποδεικτική διαδικασία.

Επιπλέον ο Nagel (1950) ισχυρίστηκε ότι η αναγκαιότητα απόδειξης ενός θεωρήματος δεν προέρχεται από την εκ των προτέρων λογική αδυναμία της άρνησής του. Με άλλα λόγια, αρνείται ως μέθοδο απόδειξης την απαγωγή εις άτοπο. Θεωρεί ότι η ανάγκη για απόδειξη προέρχεται από την ψυχολογική ανάγκη για την κατανόηση της δομής και της φύσης των γεωμετρικών αντικειμένων . Ως εκ τούτου, υποστήριξε ότι η μαθηματική απόδειξη δεν είναι αφαιρετική διαδικασία αλλά επαγωγική. Ενώ τα επιχειρήματα των επαγωγικών γενικεύσεων προέρχονται από αντιληπτικές εμπειρίες ή άμεσες παρατηρήσεις.

Εκφραστής των απόψεων της σχολής των Λογικιστών είναι ο Frege (1950), ο οποίος υποστήριξε ότι η ψυχολογική προσέγγιση δεν είναι κατάλληλη για τη θέσπιση μίας επιστήμης όπως είναι τα μαθηματικά. Στην εργασία του, με τίτλο "τα θεμέλια της αριθμητικής", η μεθοδολογική αρχή ήταν σε ξεχωριστή θέση και δίνει βαρύτητα στη λογική άποψη πάρα στην ψυχολογική άποψη, ενώ διαχωρίζει και την υποκειμενική άποψη από τον στόχο. Επέμενε ότι τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με ιδέες – εικόνες και δεν αποτελούν ψυχική ή διανοητική κατασκευή, αλλά είναι η οικοδόμηση και η σύνδεση εννοιών, οι οποίες είναι οντότητες με την έννοια των φυσικών αντικειμένων που δεν μπορούν να θεωρηθούν ψυχολογικά κατασκευάσματα. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο των θεωρήσεων του για την φύση των μαθηματικών αντικειμένων, οι συναρτήσεις και οι έννοιες είναι λογικά πρότερες των αντικειμένων. Μπορούν δηλαδή να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή νέων γεωμετρικών αντικειμένων, κάθε ένα από τα οποία προκύπτει στην περίπτωση των εννοιών, ως συλλογή των αντικειμένων που ήδη υπάρχουν και που ανήκουν στην έννοια. Η πίστη του Frege στη λογική προτεραιότητα των εννοιών και των συναρτήσεων είχε ως κατάληξη την χρήση του όρου "λογικά αντικείμενα", για όλες εκείνες της οντότητες που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο. (Αναπολιτάνος, 1985,σελ.225)

Αυτές οι απόψεις του μεταφέρονται και στην γεωμετρία, καθώς ο ορισμός των γεωμετρικών αντικειμένων με τον παραπάνω τρόπο, προϋποθέτει και κάποια απόδειξη της ύπαρξης τους. Για παράδειγμα, έστω ότι με φ(χ) συμβολίζουμε την

έννοια << η χ είναι μία παράλληλη ευθεία στην ευθεία α >> και με ψ(χ) συμβολίζουμε την έννοια << η ψ είναι μία παράλληλη ευθεία στην ευθεία β >> .Αν στην συνέχεια υποτεθεί ότι η ευθεία γ ανήκει και στην έννοια φ(χ) και στην έννοια ψ(χ), τότε μπορεί, σύμφωνα με τον Frege, να θεωρηθεί ότι υπάρχει κάποιο χαρακτηριστικό της ευθείας γ, το οποίο μοιράζεται με τις έννοιες φ(χ) και ψ(χ). Η διαδικασία αυτή θεωρείται από τον Frege ως απόδειξη ύπαρξης του λογικού αντικειμένου, το οποίο μάλιστα ονομάζει και <<διεύθυνση της ευθείας γ>> και το ορίζει ως το σύνολο των αντικειμένων που ανήκουν στην έννοια << η χ ευθεία παράλληλη προς την ευθεία γ>>(Αναπολιτάνος, 1985,σελ.228).

Επίσης, στην μαθηματική φιλοσοφία του Frege, ορίζεται ότι μία πρόταση είναι αναλυτική, αν μπορεί να αποδειχτεί από γενικούς νόμους της λογικής με την βοήθεια των ορισμών, που δεν παραβιάζουν αυτούς τους νόμους και έχουν ως χαρακτηριστικό τη λογική προτεραιότητα της έννοιας της συνάρτησης (Αναπολιτάνος, 1985,σελ.231) . Επιπλέον, θεωρεί ότι ο στόχος της απόδειξης είναι στην πραγματικότητα να πραγματοποιηθεί η αλήθεια μιας πρότασης πέραν πάσης αμφιβολίας, ενώ κάθε φόρα παρέχει και πληροφορίες για την εξάρτηση της αλήθειας της από κάποια άλλη πρόταση. Ισχυρίζεται ότι δεν είναι σπάνιο το γεγονός να ανακαλυφθεί πρώτα το περιεχόμενο της πρότασης, και αργότερα να δοθεί η αυστηρή απόδειξή της. Έτσι, η ίδια η αποδεικτική διαδικασία αποκαλύπτει με μεγαλύτερη ακρίβεια τις συνθήκες που περιορίζουν την ισχύ της αρχικής της πρότασης.. Ως συμπέρασμα για τις θεωρήσεις του Frege (1950) μπορεί να διατυπωθεί, ότι θα πρέπει να αποτελεί χωριστό πρόβλημα ο τρόπος με τον οποίο φθάνουν οι μαθητές στη διατύπωση μιας εικασίας και ξεχωριστό πρόβλημα η διαδικασία δικαιολόγησης της.

Ο Russell (1935), ως κύριος εκφραστής της σχολής των Λογικιστών, αποδίδει στην έννοια και τον ρόλο των ορισμών κατά την αποδεικτική διαδικασία, διαφορετική διάσταση από αυτήν που νοείται στον Frege. Ο Russell θεωρεί τους ορισμούς χρήσιμα εργαλεία καθαρά συντακτικού χαρακτήρα, χωρίς οντολογική βαρύτητα. Η θέση του είναι νομιναλιστικού χαρακτήρα, με την έννοια πως ένας ορισμός εισάγει ένα νέο σύμβολο ή ένα νέο συνδυασμό συμβόλων, ως συντομογραφία κάποιου ήδη υπάρχοντος συνδυασμού συμβόλων. Έτσι, ο ορισμός για τον Russell, δεν είναι υπεύθυνος για την εισαγωγή νέων εννοιών, που δεν

προϋπήρχαν και δεν είχαν κανένα οντολογικό περιεχόμενο. (Αναπολοτάνος, 1985, σελ.232) . Το πρόγραμμα της αναγωγής των μαθηματικών στην λογική συνοψίζεται στην ακόλουθη διατύπωση, που αποτυπώνεται στο έργο 'Principia Mathematica' από τους Whitehead & Russell : << το σύνολο των καθαρών μαθηματικών ασχολείται αποκλειστικά με έννοιες που μπορούν να οριστούν από ένα πολύ μικρό αριθμό θεμελιωδών λογικών εννοιών. Όλες οι προτάσεις μπορούν να αποδειχτούν από ένα πολύ μικρό αριθμό λογικών αρχών . Η φιλοσοφική αυτή άποψη έχει όλη την βεβαιότητα και ακρίβεια που οι μαθηματικές αποδείξεις μπορούν να επιδείξουν.>>

Ο Brouwer εκφράζει τις επιστημολογικές απόψεις των ενορατιστών και θεωρεί ότι η αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία είναι κατά τρόπο θεμελιακό μία δραστηριότητα σκεπτικού χαρακτήρα (thinking activity), που είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε γλώσσα (λέγοντας γλώσσα εννοείται ένα οποιοδήποτε οργανωμένο σύστημα σήμανσης). Επίσης, θεωρεί ότι ένα γεωμετρικό θεώρημα είναι αληθές , επειδή συμβαίνει να είναι αυτό ακριβώς που είναι στην πρωτογενή σφαίρα της ενόρασης. Η βασική εποπτεία (ενόραση) περιγράφεται από τον Brouwer στην εξής διατύπωση : << η αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία είναι μία θεμελιώδης δραστηριότητα του νου, που έχει τις ρίζες της στην αντίληψη μίας κίνησης του χρόνου, δηλαδή της διάλυσης μίας στιγμής της ζωής σε δύο διακριτά πράγματα, που το ένα δίνει τη θέση στο άλλο διατηρούμενο μέσα στη μνήμη. Αν αυτή η έτσι γεννημένη δυάδα απογυμνωθεί από κάθε ποιότητα, παραμένει η άδεια μορφή του υπόβαθρου όλων των δυάδων. Αυτό ακριβώς το υπόβαθρο, αυτή η άδεια μορφή, είναι η βασική εποπτεία (ενόραση) στη γεωμετρία. >> (Collected Works. Τόμος 1, North-Holland, Amsterdam, 1975, σελ. 509-510).

Ο Lakatos (1976), ως εκφραστής της κοινωνικής προσέγγισης της απόδειξης στη γεωμετρία, μέσα από το περίφημο βιβλίο του ασκεί κριτική στον τρόπο με τον οποίο η φύση της απόδειξης είχε φτάσει να κυριαρχείται από τον λογικισμό και τον φορμαλισμό. Στην εισαγωγή του ισχυρίζεται ότι η θεωρία των μαθηματικών και η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης δεν θα μπορούσαν να αναπτυχθούν χωρίς κριτική και την απόλυτη απόρριψη του φορμαλισμού.

Κατά τον Lakatos, οι αποδείξεις δεν είναι εργαλεία δικαιολόγησης, αλλά μηχανισμοί ανακάλυψης με σκοπό να συμβάλλουν στην ανάπτυξη των εννοιών και την εκλέπτυνση των εικασιών. Η αλληλεπίδραση μεταξύ εικασίας, απόδειξης,

αντιπαραδείγματος και τελειοποίησης της εικασίας, αποτελεί το ζωντανό αίμα των μαθηματικών. Για τον Lakatos, η «απόδειξη» σ' αυτό το πλαίσιο των μη τυποποιημένων μαθηματικών δεν σημαίνει μια μηχανική διαδικασία που επιβάλλει την αλήθεια μέσα από μια αδιάσπαστη ακολουθία υποθέσεων και συμπερασμάτων. Σημαίνει μάλλον εξηγήσεις, πιστοποιήσεις, επεξεργασίες που κάνουν την εικασία πιο εύκολη, πιο πειστική, ενώ γίνεται πιο αναλυτική και ακριβής κάτω από την πίεση των αντιπαραδειγμάτων. Κάθε βήμα της απόδειξης υπόκειται και αυτό σε κριτική, η οποία μπορεί να είναι μια απλή επιφύλαξη ή το αποτέλεσμα ενός αντιπαραδείγματος σε ένα ιδιαίτερο επιχείρημα. Ένα αντιπαράδειγμα που αμφισβητεί ένα βήμα σε κάποιο επιχείρημα ο Lakatos το ονομάζει «τοπικό αντιπαράδειγμα». Ένα αντιπαράδειγμα που αμφισβητεί όχι το επιχείρημα αλλά το ίδιο το συμπέρασμα το ονομάζει «καθολικό αντιπαράδειγμα» (Davis & Hersh, 1981).

Η ιστορική ανασκόπηση ολοκληρώνεται με την Ευκλείδεια απόδειξη, η οποία ξεκινά με μια λεπτομερή δήλωση του τι δίνεται και τι θα αποδειχθεί. Κάθε ισχυρισμός της απόδειξης μπορεί να δικαιολογηθεί από προηγούμενους ισχυρισμούς, αξιώματα, προηγούμενες αποδεδειγμένες προτάσεις ή με την εις άτοπον απαγωγή. Η τελευταία δήλωση στην απόδειξη είναι αυτή που επρόκειτο να αποδειχθεί. Ο Ευκλείδης με τον τρόπο αυτό καθιέρωσε έναν τρόπο και μια διαδικασία παρουσίασης της ύλης, με γενικές αυστηρές αποδείξεις, όπου κάθε πρόταση τοποθετείται στην κατάλληλη θέση και ακολουθεί η επόμενη πρόταση με μια αυστηρώς λογική τάξη, με τις λιγότερο δυνατές υποθέσεις, χωρίς να παρεμβάλλεται τίποτα το άσχετο ή το περιττό (Ευκλείδης, 2001). Αποτέλεσμα ήταν το αξιοθαύμαστο οικοδόμημα που σήμερα προς τιμήν του ονομάζουμε «Ευκλείδεια Γεωμετρία».

2.2 Η απόδειξη στην μαθηματική σχολική τάξη

2.2.1 Η αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας για την γεωμετρία.

Με δεδομένο ότι όλες οι επιστήμες ωριμάζουν και εξελίσσονται διαρκώς με στόχο νέα μεγαλύτερα επιτεύγματα και ανακαλύψεις, δεν αρκεί μόνο η καταγραφή και η διατύπωση παρατηρήσεων και φαινομένων. Έτσι και οι μαθηματικοί για την οικοδόμηση της γεωμετρίας, που αποτελεί ίσως τον αρχαιότερο κλάδο της

μαθηματικής επιστήμης, προσπαθούν να αναπτύξουν κανόνες, προτάσεις και θεωρήματα για να βοηθήσουν στην κατανόηση του τρόπου που τα γεωμετρικά αντικείμενα εμφανίζονται να είναι έτσι όπως είναι.

Δεν αρκεί όμως μόνο η ανάπτυξη, η απλή αναφορά ή η διατύπωση κανόνων, προτάσεων και θεωρημάτων, αναμφισβήτητα το ζητούμενο είναι η θεμελίωση τους μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας. Με άλλα λόγια, αντιμετωπίζεται η ανάγκη για τη θέσπιση ενός θεωρητικού πλαισίου.

Αλλά και οι κλασσικοί Έλληνες μαθηματικοί θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά διαφέρουν από τις άλλες επιστήμες, καθώς εξετάζουν συχνά οντότητες που είναι άπειρες στον βαθμό ή τον αριθμό, όπως το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, τα τρίγωνα και οι κύκλοι. Κατά εξέταση τέτοιων οντοτήτων πρέπει να διατυπωθούν γενικές δηλώσεις, δηλαδή δηλώσεις που ισχύουν για κάθε περίπτωση χωρίς εξαίρεση. Όμως καμία δήλωση για τα στοιχεία ενός άπειρου συνόλου δεν μπορεί ενδεχομένως να ελεγχθεί σε κάθε περίπτωση. Μόνο για μεμονωμένες δηλώσεις μιας αφηρημένης οντότητας μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα, μέσα από την εμπειρική παρατήρηση.

Το κλασσικό παράδειγμα αποτελεί η Ευκλείδεια γεωμετρία και πιο συγκεκριμένα η συγγραφή των στοιχείων του Ευκλείδη. Έπρεπε να αποφευχθεί μια κατάσταση όπου η ισχύς των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την εμπειρία, τη διαίσθηση ή τις υπονοούμενες υποθέσεις. Η θεμελίωση της γεωμετρίας πρέπει να στηριχτεί σε έναν σχετικά μικρό αριθμό θεμελιωδών δηλώσεων (γνωστών ως αξιώματα), που θα μπορούσαν εύκολα να γίνουν αποδεκτά και όλες οι άλλες προτάσεις ή θεωρήματα πρέπει να αποδειχθούν από αυτά τα αξιώματα με την εφαρμογή των κανόνων του λογικού συλλογισμού.

Τα αξιώματα αυτά τα εμπνεύστηκαν από την εμπειρία και την επαφή με τον πραγματικό κόσμο. Τα αξιώματα επιλέχτηκαν με ιδιαίτερη προσοχή, καθορίζοντας αν οι αφηρημένες γεωμετρικές οντότητες που εξετάζονται στα θεωρήματα μπορούν να κατασκευαστούν από τα αξιώματα, εφαρμόζοντας τον αυστηρό συλλογισμό, χωρίς περαιτέρω έκκληση στην εξωτερική εμπειρία.

Επιπλέον, η απόδειξη όπως επίσης και η ανακάλυψη απαιτούν τη δημιουργικότητα. Ακόμα και αν οι κανόνες του συμπεράσματος δίνονται, ακόμα και αν η απόδειξη δεν μπορεί να προχωρήσει χωρίς να έχει δηλωθεί το πράγμα που

αποδεικνύεται κατά τη διατύπωση της πρότασης, η κατασκευή μιας απόδειξης δεν είναι μία απλή και μηχανική διαδικασία. Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι για την κατασκευή μίας απόδειξης και οι μαθηματικοί πρέπει να βασιστούν όχι μόνο επάνω στη γνώση τους και την αίσθηση της λογικής, αλλά στη φαντασία και την ευρηματικότητά τους.

Είναι σαφές ότι η μαθηματική δημιουργικότητα συσχετίζεται λιγότερο με τη λογική ή με την απόδειξη απ' ό,τι με την εμπνευσμένη εικασία. Ο πυρήνας της καρποφόρου ευρηματικότητας είναι η συνειδητή ή ασυναίσθητη άσκηση της κρίσης στο ζύγισμα των προϊόντων της φαντασίας. Υπάρχει διάκριση ακόμη και στην ευρηματικότητα, αλλά είναι εξ ολοκλήρου σαφές ότι η μαθηματική δημιουργικότητα δεν μπορεί να μειωθεί σε ένα αξιωματικό σύστημα. Η πορεία που ξεκινά από την ανακάλυψη μέχρι την επαλήθευση, με σύμμαχο την εμπιστοσύνη που έχει το άτομο στη δημιουργικότητα του, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά και γνωστοποιούνται ως υποθέσεις.

Οι υποθέσεις μπορούν να προκύψουν και από τον πειραματισμό. Είναι ουσιαστικά μια γενίκευση, μια δήλωση που οι μαθηματικοί θεωρούν αληθινή για όλες τις περιπτώσεις, επειδή γνωρίζουν ότι ισχύει για πολλές περιπτώσεις και δεν έχουν βρει ποτέ μια περίπτωση για την οποία δεν ισχύει. Οι υποθέσεις αποδεικνύονται μερικές φορές αληθινές, άλλες όχι και άλλες φορές έχουν αντισταθεί από τη διάψευση κατά την αποδεικτική διαδικασία.

2.2.2 Ορισμός της απόδειξης στα μαθηματικά

Στην καθημερινή ζωή, η έννοια της απόδειξη περικλείει πολλές και διαφορετικές ερμηνείες Για παράδειγμα μια φαρμακευτική εταιρεία βασιζόμενη στα στοιχεία της επαγωγικής στατιστικής, μπορεί αποδείξει ότι ένα φάρμακο δεν έχει καμία σοβαρή παρενέργεια με τη δοκιμή του σε πολλούς ανθρώπους. Ένας κατήγορος μπορεί να αποδείξει ότι ένας εγκληματίας είναι ένοχος, χρησιμοποιώντας κάποια γεγονότα ως αποδεικτικά στοιχεία και την πειθώ του. Σε μερικές χώρες υπάρχει η φράση: «η απόδειξη για τη συγκεκριμένη μάρκα προϊόντος είναι στην κατανάλωση» και άρα προτείνει ότι η ποιότητα μπορεί να καθοριστεί με τη δοκιμή του στον πραγματικό κόσμο. Ένα Διευθυντής μάρκετινγκ σε μια επιχείρηση μπορεί

να χορηγήσει μια απόδειξη ενός σχεδίου πωλήσεων για να κερδίσει την έγκριση του διοικητικού συμβουλίου για να προωθήσει ένα προϊόν. Σε κάθε περίπτωση, ένα συμπέρασμα συνάγεται βάσει των στοιχείων, με την πρόθεση να επιβεβαιώσει ότι κάτι είναι αληθινό.

Όμως στα μαθηματικά, η έννοια της απόδειξης είναι αντίθετη από αυτές τις καθημερινές έννοιες. Εδώ, ο συλλογισμός - συνήθως παραγωγικός - κατέχει κεντρικό ρόλο στις μαθηματικές αξιώσεις και στις παρουσιάσεις των αποδείξεων. Δεν εξαρτάται από τη συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων (όπως στην περίπτωση του φαρμάκου) στην προσωπική πειθώ (όπως στο δικαστήριο) ή στη φωνή της αρχής (όπως για το διοικητικό συμβούλιο) αλλά στηρίζεται μόνο στα λογικά επιχειρήματα.

Η παραδοσιακή άποψη είναι ότι «απόδειξη είναι μια τυπική και λογική πορεία συλλογισμού που αρχίζει με ένα σύνολο αξιωμάτων και κινείται μέσω των λογικών βημάτων προς ένα συμπέρασμα (Griffiths, 2000, σ.2), με σκοπό να αποδειχθεί ένα θεώρημα». Επίσης, «η αποδεικτική διαδικασία είναι αυτή που επιβεβαιώνει την αλήθεια με μαθηματικό τρόπο, ενώ το πείραμα ή η παρατήρηση επιβεβαιώνει την αλήθεια για το φυσικό επιστήμονα» [Griffiths, 2000, σ. 2].

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1988), σελ. 157 η απόδειξη είναι μια λογική αλυσίδα επιχειρηματολογίας στην οποία ένα ή περισσότερα συμπεράσματα παράγονται, σύμφωνα με καλά προκαθορισμένους κανόνες από δύο σύνολα δεδομένων: α) ένα σύνολο από υποθέσεις και β) ένα σύνολο από αποδεκτά γεγονότα, αποτελούμενο από αξιώματα είτε από αποτελέσματα που έχουν ήδη αποδειχθεί»

Σε διάφορα σημεία στη μαθηματική λογοτεχνία, μια απόδειξη έχει οριστεί ως ένα επιχείρημα που κατασκευάζεται για να πείσει για την αλήθεια μίας πρότασης ή ενός θεωρήματος (Mason, Burton, και Stacey, 1982) ή ως ένα επιχείρημα που πείθει ένα μαθηματικό που γνωρίζει το θέμα (Hersh& Davis, 1981). Επίσης, ως ένα επιχείρημα που αρκεί για να πείσει ένα εύλογο σκεπτόμενο άτομο (Volmink, 1990) ή ένα επιχείρημα που δίνει κάποιος ώστε να πείσει άλλους (και συχνά τον εαυτό του) για την ορθότητα των ισχυρισμών του (Movshovitz-Hadar, 2001). Ακόμα, απόδειξη είναι ένας τρόπος για να δείξει κανείς τον μαθηματικό μηχανισμό για την επίλυση προβλημάτων και να δικαιολογήσει ότι μια προτεινόμενη λύση σ' ένα πρόβλημα είναι πράγματι μία λύση (Rav, 1999, σ. 13).

Κάποιοι άλλοι, που επικεντρώνονται στην κοινωνική φύση της απόδειξης, προσφέρουν τις ακόλουθες περιγραφές της έννοιας της απόδειξης: «Καλούμε απόδειξη μια εξήγηση δεκτή από μια συγκεκριμένη μαθηματική κοινότητα, σε μια δεδομένη στιγμή» (Balacheff, 1987, μεταφρασμένο από τα γαλλικά). «Αν ένα επιχείρημα γίνεται αποδεκτό μετά από την κοινωνική πράξη, τότε θεωρείται ότι αποτελεί απόδειξη» (Manin, 1977).

Στη διδασκαλία της γεωμετρίας η απόδειξη είναι μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι απαραίτητα ορθή, μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των μαθηματικών. Η απόδειξη παράγεται αναγωγικά και όχι εμπειρικά. Δηλαδή, η απόδειξη πρέπει να δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται , χωρίς καμία εξαίρεση. Μία πρόταση, χωρίς απόδειξη για την οποία πιστεύεται ή υπάρχουν ισχυρές υποψίες ότι ισχύει, λέγεται εικασία.

Άσχετα από τον βαθμό της τυπικότητας που ακολουθείται, το αποτέλεσμα που αποδεικνύεται λέγεται θεώρημα. Όταν ένα θεώρημα έχει αποδειχτεί, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την απόδειξη άλλων προτάσεων. Ένα θεώρημα μπορεί να λέγεται και λήμμα αν χρησιμοποιείται ως βήμα στην απόδειξη ενός θεωρήματος. Τα αξιώματα είναι οι προτάσεις αυτές που δε γίνεται ή δε χρειάζεται να αποδειχτούν. Αυτά ήταν στο παρελθόν η βασική μελέτη των φιλόσοφων των μαθηματικών, ενώ πρόσφατα εστιάζουν περισσότερο στη μαθηματική πρακτική, δηλαδή τι αποτελεί αποδεκτή τακτική.

Επίσης, ο Thurston (1994) υποστηρίζει ότι είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ των τυπικών αποδείξεων και των αποδείξεων που οι μαθηματικοί κατασκευάζουν. Στην τελευταία περίπτωση, πολλοί υπολογισμοί ρουτίνας και λογικοί χειρισμοί συρρικνώνονται. Αυτό μάλλον γίνεται επειδή οι αποδείξεις θα ήταν εξωφρενικά μεγάλες. Ο Renz (1981) εκτίμησε ότι αν κάποιος προχώρησε να αποδείξει το πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιώματα και τους κανόνες, η απόδειξη θα είναι πάνω από 80 σελίδες!

Οι Davis&Hersh (1986) υποστηρίζουν ότι είναι μάλλον αδύνατον να προσδιοριστεί με ακρίβεια τι είδους επιχείρημα αποτελεί μία έγκυρη απόδειξη για τη μαθηματική κοινότητα. Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι ακόμα και αν ένα επιχείρημα δε γίνει δεκτό ως απόδειξη, τότε αυτό δεν εξαρτάται μόνο από τη λογική δομή, αλλά και από τον τρόπο που διαμορφώσαμε το επιχείρημα αυτό, ώστε να είναι πειστικό, ακριβές και σαφές. (Hanna, 1991).

2.2.3 Τύποι γεωμετρικών αποδείξεων.

Στα σχολικά μαθηματικά οι κοινοί τύποι απόδειξης είναι οι εξής:

Ευθεία απόδειξη : Στην ευθεία απόδειξη το συμπέρασμα καθιερώνεται με το λογικό συνδυασμό των αξιωμάτων, των ορισμών και των προηγούμενων θεωρημάτων.

Άμεση απόδειξη : Μια άμεση απόδειξη είναι μια αλυσίδα των δηλώσεων, κάθε μια από τις οποίες προκύπτει λογικά από την προηγούμενη.

Απόδειξη με την εξάντληση :Μια απόδειξη από την εξάντληση στηρίζεται στον έλεγχο όλων των περιπτώσεων. Σε μερικούς τομείς των μαθηματικών, όπως η θεωρία αριθμών, είναι μια κοινή πρακτική να χρησιμοποιηθούν οι κατηγορίες που εξαντλούν όλες τις πιθανές περιπτώσεις για να κατασκευάσουν μια απόδειξη.

Απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή : Στην **α**πόδειξη με αντίφαση (γνωστή και ως *εις άτοπον απαγωγή*, ή *reductio ad absurdum* στα Λατινικά), δείχνεται ότι αν κάποια πρόταση ήταν ψευδής, τότε συμβαίνει μια λογική αντίφαση, επομένως η αρχική πρόταση θα πρέπει να είναι αληθής.

Απόδειξη της ύπαρξης :Μια απόδειξη ύπαρξης ή αλλιώς μία μη κατασκευαστική απόδειξη δείχνει ότι ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο πρέπει να υπάρχει (π.χ. "κάποιο X ικανοποιεί το f(X)"), χωρίς να εξηγήσει πως βρίσκεται ένα τέτοιο αντικείμενο. Συχνά αυτό παίρνει τη μορφή απόδειξης με αντίφαση, όπου η μη ύπαρξη του αντικειμένου αποδεικνύεται αδύνατη. Αντίθετα, μια κατασκευαστική απόδειξη στηρίζει την ύπαρξη ενός αντικειμένου δίνοντας μια μέθοδο εύρεσής του.

Ανάλυση και σύνθεση : Συχνά στην προσέγγιση ενός αποτελέσματος που έχει καθιερωθεί ότι ισχύει, η διαδικασία της απόδειξης αρχίζει με το αποτέλεσμα και ακολουθεί πορεία προς τα πίσω, στην υπόθεση ή σε κάτι που είναι ήδη γνωστό. Με άλλα λόγια, η αποδεικτική διαδικασία με ανάλυση βασίζεται στην εξής μεθοδολογία:

Δεχόμαστε προς στιγμήν ότι η προς απόδειξη πρόταση *P* είναι αληθής. Απο αυτήν συνάγουμε την αλήθεια μιας πρότασης ή μιας αλυσίδας προτάσεων. Εφ' όσον οι τελευταίες είναι αληθείς, τότε προφανώς είναι αληθής και η αρχική πρόταση *P*, καθ' όσον μπορούμε συνθετικά να αναχθούμε σε αυτήν από τις προηγούμενες. Αυτή η διαδικασία της ανάλυσης δεν ακολουθεί τους κανόνες της λογικής, καθώς ο συλλογισμός οδηγείται από αυτό που επιδιώκεται σε αυτό που διατυπώνεται ως υπόθεση και δεν είναι πάντα βέβαιο ότι μπορεί να ακολουθεί η αντίθετη κατεύθυνση.

Η αποδεικτική διαδικασία με σύνθεση χρησιμοποιεί τους ορισμούς, τα αξιώματα και άλλες ήδη γνωστές προτάσεις (που κι αυτές, με τη σειρά τους, απορρέουν από τα αξιώματα και τους ορισμούς) και με λογικούς συλλογισμούς καταλήγει στην προς απόδειξη ζητούμενη γεωμετρική πρόταση ή στο ζητούμενο γεωμετρικό θεώρημα.. Με άλλα λόγια ένα επιχείρημα που διατυπώνεται είναι κατάλληλο για να παράγει μία ολοκληρωμένη σύνθεση για την απόδειξη, όταν ξεκινά από τα διαπιστωμένα στοιχεία για να παραγάγει ένα νέο αποτέλεσμα

Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή : Στην απόδειξη με μαθηματική επαγωγή, αποδεικνύεται πρώτα μια "βασική περίπτωση", και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ένας "επαγωγικός κανόνας" για να δείξει μια (συχνά άπειρη) σειρά από άλλες περιπτώσεις. Αφού η βασική περίπτωση είναι αληθής, η απειρότητα των άλλων περιπτώσεων θα πρέπει επίσης να ισχύει, ακόμα κι αν δεν μπορούν όλες να αποδειχθούν ευθέως λόγω του άπειρου αριθμού τους. Για να αποδειχτεί ότι κάποιο αποτέλεσμα ισχύει για ένα ολόκληρο σύνολο φυσικών αριθμών ν , μια απόδειξη με επαγωγή ελέγχει αρχικά το αποτέλεσμα για τη μικρότερη τιμή του ν, παρουσιάζει την αλήθειά για κάποια τιμή του ν π.χ ν=κ και αποδεικνύεται η αλήθειά της για την επόμενη τιμή του ν, δηλαδή για ν=κ+1.

Στο ερώτημα σχετικά με το ποια μορφή και ποιος τύπος απόδειξης πρέπει να χρησιμοποιείται, δεν υπάρχει απάντηση. Ενώ μερικά θεωρήματα αποδεικνύονται μόνο με ένα είδος απόδειξης, πολλά θεωρήματα μπορούν να αποδειχτούν από πολλούς και διαφορετικούς τύπους αποδείξεων. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι το πυθαγόρειο θεώρημα, για το οποίο έχουν κατασκευαστεί εκατοντάδες διαφορετικές αποδείξεις. Ο τύπος απόδειξης που θα χρησιμοποιηθεί πρέπει να συμβαδίζει με το επίπεδο των μαθητών της τάξης. Για παράδειγμα, όταν πρόκειται για αρχάριους μαθητές ,από πλευράς μαθηματικής επίδοσης, είναι προτιμότερο να αποφευχθεί η

άμεση απόδειξη και η διαδικασία παραγωγικού και αναλυτικού συλλογισμού, Στην περίπτωση αυτή ίσως βοηθούσε μία απόδειξη από την επαγωγή, όπου θα εξεταστούν πρώτα απλούστερες περιπτώσεις και έτσι θα δημιουργηθεί πρόσφορο έδαφος για τη μετάβαση σε πιο σύνθετες γεωμετρικές καταστάσεις.

2.2.4 Ο ρόλος της απόδειξης στην σχολική τάξη διδασκαλίας του μαθήματος της γεωμετρίας

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι οι απόψεις στο τι αποτελεί απόδειξη στη γεωμετρία, οι οποίες διατυπώνονται στη βιβλιογραφία, ποικίλουν. Η απόδειξη διαδραματίζει πολλές σημαντικές λειτουργίες στην γεωμετρική επιστήμη, οι οποίες σε πολλές καταστάσεις αναδεικνύουν την σπουδαιότητα της . Οι λειτουργίες αυτές λαμβάνουν χώρα μέσα στο δυναμικό περιβάλλον της μαθηματικής σχολικής τάξης κατά την διδασκαλία της γεωμετρίας.

Η απόδειξη αρχικά εισάγεται στη διδασκαλία της γεωμετρίας ως μέσο εξήγησης και επαλήθευσης (κυρίως κατά την διδασκαλία σε υπολογιστικά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας), αργότερα είναι δυνατόν να επιτελεί και άλλες σημαντικές λειτουργίες όπως η ανακάλυψη, η συστηματοποίηση και η διανοητική πρόκληση. (Michael de Villiers (2003)

Η ανάλυση των λειτουργιών της απόδειξης αποτελεί ίσως το πρώτο στάδιο για το θέμα, το οποίο αποτελεί το επίκεντρο του ενδιαφέροντος της παρούσης εργασίας .Αρχικά είναι απαραίτητο, να καθοριστεί ο τρόπος που λειτουργεί μία μαθηματική δραστηριότητα, όπως είναι η αποδεικτική διαδικασία, ώστε να είναι ξεκάθαρο το πλαίσιο διαμόρφωσης και καθορισμού των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Με απλά λόγια θα διατύπωνε κάποιος: «εάν έχω γνώση του τρόπου που ένα μαθηματικό αντικείμενο ή μία μαθηματική διαδικασία λειτουργεί, τότε δεν μπορώ να εκφράσω τις απόψεις μου στο τι είναι και τι πιστεύω για αυτό». Παρακάτω παρατίθενται και αναλύονται οι λειτουργίες που διαδραματίζει η απόδειξη μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη :

α) Η απόδειξη ως μέσο επαλήθευσης

Παραδοσιακά, η απόδειξη στην τάξη διδασκαλίας της γεωμετρίας παρουσιάζεται μόνο ως <<μέσο λήψης της βεβαιότητας>>, για την άρση των αμφιβολιών που έχουν δημιουργήσει οι εμπειρικές παρατηρήσεις. Αυτή η προσέγγιση

προέρχεται κατά ένα μεγάλο μέρος από μια στενή φορμαλιστική άποψη, κατά την οποία η μόνη λειτουργία της απόδειξης είναι η επαλήθευση των μαθηματικών δηλώσεων.

Το μεγαλύτερο ποσοστό των μελών της μαθηματικής κοινότητας έχει διαμορφώσει την σταθερή πεποίθηση ότι η απόδειξη εξηγεί και κυρίως επιβεβαιώνει και επαληθεύει τις ιδιότητες των σχέσεων ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα στις προτάσεις και τα θεωρήματα στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος.(Harel & Sowder (1998) , Fishebein & Kedem (1982), Raymond (1997) κ.α)

Είναι αδιαμφισβήτητο ότι ο βασικός ρόλος της απόδειξης στη γεωμετρία είναι να επιβεβαιώσει την ορθότητα, την εγκυρότητα και την ισχύ ενός γεωμετρικού αποτελέσματος ή ενός ισχυρισμού (Hanna, 1983). Αυτός είναι τυπικά και ο ρόλος που οι περισσότεροι μαθητές αναγνωρίζουν στην αποδεικτική διαδικασία, κατά τη διάρκεια της σχολικής τους μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι εμπειρίες των μαθητών σχετικά με την απόδειξη, συχνά περιορίζονται στο να επιβεβαιώνουν την αλήθεια των ισχυρισμών που γνωρίζουν ότι έχουν αποδειχθεί, που σε πολλές μάλιστα περιπτώσεις είναι και ενστικτωδώς προφανείς σε αυτούς. Τέτοιες εμπειρίες συχνά οδηγούν τους μαθητές να θεωρούν την απόδειξη ως μία διαδικασία που απλά επιβεβαιώνει αυτό που είναι ήδη γνωστό ότι είναι αληθινό (Schoenfeld, 1994). Το αποτέλεσμα είναι η απόδειξη να παρέχεται για την επιβεβαίωση ενός γνωστού αποτελέσματος (Wheeler, 1990, σ. 3).

Όπως δηλώνει ο Bell (1976), η επαλήθευση ή η παροχή πειστικότητας ως προς την αλήθεια των μαθηματικών εικασιών θεωρείται παραδοσιακά ως ο πρωταρχικός ρόλος της απόδειξης. Πράγματι, αυτός ο ρόλος είναι και ο πιο οικείος στους μαθητές. Μάλιστα σε πολλές μελέτες μερικοί μαθητές θεωρούν ότι η αναγκαιότητα της επαλήθευση είναι και ο μοναδικός λόγος για την κατασκευή της απόδειξης κατά την διδασκαλία της γεωμετρίας. (Bell 1976, Braconne & Dionne 1987, Fischbein 1982, de Villiers 1992, Senk 1985).

β) Η απόδειξη ως μέσο εξήγησης

Η αποδεικτική διαδικασία έχει μεγαλύτερη παιδαγωγική αξία εάν δε δείχνει μόνο την αλήθεια των ισχυρισμών του γεωμετρικού θεωρήματος, αλλά βοηθάει και στο να γίνει κατανοητό γιατί οι ισχυρισμοί είναι αληθείς. Ο Bell (1976) θεωρεί ότι μια απόδειξη είναι αποτελεσματική εάν παρέχει μια πειστική επεξήγηση και αναφέρει

χαρακτηριστικά ότι η απόδειξη προσδοκάται από τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας για «να μεταδώσει μια βαθιά γνώση στο ***γιατί*** η πρόταση είναι αληθινή».

Όμως και η Hanna (1989, 1995) και ο de Villiers (1991) τόνισαν τη σημασία του «αποδεικνύειν» ως ένα τρόπο εξήγησης σε εκπαιδευτικά πλαίσια. Η Hanna ισχυρίστηκε ότι οι αποδείξεις που χρησιμοποιούν οι καθηγητές στα μαθήματα θα έπρεπε να επιλέγονται βάσει και των επεξηγηματικών και επαληθευτικών ιδιοτήτων τους : «η καλύτερη απόδειξη είναι αυτή που βοηθάει τους εκπαιδευτικούς να καταλάβουν το νόημα του θεωρήματος που αποδεικνύεται: για να διαπιστωθεί όχι μόνο ότι είναι αληθινό αλλά και γιατί είναι αληθινό» (Hanna 1995, σ. 47, Hersh 1993, σ. 390). Επομένως η εξήγηση θα έπρεπε να είναι άλλος ένας πρωταρχικός σκοπός της απόδειξης στην μαθηματική σχολική τάξη (Hanna 1990, Hersh 1993).

Αλλά και οι μαθηματικοί, θεωρούν ότι ο ρόλος της απόδειξης είναι κάτι περισσότερο από την απλή επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων: «οι μαθηματικοί συνήθως διαχωρίζουν τις αποδείξεις που αποκλειστικά και μόνο αποδεικνύουν, από τις αποδείξεις που επεξηγούν» (Steiner, 1978, σ. 135).

Επιπλέον, έχει διαπιστωθεί ότι αν και είναι δυνατόν να επιτευχθεί ένα αρκετά υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης για την ισχύ μιας υπόθεσης με τη βοήθεια της εμπειρικής επαλήθευσης με το χαρτί-μολύβι ή με τον υπολογιστή, όμως αυτό δεν παρέχει γενικά καμία ικανοποιητική εξήγηση γιατί η υπόθεση μπορεί να μην είναι αληθινή. Ακόμα κι αν εξετάζοντας όλο και περισσότερα παραδείγματα αυξηθεί η εμπιστοσύνη στην αλήθεια της υπόθεσης, ωστόσο δε παρέχεται καμία ψυχολογική ικανοποιητική αίσθηση υποστήριξης της βεβαιότητας, καμία διορατικότητα ή κατανόηση του πώς ή του γιατί η υπόθεση είναι η συνέπεια άλλων γνωστών αποτελεσμάτων.

Η λειτουργία της απόδειξης ως εξήγηση εμφανίζεται να έχει μεγαλύτερη ισχύ όταν η αρχική υπόθεση δεν είναι κοντά στην εμπειρική διαίσθηση, δηλαδή όταν δεν είναι προφανής ή ακόμα και όταν η διατύπωση του θεωρήματος είναι δυσνόητη από τους περισσότερους μαθητές

Στην κοινότητα των μαθηματικών οι εκπαιδευτικοί έχουν το πλεονέκτημα να είναι σε θέση να εξηγήσουν και να δώσουν πλήρη περιγραφή των γεωμετρικών καταστάσεων μέσω της απόδειξης, εφόσον όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες μπορούν να διατυπωθούν, να ανακαλυφθούν εμπειρικά και στη συνέχεια να εξηγηθούν με την

αποδεικτική διαδικασία. Από την άλλη οι μαθητές ικανοποιούν την ανάγκη τους για εξηγήσεις καθώς λύνουν τις απορίες των εμπειρικών παρατηρήσεων μέσω των αποδείξεων.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές ασπάζονται την απόδειξη ως λογική εξήγηση και οι εκπαιδευτικοί τη χρησιμοποιούν ως όπλο για να παρέχουν επεξηγηματική βοήθεια στους μαθητές, κατά την οικοδόμηση της νέας γεωμετρικής γνώσης.

γ) Η Απόδειξη ως μέσο ανακάλυψης

Η απόδειξη μπορεί να ανοίξει τον δρόμο προς την ανακάλυψη νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων. Ο de Villiers(1999) πρότεινε ότι η απόδειξη αποτελεί ένα μέσο για εξερεύνηση, ανάλυση και ανακάλυψη ή εφεύρεση νέων αποτελεσμάτων, και δεν είναι μόνο ένα μέσο επαλήθευσης αποτελεσμάτων που το άτομο γνωρίζει ότι ισχύουν. Με την εξερεύνηση των λογικών συνεπειών των ορισμών ενός αξιωματικού συστήματος, είναι εφικτό να αναπτυχθούν νέα μοντέλα μαθηματικών θεωριών. (π.χ οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες) (de Villiers, 1990).

Συχνά διατυπώνεται η άποψη ότι τα θεωρήματα αρχικά ανακαλύπτονται με τη βοήθεια της διαίσθησης ή/και των σχεδόν-εμπειρικών μεθόδων, προτού να ελεγχθούν μέσα από την διαδικασία παραγωγής των αποδείξεων. Παρόλα αυτά, υπάρχουν παραδείγματα στην ιστορία των μαθηματικών όπου τα νέα αποτελέσματα ανακαλύφθηκαν ή εφευρέθηκαν κατά τρόπο καθαρά παραγωγικό.

Η διατύπωση μίας γεωμετρικής πρότασης δεν ποτέ ικανή να πείσει ότι αυτή είναι αληθής. Μέσα από τη διαδικασία μίας παραγωγικής απόδειξης της πρότασης γεννιούνται και οι προκλήσεις να αναζητηθούν και να ανακαλυφθούν και σε ποιες άλλες περιπτώσεις μπορεί να ισχύει αυτή η γεωμετρική πρόταση. Τότε η διαδικασία της απόδειξης μετατρέπεται σε ερευνητική διαδικασία εξερεύνησης νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων.

Κατά συνέπεια, μέσα σε αυτές της συνθήκες η αποδεικτική διαδικασία για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς δεν είναι μόνο η εξήγηση, αλλά και το μέσο εκείνο, όπου μέσα από την κατανόηση της λογικής αλληλουχίας των αναπτυσσόμενων επιχειρημάτων θα δοθεί το έναυσμα για νέες ανακαλύψεις.

δ) Η Απόδειξη ως μέσο συστηματοποίησης

Ένας άλλος ρόλος της απόδειξης είναι να συνδέει ένα γεωμετρικό αποτέλεσμα σε ένα ευρύτερο σώμα γνώσης (Bell 1976, de Villiers 1999, Hanna 1983, 1990, Schoenfeld 1994). Στην πράξη αυτή η λειτουργία της απόδειξης επιτρέπει στα γεωμετρικά αποτελέσματα, που αρχικά θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους, να ενταχθούν και να οργανωθούν σε ένα πλαίσιο, που βασίζεται σε κοινά αποδεκτούς γεωμετρικούς κανόνες και νόμους. Έτσι, μια απόδειξη μπορεί να βοηθήσει στην σύνθεση και την τακτοποίηση μιας θεμελιώδους αξιωματικής γεωμετρικής δομής.

Ο de Villiers (1990) αναφέρει ότι η απόδειξη είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για τη συστηματοποίηση διάφορων γνωστών αποτελεσμάτων σε ένα ενοποιημένο σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων. Με άλλα λόγια ο κύριος στόχος της απόδειξης δεν είναι πάντα "ο έλεγχος της αλήθειας των γεωμετρικών δηλώσεων" , αλλά και η οργάνωση των λογικά ανεξάρτητων μεμονωμένων δηλώσεων, που είναι ήδη γνωστές, σε ένα συνεπές, ανεξάρτητο και πλήρες ενοποιημένο σύνολο.

ε) Η απόδειξη ως μέσο νοητικής πρόκλησης

Η προσπάθεια των μαθητών να υπερπηδήσουν τα εμπόδια που παρουσιάζονται στις μεθόδους των αποδεικτικών διαδικασιών και τις τεχνικές παρουσίασης αποδείξεων αποτελεί μία εποικοδομητική διαδικασία καλλιέργειας της κριτικής τους σκέψης.

Πολλοί είναι οι εκπαιδευτικοί που πιστεύουν ότι η αποδεικτική διαδικασία κατέχει εξέχοντα ρόλο στην διδασκαλία, διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καλλιέργεια της κριτικής σκέψης των μαθητών, του παραγωγικού συλλογισμού,αλλά και της αφαιρετικής σκέψης των μαθητών. Αλλά και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικού η απόδειξη αποτελεί ένα εργαλείο που πρέπει να γνωρίζουν ότι για να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά στη διδασκαλία, απαιτείται η συστηματική ενασχόληση από μέρους τους. Έτσι, αποτελεί μία διανοητική πρόκληση για τον κάθε εκπαιδευτικό η προσπάθεια να αξιοποιήσει τις τεχνικές των αποδείξεων, προκειμένου να στηρίξει τη βεβαιότητα, να εισάγει νέες γεωμετρικές έννοιες, ενώ ταυτόχρονα να παρέχει όλες τις απαραίτητες εξηγήσεις στους μαθητές.

στ) Η απόδειξη ως μέσο επικοινωνίας.

Προστίθεται ως λειτουργία της απόδειξης και η επικοινωνία. Η παρουσίαση και δημοσίευση των αποδείξεων είναι ένας τρόπος, ώστε ένας μαθηματικός να επικοινωνεί με τους άλλους μαθηματικούς. Η απόδειξη μέσα από τον ρόλο της

επικοινωνίας βοηθά στην μετάδοση των γεωμετρικών κανόνων, των ορισμών, των αξιωμάτων και κυρίως των γεωμετρικών εννοιών που διατυπώνονται για ένα γεωμετρικό θεώρημα μεταξύ των μαθητών, αλλά και μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού.

Επιπλέον μέσα από την επικοινωνιακή λειτουργία της αποδεικτικής διαδικασίας τα μέλη της μαθηματικής σχολικής τάξης ενεργοποιούνται, διατυπώνοντας υποθέσεις που πρέπει να εξεταστούν με την ανταλλαγή απόψεων , προτείνουν στρατηγικές μεθόδευσης, ασκούν κριτική και διαλογίζονται αν πείστηκαν για την αλήθεια της πρότασης ή του θεωρήματος. (Hanna, 1990).

Πολλοί μελετητές μέσα στα πλαίσια της μαθηματική κοινότητα διατείνονται ότι η απόδειξη αποτελεί ένα κοινωνικό κατασκεύασμα και ένα προϊόν της μαθηματικής επικοινωνίας (π.χ. Davis, 1986, Hanna, 1983, Hersh, 1993, Richards, 1991). Για παράδειγμα, η Hanna (1989β) αναφέρει ότι: «η αποδοχή ενός θεωρήματος από τους μαθηματικούς είναι μια κοινωνική διαδικασία» (σελ. 21). Η κοινωνική φύση της απόδειξης εμπεριέχει την κριτική εξέταση ενός επιχειρήματος ως απόδειξη από το κοινωνικό πλαίσιο (Alibert & Thomas 1991, Schoenfeld 1994).

Επιπλέον, ο Davis (1976) έχει αναφέρει ότι μια από τις πραγματικές αξίες της απόδειξης είναι ότι δημιουργεί τον πλαίσιο της κριτικής συζήτησης. Κάτω από αυτή την διατύπωση στην μαθηματική σχολική τάξη η γεωμετρική απόδειξη αποτελεί μια μορφή διαλόγου και ένα μέσο επικοινωνίας δασκάλων – μαθητών ή μαθητών μεταξύ τους

2.2.5 Η απόδειξη μέσω της επίλυσης προβλήματος

Έχει διαπιστωθεί ότι η διδασκαλία των μαθηματικών, μέσα από τις εφαρμογές τους και συγκεκριμένα τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων, αποτελεί μια από τις πιο αποτελεσματικές μεθόδους προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών. Με τον όρο επίλυση προβλήματος, δεν εννοούμε τη σχεδόν μηχανική – αυτοματοποιημένη πρακτική που παρατηρείται συχνά στις σχολικές αίθουσες, αλλά μια πλήρως συνειδητοποιημένη διαδικασία, σε κάθε βήμα της οποίας ο μαθητής είναι σε θέση να εξηγήσει τις ενέργειες του. Σε αυτό ακριβώς το σημείο υπεισέρχεται η έννοια της απόδειξης. Η απόδειξη ή το επιχείρημα μπορεί να αναφέρεται σε ένα θεώρημα - κάτι

που ήδη έχει αποδειχθεί από άλλους - ή σε ένα πρόβλημα που αναζητά τη λύση του· «a problem to prove», κατά τον Pólya (1957).

Το «εικάζειν» και «αποδεικνύειν» είναι μέρος μιας φυσικής, νοητικής ενότητας στα μαθηματικά, που περιστρέφεται γύρω από τη δραστηριότητα παραγωγής θεωρημάτων, συχνά ως απάντηση σε προβλήματα (Mariotti et al., 1997).

Σύμφωνα με τις Hadas και Hershkowitz (1998), η απόδειξη μπορεί να έχει ως στόχο να βεβαιωθεί το άτομο ή να πείσει τους άλλους για την ορθότητα μιας πρότασης ή να την αιτιολογήσει. Η ερευνητική τους προσπάθεια στόχευε στον εντοπισμό των συνθηκών υπό τις οποίες το άτομο προχωρεί σε επεξήγηση της πορείας, που ακολουθεί. Ο μαθητής τείνει να αιτιολογήσει την πορεία του, όταν προηγηθεί σύγκρουση ανάμεσα στις αρχικές του υποθέσεις και τα αποτελέσματα της εργασίας του ή όταν δεν είναι σε θέση να βρει παράδειγμα, το οποίο να επαληθεύει την υπόθεσή του. Το γνωστικό αδιέξοδο στο οποίο οδηγείται η προσπάθεια ή η ανατροπή μιας πεποίθησης, αναγκάζει το άτομο να αναζητήσει εξηγήσεις που θα του επέτρεπαν να αντιληφθεί τις σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος.

Η κατασκευή μαθηματικής απόδειξης εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος και ως τέτοια πρέπει να αντιμετωπίζεται (McGinvey & DeFranco, 1995). Στόχος είναι η συμμετοχή του ατόμου, η νοητική του ενεργοποίηση, η αξιοποίηση προηγούμενων γνώσεων, η κατανόηση και η σύνδεσή τους για την παραγωγή γνώσης. Η καταγραφή της αιτιολόγησης συνιστά προσπάθεια και μέτρο κατανόησης της πρότασης και επιτυγχάνεται μόνο, όταν υπάρχει πρόκληση για αντιμετώπιση μιας άγνωστης κατάστασης-προβλήματος.

Γενικά, στο τελικό στάδιο μιας οποιασδήποτε διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, η τελική λειτουργία της απόδειξης συναντά τη διανοητική πρόκληση (Luthuli, 1996). Αν οι μαθητές μαθαίνουν «να αποδεικνύουν καθώς λύνουν» (Lucast, 2003) τότε οικοδομείται στην τάξη το κατάλληλο περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές συνδέουν τις διδαχθείσες έννοιες, θεωρήματα και τεχνικές με τις αντίστοιχες εφαρμογές τους. Έτσι, η αποδεικτική διαδικασία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της εκπαίδευσης στην επίλυση προβλημάτων και της βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών. Ο μαθητής που μπορεί να αποδεικνύει, μπορεί και να εξηγεί.

Αποτελεί κοινό τόπο στην Ιστορία των Μαθηματικών ότι οι μαθηματικοί του παρελθόντος έλυσαν σημαντικά προβλήματα, χρησιμοποιώντας εννοιολογικά εργαλεία και μεθόδους που είναι ασυμβίβαστες με τις σημερινές απαιτήσεις ακριβολογίας και αυστηρότητας στην ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας. Το γεγονός αυτό και η ουσιώδης διάκριση ανάμεσα στην κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και στην αποδεικτική ικανότητα των μαθητών συνιστούν ένα είδος «παραλληλισμού», με άμεσες συνέπειες για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Από την παραπάνω ανάλυση των λειτουργιών της απόδειξης γίνεται φανερή η εξέχουσα σημασία της και η αξία της ως μαθηματική δραστηριότητα μέσα σε μία σχολική τάξη. Επιπλέον το το ενδιαφέρον που έχουν δείξει στην «απόδειξη» τόσο μεγάλοι φιλόσοφοι, όπως ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης, αλλά και Μαθηματικοί (Hilbert, Descartes, Bolzano) αποδεικνύει και την εξέχουσα σημασία της ως νοητική δραστηριότητα. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι σε οποιαδήποτε μορφή και αν η απόδειξη παρουσιάζεται και όσο αντικρουόμενες και αν είναι οι απόψεις για τη φύση της, το ρόλο της και τον χαρακτήρα της (όπως αναδείχθηκε στην αρχή του κεφαλαίου) η απόδειξη κατέχει εξέχοντα ρόλο για την μαθηματική επιστήμη και την σχολική κοινότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1 Οι πεποιθήσεις των μαθητών για την φύση, τη δομή , την οργάνωση και την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία.

Η αναφορά των επιστημολογικών ζητημάτων για την απόδειξη στη γεωμετρία μέσα από την ιστορική και κοινωνική πτυχή είναι απαραίτητη, πριν την εστίαση στη διερεύνηση της εκπαιδευτικής πλευράς της αποδεικτικής διαδικασίας, μέσα από την εξέταση των πεποιθήσεων των μαθητών , όπως παρουσιάζονται μέσα από την σχετική βιβλιογραφία.

Μία σημαντική έρευνα που σχετίζεται με το παραπάνω θέμα παρέχεται από τους Harel & Sowder (1998), οι οποίοι εξέτασαν τους μαθητές του Ηνωμένου Βασιλείου σε ζητήματα επιστημολογικής φύσεως για την απόδειξη στη γεωμετρία με χρήση ερωτηματολογίων. Οι απαντήσεις των μαθητών, σχετικά με το ποια θεωρούν ότι είναι η φύση της απόδειξης στη γεωμετρία, ομαδοποιούνται σε τρεις κατηγορίες:

α) θεωρούν ότι η απόδειξη στη γεωμετρία είναι η επαλήθευση των δηλώσεων των θεωρημάτων και παρέχει ουσιαστικά την ισχύ τους.

β) θεωρούν την απόδειξη ως την εξήγηση των γεωμετρικών θεωρημάτων. Επιπρόσθετα διευκρινίζουν ότι η εξήγηση προορίζεται για να διασαφηνιστούν οι υποθέσεις και τα ζητούμενα των γεωμετρικών θεωρημάτων, αλλά και για να επικοινωνήσουν τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας στη σχολική τάξη

γ) θεωρούν την απόδειξη στη γεωμετρία ως την ανακάλυψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων.

Οι διαπιστώσεις των ερευνητών Altis, Hampton, Foody, Lamarra, Levin και Medlcok (2001) σχετικά με το ίδιο ζήτημα είναι παρόμοιες. Στα αποτελέσματα των μελετών τους προκύπτει ότι οι μαθητές θεωρούν ότι η απόδειξη απαιτείται για να επικυρώσει την γνησιότητα κάθε θεωρήματος της γεωμετρίας, από το οποίο εξάγονται νέα συμπεράσματα για τα γεωμετρικά αντικείμενα. Επίσης, συγκαταλέγεται ότι κάποιοι θεωρούν ότι η απόδειξη είναι μία λογική διαδικασία για να δείξει την αλήθεια ή το κύρος μίας δήλωσης ενός θεωρήματος.

Στα αποτελέσματα της μελέτη των Harel &Sowder (1998) δίνεται και η ταξινόμηση των πεποιθήσεων των μαθητών για τη δομή και την οργάνωση της

γνώσης της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς και την πηγή γνώσης της αποδεικτικής διαδικασίας, μετά από την εξέταση των απαντήσεων των μαθητών Γυμνασίων και Λυκείων σε κατάλληλα προβλήματα. Κατέληξαν στις ακόλουθες κατηγορίες για τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία:

α) Υπάρχουν μαθητές που επιβεβαιώνουν, αμφισβητούν και εξετάζουν τις υποθέσεις στη διατύπωση ενός μαθηματικού θεωρήματος με την επίκληση σε φυσικά γεγονότα ή εμπειρίες που βασίζονται στις αισθήσεις τους. Οι μαθητές αυτοί δίνουν ισχύ στην αιτιολόγηση των ισχυρισμών τους μέσα από την εμπειρική θεώρηση των γεωμετρικών αντικειμένων. Επίσης δίνουν ιδιαίτερη σημασία και στην οπτική απεικόνιση του γεωμετρικού σχήματος και θεωρούν ότι μέσα από αυτή είναι δυνατόν να αποδειχτεί ένα θεώρημα της γεωμετρίας

β) Υπάρχει μειοψηφία μαθητών που αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στη αναλυτική μορφή παρουσίασης ενός μαθηματικού επιχειρήματος. Η μορφή παρουσίασης θεωρούν ότι είναι ικανή για να αποδείξει τους ισχυρισμούς μίας δήλωσης για τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού αντικειμένου. Τέλος πιστεύουν οτι μία αποδεικτική διαδικασία σχεδιάζεται με βάση τη λογική διάρθρωση και παρουσίαση των μαθηματικών συλλογισμών σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα και μαθηματικό συμβολισμό.

γ) Επίσης αρκετοί μαθητές θεωρούν ότι η απόδειξη ενός θεωρήματος της γεωμετρίας είναι αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα της σχολικής τάξης, επειδή παρουσιάζεται από καθιερωμένες αρχές, όπως είναι ο δάσκαλος και το σχολικό εγχειρίδιο

δ) Τέλος, υπάρχουν μαθητές που στηρίζονται στους επαγωγικούς τύπους μαθηματικών αποδείξεων. Συγκεκριμένα, θεωρούν ότι ο έλεγχος μίας υπόθεσης ενός γεωμετρικού θεωρήματος μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την προβολή ενός παραδείγματος - δηλαδή μίας ειδικής περίπτωσης - και ότι η παροχή περισσότερων παραδειγμάτων είναι αρκετή, για να καθιερώσει την καθολική ισχύ του θεωρήματος.

Η μελέτη των Harel &Sowder (1998) συμπληρώνεται, ώστε με βάση τις προαναφερθείσες κατηγορίες των πεποιθήσεων των μαθητών για την απόδειξη να δοθεί και η ταξινόμηση των πεποιθήσεων των μαθητών για τον σχεδιαμό μίας αποδεικτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζουν τρεις κατηγορίες, που τις χαρακτηρίζουν ως εξωτερικές (external conviction), εμπειρικές (empirical) και

αναλυτικές (analytical). Κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες προσδιορίζεται από διαφορετικούς παράγοντες, που αποτελούν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την αποδεικτική διαδικασία. Το «εξωτερικό σχέδιο κατασκευής μίας απόδειξης» καθορίζεται από τους ακόλουθους τρεις παράγοντες :

α) το τελετουργικό (the ritual of the argument presentation), που σημαίνει ότι θεωρούν οτι ένα επιχείρημα αποτελεί μια απόδειξη του γεωμετρικού θεωρήματος εάν και μόνο εάν είναι σύμφωνο με μια συγκεκριμένη μαθηματική σύμβαση. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές θεωρούν ότι η αποδεικτική διαδικασία πρέπει να παρουσιάζεται με ένα σχήμα δύο στηλών.

β) την αυθεντία (the word of authority) , που σημαίνει ότι θεωρούν οτι ένα επιχείρημα αποτελεί απόδειξη εάν παρουσιάζεται ή εγκρίνεται από μια καθιερωμένη αρχή, όπως ένας δάσκαλος ή ένας διάσημος μαθηματικός.

γ) το συμβολικό (symbolic form) αφορά τον χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων και της μαθηματικής γλώσσας κατά την παρουσίαση , την οργάνωση και τη δόμηση των επιχειρημάτων μίας αποδεικτικής διαδικασίας.

Το << εμπειρικό σχέδιο κατασκευής μίας αποδεικτικής διαδικασίας>> καθορίζεται α) από την επαγωγική αιτιολόγηση, που περιλαμβάνει την εξέταση ειδικών περιπτώσεων ή παραδειγμάτων κατά την αποδεικτική διαδικασία και β) από την άλλη από τις θεωρήσεις τους ότι το γεωμετρικό θεώρημα αποδεικνύεται "επειδή φαίνεται" από τον σχεδιασμό του γεωμετρικού σχήματος, που αναφέρεται στο γεωμετρικό θεώρημα.

Τέλος το «αναλυτικό σχέδιο κατασκευής μίας απόδειξης» παράγεται από εκείνους τους μαθητές οι οποίοι είναι ικανοί να επιβεβαιώσουν τις υποθέσεις ενός γεωμετρικού θεωρήματος μέσω της παρουσίασης λογικών επιχειρημάτων, τα οποία είναι προϊόν αφαιρετικής σκέψης.

Εκτός από την παραπάνω έρευνα και ο Bell (1976a και β) ταξινόμησε τις πεποιθήσεις των μαθητών σε σχέση την παραγωγή των αιτιολογήσεων που παρέχουν κατά την κατασκευή της αποδεικτικής διαδικασίας και προσδιόρισε δύο κατηγορίες: α) Η εμπειρική αιτιολόγηση, που χαρακτηρίζεται από την χρήση των παραδειγμάτων, προκειμένου να επαληθευτεί η ισχύς του γεωμετρικού θεωρήματος και β) η παραγωγική αιτιολόγηση, που χαρακτηρίζεται από την χρήση του αφαιρετικού συλλογισμού για την σύνδεση των υποθέσεων του γεωμετρικού θεωρήματος με τα συμπεράσματα, που ζητούνται να αποδειχτούν.

Σύμφωνα με τον Balachef (1987) η απόδειξη οδηγεί στην ύπαρξη ενός κοινού συστήματος επικύρωσης, ώστε να μπορεί να γίνει αποδεικτή από τη μαθηματική κοινότητα. Επίσης ο Balacheff (1988b) διέκρινε στις πεποιθήσεις των μαθητών δύο κατηγορίες αιτιολόγησης, τις οποίες ονόμασε "πραγματολογικές" (pragmatic) και "εννοιολογικές" (conceptual) αιτιολογήσεις. Οι πραγματολογικές αιτιολογήσεις είναι εκείνες που βασίζονται στην αποτελεσματική δράση που πραγματοποιείται στις αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων και οδηγούν στην πρακτική γνώση, που το θέμα μπορεί να χρησιμοποιήσει για να καθιερώσει την ισχύ μιας πρότασης. Αντίθετα, οι νοητικές (εννοιολογικές) αιτιολογήσεις απαιτούν αυτή την γνώση, που αντανακλάται σ' αυτές και η παραγωγή τους αναγκαία και προϋποθέτει την χρήση της γλώσσας που εκφράζει (αποσυνδεδεμένη από τις ενέργειες) τα αντικείμενα, τις ιδιότητές τους και τις σχέσεις τους. Με άλλα λόγια, οι εμπειρικές αποδείξεις είναι βασισμένες στη δράση, ενώ τη μετάβαση προς τις εννοιολογικές τις χαρακτηρίζει η χρήση της λειτουργικής γλώσσας (που περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο λεξιλόγιο και συμβολισμό) και μια νοητική εμπειρία (όπου οι πράξεις εσωτερικεύονται).

Η μετάβαση βέβαια από την πραγματολογική στην εννοιολογική απόδειξη με κατάληξη στην μαθηματική απόδειξη περιέχει τρεις συνιστώσες: τη γνώση σε επίπεδο πρακτικής, την γλώσσα ή τη συνιστώσα της διατύπωσης και την συνιστώσα της επικύρωσης περιλαμβανομένων όλων των τύπων της λογικής που κρύβονται κάτω από τις παραγόμενες αποδείξεις.

Στη κατηγορία πραγματολογικού η αιτιολόγηση περιλαμβάνει τρεις τύπους: α) την αφελής εμπειριοκρατία (naive empiricism) , στην οποία το γεωμετρικό θεώρημα που αποδεικνύεται ελέγχεται σε μερικά (κάπως τυχαία επιλεγμένα) παραδείγματα, β) το κρίσιμο πείραμα (crusial experiment), στο οποίο μια υπόθεση του θεωρήματος

ελέγχεται σε ένα προσεκτικό επιλεγμένο παράδειγμα και γ) το γενικό παράδειγμα (generic example), στο οποίο η αιτιολόγηση είναι βασισμένη στις διαδικασίες ή τους μετασχηματισμούς σε ένα παράδειγμα που επιλέγεται ως χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος μιας κατηγορίας. Σε αυτήν την περίπτωση, οι διαδικασίες ή οι μετασχηματισμοί στο παράδειγμα προορίζονται να γίνουν σε ολόκληρη την κατηγορία.

Η κατηγορία από τις εννοιολογικές αιτιολογήσεις των μαθητών περιλαμβάνουν: α) το σκεπτόμενο πείραμα (thought experiment) , στο οποίο οι ενέργειες εσωτερικοποιούνται και χωρίζονται από τα συγκεκριμένα παραδείγματα που εξετάζονται, και β) την γραφή των μαθηματικών συμβολισμών που εκφράζονται από την υπόθεση του γεωμετρικού θεωρήματος και στην οποία δεν υπάρχει η εξέταση ειδικών παραδειγμάτων και η αιτιολόγηση βασίζεται αποκλειστικά στη χρήση από τον μετασχηματισμό των τυποποιημένων συμβολικών εκφράσεων.

Τέλος η έρευνα του Balacheff (1999) επικεντρώνεται στην περαιτέρω ανάπτυξη του συστήματος των εμπειρικών αποδείξεων που αναπτύσουν οι μαθητές και προκύπτει οτι διατυπώνουν δύο είδη επιχειρημάτων : τα ρεαλιστικά και τα εννοιολογικά. Η ρεαλιστική αιτιολόγηση των μαθητών ορίζεται από τις παρατηρήσεις που αυτοί διατυπώνουν κατά την εξέταση της υπόθεσης του γεωμετρικού θεωρήματος , ενώ οι υπόλοιπες εννοιολογικές αποδείξεις σχετίζονται με την ικανότητά των μαθητών να διαπιστώνουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων του θεωρήματος ή των σχέσεων μεταξύ τους. Ο Balacheff, επίσης σημειώνει ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν παραδείγματα και για τα δύο είδη αποδείξεων.

Η βιβλιογραφία παραθέτει επιπλέον και άλλες μελέτες που ασχολήθηκαν με την διερεύνηση των πεποιθήσεων των μαθητών για την δομή και την οργάνωση της απόδειξης στη γεωμετρία. Οι Fishebein & Kedem (1982) μελέτησαν τις πεποιθήσεις των μαθητών Γυμνασίου για την απόδειξη της αλήθειας και της ισχύος των υποθέσεων ενός γεωμετρικού θεωρήματος μέσα από την εξέταση των επιχειρημάτων, που είναι σε θέση κάθε φορά να παράγουν και να κατασκευάζουν. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές μετά από την κατασκευή μίας έγκυρης απόδειξης, δεν ήταν σε θέση να αποφανθούν ότι επιβεβαιώθηκε η αλήθεια του θεωρήματος και συνέχιζαν να παραθέτουν παραδείγματα εμπειρικής προέλευσης.

Στα ίδια περίπου αποτελέσματα καταλήγει η έρευνα του Edwards (1999), όπου οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν τον ρόλο και τη σημασία της παροχής μαθηματικών και λογικών επιχειρημάτων για την αιτιολόγηση στην κατασκευή μίας αποδεικτικής διαδικασίας και αποδέχονται μόνο τα επιχειρήματα που έχουν επεξηγηματική φύση και δομή, ενώ παράλληλα στηρίζονται αποκλειστικά στα εμπειρικά παραδείγματα Σε προγενέστερη μελέτη του Edwards (1997) είχε βρεθεί, επιπλέον, ότι κατά την παρουσίαση εμπειρικών παραδειγμάτων οι μαθητές μπορούσαν να βρουν εκείνο το παράδειγμα, για το οποίο δεν ίσχυε η υπόθεση του θεωρήματος. Τέλος αποδέχονταν ότι η κατασκευή και η παρουσίαση μίας απόδειξης αποτελεί μία εξήγηση των ιδιοτήτων του γεωμετρικού αντικειμένου.

Η έρευνα του Galbraith (1981) είχε διαπιστώσει, σε αντιδιαστολή με την έρευνα του Edwards (1997), ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την έννοια των παραδειγμάτων που αποτελούν εξαίρεση στους κανόνες στις υποθέσεις των γεωμετρικών θεωρημάτων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, θεωρούν ότι ένα αντιπαράδειγμα δεν είναι αρκετό για να ανασκευάσει μία εικασία καθώς παραβιάζει το συμπέρασμα μίας υπόθεσης.

Η έρευνα του Schoenfeld (1986) έδειξε ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη φύση, το νόημα και τη δομή μίας αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία, που χαρακτηρίζεται από αυστηρότητα στη γλώσσα και τον συμβολισμό. Αντίθετα, δέχονται την οπτική απεικόνιση ως απόδειξη. Οι μαθητές, δηλαδή, πιστεύουν ότι οι υποθέσεις ενός γεωμετρικού θεωρήματος επιβεβαιώνονται, επειδή οι κατασκευές τους με χαρτί και μολύβι «φαίνονται» αληθινές και ακριβείς. Από την άλλη, αν η εικόνα που αποτυπώνουν για το γεωμετρικό αντικείμενο δε φαίνεται με το μάτι να είναι σωστή, τότε ισχυρίζονται ότι η υπόθεση του γεωμετρικού θεωρήματος είναι λανθασμένη. Συμπεραίνουμε ότι και σε αυτές τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία φαίνεται ξεκάθαρα η εμπειρική φύση των επιχειρημάτων, όπου αναγνωρίζονται ως επικύρωση, επιβεβαίωση και εξήγηση των υποθέσεων των γεωμετρικών θεωρημάτων.

Στα αποτελέσματα της μελέτης των Robert και Schwarzenberger (1991) εξάγεται ότι οι μαθητές πιστεύουν πως οι αποδείξεις είναι δύσκολες ασκήσεις και δεν αποτελούν ένα μέσο για να πείσουμε κάποιον για ένα βέβαιο αποτέλεσμα.

Στην έρευνα του Weber (2001) προκύπτει ότι οι σπουδαστές σε ακαδημαϊκό επίπεδο θεωρούν μία απόδειξη έγκυρη, όταν η παρουσίαση της δομείται με τη μορφή δύο στηλών, όπου από τη μία στήλη έχουν παρατεθεί οι υποθέσεις της δήλωσης του γεωμετρικού θεωρήματος και από την άλλη στήλη δίνονται τα ζητούμενα συμπεράσματα. Αυτή η πεποίθηση των σπουδαστών ελλοχεύει προϋπάρχουσες πεποιθήσεις, που δημιουργήθηκαν κατά τη μαθητική τους πορεία, για την «στρατηγική γνώση» μίας απόδειξης. Η «στρατηγική γνώση» μίας απόδειξης σχετίζεται με την οργάνωση, τη δομή, την ανάπτυξη και τον τρόπο παρουσίασης μίας αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία. Όπως αναλύεται από την έρευνα αυτή, οι σπουδαστές ακολουθούσαν για την κατασκευή μίας απόδειξης την εξής πορεία: ανακαλούσαν από τη μνήμη τους γνωστούς ορισμούς, αξιώματα και προτάσεις που σχετίζονται με το γεωμετρικό αντικείμενο που αναφέρεται στο θεώρημα που ζητείται να αποδειχτεί, χωρίς να έχουν κατανοήσει τις μεθοδολογίες κατασκευής μίας απόδειξης, ξεκινούν να επιβεβαιώσουν την ισχύ του θεωρήματος με την ελπίδα ότι θα οδηγηθούν προς την κατεύθυνση της αλήθειας της ζητούμενης δήλωσης.

Επίσης, σε άλλο σημείο της βιβλιογραφίας αναφέρεται, ότι οι μαθητές επιλέγουν να θεωρούν ότι μία διαδικασία αποτελεί απόδειξη επειδή η παρουσίαση της «φαίνεται περίπλοκη».(Healy & Hoyles ,2000). Αυτό φανερώνει ότι οι μαθητές έχουν σχηματίσει την πεποίθηση ότι η αποδεικτική διαδικασία είναι μία περίπλοκη και δυσνόητη δραστηριότητα της γεωμετρίας.

Επίσης οι Selden και Selden (2003) παρατήρησαν ότι οι μαθητές όταν κατασκευάζουν μία απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος αντιλαμβάνονται με λανθασμένο τρόπο τη συντακτική και σημασιολογική γνώση της. Συγκεκριμένα, θεωρούν ότι η κατασκευή μίας απόδειξης ξεκινά από το συμπέρασμα με τη χρήση του αντίστροφου του θεωρήματος και χωρίς να έχουν γνώση των χαρακτηριστικών μίας γεωμετρικής έννοιας, χρησιμοποιούν δυσνόητο για αυτούς συμβολικό και γλωσσικό συμβολισμό, προκειμένου να καταλήξουν στο ζητούμενο.

Τέλος η έρευνα των Baker και Campbell (2004) επιβεβαιώνει ότι οι σπουδαστές δεν κατανοούν τη διαδικασία οργάνωσης της κατασκευή μίας απόδειξης και την ακρίβεια στη διατύπωση των μαθηματικών συλλογισμών, ενώ ταυτόχρονα παρερμηνεύουν την εφαρμογή των κανόνων της λογικής στην κατασκευή απόδειξης.

Από τις παραπάνω έρευνες διαπιστώνεται ότι σε γενικές γραμμές στις θεωρήσεις των μαθητών για την αποδεικτική διαδικασία αναγνωρίζονται οι λειτουργίες που επιτελεί κατά την διαδικασία της μάθησης και της διδασκαλίας. Ακόμα είναι κοινή πεποίθηση η εμπειρική φύση της απόδειξης. Τέλος διαπιστώνεται ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών αναφορικά με την παραγωγή και παρουσίαση αναλυτικών και παραγωγικών επιχειρημάτων, που στηρίζουν την ανάπτυξη της απόδειξης, είναι ανεπαρκείς.

Έκτος απο τις παραπάνω έρευνες σχετικά με τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη,είναι σημαντικό να αναφερθεί και η μελέτη των Ruthven και Coe (1994), διότι στα αποτελέσματα δεν προκύπτει σημαντική σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των μαθητών για την απόδειξη και τη μορφή της διδασκαλίας που εφαρμόζεται απο τον εκπαιδευτικό. Η μεθοδολογία αυτής της έρευνας βασίστηκε στην παραγοντική ανάλυση και την ερμηνεία των απαντήσεων σε ένα δομημένο ερωτηματόλογιο 70 μαθητών,ηλικίας 16 ή 17 χρονών, που είχαν ακολουθήσει μεταρρυθμιστικά μαθηματικά προγράμματα σπουδών για πέντε χρόνια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το ερωτηματολόγιο περιείχε 28 δηλώσεις σχετικά με τη μαθηματική γνώση, τον τρόπο μάθησης και την διδασκαλία, ενώ οι μισές δηλώσεις ήταν επικεντρωμένες στην απόδειξη.

3.2 Οι δυσκολίες των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία.

Προκειμένου να κατανοηθούν οι λόγοι που οι μαθητές έχουν διαμορφωμένη τη δομή των πεποιθήσεων - που περιγράφεται παραπάνω - για τη φύση, τη δομή και την ανάπτυξη της αποδεικτικής διαδικασίας, είναι απαραίτητο να αναλυθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την απόδειξη στη γεωμετρία.

Τις τρεις τελευταίες δεκαετίες πραγματοποιήθηκαν πλήθος ερευνών στη Διδακτική των Μαθηματικών, οι οποίες μας παρέχουν αναλυτικά συμπεράσματα και στοιχεία για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την αποδεικτική διαδικασία. Παρουσιάζονται οι ταξινομήσεις δύο ερευνητών για αυτές:

Ο Dreyfus (2003, σ. 123) επιχειρεί μια ταξινόμηση των ερευνών σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για την απόδειξη. Διακρίνει τις επόμενες τρεις κατηγορίες:

- 1η κατηγορία: Έρευνα, η οποία αναλύει και ταξινομεί τα επιχειρήματα τα οποία οι μαθητές θεωρούν αποδείξεις (Balacheff 1987, Harel & Sowder 1998).
- 2η κατηγορία: Έρευνα, η οποία δείχνει πόσο ισχυρά μπορεί να είναι τα μαθηματικά επιχειρήματα των μαθητών του δημοτικού (Maher & Martino 1996, Zack 1997, Ball & Bass 2000).
- 3η κατηγορία, παρουσιάζουν «μη-τυπικές» αιτιολογήσεις στις τάξεις τους.: Έρευνα, η οποία δείχνει πόσο ανεπαρκείς είναι οι αντιλήψεις των μαθητών του γυμνασίου σχετικά με την απόδειξη (Fischbein 1982, Vinner 1983, Healy & Hoyles 1998).

Σε παλαιότερη έρευνα του ο Dreyfus (1990) ταξινομεί σε τρεις, επίσης, κατηγορίες τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει η πλειοψηφία των μαθητών για την κατάκτηση της αποδεικτικής διαδικασίας:

- 1η κατηγορία: Οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη της απόδειξης
- 2η κατηγορία: Αδυνατούν να συλλάβουν το στοιχείο του «λογικά αναπόφευκτου», που είναι έμφυτο στην έννοια της απόδειξης
- 3η κατηγορία: Δυσκολεύονται να διατυπώσουν μια απόδειξη.

Πρόσφατα, ο Μπαραλός (2006, σ. 414) επιχειρεί μια ταξινόμηση των προβλημάτων κατανόησης της απόδειξης σε τέσσερις κατηγορίες:

1η κατηγορία: Το πρόβλημα της μη αποδοχής.

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στο ότι οι μαθητές δε δέχονται ότι η τυπική απόδειξη ενός θεωρήματος αποτελεί την απόλυτη εγγύηση για την αλήθεια ενός θεωρήματος (Porteus 1990, Robert & Schwarzenberger 1991, Chazan 1993).

2η κατηγορία: Το πρόβλημα της διαφορετικότητας των πλαισίων.

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στο ότι οι μαθητές δε διαχωρίζουν εύκολα τη διαφορετικότητα των ρόλων της απόδειξης στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής, όπου η απόδειξη είναι συνώνυμη με ότι μας πείθει.Ομοίως, στο πλαίσιο των μαθηματικών, όπου η απόδειξη σημαίνει ένα παραγωγικό επιχείρημα του οποίου το συμπέρασμα προκύπτει, μέσω της λογικής, από αξιώματα (Balacheff 1991, De Villers 1996).

3η κατηγορία: Το πρόβλημα της λογικής.

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στο ότι οι μαθητές δεν έχουν τις απαιτούμενες γνώσεις λογικής. Η τυπική απόδειξη χρησιμοποιεί τη γλώσσα των μαθηματικών που περιλαμβάνει εκτός των άλλων, στοιχεία προτασιακού και κατηγορικού λογισμού, τις

λογικές αρχές, τα βασικά συμπερασματικά πρότυπα και τις βασικές μεθόδους απόδειξης. Η ατελής γνώση τους, όπως και αν επικοινωνείται αυτή η γλώσσα, δημιουργεί προβλήματα κατανόησης. Στο σχολείο, οι μέθοδοι απόδειξης, δε διδάσκονται καθόλου ή διδάσκονται ελλιπέστατα, μάλλον στη βάση της υπόθεσης ότι υπάρχει μια φυσική διανοητική λογική δομημένη στα πρότυπα της τυπικής λογικής (Furinghetti & Domingo1996, Movshovitz-Hadar 1996).

4η κατηγορία: Το πρόβλημα της μη προσφυγής στην τυπική απόδειξη

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στο ότι οι μαθητές δεν κατανοούν την ανάγκη να προσφύγουν στην τυπική απόδειξη. Ο μαθητής πρέπει να αφομοιώσει στο Λύκειο πολλές έννοιες - μεταξύ των οποίων και της αποδεικτικής διαδικασίας - σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα σε αντίθεση με τον ιστορικό χρόνο, που χρειάστηκαν για να συλληφθούν και να εξελιχθούν. Δε δίνεται ο χρόνος και ο τρόπος στους μαθητές να πεισθούν για την αναγκαιότητα της τυπικής απόδειξης (Williams 1980, Lewis 1986, Coe & Ruthven 1994).

Τα προηγούμενα συνηγορούν υπέρ της ερμηνείας, που δίνουν πολλοί ερευνητές για την αποτυχία των μαθητών να κατακτήσουν την έννοια της απόδειξης. Οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν την αναγκαιότητα και το νόημα των αυστηρών αποδείξεων στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας, όπως είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, ιδιαίτερα όταν αυτή εμφανίζεται να επικυρώνει «προφανή» αποτελέσματα της παρατήρησης και της διαίσθησης (Fischbein & Kedem 1982, Schoenfeld 1986, Balacheff 1991 κα.).

Στην ελληνική μαθηματική σχολική εκπαίδευση η έρευνα της Τσαλαπάτη (2005) διαπίστωσε ότι οι μαθητές παρουσίασαν σοβαρή αδυναμία στην αλγεβρική απόδειξη. Η αδυναμία αυτή εντοπίζεται στην κατασκευή μιας απαγωγικής απόδειξης, αλλά και στη διάκριση μιας ορθής αλγεβρικής απόδειξης από μια λανθασμένη. Επίσης διαπιστώθηκε οτι οι μαθητές έχουν την τάση να πιστεύουν ότι οι φορμαλιστικές αποδείξεις εν γένει είναι σωστές ανεξαρτήτως περιεχομένου. Ο κυρίαρχος τρόπος προσέγγισης των αλγεβρικών αποδείξεων είναι εμπειρικός με τη βοήθεια πλήθους παραδειγμάτων. Αντίθετα, στις γεωμετρικές αποδείξεις οι μαθητές μπορούσαν να διακρίνουν μια σωστή από μια λανθασμένη απόδειξη, αλλά σίγουρα οι σωστές φορμαλιστικές αποδείξεις γίνονται αποδεκτές από πολύ μεγαλύτερο αριθμό μαθητών σε σχέση με αυτούς που θα επιλέξουν μια σωστή μη φορμαλιστική

απόδειξη. Ο κυρίαρχος τρόπος προσέγγισης γεωμετρικών αποδείξεων ήταν φορμαλιστικός. Επομένως, στη γεωμετρία οι μαθητές έδειξαν σχετικά καλύτερη απόδοση, αλλά καθόλου ικανοποιητική.

Η έρευνα των Καραγιαννίδου (2005) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι:

α) οι μαθητές που πιστεύουν περισσότερο στη χρησιμότητα των μαθηματικών έχουν ορθότερη αντίληψη για το πότε μια απόδειξη είναι ορθή και πλήρης,

β) οι μαθητές που μπορούσαν να διακρίνουν τι συνιστά πλήρη απόδειξη, είχαν θετικότερη αντίληψη για τη χρησιμότητα των μαθηματικών στη ζωή.

Επίσης, η ίδια έρευνα έδειξε ότι μια μεγάλη πλειοψηφία μαθητών θεωρεί ότι οι φορμαλιστικές αποδείξεις είναι αυτές που νομιμοποιούνται και τυγχάνουν μεγαλύτερης αποδοχής από τον δάσκαλο, αν και οι μισοί περίπου μαθητές θεωρούν πιο κατανοητές τις επεξηγηματικές αποδείξεις. Στο τελευταίο δίνεται η εξής ερμηνεία. Οι μαθητές επιλέγουν αποδείξεις των οποίων τους συλλογισμούς μπορούν οι ίδιοι να αξιολογήσουν (μπορούν να διαπιστώσουν την ύπαρξη λαθών ή να εκτιμήσουν σωστά τη γενικότητά τους).

Αυτή η ερμηνεία ενισχύεται από παλαιότερες διαπιστώσεις, όπως της αναγκαιότητας που νιώθουν οι μαθητές να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά τους με εμπειρικές αποδείξεις ακόμα και όταν καταλαβαίνουν μια τυπική απόδειξη (Fischbein, 1982) και του γεγονότος ότι οι μαθητές πρέπει να κάνουν μια μετάβαση από την καθημερινή γλώσσα που τους είναι οικεία σε μια πιο λειτουργική γλώσσα.

Η αναλυτική παρουσίαση των ερευνών, που παρατίθενται παραπάνω, αποτυπώνει και περιγράφει πλήρως τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την αποδεικτική διαδικασία. Αυτές συνοψίζονται στην άγνοια βασικών κανόνων συμπεράσματος, λογικής και βασικών μεθόδων απόδειξης, στη μη αποδοχή της τυπικής απόδειξης ως εγγυήτριας της καθολικής εγκυρότητας, στον εγκλωβισμό σε εμπειρικά σχήματα αξιολόγησης, στη διαφορετικότητα των πλαισίων δράσης της απόδειξης (καθημερινή ζωή-σχολείο) και στη διαφορετικότητα των ρόλων της απόδειξης ανάμεσα στο σχολείο και στη μαθηματική κοινότητα.

Κατά αυτόν τον τρόπο, η παρούσα μελέτη μπορεί να βοηθήσει στην διαμόρφωση μίας εικόνας για το σύστημα των πεποιθήσεων που διαμορφώνουν οι μαθητές αναφορικά με τον τρόπο μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας. Το πιο σημαντικό, όμως, είναι ότι η παραπάνω ανάλυση συνιστά τη διερεύνηση των αιτιών

που δημιουργούν στους μαθητές αυτές τις δυσκολίες, ώστε να μπορεί να διαμορφωθεί μέσα στη μαθηματική τάξη εκείνο το πλαίσιο που δε θα δημιουργεί παρερμηνείες για την αποδεικτική διαδικασία, αλλά αντίθετα θα καταδεικνύει την αναγκαιότητα της απόδειξης στη γεωμετρία και θα τονίζει τον κρίσιμο ρόλο που διαδραματίζει.

Οι συγκεχυμένες πεποιθήσεις των μαθητών στο τι είδους επιχειρήματα είναι αποδεκτά σε μία αποδεικτική διαδικασία σημαίνει ότι δεν είναι σε θέση να αποφασίσουν πότε η αποδεικτική διαδικασία έχει λήξει. Η ανεπάρκεια του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών για τι πραγματικά σημαίνει να αποδείξω με λογικούς συλλογισμούς ένα θεώρημα ή μία πρόταση της γεωμετρίας, αλλά και πως κατασκευάζω ή γράφω ή διατυπώνω λεκτικά και γραπτά αυτή τη διαδικασία επιβεβαιώνεται από τις παραπάνω έρευνες.

Περαιτέρω, οι δυσκολίες των μαθητών προέρχονται κατά βάση από την υιοθέτηση της πεποίθησης ότι προκειμένου να είναι σε θέση να μάθουν μία αποδεικτική διαδικασία, αρκεί να απομνημονεύσουν αυτά που διατυπώνονται από τον διδάσκοντα ή το σχολικό εγχειρίδιο. Σύμφωνα με τις θεωρήσεις τους δεν είναι αναγκαίο να αποδειχτεί οτιδήποτε είναι γνωστό ότι ισχύει. Με άλλα λόγια πιστεύουν οτι η πρόελευση της γνώσης της απόδειξης είναι όσα έχουν διατυπωθεί εδώ και χιλιάδες χρόνια από τον Ευκλείδη και καταγράφονται στο σχολικό εγχειρίδιο.

Με άλλα λόγια, αντιλαμβάνονται την απόδειξη μόνο ως μέσο επαλήθευσης και δε διακρίνουν τους ιδιαίτερους ρόλους που διαδραματίζει στο μάθημα της γεωμετρίας. Από την άλλη, η ανεπαρκής διαισθητική κατανόηση των εννοιών και η άγνοια ή η ελλιπής χρήση των ορισμών φανερώνει τις πεποιθήσεις των μαθητών για την «απλότητα της γνώσης» της γεωμετρίας και της απόδειξης. Ό,τι έχουν διδαχτεί σε προηγούμενα έτη σπουδών είναι για τους μαθητές ανεξάρτητες πληροφορίες που δεν έχουν ενοποιηθεί, προκειμένου να συνδέουν και να αναπαριστούν τα δεδομένα μίας ζητούμενης απόδειξης πρότασης με γνωστές ιδιότητες γεωμετρικών αντικειμένων και εννοιών.

Οι μαθητές αδυνατούν να συνδέσουν και να εφαρμόσουν λογικούς κανόνες, διότι ελλοχεύει η αντίληψή τους ότι μία απόδειξη συνίσταται από απομονωμένα τμήματα γνώσης. Τέλος, η αδυναμία χρήσης της μαθηματικής γλώσσας στην παρουσίαση και την κατασκευή των αποδεικτικών διαδικασιών, φανερώνει την αδυναμία τους να κατανοήσουν ως ρόλο της απόδειξης την επικοινωνία μέσα στην κοινότητα της τάξης.

Οι περισσότεροι μαθητές δεν κατανοούν γιατί πρέπει να μάθουν την αποδεικτική διαδικασία και δηλώνουν ότι η απόδειξη είναι μία δυσνόητη διαδικασία, που πρέπει να διδαχτούν στο μάθημα της γεωμετρίας. Ενώ όταν καλούνται να σχολιάσουν την απόδειξη, μερικές κοινές απαντήσεις είναι:

(α) «εγώ μισώ τις αποδείξεις, γιατί δεν τις καταλαβαίνω»,

(β) «γιατί πρέπει να αποδείξω κάτι, που φαίνεται τόσο προφανές;» και

(γ) «εγώ εμπιστεύομαι τον μεγάλο μαθηματικό Ευκλείδη, που ανακάλυψε το θεώρημα» (Healy & Hoyles, 1998, σελ.670).

Η βαθύτερη αιτία της υιοθέτησης αυτών των πεποιθήσεων από τους μαθητές, είναι η αδυναμία τους στην παραγωγή μαθηματικού συλλογισμού. Μία πλήρης κατανόηση του τρόπου μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι αδύνατη, χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού.

3.3 Οι αιτίες για τις δυσκολίες των μαθητών με την απόδειξη στη γεωμετρία.

Η παραπάνω ανάλυση εγείρει προβληματισμούς και προκύπτουν ερωτήματα, που είναι ουσιαστικής για την μαθηματική εκπαίδευση. Έτσι πολλοί εκπαιδευτικοί αναρωτιούνται "γιατί κάποιοι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την ανάγκη κατασκευής μίας αποδεικτικής διαδικασίας ενός θεωρήματος και κυριαρχούνται από αρνητικά συναισθήματα για αυτήν " ή "μήπως η πρακτική διδασκαλίας που υιοθετήθηκε δεν ήταν κατάλληλη, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν την απόδειξη των ιδιοτήτων του γεωμετρικού αντικειμένου ". Επίσης στους συντάκτες των αναλυτικών πραγραμμάτων σπουδών γεννάται το ερώτημα "μήπως στους μαθητές (ηλικίας 14- 16 ετών) δεν είναι ακόμα προσιτή η διδασκαλία της απόδειξης στο μάθημα της γεωμετρίας". Η διερεύνηση των απαντήσεων των παραπάνω ερωτημάτων είναι σημαντική, ώστε να μην περιθωριοποιηθεί η αποδεικτική διαδικασία στην

μαθηματική σχολική εκπαίδευση, λόγω της αδυναμίας κατανόησης της απο τους μαθητές και των δυσκολιών, που αυτοί αντιμετωπίζουν.

3.3.1 Ο μαθηματικός συλλογισμός ως απαραίτητο συστατικό στοιχείο της αποδεικτικής διαδικασίας.

Το Εθνικό συμβούλιο των δασκάλων των μαθηματικών (NCTM) τονίζει τη σπουδαιότητα του μαθηματικού συλλογισμού, υπογραμμίζοντας ότι αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία. Αναφέρει χαρακτηριστικά: «οι μαθητές πρέπει να έχουν καλλιεργήσει τις δεξιότητες του μαθηματικού συλλογισμού, για να παράγουν τη γεωμετρική απόδειξη, που στηρίζεται στην οργάνωση και τη δόμηση μίας αλυσίδας λογικών επιχειρημάτων» (σελ.56).

Επιπλέον, στις αρχές και τα πρότυπα των σχολικών μαθηματικών αναφέρεται ότι οι μαθητές θα πρέπει:

α) να αναγνωρίσουν τον μαθηματικό συλλογισμό και την απόδειξη ως θεμελιώδεις πτυχές των μαθηματικών,

β)να μπορούν να ερευνούν τις μαθηματικές υποθέσεις,

γ) να είναι σε θέση να αναπτύσσουν και να αξιολογούν τα μαθηματικά επιχειρήματα στην απόδειξη και

δ) να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν τους διάφορους τύπους συλλογισμών και τις μεθόδους απόδειξης.

Επίσης, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν την απόδειξη για «να καθιερώσουν την αλήθεια» βασισμένη στον λογικό και τον παραγωγικό συλλογισμό (Battista & Clements, 1992). Η απόδειξη για έναν μαθηματικό χρησιμοποιείται για να καθιερώσει την εννοιολογική κατανόηση και δε θεωρείται απλά σειρά τεχνικών βημάτων (Hanna, 2000b). Αυτές οι δύο διατυπώσεις από μόνες τους αναδεικνύουν τη σημασία του συλλογισμού στην αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία.

Ο συλλογισμός αποτελεί όλες εκείνες τις διασυνδέσεις μεταξύ της εμπειρίας και της γνώσης που το πρόσωπο χρησιμοποιεί για να εξηγήσει τι σκέφτεται όταν παρατηρεί ή έρχεται αντιμέτωπος με μία κατάσταση. Ο Webster (1982, σελ.1183) καθορίζει τον μαθηματικό συλλογισμό ως «τη δυνατότητα να σκεφτεί με συνοχή και

λογική για να συναχθούν τα συμπεράσματα από τα γνωστά γεγονότα ή τις υποθέσεις». Ο μαθηματικός συλλογισμός πρέπει να αναπτυχθεί πολύ πριν να ζητήσουμε από τους σπουδαστές να κατασκευάσουν τις αποδείξεις (Battista & Clements, 1995 Edwards, 1997 Hanna, 2000b Knuth, 2002a Mistretta, 2000 Perham & Perham, 1997).

Όταν οι σπουδαστές καλούνται να παρουσιάσουν μία αποδεικτική διαδικασία ή να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους στις μαθηματικές ερωτήσεις, τότε απαιτείται κάποια μορφή μαθηματικού συλλογισμού. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν τον μαθηματικό συλλογισμό και κατά τη συζήτηση με τον εκπαιδευτικό και τους συμμαθητές τους μέσα στη μαθηματική τάξη, καθώς καλούνται να διατυπώσουν εικασίες και να αιτιολογήσουν τους ισχυρισμούς τους κατά την αποδεικτική διαδικασία.

Μία γεωμετρική απόδειξη απαιτεί τον παραγωγικό και τον επαγωγικό συλλογισμό. Ο παραγωγικός συλλογισμός περιλαμβάνει μία αλυσίδα δηλώσεων, που συνδέονται λογικά. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τον επαγωγικό συλλογισμό όταν γενικεύουν τα αποτελέσματα ή τις παρατηρήσεις από μερικές περιπτώσεις.

Κάτω από αυτό το πλαίσιο, επιβάλλεται η διερεύνηση των δεξιοτήτων του μαθηματικού συλλογισμού που διαθέτουν οι μαθητές, προκειμένου να κατασκευάσουν μία απόδειξη ενός θεωρήματος της γεωμετρίας.

3.3.2 Θεωρίες ανάπτυξης του γεωμετρικού συλλογισμού.

Η μελέτη των Piaget & Inhelder (1967) εξέτασε πώς τα παιδιά οργανώνουν και κατασκευάζουν ιδέες-απόψεις για την απόδειξη στη γεωμετρία και υποστηρίζουν ότι, η οργάνωση των γεωμετρικών ιδεών ενός παιδιού ακολουθεί μια καθορισμένη, λογική διατεταγμένη σειρά. Διαπίστωσαν ότι, τα παιδιά προσχολικής ηλικίας μπορούν να κάνουν διακρίσεις στα αντικείμενα που βασίζεται στα τοπολογικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα, αλλά δεν θα μπορούσαν να κάνουν διακρίσεις μεταξύ των καμπυλόγραμμων και ευθύγραμμων αντικειμένων.

Σύμφωνα με τους Piaget και Inhelder, τα παιδιά μπορούν να αρχίσουν να κάνουν διακρίσεις μεταξύ των Ευκλείδειων γεωμετρικών αντικειμένων σε ηλικία 4 ετών. Προτείνεται επίσης ότι, οι γεωμετρικές ιδέες αναπτύσσονται με την πάροδο του

χρόνου και προχωρούν μέσω των επιπέδων γνωστικής ανάπτυξης (Battista & Clements, 1992)

Τα επίπεδα γεωμετρικού συλλογισμού συνδέονται με τη δυνατότητα κάθε μαθητή να κατασκευάζει την αποδεικτική διαδικασία. Αυτό συνεπάγεται ότι διαμορφώνουν και επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για τον τρόπο μάθησης της απόδειξης. Ο Piaget (1987) υποστηρίζει ότι οι σπουδαστές προχωρούν μέσω τριών επιπέδων (PL) στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων της αιτιολόγησης και απόδειξης. Τα επίπεδα γεωμετρικής κατανόησης του Piaget συμπίπτουν με τη βιολογική ανάπτυξη του μαθητή.

Οι σπουδαστές μέχρι 7 ή 8 έτη είναι σε PL1. Σε αυτό το επίπεδο, οι σπουδαστές μεταχειρίζονται τα αλληλένδετα γεγονότα χωριστά. Στο τέλος αυτού του επιπέδου, η σκέψη τους κατευθύνεται, ώστε να αρχίζει να ενσωματώνει τις σκέψεις και τις ιδέες σε πιο ενοποιημένο σύνολο. Τα παιδιά που είναι σε αυτό το επίπεδο είναι σε θέση να εκτελούν στοιχειώδεις αφαιρετικούς συλλογισμούς.

Οι μαθητές βρίσκονται σε PL 2 μεταξύ των ηλικιών 7 ή 8 μέχρι 11 ή 12. Σε αυτό το επίπεδο, τα παιδιά αρχίζουν να διατυπώνουν υποθέσεις και να δικαιολογούν τον συλλογισμό τους. Όμως και πάλι οι υποθέσεις τους είναι ανακριβείς, δεδομένου ότι βασίζονται στα εμπειρικά αποτελέσματα. Είναι σε θέση να συνδέουν τους ισχυρισμούς και τις αιτιολογήσεις τους, βασισμένοι σε αυτά που ήδη τους είναι γνωστά από τον εμπειρικό κόσμο.

Το PL 3 εμφανίζεται στην ηλικία 11 ή 12 και πέρα. Οι μαθητές αισθάνονται την ανάγκη του λογικού και παραγωγικού συλλογισμού και αντιλαμβάνονται τη σημασία τις συνέπειες των υποθέσεων τους, ενώ είναι πλέον σε θέση να αναπτύξουν παραγωγικό συλλογισμό σε μία αποδεικτική διαδικασία. (Battista & Clements, 1992).

Η Μαρκέα (2006) αναφέρει οτι τα παραπάνω στάδια περιγράφουν και τα στάδια του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών στην κατασκευή μίας αποδεικτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα, αναλύει οτι στο πρώτο στάδιο η σκέψη του παιδιού είναι μη συστηματική και μη λογική. Πολλά μέρη πληροφορίας ή παραδείγματα συγκεντρωμένα εξετάζονται σαν ξεχωριστά και μη συσχετιζόμενα γεγονότα. Η εξερεύνηση προχωρά με τυχαία βήματα και όχι βάσει σχεδίου. Τα συμπεράσματα στα οποία φτάνει ενδεχομένως να είναι αντιφατικά. Για παράδειγμα καθιστώντας τις τρεις γωνίες ενός τριγώνου εφεξής αποδεικνύεται στους μαθητές τι

συμβαίνει για ένα τρίγωνο. Όμως πολλοί από τους μαθητές αποτυγχάνουν να γενικεύσουν αυτό το συμπέρασμα για όλα τα τρίγωνα και δηλώνουν ότι δεν είναι σίγουροι αν οι τρεις γωνίες γίνουν εφεξής με άλλη σειρά θα σχηματίσουν και πάλι μια ευθεία γωνία

Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές όχι μόνο χρησιμοποιούν τα εμπειρικά αποτελέσματα για να κάνουν προβλέψεις αλλά προσπαθούν και να δικαιολογήσουν αυτές τις προβλέψεις. Προβλέπουν τα αποτελέσματα και σκέπτονται λογικά μόνο με επιχειρήματα για τα οποία είναι σίγουροι. Στο παράδειγμα με τις γωνίες προσπάθησαν να αναλύσουν τις γωνίες σε κάθε νέο παράδειγμα. Επειδή όμως δεν κατάλαβαν το γεγονός ότι τα μέτρα των γωνιών αλληλοεξαρτώνται συχνά παραπλανήθηκαν από την εμφάνιση των γωνιών. Βαθμιαία όμως εντόπισαν μια σχέση ανάμεσα στις γωνίες και σχημάτισαν την πεποίθηση ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τριών γωνιών είναι μια ευθεία γωνία.

Στο 3ο στάδιο οι μαθητές προχωρούν (πέρα από την πεποίθηση ότι κάτι είναι πάντα αληθές) στο λογικό συμπέρασμα, ότι αυτό αναγαστικά έπρεπε να είναι αλήθεια. Ο μαθητής είναι σε θέση να ακολουθήσει την τυπική επαγωγική αποδεικτική διαδικασία με βάση οποιεσδήποτε υποθέσεις και σε αυτά τα πλαίσια είναι ικανός να χειριστεί ένα μαθηματικό σύστημα. Για παράδειγμα οι μαθητές προχωρούν από την εμπειρική γενίκευση ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180 μοίρες στο αναγκαίο της πρότασης ότι δηλαδή τρεις γωνίες με άθροισμα μεγαλύτερο δεν είναι δυνατόν να είναι συμπληρωματικά στοιχεία ενός τριγώνου.

Τέλος η Μαρκέα (2006) ισχυρίζεται οτι << η απόδειξη είναι το αποτέλεσμα της αντιπαράθεσης (Piaget 1928, 204)που προκύπτει, όπου εξαιτίας της επαφής με τους άλλους ο μαθητής συνειδητοποιεί καλύτερα τους ορισμούς των εννοιών που ο ίδιος χρησιμοποιεί και αποκτά μια τάση για ενδοσκόπηση των νοητικών του πειραμάτων >>.

Απο την άλλη, η θεωρία των επιπέδων Van Hiele (VHL), που αναπτύχθηκε από δύο Ολλανδούς καθηγητές των μαθηματικών στα τέλη της δεκαετίας του 1950, αναδεικνύει - και εν μέρει αιτιολογεί – οτι πολλοί μαθητές έχουν δυσκολία με τις γνωστικές διαδικασίες της απόδειξης, λόγω της οδηγιών των εκπαιδευτικών προγραμμάτων σπουδών για την διδασκαλία της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα η θεωρία αυτή ισχυρίζεται ότι, οι μαθητές που έχουν δυσκολία με την αποδεικτική διαδικασία

διδάσκονται σε ένα επίπεδο van Hiele ανώτερο από εκείνο στο οποίο βρίσκονται ή για το οποίο ο ίδιοι είναι έτοιμοι.

Οι Κολέζα (2000) , Τζίφας (2005) και Πρίντεζης (2006) περιγράφουν τα επίπεδα των Van Hiele ως ακολούθως:

- Επίπεδο 0 (VHL 0) : (προ-αναγνώρισης) Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να αντιληφθούν στις γεωμετρικές μορφές μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών τους, με συνέπεια να αδυνατούν να κάνουν διακρίσεις μεταξύ των σχημάτων. Παραδείγματος χάριν, μπορούν να διακρίνουν μεταξύ των τριγώνων και των τετράπλευρων, αλλά δεν είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ ενός ρόμβου και ενός παραλληλογράμμου. Οι Clements και Batista (1992) διατύπωσαν την υπόθεση ότι πριν το επίπεδο της αναγνώρισης υπάρχει και αυτό «προ-αναγνωριστικό» επίπεδο (prerecognitive level), που περιγράφκε παραπάνω.
- Επίπεδο 1: (αναγνώριση/recognition) Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα ως μια ολότητα (Gestalt αναγνώριση) και δεν είναι σε θέση να διατυπώσουν τις ιδιότητές τους. Για την περιγραφή των σχημάτων χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα (π.χ. αναγνωρίζουν ένα ορθογώνιο γιατί μοιάζει με πόρτα).
- Επίπεδο 2: (ανάλυση/analysis) Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους. Μπορούν επιπλέον να ανακαλύπτουν και να περιγράφουν τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά δεν μπορούν να τις ορίσουν τυπικά. Για παράδειγμα όταν κληθούν να απαντήσουν γιατί αυτό το σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε παραθέτουν μια σειρά από ιδιότητες του ορθογωνίου (οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες κ.τ.λ).
- Επίπεδο 3: (διάταξη/order) Οι μαθητές μπορούν να διατάξουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους και αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τον ρόλο του ορισμού, αλλά δε λειτουργούν μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα. Στο επίπεδο αυτό είναι σε θέση να αναπτύξουν απλό παραγωγικό συλλογισμό, αλλά η απόδειξη δεν τους είναι ακόμα κατανοητή. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν από μια λίστα ιδιοτήτων του ορθογωνίου τις ικανές συνθήκες για τον προσδιορισμό του και μπορούν να αναγνωρίζουν τάξεις εγκλεισμού (π.χ. τα τετράγωνα είναι ορθογώνια).
- Επίπεδο 4: (παραγωγικός συλλογισμός/deduction) Οι μαθητές κατανοούν τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των

θεωρημάτων και της απόδειξης, καθώς και τις διαφορές των εννοιών αυτών. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές μπορούν να κατασκευάζουν και να κατανοούν τις αποδείξεις των γεωμετρικών θεωρημάτων μέσα στα πλαίσια του αξιωματικού συστήματος. Μάλιστα, στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών η ουσιαστική μελέτη της Ευκλείδειας γεωμετρίας αρχίζει από αυτό το επίπεδο.

- Επίπεδο 5: (αυστηρότητα/rigor) Οι μαθητές κατανοούν την αναγκαιότητα για αυστηρότητα και είναι σε θέση να πραγματοποιήσουν παραγωγικούς συλλογισμούς, χρησιμοποιώντας αφαιρετική σκέψη. Στο επίπεδο αυτό μπορούν να κατανοήσουν τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες.

Η περιγραφή των παραπάνω επιπέδων συμπληρώνεται και από την ύπαρξη κάποιων ιδιοτήτων μεταξύ αυτών. Συγκεκριμένα, τα επίπεδα κατανόησης ενός γεωμετρικού θεωρήματος είναι εκ φύσεως επαγωγικά. Στο επίπεδο ν μελετώνται περιορισμένες εκδοχές των γεωμετρικών αντικειμένων, στην συνέχεια τα γεωμετρικά αντικείμενα του επιπέδου ν+1 είναι οι προεκτάσεις τους από το επίπεδο ν. Αυτό δηλώνει ότι ένας μαθητής δεν μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο Van Hiele επίπεδο ν δίχως να έχει διέλθει από το ν-1 επίπεδο (σταθερή αλληλουχία/ fixed sequence) και ότι αν ένα γεωμετρικό αντικείμενο είναι σε λανθάνουσα κατάσταση στο επίπεδο ν, τότε αυτό θα δηλωθεί στο επίπεδο ν+1(διαδοχικότητα/ adjacency) . Επίσης κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων, που συνδέουν τα σύμβολα αυτά (διάκριση/ distinction) . Αν ένας μαθητής, που βρίσκεται στο επίπεδο ν, συναντήσει ένα πρόβλημα που απαιτεί λεξιλόγιο, έννοιες και συλλογισμούς του επιπέδου ν+1, δεν μπορεί να προχωρήσει στην επεξεργασία του, με αποτέλεσμα να νιώθει άγχος, απογοήτευση ακόμα και θυμό. Αυτό σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να προσαρμόζει την διδασκαλία του στο επίπεδο του κάθε μαθητή, εφόσον αν δύο άτομα εκτελούν συλλογισμούς σε διαφορετικά επίπεδα, τότε δεν μπορούν να αλληλοκατανοηθούν (διαχωρισμός / separation). Τελος δεν είναι δυνατόν να περάσει κανείς κατευθείαν από το επίπεδο ν στο επίπεδο ν+2 , με οποιαδήποτε εκπαίδευση και αν λάβει. Το πέρασμα από όλα τα επίπεδα κατά διαδοχικό τρόπο είναι υποχρεωτικό και γίνεται με βάση συγκεκριμένο πρόγραμμα διδασκαλίας και μάθησης. (Τζίφας ,2005 , σελ.23-24 & Πρίντεζης ,2006 , σελ.19-20).

Το πιο σημαντικό στοιχείο που προκύπτει από την περιρραφή αυτών των ιδιοτήτων είναι οτι η πρόοδος των μαθητών σχετικά με την κατασκευή των αποδείξεων των γεωμετρικών θεωρημάτων είναι αποτέλεσμα κατάλληλης διδακτικής μεθοδολογίας. Αυτό είναι αντίθετο με την θεωρία του Piaget, που ισχυρίζεται οτι οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία σχετίζονται με την ηλικία και την βιολογική ανάπτυξη τους.

Επίσης, όσον αφορά την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία, η θεωρία των Van Hiele δίνει τις ακόλουθες πολύ σημαντικές ερμηνείες για τα επίπεδα μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών.

Σε VHL 1 (οπτικό), οι ικανότητες συλλογισμού των σπουδαστών περιορίζονται στην παρατήρηση. Βλέπουν μια εικόνα και παρατηρούν τις ιδιότητες, αλλά αποτυγχάνουν να κάνουν τις συνδέσεις μεταξύ εκείνων των ιδιοτήτων ή βλέπουν πώς μπορούν να καταστήσουν τις υποθέσεις βασισμένες σε εκείνες τις ιδιότητες.

Σε VHL 2 (περιγραφικό/αναλυτικό) οι σπουδαστές βλέπουν ότι μια μορφή έχει τις συγκεκριμένες ιδιότητες. Είναι σε θέση να ταξινομήσουν τις μορφές βασισμένες σε αυτές τις ιδιότητες. Εντούτοις, δεν είναι ακόμα ικανοί να δουν πώς αυτές οι ιδιότητες υπονοούν άλλες.

Στο VHL 3 οι μαθητές είναι σε θέση να δουν πως ορισμένες ιδιότητες είναι αλληλένδετες και είναι σε θέση να συνδέσουν τις πληροφορίες. Δεδομένου ότι οι σπουδαστές γίνονται όλο και περισσότερο ικανοί να θέσουν και να υπερασπίσουν τις υποθέσεις τους σε συνεπές και πλήρες αξιωματικό σύστημα, αρχίζουν να καταδεικνύουν μια ετοιμότητα για την απόδειξη. Οι λογικές και παραγωγικές δεξιότητές τους αναπτύσσονται σε αυτό το επίπεδο.

Ο επιτυχής συλλογισμός σε VHL 3 μπορεί να προετοιμάσει τους σπουδαστές για τον επίσημο παραγωγικό συλλογισμό, που απαιτείται σε VHL 4 για να χτίσει τα μαθηματικά επιχειρήματα και να γράψει-διατυπώσει τις αποδείξεις. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, δεν είναι όλοι οι σπουδαστές σε VHL 3 συγχρόνως. Μερικοί μπορούν να φθάσουν σε VHL 3 από το γυμνάσιο, αλλά και σε μεγαλύτερες τάξεις.

3.3.3. Έρευνες απο τη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με τα επίπεδα γεωμετρικού συλλογισμού των Van Hiele.

Ο βασικός στόχος του σχεδίου Chicago που έγινε από τον καθηγητή Usiskin την τριετία 1979-1982 ήταν να διαπιστώσει ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας και των επιπέδων Van Hiele. Δόθηκε σε 2900 μαθητές Λυκείου μία γραπτή αξιολόγηση, που αποτελείτο από τέσσερα τμήματα. Το πρώτο ήταν ένα τεστ πολλαπλών απαντήσεων (P) πάνω στις προαπαιτούμενες γνώσεις για τη μελέτη της γεωμετρίας στο Λύκειο. Το δεύτερο, επίσης πολλαπλών απαντήσεων (V), συνέδεε κατευθείαν κάθε ερώτηση με το αντίστοιχο ελάχιστο επίπεδο Van Hiele που ήταν απαραίτητο για να απαντηθεί. Το τρίτο τεστ (Pr) είχε να κάνει με την ικανότητα απόδειξης. Κάθε μαθητής έπρεπε να λύσει δύο προβλήματα που απαιτούσαν να συμπληρώσει μέρη αποδείξεων και τέσσερις τυπικές αποδείξεις. Τέλος το τέταρτο ήταν ένα συνηθισμένο τεστ (A) που αξιολογούσε την επίδοση των μαθητών στη γεωμετρία. Τα τεστ P και V δόθηκαν στην αρχή της χρονιάς και στο τέλος της ξαναδόθηκαν μαζί με τα τεστ Pr και A (Πρίντεζης, 2006)

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τη χρήση των επιπέδων Van Hiele για να εξηγήσουν γιατί πολλοί μαθητές έχουν πρόβλημα μάθησης των αποδεικτικών διαδικασιών των γεωμετρικών θεωρημάτων. Οι μισοί μαθητές που εγγράφονται σε ένα μάθημα προσανατολισμένο στην απόδειξη βιώνουν πολύ μικρή ή καμιά επιτυχία στην απόδειξη. Ο μείζων λόγος φαίνεται να είναι η έλλειψη γνώσης στην έναρξη του έτους. Το βασικό συμπέρασμα αυτής της έρευνας είναι οτι τα επίπεδα Van Hiele, που αντιστοιχίζονται στους μαθητές αποτελούν προγνώστες της απόδοση τους στην κατασκευή αποδείξεων στο μάθημα της γεωμετρίας, αλλά και της μετέπειτα απόδοσης τους. Έτσι, αυτή η μελέτη προβάλει την ανάγκη για μία συστηματική διδασκαλία της γεωμετρίας πριν το Λύκειο, με στόχο την επιτυχία των μαθητών στην κατανόηση, την οργάνωση και την παρουσίαση των αποδείξεων.

Η έρευνα της Senk (1989) ανέλυσε τις δυνατότητες κατασκευής της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία που διαθέτουν οι μαθητές στο γυμνάσιο και επιβεβαιώσε οτι σχετίζονται με το επίπεδο του γεωμετρικού συλλογισμού, στο οποίο βρίσκονται. Οι μαθητές σε μια σειρά μαθημάτων γεωμετρίας γυμνασίου εξετάστηκαν κατά την έναρξη της σχολικής χρονιάς για το γνωστικό τους υπόβαθρο και για το van Hiele επίπεδο που βρίσκονται. Στο τέλος του σχολικού έτους, οι σπουδαστές

εξετάστηκαν πάλι για το van Hiele επίπεδο που βρίσκονται, τη γνώση γεωμετρίας που πλέον διαθέτουν και τη δυνατότητα κατασκευής της απόδειξης ενός θεωρήματος της γεωμετρίας. Η Senk διαπίστωσε ότι οι σπουδαστές που αρχίζουν τη γεωμετρία σε VHL 0 έχουν πολύ λίγη πιθανότητα να διατυπώνουν και να παρουσιάζουν γραπτά τις αποδείξεις. Οι σπουδαστές σε VHL1 έχουν 33% πιθανότητα για να κατασκευάσουν τις αποδείξεις, ενώ οι σπουδαστές σε VHL 2 έχουν μια πιθανότητα 50%. Οι σπουδαστές που έχουν πετύχει την εκμάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας αρχίζουν τη γεωμετρία γυμνασίου σε VHL 3 ή ανωτέρω. Επιπλέον, οι σπουδαστές που έμαθαν τελικά να κατασκευάζουν την απόδειξη, είναι εκείνοι που άρχισαν τη σειρά μαθημάτων σε VHL 3 και ξεπέρασαν εκείνους που είχαν αρχίσει σε VHL 2. Τέλος, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας δεν υπήρξαν μαθητές Γυμνασίου σε VHL 4.

Στην Ελλάδα ο Ζάχος (2000) διερεύνησε την κατανομή των μαθητών στα τέσσερα επίπεδα και προσπάθησε να εξηγήσει τις δυνατότητες των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας με βάση την θεωρία Van Hiele. Το δείγμα της έρευνας του ήταν 458 μαθητές της Β΄Λυκείου τεσσάρων Γενικών Λυκείων της Αθήνας , που κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών, το οποίο ήταν βασισμένο στο ερωτηματολόγιο του καθηγητή Usiskin. Διαπιστώθηκε οτι το 75% των μαθητών του δείγματος ήταν κάτω από το VHL 3 , που σύμφωνα με την θεωρία Van Hiele είναι απαραίτητο για να είναι σε θέση ένας μαθητής να παρακολουθήσει μαθήματα θεωρητικής γεωμετρίας (γεωμετρικές αποδείξεις θεμελιωμένες σε ένα αξιωματικό σύστημα). Όποτε διατυπώνεται στα ερευνητικά συμπεράσματα αυτής της μελέτης , οτι είναι αναμενόμενο οι μαθητές να μην μπορούν να παρακολουθήσουν με ευκολία τη διδασκαλία των γεωμετρικών αποδείξεων στη Γεωμετρία στο Λύκειο.

Έρευνα για τα επίπεδα Van Hiele των μαθητών στα ελληνικά σχολειών έγινε και από τον Ν. Τζίφα (2005). Βασίστηκε στην θεωρία των επιπέδων Van Hiele και προσπάθησε να διερευνήσει τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τις αποδείξεις στη γεωμετρία, αλλά και κατά πόσο σημειώνεται πρόοδος στο επίπεδο Van Hiele των μαθητών με την μετάβαση στην επόμενη τάξη. Το δείγμα της έρευνας ήταν 1838 μαθητές απο την Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου από διάφορες περιοχές της Ελλάδας. Για τον εντοπισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κάθε μαθητή

χρησιμοποιήθηκε και πάλι το ερωτηματολόγιο του καθηγητή του πανεπιστημίου του Σικάγο των ΗΠΑ Usiskin (1982), μεταφρασμένο στα ελληνικά (απο τον ίδιο τον ερευνητή).

Τα αποτελέσματα της έρευνας δυστυχώς δεν είναι ενθαρυντικά για το επίπεδο VHL, που βρέθηκε οτι βρίσκονται οι μαθητές των ελληνικών σχολείων. Πιο αναλυτικά διαπιστώθηκε οτι το 41,1% των μαθητών της Β΄ Λυκείου με ελαστικό κριτήριο ή το 53,4% με αυστηρό κριτήριο βρίσκονται στα δύο πρώτα επίπεδα (το ελαστικό κριτήριο σημαίνει ότι απάντησαν 3 στις 5 ερωτήσεις του αντίστοιχου επιπέδου, ενώ το αυστηρό κριτήριο σημαίνει ότι απάντησαν 4 στις 5), ενώ στο σύνολο του δείγματος το 60,6% των μαθητών δηλαδή 1114 από τους 1838 μαθητές, βρίσκονται στα επίπεδα 0 και 1 με το αυστηρό κριτήριο και το 48,6% , δηλαδή 893 μαθητές στους 1838, με το ελαστικό κριτήριο. Αυτό σημαίνει ότι σε μεγάλο ποσοστό δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία στο επίπεδο που διδάσκεται στο Λύκειο. Αυτό εξηγεί γιατί οι μαθητές συναντούν τόσα εμπόδια στη μελέτη της και την μάθηση της γεωμετρικής απόδειξης. Όσον αφορά τη σχέση των επιπέδων και της τάξης φοίτησης των μαθητών βρέθηκε ότι με την μετάβαση των μαθητών σε μεγαλύτερες τάξεις υπάρχει μια μεταβολή των επιπέδων Van Hiele τους, προς τα πάνω. Η διδασκαλία λοιπόν βελτιώνει το επίπεδο των μαθητών έστω και αν δεν είναι προσαρμοσμένη στο πνεύμα των επιπέδων αυτών (Τζίφας 2006).

Απο τις παραπάνω έρευνες διαπιστώνεται ότι υπάρχει συσχετισμός μεταξύ των επιπέδων Van Hiele και των δυσκολιών των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Συμπεραίνουμε οτι χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες συλλογισμού, οι μαθητές δε θα επιτύχουν την κατανόηση της απόδειξης ως έννοια και ως διαδικασία στα μαθήματα της γεωμετρίας. Όμως, εκτός από τις δεξιότητες συλλογισμού υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία.

Μερίδιο ευθύνης για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την αποδεικτική διαδικασία έχει ο εκπαιδευτικός και κυρίως η πρακτική διδασκαλίας, που εφαρμόζει στη μαθηματική σχολική τάξη. Η πρακτική διδασκαλίας του εκπαιδευτικού σχετίζεται με τον τρόπο που αντιλαμβάνεται τις οδηγίες των εκπαιδευτικών προγραμμάτων και στην συνέχεια τις εφαρμόζει μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη. Όποτε για την πλήρη διερεύνηση του ζητήματος των πεποιθήσεων των μαθητών απαιτείται και η διερεύνηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την φύση και για τον τρόπο μάθησης της απόδειξης στη γεωμετρία.

Ο εκπαιδευτικός στα πλαίσια διδασκαλίας του μαθήματος της γεωμετρίας είναι επιφορτισμένος όχι μόνο να διδάξει απλά τη γνώσης της απόδειξης μίας πρότασης ή ενός θεωρήματος, αλλά να τη διδάξει και με αποτελεσματικό τρόπο, ώστε η διδακτική δραστηριότητα να είναι κατανοητή στους μαθητές. Θεωρώντας λοιπόν καθοριστικό και κεντρικής σημασίας το ρόλο των εκπαιδευτικών κρίνουμε αναγκαία τη διερεύνηση των πεποιθήσεών τους αναφορικά με το θέμα μελέτης της παρούσας εργασίας. Μία πρώτη προσέγγιση των πεποιθήσεων τους παρέχεται από την βιβλιογραφική επισκόπηση, που παρατίθεται παρακάτω.

Στη μελέτη της Raymond (1997) συμμετείχαν έξι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί του πρώτου έτους από το ίδιο εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Η πρώτη φάση της μελέτης περιέλαβε τις συνεντεύξεις για να εξετάσει τις πεποιθήσεις των συμμετεχόντων για τα μαθηματικά και τις παιδαγωγικές τους θέσεις για τα μαθηματικά. Στη δεύτερη φάση αναλύθηκε η πρακτική διδασκαλίας που εφαρμόζουν, μέσω της παρατήρησης στη σχολική τάξη Τέλος, αναλύθηκε η συνέπεια μεταξύ των πεποιθήσεων των συμμετεχόντων και των πρακτικών της διδασκαλίας, που εφαρμόζουν. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν την παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας των μαθηματικών. Το βασικό χαρακτηριστικό της διδασκαλίας τους ήταν ο μονόλογος για τη μετάδοση της μαθηματικής γνώσης. Ένας από τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία του θεώρησε ότι, η παρουσίαση στον πίνακα μίας εφαρμογής του σχολικού βιβλίου καλύπτει την οδηγία του προγράμματος σπουδών για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος στη συγκεκριμένη διδακτική ενότητα. Όμως, στις συνεντεύξεις οι εκπαιδευτικοί είχαν υποστηρίξει την ομαδοσυνεργατική επίλυση δραστηριοτήτων για την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία. Με άλλα λόγια οι εκπαιδευτικοί στην συνέντευξη εκφράζουν την πεποίθηση ότι η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών, άρα και της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία, επιτυγχάνεται με

διαφορετικό τρόπο, από αυτόν που εφαρμόζουν στις διδακτικές δραστηριότητες μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη.

Η διαφορά μεταξύ των πεποιθήσεων που εκφράζουν οι εκπαιδευτικοί και των πρακτικών διδασκαλίας που εφαρμόζουν, επιβεβαιώνεται από τη μελέτη της Ensor (2001). Παρακολούθησε τις σειρές μαθημάτων υποψήφιων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε πανεπιστήμιο της Νότιας Αφρικής κατά τη διάρκεια του τελευταίου έτους σπουδών τους. Το επόμενο έτος εξέτασε, μέσα από την παρατήρηση στη σχολική τάξη, την πρακτική διδασκαλίας αυτών των εκπαιδευτικών. Διαπιστώθηκε ότι υπήρξε μια απόκλιση μεταξύ των μαθηματικών μεθόδων και των διδακτικών προσεγγίσεων που διδάχτηκαν να εφαρμόσουν στη σχολική τάξη και στις πρακτικές διδασκαλίας που τελικά εφάρμοσαν.

Σε προπτυχιακό επίπεδο είχαν διδαχτεί να εφαρμόσουν μέσα στη σχολική τάξη μεθοδολογίες, που προορίζονταν να βελτιώσουν το επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών, καθώς και συγκεκριμένες δραστηριότητες που θα περιλάμβαναν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι όταν κλήθηκαν ως εκπαιδευτικοί να εφαρμόσουν όσα διδάχτηκαν, προτίμησαν τη δασκαλοκεντρική προσέγγιση διδασκαλίας. Ακόμα, κατά την διδασκαλία διαπιστώθηκε ότι έδιναν έμφαση στην απομνημόνευση των κανόνων και των αλγοριθμικών διαδικασιών για την κατασκευή της απόδειξης ενός θεωρήματος.

Τα ερευνητικά αποτελέσματα αυτής της μελέτης, μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια ενός φυσικού μοντέλου, που είναι η συμπεριφορά ενός ελατηρίου (Καλογερία, 2004). Όταν σε ένα ελατήριο ασκηθεί δύναμη, τότε χάνει το φυσικό του μήκος και ή επιμηκύνεται ή συσπειρώνεται, οπότε και στις δύο περιπτώσεις παραμορφώνεται. Όταν στο ελατήριο διακόπτεται η γραμμική μεταβολή του φυσικού του μήκους, εφόσον σταματήσει να ασκείται πάνω του η δύναμη παραμόρφωσης τότε δεν επανέρχεται στο φυσικό του μήκος, αλλά έχει αποκτήσει μία ελαστικότητά στο μήκος του (ο εκπαιδευτικός φεύγει από την περιοχή της ακαδημαϊκής προετοιμασίας του). Επίσης, όταν το ελατήριο δεχτεί πολύ μεγάλη δύναμη, τότε αλλάζει η σταθερά του και παύει να συμπεριφέρεται γραμμικά (περιοχή μαθηματικής σχολικής τάξης).

Αν λοιπόν παραλληλίσουμε τον εκπαιδευτικό με ένα ελατήριο, η πανεπιστημιακή εκπαίδευση του υποψήφιου εκπαιδευτικού αντιστοιχεί στην ελαστικότητα που

αποκτά το ελατήριο. Η δύναμη παραμόρφωσης μέσα σε αυτή την περιοχή προκαλεί την διαμόρφωση των πεποιθήσεων για την διδακτική πρακτική της αποδεικτικής διδασκαλίας. Η ισχυρή δύναμη παραμόρφωσης εμφανίζεται κατά την διδασκαλία στην μαθηματική σχολική τάξη. Η δύναμη αυτή ενδεχομένως αντιστοιχεί στην έλλειψη επιμόρφωσης, την πίεση του διδακτικού χρόνου και στην ανεπαρκή διδακτική προετοιμασία του. Η σταθερά του ελατηρίου εκφράζει το πόσο αντιστέκεται/αδρανεί ο εκπαιδευτικός να εφαρμόσει μία αποτελεσματική μορφή διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας (Καλογερία, 2004).

Για να εγκαθιδρυθεί, λοιπόν, από τον εκπαιδευτικό η πρακτική διδασκαλίας που θα προωθεί την αποτελεσματική γνώση της μάθησης της απόδειξης στη γεωμετρία (δηλαδή, για να δημιουργηθεί και να παραμείνει η παραμόρφωση στο ελατήριο), θα πρέπει οι πεποιθήσεις που έχει διαμορφώσει να είναι σταθερές και μόνιμες. Κατά αυτόν τον τρόπο, όσο ισχυρές και αν είναι οι δυνάμεις που προκαλούν παραμόρφωση, ο εκπαιδευτικός θα συνεχίσει να συμπεριφέρεται κατά γραμμικό τρόπο. Με άλλα λόγια οι πρακτικές διδασκαλίας που θα εφαρμόζει θα αντικατοπτρίζουν όσα έχει διδαχτεί σε ακαδημαϊκό επίπεδο (Καλογερία, 2004).

Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών σε σχέση με τις προσεγγίσεις διδασκαλίας που ακολουθούν, έχουν πολλές επιπτώσεις στη διδασκαλία και την εκμάθηση της απόδειξης. Στο κεφάλαιο 3 αναλύθηκε εκτενώς ότι οι μαθηματικές δεξιότητες συλλογισμού είναι επιτακτικές στην κατασκευή και την κατανόηση της απόδειξης μίας πρότασης ή ενός θεωρήματος στη γεωμετρία. (Battista & Clements, 1995 Edwards, 1997, 1999 Fischbein & Kedem, 1982 Izen, 1998 Jones & Swafford, 1997 Mistretta, 2000). Συνεπώς εάν οι εκπαιδευτικοί δεν προσπαθήσουν να διδάξουν αυτές τις δεξιότητες, οι μαθητές είναι πιθανό να περιθωριοποιήσουν τη διαδικασία της απόδειξης, ως κάτι δύσκολο και δυσνόητο. Ενδέχεται επίσης, να θεωρούν ότι μόνο οι ταλαντούχοι μαθητές από πλευράς μαθηματικής επίδοσης, έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν μία αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία. Πολλοί εκπαιδευτικοί δεν έχουν διαμορφώσει ξεκάθαρες πεποιθήσεις στο τι αποτελεί απόδειξη ενός θεωρήματος στη γεωμετρία. Έκτος από αυτό, υποτιμούν τη σημασία που έχει η διδασκαλία του τρόπου κατασκευής μίας αποδεικτικής διαδικασίας . (Mingus & Grassel, 1999).

Για την περαιτέρω διερεύνηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών, η μελέτη των Mingus και Grassel (1999) εξετάζει σε ένα δείγμα 51 εκπαιδευτικών, που διδάσκουν σε σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα :

α) τι θεωρούν ότι αποτελεί απόδειξη στη γεωμετρία και

β) ποιους ρόλους θεωρούν ότι διαδραματίζει η απόδειξη κατά την διδασκαλία ενός γεωμετρικού θεωρήματος.

Επιπλέον, η μελέτη εστιάζει στην εξέταση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών σε σχέση με τη διδακτική τους εμπειρία. Στα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι το 69% των εκπαιδευτικών έχει διδακτική εμπειρία στη γεωμετρική απόδειξη και από αυτούς το 40% στη διδασκαλία της γεωμετρίας του γυμνασίου. Από τα αποτελέσματα της μελέτης διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί ως προπτυχιακοί φοιτητές , ακόμη και εκείνοι που ήταν ταλαντούχοι στα μαθηματικά, είχαν εκφράσει ότι «φοβούνται» τις αποδείξεις. Οι πεποιθήσεις τους σχετικά με τι αποτελεί απόδειξη ήταν ανεπαρκής, ενώ αναγνωρίζουν τον σημαντικό ρόλο της στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Οι περισσότερες από τις απαντήσεις του ερωτηματολογίου της μελέτης έδειξαν ότι θεωρούν την απόδειξη ως ένα διδακτικό εργαλείο, που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις γεωμετρικές σχέσεις των εννοιών στα θεωρήματα ή τις προτάσεις. Επίσης, αναγνωρίζουν και την επεξηγηματική φύση της απόδειξης. Τέλος θεωρούν ότι η κατασκευή μίας απόδειξης αποτελείται από λογικά και πειστικά επιχειρήματα, που έχει ως στόχο να καταδείξει την ισχύ της υπόθεσης ενός γεωμετρικού θεωρήματος. Τέλος κάποιοι από τους συμμετέχοντες (33%) πρότειναν την εισαγωγή της διαδικασίας της απόδειξης στη γεωμετρία από το γυμνάσιο, όχι όμως με εμπειρικό τρόπο, αλλά υποστήριξαν τη θεωρητική της θεμελίωση με βάση τους κανόνες του μαθηματικού συλλογισμού.

Τα ίδια ερευνητικά ερωτήματα εξετάζονται στη μελέτη του Knuth (2002b), μέσω συνεντεύξεων 17 έμπειρων μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης των ΗΠΑ. Διαπιστώθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αναγνωρίσουν τους ποικίλους ρόλους της απόδειξης στη γεωμετρία, ενώ από όλους σχεδόν τους αναγνωρίστηκε η αποδεικτική διαδικασία θεωρείται ότι αποτελεί άκρως απαραίτητο συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας της γεωμετρίας (σελ.390). Οι εκπαιδευτικοί αυτής της μελέτης πιστεύουν ότι η απόδειξη είναι ένα μέσο επαλήθευσης ή ένας τρόπος για να

επιβεβαιωθεί ότι οι υποθέσεις ενός θεωρήματος είναι αληθείς. Σύμφωνα με αυτή την πεποίθησή τους, θεωρούν ότι η ισχύς και η εγκυρότητα ενός θεωρήματος επαληθεύεται από παραγωγή ενός λογικού ή παραγωγικού επιχειρήματος ή για κάποιους άλλους εκπαιδευτικούς από ένα πειστικό επιχείρημα. Επιπλέον, στα αποτελέσματα για τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών συγκαταλέγεται ότι θεωρούν την αποδεικτική διαδικασία και ως ένα μέσο πειραματισμού και δοκιμής κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Όμως, για την παρουσίαση της απόδειξης στους μαθητές μέσα στη σχολική τάξη, οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι πρέπει να βασίζονται αποκλειστικά στο τρόπο σχεδίασης της, που παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο. Το τελευταίο ελλοχεύει την πεποίθηση των εκπαιδευτικών ότι η γνώση της απόδειξης προέρχεται από αυτό που έχει ήδη αποδειχτεί από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας και παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο.

Επιπρόσθετα, διαπιστώθηκε ότι πολλοί εκπαιδευτικοί δυσκολεύτηκαν με την παρουσίαση της γενίκευσης μιας αποδεικτικής διαδικασίας, μετά από την εξέταση μερικών περιπτώσεων που ισχύει το θεώρημα. Μπορούν να αποφανθούν αν η κατασκευή μίας απόδειξης είναι έγκυρη, αλλά δεν μπορούσαν να αποφανθούν ότι ισχύει «πάντα», ακόμα και όταν η απόδειξη παρουσιαζόταν για μια γενική περίπτωση. Αυτό δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είχαν κατανοήσει πλήρως την επαγωγική μέθοδο κατασκευής των αποδείξεων στη γεωμετρία. Η έρευνα συνεχίστηκε με την εξέταση παραδειγμάτων, στα οποία ζητείτο από τους εκπαιδευτικούς να διακρίνουν ποιες αιτιολογήσεις μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούν μία απόδειξη. Από τη μελέτη προκύπτει ότι θεώρησαν ως αποδείξεις τα εμπειρικά επιχειρήματα. Δέκα τρεις από τους εκπαιδευτικούς για την αναγνώριση της ισχύος ενός επιχειρήματος βασίστηκαν στο εάν ήταν από μαθηματική άποψη ορθά διατυπωμένο. Από την άλλη, δώδεκα από τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς στη μελέτη θεωρούν ότι η διατύπωση ενός επιχειρήματος, που διακρίνεται από σαφήνεια και ακρίβεια στη διατύπωση του, μπορεί να αποτελεί απόδειξη για τις υποθέσεις ενός θεωρήματος. Τέλος, η μελέτη δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί που κλήθηκαν να εξετάσουν τι θεωρούν ως έγκυρες αποδείξεις, δεν αξιολόγησαν τη λογική διάρθρωση των επιχειρημάτων στην αποδεικτική διαδικασία, αλλά μόνο το είδος των επιχειρημάτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιπλέον δείχνουν ότι προκειμένου οι εκπαιδευτικοί να πείσουν ότι μία γεωμετρική δήλωση είναι αληθής, βασίζονται και δίνουν ιδιαίτερη σημασία στη μορφή της αποδεικτικής διαδικασίας που θα κατασκευάσουν. Δεν δίνουν βαρύτητα στην προώθηση της κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές. Σχετικά με την τελευταία διαπίστωση συμφωνεί και η Hanna (2000b) , η οποία θεωρεί ότι, κατά τη διδασκαλία της απόδειξης, ιδιαίτερα στο Γυμνάσιο, οι εκπαιδευτικοί δεν καλλιεργούν στους μαθητές την κριτική σκέψη και τις δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού για την κατασκευή και την παρουσίασή της. Αυτό ίσως δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν σχηματίσει την πεποίθηση ότι ξεκινούν την παρουσίαση μίας απόδειξης με δεδομένο ότι θα πρέπει να πείσει τους ίδιους και τους μαθητές τους για την ισχύ του θεωρήματος ή της πρότασης στο μάθημα της γεωμετρίας. (Battista & Clements, 1995). Με άλλα λόγια δεν αναγνωρίζουν στην αποδεικτική διαδικασία το ρόλο της διανοητικής πρόκλησης και της ανακάλυψης νέων αποτελεσμάτων.

Τέλος, πολλοί εκπαιδευτικοί μαθηματικών θεωρούν ότι η αποκλειστική εστίαση στη λογική φύση της απόδειξης μπορεί να είναι επιβλαβής στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών. Διαφωνούν με την φορμαλιστική άποψη, που οδηγεί τους μαθητές στην αποκλειστική προσήλωση στους λογικούς χειρισμούς, ενάντια στη διαμόρφωση και κατανόηση των πειστικών εξηγήσεων γιατί μια δήλωση είναι αληθινή (Alibert & Thomas, 1991).

Από την άλλη εκφράζεται ότι καθ' όλη τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους δραστηριότητας, οι καθηγητές των μαθηματικών - μεταξύ άλλων - αγωνίζονται και προσδοκούν οι μαθητές τους να καταστούν ικανοί να παρουσιάσουν μέσα στην τάξη σε προφορική ή γραπτή μορφή ένα μαθηματικό επιχείρημα ή μια ολοκληρωμένη απόδειξη, όσων ζητούνται ή ακόμα και όσων διατυπώνονται από τους ίδιους τους μαθητές.

Στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση η έρευνα της Δημητριάδου (2006) εξετάζει τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών Λυκείου σχετικά με την απόδειξη. Μέσω της ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων του ερωτηματολογίου, που χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη, προκύπτει διαφωνία απόψεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τον ρόλο της απόδειξης μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη. Ορισμένοι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι η κύρια λειτουργία της απόδειξης είναι η ανάπτυξη

της κριτικής σκέψης των μαθητών. Κάποιοι άλλοι ήταν έντονα προβληματισμένοι σχετικά με την υπερβολική χρήση των αποδείξεων κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας, θεωρώντας ότι δημιουργεί στους μαθητές προβλήματα στην κατανόηση και τη μάθηση των μαθηματικών.

Εκτός όμως από αυτή τη διχογνωμία, στα αποτελέσματα της έρευνας, διακρίνονται και οι ακόλουθες πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τον ρόλο της απόδειξης στη μαθησιακή διαδικασία της γεωμετρίας:

α) η απόδειξη είναι ένα διδακτικό εργαλείο που συμβάλει στην κατανόηση και τη μάθηση των μαθηματικών. Μία ενδεικτική απάντηση στο ερωτηματολόγιο που φανερώνει αυτή την πεποίθηση είναι: «οι μαθητές κατά την παρουσίαση της απόδειξης ενός θεωρήματος από τον διδάσκοντα θα το ακούσουν, θα το καταλάβουν και θα ξέρουν την πορεία που ακολούθησε η σκέψη μας για να καταλήξουμε σε αυτό. Άρα θα είναι σε θέση να το αποθηκεύσουν στην μνήμη τους και να το ανακαλούν από αυτήν όταν τους ζητηθεί. Αυτό είναι δύσκολο να επιτευχθεί όταν οι μαθητές διαβάζουν απλά την εκφώνηση ενός θεωρήματος»,

β) η απόδειξη ενός θεωρήματος της γεωμετρίας διδάσκεται για να πείσει τον μαθητή για την αλήθεια και την ισχύ του,

γ) η απόδειξη είναι ένα μέσο εξάσκησης για την επίλυση ασκήσεων, αλλά και για να πετύχει ο μαθητής υψηλή βαθμολογία κατά τις εξετάσεις του μαθήματος της γεωμετρίας.

Συμπεραίνουμε οτι αναγνωρίζεται κοινώς μεταξύ των εκπαιδευτικών ότι η απόδειξη έχει ως στόχο να εξηγήσει ένα θεώρημα της γεωμετρίας, είναι ένα μέσο επικοινωνίας μεταξύ των μελών της μαθηματικής σχολικής τάξης και η βαθύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην καθημερινή ζωή.

Τα παραπάνω ερευνητικά αποτελέσματα παρέχουν μία πρώτη εικόνα των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών. Όμως όπως θα διαπιστωθεί από την παρακάτω ανάλυση το ζήτημα είναι περίπλοκο, καθώς συνδέεται στενά με την μορφή διδασκαλίας και τον τύπο της μαθηματικής απόδειξης που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί, τις θεωρίες μάθησης της μάθησης της απόδειξης που υιοθετούν οι μαθητές και το κυριότερο με τις πεποιθήσεις των μαθητών.

4.2 Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και η πρακτική διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία.

Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία αποτυπώνονται στη μορφή διδασκαλίας, που εφαρμόζουν. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή η πρακτική διδασκαλίας που ακολουθούν παρέχει στοιχεία για τη δομή του συστήματος των πεποιθήσεων τους σχετικά με την απόδειξη (έχει αναλυθεί εκτενώς στο κεφάλαιο 1 της παρούσας εργασίας).

Μετά από τις βιβλιογραφικές αναφορές, επιχειρούμε μία κατηγοριοποίηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για την απόδειξη, σε σχέση με τη μορφή διδασκαλίας που εφαρμόζουν στο μάθημα της. Γεωμετρίας. Γίνεται αντιληπτό, ότι μέσα από αυτή την παρουσίαση προβάλλεται έντονα και η άρρηκτη σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και των διδακτικών πρακτικών τους για την αποδεικτική διαδικασία.

- Η αυταρχική ή δασκαλοκεντρική μορφή διδασκαλίας υιοθετείται από τους εκπαιδευτικούς με δογματικές ιδέες , σχετικά με τη χρησιμότητα των αυστηρών αποδεικτικών μεθόδων για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Οι πεποιθήσεις αυτών των εκπαιδευτικών ασπάζονται τον φορμαλιστικό χαρακτήρα των αποδεικτικών μεθόδων. Συγκεκριμένα, επιμένουν έντονα στην αυστηρή παρουσίαση και ανάπτυξη των αποδείξεων, με την λογική οργάνωση πειστικών επιχειρημάτων, που διατυπώνονται στην μαθηματική γλώσσα. Επίσης, αρνούνται κατηγορηματικά τη χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας. Επιπλέον, δεν αναγνωρίζουν τον εμπειρικό χαρακτήρα των αποδείξεων και ισχυρίζονται πως ακόμα και τα «προφανή θεωρήματα» της γεωμετρίας πρέπει να αποδεικνύονται. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο πιστεύουν ότι ο σκοπός της διδασκαλίας των αποδείξεων της γεωμετρίας είναι να αποκαλυφθεί η δομή και η λογική διάρθρωση της μαθηματικής επιστήμης. Η αποδεικτική διαδικασία είναι, κατά την άποψη αυτών των εκπαιδευτικών ο τρόπος που φανερώνει καθολικά τη γενική ισχύ των θεωρημάτων της γεωμετρίας. Μετά από την απόδειξη της εγκυρότητας ενός γεωμετρικούς θεωρήματος η μαθηματική κοινότητα θα μπορεί να το χρησιμοποιήσει σε μελλοντικές αποδείξεις και ανακαλύψεις των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων. Τέλος, θεωρούν πως η μάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας ενός

θεωρήματος στηρίζεται στην απομνημόνευσή του (Δημητριάδου 2006, Θεοδορωπούλου 2005)

- Η μαθητοκεντρική μορφή διδασκαλίας εφαρμόζεται από τους εκπαιδευτικούς, που εκφράζουν και ασπάζονται τον εμπειρικό χαρακτήρα των αποδεικτικών διαδικασιών. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί αναγνωρίζουν την αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν τις αυστηρές αποδεικτικές μεθόδους. Προσπαθούν με την ένταξη των ΝΤ στην αποδεικτική διαδικασία να συμβάλουν στη βαθύτερη κατανόηση της γεωμετρίας και να μεταφέρουν έμμεσα στους μαθητές τη σημασία και τον ρόλο της απόδειξης στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης. Τέλος, θεωρούν ότι η απόδειξη είναι ένα διδακτικό εργαλείο για την εξήγηση, την επιβεβαίωση και την αιτιολόγηση ενός γεωμετρικού θεωρήματος. Μέσα από τη χρήση των ΝΤ οι πεποιθήσεις τους αναγνωρίζουν την απόδειξη ως μέσο πειραματισμού και δοκιμής των υποθέσεων και των δηλώσεων ενός γεωμετρικού θεωρήματος. (Δημητριάδου 2006, Θεοδορωπούλου 2005)
- Η μεικτή μορφή διδασκαλίας εφαρμόζεται από τους εκπαιδευτικούς, που τείνουν να αποβάλουν τις φορμαλιστικές απόψεις της αποδεικτικής διαδικασίας. Δείχνουν μία μετριοπαθή στάση σε ότι αφορά στην τυπικότητα των αποδεικτικών μεθόδων και αποδέχονται τις οπτικές αποδείξεις με την προϋπόθεση ότι συμπληρώνονται στο τέλος και από μία τυπική απόδειξη. (Θεοδορωπούλου 2005)

Τέλος, ο Θωμαΐδης (2003, σελ. 150-151) ταξινομεί τις διδακτικές προσεγγίσεις της απόδειξης σε δύο κατηγορίες:

- 1η κατηγορία: Εκείνες οι οποίες, χωρίς να αμφισβητούν το παραδοσιακό πλαίσιο διδασκαλίας, προτείνουν μια ριζική αναθεώρηση της δομής των μαθηματικών αποδείξεων, που παρουσιάζονται στους μαθητές.
- 2η κατηγορία: Εκείνες οι οποίες προτείνουν τον μετασχηματισμό της παραδοσιακής διδασκαλίας σε μια «επιστημονική αντιπαράθεση», στην οποία η απόδειξη εμφανίζεται ως το ανώτερο στάδιο μιας συλλογικής δραστηριότητας με αντικείμενο τη διατύπωση και την επαλήθευση ή την απόρριψη μαθηματικών εικασιών.

4.3. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και η επιλογή του τύπου της γεωμετρικής απόδειξης

Στο κεφάλαιο 2.3 έχουν οριστεί αναλυτικά οι διάφοροι τύποι των μαθηματικών αποδείξεων (ευθεία απόδειξη, άμεση απόδειξη, απόδειξη απο την εξαγωγή, απόδειξη απο την αντίφαση, απόδειξη ύπαρξης, ανάλυση και σύνθεση, απόδειξη απο την μαθηματική επαγωγή) , που χρησιμοποιούνται κατά την διδασκαλία τους. Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρείται ο συσχετισμός του τύπου της μαθηματικής απόδειξης με την μορφή διδασκαλίας που υιοθετείται από τον εκπαιδευτικό. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με την προσωπική μου εκτίμηση, ο τύπος της μαθηματικής απόδειξης που επιλέγεται από τον εκπαιδευτικό για την παρουσίαση της απόδειξης, είναι σε άμεση σχέση με την πρακτική διδασκαλίας του. Ουσιαστικά θεωρώ ότι φανερώνει τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού για την αποδεικτική διαδικασία.

Πιο συγκεκριμένα, η χρήση της άμεσης απόδειξης είναι χαρακτηριστικό μιας δασκαλοκεντρικής μορφής διδασκαλίας. Πίσω από αυτή την πρακτική αποδεικτικής διαδικασίας, υποβόσκει η πεποίθηση του εκπαιδευτικού ότι η απόδειξη αποτελεί ένα διδακτικό εργαλείο, οπού η παρουσίαση της λογικής διάρθρωσης, της οργάνωσης και της ταξινόμηση των επιχειρημάτων της στοχεύουν στη συστηματοποίηση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων, κατά αυστηρό και απόλυτο τρόπο. Ταυτόχρονα στην ίδια μορφή διδασκαλίας υιοθετεί η αναλυτική και συνθετική αποδεικτική μέθοδος.

Η απόδειξη από την εξαγωγή ή η απόδειξη από την επαγωγή ακολουθείται κατά αποδεικτική διαδικασία σε μία σχολική τάξη με περισσότερο μαθητοκεντρική μορφή διδασκαλίας. Αυτό φανερώνει την πεποίθηση του εκπαιδευτικού ότι η απόδειξη είναι ικανή να κινητοποιήσει τα μέλη της μαθηματικής σχολικής τάξης για ανακάλυψη νέων γεωμετρικών ιδιοτήτων και καταστάσεων. Η παρουσίαση μίας αποδεικτικής διαδικασίας μέσω της μετάβασης από το απλό στο πιο σύνθετο, δίνει το έναυσμα για τη γενίκευση της απόδειξης και άλλες γεωμετρικές καταστάσεις.

Η υιοθέτηση της αναλυτικής και συνθετικής αποδεικτικής μεθόδου φανερώνει την πεποίθηση των εκπαιδευτικών ότι η αποδεικτική διαδικασία καλλιεργεί την κριτική σκέψη των μαθητών. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί με αυτή την πεποίθηση για την κατασκευή και παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας στηρίζονται στην αυστηρή λογική διάρθρωση των μαθηματικών επιχειρημάτων και την ακριβή διατύπωσή τους στη μαθηματική γλώσσα.

Η αποδεικτική μέθοδος από την αντίφαση και η αποδεικτική μέθοδος ύπαρξης υιοθετείται ως πρακτική διδασκαλίας των αποδείξεων και από τις δύο παραπάνω μορφές διδασκαλίας. Η πρακτική αυτή δείχνει την πεποίθηση των εκπαιδευτικών ότι η απόδειξη μίας πρότασης παρέχει την επαλήθευση και τη διαβεβαίωση και είναι το εργαλείο εκείνο, που θα παρέχει τη βεβαιότητα ότι μία γεωμετρική κατάσταση είναι αληθής πέραν πάσης αμφιβολίας.

Τέλος, να αναφέρουμε ότι μία μεικτή μορφή διδασκαλίας μπορεί και ελίσσεται στις πρακτικές διδασκαλίας που θα εφαρμοστούν κατά τις αποδεικτικές διαδικασίες των θεωρημάτων. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν συγκεκριμένες και καθορισμένες επιλογές του τύπου της μαθηματικής απόδειξης ενός γεωμετρικού θεωρήματος.

4.4 Η αποδεικτική μέθοδος που υιοθετείται από τους εκπαιδευτικούς και η επίδραση στις πεποιθήσεις των μαθητών .

Ο συλλογισμός της απόδειξης ύπαρξης και της απόδειξης από την αντίφαση δημιουργεί κάποιες φορές προβληματική κατάσταση μάθησης στη γεωμετρία. Οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν τον τρόπο, που μία αποδεικτική διαδικασία, η οποία έχει ως χαρακτηριστικό τον ορθό συλλογισμό με αφετηρία από τις δεδομένες υποθέσεις και πορεία προς το ζητούμενο αντιστρέφει την πορεία.

Μία τέτοια αποδεικτική μέθοδος δημιουργεί στους μαθητές την πεποίθηση ότι κάθε φορά που ζητείται η απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος, αυτό είναι μία απαίτηση που πρέπει να ικανοποιηθεί, ακόμα και αν χρειαστεί να αγνοήσουν αρκετές φορές τους κανόνες συλλογισμού ή ήδη γνωστές γεωμετρικές προτάσεις.

Με άλλα λόγια, οι εκπαιδευτικοί έχουν διαπιστώσει ότι οι μαθητές κατά την αποδεικτική διαδικασία με αντίφαση, κάποιες φορές δεν ακολουθούν κανόνες λογικού συλλογισμού, παρά γράφουν όρους και αξιώματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, προκειμένου να διατυπώσουν τελικά την έκφραση «αυτό είναι άτοπο», χωρίς όμως να κατανοούν τον λόγο που η τελική τους διατύπωση δεν ισχύει.

Η άμεση απόδειξη και η αναλυτική και συνθετική μέθοδος μεταφέρει στους μαθητές την πεποίθηση ότι η απόδειξη είναι μία δύσκολη μαθηματική δραστηριότητα, που επιτυγχάνεται από τους μαθητές που διαθέτουν τις μαθηματικές

δεξιότητες συλλογισμού. Επίσης ότι, η γνώση της προέρχεται από κάποια αρχή και μεταφέρεται από τον εκπαιδευτικό.

Τέλος, αυτοί οι δύο τύποι μαθηματικών αποδείξεων δημιουργούν στους μαθητές την πεποίθηση ότι η απόδειξη είναι μία διαδικασία ανεξάρτητη από τη διαίσθηση και την εμπειρία. Όμως, παράλληλα αναγνωρίζονται και ως μία πνευματική και κριτική άσκηση ή δραστηριότητα.

4.5 Συσχετισμοί μεταξύ των μορφών διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας και των θεωριών μάθησης της που ενεργοποιούνται στη σχολική τάξη .

Η μορφή διδασκαλίας που υιοθετεί από τον εκπαιδευτικό είναι και αυτή, που σύμφωνα με την διδακτική μου εμπειρία καθορίζει και τον τρόπο μάθησης του γνωστικού αντικειμένου. Παρακάτω ακολουθεί μία των θεωριών μάθησης για την απόδειξη στη γεωμετρία, που λαμβάνουν χώρα μέσα στην μαθητική σχολική και της μορφής διδασκαλίας, που εφαρμόζεται από τον εκπαιδευτικό.

Η μαθητοκεντρική μορφή διδασκαλίας υποστηρίζει την ανακαλυπτική προσέγγιση στη μάθηση και τη διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας. Η μάθηση της απόδειξης ενός θεωρήματος απαιτεί την ενεργή συμμετοχή του μαθητή, την ανακατασκευή της γνώσης, τον πειραματισμό, την εξερεύνηση και την ανακάλυψη.

Κατά την κατασκευή της αποδεικτικής διαδικασίας τονίζεται η σημασία της καλλιέργειας της διαισθητικής σκέψης. Αυτή συνίσταται στην ικανότητα να φτάσει κανείς ξαφνικά στο ζητούμενο με μια αναπάντεχη έμπνευση της στιγμής και την ικανότητα να διαμορφώνει γρήγορα εύστοχες εικασίες ή να επιλέγει μεταξύ των πιθανών μεθόδων απόδειξης την πιο αποδοτική και γόνιμη.

Μέσα από την ομαδοσυνεργατική διερεύνηση του γεωμετρικού προβλήματος επιτυγχάνεται η κατανόηση της δομής μιας γεωμετρικής έννοιας ή μιας ιδέας. Επιτρέπει στους μαθητές να διερευνήσουν από μόνοι τους τα επιμέρους θέματα και τις ειδικότερες γνώσεις, αλλά και να βρούν αφορμή να επεκταθούν σε άλλα θέματα γενικεύοντας, διερευνώντας και συνδυάζοντας γνώσεις από άλλες περιοχές.

Η ανακαλυπτική διαδικασία μάθησης κατά τον J.Bruner υπαγορεύει την ακόλουθη μεθοδολογία για την κατασκευή της απόδειξης ενός θεωρήματος:

- Ο μαθητής χειρίζεται και επεξεργάζεται απ' ευθείας τα διάφορα υλικά, δηλαδή τα σχήματα που αποτυπώνονται στη διατύπωση του θεωρήματος.
- Ο μαθητής ανακαλύπτει κάποιες κανονικότητες και πρότυπα, τα οποία αντιστοιχούν στα διαισθητικά πρότυπα τα οποία έχει ήδη διαμορφώσει. Συνδυάζει, δηλαδή, τις εμπειρίες του από τον εξωτερικό κόσμο με κάποια γεωμετρικά αντικείμενα-μοντέλα στο μυαλό του.
- Οι υπάρχουσες ιδέες και πεποιθήσεις του μαθητή αναδιοργανώνονται, ώστε να προσαρμοστούν και να συμμορφωθούν με τις καταστάσεις της φυσικής εμπειρίας
- Τα αποτελέσματα οργανώνονται σε ένα συστηματοποιημένο σώμα γνώσης με τη χρήση της μαθηματικής γλώσσας και με τους κανόνες του μαθηματικού συλλογισμού.

Η μεικτή μορφή διδασκαλίας υπαγορεύει τη ρεαλιστική προσέγγιση μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας. Η κατασκευής της γνώσης της απόδειξης γίνεται από τον μαθητή. Όμως η πορεία ανάπτυξης των αλγορίθμων είναι σε μεγάλο βαθμό προκαθορισμένη. Η διδασκαλία έχει σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε ο μαθητής να κάνει από μόνος του ανακαλύψεις, αλλά αυτό που ανακαλύπτεται καθώς επίσης και η σειρά με την οποία ανακαλύπτεται, έχει καθοριστεί εκ των προτέρων από τον σχεδιαστή της δραστηριότητας.

Μέσα από μια σειρά προβλημάτων - εργασιών (projects) και κατάλληλη καθοδήγηση, ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να ενεργοποιήσει σκέψεις και συζητήσεις για το γεωμετρικό αντικείμενο. Το διδακτικό συμπέρασμα της ρεαλιστικής προσέγγισης του Freudenthal (1973) είναι να φέρουμε τους μαθητές σε επαφή με εκείνα τα φαινόμενα, για τα οποία οι μαθηματικές έννοιες και δομές αποτελούν τα οργανωτικά εργαλεία, με στόχο μόνοι τους να διαμορφώσουν αυτά τα εργαλεία σε μια διαδικασία επανα-ανακάλυψης και να μάθουν να τα χειρίζονται στα πλαίσια ευρύτερων διδακτικών στόχων σταδιακά.

Στην περίπτωση της απόδειξης ενός γεωμετρικού θεωρήματος, στόχος μας είναι να συμπληρωθούν οι εμπειρικές ανακαλύψεις των μαθητών από την τυπική απόδειξη. Ο Freudenthal αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες και δομές ως εργαλεία οργάνωσης των πραγματικών φαινομένων, τα οποία ο μαθητής μαθαίνει στο πλαίσιο ενός αλληλεπιδραστικού προγράμματος διδασκαλίας, του οποίου η ποικιλία

και ο πλούτος των φαινομένων που καλύπτει, επιτρέπουν την αντιμετώπιση μιας μαθηματικής έννοιας ή δομής από διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Τέλος, η αυταρχική ή δασκαλοκεντρική διδασκαλία ορίζει ως τρόπο μάθησης της απόδειξης ενός θεωρήματος την αποστήθιση των κανόνων και μεθοδολογιών που παρουσιάζονται είτε από τον εκπαιδευτικό είτε από το σχολικό εγχειρίδιο. Οι μαθητές δε συμμετέχουν στην οικοδόμηση της γνώσης της αποδεικτικής διαδικασίας, αλλά είναι παθητικοί ακροατές στον μονόλογο του εκπαιδευτικού.

Οι μορφές διδασκαλίας που εφαρμόζει ο κάθε εκπαιδευτικός για την γεωμετρική απόδειξη και σχετίζονται με τις πεποιθήσεις του, ενώ ταυτόχρονα υποδηλώνουν και με έμμεσο τρόπο την αποδεικτική μέθοδο που θα ακολουθήσει κατά την παρουσίαση της, πολλές φορές σχετίζονται και με τις οδηγίες του αναλυτικού προγραμμάτος σπουδών, αλλά και με το σχολικό εγχειρίδιο.

4.6 Επικρατούσες πεποιθήσεις για τη γεωμετρική απόδειξη στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών με τις οδηγίες του παιδαγωγικού ινστιτούτου (Π. Ι) για την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και τα σχολικά εγχειριδια, που αποτελούν τα διδακτικά εργαλεία των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την μάθηση και την διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία συνθέτουν την εικόνα της μαθηματικής σχολικής τάξης. Η μαθηματική σχολική τάξη είναι ο βασικός χώρος, όπου συντελείται η μάθηση και η διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και μέσα σε αυτών αλληλεπιδρούν οι πεποιθήσεις μαθητών και εκπαιδευτικών για την οικοδόμηση της γεωμετρικής γνώσης της απόδειξης.

4.6.1 Οι οδηγίες του αναλυτικού προγράμματος σπουδών του παιδαγωγικού ινστιτούτου (Π.Ι) για την απόδειξη στο μάθημα της γεωμετρίας.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, που σχεδιάζεται από το Π.Ι του Υπουργείου Παιδείας (ΥΠ.Ε.Π.Θ) , θέτει τους στόχους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος. Η μαθηματική τάξη είναι ο αποδέκτης των αρχών που προτείνουν τα

αναλυτικά προγράμματα και αποτελεί το κύριο μέρος όπου λαμβάνει χώρα η μάθηση και η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας. Είναι λοιπόν αναμενόμενο, με βάση τις προτάσεις του Π.Ι που υλοποιούνται μέσα στη σχολική τάξη, οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί να αναπτύσσουν την δομή του συστήματος των πεποιθήσεων τους για την απόδειξη.

Στις οδηγίες του παιδαγωγικού ινστιτούτου(Π.Ι) του υπουργείου παιδείας (ΥΠ.Ε.Π.Θ) για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, προτείνεται 'η διδακτέα ύλη να προσφέρεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιδιώκεται πρώτα απ' όλα η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή' (ΥΠ.Ε.Π.Θ. – Π.Ι. 2000). Αυτή η γενική αρχή εξειδικεύεται στη συνέχεια και συνδέεται με ορισμένες βασικές αρχές της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι η «αποδεικτική διαδικασία».

Συμπληρωματικά, για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αναφέρουμε την άποψη του Θωμαΐδη (2003) 'ότι δύο διαχρονικές συνιστώσες των σκοπών της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι ο εθισμός στην κριτική σκέψη και η διέγερση του κριτικού πνεύματος'. Επίσης από τις αναλυτικές οδηγίες του Π.Ι(2003 σελ.3) ειδικά για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο Λύκειο αναφέρεται ότι ' βασικό έργο της διδασκαλίας της γεωμετρίας είναι η αφαιρετική-συνθετική σκέψη, τόσο με τον ακριβή προσδιορισμό των εννοιών, όσο και με τη χρήση της λογικής στην αποδεικτική διαδικασία' .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η γενικότερη φιλοσοφία που διέπει το πρόγραμμα σπουδών για τη γεωμετρία είναι η 'εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία' ή 'ο μαθητής πρέπει να διδαχθεί να κατανοεί την ανάγκη να αποδεικνύει θεωρήματα' ή ότι 'είναι σημαντικό ο μαθητής να κατανοεί την καθολικότητα της τυπικής απόδειξης' και άλλες ταυτόσημες ή παρόμοιες εκφράσεις. Σε αυτές τις διατυπώσεις γίνεται αντιληπτό, πως η καλλιέργεια της απόδειξης ως έννοια και ως διαδικασίας συνιστά ένα βασικό σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών κυρίως στη γεωμετρία. (Hirst, 1974, Quadling, 1979).

4.6.2. Η τρέχουσα σχολική πραγματικότητα για την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και η επίδραση στις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών

Παρά τη μεγάλη σημασία που δίνεται στα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών για την αποδεικτική διαδικασία στο μάθημα της γεωμετρίας, ενώ παράλληλα είναι αποδεικτό και το πόσο σημαντικό είναι να αναπτυχθεί η ικανότητας των μαθητών να κατανοούν και να κατασκευάζουν τις αποδείξεις της γεωμετρίας, στην καθημερινή σχολική πρακτική έχει παρατηρηθεί ότι το ενδιαφέρον περιορίζεται *στην τυπική δόμηση της απόδειξης*.

Πιο αναλυτικά κατά την διδασκαλία της γεωμετρίας, η τυπική – δομημένη μορφή για την κατασκευή, την οργάνωση και την παρουσίαση της απόδειξης περιλαμβάνει την καταγραφή δεδομένων, ζητούμενων, την παρουσίαση συγκεκριμένης ακολουθίας λογικών βημάτων συλλογισμού με αυστηρή μαθηματική γλώσσα και συμβολισμό. Πρόκειται για μια άποψη που ταυτίζεται με τη φορμαλιστική θεώρηση της γεωμετρικής απόδειξης.

Ως αποτέλεσμα της επικέντρωσης του ενδιαφέροντος στην τυπική οργάνωση της απόδειξης , παρά στην ορθότητα και της κατανόησης του περιεχομένου της, είναι ότι σπάνια καλείται ο μαθητής να κάνει κάτι καινούργιο και να αιτιολογήσει με λογικά επιχειρήματα την ανακάλυψή του. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές θεωρούν ότι η γεωμετρική γνώση δεν μπορεί να αμφισβητηθεί , εφόσον έχει προκύψει από τις ανακαλύψεις των μαθηματικών της αρχαιότητας.

Με άλλα λόγια , οι μαθητές θεωρούν ότι ο ρόλος τους για τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η απομνημόνευση της απόδειξης, όπως την παρουσίασε η πηγή της γνώσης, που είναι ο καθηγητής ή το σχολικό εγχειρίδιο.

Οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η απόδειξη στηρίζεται στην εγκυρότητα της μορφής παρουσίασης της, παρά στο περιεχόμενό της. Η δυνατότητα του μαθητή να αιτιολογήσει την αποδεικτική διαδικασία μέσω της παροχής λογικών επιχειρημάτων απουσιάζει. Αυτό όμως δεν συμβάλει στην κατανόησή της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές και δεν τους πείθει για την ορθότητά της.

Ουσιαστικά η γεωμετρική γνώση ταυτίζεται με το σχήμα: *ορισμός, αξίωμα, θεώρημα και απόδειξη* (Hanna, 1991). Το σχήμα αυτό μεταφέρεται με τη σειρά του στο σύστημα των πεποιθήσεων των μαθητών όσον αφορά την οργάνωση, τη δομή της γνώσης της αποδεικτικής διαδικασίας.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα, οτι η τυπική απόδειξη που εφαρμόζεται και υπαγορεύεται απο τις οδηγίες του Π.Ι μέσα στην σημερινή μαθηματική σχολική

τάξη διδασκαλίας της γεωμετρίας, δίνει έμφαση στη διατύπωση ορισμών, στην ακρίβεια της γλώσσας και στον προκαθορισμένο τρόπο οργάνωσης της απόδειξης. Σύμφωνα με αυτό καλλιεργείται στους μαθητές η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά υπάρχουν a priori και διακρίνονται για το αλάθητο τους και για την αμετάβλητη, διαχρονική αλήθεια που αποκαλύπτουν.

Επίσης οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές θεωρούν ότι η γεωμετρία είναι η κατεξοχήν επιστήμη της ακρίβειας, της αυστηρής γλώσσας, της συνέπειας και της αλήθειας, πιστεύοντας ακράδαντα στην 'βεβαιότητα της γνώσης της'.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών καλλιεργεί στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς την πεποίθηση ότι γνώση της απόδειξης λαμβάνεται από τους μαθητές έπειτα από την παρουσίαση μίας αποδεικτικής διαδικασίας από τον εκπαιδευτικό. Η παρουσίαση οφείλει να ακολουθεί αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο, χωρίς να δίνονται στους μαθητές περιθώρια αναπαραγωγής συλλογισμών και πειραματισμού των υποθέσεων τους.

4.6.3. Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην διαμόρφωση των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Το σχολικό βιβλίο της γεωμετρίας επηρεάζει και διαμορφώνει τις πεποιθήσεις των μαθητών ανάλογα με τη μορφή και τον τύπο της απόδειξης που παρουσιάζει. Πρώτα από όλα να αναφερθεί οτι στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρείται ότι ο τρόπος παρουσίασης των αποδείξεων είναι αποσυνδεδεμένος από τον πραγματικό κόσμο και αλληλεπίδραση μεταξύ προβλημάτων της καθημερινής ζωής και γεωμετρικών προβλημάτων σχεδόν αγνοείται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην αντιλαμβάνονται από πού προέρχονται και σε τι χρησιμεύουν τα θεωρήματα που πρέπει να διδαχτούν και να αποδείξουν στη γεωμετρία. Έτσι εκδηλώνουν αδιαφορία και άρνηση στην προσπάθεια κατάκτησης της γνώσης τους και πολύ περισσότερο για την αποδεικτική διαδικασία αυτών. Δυστυχώς, αυτό που συνήθως συμβαίνει στα σχολικά βιβλία είναι η αντίστροφη πορεία από αυτή που υπαγορεύει η ιστορική εξέλιξη των ιδεών.

Στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου κυριαρχεί η *διαισθητική και η επαγωγική* απόδειξη. Στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας γεωμετρίας Α΄και Β΄

Λυκείου κυριαρχούν οι παραγωγικές αποδείξεις που απαιτούν αυστηρή δόμηση λογικών συλλογισμών. Άλλωστε, κατά την γνώμη των συντακτών αυτή φαίνεται να είναι η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο βαθμίδων της εκπαίδευσης

Στο Γυμνάσιο, το βάρος είναι στην εποπτεία, ενώ στο Λύκειο, στην αξιωματική θεμελίωση (Αναλυτικό Πρόγραμμα, οδηγίες Π.Ι, 2003.).Οι δύο αυτοί τύποι των αποδείξεων με τη μορφή που παρουσιάζονται και διδάσκονται στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης έχουν η καθεμία το δικό της ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά και διαφορετική επίδραση στη διαμόρφωση των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Στο Γυμνάσιο τα επιχειρήματα και συλλογισμοί κατά τη αποδεικτική διαδικασία θυσιάζονται μπροστά στην εποπτεία. Κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας οι εκπαιδευτικοί ξεκινούν πρώτα από μερικές, ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες είναι ήδη γνωστές ή βρίσκονται πιο κοντά στην εμπειρία των μαθητών, για να καταλήξουν στο γενικό συμπέρασμα ή στο γενικό κανόνα. Αντίθετα στο Λύκειο οι διδάσκοντες της Ευκλείδειας γεωμετρίας επιμένουν στην αυστηρότητα των συλλογισμών και την ακριβή μαθηματική διατύπωση τους.

Είναι γενικά αποδεκτό, ότι η εποπτεία και η εμπειρία βοηθούν τη διαίσθηση, την εμπλουτίζουν, θέτουν ερωτήματα, δημιουργούν αμφιβολίες. Η εξαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας από μια συγκεκριμένη κατάσταση – πρόβλημα, υπαρκτό ή ενδομαθηματικό, η γενίκευση μετά από την εξέταση περιπτώσεων, οι διαισθητικές αιτιολογήσεις αποτελούν τρόπους καλλιέργειας της κριτικής σκέψης. Χωρίς την εξοικείωση του μαθητή με αυτές τις άτυπες διεργασίες σκέψης, δεν μπορεί να καταλάβει ποτέ τον αληθινό ρόλο της απόδειξης, που δεν είναι άλλος από το να επικυρώνει και να νομιμοποιεί τις κατακτήσεις της διαίσθησης. Η αποκλειστική, στο μεγαλύτερο μέρος των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου, παρουσία διαισθητικών – εποπτικών και επαγωγικών αποδείξεων, εκτός των άλλων διαμορφώνει και εν πολλοίς παγιώνει την πεποίθηση των μαθητών για την εμπειρική φύση της αποδεικτικής διαδικασίας στην επιστήμη της γεωμετρίας.

Η υποκατάσταση της απόδειξης από την διαδικασία της εποπτικής δικαιολόγησης, η υποκατάσταση, δηλαδή, της διατύπωσης επιχειρημάτων και επομένως συλλογισμών από διαισθητικές διαδικασίες, μετατοπίζει τον χαρακτήρα της απόδειξης από την τέχνη του συλλογίζεσθαι σε ένα αντικείμενο, που δέχεται άκριτα

την «αλήθεια». Οι αποσπασματικές αποδείξεις στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου, που υπάρχουν διάσπαρτες και ξεκρέμαστες σε διάφορες ενότητες της διδακτέας ύλης, δημιουργούν την άποψη στους μαθητές ότι υπάρχουν και αυτές απλά μεταξύ των πολλών άλλων γνώσεων, πληροφοριών, πράξεων κτλ.

Οι μαθητές αρκούνται να διατυπώσουν για την απόδειξη μίας πρότασης της γεωμετρίας με λεκτικές εκφράσεις όπως: «μου φαίνεται», «ας κάνω μερικές δοκιμές και μου αρκούν», «ας μετρήσω με το υποδεκάμετρο ή το μοιρογνωμόνιο. Με άλλα λόγια οι μαθητές γυμνασίου δεν μπορούν να κατανοήσουν το πραγματικό ρόλο μίας απόδειξης και δέχονται άκριτα και με το μάτι τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων. Η εμπειρική φύση της απόδειξης είναι κυρίαρχη στις πεποιθήσεις των μαθητών Γυμνασίου.

Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν τη γεωμετρία στο γυμνάσιο συμβιβάζονται μέσα στο πλαίσιο της εμπειρικής θεώρησης και αντιμετώπισης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων και δεν εφαρμόζουν πουθενά κατά τη διδασκαλία τους παραγωγικές αποδείξεις. Ισχυρίζονται πως το νοητικό επίπεδο των μαθητών γυμνασίου δεν είναι σε ετοιμότητα να παράγει επιχειρήματα και συλλογισμούς για να σχεδιάσει μία παραγωγική απόδειξη. Μεταφέρουν λοιπόν ,μέσω της διδασκαλίας ως τρόπο μάθησης της απόδειξης, τη μέτρηση με τα γεωμετρικά όργανα, τη παρατήρηση με το μάτι, τη χρήση διαφανούς χαρτιού και άλλες τέτοιες εμπειρικές απόψεις.

Η μετάβαση στο Λύκειο είναι ορισμένες φορές προβληματική για κάποιους μαθητές καθώς καλούνται να αιτιολογήσουν με κατάλληλα επιχειρήματα ή να εξετάσουν την ύπαρξη αντιπαραδειγμάτων για τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων στις αποδείξεις προτάσεων και θεωρημάτων, οι οποίες απαιτούν πλέον παραγωγική απόδειξη. Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την παραγωγική μαθηματική απόδειξη για να επιβεβαιώσει την αλήθεια μίας γεωμετρικής κατάστασης, κάτι το οποίο είναι ξένο με τις ήδη διαμορφωμένες πεποιθήσεις τους.

Ο εκπαιδευτικός, ως διαμεσολαβητής και διαβιβαστής της γνώσης, μέσω της διδασκαλίας του, μεταφέρει την πεποίθηση του ότι η απόδειξη είναι το εργαλείο που επικυρώνει την αλήθεια των γεωμετρικών προτάσεων.

Επιπλέον οι μαθητές με κλίση στις θετικές επιστήμες αντιλαμβάνονται την αποδεικτική διαδικασία ως μέσο που μέσα από τον τρόπο μάθησης της θα καλλιεργήσει την κριτική τους σκέψη. Επιπλέον όταν η αποδεικτική διαδικασία

διδάσκεται με διαλεκτική μορφή μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών, οι μαθητές πιστεύουν ότι η λογική της ίδιας της απόδειξης το αν είναι σωστό ή όχι το συμπέρασμα προκύπτει από την ίδια την απόδειξη και όχι από καμιά αυθεντία. Η προσεκτική παρουσίαση των επιμέρους μερών που συνιστούν την παραγωγική διαδικασία καταδεικνύει την απόλυτη εξάρτηση τους και παγιώνει σε μαθητές και εκπαιδευτικούς την πεποίθηση για την 'απλότητα της γνώσης'.

Αυτή είναι η μία πλευρά των πεποιθήσεων που διαμορφώνουν μαθητές και εκπαιδευτικοί Λυκείου. Υπάρχει και η άλλη πλευρά που επιβάλει η απότομη μετάβαση από τον εμπειρικό στο φορμαλιστικό χαρακτήρα. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις αποδεικτικές διαδικασίες ως πολύπλοπες, δυσνόητες και διατυπώνουν την απορία ' γιατί πρέπει να αποδειχτεί κάτι που είναι ήδη γνωστό' .

Ο εκπαιδευτικός αντιμετωπίζει την πρόκληση της αυστηρής διατύπωσης λογικών συλλογισμών από την μία και της πλήρης κατανόησης τους από την άλλη. Η προέλευση της γνώσης της απόδειξης είναι για τους μαθητές κάποια αυθεντία και πιστεύουν ότι μόνο οι ταλαντούχοι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν και να παράγουν αποδείξεις που να δείχνουν την αλήθεια των θεωρημάτων της γεωμετρίας. Ο τρόπος μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι η αποστήθιση, χωρίς να δίνεται από τους μαθητές ιδιαίτερη σημασία για την κατανόηση της λογικής διάρθρωσης των επιχειρημάτων που παρατίθενται από τον διδάσκοντα.

Ο διδάσκων με τη σειρά που ασπάζεται τις οδηγίες του Π.Ι για ακριβή διατύπωση συλλογισμών στη γεωμετρία Λυκείου αντιλαμβάνεται το ρόλο της απόδειξης ως ένα εργαλείο μεταφοράς της μαθηματικής γνώσης, όπου η αδυναμία κατανόησης της μεταφράζεται ως έλλειψη κατάλληλου μαθηματικού υπόβαθρου από τους μαθητές. Έτσι λοιπόν σε κάθε διδακτική ενότητα θέτει και εφαρμόζει με αυστηρή σειρά τύπους, διαδικασίες, χωρίς σύνδεση των εννοιών και των ιδιοτήτων που διατυπώνονται στη γεωμετρική πρόταση με τον πραγματικό κόσμο και εμμονή στην πιστή εφαρμογή αυτών των στρατηγικών από τους μαθητές.

Αν υπάρχουν αδυναμίες στην αποτύπωση και διατύπωση από πλευράς των μαθητών σε αυτές στις αποδεικτικές διαδικασίες ο εκπαιδευτικός συνιστά και προτείνει μελέτη στο σπίτι, επανάληψη προγενέστερων μεθόδων λύσης γεωμετρικών προβλημάτων και φορτώνει τους μαθητές με πλήθος γεωμετρικών ασκήσεων, διότι ότι μέσα από την εξάσκηση θα βοηθήσει στην άρση των δυσκολιών των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία.

Μέτα απο την ανάλυση για την μαθησιακή διαδικασία και την διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία προβάλλεται το αίτημα για αποτελεσματικότερη αξιοποίηση των οδηγιών του Π.Ι και του σχολικού εγχειριδίου, προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν την βαθύτερη αξία αυτής της διαδικασίας. Ουσιαστικά η αποδεικτική διαδικασία απαιτεί αποτελεσματική διδακτική αντιμετώπιση κυρίως από τους εκπαιδευτικούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

5.1 Σύγχρονοι προβληματισμοί για την διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία.

Η διδασκαλία της γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευσης αποτελεί ένα ενεργό πεδίο προβληματισμού μεταξύ των εκπαιδευτικών και των συντακτών των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών , αλλά και μεταξύ των ερευνητών του θέματος (Alibert 1998, Movskovitz – Hadar 1998, Hanna 1998 κ.α.). Η βασική αιτία προβληματισμού είναι η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν την συνθετική δομή του περιεχομένου της γεωμετρίας (Τζίφας, 2005). Επιπλέον, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 3 και επιβεβαιώνεται από την βιβλιογραφία (π.χ Fischbein & Kedem 1982, Schoenfeld 1986, Williams 1980, Lewis 1986, Coe & Ruthven 1994 κ.α), οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σχετικά με την κατανόηση της φύσης της αποδεικτικής διαδικασίας , την οργάνωση, την δομή και τον τρόπο μάθησης της. Καθώς, λοιπόν η κατασκευή των αποδείξεων των γεωμετρικών θεωρημάτων κυριαρχεί σε όλο το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης της γεωμετρίας καθίσταται επιτακτική ανάγκη η αναζήτηση διδακτικών προσεγγίσεων και αποτελεσματικών μορφών διδασκαλίας που απο την μία να τονίζουν την σπουδαιότητα και την αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας και απο την άλλη να άρουν, όσο αυτό είναι εφικτό, τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με αυτήν.

Επίσης και από τη βιβλιογραφία διαπιστώνεται ότι η διδασκαλία της απόδειξης είναι ένα από τα πιο ενεργά ερευνητικά πεδία στη Μαθηματική Εκπαίδευση, καθώς τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται στη διεθνή μαθηματική εκπαίδευση έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μαθηματική απόδειξη και τη θέση της στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η Mariotti (2006) προτείνει την ύπαρξη τριών ερευνητικών κατευθύνσεων:

α) ανάλυση του ρόλου της απόδειξης στα αναλυτικά μαθηματικά προγράμματα,

β) προσεγγίσεις της έννοιας της απόδειξης από τους μαθητές και

γ) διδασκαλία πειραμάτων για να εκπαιδεύσουμε τους μαθητές να αποδεικνύουν.

Ο Tall (1995) υποστηρίζει ότι η απόδειξη πρέπει να είναι η βάση της διδασκαλίας των μαθηματικών, εφόσον τα κύρια στοιχεία της, που είναι οι υποθέσεις

και οι λογικές τους συνέπειες, είναι τα συστατικά στοιχεία δημιουργίας της μαθηματικής γνώσης. Από την άλλη, η διδασκαλία της απόδειξης σύμφωνα με τη Hanna (1995), μπορεί να λειτουργήσει ως «όχημα προώθησης της μαθηματικής κατανόησης», ενώ ο Ross (1998), τη θεωρεί ως την «πεμπτουσία των μαθηματικών».

5.2. Προτάσεις για τη διδασκαλία της απόδειξης στη Γεωμετρία.

5.2.1 Η προώθηση της κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας.

Αναμφισβήτητα το πιο κρίσιμο σημείο της μαθησιακής διαδικασίας αποτελεί η κατάκτηση της διαδικασίας της απόδειξης, αφού σηματοδοτεί το πέρασμα από τα πρακτικά-εμπειρικά μαθηματικά στην επιστήμη των μαθηματικών. Αν και δεν πρέπει να ταυτίζεται η δραστηριότητα των μαθητών με την προσπάθεια των ερευνητών-μαθηματικών, η βαθύτερη κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατανοήσουν σταδιακά τον τρόπο σκέψης και εργασίας των ερευνητών-μαθηματικών και να έρθουν σε επαφή με τη δημιουργία των μαθηματικών.

Παρέχεται με αυτόν τον τρόπο στους μαθητές η ευκαιρία συνειδητοποίησης του γεγονότος ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα, που βρίσκεται σε συνεχή εξέλιξη. Ταυτόχρονα προβάλλεται η σημασία της τεκμηρίωσης της ανθρώπινης σκέψης.

Στόχος της σύγχρονης μαθηματικής παιδείας είναι η οργάνωση δραστηριοτήτων και συνθηκών μάθησης, που να δίνουν στον μαθητή τη δυνατότητα να βιώνει την εσωτερική ανάγκη αιτιολόγησης και τεκμηρίωσης κάθε μαθηματικής πρότασης (Hershkowitz, 1998). Δίνεται έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας, ώστε να γίνει αντιληπτό από τους μαθητές ότι η απόδειξη είναι μέσο επαλήθευσης και επικοινωνίας της μαθηματικής γνώσης (Maher & Martino, 1996).

Με την ανάπτυξη της γνωστικής ψυχολογίας το ενδιαφέρον μετατοπίζεται από τη διδακτική διαδικασία και το αποτέλεσμα στο γνωστικό άτομο και τις δυνατότητες κατανόησης του αντικειμένου διδασκαλίας, ανάλογα με το επίπεδο γνωστικής του ανάπτυξης. Για αυτόν τον λόγο, ο στόχος κάθε εκπαιδευτικού θα πρέπει να είναι οι αποτελεσματικές διδακτικές προσεγγίσεις των αποδεικτικών διαδικασιών στη

γεωμετρία, που θα δώσουν έμφαση στην κατανόηση της μαθηματικής γνώσης της απόδειξης μέσα από την ουσιαστική νοητική ενεργοποίηση του μαθητή.

Οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης φανερώνουν ότι στόχος της είναι να αποκτήσει ο μαθητής εμπειρίες ανάλογες με έναν μαθηματικό, για να αναπτύξει ενδιαφέρον και κίνητρα διερεύνησης και οικοδόμησης της γνώσης. Τα κίνητρα των μεγάλων μαθηματικών που αφιερώνουν χρόνια για την απόδειξη ενός θεωρήματος, είναι η περιέργεια και η μαγεία της διερεύνησης και της ανακάλυψης. Όπως ο/η μαθηματικός κατασκευάζει μια τυπική απόδειξη, ώστε να γίνει δεκτή για δημοσίευση, έτσι και ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει την απόδειξη, με στόχο να πεισθεί ο ίδιος και να πείσει τον εκπαιδευτικό για την ισχύ του θεωρήματος (Godino & Recio, 1997).

Οι στόχοι των αποτελεσματικών διδακτικών πρακτικών για την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία διατυπώνονται από την ακόλουθη εισήγηση: «Για την ανάπτυξη μιας παιδαγωγικής για τη διδασκαλία της απόδειξης και του μαθηματικού συλλογισμού, καλό σημείο εκκίνησης είναι η ενθάρρυνση των μαθητών να διατυπώνουν τα δικά τους επιχειρήματα και αιτιολογήσεις, να κρίνουν οι ίδιοι τις διαισθητικές τους προσεγγίσεις και τα μη τυπικά επιχειρήματα τους. Με αυτόν τον τρόπο, η διδασκαλία της απόδειξης ξεκινά από επιχειρήματα τα οποία έχουν νόημα για τους μαθητές, δεν παρουσιάζεται αδιαφανής και δεν οδηγεί στην απομνημόνευση. Η ενθάρρυνση των μαθητών να αναστοχάζονται στην απόδειξη από ένα 'μεταεπίπεδο', μπορεί να τους βοηθήσει να κατανοήσουν θέματα που σχετίζονται με τη δημιουργία και τη συστηματοποίηση των ρόλων της απόδειξης» (Ηρακλείδης , 2006).

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται αντιληπτό πως εάν οι μαθητές κατανοήσουν την διαδικασία κατασκευής και παρουσίασης της αποδεικτικής διαδικασίας, τότε είναι δυνατόν να αντιληφθούν και την αξία και τον ρόλο που διαδραματίζει στη γεωμετρική επιστήμη. Για αυτόν το λόγο οι διδακτικές προτάσεις της παρούσας εργασίας έχουν ως βασικό στόχο την βαθύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς προτείνουν την ανάδειξη των λειτουργιών της κατά την διδασκαλία της γεωμετρίας μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη.

5.2.2 Η προώθηση και η ανάδειξη των λειτουργιών της απόδειξης μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη.

Τα περισσότερα βιβλία μαθηματικών μας κάνουν να πιστεύουμε πως οι μαθηματικοί κάνουν τυπικές και αυστηρές αποδείξεις και λογικές συνεπαγωγές βασισμένες σε αξιώματα (Battista & Clements , 1995). Όμως, η πορεία της μαθηματικής ανακάλυψης ακολουθεί έναν εντελώς διαφορετικό δρόμο. Η διαδικασία παραγωγής των νέων μαθηματικών είναι εντελώς διαφορετική από τον παραγωγικό τρόπο της παρουσίασής τους. Είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη ο ρόλος της απόδειξης ως μέσο επικοινωνίας και να αναγνωριστεί η σημασία της κοινωνικής διαδικασίας για την αποδοχή ενός νέου αποτελέσματος από τη μαθηματική κοινότητα.

Οι συντάκτες του νέου προγράμματος σπουδών επικροτούν τον επικοινωνιακό ρόλο της απόδειξης, καθώς υποστηρίζουν ότι ο καταλληλότερος τρόπος για να αντιληφθούν οι μαθητές το νόημα της τυπικής μαθηματικής απόδειξης είναι η διάρθρωση του μαθήματος της γεωμετρίας γύρω από ομαδικές ερευνητικές δραστηριότητες μεταξύ των μαθητών. Αναφέρεται χαρακτηριστικά : << Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται κυρίως στη διαπραγμάτευση του νοήματος μέσω μιας κοινωνικής διαδικασίας παρά στην εφαρμογή τυπικών κριτηρίων εκ των έξωθεν. Συνήθως, κατά τη διάρκεια των Μαθηματικών παρουσιάζεται η θεωρία που θέλουμε να διδάξουμε στην τελική της μορφή, ενώ θα έπρεπε να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να συμμετάσχουν σε όλες τις φάσεις του δημιουργικού κύκλου της μαθηματικής έρευνας. Οι συνήθεις διδακτικές προσεγγίσεις τείνουν να προσφέρουν στους μαθητές το προϊόν της μαθηματικής σκέψης, παρά τη διαδικασία του μαθηματικού συλλογισμού, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων>> (ΥΠ.Ε.Π.Θ. – Π.Ι. 2000).

Οι μαθητές που αποκτούν «κατανόηση σε βάθος» των αποδείξεων είναι πιο εύκολο να μπορούν να διακρίνουν τη χρησιμότητα σε αυτό που μαθαίνουν (Marton & Saljo, 1984). Όμως, η κατανόηση της απόδειξης ενισχύεται, όταν δίνεται έμφαση στην επικοινωνιακή της λειτουργία παρά στον τυπικό τρόπο οργάνωσής της. Σύμφωνα με τους Martin και Harel (1989), στην καθημερινή ζωή οι άνθρωποι θεωρούν την απόδειξη ως ταυτόσημη με κάτι που τους «πείθει». Όταν δίνεται

έμφαση στην κριτική εξέταση της απόδειξης ενός μαθητή από τους συμμαθητές του, παρουσιάζεται και βιώνεται ταυτόχρονα η κοινωνική διάσταση της απόδειξης.

Σύμφωνα με τους Brendefur και Frykholm (2000), η κατανόηση της γεωμετρικής απόδειξης επιτυγχάνεται όταν οι εκπαιδευτικοί καλλιεργήσουν στους μαθητές τις δεξιότητες μαθηματικής αιτιολόγησης και τις δεξιότητες επικοινωνίας μεταξύ των μελών της μαθηματικής σχολικής τάξης. Οι δεξιότητες μαθηματικής αιτιολόγησης προωθούνται από τις δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού. Όμως, με την σειρά τους οι δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού δεν μπορούν να αναπτυχθούν χωρίς τις δεξιότητες επικοινωνίας.

Κατά την διδασκαλία της απόδειξης, οι μαθητές μπορούν να επικοινωνήσουν αποτελεσματικά με την ανταλλαγή απόψεων, υποθέσεων, με τη διατύπωση εικασιών και την παράλληλη κριτική σε αυτές, που θα ασκούν οι συμμαθητές τους και ο εκπαιδευτικός Μέσα στο πλαίσιο της κοινωνικής διαλεκτικής, η παρουσίαση μίας απόδειξης ενός θεωρήματος προκύπτει από τους ίδιους τους μαθητές σαν φυσικό επακόλουθο των συζητήσεων. Η απόδειξη είναι το μέσο, που θα εξηγήσει στις μαθηματικές συζητήσεις των μαθητών ότι το θεώρημα είναι αληθές. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της επικοινωνίας με τον εκπαιδευτικό θα καταβληθεί προσπάθεια, ώστε οι εξηγήσεις να γραφούν στη μαθηματική γλώσσα και έτσι να κατασκευαστεί μία έγκυρη γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος (Edwards, 1999)

Οι Brendefur και Frykholm (2000) περιέγραψαν, επιπλέον, τα χαρακτηριστικά των τύπων επικοινωνίας στη μαθηματική σχολική τάξη, που συμβάλλουν αποτελεσματικά στην προώθηση του μαθηματικού συλλογισμού. Η συμβαλλομένη (contributive) επικοινωνία ορίζεται, όταν «στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών, αλλά και μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών μέσω των μαθηματικών συζητήσεων παρέχεται ελάχιστη ή καμία καθοδήγηση στις σκέψεις και τις διατυπώσεις των εικασιών για το γεωμετρικό θεώρημα» (σελ. 127). Αντίθετα, η αντανακλαστική (reflective) επικοινωνία ορίζεται, όταν «στη μαθηματική συζήτηση ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές ανατροφοδοτούν συνεχώς τις σκέψεις τους και βρίσκονται σε συνεχή αλληλεπίδραση, ώστε το αποτέλεσμα να είναι μία έγκυρη παραγωγική απόδειξη του θεωρήματος» (σελ. 127). Η προώθηση της αντανακλαστικής επικοινωνίας δεν είναι εύκολος στόχος, διότι μπορεί να χαθεί ο έλεγχος της τάξης μέσα στην ελεύθερη συζήτηση των μελών της μαθηματικής

σχολικής τάξης για ανταλλαγή απόψεων και ιδεών. Τέλος να σημειωθεί ότι, τα ανοιχτά γεωμετρικά προβλήματα μέσα στο πλαίσιο της αντανακλαστικής μαθηματικής επικοινωνίας συμβάλλουν σε μεγάλο βαθμό στην κατανόηση της απόδειξης.

Η απόδειξη από τον μαθητή δεν πρέπει να έχει ως αποδέκτη τον εκπαιδευτικό - αξιολογητή, αλλά τον οποιονδήποτε θέλει να πεισθεί για την ορθότητα μιας πρότασης ή ενός θεωρήματος. Σύμφωνα με τον Balacheff (1991), όταν οι μαθητές αναμένουν να κριθεί η εγκυρότητα της μεθόδου τους από τον εκπαιδευτικό, δεν επιτυγχάνονται τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα. Η μετατόπιση της εξουσίας για αξιολόγηση μιας απόδειξης στον ίδιο τον μαθητή και η εγκατάλειψη της προσπάθειας αναπαραγωγής μιας απόδειξης που είναι γραμμένη στο σχολικό εγχειρίδιο, εξυπηρετεί τους γενικότερους στόχους της μαθηματικής παιδείας.

Δίνεται με αυτόν τον τρόπο η ευκαιρία άμεσης συνειδητοποίησης του γεγονότος ότι τα μαθηματικά είναι μία ανθρώπινη επινόηση και όλες οι απαιτήσεις δικαιολογούνται από την ανάγκη επικοινωνίας και πρακτικής χρήσης στο κοινωνικό πλαίσιο. Ακόμη, η εμπλοκή του μαθητή στη διαδικασία διερεύνησης μιας ιδέας μεγιστοποιεί της δυνατότητές κατανόησή της. Παράλληλα ενισχύει την αυτοπεποίθηση του μαθητή , καθώς θεωρεί ότι και ο ίδιος μπορεί να είναι δημιουργός μαθηματικών ιδεών και να αξιολογεί τις ιδέες και τις αποδείξεις που προτείνουν άλλοι.

Ο στόχος της απόδειξης στην τάξη δεν είναι ο ίδιος με αυτόν στη μαθηματική κοινότητα. Ενώ στη μαθηματική κοινότητα μια από τις κύριες λειτουργίες της απόδειξης είναι η επαλήθευση, στην τάξη κεντρική θέση κατέχει η επεξηγηματική λειτουργία της απόδειξης (Hanna, 1995). Η απόδειξη, που χρησιμοποιείται για την επεξήγηση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων, προωθεί την κατανόηση διότι , προσφέρει άφθονη οπτική πληροφορία, κάτι που συμφωνεί, και με τη μαθηματική πρακτική.

Μια απόδειξη μπορεί να αναδομηθεί και να κάνει τη γενική της δομή καθαρή, πριν μελετηθεί λεπτομερειακά, έτσι ώστε αυτή να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές. Η διδασκαλία των μαθητών στην κατανόηση και παραγωγή αποδείξεων μπορεί να γίνει με τη χρήση μιας προ-τυπικής παρουσίασης (Hanna & Jahnke 1996), στην οποία ο εκπαιδευτικός παραβλέπει τις τυπικές λεπτομέρειες, ενώ εξηγεί τη γενική δομή της

απόδειξης. Τέλος είναι χρήσιμο ο εκπαιδευτικός να επιλέγει κατάλληλες δραστηριότητες που αναδεικνύουν όλες τις σημαντικές λειτουργίες της απόδειξης, που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 2, ώστε η αποδεικτική διαδικασία να αποτελεί τρόπο καλλιέργειας της κριτικής σκέψης των μαθητών. Τέτοιες δραστηριότητες ευνοούνται ιδιαίτερα μέσα σε υπολογιστικά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, για τα οποία γίνεται ιδιαίτερος λόγος τα τελευταία χρόνια στην μαθηματική εκπαίδευση, καθώς τείνουν να εγκαθιδρύσουν μία νέα σχολική πραγματικότητα.

5.3. Η διδασκαλία της απόδειξης μέσα σε υπολογιστικά προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας (ΥΠΔΓ).

Η παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας αγνοεί σημαντικές λειτουργίες της αποδεικτικής διαδικασίας και εστιάζει αποκλειστικά στην λειτουργία της επιβεβαίωσης. Αντίθετα, τα ΥΠΔΓ μπορούν να φωτίσουν και άλλες πολύ σημαντικές λειτουργίες της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία, όπως είναι η επεξήγηση, η ανακάλυψη, η συστηματοποίηση, η διανοητική πρόκληση, η επικοινωνία, η κατασκευή και η εξερεύνηση (de Villiers (2004) , Hanna (2000)). Η ανάδειξη των σημαντικών λειτουργιών της απόδειξης μέσα σε ΥΠΔΓ, όπως θα αναλυθεί εκτενώς παρακάτω, δίνει μία νέα προσέγγιση της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς.

Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα σπουδών προωθούν ολοένα και περισσότερο την χρήση των ΝΤ μέσα στη σχολική τάξη. Για το σκοπό μάλιστα, το Εθνικό Συμβούλιο των Μαθηματικών στις ΗΠΑ (NCTM) επισημαίνει χαρακτηριστικά ότι << τα σημερινά μαθηματικά εκπαιδευτικά προγράμματα είναι επιτακτική ανάγκη να ενσωματώσουν την χρήση νέων τεχνολογιών>>.

Ο βασικός ρόλος των ΝΤ στη μάθηση των μαθηματικών είναι να συμβάλλουν στη δημιουργία νέων μορφών διδασκαλιών, μέσα από τις οποίες οι μαθητές θα κατανοούν σε βάθος το μαθηματικό γνωστικό περιεχόμενο των γεωμετρικών αποδείξεων. Οι ΝΤ θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να προάγουν αρχές μάθησης όπως η εννοιολογική αλλαγή, η μεταγνωσιακή επίγνωση και η γνωσιακή ευελιξία και κυρίως να αποβάλλουν την μηχανική απομνημόνευση. Ακόμη μπορούν να

λειτουργήσουν ως συνδετικός κρίκος μεταξύ των δραστηριοτήτων που επιτελούνται στο σχολείο και των προβλημάτων της καθημερινής ζωής. (Βοσνιάδου, 1998). Οι ΝΤ αποτελεί πλέον βαθιά μία μετασχηματιστική δύναμη για την κοινωνία μας (Kaput, 1998).

Με την εισαγωγή των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην εκπαίδευση έχει αλλάξει ο τρόπος προσέγγισης και διδασκαλίας της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Κατά την αποδεικτική διαδικασία οι υποθέσεις για τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων που διατυπώνονται στα γεωμετρικά θεωρήματα, μέσα στα πλαίσια ενός ΥΠΔΓ μετατρέπονται σε υποθέσεις προς διερεύνηση. Τα ΥΠΔΓ αποτελούν εικονικά εργαστήρια στα οποία οι μαθητές μέσα από την εξερεύνηση, μπορούν να κατανοήσουν τις γεωμετρικές έννοιες (Arcavi & Hadas,1998).

Η αυξανόμενη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη μαθηματική εκπαίδευση καλεί τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς να συνεργαστούν για την οικοδόμηση της γνώσης της αποδεικτικής διαδικασίας με την βοήθεια των λειτουργιών, που παρέχονται από το λογισμικό ενός προγράμματος δυναμικής γεωμετρίας. Οι νέες μορφές διδασκαλίας, που εγκαθίστανται στη μαθηματική σχολική τάξη αναθέτουν νέους ρόλους σε μαθητές και εκπαιδευτικούς στην μαθησιακή πορεία της απόδειξης στη γεωμετρία.

Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας τοποθετεί την απόδειξη στο τέλος της διαδικασίας: ορισμός → θεώρημα → αιτιολόγηση / απόδειξη. Αντίθετα μέσα σε ΥΠΔΓ η ανακάλυψη από τον μαθητή προϋποθέτει την διαδικασία: δράση → σχηματισμός εικασίας → αιτιολόγηση / απόδειξη και περιλαμβάνει γνωστικές λειτουργίες όπως διαίσθηση, δοκιμή, πλάνη, διαλογισμό, υπόθεση, εικασία. (Almeida, 2000, 2001).

5.3.1 Η προώθηση των λειτουργιών της απόδειξης μέσα σε ΥΠΔΓ.

Η αναλυτική καταγραφή των παρακάτω παραδειγμάτων στοχεύει στο να αναγνωριστεί η αξία των ΥΠΔΓ στην διδασκαλία των αποδείξεων, καθώς εγκαθιστούν μία νέα διδακτική σχολική πραγματικότητα με απώτερο στόχο την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές.

5.3.2 Η απόδειξη ως επεξήγηση μέσα σε ΥΠΔΓ

Οι de Villiers (2000) και Jones (2000) επισημαίνουν ότι ακόμα και μαθητές με χαμηλή επίδοση στο μάθημα της γεωμετρίας, επιδεικνύουν την ανάγκη να επεξηγήσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων που παρουσιάζονται στην οθόνη του υπολογιστή, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι μπορεί να μην νιώθουν την ανάγκη να βεβαιωθούν για αυτές τις ιδιότητες. Έτσι οι εκπαιδευτικοί και κυρίως οι μαθητές διατυπώνουν αιτιολογήσεις με την μορφή μαθηματικών επιχειρημάτων και προσπαθούν να εξηγήσουν ικανοποιητικά, γιατί το αποτέλεσμα της οθόνης του υπολογιστή είναι αληθές. Οι μαθηματικές επεξηγήσεις διαρθρώνονται και οργανώνονται μέσω του μαθηματικού συλλογισμού και μετατρέπονται σε μία γεωμετρική απόδειξη. Η απόδειξη πλέον είναι αυτή που παρέχει την βεβαιότητα. για τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων. (Jones, 2000).

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί έχουν βρεθεί σε δύσκολη θέση όταν οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν (να ελέγξουν) ένα διαισθητικά αυτονόητο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα αποδείξτε οτι 'οι γωνίες των βάσεων ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες'. Τότε η πιο συνήθης απάντηση είναι 'γιατί να το αποδείξω, αφού φαίνεται' ή 'κάτι τέτοιο είναι ήδη γνωστό, άρα η απόδειξη είναι περιττή'. Έστω οτι οι μαθητές καθοδηγούνται μέσα σε ΥΠΔΓ (Cabri ή Sketchpad) να κατασκευάσουν ένα ισοσκελές τρίγωνο και να μετρήσουν τις γωνίες βάσεων του. Με την λειτουργία του 'συρσίματος' έχουν την δυνατότητα να ελέγξουν πολλές περιπτώσεις ισοσκελών τριγώνων γρήγορα και με ακρίβεια. Έτσι οι μαθητές δεν αμφιβάλλουν ότι οι γωνίες των βάσεων είναι ίσες με βάση τις εμπειρικές μετρήσεις τους.

Το ζητούμενο τώρα μεταφέρεται στην εξήγηση του αποτελέσματος των μετρήσεων. Μέσα από την μαθηματική συζήτηση προκύπτει ότι η αναλυτική παρουσίαση μίας μεθοδικής αποδεικτικής διαδικασίας, όπου το κάθε βήμα αποτελείται από κατανοητούς όρους, γνωστούς ορισμούς και προτάσεις είναι το μοναδικό μέσο για να πείσει ότι το αποτέλεσμα είναι αληθές .

Σε μία άλλη περίπτωση ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν μέσα σε ΥΠΔΓ ένα τυχαίο τρίγωνο και να ενώσουν τα μέσα δύο πλευρών του, στη συνέχεια τους ζητείται να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις τους για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου. Μετά από μετρήσεις και πειραματισμούς

αναμένεται να διατυπωθεί από τους μαθητές η υπόθεση οτι' είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της' . Τα αποτελέσματα των πειραματισμών των μαθητών θα εξηγηθούν μόνο μέσα από την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας του θεωρήματος της γεωμετρίας.

Επιπλέον, η επιλογή δραστηριοτήτων σε ΥΠΔΓ, όπου τα αποτελέσματά τους, προκαλούν αντιφάσεις στις εύλογες υποθέσεις των μαθητών, τονίζουν και ισχυροποιούν την επεξηγηματική δύναμη της απόδειξης. Για παράδειγμα αν ζητηθεί από τους μαθητές να μετρήσουν το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών σε διάφορα ν-γωνα που κατασκευάζουν στην οθόνη του υπολογιστή με τη χρήση του λογισμικού, διαπιστώνουν έκπληκτοι ότι είναι πάντα 360 μοίρες. Αυτό αντιτίθεται στις υποθέσεις τους ότι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών θα αυξάνεται όπως και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών με την πρόσθεση επιπλέον πλευρών στο ν-γωνο. Τότε οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται για την κατασκευή και παρουσίαση της απόδειξης. Στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς καλλιεργείται η πεποίθηση ότι η αποδεικτική διαδικασία που στηρίζεται στους κανόνες του μαθηματικού συλλογισμού είναι εκείνη που θα άρει κάθε αμφιβολία για το αποτέλεσμα.

Από τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται αντιληπτό ότι οι δραστηριότητες μέσα σε ΥΠΔΓ σταθεροποιούν τις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών ότι η απόδειξη μίας πρότασης ή ενός θεωρήματος είναι το απαραίτητο όπλο που δίνει την εξήγηση με πειστικά επιχειρήματα.

5.3.3 Η διαδικασία της εξερεύνησης για την ανακάλυψη νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων μέσα σε ΥΠΔΓ.

Ένας από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να δοθούν οι κατάλληλες ευκαιρίες στους μαθητές, ώστε να ανακαλέσουν από την μνήμη τους προϋπάρχουσες γνώσεις και την με βοήθεια της εμπειρίας τους και της φαντασίας να ανακαλύψουν νέες ιδέες. Το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας προσφέρει σημαντικές ευκαιρίες για ανακάλυψη, επιτρέποντας στους μαθητές να εξετάσουν καταστάσεις που αντιπαραβάλλουν η μία την άλλη (Holzl, 2001).

Πράγματι, αρκετά συχνά η προσπάθεια επεξήγησης γιατί ένα αποτέλεσμα είναι αληθές, επιτρέπει την περαιτέρω γενίκευση και την ανακάλυψη νέων

συμπερασμάτων, όπως παρουσιάζεται και στο ακόλουθο παράδειγμα. Για παράδειγμα, ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν μέσα σε ΥΠΔΓ τι παρατηρούν για το λόγο των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων. Οι παρατηρήσεις τους εγείρουν προβληματισμούς στο γιατί ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητας των τριγώνων, ενώ ο λόγος των εμβαδών ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Μετά από αυτή την ανακάλυψη, δημιουργείται και η ανάγκη να διερευνήσουν αν τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν και στις περιπτώσεις των όμοιων πολυγώνων. Η διερεύνηση μετατρέπεται ουσιαστικά σε μία επαγωγική διαδικασία προς την ανακάλυψη νέων γεωμετρικών προτάσεων. Η ανακάλυψη όμως των γεωμετρικών ιδιοτήτων δεν αρκεί για την θεμελίωση και την επίσημη παρουσίαση αυτών των ιδιοτήτων στην μαθηματική σχολική κοινότητα. Μέσα σε ένα τέτοιο κλίμα ενεργητικής μάθησης η απόδειξη για την επικύρωση των ανακαλύψεων των νέων αποτελεσμάτων, μέσω της απόδειξης αποκτά για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς ιδιαίτερη αξία.

5.3.4 Η καλλιέργεια της διανοητικής πρόκλησης μέσα σε ΥΠΔΓ

Όταν ο εκπαιδευτικός επιλέξει κατάλληλες δραστηριότητες μέσα σε ΥΠΔΓ, όπου το αποτέλεσμα στην οθόνη δεν είναι αναμενόμενο από τους μαθητές , τότε μέσα από την γνωστική σύγκρουση δημιουργείται στους μαθητές η πνευματική περιέργεια να κατανοήσουν την συγκεκριμένη γεωμετρική κατάσταση. Τα συναισθήματα για την βεβαιότητα του αποτελέσματος ικανοποιούνται μόνο με την απόδειξη των ιδιοτήτων της γεωμετρικής κατάστασης.

Το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας παρέχει την ακρίβεια της κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων και η προσέγγιση των πολλαπλάσιων μορφών τους με το 'σύρσιμο'. Έτσι οι μαθητές, μέσα από το ‘παιχνίδι’ της εξερεύνησης μπορούν να δημιουργήσουν συνδέσεις με την προηγούμενη γνώση τους και αποκτήσουν κίνητρα, ώστε να οδηγήσουν τη σκέψη τους σε περιοχές που η μαθηματική φαντασία από μόνη της δεν μπορεί να φτάσει (Papert, 1980). Η αμεσότητα των μαθητών με το γεωμετρικό αντικείμενο που παρουσιάζεται στην οθόνη έχει επιπτώσεις στη γνωστική και στη συναισθηματική τους ανάπτυξη, ενώ αναπτερώνει το ενδιαφέρον τους για τη

μαθηματική κατάσταση (Sinclair, 2002).Επιπλέον ο Sinclair (2002) θεωρεί ότι η ελκυστικότητα της γεωμετρικής μορφής στην οθόνη του υπολογιστή εκπλήσσει και ευχαριστεί και κατά συνέπεια μπορεί να οδηγήσει σε περαιτέρω μαθηματική έρευνα και να συμβάλλει στα συναισθήματα προσωπικής ικανοποίησης και ευχαρίστησης.

Επιπλέον τα ΥΠΔΓ είναι κατάλληλα για την εισαγωγή των μαθητών στη θεωρητική σκέψη, δηλαδή συνδέουν την έννοια της απόδειξης με την έννοια της 'Θεωρίας'(αυτό που στα Μαθηματικά καλείται Θεώρημα) (Mariotti et al., 1997). Πειραματικές αποδείξεις (Mariotti, 1996) δείχνουν ότι με την χρήση χαρτί -μολύβι είναι πιο δύσκολο να αποκτηθεί η θεωρητική άποψη των γεωμετρικών ιδιοτήτων από οτι με την βοήθεια ενός ΥΠΔΓ. Όταν ένα σχέδιο παράγεται σε φύλλο χαρτιού, είναι φυσικό ότι για την επικύρωση της κατασκευής πρέπει να επικεντρωνόμαστε στην κατάρτιση του ίδιου του σχεδίου και σε μια άμεση αντίληψη. Ασάφεια μεταξύ σχεδίων, καθώς και των στοιχείων που αποτυπώνονται πάνω τους μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο. Η κατάρτισή των ίδιων σχεδίων σε ΥΠΔΓ δεν χαρακτηρίζονται από τέτοιες δυσκολίες, όποτε το ενδιαφέρον στη μαθηματική τάξη η κοινότητα της τάξης των μαθηματικών επικεντρώνεται στην κατασκευή της θεωρητικής πλευράς των γεωμετρικών αντικειμένων.

5.3.5 Η συστηματοποίηση των αποτελεσμάτων μέσα σε ΥΠΔΓ

Ερευνητικές μελέτες έδειξαν ότι η λειτουργία της συστηματοποίησης σπάνια επιτυγχάνεται στις σχολικές τάξεις. Αντίθετα κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, μέσα σε ΥΠΔΓ, μπορεί να ωθήσει τους μαθητές στη συστηματοποίηση των συμπερασμάτων τους (Villiers 1999, 2002· Hadas et al., 2000).

Ας υποθέσουμε ότι ο εκπαιδευτικός επιδιώκει να καθορίσει τυπικά την έννοια του ρόμβου. Με την αξιοποίηση των δυνατοτήτων ενος ΥΠΔΓ, αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω διαδοχικών κατασκευών όπως : α) ο ρόμβος είναι ένα οποιοδήποτε τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους β) ο ρόμβος είναι ένα οποιοδήποτε τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους, που διχοτομούν τις γωνίες τους γ) ο ρόμβος είναι ένα οποιοδήποτε τετράπλευρο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. δ) ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο με με κάθετες διαγωνίους ή παραλληλόγραμμο με κάθετες

διαγωνίους, που διχοτομούν τις γωνίες τους ή παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Κάθε μία από τις παραπάνω δοκιμές αναγκάζει το μαθητή να ανακαλέσει προγενέστερες γνώσεις για τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και να τις συσχετίσει με τον ορισμό του ρόμβου, ώσπου τελικά να οδηγηθεί ο ίδιος μέσω της δυναμικής κατασκευή στην θεμελίωση της έννοιας το ρόμβου. Στη συνέχεια η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί με την ενσωμάτωση και άλλων ιδιοτήτων του ρόμβου σε προτάσεις και θεωρήματα, όπου η αποδεικτική διαδικασία θα επικυρώσει τα αποτελέσματα και θα διαμορφώσει ένα ενιαίο συστηματοποιημένο πλαίσιο για τον ρόμβο.

5.3.6. Οι νέοι ρόλοι που αναλαμβάνουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί μέσα σε ΥΠΔΓ και επίδραση τους στην αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία.

Συμπερασματικά μέσα από την παραπάνω ανάλυση αντιλαμβανόμαστε η αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία μέσα σε ΥΠΔΓ είναι για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς μία διαδικασία εξερεύνησης, επαλήθευσης , συστηματοποίησης , που καλλιεργεί την κριτική τους σκέψη.

Η ενασχόληση με ΥΠΔΓ για την παραγωγή αποδείξεων στη γεωμετρία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να οικοδομήσουν οι ίδιοι μέσω της δοκιμής των υποθέσεων και μέσω της επικοινωνίας με τον υπολογιστή την απόδειξη ενός θεωρήματος. Η απόδειξη θεωρείται πλέον μία διαδικασία οικοδόμησης αιτιολογήσεων. Έτσι διαμορφώνεται στους μαθητές η πεποίθηση ότι η απόδειξη ενός θεωρήματος είναι μία παραγωγική διαδικασία που οικοδομείται σταδιακά μέσω ελέγχων, δοκιμών, υποθέσεων και πειραματισμών.

Το μεγάλο πλεονέκτημα των ΥΠΔΓ είναι ότι συμβάλουν στην βαθύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας, εφόσον συμμετέχουν ενεργά στην οικοδόμηση της γνώσης της. Άλλωστε, οτιδήποτε προσφέρεται στους μαθητές σαν έτοιμη γνώση από κάποια ανώτερη αρχή ή πηγή, όπως είναι ο δάσκαλος, δεν αφήνει τα περιθώρια σε μαθητές και σπουδαστές να κατανοήσουν ότι η απόδειξη είναι ένα μέσο εξήγησης και αιτιολόγησης των θεωρημάτων της Γεωμετρίας.

Ο εκπαιδευτικός δεν είναι πλέον ο διανεμητής της γνώσης, άλλα ο διαμεσολαβητής μεταξύ του υπολογιστή και του μαθητή, που μέσω κατάλληλων παρεμβάσεων θα τον βοηθήσει να κατανοήσει την γνώση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Η έρευνα της Καλογερία (2006) εξετάζει την διαμόρφωση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών κάτω από την επίδραση των ΥΠΔΓ . Η μέθοδος της συγκεκριμένη έρευνα είναι μία ποιοτική μελέτη περίπτωσης και διεξάγεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση εξετάζονται τα ακόλουθα δύο ερευνητικά ερωτήματα: α) ποιες είναι οι πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού για την απόδειξη στη γεωμετρία. β) ποιος θεωρεί ότι είναι ο ρόλος των ΝΤ στην αποδεικτική διαδικασία . Στην δεύτερη φάση επανεξετάζονται τα παραπάνω δύο ερευνητικά ερωτήματα, μετά από την συμμετοχή του εκπαιδευτικού σε σεμινάριο, όπου ήρθε σε επαφή με γεωμετρικές δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσα στα ΥΠΔΓ.

Τα αποτελέσματα της έρευνας είναι ότι ο εκπαιδευτικός αποδίδει στην απόδειξη το ρόλο της επιβεβαίωσης μιας μαθηματικής πρότασης. Θεωρεί ότι είναι μια παραγωγική διαδικασία στην οποία ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει μέσα στο πλαίσιο της αξιωματικής θεμελίωσης της ευκλείδειας γεωμετρίας και έτσι να μυηθεί στη διαδικασία του παραγωγικού συλλογισμού, μέσω ένταξης της νέας γνώσης στην αμέσως προηγούμενη. Θεωρεί πώς η ανάγκη για απόδειξη δημιουργείται μέσω των ερωτήσεων – παρακινήσεων του εκπαιδευτικού και όχι μέσω ενεργειών – πράξεων των μαθητών πάνω στα γεωμετρικά αντικείμενα.

Από τις απαντήσεις του εκπαιδευτικού στο ερωτηματολόγιο διακρίνεται μια προτίμησή του σε αποδείξεις με αυστηρή δομή των επιχειρημάτων που είναι διατυπωμένα στη μαθηματική γλώσσα , ενώ οι επεξηγηματικές αποδείξεις δεν αποτελούν γι' αυτόν διδακτική προτεραιότητα. Όσον αφορά τη χρήση των ΝΤ από την πρώτη του συνέντευξη φαίνεται ότι αντιλαμβάνεται την τεχνολογία ως εποπτικό μέσο, με το οποίο οι μαθητές μπορούν να δουν μία μαθηματική κατάσταση που περιέχει μαθηματικά να εξελίσσεται μπροστά τους (όχι όμως και να κάνουν κάτι με αυτό), αλλά και ως μέσο άντλησης πληροφοριών για μαθηματικά θέματα, (π.χ. ιστορία μαθηματικών). Η αξία λοιπόν που αποδίδει ο εκπαιδευτικός στη χρήση του υπολογιστή στη διδασκαλία φαίνεται να είναι η οπτικοποίηση.

Στην δεύτερη φάση τις ερευνάς οι πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού έχουν μεταβληθεί. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζει απαραίτητη την αξιοποίηση των εμπειρικών δεδομένων , που προκύπτουν μέσω του λογισμικού του ΥΠΔΓ, στην πορεία προς την απόδειξη. Αντιλαμβάνεται την αναγκαιότητα μετακίνησης από το υπολογιστικό περιβάλλον στο χαρτί – μολύβι και αντιστρόφως, ως αναπόσπαστου τμήματος της αποδεικτικής διαδικασίας. Επιπλέον η εμπλοκή του με την τεχνολογία πρόσθεσε νέες συνιστώσες στην παραδοσιακή αποδεικτική διαδικασία: την σημασία της εικασίας, της προσφυγής στην εμπειρία, της διαπίστωσης και της διανοητικής πρόκλησης των μαθητών για πρόβλεψη.

Τα συμπεράσματα της παραπάνω έρευνας είναι σημαντικά για να αντιληφθούμε την επίδραση των ΥΠΔΓ στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών. Μέσα από την παρακολούθηση της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού προκύπτει ότι μετά την επιμόρφωση του για τα ΥΠΔΓ, εισάγει κατά την διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας 5 νέες παραμέτρους: 1) τη λειτουργία της εξερεύνησης 2) χρήση των εμπειρικών δεδομένων για σχηματισμό και επιβεβαίωση της εικασίας 3) εστίαση όχι στο αποτέλεσμα της μεταβολής των σχημάτων, αλλά στην ίδια τη διαδικασία 4) έμφαση στην γεωμετρική κατασκευή και όχι στον απλό σχεδιασμό 5) ο ρόλος της τεχνολογίας στην αποδεικτική διαδικασία παύει να περιορίζεται στην παρατήρηση της εικόνας: το υπολογιστικό περιβάλλον αλληλεπιδρά διαρκώς με τη θεωρητική σκέψη στην πορεία προς την απόδειξη. Τέλος, αναγνωρίζει τη δυνατότητα αυτενέργειας των μαθητών μέσω της εμπλοκής τους με το αναπαραστασιακό κομμάτι της γεωμετρίας, χωρίς ωστόσο να θεωρεί απαραίτητη την συνεργατική μάθηση.

Η βιβλιογραφία παρουσιάζει και άλλες έρευνες σχετικά με την επίδραση των ΥΠΔΓ στις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρια. Η μελέτη των Marrades και Gutierrez (2000) εξετάζει την επίδραση του ΥΠΔΓ Gabri στις δυνατότητες των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για παραγωγή επιχειρημάτων στην κατασκευή της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία. Ο κύριος στόχος της έρευνας ήταν να διερευνηθεί με ποιους τρόπους τα ΥΠΔΓ είναι δυνατόν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της απόδειξης και τις μεθόδους αιτιολόγησης κατά την οργάνωση της αποδεικτικής διαδικασίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας, που βασίστηκαν στην ανάλυση των απαντήσεων δύο ζευγαριών μαθητών σε κατάλληλα προβλήματα γεωμετρίας που

λύθηκαν με την βοήθεια του λογισμικού Gabri, έδειξαν ότι τα ΥΠΔΓ επιδρούν θετικά στην μάθηση, την οργάνωση και την παρουσίαση της αποδεικτικής διαδικασίας, ενώ ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο μέσα σε αυτό το πλαίσιο. Πιο αναλυτικά στα αποτελέσματα αυτής της μελέτης προκύπτει ότι τα ΥΠΔΓ θέτουν τις κατάλληλες προϋποθέσεις, ώστε οι μαθητές να κινηθούν από την διατύπωση των εμπειρικών αιτιολογήσεων προς την ανάπτυξη της απόδειξης με παραγωγική και αφαιρετική σκέψη , καθώς μέσα σε ΥΠΔΓ παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές παράγουν κάθε φορά διαφορετικούς τύπους επιχειρημάτων για να αιτιολογήσουν τις υποθέσεις του γεωμετρικού θεωρήματος. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο προέκυψε ότι ο εκπαιδευτικός δημιουργεί το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι μαθητές μπορούν να ελέγχουν τις υποθέσεις ενός γεωμετρικού θεωρήματος μέσα από πειραματισμούς, με την βοήθεια του λογισμικού, ώστε να επιβεβαιώσουν την καθολική ισχύ των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην έρευνα αυτή συνίσταται στην επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων, που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν την ανάγκη για την οργάνωση μίας παραγωγικής αιτιολόγησης, που δεν βασίζεται στην χρήση παραδειγμάτων ή στην εμπειρική παρατήρηση του γεωμετρικού σχήματος.

Προς την ίδια κατεύθυνση με την παραπάνω έρευνα η Mariotti (1996) μετά απο την παρατήρηση των δράσεων των μαθητών παρουσιάζει τον γνωστικό και τον κοινωνικό ρόλο που επιτελούν τα ΥΠΔΓ σε ένα μακροπρόθεσμο πείραμα διδασκαλίας της απόδειξης στη γεωμετρία. Ο γνωστικός τους ρόλος συνίστανται στην προοδευτική κατασκευή των γεωμετρικών ιδιοτήτων μέτα απο την αποτύπωση του γεωμετρικού σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή, όπου με την βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές πειραματίζονται με την εξέταση πλήθους παραδειγμάτων, μέσα απο τα οποία επενεξετάζουν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Ο γνωστικός τους ρόλος συνίστανται στην κατασκευή της αποδεικτικής διαδικασίας με την χρήση του λογικού συλλογισμού και την παροχή επιχειρημάτων για την αιτιολόγηση, που πείθουν το κοινωνικό σύνολο της τάξης.

Οι Hadas , Hershkowitz και Schwarz (2007) περιλαμβάνει την συλλογή καινοτόμων δραστηριοτήτων, που δόθηκαν για επεξεργασία στους μαθητές μέσα σε ΥΠΔΓ. Οι δραστηριότητες είχαν ως στόχο να εξετάσουν πως επιδρούν οι λιτουργίες του ΥΠΔΓ κατά αποδεικτική διαδικασία. Ο βασικός στόχος των δραστηριοτήτων

αυτών ήταν να προκαλέσουν στους μαθητές έκπληξη και αντίφαση, σε σχέση με το αναμενόμενο αποτέλεσμα, ώστε να επιδιώξουν εξηγήσεις, οι οποίες θα οδηγήσουν προς την πορεία κατασκευής της αποδεικτικής διαδικασίας. Στην έρευνα αυτή, μετά από την ανάλυση των παρατηρήσεων των τρόπων δράσεων των μαθητών στις δραστηριότητες στο ΥΠΔΓ προέκυψε ότι τα ΥΠΔΓ επιδρούν κατά την οργάνωση μίας αποδεικτικής διαδικασίας μέσω έξι λειτουργιών : α) Τα ΥΠΔΓ δημιουργούν ένα κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον για τον έλεγχο των υποθέσεων του γεωμετρικού θεωρήματος β) στις περιπτώσεις διάψευσης των αρχικών υποθέσεων δημιουργούν αντιφάσεις μεταξύ των αναμενόμενων αποτελεσμάτων και των πραγματικών συμπερασμάτων, ώστε οι μαθητές ωθούνται από μια υπόθεση σε μια δεύτερη και σε περιπτώσεις όπου η υπόθεση ούτε αντικρούεται ούτε επιβεβαιώνεται (δηλ., στις καταστάσεις , όπου κυριαρχεί η αβεβαιότητα). γ) μέσα από τις λειτουργίες του λογισμικού των ΥΠΔΓ οι μαθητές κάνουν επαγωγικές δοκιμές και προσπαθούν να πειστούν ότι το συμπέρασμα είναι σωστό. Το πιο σημαντικό στοιχείο αυτών των δραστηριοτήτων είναι ότι δημιουργείται η ανάγκη στους μαθητές για πρόσθετες επεξηγήσεις , οι οποίες είναι προάγγελοι της απόδειξης για την επικύρωση της αλήθειας του γεωμετρικού θεωρήματος. δ) Τα ΥΠΔΓ στις δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα μέσα στα ΥΠΔΓ δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αποδείξουν το ζητούμενο γεωμετρικό θεώρημα με την μέθοδο του παραδείγματος ύπαρξης, αλλά και την κατασκευή πλήθους αντιπαραδειγμάτων, που αντικρούουν τις υποθέσεις του θεωρήματος. ε) Τέλος προκύπτει οτι τα ΥΠΔΓ είναι ένα άκρως απαραίτητο διδακτικό εργαλείο, καθώς αποτελεί για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς την πηγή άντλησης πρόσθετων εξηγήσεων για την αποδεικτική διαδικασία.

Μέσα στο πλαίσιο της εξέτασης της επίδρασης των ΥΠΔΓ στην διδασκαλία και την μάθηση της απόδειξης στη γεωμετρία οι Rodríguez και Gutiérrez (2006) διερευνούν το είδος των αποδείξεων και τις διαφορές στους τύπους των αποδείξεων στη γεωμετρία που παράγονται απο τους μαθητές στο χαρτί- μολύβι και στα ΥΠΔΓ. Οι μαθητές της έρευνας αυτής στα πλαίσια μίας πειραματικής διδασκαλίας της γεωμετρίας κλήθηκαν να λύσουν κατάλληλα προβλήματα γεωμετρίας πρώτα με χαρτί- μολύβι και μετά με την βοήθεια του Gabri λογισμικού σε ΥΠΔΓ. Για την συλλογή των δεδομένων της έρευνας αυτής παρατηρούνται οι μαθητές κατά τις

δραστηριότητες στα δύο περιβάλλοντα, συλλέγονται, εξετάζονται και αναλύονται οι απαντήσεις τους που έδωσαν στα κατάλληλα δομημένα προβλήματα στα δύο περιβάλλοντα, αλλά και παρακολουθούνται οι μαθητές να ανταλλάσουν απόψεις καθώς επιλύουν τα γεωμετρικά προβλήματα. Στα αποτελέσματα προκύπτει οι μαθητές πρώτα απο όλα εφάρμοζαν αρχικά επαγωγικές αποδείξεις , τις οποίες κατανοούσαν πλήρως, ενώ στην συνέχεια ο βασικός ρόλος των ΥΠΔΓ είναι άνοιγαν τον δρόμο για την παρουσίαση μίας τυπικής απόδειξης, που απαιτεί αφαιρετικό και παραγωγικό συλλογισμό.

Από τις παραπάνω μελέτες προκύπτει οτι χωρίς αμφιβολία τα ΥΠΔΓ ενισχύουν τον ρόλο της απόδειξης μέσα απο την αλληλεπίδραση μεταξύ της κατασκευής του γεωμετρικού αντικειμένου στην οθόνη του υπολογιστή και απόδειξης των ιδιοτήτων του. Προωθούν την ανατροφοδότηση των απόψεων των μαθητών ματαξύ τους και μεταξύ του εκπαιδευτικού, μέσα απο τον προβληματισμό που δημιουργούν για τις γεωμετρικές ιδιότητες και τις έννοιες, οδηγούν στην ανάγκη για την επέξήγηση αυτών, ώστε να επιβεβαιωθεί η ισχύς τους με την αποδεικτική διαδικασία, προωθούν μία πειραματική ατμόσφαιρα όπου ο μαθητής αυτενεργεί και καλείται να επιβεβαιώσει τις απόψεις του στο κοινωνικό σύνολο της τάξης. Η γνώση της απόδειξης, που σημαίνει οτι οι μαθητές κατανοούν γιατί το γεωμετρικό θεώρημα είναι αληθές και η κοινωνική γνώση της απόδειξης, που σημαίνει οτι ο εκπαιδευτικός πρέπει να πείσει τους μαθητές για την αλήθεια του γεωμετρικού θεωρήματος, αλλά και οι μαθητές οφείλουν να πείσουν τους συμμαθητές τους οικοδομούνται μέσα σε ΥΠΔΓ.

5.3.7 Ο ρόλος των ανοιχτών γεωμετρικών προβλημάτων των ΥΠΔΓ στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές

Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2 η αποδεικτική διαδικασία αποτελεί ουσιαστικά μία δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος. Τις περισσότερες φορές το πρόβλημα προς λύση παρουσιάζεται με τη μορφή: «Να δειχτεί ότι …». Δηλαδή, το πρόβλημα έχει ήδη λυθεί στο παρελθόν, άρα δεν είναι πρόβλημα, αν απλώς χρησιμεύει για εξάσκηση. Κάποιες άλλες φορές δίνεται με τη μορφή ανοιχτού προβλήματος: «Να βρεθεί σημείο …» ή «Να κατασκευαστεί …» ή «Να βρεθεί το

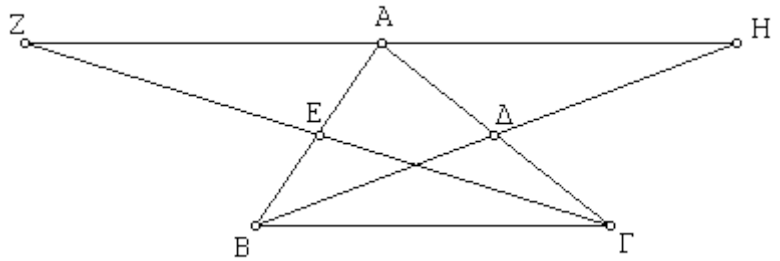
άθροισμα …» κ.λπ., κατάσταση που απαιτεί εξερεύνηση, διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους, τη δικαιολόγηση ή την απόδειξή τους. Η επίλυση προβλήματος είναι πραγματικά το πρώτο στάδιο για την ανάπτυξη της κατανόησης της μαθηματικής απόδειξης.

Η τάση απομάκρυνσης από την τυπική – φορμαλιστική απόδειξη στα σχολικά προγράμματα και η έρευνα για εναλλακτικούς τρόπους και μορφές εξασφάλισης της εγκυρότητας των μαθηματικών αποτελεσμάτων στη σχολική τάξη, έχει δώσει ώθηση στη μελέτη προβλημάτων που έχουν σχέση με τη διδασκαλία της απόδειξης. Τέτοια προβλήματα μπορούν να ληφθούν με την μορφή ανοιχτών προβλημάτων μέσα σε ΥΠΔΓ.

Ο Θωμαΐδης (2000) ισχυρίζεται ότι χρειάζεται μια μεγαλύτερη και πιο συστηματική μετατόπιση από τη διδασκαλία μαθηματικών θεωριών στις δραστηριότητες και την επίλυση προβλημάτων, τα οποία αναδεικνύουν την ευρηματικότητα και συνθετική ικανότητα των μαθητών. Όπως γίνεται φανερό από τα ακόλουθα παραδείγματα τα ανοιχτά προβλήματα ικανοποιούν την τελευταία απαίτηση και η χρήση τους μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη είναι και αρωγός της προώθησης των σημαντικών λειτουργιών της απόδειξης στη γεωμετρία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε τα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΔΗ = ΒΔ και και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι i) ΑΗ = ΑΖ και ii) ττα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.



Η διατύπωση του παραπάνω προβλήματος δεν αφήνει περιθώρια στους μαθητές για πειραματισμό, εξερεύνηση, ανακάλυψη, διατύπωση και έλεγχο εικασιών και γενικά για δημιουργική εργασία η οποία θα καταλήγει φυσιολογικά στην απόδειξη μιας πρότασης. Το αποτέλεσμα είναι προκαθορισμένο, είναι σίγουρο

δηλαδή, ότι είναι αληθές και απλώς οι μαθητές διατάσσονται να το αποδείξουν, χωρίς να προσφέρεται κανένα κίνητρο γι' αυτό. Αυτό ενισχύει την πεποίθηση που κάποιες φορές δημιουργείται στους μαθητές ότι αφού κάτι είναι αλήθεια ή προφανές ότι ισχύει γιατί πρέπει να το αποδείξω, τι μου προσφέρει αυτή η διαδικασία, ποιο το νόημα της απόδειξης της πρότασης. (Τουμάσης, 2000)

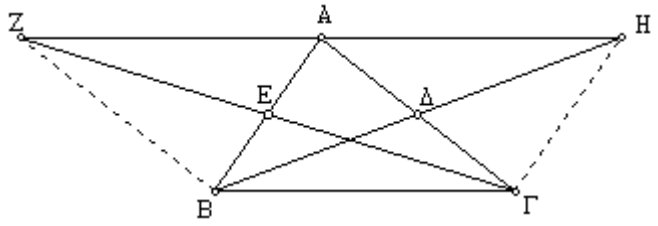
Επιπλέον έρευνες στη διδακτική των μαθηματικών αποκαλύπτουν οτι οι διατυπώσεις της μορφής με τον παραπάνω τρόπο, δηλαδή, «Να αποδείξετε ότι….», σε ορισμένες περιπτώσεις φρενάρουν την ικανότητα των μαθητών για απόδειξη (Boero et al, 1996). Άλλες έρευνες, επίσης, αναδεικνύουν τη σημασία που έχει η επιλογή του πλαισίου ή της διατύπωσης μιας δραστηριότητας μέσα στην τάξη για την ενεργοποίηση της διανοητικής διαδικασίας, η οποία θα θέσει σε λειτουργία τη δυναμική εξερεύνηση μιας προβληματικής κατάστασης με τη δημιουργία υποθέσεων και εικασιών (Arzarello et al, 1998).

Απεναντίας, μια ανοιχτή προβληματική κατάσταση μέσα σε ΥΠΔΓ θα μπορούσε να προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές για ενεργητική συμμετοχή στη διαδικασία μάθησης και να τους παρακινήσει να εμπλακούν σε δραστηριότητες, οι οποίες θα καλύπτουν όλο το φάσμα της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης (Simon, 1998). Η ιδέα αυτή βασίζεται στην υπόθεση ότι η απόδειξη ενός αποτελέσματος, το οποίο έχει ανακαλυφθεί και διαπιστωθεί από τους ίδιους τους μαθητές ως το προϊόν εμπειρικών παρατηρήσεων και πειραματισμών μέσω των λειτουργιών του λογισμικού ενός ΥΠΔΓ , τους προξενεί μεγαλύτερη αίσθηση από ότι η απόδειξη μιας πρότασης, η οποία τους δίνεται έτοιμη και την οποία τις περισσότερες φορές δεν την καταλαβαίνουν. Επιπροσθέτως, τα ανοιχτά προβλήματα, τα οποία ευνοούν τη δυναμική διερεύνηση μιας κατάστασης, προσφέρουν στους μαθητές τη δυνατότητα να ανακατασκευάσουν μέσα από τις ιδιότητες και συσχετίσεις, όλα τα στοιχεία που είναι απαραίτητα για την απόδειξη. Η απόδειξη μέσα στα πλαίσια μίας ανοιχτής δραστηριότητας σε ΥΠΔΓ αντιμετωπίζεται σαν δραστηριότητα ανακάλυψης που γεμίζει χαρά τους μαθητές καθώς καλλιεργεί την κριτική τους σκέψη μέσω της αυτενέργειας.

Το πρόβλημα κλειστού τύπου που παρουσιάσαμε παραπάνω μπορεί να μετασχηματιστεί στο εξής πρόβλημα ανοικτού τύπου, κατάλληλο για επεξεργασία σ' ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Ποιες συσχετίσεις μπορείτε να βρείτε μεταξύ των σημείων, τμημάτων και γωνιών που απαρτίζουν το σχήμα;



Οι μαθητές αφού ενώσουν κάποια σημεία, μπορούν να αξιοποιήσουν τα μενού των γεωμετρικών λογισμικών (Cabri ή Sketchpad) και να ανακαλύψουν, για παράδειγμα, ότι:

ΒΖ = ΑΓ, ΓΗ = ΑΒ, ΖΑ = ΒΓ, ΑΗ = ΒΓ,

$Z\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma, H\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B, Z\hat{B}A = B\hat{A}\Gamma, A\hat{Z}B = A\hat{\Gamma}B, A\hat{H}\Gamma = A\hat{B}\Gamma,$

και ότι Ζ, Α, Η συνευθειακά

Προκειμένου να λύσουν το παραπάνω πρόβλημα, οι μαθητές πρέπει να πάρουν αποφάσεις για την επιλογή μιας στρατηγικής, αφού πρώτα ανακαλύψουν κάποιο αποτέλεσμα, το οποίο μπορεί να μην είναι το μοναδικό. Είναι ελεύθεροι να θέσουν ερωτήματα αντί να απαντήσουν μόνο σε προκαθορισμένα, να διατυπώσουν εικασίες, να τις αξιολογήσουν και εν τέλει να τις αποδείξουν. Η διαδικασία της λύσης αποκτά έτσι ισοδύναμη αξία με τη λύση αυτή καθ' αυτή, ενώ ο στόχος δεν είναι μόνο στο να παραχθεί το σωστό αποτέλεσμα, αλλά πώς να παραχθεί ένα οποιοδήποτε αποτέλεσμα. Το κίνητρο για απόδειξη, η οποία θα εξηγεί για ποιο λόγο συνέβη το ένα ή το άλλο γεγονός ή αποτέλεσμα, καθίσταται έτσι ισχυρό (Τουμάσης, 2000).

Προς την κατεύθυνση της επίλυσης ανοιχτού γεωμετρικού προβλήματος κατά την αποδεικτική διαδικασία της γεωμετρίας συμφωνούν και οι Furinghetti, Olivero και Paola (2001) , που πρότειναν να επιλέγονται από τους εκπαιδευτικούς κατάλληλα προβλήματα που η διαδικασία επίλυσής τους, να τους προετοιμάζει ώστε να μεταβούν στην κατασκευή της απόδειξης. Συμπληρώνουν σαν οδηγία προς στους εκπαιδευτικούς, αντί να διατυπώνεται: «αποδείξτε ότι .....», να συμπεριληφθούν δραστηριότητες που θα ζητείται να εξερευνήσουν οι μαθητές. Έτσι μετά από τα

αποτελέσματα των εξερευνήσεων των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων από τους μαθητές, με την βοήθεια του λογισμικού του ΥΠΔΓ , έχουν δημιουργηθεί οι κατάλληλες προϋποθέσεις, ώστε η απόδειξη να εξηγήσει τη γεωμετρική κατάσταση. Επιπλέον θεωρούν ότι τα κλειστά προβλήματα είναι αυτά που επιδέχονται μία μόνο σωστή απάντηση, χωρίς να αφήνουν περιθώρια πειραματισμού και δοκιμών. Αντίθετα, στα ανοιχτά γεωμετρικά προβλήματα οι μαθητές προσπαθούν «να ανακαλύψουν» ένα αποτέλεσμα και να πειστούν ίσως μέσω μιας σειράς εμπειρικών παραδειγμάτων. Κατόπιν, ανακαλούν τα αξιώματα της γεωμετρίας για να εξηγήσουν γιατί το αποτέλεσμα είναι αληθές. Κατά αυτόν τον τρόπο, όμως δημιουργείται πρόσφορο έδαφος για την απόδειξη.

5.3.8 Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης ή μη των ΥΠΔΓ για την αποδεικτική διαδικασία– Μία κριτική θεώρηση

Εάν περιοριστούμε στην παραδοσιακή πεποίθηση για τον επιβεβαιωτικό – διαπιστωτικό ρόλο της απόδειξης, μοιραία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στα πλαίσια ενός ΥΠΔΓ η αξία της απόδειξης μειώνεται, μέχρι το σημείο να θεωρηθεί μη αναγκαία, προς όφελος μιας εντελώς εμπειρικής – πειραματικής προσέγγισης για την εξασφάλιση της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης. Διαφαίνεται έτσι ο κίνδυνος να καταλήξει κανείς στο συμπέρασμα ότι στα πλαίσια ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος εξερεύνησης της μαθηματικής γνώσης, είναι δυνατόν να ελεγχθεί ένας μεγάλος αριθμός περιπτώσεων, ο οποίος λόγω της συνεχούς κίνησης μπορεί να θεωρηθεί άπειρος, έτσι ώστε η αλήθεια να εδραιωθεί πάνω στις παρατηρήσεις που προκύπτουν από άπειρες περιπτώσεις, οι οποίες εξερευνούνται ταχέως με τη βοήθεια των λειτουργιών του υπολογιστή.

Η άποψη αυτή αντανακλά την τάση που παρατηρείται σήμερα μεταξύ των μαθηματικών, να παρερμηνεύουν την αυξανόμενη χρήση της υπολογιστικής τεχνολογίας στη μαθηματική επιστήμη και να στηρίζουν, έτσι, την πεποίθησή τους ότι μελλοντικά η απόδειξη θα πάψει να συνιστά την κεντρική πλευρά της μαθηματικής θεωρίας και πρακτικής (Τουμάσης, 2000).

Παρ' όλα αυτά η συντριπτική πλειοψηφία των μαθηματικών θα συμφωνούσε, ασφαλώς, στο ότι οι μαθητές είναι αναγκαίο να συνειδητοποιήσουν ότι η εξερεύνηση

και ο πειραματισμός, όσο πολύτιμες διαδικασίες κι αν είναι για το σχηματισμό και τον έλεγχο των εικασιών και υποθέσεων, σε καμιά περίπτωση δεν συνιστούν απόδειξη, ούτε και είναι σε θέση να την αντικαταστήσουν. Θα συμφωνούσαν επίσης, στο ότι η μεγάλη πρόκληση συνίσταται στο να καταφέρουν να παρακινήσουν τους μαθητές να διαμορφώσουν μια απόδειξη ή τουλάχιστον να προσπαθήσουν να παρακολουθήσουν τα βήματα μιας απόδειξης που παρουσιάζεται από το εκπαιδευτικό.

Ακόμη και το πιο ισχυρό δυναμικό λογισμικό δεν είναι σε θέση να προσφέρει το βαθμό της βεβαιότητας που προσφέρει μια αναλυτική απόδειξη. Ακόμη πιο σημαντικό όμως για την εκπαιδευτική διαδικασία μάθησης των μαθηματικών είναι να επιτευχθεί η πραγματική κατανόηση μιας έννοιας ή ενός αποτελέσματος. Η πραγματική κατανόηση όμως απαιτεί να «δουν» οι μαθητές και να συνειδητοποιήσουν *γιατί* ισχύει ένα συμπέρασμα και ακόμη παραπέρα *γιατί* πρέπει να ισχύει πάντοτε και ποιοι είναι αυτοί οι λόγοι ή ποιες είναι οι μαθηματικές ιδέες, οι οποίες συνέβαλαν στο να συμβεί κάποιο μαθηματικό γεγονός.

Αν και οι μαθητές σ' ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον αισθάνονται σίγουροι για την αλήθεια κάποιας εικασίας, ο δάσκαλος έχει καθήκον να τους κεντρίσει παραπέρα την περιέργειά τους, ζητώντας τους να διερευνήσουν για πιο λόγο πιστεύουν ότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι αληθές. Να τους προκαλέσει να προσπαθήσουν να δώσουν μια εξήγηση, η οποία θα ρίχνει φως στον τρόπο με τον οποίο συντίθεται η απόδειξη και θα κατορθώνει να παρουσιάσει το αποτέλεσμα ως λογική συνέπεια άλλων γνωστών αποτελεσμάτων.

Επομένως, η εμφάνιση της τεχνολογίας, τόσο στα μαθηματικά αυτά καθ' αυτά όσο και στη μαθηματική εκπαίδευση συμβάλει θετικά στην μάθηση και την διδασκαλία της απόδειξης. Ενώ παράλληλα μέσα απο τους νέους ρόλους που αναλαμβάνουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί είναι δινατόν να μεταβληθούν και οι πεποιθήσεις για τις λειτουργίες της απόδειξης, οι οποίες είχαν επισκιαστεί από την παραδοσιακά κυρίαρχη λειτουργίας της διαβεβαίωσης και επιβεβαίωσης της αλήθειες, μέσα στην παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας.

5.4 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην αποτελεσματική διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία.

Οι καθηγητές των μαθηματικών, ως αντιπρόσωποι της μαθηματικής κοινότητας στην τάξη, παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στην καθιέρωση των διαφόρων κοινωνικο-μαθηματικών προτύπων γενικότερα, καθώς και των κανόνων που σχετίζονται με τις αιτιολογήσεις, την επιχειρηματολογία και τις αποδείξεις ειδικότερα (Yackel & Cobb 1996). Αυτό είναι ένα εξαιρετικά ευαίσθητο και δύσκολο έργο για τους καθηγητές των μαθηματικών και για να το φέρουν σε πέρας σωστά, χρειάζονται ένα στερεό υπόβαθρο σχετικό με την έννοια της απόδειξης και του ρόλου της στα μαθηματικά και στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Το πιο βασικό συστατικό αυτού του υπόβαθρου είναι να είναι γνώστες διαφόρων τύπων προτάσεων και διαφόρων τρόπων απόδειξης της ίδιας πρότασης.

Ο συντονιστής για μία αποτελεσματική διδασκαλία για την απόδειξη στη γεωμετρία είναι ο εκπαιδευτικός. Αυτός επιλέγει και καθορίζει τη μεθοδολογία και τον τρόπο κατασκευής και παρουσίασης της απόδειξης ενός θεωρήματος της γεωμετρίας. Ο εκπαιδευτικός έχει μεγάλη ευθύνη για τη βαθύτερη κατανόηση του συλλογισμού της αποδεικτικής διαδικασίας. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να κατανοήσει πρωτίστως ο ίδιος την ανάγκη για αναδιάρθρωση των εκπαιδευτικών πρακτικών του, που θα στοχεύουν στην ανάδειξη των κρίσιμων ρόλων που διαδραματίζει η απόδειξη στη γεωμετρία. Τέλος δύο σημαντικοί παράγοντες που λειτουργούν αποφασιστικά στην εφαρμογή μίας αποτελεσματικής μορφής διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία είναι η διδακτική και γνωστική επάρκεια του εκπαιδευτικού.

5.4.1 Η προώθηση της διδακτικής και γνωστικής επάρκειας του εκπαιδευτικού

Η αποτελεσματική υιοθέτηση μεθοδολογιών και οι διαφορετικές πρακτικές διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας συνθέτουν την διδακτική επάρκεια του εκπαιδευτικού. Η γνωστική επάρκεια του καθορίζει το πόσο καλά γνωρίζει το περιεχόμενου του διδακτικού αντικειμένου της γεωμετρικής απόδειξης. Παρακάτω θα αναλυθεί ότι η ακαδημαϊκή προετοιμασία των εκπαιδευτικών και τα επιμορφωτικά

σεμινάρια είναι δύο βασικοί παράγοντες, που προωθούν την γνωστική και διδακτική επάρκεια των εκπαιδευτικών.

Τα ερευνητικά στοιχεία για την προετοιμασία των υποψήφιων εκπαιδευτικών δείχνουν ότι η εκπαίδευση τους πρέπει να εκσυγχρονιστεί. Η καλύτερη προετοιμασία των εκπαιδευτικών από πλευράς γνωστικής και διδακτικής επάρκειας είναι σημαντική, με βάση το δεδομένο ότι πολλοί εκπαιδευτικοί έχουν μία προκατειλημμένη αρνητική στάση απέναντι στη μαθηματική απόδειξη και των υψηλών επιπέδων μαθηματικού συλλογισμού.

Η έρευνα των Bischoff και Watford (1999) εξετάζει τους τρόπους που συμβάλλουν, ώστε οι σειρές μαθημάτων της εκπαίδευσης των υποψήφιων εκπαιδευτικών να αναπροσαρμοστούν, με στόχο να εξασφαλίσουν επαρκέστερη προετοιμασία των εκπαιδευτικών από πλευράς γνωστικού, διδακτικού και παιδαγωγικού περιεχομένου. Ερευνήθηκε η «κατάσταση της ετοιμότητας» για τη διδασκαλία 10 εκπαιδευτικών μέσης εκπαίδευσης μαθηματικών μέσα από συνεντεύξεις. «Η κατάσταση ετοιμότητας» ενός εκπαιδευτικού ορίζεται ως η δυνατότητα «να προγραμματίσει, να εφαρμόσει, και να παρουσιάσει στη σχολική τάξη ένα μάθημα μαθηματικών» (σελ. 394). Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν σε αυτή τη μελέτη είχαν προετοιμάσει ένα σχέδιο μαθήματος , για μία συγκεκριμένη γεωμετρική έννοια και να το υλοποιήσουν σε μαθητές γυμνασίου. Οι περισσότεροι από τους μαθηματικούς ενδιαφέρθηκαν για τη μορφοποίηση μαθήματος, παρά για να κατανοήσουν οι μαθητές την μαθηματική έννοια. Μόνο ένας δοκίμασε μια δραστηριότητα με την ενεργή συμμετοχή των μαθητών, ενώ οι άλλοι εστίασαν στην παρουσίαση των μεθοδολογιών, των αλγορίθμων και σε εφαρμογές των τύπων σε ασκήσεις. Στις προσωπικές συνεντεύξεις διατύπωσαν την άποψη ότι δε θεωρούν ότι αυτό αποτελεί προβληματική κατάσταση. Αξιολόγησαν την επιτυχία τους από το πόσο αποτελεσματικά διαχειρίζονταν τον έλεγχο της τάξης. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων παραδέχτηκαν ότι ανησυχούσαν αν ένας σπουδαστής θα υπέβαλλε μια ερώτηση και δεν θα ήταν σε θέση να απαντήσουν. Αυτό δείχνει έλλειψη εμπιστοσύνης για τη διδακτική γνώση και τη διδασκαλία του μαθηματικού αντικειμένου. (Bischoff, & Watford, 1999). Μετά από τα αποτελέσματα της έρευνας τους, οι Bischoff και Watford (1999) προτείνουν τα εκπαιδευτικά προγράμματα να

περιλαμβάνουν οδηγίες για την αυτοαξιολόγηση του κάθε εκπαιδευτικού σε συνδυασμό με τη συνεχή ανατροφοδότηση της διδασκαλίας τους.

Επίσης οι Grover & Connor (2000) προτείνουν η ακαδημαϊκή προετοιμασία των υποψήφιων εκπαιδευτικών πρέπει να περιλαμβάνει σειρές μαθημάτων, ειδικά για την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης. Μέσα από αυτές τις σειρές μαθημάτων πρέπει να τονίζεται και να γίνεται κατανοητή η σχέση και η σύνδεση μεταξύ του υλικού που θα διδάξουν και της μαθηματικής μεθοδολογίας που θα εφαρμόσουν για να το διδάξουν.

Επίσης, να αναφερθεί ότι στα τμήματα των Μαθηματικών των ελληνικών πανεπιστημίων δεν υπάρχει μια κατηγορία μαθημάτων, που αφιερώνεται στη διδασκαλία της απόδειξης ή στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Έτσι, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί κατά την επαγγελματική τους αποκατάσταση ξεκινούν να πειραματίζονται με διάφορες τεχνικές και πρακτικές διδασκαλίας, προκειμένου να αντεπεξέλθουν στον κρίσιμο ρόλο της διδασκαλίας μίας απόδειξης της γεωμετρίας.

Τέλος ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που μπορεί να αναφερθεί και επιβεβαιώνει την ελλειπή προετοιμασία των εκπαιδευτικών είναι ότι από τη μία τονίζεται η σημασία της χρήσης υπολογιστικών περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας και από την άλλη τα προγράμματα σπουδών στερούνται των οδηγιών για τον τρόπο που θα γίνει η διδασκαλία.

Στη μελέτη των Jones & Swafford, 1997 οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί της Γ' τάξης Λυκείου εγγράφηκαν σε ένα τεσσάρων εβδομάδων θερινό πρόγραμμα για μια σειρά επιμορφωτικών μαθημάτων στη γεωμετρία και ένα ερευνητικό σεμινάριο για τη θεωρία Van Hiele τους (το ερευνητικό σεμινάριο είχε παρουσιάσει τα συμπεράσματα της θεωρίας και έρευνας Van Hiele σχετικά με τους μαθητές, ώστε να είναι ενήμεροι οι εκπαιδευτικοί) . Η εκπαιδευτική μέθοδος που προβλήθηκε στο σεμινάριο ήταν η προσέγγιση της απόδειξης μίας πρότασης της γεωμετρίας μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος. Κάθε δραστηριότητα από τη σειρά μαθημάτων ξεκινούσε με την παρουσίαση ενός προβλήματος, το οποίο αναλύεται και συζητείται κατά ομάδες μεταξύ των εκπαιδευτικών. (Jones & Swafford, 1997).

Στην αρχή και στο τέλος του προγράμματος, εξετάστηκε η επάρκεια γνώσης της γεωμετρίας και των επιπέδων VHL μεταξύ των εκπαιδευτικών. Η γνώση της γεωμετρίας αναφερόταν σε προβλήματα για τα σημεία, τις γραμμές, τις γωνίες, τα

πολύγωνα, την ισότητα και την ομοιότητα τριγώνων και πολυγώνων, την περίμετρό τους, το εμβαδόν τους και τον όγκο τους. Οι δάσκαλοι κλήθηκαν, επίσης, να παρέχουν σχέδια μαθήματος σχετικά με ορισμένα θέματα γεωμετρίας πριν και μετά από την επιμόρφωση. Στο τέλος των επιμορφωτικών μαθημάτων, διαπιστώθηκε σημαντική βελτίωση, όσον αφορά στην επάρκεια γνώσης της γεωμετρίας, αλλά και του επιπέδου VHL τους. Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών έδειξαν ότι 72% των δασκάλων αύξησαν το Van Hiele επίπεδο σε ένα επίπεδο υψηλότερα και 50% αυτών σε δύο επίπεδα υψηλότερα. Δεν υπήρξε δάσκαλος που μείωσε το επίπεδο Van Hiele του. Υπήρξε, επίσης, βελτίωση στον προγραμματισμό και στην κατασκευή των σχεδίων μαθημάτων.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή τη μελέτη είναι σημαντικά για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της γεωμετρίας. Πρώτα από όλα, οι εκπαιδευτικοί παρακολούθησαν μία άλλη διδακτική αντιμετώπιση της διδασκαλίας της απόδειξης της γεωμετρίας, που είναι η επίλυση προβλήματος. Εμφανώς επιβεβαιώνεται ότι ο κάθε εκπαιδευτικός μετά από επιμορφωτικά σεμινάρια κερδίζει, εφόσον εφοδιάζεται με νέες ιδέες και προτάσεις διδασκαλίας. Οι νέες προτάσεις διδασκαλίας μπορούν να δοκιμάσουν την αποτελεσματικότητά τους μέσα στην τάξη διδασκαλίας, ώστε ο εκπαιδευτικός να μην εμμένει σε πρακτικές διδασκαλίας, που δεν προωθούν σε καμία περίπτωση την καλλιέργεια του μαθηματικού συλλογισμού.

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι εκπαιδευτικοί σπάνια συμμετέχουν σε προγράμματα επιμόρφωσης για τη διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία εκ μέρους της Πολιτείας, αφότου μισθωθούν ως εκπαιδευτικοί πλήρους απασχόλησης. Τίθεται έντονα το ερώτημα αν είναι επαρκής και πλήρης η προετοιμασία των υποψήφιων εκπαιδευτικών, για να διδάξουν το μάθημα της γεωμετρίας γενικά και ιδιαίτερα την απόδειξη.

Το ζήτημα της διδακτικής ανεπάρκειας των εκπαιδευτικών γίνεται ακόμα πιο επιτακτικό, όταν οι εκπαιδευτικοί καλούνται να διδάξουν την απόδειξη στη γεωμετρία μέσα σε ΥΠΔΓ. Αυτό αποδεικνύεται μία προβληματική κατάσταση για αυτούς, με αποτέλεσμα να εκδηλώνουν αρνητική στάση απέναντι στις ΝΤ και να μένουν προσκολλημένοι στην παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας. Αφετέρου, δεν υπάρχει το κατάλληλο υπόβαθρο εκπαίδευσης, ώστε οι εκπαιδευτικοί να είναι πλήρως εξοικειωμένοι

με τις δεξιότητες χειρισμού των υπολογιστών και δεν έχουν γνώση και διδακτική εμπειρία των προγραμμάτων γεωμετρίας (Gabri, Geogebra).

Οι εκπαιδευτικοί μέσα από επιμορφωτικά σεμινάρια θα έρθουν σε επαφή με νέες μορφές διδασκαλίας, που σίγουρα η εφαρμογή τους αποτελεί για αυτούς μία πρόκληση. Θα αντιμετωπίσουν εκπαιδευτικές πτυχές της αποδεικτικής διαδικασίας, που ίσως είναι άγνωστες σε αυτούς. Για παράδειγμα, η απόδειξη μέσα από την επίλυση προβλήματος είναι μία διδακτική πρόταση που προωθεί την κατανόηση της απόδειξης στη γεωμετρία. Άλλο παράδειγμα είναι η προβολή υποδειγματικών διδασκαλιών μέσα σε ΥΠΔΓ, που θα τους κάνει ίσως να εκτιμήσουν τον ρόλο των ΝΤ στη διδασκαλία των αποδείξεων στη γεωμετρία.

Τέλος , σύμφωνα με τον Ensor (2001), τα σχέδια μαθήματος των εκπαιδευτικών πρέπει να εξετάζονται και να αναθεωρούνται από έναν ειδικό σύμβουλο εκπαίδευσης των μαθηματικών, έτσι ώστε να μπορούν να βελτιωθούν προτού να εφαρμοστούν στη σχολική τάξη.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η κατάλληλη ακαδημαϊκή προετοιμασία του εκπαιδευτικού σε συνδυασμό με την εμπειρία που αποκτά κατά την διδασκαλία μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη και την παροχή συστηματικής επιμόρφωσης, όπου θα δίνονται οδηγίες διδασκαλίας, είναι ο βέλτιστος τρόπος για την προώθηση του μαθηματικού συλλογισμού και την κατανόηση μίας αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία, μέσω μίας αποτελεσματικής μορφής διδασκαλίας.

5.4.2. Η αποτελεσματική διαχείριση των σχολικών εγχειριδίων από τον εκπαιδευτικό

Ο διδάσκων της γεωμετρίας στο γυμνάσιο όμως οφείλει να έχει υπόψη του ότι είναι απαραίτητη και η διατύπωση επιχειρημάτων από τους μαθητές. Τα λογικά επιχειρήματα οικοδομούν την αποδεικτική διαδικασία και μέσω αυτών οι μαθητές μπορούν να γενικεύσουν, αλλά και να πειστούν πως αυτό που ανακάλυψαν δεν ισχύει μόνο για την συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά ισχύει γενικά, καθώς οι μετρήσεις μπορεί να δημιουργήσουν αυταπάτες ή αμφιβολίες.

Βέβαια και οι διαδικασίες, όπως η αναγωγή του προβλήματος σε απλούστερες περιπτώσεις, δηλαδή η επαγωγικός τύπος της απόδειξης είναι εξαιρετικά χρήσιμες και παραγωγικές. Όπως για παράδειγμα στον υπολογισμό του αριθμού των διαγωνίων ενός πολυγώνου ή στον υπολογισμό του αθροίσματος των 100 πρώτων φυσικών αριθμών. Το μεγάλο μειονέκτημα της διδασκαλίας τους στο Γυμνάσιο είναι ότι παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό ή πολλές φορές περιθωριοποιούνται και θυσιάζονται προκειμένου να ολοκληρωθεί η απαιτούμενη διδακτέα ύλη.

Η παρουσία των παραγωγικών αποδείξεων στα σχολικά βιβλία του Λυκείου, αναθέτει στον διδάσκοντα τον κρίσιμο ρόλο να προάγει τον κύριο σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών, δηλαδή την καλλιέργεια του παραγωγικού συλλογισμού. Είναι γνωστό ότι, όπως τα Μαθηματικά τα ίδια, έτσι και η μάθησή τους είναι μια κοινωνική δραστηριότητα (Schoenfeld, 1992).

Μια διδασκαλία που δίδει έμφαση στην παραγωγή και διατύπωση επιχειρημάτων, στην πραγματικότητα διδάσκει τους μαθητές να επικοινωνούν μεταξύ τους στη σχολική τάξη, να κριτικάρουν τις απόψεις τους, αλλά και τις απόψεις του δασκάλου τους, καθώς και να αιτιλογούν τις στρατηγικές που ακολουθούν. Επίσης, μια τέτοια διδασκαλία, ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν την αυτοπεποίθησή τους και να αποκτήσουν σχέσεις συνεργασίας και όχι ανταγωνισμού (Baroody,1993).

Μέσα λοιπόν σε ένα τέτοιο κλίμα μέσα στη σχολική τάξη ο διδάσκων της γεωμετρίας Λυκείου διαμορφώνει την πεποίθηση ότι η αποδεικτική διαδικασία είναι το μέσο επικοινωνίας με τους μαθητές, προκειμένου να τους πείσει με λογικά επιχειρήματα για τα γεωμετρικά θεωρήματα. Όμως είναι και το εργαλείο εκείνο, που με την κατάλληλη διδακτική αντιμετώπιση, θα καταδείξει την αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρικής επιστήμης με αρχές όπως η πληρότητα των επιχειρημάτων, η συνέπεια των λογικών συλλογισμών και η επάρκεια των δικαιολογήσεων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε η έννοια της απόδειξης, οι διάφοροι ορισμοί της, η ιστορία της στο πέρασμα των αιώνων, οι ρόλοι που διαδραματίζει μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη, η θέση της στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο, τα στάδια γεωμετρικού συλλογισμού των Van Hiele και του Piaget , οι πρακτικές της διδασκαλίας της που υιοθετούνται και η σχέση της με την τεχνολογία. Η απόδειξη φαίνεται να έχει πολλές και διαφορετικές όψεις, μέσα από τις οποίες οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν διαφορετικές θεωρήσεις για το τι πραγματικά είναι η απόδειξη ενός θεωρήματος στην γεωμετρία και τους τρόπους, που επιτυγχάνεται η μάθηση της .

Πρώτα από όλα , διαπιστώνεται ότι οι διαφορετικές επιστημολογικές απόψεις για την απόδειξη στη γεωμετρία , όπως μας παρουσιάζονται μέσα από την ιστορία των μαθηματικών εμφανίζονται και στην σημερινή μαθηματική σχολική εκπαίδευση.

Συγκεκριμένα είναι κοινή θεώρηση των περισσότερων μαθητών η ψυχολογική προσέγγιση της γνώσης της απόδειξης. Πρωτίστως ελέγχουν με μετρήσεις ή με το μάτι, αν το γεωμετρικό αντικείμενο πληρεί τις ιδιότητες που διατυπώνονται στο θεώρημα και προσπαθούν να εξετάσουν τις υποθέσεις του και τα συμπεράσματα του από την οπτική απεικόνιση του γεωμετρικού σχήματος. Επιπλέον η εξέταση περισσότερων εμπειρικών παραδειγμάτων θεωρούν ότι αποτελεί και την απόδειξη του γεωμετρικού θεωρήματος.

Επίσης διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν τις γεωμετρικές καταστάσεις επαγωγικά. Για παράδειγμα αν τους ζητηθεί να αποδείξουν το τύπο του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε πρώτα ανακαλούν στη μνήμη τους τις ιδιότητες του ορθογωνίου και στη συνέχεια προβαίνουν στο να χωρίσουν το ορθογώνιο σε απλούστερα σχήματα (σε αυτή την περίπτωση ορθογώνια τρίγωνα) με γνωστό τύπο εμβαδού και τέλος να οδηγηθούν στο ζητούμενο μετά από το άθροισμα γνωστών τύπων. Επίσης αν τους ζητηθεί να αποδείξουν τις ιδιότητες ενός ρόμβου, τότε ξεκινούν από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία, εξηγούνται εν μέρει από την θεωρία

των γεωμετρικών σταδίων των Van Hiele και του Piaget. Σύμφωνα με την θεωρία των Van Hiele οι μαθητές δυσκολεύονται με την αποδεικτική διαδικασία, διότι διδάσκονται την γεωμετρία ένα επίπεδο πιο πάνω, από αυτό που βρίσκονται. Από την άλλη ο Piaget εξηγεί ότι οι μαθητές είναι έτοιμοι για παραγωγικό και αφαιρετικό συλλογισμό σε ηλικία 16 ή 17 ετών. Όμως και η παραδοσιακή πρακτική διδασκαλίας της απόδειξης, η οποία δεν προωθεί την καλλιέργεια της κριτικής σκέψης των μαθητών ευθύνεται αρκετά για τις αδυναμίες των μαθητών για την παραγωγή λογικών επιχειρημάτων, τα οποία στηρίζουν την ανάπτυξη της αποδεικτικής διαδικασίας και γενικότερα για την ανεπάρκεια των πεποιθήσεων τους αναφορικά με αυτήν.

Στην σκοπιά των θεωρήσεων των εκπαιδευτικών για την απόδειξη, διακρίνονται οι δύο αντικρουόμενες απόψεις για την αποδεικτική διαδικασία, οι οποίες παρατηρήθηκαν μέσα στην ιστορία των μαθηματικών Εμφανίζεται μία μερίδα εκπαιδευτικών που ασπάζεται την εμπειρική άποψη των μαθηματικών, οι οποίοι θεωρούν ότι οι γνώσεις των αποδείξεων στηρίζονται σε αυτό που <<φαίνεται>> να αποτυπώνεται στην κατασκευή των γεωμετρικών αντικειμένων. Η δεύτερη μερίδα των εκπαιδευτικών επικροτεί τον φορμαλιστικό χαρακτήρα της απόδειξης, σύμφωνα με την οποία όλες οι προτάσεις και τα θεωρήματα της γεωμετρίας βασίζονται σε κανόνες και αξιώματα που συνδέονται μεταξύ τους με μία λογική αλληλουχία βημάτων. Παράλληλα αυτοί εκφράζουν δογματικές ιδέες για την αυστηρότητα των αποδεικτικών μεθόδων και τους χαρακτηρίζει η προσκόλληση στην αυστηρή μαθηματική ορολογία και η εμμονή στον μαθηματικό συμβολισμό. Διατυπώνουν και ασπάζονται την άποψη πως << αν ο μαθητής κατανοήσει την εσωτερική δομή και διάρθρωση των γεωμετρικών αποδείξεων τότε είναι σε θέση να κατανοήσει και τα μαθηματικά>>.

Επίσης οι εκπαιδευτικοί, που διδάσκουν γεωμετρία κυρίως στο Γυμνάσιο, έχουν συρρικνώσει την διαδικασία ανάπτυξης της θεωρητικής σκέψης, καθώς έχουν αντικαταστήσει τη διαδικασία επιχειρημάτων και παραγωγικών συλλογισμών με τη χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων- περιπτώσεων, με μετρήσεις με το υποδεκάμετρο, με την χρήση διαφανούς χαρτιού. Αυτοί υιοθετούν ενεργητικές μεθόδους διδασκαλίας της απόδειξης και εμπλέκουν τους μαθητές στην διαδικασία κατασκευής της νέας γνώσης. Ο πίνακας και τα ΥΠΔΓ είναι σημαντικά διδακτικά

εργαλεία στην διδασκαλία των αποδείξεων, που χρησιμοποιούνται για την οπτική αναπαράσταση των γεωμετρικών σχημάτων και την εμπειρική παρατήρηση των ιδιοτήτων τους. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί , που αντιλαμβάνονται την γνώση των αποδείξεων με βάση την εμπειρία , υιοθετούν επαγωγική μέθοδο διδασκαλίας και την απόδειξη μέσω αντιπαραδείγματος . Οι δραστηριότητες που οργανώνονται μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη προωθούν την ανακαλυπτική και την ρεαλιστική μάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Από την άλλη οι εκπαιδευτικοί, που διδάσκουν τη γεωμετρία κυρίως στο Λύκειο, στηρίζονται στην αυστηρή διατύπωση των μαθηματικών επιχειρημάτων. Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας με τον μονόλογο κυριαρχεί στην διδασκαλία τους και ισχυρίζονται πως τα λάθη των μαθητών και η αδυναμία να κατανοήσουν τις μαθηματικές αποδείξεις οφείλεται σε έλλειψη προσοχής και σε έλλειψη προαπαιτούμενων γνώσεων. Οι φορμαλιστικές θεωρήσεις τους για την απόδειξη προωθούν ,ως τρόπο μάθησης της απόδειξης, την αποστήθιση και την συστηματική επανάληψη των θεωρημάτων που διδάσκονται.

Τέλος, όπως προκύπτει μέσα από την παρούσα εργασία και οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν στο Γυμνάσιο και αυτοί που διδάσκουν στο Λύκειο αναγνωρίζουν ότι η απόδειξη είναι ένα μέσο διδασκαλίας που παρέχει την εξήγηση και την τεκμηρίωση των γνώσεων των γεωμετρικών θεωρημάτων. Επίσης σχεδόν όλοι εκφράζουν την άποψη ότι η απόδειξη είναι ένα μέσο διανοητικής πρόκλησης και ανακάλυψης νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επικοινωνία των μελών της μαθηματικής σχολικής τάξης. Όμως διαπιστώνεται ότι η έλλειψη επιμόρφωσης και η ανεπαρκής διδακτική και παιδαγωγική κατάρτιση των εκπαιδευτικών, τους καθιστά αδύναμους να κατασκευάσουν δραστηριότητες ανοιχτών προβλημάτων, οι οποίες καλλιεργούν τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών.

Επίσης για την οργάνωση και την δομή της γνώσης της απόδειξης είναι εμφανές ότι η μέθοδος αποδείξεων του σχολικού βιβλίου της Ευκλείδειας γεωμετρίας του Λυκείου κατά την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας στηρίζεται στη ‘τέχνη της πειθούς’ που υποστηρίζεται από τον Pascal. Έτσι κατά την ανάπτυξη της αποδεικτικής διαδικασίας διατυπώνονται οι υποθέσεις και οι εικασίες του θεωρήματος, στην συνέχεια αναζητείται η κατάλληλη στρατηγική μεθοδολογία για

την επιβεβαίωση των υποθέσεων του και τέλος οργανώνεται το σχέδιο παρουσίασης της απόδειξης, που στηρίζεται στην παραγωγή λογικών επιχειρημάτων. Σε αυτή τη διαδικασία δεν λείπει και η δομική προσέγγιση της γνώσης της απόδειξης, όπου οι ορισμοί, οι κοινές έννοιες , τα αξιώματα και οι ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις ή τα θεωρήματα πρέπει να αποτελούν προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών, που οφείλουν να ανακαλούν στη μνήμη τους.

Διαπιστώθηκε λοιπόν ότι ο συσχετισμός των ιστορικών επιστημολογικών προσεγγίσεων της απόδειξης με τις σχετικές έρευνες από την βιβλιογραφία μας παρέχει επαρκή συμπεράσματα για της δομή του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία. Όμως σε καμία περίπτωση τα συμπεράσματα αυτά δεν είναι πλήρη, διότι δεν πρέπει να αγνοείται ότι η μαθηματική σχολική τάξη, αποτελεί ένα ενεργό πεδίο αλληλεπίδρασης των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την έννοια, τη μάθηση και την διδασκαλία της απόδειξης. Οι διαφορετικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία, που οδηγεί στην εφαρμογή διαφορετικών πρακτικών της διδασκαλίας της και στην υιοθέτηση διαφορετικών αποδεικτικών μεθόδων και τύπων , επηρεάζουν τις πεποιθήσεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για την απόδειξη στη γεωμετρία, αλλά και το αντίστροφο. Κάθε δραστηριότητα μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη συνδέεται αλυσιδωτά με σχέσεις αιτίων και αιτιατών. Το ακόλουθο σχήμα αντικατοπτρίζει τις αλληλεπιδράσεις της μαθηματικής σχολικής τάξης:

Πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία

↕

μορφή διδασκαλίας-διδακτική πρακτική

↕

τύπος της αποδεικτικής διαδικασίας

↕

Πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη γεωμετρία

Στο ενεργό πεδίο αλληλεπίδρασης της σχολικής τάξης εμπλέκονται και τα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία είναι εκφραστές των προτάσεων του αναλυτικού προγράμματος σπουδών και μέσα από τα οποία διατυπώνονται και αποδεικνύονται τα γεωμετρικά θεωρήματα, που αποτελούν το βασικό αντικείμενο διδασκαλίας. Ο τρόπος που παρουσιάζουν την αποδεικτική διαδικασία επηρεάζει τις πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών, αλλά κάποιες φορές δημιουργεί και προβληματικές καταστάσεις για την κατανόηση της και την μάθηση της. Οι μαθητές του Γυμνασίου υιοθετούν εμπειρικές μεθόδους για την απόδειξη των γεωμετρικών θεωρημάτων, ενώ οι μαθητές Λυκείου οφείλουν να αιτιολογούν τα γεωμετρικά θεωρήματα με αναλυτικές και συνθετικές αποδεικτικές μεθόδους. Για αυτή τη διαφορά σχετικά με την απόδειξη στη γεωμετρία των δύο σχολικών βαθμίδων θα πρέπει να αναζητηθούν τρόποι να γεφυρωθεί η μετάβαση των μαθητών από το εμπειρικό στο φορμαλιστικό επίπεδο.

Σε καμιά περίπτωση δεν προτείνουμε, μετά από την ανάλυση στην παρούσα εργασία, ότι πρέπει να υπάρχουν σχολικά βιβλία Μαθηματικών στο Γυμνάσιο , τα οποία να περιέχουν μια σειρά μόνο από παραγωγικές αποδείξεις θεωρημάτων. Επίσης δεν πιστεύουμε ότι θα πρέπει να αφαιρεθούν από την Ευκλείδεια γεωμετρία του Λυκείου οι αποδείξεις, που απαιτούν χρήση παραγωγικού και αφαιρετικού συλλογισμού. Αλλά και η προσθαφαίρεση μερικών ακόμα αποδείξεων στα υπάρχοντα βιβλία δεν θα λύσει κάποιες προβληματικές καταστάσεις, ούτε θα άρει τις τυχόν δυσκολίες των μαθητών, που ανακύπτουν στις αιτιολογήσεις για την απόδειξη των γεωμετρικών θεωρημάτων.

Αντίθετα, θεωρούμε πως ένα σχολικό βιβλίο θα πρέπει να είναι γραμμένο με τέτοιο πνεύμα ώστε να επιδιώκει με ποικίλους τρόπους (αντιπαραδείγματα, παράδοξα, διαφόρων ειδών αποδείξεις κτλ) να προτρέπει τους μαθητές να σκέφτονται και να δικαιολογούν. Υπάρχουν, άλλωστε, αρκετά επίπεδα αυστηρότητας στα Μαθηματικά. Οι μαθητές θα πρέπει σταδιακά να μαθαίνουν να αναζητούν, να σκέφτονται και να δικαιολογούν, να ασκούν κριτική σε όσα μαθαίνουν στο επίπεδο, όμως πάντα, που ανταποκρίνεται στην εμπειρία και το υπόβαθρό τους (Τουμάσης, 1999). Κατά αυτόν τον τρόπο μπορούν να αναδειχθούν στα σχολικά Μαθηματικά και άλλες όψεις της απόδειξης υπερβαίνοντας τον ρόλο της σαν του αποκλειστικού μέσου επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης. Όπως, αυτή της συνεκτικής παρουσίασης και

δημοσιοποίησης της μαθηματικής γνώσης, της επινόησης ή δημιουργίας νέων μαθηματικών δεδομένων, που προκύπτουν ως λογική αναγκαιότητα από την ανάλυση και τη διερεύνηση ήδη γνωστών προτάσεων, ή της συγκρότησης μιας εμπειρικής θεωρίας μέσα από τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών. (Χασάπης, 2003 Θεσ/κη).

Επιπλέον να συμπληρωθεί ότι όσον αφορά τις οδηγίες του Π.Ι ασκούν δυναμική επιρροή στη δομή του συστήματος των μαθητών και των εκπαιδευτικών, έτσι όπως διαμορφώνονται μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη, όχι μόνο γιατί αποτυπώνονται στα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και γιατί προτείνουν πρακτικές διδασκαλίας, όπου ο εκπαιδευτικός καλείται να εφαρμόσει. Οι μαθητές με την σειρά τους είναι οι άμεσοι αποδέκτες αυτών των προτάσεων, όπου ανάλογα με τις αντιδράσεις που εκδηλώνουν σε αυτές τις πρακτικές, οι οποίες εκφράζονται κυρίως από την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και από την δυνατότητα ανάπτυξης της, αναγκάζουν τον εκπαιδευτικό είτε να υιοθετήσει, είτε να αναθεωρήσει τις προτάσεις του Π.Ι.

Μέσα στο ενεργό πεδίο της δράσης για τη γνώση της αποδεικτικής διαδικασίας, που λαμβάνει χώρα μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη, εμπλέκονται και τα ΥΠΔΓ, τα οποία στηρίζουν την ομαδοσυνεργατική μορφή της διδασκαλίας και προβάλλουν σημαντικούς ρόλους της αποδεικτικής διαδικασίας, μέσα από τις δυνατότητες που διαθέτει το λογισμικό. Οι μαθητές μέσα σε ΥΠΔΓ βιώνουν την μαγεία της εξερεύνησης και του πειραματισμού, που οδηγεί στην ανακάλυψη νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων, μένουν κάποιες φορές έκπληκτοι από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην οθόνη του υπολογιστή και ζητούν εξηγήσεις , ενώ ταυτόχρονα χαίρονται και απολαμβάνουν τη μαθηματική συζήτηση μεταξύ των μελών της μαθηματικής σχολικής τάξης. Μέσα από όλες αυτές τις δραστηριότητες που επιτελούνται στα ΥΠΔΓ οι μαθητές υιοθετούν την άποψη ότι η αποδεικτική διαδικασία είναι εκείνη που θα δώσει την επικύρωση και την τεκμηρίωση των γεωμετρικών αποτελεσμάτων και αναγνωρίζουν την αξία που έχει η απόδειξη για την γεωμετρία. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού καθίσταται ακόμα πιο κρίσιμος μέσα στα ΥΠΔΓ, καθώς καλείται να διευθετήσει και να επινοήσει ανοιχτά προβλήματα και δραστηριότητες που θα είναι κατάλληλα για τους μαθητές για εξερεύνηση, πειραματισμό, διανοητική πρόκληση και ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων. Επιπλέον οφείλει με κάθε τρόπο να ενεργοποιεί όλους τους μαθητές για την κατασκευή της

αποδεικτικής διαδικασίας, μέσα από την επικοινωνία και την συνεργασία μεταξύ τους.

Όπως λοιπόν προκύπτει, ο εκπαιδευτικός και τα ΥΠΔΓ είναι δύο πολύ βασικοί συντελεστές της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Πιο αναλυτικά, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αναλογιστούν τις επιπτώσεις που έχει η μεταφορά των γνώσεων τους, των στάσεων τους, των πεποιθήσεων τους και των αντιλήψεων τους για την απόδειξη στη γεωμετρία μέσα από την εφαρμοζόμενη διδακτική πρακτική. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εισέρχονται στη διδασκαλία με θετικές στάσεις για τη μαθηματική απόδειξη ως διαδικασία, με ανώτερο σκοπό την κατανόησή της από τους μαθητές, μέσα από την αποτελεσματική διδασκαλία. Επίσης, η κατάλληλη ανατροφοδότηση των απόψεων των μαθητών από τον έμπειρο εκπαιδευτικό, μπορεί να οδηγήσει σε ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων για τα γεωμετρικά αντικείμενα. Τα ΥΠΔΓ, με την σειρά τους όταν αξιοποιηθούν με μέτρο κατά τη διδασκαλία των αποδεικτικών διαδικασιών, τότε μπορούν να αποτελέσουν ένα πολύ σημαντικό διδακτικό εργαλείο, όπου μέσα απο την ανάδειξη των λειτουργιών και των ρόλων που επιτελεί η απόδειξη μέσα στη μαθηματική σχολική τάξη να συμβάλλουν τα μέγιστα στην κατανόηση με αποτελεσματικό τρόπο.

Τέλος συνοψίζοντας θεωρούμε ότι η παρούσα εργασία αποτελεί μία προσπάθεια για την στήριξη της αξίας της απόδειξης στη γεωμετρία. Επιχείρησε μετά από την παρουσίαση της δομής του συστήματος των πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη γεωμετρία, να παρέχει (στο κεφάλαιο 5) προτάσεις διδασκαλίας που προωθούν την βαθύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία και την αποτελεσματικότερη μάθηση της. Να διευκρινιστεί, όμως ότι όλες τις προαναφερθείσες προτάσεις διδασκαλίας διατυπώθηκαν κάτω από τρεις πολύ σημαντικές προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα πρωτίστως δίνεται προτεραιότητα στην ίδια την αξία της απόδειξης στη γεωμετρία. Κατά δεύτερον είναι πολύ σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές στην διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς προτείνεται να αναλαμβάνουν ενεργούς ρόλους στις δραστηριότητες για την γνώση της και την κατανόηση της μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη. Τέλος τα εκπαιδευτικά προγράμματα οφείλουν να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να διαμορφώσουν τις πεποιθήσεις τους για την πρακτική διδασκαλίας

που θα ακολουθήσουν στην τάξη, ώστε να είναι σε θέση να οικοδομήσουν την γνώση της αποδεικτικής διαδικασίας με κατανοητό τρόπο.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία είναι αναγκαίο να τονιστεί ότι η απόδειξη ήταν , είναι και θα παραμένει να είναι μια έννοια που χαρακτηρίζει τη γεωμετρική επιστήμη. Αποτελεί το κύριο συστατικό της διδασκαλίας της γεωμετρίας, ενώ ταυτόχρονα παίζει βασικό ρόλο στη δημιουργία θεωρημάτων, στη διαμόρφωση λογικών υποθέσεων και στη δημιουργία μιας λογικής συζήτησης. Η απόδειξη είναι ένα από τα σημαντικότερα διανοητικά επιτεύγματα της ανθρωπότητας, καθώς περιέχει τα βαθύτερα, τα πιο σύνθετα και αυστηρότερα επιχειρήματα με τα οποία είμαστε προικισμένοι. Για αυτό τον λόγο το βασικό αίτημα είναι οι αρχές διδασκαλίας της γεωμετρίας οφείλουν να προωθούν τον ρόλο, την σημασία και κυρίως την βαθύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Βιβλιογραφία

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αναπολιτάνος, Δ.Α. (1985) *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη.

Αραχωβίτης, Ι.Λ. (1998) *Τεκμηρίωση της Διδασκαλίας των Θεωρητικών Μαθηματικών*. Αθήνα: Συμμετρία.

Αργυράκης, Δ. κ.α. (2007) *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ

Αργυρόπουλος, Η. κ.α. (2005) *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Γαγάτσης, Α. (2000) *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.

Δημητρίαδου, Ελένη (2006) Φανερώνω ή Πείθω: Επιστημολογικά και Διδακτικά Ζητήματα

που Συνδέονται με την Έννοια της Απόδειξης. Στο *Ιστορία & Μαθηματική Εκπαίδευση*,

επιμέλεια Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν. & Τζανάκης, Κ., σελ. 233-252. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ

Ηλία, Ι., Χρυσάνθου, Α. & Φιλίππου, Γ. (2003) Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στο *2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση: "Τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο"*, ΕΚΠΑ- Πανεπιστήμιο Κύπρου, 11 - 13 Απριλίου, Αθήνα.

Ηρακλείδης, Χ. (2004) Η μέθοδος της λανθασμένης παραδοχής. *Ευκλείδης Α΄, 52:* 24-26, Αθήνα: ΕΜΕ.

Θωμαΐδης, Γ. (1998) Μερικές όψεις της αποτυχίας στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδεια Θεωρητικής Γεωμετρίας. Στο *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 119-127), Ρέθυμνο.

Θωμαΐδης, Γ. (2000) Η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σελ. 127-136. Ρέθυμνο.

Θωμαΐδης, Γ. & Πούλος Α. (2000) *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης, Γ. (2003) Μαθηματική απόδειξη και κριτική σκέψη στη διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Στο Α. Χασάπης (Εκδ.) *Πρακτικά 2ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα: Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά* (σελ. 147-158), ΠΤΔΕ Α.Π.Θ., επιμέλεια Δ. Χασάπης, Θες/κη.

Καραγιαννίδου, Α., Μεταξάς, Ν. & Σελεβίστας, Κ. (2005) Οι Στάσεις των μαθητών για την Απόδειξη, τη Χρησιμότητα των μαθηματικών και το Ρόλο του Δασκάλου. Στο *Πρακτικά 22ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Λαμία: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Καστάνης, Ν. (2002) Η Ιστορία των Μαθηματικών ως συνιστώσα του μεταγνωστικού υπόβαθρου των δασκάλων του σχετικού μαθήματος. Στο *Πρακτικά 1ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα: "Η ιστορία των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο"*, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ., επιμέλεια Δ. Χασάπης, σελ. 27-53.

Κρητικός, Μ., Μαλαφέκας, Α. & Τριαναταφύλλου, Α. (2006) Η χρήση του Λογισμικού στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο *Πρακτικά 23ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Πάτρα: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Μπαραλός, Γ. (2001) Η Τυπική απόδειξη ισχύει πάντοτε; Στο *Πρακτικά 18ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Ρόδος: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Μπρίκας, Μ.Α. (1970) *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητος*. Αθήνα.

Μπεμπόνη, Μ. & Πατρώνης, Τ. (2003) Το ατελές επιχείρημα: Δυσκολίες των σημερινών φοιτητών-αυριανών δασκάλων των μαθηματικών στη διατύπωση εξηγήσεων απέναντι σε έναν υποθετικό μαθητή. Στο Στο Α. Χασάπης (Εκδ.) *Πρακτικά 2ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα:*

Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, (σελ. 125-146), ΠΤΔΕ, Α.Π.Θ., επιμέλεια Δ. Χασάπης, Θες/κη.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1997, 2004) *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002-2003) *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και στο Ενιαίο Λύκειο*, τεύχος Β΄. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004-2005) *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και στο Ενιαίο Λύκειο*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Παπαδάκη, Μ. & Τσικοπούλου, Σ. (2003) Η Απόδειξη στα Σχολικά Βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Στο *2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση: "Τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο"*, ΕΚΠΑ- Πανεπιστήμιο Κύπρου, 11 - 13 Απριλίου, Αθήνα.

http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/papad.pdf

Παπασταυρίδης, Σ. (1983) Η διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης. *Ευκλείδης Γ΄,* 1(1).

Πατσιομίτου, Σταυρούλα (2006) Η αισθητική και η τεχνολογία, κίνητρα στην αποδεικτική διαδικασία σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Στο *Πρακτικά 23ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Πάτρα: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Σιώπη, Καλλιόπη (2005) *Η Απόδειξη σε περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας* (διπλωματική εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Στυλιανίδης, Α., Στυλιανίδης, Γ. & Φιλίππου, Γ (2001) Αντιλήψεις των φοιτητών για την άτυπη απόδειξη και την απόδειξη με αντιπαράδειγμα. Στο *Πρακτικά 5ου Πανελλήνιου Συνέδριου "Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση*, 12-13-14 Οκτωβρίου, Θεσσαλονίκη.

Τουμάσης, Μπάμπης (1999α) *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδ. Gutenberg.

Τουμάσης, Μπάμπης (1999β) Αλλάζει η φύση της μαθηματικής απόδειξης; Παιδαγωγικές συνέπειες. *Ευκλείδης Γ΄*, 16(52): 5-25.

Τουμάσης, Μπάμπης (2003) Το γεωμετρικό πρόβλημα: Κίνητρα για απόδειξη σε ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον. Στο *Πρακτικά 20ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Βέροια: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Τουμάσης, Μπάμπης & Αρβανίτης, Τ. (2003) *Διδασκαλία μαθηματικών με χρήση Η/Υ*. Αθήνα: Σαββάλας.

Τουμάσης, Μπάμπης (2004) Έχει κάποια αξία το μαθηματικό λογισμικό για την κατασκευή μιας απόδειξης; Στο *Πρακτικά 21ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Τρίκαλα: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Τσαλαπάτη, Ε. (2005) *Η μαθηματική απόδειξη στο σχολείο* (Διπλωματική εργασία). Τομέας Μαθηματικών, ΕΜΠ.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. – Π.Ι. (2000) *Προγράμματα Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης-Θετικές Επιστήμες.* Αθήνα: Π.Ι.

Φιλίππου, Γ.Ν. (2003) *Εισαγωγή στις βάσεις και στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών* (2η εκδ.), Αθήνα : Ατραπός.

Φιλίππου, Γ. & Παναούρα, Α. (2002) Η σημασία της ιστορίας στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης. Στο *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Κομοτηνή: Τοπικό παράρτημα ΕΜΕ.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2002) *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Χασάπης, Δ. (2003) *Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά*. Το θέμα και το πλαίσιο μιας συζήτησης, 2ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, Μάρτιος 2003. Θες/κη.

Χατζηκυριάκου, Κώστας (2003) Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά: από τη σκοπιά της λογικής. Στο *Πρακτικά 2ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα: Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά*, ΠΤΔΕ Α.Π.Θ., επιμέλεια Δ. Χασάπης, Θες/κη, σελ. 191-201

Β. ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ (συμπεριλαμβάνονται οι ελληνικές μεταφράσεις)

Alcock, L. & Weber, K. (2005) Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behaviour, 24*(2): 125-134.

Alibe*rt, D. (1988) Toward new customs in the classrooms. For the Learning of Mathematics, 8(2): 31-43.*

Alibert, D. & Thomas, M. (1991) Research on Mathematical Proof. Στο D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (σελ. 215-230). Dordrecht: Kluwer.

Antonini, S. (2001) Negation in mathematics: obstacles emerging from an exploratory study. *Proceedings of the 25th PME Conference*, Utrecht, The Netherlands, vol. 2:49-56.

Antonini, S. & Mariotti, M.A. (2006) Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction. Στο *Proceedings of the 30th PME Conference,* Prague, Czech Republic, v.2 pp. 65-72.

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000) Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5:* 25-45.

http://www.springerlink.com/content/r444168055723000/fulltext.pdf

Arsac, G. (1991) Η καταγωγή της απόδειξης. *Τετράδια Διδακτικής Μαθηματικών*, *7*: 63-72, Θεσσαλονίκη.

Artigue M. (1999) The teaching and learning of mathematics at university level – crucial questions for contemporary research in education. *Notices of the AMS*, 1377-1385.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivera, F., Robutti, O. and Paola, D. (1998) A model for analyzing the transition to formal proofs in Geometry. Στο *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*. Stellenbosch, South Africa, Vol. 2, 24-31.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002) A Cognitive Analysis of Dragging Practises in Cabri Environments. *International Reviews on Mathematical Education, 34*(3): 66 – 72.

http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm023a2.pdf

Balacheff, N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*(2): 147-176.

http://www.springerlink.com/content/l87v08m65648n6n0/fulltext.pdf

Balacheff, N. (1988) Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. Kent: The Open University.

Balacheff, N. (2002) The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof. Fou Lai Lin (ed.) *International Conference on Mathematics - "Understanding proving and proving to understand".* Taipei: NSC and NTNU (pp. 23-44).

www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me1/me1_2002_1/balacheff.doc

Ball, D. & Bass (2000) Making believe: The public construction of collective mathematical knowledge. Invited address to the *Association of Research in Undergraduate Mathematics Education (ARUME)* at the annual joint meeting of the American Mathematical Society and the Mathematical Association of America. Washington, DC.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002) The Teaching of Proof. *Proceedings of the ICM*, 3(1-3): 907-920.

http://arxiv.org/abs/math/0305021

Barbeau, E.J. (1990) Three faces of proof. *Interchange, 21*(1): 24-27.

Barbin, E. (1988) La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP 366*: 591-620.

Barbin, E. (1989) Η μαθηματική απόδειξη: Επιστημολογικές σημασίες και διδακτικά ζητήματα. *Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών, 18*, Θεσσαλονίκη.

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1998) Computers, visualization, and the nature of reasoning. In Bynum, T.W. and Moor, J.H. (Eds), *The Digital Phoenix: How Computers are Changing Philosophy, Blackwell, London*, pp. 93-116.

http://www-csli.stanford.edu/hp/CVandNR.pdf

Battista, M. & Clements, D. (1995) Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, *88*(1): 48-54.

Bell, A. (1976) A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7:* 23–40.

http://www.springerlink.com/content/g68v76300rl36k00/fulltext.pdf

Boero, P., Garuti, R. and Marriotti, M. (1996) Some dynamical mental processes underlying processing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*. Valencia, Spain, vol.2, 121-128.

http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96.html

Booth, R. D. & Thomas, M. O. (2000) Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behaviour, 18*(2): 169-190.

Braconne, A. & Dionne, J. (1987) Secondary school students' and teachers' understanding of demonstration in geometry. In J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.) *Proceedings of the Eleventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-116). Montreal.

Brownlee J. 'Students learning to teach: Conversation with students about their epistemological beliefs'. *Queensland University of Technology, Australia*

Bruner, J. (1961) *The Process of Education*. Harvard University Press.

Buehl M. & Alexander P. (2005) 'Motivation and Performance differences in students' domain-specific epistemological beliefs profiles' *American Educational Research Journal,*

Vol 42, No 4 : pp. 697-726.

Chan K. & Elliott R. (2004) 'Epistemological beliefs across cultures : critique and analysis of beliefs structure studies' *Educational Psychology, Vol 24, No 2.*

Chazan, D. (1993) High School Geometry Students' Justifications for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*: 359-387.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (1998) Charting a course for secondary geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (67–90). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Coe, R. & Ruthven, K. (1994) Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal, 20*(1): 41-53.

Davis, Donald M. (2001) *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών.* Ηράκλειο: ΠΕΚ.

Davis, P.J. (1976) The nature of proof. In Carss, M. (Ed), *Proceedings of the fifth international congress on mathematical education*. Boston: Birkhäuser.

Davis, P. J & Anderson, J.A. (1979) Non analytic aspects on mathematics and their implication on research and education. *SIAM Review 21*(1): 112-127.

De Villiers, M. (1996) Why proof in dynamic geometry? 8th ICME, July 14-21, Seville, Spain, pp 24-42.

http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/why.pdf

De Villiers, M. (1997) The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some personal reflections. Chapter in Schattschneider, D. & King, J. *Geometry Turned On!* Washington: MAA, pp. 15-24.

De Villiers, M. (1998) An alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry. In R. Lehrer and D. Chazan (Eds): *Designing Learning Environments for developing Understanding of Geometry and Space*, pp. 369-393. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

http://www.atm.org.uk/free-resources/dynamic-geometry/proof-introduction.html

De Villiers, M. (1999) The role and function of proof with Sketchpad. Στο: *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press.

http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf.

De Villiers, M. (2002) Developing Understanding for Different Roles of Proof in Dynamic Geometry. *Proceedings at ProfMat 2002*, 2-4 October, Visue, Portugal.

http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat.pdf.

De Villiers, M. (2004α) Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in 187 Science and Technology*, *35*(5): 703-724.

http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vanhiele.pdf

De Villiers, M. (2004β) *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*. Key curriculum Press.

Dreyfus, T. (1990) Advanced Mathematical Thinking. Στο J. Kilpatrick and P. Nesher (ed.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge: Cambridge University Press, 113-134.

http://www.springerlink.com/content/m0268386urnk633v/fulltext.pdf

Dreyfus, T. (1999) Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*: 85-109.

http://www.springerlink.com/content/q73791627510kn58/fulltext.pdf

Dreyfus, T. (1995) Imagery for diagrams. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education*, σελ. 3-19. Berlin: Springer - Verlag.

Dreyfus, T. (2003) Τι θεωρείται απόδειξη στην τάξη των Μαθηματικών; Στο *Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, Ρέθυμνο, Κρήτη, σελ. 123-132.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1991) On the Reluctance to visualize in Mathematics. In W.Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and Learning Mathematics* (pp.9-24). USA: MAA.

Duell O & Schommer-Aikins M. (2001) 'Measures of people's Beliefs about Knowledge and learning' . *Educational Psychology Review, Vol 13,No 14*

Duell O. & Schommer-Aikins M. (2001) 'Measures of people's Beliefs about Knowledge and learning' *Educational Psychology Review, Vol 13,No 14*

Edwards, L. D. (1997) Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*: 187–215.

http://www.springerlink.com/content/u482j8h1012u3504/fulltext.pdf

Edwards, L.D. (1998) Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4): 489-504.

http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00002-4

Epp, S. (1994) The role of proof in problem solving. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence ErIbaurn Associates Publishers.

Fischbein, E. (1982) Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2): 9-24.

Fischbein, E. & Kedem, I. (1982) Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking in A. Vermandel (Ed.) *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 128-131), Antwerp, Belgium: Universitaire Instelling Antwerpen.

Fort, M (1991) Απόδειξη: Επιστημολογική και Διδακτική προσέγγιση. *Ευκλείδης Γ΄ 29*(8): 92-94, ΕΜΕ.

Franklin, J. & Daoud, A. (1988) *Introduction to Proof in Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Furinghetti, F. & Paola, D. (2003) To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study. *Proceedings of the 27th Conference of the PME*, *2*: 397-404. Honolulu, Hawaii.

http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_furinghetti.pdf 05/20/04.

Garuti, R. & Boero, P. & Lemut, E. (1998) Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th Conference of the PME*, *2*: 345-352.

http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Garuti/Garuti98.html.

Gutierrez, A. & Jaime, A. (1994) A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3: 41-48.

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2000) The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*: 127-150.

http://www.springerlink.com/content/k248856303177170/fulltext.pdf

Hadas, N. & Hershkowitz, R. (1998) Proof in geometry as explanatory and convincing tool. *Proceedings of the 22nd Conference of PME*, *3*: 25-32. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Haddas/Haddas98/Haddas98.html

Hanna, G. (1983) *Rigorous Proof in Mathematics Education*. Toronto: OISE Press.

Hanna, G. (1989α) Proofs That Prove and Proofs That Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski, and M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. II, pp. 45-51.

Hanna, G. (1989β) More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1): 20–23.

Hanna, G. (1990) Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1): 6–13.

http://www.springerlink.com/content/q633j12418742j34/fulltext.pdf

Hanna, G. (1991) Mathematical Proof. In: D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 54-61). Kluwer, Dordrecht.

Hanna, G. (1995) Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3): 42-50.

Hanna, G. (1996) The Ongoing Value of Proof. *Proceedings of the 20th Conference of the PME*, *1*: 21-34. Valencia, Spain.

http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/970506.html.

Hanna, G. (1998) Proof as explanation in Geometry. *Focus on Learning problems in Mathematics, 20*(2&3): 4-13.

Hanna, G. (2000) Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): 5-23.

http://www.springerlink.com/content/q21702846nv02615/fulltext.pdf

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1993) Proof and application. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4): 421-439.

http://www.springerlink.com/content/pg7m41745121j7w1/fulltext.pdf

Harada, K., Gallou-Dumiel, E. & Nohda, N. (2000) The Role of Figures in Geometrical Proof-Problem Solving. *Proceedings of the ICME9* TSG 12. Tokyo/ Makuhari, Japan.

http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html

Harel, G. & Sowder, L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinksy (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III* (Vol. 7: 234-283). Providence, RI: AMS.

Healy, L. (2000) Connections between the empirical and the theoretical? Some considerations of students' interactions with examples in the proving process. *Proceedings of the ICME9* TSG 12, Tokyo/Makuhari, Japan.

http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics* (End of Award Report to ESRC). London: Institute of Education, University of London.

http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Healy/Healy98.html.

Healy, L & Hoyles, C. (2001) Software Tools for Geometrical Problem Solving: potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6*(3): 235-256.

http://www.springerlink.com/content/vk60064868143g6g/fulltext.pdf

Heinze, A. & Reiss, K. (2003) Reasoning and proof: methodological knowledge as a component of proof competence. *Proceedings of the CERME 3 Conference of the Working Group 4*, European Research in Mathematics Education III.

http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3): 176-203.

Hersh, B. (1997) *What is Mathematics, Really?* Oxford: Oxford University Press.

Hersh, R. (1993) Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4): 389-399.

http://www.springerlink.com/content/u03vj96526168xm8/fulltext.pdf

Hershkowitz, R. (1998) About reasoning in geometry. In: C. Mammana and V. Villani (eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study [Chapter 2.1]. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hirst, Paul H. (1974) *Knowledge and the Curriculum*. London: Routledge & Kegan Paul.

Hofer B. (2004) 'Exploring the dimensions of personal epistemology in different classroom

contexts: student's interpretations during the first yaer of college' *Contemporary*

educational Psychology 29: 129-163.

Hoyles, C. (1997) The Curricular Shaping of Students Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1): 7-16.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998) Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villiani (eds): *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21th Century*, *an ICMI Study*, 121-128. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

http://eprints.soton.ac.uk/41227/01/Hoyles_Jones_proof_DGS_1998.pdf

ICME (1988) *Proceedings of the 6th International Congress on Mathematical Education* (Edited by Ann & Keith Hirst).

Jackiw, N. (1995) Geometer' s Sketchpad. Key Curriculum Press, Berkeley, California

Jones, K. (2000) Providing a Foundation for Deductive Reasoning: students' interpretations when using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): 55-85.

http://www.springerlink.com/content/jqk18r173835211g/fulltext.pdf

Knuth, E. (2002) Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5): 379-405.

Laborde, C. (2000) Dynamic Geometry Environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): 151-161.

http://www.springerlink.com/content/h435681286x20764/fulltext.pdf

Lakatos, I. (1976) Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ελληνική μετάφραση (1996) *Αποδείξεις και Ανασκευές*, Αθήνα: Τροχαλία

Lee, J. K. (2002) Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education, 16*.

http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome16/docs/lee.pdf

Leron, U. (1985) A Direct approach to indirect proofs. *Educational Studies in Mathematics, 16*(3): 321-325.

Loria, G. (1971) *Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: ΕΜΕ.

Lucast, Erica (2003) M.S. Thesis: *Proof as method: A new case for proof in mathematics curricula.* M.S., Carnegie Mellon University.

http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Students/lucast.pdf

Luthuli, D. (1996) The proof of Euclidean geometry riders as an exercise in mathematical creativity. *Pythagoras, 41*: 17-26.

Mariotti, M. A. (1997) Justifying and Proving in Geometry: the Mediation of a Microworld. *Preuve Proof Prueda Web Newsletter*. November/December 1997.

http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Mariotti/Mariotti97a/Mariotti97a.html

Mariotti, M. A. (2000) Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2): 25-53.

http://www.springerlink.com/content/lh5t8t2w01463232/BodyRef/PDF/10649_2004_Article_357658.pdf

Mariotti, M. A. (2001) Justifying and proving in Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6*(1): 257-281.

Mariotti, M. A. (2006) Proof and Proving in Mathematics Education, in A. Gutiérrez and P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands, pp. 173-204.

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000) Proofs produced by secontary school students learning geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): 151-161.

Martin, G. & Harel, G. (1989) Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1): 41-51.

Marton, F & Saljo, R. (1984) Approaches to Learning. In *The Experience of Learning* (pp. 36-55), ed Marton et. al., Edinburgh: Scottish Academic Press.

Miller, G. (1976) Riemann's hypothesis and tests for primality. *J. Comp. Syst. Sci. 13*: 300–317.

Mogetta, C. & Olivero, F. & Jones, K. (1999) Providing the Motivation to Prove in a Dynamic Geometry Environment.

http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip19-2/BSRLM-IP-19-2-16.pdf.

Moore, R. (1994) Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3): 249-266.

http://www.springerlink.com/content/rt81372728242k38/fulltext.pdf

Movshovitz-Hadar, Nitsa (1996) On striking the Balance between Formal and Informal Proofs. *In ICME 8*, Sevvilla, pp.43-52.

Movshovitz-Hadar, Nitsa (1998) Stimulating Presentations of Theorems Followed by Responsive Proofs. *For the Learning of Mathematics, 8*(2): 12-30.

Movshovitz-Hadar, Nitsa (2001) The Notion of Proof. In L. Grinstein & S. Lipsey (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York: Routledge -Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

Otte, Michael Friedrich (2006) Proof and Explanation from a Semiotical Point of view. *Culture, and Mathematical Thinking. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa- Relime,* v.9: 23-43.

http://oldwebsite.laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotics_06.pdf

Porteus, K. (1990) What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, *21*:589-598.

http://www.springerlink.com/content/vgq7264770g4m252/fulltext.pdf

Quadling, D. (1979) Mathematical Education at upper secondary school, college and university transition. In ICMI, *New Trends in Mathematics Teaching*. Paris: UNESCO.

Recio, A. M. & Godino, J. D. (2001) Institutional and personal meaning of proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1): 83-99.

Reid, D. (2002) What is proof?. *La Lettre de la Preuve: International newsletter on the teaching and learning of proof*, Summer 2002.

http://www-leibniz.imag.fr/DIDACTIQUE/preuve/Newsletter/02Ete

Reid, D. (2001) Proof, proofs, proving and probing: Research related to proof. Short Oral presentation. *Proceedings of the 25th Conference of the PME*, I, 360. Utrecht, Netherlands.

http://ace.acadiau.ca/~dreid/publications/proof/proof.html.

Robert, A. & Schwarzenberger, R. (1991) Research in teaching and learning mathematics at an advanced level στο: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer, Netherlands.

http://www.springerlink.com/content/v176675040g7553z/fulltext.pdf

Schoenfeld, A. H. (1989) Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(40): 338-355.

Schoenfeld, A. (1994) What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1): 55–80.

Schommer-Aikins M. & Duell O. & Hutter R (2001) 'Epistemological beliefs, Mathematical

Problem-Solving, and academic performance of middle school students' *The Elementary*

School Journal, Vol 105, No 3.

Selden, J. & Selden, A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics 29*(2): 123–151.

http://www.springerlink.com/content/n132p75g88nh8407/fulltext.pdf

Senk, S. (1985) How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 6*: 448-456.

Silver, J.A. (1998) Can computers be used to teach proofs?'. *Mathematics Teacher, 91*(8): 660–663.

Simon, M. & Blume, G. (1996) Justification in the Mathematics Classroom: A Study of Prospective Elementary Teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*: 3-31.

Snapper, Ernst (1979) Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism. *Mathematics Magazine, 52*: 207–216.

http://www.members.shaw.ca/kschindler/mathphil.htm

Steiner, M. (1978) Mathematical Explanation. *Philosophical Studies*, *34*: 135-151.

Stylianou, D. & Blanton, M. (2003) The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. *Proceedings of the 27th Conference of the PME*, *2*:113- 120. Honolulu, Hawaii.

http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_blanton.pdf

Tall, D. (1989) The nature of mathematical proof. *Mathematics teaching*, *128*: 28-32.

http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989a-nature-proof-mt.pdf

Tall, D. (1995) Cognitive development, representations and proof. *Proceedings of the Conference for the Justifying and Proving in School Mathematics*, Institute of Education, London, December 1995: 27-38.

http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/970506.html.

Tall, D. (2007) Embodiment, symbolism, argumentation and proof στο Conference on *Reading, Writing and Argumentation at the National Changua University of Education*. Taiwan.

http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007d-changua-keynote.pdf

Thompson, D. R. (1996) Learning and Teaching Indirect Proof. *The Mathematics Teacher 89*(6): 474-82.

Toulmin, S. E. (1958) *The Uses of Argument*. Cambridge, UK: University Press.

Tsay J. '*Epistemological Beliefs and Motivation of College Students in Taiwan' :* Chayond

University of Technology, Taiwan

Vinner, S. (1983) The notion of proof: Some aspects of students' view at the senior high level. Paper presented at the *Seventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education*, Rehovot, Israel, pp. 289-294.

Volmink, J. D. (1990) The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagoras*, *23*: 7-10.

Weber, K. (2001) Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*: 101-119.

http://www.springerlink.com/content/jq2cdlg17au1lr90/fulltext.pdf

Weber, K. (2003α) Students' difficulties with proof. In Selden, A. & J. (Eds.) *Research Sampler 8*: The Mathematical Association of America Online.

http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html

Wilder, R. L. (1944) The Nature of Mathematical Proof. *The American Mathematical Monthly, 51*(6): 309-323.

Yackel, E. & Cobb, .P (1996) Sociomathematical Norms, Argumentation and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*: 458-477.

Zack, V. (1997) You have to prove us wrong: Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-First Conference of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 21) (Vol. 4: 291-298). Lahti, Finland.