ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Το μαθηματικό άπειρο, τα παράδοξα και ο νους
Μια διερεύνηση των διαδρομών που ακολουθεί ο νους στην προσπάθεια προσέγγισης του απείρου.

Αμαλία-Χριστίνα Ν. Μπαμπίλη

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθ.	
2) Πόταρη Δέσποινα	Αναπλ. Καθ.	
3) Γιαννακούλιας Ευστάθιος	Αναπλ. Καθ.	

Στους γονείς μου,

Νίκο και Μαρία-Κάτε

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

> Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig (D.Hilbert, *Über das Unendliche*)

«Από αμνημόνευτους χρόνους, το άπειρο συγκινούσε τη ψυχή του ανθρώπου περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Αλλά και καμία άλλη έννοια δεν χρήζει οριστικής διασάφησης περισσότερο από αυτήν» (D.Hilbert, «*περί του απείρου*»).

Η παραπάνω τοποθέτηση του D.Hilbert, είναι πολύ κοντά στα συναισθήματα που μας προκαλεί η έννοια του απείρου. Η προσπάθεια ερμηνείας αυτών και συμφιλίωσης με αυτά, υπήρξε ισχυρό κίνητρο για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή Θεοδόση Ζαχαριάδη για τις πολύτιμες συζητήσεις μας, τα σχόλια, τις παρατηρήσεις του και την συνολικότερη βοήθειά του, καθώς επίσης και προς τα άλλα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, Δέσποινα Πόταρη και Ευστάθιο Γιαννακούλια.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως το συμμαθητή και φίλο Κώστα Στουραΐτη, για τις ώρες των συζητήσεων καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής, για τα σχόλια και τις παρατηρήσεις του πάνω στα κείμενα, και γενικότερα, για τη συνεργασία μας καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μας, η οποία υπήρξε πολύτιμη.

Τέλος, ευχαριστώ το Μάνο Λυκίδη για την πίστη του στην προσπάθεια αυτή, για την υπομονή του, τις παρατηρήσεις του ειδικά όσον αφορά στα παράδοξα και συνολικότερα για την στήριξή του σε όλα τα επίπεδα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ…… 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΤΟ ΤΑΞΙΔΙ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΑΝΑ ΤΟΥΣ ΑΙΩΝΕΣ …… 3

1.1 Στάση πρώτη : μέχρι το 1400 μ.Χ…… 3

1.2 Στάση δεύτερη: μετά το 1500 μ.Χ……... 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ……. 35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΑΠΕΙΡΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ…….. 54

3.1 Τα παράδοξα του Ζήνωνος ……. 54

3.2 Το παράδοξο του Galileo Galilei……. 56

3.3 Torricelli’s trumpet…….. 59

3.4 Ο γρίφος του ping-pong ball…… 61

3.5 Το ασυνήθιστο ξενοδοχείο του Hilbert……..... 62

3.6 Η χρήση των παράδοξων στην προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του απείρου.... 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ……. 78

ΣΥΖΗΤΗΣΗ…….. 89

ΑΝΑΦΟΡΕΣ…….. 92

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ……... 95

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του απείρου απασχολεί ανέκαθεν την ανθρώπινη νόηση. Το αν υπάρχει το άπειρο ως πραγματικό μέγεθος ή όχι απασχόλησε φιλόσοφους και μαθηματικούς έντονα από την εποχή των Πυθαγορείων, και αποδείχθηκε ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα που είχε να αντιμετωπίσει η μαθηματική επιστήμη. Ποια είναι η φύση ενός άπειρου συνόλου; Πώς είναι δυνατόν να του αφαιρούμε ή να του προσθέτουμε στοιχεία κι αυτό να παραμένει άπειρο; Μπορούμε να κάνουμε λόγο για μικρότερα ή μεγαλύτερα άπειρα; Υπάρχει κάποιο υπέρτατο άπειρο που πέρα από αυτό τίποτα μεγαλύτερο δεν μπορεί να νοηθεί ή να κατασκευαστεί ή μήπως τα άπειρα δεν τελειώνουν ποτέ; Ο τρόπος με τον οποίο η έννοια του απείρου ελλοχεύει στο πεπερασμένο και στο καθημερινό και που προβάλλεται ανάγλυφα στα τέσσερα παράδοξα του Ζήνωνα, είναι ο τρόπος που το άπειρο δοκιμάζει τα όρια, τις αντοχές και τις ανοχές του νου. Ο Cantor απαντά στο παράδοξο που είχε διατυπώσει ο Galileo για το άπειρο τρείς αιώνες νωρίτερα και ταυτοχρόνως αποκαλύπτει τον αναπάντεχο πλούτο που έκρυβε η έννοια του απείρου, ανοίγοντας τον ασκό του Αιόλου με συνέπειες απρόβλεπτες για τον ίδιο και τα μαθηματικά.

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να αναδείξει τα παραπάνω ερωτήματα, να γίνει συνταξιδιώτης στο χρόνο και συνοδοιπόρος στην προσπάθεια κατανόησης της πολυδιάστατης φύσης του απείρου.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε με αφηγηματικό τρόπο την ιστορική αναδρομή της έννοιας του απείρου με σκοπό, κυρίως, να αναδειχθεί ο τρόπος με τον οποίο μαθηματικοί και φιλόσοφοι προσπάθησαν να προσεγγίσουν την έννοια, να συμφιλιωθούν μαζί της, να τη δαμάσουν και να τη χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο ερμηνείας φαινομένων και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, και να διαφανεί η συνεχής και δύσκολη μη γραμμική πάλη με τα παράδοξα που αποκαλύπτουν τη φύση του απείρου, το οποίο κρύβει πολλές φορές δύσβατα και επικίνδυνα μονοπάτια για το νου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρούμε μια ανασκόπηση ερευνών, οι οποίες αφορούν στην κατανόηση της έννοιας του απείρου από μαθητές/φοιτητές, με σκοπό να καταδείξουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν όταν έρχονται αντιμέτωποι με την αντιφατική φύση της έννοιας του απείρου - η έννοια του απείρου είναι αντίθετη με τα νοητικά μας σχήματα, τα οποία είναι προσαρμοσμένα σε πεπερασμένα αντικείμενα και πεπερασμένες διαδικασίες. Διερευνάται αν και

κατά πόσο η διαισθητική προσέγγιση της έννοιας αντιστέκεται στο πέρασμα του χρόνου, στην επιρροή της διδασκαλίας και του μαθησιακού περιβάλλοντος που σχεδιάζεται κάθε φορά με στόχο την αλλαγή πλαισίου αναφοράς (μετάβαση από το πεπερασμένο στο άπειρο).

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρουμε καταρχήν εκτενώς κάποια, ιστορικά και μη, μαθηματικά παράδοξα που σχετίζονται με το άπειρο. Τα παράδοξα προσφέρουν ένα πολύ δυναμικό εργαλείο στη διερεύνηση των διαδικασιών που ακολουθεί ο νους για να κατανοήσει την έννοια του απείρου. Ξεκινώντας από τα περίφημα παράδοξα του Ζήνωνος, μέχρι το άπειρο ξενοδοχείο του Hilbert, παρακολουθούμε την πάλη μεταξύ άπειρου και πεπερασμένου σε όλο της το μεγαλείο – αν μας επιτρέπεται η έκφραση! Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δυο έρευνες που χρησιμοποιούν τα παράδοξα ως «φακό» για τη διερεύνηση του είδους των νοητικών λειτουργιών με τις οποίες ο ανθρώπινος νους προσεγγίζει την έννοια του απείρου.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια διδακτική παρέμβαση που σχεδιάσαμε στη βάση της βιβλιογραφίας που είχαμε στη διάθεσή μας· είχε ως στόχο τη διερεύνηση των διαισθητικών, κατά βάση, αντιλήψεων των μαθητών για το άπειρο, μέσω της εμπλοκής τους με μια μικρή παραλλαγή των παραδόξων του Galileo και του Hilbert. Διερευνάται επίσης η αλληλεπίδραση πρακτικών και μαθηματικών εμπειριών σχεδιάζοντας ένα μαθησιακό περιβάλλον με στόχο την εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται στην περίπτωση της ισοδυναμίας απειροσυνόλων.

Θα θέλαμε, τέλος, να αναφέρουμε ότι κατά τη διάρκεια της μελέτης και συγγραφής της παρούσας εργασίας, γινόταν όλο και πιο επιτακτική η επιθυμία και ανάγκη ανεύρεσης τρόπων σύνδεσης των μαθηματικών με τη συζήτηση για τα μαθηματικά στα πλαίσια της εκπαιδευτικής διαδικασίας, καθώς επίσης και η ανάγκη βαθύτερης και εκτενέστερης γνώσης, από την πλευρά του διδάσκοντα, για τα θέματα που αφορούν τη δημιουργία και διαχείριση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την καλύτερη και πιο γόνιμη προσέγγιση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΤΟ ΤΑΞΙΔΙ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΑΝΑ ΤΟΥΣ ΑΙΩΝΕΣ

Συνήθως το άπειρο (*δυνάμει* και *ενεργεία*, μαθηματικό και φυσικό, θεολογικό και εγκόσμιο) εμπνέει αισθήματα δέους, ματαιότητας και φόβου. Πρόκειται για μια από τις πιο σημαντικές και ταυτόχρονα πιο μυστηριώδεις μαθηματικές αλλά και φιλοσοφικές έννοιες. Ήδη από την αρχαιότητα, η αντιφατική του φύση αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς και τους φιλόσοφους της εποχής. Η μελέτη του απείρου οδήγησε σε εντυπωσιακά παράδοξα, η ανάλυση των οποίων συμβάλει στην κατανόηση του ανθρώπινου νου, τις ικανότητες και τους περιορισμούς του.

Σε αυτό το πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας, θα επιχειρήσουμε ένα σύντομο ταξίδι στην ιστορία του μαθηματικού απείρου σε μια προσπάθεια προσέγγισης και δυνατόν κατανόησής του, με σκοπό κυρίως τον περιορισμό του φόβου και την ερμηνεία του δέους που αισθανόμαστε για αυτό.

1.1. Στάση πρώτη : μέχρι το 1400 μ.Χ.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε κάποιες εικασίες για το πώς παρενέβη στη ζωή του ανθρώπου η έννοια του απείρου. Ποια είναι η καταγωγή της; Μήπως η αντίληψη μεγάλων χρονικών διαστημάτων, η αντίληψη μεγάλων αποστάσεων όπως οι αχανείς έρημοι της Μεσοποταμίας ή η ευθεία γραμμή μέχρι τα άστρα; Ή θα μπορούσε να είναι ο αγώνας της ψυχής για υπέρτατες αλλά μη αισθητές εξηγήσεις; (Davis & Hersh, 1981). Στις αρχαίες κοινωνίες η προσπάθεια των ανθρώπων να εξηγήσουν τα φυσικά φαινόμενα οδήγησε στη γέννηση μύθων σχετικά με την προέλευση του κόσμου και τις σχέσεις που είχαν τα φυσικά φαινόμενα μεταξύ τους. Η αρχική κατάσταση του κόσμου, σύμφωνα με τους μύθους αυτούς, περιγράφεται ως χάος ή ωκεανός. Οι μύθοι της αρχαίας Ινδίας (1500 και 1200π.Χ.), στους οποίους εμφανίζεται έντονα το συμβολικό στοιχείο, περιγράφουν τη μάχη των Ντέβας εναντίον των Αντιτύας, του *περιορισμένου* ενάντια στο *απεριόριστο*, ή του *πεπερασμένου* εναντίον του *απέραντου*. Σύμφωνα με τους μύθους των Περσών, ο θεός Ωρομάσδης δημιούργησε τον ουρανό σε σχήμα αυγού που η κορυφή του έφτανε μέχρι τον Άπειρο Κόσμο (Vilenkin, 1997).

Η ανάπτυξη των κοινωνιών συνοδεύτηκε από την αργή εξέλιξη ενός νέου εννοιολογικού πλαισίου, το οποίο επέτρεψε να παρακαμφθεί η μυθολογία προκειμένου να δοθεί μια λογική, συνεκτική εξήγηση της όλης φυσικής δομής και της εξέλιξης των πραγμάτων. Αφήνοντας λοιπόν πίσω την «ινδοπερσική πάλη» ανάμεσα στο πεπερασμένο και το άπειρο, αρχίζει με τους προσωκρατικούς φυσικούς φιλοσόφους ένα νέο στάδιο στην ιστορία της ανθρώπινης σκέψης, το οποίο έχει ως βασικά χαρακτηριστικά: α) την εγκατάλειψη των μυθολογικών και θεϊστικών παραδόσεων και β) την υποβολή των εξωτερικών φαινομένων σε μια διαδικασία λογικής σκέψης (Χριστιανίδης, 2003). Για τον προσωκρατικό

- Αναξίμανδρο τον Μιλήσιο (611 - 547 π.Χ), ο οποίος χαρακτηρίζεται *φυσιολόγος* από τον Αριστοτέλη, το βασικό κοσμικό στοιχείο, η πρώτη *αρχή* από την οποία δημιουργήθηκε το σύμπαν και η οποία ρύθμιζε όλες τις λειτουργίες του, είναι *το άπειρο*, το οποίο είναι ανεξάντλητο και παντοτινό (η πρώτη *αρχή* για το Θαλή ήταν το *νερό*, για τον Αναξιμένη ο *αέρας*, για τους Πυθαγόρειους ο *αριθμός*, για τον Εμπεδοκλή τα τέσσερα *ριζώματα*, για το Λεύκιππο και το Δημόκριτο τα *άτομα*). Η μεγάλη τομή που έκανε ο Αναξίμανδρος με τη σκέψη του, είναι ότι εισήγαγε πρώτος στην ιστορία της φιλοσοφίας την έννοια του απείρου. Το άπειρο είναι η αρχή του κόσμου, η αρχή των πάντων, είναι αυτό που κρύβεται πίσω από την απέραντη ποικιλία των πραγμάτων και τις διαφορετικές τους ιδιότητες. Έτσι το άπειρο δεν σήμαινε μόνο το απείρως μεγάλο, αλλά επίσης το τελείως άτακτο, το πολύπλοκο, αυτό που δεν προσδιορίζεται με τρόπο πεπερασμένο. Όπως γράφει ο Αριστοτέλης, «…το να είναι κάτι άπειρο είναι μειονέκτημα, δεν είναι πλεονέκτημα, το όριο απουσιάζει…» (Rucker, 2004).

Ο Αναξίμανδρος προσδιορίζει το άπειρο ως στοιχείο αγέννητο, άφθαρτο και αθάνατο. Το άπειρο δεν είναι μείγμα των υλικών στοιχείων ούτε άυλη νοητική αρχή· είναι ύλη που περιέχει τα πάντα. Από το άπειρο αποσπώνται οι αντίθετες ύλες ‘ψυχρόν’ και ‘θερμόν’, που από την ανάμιξη τους γεννιέται το νερό. Από το νερό προκύπτει η γη, ο αέρας και η φωτιά. Από τον αέρα και τη φωτιά σχηματίζονται τα αστέρια που έχουν τη λάμψη της φωτιάς και τη ρυθμική κίνηση των ρευμάτων του αέρα. Ενώ ο Αναξίμανδρος έβλεπε το άπειρο σαν κάτι «καλό», ο Πυθαγόρας (γεννήθηκε ανάμεσα στο 570 και στο 550 π.Χ.) το έβλεπε σαν κάτι «αποκρουστικό», γιατί είναι ακατανόητο, αόριστο, χωρίς την αρμονία και την ομορφιά που περιέβαλε τον κόσμο, τον οποίο οι Πυθαγόρειοι ερμήνευσαν πάνω στην αφηρημένη έννοια του αριθμού - «*τα των αριθμών στοιχεία των όντων πάντων…είναι*» (Αριστοτέλους, *Μετά τα φυσικά*, Α5, στο Χριστιανίδης, 2003). Αποδίδοντας λοιπόν τόσο μεγάλη σημασία στους αριθμούς, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές

του επιδόθηκαν στη μελέτη των ιδιοτήτων τους, και οδηγήθηκαν, φευ, στην ανακάλυψη της ασυμμετρίας, η οποία οδήγησε στην αποτυχία της προσπάθειας των Πυθαγορείων να συνδέσουν απευθείας τα μεγέθη με τους αριθμούς. Η ανατροπή έρχεται εκ των έσω…. Έτσι λοιπόν σήμερα, οι ιστορικοί των μαθηματικών θεωρούν ότι η ασυμμετρία, ένα μείζον επίτευγμα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, ανακαλύφθηκε στη

- Σχολή των Πυθαγορείων, χωρίς να την αποδίδουν όμως προσωπικά στον ίδιο τον Πυθαγόρα. Τα ιστοριογραφικά ερωτήματα που προκύπτουν αναφορικά με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας είναι πολλά. Τα πιο σημαντικά ερωτήματα αφορούν τον τρόπο με τον οποίο έγινε η ανακάλυψη, το χρόνο που έγινε και το πρόσωπο στο οποίο πρέπει να αποδίδεται. Η αρχαιότερη σωζόμενη αναφορά στον τρόπο απόδειξης της ασυμμετρίας περιέχεται στα *Αναλυτικά πρότερα* του Αριστοτέλη. Είναι η λακωνική περιγραφή μιας απόδειξης, σύμφωνα με την οποία, εάν υποθέσουμε ότι η πλευρά και η διαγώνιος του τετραγώνου είναι σύμμετρες, τότε καταλήγουμε στην αντίφαση ότι τα άρτια γίνονται ίσα με τα περιττά: *«οίον ότι ασύμμετρος η διαγώνιος δια το γίνεσθαι τα περιττά ίσα τοίς αρτίοις συμμέτρου τεθείσης»* (Χριστιανίδης, 2003). Η λακωνικότητα της αναφοράς του Αριστοτέλη δεν μας επιτρέπει να ανασυγκροτήσουμε με βεβαιότητα όλες τις λεπτομέρειες της απόδειξης. Έχουμε στη διάθεσή μας όμως μια μεταγενέστερη, λεπτομερώς επεξεργασμένη εκδοχή της απόδειξης, η οποία περιέχεται σε ένα αγνώστου συγγραφέως σχόλιο, το οποίο δημοσιεύεται στο παράρτημα του $10^{ου}$ βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (Χριστιανίδης, 2003).

Ο B.L.Van der Waerden (2003) αναπαράγει αυτή την απόδειξη με συνοπτική μορφή: Έστω ότι η διαγώνιος ΑΓ και η πλευρά ΑΒ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι σύμμετρες, και έστω ότι ο λόγος τους σε ανάγωγη μορφή είναι m : n. Από την ΑΓ : ΑΒ = m : n συνάγεται ότι $ΑΓ^2 : ΑΒ^2 = m^2 : n^2$, αλλά αφού $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$, θα είναι $m^2 = 2n^2$, συνεπώς ο m^2 είναι άρτιος. Απ' αυτό συνάγεται ότι ο m είναι άρτιος. Οπότε m = 2h και $m^2 = 4h^2$ και συνεπώς $n^2 = 2h^2$. Άρα ο n^2 είναι άρτιος, οπότε και ο n άρτιος, άτοπο. Δεν υπάρχει συνεπώς κοινή μονάδα μέτρησης η οποία θα μπορούσε να εκφράζει το ένα τμήμα με όρους του άλλου. Η Β. Στεργίου (2009) αναφέρει: « Μια «ελάχιστη» μονάδα μήκους (ένα αδιαίρετο) που θα χωρούσε ταυτόχρονα στη διαγώνιο και στην πλευρά ενός τετραγώνου, λαμβανόμενη άπειρες φορές, θα μπορούσε να υπάρξει μόνο σαν απειροστό». Δεδομένου ότι οι Πυθαγόρειοι δεν αποδέχονταν την επ' άπειρον διαιρετότητα, ήταν αδύνατον γι' αυτούς να αντιμετωπίσουν επιτυχώς τους άρρητους και ιδιαίτερα τους λόγους ασύμμετρων μεγεθών.

Αν φανταστούμε λοιπόν ένα υποθετικό σενάριο σύμφωνα με το οποίο ο Πυθαγόρας και ο Ίππασος ταξιδεύουν με μια βάρκα και ο Ίππασος αποδεικνύει ότι ο λόγος της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου είναι άρρητος (*άπειρος*) - this “forever” was the source of the nightmare (Clegg, 2003) -, το σενάριο θα μπορούσε να ολοκληρώνεται καθώς ο Πυθαγόρας επιστρέφει από το ταξίδι και ανακοινώνει ότι ο Ίππασος πνίγηκε στη θάλασσα…..

Πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν είναι όλοι οι ιστορικοί των μαθηματικών σύμφωνοι με την άποψη ότι η ασυμμετρία διαπιστώθηκε για πρώτη φορά στην περίπτωση της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου. Ορισμένοι, όπως για παράδειγμα ο K.von Fritz - όπως περιγράφει ο W.R. Knorr (1975) -, υποστηρίζουν ότι η ασυμμετρία ανακαλύφθηκε στο πλαίσιο της έρευνας των ιδιοτήτων του κανονικού πενταγώνου, η πλευρά και η διαγώνιος του οποίου είναι επίσης ασύμμετρες. Ο B.L.Van der Waerden (2003) πιστεύει ότι ο Αρχύτας ο Ταραντίνος (390 π.Χ) είναι εκείνος που κατάλαβε τη σύνδεση ανάμεσα στη θεωρία των συνεχών αναλογιών και στην ύπαρξη αρρήτων. Αποδεικνύει, δηλαδή, ο Αρχύτας ότι μεταξύ δύο αριθμών με λόγο $(n + 1) : n$ δεν μπορεί να υπάρχει μέση ανάλογος. Αντίθετα με την αριθμοθεωρία, το πρόβλημα αυτό έχει λύση στη γεωμετρία. Τα αποτελέσματα αυτά πρέπει να προκάλεσαν μεγάλη σύγχυση σε έναν Πυθαγόρειο. Αν κάποιος υπέθετε – μια φυσιολογική υπόθεση για έναν Πυθαγόρειο – ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν, και αυτά, να εκφράζονται με αριθμούς, θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι για ευθύγραμμα τμήματα με ορισμένους λόγους, μέση ανάλογος δεν μπορούσε να υπάρχει. Όμως, μέση ανάλογος δύο ευθύγραμμων τμημάτων μπορεί πάντοτε να κατασκευασθεί. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα ευθύγραμμα τμήματα δεν εκφράζονται πάντοτε με αριθμούς, ή ακριβέστερα διατυπωμένο: οι λόγοι ευθύγραμμων τμημάτων δεν εκφράζονται πάντοτε ως λόγοι ακεραίων. Με άλλα λόγια: υπάρχουν ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παραπάνω δηλώνουν ότι ο Αρχύτας έφτασε στην ασυμμετρία με κάποιον άλλο τρόπο. Να σημειώσουμε εδώ ότι κατά τον D.J. Struik (1982) το κίνητρο για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους ίσως να ήταν το ενδιαφέρον τους για το γεωμετρικό μέσο ($\alpha:\beta=\beta:\gamma$), που ήταν και σύμβολο της αριστοκρατίας. Το ερώτημα, για το ποιος είναι ο γεωμετρικός μέσος των δύο ιερών συμβόλων 1 και 2, οδηγεί στη μελέτη του λόγου της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου.

Σε ότι αφορά, τέλος, την εποχή που ανακαλύφθηκε η ασυμμετρία, οι πληροφορίες που έχουμε στη διάθεσή μας δεν είναι πιο διαφωτιστικές. Εμμέσως, όμως, μπορούμε να καταλήξουμε στο

σχετικά ασφαλές συμπέρασμα, που προκύπτει από τα παραπάνω, ότι η ασυμμετρία ανακαλύφθηκε σε μια εποχή που δεν απέχει πολύ από το 450 – 430 π.Χ.

Έτσι λοιπόν τον 6^{ο} αιώνα π.Χ.: α) ο Αναξίμανδρος θεωρεί το *άπειρο* ως βασικό κοσμικό στοιχείο, την πρώτη *αρχή* από την οποία δημιουργήθηκε το σύμπαν και η οποία ρύθμιζε όλες τις λειτουργίες του, το οποίο είναι ανεξάντλητο, αγέννητο, άφθαρτο και παντοτινό β) οι Πυθαγόρειοι ανακαλύπτουν την ασυμμετρία και έτσι εισάγουν το άπειρο στα Μαθηματικά σηματοδοτώντας την άποψη ότι: υπάρχουν γεωμετρικά μεγέθη αποτελούμενα από απείρως μικρά τμήματα των οποίων ο αριθμός είναι άπειρος. Λίγα χρόνια αργότερα ο

- Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500 - 428 π.Χ.) ασχολείται με τη μαθηματική έννοια του απείρως μικρού. Ο Ε. Σταμάτης (1975, τομ.Ι, σελ.29) γράφει: *«την έννοια του απείρου εις την γεωμετρίαν απαντώμεν διατυπομένην το πρώτον υπό του Αναξαγόρου. Η έννοια αύτη είναι συναφής προς την έννοιαν της συνέχειας, την οποίαν επίσης διατύπωσεν ο Αναξαγόρας…Η διατύπωσις αύτη έχει ως εξής: ούτε γαρ του σμικρού έστι το γε ελάχιστον, αλλ' έλλασον αεί, (το γαρ εόν ούκ έστι μη ούκ είναι) - αλλά και του μεγάλου εστί μείζον»*. Από την άλλη μεριά οι ατομικοί φιλόσοφοι

- Δημόκριτος (460 - 370 π.Χ.), Λεύκιππος (500 - 440 π.Χ.) και Επίκουρος (341 - 271 π.Χ.), δεν αποδέχονταν την επ' άπειρον κατάτμηση των σωμάτων. Η επ' άπειρον τομή ενός υλικού σώματος, σήμαινε ότι το σώμα αυτό αποτελείται από άπειρα μέρη. Όμως ένα σύνολο από άπειρα μέρη θα πρέπει να είναι και το ίδιο άπειρο, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πεπερασμένη φύση του υλικού σώματος. Έτσι οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν ελάχιστα υλικά σωματίδια, τα *άτομα* (άτμητα). Επίσης εισήγαγαν την έννοια των αδιαίρετων και αδιάστατων μερών του χώρου (τα *αμερή*).

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας, που ανέτρεψε όπως προείπαμε την άνετη αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και στη γεωμετρία, προξένησε μεγαλύτερη αίσθηση ακόμα κι από εκείνη που είχαν δημιουργήσει τα επιχειρήματα που αφορούσαν στην πραγματικότητα της μεταβολής- επιχειρήματα που απασχολούν τους φιλοσόφους μέχρι τις μέρες μας - και έχουν αποδοθεί στο

- Ζήνωνα τον Ελεάτη (490 - 430 π.Χ.), ο οποίος κατέδειξε τις παράδοξες συνέπειες στις οποίες οδηγείται κανείς όταν υιοθετεί την άποψη ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι επ' άπειρον διαιρετοί, βρίσκοντας αντιφάσεις στην αλόγιστη χρήση των ενορατικών εννοιών της «ευθείας» και του «σημείου» (Davis & Hersh, 1981). Ο Ζήνων, μέσω των παραδόξων που διατύπωσε, αμφισβήτησε την ορθότητα παλαιότερων διαισθητικών αντιλήψεων σχετικά με το άπειρα μεγάλο

και το άπειρα μικρό - το άθροισμα απειράριθμων ποσοτήτων μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε και το άθροισμα πεπερασμένου ή άπειρου αριθμού ποσοτήτων με μηδενική διάσταση είναι μηδέν (Struik, 1982). Με τα περίφημα παράδοξα (της Διχοτομίας, του Αχιλλέα με τη χελώνα, του Βέλους και του Σταδίου) που διατύπωσε, αποκάλυψε τη σύγκρουση, το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό - «αυτό το μόνιμο εμπόδιο που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, ακόμα και τη φυσική», όπως αναφέρει ο A. Fraenkel (Vilenkin,1997)

Ο Ζήνων εκφράζει την αντίληψη ότι ο χώρος στην πραγματικότητα δεν αποτελείται από σημεία (δηλ. είναι «απλοϊκά» συνεχής), διατυπώνοντας το παράδοξο του βέλους: έστω ότι ένα βέλος φεύγει από ένα τόξο και κατευθύνεται προς το στόχο. Εάν ο χώρος αποτελείται από σημεία, τότε η τροχιά του μπορεί να αναλυθεί σε ένα άπειρο σύνολο από «παγωμένες» εικόνες στις οποίες βλέπουμε τη μύτη του βέλους να καταλαμβάνει διαδοχικά κάθε σημείο ανάμεσα στο τόξο και στο στόχο. Το πρόβλημα είναι ότι σε κάθε τέτοιο σημείο το βέλος είναι ακίνητο. Πώς είναι δυνατόν η τροχιά του βέλους να αποτελείται από μια ακολουθία από ακίνητες εικόνες; Πού πήγε η κίνηση; Το πρόβλημα λοιπόν είναι ότι αν ο χώρος αποτελείται από σημεία και το βέλος φωτογραφίζεται σε κάθε σημείο, τότε το βέλος δεν έχει τη δυνατότητα να «κινείται ανάμεσα στις εικόνες», αφού ανάμεσά τους δεν υπάρχει τίποτα (Rucker, 2004). Ο Ζήνων λοιπόν θεωρούσε το χώρο ως μη διαιρέσιμο όλον, το οποίο δεν μπορεί να διασπασθεί σε μέρη. Να σημειώσουμε εδώ ότι την άποψη του Ζήνωνος συμμερίζονταν αρκετοί φιλόσοφοι, ιδίως ο C.S. Pierce (1839-1914) και ίσως ο K. Gödel (1906-1978), ο οποίος διαχωρίζει τη συνεχή ευθεία της διαίσθησής μας (η οποία δεν ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων της), από την ευθεία γραμμή ως σύνολο σημείων που περιγράφει η συνολοθεωρητική ανάλυση (Rucker, 2004). Στην ανάλυση των εννοιών του απείρου και του συνεχούς είναι ιδιαίτερα σημαντική η προσφορά του

- Αριστοτέλη (384 - 322 π.Χ.), ο οποίος μελέτησε τις έννοιες αυτές μάλλον από ανάγκη εύρεσης τρόπου αντιμετώπισης των ελεατικών παραδόξων κίνησης. Ο Δ. Αναπολιτάνος (2005, σελ.61) σημειώνει: «Για τον Αριστοτέλη η ανάγκη να διερωτηθούμε γύρω από το άπειρο προέρχεται από τις εξής πέντε πηγές: α) από την επαγωγικής υφής πίστη μας πως ο χρόνος είναι δίχως πέρατα….άπειρος, β) από την αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς κάθε αισθητού αντικειμένου, γ) από την αντίληψη πως οτιδήποτε …οριοθετείται πάντα από κάτι άλλο που δεν αποτελεί μέρος του, και επομένως η ολότητα των πραγμάτων δεν μπορεί να έχει όρια….δ) από το απεριόριστο της ανθρώπινης σκέψης…….το απεριόριστο των αριθμών και των

γεωμετρικών μεγεθών και ε) από τη δυνατότητα ύπαρξης διαδικασιών τμήσης εκτεταμένων μεγεθών, όπου ο αριθμός των πράξεων τμήσης, χωρίς να μπορεί να είναι άπειρος, δεν είναι άνω φραγμένος».

Οι διαδικασίες που, κατά τον Αριστοτέλη, είναι υπεύθυνες για την εξοικείωσή μας με την έννοια του απείρου είναι δύο: η αθροιστική και η διαιρετική διαδικασία. Η αθροιστική διαδικασία μπορεί να μας οδηγήσει στη θεώρηση πεπερασμένων αντικειμένων οσωνδήποτε μεγάλων διαστάσεων, όχι όμως και αντικειμένων *απείρων* διαστάσεων. *Δεν* υπάρχουν *άπειρα* αντικείμενα, και *άπειρες* ολότητες αντικειμένων *δεν* αποτελούν τελειωμένα αντικείμενα σπουδής. Άπειρες ολότητες αντικειμένων μπορούν να εξετασθούν μόνον εσωτερικά, πράγμα που σημαίνει ότι για τον Αριστοτέλη έχει νόημα μόνο η *δυνητική* σπουδή του απείρου (Αναπολιτάνος, 2005). Για παράδειγμα μπορούμε να εργασθούμε μέσα στο σύνολο των φυσικών αριθμών όπου τα αντικείμενα σπουδής θα είναι οι αριθμοί 1,2,3,…(*δυνάμει* άπειρο), χωρίς να έχουμε το δικαίωμα να θεωρήσουμε το ίδιο το σύνολο των φυσικών αριθμών σαν αντικείμενο σπουδής (*ενεργεία* άπειρο). Κατά τον Cantor η παραπάνω διάκριση είναι αμφίβολη: «…η αλήθεια είναι ότι η πραγματικότητα του *δυνάμει* απείρου είναι απλώς δάνεια, στο βαθμό που κάθε *δυνάμει* άπειρη έννοια παραπέμπει πάντοτε σε μια λογικά προγενέστερη *ενεργεία* άπειρη έννοια, από την ύπαρξη της οποίας εξαρτάται» (Rucker, 2004).

Μπορούμε δηλαδή, κατά τον Αριστοτέλη, να έχουμε ένα *άπειρο* (μη εξαντλούμενο) σύμπαν χωρίς ποτέ να αδράξουμε ένα *άπειρο* αντικείμενο. Το άπειρο ενός τέτοιου σύμπαντος είναι *δυνητικό* (*δυνάμει* άπειρο). Για την ακρίβεια, ο Αριστοτέλης υποστήριξε (και δεν ήταν ο μόνος) ότι ο χώρος του σύμπαντός μας είναι φραγμένος και πεπερασμένος και έχει τη μορφή μιας τεράστιας σφαίρας. Αντιμετωπίζοντας το ερώτημα «τι βρίσκεται έξω από τη σφαίρα αυτή;», υποστήριξε ότι αυτό που περιορίζεται, δεν περιορίζεται σε σχέση με κάτι που το περιβάλλει (Rucker, 2004). Να σημειώσουμε εδώ ότι, αν θελήσουμε σήμερα να απαντήσουμε στο ερώτημα αν ο χώρος είναι άπειρος, φαίνεται ότι επικρατούν τρεις απόψεις, μια εκ των οποίων είναι ότι ο χώρος είναι πεπερασμένος σε κάποιο επίπεδο και πιο πέρα δεν υπάρχει τίποτα, που είναι η θέση του Αριστοτέλη.

Η διαιρετική διαδικασία σχετίζεται με τη δυνατότητα άπειρης διαίρεσης πεπερασμένων μεγεθών. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, τα μεγέθη αυτά μπορούν να θεωρηθούν *δυνάμει* άπειρα, δεδομένου ότι μπορούν να τμηθούν επ' άπειρον. Για παράδειγμα, ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ένα

μέγεθος *δυνάμει* άπειρο, δεδομένου ότι είναι άπειρα διαιρετό σε τμήματα ίσα με ΑΒ/2, ΑΒ/4, ΑΒ/8,…, με την έννοια ότι δεν υπάρχει πραγματική διαδικασία που να τελειώνει σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα μέσω της οποίας το μέγεθος ΑΒ να μπορεί να τμηθεί σε άπειρα το πλήθος κομμάτια. Η *δυνητική* άπειρη διαιρετότητα πεπερασμένων ευθύγραμμων τμημάτων είναι ακριβώς το θεμελιώδες χαρακτηριστικό της συνεχιστικής τους φύσης. Έτσι, το *συνεχές* ορίζεται, για τον Αριστοτέλη, από τη δυνατότητα ατέρμονης διαιρετότητάς του και κατά συνέπεια η απάντηση του Αριστοτέλη στα ελεατικά παράδοξα κίνησης είναι ότι η πεπερασμένη απόσταση διανύεται σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα κατά τρόπο *συνεχή*. Τα παράδοξα (π.χ. της Διχοτομίας, του Αχιλλέα με τη χελώνα) εμφανίζονται σαν τέτοια, γιατί υποτίθεται, λανθασμένα, πως κατά τη διάρκεια της κίνησης ο δρομέας έχει συνείδηση των άπειρων εγκοπών της αντίστοιχης διαδρομής που διανύει. Για τον Αριστοτέλη το νοητικό άλμα της αντικειμενοποίησης του απείρου (*πραγματικό* - *ενεργεία* άπειρο) είναι, από την ίδια τη φύση των πραγμάτων, μια διαδικασία μη επιτρεπτή.

Μετά τον Αριστοτέλη, οι μαθηματικοί διστάζουν να χρησιμοποιήσουν την έννοια του *ενεργεία* απείρου. Για παράδειγμα, στην πρόταση IX20 των *Στοιχείων* του, ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι: οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε δεδομένο πλήθος πρώτων αριθμών - *prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers*- (Heath, 1956, Vol.2 σελ.412). Ο Ευκλείδης διατυπώνει το παραπάνω θεώρημα χωρίς να χρησιμοποιήσει την έννοια του απείρου, δηλαδή δεν λέει ότι: «οι πρώτοι αριθμοί είναι *άπειροι*» και αποδεικνύει την πολύ σημαντική αυτή πρόταση με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, με την οποία επίσης αποφεύγεται επιτυχώς η χρήση της έννοιας του απείρου, μιας και είναι μια έννοια τόσο προβληματική. Να σημειώσουμε εδώ, ότι ο G.H. Hardy (2007, σελ.68) στην προσπάθειά του να δώσει παραδείγματα «πραγματικών» μαθηματικών θεωρημάτων χαρακτηρίζει το θεώρημα αυτό όπως επίσης και το θεώρημα για την ασυμμετρία της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου, που παρουσιάσαμε ήδη, ως θεωρήματα «πρώτης τάξης». Γράφει χαρακτηριστικά: «Δύσκολα μπορώ να πετύχω κάτι καλύτερο από το να επιστρέψω στους Έλληνες. Θα διατυπώσω και θα αποδείξω δυο από τα διάσημα θεωρήματα των Ελληνικών Μαθηματικών. Είναι μεν «απλά θεωρήματα», τόσο ως προς τη σύλληψη όσο και ως προς την εκτέλεση, αλλά δεν υπάρχει αμφιβολία ότι είναι θεωρήματα πρώτης τάξης. Το κάθε ένα από αυτά είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό, όπως και όταν ανεκαλύφθη - εδώ και 2000 χρόνια παρέμειναν ανέπαφα. Τελικά οι διατυπώσεις και οι αποδείξεις τους μπορούν να γίνουν κτήμα ενός ευφυούς

αναγνώστη σε μια ώρα, οσοδήποτε αδύνατα κι αν είναι τα μαθηματικά του εφόδια».

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα είδος γραμματικής ανάλυσης που χρησιμοποιούν οι Luis, Moreno and Waldegg (1991) για να περιγράψουν το ρόλο του απείρου στην Αρχαία Ελληνική κουλτούρα: α) ως *ουσιαστικό*, εμφανίζεται μόνο σε μυθολογικό, θεολογικό ή μεταφυσικό πλαίσιο, β) ως *επίθετο*, εμφανίζεται όταν περιγράφει ένα ουσιαστικό το οποίο έχει τα χαρακτηριστικά του απόλυτου, όπως π.χ. το Σύμπαν, το Όν, ο χώρος και ο χρόνος. Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιούσε το άπειρο ως *επίθετο*, αρνούμενος την πραγματική (φυσική) ύπαρξη του απείρου, δεδομένου ότι η έννοια αυτή ενέχει το *ενεργεία* άπειρο, το οποίο η ρεαλιστική Αριστοτελική φιλοσοφία δεν αποδεχόταν και γ) ως *τροπικό επίρρημα*, χρησιμοποιείτο για να περιγράψει νοητικές ενέργειες, όπως για παράδειγμα να επεκτείνει, να υποδιαιρέσει, να προσεγγίσει, να συνεχίσει, να προσθέσει κ.λ.π. Αυτή η χρήση του απείρου έχει να κάνει με αυτό που αποκαλούμε *δυνάμει* άπειρο, με την έννοια της άπειρης εξέλιξης μιας διαδικασίας.

Στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά το άπειρο μπορούσε να υπάρχει μόνο ως τροπικό επίρρημα, ενώ η χρήση του ως επίθετο και ως ουσιαστικό απαγορευόταν λόγω φιλοσοφικών απόψεων που αρνούνταν την ιδανική ή πραγματική ύπαρξη «άπειρων αντικειμένων». Ως επίρρημα το άπειρο είναι συνδεδεμένο με μια διαδικασία, και ως εκ τούτου η παρουσία του δεν μπορεί να θεωρηθεί αμφίβολη, αλλά είναι αποδεκτή ως ένας *εν δυνάμει* τρόπος λειτουργίας (*modus operandi*). Η θεώρηση του απείρου με τον τρόπο αυτό ώθησε σπουδαίους Έλληνες μαθηματικούς, όπως ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης, να καταλήξουν σε σπουδαία συμπεράσματα (Luis et al., 1991). Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στον Εύδοξο τον Κνίδιο και τον Αρχιμήδη, των οποίων η συμβολή στην εξέλιξη των άπειρων διαδικασιών στα Μαθηματικά ήταν καθοριστικής σημασίας.

- Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (406 - 355 π.Χ. περίπου) υπήρξε μαθητής του Πλάτωνος. Ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε το έργο του Ευδόξου στο κείμενο των *Στοιχείων* του και πιο συγκεκριμένα στα βιβλία V και XII και σε τμήματα των βιβλίων VI, X και XIII. Εξοχότερος από τους μαθηματικούς και αστρονόμους της εποχής του Πλάτωνος, ο Εύδοξος προώθησε σημαντικά τη θεωρία των αριθμών πέρα από την πυθαγόρεια παράδοση, αναπτύσσοντας την καινοτόμο θεωρία του για τα ασύμμετρα μεγέθη και επινοώντας διάφορες τεχνικές για τη μέτρηση καμπύλων επιφανειών (Struik, 1982). Ο φιλόσοφος Πρόκλος αποδίδει τη θεωρία λόγων μεγεθών στην καθαρά γεωμετρική τους μορφή στον Εύδοξο (βιβλίο V των *Στοιχείων*) και ο Αρχιμήδης του αποδίδει τη «μέθοδο της εξάντλησης». Ο πρώτος που έθεσε αξιώματα και στηριζόμενος σε αυτά απέδειξε θεωρήματα, ήταν πιθανώς ο Εύδοξος (Bunt, Jones & Bedient,

1981). Ο D.J. Struik (1982, σελ.80) αναφέρει: «Οι αυστηρές διατυπώσεις του [Ευδόξου] παίξανε καθοριστικό ρόλο στην πορεία της ελληνικής αξιωματικής μεθόδου και, σε μεγάλο βαθμό, των ελληνικών μαθηματικών σαν σύνολο. Η θεωρία λόγων του Ευδόξου ήταν απαλλαγμένη από τη θεωρία των Πυθαγορείων, που εφαρμοζόταν μόνο στα σύμμετρα μεγέθη. Επρόκειτο για μια καθαρά γεωμετρική θεωρία, δοσμένη σε αυστηρά αξιωματική μορφή, που καθιστούσε περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη». Με τον ορισμό 4 του V βιβλίου των *Στοιχείων (αν α, β είναι ομογενή μεγέθη, λέγεται ότι έχουν λόγο, αν υπάρχουν n, m φυσικοί τέτοιοι, ώστε nα>β και mβ>α)*, εξαιρούνται τα απείρως μεγάλα και τα απείρως μικρά μεγέθη (π.χ. η κερατοειδής γωνία) από τη θεωρία λόγων ομογενών μεγεθών. Διατύπωσε τον ορισμό των *ίσων λόγων (V βιβλίο των Στοιχείων, ορισμός 5: έστω α, β, γ, δ μεγέθη, ώστε ορίζονται, με βάση τους ορ.3 και 4, οι λόγοι* $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$. *Θα λέμε ότι* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, *αν για κάθε m,n φυσικούς ισχύει ένα από τα παρακάτω: mα>nβ ⇔ mγ>nδ ή mα=nβ ⇔ mγ=nδ ή mα<nβ ⇔ mγ<nδ)*, με τον οποίο ο Εύδοξος χωρίζει τους ρητούς αριθμούς σε δύο ίσης έκτασης (coextensive) κλάσεις, και ως εκ τούτου ορίζει ίσους λόγους σε σχεδόν πλήρη αντιστοιχία με τις «τομές Dedekind» που θεμελιώνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών (Heath, 1956, Vol. 2).

Με τη «μέθοδο της εξάντλησης» *(πρόταση Χ1, με χρήση σύγχρονης ορολογίας:* $\forall \alpha, \beta \in \Re^+$ *όπου α>β, θα υπάρχει* $n \in \aleph$ *τέτοιο ώστε nβ>α)* που εφάρμοσε για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, ο Εύδοξος έδειξε ότι δεν είναι ανάγκη να υποθέσουμε την «ύπαρξη» απείρως μικρών ποσοτήτων· μπορεί να φτάσει κάποιος σε ένα μέγεθος όσο μικρό θέλει, με συνεχιζόμενη διαίρεση ενός δοθέντος μεγέθους. Απέφυγε έτσι τις παγίδες των απειροστών, απλώς παρακάμπτοντάς τα. Κατά τον Αρχιμήδη, ο Εύδοξος χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτή για να αποδείξει ότι οι όγκοι των πυραμίδων και των κώνων ισούνται με το 1/3 των όγκων των πρισμάτων και των κυλίνδρων, αντίστοιχα, που έχουν τις ίδιες βάσεις και τα ίδια ύψη, αποδεικνύοντας ότι οι υποθέσεις V>(1/3)P και V<(1/3)P οδηγούν σε αντίφαση. Με την ίδια μεθοδολογία αποδεικνύει ο Εύδοξος ότι τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους (πρόταση XII2) (Heath, 1956, Vol.3). Ο Ε. Γιαννακούλιας (2004) σημειώνει ότι: «ο Εύδοξος και οι Έλληνες μαθηματικοί που ακολούθησαν, ποτέ δεν θεώρησαν ότι στη μέθοδο της εξάντλησης η διαδικασία συνεχίζεται για άπειρο αριθμό βημάτων, ώσπου να εξαντληθεί πλήρως το αρχικό μέγεθος. Στη σκέψη τους υπήρχε πάντοτε μια ποσότητα που έμενε, παρόλο που η ποσότητα αυτή μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε». Μετά τον θάνατό του, η θεμελιώδης

συνεισφορά του Ευδόξου στη γεωμετρία και στη θεωρία αριθμών οδήγησε τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων σε νέες εξελίξεις μεγάλης διάρκειας, όπως φαίνεται, λόγου χάρη, από το έργο του Αρχιμήδη. Το μεγάλο άλμα προς το άπειρο πραγματοποιήθηκε από το μεγαλύτερο μαθηματικό της αρχαιότητας και έναν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, στην προσπάθειά του να επιλύσει προβλήματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων. Ο

- Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ) με τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και με έξυπνα τεχνάσματα (σε μια επιστολή του προς τον ηλικιωμένο φίλο του Ερατοσθένη περί το 250 π.Χ., που ανακαλύφθηκε μόλις το 1906, ο Αρχιμήδης περιγράφει τον τρόπο για την εξαγωγή αποτελεσμάτων, όχι αυστηρό, αλλά διαισθητικό και γόνιμο), κατόρθωσε να επιλύσει μια σειρά μαθηματικών προβλημάτων, αποφεύγοντας τη χρήση της έννοιας του απείρου· επίσης και η έννοια του ορίου, όπως σήμερα τη γνωρίζουμε, δεν παρουσιάζεται στα έργα του Αρχιμήδη. Όμως τα προβλήματα που έλυσε, οι μέθοδοι που χρησιμοποίησε και ο τρόπος που προσέγγιζε τις άπειρες διαδικασίες, υπήρξαν τα βασικά στηρίγματα για τη σύλληψη και ανάπτυξη των εννοιών αυτών και αποτέλεσαν τον ακρογωνιαίο λίθο του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Γιαννακούλιας, 2004).

Το έργο του *Ψαμμίτης* είναι ουσιαστικά μια πραγματεία πάνω στο πώς μπορεί κανείς να γράψει μεγάλους αριθμούς και να δουλέψει με αυτούς· έτσι θα υπολόγιζε και τους κόκκους της άμμου του σύμπαντος. Στο βιβλίο του *Κύκλου Μέτρησις* παρέχονται προσεγγίσεις για το μήκος της περιφέρειας κύκλου, τις οποίες υπολογίζει εγγράφοντας και περιγράφοντας στον κύκλο κανονικά πολύγωνα. Φτάνοντας διαδοχικά σε πολύγωνα 96 πλευρών, υπολόγισε ότι το π βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$, δηλ. $3{,}1409<\pi<3{,}1429$ (Bunt et al., 1981). Στην εργασία του *Τετραγωνισμός παραβολής*, ο υπολογισμός του εμβαδού παραβολικού χωρίου είναι ένα από τα πιο ωραία και χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου της εξάντλησης. Ο Αρχιμήδης υπολόγισε το εμβαδόν μόνο εγγράφοντας (και όχι περιγράφοντας) τρίγωνα και σε έναν δεύτερο υπολογισμό, εγγράφοντας ορθογώνια (μέθοδο που και σήμερα ακολουθούμε στην ολοκλήρωση με αθροίσματα Riemann) (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999).

Συμπερασματικά λοιπόν, η έννοια του απείρου και ειδικά «η ιδέα» της άπειρης διαδικασίας και τα προβλήματα που δημιουργεί, βρήκε για πρώτη φορά έκφραση στα περίφημα παράδοξα του Ζήνωνος. Η βαθιά εντύπωση που προξένησαν στην αρχαία ελληνική διανόηση τα παράδοξα του απείρου, είχε ως αποτέλεσμα την ολική απόρριψη από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας της

έννοιας του ορίου, σαν συμπληρωμένης και τελειωμένης μετά από ένα άπειρο αριθμό βημάτων διαδικασίας (*ενεργεία* άπειρο). Οι Νεγρεπόντης κ.ά. (1999, σελ.42) αναφέρουν χαρακτηριστικά: «…. οι αποδείξεις του Ευδόξου ή του Αρχιμήδη, που σήμερα θα θεωρούσαμε ότι ασχολούνται με υπολογισμούς ορίων, ποτέ δεν χρησιμοποιούν κατά εκπεφρασμένο τρόπο την έννοια του ορίου….. αλλά βασίζονται σε μία πεπερασμένου τύπου μέθοδο διπλής αντίφασης. Κατά τη διάκριση του Αριστοτέλη εξάλλου, οι μαθηματικοί δεν χρησιμοποιούν τα απείρως μεγάλα ή τα απείρως μικρά μεγέθη, αλλά μεγέθη οσοδήποτε μεγάλα ή οσοδήποτε μικρά».

Μετά τον Απολλώνιο (247 - 205 π.Χ), τα ελληνικά μαθηματικά διακόπηκαν απότομα. Η γεωμετρία των κωνικών τομών παρέμεινε μέχρι τον Descartes στη μορφή που είχε λάβει από τον Απολλώνιο. Η μέθοδος της εξάντλησης παρέμεινε ως ήταν μέχρι τον 17^{ο} αιώνα, όταν καταπιάστηκαν με το πρόβλημα της «ολοκλήρωσης» κυρίως Άγγλοι μαθηματικοί, όπως οι J. Gregory (1638 - 1675) και I. Barrow (1630 - 1677). Οι τελευταίοι αιώνες του αρχαίου πολιτισμού σημαδεύτηκαν από την παρακμή της μάθησης, την εξάπλωση των δεισιδαιμονιών και την πίστη στους μάγους, τους θαυματοποιούς και τους προφήτες. Παλιές δοξασίες αναβίωσαν, όπως π.χ. μια ανατολικής προέλευσης κοσμοθεωρία, σύμφωνα με την οποία ο κόσμος (η γη) είναι ένας δίσκος που στηρίζεται στις πλάτες ελεφάντων, που πατούν πάνω σε μια χελώνα, που πατά σε μια άλλη χελώνα, που πατά επίσης σε μια άλλη χελώνα, κ.ο.κ.(Rucker, 2004).

Συνέπεια της παρακμής του αρχαίου πολιτισμού, ήταν να μετατοπιστεί το επίκεντρο της μαθηματικής έρευνας από τη Δύση στην Ανατολή. Ο E.H. Gombrich (2008, σελ.161) γράφει χαρακτηριστικά: «Εγώ προσωπικά είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στους Άραβες για δύο πράγματα. Το ένα είναι τα υπέροχα παραμύθια που αφηγήθηκαν και μετά κατέγραψαν……Το δεύτερο είναι ακόμα πιο παραμυθένιο από τα παραμύθια…….Πάρε έναν αριθμό, το 12 ας πούμε. Γιατί νομίζεις ότι λέμε «δώδεκα» και όχι «ένα δύο» ή «ένα και δύο»; «Επειδή» θα απαντήσεις «το 1 μπροστά από το 2 …..δεν είναι μια μονάδα, αλλά μια δεκάδα». Ξέρεις πως γράφανε οι Ρωμαίοι το δώδεκα; XII. Και το 112; CXII. Και το 1112; MCXII. Φαντάσου τώρα να πρέπει να κάνεις πολλαπλασιασμούς….με λατινικά ψηφία!..... Ενώ τα δικά μας «αραβικά» ψηφία……. περιέχουν κάτι καινούργιο - την αξία ανάλογα με τη θέση του αριθμού…..Το χρωστάμε στους Άραβες και αυτοί με τη σειρά τους στους Ινδούς». Οι Ινδοί, εκτός από την κατασκευή του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, αντιμετώπιζαν χωρίς διάκριση ρητούς και άρρητους και έλυναν αριθμητικά προβλήματα χωρίς τη βοήθεια της γεωμετρίας - στοιχείο που αργότερα βοήθησε στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού (Γιαννακούλιας, 2004). Οι Άραβες διδάχθηκαν από

τους Έλληνες που ζούσαν στις κατακτημένες πόλεις της Βυζαντινής Αυτοκρατορίας. Τον 9^{ο} και 10^{ο} αιώνα μεταφράζουν ελληνικά μαθηματικά κείμενα (του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη κ.ά.). Έτσι, ειδικά τον 12^{ο} και 13^{ο} αιώνα, υπό την επίδραση της Ανατολής τα μαθηματικά αναζωπυρώνονται. Αντιθέτως, στην Ευρώπη την ίδια χρονική περίοδο και γενικότερα σχεδόν καθ' όλη τη διάρκεια του Μεσαίωνα (476 - 1492) δεν υπήρξε πρόοδος στη Μαθηματική επιστήμη, η φιλοσοφία περιορίστηκε στο ρόλο της θεραπαινίδας της θεολογίας, και κατά συνέπεια το άπειρο έγινε μια ιδιότητα την οποία είχε μόνο ο Θεός (Vilenkin, 1997).

Προς τα τέλη του Μεσαίωνα, οι διαμάχες ανάμεσα στους θεολόγους και στους φιλοσόφους συνέτειναν στο να αναδυθούν νέες ιδέες, οι οποίες υπονόμευσαν εξίσου και τα θρησκευτικά δόγματα και το κοσμολογικό πρότυπο του Αριστοτέλη. Στα μέσα του 15^{ου} αιώνα, ο επίσκοπος και φιλόσοφος

- Nicholas of Cusa (1401 - 1464) άνοιξε το δρόμο για μια επανάσταση στην κοσμολογία και στο μαθηματικό τρόπο σκέψης. Ισχυρίζεται ότι η γη κινείται, το σύμπαν δεν είναι ηλιοκεντρικό, ούτε πεπερασμένο (όσον αφορά τα δύο πρώτα «προλαβαίνει» τον Copernicus), αλλά άπειρο δίχως κέντρο, θεωρώντας ότι το κέντρο του μπορεί να είναι οπουδήποτε και το σύνορο του σύμπαντος πουθενά. Επίσης, ότι οι κινήσεις των πλανητών και των αστέρων δεν είναι κυκλικές ούτε ομοιόμορφες (πολύ πριν τον Kepler). Ισχυρίζεται ότι στο άπειρο ο κύκλος ταυτίζεται με την ευθεία (καθώς αυξάνει η ακτίνα του κύκλου, ένα τμήμα της περιφέρειάς του θα ταυτίζεται με την ευθεία) και μελετά με ιδιαίτερο ζήλο τα απείρως μεγάλα και τα απείρως μικρά, σε μια προσπάθεια να συμπεριλάβει στη σκέψη του το πεπερασμένο και το άπειρο. Αν και δεν στήριξε τα επιχειρήματά του σε εμπειρικά δεδομένα, ούτε μετέτρεψε τις ιδέες του σε μαθηματικά μοντέλα που θα μπορούσαν να δοκιμαστούν εμπειρικά, οι απόψεις του Nicholas of Cusa διεύρυναν το διανοητικό ορίζοντα της εποχής του, ανοίγοντας το δρόμο για τις καινοτομίες των Kepler και Copernicus που ακολούθησαν, καθώς επίσης και στον Απειροστικό Λογισμό και τα μαθηματικά του συνεχούς (Vilenkin, 1997·McFarlane, 1999).

1.2. Στάση δεύτερη: μετά το 1500 μ.Χ.

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους είχε ως συνέπεια τα μαθηματικά να χωριστούν σε δύο ξεχωριστούς κλάδους: την αριθμητική και τη γεωμετρία. Αυτός ο διαχωρισμός εξέφραζε ένα θεμελιώδη διαχωρισμό μεταξύ του απείρου (το γεωμετρικό συνεχές) και του πεπερασμένου (την αριθμητική των φυσικών αριθμών), ο οποίος παρόλα αυτά δεν

εμπόδισε, όπως προείπαμε, τους Άραβες και τους Ινδούς να αντιμετωπίζουν χωρίς διάκριση ρητούς και άρρητους και να λύνουν αριθμητικά προβλήματα χωρίς τη βοήθεια της γεωμετρίας (McFarlane, 1999). Στην Ευρώπη με τους άρρητους ασχολήθηκε πρώτος ο Leonardo di Pisa (Fibonacci) γύρω στο 1200. Αν και η χρήση τους ήταν ευρέως διαδεδομένη στην Ευρώπη από την εποχή του Cusa, δεν ήταν σαφές υπό ποιαν έννοια θεωρούνταν αριθμοί, δεδομένου ότι δεν μπορούσαν να εκφραστούν με πεπερασμένο τρόπο. Το 1544 ο Γερμανός μαθηματικός M. Stifel αναφέρει χαρακτηριστικά: «…ένας άρρητος αριθμός δεν είναι αληθινός αριθμός, αλλά ένας αριθμός κρυμμένος στο σύννεφο του απείρου» (McFarlane, 1999). Όπως τελικά και αποδείχθηκε, η βάση για τους άρρητους αριθμούς απαιτεί τα μαθηματικά του *ενεργεία* απείρου. Όσο το *ενεργεία* άπειρο ήταν «απαγορευμένη» έννοια, τέτοια μαθηματικά δεν μπορούσαν να βρεθούν. Στη δημιουργία των μαθηματικών του απείρου, δηλαδή στην ανάπτυξη εννοιών του Απειροστικού Λογισμού, μεγάλη υπήρξε η συμβολή του

- Galileo Galilei (1564 - 1642). Εισήγαγε την έννοια του απείρου, του απειροστού, της συνέχειας και του αδιαίρετου. Το 1638 δημοσίευσε το πολύ σημαντικό έργο *Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences pertaining to Mechanics and Local Motions*, στο οποίο χρησιμοποιεί απειροστά και αδιαίρετα. Ο Galileo δεν σκεφτόταν τα αδιαίρετα σαν να είναι απείρως μικρές ποσότητες. Ήταν απλώς μη-ποσότητες (*non-quanta*), και ως εκ τούτου δεν έχουν τις ιδιότητες των πεπερασμένων ποσοτήτων (*quanta*), π.χ. δεν είναι μετρήσιμα. Να σημειώσουμε εδώ ότι κατά τον E. Knobloch (1999), όταν ο Galileo αναφέρεται σε *non-quanta*, αναφέρεται στα αδιαίρετα, ενώ άλλοι μελετητές (όπως ο Braga) σε άρθρα τους ισχυρίζονται ότι αναφέρεται στα απειροστά. Κατά τον D.J. Struik (1982) ο Galileo ουδέποτε εξήγησε συστηματικά τις ιδέες του για τις απειροστικές μεθόδους. Θεωρούσε το άπειρο (ως όλον) και τα αδιαίρετα ακατανόητα από τον δικό μας πεπερασμένο νου. Το μεν άπειρο εξαιτίας του «μεγάλου» μεγέθους του (*grandezza*), τα δε αδιαίρετα επειδή είναι «πολύ μικρά» (*piccolezza*), ξεπερνούν τη φαντασία μας (Knobloch, 1999). Φαίνεται πάντως να αφήνει ένα παράθυρο ανοιχτό για το *ενεργεία* άπειρο. Ανέπτυξε τη θεωρία του μέσω τεσσάρων μαθηματικών παραδειγμάτων στα οποία υπονοείται μια ανάλυση άμεσα συνδεδεμένη με την εμπειρία: 1) το παράδοξο του τροχού του Αριστοτέλη 2) η ισότητα συγκεκριμένων κύκλων και εμβαδών κύκλων, η οποία καταλήγει στην ειδική περίπτωση της ισότητας της περιφέρειας κύκλου με ένα σημείο 3) η σύγκριση των συνόλων των φυσικών και των τετράγωνων αριθμών και 4) η κατασκευή ενός υπερβολικού συστήματος σημείων (hyperbolical point system) με τη

βοήθεια του οποίου ένας κύκλος με άπειρη ακτίνα εκφυλίζεται σε ευθεία (Knobloch, 1999). Στο πρώτο και στο τρίτο παράδειγμα γίνεται εκτενής αναφορά στο τρίτο μέρος της εργασίας αυτής.

Στο ίδιο έργο, όσον αφορά στις συγκρίσεις, υποστηρίζει ότι τα *non quanta* δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους γιατί, σε αντίθεση με τα πεπερασμένα μεγέθη, δεν είναι μετρήσιμα. Όταν σύγκρινε μεταξύ τους το σύνολο των φυσικών αριθμών και των τετράγωνων αριθμών παρατήρησε αντιστοίχως, ότι οι ιδιότητες «μικρότερο», «ίσο» και «μεγαλύτερο» δεν υπάρχουν στο «άπειρο», αλλά μόνο μεταξύ ποσοτήτων που τελειώνουν (*quantità terminate*). Για άλλη μια φορά μιλά για «άπειρα», όχι άπειρες ποσότητες, και από την άλλη μεριά για ποσότητες που «τελειώνουν» (Knobloch, 1999). Δεδομένου ότι δεν υπάρχει η έννοια του ορίου, ο Galileo καταφεύγει με υπονοούμενα σε θεωρήσεις απειροστών, και λέγοντας ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των παράλληλων γραμμών που περιέχονται σ' αυτό, εκφράζει με σύγχρονη ορολογία την έννοια του αθροίσματος απείρων όρων ακολουθίας (Γιαννακούλιας, 2004).

Ένας άλλος μαθηματικός και αστρονόμος της εποχής του Γαλιλαίου, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένας από τους πρωτεργάτες του Απειροστικού Λογισμού, ήταν ο

- Johannes Kepler (1571 - 1630). Επηρεασμένος από τους Πυθαγόρειους και τον Αρχιμήδη, χρησιμοποιούσε πολλές φορές στις αποδείξεις του τη μέθοδο της εξάντλησης. Παραδεχόταν την αυστηρότητα των αποδείξεων του Αρχιμήδη, αλλά πίστευε ότι ο μαθηματικός ήταν ελεύθερος να καθορίζει ο ίδιος το είδος της αυστηρότητας που επιλέγει ή την έλλειψη αυτής (Struik,1982). Έτσι, για προσωπική του ευχαρίστηση περισσότερο, ξανοίχτηκε στην περιπέτεια του υπολογισμού όγκων. Χρησιμοποιώντας την τεχνική του Nicholas of Cusa θεωρεί ότι οι επιφάνειες και οι όγκοι δημιουργούνται από απειροστά στοιχεία ίσων διαστάσεων, αλλά αναφέρεται και στα αδιαίρετα, χωρίς ωστόσο να διευκρινίζει τη σημασία της έννοιας αυτής. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου, θεωρεί ότι ο κύκλος είναι ένα κανονικό πολύγωνο με άπειρο πλήθος αδιαίρετων πλευρών, οπότε και το εμβαδόν του είναι το άθροισμα των εμβαδών άπειρων το πλήθος τριγώνων με κοινή κορυφή το κέντρο του κύκλου. Ομοίως η σφαίρα συνίστατο από απειράριθμες πυραμίδες (Γιαννακούλιας, 2004). Το έργο του Kepler ενέπνευσε τον

- Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), μαθητή του Galileo, να αναπτύξει την *Μέθοδο των Αδιαίρετων*, που περιλαμβάνεται στο έργο του *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). Παρόλο που δεν διευκρινίζει τι ακριβώς εννοεί με τη έννοια

«αδιαίρετο», βάζει τη βάση για τη γεωμετρική αποδεικτική μέθοδο στην Ανάλυση (Στεργίου, 2009). Η κεντρική ιδέα των εργασιών του είναι ότι κάθε «*αδιαίρετο*» παράγει με την κίνησή του ένα ανώτερο συνεχές. Έτσι το κινούμενο σημείο γεννά μια γραμμή, η κινούμενη γραμμή γεννά μια επιφάνεια, η οποία αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων ευθειών και η κινούμενη γραμμή παράγει ένα στερεό που αποτελείται από παράλληλα επίπεδα (Γιαννακούλιας, 2004). Όσον αφορά στην άποψή του για το άπειρο, η Β. Στεργίου (2009) αναφέρει: « η άποψή του [Cavalieri] για το άπειρο διέφερε από την Αριστοτελική αντίληψη του δυνητικού απείρου……Επίσης είναι φανερό ότι δεν θεωρεί την έννοια του απείρου με τη μεταφυσική ερμηνεία την οποία θεωρούν οι Nicholas of Cusa και Kepler…..χρησιμοποιούσε το άπειρο μόνο σαν βοηθητική έννοια, εφόσον, σύμφωνα με τον ίδιο, από τη φύση του το άπειρο δεν ήταν αναγκαίο να έχει ξεκάθαρη φύση».

Ένα σημαντικό βήμα στην εξέλιξη της σύγχρονης επιστήμης ήταν ο συγκερασμός αριθμητικής και γεωμετρίας από τους

- René Descartes (1596 - 1650) και Pierre de Fermat (1601 - 1665) με την ανακάλυψη της αναλυτικής γεωμετρίας, στα πλαίσια της οποίας γεωμετρικά αντικείμενα μετασχηματίζονται σε αλγεβρικές εξισώσεις και αντίστροφα. Στα θεμέλια της αναλυτικής γεωμετρίας υπάρχει η σιωπηρή παραδοχή ότι στην πραγματικότητα ένας αριθμός αντιστοιχεί σε κάθε σημείο της (συνεχούς) ευθείας. Οι Πυθαγόρειοι έδειξαν, παρόλα αυτά, ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί που να αντιστοιχούν με συγκεκριμένα γεωμετρικά μεγέθη. Κάθε προσπάθεια έκφρασης των συντεταγμένων συγκεκριμένων σημείων σε αριθμητική μορφή, όπως το δεκαδικό ανάπτυγμα, καταλήγει σε ακολουθία απείρων όρων. Όμως τα άλυτα ζητήματα στα θεμέλια της αναλυτικής γεωμετρίας δεν εμπόδισαν τη χρήση της. Η λύση θα ερχόταν μερικές εκατοντάδες χρόνια αργότερα, όταν έγινε η αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών (McFarlane, 1999). Επιπλέον ο Descartes, επηρεασμένος από τις εργασίες των Galileo και Kepler πάνω στην κίνηση των σωμάτων, εισήγαγε στα μαθηματικά την γενική έννοια του μεταβλητού μεγέθους. Η εκτίμηση του F. Engels για την εξέλιξη αυτή είναι η ακόλουθη (στο Vilenkin, 1997) :

> Η καρτεσιανή έννοια του μεταβλητού μεγέθους αποτέλεσε κομβικό σημείο για τα μαθηματικά. Μέσα από αυτήν, η κίνηση, και άρα η διαλεκτική, εισήλθαν στα μαθηματικά.…και κατέστησαν αναγκαίο το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Πράγματι, ο απειροστικός λογισμός γεννήθηκε εκείνη την περίοδο, ο Νεύτων δε και ο Leibniz μάλλον το συμπλήρωσαν παρά τον επινόησαν.

Ο Απειροστικός Λογισμός, με τα παράδοξα του απείρου στον πυρήνα του, υπήρξε επανάσταση στα μαθηματικά. Κίνητρο για την αλματώδη εξέλιξη του απειροστικού λογισμού, σ' ένα μεγάλο βαθμό, ήταν προβλήματα όπως αυτό του ορισμού της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο αυτής. Μεταφράζοντας το πρόβλημα σε ισοδύναμο αλγεβρικό, μέσω της αναλυτικής γεωμετρίας, ζητείται ο ρυθμός μεταβολής (π.χ. ταχύτητα) μιας ποσότητας (διάστημα), δεδομένης μιας τυχαίας τιμής μιας άλλης ποσότητας (χρόνος). Το $17^{ο}$ αιώνα, δύο εξέχουσες προσωπικότητες που ανέπτυξαν συστηματικές μεθόδους επίλυσης αυτού του προβλήματος, ήταν οι

- Sir Isaac Newton (1642 - 1727) και Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716), δημιουργώντας ανεξάρτητα αυτό που αποκαλούμε σήμερα Απειροστικό Λογισμό. Γενικεύοντας την τεχνική του Ευδόξου σε τυχαίες καμπύλες και κάνοντας χρήση της αναλυτικής γεωμετρίας, οι Leibniz και Newton παρουσιάζουν εξαιρετικές τεχνικές για τη λύση πολλών μαθηματικών προβλημάτων, που στο παρελθόν ήταν αδύνατον να λυθούν.

Ο Newton υπήρξε μαθητής του Barrow στο Πανεπιστήμιο του Cambridge. Η μεγαλύτερη συνεισφορά του ήταν η προσπάθεια της κατανόησης του κόσμου που μας περιβάλλει μέσω της νέας σύνθεσης του Απειροστικού Λογισμού. Ο Newton προσεγγίζει την απειροστική μέθοδο κατά κύριο λόγο κινηματικά, αναπτύσσοντας την *Θεωρία των ροών* κατά τα έτη 1665-66. Σύμφωνα με τον L.T.More (στο Struik, 1982), «η ιστορία της επιστήμης δεν έχει να παρουσιάσει άλλα παραδείγματα επιτευγμάτων ικανά να συγκριθούν με αυτά που ο Νεύτωνας κατόρθωσε κατά τη διάρκεια αυτών των δυο χρυσών ετών». Το 1671 γράφει το δεύτερο κατά σειρά έργο του με τίτλο *Methodus Fluxionum et serierum infinitarum*, το οποίο δημοσιεύτηκε το 1736. Σε αυτό θεωρεί ότι οι μεταβλητές ποσότητες είναι αποτέλεσμα συνεχούς κίνησης σημείων, γραμμών και επιπέδων και όχι αθροίσματα άπειρου πλήθους απειροστών (Γιαννακούλιας, 2004).

Όρισε τη *ροή (fluxion)* ως εξής: Ροή $\dot{x}$ μιας ποσότητας x εξαρτώμενης από τον χρόνο (x είναι η *ρέουσα ποσότητα* ή *ρέον-fluent*), είναι η ταχύτητα με την οποία αυξάνεται η μεταβλητή x, διαμέσου της κίνησης που δημιουργούσε τη μεταβολή αυτή (Στεργίου, 2009). Το απείρως μικρό μήκος κατά το οποίο αυξάνεται το *ρέον* σε απείρως μικρό χρόνο το ονόμασε *στιγμή του ρέοντος (moment of fluxion)* και το συμβόλισε με $\dot{x}o$. Ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο ο Newton εξηγούσε τη μέθοδό του είναι το ακόλουθο: έστω η συνάρτηση $y = x^2-x$. Όπου x έθετε $x + \dot{x}o$ και όπου y το $y + \dot{y}o$ και προέκυπτε τελικά: $\dot{y}o = 2x\dot{x}o + (\dot{x}o)^2 - \dot{x}o$. Στη συνέχεια

διέγραφε τους όρους που περιείχαν το $\dot{x}o$ σε δύναμη με εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας και στη συνέχεια διαιρούσε με το $\dot{x}o$ και έτσι προέκυπτε: $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = 2x - 1$.

Παρατηρούμε ότι ο Newton είχε κατά νου τα *απειροστά* τα οποία δεν θεωρούσε μετρήσιμα (πεπερασμένα), αλλά ούτε και ακριβώς ίσα με το μηδέν. Προσπάθησε να διασαφηνίσει αυτό το σημείο με τη θεωρία του των «πρώτων και έσχατων λόγων» που περιλαμβάνεται στο έργο του *De quadratura curvarum* (1704). Όμως και η έννοια του έσχατου λόγου δεν είναι απολύτως σαφής. Το έργο του Principia (1687) περιλαμβάνει και την έννοια του ορίου, αλλά με τρόπο τέτοιο που ήταν πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητή. Ο D.J. Struik (1982, σελ.180) αναφέρει ένα απόσπασμα από το Principia:

> Αυτοί οι έσχατοι λόγοι, με τους οποίους οι ποσότητες εξαλείφονται δεν είναι στην πραγματικότητα λόγοι των έσχατων ποσοτήτων, αλλά όρια προς τα οποία οι λόγοι των ποσοτήτων τείνουν οπωσδήποτε, όταν φθίνουν εξακολουθητικά. Ουδέποτε ξεπερνάνε αυτά τα όρια, τα πλησιάζουν όμως έτσι ώστε η διαφορά από αυτά να γίνεται μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα. Ούτε τα φτάνουν, στ' αληθινά, ωσότου οι ποσότητες ελαττωθούν τόσο, ώστε να καταστούν απειροελάχιστες.

Αυτά πολύ απείχαν από τη σαφήνεια. Η αυστηρότερη κριτική που δέχτηκε το έργο του Newton, έγινε από τον επίσκοπο George Berkeley (1685 - 1753) στο έργο του *The Analyst*, και ειδικότερα για τη χρήση των απειροστών ποσοτήτων, λέγοντας χαρακτηριστικά: «οι επιστήμονες επιτίθενται στη θρησκεία, θεωρώντας την παράλογη. Ας βελτιώσουν λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι σκέπτονται. Μια ποσότητα ή είναι μηδενική ή δεν είναι. Δεν υπάρχει τίποτα ενδιάμεσο» (Γιαννακούλιας, 2004).

Ο Leibniz, από την άλλη μεριά, εργάστηκε με τα προβλήματα του Απειροστικού Λογισμού κατά κύριο λόγο γεωμετρικά. Η κύρια συνεισφορά του στα μαθηματικά είναι στην Ανάλυση. Πιστεύεται ότι ο Leibniz ανακάλυψε τον Απειροστικό Λογισμό ανεξάρτητα από τον Newton, παρότι ο Newton προηγήθηκε του Leibniz. Σε κάθε περίπτωση όμως, το όλο σύστημα των χαρακτήρων και συμβόλων του Λογισμού ήταν αδιαμφισβήτητα ανακάλυψη του Leibniz. Το 1675 στην μεγαλύτερη εργασία του με τίτλο: *"On Arithmetical Quadrature of the Circle, the Ellipse and the Hyperbola"*, η οποία δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1693, πραγματεύεται τη θεμελίωση, με αυστηρό τρόπο, της θεωρίας των απειροστών ή αδιαίρετων ποσοτήτων. Σε αντίθεση με τον Galileo, ακριβώς επειδή θεωρούσε τα μαθηματικά ως επιστήμη των ποσοτήτων,

δεν μπορούσε να συμβιβαστεί με τα αδιαίρετα ως μη-ποσότητες. Για τον Leibniz τα αδιαίρετα είναι απείρως μικρές θετικές ποσότητες που είναι μικρότερες από οποιαδήποτε δοσμένη, ενώ οι απείρως μεγάλες ποσότητες είναι ποσότητες μεγαλύτερες από οποιαδήποτε δοσμένη. Και τα δύο είδη των ποσοτήτων αυτών είναι μεταβλητές ποσότητες. Μιλάμε βέβαια για ποσότητες επινοήματα της φαντασίας μας, αλλά παρόλα αυτά ποσότητες, οι οποίες δεν έχει σημασία αν εμφανίζονται στη φύση ή όχι, αφού έχουν τόση χρησιμότητα στην ανακάλυψη και στην απόδειξη καθώς επίσης και στη συντόμευση του λόγου και της σκέψης (Knobloch, 1999).

Είναι βέβαια γνωστό ότι η έννοια του απειροστού δεν είναι καθόλου σαφής στο έργο του Leibniz. Ο Δ. Αναπολιτάνος (2005, σελ.115) αναφέρει χαρακτηριστικά: «Ο ίδιος [ο Leibniz] δεν ήταν διόλου σίγουρος για το οντολογικό της status. Η φύση των απειροστών δεν ξεκαθαρίστηκε ποτέ από τον Leibniz και εκείνο που πιο πολύ τα στήριζε ήταν…..η αδιαμφισβήτητη επιτυχία τους στο επίπεδο της μαθηματικής πρακτικής. Οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν για τον υπολογισμό παραγώγων και ολοκληρωμάτων δεν είχαν θεμελιωθεί με στέρεο τρόπο και οι αντιρρήσεις που εγέρθηκαν ήταν και πολλές και δίκαιες». Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας αντίρρησης, συνδεδεμένης πάλι με τον Berkeley, είναι το εξής: έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $y = x^2+x$. Κατά τον Leibniz, μια απειροστή μεταβολή της ποσότητας x θα οδηγούσε σε μια αντίστοιχη μεταβολή της συνάρτησης y. Έτσι έχουμε ότι $(y+dy) = (x+dx)^2+(x+dx)$ και στη συνέχεια καταλήγουμε στο $dy = 2xdx+(dx)^2+dx$. Διαγράφει τώρα το $(dx)^2$, δίνοντάς του τις ιδιότητες του μηδενός, και παίρνει $dy = 2xdx +dx$. Διαιρεί στη συνέχεια με το dx και προκύπτει: $\frac{dy}{dx} = 2x+1$. Σύμφωνα με τον Berkeley μια τέτοια διαδικασία δεν μπορούσε να είναι επιτρεπτή.

Για τον Leibniz το άπειρο είναι αποδεκτό και ως *δυνητικό*, με την έννοια της άπειρης διαιρετότητας εκτεταμένων αντικειμένων, και ως *πραγματικό*. Χαρακτηριστικό είναι το απόσπασμα από μια απάντησή του στο φιλόσοφο S. Foucher στο *Journal des Savants*, δημοσιευμένη το 1693 (στο Αναπολιτάνος, 2005):

> Είμαι τόσο πολύ υπέρ του πραγματικού απείρου ώστε, αντί να δεχτώ πως η φύση το απεχθάνεται, πιστεύω πως την επηρεάζει παντού έτσι ώστε να καταδεικνύει την τελειότητα του Δημιουργού. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης είναι, δεν λέω διαιρετό αλλά πράγματι διαιρεμένο και επομένως και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία όντων.

Η πίστη του στο *πραγματικό* άπειρο στηρίζεται στο ότι κάθε φαινομενικά εκτεταμένο σώμα αποτελείται από άπειρες μονάδες που το καθιστούν όχι απλά διαιρετό αλλά άπειρα διαιρεμένο. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι είναι έτοιμος να δεχτεί την ύπαρξη άπειρων αριθμών ή ευθειών με άπειρο μήκος. Παρά ταύτα ισχυρίζεται ότι ο χρόνος μπορεί να συνεχισθεί επ' άπειρον, πράγμα που σημαίνει ότι αποδέχεται την *δυνάμει* ατέρμονη πορεία, δηλαδή, τη δυνατότητα επ' άπειρον ιχνογράφησης μιας τέτοιας ευθείας (Αναπολιτάνος, 2005·Στεργίου, 2009). Ο Δ. Αναπολιτάνος (2005) αναφέρει ότι ο Leibniz σε κάποιο σημείο του έργου του ισχυρίζεται πως:

> Τα άπειρα αποτελούνται από πεπερασμένα με τον ίδιο τρόπο που τα πεπερασμένα αποτελούνται από απειροστά,

αποδεικνύοντας την αδυναμία διασύνδεσης του απείρου με το πεπερασμένο και του πεπερασμένου με τα απειροστά, αν εφαρμόσουμε διαδικασίες που είναι επιτρεπτές μόνο στα πλαίσια καθεμιάς από τις αντίστοιχες περιοχές.

Συμπερασματικά λοιπόν θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι, παρόλο που η επιτυχία του Απειροστικού Λογισμού όσον αφορά στις πρακτικές εφαρμογές ήταν εκπληκτική, στον πυρήνα του υπήρχαν ακόμα παράδοξα και αντιφάσεις. Εκτός από το γεγονός ότι θεωρεί δεδομένη την ύπαρξη αριθμών που δεν μπορούν να παρασταθούν με πεπερασμένο τρόπο, εμπλέκονται σε μαθηματικούς χειρισμούς άπειρα αθροίσματα απείρως μικρών ποσοτήτων. Τα «περίεργα» αυτά απειροστά είναι ταυτοχρόνως και μικρότερα από οποιονδήποτε θετικό αριθμό και δεν είναι ίσα με το μηδέν. Οι τεχνικές των Leibniz και Newton στηρίζονται σε ασυνέπειες και θολότητες γιατί, αφενός μεν, προσδίδουν ύπαρξη στα απείρως μεγάλα και απείρως μικρά, και αφετέρου γιατί παραδέχονται ότι μια άπειρη ακολουθία ποσοτήτων που μειώνονται επ' άπειρον, μπορεί να καταλήγει, χωρίς ποτέ να ξεπερνά, ούτε στην πραγματικότητα να φθάνει, σε πραγματικό «όριο» (μάλλον «σύνορο» είχε κατά νου ο Newton).

Οι μαθητές και οι υποστηρικτές των Newton και Leibniz χρησιμοποίησαν, μάλλον απερίσκεπτα, τις έννοιες του «απείρως μικρού» και του «απείρως μεγάλου» για να επιλύσουν τα πλέον σύνθετα προβλήματα στην αστρονομία, τη φυσική και τη μηχανική, χωρίς να αναρωτηθούν αν οι κανόνες που ισχύουν στις πράξεις των πεπερασμένων αθροισμάτων εφαρμόζονται και στα άπειρα αθροίσματα (Vilenkin, 1997). Κατά συνέπεια άρχισαν να πολλαπλασιάζονται οι περιπτώσεις όπου η λανθασμένη χρήση των απειροστών και των απείρως μεγάλων ποσοτήτων οδηγούσε σε παράδοξα.

Στη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στα μαθηματικά του 18ου και του 19ου αιώνα δεσπόζει η μεγαλειώδης μορφή του «πρίγκιπα των μαθηματικών»,

- Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Σε επιστολή του το 1831 προς τον μαθητή του αστρονόμο H. Schumacher γράφει χαρακτηριστικά (στο Kline, 1980):

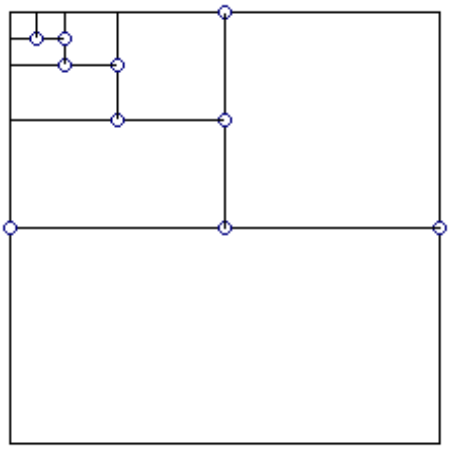
> Διαμαρτύρομαι για τη χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως πραγματικής. Αυτό ποτέ δεν επιτρέπεται στα μαθηματικά. Το άπειρο είναι ένας τρόπος έκφρασης, με τον οποίο κάποιος αναφέρεται στα όρια στα οποία ορισμένοι λόγοι πλησιάζουν όσο κοντά θέλουμε, ενώ άλλοι μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα.

Ο Gauss, αν και εναντιώθηκε έντονα, όπως φαίνεται και στην παραπάνω επιστολή, στη χρήση του πραγματικού απείρου στα μαθηματικά, το χρησιμοποίησε τελικά στις αριθμοθεωρητικές εργασίες του. Για πρώτη φορά στην ιστορία μελετήθηκαν συστηματικά από τον Gauss οι άπειρες σειρές, και μάλιστα εκείνες που συγκλίνουν, έναν τομέα με τον οποίο απέφυγαν να ασχοληθούν τόσο οι αρχαίοι Έλληνες (με εξαίρεση τον Ζήνωνα), όσο και οι περισσότεροι μαθηματικοί μέχρι την εποχή του Newton και του Leibniz (Struik, 1982). Ανακάλυψε, και μάλιστα σε ηλικία δεκαπέντε ετών, ότι το πλήθος π(ν) των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι ενός φυσικού αριθμού ν είναι κατά προσέγγιση ίσο με ν/lnν. Η πιο ακριβής διατύπωση είναι το περίφημο θεώρημα των πρώτων αριθμών: $\lim_{\nu\to\infty}\frac{\pi(\nu)}{(\nu/\ln\nu)}=1$ (Davis & Hersh, 1981).

Ο M.B.W. Tent (2007) αναφέρει ότι ο Gauss, όταν ήταν ακόμα μαθητής του δημοτικού, συζητώντας με τον φίλο του J.C.Martin Bartels - ο οποίος υπήρξε καθηγητής του Lobachevsky - δίνει μια απάντηση στο περίφημο παράδοξο του Ζήνωνος (του Αχιλλέα και της χελώνας), λέγοντας τα παρακάτω: «…φαντάσου Martin, ότι κόβουμε ένα χαρτί στη μέση. Κρατάμε το μισό και το άλλο μισό το κόβουμε πάλι στη μέση. Βάζουμε στην άκρη πάλι το ένα από τα δύο μισά (δηλ. τέταρτα του αρχικού φύλλου) και το ξανακόβουμε στη μέση (Σχ.1). Αν είχαμε τη δυνατότητα να συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία για πάντα, αυτό που θα είχαμε τελικώς πάνω στο τραπέζι μας, θα είναι ολόκληρο το αρχικό φύλλο χαρτιού κομμένο σε άπειρα κομματάκια που το καθένα από αυτά θα είναι ίσο με το μισό του κομματιού από το οποίο προέκυψε. Το άθροισμά τους θα είναι ίσο με ένα. Ο Ζήνων, βλέπεις, ισχυρίστηκε ότι ο Αχιλλέας κάλυπτε κάθε φορά το κενό κατά το ήμισυ. Το λάθος του ήταν ότι αναφερόταν σε μια πεπερασμένη μόνο

έκταση της διαδρομής, εντός πεπερασμένου χρόνου. Αν υπήρχε άπλετος χρόνος, η χελώνα θα έτρωγε τη σκόνη του Αχιλλέα!»

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\ldots=1$$



Σχ.1

Ο Gauss είναι εκείνος που προώθησε την αποδοχή των άρρητων αριθμών. Σε μια διατριβή που έγραψε για τις απαιτήσεις του πτυχίου του, η οποία εκδόθηκε το 1799, απέδειξε ότι: κάθε πολυωνυμική εξίσωση με έναν άγνωστο έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας). Με την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, ο Gauss «αναγκάστηκε» να αποδεχθεί τους άρρητους αριθμούς ως λύσεις εξισώσεων, προετοιμάζοντας το έδαφος για την αναζήτηση ενός σαφούς ορισμού για τον άρρητο αριθμό (Clawson, 2005).

Πολύ κοντά στη αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού, έφθασε ο μαθηματικός και φιλόσοφος

- Bernhard Bolzano (1781 - 1848), ο οποίος έδωσε ικανοποιητικό ορισμό για τη συνεχή συνάρτηση - για πρώτη φορά έγινε σαφές ότι η έννοια της *συνέχειας* προϋποθέτει γνώση της έννοιας του ορίου - όρισε την έννοια της παραγώγου και την έννοια του ορίου ακολουθίας. Για τον Bolzano, μια συνάρτηση f(x) σε ένα διάστημα είναι *συνεχής*, αν για κάθε τιμή του x που είναι εσωτερικό του διαστήματος, η διαφορά f(x+Δx)-f(x) γίνεται και μένει μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, με Δx επαρκώς μικρή ποσότητα, θετική ή αρνητική (Γιαννακούλιας, 2004). Μόλις το 1920 ανακαλύφθηκε πρωτότυπη εργασία γραμμένη πριν το 1834, στην οποία ο Bolzano βρίσκει μια συνάρτηση συνεχή που δεν είναι παραγωγίσιμη σε

κανένα σημείο της (http://demonstrations.wolfram.com/BolzanosFunction/) - ο Weierstrass βρίσκει το 1875 επίσης μια - ανατρέποντας έτσι την αρχή που διέπει τα έργα των Newton, Leibniz και άλλων μεταγενέστερων, ότι «κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγωγο» (Γιαννακούλιας, 2004).

Ο Bolzano δεν αποδέχτηκε την ύπαρξη των απείρως μεγάλων και απείρως μικρών ποσοτήτων, ασπάστηκε όμως την άποψη του Galileo για την πιθανότητα ύπαρξης του *ενεργεία* απείρου (Στεργίου, 2009). Δύο χρόνια μετά το θάνατό του, δημοσιεύτηκε το έργο του *Paradoxien des Unendliches*, μια μελέτη των παράδοξων του απείρου. Στο βιβλίο αυτό ο Bolzano επιχείρησε να μελετήσει τις ιδιότητες του *πραγματικού* (*ενεργεία*) απείρου, και εκφράζει την πιθανότητα της εισαγωγής του απείρου στα μαθηματικά, ως αντικείμενο μελέτης. Είναι η πρώτη προσπάθεια μαθηματικοποίησης του *ενεργεία* απείρου. Εισήγαγε τη χρήση του όρου Menge - τη γερμανική λέξη για το σύνολο, η οποία υιοθετήθηκε στη συνέχεια από τον G. Cantor - ως συλλογή αντικειμένων που τα χαρακτηρίζει κάποια κοινή ιδιότητα και όρισε την έννοια του πληθάριθμου ή «μεγέθους» ενός συνόλου (Δοξιάδης, Παπαδημητρίου, Παπαδάτος & Di Donna, 2008). Το βιβλίο προέβλεπε πολλές βασικές αρχές της θεωρίας των απειροσυνόλων, όχι όμως με την ακρίβεια που τις διατύπωσε στις εργασίες του ο Cantor, του οποίου ο Bolzano υπήρξε πνευματικός πατέρας (Vilenkin, 1997). Έδειξε ότι παράδοξα σαν εκείνα που είχε επισημάνει ο Galileo ήταν συνηθισμένα όχι μόνο στους φυσικούς αριθμούς αλλά και στους ρητούς. Συγκεκριμένα, ο Bolzano έδειξε ότι όλοι οι ρητοί που ανήκουν στο [0,5] και εκείνοι που ανήκουν στο [0,12] αντιστοιχίζονται ένας με έναν (Clegg, 2003). Ο Bolzano παραθέτει παραδείγματα 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων ενός απειροσυνόλου και εκείνων ενός γνήσιου υποσυνόλου του, την οποία απορρίπτει ως μέθοδο σύγκρισης - οδηγεί στην «αντίφαση» ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμο του συνόλου των άρτιων - (Δοξιάδης κ.ά., 2008). Έτσι, υιοθετεί την υποσυνολική σχέση (το Ευκλείδειο αξίωμα «το μέρος είναι μικρότερο του όλου») ως μέθοδο σύγκρισης δυο απειροσυνόλων, ορίζει μερικές πράξεις μεταξύ απειροσυνόλων, όμως αποτυγχάνει στην προσπάθεια να αριθμητικοποιήσει το άπειρο και εγκαταλείπει την περεταίρω έρευνα (Moreno and Waldegg, 1991). Η αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού ήρθε το 19^{ο} αιώνα από τους

- Augustin Cauchy (1789 - 1857) και Karl Weierstrass (1815 - 1897). Η ουσία της δικής τους λύσης στο πρόβλημα ήταν να απαλλαγούν από τα απειροστά και το άπειρο και αντ' αυτών να σκέφτονται με όρους συσχετισμών μεταξύ μικρών αλλά πεπερασμένων ποσοτήτων, που

μπορούν να είναι όσο μικρές επιθυμούμε. Αυτή η προσέγγιση διατυπώνεται από τον Cauchy με τον ορισμό της (μαθηματικής) έννοιας του ορίου, απαλλαγμένης από κάθε γεωμετρική αναπαράσταση(στο Σεργίου, 2009):

> Όταν διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή προσεγγίζουν απεριόριστα μια συγκεκριμένη τιμή έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτήν λιγότερο από όσο επιθυμεί κανείς,, η τελευταία αυτή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.

Για παράδειγμα η ακολουθία πολυγώνων με αυξανόμενο αριθμό πλευρών έχει τον κύκλο ως όριο, γιατί μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πολύγωνο όσο κοντά θέλουμε στον κύκλο επιλέγοντας το πλήθος των πλευρών του όσο μεγάλο θέλουμε. Έτσι, παρόλο που τα πολύγωνα δεν γίνονται ποτέ στην πραγματικότητα κύκλος, ένα πολύγωνο μπορεί να είναι όσο κοντά θέλουμε σε έναν κύκλο. Δίνοντας αυτόν τον ορισμό του ορίου, ο Cauchy μπόρεσε στη συνέχεια να δώσει και τον ορισμό της *συνέχειας* μιας συνάρτησης.

Ο Cauchy καθορίζει το απειροστό ως μια μεταβλητή ποσότητα, η οποία γίνεται όλο και μικρότερη χωρίς να γίνεται όμως ποτέ ίση με μηδέν - έχει δηλ. όριο το μηδέν - και το άπειρο ως μια μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο (Clegg, 2003). Με βάση την έννοια του ορίου, όρισε την παράγωγο και το ορισμένο ολοκλήρωμα. Αρνούμενος την ύπαρξη του *ενεργεία* απείρου, όρισε τους άρρητους ως όριο ακολουθίας ρητών αριθμών, ξεφεύγοντας από τη μαθηματική αυστηρότητα που τον χαρακτήριζε, μη παρατηρώντας τον κύκλο που δημιουργείται από τον ορισμό αυτό των αρρήτων. Διότι η έννοια του ορίου, όπως την έδωσε ο ίδιος, στηρίζεται στην έννοια του πραγματικού αριθμού, που σημαίνει ότι η έννοια του αριθμού είναι προγενέστερη εκείνης του ορίου (Γιαννακούλιας, 2004). Ο Cauchy θεώρησε βέβαια τα απειροστά ως μεταβλητές των οποίων το όριο ήταν μηδέν, όμως το βασικό εμπόδιο ήταν ότι με τον τρόπο αυτό, δεν μπορούσε να τεθεί σε αυστηρά μαθηματική βάση το σύστημα των πραγματικών αριθμών (Στεργίου, 2009).

Την προσπάθεια για αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού, εξοβελίζοντας τα απειροστά από τα τυπικά μαθηματικά, συμπλήρωσε ο Weierstrass που θεμελίωσε την Ανάλυση σε καθαρά αριθμητική βάση. Προσπάθησε να θεμελιώσει τον Απειροστικό Λογισμό στηριζόμενος μόνο πάνω στην έννοια του πραγματικού αριθμού, την οποία διαχώρισε από τη γεωμετρική της εποπτεία. Όρισε τον άρρητο αριθμό όχι ως όριο μιας ακολουθίας, αλλά ως μια

«βασική ακολουθία» αυτή καθεαυτή ή ως μια κλάση ισοδύναμών της (ο Cantor λίγο αργότερα χρησιμοποίησε τις ακολουθίες Cauchy των ρητών για τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών). Ο ίδιος όμως δεν δημοσίευσε ποτέ αυτού του είδους τη θεμελίωση. Έγινε γνωστή, μέσω των διαλέξεών του, από μαθητές του (Στεργίου, 2009).

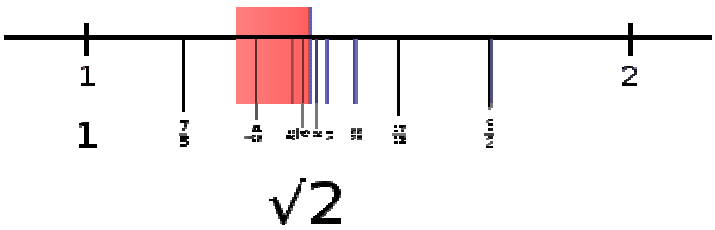
Ο D. Hilbert, στη διάλεξη του *"Über das Unendliche"* που διαβάστηκε στις 4 Ιουνίου 1925 σε μια συγκέντρωση που οργάνωσε η Μαθηματική Εταιρεία της Βεστφαλίας για να τιμήσει τη μνήμη του Weierstrass, αναφέρει: «Ως αποτέλεσμα της οξυδερκούς κριτικής του, ο Weierstrass εξασφάλισε ένα σταθερό θεμέλιο για τη Μαθηματική Ανάλυση. Διασαφηνίζοντας πολλές έννοιες, ειδικά εκείνες του ελάχιστου, της συνάρτησης και της παραγώγου, απομάκρυνε τις ατέλειες που ακόμη βρίσκονταν στον Απειροστικό Λογισμό και τον απάλλαξε από όλες τις ασαφείς ιδέες σχετικά με το απειροστό και αναμφισβήτητα ξεπέρασε τις δυσκολίες που πήγαζαν από την έννοια του απειροστού…. Η Ανάλυση του Weierstrass πράγματι εξαλείφει το άπειρα μεγάλο και άπειρα μικρό με το να αναγάγει τις προτάσεις που αναφέρονται σ' αυτά, σε προτάσεις που μιλούν για σχέσεις πεπερασμένων μεγεθών. Αν σήμερα στη Μαθηματική Ανάλυση υπάρχει απόλυτη συμφωνία και βεβαιότητα, όταν εφαρμόζονται οι μέθοδοι συμπερασμού που βασίζονται στις έννοιες του ασύμμετρου αριθμού και του ορίου γενικά,…τότε αυτή η ευτυχής έκβαση των πραγμάτων οφείλεται κυρίως στην επιστημονική δραστηριότητα του Weierstrass» (Χριστοδουλίδης, 1993). Η αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού επαναφέρει την έννοια του *δυνάμει* απείρου και απομακρύνει το *ενεργεία* άπειρο (McFarlane, 1999). Και όμως το άπειρο εξακολουθούσε να εμφανίζεται στην άπειρη αριθμητική ακολουθία που ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς και στην έννοια του ίδιου του συστήματος των πραγματικών αριθμών, το οποίο θεωρείται ότι αποτελεί ολότητα πλήρη και κλειστή που δίνεται μεμιάς. Όπως αναφέρει και ο D. Hilbert: «Το (*ενεργεία*) άπειρο κατάφερε, μεταμφιεσμένο να τρυπώσει ξανά στη θεωρία του Weierstrass και να ξεφύγει τον αυστηρό έλεγχο της κριτικής του» (Χριστοδουλίδης, 1993).

Παρά τη θεμελίωση που εξασφάλισε ο Weierstrass για τον Απειροστικό Λογισμό, οι αμφισβητήσεις σχετικά με τη θεμελίωση της Ανάλυσης συνεχίζονται. Αυτό που χρειαζόταν ήταν μια πραγματική κατανόηση του τι είναι ένας άρρητος αριθμός, και ως εκ τούτου ένας σαφής ορισμός ενός πραγματικού αριθμού (Mankiewicz, 2000). Μέχρι το 1850 οι άρρητοι ήταν αριθμοί που *δεν* ήταν ρητοί και υπερβατικοί οι αριθμοί που *δεν* ήταν αλγεβρικοί. Βλέπουμε

λοιπόν ότι οι άρρητοι και οι υπερβατικοί αριθμοί ορίζονταν μέσω του τι *δεν* είναι και δεν ήταν καθόλου σαφές εάν είχαν δικές τους ιδιότητες. Η λύση δόθηκε από τον

- Richard Dedekind (1831 - 1916) ο οποίος στην ουσία αναγκάστηκε να εισάγει το άπειρο του συνεχούς στα μαθηματικά. Το γεωμετρικό συνεχές είχε σχέση με την πυκνότητα των σημείων μιας ευθείας δηλ. για οποιαδήποτε δύο σημεία της ευθείας υπάρχει ένα σημείο ανάμεσά τους. Ωστόσο οι ρητοί έχουν την ίδια ιδιότητα χωρίς να σχηματίζουν ένα συνεχές. Επειδή υπάρχουν σημεία στο γεωμετρικό συνεχές, όπως η τετραγωνική ρίζα του δύο, που δεν αντιστοιχούν σε ρητό αριθμό, ο Dedekind επινόησε μια τεχνική για να γεμίσει τα «κενά» μεταξύ των ρητών με τους άρρητους αριθμούς. Εγκαταλείποντας την προσπάθεια να βρει τρόπους συγκόλλησης σημείων για να σχηματίσει ένα συνεχές, ο Dedekind προσπάθησε να το καθορίσει θεμελιώνοντας λογικά τους άρρητους αριθμούς ορίζοντας την *τομή (Schnitt)* ως εξής: «αν λοιπόν θεωρήσουμε δεδομένο οποιοδήποτε διαχωρισμό του συστήματος Q (των ρητών) σε δύο κλάσεις, τις A_1 και A_2,….ώστε κάθε αριθμός α_1 της A_1 είναι μικρότερος από κάθε αριθμό α_2 της A_2, τότε για λόγους συντομίας μπορούμε να ονομάσουμε αυτόν το διαχωρισμό *τομή* και να τη συμβολίσουμε (A_1,A_2)» (Clawson, 2005).

Ο R. Mankiewicz (2000, σελ.150) περιγράφει τις «τομές Dedekind» ως εξής: «Φανταστείτε την ευθεία των αριθμών σαν ένα στερεό σωλήνα απείρου μήκους γεμάτο με διατεταγμένους ρητούς αριθμούς. Μια τομή του σωλήνα θα μας δώσει δυο τμήματα, έστω Α και Β, και θα μας αποκαλύψει δύο διατομές (τα άκρα των Α και Β). Κοιτάζοντας τις εκτεθειμένες αυτές πλευρές μπορούμε να διαβάσουμε τους αριθμούς που μας δείχνουν (η μια ή η άλλη). Αν δεν μας δείχνουν κανέναν αριθμό, τότε η τομή έχει γίνει σε έναν άρρητο». Για παράδειγμα, έστω ότι το αριστερό τμήμα Α περιέχει όλους τους ρητούς που είναι μικρότεροι του 2 και το δεξιό τμήμα Β εκείνους που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2. Το 2 είναι η «τομή». Αν τώρα το τμήμα Α περιέχει τους ρητούς των οποίων το τετράγωνο είναι μικρότερο του 2 και το τμήμα Β εκείνους που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο του 2, και πάλι ορίζεται η «τομή»: είναι το $\sqrt{2}$ (Kaplan & Kaplan, 2004).



Συνεπώς το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο όλων των δυνατών τομών. Οι «τομές Dedekind» με τις οποίες τα σύγχρονα μαθηματικά ορίζουν τους ασύμμετρους αριθμούς, παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, με τη θεωρία του Ευδόξου όπως αυτή παρουσιάζεται στο V βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Ο ορισμός του Dedekind για τους άρρητους, όμως, απαιτεί τη χρήση απειροσυνόλων ρητών αριθμών. Έτσι, τελικά, το *ενεργεία* άπειρο έπρεπε να δηλωθεί σαφώς στα μαθηματικά, ώστε να παρέχει τα θεμέλια για τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται και στην αναλυτική γεωμετρία και στον απειροστικό λογισμό.

Εκείνος που συνέβαλε με μοναδικό τρόπο στην αναγέννηση του *ενεργεία* απείρου στα μαθηματικά ήταν ένας μαθητής των Dedekind και Weierstrass, ο

- Georg Cantor (1845 - 1918). Υπήρξε φανατικός αρνητής της υπόστασης των απειροστών ως αριθμών. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε στα μαθηματικά με αυστηρό τρόπο τη θεωρία συνόλων, καθώς επίσης και τους υπερπεπερασμένους αριθμούς. Το 1883 ορίζει το *σύνολο* ως μια πολλαπλότητα (*συλλογές* αντικειμένων κατά Bolzano) που μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ενότητα (τα στοιχεία της έχουν κάποια κοινή ιδιότητα). Το 1895 επαναδιατύπωσε τον ορισμό αυτόν ως εξής: «Λέγοντας *σύνολο*, εννοούμε κάθε συλλογή M από m διακριτά αντικείμενα των αισθήσεων ή της νόησής μας (τα οποία λέγονται *στοιχεία* του συνόλου M), συλλογή την οποία θεωρούμε ως ένα όλο» (Rucker, 2004). Μια από τις θεμελιώδεις συνεισφορές του Cantor ήταν η μέθοδος σύγκρισης απειροσυνόλων, σύμφωνα με την οποία ένα σύνολο είναι ισοδύναμο με ένα άλλο αν τα στοιχεία τους τίθενται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (1-1 και επί). Η πρόταση δηλ. που χρησιμοποιούσε ο Cantor, χωρίς να μπορέσει για πολλά χρόνια να αποδείξει, είναι η ακόλουθη: αν ένα σύνολο A δεν έχει λιγότερα στοιχεία από ένα σύνολο B και το B δεν έχει λιγότερα στοιχεία από το A, τότε τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αυτή η φαινομενικά απλή πρόταση αποδείχθηκε το 1897 από έναν φοιτητή του, τον F. Bernstein, και έκτοτε ονομάζεται θεώρημα Cantor-Bernstein (Vilenkin, 1997). Για παράδειγμα, το σύνολο των άρτιων είναι ισοπληθικό με το σύνολο των περιττών. Λιγότερο προφανές είναι το γεγονός ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμο με το σύνολο των άρτιων: κάθε φυσικός αντιστοιχεί στον διπλάσιό του και αντίστροφα. Ακόμα πιο σπουδαία και καταπληκτική είναι η απόδειξη από τον Cantor ότι το σύνολο των φυσικών είναι ισοδύναμο με εκείνο των ρητών αριθμών (αριθμήσιμο άπειρο). Σε ένα γράμμα του προς τον Dedekind, με τον οποίο τον συνέδεε στενή φιλία, απέδειξε αυτό που ο Dedekind απλώς υποπτευόταν: ότι το απειροσύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ισοδύναμο με το σύνολο των σημείων μιας ευθείας

και ακόμα περισσότερο με το σύνολο των σημείων όλου του τρισδιάστατου χώρου!! Γράφει χαρακτηριστικά: «το βλέπω, αλλά δεν το πιστεύω» (Kline, 1980). Και δεν είναι ο μόνος……

Κάποιος μπορεί λοιπόν εύκολα να υποθέσει ότι όλα τα απειροσύνολα έχουν την ίδια πληθικότητα. Ο Cantor απέδειξε ότι αυτή η άποψη ήταν λάθος, δημοσιεύοντας δυο αποδείξεις. Στη δεύτερη το 1891 απέδειξε ότι υπάρχουν απειροσύνολα που δεν μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών, κάνοντας χρήση του περίφημου διαγώνιου επιχειρήματος (diagonal argument): υπέθεσε ότι οι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1 είναι αριθμήσιμοι και μπορούν να παρασταθούν ως ακολουθίες απείρων όρων, εκφραζόμενοι ως περιοδικοί ή μη περιοδικοί δεκαδικοί: π.χ. το 0,2 μπορούσε να γραφεί με τη μορφή 0,20000… Μετά κατασκεύασε έναν αριθμό ο οποίος διέφερε από τον πρώτο κατά το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, από τον δεύτερο κατά το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο κ.ο.κ. Αυτός ο νέος αριθμός ήταν διαφορετικός από όλους τους δεδομένους αριθμούς, των οποίων η διάταξη είχε υποτεθεί πλήρης, άρα οι πραγματικοί αριθμοί δεν ήταν αριθμήσιμοι (Mankiewicz, 2000). Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι οι πέντε πρώτοι στη σειρά αριθμοί της δεδομένης απαρίθμησης που αντιστοιχούν στους φυσικούς αριθμούς 1,2,3,4 και 5 αντίστοιχα είναι οι:

0,1792038409827…	↔	1	0,3755500000000…	↔	2
0,0001788345441…	↔	3	0,4998783333333…	↔	4
0,8455967928739…	↔	5	……..		

Ο πίνακας βέβαια συνεχίζεται επ’ άπειρον. Η υπόθεση είναι ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί (κάποιοι θα είναι ρητοί με πεπερασμένα ή περιοδικά δεκαδικά ψηφία, ενώ άλλοι θα είναι άρρητοι) ανάμεσα στο 0 και στο1 θα περιλαμβάνονται στον πίνακα. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει αντίφαση, αρκεί να δημιουργήσουμε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1, ο οποίος να μην υπάρχει στον πίνακα. Αυτό το κάνουμε ως εξής: Για την πρώτη δεκαδική θέση μετά την υποδιαστολή επιλέγουμε ένα ψηφίο διαφορετικό από το δέκατο του αριθμού που απεικονίζεται στο1. Επιλέγουμε δηλ. ένα ψηφίο διαφορετικό του 1. Για την δεύτερη δεκαδική θέση επιλέγουμε ένα ψηφίο διαφορετικό από το εκατοστό του αριθμού που απεικονίζεται στο 2. Επιλέγουμε δηλ. ένα ψηφίο διαφορετικό του 7. Ο αριθμός μας μέχρι στιγμής θα μπορούσε να είναι ο: 0,34. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, επιλέγοντας πάντα το νιοστό ψηφίο έτσι ώστε να είναι διαφορετικό από το νιοστό ψηφίο του νιοστού πραγματικού αριθμού, ο αριθμός μας θα είναι: 0,34567….. Αυτός ο αριθμός δεν είναι αριθμός του πίνακά μας. Αν κάποιος ισχυριστεί το

αντίθετο, δεν έχουμε παρά να πάρουμε το νιοστό ψηφίο του νιοστού πραγματικού αριθμού και να δείξουμε ότι αυτό είναι διαφορετικό από το δικό μας νιοστό ψηφίο (Clawson, 2005).

Συνεπώς, το σύνολο των σημείων του συνεχούς (το σύνολο των πραγματικών αριθμών) είναι άπειρο, μεγαλύτερο από το άπειρο των φυσικών αριθμών. Το 1895 ο Cantor διατύπωσε τις απόψεις του δημιουργώντας μια καινούργια αριθμητική οντότητα, τους υπερπεπερασμένους πληθικούς αριθμούς. Παριστάνει το αριθμήσιμο άπειρο με το σύμβολο $\aleph_0$ (άλεφ μηδέν) και το πρώτο μη αριθμήσιμο άπειρο με $\aleph_1$. Μετά ακολουθεί μια άπειρη αλληλουχία υπερπεπερασμένων αριθμών, που ο καθένας τους είναι ο πληθάριθμος του συνόλου όλων των υποσυνόλων του προηγούμενου συνόλου. Όσο για το $\aleph_1$, ο Cantor υπέθεσε ότι ήταν ο πληθικός αριθμός του συνόλου των πραγματικών αριθμών, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιο τρίτο είδος απείρου που να ιεραρχείται ανάμεσα στα δύο. Αυτή είναι η περίφημη «Υπόθεση του Συνεχούς» με την οποία πέρασε την υπόλοιπη μαθηματική του ζωή ο Cantor προσπαθώντας να την αποδείξει, χωρίς όμως να το καταφέρει (ο P. Cohen απέδειξε το 1963 ότι: η «Υπόθεση του Συνεχούς» είναι ανεξάρτητη, δηλαδή δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε η ίδια ούτε η άρνησή της με το υπάρχον αξιωματικό σύστημα της θεωρίας συνόλων) (Δοξιάδης κ.ά., 2008).

Ο Cantor υπέφερε από σοβαρά ψυχικά νοσήματα και νοσηλεύθηκε για μακρά χρονικά διαστήματα με τη διάγνωση της μελαγχολίας, προβλήματα που μπορούν να αποδοθούν στην πολεμική που δέχθηκε η θεωρία συνόλων από μέρος της μαθηματικής κοινότητας. Πέθανε στο ψυχιατρικό άσυλο όπου βρισκόταν έγκλειστος παρά τη θέλησή του (Δοξιάδης κ.ά., 2008).

Οι ανακαλύψεις του Cantor είχαν ένθερμους υποστηρικτές, όπως τον D.Hilbert, αλλά και φανατικούς πολέμιους, όπως τους L. Kronecker και H. Poincaré. Τα παράδοξα δεν έλειψαν ούτε από τα μαθηματικά του απείρου του Cantor. Ο Bertrand Russell (1872 - 1970) ανακάλυψε πολύ γρήγορα, ότι ακόμα και η πιο απλή ιδέα του συνόλου έχει ενδογενή παράδοξα: ας ορίσουμε «κανονικό» (normal) ένα σύνολο που δεν είναι στοιχείο του εαυτού του και ως «μη κανονικό» (abnormal) ένα σύνολο που είναι στοιχείο του εαυτού του. Για παράδειγμα το σύνολο όλων των τετραγώνων δεν είναι τετράγωνο και συνεπώς δεν είναι στοιχείο του εαυτού του, άρα είναι «κανονικό σύνολο». Από την άλλη μεριά, το σύνολο των μη τετραγώνων δεν είναι επίσης τετράγωνο, συνεπώς είναι στοιχείο του εαυτού του, άρα είναι «μη κανονικό» σύνολο. Έστω τώρα R το σύνολο όλων των «κανονικών συνόλων». Αν το R είναι «κανονικό», τότε είναι στοιχείο του εαυτού του, δηλ. είναι «μη κανονικό». Αν το R είναι «μη κανονικό», τότε δεν

περιέχεται στον εαυτό του, δηλ. είναι κανονικό. Με λίγα λόγια, ένα σύνολο είναι στοιχείο του εαυτού του αν και μόνο αν δεν είναι στοιχείο του εαυτού του. Αυτό είναι λοιπόν το περίφημο παράδοξο που ανακάλυψε ο Russell το 1901 (http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/, http://en.wikipedia.org/wiki/Russell's_paradox). Στο Δοξιάδης κ.ά.(2008), ο Russell εμφανίζεται να λέει: «ίσως να ακούγεται σα σπαζοκεφαλιά, όμως ανατρέπει τελείως την έννοια του συνόλου ως συλλογής με κοινή ιδιότητα».

Ο Russell έβλεπε τα παράδοξα σαν πρόβλημα που έπρεπε να εξαλειφθεί μέσω μιας αυστηρής γραμμικής ιεραρχίας των συνόλων. Ο Cantor, από την άλλη μεριά, έβλεπε τα παράδοξα αυτά με διαφορετικό τρόπο: όπως υπάρχουν κάποιες συλλογές πραγμάτων που μπορούν με *συνέπεια* να ειδωθούν ως μια ολότητα, έτσι υπάρχουν και άλλες απείρως μεγάλες που δεν μπορούν με *συνέπεια* να ειδωθούν ως «ολοκληρωμένο πράγμα». Ο Cantor ονόμαζε αυτές τις συλλογές «μη συνεπείς» και τις αντιμετώπιζε ως το «Απόλυτο» άπειρο - αυτό που μπορεί να συλλάβει μόνο ο Θεός (McFarlane, 1999). Σε μια επιστολή του προς τον Dedekind το 1899 γράφει σχετικά (στο Rucker, 2004):

> Εάν ξεκινήσουμε από την έννοια μιας ορισμένης πολλαπλότητας αντικειμένων, είναι αναγκαίο….να διακρίνουμε δυο είδη πολλαπλοτήτων. Διότι μια πολλαπλότητα μπορεί να είναι τέτοια ώστε η υπόθεση ότι όλα τα στοιχεία της «συνυπάρχουν» να οδηγεί σε αντίφαση και επομένως……να είναι αδύνατο να τη συλλάβουμε ως «ολοκληρωμένο πράγμα». Τέτοιες πολλαπλότητες τις αποκαλώ *Απόλυτα Άπειρες* ή *ασυνεπείς πολλαπλότητες*.

Φαίνεται λοιπόν ότι η κλάση όλων των συνόλων είναι μια άπειρη οντότητα, που είναι τουλάχιστον αμφισβητήσιμο αν είναι ενιαία οντότητα και σίγουρα αυτή η *Απόλυτα Άπειρη* πολλαπλότητα δεν είναι δυνατόν να συλληφθεί πλήρως από τον ανθρώπινο νου. Εκεί λοιπόν που τα σύνολα ήταν τόσο ξεκάθαρα διαισθητικά και έμοιαζαν να είναι η ιδανική λύση για τα μυστήρια των αριθμών, ξαφνικά η φύση τους έγινε τόσο περίπλοκη, ασαφής και ασυνεπής, που τα προβλήματα που δημιούργησαν έμοιαζαν μη ελέγξιμα. Κάποτε ο Cantor ρώτησε τον Dedekind πώς εκείνος σκεφτόταν ένα σύνολο · και ο Dedekind του απάντησε ότι το φαντάζεται σαν ένα κλειστό σακί με συγκεκριμένα πράγματα μέσα, για τα οποία δεν γνωρίζουμε τίποτα, εκτός από το ότι είναι διακριτά και ότι είναι στην πραγματικότητα εκεί. Λίγα λεπτά αργότερα ο Cantor άνοιξε τα χέρια του διάπλατα και είπε: «για μένα σύνολο είναι η άβυσσος» (Kaplan & Kaplan, 2004).

Παρόλα αυτά, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20ου αιώνα και υποστηρικτής του Cantor, ο

- David Hilbert (1862 - 1943), στην περίφημη διάλεξή του *"Über das Unendliche"*, αναφέρει χαρακτηριστικά: «χάρη στις ταυτόχρονες γιγάντιες προσπάθειες των Frege, Dedekind και Cantor, το άπειρο ανήλθε στο θρόνο του και απήλαυσε τον απόλυτο θρίαμβό του. Κατά την τολμηρή του πτήση, το άπειρο έφτασε σε ιλιγγιώδη ύψη επιτυχίας…….Κανείς δεν θα μπορέσει να μας διώξει από τον παράδεισο που δημιούργησε για μας ο Cantor» (Hilbert, 1926). Επίσης το 1926, αναφερόμενος στο έργο του Cantor, λέει: «είναι το πιο αξιοθαύμαστο λουλούδι της ανθρώπινης διανόησης και ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της καθαρά λογικής ανθρώπινης δραστηριότητας» (Kline, 1980). Ο Hilbert κατέβαλε σπουδαία προσπάθεια να αντιμετωπίσει τις δυσκολίες της θεωρίας των απειροσυνόλων, χωρίς να αγνοήσει τα επιτεύγματα της εν λόγω θεωρίας. Παρατηρεί στην εν λόγω πραγματεία ότι, ενώ το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο αποβλήθηκαν κάποια στιγμή από τη Μαθηματική Ανάλυση, το άπειρο κατόρθωσε να επανεμφανιστεί, πρώτα μέσα από την άπειρη ακολουθία που ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς και στη συνέχεια στο σύστημα των πραγματικών αριθμών, όταν το συλλαμβάνουμε ως μια δεδομένη ολότητα πλήρη και κλειστή. Κατ' αναλογία με τον Weierstrass, ο Hilbert επιθυμούσε να αποβάλει τα απειροσύνολα από τα μαθηματικά. Κατά την άποψή του, η χρήση τέτοιων συνόλων σε μαθηματικούς συλλογισμούς πρέπει να θεωρείται ως «τρόπος του λέγειν» (ως άλλος Gauss…). Το άπειρο, κατά την άποψή του, δεν είναι επιτρεπτό ως βάση της λογικής σκέψης, διότι δεν αποτελεί μέρος της φύσης. Ο δρόμος για έγκυρες πράξεις με το άπειρο περνά μέσα από το πεπερασμένο (η λεγόμενη *περατοκρατική* άποψη). Για να προφυλάξει τα μαθηματικά από την εισβολή εννοιών του απείρου, επεξεργάστηκε μια θεωρία τυπικών αποδείξεων οι οποίες συνδέονται με την προσφυγή στην εποπτεία και τη χρήση της διαίσθησης. Το ευρύτερο σχέδιό του για την απόλυτα αυστηρή θεμελίωση των μαθηματικών (*Πρόγραμμα* του Hilbert), που περιλαμβάνει και το αίτημα της λεγόμενης *πληρότητας*, δεν μπόρεσε να πραγματοποιηθεί (ο «κεραυνός» του θεωρήματος της *Μη Πληρότητας* του K. Gödel το 1931, ήταν καταστροφικός…. ή μήπως και λυτρωτικός…).

Η περιπλάνησή μας σταματάει κάπου εδώ. Έστω και επιγραμματικά, μας δόθηκε η ευκαιρία να έρθουμε σε επαφή με τους δαιδαλώδεις δρόμους που ακολούθησε το ανθρώπινο πνεύμα στην προσπάθειά του να κατανοήσει, να δαμάσει και να χρησιμοποιήσει μια από τις πιο αντιφατικές έννοιες, το άπειρο. Η σύγκρουση άπειρου και πεπερασμένου είναι βαθειά ριζωμένη σε κάθε

προσπάθεια εξερεύνησης, προσέγγισης και κατανόησης της έννοιας αυτής. Είναι η πεπερασμένη φύση μας ή τα εμπόδια που εκείνη στήνει για να αποφύγουμε την αποδοχή της εν δυνάμει άπειρης δομής μας, που ενέχει τον κίνδυνο της βλασφημίας…..; Και επειδή ο νους στήνει επικίνδυνα παιγνίδια, ταξιδέψαμε από τους μύθους και τις δεισιδαιμονίες, στις πρώτες επιστημονικές αναζητήσεις του Πυθαγόρα, του Ζήνωνος και του Αριστοτέλη. Και ξανά μετά από χρόνια, στην πάλη με τα απειροστά, τους άρρητους, τα απείρως μεγάλα, τις μεταβλητές, τον Galileo και τα ψήγματα σύγκρισης απείρων, τον Newton, τον μέγα Leibniz, για τον οποίο το χωροχρονικό (και όχι το μαθηματικό) άπειρο είναι αποδεκτό και ως *πραγματικό*, μέχρι την τραγική φυσιογνωμία του Cantor, «πατέρα» του *ενεργεία* απείρου και της συνολοθεωρίας, της οποίας η εμφάνιση και εξέλιξη αποτελεί μια κεφαλαιώδους σημασίας φάση στην ιστορία των μαθηματικών και στην προσπάθεια της ανθρωπότητας να κατακτήσει την έννοια του απείρου. Η προσπάθεια αυτή, που δοκιμάζει τα όρια και τις ανοχές του ανθρώπινου νου θα συνεχίζεται, διότι η ιδέα του απείρου είναι ανεξάντλητη και το ανθρώπινο πνεύμα πάντα θα βρίσκει σ’ αυτή νέες προκλήσεις.

.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ

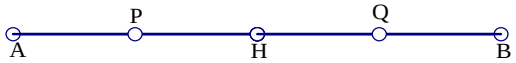
Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, παρουσιάζουμε την ανασκόπηση ενός αριθμού ερευνών που αφορούν στην κατανόηση της έννοιας του απείρου κυρίως από μαθητές αλλά και από φοιτητές. Οι έρευνες χωρίζονται σε δυο κύριες κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία είναι οι έρευνες που εξετάζουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/φοιτητές (στη συνέχεια με τον όρο αυτό θα εννοούμε και μαθήτριες/φοιτήτριες) σχετικά με την κατανόηση της έννοιας, την πηγή των δυσκολιών αυτών, και τα λάθη που κάνουν ως συνέπεια των δυσκολιών αυτών. Το πλαίσιο των ερευνών είναι κυρίως συνολοθεωρητικό, όπου μελετάται η κατανόηση του *ενεργεία* απείρου μέσω των σχέσεων μεταξύ πληθαρίθμων απειροσυνόλων (όταν στη συνέχεια αναφερόμαστε σε απειροσύνολα, θα εννοούμε αριθμήσιμα απειροσύνολα). Μπορούμε εδώ να πούμε ότι σε γενικές γραμμές οι μαθητές επιλέγουν την προσέγγιση του Bolzano (υποσυνολική σχέση), όσον αφορά στη σύγκριση των πληθαρίθμων απειροσυνόλων με συνέπεια π.χ. να θεωρούν ότι το σύνολο των φυσικών είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των άρτιων, ή ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερου μήκους από ένα άλλο περιλαμβάνει περισσότερα σημεία. Παρουσιάζεται δυσκολία στην εφαρμογή της αντιστοίχισης 1-1 (προσέγγιση του Cantor) για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Όπου εμπλέκεται το άπειρο με την έννοια της ατέρμονης κατάτμησης (*δυνάμει* άπειρο), επιλέγεται το πλαίσιο της Ανάλυσης για την εξαγωγή ερμηνειών και συμπερασμάτων. Να σημειώσουμε εδώ ότι η αντίληψη: «ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να διαιρείται επ' άπειρον» εμφανίζεται στην πλειοψηφία των μαθητών.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι έρευνες που, κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των ερευνών της πρώτης κατηγορίας, διαμορφώνουν ένα πλαίσιο διδακτικό για να διαπιστωθεί αν και κατά πόσο μπορούν να βελτιωθούν οι επιδόσεις των μαθητών στα σημεία που έχουν χαρακτηριστεί δύσκολα και προβληματικά, από τις οποίες προκύπτουν ενδιαφέροντα και χρήσιμα συμπεράσματα για αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση στην πράξη. Έχει παρατηρηθεί π.χ. ότι αριθμητική - αναλυτική αναπαράσταση των συνόλων βοηθάει περισσότερο τους μαθητές να εξάγουν σωστότερα συμπεράσματα, από ότι η γεωμετρική αναπαράσταση των ίδιων συνόλων.

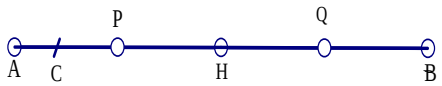
Ξεκινώντας λοιπόν την ανασκόπηση, σύμφωνα με τους Fischbein, Tirosh and Hess (1979), υπάρχουν δύο θεμελιακά διαφορετικές οπτικές που πρέπει να ληφθούν υπόψη όσον αφορά στην έννοια του απείρου: από τη μια μεριά το άπειρο ως μαθηματική οντότητα, ως αδιαμφισβήτητα λογική κατασκευή, και από την άλλη η ψυχολογική διάσταση του απείρου, η οποία μπορεί να παραμένει σύνθετη, αντιφατική και ισχυρά σχετιζόμενη με τη διαίσθηση (οι Fischbein et al. (1979) ορίζουν ως *διαίσθηση* τις «αυθόρμητες και αυταπόδεικτες - αυτονόητες μορφές γνώσης») και τις δυσκολίες που ενίοτε αυτή δημιουργεί στη σκέψη και στη διαδικασία ερμηνείας δεδομένων και φαινομένων. Είναι δίκαιο να υποθέσει κανείς ότι η κύρια πηγή των δυσκολιών που συνοδεύουν την έννοια του απείρου είναι η βαθειά αντίθεση ανάμεσα στην έννοια αυτή και τα νοητικά μας σχήματα, τα οποία είναι προσαρμοσμένα σε πεπερασμένα αντικείμενα και πεπερασμένες διαδικασίες. Για παράδειγμα, η παραδοχή της ύπαρξης του *ενεργεία* απείρου (actual infinity) μας οδηγεί στην παραδοχή της «περίεργης» πρότασης ότι το μέρος μπορεί να είναι ισοδύναμο με το όλον.

Ο σκοπός της έρευνας που πραγματοποίησαν οι Fischbein et al. (1979), ήταν να διερευνήσουν την αντιφατική φύση της έννοιας του απείρου εστιάζοντας στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας και κατά πόσον αυτή αντιστέκεται στο πέρασμα του χρόνου και στην επιρροή της διδασκαλίας. Οι υποθέσεις της έρευνας είναι οι ακόλουθες: α) όσον αφορά τη διαδικασία διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος, οι απαντήσεις των μαθητών θα χωριστούν σε δυο κατηγορίες: η διαδικασία διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος είναι άπειρη και δεν είναι άπειρη β) ούτε η ηλικία ούτε η διδασκαλία μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τη φύση των γνήσια διαισθητικών απαντήσεων. Το δείγμα αποτελείται από 470 μαθητές και των δύο φύλων ηλικίας 10 έως 15 ετών, χαμηλής, μέτριας και υψηλής επίδοσης. Όσον αφορά στη μεθοδολογία, δόθηκε στους μαθητές ένα τεστ 10 θεμάτων (items) υπό μορφή ερωτηματολογίου. Τα θέματα αναφέρονταν στην κατάτμηση (divisibility) ευθύγραμμου τμήματος, στους υπερπεπερασμένους πληθάριθμους και στα όρια. Για παράδειγμα:

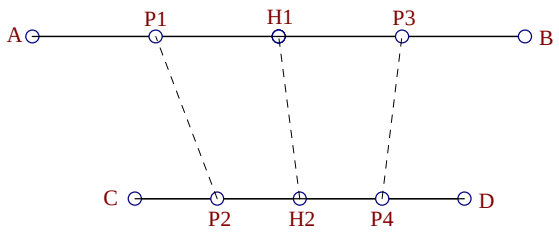
- Χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε δύο ίσα μέρη. Ονομάζουμε Η το μέσον του. Στη συνέχεια χωρίζουμε τα τμήματα ΑΗ και ΗΒ σε δύο ίσα μέρη και ονομάζουμε Ρ και Q τα μέσα των ΑΗ και ΗΒ αντίστοιχα. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία με τον ίδιο τρόπο. Θα προκύψουν μέσω της διαδικασίας αυτής τμήματα τόσο μικρά που δεν θα μπορούμε να τα χωρίσουμε σε μικρότερα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



➢ Ας υποθέσουμε ότι C είναι ένα τυχαίο σημείο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB. Χωρίζουμε το τμήμα AB σε δύο ίσα μέρη. Ονομάζουμε H το μέσον του. Στη συνέχεια χωρίζουμε τα τμήματα AH και HB σε δύο ίσα μέρη και ονομάζουμε P και Q τα μέσα των AH και HB αντίστοιχα. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία με τον ίδιο τρόπο. Είναι βέβαιο ότι κάποιο από τα σημεία που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία θα συμπέσει με το C; Να σημειώσουμε εδώ, ότι από τους μαθητές που απάντησαν ότι κάποιο σημείο θα συμπέσει με το C (81,2%), εκείνοι που αιτιολόγησαν την απάντησή τους ισχυρίστηκαν ότι: «η διαίρεση είναι άπειρη», «το ευθύγραμμο τμήμα είναι περιορισμένο», «το ευθύγραμμο τμήμα έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων»

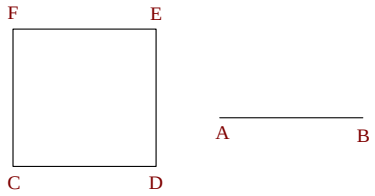


➢ Έστω AB και CD δυο ευθύγραμμα τμήμα και έστω ότι το AB είναι μεγαλύτερου μήκους από το CD. Ας αντιστοιχίσουμε το μέσον H_1 του AB με το μέσον H_2 του CD. Ονομάζουμε στη συνέχεια P_1 το μέσον του AH_1 και P_3 το μέσον του H_1B. Ας αντιστοιχίσουμε τώρα το P_1 με το μέσον του CH_2 που το ονομάζουμε P_2 και το P_3 με το μέσον του H_2D που το ονομάζουμε P_4. Συνεχίζοντας τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο, θα υπάρξει περίπτωση σε σημείο του AB να μην αντιστοιχεί σημείο του CD; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Να σημειωθεί, ότι όσοι απάντησαν καταφατικά («περατοκρατικά») (56,9%), δικαιολόγησαν την απάντησή τους ως εξής: «ναι, γιατί το AB έχει περισσότερα σημεία από το CD. Τα σημεία του CD θα τελειώσουν πιο γρήγορα».

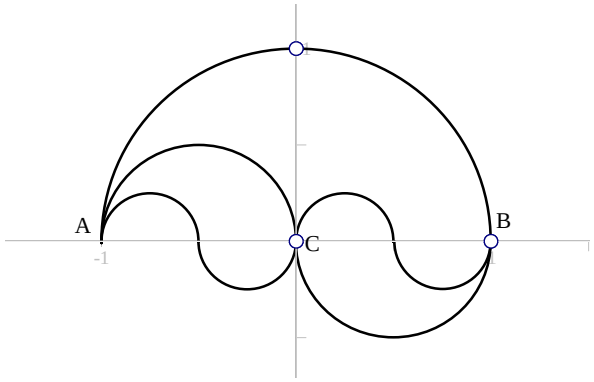


➢ Έστω ℕ={1,2,3,4,…}το σύνολο των φυσικών αριθμών και A={2,4,6,8,…} το σύνολο των άρτιων αριθμών. Ποιο από τα δύο σύνολα έχει περισσότερα στοιχεία; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Να παρατηρήσουμε εδώ ότι, κατά τη γνώμη μας, ο τρόπος που διατυπώνεται η ερώτηση δεν είναι και ο πιο αντικειμενικός. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι «εκβιάζει» την εσφαλμένη απάντηση.

➢ Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=1cm και τετράγωνο πλευράς 1cm. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο του τετραγώνου ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



➢ Κατασκευάζουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στη συνέχεια παίρνουμε το μέσον C του ΑΒ. Κατασκευάζουμε στη συνέχεια ημικύκλια με διαμέτρους ΑC και CΒ αντίστοιχα. Συνεχίζουμε τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο. Τι θα συμβεί στο μήκος της «κυματιστής» γραμμής όσο οι διάμετροι των ημικυκλίων θα μικραίνουν; Τι θα συμβεί με το άθροισμα των εμβαδών που ορίζονται από τα ημικύκλια όσο οι διάμετροι των ημικυκλίων θα μικραίνουν;



Τα αποτελέσματα της έρευνας επαλήθευσαν τις υποθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, η αντιφατική φύση της έννοιας του απείρου εκφράστηκε από το γεγονός ότι οι μαθητές χωρίστηκαν βάσει των τοποθετήσεών τους σε δύο κατηγορίες: τους «περατοκράτες-περατιστές» (finitists) («δεν μπορεί ένα ευθύγραμμο τμήμα να διαιρείται επ' άπειρον» ή «το όλον δεν μπορεί να είναι ίσο με το μέρος του») και τους «μη περατοκράτες-απειριστές» (non-finitists) («μια επ' άπειρον διαίρεση είναι εφικτή», «κάθε άπειρο υποσύνολο ενός απειροσυνόλου είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύνολο»), με τους «περατοκράτες» να υπερτερούν ανεξαρτήτως ηλικίας και επιπέδου. Από την ηλικία των 11 ετών, τα παιδιά έχουν συγκεκριμένη διαίσθηση όσον αφορά στο άπειρο η οποία, ούσα από τη φύση της αντιφατική, είναι πολύ «ευαίσθητη» στην αλλαγή εννοιολογικού

περιεχομένου και γραφικής αναπαράστασης του εκάστοτε προβλήματος. Για παράδειγμα, στην ερώτηση που αφορά στις διαδοχικές διαιρέσεις ενός ευθύγραμμου τμήματος, 44,7% των μαθητών έδωσαν «μη περατοκρατικές» απαντήσεις («η διαδικασία στην πραγματικότητα θα σταματήσει, αλλά σε θεωρητικό επίπεδο είναι άπειρη», «η διαδικασία είναι ατέρμονη, γιατί το ευθύγραμμο τμήμα έχει άπειρα σημεία», «πάντα θα μπορώ να διχοτομώ ένα ευθύγραμμο τμήμα», «με τα κατάλληλα μέσα πάντα θα μπορώ να συνεχίζω»), στη σύγκριση του πλήθους των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος και ενός τετραγώνου το 26,7% των μαθητών έδωσαν «μη περατοκρατικές» απαντήσεις («υπάρχουν άπειρα σημεία και στο ευθύγραμμο τμήμα και στο τετράγωνο», «η πλευρά του τετραγώνου και το ευθύγραμμο τμήμα έχουν το ίδιο μήκος») και στη σύγκριση του πλήθους των στοιχείων του συνόλου των φυσικών και των άρτιων αριθμών, μόνο το 10% των μαθητών έδωσαν «μη περατοκρατικές» απαντήσεις («τα σύνολα είναι ισοπληθικά, γιατί και τα δύο έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων», «είναι ισοπληθικά, γιατί μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία τους ένα με ένα»).

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών (περί το 80%), ανεξαρτήτως ηλικίας, απάντησε καταφατικά στο ερώτημα που αφορούσε την ταύτιση του τυχαίου σημείου C με ένα «μέσον». Κατά τον Fischbein (2001) αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το άπειρο εμφανίζεται να ταυτίζεται διαισθητικά με το ανεξάντλητο (inexhaustible) - μια *άδηλη* (tacit) ιδιότητα του απείρου - που σημαίνει ότι αν κάποιος συνεχίσει τη διαδικασία των διαιρέσεων, όλα τα σημεία θα εξαντληθούν (και αυτό είναι ήδη *ενεργεία* άπειρο) και συνεπώς κάποιο από αυτά θα συμπέσει με το C. Ο Fischbein (2001) θεωρεί ότι υπάρχουν δυο βασικά *άδηλα* μοντέλα (*άδηλες* αντιλήψεις) που επιδρούν στον τρόπο που κανείς χειρίζεται την έννοια του απείρου: α) η αντίληψη ότι το μεγαλύτερο - με την έννοια του υπερσυνόλου - έχει περισσότερα το πλήθος στοιχεία, η οποία με την χρήση σχηματικών αναπαραστάσεων σημείων και γραμμών μπορεί να παραποιήσει τις απαντήσεις (για παράδειγμα, ότι το πλήθος των σημείων δύο τμημάτων με διαφορετικό μήκος είναι διαφορετικό, ότι το πλήθος των σημείων ενός τμήματος και ενός τετραγώνου ή ενός τετραγώνου και ενός κύβου είναι διαφορετικό) και β) η διαισθητική αντίληψη ότι το άπειρο είναι ισοδύναμο - συνώνυμο με το ανεξάντλητο - απέραντο, η οποία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλα τα άπειρα είναι ίδια, οπότε και τα άπειρα σύνολα είναι ισοδύναμα (για παράδειγμα, το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ισοδύναμα, το πλήθος των σημείων δύο τμημάτων με διαφορετικό

μήκος είναι το ίδιο). Το γεγονός λοιπόν είναι ότι η έννοια του απείρου είναι διαισθητικά αντιφατική.

Μέχρι την ηλικία των 12 ετών οι διαισθητικές ερμηνείες που αφορούν στην έννοια του απείρου, είναι ακόμα στη διαδικασία του σχηματισμού. Μετέπειτα παραμένουν σταθερές. Η κατανόηση της έννοιας του απείρου μπορεί να βελτιωθεί μέσω της διδασκαλίας ως συνέπεια λογικής και ενδελεχούς ανάλυσης. Πώς συλλαμβάνει όμως κανείς διαισθητικά, δηλ. αυθόρμητα και σχεδόν αυταπόδεικτα την έννοια αυτή, είναι κάτι που δεν αλλάζει ούτε με το πέρασμα των ετών ούτε μέσω της διδασκαλίας. Μάλιστα όταν δημιουργείται μια αντιφατική κατάσταση, όπως αυτή με τη σύγκριση των πληθαρίθμων δύο απειροσυνόλων, παρατηρήθηκε ότι οι λάθος (περατοκρατικές) ερμηνείες υπερίσχυσαν στους μαθητές του υψηλότερου επιπέδου.

Τι σημαίνει όμως ότι κάποιος κατανοεί, με κάποιον τρόπο, την έννοια του απείρου; Το πιο βασικό επίπεδο κατανόησης, μπορεί να είναι η κατανόηση του απείρου: α) ως μια ατέρμονη διαδικασία, όπως μια συνεχής διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μικρότερα τμήματα, β) ως μια, δίχως τέλος, ακολουθία, όπως εκείνη των φυσικών αριθμών. Το άπειρο μπορεί επίσης να κατανοείται και ως μια συλλογή αριθμών, ή ό,τι άλλο, που δεν έχει τέλος. Ο Monaghan (2001) σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε το 1986, διαπιστώνει ότι μαθητές ηλικίας 16-18 ετών θεωρούν πρωταρχικά το άπειρο ως διαδικασία δίχως τέλος (infinity as a process). Η θεώρηση του απείρου ως διαδικασία δεν χρησιμοποιείται μόνο για να ορισθεί η έννοια, αλλά και ως επεξηγηματικό σχήμα (evaluatory scheme) για να αποφασίσει κανείς κατά πόσο μια ερώτηση έχει ως απάντηση «άπειρο»: «αυτό συνεχίζεται και συνεχίζεται…άπειρο σημαίνει να συνεχίζεται συνέχεια.…..γι αυτό το λόγο αυτό είναι άπειρο…..». Από την άλλη μεριά, οι μαθητές που συμμετείχαν στην παραπάνω έρευνα, βλέπουν το άπειρο ως αντικείμενο, κυρίως θεωρώντας το ως έναν πολύ μεγάλο αριθμό ή ως συλλογή της οποίας το πλήθος των στοιχείων είναι μεγαλύτερο από οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό. Για παράδειγμα, το 31% των 190 μαθητών θεωρούν ότι το άπειρο είναι ένας ακαθόριστα μεγάλος αριθμός και 147 στους 190 μπορούν να σκεφτούν τους αριθμούς 1,2,3,… ως μια ολότητα (Monaghan, 2001). Ο Tall (2001) συζητώντας με τον επτάχρονο γιό του για το άπειρο, αντιλαμβάνεται ότι το παιδί θεωρεί καταρχήν το άπειρο ως έναν πολύ μεγάλο αριθμό και κάνει πράξεις με αυτό κατ΄αναλογία με τις πράξεις μεταξύ αριθμών («άπειρο και ένα είναι μεγαλύτερο από άπειρο», «άπειρο και άπειρο ισούται με δύο άπειρα», «αν αφαιρέσουμε το άπειρο από άπειρο δεν μας μένει τίποτα», «αν έχουμε άπειρο αριθμό παιδιών και άπειρες καραμέλες, τότε κάθε παιδί θα φάει μία μόνο καραμέλα, όχι δύο»),

και στη συνέχεια, μετά από συζήτηση, ως διαδικασία δίχως τέλος: «άπειρο και ένα δεν είναι πια μεγαλύτερο από άπειρο, αφού δεν μπορούμε να πάμε πιο πέρα από αυτό».

Οι μαθητές, επίσης, λένε συχνά: «κάτι τείνει στο άπειρο», χωρίς απαραίτητα να θεωρούν εδώ το άπειρο ως αντικείμενο. Χρησιμοποιούν τις λέξεις «απείρως» και εναλλακτικά «άπειρο», χωρίς να μπορούμε να υποθέσουμε με βεβαιότητα ότι το επίρρημα αναφέρεται στη διαδικασία (process) και το ουσιαστικό στο αντικείμενο (object) (Monaghan, 2001). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν την έννοια του απείρου, είναι εγγενώς αντιφατικός και εξαιρετικά ασταθής. Εδώ μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η εικόνα της έννοιας (concept image), όπως την ορίζουν οι Tall and Vinner (1981), όσον αφορά στην έννοια του απείρου, και όχι μόνο, περιλαμβάνει όλα τα νοητικά χαρακτηριστικά που αποδίδουμε στην έννοια είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα. Όσο διαμορφώνεται η εικόνα της έννοιας με την πάροδο του χρόνου δεν σημαίνει ότι παραμένει και συνεπής, με την έννοια ότι διαφορετικά ερεθίσματα ενεργοποιούν διαφορετικά τμήματα της εικόνας, με αποτέλεσμα να προκύπτουν αντιφατικές ερμηνείες.

Για παράδειγμα, όσον αφορά στη σύγκριση των πληθαρίθμων των συνόλων των φυσικών και των άρτιων αριθμών, η θεώρηση του απείρου ως διαδικασία μπορεί να οδηγήσει στις αντιφατικές απαντήσεις: «και στα δύο σύνολα οι αριθμοί συνεχίζονται και συνεχίζονται, άρα το πλήθος τους είναι ίδιο και στα δύο» ή «και στα δύο σύνολα οι αριθμοί συνεχίζονται και συνεχίζονται, οπότε δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το πλήθος τους». Και οι δύο τοποθετήσεις έρχονται σε αντίθεση με τη θεώρηση άπειρο-αντικείμενο που σχετίζεται με την ερμηνεία ότι οι άρτιοι είναι λιγότεροι, γιατί το σύνολο των άρτιων είναι υποσύνολο του συνόλου των φυσικών (μέρος - όλον θεώρηση).

Επίσης, έχει ενδιαφέρον ότι η διδασκαλία έχει αμελητέα επίδραση στις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο (Monaghan, 2001). Ειδικά το γεωμετρικό πλαίσιο (π.χ. αν ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα τετράγωνο αποτελούνται από το ίδιο πλήθος σημείων) μοιάζει να στέκεται εμπόδιο σε ανωτέρου επιπέδου εννοιολογική κατανόηση του απείρου, ακόμα κι αν έχει προηγηθεί διδασκαλία πάνω στα απειροσύνολα (Luis et al., 1991).

Σε έρευνα των Luis et al. (1991) που πραγματοποιήθηκε το 1988 σε 36 πρωτοετείς φοιτητές, δόθηκαν τρία ερωτηματολόγια που αφορούσαν στη σύγκριση ενός απειροσυνόλου με ένα υποσύνολό του. Το πρώτο δόθηκε σε αριθμητικό πλαίσιο με ερωτήσεις όπως: «Φανταστείτε μια μηχανή που παράγει φυσικούς αριθμούς και δεν σταματά ποτέ και στη συνέχεια μια άλλη μηχανή που παράγει τετράγωνους αριθμούς και δεν σταματά ποτέ. Υπάρχουν αριθμοί τόσο

μεγάλοι ώστε η δεύτερη μηχανή να μην μπορεί να βρει το τετράγωνό τους; Υπάρχει φυσικός αριθμός που να μην έχει τετράγωνο; Αν επρόκειτο να συγκρίνετε το σύνολο των φυσικών με εκείνο των τετράγωνων αριθμών, θα είχε το σύνολο των φυσικών περισσότερα στοιχεία; Θα είχε το σύνολο των φυσικών το ίδιο πλήθος στοιχείων με εκείνο του συνόλου των τετράγωνων αριθμών; Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Αν επρόκειτο να συγκρίνουμε το σύνολο των φυσικών με εκείνο των άρτιων αριθμών, θα είχε το σύνολο των φυσικών περισσότερα στοιχεία από εκείνο των άρτιων;». Το δεύτερο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε γεωμετρικό πλαίσιο με ερωτήσεις όπως: «Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και CD με μήκη 4cm και 6cm αντίστοιχα (δίνονται σχεδιασμένα). Πιστεύετε ότι τα τμήματα αποτελούνται από σημεία; Αν ναι, είναι το πλήθος των σημείων του ΑΒ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο; Αν επρόκειτο να συγκρίνεται το πλήθος των σημείων του ΑΒ με εκείνο των σημείων του CD, έχει το CD περισσότερα σημεία από το ΑΒ; Έχει το CD ίσο πλήθος σημείων με το ΑΒ; Δίνονται σχεδιασμένα τα τμήματα ΑΒ και CD και οι διακεκομμένες ευθείες CA και DB που τέμνονται στο Ο. Έστω Ρ ένα τυχαίο σημείο του CD. Η ΟΡ τέμνει το ΑΒ στο σημείο Ρ'. Υπάρχει για κάθε σημείο του CD ένα σημείο του ΑΒ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο; Αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του ΑΒ ένα σημείο του CD και αντίστροφα; Έχει το CD περισσότερα σημεία από το ΑΒ; Σε κάθε περίπτωση αιτιολογήστε την απάντησή σας». Το τρίτο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε συνδυασμό αριθμητικού και γεωμετρικού πλαισίου χρησιμοποιώντας αλγεβρική γλώσσα, με ερωτήσεις όπως: «Κοιτάξτε το σύνολο A={$x \in \Re / 0 \leq x \leq 1$} που είναι το διάστημα [0,1]. Ας ορίσουμε τώρα το σύνολο B={y/y=2x, $x \in A$}. Στο σύνολο Β, κάθε 'x' στοιχείο του Α επανατοποθετείται στην θέση 2x στην αριθμογραμμή. Έτσι το 0 δεν αλλάζει θέση, το 1/4 πηγαίνει στο 1/2, το 1 στο 2 κ.ο.κ. (δίνεται στους φοιτητές η αριθμογραμμή). Έχει το σύνολο Β *όλα* τα στοιχεία του διαστήματος [0,2]; Είναι τα σύνολα Α και Β ισοπληθικά; Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας». Το πρώτο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 20 από τους 36 φοιτητές και τα άλλα δύο σε 24, από τους οποίους οι 8 είχαν ασχοληθεί και με το πρώτο ερωτηματολόγιο. Δεδομένου ότι οι φοιτητές δεν είχαν διδαχθεί κάποιο αντικείμενο σχετιζόμενο με την έννοια του *ενεργεία* απείρου, οι απαντήσεις τους μπορούν να εκληφθούν ως αυθόρμητες.

Από τη ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι, όταν το ερώτημα που αφορά στη σχέση πληθικότητας μεταξύ ενός απειροσυνόλου και ενός υποσυνόλου αυτού δοθεί σε αριθμητικό ή γεωμετρικό πλαίσιο, η πλειοψηφία των υποκειμένων υιοθετεί τη θεώρηση μέρος - όλον (Bolzano's approach) στις απαντήσεις της, που οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα, με

τοποθετήσεις όπως: «το σύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει άρτιους και περιττούς. Έτσι το σύνολο των άρτιων αριθμών περιέχει λιγότερα στοιχεία από το σύνολο των φυσικών» ή «υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί που δεν είναι τετράγωνοι, παρόλο που και τα δύο είναι απειροσύνολα». Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι 22% των φοιτητών πιστεύουν ότι δεν μπορεί να γίνει σύγκριση των συνόλων, κυρίως λόγω της άπειρης φύσης τους, με τοποθετήσεις όπως: «Από τη στιγμή που τα σύνολα είναι άπειρα, δεν μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ τους» και «όλα τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά». Ειδικά όσον αφορά στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, 5 από τους 24 φοιτητές απάντησαν καταφατικά σε όλες τις ερωτήσεις (όπως αναφέρονται παραπάνω), αιτιολογώντας την τελευταία καταφατική απάντηση με επιχειρήματα του τύπου «το CD έχει μεγαλύτερο μήκος από το AB», χωρίς να ανησυχούν για την λογική ασυνέπεια η οποία προκύπτει από την τοποθέτηση αυτή. Από τις απαντήσεις στο τρίτο ερωτηματολόγιο, που το πλαίσιο είναι συνδυασμός αριθμητικού και γεωμετρικού με χρήση αλγεβρικής γλώσσας και προϋποθέτει ότι οι φοιτητές αποδέχονται την αντιστοίχιση μεταξύ πραγματικών αριθμών και σημείων της ευθείας, προκύπτει ότι υιοθετείται η αντιστοίχιση 1-1 (Cantor's approach) ως τρόπος σύγκρισης μέσω της αλγεβρικής σχέσης $y=2x$, η οποία επέτρεψε στους περισσότερους από τους φοιτητές να θεωρήσουν ότι τα δυο σύνολα είναι ισοπληθικά και πολλά από τα εμπόδια που παρατηρήθηκαν στις προηγούμενες περιπτώσεις έμοιαζε, έστω και ασυνείδητα, να έχουν εξαφανιστεί.

Γνώση που έχει προκύψει από έρευνες και αφορά στις διαφορετικές αντιδράσεις σε διαφορετικές αναπαραστάσεις απειροσυνόλων, ενθαρρύνει τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο που σκέφτονται για το άπειρο. Οι Tsamir & Tirosh (1999) σε έρευνα που πραγματοποίησαν το 1996 διαπίστωσαν ότι μεταξύ 189 μαθητών ηλικίας 15-17 ετών περίπου το 70%, ανεξαρτήτως ηλικίας, απάντησε ότι τα σύνολα {1,2,3,4,…} και {4,8,12,16,…} δεν είναι ισοδύναμα, όταν δόθηκαν τα σύνολα σε αυτή την αριθμητική-οριζόντια αναπαράσταση, ενώ όταν η αναπαράσταση μετατράπηκε σε γεωμετρική (βλέπε το 2° στάδιο στην επόμενη σελίδα), το 80% των μαθητών απάντησε ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά («σχηματίζονται ζεύγη (χ_i , y_i) όπου το χ_i ανήκει στο πρώτο σύνολο και το y_i ανήκει στο δεύτερο»). Έτσι, αυτές οι δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις απέσπασαν διαφορετικές αιτιολογήσεις και οδήγησαν σε αντιφατικά συμπεράσματα. Οι ερευνήτριες χρησιμοποίησαν τα ευρήματα της παραπάνω έρευνας για το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας διάρκειας περίπου 40 λεπτών για τα απειροσύνολα, και την εφάρμοσαν σε 32 μαθητές 16-18 ετών με ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά. Τα στάδια της

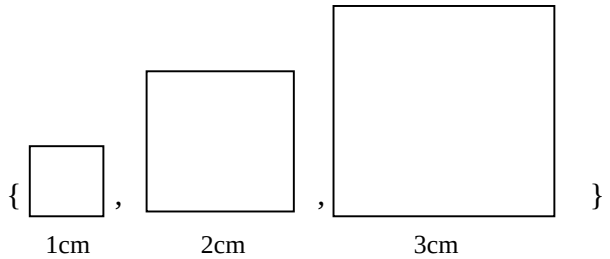
δραστηριότητας είναι περιληπτικά τα ακόλουθα:

1° στάδιο (ενθαρρύνει την αντίληψη μέρος-όλον): Δίνεται το σύνολο των φυσικών αριθμών A={1,2,3,4,5,6,7,8,…}. Να κυκλώσετε τα πολλαπλάσια του 4. Ονομάστε B το σύνολο των πολλαπλασίων του 4. Δηλ. B={4,8,12,16,…}. Είναι τα σύνολα A και B ισοπληθικά;

2° στάδιο (ενθαρρύνει την αντιστοίχιση 1-1) : Δίνεται το σύνολο

M ={ ——— , ——————— , ——————————— ,…}.
1cm 2cm 3cm

Να γράψετε το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα μήκη των παραπάνω ευθύγραμμων τμημάτων και να το ονομάσετε Γ. Σκεφτείτε ένα σύνολο τετραγώνων, κάθε στοιχείο του οποίου είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με κάθε ένα από τα τμήματα του συνόλου M. Είναι το πλήθος των τετραγώνων ίσο με το πλήθος των τμημάτων;



Ονομάστε Δ το σύνολο του οποίου τα στοιχεία αντιστοιχούν στα μήκη των περιμέτρων των παραπάνω τετραγώνων. Είναι τα σύνολα Γ και Δ ισοπληθικά;

3° στάδιο: Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τις πιθανώς αντιφατικές απαντήσεις τους (να θεωρήσουν ότι τα A και B δεν είναι ισοπληθικά με βάση την υποσυνολική σχέση, ενώ τα Γ και Δ ισοπληθικά με βάση την αντιστοίχιση 1-1). Στο στάδιο αυτό, οι μαθητές έχουν μπροστά τους τα σύνολα A,B,Γ και Δ και ενθαρρύνονται να παρατηρήσουν την ταύτιση του A με το Γ και του B με το Δ. Ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν τις απόψεις τους για τη συνέπεια των απαντήσεών τους.

Από τους 32 μαθητές, οι 12 σταθερά επιχειρηματολόγησαν ότι και στις δύο περιπτώσεις τα σύνολα είναι ισοπληθικά γιατί: «όλα τα άπειρα σύνολα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων». Οι υπόλοιποι 20 έδωσαν αντιφατικές απαντήσεις. Επτά από τους είκοσι συνειδητοποίησαν την αντιφατικότητα αυτή από μόνοι τους, ενώ 13 αναγνώρισαν την αντιφατικότητα των απαντήσεών τους μετά από μερικές βοηθητικές ερωτήσεις. Τελικά δυο μαθητές επέλεξαν το κριτήριο της 1-1 αντιστοίχισης ως το μοναδικό για τέτοιου είδους συγκρίσεις, ώστε να αποφευχθεί η αντιφατικότητα των απαντήσεων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η τοποθέτηση 6 μαθητών (ποσοστό

30%, καθόλου ευκαταφρόνητο), οι οποίοι θεώρησαν αποδεκτή στα μαθηματικά μια κατάσταση στη οποία διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου προβλήματος οδηγούν σε διαφορετικές λύσεις. Αυτή η φαινομενικά παράλογη τοποθέτηση στηρίχθηκε κυρίως στον ισχυρισμό ότι: «η αξιοπιστία των μαθηματικών προτάσεων δοκιμάζεται στην εφαρμογή τους σε άλλες επιστήμες ή στην πραγματική ζωή».

Οι Tsamir & Dreyfus (2002) παρουσιάζουν τα αποτελέσματα μιας συνέντευξης (research-based teaching interview), που στόχο είχε να ενθαρρύνει έναν ταλαντούχο μαθητή, τον Ben, να αναστοχαστεί πάνω στον τρόπο που σκέφτεται τις άπειρες ποσότητες. Σχεδίασαν τη συνέντευξη με σκοπό ο Ben να χρησιμοποιήσει δυο διαφορετικές μεθόδους σύγκρισης απειροσυνόλων, που οδηγούν σε αντίφαση. Όταν πραγματοποιήθηκε η συνέντευξη ο Ben ήταν 15 ετών, είχε κάποια εμπειρία με τη στοιχειώδη θεωρία συνόλων, αλλά δεν του είχε ζητηθεί ποτέ μέχρι εκείνη τη στιγμή να ασχοληθεί με τη σύγκριση απειροσυνόλων, ούτε είχε την ευκαιρία να ακούσει ή να διαβάσει κάτι για τη συνολοθεωρία του Cantor. Ζητήθηκε λοιπόν από τον Ben να συγκρίνει το σύνολο των φυσικών αριθμών με εκείνο των τετράγωνων αριθμών, με έργα παρόμοια με εκείνα που παρουσιάζουν οι Tsamir and Tirosh (1999), χρησιμοποιώντας δηλαδή διαφορετικές αναπαραστάσεις των συνόλων αυτών. Πιο ειδικά, η συνέντευξη σχεδιάστηκε με σκοπό: α) να αναγκάσει τον Ben να αιτιολογήσει τις απαντήσεις του β) να προκαλέσει αναστοχασμό για τον τρόπο που ενεργεί και γ) να οδηγήσει τον Ben να διερωτηθεί, αν και κατά πόσο τα συγκεκριμένα έργα με τα οποία ασχολήθηκε επηρέασαν τις απαντήσεις του. Η ανάλυση πέντε επεισοδίων της συνέντευξης αυτής οδήγησε στα εξής συμπεράσματα: α) όταν δόθηκαν τα σύνολα στην αριθμητική-οριζόντια αναπαράσταση, ο Ben ήταν εντελώς βέβαιος ότι το σύνολο των φυσικών έχει περισσότερα στοιχεία από εκείνο των τετράγωνων αριθμών, ισχυριζόμενος ότι: «λείπει [από το σύνολο των τετράγωνων αριθμών] άπειρο πλήθος στοιχείων και ακόμα περισσότερα» και όταν ρωτήθηκε να εξηγήσει τι εννοεί, τοποθετείται ως εξής: «τα ‘κενά’ [μεταξύ των τετράγωνων αριθμών] μεγαλώνουν και έτσι λείπουν περισσότερα στοιχεία από όσα ανήκουν στο σύνολο» β) όταν δόθηκαν τα σύνολα στη γεωμετρική αναπαράσταση, ισχυρίζεται με βεβαιότητα ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά και στηρίζει τον ισχυρισμό του κάνοντας χρήση της 1-1 αντιστοίχισης. Παρόλα αυτά, τη βεβαιότητα αυτή ακολούθησαν ο ενδοιασμός και η αναφώνηση: «Δεν μπορώ να το πιστέψω!! Είναι αδύνατον!». Στη συνέχεια συζητάει για την αντίφαση στην οποία οδηγήθηκε, ότι δηλαδή τα σύνολα είναι ίσα (ισοδύναμα) και ταυτοχρόνως άνισα, λέγοντας ότι: «Δεν ξέρω τι να κάνω, δεν έχω τίποτα να προτείνω». Προχωράει όμως τη σκέψη του και

αποφασίζει ότι πρέπει να διαλέξει ένα μόνο τρόπο για να συγκρίνει τα σύνολα, κάτι που δεν μπορεί να κάνει, προτού μάθει περισσότερα πράγματα για τα απειροσύνολα· επικαλείται τελικά την αυθεντία ενός επαγγελματία μαθηματικού να δώσει λύση στο πρόβλημα και εκφράζει την επιθυμία να μάθει με ποιο τρόπο αυτός κατέληξε στην όποια απόφαση. Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε εδώ ότι ο Ben, σχεδόν χωρίς καθοδήγηση από την ερευνήτρια, έκανε μια γνωστική μετακίνηση (cognitive shift) από την αναγνώριση ότι «έφτασα σε μια αντίφαση» μέσω της διαπίστωσης ότι «είναι αδύνατον να δεχτούμε δυο αντιφατικούς ισχυρισμούς» στην απαίτηση ότι «πρέπει να διαλέξουμε έναν τρόπο για να συγκρίνουμε απειροσύνολα και να κάνουμε χρήση μόνο αυτού».

Στη βάση των ευρημάτων της έρευνας των Tsamir & Tirosh (1999), η Tsamir (2001) σχεδίασε μια νέα δραστηριότητα που σκοπό είχε να ενθαρρύνει περισσότερους μαθητές να επιλέξουν την αντιστοίχιση 1-1 ως το μόνο κριτήριο για τη σύγκριση απειροσυνόλων. Η δραστηριότητα διάρκειας 50 λεπτών εφαρμόστηκε σε 15 μαθητές ηλικίας 16-18 ετών με ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά. Έχει παρόμοια δομή με την προηγούμενη με τη διαφορά ότι:

α) το 2^{ο} στάδιο εμπλουτίστηκε με ένα ακόμα έργο, την αριθμητική - αναλυτική αναπαράσταση δυο απειροσυνόλων που, όπως προέκυψε από την ανάλυση της έρευνας, έπαιξε σημαντικό ρόλο στην προσέγγιση του στόχου της δραστηριότητας: Δίνονται τα σύνολα Η και Ζ, όπως παρακάτω:

H={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,…}

Z={3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,…}

Το σύνολο Ζ αναπαρίσταται στη συνέχεια ως εξής:

H={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,…}

Z={1+**2**, 2+**2**, 3+**2**, 4+**2**, 5+**2**, 6+**2**, 7+**2**, 8+**2**,…}

Κατά τη γνώμη σας τα σύνολα Η και Ζ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων ή όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Όσον αφορά στη γεωμετρική αναπαράσταση δίνεται πάλι το σύνολο Μ, όπως και στην προηγούμενη έρευνα, και ζητείται από τους μαθητές να φτιάξουν τραπέζια αυτή τη φορά, έτσι ώστε τα τμήματα του Μ να είναι οι πάνω βάσεις των τραπεζίων. Οι κάτω βάσεις είναι μεγαλύτερες κατά 2cm. Ονομάζουμε Ε και Τ τα σύνολα που αντιστοιχούν στα μήκη των πάνω και κάτω βάσεων αντίστοιχα. Άρα Ε={1,2,3,4,5,…} και Τ={3,4,5,6,7,…}. Κατά τη γνώμη σας είναι τα σύνολα Ε και Τ ισοπληθικά; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) στο τέλος της δραστηριότητας, για να εκτιμηθεί άμεσα η επιρροή της αριθμητικής-αναλυτικής αναπαράστασης, τέθηκε το ερώτημα αν τα σύνολα των φυσικών και των άρτιων αριθμών έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων (να αιτιολογηθεί η απάντηση) και τέλος για να εκτιμηθεί η επίδρασή της μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, η ερευνήτρια πήρε συνεντεύξεις (χωρίς χρονικό περιορισμό) από πέντε συμμετέχοντες τρεις μήνες αργότερα. Τους ζητήθηκε να συγκρίνουν το πλήθος των στοιχείων των παρακάτω συνόλων:

A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,…}

P= {-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,…}

και

A= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,…}

V= {0,1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,…}

Το ενδιαφέρον στο έργο αυτό είναι ο διαφορετικής λογικής τρόπος αντιστοίχισης των στοιχείων στα παραπάνω ζεύγη συνόλων. Στην περίπτωση των Α και Ρ η αντιστοίχιση ($n \rightarrow n-4$) είναι της ίδιας λογικής με εκείνη των συνόλων Η και Ζ ($n \rightarrow n+2$), που ήδη είχαν επεξεργαστεί. Έτσι αναμενόταν οι μαθητές να βρουν τον κώδικα αντιστοίχισης και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα σύνολα είναι ισοδύναμα. Τώρα, όσον αφορά στα σύνολα Α και V, η πρόκληση είναι σαφώς μεγαλύτερη! Οι διαφορές των διαδοχικών στοιχείων του V είναι 1,2,3,… Δηλ.$v_{n+1}-v_n = n$. Άρα ο κώδικας αντιστοίχισης αυτή τη φορά δεν είναι και τόσο προφανής ($n \rightarrow v_n=\frac{n(n-1)}{2}$).

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψε ότι, όταν τα σύνολα παρουσιάστηκαν στην αριθμητική - αναλυτική αναπαράσταση όλοι οι συμμετέχοντες απάντησαν με βεβαιότητα ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά, ο κανόνας της αντιστοίχισης σχεδόν προφανής και μάλιστα

αναστοχαζόμενοι εξέφρασαν την άποψη ότι τέτοιας λογικής αντιστοίχιση έπρεπε να είχαν χρησιμοποιήσει και στις αρχικές συγκρίσεις (κάτι που προέκυψε και από την έρευνα των Dreyfus and Tsamir (2004), στην οποία παρουσιάζεται και αναλύεται μια δεύτερη συνέντευξη με τον ταλαντούχο Ben, σε μια προσπάθεια διερεύνησης της σταθεροποίησης δυο νοητικών δομών: της δομής του απείρου και της καντοριανής δομής). Όσον αφορά στην ερώτηση που ετέθη στο τέλος της δραστηριότητας και αφορούσε στα σύνολα των φυσικών και των άρτιων, και οι πέντε συμμετέχοντες απάντησαν ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά, και μάλιστα ότι η αντιστοίχιση είναι $\chi \rightarrow 2\chi$. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν οι απαντήσεις των μαθητών στο έργο που τους δόθηκε τρείς μήνες μετά. Και οι πέντε μαθητές βρήκαν τον τρόπο να αντιστοιχίσουν τα στοιχεία των συνόλων A και P. Στην περίπτωση όμως των συνόλων A και V, μετά από κάποιες αποτυχημένες προσπάθειες να βρουν τον κανόνα αντιστοίχισης, τρείς από αυτούς χρησιμοποίησαν την υποσυνολική σχέση, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι τα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά. Οι άλλοι δύο εγκατέλειψαν την προσπάθεια λέγοντας ότι: «όλα τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά, αφού υπάρχει ένα μόνο άπειρο».

Σε έρευνα της Tsamir (1999) με συμμετέχοντες μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών, παρουσιάζεται μια δραστηριότητα, η οποία σχεδιάστηκε με βάση τη διαισθητική και προηγούμενη γνώση των συμμετεχόντων και αναφέρεται στη μεταφορά των μεθόδων σύγκρισης από τα πεπερασμένα σύνολα στα απειροσύνολα· στη συνέχεια παρουσιάζεται η έρευνα που αναλύει την επίδραση αυτής σε σχέση με την επίδραση μιας τυπικής μαθηματικοκεντρικής προσέγγισης της καντοριανής συνολοθεωρίας. Οι στόχοι της δραστηριότητας ήταν: α) να αναπτυχθεί η ικανότητα αναστοχασμού των συμμετεχόντων πάνω στις μεθόδους σύγκρισης απειροσυνόλων β) να συνειδητοποιήσουν ποια από τα χαρακτηριστικά των πεπερασμένων συνόλων μεταφέρονται στα απειροσύνολα και γ) να πεισθούν οι μελλοντικοί καθηγητές ότι η συνέπεια είναι κύριο εργαλείο της εγκυρότητας μιας μαθηματικής θεωρίας και ότι η 1-1 αντιστοίχιση είναι η μέθοδος που εφαρμόζεται στη σύγκριση των πληθαρίθμων δυο απειροσυνόλων. Η δραστηριότητα χωρίζεται σε δύο μέρη:

Α) Το πρώτο μέρος πραγματεύεται τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων και χωρίζεται σε έξι στάδια, με έργα όπως:

Στάδιο 1α (ανάδειξη της τάσης να θεωρείται η απαρίθμηση 'προφανής' μέθοδος σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων). Για το σκοπό αυτό, δόθηκαν τα σύνολα A={1,t,a} και B={7,w}και ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να απαντήσουν στην ερώτηση, αν τα σύνολα έχουν το ίδιο

πλήθος στοιχείων, να αιτιολογήσουν την απάντησή τους και να συμπληρώσουν την πρόταση (γενίκευση): με σκοπό κάποιος να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων δυο πεπερασμένων συνόλων, θα μπορούσε να……..

Στάδιο 1β: (τέσσερεις μέθοδοι σύγκρισης). Δόθηκαν για το σκοπό αυτό πέντε προβλήματα: το 1^{ο} πρόβλημα ενθαρρύνει την 'αντιστοίχιση 1-1', το 2^{ο} πρόβλημα την 'απαρίθμηση', το 3^{ο} την 'υποσυνολική σχέση', το 4^{ο} τη 'λογική των διαστημάτων' (σύγκριση των διαστημάτων μεταξύ δυο «διαδοχικών» στοιχείων στα δυο σύνολα) σε συνδυασμό με την 'αντιστοίχηση 1-1' και το 5^{ο} πρόβλημα ενθαρρύνει τη 'λογική των διαστημάτων'. Για παράδειγμα, το 5^{ο} πρόβλημα είναι το εξής: Κατά μήκος του δρόμου φυτεύτηκε μια σειρά δέντρα, ένα δέντρο κάθε 200 μέτρα. Κάθε 400 μέτρα ένα φανάρι τοποθετήθηκε δίπλα στο δέντρο που βρίσκεται εκεί. Το πρώτο και το τελευταίο δέντρο είχαν επίσης από ένα φανάρι δίπλα τους. Έστω L={τα φανάρια} και T={τα δέντρα}. Είναι τα σύνολα ισοπληθικά; Να αιτιολογήσεις την απάντηση. Το 1^{ο} πρόβλημα είναι το ακόλουθο: σε ένα χορό όλοι οι μαθητές χόρευαν σε ζευγάρια, ένα αγόρι με ένα κορίτσι σε κάθε ζευγάρι. Όλοι οι μαθητές είχαν ταίρι. Αν Z ={τα αγόρια} και W={τα κορίτσια}, είναι το πλήθος των στοιχείων του Z ίσο με το πλήθος των στοιχείων του W; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Στάδιο 1γ: είχε στόχους, μεταξύ άλλων, να αναστοχαστούν οι μελλοντικοί καθηγητές πάνω στις μεθόδους σύγκρισης που χρησιμοποίησαν, να συμπεράνουν ότι οι συγκρίσεις είναι δυνατές, ακόμα κι αν τα στοιχεία των συνόλων δεν μπορούν να απαριθμηθούν, να συνειδητοποιήσουν ότι η απαρίθμηση, ακόμα κι αν είναι εφαρμόσιμη, δεν είναι πάντα ο καλύτερος τρόπος σύγκρισης και τέλος να αντιληφθούν ότι η απαρίθμηση είναι επί της ουσίας αντιστοίχιση 1-1 μεταξύ του δοθέντος συνόλου και ενός υποσυνόλου των φυσικών αριθμών. Δόθηκαν ερωτήσεις, όπως για παράδειγμα: ποιες μεθόδους χρησιμοποιήσατε για να συγκρίνετε τα παραπάνω σύνολα; Μπορούμε να συγκρίνουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου με εκείνο ενός άλλου, ακόμα κι όταν η απαρίθμηση δεν είναι εφικτή; Στις περιπτώσεις που η απαρίθμηση είναι εφικτή, είναι πάντα η καταλληλότερη μέθοδος σύγκρισης; Ποιο είναι το νόημα της 'απαρίθμησης';

Οι συμμετέχοντες εργάστηκαν καταρχήν ο καθένας μόνος του, στη συνέχεια δημιουργήθηκαν μικρές ομάδες που συζήτησαν τις επιμέρους τοποθετήσεις και τελικά έγινε συζήτηση με όλη την τάξη. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα ακόλουθα: α) ο συνδυασμός ατομικής και συλλογικής προσπάθειας αποδείχθηκε επιτυχής προς την κατεύθυνση της συνειδητοποίησης τόσο των σαφών όσο και των υπόρρητων μεθόδων που χρησιμοποίησαν οι μελλοντικοί

καθηγητές στη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων β) όσον αφορά στο στάδιο 1α, πράγματι οι συμμετέχοντες κατέληξαν ότι η απαρίθμηση είναι ο 'προφανής' τρόπος για να συγκρίνουν πεπερασμένα σύνολα. Στα έργα του σταδίου 1β χρησιμοποίησαν, παρόλα αυτά, και τις τέσσερις μεθόδους και τελικά η συζήτηση με όλη την τάξη και ο αναστοχασμός πάνω στις μεθόδους σύγκρισης είχε ως αποτέλεσμα οι συμμετέχοντες να συμφωνήσουν ότι και οι τέσσερις μέθοδοι σύγκρισης μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να προσβάλεται η συνέπεια της θεωρίας, με την 1-1 αντιστοίχιση να είναι η καταλληλότερη.

Β) Το δεύτερο μέρος πραγματεύεται τη σύγκριση απειροσυνόλων και χωρίζεται σε πέντε στάδια, με έργα όπως:

Στάδιο 2α (διάφοροι τρόποι σύγκρισης απειροσυνόλων). Δόθηκαν για το σκοπό αυτό πέντε προβλήματα, που στο καθένα ζητούμενο ήταν η σύγκριση δύο απειροσυνόλων, όπως για παράδειγμα: Έστω τα σύνολα Β={3,4,5,6,7,8,9,…} και Ρ={300,400,500,…}. Είναι οι πληθάριθμοι των συνόλων ίσοι ή άνισοι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Στάδιο 2β είχε ως στόχο να αναστοχαστούν οι συμμετέχοντες πάνω στις μεθόδους σύγκρισης που χρησιμοποίησαν και να σκεφτούν ποιες μέθοδοι προστέθηκαν και ποιες αφαιρέθηκαν κατά τη μεταφορά από τα πεπερασμένα σύνολα στα απειροσύνολα.

Στάδιο 2γ είχε ως στόχο να αντιληφθούν οι συμμετέχοντες ότι η χρήση διαφορετικών μεθόδων στη σύγκριση απειροσυνόλων οδηγεί σε αντιφατικές απαντήσεις. Για το σκοπό αυτό δόθηκαν τα σύνολα Β={1,2,3,4,5,6,7,…} και Ρ={100,200,300,400,…} και οι ακόλουθες ερωτήσεις: Εφαρμόζεται η 1-1 αντιστοίχιση; Αν ναι, να εφαρμόσετε τη μέθοδο αυτή για να συγκρίνεται τα παραπάνω σύνολα. Εφαρμόζεται η υποσυνολική σχέση; Εφαρμόζεται η άποψη 'όλα τα άπειρα είναι ίσα';

Από την ανάλυση των δεδομένων, προέκυψε ότι οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν πέντε μεθόδους στην προσπάθεια τους να αιτιολογήσουν την ισοδυναμία ή μη δύο απειροσυνόλων: α) όλα τα άπειρα είναι «ίσα» β) η μη συγκρισιμότητα των απειροσυνόλων («δεν μπορώ να συγκρίνω τα σύνολα γιατί έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων») γ) δημιουργία ζευγών (1-1 αντιστοίχιση) δ) η σχέση του περιέχεσθαι («οι άρτιοι είναι λιγότεροι από τους φυσικούς, γιατί οι άρτιοι είναι υποσύνολο των φυσικών») ε) η λογική των διαστημάτων («το σύνολο Α={1,8,27,64,125,216,…} έχει λιγότερα στοιχεία από το Β={3,6,9,12,15,18,…}, γιατί τα στοιχεία του συνόλου Α έχουν μεγαλύτερα διαστήματα μεταξύ τους»). Επίσης είναι σημαντικό το γεγονός ότι (και) στη σύγκριση απειροσυνόλων, οι μαθητές έχουν την τάση να μεταφέρουν

την προηγούμενη γνώση, συνήθως χωρίς να την προσαρμόζουν ούτε να την ανασκευάζουν όπου χρειάζεται - μεταφέρουν τους τρόπους σύγκρισης των πληθαρίθμων δύο πεπερασμένων συνόλων και στα άπειρα σύνολα, πολλές φορές χωρίς να έχουν καν επίγνωση των αντιφάσεων που προκύπτουν. Τέλος, προκύπτει ότι μια προσέγγιση που δίνει σημασία στη διαισθητική και προηγούμενη γνώση έχει καλύτερα αποτελέσματα, στην σύγκριση απειροσυνόλων, από μια τυπική μαθηματικοκεντρική προσέγγιση.

Οι Tsamir and Tirosh (2007) επιχειρηματολογούν υπέρ του σχεδιασμού ενός μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την εννοιολογική αλλαγή στην περίπτωση της ισοδυναμίας απειροσυνόλων, ακολουθώντας τις προτάσεις των Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademitriou (2001) για το σχεδιασμό αυτό, προτάσεις οι οποίες θα αναφερθούν στη συνέχεια. Θεωρούμε σημαντικό σε αυτό το σημείο να παραθέσουμε κάποια στοιχεία που αφορούν στην εννοιολογική αλλαγή. Έτσι, σύμφωνα με τους Vosniadou & Verschaffel (2004), ο όρος «εννοιολογική αλλαγή» χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει το είδος της μάθησης που απαιτείται όταν οι νέες προς μάθηση πληροφορίες έρχονται σε σύγκρουση με την προϋπάρχουσα γνώση του μαθητή, η οποία έχει αποκτηθεί, συχνά, στη βάση της καθημερινής εμπειρίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται ριζική αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης, δηλαδή απαιτείται εννοιολογική αλλαγή. Για παράδειγμα, απαιτείται εννοιολογική αλλαγή στην απόκτηση της έννοιας του ρητού αριθμού που απαιτεί ριζική αλλαγή στην προϋπάρχουσα έννοια του φυσικού αριθμού. Η εννοιολογική αλλαγή είναι εκείνο το είδος της μάθησης που απαιτεί μη προσθετικούς μηχανισμούς. Στην πραγματικότητα, η χρήση προσθετικών μηχανισμών σε καταστάσεις που απαιτούν εννοιολογική αλλαγή, είναι η αιτία πρόκλησης παρανοήσεων. Μια τυπική παρανόηση οφείλεται στο γεγονός ότι η νέα πληροφορία προστίθεται σε ασύμβατη γνωστική βάση δημιουργώντας συνθετικά μοντέλα, όπως λ.χ. η πεποίθηση ότι τα κλάσματα είναι πάντα μικρότερα της μονάδας (Stafylidou & Vosniadou, 2004) ή ότι η γη είναι κοίλη σφαίρα, μέσα στην οποία ζουν οι άνθρωποι (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Η Vosniadou (2003) (στο Vosniadou & Verschaffel, 2004), επισημαίνει ότι είναι σημαντικό στη διδασκαλία να διαχωρίζονται οι περιπτώσεις στις οποίες απαιτείται εννοιολογική αλλαγή και οι καθηγητές να προτρέπουν τους μαθητές να μη χρησιμοποιούν προσθετικούς μηχανισμούς σε αυτές τις περιπτώσεις. Γενικότερα, είναι σημαντικό η διδασκαλία να έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τις μεταγνωστικές ικανότητες που απαιτούνται για να παρακάμψουν τα εμπόδια που θέτει η πρότερη γνώση.

Σύμφωνα με τους Vosniadou et al. (2001) οι περισσότεροι από τους ερευνητές συμφωνούν σε κάποιες βασικές αρχές που πρέπει να διέπουν το σχεδιασμό μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την εννοιολογική αλλαγή. Αναφέρουμε ενδεικτικά τις ακόλουθες:

- Το μαθησιακό περιβάλλον πρέπει να υποστηρίζει την ενεργό μάθηση και να οδηγεί τους μαθητές στην απόκτηση αυτο-ρυθμιζόμενων διαδικασιών. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί, μεταξύ άλλων, αν ζητηθεί από τους μαθητές να συμμετέχουν σε projects, να προσπαθούν να λύνουν περίπλοκα προβλήματα, να εκφράζουν λεκτικά τις ιδέες τους και να ακούν τις απόψεις των άλλων.
- Δεδομένου ότι η μάθηση λαμβάνει χώρα σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, θα πρέπει να παρουσιάζονται στους μαθητές έργα που έχουν κοινά πολιτισμικά στοιχεία με αυτούς και τα προβλήματα θα πρέπει να αντιστοιχούν σε αυθεντικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές έτσι ώστε να διευκολύνεται η μεταφορά της γνώσης από τη μια κατάσταση στην άλλη.
- Δεδομένου ότι η μάθηση δεν είναι μια ατομική αλλά μια κοινωνική διαδικασία, θα πρέπει το σχολείο: α) να ενθαρρύνει τη συνεργασία μεταξύ μαθητών β) να επιτρέπει στους μαθητές να εκφράζουν τις δικές τους εσωτερικές αναπαραστάσεις των φαινομένων και να τις συγκρίνουν με αυτές των άλλων και γ) να σέβεται την ιδιαίτερη προσωπικότητα του κάθε μαθητή.

Στη συνέχεια, οι Vosniadou et al. (2001) περιγράφουν οκτώ προτάσεις για το σχεδιασμό μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την εννοιολογική αλλαγή σύμφωνα με τις οποίες πρέπει να:

- *λαμβάνεται υπόψη η προϋπάρχουσα γνώση.*
- *αναπτύσσονται οι μεταγνωστικές δεξιότητες.*
- *λαμβάνονται υπόψη οι παγιωμένες παραδοχές των μαθητών (entrenched presuppositions).*
- *αναπτύσσονται κίνητρα για εννοιολογική αλλαγή.*
- *δημιουργούνται προϋποθέσεις γνωστικής σύγκρουσης*
- *παρέχονται μοντέλα και εξωτερικές αναπαραστάσεις*
- *τίθεται, πιθανώς, υπό συζήτηση το εύρος του αναλυτικού προγράμματος*
- *λαμβάνεται υπόψη η σειρά απόκτησης των εμπλεκόμενων εννοιών.*

Οι Tsamir and Tirosh (2007) χρησιμοποιούν, στην περίπτωση της ισοδυναμίας απειροσυνόλων, τις παραπάνω προτάσεις για αναστοχασμό πάνω στις διδακτικές παρεμβάσεις που σχεδίασαν οι ίδιες. Ειδικότερα, αναλύουν με το «φακό» των παραπάνω προτάσεων τη δραστηριότητα που εφάρμοσε η Tsamir (1999) σε μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών. Για παράδειγμα, θεωρούν ότι το πρώτο μέρος της δραστηριότητας της παραπάνω έρευνας, που αφορά στη σύγκριση

πεπερασμένων συνόλων, αναπτύσσει τις μεταγνωστικές δεξιότητες των συμμετεχόντων, δεδομένου ότι προέκυψαν με βάση αυτήν σημαντικά ευρήματα, όπως ότι: α) δυο πεπερασμένα σύνολα μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους, ακόμα κι αν η απαρίθμηση αυτών δεν είναι δυνατή (προβλήματα 1και 5) β) ακόμα κι όταν η απαρίθμηση ήταν δυνατή, δεν ήταν η βέλτιστη μέθοδος σύγκρισης και γ) η απαρίθμηση δεν είναι τίποτε άλλο, στην πραγματικότητα, από μια αντιστοίχιση 1-1 των στοιχείων ενός δοσμένου συνόλου με ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Στην ίδια έρευνα στο δεύτερο μέρος το στάδιο 2γ δημιουργεί προϋποθέσεις γνωστικής σύγκρουσης, δεδομένου ότι οι συμμετέχοντες κατάλαβαν ότι η εφαρμογή των τριών μεθόδων σύγκρισης (1-1, 'υποσυνολική σχέση' και 'όλα τα άπειρα είναι ίδια') οδηγεί σε αντιφατικά συμπεράσματα. Αυτή η διαπίστωση δημιούργησε κατάσταση σύγχυσης με αποτέλεσμα να προκύψουν ερωτήσεις του τύπου: «γιατί δούλευαν οι μέθοδοι στα πεπερασμένα σύνολα; Τι πρέπει να γίνει στα απειροσύνολα;». Μετά από συζήτηση σε ομάδες και με όλη την τάξη, οι συμμετέχοντες κατέληξαν ότι: «η 1-1 αντιστοίχιση είναι η καταλληλότερη για τη σύγκριση απειροσυνόλων· έτσι κι αλλιώς εφαρμόζεται και στη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων». Έτσι στη μεταφορά από τα πεπερασμένα στα απειροσύνολα, «χάθηκε» η δυνατότητα σύγκρισης με διαφορετικές μεθόδους. Μια άλλη ιδιότητα που χάθηκε σε αυτή τη μεταφορά είναι ότι: «το μέρος είναι πάντα μικρότερο από το όλον». Η πιθανή ισοδυναμία ενός συνόλου με ένα γνήσιο υποσύνολό του είναι ένα χαρακτηριστικό που «κερδίσαμε» στη μεταφορά αυτή.

Συμπερασματικά λοιπόν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι παραπάνω έρευνες καταδεικνύουν τις αναμενόμενες δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του απείρου. Ειδικά όσον αφορά στις δυσκολίες κατανόησης του *ενεργεία* απείρου, στην προσπάθεια να αιτιολογηθεί η ισοδυναμία ή μη δύο απειροσυνόλων, κυριαρχούν οι πεποιθήσεις ότι: α) όλα τα άπειρα είναι «ίσα» β) τα απειροσύνολα δεν συγκρίνονται γ) η 1-1 αντιστοίχιση είναι μια καλή μέθοδος σύγκρισης. Αλλά και η σχέση του 'περιέχεσθαι' εμφανίζεται πολύ ισχυρή στις συγκρίσεις. Από την άλλη μεριά, ο σχεδιασμός ενός μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την εννοιολογική αλλαγή που απαιτείται για την κατανόηση της ισοδυναμίας απειροσυνόλων - και κατά συνέπεια την κατανόηση της έννοιας του *ενεργεία* απείρου - καθώς επίσης και η χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων απειροσυνόλων, ενθαρρύνει τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο που σκέφτονται για το άπειρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΑΠΕΙΡΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε, καταρχήν, έναν αριθμό παραδόξων του απείρου και στη συνέχεια δυο έρευνες στις οποίες γίνεται σαφής χρήση παραδόξων στην προσπάθεια κατανόησης του τρόπου με τον οποίο ο ανθρώπινος νους προσεγγίζει την έννοια του απείρου.

Τα μαθηματικά παράδοξα αποτέλεσαν το εφαλτήριο για τη μετάβαση σε ένα ανώτερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο αμερικανός αναλυτικός φιλόσοφος W.V.Quine (στο Mamolo & Zazkis, 2008): «Δεν είναι λίγες οι στιγμές στην ιστορία, που η ανακάλυψη ενός παράδοξου έδωσε την ευκαιρία για ανακατασκευές στα θεμέλια της σκέψης». Ο Rucker (2004, σελ.101) χαρακτηρίζει τα παράδοξα ως «συμπαγείς πηγές ενέργειας, φυλαχτά» και πιστεύει ότι: «το να συλλογίζεσαι ένα από τα παράδοξα του Ζήνωνα είναι σαν να χαϊδεύεις το μαρμάρινο άγαλμα μιας καλλίπυγους Αφροδίτης….Ποτέ δεν μπορείς να ξεφορτωθείς ένα καλό παράδοξο». Η έννοια του απείρου είναι στο κέντρο πολλών μαθηματικών παράδοξων. Όπως παρατηρεί ο B.Bolzano (στα Mamolo & Zazkis, 2008· Clegg, 2003):

> Ασφαλώς οι περισσότερες από τις παραδοξολογικές προτάσεις (paradoxical statements) που απαντώνται (encountered) στο μαθηματικό πεδίο……είναι προτάσεις που, είτε περιλαμβάνουν την έννοια του απείρου αυτή καθεαυτή, είτε η προσπάθεια απόδειξής τους εξαρτάται με κάποιο τρόπο από την έννοια αυτή.

Τα παράδοξα του απείρου, σε αντίθεση με πολλά φιλοσοφικά παράδοξα που εμπεριέχουν αυτό-αναιρέσεις ή παράλογες υποθέσεις (π.χ. το παράδοξο του κουρέα που ξύριζε όλους τους άνδρες του χωριού που δεν μπορούσαν να ξυριστούν μόνοι τους), είναι παραδοξολογικές προτάσεις που πηγάζουν από χαρακτηριστικά του μαθηματικού απείρου που φαίνονται αδύνατα και αδιανόητα, με την έννοια ότι έρχονται σε αντίφαση με τη διαίσθηση και την πραγματικότητα (Mamolo & Zazkis, 2008).

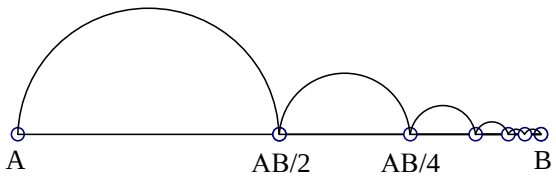
3.1 Τα παράδοξα του Ζήνωνος (Αναπολιτάνος, 2005· Barrow, 2007· Clegg, 2003).

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490 - 430 π.Χ.) υπερασπιζόμενος την Παρμενίδια θέση, ότι η κίνηση είναι αδύνατη, διατύπωσε τέσσερα παράδοξα που δεν καταρρίφθηκαν ποτέ στην αρχαιότητα και

εξακολουθούν μέχρι σήμερα να προσελκύουν το ενδιαφέρον. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τα δύο από αυτά που αναφέρονται στο άπειρο και αρχίζουν με μια φαινομενικά αδιαμφισβήτητη πρόταση από την οποία εξάγεται ένα συμπέρασμα που αντίκειται στην πραγματικότητα.

Το παράδοξο της διχοτομίας

Το συγκεκριμένο παράδοξο καταλήγει στο συμπέρασμα ότι: «η κίνηση είναι αδύνατη».



Ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας πρόκειται να διανύσει την απόσταση ΑΒ. Θα πρέπει πρώτα να διανύσει το μισό της απόστασης, δηλαδή ΑΒ/2. Στη συνέχεια το μισό του μισού της απόστασης, δηλαδή ΑΒ/4, οπότε μετά το δεύτερο βήμα της διαδικασίας θα έχει διανύσει συνολικά απόσταση ίση με $AB \cdot (1-\frac{1}{2^2})$. Συνεπώς μετά από n βήματα θα έχει διανύσει συνολικά απόσταση ίση με $AB \cdot (1-\frac{1}{2^n})$. Σύμφωνα με το Ζήνωνα η διανυόμενη απόσταση θα είναι πάντοτε μικρότερη από ΑΒ, γιατί για να διανύσει ο δρομέας την πεπερασμένη απόσταση ΑΒ θα πρέπει να περάσει από ένα άπειρο πλήθος σημείων, δηλαδή να ολοκληρώσει μια άπειρη διαδικασία, πράγμα αδύνατο. Συνεπώς και η κίνηση είναι αδύνατη.

Το παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας

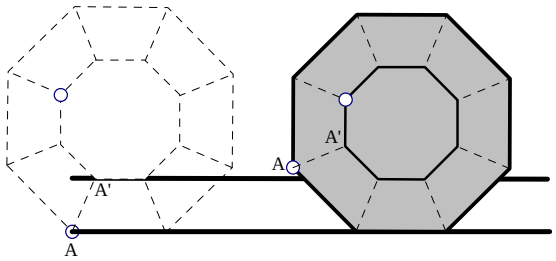
Το συγκεκριμένο παράδοξο είναι παρόμοιο με το πρώτο και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι «ο ταχύτερος δεν θα προσπεράσει ποτέ τον βραδύτερο». Ας υποθέσουμε ότι ο Αχιλλέας και η χελώνα παίρνουν μέρος σε έναν αγώνα δρόμου. Ως γενναιόδωρος ο Αχιλλέας δίνει ένα προβάδισμα στη χελώνα και ενώ εκείνος ξεκινά τον αγώνα από το σημείο 0, η χελώνα ξεκινά από το σημείο 1 και τρέχει με τη μισή ταχύτητα από εκείνη που τρέχει ο Αχιλλέας. Όταν ο Αχιλλέας θα φτάσει στο σημείο 1 η χελώνα θα βρίσκεται στο σημείο 1 + 1/2. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο 1+1/2, η χελώνα θα βρίσκεται μπροστά του, στο σημείο 1+1/2+1/4 και ούτω καθεξής. Έτσι μετά από n βήματα ο Αχιλλέας θα βρίσκεται στο σημείο 2-$\frac{1}{2^{n-1}}$ από την αφετηρία, ενώ η χελώνα θα βρίσκεται στο $2-\frac{1}{2^n}$ από την αφετηρία και θα διατηρεί το

προβάδισμα. Κατά συνέπεια ο ταχύτερος Αχιλλέας δεν θα προσπεράσει ποτέ την βραδύτερη χελώνα. Ο Ζήνων, εντέλει, προσπάθησε να δείξει ότι η ιδέα της κίνησης ως συνεχούς διαδικασίας, η οποία θα μπορούσε να είναι άπειρα διαιρέσιμη, ήταν αβάσιμη. Ο Δ. Αναπολιτάνος (2005, σελ.60) αναφέρει:

> Η σημασία των παραδόξων αυτών είναι ουσιαστική. Συνδέεται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

3.2 Το παράδοξο του Galileo Galilei (Clegg, 2003·Barrow, 2007·Kaplan & Kaplan, 2004).

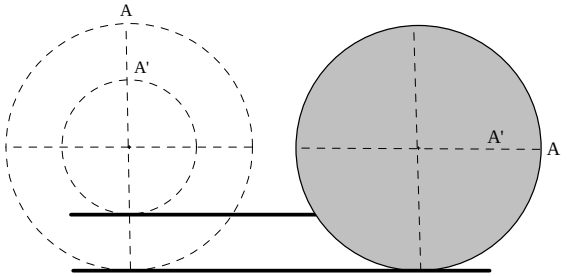
Ο Galileo Galilei στο έργο του *Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences pertaining to Mechanics and Local Motions*, παραθέτει ένα διάλογο μεταξύ τριών φανταστικών προσώπων, τους: F. Salviati, που εκφράζει τις ιδέες του Galileo, Simplicio, που μένει πιστός στις θέσεις του Αριστοτέλη και G. Sagredo, που έχει το ρόλο του ουδέτερου παρατηρητή ο οποίος επισημαίνει τα σημαντικά σημεία της συζήτησης. Μεταξύ άλλων, ο αναγνώστης έχει την ευκαιρία να έρθει σε επαφή με τις νοητικές αντινομίες που δημιουργεί το άπειρο σε όλους μας. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν την περιπλάνηση, με έναν τροχό που έχει σχήμα κανονικού οκταγώνου, στο κέντρο του οποίου και με απόστημα το μισό του αποστήματος του αρχικού, στερεώνουμε ένα μικρότερο οκτάγωνο (Σχ.1). Ο Salviati εκπλήσσει τους φίλους του, ζητώντας τους να σκεφτούν έναν «πραγματικό» πολυγωνικό τροχό ο οποίος φαίνεται να πραγματοποιεί το αδύνατο με έναν τρόπο που απαιτεί την εμπλοκή του απείρου. Καθώς λοιπόν στρέφεται ο μεγάλος τροχός προς τα δεξιά, αφήνει το αποτύπωμά του πάνω στην ευθεία και συνεπώς μόλις ολοκληρωθεί μια πλήρης περιστροφή, το ανάπτυγμα της περιμέτρου του θα έχει αποτυπωθεί σ' αυτήν. Το ίδιο όμως θα έχει συμβεί και με το μικρό οκτάγωνο, του οποίου η περίμετρος θα αποτυπωθεί σε ευθεία παράλληλη προς την αρχική.



Σχ.1

Παρατηρούμε ότι τα αποτυπώματα έχουν ίσα μήκη! Δηλαδή τα οκτάγωνα έχουν ίσες περιμέτρους!! Η εξήγηση είναι αρκετά απλή, δεδομένου ότι αν παρατηρήσουμε την κίνηση μιας κορυφής του μικρού οκταγώνου πάνω στην ευθεία αποτύπωσης, θα προσέξουμε ότι κάνει έναν «πήδο» και αφήνει ένα κενό πάνω στην ευθεία ίσο με την διαφορά του μήκους των πλευρών των οκταγώνων.

Όλα καλά μέχρι εδώ, και ο Salviati παρατηρεί ότι το ίδιο θα συμβαίνει ανεξαρτήτως του πλήθους των πλευρών του πολυγώνου – σε κάθε περίπτωση όμως πεπερασμένου πλήθους διαιρέσιμων πλευρών (quanta). Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι οι τροχοί είναι κυκλικοί (γνωστό και ως παράδοξο του τροχού του Αριστοτέλη από το έργο του «Μηχανικά») (Σχ.2).



Σχ.2

Ακλουθώντας την παραπάνω διαδικασία, μετά από μια πλήρη περιστροφή, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή τα αποτυπώματα έχουν ίσα μήκη – οι κύκλοι έχουν ίσες περιμέτρους!! Εδώ όμως υπάρχει ένα πραγματικό πρόβλημα. Η περιφέρεια του κύκλου, σε αντίθεση με εκείνη του πολυγώνου, είναι «ομαλή». Δεν υπάρχει περίπτωση ο τροχός κάποια στιγμή να μην έρχεται σε επαφή με την ευθεία, ούτε ο μεγάλος ούτε βέβαια και ο μικρός. Πώς κατάφερε λοιπόν ο μικρός κύκλος να καλύψει το «χαμένο έδαφος» δεδομένου ότι είναι συνέχεια σε επαφή με την ευθεία;

Ο Galileo, δια στόματος Salviati, έχει μια εξήγηση. Μας προτρέπει λοιπόν να φανταστούμε καταρχήν δύο όμοια κανονικά πολύγωνα με 100.000 πλευρές το καθένα. Μετά από μια πλήρη περιστροφή, το μεγάλο πολύγωνο έχει αποτυπώσει την περίμετρό του στην ευθεία (δηλαδή, πάνω στην ευθεία έχουμε μετρήσει τμήμα ίσο με την περίμετρο του πολυγώνου). Αυτό το τμήμα είναι ίσο με εκείνο που έχει *μετρηθεί* και αντιστοιχεί στην *αποτύπωση* των 100.000 μικρότερων πλευρών του μικρού πολυγώνου και των 100.000 μικρών κενών μεταξύ των πλευρών. Στη συνέχεια να φανταστούμε κάτι ακραίο: άπειρο πλήθος αδιαίρετων πλευρών του κύκλου (*non-quanta*) (Knobloch, 1999). Τότε ο μικρός κύκλος *αποτυπώνει* με την κίνησή του άπειρο πλήθος

απείρως μικρών «πλευρών», με άπειρα το πλήθος *non-quanta* κενά μεταξύ τους, κενά που προφανώς δεν μπορούμε να αντιληφθούμε (και βέβαια να μετρήσουμε την έκτασή τους) (Knobloch, 1999). Να σημειώσουμε εδώ, ότι η έννοια του «μετρώ» (*misurata*) δεν αναφέρεται στην περίπτωση του κύκλου. Γιατί τελικά, καταλήγει ο Salviati, αν τμήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε πεπερασμένα σημεία, τα τμήματα που θα προκύψουν δεν μπορούν με κανένα τρόπο να αποτελέσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερο του αρχικού, χωρίς να υπάρχουν κενά ανάμεσα. Αλλά με άπειρο πλήθος απείρως μικρών τμημάτων, με άπειρα το πλήθος απειροστών κενών (*vacui non quanti*) μεταξύ τους, μπορούμε, κατά τον Salviati, να συλλάβουμε μια ευθεία που θα εκτείνεται απεριόριστα (Knobloch, 1999).

Ο Simplicio βέβαια αντιδρά έντονα, ισχυριζόμενος ότι όλη αυτή η ιστορία με τα απείρως μεγάλα και απείρως μικρά, είναι αδιανόητη. Αν τελικά η λύση που προτείνει ο Salviati στηρίζεται στον ισχυρισμό ότι η περιφέρεια του μικρού (και του μεγάλου) κύκλου αποτελείται από άπειρα το πλήθος σημεία, δεν ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν δύο άπειρα, το ένα μεγαλύτερο από το άλλο;
Γιατί είναι κάτι παραπάνω από προφανές, ότι το άπειρο πλήθος σημείων ενός μεγαλύτερου σε μήκος τμήματος, είναι <u>μεγαλύτερο</u> από εκείνο ενός μικρότερου! Και λέει χαρακτηριστικά: *'a value greater than infinity is quite beyond my comprehension'*.

Ο Galileo μετά από όλα αυτά, θέτει ως στόχο να αποδείξει ότι το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων είναι απλώς άπειρο, θέτοντας, δια στόματος Salviati, μια σειρά ερωτήσεων στον Simplicio, που αφορούν τους φυσικούς και τους τετράγωνους αριθμούς. Για να αποδείξει την ιδέα του, ο Salviati επισημαίνει ότι αφενός μεν για κάθε ρίζα υπάρχει ένας τετράγωνος και κανένας τετράγωνος αριθμός δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια ρίζες,

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow 4, \quad 3 \leftrightarrow 9, \quad 4 \leftrightarrow 16, \quad 5 \leftrightarrow 25, \ldots$$

και αφετέρου, δεδομένου ότι κάθε φυσικός αριθμός δεν είναι τετράγωνος, το πλήθος των φυσικών αριθμών – τετράγωνων και μη – είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των τετράγωνων αριθμών και μάλιστα όσο προχωρούμε προς μεγαλύτερους αριθμούς, το πλήθος των τετράγωνων αριθμών μειώνεται συνεχώς και ταχύτατα.

Σύμφωνα με τον Salviati, ο μόνος τρόπος για να αποφύγουμε την παραπάνω αντίφαση, είναι να παραδεχτούμε ότι υπάρχουν άπειροι φυσικοί και άπειροι τετράγωνοι αριθμοί. Δεν μπορούμε να πούμε ότι οι τετράγωνοι είναι περισσότεροι ή λιγότεροι από τους φυσικούς αριθμούς. Σε τελική ανάλυση, οι ιδιότητες της ισότητας και του μικρότερου ή μεγαλύτερου μεγέθους είναι

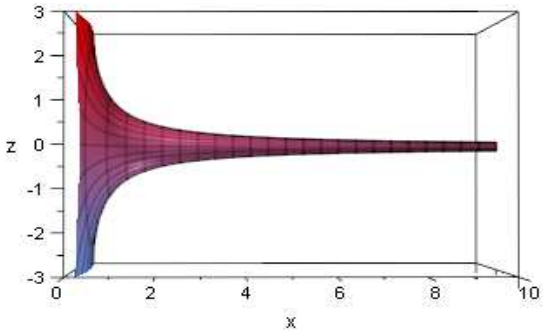
εφαρμόσιμες μόνο στις πεπερασμένες ποσότητες, δηλαδή ποσότητες που είναι μετρήσιμες , και όχι όταν ασχολούμαστε με το άπειρο (τα απειροστά – *non quanta* – δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, γιατί σε αντίθεση με τα *quanta*, δεν είναι μετρήσιμα) (Knobloch, 1999).

Τα παραπάνω δείχνουν ότι ο Galileo είχε επίγνωση της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας και ότι είναι δυνατόν το μέρος να είναι ίσο με το όλον (σε αντίθεση με το Ευκλείδειο αξίωμα) στην περίπτωση ενός απειροσυνόλου, ακόμα κι αν με τη διαπίστωση αυτή κατέληξε στο λανθασμένο συμπέρασμα, ότι όλα τα άπειρα είναι ίδια. Στην πραγματικότητα το Ευκλείδειο αξίωμα δεν μπορεί να εφαρμοστεί στα απειροσύνολα, δεδομένου ότι αυτά δεν είναι ποσότητες που μπορούν να συγκριθούν (Knobloch, 1999). Και παρόλο που δεν μπορούσε να φανταστεί ότι το σύνολο των σημείων ενός τμήματος δεν είναι καθόλου το ίδιο άπειρο με το άπειρο των φυσικών αριθμών, κατάφερε να στηρίξει τον ισχυρισμό του ότι: δυο κύκλοι μπορούν να «αποτυπώσουν» την ίδια απόσταση, ακόμα κι αν έχουν διαφορετικές ακτίνες.

3.3 Torricelli's trumpet (Kaplan & Kaplan, 2004· Clegg, 2003).

Το παράδοξο αυτό είναι επίσης γνωστό και ως το κόρνο του Γαβριήλ (Gabriel's corn). Ο μύθος ταυτίζει τον Γαβριήλ με τον Αρχάγγελο Γαβριήλ, ο οποίος αναγγέλλει με το κόρνο του την Ημέρα της Κρίσης, συσχετίζοντας το άπειρο με το Θείο (για άλλη μια φορά).

Ο E.Torricelli (1608-1647) περιγράφει ένα στερεό (Σχ. 3) του οποίου η επιφάνεια είναι άπειρη και ο όγκος πεπερασμένος. Το στερεό παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης με εξίσωση $y = 1/x$, για $x \geq 1$, γύρω από τον άξονα Ox. Ο Άγγλος φιλόσοφος Thomas Hobbes είχε γράψει χαρακτηριστικά: «Για να συλλάβει κανείς νοητικά το παραπάνω στερεό, δεν χρειάζεται να είναι μαθηματικός ή λογικός φιλόσοφος. Θα πρέπει να είναι …παλαβός» (Kaplan & Kaplan, 2004).



Σχ.3

Χρησιμοποιώντας σύγχρονη ορολογία:

$$\mathrm{V}(\lambda)=\int_1^{\lambda}\pi\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^2 dx=\pi\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)_1^{\lambda}=\pi\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}+1\right) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}V(\lambda)=\pi$$

$$E(\lambda)=2\pi\cdot\int_1^{\lambda}y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\cdot\int_1^{\lambda}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx>2\pi\cdot\int_1^{\lambda}\frac{1}{x}dx=2\pi\ln\lambda$$

$$\kappa\alpha\iota \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$$

Η μαθηματική εξήγηση του παράδοξου αυτού σχετίζεται με τις διαφορετικές διαστάσεις των ποσοτήτων που εμπλέκονται στους υπολογισμούς. Η διάσταση του μήκους είναι 1 της επιφάνειας 2 και του όγκου 3 (π.χ. m, m^2, m^3 αντίστοιχα). Όταν υπολογίζουμε τη δισδιάστατη επιφάνεια του στερεού που προέκυψε από περιστροφή του γραφήματος της y=1/*x*, υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα προέκυψε από άθροιση (ολοκλήρωση) <u>μονοδιάστατων</u> «δακτυλίων» των οποίων οι ακτίνες είναι ίσες με το ύψος του γραφήματος στο εκάστοτε δεδομένο σημείο. Ομοίως, όταν υπολογίζουμε τον τρισδιάστατο όγκο του στερεού εκ περιστροφής, υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα προέκυψε από άθροιση (ολοκλήρωση) <u>δισδιάστατων</u> κυκλικών δίσκων, ακτίνας ίσης με το εκάστοτε ύψος του γραφήματος. Καθώς $x\to\infty$ έχουμε: $\pi\cdot\frac{1}{x^2}<<2\pi\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}$. Επί της ουσίας, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι όσο μεγαλώνει το *x*, το άθροισμα των εμβαδών των δισδιάστατων κυκλικών δίσκων, γίνεται πολύ μικρότερο από το άθροισμα των περιμέτρων των μονοδιάστατων δακτυλίων, και φθίνει πολύ πιο γρήγορα από ότι θα έπρεπε για να ξεπεράσει ο συνολικός όγκος του στερεού την τιμή *π*. Ολοκληρώνοντας, είναι αναμενόμενο ο όγκος να συγκλίνει στην τιμή *π* (http://en.wikipedia.org/wiki/Gabriel's_Horn.).

Ένας λιγότερο συμβολικός τρόπος για να καταλάβουμε τα παραπάνω είναι ο ακόλουθος (ενίοτε καλείται και παράδοξο του ζωγράφου - painter's paradox): ας φανταστούμε ότι γεμίζουμε το κόρνο με χρώμα *π* κυβικών μονάδων, οπότε η πεπερασμένη αυτή ποσότητα θα χρωματίσει και την εσωτερική επιφάνεια του στερεού, η οποία είναι άπειρη!!! Το παράδοξο έγκειται στο γεγονός ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη μας ότι το πραγματικό χρώμα δεν είναι δισδιάστατο - έχει πάχος, και κατά συνέπεια η κάλυψη της άπειρης επιφάνειας θα απαιτούσε μια άπειρη

(τρισδιάστατη) ποσότητα χρώματος. Δεδομένου ότι κάποια στιγμή η διατομή του κόρνου θα γίνει μικρότερη από τη διάμετρο των σωματιδίων του υγρού, πεπερασμένη ποσότητα χρώματος θα καλύψει πεπερασμένη επιφάνεια, και το παράδοξο εξαφανίζεται.

Να σημειώσουμε εδώ ότι στα τέλη του 17^{ου} αιώνα και στις αρχές του 18^{ου}, οι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να κατανοούν αρχές της ανάλυσης. Κι εδώ όμως τα παράδοξα του απείρου δεν άργησαν να φανούν. Μεγάλος λόγος λ.χ. έγινε για το άθροισμα της άπειρης σειράς:

S = 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1…

Κάποιοι είπαν: S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+…= 0+0+0+0+…= 0.

Άλλοι πάλι το είδαν ως: S = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-…= 1-0-0-0-0-…= 1

Ο L.G. Grandi (1671-1742) έδωσε την «Σολομώντεια» λύση: υποστήριξε ότι επειδή οι τιμές 0 ή 1 για το παραπάνω άθροισμα είναι «ισοπίθανες», θα είναι: S = 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+…) = 1-S και τελικά S = 1/2.

3.4 Ο γρίφος του ping-pong ball (Mamolo &.Zazkis, 2008)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε άπειρες μπάλες του ping-pong αριθμημένες 1,2,3,…και ένα μεγάλο βαρέλι. Το πείραμα που ακολουθεί διαρκεί 1 λεπτό ακριβώς. Καταρχήν τοποθετούμε στο βαρέλι τις 10 πρώτες μπάλες και βγάζουμε από αυτό εκείνη με το νούμερο 1 σε διάστημα μισού λεπτού. Στη συνέχεια σε 1/4 του λεπτού, το μισό του υπολειπόμενου χρόνου, τοποθετούμε στο βαρέλι τις μπάλες με νούμερα 11 έως 20 και βγάζουμε από αυτό εκείνη με το νούμερο 2. Στο μισό του υπολειπόμενου χρόνου τοποθετούμε τις μπάλες με νούμερα 21 έως 30 και αφαιρούμε εκείνη με το νούμερο 3. Συνεχίζουμε τη διαδικασία επ' άπειρον. Μετά από 1 λεπτό πόσες μπάλες θα έχουν μείνει μέσα στο βαρέλι;

Στο πρόβλημα αυτό, εμπλέκονται τρία απειροσύνολα: οι μπάλες που βάζουμε στο βαρέλι, εκείνες που βγάζουμε από το βαρέλι και τα χρονικά διαστήματα. Η αναγκαιότητα να συνδυάσει κανείς τρία απειροσύνολα εκ των οποίων το ένα είναι, ενάντια στη διαίσθηση (και αναπόφευκτα), φραγμένο, περιπλέκει την κατάσταση: η ακολουθία των χρονικών διαστημάτων είναι μια ακολουθία απείρων όρων (1/2, 1/4, 1/8,…) που έχει κάτω φράγμα τα 0 sec και άνω φράγμα το 1 λεπτό, το άθροισμα των όρων της οποίας ισούται με 1. Η σύγκρουση μεταξύ του «απεριόριστου» πλήθους των χρονικών διαστημάτων και του «περιορισμένου» χρόνου (1 λεπτό) τονίζει και προβάλλει την αλληλεπίδραση του *ενεργεία* απείρου με το *δυνάμει* άπειρο. Παρά το

γεγονός ότι σε κάθε χρονική στιγμή οι μπάλες μέσα στο βαρέλι είναι περισσότερες από εκείνες που είναι έξω από αυτό, μετά το πέρας του ενός λεπτού το βαρέλι θα είναι άδειο!!

Το παράδοξο επιλύεται, αν θέσουμε σε αντιστοίχιση 1-1 το καθένα από τα παραπάνω σύνολα με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τα δύο πρώτα σύνολα (οι μπάλες που μπαίνουν και εκείνες που βγαίνουν), όντας αριθμημένα, τίθενται απευθείας σε 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών. Άρα όσες μπάλες μπαίνουν στο βαρέλι, τόσες βγαίνουν κιόλας. Το γεγονός ότι το σύνολο A={1,2,3,…}(οι μπάλες που βγάζουμε), και το σύνολο των χρονικών διαστημάτων B={$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ...$}μπορούν επίσης να τεθούν σε αντιστοιχία 1-1 ($A \ni x \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \in B$), μας εξασφαλίζει ότι μετά το πέρας του ενός λεπτού, δεν θα υπάρχει τίποτα μέσα στο βαρέλι. Όντως μας το εξασφαλίζει; Όσα προείπαμε είναι απαραίτητα (αναγκαία) αλλά όχι επαρκή. Δεν επαρκεί το γεγονός ότι τα σύνολα A και B είναι ισοπληθικά. Η διάταξη των στοιχείων του συνόλου A παίζει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος. Για να αδειάσει το βαρέλι μετά το πέρας του ενός λεπτού, πρέπει να βγάζουμε τις μπάλες από μέσα διαδοχικά ξεκινώντας από εκείνη με το νούμερο1. Συνεπώς, θα υπάρξει μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή κατά την οποία κάθε μια από τις μπάλες που βάλαμε θα έχει βγει από το βαρέλι. Για παράδειγμα, αν ισχυριστεί κάποιος ότι η μπάλα με το νούμερο 127 θα έχει μείνει στο βαρέλι, θα αντικρούσουμε το επιχείρημα ισχυριζόμενοι ότι θα έχει αφαιρεθεί από αυτό τη χρονική στιγμή $(1/2)^{127}$ και αντίστροφα. Το βλέπω αλλά δεν το πιστεύω, ως άλλος Cantor, αν μου επιτρέπεται ο παραλληλισμός!!!

3.5 Το ασυνήθιστο ξενοδοχείο του Hilbert (Vilenkin, 1997·Clegg, 2003· Rucker, 2004· Smullyan, 2003·Barrow, 2007)

Θα παρουσιάσουμε το ξενοδοχείο αυτό, σαν παραμύθι που διηγείται κανείς σε παιδιά (μέρος του οποίου παρουσιάστηκε και στην διδακτική παρέμβαση που ακολουθεί στο 4^{ο} μέρος της παρούσας εργασίας). Είναι μια καταπληκτική ιστορία που αποδίδεται στον εξέχοντα μαθηματικό D. Hilbert (δεν αναφέρεται σε κανένα από τα συγγράμματά του). Γνωστή έγινε κυρίως όταν την περιέγραψε ο G. Gamow (1961) στο βιβλίο του με τίτλο: *One Two Three…Infinity: facts and speculations in science,* Viking, Νέα Υόρκη (Barrow, 2007).

Ας προσπαθήσουμε να φιλοξενήσουμε πρόσθετους πελάτες σε ένα ξενοδοχείο του οποίου όλα τα

δωμάτια είναι κατειλημμένα, χωρίς να καταφύγουμε σε διπλοκρατήσεις και χωρίς να έχουμε αναχωρήσεις. Αδύνατον; Ναι, αλλά μόνον αν το ξενοδοχείο είναι πεπερασμένο! Και δεν είναι όλα τα ξενοδοχεία πεπερασμένα!! Τι συμβαίνει αν έχει άπειρα δωμάτια; Τέτοια ξενοδοχεία απαντώνται στις ιστορίες του Σιωπηλού Ιόντος, του διαγαλαξιακού ταξιδευτή, και γι'αυτό είναι σκόπιμο να του δώσουμε το λόγο:

Γύρισα στο σπίτι μάλλον αργά – η συνάντηση στο κλαμπ «Νεφέλωμα της Ανδρομέδας» είχε τραβήξει πολύ μετά τα μεσάνυχτα. Όλη νύχτα βασανιζόμουν από εφιάλτες. Ονειρεύτηκα ότι είχα καταπιεί ένα τεράστιο διαστημικό σκαθάρι, μετά ότι βρισκόμουν ξανά στον πλανήτη Ντουρντίτοφ και δεν μπορούσα να ξεφύγω από εκείνες τις τρομερές μηχανές που υπάρχουν εκεί και μεταμορφώνουν τους ανθρώπους σε εξάγωνα. Ένα απρόσμενο τηλεφώνημα με επανέφερε στην πραγματικότητα. Ήταν ο παλιόφιλος και σύντροφος στα διαστρικά ταξίδια καθηγητής Ταράντογκ.

«Επείγον πρόβλημα, αγαπητό μου Ιόν», τον άκουσα να μου λέει. «Οι αστρονόμοι ανακάλυψαν ένα παράξενο κοσμικό αντικείμενο - μια μυστηριώδη μαύρη γραμμή η οποία εκτείνεται από τον ένα γαλαξία στον άλλο. Κανείς δεν γνωρίζει τι συμβαίνει. Είσαι η τελευταία μας ελπίδα. Να πετάξεις αμέσως προς το νεφέλωμα ACD-1587». Την άλλη μέρα, πήρα από την επισκευαστική μονάδα τον παλιό μου πύραυλο φωτονίων, φόρτωσα πάνω τον χρονικό επιταχυντή και το ηλεκτρικό μου ρομπότ, το οποίο γνωρίζει όλες τις γλώσσες του κόσμου και όλες τις ιστορίες γύρω από τα διαστρικά ταξίδια. Απογειώθηκα. Θα έπαιρνα την υπόθεση στα χέρια μου.

Πάνω που το ρομπότ είχε εξαντλήσει όλο το απόθεμα ιστοριών και είχε αρχίσει να επαναλαμβάνεται (δεν υπάρχει τίποτα χειρότερο από το να ακούς ένα ηλεκτρονικό ρομπότ να επαναλαμβάνει την ίδια ιστορία για δέκατη φορά), φάνηκε από μακριά ο προορισμός του ταξιδιού μου. Οι γαλαξίες που απέκρυπταν τη μυστηριώδη γραμμή ήταν πίσω μου πια, ενώ εμπρός μου βρισκόταν…το ξενοδοχείο «Κόσμος». Πριν από αρκετό καιρό, είχα κατασκευάσει έναν μικρό πλανήτη για τους περιπλανώμενους διαστρικούς εξόριστους, όμως τον κατέστρεψαν οι ίδιοι, και έτσι βρίσκονταν πάλι χωρίς καταφύγιο. Ύστερα, αποφάσισαν να παρατήσουν τις περιπλανήσεις σε ξένους γαλαξίες και να ανεγείρουν ένα μεγαλοπρεπές κτίριο – ένα ξενοδοχείο για όλους τους κοσμικούς ταξιδιώτες. Η ανέγερση του ξενοδοχείου αποδείχτηκε υπέροχο έργο. Το σπουδαιότερο χαρακτηριστικό του ξενοδοχείου ήταν ο άπειρος αριθμός δωματίων. Οι εξόριστοι ήλπιζαν ότι κανείς δεν θα βρισκόταν ξανά στη δυσάρεστη θέση να ακούσει την

ενοχλητική φράση που τόσο τους είχε βασανίσει τον καιρό της περιπλάνησης τους: «λυπάμαι, δεν υπάρχουν ελεύθερα δωμάτια».

Όμως, στάθηκα άτυχος. Οι κοσμικοί ζωολόγοι είχαν έρθει από όλους τους γαλαξίες και ήταν απειράριθμοι και έτσι, όλα τα δωμάτια ήταν κατειλημμένα από τους συνέδρους. Δεν υπήρχε δωμάτιο για μένα. Πρέπει να ομολογήσω ότι ο διευθυντής προσπάθησε πολύ για να πετύχει την συγκατάθεση κάποιων αντιπροσώπων, ώστε να μοιραστώ το δωμάτιο με έναν από αυτούς. Ωστόσο, μόλις διαπίστωσα ότι ο πρώτος υποψήφιος συγκάτοικος ανέπνεε φθόριο και ο άλλος θεωρούσε φυσιολογικό να υπάρχει στο περιβάλλον του θερμοκρασία 860°C, αρνήθηκα ευγενικά τους «ευχάριστους» συγκάτοικους. Ευτυχώς, ο διευθυντής του ξενοδοχείου…….ύστερα από σκέψη, στράφηκε στον υπεύθυνο υποδοχής και του είπε: «Να τον βάλεις στο δωμάτιο 1»

- Πώς μπορεί να γίνει αυτό;

Αυτό που έκανε ο υπεύθυνος της υποδοχής, ήταν να ζητήσει από κάθε ένοικο να μετακομίσει στο αμέσως επόμενο προς τα δεξιά του δωμάτιο. Με λίγα λόγια ο ένοικος του δωματίου 1 να πάει στο δωμάτιο 2, ο ένοικος του δωματίου 2 στο δωμάτιο 3,..., ο ένοικος του δωματίου n στο δωμάτιο $n+1$. Έτσι το δωμάτιο 1 έμεινε άδειο.

Από εκείνη τη στιγμή, άρχισα να εκτιμώ την ασυνήθιστη ιδιότητα του συγκεκριμένου ξενοδοχείου. Αν ο αριθμός των δωματίων ήταν πεπερασμένος, ο ένοικος του τελευταίου δωματίου θα έπρεπε να μετακομίσει στον διαστρικό χώρο!! Αφού όμως το ξενοδοχείο είχε άπειρο αριθμό δωματίων, υπήρχε άπειρος χώρος για όλους και μπόρεσα να εγκατασταθώ χωρίς να στερήσω το δωμάτιο από κάποιο ζωολόγο. Το επόμενο πρωί μου ζήτησαν, προς μεγάλη μου έκπληξη, να μετακομίσω . Ο λόγος είναι η καθυστερημένη άφιξη 200.000 κοσμικών ζωολόγων που έπρεπε με τη σειρά τους κι αυτοί να εγκατασταθούν.

- Ποιο είναι το νούμερο του δωματίου στο οποίο μετακόμισα;

Τώρα πια ήταν εύκολο για μένα. Πήρα τα πράγματά μου και χωρίς να ρωτήσω κανέναν, μετακόμισα στο δωμάτιο 200.001 και έτσι έμειναν 200.000 άδεια δωμάτια για τους καθυστερημένους. Κατάλαβα ότι ακόμα κι αν έρχονταν n το πλήθος καθυστερημένοι, όπου n φυσικός αριθμός, θα έπρεπε κάθε ένοικος να μετακινηθεί n δωμάτια προς τα δεξιά, αφήνοντας ελεύθερα τα πρώτα n δωμάτια για τους νέους πελάτες. Ενώ πήγαινα στη ρεσεψιόν για να πληρώσω την τρίτη ημέρα της παραμονής μου, βλέπω κατάπληκτος από το παράθυρο του

υπεύθυνου υποδοχής μια μεγάλη ουρά που η άκρη της χανόταν κάπου κοντά στα Νέφη του Μαγγελάνου. Στράφηκα αμήχανος στη ρεσεψιόν και ρώτησα:

«Ποιοι είναι αυτοί οι άνθρωποι;»

«Ήρθαν για το διαστρικό συνέδριο φιλοτελιστών».

«Είναι πολλοί;»

«Άπειροι – ένας εκπρόσωπος από κάθε γαλαξία».

«Πώς θα εξασφαλίσετε δωμάτια για όλους; Οι κοσμικοί ζωολόγοι θα φύγουν αύριο».

«Δεν ξέρω· τώρα πηγαίνω να συζητήσω το θέμα για λίγο με το γενικό διευθυντή».

- Με ποιόν τρόπο μπορούμε να βοηθήσουμε τον υπεύθυνο, ώστε να εξυπηρετήσει τους πελάτες και να μη χάσει τη δουλειά του;

Αυτήν τη φορά το πρόβλημα ήταν πολύ πιο δύσκολο. Μετά από ώρα ο υπεύθυνος βγήκε από το γραφείο του διευθυντή και ζήτησε αρχικά από τους παλαιούς ενοίκους να μετακινηθούν όλοι κατά ένα δωμάτιο δεξιά. Έτσι ένας νέος ένοικος εγκαθίσταται στο άδειο δωμάτιο 1. Στη συνέχεια ζητάει πάλι από όλους να μετακινηθούν κατά ένα δωμάτιο δεξιά, οπότε πάλι το δωμάτιο 1 μένει ελεύθερο. Αναρωτήθηκα αν γνωρίζει τι κάνει!!! Τι κουραστική λύση! Αποκλείεται σε πεπερασμένο χρόνο να τακτοποιηθούν όλοι οι νέοι πελάτες. Θα έχει φύγει από τη ζωή και ακόμα θα μετακινούνται ένοικοι από το ένα δωμάτιο στο άλλο…..Τον λυπήθηκα και αποφάσισα να τον βοηθήσω. Του πρότεινα να βάλει τον ένοικο του δωματίου 1 στο νούμερο 2, του δωματίου 2 στο δωμάτιο 4, του δωματίου 3 στο δωμάτιο6,…, του δωματίου n στο δωμάτιο με αριθμό 2n. Έτσι ελευθερωνόταν το απειροσύνολο των δωματίων με περιττό αριθμό με μια κίνηση και έτσι θα μπορούσαν να εγκατασταθούν σ’ αυτά οι φιλοτελιστές !! Ενθουσιάστηκε και μου προσέφερε δωρεάν διαμονή για όσο διάστημα επιθυμούσα!!

Την επόμενη μέρα τα πράγματα ήταν ευκολότερα – το συνέδριο των κοσμικών ζωολόγων έληξε, και οι ζωολόγοι αναχώρησαν για τις πατρίδες τους. Λίγες ημέρες αργότερα, ο γενναιόδωρος οικοδεσπότης μου ήταν στεναχωρημένος. «Τι τρέχει;» τον ρώτησα. «Τα μισά δωμάτια είναι πλέον άδεια. Δεν θα επιτύχουμε τους οικονομικούς στόχους μας». Η αλήθεια είναι ότι δεν κατάλαβα για ποιους οικονομικούς στόχους μου μιλούσε. Άλλωστε, εισέπραττε μισθώματα από άπειρο πλήθος δωματίων. Παρόλα αυτά, του έδωσα μια συμβουλή: «Γιατί δεν μεταφέρετε τους πελάτες σε διπλανά δωμάτια, έτσι ώστε να γεμίσετε ολόκληρο το ξενοδοχείο;» Αυτό αποδείχτηκε αρκετά εύκολο στην πράξη. Οι φιλοτελιστές διέμεναν στα δωμάτια με περιττό

αριθμό, και μόνο σ' αυτά: 1,3,5,7,9, κλπ. Ο πελάτης του δωματίου 1 παρέμεινε στη θέση του. Ο αριθμός 3 μετακόμισε στον αριθμό 2, ο αριθμός 5 στον αριθμό 3, ο αριθμός 7 στον αριθμό 4, κ.ο.κ. Στο τέλος, όλα τα δωμάτια ήταν και πάλι γεμάτα, μολονότι δεν είχε αφιχθεί ούτε ένας νέος πελάτης.

Τούτο όμως δεν στάθηκε αρκετό για να θέσει τέρμα στη δυσαρέσκεια του διευθυντή. Μου εξήγησε ότι οι εξόριστοι δεν είχαν αρκεστεί στην ανέγερση στου ξενοδοχείου «Κόσμος». Οι ακάματοι χτίστες συνέχισαν να κατασκευάζουν άπειρα ξενοδοχεία, το καθένα με άπειρα δωμάτια, το οποίο όμως είχε ως συνέπεια τη διατάραξη της διαγαλαξιακής ισορροπίας. Γι αυτό το λόγο, τους ζητήθηκε να κλείσουν όλα τα ξενοδοχεία εκτός από το δικό μας. Η εκτέλεση της συγκεκριμένης εντολής ήταν πολύ δύσκολη, αφού όλα τα ξενοδοχεία (και το δικό μας) ήταν γεμάτα. Ζητήθηκε λοιπόν από το διευθυντή να δεχτεί όλους τους πελάτες από άπειρα ξενοδοχεία, καθένα από τα οποία είχε άπειρους πελάτες, σε ένα μοναδικό ξενοδοχείο, το οποίο όμως και αυτό ήταν ήδη πλήρες!

- Με ποιόν τρόπο μπορούμε να βοηθήσουμε τον διευθυντή να λύσει το πρόβλημα που προέκυψε;

Ύστερα από μερικές προτάσεις που δεν έλυσαν το πρόβλημα, ήρθε και η δική μου σειρά να μιλήσω - δεν ήταν δα και άχρηστες οι πενταετείς σπουδές μου στο τμήμα μαθηματικών της Αστρικής Ακαδημίας. «Να χρησιμοποιήσουμε τους πρώτους αριθμούς. Να βάλουμε τους πελάτες του πρώτου ξενοδοχείου στους αριθμούς **2**,4,8,16,…, του δεύτερου στους αριθμούς **3**,9,27,81,…, του τρίτου στους αριθμούς **5**,25,125,625,…, του τέταρτου στους αριθμούς **7**,49,343,..»

«Και δεν θα τύχει έτσι να έχουμε δύο πελάτες στο ίδιο δωμάτιο;»

«Όχι. Αν πάρουμε δύο τυχαίους πρώτους αριθμούς, όλες οι δυνάμεις τους με εκθέτη φυσικό αριθμό είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Αν οι p και q είναι πρώτοι αριθμοί, με $p \neq q$ και οι m,n είναι φυσικοί αριθμοί, τότε $p^m \neq q^n$».

Ο διευθυντής σκέφτηκε μια βελτίωση της μεθόδου που πρότεινα. Σκέφτηκε ότι ήταν απαραίτητοι μόνο οι πρώτοι αριθμοί 2 και 3. Πρότεινε, λοιπόν, να εγκατασταθεί ο πελάτης από το m-στο δωμάτιο του n-στου ξενοδοχείου στο δωμάτιο με αριθμό 2^m3^n. Αυτό είναι αποτελεσματικό, διότι αν $m \neq p$ ή $n \neq q$, τότε $2^m3^n \neq 2^p3^q$. Έτσι, δεν θα υπήρχε κανένα δωμάτιο με δύο ενοίκους. Η πρότασή μας αποτέλεσε τη λύση σε ένα πρόβλημα που όλοι είχαν θεωρήσει

άλυτο. Εντούτοις δεν ήταν η βέλτιστη λύση, γιατί έμεναν πολλά δωμάτια ελεύθερα (σύμφωνα με τη δική μου πρόταση, τα δωμάτια που είχαν αριθμό που δεν ήταν δύναμη πρώτου, όπως το 6°, το 12°, κ.λ.π., ενώ σύμφωνα με εκείνη του διευθυντή όλα τα δωμάτια που ο αριθμός τους δεν ήταν δυνατόν να γραφεί στη μορφή 2^m3^n, όπως το 5°, το 7°, κλπ.).

Η καλύτερη λύση προτάθηκε από ένα φιλοτελιστή…..Πρότεινε να σχηματίσουμε έναν πίνακα: στις γραμμές του θα καταγράφαμε τους αριθμούς των ξενοδοχείων (m) και στις στήλες τους αριθμούς των δωματίων (n). …….Σας παραθέτω αυτή την πινακοποιημένη ταξινόμηση (στην πραγματικότητα, μόνο το πάνω αριστερό τμήμα της, διότι η πλήρης καταγραφή της απαιτεί άπειρες γραμμές και στήλες):

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	…	(1,n)	…
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	…	(2,n)	…
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	…	(3,n)	…
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	…	(4,n)	…
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	…	(5,n)	…
……							
(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	(m,5)	…	(m,n)	…
…….							

«Και τώρα, τακτοποιήστε τους πελάτες σύμφωνα με τα τετράγωνα», είπε ο φιλοτελιστής-μαθηματικός.

«Πώς;» απόρησε ο διευθυντής.

«Με βάση τα τετράγωνα. Στον αριθμό 1 να βάλετε τον πελάτη από το (1,1), δηλαδή από το πρώτο δωμάτιο του πρώτου ξενοδοχείου ˙στον αριθμό 2 να βάλετε τον πελάτη από το (1,2), δηλαδή από το δεύτερο δωμάτιο του πρώτου ξενοδοχείου ˙ στον αριθμό 3 να βάλετε τον πελάτη από το (2,2), δηλαδή από το δεύτερο δωμάτιο του δεύτερου ξενοδοχείου, και στο 4 τον πελάτη από το (2,1), το πρώτο δωμάτιο του δεύτερου ξενοδοχείου. Με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε τακτοποιήσει τους πελάτες του πάνω αριστερά τετραγώνου «πλευράς 2». Κατόπιν, να βάλετε τον πελάτη από το (1,3) στον αριθμό 5, από το (2,3) στον αριθμό 6, από το (3,3) στον αριθμό 7, από το (3,2) στον αριθμό 8, από το (3,1) στον αριθμό 9. (Αυτά τα δωμάτια συμπληρώνουν το τετράγωνο με «πλευρά 3»). Και συνεχίζουμε έτσι:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & \dots & (1,n) & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \dots & (2,n) & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & \dots & (3,n) & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & (4,5) & \dots & (4,n) & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
(5,1) & \leftarrow & (5,2) & \leftarrow & (5,3) & \leftarrow & (5,4) & \leftarrow & (5,5) & \dots & (5,n) & \dots \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow & (n,5) & \leftarrow \dots & (n,n) & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

«Αλήθεια, θα υπάρξει χώρος για όλους;» Ο διευθυντής αμφέβαλε.

«Βέβαια. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, τακτοποιούμε τους πελάτες από τα πρώτα n δωμάτια των πρώτων n ξενοδοχείων στα πρώτα n^2 δωμάτια. Έτσι, αργά ή γρήγορα κάθε πελάτης θα πάρει ένα δωμάτιο. Για παράδειγμα, ο πελάτης του δωματίου 136 από το ξενοδοχείο με αριθμό 217 θα πάρει δωμάτιο στο 217° βήμα. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ποιο δωμάτιο ακριβώς. Θα έχει τον αριθμό $217^2 – 136 + 1$.

Γενικότερα, ένας πελάτης που μένει στο n δωμάτιο του m-οστού ξενοδοχείου, θα καταλύσει στον αριθμό $(n-1)^2 + m$, αν $n \geq m$, ή στον αριθμό $m^2 – n + 1$, αν $n < m$.»…

Το σχέδιο που προτάθηκε αναγνωρίστηκε ως το καλύτερο. Για να τιμήσει την τόσο επιτυχημένη λύση, ο διευθυντής διοργάνωσε δεξίωση προς τιμήν του φιλοτελιστή-μαθηματικού, στην οποία ήταν προσκεκλημένοι όλοι οι πελάτες. Μετά το τέλος της δεξίωσης, επιβιβάστηκα στον φωτονικό μου πύραυλο και ξεκίνησα για τη Γη. Έπρεπε να πληροφορήσω τους κοσμοναύτες της Γης σχετικά με το νέο αυτό διαστημικό καταφύγιο. Εκτός αυτού, ήθελα να συμβουλευτώ μερικούς διακεκριμένους μαθηματικούς και το φίλο μου καθηγητή Ταράντογκ για τις ιδιότητες των απειροσυνόλων.

3.6 Η χρήση των παράδοξων στην προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του απείρου

Μελετώντας τα μαθηματικά παράδοξα, θα μπορούσαμε πιθανόν να βρούμε απαντήσεις σχετικά με το είδος των νοητικών λειτουργιών με τις οποίες ο ανθρώπινος νους προσεγγίζει την έννοια του απείρου. Το θέμα, όσο μας επιτρέπει να συμπεράνουμε η ενασχόλησή μας στα πλαίσια της εργασίας αυτής, δεν έχει ερευνηθεί ικανοποιητικά. Η δημοσιευμένη έρευνα που χρησιμοποιεί τα παράδοξα σαν φακό για τη διερεύνηση της κατανόησης της έννοιας του απείρου είναι περιορισμένη, παρόλο που ερευνητές, όπως οι Dubinsky, Weller, McDonald and Brown (2005), έχουν επισημάνει τη χρησιμότητά τους προς αυτή την κατεύθυνση. Παράλληλα, οι Movshovitz-Hadar & Hadass (1990) προτείνουν τα παράδοξα σαν εργαλείο διδασκαλίας που θα βοηθούσε να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ μαθηματικών και εκπαίδευσης προκαλώντας συζήτηση και αντιπαράθεση και προσφέροντας ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη. Τοποθετούνται χαρακτηριστικά: «η επιθυμία να επιλυθεί ένα παράδοξο είναι ισχυρό κίνητρο για αλλαγή των πλαισίων γνώσης. Για παράδειγμα, ο μαθητής που μαθαίνει διαδικαστικά μπορεί να βιώσει μια μεταφορά στο επίπεδο της αλληλεπιδραστικής μάθησης». Παρατηρούν επίσης, ως επικοδομηστές (constructivists), ότι η εμπλοκή των μαθητών με τα παράδοξα πιθανόν να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση, που μπορεί να οδηγήσει κάποιους μαθητές στην κατασκευή νέων γνωστικών δομών (νοητικών σχημάτων). Οι Zazkis and Leikin (2007) (στο Mamolo & Zazkis, 2008) επιχειρηματολογούν υπέρ της χρήσης των παραδόξων και σαν ερευνητικό εργαλείο. Ως τέτοιο, τα παράδοξα χρησιμεύουν για να ερευνηθεί η διαισθητική και αυθόρμητη «κατανόηση» της έννοιας του απείρου.

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια δύο έρευνες, η μία του R. Núñez (1994) και η άλλη των A. Mamolo & R. Zazkis (2008), στις οποίες γίνεται σαφής χρήση παραδόξων στην προσπάθεια κατανόησης του τρόπου με τον οποίο ο ανθρώπινος νους προσεγγίζει την έννοια του απείρου.

Ο R. Núñez (1994) ερευνά το «μικρό» άπειρο (infinity in the small) κάνοντας χρήση του παραδόξου της διχοτομίας του Ζήνωνος. Σε 32 μαθητές, αγόρια και κορίτσια, ηλικίας 8, 10, 12 και 14 ετών υψηλής και χαμηλής επίδοσης, δύο σχολείων της πόλης Fribourg στην Ελβετία δόθηκε προφορικά ως ανοιχτό πρόβλημα το παράδοξο της διχοτομίας ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάμε από την μία πλευρά του τραπεζιού στην άλλη. Μας δίνεται η οδηγία να καλύψουμε στην αρχή τη μισή απόσταση και στη συνέχεια τη μισή της υπολειπόμενης κ.ο.κ. Θα φτάσουμε τελικά στην άκρη του τραπεζιού; Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο

προσωπικών συνεντεύξεων στα πλαίσια του μαθήματος της ψυχολογίας (δεν αναφέρθηκαν καθόλου τα μαθηματικά).

Στο παράδοξο του Ζήνωνος παρατηρούμε δυο χαρακτηριστικά: τον αριθμό των βημάτων και την απόσταση που καλύπτεται από κάθε βήμα. Το είδος των επαναλήψεων είναι διαφορετικό για κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά αυτά: ο αριθμός των βημάτων αυξάνει, ενώ η καλυπτόμενη απόσταση φθίνει. Από την άλλη μεριά η φύση του περιεχομένου (content) του χαρακτηριστικού που επαναλαμβάνεται είναι επίσης διαφορετική για κάθε ένα από αυτά: ο αριθμός των βημάτων αναφέρεται στην πληθικότητα (πλήθος βημάτων) ενώ η καλυπτόμενη απόσταση αναφέρεται στο χώρο. Ο συνδυασμός αυτών των ετερογενών χαρακτηριστικών στο παράδοξο του Ζήνωνος, το καθιστά ποιοτικά περίπλοκο.

Οι απαντήσεις των παιδιών, ανεξαρτήτως φύλλου, μπορούν να χωριστούν σε τρείς κύριες κατηγορίες: α) θα φτάσει στον προορισμό β) δεν θα φτάσει στον προορισμό, είτε γιατί η διαδικασία θα «κολλήσει» είτε γιατί απλώς θα πλησιάζει (θα τείνει) στον προορισμό και γ) διστάζουν να τοποθετηθούν σαφώς υπέρ της μιας ή της άλλης άποψης υιοθετώντας και τις δύο ταυτόχρονα (στην πραγματικότητα θα φτάσει, αλλά θεωρητικά δεν θα φτάσει). Στην τελευταία κατηγορία κατατάσσονται οι απαντήσεις μόνο των μεγαλύτερων σε ηλικία παιδιών. Να κάνουμε εδώ μια μικρή παρένθεση για να αναφέρουμε ότι, όταν ετέθη αυτή η ερώτηση στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ενός νησιού των Κυκλάδων τον Μάρτιο του 2009, ο πιο αδύνατος μαθητής της τάξης, σε εξαιρετικά χαμηλό επίπεδο στα μαθηματικά, έδωσε την απάντηση: «φυσικά κυρία θα φτάσει στην άκρη του τραπεζιού. Αλλά αν πρέπει να ακολουθήσει τη διαδικασία που περιγράφετε, δεν θα φτάσει!!».

Πιο αναλυτικά, στην ομάδα των μαθητών 8 ετών, εμφανίζεται η τάση αλλαγής των συνθηκών του προβλήματος, είτε αλλάζοντας τις συνθήκες τόπου ($d/2+d/4+d/8+\ldots+d/2^k = e<d$, όπου d η απόσταση και e ο νέος προορισμός) είτε της δράσης (σταματούν τις επαναλήψεις) είτε και τα δύο. Ένας μαθητής 8 ετών, απαντά χαρακτηριστικά: «…….θα αλλάξουμε το σημείο άφιξης και θα το φέρουμε πιο πριν, οπότε θα είμαστε σίγουροι ότι θα φτάσουμε». Οι χαμηλής επίδοσης μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν το πρόβλημα τετριμμένο απαντώντας «θα φτάσουμε», πιστεύοντας ότι πεπερασμένες επαναλήψεις (και μάλιστα δυο - τρείς) αρκούν για να καλύψουμε την απόσταση ($d/2+d/4+\ldots+d/2^k+d/2^k = d$, όπου d η απόσταση και k ένας αριθμός συνήθως μεταξύ 3 και 5. Τα δύο τελευταία βήματα έχουν, ασυνείδητα, υποτεθεί ίσα, για να

πραγματοποιηθεί η ακριβής άφιξη). Οι υψηλότερης επίδοσης μαθητές βασισμένοι στην ιδέα ότι η διαδικασία θα «κολλήσει», εξαιτίας του γεγονότος ότι τα βήματα θα μικρύνουν πολύ, εκφράζουν τη θέση ότι κάποιος μπορεί και να μην φτάσει στον προορισμό ή τη βεβαιότητα ότι δεν θα φτάσει στον προορισμό ($d/2+d/4+d/8+\ldots+d/2^k<d$, όπου k φυσικός).

Οι μαθητές των 10 ετών εμφανίστηκαν περισσότερο διστακτικοί από εκείνους των 8 ετών. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιοι μαθητές υψηλής επίδοσης αυτής της ομάδας, τοποθετήθηκαν μη περατοκρατικά (αποδοχή της άπειρης φύσης των επαναλήψεων) στο παράδοξο του Ζήνωνα, αλλά περατοκρατικά στο γεωμετρικό πρόβλημα (δεν θα φτάσουμε) και αντίστροφα. Παραθέτουμε ενδεικτικά δύο διαλόγους:

Η Ode διατηρεί περατοκρατική θέση όσον αφορά το γεωμετρικό πρόβλημα, αλλά δέχεται την άπειρη φύση των επαναλήψεων στο παράδοξο.

Ερευν: Θα φτάσει;

Ode (9 ετών): ….(εξετάζοντας τα τελευταία βήματα)….αν είναι εκεί θα κάνει το μισό (ακολουθεί τα βήματα στο τραπέζι) θα χρειαστεί πολύς χρόνος γιατί μετά θα κάνει μόνο ένα βήμα…..και μετά το μισό και μετά πάντα το μισό…όχι δεν νομίζω ότι θα φτάσει.

Ο Euo από την άλλη μεριά, είναι βέβαιος για τις άπειρες επαναλήψεις που εμπλέκονται στο γεωμετρικό πρόβλημα και παρόλα αυτά δεν διστάζει να θεωρήσει ότι οι επαναλήψεις στο παράδοξο κάποτε τελειώνουν:

Ερευν: Θα φτάσει;

Euo (10 ετών): Ναι, οπωσδήποτε, αν διανύσουμε το μισό, το μισό, το μισό…..μετά θα φτάσουμε σίγουρα.

Ερευν: Έχω ένα φίλο που ισχυρίζεται ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε, γιατί πάντα θα υπάρχει ένα μισό που θα πρέπει να διανύσουμε (δείχνει τα βήματα πάνω στο τραπέζι και ο Euo απαντά αμέσως με το επόμενο βήμα, σαν να ήθελε να ολοκληρώσει το «επόμενο μισό»)…

Euo: …και το επόμενο μισό ξανά και ξανά…..θα φτάσουμε.

Ερευν: και αν τα καταφέρουμε μόνο με τη φαντασία μας;

Euo: και με τη φαντασία μας και στην πραγματικότητα (θα φτάσουμε).

Στην ομάδα των μαθητών 12 και 14 ετών, σχεδόν τα 2/3 των μαθητών όλων των επιπέδων επίδοσης, έδωσαν απαντήσεις της μορφής: «θα πάρει λίγο χρόνο αλλά τελικά θα φτάσουμε» ή «θα φτάσουμε, γιατί στο τέλος δεν θα μπορούμε να κάνουμε το μισό · θα είμαστε πολύ κοντά» (μεταβολή των συνθηκών). Μεταξύ των μαθητών αυτής της ομάδας υπάρχουν αρκετοί που

διστάζουν να τοποθετηθούν σαφώς υπέρ της μιας ή της άλλης άποψης υιοθετώντας και τις δύο ταυτόχρονα: Mal (14): «Δεν θα μετρήσω το τραπέζι, αλλά πιστεύω ότι δεν θα φτάσουμε ακριβώς…..μπορεί ένα χιλιοστό πιο πριν. Σκέφτομαι ότι θα φτάσουμε, αλλά ότι δεν θα φτάσουμε αμέσως,…αν είχαμε όλο το χρόνο….. τελικά δεν ξέρω. Σκέφτομαι ότι θα φτάσουμε ακριβώς στο τέλος και σκέφτομαι ότι δεν θα φτάσουμε ακριβώς. Πιστεύω δύο διαφορετικά πράγματα. Δεν ξέρω αν θα φτάσουμε ακριβώς ή ένα χιλιοστό πριν το τέλος».

Άλλοι, μεταβάλλοντας την απόσταση (μεγαλώνοντάς την για την ακρίβεια) φαίνεται να τοποθετούν τα «τελευταία» βήματα των επαναλήψεων πιο μακριά, αφήνοντας χώρο για περισσότερες επαναλήψεις, ώστε τελικά η άφιξη να μην είναι πια εφικτή: Frc (14): «…δεν ξέρω. Νομίζω ότι αν η απόσταση είναι μικρή (όπως στο τραπέζι) θα φτάσουμε. Αλλά για μεγαλύτερες αποστάσεις δεν νομίζω…….. δεν είμαι τόσο σίγουρος, αλλά δεν νομίζω ότι θα φτάσουμε».

Γενικά, τα επιχειρήματα των μαθητών της ομάδας αυτής χαρακτηρίζονται από: α) δισταγμούς και αμφιβολίες β) παραδοχή των συνθηκών θέσης και δράσης του προβλήματος και γ) την εμφάνιση μερικές φορές της έννοιας του απείρου: Joé (14): «……..στο άπειρο δεν θα φτάσουμε ποτέ. Είναι πέρα από κάθε φαντασία. Αλλά αν δούμε (δείχνει το τραπέζι) θα φτάσουμε αλλά στην πραγματικότητα δεν θα φτάσουμε…….δεν ξέρω, ξεπερνάει τη φαντασία μου. Αν καλύπτουμε κάθε φορά το μισό της υπολειπόμενης απόστασης, θα είναι δύσκολο να φτάσουμε……θα γίνει μικροσκοπική η απόσταση, απείρως μικρή». Μόνο ένας μαθητής ήταν απολύτως σίγουρος ότι είναι αδύνατον να φτάσουμε στον προορισμό μας, παρά το γεγονός ότι οι επαναλήψεις συνεχίζονται επ' άπειρον: Stn (14): «Όχι, δεν θα φτάσουμε. Θα φτάσουμε κοντά στην άκρη του τραπεζιού, αλλά δεν θα φτάσουμε ποτέ στο τέλος της διαδρομής…..θα υπάρχει πάντα μια μικρή απόσταση που θα υπολείπεται, παρόλο που θα πλησιάζουμε όλο και πιο κοντά στο τέλος» ($d/2+d/4+d/8+\ldots<d$).

Για να συλλάβουμε την παραδοξολογική κατάσταση που ανακύπτει στο πρόβλημα του Ζήνωνα, πρέπει να είμαστε σε θέση αφενός μεν να αναγνωρίσουμε τις ιδιαιτερότητες των υποκειμένων που εμπλέκονται και αφετέρου να σεβαστούμε τις συνθήκες του προβλήματος. Οι προσεγγίσεις των παραπάνω μαθητών, πλην ενός, αντιστοιχούν σε αλλαγές των συνθηκών του προβλήματος (η περίφημη «μαθηματική αυστηρότητα» ερμηνεύεται με διαφορετικό τρόπο σε αυτές τις ηλικίες, όπως άλλωστε, με διαφορετικό τρόπο εκλάμβαναν την αυστηρότητα οι Έλληνες, οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα και οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα), τέτοιες που δεν επιτρέπουν να

αναδειχθεί το παράδοξο του Ζήνωνα: το δικό μας παράδοξο, δεν είναι παράδοξο και για τα παιδιά. Τελικά, η «μαθηματικά ορθή» προσέγγιση που εκφράζεται από τη σχέση d/2+d/4+d/8+…= d, όπου d η απόσταση, δεν υιοθετήθηκε από κανένα μαθητή.

Οι A. Mamolo & R. Zazkis (2008) επικεντρώνουν το ενδιαφέρον τους: α) στη διερεύνηση των αντιλήψεων των φοιτητών για το άπειρο μέσω της εμπλοκής τους με παράδοξα και β) στην αλληλεπίδραση πρακτικών και μαθηματικών εμπειριών. Ειδικά, το ενδιαφέρον τους επικεντρώνεται στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούν δύο ομάδες φοιτητών διαφορετικού μαθηματικού background την έννοια του απείρου στην προσπάθειά τους να επιλύσουν δύο γνωστά παράδοξα: «το ξενοδοχείο του Hilbert» και «τον γρίφο του ping-pong ball» πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την διδασκαλία. Παρουσιάζουν τις αρχικές αντιδράσεις των φοιτητών, καθώς αντιμετωπίζουν διαφορετικές εννοιολογικές προκλήσεις όταν εμπλέκονται με τα παράδοξα και διερευνούν τον βαθμό που η διαλεύκανση (untangling) των παραδόξων επηρέασε τις διαισθητικές τοποθετήσεις τους για το άπειρο. Χρησιμοποιούν δύο σχετιζόμενα μεταξύ τους θεωρητικά πλαίσια για να ερμηνεύσουν τις απαντήσεις των φοιτητών καθώς επίσης και τις αναδυόμενες (emergent) απόψεις τους για το άπειρο. Το ένα αποκαλείται «reducing abstraction», σύμφωνα με την Hazzan (1999). Όσον αφορά στο άπειρο, ένα παράδειγμα «μείωσης του επιπέδου αφαίρεσης», μπορεί να περιλαμβάνει τη χρήση από τους φοιτητές γνωστών ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών για να καταλάβουν την αριθμητική των υπερπεπερασμένων αριθμών. Η Hazzan (1999) στη συνέχεια θεωρεί ότι οι προσπάθειες μείωσης του επιπέδου της αφαίρεσης ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι ενδεικτικές της διαδικασίας εννοιολογικής κατανόησης του αντικειμένου. Οι έννοιες της «διαδικασίας» και του «αντικειμένου» είναι στο κέντρο του δεύτερου θεωρητικού πλαισίου, του APOS των Dubinsky et al.(2005). Οι Dubinsky et al.(2005) επιχειρηματολογούν ότι η εσωτερίκευση του απείρου, ως διαδικασία, αντιστοιχεί στην κατανόηση του *δυνάμει* απείρου, δηλαδή το άπειρο φαίνεται σαν να πραγματοποιεί μια ατέλειωτη πράξη, χωρίς όμως να μπορεί να φανταστεί κανείς την πραγματοποίηση του κάθε βήματος της πράξης αυτής. Η ικανότητα να συλλάβει κανείς τη διαδικασία ως ολοκληρωμένη-τελειωμένη, προκύπτει ως συνέπεια της *ενθυλάκωσής* (encapsulation) της σε αντικείμενο, που αντιστοιχεί στην έννοια του *ενεργεία* απείρου. Στην έρευνα αυτή των Mamolo & Zazkis (2008) στην περίπτωση του «γρίφου του ping-pong ball» η διαδικασία της διαίρεσης του εναπομείναντος χρόνου κάθε φορά στο μισό, μπορεί να θεωρηθεί ως ατέρμονη διαδικασία και ως εκ τούτου να περιγράφει το *δυνάμει* άπειρο. Από τη άλλη μεριά,

το *πραγματικό* άπειρο συνεπάγεται την ολοκληρωμένη (άπειρη) διαδικασία της κατάτμησης των χρονικών διαστημάτων και περιγράφει το σύνολο αυτό ως ολοκληρωμένη οντότητα. Στην περίπτωση του «ξενοδοχείου του Hilbert» το ίδιο το ξενοδοχείο αντιστοιχεί στο *ενεργεία* άπειρο - είναι μια ολοκληρωμένη άπειρη οντότητα.

Οι 36 φοιτητές λοιπόν που συμμετείχαν στην έρευνα, χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα (G_1) περιλαμβάνει 16 καθηγητές που διδάσκουν μαθηματικά στο γυμνάσιο και παρακολουθούν ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα στη διδακτική των μαθηματικών. Έχουν παρακολουθήσει επίσης ένα μάθημα που αφορά στα θεμέλια των μαθηματικών, όπου είχαν την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με την θεωρία του Cantor για τους υπερπεπερασμένους αριθμούς καθώς επίσης και με σπουδαία θεωρήματα, όπως εκείνο που αποδεικνύει ότι το σύνολο των ρητών είναι ισοδύναμο με εκείνο των φυσικών αριθμών. Η δεύτερη ομάδα (G_2) αποτελείται από 20 φοιτητές κοινωνικών επιστημών, των οποίων οι μαθηματικές γνώσεις είναι εκείνες που είχαν όταν τελείωσαν το σχολείο. Παρακολούθησαν μια σειρά διαλέξεων που αφορούσαν στα θεμέλια της αριθμητικής. Η έννοια του απείρου συζητήθηκε στο πλαίσιο των διαλέξεων αυτών, με σκοπό να παρουσιαστούν στους φοιτητές κάποιες θεμελιώδεις ιδέες των μαθηματικών. Και στις δύο ομάδες η χρήση των παραδόξων αποσκοπούσε στην ανάδειξη των ιδεών των φοιτητών και στην πρόκληση συζήτησης γύρω από τις ιδιότητες του μαθηματικού απείρου.

Στην αρχή δόθηκε στους φοιτητές το παράδοξο του «ξενοδοχείου» και τους ζητήθηκε να μαγνητοφωνήσουν τις ιδέες τους ο καθένας ξεχωριστά. Επακολούθησε συζήτηση σε ομάδες και με όλη την τάξη, κατά την οποία παρουσιάστηκαν οι ιδέες των φοιτητών και η σωστή μαθηματική λύση στο παράδοξο. Στη συνέχεια, οι φοιτητές μελέτησαν εκ νέου το παράδοξο και τους ζητήθηκε να εξηγήσουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν με τη σωστή λύση. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τον «γρίφο του ping-pong ball». Κατά την φάση της συζήτησης συμπεριλήφθηκε και διδασκαλία των εννοιών του πληθάριθμου και των απειροσυνόλων, καθώς επίσης και η σύγκριση αριθμήσιμων απειροσυνόλων με τη μέθοδο της 1-1 αντιστοίχισης.

Οι απαντήσεις των φοιτητών και των δύο ομάδων πριν τη διδασκαλία, όσον αφορά στο παράδοξο του «ξενοδοχείου», ήταν σαφώς επηρεασμένες από την εμπειρία τους και την πραγματικότητα. Για παράδειγμα, ένας φοιτητής της G_2 λέει: «για να είναι κάθε δωμάτιο του ξενοδοχείου γεμάτο, θα έπρεπε να έχουν έρθει άπειροι επισκέπτες, το οποίο είναι αδύνατο». Ο Jimmy (G_2) σκέφτεται την πιθανότητα τα δωμάτια να είναι μεν κατειλημμένα, αλλά ίσως όχι από

επισκέπτες: «δεν μπορώ να καταλάβω πως μπορεί άπειρα δωμάτια να είναι γεμάτα. Ο manager λέει ότι είναι γεμάτα, αλλά γεμάτα με τι; Μπορεί να έχουν μέσα κουτιά ή άλλα έπιπλα και να πρέπει να τα βγάλει από το ένα δωμάτιο για να μπει ο νέος επισκέπτης…Δεν έχει κανένα νόημα το ξενοδοχείο να έχει άπειρα δωμάτια και να είναι γεμάτο. Αντίκειται στη λογική!». Επίσης, ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι δεν τους προβλημάτισαν τα άπειρα δωμάτια του ξενοδοχείου, αλλά μόνο οι άπειροι επισκέπτες! Γενικά πάντως ο συνδυασμός του γεμάτου ξενοδοχείου με την επιθυμία να βρεθεί δωμάτιο για νέους επισκέπτες ήταν προβληματικός. Ένα άλλο πρόβλημα που προέκυψε και στις δύο ομάδες ήταν η ιδέα να γεμίσει ένα άπειρο ξενοδοχείο. Οι φοιτητές και των δύο ομάδων επέμεναν ότι: «υπάρχουν άπειρα δωμάτια, άρα δεν μπορεί το ξενοδοχείο να είναι γεμάτο». Ενδιαφέρον έχει και η τοποθέτηση ότι: «το άπειρο είναι ένας συνεχώς αυξανόμενος αριθμός, οπότε θα έπρεπε να υπάρχει ένα δωμάτιο διαθέσιμο». Η αντίσταση που προβάλουν οι φοιτητές στην έννοια ενός γεμάτου άπειρου ξενοδοχείου, δείχνει τη δυσκολία αποδοχής της έννοιας του *πραγματικού* απείρου. Μερικοί φοιτητές επιχειρηματολογούν ότι, αν το ξενοδοχείο μπορούσε να έχει άπειρα δωμάτια, τότε και οι ίδιοι οι νέοι επισκέπτες θα είχαν ήδη το δικό τους δωμάτιο, γιατί και αυτοί «πρέπει να είναι μέρος του απείρου». Αυτοί οι φοιτητές μοιάζει να συσχετίζουν το άπειρο με μια οντότητα που τα περιέχει όλα (all-encompassing entity). Η συσχέτιση αυτή μπορεί να ασκεί μια άδηλη επιρροή στη μη ενθυλάκωση του πραγματικού απείρου ως αντικείμενο. Πάντως το επιχείρημα: «το άπειρο τα περιέχει όλα» είναι το αγαπημένο αυτών των φοιτητών και μετά τη διδασκαλία.

Μετά τη συζήτηση και την παρουσίαση της μαθηματικά ορθής αντιμετώπισης του παράδοξου, οι φοιτητές της G_1 αποδέχονται τη σωστή λύση σε αντίθεση με τους φοιτητές της G_2 που αντιστέκονται στην αποδοχή της. Οι τοποθετήσεις τους ακόμα και μετά τη διδασκαλία μοιάζει να βασίζονται στη διαμάχη ανάμεσα στην «πραγματικότητα» και στην προσπάθεια να βρουν νόημα στα μαθηματικά. Ο Eric (G_2), αναστοχαζόμενος τη σωστή λύση, σημειώνει: «Αυτό γίνεται [να βρεθεί δωμάτιο για τον νέο επισκέπτη], γιατί παρόλο που τα άπειρα δωμάτια είναι απείρως γεμάτα, υπάρχει χώρος για κάποιον άλλο αδειάζοντας ένα δωμάτιο. Στην αρχή με προβλημάτισε η ιδέα του ενός 'τελευταίου' ανθρώπου που δεν θα έχει δωμάτιο, αλλά μετά συνειδητοποίησα ότι το τελευταίο άτομο θα ζητούσε από μένα να μετακινηθώ ένα δωμάτιο κ.ο.κ., έτσι θα υπάρχει μια συνεχής κυκλική εναλλαγή». Η περιγραφή του Eric με τα δωμάτια που «αυξάνονται συνέχεια», «προσθέτω ανθρώπους συνεχώς για να τα γεμίσω» και η «σταθερή κυκλική εναλλαγή» στην αλλαγή των δωματίων, αντιστοιχούν στην έννοια του απείρου ως

διαδικασία. Καθώς προσπαθούσε να κατανοήσει την ορθή λύση, δημιουργήθηκε γνωστική σύγκρουση μεταξύ της ιδέας ενός «τελειωμένου» απείρως γεμάτου ξενοδοχείο και της έννοιας του απείρου ως ατέρμονης διαδικασίας («προσθέτω ανθρώπους συνεχώς»). Σε μια προσπάθεια να επιλυθεί το πρόβλημα, ο Eric εισάγει την ιδέα της επ' άπειρον κυκλικής κίνησης - η άπειρη διαδικασία της πρόσθεσης ανθρώπων μεταφέρεται στην άπειρη διαδικασία της μετακίνησής τους. Μπορεί με αυτόν τον τρόπο ο Eric να «μειώνει το επίπεδο αφαίρεσης» ενός ολοκληρωμένα άπειρου ξενοδοχείου, σε μια ατελείωτη οντότητα. Χαρακτηριστική είναι και η τοποθέτηση της Clyde (G_2): «λοιπόν, από μαθηματική άποψη, η απάντηση δουλεύει. Αλλά στην πραγματικότητα η πρόταση είναι ανέφικτη. Παρόλα αυτά αντιλαμβάνομαι ότι τα σενάριο δεν είναι ρεαλιστικό, οπότε αυτή η απάντηση είναι ικανοποιητική. Απλώς φαντάζομαι κάτι αστείο: ο νέος επισκέπτης να κοιμάται αμέριμνος, και όλοι οι άλλοι να αλλάζουν δωμάτιο επ' άπειρον».

Οι τοποθετήσεις των φοιτητών πριν από τη διδασκαλία, όσον αφορά στον «γρίφο του ping-pong ball» χωρίζονται σε γενικές γραμμές σε δύο κατηγορίες: «Θα μείνουν άπειρες μπάλες στο βαρέλι» και «η διαδικασία είναι αδύνατη, από τη στιγμή που τα χρονικά διαστήματα χωρίζονται στη μέση επ' άπειρον, και έτσι τα 60 δευτερόλεπτα δεν τελειώνουν ποτέ». Ενδιαφέρουσα είναι η απάντηση: «Υπάρχουν 9 φορές περισσότερες μπάλες στο βαρέλι από ότι έξω από αυτό κάθε χρονική στιγμή. Στο τέλος των 60sec θα είναι 9∞ μπάλες μέσα και ∞ μπάλες έξω». Αυτή η τοποθέτηση συνάδει με την παρατήρηση ότι οι μαθητές μεταφέρουν την γνώση τους για τα πεπερασμένα σύνολα και στα απειροσύνολα. Επίσης τρείς από τους 16 της G_1 και15 από τους 20 της G_2 θεώρησαν ότι λόγω της άπειρης κατάτμησης του χρονικού διαστήματος των 60sec, το διάστημα είναι ατελείωτο, και κατά συνέπεια το πείραμα δεν θα τελειώσει ποτέ. Για παράδειγμα ο Kenny (G_2) τοποθετείται ως εξής: «Ακόμα κι αν μείνει 1sec μπορούμε να το χωρίσουμε σε απείρως μικρές χρονικές ποσότητες. Γι αυτό το πείραμα θα συνεχίζεται αιωνίως και οι μπάλες στο βαρέλι θα είναι άπειρες». Στο παραπάνω επιχείρημα αναγνωρίζουμε μια σύγχυση ανάμεσα στη συγκλίνουσα σειρά των «απείρως μικρών χρονικών διαστημάτων» που έχει όριο 60sec και στην αποκλίνουσα σειρά «θα συνεχίζεται αιωνίως». Αυτό μπορεί να πηγάζει από την άτυπη κατανόηση του ορίου ως κάτι που δεν φτάνουμε. Επίσης ενδιαφέρον έχει η διαπίστωση ότι στο τέλος το βαρέλι θα έχει άπειρες μπάλες μέσα. Αν το πείραμα συνεχίζεται αιωνίως όπως ισχυρίζεται, σε καμιά στιγμή δεν θα ήταν άπειρες μπάλες στο βαρέλι. Αντιθέτως, θα περιέχει πάντα πεπερασμένο αριθμό – 9n μπάλες. Εμφανίζεται, λοιπόν, το άπειρο από τη μια μεριά ως ατέρμονη διαδικασία, αλλά και ως μια πολύ μεγάλη άγνωστη ποσότητα.

Μετά τη διδασκαλία, η οποία όπως είπαμε συμπεριλάμβανε και την παρουσίαση της 1-1 αντιστοίχισης και βέβαια την λύση του γρίφου, μόνο δυο φοιτητές (της G_1) από τους 36 συμμετέχοντες είπαν ότι τελικά δεν θα υπάρχουν μπάλες στο βαρέλι, προσθέτοντας ένα σχόλιο που αναδεικνύει την διάκριση ανάμεσα σε αυτό που έχουν διδαχθεί και σε αυτό που πιστεύουν. Ο Timmy (G_1) π.χ. καταλήγει: «τώρα μπορώ να διασκεδάσω με τη ιδέα ότι δεν υπάρχουν μπάλες στο βαρέλι, αλλά δεν μου αρέσει η ιδέα αυτή». Ο Leopold (G_1) σημειώνει επίσης: «αν δεν σκεφτεί κανείς την 1-1 αντιστοίχιση, ενστικτωδώς θα πει ότι αφού έχουν μείνει 9 μπάλες μέσα στο βαρέλι (κάθε φορά βγάζοντας μία), στο τέλος θα έχουμε 9 άπειρα μπάλες». Η αλήθεια είναι ότι δύσκολα θα διαφωνήσει κανείς με τον Leopold…..

Συμπερασματικά, οι ερευνήτριες παρατήρησαν τρείς διαφορετικές τάσεις στις τοποθετήσεις όλων των φοιτητών: α) οι φοιτητές δεν επέλεξαν την μαθηματικά ορθή λύση στα προβλήματα και βρήκαν καταφύγιο σε μη-μαθηματικές θεωρήσεις. Εμμένοντας στην πρακτικά αδύνατη πραγματοποίηση των διαδικασιών, η γνωστική σύγκρουση μάλλον απεφεύχθη β) οι φοιτητές προσπάθησαν να συμφιλιώσουν την ορθή λύση με τις δικές τους απόψεις. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται γνωστική σύγκρουση η οποία δημιούργησε μια αισθητή απογοήτευση και γ) οι φοιτητές διαχώρισαν τις δικές τους απόψεις από την μαθηματικά ορθή λύση. Στην περίπτωση αυτή, η γνωστική σύγκρουση δεν λειτούργησε συμφιλιωτικά. Τελικά η τοποθέτηση του Timmy: «τώρα μπορώ να διασκεδάσω με τη ιδέα…… αλλά δεν μου αρέσει» είναι ένα σημαντικό βήμα προς το βασίλειο των μαθηματικών, που το διαχωρίζει από ρεαλιστικές ή διαισθητικές προσεγγίσεις…..

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας, θα παρουσιάσουμε μια διδακτική παρέμβαση - συζήτηση που σχεδιάσαμε και πραγματοποιήσαμε το Μάιο του 2008, με στόχο την εννοιολογική αλλαγή στην περίπτωση σύγκρισης απειροσυνόλων. Σκοπός της παρέμβασης είναι η διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών ηλικίας 16 ετών για το άπειρο, μέσω της εμπλοκής τους με δύο παράδοξα: το παράδοξο του Galileo και το άπειρο ξενοδοχείο του Hilbert (βλ. παράρτημα).

Όπως προκύπτει από το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (http://www.pi-schools.gr/content/index.php?lesson_id=12), σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης δεν γίνεται καμία αναφορά στα σύνολα και τις ιδιότητές τους, με εξαίρεση το βιβλίο της Α' Λυκείου (ΟΕΔΒ, 2002, σελ.57-62). Οι μαθητές αυτής της ηλικίας, επομένως, δεν έχουν μελετήσει με συστηματικό τρόπο και συνέπεια τις ιδιότητες των πεπερασμένων συνόλων, και πολύ περισσότερο δεν έχουν έρθει σε επαφή με τα απειροσύνολα ως αποτέλεσμα κάποιας συστηματικής διδασκαλίας. Επίσης έχει ενδιαφέρον να επισημάνουμε το γεγονός ότι στα σχολικά βιβλία δεν γίνεται καμία αναφορά και στα μαθηματικά παράδοξα, με εξαίρεση ένα ιστορικό σημείωμα του βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (ΟΕΔΒ, 1996, σελ.62) - το βιβλίο έχει αντικατασταθεί - και μία άσκηση στο βιβλίο της Β΄Λυκείου (ΟΕΔΒ, 1999, άσκηση 5 σελ.115), στα οποία γίνεται αναφορά στο Ζήνωνα και ειδικά στο παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα. Κατά συνέπεια, η προσέγγιση των μαθητών είναι καθαρά διαισθητική, δεδομένου ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι δεν είναι αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων που έχουν αποκτηθεί στα πλαίσια της σχολικής τους εμπειρίας. Η παρέμβαση έχει συνολοθεωρητική προσέγγιση. Επιλέχθηκε ως τρόπος εφαρμογής της η συζήτηση μεταξύ των μαθητών, με το δικό μας ρόλο να περιορίζεται στο ρόλο του συντονιστή της συζήτησης. Οι στόχοι της παρέμβασης ήταν δύο: α) να δημιουργηθεί καταρχήν αμφιβολία στους ίδιους τους μαθητές για τον τρόπο που επιλέγουν να συγκρίνουν μεταξύ τους πληθαρίθμους δυο απειροσυνόλων με σκοπό να καταλήξουν στο εργαλείο της 1-1 αντιστοίχισης β) να κάνουν χρήση της μεθόδου αυτής για να «λύσουν» το πρόβλημα που δημιουργείται στο άπειρο ξενοδοχείο.

Όσον αφορά στη σύγκριση απειροσυνόλων, πιστεύουμε, όπως αναφέρει η Tsamir (1999), ότι μια προσέγγιση που δίνει σημασία στη διαισθητική και προηγούμενη γνώση έχει καλύτερα αποτελέσματα από μια τυπική μαθηματικοκεντρική προσέγγιση. Επίσης, όπως έχει αναφερθεί και στο δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας από έρευνες που αναδεικνύουν τις διαφορετικές αντιδράσεις σε διαφορετικές αναπαραστάσεις απειροσυνόλων, προκύπτει η γνώση ότι οι αναπαραστάσεις αυτές ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο που σκέφτονται για το άπειρο. Εν γένει, η χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων και η ευέλικτη μετακίνηση μεταξύ αυτών - γραφική, αριθμητική, αλγεβρική - μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες (Tall, 1992).

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε το παράδοξο του ξενοδοχείου είναι γιατί πιστεύουμε, όπως αναφέρουν και οι Zazkis and Leikin (2007) (στο Mamolo & Zazkis, 2008), ότι είναι κατάλληλο για να ερευνηθεί η διαισθητική και αυθόρμητη «κατανόηση» της έννοιας του απείρου. Η χρήση του παραδόξου αποσκοπεί κυρίως στην ανάδειξη των ιδεών των μαθητών και στην πρόκληση συζήτησης γύρω από τις ιδιότητες του μαθηματικού απείρου. Επίσης, συμμεριζόμαστε την τοποθέτηση των Movshovitz-Hadar & Hadass (1990) οι οποίες, όπως προαναφέραμε, προτείνουν τα παράδοξα σαν εργαλείο διδασκαλίας που θα βοηθούσε να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ μαθηματικών και εκπαίδευσης προκαλώντας συζήτηση και αντιπαράθεση και προσφέροντας ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη, τονίζοντας χαρακτηριστικά ότι: «η επιθυμία να επιλυθεί ένα παράδοξο είναι ισχυρό κίνητρο για αλλαγή των πλαισίων γνώσης». Να σημειώσουμε εδώ ότι, παρότι δεν ήταν προσχεδιασμένο, οι μαθητές στους οποίους απευθυνθήκαμε είχαν ένα επιπλέον κίνητρο να επεξεργαστούν με ενδιαφέρον το παράδοξο, δεδομένου ότι κατοικούν σε ένα νησί των Κυκλάδων που συνδέεται άμεσα με τον τουρισμό και την εξυπηρέτηση επισκεπτών τους καλοκαιρινούς μήνες……. Επίσης, το παράδοξο αυτό έχει κατά τη γνώμη μας δυο πλεονεκτήματα έναντι των άλλων. Το πρώτο είναι ότι δεν υπεισέρχεται η παράμετρος του χρόνου που δυσκολεύει ένα πρόβλημα, κυρίως ψυχολογικά (όπως στο παράδοξο του Αχιλλέα και στο παράδοξο του ping-pong) και το δεύτερο, ίσως και πιο σημαντικό, είναι ότι από τη φύση του τοποθετείται σε φανταστικό πλαίσιο, οπότε είναι πιο εύκολο να αντιμετωπιστεί, δεδομένου ότι δεν έρχεται συνεχώς κανείς σε σύγκρουση με την πραγματικότητα (πράγμα που συμβαίνει πολύ έντονα στα παράδοξα του Ζήνωνος), παρόλο που έρχεται σε σύγκρουση με τη διαίσθηση. Με λίγα λόγια, θα βρεθεί τελικά ένας τρόπος να

βάλουμε $\aleph_0+\aleph_0$ επισκέπτες σε $\aleph_0$ δωμάτια!!

Οι συμμετέχοντες

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε ένα Λύκειο ενός νησιού των Κυκλάδων. Συμμετείχαν οκτώ μαθητές (με τον όρο «μαθητές» εφεξής εννοούμε και «μαθήτριες») τεχνολογικής και θετικής κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου. Οι μαθητές επιλέχθηκαν από τον καθηγητή τους με κριτήριο το επίπεδό τους στα μαθηματικά, το οποίο χαρακτηρίζεται ως πολύ καλό. Πραγματοποιήσαμε την παρέμβαση με την σύμφωνη γνώμη του Διευθυντή του Λυκείου, του καθηγητή της τάξης, ο οποίος βοήθησε στη βιντεοσκόπηση της παρέμβασης, και την εθελοντική συμμετοχή των μαθητών. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε τις δυο πρώτες (πρωινές) διδακτικές ώρες και δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (βλ. παράρτημα). Δεν είχε προηγηθεί συζήτηση-διδασκαλία των ιδιοτήτων των απειροσυνόλων από τον καθηγητή της τάξης. Να συμπληρώσουμε εδώ ότι η πρώτη επαφή μας με τους μαθητές έγινε κατά την διάρκεια αυτής της παρέμβασης. Εντούτοις, αναπτύχθηκε ένα κλίμα ιδιαίτερα άνετο και δημιουργικό.

Συλλογή δεδομένων

Έγινε βιντεοσκόπηση της παρέμβασης, με την σύμφωνη γνώμη του Λυκειάρχη, των μαθητών και των γονέων αυτών. Ενημερώσαμε τους μαθητές για το πλαίσιο στο οποίο γίνεται αυτή η παρέμβαση και τους διαβεβαιώσαμε ότι το περιεχόμενο του βίντεο θα παραμείνει στην κυριότητά μας και δεν θα δημοσιοποιηθεί. Το υλικό του βίντεο μελετήθηκε με στόχο μια πρώτη ανάλυση της παρέμβασης, από την οποία προέκυψαν και τα πιθανά συμπεράσματα.

Μεθοδολογία.

Η δραστηριότητα περιλαμβάνει δύο μέρη. Το πρώτο μέρος (παράδοξο του Galileo) χωρίζεται σε δυο στάδια με τέσσερις ερωτήσεις το καθένα και στο δεύτερο παρουσιάζεται το ασυνήθιστο ξενοδοχείο υπό μορφή διήγησης και τρία ερωτήματα που καλούνται οι μαθητές να επεξεργαστούν.

Στο $1^{ο}$ μέρος, και όσον αφορά στον πρώτο στόχο, δόθηκε στους μαθητές το σύνολο των φυσικών αριθμών (το ονομάσαμε Α). Ζητήθηκε από τους μαθητές να κυκλώσουν τους τετράγωνους αριθμούς, να ονομάσουν Β το σύνολο των τετράγωνων αριθμών και να απαντήσουν στην ερώτηση, αν το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του Β, αιτιολογώντας την απάντησή τους. Αυτή η αριθμητική – οριζόντια αναπαράσταση ενθαρρύνει

την αντίληψη μέρος– όλον. Στη συνέχεια δόθηκε στους μαθητές το σύνολο:

{ ——— , ——————— , ——————————— ,…}

1cm 2cm 3cm

και ζητήθηκε να ονομάσουν Γ το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα μήκη των παραπάνω ευθύγραμμων τμημάτων με σκοπό να διερωτηθούν για τα ακόλουθα: α) είναι δυνατόν να κατασκευαστούν παραπάνω από ένα τετράγωνα για κάθε ευθύγραμμο τμήμα; β) αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι x cm , πόσο είναι το εμβαδόν του; Είναι η απάντηση μοναδική; γ) δεδομένου ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι x^2 cm^2, πόσο είναι το μήκος της πλευράς του; Είναι η απάντηση μοναδική; Ονομάζουν Δ το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τα εμβαδά των τετραγώνων που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία και καλούνται να συγκρίνουν τους πληθάριθμους των συνόλων Γ και Δ αιτιολογώντας την απάντησή τους. Η παραπάνω γεωμετρική αναπαράσταση ενθαρρύνει την 1-1 αντιστοίχιση. Τα προαναφερθέντα έργα είναι ανάλογα των έργων των Tsamir & Tirosh (1999).

Στο 2° μέρος, και όσον αφορά στο δεύτερο στόχο, τα προβλήματα που καλούνται να επεξεργαστούν οι μαθητές, είναι τα ακόλουθα: α) με ποιον τρόπο θα βρει δωμάτιο ένας νέος επισκέπτης σε ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια που είναι πλήρες; β) με ποιον τρόπο θα βρουν 200.000 νέοι επισκέπτες δωμάτιο στο παραπάνω ξενοδοχείο; γ) με ποιον τρόπο θα βρουν άπειροι νέοι επισκέπτες δωμάτιο στο εν λόγω ξενοδοχείο;

Ανάλυση της παρέμβασης.

Όσον αφορά στη σύγκριση απειροσυνόλων, όταν αυτά δόθηκαν στην αριθμητική αναπαράσταση, υπερίσχυσε η αντίληψη μέρος – όλον (Bolzano’s approach), πράγμα που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα και άλλων ερευνών (Luis et al., 1991· Tsamir & Tirosh, 1999· Tsamir & Dreyfus, 2002· Tsamir,1999). Ο Μανώλης λέει χαρακτηριστικά: «δεν είναι…το σύνολο Α περιέχει τους φυσικούς και δεν είναι όλοι οι φυσικοί τέλεια τετράγωνα». Μεταφέρουν μια ιδιότητα των πεπερασμένων συνόλων – ότι δηλαδή ένα υποσύνολο ενός συνόλου έχει λιγότερα στοιχεία από το σύνολο – και στα απειροσύνολα, ακόμα κι αν η γνώση αυτή είναι διαισθητική και προέρχεται από την καθημερινή τους εμπειρία, με την έννοια ότι είναι στην πλειοψηφία των μαθητών προφανές το γεγονός ότι οι τετράγωνοι αριθμοί είναι λιγότεροι, αφού είναι «μερικοί» από τους φυσικούς αριθμούς. Ενδιαφέρουσα άποψη είναι εκείνη του Λεωνίδα, και ήταν ο μοναδικός που την υποστήριξε: «εγώ πιστεύω ότι είναι ίσα γιατί από κάθε αριθμό του πάνω συνόλου προκύπτει ένας σχετικός αριθμός στο κάτω σύνολο… δηλαδή στο 1

αντιστοιχεί το 1, στο 2 αντιστοιχεί το 4, στο 3 αντιστοιχεί το 9 και συνεχίζουμε…γιατί να μην είναι ίδιο;… αφού το 1…δηλαδή, μπορεί όλοι οι φυσικοί να μην είναι τέλεια τετράγωνα, αλλά κάθε φυσικός μπορεί να γραφτεί σε τετράγωνο…οπότε να προκύψει ένα αντίστοιχο σύνολο Β». Το σύνολο των μαθητών δεν αποφάσισε ποια από τις δυο απόψεις θα υιοθετήσει, και έτσι συμφωνήθηκε από όλους να συνεχίσουμε και στην πορεία να καταλήξουμε, πιθανόν, αν είναι ή όχι ισοπληθικά τα σύνολα.

Όταν δόθηκαν τα σύνολα στη γεωμετρική αναπαράσταση, όλοι οι μαθητές συμφώνησαν ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά. Ο Μανώλης μάλιστα επιχειρηματολογεί υπέρ της χρήσης και του «επί» της αντιστοίχισης, λέγοντας χαρακτηριστικά: «…είπαμε ότι για κάθε ευθύγραμμο τμήμα αντιστοιχεί μόνο ένα τετράγωνο και για κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί ένα ευθύγραμμο τμήμα» και στη συνέχεια « …χρειαζόμαστε και το άλλο [το αντίστροφο] γιατί αν είχαμε κάθε πλευρά ένα τετράγωνο θα ίσχυε ότι είναι ίσα. Αν όμως είχαμε ότι κάθε τετράγωνο δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε μια πλευρά, τότε οι πλευρές μπορεί να είναι περισσότερες». Το ενδιαφέρον είναι ότι μόλις ο Μανώλης λέει με σιγουριά: «είναι ίσα», ο Λεωνίδας τον ρωτά: «πώς μπορείς να συμφωνείς σ' αυτό [Γ ισοπληθικό του Δ] και να διαφωνείς στο πάνω [Α ισοπληθικό του Β]»; Δημιουργήθηκαν προϋποθέσεις γνωστικής σύγκρουσης, δεδομένου ότι οι συμμετέχοντες κατάλαβαν ότι η εφαρμογή των δυο μεθόδων σύγκρισης ('1-1 αντιστοίχιση' και 'υποσυνολική σχέση') οδηγεί σε αντιφατικά συμπεράσματα (Tsamir & Tirosh, 2007). Η διαπίστωση αυτή δημιούργησε κατάσταση σύγχυσης, με αποτέλεσμα να γίνει μια συζήτηση με όλη την τάξη για τους τρόπους που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να συγκρίνουμε τους πληθαρίθμους πεπερασμένων συνόλων ('απαρίθμηση', 'υποσυνολική σχέση' και '1-1 αντιστοίχιση') που δεν οδηγούν σε αντιφατικά συμπεράσματα για τα σύνολα αυτά, και συζητώντας μεταξύ τους οι μαθητές αποφάσισαν, δια στόματος Λεωνίδα ότι: «μόνο η 1-1 αντιστοίχιση είναι αυτή που ισχύει και για τα άπειρα σύνολα», κάτι που έρχεται σε συμφωνία και με τα αποτελέσματα της έρευνας της Tsamir (1999). Ο Λεωνίδας διατυπώνει στη συνέχεια ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον συμπέρασμα: «αυτό [τη μια φορά λέμε ότι είναι ισοπληθικά και την άλλη όχι] αποδεικνύει ότι το ανθρώπινο μυαλό δυσπιστεί σε κάτι που θέλεις να του δείξεις δηλ. που θέλει να αποδείξει. Εννοώ ότι προηγουμένως το είπαμε θεωρητικά με τους αριθμούς και οι περισσότεροι αν όχι όλοι δυσπιστούσαμε να καταλάβουμε ότι είναι ίσα, ενώ τώρα που όλα δόθηκαν μέσω των τετραγώνων, όλοι είναι απόλυτα σίγουροι ότι είναι ίσα». Μπορούμε λοιπόν να πούμε εδώ, ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων συνόλων βοήθησαν τους μαθητές να αναστοχαστούν

πάνω στον τρόπο που επιλέγουν να συγκρίνουν τους πληθαρίθμους των συνόλων (Tsamir & Tirosh, 1999). Αν και στο τέλος συμφώνησαν σχεδόν ομόφωνα για τη χρήση της 1-1 αντιστοίχισης, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι «οδηγήθηκαν» στην απόφαση αυτή συνειδητά. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι μάλλον υιοθέτησαν τον τρόπο αυτό αναγκαστικά, κυρίως λόγω της επιμονής και βεβαιότητας του Λεωνίδα, ο οποίος έτσι κι αλλιώς ισχυριζόταν από την αρχή ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά κάνοντας χρήση της 1-1 αντιστοίχισης. Η Μαρία εντούτοις δεν πείστηκε: «..εγώ πάντως δεν είμαι σίγουρη….δεν μπορώ να αποφασίσω. Και το ένα μου φαίνεται σωστό και το άλλο», χωρίς να μπορέσει να κάνει τη γνωστική μετακίνηση που έκανε ο Ben (Tsamir & Dreyfus, 2002).

Οι τοποθετήσεις των μαθητών, όσον αφορά στο παράδοξο του «ξενοδοχείου», ήταν σαφώς επηρεασμένες από την εμπειρία τους και την πραγματικότητα (Mamolo & Zazkis, 2008) και αντιστοιχούν σε προσπάθεια αλλαγής των συνθηκών του προβλήματος (Núñez, 1994). Για παράδειγμα, ένας μαθητής λέει: «…αν ο συγκάτοικος στο 1[δωμάτιο] ήταν από τη Γη, φυσιολογικές καταστάσεις οπότε μπορεί και να [μείνει μαζί του]. Υπάρχει περίπτωση να έχει φύγει ο άλλος; Μόλις έφυγε και να τον βάλανε;» και η ερώτηση του Μανώλη: «Οι άλλοι γιατί δεν δέχτηκαν να ζήσουν μαζί [στο ίδιο δωμάτιο];» Έχει κατά τη γνώμη μας ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο προβληματισμός του συνόλου των μαθητών γύρω από το ερώτημα, τι θα γίνει με το άπειρο πλήθος επισκεπτών και το άπειρο πλήθος των δωματίων, αν προστεθεί ένας ακόμα επισκέπτης, που αφορά στην επίλυση του πρώτου προβλήματος. Παραθέτουμε στη συνέχεια ένα διάλογο μαθητών που κάνει εμφανή τον προβληματισμό αυτό:

M1: Να ρωτήσω κάτι; Άμα προσθέσουμε στο άπειρο 1, μας κάνει πάλι άπειρο;

Μανώλης: Ναι

Λεωνίδας: Είσαι σίγουρος;

M1: Ναι (με νεύμα του κεφαλιού)

Μιχάλης : Και δύο να προσθέσουμε πάλι άπειρο μας κάνει.

Λεωνίδας: Εάν το προσθέσουμε, πού να το προσθέσουμε το 1 σε όλους τους αριθμούς που ανήκουν στο άπειρο……

M1: Στους απειράριθμους ζωολόγους. Αν προσθέσουμε το ένα…… μας κάνει πάλι άπειρο πλήθος ανθρώπων που θα μένουν στα δωμάτια.

Λεωνίδας: Πόσο πλήθος μπορείς να προσθέσεις για να σου βγει πάλι άπειρο.

Μιχάλης: Μπορείς να κάνεις την πρόσθεση 1 + άπειρο. Γίνεται εντάξει. Μπορεί να μην την γράφεις, αλλά γίνεται.

Λεωνίδας: Ναι, και τι προσθέτεις, πού προσθέτεις το ένα;

Μιχάλης : Εκεί, στον ένα άνθρωπο που ήρθε από….. στο άπειρο πλήθος των ανθρώπων που ζουν στα δωμάτια. Αυτό μας κάνει άπειρο. Άπειρο πλήθος ενδεχομένως αριθμών..

Λεωνίδας: Δεν μας κάνει άπειρο. Μας κάνει άπειρο + 1

Μιχάλης: Το άπειρο δεν έχει τέλος

Λεωνίδας: Άμα δεν έχει τέλος δεν θα καλύπτονται όλα τα δωμάτια

Μιχάλης: Άμα άπειρο + 1 μας κάνει άπειρο, άπειροι αριθμοί ανθρώπων. Έχει να κάνει όμως με το πλήθος των ζωολόγων και με το πλήθος των δωματίων. Άπειρο πλήθος δωματίων αντιστοιχεί σε άπειρο πλήθος ζωολόγων. Ένα συν άπειρο …ξέρω εγώ, θεωρώντας ότι θα προσθέσουμε ένα στο άπειρο. Το άπειρο δεν είναι όπως ο αριθμός….

Λεωνίδας: Άπειρο + 1 κάνει άπειρο;

Μαθητές: Ναι.

Λεωνίδας: Τι λέτε καλέ;

Εμφανίζεται λοιπόν το άπειρο ως «κάτι μεγάλο που περιέχει αριθμούς», αντίληψη που εμφανίζεται και στις έρευνες των Monaghan (2001) και Tall (2001), ως «κάτι (απροσδιόριστο) που δεν έχει τέλος» και αφού δεν έχει τέλος, «πώς γεμίζουν όλα τα δωμάτια;» και «πόσο κάνει άπειρο συν ένα;», «πού προσθέτεις το ένα;» και τελικά «το άπειρο δεν είναι όπως ο αριθμός…» και σαφώς η έντονη αντίσταση που προβάλουν οι μαθητές στην έννοια ενός γεμάτου άπειρου ξενοδοχείου, δείχνει τη δυσκολία αποδοχής της έννοιας του *πραγματικού* απείρου, που έρχεται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις των Mamolo & Zazkis (2008).

Στη συνέχεια της συζήτησης, κάνει την εμφάνισή της η 1-1 αντιστοίχιση, με όλα τα ζητήματα ανοιχτά ακόμα («δεν έχει και στο τέρμα δωμάτιο να τον βάλεις…», «αφού τα δωμάτια είναι άπειρα, και άλλος ένας να πάει να μείνει εκεί δεν υπάρχει πρόβλημα»). Ο Λεωνίδας επιχειρηματολογεί: «τα δωμάτια είναι άπειρα όπως άπειροι είναι και οι ζωολόγοι, δηλαδή, όσοι είναι οι ζωολόγοι είναι και τα δωμάτια…... άρα, αν μέσα στους άπειρους ζωολόγους ενταχθεί και το Ιόν το δικό μας …… μέσα στον άπειρο αριθμό αυτό θα αυξηθεί και ο άπειρος αριθμός των δωματίων του ξενοδοχείου». Μετά τη προτροπή της Μαρίας: «παιδιά, πώς θα τον βάλουμε στο δωμάτιο 1 δεν σας προβληματίζει;» ξαφνικά και χωρίς καμιά παρέμβαση δική μας, σαν

αποτέλεσμα της συζήτησης και προβληματισμού των μαθητών, λένε σχεδόν όλοι μαζί το καταπληκτικό: «θα πρέπει να μετακινηθούν όλοι κατά ένα δωμάτιο!! Αυτή είναι η λύση!!! Θα πάνε όλοι ένα δωμάτιο δεξιά!! Δηλαδή ο Νο 1 ζωολόγος θα πάει στο δωμάτιο 2, ο Νο 2 στο δωμάτιο 3,……!». Γράψαμε την αντιστοίχιση (1→2, 2→3,…, ν→ν+1) στον πίνακα και «του βρήκαμε δωμάτιο! Τον βάλαμε στο δωμάτιο 1 που άδειασε!! Δεν θα έχει όμως ωραία θέα! Πρώτος όροφος δωμάτιο, δεν λέει! Ενώ αν είναι στον άπειρο όροφο…». Ο Λεωνίδας δεν καταθέτει τα όπλα: «…γιατί το κάναμε τόσο δύσκολο και δεν λέγαμε ότι θα μπει στη σειρά των ζωολόγων… οι ζωολόγοι δεν ήταν σε κάποια σειρά ώστε να τακτοποιηθούν σε αντίστοιχο δωμάτιο; Εκείνος [ο επισκέπτης] θα πάρει το τελευταίο νούμερο…άπειρο συν ένα…. Συνεχώς αυξάνεται ο αριθμός…… Συνεχώς γεμίζουν τα δωμάτια; Συνεχώς δηλαδή προστίθεται και άλλος ένας άνθρωπος;». Είναι φανερή η δυσκολία κατανόησης από τον Λεωνίδα ότι αν ο επισκέπτης ν μετακινηθεί στο δωμάτιο ν+1 θα αδειάσει το δωμάτιο 1 για να εγκατασταθεί σε αυτό ο νέος επισκέπτης (το Ιόν). Και συνεχίζει: «Το μόνο που μπορώ να σκεφτώ εγώ είναι σα να έχει τελειώσει το σύνολο, να έχουμε βάλει και τη δεύτερη αγκύλη, δηλαδή και μετά να προσθέτουμε το 1 και να αυξάνεται και να προσθέτουμε όταν τελειώσει πάλι αυτό ένα δεύτερο άπειρο και ένα τρίτο άπειρο. Οπότε τα άπειρα μεταξύ τους κάνουν άπειρο».

Όσον αφορά την επίλυση του δεύτερου ερωτήματος, δεν υπήρξε πρόβλημα. Η αντιστοίχιση δούλεψε σωστά. Όλοι οι μαθητές συμφώνησαν ότι για να εγκατασταθούν οι 200.000 νέοι επισκέπτες, οι ένοικοι των δωματίων πρέπει να μετακινηθούν «200.000 δωμάτια παραπέρα. Δηλαδή ο ν-στός ένοικος θα μεταφερθεί στο ν+200.000 δωμάτιο». Στη συνέχεια, στην προσπάθεια να βρουν και οι άπειροι νέοι (φιλοτελιστές) επισκέπτες δωμάτιο, υπήρξε μεγάλος προβληματισμός. Στον παρακάτω διάλογο, με (Α) συμβολίζεται η ερευνήτρια:

Μανώλης: Όχι. Λοιπόν, αφού αυξάνονται τα δωμάτια, θα τους βάλουμε στα ίδια δωμάτια, αφού ο καθένας…

Μιχάλης: Μα, δεν αυξάνονται τα δωμάτια

Μ3: Τα δωμάτια είναι standard (συζήτηση)

Λεωνίδας: Θα προχωράνε ανά ένα

Μαθητές: Δεν θα τελειώσουνε ποτέ.

Μιχάλης: Για σταθείτε ρε παιδιά. Αντιστοιχίζεται το κάθε δωμάτιο… (συζήτηση)

Μιχάλης: Σίγουρα θα κάνουμε αντιστοίχιση.

Μανώλης: Θα τους βάλουμε στο δωμάτιο άπειρο συν ένα…

Μαθήτρια: Πριν ήταν ν + 1, τώρα θα είναι ν + άπειρο. Άρα μετακινούνται στο άπειρο.

Α: Αυτό που πρέπει να κάνετε είναι να επικεντρωθείτε στο να βρείτε μια αντιστοίχιση. Δηλαδή, θα πρέπει να μου πείτε, ο ζωολόγος No1 πού πάει; ……(συζήτηση)

Μιχάλης: Πρέπει να μπουν όλοι ταυτόχρονα μέσα. Άρα λοιπόν…

Α : Τα δωμάτια δεν είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών;

Μαθητές: Ναι

Α: Για βοηθηθείτε λίγο. Για πείτε μου για τους φυσικούς, τώρα είπαμε για τους τετράγωνους αριθμούς, έτυχε. Ποιους άλλους έχουμε; Βασικές κατηγορίες φυσικών.

Μιχάλης: Τους περιττούς

Α: Και…

Μιχάλης: τους άρτιους;

Μαθητές: Βοηθάει;

Α: Δεν ξέρω. Πόσοι είναι οι περιττοί;

Μαθητές: Άπειροι

Α: και οι άρτιοι

Μαθητές: Άπειροι

Α: Πού θα πάει ο ζωολόγος με το No 1;. Εκεί, εκεί επικεντρωθείτε.

Μ3: στο 3

Α: ο 2;

Μ3: στο 5

Α: ο 3;

Μαθητές: στο 7

Α: ο 4;

Μαθητές: στο 9

Α: Ποια θα μείνουνε κενά έτσι; Ποια δωμάτια, με τι νούμερα;

Μ3: το 2,4,6,8

Α: Πόσα είναι αυτά τα δωμάτια;

Μαθητές: Άπειρα

Α: Πού θα πάνε να κάτσουν οι φιλοτελιστές;

Μαθητές: Στα δωμάτια αυτά.

Η αντιστοίχιση ν→2ν+1 πραγματώθηκε τελικά, παρόλο που οι αμφιβολίες ήταν παρούσες μέχρι το τέλος, όπως φαίνεται στην ερώτηση ενός μαθητή: «Συγγνώμη. Τώρα για να οδηγηθεί ο καθένας στο 2ν+1 δωμάτιό του είναι γρήγορη διαδικασία; Συνέχεια θα πρέπει να μετακινούνται….!». Το ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθητές ήταν βέβαιοι ότι με τη μέθοδο της 1-1 αντιστοίχισης θα επιχειρούσαν να δείξουν την ισοδυναμία των απειροσυνόλων A={1,2,3,4,5,…} και B={3,5,7,9,11,…} και κατά συνέπεια ότι $\aleph_0+\aleph_0$ επισκέπτες χωρούν σε $\aleph_0$ δωμάτια.

Συμπεράσματα

Η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήσαμε βασίστηκε στο σχεδιασμό ενός μαθησιακού περιβάλλοντος με στόχο την εννοιολογική αλλαγή. Η περίπτωση της έννοιας της ισοδυναμίας απειροσυνόλων απαιτεί εννοιολογική αλλαγή. Η σύγκριση πληθαρίθμων απειροσυνόλων, έρχεται σε σύγκρουση με την προϋπάρχουσα και άτυπη γνώση του μαθητή που αφορά στη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων και έχει αποκτηθεί στη βάση της καθημερινής εμπειρίας.

Αν και δεν ακολουθήσαμε «πιστά» τις προτάσεις των Vosniadou et al. (2001), κάτι που μπορεί να γίνει σε ένα μελλοντικό σχεδιασμό, μέσω αυτής της προσέγγισης δίνεται η δυνατότητα: α) στο διδάσκοντα, να εξετάσει την έννοια του απείρου μέσα από διαφορετικούς φακούς και να έχει την ευκαιρία να είναι ανοιχτός σε απαντήσεις και προσεγγίσεις των μαθητών που ίσως δεν είχε προβλέψει και β) στους μαθητές, να προσεγγίσουν την έννοια με στόχο αφενός να συνειδητοποιήσουν την υπόρρητη διαισθητική αντίληψή τους για αυτήν και αφετέρου να «ανακαλύψουν» το μεγάλο πλούτο μαθηματικών ιδεών που κρύβεται πίσω από αυτήν την έννοια.

Η παρουσίαση των συνόλων των φυσικών και τετράγωνων αριθμών με δυο διαφορετικές αναπαραστάσεις ανέδειξε τις αντιφατικές αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο και η συζήτηση που ακολούθησε οδήγησε στην αποδοχή της 1-1 αντιστοίχισης, ως μοναδικού τρόπου, για τη σύγκριση των πληθικών αριθμών των συνόλων αυτών. Στη μεταφορά από τα πεπερασμένα σύνολα, έγινε κατανοητό ότι πρέπει να «αποχωριστούμε» τους άλλους τρόπους σύγκρισης. Η εμπλοκή των μαθητών με το «ξενοδοχείο», είχε ως αποτέλεσμα να διερευνήσουν οι μαθητές, για πρώτη φορά, τη δομή ενός αριθμήσιμου απειροσυνόλου. Το γεγονός ότι «ανακαλύπτουν» τις ιδιότητες: $\aleph_0+1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \nu = \aleph_0$ και τελικά $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, αποδεικνύει ότι το «ξενοδοχείο» θα μπορούσε να παίξει ουσιαστικό ρόλο ως εργαλείο στην προσπάθεια μιας πρώτης επαφής με τη θεωρία συνόλων.

Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη παρέμβαση δεν φιλοδοξεί να εφαρμόζεται στα πλαίσια του σχολικού προγράμματος αλλά πιθανώς στα πλαίσια ενός εργαστηρίου μαθηματικών εκτός σχολικού ωραρίου, και αν λάβουμε υπόψη μας ότι: «από τη στιγμή που ο εκπαιδευτικός αρχίζει να σκέφτεται συγκεκριμένα για τη δική του διδασκαλία και όχι γενικά περί διδασκαλίας, οι δυνατότητες ανάπτυξής του είναι σχεδόν απεριόριστες» (Σακονίδης, 2007, σ.314), και αυτή η ανάπτυξη είναι εντελώς βέβαιο ότι θα είναι προς όφελος της εκπαιδευτικής διαδικασίας γενικότερα, μια μελλοντική «ανάγνωση» της παρέμβασης αυτής θα μπορούσε να εστιάσει και στο ρόλο του εκπαιδευτικού που οργανώνει την παρέμβαση και συμμετέχει σ' αυτήν. Η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού είναι σε μεγάλο βαθμό αποτέλεσμα 'σκληρών' και 'δύσκολων' ερωτήσεων για τη διδασκαλία του και τις σκέψεις που τον οδήγησαν στις επιλογές του, προκλητικών ερωτήσεων που αμφισβητούν το οικοδόμημα και τη φιλοσοφία του τρόπου που λειτουργεί ως εκπαιδευτικός (Jaworski, 1998). Μόνο μέσω μιας εξονυχιστικής μελέτης και ανάλυσης των αλληλεπιδράσεων αποκτούμε σωστή αντίληψη για την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας και αρχίζουμε να εκτιμούμε τις μυριάδες θεμάτων που βρίσκονται πίσω από τις διδακτικές αποφάσεις (Potari & Jaworski, 2002). Έτσι, μας επιτρέπεται να σκεφτόμαστε μια πιο «ριζοσπαστική» σχεδίαση του περιβάλλοντος μάθησης με την έννοια της δημιουργίας κοινοτήτων πρακτικής και ό,τι αυτές συνεπάγονται. Θα είναι μια εξαιρετική ευκαιρία για τους μαθητές να εμπλακούν στην διαδικασία του να «κάνουν» Μαθηματικά - χαρακτηριστική είναι η τοποθέτηση ενός μαθητή μετά το τέλος της παρέμβασης: «μήπως πρέπει να αφήσουμε το μυαλό μας πιο ελεύθερο;» - σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει τις περισσότερες φορές δηλ. να αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά σαν ένα σύνολο κανόνων αποστειρωμένων από οποιαδήποτε κοινωνικοπολιτισμική διάσταση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε τις διαδρομές που ακολουθεί ο νους στην προσπάθειά του να κατανοήσει, να δαμάσει και να χρησιμοποιήσει την έννοια του απείρου. Ως συνταξιδιώτες, έστω και νοητικά, του απείρου ανά τους αιώνες θεωρούμε ότι σημαντικός σταθμός υπήρξε η θεωρία που ανέπτυξε ο Αριστοτέλης για το άπειρο. Η αθροιστική και διαιρετική διαδικασία που, κατά τον Αριστοτέλη, είναι υπεύθυνες για την εξοικείωσή μας με την έννοια του απείρου, μας επιτρέπουν να μιλάμε για *δυνάμει* άπειρα μεγέθη και *δυνάμει* άπειρες διαδικασίες. Για τον Αριστοτέλη έχει νόημα μόνο η *δυνητική* σπουδή του απείρου, και ως εκ τούτου το νοητικό άλμα προς την αντικειμενοποίηση του απείρου (*ενεργεία* άπειρο) είναι διαδικασία μη επιτρεπτή. Η θεώρηση του απείρου με τον τρόπο αυτό ώθησε σπουδαίους Έλληνες μαθηματικούς να καταλήξουν σε σπουδαία συμπεράσματα και καθόρησε στη συνέχεια όλη την εξελικτική πορεία της έννοιας. Το άπειρο, ως *όλον*, δεν χαίρει ευνοϊκής αντιμετώπισης ούτε από τον G. Galileo, ούτε από τον B. Bolzano, και μόνο όταν έφτασε η στιγμή της αυστηρής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών, «αναγκάστηκαν» οι μαθηματικοί να κοιτάξουν το άπειρο στα μάτια και να το αντιμετωπίσουν ως ίσος προς ίσον. Οι κοινωνικοπολιτισμικές συνθήκες και ειδικά οι επιστημονικές απαιτήσεις της εποχής για αυστηρούς και λιγότερο διαισθητικούς ορισμούς των μαθηματικών εννοιών, καθόρισαν και τη στάση απέναντι στο *ενεργεία* άπειρο, που βρήκε στο πρόσωπο του G. Cantor την, όχι ανώδυνη και χωρίς προβλήματα, έξοδο από το τούνελ. Τα απειροσύνολα! Τι να καταλάβει κανείς ακριβώς;; Θα παραμονεύει πάντα στη γωνία ένας Russell που θα μας κλείνει το μάτι!! Καθ' όλη την πορεία του το άπειρο υπήρξε συνδεδεμένο με το Θείο, και όχι άδικα κατά τη γνώμη μας, γιατί άλλο είναι να αντιμετωπίζουμε το άπειρο ως μαθηματική οντότητα, ως αδιαμφισβήτητα λογική κατασκευή, και άλλο είναι η ψυχολογική διάσταση του απείρου, η οποία παραμένει σύνθετη, αντιφατική και ισχυρά σχετιζόμενη με τη διαίσθηση. Πώς να φτάσεις πιο κοντά στην κατανόηση της έννοιας; Πόσο κοντά; Ο φόβος του άγνωστου, εκείνου που είναι πάνω και πέρα από την ανθρώπινη πεπερασμένη φύση, πώς αντιμετωπίζεται άραγε; Ο νους από την άλλη μεριά έχει άπειρες (;) δυνατότητες, οι οποίες ενίοτε κρύβουν και δυσάρεστες εκπλήξεις για τον άνθρωπο. Θα ήταν άδικο να αποκρύψουμε το «σφίξιμο» στο στομάχι που αισθανθήκαμε ως συνοδοιπόροι στο ταξίδι αυτό.

Εν κατακλείδι, παρατηρούμε ότι η εξέλιξη της έννοιας του απείρου όχι μόνο δεν υπήρξε γραμμική, αλλά η, δίχως τέλος, πάλη του νου με την έννοια υπήρξε πολλές φορές άνιση, με αποτελέσματα απρόβλεπτα για τον άνθρωπο και τα μαθηματικά. Η πορεία για την αυστηρή θεμελίωση των μαθηματικών περνά μέσα από την προσπάθεια διασάφησης της έννοιας του απείρου. Δεδομένου ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη του απείρου, προκύπτουν εύλογα ερωτήματα για τον τρόπο που ζητάμε από τους μαθητές μας, σχεδόν σαν να είναι το πιο αυτονόητο πράγμα, να χειριστούν και ως ένα βαθμό να κατανοήσουν το άπειρο, όπου και με όποια μορφή αυτό εμφανίζεται. Με ποιόν τρόπο μπορούν άραγε να αντιμετωπίσουν αυτό το κέρας της Αμάλθειας με όλες του τις μαγικές ιδιότητες, που μοιάζουν να συγκρούονται με κάθε εμπειρία της πεπερασμένης μας ζωής;

Εκτιμούμε ότι οι διαισθητικές, κατά κύριο λόγο, αντιλήψεις των μαθητών/φοιτητών για το άπειρο, όπως προκύπτει από τις έρευνες που παρουσιάσαμε, αποκαλύπτουν την πάλη με την έννοια του απείρου. Η αντιμετώπιση του απείρου ως ατέρμονη διαδικασία, ως πολύ μεγάλος αριθμός, ως μέγεθος απροσδιόριστο, ως ανεξάντλητο, ως μια συλλογή αριθμών που δεν έχει τέλος, οδηγούν τους μαθητές σε συμπεράσματα που είναι «μαθηματικά» εσφαλμένα. Συμπεράσματα όπως ότι: όλα τα άπειρα είναι ίδια, ή ότι ένα τετράγωνο και ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ή ότι οι φυσικοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους. Κατά τη γνώμη μας όμως, οι αντιλήψεις αυτές δε διαφέρουν και πολύ από τις αντιλήψεις ανθρώπων με ευρύτερο φάσμα μαθηματικών γνώσεων. Πόσοι καθηγητές μαθηματικών άραγε θα απαντούσαμε ότι στο βαρέλι δεν θα μείνει καμία μπάλα στο παράδοξο του ping-pong ball; Και πόσοι θα μπορούσαμε να πεισθούμε περί του αντιθέτου σε συζήτηση με επιχειρήματα ανάλογα με αυτά που ήδη παρουσιάσαμε; Πόσες φορές δεν βρεθήκαμε στη θέση του Cantor, αν μας επιτρέπεται ο παραλληλισμός, λέγοντας: «το βλέπω, αλλά δεν το πιστεύω»; Είναι δύσκολο να μην παραδεχθούμε ότι η πρώτη, σχεδόν αυθόρμητη, αντίδραση μας θα ήταν ότι οι τετράγωνοι αριθμοί είναι λιγότεροι από τους φυσικούς αριθμούς!! Τα παράδοξα δεδομένου ότι έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών και στη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης, μπορούν να παίξουν επίσης σπουδαίο ρόλο στην προσπάθεια διερεύνησης των διαδικασιών που ακολουθεί ο νους στην προσέγγιση της έννοιας του απείρου, αν και η δημοσιευμένη έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση είναι ελλιπής. Για να συλλάβουμε όμως την παραδοξολογική κατάσταση που ανακύπτει κάθε φορά, πρέπει να είμαστε σε θέση αφενός μεν να αναγνωρίσουμε τις ιδιαιτερότητες των υποκειμένων που εμπλέκονται και αφετέρου να σεβαστούμε τις συνθήκες

του προβλήματος. Οι προσεγγίσεις των μαθητών είναι πιθανόν να αντιστοιχούν σε αλλαγές των συνθηκών του προβλήματος (η περίφημη «μαθηματική αυστηρότητα» ερμηνεύεται με διαφορετικό τρόπο σε αυτές τις ηλικίες, όπως, άλλωστε, με διαφορετικό τρόπο εκλάμβαναν την αυστηρότητα οι Έλληνες, οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα και οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα), τέτοιες που να μην επιτρέπουν να αναδειχθεί το παράδοξο: το δικό μας παράδοξο, δεν είναι παράδοξο και για τα παιδιά (Núñez, 1994· Mamolo & Zazkis, 2008). Αξίζει να αναφέρουμε εδώ μια απορία που εξέφραζε στις διαλέξεις του ο Δ. Αναπολιτάνος: «πόσο σίγουροι είστε ότι το δάκτυλό μας ακουμπά το διακόπτη;» Για να μπορέσουν, λοιπόν, οι μαθητές να σεβαστούν τις συνθήκες του προβλήματος, θα πρέπει αυτό να δοθεί, κατά τη γνώμη μας, στο κατάλληλο πλαίσιο. Για παράδειγμα, όταν επιλέγεται το παράδοξο του Ζήνωνος με τον Αχιλλέα και τη χελώνα, καλό θα ήταν να εντάσσεται στο ιστορικό του πλαίσιο. Με λίγα λόγια, αν αναφέρεται ότι ο Ζήνων προσπαθεί με το παράδοξο αυτό να υπερασπιστεί την Παρμενίδια θέση περί «μη κίνησης», οι συνθήκες του προβλήματος έχουν ένα νόημα για τους μαθητές, οπότε πιο δύσκολα θα τις αλλάξουν, με συνέπεια το παράδοξο να είναι και για εκείνους παράδοξο.

Η χρήση των παραδόξων απαιτεί, επίσης, αλλαγή της στάσης του καθηγητή των μαθηματικών απέναντι στα μαθηματικά και στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η ανάδειξη της κοινωνικοπολιτισμικής διάστασης των μαθηματικών και η προσπάθεια δημιουργίας ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που, μέσω της συνεργασίας και της συζήτησης, θα αναδεικνύει τις αντιλήψεις και απόψεις των μαθητών, θα τους επιτρέψει να κάνουν μαθηματικά και να μάθουν από αυτά. Όπως εκείνος που σέβεται και αγαπά τη θάλασσα, σε βαθμό που του λείπει όταν είναι μακριά της, τελικά βουτά και την απολαμβάνει, έτσι και εκείνος που σέβεται και αγαπά τα μαθηματικά και τη διδασκαλία, πρέπει να δημιουργεί καταστάσεις μάθησης τέτοιες, που να ωθούν τους μαθητές στην εμπλοκή με τα μαθηματικά. Είναι χαρακτηριστική η τοποθέτηση ενός μαθητή: «μήπως πρέπει να αφήσουμε το μυαλό μας πιο ελεύθερο;». Και για να κάνουμε την ερώτηση κάπως αλλιώς: «μήπως πρέπει να βοηθήσουμε τους μαθητές μας να απελευθερώσουν τη σκέψη τους;» ή μήπως είναι πολύ επικίνδυνο αυτό για μας…..

Αν θέλουμε οι μαθητές μας να είναι, κάποια στιγμή, βέβαιοι ότι ο Cauchy δεν είναι ακολουθία, ας τους βοηθήσουμε να ανακαλύψουν τις δυνατότητες, τα όρια, τις αντοχές και τις ανοχές του νου. Και δεν υπάρχει καλύτερος τρόπος για αυτό, από το να εμπλακούν στη μαθησιακή διαδικασία που θα τους επιτρέψει να «ανακαλύψουν» τη μαγεία και το μεγάλο πλούτο των μαθηματικών ιδεών που κρύβεται πίσω από την έννοια του απείρου.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Barrow, J.D. (2007). Άπειρο, τα μαθηματικά της αθανασίας. *Εκδόσεις Τραυλός, Αθήνα*

Bunt, L.N., Jones P.S., Bedient J.D (1981). Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών. *Επιστημονικές και τεχνικές εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα*

Clawson, C.C. (2005). Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών. *Εκδόσεις Κέδρος,, Αθήνα*

Clegg, B. (2003). A brief history of Infinity. *Robinson, London*

Davis, P.J., Hersh, R. (1980). Η Μαθηματική Εμπειρία. *Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα*

Dreyfus, T., Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 271-300

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A. and Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics* 58, 335-359

Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics* 10, 3-40

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48, 309-329

Gombrich, E.H. (2008). Μικρή ιστορία του κόσμου. *Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα*

Hardy, G.H. (2007). Η απολογία ενός μαθηματικού. *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο*

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics* 40, 71-90

Heath, T.L. (1956). The thirteen books of Euclid's elements, Vol. I, II & III. *Dover Publ. INC., New York*

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche, *Mathematische Annalen* 95 (1), 161-190

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: Process, practice and the development of teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education* 1, 3-31

Kaplan, R. & Kaplan, E. (2004). The art of the infinite. *Penguin books, London*

Kline, M. (1980). Mathematics the Loss of Certainty. *Oxford University Press, New York*

Knobloch, E. (1999). Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity. *Archive for History of Exact Sciences* 54(2), 87-99

Knorr, W.R. (1975). The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry. *D.Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland*

Luis, E., Moreno, A. and Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics* 22, 211-231

Mamolo, A. and Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education* 10(2), 167-182

Mankiewicz, R. (2000). Η ιστορία των μαθηματικών. *Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα*

McFarlane, T.J. (1999). Nicholas of Cusa and the Infinite. *Ανακτημένο στις 9/11/2009 από την ιστοσελίδα:* (http://www.integralscience.org/cusa.html).

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48, 239-257

Movshovitz-Hadar, N. and Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics* 21, 265-287

Núñez, R. (1994). Cognitive Development and Infinity in the Small: Paradoxes and Consensus. *Ανακτημένο στις 12/3/2009 από την ιστοσελίδα:* http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/publications.html

Potari, D. & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis, *Journal of Mathematics Teacher Education* 5, 351-380

Rucker, R. (2004). Το άπειρο και ο νους. *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο*

Smullyan, R. (2003). Ο Σατανάς, ο Cantor και το άπειρο. *Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα*

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions, *Learning and Instruction* 14(5), 503-518.

Struik, D.J. (1982). Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών. *Εκδόσεις Ζαχαρόπουλος, Αθήνα*

Tall, D.O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169

Tall, D.O. (1992). Students' Difficulties in Calculus, *Proceedings of Working Group3, ICME-7 1992, Québec, Canada, (1993)*, 13-28

Tall, D.O. (2001). A child thinking about infinity. *Journal of Mathematical Behavior* 20, 7-19

Tent, M.B.W. (2007). Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών. *Εκδόσεις Τραυλός, Αθήνα*

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1999). Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity. *Journal for Research in Mathematics Education* 30 (2), 213-219

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics* 38, 209-234

Tsamir, P. (2001). When 'the same' is not perceived as such: the case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics* 48, 289-307

Tsamir, P., Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets-a process of abstraction: the case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior* 21, 1-23

Tsamir, P. & Tirosh, D. (2007). Teaching for conceptual change: The case of infinite sets. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 299-316). *Oxford: Elsevier.*

Van der Waerden, B.L. (2003). Η αφύπνιση της επιστήμης. *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο*

Vilenkin, N.Ya. (1997). Αναζητώντας το άπειρο. *Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα*

Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science, *Learning and Instruction* 11, 381-419

Vosniadou, S.& Verschaffel, L (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching (Ed), *Learning and Instruction* 14(5), 445-451

Αναπολιτάνος, Δ. (2005). Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών. *Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα*

Γιαννακούλιας, Ε. (2004). Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού. *Αθήνα*

Δοξιάδης, Α., Παπαδημητρίου, Χ., Παπαδάτος, Α., Di Donna, A. (2008). Logicomix. *Εκδόσεις Ίκαρος, Αθήνα*

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1999). Απειροστικός Λογισμός. *Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα*

Σακονίδης, Χ. (2007). Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση: Μια αλλαγή προοπτικής για τη μαθηματική εκπαίδευση. Στο Θ. Δραγώνα, Α. Φραγκουδάκη (επ.), Πρόσθεση όχι αφαίρεση πολλαπλασιασμός όχι διαίρεση. Η μεταρρυθμιστική παρέμβαση στην εκπαίδευση της μειονότητας της Θράκης. *Εκδόσεις Μεταίχμιο, Αθήνα*

Σταμάτης, Ε. (1975). Ευκλείδου Γεωμετρία. Τόμος Ι, ΙΙ & ΙΙΙ. *Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα*

Στεργίου, Β. (2009). Ιστορική εξέλιξη, ερμηνείες και διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του απειροστού. *Ανακτημένο την 1/12/2009 από την ιστοσελίδα:* http://nemertes.lis.upatras.gr/dspace/bitstream/123456789/1932/3/nemertes_stergiou.pdf.

Χριστιανίδης, Γ. (2003). Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών. *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο*

Χριστοδουλίδης, Π. (1993). Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών. *Εκδόσεις Γ.Α .Πνευματικού, Αθήνα*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΟ ΑΡΓΑΣΙΑΣ

Δραστηριότητα στα απειροσύνολα

ΜΕΡΟΣ 1ο

Α. 1) Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το:
A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,…}
α) Τι σημαίνουν οι ¨…¨ (τρείς τελείες) μετά το 25 ;

β) Ανήκουν στο παραπάνω σύνολο οι αριθμοί 1875, 98457634, 44.8, (-4);

2) Ξαναγράψτε το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Α) Κυκλώστε τους φυσικούς αριθμούς που είναι τέλεια τετράγωνα

β) Θα μπορούσατε να κυκλώσετε και τους αριθμούς 1113, 27, 842;

3) Τώρα μπορείτε να γράψετε το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τέλεια τετράγωνα και ονομάστε το Β. Δηλαδή Β={ }

4) Έτσι λοιπόν το σύνολο Α περιέχει τους φυσικούς αριθμούς και το σύνολο Β περιέχει τους φυσικούς αριθμούς που είναι τέλεια τετράγωνα. Είναι το πλήθος των στοιχείων του Α ίσο με το πλήθος των στοιχείων του Β; Παρακαλώ αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Β. 1) Το παρακάτω σύνολο είναι ένα άπειρο σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ευθύγραμμα τμήματα. Το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος 1cm, το δεύτερο 2cm κοκ. Δηλαδή,

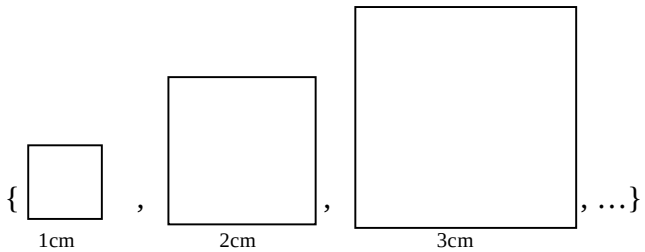
{ ——, ————, ————————,…}.
1cm 2cm 3cm

Να γράψετε το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα μήκη των παραπάνω ευθύγραμμων τμημάτων και να το ονομάσετε Γ

2) Φανταστείτε ότι θέλετε να κατασκευάσετε τετράγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε τα προηγούμενα ευθύγραμμα τμήματα να είναι οι πλευρές των αντίστοιχων τετραγώνων. Κατά τη γνώμη σας: α) Είναι δυνατόν να κατασκευαστούν παραπάνω από ένα τετράγωνα

για κάθε ευθύγραμμο τμήμα; β) αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι x cm, πόσο είναι το εμβαδόν του; Είναι η απάντησή σας μοναδική; γ) Δεδομένου ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι x^2 cm^2, πόσο είναι το μήκος της πλευράς του; Είναι η απάντησή σας μοναδική;

3) Το σύνολο των τετραγώνων που κατασκευάστηκαν με τον παραπάνω τρόπο είναι το



Πόσα είναι τα τετράγωνα; Είναι το πλήθος των τετραγώνων ίσο με το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων;

4) Τώρα, γράψτε το σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα εμβαδά των τετραγώνων και ονομάστε το Δ. Έχουν τα σύνολα Γ και Δ , κατά τη γνώμη σας, ίσο πλήθος στοιχείων; Παρακαλώ δικαιολογήστε την απάντησή σας.

<u>ΜΕΡΟΣ 2ο</u>

Το ασυνήθιστο ξενοδοχείο

Γύρισα στο σπίτι μάλλον αργά – η συνάντηση στο κλαμπ «Νεφέλωμα της Ανδρομέδας» είχε τραβήξει πολύ μετά τα μεσάνυχτα. Όλη νύχτα βασανιζόμουν από εφιάλτες. Ονειρεύτηκα ότι είχα καταπιεί ένα τεράστιο διαστημικό σκαθάρι, μετά ότι βρισκόμουν ξανά στον πλανήτη Ντουρντίτοφ και δεν μπορούσα να ξεφύγω από εκείνες τις τρομερές μηχανές που υπάρχουν εκεί και μεταμορφώνουν τους ανθρώπους σε εξάγωνα. Ένα απρόσμενο τηλεφώνημα με επανέφερε στην πραγματικότητα. Ήταν ο παλιόφιλος και σύντροφος στα διαστρικά ταξίδια καθηγητής Ταράντογκ.

«Επείγον πρόβλημα, αγαπητό μου Ιόν», τον άκουσα να μου λέει. «Οι αστρονόμοι ανακάλυψαν ένα παράξενο κοσμικό αντικείμενο- μια μυστηριώδη μαύρη γραμμή η οποία εκτείνεται από τον ένα γαλαξία στον άλλο. Κανείς δεν γνωρίζει τι συμβαίνει. Είσαι η τελευταία μας ελπίδα. Να πετάξεις αμέσως προς το νεφέλωμα ACD-1587»

Την άλλη μέρα, πήρα από την επισκευαστική μονάδα τον παλιό μου πύραυλο φωτονίων, φόρτωσα πάνω το χρονικό επιταχυντή και το ηλεκτρικό μου ρομπότ, το οποίο γνωρίζει όλες τις γλώσσες του κόσμου και όλες τις ιστορίες γύρω από τα διαστρικά ταξίδια. Απογειώθηκα. Θα έπαιρνα την υπόθεση στα χέρια μου.

Πάνω που το ρομπότ είχε εξαντλήσει όλο το απόθεμα ιστοριών και είχε αρχίσει να επαναλαμβάνεται (δεν υπάρχει τίποτα χειρότερο από το να ακούς ένα ηλεκτρικό ρομπότ να επαναλαμβάνει την ίδια ιστορία για δέκατη φορά), φάνηκε από μακριά ο προορισμός του ταξιδιού μου. Οι γαλαξίες που απέκρυπταν τη μυστηριώδη γραμμή ήταν πίσω μου πια, ενώ εμπρός μου βρισκόταν…το ξενοδοχείο «Κόσμος». Πριν από αρκετό καιρό, είχα κατασκευάσει έναν μικρό πλανήτη για τους περιπλανώμενους διαστρικούς εξόριστους, όμως τον κατέστρεψαν οι ίδιοι, και έτσι βρίσκονταν πάλι χωρίς καταφύγιο. Ύστερα, αποφάσισαν να παρατήσουν τις περιπλανήσεις σε ξένους γαλαξίες και να ανεγείρουν ένα μεγαλοπρεπές κτίριο – ένα ξενοδοχείο για όλους τους κοσμικούς ταξιδιώτες…… Η ανέγερση του ξενοδοχείου αποδείχτηκε υπέροχο έργο.

Το σπουδαιότερο χαρακτηριστικό του ξενοδοχείου ήταν ο *άπειρος αριθμός δωματίων.* Οι εξόριστοι *ήλπιζαν* ότι κανείς δεν θα βρισκόταν ξανά στη δυσάρεστη θέση να ακούσει την ενοχλητική φράση που τόσο τους είχε βασανίσει τον καιρό της περιπλάνησης τους: «λυπάμαι, δεν υπάρχουν ελεύθερα δωμάτια».

Όμως, στάθηκα άτυχος. Οι κοσμικοί ζωολόγοι είχαν έρθει από όλους τους γαλαξίες και ήταν *απειράριθμοί* έτσι, όλα τα δωμάτια ήταν κατειλημμένα από τους συνέδρους. (Ο ζωολόγος με τον α.α.1 πήρε το δωμάτιο με τον αριθμό 1, εκείνος με τον α.α. 2 πήρε το δωμάτιο με τον αριθμό 2 κοκ.) *Δεν υπήρχε δωμάτιο για μένα.* Πρέπει να ομολογήσω ότι ο διευθυντής προσπάθησε πολύ για να πετύχει τη συγκατάθεση κάποιων αντιπροσώπων, ώστε να μοιραστώ το δωμάτιο με έναν από αυτούς. Ωστόσο, μόλις διαπίστωσα ότι ο πρώτος υποψήφιος συγκάτοικος ανέπνεε φθόριο και ο άλλος θεωρούσε φυσιολογικό να υπάρχει στο περιβάλλον του θερμοκρασία 860˚C, αρνήθηκα ευγενικά τους «ευχάριστους» συγκάτοικους.

Ευτυχώς, ο διευθυντής του ξενοδοχείου…….ύστερα από σκέψη, στράφηκε στον υπεύθυνο υποδοχής και του είπε: «Να τον βάλεις στο δωμάτιο 1»

1. Πώς μπορεί να γίνει αυτό;

Από εκείνη τη στιγμή, άρχισα να εκτιμώ την ασυνήθιστη ιδιότητα του συγκεκριμένου ξενοδοχείου. Αν ο αριθμός των δωματίων ήταν πεπερασμένος, ο ένοικος του τελευταίου δωματίου θα έπρεπε να μετακομίσει στον διαστρικό χώρο. Αφού όμως το ξενοδοχείο είχε άπειρο αριθμό δωματίων, υπήρχε άπειρος χώρος για όλους, και μπόρεσα να εγκατασταθώ χωρίς να στερήσω το δωμάτιο από κάποιο ζωολόγο. Το επόμενο πρωί μου ζήτησαν, προς μεγάλη μου έκπληξη, να μετακομίσω . Ο λόγος είναι η καθυστερημένη άφιξη 200.000 κοσμικών ζωολόγων που έπρεπε με τη σειρά τους κι αυτοί να εγκατασταθούν.

2. Ποιο είναι το νούμερο του δωματίου στο οποίο μετακόμισα;

Ενώ πήγαινα στη ρεσεψιόν για να πληρώσω την τρίτη ημέρα της παραμονής μου, βλέπω κατάπληκτος από το παράθυρο του υπεύθυνου υποδοχής μια μεγάλη ουρά που η άκρη της χανόταν κάπου κοντά στα Νέφη του Μαγγελάνου. Στράφηκα αμήχανα στη ρεσεψιόν και ρώτησα:
«Ποιοι είναι αυτοί οι άνθρωποι;»
«Ήρθαν για το διαστρικό συνέδριο φιλοτελιστών».
«Είναι πολλοί;»
«Άπειροι – ένας εκπρόσωπος από κάθε γαλαξία».
«Πώς θα εξασφαλίσετε δωμάτια για όλους; Οι κοσμικοί ζωολόγοι θα φύγουν αύριο».
«Δεν ξέρω· τώρα πηγαίνω να συζητήσω το θέμα για λίγο με τον γενικό διευθυντή».

3. Με ποιόν τρόπο μπορούμε να βοηθήσουμε τον υπεύθυνο, ώστε να εξυπηρετήσει τους πελάτες και να μη χάσει τη δουλειά του;