ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Από τον Γεωμετρικό στον Αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης με χρήση Ψηφιακών Εργαλείων

ΜΠΟΡΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Α.Μ Δ201004

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΣ: ΨΥΧΑΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την **03/07/2013** από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γεώργιος Ψυχάρης (επιβλέπων Καθηγητής)	Λέκτορας	.....
2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής	.....
3) Ειρήνη Μπιζά	Λέκτορας	.....

Περιεχόμενα:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ…..……..7

Κεφάλαιο 1ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ……11

1.1 Εικόνα έννοιας (Concept Image) -
Ορισμός έννοιας (ConceptDefinition)……11

1.1.1 Γνωστική Ρίζα (Cognitive Route)
η περίπτωση της Τοπικής Ευθύτητας (Local Straightness)……...14

1.2 Κατασκευή μαθηματικού νοήματος και
διαμεσολάβηση ψηφιακού εργαλείου……...……17

1.3 Ψηφιακά εργαλεία και εκμάθηση Μαθηματικών……20

Κεφάλαιο 2ο

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ……23

2.1 Η Εφαπτομένη στο αναλυτικό πρόγραμμα……...23

2.2 Η εφαπτομένη ως έννοια και οι εικόνες που δημιουργούνται
γύρω από αυτήν……27

2.3 Οι δυσκολίες των μαθητών για την έννοια της εφαπτομένης…….29

Κεφάλαιο 3ο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ……33

3.1 Ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα……..33

3.2 Υπολογιστικό περιβάλλον και δραστηριότητες……..34

3.2.1 Το περιβάλλον Geogebra……..34

3.2.2 Δραστηριότητες……...37

3.3 Μέθοδος ……46

3.4 Συμμετέχοντες και συλλογή δεδομένων……47

3.5 Ανάλυση Δεδομένων……48

Κεφάλαιο 4ο

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ……51

4.1 Αν και πώς οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της εφαπτομένης μέσω της χρήσης του ε.ι.τ……51

4.1.1 Πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον χειρισμό του ε.ι.τ……...52

4.1.2 Τί νοήματα δημιουργούν οι μαθητές κατά την εισαγωγή του ε.ι.τ σε σχέση με τη σχηματιζόμενη εφαπτομένη…….58

4.1.3 Νοηματοδότηση της έννοιας της εφαπτομένης……68

4.2 Αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα σε σχέση με την οριακή φύση της εφαπτομένης……..90

4.2.1 Η εφαπτομένη ως εξίσωση ευθείας σε τυχαία καμπύλη……..90

4.2.2 Αν και πώς μπορεί να συνδεθεί η εφαπτομένη με την οριακή της φύση……95

Κεφάλαιο 5ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……..……105

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……...……109

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ……...……115

Στα όχι που ποτέ δεν τήρησα…

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά των επιβλέποντά μου κ. Ψυχάρη που με βοήθησε να εμπλακώ ευχάριστα και δημιουργικά στην ερευνητική διαδικασία. Υπήρξε αρωγός της προσπάθειάς μου και με τις γνώσεις και τις οδηγίες του με βοήθησε να διευρύνω τον τρόπο σκέψης μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους κ.Ζαχαριάδη και κ.Μπιζά για, την τιμή που είχα να είναι στην τριμελή επιτροπή, τη συνεργασία και τα χρήσιμα σχόλιά τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του προγράμματος και τη Διονυσία για τη πολύτιμη συμβολή της σε αυτό.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους που καθόλη τη διάρκεια της εργασίας, έδειξαν κατανόηση και μου επέτρεψαν να δουλέψω απερίσπαστα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της εφαπτομένης αποτελεί ένα κομμάτι των μαθηματικών που δημιουργεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές. Η σημαντικότερη πηγή αυτών των δυσκολιών οφείλεται στα διαφορετικά πλαίσια μέσα στα οποία συναντάται η έννοια. Για το καθένα από αυτά οι μαθητές δημιουργούν διαισθητικές εικόνες οι οποίες μπορεί να αποτελέσουν σημαντικό εμπόδιο κατά την προσπάθειά τους να μεταβούν από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Πιο συγκεκριμένα οι εικόνες αυτές έρχονται σε αντίθεση η μία με την άλλη και με τον τυπικό ορισμό της έννοιας της εφαπτομένης, προκαλώντας σύγχυση στους μαθητές.

Οι συγχύσεις που δημιουργούνται για την έννοια αυτή οφείλονται σε έναν μεγάλο βαθμό στην εικόνα που έχουν οι μαθητές για την εφαπτομένη στον κύκλο. Δηλαδή, θεωρούν ότι η εφαπτομένη «ακουμπά» τον κύκλο σε μοναδικό σημείο και δεν τον τέμνει. Αυτός ο ορισμός δεν μπορεί όμως να εφαρμοστεί σε κάθε τυχαία καμπύλη κάτι που δημιουργεί αρκετές δυσκολίες στους μαθητές όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν την έννοια στο πλαίσιο της Ανάλυσης.

Με την παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια να υπερκεράσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια της εφαπτομένης. Προς, αυτή την κατεύθυνση προτείνω έναν τρόπο ανακατασκευής της έννοιας της εφαπτομένης. Παράλληλα διερευνώ εάν η εφαπτομένη μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή εννοιών όπως για παράδειγμα αυτός του ορίου.

Η ιδέα πάνω στην οποία βασίστηκε η εργασία μου ήταν ο συνδυασμός της οριακής φύσης της εφαπτομένης με την καθιερωμένη εικόνα που έχει σχηματίσει ο μέσος μαθητής για την εφαπτομένη του κύκλου. Μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές οδηγούνται με φυσικό τρόπο στην ανακατασκευή της έννοιας της εφαπτομένης χρησιμοποιώντας την πρότερη γνώση που έχουν για την έννοια πάνω σε νέα σχήματα τα οποία παράγονται από ημικύκλια.

Για την επίτευξη των παραπάνω, γίνεται εισαγωγή ενός νέου ψηφιακού εργαλείου στους μαθητές με τη χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος

Geogebra. Το εργαλείο αυτό το ονόμασα *εργαλείο ισοσυγκλινουσών τεμνουσών* και στο εξής θα αναφέρομαι σε αυτό ως *«ε.ι.τ».* Η ιδέα για αυτό το εργαλείο βρίσκεται στο βιβλίο της Β΄ Λυκείου και πιο συγκεκριμένα στην εισαγωγή της έννοιας της εφαπτομένης στις κωνικές τομές. Μια από τις πρωτοτυπίες που εισάγονται είναι η εφαρμογή του πάνω στον κύκλο ενώ στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να το χρησιμοποιήσουν για να υπολογίσουν την εφαπτομένη σε άλλα σχήματα. Από τη διαδικασία αυτή προκύπτουν ιδιότητες για την εφαπτομένη άγνωστες έως τώρα στους μαθητές.

Τα προτερήματα του ε.ι.τ είναι τα εξής:

1. Δίνει έναν τρόπο υπολογισμού της εφαπτομένης που επικεντρώνεται κυρίως στη σημειακή της φύση. Δηλαδή, οι μαθητές προσπαθούν να βρουν την εφαπτομένη εστιάζοντας την προσοχή τους στο σημείο επαφής. Εφαρμόζοντας το ε.ι.τ σε κατάλληλα επιλεγμένα σχήματα, αναδεικνύονται όλες οι ιδιότητες της εφαπτομένης με τέτοιο τρόπο που οι όποιες ενστάσεις των μαθητών κάμπτονται από αυτό το υπολογιστικό εργαλείο.

2. Εστιάζει στην προσέγγιση της εφαπτομένης από δύο τέμνουσες. Ο δυναμικός χειρισμός των δύο τεμνουσών επιτρέπει τη διερεύνηση του κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν διαισθητικά την εφαπτομένη ως μία οριακή διαδικασία.

Η έρευνα βασίστηκε σε ένα σύνολο από δραστηριότητες σε περιβάλλον Geogebra που εφαρμόστηκαν σε δύο ομάδες μαθητών των δύο ατόμων. Οι μαθητές που επιλέχθηκαν είχαν τελειώσει τη Β΄ τάξη Λυκείου. Η επιλογή αυτή έγινε για να εξεταστεί η ικανότητά τους να δημιουργήσουν νοήματα σχετικά με την οριακή διαδικασία προτού εισαχθούν στον τυπικό ορισμό του ορίου.

Η παρούσα έρευνα – στο επίπεδο του σχεδιασμού – έχει στοιχεία έρευνας σχεδιασμού (design research(Cobb et al. (2003)). Κύριος στόχος της έρευνας είναι η εισαγωγή νέων ψηφιακών εργαλείων και η εις βάθος μελέτη της αλληλεπίδρασης των μαθητών με αυτά. Επειδή το περιβάλλον της σχολικής τάξης δεν επιτρέπει στον ερευνητή να εμβαθύνει στη μελέτη των μαθητών επιλέχθηκε η μέθοδος μελέτης περίπτωσης (case study (Yin, K.,2009)).

Η εργασία διαρθρώθηκε σε τρεις βασικές φάσεις με διαφορετικούς στόχους. Στη πρώτη φάση στόχος είναι οι μαθητές να ανακατασκευάσουν πλήρως την έννοια της εφαπτομένης και να έρθουν σε επαφή με τις ιδιότητες που τη διέπουν. Με το πέρας αυτής της φάσης αναμένεται οι μαθητές να:

- είναι σε θέση να χρησιμοποιούν το ε.ι.τ για τον υπολογισμό της εφαπτομένης σε ποικίλα σχήματα,
- έχουν κατανοήσει πλήρως τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ,
- έχουν έρθει σε επαφή με καταστάσεις στις οποίες η εφαπτομένη όπως αυτή εφαρμόζεται στον κύκλο, δεν λειτουργεί.

Στην δεύτερη φάση στόχος είναι οι μαθητές να περάσουν την εφαρμογή του ε.ι.τ από τα σχήματα στα γραφήματα. Σε αυτή τους την προσπάθεια είναι σημαντικό να:

- εστιάσουν στην σημειακή φύση της εφαπτομένης
- συνδέσουν την εφαπτομένη με τα αναλυτικά της χαρακτηριστικά και κυρίως με τον συντελεστή διεύθυνσής της. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν το πλησίασμα των τεμνουσών ως πλησίασμα των κλίσεών τους.
- στηριχτούν αποκλειστικά στο ε.ι.τ για τον σχεδιασμό της εφαπτομένης και να αποδεσμευτούν από τους περιορισμούς που προκύπτουν από το σχήμα στο οποίο καλούνται κάθε φορά να εφαρμόσουν το ε.ι.τ.

Στη τρίτη και τελευταία φάση στόχος είναι μέσα από την δυναμική που παρέχει το ε.ι.τ να:

- ενεργοποιηθεί ο οριακός χαρακτήρα της εφαπτομένης, που δεν είναι άλλος από τη σύγκλιση των δύο τεμνουσών
- διερευνηθεί κατά πόσο είναι σε θέση οι μαθητές να αντιληφθούν μια οριακή διαδικασία νωρίτερα από ότι προβλέπεται στο αναλυτικό πρόγραμμα κατά την προσπάθεια εφαρμογής του ε.ι.τ

Η παρούσα εργασία δομήθηκε σε συνολικά πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο, περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο βασίστηκε ο σχεδιασμός, η διεξαγωγή και η ανάλυση της παρούσας έρευνας. Στο δεύτερο,

αναλύουμε την έννοια της εφαπτομένης. Το πώς αυτή συναντάται στη βιβλιογραφία, στο σχολικό περιβάλλον και τις έρευνες που σχετίζονται με αυτή. Στο τρίτο, αναλύεται ο σχεδιασμός της εργασίας και το σκεπτικό που κρύβεται πίσω από αυτόν. Στο τέταρτο, πραγματοποιείται η ανάλυση των ευρημάτων σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουμε θέσει, ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας.

Κεφάλαιο 1^{ο}

ΘΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Εικόνα έννοιας (Concept Image) - Ορισμός έννοιας (Concept Definition)

Ένας μαθητής έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με μια δομημένη μορφή εκπαίδευσης μετά το έκτο έτος της ζωής του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχει διαμορφώσει βιωματικές θεωρίες, που συνήθως επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το περιβάλλον μέσα στο οποίο αναπτύσσεται. Οι θεωρίες αυτές είναι τόσο ισχυρές που οι μαθητές είναι δύσκολο να απαλλαγούν από αυτές. Συνεπώς, σε μετέπειτα στάδιο αποτελούν σημαντικό εμπόδιο στη προσπάθεια κατανόησης γνωστικών δομών που έρχονται σε αντίθεση με ή διαφοροποιούνται αισθητά από αυτές.

Όσον αφορά τα μαθηματικά, πολλές φορές οι μαθητές αναγκάζονται να επεξεργαστούν αντικείμενα σε ένα νέο πλαίσιο. Τα μαθηματικά έχουν την ιδιαιτερότητα ότι διαφοροποιούνται αρκετά σε τρόπο σκέψης και φιλοσοφίας σε σχέση με τις υπόλοιπες επιστήμες. Είναι πολύ αυστηρά δομημένα και σε αρκετές περιπτώσεις τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν έρχονται σε αντίθεση με τις διαισθήσεις των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα υπάρχουν έννοιες, όπως αυτή της εφαπτομένης, που επηρεάζεται από την ποικιλομορφία των πλαισίων μέσα στα οποία συναντάται. Οι μαθητές έχουν ως δεδομένη τη βιωματική εμπειρία της έννοιας όπως αυτή χρησιμοποιείται στη φυσική τους γλώσσα. Ταυτόχρονα έχουν να την αντιμετωπίσουν σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια: για την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η εφαπτομένη σε έναν κύκλο, για την Αναλυτική Γεωμετρία είναι η γωνία ανάμεσα σε δύο διανύσματα, ενώ στη Μαθηματική Ανάλυση συναντάται ως τριγωνομετρική συνάρτηση και ως εξίσωση μιας ευθείας.

Οι Tall και Vinner (1981) προσπαθούν να εξετάσουν πώς όλη αυτή η πρότερη εμπειρία που κουβαλά μαζί του ένας μαθητής επηρεάζει τη γνωστική διαδικασία. Η προσωπική γνώση που διαμορφώνει ένας μαθητής για μια μαθηματική έννοια διαχωρίζεται από τον τυπικό ορισμό της. Έτσι εισάγονται η εικόνα έννοιας (concept image) και ο ορισμός έννοιας (concept definition). Οι

Tall και Vinner (1981) ορίζουν ως *εικόνα έννοιας* τη συνολική γνωστική δομή που σχετίζεται με την έννοια, η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, τις σχετικές ιδιότητες και τις διαδικασίες. Από την άλλη, ο *ορισμός έννοιας* είναι μια αλληλουχία από λέξεις που χρησιμοποιείται για να δώσουν νόημα στην έννοια. Ακολουθώντας την ίδια φιλοσοφία ο Vinner (1983) διαφοροποιείται στον ορισμό της εικόνας έννοιας και αναφέρεται σε νοητική εικόνα (mental picture) η οποία συνιστά το σύνολο των εικόνων (οποιαδήποτε οπτική αναπαράσταση) οι οποίες έχουν κάποια στιγμή σχετιστεί με την υπό εξέταση έννοια. Οι Goldin και Kaput (1994) αναφέρονται σε εσωτερικές σκοπιές (internal perspective) για να περιγράψουν πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς των μαθητών.

Η εικόνα έννοιας διαφοροποιείται από μαθητή σε μαθητή. Το πώς αντιμετωπίζει ένας μαθητής ένα θέμα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο με τον οποίο αυτό τίθεται, όπως και από τις απόψεις που έχει ήδη σχηματίσει για αυτό μέσα από τη πρότερη εμπειρία του (Bingolballi & Monaghan, 2008). Οπότε, δίνεται η δυνατότητα η εικόνα που έχει ένα άτομο για μια συγκεκριμένη έννοια, να μεταβάλλεται συνεχώς και να προσαρμόζεται στα νέα κάθε φορά δεδομένα. Συνεπώς, αποτελεί μια έννοια που χτίζεται κατά τη διάρκεια των χρόνων μέσω των εμπειριών όλων των ειδών, αλλάζοντας καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει (Tall & Vinner,1981).

Για να τεκμηριώσουν αυτή τους την άποψη παραθέτουν το παράδειγμα της αφαίρεσης που συναντάται για πρώτη φορά ως μια διαδικασία θετικών ακέραιων αριθμών. Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές ίσως μπορούν να παρατηρούν ότι η αφαίρεση ενός αριθμού μειώνει το αποτέλεσμα. Για έναν τέτοιο μαθητή αυτή η παρατήρηση είναι μέρος της δικής του εικόνας έννοιας και μπορεί να προκαλέσει προβλήματα αργότερα όταν θα συναντήσει την αφαίρεση αρνητικών αριθμών. Σε αυτό το στάδιο θα πρέπει να προσαρμόσει την εικόνα έννοιας στα νέα δεδομένα. Επιπρόσθετα έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές νοηματοδοτούν τις μαθηματικές έννοιες σύμφωνα με τα πλαίσια μέσα στα οποία τις συναντούν και κάνουν χρήση ιδιοτήτων που γίνονται αντιληπτές στην εμπειρία τους χωρίς να ξέρουν το αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο που τις διέπει (Lines, Moreira & Pinto, 2004).

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν την εικόνα έννοιας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναπτύσσεται με έναν μη συνεκτικό τρόπο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ακολουθεί τον τρόπο ανάπτυξης του ατόμου. Παράλληλα, επηρεάζεται από τους εξωτερικούς παράγοντες που κάθε φορά την ενεργοποιούν. Η εικόνα έννοιας που ενεργοποιείται μία συγκεκριμένη στιγμή καλείται προκληθείσα εικόνα έννοιας (evoked concept image, (Tall & Vinner, 1981)). Οι εικόνες έννοιας μπορεί να συνυπάρχουν χωρίς να δημιουργούν κάποια μορφή σύγχυσης αφού ο μαθητής ενεργοποιεί την κάθε μία χωριστά ανάλογα με τα ερεθίσματα που κάθε φορά την προκαλούν. Έτσι, μπορεί ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο τίθεται ένα ερώτημα να χρησιμοποιεί την ανάλογη εικόνα που έχει δημιουργήσει για αυτό, ακλουθώντας διαφορετικές μαθηματικές διαδικασίες κατά την προσπάθεια επίλυσής του. Μόνο όταν συγκρουόμενες πτυχές της εικόνα έννοιας προκαλούνται ταυτόχρονα, υπάρχει μια ουσιαστική ανάγκη αναδόμησης της εικόνας έννοιας (Tall & Vinner, 1981).

Ο ορισμός έννοιας αν και φαίνεται τυπικός και ανεξάρτητος από εξωτερικούς παράγοντες, συνδέεται άμεσα με την εικόνα έννοιας και σχετίζεται με τον τρόπο που το άτομο ερμηνεύει τις λέξεις στην εικόνα έννοιας (Tall & Vinner, 1981). Για κάθε άτομο ένας ορισμός έννοιας δημιουργεί τη δική του εικόνα έννοιας. Αυτή η εικόνα μπορεί σε μερικές περιπτώσεις να είναι κενή ή πρακτικά ανύπαρκτη. Σε άλλες περιπτώσεις ίσως να είναι ή να μην είναι συνεκτικά σχετισμένη με άλλα τμήματα της γενικής εικόνας έννοιας που έχει σχηματίσει ο μαθητής (Tall & Vinner, 1981).

Πολλές φορές, για την ίδια έννοια υπάρχουν ορισμοί που διαφοροποιούνται στη διατύπωσή τους χωρίς να είναι εμφανές το πώς συνδέονται μεταξύ τους. Η επιλογή του κατάλληλου ορισμού γίνεται κάθε φορά αυθαίρετα ανάλογα με τα κριτήρια αυτού που διαχειρίζεται την προς εξέταση έννοια (Biza, 2008). Έτσι, παρόλο που ο ορισμός μιας έννοιας δίνεται ή κατασκευάζεται από τον μαθητή, υπάρχει περίπτωση να διαφοροποιείται η μορφή του ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται. Οπότε, δημιουργείται ένας προσωπικός ορισμός που μπορεί να μη συμβαδίζει με τον τυπικό ορισμό που είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω η εικόνα έννοιας και ο ορισμός έννοιας είναι άρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους. Σύμφωνα με τους Tall και Vinner (1981) η εικόνα έννοιας και ο ορισμός έννοιας αλληλεπιδρούν μέσα από τα μέρη των δύο εννοιών που συγκρούονται κάθε φορά. Το τμήμα της εικόνας έννοιας ή του ορισμού έννοιας που, ίσως, συγκρούεται με ένα άλλο τμήμα της εικόνας έννοιας ή του ορισμού έννοιας το ονόμασαν *δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης* (potential conflict factor). Επιπλέον, αναφέρουν ότι ένας σημαντικός παράγοντας δυνητικής σύγκρουσης είναι αυτός της εικόνας έννοιας η οποία διαφοροποιείται από τον τυπικό ορισμό έννοιας. Οι μαθητές που έχουν αυτόν τον παράγοντα στη δική τους εικόνα έννοιας ίσως να είναι ασφαλείς στην ερμηνεία που έχουν δώσει οι ίδιοι στις έννοιες και απλά βλέπουν τη θεωρία ως ακατάλληλη και επιφανειακή.

1.1.1 Γνωστική Ρίζα (Cognitive route) η περίπτωση της Τοπικής ευθύτητας (Local Straightness)

Η έρευνα έχει δείξει ότι ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνει κάποιος επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από παράγοντες που σχετίζονται με την εμπειρία. Ο Tall (2008) στη προσπάθειά του να μελετήσει το πώς μαθαίνει κάποιος μαθηματικά αναφέρεται σε διαφορετικούς τρόπους σκέψης και για να τους περιγράψει εισάγει την θεωρία των τριών κόσμων:

- *Αντιληπτικός – συμβολικός κόσμος* (proceptual-symbolic world)
- *Αξιωματικός – τυπικός κόσμος* (axiomatic-formal world)
- *Εννοιολογικός – ενσαρκωμένος κόσμος* (conceptual-embodied world)

Σύμφωνα με την θεωρία του ενσαρκωμένου κόσμου, ο μαθητής επεξεργάζεται τις μαθηματικές έννοιες με τρόπο που είναι πολύ κοντά στις αισθήσεις του προτού μεταβεί στην αφηρημένη ιδέα της έννοιας. Σύμφωνα με την Biza(2003) έννοιες όπως αυτή του ορίου και της παραγώγου δεν έχουν νόημα για τους μαθητές αν οι τελευταίοι δεν τις προσεγγίσουν διαισθητικά, χρησιμοποιώντας δηλαδή τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων.

Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε το πώς πραγματοποιείται μια ενσαρκωμένη προσέγγιση χρειαζόμαστε την εισαγωγή κατάλληλων εννοιών.

Αυτές οι έννοιες συνοψίζονται στους όρους:

- *γένιο παράδειγμα* (generic example)
- *γνωστική ρίζα* (cognitive route) και
- *γένιος οργανωτής* (generic organizer)

Κατά τον Tall (1989) ο γένιος οργανωτής είναι ένα περιβάλλον ή μικρόκοσμος που επιτρέπει στον μαθητή να χειριστεί παραδείγματα και αντιπαραδείγματα μιας μαθηματικής έννοιας. Βοηθά τον μαθητή να δημιουργήσει εμπειρίες που θα παρέχουν την γνωστική δομή πάνω στην οποία θα χτίσει πιο αφηρημένες έννοιες. Μία απλή περίπτωση γένιου οργανωτή που ενσωματώνει και παραδείγματα και αντιπαραδείγματα είναι το «Magnify» πρόγραμμα από τον λογισμό γραφημάτων (Tall, 1986) που είναι σχεδιασμένο για να επιτρέπει στον χρήστη να μεγεθύνει οποιοδήποτε μέρος του γραφήματος μιας συνάρτησης.

Τα αντιπαραδείγματα είναι μεγάλης σημασίας ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που ο ορισμός μιας έννοιας είναι σύνθετος (π.χ σύγκλιση, συνέχεια, διαφορισιμότητα) και οι μαθητές δυσκολεύονται να τον αντιμετωπίσουν ειδικά σε περιπτώσεις που αυτός δεν ισχύει. Στη παρούσα εργασία ένα αντιπαράδειγμα για την εφαπτομένη είναι ένα σχήμα στο οποίο ο ορισμός της έννοιας όπως αυτός συναντάται στον κύκλο, δεν ισχύει.

Για να μπορέσει να λειτουργήσει ο γένιος οργανωτής χρειάζεται μια έννοια που να είναι απλή και κατανοητή από τον μαθητή. Ο Tall (1989) την ονομάζει γνωστική ρίζα. Αυτή πρέπει να είναι ευέλικτη (Biza, 2003) και να λειτουργεί ως βάση πάνω στην οποία μπορεί να χτιστεί μια θεωρία (Tall, 1989) . Ένα παράδειγμα εφαρμόζεται στο «Magnify» πρόγραμμα. Σύμφωνα με τον Tall (1989) οι μαθητές που πειραματίζονται με το γράφημα στο πρόγραμμα αυτό, κατά κανόνα διαμορφώνουν την έννοια της τοπικής ευθύτητας (local straightness). Αυτή η τοπική ευθύτητα είναι η γνωστική ρίζα για έννοιες της Ανάλυσης.

Η ρίζα αυτή βασίζεται στην αρχή ότι αν εστιάσουμε σταδιακά σε ένα σημείο του γραφήματος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης και μεγεθύνουμε συνεχώς, τελικά θα χάσει την καμπυλότητά της και θα φαίνεται σαν μια ευθεία

γραμμή. Οι μαθητές συχνά προτείνουν μια ακόμα πιο «λεπτή» ιδέα : όσο μεγαλύτερη είναι η μεγέθυνση, τόσο χαμηλότερη είναι η καμπυλότητα (Tall, 1989).

Η γνωστική αυτή ρίζα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη προσέγγιση της παραγώγου και κατ' επέκταση και της εφαπτομένης. Στην περίπτωση της τελευταίας οι μαθητές βλέποντας ένα γράφημα δεν είναι πάντα σε θέση να αντιληφθούν αν έχει εφαπτομένη ή όχι. Ο καθηγητής κάνοντας χρήση της τοπικής ευθύτητας έχει τη δυνατότητα να δείξει ότι με συνεχόμενες μεγεθύνσεις, στο σημείο που εφαρμόζεται η εφαπτομένη, το γράφημα γίνεται ευθεία γραμμή και ταυτίζεται με την εφαπτομένη. Έτσι ο μαθητής είναι σε θέση να τη συνδέσει με την κλίση που έχει η εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Ένας μαθητής μπορεί να αντιληφθεί καλύτερα πώς συνδέονται οι κλίσεις με το γράφημα όταν πειραματιστεί με έναν γένιο οργανωτή που σαρώνει κατά μήκος το γράφημα και δημιουργεί, ταυτόχρονα, τη γραφική παράσταση των κλίσεων (Tall, 1989).

Η τοπική ευθύτητα συνδέεται ρητά με την εφαπτομένη και οι δύο μαζί συνδέονται με την οριακή θέση τεμνόμενων ευθειών και το όριό τους (Biza, 2011). Πάνω σε αυτές τις βασικές αρχές βασίζεται και ο τρόπος λειτουργίας του ε.ι.τ. Η τοπική ευθύτητα με δυναμικά εργαλεία επιτρέπει στους μαθητές να δουν την μεταβαλλόμενη κλίση ενός γραφήματος (Tall, 1985). Το σημαντικότερο όφελος της τοπικής ευθύτητας είναι ότι σε περιπτώσεις που δεν υφίσταται γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη (Tall, 1989). Στην περίπτωση της εφαπτομένης γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στα σημεία του γραφήματος που δεν εφαρμόζεται η τοπική ευθύτητα.

Από τον τρόπο που είναι δομημένα τα αναλυτικά προγράμματα οι εκπαιδευτικοί ισχυρίζονται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να συλλάβουν σύνθετες και «λεπτές» έννοιες όπως αυτή της διαφορισιμότητας. Ο Tall(1989), ωστόσο, ισχυρίζεται πως αν εφοδιάσουμε τους μαθητές με τα κατάλληλα εργαλεία τότε αυτοί είναι σε θέση να τις αντιληφθούν.

1.2 Κατασκευή μαθηματικού νοήματος και διαμεσολάβηση ψηφιακού εργαλείου

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές δημιουργούν τα μαθηματικά νοήματα, είναι ένα πεδίο που έχει απασχολήσει τους ερευνητές της μάθησης. Έχει επικρατήσει η άποψη ότι για τη κατασκευή μαθηματικών νοημάτων ο τρόπος μάθησης είναι κατασκευαστικός. Η Ackermann (2001) μελετά τις δύο κυρίαρχες θεωρίες με τις οποίες κατασκευάζεται η γνώση, τον κονστρουκτιβισμού (constructivism) με δημιουργό τον Piaget και τον constructionism με δημιουργό τον Papert. Στις δύο αυτές προσεγγίσεις η γνώση κατασκευάζεται και συνεχώς ανακατασκευάζεται μέσω της εμπειρίας του ατόμου. Η σημαντικότερη διαφορά είναι ότι ο Piaget ενδιαφέρεται για την εσωτερική σταθερότητα ενώ ο Papert για τη δυναμική της αλλαγής.

Για να γίνουμε πιο σαφείς ο κονστρουκτιβισμός εστιάζει στην εσωτερική δομή και οργάνωση της γνώσης στα διαφορετικά στάδια εξέλιξης του ατόμου. Η γνώση είναι μια εξελικτική διαδικασία κατά την οποία το άτομο μεταβαίνει από απτές έννοιες σε πιο αφηρημένες.

Από την άλλη πλευρά ο constructionism εστιάζει στην εμπλοκή του μαθητή με το αντικείμενο που κατασκευάζει. Έτσι, μέσα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον είναι σημαντικό το πώς αλληλεπιδρά ο μαθητής με αυτό. Όλες οι ενέργειες που εκτελεί ο μαθητής, διορθώσεις, μετασχηματισμοί κ.α, βοηθούν στο να γίνει αντιληπτό πώς μορφοποιούνται και αναδιαμορφώνονται οι ιδέες όταν υλοποιούνται σε συγκεκριμένα πλαίσια και με συγκεκριμένες διαθέσιμες αναπαραστάσεις. Ο απλούστερος ορισμός του constructionism είναι η ιδέα του μαθαίνω φτιάχνοντας. Η έννοια της κατασκευής αναφέρεται τόσο στην κατασκευή που εικονίζεται στην οθόνη του υπολογιστή όσο και στη γνώση που δομούν οι μαθητές και τα νοήματα που κατασκευάζουν. Ο constructionism είναι το μόνο πλαίσιο που παρέχει ελευθερία στο μαθητή να πειραματιστεί, να δημιουργήσει τα δικά του νοήματα και μέσω της αλληλεπίδρασης με τα εργαλεία να βρει ένα σημείο ισορροπίας (Papert & Harel, 1991).

Οι Papert και Harel (1991) βλέπουν τις μαθηματικές έννοιες ως χειροπιαστά αντικείμενα που μεσολαβούν για το πέρασμα από το φυσικό

κόσμο σε αυτόν των μαθηματικών νοημάτων. Τα μαθηματικά νοήματα δημιουργούνται με την ενασχόληση του ατόμου με κατάλληλα εργαλεία. Το μέσο παίζει καθοριστικό ρόλο στον constructionism, με αποτέλεσμα να είναι περιστασιοποιημένος (situated) και ρεαλιστικός (pragmatic).

Η διαδικασία με την οποία φτάνουμε στον τυπικό ορισμό μιας έννοιας συνίσταται από δύο συμπληρωματικές μεθόδους. Η μία είναι η αφαίρεση (abstraction) συγκεκριμένων ιδιοτήτων ενός ή περισσοτέρων μαθηματικών αντικειμένων για τον σχηματισμό της βάσης του ορισμού του νέου αφηρημένου μαθηματικού αντικειμένου. Η άλλη είναι η διαδικασία της κατασκευής (construction) της αφηρημένης έννοιας μέσω λογικών πορισμάτων (Harel & Tall, 1991). Στον constructionism κάποιοι προτιμούν τρόπους σκέψης οι οποίοι τους κρατούν κοντά σε φυσικά πράγματα, ενώ άλλοι χρησιμοποιούν αφαίρεση και τυπικές έννοιες για να αποστασιοποιηθούν από το συγκεκριμένο (Papert & Harel, 1991). Σημαντικό είναι ότι οι μαθηματικές αφαιρέσεις δομούνται σε στενή συνάφεια με τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη και μπορεί να χειριστεί ο χρήστης.

Οι Hoyles και Noss (2009) προσπαθούν να ερευνήσουν την φύση της μαθηματικής γνώσης που αναπτύσσεται κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με ψηφιακά εργαλεία και πώς η γνώση αυτή σχετίζεται με τη επίσημη μαθηματική γνώση. Για να μελετήσουν τη διαπλοκή αφηρημένου-συγκεκριμένου στη κατασκευή της μαθηματικής γνώσης εισάγουν την *περιστασιοποιημένη αφαιρετική διαδικασία* (situated abstraction) (Noss, Healy & Hoyles, 1997). Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει την εξερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η αλληλεπίδραση με τα εργαλεία διαμορφώνει την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Δεχόμενοι τον constructionism ως τρόπο μάθησης για τα μαθηματικά φαίνεται σχεδόν αυτονόητη η ανάγκη εισαγωγής κατάλληλων εργαλείων για να ενισχύσουμε την προσπάθεια των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων. Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι στατικά ή να εμπνέονται από τη ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας.

Τα ψηφιακά εργαλεία φαντάζουν κατάλληλα για την κατασκευή μαθηματικών εννοιών. Αυτό που τα διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα είναι η δυναμική που παρέχουν ως προς το χειρισμό τους. Οι μαθητές έχουν την

επιλογή να πειραματιστούν με ένα μαθηματικό αντικείμενο και να το προσαρμόσουν σε ποικίλα πλαίσια κατασκευάζοντας νοήματα μέσα από τη δυνατότητα πολλαπλών και διασυνδεόμενων αναπαραστάσεων. Έτσι αποκτούν μια πιο πλήρη εικόνα για το εξεταζόμενο αντικείμενο. Ένα επιμέρους είδος εργαλείων είναι εκείνο που δίνει τη δυνατότητα γραφικής αναπαράστασης γεωμετρικών και αλγεβρικών αντικειμένων και δυναμικού χειρισμού τους. Ένα τέτοιο περιβάλλον, σύμφωνα με τη Biza (2011), πρέπει να διευκολύνει τους μαθητές να:

- μεταβούν από το γεωμετρικό περιεχόμενο, στο αναλυτικό και να κάνουν την μεταξύ τους σύνδεση.
- διερευνούν τις μαθηματικές ιδιότητες μεταξύ διαφορετικών αλλά σχετιζόμενων μεταξύ τους αναπαραστάσεων.
- έχουν πρόσβαση σε διαφορετικές μαθηματικές πτυχές της ίδιας έννοιας.

Η χρήση τέτοιων εργαλείων στο χώρο της εκπαίδευσης έχει δημιουργήσει την ανάγκη να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η μεσολάβησή των εργαλείων με σκοπό την επίτευξη της γνώσης. Οι Hoyles και Noss (2009) φέρνουν στην επιφάνεια τον σχεδιασμό των ψηφιακών εργαλείων ο οποίος αναδεικνύεται σε πρωτεύοντα στόχο αν θέλουμε να έχουμε μια διαδικασία μάθησης πλούσια σε μαθηματικά νοήματα. Προς αυτή την κατεύθυνση έχει πραγματοποιηθεί σημαντική έρευνα για το πώς προσαρμόζονται τα εργαλεία στην εκμάθηση των μαθηματικών αλλά και αντίστροφα πώς τροποποιείται ο τρόπος εκμάθησης των μαθηματικών με τη χρήση των εργαλείων. Βέβαια, γεννάται το ερώτημα κατά πόσο η γνώση γενικεύεται πέρα από το πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκε. Το ερώτημα αυτό γεννάται δικαιολογημένα καθώς η εστίαση γίνεται στην κατανόηση του τρόπου που εξελίσσεται η μαθηματική γνώση σε συνδυασμό με την χρήση των ψηφιακών εργαλείων, που είναι ενσωματωμένα σε συγκεκριμένες μαθησιακές καταστάσεις. Οπότε κατά την εισαγωγή ενός ψηφιακού εργαλείου πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψην πώς αυτό μπορεί να διαμορφώσει τη μαθηματική γνώση. Μόνο τότε αυτή θα μπορεί να είναι πλήρης και ουσιαστική. Προς αυτή τη κατεύθυνση οι Hoyles & Noss (2009) με την έρευνά τους προτείνουν ότι

κατά το σχεδιασμό των ψηφιακών εργαλείων πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη:

- Πώς είναι σχεδιασμένο ένα εργαλείο για να υποστηρίξει τη μάθηση και πώς ενσωματώνεται σε δραστηριότητες που έχουν σχεδιαστεί με συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους.

- Πώς ένα εργαλείο συμβάλλει στη διαμόρφωση νοημάτων που αναπτύσσονται από τους μαθητές καθώς αλληλεπιδρούν με αυτό.

1.3 Ψηφιακά εργαλεία και εκμάθηση των Μαθηματικών

Ο υπολογιστής εισάγει ένα νέο παράγοντα στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην τάξη, στους μαθητές, το δάσκαλο και τα υπό σκέψη μαθηματικά αντικείμενα (Biza, Christou & Zachariades, 2008). Τα ψηφιακά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία χωρίζονται σε δύο μεγάλες ομάδες. Αυτά της δυναμικής γεωμετρίας (**D**ynamic **G**eometry **E**nvironment) όπως είναι το Sketchpad και το Cabri και αυτά της άλγεβρας (**C**omputer **A**lgebra **S**ystems) όπως είναι το Mathematica και το Maple. Επιπλέον, υπάρχουν προγράμματα όπως το Geogebra, που συνδυάζουν και τις δύο αυτές κατηγορίες.

Μερικές από τις δυνατότητες χειρισμού που παρέχουν τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας είναι η εστίαση (zooming) και το συρσίμο (dragging):

- **Δυνατότητα εστίασης (zooming).**

Χρησιμεύει σε σημεία που η εποπτεία μπαίνει εμπόδιο στην εξαγωγή ορθών μαθηματικών συμπερασμάτων. Στην περίπτωση της εφαπτομένης μέσω διαδοχικών εστιάσεων, ο μαθητής μπορεί να ανακαλύψει την ύπαρξη ή μη της εφαπτομένης με τον εντοπισμό της τοπικής ευθύτητας.

- **Δυνατότητα συρσίματος (dragging).**

Στη βιβλιογραφία έχει γίνει εκτενής αναφορά στον τρόπο λειτουργίας της διαδικασίας συρσίματος. Κατά τον Holtz (1996) η διαδικασία συρσίματος απαιτεί αποφάσεις σχετικά με τη συμπεριφορά των αντικειμένων όταν αυτά

μετακινούνται. Στη προσπάθεια να αντιληφθούν οι μαθητές το πώς μετακινούνται και μετασχηματίζονται τα σχήματα αναγκάζονται να επικεντρωθούν στις σχέσεις που διέπουν τα γεωμετρικά αντικείμενα. Μέσα από την ενεργή εμπλοκή των μαθητών αναπτύσσονται τρόποι έκφρασης που αντανακλούν τη φύση της αλληλεπίδρασης με το υπολογιστικό περιβάλλον.

Οι Arzello, Olivero, Paola και Robutti (2002) ισχυρίζονται ότι το σύρσιμο γεωμετρικών αντικειμένων διευκολύνει την παραγωγή εικασιών. Εξετάζουν το πώς πραγματοποιείται αυτό το σύρσιμο και ορίζουν εφτά διαφορετικούς τρόπους συρσίματος:

- ✓ *Διερευνητικό σύρσιμο*(Wandering dragging): μετακίνηση ενός σημείου στην οθόνη τυχαία, χωρίς πλάνο.
- ✓ *Σύρσιμο ορίου* (Bound dragging): κίνηση ενός σημείου που συνδέεται με ένα αντικείμενο και μπορεί να μετακινηθεί μόνο πάνω σε αυτό.
- ✓ *Καθοδηγούμενο σύρσιμο* (Guided dragging): μετακίνηση ενός βασικού σημείου με σκοπό να δημιουργηθεί ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- ✓ *Σύρσιμο σε εικονικό τόπο* (Dummy locus dragging): μετακίνηση ενός σημείου έτσι ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί.
- ✓ *Σύρσιμο γραμμής* (Line dragging): ορισμός καινούριων σημείων σε μία γραμμή με σκοπό τη διατήρηση της κανονικότητας του σχήματος.
- ✓ *Συνδεόμενο σύρσιμο* (Linked dragging): σύνδεση ενός σημείου με ένα αντικείμενο και κίνηση του σημείου πάνω σε αυτό.
- ✓ *Test συρσίματος* (Dragging Test): κίνηση σημείων, εξαρτημένων και ανεξάρτητων από το σχήμα, και προσπάθεια ελέγχου κατά πόσο στα σχήματα που δημιουργούνται διατηρούνται οι επιθυμητές ιδιότητες. Αν αυτές διατηρούνται τότε έχει περάσει το τεστ, αν όχι, το σχήμα δεν έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με τις ζητούμενες γεωμετρικές ιδιότητες.

Οι Arzello, Olivero, Paola και Robutti (2002) παρατήρησαν ότι οι μαθητές έκαναν χρήση των παραπάνω για να πετύχουν διαφορετικούς σκοπούς. Έτσι, το διαισθητικό και καθοδηγούμενο σύρσιμο χρησιμοποιείται κυρίως στη φάση ανακάλυψης, το σύρσιμο σε εικονικό τόπο εξυπηρετεί στην

κατασκευή μιας εικασίας ενώ το τεστ συρσίματος βοηθάει στην επικύρωση μιας εικασίας.

Κεφάλαιο 2^{ο}

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Κατά τον Καντ στα μαθηματικά η Ευκλείδεια γεωμετρία θεωρείται ως a priori γνώση, δηλαδή γνώση που αποτελείται από έμφυτες ιδέες που προηγούνται της εμπειρίας. Έτσι, δεν είναι τυχαίο ότι ο πρώτος ορισμός που δόθηκε για την εφαπτομένη ήταν ότι είναι μία ευθεία γραμμή που ακουμπά μια καμπύλη και προεκτεινόμενη δεν την τέμνει. Ορισμός που είναι πολύ κοντά στη φυσική γλώσσα (σε ένα ελληνικό λεξικό βρίσκουμε: {εφάπτομαι: αγγίζω σε κάτι / η εφαπτομένη: ευθεία γραμμή που ακουμπά σε ένα μόνο σημείο}) και στο πώς ερμηνεύεται ότι είναι σχετικό με την επαφή, από την προσωπική εμπειρία. Ωστόσο, αυτός ο ορισμός παρουσιάζει πολλά ψεγάδια όταν εφαρμόζεται σε καμπύλες που παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά από εκείνα του κύκλου.

2.1 Η Εφαπτομένη στο αναλυτικό πρόγραμμα

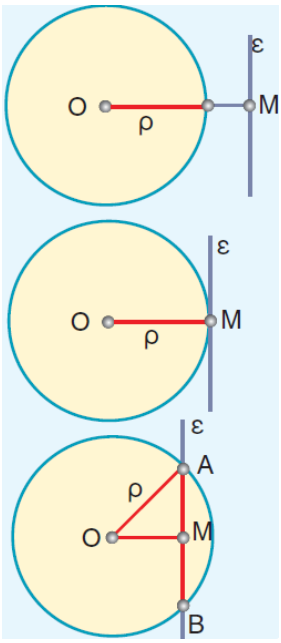
Τα σχολικά βιβλία, είναι γραμμένα χωρίς συνοχή ενώ η δομή των αναλυτικών προγραμμάτων είναι τέτοια που επικεντρώνεται σε μαθηματικές έννοιες και αντικείμενα που είναι απαραίτητα για τους μαθητές ώστε να αποκτήσουν το αναγκαίο υπόβαθρο για την καλύτερη απόδοσή τους στις εξετάσεις, για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτό έχει σημαντικό αντίκτυπο σε μαθηματικά αντικείμενα, όπως είναι αυτά της Γεωμετρίας, τα οποία περνάνε σε δεύτερη μοίρα. Έτσι οι μαθητές στερούνται σημαντικών μαθηματικών ευρημάτων και κατά επέκταση ενός από τους πιο διευρυμένους και συνάμα αυστηρά δομημένους τρόπους σκέψης που είναι ο Γεωμετρικός. Αντ' αυτού οι μαθητές περιορίζονται σε έναν καθαρά σχηματικό τρόπο σκέψης όπου όλα τα εξαγόμενα συνδέονται άμεσα με το σχήμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δημιουργούν νοήματα για μια έννοια που σε μετέπειτα στάδιο θα αποτελέσουν εμπόδιο στην προσπάθεια εισαγωγής της σε διαφορετικό πλαίσιο.

Οι μαθητές συναντούν την εφαπτομένη για πρώτη φορά στην Α΄ Γυμνασίου, στα πλαίσια της Γεωμετρίας, όταν μαθαίνουν για τις σχετικές

θέσεις ευθείας και κύκλου που φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Ο ορισμός που δίνεται τότε είναι:

*Όταν η ευθεία και ο κύκλος έχουν **ένα μόνο κοινό σημείο Μ**, η ευθεία λέγεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ.*

Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα ρ (Μ=ρ), η ευθεία είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ.



Σχήμα 2.1

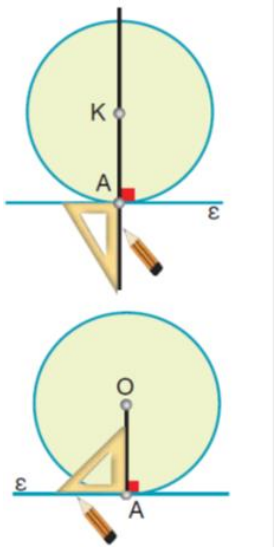
Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Ο ορισμός εισάγεται μέσω του σχήματος, οπότε στους μαθητές εντυπώνεται ότι η εφαπτομένη έχει μοναδικό σημείο επαφής (που είναι και η φράση που τονίζεται). Επιπλέον οι μαθητές μαθαίνουν για τις ιδιότητες του κύκλου μέσω δύο παραδειγμάτων:

- Να σχεδιαστεί κύκλος που να εφάπτεται σε σημείο μιας ευθείας.

- Να σχεδιαστεί ευθεία που να εφάπτεται σε σημείο ενός κύκλου.

Κατά τη λύση των παραδειγμάτων παρουσιάζεται το σχήμα 2.2 που δείχνει έναν διαδικαστικό τρόπο επίλυσης. Από παιδαγωγική σκοπιά, η προσέγγιση αυτή, είναι πολύ χρήσιμη, αφού αποτυπώνει με χαρακτηριστικό τρόπο την ιδιότητα της καθετότητας που πρέπει να έχει η εφαπτομένη με τη χορδή του κύκλου.



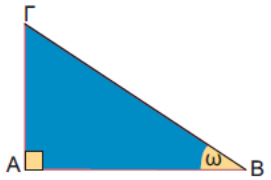
Σχήμα 2.2

Κατασκευή εφαπτομένης με χρήση κανόνα.

Όμως μετά το πέρας αυτών των παραδειγμάτων απουσιάζει οποιαδήποτε προσπάθεια γενίκευσης των ευρημάτων ως αποτελέσματα που διέπουν κάθε κύκλο. Στην επόμενη τάξη, αυτή της Β΄ Γυμνασίου, οι μαθητές συναντούν την έννοια της εφαπτομένης στα πλαίσια της Τριγωνομετρίας.

Εκεί δίνεται ο ορισμός (Σχήμα 2.3):

Ο λόγος που σχηματίζεται αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και ***λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω****.*

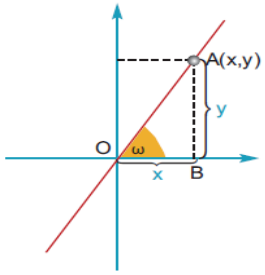


Σχήμα 2.3

Στο σχήμα αυτό αντιστοιχεί ο ορισμός της εφαπτομένης

Όπως φαίνεται η εφαπτομένη εισάγεται σε ένα νέο πλαίσιο ενώ δεν υπάρχει κανένας απολύτως συσχετισμός με την εφαπτομένη στον κύκλο. Σχετίζεται μόνο με την εξίσωση ψ=αχ (Σχήμα 2.4) όπου α είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζεται από την τομή της ευθείας με τον άξονα χχ΄.

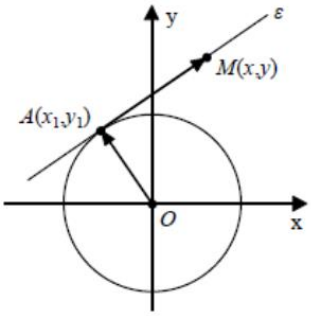
Στα πλαίσια της τριγωνομετρίας συναντάται και στη Γ΄ Γυμνασίου. Εκεί οι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στο χειρισμό των ιδιοτήτων της έννοιας σε σχέση με τις γωνίες.



Σχήμα 2.4

Κλίση ευθείας ως εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα χχ΄

Στη συνέχεια στην Α΄ Λυκείου ξανασυναντάμε τον ορισμό σχεδόν αυτούσιο με αυτόν της Α΄ Γυμνασίου. Στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εισάγεται πάλι το σχήμα 2.1 και εξετάζονται εκ νέου οι σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου. Τώρα ο ορισμός και οι ιδιότητες της εφαπτομένης είναι πιο αυστηρά δομημένες. Ο τρόπος που σχετίζεται η εφαπτομένη με την ακτίνα του κύκλου στον οποίο εφάπτεται αποτελεί μέρος της θεωρίας, ενώ υπάρχει πολύ πλούσιο ασκησιολόγιο που επιτρέπει στους μαθητές να ξεδιαλύνουν τις ιδιότητές της.



Σχήμα 2.5

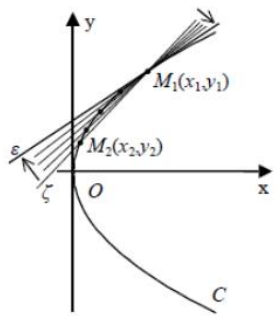
Φαίνονται τα σημεία που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της εξίσωσης της εφαπτομένης

Περνώντας στα μαθηματικά Γενικής Παιδείας της Β΄ Λυκείου έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη τριγωνομετρική προσέγγιση για την εφαπτομένη στα πλαίσια των συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι

με το ίδιο όνομα αναφερόμαστε άλλοτε σε μία συνάρτηση που ορίζεται σε γωνίες και άλλοτε σε μία ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο και έχει καθορισμένες ιδιότητες.

Σε αντίθεση με όλα τα προηγούμενα η πρώτη προσπάθεια προσέγγισης της εφαπτομένης από την πλευρά της Ανάλυσης, δηλαδή ως εξίσωση ευθείας, γίνεται στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου. Αρχικά η εφαπτομένη εισάγεται στην αναλυτική γεωμετρία ως ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος στο δισδιάστατο χώρο. Έπειτα η έννοια εισάγεται στα πλαίσια των κωνικών τομών.

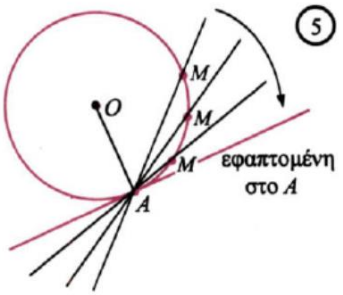
Η προσέγγιση δεν αφορά την εφαπτομένη και τις ιδιότητές της αλλά τον φορμαλιστικό υπολογισμό της εξίσωσης μιας ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο (Σχήμα 2.5). Η προσέγγιση γίνεται μέσω μιας εφαρμογής που αποτελεί τον οδηγό για την επίλυση ασκήσεων παρόμοιας μορφής. Για τις υπόλοιπες κωνικές τομές απλά δίνεται ένας τύπος υπολογισμού της εφαπτομένης. Στην περίπτωση της παραβολής (Σχήμα 2.6) γίνεται μια προσπάθεια εισαγωγής της εφαπτομένης ως μια διαδικασία προσέγγισης μέσω μιας τέμνουσας καθώς πλησιάζουμε το σημείο επαφής, χωρίς ωστόσο κάτι τέτοιο να γίνεται άμεσα αντιληπτό από τους μαθητές.



Σχήμα 2.6

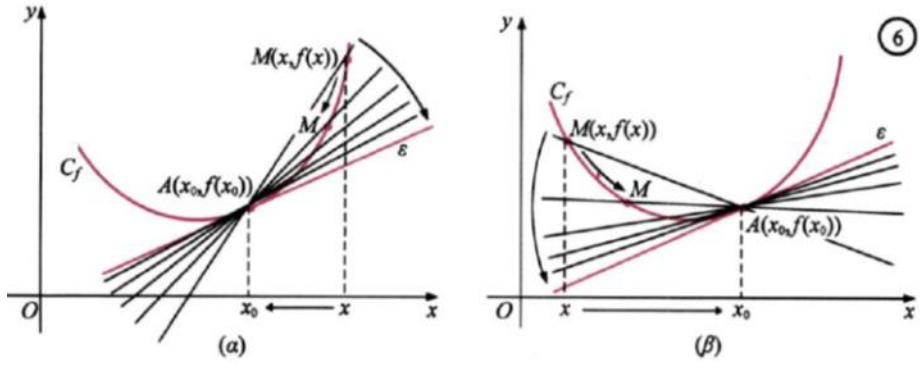
Φαίνεται η μεταβολή της εφαπτομένης καθώς κινούμαστε πάνω σε παραβολή

Στα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου γίνεται εισαγωγή στην οριακή φύση της εφαπτομένης με τη χρήση μίας τέμνουσας που προσεγγίζει το σημείο επαφής. Πρώτα περιγράφεται ο τρόπος σκέψης στον κύκλο (Σχήμα 2.7) και ακολουθεί η εφαρμογή του σε μία καμπύλη (Σχήμα 2.8). Όμως, η παραπάνω προσέγγιση, όπως γίνεται, επικεντρώνεται πιο πολύ στη οριακή θέση της κλίσης και όχι τόσο στην οριακή φύση της εφαπτομένης καθεαυτής.



Σχήμα 2.7

Φαίνεται πώς μια τέμνουσα πλησιάζει την εφαπτομένη



Σχήμα 2.8

Φαίνεται πώς μια τέμνουσα πλησιάζει την εφαπτομένη
μιας καμπύλης από δεξιά και από αριστερά σε δύο διαφορετικά σχήματα

Επιπλέον, ο τρόπος προσέγγισης γίνεται σε δύο ξεχωριστά σχήματα, οπότε οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν την προσέγγιση ως μια ενιαία διαδικασία. Ο ορισμός αυτός μπορεί να προκαλέσει παρανοήσεις για την εφαπτομένη σε σημεία που αυτή δεν υπάρχει. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι παιδαγωγικές δυνατότητες για μια μαθηματική έννοια δεν προκύπτουν μόνο από το πόσο ακριβής είναι αλλά και στο τι στερείται (Giraldo & Carvalho, 2006).

2.2 Η εφαπτομένη ως έννοια και οι εικόνες που δημιουργούνται γύρω από αυτήν

Η εφαπτομένη όπως εφαρμόζεται στον κύκλο δεν μπορεί να γενικευτεί και να εφαρμοστεί σε γραφήματα που παρουσιάζουν σημεία καμπής, γωνιακά σημεία ή σε περιπτώσεις που η εφαπτομένη ταυτίζεται με μέρος του γραφήματος (Tall, 1987). Ο ορισμός που έχει υιοθετηθεί σήμερα, είναι ισοδύναμος με εκείνον του Leibniz, και αφορά μία ευθεία που απλά αγγίζει την καμπύλη στο σημείο που εξετάζουμε. Κάτι τέτοιο βέβαια αντίκειται στην γενική εικόνα που έχει ένας μαθητής για τη γενική σημασία της λέξης «εφαπτομένη». Σύμφωνα με τον Vinner (1983) οι πρότερες εμπειρίες της εφαπτομένης στον κύκλο εισάγουν την πεποίθηση ότι η εφαπτομένη γραμμή ακουμπά το γράφημα σε ένα σημείο και δεν το τέμνει. Προς αυτήν την κατεύθυνση ο Vinner (1991) υποστήριξε ότι οι διαισθητικές ιδέες των μαθητών έρχονται σε σύγκρουση με τον τυπικό ορισμό. Η ακριβής μαθηματική διατύπωση δόθηκε από τον Cauchy τον 19^{ο} αιώνα και βασίζεται στην έννοια του ορίου. Την

προστιθέμενη δυσκολία κατανόησης της έννοιας λόγω των οριακών διαδικασιών εξέτασε ο Tall (1987).

Από την ενασχόλησή τους με συγκεκριμένες παραστάσεις οι μαθητές δημιουργούν εικόνες (Tall & Vinner, 1981)). Οι Aspinwall, Shaw & Presmeg (1997) εισάγουν την ανεξέλεγκτη εικόνα την οποία μπορεί να έχει ένας μαθητής και εξετάζουν την περίπτωση της εφαπτομένης. Διαπιστώνουν ότι αυτή η εικόνα μπορεί να αποτελέσει σημαντικό αρνητικό παράγοντα στην προσπάθεια εισαγωγής μιας μαθηματικής έννοιας.

Η νέα γνώση αντιτίθεται της παλιάς και η αποτελεσματική μάθηση απαιτεί στρατηγικές επίλυσης μιας τέτοιας σύγκρουσης (Papert, 1980). Η σύγκρουση αυτή πρέπει να αξιοποιηθεί στα πλαίσια μιας κατάλληλης παιδαγωγικής προσέγγισης οδηγώντας στον εμπλουτισμό μιας έννοιας (Giraldo & Carvalho, 2006). Στην περίπτωση της εφαπτομένης η αλλαγή αυτή μπορεί να προέλθει με τη γενίκευση μέσω ανακατασκευής (reconstructive generalisation) (Harel & Tall, 1991). Σύμφωνα με τους Harel και Tall (1991) η γενίκευση είναι η προσπάθεια εφαρμογής μιας έννοιας σε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Ωστόσο, οι γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται από τη μαθηματική γενίκευση εξαρτώνται από την υπάρχουσα γνώση του ατόμου. Από την έρευνα έχουν εντοπιστεί συγκεκριμένοι τρόποι γενίκευσης:

- Γενίκευση μέσω επέκτασης (expansive generalization): προκαλείται όταν το υποκείμενο επεκτείνει την κλίμακα εφαρμογής ενός υπάρχοντος θέματος χωρίς να το ανακατασκευάζει.

- Γενίκευση μέσω ανακατασκευής (reconstructive generalization): προκαλείται όταν το υποκείμενο ανακατασκευάζει ένα θέμα με σκοπό να διευρύνει το εύρος εφαρμογής του.

- Διαζευκτική γενίκευση (disjunctive generalization): προκαλείται όταν και καθώς κινούμαστε από ένα οικείο περιεχόμενο σε ένα νέο. Το υποκείμενο κατασκευάζει ένα νέο ασύνδετο θέμα για να αντιμετωπίσει το περιεχόμενο και το προσθέτει στην περιοχή που μπορεί το θέμα να υπάρξει.

Μελετώντας την έννοια της εφαπτομένης οι Biza, Zachariades & Sougioul (2004) βρήκαν ότι οι εικόνες που δημιουργούνται για την έννοια της

εφαπτομένης στον κύκλο λειτουργούν ως εμπόδιο στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας σε πιο γενικά πλαίσια. Επιπλέον, διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δημιουργούν συνθετικά μοντέλα, στην προσπάθειά τους να προσαρμόσουν τη νέα γνώση, που αφορά την εφαπτομένη καμπύλης, στις προηγούμενες γνώσεις τους για τον κύκλο και τις κωνικές τομές.

Στην περίπτωση της εφαπτομένης, η όποια προσπάθεια ανακατασκευής της έννοιας δυσκολεύει, ακόμα περισσότερο, από το γεγονός ότι γίνεται χρήση του ίδιου ονόματος σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια χωρίς καμία προφανή σύνδεση ανάμεσά τους (Artigue, 1995). Έτσι, έχουμε ως αποτέλεσμα να δίνουν οι μαθητές διαφορετικό νόημα στο ίδιο όνομα (Sierpinska, 1994). Σε επίπεδο μαθηματικής θεωρίας μπορούμε να κάνουμε χρήση του κατάλληλου κάθε φορά ορισμού. Σε επίπεδο όμως μαθησιακής διαδικασίας δεν είναι ισοδύναμοι όλοι οι ορισμοί (Biza, 2008). Συνέπεια όλων αυτών είναι το γεγονός ότι η προσπάθεια για ανακατασκευή της έννοια της εφαπτομένης, είναι μια διαδικασία εξαιρετικά χρονοβόρα που επηρεάζεται από πολλούς εξωγενείς και αστάθμητους παράγοντες, όπως είναι οι προσωπικές εμπειρίες των μαθητών και οι ίδιοι οι καθηγητές.

2.3 Οι δυσκολίες των μαθητών για την έννοια της εφαπτομένης

Στη βιβλιογραφία έχει γίνει προσπάθεια ερμηνείας του τρόπου με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές για την εφαπτομένη. Η Biza (2008) μελετά τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη. Οι Biza,Christou και Zachariades (2008) μελετούν πώς σκέφτονται οι μαθητές όταν δουλεύουν με τις εφαπτομένες και ορίζουν τρεις τρόπους προσέγγισης της έννοιας:

- ✓ *αναλυτική τοπική προοπτική* (Analytical Local perspective):
  - Η εφαπτομένη έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία ,τέμνει σε σημεία καμπής και ταυτίζεται με την καμπύλη.
  - Το σημείο επαφής δεν είναι γωνιακό σημείο.
- ✓ *ενδιάμεση τοπική προοπτική* (Intermediate Local perspective):
  - Η εφαπτομένη μπορεί να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με την καμπύλη αλλά υπάρχει μία περιοχή γύρω

από το σημείο επαφής στο οποίο δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο.

- Δεν μπορεί να τέμνει την καμπύλη στο σημείο επαφής.
- Δεν υπάρχει εφαπτομένη σε γωνιακό σημείο.

Τα δύο πρώτα τεκμηριώνουν το γεγονός ότι γύρω από το σημείο επαφής η καμπύλη μένει στο ίδιο μέρος ως προς την εφαπτομένη. Οι μαθητές φαίνεται να εφαρμόζουν τοπικά μια ολική ιδιότητα χωρίς να καταφέρνουν να ανακατασκευάσουν την εικόνα έννοιας ώστε να συμπεριλάβουν την αναλυτική προοπτική.

✓ *γεωμετρική ολική προοπτική* (Geometrical Global perspective) διαμορφώνει συγκεκριμένες εικόνες έννοιας για την εφαπτομένη:

- Η εφαπτομένη έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη και την αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο. Συνεπώς, οι μαθητές μπορούν να δεχθούν εφαπτομένη σε γωνιακό σημείο αλλά όχι σε σημείο καμπής.
- Η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο επαφής με την καμπύλη ανεξάρτητα από τις σχετικές τους θέσεις. Συνεπώς οι μαθητές μπορούν να δεχθούν εφαπτομένη σε σημείο καμπής.

Οι Biza, Christou και Zachariades (2008) εντοπίζουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών έχει την ενδιάμεση τοπική προοπτική. Τα ευρήματα δείχνουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται πάρα πολύ να κάνουν τη μετάβαση από το ολικό στο τοπικό και αντίστροφα (Biza, 2008). Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο ότι οι μαθητές νοηματοδοτούν τις μαθηματικές έννοιες σύμφωνα με τα πλαίσια μέσα στα οποία τις συναντούν και κάνουν χρήση ιδιοτήτων που γίνονται αντιληπτές από την εμπειρία τους χωρίς να ξέρουν το αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο που τις διέπει (Moreira & Pinto, 2004).

Προς αυτήν την κατεύθυνση έχουν αναδειχθεί μερικοί πολύ χρήσιμοι τρόποι προσέγγισης της εφαπτομένης. Στόχος όλων αυτών είναι να υπερκεράσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια και

να δημιουργηθούν οι κατάλληλες δομές που θα διευκολύνουν τους μαθητές να κατανοήσουν την εφαπτομένη.

Οι Downs και Mamona-Downs (2000), βασιζόμενοι στην ισχυρή γεωμετρική ταυτότητα της εφαπτομένης, αναφέρουν ότι είναι χρήσιμη στην αιτιολόγηση της παραγώγου. Στην προσπάθεια του Hirst (1972) να συνδέσει την εφαπτομένη με την παράγωγο προέκυψε ότι αν οι κλίσεις των χορδών έχουν οριακή αξία, τότε υπάρχει η εφαπτομένη της καμπύλης στο υπό συζήτηση σημείο και η κλίση της ισούται με την οριακή τιμή. Οι Downs και Mamona-Downs (2000) προσπαθούν να διερευνήσουν ποιά προσέγγιση της εφαπτομένης θα μπορούσε να είναι πιο ευεργετική για τους μαθητές, η αναλυτική ή η γεωμετρική. Ωστόσο, κατέληξαν ότι οι δύο προσεγγίσεις είναι αρκετά πρόχειρα διαχωρισμένες. Υπάρχουν περιπτώσεις που η χρήση της γεωμετρικής εφαπτομένης θα μπορούσε να είναι χρήσιμη αφού απαλλάσσεται από την οριακή διαδικασία, αλλά δε μπορεί να εφαρμοστεί για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του δύο.

Φαίνεται ότι η τοπική προσέγγιση της εφαπτομένης είναι τόσο ισχυρή που αρκεί για να ξεπεραστούν παρανοήσεις σχετικά με την εφαπτομένη και την παράγωγο. Η κατανόηση εννοιών, όπως της εφαπτομένης, βασίζεται σε δύο παράγοντες: την τοπική ευθύτητα και την τοπική γραμμικότητα. Η πρώτη συνδέεται με τη διαισθητική αντίληψη του ατόμου για την κλίση της γραφικής παράστασης ενώ η δεύτερη αποτελεί την συμβολική γραμμική προσέγγιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε ένα σημείο της (Biza, 2008).

Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την εφαπτομένη είναι χρήσιμο να αναπτυχθεί ένα περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας με δυνατότητες παράστασης γραφήματος συνάρτησης με σκοπό να εμπλουτιστεί η εικόνα που έχουν οι μαθητές για την έννοια (Biza, 2011). Ο Tall(1987) υποστηρίζει ότι ο υπολογιστής είναι χρήσιμος στην προσέγγιση σημαντικών ιδιοτήτων μιας νέας έννοιας παρέχοντας λογισμικό το οποίο επιτρέπει στο χρήστη να χειριστεί παραδείγματα και αντιπαραδείγματα της έννοιας σε ένα σύνθετα τροποποιημένο γενικό περιβάλλον. Οι δύο παραπάνω έρευνες ανέδειξαν την αναγκαιότητα εμπλουτισμού της έννοιας με χρήση διαδραστικών ψηφιακών εργαλείων που δίνουν τη δυνατότητα στο

μαθητή να πειραματιστεί και να ανακατασκευάσει την έννοια βασιζόμενος στην εμπειρία που αποκτά με την ενασχόλησή του με τα παραπάνω περιβάλλοντα. Συνεπώς, αυτή η προσέγγιση μας επιτρέπει να αναπτύξουμε καταλληλότερη γνώση παρέχοντας στους μαθητές γενικές ιδέες εννοιών σε ένα πρότερο στάδιο (Tall, 1987).

Με την παρούσα έρευνα εκμεταλλεύομαι τη δυναμική που παρέχουν τα σύγχρονα ψηφιακά εργαλεία όπως το Geogebra. Εντοπίζω τις αδυναμίες προηγούμενων ερευνών σχετικά με το πώς η προηγούμενη γνώση της εφαπτομένης στον κύκλο δυσκολεύει τους μαθητές να δεχθούν τα αναλυτικά χαρακτηριστικά της έννοιας. Διερευνώ πώς η ενασχόληση με την εφαπτομένη μπορεί να βοηθήσει να ξεπεραστούν οι εικόνες που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για την έννοια και να προσδώσει μια νέα δυναμική στον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τις οριακές διαδικασίες. Δηλαδή εξετάζω αν αυτές οι έννοιες μπορούν να προϋπάρξουν στους μαθητές, χωρίς αυστηρό φορμαλισμό, και κατά πόσο η εφαπτομένη δύναται να γίνει το όχημα με το οποίο οι μαθητές αποκτούν οπτικά ερεθίσματα σχετικά με το όριο.

Κεφάλαιο 3^{ο}

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα

Το γενικό σκεπτικό, στην παρούσα έρευνα είναι οι μαθητές να ξεκινήσουν έχοντας ως αφετηρία την γεωμετρική εφαπτομένη, και πιο συγκεκριμένα την εφαπτομένη στον κύκλο. Στους μαθητές εισάγεται ένα εργαλείο προσέγγισης της εφαπτομένης, μέσω της οριακής θέσης τεμνουσών ευθειών. Στη συνέχεια, με χρήση ενός νέου ψηφιακού εργαλείου σε σχήματα που είναι κοντά στην εικόνα του κύκλου, οι μαθητές αναμένεται να έρθουν σε σύγκρουση με την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη. Πειραματιζόμενοι με κατάλληλα επιλεγμένα σχήματα ανακατασκευάζουν την έννοια και σχηματίζουν μια διαισθητική εικόνα της εφαπτομένης που είναι κοντά στον αναλυτικό ορισμό. Προς αυτή τη κατεύθυνση είναι σημαντικό για τους μαθητές να οδηγηθούν στο ότι η εφαπτομένη μπορεί:

- να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία επαφής με ένα σχήμα
- να τέμνει το σχήμα σε περισσότερα του ενός σημεία

Κατά την προσπάθεια εντοπισμού αυτών των ιδιοτήτων της εφαπτομένης αναδύεται ο τοπικός χαρακτήρας της και η συσχέτιση που έχει η εφαπτομένη ως εξίσωση ευθείας με τον συντελεστή διεύθυνσής της. Το σημαντικό και ταυτόχρονα δύσκολο κομμάτι της όλης διαδικασίας είναι οι μαθητές να αντιληφθούν την εφαπτομένη διαισθητικά ως μία οριακή διαδικασία. Για να εξεταστούν τα παραπάνω οι μαθητές έρχονται σε επαφή με γραφικές παραστάσεις. Η πρότερη εμπειρία με τα σχήματα τους επιτρέπει να προσεγγίσουν την εφαπτομένη στις γραφικές παραστάσεις. Με αυτή τη διαδικασία οι μαθητές εμπλουτίζουν την εικόνα που έχουν για την έννοια της εφαπτομένης. Κάνοντας χρήση του ε.ι.τ είναι σημαντικό να αντιληφθούν ότι για να υπάρχει εφαπτομένη σε ένα σημείο θα πρέπει να υπάρχει μια αίσθηση «ομαλότητας» στο γράφημα.

Με το πέρας της παρούσας εργασίας, ενδιαφέρομαι:

- Να εξετάσω κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να προσεγγίσουν διαισθητικά τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης.
- Να μελετήσω τι είδους συνδέσεις μπορούν αυτοί να δημιουργήσουν σε σχέση με τον γεωμετρικό ορισμό και αν είναι σε θέση να διακρίνουν πότε υπάρχει ή όχι εφαπτομένη σε ένα γράφημα.
- Να αξιολογήσω τη δυνατότητα των μαθητών να κατανοήσουν τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης και την οριακή της φύση.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται στην παρούσα εργασία είναι:

- Αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της εφαπτομένης όταν εισάγονται στα αναλυτικά της χαρακτηριστικά μέσα από τη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων. Ποιός είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες νοηματοδότησης της εφαπτομένης.
- Αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα σε σχέση με την οριακή φύση της εφαπτομένης. Ποιός είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες νοηματοδότησης της οριακής φύσης της εφαπτομένης.

3.2 Υπολογιστικό περιβάλλον και δραστηριότητες

3.2.1 Το Περιβάλλον Geogebra

Το λογισμικό Geogebra προσφέρει γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις συνδυάζοντας λειτουργίες λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (DGE) και συστημάτων υπολογιστικής άλγεβρας (CAS) (Hohenwarter et al. 2002, 2010). Το Geogebra είναι εφοδιασμένο με ένα παράθυρο μέσα στο οποίο φαίνονται οι εξισώσεις των γεωμετρικών αντικειμένων που εμφανίζονται στην οθόνη. Στο παράθυρο αυτό φαίνεται η συνεχής μεταβολή των ευθειών καθώς και οι τιμές που παίρνουν τα σημεία ανάλογα με τη θέση τους. Επίσης το λογισμικό είναι εφοδιασμένο με έτοιμες συναρτήσεις που μας δίνουν χρήσιμες πληροφορίες πάνω στο σχήμα όπως είναι οι μοίρες των γωνιών και ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας. Όλα αυτά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις που εξετάζονται οι μεταβολές συγκεκριμένων τιμών, όπως οι

κλίσεις. Επιπλέον το Geogebra παρέχει τη δυνατότητα να χειριζόμαστε γεωμετρικά αντικείμενα.

Στην παρούσα έρευνα η δυνατότητα γραφικής αναπαράστασης συναρτήσεων και ο δυναμικός χειρισμός τους παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να επιλέξουν ένα σημείο και μετακινώντας το να παρατηρήσουν πώς μεταβάλλεται η ευθεία που διέρχεται από αυτό και από το σημείο στο οποίο ζητείτε να σχεδιαστεί η εφαπτομένη. Δημιουργώντας δύο τέτοιες ευθείες οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα (πειραματιζόμενοι με τις σχετικές θέσεις που αυτές μπορούν να λάβουν στον κύκλο) να ανακατασκευάσουν την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη. Η δυνατότητα αναπαράστασης που παρέχει το ψηφιακό εργαλείο αποτελεί ένα ισχυρό μέσο που βοηθάει τους μαθητές να κάμψουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν λόγω της πρότερης γνώσης σχετικά με την έννοια.

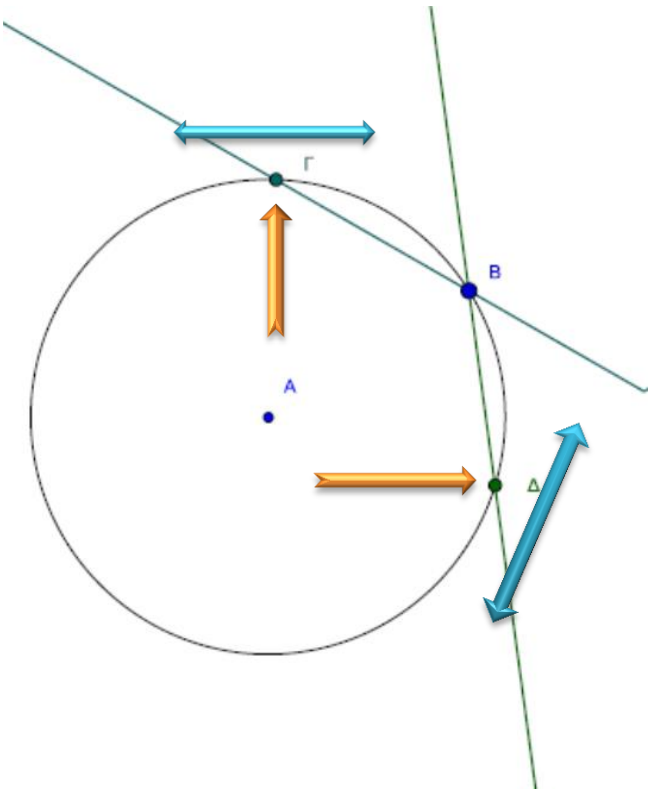
Η προσπάθεια διαισθητικής προσέγγισης της οριακής φύσης της εφαπτομένης αναμένεται να φέρει τους μαθητές αντιμέτωπους με κάποιες τεχνικές δυσκολίες όσον αφορά τη χρήση του Geogebra. Το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας είναι ιδανική επιλογή στο να αντιληφθούν οι μαθητές τη διαδικασία του «πλησιάσματος». Ωστόσο, ήδη, από τον σχεδιασμό έχει εντοπιστεί αδυναμία στην αναπαράσταση της εφαπτομένης ως οριακή θέση δύο ευθειών. Αυτό συμβαίνει επειδή το Geogebra κατασκευάζει ευθείες με τη χρήση δύο σημείων. Συνεπώς κατά τη διαδικασία του «πλησιάσματος» και όταν τα σημεία τελικά ταυτίζονται, οι ευθείες παύουν να υφίστανται οπότε και το ψηφιακό εργαλείο δεν είναι σε θέση να τις παραστήσει. Σε τέτοιες περιπτώσεις προσπαθούμε να κρύψουμε αυτή την αδυναμία πλησιάζοντας τα σημεία αρκετά κοντά αλλά όχι ταυτίζοντάς τα. Με αυτόν τον τρόπο «οπτικά» επιτυγχάνουμε την ταύτιση των δύο τεμνουσών.

Το εργαλείο των ισοσυγκλινουσών τεμνουσών (ε.ι.τ).

Το *εργαλείο των ισοσυγκλινουσών τεμνουσών (ε.ι.τ,)* με το οποίο εφοδιάζουμε τους μαθητές είναι μια μέθοδος που τους επιτρέπει να προσεγγίζουν την εφαπτομένη. Η διαφοροποίηση του σε σχέση με το σχολικό βιβλίο είναι ότι:

1. γίνεται ταυτόχρονο πλησίασμα στο σημείο επαφής και από δεξιά και από αριστερά
2. παρέχεται στους μαθητές η δυνατότητα να πραγματοποιήσουν το «πλησίασμα» με δυναμικό τρόπο
3. εισάγεται στο σχήμα του κύκλου

Κατά την εισαγωγή του ε.ι.τ (Σχήμα 3.2.1) οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν δύο σημεία, Γ και Δ, εκατέρωθεν του σταθερού σημείου επαφής Β. Στη συνέχεια πλησιάζουν τα σημεία προς το Β και παρατηρούν τη σχηματιζόμενη εφαπτομένη. Τους δίνεται δε η δυνατότητα μετακίνησης των σημείων προς κάθε κατεύθυνση. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται φανερό ότι όσο απομακρύνονται από το σταθερό σημείο Β, οι ευθείες εξακολουθούν να τέμνουν τον κύκλο, ενώ όσο πλησιάζουν προς το σημείο Β τείνουν να γίνουν μία ευθεία. Όταν οι δύο αυτές ευθείες ταυτίζονται, στο σχήμα μένει μια κοινή ευθεία, δηλαδή η εφαπτομένη.



Σχήμα 3.2.1

Με τα πορτοκαλί βέλη φαίνονται τα σημεία με τα οποία καλούνται να δουλέψουν οι μαθητές, ενώ με τα μπλε βέλη φαίνεται προς ποιά κατεύθυνση έχουν τη δυνατότητα να τα μετακινήσουν

3.2.2 Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες χωρίζονται σε δύο στάδια ανάλογα με τα σχήματα που εισάγονται κάθε φορά. Στο πρώτο, στόχος είναι η ρήξη με την πρότερη γνώση. Για αυτό εισάγεται το ε.ι.τ σε σχήματα που παράγονται από ημικύκλια. Στο δεύτερο στάδιο στόχος είναι οι μαθητές να φτάσουν σε γενικεύσεις για την εικόνα της εφαπτομένης με ταυτόχρονη αποδέσμευση από το σχήμα του κύκλου και περνούν σταδιακά στα γραφήματα. Οι δραστηριότητες εφαρμόζονται σε τρεις φάσεις ανάλογα με τα νοήματα που κάθε φορά δημιουργούν οι μαθητές. Στο πρώτο στάδιο ανήκουν οι φάσεις 1 και 2, ενώ στο δεύτερο η φάση 3.

<u>Φάση 1:</u> Εισαγωγή των μαθητών στο ε.ι.τ και εμπλοκή τους σε πρωτότυπες δραστηριότητες με στόχο την ανακατασκευή της εικόνας που έχουν για την εφαπτομένη.

Στην πρώτη φάση, στόχος είναι να έρθουν οι μαθητές σε ρήξη με την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη και κατ' επέκταση με τον γεωμετρικό ορισμό της έννοιας. Προς αυτή την κατεύθυνση σχεδιάζονται τα πρώτα τρία φύλλα εργασίας. Με το πέρας των φύλλων αυτών, οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να χειριστούν τις ιδιότητες της εφαπτομένης, όπως αυτές προκύπτουν από τον αναλυτικό της ορισμό.

Πριν την εισαγωγή του πρώτου φύλλου εργασίας αφιερώνονται περίπου είκοσι λεπτά με σκοπό την εξοικείωση των μαθητών μαζί μου αλλά και με το λογισμικό Geogebra. Επειδή δεν είναι γνωστό σε τι βαθμό είναι οι μαθητές σε θέση να χειριστούν το λογισμικό Geogebra ξεκινώ από μηδενική βάση και εισάγω στους μαθητές όλα εκείνα τα εφόδια που τους είναι απαραίτητα για την περάτωση της παρούσας εργασίας. Κατά την ενασχόλησή τους με το Geogebra τους δίνονται σχετικά παραδείγματα για να έρθουν σε επαφή με τις απαραίτητες εντολές που θα χρειαστούν για την περάτωση της παρούσας εργασίας.

Στο πρώτο φύλλο εργασίας (Παράρτημα 1) εισάγεται το ε.ι.τ, στον κύκλο - με την εφαπτομένη του οποίου οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι. Οπότε με αυτή την επιλογή αναμένεται να εστιάσουν την προσοχή τους στον τρόπο

χρήσης του ε.ι.τ. Σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να γίνει εισαγωγή του ε.ι.τ σε σχήματα με τα οποία οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι. Αυτό έχει σαν πιθανό αποτέλεσμα να επικεντρωθεί η προσοχή των μαθητών στα σχήματα και όχι στις ιδιότητες της εφαπτομένης, όπως αυτές απορρέουν από τη χρήση του ε.ι.τ. Επιπλέον, το γεγονός ότι τα σχήματα που χρησιμοποιούνται παραπέμπουν στη γεωμετρική εφαπτομένη, προκαλεί βαθύτερη σύγκρουση στους μαθητές από το να δουν την εφαπτομένη σε ένα εντελώς νέο πλαίσιο. Έτσι, εισάγονται οι ακόλουθες ερωτήσεις (τα σημεία και οι ευθείες βρίσκονται σε αντιστοιχία με το Σχήμα 3.2.1):

«Πειραματιζόμενοι με τα σημεία Γ και Δ, τι παρατηρείτε όταν τα δύο αυτά σημεία πλησιάζουν το σημείο Β;»

Με αυτή την ερώτηση επιχειρείται οι μαθητές να εμπλακούν με τον πειραματισμό και να ξεκινήσουν να κάνουν διατυπώσεις για τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ.

«Υπάρχει περίπτωση οι δύο ευθείες ε και δ να ταυτιστούν; Τι συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση;»

Ο στόχος είναι οι μαθητές να επικεντρώσουν τον πειραματισμό τους σε μια συγκεκριμένη κατάσταση και να εξεταστούν τα νοήματα που δημιουργούν σχετικά με την σχηματιζόμενη εφαπτομένη σε σχέση με τη χρήση του ε.ι.τ. Συγκεκριμένα, ελέγχεται πόσο εξοικειωμένοι είναι με τον χειρισμό της έννοιας της εφαπτομένης, η οποία εξετάζεται σε ένα οικείο προς αυτούς πλαίσιο, εκείνο του κύκλου.

«Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των δυο ευθειών και της εφαπτομένης α; Μπορείτε να διατυπώσετε με δικά σας λόγια πώς σχετίζονται οι τρεις ευθείες;»

Ο σκοπός είναι να εξεταστούν οι απόψεις που έχουν οι μαθητές για την εφαπτομένη και αν μπορούν να αντιληφθούν τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ. Επιπλέον ελέγχεται αν στο παρόν στάδιο της έρευνας οι μαθητές είναι σε θέση, έστω και διαισθητικά, να συσχετίσουν την εφαπτομένη με κάποιας μορφής οριακή κατάσταση.

«Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσε να οριστεί η εφαπτομένη σε άλλα γεωμετρικά σχήματα, όπως το τετράγωνο;»

Η εισαγωγή του ερωτήματος κρίνεται απαραίτητη. Οι μαθητές προσδίδουν εγκυρότητα στο ε.ι.τ κάτι που δε φαίνεται με τη πρώτη ματιά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, στον κύκλο και στις κωνικές τομές, μια ευθεία είναι αρκετή για να σχεδιαστεί η εφαπτομένη σε ένα σημείο. Οπότε αναδεικνύεται η ανάγκη εισαγωγής δύο τεμνουσών σε περιπτώσεις που δεν υπάρχει εφαπτομένη.

Στη συνέχεια περνάμε στο δεύτερο φύλλο εργασίας (Παράρτημα 2) το οποίο έχει ως στόχο την εφαρμογή του ε.ι.τ από τους μαθητές σε νέα σχήματα. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, δίνεται στους μαθητές ένα ημικύκλιο και καλούνται με τη χρήση του ε.ι.τ να υπολογίσουν την εφαπτομένη σε ένα σημείο. Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με αυτή την εικόνα της εφαπτομένης καθώς μοιάζει πολύ με εκείνη του κύκλου. Με αυτόν τον τρόπο επικεντρώνουν την προσοχή τους στην προσέγγιση της εφαπτομένης από «ισοσυγκλίνουσες τέμνουσες» περνώντας ταυτόχρονα σε σχήματα που διαφοροποιούνται κλιμακωτά από τον κύκλο.

Χωρίς να απαγκιστρωθώ πλήρως από το γνώριμο σχήμα του κύκλου, δίνω στους μαθητές τις ακόλουθες ερωτήσεις :

«Ανοίξτε τώρα το αρχείο με όνομα "ημικύκλιαproject". Φέρτε την εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο του ενός κύκλου. Σκεφτείτε, πώς μπορούμε, εύκολα, να το κάνουμε αυτό με βάση τις δραστηριότητες που έχουμε κάνει παραπάνω; Μπορεί να είναι και εφαπτομένη του δεύτερου κύκλου; Πειραματιζόμενοι εκφράστε τα συμπεράσματά σας.»

Με αυτό το ερώτημα οι μαθητές πειραματίζονται με την ορθή εφαρμογή του ε.ι.τ και έρχονται σε ρήξη με την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη. Στο σχήμα 4.1.10, με το οποίο καλούνται να δουλέψουν, οι μαθητές εντοπίζουν όλες τις μορφές που μπορεί να πάρει η εφαπτομένη, ανάλογα με τις ιδιότητες που έχει κάθε φορά. Σε αυτή τη δραστηριότητα δυσκολεύονται να δουν το σχήμα ως ολότητα.

«Ανοίγουμε το αρχείο "2ημικύκλιαproject". Μπορούμε να δουλέψουμε με όσα έχουμε πει έως τώρα για τις διάφορες θέσεις που μπορούν να πάρουν τα δύο ημικύκλια. Ορίζεται εφαπτομένη στα νέα σχήματα που προκύπτουν;»

Με αυτήν τη δραστηριότητα (Σχήμα 4.1.19) οι μαθητές υπολογίζουν την εφαπτομένη σε ένα σχήμα που μπορεί να μεταβληθεί. Οπότε, σιγά σιγά επικεντρώνονται στην σημειακή φύση της εφαπτομένης. Σε αυτήν την κατεύθυνση έχει ετοιμαστεί και το επόμενο ερώτημα του δεύτερου φύλλου εργασίας .

Κλίνοντας τον πρώτο αυτό κύκλο εργασιών τα σημαντικά σημεία είναι :

1. Χρήση ισοσυγκλινουσών τεμνουσών για την προσέγγιση της εφαπτομένης.
2. Εφαπτομένη ως μια διαδικασία οριακής προσέγγισης.
3. Πέρασμα από την γεωμετρική στην αναλυτική εφαπτομένη μέσω ημικυκλίων.
4. Πέρασμα από τον κύκλο σε σχήματα που διαφοροποιούνται από αυτόν, σχετίζονται όμως με αυτόν αφού συντίθενται από ημικύκλια.
5. Τρόποι προσέγγισης της εφαπτομένης στα άκρα των σχημάτων.

<u>Φάση 2:</u> Πέρασμα από τα σχήματα στα γραφήματα και σύνδεση της εφαπτομένης με τα αναλυτικά της χαρακτηριστικά ως εξίσωση ευθείας.

Στην προηγούμενη φάση ασχολούμαι κυρίως με τη σχηματική αναπαράσταση της εφαπτομένης. Αυτή η φάση αποτελεί έναν συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην εμπλουτισμένη εικόνα της εφαπτομένης που έχουν δημιουργήσει οι μαθητές και τα αναλυτικά χαρακτηριστικά του ορισμού της ως εξίσωση ευθείας. Η φάση αυτή συνοψίζεται στο τρίτο φύλλο εργασίας (Παράρτημα 3).

Οι μαθητές ασχολούνται με ένα σχήμα διαφορετικό από τον κύκλο, την παραβολή. Η παραβολή δεν έχει επιλεγεί τυχαία, αφού οπτικά δεν διαφοροποιείται σημαντικά ως προς την εφαπτομένη της σε σχέση με τον κύκλο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν μόνοι τους το σταθερό

σημείο στο οποίο θα εφαρμόσουν το ε.ι.τ. Υπό αυτό το πρίσμα, τους δίνεται η ελευθερία να πειραματιστούν με το ε.ι.τ σε διάφορες θέσεις της παραβολής οδηγούμενοι σε συμπεράσματα για το πώς σχετίζεται η σχηματιζόμενη εφαπτομένη με το γράφημα. Η πρόσθετη αξία αυτής της δραστηριότητας εντοπίζεται στο ότι οι μαθητές προχωρούν ένα βήμα παραπέρα και σχετίζουν την εφαπτομένη με την προσέγγιση του συντελεστή διεύθυνσής της από τους αντίστοιχους συντελεστές των ισοσυγκλινουσών τεμνουσών. Δηλαδή, αναγνωρίζουν ότι αυτό που μεταβάλλεται κάθε φορά είναι η κλίση.

Σε όλη αυτήν τη προσπάθεια σημαντική είναι η συμβολή του ψηφιακού εργαλείου που χρησιμοποιείται. Επιπλέον δημιουργείται η ανάγκη εισαγωγής ενός μαθηματικού εργαλείου (αντίστοιχου με αυτό που μας δίνει το ψηφιακό εργαλείο) για τον υπολογισμό της κλίσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο. Σε αυτήν την κατεύθυνση θέτουμε και το ακόλουθο ερώτημα:

«Πειραματιζόμενοι, επιλέξτε ένα σταθερό σημείο π.χ το (2,4). Παρατηρείστε πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης σε σχέση με την κλίση των δύο ευθειών που την προσεγγίζουν.»

Κλίνοντας τη δεύτερη φάση τα σημαντικά σημεία είναι :

1. *Συσχέτιση προσέγγισης εφαπτομένης με προσέγγιση της κλίσης.*
2. *Πέρασμα σε σχήματα που διαφοροποιούνται αισθητά του κύκλου, αφού πλέον αφήνουμε τη σχηματική προσέγγιση και περνάμε σε γράφημα συνάρτησης .*
3. *Εξάρτηση εξίσωσης εφαπτομένης από την κλίση.*

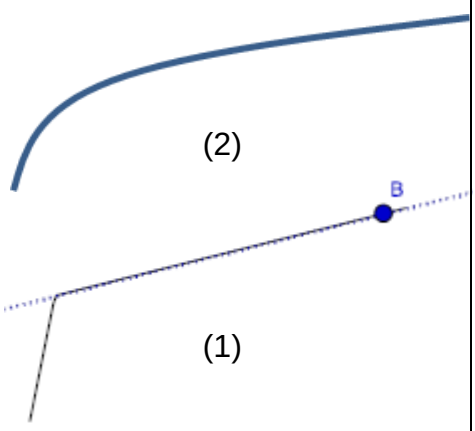
Στις δύο αυτές φάσεις επιδιώκεται οι μαθητές να αναπτύξουν ένα εξειδικευμένο λεξιλόγιο γύρω από την έννοια της εφαπτομένης. Έτσι δημιουργούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις, ώστε οι μαθητές να δουν την εφαπτομένη ως ένα «πλησίασμα» που είναι ένας αρχικός τρόπος έκφρασης μιας οριακής διαδικασίας.

Φάση 3: ***Πέρασμα σε γραφήματα στα οποία εντοπίζεται αδυναμία στην εφαρμογή του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης και προσπάθεια σύνδεσης με την οριακή της φύση.***

Για την τελευταία φάση της εργασίας έχει σχεδιαστεί το τελευταίο φύλλο εργασίας (Παράρτημα 4) καθώς και μία παρέμβαση με τον κλασικό τρόπο διδασκαλίας, χωρίς φύλλο εργασίας αλλά με χρήση πίνακα .

Στο τελευταίο φύλλο εργασίας πραγματοποιείται πέρασμα από τα σχήματα στα τυχαία γραφήματα. Έως αυτό το σημείο εσκεμμένα δεν έχει γίνει αναφορά σε τέτοιου είδους γραφήματα γιατί με ενδιαφέρει περισσότερο να δουλέψω με την οπτική αναπαράσταση που έχουν οι μαθητές από την γεωμετρική εφαπτομένη. Ανακατασκευάζοντας αυτήν την εικόνα περνούν στα αναλυτικά χαρακτηριστικά του ορισμού της. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ο όρος γράφημα και όχι γραφική παράσταση για να μείνω περισσότερο στο εποπτικό κομμάτι. Η γραφική παράσταση προϋποθέτει τον καλό χειρισμό των συναρτήσεων ενώ το γράφημα οι μαθητές το αντιλαμβάνονται πιο πολύ ως ένα σχήμα.

Σε αυτό το σημείο εξετάζω πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν στο πλαίσιο των γραφημάτων τη γνώση που έχουν αποκτήσει από τον χειρισμό και υπολογισμό της εφαπτομένης στο γεωμετρικό πλαίσιο. Μέσω των γραφημάτων με τα οποία καλούνται να δουλέψουν οι μαθητές αποκτούν εποπτεία για το πότε σε ένα σημείο υπάρχει ή όχι εφαπτομένη. Ο στόχος είναι να διερευνηθεί πώς σχετίζουν οι μαθητές την ύπαρξη της εφαπτομένης με μια αίσθηση ομαλότητας στο γράφημα. Πιο συγκεκριμένα να γίνει αντιληπτό κατά πόσον όταν εφαρμόζεται το ε.ι.τ σε ένα σημείο του γραφήματος, οι τέμνουσες ακολουθούν μια οπτική συνέχεια ως προς τον τρόπο που μεταβάλλονται. Αυτή η συνέχεια μπορεί να γίνει αντιληπτή από τους μαθητές με τις δυνατότητες που τους παρέχει το λογισμικό. Έτσι είναι σε θέση καθώς πειραματίζονται με τις τέμνουσες να παρατηρούν πως μεταβάλλονται οι κλίσεις τους. Οπότε είναι εύκολο ότι εφαπτομένη έχουμε στις περιπτώσεις που οι κλίσεις των τεμνουσών πλησιάζουν τη



Σχήμα 3.2.2

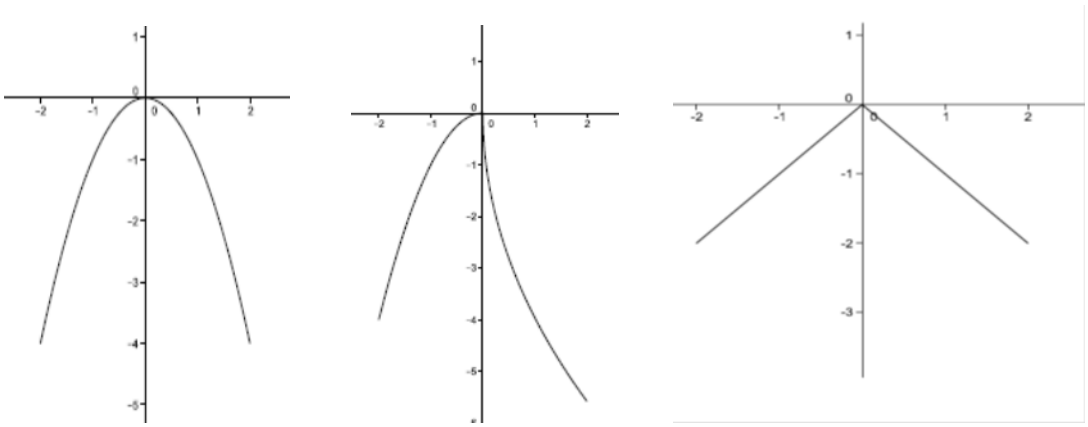
Δύο καμπύλες που οπτικά μοιάζουν αλλά διαφοροποιούνται ως προς την ύπαρξη της εφαπτομένης.

κλίση της εφαπτομένης χωρίς να παραλείπονται κάποιες ενδιάμεσες τιμές τους.

Στους μαθητές δίνονται γραφήματα που ακολουθούν την ίδια σχεδιαστική φιλοσοφία (Σχήμα 3.2.2 & Σχήμα 3.2.3), δηλαδή μοιάζουν οπτικά, διαφοροποιούνται όμως ως προς τη συνάρτηση που αναπαριστούν και τα κρίσιμα σημεία. Κρίσιμα σημεία θεωρώ τα σημεία καμπής και τα γωνιακά σημεία στα οποία δεν δουλεύει ο γεωμετρικός ορισμός της εφαπτομένης.

Ξεκινώντας από την πιο απλή περίπτωση, εισάγονται τα γραφήματα στο σχήμα 3.2.2. Οι μαθητές από την πρότερη ενασχόλησή τους με σχήματα όπως το τετράγωνο, δεν δυσκολεύονται να φτάσουν στο σωστό συμπέρασμα. Το ε.ι.τ χρησιμοποιείται ως μέσο επικύρωσης των όσων ισχυρίζονται οι μαθητές.

Στη συνέχεια στην προσπάθεια να ξεδιαλύνω κάθε τυχόν εμπόδιο που προκαλεί η οπτική ενός σχήματος δίνω στους μαθητές τα γραφήματα του σχήματος 3.2.3.



(3) (4) (5)

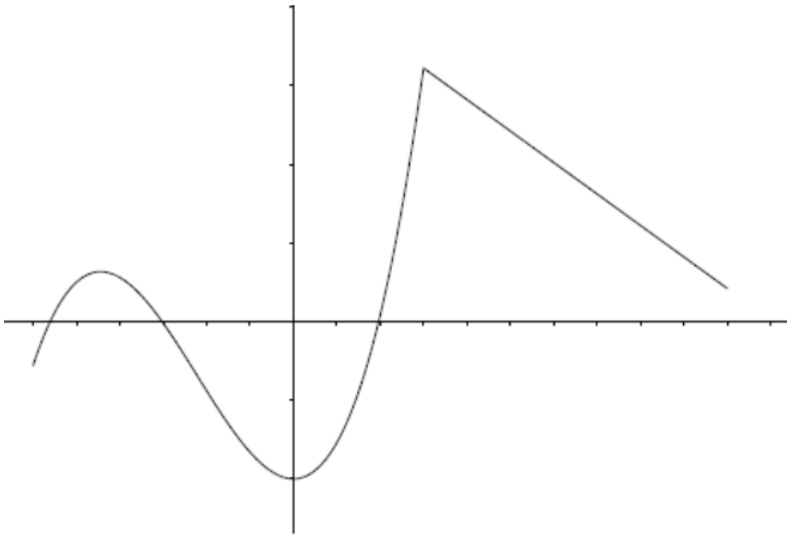
Σχήμα 3.2.3

Τα τρία αυτά γραφήματα διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει το ε.ι.τ το κρίσιμο σημείο

Στο σχήμα αυτό, το γράφημα (5) είναι μια κλασική περίπτωση μη ύπαρξης εφαπτομένης. Οι μαθητές εκτιμάται ότι δεν θα δυσκολευτούν να αιτιολογήσουν αυτή τη περίπτωση. Το γράφημα (3) είναι εύκολο να

αιτιολογηθεί με τη χρήση του ε.ι.τ και από την πρότερη ενασχόληση των μαθητών με την παραβολή.

Κάτι το καινούριο έρχεται να προσδώσει το γράφημα (4). Με αυτό προσμένω οι μαθητές να ξεδιαλύνουν και τις τελευταίες ενστάσεις που μπορεί να προκαλεί η εποπτεία στην ύπαρξη ή μη της εφαπτομένης. Η πρόσθετη αξία αυτού του σχήματος έγκειται στο ότι ενώ οπτικά μοιάζει με τα άλλα δύο παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες οι οποίες προβληματίζουν τους μαθητές. Η πρώτη είναι ότι η εφαπτομένη σε κάποιο σημείο, οπτικά τουλάχιστον, τέμνει το γράφημα της συνάρτησης. Η δεύτερη και πιο σημαντική αφορά την κλίση των δύο ισοσυγκλινουσών τεμνουσών. Οι μαθητές, από την ενασχόλησή τους με το τετράγωνο, έχουν συνδυάσει τη μη ύπαρξη εφαπτομένης με την ύπαρξη δύο ευθειών που μένουν σταθερές. Δηλαδή, των οποίων οι κλίσεις δεν μεταβάλλονται. Σε αυτό το γράφημα οι κλίσεις των δύο ευθειών μεταβάλλονται συνεχώς και απλά δεν πλησιάζουν τον ίδιο αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές κατανοούν πόσο σημαντικό είναι για την ύπαρξη της εφαπτομένης το πλησίασμα των κλίσεων προς τον ίδιο αριθμό. Πρόκειται δηλαδή για μια οριακή κατάσταση. Οι μαθητές ωστόσο δεν κατέχουν ακόμα εκείνη την γνώση που θα τους επιτρέψει να εκφράσουν τα όσα παρατηρούν να γίνονται στο ψηφιακό εργαλείο.



Σχήμα 3.2.4

Το γράφημα αυτό συνδυάζει όλες τις περιπτώσεις που έχουμε συναντήσει έως τώρα για την εφαπτομένη

Το τελευταίο γράφημα (Σχήμα 3.2.4) είναι συνδυασμός όλων των παραπάνω και αναμένεται οι μαθητές απλά να επικυρώσουν τα παραπάνω.

Σε αυτό το σημείο του φύλλου εργασίας οι μαθητές θέλουμε να είναι σε θέση να:

- Περάσουν από τα σχήματα στα γραφήματα.
- Αποκτήσουν εποπτεία για την ύπαρξη ή μη εφαπτομένης σε σημείο γραφήματος

Στη συνέχεια όπως και στα υπόλοιπα φύλλα εργασίας ακολουθεί μια συμπερασματική ερώτηση.

«Μπορείτε να σκεφτείτε τί στοιχεία χρειάζονται για να ορίσουμε την εφαπτομένη σε μια τυχαία καμπύλη; Διαφοροποιείται σε σχέση με τα όσα έχουμε πει για την εφαπτομένη του κύκλου;»

Ο σκοπός της παραπάνω ερώτησης είναι να εξεταστεί πώς έχουν αντιληφθεί οι μαθητές την εφαπτομένη ως εξίσωση μιας ευθείας με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Επιπλέον εξετάζεται κατά πόσο έχουν συνδυάσει την εφαπτομένη ως μια οριακή διαδικασία. Είναι μια ερώτηση που μπορεί να αποτελέσει τον συνδετικό κρίκο για να ακολουθήσει το επόμενο βήμα που δεν είναι άλλο από την εισαγωγή των ορίων και η σύνδεσή τους με την εφαπτομένη.

Έπειτα, για να γίνει μια διαισθητική εισαγωγή στην οριακή διαδικασία επιλέγονται παραδείγματα από την καθημερινότητα. Σε πρώτο στάδιο μιλώ στους μαθητές για καταστάσεις όπως το όριο ταχύτητας, γύρω από το οποίο συγκεντρώνονται οι περισσότερες τιμές των κινούμενων οχημάτων. Αυτή την τιμή μπορεί ένα όχημα να μη τη φτάσει ποτέ ή μπορεί και να την ξεπεράσει. Οι μαθητές όταν μιλάνε για όριο, έχουν κατά νου ένα άνω φράγμα, μια τιμή που δε μπορεί να ξεπεραστεί.

Στη συνέχεια, εισάγεται σχηματικά η έννοια του ορίου, μέσω ενός γραφήματος συνάρτησης. Στους μαθητές εξηγείται ότι υπάρχουν τιμές για την συνάρτηση (από δεξιά και από αριστερά) που πλησιάζουν και από τις δύο κατευθύνσεις το σημείο στο οποίο θέλουμε να βρούμε το όριο. Αυτές

καλούνται πλευρικά όρια και η προσοχή των μαθητών εστιάζεται στο «πλησίασμα» που γίνεται από τα δύο πλευρικά όρια στον ίδιο αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο επιχειρείται να συνδέσουν οι μαθητές τα πλευρικά όρια με το αντίστοιχο «πλησίασμα» που γίνεται από τις τέμνουσες στο ε.ι.τ.

Συνοψίζοντας, σε αυτήν την έρευνα ο κύριος στόχος είναι να ελέγξω κατά πόσο μαθητές που δεν γνωρίζουν τα αναγκαία μαθηματικά εργαλεία και που δεν έχουν διδαχθεί τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης, μπορούν διαισθητικά να φτάσουν σε αυτόν. Επίσης, εξετάζω κατά πόσο είναι εφικτό να δημιουργηθεί μέσα από την ενασχόληση με τις δραστηριότητες που έχουν σχεδιαστεί η ανάγκη εισαγωγής ενός νέου μαθηματικού εργαλείου, όπως είναι αυτό του ορίου, για τον υπολογισμό της εξίσωσης της εφαπτομένης.

3.3 Μέθοδος

Στο επίπεδο του σχεδιασμού, η έρευνα έχει κοινά στοιχεία με την έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) καθώς έχει έντονο το στοιχείο της παρέμβασης στη μαθησιακή διαδικασία με χρήση καινοτόμων εργαλείων και πολλαπλών αναπαραστάσεων. Ωστόσο, δεν πραγματοποιήθηκε σε πραγματικές σχολικές συνθήκες καθώς η κύρια ερευνητική επιδίωξη ήταν να μελετηθεί σε βάθος η εξέλιξη των στρατηγικών των μαθητών μακριά από τις δυσκολίες και το «θόρυβο» της σχολικής τάξης. Με αυτήν την έννοια επιλέχτηκε η μελέτη περίπτωσης ((case study), Yin, 2003) ως μέθοδος της έρευνας.

Επειδή κυρίαρχος στόχος της έρευνας είναι να μελετηθούν τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές σχετικά με την έννοια της εφαπτομένης και τις ιδιότητές της, επιλέγεται ως μέθοδος ανάλυσης το κρίσιμο συμβάν. Κρίσιμο συμβάν είναι μια κατάσταση που δείχνει μια σημαντική αλλαγή ή μια αλλαγή που οδηγεί σε αντιπαραβολή σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση. Ένα γνωστικό άλμα σε σχέση με την προηγούμενη κατανόηση προκαλεί ένα διαισθητικό λάθος, «ένα αξιοσημείωτο λάθος άλμα» (Powell et al, 2003).

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι ανακαλυπτική - καθοδηγούμενη ανακαλυπτική (Bruner, 1996). Η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία είναι αναγκαία για να ευνοηθούν από τα οφέλη της

χρήση εργαλείων αυτής της μορφής και όχι των κλασικών στατικών μέσων. Ο ρόλος του ερευνητή έχει ως στόχο να οδηγήσει στην συνεργατική και βιωματική μάθηση μέσα στην ομάδα. Οι μαθητές αφήνονται να προσεγγίζουν το θέμα από την δική τους οπτική γωνία. Ως εκ τούτου, η μάθηση έρχεται ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των μαθητών κάθε ομάδας. Ο ρόλος κάθε μαθητή στην ομάδα είναι μέσω της συνεργατικότητας να διατυπώσει εικασίες, να τις διερευνήσει, να τις επαληθεύσει και να επιλέξει την κατάλληλη λύση.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας δεν παρακολουθούν οι μαθητές τον ερευνητή αλλά ο ερευνητής τους μαθητές. Ο ρόλος του τελευταίου είναι να καθοδηγεί, να διορθώνει και να συμπληρώνει. Τα φύλλα εργασίας έχουν λίγες ερωτήσεις, οδηγούν τους μαθητές στην ανακάλυψη του ζητούμενου και με επαναληπτικές δραστηριότητες τους βοηθούν να φτάσουν στα σωστά συμπεράσματα.

3.4 Συμμετέχοντες και συλλογή δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα έχουν επιλεχθεί μαθητές που φέτος ολοκλήρωσαν τη Β΄ Λυκείου και έχουν επιλέξει την τεχνολογική κατεύθυνση. Η επιλογή αυτή έγινε με γνώμονα τη διδαχθείσα ύλη. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο, θεωρούνται εξοικειωμένοι με την έννοια της συνάρτησης, ενώ έχουν ήδη συναντήσει την έννοια της εφαπτομένης στο περιβάλλον των κωνικών τομών, σε σχήματα διαφορετικά του κύκλου.

Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια των θερινών μηνών όταν οι μαθητές έχουν ήδη ξεκινήσει την προετοιμασία για την επόμενη τάξη. Κατά την έναρξη της έρευνας οι μαθητές έχουν φτάσει στο κεφάλαιο των συναρτήσεων, και είναι εξοικειωμένοι με τον χειρισμό των συναρτήσεων και τη θεωρία που τις ακολουθεί. Επιπλέον, σε αυτή τη χρονική περίοδο έχουν μια σχετική ευχέρεια στο χειρισμό και νοηματοδότηση των γραφημάτων συναρτήσεων.

Για την εργασία έχουν επιλεγεί τυχαία τρία αγόρια και ένα κορίτσι-το φύλο δεν παίζει ρόλο στην επιλογή. Ως προς το επίπεδο γνώσεων ωστόσο αναζητήθηκαν μαθητές μετρίου επιπέδου στα μαθηματικά. Τους μαθητές τους χωρίστηκαν σε δύο ομάδες των δύο ατόμων. Τα δύο αγόρια αποτελούν τη μία

ομάδα και πρόκειται για δύο φίλους από την ίδια γειτονιά που όμως φοιτούσαν σε διαφορετικά σχολεία και δεν έχουν κάποιας μορφής κοινά γνωστικά ερεθίσματα. Ο ένας αντιμετώπιζε δυσκολίες στη διατύπωση των σκέψεών του, ενώ ο άλλος ήταν αρκετά καλός στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Αυτή είναι η ομάδα Α και οι μαθητές συμβολίζονται με Μ1 και Μ2. Οι άλλοι δύο μαθητές, φοιτούσαν στο ίδιο φροντιστήριο. Το αγόρι είχε πιο πλήρες επίπεδο μαθηματικών γνώσεων από το κορίτσι, το οποίο όμως αν και υστερούσε λίγο στο μαθηματικό υπόβαθρο είχε πιο διερευνητικό τρόπο σκέψης. Αυτή είναι η ομάδα Β και οι μαθητές συμβολίζονται με Μ3 και Μ4.

Για τη διεξαγωγή της έρευνας χρησιμοποίησα τον προσωπικό μου υπολογιστή. Η έρευνα δομήθηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να δουλέψουν ομαδοσυνεργατικά για τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας που τους δώσαμε καθώς και για το χειρισμό του υπολογιστή. Κατά την έρευνα η ομάδα Α απασχολήθηκε για δύο ώρες και πενήντα λεπτά ενώ η ομάδα Β για δύο ώρες και είκοσι λεπτά.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τη χρήση εργαλείων που μας δίνουν τη δυνατότητα ταυτόχρονης καταγραφής ήχου και των όσων λαμβάνουν χώρα στην οθόνη του υπολογιστή (cam capture software). Στη περίπτωσή μας έγινε χρήση του cam studio recorder. Το πλεονέκτημα με αυτά τα εργαλεία είναι ότι μας δίνουν τη δυνατότητα να έχουμε μια συσχέτιση ανάμεσα στο τί λένε οι μαθητές και τί ταυτόχρονα κάνουν στον υπολογιστή. Έτσι, αποφύγαμε τη βιντεοσκόπηση που ίσως να μην ήταν επιθυμητή από πλευράς μαθητών.

3.5 Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων βασίζεται στο μοντέλο των Powell, Francisco και Maher (2003) για το πώς αναλύουμε δεδομένα που έχουν προκύψει από βιντεοσκόπηση. Αρχικά ακούω αρκετές φορές τις συνομιλίες που έχουν καταγραφεί και κάνω πλήρη απομαγνητοφώνησή τους. Οι συνομιλίες πληκτρολογούνται σε ένα αρχείο Word για να είναι εύκολο να απομονώσω εκείνες που φανερώνουν την ύπαρξη ενός κρίσιμου συμβάντος.

Στην έρευνα αναζητώ κρίσιμα συμβάντα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Συνεπώς επικεντρώνω την προσοχή μου σε περιπτώσεις που οι μαθητές με τη χρήση του ε.ι.τ έρχονται σε προφανή σύγκρουση με την πρότερη γνώση. Στη προσπάθειά τους να διαχειριστούν τη γνωστική σύγκρουση στην οποία υπόκεινται, κάνουν διατυπώσεις σχετικά με την έννοια της εφαπτομένης και προχωρούν σε γενικεύσεις που δίνουν χρήσιμα συμπεράσματα. Οπότε έχω τη δυνατότητα να εξετάσω τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές για την εφαπτομένη και τις αναλυτικές της ιδιότητες.

Επειδή από το ηχητικό ντοκουμέντο δεν είναι εύκολο να βγουν ασφαλή συμπεράσματα, σε περιπτώσεις που εντοπίζεται ενδιαφέρον ανατρέχω στις κινήσεις που έχουν πραγματοποιήσει οι μαθητές στον υπολογιστή. Ο τρόπος που χειρίζονται τα ψηφιακά εργαλεία σε συνδυασμό με τους διαλόγους βοηθά στο να ξεδιαλύνω τις θέσεις των μαθητών και τα νοήματα που δημιουργούν.

Με βάση τα παραπάνω, με την εμπλοκή των μαθητών με το ε.ι.τ, επικεντρώνομαι σε καταστάσεις όπου οι μαθητές:

- ✓ προσπαθούν να νοηματοδοτήσουν τον τρόπο λειτουργίας του
- ✓ φανερώνουν σύγκρουση μεταξύ αναλυτικού και γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης.
- ✓ προσπαθούν να ερμηνεύσουν τη διαδικασία του «πλησιάσματος».
- ✓ σχετίζουν την εφαπτομένη με τα αναλυτικά της χαρακτηριστικά (κλίση, τοπική φύση).

Κεφάλαιο 4ο

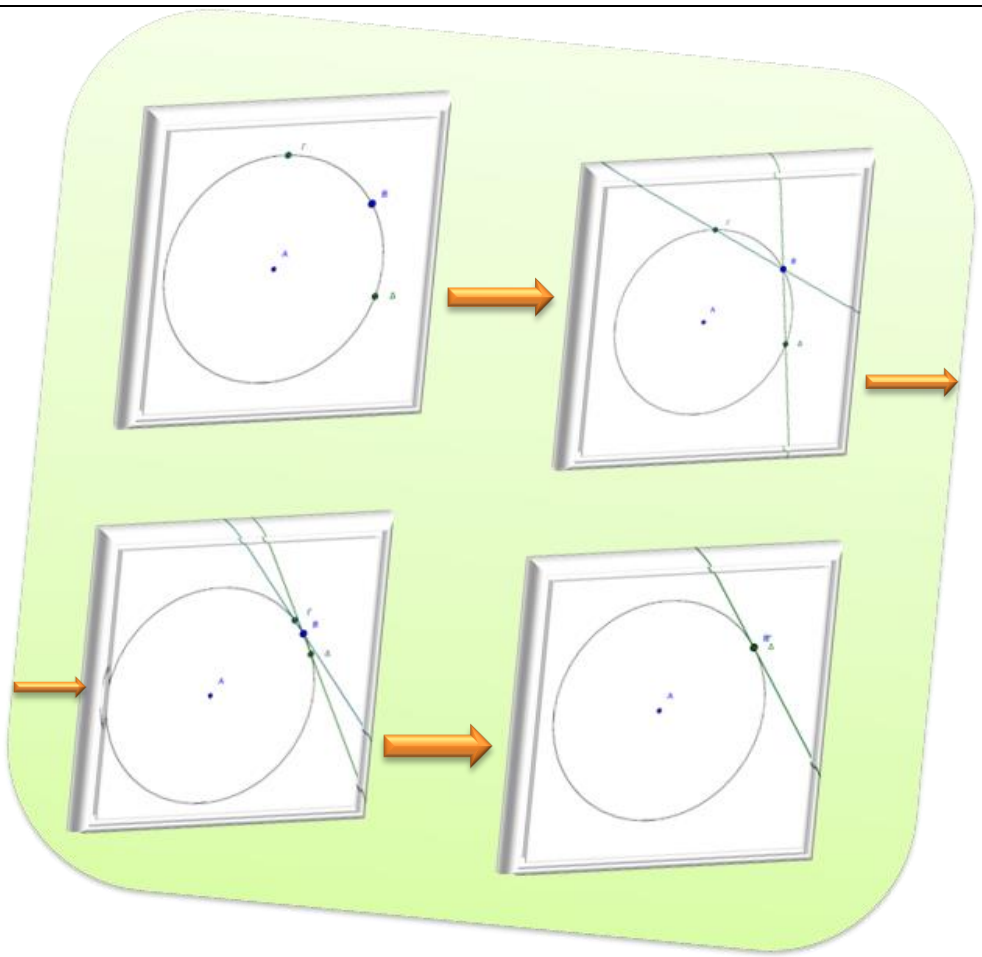
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το παρόν κεφάλαιο δομείται σε δύο ενότητες κάθε μία από τις οποίες απαντά σε ένα από τα δύο ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται κατά τον σχεδιασμό της έρευνας. Στην πρώτη ενότητα εξετάζω αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της εφαπτομένης όταν εισάγονται στα αναλυτικά της χαρακτηριστικά μέσα από τη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων. Επιπλέον, εξετάζω ποιός είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων – και ιδιαίτερα του εργαλείου των ισοσυγκλινουσών τεμνουσών (ε.ι.τ) – στις διαδικασίες νοηματοδότησης της εφαπτομένης. Στη δεύτερη ενότητα εξετάζω αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα σε σχέση με την οριακή φύση της εφαπτομένης και ποιός είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες νοηματοδότησης της οριακής φύσης της εφαπτομένης. Οι δύο αυτές ενότητες αναλύονται ξεχωριστά παρακάτω:

4.1 Αν και πώς οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της εφαπτομένης μέσω της χρήσης του ε.ι.τ

Σε αυτή την ενότητα εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να ανακατασκευάσουν την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη. Μέσα από τον πειραματισμό τους, με χρήση του ε.ι.τ, σε πρωτότυπες δραστηριότητες εξετάζω κατά πόσο είναι σε θέση να δημιουργήσουν νοήματα σχετικά με την έννοια της εφαπτομένης και ποιά είναι αυτά. Όλα αυτά μελετώνται σε συνάρτηση με τα ψηφιακά εργαλεία που έχω ετοιμάσει και κυρίως το ε.ι.τ. Για να φτάσω στα παραπάνω είναι αναγκαίο να ελεγχθεί πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη λεκτική διατύπωση του ε.ι.τ και τί νοήματα δημιουργούν σε σχέση με την εφαπτομένη κατά την εισαγωγή του. Είναι σημαντικό να εξετάσω ξεχωριστά πώς σχετίζουν οι μαθητές τη λειτουργία του ε.ι.τ με την εφαπτομένη, πριν περάσω στα υπόλοιπα ψηφιακά εργαλεία. Για τους παραπάνω λόγους η ενότητα αυτή χωρίζεται σε τρεις υποενότητες:

4.1.1 Πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον χειρισμό του ε.ι.τ



Σχήμα 4.1.1

Το σχήμα δείχνει ποιά είναι η αναμενόμενη χρήση του ε.ι.τ. Οι μαθητές καλούνται να φτάσουν στην ζητούμενη εφαπτομένη μέσα από το πλησίασμα των σημείων Γ και Δ προς το σταθερό σημείο Β.

Η αναμενόμενη λειτουργία του ε.ι.τ στην οποία είναι επιθυμητό να φτάσουν οι μαθητές φαίνεται στο σχήμα 4.1.1. Σε αυτήν την ενότητα εξετάζω τον τρόπο με τον οποίο εργάζονται οι μαθητές κατά την προσπάθειά τους να καταλάβουν πώς λειτουργεί το ε.ι.τ. Κατά την εισαγωγή του ε.ι.τ οι μαθητές δυσκολεύονται να εστιάσουν στις σχηματιζόμενες ευθείες. Επικεντρώνουν την προσοχή τους κυρίως στο πλησίασμα των σημείων και σε άλλες ιδιότητες που εμφανίζονται στο σχήμα και δεν σχετίζονται με τις τέμνουσες καθαυτές. Επίσης, εντοπίζεται δυσκολία στην κατανόηση της λέξης «εκατέρωθεν». Πιο αναλυτικά παρατηρούμε:

Α. Αδυναμία ορισμού των σημείων στο ε.ι.τ

Αρχικά, διαπιστώνεται και στις δύο ομάδες μαθητών αδυναμία στην κατανόηση της διατύπωσης του τρόπου κατασκευής του ε.ι.τ. Ως εκ τούτου, η λέξη «εκατέρωθεν» δεν φαίνεται να είναι η ενδεδειγμένη και μια διατύπωση της μορφής δεξιά – αριστερά θα ήταν πιο κατανοητή. Αυτό το συμπεραίνουμε από το γεγονός ότι καμία ομάδα δεν είναι σε θέση να αντιληφθεί τον τρόπο που λαμβάνονται τα σημεία στο ε.ι.τ. Αυτό γίνεται εμφανές, σε μεγάλο βαθμό, στην έκφραση των προσώπων των μαθητών καθώς και από κάποιες δηλώσεις τους.

Οι μαθητές ρωτώνται για το πώς λαμβάνονται τα σημεία που ζητά η πρώτη δραστηριότητα (Παράρτημα 1). Κανένας από αυτούς δεν είναι σε θέση να δώσει μία ορθή απάντηση. Οι απαντήσεις των μαθητών συνοδεύονται από μια έκφραση απορίας. Αυτό, ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι πρόκειται για μαθητές τεχνολογικής κατεύθυνσης, μετρίου επιπέδου. Οπότε, είναι πιθανό να παρουσιάζουν κάποια αδυναμία στο λεξιλόγιό τους ή απλά να αδυνατούν να νοηματοδοτήσουν μια γνωστή λέξη, σε ένα καινούργιο προς αυτούς μαθηματικό πλαίσιο. Συνεπώς η ομάδα Α λέει:

Ε: *Πριν συνεχίσουμε, την λέξη «εκατέρωθεν» πώς την καταλαβαίνετε; Πώς θα τα πάρουμε δηλαδή τα δυο αυτά σημεία;*
Μ1: *…*
Μ2: *Πιο πέρα από το Β.*
Ε: *Σίγουρα πιο πέρα από το Β, αλλά στην ίδια ή διαφορετική πλευρά ως προς το Β;*
Μ1-Μ2: *Σε διαφορετική.*

Οι μαθητές δεν είναι σε θέση από μόνοι τους να θέσουν τα σημεία στη σωστή θέση. Για το μόνο που είναι σίγουροι είναι ότι βρίσκονται σε διαφορετική θέση ως προς το Β. Βέβαια, όταν γίνω πιο συγκεκριμένος, είναι πιο άμεσοι και ακριβείς στις απαντήσεις τους. Οπότε, ίσως και να μην είναι συνηθισμένοι σε πιο ανοικτού τύπου ερωτήσεις όπου αφήνονται από μόνοι τους να συνδυάσουν τις πληροφορίες που τους δίνονται με τα μαθηματικά αντικείμενα που αυτές πρεσβεύουν. Ομοίως οι μαθητές της ομάδας Β δηλώνουν:

Ε: *Τη λέξη «εκατέρωθεν» πώς την καταλαβαίνετε;*

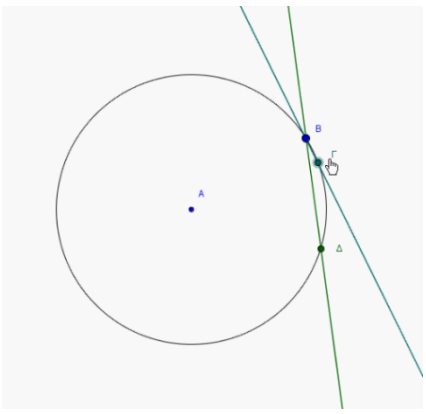
Μ3: *Εκτός;*

Μ4: *Νομίζω ότι είναι κάτι που είναι ίσο ή όχι;*

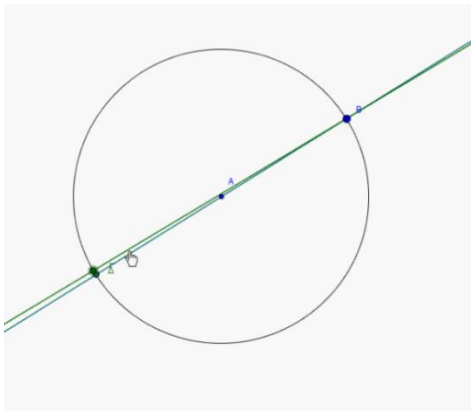
Ε: *«Εκατέρωθεν» σημαίνει ότι δεν είναι στην ίδια πλευρά ως προς το Β, το ένα είναι δεξιά και το άλλο αριστερά του. Δηλαδή ότι δεν είναι και τα δύο δεξιά ή αριστερά του Β.*

Μ4: *Εγώ νόμιζα ότι θα έχει και την ίδια απόσταση.*

Η ομάδα Β δείχνει να κατανοεί τον τρόπο με τον οποίο ορίζονται τα σημεία (Σχήμα 4.1.1). Ήταν σε θέση να διατυπώσει λεκτικά το πώς θα οριστούν τα σημεία. Παρόλα αυτά, όταν τους ζητήθηκε να εφαρμόσουν το ε.ι.τ φάνηκε ότι η λεκτική διατύπωση στην οποία είχαν φτάσει δεν είχε κανένα αντίκρισμα με αυτά που εφάρμοσαν στο σχήμα (Σχήμα 4.1.2). Εκεί τα σημεία περιφέρονται γύρω από το σταθερό σημείο Β χωρίς οι μαθητές να λαμβάνουν υπόψην τον περιορισμό του να βρίσκονται εκατέρωθεν αυτού. Οι μαθητές πειραματιζόμενοι με τα σημεία Γ και Δ, τοποθέτησαν και τα δύο στο ίδιο μέρος ως προς το Β, αγνοώντας τα όσα είχαν προηγηθεί.



(1)



(2)

Σχήμα 4.1.2

Το σχήμα δείχνει πώς προσπάθησαν οι μαθητές να πλησιάσουν το σημείο Β. Στο σχήμα (1) πήραν τα δύο σημεία στο ίδιο μέρος ως προς το Β. Στο σχήμα (2) τα απομάκρυναν από αυτό και τελικά τα ταύτισαν. Φαίνεται το διερευνητικό σύρσιμο που πραγματοποίησαν οι μαθητές.

Επίσης οι μαθητές πότε πλησίαζαν τα Γ και Δ προς το Β και πότε τα απομάκρυναν από αυτό. Όλα αυτά δείχνουν ότι οι μαθητές βρίσκονται σε μια διαδικασία κατά την οποία προσπαθούν να αντιληφθούν τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ. Δηλαδή πραγματοποιούν διερευνητικό σύρσιμο. Οι μαθητές προσπαθούν ακόμα να συνδέσουν τη λεκτική διατύπωση με την ορθή εφαρμογή του ε.ι.τ στη δραστηριότητα που τους έχουμε βάλει. Η

μεγαλύτερη δυσκολία τους είναι στο να εφαρμόσουν τους περιορισμούς που έχουμε θέσει. Έχουν την τάση να δουλεύουν χωρίς να λαμβάνουν υπόψην ολόκληρη την εκφώνηση της δραστηριότητας.

Τα παραπάνω παραδείγματα προέρχονται και από τις δύο ομάδες μαθητών. Ωστόσο δεν έχει επιτευχθεί κάποια σύνδεση με τον τρόπο με τον οποίο δουλεύει το ε.ι.τ. Για τους μαθητές ακόμα δεν είναι άμεσο ότι όταν παίρνουμε τα σημεία αυτά πρέπει να βρίσκονται κοντά στο Β και σε διαφορετικό μέρος αυτού. Άρα, αν κατά την εισαγωγή του ε.ι.τ είχα θέσει αυστηρότερους περιορισμούς ως προς την κίνηση των σημείων, θα ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές να συνδέσουν τη διατύπωση του ε.ι.τ με το πώς αυτό παριστάνεται στο λογισμικό Geogebra.

Β. Εστίαση της προσοχής σε ιδιότητες που δεν συνδέονται άμεσα με τις τέμνουσες και με το πώς αυτές προσεγγίζουν το σταθερό σημείο

Οι μαθητές ξεκινώντας να εξερευνούν το ε.ι.τ, κατά την εισαγωγή του πρώτου φύλλου εργασίας (Παράρτημα 1), φαίνεται να προσκολλώνται σε δευτερεύουσες ιδιότητες που αναδύονται από τα σχήματα με τα οποία πειραματίζονται.

Αρχικά, προσπαθώντας να πλησιάσουν το σταθερό σημείο, φαίνεται να επικεντρώνονται πολύ στο σχήμα και στις ευθείες που σχηματίζονται, εμφανίζοντας έτσι μια αδυναμία να εντοπίσουν τη σχηματιζόμενη εφαπτομένη. Αυτό πολύ πιθανό να συμβαίνει λόγω του ότι δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με τον χειρισμό της έννοιας, σε αντίθεση με όσα έχουμε λάβει υπόψη κατά το σχεδιασμό της παρούσας έρευνας. Παρόλα αυτά, δουλεύοντας μεμονωμένα με κάθε μια ευθεία από τις τέμνουσες, οι μαθητές δεν δυσκολεύονται ιδιαίτερα να φτάσουν στο συμπέρασμα. Ωστόσο δεν τους είναι εύκολο να διατυπώσουν ότι μία τέμνουσα τελικά μπορεί να γίνει εφαπτομένη του κύκλου.

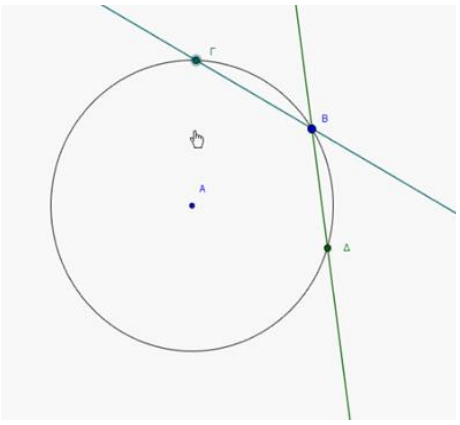
Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, όταν ζητηθεί από τους μαθητές να επικεντρωθούν στο τί γίνεται κατά το πλησίασμα των σημείων αγκιστρώνονται σε αυτά και αγνοούν το τί γίνεται με τις ευθείες που δημιουργούνται. Αυτό γίνεται φανερό σε αρκετά σημεία της έρευνας. Το φαινόμενο αυτό κάνει την

εμφάνισή του κυρίως όταν ζητηθεί από τους μαθητές να διατυπώσουν τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ. Σε αρκετές περιπτώσεις κάνουν την διατύπωση με το «πλησίασμα» των σημείων χωρίς να αναφέρονται σε σχηματισμό ή «πλησίασμα» ευθειών.

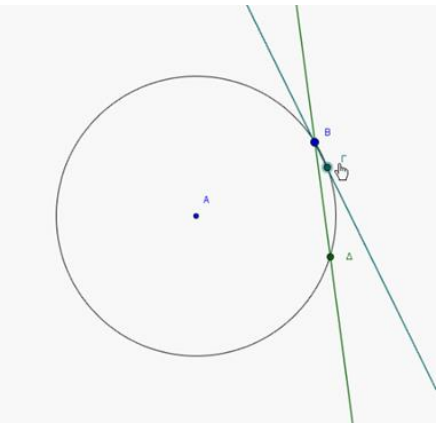
Η ομάδα Α ξεκίνησε να δουλεύει με τις ευθείες και να αναφέρεται σχετικά με την κλίση των ευθειών που δημιουργούνται:

Ε: *Ξεκινάμε με το Γ πρώτα. Άμα το πας αριστερά τί βλέπεις;*
Μ2: *Αλλάζει η κλίση.*
Ε: *Αλλάζει η κλίση αλλά τί γίνεται; Πες μου τί συμπεραίνεις;*
Μ1: *Αλλάζει και η εξίσωση της ευθείας.*

Στην ενασχόλησή τους με την ευθεία που περνάει από τα σημεία Γ και Β (Σχήμα 4.1.3), έφτασαν με σχετική ευκολία στο συμπέρασμα ότι η ευθεία θα αλλάζει συνέχεια αφού αλλάζει το σημείο που μετακινείται. Παρατηρείται όμως μια ακαθόριστη κίνηση του σημείου προς κάθε κατεύθυνση. Το σημείο Γ οι μαθητές το κινούσαν κατά μήκος όλου του κύκλου χωρίς να λαμβάνουν υπόψην ότι πρέπει να βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση ως προς το Β (δεξιά ή αριστερά αυτού). Αυτό ήταν κάτι που προήλθε από το διερευνητικό σύρσιμο που πραγματοποιούσαν οι μαθητές και από την ελευθερία των κινήσεων που τους παρείχε το ψηφιακό εργαλείο. Παρόλα αυτά, δεν έγινε στην παρούσα φάση κάποια παρέμβαση ως προς αυτήν την κατεύθυνση και οι μαθητές



(1)



(2)

Σχήμα 4.1.3

Το σχήμα δείχνει πώς τελικά οι μαθητές πλησίασαν το σημείο Β. Στο σχήμα (1) πήραν τα δύο σημεία και όρισαν τις τέμνουσες, στο (2) πλησίασαν το σημείο Β από αριστερά.

πειραματίστηκαν ελεύθερα.

Ωστόσο, όταν τέθηκε το ερώτημα «τί γίνεται όταν πλησιάσουμε το σταθερό σημείο;», η μόνη απάντηση που λάβαμε αφορούσε την ταύτιση σημείων και σε καμία περίπτωση δεν πήγε το μυαλό των μαθητών στην εφαπτομένη που είχε σχηματιστεί στον κύκλο ή στην διατύπωση κάποιας άποψης σχετική με το τί γίνεται με την ευθεία που υπάρχει στο σχήμα :

Μ2: *Αλλάζει το σημείο.*
Ε: *Ωραία, για πηγαίνετέ το πιο κοντά στο Β. Τί γίνεται όταν πλησιάζει στο Β;*
Μ2: *Πάει να ταυτιστεί με την άλλη ευθεία;*
Ε: *Άστο πάνω στο Β. Τι βλέπεις;*
Μ2: *Είναι μαζί με το Β.*
Ε: *Ναι, το σημείο. Για την ευθεία τι παρατηρείτε; Για να την πάμε πάλι στην αρχή. Μετακίνησε πάλι το σημείο.*
Μ2: *Αλλάζει κλίση.*
Μ1: *Όσο απομακρύνεται πάει να γίνει κάθετη.*

Η μεταβολή της τέμνουσας είναι δεδομένη και εμφανής στο πρόγραμμα Geogebra. Παρόλα αυτά, οι μαθητές φαίνεται να έχουν την τάση να επικεντρώνονται σε κάποια συγκεκριμένη λειτουργία του προγράμματος, αγνοώντας τις υπόλοιπες. Το τελευταίο, έκανε την εμφάνισή του και στις δύο ομάδες που εξετάζονται. Έτσι η ομάδα Β είπε σχετικά:

Ε: *Για πάμε να δούμε τί γίνεται όταν το Γ πηγαίνει στο Β.*
Μ3-Μ4: *Ταυτίζονται.*
Ε: *Ταυτίζονται τα σημεία. Η ευθεία τί γίνεται; Παρατηρούμε κάτι για την ευθεία;*

Και οι απαντήσεις της ομάδας Β επικεντρώθηκαν αρχικά σε μία άλλη από την επιθυμητή ιδιότητα του σχήματος. Στην προκειμένη περίπτωση, στο τόξο που δημιουργείται ανάμεσα στα δύο σημεία και το μήκος αυτού.

Ε: *Όταν απομακρύνεται το Γ, τί παρατηρείτε;*
Μ3: *Μεγαλώνει η μεταξύ τους απόσταση.*
Μ4: *Μεγαλώνει το τόξο.*
Ε: *Ωραία! Όταν πηγαίνει κοντά στο Β, τί παρατηρείτε;*
Μ3-Μ4: *Μικραίνει.*
Ε: *Πόσο μικραίνει;*
Μ4: *Όσο το δυνατόν περισσότερο. Μπορούν να ταυτιστούν κιόλας.*

Ο λόγος για τον οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν πλήρως τα δεδομένα που τους παρέχει το Geogebra πιθανότατα να είναι ότι είναι πρώτη φορά που ασχολούνται με κάτι ανάλογο. Γνωρίζουν την ύπαρξη των εκπαιδευτικών λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, αλλά είναι η πρώτη φορά που καλούνται να είναι αυτοί στη θέση του χρήστη. Ένα τέτοιο λογισμικό αλλάζει ριζικά τον τρόπο που προσεγγίζεται ένα θέμα. Απαιτείται από τους μαθητές να αναδείξουν από μόνοι τους τα απαραίτητα δεδομένα για την ορθή απάντηση. Επιπλέον η δυναμική που παρέχει το εργαλείο, αποσπά την προσοχή των μαθητών και ως αποτέλεσμα, δυσκολεύονται να αποκωδικοποιήσουν το ερώτημα που τους δίνεται.

Ίσως τα πράγματα να ήταν διαφορετικά αν τα ερωτήματα που είχα επιλέξει ήταν πιο εξειδικευμένα. Έτσι αν δεν άφηνα τόσο μεγάλη ελευθερία στους μαθητές και συνέδεα άμεσα την κίνηση των σημείων με την κίνηση της ευθείας που δημιουργείται, να μην είχε προκληθεί η προαναφερθείσα σύγχυση.

4.1.2 Τί νοήματα δημιουργούν οι μαθητές κατά την εισαγωγή του ε.ι.τ σε σχέση με τη σχηματιζόμενη εφαπτομένη

Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας όταν ζητήσαμε από τους μαθητές να πουν τί είναι για αυτούς η εφαπτομένη, γενικά ως έννοια, μόνο ένας κατάφερε να δώσει μια απάντηση. Οι υπόλοιποι έφτασαν στην απάντηση αφού πρώτα έγινε αναφορά στην εφαπτομένη στον κύκλο. Φαίνεται να έχουν μια συγκεκριμένη σχηματική αναπαράσταση του ορισμού και δυσκολεύονται να τον νοηματοδοτήσουν σε ένα πλαίσιο που δεν περιλαμβάνει τον κύκλο. Αυτό, βέβαια έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι έχουν εξετάσει την εφαπτομένη στις κωνικές τομές. Οπότε θα έπρεπε να νοιώθουν πιο οικείοι με την έννοια και τον χειρισμό της.

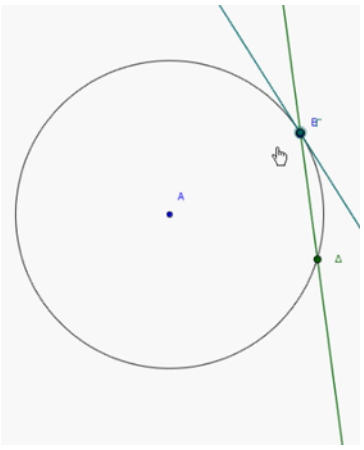
Εδώ εξετάζονται οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την εισαγωγή του ε.ι.τ, σε σχέση με τον σχηματισμό της εφαπτομένης και διερευνάται πώς συνδέονται αυτές με την πρότερη γνώση που έχουν για αυτή. Δηλαδή, εξετάζεται πώς οι εμπειρίες που έχουν οι μαθητές λειτουργούν

ως τροχοπέδη για την εισαγωγή του ε.ι.τ και κατά επέκταση ενός νέου ορισμού για την εφαπτομένη.

Με τη χρήση του ε.ι.τ αναδύονται χρήσιμα συμπεράσματα που ποικίλουν ανάλογα με τη φάση πειραματισμού που βρίσκονται οι μαθητές. Η ενότητα αυτή χωρίζεται σε πέντε υποενότητες:

Α. Πώς νοηματοδοτούν οι μαθητές τον σχηματισμό της εφαπτομένης με χρήση μίας τέμνουσας

Οι μαθητές δουλεύοντας ξεχωριστά με τις δύο ευθείες που δημιουργήθηκαν με τα σημεία που ορίσαμε εκατέρωθεν του σταθερού σημείου, έφτασαν με σχετική ευκολία στην ύπαρξη της εφαπτομένης. Λέμε σχετική ευκολία διότι η δική μας παρέμβαση επικεντρώθηκε καθαρά στο να εστιάσουμε την προσοχή τους στη σχηματιζόμενη ευθεία. Το αποτέλεσμα ήρθε ως φυσικό επακόλουθο. Έτσι, οι μαθητές όρισαν ένα σημείο αριστερά του δοσμένου σταθερού σημείου. Σχημάτισαν την ευθεία που ορίζεται από αυτό και το σταθερό σημείο. Καθώς μετακίνησαν το σημείο που επέλεξαν προς το σταθερό σημείο κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι όταν αυτό συμπέσει με το σταθερό σημείο (Σχήμα 4.1.5), τότε σχηματίζεται η εφαπτομένη όπως φαίνεται και από τα παρακάτω αποσπάσματα:



Σχήμα 4.1.5

Το σημείο Γ πηγαίνει στο Β και η αριστερή τέμνουσα ταυτίζεται με την εφαπτόμενη.

Ε: *Και αυτό, αλλά μας ενδιαφέρει κάτι άλλο … Όταν είναι μακριά από το Β σε πόσα σημεία τέμνει τον κύκλο;*
Μ1: *Σε δύο.*
Ε: *Όταν πηγαίνει κοντά στο Β τί γίνεται; Για ξαναδές.*
Μ2: *Είναι εφαπτόμενη.*
Ε: *Είναι εφαπτόμενη.*
Μ1: *Ναι.*

Ομοίως, η ομάδα Β, έφτασε στο συμπέρασμα:

Ε: *... Παρατηρούμε κάτι για την ευθεία;*
Μ3-Μ4: *Η ευθεία είναι εφαπτομένη πάνω στον κύκλο.*
Ε: *Ωραία! Οπότε όσο απομακρυνόμαστε από το Β, η ευθεία τέμνει τον κύκλο … Όσο πλησιάζουμε το Β τί γίνεται;*
Μ4: *Τον εφάπτεται.*

Αυτό που θα μπορούσαμε να πούμε με σχετική βεβαιότητα είναι ότι ίσως οι μαθητές δεν είναι ακόμα έτοιμοι να συνδυάσουν τα δεδομένα που τους παρέχει το ε.ι.τ. Επικεντρώνονται σε συγκεκριμένες καταστάσεις και παρουσιάζουν μια δυσκολία να χειριστούν όλα τα δεδομένα που τους παρέχονται. Διακρίνεται δηλαδή μια αδυναμία έκφρασης των πιο γενικών συνθηκών που επικρατούν στο σχήμα. Εκφράζουν απόψεις σχετικά με τη θέση των σημείων αλλά σε καμία περίπτωση δεν αναφέρονται στη σχηματιζόμενη εφαπτομένη. Αυτό προήλθε μόνο έπειτα από παρότρυνσή μας να εστιάσουν τη προσοχή τους στην ευθεία.

Β. Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την χρήση δύο τεμνουσών για τον σχηματισμό της εφαπτομένης

Ενώ οι μαθητές φαίνεται να είναι σε θέση πλέον να αντιμετωπίζουν μια τεμνόμενη ευθεία που τείνει να γίνει εφαπτομένη, τα πράγματα διαφοροποιούνται αισθητά όταν γίνεται προσπάθεια να νοηματοδοτήσουν τον τρόπο που σχηματίζεται η εφαπτομένη, όταν πραγματοποιούν ταυτόχρονη σύγκλιση των δύο τεμνουσών. Εδώ κάνουν την εμφάνισή τους, απόψεις των μαθητών που δείχνουν πόσο ισχυρή είναι για αυτούς η εικόνα της γεωμετρικής εφαπτομένης.

Όταν αυτό το «πλησίασμα» προς το σταθερό σημείο έγινε ταυτόχρονα και από τις δύο πλευρές, τότε οι μαθητές επικεντρώθηκαν μόνο στο γεγονός ότι, όταν αυτά συμπέσουν, τότε σχηματίζεται μία ευθεία που ακουμπά στον κύκλο. Έτσι, δήλωσαν τα ακόλουθα:

Ε: *Όταν τα πάμε όλα στο Β τί γίνεται;*
Μ: *Όλα μια ευθεία.*

Δεν τους είναι εύκολο να πάνε στην πιο γενική εικόνα που είναι αυτή της εφαπτομένης. Δεν μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν την εικόνα της εφαπτομένης καθώς όταν ρωτήθηκαν, κατευθείαν απάντησαν πως είναι η εφαπτομένη:

Ε: *Ποιά είναι αυτή η ευθεία;*
Μ2: *Η εφαπτομένη.*

Ωστόσο, δυσκολεύονται να επικεντρωθούν στον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ και αγκιστρώνονται στο γνωστό προς αυτούς σχήμα και τις ιδιότητες που απορρέουν για την υπό εξέταση έννοια της εφαπτομένης, σε σχέση με αυτό. Επιπρόσθετα, οι μαθητές εφάρμοσαν το ε.ι.τ χωρίς να λαμβάνουν υπόψην τους τις οδηγίες του φύλλου εργασίας. Είναι σαν να αποσπάστηκε η προσοχή τους από το ε.ι.τ και το υπολογιστικό περιβάλλον. Έτσι το φύλλο εργασίας περνάει σε δεύτερη μοίρα. Σημαντικό ρόλο παίζει το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι να κάνουν μαθηματικά σε υπολογιστικό περιβάλλον. Έτσι, έχουμε το ακόλουθο απόσπασμα όπου οι μαθητές πειραματίστηκαν με τα σημεία, χωρίς να λαμβάνουν υπόψην τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε το ε.ι.τ. Στη προσπάθειά τους να ελέγξουν αν οι σχηματιζόμενες ευθείες ταυτίζονται, αγνόησαν ότι το σημείο Β το ορίσαμε σταθερό και τα υπόλοιπα δύο, Δ και Γ, εκατέρωθεν αυτού. Επικέντρωσαν την προσοχή τους στην ταύτιση των Δ και Γ και μόνο αυτών (Σχήμα 4.1.6). Οι μαθητές μπόρεσαν να φτάσουν στο αποτέλεσμα μόνο έπειτα από δική μας παρέμβαση.

Μ3: *Γίνεται.*

Μ3: *Όταν το Δ πάει πάνω στο Γ.*

Μ4: *…ή στο Β …όχι στο Β… Ναι!*

Ε: *Όταν το Δ πάει στο Γ τί γίνεται; Τι σημαίνει αυτό;*

Μ3: *Διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.*

Ε: *Μόνο σε αυτή την περίπτωση μπορούν να ταυτιστούν;*

Μ3-Μ4: *Όχι.*

Μ4: *Γενικότερα, όποτε ταυτίζονται τα σημεία Γ και Δ σαν σημεία;*

Ε: *Αυτό είπαμε. Αν ταυτιστούν το Γ και το Δ ως σημεία, έχουμε μία ευθεία γιατί το ένα σημείο ήταν το Β και τα άλλα το Γ και το Δ.*

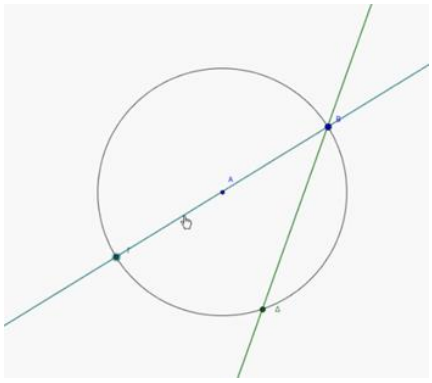
Μ4: *Ή αν είναι σε αντιδιαμετρικά σημεία;*

Ε: *Άμα δουλέψουμε σε διαφορετικές κατευθύνσεις, στην αρχή είπαμε να πλησιάσουμε το Β. Αν πλησιάσουμε το Β, οι δύο αυτές ευθείες τί μπορούν να γίνουν;*

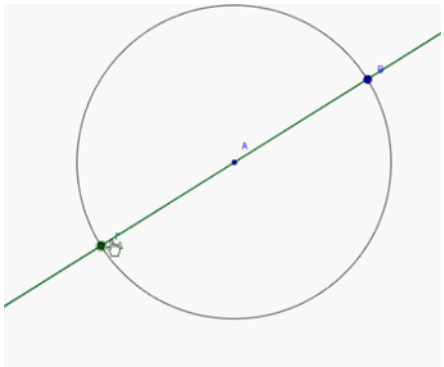
Μ3-Μ4: *Είναι κάθετες.*

Ε: *Ωραία. Θέλουμε όμως και το σημείο Γ να πάει στο Β. Τί γίνεται σε αυτήν την περίπτωση;*

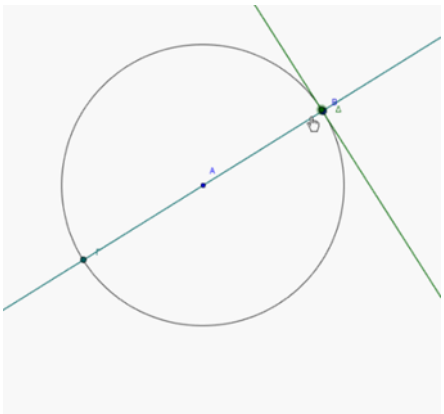
Μ3: *Είναι και εφαπτόμενες και η μία πάνω στην άλλη.*



(1)



(2)



(3)

Σχήμα 4.1.6

Φαίνονται οι θέσεις στις οποίες εστίασαν οι μαθητές κατά τον πειραματισμό με το ε.ι.τ. Στο σχήμα (1) επικεντρώθηκαν στη διάμετρο πειραματιζόμενοι με το σημείο Γ. Στη συνέχεια ταύτισαν το σημείο Γ και το Δ με αποτέλεσμα το σχήμα (2). Εστίασαν σε μια γνωστή έννοια, εκείνη της διαμέτρου του κύκλου. Στο σχήμα (3) βλέπουμε ότι αναδύεται η ιδιότητα της καθετότητας της εφαπτομένης με τη διάμετρο του κύκλου.

Στο σχήμα 4.1.6 φαίνονται τα σημεία και οι θέσεις των ευθειών στις οποίες εστίασαν οι μαθητές κατά τον παραπάνω διάλογο. Η εικόνα (2) όπου οι δύο ευθείες είναι κάθετες κάνει την εμφάνισή της και στις δύο ομάδες μαθητών και πολύ πιθανό να οφείλεται στη πρότερη γνώση που έχουν, ότι δηλαδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.

Η ομάδα Β δυσκολεύτηκε να καταλήξει στο σωστό συμπέρασμα. Εστίασε πιο πολύ σε δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος, όπως είναι τα σχηματιζόμενα τόξα. Αυτό ήταν κάτι αναμενόμενο λόγω της ελευθερίας των κινήσεων που τους παρείχε το πρόγραμμα. Ένας άλλος παράγοντας που, ίσως ,οδήγησε σε αυτό, θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι στο εισαγωγικό κομμάτι η άλλη ομάδα είχε ασχοληθεί με την εφαπτομένη του κύκλου και τις

ιδιότητές της. Ως εκ τούτου είχε πιο πρόσφατη την εικόνα της εφαπτομένης, και εστίασε πιο άμεσα σε αυτήν.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι δεν είναι μόνο η δυναμική του εργαλείου που δυσκολεύει τους μαθητές αλλά και ο νέος τρόπος που το ε.ι.τ εισάγει τη διερεύνηση ενός θέματος. Οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με διαφορετικό τρόπο από αυτόν με τον οποίο είναι εξοικειωμένοι. Είναι συνηθισμένοι να αναζητούν απαντήσεις σε προβλήματα, μέσα σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο οπότε και εστιάζουν γύρω από αυτό. Εδώ, τους ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν την πρότερη γνώση που κατέχουν για να φτάσουν σε κάποιο συμπέρασμα. Παρά, το γεγονός, ότι η έννοια της εφαπτομένης είναι γνωστή στους μαθητές, φαίνεται ότι τους είναι δύσκολο να την αναγνωρίσουν αν δεν την εντάξουμε σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο.

Γ. Διαχωρισμός εφαπτομένης από την ευθεία που σχηματίζουν οι δύο τέμνουσες όταν ταυτίζονται

Παρατηρείται μια σύγχυση όταν δίνεται στους μαθητές να εργαστούν ταυτόχρονα με τις δύο τέμνουσες. Παρά το γεγονός ότι ξέρουν ότι η εργασία αφορά την εφαπτομένη, τους είναι δύσκολο να συνδυάσουν το ε.ι.τ με αυτή. Οι πρόσθετες ευθείες με τις οποίες έχουμε εφοδιάσει τον κύκλο, φαίνεται να έρχονται σε έντονη αντίθεση με την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη σε αυτόν. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του μαθητή Μ3 όταν προσπάθησε να πλησιάσει τις τέμνουσες με αποτέλεσμα να γίνουν μία:

Μ3: *Είναι και εφαπτόμενες και η μία πάνω στην άλλη.*

Όπως φαίνεται από την δήλωση του μαθητή του οι δύο ευθείες έχουν ταυτόχρονα δύο ιδιότητες:

- ✓ είναι εφαπτόμενες
- ✓ ταυτίζονται

Φαίνεται σαν να είναι δύο εφαπτόμενες και όχι η ίδια. Επίσης διαχωρίζει εφαπτόμενες από την ευθεία. Μπορώ να υποθέσω ότι υπάρχει ένας ασαφής διαχωρισμός μεταξύ ευθείας και εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται τις ιδιότητες που έχουν

οι ευθείες που σχηματίζονται αλλά δυσκολεύονται να τα συμπεριλάβουν όλες μαζί σε μια λέξη, την εφαπτομένη.

Τα παραπάνω κάνουν την εμφάνισή τους και στην προσπάθειά να εξετάσω κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ ως μια δυναμική διεργασία. Αυτό είναι έκδηλο στο παρακάτω απόσπασμα:

Ε: *Μπορούμε να πούμε με πιο απλά λόγια αυτήν τη διαδικασία;….*
Μ3: *Τη σχηματίζουν, τη δημιουργούν.*
Ε: *Έχουμε ήδη πει ότι την «πλησιάζουν». Το «πλησίασμα» πώς θα μπορούσαμε να το πούμε με άλλα λόγια; Στην ουσία οι δύο ευθείες προσεγγίζουν σιγά σιγά την εφαπτομένη.*
Μ4: *Δηλαδή δεν είναι η εφαπτομένη;*

Όπως φαίνεται οι μαθητές αυτής της ομάδας δυσκολεύονται να δουν το ε.ι.τ ως μια συνεχόμενα μεταβαλλόμενη διαδικασία και να συνδέσουν την ύπαρξη της εφαπτομένης με το συνεχόμενο «πλησίασμα». Για αυτούς η λέξη προσέγγιση φαίνεται να έχει την έννοια πλησιάζω αλλά δε φτάνω ποτέ. Για το λόγο αυτό εκφράζουν την αμφιβολία τους για το αν πλησιάζοντας συνεχώς τις στο σημείο επαφής οι δύο τέμνουσες τελικά θα γίνουν εφαπτομένη.

Δ. Αδυναμία συσχετισμού ε.ι.τ με την εύρεση της εφαπτομένης

Οι μαθητές εφοδιασμένοι από τη γνώση των σχολικών βιβλίων, δυσκολεύονται να συνδυάσουν το ε.ι.τ με την εύρεση εφαπτομένης. Έχουν έντονη γεωμετρική αντίληψη για αυτήν και αυτό ήταν φανερό κατά την προσπάθεια εξέτασης του πώς έχουν συνδυάσει στο μυαλό τους το ε.ι.τ με τη σχηματιζόμενη εφαπτομένη. Μη λαμβάνοντας υπόψην το ε.ι.τ, ένας μαθητής είπε:

Ε: *Οπότε, ένας ορισμός για την εφαπτομένη ποιός θα μπορούσε να είναι; Πότε έχουμε εφαπτομένη σε ένα σημείο, με όσα έχουμε πει έως τώρα;*

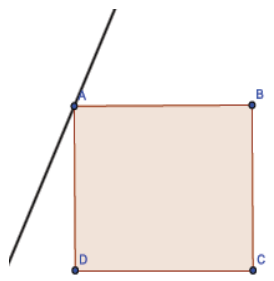
Μ4: *Έχουμε εφαπτομένη πάνω σε ένα κύκλο όταν η ευθεία περνάει από ένα κοινό σημείο του κύκλου εξωτερικά αυτού.*

Ο μοναδικός μαθητής που προσπάθησε να συσχετίσει τα όσα κάναμε μέχρι τώρα με έναν ορισμό για την εφαπτομένη μας απάντησε:

Ε: *Όπως είδαμε και στην αρχή η κάθε μία χωριστά μπορεί να προσεγγίσει την εφαπτομένη. Με βάση αυτά που είπαμε πώς θα μπορούσαμε να βρούμε την εφαπτομένη σε ένα σημείο;*
Μ2 : *Άμα πάρουμε ένα σημείο και φέρουμε μια ευθεία, που περνάει από το σημείο και δεν έχει κανένα άλλο κοινό σημείο με τον κύκλο. Δηλαδή αντί να πάρουμε δύο σημεία, παίρνουμε ένα σημείο για την ευθεία.*

Ο μαθητής κάνει μια προσπάθεια να συνδυάσει το ει.τ. Ωστόσο, το προσαρμόζει στην εικόνα που έχει για την εφαπτομένη στον κύκλο. Φαίνεται σαν η εισαγωγή του ε.ι.τ να μην δημιουργεί καμία αίσθηση στον μαθητή. Αυτό οφείλεται και στο γεγονός ότι στην περίπτωση του κύκλου, μία μόνο τέμνουσα και δύο σημεία είναι αρκετά για να βρούμε την εφαπτομένη. Οπότε, ο μαθητής κατανοεί εν μέρει το ε.ι.τ, απλά κάνει μια αφαιρετική σκέψη και το προσαρμόζει στην πρότερη γνώση που έχει. Για να μπορέσω να πείσω για την αναγκαιότητα ύπαρξης δύο τεμνουσών, είναι επιτακτική η ανάγκη εφαρμογής του ε.ι.τ σε ένα σχήμα που δεν υφίσταται η εφαπτομένη. Έτσι δώσαμε στους μαθητές να δουλέψουν το ε.ι.τ στο τετράγωνο .

Σε αυτή τους την προσπάθεια και ενώ έχει καταστεί σαφές ότι το ε.ι.τ μας παρέχει έναν τρόπο εύρεσης της εφαπτομένης σε διάφορα σχήματα, εφαρμόζουν το ε.ι.τ το οποίο φαίνεται να μην δουλεύει. Από τους τέσσερις μαθητές μόνο ένας βασίστηκε στο ε.ι.τ και απάντησε ότι δεν έχουμε εφαπτομένη. Για τους υπόλοιπους επικράτησε η πρότερη γνώση περί γεωμετρικής εφαπτομένης. Έτσι, κατά την άποψή τους μπορούν να φέρουν μία ευθεία από την κορυφή του σχήματος, η οποία ακουμπά μόνο σε ένα σημείο (Σχήμα 4.1.7). Βλέπουμε έτσι πόσο εξαρτώνται οι διαισθήσεις των μαθητών από τις σχηματικές αναπαραστάσεις με τις οποίες έχουν έρθει σε επαφή. Η τριβή τους με σχήματα όπου ένα κοινό σημείο μας δίνει εφαπτομένη έχει γενικευτεί ως ένας ορισμός για την εφαπτομένη. Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται η ταλάντωση των μαθητών



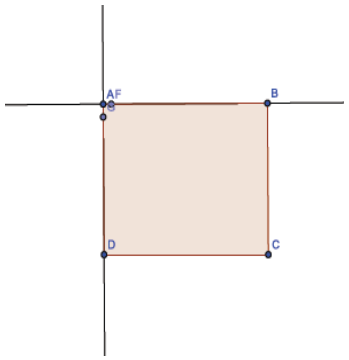
Σχήμα 4.1.7

Φαίνεται η εφαπτομένη στο τετράγωνο που είναι σύμφωνη με την εικόνα που έχουν οι μαθητές για την εφαπτομένη στον κύκλο.

ανάμεσα στην εγκυρότητα του ε.ι.τ και της εικόνας που έχουν για την εφαπτομένη:

Ε: *Εσείς τι πιστεύετε, έχει το τετράγωνο εφαπτομένη ή όχι;*
Μ3*: Όχι.*
Ε: *Όχι. Γιατί δεν έχει;*
Μ4: *Από την γωνία, έχει.*
Μ3: *Έχει εφαπτομένη αλλά δεν είναι όπως στον κύκλο.*
Μ4: *Στη γωνία δε θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει εφαπτομένη;*
Ε: *Μιλάμε γενικά ως σχήμα αν μπορεί να έχει εφαπτομένη. Όχι αν είναι όπως ο κύκλος.*
Μ3: *Έχει εφαπτομένη.*
Ε: *Ας ανοίξουμε ένα αρχείο να δούμε αν έχει ή όχι εφαπτομένη.*
…(εφαρμογή ε.ι.τ)

Οπότε με το τετράγωνο οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν το ε.ι.τ και μπορούν να καταλάβουν, σε κάποιο βαθμό, ότι όταν οι δύο τέμνουσες γίνουν μία ευθεία, τότε έχουμε εφαπτομένη, ενώ όταν δεν μπορούν να ταυτιστούν, τότε δεν έχουμε εφαπτομένη, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.8. Είναι δηλαδή σημαντικό να αντιληφθούν ότι το ε.ι.τ είναι πιο χρήσιμο στις περιπτώσεις που δεν έχουμε εφαπτομένη.



Σχήμα 4.1.8
Φαίνεται η μη ύπαρξη εφαπτομένης στο τετράγωνο έπειτα από την εφαρμογή του ε.ι.τ.

Ε: *Άρα, υπάρχει ή δεν υπάρχει η εφαπτομένη;*
Μ3-Μ4: *Δεν υπάρχει.*
Μ4: *Κανονικά υπάρχει;*

Αυτή η ταλάντωση των μαθητών μου δίνει τη δυνατότητα να εισάγω ρητά το πότε υπάρχει και πότε δεν υπάρχει εφαπτομένη. Δηλαδή,

Ε: *Άρα, υπάρχει ή δεν υπάρχει η εφαπτομένη;*
Μ3-Μ4: *Δεν υπάρχει.*
Μ4: *Κανονικά υπάρχει;*
Ε: *Όχι. Καταλάβαμε πώς δουλεύει το ε.ι.τ; Σε σημεία που θέλουμε να βρούμε την εφαπτομένη, πρέπει οι δύο ευθείες να προσεγγίζουν και στο τέλος να γίνονται μία. Αυτή η ευθεία που προκύπτει είναι η εφαπτομένη μας. Έτσι δουλεύει το εργαλείο μας.*

Οι μαθητές δυσκολεύονται να δεχθούν την εγκυρότητα του ε.ι.τ. Για αυτούς εφαπτομένη γενικά είναι μια ευθεία που ακουμπά ένα σχήμα σε ένα

σημείο. Αυτή η σχηματική αναπαράσταση αποτελεί σημαντικό εμπόδιο το οποίο φαίνεται να κάμπτεται ύστερα από την ενασχόλησή τους με το τετράγωνο. Οι μαθητές πλέον είναι σε θέση να διατυπώσουν το ε.ι.τ όμως δεν φαίνεται να είναι σε θέση να το νοηματοδοτήσουν και να κάνουν χρήση αυτού σε πιο γενικά πλαίσια απαλλαγμένα από τη γεωμετρική εποπτεία.

Με την εφαρμογή του ε.ι.τ σε ένα σχήμα πέρα των όσων έχουν συνηθίσει οι μαθητές έως τώρα, γίνεται σαφές ότι η εφαπτομένη εφαρμόζεται και σε άλλα σχήματα. Επιπλέον, το ε.ι.τ αποκτά εγκυρότητα καθώς έως τώρα δεν ήταν τίποτα περισσότερο από ένα κατασκεύασμα χωρίς νόημα. Προς, όφελος της έρευνας λειτούργησε ότι οι μαθητές μπορεί να έχουν μια εικόνα για την εφαπτομένη αλλά τους διακατέχει και μια αβεβαιότητα γύρω από αυτή. Στηρίζονται πολύ στις αισθήσεις τους για να διατυπώσουν τις απόψεις τους σχετικά με την εφαπτομένη. Η χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος βοηθά στο να ξεδιαλύνουν τις παρανοήσεις που έχουν δημιουργήσει για την έννοια.

Ε. Σημεία μη ύπαρξης εφαπτομένης

Στους μαθητές έχει δημιουργηθεί η πεποίθηση ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη σε περιπτώσεις που ένα σχήμα έχει γωνίες. Αυτή είναι μια άποψη που έχουν εκφράσει οι μαθητές και αυτό ίσως να οφείλεται και στην ενασχόλησή τους με το τετράγωνο. Οι μαθητές σε αυτές τις περιπτώσεις απαντούν διαισθητικά και δεν βασίζονται στον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ. Έτσι, όταν ασχολούνται με γραφήματα (Σχήμα 4.1.9) οι απαντήσεις των μαθητών στηρίζονται στη διαίσθηση τους και όχι στο ε.ι.τ.

Ε: *Το πρώτο λέτε δεν έχει εφαπτομένη. Για ποιό λόγο δεν έχει εφαπτομένη;*

Μ3: *Επειδή έχει γωνία;*

Ε: *Παρόλα αυτά είδαμε ότι υπάρχουν γωνίες στις οποίες υπάρχει η εφαπτομένη.*

Μ4: *Ισχύει επειδή είναι σχήμα με ευθείες;*

Ε: *Ωραία, αν τα συνδυάσουμε τί γίνεται; Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το εργαλείο με σταθερό σημείο αυτό της γωνίας.*

Μ4: *Αυτές θα τέμνονται πάντα μεταξύ τους.*

Μ4: *Δεν θα έχουμε στη γενίκευση 5. (Παράρτημα 4)*

Μ3: *Ναι.*

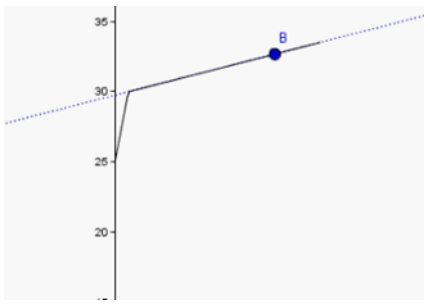
Ε: *Για ποιό λόγο;*

Μ4: *Γιατί είναι σχήμα με ευθείες, άρα,*

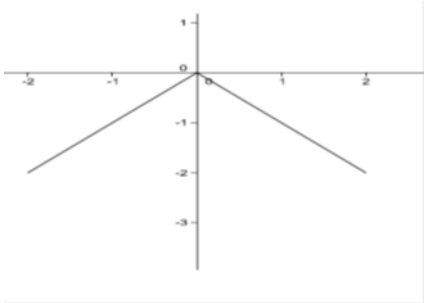
Μ3: *Η εφαπτομένη θα είναι πάνω στην ευθεία οπότε…*

Μ4: *…δεν θα υπάρχει η κλίση.*

Σημαντικό είναι να τους δώσω όλα εκείνα τα εφόδια που θα τους είναι απαραίτητα ώστε να μπορέσουν να συνδυάσουν το ε.ι.τ με τις περιπτώσεις μη ύπαρξης εφαπτομένης



(1)



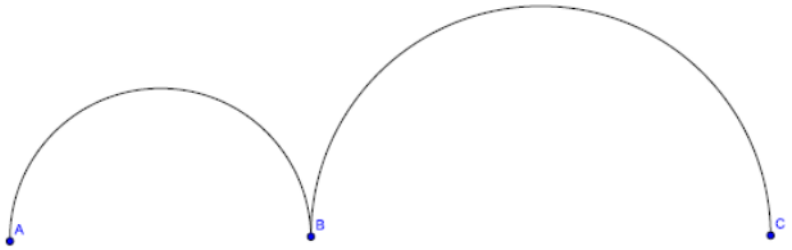
(2)

Σχήμα 4.1.9

Στα σχήματα (1) και (2) φαίνονται οι δύο δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές και αφορούσαν τα γωνιακά σημεία.

4.1.3 Νοηματοδότηση της έννοιας της εφαπτομένης

Το κυρίαρχο σχήμα στην προσπάθεια νοηματοδότησης της εφαπτομένης είναι αυτό που η μία ομάδα μαθητών ονόμασε «σπηλιές». Πρόκειται για δύο ημικύκλια (Σχήμα 4.1.10) των οποίων τα σημεία Α, Β, C βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ορίζει η διάκεντρός τους και εφάπτονται



Σχήμα 4.1.10

Το σχήμα αυτό αποτελεί ένα νέο εργαλείο στη προσπάθεια ανακατασκευής της εικόνας της εφαπτομένης. Αποτελείται από ημικύκλια οπότε είναι πολύ κοντά στην εικόνα του κύκλου ενώ με κατάλληλη εφαρμογή ρου ε.ι.τ μπορεί να προκύψουν όλα τα αναλυτικά χαρακτηριστικά του ορισμού της εφαπτομένης.

εξωτερικά στο σημείο Β.

Έτσι, οι μαθητές καλούνται να ανακατασκευάσουν ριζικά τη γνώση τους για την εφαπτομένη και να τη μελετήσουν σε διαφορετικά σχήματα. Με την ενασχόλησή τους με αυτά εστιάζουν στην τοπική φύση της έννοιας και καταρρίπτουν την εδραιωμένη εικόνα που έχουν περί μη τομής του σχήματος, μη ύπαρξης περισσοτέρων του ενός σημείου επαφής και συνδυασμούς αυτών. Στα πλαίσια αυτά διαμορφώνονται υποενότητες ανάλογα με το ποιό χαρακτηριστικό της εφαπτομένης εξετάζεται.

Α. Η εφαπτομένη είναι έννοια που εξαρτάται από το σημείο που εφαρμόζεται (τοπική έννοια)

Οι μαθητές έχουν μια εικόνα για την εφαπτομένη στον κύκλο. Είναι σε θέση να πουν ότι σε ένα τυχαίο σημείο του κύκλου διέρχεται εφαπτομένη, ωστόσο το σημείο αυτό είναι πιο πολύ συνδεδεμένο με τον κύκλο παρά με την εφαπτομένη αυτή καθεαυτή. Οι απόψεις για τον ορισμό της εφαπτομένης περιορίζονται σε αυτόν της γεωμετρικής εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα, για τους μαθητές:

Ε: *Εσύ Μ2; Τί πιστεύεις ότι είναι εφαπτομένη;*
Μ2: *Έχει ένα κοινό σημείο.*
Ε: *Κάτι άλλο; Ένα κοινό σημείο έχει και η γραμμή που μόλις σχεδιάσαμε.*
Μ2: *Αυτή χωρίζει το σχήμα, ενώ η εφαπτομένη όχι.*
Ε: *Δηλαδή αφήνει το σχήμα στο ίδιο μέρος.*

Ε: *Οπότε, ένας ορισμός για την εφαπτομένη ποιός θα μπορούσε να είναι; Πότε έχουμε εφαπτομένη σε ένα σημείο, με όσα έχουμε πει έως τώρα;*
Μ4: *Έχουμε εφαπτομένη πάνω σε ένα κύκλο όταν η ευθεία περνάει από ένα κοινό σημείο του κύκλου εξωτερικά αυτού.*

Δεν είναι να σε θέση να αναδείξουν την εξάρτηση της εφαπτομένη από το σημείο που εφαρμόζεται. Δεν μπορούν να ταυτίσουν τις δύο ευθείες σε μία. Για αυτούς εξακολουθούν να είναι ακόμα δύο ευθείες που απλά έχουν κάποιες φαινομενικά ασυσχέτιστες ιδιότητες. Δεν είναι ακόμα σε θέση να εκφράσουν την ολική ταύτιση των ευθειών και να την συνδέσουν με την εφαπτομένη στο σημείο που εφαρμόζεται το ε.ι.τ. Ακολουθούν με καθαρά

φορμαλιστικό τρόπο τα βήματα κατασκευής του ε.ι.τ και πολύ εύκολα καταλήγουν στο επιθυμητό συμπέρασμα. Προς αυτή την κατεύθυνση τους βοήθησε η επιλογή του ημικυκλίου. Οι όποιες ενστάσεις θα μπορούσαν να εμφανιστούν από την πλευρά των μαθητών έχουν ήδη καμφθεί από την πρότερη ενασχόλησή τους με τον κύκλο. Οι μαθητές εισάγουν το ε.ι.τ σε ένα νέο σχήμα το οποίο είναι πολύ κοντά στη διαίσθησή τους. Έτσι, σε πλήρη αρμονία έρχεται το παρακάτω απόσπασμα από τη δεύτερη ομάδα.

Ε: *Το ημικύκλιο τί είναι;*

Μ4: *Ο μισός κύκλος. Αν ισχύει ό,τι στον κύκλο, το έχουμε κάνει, αν ισχύει κάτι διαφορετικό, τότε δεν το έχουμε κάνει.*

Ε: *Στο ημικύκλιο αφού είναι ο μισός κύκλος γιατί να ισχύει κάτι διαφορετικό από τον κύκλο;*

Μ3: *Προφανώς ισχύουν τα ίδια πράγματα.*

Μ4: *Προφανώς επειδή δεν είναι ολόκληρος.*

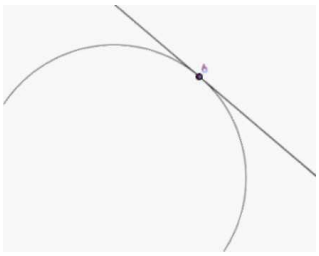
Μ3: *Και επειδή;*

Μ4: *Εκεί δεν θα μπορούν ίσως στα σημεία να γίνονται κάθετες οι ευθείες. Όπως έγινε στον ολόκληρο κύκλο.*

Ε: *Ναι, αλλά αυτό στο να ορίσουμε την εφαπτομένη το χρειαστήκαμε κάπου;*

Μ4: *Όχι, αλλά είναι μια διαφορά.*

Όπως φαίνεται οι μαθητές θεωρούν σχεδόν αυτονόητο ότι αφού το νέο σχήμα προήλθε από έναν κύκλο (Σχήμα 4.1.11), τότε είναι αναμενόμενο να ισχύουν σχεδόν τα ίδια πράγματα. Ακόμα, μπερδεύονται από ιδιότητες που προήλθαν κατά τον πειραματισμό με το ε.ι.τ, αλλά δείξαμε ότι δεν έχουν σχέση με την εύρεση της εφαπτομένης. Συνεχίζοντας προς αυτήν την κατεύθυνση, εμφανίζονται στο προσκήνιο αρκετές από τις δυσκολίες που συναντώνται κατά την εισαγωγή του αναλυτικού ορισμού της εφαπτομένης.



Σχήμα 4.1.11

Βρίσκουμε την εφαπτομένη σε έναν κύκλο και ύστερα «κόβουμε» τον μισό κύκλο.

Η πρότερη γνώση των μαθητών έρχεται σε αντίθεση με τα οπτικά ερεθίσματα που λαμβάνουν από την οθόνη και την εγκυρότητα της νέας γνώσης. Για αυτούς δεν παίζει ρόλο το σημείο επαφής αλλά το σχήμα. Δηλαδή, αν μπορώ να βρω ένα σημείο του σχήματος όπου η εφαπτομένη το ακουμπά και δεν το τέμνει πουθενά αλλού, όπως συνέβη με το παράδειγμα

του τετραγώνου. Βασίζονται στην ολική ιδιότητα της εφαπτομένης και δεν φαίνεται να εστιάζουν στην τοπική φύση της έννοιας.

Όταν ασχολούνται με σχήματα που ξεφεύγουν από την εποπτεία τους, τα εξετάζουν τμηματικά και επικεντρώνονται στα επιμέρους σχήματα που εμφανίζονται στην οθόνη τους. Έτσι, δεν χρειάζεται να απαγκιστρωθούν από τα ολικά χαρακτηριστικά που έχουν προσδώσει στην εφαπτομένη. Αυτό φαίνεται σε κάποιες συμπερασματικές εκφράσεις των μαθητών:

Μ2: *Έχουμε κάνει ότι δύο κύκλοι μπορούν να έχουν κοινή εφαπτομένη.*

και

Μ3: *Άρα, τα ημικύκλια εφάπτονται εξωτερικά.*
….
Ε: *Πάμε να δούμε σε αυτό το σημείο τί γίνεται. Τί παρατηρούμε εδώ;*
Μ4: *Ότι εφάπτεται στο ένα ημικύκλιο και τέμνει το άλλο.*

Οι μαθητές αποκόπτουν το σχήμα που τους δίνουμε στα επιμέρους σχήματα που το συνθέτουν. Έτσι, τους είναι εύκολο να δώσουν την απάντηση βασιζόμενοι στο σχήμα και στη πρότερη γνώση που έχουν. Επιπλέον δεν είναι σε θέση να εστιάσουν στην τοπική φύση της εφαπτομένης. Ο σχεδιασμός του ε.ι.τ είναι τέτοιος που να βοηθά τους μαθητές να εστιάσουν σε αυτήν. Ως φυσικό επακόλουθο της ενασχόλησης των μαθητών με το ε.ι.τ οδηγούνται στην τοπική φύση της εφαπτομένης.

Ε: *Εμάς τί μας ενδιαφέρει; Τί γίνεται στο σημείο που…,*
Μ2: *…εφάπτεται.*
Ε: *Στο σημείο που εξετάζουμε. Στο υπόλοιπο σχήμα, μας ενδιαφέρει τι γίνεται;*
Μ2-Μ1: *Όχι.*
….
Ε: *Μας πειράζει όμως, εμείς εξετάζουμε τί γίνεται σε αυτό το σημείο …Τί μας ενδιαφέρει; Μας ενδιαφέρει τί γίνεται,*
Μ1: *Στο σημείο που εξετάζουμε.*

Η ομάδα Β φάνηκε να μη δυσκολεύεται τόσο να φτάσει στα ίδια συμπεράσματα. Δέχτηκε με σχετική ευκολία τις νέες ιδιότητες χωρίς ιδιαίτερο προβληματισμό. Εφάρμοσε το ε.ι.τ και αφού αυτό δούλεψε μας έδωσε την απάντηση για την εφαπτομένη. Ωστόσο, όπως αποδείχθηκε στη συνέχεια,

αυτή η ομάδα μαθητών δεν ενσωμάτωσε τη νέα γνώση και η όποια προσέγγιση προς αυτήν ήταν καθαρά επιφανειακή.

Για να δούμε το βαθμό κατανόησης των όσων έχουμε κάνει έως τώρα, θέσαμε στους μαθητές ερώτηση σχετικά με τις ιδιότητες που μπορεί να έχει η εφαπτομένη σε σχέση με ένα σχήμα. Έτσι στο αντίστοιχο χρονικό σημείο της εργασίας οι απόψεις των μαθητών για τη εφαπτομένη ήταν οι ακόλουθες:

Ε: *Τί συμπεράσματα έχουμε βγάλει μέχρι στιγμής για την εφαπτομένη;*
Μ2: *Σε σχέση με το πρόγραμμα;*
Ε: *Σε σχέση με τα νέα σχήματα, τα ημικύκλια .*
Μ2: *κόβουν το σχήμα… δεν έχουν αναγκαστικά κοινό σημείο*
Ε: *Το σημαντικό ποιό είναι, στο σημείο που εξετάζουμε. Εμάς τί μας αρκεί;*
Μ2: *Στο σημείο που εξετάζουμε οι δύο ευθείες να γίνουν μία.*
Ε: *Τότε λέμε Μ1 ότι έχουμε…*
Μ1: *Εφαπτομένη.*
Ε: *Σε αντίθετη περίπτωση δεν έχουμε εφαπτομένη. Για την εφαπτομένη τί είναι αυτό που μας ενδιαφέρει;*
Μ2: *Το σημείο που εξετάζουμε.*

Οπότε, οι μαθητές έχουν αρχίσει πλέον να συνδέουν την εφαπτομένη με το σημείο που εφαρμόζουμε το ε.ι.τ. Φαίνεται να μην βασίζονται πλέον στο σχήμα. Πάνε απευθείας στο σημείο που θέλουν να εξετάσουν και ελέγχουν την εγκυρότητα του ε.ι.τ. Υπάρχουν, ωστόσο, φορές που η εποπτεία του σχήματος δημιουργεί εμπόδια.

Β. Η εφαπτομένη μπορεί να τέμνει ένα σχήμα

Στόχος της ενότητας αυτής είναι να έρθουν οι μαθητές σε ρήξη με την εικόνα της εφαπτομένης η οποία δεν μπορεί να τέμνει το σχήμα σε κανένα σημείο. Διαπιστώνεται πόσο έντονη είναι η παρουσία της γεωμετρικής εφαπτομένης στις διαισθήσεις των μαθητών. Παρατηρείτε μια έντονη σύγκρουση ανάμεσα στην εγκυρότητα του ε.ι.τ και των όσων έχουν μάθει έως τώρα από τη Γεωμετρία.

Οι δύο ομάδες ασχολήθηκαν με το σημείο όπου ενώνονται τα δύο ημικύκλια (Σχήμα 4.1.12). Οι μαθητές απάντησαν εύστοχα, χωρίς τη χρήση του ε.ι.τ., ότι σε εκείνο το σημείο υπήρχε εφαπτομένη. Ο λόγος είναι ότι είδαν

το σχήμα ως δύο κύκλους, για τους οποίους γνωρίζουν ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε εκείνο το σημείο. Χαρακτηριστικό της αδυναμίας να δουν το σχήμα ως μια ολότητα είναι το παρακάτω απόσπασμα.

Μ4: *Να τέμνει. Ναι, σε δύο σημεία. Αν πάρουμε τον κάθε κύκλο ξεχωριστά.*
Ε: *Εμείς το βλέπουμε ως ένα σχήμα.*

Αυτή η τάση είναι διάχυτη στις δηλώσεις των μαθητών όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με το νέο σχήμα. Ύστερα από την ενασχόλησή τους με αυτό μαθαίνουν να αποδεσμεύονται από το σχήμα και να εστιάζουν στον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ. Στη συνέχεια δεν έχουν πρόβλημα να χρησιμοποιήσουν το ε.ι.τ και να επαληθεύσουν τον ισχυρισμό που σε πρώτη φάση είχαν, διαισθητικά, διατυπώσει.

Όταν όμως τους έστρεψα την προσοχή στην ευθεία που σχηματίστηκε και την ολική της εικόνα σε σχέση με το σχήμα, ως ένα και όχι ως δύο απλούστερα, τότε τα πράγματα άλλαξαν. Τους ήταν εξαιρετικά δύσκολο, αν και το έβλεπαν στην οθόνη τους, να πουν ότι η εφαπτομένη που δημιουργήθηκε έτεμνε το σχήμα. Αν δεν είχαν διατυπώσει οι ίδιοι ότι η ευθεία που σχηματίζεται είναι η εφαπτομένη, θα ήταν πιο πιθανό να πουν ότι δεν είναι εφαπτομένη, παρά το ότι τέμνει το σχήμα.

Ε: *… θα δουλεύει το εργαλείο μας ή όχι.*
Μ1: *Όχι.*
Ε: *Εσύ Μ1 λες όχι, εσύ Μ2 τί λες; Πριν το κάνεις.*
Μ2: *Θα έχουμε.*
Ε: *Για ποιό λόγο θα έχουμε;*
Μ2: *Πιστεύω ότι θα είναι η κάθετη εδώ πέρα (στο Β).*
Ε: *Ωραία, για πήγαινε τα σημεία στο Β. Έχουμε εφαπτομένη ή όχι;*
Μ2*: Νομίζω έχουμε.*
Ε: *Δουλεύει το εργαλείο μας; Οπότε…*
Μ2: *Έχουμε εφαπτομένη.*
Μ1: *Ναι.*
Ε: *Τί παρατηρούμε για αυτή την εφαπτομένη; Έως τώρα είχαμε πει ότι η εφαπτομένη δεν κόβει το σχήμα. Εδώ τί γίνεται;*
Μ2: *Κόβει το σχήμα;*
Μ1: *Ναι.*

Ο μαθητής Μ2 δεν είναι σίγουρος για την απάντησή του. Δίνει μία ερωτηματικού τύπου απάντηση. Πρέπει να επισημανθεί ότι αυτή η ομάδα μαθητών ενήργησε με πολύ φορμαλιστικό τρόπο και βασίστηκε αρκετά στο ε.ι.τ. Έτσι, δυσκολεύτηκε λιγότερο από την ομάδα Β, η οποία στηρίχτηκε πιο πολύ στις διαισθήσεις της, προβάλλοντας ορισμένες ενδιαφέρουσες απόψεις:

Ε: … *Οπότε υπάρχει εφαπτομένη στο σημείο Β;*
Μ4-Μ3: *Υπάρχει.*
Μ3: *Άρα, τα ημικύκλια εφάπτονται εξωτερικά.*
Ε: *Τί εννοείς με το εφάπτονται εξωτερικά.*
Μ3: *Ότι ο ένας ακουμπά τον άλλον.*
Ε: *Αν ήταν κύκλοι.*
Μ3: *Ναι.*
Ε: *Ναι. Δηλαδή αυτή η εφαπτομένη τί χαρακτηριστικό έχει για το σχήμα μας;*
Μ4: *Ότι περνάει από… ότι ακουμπάει και τα δύο ημικύκλια;*

Οι μαθητές δεν είναι σε θέση να κάνουν τη γενίκευση για το σχήμα. Αγκιστρώνονται στη γνωστή ιδιότητα, ότι δύο κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη. Δεν τους είναι εύκολο να συσχετίσουν την εφαπτομένη με το σχήμα. Ο λόγος είναι ότι αυτή το τέμνει, κάτι που αντίκειται στα όσα ξέρουν για την εφαπτομένη. Για επιβεβαίωση του βαθμού κατανόησης ρωτήθηκαν να πουν τί είναι η εφαπτομένη.

Μ4: *Η εφαπτόμενη περνά και ακουμπάει μόνο ένα σημείο του σχήματος. Είναι μία ευθεία που περνά από ένα μόνο σημείο του σχήματος και το ακουμπάει. Δεν το τέμνει δηλαδή. Όταν το τέμνει δεν είναι και εφαπτομένη.*
Μ3: *Προφανώς.*
Ε: *Εσύ Μ3, μήπως έχεις να προσθέσεις κάτι;*
Μ3: *Το ίδιο θα έλεγα με την Μ4.*

Για να προκληθεί ρήξη στους μαθητές με την πρότερη γνώση αντιπαραβάλλεται η εικόνα της εφαπτομένης στο νέο σχήμα με την αντίστοιχη στον κύκλο.

Ε: *Στον κύκλο τί είπαμε ότι είναι η εφαπτομένη;*
Μ4: *Τί είπα;*
Ε: *Με τον κύκλο πόσα κοινά σημεία είπαμε ότι έχει;*
Μ4-Μ3: *Ένα.*
Ε: *Ένα το οποίο όμως δεν τέμνει τον κύκλο!*

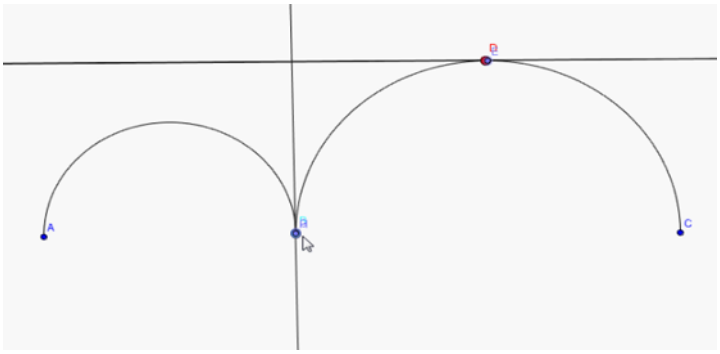
Μ4: *Όχι.*

Ε: *Αυτό το σχήμα τί το κάνει η εφαπτομένη;*

Μ4-Μ3: *(διστακτικά) το τέμνει.*

Ε: *Οπότε όταν πάμε σε άλλα σχήματα η εφαπτομένη τί μπορεί να κάνει;*

Μ4: *Να τέμνει;*

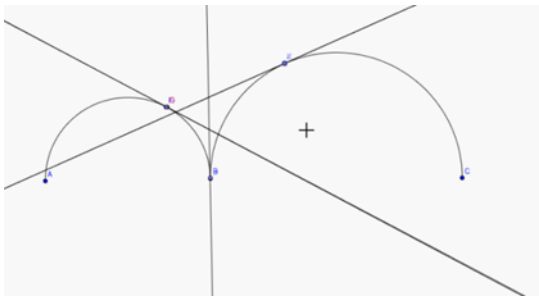


Σχήμα 4.1.12

Σε αυτή τη περίπτωση έπειτα από εφαρμογή του ε.ι.τ προκύπτει κατακόρυφη εφαπτομένη που τέμνει το σχήμα.
Η κατακόρυφη εφαπτομένη ορίζεται στο βιβλίο:
Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός.
M.Spivak. 6η έκδοση. Σελ.129 . Παν.Εκδ.Κρήτης.

Η νέα αυτή ιδιότητα, ότι δηλαδή η εφαπτομένη μπορεί και να κόβει το σχήμα, έχει προκαλέσει κάποια μορφή σύγχυσης στους μαθητές. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο, καθώς βλέπουν ένα ισχυρό, για αυτούς, δόμημα να κατεδαφίζεται. Στην παρούσα φάση δεν είναι εύκολο οι μαθητές να διακρίνουν τη σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στους δύο ορισμούς. Δηλαδή, ότι το νέο αυτό δόμημα με το οποίο τους εφοδιάσαμε δουλεύει και στον κύκλο, αλλά παρουσιάζει μεμονωμένες ιδιότητες σε αυτόν.

Το αξιοσημείωτο είναι ότι η εικόνα της γεωμετρικής εφαπτομένης είναι τόσο βαθιά ριζωμένη στους μαθητές που ακόμα και μετά την παρέμβασή μας, τους είναι εξαιρετικά δύσκολο να δεχτούν τις νέες ιδιότητες που αναδύονται από την ενασχόλησή τους με το ψηφιακό εργαλείο. Έτσι, ενώ φαινομενικά αποδέχονται ότι σε κάποια σχήματα η εφαπτομένη, μπορεί και να τέμνει το σχήμα, δεν είναι σε θέση να ενσωματώσουν αυτή την πληροφορία στην προϋπάρχουσα γνώση τους. Δέχονται το ε.ι.τ αλλά τους είναι δύσκολο να συμπεράνουν τις αναλυτικές ιδιότητες της εφαπτομένης.



Σχήμα 4.1.13

Σε αυτή τη περίπτωση έπειτα από εφαρμογή του ε.ι.τ προκύπτει εφαπτομένη με ένα σημείο επαφής και ένα σημείο τομής

Αφού οι μαθητές δέχτηκαν ότι η εφαπτομένη τέμνει ένα σχήμα προσπάθησα να ελέγξω πόσο εύκολο είναι να επεκτείνουν αυτήν την ιδιότητα. Δηλαδή, να εφάπτεται σε ένα σημείο και να τέμνει σε ένα άλλο το σχήμα (Σχήμα 4.1.13). Όπως φαίνεται, οι μαθητές ενίστανται στο γεγονός ότι η εφαπτομένη μπορεί να τέμνει το σχήμα. Ο διάλογος των μαθητών δείχνει την έντονη σύγκρουση ανάμεσα στην εικόνα που έχουν και το ε.ι.τ. Έχουν δεχθεί την εγκυρότητα του ε.ι.τ οπότε είναι σε δίλημμα κατά πόσο ισχύει αυτό ή όσα γνώριζαν έως τώρα:

Ε: *Πάμε να δοκιμάσουμε σε άλλα σημεία. Δουλεύει το εργαλείο;*
Μ2: *Όχι.*
Μ1: *Ναι.*
Ε: *Γιατί δεν έγιναν μία ευθεία;*
Μ1: *Γίνανε.*
Μ2: *Αλλά το τέμνει.*
Ε: *… Προηγουμένως που έκοβε το σχήμα, δέχθηκες ότι είναι εφαπτομένη, εδώ γιατί σε πειράζει;*
Μ2: *Γιατί έχει παραπάνω από ένα κοινό σημείο.*
Ε: *Αλλά ο ορισμός που δώσαμε, ο τρόπος για να βρίσκουμε εφαπτομένη ποιος ήταν; … Ωραία. Δουλεύει το εργαλείο μας;*
Μ1: *Ναι.*

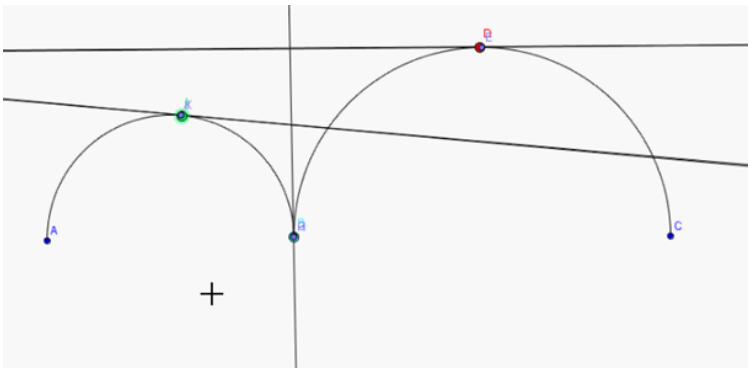
Και η επόμενη ομάδα μαθητών δεν δυσκολεύεται να διατυπώσει το ίδιο συμπέρασμα.

Ε: *…τέμνει σε ένα σημείο και,*
Μ4-Μ3: *Εφάπτεται σε ένα άλλο.*
Ε: *'Η καλύτερα εφάπτεται σε ένα σημείο και τέμνει το σχήμα σε ένα άλλο. Πολύ ωραία, ας ορίσουμε τώρα την εφαπτομένη σε αυτό το σημείο του άλλου ημικυκλίου.*
Μ4: *Α! να τέμνει σε δύο σημεία και να εφάπτεται σε ένα.*

Οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά από το δεύτερο σημείο τομής μεταξύ εφαπτομένης και γραφήματος. Αυτό που συμβαίνει αντίκειται στην πρότερη γνώση που έχουν από τον κύκλο, ότι η εφαπτομένη έχει ένα μόνο κοινό σημείο με το σχήμα. Οι μαθητές στηρίχθηκαν στο ε.ι.τ για να δεχθούν αυτήν την ιδιότητα της εφαπτομένης. Στη συνέχεια, αφού εντόπισαν την εφαπτομένη με ένα σημείο επαφής και δύο σημεία τομής (Σχήμα 4.1.14), οδηγήθηκαν και σε γενίκευση της παραπάνω ιδιότητας:

Ε: *… Εδώ το κόβει σε δύο σημεία. Συνεπώς το συμπέρασμα είναι ότι η εφαπτομένη μπορεί να κόβει το σχήμα. Σε πόσα σημεία; Ξέρουμε σε πόσα; Μπορεί να το κόβει σε άπειρα;*

Μ1: *Ναι.*



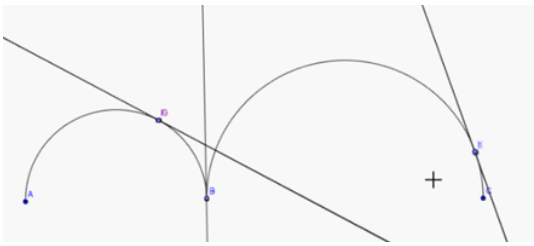
Σχήμα 4.1.14

Σε αυτήν την περίπτωση έπειτα από εφαρμογή του ε.ι.τ προκύπτει εφαπτομένη με ένα σημείο επαφής και δύο σημεία τομής. Επίτηδες έχουν αφεθεί τα ευρήματα από προηγούμενη εφαρμογή του ε.ι.τ για να φαίνεται ότι μιλάμε για το ίδιο σχήμα και ότι διαφοροποιείται η εφαπτομένη σε αυτό ανάλογα με την επιλογή του σημείου επαφής.

Φαίνεται λοιπόν ότι σε κάποιο βαθμό έχουν αρχίσει να δέχονται την καινούρια για αυτούς ιδιότητα της εφαπτομένης. Σημαντικό είναι ότι έχουν δεχτεί την εγκυρότητα του ε.ι.τ, το χρησιμοποιούν όμως ως ένα τρόπο επικύρωσης και όχι ως ορισμό.

Γ. Η εφαπτομένη μπορεί να εφάπτεται σε ένα σχήμα σε περισσότερα του ενός σημεία

Στην ενότητα αυτή μελετάται η δυνατότητα της εφαπτομένης να εφάπτεται σε περισσότερα του ενός σημεία σε ένα σχήμα. Από την ενασχόλησή τους με τα προηγούμενα σχήματα οι μαθητές δεν δυσκολεύονται να στηριχτούν στο ε.ι.τ και να οδηγηθούν από μόνοι τους στα αναμενόμενα συμπεράσματα. Το ε.ι.τ φαίνεται να έχει αρχίσει να γίνεται κτήμα των μαθητών και αυτό κάνει την εμφάνισή του στο γεγονός ότι είναι πλέον σε θέση να στηριχτούν σε αυτό για να δώσουν τις απαντήσεις τους αλλά και για να οδηγηθούν σε γενικεύσεις ως προς τις ιδιότητες της εφαπτομένης. Πλέον, η κλασική εικόνα της εφαπτομένης είναι υπό αμφισβήτηση από τους μαθητές.



Σχήμα 4.1.15

Σε αυτήν την περίπτωση έπειτα από εφαρμογή του ε.ι.τ προκύπτει εφαπτομένη με μοναδικό σημείο επαφής.

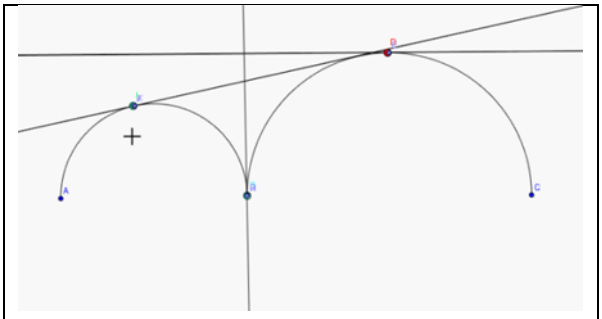
Έτσι, οι μαθητές ξεκίνησαν με την εφαπτομένη που εφάπτεται σε μοναδικό σημείο (Σχήμα 4.1.15). Στη συνέχεια προσπάθησαν να εντοπίσουν εφαπτομένη με διαφορετικές από τις έως τώρα γνωστές τους ιδιότητες. Τους ζητήθηκε να εστιάσουν την προσοχή τους στην περίπτωση που εφάπτεται το σχήμα σε δύο σημεία (Σχήμα 4.1.16):

Ε: *… Η μία το κόβει σε ένα σημείο, η άλλη το ακουμπά, όπως τον κύκλο σε ένα σημείο και η άλλη το κόβει σε δύο σημεία. Δηλαδή στο ίδιο σχήμα μπορεί οι ιδιότητες της εφαπτομένης να ποικίλουν. Μπορούμε να βρούμε μια εφαπτομένη που να εφάπτεται σε δύο σημεία στο σχήμα; Για δες το.*

Μ2: *Γίνεται.*

Ε: *Σε πόσα σημεία ακουμπάει το σχήμα;*

Μ2-Μ1: *Σε δύο.*



Σχήμα 4.1.16

Σε αυτήν την περίπτωση έπειτα από εφαρμογή του ε.ι.τ προκύπτει εφαπτομένη με δύο σημεία επαφής.

Όμοια και η επόμενη ομάδα μαθητών δεν δυσκολεύτηκε να φτάσει στο ίδιο συμπέρασμα.

Ε: *Ωραία, να κόβει το σχήμα. Πάμε να εφαρμόσουμε την εφαπτομένη για ένα άλλο σημείο, στο ένα από τα δύο ημικύκλια. Σε πόσα σημεία μου είπες ότι ακουμπά η εφαπτομένη;*

Μ4: *Σε ένα,… τώρα είναι σε δύο.*

Ε: *Πάμε να το δούμε…*

Μ3: *Ακουμπά σε δύο.*

Οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται τον τρόπο λειτουργιάς του ε.ι.τ και κατά επέκταση της εφαπτομένης. Αυτό φαίνεται κυρίως από τον ενθουσιασμό που έδειξαν σε αυτό το κομμάτι της διερεύνησης, προσπάθησαν από μόνοι τους να δημιουργήσουν γενικεύσεις για τα συμπεράσματά τους:

Ε: *Να το ακουμπά σε δύο σημεία.*

Μ4: *Παραπάνω από δύο γίνεται;*

….

Ε: *Θα μπορούσε να εφάπτεται σε περισσότερα σημεία;*

Μ4: *Λογικά, ναι.*

Μ3: *Θα μπορούσε.*

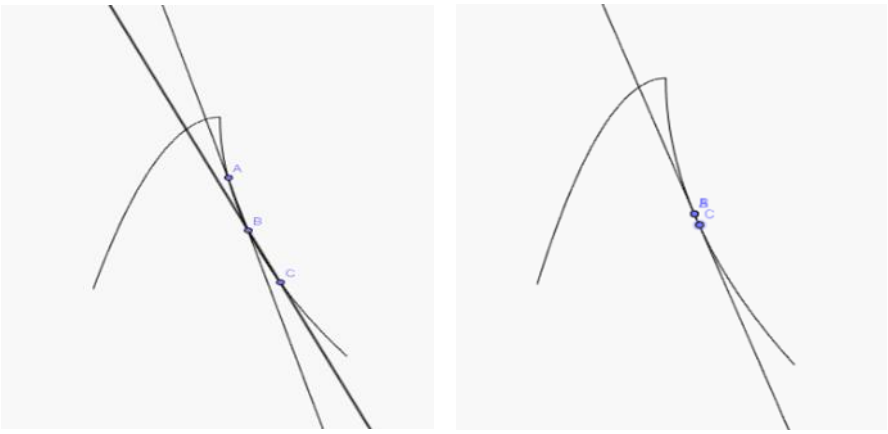
Κατά την προσπάθεια εντοπισμού περισσοτέρων του ενός σημεία επαφής, ένας μαθητής κάνει από μόνος του μια σύνδεση με την εφαπτομένη, όπως τη γνωρίζουμε στον κύκλο. Όρισε ένα σημείο που δεν είχα υποδείξει και επισήμανε ότι εδώ θα μπορούσε να υπάρχει εφαπτομένη με τις ιδιότητες της γεωμετρικής.

Μ4: *Ναι, μπορεί και να μην το ακουμπά και καθόλου.*
Ε: *Βέβαια, αν πάρουμε την εφαπτομένη στα άκρα, τί γίνεται;*
Μ4: *Στην ουσία δεν θα τέμνει καθόλου το σχήμα και θα το ακουμπά σε ένα σημείο.*

Οι μαθητές έχουν την ανάγκη να συνδέσουν τη λειτουργία του ε.ι.τ με την προϋπάρχουσα γνώση. Αυτό αποτελεί ένα είδος επικύρωσης της εγκυρότητας των όσων έχουν προηγηθεί. Η ομάδα Β, φάνηκε να ξεδιαλύνει τις τυχόν παρανοήσεις που είχαν σχηματιστεί. Είναι σε θέση πλέον να αποδεσμευτούν από τον κύκλο και να εστιάσουν στην τοπική φύση της εφαπτομένης. Να διακρίνουν ότι η εφαπτομένη ποικίλει από σχήμα σε σχήμα και από σημείο σε σημείο. Προς αυτήν την κατεύθυνση συντέλεσαν και κάποιες ερωτήσεις για την εφαπτομένη, όπως πάνω στην ευθεία, που έβαλαν τους μαθητές σε σκέψη και τους βοήθησαν λίγο να αναπτύξουν πιο ισχυρούς δεσμούς ανάμεσα στην έννοια και τον τρόπο που δουλεύει το ε.ι.τ.

Ε: *Στην ευθεία έχουμε εφαπτομένη;*
Μ3: *Ευθεία;*
Μ4: *Μια ευθεία μόνη της; Και να εφάπτεται πού; Πρέπει να έχουμε ένα σχήμα για να βρούμε την εφαπτομένη του….*
Μ4: *Α! Στην ουσία ταυτίζεται με την ευθεία.*

Ωστόσο, όπως φάνηκε δυσκολεύονται να δεχτούν ότι η εφαπτομένη μπορεί να ακουμπά σε συνεχόμενα σημεία. Δέχονται ότι μπορεί να υπάρχει εφαπτομένη σε άπειρα σημεία αρκεί αυτά να είναι διακριτά. Αυτό έκανε την εμφάνισή του όταν οι μαθητές προσπάθησαν να ελέγξουν την ύπαρξη ή μη της εφαπτομένης στο σχήμα 4.1.17. Οι μαθητές εφάρμοσαν το ε.ι.τ αλλά όταν τους ζητήθηκε να ερμηνεύσουν αν δουλεύει ή όχι, δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν.



Σχήμα 4.1.17

Στο σχήμα αυτό κάνει την εμφάνιση ο προβληματισμός σχετικά με το τί γίνεται όταν η εφαπτομένη, φαίνεται να ακουμπά σε τμήμα της καμπύλης.

Μ4: *Όχι, δεν θα ακουμπά σε ένα μόνο σημείο,*

Μ3: *Ναι*

Μ4: *Έτσι όπως το βλέπω θα ακουμπά σε περισσότερα από ένα σημεία και θα τέμνει και το σχήμα, αλλά αυτό δεν θα παίζει ρόλο.*

Ε: *Αυτό είπαμε δεν παίζει ρόλο. Να δούμε το σχήμα καλύτερα;*

Μ4: *Αλλά ας πούμε εδώ πάνω αν περνά η εφαπτομένη θα ακουμπάει σε περισσότερα από ένα σημεία και δεν θα λέγεται εφαπτομένη.*

Μ3: *Και δεν θα λέγεται εφαπτομένη.*

Οι μαθητές έχουν δεχθεί την ύπαρξη εφαπτομένης σε περισσότερα από ένα σημεία. Η ομάδα Β μας έχει πει, ότι υπάρχει εφαπτομένη σε μία ευθεία η οποία θα ταυτίζεται με την ίδια την ευθεία. Παρόλα αυτά όταν μεταβαίνουν σε πιο σύνθετα σχήματα δεν φαίνεται να είναι σε θέση να γενικεύσουν τις γνώσεις τους.

Ε: *Στο σχήμα που είδαμε με τις σπηλιές δεν είδαμε ότι μπορεί να ακουμπάει περισσότερα από ένα σημείο; Το ακουμπούσε σε δύο.*

Μ4-Μ3: *Ναι.*

Ε: *Δεν είπες ότι αφού βρήκαμε εφαπτομένη που ακουμπά σε δύο σημεία θα μπορούσαμε να βρούμε και εφαπτομένη που ακουμπά σε περισσότερα;*

Μ4: *Ναι.*

Μ3: *Όμως εδώ θα το κόψει.*

Μ4: *Αλλά είναι συνεχόμενα τα σημεία που θα ακουμπάει η μία ευθεία. Δεν θα ακουμπά σε ένα σημείο αλλά σε συνεχόμενα. Στις σπηλιές ακούμπαγε σε ένα σημείο άλλα δεν ήταν δίπλα δίπλα.*

Ε: *Αν είχαμε συνεχόμενες σπηλιές;* (Σχεδιάζω στον πίνακα)

Μ4: *Αυτό είναι εφαπτόμενη.*

Μ3: *Ναι .*

Μ4: *Σε πάνω από δύο σημεία.*

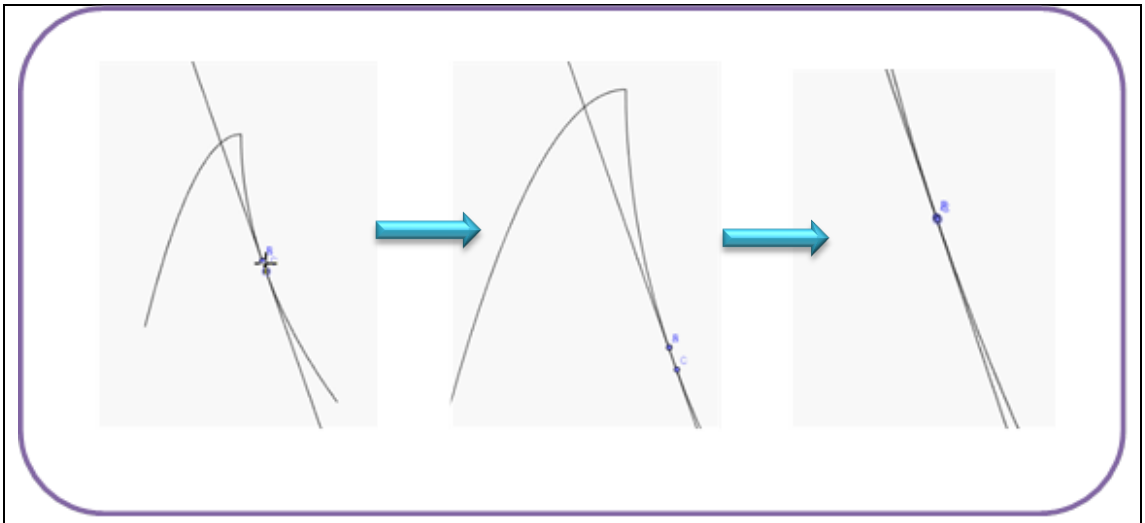
Ε: *Φτιάχνω τις σπηλιές ακόμα πιο κοντά.*

Μ3: *Πάλι είναι.*

Μ4: *Όμως άλλο να πλησιάζουν τα σημεία και άλλο να είναι δίπλα δίπλα.*

Οι μαθητές ενίστανται ως προς την πυκνότητα των σημείων. Όταν αυτά φαίνεται να απειρίζονται, δυσκολεύονται να εντάξουν το ε.ι.τ στο νέο αυτό πλαίσιο. Αυτό είναι λογικό καθώς είναι κάτι που ξεφεύγει από την εποπτεία του σχήματος. Οι μαθητές δεν είναι ακόμα σε θέση να κάνουν το άλμα. Παρόλα αυτά δέχονται την εγκυρότητα του ε.ι.τ και εν τέλει δέχονται την ύπαρξη της εφαπτομένης.

Για να πειστούν οι μαθητές χρησιμοποιήθηκε η λειτουργία εστίασης που παρέχει το Geogebra.



Σχήμα 4.1.18

Στο σχήμα φαίνεται πώς έπειτα από συνεχόμενα ζουμ, τελικά η καμπύλη τείνει να γίνει ευθεία και γίνεται αντιληπτή η εφαπτομένη

Οι μαθητές δυσκολεύονται να εφαρμόσουν το ε.ι.τ για τον υπολογισμό της εφαπτομένης. Το ε.ι.τ δουλεύει αλλά ακουμπά την καμπύλη σε ένα μέρος της και φαίνεται σαν να την κόβει. Οι μαθητές αμφιταλαντεύονται ανάμεσα στην άποψη ότι η εφαπτομένη που υπολόγισαν τέμνει το σχήμα ή εφάπτεται σε ένα τμήμα του. Αλλά πώς γίνεται μια ευθεία να εφάπτεται σε τμήμα

καμπύλης; Για να ξεπεραστεί η δυσκολία πρότεινα στους μαθητές να κάνουν ζουμ στο σχήμα (Σχήμα 4.1.18) ώστε, μέσω της τοπικής ευθύτητας, να αντιληφθούν ότι δεν το τέμνει και ότι πλησιάζοντας τελικά θα έχουμε ένα τμήμα που θα τείνει να γίνει ένα ευθύγραμμο.

Το σημαντικό είναι ότι οι μαθητές έχουν αρχίσει να συνδέουν την εφαπτομένη με την επιλογή του σημείου στο οποίο εξετάζεται. Είναι σε θέση, έστω και με έναν φορμαλιστικό τρόπο, να βρουν την εφαπτομένη σε διάφορα σχήματα. Έχουν πλέον συνδέσει την εφαπτομένη με το ε.ι.τ χωρίς να το θεωρούν ισοδύναμο ορισμό. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη χρήση του ψηφιακού εργαλείου. Επιπλέον έχουν αφομοιώσει σε μεγάλο βαθμό τις νέες ιδιότητες. Οι μαθητές βρίσκονται σε μερική σύγχυση καθώς αντιμετωπίζουν μια διαρκή σύγκρουση ανάμεσα στη νέα γνώση και την γενική εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη. Τα πράγματα απλοποιούνται περισσότερο όταν αφήνουμε το οπτικό μέρος και πάμε στο καθαρά αλγεβρικό κομμάτι της εφαπτομένης, ως εξίσωση ευθείας.

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι το πέρασμα από την γεωμετρική εφαπτομένη στην αναλυτική, είναι μια διαδικασία χρονοβόρα και επίπονη. Συνεπώς, ένα επιπλέον εμπόδιο για τους μαθητές είναι και το σύντομο διάστημα διεξαγωγής της έρευνας.

Δ. Πώς νοηματοδοτείται η εφαπτομένη σε «κρίσιμα σημεία»

Στην παρούσα εργασία έκανε την εμφάνισή της η πεποίθηση ότι δεν έχουμε εφαπτομένη σε σχήματα με γωνίες. Αυτό οφείλεται στις διαισθήσεις που έχουν αναπτύξει οι μαθητές για την εφαπτομένη. Οι γωνίες είναι σημείο ανωμαλίας σε ένα σχήμα καθώς συνήθως σε αυτές αλλάζει ριζικά. Οι μαθητές από την ενασχόλησή τους με το τετράγωνο έχουν καταρρίψει τη θεωρία ότι η εφαπτομένη ακουμπά το σχήμα σε ένα μόνο σημείο και δεν έχει κανένα άλλο κοινό σημείο με αυτό.

Στις καμπύλες εμφανίζονται *σημεία καμπής και γωνιακά σημεία* στα οποία κατά κύριο λόγο δεν εφαρμόζεται ο γεωμετρικός ορισμός της εφαπτομένης. Τα σημεία αυτά τα καλούμε κρίσιμα σημεία και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με αυτά διατυπώνονται παρακάτω:

Ως σημεία καμπής στο σχολικό βιβλίο ορίζονται:

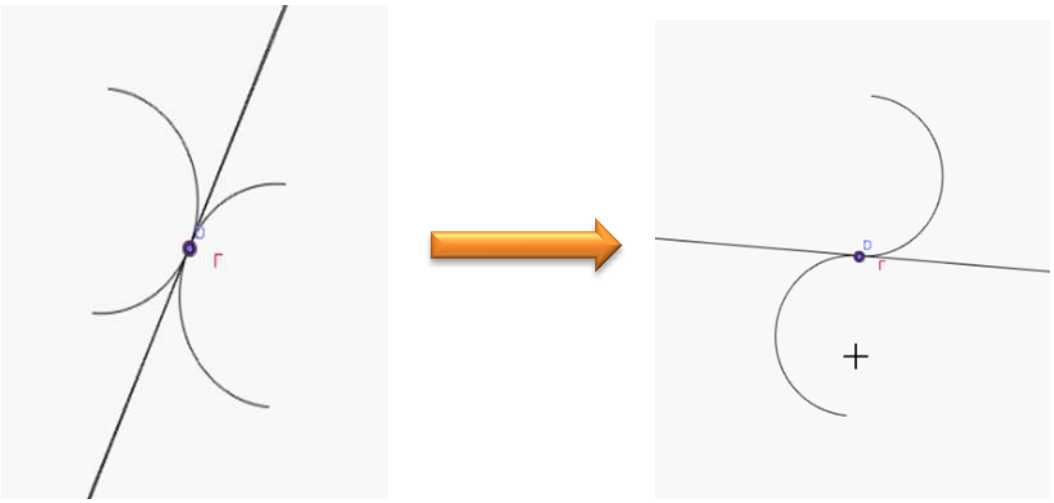
Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν

- *η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β), ή αντιστρόφως και*
- *η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$,*

  τότε το σημείο $A(x_o, f(x_o))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω, σημεία καμπής συναντώνται στα σχήματα 3.2.4, 3.2.3 (3) και 4.1.18 (2). Οι μαθητές ήρθαν σε επαφή σε πολύ πρώιμο στάδιο της εργασίας με τα σημεία καμπής (Σχήμα 4.1.19). Σε αυτό το ψηφιακό εργαλείο φέραμε την εφαπτομένη από το σημείο Γ. Οι μαθητές γνωρίζουν την κοινή εφαπτομένη ανάμεσα σε δύο ημικύκλια. Στη συνέχεια, οι μαθητές άλλαξαν μορφή στο σχήμα διατηρώντας την εφαπτομένη αμετάβλητη. Υπάρχει μιας μορφής συνδεόμενο σύρσιμο σε αυτή τη περίπτωση. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να συνδυάσουν το σημείο καμπής με το σημείο ύπαρξης της εφαπτομένης.

Η εφαρμογή του ε.ι.τ πάνω σε σχήματα που μοιάζουν με κύκλο τους



(1) (2)

Σχήμα 4.1.19

Στο σχήμα (1) παρουσιάζεται η εφαπτομένη ενός σχήματος, ενώ στο (2) βλέπουμε την εφαπτομένη που τέμνει το σχήμα αλλά εφαρμόζεται σε ένα σημείο καμπής. Το ιδιαίτερο σε αυτό το σχήμα είναι ότι η εφαπτομένη παραμένει σταθερή και μετακινούνται τα ημικύκλια.

διευκολύνουν προς αυτήν την κατεύθυνση. Αν και δεν είναι ακόμα έτοιμοι να συνδυάσουν όλα τα παραπάνω με τον ορισμό της εφαπτομένης, αφού δεν γνωρίζουν ακόμα τα σημεία καμπής. Παρόλα αυτά, εμπλουτίζουν την εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη. Όπως έγινε αντιληπτό σε μεταγενέστερο στάδιο, στα γραφήματα (Σχήμα 3.2.4 & 3.2.3(3)), οι μαθητές φάνηκε να μην προβληματίζονται από τα σημεία καμπής. Τα θεωρούν ως σημεία στα οποία υπάρχει η εφαπτομένη.

Ως γωνιακό σημείο ορίζεται *εκείνο στο οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι αλλά δεν είναι ίσες και σε αυτό δεν υπάρχει εφαπτομένη*. Σε αυτή την περίπτωση θα μας απασχολήσουν τα σχήματα 3.2.3 (4 & 5), ενώ το σχήμα 4.1.10 αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση γωνιακού σημείου.

Οι μαθητές δυσκολεύονται να εργαστούν σε σχήματα όπου οι γωνίες δεν αποτελούνται από ευθείες. Η τριβή τους με την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει σχηματίσει ισχυρές εικόνες οι οποίες είναι δύσκολο να καταρριφθούν. Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ οι μαθητές θεωρούν ότι στις γωνίες δεν έχουμε εφαπτομένη, δεν τους δημιουργεί αίσθηση όταν τους δίνουμε γραφήματα με γωνιακά σημεία που σχηματίζονται από καμπύλες. Σε τέτοια σημεία όπως και σημεία καμπής, όπως το σχήμα 3.2.3(3), δεν εξετάζουν την ύπαρξη εφαπτομένης γιατί πολύ απλά δεν τα θεωρούν γωνία, οπότε δεν παρουσιάζεται κάποια ιδιαιτερότητα με την οποία θα πρέπει να ασχοληθούν.

Τα πρώτα σημάδια περί της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε ένα σχήμα με γωνία της οποίας οι πλευρές που τη σχηματίζουν δεν είναι ευθείες, ήρθε στο φως κατά την ενασχόλησή τους με το σημείο επαφής των δύο ημικυκλίων (Σχήμα 4.1.10). Οι μαθητές απάντησαν εύκολα για την ύπαρξη της εφαπτομένης. Παρόλα αυτά δεν ήταν σε θέση να μας δώσουν μια πειστική απάντηση στο ερώτημα γιατί εδώ έχουμε εφαπτομένη ενώ στο τετράγωνο δεν έχουμε.

Ε:*…ποιά σημεία είπες ότι δεν μπορούμε να έχουμε εφαπτομένη, όταν κάναμε το τετράγωνο;*
Μ4: *Όταν έχουμε γωνία.*
Ε: *Όταν έχουμε γωνία δεν έχουμε εφαπτομένη.*
Μ4: *Όχι.*
Ε: *Εδώ πέρα στο μεσαίο σημείο έχουμε εφαπτομένη;*
Μ3-Μ4: *Ναι.*

Ε: *Έχουμε γωνία σαν σχήμα;*
Μ4: *Δεν το λέω γωνία.*
Μ3: *Υπάρχει μόνο εξωτερική γωνία.*
Μ4: *Δεν θα το έλεγα γωνία.*
Ε: *Δηλαδή τί είναι;*
Μ4: *Δεν ξέρω. Είναι τα δύο σημεία εκεί που είναι το κοινό τους .*

Το ερώτημα έχει μπερδέψει αρκετά τους μαθητές. Έχουν δεχθεί την εφαπτομένη στο συγκεκριμένο σημείο αλλά δεν είναι σε θέση να στηρίξουν τον ισχυρισμό τους. Δεν είναι ακόμα σε θέση να κάνουν ορθή χρήση του ε.ι.τ και να βασιστούν σε αυτό. Η μόνη προσπάθεια εξήγησης έχει βάση στη διαίσθηση των μαθητών.

Ε: *Σίγουρα δεν είναι ευθεία, δεν είναι καμπύλη, έχουμε μια γωνία. Εδώ γιατί να έχουμε εφαπτομένη;*
Μ4: *Γιατί να έχουμε εφαπτομένη;*
Ε: *Στο τετράγωνο είπαμε δεν έχει εφαπτομένη γιατί σχηματίζει γωνία .*
Μ4: *Ίσως επειδή δεν υπάρχει ευθεία στο σχήμα και είναι κυκλικό.*
Ε: *Κατά κάποιον τρόπο ναι. Η ουσία είναι το εργαλείο μας που δουλεύει.*
Μ4: *Και δεν τέμνει και πουθενά αλλού το σχήμα. Για αυτό υπάρχει.*

Ο μαθητής κατανόησε ότι η καμπυλότητα είναι αυτή που επηρεάζει την ύπαρξη της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο, δεν μπόρεσε όμως να το συνδυάσει με το πλησίασμα των τεμνουσών. Αυτή η πεποίθηση του μαθητή δίνει το έναυσμα να κεντρίσουμε την προσοχή των μαθητών στον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ.

Ε: *Στη γωνία ενός τετραγώνου είδαμε ότι οι δύο ευθείες που ορίσαμε δεν μπορούν να ταυτιστούν. Ήταν πάντοτε κάθετες μεταξύ τους. Εδώ το εργαλείο μας δουλεύει… καθώς οι ευθείες τείνουν να γίνουν μία στο τέλος ταυτίζονται. Υπάρχει μια ομαλότητα στον τρόπο που πηγαίνουν στη κοινή ευθεία. Δεν είναι ότι το σχήμα δεν έχει γωνία…. κάνει γωνία*
Μ4: *Ναι, δεν κάνει όμως τη γωνία με τις ευθείες, εννοώ.*
Ε: *Σίγουρα.*
Μ4: *Είναι σαν μύτη στην ουσία αυτό.*

Υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στη γωνία με την κλασική έννοια και στα υπόλοιπα σχήματα που μοιάζουν με γωνίες. Για τους μαθητές είναι κάτι που ξεφεύγει από την εποπτεία τους. Αυτό παρατηρείται κυρίως όταν εξετάζουν γραφήματα που παρουσιάζουν «κρίσιμα σημεία» ως προς την

ύπαρξη εφαπτομένης. Οι μαθητές εξέτασαν όλα τα σημεία εκτός από τα κρίσιμα. Για αυτούς φαντάζουν μέρος του γραφήματος και δεν τους προκαλεί αίσθηση. Έτσι, όταν τους ζητήθηκε να εξετάσουν ως προς την εφαπτομένη τα γραφήματα στο σχήμα 3.2.3, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά στο να φτάσουν στη σωστή απάντηση για το γράφημα (4).

Κατά την ενασχόλησή τους με τη γραφική της παράσταση, η μία ομάδα μαθητών εστίασε στο ότι είναι καμπύλη, με την έννοια ότι δεν παρουσιάζει γωνίες οπότε λογικά θα έπρεπε να έχει εφαπτομένη.

Ε: *Φαίνεται να έχει ….Οπότε έχει. Πάμε στο άλλο.* (Γενίκευση 4,Παράρτημα 4)
Μ2: *Εδώ έχει σίγουρα γιατί είναι καμπύλη …δεν έχει. Κάτσε έχει. Τώρα εδώ έχει ή δεν έχει;*
Ε: *Πάμε να κάνουμε ζουμ να το δούμε.*
Μ2: *Φαίνεται να έχει.*

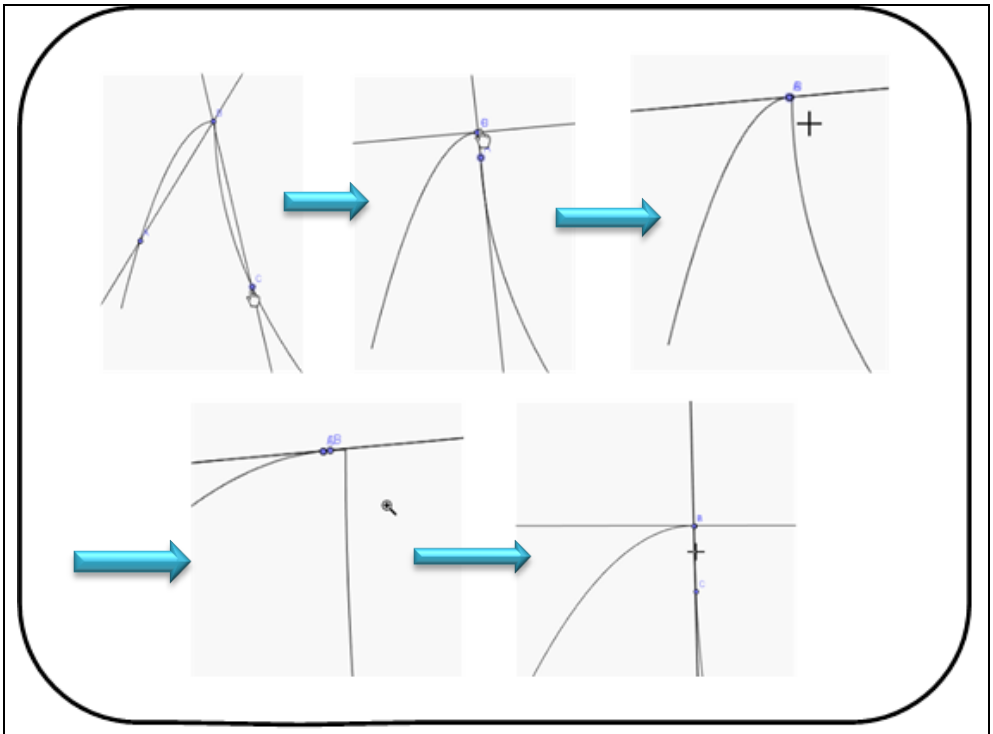
Δεν έχουν πρόβλημα να εφαρμόσουν το ε.ι.τ αλλά στο να εντοπίσουν το σημείο ανωμαλίας για την εφαπτομένη. Το μοναδικό σημείο στο οποίο δεν εστίασε άμεσα καμία από τις δύο ομάδες είναι η κορυφή του γραφήματος. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις μη ύπαρξης της εφαπτομένης το συγκεκριμένο παράδειγμα διαφοροποιείται αισθητά.

Η επόμενη ομάδα μαθητών επικεντρώθηκε κυρίως στο κομμάτι που φαινομενικά η εφαπτομένη εφάπτεται σε ένα τμήμα της καμπύλης και δεν ασχολήθηκε καθόλου με την κορυφή. Αυτό προέκυψε ύστερα από δική μου παρέμβαση:

Μ4: *Ότι υπάρχουν παντού εφαπτόμενες.*
Ε: *Όχι δεν υπάρχουν παντού εφαπτόμενες σε αυτό το σχήμα.*
Μ4: *Άρα, καλά το είπαμε.*
Ε: *Όχι, το πρόβλημα είναι αλλού σε αυτό το σχήμα.*
Μ4: *Α, στη γωνία.*
Ε: *Είναι στη γωνία. Πάμε να το δούμε γιατί δεν έχει; Φαίνεται να έχει …κάνουμε ζουμ.*
Μ4 : *Α δεν ακουμπάμε την κορυφή!*
Ε: *Το ένα σημείο θέλουμε να πλησιάζει από δεξιά και το άλλο από αριστερά. Τί παρατηρούμε όσο πλησιάζουμε; Πλησιάζει η μια ευθεία την άλλη;*
Μ4-Μ3: *Ναι και γίνονται κάθετες.*

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι πλησιάζουν η μία την άλλη αλλά δεν μπορούν ποτέ να γίνουν ίσες. Άρα, δεν υπάρχει εφαπτομένη. Έτσι,

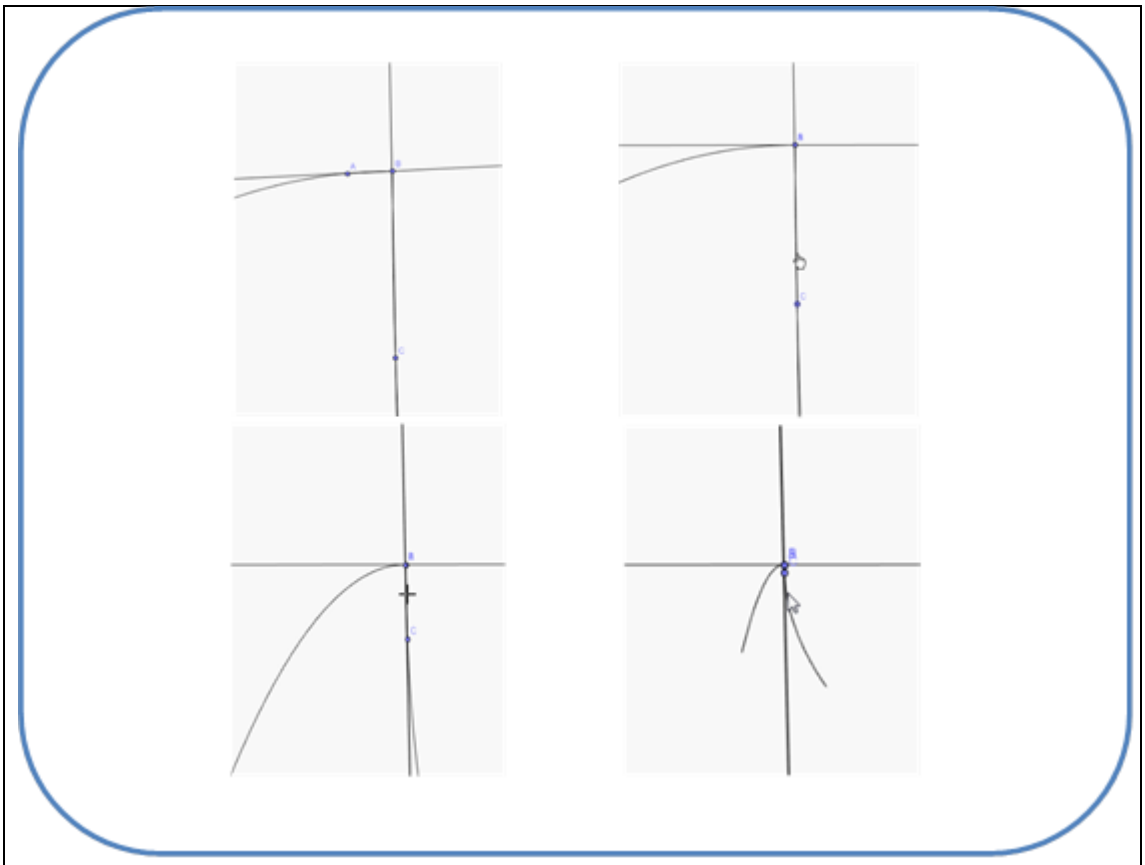
πλησιάζουν προς μια πληρέστερη εικόνα του ορισμού της εφαπτομένης. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να φτάσουν στην απάντηση λόγω της δυσκολίας που παρουσιάζει το ψηφιακό εργαλείο στην αναπαράσταση του τι ακριβώς συμβαίνει στην κορυφή του σχήματος. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές εφάρμοσαν το ε.ι.τ αλλά το εργαλείο αδυνατούσε να προσεγγίσει το σημείο στη κορυφή. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν το ζουμ και εφάρμοσαν το «πλησίασμα». Όμως, το πρόγραμμα εξακολουθούσε να αδυνατεί να πάει τα σημεία στην κορυφή, σχήμα 4.1.20.



Σχήμα 4.1.20

Οι μαθητές προσπαθούν να προσεγγίσουν την κορυφή του γραφήματος με εφαρμογή του ε.ι.τ. Στη προσπάθειά τους αυτή κάνουν χρήση του ζουμ. Το Geogebra λόγω του τρόπου με τον οποίο έχει οριστεί η συνάρτηση αδυνατεί να πραγματοποιήσει το πλησίασμα αυτό.

Η βασική αρχή είναι ότι από την εστίαση οι ευθείες δεν αλλοιώνουν τη δομή τους, αφού είναι «άπειρες», ενώ η περιορισμένη καμπύλη μικραίνει, αφού είναι ένα «σταθερό» σχήμα. Οπότε για τους μαθητές δεν ήταν εύκολο να ερμηνεύσουν το ε.ι.τ. Για να τους πείσω ότι οι τέμνουσες δεν θα ταυτιστούν ποτέ, έκανα σμίκρυνση στο σχήμα. Έτσι, φαίνεται η διαδικασία του «πλησιάσματος» και συνάμα οι δύο τέμνουσες που δεν ταυτίζονται ποτέ. Η όλη διαδικασία απεικονίζεται στο σχήμα 4.1.21.



Σχήμα 4.1.21

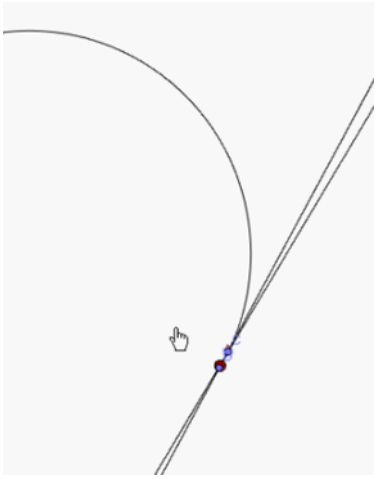
Πλησιάζουμε τα σημεία όσο κοντά μπορούμε στην κορυφή και κάνουμε σμίκρυνση ολόκληρου του σχήματος. Με αυτόν τον τρόπο φαίνεται ότι οι ευθείες δεν θα ταυτιστούν ποτέ.

Στην ουσία οι μαθητές πλησίασαν τα σημεία Α και C όσο κοντά επέτρεπε το πρόγραμμα και στη συνέχεια ακολούθησαν την αντίθετη διαδικασία από εκείνη του ζουμ. Οι όποιες δυσκολίες συναντώνται στο παρόν μέρος οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στην έλλειψη γεωμετρικού τρόπου σκέψης από πλευράς μαθητών. Οι μαθητές φαινομενικά είναι σε θέση να χειριστούν, το ε.ι.τ, να βρουν σε ποια σημεία υπάρχει εφαπτομένη και γνωρίζουν και τις ιδιότητες που αυτή, πλέον, μπορεί να έχει. Ωστόσο, αν και εφαρμόζουν το ε.ι.τ, δεν είναι σε θέση να βασιστούν στον τρόπο λειτουργίας του και τις ιδιότητές του για να οδηγηθούν σε ορθή απάντηση.

Ε. Πως ορίζεται η εφαπτομένη στα άκρα ενός γραφήματος

Το ε.ι.τ δημιούργησε μια πρόσθετη δυσκολία στους μαθητές όταν προσπάθησαν να υπολογίσουν την εφαπτομένη στα άκρα ενός σχήματος. Δεν ήταν ξεκάθαρο το πώς δουλεύει σε αυτήν την περίπτωση.

Η παρανόηση δημιουργήθηκε από το γεγονός ότι κατά την εφαρμογή του ε.ι.τ στο ημικύκλιο, οι μαθητές προσπάθησαν να το εφαρμόσουν στο άκρο του ημικυκλίου, (Σχήμα 4.1.22) ταυτίζοντας όλα τα σημεία. Στη προσπάθεια αυτή δεν εστίασα την προσοχή των μαθητών σε αυτήν τη συγκεκριμένη περίπτωση για να μην δημιουργηθεί σύγχυση με τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ. Σκοπός μου ήταν να δεχθούν την εγκυρότητά του, ανεξάρτητα από το σχήμα. Αν εισήγαγα υποπεριπτώσεις θα ήταν πιο δύσκολο να αντιληφθούν οι μαθητές τη λειτουργία του ε.ι.τ.



Σχήμα 4.1.22

Φαίνεται η προσπάθεια προσέγγισης της εφαπτομένης στο άκρο ενός σχήματος με χρήση του ε.ι.τ.

Παρόλα αυτά, σε μεταγενέστερο στάδιο και όταν ολοκλήρωσα την παρέμβαση για την ανακατασκευή της εικόνας που έχουν οι μαθητές για την εφαπτομένη, προέκυψε από τους ίδιους η απορία για το πώς δουλεύει το ε.ι.τ στα άκρα ενός γραφήματος:

Μ2: *Στην άκρη δεν γίνεται. Πώς θα το κάνουμε; Δεν γίνεται να έχουμε δύο σημεία.*
Ε: *Θα το κάνουμε με ένα.*
Μ2: *Αφού πάντα θα είναι μία ευθεία.*

Όπως φαίνεται, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη δυσκολία εφαρμογής του ε.ι.τ στα άκρα ενός γραφήματος, δεν τους είναι όμως εύκολο να κάνουν την προσαρμογή του ε.ι.τ σε αυτή την κατάσταση. Οπότε μια περεταίρω διερεύνηση προς αυτήν την κατεύθυνση πρέπει να συμπεριληφθεί ώστε να επιτευχθεί καλύτερη σύνδεση μεταξύ της γενικής εφαπτομένης και αυτής του κύκλου, σε σχέση πάντα με το ε.ι.τ.

4.2 Αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα σε σχέση με την οριακή φύση της εφαπτομένης

Στο αυτό μέρος της ανάλυσης δίνεται απάντηση στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα. Δηλαδή, αν οι μαθητές είναι σε θέση να δημιουργήσουν νοήματα σχετικά με την οριακή φύση της εφαπτομένης. Πρώτα, όμως, γίνεται μια σύνδεση της εφαπτομένη με τα αναλυτικά της χαρακτηριστικά και μια προσπάθεια δημιουργίας ενός κώδικα επικοινωνίας με τους μαθητές, που να παραπέμπει σε οριακές διαδικασίες.

4.2.1 Η εφαπτομένη ως εξίσωση ευθείας σε τυχαία καμπύλη

Στην ενότητα αυτή στόχος είναι να εξεταστεί ο βαθμός κατανόησης των μαθητών σε σχέση με τις συναρτήσεις και στη συνέχεια να γίνει μελέτη της εφαπτομένης μέσα από την εξίσωση ευθείας που την περιγράφει.

Α. Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης και του γραφήματός της

Οι μαθητές όσον αφορά στο γνωστικό τους επίπεδο είναι σε θέση να χειριστούν την έννοια της συνάρτησης και το γράφημά της. Έγινε μια προσπάθεια να εξεταστεί ο βαθμός κατανόησης των μαθητών και προέκυψε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με τον χειρισμό της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης όπως και με την έννοια της συνάρτησης. Κατά την ενασχόλησή τους με συγκεκριμένες δραστηριότητες αγνοούν το τί κρύβεται πίσω από την έννοια της γραφικής παράστασης, την οποία αντιμετωπίζουν ως σχήμα. Αυτό, ίσως, να οφείλεται και στην πρότερη ενασχόληση που είχαν με τα σχήματα στις πρώτες δραστηριότητες της έρευνας.

Σε μια ερώτηση κλασικού τύπου που τέθηκε στην ομάδα Β για το τί είναι συνάρτηση, δυσκολεύτηκαν αρκετά στο να μας απαντήσουν. Στους μαθητές επικρατεί μια σύγχυση. Το μόνο που έχουν να πουν για τη συνάρτηση σχετίζεται όχι με το τί είναι αλλά με το πώς παριστάνεται ως γράφημα και πώς τη συμβολίζουμε.

Ε: *Θα πούμε κάποια πράγματα για όρια και συναρτήσεις. Συναρτήσεις τί είναι;*
Μ3: *Πώς να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, κάποιες ιδιότητες.*
Ε: *Αυτά έχουμε μάθει και τα βρίσκουμε. Η συνάρτηση τί είναι για εσάς;*

Μ4: *Κάτι με χ και y και κάτι τέτοιο, δε θυμάμαι πώς μας το είχε πει,*

Μ3: *Ορισμό της συνάρτησης εννοείτε;*

Ε: *Τον ορισμό της συνάρτησης, δεν είναι ανάγκη να είναι ο αυστηρός ορισμός, με δικά σας λόγια. Για εσάς τί είναι η συνάρτηση;*

Μ4: *Μία γραμμή πάνω σε έναν άξονα.*

Ε: *Αυτό είναι το γράφημα της συνάρτησης, η γραφική της παράσταση.*

Μ4: *Α! Είναι μια εξίσωση.*

Μ3: *Είναι μια εξίσωση η οποία, αν δώσουμε μία τιμή στο x, θα μας δώσει κάποια αντίστοιχη τιμή στο y.*

Η ομάδα Α δυσκολεύτηκε ακόμα περισσότερο να φτάσει σε κάποια διατύπωση για το τί είναι συνάρτηση.

Ε: *… Τί είναι συνάρτηση, Μ2; Όχι αυστηρό μαθηματικό ορισμό.*

Μ2: *-*

Ε: *Μ1;*

Μ1: *-*

Ε: *Τί τιμές παίρνει η συνάρτηση;*

Μ1: *Διάφορες*

Ε: *Κάποια χ. Και τί μας δίνει;*

Μ2 : *ψ.*

Ε: *Με ποιον τρόπο βγαίνουν αυτά τα ψ;*

Μ2: *Με μία εξίσωση.*

Όταν οι άξονες του ορθοκανονικού συστήματος δυσκόλεψαν τους μαθητές να εφαρμόσουν το ε.ι.τ, (Σχήμα 3.2.3 (4)), τους ζητήθηκε να τους απομακρύνουν για να μπορέσουν να έχουν καλύτερη εποπτεία του τί συμβαίνει. Οι μαθητές από εκείνη τη στιγμή και έπειτα, και σε όλα τα υπόλοιπα γραφήματα, απομάκρυναν τους άξονες και εργάζονταν καθαρά σχηματικά. Διαλέγουν τη μορφή με την οποία είναι πιο εξοικειωμένοι, εκείνη του σχήματος έναντι του γραφήματος. Ο λόγος είναι ότι το γράφημα έρχεται σε αντίθεση με την εποπτεία που έχουν αποκτήσει από τα προηγούμενα σχήματα. Συνεπώς, οι μαθητές επιλέγουν μια σχηματική προσέγγιση.

Β. Σύνδεση ε.ι.τ με τη μεταβολή των κλίσεων των τεμνουσών και της εφαπτομένης

Η σύνδεση της κλίση της εφαπτομένης με το ε.ι.τ αποτελεί ένα σημαντικό βήμα προς την οριστική αποδέσμευση της εφαπτομένης από το σχήμα. Σημαντικό είναι από την όλη διαδικασία να προκύψει η ανάγκη

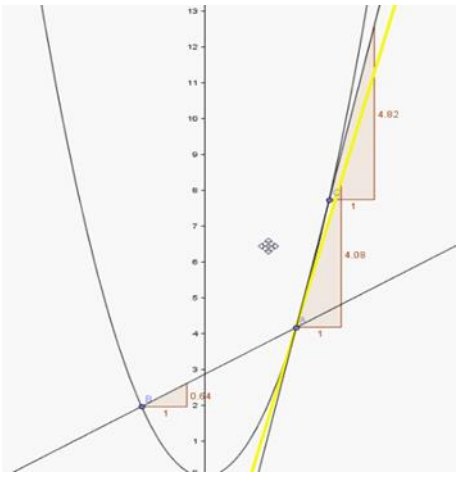
εύρεσης της κλίσης χωρίς ψηφιακά εργαλεία. Η ανάγκη, δηλαδή, εισαγωγής ενός νέου μαθηματικού εργαλείου.

Οι μαθητές από το εισαγωγικό κιόλας κομμάτι φάνηκε να μην είναι σε θέση να ανακαλέσουν τον αναλυτικό τύπο της εξίσωσης της ευθείας. Μόνο ένας μαθητής από κάθε ομάδα είναι σε θέση να δουλέψει με αυτόν. Ουσιαστικά αυτοί είναι που κάνουν την υπενθύμιση του αναλυτικού τύπου της εξίσωσης της ευθείας. Έτσι, οι δυο ομάδες έφτασαν στην διατύπωση ότι χρειάζονται δύο σημεία για τον υπολογισμό του συντελεστή διεύθυνσης.

Μ3: *Θα χρειαστούμε ένα σημείο με συντεταγμένες.*
Ε: *Το σημείο το έχουμε, τί θέλουμε να εμφανίσουμε*
Μ3: *Τις συντεταγμένες.*
Μ4: *Είναι περίεργες οι συντεταγμένες.*
Ε: *Θα τις αλλάξουμε. Τί άλλο χρειαζόμαστε;*
Μ4: *Άλλο ένα σημείο για να υπολογίσουμε το λ, πάνω στην ευθεία.*

Όμοια και η άλλη ομάδα μαθητών διατύπωσε, λίγο πιο αυστηρά τα απαραίτητα στοιχεία που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της εξίσωσης μιας ευθείας.

Μ2: $y-y_o= \lambda (x-x_o)$
Ε: *Οπότε χρειαζόμαστε…*
Μ2: *Ή ένα σημείο και τον συντελεστή διεύθυνσης ή δύο σημεία.*



Σχήμα 4.2.1

Εισαγωγή του ε.ι.τ σε μια παραβολή. Φαίνεται ο τρόπος που το Geogebra απεικονίζει τις κλίσεις των τεμνουσών και της εφαπτομένης.

Οι μαθητές έκαναν χρήση των εντολών που δίνει το Geogebra βρίσκοντας τις συντεταγμένες στο σημείο επαφής και σε ένα τυχαίο σημείο, εκτός του γραφήματος της παραβολής. Έτσι, υπολόγισαν την κλίση με αντικατάσταση στον τύπο λ= $\frac{y_2-y_1}{\chi_2-\chi_1}$ και κατά επέκταση την εξίσωση της εφαπτομένης στο σταθερό σημείο που οι ίδιοι είχαν ορίσει. Σε αυτήν τη φάση το ε.ι.τ είχε ρόλο επικύρωσης των όσων κάνουν οι μαθητές με χαρτί και μολύβι. Οι μαθητές ασχολούνται με την γραφική παράσταση της παραβολής (Σχήμα 4.2.1), που είναι πολύ κοντά στον κύκλο, όσον αφορά την εφαπτομένη και της ιδιότητές της. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές περνούν με

έναν ομαλό τρόπο από τα σχήματα στα γραφήματα. Επιπλέον, τους επιτρέπει να συνδέσουν τη μεταβολή του συντελεστή διεύθυνσης με το ε.ι.τ.

Κάτι τέτοιο το επετεύχθη ζητώντας από τους μαθητές να συσχετίσουν την μεταβολή των συντελεστών διεύθυνσης των τεμνουσών με εκείνων της εφαπτομένης. Οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να εργαστούν προς τη σωστή κατεύθυνση. Η όποια δυσκολία προέκυψε οφειλόταν στη λίγη εξοικείωση με το Geogebra. Οπότε, με σχετικά λίγη βοήθεια κατάφεραν να διατυπώσουν ότι καθώς οι τέμνουσες «πλησιάζουν» την εφαπτομένη, οι συντελεστές διεύθυνσής τους τείνουν να ταυτιστούν.

Μ2-Μ1: *Πρέπει να πάνε τα σημεία στο σταθερό σημείο.*
Ε: *Για πάμε να το κάνουμε να δούμε τί γίνεται. Τί τιμές παίρνει η κλίση καθώς πλησιάζουμε;*
… Όσο πλησιάσαμε, οι κλίσεις πού πλησίασαν;
Μ2-Μ1: *Στην κλίση της εφαπτομένης.*
Ε: *Οπότε στην ουσία αυτό που είχαμε ως ταύτιση ευθειών στην ουσία , ήταν…*
Μ2: *Ταύτιση των κλίσεων.*
Ε: *Ταύτιση των συντελεστών διεύθυνσης… Οπότε πότε έχουμε εφαπτομένη;…*
Όταν οι συντέλεσες διεύθυνσης πηγαίνουν …
Μ2: *Στον ίδιο αριθμό.*

Ομοίως κινήθηκε και η ομάδα Β.

Ε: *… Πάμε να κάνουμε το «πλησίασμα». Τί παρατηρούμε;*
Μ3-Μ4: *Θα αποκτήσουν την ίδια κλίση.*
Ε: *Είπαμε ότι οι δύο ευθείες πλησιάζουν η μία την άλλη. Στην ουσία τί είναι αυτό που μεταβάλλεται συνεχώς; Οι ευθείες ή οι κλίσεις τους;*
Μ3: *Οι ευθείες.*
Μ4: *Οι κλίσεις.*
Ε: *Έχουμε επιλέξει ένα σταθερό σημείο, οπότε έχουμε σταθερά* x_o, y_o, *και δύο σημεία που ορίζουν τις ευθείες, τα οποία μεταβάλλονται. Οπότε εκείνο που μεταβάλλεται συνέχεια είναι …*
Μ3-Μ4: *Οι κλίσεις.*
Ε: *Οπότε το πλησίασμα των ευθειών είναι στην ουσία πλησίασμα της ...*
Μ4: *Της κλίσης.*

Για να πραγματοποιηθεί πλήρης συσχετισμός με το πώς λειτουργεί το ε.ι.τ οι μαθητές πρέπει να φτάσουν στο πότε δεν υπάρχει εφαπτομένη σε ένα σημείο. Να σχετίσουν δηλαδή τί γίνεται σε αυτήν την περίπτωση με τις κλίσεις των δύο τεμνουσών. Οι μαθητές με τον πειραματισμό τους με το γράφημα της

παραβολής δεν δυσκολεύτηκαν να φτάσουν στο συμπέρασμα ότι η μη ύπαρξη εφαπτομένης συνδέεται με τη μη ταύτιση των συντελεστών διεύθυνσης.

Μ1: *Όταν σχηματίζουν μια ευθεία.*
Ε: *Όταν οι δύο ευθείες ταυτιστούν, τότε λέμε ότι έχουμε εφαπτομένη. Όμως είδαμε ότι ουσιαστικά αυτό που μεταβάλλεται συνέχεια δεν είναι τίποτε άλλο από την …*
Μ2: *..Την κλίση.*
Ε: *Όταν η κλίση γίνει ίση, σε εκείνο το σημείο έχουμε εφαπτομένη. Πότε δεν έχουμε εφαπτομένη σύμφωνα με τα όσα είπαμε;*
Μ2*: Όταν δεν έχουμε μία ευθεία.*
Ε: *Δηλαδή όταν οι κλίσεις…*
Μ2: *…είναι πάντοτε διαφορετικές.*

Με διάλογο με τους μαθητές γίνεται προσπάθεια προσαρμογής της λειτουργίας του ε.ι.τ και σύνδεσής του αποκλειστικά με τον συντελεστή διεύθυνσης. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μειώνουν την εξάρτηση που έχουν από το σχήμα σε σχέση με την ύπαρξη ή μη της εφαπτομένης. Οι μαθητές σε ορισμένες καταστάσεις έκαναν μόνοι τους τη σύνδεση και σε ορισμένες περιπτώσεις απάντησαν με βάση το ε.ι.τ εμπλουτισμένο με τα όσα είπαμε για τους συντελεστές διεύθυνσης. Έτσι κατά τη προσπάθεια εύρεσης εφαπτομένης σε γραφήματα η ομάδα Β έκανε χρήση των κλίσεων για να φτάσει στην απάντηση. Ωστόσο, υπήρχε μία σύγχυση στους μαθητές οι οποίοι ταλαντεύτηκαν ανάμεσα στις τέμνουσες και στις κλίσεις αυτών.

Μ4: *Δεν θα έχουμε στη γενίκευση 5.* (Παράρτημα 4)
Μ3: *Ναι.*
Ε: *Για ποιό λόγο;*
Μ4: *Γιατί είναι σχήμα με ευθείες, άρα…*
Μ3: *Η εφαπτομένη θα είναι πάνω στην ευθεία οπότε..*
Μ4: *…δεν θα υπάρχει η κλίση*
Κ : *Η κλίση θα είναι πάντα…*
Μ4-Μ3: *…η ίδια.*

Επιπλέον, έγινε μια προσπάθεια να φανεί ότι είναι επιτακτική η ανάγκη εύρεσης του συντελεστή διεύθυνσης ο οποίος δεν βασίζεται στο ψηφιακό εργαλείο. Η πρώτη απόπειρα έγινε κατά την προσπάθεια σύνδεσης του ε.ι.τ με την κλίση των τεμνουσών.

Ε: *… Η μοναδική δυσκολία που είχαμε στον υπολογισμό της εξίσωσης μιας ευθείας ποιά ήταν;*
Μ3: *Να βρούμε το λ.*
Ε: *Θα ήταν ωραίο να μπορούμε να υπολογίσουμε με έναν εύκολο μαθηματικό τρόπο το λ και να μην χρειαζόμαστε κάθε φορά τον υπολογιστή για να υπολογίζουμε την κλίση;*
Μ3: *Ναι.*
Μ4: *Εντάξει.*
Ε: *Φανταστείτε ότι δεν θα ξέρουμε πάντα δύο σημεία. Μπορεί να γνωρίζουμε μόνο το ένα.*
Μ3: *Σωστό αυτό.*

Η δεύτερη προσπάθεια έλαβε μέρος σε μεταγενέστερο στάδιο όπου οι μαθητές είχαν τελειώσει με την ανακατασκευή της εφαπτομένης και των αναλυτικών της χαρακτηριστικών.

Ε: *Αυτό, όμως είναι το εργαλείο. Ως ορισμό τί θα μπορούσαμε να δώσουμε;*
Μ4: *Εφαπτόμενη είναι η ευθεία που περνά από ένα σχήμα…*
Μ3: *..από ένα σημείο…*
Μ4: *…και να ακουμπά σε ένα σημείο.*
Ε: *Αυτό που αλλάζει κάθε φορά είναι….*
Μ4-Μ3 : *Η κλίση.*
Κ : *Οπότε για να ορίσουμε την εφαπτομένη χρειαζόμαστε…*
Μ4: *…το λ.*
Ε: *Αλλά πώς υπολογίζουμε το λ αν δεν γνωρίζουμε τίποτα πέρα από την εξίσωση της ευθείας και δεν έχουμε τα εργαλεία του υπολογιστή;*

Όπως φαίνεται οι μαθητές κατανοούν την ανάγκη εισαγωγής ενός τρόπου υπολογισμού της κλίσης. Δεν μπαίνουν σε μια μεταγνωστική διαδικασία ώστε να προβληματιστούν και να εκφράσουν απόψεις επί του θέματος. Ίσως, χρειαζόταν να έχω ετοιμάσει ένα ξεχωριστό φύλλο εργασίας για αυτό το κομμάτι όπου οι μαθητές θα έφταναν μόνοι τους στην ανάγκη εισαγωγής ενός κατάλληλου μαθηματικού εργαλείου.

4.2.2 Αν και πώς μπορεί να συνδεθεί η εφαπτομένη με την οριακή της φύση

Με τη παρούσα έρευνα δεν είναι στόχος η πλήρης κατανόηση από τους μαθητές εννοιών όπως αυτές του ορίου, αλλά να εξεταστεί κατά πόσο το ε.ι.τ μπορεί να λειτουργήσει ως βάση για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του ορίου σε πιο πρώιμη ηλικία. Κατά πόσο δηλαδή οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν κάποιας μορφής οριακή διαδικασία έστω και αν δεν

έχουν διδαχθεί ακόμα τίποτα περί ορίου και ενώ ο τρόπος χειρισμού των συναρτήσεων βρίσκεται σε πολύ πρώιμο στάδιο. Στην προσπάθεια αυτή χρειάστηκε να κατασκευαστεί όλο εκείνο το πλαίσιο που θα βοηθήσει τους μαθητές να εκφραστούν καλύτερα με έννοιες που παραπέμπουν σε οριακές διαδικασίες.

Α. Σύνδεση ε.ι.τ με λεξιλόγιο που παραπέμπει σε οριακές διαδικασίες

Το ε.ι.τ είναι ένα δυναμικό εργαλείο που δείχνει το «πλησίασμα» των δύο τεμνουσών προς την ευθεία της εφαπτομένης. Οι μαθητές αρχικά αντιλαμβάνονται αυτό το «πλησίασμα» και το εκφράζουν με λέξεις από την καθημερινότητά τους. Μόνο ένας μαθητής κατάφερε εξαρχής να κάνει χρήση της λέξης «τείνει» χωρίς όμως να είναι σε θέση να νοηματοδοτήσει πλήρως τη λέξη αυτή. Η πλειονότητα των μαθητών όταν έκανε χρήση της λέξης «τείνει», αναφερόταν σε μια διαδικασία που πάει σε κάποιον αριθμό αλλά δε θα τον φτάσει ποτέ και σίγουρα δεν μπορεί να τον ξεπεράσει. Δηλαδή, είναι σαν ένα άνω φράγμα. Όλες αυτές οι έννοιες προκαλούν σύγχυση στους μαθητές γιατί διαφοροποιούνται αισθητά από τον τρόπο που έχουν μάθει να τις χρησιμοποιούν στην καθημερινότητά τους. Οπότε παρουσιάζει ενδιαφέρον να παραθέσω πώς τροποποιήθηκε το λεξιλόγιο των μαθητών μέσα από την ενασχόλησή τους με το ε.ι.τ. Για το λόγο αυτό σε διάφορα σημεία της εργασίας ζητήθηκε από τους μαθητές να διατυπώσουν με δικά τους λόγια τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ.

Κατά την πρώτη επαφή τους με το ε.ι.τ οι μαθητές εκφράστηκαν σχετικά με το «πλησίασμα» το οποίο πραγματοποιείται στην οθόνη με απλό λεξιλόγιο.

Κ: *… Μπορούμε να κάνουμε μια σύνοψη στο πώς δουλεύει αυτό το εργαλείο; Σε ένα σημείο για να βρούμε την εφαπτομένη πώς θα πρέπει να δουλέψουμε;*

Μ3: *Πρέπει να πάρουμε ένα σημείο δεξιά του σταθερού σημείου και ένα σημείο αριστερά. Να πάρουμε δύο ευθείες*

Ε: *Και αυτές οι δύο ευθείες τί γίνονται;*

Μ4: *Να πλησιάσουν το σταθερό σημείο.*

Μ3: *Να πλησιάσουν το σταθερό σημείο, ώστε να γίνουν μία ευθεία και αυτή η μία ευθεία θα είναι η εφαπτομένη του κύκλου.*

Αυτή η διατύπωση του ε.ι.τ με το «πλησίασμα» των δύο ευθειών εμφανίζεται σε αρκετά σημεία της εργασίας και οφείλεται κυρίως στο ότι είναι πιο κοντά στη φυσική γλώσσα των μαθητών. Στην ομάδα Α τροποποίησα λίγο την προσέγγιση. Ως εκ τούτου οι μαθητές δεν διατύπωσαν τελείως μόνοι τους το πώς δουλεύει το ε.ι.τ, αλλά μέσω μιας σειράς καθοδηγητικών ερωτήσεων. Ως αποτέλεσμα έκαναν χρήση της λέξης «τείνουν» .

Μ2: *Γίνονται εφαπτομένη.*
Ε: *Πότε γίνεται εφαπτομένη;*
Μ2: *Όταν τα σημεία ταυτίζονται.*
Ε: *Απλά τα ταυτίζουμε. Δηλαδή απλά πηδάμε από το ένα σημείο και πάμε στο άλλο;*
Μ2: *Υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία.*
Ε: *Πώς θα μπορούσαμε να πούμε ότι σιγά σιγά πάνε στο Β;*
Μ2: *Τείνουν στο Β.*
Ε: *Μιλώντας για τις ευθείες, όταν τα σημεία πλησιάζουν το Β, οι ευθείες τείνουν να γίνουν η εφαπτομένη, δηλαδή να γίνουν μία ευθεία.*

Οι μαθητές από την πρώτη κιόλας επαφή έχουν τη διαίσθηση του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζεται η εφαπτομένη. Ωστόσο, ακόμα το «πλησίασμα» αυτό επικεντρώθηκε στα σημεία και όχι στην ίδια την εφαπτομένη (Σχήμα 4.1.1). Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η σύνδεση με τις ευθείες και οι μαθητές ξαναδιατύπωσαν πώς αντιλαμβάνονταν τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ.

Ε: *… Πες μου εσύ Μ1 να δούμε πώς έχεις αντιληφθεί τα όσα έχουμε πει έως τώρα.*
Μ1: *Ότι αυτές οι δύο ευθείες όταν τείνουν προς το Β, θα συμπίπτουν με την εφαπτομένη.*
Ε: *Ωραία. Γιατί χρησιμοποίησες την λέξη τείνουν;*
Μ1: *Ότι έρχονται πιο κοντά στο Β.*
Ε: *Πώς αλλιώς θα μπορούσαμε να πούμε το πιο κοντά;*
Μ1: *Προσεγγίζουν;*

Από τη σύνδεση που έγινε πιο πριν οι μαθητές ήταν σε θέση να διατυπώσουν το ε.ι.τ με λέξεις που παραπέμπουν σε οριακές διαδικασίες. Υπήρχε ακόμα μια σύγχυση μεταξύ των ευθειών και των σημείων που τις ορίζουν. Ίσως να διευκόλυνε περισσότερο τους μαθητές η ύπαρξη της εφαπτομένης στο σχήμα με το οποίο πραγματεύονταν. Έτσι, πολύ πιθανόν να εστίαζαν κατευθείαν στο πλησίασμα των ευθειών προς την εφαπτομένη και να αποδεσμεύονταν από το σταθερό σημείο.

Στο παραπάνω απόσπασμα ο μαθητής Μ2 ενώ αρχικά χρησιμοποίησε την λέξη «τείνουν» και ότι θα «συμπίπτουν» με την εφαπτομένη του ήταν δύσκολο να ενσωματώσει αυτή την ταύτιση. Στο μυαλό του μαθητή φαίνεται να διαφοροποιείται η ταύτιση από το συνεχές πλησίασμα. Είναι σαν να έχουμε ένα άλμα μεταξύ των δύο εννοιών. Όταν τελειώσει το συνεχές πλησίασμα, αναγκαστικά πραγματοποιείται ένα λεκτικό άλμα και αναγκαστικά οι ευθείες ταυτίζονται. Η διαφοροποίηση αυτή των δύο λέξεων έκανε την εμφάνισή της και στην ομάδα Β. Εδώ φαίνεται πιο καθαρά η σύγχυση που υπάρχει στους μαθητές ανάμεσα στο συνεχές πλησίασμα και στην ταύτιση των δύο ευθειών.

Ε: *… Το πλησίασμα αυτό θα μπορούσαμε να το πούμε με διαφορετικό τρόπο; Ας το σκεφτούμε κυρίως με τις τεμνόμενες ευθείες. Αυτή η διαδικασία, αυτές οι δύο ευθείες τί κάνουν την εφαπτομένη;*
Μ3: *Τη σχηματίζουν, τη δημιουργούν.*
Ε: *Έχουμε ήδη πει ότι την πλησιάζουν. Το πλησίασμα πώς θα μπορούσαμε να το πούμε με άλλα λόγια;*
Ε: *Στην ουσία οι δύο ευθείες προσεγγίζουν σιγά σιγά την εφαπτομένη.*
Μ4: *Δηλαδή δεν είναι η εφαπτομένη;*

Στη συνέχεια τίθεται στους μαθητές το ίδιο ερώτημα στρέφοντας αυτή τη φορά την προσοχή τους στην κλίση των τεμνουσών σε σχέση με αυτή της εφαπτομένης. Οι μαθητές εργάστηκαν πάνω στην παραβολή και στο σχήμα όπου υπήρχε η ευθεία της εφαπτομένης και η μεταβολή των κλίσεων, ως μέσο επικύρωσης.

Ε: *Οπότε πότε έχουμε εφαπτομένη;… Όταν οι συντέλεσες διεύθυνσης πηγαίνουν …*
Μ2: *Στον ίδιο αριθμό.*
- - - - - - - -
Ε: *Οι κλίσεις τείνουν να πάρουν τον ίδιο αριθμό.*
Οπότε πώς μεταβάλλεται η κλίση των δύο ευθειών σε σχέση με αυτήν της εφαπτομένης;
Μ4: *Ότι αποκτούν την ίδια κλίση η εφαπτομένη με τις ευθείες. Τείνουν τουλάχιστον.*
Ε: *Εσύ, Μ3;*
Μ3: *Όσο πηγαίνουμε το ένα σημείο πάνω στο άλλο, η κλίση των ευθειών τείνει να γίνει ίδια.*

Όπως φαίνεται οι μαθητές σιγά σιγά αφομοιώνουν το νέο προς αυτούς λεξιλόγιο και αρχίζουν να το χρησιμοποιούν πιο ελεύθερα. Η δήλωση του Μ4 δείχνει μια μορφή αμφιβολίας. Είναι η πρώτη φορά που έχουμε κάποια

δήλωση της μορφής αυτής. Αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο ότι οι συντελεστές διεύθυνσης μπορεί και να μη ταυτιστούν. Αυτό ίσως έχει προέλθει από την πρότερη ενασχόληση των μαθητών με περιπτώσεις μη ύπαρξης εφαπτομένης. Οι μαθητές, πλέον, έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούν το ε.ι.τ, κάνοντας χρήση λεξιλογίου που παραπέμπει σε οριακές διαδικασίες. Ωστόσο, έως τώρα ότι γνωρίζουν σχετικά με αυτές περιορίζεται στα ερεθίσματα που έχουν από το φυσικό τους κόσμο.

Β. Νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές σχετικά με την οριακή φύση της εφαπτομένης

Ο όλος σχεδιασμός της εργασίας βασίστηκε στο να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές με την ενασχόλησή τους με το ε.ι.τ μπορούν να αντιληφθούν την οριακή διαδικασία, κυρίως ως διαδικασία προσέγγισης. Ο λόγος είναι ότι οι μαθητές βρίσκονται σε πολύ πρώιμο στάδιο, όσον αφορά τα νοήματα σε έννοιες της ανάλυσης, όπως είναι οι συναρτήσεις. Οπότε δεν αναμένεται από αυτούς να κατανοήσουν πλήρως τον ορισμό του ορίου. Θέλω να εξετάσω πόσο κοντά μπορούν να φτάσουν σε αυτόν με ένα διαισθητικό τρόπο προσέγγισης και πώς μπορούν να τον συνδέσουν με την εφαπτομένη. Ακόμα επιδιώκω να δημιουργηθεί στους μαθητές η ανάγκη εισαγωγής ενός μαθηματικού εργαλείου που θα μας βοηθά στον υπολογισμό της εξίσωσης της εφαπτομένης.

Για να γίνει αντιληπτός ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές πρέπει πρώτα να διερευνηθεί τί σημαίνει η λέξη όριο για αυτούς:

Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές το όριο και πώς μέσα από τη φυσική γλώσσα μπορούμε να πλησιάσουμε το μαθηματικό του ορισμό

Πριν από οποιαδήποτε προσπάθεια σύνδεσης ανάμεσα στο ε.ι.τ και το όριο πρέπει να ξεπεραστεί ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα που συναντάτε σχετικά με το όριο. Το εμπόδιο αυτό δεν είναι άλλο από αυτό της φυσικής γλώσσας. Οι μαθητές από την καθημερινή τους εμπειρία έχουν δώσει στο όριο μορφή άνω φράγματος όπου δε μπορεί να ξεπεραστεί. Αυτό έκανε την εμφάνισή του από τη πρώτη συζήτηση που είχα με τους μαθητές. Έτσι για αυτούς όριο είναι:

Ε: *Όταν λέμε μια οριακή κατάσταση, τί είναι για εσάς;*
Μ2: *Ότι δεν έχει περεταίρω;*
Ε: *Ότι δεν έχει;*
Μ2: *Περαιτέρω.*
Ε: *Περισσότερο;*
Μ2: *Ναι, ότι κάπου τελειώνει.*

Παρόμοια ήταν και η απάντηση της άλλης ομάδας:

Μ3: *Το μέγιστο που μπορεί να φτάσει και το ελάχιστο;*
Ε: *Αν σας δώσουν αυτό το σχήμα το μέγιστο είναι εδώ και το ελάχιστο είναι εδώ. Αυτό πώς θα σας βοηθούσε;*
Μ4: *Θα ξέραμε μέχρι πού θα μπορούσε να φθάσει.*
Ε: *Αυτό δεν είναι το όριο, αλλά το μέγιστο και ελάχιστο, τα ακρότατα. Έχουμε δώσει άλλον ορισμό για αυτά. Στη φύση εσείς, πώς αντιλαμβάνεστε το όριο;*
Μ3: *Το μέγιστο που μπορεί να φθάσει κανείς;*
Μ4: *Όχι.*

Για τις δύο ομάδες το όριο είναι κάτι που έχει τέλος, που δεν μπορεί να ξεπεραστεί. Οπότε έγινε από μέρους μου μια προσπάθεια ανακατασκευής αυτής της άποψης. Πρέπει οι μαθητές να αντιληφθούν διαισθητικά το όριο ως ένα σημείο που συγκεντρώνονται οι τιμές μιας συνάρτησης. Στους μαθητές έγινε μια προσπάθεια να παρουσιαστεί το όριο όσο πιο απλά γίνεται με εικόνες από την καθημερινότητα για το λόγο αυτό εισάγω το όριο ταχύτητας. Η ταχύτητα των αυτοκινήτων είναι οι τιμές της συνάρτησης. Οπότε υπάρχουν τιμές που κινούνται κάτω από το όριο ταχύτητας, τιμές που κινούνται πάνω από το όριο ταχύτητας και τιμές ακριβώς στο όριο ταχύτητας. Το σημαντικό είναι ότι αν συγκεντρωθούν όλες οι τιμές μαζί, αυτές θα είναι το όριο ταχύτητας του αυτοκινητοδρόμου ή τουλάχιστον πάρα πολύ κοντά σε αυτό.

Εισαγωγή στο μαθηματικό ορισμό του ορίου μέσω των πλευρικών ορίων, τί νοήματα δημιουργούν οι μαθητές σε σχέση με το ε.ι.τ

Γίνεται μια προσπάθεια να εισαχθεί στους μαθητές ο ορισμός του ορίου. Λόγω της έλλειψης χρόνου, δεν είχα την πολυτέλεια να αφιερώσω μεγάλο χρονικό διάστημα σε αυτό το κομμάτι. Οι μαθητές είναι δύσκολο να διδαχθούν και να κατανοήσουν πλήρως τον αυστηρό ορισμό του ορίου σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα. Στη προσπάθεια να εισάγω το όριο με έναν

αυστηρά φορμαλιστικό τρόπο, οι μαθητές φάνηκε να μπερδεύονται από τους συμβολισμούς και από τον τρόπο που γίνεται η αντικατάσταση στην τιμή της συνάρτησης. Για το λόγο αυτό έδωσα στους μαθητές έναν κάπως πιο διαισθητικό ορισμό και επικεντρώθηκα στα πλευρικά όρια και πώς αυτά πλησιάζουν από δεξιά και από αριστερά τις τιμές μιας συνάρτησης. Οι μαθητές έδειξαν να αντιλαμβάνονται αυτό το «πλησίασμα» και ένας από αυτούς έκανε μόνος του τη γενίκευση ότι είναι το ίδιο πράγμα που κάνουμε για να βρούμε την εφαπτομένη σε ένα σημείο.

Μ4: *Ναι.*

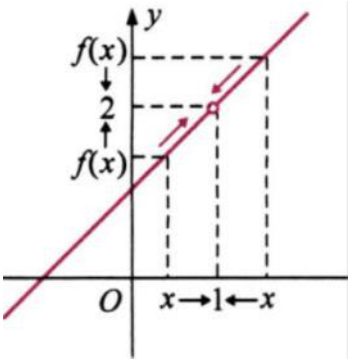
Ε: *Μετά από αυτά που είπαμε, τί καταλάβαμε για το όριο;*

Μ4: *Το όριο ακριβώς τί είναι δεν κατάλαβα, απλά κατάλαβα αυτό που μας είπατε με την ευθεία.* (Εννοεί το γράφημα)

Μ3: *Κι εγώ αυτό.*

Φαίνεται να αντιλαμβάνονται τη σχηματική παράσταση του ορίου. Ο τρόπος με τον οποίο προσπάθησα να κάνω την εισαγωγή του ορίου, ήταν μέσω του σχήματος μιας τυχαίας καμπύλης και κινήθηκα περίπου όπως στο σχήμα 4.2.2.

Ε: *Αυτό το πλησίασμα το ονομάσαμε όριο εμείς. Το βελάκι που πλησιάζει το έγραψα «όριο» π (lim) το οποίο στην ουσία σημαίνει τείνω. Πηγαίνει στο x από τιμές μικρότερες, x_o στην περίπτωση μας. Για αυτά τα x η συνάρτηση παίρνει κάποιες τιμές. Η συνάρτηση άλλο τύπο έχει εδώ πέρα κι άλλο τύπο εδώ, ή μπορεί να είναι και ο ίδιος. Καθώς το x πηγαίνει στο x_o από τιμές μικρότερες, πάμε να δούμε τί κάνει η συνάρτηση, σε αυτό το διάστημα. Ό,τι κίνηση γίνεται εδώ πέρα, η ίδια κίνηση γίνεται κι εδώ πέρα. Η συνάρτηση θα περιοριστεί στην περιοχή $f(x_o)$-ε , $f(x_o)$+ε. Αυτός ο αριθμός που θα προκύψει είναι το όριο, το «πλησίασμα» που λέμε, δηλαδή το πόσο κοντά μπορούμε να φθάσουμε.*



Σχήμα 4.2.2

Σχηματική προσέγγιση του ορίου όπως παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο.

Μ4: *Όπως με την εφαπτομένη που σιγά σιγά πλησιάζουμε.*

Ε: *Αυτό πρέπει να αντιληφθούμε, ότι είναι μια οριακή κατάσταση, το όριο των δύο τεμνουσών.*

Μ3: *Οπότε όπως οι δύο ευθείες τείνουν να γίνουν μία ,έτσι και εδώ .*

Όπως φαίνεται για τους μαθητές το όριο ως έννοια φαντάζει κάτι ξένο. Κατανοούν την διαδικασία αλλά δυσκολεύονται να δεχθούν τον ορισμό. Το σημαντικό σε αυτό το απόσπασμα είναι ότι ο μαθητής Μ4 έκανε μόνος του τη σύνδεση με την εφαπτομένη και το πλησίασμα των τεμνουσών. Αμέσως ο μαθητής Μ3 τον συμπλήρωσε και δε έμεινε τίποτε παραπάνω από την εισαγωγή του όρου «όριο».

Στην επόμενη ομάδα μαθητών το παραπάνω συμπέρασμα δεν προέκυψε τόσο αυθόρμητα. Ωστόσο, οι μαθητές έπειτα από την παρότρυνση να συσχετίσουν την διαδικασία εύρεσης της εφαπτομένης, δεν δυσκολεύτηκαν να την συνδέσουν με αυτήν του ορίου.

Ε: *Θα μπορούσαμε ως διαδικασία να την συσχετίσουμε κάπου με το όριο; Τί θα μπορούσαμε να πούμε για την εφαπτομένη Μ2; Είπαμε ότι οι δύο ευθείες πλησιάζουν να γίνουν μία. Οπότε την εφαπτομένη θα μπορούσαμε να την δούμε ως....*
Μ2: *Όριο*
Ε: *Ποιών; Των δύο…*
Μ2: *…ευθειών.*

Σε αυτήν την ομάδα έγινε μια προσπάθεια να αναδειχθεί η σημαντικότητα του ορίου για τον υπολογισμό της εφαπτομένης. Απώτερος στόχος είναι να φτάσω στον αναλυτικό τύπο της εφαπτομένης. Οι μαθητές έχουν ήδη συνδέσει την εύρεση της εφαπτομένης με την εύρεση κοινού συντελεστή διεύθυνσης. Οπότε πρέπει να εξεταστεί πόσο εύκολο είναι να τον συνδέσουν με κάποιο όριο.

Ε: *… Στην ουσία, τί είπαμε ότι είναι αυτό που μεταβάλλεται κάθε φορά;*
Μ2: *Η κλίση.**Ε:** Πώς ορίζεται η κλίση;*
Μ2: *Με την εφαπτομένη.*
Ε: *Εκτός από την εφαπτομένη.*
Μ2: $(y-y_o)/(x-x_o)$
Ε: *… Δε θα ήταν ωραίο να μπορούμε ανά πάσα ώρα και στιγμή να υπολογίζουμε την κλίση της συνάρτησης με έναν αυστηρά μαθηματικό τρόπο; Ας πούμε ότι θέλουμε να βρούμε την εφαπτομένη σε ένα σημείο. Παίρνουμε δύο σημεία δεξιά και αριστερά και τα πλησιάζουμε. Αυτό το «πλησίασμα» πώς το είπαμε πριν. Πλευρικά…*
Μ2-Μ1: *… όρια.*
Ε: *Ο τύπος είναι* $(y-y_o)/(x-x_o)$*. Οπότε μου αρκεί να υπολογίσω το όριο* $lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ *. Αυτό το όριο είναι η κλίση της εφαπτομένης… Δηλαδή πώς θα μπορούσαμε να συνδέσουμε*

αυτά που είπαμε για την εφαπτομένη με τα όρια; Αν ξέρουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη σχηματικά, τί ξέρουμε ότι υπάρχει.
Μ2: *Υπάρχει κλίση.*
Ε: *Ξέρουμε ότι υπάρχει αυτό το όριο. Οπότε μπορούμε να το υπολογίσουμε.*

Όπως φαίνεται και με την ομάδα Α, οι μαθητές είναι σε θέση να συνδέσουν την προσέγγιση των δύο τεμνουσών με αυτή των συντελεστών διεύθυνσης. Οπότε με λίγη καθοδήγηση δεν δυσκολεύονται να φτάσουν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ένα όριο. Το όριο αυτό είναι μια έννοια που υπολογίζεται, οπότε σε κάθε σημείο υπάρχει δυνατότητα εύρεσης του αν υπάρχει εφαπτομένη ή όχι. Έχει πρωτύτερα συζητηθεί ότι θα ήταν ωραίο να υπήρχε η δυνατότητα υπολογισμού της κλίσης της εφαπτομένης χωρίς να χρειάζεται να καταφύγουμε στο λογισμικό.

Ε: *Εμείς είπαμε με την εφαπτομένη ότι δεν είναι οι ευθείες που συγκλίνουν. Ποιό είναι κάθε φορά αυτό που μεταβάλλεται;*
Μ3: *Ο συντελεστής.*
Μ4: *Το λ.*
Ε: *Ο συντελεστής διεύθυνσης - η κλίση, οπότε η κλίση αυτή τι είναι;*
Μ3-Μ4: *Ένα όριο.*

Οπότε, φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες μαθητών είναι σε θέση να κάνουν κάποια σύνδεση ανάμεσα στην εφαπτομένη και το όριο. Αυτό που διαφαίνεται από τα παραπάνω είναι ότι η διαδικασία προσέγγισης της εφαπτομένης, είναι ένα ενδιαφέρον μεταβατικό στάδιο στο να αποκτήσουν οι μαθητές μια διαισθητική εικόνα για το πώς δουλεύουν τα όρια. Έτσι, σε μετέπειτα στάδιο θα φαντάζει πιο εύκολο για αυτούς να δεχτούν έναν αυστηρό ορισμό αφού φαίνεται να τον κατέχουν, ως αναδυόμενη εικόνα. Όμως, δεν είναι ακόμα εφοδιασμένοι με τα απαραίτητα εργαλεία, και τον κατάλληλο βαθμό εμβάθυνσης στην ανάλυση, που θα τους βοηθήσει να τον εκφράσουν.

Κεφάλαιο 5ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα τίθενται δύο ερευνητικά ερωτήματα. Το πρώτο είναι να εξεταστεί αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της εφαπτομένης όταν εισάγονται στα αναλυτικά της χαρακτηριστικά μέσα από τη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων και ποιός είναι ο ρόλος των εργαλείων αυτών στις διαδικασίες νοηματοδότησης. Το δεύτερο είναι να εξεταστεί αν και με ποιούς τρόπους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα σε σχέση με την οριακή φύση της εφαπτομένης και ποιός είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες νοηματοδότησης της οριακής φύσης της εφαπτομένης. Για τους σκοπούς αυτούς κατασκευάζεται το εργαλείο των ισοσυγκλινουσών τεμνουσών (ε.ι.τ) (Σχήμα 3.2.1).

Το ε.ι.τ είναι ένας τρόπος υπολογισμού της εφαπτομένης σε ένα σημείο. Οι μαθητές το εφαρμόζουν, ως έναν ισοδύναμο ορισμό για την εφαπτομένη. Αυτό το οποίο διαφοροποιεί το ε.ι.τ με τα όσα υπάρχουν στα σχολικά βιβλία για την εφαπτομένη είναι ότι παρέχει έναν τρόπο στο να βρίσκει ένας μαθητής πότε δεν έχουμε εφαπτομένη σε ένα σημείο. Είναι δύσκολο να πείσεις τους μαθητές ότι κάτι δεν υπάρχει. Με οδηγό το ε.ι.τ και με σύμμαχο το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, οι μαθητές εμπλέκονται σε κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες που βασίζονται σε πρωτότυπα σχήματα. Τα σχήματα αυτά είναι πολύ κοντά στην εικόνα του κύκλου καθώς αποτελούνται κυρίως από ημικύκλια. Στη συνέχεια εισάγονται γραφήματα κατάλληλα επιλεγμένων συναρτήσεων και μελετάται η εφαπτομένη ως εξίσωση ευθείας.

Αναφορικά με το πρώτο ερώτημα οι μαθητές με τον πειραματισμό με το ε.ι.τ αναδεικνύουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν γύρω από την έννοια της εφαπτομένης. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με την πρότερη εικόνα που έχουν για την εφαπτομένη, δηλαδή, ότι είναι μια ευθεία γραμμή που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και τον αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο. Τον ορισμό αυτό οι μαθητές φαίνεται να τον γενικεύουν και σε άλλα σχήματα κάτι

που οφείλεται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο που κάνουν χρήση της λέξης στον φυσικό τους κόσμο.

Όλα αυτά επιβεβαιώνουν τα ευρήματα που έχει αναδείξει η βιβλιογραφία σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια της εφαπτομένης. Με την παρούσα έρευνα δείχνω ότι το ε.ι.τ μπορεί να αποτελέσει ένα ψηφιακό εργαλείο που μπορεί να βοηθήσει στην ανακατασκευή της έννοιας της εφαπτομένης. Οι μαθητές με την ενασχόλησή τους με σχήματα διαφορετικά από τον κύκλο καταφέρνουν να έρθουν σε ρήξη με την εικόνα που έχουν για την έννοια και να αναγνωρίσουν τα νέα για αυτούς χαρακτηριστικά της. Ο εμπλουτισμός των εικόνων που παρέχεται στους μαθητές σε συνάρτηση με το ε.ι.τ αναδεικνύει την εξάρτηση της έννοιας από το σημείο επαφής. Ως εκ τούτου οι μαθητές είναι πλέον σε θέση να αναγνωρίζουν ότι:

- Σε ένα σχήμα η εφαπτομένη μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σημεία επαφής.
- Η εφαπτομένη μπορεί να κόβει το σχήμα.
- Η εφαπτομένη μπορεί να ακουμπά το σχήμα σε ένα σημείο και να το τέμνει σε ένα ή και σε περισσότερα.
- Τα σημεία καμπής - γωνιακά σημεία είναι σημεία που ο κλασικός ορισμός αδυνατεί να μας δώσει ορθή απάντηση για το αν έχουμε ή όχι εφαπτομένη.
- Η εφαπτομένη εξαρτάται από το σημείο που εφαρμόζουμε το ε.ι.τ και κατά επέκταση από το σημείο επαφής.
- Η ύπαρξη ή η μη ύπαρξη της εφαπτομένης εξαρτάται από τη λειτουργία ή μη του ε.ι.τ.
- Στην αναλυτική εξίσωση της εφαπτομένης αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι ο συντελεστής διεύθυνσης.

Η χρήση του ε.ι.τ φαίνεται να βοηθάει τους μαθητές να δημιουργήσουν τα κατάλληλα νοήματα για την εικόνα της εφαπτομένης. Η μοναδική περίπτωση που δεν λειτουργεί τελείως «σωστά» το ε.ι.τ είναι στα άκρα ενός σχήματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις, αρχικά η πλειοψηφία των μαθητών εφαρμόζουν λανθασμένα το ε.ι.τ, ενώ μόνο ένας διατυπώνει αμφιβολία για τη

δυνατότητα εφαρμογής του. Μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση θα συμπεριλάμβανε μια επισήμανση από την πλευρά μου για τις συνθήκες υπό τις οποίες εφαρμόζεται κάθε φορά το ε.ι.τ. Επιπλέον, φαίνεται πόσο μεγάλη εξάρτηση έχουν οι μαθητές από την εποπτεία τους. Τους είναι εξαιρετικά δύσκολο να βασίσουν μία απάντηση αποκλειστικά στο αν δουλεύει το ε.ι.τ ή όχι, όταν αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα οπτικά ερεθίσματα που λαμβάνουν από το σχήμα με το οποίο εργάζονται. Το ίδιο ισχύει και για τις ιδιότητες της εφαπτομένης που φαίνεται να μην είναι τόσο ισχυρές όσο η εποπτεία.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, φαίνεται ότι η εφαπτομένη μπορεί να παρέχει την αναγκαία δυναμική για να την εισαγωγή των μαθητών στο όριο και στις οριακές διαδικασίες σε πιο πρώιμο στάδιο. Οι μαθητές με τη τριβή τους με τις δραστηριότητες, αρχίζουν να χρησιμοποιούν έστω και υποσυνείδητα λέξεις που παραπέμπουν σε οριακή διαδικασία. Η διαδικασία του «πλησιάσματος» τους βάζει σε έναν νέο τρόπο σκέψης για την εφαπτομένη. Ωστόσο, βιώνουν μία σύγκρουση ανάμεσα σε αυτά που βλέπουν να γίνονται στην οθόνη του υπολογιστή και σε έννοιες όπως αυτή του ορίου που αντίκεινται στη φυσική τους γλώσσα. Δεν διαθέτουν ακόμα εκείνη τη γνώση που θα τους επιτρέψει να συμπληρώσουν το πάζλ. Ως αποτέλεσμα όταν εφοδιάζονται με την απαραίτητη γνώση περί ορίου, είναι σε θέση να το συνδέσουν με τον τρόπο λειτουργίας του ε.ι.τ.

Άμεση συνέπεια είναι ότι εκφράζουν τελικά την εφαπτομένη ως μια οριακή διαδικασία. Οπότε η εφαπτομένη κάτω υπό ειδικές συνθήκες μπορεί να γίνει το όχημα για να εισαχθούν οι μαθητές στην έννοια του ορίου και των διαδικασιών που το διέπουν. Οι μαθητές διαισθητικά, με την ενασχόλησή τους με το ε.ι.τ, είναι σε θέση να αντιληφθούν τη διαδικασία του «πλησιάσματος» και την ύπαρξη μιας συγκεκριμένης θέσης που δίνει την εφαπτομένη.

Σε όλη αυτήν την προσπάθεια το ψηφιακό εργαλείο, Geogebra έπαιξε καθοριστικό ρόλο. Ο δυναμικός χειρισμός των σχημάτων επέτρεψε την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες και τρόπους σκέψης που δεν είναι εφικτοί με στατικά μέσα. Έτσι, μέσω της δυνατότητας συρσίματος, εστίασης και παράστασης αλγεβρικών παραστάσεων οι μαθητές είναι σε θέση να μελετήσουν την έννοια της εφαπτομένης αποπλαισιωμένη από το σχήμα και

βασιζόμενοι στις ιδιότητες που τη διέπουν. Οι λειτουργίες αυτές του προγράμματος είναι εκείνες που παρέχουν την αναγκαία δυναμική για να αντιληφθούν οι μαθητές το ε.ι.τ και κατ' επέκταση την εφαπτομένη ως μια οριακή διαδικασία. Η ταύτιση των συντελεστών διεύθυνσης των τεμνουσών είναι κάτι που έρχεται ως φυσικό επακόλουθο μέσω των λειτουργιών του Geogebra, κάτι το οποίο δεν θα ήταν εφικτό με στατικά μέσα. Το ίδιο συμβαίνει και με την κίνηση των τεμνουσών προς το σημείο επαφής.

Παρόλα τα χρήσιμα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη παρούσα έρευνα θα μπορούσε να διαμορφωθεί κατάλληλα ώστε να διεξαχθεί σε δύο χωριστά στάδια. Το ένα θα αφορούσε την ανακατασκευή της έννοιας της εφαπτομένης καθεαυτής και το άλλο θα αφορούσε μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση του ορίου και της ανάγκης εισαγωγής μαθηματικών εργαλείων υπολογισμού του. Επιπλέον μια προσέγγιση του ορισμού του ορίου με δυναμικό τρόπο θα αναδείκνυε περισσότερο την ανάγκη εισαγωγής εννοιών όπως η παράγωγος.

Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, όπως το Geogebra, υπάρχει περιορισμός ως προς τις αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, όταν προσεγγίζονται οριακές διαδικασίες σε σχήματα όπως οι ευθείες, αυτές παύουν να υφίστανται. Ο λόγος είναι ότι για να οριστεί μία ευθεία στο Geogebra χρειάζονται δύο σημεία. Όμως, στην οριακή θέση έχουμε ταύτιση σημείων οπότε δεν μπορεί να παρασταθεί η ευθεία της εφαπτομένης. Ωστόσο το λογισμικό είναι εφοδιασμένο με κατάλληλα εργαλεία όπως είναι αυτό της εστίασης που με βοήθησαν να χειριστώ αυτές τις καταστάσεις. Οι μαθητές δέχονται τα εργαλεία που τους παρέχει το λογισμικό και τα οποία στην περίπτωση της εφαπτομένης αποτελούν ένα μέσο επικύρωσης της εφαρμογής του ε.ι.τ. Τέλος, η εφαρμογή σε περιβάλλον τάξης θα μπορούσε να δώσει επιπλέον χρήσιμα αποτελέσματα αφού ο τρόπος που αλληλεπιδρούν οι μαθητές ποικίλει αρκετά σε σχέση με τη περίπτωση της έρευνας σε μια μικρή ομάδα μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ackermann E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. *Future of learning group.*

Artigue. M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching / learning relationships in mathematics education. *CMESG. Proceedings.*

Artigue. M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7**:** 245–274, 2002.Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Arzarello F., Olivero F., Paola D. & Robutti O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM 2002* Vol. 34.

Arzarello F. & Edwards L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, pp. 123-154. Melbourne: PME.

Arzarello, F. & Paola, D. (2003). Mathematical objects and proofs within technological environments: an embodied analysis. *WG9, CERME,* Bellaria.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399–431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301-317.

Auyang S. (1998). Mathematics and Reality: Two Notions of Spacetime in the Analytic and Constructionist Views of Gauge Field Theories. *Philosophy of Science, 67. Proceedings of the 1998 Biennial Meetings of the Philosophy of Science Association*. pp. S482-S494. JSTOR.

Baccaglini-Frank A. & Mariotti M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *Int J Comput Math Learning*. Springer.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 19-35.

Biza, I., (2003). Διαφορετικές προσεγγίσεις της μαθηματικής γνώσης. Παραδείγματα αναφερόμενα σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού με χρήση νέων τεχνολογιών. Διπλωματική εργασία.

Biza, I., (2008). Διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη ευθεία στην ανάλυση. Διδακτορική διατριβή.

Biza, I.(2011). Students' Evolving Meaning About Tangent Line with the Mediation of a Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space. *Tech Know Learn* 16:125–151. Springer.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, 10(1), 53-70.

Biza, I., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2004). Conceptual change in Calculus: From the circle's tangent to a curve's tangent. In S. Vosniadou, C. Stathopoulou, X.Vamvakoussi & N. Mamaloukos (Eds.), *Proceedings of the 4th European Symposium on Conceptual Change* (pp. 101-104). Delfi, Greece.

Biza. I & Zachariades. T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior 29* , 218–229, Elsevier Incl.

Botzer G. & Yerushalmy M. (2008). Embodied Semiotic Activities and Their Role in the Construction of Mathematical Meaning of Motion Graphs. *Int J Comput Math Learning* (2008) 13:111–134. Springer.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cobb P., Confrey J., diSessa A., Lehrer R. & Schauble L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Research*, Voll.32. No.1. pp 99-13.

Downs, M. and Mamona-Downs, J. (2000). On Graphic Representation of Differentiation of Real Functions. *Themes in Education* Vol. 1 (2), (p.p. 173-198).

Giraldo V. & Carvalho L. (2003). Local straightness and theoretical-computational conflicts: computational tools on the development of the concept image of derivative and limit. *3rd Conference of the European Society.*

Giraldo, V., & Carvalho, L. M. (2006). Generic Organizer for the Enrichment of the Concept Image of Derivative. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.),305.*Proceedings of the 30th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 185-192). Prague, Czech Republic.

Giraldo, V., Carvalho, L. M., & Tall, D. O. (2003α). Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. In S. Pope & O. McNamara (Eds.), *Research in Mathematics Education, Papers of the British Society for Research into Mathematics Learning* (Vol. 5, pp. 63-78).

Goldin G. & Kaput J. (1994). A Joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. Steffe, L. & Nesher, P. (Eds.) (1996). *Theories of mathematical learning*. Mahwah (New Jersey): LEA.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. O. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 111-133.

Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction*, 14, 541-548.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 57-72.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.

Hirst, K. E. (1972). Derivatives and tangents. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 299–305.307.

Hohenwarter, M., et al. (2002, 2010). GeoGebra [computer software].Linz: GeoGebra Inc

Hoyles C. & Noss R. (2009). The technological mediation of mathematics and its learning. Published in Nunes,T (ed) *Special Issue, Giving Meaning to Mathematical Signs: Psychological, Pedagogical and Cultural Processes' Human Development*, Vol 52, No 2, April, pp. 129-

Hölzl, R. (1996). How does 'Dragging' affect the Learning of Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 1*(2): 169–187.

Leung A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through

the Lens of Variation. *Int J Comput Math Learning* 13:135–157. Springer.

Moreira, V. G., & Pinto, M. M. F. (2004). Technical school students' conceptions on tangent lines. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.),

Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 33-40). Bergen, Norway.

Noss R., Healy L. & Hoyles C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics 33*: 203–233. Kluwer Academic Publishers. Printed in The Netherlands.

Núñez R., Edwards L., Matos J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. Springer.

Papert S. 1980. *Mindstorms. Basic Books*. New York &Harvester Press, Brighton. U.K.

Papert S. & Harel I. (1991). Situating Constructionism. Is the first chapter in Seymour Papert and Idit Harel's book *Constructionism*, (Ablex Publishing Corporation,1991).

Powell A., Francisco J. & Maher C (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical*. Elsevier.

Sacristán A. & Noss R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity. *Int J Comput Math Learning* 13:47–70. Springer Science+Business Media B.V.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Spivak M. (2000). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός*. 6η έκδοση. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, pp. 123-129.

Tall, D. O. (1985β). The gradient of a graph. *Mathematics Teaching*, 111, 48– 52.

Tall, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In J. C. Bergeron, N.Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 69-75). Montréal, Canada.

Tall, D. O. (1989). Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.

Tall, D. O. (1991). Intuition and rigour :the role of visualization in the calculus. *Visualization in Mathematics* (ed. Zimmermann & Cunningham),

M.A.A., Notes No. **19**, 105–119

Tall, D. O. (1991β). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tall, D. O. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Tall, D. O. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*.

Tall, D. O., McGowen, M., & DeMarois, P. (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept. In M. L. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-NA* (Vol. 1, pp. 256-261). Tuscon, AZ.

Tall D.O, Smith D. & Piez C. (2008). Technology and Calculus. In M.Kathleen Heid and Glendon M Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*, Volume I: Research Syntheses, 207-258.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Vinner, S. (1983). Concept Definition Concept Image and the Notion of Function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65- 81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vosniadou, S. (1999). Conceptual Change Research: State of the art and future directions. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Eds.), *New Perspectives on Conceptual Change* (pp. 3-13). Oxford, UK: Elsevier Sciences.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks,CA: Sage.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα 1

Φύλλο εργασίας 1^{ο}

Πηγαίνετε στη επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή σας και ανοίξτε το αρχείο με όνομα «κύκλοςproject». Ακολουθείστε τις οδηγίες του προγράμματος κάνοντας σταδιακά κλικ στα αντίστοιχα κελιά που βρίσκονται στο αριστερό μέρος της οθόνης .

1. Πειραματιζόμενοι με τα σημεία Γ και Δ , τί παρατηρείτε όταν τα δύο αυτά σημεία πλησιάζουν το σημείο Β;

   ……
   ……
   ……

2. Υπάρχει περίπτωση οι δύο ευθείες ε και δ να ταυτιστούν; Τί συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση;

   ……
   …….....

3. Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των δυο ευθειών και της εφαπτομένης α; Μπορείτε να διατυπώσετε με δικά σας λόγια πώς σχετίζονται οι τρεις ευθείες;

   ……
   ……
   ……
   ……

4. Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσε να οριστεί η εφαπτομένη σε άλλα γεωμετρικά σχήματα , όπως το τετράγωνο;

Παράρτημα 2

Φύλλο εργασίας 2^{ο}

1. Πηγαίνετε στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή σας και ανοίξτε το αρχείο με όνομα «ημικύκλιοproject». Ακολουθείστε τις οδηγίες του προγράμματος κάνοντας σταδιακά κλικ στα αντίστοιχα κελιά που βρίσκονται στο αριστερό μέρος της οθόνης.

   Πειραματιζόμενοι, μπορείτε να εφαρμόσετε όσα κάναμε για την εφαπτομένη στον κύκλο για να προσεγγίσετε την εφαπτομένη στο νέο μας σχήμα;

2. Ανοίξτε τώρα το αρχείο με όνομα «ημικύκλιαproject». Φέρτε την εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο του ενός κύκλου. Σκεφτείτε, πώς μπορούμε, εύκολα, να το κάνουμε αυτό με βάση τις δραστηριότητες που έχουμε κάνει παραπάνω Μπορεί να είναι και εφαπτομένη του δεύτερου κύκλου; Πειραματιζόμενοι εκφράστε τα συμπεράσματά σας.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

3. Ανοίξτε το αρχείο «2ημικύκλιαproject». Μπορείτε να δουλέψετε με όσα έχουμε πει έως τώρα για τις διάφορες θέσεις που μπορούν να πάρουν τα δύο ημικύκλια; Ορίζεται εφαπτομένη στα νέα σχήματα που προκύπτουν;

……
……

4. Μπορείτε και πώς να ορίσουμε την εφαπτομένη στο ένα άκρο του ημικυκλίου;

Παράρτημα 3

Φύλλο εργασίας 3^{ο}

Ανοίξτε το αρχείο Geogebra με όνομα «parabola». Στη συνέχεια υπολογίστε την εφαπτομένη του σχήματος σε ένα τυχαίο σημείο. Δείξτε πώς μπορούμε να την προσεγγίσουμε από δύο τέμνουσες.

……
……
……

1. Γιατί ένα κοινό σημείο δεν είναι κατά ανάγκη εφαπτομένη;

……
……..

2. Χρησιμοποιείστε τα εργαλεία του προγράμματος για τον υπολογισμό της εξίσωσης της εφαπτομένης σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Μπορείτε να συνδέσετε τον τρόπο υπολογισμού της με όσα γνωρίζουμε σχετικά με την εξίσωση της ευθείας;

……
……

Πειραματιζόμενοι, επιλέξτε ένα σταθερό σημείο, π.χ το (2,4). Παρατηρείστε πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης σε σχέση με την κλίση των δύο ευθειών που την προσεγγίζουν.

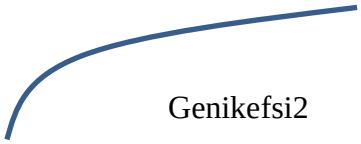
……
……
……...

Παράρτημα 4

Φύλλο εργασίας 4ο

1. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις και τα αντίστοιχα προγράμματα Geogebra. Μπορείτε να αποφασίσετε σε ποιά περίπτωση αυτά έχουν παντού εφαπτομένη και σε ποιά όχι;

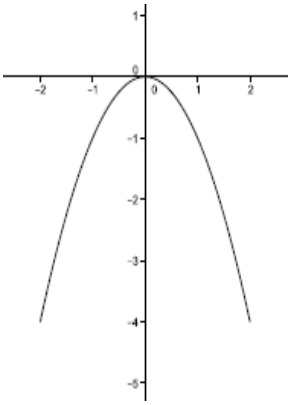
Genikefsi1



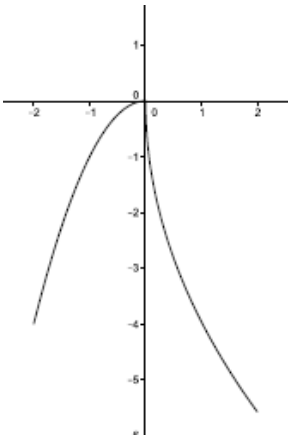
Genikefsi2

Πειραματιστείτε σε κάθε περίπτωση με την προσέγγιση της εφαπτομένης από δύο ευθείες.

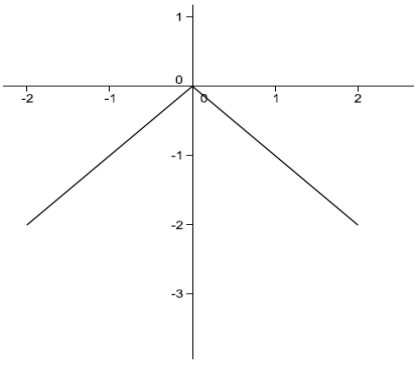
2. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις και τα αντίστοιχα προγράμματα Geogebra. Μπορείτε να αποφασίσετε σε ποιά περίπτωση αυτά έχουν παντού εφαπτομένη και σε ποιά όχι;



Genikefsi3

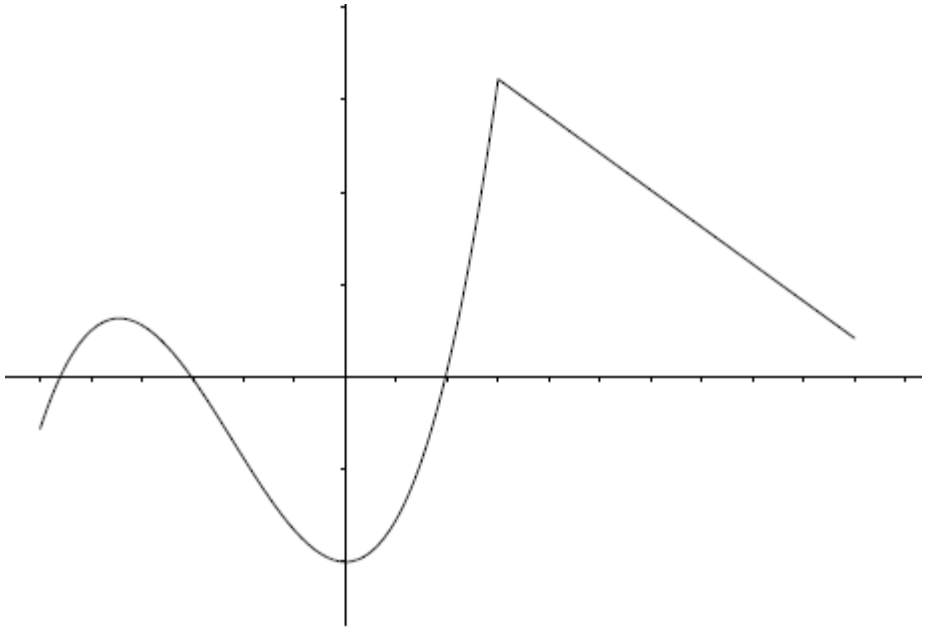


Gnikefsi4



Genikefsi5

3. Στην παρακάτω γραφική παράσταση να εξετάσετε την εφαπτομένη σε διάφορα σημεία της. Έχει η εφαπτομένη παντού τα ίδια χαρακτηριστικά;



Genikefsi6

4. Μπορείτε να σκεφτείτε τί στοιχεία χρειάζονται για να ορίσουμε την εφαπτομένη σε μια τυχαία καμπύλη; Διαφοροποιείται σε σχέση με τα όσα έχουμε πει για την εφαπτομένη του κύκλου;

……

……