ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Μοντελοποίηση ως μέσο στη διδασκαλία των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών.

ΒΟΥΔΟΥΡΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΒΑΣΙΛΙΚΗ ΦΑΡΜΑΚΗ
ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ ΕΚΠΑ

ΑΘΗΝΑ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 3/03/2010 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Βασιλική Φαρμάκη (Επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπλ. Καθηγήτρια	…….
2) Χριστόδουλος Αθανασιάδης	Καθηγητής	…….….
3) Νίκος Κλαουδάτος	Δρ στη Διδακτική των Μαθ/κών	…….….

Περιεχόμενα

Ενότητα 1: Εισαγωγή 5
1.1. Προοίμιο 5
1.2. Θεωρητικό Πλαίσιο 5
1.3. Θέμα – Στόχοι - Μεθοδολογία 10
1.4. Παρατηρήσεις 12

Ενότητα 2: Βασικές Έννοιες 15
2.1. Περί Μαθηματικών Μοντέλων 15
2.2. Η Δ.Ε. Χωριζόμενων Μεταβλητών 18
2.3. Ο Κύκλος της Μοντελοποίησης στην Πράξη 20
2.4. Η Διαδικασία της Διδασκαλίας 24
2.5. Οι Δραστηριότητες 33
2.7. Επί των απαντήσεων των σπουδαστών 35

Ενότητα 3: Ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας – Ο συνεχής ανατοκισμός 45
3.1. Περί ενός θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας 45
3.2. Ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας 46
3.3. Παρατηρήσεις 48
3.4. Το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού 51
3.5. Παραδείγματα 55
3.6. Σχόλια 57
3.7. Παρατηρήσεις 59
3.8. Παράδειγμα – ασταθής λύση ισορροπίας 60
3.9. Δραστηριότητες 63

Ενότητα 4: Οι πληθυσμιακές μεταβολές 67
4.1. Ο νόμος του Malthus 67
4.2. Το μοντέλο του Verhulst 70
4.3. Η Λογιστική Αύξηση 72
4.4. Σχόλια 75
4.5. Παρατηρήσεις 80
4.6. Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη 82

Ενότητα 5: Κάποια θεωρητικά ζητήματα 101

Ενότητα 6: Ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων 107

Ενότητα 7: Επίλογος 121

Βιβλιογραφία 125

1. Εισαγωγή

1.1. *Προοίμιο*

Η εργασία συγκροτείται κατά βάση από δύο συνιστώσες: αφενός τη διδασκαλία των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών στα πλαίσια της ενοποιημένης λύσης προβλήματος (mathematical modeling και problem solving), σε πειραματική ομάδα σπουδαστών με εξωμαθηματικό αντικείμενο και αφετέρου το ρόλο της ερμηνείας των αναπαραστάσεων που ο Η/Υ μας παρέχει, για έναν αποδοτικότερο τρόπο όσον αφορά την βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών, την εξαγωγή συμπερασμάτων, την ανάπτυξη κριτικής σκέψης για τη διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους καθώς και τη διατύπωση γενικεύσεων και προβλέψεων. Γίνεται μια προσπάθεια να εντοπιστούν και να ερμηνευθούν τα αίτια οποιωνδήποτε δυσκολιών ή παρανοήσεων σε ζητήματα που ανακύπτουν κατά τη διάρκεια της διδακτικής πρακτικής και να αντιμετωπιστούν αυτές κατά περίπτωση, εντός πάντα του πλαισίου των συνιστωσών που προαναφέραμε και με βάση την επικοινωνιακή προσέγγιση του Vygotsky και την κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση των Sierpinska & Lerman.

1.2. *Θεωρητικό πλαίσιο*

Είναι γνωστό το χάσμα μεταξύ σχολικών και πανεπιστημιακών Μαθηματικών της περιόδου 1900-1950, οπότε τα σχολικά Μαθηματικά διδάσκονται αποκομμένα από τις εφαρμογές τους και τα προβλήματα της καθημερινής ζωής, ώστε να δημιουργείται τελικά η εντύπωση ότι αποτελούν άχρηστα νοητικά κατασκευάσματα[47]. Στη δεκαετία του ‘50 έχουμε την εμφάνιση στα σχολικά Μαθηματικά της *μεταρρύθμισης των Μοντέρνων Μαθηματικών* που με αφετηρία τις Η.Π.Α. εξαπλώθηκε και σε άλλες χώρες και κινούνταν στο πνεύμα της έμφασης στους ακριβείς ορισμούς και στην αξιωματική θεμελίωση της ύλης. Τη χαριστική βολή στην ήδη αποτυχημένη μεταρρύθμιση των Μοντέρνων Μαθηματικών έδωσε το «Γιατί δε μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης – η αποτυχία των Μοντέρνων Μαθηματικών» του M. Kline και το καλό με την υπόθεση αυτή ήταν πως και στη χώρα μας οι ειδικοί άρχισαν πια να αναζητούν το γιατί, σε ποιους και με ποιους τρόπους πρέπει να διδάσκονται τα Μαθηματικά. Φτάνουμε λοιπόν στο τέλος της δεκαετίας του ’70 με τάσεις όπως η απαλλαγή των σχολικών Μαθηματικών απ’ την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και την κυριαρχία της συνολοθεωρίας, η σύνδεσή τους με τις άλλες επιστήμες ώστε να γίνεται φανερή η αναγκαιότητα της διδασκαλίας τους και η πρέπουσα απόδοση σημασίας στις εφαρμογές των Μαθηματικών και τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Προβλημάτων τα οποία δεν τίθενται ρητά ως μαθηματικά προβλήματα και των οποίων η λύση απαιτεί το ουσιαστικό προκαταρκτικό βήμα της *μαθηματικοποίησης*[22]. Επισημαίνεται δηλ. η αναγκαιότητα του να διδάξουμε το *mathematical modeling*. Στις αρχές της δεκαετίας του ’80 με το «An agenda for action» (NCTM, 1980) και το «Cockroft report» (HMSO, 1982) προτείνεται η ανάμειξη της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος (*problem solving*) στις διαδικασίες διδασκαλίας των Μαθηματικών[50]. Επιπλέον, από τα τέλη της δεκαετίας του ’80 και ύστερα, η διδασκαλία αυτή θεωρείται ως μια κοινωνικοπολιτισμική δραστηριότητα κατασκευής της γνώσης, μια διαδικασία εξοικείωσης με τα πολιτισμικά εργαλεία των

Μαθηματικών (θεωρητικό κι εννοιολογικό πλαίσιο, γλωσσικές και συμβολικές δομές, τρόποι αναπαράστασης, τρόποι επιχειρηματολογίας και συμπερασμού) που εμπλέκει τους μαθητές σε αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες προκειμένου να αναπτύξουν ισχυρές μορφές επιστημονικής σκέψης[66]. Αν και υπάρχουν κάποιες επιστημολογικές διαφορές μεταξύ του mathematical modeling και του problem solving, από τα μέσα της δεκαετίας του '80 παρατηρείται μια τάση ενοποίησης των δύο αυτών κλάδων, με αποτέλεσμα στη δεκαετία του '90 να προβάλει η *ενοποιημένη λύση προβλήματος* (ε.λ.π.) ως μέσο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών[50]. Στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα βέβαια, ίσως με απογοήτευση συνειδητοποιούμε πως είναι εύκολο να μιλάμε για μαθησιακές διαδικασίες που βασίζονται στην ε.λ.π. και τις νέες θεωρίες της Διδακτικής, μα συγχρόνως δύσκολο να τις πραγματοποιούμε, δεδομένου ότι απαιτούν ενθουσιασμό και ιδιαίτερη προσπάθεια από το δάσκαλο, παίρνουν χρόνο και αναγκαστικά περιορίζουν την ύλη. Παρ' όλα αυτά μπορούμε ως δάσκαλοι να εφεύρουμε δημιουργικές διδακτικές προσεγγίσεις αντιστεκόμενοι στο παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο τα Μαθηματικά, ως σώμα γνώσης εξωτερικό ως προς το μαθητή, μεταφέρονται δια του λόγου σε αυτόν από το δάσκαλο[49]. Αν μη τι άλλο μπορούμε να προσπαθήσουμε να εργαστούμε κατά την παρότρυνση του καθηγητή Β. Δουγαλή: «Θα ήταν καλό να κινηθούμε και στην Ελλάδα προς μορφές διδασκαλίας όπου ο δάσκαλος καθοδηγεί τους μαθητές του … σε διαδικασίες όπου οι αυτοί συνεργαζόμενοι σε μικρές ομάδες, ανακαλύπτουν από μόνοι τους τις λύσεις προβλημάτων της καθημερινής ζωής, τα οποία τίθενται σε μαθηματική γλώσσα.»[26]

Παραδοσιακά, η κατεξοχήν περιοχή εφαρμογής των Μαθηματικών είναι, δίχως αμφιβολία, η Φυσική όπου γίνεται επιτυχώς χρήση πολλών μαθηματικών θεωριών. Κατά το δεύτερο όμως μισό του 20ου αι. άλλες επιστήμες αναπτύχθηκαν σε τέτοιο βαθμό, ώστε η χρήση των Μαθηματικών και σε αυτές να καταστεί απολύτως αναγκαία. Φυσιολογικό επακόλουθο του γεγονότος αυτού είναι, από τη δεκαετία του 90 και μετά, η εμπλοκή της ενοποιημένης λύσης προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Έτσι, η ε.λ.π., όντας εγγενώς διεπιστημονική, συνδέεται πια με τις θεωρίες της διδασκαλίας και της μάθησης, ενώ συμβάλει στις έρευνες περί του ρόλου των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών και γενικώς το όλο θέμα βρίσκεται στο επίκεντρο της σημερινής έρευνας.[50]

Κατά τον Wittgenstein[15] *πρόβλημα* είναι αυτό που μπορούμε ν' αντιμετωπίσουμε και κάθε πρόβλημα υποδηλώνει μια μέθοδο αναζήτησης. Κάπως πιο επεξηγηματικά, ο Polya[76], μας πληροφορεί ότι *πρόβλημα* αντιμετωπίζουμε όταν ενσυνείδητα αναζητούμε την κατάλληλη ενέργεια προς την επίτευξη κάποιου στόχου, ο οποίος είναι πλήρως κατανοητός μα όχι άμεσα επιτεύξιμος. Η εύρεση της εν λόγω ενέργειας αποτελεί και τη λύση του προβλήματος και για την αναζήτησή της ο Polya προτείνει τη μέθοδό του των τεσσάρων βημάτων: κατανόηση – σχεδιασμός - εκτέλεση σχεδίου - έλεγχος. Μια πολύ γενική ταξινόμηση των προβλημάτων τα διαχωρίζει σε δύο κατηγορίες: τα *προβλήματα εύρεσης* στα οποία ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός ενός αγνώστου που ικανοποιεί κάποιες συνθήκες οι οποίες τον συνδέουν με τα δεδομένα του προβλήματος και τα *προβλήματα απόδειξης* στα οποία κάποιος σαφώς διατυπωμένος μαθηματικός ισχυρισμός, είτε θα πρέπει ν' αποδειχθεί πέρα από κάθε αμφιβολία (μέσω καλά συντονισμένων λογικών βημάτων που από την υπόθεση οδηγούν στο συμπέρασμα), είτε θα πρέπει να ανασκευαστεί (μέσω αντιπαραδείγματος). Τα καταρχήν εξωμαθηματικά προβλήματα τα οποία εδώ μας απασχολούν, θα μπορούσαμε να πούμε πως έχουν στοιχεία από αμφότερες τις προαναφερθείσες κατηγορίες: εμφανίζουν μεν μια πτυχή παρόμοια μ' εκείνη των προβλημάτων απόδειξης, δεδομένου ότι η μαθηματικοποίηση απαιτεί μια σειρά από αλληλοεξαρτώμενες συντονισμένες ενέργειες που απ' το πραγματικό πρόβλημα

οδηγούν σε μια διαφορική εξίσωση, η οποία δε με τη σειρά της αποτελεί ένα προβλήματα εύρεσης, αφού το ζητούμενο σ' αυτήν είναι η άγνωστη συνάρτηση.

Ο John Von Neumann[71] ενώ παρατηρεί πως θα πρέπει, στο μέτρο του δυνατού, να διατηρούμε εμφανή τη σχέση των Μαθηματικών με τις εμπειρικές τους πηγές, αλλιώς αυτά μετατρέπονται σε l' art pour l' art κινδυνεύοντας να εκφυλιστούν, αναφέρεται στον δύο όψεων χαρακτήρα των Μαθηματικών που ενώ δεν είναι εμπειρική επιστήμη, αφενός έχει εμπειρικές καταβολές, αφετέρου συνδέεται στενότατα με τις φυσικές επιστήμες. Ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των δύο όψεων των Μαθηματικών, δηλ. της πραγματικότητας και των αφηρημένων μαθηματικών δομών, είναι κατά τους Verschaffel, Greer, De Corte, το mathematical modeling[30].

Σύμφωνα με τους Blum & Niss[49], η εισαγωγή της μοντελοποίησης στη διδακτική πρακτική των διαφόρων βαθμίδων της εκπαίδευσης, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μέσω κάποιας εκ των ακόλουθων προσεγγίσεων:

- Η χωριστή προσέγγιση (The separation approach): Οι όποιες δραστηριότητες σχετίζονται με τη μοντελοποίηση λαμβάνουν χώρα σε χωριστά μαθήματα, ανεξάρτητα των μαθημάτων που αφορούν τα καθαρά Μαθηματικά.
- Η προσέγγιση των δύο μερών (The two compartment approach): Στο πρώτο μέρος διδάσκονται τα καθαρά Μαθηματικά που είναι απαραίτητα για το δεύτερο μέρος στο οποίο διδάσκονται τα θέματα μοντελοποίησης.
- Η προσέγγιση των νησίδων (The islands approach): Το πρόγραμμα διαμελίζεται σε τμήματα, καθένα εκ των οποίων οργανώνεται σύμφωνα με την προσέγγιση των δύο μερών. Το αποτέλεσμα είναι να «διακόπτεται» η ροή του προγράμματος από «νησίδες» μοντελοποίησης.
- Η μεικτή προσέγγιση (The mixing approach): Οι νέες μαθηματικές έννοιες εισάγονται μέσω της μοντελοποίησης. Από το πρόβλημα πηγάζει η νέα μαθηματική γνώση. Αντιστρόφως, οι νέες έννοιες που μόλις έχουν κατακτηθεί από την τάξη, χρησιμοποιούνται για τη διαπραγμάτευση νέων μοντέλων.
- Η ολοκληρωμένη προσέγγιση (The mathematics curriculum integrated approach): Τα προβλήματα που είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να οδηγούν στις έννοιες που επιθυμούμε να εισάγουμε, προηγούνται και οι μαθηματικές μέθοδοι και έννοιες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για τη διαπραγμάτευσή τους αναζητούνται κι αναπτύσσονται στο επόμενο στάδιο.
- Η διεπιστημονική, ολοκληρωμένη προσέγγιση (The interdisciplinary integrated approach): Το μόνο στοιχείο που τη διαφοροποιεί από την προηγούμενη προσέγγιση είναι η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ μαθηματικών κι εξωμαθηματικών εννοιών, εντός ενός διεπιστημονικού πλαισίου.

Μία μαθηματική έννοια διαθέτει αφενός μια *αφηρημένη συμβολική έκφραση* (mathematical meaning) εντός των πλαισίων μιας θεωρίας, αφετέρου τα *εφαρμόσιμα νοήματά της* (applicational meanings) εντός των πλαισίων των εφαρμογών της θεωρίας. Π.χ. η έννοια της αύξησης ή μείωσης κατά σταθερό παράγοντα αποτελεί ένα από τα εφαρμόσιμα νοήματα της εκθετικής μεταβολής. Ο Κλαουδάτος επισημαίνει[48] ότι, όπως έχει επιβεβαιωθεί, μια διδασκαλία των Μαθηματικών προσανατολισμένη στη θεωρητική διαπραγμάτευση των εννοιών δεν καθιστά τους μαθητές ικανούς να επεξεργαστούν ένα πραγματικό πρόβλημα, παρά το ότι τα Μαθηματικά που απαιτούνται για την επεξεργασία αυτή τους είναι γνωστά. Αντίθετα, με μια διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών μέσω πραγματικών καταστάσεων ο μαθητής αναπτύσσει ένα σύνολο μοντέλων εφαρμόσιμων νοημάτων, τα οποία του επιτρέπουν να διακρίνει τις έννοιες μέσα στα πραγματικά προβλήματα. Ήδη από το 1960 ο Bruner διατύπωνε την άποψη κατά την οποία «Θα πρέπει να προσφέρουμε στους μαθητές ευκαιρίες για ν' αποκτούν δεξιότητες στην επίλυση προβλημάτων… . Η εκπαίδευση θα πρέπει να δίνει προσοχή στο άγνωστο και υποθετικό,

χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά ως αφετηρία για συμπερασματικές προεκτάσεις (extrapolations)»[14]. Σήμερα θεωρούμε πως η εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλήματος, θα βοηθήσει τους μαθητές στη βαθύτερη κατανόησή τους.[41]

Στο πλαίσιο της *προσανατολισμένης στη μοντελοποίηση διδασκαλίας* (modeling orientated teaching)[49], ένα καταλλήλως επιλεγμένο πρόβλημα δημιουργεί την ανάγκη για την εισαγωγή της νέας έννοιας ή μεθόδου που πρόκειται να διδαχθεί. Η λύση του προβλήματος δημιουργεί το πλαίσιο εντός του οποίου ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση. Εν συνεχεία η εν λόγω έννοια ανεξαρτητοποιείται από το συγκεκριμένο πρόβλημα ή τον διαπραγματευτή του και μετατρέπεται σε μαθηματικό αντικείμενο. Τέλος, όταν πια η έννοια ή η μέθοδος θεωρείται γνωστή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαπραγμάτευση άλλων προβλημάτων. Μια διδασκαλία και διαδικασία μάθησης προσανατολισμένη στη μοντελοποίηση δε περιλαμβάνει δομές του τύπου θεωρία - εφαρμογές - ασκήσεις αλλά είναι οργανωμένη επάνω σε πραγματικά προβλήματα και διεξάγεται με μέσο τα πραγματικά προβλήματα: το πρόβλημα δημιουργεί την ανάγκη να κάνουμε Μαθηματικά[81]. Συγχρόνως, με μια τέτοιου είδους διδασκαλία αποκαλύπτουμε στο μαθητή και μια ολοκληρωμένη εικόνα για τα ίδια τα Μαθηματικά, ο διαχωρισμός των οποίων σε θεωρία και εφαρμογές είναι λανθασμένος, αφού είναι σαφές πως παράλληλα με τη θεωρία και τη μεθοδολογία πρέπει να διδάσκουμε τη διαίσθηση, την εικασία, τη δοκιμή και το λάθος, την εκμετάλλευση της εποπτείας, την πορεία από τη γέννηση ως τη λύση του προβλήματος, τη γενίκευση, προσφέροντάς του ταυτόχρονα κίνητρα για μάθηση.

Σύμφωνα με τον Polya ένα από τα αξιώματα της μάθησης είναι το *άριστο κίνητρο* (best motivation) και ο μαθητής θα πρέπει να βρίσκει ενδιαφέρον στην ύλη που διδάσκεται και στον τρόπο με τον οποίο τη διδάσκεται[75]. Ο Hilbert πίστευε πως τα προβλήματα είναι η ίδια η ζωή των Μαθηματικών: «ένα πρόβλημα θα πρέπει να μας κινητοποιεί δίχως όμως να είναι εντελώς απρόσιτο και να μας οδηγεί, ώστε η αποκάλυψη της λύσης του ν΄ αποτελεί πηγή χαράς»[39]. Με μια διδασκαλία προσανατολισμένη στις πραγματικές καταστάσεις και την ε.λ.π., προσφέρουμε ένα φυσικό κίνητρο για μάθηση στο μαθητή που έχει την ανάγκη να βρίσκει νόημα στην εκπαιδευτική διαδικασία, αφού αυτός ζώντας στον πραγματικό κόσμο, εκδηλώνει περιέργεια για τις πραγματικές καταστάσεις και συμμετέχει στη μαθηματική ανακάλυψη αντιμετωπίζοντας τα Μαθηματικά ως ένα σώμα γνώσης πολιτισμικά συνδεδεμένο με τον φυσικό και κοινωνικό κόσμο[53]. Εξάλλου το να κερδίσουμε το ενδιαφέρον του μαθητή αποτελεί παράγοντα κλειδί στη μείωση των συμπεριφορών που εκδηλώνονται ενάντια στην εκπαιδευτική διαδικασία.[34] Δεν πρόκειται φυσικά για εύκολη υπόθεση, δεδομένου ότι ο χώρος των πραγματικών προβλημάτων είναι ευρύς, οι παράμετροι σε μια πραγματική κατάσταση είναι πολλές και τα γεγονότα ίσως ασαφή, ενώ απουσιάζει η ακρίβεια των καθαρών Μαθηματικών, με αποτέλεσμα κατά τη μαθησιακή διαδικασία να αναδύονται ίσως συναισθήματα όπως φόβος, σκεπτικισμός ή αβεβαιότητα. Αν όμως δεχθούμε ως ισχυρή την υπόθεση ότι το «μαθαίνω Μαθηματικά» είναι συνώνυμο του «μαθαίνω να δουλεύω με τα Μαθηματικά, μαθαίνω να τα εφαρμόζω», τότε υπό την έννοια των όσων προαναφέραμε, έχουμε όχι μόνο μια πιο ανθρωπιστική προσέγγιση στα Μαθηματικά, αλλά και μια πιο ανθρώπινη-παιδαγωγική προσέγγιση στη μετάδοσή τους αφού συμμερίζεται τις εμπειρίες, τα ενδιαφέροντα και τους προβληματισμούς του μαθητή[96] που ζει τις αλλαγές, τις πιέσεις και τις εκρήξεις μιας κοινωνίας, σ΄ ένα διαρκώς πολιτιστικά μεταβαλλόμενο περιβάλλον.

Το πολιτιστικό μας περιβάλλον μας εφοδιάζει με συμβολικά συστήματα αναπαράστασης του πραγματικού κόσμου, τα οποία, λόγω της γενικότητας των νοημάτων τους, χρησιμοποιούμε προκειμένου να ερμηνεύσουμε και να

οργανώσουμε τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας για τη λύση ενός πραγματικού προβλήματος. Σύμφωνα με τον Vygotsky, η διαδικασία μάθησης των επιστημονικών, άρα και των μαθηματικών εννοιών, δεν είναι παρά μια *διαδικασία διαμεσολάβησης των συμβόλων* ανάμεσα στο υποκείμενο και το γνωστικό αντικείμενο[51]: ο Vygotsky θεωρεί τη διαμεσολάβηση των συμβόλων ως πηγή των ανώτερων νοητικών λειτουργιών του μαθητή[12]. Τα σύμβολα και τα σημειολογικά συστήματα λειτουργούν ως φορείς πολιτιστικού νοήματος όπως οι γενικευμένες γνώσεις και δεξιότητες που μεταφέρονται μέσω των συμβόλων και των αναπαραστάσεων π.χ. του Η/Υ[12],[73]. Εξέχουσα θέση στη θεωρία του Vygotsky κατέχει η «*ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης*» (ZPD), ένας συμβολικός χώρος που περιλαμβάνει τις συνθήκες υπό τις οποίες διεξάγεται η εκπαιδευτική διαδικασία, τους συμμετέχοντες σ΄ αυτήν, τις πρακτικές τους κ.τ.λ.. Η ZPD εμφανίζεται όταν οι εμπλεκόμενοι κατανοούν ο ένας τη σκέψη του άλλου και εντός της υφίσταται η διαμεσολάβηση των συμβόλων. Σύμφωνα με τους Holton και Thomas, κατά τη διδασκαλία με την ε.λ.π., η μάθηση εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στο έργο που αντιμετωπίζει η τάξη και τη ZPD των μαθητών[52]. Αν η απόσταση αυτή είναι αρκετά μεγάλη, ώστε οι μαθητές ν΄ αδυνατούν ν΄ αποπερατώσουν το έργο, επεμβαίνει ο δάσκαλος με επιπλέον εξηγήσεις και πληροφορίες, προκειμένου να διαμορφωθεί το πλαίσιο εντός του οποίου οι μαθητές θα μπορούν να διαπραγματευθούν το έργο περαιτέρω. Μια τέτοιου είδους καθοδήγηση ονομάζεται *σκαλωσιά μάθησης* (scaffold for learning)[52],[66]. Η βέλτιστη κατάσταση για παραγωγική αλληλεπίδραση των μετεχόντων στην μαθησιακή διαδικασία, δημιουργείται όταν η δυσκολία του προβλήματος είναι μεν αρκετά μεγάλη, παραμένει όμως μέσα στη ZPD των μαθητών[52].

Κατά την προσέγγιση των Sierpinska & Lerman[85], τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση αντιμετωπίζονται ως προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας. Απ΄ τη μια τα προϊόντα της μαθηματικής σκέψης θεωρούνται ως εξαρτώμενα από τα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια εντός των οποίων αναπτύσσονται κι απ΄ την άλλη κάθε κοινωνική ή πολιτιστική πρακτική λαμβάνει χώρα εντός ενός θεσμικού πλαισίου. Ως συνέπεια, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απόλυτα αντικείμενα, αλλά είναι ολότητες οι οποίες προέρχονται από τις πρακτικές δεδομένων θεσμών.

Προκειμένου να κατανοηθεί ένα μαθηματικό αντικείμενο εντός ενός θεσμού, απαιτείται ενός είδους διαπραγμάτευση (discourse): προφορικός και γραπτός λόγος, χρήση συμβολικών συστημάτων, μια διαμορφωμένη έκφραση σκέψης επί του αντικειμένου, ανταλλαγή απόψεων, επικοινωνία, τρόποι διαπραγμάτευσης που πλαισιώνονται από την τεχνολογία των υπολογιστών κ.τ.λ.[86] Ο μαθητής εξαρτάται απ΄ το δάσκαλο στο βαθμό που ο δεύτερος ελέγχει το αν π.χ. ο πρώτος διαπραγματεύεται σωστά ένα πρόβλημα. Το γεγονός αυτό, ως μέρος του διδακτικού συμβολαίου, είναι χαρακτηριστικό του θεσμού του σχολείου και συνεπώς δεν είναι ρεαλιστικό να περιμένει κανείς από τους μαθητές του να διαπραγματεύονται μαθηματικά προβλήματα με τον τρόπο που το κάνουν οι μαθηματικοί. Εκείνο όμως που μπορούμε να επιδιώκουμε και να αναμένουμε στα πλαίσια της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης, είναι η τάξη ως κοινωνική ομάδα ν΄ αποφασίζει πως και τι θα συμπεράνει από τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων που έχει ν΄ αντιμετωπίσει μέσα από μια επικοινωνιακή διαδικασία[86].

Πολλές πραγματικές καταστάσεις, ενδιαφέροντα φυσικά, κοινωνικά, οικονομικά και βιολογικά φαινόμενα εξελίσσονται συνεχώς στο χρόνο, ή τουλάχιστον δε χάνουμε και πολλά εάν υποθέσουμε κάτι τέτοιο, ως εκ τούτου είναι δυνατόν να μοντελοποιηθούν με *διαφορικές εξισώσεις* (στο εξής δ.ε.), οι οποίες ανήκουν στους κλάδους των Μαθηματικών που υποκινούνται απευθείας από τις άλλες επιστήμες. Πολλοί από τους φυσικούς νόμους βρίσκουν τη φυσική τους έκφραση στη γλώσσα

των δ.ε. των οποίων η διδασκαλία κρίνεται έτσι απαραίτητη σε πολλές περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Πράγματι, οι μαθηματικοί δεν προχώρησαν ενσυνείδητα στη δημιουργία του κλάδου που αποτελεί τις δ.ε.. Από τότε που αναγνωρίσθηκε η αντίστροφη σχέση μεταξύ ολοκλήρωσης και διαφόρισης των συναρτήσεων, οι μαθηματικοί καταπιάστηκαν με την επίλυση πολύπλοκων πραγματικών προβλημάτων, απαιτήθηκαν εξειδικευμένες τεχνικές και ως αποτέλεσμα είχαμε τη γένεση του κλάδου αυτού[10]. Θα μπορούσαμε να πούμε πως οι δ.ε. αποτελούν απλώς μια συμβολική αναπαράσταση των φυσικών νόμων και φαινομένων. Η σπουδαιότητά τους έγκειται στο ότι μας επιτρέπουν την αναγωγή ενός φυσικού, πραγματικού προβλήματος στο μαθηματικό πρόβλημα επίλυσης μιας δ.ε.[2]. Μέσω της μελέτης των δ.ε. ο Newton συμπέρανε τους νόμους της κίνησης των πλανητών που νωρίτερα είχε εμπειρικά ανακαλύψει ο Kepler και το 1846 ο Leverrier προέβλεψε την ύπαρξη του πλανήτη Ποσειδώνα και προσδιόρισε τη θέση του. Σήμερα είναι δυνατόν να διδάξουμε τις δ.ε. δίνοντας έμφαση στις φυσικές διαδικασίες και τα πραγματικά προβλήματα (real-life questions) που οδηγούν σε αυτές, κάνοντας χρήση ρεαλιστικών μοντέλων τα οποία ο Η/Υ, με τις δυνατότητές για υπολογισμούς και γραφικά που μας παρέχει, μας επιτρέπει να διερευνήσουμε σε βάθος και με πληρότητα, ώστε να εξασφαλίσουμε λύσεις και να πάρουμε απαντήσεις (real-life answers). Έχει δε διαπιστωθεί ότι διαδικασίες διδασκαλίας οργανωμένες υπό αυτή την οπτική αυξάνουν το ενδιαφέρον, την κατανόηση και την αποδοτικότητα σπουδαστών προσανατολισμένων σε εξωμαθηματικές ειδικότητες[99]. Η Mariotti[64] υποστηρίζει ότι η γεωμετρική αναπαράσταση και η αντίστοιχη μαθηματική έννοια βρίσκονται σε κάποιου είδους διαλεκτική αλληλεπίδραση: οι αναπαραστάσεις δημιουργούν μια αισθητική παρότρυνση για την ανάπτυξη και κατανόηση των εννοιών. Εξάλλου, όπως παρατηρεί ο Noss[74], τα μαθηματικά μοντέλα και οι αναπαραστάσεις (η γεωμετρική πληροφορία που εμπεριέχεται π.χ. στην ποιοτική ανάλυση μιας δ.ε.) δε θα 'πρεπε να διαχωρίζονται, ενώ αναμένουμε στις προσεχείς δεκαετίες, τέτοια ζεύγη μοντέλων-αναπαραστάσεων ν' αποτελέσουν το κλειδί στην έρευνα που αφορά μαθησιακά περιβάλλοντα όπου, εν ομαδοσυνεργατική διδασκαλία οι μαθητές, κατασκευάζουν εικονικά μοντέλα, συζητούν γι αυτά και συμπεραίνουν απαντήσεις.

Η παρούσα εργασία δεν είναι παρά μια πρόταση παρουσίασης των δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών σ' ένα πλαίσιο εντός του οποίου τα πραγματικά προβλήματα δημιουργούν την ανάγκη για μαθηματική γνώση και η μάθηση κτίζεται κατά τη διάρκεια της επίλυσής τους με έμφαση στη γεωμετρική εποπτεία ή και αντίστροφα, μια απόπειρα παρουσίασης της μοντελοποίησης πραγματικών προβλημάτων με δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών και με τον Η/Υ σε επικουρικό και πρωταγωνιστικό ταυτόχρονα ρόλο.

1.3. *Θέμα – στόχοι – μεθοδολογία*

Ας αποσαφηνισθεί πως απευθυνόμαστε σε σπουδαστές τμημάτων Τ.Ε.Ι., οι οποίοι επέλεξαν ν' ακολουθήσουν έναν δρόμο στις σπουδές τους που μάλλον δεν έχει, εμφανή τουλάχιστον, σχέση με τα Μαθηματικά τα οποία όμως προβλέπεται να διδαχθούν σ' ένα εξαμηνιαίο μάθημα. Τι είδους Μαθηματικά να τους προταθούν λοιπόν; Οι Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζόμενων Μεταβλητών αποτελούν σίγουρα ένα αντικείμενο και βέβαια όχι το μοναδικό, που ταιριάζει με την περίπτωση. Αν ανοίξει κανείς ένα οποιοδήποτε σύγγραμμα σχετικό με τις διαφορικές εξισώσεις θα διαπιστώσει πως δέκα σελίδες είναι υπεραρκετές για να καταδειχθεί η τεχνική επίλυσης των δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, να παρουσιαστούν σχετικά

παραδείγματα και να προταθούν δραστηριότητες για τον εκπαιδευόμενο. Εδώ αφιερώνεται πολύ περισσότερος χώρος και χρόνος διότι ακριβώς, το θέμα που πραγματευόμαστε δεν είναι οι δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών καθαυτές, αλλά η εφαρμογή τους στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, η χρήση τους ως μαθηματικού εργαλείου για τη μελέτη και την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, προβλημάτων που εκ πρώτης όψεως είναι εξωμαθηματικά, ανήκουν στη δικαιοδοσία άλλων επιστημών και βέβαια όχι μόνο της Φυσικής.

Εκτός του ότι οι σπουδαστές πρέπει να γνωρίσουν τις δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών ως ένα κομμάτι των Μαθηματικών που, καθ' υπόδειξη του προϊσταμένου, «πρέπει ν' αποτελεί τη συνέχεια όσων διδάχθηκαν στο Λύκειο», οι διδακτικοί στόχοι συνοψίζονται κυρίως στο να εμπεδώσουν εκείνοι στους οποίους αυτή η πρόταση απευθύνεται, ότι τα Μαθηματικά γενικότερα, δε χρησιμεύουν μόνο για ν' ακονίσουμε τις αμβλείες περιοχές του μυαλού μας, δε γίνονται μόνο για να προσφέρουν ευχαρίστηση στους μαθηματικούς, ούτε μόνο διότι πρόκειται να φανούν χρήσιμα σε όσους σκοπεύουν ν' ασχοληθούν μελλοντικά με τη Μηχανική ή τη Θερμοδυναμική. Τα Μαθηματικά μπορούν μαζί με όλα τα παραπάνω να είναι ένα μέσο, ένα εργαλείο που χρησιμοποιεί ο επιστήμονας για να πραγματεύεται προβλήματα οικονομικού ή κοινωνικού χαρακτήρα όπως π.χ. η εξάπλωση μιας επιδημίας ή η πληθυσμιακή αύξηση ενός είδους. Μπορούν να είναι μια «γλώσσα» που αναγκαστικά πρέπει να μάθουμε να χρησιμοποιούμε προκειμένου να επεξεργαστούμε φυσικά, οικονομικά ή κοινωνικά φαινόμενα, να επικοινωνήσουμε με το φυσικό και πολιτιστικό μας περιβάλλον. Σκοπεύουμε να επεξεργαστούμε τρόπους με τους οποίους ο σπουδαστής θα διακρίνει κίνητρα ώστε να εργαστεί με τα Μαθηματικά και θα αναπτύξει μια ενεργητική και διερευνητική στάση ως προς αυτά εφαρμόζοντάς τα και ανακαλύπτοντας ο ίδιος την αξία και τη χρησιμότητά τους.

Πιο συγκεκριμένα, οι σπουδαστές πρόκειται:

- να εμπλακούν σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου των οποίων η επίλυση απαιτεί την κατασκευή μοντέλων με δ.ε.,
- να γνωρίσουν και ν' αναπτύξουν νέες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων,
- να συνδέσουν πραγματικές καταστάσεις με τις μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται μ' αυτές,
- να συνεργαστούν με τον διδάσκοντα και μεταξύ τους προάγοντας τη δημιουργικότητά τους,
- να πειραματιστούν διατυπώνοντας εικασίες τις οποίες θα ελέγχουν και θα βελτιώνουν, μαθαίνοντας από τα λάθη τους.

Πέραν αυτών, στόχος επίσης είναι αφενός να διερευνήσουμε τη «συμπεριφορά» της τάξης υπό την προσανατολισμένη στη μοντελοποίηση διδασκαλία και ν' αναδείξουμε το ρόλο της διδασκαλίας αυτού του είδους ακόμη και σε περιπτώσεις στις οποίες τα υπό εξέταση μαθηματικά ζητήματα κινούνται σε πλαίσια εντελώς άγνωστα για τους εκπαιδευόμενους, αφετέρου να διαφανεί πως η ε.λ.π. θα μπορούσε ν' αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο και ταυτόχρονα το σκοπό για τον οποίο μαθαίνουμε στους μαθητές μας Μαθηματικά.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται στην όλη παρουσίαση του θέματος εντοπίζεται, εκτός απ' την αναφορά στο εκάστοτε πρόβλημα και την διαπραγμάτευσή του με τη μεικτή προσέγγιση, στην καθ' όλη τη διάρκεια της παρουσίασης χρήση του Η/Υ ως προς την κάλυψη της ανάγκης για εποπτεία καθώς τη διατύπωση ή και τον έλεγχο εικασιών και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Ένα CAS (computer algebra system) αναδεικνύεται σε πολύτιμο εργαλείο για το χρήστη του αφού αντικαθιστά την παραδοσιακή «μολύβι και χαρτί» προσέγγιση με τις πολύ προχωρημένες δυνατότητες του προγράμματος για επίλυση, σχεδίαση γραφημάτων και εξερεύνηση σύγχρονων μαθηματικών μοντέλων επιλεγμένων από τη Φυσική, τη Βιολογία ή την

Οικονομία. Ένα CAS με εύκολο συντακτικό που απεδείχθη ιδανικό για τους σκοπούς μας είναι το MathCAD. Είναι σκόπιμη η αποφυγή κατά το δυνατόν φορμαλισμών και η «φυσιολογική» εμφάνιση των νέων μαθηματικών εννοιών μέσα από συζητήσεις και προβληματισμούς. Οι σπουδαστές, με τη συζήτηση, τη μεταξύ τους συνεργασία και ερχόμενοι αντιμέτωποι με νέα εργαλεία, μπαίνουν σε μια διαδικασία επανα-ανακάλυψης των εννοιών, ώστε εντέλει να «κάνουν» Μαθηματικά. Θεωρητικά ζητήματα παρουσιάζονται μέσω δραστηριοτήτων, ενώ σχολιασμοί, παραδείγματα και παρατηρήσεις αποσαφηνίζουν ειδικά σημεία ή γενικότερα θέματα που ανακύπτουν κατά τη συζήτηση.

1.4. *Παρατηρήσεις*

Μπορούμε δίχως υπερβολή να ισχυριστούμε πως η Φυσική αποτελεί ακόμη και σήμερα κίνητρο τόσο για την ανάπτυξη όσο και για τη δικαίωση του κλάδου των δ.ε. Όμως όταν κάποιος πρόκειται να γνωρίσει τις δ.ε. σε σπουδαστές Λογιστικής ή Διοίκησης Επιχειρήσεων, σίγουρα δε μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο τη σχέση τους με τη Φυσική. Για όσα ακολουθούν, αφορμή στάθηκαν κάποιες παραδόσεις μαθημάτων στους φοιτητές του τμήματος Λογιστικής του Τ.Ε.Ι. Χαλκίδας, στα πλαίσια του μαθήματος «Γενικά Μαθηματικά». Κατά τη γνώμη μας, σε περιπτώσεις στις οποίες έχουμε ως δάσκαλοι κάποιου είδους ελευθερία επιλογών σχετικά με το τι πρόκειται να διδάξουμε, απ' τη μια πρέπει να διδάσκουμε την εκάστοτε ύλη των Μαθηματικών, μέσα από εφαρμογές που εμπίπτουν στα ενδιαφέροντα του κοινού μας, κάνοντας έτσι το μάθημα πιο φιλικό και ίσως πιο ευχάριστο, απ' την άλλη πρέπει μέσω της διαδικασίας αυτής, να οδηγούμε τους μαθητές μας προς την κατεύθυνση του να αναπτύσσουν προβληματισμούς και ν' αναζητούν απαντήσεις ερευνώντας από μόνοι τους τα πράγματα, ώστε τελικώς να ανακαλύπτουν την αλήθεια - σε τελική ανάλυση, αυτή είναι η ουσία, η φύση και η διαδικασία της επιστημονικής έρευνας.

Τα οικονομικά συστήματα είναι αρκετά πολύπλοκα και εμπεριέχουν υπερβολικά πολλές παραμέτρους, ώστε καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο να κατασκευάσουμε μαθηματικά μοντέλα που να τα περιγράφουν ικανοποιητικά. Αν και κατά τους ειδικούς είναι πολύ νωρίς για να εδραιωθεί μια «εξουσία των Μαθηματικών» στην Οικονομική Επιστήμη με τον τρόπο που αυτό συνέβη στη Φυσική, ιστορικά μπορεί εύκολα να ελεγχθεί η αμφίδρομη σχέση των Μαθηματικών με τα χρηματοοικονομικά. Καθώς βαδίζει κανείς απ' την αρχαιότητα προς την εποχή μας, μπορεί να διακρίνει μια πληθώρα εννοιών που εισδύουν στα Μαθηματικά άμεσα απ' τη εμπειρία της αγοράς και που ενισχύονται με τη χρήση της εμπειρίας αυτής: η αντίθεση των εννοιών του διακριτού και του συνεχούς εμφαίνεται με τη νομισματοκοπία, οι έννοιες του τόκου και του ανατοκισμού, διερχόμενες απ' τον Απειροστικό Λογισμό εφαρμόζονται σε μια πολλαπλότητα θεωριών αύξησης (π.χ. πληθυσμών), η πιθανοθεωρία εισέρχεται στα Μαθηματικά λόγω των αναγκών της βιομηχανίας και των επιχειρήσεων και σωρός από άλλα παραδείγματα. Απ' την άλλη μεριά στον τομέα της Οικονομίας έχουν πραγματοποιηθεί πολλές απόπειρες μαθηματικοποίησης: οι οικονομολόγοι δανείστηκαν ουσιαστικά μαθηματικούς νόμους απ' τη Φυσική και τους μετέφεραν στα δικά τους αντικείμενα. Έτσι, οι δ.ε. αποτελούν ένα από τα κύρια εργαλεία στα σύγχρονα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων.

Βεβαίως τα μοντέλα που εδώ θα συζητήσουμε δεν είναι τα μόνα που εφαρμόζονται στην οικονομία και στο marketing, ούτε εφαρμόζονται αποκλειστικά στους τομείς αυτούς. Επελέγησαν τα μοντέλα αυτά για τους εξής βασικούς λόγους:

Πρώτον, αφορούν καταστάσεις σχετικές με το αντικείμενο των φοιτητών των σχολών Οικονομίας και Διοίκησης. Ο ανατοκισμός είναι μια από τις πρώτες έννοιες που σίγουρα συναντά κάποιος που παρακολουθεί μια τέτοια σχολή. Η πληθυσμιακή αύξηση συνδέεται άμεσα με την οικονομία όπως π.χ. με το κατά κεφαλήν Α.Ε.Π. Πράγματι, μεγάλη αύξηση του πληθυσμού, άρα γρήγορη αύξηση του πλήθους των εργαζομένων, έχει ως συνέπεια τον περιορισμό της ποσότητας κεφαλαίου ανά εργαζόμενο που οδηγεί σε χαμηλότερη παραγωγικότητα και συνεπώς, σε χαμηλότερο κατά κεφαλήν Α.Ε.Π. [63]. Δεύτερον, αποτελούν πρόσφορο έδαφος για μια εισαγωγή στις δ.ε, η θεωρία των οποίων αναπτύχθηκε κυρίως στα πλαίσια της μετάβασης από εξωμαθηματικά προβλήματα σε μαθηματικά μοντέλα. Τρίτον μας δίνουν την ευκαιρία για τη διδασκαλία πολλών άλλων μαθηματικών ενοτήτων δεικνύοντας τη συνοχή τους και τη δυνατότητα εφαρμογής τους σε πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα. Τέλος, από μαθηματική άποψη, είναι απλά μοντέλα και τούτο διότι, όπως είπαμε, στους στόχους δεν είναι να εμβαθύνουμε στη θεωρία των δ.ε. ή να παρουσιάσουμε πιο προχωρημένα Μαθηματικά μα να καταδείξουμε πώς εργαζόμαστε με τα Μαθηματικά, πώς εφαρμόζουμε τα Μαθηματικά. Αφενός τα Μαθηματικά που χρειάζεται κανείς για να παρακολουθήσει τις σελίδες που ακολουθούν δεν είναι περισσότερα ή δυσκολότερα απ' όσα γνωρίζει και διδάσκεται ένας τελειόφοιτος του Λυκείου. Αφετέρου θα διαφανεί και με τον τρόπο παρουσίασης των θεωρητικών ζητημάτων, ότι έμφαση δίνεται στις εφαρμογές και στην αξιοποίηση των Μαθηματικών προς την κατεύθυνση της ερμηνείας πραγματικών καταστάσεων. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα θα λησμονηθούν μετά το πέρας του εξαμήνου. Το ότι δουλέψαμε με τα Μαθηματικά, τα εφαρμόσαμε για να προβλέψουμε το μέλλον ή για να πειστούμε πως κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, το ότι μπορέσαμε μέσα από τα Μαθηματικά να διερευνήσουμε διαδικασίες που αρχικά μοιάζουν εντελώς ξένες προς αυτά, αποτελεί ό,τι καινούργιο κερδίσαμε. Με εφόδια κυρίως κάποια από τα Μαθηματικά της μέσης εκπαίδευσης και με εργαλείο τον Η/Υ θα προσπαθήσουμε να γνωρίσουμε τις δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών ως το μέσο επεξεργασίας πραγματικών προβλημάτων, να εργαστούμε με κάποιες εφαρμογές, να διακρίνουμε συσχετισμούς και να ανακαλύψουμε όψεις του αναπάντεχου τρόπου με τον οποίο τα Μαθηματικά εμπλέκονται στη ζωή μας.

Ολόκληρο το κείμενο διαιρείται σε τρεις κύριες ενότητες (τις ενότητες 2, 3, 4) στις οποίες σταδιακά εξαντλείται ό,τι επιδιώκουμε να πραγματευτούμε. Μετά από μια εισαγωγή στη μοντελοποίηση και τις βασικές έννοιες των δ.ε., ξεκινάμε από την εκθετική μεταβολή και φτάνουμε έως τη λογιστική αύξηση. Πλαισιώνουμε με εφαρμογές και δραστηριότητες ενώ ορισμένα θεωρητικά ζητήματα συζητούνται εντός σχολίων, παραδειγμάτων ή λυμένων προβλημάτων. Μεγάλο μέρος απ' τα περιεχόμενα των ενοτήτων 5 και 6 παρουσιάστηκε συνοπτικά. Με το σύμβολο «□», δηλώνεται η ολοκλήρωση ενός ορισμού, της απόδειξης μιας πρότασης ή της λύσης ενός προβλήματος. Οι γραφικές παραστάσεις και οι πίνακες έγιναν με χρήση των λογισμικών MathCAD 2001 pro, The Geometer's Sketchpad, Graphmatica for Win3, MSWord 2000 και MSExcel 2000.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 3/03/2010 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Βασιλική Φαρμάκη (Επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπλ. Καθηγήτρια	…….
2) Χριστόδουλος Αθανασιάδης	Καθηγητής	…….….
3) Νίκος Κλαουδάτος	Δρ στη Διδακτική των Μαθ/κών	…….….

Περιεχόμενα

Ενότητα 1: Εισαγωγή 5
1.1. Προοίμιο 5
1.2. Θεωρητικό Πλαίσιο 5
1.3. Θέμα – Στόχοι - Μεθοδολογία 10
1.4. Παρατηρήσεις 12

Ενότητα 2: Βασικές Έννοιες 15
2.1. Περί Μαθηματικών Μοντέλων 15
2.2. Η Δ.Ε. Χωριζόμενων Μεταβλητών 18
2.3. Ο Κύκλος της Μοντελοποίησης στην Πράξη 20
2.4. Η Διαδικασία της Διδασκαλίας 24
2.5. Οι Δραστηριότητες 33
2.7. Επί των απαντήσεων των σπουδαστών 35

Ενότητα 3: Ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας – Ο συνεχής ανατοκισμός 45
3.1. Περί ενός θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας 45
3.2. Ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας 46
3.3. Παρατηρήσεις 48
3.4. Το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού 51
3.5. Παραδείγματα 55
3.6. Σχόλια 57
3.7. Παρατηρήσεις 59
3.8. Παράδειγμα – ασταθής λύση ισορροπίας 60
3.9. Δραστηριότητες 63

Ενότητα 4: Οι πληθυσμιακές μεταβολές 67
4.1. Ο νόμος του Malthus 67
4.2. Το μοντέλο του Verhulst 70
4.3. Η Λογιστική Αύξηση 72
4.4. Σχόλια 75
4.5. Παρατηρήσεις 80
4.6. Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη 82

Ενότητα 5: Κάποια θεωρητικά ζητήματα 101

Ενότητα 6: Ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων 107

Ενότητα 7: Επίλογος 121

Βιβλιογραφία 125

1. Εισαγωγή

1.1. *Προοίμιο*

Η εργασία συγκροτείται κατά βάση από δύο συνιστώσες: αφενός τη διδασκαλία των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών στα πλαίσια της ενοποιημένης λύσης προβλήματος (mathematical modeling και problem solving), σε πειραματική ομάδα σπουδαστών με εξωμαθηματικό αντικείμενο και αφετέρου το ρόλο της ερμηνείας των αναπαραστάσεων που ο Η/Υ μας παρέχει, για έναν αποδοτικότερο τρόπο όσον αφορά την βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών, την εξαγωγή συμπερασμάτων, την ανάπτυξη κριτικής σκέψης για τη διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους καθώς και τη διατύπωση γενικεύσεων και προβλέψεων. Γίνεται μια προσπάθεια να εντοπιστούν και να ερμηνευθούν τα αίτια οποιωνδήποτε δυσκολιών ή παρανοήσεων σε ζητήματα που ανακύπτουν κατά τη διάρκεια της διδακτικής πρακτικής και να αντιμετωπιστούν αυτές κατά περίπτωση, εντός πάντα του πλαισίου των συνιστωσών που προαναφέραμε και με βάση την επικοινωνιακή προσέγγιση του Vygotsky και την κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση των Sierpinska & Lerman.

1.2. *Θεωρητικό πλαίσιο*

Είναι γνωστό το χάσμα μεταξύ σχολικών και πανεπιστημιακών Μαθηματικών της περιόδου 1900-1950, οπότε τα σχολικά Μαθηματικά διδάσκονται αποκομμένα από τις εφαρμογές τους και τα προβλήματα της καθημερινής ζωής, ώστε να δημιουργείται τελικά η εντύπωση ότι αποτελούν άχρηστα νοητικά κατασκευάσματα[47]. Στη δεκαετία του ‘50 έχουμε την εμφάνιση στα σχολικά Μαθηματικά της *μεταρρύθμισης των Μοντέρνων Μαθηματικών* που με αφετηρία τις Η.Π.Α. εξαπλώθηκε και σε άλλες χώρες και κινούνταν στο πνεύμα της έμφασης στους ακριβείς ορισμούς και στην αξιωματική θεμελίωση της ύλης. Τη χαριστική βολή στην ήδη αποτυχημένη μεταρρύθμιση των Μοντέρνων Μαθηματικών έδωσε το «Γιατί δε μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης – η αποτυχία των Μοντέρνων Μαθηματικών» του M. Kline και το καλό με την υπόθεση αυτή ήταν πως και στη χώρα μας οι ειδικοί άρχισαν πια να αναζητούν το γιατί, σε ποιους και με ποιους τρόπους πρέπει να διδάσκονται τα Μαθηματικά. Φτάνουμε λοιπόν στο τέλος της δεκαετίας του ’70 με τάσεις όπως η απαλλαγή των σχολικών Μαθηματικών απ’ την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και την κυριαρχία της συνολοθεωρίας, η σύνδεσή τους με τις άλλες επιστήμες ώστε να γίνεται φανερή η αναγκαιότητα της διδασκαλίας τους και η πρέπουσα απόδοση σημασίας στις εφαρμογές των Μαθηματικών και τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Προβλημάτων τα οποία δεν τίθενται ρητά ως μαθηματικά προβλήματα και των οποίων η λύση απαιτεί το ουσιαστικό προκαταρκτικό βήμα της *μαθηματικοποίησης*[22]. Επισημαίνεται δηλ. η αναγκαιότητα του να διδάξουμε το *mathematical modeling*. Στις αρχές της δεκαετίας του ’80 με το «An agenda for action» (NCTM, 1980) και το «Cockroft report» (HMSO, 1982) προτείνεται η ανάμειξη της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος (*problem solving*) στις διαδικασίες διδασκαλίας των Μαθηματικών[50]. Επιπλέον, από τα τέλη της δεκαετίας του ’80 και ύστερα, η διδασκαλία αυτή θεωρείται ως μια κοινωνικοπολιτισμική δραστηριότητα κατασκευής της γνώσης, μια διαδικασία εξοικείωσης με τα πολιτισμικά εργαλεία των

Μαθηματικών (θεωρητικό κι εννοιολογικό πλαίσιο, γλωσσικές και συμβολικές δομές, τρόποι αναπαράστασης, τρόποι επιχειρηματολογίας και συμπερασμού) που εμπλέκει τους μαθητές σε αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες προκειμένου να αναπτύξουν ισχυρές μορφές επιστημονικής σκέψης[66]. Αν και υπάρχουν κάποιες επιστημολογικές διαφορές μεταξύ του mathematical modeling και του problem solving, από τα μέσα της δεκαετίας του '80 παρατηρείται μια τάση ενοποίησης των δύο αυτών κλάδων, με αποτέλεσμα στη δεκαετία του '90 να προβάλει η *ενοποιημένη λύση προβλήματος* (ε.λ.π.) ως μέσο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών[50]. Στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα βέβαια, ίσως με απογοήτευση συνειδητοποιούμε πως είναι εύκολο να μιλάμε για μαθησιακές διαδικασίες που βασίζονται στην ε.λ.π. και τις νέες θεωρίες της Διδακτικής, μα συγχρόνως δύσκολο να τις πραγματοποιούμε, δεδομένου ότι απαιτούν ενθουσιασμό και ιδιαίτερη προσπάθεια από το δάσκαλο, παίρνουν χρόνο και αναγκαστικά περιορίζουν την ύλη. Παρ' όλα αυτά μπορούμε ως δάσκαλοι να εφεύρουμε δημιουργικές διδακτικές προσεγγίσεις αντιστεκόμενοι στο παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο τα Μαθηματικά, ως σώμα γνώσης εξωτερικό ως προς το μαθητή, μεταφέρονται δια του λόγου σε αυτόν από το δάσκαλο[49]. Αν μη τι άλλο μπορούμε να προσπαθήσουμε να εργαστούμε κατά την παρότρυνση του καθηγητή Β. Δουγαλή: «Θα ήταν καλό να κινηθούμε και στην Ελλάδα προς μορφές διδασκαλίας όπου ο δάσκαλος καθοδηγεί τους μαθητές του … σε διαδικασίες όπου οι αυτοί συνεργαζόμενοι σε μικρές ομάδες, ανακαλύπτουν από μόνοι τους τις λύσεις προβλημάτων της καθημερινής ζωής, τα οποία τίθενται σε μαθηματική γλώσσα.»[26]

Παραδοσιακά, η κατεξοχήν περιοχή εφαρμογής των Μαθηματικών είναι, δίχως αμφιβολία, η Φυσική όπου γίνεται επιτυχώς χρήση πολλών μαθηματικών θεωριών. Κατά το δεύτερο όμως μισό του 20ου αι. άλλες επιστήμες αναπτύχθηκαν σε τέτοιο βαθμό, ώστε η χρήση των Μαθηματικών και σε αυτές να καταστεί απολύτως αναγκαία. Φυσιολογικό επακόλουθο του γεγονότος αυτού είναι, από τη δεκαετία του 90 και μετά, η εμπλοκή της ενοποιημένης λύσης προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Έτσι, η ε.λ.π., όντας εγγενώς διεπιστημονική, συνδέεται πια με τις θεωρίες της διδασκαλίας και της μάθησης, ενώ συμβάλει στις έρευνες περί του ρόλου των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών και γενικώς το όλο θέμα βρίσκεται στο επίκεντρο της σημερινής έρευνας.[50]

Κατά τον Wittgenstein[15] *πρόβλημα* είναι αυτό που μπορούμε ν' αντιμετωπίσουμε και κάθε πρόβλημα υποδηλώνει μια μέθοδο αναζήτησης. Κάπως πιο επεξηγηματικά, ο Polya[76], μας πληροφορεί ότι *πρόβλημα* αντιμετωπίζουμε όταν ενσυνείδητα αναζητούμε την κατάλληλη ενέργεια προς την επίτευξη κάποιου στόχου, ο οποίος είναι πλήρως κατανοητός μα όχι άμεσα επιτεύξιμος. Η εύρεση της εν λόγω ενέργειας αποτελεί και τη λύση του προβλήματος και για την αναζήτησή της ο Polya προτείνει τη μέθοδό του των τεσσάρων βημάτων: κατανόηση – σχεδιασμός - εκτέλεση σχεδίου - έλεγχος. Μια πολύ γενική ταξινόμηση των προβλημάτων τα διαχωρίζει σε δύο κατηγορίες: τα *προβλήματα εύρεσης* στα οποία ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός ενός αγνώστου που ικανοποιεί κάποιες συνθήκες οι οποίες τον συνδέουν με τα δεδομένα του προβλήματος και τα *προβλήματα απόδειξης* στα οποία κάποιος σαφώς διατυπωμένος μαθηματικός ισχυρισμός, είτε θα πρέπει ν' αποδειχθεί πέρα από κάθε αμφιβολία (μέσω καλά συντονισμένων λογικών βημάτων που από την υπόθεση οδηγούν στο συμπέρασμα), είτε θα πρέπει να ανασκευαστεί (μέσω αντιπαραδείγματος). Τα καταρχήν εξωμαθηματικά προβλήματα τα οποία εδώ μας απασχολούν, θα μπορούσαμε να πούμε πως έχουν στοιχεία από αμφότερες τις προαναφερθείσες κατηγορίες: εμφανίζουν μεν μια πτυχή παρόμοια μ' εκείνη των προβλημάτων απόδειξης, δεδομένου ότι η μαθηματικοποίηση απαιτεί μια σειρά από αλληλοεξαρτώμενες συντονισμένες ενέργειες που απ' το πραγματικό πρόβλημα

οδηγούν σε μια διαφορική εξίσωση, η οποία δε με τη σειρά της αποτελεί ένα προβλήματα εύρεσης, αφού το ζητούμενο σ' αυτήν είναι η άγνωστη συνάρτηση.

Ο John Von Neumann[71] ενώ παρατηρεί πως θα πρέπει, στο μέτρο του δυνατού, να διατηρούμε εμφανή τη σχέση των Μαθηματικών με τις εμπειρικές τους πηγές, αλλιώς αυτά μετατρέπονται σε l' art pour l' art κινδυνεύοντας να εκφυλιστούν, αναφέρεται στον δύο όψεων χαρακτήρα των Μαθηματικών που ενώ δεν είναι εμπειρική επιστήμη, αφενός έχει εμπειρικές καταβολές, αφετέρου συνδέεται στενότατα με τις φυσικές επιστήμες. Ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των δύο όψεων των Μαθηματικών, δηλ. της πραγματικότητας και των αφηρημένων μαθηματικών δομών, είναι κατά τους Verschaffel, Greer, De Corte, το mathematical modeling[30].

Σύμφωνα με τους Blum & Niss[49], η εισαγωγή της μοντελοποίησης στη διδακτική πρακτική των διαφόρων βαθμίδων της εκπαίδευσης, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μέσω κάποιας εκ των ακόλουθων προσεγγίσεων:

- Η χωριστή προσέγγιση (The separation approach): Οι όποιες δραστηριότητες σχετίζονται με τη μοντελοποίηση λαμβάνουν χώρα σε χωριστά μαθήματα, ανεξάρτητα των μαθημάτων που αφορούν τα καθαρά Μαθηματικά.
- Η προσέγγιση των δύο μερών (The two compartment approach): Στο πρώτο μέρος διδάσκονται τα καθαρά Μαθηματικά που είναι απαραίτητα για το δεύτερο μέρος στο οποίο διδάσκονται τα θέματα μοντελοποίησης.
- Η προσέγγιση των νησίδων (The islands approach): Το πρόγραμμα διαμελίζεται σε τμήματα, καθένα εκ των οποίων οργανώνεται σύμφωνα με την προσέγγιση των δύο μερών. Το αποτέλεσμα είναι να «διακόπτεται» η ροή του προγράμματος από «νησίδες» μοντελοποίησης.
- Η μεικτή προσέγγιση (The mixing approach): Οι νέες μαθηματικές έννοιες εισάγονται μέσω της μοντελοποίησης. Από το πρόβλημα πηγάζει η νέα μαθηματική γνώση. Αντιστρόφως, οι νέες έννοιες που μόλις έχουν κατακτηθεί από την τάξη, χρησιμοποιούνται για τη διαπραγμάτευση νέων μοντέλων.
- Η ολοκληρωμένη προσέγγιση (The mathematics curriculum integrated approach): Τα προβλήματα που είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να οδηγούν στις έννοιες που επιθυμούμε να εισάγουμε, προηγούνται και οι μαθηματικές μέθοδοι και έννοιες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για τη διαπραγμάτευσή τους αναζητούνται κι αναπτύσσονται στο επόμενο στάδιο.
- Η διεπιστημονική, ολοκληρωμένη προσέγγιση (The interdisciplinary integrated approach): Το μόνο στοιχείο που τη διαφοροποιεί από την προηγούμενη προσέγγιση είναι η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ μαθηματικών κι εξωμαθηματικών εννοιών, εντός ενός διεπιστημονικού πλαισίου.

Μία μαθηματική έννοια διαθέτει αφενός μια *αφηρημένη συμβολική έκφραση* (mathematical meaning) εντός των πλαισίων μιας θεωρίας, αφετέρου τα *εφαρμόσιμα νοήματά της* (applicational meanings) εντός των πλαισίων των εφαρμογών της θεωρίας. Π.χ. η έννοια της αύξησης ή μείωσης κατά σταθερό παράγοντα αποτελεί ένα από τα εφαρμόσιμα νοήματα της εκθετικής μεταβολής. Ο Κλαουδάτος επισημαίνει[48] ότι, όπως έχει επιβεβαιωθεί, μια διδασκαλία των Μαθηματικών προσανατολισμένη στη θεωρητική διαπραγμάτευση των εννοιών δεν καθιστά τους μαθητές ικανούς να επεξεργαστούν ένα πραγματικό πρόβλημα, παρά το ότι τα Μαθηματικά που απαιτούνται για την επεξεργασία αυτή τους είναι γνωστά. Αντίθετα, με μια διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών μέσω πραγματικών καταστάσεων ο μαθητής αναπτύσσει ένα σύνολο μοντέλων εφαρμόσιμων νοημάτων, τα οποία του επιτρέπουν να διακρίνει τις έννοιες μέσα στα πραγματικά προβλήματα. Ήδη από το 1960 ο Bruner διατύπωνε την άποψη κατά την οποία «Θα πρέπει να προσφέρουμε στους μαθητές ευκαιρίες για ν' αποκτούν δεξιότητες στην επίλυση προβλημάτων… . Η εκπαίδευση θα πρέπει να δίνει προσοχή στο άγνωστο και υποθετικό,

χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά ως αφετηρία για συμπερασματικές προεκτάσεις (extrapolations)»[14]. Σήμερα θεωρούμε πως η εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλήματος, θα βοηθήσει τους μαθητές στη βαθύτερη κατανόησή τους.[41]

Στο πλαίσιο της *προσανατολισμένης στη μοντελοποίηση διδασκαλίας* (modeling orientated teaching)[49], ένα καταλλήλως επιλεγμένο πρόβλημα δημιουργεί την ανάγκη για την εισαγωγή της νέας έννοιας ή μεθόδου που πρόκειται να διδαχθεί. Η λύση του προβλήματος δημιουργεί το πλαίσιο εντός του οποίου ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση. Εν συνεχεία η εν λόγω έννοια ανεξαρτητοποιείται από το συγκεκριμένο πρόβλημα ή τον διαπραγματευτή του και μετατρέπεται σε μαθηματικό αντικείμενο. Τέλος, όταν πια η έννοια ή η μέθοδος θεωρείται γνωστή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαπραγμάτευση άλλων προβλημάτων. Μια διδασκαλία και διαδικασία μάθησης προσανατολισμένη στη μοντελοποίηση δε περιλαμβάνει δομές του τύπου θεωρία - εφαρμογές - ασκήσεις αλλά είναι οργανωμένη επάνω σε πραγματικά προβλήματα και διεξάγεται με μέσο τα πραγματικά προβλήματα: το πρόβλημα δημιουργεί την ανάγκη να κάνουμε Μαθηματικά[81]. Συγχρόνως, με μια τέτοιου είδους διδασκαλία αποκαλύπτουμε στο μαθητή και μια ολοκληρωμένη εικόνα για τα ίδια τα Μαθηματικά, ο διαχωρισμός των οποίων σε θεωρία και εφαρμογές είναι λανθασμένος, αφού είναι σαφές πως παράλληλα με τη θεωρία και τη μεθοδολογία πρέπει να διδάσκουμε τη διαίσθηση, την εικασία, τη δοκιμή και το λάθος, την εκμετάλλευση της εποπτείας, την πορεία από τη γέννηση ως τη λύση του προβλήματος, τη γενίκευση, προσφέροντάς του ταυτόχρονα κίνητρα για μάθηση.

Σύμφωνα με τον Polya ένα από τα αξιώματα της μάθησης είναι το *άριστο κίνητρο* (best motivation) και ο μαθητής θα πρέπει να βρίσκει ενδιαφέρον στην ύλη που διδάσκεται και στον τρόπο με τον οποίο τη διδάσκεται[75]. Ο Hilbert πίστευε πως τα προβλήματα είναι η ίδια η ζωή των Μαθηματικών: «ένα πρόβλημα θα πρέπει να μας κινητοποιεί δίχως όμως να είναι εντελώς απρόσιτο και να μας οδηγεί, ώστε η αποκάλυψη της λύσης του ν΄ αποτελεί πηγή χαράς»[39]. Με μια διδασκαλία προσανατολισμένη στις πραγματικές καταστάσεις και την ε.λ.π., προσφέρουμε ένα φυσικό κίνητρο για μάθηση στο μαθητή που έχει την ανάγκη να βρίσκει νόημα στην εκπαιδευτική διαδικασία, αφού αυτός ζώντας στον πραγματικό κόσμο, εκδηλώνει περιέργεια για τις πραγματικές καταστάσεις και συμμετέχει στη μαθηματική ανακάλυψη αντιμετωπίζοντας τα Μαθηματικά ως ένα σώμα γνώσης πολιτισμικά συνδεδεμένο με τον φυσικό και κοινωνικό κόσμο[53]. Εξάλλου το να κερδίσουμε το ενδιαφέρον του μαθητή αποτελεί παράγοντα κλειδί στη μείωση των συμπεριφορών που εκδηλώνονται ενάντια στην εκπαιδευτική διαδικασία.[34] Δεν πρόκειται φυσικά για εύκολη υπόθεση, δεδομένου ότι ο χώρος των πραγματικών προβλημάτων είναι ευρύς, οι παράμετροι σε μια πραγματική κατάσταση είναι πολλές και τα γεγονότα ίσως ασαφή, ενώ απουσιάζει η ακρίβεια των καθαρών Μαθηματικών, με αποτέλεσμα κατά τη μαθησιακή διαδικασία να αναδύονται ίσως συναισθήματα όπως φόβος, σκεπτικισμός ή αβεβαιότητα. Αν όμως δεχθούμε ως ισχυρή την υπόθεση ότι το «μαθαίνω Μαθηματικά» είναι συνώνυμο του «μαθαίνω να δουλεύω με τα Μαθηματικά, μαθαίνω να τα εφαρμόζω», τότε υπό την έννοια των όσων προαναφέραμε, έχουμε όχι μόνο μια πιο ανθρωπιστική προσέγγιση στα Μαθηματικά, αλλά και μια πιο ανθρώπινη-παιδαγωγική προσέγγιση στη μετάδοσή τους αφού συμμερίζεται τις εμπειρίες, τα ενδιαφέροντα και τους προβληματισμούς του μαθητή[96] που ζει τις αλλαγές, τις πιέσεις και τις εκρήξεις μιας κοινωνίας, σ΄ ένα διαρκώς πολιτιστικά μεταβαλλόμενο περιβάλλον.

Το πολιτιστικό μας περιβάλλον μας εφοδιάζει με συμβολικά συστήματα αναπαράστασης του πραγματικού κόσμου, τα οποία, λόγω της γενικότητας των νοημάτων τους, χρησιμοποιούμε προκειμένου να ερμηνεύσουμε και να

οργανώσουμε τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας για τη λύση ενός πραγματικού προβλήματος. Σύμφωνα με τον Vygotsky, η διαδικασία μάθησης των επιστημονικών, άρα και των μαθηματικών εννοιών, δεν είναι παρά μια *διαδικασία διαμεσολάβησης των συμβόλων* ανάμεσα στο υποκείμενο και το γνωστικό αντικείμενο[51]: ο Vygotsky θεωρεί τη διαμεσολάβηση των συμβόλων ως πηγή των ανώτερων νοητικών λειτουργιών του μαθητή[12]. Τα σύμβολα και τα σημειολογικά συστήματα λειτουργούν ως φορείς πολιτιστικού νοήματος όπως οι γενικευμένες γνώσεις και δεξιότητες που μεταφέρονται μέσω των συμβόλων και των αναπαραστάσεων π.χ. του Η/Υ[12],[73]. Εξέχουσα θέση στη θεωρία του Vygotsky κατέχει η «*ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης*» (ZPD), ένας συμβολικός χώρος που περιλαμβάνει τις συνθήκες υπό τις οποίες διεξάγεται η εκπαιδευτική διαδικασία, τους συμμετέχοντες σ΄ αυτήν, τις πρακτικές τους κ.τ.λ.. Η ZPD εμφανίζεται όταν οι εμπλεκόμενοι κατανοούν ο ένας τη σκέψη του άλλου και εντός της υφίσταται η διαμεσολάβηση των συμβόλων. Σύμφωνα με τους Holton και Thomas, κατά τη διδασκαλία με την ε.λ.π., η μάθηση εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στο έργο που αντιμετωπίζει η τάξη και τη ZPD των μαθητών[52]. Αν η απόσταση αυτή είναι αρκετά μεγάλη, ώστε οι μαθητές ν΄ αδυνατούν ν΄ αποπερατώσουν το έργο, επεμβαίνει ο δάσκαλος με επιπλέον εξηγήσεις και πληροφορίες, προκειμένου να διαμορφωθεί το πλαίσιο εντός του οποίου οι μαθητές θα μπορούν να διαπραγματευθούν το έργο περαιτέρω. Μια τέτοιου είδους καθοδήγηση ονομάζεται *σκαλωσιά μάθησης* (scaffold for learning)[52],[66]. Η βέλτιστη κατάσταση για παραγωγική αλληλεπίδραση των μετεχόντων στην μαθησιακή διαδικασία, δημιουργείται όταν η δυσκολία του προβλήματος είναι μεν αρκετά μεγάλη, παραμένει όμως μέσα στη ZPD των μαθητών[52].

Κατά την προσέγγιση των Sierpinska & Lerman[85], τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση αντιμετωπίζονται ως προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας. Απ΄ τη μια τα προϊόντα της μαθηματικής σκέψης θεωρούνται ως εξαρτώμενα από τα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια εντός των οποίων αναπτύσσονται κι απ΄ την άλλη κάθε κοινωνική ή πολιτιστική πρακτική λαμβάνει χώρα εντός ενός θεσμικού πλαισίου. Ως συνέπεια, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απόλυτα αντικείμενα, αλλά είναι ολότητες οι οποίες προέρχονται από τις πρακτικές δεδομένων θεσμών.

Προκειμένου να κατανοηθεί ένα μαθηματικό αντικείμενο εντός ενός θεσμού, απαιτείται ενός είδους διαπραγμάτευση (discourse): προφορικός και γραπτός λόγος, χρήση συμβολικών συστημάτων, μια διαμορφωμένη έκφραση σκέψης επί του αντικειμένου, ανταλλαγή απόψεων, επικοινωνία, τρόποι διαπραγμάτευσης που πλαισιώνονται από την τεχνολογία των υπολογιστών κ.τ.λ.[86] Ο μαθητής εξαρτάται απ΄ το δάσκαλο στο βαθμό που ο δεύτερος ελέγχει το αν π.χ. ο πρώτος διαπραγματεύεται σωστά ένα πρόβλημα. Το γεγονός αυτό, ως μέρος του διδακτικού συμβολαίου, είναι χαρακτηριστικό του θεσμού του σχολείου και συνεπώς δεν είναι ρεαλιστικό να περιμένει κανείς από τους μαθητές του να διαπραγματεύονται μαθηματικά προβλήματα με τον τρόπο που το κάνουν οι μαθηματικοί. Εκείνο όμως που μπορούμε να επιδιώκουμε και να αναμένουμε στα πλαίσια της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης, είναι η τάξη ως κοινωνική ομάδα ν΄ αποφασίζει πως και τι θα συμπεράνει από τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων που έχει ν΄ αντιμετωπίσει μέσα από μια επικοινωνιακή διαδικασία[86].

Πολλές πραγματικές καταστάσεις, ενδιαφέροντα φυσικά, κοινωνικά, οικονομικά και βιολογικά φαινόμενα εξελίσσονται συνεχώς στο χρόνο, ή τουλάχιστον δε χάνουμε και πολλά εάν υποθέσουμε κάτι τέτοιο, ως εκ τούτου είναι δυνατόν να μοντελοποιηθούν με *διαφορικές εξισώσεις* (στο εξής δ.ε.), οι οποίες ανήκουν στους κλάδους των Μαθηματικών που υποκινούνται απευθείας από τις άλλες επιστήμες. Πολλοί από τους φυσικούς νόμους βρίσκουν τη φυσική τους έκφραση στη γλώσσα

των δ.ε. των οποίων η διδασκαλία κρίνεται έτσι απαραίτητη σε πολλές περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Πράγματι, οι μαθηματικοί δεν προχώρησαν ενσυνείδητα στη δημιουργία του κλάδου που αποτελεί τις δ.ε.. Από τότε που αναγνωρίσθηκε η αντίστροφη σχέση μεταξύ ολοκλήρωσης και διαφόρισης των συναρτήσεων, οι μαθηματικοί καταπιάστηκαν με την επίλυση πολύπλοκων πραγματικών προβλημάτων, απαιτήθηκαν εξειδικευμένες τεχνικές και ως αποτέλεσμα είχαμε τη γένεση του κλάδου αυτού[10]. Θα μπορούσαμε να πούμε πως οι δ.ε. αποτελούν απλώς μια συμβολική αναπαράσταση των φυσικών νόμων και φαινομένων. Η σπουδαιότητά τους έγκειται στο ότι μας επιτρέπουν την αναγωγή ενός φυσικού, πραγματικού προβλήματος στο μαθηματικό πρόβλημα επίλυσης μιας δ.ε.[2]. Μέσω της μελέτης των δ.ε. ο Newton συμπέρανε τους νόμους της κίνησης των πλανητών που νωρίτερα είχε εμπειρικά ανακαλύψει ο Kepler και το 1846 ο Leverrier προέβλεψε την ύπαρξη του πλανήτη Ποσειδώνα και προσδιόρισε τη θέση του. Σήμερα είναι δυνατόν να διδάξουμε τις δ.ε. δίνοντας έμφαση στις φυσικές διαδικασίες και τα πραγματικά προβλήματα (real-life questions) που οδηγούν σε αυτές, κάνοντας χρήση ρεαλιστικών μοντέλων τα οποία ο Η/Υ, με τις δυνατότητές για υπολογισμούς και γραφικά που μας παρέχει, μας επιτρέπει να διερευνήσουμε σε βάθος και με πληρότητα, ώστε να εξασφαλίσουμε λύσεις και να πάρουμε απαντήσεις (real-life answers). Έχει δε διαπιστωθεί ότι διαδικασίες διδασκαλίας οργανωμένες υπό αυτή την οπτική αυξάνουν το ενδιαφέρον, την κατανόηση και την αποδοτικότητα σπουδαστών προσανατολισμένων σε εξωμαθηματικές ειδικότητες[99]. Η Mariotti[64] υποστηρίζει ότι η γεωμετρική αναπαράσταση και η αντίστοιχη μαθηματική έννοια βρίσκονται σε κάποιου είδους διαλεκτική αλληλεπίδραση: οι αναπαραστάσεις δημιουργούν μια αισθητική παρότρυνση για την ανάπτυξη και κατανόηση των εννοιών. Εξάλλου, όπως παρατηρεί ο Noss[74], τα μαθηματικά μοντέλα και οι αναπαραστάσεις (η γεωμετρική πληροφορία που εμπεριέχεται π.χ. στην ποιοτική ανάλυση μιας δ.ε.) δε θα 'πρεπε να διαχωρίζονται, ενώ αναμένουμε στις προσεχείς δεκαετίες, τέτοια ζεύγη μοντέλων-αναπαραστάσεων ν' αποτελέσουν το κλειδί στην έρευνα που αφορά μαθησιακά περιβάλλοντα όπου, εν ομαδοσυνεργατική διδασκαλία οι μαθητές, κατασκευάζουν εικονικά μοντέλα, συζητούν γι αυτά και συμπεραίνουν απαντήσεις.

Η παρούσα εργασία δεν είναι παρά μια πρόταση παρουσίασης των δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών σ' ένα πλαίσιο εντός του οποίου τα πραγματικά προβλήματα δημιουργούν την ανάγκη για μαθηματική γνώση και η μάθηση κτίζεται κατά τη διάρκεια της επίλυσής τους με έμφαση στη γεωμετρική εποπτεία ή και αντίστροφα, μια απόπειρα παρουσίασης της μοντελοποίησης πραγματικών προβλημάτων με δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών και με τον Η/Υ σε επικουρικό και πρωταγωνιστικό ταυτόχρονα ρόλο.

1.3. *Θέμα – στόχοι – μεθοδολογία*

Ας αποσαφηνισθεί πως απευθυνόμαστε σε σπουδαστές τμημάτων Τ.Ε.Ι., οι οποίοι επέλεξαν ν' ακολουθήσουν έναν δρόμο στις σπουδές τους που μάλλον δεν έχει, εμφανή τουλάχιστον, σχέση με τα Μαθηματικά τα οποία όμως προβλέπεται να διδαχθούν σ' ένα εξαμηνιαίο μάθημα. Τι είδους Μαθηματικά να τους προταθούν λοιπόν; Οι Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζόμενων Μεταβλητών αποτελούν σίγουρα ένα αντικείμενο και βέβαια όχι το μοναδικό, που ταιριάζει με την περίπτωση. Αν ανοίξει κανείς ένα οποιοδήποτε σύγγραμμα σχετικό με τις διαφορικές εξισώσεις θα διαπιστώσει πως δέκα σελίδες είναι υπεραρκετές για να καταδειχθεί η τεχνική επίλυσης των δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, να παρουσιαστούν σχετικά

παραδείγματα και να προταθούν δραστηριότητες για τον εκπαιδευόμενο. Εδώ αφιερώνεται πολύ περισσότερος χώρος και χρόνος διότι ακριβώς, το θέμα που πραγματευόμαστε δεν είναι οι δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών καθαυτές, αλλά η εφαρμογή τους στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, η χρήση τους ως μαθηματικού εργαλείου για τη μελέτη και την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, προβλημάτων που εκ πρώτης όψεως είναι εξωμαθηματικά, ανήκουν στη δικαιοδοσία άλλων επιστημών και βέβαια όχι μόνο της Φυσικής.

Εκτός του ότι οι σπουδαστές πρέπει να γνωρίσουν τις δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών ως ένα κομμάτι των Μαθηματικών που, καθ' υπόδειξη του προϊσταμένου, «πρέπει ν' αποτελεί τη συνέχεια όσων διδάχθηκαν στο Λύκειο», οι διδακτικοί στόχοι συνοψίζονται κυρίως στο να εμπεδώσουν εκείνοι στους οποίους αυτή η πρόταση απευθύνεται, ότι τα Μαθηματικά γενικότερα, δε χρησιμεύουν μόνο για ν' ακονίσουμε τις αμβλείες περιοχές του μυαλού μας, δε γίνονται μόνο για να προσφέρουν ευχαρίστηση στους μαθηματικούς, ούτε μόνο διότι πρόκειται να φανούν χρήσιμα σε όσους σκοπεύουν ν' ασχοληθούν μελλοντικά με τη Μηχανική ή τη Θερμοδυναμική. Τα Μαθηματικά μπορούν μαζί με όλα τα παραπάνω να είναι ένα μέσο, ένα εργαλείο που χρησιμοποιεί ο επιστήμονας για να πραγματεύεται προβλήματα οικονομικού ή κοινωνικού χαρακτήρα όπως π.χ. η εξάπλωση μιας επιδημίας ή η πληθυσμιακή αύξηση ενός είδους. Μπορούν να είναι μια «γλώσσα» που αναγκαστικά πρέπει να μάθουμε να χρησιμοποιούμε προκειμένου να επεξεργαστούμε φυσικά, οικονομικά ή κοινωνικά φαινόμενα, να επικοινωνήσουμε με το φυσικό και πολιτιστικό μας περιβάλλον. Σκοπεύουμε να επεξεργαστούμε τρόπους με τους οποίους ο σπουδαστής θα διακρίνει κίνητρα ώστε να εργαστεί με τα Μαθηματικά και θα αναπτύξει μια ενεργητική και διερευνητική στάση ως προς αυτά εφαρμόζοντάς τα και ανακαλύπτοντας ο ίδιος την αξία και τη χρησιμότητά τους.

Πιο συγκεκριμένα, οι σπουδαστές πρόκειται:

- να εμπλακούν σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου των οποίων η επίλυση απαιτεί την κατασκευή μοντέλων με δ.ε.,
- να γνωρίσουν και ν' αναπτύξουν νέες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων,
- να συνδέσουν πραγματικές καταστάσεις με τις μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται μ' αυτές,
- να συνεργαστούν με τον διδάσκοντα και μεταξύ τους προάγοντας τη δημιουργικότητά τους,
- να πειραματιστούν διατυπώνοντας εικασίες τις οποίες θα ελέγχουν και θα βελτιώνουν, μαθαίνοντας από τα λάθη τους.

Πέραν αυτών, στόχος επίσης είναι αφενός να διερευνήσουμε τη «συμπεριφορά» της τάξης υπό την προσανατολισμένη στη μοντελοποίηση διδασκαλία και ν' αναδείξουμε το ρόλο της διδασκαλίας αυτού του είδους ακόμη και σε περιπτώσεις στις οποίες τα υπό εξέταση μαθηματικά ζητήματα κινούνται σε πλαίσια εντελώς άγνωστα για τους εκπαιδευόμενους, αφετέρου να διαφανεί πως η ε.λ.π. θα μπορούσε ν' αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο και ταυτόχρονα το σκοπό για τον οποίο μαθαίνουμε στους μαθητές μας Μαθηματικά.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται στην όλη παρουσίαση του θέματος εντοπίζεται, εκτός απ' την αναφορά στο εκάστοτε πρόβλημα και την διαπραγμάτευσή του με τη μεικτή προσέγγιση, στην καθ' όλη τη διάρκεια της παρουσίασης χρήση του Η/Υ ως προς την κάλυψη της ανάγκης για εποπτεία καθώς τη διατύπωση ή και τον έλεγχο εικασιών και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Ένα CAS (computer algebra system) αναδεικνύεται σε πολύτιμο εργαλείο για το χρήστη του αφού αντικαθιστά την παραδοσιακή «μολύβι και χαρτί» προσέγγιση με τις πολύ προχωρημένες δυνατότητες του προγράμματος για επίλυση, σχεδίαση γραφημάτων και εξερεύνηση σύγχρονων μαθηματικών μοντέλων επιλεγμένων από τη Φυσική, τη Βιολογία ή την

Οικονομία. Ένα CAS με εύκολο συντακτικό που απεδείχθη ιδανικό για τους σκοπούς μας είναι το MathCAD. Είναι σκόπιμη η αποφυγή κατά το δυνατόν φορμαλισμών και η «φυσιολογική» εμφάνιση των νέων μαθηματικών εννοιών μέσα από συζητήσεις και προβληματισμούς. Οι σπουδαστές, με τη συζήτηση, τη μεταξύ τους συνεργασία και ερχόμενοι αντιμέτωποι με νέα εργαλεία, μπαίνουν σε μια διαδικασία επανα-ανακάλυψης των εννοιών, ώστε εντέλει να «κάνουν» Μαθηματικά. Θεωρητικά ζητήματα παρουσιάζονται μέσω δραστηριοτήτων, ενώ σχολιασμοί, παραδείγματα και παρατηρήσεις αποσαφηνίζουν ειδικά σημεία ή γενικότερα θέματα που ανακύπτουν κατά τη συζήτηση.

1.4. *Παρατηρήσεις*

Μπορούμε δίχως υπερβολή να ισχυριστούμε πως η Φυσική αποτελεί ακόμη και σήμερα κίνητρο τόσο για την ανάπτυξη όσο και για τη δικαίωση του κλάδου των δ.ε. Όμως όταν κάποιος πρόκειται να γνωρίσει τις δ.ε. σε σπουδαστές Λογιστικής ή Διοίκησης Επιχειρήσεων, σίγουρα δε μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο τη σχέση τους με τη Φυσική. Για όσα ακολουθούν, αφορμή στάθηκαν κάποιες παραδόσεις μαθημάτων στους φοιτητές του τμήματος Λογιστικής του Τ.Ε.Ι. Χαλκίδας, στα πλαίσια του μαθήματος «Γενικά Μαθηματικά». Κατά τη γνώμη μας, σε περιπτώσεις στις οποίες έχουμε ως δάσκαλοι κάποιου είδους ελευθερία επιλογών σχετικά με το τι πρόκειται να διδάξουμε, απ' τη μια πρέπει να διδάσκουμε την εκάστοτε ύλη των Μαθηματικών, μέσα από εφαρμογές που εμπίπτουν στα ενδιαφέροντα του κοινού μας, κάνοντας έτσι το μάθημα πιο φιλικό και ίσως πιο ευχάριστο, απ' την άλλη πρέπει μέσω της διαδικασίας αυτής, να οδηγούμε τους μαθητές μας προς την κατεύθυνση του να αναπτύσσουν προβληματισμούς και ν' αναζητούν απαντήσεις ερευνώντας από μόνοι τους τα πράγματα, ώστε τελικώς να ανακαλύπτουν την αλήθεια - σε τελική ανάλυση, αυτή είναι η ουσία, η φύση και η διαδικασία της επιστημονικής έρευνας.

Τα οικονομικά συστήματα είναι αρκετά πολύπλοκα και εμπεριέχουν υπερβολικά πολλές παραμέτρους, ώστε καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο να κατασκευάσουμε μαθηματικά μοντέλα που να τα περιγράφουν ικανοποιητικά. Αν και κατά τους ειδικούς είναι πολύ νωρίς για να εδραιωθεί μια «εξουσία των Μαθηματικών» στην Οικονομική Επιστήμη με τον τρόπο που αυτό συνέβη στη Φυσική, ιστορικά μπορεί εύκολα να ελεγχθεί η αμφίδρομη σχέση των Μαθηματικών με τα χρηματοοικονομικά. Καθώς βαδίζει κανείς απ' την αρχαιότητα προς την εποχή μας, μπορεί να διακρίνει μια πληθώρα εννοιών που εισδύουν στα Μαθηματικά άμεσα απ' τη εμπειρία της αγοράς και που ενισχύονται με τη χρήση της εμπειρίας αυτής: η αντίθεση των εννοιών του διακριτού και του συνεχούς εμφαίνεται με τη νομισματοκοπία, οι έννοιες του τόκου και του ανατοκισμού, διερχόμενες απ' τον Απειροστικό Λογισμό εφαρμόζονται σε μια πολλαπλότητα θεωριών αύξησης (π.χ. πληθυσμών), η πιθανοθεωρία εισέρχεται στα Μαθηματικά λόγω των αναγκών της βιομηχανίας και των επιχειρήσεων και σωρός από άλλα παραδείγματα. Απ' την άλλη μεριά στον τομέα της Οικονομίας έχουν πραγματοποιηθεί πολλές απόπειρες μαθηματικοποίησης: οι οικονομολόγοι δανείστηκαν ουσιαστικά μαθηματικούς νόμους απ' τη Φυσική και τους μετέφεραν στα δικά τους αντικείμενα. Έτσι, οι δ.ε. αποτελούν ένα από τα κύρια εργαλεία στα σύγχρονα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων.

Βεβαίως τα μοντέλα που εδώ θα συζητήσουμε δεν είναι τα μόνα που εφαρμόζονται στην οικονομία και στο marketing, ούτε εφαρμόζονται αποκλειστικά στους τομείς αυτούς. Επελέγησαν τα μοντέλα αυτά για τους εξής βασικούς λόγους:

Πρώτον, αφορούν καταστάσεις σχετικές με το αντικείμενο των φοιτητών των σχολών Οικονομίας και Διοίκησης. Ο ανατοκισμός είναι μια από τις πρώτες έννοιες που σίγουρα συναντά κάποιος που παρακολουθεί μια τέτοια σχολή. Η πληθυσμιακή αύξηση συνδέεται άμεσα με την οικονομία όπως π.χ. με το κατά κεφαλήν Α.Ε.Π. Πράγματι, μεγάλη αύξηση του πληθυσμού, άρα γρήγορη αύξηση του πλήθους των εργαζομένων, έχει ως συνέπεια τον περιορισμό της ποσότητας κεφαλαίου ανά εργαζόμενο που οδηγεί σε χαμηλότερη παραγωγικότητα και συνεπώς, σε χαμηλότερο κατά κεφαλήν Α.Ε.Π. [63]. Δεύτερον, αποτελούν πρόσφορο έδαφος για μια εισαγωγή στις δ.ε, η θεωρία των οποίων αναπτύχθηκε κυρίως στα πλαίσια της μετάβασης από εξωμαθηματικά προβλήματα σε μαθηματικά μοντέλα. Τρίτον μας δίνουν την ευκαιρία για τη διδασκαλία πολλών άλλων μαθηματικών ενοτήτων δεικνύοντας τη συνοχή τους και τη δυνατότητα εφαρμογής τους σε πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα. Τέλος, από μαθηματική άποψη, είναι απλά μοντέλα και τούτο διότι, όπως είπαμε, στους στόχους δεν είναι να εμβαθύνουμε στη θεωρία των δ.ε. ή να παρουσιάσουμε πιο προχωρημένα Μαθηματικά μα να καταδείξουμε πώς εργαζόμαστε με τα Μαθηματικά, πώς εφαρμόζουμε τα Μαθηματικά. Αφενός τα Μαθηματικά που χρειάζεται κανείς για να παρακολουθήσει τις σελίδες που ακολουθούν δεν είναι περισσότερα ή δυσκολότερα απ' όσα γνωρίζει και διδάσκεται ένας τελειόφοιτος του Λυκείου. Αφετέρου θα διαφανεί και με τον τρόπο παρουσίασης των θεωρητικών ζητημάτων, ότι έμφαση δίνεται στις εφαρμογές και στην αξιοποίηση των Μαθηματικών προς την κατεύθυνση της ερμηνείας πραγματικών καταστάσεων. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα θα λησμονηθούν μετά το πέρας του εξαμήνου. Το ότι δουλέψαμε με τα Μαθηματικά, τα εφαρμόσαμε για να προβλέψουμε το μέλλον ή για να πειστούμε πως κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, το ότι μπορέσαμε μέσα από τα Μαθηματικά να διερευνήσουμε διαδικασίες που αρχικά μοιάζουν εντελώς ξένες προς αυτά, αποτελεί ό,τι καινούργιο κερδίσαμε. Με εφόδια κυρίως κάποια από τα Μαθηματικά της μέσης εκπαίδευσης και με εργαλείο τον Η/Υ θα προσπαθήσουμε να γνωρίσουμε τις δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών ως το μέσο επεξεργασίας πραγματικών προβλημάτων, να εργαστούμε με κάποιες εφαρμογές, να διακρίνουμε συσχετισμούς και να ανακαλύψουμε όψεις του αναπάντεχου τρόπου με τον οποίο τα Μαθηματικά εμπλέκονται στη ζωή μας.

Ολόκληρο το κείμενο διαιρείται σε τρεις κύριες ενότητες (τις ενότητες 2, 3, 4) στις οποίες σταδιακά εξαντλείται ό,τι επιδιώκουμε να πραγματευτούμε. Μετά από μια εισαγωγή στη μοντελοποίηση και τις βασικές έννοιες των δ.ε., ξεκινάμε από την εκθετική μεταβολή και φτάνουμε έως τη λογιστική αύξηση. Πλαισιώνουμε με εφαρμογές και δραστηριότητες ενώ ορισμένα θεωρητικά ζητήματα συζητούνται εντός σχολίων, παραδειγμάτων ή λυμένων προβλημάτων. Μεγάλο μέρος απ' τα περιεχόμενα των ενοτήτων 5 και 6 παρουσιάστηκε συνοπτικά. Με το σύμβολο «□», δηλώνεται η ολοκλήρωση ενός ορισμού, της απόδειξης μιας πρότασης ή της λύσης ενός προβλήματος. Οι γραφικές παραστάσεις και οι πίνακες έγιναν με χρήση των λογισμικών MathCAD 2001 pro, The Geometer's Sketchpad, Graphmatica for Win3, MSWord 2000 και MSExcel 2000.

2. Βασικές έννοιες

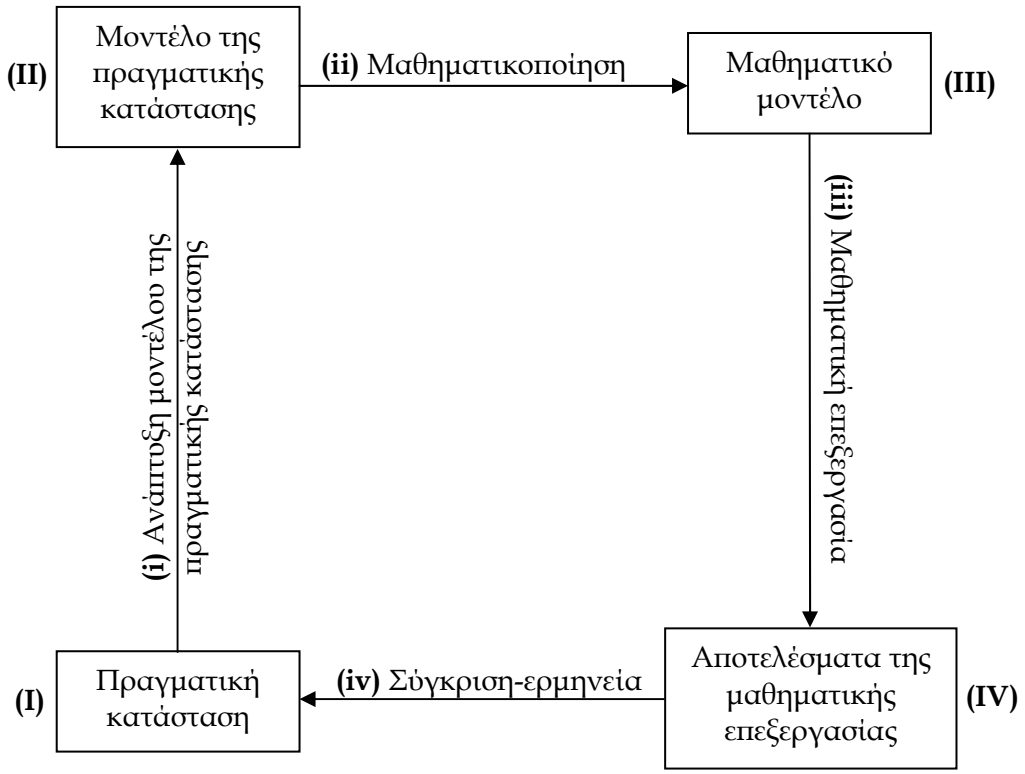
2.1. *περί μαθηματικών μοντέλων*

Είναι πασίγνωστο το «αεί ο Θεός ο Μέγας Γεωμετρεί» του Πλάτωνος (428-348 π.Χ.). Αιώνες μετά ο Γαλιλαίος (1564-1642) κάνει την ίδια διαπίστωση: «το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών» και πριν πενήντα χρόνια περίπου ο Paul Dirac (1902-1984) δηλώνει πως «ο Θεός χρησιμοποίησε πολύ προχωρημένα Μαθηματικά για την κατασκευή του σύμπαντος». Σήμερα είναι δεδομένη πια η επιρροή που έχουν αποκτήσει τα Μαθηματικά – χάρις στην αφαίρεση που τα διακρίνει – στις άλλες επιστήμες, μα και πέρα απ' αυτές στην κοινωνία ολόκληρη. Οι περισσότερες φυσικές, βιολογικές, κοινωνικές, οικονομικές, διαδικασίες που συναντάμε στον πραγματικό κόσμο και επιθυμούμε να μελετήσουμε, είναι βέβαια τόσο πολύπλοκες που είναι αδύνατο να τυποποιηθούν ώστε άμεσα να αντιμετωπιστούν με εργαλείο τα Μαθηματικά. Έτσι, επιχειρούμε να προσεγγίσουμε τις πραγματικές καταστάσεις κατασκευάζοντας μαθηματικά μοντέλα.

Ένα *μοντέλο* είναι το αποτέλεσμα της προσπάθειάς μας να περιγράψουμε, να απεικονίσουμε μια σκέψη ή μια πραγματική κατάσταση. Τέτοια μοντέλα πραγματικών διαδικασιών αναπτύσσουμε καθημερινά. Όταν προσπαθούμε να διασχίσουμε έναν δρόμο με μεγάλη κίνηση, εκτιμούμε το πλάτος του, την δική μας ταχύτητα και την ταχύτητα των διερχόμενων αυτοκινήτων. Νοητά αφαιρούμε λεπτομέρειες που θεωρούμε άσχετες, π.χ. το χρώμα ή τη μάρκα των αυτοκινήτων. Κατόπιν συσχετίζοντας τις εναπομείνασες πληροφορίες κάνουμε μια εκτίμηση του αποτελέσματος της απόπειράς μας να διασχίσουμε το δρόμο. Εάν συμπεράνουμε πως αυτό είναι ασφαλές και το συμπέρασμα αποδειχθεί ορθό, τότε θα επαναχρησιμοποιήσουμε το μοντέλο μας σε ανάλογες περιστάσεις. Εάν αποδειχθεί λανθασμένο, αλλά σταθούμε τυχεροί, θα αναθεωρήσουμε το μοντέλο μας για μια μελλοντική παρόμοια κατάσταση.

Το mathematical modeling συνίσταται εν ολίγοις, στη μετάφραση ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα (μαθηματικοποίηση), εν συνεχεία στη λύση του μαθηματικού προβλήματος κι εν τέλει στην επιστροφή στο πραγματικό πρόβλημα προκειμένου το μοντέλο να ελεγχθεί και να ερμηνευθεί. Πριν τη μαθηματικοποίηση είναι σκόπιμη η κατασκευή ενός μοντέλου της πραγματικής κατάστασης που επιτυγχάνεται με το να κάνουμε κάποιες παραδοχές απλοποιώντας τις πραγματικές διαδικασίες. Όπως επισημαίνει ο **Polya**[77], εδώ καλούμαστε να αποφύγουμε δύο αντίθετους *κινδύνους*: δε θα πρέπει να καταστήσουμε τη μαθηματική επεξεργασία τρομερά δύσκολη, αλλά ούτε και να υπεραπλουστεύσουμε τις πραγματικές πλευρές του προβλήματος. Κάνουμε παραδοχές που οδηγούν στην παράλειψη κάποιων στοιχείων τα οποία πιστεύουμε πως επιδρούν λίγο ή καθόλου στην εξέλιξη του φαινομένου που εξετάζουμε ή παραδοχές μέσω των οποίων διακριτές διαδικασίες αντικαθίστανται από συνεχείς κ.τ.λ. Για παράδειγμα, έστω πως θέλουμε ν' αναλύσουμε την κίνηση στον αέρα μιας μπάλας ποδοσφαίρου. Η μπάλα δεν είναι τέλεια σφαίρα, ο άνεμος επηρεάζει την κίνησή της και καθώς αλλάζει η απόστασή της απ' τη γη μεταβάλλεται λίγο το βάρος της. Αν παίρναμε όλα αυτά υπ' όψιν, η ανάλυσή μας θα 'ταν πολύ δύσκολη. Αντίθετα, αμελούμε το μέγεθος της μπάλας και την θεωρούμε ως υλικό σημείο, υποθέτουμε ανύπαρκτη την αντίσταση του αέρα και σταθερή τη βαρύτητα και καταλήγουμε σ' ένα πολύ απλούστερο πρόβλημα. Εξιδανικεύουμε μ' αυτόν τον τρόπο την εκάστοτε κατάσταση του πραγματικού κόσμου, προκειμένου ν' απομείνουν οι παράγοντες που ουσιαστικά

την επηρεάζουν ώστε να μπορέσουμε ακολούθως να τη διατυπώσουμε με όρους κατάλληλους προς μαθηματική διαπραγμάτευση και συγχρόνως συμβατούς με τις παρατηρήσεις. Ακολουθεί η διαδικασία της μαθηματικοποίησης που δεν είναι παρά η μεταγλώττιση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις μεταξύ σταθερών και μεταβλητών. Εφόσον το στάδιο της μαθηματικοποίησης έχει ολοκληρωθεί, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με ένα μαθηματικό πρόβλημα το οποίο ενσωματώνει τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του πραγματικού προβλήματος και του οποίου καλούμαστε να βρούμε τη λύση ή τουλάχιστον να συγκεντρώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες περί των ιδιοτήτων της. Το γεγονός όμως ότι μια μαθηματική λύση φαίνεται λογική δεν εγγυάται και την συμφωνία της με τις παρατηρήσεις. Η λύση λοιπόν του μαθηματικού προβλήματος πρέπει να ελεγχθεί και να ερμηνευθεί εντός του εννοιολογικού πλαισίου που τίθεται στο πραγματικό πρόβλημα. Η επιστροφή από το μαθηματικό στο πραγματικό πρόβλημα, συνίσταται στη σύγκριση της λύσης του μαθηματικού προβλήματος με τα πειραματικά δεδομένα. Η σύγκριση αυτή, όταν είναι δυνατή (πώς θα μπορούσαμε π.χ. να ελέγξουμε ένα μοντέλο για πυρηνικό πόλεμο;), καθορίζει το αν το μαθηματικό μοντέλο είναι ικανοποιητικό, αν πρέπει να βελτιωθεί ή ακόμη να εγκαταλειφθεί, καθορίζει δηλ. την πιστότητά του[24]. Κατά τον **Κλαουδάτο**[48], σχηματικά το mathematical modeling αποδίδεται με το επόμενο διάγραμμα:



σχήμα 1: Ο κύκλος της μοντελοποίησης

Διδακτικοί λόγοι συχνά μας αναγκάζουν να παραλείψουμε διάφορα στάδια του κύκλου (π.χ. τα (I), (i) και (iv)) από τα ζητήματα που τίθενται στην τάξη και τότε βέβαια έχουμε ν΄ αντιμετωπίσουμε απλώς εφαρμογές. Τότε, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο τμήμα του κύκλου που αφορά τα Μαθηματικά, χάνουμε τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο και ό,τι θα κερδίζαμε απ΄ αυτήν. Ο ρόλος όμως των εφαρμογών στη μαθησιακή διαδικασία δεν πρέπει να υποτιμηθεί, αφού τις χρησιμοποιούμε προκειμένου να εστιάσουμε σε συγκεκριμένες έννοιες ή συγκεκριμένα στάδια του κύκλου.

Στα επόμενα θα μας δοθεί η ευκαιρία να επανέλθουμε στον *κύκλο της μοντελοποίησης*, σίγουρα όμως η σχολική εμπειρία του καθενός εμπεριέχει κάποια παραδείγματα μαθηματικών μοντέλων, που σχετίζονται κυρίως με τη Φυσική. Για παράδειγμα, αναρωτηθήκαμε ποτέ που οφείλεται η τέλεια ομοιότητα των εξισώσεων με τις οποίες εκφράζονται ο νόμος της παγκόσμιας έλξης και ο νόμος του Coulomb; Τόσο η ελκτική ή απωστική ηλεκτροστατική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο φορτίων όσο και η ελκτική δύναμη της βαρύτητας που αναπτύσσεται μεταξύ δύο μαζών που βρίσκονται σε ηρεμία, είναι κεντρικές δυνάμεις που ακολουθούν το ίδιο μαθηματικό μοντέλο: το *νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου*.

Στα βιβλία Φυσικής, είτε σχολικά εγχειρίδια είτε πανεπιστημιακά συγγράμματα, πολύ συχνά συναντούμε συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τους ρυθμούς μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους με το ποσοτικά άγνωστο αυτό μέγεθος, συναντούμε δηλ. *διαφορικές εξισώσεις*, οι οποίες μάλιστα συνοδεύονται από κάποιες βοηθητικές συνθήκες που μας πληροφορούν σχετικά με τις τιμές του φυσικού αυτού μεγέθους κατά το παρελθόν και που τις ονομάζουμε *αρχικές συνθήκες* (α.σ.). Τα μαθηματικά αυτά μοντέλα τα λέμε *προβλήματα αρχικών τιμών* (π.α.τ.). Ως παραδείγματα μοντέλων με δ.ε., ενδεικτικά μπορούμε ν΄ αναφέρουμε τα εξής:

Καταστάσεις όπως η αποσύνθεση μιας ραδιενεργού ουσίας, η μεταβολή του πληθυσμού βακτηριδίων σε συνθήκες εργαστηρίου, η αύξηση της καλλιεργήσιμης γης σε μια αναπτυσσόμενη αγροτική περιοχή, η μεταβολή των ρύπων σε μια λίμνη ακολουθούν όλες το ίδιο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφεται με τη δ.ε.

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x\,, \quad k \text{ σταθερά}$$

στης οποίας τη λύση

$$x(t) = c \cdot e^{k \cdot t}\,,\ t \geq 0$$

συνοψίζεται ο γνωστός *νόμος της εκθετικής μεταβολής*.

Ένα ταλαντούμενο σύστημα μάζας-ελατηρίου περιγράφεται από τη δ.ε.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F(t)$$

όπου m η μάζα που είναι συνδεδεμένη στο άκρο του ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερό, b ο συντελεστής απόσβεσης, k η σταθερά του ελατηρίου, F(t) η εξωτερική δύναμη και x=x(t) η απομάκρυνση της ταλαντούμενης μάζας από τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή. Εξάλλου, ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RLC περιγράφεται από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, δηλ. τη δ.ε.

$$L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q = E(t)$$

όπου L η επαγωγή του πηνίου, R η αντίσταση, C η χωρητικότητα του πυκνωτή, E(t) η τάση της πηγής και Q=Q(t) το ολικό φορτίο του πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή. Μπορεί εύκολα να διακρίνει κανείς ότι οι δύο δ.ε. είναι από μαθηματική άποψη ταυτόσημες, προέρχονται από το ίδιο μαθηματικό μοντέλο – τις γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης - και διαφέρουν μόνον ως προς την ερμηνεία των σταθερών και μεταβλητών που εμφανίζονται σ΄ αυτές.

Οι δ.ε. λοιπόν που πρωτοεμφανίστηκαν με τους Newton και Leibniz το 17ο αι. και που με δυσκολία θ΄ αποφασίζαμε για το αν ανήκουν στα καθαρά ή τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά, σίγουρα ανήκουν σ΄ εκείνα τα Μαθηματικά που κατεξοχήν εμπνέονται από τις επιστήμες της φύσης.

2.2. *Η δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών*

Μια δ.ε. της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\text{, f συνεχής,}$$

ονομάζεται χωριζομένων μεταβλητών ανν

$$f(t,x)=g(t)\cdot h(x),$$

όπου g, h συνεχείς.
Μια δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών λοιπόν, έχει τη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = g(t)\cdot h(x).$$

Με $h(x)\neq 0$, παίρνουμε:

$$\frac{1}{h(x)}\cdot\frac{dx}{dt} = g(t).$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε αμφότερα τα μέλη ως προς t, λαμβάνοντας

$$\int \frac{1}{h(x)}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt = \int g(t)dt.$$

Με x=x(t) είναι $dx = x'(t)dt = \frac{dx}{dt}dt$ και η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$\int \frac{1}{h(x)}\cdot dx = \int g(t)dt.$$

Ένας χαλαρότερος χειρισμός με τον οποίο παραλείπονται οι ενδιάμεσες λεπτομέρειες, συνίσταται στο *να χωρίσουμε τις μεταβλητές* στην

$$\frac{dx}{dt} = g(t)\cdot h(x)$$

παίρνοντας την

$$\frac{1}{h(x)}dx = g(t)\,dt$$

και εν συνεχεία να ολοκληρώσουμε το πρώτο μέλος ως προς x και το δεύτερο ως προς t καταλήγοντας πάλι στην

$$\int \frac{1}{h(x)}\cdot dx = \int g(t)dt \;\square$$

Η παρακάτω εφαρμογή επελέγη προκειμένου να αντιμετωπιστεί στην πράξη η διαδικασία επίλυσης της δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών και να δοθεί μια ευκαιρία να συζητηθούν ζητήματα λογισμικού.

Εφαρμογή (το μοντέλο Ebbinghaus): Ως γνωστόν, οι φοιτητές αρχίζουν να ξεχνούν την ύλη που διδάχθηκαν κατά τη διάρκεια ενός εξαμήνου, όταν αυτό τελειώνει. Έστω x(t) το ποσοστό % της ύλης που κάποιος φοιτητής ή φοιτήτρια μπορεί ν' ανακαλέσει στη μνήμη του, t εβδομάδες μετά το πέρας του εξαμήνου. Κατά το μοντέλο Ebbinghaus, το ποσοστό x(t) μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της διαφοράς του από μια θετική σταθερά $a<x(t)\leq 100$. Λύστε το π.α.τ. που περιγράφει την κατάσταση και εξηγείστε τη σημασία της σταθεράς a. Αν μετρήθηκε ότι x(2)=46,3 και x(6)=19,25, σχεδιάστε το γράφημα της λύσης.

Το π.α.τ. για την παρούσα κατάσταση είναι το:

$$\frac{dx}{dt} = k\cdot(a-x), \qquad x(0)=100$$

και προφανώς η σταθερή συνάρτηση x(t)=a επαληθεύει τη δ.ε.

Για x(t)≠a, γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot (x - a)$$

και διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{dx}{x-a} = -k\,dt,$$
$$\ln|x-a| = -k \cdot t + c,$$
$$|x-a| = e^{-k \cdot t + c},$$
$$x - a = \pm e^{c} \cdot e^{-k \cdot t},$$
$$x(t) = c_0 \cdot e^{-k \cdot t} + a.$$

Με x(0)=100 προκύπτει c_0=100-a, άρα

$$x(t) = (100 - a) \cdot e^{-k \cdot t} + a\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = a$$

οπότε η σταθερά a παριστάνει το ποσοστό της ύλης που θα θυμούνται οι φοιτητές για πάντα. Εξάλλου, από τις x(2)=46,3 και x(6)=19,25 παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$(100 - a) \cdot \exp(-k \cdot 2) + a = 46.3$$
$$(100 - a) \cdot \exp(-k \cdot 6) + a = 19.25$$

Το Mathcad, μέσω του αλγορίθμου

guess values:

$a := 10$

$k := 1$

λύση του συστήματος:

Given

$(100 - a) \cdot \exp(-k \cdot 2) + a = 46.3$

$(100 - a) \cdot \exp(-k \cdot 6) + a = 19.25$

$\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(a, k)$

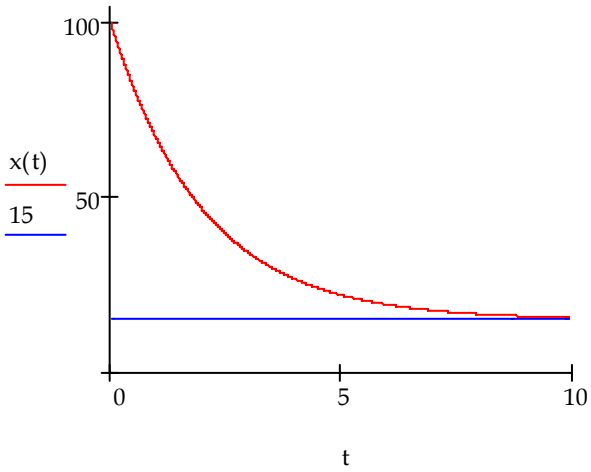
δίνει

a=15,008 ≅15 και k=0,5.

Έπεται πως λύση του π.α.τ. είναι η συνάρτηση

$$x(t) = 85 \cdot e^{-0,5 \cdot t} + 15, \quad t \geq 0.$$

με γραφική παράσταση εκείνη του σχήματος 2. □



σχήμα 2

2.3. *Ο κύκλος της μοντελοποίησης στην πράξη*

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που θα βρούμε τόσο σε βιβλία Φυσικής όσο και σε βιβλία διαφορικών εξισώσεων, είναι εκείνο της κίνησης σώματος μάζας m που αφήνεται να πέσει από την ηρεμία σε μέσο που προβάλλει αντίσταση.

Α) Η κατάσταση (Ι) - το πείραμα: Ένας sky-diver «βουτάει» από την ηρεμία, από ένα αεροπλάνο όντας εφοδιασμένος με ειδικό όργανο, το οποίο καταγράφει την ταχύτητά του ανά 5sec έως ότου ανοίξει το αλεξίπτωτό του. Έτσι συλλέγουμε τα δεδομένα του πίνακα:

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
υ_t (m/sec)	0	31,6	43,2	47,5	49,1	49,7	49,9	50	50

πίνακας 1

Ζητούμενο είναι το πως μεταβάλλεται με το χρόνο η ταχύτητά του υ= υ(t) κατά την πτώση.

Β) Η διαδικασία (i) – προς ένα μοντέλο της πραγματικής κατάστασης:

Στο πρόβλημα αυτό, το άγνωστο φυσικό μέγεθος είναι η ταχύτητα υ=υ(t). Φαίνεται κατ' αρχήν λογικό να κάνουμε τις εξής παραδοχές: Πρώτον, η τροχιά της πτώσης είναι τόσο μικρή σε σχέση με την ακτίνα της γης, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε πως η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή. Δεύτερον, το πείραμα διεξάγεται υπό άριστες καιρικές συνθήκες, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε πως οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που πέφτει, είναι το βάρος του και η *οπισθολκή* (η αντίσταση του αέρα). Η αντίσταση του αέρα εξαρτάται από παράγοντες όπως η πυκνότητά του αέρα ή η ταχύτητα του κινούμενου σώματος. Η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται με το ύψος και με το χρόνο. Είναι διαφορετική για διαφορετικά ύψη και αλλάζει από μέρα σε μέρα. Αν και δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος η αντίσταση του αέρα να μη υποτεθεί π.χ. εξαρτώμενη απ' το λογάριθμο της ταχύτητας, οι φυσικοί την λαμβάνουν συνήθως ως ανάλογη μιας δύναμης της ταχύτητας ή μια πολυωνυμική συνάρτηση του μέτρου της ταχύτητας και θεωρούν πως η σχέση είναι γραμμική όταν πρόκειται για μικρές ταχύτητες. Γενικά η αντίσταση του αέρα είναι ένας περίπλοκος παράγων που εδώ δε μπορούμε να τον αγνοήσουμε. Τρίτον λοιπόν, υποθέτουμε πως η οπισθολκή είναι ανάλογη της ταχύτητας. Στο «οπλοστάσιό» μας διαθέτουμε το δεύτερο νόμο του Newton σύμφωνα με τον οποίο, η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται ο sky-diver, ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνσή του.

Γ) Η κατάσταση (ΙΙ) – το μοντέλο της πραγματικής κατάστασης:

Υποθέσαμε πως οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που εκτελεί την πτώση, είναι η βαρυτική έλξη και η οπισθολκή. Οι δυνάμεις αυτές έχουν την κατακόρυφη διεύθυνση, είναι αντίρροπες και αν θεωρήσουμε θετική την προς τη γη φορά, ο δεύτερος νόμος του Newton παίρνει τη μορφή:

(βάρος)-(οπισθολκή)=(μάζα)×(επιτάχυνση).

Η πτώση ξεκινά με αρχική ταχύτητα μηδέν. Η βαρύτητα προκαλεί επιτάχυνση δηλ. η ταχύτητα αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Η αντίσταση του αέρα, ως ανάλογη της ταχύτητας αυξάνεται επίσης, ενώ η βαρύτητα παραμένει σταθερή. Έτσι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα που πέφτει, φθίνει. Δεδομένου ότι η μάζα παραμένει σταθερή, η επιτάχυνση=(ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας) φθίνει επίσης. Δηλ. η ταχύτητα υ=υ(t) αυξάνεται κατά φθίνοντα ρυθμό και σταθεροποιείται τη στιγμή που η αυξανόμενη αντίσταση του αέρα εξισώνεται με τη βαρύτητα, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας μηδενίζεται.

Αναμένουμε λοιπόν η γραφική παράσταση της υ(t) να είναι μια αύξουσα καμπύλη με τα κοίλα κάτω και με μια οριζόντια ασύμπτωτη.

Δ) Η διαδικασία (ii) – η μαθηματικοποίηση:

Αν m είναι η μάζα του σώματος που πέφτει και g είναι η επιτάχυνση τις βαρύτητας, τότε το βάρος του είναι $m \cdot g$ και είναι σταθερό ως γινόμενο σταθερών ποσοτήτων. Οι μεταβλητές μας είναι οι υ και t. Η αντίσταση του αέρα υπετέθη ανάλογη της ταχύτητας, άρα εκφράζεται ως ένα γινόμενο $k \cdot \upsilon$, όπου k θετική σταθερά που εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως το σχήμα και το μέγεθος του σώματος που πέφτει, η πυκνότητα και η θερμοκρασία του αέρα κ.τ.λ.. Τέλος, εάν a είναι η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα κατά την πτώση, είναι γνωστό ότι $a = \frac{d\upsilon}{dt}$. Έχοντας κατά νου τα παραπάνω, φθάνουμε στην

Ε) κατάσταση (ΙΙΙ) – το μαθηματικό μοντέλο:

Η συναρτησιακή σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το ρυθμό μεταβολής της, δηλ. η δ.ε., είναι η ισότητα

$$m \cdot g - k \cdot \upsilon = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt},$$

όπου k θετική σταθερά.

Δεδομένου τις ότι η εκκίνηση γίνεται από την ηρεμία, έχουμε ως αρχική συνθήκη την ισότητα υ(0)=0 που μας πληροφορεί για την ταχύτητα κατά τη στιγμή t=0.

ΣΤ) Η διαδικασία (iii) – η μαθηματική επεξεργασία: Για να επιλύσουμε προβλήματα αρχικών τιμών σαν το παραπάνω, εργαζόμαστε με τη *μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών* και οι δ.ε. στις οποίες εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή, λέγονται *χωριζομένων μεταβλητών* ή *διαχωρίσιμες*. Για τους λόγους που εξηγήθηκαν, σ' όλη την έκταση ετούτης της εργασίας θα καταπιαστούμε μόνο με τέτοιες δ.ε. Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής:

Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = -k \cdot (\upsilon - \frac{m \cdot g}{k}).$$

Παρατηρούμε πως η σταθερή λύση $\upsilon(t) = \frac{m \cdot g}{k}$ επαληθεύει τη δ.ε.

Με $\upsilon(t) \neq \frac{m \cdot g}{k}$ χωρίζουμε τις μεταβλητές (οι οποίες είναι οι υ και t)

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon - \frac{m \cdot g}{k}} = -\frac{k}{m} dt$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\ln\left|\upsilon - \frac{m \cdot g}{k}\right| = -\frac{k}{m} \cdot t + c$$

ή ισοδύναμα

$$\left|\upsilon - \frac{m \cdot g}{k}\right| = e^{-\frac{k}{m} \cdot t + c}.$$

Η τελευταία ισότητα δίνει

$$\upsilon - \frac{m \cdot g}{k} = \pm e^{c} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

και με $c_0 = \pm e^{c}$, παίρνουμε τελικώς τη *γενική λύση*

$$\upsilon(t) = \frac{m \cdot g}{k} + c_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}.$$

Πρόκειται για μια *μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων* δεδομένου ότι η παράμετρος c_0 μπορεί, θεωρητικά, να πάρει άπειρες τιμές. Οι γραφικές παραστάσεις των απείρως πολλών συναρτήσεων αυτής της οικογένειας λέγονται *ολοκληρωτικές καμπύλες* της δ.ε.

Απ' όλες τις ολοκληρωτικές καμπύλες, ενδιαφερόμαστε για εκείνη που διέρχεται απ' το σημείο Α(0,0) και η οποία αντιστοιχεί στη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη υ(0)=0. Με υ(0)=0 λοιπόν, παίρνουμε

$$\frac{m\cdot g}{k}+c_0\cdot e^0=0 \Leftrightarrow c_0=-\frac{m\cdot g}{k},$$

οπότε η λύση του προβλήματός μας αρχικών τιμών είναι η συνάρτηση:

$$\upsilon(t)=\frac{m\cdot g}{k}-\frac{m\cdot g}{k}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$$

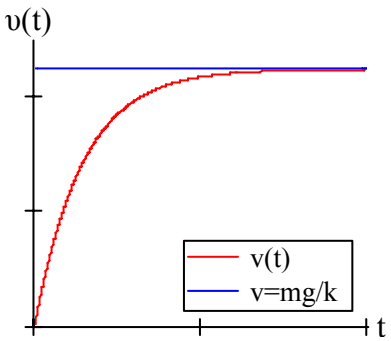
$$\Leftrightarrow \upsilon(t)=\frac{m\cdot g}{k}\cdot(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot t}).$$

Ζ) Η κατάσταση (IV) – αποτελέσματα της μαθηματικής επεξεργασίας:

Βρήκαμε λοιπόν ότι ο sky-diver πέφτει με ταχύτητα

$$\upsilon(t)=\frac{m\cdot g}{k}\cdot(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot t}),\ t\geq 0.$$

Μια γραφική παράσταση της λύσης φαίνεται στο διπλανό σχήμα και έχει την αναμενόμενη μορφή, εκείνη δηλ. που προβλέψαμε στο τέλος του (Γ). Στο σχήμα φαίνεται πως αρχικά ο αλεξιπτωτιστής μας κινείται αργά, άρα η αντίσταση του αέρα είναι μικρή κι έτσι η πτώση του γρήγορα επιταχύνεται - η κόκκινη καμπύλη ανέρχεται απότομα. Καθώς πέφτει όλο και πιο γρήγορα, η αντίσταση του αέρα όλο και αυξάνεται ώσπου να εξισωθεί με τη βαρύτητα. Τότε ο αλεξιπτωτιστής «αγγίζει» την *ορική* ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}=\frac{m\cdot g}{k}$. Στην πραγματικότητα ο αλεξιπτωτιστής ποτέ δεν επιτυγχάνει την ορική ταχύτητα, αφού ο όρος $e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$ ποτέ δε μηδενίζεται. Ωστόσο μετά από μερικά δευτερόλεπτα, η ταχύτητά του είναι πολύ κοντά στην τιμή $\frac{m\cdot g}{k}$, όπως εξάλλου φαίνεται και από την ισότητα



σχήμα 3: γραφική παράσταση της λύσης

$$\lim_{t\to+\infty}\upsilon(t)=\frac{m\cdot g}{k}$$

που εξασφαλίζει και την ύπαρξη της οριζόντιας ασύμπτωτης για την οποία προφητικά αναφερθήκαμε στο (Γ). Σημειωτέον ότι η ορική ταχύτητα μπορεί να βρεθεί κι από τη δ.ε. εάν θέσουμε

$$m\cdot\frac{d\upsilon}{dt}=m\cdot g-k\cdot\upsilon=0$$

οπότε παίρνουμε

$$\upsilon=\frac{m\cdot g}{k}.$$

Η) Η διαδικασία (iv) – συγκρίνοντας τα αποτελέσματά μας με τα πειραματικά δεδομένα:

Ταιριάζουν τ΄ αποτελέσματα της μαθηματικής επεξεργασίας με τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα 1, στο (Α); Για να ελέγξουμε κάτι τέτοιο, πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των σταθερών m, g και k. Ο πίνακας 1 δείχνει ότι η ορική ταχύτητα μετρήθηκε 50m/sec. Έτσι έχουμε

$$\frac{m \cdot g}{k} = 50$$

και με g=9,8 m/sec^2, λαμβάνουμε

$$\frac{k}{m} = 0{,}196 \, .$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών παίρνει τώρα τη μορφή:

$$\upsilon(t) = 50 \cdot (1 - e^{-0{,}196 \cdot t}) \, , \; t \geq 0$$

απ΄ την οποία και χρησιμοποιώντας ένα επιστημονικό κομπιουτεράκι, εκτιμούμε τις τιμές της ταχύτητας, στην τρίτη γραμμή του παρακάτω πίνακα:

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
παρατηρηθείσα ταχύτητα υ_t (m/sec)	0	31,6	43,2	47,5	49,1	49,7	49,9	50	50
Εκτιμώμενη ταχύτητα υ(t) (m/sec)	0	31,234	42,957	47,357	49,008	49,628	49,86	49,948	49,98

πίνακας 2

Οι εκτιμώμενες τιμές υ(t) της ταχύτητας είναι, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, αρκετά κοντά στις τιμές υ_t που μετρήθηκαν κατά το πείραμα, γεγονός που μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι το μοντέλο μας περιγράφει ικανοποιητικά την πραγματική κατάσταση.

2.4. *Η διαδικασία της διδασκαλίας*

Το μοντέλο Ebbinghaus ως εφαρμογή καθώς και το πρόβλημα του sky-diver επελέγησαν ως μέσα που θα οδηγούσαν τους σπουδαστές στην κατανόηση αφενός των βημάτων του αλγόριθμου επίλυσης της δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, αφετέρου των σταδίων του κύκλου της μοντελοποίησης. Έχουν επιλεγεί δώδεκα σπουδαστές προερχόμενοι από τη θετική κατεύθυνση και με καλές επιδόσεις στα Μαθηματικά (βαθμός πανελληνίων εξετάσεων στα Μαθηματικά ≥70), οι οποίοι χωρίστηκαν σε τέσσερις ομάδες (Α έως Δ) των τριών (π.χ. με Β1, Β2, Β3 δηλώνονται οι σπουδαστές της Β ομάδας) και με την κάθε ομάδα να έχει στη διάθεσή της έναν Η/Υ με κατάλληλο λογισμικό. Έχει προηγηθεί μια δίωρη συνάντηση με τους σπουδαστές αυτούς κατά την οποία συζητήθηκε η §2.1 και θέματα λογισμικού: η λύση του συστήματος με αγνώστους τους a,k που προκύπτει κατά την επεξεργασία του μοντέλου Ebbinghaus, μέσω του MathCAD καθώς και η σχεδίαση του γραφήματος της x=x(t) με το MathCAD, το EXCEL ή το Graphmatica. Συζητήθηκε επίσης η γραφική επίλυση μιας δ.ε ή ενός συστήματος δ.ε. με χρήση των MathCAD και Graphmatica. Γενικώς οι σπουδαστές ανταποκρίθηκαν στη διαχείριση του λογισμικού πιο άμεσα και πιο γρήγορα απ' ό,τι αναμενόταν.

Ι) Σχετικά με το μοντέλο Ebbinghaus στη 2.2., έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:
α) Δε διαπιστώθηκε οποιουδήποτε είδους πρόβλημα με την κατανόηση της εκφώνησης. Δεν παρουσιάστηκε δυσκολία κατά τη μετάβαση από τα δεδομένα στο π.α.τ.

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot (a - x), \qquad x(0)=100$$

και κατέστη πλήρως κατανοητό το γιατί σε μια ιδανική κατάσταση μπορούμε ως α.σ. να πάρουμε τη συγκεκριμένη, δίχως να αποκλείονται άλλες α.σ. όπως π.χ. η x(0)=90.
β) Κατά τον **Polya**[76], πρέπει ο μαθητής «όχι μόνο να κατανοήσει το πρόβλημα, μα και να επιθυμήσει τη λύση του». Δεδομένου ότι οι σπουδαστές εξέφρασαν το ενθουσιασμό τους σχετικά με το ότι ένα ζήτημα που αφορά μάλλον την Ψυχολογία, είναι δυνατόν να μελετηθεί με μαθηματικά εργαλεία, κρίνουμε πως η επιλογή τέτοιου είδους προβλημάτων είναι επιτυχής ως προς το ν' αναπτυχθούν, τουλάχιστον αρχικά, κίνητρα για συμμετοχή και διάθεση για περαιτέρω συνέχιση του έργου. Η επισήμανση του **Baird**[11] πως ο παράγοντας του κινήτρου παίζει σημαντικό ρόλο στη μετέπειτα δράση του μαθητή ως προς το να αναζητήσει και να επιτύχει στόχους σχετικούς με το έργο που έχει αναλάβει, φαίνεται πως κατ' αρχήν επιβεβαιώνεται.
γ) Μιλήσαμε περί του προσήμου της σταθεράς k και οι σπουδαστές επιχειρηματολόγησαν περί του γιατί θα πρέπει να ληφθεί k>0: είναι $\frac{dx}{dt} < 0$ ως ρυθμός μείωσης, a-x(t)<0 λόγω δεδομένων και άρα k>0.

Συζητήθηκε επίσης το ότι η σταθερά k ενσωματώνει παράγοντες όπως το είδος και η ποσότητα της ύλης που έχουν μελετήσει οι φοιτητές στη διάρκεια του εξαμήνου, το επίπεδο των ίδιων κ.τ.λ. και συνεπώς η τιμή της αλλάζει κατά περίπτωση: ένα δείγμα αποφοίτων της πρώτης τάξης ενός γυμνασίου της Αττικής θα έχει διαφορετικό k από εκείνο ενός δείγματος αποφοίτων του πρώτου έτους σ' ένα πανεπιστήμιο της Γαλλίας.
δ) Οι σπουδαστές ζήτησαν να δικαιολογήσουμε γιατί είναι αναγκαίο να μεταβούμε απ' τη μορφή $\frac{dx}{dt} = k \cdot (a - x)$ της δ.ε. στη μορφή $\frac{dx}{dt} = -k \cdot (x - a)$. Η απάντηση που δόθηκε ήταν πως δεν είναι απολύτως αναγκαίο, αν όμως αφήσουμε τη δ.ε. στην

αρχική της μορφή θα πρέπει αργότερα να προσέξουμε πως $\int \frac{1}{a-x}dx = -\ln|a-x|$ (χαρακτηριστικά ρωτήσαμε: «θα βάλετε το αρνητικό πρόσημο ή θα το ξεχάσετε;»). Προτιμούμε λοιπόν τη μορφή $\frac{dx}{dt} = -k\cdot(x-a)$ για ν' αποφύγουμε το ενδεχόμενο λάθος της παράλειψης του αρνητικού προσήμου κατά την ολοκλήρωση. Γενικότερα, ολοκληρωτέους της μορφής a·x+b φροντίζουμε να τους φέρουμε στη μορφή $a\cdot(x+\frac{b}{a})$ και αυτό γίνεται βασικά για λόγους πρόληψης λάθους και δευτερευόντως για λόγους αισθητικής.

ε) Τους ζητήθηκε να εφαρμόσουν την πλήρη διαδικασία επίλυσης

$$\frac{1}{x-a}\cdot\frac{dx}{dt} = -k,$$

$$\frac{1}{x-a}\cdot x'(t) = -k,$$

$$\int \frac{1}{x-a}\cdot x'(t)dt = -\int k\,dt, \quad [\text{με } x = x(t) \text{ είναι } dx = x'(t)dt]$$

$$\int \frac{1}{x-a}dx = -\int k\,dt, \quad \text{κ.τ.λ.}$$

και όλες οι ομάδες ανταποκρίθηκαν. Υπενθυμίσαμε στο σημείο αυτό πως στην πράξη, απλώς παραλείπουμε τη δεύτερη και τρίτη γραμμή απ' την παραπάνω διαδικασία, με αποτέλεσμα ο χωρισμός των μεταβλητών να μοιάζει ότι έγκειται στο να «συγκεντρώνουμε» τα x και dx στο ένα μέλος και τα t, dt στο άλλο.

στ) Αφού βρέθηκε η λύση $x(t) = (100-a)\cdot e^{-k\cdot t} + a$, δυσκολία παρουσιάστηκε στο να μαντέψουν τη σημασία της σταθεράς a. Στο σημείο αυτό δε δόθηκε μια άμεση απάντηση, μα τους ζητήθηκε και απάντησαν πως π.ο. της λύσης είναι το [0,+∞). Εν συνεχεία τους υπενθυμίσαμε πως συχνά είναι χρήσιμο να εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησής μας σε ακραία σημεία του π.ο., μια περίπτωση της *ειδίκευσης* του **Polya**[76] (της μετάβασης από την εξέταση ενός συνόλου περιπτώσεων, στην εξέταση ενός υποσυνόλου του) ο οποίος εύστοχα μας παροτρύνει, κατά τη λύση προβλημάτων να εξετάζουμε ειδικές ή «ακραίες» περιπτώσεις και αποτελεί και μια από τις αρχές του **Aris**[9] για το mathematical modeling. Αναγκάστηκαν λοιπόν να υπολογίσουν το $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ και να ανακαλύψουν από μόνοι τους την απάντηση. Αντιλήφθηκαν επίσης πως ταυτόχρονα είχαν βρει ότι επρόκειτο για την ύπαρξη μιας οριζόντιας ασύμπτωτης. Οι **Resnick, Cauzinille-Marmeche, Mathieu**[80] διαπιστώνουν πως «…οι αλγεβρικές παραστάσεις και οι κανόνες μετασχηματισμών θα πρέπει να συσχετίζονται με τις αναφορικές καταστάσεις απ' τις οποίες θα μπορούσαν να παραχθούν καθώς και με τις μαθηματικές έννοιες που αντιπροσωπεύουν». Στο πνεύμα αυτό λοιπόν, τονίστηκε πως για το ίδιο πράγμα είχαμε τρεις διαφορετικούς τρόπους έκφρασης:

- λεκτικά όπως εκφράζεται με τη φράση «το a παριστάνει το ποσοστό της ύλης που οι φοιτητές του προβλήματος θα θυμούνται μετά πάροδο πολύ, πολύ μεγάλου χρονικού διαστήματος»
- αλγεβρικά όπως εκφράζεται με την ισότητα $\lim_{t\to+\infty} x(t) = a$, και
- γεωμετρικά, όπως εκφράζεται με την ύπαρξη της οριζόντιας ασύμπτωτης $y = a$ της γραφικής παράστασης.

ΙΙ) Σχετικά με την §2.3.

Στους σπουδαστές διανέμονται φωτοαντίγραφα με το σχήμα 1 και χωριστά φωτοαντίγραφα με την εκφώνηση του προβλήματος που δεν είναι παρά η «κατάσταση (Ι) - το πείραμα» όπως ακριβώς περιγράφεται στο Α της §2.3. παραπάνω. Τους διευκρινίζουμε ότι θα πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια να προχωρήσουν με βάση τα στάδια του κύκλου της μοντελοποίησης τα οποία είπαμε πως έχουν συζητηθεί σε προηγούμενο μάθημα.

Ο διάλογος που αφορά τα (Β) και (Γ) της §2.3:

Κ: Ποιο είναι το άγνωστο μέγεθος; Τι είπαμε πως ψάχνουμε;
Γ1: Την ταχύτητα.
Κ: Ψάχνουμε αριθμό; Ψάχνουμε ποια θα είναι η ταχύτητα σε δεδομένη χρονική στιγμή;
Γ1: [Ψάχνουμε] τη συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα. Την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου.
Κ: Ωραία, τι λέτε να ξεκινούσαμε με το ποιες δυνάμεις ασκούνται στο σώμα που πέφτει, στον αλεξιπτωτιστή;
Β3: Το βάρος.
Κ: Σωστά. Το βάρος είναι σταθερή δύναμη;
Β3: Σταθερή. Είναι η δύναμη με την οποία τον έλκει η γη.
Κ: Γιατί το βάρος είναι σταθερή δύναμη;
Α1: Το βάρος είναι m·g, άρα σταθερό. Τι να σκεφτούμε; Ότι όπως πέφτει αδυνατίζει; (γέλια)…
Κ: Το ότι δεν αδυνατίζει, δηλ. δε χάνει κιλά, σημαίνει πως η μάζα του είναι σταθερή (γράφει στον πίνακα Β= m·g). Το m είναι σταθερό. Το g;
Β1: Το g μεταβάλλεται με το ύψος και από τόπο σε τόπο. Π.χ. η τιμή του είναι διαφορετική στους πόλους απ' ό,τι στον ισημερινό.
Κ: Αφού το g μεταβάλλεται με το ύψος και ο αλεξιπτωτιστής μας καθώς πέφτει αλλάζει το ύψος του από την επιφάνεια της γης, έχει σταθερό βάρος;
Β3: Όχι.
Δ2: Επειδή όμως το ύψος δεν αλλάζει και τρομακτικά, θεωρούμε ότι το g είναι σταθερό. Άρα και το βάρος.
Κ: Πράγματι. Σας θυμίζω πως σε απόσταση r από το κέντρο της γης (γράφει στον πίνακα) είναι

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και M η μάζα της γης. Αν λοιπόν, όπως είπε ο Πάνος (Δ2), το ύψος του αλεξιπτωτιστή από την επιφάνεια της γης δεν αλλάζει και τρομακτικά, τότε το r δεν αλλάζει και τόσο πολύ, οπότε η επιτάχυνση g της βαρύτητας μεταβάλλεται ελάχιστα, είναι περίπου σταθερή. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το βάρος είναι σταθερή δύναμη, κάτι που δεν είναι εντελώς αλήθεια, απλοποιεί όμως το πρόβλημά μας. Άλλες δυνάμεις που δέχεται ο αλεξιπτωτιστής κατά την πτώση του;
Δ3: Ας πούμε πλάγιοι άνεμοι.
Κ : Ωραία. Μπορούμε όμως να τους υπολογίσουμε τόσο εύκολα;
Γ1: Να τους αγνοήσουμε. Να υποθέσουμε ότι δε φυσάει.
Κ : Σωστά. Να άλλη μια υπόθεση που απλοποιεί το πρόβλημά μας. Άλλες δυνάμεις;
Β1: Η αντίσταση του αέρα.
Α2: Μα αφού είπαμε δε φυσάει.
Β1: Ναι, αλλά ο αέρας δεν είναι κενό.
Κ : Σωστά. Έχουμε πτώση εντός ενός μέσου, του αέρα, που ασκεί αντίσταση όπως συμβαίνει π.χ. με το νερό. Η αντίσταση του αέρα εξαρτάται από παράγοντες όπως η πυκνότητά του αέρα, το σχήμα ή η ταχύτητα του κινούμενου σώματος. Η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται με το ύψος και με το χρόνο. Είναι διαφορετική για διαφορετικά ύψη και αλλάζει από μέρα σε μέρα. Θεωρώντας πως το ύψος «δεν αλλάζει και τρομακτικά» μπορούμε να υποθέσουμε πως η πυκνότητα του αέρα δε μεταβάλλεται, επομένως η αντίσταση του αέρα που ασκείται στον αλεξιπτωτιστή εξαρτάται μόνο από την ταχύτητά του. Αν και δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος η αντίσταση του αέρα να μη θεωρηθεί π.χ. εξαρτώμενη απ' το λογάριθμο της ταχύτητας, οι φυσικοί τη λαμβάνουν συνήθως ως ανάλογη μιας δύναμης της ταχύτητας. Για όχι ιδιαίτερα

μεγάλες ταχύτητες, όπως στην περίπτωση που εξετάζουμε, τη λαμβάνουν ως ανάλογη της ταχύτητας. Γενικά η αντίσταση του αέρα είναι ένας περίπλοκος παράγων που εδώ δε μπορούμε να τον αγνοήσουμε. Τελικά άλλη μια παραδοχή που κάνουμε είναι;
Β1: Ότι η αντίσταση του αέρα εξαρτάται απ΄ την ταχύτητα;
Κ: Ναι, αλλά με ποιόν τρόπο;
Β1: Ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας;
Κ: Ακριβώς. Αν δεν έχετε κάτι να συμπληρώσετε, ας συνοψίσουμε.
Β3: Το βάρος και η αντίσταση του αέρα δεν έχουν αντίθετη φορά;
Κ: Ναι, είναι δυνάμεις αντίρροπες. Συνοψίζουμε; Ποιος θέλει;
…
Α1: Ψάχνουμε μια συνάρτηση της ταχύτητας ως προς το χρόνο. Με σκοπό να φτιάξουμε πρώτα ένα μοντέλο κάνουμε κάποιες υποθέσεις που θα απλοποιούν το πρόβλημα. Οι υποθέσεις αυτές είναι: θεωρούμε το g σταθερό, θεωρούμε πως οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στον αλεξιπτωτιστή είναι το βάρος και η αντίσταση του αέρα που είναι αντίρροπες και ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας.
Κ: Σας υπενθυμίζω ότι τίποτα απ΄ όσα υποθέτουμε δεν είναι εντελώς αληθινό. Οι υποθέσεις μας είναι απλώς εξιδανικεύσεις της πραγματικότητας που στόχο έχουν να απλοποιήσουν το πρόβλημα και να το φέρουν σε μια μορφή μαθηματικώς διαπραγματεύσιμη, δίχως όμως αυτό να χάσει τα ουσιαστικά του χαρακτηριστικά. Στο μέρος (iv) του κύκλου θα φανεί αν οι υποθέσεις μας έχουν βάση.
Πως όμως θα συνθέσουμε τις «πληροφορίες» που έχουμε για να φτιάξουμε ένα μοντέλο της πραγματικής κατάστασης; Για να σας βοηθήσω, σας λέω πως πρέπει να σκεφτούμε όπως όταν στο Λύκειο λύναμε ασκήσεις Φυσικής. Ποια είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται ο αλεξιπτωτιστής;
Β3: Η συνισταμένη του βάρους και της αντίστασης του αέρα.
Κ: Και;
Β3: Είναι (βάρος)-(αντίσταση).
Κ: Γιατί μείον και όχι συν;
Β3: Είπαμε πως είναι αντίρροπες.
Κ: Καλά. Και γιατί όχι (αντίσταση)-(βάρος);
Β3: Αυτός κινείται προς τα κάτω. Αλλά και το βάρος έχει φορά προς τα κάτω.
Κ: Μάλιστα. Συνηθίζουμε, ως θετική φορά να παίρνουμε εκείνη της κίνησης. Έτσι, η συνισταμένη είναι (βάρος)-(αντίσταση του αέρα). Λοιπόν, τι;
Δ2: Θα ισχύει $\sum F = m \cdot a$ (ο σπουδαστής λέει «σίγμα εφ ίσον μι επί άλφα).
Κ: Λίγο πιο καλά.
Β3: (βάρος)-(αντίσταση) =m·a.
Κ: Συμφωνούμε ή υπάρχει κάποιος με διαφορετική γνώμη; (Ενώ γνέφουν καταφατικά) Είστε σίγουροι; (γνέφουν καταφατικά). Ωραία, αυτό στο οποίο καταλήγουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Newton, κατά τον οποίο είναι (γράφει στον πίνακα)

(βάρος)-(αντίσταση του αέρα) =(μάζα)×(επιτάχυνση).

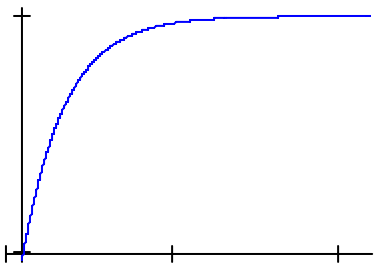
Ποιο νομίζετε πως είναι το μοντέλο της πραγματικής κατάστασης; Αντώνη;
Β1: Η τελευταία εξίσωση που γράψατε. … Ναι, η εξίσωση μαζί με τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για το βάρος και την αντίσταση του αέρα. Ότι δηλ. το βάρος είναι σταθερό και η αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας.
Κ: Ωραία. Ποια είναι η αρχική ταχύτητα του sky-diver, Δημήτρη;
Γ3: Σύμφωνα με το πρόβλημα, ξεκινάει από την ηρεμία άρα έχει αρχική ταχύτητα μηδέν.
Κ: Ποια δύναμη τον επιταχύνει; (γράφει στον πίνακα «1.αρχική ταχύτητα = μηδέν»)
Γ3: Το βάρος.
Κ: Το ότι το βάρος τον επιταχύνει, τι σημαίνει για την ταχύτητα;
Γ2: Αυξάνεται.
Κ: Τι συμβαίνει τότε με την αντίσταση του αέρα;
Β1: Αυξάνεται, αφού είναι ανάλογη της ταχύτητας.
Κ: Στο πρώτο μέλος λοιπόν της εξίσωσης

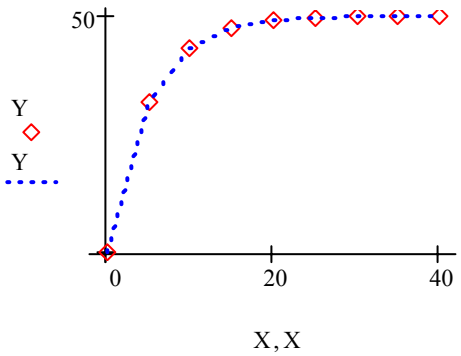
(βάρος)-(αντίσταση του αέρα)=(μάζα)×(επιτάχυνση),

το βάρος είναι σταθερό και η αντίσταση του αέρα αυξάνεται. Άρα το πρώτο μέλος μένει σταθερό, αυξάνεται ή μειώνεται;

Β1: Μειώνεται, άρα μειώνεται και το δεύτερο μέλος, δηλ. μειώνεται η επιτάχυνσή του.
Κ: Πως ορίζεται η επιτάχυνση;
Γ2: Είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, η παράγωγος της ταχύτητας.
Κ: Ωραία. Δηλ. η ταχύτητα αυξάνεται ενώ η παράγωγός της μειώνεται. (γράφει στον πίνακα «2. υ(t)↑ και υ΄(t)↓) Ας επιστρέψουμε στην αντίσταση του αέρα. Είπαμε πως αυξανομένης της ταχύτητας, αυξάνεται με αποτέλεσμα να μειώνεται το πρώτο μέλος της εξίσωσής μας. Ως πότε θα συμβαίνει αυτό;
Α3: Νομίζω, μέχρι να μηδενιστεί το πρώτο μέλος.
Κ: Και τότε;
Α3: Τότε η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον αλεξιπτωτιστή γίνεται μηδέν και θ' αρχίσει να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Κ: Δηλ. θα κινείται με σταθερή ταχύτητα;
Δ1: Ναι. Η ταχύτητα σταθεροποιείται στα 50m/sec όπως δείχνουν οι μετρήσεις.
Κ: Μάλιστα. (γράφει στον πίνακα «3. η ταχύτητα σταθεροποιείται μάλλον στα 50m/sec») Θα 'θελα τώρα να δούμε τι σημαίνουν αυτά (δείχνει τα 1,2,3 στον πίνακα) για τη συνάρτηση υ=υ(t) που αναζητούμε. Πάνο;
Δ2: Απ' το 2 προκύπτει πως είναι αύξουσα συνάρτηση, αλλά από ένα σημείο και μετά η γραφική παράσταση γίνεται ευθεία, λόγω του 3.
Κ: Μάλιστα. Να συμπληρώσετε ή ν' αλλάξετε κάτι; Βαγγέλη δεν έχεις μιλήσει καθόλου.
Β2: Η γραφική παράσταση ξεκινάει απ' την αρχή των αξόνων, όπως μας λέει το 1.
Κ: Ωραία. Κάτι άλλο;
Γ2: Η γραφική παράσταση είναι κοίλη γιατί η παράγωγος της ταχύτητας είναι φθίνουσα.
Κ: Ωραία. Σχεδιάστε μια υποψήφια γραφική παράσταση για τη συνάρτηση υ=υ(t), μια καμπύλη η κάθε ομάδα.

σχήμα 4





Οι τρεις ομάδες παραδίδουν από ένα γράφημα πρόχειρα σχεδιασμένο σε χαρτί, σχεδόν το ίδιο, που απεικονίζει μια καμπύλη της μορφής του πρώτου εκ των παραπάνω σχημάτων. Η ομάδα Γ, σχεδίασε σε λογισμικό, μια καμπύλη της ίδιας μορφής, συνδέοντας τα σημεία (t,υ) του πίνακα 1 (δεύτερο εκ των παραπάνω σχημάτων).

Κ: Το σχήμα σας είναι σωστό και μας δίνει μια ποιοτική πληροφορία για τη ζητούμενη συνάρτηση.
…
Κ: Κατά τη μαθηματικοποίηση τώρα του προβλήματος είπαμε πως θα διατυπώσουμε το πρόβλημά μας με μαθηματικούς όρους, με σχέσεις ανάμεσα σε σταθερές και μεταβλητές. Ας πούμε πρώτα πως θα εκφράσουμε την αντίσταση του αέρα. Τι λέτε;
Δ3: Είναι ανάλογη είπαμε της ταχύτητας, άρα α·υ.
Κ: Σωστά, μα ας πούμε καλύτερα k·υ, ώστε να μη συγχέουμε το άλφα με την επιτάχυνση. Η σταθερά αυτή αναλογίας, το k, ενσωματώνει όλους εκείνους τους παράγοντες απ' τους

οποίους εξαρτάται η αντίσταση του αέρα, ύψος, θερμοκρασία, σχήμα του σώματος που εκτελεί την πτώση, πυκνότητα του αέρα κ.τ.λ. Είμαστε πολύ κοντά. Ακούω.
Α2: Νομίζω πως όλη η υπόθεση είναι να γράψουμε

$$m\cdot g - k\cdot \upsilon = m\cdot a.$$

Κ: Κάτι είπε πριν η Κατερίνα (Γ2) για την επιτάχυνση.
Γ2: Είναι η παράγωγος της ταχύτητας.
Α2: Οπότε

$$m\cdot g - k\cdot \upsilon = m\cdot \upsilon'(t)$$

Κ: Ωραία. Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\frac{d\upsilon}{dt}$ για την παράγωγο έχουμε τη δ.ε. (γράφει στον πίνακα)

$$m\cdot g - k\cdot \upsilon = m\cdot \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Α2: Μισό λεπτό, γιατί αλλάξαμε το σύμβολο; Το $\upsilon'(t)$ είναι πιο συνηθισμένο για μας (κάποιοι άλλοι σπουδαστές δείχνουν να συμφωνούν).
Κ: Θα σας απαντήσω σ΄ αυτό σε λίγο. Λίγο υπομονή. Εξάλλου θα προχωρήσουμε με τον τρόπο που έχετε συνηθίσει. Έχουμε λοιπόν τη δ.ε. Τι μένει; Τι μένει για να έχουμε ένα π.α.τ.;
Δ1: Α! Η α.σ. Την είπαμε. Ξεκινάει από την ηρεμία. Άρα $\upsilon(0)=0$.
Κ: Το π.α.τ. που έχουμε να λύσουμε λοιπόν είναι η δ.ε. με την α.σ. $\upsilon(0)=0$. (γράφει την α.σ. δίπλα στη δ.ε.). Προσπαθήστε να το λύσετε.

Δίχως ιδιαίτερες παρεμβάσεις του διδάσκοντος και μετά από δέκα περίπου λεπτά, οι ομάδες φτάνουν στη λύση:

$$\upsilon(t) = \frac{m\cdot g}{k}\cdot(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}),\ t \ge 0$$

ή σε κάποια ισοδύναμη μορφή.
Οι περισσότεροι αναπτύσσουν το εξής σκεπτικό

$$m\cdot \upsilon'(t) = m\cdot g - k\cdot \upsilon(t) \Rightarrow \upsilon'(t) + \frac{k}{m}\cdot \upsilon(t) = g \Rightarrow e^{\frac{k}{m}\cdot t}\cdot \upsilon'(t) + \frac{k}{m}\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t}\cdot \upsilon(t) = g\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{k}{m}\cdot t}\cdot \upsilon(t)\right)' = \left(\frac{m\cdot g}{k}\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t}\right)' \Rightarrow e^{\frac{k}{m}\cdot t}\cdot \upsilon(t) = \frac{m\cdot g}{k}\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t} + c$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \frac{m\cdot g}{k} + c\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t},\quad \text{κ.τ.λ.}$$

που διδάχθηκαν στο λύκειο και ένας μόνο σπουδαστής εφαρμόζει την εξής διαδικασία:

$$m\cdot \upsilon'(t) = m\cdot g - k\cdot \upsilon(t) \Rightarrow \frac{\upsilon'(t)}{m\cdot g - k\cdot \upsilon(t)} = \frac{1}{m} \Rightarrow \int \frac{\upsilon'(t)}{m\cdot g - k\cdot \upsilon(t)}dt = \int \frac{1}{m}dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{m\cdot g - k\cdot \upsilon} = \int \frac{1}{m}dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\cdot \ln\left|m\cdot g - k\cdot \upsilon\right| = \frac{t}{m} + c$$

$$\Rightarrow m\cdot g - k\cdot \upsilon = e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\cdot e^{-k\cdot c}.$$

Η τελευταία, για t=0, δίνει $e^{-k\cdot c} = m\cdot g$, οπότε προκύπτει η γενική λύση

$$\upsilon(t) = \frac{m\cdot g}{k}\cdot(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}),\ t \ge 0.$$

Τους εξηγούμε τα όσα περιγράφονται στη 2.2 και πως ο χωρισμός των μεταβλητών «χρειάζεται» το σύμβολο $\frac{d\upsilon}{dt}$ αντί του $\upsilon'(t)$. Αν όμως σκοπεύουμε να ολοκληρώσουμε

και τα δύο μέλη ως προς t και να εργαστούμε όπως στην λύση που αμέσως πριν αναφέρθηκε, τότε η χρήση του υ΄(t) είναι βολικότερη.

Κ: Πως θα δούμε τι συμβαίνει μετά πάροδο πολύ μεγάλου χρονικού διαστήματος, δηλ. πολλών, πολλών sec;

Γ1: Το όριο για $t \to +\infty$ είναι $\frac{m \cdot g}{k}$. Δηλ. τελικά η ταχύτητα σταθεροποιείται σ' αυτή την τιμή που μάλλον είναι 50.

Κ: Πολύ ωραία, αλλά όχι «μάλλον». Είναι 50. Μετρήθηκε 50 και είναι αυτό που οι φυσικοί ονομάζουν ορική ταχύτητα. Τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά; Τι σημαίνει για τη γραφική παράσταση το ότι $\lim_{t \to +\infty} \upsilon(t) = \frac{m \cdot g}{k} = 50$;

Γ1: Πως έχουμε ασύμπτωτη. Η y=50 είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

Κ: Μάλιστα. Πάρτε g=9,8 και $\frac{m \cdot g}{k}$=50, βρείτε το $\frac{k}{m}$ και γράψτε ακριβώς τον τύπο της συνάρτησης.

Οι ομάδες βρίσκουν

$$\upsilon(t) = 50 \cdot (1 - e^{-0,196 \cdot t}),\ t \geq 0.$$

Κ: Θα γίνει η ταχύτητα ποτέ ίση με 50;

…

Β2: Πρέπει να μηδενιστεί το $e^{-0,196 \cdot t}$, αλλά τα εκθετικά δε μηδενίζονται, είναι θετικές ποσότητες. Άρα το υ(t) δε θα γίνει ποτέ ίσο με 50, απλώς τείνει στο 50.

Κ: Ελέγξτε αν η συνάρτηση που βρήκατε, έχει τη γραφική παράσταση που είχαμε προβλέψει πριν και την είχατε σχεδιάσει.

Οι ομάδες εισάγουν στο MathCAD τον τύπο της λύσης που βρήκαμε και σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση η οποία και βέβαια είναι η καμπύλη του σχήματος 3 και συμφωνεί με τις καμπύλες του σχήματος 4.

Κ: Το ότι παίρνουμε μια γραφική παράσταση σαν εκείνη που είχατε προβλέψει, σημαίνει πως βρισκόμαστε σε καλό δρόμο. Πρέπει τώρα ως τελευταίο στάδιο να επιχειρήσετε μια σύγκριση της λύσης του μαθηματικού προβλήματος με τα πειραματικά δεδομένα. Πώς να γίνει αυτό άραγε;

Α1: Το ότι οι γραφικές παραστάσεις που προβλέψαμε μοιάζουν πολύ με τη γραφική παράσταση της λύσης, δε φτάνει;

Κ: Είναι μια ένδειξη πως βρισκόμαστε σε καλό δρόμο. Θέλουμε όμως μια ισχυρότερη απόδειξη για το ότι η λύση μας συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα.

…(Δυσκολεύονται)

Κ: Ποια είναι τα πειραματικά δεδομένα;

Β3: [Εκείνα] του πίνακα της εκφώνησης (πίνακας 1).

Κ: Και η λύση του προβλήματός μας ποια είναι;

Δ3: Η συνάρτηση υ(t) που βρήκαμε απ' τη δ.ε.

Κ: Τι θα πει λοιπόν «η λύση συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα»;

Β1: Να ελέγξουμε αν υ(0)=0, υ(5)=31,6, υ(10)=43,2 κ.τ.λ.

Β3: Στον πίνακα έχουμε ζευγη (t,υ_t) που αντιστοιχούν σε σημεία. Να ελέγξουμε αν τα σημεία αυτά ανήκουν στη συνάρτηση υ(t). Να ελέγξουμε αν την επαληθεύουν.

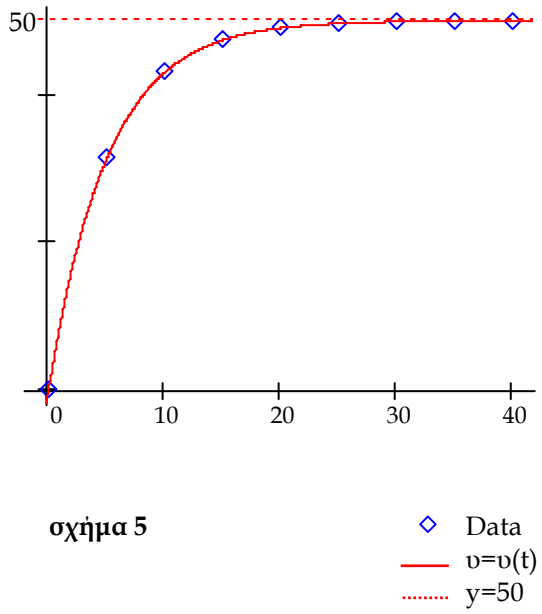
Κ: Αυτό είναι. Καταλάβαμε όλοι; Κάντε τον έλεγχο.

Η ομάδα Α χρησιμοποιεί το επιστημονικό κομπιουτεράκι του Η/Υ που έχει στη διάθεσή της. Οι ομάδες Β, Δ χρησιμοποιούν το EXCEL και η ομάδα Γ το MathCAD. Αφού ολοκληρωθούν απ' όλους οι υπολογισμοί, ζητάμε από τον Προκόπη (Α1) να

διαβάσει δυνατά τ' αποτελέσματα στα οποία κατέληξε η ομάδα του. Ενώ διαβάζει ρωτάμε τις άλλες ομάδες αν έχουν καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα. Κατά προσέγγιση συμφωνούν όλοι. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα 2 με τις εκτιμώμενες τιμές της ταχύτητας στην τρίτη γραμμή.

Κ: Τι λέτε λοιπόν; Περιγράφει ικανοποιητικά το μοντέλο μας την πραγματικότητα;
Α2: Οι τιμές στις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα δεν είναι ίδιες.
Κ: Όμως οι εκτιμώμενες τιμές έχουν μεγάλη διαφορά από τις τιμές που μετρήθηκαν με το ταχύμετρο του αλεξιπτωτιστή;
Α2: Όχι, [οι τιμές] είναι πολύ κοντά. Οι διαφορές είναι μικρές, δεν είναι σημαντικές.
Κ: Οπότε, τι σημαίνει αυτό για την πιστότητα, που λέγαμε στην αρχή, του μοντέλου μας;
Δ2: Είναι καλό. Αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση που βρήκαμε, βρίσκουμε, περίπου, τις ίδιες ταχύτητες με τις πραγματικές. Άρα εντάξει.
Κ: Εντάξει, συμφωνείτε με τον Πάνο; (γνέφουν καταφατικά). Αρχικά είχαμε κάποια πειραματικά δεδομένα. Ακολουθώντας τα στάδια του κύκλου της μοντελοποίησης, μετατρέψαμε το πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό πρόβλημα το οποίο λύσαμε. Τέλος, ελέγξαμε αν η λύση προβλέπει αποτελέσματα που δεν είναι ας πούμε εξωπραγματικά και καταλήξαμε πως έτσι είναι πράγματι. Αυτό σημαίνει πως οι αρχικές παραδοχές μας ήταν στη σωστή κατεύθυνση. Το προτελευταίο πράγμα που θέλω από σας είναι να βάλετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα πειραματικά δεδομένα και τη γραφική παράσταση της λύσης.

Τελειώνοντας οι ομάδες την εργασία που τους ανατέθηκε, παρουσίασαν γραφήματα σαν το ακόλουθο, οπότε και διαπιστώθηκε πως το μοντέλο ταιριάζει με τα πειραματικά δεδομένα.



σχήμα 5

Κ: Πολύ ωραία. Φαίνεται καθαρά πια πως το μοντέλο μας ταιριάζει με τα πειραματικά δεδομένα. Ξέρω πως κουραστήκατε, όμως μετά από ένα σύντομο διάλειμμα, θέλω κάτι τελευταίο: τις εντυπώσεις σας.
…

Μετά το πέρας της παραπάνω συζήτησης, έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα:
α) Οι σπουδαστές δήλωσαν πως το όλο ζήτημα τους κίνησε το ενδιαφέρον. Μάλιστα, διατυπώθηκαν εκφράσεις όπως «μακάρι να γινόταν πάντα έτσι το μάθημα» ή «…ήταν ωραίο. Να κάνουμε κι άλλα τέτοια προβλήματα …». Όταν ρωτήθηκαν τι τους άρεσε περισσότερο, τι νομίζουν πως κέρδισαν, κάποιος είπε «…Χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από πολλά πεδία: Μαθηματικά, Φυσική, Υπολογιστές.

Νομίζω ότι άρχισα να καταλαβαίνω πιο καλά τον τρόπο που συνδέονται τα Μαθηματικά με άλλα πεδία.» και κάποιος άλλος «… μου άρεσε που εφαρμόσαμε με την ομάδα μου τον κύκλο. Μου άρεσε που χρησιμοποιούσαμε τον υπολογιστή για να κάνουμε γραφήματα ή για να επαληθεύσουμε συμπεράσματα. Κάναμε πραγματική δουλειά. Ήταν η πρώτη φορά που κάποια πράγματα που μάθαμε στο σχολείο, συν τα καινούρια, τα εφαρμόσαμε όλα μαζί, πραγματικά τα εφαρμόσαμε…». Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι δραστηριότητες με τον Η/Υ παρέχουν υψηλό βαθμό διεπιστημονικότητας: γνωστικά αντικείμενα όπως Μαθηματικά, Φυσική, Πληροφορική εμπλέκονται λειτουργικά μεταξύ τους στην υλοποίηση ενός έργου. Όταν ρωτήθηκαν εάν δυσκολεύτηκαν με την έννοια και τη διαδικασία επίλυσης της δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών απάντησαν γενικά πως «όχι». Κάποιος μάλιστα είπε: « … δεν κατάλαβα καλά, καλά ότι μάθαινα κάτι καινούριο. Στην αρχή που μας είπατε πως οι δ.ε. είναι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται η άγνωστη συνάρτηση με τις παραγώγους της, νόμιζα πως θα μας δυσκόλευαν πολύ. Όμως σε όσα είπαμε, μου φάνηκε ότι απλά ξαναθυμηθήκαμε πράγματα που ξέραμε.»

β) Κατά τη γνώμη μας, όσον αφορά την παρέμβαση του καθηγητή στο ζήτημα της αντίστασης του αέρα, έπρεπε να πάρει την έκταση που πήρε, αφενός διότι επρόκειτο για καθοριστικής σημασίας ζήτημα όσον αφορά την εξέλιξη της συζήτησης, αφετέρου διότι οι σπουδαστές δεν είχαν προηγούμενη σχετική εμπειρία, δε γνώριζαν όσα έπρεπε για το θέμα αυτό. Όπως παρατηρεί ο **Polya**[77], για να μεταφράσουμε ένα φυσικό πρόβλημα σε εξισώσεις, προφανώς πρέπει να γνωρίζουμε τι ισχύει στη Φυσική σχετικά με αυτό.

γ) Οι ομάδες δυσκολεύθηκαν μόνο στο τελευταίο στάδιο όπου έπρεπε να ελεγχθεί η πιστότητα του μοντέλου τους. Στην πραγματικότητα, αρχικά δεν ήξεραν τι έπρεπε να κάνουν. Το πρόβλημα ξεπεράστηκε με τον τρόπο που φαίνεται στη συζήτηση, με το να τους καλέσουμε δηλ. να προσέξουν «ποια είναι τα πειραματικά δεδομένα» και τι σημαίνει το ότι αυτά συνδέονται με τη συνάρτηση που βρήκαν ως λύση του π.α.τ. Ακόμη και τότε, όταν πια οι ομάδες έκαναν τους απαιτούμενους ελέγχους και μάλιστα χρησιμοποιώντας διαφορετικά τον Η/Υ, υπήρχε δισταγμός στο να βγάλουν το συμπέρασμα που έπρεπε αφού οι τιμές στις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα 2 δε συνέπιπταν. Η αλήθεια είναι ότι τέτοιου είδους παρανοήσεις αναμένονται όταν η δεδομένη αυστηρότητα των Μαθηματικών πρέπει να συμβαδίσει με τη χαλαρότητα των προσεγγίσεων που συνοδεύει τους υπολογισμούς στις εφαρμογές. Οι **Davis** και **Hersh**[25] επισημαίνουν ότι η ακρίβεια και η αισθητική ισορροπία που χαρακτηρίζουν τα καθαρά Μαθηματικά, συχνά απουσιάζουν από τις εφαρμογές και αυτό πράγματι δημιουργεί δυσκολίες, κάτι που και ο **Polya**[76] εντοπίζει αναφερόμενος στις *ασαφείς έννοιες* που πρέπει να διευκρινίσουμε όταν αντιμετωπίζουμε πραγματικά προβλήματα.

δ) Επιδιώκουμε η εκτέλεση του έργου από τους σπουδαστές να επιτυγχάνεται μέσω μιας διαδικασίας μίμησης του τρόπου σκέψης του καθηγητή τους. Στην αλληλεπίδραση καθηγητή-σπουδαστών, αυτή η *μίμηση*, με την έννοια που χρησιμοποιεί τον όρο ο **Polya**[76], είναι ο πυρήνας της ZPD με την εκδήλωση της οποίας οι σπουδαστές κινούνται ανοδικά, στήνοντας μια σκαλωσιά μάθησης ανάμεσα στο τρέχον γνωστικό τους επίπεδο και στο εν δυνάμει επίπεδο μάθησής τους. Ο δάσκαλος λειτουργεί ως διαμεσολαβητής προσφέροντάς τους πολιτιστικά εργαλεία (εννοιολογικό πλαίσιο, τρόπους συμβολισμού και ερμηνείας των αναπαραστάσεων, τρόπους μεθοδολογίας και δράσης) ως υποστηρίγματα της σκέψης τους.

2.5. *Οι δραστηριότητες*

Μετά το πέρας αυτής της συνάντησης οι δραστηριότητες που δόθηκαν στις ομάδες είχαν στόχο τόσο την περαιτέρω εξοικείωση των σπουδαστών με την έννοια και την επίλυση της δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, όσο και την βαθύτερη κατανόηση από μέρους τους της περιγραφής πραγματικών καταστάσεων με μαθηματικούς όρους και έννοιες. Είχαν χρόνο περίπου πέντε μέρες να εργαστούν εντός ή εκτός τάξης σε ομάδες ή ανεξάρτητα. Για το πενθήμερο αυτό είχαν προγραμματιστεί δύο δίωρες συναντήσεις των ομάδων με τον καθηγητή τους. Οι δραστηριότητες αυτές ήταν οι παρακάτω:

1. Ελαστικότητα ζήτησης: Η παράγωγος του λογαρίθμου μιας θετικής συνάρτησης f(t), δίνεται απ' την ισότητα

$$(\ln f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Λόγω του ότι η παραπάνω ποσότητα συγκρίνει το ρυθμό μεταβολής της f(t) με την ίδια την f(t), την ονομάζουμε *σχετικό ρυθμό μεταβολής της f(t) ανά μονάδα του t*.

Ως γνωστόν, στην Οικονομική Θεωρία μια τυπική συνάρτηση ζήτησης Q=Q(p) συνδέει τη ζητούμενη ποσότητα Q με την τιμή p του εκάστοτε προϊόντος. Η έννοια της ελαστικότητας της ζήτησης Q(p) ως προς την τιμή p (ανά μονάδα) ενός προϊόντος, ορίζεται από την ισότητα:

$$e(p) = -\frac{\text{σχετικός ρυθμός μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας}}{\text{σχετικός ρυθμός μεταβολής της τιμής}}$$

$$= -\frac{Q'(p)/Q(p)}{1/p} = -\frac{p \cdot Q'(p)}{Q(p)},$$

προκειμένου να συγκριθεί ο σχετικός ρυθμός μεταβολής $(\ln Q(p))'$ της ζητούμενης ποσότητας προϊόντος με το σχετικό ρυθμό μεταβολής της τιμής του προϊόντος $(\ln p)'$.

i) Γιατί για μια τυπική συνάρτηση ζήτησης είναι $Q'(p) < 0$; Μπορείτε να δικαιολογήσετε το αρνητικό πρόσημο στον ορισμό της e(p);

ii) Εάν η ελαστικότητα έχει τη σταθερή τιμή m, οπότε μιλάμε για *ισοελαστική ζήτηση*, βρείτε τη μορφή της συνάρτησης Q(p) της ζήτησης. Αποδείξτε πως αν η ζήτηση είναι ισοελαστική τότε το κλάσμα $\frac{\text{οριακά έσοδα}}{\text{ζητούμενη ποσότητα}}$ είναι σταθερό.

iii) Εάν η ζήτηση Q(p) είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής τότε $e(p) = 1$, ενώ αν η ζήτηση είναι ανάλογη της τιμής τότε $e(p) = -1$. Είναι ρεαλιστική αυτή η δεύτερη περίπτωση;

2. Δράση εντομοκτόνου: Κουνούπια που βρίσκονται σ' ένα κλειστό δωμάτιο ψεκάζονται μ' ένα φάρμακο. Αν η μεταβλητή x παριστάνει τη δόση (ποσοστό μιας φιάλης) του φαρμάκου που χρησιμοποιήθηκε και η μεταβλητή y παριστάνει το αντίστοιχο ποσοστό των νεκρών εντόμων επί του συνόλου, τότε επιθυμούμε να βρούμε μια συνάρτηση y=y(x) που θα συνδέει τις δύο μεταβλητές.

Δόση x του φαρμάκου	**Αριθμός εντόμων στο δωμάτιο**	**Πλήθος νεκρών εντόμων**	**Ποσοστό y των νεκρών εντόμων επί του συνόλου**
0,10	47	8	0,170
0,15	53	14	0,264
0,20	55	24	0,436
0,30	52	32	0,615
0,50	46	38	0,826
0,70	54	50	0,926
0,95	52	50	0,962

πίνακας 3

i) Γιατί είναι λογικό να θεωρήσουμε την x ως την ανεξάρτητη και την y ως την εξαρτημένη μεταβλητή;
ii) Αν προτείνονται τα μοντέλα

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (1 - y) \quad [M1] \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dx} = b \cdot x^{-0,8} \cdot y \cdot (1 - y) \quad [M2]$$

τότε λύστε τις δύο παραπάνω δ.ε. και σε κάθε περίπτωση βρείτε τη συνάρτηση y=y(x).
iii) Εάν δύο μετρήσεις έδωσαν y(0,10)=0,17 και y(0,30)=0,615, βρείτε τις σταθερές a και b. Από ποιους παράγοντες νομίζετε πως εξαρτώνται οι σταθερές αυτές;
iv) Εάν τα πλήρη πειραματικά δεδομένα είναι εκείνα του πίνακα 3, τότε παραστήστε αυτά και τις λύσεις που βρήκατε σ' ένα σύστημα xy. Ποιο από τα δύο μοντέλα περιγράφει καλύτερα την κατάσταση;

3. I) Το μοντέλο Lanchester**:** Κατά τη διάρκεια του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου, ο F. W. Lanchester θεώρησε πως αν δυο αντίπαλα στρατεύματα μάχονται σε μια συμβατική μάχη από της οποίας την έναρξη έχει παρέλθει χρόνος t, τότε δεδομένου πως δεν υπάρχουν ενισχύσεις και x(t) και y(t) είναι το πλήθος των μάχιμων ανδρών των δύο πλευρών αντίστοιχα κατά τη στιγμή t, ικανοποιείται το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = -a \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = -b \cdot x$$

όπου a, b θετικές σταθερές.
i) Πως ερμηνεύονται οι εξισώσεις του συστήματος;
ii) Στη μάχη της Iwo Jima, στο δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, ενεπλάκησαν x(0)=54000 Αμερικανοί με y(0)=21500 Ιάπωνες στρατιώτες ενώ έχει εκτιμηθεί ότι a=0,05 και b=0,01 (βλ. π.χ. στο [4] της βιβλιογραφίας). Βρείτε τη σχέση που συνδέει τις μεταβλητές x και y.
iii) Αν οι Ιάπωνες στρατιώτες μαχόμενοι μέχρι τελικής πτώσεως εξοντώθηκαν όλοι, τότε πόσους μάχιμους Αμερικάνους στρατιώτες προβλέπει το συγκεκριμένο μοντέλο μετά το πέρας της μάχης;
iv) Με τη χρήση λογισμικού σχεδιάστε τις καμπύλες της λύσης του συστήματος.
II) Το μοντέλο Lotka – Voltera: Εδώ μελετάμε ένα μοντέλο που σχετίζεται με την αλληλεπίδραση των πληθυσμών δύο διαφορετικών ειδών: το μοντέλο θηρευτή θηράματος ή *μοντέλο Lotka – Voltera* λόγω του ότι οι δύο αυτοί επιστήμονες το ανακάλυψαν δουλεύοντας ανεξάρτητα. Ας υποθέσουμε πως σ' ένα κλειστό οικοσύστημα (π.χ. σ' ένα νησί) ζει ένας πληθυσμός κουνελιών και αλεπούδων (ή π.χ. κοκκινολαίμηδων και σκουληκιών, λύκων και ελαφιών, γενικώς δύο ειδών που έχουν ρόλους θηρευτή-θηράματος). Ας συμβολίσουμε με x=x(t) τον πληθυσμό των κουνελιών και με y=y(t) τον πληθυσμό των αλεπούδων. Υποθέτουμε πως τα κουνέλια, αν ήταν μόνα στο νησί θ' αυξάνονταν κατά α% κάθε μήνα τρεφόμενα από τη βλάστηση. Οι αλεπούδες, αν ζούσαν μόνες στο νησί, θα μειώνονταν κατά β% κάθε μήνα, λόγω του ότι δεν θα μπορούσαν να ζήσουν από τη βλάστηση. Στην πραγματικότητα όμως, τα δύο είδη αλληλεπιδρούν, μέσω περιστασιακών συναντήσεων που το πλήθος τους είναι ανάλογο του γινομένου των δύο πληθυσμών και είναι δυσάρεστες για τα κουνέλια. Το απλό αυτό μοντέλο περιγράφεται από το *σύστημα των δ.ε.*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - (\text{επίδραση του θηρευτή στο θήραμα}) = \alpha \cdot x - \gamma \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\beta \cdot y + (\text{επίδραση του θηράματος στο θηρευτή}) = -\beta \cdot y + \delta \cdot x \cdot y$$

α) Συζητήστε πως καταλήγουμε σ' αυτό το σύστημα και άν α=1, β=0,75, γ=0,5 και δ=0,25, τότε

β) να παραστήσετε γραφικά μέσω κατάλληλου λογισμικού τις λύσεις x=x(t) και y=y(t) και να σχολιάσετε το διάγραμμα (αφού εξετάσετε τη μονοτονία των x(t), y(t)).Τέλος,

γ) βρείτε πως συνδέονται μεταξύ τους οι μεταβλητές x, y.

2.6. *Επί των απαντήσεων των σπουδαστών*

Α) Για τη δραστηριότητα 1.

Οι σπουδαστές είναι πιο εξοικειωμένοι απ' τον διδάσκοντα με τις έννοιες της οικονομίας και έχουν στη διάθεσή τους σχετικά συγγράμματα. Όπως αναμενόταν, όλες οι ομάδες έδωσαν σωστές απαντήσεις που σε γενικές γραμμές είχαν ως εξής:

i) Αυξανομένης της τιμής p του προϊόντος, η ζήτηση φθίνει. Η συνάρτηση Q=Q(p) έχει λοιπόν ως γραφική παράσταση μια καμπύλη που σε κάθε σημείο της έχει αρνητική κλίση. Έτσι $Q'(p) < 0$. Στην Οικονομική Θεωρία συνηθίζουμε να διαχειριζόμαστε θετικά μεγέθη, οπότε με $Q'(p) < 0$ κι ενώ θα πρέπει να είναι e(p)>0, δικαιολογείται το αρνητικό πρόσημο στον ορισμό της ελαστικότητας e(p).

ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&e(p) = m,\\
&-\frac{p \cdot Q'(p)}{Q(p)} = m,\\
&-\frac{dQ}{dp} = \frac{m}{p} \cdot Q,\\
&\frac{dQ}{Q} = -m \cdot \frac{dp}{p},\\
&\ln Q = -m \cdot \ln p + c,\\
&Q = e^c \cdot (e^{\ln p})^{-m}
\end{aligned}$$

και με $e^c = a = \text{σταθερά}$, παίρνουμε:

$$Q(p) = a \cdot p^{-m} \Leftrightarrow Q(p) = \frac{a}{p^m}.$$

Περαιτέρω, τα έσοδα είναι

$$R(p) = (\text{ζητούμενη ποσότητα}) \cdot (\text{τιμή ανά μονάδα}) = Q(p) \cdot p$$

και τα οριακά έσοδα είναι

$$\begin{aligned}
R'(p) &= Q'(p) \cdot p + Q(p)\\
&= Q(p) \cdot [1 + \frac{Q'(p) \cdot p}{Q(p)}]\\
&= Q(p) \cdot [1 - e(p)]\\
&= Q(p) \cdot (1 - m).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\text{οριακά έσοδα}}{\text{ζητούμενη ποσότητα}} = \frac{R'(p)}{Q(p)} = 1 - m = \text{σταθερό}.$$

[Εδώ κάποιος παρατήρησε πως το κλάσμα $\frac{\text{οριακά έσοδα}}{\text{ζητούμενη ποσότητα}}$ δεν είναι παρά ένας *αριθμοδείκτης* του οποίου η τιμή μας δείχνει πως συσχετίζονται οι μεταβλητές «οριακά έσοδα» και «ζητούμενη ποσότητα».]

iii) Εάν η ζήτηση Q(p) είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής τότε υπάρχει k>0, με $Q(p)=\frac{k}{p}$, $Q'(p)=-\frac{k}{p^2}$ και $e(p)=-\frac{p\cdot Q'(p)}{Q(p)}=-\frac{p\cdot(-\frac{k}{p^2})}{\frac{k}{p}}=1$, ενώ αν η ζήτηση είναι ανάλογη της τιμής τότε $Q(p)=k\cdot p$, $Q'(p)=k$ και $e(p)=-\frac{p\cdot Q'(p)}{Q(p)}=-\frac{p\cdot k}{k\cdot p}=-1$. Το να είναι η ζήτηση ανάλογη της τιμής δεν είναι ρεαλιστικό. □

Β) Για τη δραστηριότητα 2. Κι εδώ οι ομάδες απάντησαν σωστά σε όλα τα ερωτήματα:

i) Η δόση x του φαρμάκου είναι μια μεταβλητή της οποίας οι τιμές στο [0,1] καθορίζονται αυθαίρετα από εκείνον που εκτελεί το πείραμα. Η x λοιπόν είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Η y όμως εκφράζει το ποσοστό των νεκρών εντόμων επί του συνόλου των εντόμων και οι τιμές της στο [0,1] εξαρτώνται άμεσα από εκείνες της x. Άρα η y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.

ii) Για τη δ.ε. του [M1], με y≠0,1 (οι y=0, y=1 την επαληθεύουν), χωρίζουμε τις μεταβλητές και διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{dy}{y\cdot(y-1)}=-adx,$$

$$(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y})dy=-adx,$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=-a\cdot x+c,$$

$$\left|\frac{y-1}{y}\right|=e^{c}\cdot e^{-a\cdot x},$$

$$\frac{y-1}{y}=\pm e^{c}\cdot e^{-a\cdot x},$$

$$1-\frac{1}{y}=c_1\cdot e^{-a\cdot x}$$

και η προκύπτουσα λύση είναι η συνάρτηση

$$y_1(x)=\frac{1}{1-c_1\cdot e^{-a\cdot x}}.$$

Για τη δ.ε. του [M2] ομοίως έχουμε:

$$\frac{dy}{y\cdot(y-1)}=-b\cdot x^{-0,8}\cdot dx,$$

$$(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y})dy=-b\cdot x^{-0,8}dx,$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=-b\cdot\frac{x^{-0,8+1}}{-0,8+1}+C,$$

$$\frac{y-1}{y}=\pm e^{C}\cdot e^{-5\cdot b\cdot x^{0,2}},$$

$$1-\frac{1}{y}=c_2\cdot e^{-5\cdot b\cdot x^{0,2}},$$

οπότε παίρνουμε τη λύση

$$y_2(x)=\frac{1}{1-c_2\cdot\exp(-5\cdot b\cdot x^{0,2})}.$$

iii) Με $y_1(0,1)=0,17$ και $y_1(0,3)=0,615$ προκύπτει $c_1=-13,635$ και a=10,27. Έτσι η λύση της πρώτης δ.ε. είναι η συνάρτηση

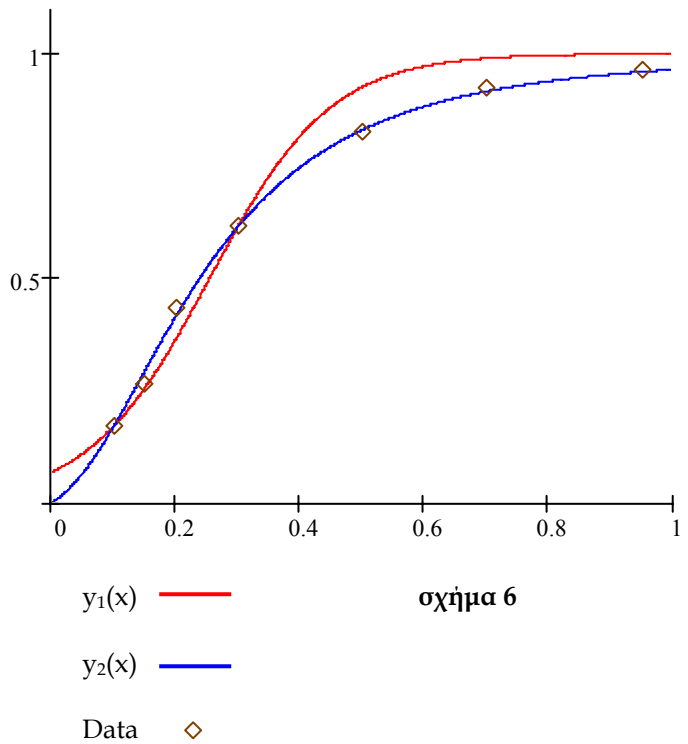
$$y_1(x)=\frac{1}{1+13,635\cdot e^{-10,27\cdot x}}.$$

Ακόμη με $y_2(0,1)=0,17$ και $y_2(0,3)=0,615$ προκύπτει $c_2=-20835$ και b=2,65. Επομένως η λύση της δεύτερης δ.ε. είναι η συνάρτηση

$$y_2(x)=\frac{1}{1+20835\cdot \exp(-13,25\cdot x^{0,2})}.$$

Οι σταθερές a, b θα μπορούσαν να επηρεάζονται από παράγοντες όπως ο όγκος του δωματίου, το πλήθος των εντόμων που βρίσκονται σ' αυτό ή η θερμοκρασία και η υγρασία.

iv) Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε από το παρακάτω σχήμα (όλες οι ομάδες προτίμησαν το MathCAD) πως το μοντέλο [M2} ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα. Επίσης η λύση που παίρνουμε απ' το [M2] είναι ρεαλιστικότερη, αφού δίνει την τιμή y(0) κοντά στο 0, κάτι που δεν ισχύει για τη λύση του [M1]. □



σχήμα 6

Ως προς τις απαντήσεις που παρουσίασαν οι ομάδες, διαφοροποιήσεις υπήρξαν μόνο ως προς τις στρογγυλοποιήσεις των τιμών των σταθερών, σε γενικές γραμμές όμως οι λύσεις που έδωσαν συμφωνούσαν με την προηγούμενη.

Επρόκειτο επομένως για ένα θέμα το οποίο δεν παρουσίασε δυσκολία, αν και ομολόγησαν πως δυσκολεύτηκαν κάπως με την ολοκλήρωση.

Επίσης, μόνο η απάντηση της Γ ομάδας περιείχε τον περιορισμό y≠0, y≠1 πριν το χωρισμό των μεταβλητών, χωρίς την παρατήρηση ότι οι y=0 και y=1 επαληθεύουν τη δ.ε.. Γενικά δεν αναμένεται οι σπουδαστές που έχουμε απέναντί μας να κοιτάζουν με την απαιτούμενη αυστηρότητα τις αποδείξεις τους. Συνήθως εργάζονται εμπειρικά, με το βλέμμα ίσως στραμμένο στο αποτέλεσμα για να εξασφαλίσουν αν είναι λογικό ή αν μοιάζει με το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξαν οι συνάδελφοί τους. Η γνώμη μας είναι πως η αυστηρότητα των μαθηματικών είναι τρόπος σκέψης που καλλιεργείται και ως εκ τούτου δικαιολογούμε τη στάση τους. Ελπίζουμε, μετά τη δική μας παρέμβαση, να επιτευχθεί μια στροφή της τάξης απ' τον έλεγχο του αποτελέσματος στον έλεγχο της διαδικασίας.

Γ) Για τη δραστηριότητα 3.

Ι) Οι ομάδες ανταποκρίθηκαν στο ερώτημα (i):

(i) Υποθέτουμε πως όλοι οι άνδρες στο κάθε στράτευμα μάχονται και είτε βγαίνουν εκτός μάχης είτε συνεχίζουν να προκαλούν απώλειες στον αντίπαλο μέχρι να μηδενιστεί η δύναμη κάποιου εκ των δύο στρατευμάτων. Προφανώς οι δύο εξισώσεις του συστήματος δηλώνουν ότι ο ρυθμός μείωσης του κάθε στρατεύματος είναι ανάλογος της δύναμης του άλλου.

(ii) Στο δεύτερο αυτό ερώτημα, οι ομάδες δεν είχαν απαντήσει, οπότε ούτε στο ερώτημα (iii). Κάποιος σπουδαστής εξέφρασε την ιδέα πως αν διαιρέσουμε τις εξισώσεις του συστήματος κατά μέλη και «αντιμετωπίσουμε τα πρώτα μέλη ως κλάσματα», παίρνουμε τη δ.ε.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{y},$$

η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Όμως γνώριζε ότι «τα πρώτα μέλη των δύο εξισώσεων του συστήματος δεν είναι κλάσματα».

Τους υποδείξαμε ότι με y≠0 μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},$$

άρα

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-b\cdot x}{-a\cdot y}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{y}$$

οπότε, στην τάξη πια, οι ομάδες συνέχισαν:

$$y\,dy=\frac{b}{a}\cdot x\,dx,$$

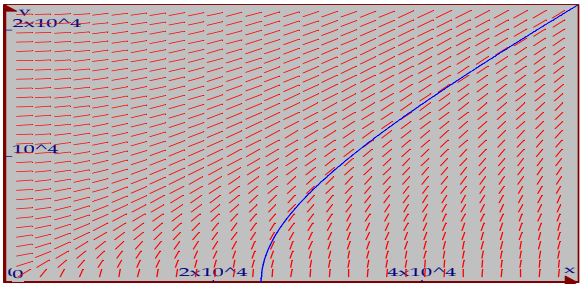
$$\frac{y^2}{2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2}{2}+c,$$

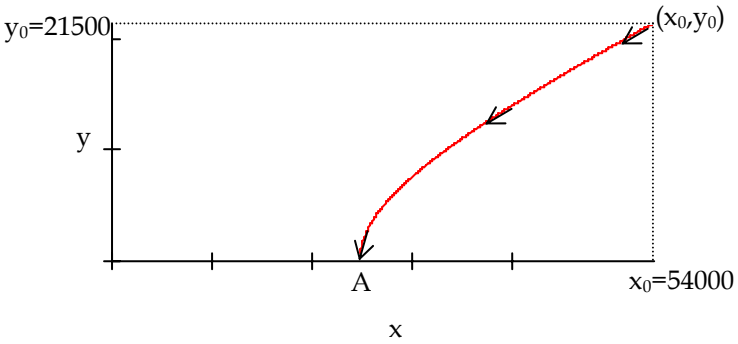
$$a\cdot y^2=b\cdot x^2+C,$$

όπου $C=2\cdot a\cdot c=$ σταθερά.

Η τελευταία είναι γνωστή ως *νόμος τετραγώνων του Lanchester* και με a=0,05, b=0,01, x(0)=54000 και y(0)=21500, δίνει C=-6047500. Συνεπώς έχουμε την υπερβολή

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{-C/b}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{-C/a}\right)^2}=1$$



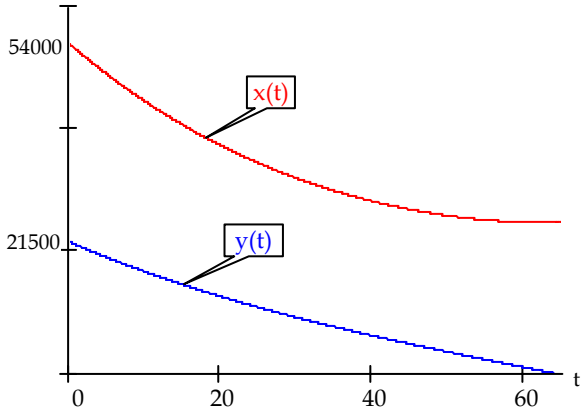


σχήμα 7

και μάλιστα το τμήμα της που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

iii) Στο σχήμα 7, έχουμε τη γραφική παράσταση. Η μάχη ξεκινά στο σημείο (x_0,y_0)=(54000,21500) και καθώς περνά ο χρόνος, οι δυνάμεις x(t) και y(t) των δύο στρατευμάτων μειώνονται. Κινούμαστε λοιπόν κατά μήκος της καμπύλης του σχήματος 7 όπως δείχνουν τα βέλη. Η μάχη τελειώνει τη στιγμή που βρισκόμαστε στην κορυφή A της υπερβολής, οπότε είναι y=0 και x= $\sqrt{-C/b}$ =24590.

iv) Οι ομάδες είχαν απαντήσει: Με τη βοήθεια του MathCAD (σχήμα 8) μπορούμε να δούμε τις γραφικές παραστάσεις της λύσης (x(t), y(t)) του συστήματος. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο μειώνονται τα δύο αντίπαλα στρατεύματα. □



σχήμα 8

ΙΙ) α) Στο πρώτο σκέλος, οι ομάδες έδωσαν πάνω, κάτω την ίδια απάντηση:
Υποθέτουμε πως αν τα κουνέλια ζούσαν μόνα θ' αυξάνονταν κατά α% το μήνα τρεφόμενα από τη βλάστηση και τη μεταβολή του πληθυσμού τους θα περιέγραφε η δ.ε

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x \,.$$

[Συμπληρώσαμε με μια αυστηρότερη προσέγγιση: εάν x(t) είναι ο πληθυσμός των κουνελιών κατά τη χρονική στιγμή t, τότε μετά πάροδο χρόνου h, αυτός θα έχει αυξηθεί κατά α · x(t) · h και θα ισούται πλέον με $x(t+h) = x(t) + \alpha \cdot x(t) \cdot h$. Απ' την τελευταία παίρνουμε $\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \alpha \cdot x(t)$ και για h→0 προκύπτει τελικά $\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x$.]

Στο δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας θα πρέπει να προστεθεί ένας όρος μείωσης που οφείλεται στις συναντήσεις των κουνελιών με αλεπούδες. Ο ρυθμός μείωσης των κουνελιών είναι ανάλογος του πλήθους των συναντήσεων αυτών και άρα ανάλογος του γινομένου x·y. Έτσι η παραπάνω δ.ε. παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \gamma \cdot x \cdot y \,.$$

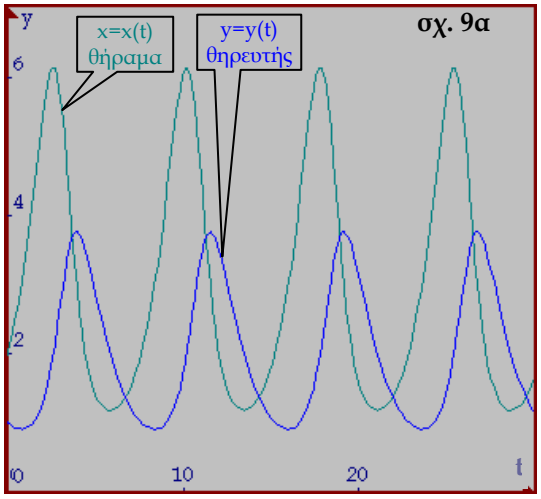
Υποθέτουμε επίσης πως αν οι αλεπούδες ζούσαν μόνες θα μειώνονταν κατά β% το μήνα, μη μπορώντας να τραφούν από τη βλάστηση και σκεπτόμενοι ανάλογα, καταλήγουμε πως ο πληθυσμός τους περιγράφεται από μια δ.ε. της μορφής

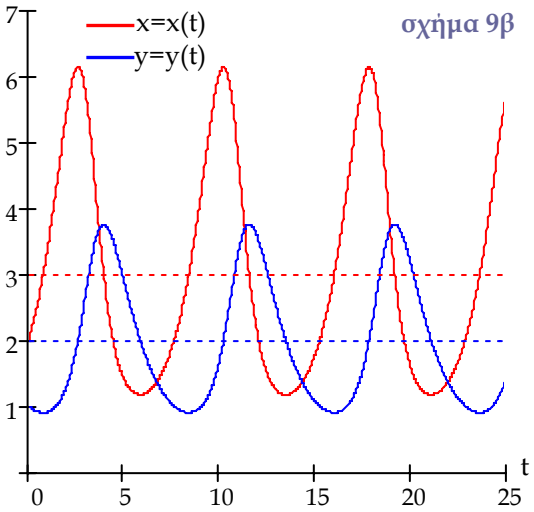
$$\frac{dy}{dt} = -\beta \cdot y + \delta \cdot x \cdot y \,.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα των δ.ε.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \gamma \cdot x \cdot y \text{ και } \frac{dy}{dt} = -\beta \cdot y + \delta \cdot x \cdot y \,. \square$$

β) Οι σπουδαστές ήξεραν πως θα χρησιμοποιήσουν το διαθέσιμο λογισμικό για να παραστήσουν γραφικά τις λύσεις του παραπάνω συστήματος δ.ε. Παρουσίασαν τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

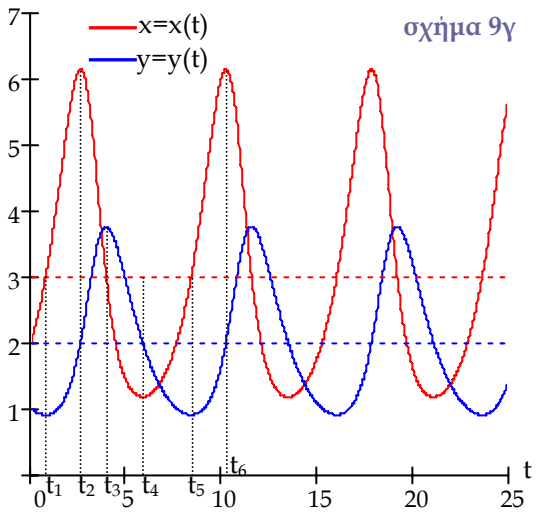




Οι ομάδες δεν αναφέρθηκαν στην περιοδικότητα παρά μόνο περιγραφικά με παρατηρήσεις του τύπου «όπως συμπεραίνουμε από τη μορφή των γραφικών παραστάσεων, η λύση του συστήματος είναι ένα ζεύγος περιοδικών συναρτήσεων». Προφανώς λοιπόν το θέμα έπρεπε να συζητηθεί στην τάξη:

Οι δ.ε. του συστήματος παίρνουν τη μορφή

$$\frac{dx}{dt}=\gamma\cdot x\cdot(\frac{\alpha}{\gamma}-y)\ ,\ \frac{dy}{dt}=\delta\cdot y\cdot(x-\frac{\beta}{\delta}).$$



Έτσι, για α=1, β=0,75, γ=0,5, εάν $y<\frac{\alpha}{\gamma}=2$ τότε $\frac{dx}{dt}>0$ οπότε η x(t) είναι γνησίως αύξουσα, ενώ εάν $y>\frac{\alpha}{\gamma}=2$ τότε $\frac{dx}{dt}<0$ και η x(t) είναι γνησίως φθίνουσα. Ακόμη, εάν $x<\frac{\beta}{\delta}=3$ τότε $\frac{dy}{dt}<0$ και η y(t) είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ εάν $x>\frac{\beta}{\delta}=3$ τότε $\frac{dy}{dt}>0$ οπότε η y(t) είναι γνησίως αύξουσα.

Ξεκινώντας από μια κατάσταση (t=0) στην οποία αμφότεροι οι πληθυσμοί είναι μικροί (x(0)<3 και y(0)<2) , ο πληθυσμός x(t) του θηράματος αυξάνεται λόγω περιορισμένου κυνηγιού και ο πληθυσμός y(t) του θηρευτή φθίνει. Η συμπεριφορά αυτή των δύο πληθυσμών συνεχίζεται έως τη στιγμή t_1 κατά την οποία η καμπύλη x=x(t) φθάνει στη στάθμη $\frac{\beta}{\delta}=3$. Τότε, αφού πια υπάρχει αφθονία τροφής για τον θηρευτή, ο πληθυσμός του y(t) αρχίζει ν' αυξάνεται.

Αφού $y(t_1)<\frac{\alpha}{\gamma}=2$, η x(t) συνεχίζει να αυξάνεται. Επομένως, για $t>t_1$, είναι $x(t)>\frac{\beta}{\delta}=3$ και άρα η y(t) είναι αύξουσα. Η συμπεριφορά αυτή των δύο πληθυσμών συνεχίζεται έως κάποια στιγμή t_2 κατά την οποία η καμπύλη y=y(t) φθάνει στη στάθμη $\frac{\alpha}{\gamma}=2$. Τότε, λόγω ενίσχυσης του κυνηγιού, ο πληθυσμός x(t) του θηράματος αρχίζει να φθίνει. Σε κάποια χρονική στιγμή t_3 που ο πληθυσμός x(t) του θηράματος φθάνει στη στάθμη $\frac{\beta}{\delta}=3$, λόγω του ότι για τον υπάρχοντα πληθυσμό $y(t_3)$ του θηρευτή η τροφή δεν είναι πια αρκετή, η συνάρτηση y=y(t) αρχίζει να φθίνει, μέχρι που κάποια στιγμή t_4 η y(t) φθάνει στη στάθμη $\frac{\alpha}{\gamma}=2$. Η ιστορία αυτή συνεχίζεται όπως περιγράφεται στο σχήμα 9γ, με αποτέλεσμα να έχουμε τις καμπύλες λύσεων που φαίνονται στο σχήμα αυτό. □

Πολύ εύστοχα κάποιος από τους σπουδαστές χαρακτήρισε τις τιμές $\frac{\alpha}{\gamma}=2$ και $\frac{\beta}{\delta}=3$ ως «κρίσιμες στάθμες» και παρατήρησε, με τους συναδέλφους του να συμφωνούν, πως διαδραματίζουν έναν καθοριστικό ρόλο όσον αφορά την περιοδικότητα, όμως στην τάξη πλανιόταν μια ανησυχία και ένα ερωτηματικό: τι ακριβώς ήταν αυτές οι τιμές; Δίχως να μπούμε σε λεπτομέρειες και υπολογισμούς, απλώς ενημερώσαμε τους σπουδαστές πως μέσω του Θ.Μ.Τ. του Ολοκληρωτικού Λογισμού μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι αυτές οι «κρίσιμες στάθμες», δεν είναι παρά οι μέσες τιμές των x=x(t) , y=y(t) σε διάστημα μιας περιόδου και είναι ανεξάρτητες από την περίοδο και τις α.σ..

(Για του λόγου το αληθές, προκειμένου να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της συνάρτησης y=y(t) στο διάστημα [0,T] της πρώτης περιόδου, έχουμε:

$$\{\ln x(t)\}'=\frac{x'(t)}{x(t)}=\alpha-\gamma\cdot y(t)$$

άρα

$$y(t)=\frac{1}{\gamma}\cdot\left\{\alpha-[\ln x(t)]'\right\}$$

και

$$\bar{y} = \frac{1}{T-0}\cdot\int_0^T y(t)dt = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \frac{1}{\gamma}\cdot\left\{\alpha - [\ln x(t)]'\right\}dt = \frac{1}{\gamma\cdot T}\cdot[\alpha\cdot t - \ln x(t)]_0^T = \frac{1}{\gamma\cdot T}\cdot[\alpha\cdot T - \ln x(T) + \ln x(0)] = \frac{\alpha}{\gamma} = 2$$

Ομοίως η μέση τιμή της x(t) στο διάστημα [0,T] μήκους μιας περιόδου, είναι $\bar{x} = \frac{\beta}{\delta} = 3$.)

Οι «κρίσιμες στάθμες» λοιπόν δεν είναι παρά οι μέσες τιμές των πληθυσμών τόσο του θηρευτή, όσο και του θηράματος είναι ανεξάρτητες από την περίοδο και τις α.σ. Η πληροφορία αυτή ανακούφισε τους σπουδαστές από την όποια ανησυχία ή περιέργεια που ένιωθαν, δεδομένου ότι είχαν ξεκαθαρίσει πια στο νου τους το «ρόλο» των τιμών αυτών.

γ) Στο τρίτο αυτό ερώτημα, οι ομάδες δεν είχαν απαντήσει για τον ίδιο λόγο που δεν απάντησαν στο ερώτημα I(ii): δεν αντιλήφθηκαν πως το πρόβλημα έλυνε η εφαρμογή του κανόνα αλυσίδας. Η γνώμη μας γι αυτό, είναι ότι έχουν συνηθίσει διαφορετικό συμβολισμό για τον κανόνα αλυσίδας από εκείνον του Leibnitz: το συμβολισμό $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ με τον οποίο δούλευαν στο λύκειο και στα εισαγωγικά μαθήματα των Γενικών Μαθηματικών πριν από λίγο καιρό. Αφού λίγο πριν είχαν εργαστεί στην τάξη με το I(ii) δε δυσκολεύτηκαν να δουλέψουν κι εδώ ως εξής:

Αν $x \neq 0, \frac{\beta}{\delta}$ και $y \neq 0, \frac{\alpha}{\gamma}$, τότε σύμφωνα με τον κανόνα αλυσίδας, έχουμε τις

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y\cdot(\delta\cdot x - \beta)}{x\cdot(\alpha - \gamma\cdot y)}$$

οι σπουδαστές, χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας, συμπέραναν ότι διαδοχικά έχουμε:

$$(\frac{\alpha}{y} - \gamma)dy = -(\frac{\beta}{x} - \delta)dx,$$

$$\ln y^{\alpha} - \gamma\cdot y = -\ln x^{\beta} + \delta\cdot x + c,$$

$$\ln(y^{\alpha}\cdot x^{\beta}) = \gamma\cdot y + \delta\cdot x + c,$$

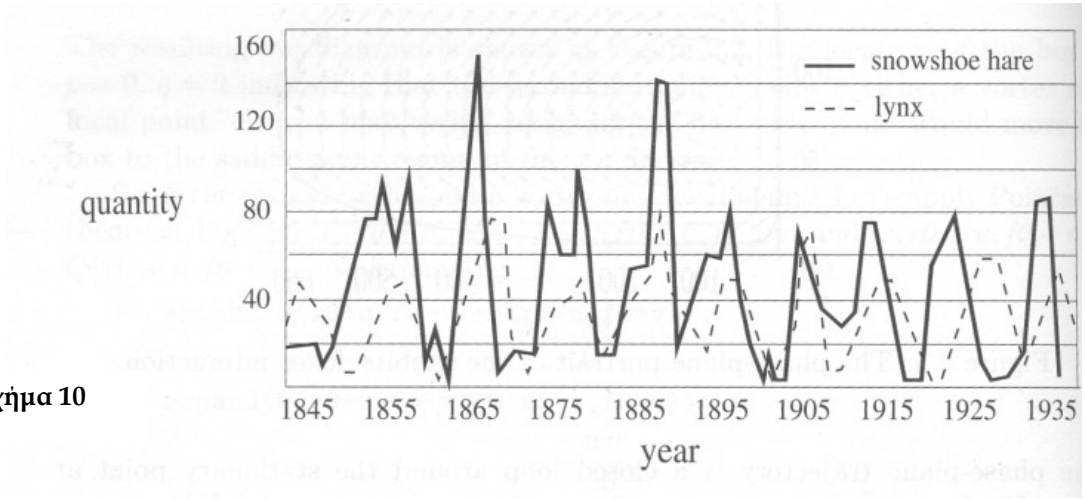
$$y^{\alpha}\cdot x^{\beta} = e^{c}\cdot e^{\gamma\cdot y + \delta\cdot x}$$

και με $c_0 = e^c$ καταλήγουμε στην

$$y^{\alpha}\cdot x^{\beta} = c_0\cdot e^{\gamma\cdot y + \delta\cdot x}$$

που δίνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές x, y. □

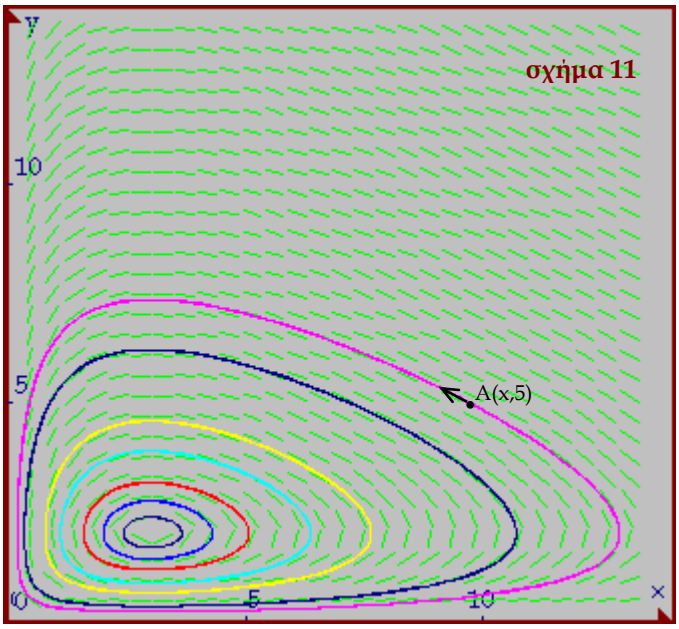
Το μοντέλο βέβαια αποτελεί υπεραπλουστευμένη εκδοχή της πραγματικότητας, όπως δείχνει το σχήμα 10 που αφορά δύο είδη σε ρόλους θηρευτή - θηράματος και βρήκαμε στα [21] και [31] της βιβλιογραφίας.



σχήμα 10

Συμπληρωματικά συζητήθηκαν στην τάξη οι εξής παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 1) Για α=1, β=0,75, γ=0,5, δ=0,25, το graphmatica δίνει το γράφημα που αντιστοιχεί στην εξίσωση $y^{\alpha} \cdot x^{\beta} = c_0 \cdot e^{\gamma \cdot y + \delta \cdot x}$. Το γράφημα αυτό είναι μια κλειστή τροχιά, διαφορετική κάθε φορά που αλλάζουμε την αρχική συνθήκη και άρα την τιμή της σταθεράς c_0, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.



σχήμα 11

Παρατήρηση 2) Οι τροχιές διαγράφονται κατά την αντιωρολογιακή φορά: για παράδειγμα στο A(x,5) με x>3, έχουμε:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta \cdot y + \delta \cdot x \cdot y = 1{,}25 \cdot (x-3) > 0,$$

δηλ. το y αυξάνεται και άρα το A κινείται κατά τη φορά του βέλους.

Παρατήρηση 3) Το ότι οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες σημαίνει περιοδικότητα των λύσεων: ξεκινώντας από ένα σημείο (x,y) (ένα ζεύγος (x(τ),y(τ)) πληθυσμών για τα δύο είδη, που συνυπάρχουν κατά την ίδια χρονική στιγμή τ) και ακολουθώντας μια απ' τις τροχιές κατά την αντιωρολογιακή φορά, θα καταλήξουμε, μετά πάροδο κάποιου χρόνου T, πάλι στο ίδιο σημείο (x(τ),y(τ)). Δηλ. η τιμή (x(τ),y(τ)) της λύσης επανεμφανίζεται μετά πάροδο χρόνου T. Αυτό σημαίνει πως η λύση είναι περιοδική περιόδου T. Σε χρόνο T, το σημείο (x,y) κάνει μια πλήρη περιστροφή ακολουθώντας κάποια απ' τις τροχιές.

Οι στόχοι υπό τους οποίους ανατέθηκαν στους σπουδαστές οι παραπάνω δραστηριότητες ήταν να εξοικειωθούν με το λογισμικό, να γνωρίσουν μαθηματικά μοντέλα καταστάσεων από διάφορους εξωμαθηματικούς χώρους, να αναγκαστούν να ερμηνεύσουν παραμέτρους ή γραφήματα , να εφαρμόσουν τη μέθοδο επίλυσης μιας δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, να συγκρίνουν μοντέλα μεταξύ τους αποφασίζοντας πιο ερμηνεύει καλύτερα μια πραγματική κατάσταση, ν' αντιμετωπίσουν τα ζητήματα αυτά υπό μια ενεργητική και ερευνητική σκοπιά.

Εν γένει δεν παρατηρούνται δυσκολίες όσον αφορά τη μαθηματική διαπραγμάτευση μιας δ.ε. εκτός, όπως είπαμε, απ' την έλλειψη αυστηρότητας που αφορούσε κάποιους περιορισμούς. Βιαστική αλλά όχι λανθασμένη επίσης κρίνεται και η αντιμετώπισή τους για τη δραστηριότητα 3ΙΙβ, εκεί όμως πρόκειται για ζήτημα αυστηρής ερμηνείας ενός διαγράμματος. Δεδομένου πως οι δυσκολίες εντοπίζονται κυρίως σε ζητήματα μαθηματικοποίησης ή αντίστροφα σε ζητήματα ερμηνείας των μαθηματικών συμπερασμάτων και των αντίστοιχων αναπαραστάσεων, έχουμε την άποψη ότι με τον τρόπο που προηγουμένως εξηγήσαμε, βοηθάμε τους σπουδαστές ν' ανακαλύψουν κάποιες κανονικότητες και πρότυπα διαπραγμάτευσης του προβλήματος, που διαισθητικά συνδέονται με προϋπάρχουσα γνώση, διευρύνοντας έτσι το υπάρχον γνωστικό τους σχήμα. Οι ως τώρα ιδέες και αντιλήψεις των σπουδαστών αναδιοργανώνονται ώστε να προσαρμοστούν και να συμμορφωθούν με τις νέες εμπειρίες κάτι που από πλευράς Διδακτικής των Μαθηματικών, είναι συνεπές με τις απόψεις των **Bachelard** και **Broussseau**[68]. Οι σπουδαστές δεν έχουν την απαιτούμενη κατάρτιση για την αντιμετώπιση προβλημάτων που αφορούν συστήματα δ.ε. Ο τρόπος όμως με τον οποίο διατυπώθηκε το πρόβλημα καθώς και η όλη συζήτηση, αφενός δεν προαπαιτούν κάτι τέτοιο, αφετέρου

δρουν, κατά τη γνώμη μας, προς την κατεύθυνση βελτίωσής τους στα ζητήματα που προαναφέραμε. Όπως επισημαίνουν οι **Noss** και **Hoyles**[73], ο σπουδαστής συγχρονίζει τη δομή του συστήματος μάθησής του (προηγούμενη γνώση κι εμπειρία, διαθέσιμες πηγές γνώσης, γνώση που πρόκειται να κατακτηθεί) και κατασκευάζει τα προσωπικά του ενδιάμεσα βήματα προς την κατάκτηση της γνώσης του, μέσω αλληλεπίδρασης και ανατροφοδότησης τόσο με τους σπουδαστές-συνεργάτες και το δάσκαλο, όσο και με το λογισμικό που από φαινομενικό αντικείμενο το μετατρέπει σε εργαλείο και ως τέτοιο το χρησιμοποιεί.

3. Η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας - Ο συνεχής ανατοκισμός

3.1. *Περί ενός θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας.*

Είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα τη γενική λύση μιας δ.ε. ως μια οικογένεια απείρως πολλών συναρτήσεων που αντιστοιχούν σ' ένα άπειρο πλήθος επιλογών της σταθεράς c_0. Είδαμε επίσης στα παραδείγματα αυτά πως μέσω της αρχικής συνθήκης, αντιστοιχίσαμε μια μόνο τιμή στο c_0 έτσι, ώστε από το σύνολο των διαθέσιμων λύσεων να επιλέξουμε τελικώς μία και μόνο. Οι αρχικές συνθήκες λοιπόν φαίνεται να είναι εκείνες οι πρόσθετες συνθήκες που οδηγούν στον μονοσήμαντο προσδιορισμό της λύσης. Ο περίφημος *δεύτερος νόμος του Newton*

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt})$$

σε μία άλλη εκδοχή του οποίου ήδη αναφερθήκαμε, είναι μια δ.ε., η πρώτη ιστορικά, όπου η ανάγκη ύπαρξης αρχικών συνθηκών για το μονοσήμαντο προσδιορισμό της κίνησης είναι ιδιαίτερα αισθητή. Ο ίδιος ο Διαφορικός Λογισμός γεννήθηκε, μέσα από πολλούς αγώνες και δισταγμούς, από την απόπειρα του Newton να αποδώσει μαθηματικά τον φερώνυμο νόμο, ώστε να έχει τη δυνατότητα να προσδιορίζει το είδος της κίνησης που μια συγκεκριμένη δύναμη προκαλεί στη μάζα m, γνωρίζοντας τη θέση και την ταχύτητα της μάζας σε δεδομένη χρονική στιγμή t_0, γνωρίζοντας δηλ. αρχικές συνθήκες του τύπου

$$x(t_0) = x_0 \ , \ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = \upsilon_0 .$$

Πληροφοριακά, ας αναφέρουμε ότι για μια δ.ε. δεύτερης τάξης σαν την προηγούμενη, απαιτούνται δύο αρχικές συνθήκες.
Οι δ.ε. που θ' αντιμετωπίσουμε με βάση τα μοντέλα που θα εξετάσουμε εδώ, είναι δ.ε. της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) .$$

Αναμένουμε λοιπόν να συναντήσουμε προβλήματα αρχικών τιμών που αποτελούνται από μια δ.ε. της προαναφερθείσης μορφής η οποία θα συνοδεύεται από μια αρχική συνθήκη της μορφής $x(t_0) = x_0$. Είναι εύλογο ν' αναρωτηθούμε εάν τέτοια προβλήματα αρχικών τιμών έχουν λύσεις και αν ναι, τότε πόσες είναι αυτές. Φαίνεται λογικό, ότι από τη στιγμή που ένα φυσικό πρόβλημα, έχοντας μαθηματικοποιηθεί ορθά, εκφράζεται μ' ένα τέτοιου είδους πρόβλημα αρχικών τιμών, τότε το τελευταίο θα πρέπει να έχει λύση. Διαφορετικά θα πρέπει να κρύβεται κάποιο σφάλμα στη μαθηματική διατύπωση. Πράγματι, κάποιο θεώρημα που είναι γνωστό ως *Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας* ή *Θεώρημα του Μονοσήμαντου των Λύσεων*, εξασφαλίζει πως δοθέντος ενός π.α.τ. της μορφής $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, υπάρχει συνάρτηση και μάλιστα μοναδική, που ικανοποιεί τόσο τη δ.ε. όσο και την αρχική συνθήκη. Το εν λόγω θεώρημα, από γεωμετρική άποψη, μας πληροφορεί πως <u>δύο διαφορετικές ολοκληρωτικές καμπύλες της ίδιας δ.ε. δεν είναι δυνατό να τέμνονται.</u>

3.2. *Ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας.*

Είναι καθημερινή εμπειρία ότι τα θερμά ή κρύα σώματα κρυώνουν ή θερμαίνονται αντιστοίχως, τείνοντας να πάρουν τη θερμοκρασία του περιβάλλοντός τους. Πειραματικές μετρήσεις έχουν δείξει ότι η επιφανειακή θερμοκρασία ενός θερμού σώματος, μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της διαφοράς των θερμοκρασιών του σώματος και του περιβάλλοντος, δεδομένου ότι αυτή η διαφορά δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Ομοίως, ο ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας ενός ψυχρού σώματος είναι ανάλογος με τη διαφορά των θερμοκρασιών του σώματος και του περιβάλλοντος. Δεδομένου ότι το μέσο που περιβάλλει το υπό εξέταση σώμα υποτίθεται αχανές έτσι, που η θερμοκρασία του T να μην επηρεάζεται από εκείνη του σώματος, η T θεωρείται σταθερή.

Εάν λοιπόν x=x(t) είναι η θερμοκρασία ενός σώματος κατά τη χρονική στιγμή t και T η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος, τότε, όπως πειραματικά επαληθεύεται, ικανοποιείται η δ.ε.

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot (x - T)$$

όπου k μία θετική σταθερά που εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το υλικό του σώματος που εκτίθεται στο περιβάλλον, η έκταση της επιφανείας του, η πυκνότητά του, η αρχική διαφορά της θερμοκρασίας του από εκείνη του περιβάλλοντος κ.α. Πρόκειται για ένα ακόμη μαθηματικό μοντέλο που έχει ελεγχθεί και επαληθευτεί, μάλιστα είναι γνωστό ως *νόμος ψύξης-θέρμανσης του Newton*. Ας μείνουμε όμως για λίγο στο πρόσημο της σταθεράς k. Αν το σώμα είναι θερμότερο του περιβάλλοντος δηλ. x – T > 0, με την πάροδο του χρόνου θα ψύχεται οπότε η θερμοκρασία του θα φθίνει, δηλ. $\frac{dx}{dt} < 0$ και άρα θα πρέπει να είναι k > 0. Αν το σώμα είναι ψυχρότερο του περιβάλλοντος δηλ. x – T < 0, τότε με την πάροδο του χρόνου η θερμοκρασία του θα αυξάνεται. Ο ρυθμός μεταβολής $\frac{dx}{dt}$ είναι τώρα ρυθμός αύξησης, άρα $\frac{dx}{dt} > 0$ κι επομένως θα πρέπει και πάλι να είναι k > 0.

Εφαρμόζοντας, όπως πριν, τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών για τη δ.ε.

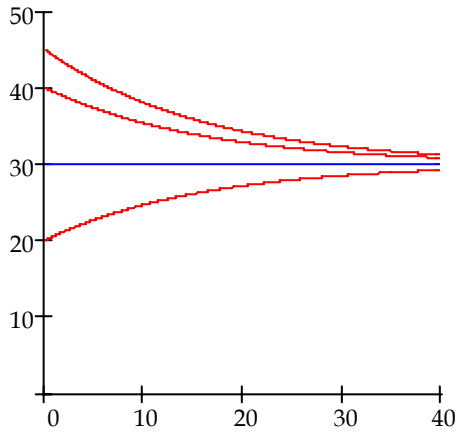
$$\frac{dx}{dt} = -k(x - T)$$

παίρνουμε ως λύσεις, τις συναρτήσεις:

$$x(t) = T + c_0 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \geq 0.$$

Ας υποθέσουμε πως σ' ένα δωμάτιο θερμοκρασίας T = 30°C φέρνουμε την ίδια στιγμή (τη στιγμή t = 0) τρεις κούπες π.χ. με καφέ που βρίσκονται σε θερμοκρασίες 40°C, 45°C και 20°C.

Με Τα = 30 , η αρχική συνθήκη x(0)=40 δίνει τη λύση $x_1(t) = 30 + 10 \cdot e^{-k \cdot t}$. Η αρχική συνθήκη x(0)=45 δίνει τη λύση $x_2(t) = 30 + 15 \cdot e^{-k \cdot t}$ και με x(0)=20 παίρνουμε τη λύση $x_3(t) = 30 - 10 \cdot e^{-k \cdot t}$. Παρατηρούμε, ότι για $c_0 = 0$ προκύπτει η λύση x(t) = T = 30. Η σταθερή αυτή λύση, ονομάζεται *λύση ισορροπίας* της δ.ε. διότι



σχήμα 12: Ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας.

αντιστοιχεί σε μηδενική μεταβολή του x(t) καθώς το t μεταβάλλεται: αν μια κούπα καφέ έχει τη στιγμή t=0 θερμοκρασία 30°C (τη θερμοκρασία δηλ. του δωματίου), η θερμοκρασία της, καθώς περνά η ώρα, θα διατηρείται στη σταθερή τιμή των 30°C. Σημειωτέον ότι τη λύση ισορροπίας μπορούμε να βρούμε απ' τη δ.ε. λύνοντας την $\frac{dx}{dt} = 0$:
η εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow -k(x - T) = 0$$

δίνει

$$x=T=30°C.$$

Οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές καμπύλες φαίνονται στο σχήμα 5 και το ότι $\lim_{t\to+\infty} x(t) = T = 30\ °C$ σημαίνει πως η ευθεία y=30 είναι οριζόντια ασύμπτωτη καθεμιάς εκ των ολοκληρωτικών καμπυλών. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει πως μακροπρόθεσμα η θερμοκρασία του καφέ σε κάθε κούπα, όπως αναμενόταν, τείνει να εξισωθεί μ' εκείνη του δωματίου, τείνει δηλ. στη λύση ισορροπίας. Μ' άλλα λόγια, <u>ό,τι πρόκειται να συμβεί μακροπρόθεσμα είναι ανεξάρτητο από τις αρχικές συνθήκες</u>. Όλες οι λύσεις συρρέουν προς τη λύση ισορροπίας καθώς $t\to+\infty$ και μια τέτοια λύση ισορροπίας ονομάζεται *ασυμπτωτικά ευσταθής*. Επίσης, ένα πρόβλημα αρχικών τιμών σαν το

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot (x - T),\ \ x(0) = x_0$$

που εδώ είδαμε, ονομάζεται *ασυμπτωτικά ευσταθές* και σ' ένα τέτοιο πρόβλημα οι ολοκληρωτικές καμπύλες συγκλίνουν προς τη λύση ισορροπίας καθώς $t\to+\infty$.
Το πρόβλημα αρχικών τιμών της 2.3. λόγου χάρη, είναι επίσης ένα ασυμπτωτικά ευσταθές πρόβλημα. Γενικά λοιπόν,

μια λύση ισορροπίας θα ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθής, εάν από μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες προκύπτει λύση της δ.ε. που τείνει προς τη λύση ισορροπίας καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στο $+\infty$.

3.3. Παρατηρήσεις

α) Το πρώτο σκέλος της συζήτησης εδώ, αφορά το ρόλο των α.σ. στο μονοσήμαντο προσδιορισμό της λύσης και φυσιολογικά οι σπουδαστές (καθ)οδηγούνται στο ν' αναρωτηθούν περί της ύπαρξης ενός θεωρήματος σχετικού με την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης μιας δ.ε. Προς το παρόν είναι πέρα από τους στόχους μας η διατύπωση και η απόδειξη του σχετικού θεωρήματος (αυτό γίνεται στην ενότητα 6), όμως έπρεπε να τεθεί το ζήτημα λόγω του ότι στα επόμενα θα χρειαστούμε τη γεωμετρική του ερμηνεία, την οποία εύκολα οι ομάδες αντιλήφθηκαν: αν δύο ολοκληρωτικές καμπύλες τέμνονταν σε κάποιο σημείο με τετμημένη t_0, τότε αναγκαστικά θα ικανοποιούσαν την ίδια α.σ. οπότε θα συνέπιπταν, άτοπο.

β) Ο πίνακας 4 δίνει ως πειραματικό αποτέλεσμα τη μεταβολή της θερμοκρασίας ενός σώματος σε °C συναρτήσει του χρόνου, το οποίο βρίσκεται σε περιβάλλον θερμοκρασίας 30°C και έχουμε χρησιμοποιήσει την προσέγγιση $\frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Με ανεξάρτητη μεταβλητή την X= x(t) και εξαρτημένη την Y=$\frac{dx}{dt}$ υπολογίζεται ένας συντελεστής γραμμικής συσχέτισης R(X,Y)=-0,998834085.

χρόνος t σε min	θερμοκρασία x(t) σε °C	$\frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x}{\Delta t}$
0	20	
2	23,5	1,75
4	25,8	1,15
6	27,2	0,7
8	28,2	0,5
10	28,8	0,3
12	29,2	0,2
14	29,5	0,15
16	29,7	0,1
18	29,8	0,05
20	29,9	0,05
22	29,9	0
24	30	0,05
26	30	0
28	30	0
30	30	0

πίνακας 4

Δεδομένου ότι $|R(X,Y)| \cong 1$, είναι καλή ιδέα η προσαρμογή μιας ευθείας στα δεδομένα , π.χ. με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Παλινδρομώντας την Y επάνω στην X βρίσκουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Y=-0,267379855·X+8,0249605

που οδηγεί στη δ.ε.

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}267379855 \cdot x + 8{,}0249605$$

ή ισοδύναμα στην

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}267379855 \cdot (x - 30)\,.$$

Έτσι, πειραματικά καταλήγουμε στη δ.ε.

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot (x - T)\,,$$

όπου x=x(t) είναι η θερμοκρασία ενός σώματος κατά τη χρονική στιγμή t και T η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Στους σπουδαστές δόθηκαν οι δύο μόνο πρώτες στήλες του πίνακα 4 με την παρότρυνση να υπολογίσουν τα στοιχεία της τρίτης στήλης και να εξετάσουν τη γραμμική συσχέτιση των μεταβλητών X=x(t) και Y=$\frac{dx}{dt}$. Οι ομάδες χρησιμοποιώντας το EXCEL, υπολόγισαν το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης οπότε συμπέραναν πως η προσαρμογή μιας ευθείας στα δεδομένα είναι η ενδεικνυόμενη και βρήκαν την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, κατασκευάζοντας τελικά το μαθηματικό μοντέλο. Ενώ εντύπωση προκάλεσε το γεγονός ότι και η Στατιστική είχε μπει στο παιχνίδι, οι ομάδες είχαν καταφέρει ν' αναρριχηθούν λίγο ακόμη στη σκαλωσιά

μάθησης που είχαν στήσει, κατασκευάζοντας το μοντέλο τους μ' έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο από εκείνον των §2.3., 2.4.

γ) Οι σπουδαστές, από μόνοι τους έκαναν το συλλογισμό που αναπτύξαμε προηγουμένως, προκειμένου να καταλήξουν στο ότι k>0. Επίσης, χωρίς δυσκολία κατέληξαν στη γενική λύση της δ.ε. και σχεδίασαν στο MathCAD τις ολοκληρωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις τρεις διαφορετικές α.σ. Στη συνέχεια επικεντρώσαμε την προσοχή τους στα εξής σημεία:

- Η σταθερή συνάρτηση x(t)=T επαληθεύει τη δ.ε. και αντιστοιχεί σε μηδενική μεταβολή του x(t) καθώς το t μεταβάλλεται ($\frac{dx}{dt}=0$). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν τη στιγμή t=0 ο καφές έχει τη θερμοκρασία T του δωματίου, η θερμοκρασία του καθώς περνά η ώρα θα διατηρείται στη σταθερή τιμή T.
- Για μια οποιαδήποτε λύση x=x(t), ισχύει
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = T = 30\,°C$$
που σημαίνει ότι μετά πάροδο αρκετού χρόνου, η θερμοκρασία οποιασδήποτε κούπας καφέ θα εξισωθεί με τη θερμοκρασία T του δωματίου. Οι λύσεις, ανεξάρτητα από τις α.σ., τείνουν ασυμπτωτικά προς τη λύση ισορροπίας (η σταθερή θερμοκρασία T του δωματίου είναι *ελκυστής*).
- Τα συμπεράσματα αυτά είναι απολύτως σύμφωνα με την εμπειρία του καθενός.

Έτσι, η έννοια της ασυμπτωτικά ευσταθούς λύσης ισορροπίας εισάγεται εντελώς φυσιολογικά, μέσω της μοντελοποίησης. Έχουμε λοιπόν εδώ τη μεικτή προσέγγιση των **Blum** και **Niss** που αναφέρθηκε και στην § 1.2. και κατά την οποία, ενώ τα μαθηματικά εργαλεία που πρόκειται να χειριστούν οι σπουδαστές είναι εκ των προτέρων γνωστά, τα στοιχεία της μοντελοποίησης χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή της νέας μαθηματικής έννοιας.

Έως εδώ, μέσω ενός μαθηματικού μοντέλου (του νόμου ψύξης του Newton), «είδαμε» τις ολοκληρωτικές καμπύλες και μιλήσαμε για τη λύση ισορροπίας και για την ασυμπτωτική ευστάθεια. Ο στόχος για τον οποίο το συγκεκριμένο μοντέλο επελέγη, επετεύχθη. Η ενότητα κλίνει με μια

εφαρμογή: Ενώ σ' ένα απ' τα δωμάτια ενός ξενοδοχείου έχει διαπραχθεί ένας φόνος, το πτώμα ανακαλύπτεται στις 11:30 π.μ. σε θερμοκρασία 30°C και δύο ώρες μετά η θερμοκρασία του μετριέται 25°C. Αν η θερμοκρασία του δωματίου είναι 20°C, θα υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή του θανάτου.

[Συμφωνήθηκε με τις ομάδες να λάβουμε ως αρχή (t=0) τη στιγμή διάπραξης του φόνου και να υποθέσουμε πως εκείνη τη στιγμή το θύμα είχε τη θερμοκρασία των 36,6 ≅ 37°C. Η δεύτερη υπόθεση είναι πως το σώμα ακολουθεί το νόμο ψύξης του Newton.]

Υποθέτουμε πως τη στιγμή t=0 που έγινε ο φόνος, το σώμα είχε την κανονική θερμοκρασία των 37°C.

Η θερμοκρασία x(t) του σώματος ακολουθεί το νόμο
$$\frac{dx}{dt} = -k\cdot(x-T)$$
και άρα μεταβάλλεται με τη συνάρτηση
$$x(t) = T + c_0\cdot e^{-k\cdot t},\ t\geq 0$$
με T=20 και
$$x(0)=37 \Leftrightarrow T+c_0=37 \Leftrightarrow c_0=37-T \Leftrightarrow c_0=17.$$
Η συνάρτησή μας επομένως, παίρνει τη μορφή

$$x(t) = 20 + 17 \cdot e^{-k \cdot t}, \ t \geq 0.$$

Εάν το πτώμα ευρέθη t_0 ώρες μετά τον φόνο, έχουμε:

$$\begin{cases} x(t_0) = 30 \\ x(t_0 + 2) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 17 \cdot e^{-k \cdot t_0} = 30 \\ 20 + 17 \cdot e^{-k(t_0+2)} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17 \cdot e^{-k \cdot t_0} = 10 \\ 17 \cdot e^{-kt_0} \cdot e^{-2 \cdot k} = 5 \end{cases} \overset{\div}{\Rightarrow} e^{2k} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2k = \ln 2 \Leftrightarrow 2k \cong 0{,}7 \Leftrightarrow k \cong 0{,}35.$$

Ακόμη,

$$x(t_0) = 30 \Leftrightarrow 20 + 17 \cdot e^{-k \cdot t_0} = 30 \Leftrightarrow 17 \cdot e^{-k \cdot t_0} = 10 \Leftrightarrow e^{k \cdot t_0} = 1{,}7 \Leftrightarrow k \cdot t_0 = \ln 1{,}7$$

$$\Leftrightarrow 0{,}35 \cdot t_0 = 0{,}53 \Leftrightarrow t_0 \cong 1{,}5$$

Άρα το πτώμα ανακαλύφθηκε 1,5 ώρες μετά το φόνο και η ώρα ήταν 11:30 π.μ. Ο φόνος επομένως έγινε στις 10:00 π.μ. □

Όπως χαρακτηριστικά περιγράφει ο **Κλαουδάτος**[48], στα πλαίσια της ε.λ.π. ένα καταλλήλως επιλεγμένο πρόβλημα δημιουργεί την ανάγκη για την εισαγωγή της νέας έννοιας που πρόκειται να διδαχθεί. Κατόπιν η εν λόγω έννοια ανεξαρτητοποιείται από το συγκεκριμένο πρόβλημα και μετατρέπεται σε μαθηματικό αντικείμενο που με τη σειρά του χρησιμοποιείται σε περαιτέρω εφαρμογές.

3.4. *Το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού*

Όταν κάποιος μαθαίνει για το «σύνθετο τόκο» στα Οικονομικά Μαθηματικά, αντιμετωπίζει την κατάσταση κατά την οποία ένα αρχικό κεφάλαιο A_0 κατατίθεται σ' ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα για t έτη, t θετικός ακέραιος, με **ετήσιο επιτόκιο** i, i>0. Ο παραγόμενος στο τέλος κάθε έτους τόκος, προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο (κεφαλαιοποιείται), παράγοντας κι αυτός τόκο απ' το επόμενο έτος. Πρόκειται για ένα παράδειγμα *βρόγχου ανάδρασης*: το αρχικό κεφάλαιο καθορίζει το ποσό των τόκων που κερδίζουμε, που καθορίζει το νέο υπόλοιπο λογαριασμού, που καθορίζει… . Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργείται ένα τελικό κεφάλαιο A_t, ο $t^{ος}$ όρος μιας ακολουθίας $\{A_t\}_{t\in N^*}$ με τύπο:

$$A_t = A_0 \cdot (1+i)^t \quad \textbf{[1]}$$

Η ισότητα [1] που εκφράζει τη *διαχρονική αξία του χρήματος* (time value of money), έννοια επάνω στην οποία έχει οικοδομηθεί η χρηματοοικονομική επιστήμη, αποτελεί ουσιαστικά τη βάση όλων των οικονομικών υπολογισμών των σχετικών με τραπεζικούς λογαριασμούς, δάνεια, υποθήκες, επενδύσεις, είναι γνωστή ως *γενικός τύπος του ανατοκισμού* και προκύπτει ως εξής:

Αν A_t είναι το υπόλοιπο στο τέλος του $t^{ου}$ έτους και A_{t+1} το υπόλοιπο στο τέλος του $(t+1)^{ου}$ έτους , τότε

$$A_{t+1} = A_t + A_t \cdot i = A_t \cdot (1+i)$$

οπότε

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+i\,.$$

Έτσι, η ακολουθία $\{A_t\}_{t\in N^*}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $A_1 = A_0 \cdot (1+i)$ και λόγο λ=1+i. Άρα ο $t^{ος}$ όρος της είναι

$$A_t = A_1 \cdot \lambda^{t-1} = A_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{t-1} = A_0 \cdot (1+i)^t .\square$$

Το αρχικό κεφάλαιο A_0, ενδέχεται να ανατοκίζεται συχνότερα και ως γνωστόν κάποια χρηματοπιστωτικά ιδρύματα τοκίζουν μηνιαίως ή ακόμη και ημερησίως. Αν λοιπόν το A_0 ανατοκίζεται m φορές ανά έτος, m θετικός ακέραιος, τότε μετά από t έτη, δημιουργείται ένα τελικό κεφάλαιο

$$A_{m,t} = A_0 \cdot (1+\frac{i}{m})^{m\cdot t} \quad \textbf{[2]}.$$

Πράγματι, διαιρούμε το έτος σε m ίσες χρονικές περιόδους, m θετικός ακέραιος και υποθέτουμε πως το κεφάλαιό μας ανατοκίζεται στο τέλος καθεμιάς εξ αυτών. Μετά πάροδο t ετών θα έχουν παρέλθει $\tau = m \cdot t$ τέτοιες χρονικές περίοδοι και το επιτόκιο για καθεμιά θα είναι $j = \frac{i}{m}$, όπου i το ετήσιο επιτόκιο. Αντικαθιστώντας στην [1] το j στη θέση του i και το τ στη θέση του t, λαμβάνουμε τελικό κεφάλαιο

$$A_0 \cdot (1+j)^\tau = A_0 \cdot (1+\frac{i}{m})^{m\cdot t}$$

που το συμβολίζουμε με $A_{m,t}$. Έτσι προκύπτει η ισότητα [2]. $\square$

Τι συμβαίνει όταν το πλήθος m των περιόδων ανατοκισμού αυξάνεται απεριόριστα; Οι ομάδες αντιλαμβάνονται ότι για να το ανακαλύψουμε θα πρέπει να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{m\to+\infty} A_{m,t}$.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$G(x) = A_0 \cdot (1+\frac{i}{x})^{x\cdot t} = A_0 \cdot \left[e^{x\cdot \ln(1+\frac{i}{x})} \right]^t, \ x>0$$

και αναζητούμε το όριό της για $x \to +\infty$.
Επιχειρώντας να υπολογίσουμε το όριο του εκθέτη

$$x \cdot \ln(1+\frac{i}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{i}{x})}{\frac{1}{x}},$$

καθώς $x \to +\infty$, οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ και με εφαρμογή του κανόνα de L' Hospital, το βρίσκουμε ίσο με i.
Τελικά

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = A_0 \cdot (e^i)^t = A_0 \cdot e^{i\cdot t}$$

άρα και

$$\lim_{m\to+\infty} G(m) = A_0 \cdot e^{i\cdot t}.$$

Όμως $A_{m,t}$ =G(m), επομένως

$$\lim_{m\to+\infty} A_{m,t} = A_0 \cdot e^{i\cdot t} \ \textbf{[3]}.\square$$

Η ισότητα [3] μας πληροφορεί πώς το τελικό κεφάλαιο $A_{m,t}$ πλησιάζει την ποσότητα $A_0 \cdot e^{i\cdot t}$ όταν ο ανατοκισμός είναι εξαιρετικά συχνός ($m \to +\infty$). Τότε, οι m περίοδοι ανατοκισμού στις οποίες διαμερίζεται το έτος είναι τόσο πολλές, ώστε να μπορούμε να τις θεωρήσουμε απειροστές. Ανακαλούμε τον κύκλο της μοντελοποίησης. Η περίπτωση που μελετάμε εμφανίζει την εξής ιδιαιτερότητα: η «μαθηματικοποίηση» έγκειται ουσιαστικά στην επαναδιατύπωση ενός προβλήματος που είναι ήδη διατυπωμένο με όρους των Μαθηματικών. Αυτή η επαναδιατύπωση που θα μας οδηγήσει στο μαθηματικό μας μοντέλο γίνεται υπό τις επιπλέον υποθέσεις ότι ένα χρηματικό ποσό είναι συνεχής μεταβλητή και ότι πρόκειται για εξαιρετικά συχνό ανατοκισμό. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως το αρχικό κεφάλαιο A_0 ανατοκίζεται συχνότερα από κάθε μέρα, κάθε ώρα, κάθε στιγμή, ανατοκίζεται *συνεχώς* και ας εξετάσουμε την περίπτωση του λεγόμενου συνεχούς ανατοκισμού:

Ένα χρηματικό ποσό A_0 κατατίθεται σε μια τράπεζα, η οποία προσφέρει **συνεχές επιτόκιο** r, r>0 και έστω A(t) η τρέχουσα αξία της επένδυσης τη χρονική στιγμή t. Αν το αρχικώς κατατεθέν ποσό ανατοκίζεται συνεχώς, τότε είναι $t \in [0,+\infty)$ και το επιτόκιο r εκφράζει το *σχετικό ρυθμό αύξησης* της αξίας της επένδυσης (δηλ. το κλάσμα $\frac{dA/dt}{A}$) ή αλλιώς, ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της επένδυσης ισούται με το ρυθμό αύξησης του κέρδους, δηλ. με το επιτόκιο επί την τρέχουσα αξία της επένδυσης. Έτσι, η κατάσταση περιγράφεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

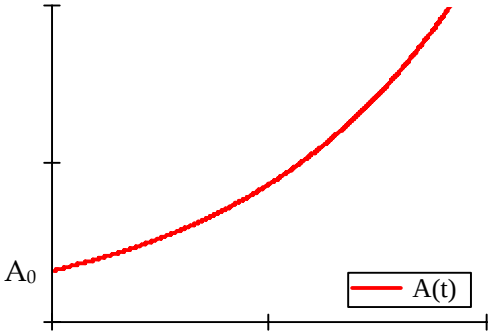
Π₁: $$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \quad \textbf{[4]}, \qquad A(0)=A_0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Λύνοντας οι σπουδαστές τη διαφορική εξίσωση [4] με την αρχική συνθήκη $A(0)=A_0$, παίρνουν μια συνάρτηση με τύπο:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{r \cdot t} \quad \textbf{[5]}$$

που εκφράζει την *εκθετική αύξηση* και έχει ως γραφική παράσταση τη συνεκτική καμπύλη του σχήματος 13.



σχήμα 13: εκθετική αύξηση

Συγκρίνουμε τώρα το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού με περιπτώσεις στις οποίες ένα αρχικό κεφάλαιο A_0 ανατοκίζεται σε διακριτά χρονικά διαστήματα. Στον πίνακα που ακολουθεί, κεφάλαια 2000€, 20000€ και 200000€ ανατοκίζονται ετησίως, ανά τρίμηνο (m=4), ανά μήνα (m=12) και συνεχώς με επιτόκια 0,01 και 0,05. Στον πίνακα φαίνεται ότι οι διαφορές $A(t)-A_t$ (υπόλοιπο κατά τον συνεχή ανατοκισμό μείον υπόλοιπο κατά τον ετήσιο ανατοκισμό) και $A(t)-A_{m,t}$ (υπόλοιπο κατά τον συνεχή ανατοκισμό μείον υπόλοιπο κατά τον ανά τρίμηνο ή ανά μήνα ανατοκισμό) αυξάνονται όταν αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο A_0 ή όταν αυξάνεται το επιτόκιο ή όταν αυξάνεται η χρονική διάρκεια t σε έτη. Τα αποτελέσματα έχουν υπολογιστεί για t=10, t=20 και t=30 έτη μέσω των τύπων [1], [2] και [5]. Το μοντέλο λειτουργεί ικανοποιητικά εκτός απ' την περίπτωση κατά την οποία μεγάλο αρχικό κεφάλαιο ανατοκίζεται για μεγάλη χρονική διάρκεια με μεγάλο επιτόκιο (βλ. το κάτω και δεξιά μπλοκ στον παρακάτω πίνακα).

		i=0,01						i=0,05					
A_0=2000	m=4	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$
		10	2209,244	2210,066	2210,342	1,097585	0,2758159	10	3257,789	3287,239	3297,443	39,65329	10,203614
		20	2440,38	2442,196	2442,806	2,425436	0,6096094	20	5306,595	5402,97	5436,564	129,9682	33,593775
		30	2695,698	2698,707	2699,718	4,019784	1,0105208	30	8643,885	8880,426	8963,378	319,4934	82,951683
	m=12	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$
		10	2209,244	2210,25	2210,342	1,097585	0,0920445	10	3257,789	3294,019	3297,443	39,65329	3,423546
		20	2440,38	2442,602	2442,806	2,425436	0,2034456	20	5306,595	5425,281	5436,564	129,9682	11,283086
		30	2695,698	2699,38	2699,718	4,019784	0,3372563	30	8643,885	8935,489	8963,378	319,4934	27,889513
A_0=20000	m=4	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$
		10	22092,44	22100,66	22103,42	10,97585	2,7581589	10	32577,89	32872,39	32974,43	396,5329	102,03614
		20	24403,8	24421,96	24428,06	24,25436	6,0960937	20	53065,95	54029,7	54365,64	1299,682	335,93775
		30	26956,98	26987,07	26997,18	40,19784	10,105208	30	86438,85	88804,26	89633,78	3194,934	829,51683
	m=12	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$
		10	22092,44	22102,5	22103,42	10,97585	0,9204453	10	32577,89	32940,19	32974,43	396,5329	34,23546
		20	24403,8	24426,02	24428,06	24,25436	2,0344563	20	53065,95	54252,81	54365,64	1299,682	112,83086
		30	26956,98	26993,8	26997,18	40,19784	3,3725627	30	86438,85	89354,89	89633,78	3194,934	278,89513
A_0=200000	m=4	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$
		10	220924,4	221006,6	221034,2	109,7585	27,581589	10	325778,9	328723,9	329744,3	3965,329	1020,3614
		20	244038	244219,6	244280,6	242,5436	60,960937	20	530659,5	540297	543656,4	12996,82	3359,3775
		30	269569,8	269870,7	269971,8	401,9784	101,05208	30	864388,5	888042,6	896337,8	31949,34	8295,1683
	m=12	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$	t	A_t	$A_{m,t}$	A(t)	$A(t)-A_t$	$A(t)-A_{m,t}$
		10	220924,4	221025	221034,2	109,7585	9,2044527	10	325778,9	329401,9	329744,3	3965,329	342,3546
		20	244038	244260,2	244280,6	242,5436	20,344563	20	530659,5	542528,1	543656,4	12996,82	1128,3086
		30	269569,8	269938	269971,8	401,9784	33,725627	30	864388,5	893548,9	896337,8	31949,34	2788,9513

πίνακας 5

Περαιτέρω, αν υποθέσουμε πως εκτός της συσσώρευσης κεφαλαίου λόγω τόκου, υπάρχουν καταθέσεις ή αναλήψεις οι οποίες πραγματοποιούνται με σταθερό ρυθμό k, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών Π_1 αντικαθίσταται από το

$$\mathbf{\Pi_2}: \quad \frac{dA}{dt} = r \cdot A + k \ , \qquad A(0)=A_0$$

όπου k>0 για καταθέσεις και k<0 για αναλήψεις.

Θα δώσουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών Π_2:

Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dA}{dt} = r \cdot A + k$

στη μορφή $\frac{dA}{dt} = r \cdot (A + \frac{k}{r})$,

χωρίζουμε τις μεταβλητές $\frac{dA}{A + \frac{k}{r}} = r \cdot dt$

και ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$\int \frac{dA}{A + \frac{k}{r}} = \int r \cdot dt \Leftrightarrow \ln\left|A + \frac{k}{r}\right| = r \cdot t + c \Leftrightarrow \left|A + \frac{k}{r}\right| = e^{r \cdot t + c} \Leftrightarrow A + \frac{k}{r} = \pm e^{c} \cdot e^{r \cdot t}$$

οπότε

$$A(t) = c_0 \cdot e^{r \cdot t} - \frac{k}{r},$$

όπου c σταθερά και $c_0 = \pm e^{c}$.

Πρέπει όμως να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη

$A(0)=A_0$,

πρέπει δηλ.

$$c_0 \cdot e^{0} - \frac{k}{r} = A_0 \Leftrightarrow c_0 = A_0 + \frac{k}{r},$$

Τελικά, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών Π_2 είναι:

$$A(t) = (A_0 + \frac{k}{r}) \cdot e^{r \cdot t} - \frac{k}{r} \quad \textbf{[6]}$$

την οποία γράφουμε στη μορφή:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{r \cdot t} + \frac{k}{r} \cdot (e^{r \cdot t} - 1) \quad \textbf{[7]}. \ \square$$

Το πρόβλημα Π_1 αντιμετωπίζεται εντελώς ανάλογα και είναι κατά τι απλούστερο.

Ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος της ισότητας [7] είναι το μέρος του A(t) που οφείλεται στον ανατοκισμό του αρχικού κεφαλαίου A_0, ενώ ο δεύτερος όρος είναι το μέρος που οφείλεται στις καταθέσεις ή αναλήψεις με σταθερό ρυθμό k (βλ. παράδειγμα 2 στην επόμενη σελίδα).

Έχουν εκ των προτέρων επιλεγεί από τον διδάσκοντα και θεωρείται σκόπιμο να συζητηθούν τα ακόλουθα:

3.5. *Παραδείγματα*

1. Θεωρήσαμε ότι ο ανατοκισμός είναι μια συνεχής διαδικασία, κάτι που βέβαια αποκλίνει από την πραγματικότητα, όμως δεν πρόκειται για σοβαρή απόκλιση. Πράγματι, έστω για παράδειγμα ότι κεφάλαιο A_0=500€ κατατίθεται με επιτόκιο i ή r ίσο με 2% για t=8 έτη. Η αξία της επένδυσης στο τέλος των 8 ετών θα είναι $A_8 = A_0 \cdot (1+i)^8 = 500 \cdot 1{,}02^8 = 585{,}83$ € σύμφωνα με την εξίσωση [1] και $A(8) = A_0 \cdot e^{r \cdot 8} = 500 \cdot e^{0{,}16} = 586{,}76$ € σύμφωνα με την εξίσωση [5]. Δεδομένου πως πρόκειται για μια διαφορά της τάξεως μόνο των 0,93€ σε 8 έτη, το μοντέλο μας είναι ικανοποιητικό και ίσως θ' άξιζε για μια τράπεζα να διαφημίζει ότι, σε κάποιες περιπτώσεις, ανατοκίζει τα χρήματά σας συνεχώς, κάθε δέκατο του δευτερολέπτου, μέρα και νύχτα.

2. Ας υποθέσουμε ότι κάποιος στα 20 του, ανοίγει ένα λογαριασμό συνταξιοδότησης με αρχικό κεφάλαιο 2000€ και προτίθεται να καταθέτει 2000€ το χρόνο. Θεωρώντας ένα συνεχές επιτόκιο 2%, ας δούμε τι ποσό θα έχει στη διάθεσή του στα 60 του.
Είναι A_0=2000€, r=0,02, k=2000€ και από την [7], έχουμε:

$$A(40) = 2000 \cdot e^{0{,}02 \cdot 40} + \frac{2000}{0{,}02}(e^{0{,}02 \cdot 40} - 1) = \underbrace{4451{,}08}_{\substack{\text{ποσό οφειλόμενο}\\ \text{στον ανατοκισμό}\\ \text{του } A_0=2000}} + \underbrace{122554{,}09}_{\substack{\text{ποσό οφειλόμενο}\\ \text{στις καταθέσεις με}\\ \text{σταθερό ρυθμό}\\ k=2000}} = 127005{,}17 .$$

Μπορούμε λοιπόν να παρατηρήσουμε τα εξής:
α) Κατατέθηκαν συνολικά 82000€, οπότε η διαφορά που ανέρχεται στο ποσό των 127005,17-82000= 45005,17 € οφείλεται στους τόκους.
β) Το υπόλοιπο του λογαριασμού μετά από 40 χρόνια είναι αρκετά ευαίσθητο ως προς τις μεταβολές του επιτοκίου r. Πράγματι, με r=0,015 προκύπτει A(40)=85856,118, ενώ με r=0,025 προκύπτει A(40)=177264,75.

3. Καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο A_0 άπαξ, με συνεχές επιτόκιο r=2%. Μετά από t έτη, διαθέτει ένα υπόλοιπο λογαριασμού που, κατά την [6], δίνεται από την ισότητα:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{0{,}02 \cdot t} .$$

Στο τέλος του πρώτου έτους, το υπόλοιπο του λογαριασμού του αλλάζει από $A(0)=A_0$ σε $A(1) = A_0 \cdot e^{0{,}02}$ αυξάνεται δηλ. κατά τον παράγοντα $e^{0{,}02} \cong 1{,}0202$. Έτσι, η ετήσια ποσοστιαία αύξηση είναι

$$\frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{A_0 \cdot e^{0{,}02} - A_0}{A_0} = e^{0{,}02} - 1 \cong 1{,}0202 - 1 = 2{,}02\% .$$

Αυτό ακριβώς εννοεί ένας τραπεζίτης όταν λέει «επιτόκιο 2% με πραγματική ετήσια απόδοση 2,02%».
Δεδομένου ότι

$$A_0 \cdot e^{0{,}02 \cdot t} = A_0 \cdot (1{,}0202)^t ,$$

έχουμε δύο διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης της ίδιας συνάρτησης.

4. Εάν μία τράπεζα ισχυρίζεται ότι προσφέρει ετήσιο επιτόκιο 1%, εννοεί ότι ένα κεφάλαιο A_0 μετά από ένα έτος θα έχει γίνει, κατά την εξίσωση [1], ίσο με

$$A_1 = A_0 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = A_0 \cdot 1{,}01\,,$$

θα έχει επομένως αυξηθεί κατά τον παράγοντα 1,01.
Μετά από t έτη θα έχει συσσωρευτεί κεφάλαιο A_t που δίνεται από την

$$A_t = A_0 \cdot (1{,}01)^t\,.$$

Εάν επιθυμούσαμε να υπολογίσουμε την αύξηση κατά το συνεχές μοντέλο θα υποθέταμε πως το κεφάλαιο, t έτη μετά, θα δίνεται μέσω της συνάρτησης

$$A(t) = A_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

και ένα έτος μετά, θα είναι ίσο με

$$A(1) = A_0 \cdot e^r\,.$$

Προκειμένου, κατά το συνεχές μοντέλο, να επιτύχουμε ετήσια αύξηση επίσης 1%, απαιτούμε

$$e^r = 1{,}01 \Leftrightarrow r = \ln 1{,}01 \Leftrightarrow r \cong 0{,}00995$$

Το συνεχές επιτόκιο r=0,995% δεν είναι ίδιο με το ετήσιο επιτόκιο i=1%, αλλά είναι πολύ κοντά σ΄ αυτό, γεγονός που συνηγορεί υπέρ της αξιοπιστίας του μοντέλου μας.
Παρατηρούμε πως κι εδώ έχουμε δύο αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης αφού

$$A_0 \cdot (1{,}01)^t = A_0 \cdot e^{0{,}00995 \cdot t}\,.$$

3.6. Σχόλια

1. Μπορούμε ν' αποδείξουμε την [3] χρησιμοποιώντας κάποιο θεώρημα της ανάλυσης κατά το οποίο, εάν $\{a_m\}_{m\in N^*}$ είναι μια απειρίζουσα ακολουθία, τότε

$$\lim_{m\to+\infty}(1+\frac{1}{a_m})^{a_m}=e \quad [8].$$

Η ακολουθία $\{a_m\}_{m\in N^*}$ με $a_m=\frac{m}{i}$ είναι απειρίζουσα καθώς $m\to+\infty$, αφού i>0 και συνεπώς ισχύει γι αυτήν η ισότητα [8].
Εξάλλου,

$$A_{m,t}=A_0\cdot(1+\frac{i}{m})^{m\cdot t}=A_0\cdot\left[(1+\frac{1}{m/i})^m\right]^t=A_0\cdot\left[(1+\frac{1}{m/i})^{\frac{m}{i}}\right]^{i\cdot t}=A_0\cdot\left[(1+\frac{1}{a_m})^{a_m}\right]^{i\cdot t}$$

συνεπώς

$$\lim_{m\to+\infty}A_{m,t}=\lim_{m\to+\infty}A_0\cdot\left[(1+\frac{1}{a_m})^{a_m}\right]^{i\cdot t}\overset{[8]}{=}A_0\cdot e^{i\cdot t}$$

και η [3] απεδείχθη.□

2. Βασικό μειονέκτημα του μοντέλου που περιγράψαμε, είναι ότι υποθέσαμε πως το επιτόκιο r είναι σταθερό καθ' όλη τη χρονική περίοδο, ενώ στην πραγματικότητα εμφανίζει σημαντικές διακυμάνσεις και απ' την άποψη αυτή το μοντέλο μας δε λειτουργεί μακροπρόθεσμα. Ένας τρόπος να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, είναι να θεωρήσουμε πως τα r, k είναι συναρτήσεις του t, αλλά τότε η λύση καθώς και η πορεία προς αυτή θα ήταν σαφώς πιο περίπλοκες. Απ' την άλλη μεριά, τα επιτόκια και οι ρυθμοί καταθέσεων ή αναλήψεων όντως μεταβάλλονται αλλά αυτό συνήθως γίνεται μάλλον τυχαία παρά μέσω τύπων. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι δε μπορούμε να προβλέψουμε τα μελλοντικά επιτόκια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα [7] για να συγκρίνουμε τ' αποτελέσματα διαφορετικών επενδυτικών προγραμμάτων ή ως θεωρητικό εργαλείο στην ανάλυση κάποιων καταστάσεων που αφορούν τα χρηματοοικονομικά και τις επιχειρήσεις.

3. Ενδεχομένως κάποιος ν' αναρωτιέται πως είναι δυνατόν ένα χρηματικό ποσό να προκύπτει ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, δεδομένου ότι τα χρηματικά ποσά είναι διακριτές ποσότητες (δεν υπάρχουν κλάσματα του ενός cent). Απ' την άλλη μεριά οι αυξήσεις ενός κεφαλαίου λόγω του ανατοκισμού του, λαμβάνουν χώρα σε διακριτές χρονικές περιόδους, ο χρόνος είναι διακριτή μεταβλητή. Στη διαφορική εξίσωση όμως το χρηματικό ποσό αντιμετωπίζεται ως συνεχής μεταβλητή (αλλιώς δεν θα 'ταν καν διαφορίσιμη), το ίδιο και ο χρόνος. Στη διακριτή περίπτωση που εξάλλου αντιστοιχεί στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει τίποτα ανάμεσα στο 1 και το 2. Η μετάβαση απ' το 1 στο 2 απαιτεί ένα άλμα. Στη συνεχή περίπτωση, κατά τη μετάβασή μας απ' το 1 στο 2 διασχίζουμε νοητά και κατά συνεκτικό τρόπο μια απειρία αριθμών που παρεμβάλλονται μεταξύ των 1 και 2 δίχως άλματα. Αυτή η ιδέα της συνεκτικότητας κρύβεται πίσω απ' τις θεμελιώδεις έννοιες του ορίου και της συνέχειας, στη βάση της Ανάλυσης. Ο Απειροστικός Λογισμός εφοδίασε την επιστήμη με εύχρηστες τεχνικές που βασίζονται στο όριο, το μέσο με το οποίο προσεγγίζουμε ακόμη και διακριτά φαινόμενα με συνεχή. Η

διαφορική εξίσωση λοιπόν, δηλ. ο συνεχής ανατοκισμός, είναι μια ιδεατή, θεωρητική κατάσταση και στην περίπτωσή μας, δεν αποτελεί παρά μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Η διαδικασία διατύπωσης ή επαναδιατύπωσης ενός πραγματικού προβλήματος με μαθηματικό τρόπο, συχνά εμπεριέχει την εννοιολογική αντικατάσταση διακριτών διαδικασιών από συνεχείς, αρκεί όπως παρατηρούν οι **Στράντζαλος & Κατάβολος**[93], να έχουμε αρκετές ενδείξεις για το ότι το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα αντανακλά τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της αρχικής κατάστασης και οι μεταβολές της εκάστοτε ποσότητας να είναι, σε σχέση με το μέγεθός της τόσο μικρές, ώστε να μπορούν να θεωρηθούν απειροστές. Σύμφωνα με την [1], το υπόλοιπο ενός τραπεζικού λογαριασμού με ετήσιο ή π.χ. τριμηνιαίο ανατοκισμό αυξάνεται γεωμετρικά (βλ. §3.1), ενώ κατά την [5] το υπόλοιπο με συνεχή ανατοκισμό αυξάνεται εκθετικά, εν ολίγοις αυξάνονται κατά τον ίδιο τρόπο. Πράγματι, αν το A(t) μεταβάλλεται συνεχώς κατά την

$$A(t) = A_0 \cdot e^{r \cdot t} \quad [5]$$

και «διακριτοποιήσουμε» το χρόνο (t=0, 1, 2, …) τότε η A(t) μετατρέπεται σε μια ακολουθία (A_t) για την οποία έχουμε

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{A_0 \cdot e^{r \cdot (t+1)}}{A_0 \cdot e^{r \cdot t}} = e^r = \text{σταθερό},$$

μετατρέπεται δηλ. σε γεωμετρική πρόοδο. Απ' την άλλη μεριά αν, αντιστρόφως το υπόλοιπο του λογαριασμού μεταβάλλεται κατά την

$$A_t = A_0 \cdot (1+i)^t \quad [1],\ t \in N$$

και επιτρέψουμε στο t να πάρει όλες τις μη αρνητικές τιμές και όχι μόνο τις ακέραιες, η ακολουθία με t^o όρο $A_t = A_0 \cdot (1+i)^t$ μετατρέπεται στην εκθετική συνάρτηση

$$A(t) = A_0 \cdot (1+i)^t = A_0 \cdot e^{t \cdot \ln(1+i)}.$$

Δηλ. *η γεωμετρική πρόοδος είναι το διακριτό ισοδύναμο της εκθετικής συνάρτησης.*

Τώρα, προχωρώντας ένα βήμα, υποθέτουμε πως το ετήσιο επιτόκιο i γίνεται συνεχές, δηλ. i=r και παίρνουμε

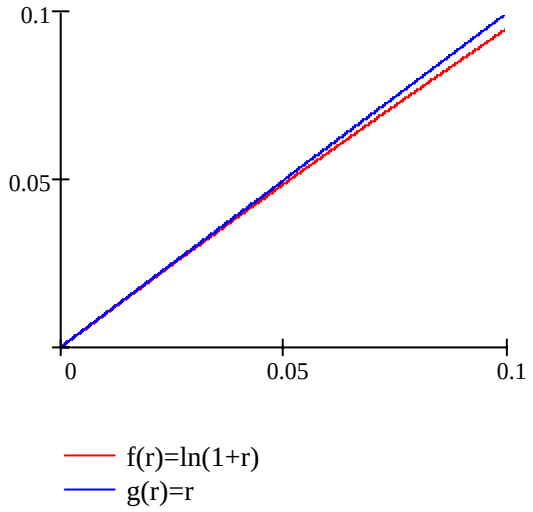
$$A(t) = A_0 \cdot e^{r \cdot t} = A_0 \cdot e^{i \cdot t},$$

κάνουμε δηλ. την παραδοχή

$$i=\ln(1+i) \Leftrightarrow r=\ln(1+r)$$

όπως ακριβώς στο παράδ. 4 της 3.2.

Στο σχήμα 14 φαίνεται πως νομιμοποιούμαστε να δεχθούμε κάτι τέτοιο, δεδομένου πως για επιτόκια <10% οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(r)= ln(1+r) και g(r)=r σχεδόν συμπίπτουν.



σχήμα 14:

για 0<r<0,1 είναι ln(1+r) ≅ r

Πράγματι,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\ln(1+r)}{r} \overset{\text{De L Hospital}}{=} \lim_{r \to 0} \frac{1}{1+r} = 1,$$

δηλ. για μικρά r, είναι

$$\frac{\ln(1+r)}{r} \cong 1 \ \text{ ή } \ \ln(1+r) \cong r.$$

Στο σχήμα 15, με i=r=0,02 και A_0=2000 εικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της ακολουθίας με n^o όρο

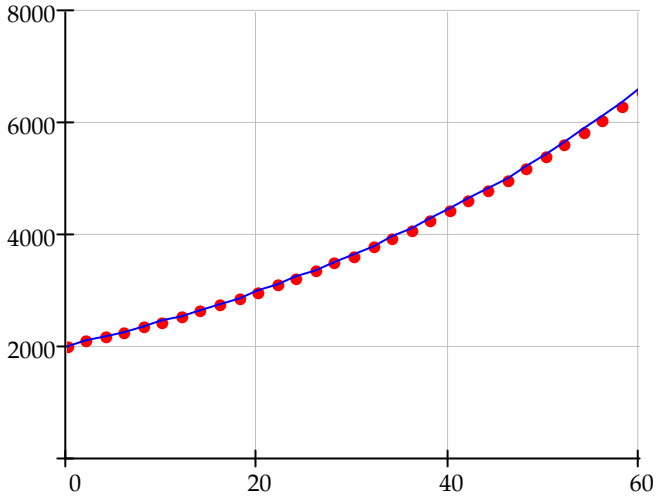
$$A_n = A_0 \cdot (1+i)^n$$

και της συνάρτησης

$$A(t) = A_0 \cdot e^{i \cdot t} = A_0 \cdot e^{r \cdot t}.$$

Η ουρά της (A_n) βρίσκεται σχεδόν επί της γραφικής παράστασης της A(t).

Το πιο ισχυρό επιχείρημα για τη συνέπεια της μετάβασης από τη διακριτή στη συνεχή κατάσταση, είναι η σύγκριση της ισότητας [3] και της λύσης [5] του προβλήματος Π_1. Παρατηρώντας τις σχέσεις [3] και [5] οδηγούμαστε στη διαπίστωση πως η μετάβαση αυτή επιτυγχάνεται φυσιολογικά με την υπόθεση ενός εξαιρετικά συχνού ανατοκισμού, με την παραδοχή ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ανατοκισμών μεσολαβεί ένα απειροστό χρονικό διάστημα.



σχήμα 15: οι όροι της (A_n) με $A_n = A_0 \cdot (1+i)^n$ (κουκίδες κόκκινου χρώματος) βρίσκονται σχεδόν επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $A(t) = A_0 \cdot e^{i \cdot t} = A_0 \cdot e^{r \cdot t}$ (καμπύλη μπλε χρώματος).

3.7. Παρατηρήσεις

α) Το σχόλιο 1 της 3.5 δεν κρίθηκε απαραίτητο να συζητηθεί στην τάξη και διανεμήθηκε φωτοτυπημένο.

β) Η συζήτηση η σχετική με τις 3.3 έως 3.5 χρειάστηκε κάτι παραπάνω από ένα δίωρο. Δεδομένου ότι οι σπουδαστές είχαν παρακολουθήσει μαθήματα Οικονομικών Μαθηματικών σε αντίστοιχο μάθημα δεν παρουσιάστηκαν δυσκολίες σχετικά με τις αποδείξεις των [1] και [2] στην 3.3. Διανεμήθηκαν φωτοαντίγραφα με την τελευταία παράγραφο της σελ. 50 που αφορά τη μαθηματικοποίηση και το μαθηματικό μοντέλο. Οι εκφράσεις «το επιτόκιο r εκφράζει το *σχετικό ρυθμό αύξησης* της αξίας της επένδυσης (δηλ. το κλάσμα $\frac{dA/dt}{A}$)» ή «ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της επένδυσης ισούται με το ρυθμό αύξησης του κέρδους, δηλ. με το επιτόκιο επί την τρέχουσα αξία της επένδυσης» που αντλήσαμε απ' τα [43], [17] της βιβλιογραφίας αντίστοιχα, δημιούργησαν μια, κατά τους **Davis** και **Hersh**[25], *κρίση κατανόησης*: οι σπουδαστές δήλωναν πως κατανοούσαν μεν το νόημα της συγκεκριμένης πρότασης αλλά όχι το γιατί αυτή είναι αληθής. Προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα, σκεφτήκαμε να θέσουμε το θέμα ως εξής: εάν A(t) είναι το υπόλοιπο του λογαριασμού κατά τη χρονική στιγμή t, τότε μετά πάροδο χρόνου Δt, τη στιγμή δηλ. t +Δt, το ποσό αυτό θα έχει αυξηθεί κατά r · A(t) · Δt . Έτσι, θα έχει συσσωρευτεί κεφάλαιο ίσο μ ε

$$A(t+\Delta t) = A(t) + r \cdot A(t) \cdot \Delta t .$$

Απ' την τελευταία προκύπτει

$$\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}=r\cdot A(t)$$

και παίρνοντας τα όρια των δύο μελών για $\Delta t \to 0$, προκύπτει η ισότητα $\frac{dA}{dt}=r\cdot A$.

Η «αναλογία» (**Polya**[76]) με τον πληθυσμό των κουνελιών στη σελ. 39, λειτούργησε αλλά εκ των υστέρων: οι σπουδαστές μετά θυμήθηκαν πως είχαν ξαναδεί μια παρόμοια αντιμετώπιση. Η αλήθεια είναι ότι οι εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν αρχικά και προκάλεσαν την κρίση κατανόησης έχουν περισσότερο ένα χαρακτήρα συμπεράσματος, παρά δικαιολογούν το περιεχόμενό τους. Αφού λοιπόν το πρόβλημα είχε πλέον ξεπεραστεί μέσω της παραπάνω αυστηρότερης αντιμετώπισης που μάλλον θα έπρεπε να έχει προηγηθεί και που εν προκειμένω, αποτελεί ό,τι οι **Davis** και **Hersh**[25] ονομάζουν *τεκμηρίωση της διαδικασίας της ανακάλυψης*, οι ομάδες εύκολα έφθασαν στις σχέσεις [5] και [7]. Για λόγους οικονομίας χρόνου ο πίνακας 5 είχε ετοιμαστεί από τον διδάσκοντα κι διανεμήθηκε φωτοτυπημένος στις ομάδες. Οι σπουδαστές παροτρύνθηκαν μελετώντας τον να ανακαλύψουν πότε το μοντέλο δε λειτουργεί ικανοποιητικά. Μετά από ένα περίπου 10λεπτο, συμπέραναν πως το μοντέλο δε λειτουργεί ικανοποιητικά όταν μεγάλο αρχικό κεφάλαιο ανατοκίζεται μακροπρόθεσμα με μεγάλο επιτόκιο: στο κάτω-δεξιά μπλοκ του πίνακα οι διαφορές, $A(t)-A_t$ και $A(t)-A_{m,t}$ είναι μεγάλες σχετικά με τις αντίστοιχες διαφορές των υπολοίπων μπλοκ.

γ) Δεν παρουσιάστηκε δυσκολία στη συζήτηση των παραδειγμάτων της 3.4 καθώς και στον υπολογισμό του ορίου στο πρώτο σχόλιο της 3.5.

Η συζήτηση που αναπτύσσεται στα σχόλια 2 και 3 της 3.5 πήρε τον περισσότερο χρόνο. Όταν ρωτήθηκαν αν συμφωνεί με την πραγματικότητα η υπόθεση κατά την οποία τα r, k είναι σταθερά, κάποιος απάντησε «σίγουρα όχι, αλλά είπαμε πως στην κατασκευή μοντέλων εξιδανικεύουμε τις καταστάσεις». Κάποιος άλλος συμπλήρωσε «τα r, k είναι συναρτήσεις του χρόνου, αλλά ποιες; Μπορούμε να ξέρουμε;».

δ) Παρατήρησαν επίσης πως «είναι εύκολο να δεχθούμε το χρόνο ως συνεχή μεταβλητή αλλά όχι και το κεφάλαιο». Έτσι οδηγηθήκαμε στη συζήτηση που περιγράφεται στο σχόλιο 3. Αν και δεν είχαν από προηγούμενη εμπειρία ξεκαθαρίσει ότι η γεωμετρική πρόοδος είναι το διακριτό ισοδύναμο της εκθετικής συνάρτησης, δε δυσκολεύτηκαν να πειστούν γι αυτό. Μάλιστα κάποιος παρατήρησε: « … άρα όταν λέμε πως ένα μέγεθος μεταβάλλεται γεωμετρικά και εκθετικά, λέμε το ίδιο πράγμα».

Όπως ισχυρίζεται ο **Freudenthal**[35] η γεωμετρική εποπτεία μας προσφέρει μια απ' τις καλύτερες ευκαιρίες για να μάθουμε να μαθηματικοποιούμε την πραγματικότητα. Συμφωνώντας οι **Borrelli & Coleman**[16] εκφράζουν την άποψη ότι τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται με τη μορφή λογισμικού καταδεικνύουν τις συνάφειες μεταξύ των πραγματικών φαινομένων και των μαθηματικών μοντέλων που τα περιγράφουν. Οι ομάδες παροτρύνθηκαν να σχεδιάσουν στο MathCAD τα σχήματα 14 και 15, οπότε πείστηκαν εντελώς για το ότι μπορούμε, υπό κάποιες προϋποθέσεις, να θεωρούμε φυσιολογική τη μετάβαση απ' τη διακριτή στη συνεχή κατάσταση. Τα σχήματα 14 και 15 είναι η γεωμετρική επιβεβαίωση των συμπερασμάτων μας στα παραδείγματα 1 και 4 της §3.4. Η συζήτηση ολοκληρώνεται με την ανάθεση στους σπουδαστές να διαπραγματευτούν το παράδειγμα της επόμενης παραγράφου:

3.8. *Παράδειγμα – ασταθής λύση ισορροπίας*

Έχει καταθέσει κάποιος ένα ποσό A_0 με συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο r. Αναλήψεις για έξοδα διαβίωσης γίνονται κάθε χρόνο με σταθερό ρυθμό k ευρώ το χρόνο, $k>0$.

i) Σχηματίστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών σύμφωνα με το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού, το οποίο να περιγράφει την κατάσταση αυτή και αποδείξτε πως η λύση του είναι η συνάρτηση

$$A(t) = (A_0 - \frac{k}{r}) \cdot e^{r \cdot t} + \frac{k}{r}.$$

ii) Θεωρώντας τα A_0 και r δεδομένα, υπολογίστε το ρυθμό k_0 των αναλήψεων, ώστε το A(t) να παραμένει σταθερό.

iii) Εάν το k υπερβαίνει το k_0 του ερωτήματος (ii), αποδείξτε ότι το A(t) συνεχώς μειώνεται και υπολογίστε το χρόνο t_0 που απαιτείται προκειμένου το A(t) να μηδενιστεί.

iv) Υπολογίστε το t_0 εάν r=1,4% και $k = 2 \cdot k_0$.

v) Τι συμβαίνει εάν το k_0 υπερβαίνει το k;

Οι ομάδες μία περίπου ώρα αργότερα παρέδωσαν τις απαντήσεις τους σε συμφωνία, μα πιο «λιτά» διατυπωμένες από την παρακάτω λύση που τους διανεμήθηκε φωτοτυπημένη:

<u>Λύση:</u> **i)** Κάνουμε εντελώς ανάλογες σκέψεις μ' εκείνες της παραγράφου 2.1. όπου αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $Π_2$.

Το ζητούμενο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι:

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A - k \quad \textbf{[9]}, \quad \text{με } k>0 \quad \text{και} \quad A(0)=A_0.$$

Δεδομένου ότι η σταθερά k>0 εκφράζει το ρυθμό των αναλήψεων είναι προφανές ότι πρέπει τώρα να δέχεται πρόσημο «-».

Αρχικά με $r \cdot A - k \neq 0$, αν στο δεύτερο μέλος βγάλουμε το r κοινό παράγοντα και χωρίσουμε τις μεταβλητές, η [9] παίρνει τη μορφή

$$\frac{dA}{A - \frac{k}{r}} = r \cdot dt$$

οπότε ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$\ln\left|A - \frac{k}{r}\right| = r \cdot t + c \Leftrightarrow \left|A - \frac{k}{r}\right| = e^{r \cdot t + c} \Leftrightarrow A - \frac{k}{r} = \pm e^c \cdot e^{r \cdot t} \overset{c_0 = \pm e^c, c \text{ σταθερά}}{\Leftrightarrow} A - \frac{k}{r} = c_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

και έτσι

$$A(t) = c_0 \cdot e^{r \cdot t} + \frac{k}{r}.$$

Από την αρχική συνθήκη

$$A(0)=A_0,$$

παίρνουμε

$$c_0 \cdot e^0 + \frac{k}{r} = A_0 \Leftrightarrow c_0 = A_0 - \frac{k}{r},$$

οπότε τελικά προκύπτει η λύση

$$A(t) = (A_0 - \frac{k}{r}) \cdot e^{r \cdot t} + \frac{k}{r} \quad \textbf{[10]}.$$

ii) Εάν το A(t) παραμένει σταθερό, συνεχώς ίσο δηλ. με την αρχική του τιμή A_0, τότε θα είναι

$$\frac{dA}{dt}=0 \overset{[9]}{\Leftrightarrow} r\cdot A(t)-k=0 \Leftrightarrow r\cdot A_0-k=0$$

δηλ. η τιμή του k, ώστε το A(t) να παραμένει σταθερό είναι

$$k_0=r\cdot A_0 \quad \textbf{[11]}.$$

Η σταθερή λύση $A_1(t)=A_0$ είναι η *λύση ισορροπίας* της δ.ε. [9] και αντιστοιχεί σε μηδενική μεταβολή του A(t) καθώς το t αυξάνεται. Έχουμε ξαναπεί ότι τη λύση ισορροπίας μπορούμε να βρούμε κατευθείαν, μηδενίζοντας το δεύτερο μέλος της [9] και δε χρειάζεται για τον εντοπισμό της να λύσουμε τη δ.ε.

iii) Παραγωγίζοντας τη [10], παίρνουμε

$$A'(t)=r\cdot(A_0-\frac{k}{r})\cdot e^{r\cdot t} \quad \textbf{[12]}.$$

κι εάν το k υπερβαίνει το k_0, έχουμε διαδοχικά

$$k>k_0 \Leftrightarrow \frac{k}{r}>\frac{k_0}{r} \overset{[11]}{\Leftrightarrow} \frac{k}{r}>A_0 \Leftrightarrow A_0-\frac{k}{r}<0 \Leftrightarrow r\cdot(A_0-\frac{k}{r})\cdot e^{r\cdot t}<0 \overset{[12]}{\Leftrightarrow} A'(t)<0$$

που σημαίνει πως η συνάρτηση A(t) είναι γνησίως φθίνουσα για $t\geq 0$, δηλ. το A(t) συνεχώς μειώνεται.

Επιπλέον, αναζητούμε το t έτσι, ώστε

$$A(t)=0 \overset{[10]}{\Leftrightarrow} e^{r\cdot t}=\frac{k/r}{k/r-A_0} \Leftrightarrow e^{r\cdot t}=\frac{k}{k-r\cdot A_0} \Leftrightarrow t=\frac{1}{r}\cdot\ln\frac{k}{k-k_0},$$

δηλ. το κεφάλαιο A(t) μηδενίζεται σε πεπερασμένο χρόνο

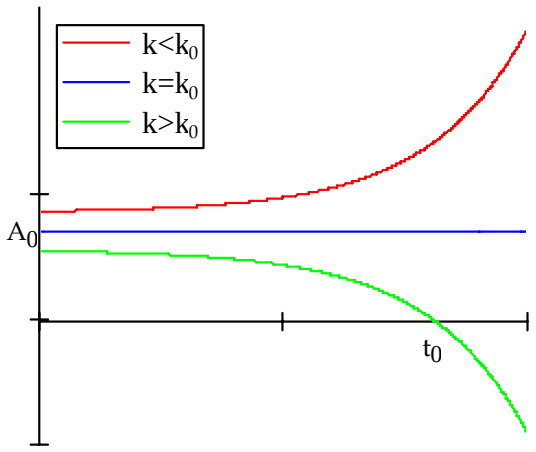
$$t_0=\frac{1}{r}\cdot\ln\frac{k}{k-k_0}.$$

iv) Με r=1,4% και $k=2\cdot k_0$, η τελευταία ισότητα δίνει

$$t_0=\frac{1}{0{,}014}\cdot\ln\frac{2\cdot k_0}{2\cdot k_0-k_0}=\frac{100}{1{,}4}\cdot\ln\frac{2\cdot k_0}{k_0}=\frac{50}{0{,}7}\cdot\ln 2=50 \text{ έτη}.$$

v) Εργαζόμενοι αναλόγως προς το ερώτημα (iii), συμπεραίνουμε πως η συνάρτηση A(t) είναι γνησίως αύξουσα για $t\geq 0$, δηλ. το A(t) συνεχώς αυξάνεται.

Ας πούμε όμως λίγα ακόμη παρατηρώντας το σχήμα: Η μπλέ χρώματος γραμμή είναι η γραφική παράσταση της λύσης ισορροπίας $A(t)=A_0$ που αντιστοιχεί στην τιμή k_0 του k. Μια τέτοια λύση ισορροπίας λέγεται *ασταθής* διότι αρχικά γειτονικές της λύσεις, τείνουν ν' απομακρυνθούν απ' αυτή καθώς το t αυξάνεται. Με άλλα λόγια, μικρές αλλαγές στην αρχική συνθήκη, έχουν ως αποτέλεσμα να προκύπτουν λύσεις που τα γραφήματά τους αποκλίνουν από τη λύση ισορροπίας καθώς $t\to+\infty$. Αυτό συμβαίνει στις περιπτώσεις $k>k_0$ (καμπύλη πράσινου χρώματος) και $k<k_0$ (καμπύλη κόκκινου χρώματος). Γενικά,



σχήμα16: Ασταθής λύση ισορροπίας

μια λύση ισορροπίας θα ονομάζεται ασταθής, εάν από μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες προκύπτει λύση της δ.ε. που απομακρύνεται από τη λύση ισορροπίας καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στο +∞.

Παρατήρηση: Η διαπραγμάτευση του παραδείγματος απαίτησε περίπου μια ώρα. Σχετικά με τα ερωτήματα (iii) και (v), τους ζητήθηκε να συμπεράνουν ότι:
Ξεκινώντας με μια α.σ. $c_0' < c_0 \Leftrightarrow k > k_0$ (κάποιος πρότεινε να πάρουμε $k=2\cdot k_0$) τότε παίρνουμε μια γνησίως φθίνουσα ολοκληρωτική καμπύλη που μηδενίζεται εντός πεπερασμένου χρόνου, ενώ ξεκινώντας με μια α.σ. $c_0'' > c_0 \Leftrightarrow k < k_0$ (ο ίδιος πρότεινε να πάρουμε $k=k_0/2$) τότε παίρνουμε μια γνησίως αύξουσα ολοκληρωτική καμπύλη.
Τους ζητήθηκε λοιπόν να σχεδιάσουν τις ολοκληρωτικές καμπύλες και τη λύση ισορροπίας στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό, προκειμένου να δοθεί αφορμή για την εισαγωγή της έννοιας της ασταθούς λύσης ισορροπίας. Κι εδώ μέσω της μεικτής προσέγγισης των **Blum** και **Niss** η εισαγωγή της νέας μαθηματικής έννοιας επιτυγχάνεται με χρήση των στοιχείων της μοντελοποίησης και γνωστών μαθηματικών εργαλείων. Η συγκεκριμένη έννοια, ανεξάρτητη πια, πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε περαιτέρω εφαρμογές.

3.9. *Δραστηριότητες*

1) Σύμφωνα με το ενεργητικό μιας επιχείρησης, η περιουσία της W(t), σε χιλιάδες €, αυξάνεται με συνεχή ρυθμό r=5% ανά έτος. Συγχρόνως , οι υποχρεώσεις της επιχείρησης για μισθοδοσία και άλλα έξοδα, εκπληρώνονται συνεχώς, με σταθερό ρυθμό k=200 χιλιάδες € ετησίως.
i) Γράψτε μια διαφορική εξίσωση που να διέπει την κατάσταση που περιγράψαμε.
ii) Βρείτε τη λύση ισορροπίας και λύστε τη διαφορική εξίσωση με την αρχική συνθήκη $W(0)=W_0$.
iii) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της λύσης για W_0=3000, 4000 και 5000 χιλιάδες € και σχολιάστε σε κάθε περίπτωση.

2) «Ελκυστικές» προσφορές τραπεζών. Έστω ότι μια τράπεζα προσφέρει το ελκυστικό επιτόκιο του r=10% με συνεχή ανατοκισμό, όμως ταυτόχρονα απαιτεί μια μικρή «αμοιβή υπηρεσιών» που ανέρχεται στο s=0,00005 του τετραγώνου του υπολοίπου A(t), του λογαριασμού. Έστω πως κάποιος καταθέτει ένα ποσό $A(0)=A_0$ άπαξ και στη συνέχεια δεν πραγματοποιούνται καταθέσεις ή αναλήψεις.
i) Βρείτε τη δ.ε. που περιγράφει το πρόβλημα, καθώς και τις λύσεις ισορροπίας.
ii) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των λύσεων που παίρνουμε με α.σ. $A_0 = 250$ και $A_0 = 3000$ και τις λύσεις ισορροπίας στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (Δε χρειάζεται να λύσετε τη δ.ε.)
iii) Παρατηρώντας το διάγραμμα αυτό σχολιάστε περί της ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας.
iv) Δείξτε ότι υπάρχει μια τιμή $\tilde{A}$ την οποία ποτέ δεν θα ξεπεράσει το αυξανόμενο κεφάλαιο A(t) εάν $A_0 < \tilde{A}$. Είναι συμφέρουσα μια αρχική κατάθεση $A_0 > \tilde{A}$;

Παρατηρήσεις επί των απαντήσεων των σπουδαστών

Α) Για τη δραστηριότητα 1.

i) Η δ.ε. που ενσωματώνει ό,τι περιγράφεται στο πρόβλημα είναι η

$$\frac{dW(t)}{dt} = 0{,}05 \cdot W(t) - 200\,, \quad t \geq 0.$$

ii) Θέτοντας

$$\frac{dW(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow 0{,}05 \cdot W(t) - 200 = 0$$

βρίσκουμε τη λύση ισορροπίας $\widetilde{W}(t) = 4000$ της δ.ε.

Με W≠4000, είναι:

$$\frac{dW}{dt} = 0{,}05 \cdot (W - 4000) \Rightarrow \frac{dW}{W - 4000} = 0{,}05dt\,.$$

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε:

$$\ln|W - 4000| = 0{,}05 \cdot t + c \Leftrightarrow |W - 4000| = e^{0{,}05 \cdot t + c} \Leftrightarrow W - 4000 = \pm e^{c} \cdot e^{0{,}05 \cdot t}$$

$$\overset{c_0 = \pm e^{c}}{\Leftrightarrow} \quad W(t) = 4000 + c_0 \cdot e^{0{,}05 \cdot t}, \quad t \geq 0.$$

Όμως

$$W(0) = W_0 \Leftrightarrow 4000 + c_0 = W_0 \Leftrightarrow c_0 = W_0 - 4000.$$

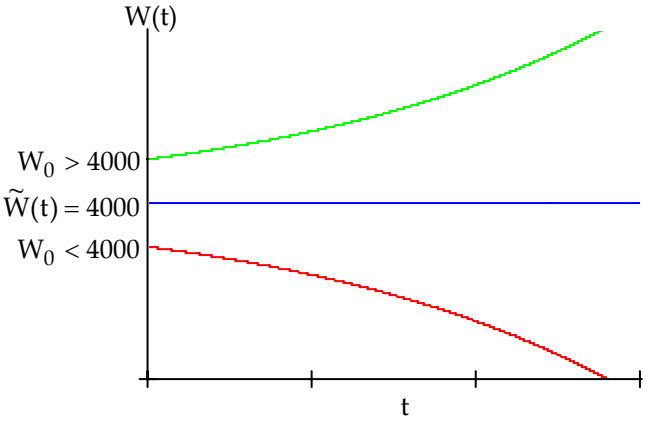
Τελικά

$$W(t) = 4000 + (W_0 - 4000) \cdot e^{0{,}05 \cdot t}, \quad t \geq 0.$$

iii) Εδώ οι σπουδαστές χρησιμοποιώντας το MathCAD σχεδίασαν τις γραφικές παραστάσεις του διπλανού σχήματος και από το σχήμα απεφάνθησαν ότι αυτή είναι ασταθής.

Η δική μας παρατήρηση ήταν ότι θα μπορούσαν να δώσουν μια κατά τι αναλυτικότερη και αυστηρότερη απάντηση, ως εξής:

Αν ξεκινήσουμε με μια α.σ. W_0 >4000 τότε, λόγω του μονοσήμαντου, η λύση W(t) θα παραμένει >4000 οπότε $\frac{dW}{dt} > 0$ και συνεπώς η W(t) είναι γν. αύξουσα. Δηλ. η W(t) αυξάνεται απομακρυνόμενη απ' τη λύση ισορροπίας καθώς το t αυξάνεται. Ομοίως οι τροχιές που ξεκινούν από α.σ. W_0 <4000, φθίνουν εγκαταλείποντας τη λύση ισορροπίας και σε πεπερασμένο χρόνο μηδενίζονται (σχήμα 17). Η $\widetilde{W}(t) = 4000$ λοιπόν είναι μια ασταθής λύση ισορροπίας, αφού αρχικά γειτονικές της λύσεις τείνουν ν' απομακρυνθούν απ' αυτήν καθώς t→+∞. □



σχήμα 17

Β) Για τη δραστηριότητα 2.

i) Σ' αυτό το πρώτο ερώτημα οι ομάδες απάντησαν σωστά και περίπου ως εξής:

Έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A - s \cdot A^2 \quad , A(0) = A_0.$$

Μετά την αντικατάσταση, η δ.ε. παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}1 \cdot A - 0{,}00005 \cdot A^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = -0{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot A \cdot (A - 2000).$$

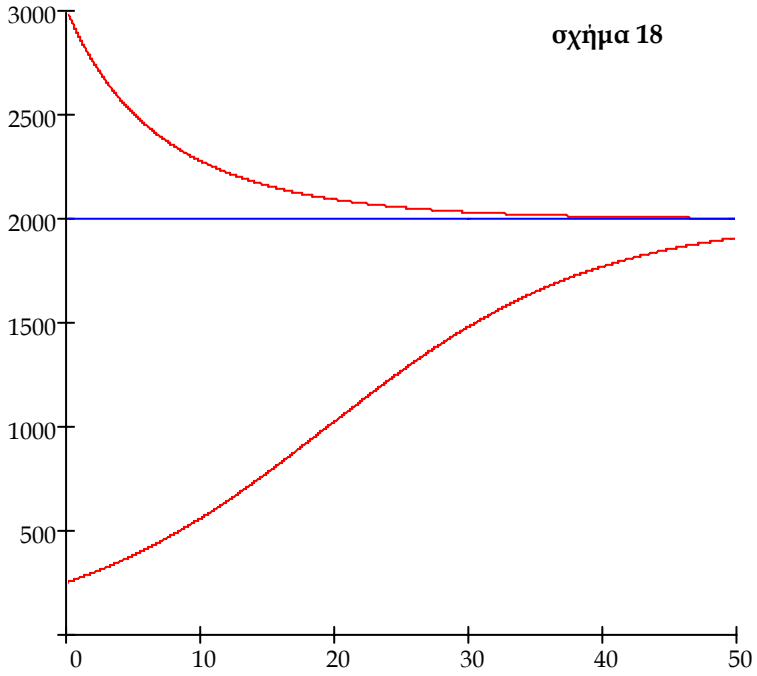
Λύνοντας την εξίσωση

$$\frac{dA}{dt} = 0 \Leftrightarrow \cdot A \cdot (A - 2000) = 0,$$

παίρνουμε τις λύσεις ισορροπίας

$\tilde{A}_1(t) = 0$ και $\tilde{A}_2(t) = \tilde{A} = 2000$.

Για τα ερωτήματα **(ii)** και **(iii)** οι ομάδες είχαν σχεδιάσει τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος απ' το οποίο πάλι συμπέραναν ότι η λύση ισορροπίας $\tilde{A}_1(t) = 0$ είναι ασταθής ενώ η λύση ισορροπίας $\tilde{A}_2(t) = 2000$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, ενώ για το ερώτημα **(iv)** αντιλήφθηκαν πως πρόκειται για την τιμή $\tilde{A} = 2000$. Μια κατάθεση $A_0 > \tilde{A}$ δεν είναι συμφέρουσα, αφού μακροπρόθεσμα το ποσό A_0 τείνει στην τιμή $\tilde{A} = 2000$. Μάλιστα, όπως κάποιος παρατήρησε, η γραφική παράσταση φθίνει απότομα στην πρώτη δεκαετία. □



σχήμα 18

Είναι εκπληκτικό το πόσο χρήσιμος είναι ο Η/Υ στην παρούσα κατάσταση. Δίχως οι σπουδαστές να έχουν λύσει τη δ.ε. έχουν μια αναπαράσταση των λύσεων, για διάφορες α.σ., την οποία χρησιμοποιούν για να εξάγουν συμπεράσματα. Το «εκπληκτικό» συνίσταται στο πόσο άμεσα και εύκολα επιτυγχάνεται η εξαγωγή των συμπερασμάτων και άρα η επιτυχής απάντηση στα ερωτήματα που τους θέσαμε, με μόνο την παρατήρηση της γεωμετρικής αναπαράστασης των λύσεων. Ο **Howson**[42] επισημαίνει ότι ένα από τα μέσα που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί προκειμένου ν' αποδώσουν νόημα σε μαθηματικές έννοιες είναι η κατασκευή και παρουσίαση γεωμετρικών μοντέλων – αναπαραστάσεων. Ως παράδειγμα από την Ιστορία των Μαθηματικών, ο Howson αναφέρει τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών που επέτυχε ο Gauss, καταφέρνοντας να μοντελοποιήσει έτσι τόσο τα στοιχεία του συνόλου των μιγαδικών αριθμών, όσο και τις πράξεις μεταξύ τους, δίνοντας νόημα σ' εκείνο που προηγουμένως ο Napier είχε αποκαλέσει «φάντασμα». Σημειωτέον ότι στην περίπτωση που εξέτασαν οι σπουδαστές, η «απόδοση νοήματος» στην οποία αναφέρεται ο Howson εμφανίζεται όχι ως να υπαγορεύεται από εσωτερικές ανάγκες των Μαθηματικών αλλά ως να κινητοποιείται από πραγματικές καταστάσεις. Συμπληρωματικά, ο **Kaput**[45],[46] εκφράζει την άποψη πως τα Μαθηματικά συνδέονται κατά κάποιο τρόπο, συνεχώς με τις αναπαραστάσεις και ότι πολλές δυσκολίες των μαθητών οφείλονται στο «σπάσιμο» αυτής της συνέχειας, ενώ κατά τους **Dyfour-Janvier, Bednarz & Belanger**[27] οι αναπαραστάσεις που για τους μαθηματικούς αποτελούν εργαλεία με τα οποία εκφράζονται συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, για τους σπουδαστές αναμένεται ν' αποτελέσουν εργαλεία αντιμετώπισης μαθηματικών προβλημάτων, κάτι που κατά τη γνώμη μας εδώ, επιβεβαιώνεται.

4. Οι πληθυσμιακές μεταβολές

4.1. *Ο νόμος του Malthus*

Ως γνωστόν, η απογραφή είναι μία από τις μεθόδους συλλογής στατιστικών στοιχείων. Η κατάσταση του πληθυσμού σε κάθε χώρα, διαπιστώνεται με δεκαετείς γενικές απογραφές που διεξάγονται κατά τα έτη που τελειώνουν σε 0 ή 1. Η πρώτη απογραφή πληθυσμού στις Η.Π.Α. έγινε το έτος 1790 και στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται ο πληθυσμός τους σε εκατομμύρια, όπως αυτός προκύπτει από τις πρώτες επτά απογραφές:

Έτος	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
πληθυσμός	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1	23,2

πίνακας 6

Αν θέλουμε μια εκτίμηση για το σχετικό ρυθμό αύξησης του πληθυσμού π.χ. κατά το έτος 1800, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\frac{dP/dt}{P} \cong \frac{1}{P}\cdot\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\right)^{(U)}$$

$$= \frac{1}{\text{πληθυσμός το 1800}}\cdot\frac{(\text{πληθυσμός το 1810})-(\text{πληθυσμός το 1800})}{10}$$

$$= \frac{1}{5{,}3}\cdot\frac{7{,}2-5{,}3}{10} = 0{,}0358 = 3{,}58\%$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, υπολογίζουμε το σχετικό ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των Η.Π.Α. κατά την πεντηκονταετία 1790-1840:

Έτος	1790	1800	1810	1820	1830	1840
$\frac{dP/dt}{P}$	3,59%	3,58%	3,33%	3,44%	3,26%	3,57%

πίνακας 7

Ο σχετικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού λοιπόν είναι περίπου σταθερός, μπορούμε δηλ. να γράψουμε

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = k$$

ή

$$\frac{dP}{dt} = k\cdot P \quad \textbf{[13]},$$

με k θετική σταθερά.

Κατά την [13] ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος του ίδιου του πληθυσμού. Βεβαίως, αν k<0 ο πληθυσμός μειώνεται.

Ο βρετανός οικονομολόγος T. Malthus (1766-1834) παρατήρησε πρώτος και δημοσίευσε, ότι πολλοί βιολογικοί πληθυσμοί αυξάνονται κατ' αυτόν τον τρόπο, γι αυτό και η δ.ε. [13] είναι γνωστή ως νόμος του Malthus και η λύση της, όπως ακριβώς

με το πρόβλημα Π_1 που αφορούσε τις τραπεζικές καταθέσεις, είναι η εκθετική συνάρτηση

$$P(t) = P_0 \cdot e^{k \cdot t} \quad \textbf{[14]},$$

όπου P_0 ο αρχικός πληθυσμός.

Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε πως ο πληθυσμός αυξάνεται ετησίως κατά 3,46% που είναι ο μέσος όρος των τιμών της δεύτερης γραμμής του πίνακα 7. Συνεπώς εντός μιας δεκαετίας αυξάνεται κατά 34,6%. Έτσι,

$$\begin{aligned} & P(10) = P(0) + 0{,}346 \cdot P(0) \\ \Leftrightarrow\ & P(10) = 1{,}346 \cdot P_0 \\ \Leftrightarrow\ & P_0 \cdot e^{10 \cdot k} = 1{,}346 \cdot P_0 \\ \Leftrightarrow\ & 10 \cdot k = \ln 1{,}346 \\ \Leftrightarrow\ & k = 0{,}0297 \end{aligned}$$

Εάν ως P_0 πάρουμε τον πληθυσμό του 1790 που είναι 3,9 εκατομμύρια, τότε η [14] δίνει

$$P(t) = 3{,}9 \cdot e^{0{,}0297 \cdot t} \quad \textbf{[15]}, \quad t \geq 0 .$$

Θέτοντας στην τελευταία τις τιμές 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60 στη θέση του t, παίρνουμε τον εκτιμώμενο πληθυσμό για τα έτη 1790 έως 1850:

Έτος	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
εκτιμώμενος πληθυσμός	3,9	5,2	7,0	9,5	12,7	17,2	23,2

πίνακας 8

Ελέγχοντας το μοντέλο που κατασκευάσαμε, παρατηρούμε πως οι τιμές της δεύτερης γραμμής του πίνακα 8 είναι πολύ κοντά στις αντίστοιχες τιμές του πίνακα 6, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα πως μάλλον πρόκειται για ένα πολύ ικανοποιητικό μοντέλο. Όμως το συγκεκριμένο μοντέλο προβλέπει για το έτος 2061 ένα τόσο μεγάλο πληθυσμό στη γη ώστε, δεδομένης της επιφάνειάς της καλλιεργήσιμης γης (το 70% της γήινης επιφάνειας καλύπτεται από θάλασσα και μόνο το 11% της ξηράς είναι καλλιεργήσιμο) θα αντιστοιχούν τότε στον κάθε κάτοικο αυτού του πλανήτη μόλις 73m². Κάτι τέτοιο φαίνεται παράδοξο αν λάβουμε υπόψη πως σήμερα υπολογίζεται ότι στον καθένα μας αντιστοιχούν περίπου 4 καλλιεργήσιμα στρέμματα. Κάποιοι συγγραφείς δε, παρατηρούν πως η εφαρμογή του εκθετικού μοντέλου σε κουνέλια που τεκνοποιούν διπλασιάζοντας τον πληθυσμό τους σε κάθε γενιά, συνεπάγεται πως το αρχικό ζευγάρι στην Αυστραλία θα είχε εξαπλωθεί τόσο, ώστε σε 120 γενιές μόνο, θα κάλυπτε ολόκληρο το σύμπαν.

Για μικρά χρονικά διαστήματα λοιπόν, ναι πρόκειται για ένα πολύ ικανοποιητικό μοντέλο. Για μεγάλες χρονικές περιόδους όμως, ο νόμος του Malthus αποτυγχάνει, αφού δε συμπεριλαμβάνει ανταγωνισμούς και διάφορα κοινωνικά φαινόμενα που επιβραδύνουν το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού σταματώντας την ανεμπόδιστη εκθετική αύξηση. Βλέπετε, μπορεί οι καταθέσεις σας να αυξάνονται εκθετικά αλλά οι άνθρωποι δεν είναι καταθέσεις. Εξάλλου, ο μελλοντικός πληθυσμός της γης μπορεί να επηρεαστεί από διαδικασίες λήψης αποφάσεων, πολιτικές και άλλους παράγοντες στους οποίους εμπλέκεται η ελεύθερη βούληση. Βέβαια το αν είναι πράγματι ελεύθερη και το αν πρόκειται για τη βούληση πολλών ή λίγων και ποιών, είναι θέμα για μια άλλη συζήτηση. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του πληθυσμού των Η.Π.Α. με το οποίο ξεκινήσαμε, αν επιθυμούμε να καταλήξουμε σ' ένα μοντέλο σύμφωνα με

το οποίο ο πληθυσμός αυτός θα σταθεροποιείται μελλοντικά σε κάποια, ενδεχομένως προαποφασισμένη, τιμή C θα πρέπει κατά το μοντέλο αυτό να μειώνεται σταδιακά ο τρέχων ρυθμός αύξησης. Από μαθηματική άποψη, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τη σταθερά k=0,297 με μια συνάρτηση k(t) που θα είναι θετική, θα ικανοποιεί την k(0)=0,297 και θα φθίνει κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτευχθεί η σταθεροποίηση του P(t) στην προαναφερθείσα προαποφασισμένη τιμή C. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να επιλέξουμε μια συνάρτηση της μορφής $k(t) = \frac{0,297}{1 + a \cdot t^b}$ με τους a, b να 'χουν τιμές ανάλογα με το πόσο γρήγορα θέλουμε να φθίνει η k(t). Έτσι θα έχουμε ν' αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, σαν το

$$\frac{dP}{dt} = k(t) \cdot P(t), \quad P(0)=3,9$$

απαιτώντας να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες

$$k(0) \cong 0,3 \quad \text{και} \quad \lim_{t \to +\infty} P(t) = C .$$

Βέβαια, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά δεδομένου ότι θα πρέπει να κάνουμε ελέγχους σχετικούς με τις τιμές των a, b αλλά και γενικότερα με τη μορφή της k(t). Εξάλλου, εκτός του ότι μπορεί να προταθεί μια διαφορετική μορφή για την k(t), η υπόθεση του φθίνοντος ρυθμού αύξησης όπως την περιγράψαμε θα μπορούσε ν' αντικατασταθεί π.χ. με την υπόθεση ότι η ανάπτυξη ενός πληθυσμού αποσβεννύεται μέσω μιας συνάρτησης του P, μιας k(P) η οποία θα είναι θετική, θα προσεγγίζει την τιμή $k \cong 0,03$ για μικρές τιμές του P, θα φθίνει καθώς το P αυξάνεται και θα είναι αρνητική για μεγάλα P έτσι, ώστε να εξασφαλίζεται τότε ένας αρνητικός ρυθμός μεταβολής $\frac{dP}{dt}$. Η πιο απλή συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες είναι η $k(P)=0,03- b \cdot P$, με b>0. Το μοντέλο μας τότε για την εξέλιξη ενός πληθυσμού θα συνοψίζεται σε μια δ.ε. της μορφής

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot (0,03 - b \cdot P) .$$

Από μια άποψη λοιπόν είμαστε αρκετά τυχεροί διότι μας απαλλάσσει από την αναζήτηση και τους ελέγχους το γεγονός ότι μια τέτοια οπτική εμπεριέχει το μοντέλο του Verhulst που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο και που κατέχει σπουδαιότατη θέση στη θεωρητική δυναμική των πληθυσμών.

4.2. *Το μοντέλο του Verhulst*

Ως γνωστόν, προσεγγίζουμε το ρυθμό αύξησης $\frac{dP}{dt}$ του πληθυσμού με το μέσο ρυθμό αύξησης $\frac{\Delta P}{\Delta t}$. Έτσι, για το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού κατά το 1800, χρησιμοποιήσαμε πριν την άνω-εκτίμηση:

$$\frac{dP}{dt}\ \text{κατά το 1800} \cong \left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\ \text{κατά το 1800}\right)^{(U)}$$
$$= \frac{(\text{πληθυσμός κατά το 1810}) - (\text{πληθυσμός κατά το 1800})}{10}.$$

Θα μπορούσαμε να έχουμε εκτιμήσει το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού κατά το 1800 με την κάτω-εκτίμηση

$$\frac{dP}{dt}\ \text{κατά το 1800} \cong \left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\ \text{κατά το 1800}\right)_{(L)}$$
$$= \frac{(\text{πληθυσμός κατά το 1800}) - (\text{πληθυσμός κατά το 1790})}{10}.$$

ή ακόμη καλύτερα, παίρνοντας το μέσο όρο των δύο προηγούμενων εκτιμήσεων, δηλ. ως εξής:

$$\frac{dP}{dt}\ \text{κατά το 1800} \cong \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\ \text{κατά το 1800}\right)^{(U)} + \left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\ \text{κατά το 1800}\right)_{(L)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(\text{πληθ. το 1810}) - (\text{πληθ. το 1800})}{10} + \frac{(\text{πληθ. το 1800}) - (\text{πληθ. το 1790})}{10}\right)$$
$$= \frac{(\text{πληθ. κατά το 1810}) - (\text{πληθ. κατά το 1790})}{20}$$
$$= \frac{7{,}2 - 3{,}9}{20} = 0{,}165.$$

Συνεπώς, ο σχετικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των Η.Π.Α. κατά το έτος 1800 είναι

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} \cong \frac{1}{5{,}3}\cdot 0{,}165 = 0{,}0311.$$

Εργαζόμενοι κατ' αυτόν τον τρόπο κι επαναλαμβάνοντας παρόμοιους υπολογισμούς, σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα:

έτος	**πληθυσμός P**	$\frac{dP/dt}{P}$
1790	3,9	
1800	5,3	0,0311
1810	7,2	0,0299
1820	9,6	0,0297
1830	12,9	0,0291
1840	17,1	0,0301
1850	23,2	0,0308
1860	31,4	0,0245
1870	38,6	0,0244
1880	50,2	0,0242
1890	62,9	0,0205
1900	76	0,0191
1910	92	0,0161
1920	105,7	0,0146
1930	122,8	0,0106
1940	131,7	

πίνακας 9

Στον πίνακα αυτόν, παρατηρούμε ότι αυξανομένων των τιμών του πληθυσμού P, οι τιμές του σχετικού ρυθμού αύξησης $\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt}$ φθίνουν, κάτι που ήταν αναμενόμενο ως αποτέλεσμα του υπερπληθυσμού και των ανταγωνισμών.

Περαιτέρω, θεωρούμε τη μεταβλητή X=P ως ανεξάρτητη και την Y=$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt}$ ως εξαρτημένη και υπολογίζουμε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης

r(X,Y)=-0,9851.

Οι μεταβλητές X, Y λοιπόν είναι αρνητικά συσχετισμένες και η απόλυτη τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης είναι περίπου ίση με 1, που σημαίνει πως πρόκειται για σχεδόν τέλεια συσχέτιση. Μ' άλλα λόγια, είναι ιδιαιτέρως ικανοποιητική η προσαρμογή μιας ευθείας στο διάγραμμα διασποράς της Y ως προς την X.

Αναζητώντας μια τέτοια ευθεία, π.χ. με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, καταλήγουμε στην

Y=0,0318-0,00017·X .

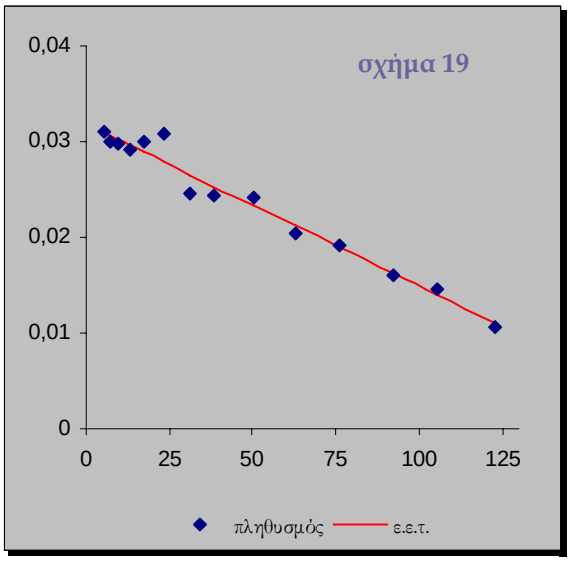
η οποία προσαρμόζεται στο διάγραμμα διασποράς κατά τον τρόπο που δείχνει το σχήμα 19.

Η παραπάνω εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων (ε.ε.τ.), γράφεται στη μορφή:

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = 0{,}0318 - 0{,}00017\cdot P$$

ή

$$\frac{dP}{dt} = P\cdot(0{,}0318 - 0{,}00017\cdot P) \quad \textbf{[16]}$$



Η [28] είναι μια δ.ε. της μορφής

$$\frac{dP}{dt} = P\cdot(a - b\cdot P) \qquad \textbf{[17]}$$

και αν $C = \frac{a}{b}$, η [29] γράφεται:

$$\frac{dP}{dt} = b\cdot P\cdot(C - P) \quad \textbf{[18]}, \qquad b, C>0$$

Ο Βέλγος επιστήμονας P. Verhulst (1804-1849) εισήγαγε τη δ.ε. [18] ως μαθηματικό μοντέλο για την πληθυσμιακή αύξηση το 1845 και χρησιμοποίησε τον όρο «λογιστική αύξηση». Αργότερα, περί το 1930 με 1935, το μοντέλο του Verhulst επαληθεύτηκε πειραματικά για κάποιους πληθυσμούς εντόμων.

4.3. *Η Λογιστική Αύξηση*

Μηδενίζοντας το δεύτερο μέλος της [18], βρίσκουμε δύο λύσεις ισορροπίας:

$$P_1(t)=0 \quad \text{και} \quad P_2(t)=C.$$

Με $P(t) \neq 0$ και $P(t) \neq C$, χωρίζουμε τις μεταβλητές και έχουμε:

$$\frac{dP}{P\cdot(P-C)} = -bdt$$

οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int \frac{dP}{P\cdot(P-C)} = -b\cdot t + c \quad \textbf{[19]}, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Για το πρώτο μέλος της [19], αναζητούμε A, B τέτοιους, ώστε

$$\frac{1}{P\cdot(P-C)} = \frac{A}{P-C} + \frac{B}{P}$$

και μετά από λίγους υπολογισμούς, προκύπτει A=1/C καιB=-1/C.
Έτσι απ' τη [19] παίρνουμε:

$$\int\left(\frac{1/C}{P-C} - \frac{1/C}{P}\right)dP = -b\cdot t + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C}\cdot(\ln|P-C| - \ln|P|) = -b\cdot t + c$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{P-C}{P}\right| = -C\cdot b\cdot t + C\cdot c$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{P-C}{P}\right| = e^{-C\cdot b\cdot t}\cdot e^{C\cdot c}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{C}{P} = \pm e^{C\cdot c}\cdot e^{-C\cdot b\cdot t}$$

$$\overset{c_0=\pm e^{C\cdot c}}{\Leftrightarrow} \frac{C}{P} = 1 - c_0\cdot e^{-C\cdot b\cdot t}$$

$$\Leftrightarrow P(t) = \frac{C}{1 - c_0\cdot e^{-C\cdot b\cdot t}}$$

Εάν P_0 ο αρχικός πληθυσμός, έχουμε

$$P(0)=P_0, \quad 0<P_0<C.$$

Τότε

$$\frac{C}{1-c_0} = P_0$$

$$\Leftrightarrow c_0 = -\frac{C-P_0}{P_0}$$

Τελικά

$$P(t) = \frac{C}{1 + \frac{C-P_0}{P_0}\cdot e^{-C\cdot b\cdot t}} \quad , \quad t \geq 0.$$

Θέτοντας $A_0 = \frac{C-P_0}{P_0} > 0$, η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$P(t) = \frac{C}{1 + A_0\cdot e^{-a\cdot t}} \quad \textbf{[20]}, \qquad t \geq 0.$$

Λίγη Ανάλυση θα μας βοηθήσει να πάρουμε στοιχεία για τη μορφή της γραφικής παράστασης.
Από την [18] έχουμε

$$P'(t) = b \cdot P(t) \cdot [C - P(t)] > 0\,, \quad \forall t \geq 0$$

οπότε η P(t) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Ακόμη

$$\begin{aligned} P''(t) &= b \cdot P'(t) \cdot [C - P(t)] + b \cdot P(t) \cdot [-P'(t)] \\ &= b \cdot P'(t) \cdot [C - 2 \cdot P(t)] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & P''(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & C - 2 \cdot P(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P(t) = \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{C}{1 + A_0 \cdot e^{-a \cdot t}} = \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow\ & e^{a \cdot t} = A_0 \\ \Leftrightarrow\ & t = \frac{\ln A_0}{a} \end{aligned}$$

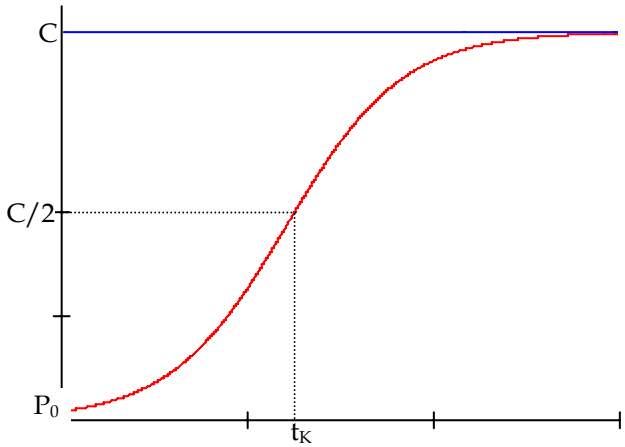
Έχουμε έτσι για την P(t), τον εξής πίνακα μεταβολών:

t	0	$\frac{\ln A_0}{a}$	+4
$P'(t)$	+		+
$P''(t)$	+		-
P(t)	↗		↗

Αν στα προηγούμενα προσθέσουμε και το ότι

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{C}{1 + A_0 \cdot e^{-a \cdot t}} = C\,,$$

παίρνουμε μια γραφική παράσταση σαν αυτή του διπλανού σχήματος που είναι γνωστή ως *λογιστική καμπύλη* (οπότε μιλάμε για *λογιστική αύξηση*). Εύκολα μπορεί κανείς να διακρίνει πως η λύση ισορροπίας $P_2(t)=C$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής ενώ η λύση ισορροπίας $P_1(t)=0$ είναι ασταθής διότι απωθεί τις ολοκληρωτικές καμπύλες.



σχήμα 20: λογιστική αύξηση

Είναι φανερό ότι η λογιστική καμπύλη παρουσιάζει καμπή στη θέση

$$t_K = \frac{\ln A_0}{a}$$

με

$$P(t_K) = \frac{C}{1 + A_0 \cdot e^{-a \cdot \frac{\ln A_0}{a}}} = \frac{C}{1 + A_0 \cdot e^{-\ln A_0}} = \frac{C}{1 + A_0 \cdot (e^{\ln A_0})^{-1}} = \frac{C}{1 + A_0 \cdot A_0^{-1}} = \frac{C}{2}\,. \square$$

Είδαμε πως η λύση της [18] είναι η συνάρτηση

$$P(t)=\frac{C}{1+A\cdot e^{-a\cdot t}} \quad \textbf{[20]}, \quad t\geq 0$$

όπου $A=\frac{C-P_0}{P_0}$ και $P_0=P(0)$ ο αρχικός πληθυσμός.

Για την περίπτωση του πληθυσμού των Η.Π.Α. στην [31], έχουμε:
a=0,0318
b=0,00017
C= a/b =187,05882
P_0=3,9
A=46,963801
και άρα η λύση της [28] είναι η συνάρτηση

$$P(t)=\frac{187{,}05882}{1+46{,}963801\cdot e^{-0{,}0318\cdot t}} \quad \textbf{[21]}, \quad t\geq 0\,.$$

Στον πίνακα 10, φαίνεται σαφώς ότι το σφάλμα κατά την εκτίμηση μέσω της εκθετικής συνάρτησης (με βάση δηλ. την [15]), μακροπρόθεσμα ολοένα και μεγαλώνει κατ' απόλυτη τιμή και η [15] τότε δίνει πολύ κακές εκτιμήσεις για τον πληθυσμό των Η.Π.Α. Αντίθετα, η εκτίμηση με τη λογιστική συνάρτηση (μέσω της [21]) είναι πάντα ικανοποιητικά κοντά στην πραγματική τιμή του πληθυσμού.

έτος	**t**	**πληθυ-σμός P**	**εκτίμηση του πληθυσμού από την [15]**	**σφάλμα κατά την εκτίμηση από την [15]**	**εκτίμηση του πληθυσμού από την [21]**	**σφάλμα κατά την εκτίμηση από την [21]**
1790	0	3,9	3,9	0	3,9	0
1800	10	5,3	5,2487	-0,0513	5,3186	0,0186
1810	20	7,2	7,0638	-0,1362	7,2327	0,0327
1820	30	9,6	9,5065	-0,0935	9,7986	0,1986
1830	40	12,9	12,794	-0,106	13,208	0,308
1840	50	17,1	17,2184	0,1184	17,6852	0,5852
1850	60	23,2	23,1727	-0,0273	23,4753	0,2753
1860	70	31,4	31,1862	-0,2138	30,816	-0,584
1870	80	38,6	41,9709	3,3709	39,8924	1,2924
1880	90	50,2	56,4851	6,2851	50,7735	0,5735
1890	100	62,9	76,0185	13,1185	63,3449	0,4449
1900	110	76	102,3068	26,3068	77,2644	1,2644
1910	120	92	137,6861	45,6861	91,9687	-0,0313
1920	130	105,7	185,3001	79,6001	106,7506	1,0506
1930	140	122,8	249,3797	126,5797	120,8879	-1,9121
1940	150	131,7	335,619	203,919	133,7787	2,0787

πίνακας 10

4.4. Σχόλια

1. Όπως δείξαμε στατιστικά στην παράγραφο 4.2 (σελ. 71), κατά το λογιστικό μοντέλο, ο σχετικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι μια γραμμικά φθίνουσα συνάρτηση του ίδιου του πληθυσμού:

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = a - b\cdot P\,.$$

Μάλιστα είχαμε a=0,0318 και b=0,00017.
Για μικρές τιμές του P, έχουμε την προσέγγιση

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} \cong a\,.$$

Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι μια εκθετική συνάρτηση, δηλ. για μικρά P η λογιστική αύξηση είναι κατά προσέγγιση εκθετική (σχήμα 21).
Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο νόμος του Malthus περιγράφει αρκετά καλά την πληθυσμιακή εξέλιξη κατά την περίοδο 1790-1860 οπότε ο πληθυσμός των Η.Π.Α. ήταν σχετικά μικρός (βλ. τον πίνακα 10). Γενικά, ο νόμος του Malthus δουλεύει αρκετά καλά για πολύ μικρό ή αραιό πληθυσμό, όταν υπάρχει αρκετή τροφή και πολύς κενός χώρος για την εξάπλωσή του.

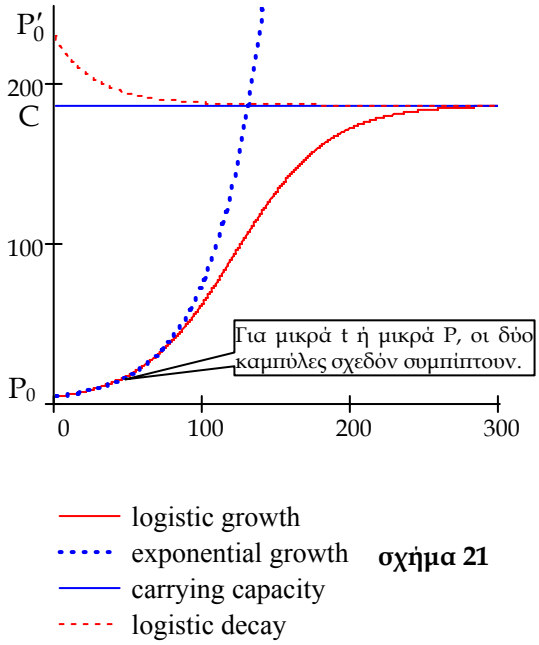
Επίσης για μικρές τιμές του t, η λογιστική καμπύλη μοιάζει, όσον αφορά το σχήμα, με την καμπύλη της εκθετικής αύξησης (σχ. 21). Αυτό ισχυροποιεί την υπόθεση ότι η εκθετική αύξηση αποτελεί καλό μοντέλο για την περιγραφή των πληθυσμών σε βραχείες χρονικές περιόδους. Μακροπρόθεσμα το εκθετικό μοντέλο αποτυγχάνει μιας και κατ' αυτό ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού συνεχώς αυξάνεται. Κατά τη λογιστική αύξηση όμως η οποία περιγράφει καλύτερα την πραγματικότητα, ο ρυθμός αύξησης μειώνεται όταν ο πληθυσμός αρχίζει π.χ. να υποφέρει από έλλειψη τροφής και ξεκινούν οι ανταγωνισμοί. Τελικά ο ρυθμός αύξησης (η κλίση της λογιστικής καμπύλης) τείνει να μηδενιστεί καθώς ο πληθυσμός φτάνει τη μέγιστη τιμή που το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον του επιτρέπει.

Αναλυτικότερα: Κατά το λογιστικό μοντέλο, ο σχετικός ρυθμός αύξησης $\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt}$ του πληθυσμού φθίνει προς το να μηδενιστεί, όπως πολύ καθαρά φαίνεται στο σχήμα 19. Θα γίνει μηδέν όταν

$$a - b\cdot P = 0$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a}{b}.$$

Η οριακή τιμή $C = \frac{a}{b}$ του πληθυσμού είναι προφανώς η ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας της [17].
Σύμφωνα με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων, δύο διαφορετικές λύσεις δεν διέρχονται ποτέ από το ίδιο σημείο. Έτσι, ενώ οι λύσεις πλησιάζουν τη λύση ισορροπίας y=C καθώς $t \to +\infty$, δεν την τέμνουν ποτέ. Η



σχήμα 21

τιμή $C=\frac{a}{b}$ αποτελεί άνω φράγμα για οποιαδήποτε λύση P(t) που εκφράζει αυξανόμενο πληθυσμό. Τη στάθμη y=C, που λέγεται *περιβαλλοντική χωρητικότητα* (ή *φέρουσα χωρητικότητα-carrying capacity*), την προσεγγίζουν μα ποτέ δεν την ξεπερνούν αυξανόμενοι πληθυσμοί που το σημείο εκκίνησής τους είναι μια αρχική συνθήκη $P_0<C$ (που βρίσκεται δηλ. χαμηλότερα απ' το C). Η τιμή C είναι η ανώτερη που το περιβάλλον επιτρέπει στο πληθυσμό να πλησιάσει (σχ. 20). Μάλιστα, πληθυσμοί με σημείο εκκίνησης μια αρχική συνθήκη $P_0'>C$, φθίνουν (διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη στο σχ.21) πλησιάζοντας ασυμπτωτικά την περιβαλλοντική χωρητικότητα C.

Αφού $C=\frac{a}{b}$, μπορούμε να γράψουμε τη δ.ε. [18] στη μορφή

$$\frac{dP}{dt}=a\cdot P\cdot\frac{C-P}{C} \quad \textbf{[22]}.$$

Το κλάσμα $\frac{C-P}{C}$ που κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1, αντικατοπτρίζει την περιοριστική δράση του περιβάλλοντος επί του πληθυσμού και είναι κοντά στο 1 όταν το P είναι κοντά στο 0. Αν αντικαταστήσουμε το κλάσμα αυτό με τη σταθερά 1, τότε η [22] παίρνει τη μορφή

$$\frac{dP}{dt}=a\cdot P$$

της δ.ε. για τη συνήθη εκθετική αύξηση. Για το λόγο αυτό, η παράμετρος a λέγεται *ενδογενής ρυθμός αύξησης* (*intrinsic rate of growth*) του πληθυσμού και εκφράζει το πώς θ' αυξανόταν ο πληθυσμός εάν το περιβάλλον επέτρεπε, άνευ περιορισμών, την εκθετική αύξηση.

2. Στη δ.ε. [13] η σταθερά k εξαρτάται από τη φύση του πληθυσμού που εξετάζουμε. Στη συζήτηση που είχαμε κλείνοντας την παράγραφο 3.1. μιλήσαμε για την αντικατάστασή της από μια συνάρτηση k(t) προκειμένου η δ.ε. $\frac{dP}{dt}=k(t)\cdot P$ που προκύπτει να συμπεριλαμβάνει τη σταδιακή μείωση του ρυθμού αύξησης του εν λόγω πληθυσμού. Ανεξάρτητα όμως από αυτή την προοπτική, χωρίς εμείς να επιθυμούμε να «διορθώσουμε» το νόμο του Malthus, είναι δυνατόν ορισμένες π.χ. περιβαλλοντολογικές ή κοινωνικές συνθήκες να επιδράσουν επί του συντελεστή k και να τον καταστήσουν συνάρτηση του χρόνου με αποτέλεσμα μια γενίκευση του νόμου. Κατά το ίδιο σκεπτικό, μια παρόμοια γενίκευση της μορφής $\frac{dP}{dt}=b(t)\cdot P\cdot[C-P]$, μπορεί να προκύψει για το νόμο του Verhulst. Εφόσον δε ο άνθρωπος είναι ον που μετασχηματίζει τη φύση και δεδομένης της προόδου της επιστήμης, είναι δυνατόν, με δική μας επέμβαση να αυξομειώνεται η περιβαλλοντική χωρητικότητα για κάποιους πληθυσμούς που αναπτύσσονται σε ελεγχόμενα περιβάλλοντα κι έτσι να έχουμε μια γενίκευση της [18] στη μορφή $\frac{dP}{dt}=b(t)\cdot P\cdot[C(t)-P]$ που προκύπτει αν θεωρήσουμε και τη σταθερά C ως συνάρτηση του χρόνου. Πέρα από τις επισημάνσεις αυτές, οι γεννήσεις και οι θάνατοι είναι γεγονότα που συμβαίνουν σε διακριτό χρόνο ή δε συμβαίνουν. Στην πράξη δεν είναι δυνατό να έχουμε π.χ. μισή γέννηση. Έτσι, η συνάρτηση P(t) που εκφράζει τον πληθυσμό των ανθρώπων, ζώων ή βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή t είναι αναγκαστικά είτε ακολουθία, είτε βαθμωτή συνάρτηση με θετικές

ακέραιες τιμές. Κατά συνέπεια, ο ρυθμός μεταβολής $\frac{dP}{dt}$ του πληθυσμού είτε είναι μηδέν στην περίπτωση που ο χρόνος μεταβάλλεται σ' ένα διάστημα όπου η P(t) είναι σταθερή, είτε δεν υφίσταται στην περίπτωση που η P(t) μεταπηδά από τη μία ακέραια τιμή στην άλλη. Συνεπώς η κύρια υπόθεση που κάνουμε χάριν της μαθηματικοποίησης είναι ότι η P(t) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη για κάθε t≥0.

3. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης [18] είναι η παραβολή

$$f(P) = b \cdot P \cdot (M - P) = -b \cdot P^2 + b \cdot C \cdot P$$

του σχήματος 22 που προφανώς τέμνει τον οριζόντιο άξονα στις θέσεις P=0 και P=C και έχει μέγιστο για $P = -\frac{b \cdot C}{2 \cdot (-b)} = \frac{C}{2}$.

Η [18] γράφεται

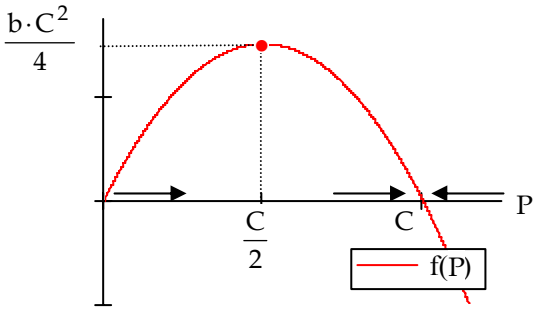
$$\frac{dP}{dt} = f(P) \quad \textbf{[23]}$$

απ' όπου

$$\frac{d^2P}{dt^2} = f'(P) \cdot \frac{dP}{dt}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d^2P}{dt^2} = f'(P) \cdot f(P) \quad \textbf{[24]}$$



σχήμα 22
$f(P) = b \cdot P \cdot (C - P)$

Παρατηρούμε ότι:

I) Για 0<P<C η f(P), άρα και η $\frac{dP}{dt}$, είναι θετική που σημαίνει ότι η P(t) είναι αύξουσα, κάτι που δηλώνεται με το δεξιάς φοράς βέλος. Το βέλος μας πληροφορεί ότι για 0<P<C και καθώς το t αυξάνεται, η P(t) αυξάνεται εγκαταλείποντας την περιοχή της σταθερής λύσης $P_1(t) = 0$ που άρα είναι ασταθής και πλησιάζοντας στη λύση ισορροπίας $P_2(t) = C$, που επομένως είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Για 0<P<$\frac{C}{2}$ οι $f(P), f'(P)$ είναι ομόσημες. Άρα απ' την [22] παίρνουμε $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$, οπότε η P(t) είναι κυρτή.

Για $\frac{C}{2}$<P<C οι $f(P), f'(P)$ είναι ετερόσημες (γιατί;), άρα $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$ και η P(t) είναι κοίλη.

Όταν το P είναι κοντά στο 0 ή στο C τότε η f(P), άρα και η $\frac{dP}{dt}$, είναι κοντά στο 0 οπότε οι καμπύλες P(t) είναι ευθείες (οι λύσεις ισορροπίας). Οι λύσεις αποκτούν μεγαλύτερη κλίση καθώς το P απομακρύνεται από τις περιοχές του 0 ή του C και η κλίση τους μεγιστοποιείται στη θέση $x = \frac{C}{2}$.

II) Για P>C παρόμοια προκύπτει ότι $\frac{dP}{dt} < 0$, $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$ οπότε αναμένεται ότι η P(t) θα είναι γν. φθίνουσα (αριστερής φοράς βέλος) και κοίλη. Το αριστερής φοράς βέλος

μας πληροφορεί ότι για P>C η P(t) φθίνει καθώς το t αυξάνεται, πλησιάζοντας στη λύση ισορροπίας $P_2(t) = C$ που συνεπώς είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Η παραπάνω ποιοτική επεξεργασία της δ.ε. [18] επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων περί της συμπεριφοράς της λύσης P(t), πριν ακόμα λύσουμε τη δ.ε.. και μας οδηγεί στο να συμπεράνουμε πως η P(t) θα έχει τη μορφή της καμπύλης του σχήματος 20.

Αν και μια τέτοιου είδους ποιοτική επεξεργασία δ.ε. της μορφής [23] παρέχει περιορισμένη πληροφορία (δε μας γνωστοποιεί ποια ακριβώς είναι η λύση P(t)), είναι εύκολη και σύντομη και συνίσταται στα εξής:

- Βρίσκουμε τις λύσεις ισορροπίας λύνοντας ως προς P την f(P)=0.
- Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(P) και με βάση το πρόσημο της f(P) σχεδιάζουμε τα βέλη, τα οποία μας πληροφορούν περί της ευστάθειας των λύσεων. Εάν το βέλος δείχνει απομάκρυνση από τη λύση ισορροπίας τότε αυτή είναι ασταθής ενώ αν έχει φορά προς τη λύση ισορροπίας τότε αυτή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. (Αλλιώς, στα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f(P) διαπερνά τον οριζόντιο άξονα με θετική κλίση έχουμε ασταθείς λύσεις ισορροπίας: αν $f(\tilde{P}_0)=0$ και $f'(\tilde{P}_0) > 0$, τότε η $\tilde{P}_0$ είναι ασταθής λύση ισορροπίας. Αναλόγως, στα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f(P) διαπερνά τον οριζόντιο άξονα με αρνητική κλίση έχουμε ασυμπτωτικά ευσταθείς λύσεις ισορροπίας: αν $f(\tilde{P}_0)=0$ και $f'(\tilde{P}_0) < 0$, τότε η $\tilde{P}_0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας.) Ο άξονας των P με σημειωμένα επ΄ αυτού τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη, λέγεται *ευθεία φάσεων της δ.ε.* .
- Το γράφημα της f(P) σε συνδυασμό με την [24] μας οδηγεί σε συμπεράσματα περί κυρτότητας των λύσεων: αν οι $f(P), f'(P)$ είναι ομόσημες, η P(t) είναι κυρτή ενώ αν οι $f(P), f'(P)$ είναι ετερόσημες, η P(t) είναι κοίλη. Τα σημεία καμπής της P(t), αν υπάρχουν, αντιστοιχούν στα ακρότατα της f(P).

4. Μια αυστηρότερη εξέταση της ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας συνίσταται στα εξής:

Έστω $\delta(t)$ μια *διαταραχή* (πολύ, πολύ μικρή μεταβολή) της λύσης ισορροπίας $\tilde{P}_1(t) = 0$ κατά τη στιγμή t και $P(t) = 0 + \delta(t)$. Η δ.ε.

$$\frac{dP}{dt} = b \cdot P(t) \cdot [C - P(t)]$$

γίνεται

$$\frac{d\delta}{dt} = b \cdot \delta(t) \cdot [C - \delta(t)] \Leftrightarrow \frac{d\delta}{dt} = b \cdot C \cdot \delta(t) - b \cdot [\delta(t)]^2.$$

Αγνοώντας το μη γραμμικό όρο $b \cdot [\delta(t)]^2$ ως πολύ μικρό συγκριτικά με τον $b \cdot C \cdot \delta(t)$, παίρνουμε την

$$\frac{d\delta}{dt} = b \cdot C \cdot \delta(t) \Leftrightarrow \frac{d\delta}{dt} = a \cdot \delta(t)$$

με λύση

$$\delta(t) = \delta(0) \cdot e^{a \cdot t},$$

η οποία αυξάνεται χωρίς φράγμα καθώς $t \to +\infty$ κι επομένως η $P(t) = 0 + \delta(t)$ απομακρύνεται απ΄ τη λύση ισορροπίας $\tilde{P}_1(t) = 0$ καθώς το t αυξάνεται. Έτσι, η λύση ισορροπίας $\tilde{P}_1(t) = 0$ είναι ασταθής.

Έστω τώρα $\delta(t)$ μια διαταραχή της λύσης ισορροπίας $\tilde{P}_2(t) = C$ και $P(t) = C + \delta(t)$.
Η δ.ε.

$$\frac{dP}{dt} = b \cdot P(t) \cdot [C - P(t)]$$

γίνεται

$$\frac{d(C+\delta)}{dt} = b \cdot [C + \delta(t)] \cdot \{C - [C + \delta(t)]\} \Leftrightarrow \frac{d\delta}{dt} = -b \cdot C \cdot \delta(t) - b \cdot [\delta(t)]^2.$$

Αγνοώντας πάλι το μη γραμμικό όρο $b \cdot [\delta(t)]^2$ ως πολύ μικρό, παίρνουμε την

$$\frac{d\delta}{dt} = -b \cdot C \cdot \delta(t) \Leftrightarrow \frac{d\delta}{dt} = -a \cdot \delta(t)$$

με λύση

$$\delta(t) = \delta(0) \cdot e^{-a \cdot t},$$

η οποία τείνει στο μηδέν καθώς $t \to +\infty$ κι επομένως η $P(t) = C + \delta(t)$ πλησιάζει προς τη λύση ισορροπίας $\tilde{P}_2(t) = C$ καθώς το t αυξάνεται. Έτσι, η λύση ισορροπίας $\tilde{P}_2(t) = C$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

5. Εξετάζοντας τον πίνακα μεταβολών ή τη γραφική παράσταση του σχ.20, παρατηρούμε αυτό που ήδη είπαμε, ότι το σημείο καμπής $(t_K, \frac{C}{2})$ είναι εκείνο στο οποίο η λογιστική καμπύλη έχει τη μεγαλύτερη κλίση (γενικά η θέση ενός σημείου καμπής μιας καμπύλης, αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της κλίσης της καμπύλης, αφού η αλλαγή των κοίλων εκατέρωθεν του σημείου καμπής ισοδυναμεί με την αλλαγή της μονοτονίας της παραγώγου και άρα την ύπαρξη ακροτάτου γι αυτήν). Δηλ. στη χρονική στιγμή t_K, αντιστοιχεί η μεγαλύτερη δυνατή αύξηση της λογιστικής συνάρτησης. Το συμπέρασμα αυτό, αναφορικά με την περίπτωση που εξετάζουμε, σημαίνει πως ο πληθυσμός αυξάνεται με τη μεγαλύτερη ταχύτητα, τη χρονική στιγμή που αυτός είναι ίσος με το μισό της περιβαλλοντικής χωρητικότητας.
Εξάλλου, εάν $t_1 = t_K - L$ και $t_2 = t_K + L$, $L>0$ είναι δύο χρονικές στιγμές εκατέρωθεν της t_K και ισαπέχουσες απ' αυτήν, με λίγη άλγεβρα μπορεί να επαληθευτεί ότι $P'(t_1) = P'(t_2)$ δηλ. ότι ο πληθυσμός αυξάνεται κατά τις χρονικές αυτές στιγμές με την ίδια ταχύτητα.

6. Ας ξανακοιτάξουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις, του Malthus

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \quad [13], \quad k \text{ θετική σταθερά,}$$

και του Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = b \cdot P \cdot (C - P) \quad [18], \quad b, C \text{ θετικές σταθερές.}$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης του Verhulst υπάρχουν δύο παράγοντες. Καθώς ο παράγοντας P αυξάνεται, ο C-P μειώνεται προσεγγίζοντας το μηδέν, δηλ. ο ρυθμός γεννήσεων πέφτει. Εξάλλου για πολύ μικρό P, ο C-P βρίσκεται πολύ κοντά στο C και η [18] μοιάζει τότε με την [13]. Οι δύο παράγοντες λοιπόν δρουν ανταγωνιζόμενοι προς αντίθετες κατευθύνσεις. Ο ρόλος του P είναι να διογκώσει τον πληθυσμό ενώ

του C-P να τον συμπιέσει. Το δεύτερο μέλος της [13] είναι γραμμική συνάρτηση του P. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με την [18]. Το δεύτερο μέλος της γράφεται

$$b \cdot C \cdot P - b \cdot P^2$$

και ο όρος $-b \cdot P^2$ καταστρέφει τη γραμμικότητα. Ανεξαρτήτως της τιμής του b, δηλ. οσοδήποτε μικρός και να είναι ο μη γραμμικός όρος στην εξίσωση του Verhulst, οι λύσεις της πλησιάζουν την πεπερασμένη τιμή $C=\frac{a}{b}$ καθώς $t \to +\infty$, ενώ οι λύσεις της εξίσωσης του Malthus είναι μη φραγμένες, αύξουσες εκθετικές καμπύλες (σχήμα 21). Ακόμη κι ένας ελάχιστος μη γραμμικός όρος επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά της λύσης μακροπρόθεσμα (δηλ. για μεγάλες τιμές του t). Η μη γραμμικότητα οδηγεί σε ανάδραση και *χαοτική συμπεριφορά*, ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα που αξίζει τον κόπο να συζητηθεί κάποτε.

4.5. *Παρατηρήσεις*

Το θέμα κρίνεται γενικά δύσκολο.

Για την 4.1: Στις ομάδες διανεμήθηκε ο πίνακας 7, φωτοτυπημένος. Αφού εξηγήθηκαν τα περί εκτίμησης του σχετικού ρυθμού αύξησης του πληθυσμού, τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν τη δεύτερη γραμμή του πίνακα 8 χρησιμοποιώντας ένα επιστημονικό κομπιουτεράκι, πράγμα που έγινε. Αφού παρατήρησαν πως ο σχετικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι περίπου σταθερός, πρότειναν την [13] και συμπέραναν την [14]. Συμφωνήσαμε να υποθέσουμε πως ο πληθυσμός αυξάνεται ετησίως κατά τόσο, όσο είναι ο μέσος όρος των τιμών στη δεύτερη γραμμή του πίνακα 7. Η πρώτη δυσκολία παρουσιάστηκε όταν τους ζητήθηκε να προτείνουν πως θα υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς k. Κάποιοι απάντησαν βιαστικά ότι k=3,46%, κάποιοι συνάδελφοί τους διαφώνησαν, μα το ερώτημα έμενε αναπάντητο. Οι σπουδαστές δεν διέθεταν τιμές του πληθυσμού ανά έτος, αλλά ανά δεκαετία. Μετά από παρέμβαση του διδάσκοντα υπολόγισαν αύξηση ανά δεκαετία ίση με 34,6% και παίρνοντας τη σχέση $\frac{P(10)-P(0)}{P(0)} = 34{,}6\%$, υπολόγισαν την τιμή του k. Όταν τους ρωτήσαμε γιατί όλοι τους πήραν την $\frac{P(10)-P(0)}{P(0)} = 34{,}6\%$ αντί π.χ. της $P(10) = P(0) + 0{,}346 \cdot P(0)$, απάντησαν πως έτσι δουλεύουν στην Οικονομία. Δε δυσκολεύτηκαν στη συνέχεια να φθάσουν στην [15] και να συμπληρώσουν τη δεύτερη γραμμή του πίνακα 9. Συμπέραναν λοιπόν ότι το μοντέλο λειτουργεί θαυμάσια. Προκειμένου να πειστεί κανείς για το ότι δε συμβαίνει κάτι τέτοιο, αρκεί να υπολογίσει πως το μοντέλο εκτιμά για το 1940 πληθυσμό 335,619 εκατομμύρια, ενώ η απογραφή του 1940 δίνει 131,7 εκατομμύρια. Αφού επισημάνθηκε ότι το μοντέλο δε λαμβάνει υπόψη κοινωνικά φαινόμενα που επιβραδύνουν το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού, το θέμα έκλεισε με τη συζήτηση στο τέλος της 4.1, ενώ είχε περάσει μια ολόκληρη ώρα.

Για την 4.2: Στις ομάδες διανεμήθηκε φωτοτυπία με τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα 9. Αφού εξηγήθηκαν τα περί άνω και κάτω εκτίμησης του σχετικού ρυθμού αύξησης του πληθυσμού, τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν την τρίτη στήλη του πίνακα 10 χρησιμοποιώντας ένα επιστημονικό κομπιουτεράκι και έτσι έγινε. Μετά την υπόδειξη να θέσουν X=P την ανεξάρτητη μεταβλητή και $Y=\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt}$ την εξαρτημένη και να υπολογίσουν στο EXCEL το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης και ανακαλώντας τη δουλειά τους στην §3.2, κατέληξαν στο ότι $|r(X,Y)| \approx 1$ και βρήκαν την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων. Έτσι έφθασαν στην $\frac{dP}{dt} = P \cdot (0{,}0318 - 0{,}00017 \cdot P)$. Το σχήμα 19 είναι δημιούργημα μιας εκ των ομάδων.

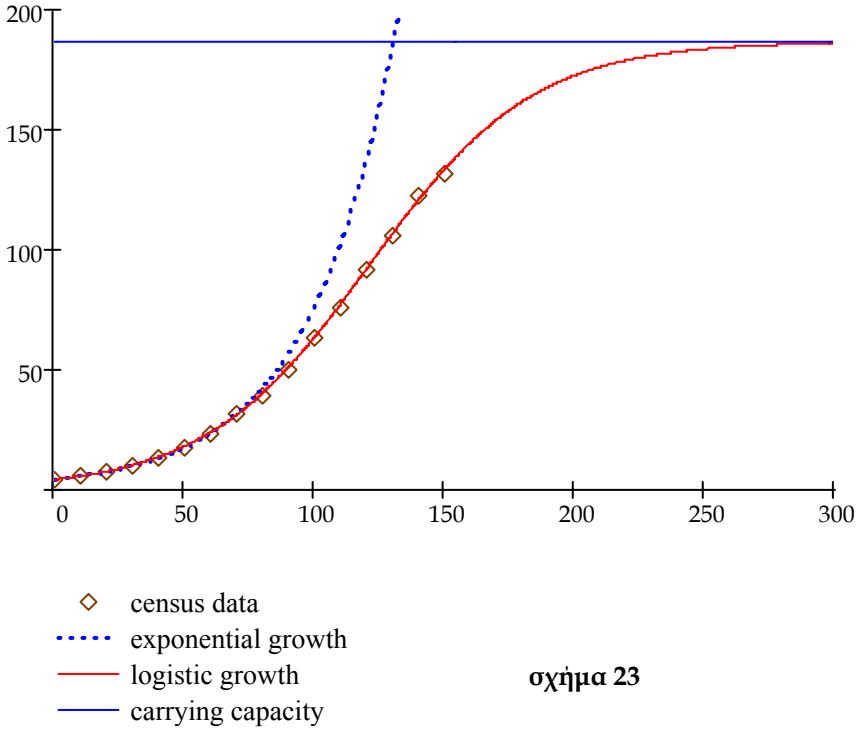
Για τις 4.3 και 4.4:

Η ολοκλήρωση της ρητής συνάρτησης διανεμήθηκε φωτοτυπημένη και είχαμε τη λύση $P(t)=\frac{C}{1+A_0\cdot e^{-a\cdot t}}$. Για λόγους οικονομίας χρόνου οι υπολογισμοί που χρειάζονται για να φθάσουμε στον πίνακα μεταβολών και ο πίνακας μεταβολών, διανεμήθηκαν σε αντίγραφα. Αφού έγιναν στην τάξη οι απαραίτητοι υπολογισμοί για να φθάσουμε στην

$$P(t)=\frac{187{,}05882}{1+46{,}963801\cdot e^{-0{,}0318\cdot t}},$$

διανεμήθηκε και ο πίνακας 10. Οι ομάδες παροτρύνθηκαν να σχεδιάσουν με το MathCAD τις λύσεις $P(t)=3{,}9\cdot e^{0{,}0297\cdot t}$ και

$$P(t)=\frac{187{,}05882}{1+46{,}963801\cdot e^{-0{,}0318\cdot t}}$$



σχήμα 23

των νόμων του Malthus και του Verhulst αντίστοιχα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, οπότε πήραν το σχήμα 21. Συμπληρώνοντας το σχήμα 21 με τα στοιχεία των απογραφών, παίρνουμε το σχήμα 23, που μαζί με τον πίνακα 11 μας αρκούν για να συγκρίνουμε τα δύο μοντέλα και να διαπιστώσουμε πως πράγματι ο νόμος του Malthus λειτουργεί καλά μόνο βραχυπρόθεσμα και πως πράγματι η λογιστική καμπύλη προσαρμόζεται πολύ καλά στα δεδομένα των απογραφών. Επίσης παρουσιάζεται μια πρώτης τάξεως ευκαιρία για τους σπουδαστές να χρησιμοποιήσουν και να συνδέσουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπο, γράφημα, πίνακα τιμών) και να τις συσχετίσουν.

Μετά τη σχετική συζήτηση το ενδιαφέρον και τις εντυπώσεις απέσπασαν τα σχόλια 3 και 5 που επίσης έχουν «γεωμετρικό χαρακτήρα». Στο σχόλιο 3 «ενισχύεται» η έννοια της ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας με την ποιοτική επεξεργασία και πέρα από την απλή παρατήρηση των ολοκληρωτικών καμπυλών. Οι σπουδαστές νιώθουν πια πιο ασφαλείς διαθέτοντας μια απλή μέθοδο που τους επιτρέπει να εξετάζουν την ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας πριν λύσουν καν τη δ.ε. Στο σχόλιο 5 διατυπώνεται η παρατήρηση ότι μια καμπύλη έχει τη μέγιστη απολύτως κλίση στη θέση του σημείου καμπής της, κάτι που οι περισσότεροι από τους σπουδαστές δεν είχαν συνειδητοποιήσει έως τώρα. Έτσι τονίζονται οι δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί κάποιος να «δει» το σημείο καμπής μιας καμπύλης: εκείνος του ορισμού με την αλλαγή των κοίλων εκατέρωθεν του σημείου που συνεπάγεται και την εικόνα που έχουμε γι αυτό και εκείνος που του προσδίδει κάποιου είδους «φυσική σημασία» και αναφέρθηκε εδώ.

Γενικά, ολόκληρη η ενότητα αντιμετωπίστηκε με κέφι κι ενθουσιασμό από τους σπουδαστές. Είδαν θετικά το γεγονός ότι τα Μαθηματικά ενεπλάκησαν με την Πληροφορική και τη Στατιστική προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα και τελικά ένιωθαν περήφανοι που είχαν σχεδιάσει το σχήμα 23 και κατανοούσαν τόσο αυτό, όσο και όσα είχαν προηγηθεί για να καταλήξουν σ΄ αυτό.

4.6. *Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη*

1. Κάποιοι πληθυσμοί μεταβάλλονται κατά το μοντέλο που ορίζει η δ.ε.

$$\frac{dP}{dt} = -b \cdot P(t) \cdot [C_1 - P(t)] \quad \textbf{[25]}, \quad t \geq 0,\ P>0,\ b, C_1 \text{ θετικές σταθερές,}$$

με την αρχική συνθήκη $P(0)=P_0$, η οποία διαφέρει από τη [18], μόνο ως προς το πρόσημο της σταθεράς b και στο ότι το C_1 εμφανίζεται στη θέση του C.

Με μια ποιοτική ανάλυση μελετήστε την ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας και κατόπιν συγκρίνετε τα συμπεράσματά σας μ' εκείνα μιας πλήρους λύσης.

Περιγράψτε τις ποιοτικές διαφορές στη συμπεριφορά των πληθυσμών με αρχική συνθήκη μικρότερη του C_1 κι εκείνων με αρχική συνθήκη μεγαλύτερη του C_1.

Προτείνετε όπου είναι απαραίτητο, τρόπους βελτίωσης αυτού του μοντέλου.

Απάντηση: Η τάξη δούλεψε όπως στο σχόλιο 3 της §4.4, κάπως πιο επιγραμματικά απ' ότι παρουσιάζεται εδώ, αλλά σωστά και με σαφήνεια.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης [25] είναι η παραβολή

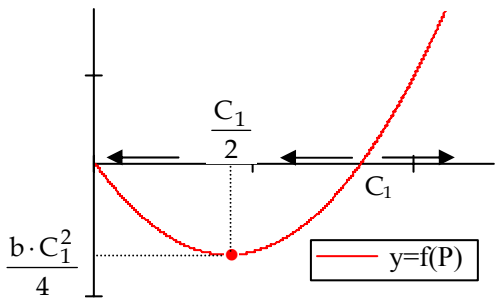
$$f(P) = -b \cdot P \cdot (C_1 - P) = b \cdot P^2 - b \cdot C_1 \cdot P$$

του διπλανού σχήματος που έχει ελάχιστο για $P = \frac{C_1}{2}$ και τέμνει τον οριζόντιο άξονα στις θέσεις P=0 και $P=C_1$. Οι λύσεις ισορροπίας της [25] συνεπώς είναι οι $P_1(t) = 0$ και $P_2(t) = C_1$.

Α) Για $0<P<C_1$, η $P_1(t) = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και η $P_2(t) = C_1$ είναι ασταθής.

Για $0<P<\frac{C_1}{2}$ οι $f(P), f'(P)$ είναι ομόσημες οπότε η P(t) είναι κυρτή.

Για $\frac{C_1}{2}<P<C_1$ οι $f(P), f'(P)$ είναι ετερόσημες και η P(t) είναι κοίλη.



σχήμα 24
$f(P) = -b \cdot P \cdot (C_1 - P)$

Όταν το P είναι κοντά στο 0 ή στο C_1 τότε η f(P), άρα και η $\frac{dP}{dt}$, είναι κοντά στο 0 οπότε οι καμπύλες P(t) τείνουν στο να γίνουν οι ευθείες που αντιστοιχούν στις λύσεις ισορροπίας. Οι λύσεις αποκτούν μεγαλύτερη κλίση καθώς το P απομακρύνεται από τις περιοχές του 0 ή του C_1 και η κλίση τους μεγιστοποιείται στη θέση $P = \frac{C_1}{2}$.

Β) Για $P>C_1$ η λύση ισορροπίας $P_2(t) = C_1$ είναι ασταθής και οι $f(P), f'(P)$ είναι ομόσημες οπότε η P(t) είναι κυρτή.

Οι σπουδαστές παρατήρησαν πως δεν είναι αναγκαία μια πλήρης λύση της [25], αφού αυτή δε διαφέρει από εκείνη της [18] παρά μόνο στο ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε το b με το –b και το C με το C_1. Έτσι, ως λύση της [25] παίρνουμε τη συνάρτηση

$$P(t) = \frac{C_1}{1 + A \cdot e^{C_1 \cdot b \cdot t}} \quad \textbf{[26]}, \qquad t \geq 0,$$

όπου θέσαμε $A = \frac{C_1 - P_0}{P_0}$.

Εάν ξεκινήσουμε με μια α.σ. $P(0)=P_0$ με $0<P_0<C_1 \Leftrightarrow A>0$, τότε λόγω του μονοσήμαντου των λύσεων θα είναι $0 < P(t) < C_1$, για κάθε $t \geq 0$. Ακόμη

$$P'(t) = -b \cdot P(t) \cdot [C_1 - P(t)] < 0, \quad \forall t \geq 0$$

και

$$P''(t) = b \cdot P'(t) \cdot [2 \cdot P(t) - C_1], \quad t \geq 0$$

με

$$P''(t)=0 \Leftrightarrow P(t)=\frac{C_1}{2} \Leftrightarrow t=-\frac{\ln A}{C_1 \cdot b}.$$

Έχουμε λοιπόν για την P(t) τον εξής πίνακα μεταβολών:

t	0	$-\frac{\ln A}{C_1 \cdot b}$	+4
$P'(t)$	-		-
$P''(t)$	-		+
P(t)	↘	$C_1/2$	↘

Αν ξεκινήσουμε με α.σ. $P(0)=P_0$ με $P_0>C_1 \Leftrightarrow A<0$, τότε λόγω του μονοσήμαντου θα είναι $P(t)>C_1$, για κάθε $t\geq 0$.
Επίσης

$$P'(t)=-b\cdot P(t)\cdot[C_1-P(t)]>0, \quad \forall t\geq 0$$

και

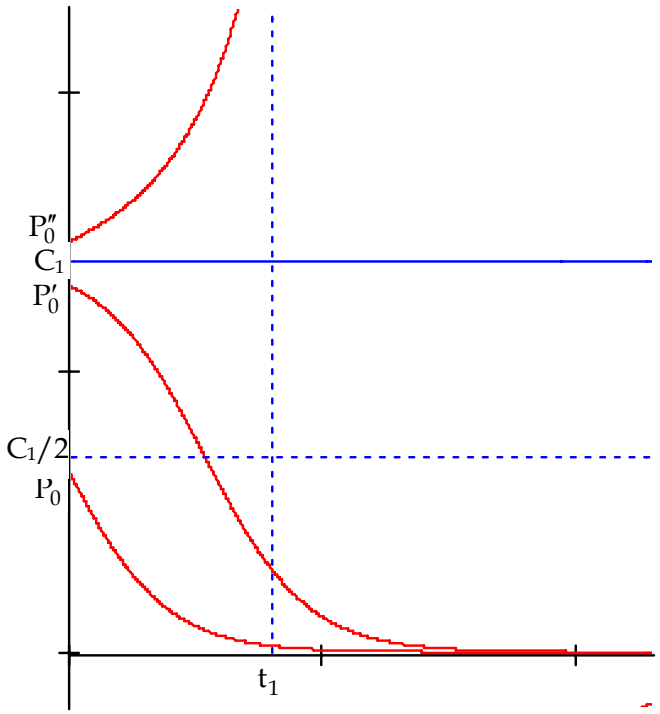
$$P''(t)=k\cdot P'(t)\cdot[2\cdot P(t)-C], \ t\geq 0$$

με

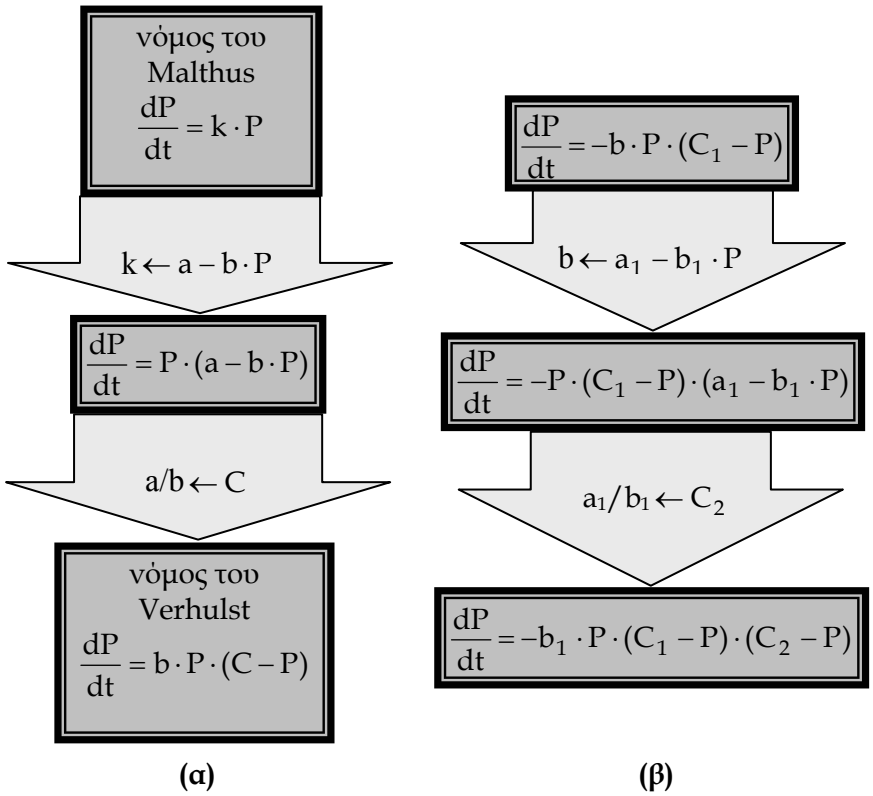
$$P''(t)>0, \quad \forall t\geq 0.$$

Έτσι η P(t) είναι γν. αύξουσα με τα κοίλα άνω.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι με $x(0)=P_0>C_1$ είναι $A<0$, η λύση ορίζεται για $t\neq -\frac{\ln(-A)}{b\cdot C_1}=t_1$ και $\lim_{t\to t_1^-} P(t)=+\infty$. Δηλ. η λύση *εκρήγνυται (blows up)*. Εδώ η ύπαρξη κατακόρυφης ασύμπτωτης διέφυγε της ποιοτικής ανάλυσης και συνεπώς η ακριβής λύση μας παρέχει σημαντική επιπλέον πληροφορία. Την ίδια όμως επιπλέον πληροφορία παίρνουμε χρησιμοποιώντας απλώς το λογισμικό για να «δούμε» τις ολοκληρωτικές καμπύλες. Τελικά οι ολοκληρωτικές καμπύλες έχουν τη μορφή που βλέπουμε στο σχήμα 25.
Συνοψίζοντας, εάν ο πληθυσμός έχει σημείο εκκίνησης μια αρχική συνθήκη $P_0<C_1$, τότε ακολουθώντας τη σιγμοειδή καμπύλη είναι καταδικασμένος να εκλείψει. Εάν όμως ο πληθυσμός ξεκινά με αρχική συνθήκη $P_0>C_1$, τότε απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο t_1. Όμως ένας πληθυσμός δε μπορεί να απειρίζεται και άρα πρέπει να τροποποιήσουμε το μοντέλο μας, ώστε να εξαλείψουμε τη μη φραγμένη αύξηση της P(t) για $P_0>C_1$.



σχήμα 25



σχήμα 26: εξάλειψη της εκθετικής αύξησης
α) απ' το νόμο του Malthus β) απ' το μοντέλο που ορίζει η [25]

Εδώ αφενός λειτουργεί η *αναλογία* του **Polya**[76], δηλ. προκειμένου να «σταματήσουμε» την ανεμπόδιστη εκθετική αύξηση απ' το μοντέλο που ορίζει η [25], θυμόμαστε την ανάλογη περίπτωση όπου εξαλείψαμε τη μη φραγμένη αύξηση που προέβλεπε ο νόμος του Malthus. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται καθαρά η αντιστοιχία: Αντικαθιστώντας στο δεύτερο μέλος της [13] τη θετική σταθερά k με τη γραμμική συνάρτηση a-b·P και με C=a/b, φτάσαμε στο νόμο του Verhulst που εκφράζεται μέσω της [18], επιτυγχάνοντας να καταστήσουμε αρνητικό το ρυθμό $\frac{dP}{dt}$ μεταβολής του πληθυσμού για μεγάλα P. Αναλόγως θα πράξουμε και τώρα. Όπως παραστατικά δείχνει το σχήμα 26, αντικαθιστώντας στο δεύτερο μέλος της [25] τη θετική σταθερά b με τη γραμμική συνάρτηση $a_1 - b_1 \cdot P$ και θέτοντας $C_2=a_1/b_1$, φτάνουμε στη δ.ε.

$$\frac{dP}{dt} = -b_1 \cdot P \cdot (C_1 - P) \cdot (C_2 - P) \text{ . } \textbf{[27]}$$

Αφετέρου λειτουργεί η ιδέα του **Vygotsky**[98], κατά την οποία αντί να εστιάζουμε στα μαθηματικά αντικείμενα, εστιάζουμε στη διαλεκτική σχέση που δημιουργείται ανάμεσα στη σκέψη και τη δράση επί των αντικειμένων αυτών. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε να λειτουργήσει π.χ. το σχήμα 26 ως *διαμεσολαβητής*. Οι σπουδαστές, μετά από παρότρυνση του διδάσκοντα, ξεκινώντας με την *αναλογία* του Polya συζητούν με τον δάσκαλό τους και μεταξύ τους συμπεραίνοντας αρχικά τη βασική ιδέα του σχήματος 26: «όπως τότε το πρόβλημα λύθηκε με την αντικατάσταση $k \leftarrow a - b \cdot P$, ανάλογα τώρα το πρόβλημα θα λυθεί με την αντικατάσταση $b \leftarrow a_1 - b_1 \cdot P$».

Από εκεί και πέρα είναι τετριμμένο γι αυτούς να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για να πάρουν επιπλέον συμπεράσματα:
Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης [27] είναι το πολυώνυμο

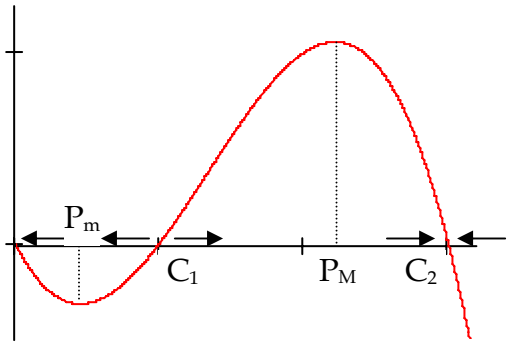
$$f(P) = -b_1 \cdot P \cdot (C_1 - P) \cdot (C_2 - P)$$

του οποίου η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα στις θέσεις $P_1=0$, $P_2=C_1$ και $P_3=C_2$ (σχήμα 27), έχει ελάχιστο στη θέση

$$P_m = \frac{C_1 + C_2 - \sqrt{C_1^2 - C_1 \cdot C_2 + C_2^2}}{3}$$

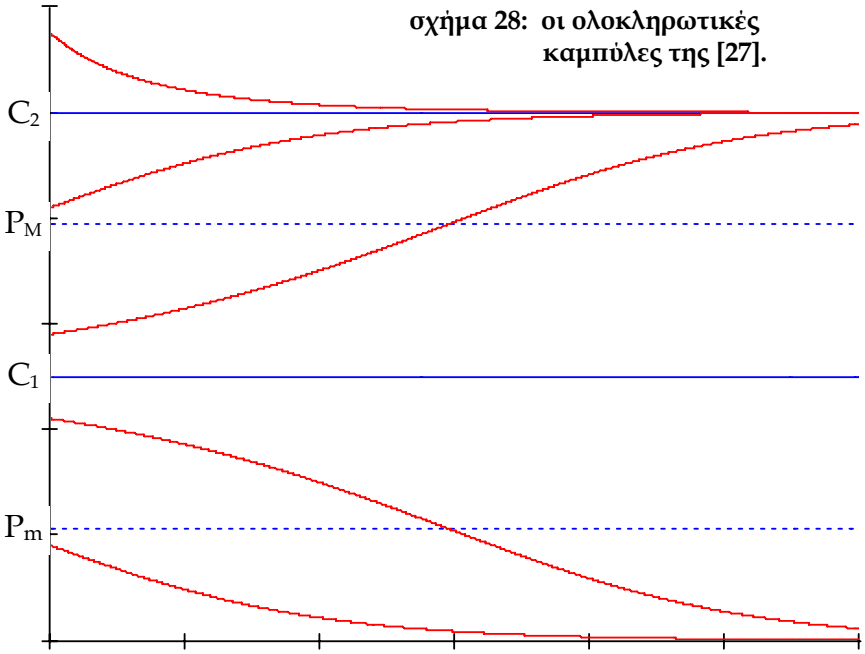
και μέγιστο στη θέση

$$P_M = \frac{C_1 + C_2 + \sqrt{C_1^2 - C_1 \cdot C_2 + C_2^2}}{3} \text{ .}$$



σχήμα 27:
$f(P) = -b_1 \cdot P \cdot (C_1 - P) \cdot (C_2 - P)$

Από τις λύσεις ισορροπίας της [27], οι $P_1(t)=0$ και $P_3(t)=C_2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς και η $P_2(t)=C_1$ είναι ασταθής. Η P(t) στρέφει τα κοίλα άνω όταν οι f(P), f′(P) είναι ομόσημες δηλ. όταν $0<P<P_m$ ή $C_1<P<P_M$ ή $P>C_2$, ενώ στρέφει τα κοίλα κάτω όταν οι f(P), f′(P) είναι ετερόσημες δηλ. όταν $P_m<P<C_1$ ή $P_M<P<C_2$. Η γραφική παράσταση της P(t) φαίνεται, για διάφορες αρχικές συνθήκες, στο σχήμα 28, το οποίο οι σπουδαστές σχεδίασαν στο MathCAD. □



σχήμα 28: οι ολοκληρωτικές καμπύλες της [27].

2. Σε μια θαλάσσια περιοχή αλιεύεται ένα συγκεκριμένο είδος ψαριού. Εάν ο πληθυσμός των ψαριών είναι μεγάλος είναι λογικό να υποθέσουμε πως ο ρυθμός συγκομιδής είναι σταθερός και ίσος με h. Τότε η πληθυσμιακή εξέλιξη των ψαριών μοντελοποιείται με τη δ.ε.

$$\frac{dP}{dt} = b \cdot P \cdot (C - P) - h \quad \textbf{[28]}, \quad b, C, h>0.$$

Α) Έστω $h < \frac{b \cdot C^2}{4}$

i) Δείξτε πως η δ.ε. [28] έχει δύο λύσεις ισορροπίας P_1 και P_2 με $P_1<P_2$ οι οποίες και να προσδιοριστούν.

ii) Με τη βοήθεια του γραφήματος της $f(P)= b \cdot P \cdot (C - P) - h$, εξηγείστε ότι η P_1 είναι ασταθής και η P_2 είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

iii) Έστω P_0 ο αρχικός πληθυσμός των ψαριών στην εν λόγω θαλάσσια περιοχή. Εάν $P_0<P_1$, εξηγείστε το ότι η εξαφάνιση του πληθυσμού των ψαριών θα συμβεί σε πεπερασμένο χρόνο, ενώ εάν $P_0>P_1$, εξηγείστε γιατί $P(t) \to P_2$ καθώς $t \to +\infty$.

iv) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό, σχεδιάστε τις ολοκληρωτικές καμπύλες.
Περιορίζει η συγκομιδή τη μέγιστη ικανότητα ανάπτυξης του πληθυσμού;

Β) Έστω $h = \frac{b \cdot C^2}{4}$.

i) Δείξτε πως υπάρχει μία μοναδική λύση ισορροπίας με τιμή $\frac{C}{2}$ η οποία είναι ημιευσταθής.

ii) Σχεδιάστε τις ολοκληρωτικές καμπύλες.

Γ) Έστω $h > \frac{b \cdot C^2}{4}$.

i) Δείξτε ότι ο πληθυσμός P(t) τείνει να μηδενιστεί καθώς το t αυξάνεται, ανεξαρτήτως της αρχικής του τιμής P_0.

ii) Σχεδιάστε τις ολοκληρωτικές καμπύλες.

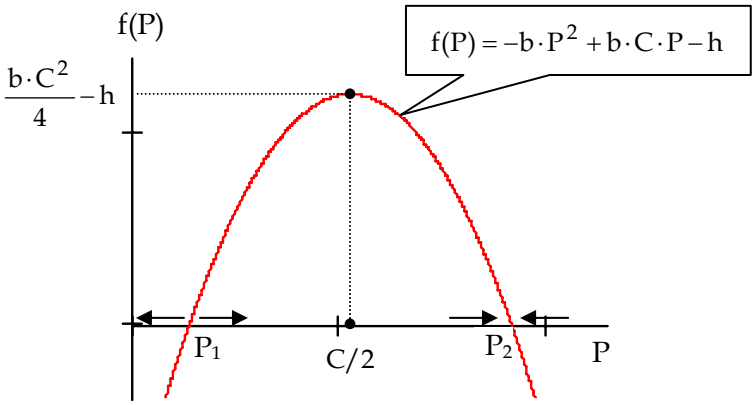
Δ) Συνοψίζοντας, κάντε κάποια σχόλια σχετικά με το πότε μπορούμε να θεωρούμε ότι υπάρχει υπερεκμετάλλευση της αλιείας.
Εάν b=0,01 και C=200 ποια πολιτική θα προτείνατε προκειμένου να εξασφαλιστεί η επί μακρόν επιβίωση του πληθυσμού των ψαριών;

Απάντηση: Το δεύτερο μέλος της [28] είναι το τριώνυμο

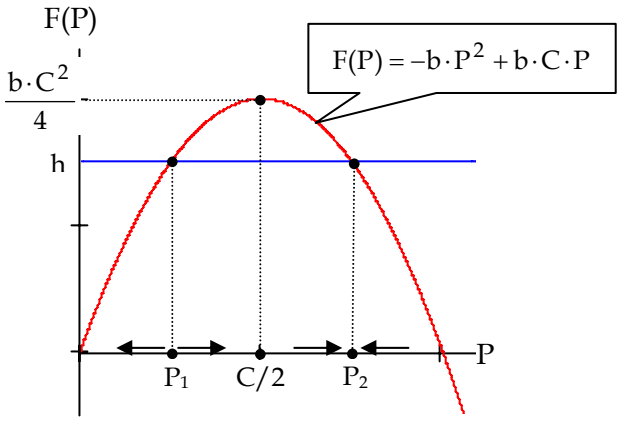
$$f(P) = -b \cdot P^2 + b \cdot C \cdot P - h$$

με b, C, h>0 και διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 \cdot C^2 - 4 \cdot b \cdot h = b \cdot (b \cdot C^2 - 4 \cdot h).$$



σχήμα 29



σχήμα 29β

A) i) Εάν $h < \frac{b \cdot C^2}{4} \overset{b>0}{\Leftrightarrow} \Delta > 0$,

τότε η εξίσωση f(P)=0 έχει δύο ρίζες πραγματικές, διακεκριμένες, τις

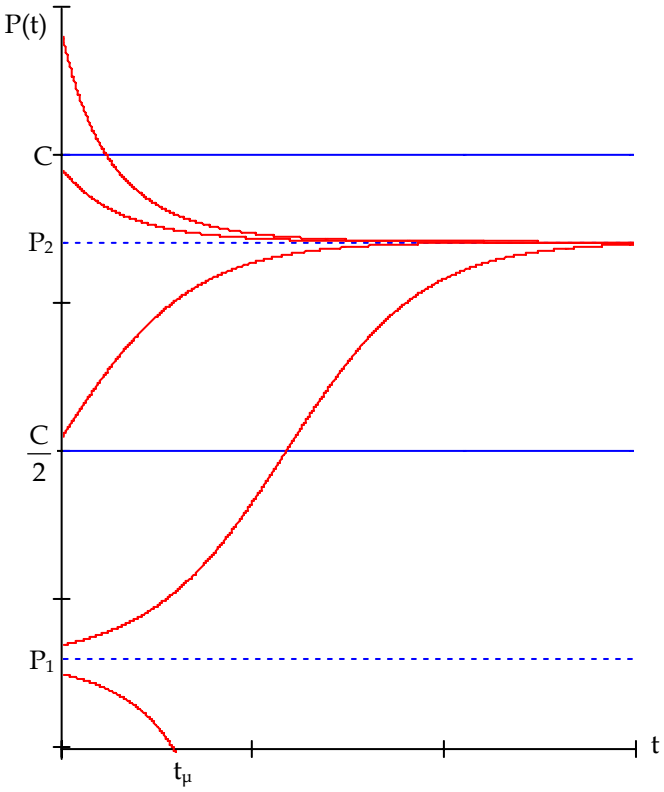
$$P_1 = \frac{-b \cdot C + \sqrt{b \cdot (b \cdot C^2 - 4 \cdot h)}}{-2 \cdot b} \quad \text{και} \quad P_2 = \frac{-b \cdot C - \sqrt{b \cdot (b \cdot C^2 - 4 \cdot h)}}{-2 \cdot b}$$

που δεν είναι παρά οι λύσεις ισορροπίας της δ.ε. [28].

ii) Η γραφική παράσταση του τριωνύμου f(P) είναι μια παραβολή σαν εκείνη του σχήματος 29. Με βάση το πρόσημο της f(P) σχεδιάζουμε τα βέλη επί της ευθείας φάσεων, τα οποία μας πληροφορούν για το ότι η P_1 είναι ασταθής ενώ η P_2 είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

iii) Έστω πως ξεκινάμε με μια α.σ. $P_0<P_1$. Τότε, λόγω του θεωρήματος του μονοσήμαντου, η λύση P(t) θα παραμένει $<P_1$. Επιπλέον για $P(t)<P_1$, είναι f(P)<0, άρα $\frac{dP}{dt}<0$ οπότε η P(t) είναι γνησίως φθίνουσα. Θα μπορούσε η P(t) όντας φθίνουσα να πλησιάζει ασυμπτωτικά τον οριζόντιο άξονα, όμως η P(t) δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη νοτιότερα της $y=P_1$ και δεδομένου ότι οι P(t), P'(t) είναι ετερόσημες, η P(t) είναι κοίλη. Έτσι, η λύση P(t) απομακρύνεται από την ασταθή λύση ισορροπίας P_1 και φθίνει με τα κοίλα κάτω, συναντώντας σε κάποια χρονική στιγμή t_μ τον οριζόντιο άξονα. Δηλ. σε πεπερασμένο χρόνο ο πληθυσμός των ψαριών μηδενίζεται.

Έστω τώρα πως ξεκινάμε με μια α.σ. $P_0>P_1$. Λόγω του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας, η τροχιά P(t) θα διατηρείται μελλοντικά $>P_1$. Τότε, δηλ. για $P_1<P<P_2$, η f(P), άρα και η $\frac{dP}{dt}$, είναι θετική οπότε η P(t) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης, η f(P) μεγιστοποιείται για $P=\frac{C}{2}$ οπότε και η P(t) παρουσιάζει καμπή (από κυρτή γίνεται κοίλη).



σχήμα 30

Για $\frac{C}{2}$<P< P_2 η P(t) αυξάνεται καθώς $t\to+\infty$, με τα κοίλα κάτω πλησιάζοντας προς την ασυμπτωτικά ευσταθή λύση ισορροπίας P_2. Ομοίως, για $P_0>P_2$ οι τροχιές είναι γνησίως φθίνουσες, κυρτές και έχουν την y= P_2 οριζόντια ασύμπτωτη.

iv) Οι ολοκληρωτικές καμπύλες φαίνονται στο σχήμα 30. Οι σπουδαστές παρατηρούν ότι:

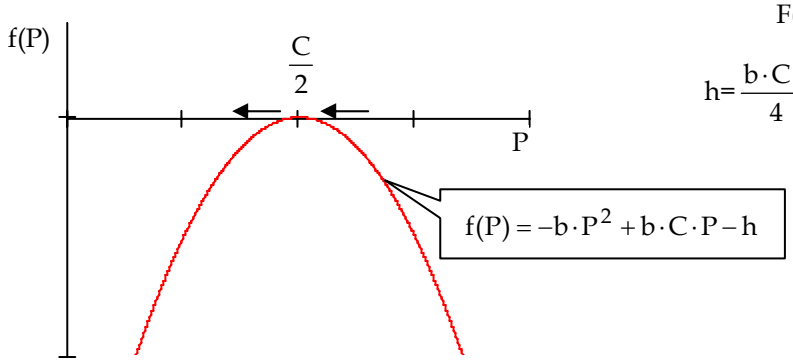
α) η πιθανότητα να μηδενιστεί ο πληθυσμός είναι ίση με την πιθανότητα να έχουμε α.σ. μικρότερη της μικρότερης ρίζας P_1 της εξίσωσης f(P)=0 και

β) η συγκομιδή βεβαίως και περιορίζει τη μέγιστη ικανότητα ανάπτυξης του πληθυσμού, αφού δίχως τη συγκομιδή, δηλ. για h=0, ο πληθυσμός φτάνει έως το επίπεδο C της περιβαλλοντικής χωρητικότητας, ενώ τώρα η ανώτερη τιμή που μπορεί να πλησιάσει είναι P_2< C.

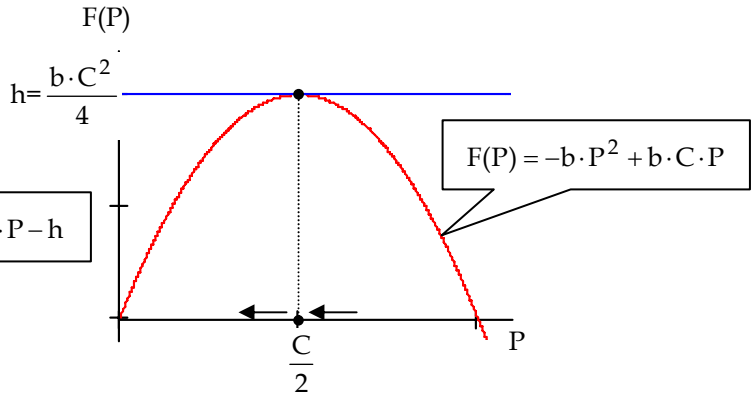
Στο σημείο αυτό, οι σπουδαστές παροτρύνονται και αποδεικνύουν αλγεβρικά ότι πράγματι είναι P_2< C.

B) Έστω $h=\frac{b\cdot C^2}{4}$.

i) Τότε το τριώνυμο f(P) έχει διακρίνουσα Δ=0 και άρα έχει μια διπλή ρίζα ίση με $\frac{C}{2}$ (στο σχήμα 31, η παραβολή εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα στη θέση $\frac{C}{2}$).



σχήμα 31

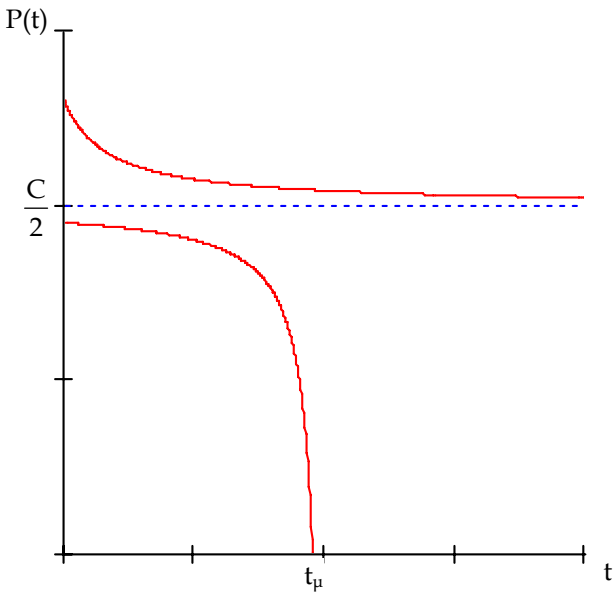


σχήμα 31β

Αυτή είναι και η μοναδική λύση ισορροπίας της δ.ε. η οποία, όπως δείχνουν τα βέλη, είναι *ημιευσταθής*: λύσεις που ξεκινούν από α.σ. $P_0>\frac{C}{2}$ πλησιάζουν προς την τιμή $\frac{C}{2}$ καθώς $t\to+\infty$, ενώ λύσεις που ξεκινούν από α.σ. $P_0<\frac{C}{2}$ απομακρύνονται απ' την τιμή $\frac{C}{2}$ καθώς $t\to+\infty$.

Αν ο πληθυσμός των ψαριών βρεθεί σε επίπεδο χαμηλότερο της τιμής $\frac{C}{2}$, τότε η τροχιά P(t) φθίνει με τα κοίλα κάτω (οι $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$ είναι ετερόσημες) απομακρυνόμενη απ' την τιμή $\frac{C}{2}$ και δίχως να έχει οριζόντιες ασύμπτωτες νοτιότερα της τιμής αυτής. Έτσι ο πληθυσμός των ψαριών πρόκειται να μηδενιστεί σε πεπερασμένο χρόνο t_μ.

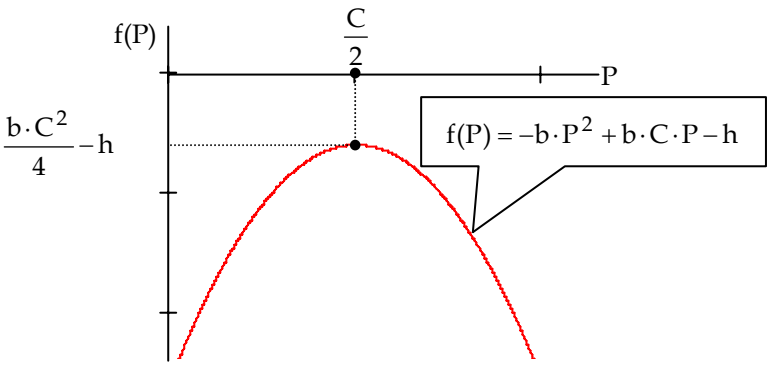
ii) Οι σπουδαστές σχεδιάζουν στο MathCAD τις ολοκληρωτικές καμπύλες του σχήματος 32. και παρατηρούν πως κι εδώ η πιθανότητα να μηδενιστεί ο πληθυσμός είναι ίση με την πιθανότητα να έχουμε α.σ. μικρότερη της διπλής ρίζας $\frac{C}{2}$.



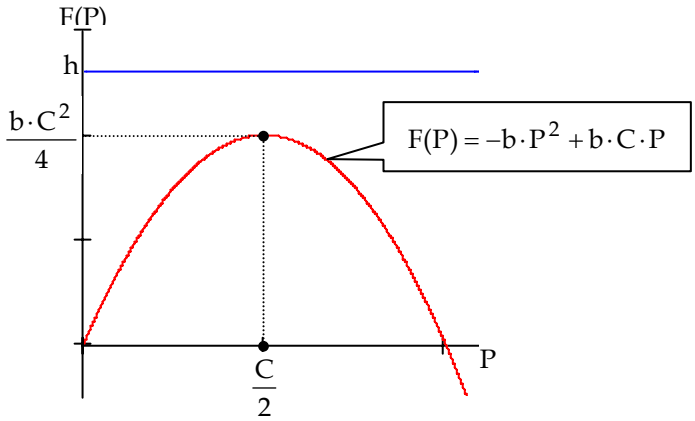
σχήμα 32

Γ) Έστω $h > \frac{b \cdot C^2}{4}$.

i) Τότε το τριώνυμο f(P) έχει αρνητική διακρίνουσα, συνεπώς είναι μονίμως ομόσημο του συντελεστή –b του δευτεροβάθμιου όρου, δηλ. f(P)<0 για κάθε τιμή του P. Τότε όμως είναι και η $\frac{dP}{dt}$ μονίμως αρνητική που σημαίνει πως η P(t) είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε μην έχοντας οριζόντιες ασύμπτωτες (η δ.ε. δεν έχει λύσεις ισορροπίας), δε μπορεί παρά σε κάποια χρονική στιγμή να μηδενιστεί.



σχήμα 33

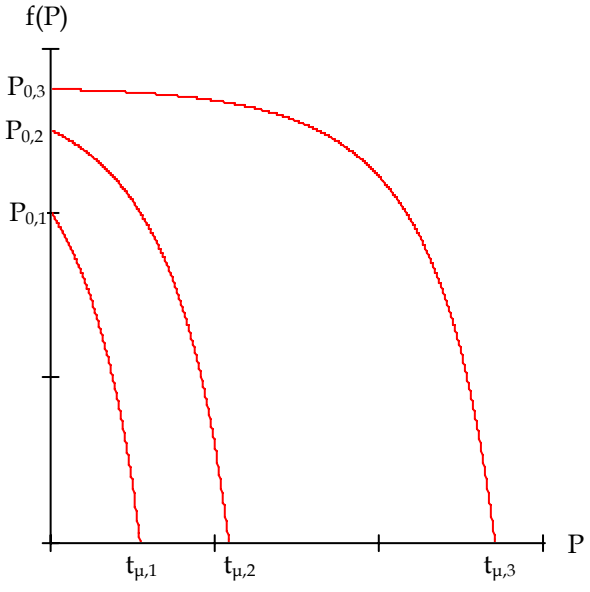


σχήμα 33β

ii) Οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι οι τροχιές του σχήματος 34. Εδώ είναι <u>βέβαιο</u> πως θα μηδενιστεί ο πληθυσμός, για οποιαδήποτε α.σ.

Δ) Συνοψίζουμε:

- Εάν δεν υφίσταται συγκομιδή (αλιεία, κυνήγι, υλοτόμηση κ.τ.λ.), δηλ. h=0, ο πληθυσμός εξελίσσεται με τη λογιστική εξίσωση του Verhulst $\frac{dP}{dt} = \underbrace{-b \cdot P^2 + b \cdot C \cdot P}_{F(P)}$ η οποία έχει δύο λύσεις ισορροπίας, την $P_1(t)=0$ που είναι ασταθής και την $P_2(t)=C$ που είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Με όποια α.σ. κι αν γίνει η εκκίνηση, η P(t) θ' ακολουθήσει τη σιγμοειδή καμπύλη του σχήματος. 20 πλησιάζοντας ασυμπτωτικά την περιβαλλοντική χωρητικότητα C.
- Εάν $0 \neq h < \frac{b \cdot C^2}{4} = F_{max}(P)$ τότε η [28] έχει δύο λύσεις ισορροπίας, τις ρίζες της εξίσωσης F(P)=h εκ των οποίων η μικρότερη P_1 είναι ασταθής και η μεγαλύτερη P_2 είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Εδώ, μια α.σ. $<P_1$, οδηγεί τον πληθυσμό προς εξαφάνιση σε πεπερασμένο χρόνο (σχήμα 29β και 30).



σχήμα 34

- Εάν $0 \neq h = \frac{b \cdot C^2}{4} = F_{max}(P)$ τότε η [28] έχει μια ημιευσταθή λύση ισορροπίας, ίση με τη διπλή ρίζα $P_1 = \frac{C}{2}$ της εξίσωσης F(P)=h. Κι εδώ, μια α.σ. $<P_1$, οδηγεί τον πληθυσμό προς εξαφάνιση σε πεπερασμένο χρόνο (σχήμα 31β και 32).
- Εάν $h > \frac{b \cdot C^2}{4} = F_{max}(P)$ τότε η [28] δεν έχει λύσεις ισορροπίας και ο πληθυσμός μηδενίζεται σε πεπερασμένο χρόνο, για οποιαδήποτε α.σ. (σχήμα 33β και 34).

Ο ρυθμός συγκομιδής h λοιπόν, δεν πρέπει να ξεπεράσει τη στάθμη $\frac{b \cdot C^2}{4} = F_{max}(P)$ (*maximum sustainable yield-MSY-μέγιστη ανεκτή απόδοση*). Αν συμβεί αυτό, υπάρχει υπερεκμετάλλευση της αλιείας και ο πληθυσμός των ψαριών μηδενίζεται κάποια χρονική στιγμή t_μ.

Με b=0,01 και C=200, είναι $MSY = \frac{b \cdot C^2}{4} = 100$.

Την ιδέα για να θέσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα στους σπουδαστές, πήραμε από κάποιες ασκήσεις που προτείνονται στα [3] και [17] της βιβλιογραφίας, καθώς και από την σχετική αναφορά του Clark στο θέμα, στο [23] της βιβλιογραφίας. Οι σπουδαστές έχουν κατανοήσει πλήρως πλέον την ποιοτική επεξεργασία που περιγράφεται στο σχόλιο 3 της §4.4. Έχουν επίσης χρησιμοποιήσει επιτυχώς το λογισμικό για να σχεδιάζουν τις ολοκληρωτικές καμπύλες και ό,τι άλλο χρειάζονται σε κάθε περίπτωση. Έτσι έχουν στη διάθεσή τους εποπτεία. Η **Hoyles**[43] εκφράζει την άποψη ότι το λογισμικό ως εργαλείο διαμεσολαβεί με τις ιδέες των σπουδαστών μέσω της δράσης τους σ΄ αυτό και π.χ. της εποπτείας που έχουν ως αντάλλαγμα. Η δραστηριότητα που αναπτύσσεται κατά την εκτέλεση του έργου που έχουν αναλάβει έχει ως αποτέλεσμα ενός είδους επικοινωνία. Οι σπουδαστές συνεργάζονται, συμφωνούν σε προσεγγίσεις και τεχνικές, συζητούν και συγκατασκευάζουν τη μαθηματική γνώση και το κοινωνικό στοιχείο επηρεάζει τη διαδικασία της μάθησής τους. Ικανοποιημένοι πλέον με την δόμηση της απάντησης στο πρόβλημα την οποία με ελάχιστη καθοδήγηση από το δάσκαλό τους επέτυχαν, μπορούν να συμφωνήσουν στη διατύπωση ενός τελικού συμπεράσματος:

Προϋπόθεση είναι ο ρυθμός αλίευσης h να παραμένει σε επίπεδα ≤100=MSY, οπότε αποκλείουμε το βέβαιο αφανισμό του πληθυσμού που περιγράφεται στο (Γ). Επιπλέον, εάν αυτό εξασφαλιστεί, θα έπρεπε να φροντίσουμε, ώστε η μικρότερη ρίζα P_1 της εξίσωσης F(P)=h όταν h<100 ή η διπλή ρίζα της όταν h=100, να παραμένει μικρότερη από τον αρχικό πληθυσμό, προκειμένου ν΄ αποφύγουμε τον ενδεχόμενο μηδενισμό του, που περιγράφεται στα (Α), (Β).

3. Την ιδέα για τη δραστηριότητα αυτή πήραμε από μια άσκηση στο [61] της βιβλιογραφίας καθώς και από σχετικές αναφορές στο θέμα, στα [38] και [67].
Οι Ludwig, Jones και Holling, σε μια εργασία τους σχετική με την εμφάνιση ενός είδους σκουληκιών στα δάση ερυθρελάτης στον Καναδά, πρότειναν πως ο πληθυσμός P=P(t) των σκουληκιών διέπεται από τη δ.ε.

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot (C - P) - \frac{b \cdot P^2}{a^2 + P^2},$$

όπου r ο ρυθμός αύξησης, C η φέρουσα χωρητικότητα και $g(P) = \frac{b \cdot P^2}{a^2 + P^2}$ ένας όρος μείωσης του πληθυσμού οφειλόμενος στους θηρευτές (πουλιά κ.τ.λ.), με a, b θετικές σταθερές.
i) Προσδιορίστε τις διαστάσεις των παραμέτρων r, C, a, b.
ii) Από τη γραφική παράσταση της $\frac{g(P)}{b}$ ως συνάρτησης του P για a=1, 5 και 10 οδηγηθείτε σε κάποια ποιοτική παρατήρηση, σχετική με την επιρροή της παραμέτρου a στο μοντέλο. Σχεδιάστε και σχολιάστε το γράφημα της g(P).
iii) Επιλέγοντας τις αδιάστατες μεταβλητές

$$u = \frac{P}{a}, \quad \tau = \frac{b \cdot t}{a}, \quad q = \frac{C}{a}, \quad R = \frac{a \cdot r \cdot C}{b}$$

γράψτε τη δ.ε. σε αδιάστατη μορφή.
iv) Χρησιμοποιώντας το αδιάστατο μοντέλο του ερωτήματος (iii), βρείτε το πλήθος των λύσεων ισορροπίας της δ.ε. και σχολιάστε την ευστάθειά τους.
v) Με q=35, R=0,4 χρησιμοποιήστε κατάλληλο software για να προσδιορίσετε τις λύσεις ισορροπίας και να σχεδιάσετε τις ολοκληρωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις α.σ. u(0)=40, 25, 2 και 0,05.

Απάντηση: i) Οι διαστάσεις του πρώτου, άρα και του δεύτερου μέλους της $\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot (C - P) - \frac{b \cdot P^2}{a^2 + P^2}$ είναι $\frac{\text{population}}{\text{time}}$. Έτσι κάθε προσθετέος στο δεύτερο μέλος έχει αυτές τις διαστάσεις. Παρακάτω, το σύμβολο «$\mapsto$» θα σημαίνει «έχει διαστάσεις».
Προφανώς $\boxed{C \mapsto \text{population}}$ και έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} r \cdot P \cdot (C - P) \mapsto \frac{\text{population}}{\text{time}} \\ P \cdot (C - P) \mapsto (\text{population})^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \mapsto \frac{1}{(\text{population}) \times (\text{time})}},$$

$$P^2 \mapsto (\text{population})^2 \Rightarrow a^2 \mapsto (\text{population})^2 \Rightarrow \boxed{a \mapsto \text{population}} \text{ και}$$

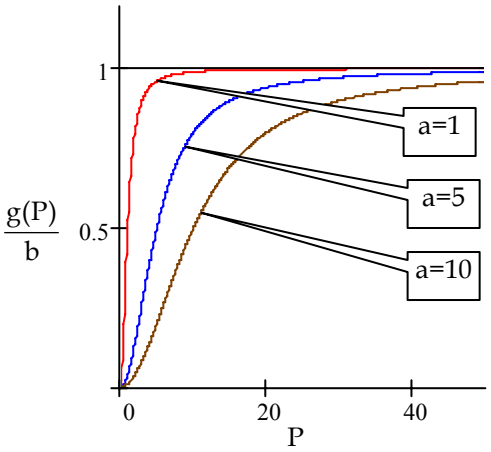
$$b \cdot \underbrace{\frac{P^2}{a^2 + P^2}}_{\text{αδιάστατο}} \mapsto \frac{\text{population}}{\text{time}} \Rightarrow \boxed{b \mapsto \frac{\text{population}}{\text{time}}}.$$

Το ερώτημα αντιμετωπίστηκε εύκολα απ' τις ομάδες.

ii) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται πως αυξανομένης της τιμής της παραμέτρου a, η γραφική παράσταση αυξάνεται όλο και λιγότερο απότομα.
Ομολογουμένως οι σπουδαστές δεν κατέληξαν εύκολα στο συμπέρασμα. Αντιλήφθηκαν ότι αύξηση του a συνεπάγεται τη μείωση της κλίσης της $\frac{g(P)}{b}$, όμως έδωσαν την ερμηνεία μόνο όταν τους επισημάνθηκε ότι η g(P) παριστάνει την επίδραση του θηρευτή στο θήραμα. Μάλιστα συζητώντας διατυπώθηκε τελικά ο εξής συλλογισμός:

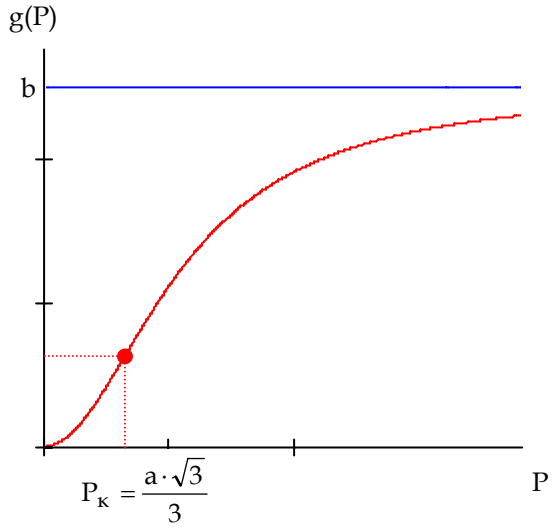
(αύξηση του a) $\Rightarrow$ (μείωση της κλίσης της $\frac{g(P)}{b}$)

$\Rightarrow$ (μείωση του ρυθμού αύξησης της g(P) ως προς P)
$\Rightarrow$ (η επίδραση g(P) του θηρευτή στον πληθυσμό P, επιβραδύνεται ως προς P)
$\Rightarrow$ (η επίδραση g(P) του θηρευτή αυξάνεται για ολοένα μεγαλύτερες τιμές του P).



σχήμα 35

Θα μπορούσαμε να πούμε δηλ. ότι <u>αυτή η μείωση της κλίσης της γραφικής παράστασης</u> (η ελάττωση του ρυθμού μεταβολής της επίδρασης g(P) του θηρευτή) <u>σημαίνει πως με την αύξηση της τιμής του a, απαιτείται όλο και μεγαλύτερος πληθυσμός προκειμένου ο θηρευτής να έχει σ' αυτόν ουσιαστική επίδραση.</u>
Γενικά το ερώτημα αντιμετωπίστηκε με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η χρήση της τεχνολογίας στο μάθημα των δ.ε. έχει ως αποτέλεσμα αυτό να γίνεται πιο εποπτικό, λιγότερο επικεντρωμένο στον φορμαλισμό και περισσότερο από πριν συνδεδεμένο με την ποιοτική επεξεργασία τους. Ο έτσι κι αλλιώς σημαντικός ρόλος των παραμέτρων για παράδειγμα είναι τώρα περισσότερο προσιτός για μελέτη. Όπως παρατηρεί ο **Boyce**[19], είναι συχνά σημαντικότερο για τον σπουδαστή να κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο μια παράμετρος επηρεάζει τη λύση, απ' το να υπολογίσει π.χ. τη λύση για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου.



σχήμα 36

Περαιτέρω, έχουμε:

$$g(P) = \frac{b \cdot P^2}{a^2 + P^2}, \quad g'(P) = \frac{2 \cdot a^2 \cdot b \cdot P}{\left(a^2 + P^2\right)^2},$$

$$g''(P)=\frac{2\cdot a^2\cdot b\cdot(a+P\cdot\sqrt{3})}{\left(a^2+P^2\right)^3}\cdot(a-P\cdot\sqrt{3})$$

και

$$\lim_{P\to+\infty} g(P)=b\,.$$

Οι παραπάνω ισότητες μας οδηγούν να συμπεράνουμε ότι η g(P) είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση με σημείο καμπής στη θέση $P_\kappa=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$ και με οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=b, έχοντας το σιγμοειδές σχήμα του διακόπτη (switch like shape).

Για τιμές του πληθυσμού μικρότερες από την τιμή $P_\kappa=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$, η επίδραση g(P) του θηρευτή είναι μικρή με τιμές κοντά στο μηδέν, ενώ για τιμές του πληθυσμού μεγαλύτερες από την κρίσιμη τιμή $P_\kappa=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$, η επίδραση g(P) του θηρευτή αιφνιδίως αυξάνεται (switched on) παίρνοντας πολύ μεγαλύτερες τιμές, κοντά στην τιμή b. Ουσιαστικά η θήρα υφίσταται μόνον όταν υπάρχει αρκετή ποσότητα λείας (σκουληκιών), όπως άλλωστε εξηγήσαμε και εξάλλου αναμένεται.

iii) Με $u=\frac{P}{a}$, $\tau=\frac{b\cdot t}{a}$, $q=\frac{C}{a}$, $R=\frac{a\cdot r\cdot C}{b}$, η δ.ε.

$$\frac{dP}{dt}=r\cdot P\cdot(C-P)-\frac{b\cdot P^2}{a^2+P^2}$$

παίρνει διαδοχικά τις μορφές:

$$\frac{dP}{dt}=r\cdot C\cdot P\cdot(1-\frac{P}{C})-b\cdot\frac{\frac{P^2}{a^2}}{1+\frac{P^2}{a^2}},$$

$$\frac{adu}{\frac{a}{b}d\tau}=\frac{b}{a}\cdot R\cdot a\cdot u\cdot(1-\frac{a\cdot u}{C})-b\cdot\frac{u^2}{1+u^2},$$

$$b\cdot\frac{du}{d\tau}=b\cdot R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q})-b\cdot\frac{u^2}{1+u^2},$$

$$\frac{du}{d\tau}=R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q})-\frac{u^2}{1+u^2}.$$

Σ΄ αυτήν την αδιάστατη μορφή εμφανίζονται μόνο δύο παράμετροι, οι R, q.

iv) Προφανώς, η $\tilde{u}_0=0$ είναι μια απ΄ τις λύσεις ισορροπίας η οποία είναι ασταθής. Πράγματι, για τιμές του u κοντά στο μηδέν είναι $u^2\cong 0$ και η δ.ε. γίνεται $\frac{du}{d\tau}=R\cdot u$ με R>0, οπότε το u αυξάνεται εκθετικά, απομακρυνόμενο απ΄ τη λύση ισορροπίας $\tilde{u}_0=0$. Οι μη μηδενικές λύσεις ισορροπίας της δ.ε.

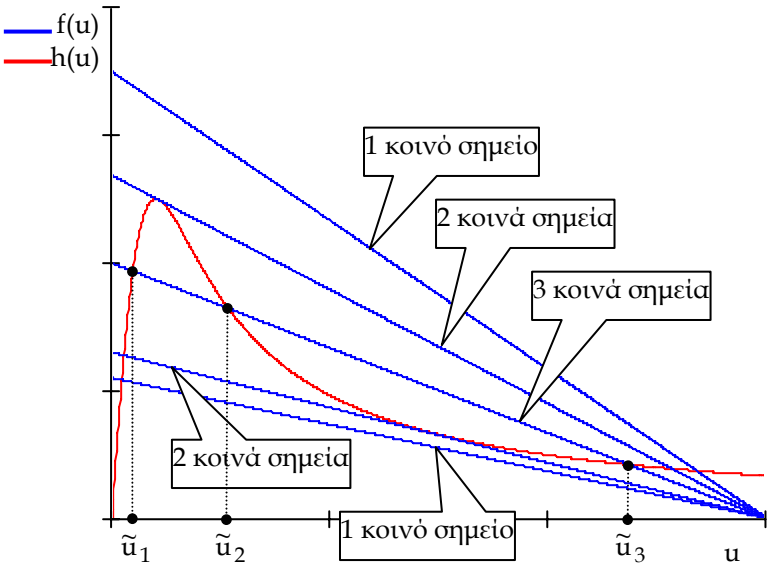
$$\frac{du}{d\tau}=R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q})-\frac{u^2}{1+u^2}$$

είναι ισάριθμες με τις ρίζες της εξίσωσης

$$R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q})-\frac{u^2}{1+u^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{R\cdot(1-\frac{u}{q})}_{f(u)}=\underbrace{\frac{u}{1+u^2}}_{h(u)}.$$

Αυτές είναι τόσες, όσα τα κοινά σημεία της ευθείας $f(u) = R\cdot(1-\frac{u}{q})$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(u) = \frac{u}{1+u^2}$ που, όπως φαίνεται στο σχήμα 37, μπορεί να είναι ένα, δύο ή τρία. Για σταθεροποιημένο π.χ. q και αρκετά μικρές ή αρκετά μεγάλες τιμές της παραμέτρου R, η ευθεία $f(u) = R\cdot(1-\frac{u}{q})$ τέμνει το γράφημα της $h(u) = \frac{u}{1+u^2}$ σε ένα μόνο σημείο, ενώ μεταβάλλοντας το R (ή το q) μεταβάλλουμε την κλίση της ευθείας έτσι, ώστε να εμφανισθούν μέχρι και τρία κοινά σημεία των δύο καμπυλών που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές λύσεις ισορροπίας της δ.ε.



σχήμα 37

Από άλλη άποψη, αν

$$F(u) = R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2}$$

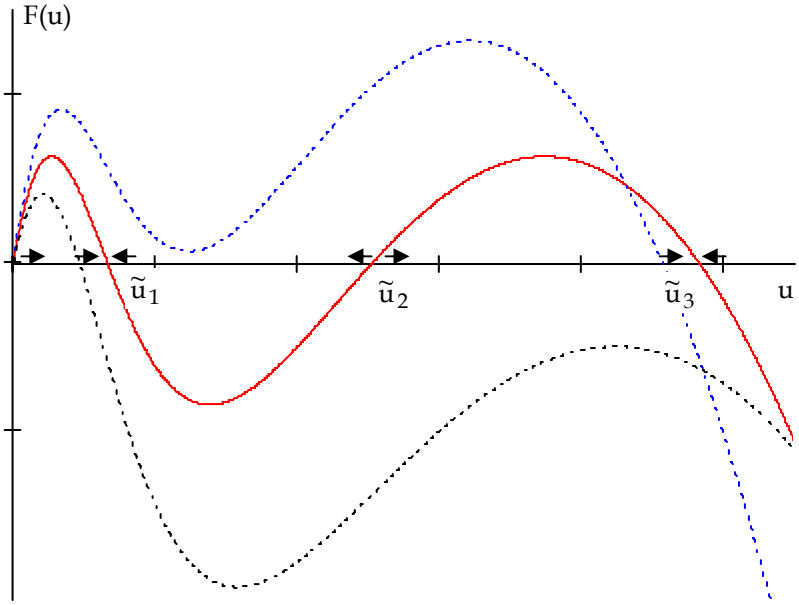
τότε τα σημεία ισορροπίας της δ.ε.

$$\frac{du}{d\tau} = R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2}$$

συμπίπτουν, ως γνωστόν, με τις ρίζες της εξίσωσης

$$F(u) = 0 \Leftrightarrow R\cdot u\cdot(1-\frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2} = 0\,.$$

Στο σχήμα 38 έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F(u) και τα βέλη επί της ευθείας φάσεων, που μας πληροφορούν περί του είδους της ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας.



σχήμα 38

Η λύση ισορροπίας $\tilde{u}_0 = 0$ ήδη εξηγήσαμε πως είναι ασταθής, επομένως <u>οποιαδήποτε προσπάθεια εξαφάνισης του πληθυσμού των σκουληκιών δεν έχει νόημα.</u> Επίσης, αποκλείεται ο πληθυσμός των σκουληκιών να σταθεροποιηθεί σε κάποια τιμή κοντά στην ασταθή λύση ισορροπίας $\tilde{u}_2$. Η μεγαλύτερη από τις ασυμπτωτικά ευσταθείς λύσεις ισορροπίας $\tilde{u}_3$, αντιστοιχεί πραγματικά σε μια έκρηξη του πληθυσμού των σκουληκιών, η οποία θα προτιμούσαμε να μη συμβεί. Η προτιμώμενη λοιπόν απ' τις ασυμπτωτικά ευσταθείς λύσεις ισορροπίας, είναι η $\tilde{u}_1$. <u>Θα μπορούσαμε να επέμβουμε π.χ. με ψεκασμούς έτσι, ώστε οι τιμές των παραμέτρων R, q να γίνουν τέτοιες, που να υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης μόνο της $\tilde{u}_1$, δηλ. η F(u) να έχει ως γραφική παράσταση μια καμπύλη σαν τη νοτιότερη του σχήματος 38.</u>

v) Ο παρακάτω αλγόριθμος στο MathCAD δίνει, για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων R, q, τις λύσεις ισορροπίας και τις ολοκληρωτικές καμπύλες του σχήματος 39:

$R := 0.4$

$q := 35$

$$F(\tau, u) := R \cdot u \cdot \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}$$

$\tau 0 := 0$

$\tau max := 20$

Equilibriums:

$$F(t, u) = 0 \text{ solve}, u \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ .48856010474594569649 \\ 2.2184069030338534702 \\ 32.293032992220200833 \end{pmatrix}$$

$u1 := .48856010474594569649$ (stable equilibrium)

$u2 := 2.2184069030338534702$ (unstable equilibrium)

$u3 := 32.293032992220200833$ (stable equilibrium)

Solution of the d.e.:

Given

$u'(\tau) = F(\tau, u(\tau))$

$u(\tau 0) = u0$ (u0 is the parameter)

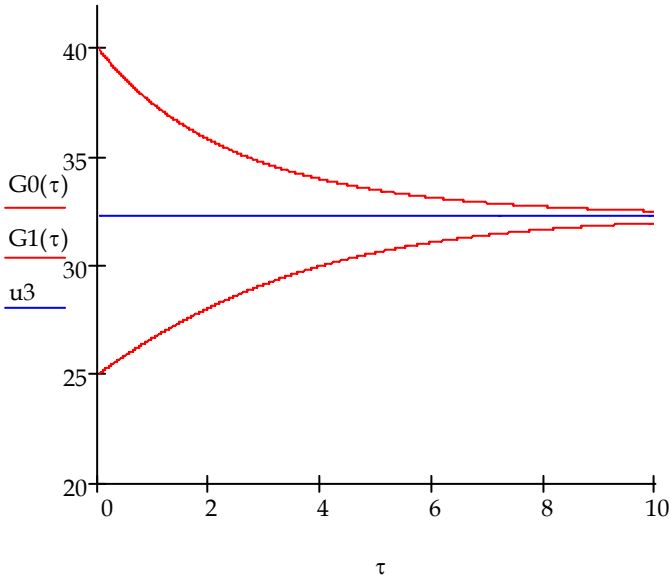
$U(u0) := \text{Odesolve}(\tau, \tau max)$

$G0 := U(40)$

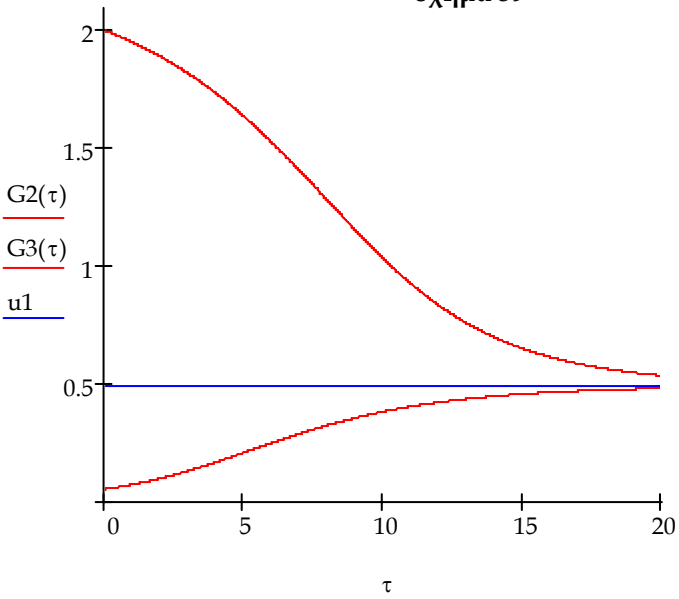
$G1 := U(25)$

$G2 := U(2)$

$G3 := U(0.05)$



σχήμα 39



Όπως μάλλον γίνεται κατανοητό, ο στόχος των παραπάνω δραστηριοτήτων ήταν να ερμηνευθούν κάποιες αναπαραστάσεις και μέσω κάποιων άλλων να εξαχθούν συμπεράσματα τα οποία οι σπουδαστές δε διέθεταν εναλλακτικούς τρόπους να τα έχουν. Για λόγους οικονομίας χρόνου οι αλγεβρικοί υπολογισμοί στα ερωτήματα (i), (ii) και (iii) της τρίτης δραστηριότητας διανεμήθηκαν σε αντίγραφα και συζητήθηκαν ακροθιγώς, ενώ ο χρόνος δαπανήθηκε κυρίως στην ερμηνεία των γραφημάτων. Γενικά το θέμα αντιμετωπίστηκε με ιδιαίτερο ενθουσιασμό από την τάξη, αν και λόγω της δυσκολίας του, αρχικά υπήρχαν ως προς αυτό, κάποιες επιφυλάξεις από μέρους μας. Τις εντυπώσεις κέρδισαν τα ερωτήματα (Δ) της δεύτερης και (iv) της τρίτης δραστηριότητας, κατά τη διαπραγμάτευση των οποίων παρατηρήθηκε άριστη συνεργασία των σπουδαστών μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα. Πρόκειται για τα ερωτήματα όπου κατά κάποιο τρόπο, με τη χρήση απλών εργαλείων τόσο από πλευράς Μαθηματικών, όσο κι από πλευράς λογισμικού, δίνεται τελικά μια συνολική απάντηση, σ' ένα ερώτημα που αρχικά φαντάζει αρκετά περίπλοκο. Όπως υπογραμμίζει η **Hoyles**[43], το «μαθαίνω Μαθηματικά» είναι μια περίπλοκη διαδικασία που περιλαμβάνει δράσεις, αναπαραστάσεις και κοινωνικές πρακτικές. Αυτό που διδάσκεται π.χ. με το σχήμα 38 δεν είναι η απάντηση σε μια ερώτηση μα πολλά άλλα μαζί: ένα εργαλείο, ένας τρόπος σκέψης, ένας τρόπος δράσης. Λίγο περισσότερη δράση έχουμε στην επόμενη δραστηριότητα που τη βασική της ιδέα βρίσκουμε στο [4] της βιβλιογραφίας:

3. i) Θεωρήστε πως η λύση της λογιστικής εξίσωσης

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{N}\right) \quad \textbf{[29]}$$

μοντελοποιεί την κατ΄ έτος τιμή ενός πληθυσμού σε εκατοντάδες άτομα που δίνεται στον διπλανό πίνακα, με N = 31,05 και x(0) = 9,61.

Λύστε τη δ.ε. και βρείτε τις εκτιμώμενες τιμές x(t) για την αυθαίρετη τιμή k = 0,3 της παραμέτρου k. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την «επίλυση» (solver) του EXCEL προκειμένου να εκτιμήσετε την τιμή της k, ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο σφάλμα εκτίμησης:

$$\text{error} = \frac{\sqrt{\sum_{t=0}^{18} (x_t - x(t))^2}}{18}.$$

ii) Κάντε το ίδιο για τη δ.ε.

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{N}\right)^p\right) \quad \textbf{[30]}$$

εκτιμώντας τώρα, με την «επίλυση» του EXCEL, τις τιμές των παραμέτρων k και p. Ξεκινήστε με k = 0,3 , p = 4.

iii) Χρησιμοποιήστε το Mathcad ή το EXCEL για να σχεδιάσετε τα δεδομένα του πίνακα και τις λύσεις των δύο δ.ε. στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Ποιο από τα δύο μοντέλα ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα;

έτος t	**τιμή x_t**
0	9,61
1	10,88
2	10,59
3	12,39
4	14,8
5	16,07
6	18,1
7	20,47
8	22,32
9	23,88
10	26,88
11	26,75
12	28,43
13	30,3
14	30,3
15	30,3
16	30,49
17	31,05
18	31,05

πίνακας 11

i) Χωρίζουμε τις μεταβλητές στην [29] και παίρνουμε:

$$\frac{dx}{x \cdot (x - N)} = -\frac{k}{N} dt,$$

$$\left(\frac{1}{x - N} - \frac{1}{x}\right) dx = -k\, dt,$$

$$\ln\left|\frac{x - N}{x}\right| = -k \cdot t + c,$$

$$\left|\frac{x - N}{x}\right| = e^{-k \cdot t + c},$$

$$\frac{x - N}{x} = \pm e^{c} \cdot e^{-k \cdot t},$$

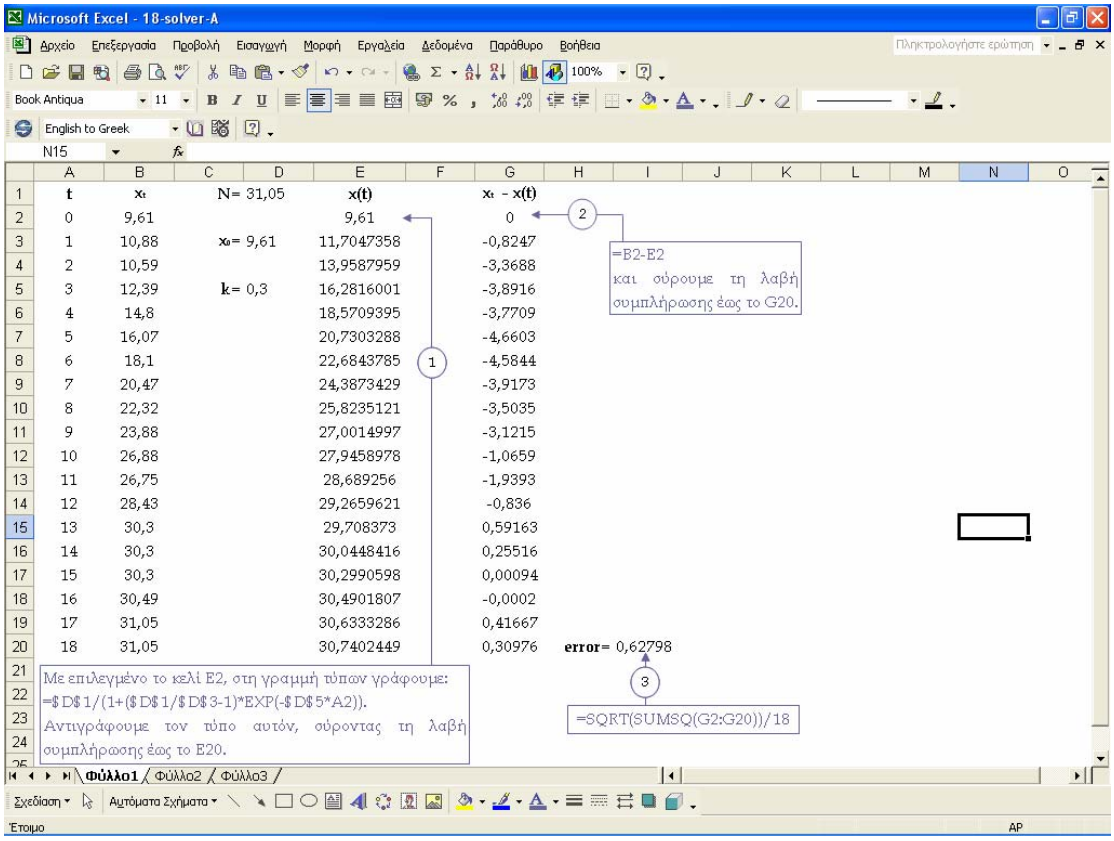
$$1 - \frac{N}{x} = c_0 \cdot e^{-k \cdot t},$$

$$x(t) = \frac{N}{1 - c_0 \cdot e^{-k \cdot t}}.$$

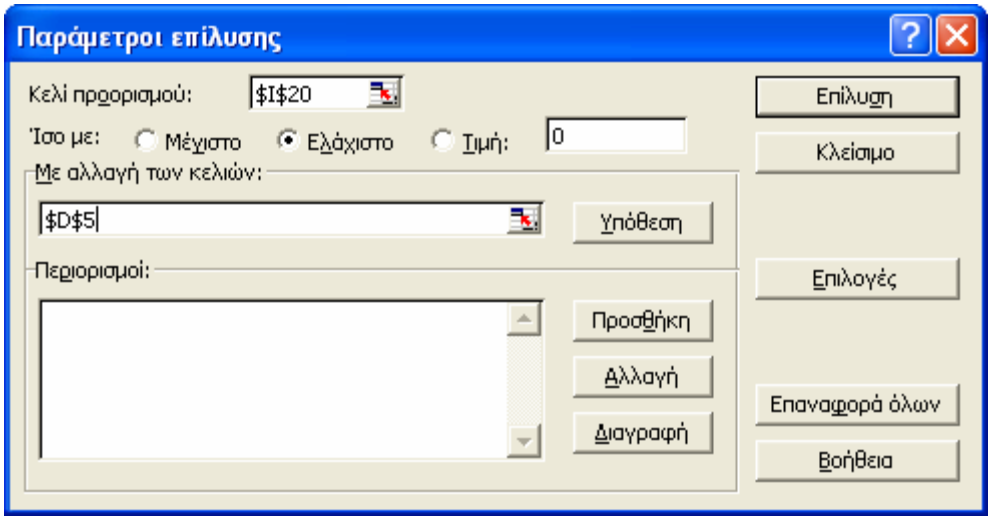
Με $x(0)=x_0$ προκύπτει $c_0 = 1 - \frac{N}{x_0}$, οπότε

$$x(t) = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{x_0} - 1\right) \cdot e^{-k \cdot t}}. \quad [31]$$

Η οθόνη του EXCEL πριν εφαρμόσουμε την «επίλυση», έχει ως εξής:



Ακολουθούμε τη διαδρομή: Εργαλεία>Επίλυση και στο παράθυρο διαλόγου

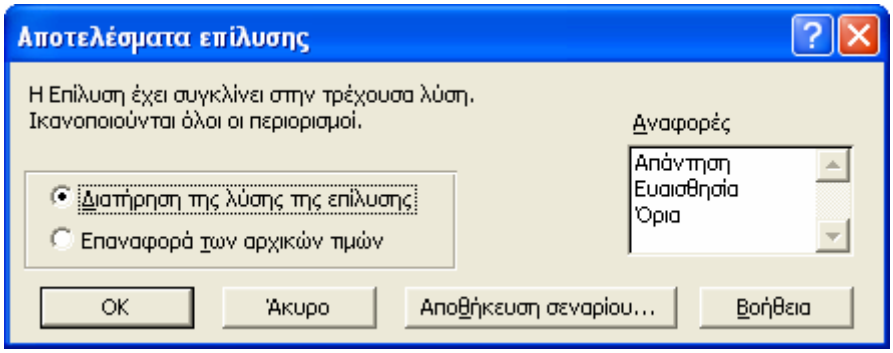


που εμφανίζεται, επιλέγουμε ως κελί προορισμού το I20: τοποθετούμε τον κέρσορα στη γραμμή «Κελί προορισμού» και κάνουμε κλικ επάνω στο I20. Αυτό είναι το κελί του οποίου η τιμή επιθυμούμε να βελτιστοποιηθεί.

Στη συνέχεια, τσεκάρουμε στην ένδειξη «Ελάχιστο».

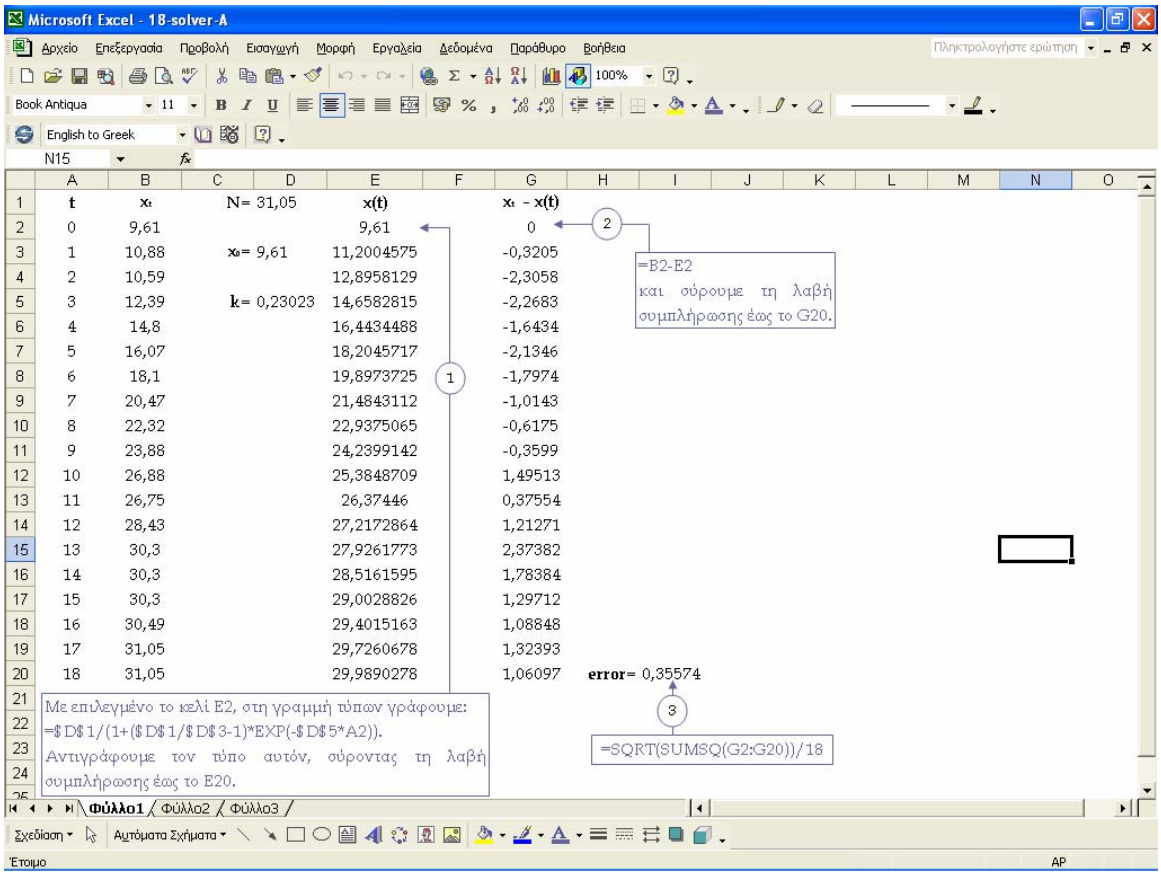
Τοποθετούμε τον κέρσορα στη γραμμή «Με αλλαγή των κελιών» και κάνουμε κλικ επάνω στο D5. Αυτό είναι το κελί που περιέχει τη μεταβλητή της οποίας την τιμή αναζητούμε, ώστε να επιτύχουμε την ελαχιστοποίηση.

Κάνουμε κλικ στο κουμπί «Επίλυση» κι εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου



όπου απλώς κάνουμε κλικ στο κουμπί «OK».

Παίρνουμε την οθόνη:



t	xₜ	x(t)	xₜ - x(t)
0	9,61	9,61	0
1	10,88	11,2004575	-0,3205
2	10,59	12,8958129	-2,3058
3	12,39	14,6582815	-2,2683
4	14,8	16,4434488	-1,6434
5	16,07	18,2045717	-2,1346
6	18,1	19,8973725	-1,7974
7	20,47	21,4843112	-1,0143
8	22,32	22,9375065	-0,6175
9	23,88	24,2399142	-0,3599
10	26,88	25,3848709	1,49513
11	26,75	26,37446	0,37554
12	28,43	27,2172864	1,21271
13	30,3	27,9261773	2,37382
14	30,3	28,5161595	1,78384
15	30,3	29,0028826	1,29712
16	30,49	29,4015163	1,08848
17	31,05	29,7260678	1,32393
18	31,05	29,9890278	1,06097

με την εκτίμηση k=0,23023. Τώρα γνωρίζουμε πλήρως τον τύπο της συνάρτησης x(t) της [31].

ii) Χωρίζουμε τις μεταβλητές στην [30] και ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε:

$$\int \frac{dx}{x\cdot\left(\left(\frac{x}{N}\right)^{p}-1\right)} = -\int k\,dt\,. \quad \textbf{[32]}$$

Για το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους, θέτουμε

$$u=\left(\frac{x}{N}\right)^{p},$$

οπότε

$$x = N \cdot u^{1/p} \quad \text{και} \quad dx = \frac{N}{p} \cdot u^{1/p - 1} du = \frac{N}{p} \cdot \frac{u^{1/p}}{u} du \,.$$

Έτσι, από την [32] παίρνουμε:

$$\int \frac{\frac{N}{p} \cdot \frac{u^{1/p}}{u}}{N \cdot u^{1/p} \cdot (u-1)} du = -\int k dt,$$

$$\int \frac{1}{u \cdot (u-1)} du = -p \cdot \int k dt,$$

$$\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = -k \cdot p \cdot t + c,$$

$$\ln \left| \frac{u-1}{u} \right| = -k \cdot p \cdot t + c,$$

$$\left| \frac{u-1}{u} \right| = e^{-k \cdot p \cdot t} \cdot e^{c},$$

$$\frac{u-1}{u} = \pm e^{c} \cdot e^{-k \cdot p \cdot t},$$

$$1 - \frac{1}{u} = c_0 \cdot e^{-k \cdot p \cdot t},$$

$$u = \frac{1}{1 - c_0 \cdot e^{-k \cdot p \cdot t}},$$

$$\left(\frac{x}{N} \right)^{p} = \frac{1}{1 - c_0 \cdot e^{-k \cdot p \cdot t}},$$

$$x^{p} = \frac{N^{p}}{1 - c_0 \cdot e^{-k \cdot p \cdot t}},$$

$$x(t) = \frac{N}{\left(1 - c_0 \cdot e^{-k \cdot p \cdot t}\right)^{1/p}}.$$

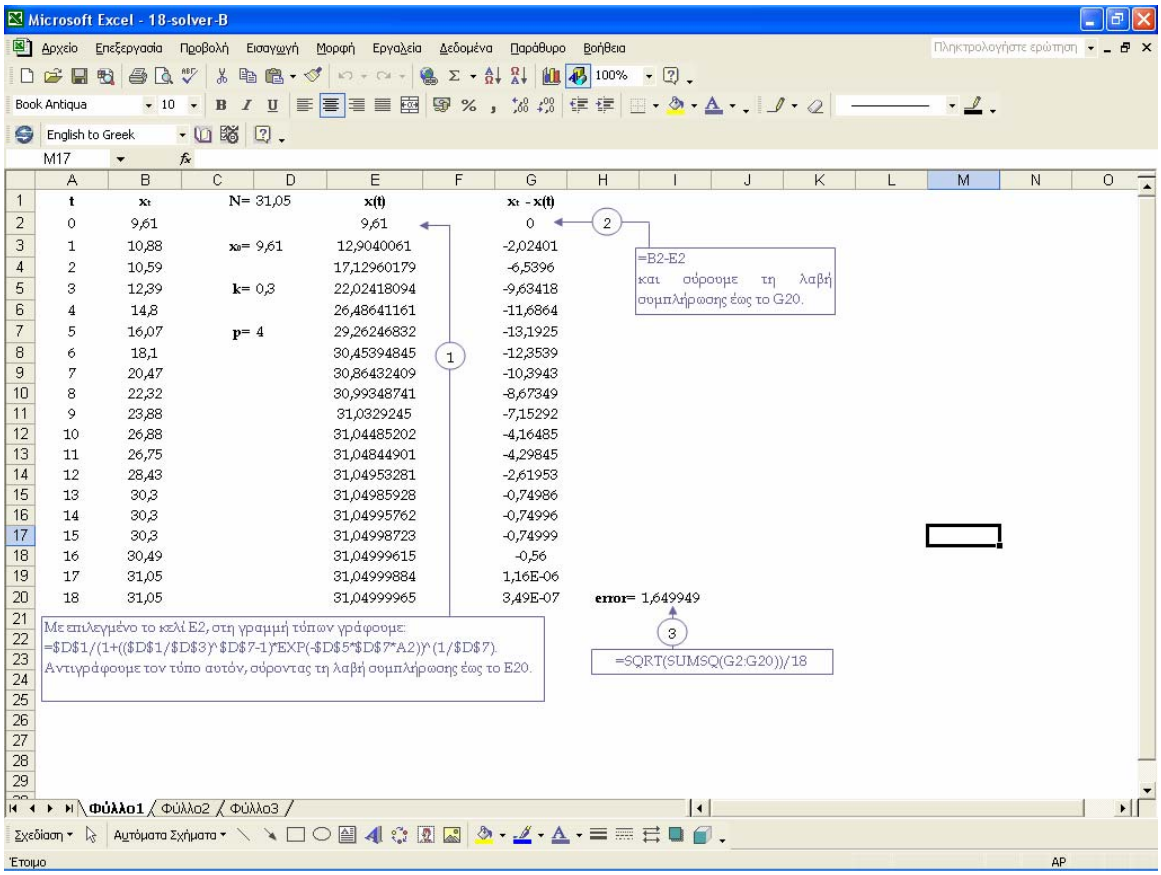
Με $x(0)=x_0$ προκύπτει

$$c_0 = 1 - \left(\frac{N}{x_0} \right)^{1/p},$$

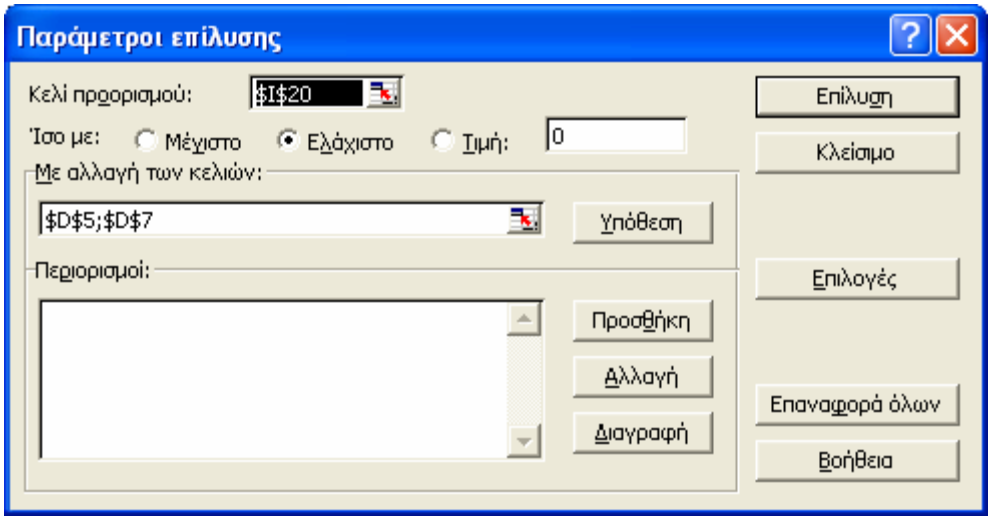
και τελικά

$$x(t) = \frac{N}{\left\{ 1 + \left[\left(\frac{N}{x_0} \right)^{p} - 1 \right] \cdot e^{-k \cdot p \cdot t} \right\}^{1/p}}. \quad \textbf{[33]}$$

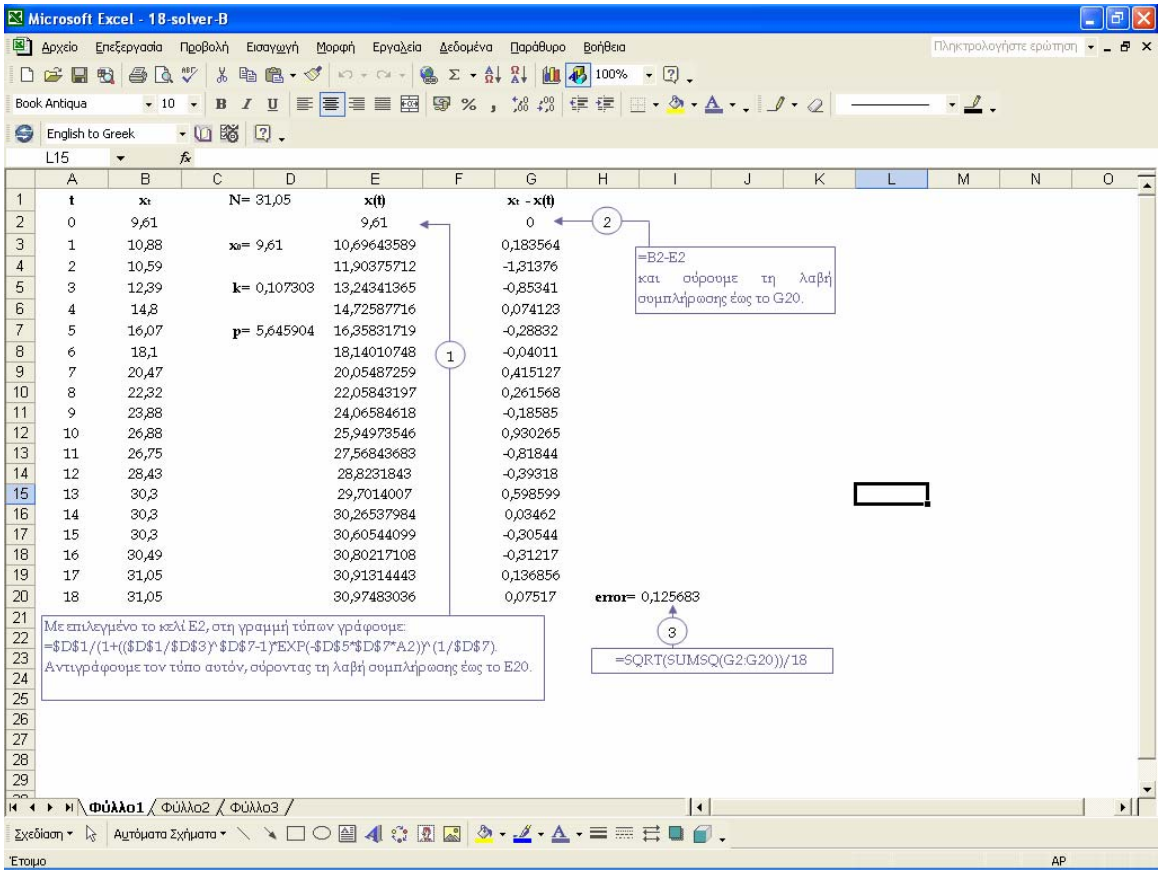
Φτιάχνουμε το παρακάτω φύλλο στο EXCEL:



Στο παράθυρο διαλόγου της επίλυσης, στη γραμμή «Με αλλαγή των κελιών» εισάγουμε τις αναφορές στα κελιά D5 και D7 χωρισμένες μ' ένα ελληνικό ερωτηματικό (;). Αυτά τα κελιά περιέχουν τις τιμές των παραμέτρων που πρέπει να προσδιοριστούν, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέσο σφάλμα εκτίμησης στο I20.



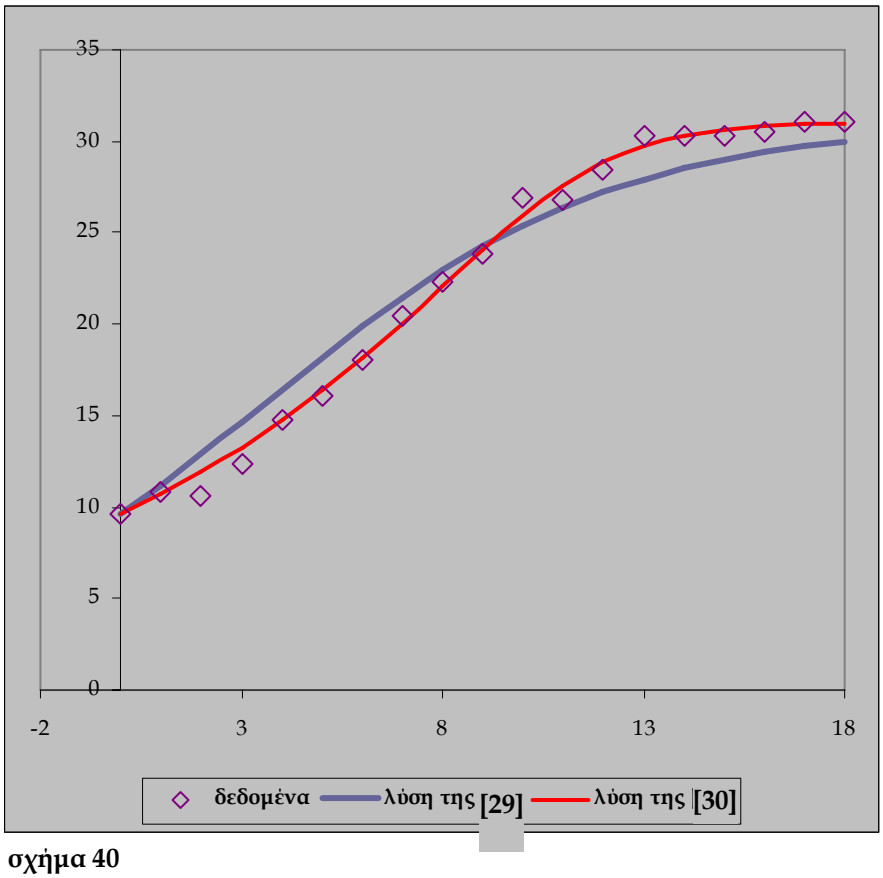
Αφού ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία, έχουμε την οθόνη



t	x_t			x(t)	x_t - x(t)
0	9,61	N=	31,05	9,61	0
1	10,88	x_0=	9,61	10,69643589	0,183564
2	10,59			11,90375712	-1,31376
3	12,39	k=	0,107303	13,24341365	-0,85341
4	14,8			14,72587716	0,074123
5	16,07	p=	5,645904	16,35831719	-0,28832
6	18,1			18,14010748	-0,04011
7	20,47			20,05487259	0,415127
8	22,32			22,05843197	0,261568
9	23,88			24,06584618	-0,18585
10	26,88			25,94973546	0,930265
11	26,75			27,56843683	-0,81844
12	28,43			28,8231843	-0,39318
13	30,3			29,7014007	0,598599
14	30,3			30,26537984	0,03462
15	30,3			30,60544099	-0,30544
16	30,49			30,80217108	-0,31217
17	31,05			30,91314443	0,136856
18	31,05			30,97483036	0,07517

με k=0,107303 και p=5,645904. Με γνωστές τις τιμές των παραμέτρων k, p γνωρίζουμε την ακριβή λύση της [33].

iii) Στο σχήμα 40 παρατηρούμε πως η λύση της [30] μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα, κάτι που γίνεται σαφές και αν παρατηρήσουμε τις τιμές των διαφορών x_t - x(t) στην κάθε περίπτωση ή το μέσο σφάλμα εκτίμησης (error) στην κάθε περίπτωση.



σχήμα 40

5. κάποια θεωρητικά ζητήματα

5.1. Ορισμοί: Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in N^*}$ πραγματικών αριθμών, λέμε ότι είναι

- *αύξουσα*, όταν $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
- *γνησίως αύξουσα*, όταν $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
- *φθίνουσα*, όταν $x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
- *γνησίως φθίνουσα*, όταν $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
- *άνω φραγμένη*, όταν υπάρχει $M\in\mathbf{R}$ τέτοιος, ώστε $x_n \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
- *κάτω φραγμένη*, όταν υπάρχει $m\in\mathbf{R}$ τέτοιος, ώστε $x_n \ge m$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
- *φραγμένη*, όταν υπάρχουν $m, M\in\mathbf{R}$ τέτοιοι, ώστε $m \le x_n \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.□

Προφανώς μια άνω φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\in N^*}$ θα έχει άπειρα το πλήθος άνω φράγματα. Το μικρότερο από αυτά, το λέμε *ελάχιστο άνω φράγμα* ή *supremum* της $(x_n)_{n\in N^*}$ και το συμβολίζουμε με $\sup x_n$. Ανάλογα ορίζεται το *μέγιστο κάτω φράγμα* ή *infimum* (συμβολικά $\inf x_n$) για μια κάτω φραγμένη ακολουθία. Εξάλλου, είναι άμεσο πως η $(x_n)_{n\in N^*}$ είναι φραγμένη ανν $\exists M>0$ τέτοιος, ώστε $|x_n| \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Προχωρούμε στον ορισμό της σύγκλισης.

5.2. Ορισμός: Έστω $(x_n)_{n\in N^*}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $L\in\mathbf{R}$. Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in N^*}$ *συγκλίνει στον L* ή *έχει όριο τον L καθώς* $n \to +\infty$, ανν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N}^*$ τέτοιος, ώστε

$$\text{αν } n > n_0 \text{ τότε } |x_n - L| < \varepsilon.$$

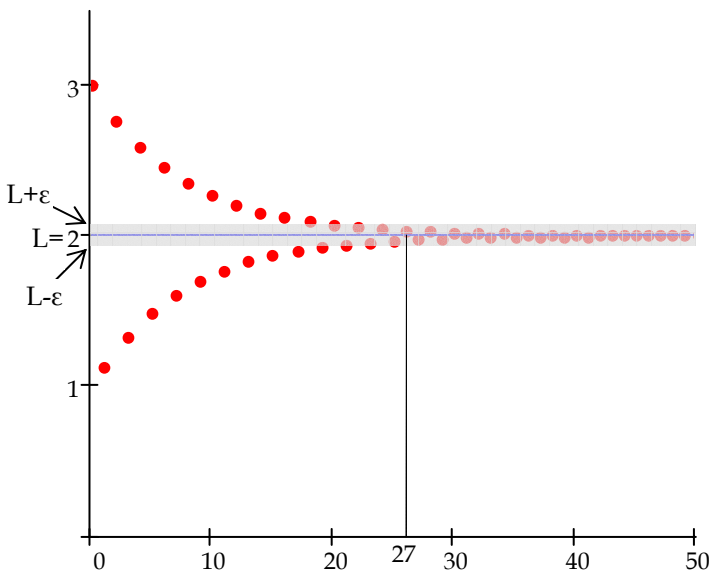
Τότε γράφουμε

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

ή

$$x_n \to L \text{ καθώς } n \to +\infty.\square$$

Στο σχήμα 41 π.χ. όλοι οι όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n\in N^*}$ με $x_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + 2$ από κάποιον δείκτη και μετά, δηλ. όλοι οι όροι της ουράς της βρίσκονται σε μια ζώνη πλάτους $2\cdot\varepsilon$, η οποία απλώνεται συμμετρικά γύρω από το όριο L και με τον ε, οσοδήποτε μικρό θέλουμε. Έχουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.



σχήμα 41: οι όροι απ' τον x_{27} και πέρα κείνται εντός της ζώνης (2-ε,2+ε).

5.3. Θεώρημα Εάν μία ακολουθία που είναι μονότονη και φραγμένη τότε είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_{n\in N^*}$ μια αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και ας συμβολίσουμε με L το ελάχιστο άνω φράγμα της. Έστω επίσης ένας ε>0, τυχαίος.
Θα είναι

$$x_n \le L, \quad \forall n \in \mathbf{N^*} \qquad \textbf{[34]}$$

και αφού L-ε<L, ο L-ε δεν είναι άνω φράγμα για την $(x_n)_{n\in N^*}$.
Συνεπώς, υπάρχει κάποιος δείκτης $n_0 \in \mathbf{N^*}$ τέτοιος, ώστε

$$L-\varepsilon < x_{n_0}. \qquad \textbf{[35]}$$

Η $(x_n)_{n\in N^*}$ υπετέθη αύξουσα, οπότε αν $n > n_0$ τότε, σύμφωνα και με τις [34], [35] και την 5.1., θα έχουμε:

$$L-\varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le L < L+\varepsilon.$$

Δηλ. για κάθε ε>0, υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N^*}$ τέτοιος, ώστε αν $n > n_0$ τότε

$$L-\varepsilon < x_n < L+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - L < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Από τον ορισμό 5.2. έπεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L. \ \square$$

Για να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση θα χρειαστούμε την
5.4. ανισότητα Bernoulli: Αν $-1 < \alpha \ne 0$ τότε ισχύει

$$(1+\alpha)^n \ge 1 + n\cdot\alpha, \quad \forall n \in \mathbf{N^*}.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγωγή.
Η αποδεικτέα, για n=1 γίνεται

$$(1+\alpha)^1 \ge 1 + 1\cdot\alpha,$$

που ισχύει ως ισότητα.
Έστω πως η αποδεικτέα ισχύει για n=k, δηλ. ότι

$$(1+\alpha)^k \ge 1 + k\cdot\alpha.$$

Για n=k+1, είναι:

$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k\cdot(1+\alpha) \overset{\substack{\text{επαγωγική}\\ \text{υπόθεση}}}{\ge} (1+k\cdot\alpha)\cdot(1+\alpha) = 1+(k+1)\cdot\alpha + k\cdot\alpha^2 \ge 1+(k+1)\cdot\alpha.$$

Τελικά, η αποδεικτέα ισχύει για κάθε $n\in\mathbf{N^*}$. $\square$

5.5. πρόταση: Αν $|\theta|<1$ τότε $\theta^n \to 0$, καθώς $n \to +\infty$.

Απόδειξη: Αν θ=0 τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.
Έστω λοιπόν θ≠0, οπότε $0 < |\theta| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|\theta|} > 1$ και άρα υπάρχει α>0 τέτοιος, ώστε

$$\frac{1}{|\theta|} = 1+\alpha.$$

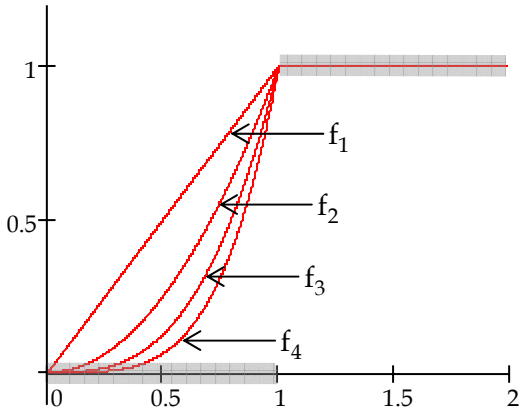
Είναι:

$$\frac{1}{|\theta|^n} = (1+\alpha)^n \ge 1+n\cdot\alpha > n\cdot\alpha \Rightarrow |\theta^n| < \frac{1}{\alpha\cdot n} \Rightarrow -\frac{1}{\alpha\cdot n} < \theta^n < \frac{1}{\alpha\cdot n}$$

και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ή θεώρημα ισοσυγκλινουσών ή θεώρημα σάντουιτς. $\square$

5.6. Ορισμός: Έστω τώρα $(f_n)_{n\in N^*}$ μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο $A\subseteq \mathbf{R}$ και μια συνάρτηση f, ορισμένη επίσης στο A. Λέμε ότι η $(f_n)_{n\in N^*}$ *συγκλίνει κατά σημείο* στην f ανν για κάθε ένα σημείο $x\in A$ ξεχωριστά και για κάθε ε>0, υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N}^*$ (που εξαρτάται από τα x, ε) τέτοιος, ώστε

$$\text{αν } n > n_0 \text{ τότε } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \square$$

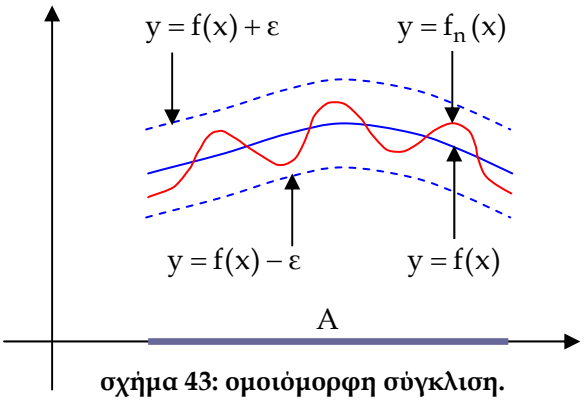


σχήμα 42: κατά σημείο σύγκλιση.

Έστω για παράδειγμα η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$ η οποία, λόγω της 5.5. συγκλίνει κατά σημείο στην $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$.

Σημειώστε πως καθεμία εκ των f_n είναι συνεχής, ενώ δεν ισχύει το ίδιο για την f. Στο σχήμα 42 μια ζώνη πλάτους 2·ε περιβάλλει τη γραφική παράσταση της f. Αν επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε $\varepsilon < \frac{1}{2}$, τότε η ζώνη αυτή αποτελείται από δύο τμήματα τα οποία δεν περιέχουν σημεία με τεταγμένη 1/2. Δεδομένου ότι έκαστη των f_n παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$, είναι σαφές πως οι γραφικές παραστάσεις των f_n δεν κείνται εντός της εν λόγω ζώνης. Στην προκειμένη περίπτωση λοιπόν, για κάθε ένα $x\in A$ ξεχωριστά και για κάθε ε>0, υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N}^*$ (που εξαρτάται από τα x, ε) τέτοιος, ώστε αν $n > n_0$ τότε το σημείο $(x, f_n(x))$ να περιέχεται στη ζώνη (f(x)-ε, f(x)+ε). Θα πρέπει όμως να παίρνουμε ολοένα και μεγαλύτερα n_0 καθώς τα x επιλέγονται ολοένα και εγγύτερα στο 0 και δεν έχουμε τη δυνατότητα επιλογής κάποιου n_0 που να είναι ικανοποιητικός για όλα τα x συγχρόνως. Στην περίπτωση κατά την οποία το ίδιο n_0 λειτουργεί εξίσου καλά για όλα τα $x\in A$, λέμε πως η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο A. Σχετικά, δίνεται ο ακόλουθος

5.7. Ορισμός: Έστω $(f_n)_{n\in N^*}$ μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο $A\subseteq \mathbf{R}$ και μια συνάρτηση f, ορισμένη επίσης στο A. Λέμε ότι η $(f_n)_{n\in N^*}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα* στην f ανν για κάθε ε>0, υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N}^*$ (που εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιος, ώστε αν $n > n_0$ τότε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, για όλα τα $x\in A$. $\square$



σχήμα 43: ομοιόμορφη σύγκλιση.

Το ότι η ανισότητα $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ ισχύει για όλα τα $n > n_0$ και για όλα τα $x\in A$ σημαίνει γεωμετρικά πως η γραφική παράσταση της $y = f_n(x)$ κείται εντός μιας ζώνης πλάτους 2·ε «παραλλήλων» γραφικών παραστάσεων, των οποίων η «μεσοπαράλληλη» είναι η y=f(x) (σχήμα 43).

Είδαμε προηγουμένως ένα παράδειγμα όπου οι f_n είναι συνεχείς για κάθε $n\in\mathbf{N}^*$, ενώ η κατά σημείο οριακή συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Αν θεωρήσουμε εξάλλου την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x)=2\cdot n\cdot x\cdot e^{-n\cdot x^2},\ 0\le x\le 1$$

η οποία έχει κατά σημείο όριο τη συνάρτηση f(x)=0, παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 2\cdot n\cdot x\cdot e^{-n\cdot x^2}dx=\left[1-e^{-n\cdot x}\right]_0^1=1-e^{-n}\to 1 \text{ καθώς } n\to+\infty,$$

ενώ

$$\int_0^1 f(x)dx=0\to 0 \text{ καθώς } n\to+\infty.$$

Δηλ. γενικά

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\ne\int_0^1\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx.$$

Τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν αποσαφηνίζουν το ζήτημα σχετικά με το πότε είναι συνεχής η οριακή συνάρτηση και πότε είναι επιτρεπτή η αντιμετάθεση των τελεστών ορίου και ολοκλήρωσης.

5.8.Θεώρημα: Έστω ότι $(f_n)_{n\in N^*}$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων ολοκληρώσιμων στο $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση f, επίσης ολοκληρώσιμη στο [a,b]. Τότε

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Απόδειξη: Έστω ε>0, τυχαίος.
Η $(f_n)_{n\in N^*}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f, άρα υπάρχει δείκτης $n_0\in\mathbf{N}^*$ (που εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιος, ώστε

$$\text{αν } n>n_0 \text{ τότε } |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\quad \text{για όλα τα } x\in[a,b].$$

Έτσι, για $n>n_0$, έχουμε:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b[f_n(x)-f(x)]dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx\le\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

Αφού αυτό είναι αληθές για κάθε ε>0, έπεται

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f(x)dx.\square$$

5.9.Θεώρημα: Έστω ότι $(f_n)_{n\in N^*}$ είναι μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση f ορισμένη στο [a,b]. Τότε η f είναι επίσης συνεχής στο [a,b].

Απόδειξη: Έστω ε>0, τυχαίος.
Η $(f_n)_{n\in N^*}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f, άρα για n από κάποιον n_0 και πέρα, θα έχουμε:

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ \text{για όλα τα } x\in[a,b].$$

Έτσι, για όλα τα h για τα οποία είναι $x+h\in[a,b]$ είναι

$$|f_n(x+h)-f(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

και λόγω της συνέχειας των f_n, $n\in\mathbf{N}^*$ υπάρχει δ>0 έτσι, ώστε για $|h|<\delta$ να έχουμε

$$|f_n(x+h)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Επομένως για $|h| < \delta$, είναι:

$$|f(x+h) - f(x)| =$$
$$|f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

που σημαίνει πως η f είναι συνεχής. □

Στο θεώρημα για την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων ενός π.α.τ. που φιλοδοξούμε ν΄ αποδείξουμε, θα αναγκαστούμε να χειριστούμε σειρές πραγματικών συναρτήσεων, οπότε θα πρέπει ν΄ αναφερθούμε σχετικά. Αρχικά, δίνεται ο ακόλουθος

5.10. Ορισμός: Έστω $(f_n)_{n\in N^*}$ μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο $A \subseteq \mathbf{R}$ και μια συνάρτηση f, ορισμένη επίσης στο A. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ λέμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, ανν η ακολουθία $\sum_{k=1}^{n} f_k$ μερικών αθροισμάτων αυτής, συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Ως συνέπεια του ορισμού 5.10. και των θεωρημάτων 5.8. και 5.9. έχουμε το

5.11. Πόρισμα:

Έστω πως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο [a,b]. Τότε:

- αν οι f_n, $n \in \mathbf{N}^*$ είναι συνεχείς στο [a,b], η f είναι επίσης συνεχής στο [a,b] και
- αν οι f_n, $n \in \mathbf{N}^*$ είναι ολοκληρώσιμες στο [a,b], η f είναι επίσης ολοκληρώσιμη στο [a,b] και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx. \square$$

Μετά λοιπόν από αυτά τα «εισαγωγικά» πλησιάζουμε στο στόχο μας που δεν είναι, παρά η απόδειξη ενός θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων ενός π.α.τ. της μορφής

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

6. ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων

Στην §2.3. επισημάναμε πως φαίνεται κατ' αρχήν λογικό το ότι αν ένα π.α.τ. έχει προκύψει απ' τη σωστή μαθηματικοποίηση ενός φυσικού προβλήματος, τότε το πρώτο θα πρέπει να έχει λύση. Πράγματι, με το θεώρημα Picard-Lindelöf που πρόκειται ν' αποδείξουμε, όχι μόνο κατοχυρώνεται η ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης για το π.α.τ.

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad \textbf{[Π]}$$

υπό κάποιες προϋποθέσεις για την f αλλά υποδεικνύεται κι ένας τρόπος προσέγγισης της λύσης με την όποια επιθυμητή ακρίβεια. Πριν όμως θα πρέπει να δούμε κάποιες προτάσεις, τα συμπεράσματα των οποίων σχετίζονται άμεσα με το θεώρημα 6.6.

6.1. Θεώρημα

Αν η f(t,x) είναι συνεχής σ' έναν τόπο του $\mathbf{R}^2$ τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x'(t) = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad \textbf{[Π]}$$

και η *ολοκληρωτική εξίσωση*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \textbf{[36]}$$

έχουν τις ίδιες λύσεις.

Απόδειξη: Αν φ(t) είναι μια λύση του π.α.τ. [Π], τότε

$$\varphi' = f(t,\varphi) \text{ και } \varphi(t_0) = x_0 .$$

Η f(t,φ(t)) είναι συνεχής ως προς t, οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε αμφότερα τα μέλη της ισότητας $\varphi' = f(t,\varphi)$ από t_0 έως t, λαμβάνοντας:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \Leftrightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \Leftrightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds,$$

δηλ. η φ(t) είναι λύση της [36].

Αντιστρόφως, έστω πως η φ(t) είναι μια λύση της [36], δηλ.

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds . \qquad \textbf{[37]}$$

Η ολοκληρωτέα στο δεύτερο μέλος της [37] είναι συνεχής, οπότε λόγω του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, παραγωγίζοντας τα μέλη της [37], παίρνουμε

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) .$$

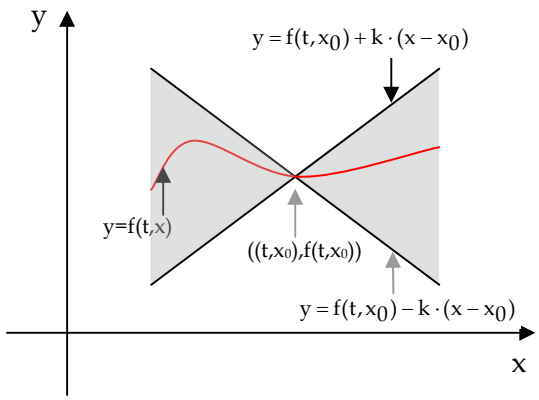
Επίσης, απ' την [37] προκύπτει $\varphi(t_0) = x_0$.

Η φ(t) λοιπόν είναι λύση του π.α.τ. [Π]. □

6.2. η συνθήκη Lipschitz

Έστω f ορισμένη σ' έναν τόπο D του $\mathbf{R}^2$. Λέμε ότι η f ικανοποιεί τη *συνθήκη Lipschitz* ως προς x (ή πιο απλά, ότι η f είναι Lipschitz ως προς x), αν υπάρχει k>0 (η σταθερά Lipschitz) τέτοιος, ώστε

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| < k \cdot |x_1 - x_2|, \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D. \ \square$$



σχήμα 44

Άρα, αν (t,x_0) είναι οποιοδήποτε σημείο του D, θα έχουμε:
$|f(t,x)-f(t,x_0)| \le k\cdot|x-x_0|, \forall (t,x)\in D$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει πως η γραφική παράσταση C της y=f(t,x) περιέχεται στον διπλό κώνο του σχήματος 44 που ορίζουν οι ευθείες $y - f(t,x_0) = k\cdot(x - x_0)$ και $y - f(t,x_0) = -k\cdot(x - x_0)$ οι οποίες διέρχονται από ένα οποιοδήποτε σημείο $A((t,x_0),f(t,x_0))$ της C.

Σημειωτέον ότι μια συνάρτηση που είναι Lipschitz ως προς x, είναι και συνεχής ως προς x, όχι όμως ως προς (t,x). Π.χ. η f(t,x)=g(t)+x είναι Lipschitz ως προς x, οποιαδήποτε κι αν είναι η συνάρτηση g(t).

6.3. πρόταση

Αν η f είναι συνεχής σ' έναν κυρτό τόπο D του $\mathbf{R}^2$ και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ υπάρχει και είναι φραγμένη στον D , τότε η f είναι Lipschitz ως προς x.

Απόδειξη:
Πράγματι, έστω $(t,x_1),(t,x_2)\in D$ με $x_1 < x_2$. Τότε, λόγω της κυρτότητας του D και του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2)$ με $(t,x_0)\in D$ έτσι, ώστε:

$$f(t,x_2) - f(t,x_1) = \frac{\partial f(t,x_0)}{\partial x}\cdot(x_2 - x_1). \qquad \textbf{[38]}$$

Όμως η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι φραγμένη στον D, άρα υπάρχει k>0 τέτοιο, ώστε

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le k, \quad \forall (t,x)\in D.$$

Απ' την [38] έπεται

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \le k\cdot|x_2 - x_1|, \text{ ο.ε.δ. } \square$$

6.4. υπενθύμιση

Στην απόδειξη του θεωρήματος Picard-Lindelöf που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα κατά Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \textbf{[39]}$$

καθώς και το

6.5. Μ-κριτήριο του Weierstrass σύμφωνα με το οποίο
εάν $\{f_n\}_{n\in N^*}$ ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο Α και $\{M_n\}_{n\in N^*}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών έτσι, ώστε

$$|f_n(x)| \le M_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ και } \forall x \in A$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ (*Μ-σειρά*) συγκλίνει, τότε $\forall x \in A$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Α, στη συνάρτηση f με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Απόδειξη: Δίνεται ότι

$$|f_n(x)| \le M_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ και } \forall x \in A$$

και ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty,$$

δηλ. για κάθε $x \in A$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ συγκλίνει, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα.
Επίσης για όλα τα $x \in A$, έχουμε:

$$|f(x) - [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)]| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \le \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n .$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, ο αριθμός $\sum_{n=m+1}^{\infty} M_n < \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρός (μικρότερος από έναν οποιονδήποτε ε>0) , επιλέγοντας τον m αρκούντως μεγάλο. Αυτό σημαίνει πως η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. □

Για παράδειγμα, είναι $\left|\frac{\sin(n \cdot x)}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbf{N}^*$ και $\forall x \in \mathbf{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ως Μ-σειρά τη συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, προκύπτει πως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2}$ είναι ομοιόμορφα και απολύτως συγκλίνουσα σε κάθε διάστημα του **R**. □
Σημειωτέον, ότι μια σειρά ενδέχεται να συγκλίνει ομοιόμορφα αλλά όχι απολύτως ή να συγκλίνει απολύτως αλλά όχι ομοιόμορφα.

6.6. το Θεώρημα Picard-Lindelöf

Στη δραστηριότητα 1 της 4.6. είδαμε ότι στη γενική περίπτωση, οι λύσεις μη γραμμικών δ.ε. δεν υπάρχουν για όλα τα t, διότι εκρήγνυνται σε πεπερασμένο χρόνο. Έτσι δεν αναμένουμε γενικά την ολική ύπαρξη λύσεων. Το Θεώρημα Picard-Lindelöf έχει τοπικό χαρακτήρα. Με τη *μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων* ή *επαναληπτική μέθοδο του Picard* θα εξασφαλίσουμε, υπό κάποιες προϋποθέσεις για την f, την ύπαρξη και μοναδικότητα μιας προσεγγιστικής λύσης σε μια περιοχή του αρχικού σημείου, για το πρόβλημα αρχικών τιμών [Π] ή ισοδύναμα (λόγω του 6.1.) για την ολοκληρωτική εξίσωση [36].

Μια μεταφορά της αρχής των αξόνων στο σημείο (t_0, x_0) οδηγεί στο «απλούστερο» π.α.τ.

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = 0 \qquad \textbf{[Π΄]}$$

και ισοδύναμα στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds \qquad \textbf{[40]}$$

Διατύπωση του Θεωρήματος:

Αν η f είναι συνεχής και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ φραγμένη στο ορθογώνιο

$$R:\ 0 \le t \le a,\ -b \le x \le b$$

του $\mathbf{R}^2$, τότε υπάρχει διάστημα [0,h] του t, με h≤a, στο οποίο ορίζεται μία και μοναδική λύση x=φ(t) για το π.α.τ. [Π΄].

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Όπως είπαμε, αρκεί ν' αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα μιας προσεγγιστικής λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης [40].

Ως προσέγγιση μηδενικής τάξης επιλέγουμε μια οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση φ_0 που διέρχεται απ' την αρχή O(0,0) των αξόνων και η απλούστερη επιλογή είναι η

$$\varphi_0(t) = 0.$$

Η φ_0 ικανοποιεί την α.σ., όχι όμως κατ' ανάγκη και την ολοκληρωτική ή τη διαφορική εξίσωση.

Η επόμενη προσέγγιση δίνεται από την

$$\varphi_1(t) = \int_0^t f(s, \varphi_0(s))ds$$

και αναμένεται να κείται εγγύτερα της λύσης αφού την κατασκευάσαμε με βάση την ίδια τη δ.ε., διορθώνοντας έτσι την αρχική προσέγγιση.

Εν συνεχεία κατασκευάζουμε την επόμενη προσέγγιση

$$\varphi_2(t) = \int_0^t f(s, \varphi_1(s))ds$$

και γενικά έχουμε μια ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων που ορίζεται απ' την αναδρομική σχέση

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \varphi_n(s))ds \qquad \textbf{[41]}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Εάν σε κάποιο στάδιο η διαδικασία αυτή βελτίωσης των προσεγγίσεων τερματιστεί, δηλ. αν για κάποιον m∈ **N*** ισχύει

$$\varphi_m(t) = \int_0^t f(s, \varphi_m(s))ds,$$

τότε θα έχει βρεθεί μια λύση της [40]. Αλλιώς θα πρέπει ν' αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N^*}$ συγκλίνει προς μια συνεχή συνάρτηση που θα είναι η λύση της [40].

Πράγματι, εάν η ακολουθία $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N^*}$ έχει όριο την φ(t), θα είναι

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{n+1}(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t),$$

οπότε παίρνοντας όρια στην [41], προκύπτει

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s, \varphi(s))ds \quad \textbf{[42]}$$

που σημαίνει ότι η φ(t) επιλύει την [40].

Η μετάβαση από την [41] στην [42] προϋποθέτει ότι είναι επιτρεπτή η εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος στο δεύτερο μέλος της [41], κάτι που όπως είδαμε δεν ισχύει εν γένει. Αυτό είναι και ένα από τα λεπτά σημεία στην απόδειξη που μας επιβάλλουν τις σχετικές υποθέσεις για την f.

Επιπλέον, οι όροι της ακολουθίας $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N^*}$ δεν είναι γενικώς δυνατό να υπολογισθούν ακριβώς, οπότε υπάρχει ο κίνδυνος σε κάποιο βήμα, π.χ. για n=N, κάποια σημεία της γραφικής παράστασης της $y = \varphi_N(t)$ να κείνται εκτός του ορθογωνίου R. Σε τέτοια όμως σημεία δε γνωρίζουμε αν η $f(t, \varphi_N(t))$ είναι συνεχής ή αν ορίζεται καν, οπότε αδυνατούμε να υπολογίσουμε την $y = \varphi_{N+1}(t)$ μέσω της [41]. Προκειμένου ν' αποφευχθεί ο κίνδυνος αυτός, σκεπτόμαστε ως εξής:

Προσδιορισμός κατάλληλου πεδίου για το t.

Η f(t,x) είναι συνεχής στο ορθογώνιο R και κατά συνέπεια φραγμένη. Έτσι, υπάρχει M>0 τέτοιος, ώστε

$$|f(t,x)| \le M, \quad \forall (t,x) \text{ στο ορθογώνιο } R.$$

Τότε έχουμε:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = |\varphi_1(t)| = \left|\int_0^t f(s, \varphi_0(s))ds\right| \le \int_0^t |f(s, \varphi_0(s))|ds \le \int_0^t M ds = M \cdot t.$$

Άρα, αν απαιτήσουμε να είναι $t \le \frac{b}{M}$, θα έχουμε εξασφαλίσει να ισχύει

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \le b.$$

Στη συνέχεια λοιπόν θεωρούμε ότι τα t ανήκουν σ' ένα διάστημα [0,h], όπου $h = \min(a, \frac{b}{M})$, οπότε τα σημεία (t,x) θ' ανήκουν σ' ένα ορθογώνιο

$$D: 0 \le t \le h, \ -b \le x \le b.$$

Απόδειξη του ότι η γραφική παράσταση καθεμιάς εκ των προσεγγίσεων είναι συνεχής και κείται στο R.

Για τα σημεία (t,x) του ορθογωνίου D, έχουμε:

Η $\varphi_1(t)$ είναι συνεχής στο [0,h] και $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \le b$.

Έστω ότι η $\varphi_n(t)$ είναι συνεχής στο [0,h] και $|\varphi_n(t) - \varphi_0(t)| \le b$.

Για $t\in[0,h]$ είναι $(t, \varphi_n(t)) \in D \subseteq R$, οπότε ορίζεται η $f(t, \varphi_n(t))$ και είναι συνεχής στο R. Έτσι ορίζεται και είναι συνεχής στο [0,h] η $\varphi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \varphi_n(s))ds$ και

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_0(t)| = |\varphi_{n+1}(t)| = \left|\int_0^t f(s, \varphi_n(s))ds\right| \le \int_0^t |f(s, \varphi_n(s))|ds \le \int_0^t M ds = M \cdot t \le b.$$

Αποδείξαμε λοιπόν επαγωγικά ότι για $t\in[0,h]$ όλες οι προσεγγίσεις $\varphi_n(t)$ ορίζονται, είναι συνεχείς και παραμένουν στο διάστημα [-b,b]. Συνεπώς η γραφική παράσταση καθεμιάς εκ των $y=\varphi_n(t)$ κείται στο ορθογώνιο R.

Απόδειξη του ότι η ακολουθία των προσεγγίσεων συγκλίνει ομοιόμορφα προς μία συνεχή συνάρτηση φ(t) ορισμένη στο [0,h].

Στη συνέχεια θ' αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N^*}$ συγκλίνει.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας και την παρατήρηση 6.3., η f είναι Lipschitz. Για κάθε $n\in\mathbf{N}^*$ έχουμε:

$$|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|=\left|\int_0^t f(s,\varphi_n(s))ds-\int_0^t f(s,\varphi_{n-1}(s))ds\right|=\left|\int_0^t [f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi_{n-1}(s))]ds\right|\le$$

$$\le\int_0^t |f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi_{n-1}(s))|ds \overset{\text{f Lipschitz}}{\le} \int_0^t k\cdot|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|ds=k\cdot\int_0^t|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|ds.$$

Έχουμε αποδείξει ότι

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\le M\cdot t \qquad \textbf{[43]}$$

και

$$|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|\le k\cdot\int_0^t|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|ds \quad \textbf{[44]}, \text{ για κάθε } n\in\mathbf{N}^*.$$

Η [44], λόγω της [43], δίνει

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\le k\cdot\int_0^t|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|ds\le k\cdot\int_0^t M\cdot s ds=k\cdot M\cdot\frac{t^2}{2}$$

και ακολούθως

$$|\varphi_3(t)-\varphi_2(t)|\le k\cdot\int_0^t|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)|ds\le k\cdot\int_0^t k\cdot M\cdot\frac{s^2}{2}ds=k^2\cdot M\cdot\frac{t^3}{3!},$$

$$\vdots$$

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\le k\cdot\int_0^t|\varphi_{n-1}(s)-\varphi_{n-2}(s)|ds\le k^{n-1}\cdot M\cdot\frac{t^n}{n!}.$$

Αφού δε

$$k^{n-1}\cdot M\cdot\frac{t^n}{n!}=\frac{M}{k}\cdot\frac{(k\cdot t)^n}{n!}\le\frac{M}{k}\cdot\frac{(k\cdot h)^n}{n!},$$

θα είναι

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\le\frac{M}{k}\cdot\frac{(k\cdot h)^n}{n!}. \qquad \textbf{[45]}$$

Περαιτέρω, έχουμε:

$$\varphi_n(t)=\varphi_0(t)+[\varphi_1(t)-\varphi_0(t)]+[\varphi_2(t)-\varphi_1(t)]+\cdots+[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]$$

$$\Leftrightarrow \varphi_n(t)=\sum_{m=1}^{n}[\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)], \qquad \textbf{[46]}$$

δηλ. η $\varphi_n(t)$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{m=1}^{\infty}[\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)].$$

Όμως η σειρά των φραγμάτων της [45] συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{k}\cdot\frac{(k\cdot h)^n}{n!}\overset{[39]}{=}\frac{M}{k}\cdot(e^{k\cdot h}-1)<+\infty,$$

οπότε απ' το Μ-κριτήριο του Weierstrass προκύπτει, λόγω και της [45], ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα προς μία συνάρτηση φ(t) ορισμένη στο [0,h]. Δηλ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]=\varphi(t) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sum_{m=1}^{n}[\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)]=\varphi(t) \overset{[46]}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t) \quad \textbf{[47]}$$

και αφού κάθε όρος της ακολουθίας $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N^*}$ των προσεγγίσεων είναι συνεχής συνάρτηση, η φ(t) θα είναι επίσης συνεχής ως ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.
Επιστρέφοντας τώρα στην [41], παίρνουμε όρια του n τείνοντος στο +∞ και έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_{n+1}(t)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^t f(s,\varphi_n(s))ds\,.$$

Απόδειξη του ότι η φ(t) επιλύει την ολοκληρωτική εξίσωση [40].

Το γεγονός ότι η σύγκλιση στην [47] είναι ομοιόμορφη, επιτρέπει την αντιμετάθεση των τελεστών ορίου και ολοκλήρωσης στο δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας, με συνέπεια την

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_{n+1}(t)=\int_0^t \lim_{n\to+\infty} f(s,\varphi_n(s))ds$$

ή ισοδύναμα, την

$$\varphi(t)=\int_0^t f(s,\varphi(s))ds$$

η οποία εξασφαλίζει πως η φ(t) επιλύει την ολοκληρωτική εξίσωση [40] και άρα το ισοδύναμο με αυτήν πρόβλημα αρχικών τιμών [Π'].
Ολοκληρώσαμε έτσι την απόδειξη περί της ύπαρξης λύσης ορισμένης στο [0,h] για το π.α.τ. [Π'] και μένει ν' αποδειχθεί η μοναδικότητα.

Απόδειξη της μοναδικότητας.

Έστω λοιπόν ότι το π.α.τ. [Π'] και ισοδύναμα η ολοκληρωτική εξίσωση [40], έχει δύο λύσεις φ(t) και ω(t) ορισμένες σ' ένα διάστημα [0,r]⊆[0,h], όπου το r επιλέγεται έτσι, ώστε το [0,r] να περιέχεται στην τομή των π.ο. των φ και ω.
Οι φ, ω θα επαληθεύουν τη [40], ήτοι

$$\varphi(t)=\int_0^t f(s,\varphi(s))ds \quad \text{και} \quad \omega(t)=\int_0^t f(s,\omega(s))ds\,.$$

Τότε,

$$|\varphi(t)-\omega(t)|=\left|\int_0^t[f(s,\varphi(s))-f(s,\omega(s))]ds\right|\le\int_0^t|f(s,\varphi(s))-f(s,\omega(s))|ds$$

$$\overset{f\ \text{Lipschitz}}{\le}\int_0^t k\cdot|\varphi(s)-\omega(s)|ds=k\cdot\int_0^t|\varphi(s)-\omega(s)|ds.$$

Αποδείξαμε δηλ. τη σχέση

$$|\varphi(t)-\omega(t)|\le k\cdot\int_0^t|\varphi(s)-\omega(s)|ds$$

η οποία, εάν g(t)= $\int_0^t|\varphi(s)-\omega(s)|ds\ge 0$, είναι διαδοχικά ισοδύναμη με τις

$$g'(t) \le k \cdot g(t),$$
$$g'(t) \cdot e^{-k \cdot t} \le k \cdot e^{-k \cdot t} \cdot g(t),$$
$$g'(t) \cdot e^{-k \cdot t} - k \cdot e^{-k \cdot t} \cdot g(t) \le 0,$$
$$\left(e^{-k \cdot t} \cdot g(t)\right)' \le 0.$$

Απ, την τελευταία προκύπτει πως η συνάρτηση

$$G(t) = e^{-k \cdot t} \cdot g(t), \quad t \in [0,r]$$

είναι φθίνουσα, οπότε έχουμε:

$t \ge 0 \Rightarrow G(t) \le G(0) \Rightarrow e^{-k \cdot t} \cdot g(t) \le 0 \Rightarrow g(t) \le 0 \Rightarrow g(t) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \omega(t)$, $\forall\ t \in [0,r]$,

δηλ. έχουμε και τη μοναδικότητα της λύσης. □

6.7. παρατηρήσεις-σχόλια

i) Για την εκτίμηση του σφάλματος $|\varphi_n(t) - \varphi(t)|$ που γίνεται κατά την $\varphi_n(t)$ προσέγγιση, $0 \le t \le h$, θ' αποδείξουμε καταρχάς, επαγωγικά την ανισότητα:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \le \frac{M \cdot k^n \cdot t^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \textbf{[48]}$$

Για n=0, θα πρέπει ν' αποδειχθεί ότι

$$|\varphi_0(t) - \varphi(t)| \le M \cdot t \Leftrightarrow |\varphi(t)| \le M \cdot t.$$

Πράγματι,

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t f(s,\varphi(s))ds\right| \le \int_0^t |f(s,\varphi(s))|ds \le \int_0^t M ds = M \cdot t.$$

Έστω ότι η αποδεικτέα ισχύει για n=ν, δηλ. ότι

$$|\varphi_\nu(t) - \varphi(t)| \le \frac{M \cdot k^\nu \cdot t^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Θα αποδείξουμε πως η [48] ισχύει για n=ν+1, δηλ. ότι

$$|\varphi_{\nu+1}(t) - \varphi(t)| \le \frac{M \cdot k^{\nu+1} \cdot t^{\nu+2}}{(\nu+2)!}.$$

Πράγματι, για n=ν+1 έχουμε:

$$|\varphi_{\nu+1}(t) - \varphi(t)| = \left|\int_0^t [f(s,\varphi_\nu(s)) - f(s,\varphi(s))]ds\right| \le \int_0^t |f(s,\varphi_\nu(s)) - f(s,\varphi(s))|ds$$

$$\overset{\text{f Lipschitz}}{\le} k \cdot \int_0^t |\varphi_\nu(s) - \varphi(s)|ds \overset{\substack{\text{επαγωγική}\\ \text{υπόθεση}}}{\le} k \cdot \int_0^t \frac{M \cdot k^\nu \cdot s^{\nu+1}}{(\nu+1)!} ds = \frac{M \cdot k^{\nu+1} \cdot t^{\nu+2}}{(\nu+2)!}.$$

Άρα η [48] ισχύει για όλα τα n.□

Λόγω της [48] και δεδομένου ότι $0 \le t \le h$, προκύπτει

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \le \frac{M \cdot k^n \cdot h^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \textbf{[49]} \ \square$$

Η παραπάνω εκτίμηση του σφάλματος κατά την προσέγγιση $\varphi_n(t)$, $0 \le t \le h$, είναι δυνατή δίχως να γνωρίζουμε την $\varphi_n(t)$, γεγονός που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ποιας τάξης προσέγγιση πρέπει να βρούμε για σφάλμα εκτίμησης δεδομένης ακρίβειας ε>0. Το h στην [49], που κατά μία έννοια καθορίζει την έκταση ισχύος της λύσης, είναι ανεξάρτητο της ακρίβειας ε και εξαρτάται μόνο από τα a, b (κατά συνέπεια από τις διαστάσεις του ορθογωνίου R) και από το φράγμα M της f. Η μείωση του h έχει ως αποτέλεσμα μια «ταχύτερη» μεν σύγκλιση στην λύση φ(t) η οποία όμως θα ορίζεται πια σε μικρότερο διάστημα.

ii) Εάν υποθέσουμε πως η f είναι συνεχής και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ φραγμένη στο ορθογώνιο

$$R:\ -a \le t \le 0,\ -b \le x \le b$$

του $\mathbf{R^2}$, τότε η αλλαγή μεταβλητής

$$\tau = -t$$

μετασχηματίζει τη συνάρτηση x(t) στην $x(-\tau) \overset{\text{ορσ}}{=} y(\tau)$ και το π.α.τ. [Π'] στο π.α.τ.

$$y'(\tau) = -f(-\tau, y(\tau)) \overset{\text{ορσ}}{=} g(\tau, y(\tau)), \quad y(0) = 0\,.$$

Η προηγηθείσα επιχειρηματολογία στην 6.6., αποδεικνύει την ύπαρξη μιας και μοναδικής λύσης του νέου αυτού π.α.τ. για 0≤τ≤h που ισοδυναμεί με την ύπαρξη μιας και μοναδικής λύσης του π.α.τ. [Π'] για -h≤t≤0.
Τελικά, τα «πλευρικά» αυτά αποτελέσματα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το π.α.τ. [Π'] έχει μια και μοναδική λύση για -h≤t≤h.

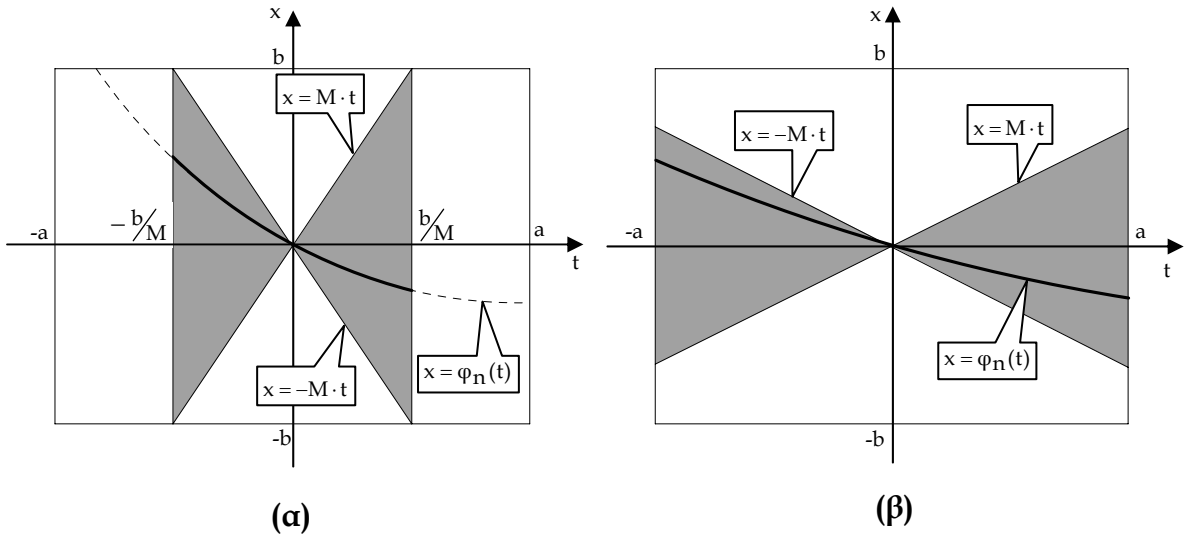
iii) Έστω t τέτοιο, ώστε $|t| \le h = \min(a, \frac{b}{M})$.

Για t≥0, έχουμε:

$$|\varphi_n(t)| = \left|\int_0^t f(s, \varphi_{n-1}(s))ds\right| \le \int_0^t |f(s, \varphi_{n-1}(s))|ds \le \int_0^t M ds = M \cdot t\,,$$

ενώ για t<0, είναι:

$$|\varphi_n(t)| = \left|\int_0^t f(s, \varphi_{n-1}(s))ds\right| = \left|-\int_t^0 f(s, \varphi_{n-1}(s))ds\right| = \left|\int_t^0 f(s, \varphi_{n-1}(s))ds\right| \le \int_t^0 |f(s, \varphi_{n-1}(s))|ds \le \int_t^0 M ds = -M \cdot t.$$



σχήμα 45: (α) $h = \frac{b}{M}$ και (β) h=a

Ισχύει συνεπώς η ανισότητα

$$|\varphi_n(t)| \le M \cdot |t|, \quad \forall t \text{ με } |t| \le h = \min(a, \frac{b}{M}),$$

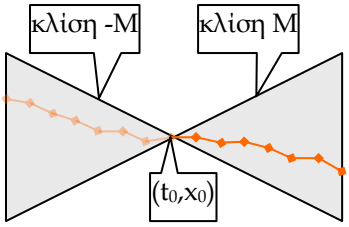
που ερμηνεύεται γεωμετρικά με το ότι προσέγγιση $\varphi_n(t)$ βρίσκεται στο σκιασμένο χωρίο σχήματος πεταλούδας (butterfly-shaped) του ορθογωνίου R (σχήμα 45) το οποίο περικλείεται απ' τις ευθείες $t = -h, t=h,\ x = -M \cdot t$ και $x = M \cdot t$.

Το γεγονός αυτό συνεπάγεται, όπως είπαμε στην απόδειξη του 6.6., πως το σημείο $(t, \varphi_n(t))$ κείται εντός του ορθογωνίου R, για κάθε t με $|t| \le h = \min(a, \frac{b}{M})$.

iv) Το θεώρημα Picard-Lindelöf, εκτός του ότι, ως θεωρητικό εργαλείο, εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας προσεγγιστικής λύσης του π.α.τ. [Π΄] ή του [Π], παρέχει και μια κατασκευαστική μέθοδο υπολογισμού των διαδοχικών προσεγγίσεων της λύσης αυτής, έναν αλγόριθμο, ο οποίος προσφέρεται για υπολογισμούς με Η/Υ: Ξεκινούμε μ΄ ένα σημείο (t_0,x_0) και υπολογίζουμε την παράγωγο $x' = f(t_0, x_0)$ που καθορίζει την κλίση της «λύσης» στο σημείο (t_0,x_0). Στη συνέχεια παίρνουμε ένα σημείο (t_1,x_1) κοντά στο (t_0,x_0) και στη διεύθυνση που καθορίστηκε απ΄ την τιμή $f(t_0, x_0)$. Τότε η παράγωγος $x' = f(t_1, x_1)$ καθορίζει μια νέα διεύθυνση στο (t_1,x_1). Κινούμενοι κατά ένα μικρό διάστημα προς αυτή τη νέα διεύθυνση, παίρνουμε ένα νέο σημείο (t_2,x_2) στο οποίο καθορίζεται μια νέα κλίση $x' = f(t_2, x_2)$. Καθώς η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, κατασκευάζεται μια πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από μικρά ευθύγραμμα τμήματα. Αν τα διαδοχικά σημεία (t_0,x_0), (t_1,x_1), (t_2,x_2), … επιλέγονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο, η πολυγωνική γραμμή προσεγγίζει μια λεία καμπύλη x=φ(t), που δεν είναι παρά η λύση της $x' = f(t, x)$ η οποία διέρχεται απ΄ το αρχικό σημείο (t_0,x_0). Με ισχύουσα τη συνθήκη

$$|f(t,x)| \le M, \quad \forall (t,x) \text{ στο ορθογώνιο } R,$$

όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που απαρτίζουν την προαναφερθείσα πολυγωνική γραμμή, έχουν κλίσεις μεταξύ –M και M. Άρα η πολυγωνική γραμμή (επομένως και η ακριβής λύση) κείται στη σκιασμένη περιοχή του σχήματος 46.



σχήμα 46

Όσο για το ζήτημα του πόσο ικανοποιητική μπορεί να είναι μια προσεγγιστική λύση έναντι της ακριβούς λύσης μιας δ.ε., ας σημειωθεί ότι αφ΄ ενός μια προσεγγιστική λύση είναι τόσο ικανοποιητική όσο και η ακριβής λύση μιας δ.ε., αφού η προσέγγιση γίνεται με την όποια επιθυμητή ακρίβεια, αφ΄ ετέρου ένα μαθηματικό μοντέλο αποτελεί ούτως ή άλλως προσέγγιση μιας πραγματικής κατάστασης.

v) Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας μπορεί, όπως αναφέρθηκε και στην §3.1., να ερμηνευθεί γεωμετρικά ως εξής: υπάρχει μόνο μια ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από δεδομένο σημείο του ορθογωνίου D ή δύο ολοκληρωτικές καμπύλες της ίδιας δ.ε. δεν έχουν κοινά σημεία. Επομένως κάθε ολοκληρωτική καμπύλη ενός π.α.τ. σαν το

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

που πολλές φορές συναντήσαμε ως τώρα, βρίσκεται εξολοκλήρου σε κάποια από τις οριζόντιες ζώνες στις οποίες διαιρείται το t-x επίπεδο από τις ευθείες-λύσεις ισορροπίας της τελευταίας αυτόνομης δ.ε., μιας και δεν είναι δυνατόν να τέμνει οποιαδήποτε εξ αυτών.

vi) Επειδή κάθε μαθηματικό μοντέλο αποτελεί προσέγγιση της πραγματικότητας, θα πρέπει τα σφάλματα μέτρησης, δηλ. οι μικρές παρεκκλίσεις των τιμών των α.σ. απ΄ τις πραγματικές τιμές τους να επιφέρουν μικρές εκτροπές στη λύση. Τότε μόνο εξασφαλίζεται η πιστότητα του μαθηματικού μοντέλου και άρα η χρησιμότητά του. Μ΄ άλλα λόγια σ΄ ένα π.α.τ. σαν το [Π] της παραγράφου 6.1., μια μικρή μεταβολή (διαταραχή) στην αρχική συνθήκη θα πρέπει να επιφέρει μικρή μεταβολή στη λύση,

ή αλλιώς η λύση θα πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση της αρχικής συνθήκης. Η ιδιότητα αυτή λέγεται *ευστάθεια*. Σχετικά με την ευστάθεια, δηλ. με τη συνεχή εξάρτηση των λύσεων από τις α.σ., που από πλευράς εφαρμογών έχει μεγάλη σημασία, μπορούμε να δούμε τα εξής:

<u>Ορισμός:</u> Το π.α.τ.

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad \textbf{[Π]}$$

λέγεται *καλώς τοποθετημένο* αν έχει μοναδική λύση η οποία είναι συνεχής συνάρτηση της α.σ.

<u>Θεώρημα της Συνέχειας:</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και Lipschitz με σταθερά k στο ορθογώνιο R: $t_0 \le t \le t_0 + a,\ x_0 - b \le x \le x_0 + b$ του $\mathbf{R}^2$, τότε το π.α.τ. [Π] είναι καλώς τοποθετημένο.

Απόδειξη: Το θέμα περί ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων το έχουμε καλύψει. Αρκεί ν' αποδειχθεί πως μία λύση φ(t) του [Π] είναι συνεχής συνάρτηση του x_0 στο διάστημα $[\,t_0, t_0 + a\,]$.
Αν λοιπόν ω(t) είναι μία λύση του π.α.τ.

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = \tilde{x}_0$$

θ' αποδείξουμε ότι για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε

$$\text{αν } |x_0 - \tilde{x}_0| < \delta \text{ τότε } |\varphi(t) - \omega(t)| < \varepsilon\,.$$

Λόγω του Θεωρήματος 6.1. θα ισχύουν οι

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \quad \text{και} \quad \omega(t) = \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\omega(s))ds\,.$$

Επομένως, αν υποθέσουμε πως $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$, τότε

$$|\varphi(t) - \omega(t)| = \left| x_0 - \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi(s)) - f(s,\omega(s))]ds \right| \le |x_0 - \tilde{x}_0| + \left| \int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi(s)) - f(s,\omega(s))]ds \right|$$

$$\le |x_0 - \tilde{x}_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\omega(s))|ds \le |x_0 - \tilde{x}_0| + k \cdot \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \omega(s)|ds < \delta + k \cdot \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \omega(s)|ds.$$

Εάν θέσουμε $g(t) = \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \omega(s)|ds$, έχουμε αποδείξει ότι

$$g'(t) < \delta + k \cdot g(t)$$

η οποία διαδοχικά είναι ισοδύναμη με τις

$$e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot g'(t) < e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot \delta + k \cdot e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot g(t),$$

$$e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot g'(t) - k \cdot e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot g(t) < e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot \delta,$$

$$\left(e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot g(t)\right)' < e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot \delta.$$

Ολοκληρώνοντας από t_0 έως t στην τελευταία, παίρνουμε:

$$e^{-k\cdot(t-t_0)} \cdot g(t) < \frac{\delta}{k} \cdot [1 - e^{-k\cdot(t-t_0)}]$$

$$\Leftrightarrow g(t) < \frac{\delta}{k} \cdot [e^{k\cdot(t-t_0)} - 1].$$

Έχουμε συνεπώς ότι:

$$|\varphi(t)-\omega(t)| < \delta + k\cdot\int_{t_0}^{t}|\varphi(s)-\omega(s)|ds = \delta + k\cdot g(t) < \delta + k\cdot\frac{\delta}{k}\cdot[e^{k\cdot(t-t_0)}-1]$$

$$= \delta + \delta\cdot[e^{k\cdot(t-t_0)}-1] = \delta\cdot e^{k\cdot(t-t_0)} \le \delta\cdot e^{k\cdot a}.$$

Τελικά, για κάθε ε>0, υπάρχει $\delta = \frac{\varepsilon}{e^{k\cdot a}} > 0$ έτσι, ώστε

$$\text{αν } |x_0 - \tilde{x}_0| < \delta \text{ τότε } |\varphi(t)-\omega(t)| < \delta\cdot e^{k\cdot a} = \varepsilon, \quad \text{ο.ε.δ.} \square$$

Όπως στο 6.7.(ii), συμπεραίνουμε πως το θεώρημα ισχύει για $(t,x)\in[t_0\text{-}a,t_0\text{+}a]\times[x_0\text{-}b,x_0\text{+}b]\subseteq \mathbf{R}^2$.

Αν λοιπόν δύο ολοκληρωτικές καμπύλες βρίσκονται αρκούντως κοντά για μια τιμή του $t\in[t_0-a,t_0+a]$, τότε η εγγύτητά τους θα διατηρείται σε ολόκληρο το διάστημα $[t_0-a,t_0+a]$. Αυτή η συνεχής εξάρτηση των λύσεων από τις α.σ. εξασφαλίζει ότι μικρές αλλαγές στις α.σ. συνεπάγονται μικρές επίσης μεταβολές στις λύσεις. Πρακτικά, αυτό σημαίνει πως γνωρίζοντας «αρκετά καλά» την κατάσταση μιας φυσικής διαδικασίας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t_0 (γνωρίζοντας δηλ. τις α.σ. με μικρό σφάλμα μέτρησης), είμαστε σε θέση να προβλέψουμε με επίσης μικρό σφάλμα εκτίμησης, το πώς αυτή θα εξελιχθεί μελλοντικά. Σημειωτέον ότι πολλές σημαντικές φυσικές διεργασίες δεν είναι ευσταθείς, άρα στα Μαθηματικά μελετούμε συχνά προβλήματα που δεν είναι καλώς τοποθετημένα. Η ευστάθεια είναι απαραίτητη στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Οι συναρτήσεις δεν αναπαρίστανται ακριβώς στον Η/Υ διότι πάντα υπάρχουν σφάλματα στρογγυλοποίησης ή αποκοπής. Αν λοιπόν έχουμε ένα ασταθές πρόβλημα, τα σφάλματα θα μεταδοθούν μέσω της εκάστοτε αριθμητικής μεθόδου που ακολουθείται και θ' αυξηθούν σε μέγεθος. Μετά από λίγο οι υπολογισμοί δε θα έχουν νόημα. Σύγχρονες αριθμητικές μέθοδοι σχεδιάζονται έτσι, ώστε να αποφευχθούν αστάθειες που δεν αποτελούσαν μέρος του αρχικού προβλήματος και τις δημιουργεί η ίδια αριθμητική μέθοδος. Η ιδέα του καλώς τοποθετημένου π.α.τ. δεν είναι παρά η μαθηματική διατύπωση της έννοιας της αιτιότητας, η οποία οφείλεται στον J. Hadamard.

vii) Για τη μοναδικότητα της λύσης θα μπορούσαμε να εργαστούμε και (όπως προτείνεται στο [60] της βιβλιογραφίας) ως εξής:

Εάν $\|\varphi(t)-\omega(t)\|$ είναι η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης $|\varphi(t)-\omega(t)|$ στο διάστημα [0,t], τότε από την

$$|\varphi(t)-\omega(t)| \le k\cdot\int_0^t|\varphi(s)-\omega(s)|ds, \text{ για κάθε } t$$

προκύπτει ότι

$$|\varphi(t)-\omega(t)| \le \|\varphi(t)-\omega(t)\|\cdot k\cdot|t-0|, \text{ για κάθε } t$$

και άρα

$$\|\varphi(t)-\omega(t)\| \le \|\varphi(t)-\omega(t)\|\cdot k\cdot|t-0| \Leftrightarrow [1-k\cdot|t|]\cdot\|\varphi(t)-\omega(t)\| \le 0.$$

Επιλέγοντας αρκούντως μικρό το μήκος $|t-0|=|t|$ και π.χ. ίσο με $\frac{1}{2\cdot k}$,τότε απ' την τελευταία προκύπτει

$$\|\varphi(t)-\omega(t)\| = 0$$

και έπεται το συμπέρασμα. $\square$

6.8. Δραστηριότητες

1. Προσεγγίσεις Picard. Βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας $\{\varphi_n(t)\}$ του Picard και συγκρίνετέ τους γραφικά με την ακριβή λύση του π.α.τ.

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 1$$

για 0≤t≤2, 0≤x≤7.

2. Εκτίμηση σφάλματος. Θεωρούμε το π.α.τ

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = 0 \qquad \textbf{[Π΄]}$$

όπου

$$f(t, x) = \eta\mu t + x^2$$

στο ορθογώνιο

$$R: \ -1 \le t \le 1, \ -1 \le x \le 1.$$

Βρείτε την $\varphi_2(t)$ προσέγγιση της λύσης με την επαναληπτική μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard και κάντε μια εκτίμηση του σφάλματος κατά τη $\varphi_5(t)$ προσέγγιση.

Οι απαντήσεις των σπουδαστών

1. Είναι f(t , x) = x, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Picard-Lindelöf στο ορθογώνιο R: $0 \le t \le 2, \ 0 \le x \le 7$.

Με $\varphi_0(t)=\varphi(0)=1$, η επανάληψη

$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi_n(s)\,ds$$

δίνει:

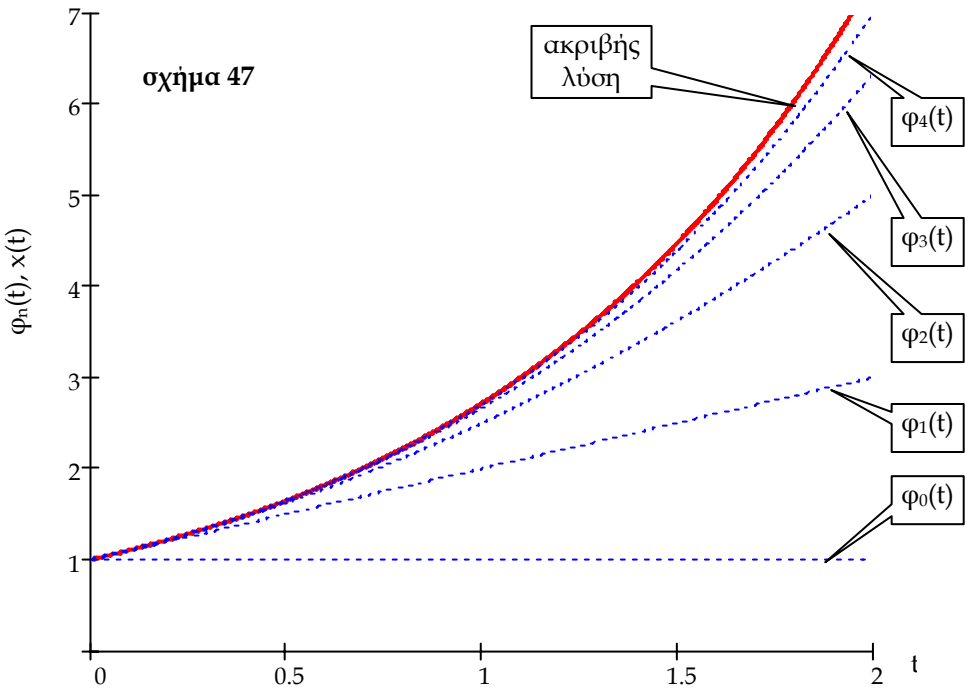
$$\varphi_1(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi_0(s)\,ds = \varphi(0) + \int_0^t 1\,ds = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi_1(s)\,ds = \varphi(0) + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_3(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi_2(s)\,ds = \varphi(0) + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6},$$

$$\varphi_4(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi_3(s)\,ds = \varphi(0) + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6})\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}.$$

Οι σπουδαστές δε δυσκολεύτηκαν με τους παραπάνω υπολογισμούς και η ικανοποίησή τους ήταν φανερή όταν κατασκευάζοντας το διπλανό σχήμα διέκριναν την ολοένα και καλύτερη προσέγγιση της ακριβούς λύσης απ' τους όρους της ακολουθίας Picard. □



2. Είναι f(t,x)=ημt+ x^2, $\frac{\partial f}{\partial x}=2\cdot x$ και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Picard-Lindelöf στο ορθογώνιο R: $|t|\le 1,\ |x|\le 1$.

Ακόμη,

$$|f(t,x)|=\left|\eta\mu t+x^2\right|\le|\eta\mu t|+\left|x^2\right|\le 1+1=2,\ \forall(t,x)\in R$$

και άρα M=2.

Επίσης

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=2\cdot|x|\le 2,\ \forall(t,x)\in R,$$

Παροτρύναμε τους σπουδαστές να θυμηθούν απ' την 6.3., πως η σταθερά k της συνθήκης Lipschitz είναι το φράγμα της $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$, οπότε παίρνουμε k=2.

Είναι $h=\min(a,\frac{b}{M})=\min(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

Για $|t|\le\frac{1}{2}=h$ οι διαδοχικές προσεγγίσεις συγκλίνουν στη λύση φ(t) του εν λόγω π.α.τ.

Έχουμε:

$\varphi_0(t)=0$,

$$\varphi_1(t)=\int_0^t f(s,\varphi_0(s))ds=\int_0^t(\eta\mu s+0^2)ds=[-\sigma\upsilon\nu s]_0^t=1-\sigma\upsilon\nu t.$$

Για τον υπολογισμό του παρακάτω ολοκληρώματος χρειάστηκαν κάποιες υπενθυμίσεις από την τριγωνομετρία:

$$\varphi_2(t)=\int_0^t f(s,\varphi_1(s))ds=\int_0^t[\eta\mu s+(1-\sigma\upsilon\nu s)^2]ds=\int_0^t(\eta\mu s+1-2\cdot\sigma\upsilon\nu s+\sigma\upsilon\nu^2 s)ds$$

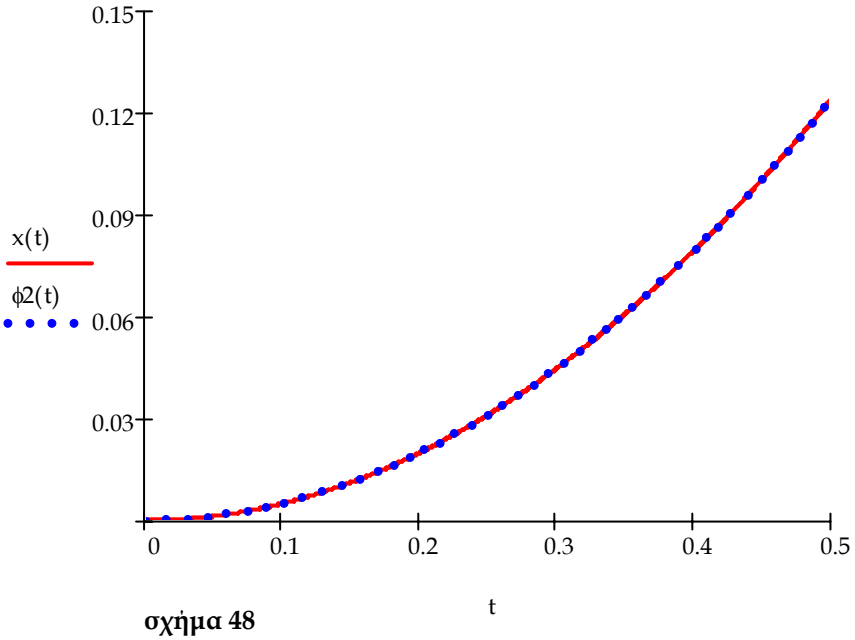
$$=\int_0^t\left(\eta\mu s+1-2\cdot\sigma\upsilon\nu s+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\cdot s}{2}\right)ds=\int_0^t\left(\frac{3}{2}+\eta\mu s-2\cdot\sigma\upsilon\nu s+\frac{\sigma\upsilon\nu(2\cdot s)}{2}\right)ds$$

$$=\left[\frac{3}{2}\cdot s-\sigma\upsilon\nu s-2\cdot\eta\mu s+\frac{1}{4}\cdot\eta\mu(2\cdot s)\right]_0^t=1+\frac{3}{2}\cdot t-\sigma\upsilon\nu t-2\cdot\eta\mu t+\frac{1}{4}\cdot\eta\mu(2\cdot t),\quad -\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}.$$

Για το σφάλμα κατά την $\varphi_5(t)$ προσέγγιση (σχέση [48], σελ. 114) έχουμε:

$$|\varphi_5(t)-\varphi(t)|\le\frac{M\cdot k^5\cdot h^{5+1}}{(5+1)!}=\frac{2\cdot 2^5\cdot(1/2)^6}{6!}=\frac{1}{720}=0{,}14\%,\quad -\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}.$$

Κι εδώ η τάξη δούλεψε συνεργατικά. Έτσι φτάσαμε στο σχήμα 48, όπου μπορούμε συγκρίνοντας τη λύση x(t) (καμπύλη κόκκινου χρώματος) με την προσέγγιση $\varphi_2(t)$ (διακεκομμένη καμπύλη μπλε χρώματος), να παρατηρήσουμε ότι πρόκειται για πολύ ικανοποιητική προσέγγιση. □



σχήμα 48

7. επίλογος

Σύμφωνα με την άποψη του Andre Weil, ενός από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του 20ου αι., η Μαθηματική επιστήμη θα πρέπει να έχει ως στόχο τη δόξα του ανθρώπινου πνεύματος και όχι να πλανιέται «στα λασπώδη μονοπάτια της οικτρής πραγματικότητας»[59]. Ξαναβρίσκουμε εδώ σε κάπως πιο πομπώδη τόνο το δόγμα του G. H. Hardy[25] κατά το οποίο οι μαθηματικοί οφείλουν ν' ασχολούνται με τα άχρηστα Μαθηματικά, τα καθαρά Μαθηματικά και όχι με τις εφαρμογές των Μαθηματικών. Αν και τα τελευταία χρόνια η ζήτηση για τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά είναι αισθητά αυξημένη, στη συνείδηση των μαθηματικών η χρησιμότητα των Μαθηματικών είναι δευτερεύουσας σημασίας. Οι Μαθηματικοί παράγουν Μαθηματικά. Αν συμβεί να βρεθούν εφαρμογές γι αυτά τόσο το καλύτερο, αλλά δεν είναι αυτός ο σκοπός, δεν είναι ο στόχος η παραγωγή χρήσιμων Μαθηματικών. Ο ίδιος ο Hardy στην «απολογία» του αναφέρει: «Ποτέ μου δεν έκανα κάτι χρήσιμο. Καμία ανακάλυψή μου δεν είχε, ούτε φαίνεται πως θα επιφέρει άμεσα ή έμμεσα, για καλό ή κακό, την παραμικρή διαφορά στη βελτίωση του κόσμου.»[40]. Κατά μια ρήση που αποδίδεται στον Gauss, «τα Μαθηματικά είναι η βασίλισσα των επιστημών και η Θεωρία Αριθμών είναι (εξ αιτίας της μη χρησιμότητάς της) η βασίλισσα των Μαθηματικών.» Με βάση το διαχωρισμό των Μαθηματικών σε καθαρά κι εφαρμοσμένα, η Θεωρία Αριθμών ήταν ό,τι πιο καθαρό υπάρχει. Όμως αυτό έπαψε να ισχύει. Ο Hardy γελάστηκε. Ο φυσικομαθηματικός P. Cvitanovič που ασχολείται με τη Χαοτική Δυναμική, σε μια ομιλία του στα τέλη της δεκαετίας του 1980, παρέπεμπε το ακροατήριό του στο σύγγραμμα *An Introduction to the theory of numbers* της κλασσικής Θεωρίας Αριθμών των Hardy και Wright[91]. Η Θεωρία των Αριθμών, ακόμη κι αυτή, έχει απροσδόκητα σοβαρότατες εφαρμογές στη Χαοτική Δυναμική (και όχι μόνο). Είναι σαφές ότι τα καθαρά Μαθηματικά, όντας αυτάρκη και απελευθερωμένα από τις δεσμεύσεις και τις επιταγές της πραγματικότητας, οδηγούν ενίοτε σε θεωρήσεις που έχουν βαθύτατες συνέπειες για την ίδια αυτή πραγματικότητα, οικτρή ή όχι. Αυτό και μόνο το στοιχείο αποκαλύπτει και την πολιτισμική φύση των Μαθηματικών[100]. Στο κάτω, κάτω μια από τις κύριες λειτουργίες του πολιτισμού και ιδιαιτέρως της επιστημονικής του πλευράς, είναι να προσαρμόζει τον άνθρωπο στο ολοένα διευρυνόμενο περιβάλλον του και να τον καθιστά ικανό να το ελέγχει. Το αν ένα κομμάτι των Μαθηματικών είναι χρήσιμο ή όχι, κρίνεται στο βαθμό που ικανοποιεί ανθρώπινες ανάγκες ή αυξάνει την ευημερία σε μια κοινωνία. Το σίγουρο είναι πως η κοινωνία χρειάζεται την επιστήμη κι η επιστήμη χρειάζεται τα Μαθηματικά και ως εκ τούτου η χρησιμότητα των Μαθηματικών είναι δεδομένη. Η επιθυμία του επιστήμονα να οργανώσει λογικά τις σύνθετες εμπειρίες του τον οδηγεί αναπόφευκτα στη χρήση των Μαθηματικών. Μάλιστα, όσο μακρύτερα από τα Μαθηματικά βρίσκεται ένας επιστημονικός κλάδος, τόσο πιο ανασφαλή είναι τα θεωρητικά του μέρη.[32] Προκειμένου οι επιστήμονες να μελετήσουν τις φυσικές διεργασίες, κατασκευάζουν μαθηματικά μοντέλα. Ένα μαθηματικό μοντέλο αποτελεί μια διαφοροποίηση σε επίπεδο αφαίρεσης του πρωτοτύπου που είναι ένα φυσικό αντικείμενο ή μια φυσική διαδικασία. Συγκεκριμένα στοιχεία του πρωτοτύπου έχουν απομακρυνθεί και απλουστεύσεις έχουν λάβει χώρα προκειμένου να κατασκευαστεί το μοντέλο που συνεπώς θεωρείται λιγότερο «πραγματικό» από το πρωτότυπο. Από λογική άποψη το πρωτότυπο

αποτελεί μια εκδοχή στην οποία οι συνθήκες του μαθηματικού μοντέλου ικανοποιούνται μόνο σε κάποιο βαθμό[9]. Ο Bender το θέτει απλά: «Το μαθηματικό μοντέλο μιμείται την πραγματικότητα χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των Μαθηματικών»[13]. Οι επιστήμονες χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά συνθέτοντας με αυτά, μοντέλα τα οποία εν συνεχεία επεξεργάζονται. Αυτό είναι η θεωρία. Κατόπιν η θεωρία ελέγχεται σε σχέση με το κατά πόσο συμφωνεί με τις μετρήσεις και τις παρατηρήσεις. Αυτό είναι το πείραμα. Ανάλογα με τα πειραματικά δεδομένα το μοντέλο τροποποιείται και αυτός ο κύκλος της μοντελοποίησης επαναλαμβάνεται ωσότου η θεωρία και το πείραμα συμφωνήσουν ή ενδεχομένως εγκαταλειφθεί το μοντέλο. Παραδόξως, η διαδικασία αυτή είναι αποτελεσματική, η επιστημονική εξέλιξη συμβαδίζει με την ανάπτυξη των Μαθηματικών και σε πάρα πολλές περιπτώσεις διαφαίνεται ένας ικανοποιητικός έως ιδιαιτέρως επιτυχής χειρισμός εξωμαθηματικών ζητημάτων από τα Μαθηματικά. Το γεγονός αυτό δε δεικνύεται κατά τη γνώμη μας στη διάρκεια της μέσης εκπαίδευσης και κάποιες πτυχές του είχαμε ως στόχο να παρουσιάσουμε με την πρόταση που προηγήθηκε, για λόγους που έχουν εξηγηθεί και με τον κατά το δυνατόν απλούστερο τρόπο. Στην πορεία, αναπόφευκτα η συζήτηση στράφηκε στη μαθησιακή διαδικασία η οποία εκ των υστέρων χαρακτηρίζεται κοπιώδης, χρονοβόρα αλλά και εξελισσόμενη μ' ενδιαφέρον και ενθουσιασμό. Άξιζε, πιστεύουμε, τον κόπο να αποτολμήσουμε αυτή την προσπάθεια αν σκεφτούμε τα πλεονεκτήματά της: αύξηση του χρόνου μαθηματικής επικοινωνίας των σπουδαστών μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα, κοινωνική υποστήριξη για τη μάθηση των Μαθηματικών, ευκαιρίες για όλους στην επιτυχή αντιμετώπιση προβλημάτων, ενασχόληση με τα Μαθηματικά μέσω της εξερεύνησης πραγματικών καταστάσεων. Κάνοντας έναν απολογισμό, μπορούμε να πούμε πως σίγουρα επιβεβαιώθηκαν τα εξής: **α)** Οι σπουδαστές εργαζόμενοι σε ομάδες μπορούν επιτυχώς ν' αντιμετωπίσουν καταστάσεις που υπερβαίνουν τις δυνατότητές τους ως άτομα. Η συνεργασία των σπουδαστών στη ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης έχει ως αποτέλεσμα τη σμίκρυνση της απόστασης ανάμεσα στο πραγματικό επίπεδο ανάπτυξης (το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί με εργασίες που μπορούν να γίνουν αυτόνομα από τους σπουδαστές) και στο δυνητικό επίπεδο ανάπτυξης (το οποίο προσδιορίζεται με εργασίες που μπορούν να έλθουν σε πέρας με την καθοδήγηση του δάσκαλου ή τη συνεργασία με ικανότερους συναδέλφους τους). Το πέρασμα από το πραγματικό στο δυνητικό επίπεδο ανάπτυξης επιτυγχάνεται κυρίως μέσω μιας διαδικασίας μίμησης που όμως δεν εξελίσσεται μηχανιστικά αλλά ως διαδικασία που βοηθά τους σπουδαστές να ξεπεράσουν τα όριά τους μέσω της συνεργασίας τους με το δάσκαλο ή με ικανότερους συναδέλφους τους. Έτσι υπονοείται μια σύμβαση μεταξύ των εμπλεκομένων για τη συγκρότηση της διυποκειμενικής τους σχέσης, η οποία αποτελεί τη βάση της ανάπτυξης και από την οποία εξαρτάται και το αποτέλεσμα που θα προκύψει. Ο σπουδαστής χρειάζεται επίσης τη σκαλωσιά μάθησης, που στην αρχή είναι απαραίτητη και σταδιακά η ανάγκη γι αυτήν μειώνεται μέχρι ο σπουδαστής να συγκροτήσει το ενέργημα (τι θα κάνω, για ποιο σκοπό και πως) και να μπορεί να εργαστεί με αυτοέλεγχο. Η σκαλωσιά μάθησης που στήνει ο δάσκαλος για να περάσουν οι μαθητές του σε ανώτερο επίπεδο κατανόησης είναι αποτελεσματική εάν οι μαθητές δεν υποχρεώνονται ν' ανεβαίνουν πολλά σκαλοπάτια μαζί. **β)** Οι σπουδαστές δημιουργούν κι επεξεργάζονται εργαλεία και σημεία-σύμβολα (και κατά συνέπεια πολιτισμό). Η χρήση των εργαλείων έχει σημαντικές επιπτώσεις στην ίδια τη δραστηριότητα που έχει ανατεθεί στους σπουδαστές: τα εργαλεία τροποποιούν και

μορφοποιούν τη δραστηριότητα και συγχρόνως τροποποιούνται τα ίδια, λειτουργούν ως διαβιβαστές της ψυχολογικής διαδικασίας του σπουδαστή και ταυτόχρονα εκπροσωπούν τη γνώση που οικοδομήθηκε από τον ίδιο. Η σημειωτική λειτουργία δηλ. η διαδικασία διαμόρφωσης και διαμεσολάβησης των συμβόλων ή του κάθε είδους κώδικα συμβάλλει αποφασιστικά στην ανάπτυξη της σκέψης. Η διαδικασία της ανακάλυψης από τους σπουδαστές όπως εξελίσσεται, συνιστά μια εσωτερική ανταμοιβή γι αυτούς και λειτουργεί ως παρότρυνση για περαιτέρω ανακάλυψη και ως κίνητρο για τη διατήρηση του ενδιαφέροντος όσον αφορά τα Μαθηματικά. Σημαντικό ρόλο ως προς αυτόν τον παράγοντα διαδραματίζουν αφενός η επιλογή των μοντέλων που παρουσιάστηκαν και αφετέρου η διεπιστημονικότητα που χαρακτηρίζει τη διαπραγμάτευσή τους. **γ)** Όπου σημειώνονται δυσκολίες ή παρανοήσεις αντιμετωπίζονται έτσι, ώστε τελικά μέσω του διαλόγου και της συνεργασίας που αναπτύσσονται, όχι μόνο να δίνονται απαντήσεις στα ερωτήματα που ανακύπτουν, μα ταυτόχρονα οι σπουδαστές οδηγούνται στο να διεξέλθουν και συναφών θεμάτων που δεν είχαν τεθεί εξαρχής και απλώς προέκυψαν ή να δώσουν ερμηνείες π.χ. γραφημάτων, με σκοπό τον έλεγχο ή την τεκμηρίωση των συμπερασμάτων τους. **δ)** Το ένα που σαφώς κερδίσαμε είναι το ότι γνωρίσαμε τρόπους με τους οποίους τα Μαθηματικά εμπλέκονται στην καθημερινότητά μας. Αυτό όμως δεν θα το είχαμε επιτύχει δίχως τη χρήση του Η/Υ. Ο υπολογιστής βέβαια και το εκάστοτε λογισμικό από μόνα τους δεν παράγουν Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά παράγονται από το στοχασμό επί των επεμβάσεών μας στο λογισμικό. Το δεύτερο λοιπόν που πρέπει να επισημάνουμε είναι ο μεγάλης σημασίας ρόλος του Η/Υ στη διδακτική πρακτική γενικότερα και στη διδασκαλία των δ.ε. ειδικότερα. Είναι προφανής η ανάγκη για εποπτεία στη διδασκαλία των δ.ε., ανάγκη που ο υπολογιστής, ως το πλέον εξελιγμένο εποπτικό μέσο, έρχεται να καλύψει άμεσα βοηθώντας μας να συσχετίσουμε τις αλγεβρικές παραστάσεις και τις μαθηματικές έννοιες που αντιπροσωπεύουν με τις πραγματικές καταστάσεις από τις οποίες προέρχονται. Η χρήση του υπολογιστή συνοδεύει εξ αρχής τη συζήτησή μας αλλά με τρόπο που η παρουσία του είναι όχι απλώς έντονη μα καθοριστική. Ο υπολογιστής αποτελεί το μέσο που μας καθοδηγεί στη διατύπωση εικασιών και μας βοηθά στις απόπειρες ελέγχου της ορθότητάς τους, το μέσο που μας βοηθά να κατανοούμε, όχι πως απαντώνται τα ερωτήματα - αυτό το κάνει η απόδειξη – αλλά το γιατί τίθενται. Η εικασία είναι το πρώτο βήμα, η απόδειξη έπεται. Στα περισσότερα βιβλία Μαθηματικών η απόδειξη ενός θεωρήματος είναι αυτό που εντέλει διδάσκεται και όχι η πορεία προς τη διατύπωση του. Ως εκ τούτου η απόδειξη έχει παραδοσιακά υπερτονιστεί ενώ η εικασία, η πορεία προς τη σύλληψη και διατύπωση μιας μαθηματικής πρότασης αφήνεται ως η αθέατη πλευρά της μαθηματικής δημιουργίας. Η αλήθεια όμως είναι πως σε μια μαθηματική πρόταση η εικασία και η απόδειξη συνυπάρχουν και συμμετέχουν ισάξια και η μαθηματική πρακτική εμπεριέχει αμφότερες αυτές τις διεργασίες. Η λογική και η εποπτεία είναι και οι δύο απαραίτητες. Κατά τον Poincaré[79] «η λογική είναι το εργαλείο της απόδειξης, ενώ η εποπτεία είναι το εργαλείο της επινόησης», η αφορμή για τη δημιουργία της εικασίας (ας θυμηθούμε πόσες φορές ένα καλό σχήμα στη σχολική Γεωμετρία μας οδήγησε σε εικασίες που ήταν προς τη σωστή κατεύθυνση της απόδειξης). «Ας μάθουμε ν΄ αποδεικνύουμε, όμως ας μάθουμε και να εικάζουμε» λέει ο Polya και ο Η/Υ αδιαμφισβήτητα μας βοήθησε να εικάσουμε, να «δούμε» το δρόμο που οδηγεί στην απόδειξη. Αυτό είναι το δεύτερο που κερδίσαμε. **ε)** Κατά τον Polya[78], «στα Μαθηματικά πρώτα μαντεύουμε και μετά αποδεικνύουμε…. Θα πρέπει να δώσουμε λοιπόν την ευκαιρία στους μαθητές μας να μυηθούν, μέσω κατάλληλων προβλημάτων, στο να μαντεύουν πρώτα και να αποδεικνύουν μετά». Συγκρίνοντας τους σπουδαστές αυτής της τάξης με τους

υπόλοιπους που παρακολούθησαν το μάθημα κατά τον παραδοσιακό τρόπο, μπορούμε δίχως καμιά υπερβολή να πούμε ότι οι σπουδαστές μας είχαν κι εκμεταλλεύτηκαν την ευκαιρία να μάθουν να μαντεύουν, να εικάζουν, να ελέγχουν και ν' αποδεικνύουν, να πάρουν μια γεύση από την πρακτική των Μαθηματικών ξεκινώντας από εμπειρικά στοιχεία και συμμετέχοντας σε μια, κατά τη δική τους εκπεφρασμένη γνώμη, ελκυστική και αποτελεσματική διαδικασία διδασκαλίας.

Ανεξάρτητα από το αν επετεύχθησαν οι αρχικοί μας στόχοι, κάτι για το οποίο δε θα αποφανθούμε εμείς, από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια Β. Φαρμάκη για την ανοχή της και την ανεκτίμητη βοήθειά της, τον καθηγητή Ν. Κλαουδάτο που, δίχως ο ίδιος να το γνωρίζει, υπήρξε νοερά συνοδοιπόρος μου σ' αυτή την εργασία, τον καθηγητή Χ. Αθανασιάδη για την ενθάρρυνση που μου προσέφερε και τους φοιτητές μου του Τ.Ε.Ι. Χαλκίδας που επίσης δίχως να το γνωρίζουν βοήθησαν με τις παρεμβάσεις και τις παρατηρήσεις τους στο να οδηγήσουν οι συναντήσεις μας στην αίθουσα διδασκαλίας, στη μορφή και τη δομή της προηγηθείσης διδακτικής πρότασης.

Βιβλιογραφία

1. Αθανασιάδης Χ., Καλογερόπουλος Γ., Στρατής Ι. (1990), *Μαθήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων – σημειώσεις παραδόσεων*, Αθήνα.
2. Aleksandrov A. D., Kolmogorov A. N., Lavrent'ev M. A. (Eds.) (1999), *Mathematics, its Content, Methods and Meaning*, Dover.
3. Αλικάκος Ν., Καλογερόπουλος Γ. (2004), *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική.
4. Ang K. C. (2006), *Differential Equations, Models and Methods*, McGraw-Hill.
5. Apostol T., *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός τ.Ι και ΙΙ*, Εκδόσεις Ατλαντίς.
6. Apostol T. (1982), *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley.
7. Αποστολόπουλος Θ. (1998), *Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών*, Αθήνα.
8. Αραχωβίτης Ι. (2001), *Καμπύλες Μάθησης και το Κατώφλι του Χάους ή Μία Μέθοδος Αξιολόγησης*, Πρακτικά Α΄ Συνεδρίου «Σύνδεση Τριτοβάθμιας & Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης», Θεσσαλονίκη.
9. Aris Rutherford (1994), *Mathematical Modeling Techniques*, Dover.
10. Αρτεμιάδης Ν. (2000), *Ιστορία των Μαθηματικών*, Αθήνα.
11. Baird J., (2001), *Learning and Teaching: From Ignorance to Understanding*. Στο Clark D., *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
12. Bartolini Bussi M. G., (1994), *Theoretical and Empirical Approaches to Classroom Interaction*. Στο Biehler, Schollz et al (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*.
13. Bender E. (2000), *An Introduction to Mathematical Modeling*, Dover.
14. Bigge M. (1990), *Θεωρίες Μάθησης για Εκπαιδευτικούς*, εκδόσεις Πατάκη.
15. Βίττγκενστάϊν (2007), *Στοχασμοί*, εκδόσεις Στιγμή.
16. Borrelli R. L., Coleman C. S., *Modeling and Visualization in the Introductory ODE Course*. Στο Kallaher M. (Ed.), *Revolutions in Differential Equations*, MAA Notes, #50.
17. Boyce W., Diprima R. (1999), *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
18. Boyce W., Brannan J. (2007), *Differential Equations*, John Wiley & Sons.
19. Boyce W., *Differential Equations in the Information Age*. Στο Kallaher M. (Ed.), *Revolutions in Differential Equations*, MAA Notes, #50.
20. Bradley T., Patton P. (1998), *Essential Mathematics for Economics and Business*, John Wiley & Sons.
21. Braun M. (1993), *Differential Equations and Their Applications*, Springer.
22. Briggs W. (2005), *Ants, Bikes & Clocks, Problem Solving for Undergraduates*, SIAM.
23. Clark C. (1990), *Mathematical Bioeconomics*, Wiley-Interscience.
24. Δάσιος Γ. (1991), *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πάτρα.
25. Davis P., Hersh R. (1981), *Η Μαθηματική Εμπειρία*, εκδόσεις Τροχαλία.
26. Δουγαλής Β., *Μερικές Σκέψεις για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Ομιλία για την τελετή απονομής του βραβείου Ξανθόπουλου-Πνευματικού, 1/12/2000, http://www.math.uoa.gr /web/greek/omiliadoug.html
27. Dyfour-Janvier, B., Bednarz, N.,& Belanger, M., (1987), *Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation*. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in Teaching and Learning of Mathematics*, London: Lawrence Erlbaum Associates.
28. Edwards C. H., Penney D. E. (1994), *Calculus with Analytic Geometry*, Prentice Hall.
29. Edwards C. H., Penney D. E. (1996), *Differential Equations Computing and Modeling*, Prentice Hall.
30. Elia I. (2003), *The Influence of the Didactical Contract on Problem Solving: Matching Unusual Word Problems with Given Answers*, 3d Mediterranean Conference On Mathematical Education, Athens.
31. Enns R. H., McGuire G. C. (2007), *Computer Algebra Recipes-An Advanced Guide to Scientific Modeling*, Springer.
32. Ζερβός Σ. (1991), *Τι μπορούν να μας πουν τα Μαθηματικά και οι Φυσικές Επιστήμες*, Αθήνα.
33. Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R. (2007), *Thomas' Calculus, Τόμος Ι*, Π.Ε.Κ..
34. Fontana D. (1996), *Ο Εκπαιδευτικός στην τάξη*, εκδόσεις Σαββάλας.

35. Freudenthal H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Reidel.
36. Goldberg S. (1986), *Introduction to Difference Equations with Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*, Dover.
37. Goldstein L., Lay D., Schneider D. (1993), *Calculus and its Applications*, Prentice Hall.
38. Gottman J. et al. (2005), *The Mathematics of Marriage, Dynamic Nonlinear Models*, M.I.T. Press.
39. Gray J. J. (2000), *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press.
40. Hardy G.H. (1991), *Η απολογία ενός μαθηματικού*, Π.Ε.Κ..
41. Holton D., et al (1999), *Mathematical Problem Solving in Support of the Curriculum*. Στο Int. J. of Math. Educ. Sci. Technol., vol. 30, No 3.
42. Howson G (2005)., *"Meaning" and School Mathematics*. Στο Kilpatrick J., Hoyles C. et al. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, Mathematics Education Library vol. 37, Springer.
43. Hoyles C. (2005), *Making Mathematics and Sharing Mathematics: Two Paths to Co-Constructing Meaning?*. Στο Kilpatrick J., Hoyles C. et al. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, Mathematics Education Library vol. 37, Springer.
44. Hughes-Hallett D., Gleason A. et al. (1994), *Calculus*, John Wiley & Sons.
45. Kaput, J. J., (1987), *Representation Systems and Mathematics*. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in Teaching and Learning of mathematics*, London: Lawrence Erlbaum Associates.
46. Kaput, J. J., (1987), *Toward A Theory of Symbol Use in Mathematics*. Στο C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in Teaching and Learning of mathematics*, London: Lawrence Erlbaum Associates.
47. Καραγεώργος Δ. (2000), *Το Πρόβλημα και η Επίλυσή του*, μια διδακτική προσέγγιση, εκδόσεις Σαββάλας.
48. Κλαουδάτος Ν. (1991), *Η Μοντελοποίηση στη διδακτική πράξη*, διεθνής επιστημονική διημερίδα στη Διδακτική των Μαθηματικών, Ρόδος.
49. Κλαουδάτος Ν. (1996), *Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών»*.
50. Κλαουδάτος Ν. (2000), *Η Διδασκαλία των Μαθηματικών με Πραγματικά Προβλήματα και Εφαρμογές - που βρισκόμαστε σήμερα*, Ε.Μ.Ε., Πρακτικά 17ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.
51. Κλαουδάτος Ν. (2004), *Η Επικοινωνιακή Προσέγγιση του Vygotsky και η Θεωρία της Αλληλοδράσης-Αλληλεπίδρασης*.
52. Κλαουδάτος Ν. (2005), *Εισαγωγή στη Θεωρία της Διδασκαλίας*.
53. Klein M. (1990), *Γιατί δε μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης*, εκδόσεις Βάνιας.
54. Klein M. (1998), *Calculus, An Intuitive and Physical Approach*, Dover.
55. Kreith K., *Απειροστικός Λογισμός – ναι ή όχι;*, περιοδικό QUANTUM, τόμος 2 - τεύχος 1.
56. Κυβεντίδης Θ. (1992), *Διαφορικές Εξισώσεις τ. ΙΙΙ*, Εκδόσεις Ζήτη.
57. Κυβεντίδης Θ. (1993), *Δυναμική των Πληθυσμών*, Εκδόσεις Ζήτη.
58. Lanchester F. W., *Mathematics in Warfare*. Στη συλλογή δοκιμίων Newman (Ed.) (2000), *The World of Mathematics*, vol. 4, Dover.
59. Lang S. (1997), *Η γοητεία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Κάτοπτρο.
60. Lin C. C., Segel L.A. (1988), *Mathematics Applied to deterministic Problems in the Natural Sciences*, SIAM.
61. Logan J. D. (2002), *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Π.Ε.Κ..
62. Maor E. (2005), *e : Η Ιστορία ενός Αριθμού*, Κάτοπτρο.
63. Mankiw N. G. (2002), *Αρχές της Οικονομικής τ. Β*, εκδόσεις Τυπωθήτω.
64. Mariotti M. A. (1995), *Images and Concepts in Geometrical Reasoning*. Στο Sutherland R. & Mason J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computer in Mathematics Education*, Springer Verlag.
65. Mickens R. (1990), *Difference Equations, Theory and Applications*, Chapman & Hall.
66. Μπαρκάτσας Α. (2003), *Σύγχρονες Διδακτικές και Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις στα Μαθηματικά του 21ου αι.*, εκδόσεις Κωστόγιαννος.
67. Murray J. (1993), *Mathematical Biology, vol. I, An Introduction*, Springer.
68. Νεγρεπόντης Σ. (1991), *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών και Προτάσεις για τη Μαθηματική Εκπαίδευση*, διεθνής επιστημονική διημερίδα στη Διδακτική των Μαθηματικών, Ρόδος.
69. Νεγρεπόντης Σ. (1993), *Κοινή Μεθοδολογία στην Ανακάλυψη και στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 3η διεθνής επιστημονική διημερίδα στη Διδακτική των Μαθηματικών, Ρόδος.

70. Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1986), *Απειροστικός Λογισμός τ. Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία.

71. Neumann J., *The Mathematician*. Στη συλλογή δοκιμίων Newman (Ed.) (2000), *The World of Mathematics*, vol 4, Dover.

72. Neuwirth E., Arganbright D. (2004), *Mathematical Modeling with M.S. EXCEL*, Thomson, Brooks/Cole.

73. Noss, R. & Hoyles, C., (1996), *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

74. Noss R., *Designing a learnable Mathematics: a fundamental role for the computer?*, 1ο Συνέδριο ΕνΕΔιΜ.

75. Περδικάρης Σ. (1984), *Αξιωματική τοποθέτηση του Polya στη διαδικασία της μάθησης των Μαθηματικών και μερικοί κανόνες διδασκαλίας*, Νέα Παιδεία, Άνοιξη 1984.

76. Polya G., *Πώς να το λύσω*, εκδόσεις Σπηλιώτη.

77. Polya G. (2001), *Η Μαθηματική Ανακάλυψη, τ.1*, εκδόσεις Κάτοπτρο.

78. Polya G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. 2, Princeton Univ. Press.

79. Poinaré H. (1997), *Η αξία της επιστήμης*, Εκδόσεις Κάτοπτρο.

80. Resnick L. B. et al., *Η κατανόηση της Άλγεβρας*. Στο Βοσνιάδου Σ. (1999), *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*, Gutenberg.

81. Reynolds B., et al, (1995), *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*, MAA Notes, #37.

82. Rudin W. (1983), *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill.

83. Σγαρδέλης Σ. (2006), *Μαθηματικά Μοντέλα στη Βιολογία*, University Studio Press.

84. Sierpinska A., *On Understanding the Notion of Function*. Στο Harel G. & Dubinsky E. (Eds.) (1992), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA.

85. Sierpinska A. & Lerman S. (1996), *Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education*. Στο Bishop et al. (Eds), *Handbook of Research in Mathematics Education*.

86. Sierpinska A. (2005), *Discoursing Mathematics Away*. Στο Kilpatrick J., Hoyles C. et al. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, Mathematics Education Library vol. 37, Springer.

87. Simmons G., Krantz S. (2007), *Differential Equations: Theory, Technique and Practice*, McGraw-Hill.

88. Silverman R. (2002), *Modern Calculus and Analytic Geometry*, Dover.

89. Sokolnikoff I., Redheffer R. (2001), *Μαθηματικά για φυσικούς και Μηχανικούς*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π..

90. Spivac M. (1967), *Calculus*, Addison-Wesley.

91. Stewart I. (1998), *Παίζει ο Θεός ζάρια; - Η επιστήμη του Χάους*, Εκδόσεις Τραυλός.

92. Straffin P. (Ed.), *Applications of Calculus*, MAA Notes, #29.

93. Στράντζαλος Π., Κατάβολος Α. (1986), *Εισαγωγή στη Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων*, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

94. Tenenbaum M., Pollard H. (1985), *Ordinary Differential Equations, an Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering and the Sciences*, Dover.

95. Thomas G., Finney R. (1997), *Απειροστικός Λογισμός, τ. Ι*, Π.Ε.Κ.

96. Τουμάσης Μ. (1999), *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Κωστόγιαννος.

97. Τραχανάς Σ. (1999), *Διαφορικές Εξισώσεις τ.1*, Π.Ε.Κ..

98. Vygotsky, L. S., (1986), *Thought and Language*, MIT Press.

99. West B., *Technology in Differential Equations Courses: My Experiences, Student Reactions*. Στο Kallaher M. (Ed.) (1999), *Revolutions in Differential Equations*, MAA Notes, #50.

100. Wilder R. (1986), *Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών*, Εκδόσεις Κουτσούμπος Α.Ε.

101. Weller K., Snow J. (2003), *Exploratory Examples for Real Analysis*, MAA.

102. Young H. (1994), *Φυσική τ. Α΄ – Μηχανική, Θερμοδυναμική*, εκδόσεις Παπαζήση.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

1. Στη σελίδα όπου αναγράφονται τα περιεχόμενα, η γραμμή

   4.6 Παρατηρήσεις…σελ. 80

   ν΄ αντικατασταθεί με την

   4.5 Παρατηρήσεις…σελ. 80.
2. Στη σελίδα όπου αναγράφονται τα περιεχόμενα, η γραμμή

   4.7 Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη…σελ. 80

   ν΄ αντικατασταθεί με την

   4.6 Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη…σελ. 82.
3. Στη σελίδα 80, η επικεφαλίδα

   4.6 Παρατηρήσεις

   ν΄ αντικατασταθεί με την

   4.5 Παρατηρήσεις.
4. Στη σελίδα 82, η επικεφαλίδα

   4.7 Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη

   ν΄ αντικατασταθεί με την

   4.6 Δραστηριότητες που συζητήθηκαν στην τάξη.
5. Στη σελίδα 82, στην απάντηση της δραστηριότητας 1, στην πρώτη γραμμή, η φράση

   Η τάξη δούλεψε όπως στο σχόλιο 3 σελ. 75-76

   ν΄ αντικατασταθεί με την

   Η τάξη δούλεψε όπως στο σχόλιο 3 της §4.4.
6. Στη σελίδα 110, στη δεύτερη γραμμή, η φράση

   Στην δραστηριότητα 1 της 4.5. είδαμε ότι…

   ν΄ αντικατασταθεί με την

   Στη δραστηριότητα 1 της 4.6. είδαμε ότι…