ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

Η εξίσωση Pell στα Ελληνικά και Ινδικά Μαθηματικά

Συγγραφή:
Μαρίνα Μπρόκου
Δ201101

Επιβλέπων:
Ομότ. Καθηγητής
Στ. Νεγρεπόντης

Αθήνα, Ιούλιος 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**
1.1 Η εξίσωση Pell 1
1.1.1 Συνεχή κλάσματα 2
1.1.2 Συγκλίνουσες (convergents) (x_n, y_n) 3

2 Αρχαία Εποχή **4**
2.1 Ανθυφαίρεση 4
2.2 Οι Πυθαγόρειοι και οι πλευρικοί-διαμετρικοί αριθμοί . . . 6
2.2.1 Ορισμός και βασική ιδιότητα 6
2.2.2 Πυθαγόρεια προέλευση πλευρικών-διαμετρικών . 8
2.2.3 Πλευρικοί-διαμετρικοί ως ανθυφαιρετικές προσεγγίσεις του λόγου διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου 8
2.3 Αρχιμήδης 12

3 Πλάτων και παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση **15**
3.1 Πλατωνικές Ιδέες και τετραγωνικοί άρρητοι 16
3.2 Θεόδωρος-Θεαίτητος και ανθυφαιρετική ασυμμετρία τετραγωνικών αρρήτων 17
3.3 Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας "Ασπαλιευτής" (*Σοφιστής* 218b-221c) 18
3.3.1 Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή 18
3.3.2 Συναγωγή-Λόγος του Ασπαλιευτή 19
3.3.3 Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή 22
3.4 Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας "Σοφιστής" (*Σοφιστής* 234e-236d & 264b-268d) 23
3.5 Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας "Πολιτικός" στον *Πολιτικό* 23
3.5.1 Ο ορισμός του Πολιτικού ως φιλοσοφικό ανάλογο παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης (*Πολιτικός 258c-267c, 289e-305e)* 24

3.5.2 Τα δέκα πρώτα βήματα της Διαίρεσης και Συναγωγής (258b-267c) 26
3.5.3 Η παλινδρομική περιοδικότητα στο μύθο των εποχών Κρόνου και Δία (268d-274e) και η συσχέτιση με τον ορισμό του Πολιτικού 27
3.5.4 Τα δέκα τελευταία βήματα της διαίρεσης (267c-268d & 274e-277c, 289e-305e) 28
3.6 Ανακατασκευή της απόδειξης της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης με χρήση εργαλείων από το Βιβλίο X 29
3.6.1 Μαθηματικά εργαλεία για την ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας 29
3.6.2 Η απόδειξη του Θεωρήματος Περιοδικότητας . . . 31
3.6.3 Η απόδειξη του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας (ΘΠΠ) 33

4 Ινδοί 37
4.1 Kuttaka (pulveriser) 37
4.2 Varga-prakṛti 41
4.3 Ειδική λύση του Brahmagupta 42
4.3.1 Η Αρχή Σύνθεσης του Brahmagupta 42
4.3.2 Παραδείγματα 44
4.3.3 Επίλυση της varga-prakṛti όταν υπάρχει λύση για $l = \pm 1, \pm 2$, ή ± 4 49
4.4 Cakravāla ή Κυκλική Μέθοδος 53
4.4.1 Jayadeva 53
4.4.2 Bhāskara II 54
4.4.3 Nārāyaṇa 62

5 Ζήτημα προέλευσης Ινδικών Μεθόδων 65
5.1 Θεωρία van der Waerden περί Αρχαίας Ελληνικής προέλευσης 66
5.2 Συγκλίνουσες και ανθυφαίρεση 67
5.3 Cakravāla και Ανθυφαίρεση 68
5.3.1 Μετάβαση στο επόμενο ζεύγος συγκλινουσών . . 72
5.3.2 Κανόνας παράλειψης ανθυφαιρετικού βήματος . . 72
5.3.3 Κριτήριο ελάχιστης απόλυτης τιμής 74
5.3.4 Παραδείγματα 76
5.3.5 Το ζήτημα της αναγκαιότητας της kuttaka 78
5.4 Τετραγωνισμός 79

5.5 Χρήση τετραγωνισμών για συντομεύσεις 81
5.6 Επίλογος 85

Κατάλογος σχημάτων

3.1 Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c) 19
3.2 Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c) και το Κριτήριο Λόγου 22

Κατάλογος πινάκων

3.1 Η παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση στον *Πολιτικό* . 25

4.1 **D=67** - Ινδοί 61
4.2 **D=103** - Ινδοί 64
4.3 **D=97** - Ινδοί 64

5.1 **D=67** - Ανθυφαιρετικά βήματα 76
5.2 **D=61** - Ανθυφαιρετικά βήματα 77
5.3 **D=97** - Ανθυφαιρετικά βήματα 77
5.4 **D=103** - Ανθυφαιρετικά βήματα 77

Ευχαριστίες

Κύριε Νεγρεπόντη, σας ευχαριστώ για την πολύτιμη καθοδήγηση καθώς και για την υποστήριξή σας καθ'όλη τη διάρκεια των περασμένων μηνών. Είμαι πραγματικά ευγνώμων και ίσως ο χαρακηρισμός να είναι ελλιπής σε σχέση με ό,τι αισθάνομαι.

Κυρία Φαρμάκη και Κύριε Ζαχαριάδη, θα ήθελα να σας ευχαριστήσω ιδιαίτερα, για το ενδιαφέρον και τις παρατηρήσεις σας όσον αφορά την προσπάθεια αυτή. Είναι ένα από τα κίνητρα που με ωθούν να προχωρώ.

Διονυσία, ένα ευχαριστώ θα ήταν λίγο για την άψογη συνεργασία, την προσήνεια και την προθυμία σου. Είσαι ο φάρος του Μεταπτυχιακού Προγράμματος.

Θείε Χαρίλαε και Θεία Μαρία, σας ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου για όλα.

Άγγελε και Δήμητρα η ψυχολογική υποστήριξή σας και η υπομονή σας θα έπρεπε να ανταμείβεται με βραβείο. Ή και ρεκόρ Γκίνες...

Αποστόλη σε ευχαριστώ πολύ για την όλη βοήθεια με το LaTeX.

Μαμά, ό,τι και να πω, αρκετό δεν θα είναι. Ευχαριστώ.

Περίληψη

Ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης Pell $x^2 = Dy^2+1$, όπου D μη-τετράγωνος αριθμός και x, y φυσικοί αριθμοί, ήταν γνωστές στους Πυθαγόρειους ($D = 2$, πλευρικοί-διαμετρικοί αριθμοί) και στον Αρχιμήδη ($D = 3$, *Κύκλου Μέτρησις*).
Διάφορες μέθοδοι επίλυσης της εξίσωσης Pell, οι οποίες αναφέρονται στα Ινδικά Μαθηματικά (6ος - 12ος αι. μ.Χ. Brahmagupta, Jayadeva, Bhāskara II), μελετήθηκαν από τον C.O. Selenius (1975) και από τον B.L. van der Waerden (1976, 1983). Ο πρώτος, συσχέτισε τη μέθοδο cakravāla με ένα τμήμα της σύγχρονης θεωρίας των συνεχών κλασμάτων (Euler) μιλώντας για αντιστοιχία με semi-regular συνεχή κλάσματα. Ο δεύτερος, θεώρησε τις Ινδικές μεθόδους ως συνέχεια προερχόμενη από τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά χωρίς όμως να έχει πειστικά επιχειρήματα για να στηρίξει την διαίσθησή του αυτή.
Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα επιχειρηθεί μια αναδρομή από την Αρχαιότητα μέχρι και τη Σύγχρονη Εποχή κατά την οποία θα επιδιωχθεί μια σαφέστερη και στενότερη συσχέτιση της συμβολής των Ινδικών μαθηματικών στην εξίσωση Pell με τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.
Στην πορεία της αναδρομής αυτής, παρουσιάζονται τα επιχειρήματα που λείπουν από τον van der Waerden για να στηρίξει την αρχαιοελληνική ανθυφαιρετική προέλευση των Ινδικών μεθόδων και αυτά είναι:

- Η μελέτη του Πλάτωνα (*Φίληβος, Θεαίτητος, Σοφιστής, Πολιτικός*) από την οποία αποκαλύπτεται πως η μέθοδος της Διαίρεσης και Συναγωγής για την απόκτηση γνώσης επί των Πλατωνικών Ιδεών είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της Παλινδρομικά Περιοδικής Ανθυφαίρεσης δυνάμει-μόνο σύμμετρων ευθειών. Αυτό υποδεικνύει πως ο Θεαίτητος και το περιβάλλον του γνώριζαν το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας για τετραγωνικούς άρρητους.

- Η συμβολή του Βιβλίου Χ των *Στοιχείων* όσον αφορά την παρουσία των απαραίτητων εργαλείων για την απόδειξη του εν λόγω Θεωρήματος. Πράγματι, οι έννοιες των αποτομών και εκ δύο ονομάτων ευθειών καθώς σαφώς και η συζυγία αυτών είναι επαρκείς για την απόδειξη του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας και ο Θεαίτητος αν μη τι άλλο τις είχε στα χέρια του καθώς το Βιβλίο Χ αποδίδεται σε αυτόν.

- Η συμβολή του Βιβλίου Χ όσον αφορά την κατανόηση της προέλευσης της Ινδικής μεθόδου του τετραγωνισμού Brahmagupta που χρησιμοποιείται κατά κόρον στην επίλυση της εξίσωσης Pell. Θα δούμε πως ένα ολόκληρο μέρος του Βιβλίου Χ αφορά τον τετραγωνισμό αποτομών και την ταξινόμησή τους με βάση τον προστιθέμενο όρο που εμφανίζεται στις εξισώσεις $x^2 = Dy^2 + l$ που αποτελούν για τους Ινδούς ενδιάμεσες βοηθητικές εξισώσεις για την επίλυση της Pell.

- Η εμπλοκή της παλινδρομικότητας στη χρήση των τετραγωνισμών ως συντομεύσεων από τους Ινδούς.

Τα κυριότερα αποτελέσματα των παραπάνω είναι:

- Η απόδειξη πως η Ινδική μέθοδος cakravāla στην πλήρη της μορφή (χωρίς δηλαδή την εφαρμογή τοπικών συντομεύσεων που χρησιμοποιούν σε ορισμένα σημεία οι Ινδοί) είναι ισοδύναμη με την ανθυφαίρεση, δηλαδή με την επέκταση συνεχών κλασμάτων τετραγωνικών αρρήτων χωρίς να χρειάζεται η χρήση semi-regular συνεχών κλασμάτων.

- Η προέλευση του τετραγωνισμού Brahmagutpa από το Βιβλίο Χ του Θεαίτητου.

- Οι ενδείξεις για ένα μέρος του σκοπού του "μυστηριώδους" Βιβλίου Χ, εάν λάβουμε υπ'όψιν τα παραπάνω αποτελέσματα.

Σημείωση: Η παράθεση των Αρχαίων Κειμένων έγινε από το TLG: "Θησαυρός της Ελληνικής Γλώσσας".

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η εξίσωση Pell

Εξίσωση Pell καλείται η Διοφαντική εξίσωση

$$x^2 = Dy^2 + 1, \tag{1.1}$$

όπου D μη τετράγωνος φυσικός αριθμός.

Η σύγχρονη κατηγοριοποίησή της ως Διοφαντική καταδεικνύει την αναγκαιότητα εύρεσης όχι γενικά ρητών, αλλά συγκεκριμένα ακέραιων λύσεων για αυτήν.

Το αξιοσημείωτο όσον αφορά την εξίσωση Pell, είναι το γεγονός πως ο λόγος που δημιουργείται από κάθε ζεύγος λυσεών της είναι πολύ καλή ρητή προσέγγιση για το $\sqrt{D}$.

Το 1768 ο Lagrange ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε απόδειξη για το ότι η εξίσωση Pell έχει πάντα λύση και μάλιστα άπειρες.

Το όνομα της εξίσωσης Pell οφείλεται σε ένα εκ παραδρομής λάθος του Euler σε αλληλογραφία του με τον Goldbach , όπου αποδίδει λανθασμένα τη μέθοδο επίλυσής της στον Άγγλο Pell. Στην πραγματικότητα, όπως μας πληροφορεί ο Wallis [Weil, 1984, σελ.93], η πρώτη σύγχρονη ολοκληρωμένη μέθοδος επίλυσης της (1.1) με ακεραίους δίδεται από τον Brouncker σαν απάντηση στο πρόβλημα - πρόκληση επίλυσής της που έθεσε ο Fermat το 1657. Αν και ιστορικά ανακριβής, η ονομασία "Εξίσωση Pell", συνεχίζει να χρησιμοποιείται, καθώς είναι σαφής και βολική για τον μαθηματικό κόσμο.

Ο Euler περί το 1730 παρατήρησε πως η μέθοδος του Brouncker , ουσιαστικά ταυτίζεται με την επέκταση συνεχούς κλάσματος του $\sqrt{D}$. Αξιοσημείωτο όμως είναι το γεγονός πως ισοδυναμεί στη βάση της και με τη Ινδική μέθοδο *cakravāla*.

Πηγαίνοντας ακόμα πιο πίσω στο χρόνο, στην Αρχαία Ελλάδα της εποχής των Πυθαγορείων, συναντάμε λύσεις της (1.1) για συγκεκριμένες τιμές του D, με χρήση ανθυφαίρεσης, μιας μεθόδου ισοδύναμης με τα συνεχή κλάσματα που βασίζεται στον Ευκλείδειο αλγόριθμο.

Έλληνες, Ινδοί, σύγχρονοι μαθηματικοί της Δύσης...Ας αρχίσουμε το δικό μας ταξίδι σε μια προσπάθεια συσχέτισής τους με πυρήνα την εξίσωση Pell !

1.1.1 Συνεχή κλάσματα

Το μαθηματικό υπόβαθρο για την αντιμετώπιση της εξίσωσης Pell στη σύγχρονη εποχή αποτελεί, όπως ήδη αναφέρθηκε, η Θεωρία Συνεχών Κλασμάτων. Η Θεωρία αυτή άρχισε να δημιουργείται τον 16ο αι. από ονόματα όπως ο Bombelli και ο Cataldi, εμπλουτίστηκε τον 17ο αι. με τη συμβολή των Fermat, Brounker και Wallis και τέλος έφτασε σε επίπεδο ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει ολοκληρωτικά το Πρόβλημα του Pell, τον 18ο αι. με τη συνεισφορά των Euler, Lagrange και Legendre.

Σύμφωνα με τη Θεωρία Συνεχών Κλασμάτων, κάθε πραγματικός αριθμός x_0 μπορεί να αναπαρασταθεί ως συνεχές κλάσμα ως εξής:

$$x_0 = \mu + \frac{1}{x_1} = \mu + \cfrac{1}{\kappa_1 + \cfrac{1}{x_2}} = \mu + \cfrac{1}{\kappa_1 + \cfrac{1}{\kappa_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = \mu + \cfrac{1}{\kappa_1 + \cfrac{1}{\kappa_2 + \cfrac{1}{\kappa_3 + (...)}}},$$

όπου $\mu > 1$ το ακέραιο μέρος του x και $\frac{1}{x_i} < 1$ το δεκαδικό. Το x_i είναι κατά συνέπεια αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας και η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί με τον ίδιο τρόπο.

Για να αναπαραστήσουμε την επέκταση συνεχούς κλάσματος ενός πραγματικού αριθμού, χρησιμοποιούμε το ακέραιο μέρος από κάθε x_i γράφοντας

$$x_0 = [\mu, \kappa_1, .., \kappa_n, (...)].$$

Οι τελείες στο τέλος της παραπάνω αναπαράστασης βρίσκονται μέσα σε παρένθεση διότι οι ρητοί αριθμοί αναπαρίστανται από πεπερασμένα συνεχή κλάσματα, επομένως η αναπαράσταση σταματά σε καποιο κ_n ενώ οι άρρητοι από άπειρα συνεχή κλάσματα.

Ο Euler πρώτος παρατήρησε, αλλά ο Lagrange πρώτος απέδειξε περί το 1770 πως όλοι οι τετραγωνικοί άρρητοι[1] έχουν παλινδρομικά περιοδικά συνεχή κλάσματα.

[1]Οι άρρητοι που το τετράγωνό τους είναι ρητός.

Θεώρημα 1.1 (Fermat, Brouncker, Euler, Lagrange — Legendre, Galois)**.** *Έστω D μη τετράγωνος φυσικός.*
Το συνεχές κλάσμα της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{D}$, είναι ***παλινδρομικά περιοδικό****.*
Δηλαδή, υπάρχουν αριθμοί μ_1 και $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{n-1}, \kappa_n$, τ.ώ. το συνεχές κλάσμα του $\sqrt{D}$ έχει την εξής μορφή:

$$[\mu_1, period(\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{n-1}, (\kappa_n), \kappa_{n-1}, ..., \kappa_2, \kappa_1, 2\mu_1].$$

1.1.2 Συγκλίνουσες (convergents) (x_n, y_n)

Στο σημείο αυτό είναι εύλογο να αναρωτηθούμε σχετικά με το ποια είναι η ουσιαστική σχέση της Θεωρίας Συνεχών Κλασμάτων με την εξίσωση Pell. Η απάντηση δίδεται στη συνέχεια. Υπαρχει μοναδική διπλή ακολουθία φυσικών αριθμών (x_n, y_n), με x_n και y_n σχετικώς πρώτους, για την οποία το συνεχές κλάσμα των λόγων $\dfrac{x_n}{y_n}$ είναι αρχικό τμήμα του συνεχούς κλάσματος του $\sqrt{D}$, ή με άλλα λόγια οι λόγοι αυτοί είναι καλές ρητές προσεγγίσεις του $\sqrt{D}$.

Όταν το Συνεχές κλάσμα του $\dfrac{x_n}{y_n}$ αντιστοιχεί στη συμπλήρωση μιας περιόδου του $\sqrt{D}$, τότε το ζεύγος (x_n, y_n) αποτελεί λύση της εξίσωσης Pell, ή της εξίσωσης $x^2 = Dy^2 - 1$.

Οι όροι αυτής της διπλής ακολουθίας συγκλινουσών βρίσκονται επαγωγικά με την βοήθεια δύο επιπλέον ακολουθιών l_n και m_n. Οι πρώτοι όροι είναι

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 & m_1 &= [\sqrt{D}] \\ x_1 &= m_1 & y_1 &= 1, \end{aligned}$$

και τα l_{n+1} και m_{n+1} ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

1. $\pm l_{n+1} = x_n^2 - Dy_n^2$, $l_{n+1} > 0$
2. $m_{n+1}^2 < D$
3. $D - m_{n+1}^2$: ελάχιστο.

Τότε, αποδεικνύεται πως οι επαγωγικοί τύποι των συγκλινουσών είναι:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n m_{n+1}}{l_{n+1}} \\ x_{n+1} &= \frac{x_n m_{n+1} + y_n D}{l_{n+1}}. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Αρχαία Εποχή

2.1 Ανθυφαίρεση

Ορισμός 2.1 (Ορισμός Χ.1). *Δύο μεγέθη $a > b$ ονομάζονται **σύμμετρα** εάν υπάρχει ένα μέγεθος k και φυσικοί αριθμοί m, n τέτοιοι ώστε $a = mk$ και $b = nk$.*
*Δύο μεγέθη είναι **ασύμμετρα** εάν δεν είναι σύμμετρα.*

Ορισμός 2.2 (Ορισμός Χ.2). *Δύο ευθείες a, b ονομάζονται δυνάμει-μόνο σύμμετρες εάν a, b είναι ασύμμετρες ευθείες και a^2, b^2 σύμμετρες επιφάνειες.*

Η αρχαία έννοια που ισοδυναμεί με τη σύγχρονη έννοια της επέκτασης συνεχούς κλάσματος (θετικών) πραγματικών αριθμών είναι η ανθυφαίρεση δύο ομογενών μεγεθών. Η έννοια αυτή ορίζεται σαφώς στα *Στοιχεία* μέσω των Προτάσεων Χ.2 και Χ.3 με τρόπο ανάλογο του ορισμού της ανθυφαίρεσης φυσικών αριθμών (Ευκλείδειος αλγόριθμος), που γίνεται στο Βιβλίο VII. Με σκοπό να καθοριστεί και να γίνει κατανοητός ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί, παρατίθεται παρακάτω η ανθυφαίρεση δύο ευθειών $a > b$:

$a = \mu_1 b + \gamma_1$, με $b > \gamma_1$,
$b = I_1\gamma_1 + \gamma_2$, με $\gamma_1 > \gamma_2$,
$\gamma_1 = I_2\gamma_2 + \gamma_3$, με $\gamma_2 > \gamma_3$,
...
$\gamma_n = I_{n+1}\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2}$, με $\gamma_{n+1} > \gamma_{n+2}$,
...
$\gamma_m = I_{m+1}\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2}$, με $\gamma_{m+1} > \gamma_{m+2}$,
...

Η ανθυφαίρεση μεγεθών, σε αντίθεση με την ανθυφαίρεση φυσικών αριθμών που είναι πάντα πεπερασμένη, μπορεί να είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρη. Στο γεγονός αυτό βασίζεται η επόμενη πολύ σημαντική Πρόταση:

Πρόταση 2.1 (Πρόταση Χ.2, Ανθυφαιρετικό κριτήριο ασυμμετρίας δύο ευθειών). *Δύο ευθείες a, b είναι ασύμμετρες εάν και μόνο αν η ανθυφαίρεση των a, b είναι άπειρη.*

Η προ-Ευδόξου **ανθυφαιρετική** Θεωρία Λόγων Μεγεθών για την ύπαρξη της οποίας πληροφορούμαστε από το χωρίο $158b24 - 159a2$ των *Τοπικών* του Αριστοτέλη αποδίδεται κατά γενική ομολογία στον Θεαίτητο.

Στον επόμενο ορισμό έχει τη βάση της η εν λόγω Θεωρία:

Ορισμός 2.3. *Εάν a, b ομογενή μεγέθη και ομοίως για τα c, d, τότε $a/b = c/d$ εάν και μόνο αν $Anth(a, b) = Anth(c, d)$.*

Παρατήρηση
Ο συμβολισμός $Anth(a, b)$ υποδεικνύει την ακολουθία διαδοχικών υπολοίπων της Ανθυφαίρεσης του a με το b.

Φυσικό επακόλουθο του παραπάνω ορισμού ισότητας λόγων μεγεθών είναι το Κριτήριο Λόγου:

Πρόταση 2.2 (Κριτήριο Λόγου για την περιοδικότητα μιας ανθυφαίρεσης). *Έστω a, b δύο ευθύγραμμα τμήματα με $a > b$ και ανθυφαίρεση όπως ορίστηκε προηγουμένως.*
***Εάν** υπάρχουν δείκτες $n < m$ τέτοιοι ώστε*

$$\gamma_n/\gamma_{n+1} = \gamma_m/\gamma_{m+1},$$

***τότε** η ανθυφαίρεση του a με το b είναι τελικά περιοδική και συγκεκριμένα*

$$Anth(a, b) = [\mu_1, I_1, ..., I_n, period(I_{n+1}, I_{n+2}, ...I_m)].$$

Απόδειξη. *Από τον Ορισμό 2.3 προκύπτει πως $Anth(\gamma_n, \gamma_{n+1}) = Anth(\gamma_m, \gamma_{m+1})$. Όμως*
$Anth(a, b) =$
$[\mu_1, I_1, ..., I_n, Anth(\gamma_n, \gamma_{n+1})] =$
$[\mu_1, I_1, ..., I_n, I_{n+1}, I_{n+2}, ..., I_m, Anth(\gamma_m, \gamma_{m+1})] =$
$[\mu_1, I_1, ..., I_n, I_{n+1}, I_{n+2}, ..., I_m, Anth(\gamma_n, \gamma_{n+1})] =$
$[\mu_1, I_1, ..., I_n, I_{n+1}, I_{n+2}, ..., I_m, I_{n+1}, I_{n+2}, ..., I_m, Anth(\gamma_m, \gamma_{m+1})] =$
...
Επομένως
$Anth(a, b) = [\mu_1, I_1, ..., I_n, period(I_{n+1}, I_{n+2}, ...I_m)].$ □

2.2 Οι Πυθαγόρειοι και οι πλευρικοί-διαμετρικοί αριθμοί

2.2.1 Ορισμός και βασική ιδιότητα

Οι Πυθαγόρειοι, με τη βοήθεια της Θεωρίας πλευρικών και διαμετρικών αριθμών ήταν σε θέση να λύνουν εξισώσεις της μορφής

$$x^2 = 2y^2 \pm 1. \tag{2.1}$$

Ορισμός 2.4. *Οι πλευρικοί y_n και διαμετρικοί x_n αριθμοί, είναι μια διπλή ακολουθία (x_n, y_n) φυσικών αριθμών, η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

Για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & x_{n+1} &= x_n + 2y_n, \\ y_1 &= 1 & y_{n+1} &= x_n + y_n. \end{aligned}$$

Ο Πρόκλος όπως επίσης και ο Θέων ο Σμυρνεύς δίνουν τον παραπάνω ορισμό για τους πλευρικούς-διαμετρικούς αριθμούς. Χαρακτηριστικά ας παρουσιάσουμε το σχετικό απόσπασμα από τον Πρόκλο (*εις Πολιτείαν,2,24,18-24*):

ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρά
ἐστιν καὶ διάμετρος. ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἣ μὲν ὡς
πλευρὰ [ἣ δ]ὲ ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς
πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο,
ἐπείπερ ἡ ὡς διάμετρος μονάδι ἐλάσσων ἢ διπλασία τῆς ὡς
πλευρᾶς.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί ως Πρόταση η βασική ιδιότητα των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών, η απόδειξη της οποίας φαίνεται να αποτελεί μοναδική χρησιμότητα της **Πρότασης ΙΙ.10** των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η Πρόταση ΙΙ.10 αναφέρεται σε ευθύγραμμα τμήματα, όχι αριθμούς, και είναι η εξής:
Για δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα α και β, ισχύει πως:

$$(2\alpha_n + \beta_n)^2 + (\beta_n)^2 = 2(\alpha_n)^2 + 2(\alpha_n + \beta_n)^2. \tag{2.2}$$

Ο Πρόκλος, γνωρίζει τη στενή σχέση μεταξύ της Πρότασης ΙΙ.10 και της Πυθαγόρειας θεωρίας των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών

(το ότι η θεωρία αυτή είναι γέννημα των Πυθαγορείων θα υποστηριχθεί στη συνέχεια). Η Πρόταση II.10 έχει εκ πρώτης όψεως μια "μοναχική" παρουσία και φαντάζει αποκομμένη από τις υπόλοιπες αφού δεν χρησιμοποιείται πουθενά στα *Στοιχεία*. Παρ'όλα αυτά ο Πρόκλος την αποκαλεί "γλαφυρόν θεώρημα"(*εις Πολιτείαν*,2,27,32)! Τον λόγο μας τον αποκαλύπτει ο ίδιος και δεν είναι άλλος από το ότι η II.10 αποτελεί το επαγωγικό βήμα για την -μονοσήμαντα επαγωγική- απόδειξη της θεμελιώδους ιδιότητας των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών(*εις Πολιτείαν* 2,24,16-25,13 και 2,27,1-29,4).

Πρόταση 2.3. *Για κάθε φυσικό αριθμό n,*

$$x_n^2 = 2y_n^2 + (-1)^n.$$

Απόδειξη (Βασικής Ιδιότητας σύμφωνα με την υπόδειξη του Πρόκλου, με χρήση δηλαδη της II.10). *Έστω x_n και y_n ένα ζευγάρι πλευρικών και διαμετρικών αριθμών. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ω.*
*Θέτοντας $\alpha = y_n\omega$, $\beta = x_n\omega$, από τη **II.10** προκύπτει η εξής σχέση μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων:*

$$(2y_n\omega + x_n\omega)^2 + (x_n\omega)^2 = 2(y_n\omega)^2 + 2(y_n\omega + x_n\omega)^2.$$

*Επομένως απαλείφοντας το ω, προκύπτει μια σχέση **αριθμών** πλέον:*

$$(2y_n + x_n)^2 + (x_n)^2 = 2(y_n)^2 + 2(y_n + x_n)^2. \tag{2.3}$$

Με χρήση του ορισμού των πλευρικών-διαμετρικών προκύπτει πως για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει η εξής ταυτότητα:

$$(x_{n+1})^2 + (x_n)^2 = 2(y_n)^2 + 2(y_{n+1})^2.$$

Μέσω της επαγωγικής μεθόδου, θα καταλήξουμε στο ότι

$$x_n^2 = 2y_n^2 + (-1)^n,$$

για κάθε n=1,2,...

- *Για $n = 1$ ισχύει.*
- *Υποθέτω ότι ισχύει για n.*
- *Θα δείξω ότι ισχύει για $n + 1$:*
  $x_{n+1}^2 = 2y_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \Longrightarrow$
  $(2y_n + x_n)^2 + (x_n)^2 = 2(y_n + x_n)^2 + (-1)^{n+1} \Longrightarrow$
  $4(y_n)^2 + (x_n)^2 + 4y_nx_n = 2(y_n)^2 + 2(x_n)^2 + 4y_nx_n + (-1)^{n+1} \Longrightarrow$
  $2(y_n)^2 = (x_n)^2 + (-1)^{n+1} \Longrightarrow$
  $(x_n)^2 = 2(y_n)^2 - (-1)^{n+1} \Longrightarrow$
  $(x_n)^2 = 2(y_n)^2 + (-1)^n$, *ισχύει.*

Επομένως,

$$x_n^2 = 2y_n^2 + (-1)^n, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots.$$

Παρατήρηση
Ο μοναδικός τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε να αποδειχθεί η Θεμελιώδης Ιδιότητα των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών μέσω της II.10 είναι η μέθοδος της επαγωγής. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο να εικάσουμε πως οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν την επαγωγική μέθοδο.

2.2.2 Πυθαγόρεια προέλευση πλευρικών-διαμετρικών

Οι πλευρικοί-διαμετρικοί αριθμοί δεν μπορεί παρά να έχουν Πυθαγόρεια προέλευση όπως καταδεικνύεται από τις αρχαίες μαρτυρίες που παρατίθενται στην συνέχεια.

Συγκεκριμένα, στην *Πολιτεία*, στο χωρίο 546b-c, ο Πλάτων περιγράφοντας τον Γεωμετρικό αριθμό, δεν αναφέρει μεν τους πλευρικούς-διαμετρικούς αριθμούς κατ'όνομα, δίνει όμως μεγάλη έμφαση στο ζεύγος πλευρικών-διαμετρικών $x_3 = 7$, $y_3 = 5$ και τη σχέση που το διέπει: $49 = x_3^2 = 2y_3^2 - 1 = 50 - 1$. Ο Ιάμβλιχος, κατηγορεί ευθέως τον Πλάτωνα (*Πυθαγορικός Βίος*, 131,3-6) πως **σφετερίζεται την δόξα των Πυθαγορείων** με το να κάνει λόγο για το παραπάνω ζεύγος αριθμών:

σφετερίσασθαι δὲ τὴν δόξαν Πλάτωνα,
λέγοντα φανερῶς ἐν τῇ Πολιτείᾳ
τὸν ἐπίτριτον ἐκεῖνον πυθμένα
τὸν τῇ πεμπάδι συζευγνύμενον
καὶ τὰς δύο παρεχόμενον ἁρμονίας.

Επίσης, ο Πρόκλος **αποδίδει τον ορισμό των πλευρικών-διαμετρικών**(*εις Πολιτείαν*,2,24,16-18), **στους Πυθαγορείους**:

Ὅτι αἱ ταῖς ἀρρήτοις διαμέτροις παρακείμεναι ῥη-
ταὶ μονάδι μείζους εἰσὶν ἢ ἐλάττους διπλασίου, διὰ τῶν
ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι δεικνύουσιν.

2.2.3 Πλευρικοί-διαμετρικοί ως ανθυφαιρετικές προσεγγίσεις του λόγου διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου

Ο Πρόκλος (*εις Πολιτείαν*,2,27) αναφέρει πως η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ρητοί αριθμοί

καθώς το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού δεν δύναται να είναι ίσο με το διπλάσιο του τετραγώνου ενός άλλου κάτι που φανερώνει πως τα μεγέθη διάγώνιος και πλευρά τετραγώνου είναι ασύμμετρα:

Ὅτι ἐπειδὴ ἀδύνατον ῥητὴν εἶναι τὴν διάμετρον τῆς πλευρᾶς οὔσης ῥητῆς (οὐ γάρ ἐστιν τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος.ᾧ καὶ δῆλον ὅτι ἀσύμμετρά ἐστιν μεγέθη

Ορμώμενοι από την ασυμμετρία πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου, οι Πυθαγόρειοι φαίνεται να είχαν ένα ισχυρό κίνητρο για να δημιουργήσουν τους πλευρικούς-διαμετρικούς αριθμούς σε μια προσπάθεια προσέγγισης του άρρητου λόγου διαγωνίου προς πλευρά.

Ο λόγος x_n/y_n του n-οστού ζεύγους των πλευρικών διαμετρικών αριθμών είναι μια όλο και ακριβέστερη (όσο αυξάνεται το n) ρητή προσέγγιση, του άρρητου λόγου διαγωνίου προς πλευρά ενός τετραγώνου (δηλ. του $\sqrt{2}$). Αυτό προκύπτει από την θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών διαμετρικών:

$$x_n^2 = 2y_n^2 + (-1)^n. \tag{2.4}$$

Διαιρώντας κάθε μέλος της ισότητας με το y_n^2 παίρνουμε:

$$(x_n/y_n)^2 = 2 \pm (1/y_n)^2, \tag{2.5}$$

με τα $+$ και $-$ να εναλλάσσονται σε κάθε βήμα αρχίζοντας από $-$ για $n = 1$.
Από την (2.5) είναι φανερό πως το τετράγωνο του λόγου x_n/y_n είναι περίπου ίσο με το 2.

Ας υποστηρίξουμε στο σημείο αυτό το επιχείρημα πως **οι Πυθαγόρειοι έβλεπαν τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς ως ρητές προσεγγίσεις του λόγου της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου**, με εργαλεία μας τις αρχαίες πηγές.

Κατ'αρχάς, ο Πλάτων (*Πολιτεία* 546c4-5) καλεί τον διαμετρικό αριθμό $x_3 = 7$ που αντιστοιχεί στον πλευρικό $y_3 = 5$ "**ρητή διάμετρο** της πεμπτάδος". Μάλιστα επισημαίνει πως υπολείπεται κατά μία μονάδα ("**δεομένων ενός**") της "**άρρητης διαμέτρου** της πεμπτάδος".

Ο Αρίσταρχος, αναφερόμενος κι αυτός στον λόγο του τρίτου ζεύγους πλευρικών-διαμετρικών αριθμών $7/5$, τον θεωρούσε ως μία προσέγγιση εκ των κάτω του λόγου διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, βασιζόμενος στη σχέση των τετραγώνων $2/1 > 49/25$.

Ο Πρόκλος τέλος, εκφράζει κι αυτός στα έργα του την προσεγγιστική ιδιότητα του ζεύγους $(7, 5)$ με χρήση της λέξης "**σύνεγγυς**" (*Πολιτείαν* 2,38, 16-22, εις Ευκλείδην 61,12-17 και 417, 18-24). Αναφέρει πως

σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει σε γεωμετρικά μεγέθη, δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι διπλάσιο του τετραγώνου ενός άλλου. Σε περίπτωση που απαιτούμε η διάμετρος να είναι ρητός αριθμός και να ισχύει η προαναφερθείσα σχέση τετραγώνων, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να αρκεστούμε στην **σύνεγγυς** διάμετρο που είναι το **μονάδι έλασσον** ή **ενός δέοντος** του τετραγώνου της αρρήτου διαμέτρου. Για παράδειγμα, για τετράγωνο πλευράς 5, η ρητή διάμετρος που θα λάβουμε είναι 7 καθώς είναι το **μονάδι έλασσον** του τετραγώνου της αρρήτου διαμέτρου 50.

Δεχόμενοι πως οι πλευρικοί-διαμετρικοί αριθμοί δημιουργήθηκαν από τους Πυθαγόρειους ώστε να αποτελέσουν ρητές προσεγγίσεις του λόγου διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, ας γίνουμε περισσότερο συγκεκριμένοι: οι προσεγγίσεις αυτές με μεγάλη πιθανότητα ήταν **ανθυφαιρετικές** καθώς δεν υπάρχει καμία γνώστή αρχαία ρητή προσέγγιση είτε ρητού είτε αρρήτου εκτός της ανθυφαιρετικής.

Ορισμός. *Αν $\alpha > \beta$ είναι ένα ζεύγος αριθμών ή μεγεθών συμμέτρων ή ασυμμέτρων και $m > n$ είναι ένα ζεύγος φυσικών αριθμών, θα λέμε ότι ο λόγος m/n είναι **ανθυφαιρετική προσέγγιση** του λόγου α/β αν η ακολουθία των διαδοχικών πηλίκων της ανθυφαίρεσης των m, n αποτελεί αρχικό τμήμα της ακολουθίας των διαδοχικών πηλίκων της ανθυφαίρεσης των $\alpha > \beta$.*

Αρίσταρχος, Αρχιμήδης, Ερατοσθένης, Ίππαρχος, Διόφαντος ...Παντού η προσέγγιση που συναντάμε είναι ανθυφαιρετική.

Ενδεικτικά, ο Αρίσταρχος στο έργο του *Περί μεγεθών και αποστημάτων ηλίου και σελήνης* (Πρόταση 15(60-61), προσεγγίζει εκ των κάτω τον λόγο $71755675/61735500$ ο οποίος έχει ανθυφαίρεση $[\mathbf{1,6,6}, 11, 2, 4, 1, 2, 36]$ με τον απλούστερο λόγο $43/37$, με ανθυφαίρεση $[\mathbf{1,6,6}]$.

Ένα παράδειγμα προσέγγισης αρρήτου -αυτή τη φορά- από ρητό μπορούμε να πάρουμε από τον Διόφαντο ο οποίος προσεγγίζει εκ των άνω τον λόγο της δύναμης α του 3 προς το μοναδιαίο μήκος α, ο οποίος είναι γνωστό πως έχει άπειρη ανθυφαίρεση $[\mathbf{1,1,2,1,2,1}, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$, με τον λόγο $26/15$ με ανθυφαίρεση $[1, 1, 2, 1, 3] = [\mathbf{1,1,2,1,2,1}]$.

Περισσότερα παραδείγματα ο αναγνώστης μπορεί να βρει στα [Νεγρεπόντης] και [Fowler, 1999, Κεφ. 2].

Για την περίπτωση των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών που μας ενδιαφέρει, όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στην ακόλουθη Πρόταση, η απόδειξη της οποίας βασίζεται στη μαθηματική επαγωγή (που όπως έχουμε παρατηρήσει, γνώριζαν οι Πυθαγόρειοι).

Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη της Πρότασης αυτής, ας αναφέρουμε πως το άπειρο ανθυφαιρετικό ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$, ή αλλιώς της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, είναι το εξής:

$$Anth(x, y) = [1, 2, \ldots, 2, \ldots],$$

όπου x και y, διάμετρος και πλευρά αντιστοίχως.

Πρόταση. *Για (x_n, y_n) διπλή ακολουθία διαμετρικών και πλευρικών αριθμών και x_n, y_n σχετικώς πρώτους:*

$$Anth(x_n, y_n) = [1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\textit{n-1 times}}],$$

για $n = 1, 2, \ldots$

Απόδειξη (με μαθηματική επαγωγή). *Η Πρόταση είναι αληθής για $n = 1, 2, 3, 4$, με απ'ευθείας επαλήθευση.*
Έστω ότι ισχύει για n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$:

$$Anth(x_n, y_n) = [1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\textit{n-1 times}}],$$

και x_n, y_n σχετικώς πρώτοι.
Έπεται ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ ώστε $x_n < y_n < \gamma_1 < \ldots < \gamma_{n-1} = 1$ (καθώς x_n, y_n σχετικώς πρώτοι) και,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 \cdot y_n + \gamma_1 \\ y_n &= 2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2, \\ &\ldots \\ x_{n-2} &= 2 \cdot x_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Τότε,

$$Anth(y_n, \gamma_1) = [\underbrace{2, \ldots, 2}_{\textit{n-1 times}}]$$

και οι y_n, γ_1 είναι σχετικώς πρώτοι.
Τροποποιούμε τώρα αυτή την ανθυφαίρεση κατάλληλα ως προς τα δύο πρώτα βήματά της με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\alpha_1 = 1 \cdot \alpha_2 + x_n \tag{2.7}$$

$$\alpha_2 = 2 \cdot x_n + \gamma_1. \tag{2.8}$$

Τότε,

$$Anth(\alpha_1, \alpha_2) = [1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n \text{ times}}]$$

και οι α_1, α_2 *είναι σχετικώς πρώτοι. Όμως προφανώς,*
$\gamma_1 = y_n - x_n$, *από την* (2.6)
$\alpha_2 = 2 \cdot y_n + \gamma_1 = 2 \cdot y_n + (y_n - x_n) = y_n + x_n = y_{n+1}$, *από την* (2.8) *και*
$\alpha_1 = \alpha_2 + y_n = (y_n + x_n) + y_n = 2 \cdot y_n + x_n = x_{n+1}$, *από την* (2.7).

Αποδείχθηκε δηλαδή, πως η ακολουθία των πηλίκων της ανθυφαίρεσης του n-οστού ζεύγους y_n, x_n, είναι αρχικό τμήμα της άπειρης ακολουθίας των πηλίκων της ανθυφαίρεσης διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου.

2.3 Αρχιμήδης

Για τη μελέτη μας, θα εστιάσουμε σε δύο προβλήματα από το σύνολο των γνωστών σωζόμενων έργων του Αρχιμήδη υποστηρίζοντας το επιχείρημα πως ο Αρχιμηδης ενδιαφερόταν για την εξίσωση Pell (και γενικότερα εξισώσεις της μορφής $x^2 = Dy^2 \pm k$, με D, k θετικούς ακεραίους) και πως πιθανώς είχε κάποια επίγνωση της δομής του συνόλου λύσεών τους.

Το πρώτο, είναι το διάσημο "βοεικό πρόβλημα" που εντοπίζεται σε ένα Ελληνικό επίγραμμα 22 διστίχων που ήρθε στο φως από τον λογοτέχνη και βιβλιοθηκάριο της βιβλιοθήκης του Wolfenbüter, Gotthold Ephraim Lessing το 1773. Στο χειρόγραφο όπου το "βοεικό πρόβλημα" περιέχεται, δίνεται η πληροφορία πως επρόκειτο για ένα πρόβλημα που ο Αρχιμήδης απηύθηνε στους μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας. Το "βοεικό πρόβλημα" οδηγεί σε μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης Pell και συγκεκριμένα στην:

$$x^2 - 4729494 \cdot y^2 = 1.$$

Δεύτερον, στο έργο του *Κύκλου Μέτρησις* ο Αρχιμήδης αποδεικνύει πως η περιφέρεια ενός κύκλου είναι μικρότερη από $3\frac{1}{7}$ φορές τη διάμετρο αλλά μεγαλύτερη από $3\frac{10}{71}$ φορές:

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. (1,140,9-11)

Προς απόδειξη αυτού, ξεκινά με ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τη μία οξεία γωνία να μετρά 30° και για το οποίο ισχυρίζεται πως ο λόγος των δύο κάθετων πλευρών (έστω $w : e$) είναι μεταξύ των ορίων $265 : 153$ και $1351 : 780$. Είναι προφανές πως εάν η βρίσκεται απέναντι από τη γωνία 30°, η υποτείνουσα θα είναι 2e και πως $w = (2e)^2 - e^2 = 3e^2$. Επομένως αυτό που ουσιαστικά ο Αρχιμήδης ήθελε να υπολογίσει βρίσκοντας τα παραπάνω όρια ήταν ρητές **προσεγγίσεις** του αρρήτου $\frac{w}{e} = \sqrt{3}$.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς ο Αρχιμήδης απέδειξε τα όρια αυτά; Ο Ευτόκιος, στα σχόλιά του για το *Κύκλου Μέτρησις* (246-248), θέλοντας να επαληθεύσει την εγκυρότητα των άνωθι προσεγγίσεων του Αρχιμήδη για το $\sqrt{3}$ παραθέτει απλώς τις ταυτότητες:

$$265^2 = 3 \times 153^2 - 2$$
$$1351^2 = 3 \times 780^2 + 1.$$

Βάσει αυτού, θα μπορούσαμε με κάποια ασφάλεια να υποθέσουμε πως ο Αρχιμήδης γνώριζε πως τα ζευγάρια $(265, 153)$ και $(1351, 780)$ των λόγων του ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2 = 3y^2 - 2 \tag{2.9}$$
$$x^2 = 3y^2 + 1 \tag{2.10}$$

και πως είχε στα χέρια του κάποια μέθοδο εύρεσης ζευγών λύσεων που να τις ικανοποιούν.

Στο σημείο αυτό, ας ανοίξουμε μια παρένθεση στην πορεία σκέψης μας για να κάνουμε εναν συσχετισμό που θα μας χρειαστεί μόλις παρακάτω: Η επίλυση της εξίσωσης Pell για $D = 2$ από τους Πυθαγορείους βασίστηκε στην ταυτότητα (2.3) η οποία προήλθε από την II.10 όπως έχουμε αναφέρει. Με παρόμοιο σκεπτικό, με χρήση των αναδρομικών τύπων

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \end{aligned} \tag{2.11}$$

και βασιζόμενοι αυτή τη φορά στην ταυτότητα

$$(2y_n + 3x_n)^2 + 3(x_n)^2 = (y_n)^2 + 3(x_n + 2y_n)^2, \tag{2.12}$$

οδηγούμαστε σε επίλυση της εξίσωσης Pell για $D = 3$.

Οι ταυτότητες (2.3) και (2.12) είναι και οι δύο ειδικές περιπτώσεις μιας γενικότερης πολύ σημαντικής ταυτότητας, που θα μας απασχολήσει και στα επόμενα κεφάλαια, της

$$(x_1x_2 \pm Dy_1y_2)^2 = D(x_1y_2 \pm x_2y_1)^2 + (x_1^2 - Dy_1^2)(x_2^2 - Dy_2^2). \qquad (2.13)$$

Γυρνώντας στον Αρχιμήδη, ιστορικοί των μαθηματικών όπως ο Toeplitz, ο Tannery και ο Müller, παραθέτουν κάποιες ενδιαφέρουσες εικασίες [van der Waerden, 1983] για το πώς ο Αρχιμήδης βρήκε τις προσεγγίσεις του, οι οποίες όλες οδηγούν στην προαναφερθείσα ταυτότητα (2.13).

Κεφάλαιο 3

Πλάτων και παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται και αναλύεται σε μετάφραση το επιχείρημα ύπαρξης της ιδέας της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης στον Πλάτωνα, μέσω μιας ανάλυσης των Πλατωνικών διαλόγων *Θεαίτητος, Σοφιστής, Πολιτικός και Φίληβος*, όπως αυτό γίνεται στο εξαιρετικά ενδιαφέρον άρθρο του κ. Νεγρεπόντη [Negrepontis, May 16, 2014]. Συγκεκριμένα υποστηρίζεται πως:

- Οι Πλατωνικές Ιδέες είναι το φιλοσοφικό ανάλογο ενός ζεύγους δυνάμει-μόνο σύμμετρων ευθειών.[1] [*Φίληβος*]
- Ο Θεαίτητος έχει αποδείξει την ασυμμετρία για κάθε τετραγωνικό άρρητο με ανθυφαιρετική μέθοδο. [*Θεαίτητος*]
- Η Διαίρεση και Συναγωγή, η μέθοδος μέσω της οποίας ο άνθρωπος αποκτά γνώση μιας Πλατωνικής Ιδέας, είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης της δυάδος των δυνάμει-μόνο σύμμετρων ευθειών που αντιστοιχεί στην Ιδέα αυτή, [*Σοφιστής* και *Πολιτικός*]

Μια συνέπεια των άνωθι συμπερασμάτων είναι πως:

- ο Θεαίτητος είχε επιτύχει μια απόδειξη της Πρότασης: *Η ανθυφαίρεση μιας δυάδος μήκει-μόνο ασύμμετρων ευθειών είναι παλινδρομικά περιοδική.*

[1] Οι έννοιες δυνάμει-μόνο σύμμετρες και μήκει-μόνο ασύμμετρες ευθείες είναι ισοδύναμες και αντιστοιχούν στην ανθυφαίρεση τετραγωνικών αρρήτων.

Επαληθεύεται πως για την απόδειξη της Πρότασης αυτής, οι έννοιες και τα εργαλεία που περιέχονται στο Βιβλίο Χ των *Στοιχείων* Ευκλείδη (Βιβλίο ουσιαστικά του Θεαίτητου), είναι επαρκή.

3.1 Πλατωνικές Ιδέες και τετραγωνικοί άρρητοι

Το οικοδόμημα που επιχειρεί ο κ. Νεγρεπόντης, δεν θα μπορούσε να έχει γερά θεμέλια εάν δεν υπήρχε αντιστοιχία μεταξύ του αντικειμένου της Πλατωνικής φιλοσοφίας (δηλ. των Πλατωνικών Ιδεών) και του αντικειμένου του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας που είναι οι τετραγωνικοί άρρητοι.

Πράγματι, το 1996 έγινε η ανακάλυψη από τον κ. Νεγρεπόντη πως στον Πλατωνικό διάλογο *Φίληβος*, 23b-25e οι δύο αρχές "πέρας" και "άπειρον" αντιστοιχούν στις έννοιες της πεπερασμένης και άπειρης ανθυφαίρεσης (όπως περιγράφονται στις Προτάσεις 1-8 του Βιβλίου Χ των *Στοιχείων*) δηλαδή στην συμμετρία και την ασυμμετρία αντίστοιχα.[Negrepontis, May 16, 2014, Κεφ.2 & 3]

Η μείξη "πέρατος" και "απείρου" παράγει τις Πλατωνικές Ιδέες (*Φίληβος*, 16c) ενώ η μείξη συμμετρίας και ασυμμετρίας σε γεωμετρικά μεγέθη μπορεί να παράξει την έννοια των δυνάμει-μόνο σύμμετρων ευθειών (έννοιας που οφείλεται στον Θεαίτητο), δηλαδή τετραγωνικούς αρρήτους. **Οι τετραγωνικοί άρρητοι αποτελούν λοιπόν την μαθηματική προέλευση των Πλατωνικών Ιδεών ή ισοδύναμα οι Πλατωνικές Ιδέες αποτελούν το φιλοσοφικό ανάλογο των τετραγωνικών αρρήτων.**

Ο κύριος όγκος του επιχειρήματος του κ. Νεγρεπόντη έγκειται στην απόδειξη ότι το είδος της μείξης του "πέρατος" και του "απείρου" προς δημιουργία των Πλατωνικών Ιδεών (φιλοσοφική μείξη) είναι της ίδιας φύσης με εκείνο της μείξης των σύμμετρων (a, b) και ασύμμετρων (a^2, b^2) ζευγών γεωμετρικών μεγεθών (μαθηματική μείξη). Οι ενδείξεις στον διάλογο Θεαίτητο συνηγορούν στην ανθυφαιρετική προέλευση της μαθηματικής μείξης. Δεχόμενοι την ανθυφαιρετική προέλευση, η μαθηματική μείξη δεν μπορεί παρά να αφορά παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση τετραγωνικών αρρήτων. Όσον αφορά τη φιλοσοφική μείξη, αρχής γενομένης από τον *Σοφιστή* και με αποκορύφωμα τον *Πολιτικό*, καθίσταται σαφές πως και η φιλοσοφική μείξη ισοδυναμεί με παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση!

3.2 Θεόδωρος-Θεαίτητος και ανθυφαιρετική ασυμμετρία τετραγωνικών αρρήτων

Στην αρχή του Πλατωνικού διαλόγου *Θεαίτητος*, 147d3-6, μαθαίνουμε πως ο Θεόδωρος μπορούσε να αποδεικνύει κατά περίπτωση την ασυμμετρία του $\sqrt{D}$ από $D = 3$ μέχρι και $D = 17$, με D μη τετράγωνο φυσικό, χωρίς να μαθαίνουμε όμως κάτι για τη μέθοδο απόδειξης που ακολούθησε.

Παρακολουθώντας το μάθημα του Θεόδωρου, ο Θεαίτητος, "επειδή οι δυνάμεις φαίνονταν άπειρες το πλήθος", είχε την ιδέα μαζί με κάποιον σύντροφό του και στην πραγματικότητα κατάφεραν, να συμπεριλάβουν κάθε δύναμη σε Ένα (*ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν*, 147d7-8).

Η (Διαίρεση και) Συναγωγή αυτή των δυνάμεων σε Ένα επιτυγχάνεται με τη συνειδητοποίηση ότι **κάθε δύναμη** είναι ακριβώς ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκει-μόνο ασύμμετρο στην ποδιαία (ευθύγραμμο τμήμα μήκους ενός ποδιού)(147e3-148b3). Επομένως η μαθηματική μείξη συμμετρίας και ασυμμετρίας (Συναγωγή σε Ένα) πραγματοποιείται μέσω των τετραγωνικών αρρήτων (μηκει-μόνο ασύμμετρων ευθύγραμμων τμημάτων).

Από τον Ευκλείδη, Πρόταση Χ.9, καθίσταται σαφές πως ο Θεαίτητος είχε γενικεύσει τη μέθοδο του Θεόδωρου και είχε αποδείξει την ασυμμετρία του $\sqrt{D}$ για κάθε D μη τετράγωνο. Η απόδειξη που εμφανίζεται στα *Στοιχεία* δεν είναι ανθυφαιρετική, όμως ο κ. Νεγρεπόντης επιχειρηματολογεί υπέρ της ανθυφαιρετικής απόδειξης της Πρότασης αυτής από τον Θεαίτητο:

1. Κατ'αρχάς, η λέξη "δυνάμεις" εμφανίζεται τρεις φορές στο χωρίο που εξετάζουμε. Η δεύτερη εμφάνιση (*ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο*, 147d7-8) είναι εκείνη που μας απασχολεί ώστε να καταλάβουμε **με ποιο τρόπο θεωρούνται άπειρες οι δυνάμεις** από τον Θεόδωρο και κατ'επέκταση τον Θεαίτητο.
   Στην κατεύθυνση αυτή μας βοηθάει η πρώτη ([δυνάμεις] μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, 147d4-5) και τρίτη εμφάνιση της λεξης ([δυνάμεις]... ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ'ἐπιπέδοις ἃ δύνανται [σύμμετρους], 148b1-2) όπου ο πληθυντικός αριθμός που χρησιμοποιείται είναι εμφανώς διανεμητικής μορφής. Είναι ένα ισχυρό κίνητρο ώστε να υποθέσουμε πως και στη δεύτερη εμφάνιση της λέξης "δυνάμεις" γίνεται χρήση διανεμητικού πληθυντικού. Δηλαδή **οι δυνάμεις (ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα**

προς την ποδιαία) είναι άπειρες κάθε μία ξεχωριστά κάτι που είναι βέβαιο πως καθορίζει τον τρόπο απόδειξης της ασυμμετρίας κάθε τετραγωνικού αρρήτου. Η απειρία και η ασυμμετρία μεγεθών συνδέονται **ανθυφαιρετικά** μέσω της Πρότασης Χ.2.

2. Η επιχειρηματολογία σχετικά με την ανθυφαιρετική μέθοδο του Θεαίτητου ενισχύεται και από κάποια Ανώνυμα Σχόλια στον *Θεαίτητο*. Αναλυτικά βλ. [Negrepontis, May 16, 2014, Κεφ. 5].

3.3 Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας "Ασπαλιευτής" (*Σοφιστής* 218b-221c)

Θα δούμε στη συνέχεια πώς η γνώση του Ασπαλιευτή στον *Σοφιστή* αποτελεί φιλοσοφικό ανάλογο επίτευξης περιοδικότητας στην ανθυφαίρεση, με το Κριτήριο Λόγου.

3.3.1 Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή

Η **μέθοδος Διαίρεσης και Συναγωγής**, αλλιώς επονομαζόμενη ως "Όνομα και Λόγος" (βλ. *Θεαίτητος* 201e2-202b5, *Σοφιστής* 218c1-5, 221a7-b2, 268c5-d5), εξηγείται στην αρχή του *Σοφιστή* (218b-221c) μέσω του ορισμού του Όντος Ασπαλιευτής. Η δυική διαδικασία διαίρεσης που οδηγεί στον Ασπαλιευτή παρουσιάζεται γραφικά στη συνέχεια.

Σχήμα 3.1: Η Διαίρεση του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c)

3.3.2 Συναγωγή-Λόγος του Ασπαλιευτή

Η περιγραφή του Λόγου-Συλλογής του Ασπαλιευτή περιέχεται στο χωρίο 220e2-221c3 του *Σοφιστή*, το οποίο έχει χωριστεί χάριν ευκολίας σε δύο μέρη **[A]** και **[B]**:

[A] *ΞΕ. Τοῦ τοίνυν ἀγκιστρευτικοῦ* ***[A8]*** *τῆς πληκτικῆς τὸ μὲν* ***ἄνωθεν εἰς τὸ κάτω*** *(μτφ.* ***από πάνω προς τα κάτω****) γιγνόμενον διὰ τὸ τοῖς τριόδουσιν οὕτω μάλιστα χρῆσθαι τριοδοντία* ***[B9]*** *τις οἶμαι κέκληται.*
ΘΕΑΙ. Φασὶ γοῦν τινές.
ΞΕ. Τὸ δέ γε λοιπόν ἐστιν ἓν ἔτι μόνον ὡς εἰπεῖν εἶδος.
ΘΕΑΙ. Τὸ ποῖον;
ΞΕ. Τὸ τῆς ἐναντίας ταύτῃ πληγῆς, ἀγκίστρῳ τε γιγνόμενον καὶ τῶν ἰχθύων οὐχ ἥ τις ἂν τύχῃ τοῦ σώματος, ὥσπερ τοῖς τριόδουσιν, ἀλλὰ περὶ τὴν κεφαλὴν καὶ τὸ στόμα τοῦ θηρευθέντος ἑκάστοτε, καὶ

κάτωθεν εἰς τοὐναντίον *(μτφ.* ***από κάτω προς τα πάνω****) ἄνω ῥάβδοις καὶ καλάμοις ἀνασπώμενον. οὗ τί φήσομεν, ὦ Θεαίτητε, δεῖν τοὔνομα λέγεσθαι;*
ΘΕΑΙ. Δοκῶ μέν, ὅπερ ἄρτι προυθέμεθα δεῖν ἐξευρεῖν, τοῦτ' αὐτὸ νῦν ἀποτετελέσθαι.
ΞΕ. Νῦν ἄρα τῆς ἀσπαλιευτικῆς πέρι σύ τε κἀγὼ συνωμολογήκαμεν οὐ μόνον τοὔνομα, ***[A9]*** (220e2-221b1)
[B] *ἀλλὰ* ***καὶ τὸν λόγον περὶ αὐτὸ τοὖργον εἰλήφαμεν ἱκανῶς****.*
συμπάσης ***γὰρ*** *(μτφ.* ***διότι****) τέχνης τὸ μὲν ἥμισυ μέρος κτητικὸν ἦν,*
κτητικοῦ δὲ χειρωτικόν,
χειρωτικοῦ δὲ θηρευτικόν,
τοῦ δὲ θηρευτικοῦ ζῳοθηρικόν,
ζῳοθηρικοῦ δὲ ἐνυγροθηρικόν,
ἐνυγροθηρικοῦ δὲ ***[A5]***
τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον *(μτφ.* ***όλο το από κάτω μέρος****)*
ἁλιευτικόν, ***[A6]***
ἁλιευτικῆς δὲ πληκτικόν,
πληκτικῆς δὲ ἀγκιστρευτικόν, ***[A8]***
τούτου δὲ τὸ ***περὶ τὴν κάτωθεν ἄνω*** *(μτφ.* ***από κάτω προς τα πάνω****)*
πληγὴν ἀνασπωμένην,
ἀπ' αὐτῆς τῆς πράξεως ἀφομοιωθὲν τοὔνομα, ἡ νῦν ἀσπαλιευτικὴ ***[A9]***
ζητηθεῖσα ἐπίκλην γέγονεν.

Στο **[A]**, η σχέση αντίθεσης της Τριοδοντίας με την Ασπαλιευτική εξηγείται με μεγάλη προσοχή: Το ψάρεμα με αγκρίστρι (*Αγκιστρευτικόν*) διαιρείται στην

Τριοδοντία,

δηλαδή ψάρεμα με τρίαινα που περιγράφεται ως τέχνη ψαρεματος με αγκίστρι που πραγματοποιείται **από πάνω προς τα κάτω**, και στην

Ασπαλιευτική,

δηλαδή ψάρεμα με καλάμι που περιγράφεται ως τέχνη ψαρέματος με αγκίστρι που πραγματοποιείται **από κάτω προς τα πάνω**.

Όπως γίνεται κατανοητό, έχει πραγματοποιηθεί μια Διαίρεση, ξεκινώντας από το σύνολο των τεχνών και καταλήγοντας στην Ασπαλιευτική. Αναμφισβήτητα λοιπόν, έχει βρεθεί το "Όνομα" της Ασπαλιευτικής.

Στο **[B]** τώρα, αναφέρεται πως επιπλέον, έχει βρεθεί και ο "Λόγος" της Ασπαλιευτικής. Η αιτιολόγηση - η απόδειξη - πως έχουμε πράγματι βρει και το Λόγο βρίσκεται στη συνέχεια, μέσα στο ίδιο το **[B]** από

τη στιγμή που ξεκινά με τη λέξη "διότι" (*γαρ*). Η αιτιολόγηση λοιπόν, φαίνεται να αποτελείται από:

i. μια ακριβή καταμέτρηση όλων των βημάτων της διαίρεσης, συντομευμένη υπό την έννοια ότι από τα δύο είδη στα οποία κάθε γένος διαιρείται, αναφέρεται μόνο εκείνο που περιέχει τον Ασπαλιευτή και το συμπληρωματικό του παραλείπεται.

ii. μια υπενθύμιση πως το τελευταίο είδος, η Ασπαλιευτική, χαρακτηρίζεται ως μέρος του γένους του που έχει φορά "από κάτω προς τα πάνω".

iii. την **μοναδική**[2] νέα πληροφορία, που αναφέρει πως το είδος της Αλιευτικής (τρία βήματα πριν την Ασπαλιευτική), είναι το "όλο το από κάτω μέρος" του γένους του.

Καθώς η καταμέτρηση όπως είπαμε είναι συντομευμένη, δεν υπάρχει σαφής πληροφορία όσον αφορά το συμπληρωματικό είδος της Αλιευτικής (δηλαδή της Πτηνοθηρευτικής), αλλά επειδή η Αλιευτική περιγράφεται όχι απλά ως "το από κάτω μέρος" του γένους του αλλά ως "όλο το από κάτω μέρος", προκύπτει πως το συμπληρωματικό είδος (Πτηνοθηρευτική) θα πρέπει να χαρακτηριστεί ως "όλο το από πάνω μέρος" του ίδιου γένους. Μόνο με τον τρόπο αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί η παρουσία της λέξης "όλο" επιχειρηματολογώντας πάνω στο ότι εκτός από το "Όνομα" έχει βρεθεί επιπλέον και ο "Λόγος" της Ασπαλιευτικής.

Μέχρι τώρα έχει δικαιολογηθεί το "γιατί" έχει βρεθεί αυτός ο Λόγος. Τώρα μένει να απαντήσουμε στο ερώτημα: "**Ποιος** είναι ο Λόγος του Ασπαλιευτή που προκύπτει λογικά από μια τέτοια δικαιολόγηση;" Η απάντηση δεν μπορεί παρά να είναι η εξής:
Ο Λόγος που αναζητούμε είναι ένας λόγος ίσος με το φιλοσοφικό λόγο Τριοδοντία προς Ασπαλιευτική (δηλαδή με τον λόγο "από πάνω προς τα κάτω" προς "από κάτω προς τα πάνω"). Ο λόγος αυτός δεν είναι άλλος από τον λόγο της Πτηνοθηρευτικής (άνωθεν) προς την Αλιευτική (κάτωθεν).

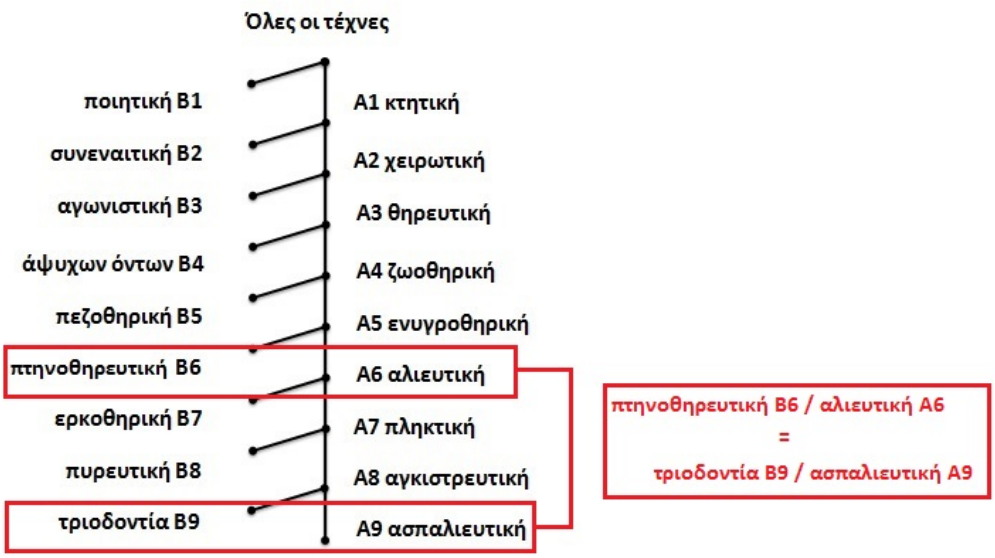
Συγκεκριμένα,
πτηνοθηρευτική Β6 / αλιευτική Α6 =
τριοδοντία Β9 / ασπαλιευτική Α9 =
από πάνω προς τα κάτω / από κάτω προς τα πάνω.

[2]Τα i. και ii. είναι ήδη γνωστά από τη Διαίρεση και το [Α].

Από τη στιγμή που τα είδη Τριοδοντία και Ασπαλιευτική όπως και τα είδη Πτηνοθηρευτική και Αλιευτική είναι αντιστοίχως ζευγάρια αντιθέτων ειδών στο σχήμα Διαίρεσης για τον Ασπαλιευτή, ο "Λόγος" που προκύπτει έχει **εκπληκτική ομοιότητα με το Κριτήριο Λόγου** για την περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης γεωμετρικών μεγεθών και συγκεκριμένα γεωμετρικών δυνάμεων.

3.3.3 Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή παίρνει τη μορφή του Σχήματος:



Σχήμα 3.2: Η Διαίρεση και Συναγωγή του Ασπαλιευτή (*Σοφιστής* 218b-221c) και το Κριτήριο Λόγου

Συνοψίζοντας, η Διαίρεση και Συναγωγή αποτελείται από:

α) τη **Διαίρεση** που είναι το ανάλογο του συντομευμένου ανθυφαιρετικού μοντέλου και

β) το **Λόγο** που είναι το ανάλογο του Κριτηρίου Λόγου για την περιοδικότητα της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης.

3.4 Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας "Σοφιστής" (*Σοφιστής* 234e-236d & 264b-268d)

Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, η Διαίρεση και Συναγωγή μιας Πλατωνικής Ιδέας όπως για παράδειγμα ο Ασπαλιευτής μοιάζει πολύ με την ανθυφαιρετική Διαίρεση και το Κριτήριο Λόγου μιας γεωμετρικής "δύναμης". Όταν ο νεαρός Σωκράτης στον *Θεαίτητο* (145c7-148e5) εκφράζει την επιθυμία μίμησης της μαθηματικής θεωρίας του Θεόδωρου, εννοεί ουσιαστική ομοιότητα: ίδια διαιρετική δομή κατά τη Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής ιδέας και ίδιου τύπου "Λόγος".

Η παραπάνω ομοιότητα επιβεβαιώνεται και από τη Διαίρεση και Συναγωγή της Ιδέας του Σοφιστή στον *Σοφιστή*, η οποία έχει την ίδια μορφή με εκείνη του Ασπαλιευτή, με πιο εκλεπτυσμένη και φιλοσοφικής χροιάς όμως την χρήση του Κριτηρίου Λόγου εδώ. Η όλη ανάλυση και υποστήριξη των παραπάνω βρίσκεται στο [Negrepontis, May 16, 2014, Κεφ.10].

Έχουμε επιχειρηματολογήσει λοιπόν πάνω στο ότι τα δύο παραδείγματα Διαίρεσης και Συναγωγής στον *Σοφιστή*, δηλαδή ο Ασπαλιευτής και ο Σοφιστής έχουν τη δομή ενός φιλοσοφικού αναλόγου περιοδικής ανθυφαίρεσης. Παρ'όλο που τα επιχειρήματα που οδηγούν στην ερμηνεία αυτή έχουν γερή βάση, κάποιος θα μπορούσε να επισημάνει πως δεν υπάρχει ένδειξη πουθενά στον *Σοφιστή* για το μη-πεπερασμένο της Διαίρεσης. Θα δούμε στην ανάλυση που θα γίνει παρακάτω για τον *Πολιτικό* πως ο Πλάτων περιγράφει σαφώς την Διαίρεση και Συναγωγή ως περιοδική μέσω της εφαρμογής σε αυτήν του μύθου για την εποχή του Κρόνου και την εποχή του Δία. Με άλλα λόγια ο Πλάτων αναφέρει πως η Διαίρεση και Συναγωγή αποτελεί άπειρη διαίρεση.

3.5 Η Διαίρεση και Συναγωγή της Πλατωνικής Ιδέας "Πολιτικός" στον *Πολιτικό*

Η απόκτηση γνώσης της Πλατωνικής Ιδέας του Πολιτικού, πραγματοποιείται -όπως και στις περιπτώσεις του Ασπαλιευτή και του Σοφιστή- μέσω της μεθόδου Διαίρεσης και Συναγωγής (Όνομα και Λόγος) που όπως υποστηρίξαμε αποτελεί το φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης. Η χρήση του Κριτηρίου Λόγου στην ερμηνεία αυτή είναι καταλυτική. Στην Παράγραφο αυτή θα αποκαλυφθεί πως η ανθυφαί-

ρεση αυτή έχει επιπλέον **παλινδρομική** μορφή.

3.5.1 Ο ορισμός του Πολιτικού ως φιλοσοφικό ανάλογο παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης (*Πολιτικός 258c-267c, 289e-305e*)

Εποχή Κρόνου, "αγελαιοτροφική"		Εποχή Δία, "αγελαιοκομική"	
[G] όλες οι τέχνες			
(258b-259d)			
[K1] πρακτικὴ	**[L1] γνωστική**	[W1]	[Z1] ρητορεία (304c-e)
		[W2]	
[W1]			
[K'1] στρατηγική	[L'1] πολιτικός		
<πρακτική> (304e-305a)	<γιγνώσκουσα>		
Κριτήριο Λόγου			
K'1/L'1 = K1/L1			
περιοδικότητα & πλήρης γνώση του Πολιτικού			
[L1] γνωστική (259d-260c)			
[K2] **κριτική**	[L2] επιτακτική	[W2]	[Z2] δικαστική[3] (305b-c)
		[W3] (304e-305c)	
[L2] επιτακτική (260d-261b)			
[K3] **ανώνυμον**	[L3] αυτεπιτακτική	[W3]	[Z3] ιερείς[4]
		[W4] (290c-291a)	
[L3] αυτεπιτακτική (261b-d)			
[K4] **άψυχα**	[L4] έμψυχα	[W4]	[Z4] γραπτοί νόμοι[5]
		[W5] (291d-303b)	
[L4] έμψυχα (261d-e)			
Συνέχεια στην επόμενη σελίδα			

[3]Ηγέτες που δρουν **κρίνοντας**.
[4]Ηγέτες που δρουν **υπό τις εντολές κάποιου άλλου**.
[5]Ηγέτες που δρουν με **άψυχο** τρόπο.

[K5] **μονοτροφία**	[L5] αγελαιοτροφική	[W5]	[Z5] αναρχία[6]
		[W6]	
[L5] αγελαιοτροφική (264b-d)			
[K6] **υγροτροφική**	[L6] ξηροτροφική	[W6]	[Z6] ναυτέμποροι[7]
		[W7](289e-290a)	
[L6] ξηροτροφική (264e-265b)			
[K7] **πτηνοκομική**	[L7] πεζονομική	[W7]	[Z7] κήρυκες[8]
		[W8](290a-c)	
[L7] πεζονομική (265b-d)			
[K8] **κερασφόρα**	[L8] άκερα	[W8]	[Z8] σάτυροι[9]
		[W9](291b, 303b-d)	
[L8] άκερα (265d-e)			
[K9] **κοινογονία**	[L9] άκερα	[W9]	[Z9] κένταυροι[10]
		[W10](291a, 303b-d)	
[L9] ιδιογονία (265e-266d)			
[K10] **τετράποδα-χοίροι**	[L10] δίποδα-άνθρωποι	[W10]	[Z10] σοφιστής[11]
		[W11](291b-c, 303b-d)	
	L10>L11>...>W11](278b-289a)		
	αίτια και συναίτια		

Πίνακας 3.1: Η παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση στον *Πολιτικό*

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο θα πρέπει να γίνει η ανάγνωση του Πίνακα 3.1 ώστε να γίνει προφανής ο ορισμός του Πολιτικού ως φιλοσοφικό ανάλογο παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης.

[6]Δημοκρατία χωρίς νόμους. Οι ηγέτες δρουν ως **μονάδα.**
[7]Ηγέτες που δρουν μέσω του **υγρού** στοιχείου.
[8]Ιπτάμενος Ερμής. Ηγέτες που δρουν **ιπτάμενοι**.
[9]Ολιγαρχία - λίγοι, χωρίς νόμους. Ηγέτες που δρουν ως **κερασφόρα** ζώα.
[10]Τύρρανοι- ένας, χωρίς νόμους. Ηγέτες που δρουν ως **μεικτά** ζώα.
[11]Ηγέτες που δρουν ως **χοίροι**.

3.5.2 Τα δέκα πρώτα βήματα της Διαίρεσης και Συναγωγής (258b-267c)

Η ανάγνωση του Πίνακα αρχίζει από την αριστερή στήλη ξεκινώντας από το σύνολο των τεχνών [G] μέχρι το [L10], περιλαμβάνοντας τα δέκα πρώτα βήματα της δυικής διαίρεσης που πραγματοποιείται προς αναζήτηση του ορισμού της Πλατωνικής Ιδέας του Πολιτικού. Συγκεκριμένα, η τέχνη ως σύνολο [G] διαιρείται στα [K1] (πρακτική τέχνη) και [L1] (επιστημονική, "γνωστική"). Η διαίρεση συνεχίζεται μόνο από την πλευρά των [Li] ενώ τα [Ki] απορρίπτονται από την διαιρετική διαδικασία παραμένοντας απλά ως "φύλλα" αυτού του δυαδικού δέντρου που δημιουργείται. Τα [Ki] θα παίξουν σημαντικό ρόλο στον εντοπισμό της παλινδρομικότητας της διαδικασίας. Η διαίρεση λοιπόν συνεχίζεται με το [L1] το οποίο χωρίζεται σε [K2] (κριτική τέχνη) και [L2] (επιτακτική). Η διαδικασία συνεχίζεται ομοίως με τη διαίρεση του [L2] κ.ο.κ. μέχρις ότου το [L9] να διαιρεθεί στα [K10] (τετράποδα-χοίροι) και [L10] (δίποδα-άνθρωποι).

Ας παρατηρήσουμε πως από το [L4] και στη συνέχεια, αυτό που στην πραγματικότητα διαιρείται είναι η **φύση** της αγέλης που διοικείται, μέχρι να καταλήξουμε στην τέχνη της διοίκησης μιας "αγέλης" ανθρώπων [L10].

Το [L10] δεν αποτελεί το τέλος της αναζήτησης για την απόκτηση γνώσης της Ιδέας του Πολιτικού καθώς δεν ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε απλά την τέχνη της διοίκησης μιας "αγέλης" ανθρώπων αλλά τον βέλτιστο από τους πιθανούς τρόπους διοίκησής της (ιδιότητα του Πολιτικού) (267c-268d & 274e-277c). Η βέλτιστη διοίκηση δεν θα προέλθει παρά από μια δεύτερη διαδικασία διαδοχικών δυικών διαιρέσεων των τρόπων διοίκησης μιας ανθρώπινης "αγέλης". Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται στο δεξί μέρος του Πίνακα 3.1 με τα διαδοχικά [Wi] και [Zi]. Πριν όμως αναφερθούμε σε αυτήν θα ανοίξουμε μια σημαντική παρένθεση όπως κάνει και ο ίδιος ο Πλάτων στο διάλογό του, που θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε πώς υπεισέρχεται η παλινδρομικότητα στον ορισμό του Πολιτικού.[12]

[12]Σχετικά με την ανάγνωση του πίνακα, μετά τα δέκα πρώτα βήματα του αριστερού μέρους και πριν την έναρξη της ανάγνωσης του δεξιού, παρεμβάλλεται η συνέχεια της διαίρεσης με τα "αίτια και συναίτια" (που αποτελούν τα βήματα L10, L11,..., W11). Το μέρος αυτό του ορισμού του Πολιτικού έχει πιθανώς επίσης κάποια παλινδρομικά χαρακτηριστικά όμως δεν θα μας απασχολήσει στην ανακατασκευή της απόκτησης γνώσης του Πολιτικού ως παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση.

3.5.3 Η παλινδρομική περιοδικότητα στο μύθο των εποχών Κρόνου και Δία (268d-274e) και η συσχέτιση με τον ορισμό του Πολιτικού

Σύμφωνα με τον μύθο που εντοπίζουμε στο χωρίο 268d-274e, υπάρχουν δύο εποχές που διέπουν τη σφαιρική ολότητα ονόματι "κόσμος": η εποχή του Κρόνου και η εποχή του Δία.

Κατά την εποχή του Κρόνου, ο κόσμος περιστρέφεται με μία συγκεκριμένη φορά και περνάει από συγκεκριμένα στάδια τα οποία όταν εξαντληθούν είναι απαραίτητο να επέλθει αλλαγή εποχής αλλάζοντας φορά και να μεταβεί πλέον στην εποχή του Δία. Όταν ο Θεός κρίνει πως η εποχή του Δία κινδυνεύει να βγάλει τον κόσμο από τη σωστή του πορεία και να τον κάνει να χαθεί στον "άπειρο πόντο της ανομοιότητας", επεμβαίνει στρέφοντάς τον πάλι, καθιστώντας τον "αθάνατο" και "χωρίς ηλικία". Με τον τρόπο αυτό έχει πραγματοποιηθεί επαναφορά στην εποχή του Κρόνου και ολοκλήρωση μιας πλήρους περιόδου.

Ας παρατηρήσουμε πως τα στάδια που διανύει ο κόσμος την εποχή του Κρόνου είναι ακριβώς τα ίδια αλλά με την αντίστροφη σειρά από εκείνα που διανύει την εποχή του Δία. Συγκεκριμένα, στην εποχή του Δία οι άντρες μεταβαίνουν από την μη-ύπαρξη (α) στην ύπαρξη (β), μεγαλώνουν (γ), αποκτούν γενειάδα (δ), η γενειάδα τους ασπρίζει (ε), γερνούν (στ) και πλησιάζουν το θάνατο (ζ). Εάν με θεεική παρέμβαση στο σημείο αυτό ο κόσμος στραφεί και αλλάξει εποχή, οι άντρες θα περνούν από το στάδιο (ζ) στο (στ), στο (ε), στο (δ), στο (γ) και το (β) μέχρι να μεταβούν στη μη-ύπαρξη (α).

Συνοψίζοντας τον μύθο, ο κόσμος είναι περιοδικός με περίοδο που αποτελείται από δύο ημιπεριόδους, δύο εποχές: την εποχή του Κρόνου και την εποχή του Δία. Οι δύο ημιπερίοδοι έχουν όπως είδαμε παλινδρομική μορφή. Επομένως **ο κόσμος είναι παλινδρομικά περιοδικός.**

Ο Πλάτων, στο χωρίο 276a1-7 καθιστά σαφή την ανάγκη εφαρμογής της παλινδρομικής περιοδικότητας του μύθου στη Διαίρεση και Συναγωγή του Πολιτικού. Καθώς η συγκεκριμένη αποτελεί παράδειγμα που υποδεικνύει την γενική μέθοδο της Διαίρεσης και Συναγωγής, προκύπτει πως **κάθε** Διαίρεση και Συναγωγή (όπως επίσης του Ασπαλιευτή ή του Σοφιστή) έχει παλινδρομικά περιοδική μορφή.

Ο κύκλος, η περίοδος, πραγματοποιείται ανθυφαιρετικά με το Κριτήριο Λόγου ενώ η παλινδρομικότητα (το νέο στοιχείο που εισάγεται στον *Πολιτικό* ενώ δεν εντοπίζεται στον *Σοφιστή*)θα εμφανιστεί από τη συμμετρία που παρουσιάζει η περίοδος γύρω από το μέσον.

Τα δέκα πρώτα βήματα της διαίρεσης αντιστοιχούν στην εποχή του Κρόνου, ενώ τα δέκα τελευταία στην εποχή του Δία.

3.5.4 Τα δέκα τελευταία βήματα της διαίρεσης (267c-268d & 274e-277c, 289e-305e)

Τα δέκα αυτά τελευταία βήματα της δυικής διαίρεσης που αντιστοιχούν στην εποχή του Δία, δεν δίνονται με τη σωστή σειρά από τον Πλάτωνα κατά τον ορισμό του *Πολιτικού* έτσι η παλινδρομικότητα δεν είναι προφανής εξ'αρχής. Ο Πλάτων δεν μας δίνει μασημένη τροφή αλλά αντ'αυτής μας εφοδιάζει με τους κανόνες του "παιχνιδιού" που θέλει να παίξουμε ώστε να οδηγηθούμε στην σωστή σειρά και κατ'επέκταση στην παλινδρομικότητα, στην εύρεση του σημείου εφαρμογής του Κριτηρίου Λόγου και τελικά στον ορισμό του Πολιτικού. Οι κανόνες παρατίθενται αναλυτικά στο άρθρο [Negrepontis, May 16, 2014, Κεφ.11]

Η δεξιά στήλη του Πίνακα 3.1 καταγράφει τα δέκα τελευταία βήματα με τη σωστή σειρά για την επίτευξη **παλινδρομικότητας**, όπως έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή των κανόνων του Πλάτωνα. Με την ανάγνωση της στήλης αυτής ολοκληρώνεται η διαίρεση. Συγκεκριμένα, η ανάγνωση πρέπει να γίνει ξεκινώντας από κάτω [W11], μέχρι πάνω [W1], συνεχιζόμενη μόνο από τη μία πλευρά, συγκεκριμένα την πλευρά των [Wi] ενώ τα [Zi] απορρίπτονται από τη διαίρεση παραμένοντας ως "φύλλα" του δέντρου. Συγκεκριμένα, το [W11] διαιρείται στα [Z10](σοφιστές) και [W10]. Το [W10] διαιρείται στα [Z9] (κένταυροι) και [W9] κ.ο.κ. μέχρις ότου το [W1] να διαιρεθεί στα [K'1](πρακτική τέχνη της στρατηγικής) και [L'1] (γνωστική τέχνη του πολιτικού).

Στο σημείο αυτο, η ισότητα του αρχικού λόγου [K1]/[L1], δηλ. (πρακτικές τέχνες)/(επιστημονικές τέχνες) με τον τελικό λόγο [K'1]/[L'1], δηλ. (πρακτική τέχνη της στρατηγικής)/(επιστημονική τέχνη του πολιτικού), επιτρέπει την εφαρμογή του Κριτηρίου Λόγου όπως επισημαίνεται και στο χρωματισμένο μέρος του Πίνακα 3.1. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε στην **περιοδικότητα και την πλήρη γνώση του Πολιτικού**.

3.6 Ανακατασκευή της απόδειξης της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης με χρήση εργαλείων από το Βιβλίο Χ

Το όλο περιεχόμενο του "Πολιτικού" δεν είναι παρά φιλοσοφικά κεκαλυμμένη εμφάνιση του θεωρήματος που υποστηρίζει ότι "η ανθυφαίρεση δύο δυνάμει-μόνο σύμμετρων ευθειών είναι παλινδρομικά περιοδική" ή με σύγχρονη ορολογία ότι "η επέκταση συνεχούς κλάσματος ενός τετραγωνικού αρρήτου είναι παλινδρομικά περιοδική".

Παρ'όλο που δεν σώζεται κάποια προφανής μαθηματική ένδειξη πως το εν λόγω θεώρημα ήταν γνωστό στους κόλπους της Ακαδημίας Πλάτωνος, όλα τα εργαλεία για την απόδειξη αυτού εντοπίζονται στο Βιβλίο Χ των *Στοιχείων*!

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας έτσι όπως ο Θεαίτητος θα ήταν εφικτό να είχε αντιληφθεί και αποδείξει μέσω των εργαλείων του (δικού του) Βιβλίου Χ:

Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας. *Έστω $a > b$ δύο ευθείες και D μη τετράγωνος αριθμός ώστε $a^2 = Db^2$. Τότε υπάρχουν αριθμοί m_1, I_1, I_2,..., I_k, τέτοιοι ώστε η ανθυφαίρεση των a και b να είναι παλινδρομικά περιοδική και ίση με*

$$[m_1, period(I_1, I_2, ..., I_{k-1}, (I_k), I_{k-1}, ..., I_2, I_1, 2m_1)].$$

Γενικότερα, το ίδιο συμπέρασμα ισχύει στην περίπτωση που a και b είναι δυνάμει-μόνο σύμμετρες ευθείες.

3.6.1 Μαθηματικά εργαλεία για την ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας

Παρακάτω παρατίθεται μια πλήρης λίστα των εργαλείων που χρειάζονται στην ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος, το σύνολο των οποίων εμφανίζονται στο Βιβλίο Χ των *Στοιχείων* με εξαίρεση τη Θεωρία Λόγων Μεγεθών (Θεόδωρος-Θεαίτητος) που συναντάμε στα *Τοπικά* του Αριστοτέλη.

Στην ανακατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια των αυξητικών παραγόντων για τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα (από γ_n σε γ_{n+1}) τα οποία θα συμβολίσουμε με ϕ_n. Η απόδειξη των ιδιοτήτων των ϕ_n βασίζεται

εκτός από την Πρόταση Χ.2 των *Στοιχείων* στην προ-Ευδόξου **ανθυφαιρετική** Θεωρία Λόγων Μεγεθών η ανακατασκευή της οποίας έγινε σε προηγούμενο Κεφάλαιο.

Ορισμός 3.1 (Αυξητικοί παράγοντες ανθυφαιρετικών υπολοίπων). *Έστω $a > b$ δύο ευθείες και*

$a > b > \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > ... > \gamma_n > \gamma_{n+1} > ...$

*η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσής τους. Ορίζουμε την ακολουθία (ϕ_n) των **αυξητικών παραγόντων (από γ_n σε γ_{n+1})** από τις σχέσεις:*

$\phi_1 = \gamma_1$, *και*
$\gamma_{n-1} \cdot \phi_n = b \cdot \gamma_n$, *για* $n > 1$.

Πρόταση 3.1 (Ιδιότητες των ϕ_n). *Έστω $a > b$ δύο ευθείες, και*
$a > b > \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > ... > \gamma_n > \gamma_{n+1} > ...$
η ακολουθία διαδοχικών υπολοίπων,
$\mu_1, I_1, I_2, I_3, ..., I_n, I_{n+1}, ...$
η ακολουθία διαδοχικών πηλίκων, και
$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...$
η ακολουθία αυξητικών παραγόντων των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης των a, b. Τότε:

(α) $\phi_n < b$ *για κάθε* n,

(β) $\phi_n(I_n b + \phi_{n+1}) = b^2$ *για κάθε* n,

(γ) η ανθυφαίρεση των b, ϕ_n ισούται με $Anth(b, \phi_n) = [I_n, I_{n+1}, ...]$ για κάθε n, και

(δ) εάν υπάρχουν n, m με $n < m$, τέτοια ώστε $\phi_n = \phi_m$, τότε η ανθυφαίρεση των a, b είναι τελικά περιοδική και στην πραγματικότητα ίση με $[\mu_1, I_1, ..., I_{n-1}, period(I_n, I_{n+1}, ..., I_{m-1})]$.

Απόδειξη. *Για τα (α) και (β) εξ'ορισμού της ανθυφαίρεσης μεγεθών.*
Για το (γ) από τον Ορισμό Λόγων των Τοπικών.
Για το (δ) από το Κριτήριο Λόγου. □

Ορισμός 3.2. *Έστω b μια προτεθείσα ευθεία, ζ, η ασύμμετρες ευθείες με $\zeta > \eta$ τέτοιες ώστε ζ^2, η^2 σύμμετρα με το b^2. Τότε*

*(α) (στην Πρόταση Χ.73 των Στοιχείων) η ευθεία $\zeta - \eta$ καλείται **αποτομή**.*

(b) *(στην Πρόταση Χ.36 των Στοιχείων) η ευθεία $\zeta + \eta$ καλείται* ***εκ δύο ονομάτων****.*

(c) *(εμμέσως στις Προτάσεις Χ.112-114 των Στοιχείων) η αποτομή $\zeta - \eta$ και η εκ δύο ονομάτων $\zeta + \eta$ καλούνται* ***συζυγείς*** *μεταξύ τους. Γράφουμε $\zeta + \eta = (\zeta - \eta)^*$ και $\zeta - \eta = (\zeta + \eta)^*$.*
Οι ευθείες ζ, η καλούνται ***ονόματα*** *των ευθειών $\zeta - \eta$ και $\zeta + \eta$.*

Η ακόλουθη, άμεσα εξακριβώσιμη Πρόταση είναι ο βασικός σύνδεσμος μεταξύ ανθυφαίρεσης και της Θεωρίας των άλογων ευθειών του Βιβλίου Χ του Θεαίτητου.

Πρόταση 3.2. *Η ευθεία $\phi_1 = a - \mu_1 b$ είναι αποτομή.*

Η συζυγία μεταξύ των εκ δύο ονομάτων και των αποτομών περιγράφεται στις θεμελιώδεις Προτάσεις Χ.112-114 των *Στοιχείων* οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια. Η χρησιμότητα τη συζυγίας είναι μεγάλη όσον αφορά τις ρητοποιήσεις παρονομαστών που πραγματοποιούνται στις επεκτάσεις συνεχών κλασμάτων. Η ανακατασκευή της αποδειξης του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας χρησιμοποιεί αποκλειστικά τις έννοιες της αποτομής, της ευθείας εκ δύο ονομάτων και την συζυγία τους όπως αυτή ορίζεται εμμέσως από τις Προτάσεις Χ.112-114.

Πρόταση 3.3 (Πρόταση Χ.112). *Εάν b είναι μια ρητή ευθεία, ζ μια ευθεία εκ δύο ονομάτων, με ονόματα $\zeta_1 > \zeta_2$, και η είναι μια ευθεία τ.ώ. $\zeta \cdot \eta = b^2$, τότε η η είναι αποτομή με ονόματα $\eta_1 > \eta_2$, και $\dfrac{\zeta_1}{\eta_1} = \dfrac{\zeta_2}{\eta_2}$ είναι ένας σύμμετρος λόγος.*

Πρόταση 3.4 (Πρόταση Χ.113). *Εάν b είναι μια ρητή ευθεία, ζ μια αποτομή, με ονόματα $\zeta_1 > \zeta_2$, και η είναι μια ευθεία τ.ώ. $\zeta \cdot \eta = b^2$, τότε η η είναι εκ δύο ονομάτων με ονόματα $\eta_1 > \eta_2$, και $\dfrac{\zeta_1}{\eta_1} = \dfrac{\zeta_2}{\eta_2}$ είναι ένας σύμμετρος λόγος.*

Πρόταση 3.5 (Πρόταση Χ.114). *Εάν ζ είναι μία ευθεία εκ δύο ονομάτων, με ονόματα $\zeta_1 > \zeta_2$, η είναι μια αποτομή με ονόματα $\eta_1 > \eta_2$, $\dfrac{\zeta_1}{\eta_1} = \dfrac{\zeta_2}{\eta_2}$ είναι ένας σύμμετρος λόγος, και $\zeta \cdot \eta = b^2$, τότε η b είναι ρητή ευθεία.*

3.6.2 Η απόδειξη του Θεωρήματος Περιοδικότητας

Για αρχή, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του ασθενέστερου Θεωρήματος Περιοδικότητας (που αποτελείται από την Πρόταση 3.6 και το

Πόρισμα 1) , χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα εργαλεία του Βιβλίου Χ στα οποία αναφερθήκαμε νωρίτερα.

Πρόταση 3.6. *Έστω D μη τετράγωνος φυσικός αριθμός και a, b ευθείες γραμμές τ.ώ. $a^2 = Db^2$.*
Έστω επίσης
$\mu_1, I_1, I_2, ...I_n, ...$
η ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων και
$\phi_1, \phi_2, ...\phi_n, ...$
η ακολουθία των διαδοχικών αυξητικών παραγόντων των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης του a με το b.

Τότε, υπάρχουν δύο ακολουθίες φυσικών αριθμών
$l_1 = 1, l_2, ..., l_k, ...$ *και* $m_1 = \mu_1, m_2, ..., m_k, ...$ *τέτοιες ώστε για κάθε φυσικό αριθμό $k > 1$:*

(a_k) $l_k l_{k-1} = D - m_{k-1}^2$,

(b_k) $l_k(I_{k-1}b + \phi_k) = l_{k-1}(\phi_{k-1})^*$,

(c_k) $m_k + m_{k-1} = I_{k-1}l_k$,

επομένως το l_k είναι φυσικός αριθμός μικρότερος του D, και το m_k είναι φυσικός του οποίου το τετράγωνο είναι μικρότερο του D, και

(d_k) *η ευθεία ϕ_k είναι <u>αποτομή</u> και μάλιστα $l_k\phi_k = a - m_k b$.*

Απόδειξη. *Με χρήση μαθηματικής επαγωγής.*
Αποδεικνύουμε τα (a_2), (b_2), (c_2),(d_2) και υποθέτοντας πως ισχύουν τα (a_k), (b_k), (c_k),(d_k) αποδεικνύουμε τα (a_{k+1}), (b_{k+1}), (c_{k+1}),(d_{k+1}).

(a_{k+1}): *Η απόδειξη έγκειται στην επαλήθευση, με χρήση των (d_k), (a_k), (c_k), του ότι το αριθμός l_{k+1} που ορίζεται από την παράσταση $l_{k-1}+I_{k-1}(m_{k-1}-m_k)$ είναι φυσικός*[13]

(b_{k+1}): *Από την ισότητα (d_k): $l_k\phi_k = a - m_k b$ συνεπάγεται ότι η ϕ_k είναι αποτομή. Έστω η συζυγής της ευθεία εκ δύο ονομάτων $l_k\phi_k^* = a + m_k b$.*
Από το (a_{k+1}) και την Πρόταση Χ.114 παίρνουμε

$$l_k^2\phi_k(\phi_k)^* = (a - m_k b)(a + m_k b) = a^2 - m_k^2 b^2 = l_{k+1}l_k b^2.$$

[13]Αναλυτική απόδειξη βλ. [Negrepontis]

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με l_k, προκυπτει

$$l_k\phi_k(\phi_k)^* = l_{k+1}b^2. \tag{3.1}$$

Όμως, από την ανθυφαιρετική σχέση (β) της Πρότασης 3.1 έχουμε $\phi_k(I_kb + \phi_{k+1}) = b^2$ από όπου προκύπτει

$$l_{k+1}\phi_k(I_kb + \phi_{k+1}) = l_{k+1}b^2. \tag{3.2}$$

Συγκρίνοντας τις (3.1) *και* (3.2) *προκύπτει $l_{k+1}\phi_k(I_kb+\phi_{k+1}) = l_k\phi_k(\phi_k)^*$, και τελικά*

$$l_{k+1}(I_kb + \phi_{k+1}) = l_k(\phi_k)^*.$$

(c_{k+1}): *Δεδομένου ότι το (b_{k+1}) έχει αποδειχθεί και επιπλέον με χρήση του (α) της Πρότασης 3.1, η απόδειξη του (c_{k+1}) συνίσταται στην στοιχειώδη εξακρίβωση του ότι το m_{k+1} που ορίζεται από την παράσταση $I_kl_{k+1} - m_k$ είναι φυσικός αριθμός.*

(d_{k+1}): *Στοιχειώδες, με χρήση των (b_{k+1}) και (c_{k+1}).*

□

Πόρισμα 1 (Περιοδικότητας). *Η ανθυφαίρεση των a και b είναι τελικά περιοδική.*

Απόδειξη. *Εκ του γεγονότος ότι το σύνολο ζευγών φυσικών αριθμών (l, m) (με το l να είναι άνω φραγμένο από το D και το m από το μ_1) είναι πεπερασμένο, προκύπτει με εφαρμογή της Αρχής του Περιστερεώνα πως υπάρχουν δείκτες k και s, με $k < s$, τ.ώ. $\phi_k = \phi_s$. Η τελική περιοδικότητα προκύπτει από το Κριτήριο Λόγου για τους αυξητικούς*[14] *παράγοντες ϕ_n. (Πρόταση 3.1, (δ).)* □

3.6.3 Η απόδειξη του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας (ΘΠΠ)

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζεται η απόδειξη του πλήρους Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας, το οποίο περιγράφεται στον *Πολιτικό*. Για τον σκοπό αυτό, θα ξεκινήσουμε ορίζοντας ακόμα μια ακολουθία (ω_n) οι όροι της οποίας είναι κατά μία έννοια αντίστροφοι των όρων της ακολουθίας των συζυγών των αυξητικών παραγόντων, δηλαδή αντίστροφοι των όρων της $(\phi_n)^*$).

[14] Από γ_n σε γ_{n+1}

Ορισμός 3.3 (Αντίστροφο του συζυγούς $(\phi_n)^*$). *Η ευθεία ω_n ορίζεται από την σχέση $(\phi_n)^*\omega_n = b^2$.*

Από τη στιγμή που $(\phi_n)^*$ είναι μία ευθεία εκ δύο ονομάτων, προκύπτει από το Βιβλίο Χ (συζυγία, Πρόταση Χ.112) πως η ω_n είναι αποτομή. Μαλιστα μπορούμε να αντλήσουμε ακόμα περισσότερες πληροφορίες για τους όρους της ακολουθίας (ω_n) όπως αποδεικνύει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.7. *Τα ω_n έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:*

(a) Η ευθεία ω_n είναι αποτομή. Συγκεκριμένα, έχει τη μορφή $l_{n+1}\omega_n = a - m_n b$,

(b) $\omega_n < b$,

(c) $\omega_1(\phi_1 + 2m_1 b) = b^2$ και

(d) $\omega_{n+1}(I_n b + \omega_n) = b^2$.

Απόδειξη. [15]

(a) Εξ' ορισμού των ω_n σε συνδυασμό με τα (a_n) και (d_n) της Πρότασης 3.6.

(b) Εξ' ορισμού των ω_n σε συνδυασμό με το (c_n) της Πρότασης 3.6.

(c) Εξ' ορισμού των ω_1 και ϕ_1.

(d) Εξ' ορισμού των ω_n σε συνδυασμό με το (d_{n+2}) της Πρότασης 3.6. □

Απόδειξη (ΘΠΠ). *Τοποθετούμε τους όρους των δύο ακολουθιών (ϕ_n) και (ω_n) σε μία ως ακολούθως:*

$$\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2, ..., \phi_n, \omega_n, ...$$

Από την Αρχή του Περιστερεώνα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Περιοδικότητας και το (a) της Πρότασης 3.7, υπάρχει ένα πρώτο στοιχείο στην ακολουθία που κατασκευάστηκε, τ.ώ.:

i. όλα τα προηγούμενα είναι διαφορετικά ανά δύο, και

ii. το εν λόγω στοιχείο ταυτίζεται με κάποιο από τα προηγούμενα.

[15] Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις προς εξέταση:

Περίπτωση I: *Τα στοιχεία* $\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2, ..., \phi_{k-1}, \omega_{k-1}, ...$ *είναι διαφορετικά ανά δύο και το στοιχείο* ϕ_k *ταυτίζεται με κάποιο από τα προηγούμενα στοιχεία. Τότε ισχυριζόμαστε πως* $\omega_{k-1} = \phi_k$*.*
Περίπτωση II: *Τα στοιχεία* $\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2, ..., \phi_{k-1}, \omega_{k-1}, ..., \phi_k$ *είναι διαφορετικά ανά δύο και το στοιχείο* ω_k *ταυτίζεται με κάποιο από τα προηγούμενα. Τότε ισχυριζόμαστε πως* $\phi_k = \omega_k$*.*

Απόδειξη (Περίπτωση I). *Υπάρχουν τρεις υποπεριπτώσεις:*

(a) Εάν η αποτομή ϕ_k *ταυτίζεται με την αποτομή* ϕ_1*, τότε έχουμε αντίφαση.*[16]

(b) Εάν η αποτομή ϕ_k *ταυτίζεται με την αποτομή* ϕ_j*, για* j *με* $1 < j < k$*, τότε έχουμε αντίφαση.*
Πράγματι*, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι* $\phi_k = \phi_j$ *από όπου προκύπτει πως οι συζυγείς τους εκ δύο ονομάτων είναι επίσης ίσες:* $(\phi_k)^* = (\phi_j)^*$*. Εξ' ορισμού του* ω_k *ισχύει* $(\phi_k)^*\omega_k = (\phi_j)^*\omega_j b^2$*, από όπου προκύπτει* $\omega_k = \omega_j$*.*
Όμως, από το (d) της Πρότασης 3.7 ισχύει πως $\omega_j(I_{j-1}b + \omega_{j-1}) = b^2$ *και* $\omega_k(I_{k-1}b + \omega_{k-1}) = b^2$*.*
Ως εκ τούτου, $I_{k-1}b = I_{j-1}b$*. Καθώς (σύμφωνα και με το (b) της Πρότασης 3.7) και τα δύο μέλη της εξίσωσης αναπαριστούν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας αρχικής ευθείας με την ίδια ευθεία* b*, προκύπτει ότι τα υπόλοιπα είναι ίσα:* $\omega_{k-1} = \omega_{j-1}$*. ΑΤΟΠΟ, καθώς τα στοιχεία* $\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2, ..., \phi_{k-1}, \omega_{k-1}$ *έχει υποτεθεί πως είναι διαφορετικά ανά δύο.*
Επομένως, το ϕ_k *δεν είναι ίσο με το* ϕ_j*, για κάποιο* j *με* $1 < j < k$*.*

(c) Η αποτομή ϕ_k *ταυτίζεται με την αποτομή* ω_j*, για κάποιο* j *με* $j < k - 1$*, τότε έχουμε αντίφαση.*[17]

Επομένως, από τη στιγμή που το ϕ_k *ισούται με κάποιο από τα στοιχεία* $\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2, ..., \phi_{k-1}, \omega_{k-1}$*, η μόνη εναπομείνασα δυνατότητα από τα (a), (b) και (c) είναι να ισχύει* $\omega_{k-1} = \phi_k$*.*

Η ***Περίπτωση II*** *αντιμετωπίζεται παρόμοια και καταλήγει στο ότι* $\phi_k = \omega_k$*.*

Η απόδειξη ολοκληρώνεται δείχνοντας την παλινδρομικότητα στην ***Περίπτωση I***[18]*.*

[16] Η απόδειξη είναι παρόμοια με του (b) που παρουσιάζεται στη συνέχεια.
[17] Η απόδειξη είναι παρόμοια με του (b) που παρουσιάστηκε παραπάνω.
[18] Η **Περίπτωση II** αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Από το γεγονός (που αποδείχθηκε παραπάνω) πως $\omega_{k-1} = \phi_k$ *και τις σχέσεις* $\phi_k(I_k b + \phi_{k+1}) = b^2$ *(Πρόταση 3.1,(b)) και* $\omega_{k-1}(I_{k-2}b + \omega_{k-2}) = b^2$ *(Πρόταση 3.7,(b)) συνεπάγεται ότι*
$I_k b + \phi_{k+1} = I_{k-2}b + \omega_{k-2}$.
Από τη στιγμή που (σύμφωνα με τις Προτάσεις 3.1,(a) και 3.7,(b)) και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας αντιπροσωπεύουν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας αρχικής ευθείας με την ίδια ευθεία b, προκύπτει πως τα δύο υπόλοιπα και τα δύο πηλίκα είναι ίσα: $I_k = I_{k-2}$ *και* $\phi_{k+1} = \omega_{k+2}$.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει $I_{k+1} = I_{k-3}$ *και* $\phi_{k+2} = \omega_{k-3}$.
Συνεχίζοντας ακόμα τοιουτοτρόπως, προκύπτει $I_1 = I_{2k-3}$ *και* $\phi_{2k+2} = \omega_1$.
Όμως, ισχύει ότι $\phi_{2k-2}(I_{2k-2}b + \phi_{2k-1}) = b^2$ *(Πρόταση 3.1,(b)) και* $\omega_1(2\mu_1 b + \phi_1) = b^2$ *(Πρόταση 3.7,(d)).*
Άρα $I_{2k-2}b + \phi_{2k-1} = 2\mu_1 b + \phi_1$.
Από τη στιγμή που (σύμφωνα με την Πρόταση 3.1,(a)) και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας αναπαριστούν την ανθυφαιρετική διαίρεση της ίδιας αρχικής ευθείας με την ευθεία b, προκύπτει ότι τα δύο υπόλοιπα και τα δύο πηλίκα είναι ίσα: $I_{2k-2} = 2\mu_1$ *και* $\phi_{2k-1} = \phi_1$.
Από την ισότητα $\phi_{2k-1} = \phi_1$ *(Κριτήριο Λόγου για τους αυξητικούς*[19] *παράγοντες* ϕ_n*, Πρόταση 3.1,(d)), συνεπάγεται η περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης, και από τις ισότητες*
$I_{2k-2} = 2\mu_1$ *και* $I_1 = I_{2k-3}, I_2 = I_{2k-4}, ..., I_k = I_{k-2}$*, και* $I_{k+1} = I_{k-3}$*,*
συνεπάγεται η παλινδρομικότητα στην περίοδο της ανθυφαίρεσης, δηλαδή το ζητούμενο, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος. □

[19] από γ_n σε γ_{n+1}

Κεφάλαιο 4

Ινδοί

4.1 Kuttaka (pulveriser)

Η επίλυση της γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης $am - by = c$ για m και y θετικούς ακεραίους όπου $a > b$ και c ακέραιοι σχετικώς πρώτοι, καλείται από τους Ινδούς μαθηματικούς kuttaka. Kuttaka σημαίνει στην πραγματικότητα κονιορτοποιητής (pulveriser) και το όνομα δόθηκε στη μέθοδο λόγω της διαδικασίας συνεχόμενων διαιρέσεων που πραγματοποιούνται για την εύρεση λύσης. Ο λόγος που η kuttaka θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία είναι πως συνδέεται με την διαδικασία cakravāla που οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν για την επίλυση της εξίσωσης Pell και την οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ο πρώτος Ινδός μαθηματικός που ασχολήθηκε με την επίλυση της προαναφερθείσας εξίσωσης είναι ο Arya Bhata (499 μ.Χ.) στο έργο του *Arya Bhatiya*. Οι γλωσσικές δυσκολίες που προέκυψαν από τη συνήθεια των Ινδών να γράφουν τα πάντα σε μορφή ποιήματος καθώς και η σπανιότητα εύρεσης γραπτού υλικού δυσκόλεψαν τους σύγχρονους σχολιαστές στο να καθορίσουν ποια ήταν ακριβώς η διαδικασία που ο Arya Bhata ακολουθούσε. Η ερμηνεία της kuttaka βασίζεται κυρίως στον Bhāskara I ο οποίος είτε ήταν μαθητής του Arya Bhata ή ανήκε στην ιεραρχία των μαθητών του.

Η μετάφραση δίδεται από το βιβλίο [Srinivasiengar, 1988, σελ. 96]:

Divide the divisor corresponding to the greater remainder by the divisor corresponding to the smaller remainder. The residue and the divisor corresponding to the smaller remainder being mutually divided, the last residue should be multiplied by an integer at our choice such that the product on being added to (if the number of quotients in the division process is even) or subtracted (if the number of quotients is odd) by the difference of the remainders, will be

exactly divisible by the penultimate remainder. Place the quotients of the mutual division succesively one below the other in a column; below them the optional multiplier, and below it the quotient just obtained. The penultimate is multiplied by the one just above it, and added to that just below it. Repeating this process, divide the last number obtained by the divisor corresponding to the smaller remainder. Then multiply the residue by the divisor corresponding to the greater remainder, and add the greater remainder. The result will be a number corresponding to the two divisors.

Η kuttaka δεν πρόκειται παρά για φανερή εφαρμογή του Ευκλείδειου αλγορίθμου (πεπερασμένη ανθυφαίρεση) των a και b, με $a > b$ σχετικώς πρώτους, που αποτελούν τους συντελεστές των m και y αντίστοιχα της προς επίλυση εξίσωσης $am - by = c$.

Μια ερμηνεία της kuttaka δίδεται από τον κ. Νεγρεπόντη και παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Ας ξεκινήσουμε με τη διατύπωση ενός βασικού Λήμματος.

Λήμμα 4.1. [1] *Εάν $a > b$ και $y > m$ είναι δύο ζεύγη αριθμών και*

$$a = k_1 b + a_1 \qquad y = k_1 m + y_1$$
$$b = k_2 a_1 + b_1 \qquad m = k_2 y_1 + y_2,$$

τότε $am - by = a_1 y_2 - b_1 y_1$.

Συνεχιζουμε τώρα με την ανάλυση του Ευκλείδειου αλγορίθμου των a και b της εξίσωσης για την οποία αναζητούμε λύση.
Περίπτωση I: Τα βήματα του Ευκλείδειου αλγορίθμου είναι **περιττά** τον αριθμό.
Έστω για παράδειγμα πως ο αριθμός των βημάτων είναι πέντε.

$$\begin{aligned} a &= k_1 b + a_1 \\ b &= k_2 a_1 + b_1 \\ a_1 &= k_3 b_1 + a_1 \\ b_1 &= k_4 a_2 + b_2 \\ a_2 &= k_5 b_2. \end{aligned}$$

[1] Το Λήμμα αληθεύει επίσης για μεγέθη a, b, y, x και χρησιμεύει στην απόδειξη (με χρήση της Αρχής του Ευδόξου) του ότι εάν $Anth(a, b) = Anth(y, x)$, τότε $ax = by$. Επομένως το Λήμμα συνδέεται με Θεωρία Λόγων Μεγεθών που αποδίδουμε στον Θεαίτητο.

Βέβαια, $b_2 = 1$.

Αναζητούμε μια λύση (m, y), με y, x σχετικά πρώτους ώστε

$$\begin{aligned} y &= k_1 m + y_1 \\ m &= k_2 y_1 + m_1 \\ y_1 &= k_3 m_1 + y_2 \\ m_1 &= k_4 y_2 + m_2. \end{aligned}$$

Τότε, από το Λήμμα και δεδομένου ότι $b_2 = 1$, έπεται ότι
$c = am - by = a_1 m_1 - b_1 y_1 = a_2 m_2 - b_2 y_2 = a_2 m_2 - y_2$.

Αναζητούμε μια λύση (m_2, y_2) ώστε $a_2 m_2 - y_2 = c$, δηλαδή
$a_2 m_2 = y_2 + c$.
Για αυτό, αρκεί να βρούμε y_2 ώστε $y_2 + c$ να διαιρείται δια του a_2 και βρίσκουμε το αντίστοιχο m_2.
Με διαδοχική αντικατάσταση και ξεκινώντας από τα y_2, m_2 φτάνουμε σε μια λύση (m, y) ώστε $am - by = c$.

Όταν έχει βρεθεί μία λύση μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση που είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} y' &= y + ak \\ m' &= m + bk, \end{aligned}$$

για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Περίπτωση ΙΙ: Τα βήματα του Ευκλειδείου αλγορίθμου είναι **άρτια** τον αριθμό.
Έστω για παράδειγμα πως είναι τέσσερα.

$$\begin{aligned} a &= k_1 b + a_1 \\ b &= k_2 a_1 + b_1 \\ a_1 &= k_3 b_1 + a_1 \\ b_1 &= k_4 a_2. \end{aligned}$$

Βέβαια, $a_2 = 1$.

Με την ίδια λογική όπως στην Περίπτωση Ι, αναζητούμε μια λύση

(m, y), με y, x σχετικά πρώτους ώστε

$$\begin{aligned} y &= k_1 m + y_1 \\ m &= k_2 y_1 + m_1 \\ y_1 &= k_3 m_1 + y_2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε **το πρώτο βήμα** της $Anth(a, b)$, $a = k_1 b + a_1$ για να ορίσουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση του $y = k_1 m + y_1$.
Τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} am - b(k_1 m + y_1) &= c && \Rightarrow \\ (a - k_1 b)m - by_1 &= c && \Rightarrow \\ a_1 m - by_1 &= c && \Rightarrow \\ by_1 - a_1 m &= -c, \end{aligned}$$

με $b > a_1$.

Τότε, από το Λήμμα, και δεδομένου ότι $a_2 = 1$, έπεται ότι
$-c = by_1 - a_1 m = b_1 y_2 - a_2 m_1 = b_1 y_2 - m_1$

Αναζητούμε μια λύση (m_1, y_2) ώστε $b_1 y_2 = m_1 - c$.
Δεν έχουμε παρά να βρούμε m_1, ώστε $m_1 - c$ να διαιρείται δια του b_1.
Τα υπόλοιπα προχωρούν με τον ίδιο τρόπο όπως στην Περίπτωση Ι.

Παράδειγμα Περίπτωσης ΙΙ Έστω η γραμμική Διοφαντική εξίσωση $11m - 7y = -90$.
Η $Anth(11, 7)$ έχει άρτιο αριθμό βημάτων. Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Επειδή τα βήματα του Ευκλείδειου αλγορίθμου είναι άρτια, χρησιμοποιούμε το πρώτο βήμα $11 = 1 \cdot 7 + 4$ για την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $m = y_1 + m_1$.
Τότε, $7y_1 - 4_m = 90$.
Επομένως

$$\begin{aligned} 7 &= 1 \cdot 4 + 3 & m &= y_1 + m_1 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 & y_1 &= m_1 + y_1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 & m_1 &= 3 \cdot y_2. \end{aligned}$$

Έχουμε από το Λήμμα: $7y_1 - 4m = 3y_2 - m_1$.
Άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$3y_2 = m_1 + 90.$$

Ψάχνουμε για μία λύση π.χ. $m_1 = 3$.
Τότε

$$\begin{aligned} 3y_2 &= 93 \\ y_2 &= 31 \\ y_1 &= m_1 + y_2 = 3 + 31 = 34 \\ m &= y_1 + m_1 = 34 + 3 = 37 \\ y &= m + y_1 = 37 + 34 = 71. \end{aligned}$$

Όλες οι άλλες λύσεις είναι της μορφής

$$\begin{aligned} y' &= 71 + 11k \\ m' &= 37 + 7k, \end{aligned}$$

για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4.2 Varga-prakṛti

Ένα από τα μαθηματικά προβλήματα που απασχόλησαν τους Ινδούς ήδη από το δεύτερο μισό του 1ου αι. μ.Χ. ήταν η επίλυση της εξίσωσης Pell στη γενική της μορφή

$$x^2 = Dy^2 + l, \tag{4.1}$$

για ακέραιες τιμές των x και y, με D μη τετράγωνο θετικό ακέραιο και l ακέραιο. Η εξίσωση αυτή καλείται από τους Ινδούς varga-prakṛti (ή και Kṛti-rakṛti), δηλαδή *Τετραγωνική-φύση* σε ελεύθερη μετάφραση, και η ειδική περίπτωση για $l = 1$ φαίνεται να είναι η πιο πολυσυζητημένη. Στα επόμενα ως varga-prakṛti θα εννοούμε την εξίσωση Pell, δηλαδή την περίπτωση όπου $l = 1$, εκτός αν επισημαίνεται κάτι διαφορετικό. Το πρόβλημα πρωτοεμφανίζεται - σύμφωνα πάντα με τις σωζόμενες Ινδικές πηγές - το 628 μ.Χ. στην πραγματεία Brahma-sphuta-siddhānta του Brahmagupta.

Για την επίλυση της Varga-prakṛti, οι Ινδοί χρησιμοποιούν δύο μεθόδους. Την μέθοδο σύνθεσης του Brahmagupta, η οποία εφαρμόζεται

υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις και την Cakravāla, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε περίπτωση, ούσα γενικότερη.

Ο Brahmagupta, γεννήθηκε το 598 μ.Χ. στην πόλη Bhillamala. Η συνεισφορά του στα μαθηματικά και την αστρονομία θεωρείται σπουδαία και εξαντλείται στις δύο πραγματείες του, Brahma-sphuta-siddhānta (628 μ.Χ.) και Khaṇḍa-khādyaka (665 μ.Χ.). Τα κείμενα αυτά είναι γραμμένα σε Σανσκριτικό στίχο, όπως συνηθιζόταν. Το ενδιαφέρον μας εντοπίζεται στην πρώτη εξ' αυτών των πραγματειών και συγκεκριμένα στο 18ο βιβλίο της όπου ο Brahmagupta ασχολείται με άλγεβρα και αριθμητική. Στο βιβλίο αυτό λοιπόν περιέχεται η λύση γραμμικών Διοφαντικών εξισώσεων καθώς και της varga-prakṛti.

Μελετώντας τη συνεισφορά των Ινδών στη μελέτη της εξίσωσης Pell, ένα από τα ονόματα που θα ξεχωρίσει επίσης κάποιος είναι εκείνο του Bhāskara II, διάσημου μαθηματικού που θεωρείται ουσιαστικά ο τελευταίος της κλασσικής ινδικής περιόδου [Emch et al., 2005, σελ. 25]. Το έργο του Siddhāntaśiromaṇi(1150 μ.Χ.) έχει, όπως και του Brahmagupta, μορφή ποιήματος καθώς είναι γραμμένο σε στίχους και χωρίζεται σε τέσσερα μέρη από τα οποία θα μας απασχολήσει το επονομαζόμενο Vija-gaṇita (Άλγεβρα) όπου και ασχολείται εκτός των άλλων με την επίλυση της varga-prakṛti με την μέθοδο cakravāla.

Κάποιοι ακόμα Ινδοί μαθηματικοί που θα μας απασχολήσουν στη μελέτη μας αυτή γύρω από την επίλυση της varga-prakṛti είναι ο Nārāyaṇa και ο Jayadeva. Εκτενέστερα θα μιλήσουμε για αυτούς στη συνέχεια του Κεφαλαίου. Προς το παρόν ας έχουμε υπόψιν μας ότι η μέθοδος που καταγράφουν για επίλυση της varga-prakṭi είναι επίσης η cakravāla.

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, ο μόνος από τους προαναφερθέντες μαθηματικούς που δεν φαίνεται να γνωρίζει την cakravāla είναι ο Brahmagupta. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που εγείρεται προς μελέτη είναι αν πράγματι αυτό ισχύει, κάτι που όμως δεν θα επιχειρήσουμε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

4.3 Ειδική λύση του Brahmagupta

4.3.1 Η Αρχή Σύνθεσης του Brahmagupta

Ο Brahmagupta, αρχίζει την αναφορά του στην επίλυση της varga-prakṛti (4.1) παραθέτοντας έναν εξαιρετικά ενδιαφέροντα κανόνα (*Bhāvana* στα Σανσκριτικά), σύμφωνα με τον οποίο δύο ζευγάρια ήδη γνωστών λύσεων της (4.1), όχι απαραίτητα με το ίδιο l, συντίθενται και σαν αποτέλεσμα παράγεται ένα νέο ζεύγος λύσεών της με σταθερό όρο ll':

RULE §39 − 40:
A root [is set down] two-fold: and [another, deduced] from the assumed square multiplied by the multiplier, and increased or diminished by a quantity assumed. The product of the first [pair], taken into the multiplier, with the product of the last [pair] added, is a "last" root. The sum of the products of oblique multiplication is a "first" root. The additive is the product of the like additive or subtractive quantities.

The roots [so found], divided by the [original] additive or subtractive quantity, are [roots answering] for additive unity. [Colebrooke, 1817, σελ. 363]

Η αντιστοιχία με την ορολογία του Colebrooke μεταφράζοντας τον Brahmagupta που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εξής:

D: "multiplier"(guṇaka στο Σανσκριτικό κείμενο)
x: "last root"
y: "first root"
l: "additive ή subtractive" (kṣepa, prakṣepa ή prakṣepaka για τον Brahmagupta).

Οι Datta και Singh [Datta and Singh, 1938] αποδίδουν στη φράση *two-fold* (dvidhâ στα Σανσκριτικά) μια διττή ερμηνεία. Η πρώτη εξ' αυτών, είναι γενικότερη και αφορά τη σύνθεση δύο εξισώσεων με διαφορετικά ζεύγη λύσεων (x, y) και διαφορετικό σταθερό όρο l (Composition of Unequals ή *Atulya Bhâvanâ* στα Σανσκριτικά). Θα αναφερόμαστε στην ερμηνεία αυτή ως Λήμμα ή Αρχή Brahmagupta.

Η δεύτερη ερμηνεία της φράσης *two-fold* αφορά τη σύνθεση μιας τριάδας (x, y, l) με τον εαυτό της (Composition of Equals ή *Tulya Bhâvanâ*). Θα αναφερόμαστε στην ερμηνεία αυτή ως Πόρισμα Brahmagupta ή **τετραγωνισμό**.

Ο Κανόνας του Brahmagupta μπορεί να ανακατασκευαστεί με σύγχρονη μαθηματική ορολογία από τον Ορισμό, το Λήμμα και το Πόρισμα που ακολουθούν:

Ορισμός 4.1 (D-τριάδα). *Ως D-τριάδα ορίζεται μια τρίαδα (x, y, l) που ικανοποιεί τη σχέση $x^2 - Dy^2 = l$.*

Λήμμα Brahmagupta. *Εάν (x, y, l) και (x', y', l') είναι δύο D-τριάδες, τότε εάν*

$$\begin{aligned} x'' &= xx' \pm Dyy' \\ y'' &= xy' \pm yx' \\ l'' &= l \cdot l', \end{aligned} \tag{4.2}$$

η (x'', y'', l'') είναι μια D-τριάδα.

Πόρισμα Brahmagupta. *Στην ειδική περίπτωση όπου* $x' = x, y' = y$ *και* $l' = l$*, η D-τριάδα που προκύπτει από την* (4.2) *παίρνει τη μορφή*

$$\begin{aligned} x'' &= x^2 + Dy^2 \\ y'' &= 2xy \\ l'' &= l^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ο Bhāskara II αναφέρεται και αυτός στο έργο του Vija-gaṇita στην Αρχή της Σύνθεσης [Colebrooke, 1817, σελ. 171]:

Rules for investigating the square-root of a quantity with additive unity: Let a number be assumed, and be termed the "least" root. That number, which, added to, or subtracted from, the product of its square by the given coefficient, makes the sum (or difference) give a square-root, mathematicians denominate a positive or a negative additive ; and they call that root the "greatest" one.
Having set down the "least" and "greatest" roots and the additive, and having placed under them the same or others, in the same order, many roots are to be deduced from them by composition. Wherefore their composition is propounded. The "greatest" and "least" roots are to be reciprocally multiplied crosswise; and the sum of the products to be taken for a least root. The product of the two [original] "least" roots being multiplied by the given coefficient, and the product of the "greatest" roots being added thereto, the sum is the corresponding greatest root; and the product of the additives will be the [new] additive.
Or the difference of the products of the multiplication crosswise of greatest and least roots may be taken for a "least" root: and the difference between the product of the two [original] least roots multiplied together and taken into the coefficient, and the product of the greatest roots multiplied together, will be the corresponding "greatest" root: and here also the additive will be the product of the two [original] additives.

Η βαρύτητα της Αρχής της Σύνθεσης του Brahmagupta σε ένα πρώτο επίπεδο έγκειται στο γεγονός πως χρησιμοποιείταιγια την παραγωγή νέων λύσεων της Pell από γνωστές λύσεις της varga-prakṛti με δεδομένο l. Μια βαθύτερη μελέτη εντούτοις, φαίνεται πως έχει πολλά παραπάνω να μας αποκαλύψει για τη σημασία της Αρχής. Περισσότερα όμως θα δούμε σε επόμενο Κεφάλαιο.

4.3.2 Παραδείγματα

Ο Brahmagupta παραθέτει δύο παραδείγματα εφαρμογής της Αρχής Σύνθεσης ως απάντηση σε ένα ερώτημα-άσκηση που ο ίδιος θέτει [Colebrooke, 1817, Question 27, σελ. 564]. Οι εξίσωσεις για καθεμία

από τις οποίες βρίσκει ένα θετικό ακέραιο ζεύγος λύσεων είναι η $x^2 = 92y^2 + 1$ και $x^2 = 83y^2 + 1$.

Making the square of the residue of signs and minutes on a Wednesday, multiplied by ninety-two and eighty-three respectively, with one added to the product, [afford, in each instance] an exact square, [a person solving this problem] within a year [is] a mathematician.

Here the assumed square is put 1.
Its root is " least" root.
Set down twice, $\begin{array}{|c|}\hline L\,1 \\ \hline L\,1 \\ \hline\end{array}$.
Again the same square, multiplied by ninety-two, and having eight added [to make it yield a square-root], amounts to 100*: the root of which is "greatest",* 10.
Statement of them in order $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,1 & G\,10 & A\,8 \\ \hline L\,1 & G\,10 & A\,8 \\ \hline\end{array}$.
Then, proceeding by the rule (the product of the first taken into the multiplier, & e. § 39—40) the "least" and "greatest" roots for additive sixty-four are found $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,20 & G\,192 & A\,64 \\ \hline\end{array}$.
By the concluding part of the rule (§ 40*) the "least" and "greatest" roots for additive unity come out* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,\frac{5}{2} & G\,24 & A\,1 \\ \hline\end{array}$.
Again, from this, by the combination of like ones, other least and greatest roots are brought out $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,120 & G\,1151 & A\,1 \\ \hline\end{array}$.
Here the "least" root is residue of degrees.
Whence, as before, the number of [elapsed] days is deduced, 65.

In the second example, the square assumed is 1.
Its square-root is "least" root, 1.
From the assumed square, multiplied by eighty-three, and lessened by subtraction of two, the square-root extracted is "greatest," 9.
*Proceeding by the rule (§*39*), the "greatest" root comes out,* 164*; and by the sequel of it (§*40*), the "least" root,* 18*; and these, divided by the subtractive, namely* 2*, become roots for additive unity,and greatest roots are brought out* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,9 & G\,82 & A\,1 \\ \hline\end{array}$.
The "least" is residue of minutes: whence, as before, the number of [elapsed] days is found, 22.

Στο παραπάνω κείμενο ας επισημάνουμε τις εξής αντιστοιχίες:

L : "least root",
G : "greatest root"
A : "additive".

Με σύγχρονο συμβολισμό, ο Brahmagupta ακολουθεί τα εξής βήματα:

- Για να λύσει την $x^2 = 92y^2 + 1$ αρχίζει από την

$$x^2 = 92y^2 + 8.$$

Επιλέγει $y = 1$ ούτως ώστε να προκύψει τετράγωνος αριθμός και επομένως $x = 10$.
Με σύνθεση της εξίσωσης αυτής με τον εαυτό της (Πόρισμα Brahmagupta), προκύπτει

$$\begin{aligned} x'' &= x^2 + 92y = 192 \\ y'' &= 2xy = 20 \\ l'' &= l^2 = 64, \end{aligned}$$

δηλαδή $192^2 = 92 \cdot 20^2 + 64$.
Στη συνέχεια διαιρεί και τα δύο μέλη με 64 και προκύπτει

$$24^2 = 92 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1.$$

Εφαρμόζοντας στην τελευταία το Πόρισμα Brahmagupta προκύπτει το **ακέραιο** ζεύγος λύσεων $(1151, 120)$:

$$\boxed{1151^2 = 92 \cdot 120^2 + 1}.$$

- Για να λύσει την $x^2 = 83y^2 + 1$, ο Brahmagupta αρχίζει από την

$$x^2 = 83y^2 - 2.$$

Με σύνθεση με τον εαυτό της προκύπτει

$$164^2 = 83 \cdot 18^2 + 4.$$

Τέλος, με διαιρεση και των δύο μελών με το 4 προκύπτει το ακέραιο ζεύγος λύσεων $(82, 9)$:

$$\boxed{82^2 = 92 \cdot 9^2 + 1}.$$

Παρατηρήσεις

1 Και στα δύο παραδείγματά του ο Brahmgagupta αποσκοπεί σε εύρεση ακέραιων λύσεων της $x^2 = Dy^2 + 1$. Κατά την παρουσίαση των παραδειγμάτων αυτών, δεν παραθέτει κάποια μέθοδο που να οδηγεί προς αυτήν την κατεύθυνση, παρά μόνο τις τελικά επιλεγμένες τιμές των x και y. Πρόκειται λοιπόν απλά για επιτυχημένα παραδείγματα δοκιμών ή ο Brahmagupta γνώριζε μια μέθοδο που οδηγεί πάντα σε ακέραιες λύσεις αλλά δεν την αναφέρει;

2 Ο Brahmagupta στα παραδείγματα αυτά όπου ασχολείται με την varga-prakṛti ($l = 1$), δεν εφαρμόζει πουθενά το Λήμμα Brahmagupta, παρά μόνο το Πόρισμα. Με άλλα λόγια, δεν κάνει σύνθεση ενός ζεύγους λύσεων με ένα ζεύγος λύσεων μιας άλλης με διαφορετικό l αλλά συνθέτει μόνο ζεύγη λύσεων μιας εξίσωσης με τον εαυτό τους. Και αυτός είναι ο μόνος τρόπος με τον οποίο προχωρά.

Το μόνο παράδειγμα σύνθεσης ζευγών λύσεων εξισώσεων με διαφορετικό l είναι το εξής [Colebrooke, 1817, σελ. 365]:

Question 32. *The square of residue of revolutions, or the like, multiplied by three, and having nine hundred added, [...] is a square. Solving [this problem] within a year [the proficient is] a mathematician.*

Statement: Multiplier 3. *Additive* 900.
Here the additive is divided by the square number 900*; and the quotient is* 1*: whence the "least" and "greatest" roots are deduced,* 1 *and* 2.
These, multiplied by the square-root of the abridging divisor, namely, 30*, become the "least" and 'greatest" roots for the additive nine hundred,* 30 *and* 60.*[...]*

In any instance, where the additive is exactly divisible by a square, the least and greatest roots, which are thence deduced, being multiplied by the squareroot of the abridging divisor, become roots adapted to that additive or subtractive. And further, by composition of the roots so found for the given additive, with roots serving for additive unity, other roots are derived for the same additive. For instance,

L 30	*G* 60	*A* 900
L 1	*G* 2	*A* 1

*By the preceding rules (§*39—40 *and* 41*) other "least" and "greatest" roots are here found,* 120 *and* 210*. So in all similar cases.*

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το Λήμμα χρησιμοποιείται στην εφαρμογή της μεθόδου cakravāla για επίλυση της varga-prakṛti

από μεταγενέστερους Ινδούς όπως τον Bhāskara II και τον Nārāyaṇa. Ένα ερώτημα που γεννάται είναι το τι υποδεικνύει η αναφορά του Λήμματος από τον Brahmagupta παρ'όλο που χρησιμοποιείται από αυτόν μονάχα ένα συγκεκριμένο Πόρισμά του στις εφαρμογές;

Ο Bhāskara II δίνει κι αυτός παραδείγματα εφαρμογής της Αρχής Σύνθεσης. Πρόκειται για την επίλυση (με θετικούς ακέραιους) των $x^2 = 8y^2 + 1$ και $x^2 = 11y^2 + 1$ [Colebrooke, 1817, σελ. 173]:

Example. What square, multiplied by eight, and having one added to the product, will be a square? Declare it, mathematician! Or what square, multiplied by eleven, and having one added to the product, will be a square, my friend?

Statement on Example 1st: $\boxed{C\,8 \mid A\,1}$.
Here putting unity for the assumed "least" root, the "greatest" root is three, and additive one. Statement of them for composition:

$C\,8$	$L\,1$	$G\,3$	$A\,1$
	$l\,1$	$g\,3$	$a\,1$

.
By the rule [§77] the first "least" root 1*, multiplied by the second "greatest" root* 3*, gives the product* 3*. The second "least" root, by the first "greatest" gives the like product. Their sum is* 6*. Let this be the "least" root. The product of the two "less" roots* 1*, being multiplied by the given coefficient* 8*, and added to the product of the two "greater" roots* 9*, makes* 17*. This will be the "greater" root. The product of the additives will be the additive* 1*.*
Statement of the former roots and additive, with these, for composition:

$C\,8$	$L\,1$	$G\,3$	$A\,1$
	$l\,6$	$g\,17$	$a\,1$

.
Here, by composition, the roots are found $\boxed{L\,35 \mid G\,99 \mid A\,1}$*; and so on, idefinitely, by means of composition.*

Statement on Example 2d: Putting unity for the assumed "least", and subtracting two from the square of that multiplied by the given coefficient 11*, the "greater" root is* 3*. Hence the statement for composition is*

$C\,11$	$L\,1$	$G\,3$	$A\,\dot{2}$
	$l\,1$	$g\,3$	$a\,\dot{2}$

.
Proceeding as before, the roots for additive 4 *are* $\boxed{L\,6 \mid G\,20 \mid A\,4}$*. Then, by the rule §79, putting two for the assumed number, the roots for unity additive are found* $\boxed{L\,3 \mid G\,10 \mid A\,1}$*. Hence, by composition of like sets*, the "least" and "greatest" roots are found* $\boxed{L\,60 \mid G\,199 \mid A\,1}$*. In like manner, an indefinite number of roots may be deduced.*

4.3.3 Επίλυση της varga-prakṛti όταν υπάρχει λύση για $l = \pm 1, \pm 2,$ ή ± 4

Στην προσπάθεια έυρεσης θετικών ακέραιων λύσεων για την varga-prakṛti οι Ινδοί παρατήρησαν πως εάν ο σταθερός όρος l μιας -έστω βοηθητικής- εξίσωσης $x^2 = Dy^2 + l$ είναι -1, ± 2 ή ± 4, τότε οδηγούμαστε **πάντα** σε **ακέραιο** ζεύγος λύσεων της $x^2 = Dy^2 + 1$.

Η πρώτη γνωστή αναφορά από τους Ινδούς στην παραπάνω παρατήρηση, γίνεται από τον **Brahmagupta**, ο οποίος ρητά αναφέρει για τις περιπτώσεις i) $l = 4$ και ii) $l = -4$, τα εξής:

i) RULE §42:
When the additive is four, the square of the last root, less three, being halved and multiplied by the last, is a last root; and the square of the last root, less one, being divided by two and multiplied by the first, is a first root. [Colebrooke, 1817, σελ. 566]

ii) RULE §43:
When four is subtractive, the square of the last root is twice set down, having three added in one instance and one in the other: half the product of these sums is set apart, and the same less one. This, multiplied by the former less one, is "last" root. The other, multiplied by the product of the roots, is "first" root answering to that "last", [Colebrooke, 1817, σελ. 566]

Με σύγχρονη ορολογία:

i) Έστω $x^2 = Dy^2 + 4$.
Τότε, το ζεύγος $x' = \dfrac{x(x^2-3)}{2}$ και $y' = \dfrac{y(x^2-1)}{2}$, είναι (ακέραια) λύση της $x^2 = Dy^2 + 1$.

ii) Έστω $x^2 = Dy^2 - 4$.
Τότε, το ζεύγος

$$x' = (x^2+2)\left[\frac{(x^2+3)(x^2+1)}{2} - 1\right], \quad y' = \frac{xy(x^2+3)(x^2+1)}{2}$$

είναι (ακέραια) λύση της $x^2 = Dy^2 + 1$.

Ανακατασκευή των αποδείξεων
Παρακάτω παρουσιάζεται μια απόδειξη των δύο παραπάνω συμπερασμάτων όπως δίδεται από σύγχρονους μελετητές [Datta and Singh, 1938]. Ας διευκρινίσουμε πως ο Brahmagupta δεν δίνει ο ίδιος

αυτές τις αποδείξεις παρά μόνο τα ζεύγη λύσεων. Τίποτα δεν μας εμποδίζει όμως να υποθέσουμε πως τις γνώριζε καθώς το μόνο εργαλείο που όπως θα δούμε χρησιμοποιείται σε αυτές είναι το Πόρισμα Brahmagupta, δηλαδή ο τετραγωνισμός. Συγκεκριμένα:

i) Όταν $l = +4$.
Στην περίπτωση αυτή, ξεκινώντας από την

$$x^2 = Dy^2 + 4 \tag{4.4}$$

έχουμε

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = D\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1. \tag{4.5}$$

Η Σύνθεση της (4.5) με τον εαυτό της δίνει

$$\left(\frac{x^2}{4} + D\frac{y^2}{4}\right)^2 = D\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + 1. \tag{4.6}$$

Συνυπολογίζοντας ότι $Dy^2 = x^2 - 4$ από την (4.4), έχουμε

$$x' = \frac{x^2 - 2}{2}, \qquad y' = \frac{xy}{2}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα τις δυνατές περιπτώσεις:

- Εάν y άρτιος, τότε και x άρτιος (και το αντίστροφο) καθώς $x^2 = Dy^2 + 4$. Επομένως έχουμε βρει μια ακέραια λύση.
- Εάν y περιττός και x άρτιος η λύση που βρήκαμε είναι επίσης ακέραια.
- Στην περίπτωση όμως που y περιττός και x περιττός τότε για να φτάσουμε σε ακέραια λυση αναγκαζόμαστε να προβούμε σε διπό τετραγωνισμό της (4.5). Συγκεκριμένα, από την Αρχή Σύνθεσης για τις (4.5) και (4.6) παίρνουμε

$$\left[\frac{x(x^2-3)}{2}\right]^2 = D\left[\frac{y(x^2-1)}{2}\right]^2 + 1$$

Παρατηρούμε πως η λύση $x' = \dfrac{x(x^2-3)}{2}$ και $y' = \dfrac{y(x^2-1)}{2}$, η λύση στην οποία δηλαδή αναφέρεται ο Brahmagupta, **δεν** είναι ακέραια στην περίπτωση που y περιττός και x άρτιος.

Με άλλα λόγια ο Brahmagupta δεν κάνει τον παραπάνω έλεγχο περιπτώσεων, αγνοεί εντελώς την περίπτωση όπου y περιττός και x άρτιος και ο κανόνας του αφορά μόνο τις πέριπτώσεις όπου x και y άρτιοι ή x και y περιττοί.

ii) Όταν $l = -4$.
Ξεκινώντας από την

$$x^2 = Dy^2 - 4 \tag{4.7}$$

έχουμε

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = D\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1. \tag{4.8}$$

Η σύνθεση της (4.8) με τον εαυτό της δίνει

$$\left(\frac{x^2}{4} + D\frac{y^2}{4}\right)^2 = D\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + 1.$$

Συνυπολογίζοντας ότι $Dy^2 = x^2 + 4$ από την (4.7), έχουμε

$$\left(\frac{x^2+2}{2}\right)^2 = D\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + 1. \tag{4.9}$$

Με σύνθεση της (4.9) με τον εαυτό της (τετραγωνισμός) παίρνουμε

$$\left(\frac{x^4+4x^2+2}{2}\right)^2 = D\left[\frac{xy(x^2+2)}{2}\right]^2 + 1. \tag{4.10}$$

Εφαρμόζοντας την Αρχή της Σύνθεσης στις (4.9) και (4.10) (διπλός τετραγωνισμός της (4.9)) προκύπτει η

$$\left\{(x^2+2)\left[\frac{(x^2+3)(x^2+1)}{2} - 1\right]\right\}^2 = D\left[\frac{xy(x^2+3)(x^2+1)}{2}\right]^2 + 1. \tag{4.11}$$

Αποδεικνύεται πως οι τιμές

$$x' = (x^2+2)\left[\frac{(x^2+3)(x^2+1)}{2} - 1\right], \quad y' = \frac{xy(x^2+3)(x^2+1)}{2},$$

η λύση δηλαδή που δίνει ο Brahmagupta, είναι ακέραιες:

- Εάν x άρτιος, τότε και x^2+2 άρτιος και άρα x' και y' ακέραιοι.
- Εάν x περιττός, τότε x^2+3 και x^2+1 άρτιοι επομένως και σε αυτήν την περίπτωση x' και y' ακέραιοι. □

Ο **Bhāskara II**, στο έργο του Vija-gaṇita, στο τέλος της περιγραφής της μεθόδου cakravāla, για την οποία θα συζητήσουμε σε επομενη παράγραφο, αναφέρει το εξής:

[...] Thus are integral roots found with four, two, or one [or other number[2]*, for] additive : and composition serves to deduce roots for additive unity, from those which answer to the additives four and two [or other number.]*

Αυτό που κρατάμε από το απόσπασμα του Bhāskara II είναι πως εκτός από τις περιπτώσεις $l = \pm 4$, όταν επίσης έχουν βρεθεί ακέραιες λύσεις της $x^2 = Dy^2 + l$ για i) $l = -1$ ή ii) $l = \pm 2$, τότε μέσω της Αρχής της Σύνθεσης επάγονται ακέραιες λύσεις για την εξίσωση Pell, $x^2 = Dy^2 + 1$.

Ο Bhāskara, όπως και ο Brahmagupta, δεν δίνει απόδειξη της παραπάνω δήλωσης, είναι όμως απίθανο να μην τη γνωρίζει καθώς το μόνο εργαλείο που χρησιμοποιείται σε αυτήν είναι το Πόρισμα Brahmagupta (τετραγωνισμός) και μάλιστα η διαδικασία απόδειξης όταν $l = 2$ ακολουθείται κατά γράμμα στο τελευταίο βήμα της επίλυσης της $x^2 = 67y^2 + 1$, που θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Η απόδειξη είναι η εξής:

Έστω (x, y) ζεύγος ακέραιων λύσεων της (βοηθητικής) εξίσωσης $x^2 = Dy^2 + l$ για δεδομένο l.
Από τετραγωνισμό έπεται πως το ζεύγος $x' = x^2 + Dy^2$ και $y' = 2xy$ είναι μια λύση της ξίσωσης $x^2 = Dy^2 + l^2$.
Τότε, δεδομένης της

$$x^2 = Dy^2 + l, \tag{4.12}$$

η $x^2 = Dy^2 + l^2$ έχει σαν πρώτη λύση το ζεύγος $x' = x^2 + Dy^2$ και $y' = 2xy$.
Επομένως έχουμε:

$$\left(\frac{x^2 + Dy^2}{l}\right)^2 = D\left(\frac{2xy}{l}\right)^2 + 1.$$

Δηλαδή, μια λύση της $x^2 = Dy^2 + 1$ είναι η:

$$x' = \frac{x^2 + Dy^2}{l}, \qquad y' = \frac{2xy}{l}.$$

Απαιτούμε όμως η παραπάνω λύση να είναι ακέραια. Αυτό, στις περιπτώσεις που ακολουθούν πραγματικά συμβαίνει:

[2]Ο σχολιαστής Crishna (τέλη 16ου αιώνα, [Colebrooke, 1817, σελ. xxvi]) σημειώνει: *with four, two or one, additive* ***or subtractive****; or with some other number.*

1. Όταν $l = -1$. Προφανώς.

2. Όταν $l = \pm 2$.
Ας δούμε τι συμβαίνει όταν $l = +2$.
Στην περίπτωση αυτή, η βοηθητική εξίσωση γίνεται $x^2 = Dy^2 + 2$.
Σύμφωνα με όσα διατυπώθηκαν παραπάνω, μια πρώτη λύση της $x^2 = Dy^2 + 1$ θα είναι η $x' = \dfrac{x^2 + Dy^2}{2}$ και $y' = xy$.
Όμως $Dy^2 = x^2 - 2$.
Επομένως $x' = \dfrac{x^2 + x^2 - 2}{2} = x^2 - 1$ και $y' = xy$, δηλαδή x' και y' ακέραιοι.
Για $l = -2$ ομοίως προκύπτει πως x' και y' ακέραιοι.

Ο Sripati (1039 μ.Χ.) [Datta and Singh, 1938, σελ. 157] επίσης παρατηρεί πως:

If 1, 2 *or* 4 *be the additive or subtractive (of the auxiliary equation) the lesser and greater roots will be integral (abbinna).*

4.4 Cakravāla ή Κυκλική Μέθοδος

Η μέθοδος cakravāla για την επίλυση της varga-prakṛti και συγκεκριμένα για την περίπτωση όπου $k = 1$ (Pell) είναι στενά συνυφασμένη με το όνομα του Bhāskara II [Datta and Singh, 1938, σελ. 161]. Ο ίδιος όμως ο Bhāskara, στα έργα του *Līlāvatī* και *Bīja-gaṇita* (1150 μ.Χ.) αποδίδει τη μέθοδο επίλυσης της varga-prakṛti σε προγενέστερους συγγραφείς ([Colebrooke, 1817] και [Selenius, 1975]).

4.4.1 Jayadeva

Από την εγκυκλοπαίδεια [Selin, 1997], μαθαίνουμε πως η cakravāla εντοπίζεται και στο έργο του **Ācārya Jayadeva**, ο οποίος έζησε τουλάχιστον 100 χρόνια πριν από τον Bhāskara II. Το είκοσι στίχων απόσπασμα που σώζεται από το έργο του παρατίθεται από τον αστρονόμο Udayadivākara στα σχόλιά του για το Laghubhāskarī ya του Bhāskara I, περί το 1073 μ.Χ.. Η χρονολογία αυτή αποκαλύπτει πως ο Jayadeva ήταν σαφώς προγενέστερος.

Το απόσπασμα αυτό, από το οποίο και μόνο είναι γνωστός ο Jayadeva, αποτελεί την παρουσίαση επίλυσης εξισώσεων της μορφής $x^2 = Dy^2 \pm l$ και περιέχει την πρώτη σωζόμενη αναφορά της μεθόδου cakravāla.

Το απόσπασμα παρατίθεται στα πλαίσια ενός αστρονομικού προβλήματος στο οποίο εμφανίζεται η εξίσωση $x^2 = 7y^2 + 1$. Για αυτήν, ο Udayadivākara αναφέρει πως η τιμή του y μπορεί να βρεθεί μέσω της "ευφυούς μεθόδου ονόματι varga-prakṛti [3] που διατυπώθηκε από τον Jayadeva".

Συγκεκριμένα, το απόσπασμα αρχίζει ορίζοντας την varga-prakṛti:

When (in an equation of the type $x^2 = Dy^2 \pm l$) the square of an optional number is multiplied by a given number and then the product is increased or decreased by another number, and the result is in the nature of a square, such an equation is called varga-prakṛti.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται και επεξηγούνται οι τεχνικοί όροι που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση της varga-prakṛti.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στην παρουσίαση της cakravāla, με την οποία επιτυγχάνεται η απειρία λύσεων. Το απόσμασμα κλείνει με τον Jayadeva να ευφυολογεί ορμώμενος από τη δυσκολία του προβλήματος, λέγοντας:

Thus have we identified a very ingenious method for solving the problem which is as difficult as it is for a flea to fly against the wind.

Εντούτοις, ο Weil [Weil, 1984, σελ. 22] αμφισβητεί την πατρότητα της μεθόδου καθώς ο Jayadeva ήταν σχετικά άσημος και η cakravāla δεν θα μπορούσε να αποδοθεί σε αυτόν, παραμένοντας έτσι ακόμα "αγνώστου πατρός".

4.4.2 Bhāskara II

Από τον Colebroke [Colebrooke, 1817, σελ. 175] παίρνουμε το εξής απόσπασμα του Bhāskara II που αφορά την μέθοδο cakravāla:

§83 − 86:
*Rule for the cyclic method: Making the "least" and "greatest" roots and additive, a divident, additive and divisor, let **the multiplier** be thence found.*
The square of that multiplier being subtracted from the given coefficient, or this coefficient being subtracted from that square, (so as the remainder be small;) the remainder, divided by the original additive, is a new additive; which is reversed if the subtraction be [of the square] from the coefficient.
*The quotient corresponding to the multiplier [and found with it] will be the "least" root: **whence** the "greatest" root may be deduced.*

[3] Εδώ μάλλον πρόκειται για λάθος. Ο σωστός όρος πρέπει να είναι cakravāla.

With these, the operation is repeated, setting aside the former roots and additive. This method mathematicians call that of the circle.

Με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό η Cakravāla (Κυκλική Μέθοδος) σύμφωνα με το κείμενο του Bhāskara II μπορεί να περιγραφεί ως κάτωθι:

Προς επίλυση της εξίσωσης $x^2 = Dy^2 + 1$ ακολουθείται η εξής διαδικασία:

1. Δεδομένου ενός ζεύγους λύσεων (x_n, y_n) για την varga-prakṛti $(x_n)^2 = D(y_n)^2 + l_{n+1}$, (εννοείται με x_n, y_n θετικούς ακέραιους και l_{n+1} θετικό ή αρνητικό ακέραιο αριθμό, όλοι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους) σχηματίζω την απροσδιόριστη εξίσωση

$$y_n M + x_n = l_{n+1} Y \tag{4.13}$$

2. Μέσω της μεθόδου kuttaka βρίσκονται όλα τα ζευγάρια λύσεων M και Y της εξίσωσης (4.13).

3. Επιλέγω από αυτά το συγκεκριμένο ζεύγος (m_{n+1}, y_{n+1}) το οποίο ελαχιστοποιεί την παράσταση $|M^2 - D|$.

4. Δημιουργώ μια νέα varga-prakṛti

$$(x_{n+1})^2 = D(y_{n+1})^2 + l_{n+2}, \tag{4.14}$$

με σταθερό όρο $l_{n+2} = \dfrac{|(m_{n+1})^2 - D|}{l_{n+1}}$.
Το y_{n+1} είναι η μικρή ρίζα της εξίσωσης αυτής. Από την εξίσωση (4.14) προκύπτει και η μεγάλη ρίζα x_{n+1}. (βλ. **Παρατήρηση 1**)

5. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου φτάσουμε σε varga-prakṛti με επιθυμητό σταθερό όρο (δηλαδή, όπως θα δούμε στη συνέχεια $l = \pm 1, \pm 2 \pm 4$).

Παρατηρήσεις

1) Όσον αφορά την εύρεση της νέας μεγάλης ρίζας x_{n+1}, η μετάφραση που δίνεται στο [Datta and Singh, 1938, σελ. 163] είναι η εξής:

The quotient corresponding to that value of the multiplier is the (new) lesser root; ***thence*** *the greater root.*

Η χρήση της λέξης ***thence*** όπως και της λέξης ***whence*** που χρησιμοποιεί ο Colebrooke, υποδεικνύουν πως ο Bhāskara βρίσκει τη μεγάλη ρίζα x_{n+1} αντικαθιστώντας τα y_{n+1} και l_{n+2} στην (4.14).

Ας παρατηρήσουμε πως ο σχολιαστής Crishna [Colebrooke, 1817, σελ. 175] επισημαίνει πως η μεγάλη ρίζα (x_{n+1}) μπορεί επίσης να βρεθεί χωρίς την χρήση της νέας μικρής ρίζας y_{n+1} αλλά μόνο του m_{n+1} από τον ακόλουθο τύπο:

$$x_{n+1} = \frac{Dy_n + m_{n+1}x_n}{l_{n+1}}. \tag{4.15}$$

Μας υποδεικνύει δηλαδή καθαρά τον τύπο των γενικευμένων πλευρικών-διαμετρικών αριθμών για την εύρεση του x_{n+1}.

Μια ακόμα ένδειξη του ότι ο Bhāskara δεν αναφέρεται στον συγκεκριμένο τρόπο εύρεσης του x_{n+1} αλλά σε αντικατάσταση στην $(x_{n+1})^2 = D(y_{n+1})^2 + l_{n+2}$, είναι το γεγονός ότι πριν αναφερθεί στην εύρεση της νέας μεγάλης ρίζας, προηγείται η εύρευση του l_{n+2}, κάτι που δεν χρειάζεται στην (4.15).

2) Αποδεικνύεται[4] πως η παράσταση $|M^2 - D|$ ελαχιστοποιείται όταν

$$\begin{aligned} M &= m_{n+1}, \text{ ή όταν} \\ &= m_{n+1} + l_{n+1}. \end{aligned}$$

3) Ο Bhāskara δεν παρουσιάζει αποδείξεις για τους τύπους που χρησιμοποιεί. Η μορφή που έχει το κείμενό του θυμίζει αλγόριθμο, είναι απλή παράθεση βημάτων που σε σύνολα σχηματίζουν κανόνες. Οι σύγχρονοι μελετητές [Datta and Singh, 1938, σελ. 162] και [Srinivasiengar, 1988, σελ. 112] ίσως σε μια προσπάθεια δικαιολόγησης του τύπου $l_{n+2} = \dfrac{|m_{n+1}^2 - D|}{l_{n+1}}$ που ο Bhāskara εμφανίζει, τον αποδίδουν στο αποτέλεσμα της Σύνθεσης Brahmagupta της τριάδας (x_n, y_n, l_{n+1}) με την $(M, 1, M^2 - D)$.

Πράγματι, από την σύνθεση αυτή και διαιρώντας κάθε όρο με l_{n+1} προκύπτει η D-τριάδα $(\dfrac{x_nM + Dy_n}{l_{n+1}}, \dfrac{x_n + y_nM}{l_{n+1}}, M^2 - D)$. Από την kuttaka καθορίζονται οι τιμές του M ώστε $\dfrac{x_n + y_nM}{l_{n+1}}$ να είναι ακέραιος και από αυτές γίνεται επιλογή εκείνης, έστω m_{n+1} που ελαχιστοποιεί την $M^2 - D$. Η ακέραια D-τριάδα που σχηματίζει την

[4] βλ. [Singh, 1983, σελ. 15, note (3)]

επόμενη κατά σειρά εξίσωση Varga-prakṛti θα είναι λοιπόν η $(x_{n+1}, y_{n+1}, l_{n+2}) = (\frac{x_n m_{n+1} + D y_n}{l_{n+1}}, \frac{x_n + y_n m_{n+1}}{l_{n+1}}, m_{n+1}^2 - D)$.
Τα $x_{n+1} = \frac{x_n m_{n+1} + D y_n}{l_{n+1}}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n m_{n+1}}{l_{n+1}}$ δεν είναι παρά οι επαγωγικοί τύποι των συγκλινουσών του $\sqrt{D}$.

Ας παρατηρήσουμε όμως πως η απόδειξη αυτή επιχειρεί Σύνθεση μεταξύ δύο διαφορετικών τριάδων. Πουθενά στους Ινδούς δεν έχουμε συναντήσει κάποια τέτοια εφαρμογή αφού σε όλες τις περιπτώσεις παραδειγμάτων γίνεται τετραγωνισμός.

Ο σκοπός της cakravāla για τον Bhāskara II φαίνεται στις παρακάτω προτάσεις που βρίσκονται όπως έχουμε δει σε προηγούμενη παράγραφο στο τέλος της περιγραφής της μεθόδου cakravāla [Colebrooke, 1817, σελ. 175]:

Thus are integral roots found with four, two, or one [or other number, for] additive: and composition serves to deduce roots for additive unity, from those which answer to the additives four and two [or other number.]

Για τον Bhāskara II λοιπόν, σκοπός της μεθόδου είναι η εύρεση μιας βοηθητικής εξίσωσης με σταθερό όρο ± 1, ± 2 ή ± 4 ούτως ώστε στη συνέχεια, με εφαρμογή της Αρχής Σύνθεσης του Brahmagupta να επιλυθεί η εξίσωση Pell.

Παρ'όλα αυτά, ([Selenius, 1975, σελ. 169 & 177] και [Weil, 1984, σελ. 24]) η μέθοδος cakrāvala οδηγεί επίσης σε λύση χωρίς εφαρμογή των συντομεύσεων του Brahmagupta, αντιστοιχώντας όπως θα δούμε στα βήματα της περιοδικής ανθυφαίρεσης του $\sqrt{D}$ για D μη τετράγωνο φυσικό. Μάλιστα ο Weil υποστηρίζει επίσης πως οι συντομεύσεις αυτές *καταστρέφουν τον κυκλικό χαρακτήρα* της μεθόδου ο οποίος ελλείψει αυτών θα φανερωνόταν από την περιοδική εμφάνιση των σταθερών όρων l_i, δηλαδή στην περιοδική ανθυφαίρεση του $\sqrt{D}$ συμπληρώνουμε εμείς.

Παραδείγματα

Ως εφαρμογή της μεθόδου cakravāla, ο Bhāskara παρουσιάζει δύο παραδείγματα, την επίλυση της i) $x^2 = 67y^2 + 1$ και της ii) $x^2 = 61y^2 + 1$.

Example: What is the square, which, being multiplies by sixty-seven, and one being added to the product, will yield a square-root? and what is that, which multiplied by sixty-one, with unity added to the product, will do so likewise?

Declare it, friend, if the method of the affected square be thoroughly spread, like a creeper, over thy mind.

i) ***Statement of Example 1st:*** *(Putting unity for the "least" root, and negative three for the additive.)* $\boxed{C\,67}\boxed{L\,1}\boxed{G\,8}\boxed{A\,\dot{3}}$.
Making the "least" root the divident, the "greatest" root the additive, and the additive the divisor, the statement for the operation of finding the multiplier is
$\boxed{\dfrac{\textit{Divident}\ 1}{\textit{Divisor}\ 3}}\boxed{\textit{Additive}\ 8}$.

Here, by the rule §61, the series is $\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 2\\\hline 0\\\hline\end{array}$*; and the quotient and multiplier are found* $\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 2\\\hline\end{array}$*; which, as the number of quotients [in the series] is uneven, must be subtracted from the abraders (§57) leaving* $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 1\\\hline\end{array}$*; and the quotient obtained in the abrading of the additive is to be added (§61) to the quotient here found; making the quotient and multiplier* $\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}$*. Since the divisor is negative, the quotient is considered so too (§68); and the quotient and multiplier are* $\begin{array}{|c|}\hline \dot{3}\\\hline 1\\\hline\end{array}$*. Then the square of the multiplier* 1*, being subtracted from the given coefficient* 67*, leaves* 66*; which, however, is not a small remainder. Putting therefore negative two for the assumed number by §64, and multiplying by that the negative divisor* $\dot{3}$*, and adding the product to the multiplier, a new multiplier is found: viz.* 7*. Its square* 49 *being subtracted from the coefficient* 67*, the remainder* 18*, divided by the original additive* $\dot{3}$*, yields* $\dot{6}$*; the sign of which is reversed, as the subtraction was of the square of the multiplier from the coefficient; and it thus becomes* 6 *positive. The quotient answering to the multiplier, viz.* $\dot{5}$*, is the "least" root. Whether this be negative or affirmative, makes no difference in the further operation. It is noted then as* 5 *positive. Its square being multiplied by the coefficient, and six being added to the product, and the square-root being extracted, the "greater" root comes out* 41*.*
Statement of these again for a further investigation of a pulverizer:
$\boxed{\dfrac{\textit{Divident}\ 5}{\textit{Divisor}\ 6}}\boxed{\textit{Additive}\ 41}$.
Here the multiplier is found, 5*. Its square, subtracted from the coefficient, leaves* 42*; which, divided by the original additive* 6*, yields* 7*; the sign whereof is*

reversed because the subtraction was from the coefficient; and the new additive comes out 7. *The quotient answering to the multiplier is the "least" root,* 11. *Hence the "greatest" root is deduced,* 90.

Statement of these again for a further pulverizer: $\begin{array}{|c|c|}\hline \dfrac{\textit{Divident } 11}{\textit{Divisor } \dot{7}} & \textit{Additive } 90 \\ \hline \end{array}$.

By the rule §61, *the abraded additive becomes* 6, *and the multiplier is found* 5; *and, since the products in the series are uneven, it is subtracted from its abrader, and the multiplier becomes* 2. *Its negative divisor (the former additive) being negative* $\left(\dot{7}\right)$ *is multiplied by negative one* $\left(\dot{1}\right)$ *assumed by* §64 *and added to that multiplier, for a new multiplier* 9; *from the square of which* 81, *subtracting the given coefficient* 67, *the remainder* 14, *divided by the original additive* $\dot{7}$, *gives the new additive* $\dot{2}$. *The quotient answering to the multiplier is the "least" root* 27: *whence the "greatest" root is found* 221. *From these, others are to be deduced by combination of like sets.*

Statement: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,27 & G\,221 & A\,\dot{2} \\ \hline l\,27 & g\,221 & a\,\dot{2} \\ \hline \end{array}$.

Proceeding as directed, the roots are found $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,11934 & G\,97684 & A\,4 \\ \hline \end{array}$.
These roots divided by the root of the additive four, viz. 2, *give roots which answer to additive unity:* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,5967 & G\,48842 & A\,1 \\ \hline \end{array}$.

ii) ***Statement of Example 2d***. $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline C\,61 & L\,1 & G\,8 & A\,3 \\ \hline \end{array}$.

Statement for a pulverizer: $\begin{array}{|c|c|}\hline \dfrac{\textit{Divident } 1}{\textit{Divisor } 3} & \textit{Additive } 8 \\ \hline \end{array}$.

Proceeding as before, by §61, *and putting two for the assumed number* (§64) *the multiplier is found* 7. *Whence roots, answering to the negative additive four, are deduced* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,5 & G\,39 & A\,\dot{4} \\ \hline \end{array}$. *Thence, by* §79, *roots are found for subtractive unity,* $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,\frac{5}{2} & G\,\frac{39}{2} & A\,\dot{1} \\ \hline \end{array}$. *Statement of these for composition*

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,\frac{5}{2} & G\,\frac{39}{2} & A\,\dot{1} \\ \hline l\,\frac{5}{2} & g\,\frac{39}{2} & a\,\dot{1} \\ \hline \end{array}$.

From them are deduced roots answering to additive unity
$\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,\frac{195}{2} & G\,\frac{1523}{2} & A\,1 \\ \hline \end{array}$.
Statement of these again, with roots answering to subtractive unity, for composition $\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,\frac{5}{2} & G\,\frac{39}{2} & A\,\dot{1} \\ \hline l\,\frac{195}{2} & g\,\frac{1523}{2} & a\,1 \\ \hline \end{array}$.
Hence integral roots answering to subtractive unity are obtained
$\begin{array}{|c|c|c|}\hline L\,3805 & G\,29718 & A\,\dot{1} \\ \hline \end{array}$. *From these, by combining like sets, roots for additive*

unity come out (in whole numbers) | *L* 226153980 | *G* 1766319049 | *A* 1 |.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα παραδείγματα αυτά χρησιμοποιώντας σύγχρονη ορολογία:

i) Προς επίλυση της $x^2 = 67y^2 + 1$ κατ' αρχάς δημιουργείται η βοηθητική εξίσωση

$$x_n^2 = 67y_n^2 + l_{n+1}, \tag{4.16}$$

στην οποία για $n = 1$ γίνονται οι αντικαταστάσεις $y_1 = 1$ και $l_2 = -3$ με αποτέλεσμα να προκύπτει $x_1 = 8$.
Από την αντικατάσταση αυτή παίρνοντας όμως για όλες τις μεταβλητές απόλυτες τιμές, η (4.13) δίνει την απροσδιόριστη εξίσωση

$$M + 8 = 3Y. \tag{4.17}$$

Εφαρμόζοντας την kuttaka στην παραπάνω εξίσωση και επιλέγοντας ένα ζεύγος λύσεων (M, Y) για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη $|M^2 - 67|$: ελάχιστο, προκύπτει $M = m_2 = 7$ και $Y = y_2 = 5$.
Ο τύπος $l_{n+2} = \dfrac{|m_{n+1}^2 - 67|}{l_{n+1}}$ από τον κανόνα του Bhāskara δίνει $l_3 = 6$.
Από την (4.16) προκύπτει $x_2 = 41$. Η βοηθητική εξίσωση (4.16) παίρνει τώρα τη μορφή

$$x_n^2 = 67y_n^2 + 6$$

και η δεύτερη απροσδιόριστη εξίσωση στην οποία θα εφαρμοστεί η kuttaka είναι η

$$5M + 41 = 6Y,$$

μέσω της οποίας (και της συνθήκης $|M^2 - 67|$: ελάχιστο) βρίσκουμε $m_3 = 5$, $y_3 = 11$.
Προκύπτει πως $l_4 = \dfrac{|m_3^2 - 67|}{l_3} = 7$ και συνεπάγεται ότι $x_3 = 90$.
Η βοηθητική εξίσωση (4.16) παίρνει τώρα τη μορφή

$$11M + 90 = 7Y,$$

από την οποία με εφαρμογή της kuttaka και της συνθήκης ελαχιστοποίησης για το $|M^2 - 67|$ προκύπτει $m_4 = 9$, $y_4 = 27$ και συνεπώς $l_5 = 2$ και $x_4 = 221$.

Έχοντας φτάσει σε $l = 2$ ένας τετραγωνισμός της τριάδας $(x_4, y_4, l_5) = (221, 27, 2)$ δίνει $(11934, 97684, 4)$ από όπου και διαιρώντας με 2 προκύπτει ακέραια λύση της $x^2 = 67y^2 + 1$, η $x_5 = 48842$, $y_5 = 5967$.

Παρακάτω παρουσιάζονται με τη μορφή πίνακα οι τιμές των l_n, m_n, y_n, x_n που ο Bhāskara υπολογίζει διαδοχικά μέχρι να καταλήξει στην ακέραια επίλυση της εξίσωσης $x^2 = 67y^2 + 1$.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
l_n	-	3	6	7	2	1
m_n	-	7	5	9	-	-
y_n	1	5	11	27	5967	-
x_n	8	41	90	221	448842	-

Πίνακας 4.1: **D=67** - Ινδοί

ii) Προς επίλυση της $x^2 = 61y^2 + 1$ δημιουργείται η βοηθητική εξίσωση

$$x_n^2 = 61y_n^2 + l_{n+1}, \tag{4.18}$$

με $x_1 = 8$, $y_1 = 1$ και $l_2 = 3$. Η απροσδιόριστη εξίσωση που δημιουργείται είναι η

$$M + 8 = 3Y. \tag{4.19}$$

Με εφαρμογή της kuttaka(και τη συνθήκη για $|M^2 - 61|$: ελάχιστο), προκύπτει $m_2 = 7$ από όπου επάγεται η τριάδα $(x_2, y_2, l_3) = (39, 5, -4)$.
Από τον κανόνα της παραγράφου §79 (βλ. Παρατήρηση 1), βρίσκονται οι ρητές λύσεις $x = \frac{39}{2}$ και $y = \frac{5}{2}$ για σταθερό όρο -1.
Ο τετραγωνισμός της ρητής D-τριάδας $(\frac{39}{2}, \frac{5}{2}, -1)$ δίνει τη ρητή λύση $(\frac{195}{2}, \frac{1523}{2})$ για σταθερό όρο μονάδα.
Με μία επιπλέον σύνθεση της τελευταίας D-τριάδας με την αρχική (διπλός τετραγωνισμός) προκύπτει η επιθυμητή ακέραια λύση της Pell $x_3 = 1766319049$, $y_3 = 226153980$.

Παρατηρήσεις

[1] RULE §79:
Let the additive divided by the square of an assumed number, be a new additive; and the roots, divided by that assumed number, will be the corresponding roots. Or the additive being multiplied [by the square], the roots must, in like manner, be multiplied [by the number put].[Colebrooke, 1817, Bhāskara, σελ.172]

[2] Η αρίθμηση των δεικτών στα παραπάνω παραδείγματα γίνονται με βάση τα βήματα της cakravāla. Μόλις προκύψει $l_n = -2$ όπως στο $D = 67$ ή $l_n = -4$ όπως στο $D = 61$ ο Bhāskara επιχειρεί τετραγωνισμούς για την επίτευξη ακέραιας λύσης. Στον Πίνακα, οι χρωματισμένες τριάδες είναι οι τελευταίες πριν τον -ή τους- τετραγωνισμό/ούς.

[3] Ο Bhāskara δίνει προτεραιότητα στο να επιτύχει εύρεση λύσης μιας varga- prakṛti με $l = 1$ έστω κι αν αυτή η λύση είναι ρητή και όχι ακέραια. Στη συνέχεια προχωρά σε εύρεση ακέραιας λύσης, έχοντας εξασφαλισμένη όμως πλέον τη μονάδα ως σταθερό όρο της $x^2 = Dy^2 + l$.

4.4.3 Nārāyaṇa

Ο Nārāyaṇa υπήρξε επίσης ένας σπουδαίος μαθηματικός για τους Ινδούς. Έγραψε δύο έργα: Bijaganita Vatamsa (αριθμητική) και Ganita Kaumudi (άλγεβρα)(1356 μ.Χ.). Το μέρος των έργων αυτών που μας ενδιαφέρει αφορά την kuttaka και την αντιμετώπιση της varga-prakṛti και οι κανόνες τους οποίους εμφανίζει είναι ισοδύναμοι και παρόντες και στα δύο του έργα. Εμφανίζει την διαδικασία της cakravāla σχεδόν ταυτόσημα με τον Bhāskara II, με μικρές διαφορές για τις οποίες θα συζητήσουμε στη συνέχεια.

Ο Nārāyaṇa αναπαράγει εν μέρει τον κανόνα της cakravāla που περιγράφει ο Bhāskara γράφοντας:

Making the lesser root, greater root and interpolator (of a Square - nature) the divident, addend and divisor (respectively of a pulverizer), the (indeterminate) multiplier of it should be determined in the way described before. The prakṛti being subtracted from the square of that or the square of the multiplier being subtracted from the prakṛti, the remainder divided by the (original) interpolator is the interpolator (of a new Square - nature); and it will be reversed in sign in case of subtraction of the square of the multiplier. The quotient (corresponding to that values of the multiplier) is the lesser root (of the new Square - nature); and that multiplied by the multiplier and diminished by the product of the previous

lesser root and (new) interpolator will be its greater root. By doing so repeatedly will be obtained two integral roots corresponding to the interpolator ± 1, ± 2 *or* ± 4. *In order to derive integral roots for the additive unity from those answering to the interpolator* ± 2 *or* ± 4, *the Principle of Composition (should be adopted).*

Όπως είδαμε στην περιγραφή της μεθόδου cakravāla που δίνει ο Bhāskara II[5], η τιμή του M καθορίζεται έτσι ώστε η παράσταση $|M^2 - D|$ να ελαχιστοποιείται και αυτό συμβαίνει όταν $M = m_{n+1}$ ή $M = m_{n+1} + l_{n+1}$.

Η διαφορά του Nārāyaṇa με τον Bhāskara έγκειται στο γεγονός ότι δεν εκφράζει πουθενά ρητά ότι η τιμή του M θα πρέπει να επιλέγεται με σκοπό η παράσταση $|M^2 - D|$ να ελαχιστοποιείται. [Datta and Singh, 1938, σελ. 165]

Στην πραγματικότητα, παρουσιάζει ένα παράδειγμα[6] όπου θέτοντας $M = m_{n+1}$ και $M = m_{n+1} + l_{n+1}$ προκύπτουν **δύο ίσες** ελάχιστες τιμές για την διαφορά $|M^2 - D|$. Ένα ερώτημα που τίθεται είναι πώς επιλέγει το M με το οποίο θα συνεχίσει την διαδικασία εξ' αυτών των δύο από τη στιγμή που και τα δύο οδηγούν σε ελαχιστοποίησή; Θα δούμε σε επόμενο Κεφάλαιο πως ο Nārāyaṇa **φαίνεται να ακολουθεί έναν γενικότερο κανόνα και όχι αυτόν της ελαχιστοποίησης των Bhāskara και Jayadeva**. Άλλη μια ένδειξη προς την κατεύθυνση αυτή είναι πως στο ίδιο παράδειγμα, εμφανίζεται άλλη μια ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου ο Nārāyaṇa μεταξύ των δύο τιμών για το M, **δεν** επιλέγει εκείνη που ελαχιστοποιεί την απόλυτη διαφορά $|M^2 - D|$.

Τα παραδείγματα που καταγράφει και επιλύει ο Nārāyaṇa είναι τα

(i) $x^2 = 103y^2 + 1$ και

(ii) $x^2 = 97y^2 + 1$.

Στη συνέχεια παρατίθενται σε Πίνακες τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την επίλυση των εξισώσεων αυτών. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε περιγράφεται αναλυτικά από σύγχρονους Ινδούς μελετητές όπως οι [Datta and Singh, 1938, σελ. 168-171] και [Srinivasiengar, 1988, σελ. 116-117]. [7]

[5]Το ίδιο ισχύει και για τον Jaydadeva.

[6]D=97

[7]Για περισσότερες λεπτομέρειες επί της διαδικασίας που ακολουθούν στην παρουσίαση και ανάλυση των παραδειγμάτων αυτών ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην Παρατήρηση 3), του Κεφαλαίου 4.4.2.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
l_n	-	3	6	9	2	1
m_n	-	11	7	11	-	-
y_n	1	7	20	47	22416	-
x_n	10	71	203	477	227528	-

Πίνακας 4.2: **D=103** - Ινδοί

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
l_n	-	3	8	9	11	3	1	1
m_n	-	11	13	14	8	10	-	-
y_n	1	7	20	53	86	569	6377352	-
x_n	10	69	197	522	847	5604	62809633	-

Πίνακας 4.3: **D=97** - Ινδοί

Παρατηρήσεις

[1] Στους Πίνακες, τα l_n δίδονται σε απόλυτη τιμή χωρίς πρόσημα. Στην πραγματικότητα τα πρόσημα εναλλάσσονται ξεκινώντας από - στην περίπτωση του $D = 103$ και + στην περίπτωση του $D = 97$

[2] Στους Πίνακες, οι χρωματισμένες τριάδες είναι τα σημεία όπου γίνονται οι τετραγωνισμοί Brahmagupta. Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου $D = 103$ το ζεύγος (x_4, y_4) δίνει $l_5 = 2$. Στο σημείο αυτό ο Nārāyaṇa συνθέτει την τριάδα (x_4, y_4, l_5) με τον εαυτό της και προκύπτει η λύση της εξίσωσης Pell $(x_5, y_5, l_6) = (227528, 22419, 1)$. Αντιστοίχως, στην περίπτωση όπου $D = 97$ το ζεύγος (x_6, y_6) δίνει $l_7 = -1$. Για να επιτύχει λύση της Pell ο Nārāyaṇa συνθέτει την τριάδα (x_6, y_6, l_7) με τον εαυτό της και έτσι προκύπτει η επιθυμητή λύση $(x_7, y_7, l_8) = (6377352, 62809633, 1)$.

[3] Το παράδειγμα για $D = 97$ αποτελεί ένα πολύ πρόσφορο παράδειγμα για τη μελέτη της cakravāla καθώς η μέθοδος εφαρμόζεται για μεγάλο αριθμό βημάτων, σχεδόν μέχρι τέλους όπου και εμφανίζεται $l_7 = -1$ και έτσι επιχειρείται τετραγωνισμός για να αλλάξει το πρόσημο του l και να βρεθεί το ζεύγος που ικανοποιεί την εξίσωση Pell.

Κεφάλαιο 5

Ζήτημα προέλευσης Ινδικών Μεθόδων

Η αποκάλυψη των πολύπλοκων Ινδικών μεθόδων στη Δύση έγινε μόλις το 1817 από τον Henry Thomas Colebrooke, ο οποίος μετέφρασε από τα Σανσκρικά τα έργα των Brahmagupta και Bhāskara II [Colebrooke, 1817]. Η αποκάλυψη αυτή προκάλεσε μεγάλη έκπληξη στους μαθηματικούς της εποχής καθώς φάνηκε πως οι Ινδοί διέθεταν διαδικασίες εύρεσης ακέραιων λύσεων για την εξίσωση του Pell ήδη από τον 7ο αι. μ.Χ.

Ο Fermat θεωρούσε πολύ απαιτητικό πρόβλημα την εύρευση γενικής ακέραιας λύσης για την εξίσωση Pell: όταν το έθεσε προς επίλυση στον Frenicle σε αλληλογραφία τους το 1657, χαρακτηριστικό είναι πως του επισημαίνει (πιθανώς διασκεδάζοντάς το) πως αν δεν μπορέσει να βρει τη γενική λύση, τουλάχιστον να του στείλει τη λύση για $D = 61$ και $D = 109$. Ο Fermat δεν μπορεί παρά να γνώριζε πως το ελάχιστο ζευγάρι ακεραίων που ικανοποιεί την $x^2 = Dy^2 + 1$ είναι το $(1.766.319.049, 226.153.980)$.

Θα μπορούσε λοιπόν να φανταστεί κανείς την έκπληξη που ο Fermat θα δοκίμαζε αν ζούσε το 1817 και έβλεπε πως όχι μόνο το πρόβλημα για $D = 61$ είχε επιλυθεί από τον Bhāskara II σε μισή μόλις σελίδα εφαρμόζοντας τις ινδικές μεθόδους, αλλά και πως οι Ινδοί διέθεταν γενική μέθοδο επίλυσης δέκα αιώνες πριν από την εποχή του!

5.1 Θεωρία van der Waerden περί Αρχαίας Ελληνικής προέλευσης

Ο μαθηματικός και ιστορικός των μαθηματικών van der Waerden, διατείνεται πως οι Ινδικές μέθοδοι έχουν Αρχαία Ελληνική προέλευση.

Παραθέτει την άποψη πως για την ιστορική ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας, οι ειδικές περιπτώσεις και οι κατασκευαστικές μέθοδοι προηγούνται των γενικεύσεων. Γνωρίζοντας πως οι Πυθαγόρειοι όπως και ο Αρχιμήδης μπορούσαν να αντιμετωπίσουν ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης Pell πιστεύει πως αυτές αποτέλεσαν την αφετηρία για την ανάπτυξη των Ινδικων μεθόδων που αναφέρονται σε γενική επίλυση της εξίσωσης Pell. Προς αυτήν την κατεύθυνση αυτή, παρουσιάζει σαν επιχείρημα και την εξής πληροφορία. Το έργο του Brahmagupta, όπως και άλλων Ινδών προγενέστερων, αφορά κυρίως την αστρονομία και έχει πηγές κατά κύριο λόγο Ελληνικές. Αυτό κατά τον van der Waerden κάνει ακόμα πιο πιθανό το ενδεχόμενο οι ρίζες των γενικών Ινδικών μεθόδων να είναι Ελληνικές.

Στη συνέχεια του Κεφαλαίου αυτού θα αποδειχθεί πως η διαίσθηση του van der Waerden ήταν σωστή αλλά δεν είχε τα κατάλληλα γερά επιχειρήματα με τα οποία θα μπορούσε να την στηρίξει επαρκώς.

Ο van der Waerden δεν γνώριζε εάν και κατά πόσον οι Αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν για την Παλινδρομική Περιοδικότητα της Ανθυφαίρεσης τετραγωνικών αρρήτων η οποία αποτελεί το κλειδί για το πρόβλημα του Pell[1]

Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις από τη μελέτη του Πλάτωνα που έγινε σε προηγούμενο Κεφάλαιο πως οι Αρχαίοι Έλληνες την εποχή του Θεαίτητου πράγματι γνώριζαν το Θεώρημα Παλινδρομικά Περιοδικής Ανθυφαίρεσης και επιπλέον είχαν και τα εργαλεία να το αποδείξουν, μέσω του Βιβλίου Χ των *Στοιχείων*.

Όσον αφορά τους τετραγωνισμούς του Brahmagupta που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην εφαρμογή των Ινδικών μεθόδων, εκεί ο van der Waerden φαίνεται πως έχει πλήρη άγνοια. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ένα μεγάλο μέρος του Βιβλίου Χ ασχολείται με τετραγωνισμούς αποτομών. Όταν αυτές εφαρμοστούν στις ειδικής μορφής αποτομές που αποτελούν τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα, προκύπτει ο τετραγωνισμός του Brahmagupta αυτούσιος.

[1]Αυτό συμβαίνει επειδή οι συγκλίνουσες (x_n, y_n) που αποτελούν αρχικό τμήμα της ανθυφαίρεσης του $\sqrt{D}$, για D μη τετράγωνο φυσικό, παρέχουν λύσεις της εξίσωσης Pell όταν η ανθυφαίρεσή τους αντιστοιχεί χονδρικά στη συμπλήρωση μιας περιόδου (ή σε κάποιες περιπτώσεις στο διπλάσιο της περιόδου) της $Anth(\sqrt{D})$.

Στη συνέχεια λοιπόν του Κεφαλαίου αυτού, θα γίνει μια προσπάθεια αναλυτικής παρουσίασης των Ινδικών μεθόδων ανακατασκευάζοντάς τες με ανθυφαιρετικά εργαλεία με σκοπό να αποκτήσει γερά θεμέλια η διαίσθηση του van der Waerden περί Αρχαίας Ελληνικής προέλευσης των μεθόδων αυτών.

5.2 Συγκλίνουσες και ανθυφαίρεση

Έστω $a > b$ δύο μεγέθη[2] και D μη τετράγωνος αριθμός για τα οποία ισχύει $a^2 = Db^2$.
Η ανθυφαίρεσή τους είναι η εξής:

$a = \mu_1 b + \gamma_1$, με $b > \gamma_1$,
$b = I_1\gamma_1 + \gamma_2$, με $\gamma_1 > \gamma_2$,
$\gamma_1 = I_2\gamma_2 + \gamma_3$, με $\gamma_2 > \gamma_3$,
...

Αποδεικνύεται πως τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα μπορούν να πάρουν τη μορφή αποτομών ως εξής:

$\gamma_n = (-1)^n(x_n b - y_n a)$, με x_n και y_n φυσικούς αριθμούς οι οποίοι αποτελούν συγκλίνουσες του $\sqrt{D}$.

Πρόταση 5.1. *Οι επαγωγικοί τύποι που δίνουν το μοναδικό σύνολο συγκλινουσών του $\sqrt{D}$, όπου D μη τετράγωνος φυσικός, δεδομένης της ανθυφαιρετικής αποτομής $\gamma_n = (-1)^{n+1}(y_n a - x_n b)$, με x_n και y_n φυσικούς αριθμούς, συγκλίνουσες του $\sqrt{D}$ και $x_1 = m_1 = [\sqrt{D}] = \mu_1$ και $y_1 = 1$, είναι*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n m_{n+1}}{l_{n+1}}$$
$$y_{n+1} = \frac{x_n m_{n+1} + D y_n}{l_{n+1}}$$

Απόδειξη. *Από τον Ορισμό των αυξητικών παραγόντων ϕ_n (από γ_n σε γ_{n+1}), γνωρίζουμε πως*

$$b\gamma_{n+1} = \gamma_n \phi_{n+1}. \tag{5.1}$$

Επίσης, έχουμε δει πως ισχύει

$$\phi_{n+1} = \frac{a - m_{n+1} b}{l_{n+1}}. \tag{5.2}$$

[2]Όπου b η προτεθείσα ευθεία.

Επομένως η (5.1) *με χρήση της* (5.2) *και των δεδομένων της υπόθεσης γίνεται*

$$\begin{aligned} b(-1)^{n+2}(y_{n+1}a - x_{n+1}b) &= (-1)^{n+1}(y_n a - x_n b)\frac{a - m_{n+1}b}{l_{n+1}} && \Rightarrow \\ (-1)l_{n+1}b(y_{n+1}a - x_{n+1}b) &= (y_n a^2 + x_n m_{n+1}b^2) - (y_n m_{n+1} + x_n)ab && \Rightarrow \\ (-1)l_{n+1}b(y_{n+1}a - x_{n+1}b) &= (y_n Db^2 + x_n m_{n+1}b^2) - (y_n m_{n+1} + x_n)ab && \Rightarrow \\ l_{n+1}(x_{n+1}b - y_{n+1}a) &= (y_n D + x_n m_{n+1})b - (y_n m_{n+1} + x_n)a. \end{aligned}$$

Από Πρόταση για τη Μοναδικότητα Αποτομής που υπάρχει στο Βιβλίο X, προκύπτει

$$\begin{aligned} l_{n+1}x_{n+1} &= y_n D + x_n m_{n+1} \\ l_{n+1}y_{n+1} &= y_n m_{n+1} + x_n. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n m_{n+1} + y_n D}{l_{n+1}} \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n m_{n+1}}{l_{n+1}}. \end{aligned}$$

□

Οι τύποι δηλαδή των convergents όπως και οι τύποι που χρησιμοποιουν οι Ινδοί φαίνεται πως **μπορούν να προκύψουν μέσω χρήσης των αυξητικών παραγόντων** ϕ_n.

5.3 Cakravāla και Ανθυφαίρεση

Η μέθοδος Cakravāla των Ινδών αποτελεί μέθοδο ισοδύναμη της Ανθυφαίρεσης. Η Πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύει την εν λόγω ισοδυναμία.

Πρόταση 5.2. *Έστω* x_n, y_n *θετικοί αριθμοί,* l_{n+1} *ακέραιος και*

$$x_n^2 = Dy_n^2 + l_{n+1},$$

όπου x_n, y_n, l_{n+1} *σχετικώς πρώτοι. Τότε, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί* (M, Y) *ώστε:*

(1) $y_n M + x_n = l_{n+1}Y$

(2) $M^2 < D$, *με* $M > 0$

(3) $D - M^2$ *ελάχιστο ως προς (1) και (2)*

και οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι προς

$$M = m_{n+1}$$
$$Y = y_{n+1}.$$

Απόδειξη. *Το ζεύγος* $M = m_{n+1}$ *και* $Y = y_{n+1}$ *ικανοποιεί τη συνθήκη (1) καθώς γνωρίζουμε από τους τύπους των Γενικευμένων Πλευρικών-Διαμετρικών αριθμών πως:*

$$y_{n+1} = \frac{y_n m_{n+1} + x_n}{l_{n+1}}.$$

Επίσης, το συγκεκριμένο $M = m_{n+1}$ *ικανοποιεί επίσης τη συνθήκη (2) εξ' ορισμού ανθυφαίρεσης, δηλαδή:*

$$m_1^2 < D \text{ και } m_{n+1} \leq m_1.$$

Επομένως $m_{n+1}^2 < D$.
Επίσης, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ *ισχύει πως* $m_i > 0$, *επομένως* $M = m_{n+1} > 0$.
Μένει να αποδείξουμε πως το ζεύγος (m_{n+1}, y_{n+1}) *ικανοποιεί επίσης την συνθήκη (3).*

Ισχυρισμός 1. *Αν* (m, y) *είναι μία λύση της* $y_n M + x_n = l_{n+1} Y$, *τότε η γενική λύση είναι*

$$M = m + k l_{n+1}$$
$$Y = y + k y_n,$$

για $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1:
Έστω (m, y) *μια δεδομένη λύση της εξίσωσης* $y_n M + x_n = l_{n+1} Y$.
Έστω (m', y') *επίσης λύση της εξίσωσης αυτής, με* $m \neq m'$ *και συνεπώς* $y \neq y'$.
Τότε, $y_n(m' - m) = l_{n+1}(y' - y)$,
Όμως y_n *και* l_{n+1} *είναι σχετικώς πρώτοι.*
Επειδή $\dfrac{y_n}{l_{n+1}} = \dfrac{y' - y}{m' - m}$, *προκύπτει πως υπάρχει ένας φυσικός αριθμός* k, *τ.ώ.* $y' - y = k y_n$ *και* $m' - m = k l_{n+1}$, *δηλαδή*

$$m' = m + k l_{n+1}$$
$$y' = y + k y_n.$$

Ώστε κάθε λύση προκύπτει από τη δεδομένη λύση. □

Ισχυρισμός 2. *Θεωρώντας $l_i > 0$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, ισχύει πως*

$$m_{n+1} + l_{n+1} > m_1.$$

Με άλλα λόγια $(m_{n+1} + l_{n+1})^2 > D$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2:
Για ευκολία, θέτω $\kappa = n + 1$. Έστω

$$\begin{aligned} l_\kappa + m_\kappa &\leq m_1 \Rightarrow \\ l_\kappa &\leq m_1 - m_\kappa \Rightarrow \\ m_{\kappa+1} &\leq m_1 \Rightarrow \\ m_\kappa + m_{\kappa+1} &\leq m_\kappa + m_1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Δεδομένου ότι $m_\kappa + m_{\kappa+1} = I_\kappa l_{k+1}$, η τελευταία ανίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} I_\kappa l_{\kappa+1} &\leq m_1 + m_\kappa \Rightarrow \\ l_{\kappa+1} \leq I_\kappa l_{\kappa+1} &\leq m_1 + m_k \Rightarrow \\ l_{\kappa+1} &\leq m_1 + m_k. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις ανισώσεις (5.3) *και* (5.4) *από όπου και προκύπτει*

$$\begin{aligned} l_\kappa l_{\kappa+1} &\leq m_1^2 - m_\kappa^2 \Rightarrow \\ l_\kappa l_{\kappa+1} &\leq D - m_\kappa^2 - (D - m_1^2). \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $D - m_\kappa^2 = l_\kappa l_{\kappa+1}$ και $D - m_1^2 = l_1 l_2 = l_2$, η τελευταία ανίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} l_\kappa l_{\kappa+1} &\leq l_\kappa l_{\kappa+1} - C \Rightarrow \\ l_2 &\leq 0 \text{ (άτοπο).} \end{aligned}$$

□

Έστω (m_0, y_0) η <u>ελάχιστη</u> λύση (M, Y) <u>ώστε $M > 0$</u>.
*Τότε, από **Ισχυρισμό 1**, όλες οι θετικές λύσεις είναι της μορφής*

$$\begin{aligned} M &= m_0 + k l_{n+1} \\ Y &= y_0 + k y_n. \end{aligned}$$

Επομένως αφού η λύση $= m_{n+1}$ *ικανοποιεί τη συνθήκη (2), δηλαδή* $m_{n+1}^2 < D$ *με* $m_{n+1} > 0$ *αλλά ταυτοχρόνως από τον* ***Ισχυρισμό 2*** *γνωρίζουμε πως* $(m_{n+1} + l_{n+1})^2 > D$, *προκύπτει πως η μεγαλύτερη θετική λύση , ώστε* $M^2 < D$ *(δηλαδή ώστε* $D - M^2$ *θετικό ελάχιστο), είναι η*

$$M = m_{n+1}.$$

Δηλαδή, η $M = m_{n+1}$ *ικανοποιεί και την συνθήκη (3) της Πρότασης.* □

Παρατηρήσεις

1) Μόλις αποδείξαμε πως η cakravāla στη γενική της μορφή[3] είναι ισοδύναμη με την ανθυφαίρεση. Ο Singh [Singh, 1983] έχει παρουσιάσει την ισοδυναμία της cakravāla με την επέκταση συνεχών κλασμάτων. Τα δύο αποτελέσματα είναι ταυτόσημα καθώς η ανθυφαιρεση τετραγωνικών αρρήτων[4] ισοδυναμεί με την επέκταση συνεχών κλασμάτων τους.
Σαν αποτέλεσμα, προσπάθειες ερμηνείας της cakravāla όπως η αντιστοιχία με semi-regular συνεχή κλάσματα, όπως η "ideal" (όπως ονομάζεται) μέθοδος του Selenius [van der Waerden, 1976], [Selenius, 1975] αποδεικνύονται ανεπαρκείς. Η προσπάθεια του Selenius να περιλάβει στην cakravāla την ελαχιστοποίηση της απολύτου τιμής $|D - M^2|$ δεν μπορεί να είναι αποδεκτή αφού οπως θα αναλύσουμε περισσότερο στη συνέχεια, ο Nārāyaṇa παρουσιάζει επιδεικτικά θα μπορούσαμε να πούμε το παράδειγμα $D = 97$ όπου ο Κανόνας ελάχιστης απόλυτης τιμής εμφανίζεται προβληματικός ή απλώς δεν ακολουθείται.

2) Ανθυφαιρετικά, η ύπαρξη τιμής του M που να ικανοποιεί την συνθήκη $M^2 < D$, με $M > 0$ δεν αμφισβητείται εξ' ορισμού της ακολουθίας m_n, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο.
Όσον αφορά τους Ινδούς όμως, **δεν φαίνεται να γνωρίζουν ότι αδιαμφισβήτητα υπάρχει** ελάχιστη θετική τιμή για το M ώστε $M^2 < D$. Η kuttaka δίνει τη γενική λύση για το M δηλαδή όλο το σύνολο λύσεων. Στα παραδείγματα που οι Ινδοί εμφανίζουν πάντα υπάρχει η ελάχιστη αυτή θετική τιμή για το M. Παρ' όλα αυτά πουθενά δεν είναι εμφανής μια γενική μέθοδος που να εξασφαλίζει την ύπαρξη αυτής της τιμής.

[3]Δηλαδη χωρίς τις τοπικές συντομεύσεις που όπως θα δούμε πραγματοποιούνται σε ορισμένα σημεία.

[4]Αριθμοί άρρητοι που το τετράγωνό τους είναι ρητός.

5.3.1 Μετάβαση στο επόμενο ζεύγος συγκλινουσών

Είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο πως αν και ούτε ο Bhāskara II ούτε κανένας από τους Αρχαίους Ινδούς που μελετήσαμε δεν το αναφέρει ρητά, οι σύγχρονοι μελετητές εμφανίζουν μια βεβαιότητα πάνω στο ότι το βήμα της cakravāla με το οποίο επιτελείται η μετάβαση από μια D-τριάδα (x_n, y_n, l_{n+1}) στην ανθυφαιρετικά επόμενη $(x_{n+1}, y_{n+1}, l_{n+2})$ επιτελείται με την εφαρμογή Σύνθεσης Brahmagupta μεταξύ των ζευγών (x_n, y_n) και $\left(\frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}, \frac{1}{l_{n+1}}\right)$.

Είδαμε πως τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα μπορούν να γραφούν με τη μορφή αποτομών ως $\gamma_n = \pm(y_n a - x_n b)$, όπου x_n, y_n ζεύγος συγκλινουσών που αντιστοιχεί σε προστιθέμενο όρο l_{n+1}. Επίσης, αποδείχθηκε πως $\phi_{n+1} = \frac{a - m_{n+1}b}{l_{n+1}}$, δηλαδή πως οι αυξητικοί παράγοντες ϕ_n έχουν τη μορφή αποτομών και αντιστοιχούν στο ζευγάρι $\left(\frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}, \frac{1}{l_{n+1}}\right)$.

Εξ' ορισμού των ϕ_n ισχύει πως $\gamma_n \cdot \phi_{n+1} = \pm b(\gamma_{n+1})$. Το ανθυφαιρετικό υπόλοιπο γ_{n+1} γράφεται ως αποτομή $\gamma_{n+1} = \pm(x_{n+1}b - y_{n+1}a)$. Το ζεύγος (x_{n+1}, y_{n+1}) προφανώς αντιστοιχεί σε προστιθέμενο όρο l_{n+2}.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η σύνθεση Brahmagupta ενός ζεύγους συγκλινουσών (x_n, y_n) με το ζεύγος $(m_{n+1}, 1)$ δεν είναι παρά η επίδραση των αυξητικών παραγόντων ϕ_{n+1} για μετάβαση από το ανθυφαιρετικό υπόλοιπο γ_n στο γ_{n+1}.

5.3.2 Κανόνας παράλειψης ανθυφαιρετικού βήματος

Μελετώντας τα παραδείγματα των Ινδών παρατηρούμε πως δεν εφαρμόζουν την cakravāla ακριβώς σε αντιστοιχία βημάτων την ανθυφαίρεση αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις πηδούν κάποιο ανθυφαιρετικό βήμα και μεταβαίνουν απευθείας στο μεθεπόμενο ζευγάρι συγκλινουσών[5].

Ο **γενικός κανόνας** που οι Ινδοί φαίνεται να ακολουθούν περιγράφεται στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 5.3 (Κανόνας τοπικής συντόμευσης)**.** *Για τους όρους των ακολουθιών (l_n) και (m_n) ισχύει πώς:*

[5]Αυτή η συντόμευση είναι κάτι τελείως διαφορετικό από τις συντομεύσεις που λαμβάνουν χώρα όταν $l = -1, \pm 2, \pm 4$ από όπου οδηγούμαστε απ' ευθείας σε λύση. Τα πηδήματα βημάτων είναι μεν συντομεύσεις αλλά τοπικές που κατά κύριο λόγο δεν οδηγούν σε λύση απλά σε μεθεπόμενο ζεύγος συγκλινουσών.

Εάν $m_{n+1} + m_{n+2} = l_{n+2}$, τότε $m'_{n+1} = m_{n+1} + l_{n+1}$.

Ο κανόνας αυτός μπορεί να αποδειχθεί με χρήση των αυξητικών παραγόντων ϕ_n των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης και των τύπων των γενικευμένων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών.

Απόδειξη. *Έστω $a > b$ δύο μεγέθη, με b η προτεθείσα ευθεία, και D μη τετράγωνος αριθμός για τα οποία ισχύει $a^2 = Db^2$. Εξ' ορισμού των ϕ_n ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

$$\gamma_n \phi_{n+1} = b\gamma_{n+1} \tag{5.5}$$

$$\gamma_{n+1} \phi_{n+2} = b\gamma_{n+2}, \tag{5.6}$$

από τις οποίες συνεπάγεται

$$b^2 \gamma_{n+2} = \gamma_n \phi_{n+1} \phi_{n+2}. \tag{5.7}$$

Με χρήση της Πρότασης 3.6,(d_k), της $a^2 = Db^2$ και της σχέσης $D - m_{n+1}^2 = l_{n+1} l_{n+2}$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}\phi_{n+2} &= \frac{a - m_{n+1}b}{l_{n+1}} \cdot \frac{a - m_{n+2}b}{l_{n+2}} \\
&= \frac{Db^2 - m_{n+1}ab - m_{n+2}ab + m_{n+1}m_{n+2}b^2}{l_{n+1}l_{n+2}} \\
&= \ldots \\
&= -b\left[\frac{a - (m_{n+1} + l_{n+1})b}{l_{n+1}}\right].
\end{aligned}$$

Επομένως, η (5.7) λαμβάνοντας υπ' όψιν πως τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα μπορούν να πάρουν τη μορφή αποτομών[6] *και μετά από πράξεις δίνει*

$$\gamma_{n+2} = a\left[\frac{y_n(m_{n+1} + l_{n+1}) + x_n}{l_{n+1}}\right] - b\left[\frac{y_n D + x_n(m_{n+1} + l_{n+1})}{l_{n+1}}\right] \tag{5.8}$$

$$= ay_{n+2} + bx_{n+2}. \tag{5.9}$$

Όμως από τους επαγωγικούς τύπους των συγκλινουσών ισχύει ότι

$$y_{n+2} = \frac{y_{n+1}m_{n+2} + x_{n+1}}{l_{n+2}}. \tag{5.10}$$

Από τις (5.8) και (5.10) και τη μοναδικότητα των αποτομών προκύπτει πως

$$\frac{y_n(m_{n+1} + l_{n+1}) + x_n}{l_{n+1}} = \frac{y_{n+1}m_{n+2} + x_{n+1}}{l_{n+2}}. \tag{5.11}$$

[6] Για x_n και y_n συγκλίνουσες, $\gamma_n = (-1)^n(x_n b - y_n a)$.

Αυτό σημαίνει πως εάν ισχύει η υπόθεση $m_{n+1}+m_{n+2} = l_{n+2}$ *είναι δυνατή η μετάβαση από το ζεύγος* (x_n, y_n) *απευθείας στο* (x_{n+2}, y_{n+2}). *Στη νέα συντομευμένη σειρά βημάτων, το βήμα* $n+1$, *έστω* $(n+1)'$ *θα δώσει το ίδιο ζεύγος συγκλινουσών με εκείνο που προέκυπτε στο βήμα* $n+2$ *στη μη συντομευμένη ανθυφαίρεση. Τότε, από την* (5.11) *φαίνεται πως το* $l'_{n+1} = l_{n+1}$ *ενώ* $m'_{n+1} = m_{n+1} + l_{n+1}$. □

Παρατηρήσεις

1) Όταν η έκφραση $m_{n+1} + m_{n+2} = l_{n+2}$ της υπόθεσης αληθεύει, τότε για το πηλίκο I_{n+2} της κανονικής ανθυφαίρεσης[7], ισχύει πως $I_{n+2} = 1$. Από τους Πίνακες των Παραδειγμάτων που βρίσκονται σε παράγραφο που ακολουθεί, μπορεί ο αναγνώστης να ελέγξει την ισχύ του Κανόνα παρατηρώντας τα χρωματισμένα κελιά που αντιπροσωπεύουν την ακολουθία συγκλινουσών που εμφανίζουν οι Ινδοί στα Παραδείγματά τους και κάνοντας τη σύγκριση με την ακολουθία των συγκλινουσών που εμφανίζει η ανθυφαίρεση (cakravāla σε πλήρη ανάπτυξη).

2) Ο Κανόνας "τοπικής συντόμευσης" είναι εκείνος που ακολουθείται από τον Nārāyaṇa για την επιλογή του κατάλληλου M μετά την εφαρμογή της kuttaka στα Παραδείγματα $D = 97$ (για τα πηδήματα των βημάτων $n = 3, 5, 7$ και 10) και $D = 103$ (για τα πηδήματα των βημάτων $n = 25$).

3) Η εφαρμογή του Κανόνα, προϋποθέτει τη γνώση της δήλωσης ότι το άθροισμα $m_{n+1} + m_{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του l_{n+2}. Η δήλωση εμφανίζεται στην Πρόταση 3.6, (c_k) κατά την μελέτη των αυξητικών παραγόντων ϕ_n των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης.

5.3.3 Κριτήριο ελάχιστης απόλυτης τιμής

Οι Jayadeva και Bhāskara II για την επιλογή του κατάλληλου M εξ' αυτών που προκύπτουν από την kuttaka εφαρμόζουν ένα Κριτήριο που εμπίπτει στον γενικότερο κανόνα που μόλις περιγράφηκε, το οποίο είναι όμως πιο περιοριστικό. Πηδούν λοιπόν ένα ανθυφαιρετικό βήμα όταν από τις δύο πιθανές τιμές $M = m_{n+1}$ και $M = m_{n+1} + l_{n+1}$ που θα μπορούσαν να ελαχιστοποιούν την παράσταση $|M^2 - D|$, αυτό συμβαίνει για την δεύτερη.

[7]Ακολουθώντας τον συμβολισμό των Πινάκων των Παραδειγμάτων που βρίσκονται σε επόμενη παράγραφο.

Πρόταση 5.4 (Κριτήριο ελάχιστης απόλυτης τιμής). *Εάν*
$(m_{n+1} + l_{n+1})^2 - D < D - m_{n+1}^2$,
τότε $m_{n+2} + m_{n+1} = l_{n+2}$.

Απόδειξη. *Από υπόθεση ισχύει πως*
$m_{n+1}^2 + l_{n+1}^2 + 2m_{n+1}l_{n+1} - D < D - m_{n+1}^2 \Rightarrow$
$l_{n+1}^2 + 2m_{n+1}l_{n+1} < 2(l_{n+1}l_{n+2}) \Rightarrow$
$l_{n+1} + 2m_{n+1} < 2l_{n+2} \Rightarrow$
$(l_{n+1} + m_{n+1}) + m_{n+1} < 2l_{n+2}$.

Λήμμα
$m_{n+1} - m_n < l_n$.

Απόδειξη Λήμματος Γνωρίζουμε πως $m_{n+1} + m_n < I_n l_{n+1}$
Δεχόμενοι πως $m_{n+1} - m_n < l_n$ *προκύπτει πως*
$m_{n+1}^2 - m_n^2 < I_n l_n l_{n+1} \Rightarrow$
$D - l_{n+1}l_{n+2} - D + l_n l_{n+1} < I_n l_n l_{n+1} \Rightarrow$
$-l_{n+2} < (I_n - 1)l_n$, *ισχύει.* □

Από το ***Λήμμα***, $m_{n+2} + m_{n+1} < 2l_{n+2}$.
Όμως, το άθροισμα $m_{n+2} + m_{n+1}$ *είναι πολλαπλάσιο του* l_{n+2}.
Προκύπτει έτσι πως
$m_{n+2} + m_{n+1} = l_{n+2}$. □

Παρατηρήσεις

1) Το συμπέρασμα $m_{n+2} + m_{n+1} = l_{n+2}$ είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη $I_{n+2} = 1$.[8]

2) Η υπόθεση του Κριτηρίου $(m_{n+1} + l_{n+1})^2 - D < D - m_{n+1}^2$ επάγει το συμπέρασμα αλλά δεν πρόκειται για ισοδυναμία, δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις όπου το αντίστροφο δεν ισχύει.

3) Ο λόγος που χαρακτηρίζουμε το Κριτήριο αυτό ως περιοριστικό σε σχέση με τον γενικότερο κανόνα που ακολουθεί ο Nārāyaṇa σκιαγραφείται και από τον ίδιο μέσα από το παράδειγμα που παρουσιάζει για $D = 97$. Συγκεκριμένα, η παράλειψη βήματος, παραμένοντας όμως στην ανθυφαίρεση, πραγματοποιείται από τον Nārāyaṇa για το ζεύγος (x_7, y_7) χωρίς να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Κριτηρίου ελάχιστης απόλυτης τιμής καθώς $D -$

[8] Με τον συμβολισμό που ακολουθείται στους Πίνακες των παραδειγμάτων της επόμενης παραγράφου.

$m_7^2 = 97 - 25 = 72$ ενώ $(m_7 + l_7)^2 - D = 196 - 97 = 99$ και παρ' όλα αυτά η παράλειψη πραγματοποιείται! Επιπλέον, μελετώντας το ζεύγος (x_5, y_5) παρατηρούμε πως $D - m_5^2 = (m_5 + l_5)^2 - D$ επομένως το Κριτήριο ελάχιστης απόλυτης τιμής δεν θα μπορούσε να αποφανθεί! Πάραυτα, ο Nārāyaṇa επιλέγει $= m_5 + l_5$ ακολουθώντας τον γενικότερο κανόνα και παραλείποντας το βήμα (x_5, y_5).[9]

5.3.4 Παραδείγματα

Στους παρακάτω Πίνακες καταγράφουμε τα στοιχεία που προκύπτουν από τα βήματα της ανθυφαίρεσης, δηλαδή της cakravāla χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν τα τοπικά πηδήματα βημάτων που όπως είδαμε όταν συμβαίνουν, το πηλίκο της ανθυφαίρεσης είναι μονάδα.[10] Τα χρωματισμένα μέρη του πίνακα υποδεικνύουν τα ζεύγη συγκλινουσών που οι Ινδοί (ο Bhāskara II για $D = 67$ και $D = 61$ και ο Nārāyaṇa για $D = 97$ και $D = 103$) εμφανίζουν στα παραδείγματά τους.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
l_n	1	3	6	7	9	2	9	7	6	3	1
m_n	8	7	5	2	7	7	2	5	7	8	
y_n	1	5	11	16	27	205	232	437	1106	**5967**	
x_n	8	41	90	131	221	1678	1899	3577	9053	**48842**	
I_n[11]	8	5	2	1	1	7	1	1	2	5	16

Πίνακας 5.1: **D=67** - Ανθυφαιρετικά βήματα

Στους Πίνακες, το l_{n+1} αντιπροσωπεύει την απόλυτη τιμή της διαφοράς $x_n^2 - Dy_n^2$. Η διαφορά αυτή όμως εναλλάσσει το πρόσημό της σε κάθε ανθυφαιρετικό βήμα. Συγκεκριμένα ισχύει $x_n^2 = Dy_n^2 + (-1)^n l_{n+1}$. Για να δικαιούμαστε λοιπόν να μιλάμε για επίλυση της εξίσωσης Pell δεν αρκεί να βρεθεί μόνο $l_n = 1$. Πρέπει επιπλέον να βρισκόμαστε σε άρτιο βήμα της ανθυφαιρετικής διαδικασίας (n άρτιος). Για παράδειγμα στον Πίνακα 5.2 επειδή το $l = 1$ αντιστοιχεί σε συγκλίνουσες περιττού

[9] Όλα τα παραπάνω ο αναγνώστης μπορεί να τα εξακριβώσει μελετώντας τους Πίνακες παραδειγμάτων της επόμενης παραγράφου.

[10] Ας επισημάνουμε πως οι ανθυφαιρέσεις (αντιστοίχως τα συνεχή κλάσματα) για τα D των πινάκων είναι ως εξής:
$Anth(\sqrt{67}) = [8, period(5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16)]$
$Anth(\sqrt{61}) = [7, period(1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)]$
$Anth(\sqrt{97}) = [9, period(1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18)]$
$Anth(\sqrt{103}) = [10, period(6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20)]$.

[11] Τα πηλίκα της ανθυφαίρεσης.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
l_n	1	12	3	4	9	5	5	9	4	3	12	**1**
m_n	7	5	7	5	4	6	4	5	7	5	7	
y_n	1	1	5	16	21	58	137	195	722	3083	**3805**	
x_n	7	8	39	125	164	453	1070	1523	5639	24079	**29718**	
I_n	7	1	4	3	1	2	2	1	3	4	1	14

Πίνακας 5.2: **D=61** - Ανθυφαιρετικά βήματα

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
l_n	1	16	3	11	8	9	9	8	11	3	16	**1**
m_n	9	7	8	3	5	4	5	3	8	7	9	
y_n	1	1	6	7	13	20	33	53	86	483	**569**	
x_n	9	10	59	69	128	197	325	522	847	4757	**5604**	
I_n	9	1	5	1	1	1	1	1	1	5	1	18

Πίνακας 5.3: **D=97** - Ανθυφαιρετικά βήματα

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
l_n	1	3	13	6	9	11	2	11	9	6	13	3	**1**
m_n	10	8	5	7	2	9	9	2	7	5	8	10	
y_n	1	6	7	20	27	47	450	497	947	2391	3338	**22419**	
x_n	10	61	71	203	274	477	4567	5044	9611	24266	33877	**227528**	
I_n	10	6	1	2	1	1	9	1	1	2	1	6	20

Πίνακας 5.4: **D=103** - Ανθυφαιρετικά βήματα

βήματος, συμπεραίνουμε πως πρόκειται για αρνητική διαφορά. Για να προβούμε σε επίλυση αρκεί ένας τετραγωνισμός της D-τριάδας (x, y, l).

Από την παρατήρηση των Πινάκων προκύπτει πως ένα βήμα πριν την ολοκλήρωση της περιόδου, συγκεκριμένα στο βήμα πριν τον διπλασιασμό του I_1 πραγματοποιείται η εύρεση ενός ζεύγους λύσεων για την $x_n^2 - Dy_n^2 = \pm 1$. Εάν η περίοδος της ανθυφαίρεσης εξαιρουμένου του τελευταίου πηλίκου[12] περιλαμβάνει περιττό αριθμό παλινδρομικών πηλίκων τότε με κάθε πέρας της περιόδου παίρνουμε λύση για την Pell. Στην περίπτωση αυτή εντάσσονται τα παραδείγματα για $D = 67$ και $D = 103$. Σε περίπτωση που τα παλινδρομικά πηλίκα της περιόδου (με εξαίρεση πάντα το τελευταίο) είναι άρτια σε αριθμό, τότε λύση της Pell συναντάμε σε κάθε δεύτερη περίοδο. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα στις περιπτώσεις όπου $D = 61$ και $D = 97$.

5.3.5 Το ζήτημα της αναγκαιότητας της kuttaka

Ο Weil [Weil, 1984, σελ. 23] υποστηρίζει πως η κατά την διαδικασία της cakravāla ακολουθείται πάντα το Κριτήριο ελάχιστης απόλυτης τιμής.[13] Υποστηρίζει επίσης πως η διαδικασία της kuttaka δεν είναι αναγκαία καθώς η εύρεση του m_{n+1} θα μπορούσε να δοθεί αντ' αυτής από τον τύπο $m_{n+1} + m_n =$ πολλαπλάσιο του l_{n+1}. Πρόκειται για μια σχέση που δεν αναφέρεται ρητά από τους Ινδούς παρ' όλο που σύμφωνα με τον Weil είχαν τα απαραίτητα αναγκαία στοιχεία για να μπορούν να την χρησιμοποιήσουν. Παρ' όλα αυτά, όπως παρατηρήσαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο, ο γενικός Κανόνας παράλειψης ανθυφαιρετικού βήματος που ισχύει σε όλα τα παραδείγματα που αναφέρθηκαν, προϋποθέτει τη γνώση του παραπάνω τύπου.

Ας εξετάσουμε όμως στο σημείο αυτό την ισοδυναμία της kuttaka με τον τύπο $m_{n+1} + m_n =$ πολλαπλάσιο του l_{n+1}. Η kuttaka ειναι η μέθοδος μέσω της οποίας βρίσκουμε το m και το y δεδομένου του l. Μας δίνει ένα σύνολο πιθανών τιμών για το m. Με άλλα λόγια, αυτό που κάνει η μεθοδος kuttaka είναι να μας δινει μια "δεξαμενή" με υποψήφια m για να συμμετέχουν στη διαδικασία της cakravāla.

Ας υπενθυμίσουμε τα εξής:
Γράφουμε $h \equiv k \pmod{n}$ ανν $(h - k)$ διαιρείται ακριβώς με το n.
Δηλαδή, εάν $(h - k) = ns$ για κάποιον ακέραιο s.

[12] Το τελευταίο πηλίκο κάθε ανθυφαιρετικής περιόδου είναι το διπλάσιο του πρώτου πηλίκου της ανθυφαίρεσης I_1.

[13] Είδαμε πως αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση του παραδείγματος του Nārāyaṇa για $D = 97$.

Αυτό σημαίνει πως η συνθήκη $m_{n+1} + m_n =$ πολλαπλάσιο του l_{n+1} μπορεί να γραφεί ως $m_{n+1} = m_n(\mod l_{n+1})$. Γνωρίζοντας λοιπόν το m_n όπως και το l_{n+1}, μπορώ να βρω την "δεξαμενή" με τα πιθανά m_{n+1}, δηλαδή την κλάση υπολοίπων modulo l_{n+1} που περιέχει ήδη το m_n.

Εάν λοιπόν κάποιος γνωρίζει τη σχέση $m_{n+1} + m_n =$ πολλαπλάσιο του l_{n+1}, η kuttaka σαν διαδικασία δεν χρειάζεται.

5.4 Τετραγωνισμός

Οι Ινδοί, εκτός από την μέθοδο cakravāla, χρησιμοποιούσαν είτε ως συνέχεια αυτής είτε ανεξάρτητα, την Αρχή Σύνθεσης του Brahmagupta μιας D-τριάδος (x, y, l) με τον εαυτό της (Πόρισμα Brahmagupta). Ειδικά στην περίπτωση όπου $l = -1, \pm 2, \pm 4$ το αποτέλεσμα ενός ή δύο τετραγωνισμών οδηγεί σε ακέραια λύση για την εξίσωση Pell.

Θυμίζουμε πως ο Τετραγωνισμός Brahmagupta ενός ζεύγους (x, y) με l τέτοιο ώστε $x^2 = Dy^2 + l$ όπου D μη τετράγωνος αριθμός, δίνει ως αποτέλεσμα το ζεύγος συγκλινουσών $(x^2 + Dy^2, 2xy)$ που αντιστοιχεί σε D-τριάδα με προστιθέμενο όρο l^2.

Οι τετραγωνισμοί ζευγών συγκλινουσών αντιστοιχούν επομένως σε τετραγωνισμούς του αντίστοιχου προστιθέμενου όρου l. Με άλλα λόγια ο προστιθέμενος όρος που προκύπτει από τη Σύνθεση είναι **τετράγωνος αριθμός**.

Στο ζήτημα της προέλευσης της Αρχής Σύνθεσης του Brahmagupta έρχεται να εμπλακεί ακόμη μία φορά το περιεχόμενο του Βιβλίου Χ. Ο Θεαίτητος προβαίνει στο Βιβλίο αυτό σε μια ταξινόμηση αποτομών $\zeta - \eta$ σε δύο κατηγορίες I και II η κάθε μία από τις οποίες χωρίζεται επιπλέον σε τρεις υποκατηγορίες. Ο πρώτος διαχωρισμός σύμφωνα με τον Ορισμό Χ.84/85, κατατάσσει τις αποτομές ως εξής:

I. Εκείνες των οποίων η τετραγωνική ρίζα του $d^2 = \zeta^2 - \eta^2$ είναι σύμμετρη προς την προτεθείσα ευθεία b και ονομάζονται **αποτομές πρώτης τάξης**.

II. Εκείνες των οποίων η τετραγωνική ρίζα του $d^2 = \zeta^2 - \eta^2$ είναι ασύμμετρη προς την προτεθείσα ευθεία b.

Ας εξετάσουμε επιπλέον την Πρόταση Χ.97 των *Στοιχείων* η οποία παράγει αποτομές πρώτης τάξεως.

Πρόταση Χ.97. *Εάν*

- *$\zeta - \eta$ είναι αποτομή ως προς την προτεθείσα b και*

- $(\zeta - \eta)^2 = b \cdot \omega$,

*τότε ω είναι **αποτομή**, δηλαδή υπάρχουν ζ_1, η_1 δυνάμει-μόνο σύμμετρες ευθείες ώστε $\omega = \zeta_1 - \eta_1$ και μάλιστα αποτομή **πρώτης τάξης**. Αν θέσω δηλαδή $d_\omega^2 = \zeta_1^2 - \eta_1^2$, τότε d_ω^2 και b είναι σύμμετρα.*

Όπως έχουμε δει, τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα γ_n της ανθυφαίρεσης δύο ευθειών $a > b$ με $a^2 = Db^2$ όπου D μη τετράγωνος αριθμός μπορούν να γραφούν με τη μορφή αποτομών ως $\gamma_n = (-1)^n(x_n b - y_n a)$ όπου (x_n, y_n) ζεύγη συγκλινουσών που ανήκουν στη σχέση $x_n^2 = Dy_n^2 + l_{n+1}$ και b η προτεθείσα ευθεία.

Είναι πολύ ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε τι θα συμβεί εάν εφαρμόσουμε την Πρόταση Χ.97 για τις αποτομές-ανθυφαιρετικά υπόλοιπα[14]. Εξ' ορισμού του d^2 ισχύει

$$d_\gamma^2 = y^2a^2 - x^2b^2 = (Dy^2 + x^2)b^2 = lb^2.$$

Ας επισημάνουμε το l που προκυπτει ως συντελεστής του b^2. **Είναι ο προστιθέμενος όρος της varga-prakṛti** $x^2 = Dy^2 + l$.

Αποκαλύπτεται λοιπόν ότι το Κριτήριο ταξινόμησης των αποτομών σε ομάδες I,II του Βιβλίου Χ, σχετίζεται με την εξίσωση του Pell. Από την σκοπιά των συγκλινουσών και της εξίσωσης Pell, η κατηγοριοποίηση των αποτομών μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως εξής:

I. Η διαφορά l_{n+1} των συγκλινουσών (x_n, y_n) είναι τετράγωνος αριθμός,

II. Η διαφορά l_{n+1} των συγκλινουσών (x_n, y_n) είναι μη τετράγωνος αριθμός.

Τετραγωνίζοντας την αποτομή γ παίρνουμε

$$\gamma^2 = (ya - xb)^2 = y^2a^2 + x^2b^2 - 2yaxb = b[(Dy^2 + x^2)b - 2xya].$$

Δηλαδή, $\omega = (Dy^2 + x^2)b - 2xya$.
Ας επισημάνουμε εδώ πως οι συντελεστές των a και b **είναι το νέο ζεύγος συγκλινουσών που προκύπτει από τον τετραγωνισμό Brahmagupta** του ζεύγους συγκλινουσών (x, y).

Από την Πρόταση Χ.97, το ω είναι αποτομή πρώτης τάξης, δηλαδή

$$d_\omega^2 = (Dy^2 + x^2)^2b^2 - 4x^2y^2a^2 = l^2b.$$

Ας παρατηρήσουμε εδώ πως η εφαρμογή της Πρότασης Χ.97 του Θεαίτητου σε ανθυφαιρετικά υπόλοιπα (ειδική περίπτωση αποτομών) εμφανίζει επιπλέον και το l^2 το ίδιο που εντοπίζουμε στο αποτέλεσμα του τετραγωνισμού του Brahmagupta για D-τριάδες.

[14] Ας μελετήσουμε την αποτομή $\gamma = ya - xb$ ως προς την προτεθείσα ευθεία b με $x^2 = Dy^2 + l$ χωρίς να λαμβάνουμε υπ' όψιν τα πρόσημα.

Προέλευση τετραγωνισμού Brahmagupta

Φαίνεται πλέον ξεκάθαρα πως ο τετραγωνισμός του Brahmagupta (7ος αι. μ.Χ.) μπορεί να προκύψει εξ' ολοκλήρου από την Πρόταση Χ.97 του Βιβλίου του Θεαίτητου (Θεαίτητος, 4ος αι. π.Χ.). Εκτός από την ταύτιση που εμφανίζεται στο ζεύγος συγκλινουσών που προκύπτει, υπάρχει και στενή σχέση στην εξέταση των προστιθέμενων όρων. Ο Brahmagupta, όπως και ο Θεαίτητος δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στις περιπτώσεις που το l αυτό προκύπτει τετράγωνος αριθμός. Ο πρώτος μέσω του τετραγωνισμού Brahmagupta με σκοπό την επίλυση της εξίσωσης Pell και ο δεύτερος μέσω της πρώτης ταξινόμησης των αποτομών. Η στενή σύνδεση θα μπορούσε να αποκαλύπτει την προέλευση του κανόνα Brahmagupta από την ανάλυση του Θεαίτητου για τις αποτομές.

Ας επισημάνουμε πως το σύνολο των Προτάσεων Χ.73-110 έχουν σχέση με τον τετραγωνισμό και την τετραγωνική ρίζα αποτομής και αν διαβαστούν υπό το φως των ανθυφαιρετικών υπολοίπων ως αποτομές πρόκειται για μια ένδειξη πως σκοπός του Θεαίτητου ίσως ήταν εν μέρει η αντιμετώπιση του Προβλήματος Pell με χρήση συντομεύσεων.

5.5 Χρήση τετραγωνισμών για συντομεύσεις

Όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο, οι Ινδοί διέθεταν τύπους, η εφαρμογή των οποίων όταν εμφανιζόταν $l = -1, \pm 2 \pm 4$ σε κάποιο βήμα της cakravāla ή ανεξαρτήτως αυτής σε κάποια βοηθητική vargka-parkṛti[15], οδηγούν απευθείας σε εύρεση ακέραιων λύσεων για την εξίσωση Pell.

Οι τύποι αυτοί, επαναλαμβάνουμε πως προέκυψαν από **χρήση (μίας ή δύο φορών) του τετραγωνισμού** μιας D-τριάδας (x_n, y_n, l_{n+1}) και πρόκειται ουσιαστικά για **συντομεύσεις** της ανθυφαιρετικής διαδικασίας (cakravāla).

Το παράδειγμα $D = 67$

Ας μελετήσουμε το παράδειγμα για $D = 67$ χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του Πίνακα5.1 (όπου εμφανίζεται $l_6 = 2$) και ας καταγράψουμε με ανθυφαιρετικό τρόπο το τι είναι αυτό που συμβαίνει και επιτρέπει την πραγματοποίηση συντόμευσης:

[15]Για παράδειγμα στην περίπτωση του Brahmagupta ο οποίος δεν αναφέρει πουθενά την cakravāla

Έστω $a > b$ δύο μεγέθη[16] για τα οποία ισχύει $a^2 = 67b^2$.
Η ανθυφαίρεσή τους είναι η εξής:

$a = 8b + \gamma_1$, με $b > \gamma_1$,
$b = 5\gamma_1 + \gamma_2$, με $\gamma_1 > \gamma_2$,
$\gamma_1 = 2\gamma_2 + \gamma_3$, με $\gamma_2 > \gamma_3$,
...

Από τα παραπάνω προκύπτουν πως τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα μπορούν να πάρουν τη μορφή αποτομών ως εξής:

$\gamma_1 = a - 8b$,
$\gamma_2 = b - \gamma_1 = 41b - 5a$,
...
$\gamma_n = (-1)^n(x_n b - y_n a)$
...

Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο με την ανακατασκευή του Θεωρήματος Παλινδρομικής Περιοδικότητας, ορίζονται οι αυξητικοί παράγοντες από γ_n σε γ_{n+1} ως $\phi_n = b\dfrac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$.
Τα υπόλοιπα αυτά, με βάση τις ακολουθίες m_n και l_n παίρνουν επίσης τη μορφή

$$\phi_n = \frac{a - m_n b}{l_n} \Leftrightarrow b\gamma_n = \gamma_{n-1}\phi_n, \text{ για } n \geq 2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει πως

$$b^{n-1}\gamma_n = \gamma_1\phi_2...\phi_n. \tag{5.12}$$

Για $n = 5$ η (5.12) γίνεται

$$\begin{aligned} b^4\gamma_5 &= \phi_1\phi_2...\phi_5 \\ &= (\frac{8}{1})(\frac{7}{3})(\frac{5}{6})(\frac{2}{7})(\frac{7}{9}) \end{aligned}$$

Τετραγωνίζοντας, προκύπτει

$$\begin{aligned} b^8\gamma_5^2 &= (\phi_1\phi_2...\phi_5)(\phi_1\phi_2...\phi_5) \\ &= \left[\left(\frac{8}{1}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\right]\left[\left(\frac{8}{1}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\right] \\ &= \left(\frac{8}{1}\right)^2\left(\frac{7}{3}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{7}{9}\right)^2 \\ &= \phi_1^2\phi_2^2\phi_3^2\phi_4^2\phi_5^2. \end{aligned}$$

[16] Όπου b η προτεθείσα ευθεία.

Επίσης (με χονδροειδή αντικατάσταση των ϕn με $\frac{m_n}{l_n}$)

$$\begin{aligned}
b^9\gamma_{10} &= \phi_1\phi_2...\phi_{10} \\
&= \left(\frac{m_1}{l_1}\right)...\left(\frac{m_{10}}{l_{10}}\right) \\
&= \left(\frac{8}{1}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{m_1^2m_2^2m_3^2m_4^2m_5^2}{l_1^2l_2^2l_3^2l_4^2l_5^2\cdot 2} \\
&= \phi_1^2\phi_2^2\phi_3^2\phi_4^2\phi_5^2\cdot\frac{1}{2} \\
&= b^8\gamma_5^2\cdot\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\gamma_5^2 = 2b\gamma_{10}. \tag{5.13}$$

Για τις συγκλίνουσες που αντιστοιχούν στο γ_5 ισχύει πως

$$\begin{aligned}
x_5^2 - 67y^2 &= 221^2 - 67\cdot 27^2 \\
&= 2 \\
&= l_6.
\end{aligned}$$

Η (5.13) αν ερμηνευθεί με όρους της Πρότασης Χ.97(η οποία όπως είδαμε αντιστοιχεί με τον τετραγωνισμό του Brahmagupta) για τον τετραγωνισμό της αποτομής γ_5, οδηγεί στο $l_{11} = 1$ συντομεύοντας την ανθυφαιρετική διαδικασία κατά μισή περίοδο.
Από τη στιγμή που πρόκειται για άρτιο βήμα[17], οι συγκλίνουσες που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο l αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Pell. Η ισχύς της (5.13) η οποία προέκυψε λόγω της παλινδρομικότητας του $\sqrt{67}$ είναι εκείνη που δικαιολογεί το γεγονός ότι ο τετραγωνισμός των συγκλινουσών που αντιστοιχούν στο $l_6 = 2$ οδηγεί σε λύσεις της Pell.

Η γενική περίπτωση όταν $l = 2$

Ορμώμενοι από το Παράδειγμα του $D = 67$ ας δούμε πώς το αποτέλεσμα γενικεύται για κάθε μη τετράγωνο D. Ας δούμε δηλαδή ποια είναι η γενική διαδικασία που επιτρέπει τη συντόμευση.

[17]Θυμίζουμε πως ο δείκτης του l προηγείται πάντα ένα βήμα από την θέση των συγκλινουσών. Εμείς σαν βήματα αναφέρουμε τη θέση των συγκλινουσών και όχι του l.

Πρόταση 5.5. *Έστω μεγέθη $a > b$ και D μη τετράγωνος αριθμός ώστε $a^2 = Db^2$.*
Εάν

*i. υπάρχει ζεύγος συγκλινουσών (x_n, y_n) για το οποίο $l_{n+1} = x_n^2 - Dy_n^2 =$**2** και*

ii. η παλινδρομικότητα εμφανίζεται γύρω από το πηλίκο I_{n+1} που αντιστοιχεί στο l_{n+1}, δηλαδή $\phi_{n+1} = \omega_n, ..., \phi_{2n} = \omega_1$,

τότε ο τετραγωνισμός του ζεύγους συγκλινουσών (x_n, y_n) συντομεύει την ανθυφαιρετική διαδικασία κατά το ήμισυ της περιόδου και οδηγεί στο ζεύγος λύσεων της Pell (x_{2n}, y_{2n}), όπου φυσικά $l_{2n+1} = 1$.

Απόδειξη. *Τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα έχουν τη μορφή*

$$\gamma_n = (-1)^n (x_n b - y_n a)$$

Μέσω της διαδικασίας που είδαμε στο Παράδειγμα για $D = 67$ προκύπτει πως

$$b^{n-1}\gamma_n = \phi_1\phi_2...\phi_n. \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} b^{2n-1}\gamma_{2n} &= \phi_1\phi_2...\phi_n\phi_{n+1}...\phi_{2n} \\ &= \phi_1\phi_2...\phi_n\omega_n...\omega_1 \\ &= \frac{(a-m_1b)^2(a-m_2b)^2...(a-m_nb)^2}{l_1^2 l_2^2 ... l_n^2 \cdot 2} \\ &= \phi_1^2\phi_2^2...\phi_n^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= b^{2n-2}\gamma_n^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\gamma_n^2 = 2b\gamma_{2n}. \tag{5.15}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση Χ.97 των Στοιχείων, το $2\gamma_{2n}$ είναι αποτομή που αντιστοιχεί σε $l'_{2n+1} = 4$.
Δηλαδή, $(2x_{2n})^2 - D(2y_n)^2 = l'_{2n} = 4$.
Αυτό όμως σημαίνει πως $x_{2n}^2 - Dy_n^2 = 1$.
Δηλαδή $l_{2n+1} = 1$. □

Παρατηρούμε πως οι συντομεύσεις αποτελούν χρήση του θεωρήματος του τετραγωνισμού. Η εφαρμογή συντόμευσης στην περίπτωση που $l = 2$ οδηγεί σε επίλυση λόγω της **παλινδρομικότητας** και της θέσης του $l = 2$ στο **μέσον** της ανθυφαιρετικής περιόδου.

5.6 Επίλογος

Το Κεφάλαιο που μόλις έκλεισε ήταν καταλυτικό όσον αφορά την διαχείριση της γνώσης και πληροφορίας που αποκτήθηκε στα προηγούμενα Κεφάλαια ώστε να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα που βασίζονται σε γερά θεμέλια. Η εικόνα είναι πλέον σαφέστερη όσον αφορά την προέλευση των Ινδικών μεθόδων και η διαίσθηση του van der Waerden περί Αρχαίας Ελληνικής καταβολής τους μπορεί να μετατραπεί αν όχι σε βεβαιότητα, τουλάχιστον σε σύνολο ισχυρών επιχειρημάτων προς την κατεύθυνση αυτή.

Ο Πλάτων παρείχε τις ενδείξεις, το Βιβλίο Χ τα εργαλεία, και το Θεώρημα Παλινδρομικής Περιοδικότητας τετραγωνικών αρρήτων όπως και η απόδειξή του ανήκει πλέον στα "κεκτημένα" του Θεαίτητου. Το πρόβλημα του Pell ελάχιστα απέχει από το σημείο αυτό! Η cakravāla, ανεπτυγμένη πλήρως, ισοδυναμεί με την ανθυφαίρεση. Δεν είναι δύσκολο κάποιος να βγάλει συμπεράσματα για μια καλή πιθανότητα προέλευσης της Ινδικής μεθόδου...

Επιπλέον, πέραν της cakravāla, ή καλύτερα σε συνδυασμό με αυτήν οι Ινδοί χρησιμοποιούν κατά κόρον συντομεύσεις που βασίζονται σε τετραγωνισμούς για την επίλυση της Pell. Είδαμε πως ο Θεαίτητος στο Βιβλίο Χ παρουσιάζει προτάσεις για τον τετραγωνισμό αποτομών, ειδική μορφή των οποίων αποτελούν τα ανθυφαιρετικά υπόλοιπα. Τετραγωνίζοντας αποτομές με τη μορφή ανθυφαιρετικών υπολοίπων το εκπληκτικό συμπέρασμα είναι πως προκύπτει ακριβώς το αποτέλεσμα του Ινδικού τετραγωνισμού του Brahmagupta. Η ταύτιση δεν αφορά απλά τις συγκλίνουσες (x_n, y_n) που και αυτό από μόνο του είναι εξαιρετικό, αλλά επεκτείνεται και στο προστιθέμενο l_{n+1}.

Στο σημείο αυτό, εντοπίζουμε ακόμη μία ακόμη ομοιότητα. Η πρώτη ταξινόμηση αποτομών που επιχειρεί ο Θεαίτητος, αν ερμηνευθεί με όρους συγκλινουσών, χωρίζει το προστιθέμενο l σε τετράγωνο και μη τετράγωνο αριθμό. Παρατηρούμε πως οι Ινδοί τετραγωνίζοντας επιθυμούν τετράγωνο l.

Ας επισημάνουμε επίσης πως η παλινδρομικότητα αποδείχθηκε αναγκαία στη χρήση των τετραγωνισμών ως συντομεύσεων από τους Ινδούς.

Κλείνοντας, όλα τα παραπάνω καταδεικνύουν σαφώς την συσχέτιση των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών με τις Ινδικές μεθόδους για την επίλυση της εξίσωσης Pell. Δείχνουν όμως επιπλέον πως ένα μέρος του σκοπού του κατά γενική ομολογία "μυστηριώδους" Βιβλίου Χ ίσως να αρχίζει να διαφαίνεται. Και σίγουρα δεν είναι η μελέτη των

κανονικών πολυγώνων και πολυέδρων όπως ο Weil ισχυρίζεται [Weil, 1984, σελ. 15]...

Βιβλιογραφία

Σ. Νεγρεπόντης. Η ανακατασκευή της Πυθαγόρειας Γεωμετρίας και η παρεπόμενη ανθυφαιρετική ερμηνεία της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας και του παραδόξου διχοτομίας του Ζήνωνος. Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Ε. Σταμάτης. *Ευκλείδου Περί Ασυμμέτρων, Στοιχεία, Βιβλίον Χ, Τόμος ΙΙΙ*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 1975.

Α. Μπασιάκου. Ο *Πολιτικός* του Πλάτωνος και η Παλινδρομική Περιοδικότητα της Ανθυφαίρεσης Τετραγωνικών Αρρήτων. Master's thesis, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2004.

I.S. Bhanu Murthy. *A modern introduction to Ancient Indian Mathematics*. New Age International Publishers, 1992.

R.K. Bhattacharyya. Brahmagupta: The ancient indian mathematician. In *Ancient Indian Leaps into Mathematics*, pages 171–192. Birkhäuser.

F. Cajori. *A History of Mathematics*. The Macmillan Company, 1893.

H.T. Colebrooke. *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. John Murray, 1817.

B. Datta and A.N. Singh. *History of Hindu Mathematics, A source book, Parts I and II*. Asia Publishing House, 1938.

G. Emch, Srinivas M.D., and Sridharan R., editors. *Contributions to the History of Indian Mathematics*. Hindustan Book Agency, 2005.

D. Fowler. *The Mathematics of Plato's Academy, A New Reconstruction*. Clarendon Press - Oxford, 1999.

G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1938.

Srinivas M.D. The cakravāla method for solving quadratic indeterminate equations. Presentation.

S. Negrepontis. A reconstruction of the proof of the palindromic periodicity of the anthyphairesis of commensurable in power only lines, employing only tools from *Book X* of *Euclid's Elements*. Proof developed in 1999.

S. Negrepontis. The anthyphairetic revolutions of the platonic ideas. *ArXiv: 1207.2950*, May 16, 2014.

C.O. Selenius. Rationale of the chakravāla process of jayadeva and bhāskara ii. *Historia Mathematica 2*, 2:167–184, 1975.

H. Selin, editor. *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Springer, 1997.

P. Singh. Varga-prakṛti - the cakravāla method of its solution and the regular continued fractions. *Indian Journal of History of Science*, 19(I):1–17, 1983.

C.N. Srinivasiengar. *The History of Ancient Indian Mathematics*. The World Press Private LTD, 1988.

Farmaki V. and Negrepontis S. Axioms in search of a definition. Department of Mathematics, University of Athens.

B.L. van der Waerden. Pell's equation in greek and hindu mathematics. *Upekhi Mat. Nauk*, 31(5):57–70, 1976.

B.L. van der Waerden. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer, 1983.

A. Weil. *Number Theory: An approach through History from Hammurapi to Legendre*. Birkhäuser, 1984.