ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η έννοια της *Συνέχειας*: Ιστορική Εξέλιξη – Έρευνα σε φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ για το επίπεδο κατανόησης της έννοιας

Κωνσταντίνος Χρυσανθόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ευστάθιος Γιαννακούλιας

Αθήνα
Ιούνιος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ευστάθιος Γιαννακούλιας (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	.....
2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Αν. Καθηγητής	.....
3) Παναγιώτης Σπύρου	Επ. Καθηγητής	.....

«Άξια σύζυγο ποιος μπορεί να βρει;
Αυτή αξίζει περισσότερο από τα κοράλλια …»

Παροιμίες 31:10, Μ.Ν.Κ

Στη γυναίκα μου που με περιμένει … υπομονετικά …

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΧΡΥΣΑΝΘΟΠΟΥΛΟΣ, Ιούνιος 2008

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
‘Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών’
Τμήμα Μαθηματικών, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ – ΕΡΕΥΝΑ ΣΕ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

(σελ. 212)

Η έννοια της συνέχειας αποτελεί κεντρική έννοια των μαθηματικών και η προσπάθεια του ανθρώπου για την κατάκτησή της ξεκίνησε από την εποχή που ο άνθρωπος άρχισε να θεμελιώνει αυστηρά τις μαθηματικές έννοιες. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της συνέχειας από τη Γ΄ Λυκείου. Η αναφορά που υπάρχει στο βιβλίο γενικής παιδείας θεωρείται άνευ ουσίας ενώ το κεφάλαιο που υπάρχει στο βιβλίο της κατεύθυνσης δίνει τον ορισμό της συνέχειας μέσω του ορίου και έχει χαρακτήρα περισσότερο αλγοριθμικό με πληθώρα ασκήσεων που στοχεύουν στην ικανότητα εκτέλεσης πράξεων και όχι στην εννοιολογική κατανόηση.

Στο μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών η έννοια της συνέχειας διδάσκεται από το πρώτο εξάμηνο στα πλαίσια του μαθήματος ‘Απειροστικός Λογισμός Ι’. Δίνεται ο ε-δ ορισμός για τη συνέχεια και αργότερα αναφέρεται η έννοια του ορίου. Η έννοια της συνέχειας φυσικά επαναλαμβάνεται στα περισσότερα μαθήματα του μαθηματικού τμήματος.

Ο σκοπός του Α΄ Μέρους της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει μερικά σύντομα ιστορικά στοιχεία για την εξέλιξη της έννοιας της συνέχειας από την εποχή της αρχαιότητας μέχρι και την εποχή της αυστηρής θεμελίωσης των Cauchy, Bolzano και Weierstrass. Η έρευνα που παρουσιάζεται στο Β΄ Μέρος έχει σαν σκοπό να διερευνήσει το επίπεδο κατανόησης της έννοιας της συνέχειας από μέρους των φοιτητών του μαθηματικού τμήματος καθώς και τις ιδιαίτερες δυσκολίες που

ανιχνεύονται στην προσπάθεια των καθηγητών να διδάξουν και των φοιτητών – μαθητών να κατανοήσουν την έννοια αυτή. Ως θεωρητικά εργαλεία για την παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τρεις θεωρίες που περιγράφουν τους τοπικούς κύκλους εννοιολογικής ανάπτυξης: η θεωρία υποστασιοποίησης της Sfard, η θεωρία APOS από τον Dubinsky και τους συνεργάτες του καθώς και η θεωρία των Gray – Tall όπως έχει πρόσφατα διαμορφωθεί στα πλαίσια των 3 κόσμων του Tall. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί το πλαίσιο της Εννοιολογικής Αλλαγής των Vosniadou – Verschaffel για να μελετηθεί η επίδραση που ασκεί η προϋπάρχουσα γνώση του Λυκείου στην κατασκευή των νέων νοητικών σχημάτων κατά τη φοίτηση στο πανεπιστήμιο και ο βαθμός στον οποίο έχει λάβει χώρα η κατάλληλη εννοιολογική μετάβαση.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών σε ένα δείγμα 62 (εξήντα δύο) φοιτητών με τη χρήση κατάλληλου ερωτηματολογίου. Από αυτούς, οι 35 (τριάντα πέντε) συμμετείχαν στη συνέχεια εθελοντικά σε ημι-δομημένη μαγνητοφωνημένη συνέντευξη με αναφορά το ερωτηματολόγιο.

Η ανάλυση που έγινε στη συνέχεια στα ερωτηματολόγια και ιδιαίτερα στις συνεντεύξεις έδειξε ότι υπάρχει ένα σοβαρό έλλειμμα μαθηματικής κατανόησης για την έννοια της συνέχειας. Οι περισσότεροι φοιτητές παραμένουν σε ένα λειτουργικό επίπεδο και δεν μπορούν να συνδέσουν τον ορισμό της συνέχειας του Λυκείου με τον αντίστοιχο ε-δ του Πανεπιστημίου. Η συντριπτική πλειονότητα των φοιτητών ταυτίζουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης με τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Δεν μπορούν να κατασκευάσουν κατάλληλες αναπαραστάσεις ούτε να δημιουργήσουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ τους. Παρουσιάζουν μεγάλη δυσκολία στην εσωτερίκευση του νοήματος του ορισμού της συνέχειας ενώ φαίνεται ότι οι περισσότεροι δεν έχουν κάνει τις απαραίτητες εννοιολογικές αλλαγές κατά τη μετάβαση από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο.

Η Ανάλυση των αποτελεσμάτων δείχνει σοβαρό έλλειμμα ακριβούς κατανόησης και ανάγκη επαναπροσδιορισμού του τρόπου διδασκαλίας της έννοιας της συνέχειας τόσο στο Λύκειο, όσο και στα πλαίσια του Πανεπιστημίου.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ:
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ – ΕΡΕΥΝΑ ΣΕ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

Κωνσταντίνος Χρυσανθόπουλος

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ

Αθήνα, Ελλάδα
Ιούνιος, 2008

© Κωνσταντίνος Χρυσανθόπουλος, 2008

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία έχει σαν σκοπό να παρουσιάσει την ιστορική πορεία εξέλιξης της έννοιας της συνέχειας καθώς και τις δυσκολίες κατανόησής της από τους μαθητές και δη τους φοιτητές του μαθηματικού τμήματος.

Το Α΄ Μέρος της εργασίας περιγράφει την εξέλιξη της έννοιας της συνέχειας από την αρχαία εποχή μέχρι και σήμερα.

Το Β΄ Μέρος περιέχει την έρευνα που διενεργήθηκε στο Μαθηματικό τμήμα ΕΚΠΑ με σκοπό να διερευνηθούν οι δυσκολίες που ανακύπτουν κατά τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές προκειμένου να αποκτήσουν εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσω ερωτηματολογίου και πραγματοποίηση ημι-δομημένων συνεντεύξεων με σημείο αναφοράς τα συμπληρωμένα ερωτηματολόγια. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν ως θεωρητικά εργαλεία η θεωρία υποστασιοποίησης της Sfard, η θεωρία APOS, η θεωρία των 3 κόσμων του Tall καθώς και το πλαίσιο εννοιολογικής αλλαγής των Vosniadou – Verschaffel.

Η έρευνα αποτελείται από πέντε κεφάλαια, Το Πρόβλημα, Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας, Μεθοδολογία, Αποτελέσματα και Συμπεράσματα. Το κεφάλαιο των αποτελεσμάτων αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος περιέχει σημείο προς σημείο ανάλυση αρκετών από των συνεντεύξεων. Το δεύτερο μέρος περιέχει μια συνολική αποτίμηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από όλους τους φοιτητές που πήραν μέρος στη διαδικασία των συνεντεύξεων ενώ στο τρίτο μέρος υπάρχει μια συνολική εκτίμηση για τα ερωτηματολόγια των φοιτητών που δεν πέρασαν από συνέντευξη αλλά απλά συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο.

Στο Παράρτημα Α υπάρχει το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους φοιτητές και χρησιμοποιήθηκε για την έρευνα, ενώ στο Παράρτημα Β υπάρχει το πλήρες

απομαγνητοφωνημένο κείμενο όλων των συνεντεύξεων μαζί με τα ψηφιοποιημένα ερωτηματολόγια – απαντήσεις των φοιτητών.

Η εργασία αυτή ολοκληρώθηκε κάτω από την άγρυπνη αλλά και διακριτική επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή κυρίου Ευστάθιου Γιαννακούλια. Για όλα όσα με δίδαξε και για την προσωπική βοήθεια που μου παρείχε, τον ευχαριστώ θερμά.
Ο Αναπληρωτής Καθηγητής κύριος Θεοδόσιος Ζαχαριάδης μου έδωσε στη διάρκεια των σπουδών μου αρκετή 'τροφή' για σκέψη, και ερεθίσματα για περαιτέρω έρευνα στον τομέα της ανάλυσης κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα.
Επίσης, ευχαριστώ πολύ τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Παναγιώτη Σπύρου για τις χρήσιμες υποδείξεις του καθώς ολοκληρωνόταν αυτή η εργασία.
Μια ιδιαίτερη ευχαριστία ανήκει στο Υποψήφιο Διδάκτορα κύριο Αλκαίο Σογιούλ που βοήθησε καθοριστικά στην επίδοση των ερωτηματολογίων στους φοιτητές.

Τίποτα όμως δεν θα είχε γίνει αν αρκετοί φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών δεν δέχονταν να πάρουν μέρος στην έρευνα. Τους ευχαριστώ θερμά.

Κωνσταντίνος Χρυσανθόπουλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ……...…vi
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ……vii
ΜΕΡΟΣ
Α Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΤΟ ΔΙΑΒΑ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ …….….1
Εισαγωγή …….…1
Η έννοια της συνέχειας στο προ – Ελληνικά μαθηματικά ……..... 2
Η έννοια της συνέχειας στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά ……....3
Η έννοια της συνέχειας μέσα στο μεσαίωνα …….11
Η έννοια της συνέχειας κατά την Αναγέννηση ……13
Μια παλλόμενη χορδή ανοίγει το δρόμο για τη συνέχεια …….21
Η εποχή της αυστηρής θεμελίωσης ……...33
Β Η ΕΡΕΥΝΑ ……...51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ
Ι ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ……..51
Περίληψη ……...51
Διατύπωση προβλήματος ……...51
Σκοπός της έρευνας ……...78
Ερευνητικά ερωτήματα ……..79
Υποθέσεις ……..79
Αναγκαιότητα – Σημαντικότητα της έρευνας ……80
Οριοθέτηση Προβλήματος ……81
ΙΙ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ……82
Περίληψη ……...82
Εισαγωγή ……...82
Θεωρητικό πλαίσιο ……85
«Κύριο μέρος» ……...86
ΙΙΙ ΜΕΘΟΔΟΓΟΓΙΑ ……122
Περίληψη ……122
Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας ……..122
Μέσα συλλογής δεδομένων ……124
Καθορισμός πληθυσμού – Δείγμα ……...…126
Παραδοχές έρευνας ……..……128
IV ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ……129
Περίληψη ……129
Εισαγωγή ……129
Αποτελέσματα ……130
V ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ……..202
Περίληψη ……..202
Συμπεράσματα ……..202
Εισηγήσεις ……209
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
Α Παρουσίαση του Ερωτηματολογίου ……213
Β Παρουσίαση των Συνεντεύξεων ……..224
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ……480

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΕΛΙΔΑ

1 Ταυτότητα συμμετοχής των 35 φοιτητών που πήραν μέρος στις συνεντεύξεις ……...126

2 Ταυτότητα συμμετοχής των 27 φοιτητών που πήραν μέρος στην έρευνα μόνο με τη συμπλήρωση ερωτηματολογίου ……..127

3 Ταυτότητα συμμετοχής του συνόλου των 62 φοιτητών ……...127 και 128

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΕΛΙΔΑ

1 Το *Σχήμα* και οι κατασκευές του …….96

2 Ο Θεμελιώδης Κύκλος κατασκευής των εννοιών …….102

3 Οι τρεις κόσμοι του Tall και οι αναπαραστάσεις του Bruner …….. 109

4 Η γνωστική ανάπτυξη μέσα από τους 3 κόσμους του Tall …… 109

ΜΕΡΟΣ Α

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΤΟ ΔΙΑΒΑ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ

Εισαγωγή

Η πορεία εμφάνισης και ανάπτυξης της έννοιας της συνέχειας είναι σχεδόν παράλληλη με τη γενικότερη επιστημονική πρόοδο του ανθρώπου. Ίσως για καμιά άλλη έννοια δεν θα μπορούσε να ειπωθεί τόσο ξεκάθαρα ότι αποτελεί καθρέφτη της εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών. Σχεδόν μηδενική παρουσία στο προ – Ελληνικά υπολογιστικά μαθηματικά, δυναμική είσοδος με έντονες αντιπαραθέσεις στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, ομιχλώδης παρουσία στα σκοτεινά χρόνια του μεσαίωνα, δυναμική επανεμφάνιση στα χρόνια της Αναγέννησης, φορμαλιστική δυναμική στον 19^{ο} αιώνα, αιώνα της θεμελίωσης και της αυστηρότητας, και τελικά ώριμη και μεστή νοημάτων και συνεπειών παρουσία στο σύνολο της μαθηματικής γνώσης από τον 20^{ο} αιώνα και μέχρι σήμερα.

Η έννοια της συνέχειας κρύβει από πίσω της το μεγαλύτερο Σισύφειο μαρτύριο του ανθρώπινου νου, την προσπάθεια εξιχνίασης του δίπολου *πέρας* και *άπειρο*. Η έννοια του απείρου εμπεριέχει γνωστικές συγκρούσεις που δύσκολα ξεπερνιούνται. Τα παράδοξα του Ζήνωνα είναι ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της 'παραφροσύνης' στην οποία μπορεί να οδηγήσει η λανθασμένη ή ελλιπής κατανόηση των απειροστικών διαδικασιών. Η συνέχεια σχετίζεται άμεσα επίσης με την αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών μέσω της οποίας ουσιαστικά παρουσιάστηκε φορμαλιστικά το *συνεχές* της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Αν και τα πρώτα ψήγματα των διαδικασιών που οδηγούν στη θεμελίωση της έννοιας της συνέχειας εμφανίστηκαν περίπου τον 5^{ο} αιώνα π.Χ., χρειάστηκε να περάσουν περισσότερα από 2300 χρόνια για να δούμε την αυστηρή παρουσίασή της από τους Cauchy, Bolzano και Weierstrass.

Σήμερα η έννοια της συνέχειας κατέχει κυρίαρχη θέση μέσα στη λογική αυστηρότητα της μαθηματικής μεθοδολογίας. Αν ο Απειροστικός Λογισμός είναι το κυρίαρχο

εργαλείο σκέψης και ανάπτυξης στα μαθηματικά και αν η έννοια της συνάρτησης θεωρείται κεντρική και αναγκαία για τον Απειροστικό Λογισμό, τότε σίγουρα η συνέχεια είναι αυτή που ορίζει μια κλάση συναρτήσεων με ιδιότητες χρήσιμες αλλά και επιθυμητές στο χώρο της Ανάλυσης και όχι μόνο.

Η έννοια της συνέχειας στα προ –Ελληνικά μαθηματικά

Οι περισσότεροι επιστήμονες συμφωνούν ότι η γραφή στην ανθρώπινη ιστορία, με την έννοια που αποδίδουμε σήμερα στη λέξη, έχει ζωή περίπου 6000 χρόνια (National Geographic, 1992). Τα δείγματα γραφής που έχει αφήσει κάθε πολιτισμός μας δίνουν μια ιδέα της επιστημονικής ανάπτυξης, και εν προκειμένω της μαθηματικής, που υπήρχε κάθε φορά. Είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί έστω και ένας πολιτισμός που να μην άφησε δείγματα μαθηματικής γραφής. Αν θέλαμε να δώσουμε ένα κατά προσέγγιση χρονοδιάγραμμα στα κύρια 'ρεύματα' των μαθηματικών όπως αυτά εμφανίστηκαν στο διάβα της ιστορίας, τότε σύμφωνα με τους Davis και Hersh (1981) θα είχαμε το εξής:

- Αιγύπτιοι: 3000 π.Χ. – 1600 π.Χ.
- Βαβυλώνιοι: 1700 π.Χ. – 300 π.Χ.
- Έλληνες: 600 π.Χ. – 200 μ.Χ.
- Ελληνορωμαίοι: 150 μ.Χ. – 525 μ.Χ.
- Ισλαμιστές: 750 μ.Χ. – 1450 μ.Χ.
- Δυτικοί: 1100 μ.Χ. – 1600 μ.Χ
- Σύγχρονοι: 1600 μ.Χ. – σήμερα.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι Έλληνες έτρεφαν μεγάλη εκτίμηση στα μαθηματικά των Αιγυπτίων. Ο Αριστοτέλης γράφει ότι: «… οι μαθηματικές τέχνες γεννήθηκαν πρώτα – πρώτα στην Αίγυπτο…»[1] (*Μετά τα Φυσικά*, Α 1 981b) ενώ αρκετές παρόμοιες αναφορές για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων συναντούμε και στον Ηρόδοτο και στον Δημόκριτο (V. D. Waerden, 2000; Boyer, 1959). Αν και είναι

[1] Ελεύθερη απόδοση του χωρίου όπως αναφέρεται στον Van Der Waerden, B. L. (2000). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. (Γ. Χριστιανίδη μετάφραση). Ηράκλειο: ΠΕΚ. (Πρωτότυπη έκδοση: 1988), σελίδα 1.

αρκετά τα Αιγυπτιακά κείμενα με μαθηματικό περιεχόμενο, ουσιαστικά δεν βλέπουμε παρά μια σειρά από υπολογισμούς, αξιόλογους ομολογουμένως, χωρίς όμως το παραμικρό κίνητρο. Δεν υπάρχει καμιά ένδειξη για οποιοδήποτε αποδεικτικό συλλογισμό. Υπάρχουν περίπλοκοι υπολογισμοί, και μάλιστα με κλάσματα, που όμως δεν έχουν τη μορφή μιας δομημένης αλγεβρικής σκέψης ενώ και ο χειρισμός της γεωμετρίας γίνεται μόνο με τη μορφή εφαρμοσμένης αριθμητικής (V. D. Waerden, 2000; Boyer, 1959). Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, είναι αυτονόητο ότι απουσιάζει καθετί που θα μπορούσε έστω και να παραπέμπει στην έννοια της συνέχειας, εφόσον χρησιμοποιούνταν μόνο διακριτοί αριθμοί ενώ δεν φαίνεται να υπάρχει καμιά, έστω και υπόρρητη, αναφορά σε συνεχή μεγέθη (Boyer, 1959). Το ανθρώπινο μυαλό δεν φαίνεται να έχει απασχοληθεί ακόμα με το άπειρο και το συνεχές.

Τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά προσομοιάζουν αρκετά στα Αιγυπτιακά αλλά δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην αριθμητική πλευρά των πραγμάτων και υπάρχει πιο έντονο το αλγεβρικό στοιχείο. Πράγματι, οι αλγεβρικές πράξεις που υπάρχουν είναι αρκετά ανεπτυγμένου επιπέδου αλλά πουθενά δεν υπάρχει αναφορά στο πώς κατέληγαν σε κάποια συμπεράσματα (V. D. Waerden, 2000). Δεν συναντούμε καθόλου στοιχεία αποδεικτικής διαδικασίας παρά μόνο σε κάποιες περιπτώσεις όπου πολύπλοκα προβλήματα αναλύονταν σε απλούστερα και έτσι ‘αποδεικνύονταν’ (Boyer, 1959). Όπως και στα Αιγυπτιακά μαθηματικά, δεν γίνεται πουθενά αναφορά σε συνεχή μεγέθη. Αν και υπάρχουν κάποιοι αστρονομικοί πίνακες με τιμές μεγεθών, που σε σύγχρονη γλώσσα θα μπορούσαν να ειδωθούν σαν μεταβλητές μια συνεχούς συνάρτησης, δεν υπάρχει η παραμικρή ένδειξη ότι οι Βαβυλώνιοι το έβλεπαν έτσι ή ότι είχαν κάνει την παραμικρή σκέψη πάνω στις έννοιες συνεχές μέγεθος, άπειρο κ.λ.π. (Boyer, 1959).

Η έννοια της συνέχειας στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά

Ο Heath αναφέρει ότι « … οι Έλληνες υπήρξαν λαός *διανοητών*. Δεν τους αρκούσε η γνώση των γεγονότων, ήθελαν να γνωρίζουν το πώς και το γιατί, και δεν ησύχαζαν έως ότου ήταν σε θέση να δώσουν μια λογική εξήγηση – ή τουλάχιστον ό,τι

θεωρούσαν ως λογική – για κάθε γεγονός ή φαινόμενο» [2]. Πράγματι, για πρώτη φορά στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά συναντούμε την έννοια της απόδειξης και μάλιστα πολλές φορές με μια αυστηρότητα που και ένας σύγχρονος μαθηματικός θα θαύμαζε. Πρωτοπόρος σε αυτή την πορεία ήταν ο Θαλής για τον οποίο ο Πρόκλος αναφέρει: «QalÁj dè prî ton e„j A‡gupton ™lqën met»gagen e„j t¾n `Ell£da t¾n qewr…an taÚthn kaˆ poll¦ mèn aÙtÕj eáren, pollîn dè t¦j ¢rc¦j to‹j met' aÙtÕn Øfhg»sato, to‹j mèn kaqolikèteron ™pib£llwn, to‹j dè a„sqhtikèteron» [3]. Ο Θαλής όμως δεν κατασκεύασε ένα δομημένο 'σώμα' μαθηματικής γνώσης με τη σημερινή έννοια του όρου, ούτε εφάρμοσε τις μεθόδους του στο πρόβλημα της συνέχειας που ήδη είχε αρχίσει να κάνει την εμφάνισή του στα προβλήματα κίνησης, αλλά όπως θα αναλύσουμε στη συνέχεια, οι Πυθαγόρειοι ήταν αυτοί που προχώρησαν σε αυτό το βήμα (Boyer, 1959). Ο Πρόκλος στο ίδιο έργο του αναφέρει: «™pˆ dè toÚtoij PuqagÒraj t¾n perˆ aÙt¾n filosof…an e„j scÁma paide…aj ™leuqšrou metšsthsen, ¥nwqen t¦j ¢rc¦j aÙtÁj ™piskopoÚmenoj kaˆ ¢älwj kaˆ noerîj t¦ qewr»mata diereunèmenoj, Öj d¾ kaˆ t¾n tîn ¢lÒgwn pragmate…an kaˆ t¾n tîn kosmikîn schm£twn sÚstasin ¢neàren» [4].

Σύμφωνα με την Πυθαγόρεια φιλοσοφία, τα δομικά υλικά του σύμπαντος ήταν οι φυσικοί αριθμοί, και οι δομικές τους σχέσεις μπορούσαν να περιγραφούν σαν σχέσεις λόγων φυσικών αριθμών (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Αναπολιτάνος, 1985). Είναι ενδιαφέρον ότι μέσα σε αυτές τις αντιλήψεις αρχίζει να προβάλλει δειλά η έννοια του απείρου. Σύμφωνα με την Πυθαγόρεια κοσμογονία, το σύμπαν δημιουργήθηκε από τον αριθμό 1 μετά από διαίρεσή του που πραγματοποιήθηκε από εισπνοή *απείρου*. Από τη διαίρεση αυτή δημιουργείται από τη μονάδα η δυάδα, από τη δυάδα η τριάδα, από την τριάδα η τετράδα κ.λ.π., με τρόπο ώστε το Πυθαγόρειο σύμπαν να αποτελεί ένα αντίγραφο αυτού που θα λέγαμε σήμερα σύνολο των φυσικών αριθμών (Αναπολιτάνος, 1985). Έτσι για τους Πυθαγόρειους ήταν τελείως φυσιολογικό να αποτελείται το σύμπαν από σχέσεις ανάμεσα σε διακριτές ποσότητες, νόμους και αρμονίες εκφράσιμες με λόγους της μορφής p/q όπου p, q φυσικοί αριθμοί.

---

[2] Heath, T. L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. (Μετάφραση του Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ). (Τόμος 1). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (Πρωτότυπη έκδοση: 1921), σελίδα 23.
[3] Πρόκλος. *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*. 65 7-11
[4] Πρόκλος. *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*. 65 15-21

Ήταν τόσο έντονη η πίστη των Πυθαγορείων στη διακριτικότητα του κόσμου ώστε ήταν διαδεδομένη η αντίληψη στον αρχαίο κόσμο πως στις γεωμετρικές τους κατασκευές και αποδείξεις δεν χρησιμοποιούσαν συνεχή μεγέθη και μάλιστα παρίσταναν τα γεωμετρικά σχήματα με χαλίκια ώστε κάθε πλευρά ενός κυρτού σχήματος να αποτελείται από διακριτό αριθμό χαλικιών. (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Αναπολιτάνος, 1985). Αν οι γεωμετρικές έννοιες ήταν τα στοιχεία του σύμπαντος, τότε οι αριθμοί ήταν τα θεμελιώδη δομικά συστατικά αυτών των στοιχείων. Αυτή η θεώρηση έκανε τους Πυθαγορείους να βλέπουν μία γραμμή ως αποτελούμενη από ακέραιο αριθμό μονάδων. Αυτό όμως δεν μπορούσε να εφαρμοστεί στη διαγώνιο ενός τετραγώνου πλευράς 1. Όσο μικρή κι αν έκανε κάποιος τη μονάδα μέτρησης, δεν μπορούσε να καλύψει τη διαγώνιο με ακέραιο αριθμό μονάδων. Τα ασύμμετρα μεγέθη είχαν κάνει την εμφάνισή τους, και η Πυθαγόρεια φιλοσοφία δεχόταν ένα δυνατό χτύπημα.

Τα ασύμμετρα μεγέθη παρέμειναν ένα ισχυρό εμπόδιο για την ελληνική γεωμετρία. Αν και κατέχουν σημαντική θέση στα έργα του Ευκλείδη και του Πλάτωνα, είναι αξιοσημείωτο ότι ποτέ δεν πέρασε από το μυαλό των αρχαίων Ελλήνων να επινοήσουν έναν άρρητο αριθμό για να παρακάμψουν αυτό το εμπόδιο παρόλο που το έκαναν αυτό στα πλαίσια της γεωμετρίας με τη θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών (V. D. Waerden, 2000; Boyer, 1959). Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι τα κλάσματα δεν συναντώνται στα επίσημα αρχαία ελληνικά μαθηματικά πριν από τον Αρχιμήδη, αλλά στην πράξη είναι σίγουρο ότι χρησιμοποιούνταν στους εμπορικούς υπολογισμούς. Ο λόγος για τον οποίο τα κλάσματα είχαν αποκλειστεί από τη θεωρία και αντιμετωπίζονταν με αποστροφή φαίνεται να είναι η θεωρητικά μη διαιρετότητα της μονάδος όπως προκύπτει από χωρία του Πλάτωνα στην Πολιτεία[5] και του Θέωνος του Σμυρναίου[6] (V. D. Waerden, 2000). Προκειμένου όμως να δημιουργηθεί μια θεωρητική βάση για το λογισμό των κλασμάτων, συναντούμε τη θεωρία λόγων που

[5] Πλάτων, *Πολιτεία*, 525, d8-e4: « oÎsqa g£r pou toÝj perˆ taàta deinoÝj aâ æj, ™£n tij aÙtÕ tÕ □n ™piceirÍ tù lÔgJ tšmnein, katagelîs… te kaˆ oÙk ¢podšcontai, ¢ll'™¦n sÝ kermat…zVj aÙtÒ, ™ke‹noi pollaplasioàsin, eÙlaboÚmenoi m» pote fanÍ tÕ □n m¾ □n ¢ll¦ poll¦ mÒria.»

[6] Θέων ο Σμυρναίος, *De utilitate mathimaticae*, 18, 18-22: «tÕ dè en ¨n mèn ™n a„sqhto‹j diairÁtai, æj mèn sîma ™lattoàtai kaˆ diaire‹tai e„j ™l£ttona aØtoà mÒria tÁj tomÁj ginomšnhj, æj dè ¢riqmÕj aÜxetai·
¢ntˆ g¦r ˜nÕj g…netai poll£. éste kaˆ kat¦ toàto ¢merèj tÕ ›n.»

ουσιαστικά δημιούργησε ένα μαθηματικό ισοδύναμο της έννοιας του κλάσματος (V. D. Waerden, 2000; Σταμάτης, 1958).

Γιατί υπήρχε όμως αυτή η εμμονή από την πλευρά των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών για την γεωμετρικοποίηση της Άλγεβρας; Η απάντηση φαίνεται να βρίσκεται στην ανακάλυψη της ασυμμετρίας που όπως όλα δείχνουν έγινε από τη σχολή των Πυθαγορείων. Σήμερα λέμε απλά ότι το $\sqrt{2}$ είναι ένας άρρητος αριθμός και καμιά φορά μπορεί λανθασμένα να πιστεύουμε ότι οι Έλληνες δεν γνώριζαν τους άρρητους αριθμούς. Τουναντίον, γνώριζαν πολύ καλά τους άρρητους αριθμούς και λόγους, και κατανοούσαν πολύ καθαρά τον λόγο της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου· ήταν δε σε θέση να αποδείξουν αυστηρά ότι αυτός ο λόγος δεν είναι δυνατό να εκφραστεί με ακέραιους όρους (V. D. Waerden, 2000; Στράντζαλος, 1987; Σταμάτης, 1958). Το ότι δεν έβλεπαν το $\sqrt{2}$ ως αριθμό δεν ήταν αποτέλεσμα άγνοιας αλλά αυστηρής εμμονής στον ορισμό του αριθμού. *Αριθμός* σήμαινε ποσότητα, επομένως έπρεπε να είναι ακέραιος. Αυτή η λογική τους αυστηρότητα ήταν που τους έκανε να μη δέχονται τα κλάσματα ως αριθμούς, αλλά να τα αντικαθιστούν με λόγους ακεραίων. Αυτή η προσκόλληση των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών στην λογική αυστηρότητα ήταν υποκινούσα δύναμη για απίστευτα επιστημονικά επιτεύγματα αλλά τι ειρωνεία(!), και τροχοπέδη στην περαιτέρω ανάπτυξη κάποιων μαθηματικών ιδεών όπως η έννοια της συνέχειας (V. D. Waerden, 2000; Στράντζαλος, 1987). Φυσικά θα ήταν άδικο να τους κατηγορήσουμε γι' αυτή τους την 'εμμονή' όταν ακόμα και οι Newton και Leibniz που ήταν οι θεμελιωτές του Απειροστικού Λογισμού, δεν είχαν κατανοήσει πλήρως την ανάγκη της αριθμητικής παρουσίασης των εννοιών που εισήγαγαν και ούτε κατάφεραν να ξεφύγουν από τη γεωμετρική εποπτεία (Boyer, 1959).

Τα δομικά συστατικά που χρειάζονταν για μια τέτοια ανάπτυξη, φαίνεται να υπάρχουν από τον 5^{ο} αιώνα π.Χ. στη σχολή των Πυθαγορείων. Η έννοια του *απειροελάχιστου*, με όλες τις ενστάσεις που κρύβει ο όρος, αναδύεται ξεκάθαρα στα γραπτά των Πυθαγορείων. Η έννοια του *συνεχούς* εμφανίζεται στα κείμενα του Παρμενίδη (Παρμενίδου. *Περί Φύσεως*. 8 1-6, 22-25), ο οποίος ήταν μαθητής του Ξενοφάνη που με τη σειρά του ήταν ιδρυτής της *Ελεατικής Σχολής* και δάσκαλος του *Ζήνωνα* του

Ελεάτη. Τα παράδοξα του Ζήνωνα[7] αποτελούν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του πόσο ανεπτυγμένη ήταν η μαθηματική σκέψη της εποχής σε θέματα που περιλάμβαναν απειροστικές διαδικασίες. Η σημασία αυτών των παραδόξων είναι πολύ σημαντική καθώς συνδέεται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα και περιλαμβάνει τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας και του απείρου (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Αναπολιτάνος, 1985; Boyer, 1959). Είναι αξιοσημείωτο ότι για τον Αριστοτέλη το άπειρο και το συνεχές είναι ουσιωδώς συναρτημένα όπως καταγράφεται στα *Φυσικά*, 200b 17-20: «tÕ d' ¥peiron ™mfa…netai prÎton ™n tù sunece‹· diÕ kaˆ to‹j Ðrizomšnoij tÕ sunecèj sumba…nei proscr»sasqai poll£kij tù lÒgJ tù toà ¢pe…rou, æj tÕ e„j ¥peiron diairetÕn sunecèj Ôn»[8]. Τα Ελεατικά παράδοξα αλλά και οι απόψεις του Αριστοτέλη δείχνουν ότι στη σκέψη της εποχής το συνεχές συνδέεται άμεσα με τη δυνητική άπειρη διαιρετότητα των πεπερασμένων ευθύγραμμων τμημάτων. Στο εννοιολογικό πλέγμα εκείνης της εποχής καθοριστική ήταν η συμβολή του Αριστοτέλη με την ανάλυση της έννοιας του σημείου, μια ανάλυση που έχει πολλά κοινά στοιχεία με τη θεμελίωση των πραγματικά αριθμών με τις τομές Dedekind (Αναπολιτάνος, 1985).

Η αδυναμία των Ελλήνων μαθηματικών να δώσουν μια ξεκάθαρη απάντηση στα παράδοξα του Ζήνωνα με εργαλεία μαθηματικού λογισμού τους οδήγησε στο να εντείνουν τις προσπάθειές τους προκειμένου να δώσουν στα φαινόμενα κίνησης μια ποσοτική εξήγηση (Boyer, 1959). Στα έργα του Πλάτωνα είναι εμφανής η αγωνία του να δώσει κάποια εξήγηση σε προβλήματα που είχαν να κάνουν με τη φύση των αριθμών και τη σχέση τους με τη Γεωμετρία, τις δυσκολίες που προέκυπταν από την ασυμμετρία, τα παράδοξα του Ζήνωνα και τα ερωτηματικά που έθεσε ο Δημόκριτος για την διαιρετότητα και τη φύση του συνεχούς. (Στράντζαλος, 1987; Boyer, 1959). Δεν είναι έτσι καθόλου άστοχο να επαναλάβουμε αυτό που έγραψε ο Marvin ότι: «…από τα γραπτά του Πλάτωνα βλέπουμε ότι ασχολήθηκε με εκείνα τα προβλήματα

[7] Βλέπε Αριστοτέλης, *Φυσικά*, 239b-240b.

[8] «Το άπειρο εμφανίζεται κατά προτεραιότητα στο συνεχές, γι' αυτό και το άπειρο χρησιμοποιείται συχνά στους ορισμούς του συνεχούς, όπως όταν λέμε ότι το άπειρα διαιρέσιμο είναι συνεχές.» Μετάφραση από: Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη, σελίδα 60.

που οδήγησαν κατευθείαν στην ανακάλυψη του [Απειροστικού] λογισμού»[9]. Ο τρόπος που οι Έλληνες μαθηματικοί αντιμετώπιζαν το άπειρο και το συνεχές ήταν αποτέλεσμα κυρίως της θεώρησης που είχαν για τον *αριθμό*, των περιορισμών που οι ίδιοι έθεσαν καθώς και το ελλιπές, από πλευράς λογισμού, πεδίο στο οποίο κινήθηκαν (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Boyer, 1959). Όσο ο Αριστοτέλης και οι υπόλοιποι Έλληνες μαθηματικοί έβλεπαν την κίνηση συνεχή και τους αριθμούς διακριτούς, τόσο απομακρυνόταν η στιγμή που ο Απειροστικός Λογισμός και ειδικότερα η έννοια της συνέχειας θα γνώριζαν την αυστηρή τους θεμελίωση (Boyer, 1959).

Όπως είδαμε, η Πυθαγόρεια θεωρία των αναλογιών προσέκρουσε στη ασυμμετρία κάποιων μεγεθών που οφειλόταν στην αρρητότητα, ενώ από την άλλη πλευρά η θεωρία του Δημόκριτου ήταν λογικά αβάσιμη (Boyer, 1959). Η αρρητότητα, τα προβλήματα κίνησης, τα παράδοξα της Ελεατικής σχολής και τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας προετοίμασαν το έδαφος για τον Εύδοξο ο οποίος αντικαθιστά τη θεωρία λόγων – μεγεθών του Θεαίτητου που στηριζόταν στην ανθυφαίρεση, με τη θεωρία αριθμών που διατυπώνεται στο V Βιβλίο στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (Νεγρεπόντης, 2004; Heath, 2001; Boyer, 1959; Σταμάτης 1958). Είναι μάλιστα σημαντικό να προσθέσουμε ότι οι ορισμοί του Ευδόξου άπτονται των σύγχρονων μαθηματικών αφού ο Ορισμός 3 είναι ουσιαστικά ισοδύναμος με την ιδιότητα Ευδόξου – Αρχιμήδους, ενώ ο Ορισμός 4 είναι ισοδύναμος με τον ορισμό των πραγματικών αριθμών με τις τομές Dedekind. Ο Εύδοξος βρισκόταν πραγματικά ένα βήμα πριν τον ορισμό των πραγματικών αριθμών αλλά η ελλιπής κατανόηση των απειροστικών διαδικασιών και το γενικότερο ανώριμο μαθηματικό υπόβαθρο της εποχής είχε σαν αποτέλεσμα να χρειαστεί να περάσουν άλλα 2300 χρόνια για να έρθει ο Cauchy και να ορίσει αυστηρά τις παραπάνω έννοιες.

Στο Εύδοξο επίσης αποδίδεται η πρώτη χρήση της *μεθόδου της εξάντλησης* που στηρίχθηκε στην αρχή που παρουσιάζεται στο Χ Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (Νεγρεπόντης, 2004; Heath, 2001; Στράντζαλος, 1987; Boyer, 1959). Και σε αυτή τη μέθοδο βέβαια βλέπουμε να ξεπροβάλλει ο γεωμετρικός χαρακτήρας των Ελληνικών μαθηματικών.

[9] Ελεύθερη μετάφραση από τον Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications Inc, σελίδα 29.

Ο τελευταίος μεγάλος της Ελληνικής σχολής είναι ταυτόχρονα ίσως και η μεγαλύτερη μορφή των μαθηματικών στην ιστορία της ανθρωπότητας. Στα μέσα του 3^{ου} αιώνα π.Χ. ζούσε στις Συρακούσες, μακριά από την Αλεξάνδρεια που ήταν τότε το κέντρο του κόσμου, ο Αρχιμήδης. Οι θρύλοι που περιβάλλουν τον ίδιο και τις καταπληκτικές του ανακαλύψεις ξεπερνούν όσα έχουν γραφεί για οποιοδήποτε μαθηματικό. Ο Αρχιμήδης, αντίθετα με ότι έχει επικρατήσει στη μνήμη των περισσοτέρων δε ήταν πρωτίστως ένας ευφυής μηχανικός, αλλά ένας κατ' εξοχήν θεωρητικός μαθηματικός (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Νεγρεπόντης κ.α., 1987; Boyer, 1959). Οι εργασίες του έχουν αποτελέσει μνημεία επιστημονικής κληρονομιάς και πραγματικά αφήνουν άφωνο οποιοδήποτε σύγχρονο μελετητή. Δεν είναι υπερβολή να συμφωνήσουμε με τον Heath ο οποίος λέει ότι: «Όλες χωρίς εξαίρεση οι πραγματείες είναι μνημεία μαθηματικής παρουσίασης, η προοδευτική αποκάλυψη του σχεδίου προσέγγισης, η αριστοτεχνική διάταξη των προτάσεων, η σταθερή απάλειψη οτιδήποτε δεν σχετίζεται άμεσα με το σκοπό, η ολοκλήρωση, εντυπωσιάζουν τόσο πολύ με την τελειότητα τους που δημιουργούν ένα αίσθημα δέους στον αναγνώστη»[10]. Ο τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου για παράδειγμα, παρουσιάζεται με τρόπο που ελάχιστα διαφέρει από αυτόν που θα κάναμε σήμερα. Όλες οι εργασίες το Αρχιμήδη φανερώνουν ένα εκπληκτικά αλάνθαστο μαθηματικό ένστικτο και μια κατανόηση που ξεπερνά κατά χιλιάδες χρόνια την εποχή του. Και το μεγάλο ερώτημα είναι: πώς κατέληγε σε αυτά τα εκπληκτικά συμπεράσματα;

Δεν θα είχαμε δώσει εύκολα απάντηση σε αυτό το ερώτημα αν το 1906 ο Δανός φιλόλογος Heiberg δεν ανακάλυπτε στην Κωνσταντινούπολη ένα «παλίμψηστο», ένα χειρόγραφο δηλαδή, που περιείχε κάτω από το εμφανές κείμενο με βυζαντινές προσευχές το πιο εκπληκτικό έργο του Αρχιμήδη, ένα μαθηματικό κείμενο με διαγράμματα με τίτλο *Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Έφοδος*. Στο έργο του αυτό περιγράφει όχι μόνο πώς απέδειξε, αλλά και πώς συνέλαβε τα σημαντικότερα αποτελέσματά του (V. D. Waerden, 2000; Νεγρεπόντης κ.α., 1987). Στο έργο το αυτό μπορούμε να δούμε ξεκάθαρα ότι ο Αρχιμήδης είχε συλλάβει έννοιες της σύγχρονης ανάλυσης και μάλιστα με τον σωστό τρόπο. Εφαρμόζει μια μέθοδο 'τεμαχισμού' προκειμένου να υπολογίσει τον όγκο της σφαίρας και γενικότερα

[10] Όπως αποδίδεται στο Van Der Waerden, B. L. (2000). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. (Γ. Χριστιανίδη μετάφραση). Ηράκλειο: ΠΕΚ. (Πρωτότυπη έκδοση: 1988), σελίδα 249.

όγκους (τμημάτων) παραβολοειδούς, ελλειψοειδούς και υπερβολοειδούς εκ περιστροφής τέμνοντας τα στερεά αυτά με επίπεδα (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Νεγρεπόντης κ.α., 1987; Boyer, 1959). Στην παραπάνω μέθοδο το κρίσιμο βήμα είναι κάθε φορά η μετάβαση από τις εγκάρσιες απειροστές τομές που κάνει, σε ολόκληρο το στερεό. Αυτή η μετάβαση από το απειροστό μέρος σε ολόκληρη την ποσότητα, είναι ένα βασικό βήμα στον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Έτσι φαίνεται ότι ο Αρχιμήδης – αλλά και άλλοι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί – έφταναν πρώτα διαισθητικά στα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη μηχανική μέθοδο (και όχι μόνο), αλλά επίσης χρησιμοποιώντας, έστω και υπόρρητα, απειροστά, άπειρες διαδικασίες και όρια σε αρκετά προχωρημένη, για την εποχή τους, μορφή (Νεγρεπόντης κ.α., 1987, Boyer, 1959) .

Μετά τον Αρχιμήδη έχουμε μια κάμψη στη θεωρητική ανάπτυξη των μαθηματικών ανάμεσα στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Η γενικότερη τάση ήταν η ανάπτυξη εφαρμογών παρά η θεωρητική μελέτη γι΄ αυτό και δεν παρατηρείται κάποια περαιτέρω εμβάθυνση στις έννοιες της ανάλυσης – και ειδικότερα στην ανάπτυξη της έννοιας της συνέχειας – μετά τον Αρχιμήδη (Boyer, 1959). Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι οι μέθοδοί του ξεχάστηκαν και χαρακτηριστικό παράδειγμα γι΄ αυτό είναι ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς ο οποίος όχι μόνο εργάστηκε πάνω στις μεθόδους του Αρχιμήδη, αλλά πρόσθεσε και κάτι νέο με το περίφημο *Θεώρημα του Πάππου* (Heath, 2001; V. D. Waerden, 2000; Boyer, 1959). Κάπου εδώ τερματίζεται μια από τις πιο φωτεινές περιόδους στην ανθρώπινη διανόηση και δυστυχώς η λήθη και η δεισιδαιμονία θα σκέπαζε πολλά από τα παραπάνω επιτεύγματα ενώ για κάποια θα γινόταν προσπάθεια ακόμα και να εξαφανιστούν. Θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι τον $16^{ο}$ και $17^{ο}$ αιώνα για να αρχίσουν και πάλι οι επιστήμονες να σκύβουν με προσοχή πάνω από τα έργα του Αρχιμήδη και των άλλων κορυφαίων Ελλήνων μαθηματικών προκειμένου οι ευφυείς ιδέες που πρωτοπαρουσιάστηκαν εκεί, να αναλυθούν και να μορφοποιηθούν για να οδηγήσουν στο αυστηρό σώμα των μαθηματικών που γνωρίζουμε σήμερα. Μέχρι τότε όμως, τη σκυτάλη των μαθηματικών θα έπρεπε πρώτα να περάσει στα χέρια των Ινδών και των Αράβων.

Η έννοια της συνέχειας μέσα στον μεσαίωνα

Ο Διόφαντος φαίνεται να είναι ένας από τους τελευταίους Έλληνες μαθηματικούς, και ταυτόχρονα από τους πρώτους που ασχολείται συστηματικά με την άλγεβρα. Μετά τον Διόφαντο έχουμε μια στροφή των μαθηματικών από τη Γεωμετρία στην Άλγεβρα. Η Χριστιανική(;) Δύση της εποχής έχει ήδη γυρίσει στην πλάτη στην ειδωλολατρία των αρχαίων Ελλήνων και αντιμετωπίζει αρχικά μάλλον με αποστροφή τα επιστημονικά τους επιτεύγματα (αν και η Χριστιανική θεολογία φρόντισε να απορροφήσει σχεδόν στο πλήρες την Πλατωνική φιλοσοφία …). Υπάρχει ελάχιστο ενδιαφέρον για τα κείμενα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και άλλων, και το 528 μ.Χ. κλείνει οριστικά η οικονομικά εύρωστη *Σχολή των Αθηνών* κατόπιν διαταγής του αυτοκράτορα Ιουστινιανού (V. D. Waerden, 2000). Ο διευθυντής της Δαμάσκιος αλλά και ο Σιμπλίκιος, ο εξαιρετικός σχολιαστής του Αριστοτέλη που εκείνη την περίοδο βρισκόταν στην Αθήνα, καταφεύγουν στην Περσία. Η σκυτάλη των μαθηματικών φεύγει από τα χέρια των Ελλήνων και μεταφέρεται στους Ινδούς και τους Άραβες.

Οι Ινδοί ελκύονταν κυρίως από την αριθμητική, την υπολογιστική πλευρά των μαθηματικών πάρα από τη γεωμετρική. Το ίδιο το όνομα που έδιναν στα μαθηματικά, *ganita*, σημαίνει κατά γράμμα ‘επιστήμη των υπολογισμών’ και αντιπροσωπεύει κατάλληλα το είδος των μαθηματικών με τα οποία ασχολούνταν οι Ινδοί. Έδιναν ιδιαίτερη έμφαση στους αριθμούς και τις ιδιότητές τους με αποτέλεσμα να ασκεί επάνω τους ελάχιστη επιρροή η Ευκλείδεια γεωμετρία, η Αριστοτελική λογική ή οι αναλυτικές μέθοδοι του Αρχιμήδη (Boyer, 1959). Το Πυθαγόρειο πρόβλημα της ασυμμετρίας που οδήγησε σε τόσες καινοτόμες ιδέες τους Έλληνες γεωμέτρες, λίγο ενδιέφερε τους Ινδούς μαθηματικούς οι οποίοι μεταχειρίζονταν τους ρητούς και τους άρρητους αδιακρίτως (Boyer – Merzbach, 1997; Boyer, 1959). Δεν μπορούμε βέβαια, να μην αντιμετωπίσουμε με ιδιαίτερο σεβασμό την σημαντική τους προσφορά στην άλγεβρα και σίγουρα, και μόνο για το γεγονός ότι εισήγαγαν το 0 στο χώρο των μαθηματικών, αξίζει να μνημονεύσουμε την προσφορά τους. Παρόλα αυτά, δεν φαίνεται να συναντούμε κάποιες σημαντικές ιδέες στο χώρο της ανάλυσης, ούτε καν κάποια επανάληψη όσων είχαν ήδη διατυπωθεί από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς (Boyer, 1959).

Στα μαθηματικά των Αράβων στη συνέχεια, συναντούμε στοιχεία και από τους δύο πολιτισμούς. Οι Άραβες έχουν κρατήσει στις μετρήσεις το αριθμητικό σύστημα των Ινδών και το ίδιο συμβαίνει και στην τριγωνομετρία. Στον τομέα της γεωμετρίας όμως, οι Άραβες φαίνεται να έχουν επηρεαστεί έντονα από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες. Φαίνεται ξεκάθαρα η επίδραση που έχουν ασκήσει πάνω τους τα κείμενα του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη, και ακόμα και η αραβική γεωμετρία παρουσιάζει σημάδια επιστροφής στον αρχαίο ελληνικό γεωμετρικό τρόπο παρουσίασης και στην εμμονή του Διόφαντου για την αποφυγή των αρνητικών αριθμών (V. D. Waerden, 2000; Boyer, 1959). Βέβαια, ο χαρακτήρας της είναι πιο πρακτικός, εστιασμένος σε πρακτικά προβλήματα και πολύ λιγότερο στις αφηρημένες ιδιότητες των αριθμών. Έχοντας κατά νου αυτή τη γενικότερη τάση των Αράβων μαθηματικών, όπως είναι αναμενόμενο δεν ασχολούνταν με εικασίες και υποθέσεις που είχαν να κάνουν με την ασυμμετρία, το συνεχές και το άπειρο, την αδιαιρετότητα και άλλες έννοιες με τις οποίες είχαν καταπιαστεί οι αρχαίοι Έλληνες και που τους οδηγούσαν κατευθείαν στην Ανάλυση. Δεν φαίνεται όμως αυτό να οφείλεται σε περιφρόνηση προς τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, αφού στους Άραβες χρωστούμε τη διάσωση και διάδοση των αρχαίων ελληνικών κειμένων σε όλη την Ευρώπη κατά τα χρόνια του Μεσαίωνα. (Boyer, 1959).

Στη Χριστιανική Ευρώπη από την άλλη μεριά, όχι μόνο δεν φαινόταν να υπάρχει κανένα ενδιαφέρον για τις μαθηματικές ανησυχίες των αρχαίων Ελλήνων, αλλά τουναντίον, επικρατούσε άγνοια για τα περισσότερα αρχαία Ελληνικά κείμενα. Τον 12^{ο} αιώνα μ.Χ. εμφανίζονται οι πρώτες Λατινικές μεταφράσεις οι οποίες έγιναν από Άραβες, Εβραίους και Έλληνες μεταφραστές και λόγιους οι οποίες όμως δεν έτυχαν ενθουσιώδους υποδοχής. Τον επόμενο αιώνα δεν φαίνεται να υπάρχει μαθηματική απραξία, απλά η μελέτη της γεωμετρίας από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν αφορά αφηρημένες έννοιες αλλά δείχνει να επικεντρώνεται κυρίως σε μια επίμονη και επίπονη προσπάθεια απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος, προσπάθεια που θα οδηγήσει 5 αιώνες αργότερα στην ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Boyer, 1959).

Ταυτόχρονα, έχουν αρχίσει να διαδίδονται τα έργα του Αριστοτέλη και οι συζητήσεις έχουν ανάψει γύρω από τις θεωρίες του. Στο έργο του *Φυσικά*, πραγματεύεται ιδέες

που έχουν να κάνουν με το άπειρο, το απειροελάχιστο, τη συνέχεια και τα συνεχή μεγέθη και άλλα θέματα που άπτονται της μαθηματικής ανάλυσης (V. D. Waerden, 2000; Αναπολιτάνος, 1985; Boyer, 1959). Οι συζητήσεις όμως γίνονταν περισσότερο στα πλαίσια της φιλοσοφικής θεώρησης των *Σχολαστικών* παρά με μαθηματικούς όρους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της εποχής είναι ο Thomas Bradwardine, Αρχιεπίσκοπος του Canterbury και ίσως ο επιφανέστερος μαθηματικός του 14^{ου} αιώνα μ.Χ. Στα έργα του *Geometria speculativa* και *Tractatus de continuo* ο Bradwardine ανάμεσα στα άλλα πραγματεύεται τη φύση των συνεχών μεγεθών και εκεί φαίνεται καθαρά η επίδραση που ασκούσε η μεταφυσική και το φιλοσοφικό ρεύμα του *Σχολαστικισμού.* Αυτό το μείγμα θεολογικών, φιλοσοφικών, μαθηματικών και επιστημονικών μελετών και αναζητήσεων εξακολουθούσε να ανακατεύεται αργά για άλλους δυο αιώνες στη διάρκεια των οποίων η έννοια της συνέχειας εξακολουθούσε να είναι ομιχλώδης και προβληματική στην αντιμετώπισή της (Boyer, 1959).

Η έννοια της συνέχειας κατά την Αναγέννηση

Καθώς περνούν τα χρόνια, η επίδραση των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών αρχίζει να γίνεται όλο και πιο έντονη. Είναι εμφανής επίσης, η επίδραση του *Σχολαστικισμού* καθώς και η προσπάθεια συγκερασμού των απόψεων του Αρχιμήδη, που έχουν βγει από την αφάνεια και έχουν γίνει πια αντικείμενο μελέτης, καθώς και των νεοανακαλυφθέντων απειροστικών μεθόδων που είχαν αρχίσει να εφαρμόζονται στον υπολογισμό σειρών (Boyer, 1959). Αν και η άλγεβρα του Luca Pacioli γύρω στα 1500 δεν διαφέρει και πολύ από αυτήν του Leonardo της Πίζας του 1200, παρόλα αυτά φαίνεται να υπάρχει μια γνησίως αύξουσα πορεία στη μαθηματική ωριμότητα που διαπνέει τα κείμενα της εποχής. Είναι ολοφάνερο ότι κάτι πάει να αλλάξει στο θέμα της κατανόησης και αυτό, όπως συμβαίνει πάντα με την ανθρώπινη διανόηση, θα γεννήσει κάτι μεγάλο.

Πριν το 1545 οι τριτοβάθμιες εξισώσεις έχουν λυθεί από τους Tartaglia και Cardan και οι τεταρτοβάθμιες από τον Ferrari (Boyer – Merzbach, 1997; Boyer, 1959). Από εκείνη την περίοδο και πέρα παρατηρούμε μια μάλλον επιπόλαιη χρήση των ρητών,

άρρητων και μιγαδικών αριθμών χωρίς να διαφαίνεται η απαιτούμενη κατανόηση για την υπόσταση του κάθε αριθμού. Όπως είχαμε δει, οι αρχαίοι Έλληνες δεν αντιμετώπιζαν τους άρρητους λόγους ως αριθμούς με την αυστηρή έννοια του όρου, και η άποψη αυτή επικράτησε και στον μεσαίωνα (Boyer, 1959). Ο Bradwardine ισχυριζόταν επίσης ότι μια αναλογία αρρήτων δεν μπορούσε να παρασταθεί από κανέναν αριθμό και παρόμοιες απόψεις είχαν και οι περισσότεροι από τους μαθηματικούς της εποχής (Boyer, 1959). Στα μαθηματικά πάλι των Ινδών και των Αράβων, δεν φαίνεται να υπάρχει ξεκάθαρη διάκριση μεταξύ ρητών και αρρήτων αριθμών. Η σύγχυση αυτή δημιουργούσε αναπόφευκτα πρόβλημα στην κατανόηση της έννοιας της συνέχειας η οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το συνεχές της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Τώρα, στον 16^{ο} αιώνα το πρόβλημα συνέχιζε να απασχολεί τους μαθηματικούς. Ο άρρητος λόγος είναι αριθμός αλλά τον αποκαλούν *numerus surdus*, σύμφωνα με το Leonardo της Πίζας, και συνεχίζουν να τον αντιμετωπίζουν γεωμετρικά, ως λόγο μεγεθών (Boyer, 1959). Το ίδιο πρόβλημα βέβαια υπήρχε και με τους αρνητικούς αριθμούς οι οποίοι αν και είχαν γίνει δεκτοί από τους Ινδούς, δεν συνέβαινε το ίδιο με τους αρχαίους Έλληνες και του Άραβες. Και το 16^{ο} αιώνα χρησιμοποιούνταν αλλά αντιμετωπίζονταν ως *numeri falsi* και μόνο τους επόμενους αιώνες αναγνωρίστηκαν ως 'ισότιμοι' αριθμοί. Όσο για τους μιγαδικούς, αν και χρησιμοποιούνταν από τον 16^{ο} αιώνα και πέρα, θεωρούνταν παράξενοι και 'ανώμαλοι' αριθμοί και βρήκαν τη θέση τους στον κόσμο των μαθηματικών μόνο μετά τον Gauss (Boyer, 1959). Οι μαθηματικοί προς το παρόν ασχολούνται με την επίλυση προβλημάτων και αφού τα προβλήματα λύνονταν, ή τουλάχιστον έτσι φαινόταν, δεν ανησυχούν ιδιαίτερα για το αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο.

Σιγά – σιγά όμως τα πράγματα αλλάζουν. Οι μαθηματικοί αρχίζουν να βγαίνουν από τις αυλές των βασιλιάδων, η τυπογραφεία διαδίδεται κι έτσι γραπτά κείμενα αρχίζουν να κυκλοφορούν, τα πειραματικά δεδομένα δεν μπορούν πάντα να επαληθεύσουν τις εικασίες ενώ τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθηματικοί γίνονται ολοένα και πιο δύσκολα. Αρχίζουν να δημιουργούνται όλο και περισσότερα πανεπιστήμια, και οι καθηγητές σε αυτά πρέπει να συγγράψουν συγγράμματα και τότε ανακαλύπτουν ότι δεν μπορούν να τεκμηριώσουν πάντα όσα λένε. Οι επιστήμονες επίσης αλληλογραφούν μεταξύ τους, συναντώνται, ανταλλάσσουν ιδέες και κυρίως

διαφωνούν και η διαφωνία προϋποθέτει τη, στοιχειώδη έστω, ανάπτυξη επιχειρημάτων. Η παγκόσμια στροφή επίσης που παρατηρείται στα κλασσικά κείμενα της αρχαιότητας παρακινεί πολλούς να αναθεωρήσουν τις απόψεις τους, να αναζητήσουν εξηγήσεις και να προσπαθήσουν με πείσμα να αποδείξουν ή να καταρρίψουν εικασίες ή θεωρίες. Από το 1560 και ύστερα, μεγάλες μορφές των επιστημών έρχονται στο προσκήνιο και αφήνουν το στίγμα τους: το 1564 γεννιέται ο Γαλιλαίος, το 1603 πεθαίνει ο Viete, το 1609 ο Kepler εκδίδει το *Astronomia nova*, το 1629 παρουσιάζεται η μέθοδος του Fermat για τα μέγιστα και τα ελάχιστα, ενώ λίγο αργότερα ο Cavalieri, ο Descartes και ο Pascal παρουσιάζουν μερικά από τα πολύ γνωστά τους έργα. Όταν το 1642 πεθαίνει ο μεγάλος Γαλιλαίος, μια κορυφαία μορφή της ανθρωπότητας έρχεται σε ζωή, ο Isaac Newton (Boyer – Merzbach, 1997). Περίπου την ίδια εποχή γεννιέται και ο Leibniz. Η εποχή που ο Απειροστικός Λογισμός θα έπαιρνε σάρκα και οστά είχε φτάσει.

Ο Newton με τις ερευνητικές του δραστηριότητες κατά τα έτη 1664-71 μπορεί να θεωρηθεί ως ο πρώτος που 'ανακάλυψε' τον Απειροστικό Λογισμό (Grattan – Guinness, 1994; Struik, 1966; Loria, 1972). Αν και η σύλληψη των εννοιών ανήκει στον Αρχιμήδη και οι τεχνικές φαίνεται να είχαν ήδη αναπτυχθεί από τους Cavalieri, Torricelli, Pascal, Wallis και άλλους, ο Νεύτωνας ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε ότι για να μελετήσουμε τις ιδιότητες μιας 'συνάρτησης' (με τη σημερινή έννοια του όρου αφού ακόμα δεν υπήρχε επαρκής κατανόηση), έπρεπε να εισαχθούν δύο νέες έννοιες – συναρτήσεις που αντιστοιχούν στη σημερινή παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Αντιλαμβανόταν τη σημασία του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού, και είχε αναγάγει όλα τα γνωστά γεωμετρικά προβλήματα σε δύο κατηγορίες: προβλήματα παραγώγισης και αντίστροφα προβλήματα ολοκλήρωσης Grattan – Guinness, 1994; Boyer, 1959). Ο λογισμός του Νεύτωνα, τον οποίο ο ίδιος αποκαλούσε «θεωρία των ροών» είχε ένα κινηματικό χαρακτήρα ενώ οι περισσότερες αποδείξεις του είχαν μια έντονη γεωμετρική υφή (Grattan – Guinness, 1994; Loria, 1972; Struik, 1966; Boyer, 1959).

Ελάχιστα αργότερα από τον Newton αλλά τελείως ανεξάρτητα από αυτόν, όπως αποφαίνεται το σύνολο σχεδόν των ιστορικών, ο Leibniz αναπτύσσει και αυτός τις βασικές αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ο Leibniz ήταν πρώτα απ' όλα ένας

μεγάλος φιλόσοφος και ένας ανήσυχος στοχαστής. Όπως αναφέρει ο Αναπολιτάνος (1985) συνδύαζε '…μια ορμητική διάθεση για έρευνα, από τη μια μεριά, και μια δύσκολα συγκαλυπτόμενη ανάγκη για δημιουργία ενοποιητικών, συνθετικών και ολιστικών μεταφυσικών συστημάτων, από την άλλη'[11]. Ενώ ο Νεύτωνας στήριξε το λογισμό σε ένα οικοδόμημα που είχε ένα κινηματικό χαρακτήρα και παρέπεμπε στον Πλάτωνα και τον Αρχιμήδη, ο Leibniz δημιούργησε ένα φιλοσοφικό σύστημα που φέρει έντονα τα ίχνη της Αριστοτελικής επίδρασης (Αναπολιτάνος, 1985; Boyer, 1959). Αναζητούσε μια *lingua universalis [οικουμενική γλώσσα]* ή αλλιώς μια *characteristica generalis [γενική χαρακτηριστική]* στην οποία κάθε νοητικό σφάλμα θα απεικονιζόταν σε σφάλμα υπολογιστικό (Grattan – Guinness, 1994; Struik, 1966). Η αναζήτηση αυτή τον οδήγησε σε πολλές καινοτομίες στο θέμα του μαθηματικού συμβολισμού. Στον Leibniz οφείλουμε τα σύμβολα της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης που χρησιμοποιούμε σήμερα, και αν και δεν εισήγαγε ο ίδιος το σύγχρονο συναρτησιακό συμβολισμό, σε αυτόν οφείλουμε τη λέξη «συνάρτηση» που τη χρησιμοποιούσε όπως και σήμερα (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1972; Struik, 1966; Boyer, 1959). Επιπλέον, όταν άρχισε να μελετά τα μαθηματικά εστίαζε σε μεθόδους παρά σε συγκεκριμένα προβλήματα. Ο λογισμός που παρουσίασε επίσης είχε έναν έντονα γεωμετρικό χαρακτήρα, αντίθετα από τον κινηματικό του Νεύτωνα. Αν και ο λογισμός του Νεύτωνα φαινόταν να έχει ένα πιο στέρεο λογικό υπόβαθρο, ήταν πιο δυσνόητος ακόμα και στους κύκλους των κορυφαίων μαθηματικών της εποχής (Grattan – Guinness, 1994; Struik, 1966; Boyer, 1959).

Στο σημείο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό να δούμε τις απόψεις του Leibniz για την έννοια της συνέχειας[12]. Το φιλοσοφικό του έργο, που ουσιαστικά αποτελούσε και το υπόβαθρο για το αντίστοιχο επιστημονικό, στηρίζεται σε συγκεκριμένες a priori αρχές, μια από τις οποίες αποκαλείται από τον Leibniz ως «αρχή της συνέχειας». Εμφανίζεται με διάφορες μορφές στο έργο του, οι πιο βασικές εκ των οποίων είναι οι επόμενες:

---

[11] Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη, σελίδα 95. Επίσης, στο Struik, D. J. (1966). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Δαίδαλος, σελίδα 182 γίνεται αναφορά στη *scientia generalis [γενική επιστήμη]* που ο Leibniz προσπαθούσε να οικοδομήσει.

[12] Οι πληροφορίες γι' αυτήν, καθώς και για την επόμενη παράγραφο βασίζονται στο βιβλίο Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη, σελίδες 112-123, καθώς και στο βιβλίο του Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* (1959). New York: Dover Publications, Inc, σελίδες 187-223.

1. Η φύση δεν κάνει άλματα.

2. Οι ιδιότητες των όντων είναι συνεχείς συναρτήσεις των βασικών χαρακτηριστικών τους.

3. Η φύση σέβεται τη συνέχεια του γίγνεσθαι, και γενικότερα τη συνέχεια της επ' άπειρο αλλαγής.

4. Τα όντα και οι εκάστοτε καταστάσεις τους σχηματίζουν γραμμικά συστήματα, που είναι παντού πυκνά.

Ο Leibniz χρησιμοποιεί αυτήν την, φιλοσοφικής υφής περισσότερο, «αρχή της συνέχειας» όταν καλείται να εξηγήσει τη μετάβαση από την πεπερασμένη στην απειροελάχιστη ποσότητα. Μια παρόμοια αρχή έχει χρησιμοποιήσει νωρίτερα ο Kepler και ο Nicholas of Cusa. Ο τελευταίος είναι πιο πιθανό να επηρέασε τον Leibniz αφού αυτός εισήγαγε το *δόγμα της μονάδας*, που αποτελούσε θεμελιώδη έννοια στο μεταφυσικό οικοδόμημα του Leibniz. Παρόλα αυτά, ο Leibniz προσέδωσε στην «αρχή της συνέχειας» μια σαφήνεια που δεν είχε προηγουμένως αν και αυτή καθ' εαυτή η έννοια του απειροστού δεν είναι σαφής στο έργο του αφού και ο ίδιος δεν φαίνεται να είναι σίγουρος για την οντολογική της υπόσταση. Η φύση των απειροστών δεν ξεκαθαρίστηκε ποτέ από τον Leibniz και εκείνο που πιο πολύ τα στήριζε ήταν η άμεση γειτνίασή τους με την «αρχή της συνέχειας» αλλά και η επιτυχία τους στο επίπεδο της μαθηματικής πρακτικής.

Υπάρχουν αρκετά χωρία που μπορούν να μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε τις απόψεις του Leibniz για το συνεχές. Για παράδειγμα σε ένα γράμμα του προς τον Varignon ο Leibniz αναπτύσσει την ιδέα ότι το σύνολο των φυσικών όντων, οργανικών και ανόργανων, σχηματίζει μια συνεχή αλυσίδα [13]. Στο απόσπασμα αυτό, ο Leibniz διατυπώνει κατ' ουσίαν, και σε σύγχρονη ορολογία, την άποψη ότι η αλυσίδα

[13] Βλέπε Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη, σελίδα 117: «… Οι άνθρωποι επομένως σχετίζονται με τα ζώα, αυτά με τα φυτά, και τα φυτά με τα απολιθώματα τα οποία, με τη σειρά τους, είναι συνδεδεμένα με τα σώματα εκείνα που οι αισθήσεις και η φαντασία μας αναπαριστάνουν σε μας σαν νεκρά και άμορφα. Τώρα η αρχή της συνέχειας απαιτεί, όταν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά ενός όντος προσεγγίζουν αυτά ενός άλλου, όλες οι ιδιότητες του πρώτου να προσεγγίζουν βαθμιαία αυτές του δεύτερου. … Τόσο μεγάλη είναι η δύναμη της αρχής της συνέχειας στη φιλοσοφία μου, ώστε δεν θα έπρεπε να αισθανθώ έκπληξη αν μάθαινα ότι ανακαλύφθηκαν όντα τα οποία, σε σχέση με διάφορες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα διατροφή και αναπαραγωγή, θα μπορούσαν να θεωρηθούν είτε σαν φυτά, είτε σαν ζώα. … Λέω ότι δεν θα έπρεπε να αισθανθώ έκπληξη, η αλήθεια είναι ότι είμαι πεπεισμένος ότι οφείλουν να υπάρχουν τέτοια όντα, τα οποία θα ανακαλύψει μία μέρα η Φυσική Ιστορία όταν θα έχει μελετήσει περισσότερους από άπειρους ζωντανούς οργανισμούς των οποίων το μικρό μέγεθος δεν επιτρέπει τη συνηθισμένη παρατήρηση και τα οποία είναι θαμμένα στα έγκατα της γης και στην άβυσσο των υδάτων.»

των όντων είναι πλήρης. Με άλλα λόγια, στο κείμενο αυτό, μπορεί κάποιος να διακρίνει τα σπέρματα του αξιώματος της γραμμικής πληρότητας αλλά και της πυκνότητας, δηλαδή των δύο θεμέλιων λίθων της μοντέρνας έννοιας για τη συνέχεια. Σε ένα άλλο του γράμμα προς τον Bayle το 1687 ο Leibniz σχολιάζοντας την «αρχή της συνέχειας» γράφει: «Σε οποιαδήποτε θεωρούμενη μετάβαση, με καταληκτική πορεία κάποιο πέρας, είναι επιτρεπτό να καθιερώνω μια γενική συλλογιστική μέσω της οποίας το πέρας συμπεριλαμβάνεται σε αυτήν»[14]. Εδώ ο Leibniz φαίνεται να επικαλείται μια ασαφή έννοια συνέχειας στην οποία υπόρρητα εμφανίζεται και η έννοια του ορίου. Η έννοια του συνεχούς είναι επίσης άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια του απείρου, και για τον Leibniz το άπειρο είναι αποδεκτό και σαν δυνητικό, με την έννοια της ατέρμονης άπειρης διαιρετότητας εκτεταμένων αντικειμένων, αλλά και σαν πραγματικό. Αν και σε πρωτολειακή μορφή, στα έργα του Leibniz συναντούμε αρκετές ενδείξεις που πιστοποιούν ότι στο μυαλό του είχε ήδη αναπτυχθεί μια αρκετά ώριμη άποψη για την έννοια της συνέχειας. Έμενε μόνο να μπουν τα θεμέλια της σύγχρονης δομής των μαθηματικών για να πάρει μια πιο ξεκάθαρη και αυστηρή μορφή.

Η κεντρική έννοια στα σύγχρονα μαθηματικά είναι αυτή της συνάρτησης. Η έννοια της συνάρτησης, ως έκφραση μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες, εμφανίζεται συγκεκαλυμμένα ήδη από την αρχαιότητα (Heath, 2001; Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Boyer, 1959). Τα γεγονότα που έδωσαν όμως αποφασιστική ώθηση στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης ήταν η δημιουργία της Άλγεβρας και της αναλυτικής γεωμετρίας. Ο Descartes στο έργο του *La Geometrie* (1637) παρουσιάζοντας τη μέθοδο προσδιορισμού μιας καμπύλης από μια εξίσωση ως προς x και y (τα οποία εκφράζουν ευθύγραμμα τμήματα – συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης), περιέγραψε για πρώτη φορά τη δυνατότητα αναλυτικής αναπαράστασης μιας σχέσης εξάρτησης ανάμεσα σε μεταβλητές ποσότητες. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η πατρότητα όμως του όρου 'συνάρτηση' αποδίδεται στον Leibniz (Boyer – Merzbach, 1997; Struik, 1966; Boyer, 1959). Εμφανίζεται για πρώτη φορά το 1673 σε ένα χειρόγραφό του με τίτλο *Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων* στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων

[14] ελεύθερη μετάφραση από Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* (1959). New York: Dover Publications, Inc, σελίδα 217.

μιας καμπύλης όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007).

Ο όρος συνάρτηση άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή και πέρα μία ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Λίγο αργότερα ο J. Bernoulli έδωσε το 1718 το επόμενο ορισμό: «Ονομάζω συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους μία ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές» (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Loria, 1972). Η αντίληψη της συνάρτησης ως 'αναλυτική έκφραση' κυριάρχησε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, μέχρι τον 18^{ο} αιώνα, στη διάρκεια του οποίου η μαθηματική ανάλυση οριζόταν ως η γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεών τους.

Λίγο αργότερα εμφανίζεται στο προσκήνιο μια μεγάλη μορφή των μαθηματικών, ο Euler. Η συμβολή του Euler στον τομέα της ανάλυσης είναι τεράστια ενώ η δουλειά του προετοίμασε το δρόμο για την αυστηρή θεμελίωση της έννοιας της συνέχειας μακριά και πέρα από φιλοσοφικές και μεταφυσικές προεκτάσεις. Παρά την μερική και αργότερα ολική τύφλωση που υπέστη, χάρη στην απίστευτη μνήμη του, παρήγαγε ένα μοναδικό σε όγκο αλλά και περιεχόμενο έργο. Πρωτοπόρος στο θέμα του συμβολισμού, εισήγαγε μια μεγάλη σειρά από σύμβολα τα περισσότερα από τα οποία μένουν μέχρι σήμερα με σημαντικότερο ίσως όλων το σύμβολο f(x) που χρησιμοποιούμε για τη συνάρτηση (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1972; Struik, 1966). Δεν θα υπερβάλλαμε αν λέγαμε ότι ο Euler έκανε για την ανάλυση του Newton και του Leibniz ότι έκανε ο Ευκλείδης για τη γεωμετρία του Ευδόξου και του Θεαίτητου. Πήρε το διαφορικό λογισμό και τη μέθοδο των ρυθμών μεταβολής και τα έκανε μέρος ενός γενικότερου κλάδο των μαθηματικών, ο οποίος είναι από τότε γνωστός ως 'Ανάλυση' – η μελέτη των άπειρων διαδικασιών.

Το κλειδί αυτού του νέου κλάδου μπορεί να θεωρηθεί η *Introductio in analysin infinitorum* του Euler που ανάγεται στο 1748 (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1972). Από την εποχή εκείνη και μετά, η έννοια της συνάρτησης έπαιξε βασικό ρόλο στην

ανάλυση. Η τέταρτη παράγραφος της *Introductio* ορίζει ως 'συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας κάθε αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από τη μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές ποσότητες' (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Boyer – Merzbach, 1997; Grattan – Guinness, 1994; Edwards, 1979; Loria, 1972). Είναι το πρώτο μαθηματικό έργο στο οποίο η συνάρτηση παίζει ένα κεντρικό και σαφή ρόλο (Edwards, 1979; Boyer, 1959). Είναι αλήθεια ότι μερικές φορές ο Euler θεωρούσε τη συνάρτηση, λιγότερο αυστηρά, ως τη σχέση ανάμεσα σε δύο συντεταγμένες σημείων μιας καμπύλης που έχουμε σχεδιάσει με το χέρι σε ένα επίπεδο. Γενικότερα, θα λέγαμε ότι ο ορισμός του Euler με τα σημερινά δεδομένα δεν είναι αποδεκτός γιατί δεν εξηγεί τι είναι η 'αναλυτική έκφραση'. Προφανώς είχε κατά νου, κυρίως, της αλγεβρικές συναρτήσεις και τις στοιχειώδεις υπερβατικές συναρτήσεις (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1972). Όμως παρά τις όποιες ενστάσεις μπορεί να έχει κάποιος, η ουσία είναι ότι με τον Euler έχουμε την εμφάνιση της Ανάλυσης με κεντρικό άξονα την έννοια της συνάρτησης, απαραίτητη πλατφόρμα για την φορμαλιστική διατύπωση λίγο καιρό αργότερα της έννοιας της συνέχειας. Άλλωστε και ο ίδιος ο Euler αντιλαμβανόμενος την ατέλεια του προηγούμενου ορισμού, το 1775 διατυπώνει έναν άλλο ορισμό απαλλαγμένο από την άμεση αναφορά στην έννοια της 'αναλυτικής έκφρασης': «Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάξουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται οι συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μία μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x». (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Edwards, 1979).

Η στοχοθέτηση της συνάρτησης ως κεντρικό στοιχείο μελέτης, παρά της καμπύλης που μέχρι τότε κυριαρχούσε, ήταν αυτό που επέτρεψε την αριθμητικοποίηση της γεωμετρίας, και τον συνεπακόλουθο διαχωρισμό του Απειροστικού Λογισμού από τη γεωμετρική προοπτική (Edwards, 1979; Boyer, 1959). Μέχρι την εποχή του Euler, αντικείμενα μελέτης αποτελούσαν οι γεωμετρικές καμπύλες στα πλαίσια της Καρτεσιανής Γεωμετρίας. Στο λογισμό του Newton και του Leibniz, οι μεταβλητές x,

y, z αντιπροσώπευαν γεωμετρικά μεγέθη (Grattan – Guinness, 1994). Γενικότερα, στα μαθηματικά μέχρι τον Euler, οι *μεταβλητές* ήταν απλά γεωμετρικές ποσότητες – τετμημένες, τεταγμένες, εφαπτόμενες, μήκη τόξων κ.λ.π. Σχέσεις ανάμεσα σε τέτοιες ποσότητες εκφράζονταν συνήθως με τη μορφή εξισώσεων και όχι με τη μορφή συναρτήσεων (Edwards, 1979). Από τον 18^{ο} αιώνα και πέρα όμως οι μαθηματικοί άρχισαν να βλέπουν πέρα από τη γεωμετρία, άρχισαν να σκέπτονται και να λύνουν εξισώσεις (κυρίως διαφορικές όπως θα δούμε στη συνέχεια) και άρχισαν να κατηγοριοποιούν το νεοεμφανιζόμενο μαθηματικό αντικείμενο, τις συναρτήσεις (Boyer – Merzbach, 1997; Grattan – Guinness, 1994; Edwards, 1979; Loria, 1972; Boyer, 1959).

Μια παλλόμενη χορδή ανοίγει το δρόμο για τη συνέχεια

Από τη στιγμή που η συνάρτηση άρχισε να παίζει ένα κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά, οι μαθηματικοί άρχισαν δειλά να πειραματίζονται με το νέο εύρημα. Όπως συνέβη πολλές φορές στην επιστημονική ιστορία, η προσπάθεια μαθηματικής ερμηνείας κάποιων φυσικών προβλημάτων που είχαν γίνει εμμονές για κάποιους, λειτουργούσαν ως πλατφόρμα ανάπτυξης και ανακάλυψης νέων εννοιών και ιδεών. Ένα τέτοιο πρόβλημα ήταν για τον 17^{ο} και 18^{ο} αιώνα το *πρόβλημα της παλλόμενης χορδής* (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Grabiner, 1981; Edwards, 1979). Σε αυτό το πρόβλημα, που απασχόλησε όλους τους μεγάλους μαθηματικούς της εποχής, ζητείται να προσδιοριστεί μια συνάρτηση της μορφής y=f(x,t) που να περιγράφει το σχήμα μιας παλλόμενης χορδής στερεωμένη στα δύο άκρα της, σε μια δεδομένη στιγμή t[15]. Οι J. Bernoulli, N. Bernoulli, D. Bernoulli, Euler, Lagrange, D' Alembert, και Taylor είναι μόνο οι πιο ονομαστοί από τους μαθηματικούς της εποχής που καταπιάστηκαν με το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής. Το παραπάνω πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση

[15] Μια πολύ καλή και αναλυτική περιγραφή του προβλήματος, που αποτελεί και την πρώτη αναφορά σε διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, της λύσης του αλλά και γενικότερα μια συνοπτική αναφορά στα προβλήματα που κατέληγαν σε Δ.Ε με μερικές παραγώγους κατά τον 18^{ο} αιώνα, μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο άρθρο του J. Lutzen, *Partial differential equations*, στο βιβλίο των Grattan – Guinness, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London.

μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους της μορφής: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Τη λύση έδωσε τελικά το 1747 ο d' Alembert ο οποίος απέδειξε ότι η λύση της είναι ένα γενικό ολοκλήρωμα της μορφής $y = f_1(t + ax) + f_2(t - ax)$ με τις f_1 και f_2 αυθαίρετες συναρτήσεις (Grattan – Guinness, 1994; Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Loria 1972).

Η συζήτηση για το παραπάνω πρόβλημα είχε απρόσμενες συνέπειες. Τι είδους 'αυθαίρετες' συναρτήσεις θα ήταν αυτές; Ο ασαφής ορισμός για τη συνάρτηση του Euler δεν βοηθούσε και οι συζητήσεις έδιναν και έπαιρναν ανάμεσα στους κορυφαίους μαθηματικούς για το ποια μορφή θα είχε μια αυθαίρετη συνάρτηση που θα αναπαριστούσε το αρχικό σχήμα της χορδής. Ο D' Alembert ισχυριζόταν ότι για να μπορεί να εφαρμόσει στο πρόβλημα τους κανόνες του λογισμού, είναι απαραίτητο κάθε συνάρτηση που θα εμφανιζόταν, σε οποιοδήποτε κομμάτι του πεδίου ορισμού της να διατηρεί την ίδια αναλυτική έκφραση, να μπορεί να προκύψει δηλαδή από μια και μοναδική εξίσωση, αλγεβρική ή υπερβατική (Grabiner, 1981; Edwards, 1979). Αυτή η απαίτηση περιγραφόταν εκείνη την εποχή με τη φράση ότι 'η συνάρτηση υπόκειται στο νόμο της συνέχειας της μορφής'. Ο Euler ανταπαντούσε ότι αυτή η απαίτηση είναι μη ρεαλιστική από φυσικής άποψης και ισχυριζόταν ότι μια συνάρτηση που θα ικανοποιούσε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος μπορεί να ήταν μια συνάρτηση με διπλό τύπο, κατά τμήματα λεία και άρα 'μη κανονική' ή 'ασυνεχής' για να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις του Euler. Ο Euler συμπεριλάμβανε στις 'ασυνεχείς' και εκείνες τις συναρτήσεις που μπορούσαν να σχεδιαστούν με μια ελεύθερη κίνηση του χεριού και άρα δεν εκφράζονται από κάποιο τύπο (Grabiner, 1981; Edwards, 1979).

Είναι ενδιαφέρον λοιπόν, να δούμε πώς ένα φυσικό πρόβλημα οδήγησε στο να ανοίξει μια μεγάλη κουβέντα για τις συναρτήσεις. Το είδος των συναρτήσεων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα της παλλόμενης χορδής είναι τόσο γενικό, που ανάγκασε τους μαθηματικούς να αναθεωρήσουν την καθιερωμένη αντίληψη ότι κάθε συνάρτηση ταυτίζεται με μια αναλυτική έκφραση και να αναζητήσουν γενικότερους ορισμούς. (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007). Όλη αυτή η συζήτηση έφερε στο προσκήνιο ένα νέο ζήτημα: ποιες συναρτήσεις θα λέγονται συνεχείς; Μέχρι εκείνη την εποχή υπήρχαν

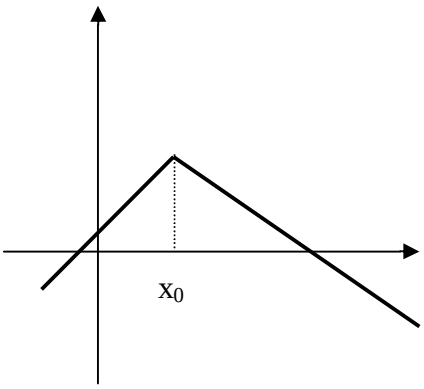
δύο διαφορετικές αντιλήψεις για την έννοια τη συνέχειας. Η μία είχε καθαρά γεωμετρική προέλευση και αναφερόταν στην ιδιότητα μιας καμπύλης να μην παρουσιάζει 'διακοπές'. Η άλλη είχε προέλευση από τη Φυσική και εξέφραζε την ιδιότητα ενός αντικειμένου να ακολουθεί τον ίδιο νόμο, την ιδιότητα δηλαδή μιας καμπύλης να διατηρεί την ίδια αναλυτική έκφραση σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (Ανδρεαδάκης κ.α., 2007; Edwards, 1979; Boyer, 1959). Ιδιαίτερα η δεύτερη άποψη ήταν διάχυτη στα έργα του Euler, όπως είδαμε νωρίτερα, αλλά και του Lagrange.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε τη συμβολή του Lagrange στη θεμελίωση της ανάλυσης καθώς επιτέλεσε ένα σημαντικό έργο. Ο Lagrange, όπως και ο Euler, διέκρινε γρήγορα τη σημασία των συναρτήσεων και δεν είναι υπερβολικό να πούμε ότι στα έργα του το 1772 και 1779 εμφανίζεται για πρώτη φορά μια *Θεωρία Συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής* (Grattan – Guinness, 1994; Loria, 1972; Struik, 1966; Boyer, 1959). Στον Lagrange επίσης οφείλουμε τη χρήση του σύγχρονου συμβολισμού f΄(x), f΄΄(x) κ.λ.π. για τις παραγώγους (Loria, 1972; Struik, 1966). Προσπαθεί να αποδείξει αλγεβρικά ότι *κάθε* συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί ως δυναμοσειρά Taylor με συντελεστές τις παραγώγους της συνάρτησης. Ανεξάρτητα από το λανθασμένο του ισχυρισμού, και παρόλο που ο Lagrange δεν είναι προσεκτικός στη σύγκλιση των σειρών, είναι αξιοσημείωτο ότι για πρώτη φορά η συνάρτηση γίνεται κυρίαρχο στοιχείο της ανάλυσης και λειτουργεί μα αφηρημένο τρόπο (Struik, 1966). Ο Lagrange προσπάθησε να κάνει την ανάλυση ένα πεδίο 'ασφαλές' όπως και η άλγεβρα, γι' αυτό και εισάγει αρκετά αλγεβρικά στοιχεία[16]. Εστίαζε επίσης αποκλειστικά στη χρήση των συναρτήσεων και των παραγώγων τους και βλέπει – όπως και σήμερα – την παράγωγο σαν μια νέα συνάρτηση. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι ένας σημαντικός λόγος για τον οποίο τα συγγράμματα του Lagrange είναι τόσο προσεγμένα είναι ότι κλήθηκε να διδάξει στη νεοϊδρυθείσα Ecole Polytechnique. Για πρώτη φορά τα ανώτερα μαθηματικά πρέπει να διδαχθούν με ένα συστηματικό τρόπο. Αυτό απαιτεί σωστή θεμελίωση και παρουσίαση μέσα από προσεγμένα εκπαιδευτικά συγγράμματα και ο Lagrange φαίνεται να ανταποκρίνεται

[16] Ο όρος *άλγεβρα* εκείνη την εποχή αναφερόταν στη θεωρία πολυωνυμικών εξισώσεων, στη διαδικασία δηλαδή ανεύρεσης τύπων επίλυσης μιας εξίσωσης. Άλγεβρα όμως θεωρείτο και κάθε άλλη μέθοδος επίλυσης, ακόμα και προσεγγιστικής. Έτσι, ακόμα και η μελέτη των ανισοτήτων θεωρείτο μέρος της άλγεβρας.

αρκετά καλά απέναντι στην πρόκληση που αντιμετωπίζει (Grattan – Guinness, 1994). Οι εργασίες του ουσιαστικά αποτελούνται από τις σημειώσεις που χρησιμοποιούσε για τις παραδόσεις στους φοιτητές του. Στην προσπάθειά του να εξηγήσει κάποιες έννοιες στους φοιτητές του, ο Lagrange θα χρησιμοποιήσει την έννοια της συνέχειας με έναν καινοτόμο τρόπο.

Τόσο ο Euler όσο και ο Lagrange ήταν δύο από τους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, πρόβλημα που όπως είδαμε οδήγησε σε έντονες συζητήσεις για τη συνέχεια μιας συνάρτησης. Στην πραγματικότητα, όλες οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνταν από τους μαθηματικούς στα τέλη του 18^{ου} αιώνα ήταν συνεχείς, με τη σύγχρονη έννοια του όρου (Grabiner, 1981; Edwards, 1979). Ασυνεχείς θεωρούνταν μόνο οι συναρτήσεις που είναι κατά τμήματα λείες, όπως στο διπλανό σχήμα – οπότε στο x_0 που η συνάρτηση αλλάζει τύπο, θεωρούσαν ότι δεν είναι συνεχής – καθώς και οι συναρτήσεις που προκύπτουν από ελεύθερα γραφήματα, οπότε δεν περιγράφονται από μια αναλυτική έκφραση (Ανδρεαδάκης, 2007; Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Boyer, 1959). Στην άλγεβρα τα πολυώνυμα θεωρούνταν συνεχείς συναρτήσεις κι έτσι η εύρεση του διαστήματος μέσα στο οποίο κινείτο η ρίζα ενός πολυωνύμου, μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως απόδειξη ύπαρξη της ρίζας (Grabiner, 1981). Η παραπάνω ιδιότητα χρησιμοποιήθηκε από τον Lagrange το 1798 όταν προσπαθούσε να αποδείξει την το θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής. Στην πορεία της απόδειξης, ο Lagrange χρειάστηκε να δώσει μια περιγραφή της συνέχειας για ένα πολυώνυμο με θετικούς όρους και το έκανε ως εξής: αν P και Q είναι δύο πολυώνυμα με θετικούς όρους ορισμένα σε ένα διάστημα μεταξύ των x=p και x=q, τότε ο Lagrange λέει ότι «είναι προφανές ότι αυτές οι ποσότητες [εννοεί τα P και Q] αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο που αυξάνεται το x, και καθώς το x αυξάνεται [μεταβάλλεται] περνώντας από όλες τις ανεπαίσθητες [απειροελάχιστες] τιμές μεταξύ των p και q, και τα προηγούμενα [τα P και Q] αυξάνονται επίσης κατά ανεπαίσθητες



[απειροελάχιστες] τιμές»[17]. Αν και η παραπάνω αναφορά περιορίζεται στα πολυώνυμα, είναι ουσιαστικά η πρώτη προσέγγιση σε αυτό που αργότερα ο Bolzano και ο Cauchy θα χρησιμοποιούσαν για να ορίσουν τη συνέχεια (Grabiner, 1981).

Ένα χρόνο νωρίτερα, το 1797, ο Lagrange χρησιμοποίησε την έννοια της συνέχειας σε ένα θέμα καθαρά αλγεβρικό· την προσπάθειά του να προσεγγίσει τις συναρτήσεις μέσω των σειρών Taylor. Προσπαθούσε να αποδείξει ένα λήμμα σύμφωνα με το οποίο αν $f(x+h) = f(x) + hp(x) + h^2 q(x) + \ldots$ υπάρχει ένα h κατάλληλα μικρό ώστε να ισχύει $|f(x)| > |hp + h^2 q + \ldots|$. Αν και η απόδειξή του δεν είναι σωστή, ο Lagrange δίνει μια περιγραφή της συνεχούς συνάρτησης που είναι η πιο συναφής με αυτή των Bolzano και Cauchy οπό οποιαδήποτε άλλη είχε εμφανιστεί μέχρι τότε (Grabiner, 1981). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση hP όπου P μια συνάρτηση των x και h. Αν σταθεροποιήσουμε το x τότε, λέει ο Lagrange, όσο το P υπάρχει και παραμένει πεπερασμένο, το hP τείνει προς εξαφάνιση. Αν θεωρήσουμε την καμπύλη που αντιστοιχεί σε αυτή τη συνάρτηση έτσι ώστε το h να αντιστοιχεί στην τετμημένη και το hP στην τεταγμένη, τότε η καμπύλη θα τμήσει τον άξονα στην αρχή του. Ο Lagrange αναφέρει τότε ότι «Η τροχιά της καμπύλης θα είναι απαραίτητα *συνεχής (continuous)* από αυτό το σημείο· έτσι θα πλησιάζει λίγο – λίγο τον άξονα πριν τον τμήσει και επομένως θα τον πλησιάζει κατά μια ποσότητα μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα. Άρα μπορούμε πάντα να βρούμε μια τετμημένη h που να αντιστοιχεί σε μια τεταγμένη μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα· και στη συνέχεια όλο και πιο μικρές τιμές του h αντιστοιχίζονται όμοια σε τεταγμένες μικρότερες από τη δοσμένη ποσότητα»[18]. Αν και ο Lagrange δεν θεωρεί αυτή την ιδιότητα ως το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της *συνέχειας*, μπορεί δίκαια να του αναγνωριστεί ότι πρώτος χρησιμοποιεί τις *ανισότητες* για να περιγράψει αυτό που αργότερα ο Cauchy με τον Bolzano θα διατύπωναν αυστηρά (Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Loria, 1972).

[17] Ελεύθερη μετάφραση από το κείμενο της Grabiner, J.V. (1981). *The Origins of the Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, MA: MIT Press, σελίδες 88,89.
[18] Ελεύθερη μετάφραση από το κείμενο της Grabiner, J.V. (1981). *The Origins of the Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, MA: MIT Press, σελίδα 95.

Μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα δεν φαινόταν να υπήρχε κάποιο πρόβλημα στον ορισμό της συνέχειας. Αυτή διατηρούσε ένα γεωμετρικό χαρακτήρα. Αλλά ούτε η γεωμετρική εποπτεία ούτε και η αναφορά στα πολυώνυμα ήταν αρκετή για να αναδείξει ξεκάθαρα αυτό που τώρα αναγνωρίζουμε ως ουσιώδη ιδιότητα της συνέχειας και να την κάνει να ξεχωρίσει από τις υπάρχουσες ιδιότητες των συναρτήσεων. Έτσι σιγά – σιγά η ανάγκη ορισμού της συνέχειας γινόταν όλο και πιο επιτακτική καθώς όπως είδαμε άλλαξε ο ορισμός της συνάρτησης(Grabiner, 1981). Όταν ξεκίνησε η μελέτη των συναρτήσεων κατά τον 18^{ο} αιώνα, ως συναρτήσεις αναγνωρίζονταν κάποιες συγκεκριμένες μορφές, κυρίως οι άπειρες σειρές. Καθώς οι συναρτήσεις άρχισαν να παίρνουν κι άλλες μορφές, πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, τριγωνομετρικές, λογαριθμικές, κ.α., αυτό οδήγησε τους επιστήμονες στο να αναμένουν από αυτές να έχουν μια 'καλή' συμπεριφορά, και αυτό συνήθως τότε σήμαινε να έχουν την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής και να είναι παραγωγίσιμες όσες φορές χρειαζόταν (Grabiner, 1981).

Οι προσδοκίες αυτές φάνηκε να γκρεμίζονται στα μέσα του 18^{ου} αιώνα όταν προβλήματα σαν αυτό της παλλόμενης χορδής έφερε στο προσκήνιο οικογένειες συναρτήσεων, όπως αυτές που προκύπτουν από τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, που δεν έχουν μια αναλυτική έκφραση κατά τα γνωστά. Τι ιδιότητες έχουν αυτές; Οι μαθηματικοί καθώς προσπαθούσαν να κατηγοριοποιήσουν τις νέες συναρτήσεις κατάλαβαν ότι η έννοια της συνάρτησης έπρεπε να επεκταθεί και η συνέχεια να τεθεί ξανά και με προσοχή σε νέα βάση (Grabiner, 1981; Edwards, 1979). Μέχρι τότε μια συνάρτηση ήταν *συνεχής* αν είχε την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, ή αν ήταν διαφορίσιμη, ή αν εκφραζόταν από ένα μόνο τύπο, ή αν δεν παρουσίαζε άλματα ή αν δοθείσης μιας 'ανεπαίσθητης' μεταβολής στην ανεξάρτητη μεταβλητή x, η συνάρτηση υφίστατο επίσης μια 'ανεπαίσθητη' μεταβολή (Grabiner, 1981). Κάποιες από τις παραπάνω ιδιότητες, τις οποίες σήμερα αντιμετωπίζουμε διακριτά, άλλοτε τις αντιμετώπιζαν ως ισοδύναμες και άλλοτε τις έβλεπαν ως διαφορετικές. Η ανάγκη για αποσαφήνιση των ανωτέρω γινόταν όλο και πιο επιτακτική. Οι όροι *συνέχεια* και *νόμος της συνέχειας* χρησιμοποιούνταν επίσης με έναν τελείως διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τα όρια και τις παραγώγους (Grabiner, 1981). Η συνέχεια χρησιμοποιείτο μερικές φορές για να δηλώσει ότι αν κάθε όρος μιας ακολουθίας είχε μια ιδιότητα, τότε την ίδια ιδιότητα είχε και το όριο της

ακολουθίας. Λειτουργούσε επίσης και ως ένα οντολογικό επιχείρημα για την ύπαρξη της παραγώγου. Ο Lacroix έγραφε ότι ακριβώς λόγω του νόμου της συνέχειας οι μεταβολές [του λόγου $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$] μολονότι τείνουν προς μηδενισμό, διατηρούν το λόγο προς τον οποίο σταδιακά πλησιάζουν πριν εξαφανισθούν. Έτσι η συνέχεια φαίνεται να συνδέεται κατά κάποιο τρόπο με τη διαφορισιμότητα (Grabiner, 1981).

Όπως εξετάσαμε νωρίτερα, το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής έδωσε την αφορμή για να ξεκινήσει η κουβέντα για το τι μπορεί να είναι συνάρτηση και τι όχι, καθώς και για το πότε μια συνάρτηση θα λέγεται συνεχής. Μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα των απόψεων που κυκλοφορούσαν και της αντίληψης που υπήρχε τότε για τη συνέχεια, από ένα μαθηματικό διαγωνισμό που έγινε εκείνη την εποχή. Το 1787 η Ακαδημία του St. Petersburg πρόσφερε ένα βραβείο για την καλύτερη απάντηση στο εξής ερώτημα[19]: «Εάν και κατά πόσον μια αυθαίρετη συνάρτηση που λαμβάνεται από την ολοκλήρωση μιας εξίσωσης με 3 ή περισσότερες μεταβλητές μπορεί να παριστάνει μια οποιαδήποτε καμπύλη ή επιφάνεια, είτε αλγεβρική είτε υπερβατική, είτε από τη μηχανική, είτε *ασυνεχής*, είτε έχει προκύψει από ελεύθερη σχεδίαση ή εάν και κατά πόσο αυτές οι συναρτήσεις περιλαμβάνουν μόνο [συνεχείς[20]] καμπύλες που περιγράφονται από αλγεβρικές ή υπερβατικές εξισώσεις» (Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Loria, 1972). Το βραβείο το κέρδισε ο L.F.A. Arbogast ο οποίος κατάφερε να αποσαφηνίσει τα ζητήματα, έστω ατελώς και προσωρινά, εισάγοντας την κατάλληλη ορολογία. Ο Arbogast ισχυρίστηκε ότι ακόμα και μια συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής, όπως θα λέγαμε σήμερα, μπορεί να είναι αποδεκτή ως λύση της διαφορικής εξίσωσης. Εισάγει ένα νέο όρο, τον όρο *discontiguous* (απομονωμένος, ξεχωρισμένος, διαχωρισμένος) για μια συνάρτηση που έχει διακριτά, ξεχωρισμένα τα μέρη της, ενώ χρησιμοποιεί τον όρο *discontinuous* (ασυνεχής) για να υποδηλώσει τη συνάρτηση που δεν έχει την ίδια αναλυτική έκφραση σε όλο το πεδίο ορισμού της (Grabiner, 1981).

---

[19] Ελεύθερη μετάφραση από το κείμενο της Grabiner, J.V. (1981). *The Origins of the Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, MA: MIT Press, σελίδα 91 και από τον Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag, σελίδα 303.

[20] Η λέξη υπάρχει μόνο στο κείμενο του C.H. Edwards, αλλά υπονοείται και στα συμφραζόμενα της Grabiner.

Αυτό που αργότερα ο Cauchy και ο Bolzano θα όριζαν ως *continuous* (συνεχής) είναι ουσιαστικά αυτό που ο Arbogast όρισε ως *contiguous* (γειτνιάζων, παρακείμενος, όμορος, συνεχόμενος). Το 1791 στην εργασία του με την οποία κέρδισε το βραβείο, ο Arbogast λέει: [21]«Ο νόμος της συνέχειας συνίσταται στο ότι μια ποσότητα δεν μπορεί να μεταβεί από μια θέση σε μια άλλη αν δεν διατρέξει όλες τις ενδιάμεσες θέσεις που υπόκεινται στον ίδιο νόμο. Οι αλγεβρικές συναρτήσεις αντιμετωπίζονται ως συνεχείς γιατί οι διάφορες τιμές της συνάρτησης εξαρτώνται κατά τον ίδιο τρόπο από τις διάφορες τιμές της μεταβλητής· και υποθέτοντας ότι η μεταβλητή αυξάνει κατά συνεχή τρόπο, η συνάρτηση θα λαβαίνει αντίστοιχες τιμές [δηλαδή κατά συνεχή τρόπο], αλλά δεν θα μεταβαίνει από τη μια τιμή στην άλλη αν δεν διατρέχει όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Κατά συνέπεια, η τεταγμένη y μιας αλγεβρικής καμπύλης, καθώς η τετμημένη x μεταβάλλεται, δεν μπορεί να μεταβεί 'απότομα' [να παρουσιάσει άλμα] από μια τιμή προς μια άλλη. Δεν μπορεί να υπάρξει ένα άλμα από μια τεταγμένη σε μια άλλη όταν αυτές διαφέρουν κατά μια αισθητή ποσότητα· αλλά όλες οι διαδοχικές τιμές του y συνδέονται με τον ίδιο νόμο που κάνει τα άκρα των τεταγμένων να συνθέτουν μια κανονική και συνεχή καμπύλη … Η συνέχεια μπορεί να καταστραφεί με δύο τρόπους:

1^{ον} : Μπορεί να αλλάξει ο τύπος της συνάρτησης, δηλαδή, ο νόμος σύμφωνα με τον οποίο η συνάρτηση μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μεταβλητή μπορεί να μεταβληθεί τελείως. Μια καμπύλη που απαρτίζεται από αρκετά τμήματα διαφορετικών καμπυλών, είναι τέτοιου είδους … Δεν είναι απαραίτητο καν η συνάρτηση y να εκφράζεται από μια εξίσωση σε ένα συγκεκριμένο διάστημα της μεταβλητής· μπορεί να αλλάζει συνεχώς ο τύπος της, και η γραμμή που την αναπαριστά αντί να απαρτίζεται απλά από διάφορες κανονικές καμπύλες, να είναι σαν σε κάθε ένα από τα σημεία της να καθίσταται και μια διαφορετική καμπύλη· δηλαδή, να είναι τελείως ακανόνιστη και να μην ακολουθεί κανένα νόμο για οποιοδήποτε διάστημα, οσοδήποτε μικρό. Τέτοια θα μπορούσε να είναι μια καμπύλη που φτιάχνουμε με ελεύθερη κίνηση του χεριού. Τέτοιου είδους καμπύλες δεν μπορούν να παρασταθούν ούτε από μία ούτε από περισσότερες εξισώσεις [τύπους] αλγεβρικής ή υπερβατικής μορφής.

---

[21] Ελεύθερη μετάφραση από τον Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag, σελίδα 303, 304.

2^{ον} : Ο νόμος της συνέχειας χαλάει επίσης όταν τα διαφορετικά μέρη μιας καμπύλης δεν συνδέονται μεταξύ τους … θα καλούμε καμπύλες τέτοιου είδους ως *discontiguous* [καμπύλες που δεν γειτνιάζουν], γιατί όλα τα μέρη τους δεν είναι συνεχόμενα [δεν γειτνιάζουν]…».

Ο τρόπος που ο Arbogast εξήγησε τον όρο *contiguous* που ο ίδιος εισήγαγε, είναι περισσότερο σημαντικός από τον όρο αυτό καθ' εαυτό (Grabiner, 1981). Άρχισε κάνοντας ένα σχόλιο πάνω στα λεγόμενα του Marquis de Condorcet για το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, ο οποίος ισχυριζόταν ότι η συναρτησιακή λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ακόμα και αν εκφράζεται με τμήματα καμπυλών που εκφράζονται από διαφορετικούς τύπους, αυτά πρέπει να έχουν τμήματα που να συνορεύουν, να συναντούνται μεταξύ τους. 'Αλλά τι σημαίνει', αναρωτιέται ο Arbogast, 'να συνορεύουν, να συναντώνται μεταξύ τους'; Όπως φαίνεται από το προηγούμενο κείμενο που παραθέσαμε αλλά και από την υπόλοιπη εργασία που παρουσίασε, ο Arbogast αναφέρει τρία χαρακτηριστικά της ιδιότητας που αποκαλεί *contiguity* (Grabiner, 1981):

1^{ον}: Είπε ότι η τελευταία τεταγμένη του πρώτου τύπου με την πρώτη τεταγμένη του επόμενου τύπου να είναι ίσες μεταξύ τους, ή να διαφέρουν κατά μια απειροελάχιστα μικρή ποσότητα,

2^{ον}: λέει επίσης ότι με την υπόθεση ότι η μεταβλητή αυξάνει κατά συνεχή τρόπο, η συνάρτηση θα λαβαίνει αντίστοιχες τιμές [κατά συνεχή τρόπο δηλαδή], και

3^{ον}: λέει ότι η τεταγμένη y, όπου y είναι συνάρτηση του x, δεν μπορεί να περάσει 'απότομα' από τη μια τιμή στην άλλη· δεν μπορεί να υπάρξει ένα άλμα από μια τεταγμένη σε μια άλλη όταν αυτές διαφέρουν κατά μια αισθητή ποσότητα.

Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά είχαν σαν σκοπό να αποκλείσουν μια συνάρτηση που με σύγχρονη ορολογία θα λέγαμε ότι παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας σε κάποια σημεία. Αλλά με τα χαρακτηριστικά που βάζει ο Arbogast έστρεφε την προσοχή στην ουσιώδη ιδιότητα της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο (Grabiner, 1981).

Προκειμένου ο Arbogast να κάνει έκδηλη τη διαφορά ανάμεσα στη *contiguity* και στη *continuity* (έτσι όπως ο ίδιος τις οριοθετεί) δίνει το επόμενο παράδειγμα συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{mx} & \textit{για x από 0 έως α}\\ \dfrac{1}{k\sqrt{n^2-(x-p)^2}}+q & \textit{για x από α έως b}\\ \sqrt{k^2-(x-r)^2}+h & \textit{για x από b έως c}\end{cases}$$

Κατάλληλη επιλογή των σταθερών της συνάρτησης, λέει ο Arbogast, μπορεί να κάνει τη συνάρτηση *contiguous* στο διάστημα [0, c]· η συνάρτηση όμως είναι ήδη *continuous* σε καθένα ξεχωριστά από τα τρία διαστήματα (Grabiner, 1981). Τελικά ο Arbogast αποφαίνεται ότι οι 'αφηρημένες' συναρτήσεις που εμφανίζονται στη λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους στο πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, μπορεί να μην είναι ούτε *contiguous* αλλά ούτε και *continuous* (Grabiner, 1981). Αλλά όπως θα δούμε αμέσως μετά, το κεντρικό και καταλυτικό επιχείρημα για την αναγκαιότητα ύπαρξης και ουσιαστικής παρουσίας στα μαθηματικά των ασυνεχών συναρτήσεων θα διατυπωνόταν από τον Fourier στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

Ο Fourier στο βιβλίο του *The Analytical Theory of Heat* αναπτύσσει ως μια γενική θεωρία τη μέθοδο των τριγωνομετρικών σειρών που πρώτοι οι Euler και Bernoulli είχαν εφαρμόσει σε ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων κατά τη μελέτη του προβλήματος της παλλόμενης χορδής (Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Struik, 1966; Loria, 1972). Ένα τυπικό πρόβλημα με το οποίο ασχολήθηκε ο Fourier στο βιβλίο του ήταν η ανεύρεση μιας συνάρτησης θερμοκρασίας u(x, y) με το x να κινείται στο διάστημα [0, π] και το y μη αρνητικό που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

$$u(x,y)=u(\pi,y)=0, \qquad (2)$$

$$u(x,0)=\phi(x), \qquad (3)$$

όπου Φ(x) είναι μια δοσμένη συνάρτηση που ορίζει τη θερμοκρασία στη βάση της περιοχής. Ο Fourier παρατηρεί ότι κάθε μια από τις συναρτήσεις της μορφής

$$e^{-ny}\sin nx, \quad n=1,2,3,...$$

ικανοποιεί τις απαιτήσεις (1) και (2) και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το ίδιο συμβαίνει με την πιο γενική συνάρτηση

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny}\sin nx$$

όπου b_1, b_2, b_3, … αυθαίρετες σταθερές. Η συνθήκη (3) μπορεί εξίσου να αληθεύει αν αυτές οι σταθερές επιλεγούν έτσι ώστε:

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad x\in(0,\pi) \quad (4)$$

Ο Fourier καταπιάστηκε με το ανάπτυγμα μιας 'αυθαίρετης' [22] συνάρτησης σε τριγωνομετρική σειρά. Ακολουθεί μια ευρετική μέθοδο για τον υπολογισμό των σταθερών b_n . Αναπτύσσει την Φ(x) κατά Taylor, φτιάχνει ένα γραμμικό σύστημα από εξισώσεις των b_n, και τελικά καταλήγει ότι

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(x)\sin nx dx \quad (5)$$

ο γνωστός σήμερα τύπος για τους συντελεστές Fourier. Σχολιάζοντας το αποτέλεσμα, ο Fourier αναφέρει:[23] «… οι συντελεστές a, b, c, d, e, f, …, που υπεισέρχονται στην εξίσωση $\frac{1}{2}\pi\phi(x)=a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x+d\sin 4x+...$ και τους οποίους βρήκαμε νωρίτερα με τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών, είναι οι τιμές του ορισμένου ολοκληρώματος που εκφράζεται από τον όρο $\int \sin ix\phi(x)dx$, όπου i το νούμερο του όρου του οποίου ο συντελεστής απαιτείται. Αυτή η επισήμανση είναι σημαντική γιατί μας δείχνει πώς συναρτήσεις εντελώς αυθαίρετες μπορεί να αναπτυχθούν σε τριγωνομετρικές σειρές με ημίτονα πολλαπλάσιων τόξων. Στην πραγματικότητα, αν η συνάρτηση Φ(x) που αντιπροσωπεύεται από τη μεταβλητή τεταγμένη μιας οποιασδήποτε καμπύλης της οποίας η τετμημένη κινείται μεταξύ του 0 και του π, και αν από την ίδια πλευρά του άξονα η γνωστή τριγωνομετρική καμπύλη, της οποίας η τεταγμένη είναι y=sinx, μπορεί να σχεδιαστεί, τότε είναι εύκολο να αναπαριστάνει την τιμή κάθε όρου ολοκλήρωσης. Πρέπει να υποθέσουμε ότι για κάθε τετμημένη x, στην οποία αντιστοιχεί μια τιμή της Φ(x), και μια τιμή της sinx, πολλαπλασιάζουμε την τελευταία τιμή με την πρώτη και στο ίδιο σημείο του άξονα ορθώνουμε μια τεταγμένη ίση προς το γινόμενο Φ(x)sinx. Μέσω αυτής της συνεχούς διαδικασίας σχηματίζεται

[22] Λέγοντας 'αυθαίρετη' συνάρτηση εννοούσε μια συνάρτηση που μπορεί να παρασταθεί σαν τόξο μιας συνεχούς καμπύλης ή ως ένωση τέτοιων διαδοχικών τόξων.
[23] Ελεύθερη μετάφραση από τον Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag, σελίδα 306.

μια τρίτη καμπύλη, της οποίας οι τεταγμένες είναι αυτές της τριγωνομετρικής καμπύλης, μειωμένες κατ' αναλογία με τις τεταγμένες της αυθαίρετης συνάρτησης που αναπαριστά η Φ(x). Με αυτό τον τρόπο, το χωρίο αυτής της καμπύλης που λαμβάνεται μεταξύ των x=0 και x=π δίνει την ακριβή τιμή του συντελεστή του sinx· και οποιαδήποτε κι αν είναι η δοσμένη καμπύλη που αντιστοιχεί στην Φ(x), είτε μπορούμε να αποδώσουμε σε αυτήν μια αναλυτική έκφραση μέσω εξίσωσης, είτε υπακούει σε κάποιο κανονικό νόμο είτε όχι, είναι γεγονός ότι πάντα χρησιμεύει για να απλοποιεί με κάθε τρόπο οποιαδήποτε τριγωνομετρική σειρά. Άρα, το χωρίο της νέας καμπύλης θα έχει, σε κάθε δυνατή περίπτωση, μια πεπερασμένη τιμή που θα είναι η τιμή του συντελεστή του sinx στο [κατά Taylor] ανάπτυγμα της συνάρτησης».

Στο προηγούμενο χωρίο ο Fourier κάνει μια σημαντική παρατήρηση ότι για να είναι επιτρεπτός ο υπολογισμός των συντελεστών στη σειρά Fourier του Φ(x), αρκεί για το χωρίο που ορίζεται από την y=Φ(x)sin*nx* να υπάρχει μια περιοχή (για κάθε n) που να μπορεί να ληφθεί ως η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\pi} \Phi(x)\sin nx dx$ (Grabiner, 1981). Δεν είναι απαραίτητο η y=Φ(x)sin*nx* να είναι συνεχής και επιπλέον έχει ένα ολοκλήρωμα που μπορεί να υπολογιστεί μέσω αντιδιαφόρισης. Επίσης ο Fourier παρατηρεί ότι ακόμα και αν η Φ(x) είναι συνεχής στο [0, π], αλλά Φ(π)≠0, η αναπτυγμένη συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier συγκλίνει, σε όλη την πραγματική ευθεία, θα είναι απαραίτητα discontinuous (εννοεί discontiguous) στο σημείο x το οποίο είναι περιττό πολλαπλάσιο του π, διότι αυτή η αναπτυγμένη συνάρτηση είναι περιττή με περίοδο 2π (Grabiner, 1981; Struik, 1966). Συνεπώς, η παρουσίαση από τον Fourier της προηγούμενης τεχνικής ουσιαστικά επέβαλλε τη μελέτη των ασυνεχών συναρτήσεων σε ίση βάση με αυτή των συνεχών και κατέστησε αναγκαία την ανάπτυξη μιας θεωρίας για την ολοκλήρωση ασυνεχών συναρτήσεων, θεωρία που θα αναπτυσσόταν αργότερα από τους Cauchy και Riemann (Grabiner, 1981).

Βέβαια, παρόλο που ο Fourier στο βιβλίο του προς το τέλος δίνει ένα ορισμό για τη συνάρτηση που αγγίζει πολύ τα σύγχρονα δεδομένα, ο τρόπος με τον οποίο όριζε την ασυνέχεια ήταν ουσιαστικά αυτός που επικρατούσε τον 18^{ο} αιώνα, ασυνέχεια δηλαδή ως προς τον τύπο. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούσε ήταν στη χειρότερη περίπτωση

λείες κατά τμήματα, με μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό 'ασυνεχών' σημείων σε κάθε διάστημα. Ας δούμε ένα τελευταίο απόσπασμα από το βιβλίο του Fourier:[24] «Πάνω από όλα, πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση f(x), στην οποία εφαρμόζεται αυτή η απόδειξη [η απόδειξη που εξετάσαμε νωρίτερα], είναι εντελώς αυθαίρετη και δεν υπόκειται σε κάποιο *νόμο συνέχειας* … Γενικά η συνάρτηση f(x) παριστάνει μια σειρά από τιμές που δίνονται στην τετμημένη x, δημιουργεί μια ίση διαδοχική σειρά από τεταγμένες f(x) … δεν θεωρούμε ότι αυτή η σειρά από τεταγμένες θα υπακούει σε κάποιο κανονικό νόμο· διαδέχεται η μία την άλλη κατά οποιοδήποτε τρόπο και η καθεμιά δίνεται σαν να ήταν ξεχωριστή ποσότητα. Μπορεί να φαίνεται από τη φύση του προβλήματος και από την περαιτέρω ανάλυση, ότι η μετάβαση από τη μια τεταγμένη στην άλλη επιτυγχάνεται με ένα συνεχή τρόπο. Αλλά αυτό έχει να κάνει με ειδικές απαιτήσεις και καταστάσεις. Η γενική εξίσωση όμως, ιδωμένη από μόνη της [μακριά από το πλαίσιο του προβλήματος], είναι ανεξάρτητη από αυτούς τους περιορισμούς. Αυστηρά, είναι εφαρμόσιμη και στις ασυνεχείς συναρτήσεις». Με τον Fourier φθάνει σιγά – σιγά στο τέλος της η περίοδος της αναζήτησης και του προβληματισμού για την έννοια της συνέχειας. Τρεις κορυφαίοι μαθηματικοί, ο Bolzano, ο Cauchy και ο Weierstrass θα όριζαν με αυστηρό τρόπο αυτό που πριν από χιλιάδες χρόνια είχαν προσπαθήσει να περιγράψουν οι Έλληνες μαθηματικοί, την έννοια του *συνεχούς*.

Η εποχή της αυστηρής θεμελίωσης

Η εργασία του Arbogast που του απέφερε το βραβείο, καθώς και η δουλειά του Lagrange και του Fourier που περιγράψαμε νωρίτερα, έδωσε πολλά ερεθίσματα στους μαθηματικούς στα τέλη του 18^{ου} και στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Είχαν σαν αποτέλεσμα να υπάρξουν πολλές συζητήσεις για το τι εννοούμε λέγοντας 'συνεχή συνάρτηση' (Grabiner, 1981; Edwards, 1979). Η διαμάχη που ξέσπασε για το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής είχε σαν αποτέλεσμα να υπάρξουν πολλές περιγραφές για τη *συνέχεια* γύρω στο 1800 και αν και δεν φαίνεται οι απόψεις που επικρατούσαν να επηρέασαν τους Bolzano και Cauchy, είναι σίγουρο ότι προετοίμασαν το έργο τους

[24] Ελεύθερη μετάφραση από τον Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag, σελίδα 307.

(Grabiner, 1981). Η ανάλυση Fourier είχε φέρει στο προσκήνιο τις τριγωνομετρικές σειρές και την παράξενη συμπεριφορά τους και λειτούργησε σαν συνδετικός κρίκος με την νέα θεμελίωση που παρουσίασαν ο Cauchy και ο Weierstrass (Grattan – Guinness, 1994).

Όπως έχουμε ήδη εξετάσει, εκείνη την περίοδο οι δυο κύριες αντιλήψεις που επικρατούσαν για την έννοια της συνέχειας, ήταν: η μια με καθαρά γεωμετρική προέλευση, που εξέφραζε την ιδιότητα μιας καμπύλης να μην παρουσιάζει 'διακοπές' και η άλλη, με προέλευση κυρίως από τη φυσική, εξέφραζε την ιδιότητα ενός φαινομένου – συνάρτησης να ακολουθεί τον ίδιο 'νόμο', την ίδια αναλυτική έκφραση σε όλο το πεδίο ορισμού της. Το πόσο διαδεδομένες ήταν αυτές οι απόψεις μπορεί να φανεί από τα σχόλια που κάνει ο Cauchy το 1844[25]: «Στα έργα των Euler και Lagrange, μια συνάρτηση ονομάζεται *συνεχής* ή *ασυνεχής* ανάλογα με το αν οι διαφορετικές τιμές αυτής της συνάρτησης υπόκεινται ή όχι στον ίδιο νόμο, προκύπτουν ή όχι από μια μοναδική εξίσωση. Όμως αυτός ο ορισμός πολύ απέχει από το να θεωρηθεί μαθηματικά ακριβής γιατί αν οι διαφορετικές τιμές μιας συνάρτησης εξαρτώνται από δύο ή περισσότερες διαφορετικές εξισώσεις, τίποτα δεν μας εμποδίζει να μειώσουμε τον αριθμό αυτών των εξισώσεων ή ακόμα και να τις αντικαταστήσουμε από μια απλή εξίσωση, της οποίας η ανάλυση θα μας έδινε όλες τις υπόλοιπες. Επομένως, αν κανείς θεωρήσει τον ορισμό των Euler και Lagrange εφαρμόσιμο σε όλα τα είδη των συναρτήσεων, τότε μια απλή αλλαγή του συμβολισμού είναι συχνά αρκετή για να μετασχηματίσει μια συνεχή συνάρτηση σε ασυνεχή και αντίστροφα. Έτσι π.χ., αν το x συμβολίζει μια πραγματική μεταβλητή, τότε η συνάρτηση που ισούται με +x ή –x, ανάλογα με το αν η μεταβλητή x είναι θετική ή αρνητική, πρέπει για το λόγο αυτό να τοποθετηθεί στην κλάση των ασυνεχών συναρτήσεων· όμως η ίδια συνάρτηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνεχής όταν γραφεί στη μορφή $\sqrt{x^2}$. Έτσι, ο χαρακτήρας της συνέχειας των συναρτήσεων, θεωρούμενος από το σημείο όπου οι γεωμέτρες σταμάτησαν για πρώτη φορά, είναι ασαφής και αβέβαιος. Η αβεβαιότητα όμως θα εξαφανιστεί, αν στη θέση του ορισμού του Euler βάλουμε αυτόν που έχω δώσει στο

[25] Το κείμενο που ακολουθεί είναι παρμένο από το βιβλίο των Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2007). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης*. (Έκδοση 2007). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β, σελίδες 206, 207.

κεφάλαιο ΙΙ του έργου μου *Αλγεβρική Ανάλυση…*». Αργότερα θα δούμε αναλυτικά τον ορισμό που εισαγάγει ο Cauchy.

Είναι ενδιαφέρον ότι καθώς μελετούμε το κλίμα εκείνης της εποχής, βλέπουμε ότι οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για να εμποδίσουν την εμφάνιση και καθιέρωση εννοιών όπως το άπειρο και η συνέχεια, ήταν οι ίδιες που συνέβαλλαν στην εδραίωση αυτών. Η μέθοδος των ορίων για παράδειγμα που εμφανίστηκε εκείνη την περίοδο για να αποφευχθεί η χρήση του απείρου ή του *νόμου της συνέχειας*, ουσιαστικά λειτούργησε ως πλατφόρμα παρουσίασης της συνέχειας και των απειροστικών διαδικασιών (Boyer, 1959). Το ίδιο συνέβη και με τις μεθόδους του Lagrange. Το έργο του δημιούργησε ερωτήσεις σχετικά με την εγκυρότητα της πεποίθησης που υπήρχε ότι κάθε συνάρτηση μπορούσε να περιγραφεί ως μια δυναμοσειρά Taylor. Αυτό έδωσε το έναυσμα για να ξεσπάσει μια συζήτηση σχετικά με το τι σήμαινε συνάρτηση και μάλιστα *συνεχής* συνάρτηση. Καθώς επίσης οι άπειρες σειρές αλλά και τα άπειρα αθροίσματα χρησιμοποιούνταν ολοένα και περισσότερο, η ανάγκη για αυστηρή θεμελίωση γινόταν επιτακτική. Σκαπανέας σε αυτή την προσπάθεια ήταν ένας Βοημός ιερέας, ο Bernard Bolzano.

Ο Bolzano γεννήθηκε το 1791 στην Πράγα της, πάλαι ποτέ, Βοημίας. Λόγω της πατρικής παραίνεσης ακολουθεί τον εκκλησιαστικό κλάδο και χειροτονείται ως ιερέας το 1805. Την ίδια χρονιά παίρνει το διδακτορικό του στη φιλοσοφία και στη συνέχεια αναγορεύεται καθηγητής στην έδρα της επιστήμης των θρησκευμάτων. Ο τρόπος διδασκαλίας του όμως δεν είναι σύμφωνος με τις στενές αντιλήψεις της Αυστριακής κυβέρνησης αλλά ούτε και του πανίσχυρου κλήρου κι έτσι του χορηγείται μια μικρή σύνταξη προκειμένου να αποσυρθεί από την έδρα. Το 1841 επιστρέφει στη γενέτειρά του όπου και έμεινε μέχρι το θάνατό του το 1848 (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1974). Ο Bolzano έμεινε στην αφάνεια για πολλά χρόνια και αρκετά από τα γραπτά του ήρθαν στο φως δεκαετίες αργότερα. Υπέρμαχος της αυστηρότητας και της ακριβούς θεμελίωσης, ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τη μαθηματική ανάλυση. Το 1799 ο Gauss είχε δώσει μια απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας χρησιμοποιώντας όρους από τη γεωμετρία. Ο Bolzano όμως επιθυμούσε μια απόδειξη που θα περιελάμβανε μόνο όρους που θα παρέπεμπαν στην αριθμητική, την άλγεβρα

και την ανάλυση. Όπως και ο Lagrange είχε αντιληφθεί ότι η εμφάνιση του χρόνου και της κίνησης στα μαθηματικά δεν ήταν απαραίτητη κι έτσι προσπαθούσε στις αποδείξεις του να αποφεύγει όρους που παρέπεμπαν σε μια *διαισθητική και ενορατική αντίληψη του χώρου* (Boyer, 1959) [26].

Αυτή η νέα θεώρηση που πρέσβευε ο Bolzano απαιτούσε ένα καινούριο ορισμό για τη *συνέχεια*. Ο λογισμός μέχρι τότε, έδειχνε την 'Πυθαγόρεια' πλευρά του, καθώς γινόταν αγωνιώδης προσπάθεια να υποκαταστήσουν οι αριθμητικοί όροι τα υποτιθέμενα συνεχή γεωμετρικά μεγέθη. Ο Newton είχε αποφύγει ένα τέτοιο αδιέξοδο κάνοντας έκκληση στη διαίσθηση μέσω της *ροής*, της συνεχούς κίνησης. Ο Leibniz πάλι, απέφυγε τελείως το ερώτημα κάνοντας έκκληση στην *αρχή της συνέχειας*. Ο Bolzano όμως, έδωσε ένα ορισμό για τις συνεχείς συναρτήσεις που για πρώτη φορά δείχνει ότι η βάση για την έννοια της συνέχειας θα έπρεπε να είναι η έννοια του ορίου την οποία αναδεικνύει ως πρωτεύουσα (Boyer, 1959). Αυτός ο ορισμός εμφανίστηκε σε ένα φυλλάδιο που εκδόθηκε ιδιωτικά το 1817 από τον Bolzano με τίτλο : *Purely analytical proof of the theorem, that between each two roots which guarantee an opposing result, at least one real root of the equation lies* [27] [Καθαρά αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος ότι μεταξύ όποιων δύο τιμών που δίνουν αποτελέσματα διαφορετικών προσήμων, βρίσκεται τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα της εξίσωσης] (Russ, 1980; Edwards, 1979; Boyer, 1959). Ο Bolzano ισχυρίστηκε ότι μια διαισθητική γεωμετρική απόδειξη, ότι δηλαδή ένα συνεκτικό γράφημα πρέπει να τέμνει σε κάποιο σημείο μια ευθεία που διαχωρίζει τα άκρα της, βασίζεται σε μια ανεπαρκή κατανόηση του όρου *συνεχής*. Όρισε μια συνάρτηση f(x) ως συνεχή σε ένα διάστημα, αν για όποια τιμή του x σε αυτό το διάστημα, η διαφορά $f(x+\Delta x) - f(x)$ γίνεται και παραμένει μικρότερη από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα για Δx επαρκώς μικρό, είτε θετικό είτε αρνητικό (Boyer, 1959). Ο Bolzano αναφέρει συγκεκριμένα ότι: «…η έκφραση ότι μια συνάρτηση f(x) μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του x μέσα ή έξω από κάποια δοσμένα όρια, δεν σημαίνει τίποτα άλλο παρά ότι: αν το

[26] Ο Boyer (1959) χρησιμοποιεί εδώ τον όρο spatial intuition

[27] Μια πολύ καλή μετάφραση στα Ελληνικά ολόκληρου του φυλλαδίου μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο Παράρτημα της Διπλωματικής Εργασίας της Καραγιαννίδου Ανδρομάχης. (2006). *Απαρχές της Αυστηρής Θεμελίωσης του Λογισμού, Lagrange – Bolzano – Cauchy*. Αθήνα. Επιβλέπων Καθηγητής: Γιαννακούλιας Ευστάθιος (Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών), στα πλαίσια του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών σπουδών 'ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ'.

x είναι κάποια τέτοια τιμή, η διαφορά f(x+ω) – f(x) μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, με την προϋπόθεση να πάρουμε το ω οσοδήποτε μικρό θέλουμε» (Russ, 1980; Edwards, 1979). Με άλλα λόγια και με σύγχρονη ορολογία, ο Bolzano λέει ότι μια συνάρτηση f(x) είναι συνεχής σε ένα διάστημα όταν $\lim_{\omega \to 0} f(x+\omega) = f(x)$ για κάθε x μέσα σε αυτό το διάστημα, ένας ορισμός καθ' όλα σύγχρονος και χωρίς ουσιαστικές διαφορές από αυτόν που όπως θα δούμε διατύπωσε λίγο αργότερα ο Cauchy (Edwards, 1979; Boyer, 1959).

Όπως είναι φυσικό όμως, η προσπάθεια αυστηρής θεμελίωσης της συνέχειας δεν ήταν πλήρης από τον Bolzano, και σε αυτό συνέβαλλε σε καθοριστικό βαθμό η ελλιπής κατανόηση που υπήρχε για τους πραγματικούς αριθμούς. Η ιδιότητα της πληρότητας έλειπε και θα έπρεπε να περιμένουμε μέχρι να έρθει ο Dedekind και ο Cantor για να έχουμε τη σημερινή μορφή του ορισμού (Edwards, 1979). Αυτό βέβαια δεν μειώνει την σημαντική συμβολή του Bolzano στην αυστηρή θεμελίωση του λογισμού. Σε μια εποχή που πολλοί μαθηματικοί συνέδεαν τη συνέχεια με την παραγωγισιμότητα, ο Bolzano πρώτος δίνει ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης συνεχούς αλλά πουθενά παραγωγίσιμης (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1974; Boyer, 1959). Δυστυχώς, η εργασία που περιελάμβανε το παραπάνω παράδειγμα αλλά και τα περισσότερα έργα του Bolzano έμειναν στην αφάνεια για πολλά χρόνια. Έτσι, αρκετές από τις ιδέες του χρειάστηκε να περάσουν αρκετά χρόνια για να 'ανακαλυφθούν' από την αρχή από τον Augustin Louis Cauchy (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1974).

Ο Cauchy γεννήθηκε το 1789 και από τα μαθητικά του χρόνια έδειξε την κλίση του στα μαθηματικά. Το 1805 μπαίνει στην Ecole Polytechnique δεύτερος σε σειρά κατάταξης και στη διάρκεια των σπουδών του επινοεί μια νέα αναλυτική λύση του προβλήματος του Απολλωνίου η οποία δημοσιεύεται σε πολλά γαλλικά συγγράμματα. Το 1816 γίνεται δεκτός στην Ακαδημία των Επιστημών και λίγο αργότερα καταλαμβάνει έδρα καθηγητού στην Ecole Polytechnique, στο College de France και στη Sorbonne, πράγμα που του έδωσε τη το κίνητρο για να γράψει αριστουργηματικά διδακτικά συγγράμματα ανάλυσης, άλγεβρας και λογισμού (Loria, 1974). Υπήρχε άλλωστε και μια παράδοση στην Ecole Polytechnique σύμφωνα με την οποία ακόμα και οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί δεν ήταν υπεράνω της συγγραφής εγχειριδίων για όλα

τα επίπεδα. Αυτό ήταν μόνο η αφορμή που χρειαζόταν ο Cauchy, ο οποίος λάτρευε τη διδασκαλία και τη συγγραφή για να παράγει ένα τρομακτικό όγκο κειμένων που όμοιό του μόνο στον Euler συναντούμε (Boyer – Merzbach, 1997; Loria, 1974). Γύρω στο 1833 τον συναντούμε στην Πράγα ως εκπαιδευτή του δούκα του Bordeaux και αυτό του δίνει την ευκαιρία να συγγράψει και άλλα σημαντικά έργα. Συναντήθηκαν ή όχι μεταξύ τους ο Cauchy με τον Bolzano; Είναι δύσκολο να απαντήσει κανείς αλλά η πλειονότητα των ιστορικών είναι μάλλον δύσπιστη απέναντι σε αυτή την προοπτική. Οι Grattan – Guinness (1970) θεωρούν ότι είναι τόσες πολλές οι ομοιότητες ανάμεσα στο έργο τους ώστε είναι αδύνατον να πιστέψει κανείς ότι δεν είχε επηρεαστεί ο Cauchy από το έργο του Bolzano. Ο Laugwitz παραθέτει στο έργο τους χωρίς όμως να δείχνει ότι συμμερίζεται τη γνώμη τους (Grattan – Guinness, 1994). Ο Edwards (1979) επίσης αναφέρει επιγραμματικά ότι ο Cauchy φαίνεται να αντέγραψε τον ορισμό της συνέχειας και των εφαρμογών που απορρέουν από αυτήν από το έργο του Bolzano και απλά παραπέμπει στο άρθρο των Grattan – Guinness (1970). Οι περισσότεροι όμως από τους άλλους ιστορικούς συμφωνούν ότι δεν φαίνεται να υπήρξε επαφή και ανταλλαγή απόψεων μεταξύ του Bolzano και του Cauchy, αν και οι δύο άνδρες εκείνη την περίοδο βρίσκονται στην ίδια πόλη (Boyer – Merzbach, 1997; Grabiner, 1981; Loria, 1974; Struik, 1966; Boyer, 1959).

Ο Cauchy ήταν υπέρμαχος της αυστηρότητας και σίγουρα του οφείλουμε τον τίτλο του θεμελιωτή του απειροστικού λογισμού με μια εντελώς αυστηρή μορφή και μάλιστα με βάση την έννοια του ορίου (Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Loria, 1974; Struik, 1966; Boyer, 1959). Είναι αξιοσημείωτο μάλιστα το γεγονός ότι η έννοια του ορίου διατυπώνεται με ένα τρόπο που αγγίζει τη σύγχρονη προσέγγιση [28]: «Όταν οι διαδοχικές τιμές που δίνουμε σε μια μεταβλητή πλησιάζουν απεριόριστα μια συγκεκριμένη τιμή, έτσι ώστε να διαφέρουν από αυτήν όσο λίγο εμείς θέλουμε, τότε αυτή η τελευταία ονομάζεται το όριο όλων των άλλων» (Boyer – Merzbach, 1997; Edwards, 1979). Επίσης, ενώ πολλοί προγενέστεροι μαθηματικοί είχαν θεωρήσει το απειροστό ως ένα πολύ μικρό *συγκεκριμένο* αριθμό, ο Cauchy το όρισε σαφώς ως μια

[28] Ελεύθερη μετάφραση από τον Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag, σελίδα 310. Η ίδια σχεδόν απόδοση υπάρχει στους Boyer, C. B., Merzbach, U. C. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού. (Πρωτότυπη έκδοση: 1989).

εξαρτημένη μεταβλητή:[29] «Θεωρούμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή, όταν η αριθμητική της τιμή ελαττώνεται απεριόριστα έτσι ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν» και σε ένα άλλο σημείο αναφέρει: «Το α θα λέγεται *απειροστό* όταν θα είναι μια μεταβλητή της οποίας η αριθμητική τιμή μειώνεται επ' άπειρον» (Boyer – Merzbach, 1997; Edwards, 1979). Παρόλο που ο Cauchy φαίνεται με την πρώτη ματιά να περιπλέκει την παρουσίασή του μιλώντας για απείρως μικρές ποσότητες χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των μεταβλητών μάλλον παρά των συναρτήσεων, είναι ξεκάθαρο ότι με τη λέξη *απειροστό* [*'un infiniment petit'* ή *'une quantite infiniment petit'* σύμφωνα με το κείμενο] αναφέρεται σε μια εξαρτημένη μεταβλητή ή συνάρτηση a(h) η οποία προσεγγίζει το 0 καθώς $h \to 0$. Έτσι τα απειροστά του Cauchy δεν είναι πια απειροελάχιστα μικρές *σταθερές* ποσότητες όπως πιστευόταν από τους περισσότερους μαθηματικούς μέχρι τότε, αντίληψη που είχε δημιουργήσει τόσο σύγχυση (Edwards, 1979).

Οι Boyer & Merzbach (1997) αναφέρουν και μια ενδιαφέρουσα εκδοχή για τον λόγο που ο Cauchy αποστρεφόταν τη γεωμετρική εποπτεία, αν και οι πρώτες του εργασίες ήταν σε γεωμετρικά θέματα. Από πολύ νωρίς ασχολήθηκε με τη μιγαδική ανάλυση και τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών συναρτήσεων. Τον 18^{ο} αιώνα είχαν παρουσιαστεί πολλά προβλήματα μιγαδικών μεταβλητών μέσα από τη φυσική του Euler και του d' Alembert και τώρα σιγά – σιγά είχαν γίνει τμήμα των θεωρητικών μαθηματικών. Εφόσον η ανεξάρτητη μιγαδική μεταβλητή χρειαζόταν δύο διαστάσεις για γραφική απεικόνιση, θα χρειαζόμασταν τέσσερις διαστάσεις για να απεικονίσουμε γραφικά μια συναρτησιακή σχέση της μορφής w=f(z). Άρα, κατ' ανάγκη, η θεωρία των μιγαδικών μεταβλητών απαιτεί μεγαλύτερο βαθμό αφαίρεσης και πολυπλοκότητας από τη μελέτη των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Για παράδειγμα, οι ορισμοί και οι κανόνες παραγώγισης δεν μεταφέρονται αυτούσιοι από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς και η παράγωγος στην περίπτωση των μιγαδικών δεν είναι πλέον η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης. Τώρα, χωρίς τη βοήθεια της οπτικής αναπαράστασης χρειάζονταν ακριβέστεροι και προσεκτικότεροι ορισμοί και ο Cauchy ήταν αυτός που ανέλαβε να φέρει σε πέρας αυτό το έργο.

[29] Ελεύθερη μετάφραση από τον Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag, σελίδα 310.

Η ανάγκη αυστηρής θεμελίωσης της συνέχειας έγινε ακόμα πιο επιτακτική με την αλλαγή της έννοιας της συνάρτησης. Κατά τον 18^{ο} αιώνα η λέξη συνάρτηση αναφερόταν σε αναλυτικές εκφράσεις που περιελάμβαναν μεταβλητές και σύμβολα, όπως οι πολυωνυμικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές και οι τριγωνομετρικές, δηλαδή συναρτήσεις με 'καλή' συμπεριφορά: να έχουν την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής και να δέχονται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο τους (Grabiner, 1981; Boyer, 1959). Το έργο του Fourier όμως έδειξε ότι ασυνεχείς καμπύλες μπορούν να παρασταθούν από άπειρες σειρές τριγωνομετρικών όρων. Αυτό διεύρυνε την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Boyer, 1959). Η μελέτη των συγγραμμάτων του Fourier και του Lagrange, είχε εφοδιάσει τον Cauchy με το απαραίτητο υπόβαθρο που χρειαζόταν να έχει για να κάνει τη μεγάλη ανατροπή στα μαθηματικά.

Στην εισαγωγή της εργασίας του για το ορισμένο ολοκλήρωμα, ο Cauchy παρατηρεί ότι το θεώρημα $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$, όπου $f(x) = F'(x)$, είναι αληθές «…μόνο στην περίπτωση μιας συνάρτησης που μεγαλώνει ή μικραίνει κατά συνεχή τρόπο μεταξύ των εν λόγω ορίων. Αν όταν η συνάρτηση αυξάνεται *απειροελάχιστα*, παρατηρούμε τη συνάρτηση να πηδάει απότομα από τη μία τιμή στην άλλη, η μεταβλητή παραμένει ανάμεσα στα όρια ολοκλήρωσης, οι διαφορές ανάμεσα σε κάθε ένα από τα απότομα άλματα που κάνει η συνάρτηση καθιστούν αναγκαίο μια διόρθωση» [30]. Η ορολογία που χρησιμοποιεί εδώ ο Cauchy προσομοιάζει αρκετά με αυτή του Arbogast, και χωρίς αμφιβολία φαίνεται σαν δήλωση που απαντά στη διαμάχη που είχε ξεσπάσει στα τέλη του 18^{ου} αιώνα (Grabiner, 1981). Η λέξη *απειροελάχιστα* επίσης, παραπέμπει στη αντίστοιχη λέξη που χρησιμοποιούσε ο Lagrange στις εργασίες του (Grabiner, 1981). Ο Cauchy εδώ δεν κάνει, τουλάχιστον ρητά, κάποια αναφορά στην έννοια της συνέχειας, με ότι περιελάμβανε ο όρος εκείνη την εποχή, αλλά ούτε και στην παραγωγισιμότητα. Για την ακρίβεια, θα λέγαμε ότι σε αυτήν την εργασία του 1814, δεν δίνει κάποιο ορισμό για τη συνεχή συνάρτηση· η ιδιότητα που χρειαζόταν εδώ ήταν απλά 'όχι άλματα' όταν στην απόδειξη που δίνει για το θεώρημα μέσης τιμής το

[30] Ελεύθερη μετάφραση από Grabiner, J.V. (1981). *The Origins of the Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, MA: MIT Press, σελίδα 93.

1821, όπως θα δούμε, απαιτεί μια ε-δ κατανόηση του ορισμού της συνέχειας (Grabiner, 1981).

Ο Cauchy σε αυτή την εργασία του 1814 δίνει ένα αλγεβρικό χαρακτηρισμό της ασυνέχειας σε σημείο. Μελετά την περίπτωση μιας συνάρτησης που «… περνά ξαφνικά από μια συγκεκριμένη τιμή σε μια άλλη που διαφέρει κατά μια αισθητή ποσότητα από την πρώτη» (Grabiner, 1981). Αν Φ(ζ) είναι η συνάρτηση, Z το σημείο, και ξ «μια πολύ μικρή ποσότητα», ο Cauchy περιγράφει την κατάσταση γράφοντας: $\Phi(Z+\xi)-\Phi(Z-\xi)=\Delta$. Ο χαρακτηρισμός του Cauchy για την ασυνέχεια είναι μια αλγεβρική μετάφραση της ιδιότητας του να παρουσιάζει άλμα. Παρόλο που δεν χρησιμοποιεί τη γλώσσα των ορίων εδώ, τεκμαίρεται πιθανώς ότι ήξερε, αντιλαμβανόταν ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει ένα άλμα στο σημείο Z αν το όριο, καθώς το ξ τείνει προς το 0, της ποσότητας $\Phi(Z+\xi)-\Phi(Z-\xi)$ *δεν* είναι μηδέν. Εφόσον ο Cauchy έχει ορίσει μια απείρως μικρή ποσότητα να είναι μια μεταβλητή της οποίας το όριο είναι το 0, η αλγεβρική κατανόηση της ασυνέχειας που βλέπουμε στην εργασία του 1814, είναι σύμμορφη με τον ορισμό που δίνει για τη συνέχεια το 1821 (Grabiner, 1981).

Ο Cauchy στο περίφημο έργο του *Cours d' analyse* και στο κεφάλαιο II, δίνει το 1821 τον ορισμό της συνέχειας μια συνάρτησης που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα:

> «…αν κάποιος προσδώσει στη μεταβλητή x μια απείρως μικρή αύξηση α, τότε για τη συνάρτηση για την αύξηση θα σχηματίζεται η διαφορά f(x+a)-f(x), η οποία εξαρτάται την ίδια στιγμή από τη μεταβλητή α και από την τιμή του x. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση f(x), η οποία κινείται μεταξύ των δύο ορίων του διαστήματος της μεταβλητής x [εννοεί τα άκρα του διαστήματος], θα καλείται ***συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x***, αν για κάθε τιμή του x μεταξύ αυτών των ορίων [των άκρων του διαστήματος] η αριθμητική τιμή της διαφοράς f(x+a)-f(x), μικραίνει επ' αόριστον μαζί με αυτήν του α. μ άλλα λόγια, η συνάρτηση f(x) θα παραμένει ***συνεχής*** *ως προς το x*, μεταξύ των δοσμένων ορίων [των άκρων του διαστήματος], αν μια απείρως μικρή αύξηση της μεταβλητής μεταξύ αυτών των ορίων παράγει πάντοτε μια απείρως μικρή αύξηση στην ίδια τη συνάρτηση.» (Grabiner, 1981; Edwards, 1979; Boyer, 1959).

Αν κάποιος παρατηρήσει μπορεί να δει ότι ο ορισμός που είχε διατυπώσει ανεξάρτητα ο Bolzano τέσσερα χρόνια νωρίτερα, αν και λίγο διαφορετικός και ίσως περισσότερο ακριβής, ουσιαστικά λέει ακριβώς το ίδιο πράγμα (Grabiner, 1981; Boyer, 1959). Είναι σημαντικό επίσης να τονίσουμε ότι ο Cauchy *δεν* αναφέρεται σε απειροελάχιστα μικρές σταθερές ποσότητες. Λέει απλά ότι η *μεταβλητή* f(x+a)-f(x) είναι μια απείρως μικρή ποσότητα καθώς το α είναι επίσης το ίδιο· δηλαδή ότι η ποσότητα f(x+a)-f(x) τείνει στο 0 καθώς κάνει το ίδιο και το α (Edwards, 1979). Σε αυτόν τον ορισμό έχουμε αντιστροφή της ιδέας που επικρατούσε μέχρι τότε. Ο Newton (υπόρρητα) και ο Leibniz είχαν στηρίξει το λογισμό σε μια εικασία που οι αρχαίοι Έλληνες είχαν προσπαθήσει με αγωνία να αποφύγουν, ότι μέσω μιας ασαφούς έννοιας συνέχειας, ενός *νόμου της συνέχειας*, προσεγγίζονταν οι οριακές διαδικασίες. Ο Cauchy όμως έρχεται να βάλει τα πράγματα στη θέση τους και ορίζει τη συνέχεια με τον ορθό μαθηματικό τρόπο, να ορίζεται δηλαδή με βάση το όριο και όχι το αντίστροφο. Επίσης ο ορισμός δεν στηρίζεται σε κάποια ασαφή και διαισθητική έννοια *γειτνίασης τμημάτων (contiguity)* αλλά σε μια συγκεκριμένη αριθμητική σχέση που αργότερα με την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών θα γινόταν ακόμα πιο στέρεη (Boyer, 1959).

Το επίτευγμα των Bolzano και Cauchy είχε τριπλή αξία. Κατ' αρχήν κατάφεραν να διακρίνουν το πόσο θεμελιώδης είναι η ιδιότητα της συνέχειας – θεμελιώδης διότι μέσω αυτής μπορούμε να αποδεικνύουμε και να θεμελιώνουμε άλλες σημαντικές ιδιότητες. Δεύτερον, από τη στιγμή που επελέγη η ιδιότητα της συνέχειας, αυτό τους έδωσε τη δυνατότητα να πάνε ακόμα παραπέρα και να ορίσουν τη συνέχεια μέσω ενός ορισμού ακριβούς και βασισμένου στις ανισότητες. Τέλος χρησιμοποίησαν τον ορισμό της συνέχειας ως βάση για την απόδειξη θεωρημάτων που αφορούσαν τις συνεχείς συναρτήσεις (Grabiner, 1981).

Βέβαια ο Cauchy δεν απέφυγε κάποια ουσιώδη λάθη που οφείλονταν στην έλλειψη ενός αυστηρού πλαισίου θεμελίωσης. Για παράδειγμα μετά τον ορισμό της συνέχειας πραγματεύεται τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Παρόλα αυτά σφάλλει όταν επιχειρεί να αποδείξει ότι μια συνάρτηση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής, καθώς εσφαλμένα θεωρεί ότι έχει αποδείξει ότι η f(x,y,z) είναι συνεχής ότι δηλαδή $\lim_{\alpha,\beta,\gamma\to 0} f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = f(x,y,z)$ θεωρώντας ότι η f είναι συνεχής σε κάθε μια

από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y, z (Edwards, 1979). Η γεωμετρική εποπτεία επίσης που επηρέαζε την θεώρηση του Cauchy για τους άρρητους αριθμούς τον οδήγησε λανθασμένα στην πεποίθηση ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης ήταν επαρκής για να έχουμε γεωμετρική αναπαράστασή της καθώς και παράγωγο. Πίστευε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγωγο εκτός ίσως από κάποια μεμονωμένα σημεία (Boyer, 1959). Ο Bolzano βέβαια είχε ήδη δείξει ότι αυτό ήταν εσφαλμένο αλλά τα γραπτά του είχαν μείνει στην αφάνεια και θα έπρεπε να περιμένουμε μέχρι να έρθει ο Weierstrass για να το κάνει αυτό ευρέως γνωστό.

Ο λογισμός του Newton και του Leibniz ήταν ένας λογισμός γεωμετρικών μεταβλητών, ποσοτήτων άμεσα συνδεδεμένων με γεωμετρικές καμπύλες, και μεγάλο μέρος της ανάλυσής τους στηριζόταν πάνω σε γεωμετρικές έννοιες διαισθητικά θεμελιωμένες. Αυτό όπως εξετάσαμε είχε άμεση επίδραση στην έννοια της συνέχειας η οποία είχε μια καθαρά γεωμετρική και διαισθητική σημασία. Ο Euler, ο Lagrange, ο Bolzano και ο Cauchy στη συνέχεια προσπάθησαν να αντικαταστήσουν τη γεωμετρική εποπτεία με αριθμητικές αρχές· είναι χαρακτηριστικό ότι ούτε μια γεωμετρική αναπαράσταση δεν εμφανίζεται στις εργασίες τους για τον απειροστικό λογισμό. Παρόλα αυτά, όλες οι παραπάνω προσπάθειες ήταν μόνο εν μέρει επιτυχείς και αυτό οφειλόταν κατά κύριο λόγο στην ελλιπή κατανόηση για τους πραγματικούς αριθμούς τους οποίους μέχρι τότε αντιμετώπιζαν διαισθητικά (Edwards, 1979). Μέχρι τον 17^{ο} αιώνα οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τους άρρητους αριθμούς με έναν άκριτο τρόπο χωρίς να αναρωτιούνται για την ακριβή τους υπόσταση και φύση, και στους αριθμητικούς υπολογισμούς στηρίζονταν στην υπόθεση ότι οι άρρητοι αριθμοί μπορούσαν να προσεγγιστούν από ρητούς (π.χ. $\sqrt{2}$ = 1,41421 …). Στην πραγματικότητα, υπέθεταν – χωρίς να ανησυχούν ιδιαίτερα για την αυστηρότητα – ότι οι άρρητοι αριθμοί υπάρχουν και υπακούν στους ίδιους αλγεβρικούς νόμους με αυτούς που υπακούν οι ρητοί (Edwards, 1979).

Με την έλλειψη πλήρους κατανόησης που υπήρχε για τους πραγματικούς αριθμούς, ήταν λογικό η θεμελίωση του λογισμού και ιδιαίτερα της έννοιας της συνέχειας να μην είναι όσο αυστηρή θα έπρεπε. Για παράδειγμα η απόδειξη των Bolzano – Cauchy για το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για τις συνεχείς συναρτήσεις απαιτούσε ‘την ιδιότητα

της φραγμένης μονότονης ακολουθίας', δηλαδή το λήμμα ότι κάθε φραγμένη είτε αύξουσα είτε φθίνουσα ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, είναι συγκλίνουσα. Η ίδια ιδιότητα για τους πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιείται για να καταδειχθεί η επάρκεια του κριτηρίου σύγκλισης Cauchy, και τεκμαίρεται επακριβώς και από τον Cauchy και από τον Riemann στις αποδείξεις τους για την ύπαρξη του ολοκληρώματος κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Όμως η ισχύς αυτής της βασικής πρότασης των πραγματικών αριθμών, δεν αποδεικνυόταν αλλά απλώς θεωρείτο αληθής με κριτήρια γεωμετρικής εποπτείας (Edwards, 1979).

Η έλλειψη κατανόησης για τους πραγματικούς αριθμούς είχε επηρεάσει φυσικά και την αντίληψη του Cauchy για τη συνέχεια. Μέχρι τον Cauchy η ανάλυση ασχολιόταν περισσότερο με αλγεβρικές παραστάσεις. Στην ανάλυση όμως που παρουσιάζει ο Cauchy το 1821 τα αντικείμενά του είναι πλέον μεταβλητές και θεμελιώδεις έννοιες γίνονται το όριο και η συνέχεια· η συνέχεια που για πρώτη φορά ορίζεται πιο ξεκάθαρα σε σχέση με το παρελθόν, αλλά όχι ακόμα τόσο ξεκάθαρα όσο χρειαζόταν (Grattan – Guinness, 1994). Θεωρώντας τη συνεχή μεταβλητή ως μια έννοια θεμελιώδη αλλά ακόμα λίγο ασαφή, ο Cauchy ουσιαστικά ακολουθούσε μια μακρά παράδοση της φιλοσοφίας και της φυσικής. Λίγο αργότερα όμως, και μάλλον ξεκινώντας από τους Abel και Dirichlet στη δεκαετία 1820' οι μεταβλητές βαθμιαία έχασαν το θεμελιώδη ρόλο που κατείχαν και κατ' ουσίαν μεταβλήθηκαν σε μια συνάθροιση αριθμών. Αυτή η διαδικασία έχει επικρατήσει (ιδιαίτερα μετά τον F. Klein) να αποκαλείται 'αριθμητικοποίηση της ανάλυσης' και τελικά οδήγησε στην ταξινόμηση των μεταβλητών σε σύνολα αριθμών ή σημείων (Grattan – Guinness, 1994). Προκειμένου να οδηγηθούμε σε αυτό το νέο επίπεδο κατανόησης, ήταν απαραίτητο να δημιουργηθούν διαφορετικά νοητικά πλαίσια. Αυτό το είχε ήδη διακρίνει ο Bolzano ο οποίος όταν εξέδωσε την εργασία του το 1817 στην οποία αποδεικνύει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις, αποπειράται να παρουσιάσει και μια θεωρία θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών στην οποία περιλαμβάνεται, σε πρωτολειακή μορφή, η ιδιότητα πληρότητας των πραγματικών αριθμών (Grattan – Guinness, 1994; Boyer – Merzbach, 1997; Loria 1974; Boyer, 1959). Ο Bolzano είχε τόσο πολύ συνειδητοποιήσει την ανάγκη για αυστηρότητα στην ανάλυση ώστε ο Klein τον αποκαλούσε «πατέρα της αριθμητικοποίησης» (Boyer –

Merzbach, 1997). Έτσι, στα μέσα του 19ου αιώνα οι περισσότεροι είναι ευχαριστημένοι με μια ασαφή έννοια συνεχούς μεταβλητής η οποία επιδέχεται πραγματικές τιμές, αναπαρίσταται από δεκαδικούς αριθμούς και πιθανόν επαυξανόταν από την έννοια του απειροστού (Grattan – Guinness, 1994). Τι θα σήμαινε όμως η συνέχεια μιας μεταβλητής ή μιας γραμμής; Η απάντηση θα δινόταν γύρω στο 1870 από τη Σχολή του Βερολίνου με πρωτοπόρο τον Weierstrass.

Ο Karl Weierstrass γεννήθηκε το 1815 στο Βερολίνο και ευτύχησε να μαθητεύσει δίπλα στον Gudermann ο οποίος του μετέδωσε την έμπνευση. Περίπου το 1855 διορίζεται καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου και στη συνέχεια ξεκίνησε μια λαμπρή ακαδημαϊκή καριέρα· μερικοί από τους επιφανέστερους μαθηματικούς της εποχής ήταν μαθητές του (Boyer – Merzbach, 1997; Loria 1974). Μέχρι τότε ήταν ευρύτατα αποδεκτό ότι μια συνάρτηση συνεχής ήταν σίγουρα παραγωγίσιμη εκτός ίσως από κάποια σημεία. Το 1861 όμως, ο Weierstrass στις διαλέξεις που δίνει, και αργότερα το 1872 στην Ακαδημία του Βερολίνου, παρουσιάζει ένα παράδειγμα μιας συνεχούς συνάρτησης αλλά πουθενά παραγωγίσιμης, παράδειγμα που όπως έχουμε δει πρώτος παρουσίασε ο Bolzano 50 χρόνια νωρίτερα αλλά έμεινε στην αφάνεια. Το παράδειγμα που χρησιμοποίησε ήταν η συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \pi x\right)$ όπου $x \in \mathbb{R}$, α περιττός ακέραιος, και b σταθερά με $b \in (0,1)$ έτσι ώστε $ab > 1+\frac{3\pi}{2}$ (Edwards, 1979; Boyer, 1959). Αυτό έδωσε ένα πρώτο δυνατό χτύπημα στη γεωμετρική διαίσθηση που είχαν για την έννοια της συνέχειας και κατέδειξε την ανάγκη επαναθεμελίωσης της ανάλυσης. Ο Weierstrass έβλεπε ότι η ανάλυση στο βάθος δεν είχε στέρεα θεμέλια και αντιλήφθηκε ότι έπρεπε να ενισχύσει το αριθμητικό πλαίσιό της και να το αποδεσμεύσει από τη γεωμετρική εποπτεία. Προς τούτο επινόησε μια νέα θεωρία ασύμμετρων αριθμών και οι μαθητές του έδωσαν μεγάλη δημοσιότητα στις θεωρίες του αυτές, το πνεύμα των οποίων ουσιαστικά συναντούμε λίγο αργότερα στη δουλειά των Dedekind και Cantor (Edwards, 1979; Loria, 1974). Η φήμη του Weierstrass είχε βασιστεί στην εξαιρετικά προσεκτική συλλογιστική του, που έμεινε στην ιστορία με τον τίτλο «αυστηρότητα του

Weierstrass». Ο Weierstrass αποτελούσε την κατεξοχήν μαθηματική συνείδηση, μεθοδολογικά και λογικά (Struik, 1966).

Το έτος 1872 ήταν ένα πολύ σημαντικό έτος για την ανάλυση. Πέντε μαθηματικοί, ένας Γάλλος και οι υπόλοιποι Γερμανοί, προώθησαν ιδιαίτερα την αριθμητικοποίηση της ανάλυσης. Ο Γάλλος ήταν ο Meray· οι υπόλοιποι ήταν ο Weierstrass, ο Heine, ο Cantor και ο Dedekind (Boyer – Merzbach, 1997). Όλοι οι παραπάνω κατά μια έννοια αντιπροσώπευαν το εντυπωσιακό τέλος μισού αιώνα αναζήτησης της φύσης της συνάρτησης και του αριθμού, η οποία είχε αρχίσει στα 1822 με τη θεωρία της θερμότητας του Fourier. Σε αυτό το διάστημα των 50 ετών υπήρξαν δύο κύριες αιτίες ανησυχίας. Η μία ήταν η έλλειψη εμπιστοσύνης στις πράξεις των απειροσειρών. Δεν ήταν καν σαφές αν μια απειροσειρά συναρτήσεων – δυνάμεων ή ημιτόνων και συνημιτόνων, για παράδειγμα – συγκλίνει πάντοτε στη συνάρτηση από την οποία προέκυψε. Μια δεύτερη πηγή ανησυχίας ήταν η έλλειψη κάποιου ορισμού για την έννοια ‘πραγματικός αριθμός’, έννοια που βρισκόταν στην καρδιά του προγράμματος αριθμητικοποίησης. Η πλήρης αριθμητικοποίηση της ανάλυσης έγινε δυνατή μόνο όταν, όπως προέβλεψε ο Hankel, οι μαθηματικοί κατάλαβαν ότι οι πραγματικοί αριθμοί πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ‘νοητικά κατασκευάσματα’ και όχι ως διαισθητικά δεδομένα μεγέθη κληρονομιά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας· και αυτό έγινε από την πεντάδα των μαθηματικών που αναφέραμε (Boyer – Merzbach, 1997).

Οι Bolzano και Cauchy είχαν προσπαθήσει να αποδείξουν ότι μια ακολουθία ‘συγκλίνει μέσα στον εαυτό της’, με άλλα λόγια, μια ακολουθία για την οποία το S_{n+p} διαφέρει από το S_n λιγότερο από ένα δεδομένο μέγεθος ε (για ένα δεδομένο ακέραιο p και για n επαρκώς μεγάλο), τότε αυτή συγκλίνει προς ένα πραγματικό αριθμό S, που είναι το όριο μιας ακολουθίας. Ο Meray σε μια εργασία του το 1872, έκοψε τον γόρδιο δεσμό, μη επικαλούμενος την εξωτερική συνθήκη της σύγκλισης ή του πραγματικού αριθμού S και ανάπτυξε μια θεωρία πραγματικών αριθμών που προσομοίαζε με αυτήν που ανέπτυξε την ίδια περίοδο ο Weierstrass ο οποίος θέλησε να διαχωρίσει τον απειροστικό λογισμό από τη γεωμετρία και να τον βασίσει μόνο στην έννοια του αριθμού (Boyer – Merzbach, 1997; Boyer, 1959). Όπως και ο Meray, διαπίστωσε ότι για να πετύχει κάτι τέτοιο ήταν αναγκαίο να ορίσει τους άρρητους

αριθμούς, ανεξάρτητα από την έννοια του ορίου. Ο Weierstrass, στην προσπάθειά του να διορθώσει το λογικό λάθος του Cauchy διευθέτησε το πρόβλημα της ύπαρξης ενός ορίου μιας συγκλίνουσας ακολουθίας, θεωρώντας την ίδια την ακολουθία ως τον αριθμό ή το όριο. Ορίζει επίσης τους άρρητους ως σύνολα ρητών αντί για διατεταγμένες ακολουθίες ρητών. Οι μαθητές του Weierstrass, Lindemann και Heine ήταν αυτοί οι οποίοι παρακολουθούσαν τις διαλέξεις του και γνωστοποίησαν τα αποτελέσματά του στο ευρύ κοινό (Boyer – Merzbach, 1997; Boyer, 1959).

Θέλοντας επίσης ο Weierstrass να κάνει τα θεμέλια του λογισμού πιο στέρεα και αυστηρά στρέφεται εναντίον της διαισθητικής άποψης περί συνεχούς κίνησης όπως αυτή εμφανίζεται στις ιδέες του Cauchy όταν λέει ότι η μεταβλητή *προσεγγίζει* το όριο, παρόλο που ο Cauchy είχε αντιληφθεί ότι η μεταβλητή αντιπροσώπευε μια σταθερή ποσότητα (Boyer, 1959). Έτσι ορίζει τη *συνεχή μεταβλητή* με ΄στατική ορολογία': «Αν για κάθε τιμή x_0 από ένα σύνολο και για κάθε ακολουθία θετικών αριθμών $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, οσοδήποτε μικρών, υπάρχουν στα διαστήματα $x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i$ [και] άλλοι από το σύνολο, τότε αυτή [η τιμή x_0] καλείται *συνεχής*»[31]. Με όμοιο τρόπο, ο Weierstrass δίνει έναν ορισμό για τη συνεχή συνάρτηση ισοδύναμο προς αυτό των Bolzano και Cauchy ο οποίος όμως χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη σαφήνεια και ακρίβεια. Μέχρι τότε, για να πουν ότι η ποσότητα $f(x+\Delta x) - f(x)$ γίνεται απειροστή, δηλαδή ότι γίνεται και παραμένει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα, καθώς το Δx προσεγγίζει το 0, έπρεπε να χρησιμοποιήσουν όρους που παρέπεμπαν σε κάτι *απειροελάχιστα μικρό* ή σε άλλες ασαφείς ιδέες κίνησης (Boyer, 1959). Ο Weierstrass όμως, δίνει τον ορισμό ότι:

> «μια συνάρτηση f(x) είναι **συνεχής**, με το x να κινείται σε ένα συγκεκριμένο διάστημα, αν για κάθε τιμή x_0 σε αυτό το διάστημα και για κάθε οσοδήποτε μικρή θετική ποσότητα ε, μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα γύρω από το x_0 έτσι ώστε για κάθε τιμή σε αυτό το διάστημα, η διαφορά $f(x)-f(x_0)$ γίνεται κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη από το ε » (Boyer, 1959).

Ο Heine ο οποίος παρακολουθούσε τις διαλέξεις του Weierstrass το 1861, δίνει και την ισοδύναμη εκδοχή ότι η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής, αν για κάθε οσοδήποτε

[31] ελεύθερη μετάφραση από Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* (1959). New York: Dover Publications, Inc, σελίδα 286.

μικρή θετική ποσότητα ε, μπορούμε να βρούμε ένα η_o έτσι ώστε για κάθε $\eta<\eta_o$, η διαφορά f(x+η)-f(x) γίνεται κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη από το ε (Boyer, 1959).
Οι Grattan – Guinness (1994) αποδίδουν τον ορισμό ως εξής:

> «αν μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα φράγμα δ για τα h έτσι ώστε, για όλα τα $|h|<\delta$, [η διαφορά] $|f(x+h)-f(x)|$ να είναι μικρότερη από μια δοσμένη οσοδήποτε μικρή ποσότητα ε, τότε λέμε ότι απειροελάχιστα μικρές μεταβολές στη μεταβλητή παράγουν απειροελάχιστα μικρές μεταβολές στο όρισμα».
> Αν το παραπάνω ισχύει για κάθε (σταθερό) x, τότε η f(x) είναι συνεχής κατά σημείο.

Αν επιπλέον το ε δεν εξαρτάται από το x τότε, λέει ο Weierstrass, η f(x) είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ο Cauchy και οι υπόλοιποι είχαν χρησιμοποιήσει τα ε και δ αλλά μόνο περιστασιακά ως εργαλεία. Ο Weierstrass όμως τα μετέτρεψε σε βασικό στοιχείο των αυστηρών ορισμών και θεωρημάτων με τον ίδιο τρόπο που τα χρησιμοποιούμε σήμερα (Grattan – Guinness, 1994). Η έννοια της συνέχειας είχε πάρει πλέον την τελική της μορφή και το ταξίδι στο συνεχές και το άπειρο έφτανε στο τέλος του (;).

Ο Weierstrass και οι μαθητές του απέδειξαν στη συνέχεια κάποια λήμματα τα οποία θεωρούνταν απλώς δεδομένα από τον Cauchy, αλλά και αργότερα από τους Dirichlet και Riemann στη δεκαετία 1850'· μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής, είναι φραγμένη και παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Ο Weierstrass όπως και ο Cauchy έδειξε την προτίμησή του για τις συνεχείς συναρτήσεις. Το 1886, λίγο πριν ολοκληρώσει μια λαμπρή καριέρα πανεπιστημιακού δασκάλου, με ιδιαίτερο ενθουσιασμό παρουσίασε το περίφημο προσεγγιστικό του θεώρημα: μια συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα, είναι ίση με μια ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά πολυωνύμων (Grattan – Guinness, 1994).

Η *αναζήτηση του συνεχούς* ολοκληρώθηκε με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τους Dedekind και Cantor το 1872. Με τον όρο «συνεχές» εκφραζόταν εκείνη την εποχή αυτό που σήμερα λέμε «σύνολο των πραγματικών αριθμών». Την εποχή εκείνη γενικά ήταν αποδεκτό από τη μαθηματική κοινότητα ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη φυσική του διάταξη είναι ένα συνεχές σύνολο (δηλαδή ένα πυκνό

σύνολο που δεν παρουσιάζει χάσματα) ισοδύναμο με το σύνολο των σημείων μιας ευθείας. Μέχρι εκείνη την εποχή δεν είχαν κατασκευαστεί αριθμητικά οι πραγματικοί αριθμοί. Στόχος του Dedekind ήταν να εκφράσει με αριθμούς την πληρότητα – δηλαδή τη συνέχεια της ευθείας γραμμής. Μέχρι τότε η εισαγωγή των άρρητων αριθμών βασιζόταν συνήθως στην αντίληψη των *εκτεταμένων μεγεθών* (extensive magnitudes) (Boyer, 1959). Ο Dedekind ορίζει τους άρρητους αριθμούς ως τομές ακολουθώντας έναν τρόπο ταυτόσημο με αυτόν που έδωσε ο Εύδοξος για την αναλογία λόγων γεωμετρικών μεγεθών (Edwards, 1979; Boyer, 1959). Χωρίζει όλα τα σημεία της ευθείας γραμμής σε δύο τάξεις ώστε κάθε σημείο της πρώτης τάξης να είναι στα αριστερά κάθε σημείου της δεύτερης τάξης· τότε υπάρχει ένα και μόνο σημείο το οποίο να επιτυγχάνει αυτόν τον καταμερισμό των σημείων σε δύο τάξεις. Αυτό το σημείο είναι ένας πραγματικός αριθμός, μια τομή Dedekind (Rudin, 2000). Η αλγεβρική δομή των πραγματικών αριθμών και αυτή των ρητών είναι συμβατές μεταξύ τους, και σε σχέση με τη διάταξη. Η βασική πρόταση που διαχωρίζει τη δομή $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ από τη δομή $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, είναι η ιδιότητα της πληρότητας ή συνέχειας: κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα. Ο Dedekind έχοντας κατά νου το *διαισθητικό συνεχές* της ευθείας γραμμής, κατασκεύασε το αντίστοιχο *μαθηματικό συνεχές*, δηλαδή το σύνολο των πραγματικών αριθμών ξεκαθαρίζοντας πλέον ότι οι δυο έννοιες είναι μεταξύ τους ισόμορφες (Rudin, 2000).

Η προσέγγιση του Cantor για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών από την άλλη πλευρά, στηριζόταν στην ιδέα ότι ένας πραγματικός αριθμός α είναι το όριο μιας ακολουθίας $\{a_n\}_1^\infty$ ρητών αριθμών. Σε πιο μοντέρνα γλώσσα η κατασκευή του Cantor ισοδυναμεί με το ορίσουμε το σύνολο R ως το σύνολο όλων των ισοδύναμων κλάσεων των βασικών ακολουθιών των ρητών αριθμών (Edwards, 1979, Boyer, 1959). Και αυτή η κατασκευή επιτρέπει την αυστηρή θεμελίωση της ιδιότητας της πληρότητας ή συνέχειας που παίζει ένα καθοριστικό ρόλο στον απειροστικό λογισμό.

Με την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, έγινε το τελευταίο βήμα που χρειαζόταν για να εδραιωθεί πλήρως και αυστηρά η έννοια της συνέχειας και να ολοκληρωθεί μια πορεία χιλιάδων ετών αναζήτησης και εμπλοκής με τις έννοιες του *συνεχούς* και του *απείρου*. Με τον ε-δ ορισμό του ορίου που δόθηκε από τον

Weierstrass στα τέλη του 19^{ου} αιώνα αφαιρέθηκε η γεωμετρικής υφής αναφορά στο όριο ως συνεχής κίνηση και έγινε πιο στέρεη και απαλλαγμένη από τη διαίσθηση ο ορισμός της συνέχειας κατά σημείο (Edwards, 1979; Boyer, 1959).

ΜΕΡΟΣ Β

Η ΕΡΕΥΝΑ

Ι. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Περίληψη

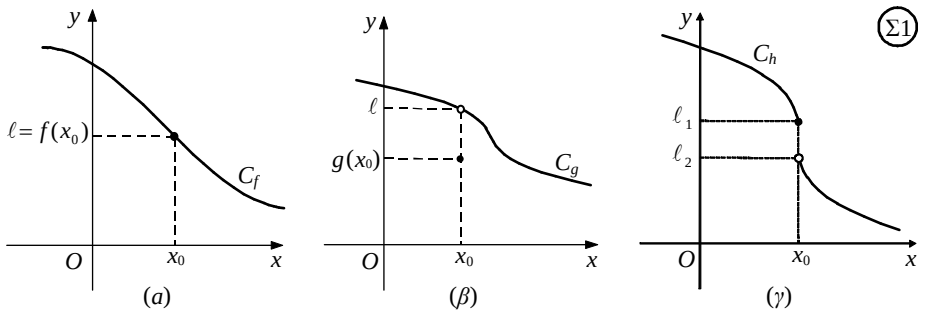
Η έννοια της συνέχειας είναι κεντρική για τα μαθηματικά. Παίζει βασικό ρόλο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Γ΄ Λυκείου, στις κατευθύνσεις Τεχνολογική και Θετική, στο Μαθηματικό Τμήμα αλλά και σε συναφή πανεπιστημιακά τμήματα. Διεθνείς και Ελληνικές έρευνες έχουν δείξει ότι παρά την έμφαση που δίνεται στη διδασκαλία της, υπάρχει έλλειψη ακριβούς γνώσης εκ μέρους των μαθητών αλλά και των φοιτητών. Η έρευνα αυτή έχει σκοπό τη μελέτη μέσα από διάφορα θεωρητικά πλαίσια, των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος στην κατανόηση της έννοιας της συνέχειας.

Διατύπωση του προβλήματος

Ο ορισμός της συνέχειας στη Γ΄ Λυκείου

Η έννοια της συνέχειας είναι μια έννοια που παραδοσιακά διδάσκεται στη Γ΄ Λυκείου στο Ελληνικό πρόγραμμα σπουδών, συνήθως μετά την αναλυτική παρουσίαση του ορίου. Στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Μέτη, Μπρουχούτα, Παπασταυρίδη & Πολύζου (2007), το οποίο χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών κατεύθυνσης στη Γ΄ Λυκείου κατά τα τελευταία 9 χρόνια, η συνέχεια παρουσιάζεται στο Β΄ Μέρος (Ανάλυση) στην ενότητα 1.8 αφού προηγουμένως στις ενότητες 1.4 – 1.7 έχει παρουσιαστεί αναλυτικά η έννοια του ορίου, οι ιδιότητές του και αρκετές εφαρμογές. Σημειώνουμε ότι η έννοια του ορίου δίδεται στους μαθητές του Λυκείου μόνο περιγραφικά αφού ο ε-δ ορισμός αν και αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο, είναι εκτός ύλης κι έτσι δεν διδάσκεται.

Ο ορισμός της κατά σημείο συνέχειας εισάγεται μέσω κάποιων γραφημάτων αρχικά, τα οποία οδηγούν στον ορισμό. Παρουσιάζονται οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός:

> Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
> Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Κατόπιν, ακολουθεί ανάλυση του πότε μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής, παραδείγματα συνεχών και μη συναρτήσεων, επέκταση του ορισμού της σημειακής συνέχειας σε όλο το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, πράξεις ανάμεσα σε συνεχείς συναρτήσεις και το θεώρημα σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων. Μετά ακολουθεί μια μάλλον αμφισβητούμενη παράγραφος την οποία παραθέτουμε αυτούσια από το σχολικό βιβλίο:

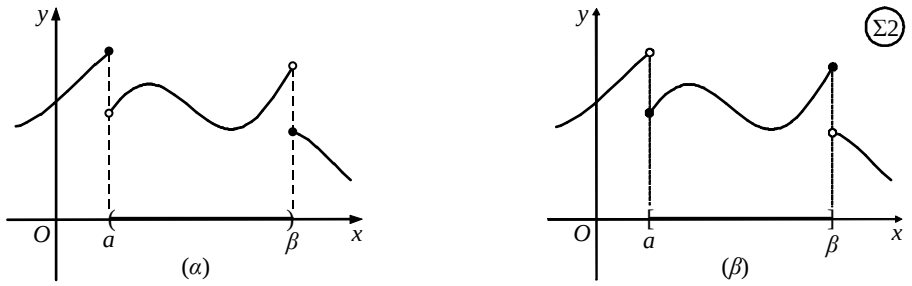
Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

Πολλά από τα θεωρήματα της Ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως, απαραίτητο να γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β). (Σχ. 2α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\text{Σχ. } 2\beta)$$



Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

Αυτή η παράγραφος αν και θεωρητικά είναι σωστή και απαντάται σε έγκυρα βιβλία Απειροστικού Λογισμού [32], παρόλα αυτά όπως θα φανεί στην έρευνα που ακολουθεί, φαίνεται να δημιουργεί στους μαθητές – φοιτητές περισσότερα προβλήματα από όσα προσπαθεί να λύσει.

Η ενότητα αυτή του σχολικού βιβλίου ολοκληρώνεται με την παράθεση των βασικών θεωρημάτων της συνέχειας, του θεωρήματος Bolzano, του θεωρήματος Ενδιάμεσων τιμών, του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής καθώς και μιας πρότασης εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης γνησίως μονότονης και συνεχούς σε ένα διάστημα.

Η όλη παρουσίαση της ενότητας στο σχολικό βιβλίο κρύβει από πίσω της μια 'αλγοριθμική' λογική. Δεν δίνεται κάποια έμφαση στην κατανόηση του ορισμό της συνέχειας και τα παιδιά δεν μπορούν να διαβάσουν 'πίσω και κάτω από τον ορισμό', κάτι που έχει βέβαια ξεκινήσει νωρίτερα, από τον κεντρικό ορισμό του ορίου (Knapp & Oehrtman, 2005). Από την αρχή της ενότητας, λίγο πριν δοθεί ο ορισμός της συνέχειας κατά σημείο, υπάρχει στο σχολικό βιβλίο η φράση: «Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος [βλέπε Σ1 σελίδα 52] μόνο η γραφική παράσταση της f δεν διακόπτεται στο x_o. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_o** μόνο τη συνάρτηση f ». Η παραπάνω φράση που αναφέρεται στη σημειακή συνέχεια, αβίαστα και εντελώς λανθασμένα μεταφράζεται στο μυαλό των μαθητών και ορισμένων καθηγητών στη φράση: συνεχής *γενικά*, είναι μια συνάρτηση που δεν διακόπτεται (Mastorides & Zachariades, 2004; Hitt & Lara, 1999; Pinto & Gray, 1995). Η παρανόηση αυτή όπως θα φανεί στην έρευνα, συνοδεύει τους μαθητές και τους φοιτητές για πολλά χρόνια και σε κάποιους δεν αναιρείται ποτέ. Οι ασκήσεις που

[32] Βλέπε για παράδειγμα M. Spivak, (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός – Μια Εισαγωγή στην Ανάλυση*. Π.Ε.Κ., σελίδα 93

υπάρχουν στην ενότητα 1.8 στο σχολικό βιβλίο δείχνουν ξεκάθαρα το στόχο των συγγραφέων: υπάρχει μόνο μια άσκηση με γραφικές παραστάσεις ενώ όλες οι υπόλοιπες είναι υπολογιστικές – αλγοριθμικές. Οι μαθητές σύντομα μαθαίνουν να απαντούν στις ασκήσεις αυτές αλλά χωρίς να έχουν επαρκή κατανόηση. Τις περισσότερες φορές μαθαίνουν να χειρίζονται με επιτυχία ασκήσεις με την ίδια μορφή αλλά αδυνατούν να χειριστούν εναλλακτικές μορφές και αυτό παρατηρείται ακόμα και στο χώρο του πανεπιστημίου (Tall, 1990d). Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της Sfard (1991), οι μαθητές παραμένουν στη *λειτουργική έννοια* (operational conception) των μαθηματικών αντικειμένων που χειρίζονται, και δεν περνούν στη *δομική έννοια* (structural conception).

Ο ορισμός της συνέχειας στο Πανεπιστήμιο

Η παρούσα έρευνα έγινε στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, έτσι τα σχόλια που θα γίνουν αναφέρονται στο συγκεκριμένο τμήμα. Η έννοια της συνέχειας διδάσκεται για πρώτη φορά στους φοιτητές στα πλαίσια του μαθήματος 'Απειροστικός Λογισμός Ι' στο α΄ εξάμηνο σπουδών. Ως διδακτικό σύγγραμμα χρησιμοποιείται το βιβλίο *Απειροστικός Λογισμός Ι* των Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλου και Γιαννακούλια, εκδόσεις Συμμετρία (1987). Το συγκεκριμένο βιβλίο μπορεί να χαρακτηρισθεί ως ένα εγχειρίδιο διδασκαλίας αδιαμφισβήτητης επιστημονικής αξίας, που όμως δεν μπορεί να πάρει τον τίτλο του εγχειριδίου *μάθησης*. Είναι γραμμένο πριν από 25 περίπου χρόνια και έχει ένα καθαρά φορμαλιστικό ύφος απευθυνόμενο σε πρωτοετείς που έχουν ήδη ένα αρκετά υψηλό επίπεδο μαθηματικής ωριμότητας. Υπάρχει ένα τεράστιο χάσμα ανάμεσα στο βιβλίο μαθηματικών κατεύθυνσης που διδάσκεται στη Γ΄ Λυκείου και στο βιβλίο που χρησιμοποιείται στο πρώτο έτος του Πανεπιστημίου. Παρά τις φιλότιμες προσπάθειες που καταβάλλουν οι καθηγητές στο πανεπιστήμιο να διδάξουν την ύλη με τρόπο κατανοητό στους φοιτητές, είναι σίγουρο ότι πρέπει να υπάρξει και ένα βοηθητικό σύγγραμμα.

Ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια της συνέχειας στο βιβλίο του *Απειροστικού Λογισμού* είναι τελείως διαφορετικός από αυτόν που οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο Λύκειο και αυτό από μόνο του δημιουργεί αρκετά προβλήματα. Στο Λύκειο οι μαθητές μαθαίνουν την έννοια του ορίου και ύστερα ακολουθεί η συνέχεια η οποία

εισάγεται μέσω του ορίου με τον τρόπο που είδαμε στις σελίδες 51-53. Στο Πανεπιστήμιο η παρουσίαση γίνεται συνακόλουθα με την ιστορική εξέλιξη των εννοιών. Η συνέχεια παρουσιάζεται στο 8ο κεφάλαιο μέσω του ε-δ ορισμού, ακολουθεί στο 9ο κεφάλαιο η ομοιόμορφη συνέχεια, τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων στο κεφάλαιο 10, η ολοκλήρωση κατά Riemann στα κεφάλαια 11-15 και αρκετά μετά, στο 16ο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του ορίου. Ο ορισμός της συνέχειας που υπάρχει στο βιβλίο του πανεπιστημίου είναι:

8.1. Ορισμός. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Στον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι η συνέχεια μελετάται σε σημείο του πεδίου ορισμού μια συνάρτησης. Διαισθητικά αυτός ο ορισμός μας λέει ότι ***οι τιμές f(x) είναι οσοδήποτε κοντά στο f(x_o) όταν το x είναι κατάλληλα κοντά στο x_o***. Παρατηρούμε ότι στην ειδική περίπτωση του ορίου, η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σημείο x_o και η οριακή τιμή της f καθώς το x τείνει στο x_o είναι η τιμή f(x_o). Ο ορισμός όμως του ορίου συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_o, έχει μια μεγαλύτερη γενικότητα: η συνάρτηση f δεν είναι κατ' ανάγκη ορισμένη στο σημείο x_o στο οποίο λαμβάνεται το όριο, και η οριακή τιμή δεν είναι κατ' ανάγκη f(x_o) έστω κι αν η f ορίζεται στο x_o. Η γενίκευση αυτή, είναι δυνατόν να ορισθεί μόνο για σημεία που είναι σημεία συσσώρευσης του συνόλου ορισμού της f. Έτσι, αρχικά δίνεται στο κεφάλαιο 16 ο ορισμός του σημείου συσσώρευσης:

16.1. Ορισμός. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Το x είναι ένα *σημείο συσσώρευσης* του X αν $(x - \delta, x + \delta) - \{x\} \neq \varnothing$ για κάθε δ>0.

Ακολουθούν κάποιες προτάσεις που αφορούν τα σημεία συσσώρευσης καθώς και τα μεμονωμένα σημεία και μετά υπάρχει ο επόμενος ορισμός:

16.7. Ορισμός. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, x_o σημείο συσσώρευσης του X, και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Το *όριο της f καθώς το x τείνει στο x_o υπάρχει και είναι ίσο με α*

αν η συνάρτηση $\phi : X \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & \alpha\nu\ x \neq x_0 \\ a, & \alpha\nu\ x = x_0 \end{cases}$$ είναι συνεχής στο x_o.

Λέμε τότε ότι η συνάρτηση f *τείνει στο α καθώς το x τείνει στο x_o.*

Στη συνέχεια ακολουθεί η πρόταση 16.9 που συνδέει τον προηγούμενο ορισμό, με τον γνωστό ε-δ ορισμό του ορίου. Η παρακάτω πρόταση αποτελεί τον 'πανεπιστημιακό' ε-δ ορισμό του ορίου:

16.9. Πρόταση. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, x_o σημείο συσσώρευσης του X, και $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_o είναι το α

(ii) Για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε

για $x \in X$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Ένα βασικό ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό είναι αν οι δύο ορισμοί, ο σχολικός και ο 'πανεπιστημιακός' είναι ισοδύναμοι. Ας δούμε λίγο αυτό το θέμα καθώς αποτέλεσε σημαντικό ερώτημα στην παρούσα έρευνα.

Στο Λύκειο οι μαθητές μαθαίνουν ότι η f είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x_0}$, όπου $\boldsymbol{x_0}$ σημείο του πεδίου ορισμού της, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Στο πανεπιστήμιο οι φοιτητές, μόλις 6 μήνες αργότερα, μαθαίνουν ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Αρχικά θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι στο Λύκειο οι μαθητές εργάζονται σε συναρτήσεις ορισμένες αποκλειστικά σε διάστημα ή σε ένωση διαστημάτων [33]. Άρα κάθε σημείο της κλειστότητας ενός πεδίου ορισμού (με την έννοια που έχει ο όρος στα σχολικά μαθηματικά) είναι και ένα σημείο συσσώρευσης. Με αυτή την προϋπόθεση οι

[33] βλέπε Ανδρεαδάκης, Α., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., και Πολύζος, Γ. (2007). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου* (έκδοση 2007). ΟΕΔΒ, σελίδα 133.

δυο ορισμοί είναι απόλυτα ισοδύναμοι. Πράγματι, μεταφράζοντας την εξίσωση $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ με τον ορισμό του ορίου έχουμε:

Για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε για $x \in X$ και

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Τώρα το επιπλέον σημείο είναι το x_o και η φράση $0 < |x - x_0| < \delta$

μπορεί να μετατραπεί στην $|x - x_0| < \delta$ αφού για $x=x_o$ έχουμε ότι

$|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Κατά συνέπεια, για τα σημεία συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μια συνάρτησης, οι δυο ορισμοί είναι απολύτως ισοδύναμοι.

Αντίθετα στο πανεπιστήμιο το Χ είναι απλά ένα σύνολο, κάτι γενικότερο από το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων με σημαντικότερη διαφορά την ύπαρξη μεμονωμένων σημείων. Αν τώρα το x_o είναι ένα μεμονωμένο σημείο του Χ, τότε:

x_o μεμονωμένο σημείο, άρα το x_o δεν είναι σημείο συσσώρευσης, άρα:

$\exists \ \delta_1 > 0 : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap \mathrm{A} = \{x_0\}$.

Άρα αν πάρουμε ε>0, υπάρχει $\delta=\delta_1>0$ έτσι ώστε

$\forall \ x \in X$ με $0 = |x - x_0| < \delta_1$ να ισχύει $0 = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$

Άρα σε κάθε μεμονωμένο σημείο μια συνάρτηση είναι συνεχής και θα μπορούσαμε να πούμε ότι και εδώ *τετριμμένα* και μάλλον *καταχρηστικά* ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ αν και βέβαια δεν έχει νόημα να αναφερόμαστε σε *όριο* όταν κάνουμε λόγο για μεμονωμένα σημεία.

Συνέχεια και συνεκτικότητα

Ένα σημαντικό πρόβλημα που απαντάται κατά τη μελέτη της συνέχειας είναι ότι ενίοτε αυτή συγχέεται με τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Συχνά αναφέρεται η φράση ‘συνεχής είναι μια συνάρτηση όταν το γράφημά της δεν διακόπτεται’. Πόσο σωστή είναι η φράση αυτή; Ας εξετάσουμε λίγο πιο αναλυτικά το θέμα αυτό. Θα παραθέσουμε στη συνέχεια κάποιους απαραίτητους ορισμούς και ορισμένες προτάσεις που θα μας βοηθήσουν να καταλήξουμε σε ασφαλή συμπεράσματα.

Ορισμός 1.

Έστω συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Γράφημα** της συνάρτησης f ονομάζεται το σύνολο $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Γενικότερα, αν X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μια συνάρτηση, τότε το σύνολο $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ είναι ένα **γράφημα.**

Ορισμός 2.

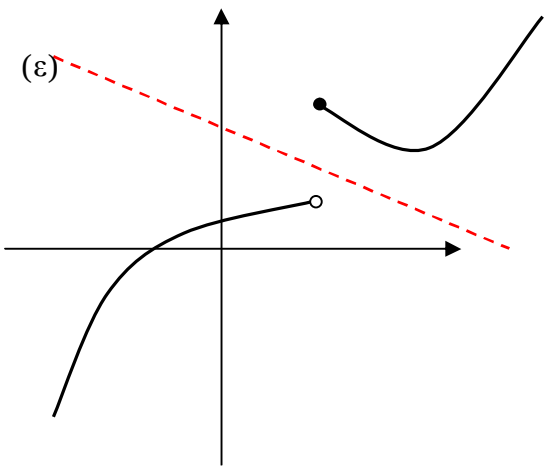
Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται ***συνεκτικός*** αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, ανοικτά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα G_1, G_2 του X, ώστε $X = G_1 \cup G_2$. (Δηλαδή αν δεν υπάρχουν G_1, G_2 ανοιχτά, μη κενά, υποσύνολα του X έτσι ώστε: $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, και $X = G_1 \cup G_2$)

Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου είναι συνεκτικό αν είναι συνεκτικός χώρος στη σχετική τοπολογία. Άρα:

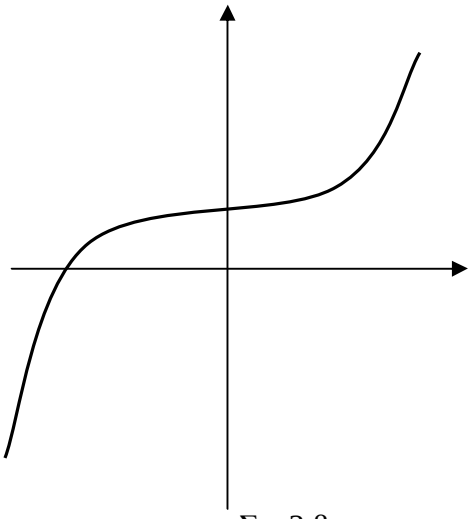
Ορισμός 3.

Έστω X τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq A \subset X$. Το A θα λέγεται **συνεκτικό** υποσύνολο του X αν και μόνο αν *δεν* υπάρχουν G_1, G_2 ανοιχτά υποσύνολα του X έτσι ώστε $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 \cap A \neq \varnothing$, $G_2 \cap A \neq \varnothing$ και $A \subseteq G_1 \cup G_2$.

Με βάση τώρα τα παραπάνω, πότε ένα γράφημα μιας συνάρτησης είναι ένα συνεκτικό σύνολο; Ας δούμε τα επόμενα δύο γραφήματα:



Σχ. 3.α



Σχ. 3.β

Όπως μπορούμε να δούμε, στο Σχήμα 3.α παρουσιάζεται ένα *μη* συνεκτικό γράφημα. Πράγματι, αν φέρω μια ευθεία όπως η (ε), τότε δημιουργούνται δυο σύνολα G_1 και G_2 που να ικανοποιούν τον παραπάνω ορισμό. Αντίθετα, στο Σχήμα 3.β έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα καθώς δε μπορούμε να βρούμε κατάλληλα σύνολα G_1 και G_2 που να ικανοποιούν τον ορισμό.

Παραθέτουμε τώρα χωρίς απόδειξη μερικές χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 1.

Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq \beta$ το κλειστό διάστημα [α, β] είναι συνεκτικό.

Πρόταση 2.

Έστω Χ τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο Χ είναι συνεκτικός χώρος

(ii) Τα μόνα υποσύνολα του Χ που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά είναι τα $X, \varnothing$

(iii) Δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : X \to \{0,1\}$ (όπου το {0, 1} έχει τη διακριτή τοπολογία).

Πρόταση 3

Η ένωση κάθε οικογένειας συνεκτικών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου Χ, που έχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο στην τομή τους, είναι συνεκτικό σύνολο. (Δηλαδή, αν $A_i \subset X$ είναι συνεκτικό για $i \in I$, και $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό).

Πόρισμα των προηγουμένων προτάσεων είναι η επόμενη πρόταση

Πρόταση 4.

(i) Ο $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός χώρος.

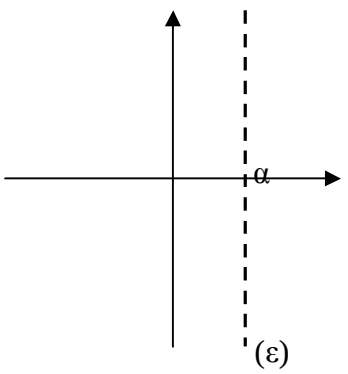
(ii) Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα διαστήματα (μονοσύνολα ή διαστήματα με πεπερασμένα ή άπειρα άκρα κάθε είδους).

Οι προηγούμενες προτάσεις μας βοηθούν να αποδείξουμε ένα κεντρικό θεώρημα, ιδιαίτερα χρήσιμο:

Πρόταση 5.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν το Α δεν είναι συνεκτικό, τότε το γράφημα μιας συνάρτησης $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι συνεκτικό.

Απόδειξη.



Σχήμα 4

Έστω το Α ένα μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λόγω της Πρότασης 4, το Α δεν θα είναι διάστημα. Άρα θα υπάρχει ένα α με $a \in \mathbb{R} \setminus A$ ώστε $A \cap (-\infty, a) \neq \varnothing$ και $A \cap (a, +\infty) \neq \varnothing$. Φέρνουμε τώρα την ευθεία x=α όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θέτουμε επίσης τα επόμενα σύνολα: $E_{a^+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > a\}$ και $E_{a^-} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < a\}$.

Ισχύει τότε ότι τα σύνολα E_{a^+}, E_{a^-} είναι ανοιχτά και μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Επίσης, ισχύει ότι $E_{a^+} \cap Gr(f) \neq \varnothing$ και $E_{a^-} \cap Gr(f) \neq \varnothing$ και $Gr(f) \subseteq E_{a^+} \cup E_{a^-}$.

Άρα από τον Ορισμό 3 προκύπτει ότι το Gr(f) δεν είναι συνεκτικό σύνολο.

Παρατήρηση 1.

Αν έχω μια συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R} \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$, ουσιαστικά αναζητώ να μελετήσω τη συμπεριφορά του Gr(f) και όχι της f. Αν δηλαδή θέσω $\Phi : \mathrm{A} \to Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ με $\Phi(x) = (x, f(x))$, μελετώ την Φ ως προς τη συνέχεια.

Πρόταση 6.

Έστω συνάρτηση $f : X \to Y$ με X, Y τοπολογικοί χώροι. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι συνεχής

(ii) $f^{-1}(A) \subseteq X$ είναι ανοιχτό για κάθε $A \subseteq Y$ ανοιχτό.

(iii) $f^{-1}(A) \subseteq X$ είναι κλειστό για κάθε $A \subseteq Y$ κλειστό.

Πρόταση 7.

Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτικός χώρος. (Δηλαδή αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ είναι συνεκτικό και $\Phi : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X} \to \Phi(\mathrm{A}) \subseteq Y$ συνάρτηση συνεχής και επί, τότε και το Φ(A) είναι συνεκτικό).

Απόδειξη.

Έστω ότι το Φ(A) είναι μη συνεκτικό. Επομένως θα υπάρχουν G_1, G_2 ανοιχτά υποσύνολα του Φ(A) έτσι ώστε $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 \cap \Phi(\mathrm{A}) \neq \varnothing$, $G_2 \cap \Phi(\mathrm{A}) \neq \varnothing$ και $\Phi(\mathrm{A}) \subseteq G_1 \cup G_2$.

Θέτουμε $V_1 = \Phi^{-1}(G_1)$ και $V_2 = \Phi^{-1}(G_2)$. Αφού Φ συνεχής συνάρτηση, λόγω της Πρότασης 6 τα V_1 και V_2 θα είναι ανοιχτά υποσύνολα του X. Προφανώς επίσης ισχύει $V_1 \cap A \neq \varnothing$, $V_2 \cap A \neq \varnothing$ και επίσης $A \subseteq V_1 \cup V_2$. Άρα το σύνολο A δεν είναι συνεκτικό, άτοπο.

Άρα το Φ(A) είναι συνεκτικό σύνολο.

Παρατήρηση 2.

Αποδείξαμε ότι η *συνεχής* εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτικό σύνολο, αλλά η **αντίστροφη εικόνα** ενός συνεκτικού συνόλου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης **δεν** είναι κατ' ανάγκη συνεκτικό σύνολο.

Παρατήρηση 3.

Αν έχω μια συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R} \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ και θέσω $\Phi : \mathrm{A} \to Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ με $\Phi(x) = (x, f(x))$, τότε η συνέχεια της Φ είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια της f. Πράγματι, αφού $\Phi(x) = (x, f(x))$ άρα $\Phi_1(x) = x$ και $\Phi_2(x) = f(x)$. Αλλά $\Phi_1(\mathrm{x})$ και $\Phi_2(\mathrm{x})$ συνεχείς, άρα και η Φ(x) συνεχής.

Μια ιδιαίτερα χρήσιμη πρόταση είναι η επόμενη:

Πρόταση 8.

Αν $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και Α συνεκτικό σύνολο, τότε το Gr(f) είναι συνεκτικό.

Απόδειξη.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 7 και της Παρατήρησης 3.

Παρατήρηση 4.

Η προηγούμενη πρόταση αν συνδυαστεί με την Πρόταση 4 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα κάθε είδους δίνει συνεκτικό γράφημα.

*Άρα αν το γράφημα μιας συνάρτησης **δεν είναι συνεκτικό** σύνολο, δηλαδή αν το γράφημα διακόπτεται σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού, τότε η συνάρτηση **δεν είναι συνεχής**.*

Τι θα πούμε τώρα για το αντίστροφο; Αν το γράφημα μιας συνάρτησης είναι συνεκτικό σύνολο, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής; **Όχι κατ' ανάγκη.** Η Πρόταση 8 δεν ισχύει και αντίστροφα.

Ας δούμε ένα αντιπαράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0\ , & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση αν και **δεν** είναι συνεχής, **έχει** συνεκτικό γράφημα.

Πρόταση 9.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0\ , & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής για $x \neq 0$ ενώ είναι ασυνεχής στο x=0.

Απόδειξη.

Πράγματι, έστω $x_0 \neq 0$ και ε>0. Θέτουμε $\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2}\right\}$. Τότε $x \neq 0$ λόγω του τρόπου ορισμού του δ και άρα για $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x_0}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|} < \frac{2|x - x_0|}{|x_0|^2} < \frac{2\delta}{|x_0|^2} < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής για κάθε $x_0 \neq 0$.

Για το $x_0 = 0$ τώρα θα δείξουμε ότι είναι ασυνεχής.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, τότε $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

αλλά $f(x_n) = f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Άρα από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Λήμμα 1.

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, τότε το σύνολο $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Λήμμα 2.

Αν $A \subseteq X$ είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X, τότε κάθε $B \subseteq X$ με την ιδιότητα $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Άρα αν A συνεκτικό σύνολο τότε και η κλειστή θήκη $\overline{A}$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Πρόταση 10.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0\ , & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$ έχει συνεκτικό γράφημα.

Απόδειξη.

Παίρνουμε $Gr(f)=\{(x,f(x)):x<0\}\cup\{(0,0)\}\cup\{(x,f(x)):x>0\}$ και θέτουμε

$G_1=\{(x,f(x)):x<0\}$, $G_2=\{(x,f(x)):x>0\}$,

$W_1=\{(x,f(x)):x<0\}\cup\{(0,0)\}$ και $W_2=\{(x,f(x)):x>0\}\cup\{(0,0)\}$

Για x<0 λόγω της Πρότασης 9 η f είναι συνεχής και άρα λόγω της Πρότασης 8 το G_1 είναι συνεκτικό. Ομοίως και το G_2 είναι συνεκτικό.

Παρατηρούμε επίσης ότι το σημείο (0, 0) είναι σημείο συσσώρευσης για το G_1. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ τότε έχουμε ότι

$\left(\frac{1}{2\pi n},f\left(\frac{1}{2\pi n}\right)\right)\xrightarrow{n\to+\infty}(0,0)$. Ομοίως δείχνουμε ότι το σημείο (0, 0) είναι σημείο συσσώρευσης και για το G_2.

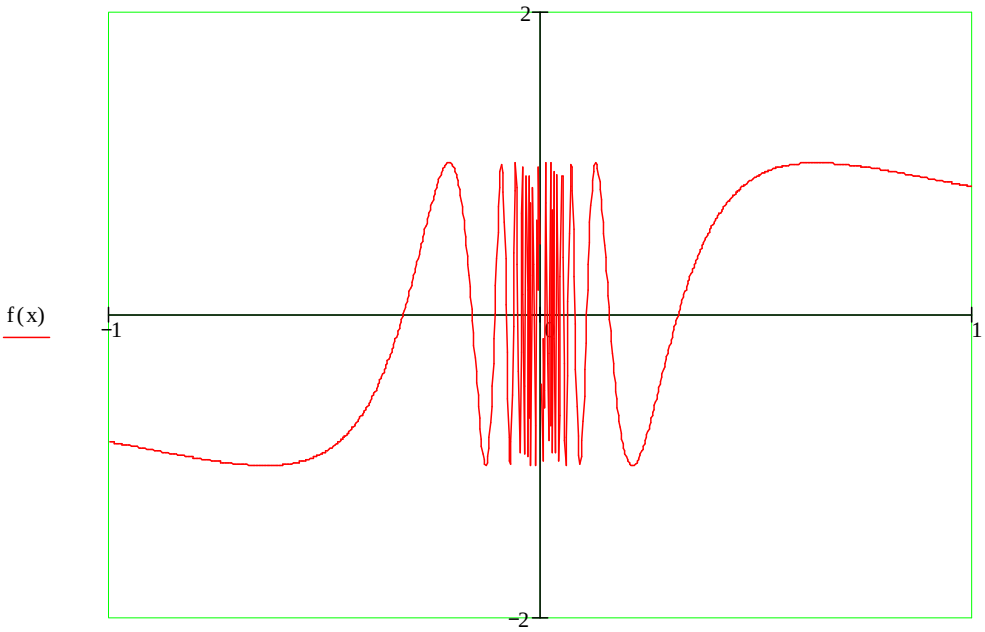
Άρα ισχύει ότι $\overline{G_1}\supseteq W_1$ και ομοίως $\overline{G_2}\supseteq W_2$. Προφανώς όμως εξ' ορισμού έχουμε ότι $G_1\subseteq W_1$ και $G_2\subseteq W_2$. Άρα τελικά έχουμε ότι: $G_1\subseteq W_1\subseteq\overline{G_1}$ και $G_2\subseteq W_2\subseteq\overline{G_2}$. Εφόσον όμως τα G_1 και G_2 είναι συνεκτικά σύνολα, από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι και τα W_1 και W_2 είναι συνεκτικά.

Αλλά τότε έχουμε ότι W_1 και W_2 είναι συνεκτικά και $W_1\cap W_2=\{(0,0)\}\neq\varnothing$. Άρα από το Λήμμα 1 προκύπτει ότι $W_1\cup W_2$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Άρα το Gr(f) είναι συνεκτικό σύνολο.

Άρα αποδείξαμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x\neq 0\\ 0\ , & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$ αν και δεν είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, έχει συνεκτικό γράφημα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το γράφημά της.



Σχήμα 5

Συμπέρασμα

Όλα τα προηγούμενα καταδεικνύουν ότι:

1. Μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα κάθε είδους έχει συνεκτικό γράφημα.

2. Μια συνάρτηση με συνεκτικό γράφημα δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής.

3. Αν το γράφημα μιας συνάρτησης διακόπτεται σε διάστημα του πεδίου ορισμού της, τότε η συνάρτησης δεν είναι συνεχής.

Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι η έννοια της συνέχειας εμπεριέχει κάποιες λεπτές πτυχές που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή εκ μέρους και των καθηγητών αλλά και των μαθητών – φοιτητών. Οι περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι συχνά οι μαθητές και οι φοιτητές δεν έχουν μια σαφή αντίληψη για το τι περιλαμβάνεται στη *συνέχεια* μιας συνάρτησης και συχνά συγχέουν τη συνέχεια με τη συνεκτικότητα (Mastorides & Zachariades, 2004; Tall, 2003a; Hitt & Lara, 1999; Núñez & Lakoff, 1998; Tall, 1996i; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1994h; Tall, 1991a; Cornu, 1991; Tall & Vinner, 1981). Αργότερα θα έχουμε την ευκαιρία να μελετήσουμε διεξοδικά αυτές τις έρευνες και να δούμε αν και κατά πόσον τα ευρήματα επαληθεύονται και από την παρούσα έρευνα.

Η προηγούμενη ανάλυση καθιστά αναγκαία τη διερεύνηση του είδους των νοητικών εικόνων που σχηματίζονται από τα υποκείμενα κατά τη διδασκαλία της εν λόγω έννοιας. Σύμφωνα με τον Vinner (1991), υπάρχουν δύο διαφορετικά κελιά στη γνωστική μας δομή. Αποκαλεί *«εικόνα έννοιας» (concept image)* αυτό που έρχεται στη μνήμη μας όταν ακούμε ή βλέπουμε το όνομα μιας έννοιας. Μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση ή μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών. Χρησιμοποιεί επίσης τον όρο *«ορισμός έννοιας» (concept definition)* για να αποδώσει τον τυπικό φορμαλιστικό ορισμό μιας έννοιας. Η γνώση του τυπικού ορισμού δεν εγγυάται την κατανόηση και την αφομοίωση. Αυτό απαιτεί επιπλέον την ύπαρξη της κατάλληλης, δηλαδή της σωστής, *εικόνας έννοιας* (Vinner, 1991; Tall & Vinner, 1981).

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ενδέχεται και τα δύο κελιά να είναι κενά ή να είναι γεμάτο μόνο το ένα από τα δύο. Ακόμα όμως κι να είναι γεμάτα και τα δυο κελιά, αυτό δεν σημαίνει αυτόματα και ακριβή γνώση του μαθηματικού αντικειμένου. Πολλές φορές το ένα κελί υπερισχύει έναντι του άλλου ή κάποιο κελί παραμένει ανενεργό. Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να διερευνηθεί σε κάθε περίπτωση που χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί μια έννοια, πιο κελί ενεργοποιείται από το υποκείμενο και αν ενεργοποιούνται και τα δύο τότε με ποιον τρόπο έχουν αλληλεπιδράσει μεταξύ τους (Tall & Vinner, 1981).

Η Διδασκαλία της συνέχειας

Η δεκαετία του 1980-90 χαρακτηρίστηκε σε πολλές δυτικές χώρες από το σκεπτικισμό για την ποιότητα των αναλυτικών προγραμμάτων αλλά και την αποτελεσματικότητα των προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών (Φιλίππου & Χρίστου, 2002). Για πολλά χρόνια τα μαθηματικά θεωρούνταν κατάκτηση των 'λίγων', αυτών που διέθεταν 'μαθηματικό μυαλό'. Διαμορφώθηκε έτσι μια Αρεία φυλή *μαθηματικών ταλέντων* που κοιτούσε με περισσή περιφρόνηση τους υπόλοιπους *αμ χαάρετς*[34]. Σιγά – σιγά αυτή η νοοτροπία έδωσε τη θέση της σε μια πιο δημοκρατική άποψη που λέει ότι όλοι, ή τουλάχιστον σχεδόν όλοι, θα μπορούσαν να *μάθουν* μαθηματικά κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Ποιες είναι αυτές οι κατάλληλες συνθήκες; Ποια θεωρητικά

[34] Κατά γράμμα: **άνθρωποι της γης.** Όρος που χρησιμοποιούσαν οι Γραμματείς και οι Φαρισαίοι την εποχή του Ιησού Χριστού για να αναφερθούν περιφρονητικά στους απλούς καθημερινούς ανθρώπους που δεν είχαν τη δική τους ραβινική μόρφωση.

πλαίσια διαμορφώθηκαν και πώς αυτά εφαρμόζονται σήμερα σε μια σύγχρονη τάξη; Θα εξετάσουμε μερικά από αυτά και παράλληλα θα βλέπουμε πώς αυτά εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας.

Ο William James (1842-1919), ο οποίος θεωρείται πατέρας της ψυχολογίας στην Αμερική, επηρεασμένος από τις θεωρίες του Δαρβίνου ήταν ο πρώτος που υποστήριξε την άποψη ότι ο σωστός τρόπος μελέτης των ψυχολογικών φαινομένων είναι μέσω της εξέτασης της προσαρμοστικής τους αξίας και της λειτουργικότητάς τους. Γι' αυτό το λόγο η ψυχολογική θεώρηση του James ονομάζεται *Λειτουργισμός (Functionalism)* (Βοσνιάδου, 2005). Μαθητής του ήταν ο Edward Lee Thorndike (1874-1949). Ο Thorndike είδε τη μάθηση ως αποτέλεσμα μιας μακράς πορείας δοκιμών και λαθών και διατύπωσε δύο νόμους της μάθησης που έβαλαν τις βάσεις σε αυτό που αργότερα ονομάστηκε *Συμπεριφοριστική* (ή *Μπηχεβιοριστική = Behaviorist*) θεωρία. Υποστηρίζει ότι οι αντιδράσεις που παράγουν θετικά αποτελέσματα τείνουν να επαναλαμβάνονται, ενώ αντίθετα, οι αντιδράσεις που δεν παράγουν θετικά αποτελέσματα σταματούν να επαναλαμβάνονται. Ο Thorndike ονόμασε αυτού του είδους τη μάθηση *συντελεστική εξάρτηση* διότι οι αντιδράσεις ενισχύονται όταν συντελούν στη παραγωγή κάποιας αμοιβής και ονόμασε αυτή τη σχέση ανάμεσα στην αντίδραση και στις συνέπειές της *νόμο του αποτελέσματος* (Βοσνιάδου, 2005; Τουμάσης, 2002). Ο John Watson (1878-1958) επηρεασμένος βαθιά από τις θεωρίες του Δαρβίνου, τα ευρήματα του Thorndike και του Ρώσου φυσιολόγου Ivan Pavlov, έδωσε μεγάλη σημασία στη μάθηση ως τον πιο σημαντικό παράγοντα στη διαμόρφωση της συμπεριφοράς. Ο συμπεριφορισμός του Watson έτσι όπως διαμορφώθηκε από τις ιδέες του Thorndike, βρήκε έναν ένθερμο υποστηρικτή στο πρόσωπο του Αμερικανού ψυχολόγου Burrhus F. Skinner (1904-1990). Τα δοκίμια του Skinner επηρέασαν την Αμερική και γενικότερα τη δύση τουλάχιστον μέχρι το 1960.

Για τον Συμπεριφορισμό η μάθηση είναι το αποτέλεσμα συνεξαρτήσεων ανάμεσα στα *ερεθίσματα* που δέχεται το άτομο από το περιβάλλον του και στις *αντιδράσεις* του στα ερεθίσματα αυτά. Περιλαμβάνει επίσης έναν κατακερματισμό της ύλης σε επί μέρους κομμάτια που ο μαθητής καλείται να μάθει με απανωτές δοκιμές Όπως κάθε

θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύσσεται, έτσι κι αυτό έχει αρκετά θετικά στοιχεία αλλά στην πορεία φάνηκε ότι αδυνατούσε να ερμηνεύσει πολλά από τα προβλήματα που ανέκυπταν κατά τη διδασκαλία. Η συμπεριφοριστικού τύπου διδασκαλία απαντάται μέχρι σήμερα ιδιαίτερα σε πιο μικρές τάξεις όταν ζητείται από τους μαθητές να επαναλαμβάνουν 'κατεβατά' κανόνων, τύπων, λέξεων με πιεστικό τρόπο έως ότου τα μάθουν απ' έξω. Κάνουν εκατοντάδες πανομοιότυπες προσθέσεις και αφαιρέσεις ως σαν να είναι αυτός ο μόνος τρόπος για να μάθουν τις πράξεις αυτές (Βοσνιάδου, 1999). Ένας τέτοιος τρόπος διδασκαλίας αν και τείνει(;) να γίνει δυσεύρετος στις πιο μεγάλες τάξεις, συνεχίζει μερικές φορές να είναι η αιτία που οι μαθητές δεν έχουν ουσιαστική και ενοποιημένη γνώση (Τουμάσης, 2002).

Κατά τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας πιο συγκεκριμένα, αρκετά συχνά παρατηρείται το φαινόμενο ένας καθηγητής έχοντας κατά νου την επιτυχία των μαθητών στις πανελλήνιες, να χωρίζει το μάθημά του σε διαδοχικά κομμάτια – μεθοδολογίες που μεταξύ τους πολλές φορές φαίνονται ασύνδετα. Παρατηρείται επίσης το φαινόμενο να καλούνται οι μαθητές να λύσουν δεκάδες ίδιες ασκήσεις χωρισμένες σε ομάδες που ανήκουν σε αντίστοιχες μεθοδολογίες. Δεν γίνεται προσπάθεια να κατανοήσουν τα δομικά συστατικά της έννοιας της συνέχειας παρά μόνο να αποκτήσουν οι μαθητές λειτουργικές ικανότητες επίλυσης συγκεκριμένου τύπου ασκήσεων μέσω συνεχούς εξάσκησης και επανειλημμένων δοκιμών.

Η θήτευση των μαθητών σε ένα σχολείο που λειτουργεί με έναν τέτοιο τρόπο έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές όταν περνούν το κατώφλι του πανεπιστημίου να συνεχίζουν να σκέπτονται με τον ίδιο τρόπο. Στο Μαθηματικό τμήμα του πανεπιστημίου Αθηνών είναι συχνό το φαινόμενο των μαθητών που στο α΄ έτος σπουδών στο μάθημα 'Απειροστικός Λογισμός Ι' αγωνίζονται απλά να κατηγοριοποιήσουν και να αποστηθίσουν τα πιθανά θέματα των εξετάσεων. Δεν προσπαθούν να μάθουν αλλά απλά να ανταποκριθούν επιτυχώς στα θέματα που πιθανώς θα συναντήσουν στις εξετάσεις και αυτό έχει φανεί ότι είναι κοινός τόπος σε πολλές χώρες (Tall, 1990d). Καθώς στο μαθηματικό τμήμα απαιτείται ένας δομικός και ολιστικός τρόπος σκέψης, τα απογοητευτικά χαμηλά ποσοστά επιτυχίας σε μαθήματα όπως ο Απειροστικός Λογισμός, συντελούν στη διαμόρφωση του συμπεράσματος ότι οι μαθητές δεν έχουν αποκτήσει αυτόν τον τρόπο σκέψης στο Λύκειο.

Μια δεύτερη μεγάλη οικογένεια θεωριών μάθησης που αναπτύχθηκε σχεδόν παράλληλα με τον συμπεριφορισμό είναι η *Θεωρία του Ολομορφικού Πεδίου* ή αλλιώς *Μορφολογική θεωρία* (*Gestalt*). Πρωτοπόροι ήταν τέσσερις Γερμανοί ψυχολόγοι, οι Wertheimer, Kohler, Koffka και Lewin. Η βασική τους πρόταση συμπυκνώνεται στη μελέτη της αντίληψης χωρίς τον κατακερματισμό της. Η μάθηση ορίζεται ως η αναδιοργάνωση του αντιληπτικού ή ψυχολογικού κόσμου του υποκειμένου. Θεωρείται ότι το όλον είναι μεγαλύτερης σημασίας από το άθροισμα των μερών που το απαρτίζουν. Κατά συνέπεια η μελέτη των μερών δεν είναι ο πιο αποδοτικός τρόπος για την κατανόηση του συνόλου (Φιλίππου & Χρίστου, 2002). Ένα από τα πιο σημαντικά ευρήματα των Γερμανών ψυχολόγων ήταν ότι η μάθηση δεν εξαρτάται αποκλειστικά από τα αποτελέσματα, τις ενισχύσεις δηλαδή που ακολουθούν την αντίδραση (Βοσνιάδου, 2005).

Η ψυχολογία Gestalt έχει εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα των δραστηριοτήτων της ζωής. Βασική της αρχή είναι ότι οι νοητικές διεργασίες αποτελούνται κυρίως από σχηματοποιήσεις σε σύνολα (gestalten) και όχι από ακολουθίες απλών αισθητηριακών αντιλήψεων ή από διασυνδέσεις ανάμεσα σε ερεθίσματα και αντιδράσεις, όπως υποστήριζαν οι μπιχεβιοριστές. Αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα περισσότερο σαν καλά οργανωμένους σχηματισμούς ή ολότητες παρά σαν το άθροισμα των μεμονωμένων μερών τους (Βοσνιάδου, 2005). Αν και η κυριότερη εφαρμογή των παραπάνω βασικών αρχών της Μορφολογικής Θεωρίας είναι στη σχηματοποίηση των αντικειμένων, παρόλα αυτά είναι χρήσιμη και η εφαρμογή της στη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η συνέχεια δεν είναι απλά μια τοπική ιδιότητα, όπως για παράδειγμα το όριο, αλλά μια τοπολογική έννοια που από τη φύση της κρύβει μέσα της μια ολότητα. Είναι χρήσιμο διδακτικά να παραμένει πάντα αυτό στο μυαλό του διδάσκοντα και να γίνεται η διδασκαλία με τέτοιο τρόπο ώστε αυτό να βρίσκεται πάντα στο προσκήνιο.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1950 έκανε την εμφάνισή της η *Γνωστική Ψυχολογία*, ο κλάδος της ψυχολογίας που μελετά τις νοητικές διεργασίες της αντίληψης, προσοχής, μνήμης, λύσης προβλημάτων, γλώσσας κ.λ.π. με κύριους εκφραστές τους George Miller, Gerome Bruner, Alan Newell, Herb Simon και Noam Chomsky (Βοσνιάδου, 2005). Οι ζυμώσεις είχαν αρχίσει αρκετά νωρίτερα με τις εργασίες του Piaget που

είχαν αρχίσει να διαδίδονται ευρέως, ενώ ο Bartlett από το 1932 είχε διατυπώσει δυο θεμελιώδεις απόψεις και ανάμεσα στα άλλα γινόταν αναφορά στα *σχήματα*, έννοια θεμελιώδης στο χώρο της γνωστικής ψυχολογίας (Κολέζα, 2000). Βασική θέση της είναι ότι δεν μπορούμε να εξηγήσουμε την ανθρώπινη συμπεριφορά μόνο με αναφορά σε εξωτερικά ερεθίσματα του περιβάλλοντος αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε εσωτερικές νοητικές διεργασίες. Ο τρόπος με τον οποίο ένας οργανισμός αποκτά πληροφορίες από το περιβάλλον εξαρτάται από τρεις βασικές ικανότητες: (α) την ικανότητα αναπαράστασης του περιβάλλοντος, (β) την ικανότητα του χειρισμού και αλλαγών αυτών των αναπαραστάσεων και (γ), την ικανότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της γνωστικής διαδικασίας (Βοσνιάδου, 2005). Στη συνέχεια θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε πώς οι παραπάνω αρχές επηρεάζουν τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών όπως η συνέχεια.

Ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του 1950 οι ψυχολογικές έρευνες άρχισαν να συγκλίνουν στην άποψη ότι κατανόηση των μαθηματικών δομών αποτελεί προϋπόθεση για μια μάθηση με βάση το νόημα (Ernest, 1995). Μέσα από τη συνεργασία μαθηματικών και ψυχολόγων προέκυψε η ανάγκη κατανόησης της μαθηματικής δομής ως προϋπόθεση της μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Μια βασική θέση που προέκυψε από αυτή τη συνεργασία ήταν ότι κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να δοθεί έμφαση στις μαθηματικές δομές, δηλαδή ότι οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά είναι μια αυστηρά δομημένη επιστήμη. Η διδακτική αυτή προσέγγιση έγινε ευρύτερα γνωστή ως *Στρουκτουραλισμός* ή *Δομισμός* (structure = δομή) (Κολέζα, 2000).

Στη βάση των παραπάνω αρχών αλλά και στις αρχές του Piaget κινήθηκαν τη δεκαετία του 1960 οι J. B. Bruner και Z. P. Dienes. Ο Piaget ισχυρίζεται ότι η ανάπτυξη που συντελείται κατά τη διάρκεια της μάθησης συνεπάγεται συνεχείς αναδομήσεις γεγονότων και σχέσεων, οι οποίες απορρέουν από την αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον του (Poynter & Tall, 2005a; Κολέζα, 2000; Donaldson, 1991). Η βασική θέση του Piaget είναι ότι η ανθρώπινη νοημοσύνη είναι μια διαδικασία προσαρμογής. Ο Piaget επίσης χρησιμοποιεί τον όρο «σχήμα» για να αναφερθεί στις «νοητικές δομές», δηλαδή τις αναπαραστάσεις του υποκειμένου, και αναφέρεται στους τρόπους επεξεργασίας αυτών των αναπαραστάσεων με τον όρο «λειτουργίες». Μια «λειτουργία» είναι ένα ιδιαίτερο είδος νοητικής ενέργειας με την έννοια ότι είναι

αντιστρέψιμη. Η αντιστρεψιμότητα είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των δομών της «λειτουργικής σκέψης». Οι λειτουργίες σύμφωνα με τον Piaget εξελίσσονται με το χρόνο. Η παρουσία ή απουσία κάποιων λειτουργιών προσδιορίζει τις περιόδους ή τα στάδια ανάπτυξης ενός ατόμου (Κολέζα, 2000). Επιγραμματικά ο Piaget διακρίνει τέσσερα στάδια ανάπτυξης:

- Το Αισθησιοκινητικό Στάδιο (Sensorimotor stage)
- Το Προεννοιολογικό Στάδιο (Preoperational stage)
- Το στάδιο των Συγκεκριμένων Λειτουργιών (Concrete Operation stage)
- Το στάδιο των Τυπικών Λειτουργιών (stage of Formal Operations)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη θεωρία του Piaget, παρουσιάζει η διαδικασία μετάβασης από το ένα στάδιο στο άλλο. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετάβασης είναι πιθανόν να παρατηρηθεί μια αστάθεια στη συμπεριφορά του ατόμου λόγω μιας ενδεχόμενης σύγκρουσης μεταξύ παλαιότερων και νέων ιδεών. Ο Piaget χρησιμοποιεί τον όρο «αφομοίωση» (assimilation) για να περιγράψει τη διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων δεδομένων στις ήδη υπάρχουσες δομές γνώσης και τον όρο «συμμόρφωση» (accommodation) όταν αναφέρεται στη διαδικασία τροποποίησης των γνωστικών δομών του ατόμου. Ο Piaget θεωρεί την αφομοίωση και τη συμμόρφωση ως συμπληρωματικές διαδικασίες (Βοσνιάδου, 2005; Pegg & Tall, 2002g; Κολέζα, 2000; Dehaene, 1997; Donaldson, 1991).

Οι συνέπειες των βασικών αρχών της θεωρίας του Piaget για τη μάθηση και τη διδασκαλία είναι πολύ σημαντικές και ξεκινούν από τη διαπίστωση πώς η σκέψη είναι σύνολο λογικών ενεργειών αντιστρέψιμων και συγκροτημένων σε ομάδες συνολικών συστημάτων, που έχουν μια δύναμη εκτεταμένης εφαρμογής και γενίκευσης. *Μαθαίνει* ο μαθητής, σημαίνει ότι εκτελεί ορισμένες πράξεις και λογικές ενέργειες που πρέπει να προκληθούν κατά τη διδασκαλία, γιατί βρίσκονται στη βάση των εννοιών που πρέπει να κατακτηθούν (Τουμάσης, 2002; Ernest, 1995). Η μάθηση δεν σημαίνει τη μετάδοση γνώσεων από το γνώστη – δάσκαλο προς τον αδαή – μαθητή αλλά την υποκίνηση του ατόμου προκειμένου να συμμετέχει ενεργά στην *προσωπική* κατάκτηση, οικοδόμηση και κατασκευή της γνώσης. Μια μέθοδος διδασκαλίας στα πλαίσια των αρχών του Piaget θα περιλαμβάνει την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, την παρουσίαση νέων εννοιών μέσα από κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις, την

καλλιέργεια της ερευνητικής διάθεσης και του πειραματισμού, τη μύηση του μαθητή στην εικασία, την επαλήθευση και τον έλεγχο καθώς και την ενθάρρυνση της ανταλλαγής ιδεών. Κατά τη διδασκαλία πρέπει συνεχώς να τίθενται προβλήματα με στόχο την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων μέσω των οποίων το άτομο οδηγείται σε επανοργάνωση και εμπλουτισμό των γνωστικών του σχημάτων. Το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε με βάση τις θεωρίες του Piaget και όσων στηρίχθηκαν σε αυτές, ονομάστηκε *Κονστρουκτιβισμός* (construct = κατασκευάζω). (Τουμάσης, 2002; Κολέζα, 2000).

Εξετάζοντας πρακτικά τις παραπάνω αρχές με βάση το σχολικό βιβλίο και την παρουσίαση της έννοιας της συνέχειας, παρατηρούμε ότι απλά δεν γίνεται καμιά προσπάθεια να ακολουθηθεί ένα πλαίσιο διδασκαλίας που να ικανοποιεί έστω και τις βασικές αρχές του Piaget. Δεν εισάγεται η έννοια της συνέχειας μέσω κάποιας προβληματικής κατάστασης ή κάποιας δραστηριότητας και δεν υπάρχει καμιά ένδειξη για την ενθάρρυνση του μοντέλου εικασία – επαλήθευση – έλεγχος. Η ανάγκη για να βγάλει ο καθηγητής την ύλη και το άγχος των πανελληνίων εξετάσεων καθιστούν σχεδόν απαγορευτική την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και αποθαρρύνουν το διάλογο μεταξύ των μαθητών. Όλα τα προηγούμενα επαναλαμβάνονται και στο πανεπιστήμιο και ενισχύονται λόγω του άκρατου – και εν μέρει επιβεβλημένου – φορμαλισμού που επικρατεί. Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων της έρευνας θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε πώς αυτό επηρεάζει το επίπεδο κατανόησης και εμβάθυνσης από την πλευρά των φοιτητών.

Ένας άλλος βασικός εκπρόσωπος και συνάμα διαμορφωτής του στρουκτουραλισμού ήταν ο J. B. Bruner. Έχοντας ως βάση τη θεωρία του Piaget σύμφωνα με την οποία η ανάπτυξη συνεπάγεται συνεχείς αναδομήσεις γεγονότων και σχέσεων οι οποίες απορρέουν από την αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον του, ο Bruner ερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι αλληλεπιδράσεις αναπαρίστανται στο νου του μαθητή. Αναφέρει ότι η πιο σημαντική λειτουργία της μνήμης δεν είναι η αποθήκευση μιας πληροφορίας, αλλά η κατανόηση της πληροφορίας. Η ανάκληση εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο έχει κωδικοποιηθεί και υποστεί επεξεργασία η παρελθούσα εμπειρία ώστε να είναι χρηστική. Το τελικό προϊόν της κωδικοποίησης και επεξεργασίας, είναι αυτό που ο Bruner ονομάζει κωδικοποίηση (Pegg & Tall,

2002g; Φιλίππου & Χρίστου, 2002; Τουμάσης, 2002; Κολέζα, 2000; Bruner, 1966). Ο Bruner περιγράφει τρεις τρόπους αναπαράστασης:

- Πραξιακή (Enactive) : Αναπαράσταση με όρους δράσης
- Εικονική (Iconic) : Αναπαράσταση με όρους στατικών αντιληπτικών εικόνων.
- Συμβολική (Symbolic) : Χρήση γλώσσας και συμβόλων.

Αυτές οι μορφές αναπαράστασης μοιάζουν με τα στάδια ανάπτυξης του Piaget, με σημαντικότερη ομοιότητα την κοινή παραδοχή ότι η μάθηση προχωράει από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, αλλά έχουν μια βασική διαφορά: ενώ για τον Piaget πρέπει να περιμένουμε πριν μπορέσει ένα παιδί να κατανοήσει μια έννοια, ο Bruner υποστηρίζει ότι κάθε ιδέα μπορεί να παρουσιαστεί ως μια έννοια αρκετά απλή ώστε να μπορεί κάθε μαθητής να την καταλάβει (Φιλίππου & Χρίστου, 2002; Κολέζα, 2000; Bruner, 1966). Δίνει μεγάλη έμφαση στην *ανακάλυψη*, την πορεία μέσα από την οποία ο μαθητής ανακαλύπτει μόνος του και κατακτά τη γνώση. Η μάθηση των μαθηματικών απαιτεί ενεργητική συμμετοχή του μαθητή, ανακατασκευή της γνώσης, πειραματισμό, εξερεύνηση και ανακάλυψη. Μεγάλη έμφαση δίνει επίσης ο Bruner στην καλλιέργεια της διαισθητικής σκέψης του παιδιού η οποία αναγνωρίζεται από όλους του ψυχολόγους ως καθοριστική για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Βοσνιάδου, 2005; Τουμάσης, 2002; Bruner, 1966). Ο Bruner τέλος, αναπτύσσει την ιδέα ότι η ουσιαστική μάθηση εξαρτάται από την κατανόηση της δομής ενός αντικειμένου. Ισχυρίζεται ότι πρέπει να δίνεται έμφαση στη βαθιά κατανόηση των βασικών αρχών που συνθέτουν μια ενότητα και αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για να μπορεί κανείς να αντιληφθεί πώς εφαρμόζεται μια γενική ιδέα σε ειδικές περιπτώσεις.

Εξετάζοντας από κοινού τη θεωρία Gestalt (θεωρία που δίνει έμφαση στη σύλληψη της ολότητας ενός φαινομένου) και τη στρουκτουραλιστική προσέγγιση διδασκαλίας κατά Bruner (διδασκαλία που δίνει έμφαση στην κατανόηση της δομής των μαθηματικών αντικειμένων), μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η πρώτη παρέχει μια επαρκή θεωρητική βάση για τη δεύτερη. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία Gestalt δίνει έμφαση στην κατανόηση της δομής του προβλήματος ως συνόλου, επομένως αντικείμενο της διδασκαλίας πρέπει να είναι οι δομικές ιδιότητες των μαθηματικών εννοιών και οι μεταξύ τους σχέσεις, κάτι το οποίο υποστηρίζει η στρουκτουραλιστική άποψη (Κολέζα, 2000).

Εξετάζοντας τώρα τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου αλλά και στους πρωτοετείς του μαθηματικού τμήματος, μπορεί εύκολα κάποιος να δει ότι και τα δύο διδακτικά συγγράμματα δεν προωθούν τη μάθηση διαμέσου ενός πλαισίου μάθησης διαμορφωμένου από τις αρχές του στρουκτουραλισμού. Δεν δίνεται καθόλου έμφαση στην *ανακάλυψη* των εννοιών, την πορεία μέσα από την οποία ο μαθητής – φοιτητής θα κατακτήσει τη γνώση, δεν αναλύονται επαρκώς οι βασικές δομές που κρύβονται πίσω από την έννοια της συνέχειας, και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα αυτή να κωδικοποιείται από το υποκείμενο μέσω λανθασμένων ή στρεβλών αναπαραστάσεων. Η απλή απομνημόνευση έτοιμων 'ρουτινών' και μεθοδολογιών επίλυσης ασκήσεων έχει σαν αποτέλεσμα αργότερα ως φοιτητές να συνεχίζουν να προσπαθούν να 'μάθουν' με τον ίδιο τρόπο. Καθώς όμως το *συμβολικό* –κατά Bruner – επίπεδο δεν έχει αναπτυχθεί, δυσκολεύονται ιδιαίτερα ή και αδυνατούν να ενταχθούν στον αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών.

Μέχρι τώρα έχουμε εστιάσει την προσοχή μας στις Κονστρουκτιβιστικές αντιλήψεις και πώς αυτές εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας. Στα πλαίσια του Κονστρουκτιβισμού δίνεται προτεραιότητα στη δράση του υποκειμένου και στην εσωτερική ανάδειξη του νοήματος, ως ένα επιστημολογικό πλαίσιο ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. Σε ένα τέτοιο θεωρητικό πλαίσιο προηγείται ο εγωκεντρικός λόγος ο οποίος εξελίσσεται από εσωτερικό σε κοινωνικό λόγο. Η μαθηματική γνώση θεωρείται ως ένα προϊόν των νοητικών λειτουργιών του ατόμου χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ιδιαίτερα η επίδραση του περιβάλλοντος στη γνωστική ανάπτυξη. Αν και υπάρχουν κάποιες νύξεις του Piaget για το ρόλο του κοινωνικού πλαισίου στη γνωστική ανάπτυξη, οι οπαδοί της σχολής της Γενεύης φαίνεται να εκλαμβάνουν την κοινωνική αλληλεπίδραση ως μια εξωτερική μεταβλητή σε σχέση με τη διαδικασία ανάπτυξης του ατόμου. Ενώ όμως οι απόψεις του Piaget συνέπαιρναν τη δύση, πολλά χρόνια νωρίτερα στη Ρωσία αναπτυσσόταν μια θεωρία που θα έδινε έμφαση στο κοινωνικό περιβάλλον και που θα περίμενε παραπάνω από 50 χρόνια για να βγει από την αφάνεια.

Η θεωρία του *Κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου* αναπτύχθηκε αρχικά από τον L. S. Vygotsky (1896 – 1934) αλλά και από άλλους Ρώσους ψυχολόγους όπως ο Luria και ο Leont'ev. Η εκπαίδευση για τον Vygotsky είναι κατά βάση μια διαδικασία

εκπολιτισμού κατά την οποία τα παιδιά ενθαρρύνονται παρακινούνται και υποβοηθούνται στην κατάκτηση βασικής γνώσης, συνδυασμένης με το ανθρωπιστικό στοιχείο. Για τον Vygotsky η μάθηση δεν είναι μια απλή σχέση μεταξύ ατόμου και γνώσης, αλλά η εισαγωγή του ατόμου σε μια υπάρχουσα κουλτούρα. Αντίθετα με τον Κονστρουκτιβισμό, εδώ προηγείται ο κοινωνικός λόγος ο οποίος εξελίσσεται σε εσωτερικό λόγο (Ernest, 1995; Vygotsky, 1978). Οι συνέπειες αυτού του γεγονότος για τη διδασκαλία είναι πολύ μεγάλες, ειδικά όσον αφορά το ρόλο του δασκάλου και την αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου και μαθητή. Μια από τις βασικές διαδικασίες αυτής της αλληλεπίδρασης είναι η *σημειολογική διαμεσολάβηση* (Κολέζα, 2000; Vygotsky, 1978). Η εργασιακή δραστηριότητα όπως και η διαδικασία συμβολοποίησης, αποτελούν μορφές διαμεσολαβητικής δραστηριότητας. Το πιο σημαντικό σύστημα συμβόλων για τον Vygotsky είναι η ίδια η γλώσσα, ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας το οποίο σχετίζεται με τη σκέψη.

Για τον Vygotsky το ότι η ατομική μάθηση εξαρτάται από την κοινωνική αλληλεπίδραση, δεν υπονοεί μια απλή συσχέτιση μεταξύ των δύο. Η θέση του Vygotsky είναι ότι οι ίδιες οι ιδιότητες της σκέψης προσδιορίζονται από τα οργανικά χαρακτηριστικά της κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Θεωρεί ότι το παιδί, στα πρώτα στάδια της ανάπτυξής του έχει ανάγκη της υποστήριξης των δασκάλων, των γονέων και των συμμαθητών για να φέρει σε πέρας μια δραστηριότητα, ενδεχομένως μέσα από τη μίμηση κάποιων λειτουργιών. Η μίμηση αυτή στα πλαίσια μιας κοινωνικοπολιτισμικής δραστηριότητας αποτελεί τον πυρήνα αυτού που ο Vygotsky αποκάλεσε *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης* (ZPD = **Z**one of **P**roximal **D**evelopment) (Vygotsky, 1978). Η ζώνη αυτή αντιστοιχεί στην απόσταση ανάμεσα στο πραγματικό αναπτυξιακό επίπεδο ενός μαθητή, όπως αυτό καθορίζεται από την ανεξάρτητη και μη υποβοηθούμενη επίλυση προβλημάτων, και στο εν δυνάμει επίπεδο ανάπτυξης όπως αυτό καθορίζεται από την επίλυση προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση των ενηλίκων ή σε συνεργασία με πιο ικανούς συμμαθητές. Αυτή η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης καθορίζει αυτές τις λειτουργίες που δεν έχουν ωριμάσει ακόμα αλλά που είναι στη διαδικασία ωρίμανσης, λειτουργίες που θα ωριμάσουν αύριο αλλά σήμερα είναι σε εμβρυακή κατάσταση. Το υπάρχον επίπεδο ανάπτυξης (που ο Vygotsky

ονομάζει actual) χαρακτηρίζει τη νοητική ανάπτυξη αναδρομικά, ενώ η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης χαρακτηρίζει τη νοητική ανάπτυξη προοπτικά (Mellin-Olsen, 1991; Vygotsky, 1978).

Υποστηρίζει ότι ένα βασικό χαρακτηριστικό της μάθησης είναι ότι δημιουργεί τη ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης, δηλαδή ότι η μάθηση ενεργοποιεί μια ποικιλία εσωτερικών αναπτυξιακών διαδικασιών που είναι ικανές να λειτουργήσουν μόνο όταν το παιδί αλληλοδρά με ανθρώπους στο περιβάλλον του. Μόλις αυτές οι διαδικασίες εσωτερικοποιηθούν, γίνονται μέρος του ανεξάρτητου αναπτυξιακού επιτεύγματος του παιδιού. Από αυτή την άποψη η μάθηση δεν είναι ανάπτυξη. Όμως, η κατάλληλα οργανωμένη μάθηση έχει ως αποτέλεσμα τη νοητική ανάπτυξη και θέτει σε κίνηση μια ποικιλία αναπτυξιακών διαδικασιών που θα ήταν αδύνατες χωρίς τη μάθηση. Έτσι, για τον Vygotsky η μάθηση είναι μια απαραίτητη και παγκόσμια θεώρηση της ανάπτυξης πολιτισμικά οργανωμένων, ειδικά ανθρώπινων, ψυχολογικών λειτουργιών (ibid, 1978). Μια από τις σημαντικότερες παιδαγωγικές συνέπειες της θεώρησης αυτής, είναι η *ομαδοσυνεργατική διδασκαλία*, όπου ο εκπαιδευτικός έχει αποφασιστικό ρόλο στη διαμόρφωση της κατεύθυνσης και του χαρακτήρα της επικοινωνίας στην τάξη. Για τον Vygotsky η διαδικασία μάθησης δεν διαχωρίζεται από τη διαδικασία διδασκαλίας. πρόκειται για μια διμερή διαδικασία που πραγματοποιείται και από τον δάσκαλο και από τον μαθητή (Κολέζα, 2000).

Η ιδέα της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας σπάνια βρίσκει εφαρμογή στα ελληνικά σχολεία, και σχεδόν ποτέ δεν συμβαίνει αυτό στη Γ΄ Λυκείου. Σύμφωνα επίσης με τον Vygotsky η ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών πηγαίνει από το γενικό στο συγκεκριμένο. Έτσι ενώ σε μια κονστρουκτιβιστική τάξη, η ανάπτυξη της έννοιας της συνέχειας θα γινόταν μέσω μιας προβληματικής κατάστασης στην οποία η εν λόγω έννοια εμφανίζεται ως αναντικατάστατο εργαλείο λύσης, σε μια κοινωνικοπολιτισμική τάξη είναι φυσιολογικό να έχουν οι μαθητές να μελετήσουν τον ορισμό της συνέχειας ως σημείο αφετηρίας για την κατανόησή της. Όχι όμως με τον άκομψο και τεχνικό τρόπο που γίνεται μέσα σε μια τυπική τάξη, αλλά με επεκτάσεις στην ανάλυση και τη λογική της δομής, με χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων για τη χρήση της και τη θέση της στη δομή της θεωρίας, τις πιθανές εφαρμογές της κ.λ.π. Η διδασκαλία

και η αφομοίωση της επιστημονικής έννοια της συνέχειας δεν μπορεί να προκύψει από μια απλή εμπειρική αφαίρεση αλλά απαιτεί μια ανωτέρου επιπέδου *θεωρητική αφαίρεση*, χρειάζεται ένα ποιοτικό, νοητικό άλμα. Η παρούσα έρευνα θα διερευνήσει αν και κατά πόσον έχει πραγματοποιηθεί από τα υποκείμενα αυτό το νοητικό άλμα.

Θεωρητικά Πλαίσια ανάλυσης του Προβλήματος

Στο χώρο της Διδακτικής των μαθηματικών έχει αναπτυχθεί ένα έντονο ενδιαφέρον τα τελευταία 30 χρόνια για τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο το υποκείμενο – μαθητής *μαθαίνει* μαθηματικά, κατασκευάζοντας με ουσιαστικό και αποτελεσματικό τρόπο τη γνώση. Με σκοπό να μάθουν οι μαθητές και αυριανοί φοιτητές να *σκέφτονται μαθηματικά* υπάρχει μια πληθώρα γνωστικών πλαισίων που αποσκοπούν στη διερεύνηση της μαθηματικής σκέψης (Tall, 1996i). Τα περισσότερα από αυτά τα πλαίσια εμφανίζονται με τη μορφή θεωριών που αν και διαφορετικές, αρκετά συχνά αλληλοσυμπληρώνονται ενώ άλλες φορές με τον καιρό δημιουργείται μια ώσμωση μεταξύ τους που έχει σαν φυσικό επακόλουθο μια συνεχή εκλέπτυνση. Η πληθώρα των γνωστικών θεωριών που έχουν προταθεί δεν δηλώνει νοσηρότητα αφού είναι κοινός τόπος ότι η διαδικασία της σκέψης αποτελεί ένα μεγάλο μυστήριο και δεν σκεπτόμαστε όλοι με τον ίδιο τρόπο (Tall, 1997g). Επίσης η κάθε θεωρία διαθέτει τα δικά της εργαλεία ανάλυσης διερεύνησης και εστιάζει σε διαφορετικές οπτικές.
Οι κυριότερες θεωρίες που έχουν επιλεγεί για την παρούσα έρευνα είναι οι εξής:

- Η θεωρία των *τριών κόσμων* του Tall (2004a), μια θεωρία που διατρέχει όλο το φάσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης και παρουσιάζει τους τρεις τρόπους – κόσμους με τους οποίους μπορεί κάποιος να προσεγγίσει τα μαθηματικά: τον ενσώματο κόσμο, τον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο και τέλος τον αξιωματικό κόσμο.
- Η θεωρία της *υποστασιοποίησης* της Sfard (1991), σύμφωνα με την οποία η ανάπτυξη μιας έννοιας γίνεται μέσα από τρία στάδια: την εσωτερίκευση, τη συμπύκνωση και την υποστασιοποίηση.
- Η γενική θεωρία *APOS* (Action – Process – Object – Schema) του Dubinsky και των συνεργατών του (Dubinsky & MacDonald, 2001; Czamocha et al.,

1999; Dubinsky, 1991). Θεωρία που περιγράφει τις τέσσερις διεργασίες μέσω των οποίων συντελείται η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας.

- Η θεωρία της *εννοιολογικής αλλαγής* των Vosniadou & Verschaffel (2004), θεωρία που εξετάζει τις δυσκολίες που προκύπτουν όταν οι προηγούμενες γνώσεις του υποκειμένου – μαθητή έρχονται σε αντιπαράθεση με τη νέα γνώση κατά τη διάρκεια της μάθησης.

Οι παραπάνω θεωρίες όπως θα δούμε δεν είναι ασύμβατες μεταξύ τους. Αντίθετα λειτουργούν συμπληρωματικά και διευκολύνουν στην ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας, όπως έχει γίνει και σε άλλες παρόμοιες έρευνες, και φωτίζουν διαφορετικές πτυχές της. Διευκολύνουν στην ανάλυση των γνωστικών συγκρούσεων που αντιμετωπίζουν τα υποκείμενα της έρευνας και στην κατάταξή τους σε ομάδες. Προσφέρουν επίσης το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο για την εξαγωγή ασφαλών – στο μέτρο του δυνατού – συμπερασμάτων. Κάτω από το φως που ρίχνουν τα παραπάνω θεωρητικά πλαίσια, θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθεί το επίπεδο κατανόησης από μέρους των φοιτητών για την έννοια της συνέχειας.

Σκοπός της Έρευνας

Ο σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει τις δυσκολίες που παρουσιάζει η κατανόηση της έννοιας της συνέχειας σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος. Η επιλογή του δείγματος έγινε από το αντίστοιχο τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών ανεξάρτητα από το έτος φοίτησης. Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό μέσα από ικανό αριθμό ημιδομημένων προσωπικών συνεντεύξεων να μελετήσει, να αναλύσει και να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στην προσπάθειά τους να κατακτήσουν την έννοια της συνέχειας μέσα από τα θεωρητικά πλαίσια της θεωρίας των 3 κόσμων του Tall, της θεωρίας υποστασιοποίησης της Sfard, της γενικής θεωρίας APOS, καθώς και της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής των Vosniadou & Verschaffel.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Πιο συγκεκριμένα η παρούσα έρευνα θα προσπαθήσει να δώσει απάντηση στα επόμενα ερωτήματα:

1. Κατά πόσον επαληθεύονται οι έρευνες που έχουν γίνει διεθνώς και αφορούν την κατανόηση της έννοιας της συνέχειας από την πραγματικότητα του Ελληνικού πανεπιστημίου.
2. Ποιες ιδιαίτερες δυσκολίες παρουσιάζει η διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας σε μαθητές αλλά και σε φοιτητές.
3. Σε ποιο βαθμό ο φορμαλισμός και η αξιωματική θεώρηση που ακολουθείται στο μαθηματικό τμήμα έρχεται να διορθώσει τις παρανοήσεις που ο φοιτητής κουβαλά μαζί του από το Λύκειο
4. Ποιο είναι το επίπεδο κατανόησης που έχουν οι φοιτητές για την έννοια της συνέχειας στα πλαίσια της θεωρίας των 3 κόσμων του Tall, της θεωρίας υποστασιοποίησης της Sfard και της θεωρίας APOS και πώς η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής των Vosniadou & Verschaffel μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τις γνωστικές συγκρούσεις που λαβαίνουν χώρα όταν η ‘νέα’ γνώση του Πανεπιστημίου έρχεται σε σύγκρουση με την ήδη υπάρχουσα γνώση από το Λύκειο.

Υποθέσεις

Βασική υπόθεση αποτελεί η πεποίθηση ότι και η παρούσα έρευνα θα επιβεβαιώσει τα συμπεράσματα παρόμοιων ερευνών που έχουν γίνει διεθνώς. Η έννοια της συνέχειας παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες που δημιουργούν έντονες γνωστικές συγκρούσεις και καθιστούν τη διδασκαλία της ιδιαίτερα απαιτητική. Αναμένεται οι φοιτητές να έχουν ένα μέσο επίπεδο κατανόησης το οποίο να παρουσιάζει μια αυξητική τάση καθώς προχωρούμε στα έτη σπουδών. Αναμένεται τέλος οι φοιτητές να έχουν κατανοήσει ότι η έννοια της συνέχειας όπως τη διδάσκονται στη Γ΄ Λυκείου, είναι ταυτόσημη με τον ε-δ ορισμό που μαθαίνουν στο πανεπιστήμιο.

Αναγκαιότητα – Σημαντικότητα της Έρευνας

Η έννοια της συνέχειας είναι κεντρική στο χώρο των μαθηματικών και σε αυτήν στηρίζονται μια ευρεία γκάμα άλλων ουσιωδών εννοιών. Η ακριβής κατανόησή της καθώς και των συναφών προς αυτήν εννοιών αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για κάθε φοιτητή του μαθηματικού τμήματος. Παρόλα αυτά, όπως έχει φανεί από πολλές έρευνες που έχουν γίνει διεθνώς, είναι μια έννοια που δημιουργεί έντονες γνωστικές συγκρούσεις και προβληματίζει ως προς τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να διδάσκεται (Tall, 2003a; Tall et al., 2001; Hitt & Lara, 1999; Núñez & Lakoff, 1998; Tall, 1996i; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1994b; Tall, 1994h; Cornu, 1991; Artigue, 1991; Mamona-Downs, 1990; Tall, 1991a; Tall & Vinner, 1981). Η πληθώρα των παραπάνω ερευνών που θα εξεταστούν στο επόμενο κεφάλαιο δείχνει τη σοβαρότητα του θέματος. Μια παρόμοια έρευνα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να γίνει και στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών και η παρούσα έρχεται να καλύψει αυτό το κενό.

Πολλές έρευνες που πραγματοποιούνται έχουν αποκλειστικά ποσοτικά κριτήρια, και συνήθως πραγματοποιούνται μέσω κάποιου κατάλληλου ερωτηματολογίου. Αυτό μερικές φορές μπορεί να οδηγήσει σε λαθεμένα συμπεράσματα καθώς τα αποτελέσματα δεν αναλύονται κάτω από το φως ενός κατάλληλου θεωρητικού πλαισίου (Lerman, 2005). Από την άλλη μεριά όμως, η εμπειρία έχει δείξει ότι συχνά τα συμπεράσματα μιας εκπαιδευτικής έρευνας μπορεί να αλλοιωθούν ή τα αποτελέσματα να επιδέχονται διαφορετική ερμηνεία ανάλογα με τη θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιείται (Even & Schwarz, 2003). Έτσι, αποτελεί πεποίθηση του ερευνητή ότι είναι προτιμότερο να γίνει μια ποιοτική ανάλυση των συνεντεύξεων κάτω από το φως διαφορετικών αλλά συναφών γνωστικών θεωριών παρά μια απλή ποσοτική έρευνα. Τα ευρήματα σε αυτή περίπτωση δεν θα πρέπει να αναλύονται με άτεγκτο τρόπο και επίσης παρέχεται ένας πλούτος ερεθισμάτων και πηγών στοχασμού και ανατροφοδότησης.

Μια έρευνα μέσα από ηχογραφημένες συνεντεύξεις εξυπηρετεί έναν ακόμα σκοπό. Οι περισσότερες έρευνες και θεωρητικά πλαίσια συνήθως προσπαθούν να εξηγήσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά στρέφοντας την προσοχή στο έλλειμμα εννοιολογικής κατανόησης που συνήθως υπάρχει. Τα πρόσφατα χρόνια

όμως, αρκετοί ερευνητές έχουν στρέψει την προσοχή τους στον τομέα της επικοινωνίας, όπου και έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες (Mellin-Olsen, 1991; Sinclair, 1984; Bruner, 1983). Οι παραπάνω έρευνες έχουν φέρει στο φως ευρήματα που παρέχουν ισχυρές ενδείξεις ότι τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, συχνά δεν οφείλονται σε ελλιπή εννοιολογική κατανόηση, αλλά σε πρόβλημα επικοινωνίας ανάμεσα στους μαθητές και στους καθηγητές τους. Έτσι, η χρήση συνεντεύξεων μπορεί να βοηθήσει ώστε να διερευνηθούν τέτοιου είδους δυσκολίες.

Η παρούσα έρευνα τέλος, μπορεί να αποτελέσει την αφορμή για περισσότερη έρευνα στον τομέα της διδασκαλίας σημαντικών εννοιών στα μαθηματικά όπως είναι η συνέχεια. Τα αποτελέσματα των εξετάσεων στα διάφορα μαθήματα στο μαθηματικό τμήμα είναι πολλές φορές απογοητευτικά και σίγουρα δημιουργούν έναν έντονο προβληματισμό στους διδάσκοντες. Έρευνες σαν την παρούσα θα μπορούσαν να αποτελέσουν αφετηρία για μια γενικότερη δυναμική που αναπτύσσεται στο χώρο των πανεπιστήμιων και αφορά τη βελτίωση της διδασκαλίας και την έμφαση που πρέπει να δοθεί στην εννοιολογική κατανόηση από μέρους των φοιτητών. Η ανάλυση ενός διαλόγου μπορεί να φέρει στην επιφάνεια αρκετές παρανοήσεις που μπορεί να ανακύψουν ανάμεσα σε δύο συνομιλητές, ιδιαίτερα ανάμεσα σε ένα μαθητή και ένα δάσκαλο (Van Dormolen, 1991).

Οριοθέτηση του Προβλήματος

Η παρούσα έρευνα θα ασχοληθεί ιδιαίτερα με την αντιλήψεις των φοιτητών για την έννοια της συνέχειας και την ικανότητα που έχουν να διακρίνουν τα γραφήματα συνεχών ή μη συναρτήσεων. Αν και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και συναντάται σε παρόμοιες έρευνες, δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στις διασυνδέσεις της έννοιας της συνέχειας με τον ορισμό του ορίου. Επίσης αν και γίνονται κάποιες νύξεις, δεν αποτελεί σκοπό της έρευνας να διερευνηθεί το πώς σχετίζονται οι απόψεις των φοιτητών για την έννοια της συνέχειας με τις αντίστοιχες απόψεις τους για την πυκνότητα των ρητών – αρρήτων, το συνεχές της ευθείας των πραγματικών αριθμών και άλλες συναφείς έννοιες.

ΙΙ. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη

Παρουσιάζονται αρκετές έρευνες που έχουν γίνει διεθνώς και έχουν καταδείξει ότι η έννοια της συνέχειας δημιουργεί αρκετές γνωστικές συγκρούσεις. Θα αναφερθούν ευρήματα που δείχνουν ότι υπάρχουν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση του ορισμού και αρκετά συχνά οι νοητικές εικόνες που έχουν οι μαθητές – φοιτητές κατά νου δεν είναι σωστές. Εξετάζονται επίσης κύριες θεωρίες ανάπτυξης και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών όπως η θεωρία υποστασιοποίησης της Sfard, η θεωρία των τριών κόσμων του Tall, η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής καθώς και η θεωρία APOS, και εξηγείται πώς αυτές μας βοηθούν στην ανάλυση και ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο δομείται η μαθηματική γνώση.

Εισαγωγή

Η εκπαιδευτική έρευνα έχει αποδειχτεί ένα ιδιαίτερα ισχυρό και χρήσιμο εργαλείο στην εκπαίδευση τα τελευταία χρόνια. Με τον όρο ***έρευνα*** (research) εννοούμε τη συστηματική επιστημονική διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με σκοπό την εύρεση νέων γνώσεων (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2005; Βάμβουκας, 2000; Babbie, 1998). Σε χώρες όπως οι Η.Π.Α δίνεται μεγάλη έμφαση στην επιστημονική έρευνα και τα αποτελέσματα τέτοιων ερευνών εξετάζονται προσεκτικά (Lester, 2005). Για πολλά χρόνια ήταν εμφανής μια αντιπαράθεση ανάμεσα στους 'καθαρούς' μαθηματικούς και στους γνωστικούς ψυχολόγους. Σήμερα έχει φανεί ξεκάθαρα ότι χρειαζόμαστε μια 'διεθνή' γλώσσα που θα μπορεί να περιγράψει με σαφήνεια την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, και η γλώσσα αυτή να είναι αποδεκτή και από τις δύο ομάδες επιστημόνων δηλαδή να είναι προϊόν της αγαστής συνεργασίας τους (Lerman, 2005).

Αν και ο χώρος της μαθηματικής εκπαιδευτικής έρευνας δεν έχει πολλά χρόνια ζωής, παρόλα αυτά έχει να επιδείξει ένα αρκετά μεγάλο πλούτο εκπαιδευτικών ευρημάτων (Lester, 2005; Kilpatrick, 1992). Η πλειοψηφία αυτών των ερευνών εδράζονται συνήθως σε κάποιο κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο και σχεδόν πάντα γίνεται προσπάθεια να εφαρμοστεί αυτό το πλαίσιο σε κάποιο εμπειρικό τομέα της μαθηματικής γνώσης (Lerman, 2005; English & Sriraman, 2005). Είναι σημαντική

επίσης η στροφή που έχει γίνει προς μια κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση των μαθηματικών και η στροφή αυτή είναι εμφανής και στις έρευνες οι οποίες πλέον δεν ασχολούνται μόνο με τη γνωστική ανάπτυξη των εννοιών (English & Sriraman, 2005; Even & Schwarz, 2003). Γιατί είναι όμως η θεωρία τόσο σημαντική σε μια έρευνα; Ο diSessa (1991), αναφέρει μερικούς κύριους λόγους:

- Δεν υπάρχουν δεδομένα χωρίς θεωρία. Ο diSessa εξηγεί ότι αντίθετα με ό,τι είναι συνήθως παραδεκτό, τα δεδομένα από μόνα τους δεν μιλούν.
- Μια καλή θεωρία υπερβαίνει τα όρια της κοινής λογικής και μας δίνει τη δυνατότητα να ερμηνεύουμε γεγονότα και καταστάσεις που διαφορετικά δεν θα μπορούσαμε.
- Το/α κατάλληλο/α θεωρητικό/α πλαίσιο/α μας βοηθούν στο να έχουμε βαθύτερη κατανόηση σε πολύπλοκα προβλήματα.

Αν και για πολλούς φαίνεται ότι πάσχουμε από πληθώρα θεωριών και αντίστοιχη έλλειψη πρακτικής εφαρμογής, θα αναφέρουμε τη φράση του R. Skemp όπως την έχουν καταγράψει οι Poynter & Tall (2005a) σε ένα άρθρο τους: *«There is nothing as practical as a good theory» (τίποτα δεν μπορεί να θεωρηθεί τόσο πρακτικό, όσο μια καλή θεωρία).*

Βέβαια, από την άλλη μεριά θα πρέπει να θυμόμαστε ότι τα διάφορα θεωρητικά πλαίσια δεν είναι πανάκεια και ούτε αποκαλύπτουν με κάποιο μαγικό τρόπο τα μυστικά της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης στα υποκείμενα. Κάθε ερευνητής θα πρέπει να είναι προσεκτικός ώστε να μην πέσει στην παγίδα να προσαρμόζει τα ερευνητικά ερωτήματα ή τα δεδομένα μιας έρευνας στο θεωρητικό πλαίσιο που *πιστεύει* ότι είναι σωστό ή που απλά του αρέσει (English & Sriraman, 2005). Τα αποτελέσματα μιας έρευνας έχουν άμεση σχέση με το θεωρητικό πλαίσιο που έχουμε επιλέξει και αυτό μερικές φορές είναι επικίνδυνο (Even & Schwarz, 2003). Αρκετές φορές έχουν κατηγορηθεί οι ερευνητές της διδακτικής ότι προσαρμόζουν τα ευρήματα των ερευνών τους έτσι ώστε να ταιριάζουν και άρα να επιβεβαιώνουν την ή τις επιθυμητές θεωρίες ή ότι τα δεδομένα των ερευνών απογυμνώνονται από κάθε ποιοτικό χαρακτηριστικό και απλά μέσω μιας άτεγκτης κατηγοριοποίησης υπηρετούν κάποια τυπική θεώρηση. Οι ερευνητές επίσης έχουν κατηγορηθεί ότι προτείνουν θεωρητικά πλαίσια τα οποία δεν έχουν εφαρμογή στο χώρο του σχολείου ή γενικότερα

στο εκπαιδευτικό περιβάλλον αλλά μόνο στα ακαδημαϊκά γραφεία των ερευνητών (Lester, 2005).

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες που ερμηνεύουν – ή τουλάχιστον αποσκοπούν σε αυτό – τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση και προσπαθούν να εξηγήσουν τις διάφορες γνωστικές συγκρούσεις που δημιουργούνται καθώς τα υποκείμενα – μαθητές προσπαθούν να δομήσουν τη γνώση (Pegg & Tall, 2005h; Ernest, 1995). Υπάρχουν γενικές θεωρίες που περιγράφουν μια μακράς διαρκείας γνωστική πορεία, όπως τα στάδια του Piaget, τα επίπεδα van Hiele, οι ταξινομίες SOLO και οι μορφές αναπαράστασης του Bruner, ενώ υπάρχουν και οι θεωρίες που περιγράφουν τη γνωστική ανάπτυξη σε ένα τοπικό πλαίσιο όπως η θεωρία APOS της ομάδας των συνεργατών του Dubinsky, οι τρεις κόσμοι του Tall που αποτελούν μια εξέλιξη του procept – object των Gray & Tall, η θεωρία της υποστασιοποίησης της Sfard, κ.α. (Tall, 2007d; Pegg & Tall, 2002g). Αυτές οι θεωρίες μας βοηθούν να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται η μαθηματική γνώση από τα υποκείμενα καθώς και το πώς αυτά αντιδρούν. Η προσέγγιση επίσης της εννοιολογικής αλλαγής μας δίνει τη δυνατότητα να αξιολογήσουμε τη συμπεριφορά των υποκειμένων – μαθητών στις γνωστικές συγκρούσεις που ανακύπτουν καθώς η νέα γνώση έρχεται σε αντιπαράθεση με τις καλά εδραιωμένες αντιλήψεις.

Ο συνδυασμός των διαφορετικών θεωρητικών πλαισίων παρέχει πολλά πλεονεκτήματα. Οι περισσότερες θεωρίες δεν διατυπώνονται σε μια τελική μορφή αλλά διαπλάθονται, εκλεπτύνονται και διαμορφώνονται συνεχώς καθώς έρχονται σε αντιπαράθεση και συνεχή ώσμωση με άλλες θεωρίες αλλά και την πρακτική διδασκαλία και έρευνα (Tall, 2004d). Ο συνδυασμός διαφορετικών θεωρήσεων βελτιώνει την οπτική μας και αυξάνει την εγκυρότητα των συμπερασμάτων που διατυπώνονται σε μια έρευνα (Even & Schwarz, 2003). Το κάθε θεωρητικό πλαίσιο θα μας δώσει τη δυνατότητα να φωτίσουμε διαφορετικές πτυχές του θέματος, να αξιολογήσουμε και αναλύσουμε τις απαντήσεις των φοιτητών από διαφορετική σκοπιά και επιπλέον αποφεύγουμε να πέσουμε στην παγίδα να εμφανίσουμε τα ευρήματα της έρευνας ως εκείνα που υπερθεματίζουν για τη μια ή την άλλη θεωρία, συνηθισμένο πρόβλημα σε μονοθεωρητικές αναλύσεις (Lester, 2005). Οι Tirosh & Tsamir (2004)

αναφέρουν ότι σύμφωνα με τον Schoenfeld (2002) υπάρχουν 8 κριτήρια που μπορούν να σταθμίσουν το επίπεδο των μοντέλων-θεωριών και γενικότερα των θεωρητικών πλαισίων που χρησιμοποιούνται στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Δύο από τα πιο σημαντικά είναι η επεξηγηματική δύναμη και η δύναμη πρόβλεψης. Οι θεωρίες που έχουν επιλεγεί ανωτέρω πληρούν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό και τα δύο κριτήρια.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Βασική θέση της γνωστικής ψυχολογίας είναι ότι δεν μπορούμε να εξηγήσουμε την ανθρώπινη συμπεριφορά μόνο με αναφορά σε εξωτερικά ερεθίσματα του περιβάλλοντος αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε εσωτερικές νοητικές διεργασίες. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι πιστεύουν πώς ο τρόπος με τον οποίο ένας οργανισμός αποκτά πληροφορίες από το περιβάλλον εξαρτάται από τρεις βασικές ικανότητες: (α) την ικανότητα αναπαράστασης του περιβάλλοντος, (β) την ικανότητα του χειρισμού και αλλαγών αυτών των αναπαραστάσεων και (γ) την ικανότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της γνωστικής διαδικασίας. Οι *αναπαραστάσεις* αποτελούνται από σύμβολα ή σημεία τα οποία αντιπροσωπεύουν κάτι στον εξωτερικό κόσμο. Μπορεί να είναι ένα αντικείμενο, μια αφηρημένη ιδέα, μια πράξη, μια σχέση ανάμεσα σε αντικείμενα και πράξεις κ.λ.π. Ειδικότερα ως *εσωτερικές αναπαραστάσεις* καλούνται οι νοητικές αναπαραστάσεις που αντιπροσωπεύουν κάποια πτυχή του εξωτερικού μας κόσμου (Βοσνιάδου, 2005; Γαγάτσης & Σπύρου, n.d.).

Το είδος των νοητικών αναπαραστάσεων που κατασκευάζουν οι μαθητές καθώς διδάσκονται μια νέα έννοια στα μαθηματικά, αποτελεί σημαντικό αντικείμενο έρευνας στον τομέα της διδακτικής των μαθηματικών (Γαγάτσης & Σπύρου, n.d.). Αυτό είναι μια ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία ιδιαίτερα στα ανώτερα μαθηματικά. Οι έρευνες έχουν δείξει ότι ο τομέας της ανάλυσης για παράδειγμα, απαιτεί διαφορετικό είδος σκέψης από αυτό που απαιτεί η μελέτη των στοιχειωδών μαθηματικών (Gray et al., 1999k). Έχει λοιπόν ιδιαίτερο ενδιαφέρον να διερευνήσουμε το είδος των αναπαραστάσεων που κατασκευάζουν οι φοιτητές για την έννοια της συνέχειας τόσο

στην τελευταία τάξη του Λυκείου, όσο και κατά τη φοίτησή τους στο πανεπιστήμιο. Θα δούμε τι έχουν δείξει οι έρευνες για αυτό το θέμα αφού πρώτα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα θεωρητικά πλαίσια μέσα στα οποία θα κινηθούμε

Διεργασία και Αντικείμενο

Όπως αναφέρει η Κολέζα (2000), στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης, το θέμα της κατανόησης αντιμετωπίζεται από τους ερευνητές κάτω από τρεις κυρίως οπτικές γωνίες:

- Μέσα από την αναζήτηση και την ανάπτυξη διδακτικών εργαλείων που έχουν ως στόχο να διευκολύνουν την κατανόηση
- Μέσα από τη διερεύνηση παραμέτρων που επηρεάζουν τη διαδικασία μάθησης και κατανόησης εννοιών και σχέσεων από τους μαθητές
- Μέσα από την κατασκευή θεωρητικών μοντέλων κατανόησης

Τα θεωρητικά μοντέλα ανεξάρτητα από τον στόχο τον οποίο υπηρετούν, στη βάση τους εδράζονται σε κάποια θεωρία. Στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών, κυρίαρχο ρόλο παίζουν θεωρίες που αντιμετωπίζουν τη διαδικασία κατανόησης ως μια διαδικασία ***διεργασίας – αντικειμένου·*** μια μαθηματική έννοια θεωρείται ως εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων αλλά συγχρόνως ως αντικείμενο μελέτης, ανάλυσης και θεωρητικής ανάπτυξης (Gray & Tall, 2007x; Watson et al., 2002).

Ο σχηματισμός νέων εννοιών πραγματοποιείται μέσω της αφαιρετικής διαδικασίας, η οποία έχει γίνει αντικείμενο μελέτης σε διάφορους επιστημονικούς τομείς. Ο Piaget επηρεάστηκε άμεσα από τα μαθηματικά και χρησιμοποίησε την έννοια του «συνόλου» για να χαρακτηρίσει τις δομές της ανθρώπινης νοημοσύνης, δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη μηχανισμών μάθησης όπως αυτών της αυτορρύθμισης, της εξισορρόπησης, της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης, που επιτρέπουν στον άνθρωπο να προσαρμόζεται στο περιβάλλον του. Για τον Piaget, η κυρίαρχη μορφή της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας – αυτή που βάζει τις βάσεις για την ανάπτυξη των δομών της λειτουργικής σκέψης – είναι η δραστηριότητα που βασίζεται στη λογικομαθηματική εμπειρία. Αυτό το είδος της δραστηριότητας, που μέσα από το μηχανισμό της «στοχαστικής αφαίρεσης» ανακαλύπτει σχέσεις ανάμεσα στα

αντικείμενα, κάνει δυνατή, ανάμεσα στα άλλα, τη δημιουργία ιεραρχικά δομημένων ταξινομήσεων και την ανακάλυψη γενικών αρχών (Βοσνιάδου, 1999). Ο Piaget αρχικά έκανε διαχωρισμό ανάμεσα στην *εμπειρική αφαίρεση (empirical abstraction)* η οποία εστιάζει στα αντικείμενα και τις ιδιότητές τους, και στην *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση (pseudo-empirical abstraction)* που εστιάζει στις δράσεις στα αντικείμενα και στις ιδιότητες των δράσεων (Gray & Tall, 2007x; Piaget, 1972). Αργότερα ο Piaget αναφέρεται στην *στοχαστική* ή *αναστοχαστική αφαίρεση (reflective abstraction)* και αναφέρει ότι η αφαίρεση ξεκινάει από πράξεις και δεν αποτελείται απλώς από απομονωμένα στοιχεία, αλλά απαιτεί μια αναδόμηση μέσω στοιχείων που προβάλλονται ή «αντανακλώνται» από το χαμηλότερο προς το ψηλότερο επίπεδο (Beth & Piaget, 1966). Γιατί όμως χρησιμοποιείται ο όρος στοχαστική (ή αναστοχαστική); Η Βοσνιάδου στο Παράρτημα του βιβλίου της Donaldson (1991) αναφέρει δύο βασικούς λόγους. Κατ' αρχήν η ίδια η λέξη εμπεριέχει μια μεταφορά: η δόμηση του χαμηλότερου επιπέδου αντανακλάται ή προβάλλεται στο ανώτερο επίπεδο. Επίσης η αλλαγή που πραγματοποιείται υπογραμμίζεται από μια αύξηση του «στοχασμού» (reflection), με την έννοια της αύξησης της συνείδησης και του συλλογισμού.

Σύμφωνα με τον Piaget, η ενθυλάκωση μιας διεργασίας ως έννοια λαμβάνει χώρα όταν μια φυσική ή νοητική ενέργεια επαναδομείται και επαναοργανώνεται σε υψηλότερο επίπεδο σκέψης κι έτσι γίνεται κατανοητή από το υποκείμενο (Beth & Piaget, 1966). Αυτή η αφαιρετική διαδικασία επιτελείται μέσω μιας «αποπλαισιοποίησης», μια διαδικασία μέσω της οποίας ξεκινάμε αρχικά με συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα ή διεργασίες και στη συνέχεια σταδιακά το πλαίσιο των μαθηματικών αντικειμένων εγκαταλείπεται και στρέφουμε την προσοχή στις επί μέρους σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα. Αυτό δημιουργεί ένα αντικείμενο ανώτερης κλάσης που με τη σειρά του αποπλαισιοποιείται οδηγώντας σε μια νέα ακόμα υψηλότερη κλάση κ.ο.κ. Αυτή η σπειροειδής πορεία κατασκευής νοητικών αντικειμένων βρίσκεται στην καρδιά πολλών θεωρητικών μοντέλων που ανήκουν στα λεγόμενα τοπικά θεωρητικά πλαίσια γνωστικής ανάπτυξης (local frameworks of conceptual growth) (Tall, 2007b; Pegg & Tall, 2005d; Pegg & Tall, 2002g). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τρία τέτοια μοντέλα: α) τη θεωρία Υποστασιοποίησης της Sfard, β) τη θεωρία APOS και γ), τους 3 κόσμους του Tall.

Θεωρία της Υποστασιοποίησης της Sfard

Αρχικά, θα πρέπει να τονίσουμε ότι η Sfard (1991) κάνει μια λεπτή διάκριση ανάμεσα σε δύο λέξεις που διατρέχουν όλη τη θεωρία της. Χρησιμοποιεί τη λέξη *concept (έννοια)* και εναλλακτικά τη λέξη *notion (διανόημα)* για να αναφερθεί στη επίσημη, καθολικά αποδεκτή και αυστηρή μορφή μιας μαθηματικής έννοιας ως θεωρητικό κατασκεύασμα μέσα στο τυποκρατικό σύμπαν της μαθηματικής γνώσης, ενώ χρησιμοποιεί τη λέξη *conception (επινόηση)* για να αναφερθεί στο σύνολο των εσωτερικών υποκειμενικών αναπαραστάσεων και συνδέσεων που δημιουργούνται από την αντίστοιχη *έννοια*. Έτσι για παράδειγμα, στην παρούσα έρευνα η έννοια της συνέχειας όπως διατυπώνεται στα πλαίσια του ε-δ ορισμού αποτελεί *concept*, ενώ ο τρόπος με τον οποίο καταγράφεται αυτή η έννοια από τα υποκείμενα κατά τη διάρκεια κατασκευής της γνώσης είναι *conception.*

Στη συνέχεια η Sfard (1991) εισάγει τον όρο *structural conception (δομική επινόηση)* για να περιγράψει τη χρήση από την πλευρά των υποκειμένων των μαθηματικών εννοιών ως αφηρημένα αντικείμενα, και τον όρο *operational conception (λειτουργική επινόηση)* για να αναφερθεί στους αλγορίθμους, τις διαδικασίες και τις δράσεις που επιτυγχάνονται κατά την επεξεργασία των διανοημάτων. Με αυτόν τον τρόπο η Sfard αναφέρεται στον δυϊσμό διεργασίας / αντικειμένου, τη δυΐκή φύση των μαθηματικών επινοήσεων και σχολιάζει ότι αν και υπάρχει ένα βαθύ οντολογικό κενό ανάμεσα στην δομική και τη λειτουργική επινόηση, στην πραγματικότητα είναι μεταξύ τους έννοιες συμπληρωματικές γι' αυτό και αναφέρεται σε δυϊκότητα και όχι σε διχοτομία. Έτσι, στην έρευνά μας ο ε-δ ορισμός της συνέχειας ως μέσο καθορισμού μιας κλάσης συναρτήσεων αποτελεί μια δομική επινόηση ενώ η χρήση του ορισμού ιδιαίτερα στη μορφή $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ προκειμένου να ελεγχθεί 'αλγεβρικά' η συνέχεια, αποτελεί μια λειτουργική επινόηση.

Είναι αξιοσημείωτο να τονίσουμε ότι η Sfard (1991) αναφέρει ότι φαίνεται να προηγείται η λειτουργική επινόηση της δομικής και αυτό συνάδει και με την ιστορική εξέλιξη όλων σχεδόν των μαθηματικών εννοιών. Επιμένει επίσης στον όρο δυϊσμό, όρος που συνενώνει το *αντικείμενο* και τη *διεργασία*. Υποστηρίζει ότι για να αναπτύξει το υποκείμενο το νόημα και να κατασκευάσει τις ανωτέρου επιπέδου έννοιες πρέπει να μπορεί να σκέφτεται συγχρόνως και λειτουργικά και δομικά. Εν προκειμένω, το

υποκείμενο θα πρέπει να μπορεί να χειριστεί τον ε-δ ορισμό αφηρημένα ως ένα χαρακτηριστικό που ορίζει μια κλάση συναρτήσεων, και ταυτόχρονα να μπορεί να τον χρησιμοποιήσει λειτουργικά ελέγχοντας τη συνέχεια μιας συνάρτησης.

Η διαλεκτική που αναπτύσσεται με βάση τα προηγούμενα, οδηγεί τη Sfard (1991) στη διατύπωση των βασικών αρχών της θεωρίας της υποστασιοποίησης. Κάτω από το φως της ανάλυσης που έχει προηγηθεί για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών μέσω μιας ιεραρχικής δομής, αρχικά εκτελείται μια διεργασία (process) σε ένα ήδη οικείο χαμηλού επιπέδου αντικείμενο, στη συνέχεια αυτή η διεργασία συμπυκνώνεται σε μια αυτόνομη οντότητα και τέλος, η οντότητα αυτή αντιμετωπίζεται ολιστικά ως ένα αντικείμενο ανώτερου επιπέδου που ενσωματώνει όλα του τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες. Αυτά τα τρία στάδια περιγράφονται από την Sfard (ibid) με τους όρους *interiorization (εσωτερίκευση), condensation (συμπύκνωση)* και *reification (υποστασιοποίηση).*

Αναλυτικότερα τώρα, η *εσωτερίκευση (interiorization)* περιγράφεται ως η φάση εκείνη κατά την οποία το υποκείμενο εκτελεί λειτουργίες σε μαθηματικά αντικείμενα χαμηλότερου επιπέδου. Σταδιακά το υποκείμενο γίνεται όλο και πιο επιδέξιο στην εκτέλεση αυτών των λειτουργιών μέχρι που φτάνει στο σημείο να εκτελεί τις διεργασίες χωρίς να χρειάζεται να τις αναλύει λεπτομερώς. Τότε μπορούμε να πούμε ότι το υποκείμενο έχει *εσωτερικεύσει* τη διαδικασία. Ο όρος χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο που τον χρησιμοποιεί και ο Piaget, ο οποίος αναφέρει ότι μια διεργασία (process) έχει εσωτερικευθεί όταν μπορεί να υλοποιηθεί μέσω νοητικών αναπαραστάσεων χωρίς να χρειάζεται να αναλύονται λεπτομερώς τα επί μέρους βήματα. Έτσι για παράδειγμα η ικανότητα ενός μαθητή να χειρίζεται με ευχέρεια τη μορφή $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ χωρίς να χρειάζεται να ανατρέχει αναλυτικά στα επί μέρους βήματα προκειμένου να ελέγξει 'αλγεβρικά' τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, καθώς και η χρήση των ιδιοτήτων της συνέχειας σε ένα πρωτογενές επίπεδο είναι δηλωτικό μιας *εσωτερίκευσης πρώτου επιπέδου*. Όταν αργότερα ο ίδιος μαθητής ως φοιτητής πλέον μπορέσει με την ίδια ευχέρεια να χρησιμοποιήσει τον ε-δ ορισμό σε ένα δευτερογενές επίπεδο προκειμένου να ελέγξει τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε

ένα σημείο, καθώς και να χρησιμοποιήσει τις ιδιότητες που απορρέουν από τον ορισμό, τότε θα μπορούμε να μιλάμε για μια *εσωτερίκευση ανώτερου επιπέδου*.

Κατά τη φάση της *συμπύκνωσης (condensation)* τώρα, μια περιπλεγμένη ακολουθία διαδικασιών συμπυκνώνεται σε μια αυτόνομη οντότητα που είναι πιο εύκολο να τη διαχειριστεί κάποιος. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, το υποκείμενο γίνεται ολοένα και πιο ικανό να αντιμετωπίζει μια διεργασία (process) ως ολότητα χωρίς να χρειάζεται να αναλύει τις επί μέρους διαδικασίες (procedures). Έτσι μια νέα έννοια (concept) επίσημα έρχεται σε ύπαρξη. Το υποκείμενο κατά τη φάση της *συμπύκνωσης* έχει τη δυνατότητα να κάνει συνδέσεις της έννοιας με άλλες έννοιες, να γενικεύει καθώς και να δημιουργεί πολλαπλές αναπαραστάσεις τις οποίες και να συνδέει μεταξύ τους. Η δημιουργία κατάλληλων αναπαραστάσεων καθώς και η ικανότητα από μέρους του υποκειμένου να μεταβαίνει από τη μια στην άλλη, αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της *συμπύκνωσης*. Και αυτή η φάση όπως και η πρώτη πραγματώνονται σταδιακά μέσα από μια ποσοτικά ελέγξιμη διαδικασία συνεχών εκλεπτύνσεων. Ως αναφορά την έννοια της συνέχειας, η *συμπύκνωση* επιτυγχάνεται με την ικανότητα του υποκειμένου να δημιουργεί κατάλληλες αναπαραστάσεις για τον ορισμό της συνέχειας, να διακρίνει τις διασυνδέσεις ανάμεσα στον ε-δ ορισμό και τον ορισμό μέσω ορίου, να μπορεί να διακρίνει τη συνέχεια από το γράφημα μιας συνάρτησης και να χειρίζεται της ιδιότητες μια συνεχούς συνάρτησης μέσα από τις προηγούμενες – αλλά και άλλες κατάλληλες – αναπαραστάσεις.

Ως *υποστασιοποίηση (reification)* τέλος, ορίζεται το στάδιο κατά το οποίο το υποκείμενο μπορεί να συλλάβει την καινούργια έννοια, που αναπτύχθηκε λειτουργικά στο στάδιο της *εσωτερίκευσης* και εμπλουτίστηκε με πολλαπλές και ενεργά συνδεδεμένες μεταξύ τους αναπαραστάσεις στη φάση της *συμπύκνωσης*, ως ένα πλήρες, νέο νοητικό αντικείμενο που εμπεριέχει όλα του τα χαρακτηριστικά. Αυτό το στάδιο δεν είναι μια ποσοτικά αξιολογήσιμη διεργασία διακριτών βημάτων αλλά μάλλον θα πρέπει να ειδωθεί ως ένα απότομο βήμα, μια κβαντισμένη διαδικασία, την ξαφνική ικανότητα του υποκειμένου να δει ένα οικείο νοητικό αντικείμενο κάτω από ένα τελείως καινούργιο φως, μια διαδικασία σίγουρα επίπονη. Πολλές φορές έρχεται όταν δεν την περιμένει κανείς σαν ένα απρόσμενο φλας.

Όταν το υποκείμενο έχει *υποστασιοποιήσει* μια έννοια, τότε μπορεί να σκεφθεί σφαιρικά πάνω σε αυτήν, να χρησιμοποιήσει συνολικά και διαδραστικά τα επί μέρους χαρακτηριστικά της και τις αναπαραστάσεις που έχει κατασκευάσει, να συνδυάσει τις ιδιότητες που απορρέουν και χαρακτηρίζουν αυτή την έννοια, να συνάγει νέα συμπεράσματα και να δημιουργήσει νέες έννοιες ανώτερου επιπέδου. Τότε το υποκείμενο αρχίζει να *εσωτερικεύει* ένα νέο νοητικό αντικείμενο ανώτερου επιπέδου που με τη σειρά του αφού περάσει από τη φάση της *συμπύκνωσης*, τελικά θα *υποστασιοποιηθεί* σε μια ακόμα πιο υψηλού επιπέδου έννοια που με τη σειρά της θα αρχίσει να εσωτερικεύεται κ.ο.κ., οδηγώντας σε μια αέναη διαδικασία κατασκευής της γνώσης που συντελείται σε επάλληλους κύκλους.

Αν θέλαμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεωρητικό μοντέλο σύντομα στην κατασκευή της γνώσης της έννοιας της συνέχειας, θα διακρίναμε σε αδρές γραμμές τα επόμενα στάδια. Ο μαθητής στη Γ΄ Λυκείου έρχεται σε επαφή με την έννοια της συνέχειας μέσα από τη σχέση $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Καθώς τη χρησιμοποιεί προκειμένου να ελέγξει τη συνέχεια μιας συνάρτησης και μαθαίνει να αξιοποιεί λειτουργικά τις βασικές ιδιότητες, το υποκείμενο μπαίνει στη φάση της *εσωτερίκευσης*. Στη συνέχεια ο μαθητής αρχίζει να σκέπτεται τη συνέχεια μέσα από τα γραφήματα συναρτήσεων και μαθαίνει να αξιοποιεί πλήρως όλες τις ιδιότητες. Μαθαίνει για τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων, δημιουργεί τις κατάλληλες γεωμετρικές αναπαραστάσεις τους και παρατηρεί πώς αυτά αποδεικνύονται και πώς η συνέχεια αποτελεί την ειδοποιό διαφορά. Καθώς όλα αυτά τα χαρακτηριστικά ολοένα και εκλεπτύνονται, ο μαθητής περνάει στο στάδιο της *συμπύκνωσης*. Όταν όλα τα προηγούμενα συντελεστούν σε ένα αρκετά υψηλό επίπεδο, τότε κάποια στιγμή το υποκείμενο βλέπει την ιδιότητα της συνέχειας ως μια γενική ιδιότητα που δημιουργεί μια κλάση συναρτήσεων ορισμένες σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων που μέσα της περιέχει και ενοποιεί όλα τα προηγούμενα επί μέρους χαρακτηριστικά. Σκέπτεται ταυτόχρονα με τη σχέσεις αλλά και με τις αναπαραστάσεις ενώ οι ιδιότητες θεωρούνται αναπόσπαστο τμήμα του νέου νοητικού αντικειμένου. Τότε, και μόνο τότε, μπορούμε να πούμε ότι η συνέχεια έχει *υποστασιοποιηθεί* στο νου του μαθητή.

Αυτή η υποστασιοποίηση με τη σειρά της δημιουργεί νέα ερωτηματικά και ανοιχτά προβλήματα. Καθώς ο μαθητής έρχεται σε επαφή στο πανεπιστήμιο με τον ε-δ ορισμό

το νοητικό αντικείμενο της συνέχειας αρχίζει και πάλι να μεταπλάθεται. Αρχικά ο φοιτητής μπαίνει και πάλι στη φάση της *εσωτερίκευσης* χρησιμοποιώντας λειτουργικά τον ορισμό και προσπαθώντας να μάθει τα νέα σύμβολα και τις βασικές ιδιότητες που απορρέουν από αυτόν. Στη συνέχεια προσπαθεί να διερευνήσει τις διασυνδέσεις του νέου ορισμού με τη σχέση που είχε μάθει στο Λύκειο, να δημιουργήσει κατάλληλες αναπαραστάσεις για τη συνέχεια κάνοντας κατάλληλη χρήση των συμβόλων ε και δ, να διακρίνει πώς ο ορισμός διαμορφώνει κατάλληλες ιδιότητες και οδηγεί στη διατύπωση θεωρημάτων κι έτσι περνάει στη φάση της *συμπύκνωσης*. Όταν φτάσει η στιγμή που ο φοιτητής αντιλαμβάνεται πλέον τη συνέχεια ως μια ιδιότητα που ορίζει μια γενικότερη κλάση συναρτήσεων που εμπεριέχει όλες τις προηγούμενες σχέσεις, αναπαραστάσεις, ιδιότητες και θεωρήματα, τότε ένα νέο νοητικό αντικείμενο υψηλότερου επιπέδου έχει *υποστασιοποιηθεί* στο νου του φοιτητή. Αργότερα ο φοιτητής θα περάσει από το οικείο σύνολο $\mathbb{R}$ στους μετρικούς χώρους και η προηγούμενη διαδικασία θα επαναληφθεί ξανά για να καταλήξουμε στην *υποστασιοποίηση* ενός ακόμα υψηλότερου νοητικού αντικειμένου. Αργότερα θα έρθει η έννοια του τοπολογικού χώρου και η προηγούμενη διαδικασία θα επαναληφθεί κ.ο.κ.

Σύμφωνα με τη Sfard (1991), η *υποστασιοποίηση* παίζει κεντρικό ρόλο στη διαδικασία μάθησης. Όπως εξηγήθηκε ανωτέρω, η μορφοποίηση μιας δομικής επινόησης γίνεται μέσω μιας διαστρωματοποιημένης εκλέπτυνσης του κατάλληλου γνωστικού σχήματος. Αυτές οι συνεχείς εκλεπτύνσεις οδηγούν σε γνωστικά σχήματα απλούστερα αλλά ταυτόχρονα πιο περιεκτικά. Αυτό δίνει περισσότερο 'χώρο' για νέα γνωστικά σχήματα και επίσης τα κάνει πιο ευέλικτα και αποτελεσματικά στη χρήση τους και στη διασύνδεσή τους με άλλα γνωστικά σχήματα. Έτσι, η μετάβασή μας από τις διαδικασίες στα νοητικά αντικείμενα μέσω της πορείας *εσωτερίκευση – συμπύκνωση – υποστασιοποίηση* βελτιώνει και κάνει ποιοτικότερη τη μαθηματική γνώση. Η Sfard (ibid) αναφέρει ότι ο αέναος κύκλος της υποστασιοποίησης μπορεί να μας βοηθήσει να εξηγήσουμε γιατί για τόσο πολύ κόσμο 'τα μαθηματικά του σχολείου είναι μια συλλογή από ακατανόητους κανόνες που απλά αν τους αποστηθίσει κάποιος και τους εφαρμόσει σωστά οδηγούν στο σωστό αποτέλεσμα' [35].

[35] Φράση από τον Skemp, R., R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics.* Harmondsworth, England: Penguin Books, page 3.

Όπως έχει διαφανεί από τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, είναι σαφές ότι οι διεργασίες που απαιτούνται για να φτάσει κάποιος στην υποστασιοποίηση ενός νοητικού αντικειμένου, δεν είναι καθόλου εύκολες. Γι' αυτό άλλωστε πολλοί μαθητές και φοιτητές είναι αρκετά ικανοί στο χειρισμό διαδικασιών αλλά εμφανίζεται να έχουν ελλιπή θεωρητική κατανόηση και αδυναμία επαγωγικής αλλά και παραγωγικής σκέψης.

Στην παρούσα έρευνα θα διερευνήσουμε σε ποιο βαθμό οι φοιτητές έχουν εσωτερικεύσει τις σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της συνέχειας, το είδος των αναπαραστάσεων που έχουν κατασκευάσει γι' αυτήν και αν διακρίνουν τις διασυνδέσεις ανάμεσα σε αυτές, δηλαδή αν έχουν περάσει στη φάση της συμπύκνωσης. Τέλος, θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθεί αν υπάρχουν φοιτητές που να έχουν φτάσει σε ένα ανώτερο επίπεδο υποστασιοποίησης ώστε να αντιλαμβάνονται την έννοια της συνέχειας ως ένα νοητικό αντικείμενο, μια ολότητα που εμπεριέχει όλα το προηγούμενα στοιχεία.

Η θεωρία APOS

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τις βασικές αρχές της θεωρίας APOS του Dubinsky και των συνεργατών του κυρίως στην πιο πρόσφατη μορφή της (Dubinsky & MacDonald, 2001; Czarnocha et al., 1999; Dubinsky, 1991). Η κύρια βάση γι' αυτή τη θεωρία είναι η επιστημολογία της μάθησης του Piaget από τη νηπιακή ηλικία και μέχρι την εφηβεία και η προσπάθεια εφαρμογής του μηχανισμού της *αναστοχαστικής αφαίρεσης* [36] στην εκμάθηση μαθηματικών πέρα από την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τι σημαίνει να μαθαίνει και να γνωρίζει κανείς κάτι στο χώρο των μαθηματικών; Ο Dubinsky και οι συνεργάτες του αναφέρουν: «*Η μαθηματική γνώση ενός υποκειμένου συνίσταται στην ικανότητά του να απαντά σε προβληματικές καταστάσεις μαθηματικών μέσω αναστοχασμού σε αυτές μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο, κατασκευάζοντας ή επανακατασκευάζοντας μαθηματικές δράσεις, διεργασίες και αντικείμενα οργανωμένα σε σχήματα προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στην προβληματική κατάσταση*» (Czarnocha et al., 1999). Με άλλα λόγια η απόκτηση

[36] Βλέπε σελίδες 86 και 87.

της γνώσης συνίσταται στην ικανότητα του ατόμου να δημιουργεί νοητικές κατασκευές – σχήματα ικανά να επιλύσουν προβληματικές καταστάσεις.

Ο *αναστοχασμός* αποτελεί κεντρική ιδέα στη θεωρία APOS, καθώς το να ξέρει κανείς μαθηματικά σημαίνει πολύ περισσότερα από το να μπορεί να χειριστεί αλγοριθμικά κάποιες διαδικασίες. Υποστηρίζεται επίσης από τη Sfard (1991) ότι αυτός ο *αναστοχασμός* λειτουργεί καλύτερα μέσα σε ένα κατάλληλο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο. Η κοινωνική αλληλεπίδραση που καλλιεργείται μέσα σε κατάλληλο περιβάλλον ανταλλαγής ιδεών επιδρά ευεργετικά στη διαδικασία δόμησης της (μαθηματικής και όχι μόνο) γνώσης μέσω αποτελεσματικών νοητικών κατασκευών. Αυτά τα *σχήματα* πολλές φορές απαιτούν την υπενθύμιση ή επανακατασκευή μιας προηγούμενης νοητικής κατασκευής. Η προοδευτική εξέλιξη όμως στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης δεν έρχεται με μια κατασκευή που θα αποτελεί απλά εξέλιξη ή βελτίωση παλαιότερων νοητικών κατασκευών. Τα νέα σχήματα αν και έχουν αρκετά κοινά σημεία με τα παλιότερα είναι πολυπλοκότερα, νοητικές κατασκευές ανώτερου επιπέδου. Αυτή η ιδέα σχετίζεται με τη διχοτομία του Piaget μεταξύ *αφομοίωσης* και *συμμόρφωσης* [37].

Ο Dubinsky υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα οικοδομούνται μέσω της αναστοχαστικής αφαίρεσης σε μια διαλεκτική ακολουθία **A** → **P** → **O** → **S**, που ξεκινά με *Δράσεις (**A**ctions)* πάνω σε φυσικά και νοητικά αντικείμενα, δράσεις που δημιουργούνται ως αντιδράσεις σε ερεθίσματα που εκλαμβάνονται ως εξωτερικά από το υποκείμενο. Οι δράσεις με τη σειρά τους *εσωτερικεύονται (interiorized)* σε *Διεργασίες (**P**rocesses)* που με τη σειρά τους *ενθυλακώνονται (encapsulated)* σε νοητικά *Αντικείμενα (**O**bjects)*, ενώ τέλος οι διεργασίες και τα αντικείμενα οργανώνονται σε *Σχήματα (**S**chema)* (Poynter & Tall, 2005a; Dubinsky & MacDonald, 2001; Czarnocha et al., 1999; Tall, 1999c; Dubinsky, 1991).

Αρχικά οι μετασχηματισμοί αντικειμένων εκλαμβάνονται ως *δράσεις* επί άλλων αντικειμένων. Οι δράσεις αυτές εκλαμβάνονται ως αντιδράσεις σε ερεθίσματα που το υποκείμενο τα εκλαμβάνει ως εξωτερικά. Προϋποθέτουν αναλυτικές και πλήρως καταληπτές οδηγίες τις οποίες το υποκείμενο θα ακολουθεί πιστά σε κάθε βήμα του

[37] Βλέπε σελίδες 71 και 72.

μετασχηματισμού. Οι δράσεις ασκούνται επί κάποιων αντικειμένων με σκοπό τη δημιουργία νέων (Czarnocha et al., 1999).

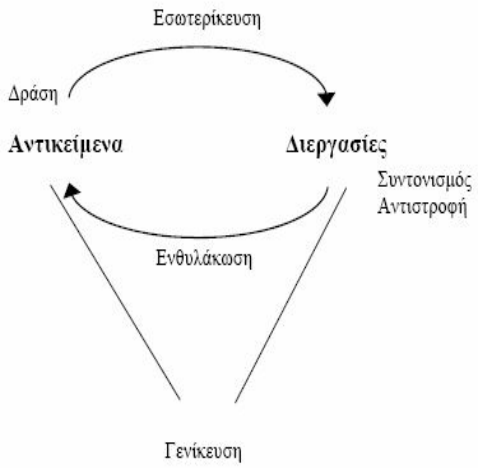
Στο επόμενο στάδιο το υποκείμενο αναστοχάζεται πάνω στη δράση η οποία *εσωτερικεύεται* με τη μορφή νοητικής *διεργασίας*, και καθίσταται ενήμερο των διεργασιών που μπορούν να γίνουν. Αποκτά τον έλεγχο πάνω στις δράσεις και διακρίνει τον τρόπο με τον οποίο αυτές επενεργούν. Σημειώνουμε ότι το υποκείμενο περνά στο στάδιο της *διεργασίας* όταν μπορεί να στοχάζεται τον τρόπο και το αποτέλεσμα της δράσης χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να εκτελεί τις επί μέρους δράσεις (Czarnocha et al., 1999; Tall, 1999c; Dubinsky, 1991).

Στη συνέχεια το υποκείμενο αρχίζει να κάνει στοχασμούς πάνω στις επί μέρους λειτουργίες σε μια συγκεκριμένη διεργασία, να διακρίνει τους μετασχηματισμούς που μπορούν να γίνουν και αντιλαμβάνεται το σύνολο των διεργασιών ως μια ολότητα, όντας ικανό πλέον να στοχάζεται πάνω σε αυτές τις διεργασίες ως ένα αυτόνομο νοητικό αντικείμενο. Τώρα το υποκείμενο έχει περάσει στο επόμενο στάδιο και τότε λέμε ότι οι διεργασίες *ενθυλακώνονται* σε *αντικείμενο*. Πολλές φορές είναι απαραίτητο να γίνει και η αντίστροφη διαδικασία. Μια *δράση* ή *διεργασία* που έχει ήδη *ενθυλακωθεί* σε ένα νοητικό αντικείμενο, χρειάζεται να *από-ενθυλακωθεί (de-encapsulate)* πίσω στη δράση ή τη διεργασία από την οποία προήλθε προκειμένου να χρησιμοποιηθεί λειτουργικά, να αξιοποιηθούν οι ιδιότητές του (Czarnocha et al., 1999). Αυτή η ικανότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη διδακτικά, καθώς ο μαθητής – φοιτητής πρέπει να μπορεί να κινείται συνεχώς ανάμεσα στο αντικείμενο – έννοια και στις διεργασίες – λειτουργίες του αντικειμένου.

Στο τελευταίο στάδιο οι δράσεις που έχουν εσωτερικευθεί με τη μορφή διεργασιών και οι διεργασίες που έχουν ενθυλακωθεί σε αντικείμενα συνδέονται μεταξύ τους με διαφορετικούς τρόπους και δημιουργούν ένα *σχήμα*. Ένα σχήμα μπορεί να προκύψει για παράδειγμα από τη σύνθεση δύο ή περισσότερων διεργασιών ή από τη δράση μεταξύ διεργασιών και αντικειμένων. Μια συλλογή από δράσεις, διεργασίες και αντικείμενα μπορεί να δομηθεί σε ένα σχήμα το οποίο μάλιστα μπορεί να περιέχει και άλλα προγενέστερα σχήματα. Το υποκείμενο μπορεί τώρα να βλέπει τη γνώση ως μια ολότητα, να χρησιμοποιεί κατά το δοκούν τις δράσεις και τις διεργασίες, να δομεί επί μέρους τμήματα του σχήματος σε λειτουργικές υπο-δομές και το αντίστροφο, να

αποδομεί ένα σχήμα σε επί μέρους στοιχεία. Τέτοια σχήματα τώρα, μπορούν να ιδωθούν ως αντικείμενα που με τη σειρά τους κάτω από τις κατάλληλες δράσεις θα εσωτερικευθούν με τη μορφή διεργασιών οι οποίες θα ενθυλακωθούν σε νέα ανώτερα αντικείμενα, συνδυασμός των οποίων θα παραγάγει νέα σχήματα ανώτερου επιπέδου κ.ο.κ. (Dubinsky & MacDonald, 2001; Czarnocha et al., 1999). Έτσι έχουμε μια σπειροειδή πορεία οικοδόμησης ολοένα και πιο εκλεπτυσμένων σχημάτων.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να τονίσουμε ότι η παραπάνω αποτελεί εν δυνάμει πορεία της σκέψης του μαθητή και όχι δεδομένη διαδρομή που ακολουθεί κάθε υποκείμενο. Υπάρχουν αρκετοί άλλοι παράγοντες που θα καθορίσουν τελικά τον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής θα αντιμετωπίσει μια προβληματική κατάσταση (Dubinsky, 1991).



Διάγραμμα 1

Το *σχήμα* και οι κατασκευές του (Dubinsky, 1999).

Στο Σχήμα 6 μπορούμε να δούμε μια σχηματική περιγραφή της δομής ενός σχήματος όπως περιγράφεται στα πλαίσια της θεωρίας APOS. Περιγράφει τα πέντε είδη κατασκευών που προτείνονται από τον Dubinsky (1991) και χαρακτηρίζουν την αναστοχαστική αφαίρεση: *εσωτερίκευση*, *συντονισμός*, *ενθυλάκωση*, *γενίκευση* και *αντιστροφή*. Έχουμε ήδη περιγράψει ότι η εσωτερίκευση αναφέρεται στη φάση κατά την οποία το υποκείμενο αναστοχάζεται πάνω στις δράσεις που ασκούνται σε ένα αντικείμενο και τις εσωτερικεύει σε διεργασίες. Ο Dubinsky (ibid) για να εξηγήσει στη συνέχεια το μηχανισμό του *συντονισμού* αναφέρει το παράδειγμα της σύνθεσης συναρτήσεων. Ξεκινάμε με δύο συναρτήσεις – αντικείμενα. Το υποκείμενο αρχικά τις

από-δομεί στοχαζόμενο τις επί μέρους διεργασίες που απαιτούνται και έτσι τις εσωτερικεύει. Στη συνέχεια οι διεργασίες *συντονίζονται* προκειμένου να σχηματιστεί μια νέα διεργασία η οποία με τη σειρά της ενθυλακώνεται σε ένα νέο αντικείμενο που είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης συναρτήσεων. Το επόμενο στάδιο, η *ενθυλάκωση*, όπως έχουμε δει αναφέρεται στη φάση κατά την οποία το υποκείμενο στοχάζεται πάνω στις διεργασίες και τις αντιμετωπίζει ως μια ολότητα. Η *γενίκευση* στη συνέχεια, είναι ο πιο απλός και συνηθισμένος μηχανισμός αναστοχαστικής αφαίρεσης και αναφέρεται στις γενικεύσεις που κάνει ένα υποκείμενο σε ένα σχήμα που έχει οικοδομηθεί προκειμένου να συμπεριλάβει νέες διεργασίες ανώτερου επιπέδου. Για παράδειγμα το γνωστικό σχήμα της συνάρτησης που αρχικά χτίζεται πάνω σε ένα σύνολο αριθμών, στη συνέχεια μπορεί να γενικευθεί προκειμένου να συμπεριλάβει σύνολα, διανύσματα ή άλλες συναρτήσεις. Η τελευταίος μηχανισμός που αναφέρεται είναι η *αντιστροφή*. Υπάρχουν αρκετές μαθηματικές δραστηριότητες που εμπεριέχουν την αντιστροφή όπως η επίλυση μιας εξίσωσης, η εύρεση μιας αντίστροφης συνάρτησης, η απόδειξη μιας ανισότητας με τη μέθοδο των ισοδυναμιών κ.α.

Ας δούμε τώρα πώς εφαρμόζεται το θεωρητικό πλαίσιο APOS στην έννοια της συνέχειας. Ο μαθητής στη Γ΄ Λυκείου μαθαίνει αρχικά τη μορφή $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ και τη χρησιμοποιεί προκειμένου να ελέγξει τη συνέχεια μιας συνάρτησης χωρίς να κάνει ιδιαίτερες σκέψεις και χωρίς να μπορεί αν αξιολογήσει ακόμα την ισχύ του τύπου. Αυτό αποτελεί μια εννοιολογική *δράση*. Στο επόμενο στάδιο το υποκείμενο δεν κάνει πλέον απλά κάποιες μηχανιστικές πράξεις αλλά αρχίζει μέσω της αναστοχαστικής αφαίρεσης να κάνει στοχασμούς πάνω στις δράσεις που έχουν προηγηθεί και να αποκτά έλεγχο πάνω σε αυτές. Οι δράση τώρα εσωτερικεύεται σε *διεργασία*. Το υποκείμενο δεν είναι απαραίτητο να εκτελεί πράξεις αλλά αρκεί η σκέψη του πάνω στις προηγούμενες δράσεις και στο τι μπορούν να επιτελέσουν αυτές. Ο μαθητής αντιλαμβάνεται πώς δρα ο τύπος $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$, τι περιλαμβάνει η συνέχεια μιας συνάρτησης, πώς περιλαμβάνονται οι ιδιότητες της συνέχειας στη παραπάνω διαλεκτική, τι αναπαραστάσεις κατασκευάζονται και πώς αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Όταν όλους τους προηγούμενους μετασχηματισμούς το υποκείμενο μπορεί να τους αντιληφθεί όχι απλά ως μεμονωμένες και ανεξάρτητες διεργασίες αλλά

τους δει ενοποιημένα, τότε ο στοχασμός οδηγεί στην ενθυλάκωση όλων των δράσεων και διεργασιών σε ένα *αντικείμενο*. Στο τέλος το υποκείμενο – μαθητής δημιουργεί στα πλαίσια του σχολείου ένα *σχήμα* που συνδέει τις δράσεις, τις διεργασίες, τους μετασχηματισμούς μεταξύ τους και το αντικείμενο που τα ενοποιεί. Όταν ο μαθητής περάσει πλέον στο στάδιο του φοιτητή, αυτό το σχήμα με τη σειρά του μπορεί να ιδωθεί ως ένα νέο αντικείμενο που με δράσεις ανώτερου επιπέδου – στηριζόμενες στον ε-δ ορισμό – εσωτερικεύεται σε διεργασίες ανώτερου επιπέδου που θα ενθυλακωθούν σε ένα ανώτερο αντικείμενο που θα οδηγήσει τελικά στο σχηματισμό ενός σχήματος ανώτερου επιπέδου κ.ο.κ.

Στην παρούσα έρευνα θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθεί το επίπεδο κατανόησης από μέρους των φοιτητών στα πλαίσια της θεωρίας APOS. Το είδος των δράσεων που ασκούνται από τους φοιτητές, οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζονται και αν και σε ποιο βαθμό εσωτερικεύονται σε διεργασίες. Αν επίσης οι φοιτητές μπορούν όλα τα παραπάνω να τα δουν σαν ένα αντικείμενο και αν είναι εφικτό να φτάσουν στο ανώτερο επίπεδο κατασκευής του κατάλληλου σχήματος.

Από το procept στους 3 κόσμους του Tall

Από τα πρώτα χρόνια στη διδακτική των μαθηματικών γινόταν αρκετή συζήτηση για τον τρόπο με τον οποία οι διεργασίες 'μετασχηματίζονται' σε νοητικά αντικείμενα. Ο Piaget αναφέρεται στην *ενθυλάκωση* (*encapsulation*) μιας διεργασίας (process) σε νοητικό αντικείμενο (mental object) (Piaget, 1972; Beth & Piaget, 1966). Ο Dienes (1960) περιγράφει πώς μια δράση γίνεται ένα αντικείμενο ή μια ευρύτερη δράση που με τη σειρά της μπορεί να γίνει ένα ευρύτερο αντικείμενο. Γενικότερα, η γνωσιακή εξέλιξη της μορφοποίησης μιας (δυναμικής) διεργασίας σε μια (στατική) γνωστική οντότητα έχει κατά καιρούς ονομαστεί: *ενθυλάκωση* (*encapsulation*) μετά τον Piaget, *μορφοποίηση σε αυτοτελή οντότητα* (*entification*) από τον Kaput και *υποστασιοποίηση* (*reification*) από τη Sfard (Gray & Tall, 1991).

Οι Gray και Tall χρησιμοποιούν τις λέξεις *διεργασία (process)* και *διαδικασία (procedure)* με διαφορετική σημασία. Με τον όρο διαδικασία εννοούν έναν αλγόριθμο, μια ακολουθία βημάτων που εκτελούνται με τη σειρά, ενώ με τον όρο διεργασία εννοούν κάτι πιο γενικό, περιλαμβάνει το σύνολο όλων των διαδικασιών που μπορούν

να χρησιμοποιηθούν για να περατωθεί μια διεργασία (Gray & Tall, 1994; Gray & Tall, 1991). Για παράδειγμα, η παραγώγιση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}$ είναι μια *διεργασία*. Η παράγωγος όμως αυτή μπορεί να βρεθεί με πολλούς τρόπους, με χρήση του κανόνα του πηλίκου, με χρήση του κανόνα του γινομένου, με χωρισμό στα επί μέρους κλάσματα κ.λ.π. Καθεμία από αυτές τις μεθόδους αποτελεί μια *διαδικασία* (Tall et al., 2001).

Αυτή η ενθυλάκωση μιας διεργασίας σε ένα αντικείμενο είναι μια δύσκολη γνωσιακή δραστηριότητα αφού κάτι πρέπει να ιδωθεί ταυτόχρονα ως διεργασία και ως αντικείμενο. Οι Gray και Tall διακρίνουν στα μαθηματικά την *έννοια (concept)* που αναφέρεται στα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις και τον όρο *διεργασία (process)* που περιγράφει τις δράσεις που μπορούν να ασκηθούν στο εν λόγω μαθηματικό αντικείμενο. Η διεργασία είναι από τη φύση της δύσκαμπτη, περιορισμένη και μονοδιάστατη ενώ η έννοια είναι εύκαμπτη, ελαστική και πολυδιάστατη. Ο μαθηματικός συμβολισμός έρχεται τώρα να γεφυρώσει τη φαινομενική διχοτομία που δημιουργείται και να δημιουργήσει μια δυϊκότητα, μια αμφισημία ανάμεσα στην έννοια και τη διεργασία, δυϊκότητα απαραίτητη για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Gray & Tall, 1994; Gray & Tall 1991). Έτσι για παράδειγμα, η έκφραση 3x+2 αναπαριστά ταυτόχρονα τη διεργασία της πρόσθεσης του 2 με το 3x αλλά και την έννοια του αλγεβρικού αποτελέσματος· ή ο συμβολισμός $\lim_{x\to x_o} f(x)$ ενοποιεί τη διεργασία εύρεσης ενός ορίου αλλά και την έννοια της τιμής του ορίου. Σύμφωνα με τους Gray και Tall (ibid), η ικανότητα του υποκειμένου να χειρίζεται και τις δύο μορφές και να μπορεί να κινείται με άνεση μεταξύ τους, είναι η ρίζα της επιτυχημένης μαθηματικής σκέψης.

Βλέπουμε λοιπόν ότι στα πλαίσια μιας ανεπτυγμένης μαθηματικής σκέψης, οι διεργασίες και οι έννοιες λειτουργούν συμπληρωματικά, σαν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Οι Gray και Tall (ibid) εισάγουν τον όρο *Διεργασία – Έννοια* (**procept** = **pro**cess + con**cept**) για να περιγράψουν το μίγμα που δημιουργείται από τη διεργασία και την έννοια που αναπαρίστανται από τον ίδιο μαθηματικό συμβολισμό. Αντίστοιχα αναφέρονται στη *διαδικαστική σκέψη (procedural thinking)* που αφορά τις ενέργειες

που γίνονται πάνω σε ένα αντικείμενο με περιορισμένο όμως ορίζοντα, και στην *διεργασιοεννοιολογική σκέψη (proceptual thinking)* που ορίζεται ως η ικανότητα του υποκειμένου να χρησιμοποιεί με ευελιξία το μαθηματικό συμβολισμό, άλλοτε ως διεργασία και άλλοτε ως έννοια. Αν και η βάση για τα παραπάνω αποτέλεσαν οι θεωρίες της Sfard και του Dubinsky που εξετάσαμε νωρίτερα και μιλούσαν για ενθυλάκωση και υποστασιοποίηση του της διεργασίας σε αντικείμενο, δεν υπήρχε μια λέξη για να περιγράψει τη διεργασία που ταυτόχρονα είναι και έννοια (Tall, 2007). Η εργασία των Gray και Tall προχωράει σε ένα πιο εκλεπτυσμένο επίπεδο και μπορούμε να μιλάμε για διάφορα είδη procept. *Λειτουργικά procepts (operational procepts)* όπως το 2+3 στην αριθμητική, στα οποία υπάρχει πάντα μια διαδικασία που υπολογίζει ένα αποτέλεσμα, *δυνητικά procepts (potential procepts)* στην άλγεβρα όπως το 2+3x που αναπαριστά τόσο μια γενική διεργασία εκτίμησης που δεν μπορεί να ολοκληρωθεί αν δεν ξέρουμε το x όσο και μια αλγεβρική έκφραση και τέλος *δυνητικώς άπειρα procepts (potentially infinite procepts)* όπως η έννοια του ορίου (Tall, 2007d; Tall et al., 2001).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η βάση όλων των προηγουμένων είναι η *αφαίρεση*, μια πολύπλευρη οντότητα που μέσα της ενυπάρχουν η διεργασία, η ιδιότητα και η έννοια (Tall, 2007d). Οι Gray και Tall (2001i) διακρίνουν τουλάχιστον τρεις διαφορετικούς τύπους μαθηματικών εννοιών: ο πρώτος βασίζεται στην αντιληπτικότητα των αντικειμένων, ο δεύτερος στις διεργασίες με δυϊκή φύση που συμβολοποιούνται και συλλαμβάνονται ως διεργασία-έννοια (procept), δηλαδή άλλοτε ως διεργασίες και άλλοτε ως έννοιες και ο τρίτος βασίζεται σε μια λίστα από ιδιότητες που δρουν ως ορισμός της έννοιας (concept definition) για την κατασκευή ενός αξιωματικού συστήματος στα ανώτερα μαθηματικά. Το καθένα από τα παραπάνω είναι ένα είδος αφαίρεσης: η νοητική εικόνα ενός προσλαμβανόμενου από τις αισθήσεις αντικειμένου (όπως ενός τριγώνου για παράδειγμα), μια νοητική διεργασία που ταυτόχρονα είναι και έννοια (για παράδειγμα το αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης που μπορεί να ειδωθεί και ως έννοια του αριθμού) και τέλος ένα τυποκρατικό σύστημα που βασίζεται στις ιδιότητές του (όπως για παράδειγμα μια ομάδα μεταθέσεων). Έτσι βλέπουμε ότι η αφαίρεση μπορεί να εστιάζει στις ιδιότητες του προσλαμβανόμενου από τις αισθήσεις αντικειμένου, στις δράσεις πάνω στα αντικείμενα, ή τέλος στις ιδιότητες πάνω σε

νοητικά αντικείμενα συμπυκνωμένα στη μορφή του ορισμού της έννοιας και εκπεφρασμένα σε όρους μαθηματικού συμβολισμού (Tall, 2007d).
Αυτή η διάκριση ανάμεσα στις διαφορετικές μορφές αφαίρεσης εμφανίζεται άμεσα ή υπόρρητα στα περισσότερα από τα γνωστά θεωρητικά πλαίσια. Ο Piaget μιλάει για την *εμπειρική αφαίρεση (empirical abstraction*) που εστιάζει στα αντικείμενα και τις ιδιότητές τους, την *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση (pseudo-empirical abstraction)* που εστιάζει στις δράσεις πάνω στα αντικείμενα και στις ιδιότητες των δράσεων και τέλος την *αναστοχαστική αφαίρεση (reflective abstraction)* που συντελείται μέσω νοητικών διεργασιών ή αντικειμένων τα οποία μέσω νοητικών λειτουργιών μετατρέπονται σε νέα αντικείμενα (Piaget, 1972). Ο Skemp αναφέρεται στην *αντιληπτικότητα (perception*), στη *δράση (action)* και την *ανάκλαση (reflection),* ενώ ο Fischbein αναφέρεται σε τρεις πλευρές της μαθηματικής σκέψης: τη *διαίσθηση* ή *ενόραση (intuition),* τις *διαδικασίες (algorithms)* και τη *φορμαλιστική πλευρά (formal)* των ιδιοτήτων, αξιωμάτων ορισμών και αποδείξεων (Gray & Tall, 2007x; Tall, 2007d; Tall, 2004d; Pegg & Tall, 2002g).

Όπως έχουμε επίσης ήδη εξετάσει, ο Bruner ερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο οι αλληλεπιδράσεις του ατόμου με το περιβάλλον του αναπαρίστανται στο νου του. Ο Bruner περιγράφει τρεις τρόπους αναπαράστασης: την πραξιακή (enactive) που αναφέρεται στην αναπαράσταση με όρους δράσης, την εικονική (iconic) που σχετίζεται με την αναπαράσταση με όρους στατικών αντιληπτικών εικόνων και τη συμβολική (symbolic) που αναφέρεται στη χρήση γλώσσας και συμβόλων [38]. Η παραπάνω πορεία, ισχυρίζεται ο Bruner, μπορεί να επιτευχθεί σε οποιαδήποτε ηλικία της ζωής του ατόμου. Όπως αναφέρει επίσης ο Tall (2007d, 2004d) οι Biggs και Collins (1982) με βάση τη θεωρία των σταδίων του Piaget και τις μορφές αναπαραστάσεων του Bruner, αναφέρονται στην ταξινομία SOLO (**S**tructure of **O**bserved **L**earning **O**utcomes) σύμφωνα με την οποία προτείνονται πέντε στάδια γνωστικής ανάπτυξης: το αισθησιοκινητικό (sensori-motor), το εικονικό (iconic), το συγκεκριμένο συμβολικό (concrete-symbolic), το τυπικό (formal) και το μετά-τυπικό (post-formal), μια σειρά από στάδια τα οποία δεν διαδέχονται το ένα το άλλο, αλλά μάλλον επικάθονται το ένα στο άλλο.

[38] Βλέπε σελίδες 72 και 73.

Όλα τα προηγούμενα θεωρητικά πλαίσια έχουν αρκετές επί μέρους διαφορές μεταξύ τους, αλλά ταυτόχρονα και βασικές ομοιότητες με κυριότερη την κοινή βάση της αναστοχαστικής αφαίρεσης (Pegg & Tall, 2002g; Gray et al., 1999k). Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε το Θεμελιώδη κύκλο κατασκευής εννοιών με αφετηρία τις δράσεις και κατάληξη το αντικείμενο με βάση τη ταξινομία SOLO, τη θεωρία APOS και τη θεωρία των Gray και Tall.

<table>
<tr><th>Ταξινομία SOLO</th><th>Θεωρία APOS</th><th>Θεωρία των Gray & Tall</th><th colspan="2">Θεμελιώδης Κύκλος (Fundamental Cycle)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Μονοδομικός (Unistructural)</td><td></td><td>Αντικείμενο/α Βάσης (Base Object(s))</td><td>Αντικείμενο/α Βάσης (Base Object(s))</td><td rowspan="5">Κατασκευή Σχήματος (Schema Building)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Δράση (Action)</td><td rowspan="2">Διαδικασία (Procedure) Πολύ-διαδικασίες (Multi-Procedure)</td><td>Μεμονωμένες Δράσεις (Isolated Actions) Διαδικασία (Procedure)</td></tr>
<tr><td>Πολυδομικός (Multistructural)</td><td>Πολύ-διαδικασίες (Multi-Procedure)</td></tr>
<tr><td>Συσχετιστικός (Relational)</td><td>Διεργασία (Process)</td><td>Διεργασία (Process)</td><td>Διεργασία (Process)</td></tr>
<tr><td>Μονοδομικός (Unistructural) Διευρυμένη Αφαίρεση (Extented Abstract)</td><td>Αντικείμενο (Object) Σχήμα (Schema)</td><td>Διεργασία – Έννοια (Procept)</td><td>Αυτοτελής Οντότητα (Entity) Σχήμα (Schema)</td></tr>
</table>

Διάγραμμα 2. Ο Θεμελιώδης κύκλος κατασκευής των εννοιών, (Pegg & Tall, 2002g)

Οι προηγούμενες θεωρίες αποτέλεσαν ουσιαστικά την αφετηρία γέννησης των τριών κόσμων του Tall (Tall, 1996i; Tall, 2004a). Ο Tall (2004a) διέκρινε τρεις αρκετά διαφορετικούς τρόπος εννοιολογικής σχηματοποίησης των μαθηματικών εννοιών: την ενσάρκωση (embodiment) που ξεκινά από φυσικά αντικείμενα και δράσεις που αναπαρίστανται νοητικά και μορφοποιούνται σε διανοήματα, ο συμβολισμός (symbolism) που έρχεται με την αναπαράσταση των δράσεων ως σύμβολα και τη διαπραγμάτευσή τους ως νοητικά αντικείμενα και τέλος τον τυπικό - αξιωματικό που επέρχεται με τη φορμαλιστική λεκτική απόδοση των ιδιοτήτων και τη μετατροπή τους στη βάση ενός λογικά συνεκτικού συστήματος ορισμών και προτάσεων (Tall, 2007d). Οι τρεις παραπάνω τρόποι αναπαράστασης διατυπώθηκαν στη θεωρία που είναι γνωστοί ως ***3 κόσμοι του Tall.*** Ο πρώτος κόσμος είναι ο *ενσαρκωμένος ή ενσώματος κόσμος (conceptual-embodied world* ή απλά *embodied world).* Ο δεύτερος είναι ο

συμβολικός ή ο *διεργασιοεννοιολογικός κόσμος* ή *κόσμος των διεργασιών-εννοιών (proceptual-symbolic world* ή απλά *proceptual world*). Ο τρίτος κόσμος είναι ο *τυπικός-αξιωματικός κόσμος* ή *τυπικός (axiomatic-formal world* ή απλά *formal world)* (Tall, 2007b; Tall, 2007d; Tall, 2006; Tall, 2006b; Tall, 2004a; Tall, 2003a). Η διπλή ονομασία που έχουν οι κόσμοι του Tall δεν είναι τυχαία αλλά εδράζεται στην επιθυμία του να προσδιοριστεί κατάλληλα ο κάθε κόσμος και να αποφευχθούν γενικεύσεις και παρανοήσεις των όρων (Tall, 2007d).

Ο Ενσώματος Κόσμος. Ο πρώτος κόσμος που καλείται *ενσώματος (conceptual-embodied world* ή *embodied world)* και βασίζεται στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου που μας περιβάλλει. Ο κόσμος αυτός που δομείται από τις αντιλήψεις μας δεν περιλαμβάνει μόνο τα φυσικά αντικείμενα που μας περιβάλλουν, αλλά επεκτείνεται και στις νοητικές κατασκευές που προκύπτουν μέσω *αναστοχαστικής αφαίρεσης (reflective abstraction)* επί αυτών, με την έννοια του όρου που τη χρησιμοποιεί και ο Piaget, αλλά και με τη χρήση όλο και πιο εκλεπτυσμένης γλώσσας. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να γίνει αντιληπτή από το νου του μαθητή η έννοια της ευθείας για παράδειγμα, η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία ή ένας μιγαδικός αριθμός ως σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Παρόλα αυτά, ο *ενσαρκωμένος κόσμος* παραμένει πάντα συνδεδεμένος με τη δράση και τα αποτελέσματα των αισθήσεων (Tall, 2004a; Tall, 2004d; Tall, 2006b).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε μια απαραίτητη διευκρίνιση για τη χρήση του όρου *ενσαρκωμένος* όπως χρησιμοποιείται από τον Tall. Όπως ο ίδιος διευκρινίζει (Tall, 2004a; Tall, 2004d; Gray & Tall, 2001i), ο όρος αυτός διαφέρει από τον αντίστοιχο όρο που χρησιμοποιεί ο Lakoff και οι συνεργάτες του. Οι Lakoff και Nunez (2000) είναι υποστηρικτές της *ενσαρκωμένης γνώσης (embodied cognition)* σύμφωνα με την οποία οι ανθρώπινες έννοιες και η ανθρώπινη λογική δομούνται συνακόλουθα με τη φύση του σώματος, του μυαλού και του τρόπου λειτουργίας μέσα στον κόσμο. Στις παραπάνω έννοιες συμπεριλαμβάνονται και οι μαθηματικές έννοιες καθώς και η μαθηματική λογική. Αυτό καλείται από τον Lakoff και τους συνεργάτες του *embodiment of mind* και θα μπορούσε να αποδοθεί ως «σωματοποίηση του νου» αφού οι νοητικές λειτουργίες συνδέονται με φυσικές και βιολογικές λειτουργίες του σώματος (Tall, 2003a; Watson et al., 2002).

Σύμφωνα με τους Lakoff και Nunez (2000), τα μαθηματικά στηρίζονται στην εμπειρία μας, ενσαρκώνονται δε και δομούνται μέσω των *εννοιολογικών μεταφορών*. Ως *εννοιολογική μεταφορά* περιγράφεται ένας μηχανισμός συνάρτησης μεταξύ διαφορετικών εννοιολογικών πεδίων που επιτρέπει την επιχειρηματολογία για θέματα του ενός με αξιοποίηση της συμπερασματικής δομής του άλλου. Σε μια *εννοιολογική μεταφορά* διακρίνουμε το *πηγαίο πεδίο (source domain)* και το *πεδίο στόχος (target domain)*. Συνοπτικά θα λέγαμε ότι οι Lakoff και Nunez υποστηρίζουν ότι όλα τα μαθηματικά, στοιχειώδη αλλά και προχωρημένα, είναι *ενσαρκωμένα* προϊόν του ανθρώπινου νου, της φύσης του σώματός μας, της εξέλιξής μας, του περιβάλλοντός μας και της μακρόχρονης κοινωνικής και πολιτισμικής μας ιστορίας.

Οι απόψεις αυτές έχουν σίγουρα επηρεάσει τον Tall στον ορισμό του *ενσαρκωμένου κόσμου*. Είναι σημαντικό όμως να κάνουμε μια απαραίτητη διευκρίνιση. Ο Tall με τον όρο *ενσαρκωμένο* δεν αναφέρεται σε όλη τη μαθηματική σκέψη και γνώση αλλά μόνο σε εκείνη που στηρίζεται στην αντίληψη μέσω των αισθήσεων και διαχωρίζεται από τη συμβολική και λογική Μαθηματική σκέψη (Tall, 2004a; Tall, 2004d). Στο υπό έκδοση βιβλίο του ο Tall (διαθέσιμο ηλεκτρονικά στην προσωπική του ιστοσελίδα), στο κεφάλαιο 6 με τίτλο 'Three Worlds of Mathematics and the Role of Language' κάνει μια σύντομη αναδρομή του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιεί ο Lakoff τον όρο *ενσάρκωση*. Αρχικά παραπέμπει σε δύο διαφορετικές μορφές της *ενσάρκωσης* όπως αυτές περιγράφονται από τον Lakoff στο βιβλίο του *Women, Fire and Dangerous Things*: την *Εννοιολογική Ενσάρκωση (Conceptual Embodiment)* και τη *Λειτουργική Ενσάρκωση (Functional Embodiment).* Ο Tall αναφέρει ότι η *Εννοιολογική Ενσάρκωση* με την έννοια που της αποδίδει ο Lakoff είναι πολύ κοντά στον όρο *Ενσαρκωμένος κόσμος* που χρησιμοποιεί για να περιγράψει τον πρώτο κόσμο. Αντίθετα, θεωρεί ότι η *Λειτουργική Ενσάρκωση* είναι παρούσα και στους τρεις κόσμους. Φτάνοντας στην τελική διατύπωση της θεωρίας της *Ενσαρκωμένης Γνώσης* από τους Lakoff & Nunez όπως τη συναντούμε στο βιβλίο τους *Where Mathematics Comes from,* ο Tall σχολιάζει την άποψή τους ότι *όλα* τα μαθηματικά είναι ενσαρκωμένα. Αναφέρει ότι αυτό είναι σωστό υπό την έννοια ότι τα μαθηματικά είναι σύλληψη του ανθρώπινου νου. Η γνωστική ανάπτυξη ενός παιδιού επίσης, πράγματι αρχίζει με την αισθητικοκινητική δραστηριότητα. Εντούτοις, κάτι αλλάζει μετά από

την αισθησιοκινητική περίοδο που ο Piaget ορθά προσδιορίζει ως διαδοχικά λεπτά στάδια ανάπτυξης. Είναι η φύση αυτών των επόμενων εξελίξεων και των συνδέσεών τους με την αισθητήρια εμπειρία που είναι θεμελιώδους σπουδαιότητας στη μαθηματική εξέλιξη. Τέτοια αύξηση μπορεί *να αρχίσει* με τις αισθησιοκινητικές διαδικασίες και οι επόμενες συνδέσεις με τις αισθησιοκινητικές περιοχές του εγκεφάλου μπορούν να συνεχιστούν. Εντούτοις, ο ισχυρισμός ότι όλες οι μαθηματικές ιδέες συνεχίζουν να βασίζονται στις συνδέσεις με το αισθησιοκινητικό σύστημα είναι αμφισβητήσιμος από τον Tall που διατείνεται ότι πρέπει να γίνει περαιτέρω έρευνα γι' αυτό το θέμα.

Μια βασική υπόθεση που κάνει ο Tall είναι ότι ένα *ενσαρκωμένο αντικείμενο* ξεκινά με τη διανοητική σύλληψη ενός φυσικού αντικειμένου από τον εξωτερικό κόσμο όπως αυτό προσλαμβάνεται από τις αισθήσεις μας (Tall, 2007d; Tall, 2004d; Gray & Tall, 2001i). Μέσω της επικοινωνίας μας με το περιβάλλον και μέσω της διαμεσολάβησης των συμβόλων αυτό το 'διανοητικό κατασκεύασμα' εκλεπτύνεται ολοένα και περισσότερο παίζοντας ένα διττό ρόλο. Από τη μια μπορεί να παίζει το ρόλο ενός *σκελετού* ή ενός *προτύπου* που προσλαμβάνει πιο συγκεκριμένα χαρακτηριστικά κατά περίπτωση. Από την άλλη, και εδώ κρύβεται και η σύνδεση με τον κόσμο των μαθηματικών, μέσω των αντιλήψεων και την *στοχαστικής αφαίρεσης* οδηγούμαστε σε αντικείμενα που δεν είναι πλέον απτά στο φυσικό μας κόσμο. Έτσι για παράδειγμα από την έννοια της ευθείας που χαράσσει ένας μηχανικός με το χάρακα, οδηγούμαστε στην έννοια της 'απόλυτης ευθείας' που δεν έχει πλάτος και είναι επ' άπειρον επεκτεινόμενη. Καμιά από αυτές τις ιδιότητες δεν είναι απτή στο φυσικό μας κόσμο, αλλά το ενσαρκωμένο αντικείμενο της απόλυτης ευθείας βασίζεται στον πραγματικό κόσμο των αισθήσεων και μπορεί να κατασκευασθεί διανοητικά μέσω των ανθρώπινων πράξεων της αντίληψης και της *στοχαστικής αφαίρεσης*. Με αυτή την έννοια υπάρχει μια αυξανόμενη πολυπλοκότητα στην έννοια του *ενσαρκωμένου αντικειμένου* που ξεκινά από την αντίληψη μέσω των αισθήσεων και εξελίσσεται σε νοητική σκέψη με τη χρήση της γλώσσας που μπορεί να δώσει όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια και ιεράρχηση στα νοήματα. Για άλλη μια φορά οι Tall και Gray διευκρινίζουν ότι αν και ο όρος

ενσαρκωμένο αντικείμενο χρησιμοποιείται με τρόπο που προσομοιάζει με την θεωρία των Lakoff & Nunez, δεν συναντάται στις δικές τους θεωρίες σαν όρος.
Στην ίδια εργασία οι Gray και Tall (2001) προσδιορίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε ένα *ενσαρκωμένο αντικείμενο,* και σε ένα *σύμβολο* με τον τρόπο που το διαχειριζόμαστε στην Άλγεβρα. Τα σύμβολα λειτουργούν ως άξονες ανάμεσα στις έννοιες και τις διαδικασίες επιτρέποντας τη ασφαλή μετάβαση από τη μια στην άλλη. Έτσι για παράδειγμα, το ότι μπορούμε να φανταστούμε τον αριθμό 5 ως σύμβολο δεν σημαίνει ότι είναι ένα *ενσαρκωμένο αντικείμενο* παρόλο που η διανοητική εικόνα 5 δαχτύλων είναι. Αυτό καταδεικνύει ότι η διαδικασία της σκέψης με χρήση *ενσαρκωμένων αντικειμένων* μπορεί να διαφέρει πολύ από το είδος της σκέψης που απαιτείται για μια επιτυχημένη αντιμετώπιση της άλγεβρας με χρήση των συμβόλων.

Ο Κόσμος των Διεργασιών – Εννοιών. Ο δεύτερος κόσμος είναι ο κόσμος των *Διεργασιών – Εννοιών ή Συμβολικός Κόσμος (Proceptual – Symbolic world* ή, *Symbolic world).* Είναι ο κόσμος των συμβόλων που χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς και το χειρισμό δεδομένων στην Άλγεβρα, τη Λογική, την Ανάλυση κ.λ.π. Ξεκινά με δράσεις που *ενθυλακώνονται (encapsulated)* ως έννοιες μέσω της χρήσης των συμβόλων και μας επιτρέπουν να μεταβαίνουμε αβίαστα από τις διαδικασίες μέσω των οποίων *κάνουμε μαθηματικά,* στις έννοιες που *σκεπτόμαστε για τα μαθηματικά.* Ο πρώτος κόσμος μπορεί να φανεί στον τρόπο με τον οποίο χειριζόμαστε τα γεωμετρικά αντικείμενα αλλά δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν χειριζόμαστε αριθμούς και λογικά σύμβολα. Οι αριθμοί αν και είναι φυσικά νοητά αντικείμενα δεν μπορούν να θεωρηθούν ως ενσώματα αντικείμενα αφού κάθε στιγμή συνδυάζουν τη διαδικασία υπολογισμού αλλά και την έννοια του αριθμού.

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε σύντομα την έννοια της λέξης procept και proceptual όπως αυτές χρησιμοποιούνται από τους Gray & Tall (Tall, 2004a; Tall, 2004d; Gray & Tall, 2001i; Gray & Tall, 1994; Gray & Tall, 1991). Με τον όρο *διαδικασία (procedure)* αποδίδεται μια βήμα προς βήμα εφαρμογή ενός αλγορίθμου κατά την οποία το υποκείμενο πρέπει να ολοκληρώσει κάθε βήμα πριν μεταβεί στο επόμενο. Με τον όρο *διεργασία (process)* εννοούμε μια ή περισσότερες διαδικασίες που

αντιμετωπίζονται ως σύνολο χωρίς να χρειάζεται να αναφερθούμε στα επί μέρους βήματα. Έτσι για παράδειγμα η πρόσθεση δύο αριθμών αποτελεί μια *διεργασία* ενώ οι επί μέρους τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό αποτελούν τις *διαδικασίες*. Η *διεργασία* έχει ένα γενικό χαρακτήρα και συγκεκριμένο σκοπό και δεν ασχολείται με τη συγκεκριμένη μέθοδο που θα ακολουθηθεί για την επίτευξή του ενώ η *διαδικασία* αναφέρεται στο συγκεκριμένο αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί για την πραγματοποίηση του στόχου μιας *διεργασίας*.

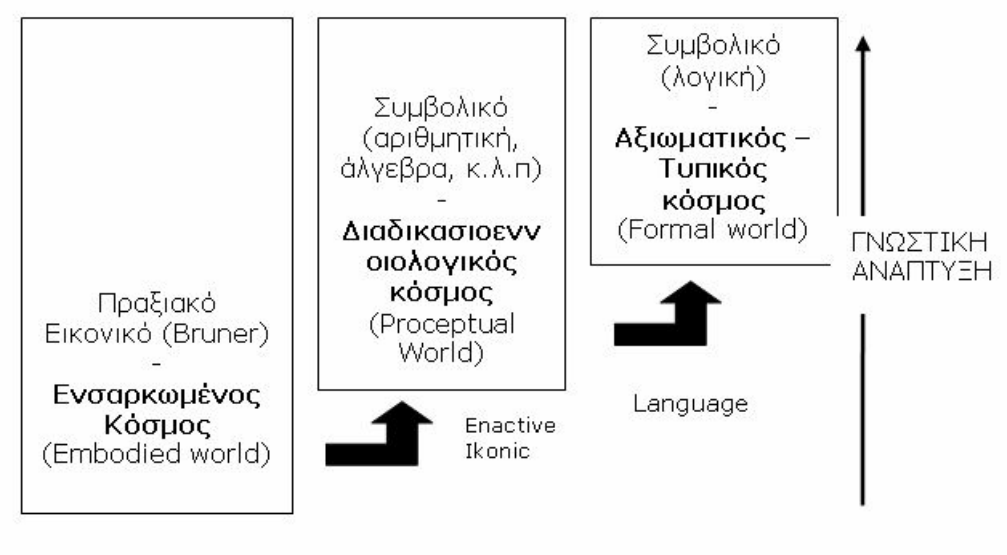
Οι Gray & Tall (1994, 1991) κάνουν διάκριση ανάμεσα στη *διεργασία (process)* που αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα και στην *έννοια (concept)* που αφορά τα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Επιχειρούν μια ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο οι *διεργασίες* μεταβάλλονται σε *έννοιες* και αντίστροφα. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, καθοριστική αναδεικνύεται η σημασία του μαθηματικού συμβολισμού. Αυτό που συμβαίνει στην πράξη είναι το ίδιο το σύμβολο να εκφράζει άλλοτε μια *διεργασία* και άλλοτε μια *έννοια*, δηλαδή με την ίδια μαθηματική έκφραση να δηλώνεται ταυτόχρονα, μια πράξη αλλά και το αποτέλεσμά της. Για να εξηγήσουν αυτό το φαινόμενο οι Gray και Tall δημιούργησαν τον όρο *διεργασία-έννοια (procept)* από τον συνδυασμό των λέξεων ***pro**cess (διεργασία)* και *con**cept** (έννοια)*. Σκοπός ήταν να περιγράψουν το μίγμα της *διεργασίας* και της αντίστοιχης *έννοιας* που χρησιμοποιούν κοινό συμβολισμό.

Έτσι μπορούμε να μιλάμε για *σκέψη με διεργασίες-έννοιες (proceptual thinking)* που ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται το συμβολισμό άνετα, άλλοτε ως διεργασία και άλλοτε ως έννοια αλλάζοντας με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο. Αντίθετα η *διαδικαστική σκέψη (procedural thinking)* των μαθηματικών μπορεί να αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα και στον περιορισμό της εστίασης στο συσχετισμό δεδομένων και ζητούμενων σε μια διαδικασία (Tall, 2004d; Gray & Tall, 1994).
Είναι χρήσιμο να προσθέσουμε ότι πολλές φορές το υποκείμενο μπορεί να μην ενθυλακώνει μια δεδομένη διεργασία σε νοερό αντικείμενο αλλά αντίθετα μπορεί να συνεχίζει να εκτελεί διαδικασίες με επαναλαμβανόμενο και κοινότοπο τρόπο χωρίς να ασκείται στοχασμός πάνω στην επαναλαμβανόμενη δράση. Και αυτό μπορεί να

συμβεί όχι μόνο λόγω αποτυχίας των μαθητών, αλλά και σε περιπτώσεις που οικείες διαδικασίες εκτελούνται μέσω συμβόλων που δεν έχουν φυσική εννοιολογική ενσάρκωση στο νου του υποκειμένου. Η παραπάνω διαδικασία έχει και ιστορικό προηγούμενο όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των Tartaglia και Cardano οι οποίοι έλυναν τριτοβάθμιες εξισώσεις και έκαναν πράξεις σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών χωρίς τότε να έχουν ακριβή επίγνωση της έννοιας των μιγαδικών (Tall, 2004a).

Ο Τυπικός – Αξιωματικός κόσμος. Ο τρίτος κόσμος είναι ο *Τυπικός – Αξιωματικός* ή απλά *τυπικός κόσμος (Formal-Axiomatic world or, Formal world)*. Είναι ο κόσμος που προσεγγίζει τα μαθηματικά με τον φορμαλιστικό τρόπο. Ξεκινάει από επιλεγμένα αξιώματα και θεμελιώδεις έννοιες και με λογικά συμπεράσματα οδηγείται στην απόδειξη. Στον κόσμο αυτό οι προτάσεις είναι αληθείς, γιατί μπορούν να αποδειχθούν με βάση τα αξιώματα και τα θεωρήματα. Ο *Τυπικός – Αξιωματικός κόσμος* προκύπτει από ένα συνδυασμό ενσαρκωμένων αντικειμένων και διαχείρισης συμβόλων αλλά μπορεί κάλλιστα να συμβεί και η αντίστροφη πορεία. Οι τυπικοί ορισμοί και προτάσεις μπορούν με τη σειρά τους να οδηγήσουν σε θεωρήματα δομής που ουσιαστικά αποτελούν ενσαρκωμένες μορφές του τυπικού αξιωματικού συστήματος από το οποίο προέρχονται (Tall, 2004a). Σ' αυτό τον κόσμο τα μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα και πρωταρχικές έννοιες με τη χρήση των οποίων ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται προτάσεις. Ο *Τυπικός – Αξιωματικός κόσμος*, λόγω της αυστηρότητας και του φορμαλιστικού τρόπου σκέψης που απαιτεί, αποτελεί το χώρο που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές. Οι περισσότερες διεθνείς έρευνες έχουν δείξει ότι λίγοι μαθητές – φοιτητές παρουσιάζουν χαρακτηριστικά που να τους εντάσσουν σε αυτόν τον κόσμο.

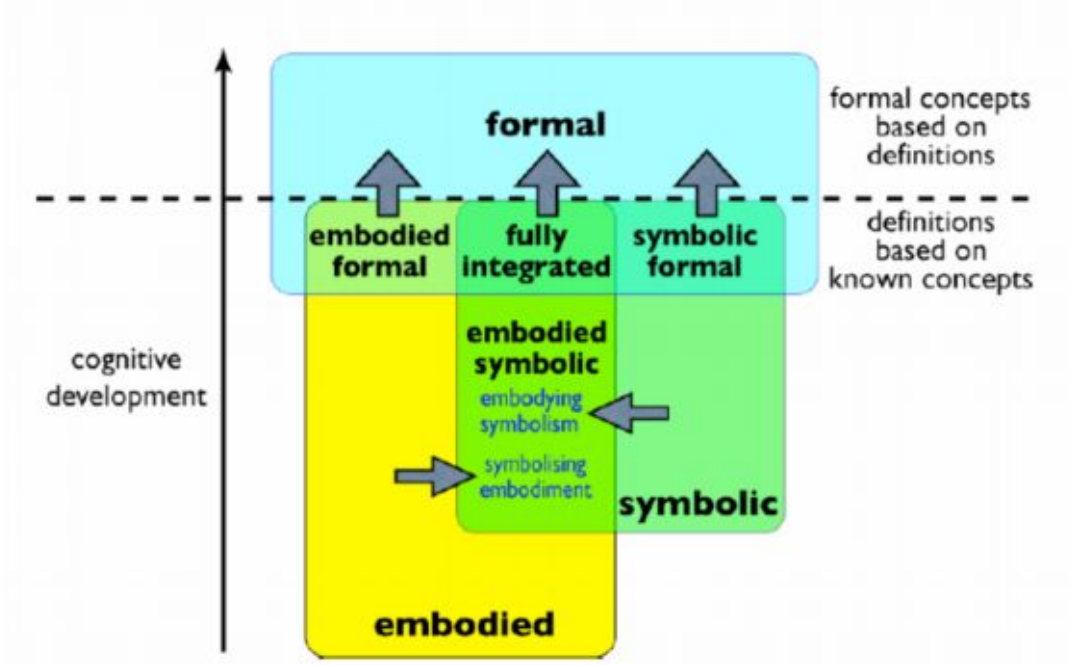
Όπως αναφέραμε ήδη, οι 3 κόσμοι του Tall, έχουν ως βάση τους κατά κύριο λόγο τις θεωρίες του Piaget και του Bruner. Στο επόμενο σχήμα που εμφανίζεται στο υπό έκδοση βιβλίο του Tall, φαίνεται μια απεικόνιση της σχέσης ανάμεσα στους 3 κόσμους του Tall και τα είδη αναπαραστάσεων του Bruner.



Διάγραμμα 3. Οι τρεις κόσμοι του Tall και οι αναπαραστάσεις του Bruner

Tall, βιβλίο υπό έκδοση (τμήματά του διαθέσιμα ηλεκτρονικά από την προσωπική του ιστοσελίδα)

Οι τρεις αυτοί κόσμοι δεν είναι διακριτοί, αντίθετα υπάρχει μια ώσμωση μεταξύ τους που μπορεί να φανεί παραστατικά στο επόμενο σχήμα που απεικονίζει τη γνωστική ανάπτυξη των φορμαλιστικών εννοιών με βάση ανάπτυξης τους ορισμούς, όπως αυτή περιγράφεται από τη θεωρία των 3 κόσμων.



Διάγραμμα 4

Η γνωστική ανάπτυξη μέσα από τους τρεις κόσμους του Tall, (Tall, 2007b).

Ο απειροστικός λογισμός μπορεί να αντιμετωπισθεί λειτουργικά τόσο σε φυσικό - ενσαρκωμένο επίπεδο στα πλαίσια των αλλαγών που προσλαμβάνονται αντιληπτικά από τα υποκείμενα, όσο και σε συμβολικό επίπεδο στη φάση επίλυσης προβλημάτων με χρήση των διαδικασιών της παραγώγισης, ολοκλήρωσης κ.λ.π. Έτσι αποτελεί ουσιαστικά ένα συνδυασμό του ενσαρκωμένου αλλά και του διεργασιοεννοιολογικού τρόπου λειτουργίας. Καθώς όμως η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης διευρύνεται, περνάμε σε ένα τυπικό – αξιωματικό τρόπο σκέψης που δεν εδράζεται σε αναπαραστάσεις και λειτουργίες αλλά δομείται με βάση ορισμούς, αξιώματα και προτάσεις (Tall, 2003a).

Ας δούμε τώρα πώς εφαρμόζεται η θεωρία των 3 κόσμων του Tall στην κατασκευή της έννοιας της συνέχειας. Σε απλοϊκό επίπεδο, η έννοια της συνέχειας μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ως ενσώματη υπόσταση το συνεχές της ευθείας. Καθώς όμως ο έλεγχος της συνέχειας γίνεται με χρήση του τύπου $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$, εκεί δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια ενσάρκωση της έννοιας. Η διαπραγμάτευση γίνεται στα πλαίσια του συμβολικού κόσμου και, στο βαθμό που ο μαθητής έχει κατακτήσει την έννοια του ορίου και μπορεί να αξιοποιήσει την ισότητα που διέπει τον τύπο $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$, τότε μπορούμε να πούμε ότι έχει περάσει στην ενθυλάκωση της έννοιας της συνέχειας. Καθώς τώρα εισάγονται οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, ο μαθητής εισέρχεται στον αξιωματικό κόσμο. Θα πρέπει όμως να διερευνηθεί το κατά πόσον οι μαθητές έχουν συνείδηση των διεργασιών που επιτελούνται στο συμβολικό κόσμο και αν επίσης έχουν κατακτήσει την έννοια της συνέχειας στον αξιωματικό κόσμο.

Τα ίδια ερωτήματα προκύπτουν και για τους φοιτητές. Και εδώ ξεκινάμε με τον ε-δ ορισμό που δεν έχει κάποια ενσώματη υπόσταση και ο χειρισμός του γίνεται στα πλαίσια του συμβολικού κόσμου. Οι ιδιότητες και τα θεωρήματα που εξάγονται στη συνέχεια οδηγούν το φοιτητή στον αξιωματικό κόσμο. Εκτός από τα δύο ερωτήματα που τέθηκαν πριν, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν κατανοούν οι φοιτητές ότι οι διεργασίες που κάνουν στα πλαίσια του ε-δ ορισμού είναι εν πολλοίς ισοδύναμες με αυτές που εκτελούσαν με χρήση του τύπου του ορίου.

Η Εννοιολογική Αλλαγή

Με τον όρο *εννοιολογική αλλαγή* εννοούμε το είδος της μάθησης που απαιτείται όταν μια νέα πληροφορία που εμφανίζεται, έρχεται σε σύγκρουση με προηγούμενες γνώσεις του υποκειμένου (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής έλκει τις καταβολές της στη φιλοσοφία και την ιστορία των επιστημών καθώς από πολύ νωρίς έγινε αντιληπτή η αναλογία ανάμεσα στις αλλαγές που συμβαίνουν στη μαθηματική γνώση με την εμφάνιση καθετί νέου και στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση μιας νέας έννοιας. Η προσέγγιση αυτή είναι διάχυτη στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είτε την παρατηρεί κάποιος στην ιστορία των μαθηματικών είτε σε ένα μαθητή (Greer, 2004).

Η εννοιολογική αλλαγή αν και είναι ένα είδος μάθησης, θα πρέπει να διαφοροποιηθεί από τα υπόλοιπα είδη γιατί απαιτεί διαφορετικούς μηχανισμούς αφομοίωσης αλλά και διαφορετικό τρόπο μάθησης. Τα περισσότερα είδη μάθησης έχουν αθροιστικό χαρακτήρα και συνήθως προϋποθέτουν έναν εμπλουτισμό του ήδη υπάρχοντος γνωστικού υπόβαθρου. Η εννοιολογική προσέγγιση όμως δεν μπορεί να επιτευχθεί με αυτούς τους τρόπους και μάλιστα η χρήση αθροιστικών μηχανισμών σε περιπτώσεις που απαιτούν εννοιολογική αλλαγή είναι μια κύρια αιτία παρανοήσεων (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Σύμφωνα με τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής το παιδί στην προσπάθειά του να κατανοήσει τον κόσμο δημιουργεί μια *θεωρία-πλαίσιο (framework theory)*, όχι μια φορμαλιστική θεωρία αλλά μάλλον μια θεώρηση που ανήκει σε αυτό που ονομάζουμε *αφελείς θεωρίες (naive theories)* που ουσιαστικά είναι ερμηνευτικά πλαίσια που κατασκευάζονται από την μικρή ηλικία και λειτουργούν ως *εκ των προτέρων πεποιθήσεις (presuppositions)* που μαζί με τις *απόψεις (beliefs)* των μαθητών αποτελούν αυτό που ο Fischbein (1987) αποκαλεί *διαισθητική γνώση (intuitive Knowledge)* (Biza, Souyoul, Zachariades, 2005; Brousseau & Otte, 1991). Πολλές φορές αυτές οι απόψεις και οι εκ των προτέρων πεποιθήσεις των μαθητών επηρεάζουν την απόκτηση νέας γνώσης και προκαλούν γνωστικές συγκρούσεις. Σε πολλές περιπτώσεις ο μαθητής δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι το υπάρχον γνωστικό πλαίσιο δεν επαρκεί για να κατασκευαστεί ένα νέο γνωστικό σχήμα και αγωνίζεται ανεπιτυχώς να διευρύνει το παλιό προκειμένου να συμπεριλάβει τη νέα γνώση. Άλλοτε πάλι ο

μαθητής αντιλαμβάνεται την ανεπάρκεια του παλιού γνωστικού σχήματος, αγωνίζεται να δομήσει ένα νέο, αλλά χρησιμοποιεί μεθόδους και διεργασίες από το παλιό, δείχνοντας έτσι ότι συνεχίζει να παραμένει αγκιστρωμένος σε αυτό. Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής προσπαθεί να εξηγήσει ακριβώς τέτοιου είδους προβλήματα. Οι παρανοήσεις αυτές που δημιουργούνται δεν αντιμετωπίζονται στα πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής ως λανθασμένες αντιλήψεις που απαιτούν μια άλλη θεωρία, αλλά μπορούν να χαρακτηριστούν ως συνθετικά μοντέλα, προσπάθειες δηλαδή των υποκειμένων να συνθέσουν το ήδη υπάρχον γνωστικό πλαίσιο με τη νέα πληροφορία γνώσης. Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής επίσης μας δίνει τη δυνατότητα να προβλέψουμε την εμφάνιση τέτοιων παρανοήσεων και να προετοιμάσουμε τη διδασκαλία μας κατάλληλα (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Η ασυμβατότητα που παρατηρείται ανάμεσα στην παλιά καλά εδραιωμένη γνώση και στο νέο πλαίσιο γνώσης, ασυμβατότητα που μελετά η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, έχει ανιχνευθεί σε αρκετούς τομείς της επιστημονικής γνώσης (Tirosh & Tsamir, 2004). Αναφέρεται από τους Merenluoto και Lehtinen (2004) για την έννοια του αριθμού, από τις Stafilidou και Vosniadou (2004) για τη μετάβαση των μαθητών από τους φυσικούς αριθμούς στα κλάσματα, από τις Vamvakoussi και Vosniadou (2004) για τη μετάβαση από το σύνολο των φυσικών αριθμών στο σύνολο των ρητών κ.α. Αρκετοί επίσης ερευνητές έχουν κατά καιρούς ασχοληθεί με την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και το πώς αυτή δρα καταλυτικά και πολλές φορές αρνητικά στην κατασκευή της γνώσης. Ο Fischbein (1987) αναφέρεται στη *διαισθητική γνώση (intuitions)* και την επίδρασή της στη μαθηματική συλλογιστική ενώ ο Cornu (1991) μιλάει για τις *αυθόρμητες αντιλήψεις (spontaneous conceptions)* που προϋπάρχουν της αξιωματικής γνώσης και θεμελίωσης και αρκετά συχνά δημιουργούν σοβαρά εμπόδια στην οικοδόμησή της. Οι Stavy και Tirosh αναφέρονται εκτεταμένα στους *διαισθητικούς κανόνες (intuitive rules)* που εφαρμόζουν οι μαθητές στα διάφορα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης και αναλύουν αρκετούς μηχανισμούς με τους οποίους εκδηλώνονται (Stavy & Tirosh, 2000; Tirosh & Stavy, 1999; Tirosh, 1991). Ο Tall αναφέρεται στη γνώση που φαίνεται να ενυπάρχει στο νου του παιδιού με τον όρο *set-before* ενώ για τις ιδέες που κατασκευάζει το παιδί ανάλογα με τα προσωπικά του γνωστικά σχήματα και ανακαλεί κάθε φορά, χρησιμοποιεί τον όρο *met-before* και

αναφέρει ότι δημιουργεί πολλές φορές σοβαρά προβλήματα όταν έρχεται σε αντίθεση με ένα νέο πλαίσιο γνώσης (Tall, 2007b; Lima & Tall, 2006d).

Στην παρούσα έρευνα θεωρούμε ότι η διδασκαλία της έννοιας της συνέχεια απαιτεί μια κατάλληλη εννοιολογική αλλαγή. Η σημαντικότερη παρανόηση που υπάρχει είναι η ταύτιση της συνέχειας με την συνεκτικότητα του γραφήματος. Αυτή η προϋπάρχουσα άποψη δημιουργεί σοβαρά εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας της συνέχειας και εμφανίζεται έντονα στους χαρακτηρισμούς που αποδίδουν οι μαθητές σε γραφήματα. Θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθεί το κατά πόσον οι μαθητές – φοιτητές αντιλαμβάνονται αυτή τη γνωστική σύγκρουση, να διαγνωσθεί ο βαθμός στον οποίο είναι διαδεδομένη αυτή η γνωστική σύγκρουση, πώς διαχειρίζονται τα ίδια τα υποκείμενα αυτή την προβληματική κατάσταση και αν παίζει ρόλο ο τρόπος διδασκαλίας.

Έρευνες για την έννοια της συνέχειας

Η ανάλυση αποτελεί ένα κεντρικό κλάδο των μαθηματικών που ουσιαστικά αποτελεί τη βάση ανάπτυξης για όλους σχεδόν τους τομείς των μαθηματικών. Από πολύ νωρίς οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών έστρεψαν την προσοχή τους σε αυτό το χώρο και ερεύνησαν τα προβλήματα που ανέκυπταν (Tall, 1991a). Είναι χαρακτηριστικό μάλιστα ότι ακόμα και μαθητές που τα έχουν πάει καλά στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν αργότερα στη διδασκαλία του λογισμού ανυπέρβλητες δυσκολίες ενώ άλλοι εξίσου καλοί μαθητές όχι (Crowley & Tall, 2006c). Στη συνέχεια θα δούμε μερικές από αυτές τις έρευνες με έμφαση σε αυτές που πραγματεύονται τα εμπόδια που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία της έννοιας τη συνέχειας, έννοια κεντρική για την ανάλυση και την τοπολογία και, κατά κοινή ομολογία των περισσότερων μαθηματικών, δύσκολη στη κατανόησή της αλλά και στη διδασκαλία της (Núñez & Lakoff, 1998).

Ο Artigue (1997) αναφέρει ότι οι έρευνες διεθνώς έχουν καταδείξει τις σοβαρές και συνεχιζόμενες δυσκολίες που εμφανίζονται στους φοιτητές κατά τη διδασκαλία του λογισμού στα πανεπιστήμια. Σχολιάζει ότι οι περισσότερες από αυτές πηγάζουν από τα βασικά πεδία του χώρου: την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, τις

συναρτήσεις, τις ακολουθίες και το όριο. Ιδιαίτερα για το όριο υπάρχει μια πληθώρα ερευνών που ασχολείται με τα επιστημολογικά εμπόδια που συναντούν οι μαθητές και οι φοιτητές στην προσπάθειά τους να το συλλάβουν ως έννοια. Ισχυρίζεται ότι ανάμεσα στη διαισθητική έννοια του ορίου και στην τυπική – αξιωματική θεμελίωσή του υπάρχει ένα μεγάλο ποιοτικό κενό που για να καλυφθεί απαιτείται η ενθυλάκωση του αντικειμένου (με τη γλώσσα του Dubinsky) ή αλλιώς η υποστασιοποίησή του (με τη γλώσσα της Sfard). Αυτό έχει άμεσο αντίκτυπο στην κατανόηση των μαθητών και φοιτητών για την έννοια της συνέχειας (Artigue, 1997; Artigue, 1991).
Οι Robert και Schwarzenberger (1991) κάνοντας μια αναδρομή στην έρευνα για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών σε ανώτερο επίπεδο, αναλύουν αρκετούς από τους παράγοντες που δημιουργούν αντικειμενικές και ευρέως παρατηρούμενες δυσκολίες στη διδασκαλία του λογισμού, περιγράφοντας ουσιαστικά τα ίδια προβλήματα που αναφέρει και ο Artigue. Αναφέρουν ότι ο χώρος των ανώτερων μαθηματικών φαίνεται να αλλάζει ποιοτικά και ποσοτικά χωρίς όμως ούτε οι μαθητές αλλά ούτε και οι καθηγητές να εμφανίζονται έτοιμοι για αυτή την αλλαγή.

Ο Eisenberg (1991) εξετάζει ιδιαίτερα την έννοια της συνάρτησης και τις δυσκολίες που ανακύπτουν κατά τη διδασκαλία της. Αν και αυτό δεν αποτελεί κύριο θέμα στην παρούσα έρευνα, στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα δούμε ότι πράγματι κάποιες λανθασμένες αντιλήψεις των φοιτητών για την έννοια της συνάρτησης οδηγεί στο να έχουν λανθασμένες αντιλήψεις και για τη συνέχεια. Ο Eisenberg (ibid) αναφέρεται σε προβλήματα που έχουν να κάνουν με τη συμβολοποίηση, τη χρήση μεταβλητών και την έλλειψη κατάλληλης αφαιρετικής ικανότητας. Το μεγαλύτερο πρόβλημα όμως εστιάζεται στο γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές τείνουν να σκέπτονται τη συνάρτηση κυρίως μέσω ενός τύπου και αδυνατούν να δημιουργήσουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις. Στην παρούσα έρευνα ισχυριζόμαστε ότι αυτή η αδυναμία των μαθητών ίσως να βρίσκεται στη βάση της κατασκευής λανθασμένων αναπαραστάσεων για την έννοια της συνέχειας και της μειωμένης ικανότητας διαχωρισμού μεταξύ γραφημάτων συνεχών και μη συνεχών συναρτήσεων.
Παρόμοια αποτελέσματα έχουν φανεί και σε άλλες έρευνες που έχουν γίνει για την έννοια της συνάρτησης. Η Evangelidou και οι συνεργάτες της αναφέρουν ότι η έννοια της συνάρτησης είναι τόσο αφηρημένη ώστε κρύβει πολλές δυσκολίες η διδακτική

μεταφορά της (Evangelidou et al., 2004). Η έρευνά τους έδειξε ότι υπάρχουν τρεις έντονες τάσεις ανάμεσα στους μαθητές για την έννοια της συνάρτησης:

I. Συχνά συγχέουν τη γενική έννοια της συνάρτησης με την «1-1» συνάρτηση.
II. Θεωρούν ότι συνάρτηση είναι η αναλυτική έκφραση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές και μάλιστα μονού τύπου κατά προτίμηση και,
III. Βλέπουν τη συνάρτηση ως άμεσα εξαρτώμενη από κάποιου είδους διάγραμμα ή γραφική παράσταση αντιμετωπίζοντας πρόβλημα όταν πρέπει να την χειριστούν αλγεβρικά.

Στην εργασία των Σπύρου και Γαγάτση (n.d.) αναφέρονται πολλά από τα επιστημολογικά εμπόδια που κρύβει η αρκετά αφηρημένη έννοια της συνάρτησης. Συχνά οι μαθητές παγιδεύονται σε μια σειρά εμπόδια που αποτελούν γενικεύσεις των αποσπασματικών σχολικών εμπειριών τους ή μεταφορά γλωσσικών εμπειριών που προσλαμβάνονται κατά κυριολεξία. Στην παρούσα εργασία θα διερευνήσουμε το κατά πόσον επιβεβαιώνονται τα παραπάνω και σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος.

Ο Tall (1991) εξετάζοντας το ρόλο της νοερής απεικόνισης στον απειροστικό λογισμό, αναφέρει ότι ένας από τους λόγους για τους οποίους η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού βρίσκεται σε αποδιοργάνωση είναι ότι οι έννοιες που οι έμπειροι μαθηματικοί θεωρούν διαισθητικές, δεν είναι διαισθητικές για τους μαθητές τους. Η διαίσθηση εξαρτάται από τη γνωστική δομή του ατόμου, η οποία με τη σειρά της επίσης εξαρτάται από την προηγούμενη εμπειρία του. Δεν υπάρχει κανένας λόγος να υποτεθεί ότι ο αρχάριος θα διαθέτει τις ίδιες διαισθήσεις με τον πιο έμπειρο. Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση δείχνει ότι πολύ συχνά οι ιδέες των μαθητών για πολλές έννοιες δεν είναι εκείνες που θα αναμένονταν.

Οι Tall και Vinner (1981) ονομάζουν *εν δυνάμει αντιτιθέμενο παράγοντα (potential conflict factor)* ένα τμήμα της εικόνας της έννοιας (concept image) που έρχεται σε σύγκρουση με τον ορισμό της έννοιας (concept definition) ή και το αντίστροφο [39]. Όταν ένας τέτοιος εν δυνάμει παράγοντας κάνει την εμφάνισή του στη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης δημιουργώντας γνωστικό πρόβλημα τότε μετατρέπεται σε *γνωστικό αντιτιθέμενο παράγοντα (cognitive conflict factor).* Τέτοιου είδους

[39] Για τις έννοιες concept image και concept definition βλέπε σελίδα 66.

προβλήματα μπορούν να παρουσιαστούν στη διδασκαλία του ορίου ακολουθίας, του ορίου συνάρτησης ή της συνέχειας μιας συνάρτησης. Αφού εξετάζουν εκτενώς τα προβλήματα που ανακύπτουν με τη διδασκαλία του ορίου, οι Tall και Vinner (ibid) ασχολούνται με την έννοια της συνέχειας. Αναφέρουν ότι το σοβαρότερο πρόβλημα έχει να κάνει με τη λανθασμένη ταύτιση 'συνεχής συνάρτηση = συνεχόμενη γραμμή'. Αυτό δημιουργεί στους μαθητές μια εικόνα της έννοιας που είναι διαφορετική και λανθασμένη σε σχέση με τον ορισμό της έννοιας. Σε έρευνα που παρουσιάζουν στο άρθρο τους, και αφορά πρωτοετείς φοιτητές με καλούς βαθμούς στα μαθηματικά, γίνεται φανερό ότι οι μαθητές πολλές φορές ταυτίζουν τη συνέχεια με τη μοναδικότητα του τύπου μιας συνάρτησης ή με τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Επίσης συχνά οι παρανοήσεις έχουν να κάνουν με το πεδίο ορισμού. Το 'συνεχές' της ευθείας των πραγματικών αριθμών συγχέεται με τη συνεχόμενη ευθεία, δηλαδή τη 'συνεχή'. Αυτό σχετίζεται αρκετά με τα ευρήματα και άλλων ερευνών που δείχνουν ότι οι φοιτητές συγχέουν την έννοια της συνέχειας με την έννοια της πυκνότητας (Bagni, 1999). Οι ερευνητές διατείνονται ότι αυτές οι εικόνες της έννοιας είναι πολύ ισχυρές και δύσκολα διορθώνονται.

Οι Tall και Schwarzenberger (1978) περιγράφουν τα σοβαρά εννοιολογικά προβλήματα που συνδέονται με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και την έννοια του ορίου. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες λόγω της γλώσσας, η οποία τους ωθεί στο να πιστεύουν ότι ένα όριο «προσεγγίζεται» αλλά *δεν μπορεί να επιτευχθεί*. Αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την ατελή φύση της έννοιας, που πλησιάζει, αλλά ποτέ δεν φαίνεται να φθάνει. Οι δυσκολίες γίνονται πολύ περισσότερες στο πανεπιστήμιο οπότε η χρήση των ποσοδεικτών θεωρείται από τους φοιτητές ακαταλαβίστικη κι έτσι η κατανόηση εννοιών όπως η συνέχεια δυσχεραίνεται. Η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και η μετάβαση από τους ρητούς στους άρρητους περιλαμβάνει σοβαρά γνωστικά εμπόδια (Dehaene, 1997). Αν και η παρούσα έρευνα δεν αποσκοπεί στη διερεύνηση τέτοιων εμποδίων, κάποιες νύξεις και συζητήσεις που έγιναν με τους φοιτητές θα μας δώσουν την αφορμή να δούμε αν επιβεβαιώνονται οι παραπάνω έρευνες. Στις διάφορες έρευνες επίσης, αρκετά συχνά για παράδειγμα εμφανίζεται το φαινόμενο να θεωρούν οι μαθητές ή φοιτητές ότι υπάρχει μια διαδοχή του στυλ: 'ρητός – άρρητος – ρητός – άρρητος - …' ή

γενικότερα ότι μια σειρά αρρήτων διαδέχεται μια σειρά ρητών κ.ο.κ. (Pinto & Tall, 1996h; Pinto & Gray, 1995).

Ο Cornu (1991) αναφέρεται εκτεταμένα στην έννοια του ορίου και τις δυσκολίες που περιλαμβάνει η διδασκαλία της. Αναφέρει μια έρευνα στην οποία αναλύει τις αυθόρμητες αντιλήψεις (spontaneous conceptions) και τα νοητικά μοντέλα που σχηματίζουν συνήθως οι μαθητές κατά τη διδασκαλία του ορίου. Αναλύει τα γνωστικά εμπόδια που αναφύονται αλλά και τα επιστημολογικά εμπόδια που παρατηρούνται και στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας όπως η αδυναμία σύνδεσης γεωμετρίας και αριθμητικής, η έννοια του απείρως μεγάλου και απείρως μικρού, η μεταφυσική διάσταση της έννοιας του ορίου και η διαχρονική αγωνία της προσέγγισης ή μη της τιμής του ορίου. Σε έρευνα που έγινε σχεδόν την ίδια εποχή από την Joanna Mamona – Downs (1990) έδειξε ότι οι διαφορετικοί (τότε) τρόποι διδασκαλίας ανάμεσα σε Ελλάδα και Αγγλία λίγο αλλάζουν τα αποτελέσματα των ερευνών. Τα προηγούμενα με τη σειρά τους μεταφέρονται και στην έννοια της συνέχειας κάνοντας ιδιαίτερα απαιτητική τη διδασκαλία της.

Ο Tall (1990d) αναφέρεται εκτεταμένα στις αντιφάσεις και τις αστάθειες που παρατηρούνται στη διδασκαλία του απειροστικού λογισμού. Οι φοιτητές μαθαίνουν να απαντούν σε συγκεκριμένου τύπου ερωτήσεις και ασκήσεις ενώ όταν διερευνηθεί η γνώση τους με διαφορετικό τρόπο, τότε εμφανίζονται δυσκολίες. Παραθέτει τα αποτελέσματα μιας έρευνας που δείχνουν τα σημαντικά γνωστικά εμπόδια που συναντούν οι φοιτητές ενώ παραθέτει μια πληθώρα ερευνών που έγιναν από το 1977 έως το 1990 και παρουσιάζουν παρόμοια ευρήματα στη θεμελίωση των πραγματικών, τον ορισμό της εφαπτομένης καμπύλης, τους δεκαδικούς, τα όρια, την έννοια της συνέχειας, την έννοια της συνάρτησης, τη σύγκλιση ακολουθιών, τα όρια συναρτήσεων, την έννοια του απείρου, τα απειροστά, τον ορισμό της παραγώγου και την έννοια του διαφορικού. Αναλύει επίσης μερικούς από τους παράγοντες που μπορεί να οδηγήσουν στην εμφάνιση γνωστικών εμποδίων: το προσωπικό νόημα που αποδίδει σε μια έννοια ο καθηγητής και ο μαθητής αντίστοιχα, τα επιστημολογικά εμπόδια που ενυπάρχουν στην ανάπτυξη κάθε έννοιας και εμφανίζονται στην ιστορική της εξέλιξη καθώς και ο τρόπος που επιλέγεται για να γίνει η μεταφορά του νοήματος

στο μαθητή μιας και η γλώσσα μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο και με ακατάλληλη χρήση να αποτελέσει αιτία δημιουργίας γνωστικών εμποδίων ανάπτυξης της ανώτερης μαθηματικής σκέψης.

Ο Tall (1993k) σε ένα του άρθρο αναφέρεται εκτεταμένα στις δυσκολίες που παρουσιάζονται στον απειροστικό λογισμό. Εξηγεί ότι παγκόσμια, άσχετα με τις μεθόδους που ακολουθούνται, υπάρχει έντονη απογοήτευση για τις επιδόσεις των φοιτητών. Στη Γαλλία, Ηνωμένο Βασίλειο και Η.Π.Α τα αποτελέσματα των ερευνών δείχνουν πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας των φοιτητών στο μάθημα του απειροστικού λογισμού. Περιγράφει μια πλειάδα δυσκολιών που απαντώνται όπως οι επόμενες:

- Δυσκολίες ενσωματωμένες στη γλώσσα: όροι όπως «όριο», «τείνει προς», «πλησιάζει», «τόσο μικρό όσο θέλουμε», έχουν μια καθημερινή έννοια που δημιουργεί γνωστικό εμπόδιο στον τυπικό ορισμό.
- Η διαδικασία του ορίου δεν επιτυγχάνεται με μεθόδους αλγεβρικές που είναι πιο οικείες στους μαθητές.
- Η διεργασία «μια μεταβλητή γίνεται οσοδήποτε μικρή» μεταφράζεται από τους μαθητές ως «μια οσοδήποτε μικρή μεταβλητή ποσότητα».
- Η ιδέα του «Ν οσοδήποτε μεγάλου» οδηγεί τους μαθητές στη δύσκολη έννοια των άπειρων αριθμών.
- Οι μαθητές έχουν πάντα την απορία αν τελικά η τιμή του ορίου μπορεί να προσεγγιστεί.
- Η μετάβαση από το πεπερασμένο στο άπειρο δημιουργεί το ερωτηματικό: «τι συμβαίνει στο άπειρο;»
- Οι περιορισμένες και συχνά λανθασμένες νοητικές αναπαραστάσεις των μαθητών για τις συναρτήσεις.
- Τα εννοιολογικά προβλήματα που δημιουργεί ο συμβολισμός του Leibniz.
- Οι δυσκολίες που ανακύπτουν κατά την προσπάθεια μετάφρασης πραγματικών προβλημάτων σε φορμαλιστική γλώσσα.
- Η δυσκολία επιλογής και χρήσης κατάλληλων αναπαραστάσεων.
- Οι αλγεβρικές πράξεις που περιλαμβάνονται αλλά και η έλλειψή τους.
- Η ανάγκη αφομοίωσης πολύπλοκων νέων εννοιών σε περιορισμένο χρόνο.
- Η έμφυτη προτίμηση των μαθητών σε διαδικαστικές μεθόδους παρά στην εννοιολογική κατανόηση.

Το τελευταίο σημείο έχει σχολιαστεί ιδιαίτερα και σε άλλες έρευνες. Οι Tall και Razali (1993d), σχολιάζοντας τα αποτελέσματα ερευνών αναφέρουν ότι οι πιο ευέλικτοι φοιτητές φαίνεται να κινούνται με μεγαλύτερη άνεση μεταξύ της διεργασίας και της έννοιας και μάλιστα με ταχύτητα που πολλές φορές δεν είναι αντιληπτή ούτε από τους ίδιους. Οι λιγότεροι ικανοί αναζητούν κανόνες και θέλουν να κάνουν πράξεις όταν οι πιο ικανοί χειρίζονται νοητικά αντικείμενα, σκέπτονται και τείνουν να θυμούνται λιγότερα ανακατασκευάζοντας όσα χρειάζονται κάθε φορά. Με δυο λόγια η διαφορά είναι ότι ενώ οι πιο έμπειροι χρησιμοποιούν *διεργασιοεννοιολογική (proceptual)* σκέψη, οι λιγότερο έμπειροι φαίνεται να χρησιμοποιούν *διαδικαστική* (*procedural*) σκέψη.

Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της Sfard (1991) θα λέγαμε ότι πράγματι φαίνεται ότι τα λειτουργικά μαθηματικά προηγούνται των δομικών αλλά αυτό ισχύει μόνο στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Στο χώρο των ανώτερων μαθηματικών, η μεστότητα και η δύναμη της φορμαλιστικής προσέγγισης πρέπει να γίνεται ένας φυσικός τρόπος λειτουργίας (Tall, 1992m). Προφανώς βέβαια, η μετάβαση από τα λειτουργικά μαθηματικά στα δομικά – αξιωματικά, δεν είναι εύκολη και απαιτεί εξειδικευμένες ικανότητες. Οι μαθητές στο σχολείο ξεκινούν με εικόνες και αναπαραστάσεις και προχωρούν σε νοητικά αντικείμενα και σχήματα λειτουργώντας ως *φυσικοί μαθητές (natural learners).* Η ερμηνεία των συμβόλων και των αντικειμένων έχει προέλθει από μια εξοικείωση του υποκειμένου μαζί τους σε ένα επίπεδο λειτουργικό και διερευνητικό. Στα ανώτερα μαθηματικά όμως, στον τυπικό – αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών, η πορεία αυτή αντιστρέφεται (Tall et al., 2001; Balacheff, 1991). Οι φοιτητές έρχονται πρώτα σε επαφή με τους ορισμούς διατυπωμένους με σύμβολα σε μια φορμαλιστική γλώσσα που οδηγούν επαγωγικά στην οικοδόμηση μαθηματικών οντοτήτων και στη θεμελίωση των ιδιοτήτων τους μέσω κατάλληλων προτάσεων και θεωρημάτων. Αυτό με τη σειρά του τους μετατρέπει σε *τυπικούς – αξιωματικούς μαθητές (formal learners)* (Gray et al., 1999k; Tall, 1997g; Tall, 1992m).

Οι Merenluoto και Lehtinen (2000) χρησιμοποίησαν την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής προκειμένου να μελετήσουν το ρόλο που παίζει η

προηγούμενη γνώση στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να καταλάβουν τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Η έρευνά τους έδειξε ότι η προηγούμενη *αφελής* θεώρηση των μαθητών ότι η συνέχεια υποκρύπτει κίνηση ενώ το όριο είναι κάτι που σταματά την κίνηση, είναι προφανές εμπόδιο και η εννοιολογική αλλαγή και μετάβαση από την προϋπάρχουσα γνώση στο μαθηματικό ορισμό της συνέχειας όπως δίδεται μέσω του ορίου απαιτεί μια δραστική ανακατασκευή της γνώσης.

Οι Mastorides και Zachariades (2004) σε έρευνά τους προσπάθησαν να διερευνήσουν την κατανόηση και τη συλλογιστική καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ακόμα και στους καθηγητές υπήρχαν αρκετές παρανοήσεις και μάλιστα αρκετές ήταν ταυτόσημες με αυτές των μαθητών. Υπήρχαν αρκετές δυσκολίες στην ακριβή κατανόηση του ε-δ ορισμού και στη διαχείριση των συμβόλων που περιλαμβάνει, κάτι που έχει διαφανεί και από άλλους ερευνητές (Knapp & Oehrtman, 2005). Οι περισσότεροι επίσης δυσκολεύονταν στο να αποδώσουν λεκτικά τους δύο τύπους. Διαπιστώθηκε επίσης ότι η πλειοψηφία είχε λανθασμένη εικόνα της έννοιας αφού θεωρούσαν ότι η συνέχεια μεταφράζεται σε συνεχή γραμμή χωρίς να δείχνουν ότι χρειάζεται να δουν τη συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα για να ισχύει αυτό. Είναι εντυπωσιακό μάλιστα να τονισθεί ότι η έρευνα έγινε σε ιδιαίτερα έμπειρους καθηγητές. Παρόμοια αποτελέσματα είχε και η έρευνα των Hitt και Lara (1999), που και εδώ η συνέχεια θεωρείται ταυτόσημη με τη συνεκτικότητα. Επίσης και εδώ εμφανίστηκε το φαινόμενο πολλοί μαθητές αλλά και κάποιοι καθηγητές να έχουν την τάση να θεωρούν συνεχή μια συνάρτηση που εκφράζεται από μοναδικό τύπο, άποψη που είχε επηρεάσει έντονα τον Euler. Φαίνεται επίσης ότι κάποιοι ενώ είχαν αναπτύξει την έννοια του εν δυνάμει απείρου, δεν συνέβαινε το ίδιο και για το πραγματικό άπειρο.

Ο ορισμός της συνέχειας δημιουργεί πράγματι σοβαρά γνωστικά προβλήματα σε μαθητές και καθηγητές. Οι ορισμοί στα μαθηματικά έχουν ένα διπλό ρόλο: αφ' ενός μια έννοια που είναι ήδη οικεία στο μαθητή αποκτά αξιωματική υπόσταση μέσω του ορισμού, αφ' ετέρου στον τυπικό – αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών ο ορισμός χρησιμοποιείται για την κατασκευή των ιδιοτήτων της μαθηματικής έννοιας που

αποδίδεται μέσω του ορισμού (Pinto & Tall, 1996h). Με άλλα λόγια ο ορισμός προσδίδει νόημα (giving meaning) στην εικόνα της έννοιας μετατρέποντάς τη σε ορισμό της έννοιας, αλλά επίσης εξάγει νόημα (extracting meaning) από τον ορισμό της έννοιας μέσω κατάλληλων επαγωγικών συλλογισμών (Tall et al., 2001; Pinto & Tall, 1999g). Ακόμα και φοιτητές με μεγάλη ευχέρεια στη χρήση του ε-δ ορισμού του ορίου και της συνέχειας παρουσιάζουν αδυναμία εσωτερίκευσης του νοήματος των ορισμών. Άλλοι πάλι αν και έχουν μάθει τον ορισμό, συχνά δείχνουν να ξαναγυρνούν στην προϋπάρχουσα γνώση και επηρεάζονται από τις αυθόρμητές αντιλήψεις με πιο έντονη την άποψη ότι συνεχής είναι μια συνάρτηση που η γραφική της παράσταση γίνεται χωρίς να σηκώσουμε το στυλό από το χαρτί (Tall, 1997g; Tall, 1996i; Tall, 1994h).

Τα παραπάνω έρχονται να επιβεβαιώσουν τα ευρήματα του Vinner (1991) ο οποίος αναλύοντας τις έννοιες εικόνα της έννοιας (concept image) και ορισμός της έννοιας (concept definition), τονίζει ότι όπως φαίνεται από τις έρευνες, οι μαθητές ακόμα και αν έχουν 'μάθει' τον ορισμό μιας έννοιας, τον αποφεύγουν όσο μπορούν και συνήθως προσπαθούν να δώσουν απαντήσεις με την εικόνα της έννοιας.

Στην έρευνα των Gray και Pinto επίσης, έγινε προσπάθεια να διερευνηθούν οι απόψεις φοιτητών για την έννοια της συνέχειας (Pinto & Gray, 1995). Όταν τους ζητήθηκε να εξηγήσουν γιατί η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x\ \ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & \alpha\nu\ x\ \ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma \end{cases}$ είναι ασυνεχής για κάθε $x \neq 0$, η πλειοψηφία προσπάθησε να αποφύγει τον ορισμό και στηρίχθηκαν σε μια δυναμική ή διαδικαστική χρήση του ορισμού ή στην εικόνα της έννοιας. Προσπαθούσαν να ανακατασκευάσουν τον ορισμό της έννοιας κάνοντας χρήση της εικόνας της έννοιας. Είναι χαρακτηριστικό ότι κανένας από τους μαθητές δεν χρησιμοποίησε τον ε-δ ορισμό της συνέχειας ενώ κάποιοι μπέρδευαν τη συνέχεια με την παραγωγισιμότητα ή θεωρούσαν ότι μια συνεχής συνάρτηση παραγωγίζεται. Άλλοι θεωρούσαν ότι συνεχής σημαίνει ότι για κάθε τιμή του x να υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή για το y, ενώ και εδώ εμφανίστηκε το φαινόμενο να θεωρούν ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής αφού δεν ορίζεται από έναν τύπο.

ΙΙΙ. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Περίληψη

Η έρευνα διεξάχθηκε στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών και ήταν εθελοντική. Χορηγήθηκε ερωτηματολόγιο σε φοιτητές που παρακολουθούσαν το μάθημα 'Απειροστικός Λογισμός ΙΙ'. Στη συνέχεια με όσους εκδήλωσαν ενδιαφέρον επακολούθησε ημιδομημένη συνέντευξη που μαγνητοφωνήθηκε. Η συνέντευξη είχε σαν κύριο αντικείμενο το ερωτηματολόγιο. Δεν έγινε στατιστική ανάλυση των ερωτηματολογίων, αλλά ποιοτική.

Διαδικασία Εκτέλεσης της Έρευνας

Η έρευνα έλαβε χώρα το διάστημα Μάρτιος – Ιούνιος 2006.

Στα τέλη Μαρτίου χορηγήθηκε ένα ανώνυμο ερωτηματολόγιο σε ένα από τα τμήματα που γινόταν η διδασκαλία του μαθήματος 'Απειροστικός Λογισμός ΙΙ'. Το μάθημα απευθύνεται σε φοιτητές του β΄ εξαμήνου σπουδών αλλά συνήθως το παρακολουθούν πολλοί φοιτητών και αρκετά μεγαλύτερων εξαμήνων. Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν εθελοντική και ο παρεχόμενος χρόνος ήταν μία διδακτική ώρα. Στην αίθουσα δεν ήταν παρών ο διδάσκων καθηγητής, παρά μόνο ο ερευνητής. Το ερωτηματολόγιο συμπλήρωσαν 57 (πενήντα επτά) άτομα. Άλλα πέντε άτομα που έμαθαν για την έρευνα προσήλθαν εθελοντικά και συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο. Έτσι συνολικά συγκεντρώθηκαν 62 (εξήντα δύο) ερωτηματολόγια.

Δεν χορηγήθηκε πειραματικό δοκίμιο σε κάποια μεγάλη ομάδα ελέγχου. Ο λόγος ήταν πρακτικός καθώς αυτό θα δημιουργούσε καχυποψία στους υπόλοιπους φοιτητές και ίσως να μείωνε δραματικά τη συμμετοχή τους στο κυρίως μέρος της έρευνας.

Εξηγήθηκε σε όλους ο σκοπός της έρευνας, και ότι με όσους ήθελαν θα ακολουθούσε μια συνέντευξη. Όσοι ενδιαφέρονταν έδωσαν το όνομά τους και ένα τηλέφωνο στον ερευνητή για προσωπική επικοινωνία. Ακλούθησε τηλεφωνική επαφή γνωριμίας μαζί τους και στη συνέχεια κλείστηκε το ραντεβού για τη συνέντευξη. Συνολικά έλαβαν μέρος 35 (τριάντα πέντε) άτομα. Οι συνεντεύξεις έγιναν στο αναγνωστήριο του

Μαθηματικού τμήματος στο χρονικό διάστημα Απρίλιος – Ιούνιος 2006. Σε κάθε συνέντευξη παρών ήταν μόνο ο ερευνητής και ο φοιτητής [40]. Αρχικά προηγείτο μια συζήτηση γνωριμίας που βοηθούσε τους φοιτητές να νοιώσουν πιο άνετα, και επίσης δινόταν η ευκαιρία στον ερευνητή να περιγράψει τους σκοπούς της έρευνας και ιδιαίτερα της συνέντευξης. Σε κάθε έναν ζητήθηκε η άδεια να μαγνητοφωνηθεί η συνέντευξη, και ο κάθε φοιτητής επέλεγε ένα ψευδώνυμο που χρησιμοποιούσε σε όλη τη διάρκεια της συνέντευξης (Bell, 1997; Javeau, 1996). Δόθηκε σε όλους η διαβεβαίωση ότι πρόσβαση στο υλικό της έρευνας θα είχε μόνο ο ερευνητής. Αν και ο αρχικός σχεδιασμός ήταν να είναι οι συνεντεύξεις αυστηρά προσωπικές, στην πορεία έγιναν και κάποιες ομαδικές συνεντεύξεις (2 ή 3 άτομα) οι οποίες αποδείχθηκαν πολύ ενδιαφέρουσες αφού υπήρξε η δυνατότητα καταγραφής του διαλόγου που διεμήφθη ανάμεσα στους φοιτητές.

Το κυρίως μέρος κάθε συνέντευξης διαρκούσε 15 – 45 λεπτά. Η μορφή τους ήταν ημιδομημένη με κύριο άξονα το ερωτηματολόγιο. Οι φοιτητές ενθαρρύνονταν να σχολιάσουν αβίαστα όσα είχαν γράψει στο ερωτηματολόγια και ανάλογα ακλουθούσαν και άλλες ερωτήσεις ανοικτού τύπου. Τους δινόταν συνεχώς η ενθάρρυνση να σκέπτονται 'φωναχτά'. Σε περιπτώσεις που ο ερευνητής έβλεπε ότι ο φοιτητής αισθανόταν άβολα και φαινόταν αγχωμένος, φρόντιζε να ολοκληρώσει πιο γρήγορα τη συνέντευξη. Σε όλη την διάρκεια της κάθε συνέντευξης, ο ερευνητής δεν σχολίαζε ποτέ τις απαντήσεις των φοιτητών ούτε διατυπωνόταν οποιασδήποτε μορφής σχόλιο σε αυτά που έλεγαν. Μετά το τέλος κάθε συνέντευξης ο ερευνητής αφιέρωνε ιδιαίτερα χρόνο προκειμένου να λύσει οποιαδήποτε απορία

Όλες οι συνεντεύξεις των φοιτητών απομαγνητοφωνήθηκαν και αφού ψηφιοποιήθηκαν τα ερωτηματολόγια ενσωματώθηκαν και αυτά στους διαλόγους. Το πλήρες κείμενο των διαλόγων μαζί με τις απαντήσεις βρίσκεται στο Παράρτημα Β της παρούσας εργασίας. Όλη η παρούσα εργασία με τα αποτελέσματα και συμπεράσματα που θα παρουσιαστούν στηρίζονται κυρίως στα 35 ερωτηματολόγια τα οποία συνδυάστηκαν και με συνέντευξη. Παρόλα αυτά, υπάρχουν και κάποια σύντομα σχόλια για τα υπόλοιπα 27 ερωτηματολόγια φοιτητών που δεν ήθελαν να περάσουν από προσωπική συνέντευξη.

[40] Στη συνέχεια της εργασίας, και εφόσον δεν δημιουργείται παρανόηση, θα χρησιμοποιείται για λόγους συντομίας ο όρος «ο φοιτητής» ανεξαρτήτως του φύλου.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Προκειμένου να διενεργηθεί η έρευνα καταρτίστηκε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τις συνεντεύξεις που ακολούθησαν. Αρχικά το ερωτηματολόγιο δόθηκε σε δύο φοιτητές προκειμένου να ελεγχθούν και να διορθωθούν κάποια σημεία του. Το πλήρες ερωτηματολόγιο που τελικά χρησιμοποιήθηκε βρίσκεται στο Παράρτημα Α.

Το ερωτηματολόγιο ξεκινάει με δύο ερωτήσεις στατιστικού χαρακτήρα και στη συνέχεια περιλαμβάνει 6 κύρια ερωτήματα:

Ερώτημα 3: Ζητείται από τους φοιτητές να δώσουν τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η ερώτηση αυτή αποσκοπούσε στο να διερευνηθεί αν και κατά πόσον οι φοιτητές γνώριζαν τον ε-δ ορισμό που είχαν διδαχθεί λίγο καιρό νωρίτερα.

Ερώτημα 4: Ζητείται από τους φοιτητές να διατυπώσουν τη άποψή τους για το πώς συνδέονται η έννοια της συνέχειας που είχαν μάθει στο Λύκειο με ό,τι έμαθαν στο πανεπιστήμιο. Σκοπός αυτού του ερωτήματος είναι να διερευνηθούν οι αντιλήψεις των φοιτητών για το πώς συνδέονται οι έννοιες μεταξύ τους. Θέλουμε να δούμε σε ποιο βαθμό οι φοιτητές έχουν αναλύσει τους δύο ορισμούς και έχουν διακρίνει τις ομοιότητες και διαφορές.

Ερώτημα 5: Στη συνέχεια ζητείται από τους φοιτητές να γράψουν σε μια φράση τι έρχεται στο μυαλό τους όταν ακούν τη φράση «η συνάρτηση f είναι συνεχής». Σκοπός αυτού του ερωτήματος είναι διερευνηθούν οι αυθόρμητες αντιλήψεις τους, να διαφανεί ποια είναι η πιο κοινή εικόνα που έχουν στο μυαλό τους για την έννοια της συνέχειας.

Ερώτημα 6: Στη συνέχεια υπάρχει μια ερώτηση με τρεις φράσεις που ζητάμε να χαρακτηριστούν ως ‘Σωστή’ ή ‘Λάθος’. Είναι τρεις φράσεις που θα διερευνήσουν περαιτέρω τη ακριβή κατανόηση των φοιτητών για τη συνέχεια, θα φέρουν στην επιφάνεια λανθασμένες ιδέες, και θα αποκαλύψουν σε κάποιο βαθμό αν έχουν ‘μεταφράσει’ σωστά την έννοια της συνέχειας. Και τα τρία σημεία διατυπώνονται στη μορφή ‘Σωστό – Λάθος’ ώστε να δίνεται η ευκαιρία στους φοιτητές να σκεφθούν κάθε ενδεχόμενο. Στη διάρκεια της συνέντευξης επίσης, τους ζητήθηκε να δικαιολογήσουν

τις απαντήσεις του ή έστω να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι τους ώθησε να διαλέξουν την συγκεκριμένη απάντηση. Το πρώτο σημείο είχε σαν σκοπό να διερευνήσει αν είχαν αντιληφθεί το πόσο σημαντικό ήταν να αναζητούν τη συνέχεια μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού και αν διέκριναν τη διαφορά από το όριο. Τα δυο επόμενα σημεία εξέταζαν τη ισχύ της ισοδυναμίας 'συνεχής συνάρτηση ↔ συνεκτικό γράφημα'.

Ερώτημα 7: Το επόμενο ερώτημα περιελάμβανε 6 συναρτήσεις που δίνονται μέσω της αναλυτικής τους έκφρασης και ζητείται να δικαιολογηθεί το αν είναι συνεχείς ή όχι. Ένα 'κλασσικό' ερώτημα που απαντάται σε πολλές έρευνες με προφανή πλεονεκτήματα και δυνατότητα για εκτενή συζήτηση στη διάρκεια της συνέντευξης. Η επιλογή των συναρτήσεων έγινε πολύ προσεκτικά και με κριτήριο την ανίχνευση ιδιαίτερων χαρακτηριστικών.

Ερώτημα 8: Το τελευταίο ερώτημα περιλαμβάνει 10 (δέκα) γραφήματα συναρτήσεων που ζητάμε να χαρακτηρισθούν ως συνεχείς ή μη. Τα γραφήματα δίνονταν χωρίς αναφορά στην αναλυτική έκφραση της αντίστοιχης συνάρτησης. Άλλωστε σε αυτό το ερώτημα βασικό ζητούμενο είναι να φανεί η ικανότητα του φοιτητή να αξιολογεί τη συνέχεια ή μη μιας συνάρτησης καθαρά από το γράφημά της, χωρίς να χρειάζεται να αναζητά την αντίστοιχη αναλυτική της έκφραση. Και εδώ έχουμε κατάλληλα γραφήματα που δίνουν την ευκαιρία για εκτενείς συζητήσεις. Κάποια αντιστοιχούσαν σε μια γνωστή συνάρτηση, ενώ άλλα όχι.

Το μέγεθος του ερωτηματολογίου καθορίστηκε από την επιθυμία του ερευνητή να διερευνηθούν όλες οι πτυχές που έχουν αναφερθεί χωρίς όμως το ερωτηματολόγιο να γίνει βαρετό ή κουραστικό για τους φοιτητές.

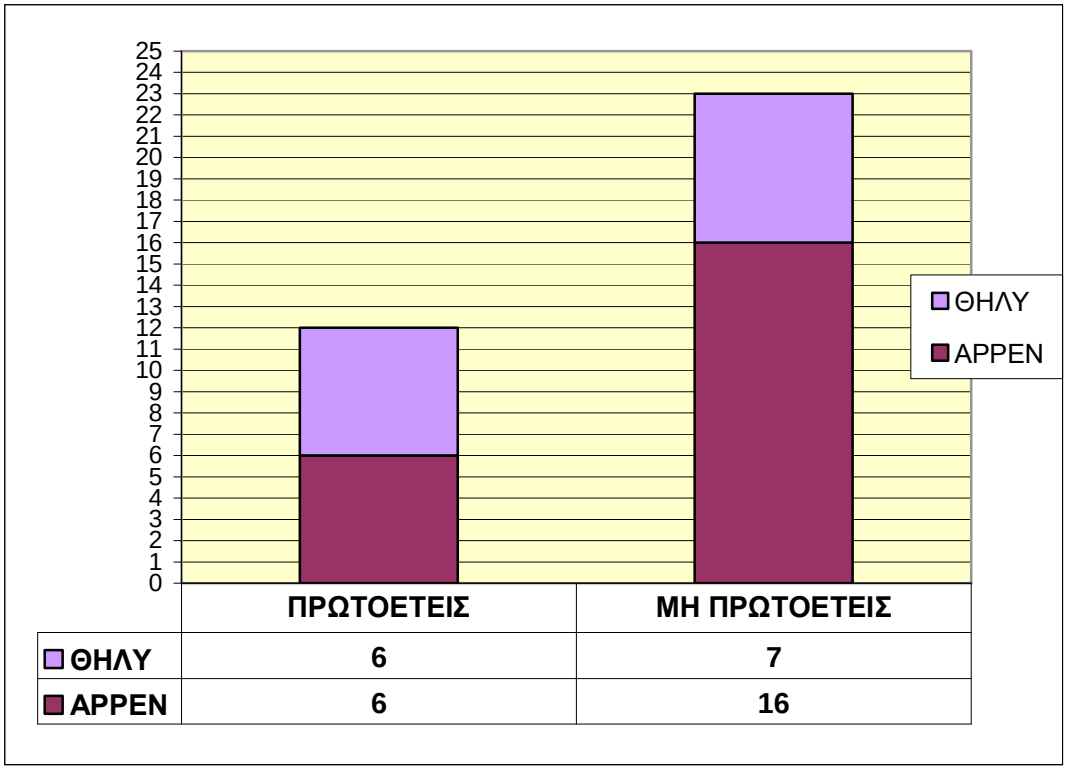
Στη διάρκεια των ηχογραφημένων συνεντεύξεων ο κάθε φοιτητής έπαιρνε ξανά μπροστά το ερωτηματολόγιό του και η συζήτηση γινόταν με βάση αυτό. Ζητήθηκε σε κάθε ερώτηση να προσπαθήσει να δικαιολογήσει το πώς έδωσε την απάντησή του. Ο φοιτητής είχε τη δυνατότητα να γράψει επάνω στο ερωτηματολόγιο ό,τι ήθελε ή να αλλάξει κάτι. Απλά ζητείτο κάθε φορά να δικαιολογήσει τις επιλογές του εκφράζοντας ελεύθερα είτε αυστηρά μαθηματικά κριτήρια είτε διαισθητικές απόψεις και 'αφελείς' θεωρίες.

Καθορισμός Πληθυσμού – Δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 62 άτομα, φοιτητές διαφόρων ετών στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών. Από αυτούς οι 35 πήραν μέρος με ηχογραφημένες συνεντεύξεις ενώ οι υπόλοιποι 27 απλά συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο.

Η ταυτότητα των 35 φοιτητών που συμμετείχαν στη διαδικασία των συνεντεύξεων φαίνεται στον επόμενο πίνακα και το γράφημα που ακολουθεί:

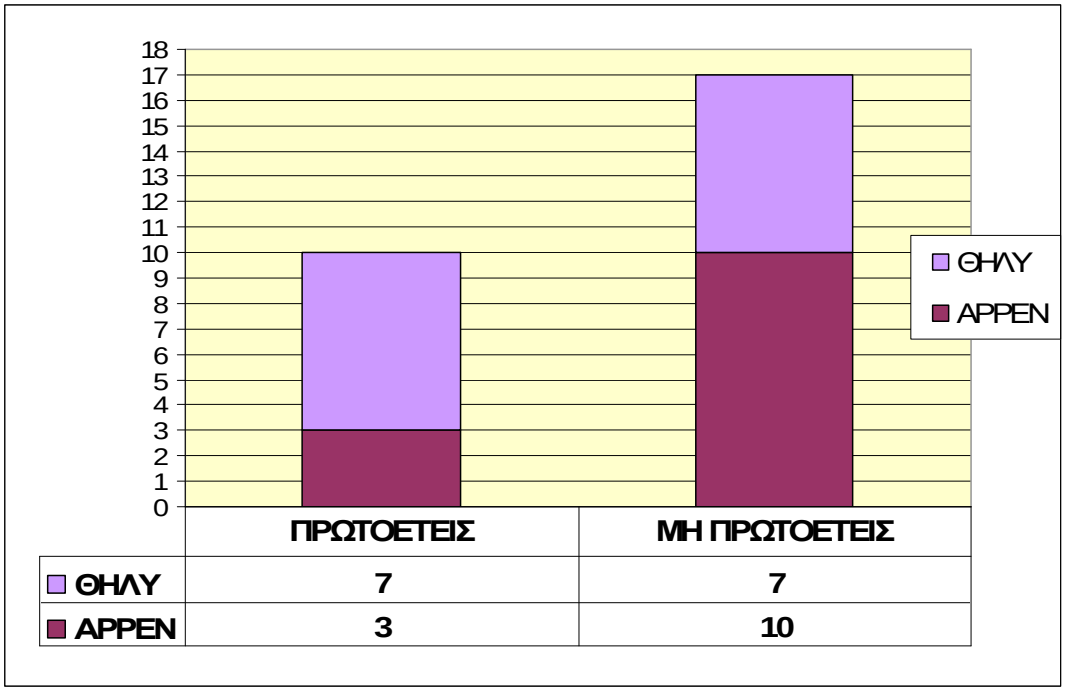
	ΠΡΩΤΟΕΤΕΙΣ	ΜΗ ΠΡΩΤΟΕΤΕΙΣ
ΑΡΡΕΝ	6	16
ΘΗΛΥ	6	7



Πίνακας 1

Η ταυτότητα των υπολοίπων 27 φοιτητών που πήραν μέρος στην έρευνα μόνο με τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου είναι η εξής:

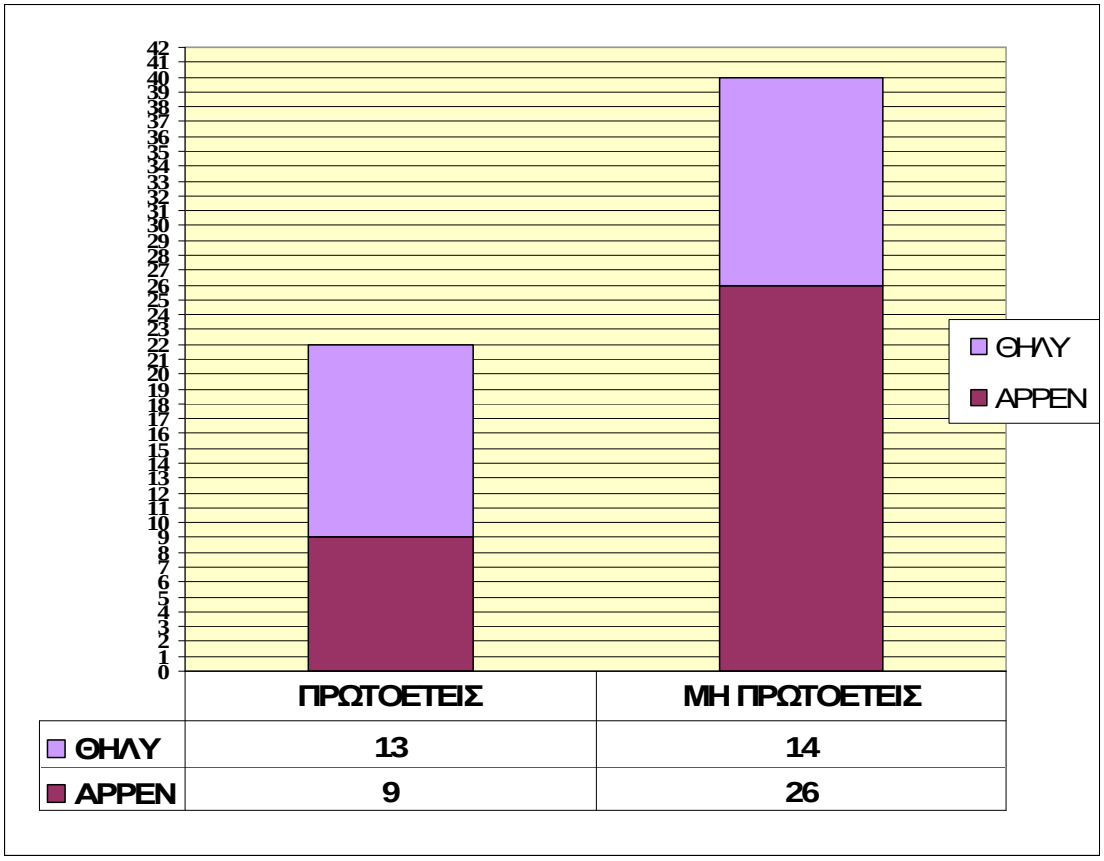
	ΠΡΩΤΟΕΤΕΙΣ	ΜΗ ΠΡΩΤΟΕΤΕΙΣ
ΑΡΡΕΝ	3	10
ΘΗΛΥ	7	7



Πίνακας 2

Ενώ τέλος, για όλο το δείγμα των 62 φοιτητών τα στοιχεία έχουν ως εξής:

	ΠΡΩΤΟΕΤΕΙΣ	ΜΗ ΠΡΩΤΟΕΤΕΙΣ
ΑΡΡΕΝ	9	26
ΘΗΛΥ	13	14



Πίνακας 3

Παραδοχές της Έρευνας

Αποτελεί βασική παραδοχή ότι όλοι οι φοιτητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα απάντησαν με ειλικρίνεια στις ερωτήσεις και οι απαντήσεις που έδωσαν ήταν προσωπικές και αντανακλούσαν τα πιστεύω τους. Το ίδιο ισχύει επίσης και για την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων και τη μεταφορά των κειμένων.

IV. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Οι απαντήσεις των φοιτητών δεν παρουσιάζουν μεγάλες αποκλείσεις. Γενικότερα φαίνεται πώς υπάρχει ένα έντονο πρόβλημα ακριβούς κατανόησης γύρω από την έννοια της συνέχειας και μια έντονη τάση αποφυγής έως και αποστροφής του κόσμου των τυπικών – αξιωματικών μαθηματικών. Ακολουθεί ποιοτική ανάλυση στις συνεντεύξεις του κάθε φοιτητή στα πλαίσια της θεωρίας της υποστασιοποίησης της Sfard, της θεωρίας APOS, των 3 κόσμων του Tall και με βάση την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής καθώς και σύντομη αναφορά στους φοιτητές που απλά συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο.

Εισαγωγή

Η ποιοτική ανάλυση των συνεντεύξεων μέσα από τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των συνεντεύξεων δεν είναι πάντα μια εύκολη διαδικασία. Οι μαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις έχουν σημαντικά πλεονεκτήματα καθώς παρέχουν την δυνατότητα άμεσης καταγραφής όχι μόνο των διαλόγων αλλά και γενικότερα των αντιδράσεων, του ύφους, της χροιάς της φωνής, των συναισθημάτων που κρύβει η φωνή κ.λ.π. (Παπαναστασίου και Παπαναστασίου, 2005; Bell, 1997; Javeau, 1996). Αυτό το πλεονέκτημα όμως μπορεί σε μεγάλο βαθμό να χαθεί κατά την απομαγνητοφώνηση των διαλόγων. Αυτός είναι ο λόγος που έγινε προσπάθεια ώστε οι διάλογοι να παρουσιαστούν με τρόπο που να προσομοιάζει στον τρόπο συνομιλίας και επίσης να συνοδεύονται από το αντίστοιχο έγγραφο – ερωτηματολόγιο του φοιτητή στο οποίο καταγράφονταν όλες οι σημειώσεις από μέρους του. Στο Παράρτημα της εργασίας ο αναγνώστης μπορεί να βρει το πλήρες κείμενο των συνεντεύξεων με τις απαντήσεις των φοιτητών.

Οι περισσότεροι φοιτητές δεν είχαν πρόβλημα να συζητήσουν με τον ερευνητή αν και φαινόταν ότι δεν ένοιωθαν ‘άνετα’ με τη φορμαλιστική γλώσσα των μαθηματικών και προτιμούσαν να δίνουν πιο απλές απαντήσεις κάτι που είναι συχνό φαινόμενο στις έρευνες (Gray & Pinto, 1995). Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά τα αποτελέσματα της κάθε συνέντευξης πάντα κάτω από το φως που ρίχνουν τα θεωρητικά πλαίσια της

υποστασιοποίησης της Sfard, των 3 κόσμων του Tall, της θεωρίας APOS και μέσα από την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής. Στους διαλόγους που θα παρατεθούν, ο ερευνητής συμβολίζεται με ***Ερ***.

Αποτελέσματα

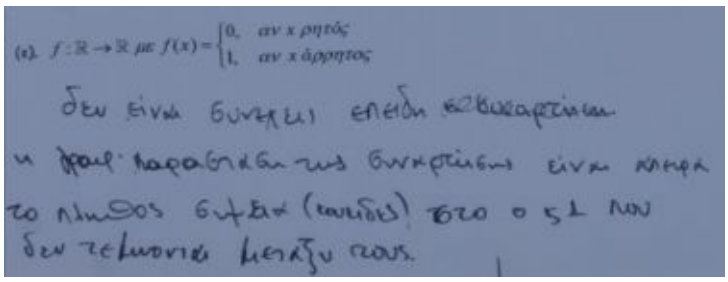
'Αρετή' ($1^{η}$ Συνέντευξη)

Η 'Αρετή' φοιτούσε στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο. Γράφει σωστά τον ε-δ ορισμό και όταν της ζητείται να σχολιάσει τη σχέση του με τον ορισμό του Λυκείου λέει:

Ερ –… Δηλαδή, πώς αντιλαμβάνεσαι τη σύνδεση της συνέχειας από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο; Ποια είναι διαφορά, πώς το εννοείς αυτό; Απλά θέλω να το καταλάβω λίγο καλύτερα, κοίταξέ το και πες μου.
Α – Στο Λύκειο μαθαίναμε μόνο για το όριο και βάζαμε την τιμή του x_o πάνω στην $f(x)$ και βλέπαμε αν όντως είναι $f(x_o)$. Μόνο αυτό βλέπαμε. Ενώ εδώ μαθαίνουμε ότι γενικώς αν παίρνουμε ένα σημείο και κοντά σε αυτό η συνάρτηση οι τιμές της να είναι πάλι κοντά στο $f(x_o)$…

[Απόσπασμα 1]

Βλέπουμε να ανακύπτει ένα κλασσικό γνωστικό εμπόδιο καθώς η φοιτήτρια θεωρεί ότι στο Λύκειο *βάζαμε την τιμή του x_o πάνω στην $f(x)$ και βλέπαμε αν όντως είναι $f(x_o)$* ενώ στον ε-δ ορισμό για τα x που πλησιάζουν το x_o, θέλουμε να δούμε αν *η συνάρτηση οι τιμές της να είναι πάλι κοντά στο $f(x_o)$*. Δεν έχει αντιληφθεί πλήρως ότι και στο όριο ενυπάρχει η διαδικασία της προσέγγισης. Δείχνει να μπορεί να χειριστεί λειτουργικά τους τύπους αλλά δεν φαίνεται να έχει δομική κατανόηση. Σύμφωνα με τη Sfard (1991) θα λέγαμε ότι το άτομο αν και φαίνεται να έχει εσωτερικεύσει τη διαδικασία ελέγχου της συνέχειας, δεν έχει περάσει στη φάση της συμπύκνωσης



Λίγο αργότερα η φοιτήτρια λέει:

Α – Λοιπόν, να σας εξηγήσω εδώ, είναι κουκίδες η γραφική της παράσταση αλλά δεν συνδέονται…

Ερ – Ναι αυτό θέλω λίγο να μου εξηγήσεις. 'και δεν τέμνονται μεταξύ τους' λες. Τι εννοείς;
Α – Άμα το σχεδιάσουμε, τότε βλέπουμε ότι δεν ενώνονται μεταξύ τους.

[Απόσπασμα 2]

Λίγο αργότερα στη συνέντευξη με τη φοιτήτρια η συζήτηση είχε φτάσει στην εξέταση του γραφήματος 8α το οποίο χαρακτήριζε 'συνεχή με ένα σημείο ασυνέχειας' οπότε ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:

Ερ – Εντάξει! Ας δούμε τώρα αυτό. Πες μου. Εδώ έχουμε μόνο γραφήματα, αυτό που βλέπεις. Τι σου κάνει αυτό;
Α – Στα γραφήματα πιστεύω ότι όλα τα έχω λάθος.
Ερ – Το χαρακτήρισες αυτό. . .
Α – Συνεχής με ένα μόνο σημείο ασυνέχειας, έτσι έχω γράψει τώρα.
Ερ – Ωραία, γιατί;
Α – Γιατί βλέπω το κενό και έχει άλλη τιμή το y_2.
Ερ – Επειδή μου είπες ότι χειρίζεσαι καλύτερα τα σύμβολα παρά τα γραφήματα, πώς θα το δικαιολογούσες αυτό με χρήση των ορίων; Με τα μαθηματικά Λυκείου, δεν με πειράζει
Α - …ε…θα το έπαιρνα μεγαλύτερο του 5 μικρότερο του 5 η f είναι η τάδε ας πούμε, ενώ για 5 παίρνει την τιμή y_2.
Ερ – Δηλαδή έχεις μια δίκλαδη συνάρτηση…
Α – Ναι
Ερ – Συμφωνώ. Που είναι μια καμπύλη τάδε για $x \neq 5$…
Α - …αλλά βασικά άμα πηγαίναμε 5 συν 5 πλην το όριο, πάλι στην τιμή…όχι θα μας έδινε την τιμή y_1 λογικά, όχι την τιμή y_2. Άρα είναι συνεχής στο σημείο 5.
Ερ – Γιατί;
Α – γιατί στο σημείο 5 έχουμε την τιμή y_2 …
Ερ – το f(5) εννοείς…
Α – Ναι, το f(5) είναι y_2 ενώ τα όρια συν πλην είναι y_1. …Τώρα που το ανέλυσα δηλαδή, εκείνη την ώρα το έγραψα γρήγορα για να φύγω!
Ερ – Τι ήταν εκείνο που έκανε εκείνη την ώρα να απαντήσεις ότι δεν ήταν συνεχής;

[Απόσπασμα 3]

Εδώ μπορούμε να δούμε άλλη μια συνηθισμένη παρανόηση για τη συνέχεια. Η φοιτήτρια ενώ αρχικά δηλώνει ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x=5, στη συνέχεια αλλάζει γνώμη θεωρώντας ότι είναι συνεχής αφού υπάρχει το f(5). Η φοιτήτρια συγχέει τη συνέχεια με τον ορισμό της συνάρτησης. Επίσης όπως συμβαίνει με την πλειονότητα των φοιτητών, και εδώ συναντάμε το φαινόμενο να θεωρείται ασυνεχής μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διακόπτεται. Παραθέτουμε

για παράδειγμα το επόμενο απόσπασμα το οποίο αφορά το γράφημα 8ζ που το έχει χαρακτηρίσει ως συνεχές:

Ερ – Αυτή τώρα;
Α – Αυτή…έχω βάλει συνεχής…όχι δεν είναι συνεχής…Τέλος πάντων, πιστεύω ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ – Τι σε χαλάει;
Α – Ε! το ότι έχει σημείο εδώ, το 3. Αυτό με χαλάει. Αλλά δεν ξέρω, εκείνη τη στιγμή μου ήρθε το συνεχής.
Ερ – Ωραία, και για την (η);
Α – Και για τους ίδιους λόγους…
Ερ – …ασυνεχής;…
Α - …ναι σπάει…σπάει σε πολλά κομμάτια κιόλας.
Ερ – Ωραία.

[Απόσπασμα 4]

Με τη γλώσσα της Sfard (1991) βλέπουμε ότι η φοιτήτρια ενώ φαίνεται να έχει εσωτερικεύσει λειτουργικά την έννοια της συνέχειας, δεν έχει περάσει στη φάση της συμπύκνωσης ώστε να σκέπτεται τη συνέχεια μέσα από τα γραφήματα συναρτήσεων και να μαθαίνει να αξιοποιεί πλήρως τις ιδιότητές της. Σύμφωνα επίσης με τον Dubinsky και τους συνεργάτες (Czarnocha et al., 1999; Dubinsky, 1991), θα λέγαμε ότι η φοιτήτρια φαίνεται να έχει μείνει στο πρώτο στάδιο, το στάδιο της δράσης χωρίς καν να μπορεί να κάνει κατάλληλους και σωστούς στοχασμούς πάνω στις προηγούμενες δράσεις. Χρησιμοποιώντας τέλος τη γλώσσα της θεωρίας του Tall (1994, 1991), η φοιτήτρια δείχνει να έχει περισσότερο διαδικαστική σκέψη, παρά διεργασιοεννοιολογική καθώς δεν φαίνεται να κινείται με ευελιξία μεταξύ της διεργασίας και της έννοιας. Βρίσκεται λοιπόν στον πρώτο κόσμο, τον ενσαρκωμένο. Είναι φανερό επίσης ότι οι αντιλήψεις του Λυκείου ασκούν επάνω της ισχυρή επιρροή και δεν έχουν ενεργοποιηθεί οι κατάλληλοι μηχανισμοί της εννοιολογικής αλλαγής που θα την βοηθήσουν να μεταβεί στο νέο επίπεδο γνώσης.

'Οδυσσέας' (2η Συνέντευξη)

Ο 'Οδυσσέας' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο την εποχή της συνέντευξης. Από την αρχή δείχνει ότι είναι άτομο που αντιλαμβάνεται ότι η μετάβαση από το Λύκειο στο πανεπιστήμιο απαιτεί μια διαφορετική εννοιολογική προσέγγιση:

Και αυτή πιστεύω είναι και η δυσκολία του Απειροστικού όταν έρχεσαι στο πρώτο έτος δεν είναι και το πιο δύσκολο μάθημα αλλά απαιτούν να αλλάξεις τη νοοτροπία από αυτή που είχες δημιουργήσει τρία χρόνια στο Λύκειο. Γι' αυτό υπάρχει και η δυσκολία στη συνέχεια και σε ένα σωρό άλλα πράγματα.

[Απόσπασμα 5]

Αυτή η φράση του φοιτητή υποκρύπτει την εννοιολογική αλλαγή που αναφέρουν οι Vosniadou και Verschaffel (2004). Επαναλαμβάνει της ότι η λέξη συνέχεια φέρνει στο μυαλό τη συνεχόμενη γραμμή αν και, όπως αναφέρει, ξέρει ότι αυτό δεν είναι σωστό:

...η πρώτη πρόταση που θα μου ερχόταν στο μυαλό πριν ένα χρόνο θα ήταν ότι είναι μια συνεχόμενη γραμμή και πιστεύω ότι πολλοί άνθρωποι ξέρουν ότι δεν είναι συνεχόμενη γραμμή, που το συζήτησα, αλλά το γράψανε, γιατί εσύ ζήτησες το πρώτο πράγμα που της ερχόταν στο μυαλό. Είναι δύσκολο να σου φύγει από το μυαλό ότι είναι μια συνεχόμενη γραμμή άρα είναι συνεχής, το οποίο δεν ισχύει.

[Απόσπασμα 6]

Και εδώ, αν και ο φοιτητής φαίνεται να γνωρίζει τον τρόπο εύρεσης της συνέχειας μέσω του ορίου, δεν υπάρχει σωστή νοητική αναπαράσταση της έννοιας. Εμφανίζεται ξανά το φαινόμενο ο φοιτητής να θεωρεί ότι αν η συνάρτηση για κάποιο x_o 'πιάνει' την τιμή $f(x_o)$ τότε είναι συνεχής. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο απόσπασμα που αφορά το γράφημα 8α που τα χαρακτηρίζει συνεχές:

Ερ – Ωραία, της δούμε τώρα αυτή.
Ο – Αυτή ουσιαστικά είναι η περίπτωση συνεχόμενης γραμμής με το σημείο που κόβεται ουσιαστικά υπάρχει μέσα στο σημείο, δηλαδή υπάρχει αυτή η τιμή εδώ πέρα της συνάρτησης, αυτό καταλαβαίνω από το γράφημα.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα.

[Απόσπασμα 7]

Και λίγο μετά κατά την εξέταση του γραφήματος 8δ που ο χαρακτηρισμός είναι ‘Ασυνεχής’ ….

Ερ – Η επόμενη τώρα;
Ο – Λόγω του σημείου…
Ερ - …που λείπει;
Ο - …ναι που λείπει.
Ερ – ενώ στο (α) γιατί λες ότι είναι συνεχής;
Ο – γιατί το σημείο υπάρχει, άσχετα αν κόβεται, είναι πιο κάτω.

[Απόσπασμα 8]

Η ίδια λογική κάνει το φοιτητή λίγο μετά να θεωρεί ότι στα ανοικτά άκρα της μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Για το γράφημα 8ε αναφέρει:

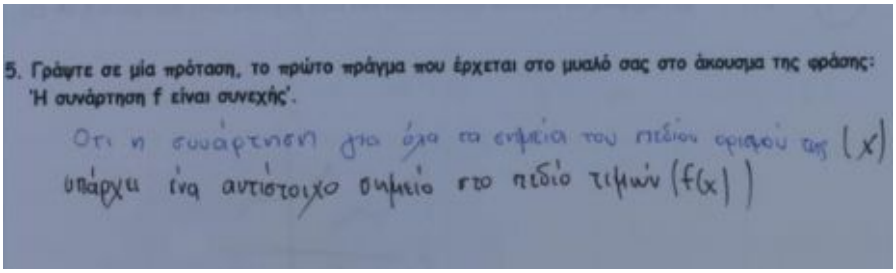
Ερ – Αυτή;
Ο – Ασυνεχής πάλι λόγω των σημείων -1, 1 και 4

[Απόσπασμα 9]

Εδώ έχουμε ένα φοιτητή που αν και αρχικά έδειχνε ότι διέθετε μια ωριμότητα, οι απαντήσεις του στη συνέχεια έδειξαν ότι υπήρχε ένα σοβαρό έλλειμμα εννοιολογικής κατανόησης. Είχε εντελώς λανθασμένες νοητικές αναπαραστάσεις για την έννοια της συνέχειας, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ανταποκριθεί με επιτυχία ούτε και στο λειτουργικό κομμάτι των μαθηματικών. Είναι αμφίβολο ακόμα και το αν ο φοιτητής έχει εσωτερικεύσει τη διαδικασία έλεγχου της συνέχειας (Sfard, 1991). Οι δράσεις που ασκεί πάνω στο αντικείμενο δεν διέπονται από αντίστοιχη εννοιολογική κατανόηση αλλά φαίνεται να επηρεάζονται από τις αυθόρμητες αντιλήψεις του (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Βρίσκεται σε ένα αρκετά πρώιμο στάδιο του ενσώματου κόσμου σύμφωνα με τον Tall (2004a), ενώ δεν φαίνεται να έχει κάνει τις απαραίτητες εννοιολογικές αλλαγές προκειμένου να αντιμετωπίσει τη ‘νέα’ γνώση του πανεπιστημίου που αρχικά και φαινομενικά έρχεται σε αντιπαράθεση με την αντίστοιχη Λυκειακή.

'Νίκος' (4η Συνέντευξη)

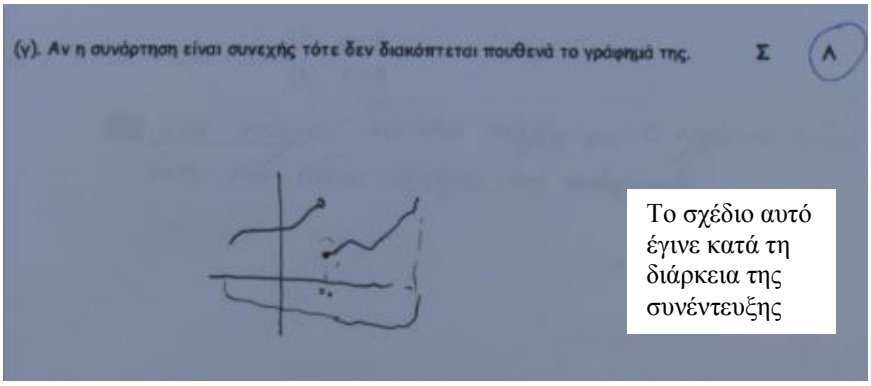
Ο 'Νίκος' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο. Από την αρχή δείχνει να έχει συγκεχυμένες απόψεις και να παρουσιάζει ένα ικανό έλλειμμα μαθηματικής γνώσης. Δεν ήξερε τον ε-δ ορισμό της συνέχειας σε σημείο αλλά ούτε και τον αντίστοιχο του Λυκείου. Δεν μπορούσε να απαντήσει στην ερώτηση τι έρχεται στο μυαλό του στο άκουσμα της φράσης «συνεχής συνάρτηση» και όταν ο ερευνητής τον παρακίνησε να δώσει μια αυθόρμητη απάντηση, έγραψε:


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Οτι η συνάρτηση για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της (x) υπάρχει ένα αντίστοιχο σημείο στο πεδίο τιμών (f(x))

[Απόσπασμα 10]

Για άλλη μια φορά εμφανίζεται το φαινόμενο να συγχέεται ο ορισμός της συνέχειας με τον ορισμό της συνάρτησης. Λίγο αργότερα επαναλαμβάνει:

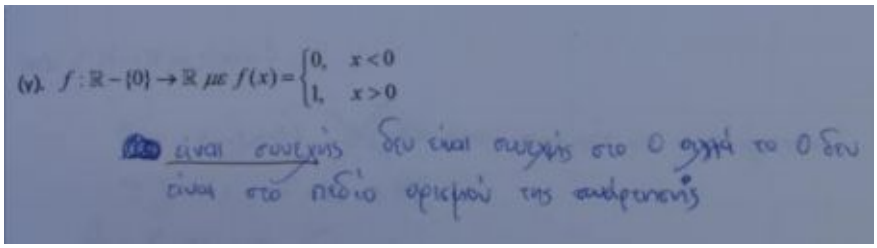

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Το σχέδιο αυτό έγινε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ – Ωραία, τώρα στο (γ) γιατί επιλέγεις το Λάθος;
Ν - …Α! ναι, γιατί υπάρχουν περιπτώσεις που μπορεί να διακόπτεται το γράφημα, αλλά να είναι συνεχής.
Ερ – Έχεις κάποιο γράφημα υπόψη σου; Θες να σχεδιάσεις στο χαρτί κάτι;
Ν - …(σχεδιάζει πάνω στο ερωτηματολόγιο το γράφημα που φαίνεται παραπάνω.) Αυτή είναι συνεχής αλλά το γράφημά της διακόπτεται.

[Απόσπασμα 11]

Αργότερα αναφέρει ξανά:



Ερ – Εδώ τότε γιατί θεωρείς ότι είναι συνεχής;
Ν – Είπαμε ότι αν ένα γράφημα δεν διακόπτεται, λέμε ότι είναι συνεχής, αλλά ένα γράφημα που διακόπτεται, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ – Α! μάλιστα, κατάλαβα. Δηλαδή γιατί αυτό αν και διακόπτεται είναι συνεχής;
Ν – Δηλαδή, το κλειδί είναι αυτό το σημείο του πεδίου ορισμού. Δηλαδή για κάθε σημείο το πεδίου ορισμού, υπάρχει ένα αντίστοιχο y. Αφού το μηδέν δεν είναι στο πεδίο ορισμού, δεν μας πειράζει.

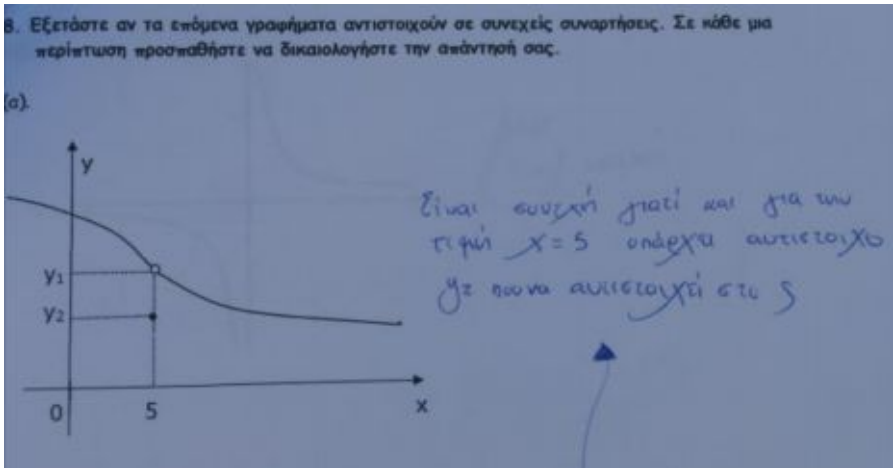
[Απόσπασμα 12]

…

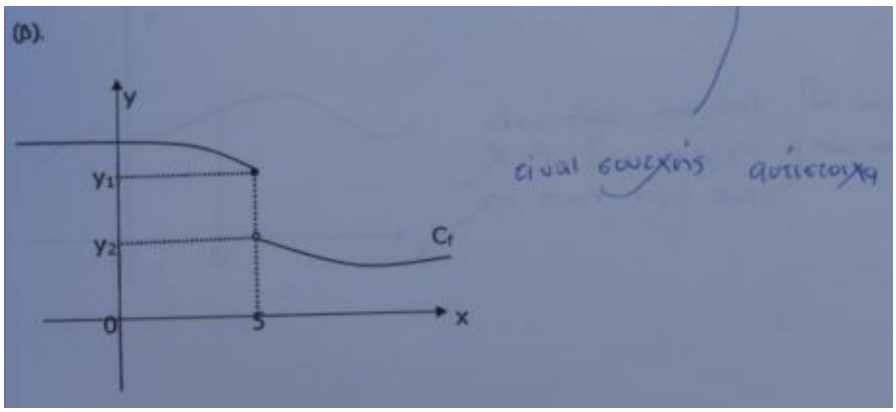
Ν – Γιατί εγώ…είχα…πιστεύω δηλαδή…όπως είπα και πιο πριν ότι τι κριτήριο που θα μου πει αν μια συνάρτηση είναι συνεχής είναι αν για κάθε x του πεδίου ορισμού, ουσιαστικά εδώ…να υπάρχει ένα αντίστοιχο y…

[Απόσπασμα 13]

…



Ερ – α! κατάλαβα! Εδώ τώρα στο 8(α) νομίζω ότι τώρα με βάση αυτά που έχεις πει, η απάντησή σου είναι ξεκάθαρη…
Ν – …ναι, ναι



Ερ – Εδώ τώρα πάλι; Το ίδιο;
Ν – ναι, ναι το ίδιο

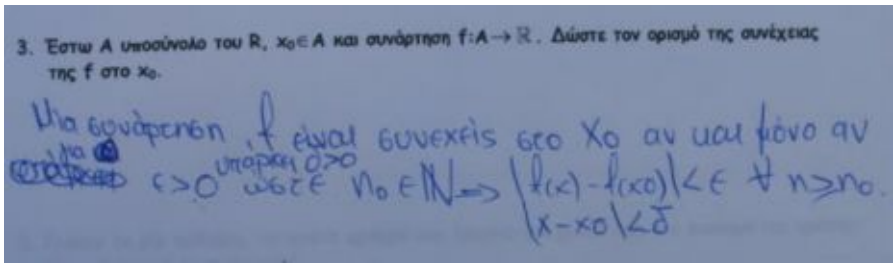
[Απόσπασμα 14]

Ο φοιτητής επαναλαμβάνει τα ίδια και στις επόμενες ερωτήσεις. Στο σχήμα 8δ υποστηρίζει ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής γιατί στο x=5 δεν υπάρχει το αντίστοιχο y, ενώ στο σχήμα 8ε για το x=3 αναφέρει πάλι το ίδιο ενώ στο x=1 δεν αναφέρει κάποιο πρόβλημα. Ομοίως στο 8ζ λέει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x=3 αλλά ως δικαιολόγηση προβάλλει το γεγονός ότι εκεί υπάρχει το αντίστοιχο y. Η παραπάνω αντίληψη διατρέχει σταθερά όλη τη συλλογιστική του φοιτητή. Λειτουργεί ως μια αυθόρμητη αντίληψη η οποία επισκιάζει κάθε προσπάθειά του να δομήσει εννοιολογικά τη γνώση (Cornu, 1991). Η εικόνα της έννοιας που έχει σχηματιστεί στο νου του φοιτητή είναι ισχυρότερη από τον ορισμό της έννοιας και δημιουργεί έντονο γνωστικό πρόβλημα στην προσπάθεια οικοδόμησης της γνώσης λειτουργώντας ως ένας γνωστικός αντιτιθέμενος παράγοντας (cognitive conflict factor) (Tall & Vinner, 1981). Οι ήδη διαμορφωμένες αντιλήψεις του φοιτητή λειτουργούν ανασταλτικά και υπερισχύουν της προσπάθειάς του να εισέλθει στον τυπικό – αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών. Προσπαθεί να δικαιολογήσει τις απαντήσεις του χρησιμοποιώντας την εικόνα της έννοιας και όχι τον ορισμό (Pinto & Gray, 1995).

Ο φοιτητής φαίνεται να βρίσκεται σε έναν ατελή και πρώιμο ενσώματο κόσμο άμεσα συνδεδεμένο με τα αποτελέσματα των αισθήσεών του (Tall, 2004a; Tall, 2004d). Επιδεικνύει αποκλειστικά λειτουργική σκέψη χωρίς να μπορεί να μεταβεί από τις διεργασίες στο αντικείμενο (Tall, 2004d; Gray & Tall, 1994; Sfard,1991). Διανύει μια αρχική φάση εσωτερίκευσης κατά την οποία όμως δεν ασκεί στοχευμένη δράση, αλλά μάλλον καθοδηγείται αποκλειστικά από τις διαισθητικές του αντιλήψεις. Οι δράσεις αυτές δεν ακολουθούν πάντα μια βήμα προς βήμα διαδικασία αφού συχνά εμφορούνται απλά από τις αντιλήψεις του φοιτητή και όχι από την κατασκευασμένη γνώση (Dubinsky & MacDonald, 2001; Czarnocha et al., 1991; Dubinsky, 1991). Ο φοιτητής δεν μπορεί να αναστοχαστεί αφαιρετικά πάνω στις δράσεις και έτσι σύμφωνα με τη θεωρία APOS δεν μπορεί να περάσει ούτε στο δεύτερο επίπεδο των διεργασιών εσωτερικεύοντας τις δράσεις.

'Άλκηστη' (5η Συνέντευξη)

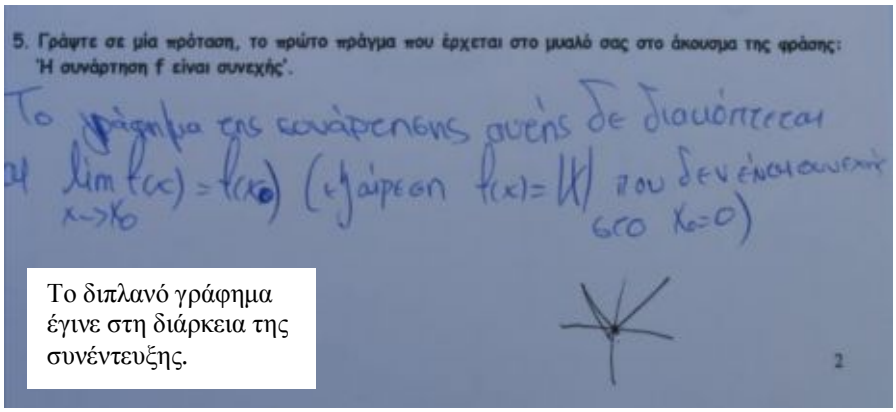
Η 'Άλκηστη' ήταν μια φοιτήτρια που την εποχή της συνέντευξης φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο. Στο αρχικό ερώτημα που ζητήθηκε ο ορισμός της συνέχειας, έδωσε την παρακάτω απάντηση:


3. Έστω Α υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\epsilon > 0$ $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$. $|x - x_0| < \delta$

[Απόσπασμα 15]

Στη συνέχεια στο ερώτημα 5 έγινε η παρακάτω στιχομυθία:


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Το γράφημα της συνάρτησης αυτής δε διαιρείται σε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (εξαίρεση $f(x) = |x|$ που δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$)

Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

2

Ερ – Ωραία, εδώ τώρα λες … (διαβάζω την απάντηση)… Θα ήθελα να μου εξηγήσεις λίγο αυτό που γράφεις στην παρένθεση.
Α – Ξέρουμε ότι μια συνάρτηση, νομίζω… δεν είμαι απόλυτα σίγουρη, ότι δεν είναι συνεχής όταν είναι το $|x|$. Δεν ξέρω, αυτό θυμάμαι…
Ερ – Δηλαδή εννοείς ότι αυτή είναι εξαίρεση στον κανόνα που έχεις γράψει;
Α - …κανόνα, ε ναι τέλος πάντων. Ή παραγωγίσιμη δεν είναι αυτή ή ασυνεχής. Παραγωγίσιμη δεν είναι σίγουρα στο μηδέν… τώρα συνεχής…έτσι μου ήρθε έτσι το έγραψα.
Ερ – Ωραία, θυμάσαι το γράφημά της;
Α – εεε δεν πάει κάπως έτσι; (σχεδιάζει γρήγορα το γράφημα που φαίνεται στο σχήμα παραπάνω)
Ερ – Ωραία, και άρα τι πιστεύεις, είναι ή δεν είναι συνεχής;
Α - …είναι συνεχής φαντάζομαι έτσι όπως τη βλέπω τώρα, δεν είναι; Αφού σε όλα μπορεί να πάρει τις τιμές, δεν είναι συνεχής; Είναι. Απλά νομίζω δεν είναι παραγωγίσιμη.
Ερ – Δηλαδή θέλεις να αλλάξεις κάτι στην απάντησή σου ή εννοείς κάτι άλλο;
Α – Όχι δεν το εννοώ καθόλου. Μάλλον το σκέφτηκα για το παραγωγίσιμη αυτό. Παραγωγίσιμη δεν είναι σίγουρα στο μηδέν. Αυτό το ξέρω.

[Απόσπασμα 16]

Στην απάντηση της φοιτήτριας εμφανίζεται η πιο κοινή παρανόηση για τη συνέχεια: η σύγχυση με τη συνεκτικότητα του γραφήματος (Mastorides & Zachariades, 2004; Merenluoto & Lehtinen, 2000; Bagni, 1999; Hitt & Lara, 1999; Pinto & Tall, 1996h; Tall, 1996i; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1994h; Tall, 1993k; Tall & Vinner, 1981). Επίσης ξανά εμφανίζεται το φαινόμενο η φοιτήτρια να θεωρεί ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης στο x είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη εικόνας του x. Παρατηρείται επίσης το φαινόμενο να συγχέει τη συνέχεια με την παραγωγισιμότητα, κάτι που έχει παρατηρηθεί σε αρκετές έρευνες (Pinto & Gray, 1995). Είναι χαρακτηριστικό ότι δεν έχει ακριβή γνώση για την έννοια της συνέχειας. Θεωρεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής αλλά όταν γίνεται συζήτηση πάνω σε αυτό, αναφέρει:

Ερ – Τώρα που την ξαναβλέπεις τι θα έλεγες;
Α – Ότι είναι συνεχής γιατί το μηδέν είναι εκτός πεδίου ορισμού.
Ερ – Προτιμάς δηλαδή αυτή την απάντηση από αυτή που είχες βάλει;
Α – Ναι …μάλλον…έχω μπερδευτεί με αυτό που λέμε εδώ ότι όταν το γράφημα είναι συνεχές και δεν διακόπτεται πουθενά. Εδώ ας πούμε το γράφημα δεν είναι συνεχές, αλλά η συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής, γιατί το μηδέν δεν είναι στο πεδίο ορισμού της, αυτό μας έχει δοθεί, οπότε είναι συνεχής δεν είναι;
Ερ – Δηλαδή τι θα επέλεγες τελικά για απάντηση;
Α – Ότι είναι συνεχής. Έτσι όπως τη βλέπω τώρα.

[Απόσπασμα 17]

Λίγο αργότερα επίσης, καθώς εξεταζόταν το γράφημα 7ε γίνεται μια ενδιαφέρουσα συζήτηση που αφορά τους ρητούς και τους άρρητους:

Α – Αυτή δεν ξέρω. Με τους ρητούς και τους άρρητους δεν τα πάω καθόλου καλά. Όποτε τους βλέπω δεν τα πάω καλά. Δεν μπορεί να τους συλλάβει το μυαλό μου.
Ερ – Ωραία, τώρα που τη βλέπεις, σου λέει τίποτα; Σου θυμίζει κάτι;
Α - …νομί…όχι σας λέω δεν τα πάω καλά. Ρητούς άρρητους τώρα…
Ερ – Εντάξει, κανένα πρόβλημα. Αν, αν ήθελες να της κάνεις ένα χονδροειδές γράφημα, τι θα έκανες;
Α – αυτό είναι το πρόβλημά μου! Αν την ήξερα, θα την έγραφα κιόλας. Αλλά δεν την ξέρω!
Ερ – Πώς περίπου την φαντάζεσαι;
Α – Φαντάζομαι κάτι τελίτσες στο μηδέν και στο ένα. Για κάθε ρητό στο 0 και για κάθε άρρητο στο 1. Έτσι το έχω εγώ φανταστεί. Αλλά να ρωτήσω το εξής: το σύνολο R αποτελείται από ρητούς και άρρητους λογικά. Άρα δεν θα υπάρχει μια συνέχεια; Μετά από κάθε ρητό ένας άρρητος και μετά από κάθε…τέλος πάντων; Και συνεχίζεται και θα είναι συνεχής;

Ερ – θα το πούμε στο τέλος! Άρα δηλαδή…
Α – …λογικά είναι συνεχής έτσι όπως το φαντάζομαι, αλλά δεν ξέρω. Λογικά είναι συνεχής γιατί αν πάρουμε ότι υπάρχει ρητός, άρρητος, ρητός, άρρητος και σε όλα αυτά παίρνει μια τιμή αυτή η συνάρτηση, άρα είναι συνεχής, υπάρχει μια συνεχής γραμμή στον άξονα των x΄x …λογικά…όχι στον x στον 0 και 1.

[Απόσπασμα 18]

Στο παραπάνω απόσπασμα παρατηρούμε τα σοβαρά εννοιολογικά προβλήματα που συνδέονται με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και τη μετάβαση από τους ρητούς στους άρρητους, προβλήματα που έχουν παρατηρηθεί σε αρκετές έρευνες (Pinto & Gray, 1996h; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1993k; Tall & Schwarzenberger, 1978). Όταν στη συνέχεια γίνεται συζήτηση για την $f(v) = \frac{1}{v}$, ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:

Α – Ναι, ναι, γιατί είναι μόνο τα θετικά…ξέρετε όμως εδώ λέει μόνο για φυσικούς, λογικά δεν θα είναι μια συνεχόμενη γραμμή γιατί φυσικοί είναι μόνο 1, 2, 3, 4, κ.λ.π.
Ερ – Δηλαδή είναι αυτή η γραφική παράσταση ή…
Α - …όχι, νομίζω…λογικά είναι μόνο αυτές οι τελείτσες που είχα κάνει εδώ…
Ερ - …αα, ναι κατάλαβα, αν θέλεις κάντες λίγο πιο έντονα να ξεχωρίζουν…,,ωραία. Άρα είναι κουκίδες ε;
Α - …ναι έτσι…
Ερ – …άρα είναι συνεχής;
Α – Λογικά δεν είναι.
Ερ – Γιατί;
Α - …γιατί δεν είναι!...είναι και το πεδίο ορισμού που με μπερδεύει. Υπάρχει ένα…ξέρεις στο μυαλό μου δεν μπορώ να συλλάβω ας πούμε…το πεδίο ορισμού που, εντάξει το πεδίο ορισμού παίρνει αυτές τις τιμές αλλά δεν δημιουργείται ένα γράφημα, ένα αυτό…
Ερ - …μια γραμμή εννοείς;…
Α - …ναι ακριβώς γιατί τις ενδιάμεσες τιμές δεν τις παίρνει! Άρα δεν είναι συνεχής, δεν υπάρχει το γράφημα έτσι όπως το έχω συνδυάσει στο μυαλό μου..
Ερ - …επειδή δηλαδή έχεις κουκίδες που δεν ενώνονται μεταξύ τους εννοείς…
Α - …ναι ακριβώς. Αυτή την απορία δεν την είχα λύσει ποτέ γι' αυτό …

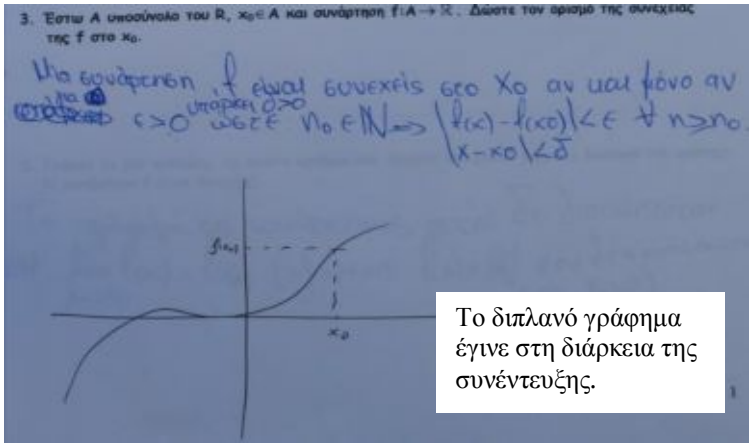
[Απόσπασμα 19]

Ερ – Πες μου μόνο για τα μεμονωμένα σημεία, το 6 και το 8. Πιστεύεις ότι σε αυτά τα σημεία είναι συνεχής;
Α – Αυτό τώρα…εμένα η συνέχεια στο μυαλό μου είναι συνδεδεμένη με τη συνέχεια, τη συνέχεια…
Ερ - …εννοείς τη γραμμή;…
Α - …ναι τη συνέχεια. Τώρα μια κουκίδα τη συνέχεια μπορεί να έχει;
Ερ - …συνεχόμενη γραμμή εννοείς;…

Α - …τι συνεχόμενη γραμμή; Ότι υπάρχει κάποιο γράφημα ουσιαστικά…
Ερ - …το οποίο να είναι τι;…
Α – να είναι μια καμπύλη ένα κάτι, όχι…
Ερ – …τι πρέπει να έχει αυτό το γράφημα που θα σε κάνει να λες ότι είναι συνεχές, ότι αντιστοιχεί σε συνάρτηση που είναι συνεχής;…
Α - …συνέχεια, μια συνέχεια, να μην διακόπτεται, κάπως έτσι το έχω στο μυαλό μου συνδεδεμένο. Τώρα αυτές οι τελείτσες εκεί πέρα έτσι, δεν είναι γράφημα, είναι… πώς να υπάρχει συνέχεια σε ένα μόνο σημείο; Αυτό δεν μπορώ να συλλάβω έτσι καλά, να όπως κι αυτό (δείχνει το γράφημα (ι)) που δεν είναι συνεχές γιατί δεν παίρνει τις ενδιάμεσες τιμές. Μοιάζει με αυτό που λέγαμε πριν με τους φυσικούς αριθμούς.
Ερ – Άρα για τον ίδιο λόγο δεν είναι και αυτό συνεχής;
Α – ναι, ναι.

[Απόσπασμα 20]

Η αντίληψη ότι η συνέχεια είναι ισοδύναμη με τη συνεκτικότητα του γραφήματος είναι πολύ ισχυρή στο νου της φοιτήτριας και εμφανίζεται σε όλες σχεδόν τις απαντήσεις της (Tall & Vinner, 1981). Είναι χαρακτηριστικό ότι η φοιτήτρια όταν συναντά μεμονωμένα σημεία αποφαίνεται πάντα ότι το γράφημα δεν αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση με αιτιολογία ότι δεν έχει συνεκτικό γράφημα. Κάθε φορά που θέλει να δικαιολογήσει όσα έχει γράψει στο ερωτηματολόγιο δεν επικαλείται τον ορισμό, κάποιο θεώρημα ή κάποια πρόταση, αλλά απλά αναφέρει αν η συνάρτηση 'πιάνει' την τιμή ή όχι. Είναι χαρακτηριστική η αποστροφή με την οποία αντιμετωπίζει τα τυπικά μαθηματικά, ακόμα κι όταν πρέπει απλά να χρησιμοποιήσει τον ορισμό του Λυκείου (Tall, 1996i; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1994h). Δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει ούτε καν στοιχειώδη τυπικά μαθηματικά για να δώσει κάποια απάντηση και δικαιολογεί πάντα τις απαντήσεις της διαισθητικά. Όταν στο τέλος της συνέντευξης της ζητείται να σχολιάσει τον ορισμό της συνέχειας που έχει δώσει, ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:



Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ – Ωραία, να δούμε και κάτι τελευταίο. Να ξαναγυρίσουμε στον ορισμό τον αρχικό…
Α – …γιατί πιστεύετε ότι τον ήξερα; Δεν τον θυμόμουνα…
Ερ - …δεν πειράζει…
Α - …λοιπόν να σας πω. Εδώ συναντώ το μεγαλύτερο πρόβλημα ας πούμε που μπορείτε να φανταστείτε

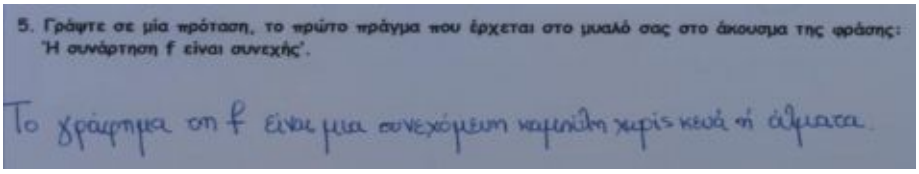
διότι τώρα, δεν μπορώ να συλλάβω τι σχέση έχει ένα ε θετικό ένα δ θετικό, όλο αυτό το … ε θετικό, η απόσταση μεταξύ σημείων με τη συνέχεια.
Ερ – Θα μπορούσες να μεταφράσεις αυτόν τον ορισμό σε απλά Ελληνικά;!; Δηλαδή τι φαντάζεσαι να λέει;
Α – Λοιπόν κοιτάξτε, αν θυμάμαι καλά από αυτά που μας λέγανε είναι ότι … η απόσταση δύο σημείων να είναι μικρότερη από ε νομίζω … κατ' αρχήν υπάρχει ε και δ στη συνέχεια ή είναι για την παραγωγίσιμη αυτή;
Ερ – Υπάρχει κάτι που θα ήθελες να αλλάξεις στον ορισμό;
Α – Νομίζω είναι αν και μόνο αν υπάρχει ε θετικό, ώστε για κάθε δ…ώστε για δ θετικό και v_o ανήκει στο N ισχύει αυτό;…
Ερ – Δηλαδή αν φτιάξω το γράφημα μιας συνάρτησης κάπως έτσι (σχεδιάζω το γράφημα που φαίνεται στην εικόνα), αν ήθελες χρησιμοποιώντας αυτό το γράφημα να εξηγήσεις σε κάποιον τον ορισμό, τι θα του έλεγες; Πώς θα τον περιέγραφες με λόγια χρησιμοποιώντας το σχήμα;
Α – ότι για την απόσταση κάθε x από το x_0 η οποία είναι μικρότερη ενός αριθμού δ, δηλαδή αν η απόσταση μεταξύ x και x_0 είναι μικρότερη από δ …μμμ…ε δεν ξέρω… τότε όμοια και η απόσταση του f(x) από το f(x_0) αντίστοιχα θα είναι μικρότερη του ε και το ε εξαρτάται από το δ, το δ από το ε αντίστοιχα, τέλος πάντων…
Ερ – Ωραία, το v_0;
Α – το v_0 δεν ξέρω που κολλάει, δεν ξέρω…(το ξαναδιαβάζει) ναι δεν ξέρω που κολλάει το ν. Πρέπει να ήταν για ακολουθία αυτό. Άσχετο! Δεν ξέρω έχω μπερδευτεί, δεν τον ξέρω τον ορισμό γενικότερα.

[Απόσπασμα 21]

Και εδώ συναντούμε το φαινόμενο η εικόνα της έννοιας που έχει σχηματιστεί στο νου της φοιτήτριας να είναι ισχυρότερη από τον ορισμό της έννοιας και να δημιουργεί έντονο γνωστικό πρόβλημα στην προσπάθεια οικοδόμησης της γνώσης λειτουργώντας ως ένας γνωστικός αντιτιθέμενος παράγοντας (Tall, 1991; Tall & Vinner, 1981). Οι αντιλήψεις που έχουν ήδη διαμορφωθεί στο νου της λειτουργούν ανασταλτικά και υπερισχύουν της προσπάθειας που καταβάλλει να εισέλθει στον τυπικό – αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών. Προσπαθεί να δικαιολογήσει τις απαντήσεις της χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο την εικόνα της έννοιας και όχι τον ορισμό (Pinto & Gray, 1995). Βρίσκεται σε έναν αρκετά πρώιμο ενσώματο κόσμο άμεσα συνδεδεμένο με τα αποτελέσματα των αισθήσεών της ενώ επιδεικνύει αποκλειστικά λειτουργική σκέψη (Tall, 2004d; Gray & Tall, 1994; Sfard,1991). Βρίσκεται σε μια αρχική φάση εσωτερίκευσης κατά την οποία απλά καθοδηγείται αποκλειστικά από τις διαισθητικές της αντιλήψεις και όχι από την κατασκευασμένη γνώση (Czarnocha et al., 1991; Dubinsky, 1991). Ο φοιτητής δεν μπορεί να αναστοχαστεί αφαιρετικά πάνω στις δράσεις και έτσι σύμφωνα με τη θεωρία APOS δεν μπορεί να περάσει σε ένα δεύτερο επίπεδο των διεργασιών εσωτερικεύοντας τις δράσεις.

'Αλέξανδρος' (6η Συνέντευξη)

Ο 'Αλέξανδρος' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο την εποχή που πάρθηκε η συνέντευξη. Είχε ήδη περάσει τα μαθήματα 'Απειροστικός Λογισμός' Ι και ΙΙ και απλά βρέθηκε κατά σύμπτωση στο αμφιθέατρο τη μέρα που δόθηκε το ερωτηματολόγιο και αποφάσισε να πάρει μέρος στην έρευνα. Θα μπορούσε να θεωρηθεί καλός φοιτητής αφού χρωστούσε πολύ λίγα μαθήματα σε σχέση με το έτος φοίτησής του. Στην αρχή της συζήτησης φάνηκε ότι κινείτο με σχετική άνεση στο χώρο των τυπικών – αξιωματικών μαθηματικών. Ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:

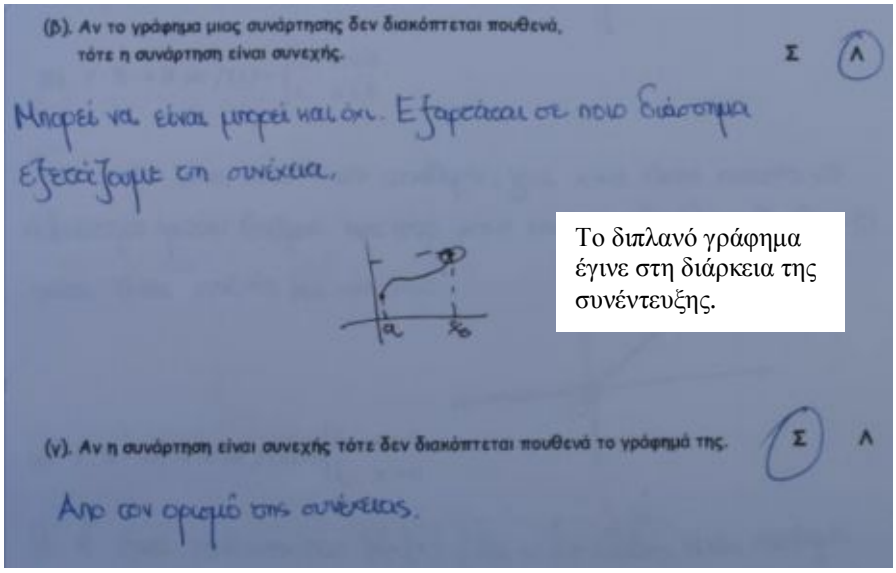

5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Το χράφημα ση f είναι μια συνεχόμενη καμπύλη χωρίς κενά ή άλματα.

Ερ – Ας πάμε λίγο στο 5. Αυτό είναι που σου έρχεται στο μυαλό, έτσι; Θέλεις να σχολιάσεις κάτι πάνω σε αυτό;
Α- Αυτό είναι το πρώτο πράγμα που μου ήρθε στο μυαλό χωρίς να σκεφτώ καθόλου με βάση την ανάλυση που ξέρω, αυτό που μου ήρθε απλά στο μυαλό. Χωρίς να σκεφτώ καθόλου, τίποτα.
Ερ - Καθώς προχώρησες στο Πανεπιστήμιο, άλλαξε καθόλου αυτή η εντύπωση;
Α – Αρκετά…
Ερ – Γιατί;
Α - Κατ αρχήν άλλαξε αρκετά διότι ξεχώρισα τη συνέχεια την απλή αυτή που λέμε σημειακή από τη συνέχεια την ομοιόμορφη που είναι ολική. Μετά, επί πλέον όταν προχωρήσαμε λίγο παραπάνω στα ολοκληρώματα και σε αυτά, είπαμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις ξέρεις κάτι, ολοκληρώνονται κατά Riemann μια χαρά και είμαστε εντάξει αλλά και πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας να έχουμε πάλι είμαστε εντάξει και μπορούν να ολοκληρωθούν. Άρα λέω, και πεπερασμένο πλήθος αλμάτων να περιέχει η συνάρτησή μου δεν ξεφεύγει και πολύ από το να είναι συνεχής, δηλαδή είναι κατά τμήματα συνεχής όπως έχω απαντήσει λίγο πιο κάτω.

[Απόσπασμα 22]

Η απάντησή του φανερώνει την ισχύ που έχουν οι διαισθητικές αντιλήψεις και η εικόνα μιας έννοιας (Vosniadou & Verschaffel, 2004; Vinner, 1991; Fischbein, 1987; Tall & Vinner, 1981). Ακόμα και όταν ο φοιτητής μαθαίνει τον ορισμό και εσωτερικεύει το νόημά του, οι αυθόρμητες αντιλήψεις επανέρχονται και επηρεάζουν τις απαντήσεις του (Tall, 1996i; Pinto & Gray, 1995). Είναι χαρακτηριστικό ότι όταν καλείται να σχολιάσει το 6α, αναφέρει πολύ σωστά ότι: «Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε σημεία στα οποία η f δεν ορίζεται». Στο 6β όμως ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:



Τώρα στο β. Έχεις κάποιο παράδειγμα; Τι σου ήρθε στο μυαλό και απάντησες λάθος;
Α - Δεν θυμάμαι τι μου ήρθε στο μυαλό και απάντησα λάθος.
Ερ - Τώρα που το ξανακοιτάζεις;
Α - Βασικά νομίζω ότι το βλέπω σε αντιδιαστολή με αυτό (δείχνει το γ). Δηλαδή νομίζω ότι δεν ισχύει και αντιστρόφως. Δηλαδή νομίζω ότι αυτό είναι το πιο λογικό. Αν είναι συνεχής τότε δεν θα διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.
Ερ - Και απλά πιστεύεις ότι δεν ισχύει το αντίστροφο;
Α - Πιστεύω ότι δεν ισχύει το αντίστροφο γιατί ας πούμε μπορεί να είναι ...(διστάζει και διαβάζει ξανά την εκφώνηση). . .
Ερ - Σου έρχεται κάποιο γράφημα το μυαλό; Σου ήρθε κάτι συγκεκριμένο στο μυαλό και το σκέφθηκες αυτό;
Α – Ναι μπορεί να είναι… (αρχίζει να σχεδιάζει στο χαρτί το γράφημα που φαίνεται παραπάνω). Για παράδειγμα να είναι ανοιχτό στο x_0 και να θες να εξετάσεις τη συνέχεια στο x_0. Τότε αυτή, αν εξετάσουμε τη συνέχεια στο x_0, δεν είναι συνεχής στο x_0.
Ερ – Γιατί;
Α - Εκτός του ότι δεν είναι σημείο του πεδίου ορισμού, αφού είναι ανοιχτό, αν θέλουμε να το εξετάσουμε πιο μαθηματικά, ας πούμε, και πάρουμε τα πλευρικά όρια τότε το $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *υπάρχει και μπορούμε να το βρούμε, παίρνει κάποια τιμή, ενώ το* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *δεν υπάρχει καθόλου και επίσης το* $f(x_0)$ *δεν υπάρχει καθόλου. Ωστόσο ας πούμε το γράφημα της συνάρτησης είναι συνεχόμενη γραμμή. Δηλαδή το σκέφτηκα έτσι απλά, να έχει μικρή τρυπούλα εδώ πέρα. Δηλαδή το σκέφτηκα, αν το βάλουμε να ορίζεται στο [α, $χ_0$) είναι συνεχής. Ενώ στο [α, $χ_0$] δεν είναι συνεχής. Εγώ με αυτή την έννοια το σκέφτηκα εκείνη την ώρα.*
Ερ – κατάλαβα, ωραία.

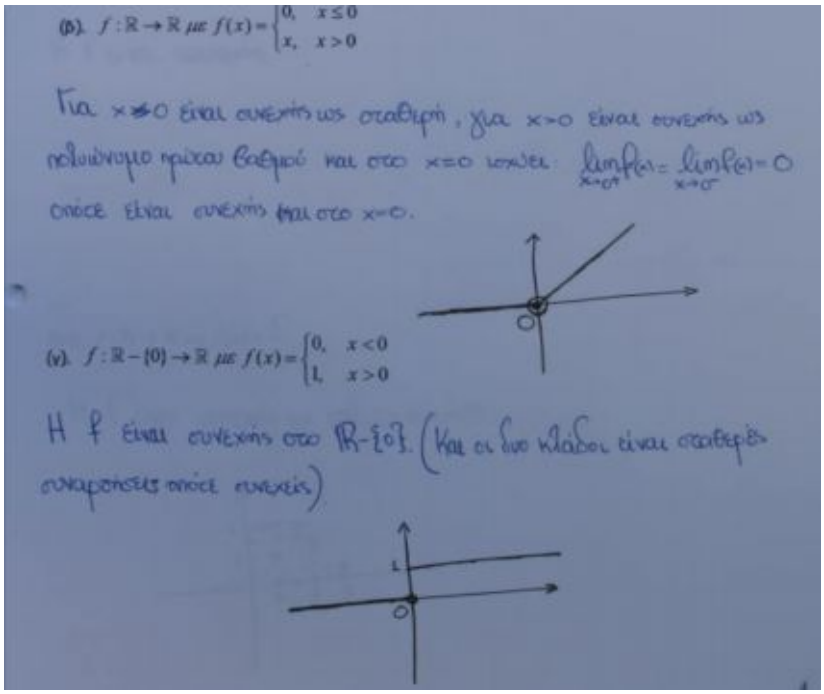
[Απόσπασμα 23]

Λίγο αργότερα όμως σχολιάζοντας τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, την προσδιορίζει ως συνεχή και σχολιάζει:

Ερ - Σε πειράζει που το γράφημα δεν είναι συνεκτικό, δεν είναι δηλαδή συνεχόμενη γραμμή;
Α – Όχι, όχι. Βασικά ξέρεις τι γίνεται, είχα συνηθίσει στο Λύκειο, με τη νοοτροπία του Λυκείου, αυτό που λες εσύ. Να βλέπω ένα γράφημα και να λέω, δεν είναι συνεκτικό, δεν είναι μια συνεχόμενη γραμμή, άρα δεν είναι συνεχής. Μετά το συνέδεσα στο Πανεπιστήμιο 100 % σχεδόν 80 % μπορώ να σου πω με το πεδίο ορισμού. Δηλαδή στις περισσότερες απαντήσεις έχω απαντήσει με βάση το πεδίο ορισμού παρά με τον τύπο της συνάρτησης.

[Απόσπασμα 24]

Τα σοβαρά γνωστικά εμπόδια που γεννάει η έννοια του ορίου είναι έκδηλα σε όλες τις συναφείς έρευνες (Merenluoto & Lehtinen, 2000; Pinto & Tall, 1996i; Tall, 1993k; Cornu, 1991; Tall & Schwarzenberger, 1978). Σε ένα απόσπασμα του διαλόγου είναι ενδιαφέρον να δει κανείς πώς ξεπροβάλλει αυτό το γνωστικό εμπόδιο:



Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Εδώ τώρα λες (διαβάζω την απάντησή του στο (β))…
Α - …ναι και είναι συνεχής…
Ερ - …και στο 0 εξετάζεις με . . .
Α - …με τα πλευρικά όρια.
Ερ – Ωραία. Μπορείς να μου κάνεις και εδώ τη γραφική παράσταση;
Α – (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται δίπλα και μου το εξηγεί με ευχέρεια.)… και εδώ στο 0 δεν ορίζεται.
Ερ - Δηλαδή έχεις κενό στο 0;
Α - Εξαρτάται ποιο κλάδο μελετάμε.
Ερ – Σαν συνάρτηση. Θα έχει κενό στο 0;
Α - Δεν θα έχει, όχι δεν θα έχει.
Ερ – Γιατί;
Α - …γιατί…Δεν ξέρω. Το εξέτασα με το όριο μετά. Αλλά δεν μου φαινόταν λογικό να έχει κενό στο 0. Το επιβεβαίωσε το όριο αυτό μετά, τα τυπικά μαθηματικά δηλαδή. Είχα κι εγώ ένα προβληματάκι όταν έφτιαχνα τη γραφική παράσταση στο μυαλό μου. Γιατί

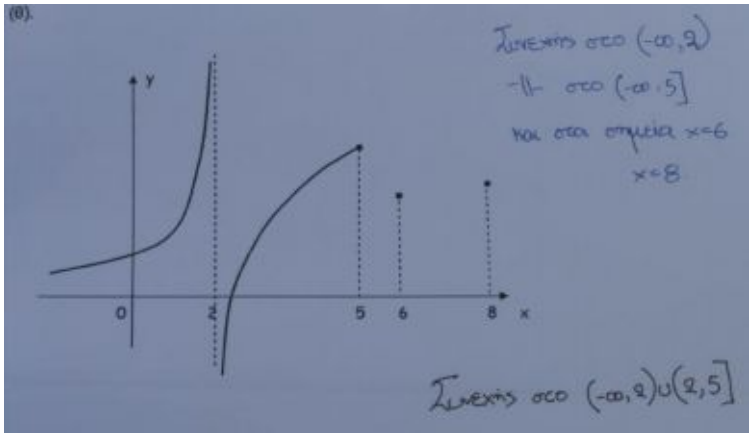
λέω ότι θα ναι εδώ και κλειστό κυκλάκι; Και ανοιχτό; Και τα δύο ; Και το επιβεβαίωσε το όριο μετά, ότι πρέπει να είναι κλειστό.
Ερ – Ωραία, ωραία. Να δούμε τώρα τη (γ). Λες ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$. *Μπορείς να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;*
Α – (σχεδιάζει και πάλι γρήγορα το γράφημα και το εξηγεί). Στο 0 έχω ανοικτό κυκλάκι γιατί δεν την παίρνει την τιμή.
Ερ – Στο 1; Έχεις ανοιχτό ή κλειστό εκεί;
Α – Χμμμ…Κλειστό πρέπει να ναι…Γιατί να είναι ανοικτό; Είναι η $f(x)=1$, *σταθερή συνάρτηση, αυτή είναι η γραφική της παράσταση…δεν υπάρχει λόγος να έχει ανοιχτό. Μα η* $f(x)=1$ *αν το πάρεις ξεχωριστά σαν συνάρτηση, για παράδειγμα δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=1$ *έχει πεδίο ορισμού όλο το R. Άρα το να βάλεις εδώ ανοικτό κυκλάκι δεν θα ήταν λίγο περίεργο;*
Ερ – Δεν ξέρω, εγώ απλά ρωτάω!
Α - Όχι, δε νομίζω ότι θα έβαζα ανοικτό κυκλάκι. Θα το έβαζα συνεχόμενο, κανονικά, όπως το έχω εδώ.
Ερ – Ωραία, πάντως είναι συνεχής ή όχι;
Α – Ναι, ναι, συνεχής!

[Απόσπασμα 25]

Στο ερώτημα 7β ο φοιτητής χρησιμοποιεί τις διεργασίες που έχει μάθει και απαντά ότι η συνάρτηση είναι συνεχής, δείχνοντας ότι έχει εσωτερικεύσει τις διαδικασίες που περιλαμβάνονται και δεν χρειάζεται να τις αναλύει στα επί μέρους βήματα (Sfard, 1991). Έχει περάσει επίσης στη φάση της συμπύκνωσης καθώς προσπαθεί να δημιουργεί κατάλληλες αναπαραστάσεις και φαίνεται να μπορεί να τις χειριστεί διαδραστικά. Σύμφωνα με τη θεωρία APOS ο φοιτητής βρίσκεται στη φάση που αναστοχάζεται πάνω στις δράσεις περνώντας στο στάδιο των διεργασιών (Czarnocha et al., 1999; Dubinsky, 1991). Θα μπορούσαμε μάλιστα να πούμε ότι προσπαθεί να μπει στην τρίτη φάση, τη φάση της ενθυλάκωσης των διεργασιών σε αντικείμενο καθώς αρχίζει να κάνει συσχετισμούς ανάμεσα στις επί μέρους διεργασίες και τους μεταξύ τους μετασχηματισμούς. Αυτό δεν έχει όμως επιτελεστεί ακόμα σε ικανοποιητικό βαθμό. Στο ερώτημα 7β ο φοιτητής χρησιμοποιώντας τα τυπικά μαθηματικά απαντά ότι η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά όταν καλείται να απαντήσει αν στο σημείο x=0 θα υπάρχει ανοικτό ή κλειστό κυκλάκι, διστάζει και προβληματίζει. Για άλλη μια φορά κάνει την εμφάνισή του το εννοιολογικό πρόβλημα αν το όριο 'πιάνει' την τιμή του ή όχι δημιουργώντας μια σύγχυση ανάμεσα στα τυπικά μαθηματικά και σε μια αναπαράσταση αυτών. Σύμφωνα με τη γλώσσα του Tall, ο φοιτητής έχει αρχίσει να κινείται μέσα στον Συμβολικό κόσμο, τον κόσμο των

διεργασιών – εννοιών (Tall, 2007b; Tall, 2004a; Tall, 2004d; Gray & Tall, 2001i). Οι διαισθητικές του αντιλήψεις όμως συνεχίζουν να είναι ισχυρές και έτσι δεν έχει αποβάλλει ακόμα τα χαρακτηριστικά του ενσώματου κόσμου όπως φαίνεται από τα σχόλιά του στην ερώτηση 7γ.

Όταν η συζήτηση στρέφεται στο ερώτημα 8, τότε στα πρώτα γραφήματα ο φοιτητής δίνει με άνεση τις σωστές απαντήσεις, γνωρίζει για τη συνέχεια στα μεμονωμένα σημεία και δεν κάνει το συνηθισμένο λάθος να ταυτίσει τη διακοπή ενός γραφήματος με την ασυνέχεια, αλλά ταυτόχρονα φαίνεται ότι δεν έχει ακόμα ενθυλακώσει τις επί μέρους διεργασίες σε ένα κατάλληλο νοητικό αντικείμενο ώστε να μπορεί στη συνέχεια μέσω της από-ενθυλάκωσης να ερμηνεύσει τις δράσεις και να οδηγηθεί σε νέες. Στο σχήμα 8ε αρχικά μπερδεύεται και θεωρεί ότι δεν μπορεί από το σχήμα να υπολογίσει τα όρια αλλά στη συνέχεια το αντιμετωπίζει αν και στο τέλος κάνει πάλι ένα λάθος. Όταν στη συνέντευξη η κουβέντα έφτασε στο 8θ έγινε ο εξής πολύ ενδιαφέρων διάλογος:



Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα λες (διαβάζω την απάντηση του). Λες συνεχής στο $(-\infty,2)$ *και μετά λες ότι είναι συνεχής στο* $(-\infty,5]$. *Άρα το ένα διάστημα δεν περιλαμβάνει το άλλο; Το διάστημα* $(-\infty,5]$ *δεν έχει μέσα του και το διάστημα* $(-\infty,2)$*;*
Α - …ναι…
Ερ – …άρα δεν θα είναι συνεχής και στο 2; Απλά ρωτάω γιατί μου φαίνεται ότι το ένα αντιφάσκει με το άλλο. Ή κάνω λάθος;
Α - …για το 2 ας πούμε…όταν το x πάει στο 2 από μικρότερες τιμές, τότε παίρνει αυτόν τον τύπο … οπότε το ξέρουμε, πάει στο συν άπειρο, ενώ όταν πάει από μεγαλύτερες τιμές τότε πάει στο πλην άπειρο, οπότε στο 2 θα έχει πρόβλημα…
Ερ - …συνέχειας;…
Α - …ναι. Μπορώ να το διατυπώσω και αλλιώς ας πούμε. Ωραία….συνεχής…στο σχήμα δεν φαίνεται να έχει πρόβλημα όμως…
Ερ - …γιατί;…

Α - …στο $(-\infty,2)$ *συνεχής η γραμμή, δεν έχει πρόβλημα, και εδώ πέρα (δείχνει με το χέρι του)…μμμ…όχι* $(-\infty,5]$*…*
Ερ – Α! όταν λες $(-\infty,5]$ *εννοείς τη δεύτερη γραμμή από κάτω στο μείον άπειρο μέχρι επάνω το 5;*
Α – Ναι!
Ερ – Α! Μάλιστα κατάλαβα.
Α - …Αυτή (δείχνει τον πρώτο κλάδο) πλησιάζει το 2. Και έρχεται από το μείον άπειρο; Δεν ξέρω. Ναι, όντως φαίνεται περίεργο εδώ, αλλά πως αλλιώς να το γράψω;
Ερ - Δεν σημαίνει ότι πρέπει να αλλάξεις κάτι κατά ανάγκη. Απλά ρωτάω. Απλά ρωτάω πώς το σκέφτηκες.
Α - Το σκέφτηκα κατά διαστήματα πάλι, αλλά ... όντως είναι περίεργο αυτό… Θα μπορούσαμε αυτά τα δύο να τα γράψουμε σαν ένωση διαστημάτων. Δηλαδή γίνεται και αυτό. Να πούμε δηλαδή $(-\infty,2)$*… μμμ… να το γράφαμε* $(-\infty,2)\cup(2,5]$*; …Πιο λογικό φαίνεται πάντως από αυτό.*
Ερ - Θες να το αλλάξεις ή όχι;
Α – Ναι, θέλω να το αλλάξω. (γράφει στο χαρτί).

[Απόσπασμα 26]

Εδώ παρατηρούμε μια παρανόηση που δημιουργήθηκε στο νου του φοιτητή και εν μέρει έχει να κάνει με την έννοια της συνάρτησης (Evangelidou et al., 2004; Eisenberg, 1991; Σπύρου & Γαγάτσης, n.d.). Ο φοιτητής αντί να 'βλέπει' τη συνάρτηση κινούμενος πάνω στον άξονα x΄x, ακολουθεί το γράφημά της κινούμενος ουσιαστικά νοερά πάνω στον άξονα y΄y.

Στο τελευταίο μέρος της συνέντευξης ο φοιτητής καλείται να εξηγήσει με δικά του λόγια τον ορισμό της συνέχειας χωρίς να τα καταφέρνει όμως. Δεν μπορεί να κινηθεί ακόμα με άνεση στον τυπικό – αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών. Δεν έχει περάσει ακόμα στην υποστασιοποίηση, στην σύλληψη του αντικειμένου της συνέχειας ως μια ολότητα, ως ένα νοητικό αντικείμενο που εμπεριέχει όλα του τα χαρακτηριστικά. Προσπαθεί να οδηγηθεί στη κατασκευή ενός κατάλληλου νοητικού σχήματος αλλά ακόμα δεν έχουν μορφοποιηθεί τα επί μέρους χαρακτηριστικά.

'Γιάννης' (7η Συνέντευξη)

Ο 'Γιάννης' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο την εποχή που πάρθηκε η συνέντευξη. Από την αρχή έδειχνε να είναι ένας φοιτητής που ένοιωθε άνετα με τον κόσμο των τυπικών – αξιωματικών μαθηματικών. Στο πρώτο ερώτημα που του ζητήθηκε να σχολιάσει την έννοια της συνέχειας σε σχέση με την προγενέστερη γνώση του Λυκείου, ανέφερε:

Γ - Πρώτα απ όλα, ξεφύγαμε τελείως από το θέμα της οπτικοποίησης μιας συνάρτησης για να ελέγξουμε τη συνέχεια, δηλαδή πήγαμε σε καθαρά μαθηματικούς όρους και όχι πλέον… και είδαμε ότι μπορεί να έχουμε μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής, αυτό που λέμε δηλαδή δε σηκώνουμε το μολύβι, και παρόλα αυτά να είναι συνεχής….
Ερ - …πιο παράδειγμα έχεις; Πιο απλό παράδειγμα δηλαδή θα σου ερχόταν στο μυαλό; …
Γ - …μια συνάρτηση που ορίζεται στο Ν.
Ερ - …Κάνε μου ένα τυχαίο γράφημα τέτοιο.
Γ – … (σχεδιάζει ένα γράφημα που αποτελείται μόνο από κουκίδες)…. Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση.

[Απόσπασμα 27]

Είναι χαρακτηριστικό ότι όταν του ζητείται αμέσως να πει τι του έρχεται στο μυαλό στο άκουσμα της φράσης «συνεχής συνάρτηση» αναφέρει: «η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει 'άλματα', δηλαδή είναι μια συνεχής γραμμή» και ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:

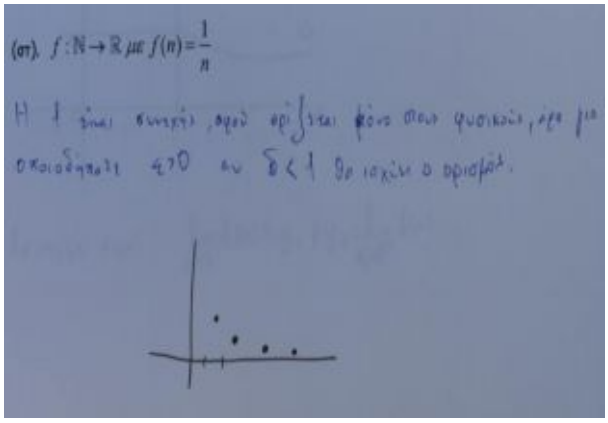
Ερ – Τώρα σε αυτήν. Αυτό είναι το πρώτο πράγμα που σου έρχεται στο μυαλό όταν ακούς συνεχής συνάρτηση, έτσι;
Γ - Ναι, έχει μείνει από το Λύκειο.
Ερ - Τι πιστεύεις, είναι αυτό απόλυτα σωστό ή όχι; …
Γ - …όχι, όχι
Ερ - …μάλιστα. Αλλά αυτό είναι που σου έρχεται στο μυαλό όταν ακούς τη φράση συνεχής συνάρτηση έτσι;
Γ – ναι.

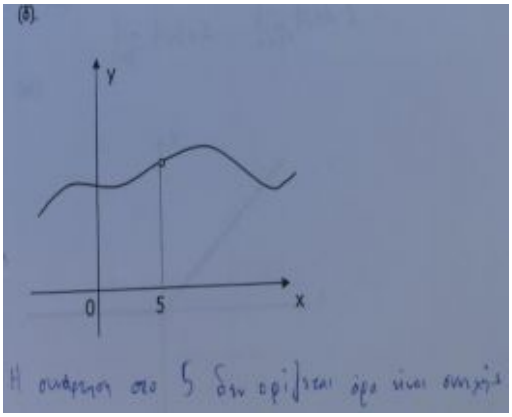
Και λίγο αργότερα …

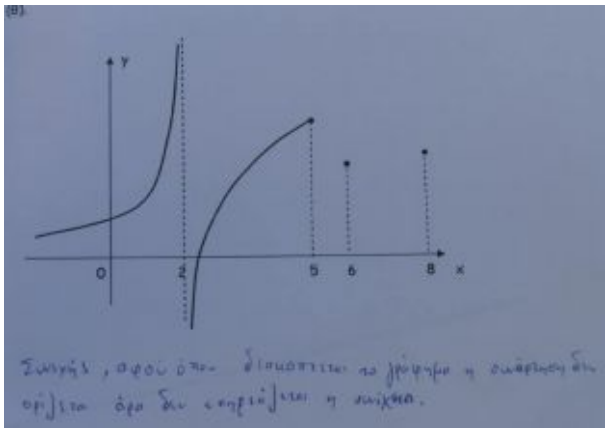
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στο (γ) λες ότι μπορεί να διακόπτεται σε σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού. Πώς το φαντάζεσαι αυτό;
Γ - Μπορεί το γράφημα, ε… η συνάρτηση να μην ορίζεται στο R ή σε ένα διάστημα, αλλά να ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, οπότε δεν έχει λόγο να εξετάσουμε τη συνέχεια ενδιάμεσα στα διαστήματα. Διακόπτεται προφανώς το γράφημα αφού εκεί που δεν ορίζεται δεν έχουμε κάτι να σχεδιάσουμε αλλά παρόλα αυτά είναι συνεχής η συνάρτηση.

[Απόσπασμα 28]

Σε όλες τι υπόλοιπες συναρτήσεις του ερωτήματος 7 ο φοιτητής δίνει σωστές απαντήσεις και τις δικαιολογεί με κατάλληλα επιχειρήματα επικαλούμενος συχνά τη γλώσσα των τυπικών μαθηματικών. Παραθέτουμε μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις του:

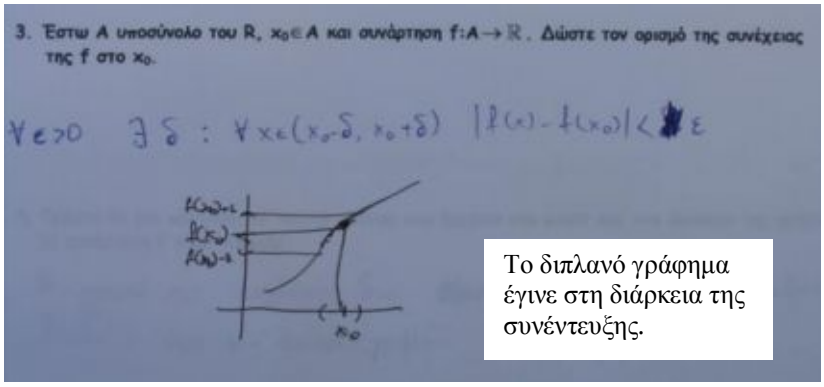






[Απόσπασμα 29]

Οι απαντήσεις του φοιτητή δείχνουν ότι αν και γνωρίζει ότι η συνεκτικότητα ενός γραφήματος συχνά συγχέεται με το ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής, δεν αφήνει αυτή του την αυθόρμητη αντίληψη να τον επηρεάσει στις απαντήσεις που δίνει. Σε όλα τα υπόλοιπα γραφήματα δίνει πάντα σύντομες και σωστές απαντήσεις. Στο τέλος της συνέντευξης ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:



Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ - Να γυρίσω τώρα στον ορισμό. Πως θα εξηγούσε στον ορισμό; Ας υποθέσουμε ότι έχεις έναν καλό μαθητή της Γ΄ Λυκείου και βλέπει τον ορισμό στο σχολικό βιβλίο. Σε ρωτάει λοιπόν να του τον εξηγήσεις σε απλά ελληνικά! Τι θα του έλεγες; Κατά αρχήν, μήπως θα άλλαζες κάτι στον ορισμό σου;

Γ – Όχι, νομίζω ότι είναι σωστός.
Ερ – Ωραία, Τώρα αν έπρεπε να τον εξηγήσεις πώς θα τον εξηγούσες; Με ένα απλό γράφημα.
Γ - …(σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω)…ξεκινάω με ένα ε τυχαίο και έχω μια περιοχή εδώ γύρω από το $f(x_0)$ *πλάτους* 2ε *και άρα αν πάρω οποιοδήποτε x μέσα σε μια περιοχή του* x_0 *που έχει πλάτος 2δ τότε αυτό το x θα πέφτει μέσα στην αρχική περιοχή του* $f(x_0)$.
Ερ - Από ποια περιοχή θα ξεκινήσεις; Από την πάνω ή την κάτω;
Γ - Από την πάνω. Γιατί το δ εξαρτάται από το ε.
Ερ - Ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ.

[Απόσπασμα 30]

Έχουμε να κάνουμε με μια περίπτωση φοιτητή που με βάση τη θεωρία της Sfard (1991) βρίσκεται στο στάδιο της υποστασιοποίησης καθώς φαίνεται να έχει συλλάβει την έννοια της συνέχειας ως ένα νοητικό αντικείμενο που εμπεριέχει όλα του τα χαρακτηριστικά που έχουν αναπτυχθεί και αποκτήσει διασυνδέσεις μεταξύ τους στο στάδιο της συμπύκνωσης. Σκέφτεται σφαιρικά πάνω στην έννοια και χρησιμοποιεί διαδραστικά τα χαρακτηριστικά της προκειμένου να αναπαράγει νέες δράσεις. Σύμφωνα με τη θεωρία APOS, ο φοιτητής φαίνεται να έχει περάσει ήδη στο στάδιο του αντικειμένου καθώς δείχνει να διακρίνει τους μετασχηματισμούς που είναι εφικτοί και να στοχάζεται πάνω σε αυτούς ως ένα αυτόνομο αντικείμενο, ως μια ολότητα. Ο φοιτητής έχει ενθυλακώσει όλες αυτές τις διεργασίες ως ένα αντικείμενο και μάλιστα φαίνεται να μπορεί να προχωρά σε από-ενθυλάκωση αυτού προκειμένου να οδηγηθεί σε νέες δράσεις (Dubinsky & MacDonald, 2001; Czarnocha et al., 1999; Dubinsky, 1991). Η ωριμότητά του επίσης δείχνει ότι προσπαθεί να κατακτήσει τη τελευταία φάση, τη φάση του σχήματος καθώς φαίνεται να μπορεί να αντιμετωπίσει τη γνώση ως μια ολότητα χρησιμοποιώντας κατά το δοκούν τα επί μέρους χαρακτηριστικά της. Στα πλαίσια της θεωρίας του Tall (2004a), ο φοιτητής έχει ήδη περάσει από τον συμβολικό κόσμο και προσεγγίζει με αρκετή επιτυχία τον τυπικό – αξιωματικό κόσμο. Η σκέψη του συνδυάζει με επιτυχία τα ενσαρκωμένα αντικείμενα και τη διαχείριση συμβόλων. Έχει επίσης την ευχέρεια να κάνει την αντίστροφη διαδικασία, να χρησιμοποιεί τα τυπικά μαθηματικά προκειμένου να οδηγηθεί σε νέα ενσώματα αντικείμενα ανώτερου επιπέδου.

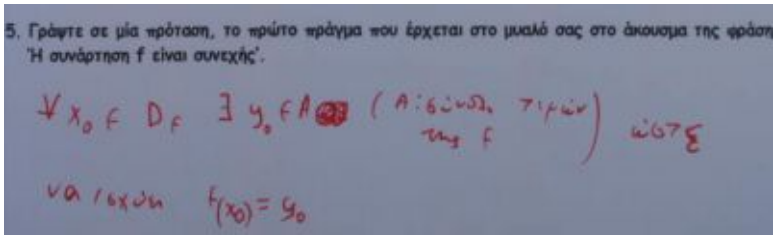
'Περικλής' (8η Συνέντευξη)

Ο 'Περικλής' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο όταν πάρθηκε η συνέντευξη. Στην αρχή της συζήτησης δείχνει να νοιώθει σχετική άνεση με τη γλώσσα των τυπικών μαθηματικών. Όταν του ζητήθηκε να συγκρίνει τους δύο ορισμούς της συνέχειας που είχε μάθει, είπε τα εξής:

Π - Πιστεύω ότι ο ορισμός του Απειροστικού είναι πιο ισχυρός, πιο αφηρημένος…
Ερ - …γιατί;…
Π - Μπορεί να λειτουργήσει και σε δύσκολες περιπτώσεις για παράδειγμα όταν μια συνάρτηση έχει παράξενο τύπο που ορίζεται σε κάποια σημεία, σε κάποιο σημείο δεν μπορούμε να δουλέψουμε με τα όρια, αλλά δουλεύουμε με τον ε - δ ορισμό, συναρτήσεις μεγάλες, παράξενες, που έχουν δυσκολία…
Ερ – μάλιστα, υπάρχει κάποια ειδική κατηγορία συναρτήσεων που σου έκανε εντύπωση ότι δεν τις εξέταζες στο Λύκειο αλλά τώρα στο Πανεπιστήμιο ασχολήθηκες με τη συνέχειά τους;
Π - Είναι, θυμάμαι για παράδειγμα συναρτήσεις που έμπλεκαν πολυωνυμικές με τριγωνομετρικές όπως για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$
Ερ – …ποια είπες, ποια;…
Π – …η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$
Ερ – μμμ!
Π - Αυτή ας πούμε είναι συνεχής αλλά όχι παντού, στο 0 ας πούμε που δεν ορίζεται, νομίζω.
Ερ – Μάλιστα. Οπότε τέτοιου είδους συναρτήσεις δεν μπορούσες να τις αντιμετωπίσεις ...
Π - … Τέτοιου είδους συναντήσεις δεν τις είχαμε κάνει γιατί τη θεωρούσαμε… θεωρείται πολύ τραβηγμένη…

[Απόσπασμα 31]

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι είναι ένας από τους ελάχιστους φοιτητές που ανέσυρε από τη μνήμη του μια συνάρτηση που μοιάζει – έστω και λανθασμένα – με το κλασσικό παράδειγμα που χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι μα συνάρτηση μπορεί να έχει συνεκτικό γράφημα κι όμως να είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της (Merenluoto & Lehtinen, 2000). Φαίνεται να βρίσκεται σε μια προσπάθεια εσωτερίκευσης των δράσεων που έχει μάθει από του Λύκειο η οποία όμως δεν μπορεί να θεωρηθεί ακόμα επιτυχημένη (Czarnocha et al., 1999; Tall, 1999c; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991). Φαίνεται να κινείται σε έναν ατελή προς το παρόν συμβολικό κόσμο (Tall, 2004a). Για παράδειγμα λίγο αργότερα ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:



Ερ - Μάλιστα. Αυτή την ερώτηση τώρα είναι που ήθελα να τη δούμε. Ήθελα να μου εξηγήσεις λίγο αυτό που έχεις γράψει εδώ.
Π - …Ναι, και καλά το έχω δώσει ως ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο. Ότι για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, ένα σημείο x_0, μπορώ να βρω ένα σημείο y_0 του συνόλου τιμών, ώστε όλα αυτά τα σημεία του πεδίου ορισμού, το $f(x_0)$ δηλαδή να συμπίπτει με το y_0, να ισούται με τα σημεία του πεδίου τιμών της.
Ερ - Είναι αυτός ο ορισμός της Γ΄ Λυκείου;
Π - Όχι, εκεί δίνει άλλο ορισμό, απλά αυτός περιγράφει…αυτός δεν μου λέει αν υπάρχουν όλα τα $f(x_0)$ όλα τα y_0, ή αν υπάρχουν δε μου λέει ότι συμπίπτουν όλα κιόλας, ο σωστός ποιος είναι, ότι … μισό λεπτό, λοιπόν, αυτό τον ορισμό τον έδωσα επειδή μου λέει ότι η f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής παντού όπου ορίζεται. Στο Λύκειο είχαμε ορίσει μια συνάρτηση συνεχής με το όριο που είχαμε πει, η συνεχής συναρτήσεις σε ένα σημείο x_0 είναι συνεχής στο σημείο αυτό, αν το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ισούται με το $f(x_0)$.
Ερ - …Α! μάλιστα…
Π - …εδώ όμως το έδωσα έτσι γιατί δεν μπορούσα να πάρω το όριο σε όλο το πεδίο στο οποίο ορίζεται, έπρεπε να βρω καθένα σημείο του πεδίου ορισμού.
Ερ - Μάλιστα. Ακούγοντας τώρα τη φράση 'η συνάρτηση είναι συνεχής' τι σου έρχεται στο μυαλό;
Π - Μπορώ να πω, βλέπω μια καμπύλη, μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση δεν έχει κενά, χάσματα, ούτε άλματα ούτε κοψίματα. Που ορίζεται σε όλο το διάστημα στο οποίο μπορούμε να τη ορίζουμε. Δεν έχει κενά.
Ερ - …Έχει γράφημα εννοείς …
Π - …συνεχόμενο, ναι.

… …

Ερ - Ωραία. Να ρωτήσω τώρα γι' αυτά τα δύο. Τα έχεις βάλει και τα δύο σωστά. Άρα θεωρείς ότι ισχύει η πρόταση με διπλή συνεπαγωγή; Δηλαδή το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι συνεχής;
Π - …Πάντα για ένα κλειστό ή ανοιχτό διάστημα στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση.
Ερ - Σαν φράση λέω εγώ. Το ακούς σαν μια ολοκληρωμένη φράση. 'Το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι συνεχής'. Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχεις κάνει κάποιο λάθος. Απλά ρωτάω.
Π - …απλά προσπαθώ να σκεφτώ αντιπαράδειγμα στο οποίο έχουμε μια συνεχή καμπύλη αλλά η συνάρτηση να μην είναι συνεχής όπου φαίνεται, όπου δηλαδή η καμπύλη είναι συνεχής. Νομίζω όμως… γιατί το έβαλα σωστά… γιατί βασικά, νομίζω, αυτές οι προτάσεις απευθύνονται στην εποπτεία μας. Βλέπουμε ότι μια καμπύλη που δεν έχει χάσματα, τρύπες ή κενά ή άλματα, είναι γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης. Και μια συνεχής συνάρτηση αποκλειστικά αναπαρίσταται από συνεχή καμπύλη.
Ερ - Μπορείς να σκεφτείς συνεχή συνάρτηση που να μην έχει συνεκτικό γράφημα, συνεχή καμπύλη όπως τη λες;
Π – Όχι.

[Απόσπασμα 32]

Εδώ φαίνεται ο φοιτητής να κάνει ξανά ένα λάθος που το έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα αρκετές φορές καθώς αναφέρει ότι η ύπαρξη τιμής y για κάποιο x, εξασφαλίζει τη συνέχεια στο x (Pinto & Gray, 1995). Αν και γνωρίζει ότι αυτός δεν είναι ο ορισμός της συνέχειας, θεωρεί ότι στην ουσία αυτό περιγράφει. Αν και γνωρίζει να κάνει δράσεις πάνω σε κάποια αντικείμενα και αξιολογεί τους διάφορους μετασχηματισμούς, δεν δημιουργεί πάντα τους σωστούς μετασχηματισμούς και δεν μπορεί να τους συνδέσει κατάλληλα. Έτσι ο φοιτητής δεν μπορεί ακόμα να εισέλθει στη φάση της συμπύκνωσης σύμφωνα με τη θεωρία της Sfard (1991). Στα πλαίσια της θεωρίας APOS, αν και ο φοιτητής φαίνεται να μπορεί να κάνει τις κατάλληλες δράσεις χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες που έχει μάθει, αυτές δεν έχουν εσωτερικευθεί στις κατάλληλες διεργασίες ώστε να μπορεί να περάσει στο δεύτερο στάδιο, το στάδιο της εσωτερίκευσης των δράσεων σε διεργασίες (Czarnocha et al., Dubinsky, 1991). Ο φοιτητής κινείται στο συμβολικό κόσμο του Tall χωρίς όμως να μπορεί ακόμα μεταβαίνει με άνεση και επιτυχία ανάμεσα στις διεργασίες και τα αντικείμενα (Tall, 2007d; Tall, 2007b; Tall, 2006e; Tall, 2004a; Tall, 2003a).

Δεν έχει επίσης ακριβή κατανόηση για τη σχέση μεταξύ συνέχειας και συνεκτικότητας γραφήματος καθώς φαίνεται να επηρεάζεται από τη ‘γνώση’ του Λυκείου και να μην έχει κάνει τις κατάλληλες εννοιολογικές αλλαγές προκειμένου να αφομοιώσει και επεξεργαστεί τη νέα γνώση (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Γνωρίζει ότι η συνέχεια εξετάζεται μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού και σε αρκετά γραφήματα δίνει σωστές απαντήσεις, αλλά δεν μπορεί να δημιουργήσει πάντα τις κατάλληλες νοητικές αναπαραστάσεις και να κάνει τις απαραίτητες διασυνδέσεις μεταξύ τους φανερώνοντας μια αδυναμία εσωτερίκευσης του νοήματος που κρύβεται στους ορισμούς (Merenluoto & Lehtinen, 2000; Tall, 1996i; Tall, 1991a; Pinto & Gray, 1995).

'Κώστας (10η Συνέντευξη)

Ο 'Κώστας ήταν πρωτοετής στο μαθηματικό τμήμα όταν έγινε η συνέντευξη. Στα σχόλιά του για τις ερωτήσεις 4 και 5 ανέφερε:

Ερ – Πιστεύεις ότι έχει σχέση ο ορισμός της συνέχειας στο Λύκειο με αυτόν που έμαθες στο Πανεπιστήμιο; Τι σου φαίνεται;
Κ - Μου φαίνονται πολύ διαφορετικοί. Απλά, σύγκρινα ας πούμε τον έναν με τον άλλο και ουσιαστικά είναι μόνο αυτά που είναι ίδια, το $x \to x_0$*, το* $f(x) \to f(x_0)$ *και το* $\Rightarrow$*, αυτά μόνο είναι ίδια. Αλλά, μου φαίνονται πολύ διαφορετικοί. Το πώς καταλήγει ένας τον άλλον δεν, δεν το έχω καταλάβει. …*
… ναι, οι καθηγητές μας, π.χ. έμπαινε ας πούμε στη συνέχεια, έκανε μία γραφική παράσταση στον τοίχο και έλεγε ας πούμε αυτή είναι συνεχής, μια γραμμή χωρίς κενό. Αυτή ήταν και η πρώτη εντύπωση της συνέχειας.

[Απόσπασμα 33]

Απαντάει σωστά στα ερωτήματα 6α και 6γ και μάλιστα δίνει και κατάλληλο αντιπαράδειγμα. Στο ερώτημα 7α απαντάει σωστά αλλά ταυτόχρονα σχολιάζει:

Ερ - Σε ενοχλεί που έχει δύο κομμάτια αντί για ένα;
Κ – Όχι, δεν με ενοχλεί, εντάξει.
Ερ - Γιατί;
Κ - Μου φαίνεται λίγο περίεργο βασικά αλλά ξέρω εγώ, τόσα χρόνια την έχουμε κάνει αυτή τη γραφική παράσταση και την έχω συνηθίσει. Στην αρχή μου φάνηκε λίγο περίεργη.
Ερ - Δηλαδή, το ότι διακόπτεται σε χαλάει;
Κ - Λίγο ναι. Οι περισσότερες συναρτήσεις έχουμε συνηθίσει να είναι ένα κομμάτι που να μη διακόπτεται, δεν έχουν δύο κλάδους.
Ερ - Δηλαδή θα ήθελες να αλλάξεις εδώ την απάντηση;
Κ - Όχι. Ξέρω ότι είναι συνεχής.
Ερ - Τι πιστεύεις, πως μπορείς να εξηγήσεις ότι αν και είναι ένα γράφημα που διακόπτεται παρόλα αυτά είναι συνεχής;
Κ - Θυμάμαι τώρα μια φράση ενός καθηγητή που λέει, ξέρω εγώ, αν παίρναμε, ξέρω εγώ, ένα σημείο από εδώ, δεν είναι συνεχής σ' όλο το R, κάπως έτσι ας πούμε, αλλά γι' αυτήν εδώ, σύμφωνα με την απάντηση που έδωσε στο 5 που διακόπτεται, πιστεύω ότι είναι λάθος, αφού διακόπτεται, αλλά αφού είναι διαφορετικά, ξέρω εγώ, με την ίδια λογική εξετάζουμε την κάθε γραμμή ξεχωριστά. Δεν διακόπτεται καμία και αφού στο 0 δεν ορίζεται, έχουν διαφορετική τιμή, οπότε αν το κοιτάξω έτσι …

[Απόσπασμα 34]

Στο ερώτημα 7ε απαντά από μνήμης χωρίς να μπορεί να δικαιολογήσει την απάντησή του και σχολιάζοντας αναφέρεται στους ρητούς και τους άρρητους λέγοντας:

Ερ - Αν προσπαθούσες να κάνεις γραφική παράσταση, πώς πιστεύεις ότι περίπου θα ήταν;
Κ - Νομίζω από την πληρότητα, μου φαίνεται, έτσι όπως είναι εδώ, θα ήταν πολλές τελίτσες μαζί που θα φαίνονται σαν γραμμή αλλά είναι …ένας ρητός εδώ άλλος ένας ρητός λίγο πιο εδώ, κάπως έτσι, πολλές τελίτσες που θα φαίνονται σαν γραμμές και τώρα δεν μπορείς να πεις ότι ανάμεσα από ένα ρητό και έναν άλλο ρητό υπάρχει ένας άρρητος, υπάρχει κι άλλος ρητός ανάμεσα, δεν μπορείς να πεις ανάμεσα στις δύο τελίτσες πάει άλλη τελίτσα, απλά είναι, ξέρω εγώ, πως κάποια κενά υπάρχουν, τα κενά των ρητών ας πούμε είναι οι άρρητοι, οπότε … δεν μπορείς να πεις ότι είναι συνεχής, δεν είναι μία γραμμή, απλά φαίνεται σαν μία γραμμή επειδή είναι άπειροι, άπειροι οι ρητοί και άπειροι οι άρρητοι. Κάπως έτσι το σκέφτηκα.

[Απόσπασμα 35]

Και εδώ βλέπουμε να αναφύεται μια συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών – φοιτητών ότι οι ρητοί και οι άρρητοι εναλλάσσονται μεταξύ τους (Pinto & Tall, 1996i; Pinto & Gray, 1995). Είναι ενδιαφέρουσα επίσης η στιχομυθία που έγινε για τη ερώτηση 8η την οποία ο φοιτητής έχει χαρακτηρίσει ως ‘συνεχή’:

Ερ – Για την (η) τώρα;
Κ – Συνεχής
Ερ – Συνεχής;
Κ – …(διστακτικά)…μάλλον.
Ερ - Αλλάζεις γνώμη καθώς το κοιτάς; Συμφωνείς η διαφωνείς;
Κ - Εντάξει, εδώ δεν με πειράζει τόσο πολύ γιατί είναι ένωση διαστημάτων, σε σχέση με το προηγούμενο και … αλλά …
Ερ - Άρα αν θα μου έλεγες ότι είναι συνεχής, που θα μου έλεγες ότι είναι συνεχής;
Κ - Ίσως να άλλαζα γνώμη λόγω αυτού (δείχνει το 1 και το 2). Το όριο στο 1^+ είναι ίσο με το όριο στο 2^- αλλά εδώ στο 4 και στο 4,5 δεν είναι ίσα και έτσι ίσως να άλλαζα γνώμη αλλά …
Ερ - …δηλαδή θα ήθελες να είναι ίσα αυτά τα όρια;
Κ - Ναι. Τότε θα έλεγα λίγο πιο εύκολα ότι είναι συνεχής αυτή. Αλλά δεν ξέρω, μπορούμε να πούμε ότι είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων; Δεν ξέρω, τώρα που το σκέφτομαι, μάλλον ασυνεχής θα την έβαζα. Γιατί, πού να την πούμε συνεχής, σε ένωση διαστημάτων; … Δεν ξέρω, δεν είμαι σίγουρος γι αυτήν.
Ερ - Άρα τελικά τι θα έλεγες σαν τελική απάντηση;
Κ - Λοιπόν θα μείνω τελικά σε αυτήν συνεχής.
Ερ - Συνεχής;
Κ – Ναι, συνεχής. Απλά δεν ξέρω αν μπορώ να πω σε ένωση διαστημάτων. Ότι είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων. Εκεί κολλάω.

[Απόσπασμα 36]

Στο προηγούμενο απόσπασμα βλέπουμε μια πολύ ενδιαφέρουσα παρανόηση που φανερώνει τα πολλά προβλήματα που κρύβει η έννοια του ορίου (Pinto & Tall, 1996i; Tall, 1993k; Tall, 1990d; Tall & Schwarzenberger, 1978). Ο φοιτητής αν και έχει στο νου του τον ορισμό της συνέχειας όπως τον έχει διδαχθεί στο Λύκειο, δεν έχει εσωτερικεύσει το νόημά του. Αντίθετα φαίνεται να έχει κατασκευάσει λανθασμένες νοητικές αναπαραστάσεις, εικόνες της έννοιας που δεν ανταποκρίνονται στον ορισμό της έννοιας. Σχολιάζοντας επίσης το επόμενο γράφημα, το 8θ, αναφέρει:

Ερ - Ωραία. Εδώ στη (θ) λες ασυνεχής. Τι σε χαλάει εδώ;
Κ - Τα σημεία που είναι μόνα τους.
Ερ - Τα μεμονωμένα δηλαδή;
Κ - Ναι, το 6 και το 8. Αυτό εδώ (δείχνει το 2) δεν με χαλάει τόσο γιατί μου θυμίζει την $\frac{1}{x}$…
Ερ – … α! Μάλιστα…
Κ - …Ότι πάει στο συν άπειρο και στο πλην άπειρο αλλά μάλλον, όχι, και αυτό με χαλάει.
Ερ – Και αυτό;
Κ – Ναι, και αυτό. Αν το πάρουμε ας πούμε με τα πλευρικά όρια το ένα πάει στο πλην άπειρο και το άλλο πάλι στο συν άπειρο, άρα διαφορετικά, οπότε πάλι ασυνεχής είναι.
Ερ - Άρα τι θα είναι αυτή;
Κ – Ασυνεχής, σε όλο βασικά.
Ερ - Άρα εμμένεις σε αυτό που είχε γράψει έτσι;
Κ - Ναι ασυνεχής.

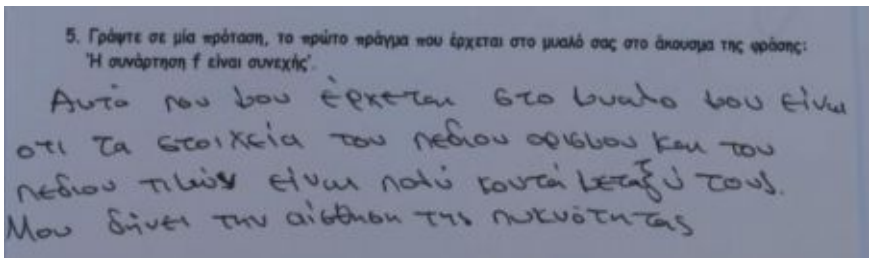
[Απόσπασμα 37]

Σε αυτήν, όπως και σε αρκετές άλλες απαντήσεις του φοιτητή, βλέπουμε ότι έχει συνδέσει τη συνέχεια με ένα συνεκτικό γράφημα κι επίσης θεωρεί ότι στα μεμονωμένα σημεία μια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συνεχής (Tall, 1991a, Tall & Vinner, 1981).

Και εδώ παρατηρούμε την αδυναμία εσωτερίκευσης του νοήματος που κρύβουν οι ορισμοί. Ο φοιτητής παραμένει σε ένα διαδικαστικό επίπεδο χωρίς να μπορεί μέσω του αναστοχασμού να στοχαστεί πάνω στις δράσεις και να περάσει στη φάση κατασκευής των κατάλληλων νοητικών αντικειμένων.

'Κώστας' (11η Συνέντευξη)

Ο 'Κώστας' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο όταν έγινε αυτή η συνέντευξη. Συζητώντας το ερώτημα 5 αναφέρει:


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Αυτό που μου έρχεται στο μυαλό μου είναι ότι τα στοιχεία του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Μου δίνει την αίσθηση της πυκνότητας

Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα.
Τι θα έλεγες για το 5;
Χ - …(το διαβάζει)…
Βασικά, αυτό που μου έρχεται σαν αίσθηση είναι … ότι υπάρχει πυκνότητα ας πούμε (χαμογελάει).
Ερ – Δηλαδή;
Χ - Ότι πάντα μπορείς να βρεις σημεία. Υπάρχουν … δεν ξέρω … αυτό που έρχεται σαν αίσθηση.
Ερ - Ωραία. Αυτό θέλω. Δεν με ενδιαφέρει να μου το μαθηματικοποιήσεις. Απλά θέλω να μου περιγράψεις λίγο πώς το αντιλαμβάνεσαι αυτό;
Χ - …εεε…
Ερ - Συνεχής συνάρτηση. Τι εικόνα σου φέρνει στο μυαλό σου;
Χ - Αυτό, αυτό δηλαδή, ότι είναι πολύ ισχυρό πράγμα η συνέχεια μιας συνάρτησης. Αυτό, αυτό που έρχεται σαν αίσθηση, ότι έχει μια πυκνότητα αυτό το πράγμα, η συνάρτηση.

[Απόσπασμα 38]

Εδώ παρατηρούμε μια κλασσική παρανόηση που έχει περιγραφεί και σε άλλες έρευνες, καθώς ο μαθητής μπερδεύει την έννοια της συνέχειας με την έννοια της πυκνότητας (Bagni, 1999; Tall & Vinner, 1981). Λίγο αργότερα σχολιάζοντας την 7γ την οποία έχει χαρακτηρίσει ως συνεχή, φτιάχνει τη γραφική της παράσταση και σχολιάζει:

Εδώ έχουμε πρόβλημα στο x=0 αλλά το 0 δεν είναι στο πεδίο ορισμού, αλλά αυτό δεν έχει καμία σχέση … εεε … μου φαίνεται ότι δεν είναι συνεχής στο μηδέν.
Ερ - Άρα πιστεύεις ότι πρέπει να αλλάξεις την απάντηση που έχεις γράψει ότι είναι συνεχής;
Χ – Ναι.
Ερ - Τι θα ήταν καλύτερο να έγραφες κατά τη γνώμη σου;
Χ - …τι θα ήταν καλύτερο … δεν ξέρω, δεν με βοηθάει η γραφική παράσταση.
Ερ - Ωραία. Κοιτώντας τον τύπο μόνο;
Χ - Ναι, ναι.
Ερ - Θα άλλαζες κάτι;
Χ – Ναι … (με δισταγμό)…δεν ξέρω, δεν θα το άλλαζα.
Ερ - Άρα το αφήνουμε όπως είναι;
Χ - Ναι.

Ερ - Εντάξει. Εδώ τώρα στην (δ). Λες ότι στο x=0 δεν είναι συνεχής. Ουσιαστικά είναι …
Χ - …ναι σαν την προηγούμενη…
Ερ - … βλέπεις ποια είναι η διαφορά;
Χ – Ναι, το x=0. Ότι τώρα υπάρχει το x=0, είναι μέσα στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Και τώρα απαντάς ότι στο x=0 δεν είναι συνεχής. Σε τι διαφοροποιείται η απάντησή του από την προηγούμενη;
Χ - … δεν ξέρω …δεν θυμάμαι γιατί το έβαλα.
Ερ - Τώρα που το ξαναβλέπεις;
Χ - …
Ερ - Γιατί να υπάρχει άλλο αποτέλεσμα, άλλη απάντηση εδώ και άλλη απάντηση εκεί; Τι πιστεύεις;
Χ - …(με δισταγμό)… δεν ξέρω, δεν ξέρω, μάλλον λάθος έχω κάνει.
Ερ - Πιστεύεις δηλαδή ότι θα έπρεπε να αλλάξεις κάποιο από τα δύο τώρα που τα βλέπεις σε συνδυασμό ;
Χ - Πιστεύω ότι ή και οι δύο θα είναι συνεχείς ή και οι δύο δεν θα είναι συνεχείς σε αυτό το σημείο. Δηλαδή δεν έχει σημασία αν ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Άρα, αν θα έπρεπε να αλλάξεις μία από τις δύο ποια θα άλλαζες;
Χ - …
Ερ - Αν νομίζεις ότι πρέπει να αλλάξεις κάποια.
Χ - Αυτήν εδώ (δείχνει την (γ)). Θα έλεγα ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία. Ας το γράψουμε. Άρα γράφουμε εδώ ότι 'στο x_0 δεν είναι συνεχής' (βλέπε φωτογραφία προηγούμενης σελίδας). Συμφωνείς;
Χ - Ναι.
Ερ - Την (δ) την αφήνουμε όπως είναι;
Χ - Ναι.

[Απόσπασμα 39]

Ο φοιτητής όταν λίγο νωρίτερα έχει κληθεί να χαρακτηρίσει το ερώτημα 6α, το έχει βάλει ως 'Σωστό' με αιτιολογία ότι δουλεύουμε σε μια περιοχή του x_o. Είναι προφανές ότι συγχέει την έννοια της συνέχειας με την αντίστοιχη του ορίου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αντιμετωπίζει πρόβλημα στην εννοιολογική αντιμετώπιση του ορισμού της συνέχειας και να δυσκολεύεται στο να κατασκευάσει τις κατάλληλες νοητικές αναπαραστάσεις που θα περιγράφουν την έννοια. Είναι χαρακτηριστικό ότι σχεδόν στο σύνολο των ερωτημάτων δεν μπορούσε να συνδέσει το γράφημα με την έννοια της συνέχειας. Οι αντιλήψεις που υπάρχουν στο νου του είναι ισχυρότερες από τη γνώση μέσω των τυπικών μαθηματικών και αυτό φαίνεται στις απαντήσεις του. Είναι χαρακτηριστικό ότι συνδέει τη συνέχεια με το μέγεθος του 'κενού' που παρουσιάζει το γράφημα μιας συνάρτησης.

Σχολιάζοντας στη συνέχεια τα γραφήματα 8δ, ε, στ, και ζ αναφέρει:

Ερ – Στη (δ) λες επίσης συνεχής. Στο 5 που έχει το κενό σε χαλάει;
Χ - Όχι, δεν με χαλάει.
Ερ - Γιατί;
Χ – (γελάει) ε! Τι να με χαλάει. Ένα σημείο είναι μόνο!
Ερ – Α!
Ερ - Ωραία. Εδώ [στην ε] *λες συνεχής.*
Χ - … (το κοιτάζει προσεκτικά)… συνεχής ε;
Ερ - Θα άλλαζες κάτι στην απάντησή σου;
Χ - Ναι. Τώρα θα έλεγα ότι δεν είναι συνεχής….
Ερ - Ότι δεν είναι;
Χ - Ναι, δεν είναι στο 1.
Ερ – Δεν είναι στο 1. Γιατί;
Χ - …γιατί…γιατί υπάρχει αυτό το κενό εδώ πέρα.
Ερ – Ωραία. Αυτή τώρα τη (στ) τη λες συνεχή.
Το κενό που υπάρχει…
Χ - … ναι με την ίδια λογική δεν με χαλάει το κενό που υπάρχει, ένα σημείο είναι μόνο.
Ερ - Ωραία. Δεν σου χαλάει το κενό. Αυτή τώρα τη (ζ) λες ότι είναι ασυνεχής στο 1,6 και στο 3.
Χ – Ναι.
Ερ – Γιατί;
Χ - … Δεν ξέρω ακριβώς τι με χάλασε… επειδή σταματάει εδώ πέρα … μάλλον … δεν ξέρω ακριβώς τι είναι αυτό που με χάλασε. Δηλαδή, δεν με βοηθάει σε τίποτα το γράφημα.
Ερ - Δηλαδή άμα βλέπεις μόνο το γράφημα τι αίσθηση σου δημιουργεί; Για παράδειγμα γιατί απαντάς ότι είναι ασυνεχής στο 1,6 αλλά δεν λες το ίδιο και για το -2; Ή για να το πω καλύτερα ας δούμε το επόμενο γράφημα το (η). Λες ότι είναι ασυνεχής στο 2, στο 6 και στο 4,5. Ας πούμε, γιατί δεν λες ότι είναι ασυνεχής και στα τέσσερα; Ή και στο 1 ή στο -1; Τι διαφορά σου κάνει το 4 από το 4,5;
Χ - …(την ξανακοιτάει)… βασικά …εεε…επειδή εδώ πέρα δεν υπάρχει στο πεδίο ορισμού, δεν ξέρω γιατί το σκέφτηκα έτσι, πρέπει να είναι συνεχής εκεί πέρα γιατί δεν υπάρχει αυτό…
Ερ - Άρα εδώ πέρα δεν σε νοιάζει τι είναι;
Χ - Ναι.
Ερ - Δηλαδή ας πούμε στο 4 είναι συνεχής;
Χ - Ναι.
Ερ - Στο 1, στο -1;
Χ - Ναι.
Ερ - Είναι συνεχής έτσι; Αν κατάλαβα καλά.
Χ – Ναι, αλλά μάλλον λάθος είναι αυτό που λέω.

[Απόσπασμα 40]

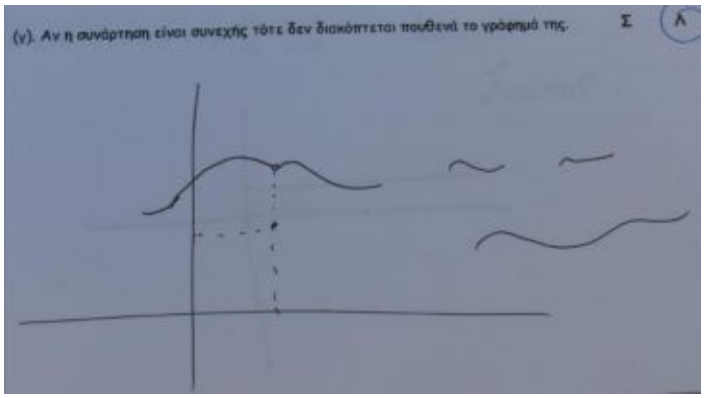
'Χαρά' (15η Συνέντευξη)

Η 'Χαρά' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο την εποχή που έγινε η συνέντευξη. Και εδώ από την αρχή συναντούμε την άποψη ότι η συνέχεια ταυτίζεται με τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

Ερ - Ωραία. Η εικόνα λοιπόν που έχεις στο μυαλό σου για τη συνέχεια είναι …
Χ - …η γραφική παράσταση μου έρχεται στο μυαλό .. και .. εεε.. αυτό δηλαδή ότι είναι συνεχής η γραφική παράσταση της συνάρτησης, ότι δεν διακόπτεται σε κάποια σημεία.

[Απόσπασμα 41]

Στο ερώτημα 6α η φοιτήτρια υποστηρίζει ότι για να εξετάσουμε τη συνέχεια σε ένα σημείο αυτό θα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού, αλλά αμέσως μετά λέει:



Ερ - Αυτό τώρα το (γ) το θεωρείς Λάθος. Γιατί;
Χ - …(το ξαναδιαβάζει) …
Ερ - Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα κατά νου;
Χ - Λοιπόν, για να σκεφτώ τώρα. Αντιπαράδειγμα ε;
Ερ - Όταν το έβαλες Λάθος τι σου ήρθε στο μυαλό;
Χ - Μου ήρθε στο μυαλό μία γραφική παράσταση … μισό λεπτό να τη ζωγραφίσω, τώρα δεν ξέρω αν είναι συνεχής, εγώ θα σας το δείξω όπως μου έρχεται στο μυαλό, έστω τέλος πάντων ότι είναι εδώ και ότι πάει κάπως έτσι, αν και έρχεται σε αντίθεση με αυτό που σκέφτηκα για τον ορισμό της συνέχειας, και ότι είναι κάπως έτσι.
Ερ – Α, η κουκκίδα έχει μεταφερθεί κάτω έτσι;
Χ – Δηλαδή ότι, ναι.
Ερ - Άρα αυτή είναι συνεχής λες, αλλά διακόπτεται έτσι; Για αυτό τη θεωρείς ως αντιπαράδειγμα έτσι;
Χ – Ναι.
Ερ - Είναι συνεχής η συνάρτηση αλλά όμως διακόπτεται έτσι;
Χ - Ναι. Έτσι όπως το έχω στο μυαλό μου ναι.

[Απόσπασμα 42]

Όταν όμως λίγο αργότερα στο ερώτημα 8α συναντάει ένα γράφημα που είναι ίδιο με αυτό που σχεδίασε πιο πριν, τότε λέει:

Ερ - Εντάξει. Ας δούμε τώρα τα επόμενα που είναι όλο γραφήματα. Τι λες για το πρώτο; Ασυνεχής, γιατί;
Χ - Επειδή διακόπτεται σε ένα σημείο, έτσι όπως τη σκέφτηκα εκείνη την ώρα, και επειδή η εικόνα της f(x) για x=5, ενώ θα έπρεπε να είναι εδώ (δείχνει την τρύπα) είναι εδώ (δείχνει την μαύρη κουκίδα), δεν είναι συνεχής.
Ερ - Μάλιστα. Η κάτω τώρα [το διάγραμμα 8β]*;*
Χ - Αυτή είναι συνεχής.
Ερ - Γιατί;
Χ - Γιατί; Γιατί είναι εδώ που πρέπει, δηλαδή για x=5 είναι κανονικά εδώ που έπρεπε να είναι και μετά ξεκινάει από κάτω για x=6 μια χαρά.

[Απόσπασμα 43]

Η σύγχυση στην οποία βρίσκεται η φοιτήτρια φαίνεται καθώς ολοκληρώνεται η συνέντευξη. Στο γράφημα 8ι αναφέρει:

Ερ – Εδώ τώρα στη (ι);
Χ - … είμαι ξαναμπερδεμένη. Από τη μια για κάθε θετικό ακέραιο υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή …
Ερ - Αυτό είναι καλό δηλαδή;
Χ – (γελάει) Καλό πρέπει να ναι! … ασυνεχής… μάλλον.
Ερ – Ε! Με προκαλείς! (γελάω) Γιατί εδώ (δείχνω την 7(στ)) μου είπες ότι είναι συνεχής;
Χ – Συνεχής έχω βάλει; Μωρέ μπερδεύομαι! Δεν ξέρω τώρα …τι να είναι…
Ερ - Γιατί η προηγούμενη να είναι συνεχής ενώ αυτή τώρα ασυνεχής;
Χ - Γιατί δεν έχω ξεκάθαρο τον ορισμό της συνέχειας και τα λέω μία έτσι και μία αλλιώς.
Ερ - Δεν με πειράζει αυτό, αυτό θέλω, την εικόνα που έχεις στο μυαλό σου. Δηλαδή αν γυρίζαμε τώρα στην 7(στ) θα την κάναμε ασυνεχή;
Χ - … χμμμ …
Ερ - Πρόσεξε. Δεν σημαίνει ότι κάπου έχεις κάνει λάθος. Απλά θέλω να καταλάβω γιατί σε σχήματα που και τα δύο έχουν κουκίδες και χοντρικά μοιάζουν, δίνεις διαφορετική απάντηση. Απλά ρωτάω.
Χ - Θα πω και αυτήν συνεχή.
Ερ - Δηλαδή αλλάζεις την απάντησή σου στην τελευταία και τη λες και αυτή συνεχή;
Χ - Ναι.

[Απόσπασμα 44]

Και εδώ έχουμε να κάνουμε με ένα άτομο που δρα σε λειτουργικό επίπεδο και όχι σε δομικό. Δεν μπορεί να προχωρήσει πέρα από συγκεκριμένες διεργασίες που και αυτές φαίνονται να γίνονται σε τυπικό μηχανιστικό επίπεδο χωρίς κατανόηση και εσωτερίκευση του νοήματος των διεργασιών.

'Εύη' (17η Συνέντευξη)

Η 'Εύη' ήταν πρωτοετής στο μαθηματικό τμήμα όταν έγινε η συνέντευξη. Με αρκετή ειλικρίνεια στην αρχή έδειξε πόσο άβολα αισθανόταν στο χώρο των τυπικών – αξιωματικών μαθηματικών αν και είχε μπει στο πανεπιστήμιο με πολύ καλό βαθμό στα μαθηματικά.

Ερ - Όπως βλέπω Εύη είσαι πρωτοετής. Πώς σου φάνηκε ο Απειροστικός;
Ε - Χάλια, πολύ χάλια. Πάρα πολύ θεωρία και μισώ τη θεωρία! Πακέτο!
Ερ - Κατάλαβα. Πόσο έγραψες στις πανελλήνιες στα μαθηματικά κατεύθυνσης;
Ε – 18.5

[Απόσπασμα 45]

Για άλλη μια φορά η συνέχεια ταυτίζεται με τη συνεκτικότητα του γραφήματος ενώ και πάλι όταν συναντά τους ρητούς και τους άρρητους συναντά πρόβλημα.

Ερ – Η επόμενη η (ε) σου λέει τίποτα;
Ε - … Να την κάνω σαν γραφική παράσταση; Δεν μπορώ να την κάνω αυτό είναι το μόνο σίγουρο.
Ερ - Γιατί;
Ε - Δεν ξέρω, πάντα είχα ένα πρόβλημα με τους ρητούς και τους άρρητους. Οι ρητοί δεν είναι όταν διαιρούνται ακριβώς;
Ερ - Όταν διαιρούνται ακριβώς; Θέλεις να μου δώσεις ένα παράδειγμα για να καταλάβω ακριβώς τι εννοείς;
Ε – δηλαδή … ξέρω εγώ … το 2 και άρρητοι είναι αυτοί που έχουν και δεκαδικά στοιχεία, δηλαδή 1, κάτι ας πούμε.
Ερ - Δηλαδή όταν λέει ρητό εννοείς 1, 2, 3 … κ.λ.π;
Ε - … 2.5, 3.5, άρρητοι, ναι.

[Απόσπασμα 46]

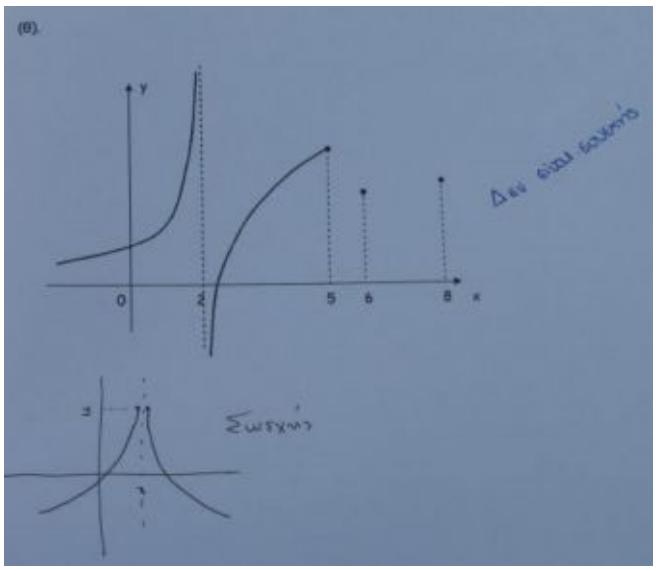
Επίσης και πάλι εμφανίζεται η πεποίθηση ότι η συνέχεια ταυτίζεται με την ύπαρξη τιμής y μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x. Για παράδειγμα στην ερώτηση 8 που γίνεται συζήτηση για τα γραφήματα ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:

Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα έχουμε μόνο γραφήματα. Αυτή η (α) λες 'Δεν είναι συνεχής'. Γιατί;
Ε – Λοιπόν, αυτά έπρεπε να τα είχα βάλει όλα συνεχή κανονικά. Εφόσον είναι συνεχής εδώ (δείχνει την κουκίδα στο x=5) άρα πρέπει να είναι συνεχής.
Ερ – Εννοείς εφόσον υπάρχει η τιμή για x=5;
Ε – Ναι.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα το σβήνουμε το 'Δεν';

Ε – Ναι.
Ερ – Ωραία. Η κάτω τώρα;
Ε – Το ίδιο, είναι συνεχής. Εφόσον υπάρχει η τιμή του 5 εδώ (δείχνει την κουκίδα στο y_1) και μετά εδώ δεν υπάρχει (δείχνει το ανοιχτό κυκλάκι στο y_2) και μετά συνεχίζει άρα είναι συνεχής.

[Απόσπασμα 47]

Εμφανίζεται και πάλι επίσης η άποψη να θεωρεί η φοιτήτρια ότι ένα μεγάλο κενό στο γράφημα υποδηλώνει ασυνέχεια, ενώ ένα μικρό κενό όχι. Είναι χαρακτηριστικό το επόμενο απόσπασμα:



Ερ – Κατάλαβα. Στη (θ) τώρα; Λες 'Δεν είναι συνεχής'. Γιατί;
Ε - Αυτά εδώ είναι μόνα τους (δείχνει τις δύο κουκκίδες) δεν συνδέονται πουθενά, Εδώ αυτά τα δύο (δείχνει τους δύο κλάδους) θα μπορούσαν να ήταν συνεχείς αλλά εδώ το 2 είναι εκτός πεδίου ορισμού, αλλά δεν μου ταιριάζει και σαν σχέδιο για να είναι... Αλλά νομίζω το βασικό είναι τα δύο σημεία τα μόνα τους.
Ερ - Αν δηλαδή τα διώξουμε αυτά τα δύο μεμονωμένα σημεία τότε το υπόλοιπο γράφημα;
Ε - Στο 2 διακόπτεται γιατί δεν είναι στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Σε νοιάζει ή δεν σε νοιάζει; Αυτό είναι καλό ή κακό;
Ε - Άμα είναι εκτός πεδίου ορισμού τότε δεν με νοιάζει. Αλλά κοντά στο 2 δεν θα έπρεπε τουλάχιστον να έχουν τις ίδιες τιμές, την ίδια τιμή για να είναι συνεχής στη γύρω περιοχή;
Ερ - Να έχουν την ίδια τιμή, να πιάνει εννοείς την ίδια τιμή, την τιμή 2; Τι ακριβώς εννοείς;
Ε – Ναι περίπου.
Ερ – Μήπως εννοείς… α … αν είχα αυτό (κάνω το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ε – Ναι, αυτό
Ερ - Τώρα δηλαδή θα ήταν συνεχής;
Ε - Ναι, ναι έτσι νομίζω.
Ερ - Άρα δηλαδή αυτή τη λέω συνεχή έτσι;
Ε - Ναι.

[Απόσπασμα 48]

'Μαρία', 'Λένα', 'Αφροδίτη' (21η – 23η Συνέντευξη)

Η 'Μαρία', η 'Λένα' και η 'Αφροδίτη' ήταν πρωτοετείς όταν έγινε η συνέντευξη. Δεν βρίσκονταν στο αμφιθέατρο όταν δόθηκε το ερωτηματολόγιο αλλά εθελοντικά προσήλθαν, συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο και στη συνέχεια πάρθηκε ομαδική συνέντευξη. Αυτό έδωσε την ευκαιρία για πολύ ενδιαφέρουσες συζητήσεις και ανταλλαγές απόψεων ανάμεσα στις φοιτήτριες. Από την αρχή έγινε σαφές ότι για άλλη μια φορά η συνέχεια στο μυαλό των φοιτητριών ταυτιζόταν με τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Κατά τη συζήτηση του ερωτήματος 5 οι φοιτήτριες ανέφεραν:

Ερ – Ωραία, πάμε στο 5. Το 5 με ενδιαφέρει πολύ.
Μ - Ναι, αυτό που κάναμε στο Λύκειο και επίσης μου έρχεται στο μυαλό και μια συνεχής γραμμή τέλος πάντων. Αν και αυτό δεν είναι απόλυτο, δηλαδή ότι δεν είναι συνεχής η γραμμή άρα δεν είναι συνεχής και η συνάρτηση αλλά αυτό πάντως που μου έρχεται στο μυαλό.
Λ - Εγώ το πρώτο που μου έρχεται στο μυαλό είναι αυτό ότι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 είναι ίσο με το $f(x_0)$, αυτό μου έρχεται στο μυαλό.
Ερ - Και σαν εικόνα, σου έρχεται κάτι;
Λ - Και μένα αυτό, μία συνεχής γραμμή.
Α - Και εγώ το ίδιο, μία συνεχής γραμμή χωρίς να διακόπτεται.

[Απόσπασμα 49]

Δίνουν αρκετές σωστές απαντήσεις αλλά δυσκολεύονται αρκετά στην προσπάθειά τους να δικαιολογήσουν όσα λένε. Έχουν αρκετή επάρκεια σε λειτουργικό επίπεδο αλλά δυσκολεύονται όταν προσπαθούν να δημιουργήσουν συνδέσεις και κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάμεσα σε όσα έχουν μάθει. Αρκετές φορές απαντούν σωστά χωρίς όμως να μπορούν να εξηγήσουν το γιατί. Για παράδειγμα ακολουθεί ο επόμενος διάλογος από το ερώτημα 7στ:

Ερ – Καλώς, θα ξαναγυρίσουμε σε αυτό στο τέλος. Για πάμε λίγο στο επόμενο στη (στ). Λένα;
Λ – … Σαν γραφική παράσταση σίγουρα διακόπτεται … αλλά …
Α – … τελείτσες θα είναι …
Ερ – Θυμάσαι να μου την κάνεις; … Μαρία, θέλεις να δοκιμάσεις και εσύ να την κανείς; …
(Κάνουν τα γραφήματα που φαίνονται παραπάνω) …
Λ – Θα είναι κάπως έτσι (δείχνει το γράφημα της) όλο τελείτσες.
Ερ – Και αν το γράφημα είναι έτσι τότε, τι λες, είναι συνεχής συνάρτηση;
…..
Ερ – Τη σκέψη σου θέλω, ό,τι σου έρχεται αυθόρμητα.

Λ – Ασυνεχής μου έρχεται … αλλά δεν μπορώ να το αιτιολογήσω…
Ερ – Ασυνεχής, γιατί; … Ενστικτωδώς; Τι πιστεύεις δηλαδή; … Τι αίσθηση σου βγάζει;
Λ – (γελάει) … Ότι κάτι της λείπει!
Ερ – Ωραία, αυτό θέλω. Ωραία. Αν ενωνόντουσαν οι κουκίδες;
Λ – Τότε … συνεχής θα μου έκανε.
Ερ – Συνεχής, εσύ Αφροδίτη;
Α – Και εμένα ασυνεχής μου έκανε.
Ερ – Ασυνεχής, γιατί;
Α – Δεν ξέρω αλλά έτσι όπως βλέπω τις κουκίδες … το θεωρώ τελείως … ξέρω ότι δεν είναι συνεχής τέλος πάντων ότι δεν πάει …
Μ – Εγώ το άλλο το έχω κάνει λάθος (δείχνει την (ε)) αλλά εντάξει το ίδιο είναι (δείχνει το σωστό γράφημα για την (ε)) αλλά αυτή συνεχή θα την έβαζα.
Ερ – Συνεχή, γιατί;
Μ – Γιατί παίρνει μόνο τους φυσικούς, οπότε ενδιάμεσα δε θα μπορούσε να πάρει άλλες τιμές, τώρα …
Ερ - Ωραία. Οπότε θα έλεγες συνεχής; Γράψτο δίπλα. Γράψτε και εσείς την απάντηση που δώσατε πριν … Ωραία.

[Απόσπασμα 50]

Ή αμέσως μετά στο ερώτημα 8α οι φοιτήτριες αναφέρουν:

Ερ – Μαρία τι λες για το πρώτο;
Μ – …
Ερ – Κορίτσια ελπίζω να μην σας έχω κουράσει μέχρι τώρα;
Μ, Λ, Α – Όχι, όχι.
Ερ – Ό,τι σκέπτεσαι πες μου Μαρία.
Μ – εεε … ασυνεχή θα την έλεγα.
Ερ – Γιατί; Τι σε χαλάει δηλαδή και δεν τη λες συνεχή αυτή;
Μ – …
Ερ - Μη σε νοιάζει πώς θα το πεις. Πες μου απλά αυτό που σκέφτεσαι αυτή τη στιγμή.
Μ – … (γελάει) … δεν ξέρω!
Ερ – Τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ασυνεχής;
Μ – … απλά επειδή την τιμή της την παίρνει πιο κάτω εδώ … δεν ξέρω …
Ερ – Ωραία, σκέψου το και άμα είναι θα σε ξαναρωτήσω πάλι. Εσύ τι λες Λένα;
Λ – Και εγώ ασυνεχή θα έλεγα.
Ερ – Ασυνεχή, γιατί;
Λ – Δεν ξέρω … επειδή η τιμή είναι αλλού … και … τα όρια πηγαίνουν αλλού … μάλλον, δεν ξέρω σίγουρα.
Α – Εγώ την έχω βάλει ασυνεχή διότι το $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ *είναι* y_1 *όπως και το* $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ *αλλά το f(5) είναι* y_2*, οπότε είναι ασυνεχής στο 5.*

[Απόσπασμα 51]

Είναι χαρακτηριστικό επίσης το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν με τα μεμονωμένα σημεία. Για παράδειγμα στο ερώτημα 8ζ έγινε η επόμενη συζήτηση:

Ερ – Ωραία. Για πάμε στη (ζ). Τι λέτε;
Α – Δεν το έχω σκεφτεί ακόμα.
Ερ – Ποια το έχει σκεφτεί να ξεκινήσει;
Λ – Αυτή εδώ η κουκκίδα με χαλάει πολύ. Θα την πω ασυνεχή.
Ερ – Ασυνεχή, μάλιστα. Αν ενώναμε το 1,6 με το 3;
Λ – Συνεχή.
Ερ – Μάλιστα. Αφροδίτη;
Α – Δεν ξέρω. Με χαλάει αυτό το 1,6 πολύ παράξενο, κάτι παίζει με αυτό, δεν ξέρω! (γελάει)
Μ – Δηλαδή να εξετάσουμε τη συνέχεια στο 3;
Ερ – Θέλω να μου πεις αν αυτό το γράφημα αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση, όπως το βλέπεις, χωρίς κανένα άλλο σχόλιο.
Α – Και εδώ γιατί κόβεται, που έχει πάει η γραφική παράσταση;
Μ – Εγώ πάντως δεν μπορώ να καταλάβω.
Ερ – Το γράφημα όπως το βλέπεις, είναι ένα γράφημα όπως το βλέπεις αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση;
Α – Δηλαδή το πεδίο ορισμού αυτής είναι το (-2, 3];
Ερ – Εσύ Λένα τι λες, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
Λ – … αφού δεν παίρνει τιμές ενδιάμεσα άρα πρέπει να είναι το (-2, 1.6) και …
Α – … ανοιχτό όμως στο -2;
Μ – … ανοιχτό, αφού δεν ορίζεται.
Α – Ανοιχτό είναι αφού δεν ορίζεται, αλλά μετά στο 1,6;
Λ – Κλειστό στο 1,6 αλλά μετά κάτι γίνεται …
Α – … τι, και μετά ένωση με το 3;
Λ – Ναι, αυτό γίνεται.
……..
Α – Η επιστήμη σηκώνει τα χέρια ψηλά! Τέρμα! (γελούν και οι τρεις)
Ερ – Αν έπρεπε έστω και ενστικτωδώς να δώσετε μια απάντηση τι θα έλεγες Αφροδίτη;
Α – Ασυνεχή θα έλεγα.
Λ – Κι εγώ ασυνεχή θα την έλεγα.
Μ – Εγώ θα την έβαζα συνεχή.

[Απόσπασμα 52]

Και στα υπόλοιπα γραφήματα έχουμε μια παρόμοια αντιμετώπιση από τις φοιτήτριες. Έχουν μια άνεση στο διαδικαστικό κομμάτι αλλά φαίνεται να είναι αρκετά έντονες οι αντιλήψεις που φέρουν μαζί τους από το Λύκειο και αυτό αποτελεί σοβαρό εμπόδιο στην προσπάθειά τους να περάσουν από τις απλές λειτουργικές δράσεις, στο στοχασμό πάνω στα αντικείμενα. Δεν μπορούν να εσωτερικοποιήσουν το νόημα των ορισμών και δυσκολεύονται να συνδέσουν κατάλληλα τις αναπαραστάσεις που έχουν σχηματίσει.

'Πυθαγόρας' (29η Συνέντευξη)

Ο 'Πυθαγόρας' φοιτούσε στο μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο όταν έγινε αυτή η συνέντευξη. Ήταν μάλιστα ένας από τους ελάχιστους φοιτητές που είχε μπει στο πανεπιστήμιο με τη μέθοδο των δεσμών κι έτσι είχε διδαχθεί τον ε-δ ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο. Φαινόταν να δείχνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και ο ερευνητής συζήτησε μαζί του αρκετές φορές το διάστημα που λαμβάνονταν οι συνεντεύξεις. Παρόλο όμως που φοιτούσε ήδη αρκετά χρόνια στο μαθηματικό τμήμα, δεν είχε αναπτύξει μια μαθηματική ωριμότητα. Στο ερώτημα 5 απάντησε:

Ερ – Ωραία. Για πες μου λίγο τώρα στην επόμενη τι εννοείς το γράφημα της f να είναι ενιαίο;
Π – Ενιαίο εννοούμε, βάζουμε κάτω το στυλό, κάνουμε το γράφημα, και το στυλό διαγράφει μία συνεχή γραμμή. Δηλαδή το γράφημα δεν παρουσιάζει κάποια κενά.
Ερ – Εννοείς δηλαδή συνεκτικό γράφημα;
Π – Ναι, συνεκτικό λέγεται; Δεν είμαι σίγουρος.

[Απόσπασμα 53]

Όταν στη συνέχεια του ζητήθηκε να κάνει τα γραφήματα στα ερωτήματα 7 α, β, γ και δ τότε δεν μπορεί να σχεδιάσει σωστά καμία από αυτές. Όταν μάλιστα του ζητείται να αιτιολογήσει το γιατί είναι συνεχείς κάποιες από αυτές, επικαλείται ξανά τον ισχυρισμό ότι η συνέχεια εξασφαλίζεται με την ύπαρξη εικόνας y για κάθε τιμή x. Θεωρούσε επίσης ότι στα μεμονωμένα σημεία μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής ενώ την ίδια άποψη είχε και για τα ανοιχτά διαστήματα. Είναι χαρακτηριστικά τα σχόλια που κάνει για τα γραφήματα 8 ζ, η, θ και ι.

Ερ – Ωραία, η (ζ);
Π – Στο (ζ) πάλι, για x=2 έχουμε ένα σημείο ασυνέχειας …
Ερ – … γιατί;
Π – Γιατί … γιατί ενδεχομένως να ορίζεται;
Δεν ξέρουμε τι συμβαίνει εκεί. Είναι ανοιχτό κυκλάκι άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε τι συμβαίνει. Υπάρχει και ένα σημείο που είναι εκτός του γραφήματος, έτσι μεμονωμένο. Δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού, είναι συνεχής μόνο από το -2 μέχρι το 1,6.
Ερ – Τότε γιατί μου είπες ότι στο -2 έχεις πρόβλημα;
Π – Επειδή είναι διαφανές το κυκλάκι, δεν ξέρω τι τιμή παίρνει. Μπορεί να ορίζεται.
Ερ – Ωραία. Αν τώρα η γραμμή συνέχιζε μέχρι το 3;
Π – Τότε θα ήταν συνεχής από το -2 μέχρι το 3. Δεν ξέρουμε τι συμβαίνει στο -2.
Ερ – Στην (η);

Π – Και εδώ το ίδιο. Στο -1 και το 1 έχουμε σημεία που δεν ξέρουμε, από το 2 μέχρι το 4 είναι συνεχής, στο 4 πάλι δεν ξέρουμε, και μετά πάλι υπάρχει ένα άλμα ασυνέχειας εδώ, έχει δύο άλματα ασυνέχειας αυτή και τρία μεμονωμένα σημεία.
Ερ – Κατάλαβα. Η (θ);
Π – Ενδιαφέρουσα αυτή. Αυτή θα ήταν συνεχής αν δεν είχε αυτά τα δύο μεμονωμένα σημεία, το 6 και το 8.
Ερ – Το υπόλοιπο θα ήταν;
Π – Το υπόλοιπο να είναι συνεχές.
Ερ – Το 2 δεν σε χαλάει;
Π – Όχι δεν με χαλάει, γιατί προφανώς απειρίζεται στο 2 αυτή.
Ερ – Εννοείς ότι τα πλευρικά όρια πάνε στο άπειρο ...
Π – … ναι, όπως φαντάζομαι από το γράφημα της δεν πρέπει να παίρνει τιμή στο 2. Οπότε δεν το εξετάζουμε καν το 2 σαν σημείο στο γράφημα της. Μιλάμε πριν το 2 και μετά το 2 που είναι συνεχής αλλά υπάρχουν και εκείνα τα δύο μεμονωμένα σημεία που μας χαλάνε. Α! Όμως την είχα βάλει συνεχής αυτή, τώρα το είδα.
Ερ – Θα το άλλαζες;
Π – Ναι, είναι ασυνεχής.
Ερ – Λόγω του …
Π – … λόγω των δύο μεμονωμένων σημείων αλλά και λόγω του ότι απειρίζεται στο 2. Βέβαια θα μπορούσαμε να το αφήσουμε κι απ έξω αυτό όπως είπα πριν γιατί μπορεί και να μην ορίζεται καν εκεί, γιατί βλέπω έχεις κάνει και μία διακεκομμένη γραμμή στο 2 …
Ερ – … ναι για να δείξουμε ότι το γράφημα τείνει ασυμπτωτικά σε αυτή την ευθεία.
Π – Ναι, ναι, όχι θα το άλλαζα, είναι ασυνεχής.
Ερ – Ωραία, και η τελευταία;
Π – Μια κλασσική συνάρτηση σημειακή. Ασυνεχής.
Ερ – Δεν μου λες, αν ενώσω τις κουκίδες;
Π – Αν ενώσουμε τις κουκίδες ναι, θα υπάρχει μία συνέχεια.

[Απόσπασμα 54]

Στο τέλος της συνέντευξης έγινε συζήτηση για τον ορισμό. Είναι αξιοσημείωτο ότι έγραψε με ευχέρεια τον ε-δ ορισμό και προσπάθησε να τον εξηγήσει. Παρόλα αυτά τα στοιχεία από την υπόλοιπη συνέντευξη δείχνουν ότι κινείται μόνο στο συμβολικό κόσμο των μαθηματικών χωρίς να μπορεί να δημιουργεί τους κατάλληλους μετασχηματισμούς. Η σχηματοποίηση του νοητικού αντικειμένου της συνέχειας είναι ατελής και προδίδει ασαφή αναστοχασμό. Η εικόνα της έννοιας που έχει μορφοποιηθεί στο μυαλό του δεν είναι η κατάλληλη και δεν σχετίζεται με τον ορισμό της έννοιας. Έτσι, όταν καλείται να απαντήσει σε κάποιο ερώτημα επικαλείται τη λανθασμένη εικόνα της έννοιας.

'Ηρακλής' και ***'Μπάμπης'*** (32η και 33 Συνέντευξη)

Ο 'Ηρακλής' και ο ΄Μπάμπης' ήταν πρωτοετείς στο μαθηματικό τμήμα όταν έγινε η συνέντευξη. Η συνέντευξη πάρθηκε και με τους δύο μαζί. Από την αρχή φάνηκε ότι υπήρχε μια διαφορά στο βαθμό εννοιολογικής κατανόησης ανάμεσά τους. Είναι χαρακτηριστικές οι απαντήσεις που δίνουν στα ερωτήματα 4 και 5.

Ερ – Μάλιστα. Να προχωρήσω τώρα στο επόμενο. Ηρακλή πώς σου φάνηκε η έννοια της συνέχειας όπως την έμαθες τώρα στο Πανεπιστήμιο;
Βρήκες διαφορά;
Η – Μεγάλη! (γελάει) … ε, ήταν και λίγο απότομο! Ε, δεν θα έπρεπε να ήταν ο Απειροστικός στο πρώτο έτος.
Ερ – Εσύ Μπάμπη;
Μ – Ε, η αλήθεια είναι ότι όταν το είδα δεν το κατάλαβα αμέσως. Άργησα να το καταλάβω και το ίδιο έγινε αργότερα και με την αρχή της μεταφοράς. Αλλά τώρα που έχει περάσει καιρός νομίζω ότι είναι τα ίδια. Δεν έχει διαφορά από αυτό με το οριάκι που είχαμε μάθει στο Λύκειο. Μου φαίνεται ότι είναι σα να έχουμε πάρει αυτό με το όριο που είχαμε μάθει και να το απλώσαμε λίγο. Δεν βρίσκω κάποια διαφορά, μου φαίνεται σχεδόν ίδιο, δεν ξέρω αν κάνω κάποιο λάθος.
Ερ – Ωραία. Ακούγοντας τώρα τη φράση η συνάρτηση είναι συνεχής τι σας έρχεται στο μυαλό; Ηρακλή τι λες;
Η – (γελάει) … τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου. Δεν είπατε να γράψουμε ότι μας έρχεται στο μυαλό;
Ερ – Και καλά έκανες! Αυθόρμητες απαντήσεις θέλω! Απλά εννοώ, σαν εικόνα τι σου έρχεται στο μυαλό;
Η – Ε, μου έρχεται μια γραμμή, μια γραμμή που την κάνουμε συνεχόμενα, στη γραφική παράσταση δεν εννοείς; …
Ερ – … ναι, ναι …
Η – … ε, κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι μας, αυτό.
Ερ – Ωραία. Μπάμπη τι λες εσύ; Δεν θυμάμαι τι είχες απαντήσει … (διαβάζω την απάντησή του) … γιατί λες να μην διακόπτεται στο πεδίο ορισμού της;
Μ – Γιατί … αυτό είναι ένα μπέρδεμα που έχω από φέτος, πέρσι άκουγα συνεχής και φανταζόμουνα μία ευθεία γραμμή, ενώ φέτος έχουμε δει κάποιες συναρτήσεις που δεν θα πίστευα ποτέ ότι θα είναι συνεχείς κι όμως είναι, γι' αυτό επειδή με έχει μπερδέψει λίγο, έβαλα το πεδίο ορισμού σε πιο αφηρημένη έννοια, επειδή δεν το έχω αναλύσει ακόμη πολύ καλά και με μπερδεύει λίγο στο μυαλό μου.

[Απόσπασμα 55]

Ο 'Μπάμπης' είναι από τους ελάχιστους φοιτητές που φαίνεται να έχουν αντιληφθεί ότι οι δυο ορισμοί είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους και επίσης έχει διακρίνει ότι το πεδίο ορισμού είναι αυτό που καθορίζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

'Ερνέστο' (35η Συνέντευξη)

Ο 'Ερνέστο' ήταν πρωτοετής όταν έγινε η συνέντευξη. Ήρθε εθελοντικά και πήρε μέρος στην έρευνα. Αν και ήταν πρωτοετής διέθετε μια αξιοθαύμαστη μαθηματική ωριμότητα που έγινε έκδηλη από την αρχή της συζήτησης. Απάντησε πολύ εύστοχα στα ερωτήματα 4 και 5, και ήταν το μοναδικό άτομο που χαρακτήρισε τη δήλωση στο 6β ως λάθος. Ανέφερε:

Ε – Εντάξει, συνεχής … (χαμογελάει) … η εικόνα δυστυχώς είναι αυτή που λέγαμε πριν, αν και λανθασμένη αυτή έρχεται κατ' ευθείαν στον μυαλό από το Λύκειο, μια γραμμή που δεν διακόπτεται.
Ερ – Ωραία, για πες μου τώρα για το 6(α).
Ε – Όχι βέβαια. Εφόσον στον ορισμό της συνέχειας μιλάμε για το $f(x_0)$, είναι απαραίτητο να ορίζεται η συνάρτηση στο x_0.
Ερ – Ωραία. Το (β);
Ε – Αυτό είναι λανθασμένο …
Ερ – … γιατί; Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα κατά νου;
Ε – Ναι … μπορούμε να πάρουμε την $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$ *η οποία δεν διακόπτεται πουθενά, βέβαια δεν μπορείς να τη σχεδιάσεις, αλλά δεν φαίνεται να διακόπτεται πουθενά. Δηλαδή άμα την κάνεις στον υπολογιστή και τη δώσεις στον άλλο θα σου πει 'να μία συνεχής συνάρτηση'. Δεν διακόπτεται πουθενά, αλλά παρόλα αυτά δεν είναι συνεχής στο 0.*
Ερ – Μάλιστα, άρα λες λάθος. Το (γ)
Ε – Λάθος βέβαια. Η ακολουθία που είπα πριν ή μπορείς να πάρεις και την 1/x, η οποία είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού, όμως διακόπτεται στο 0.

[Απόσπασμα 56]

Χαρακτηρίζει γρήγορα και σωστά όλες τις συναρτήσεις που περιλαμβάνονται στο ερώτημα 7 και μάλιστα στην 7ε χρησιμοποίησε με ευχέρεια την αρχή της μεταφοράς για να απαντήσει. Όταν η συζήτηση στράφηκε στα γραφήματα χωρίς δισταγμό, γρήγορα και με ακρίβεια απαντούσε σε κάθε γράφημα. Παραθέτουμε για παράδειγμα το τελευταίο μέρος της συνέντευξης.

Ερ – Ωραία, στην (ε) τώρα;
Ε – Εδώ δεν είναι συνεχής, γιατί πρώτα από όλα αν και ορίζεται η συνάρτηση στο 1 δεν υπάρχει το όριο εκεί, στο 3 δεν έχουμε πρόβλημα γιατί δεν ορίζεται εκεί, δηλαδή από το 1 και μετά είναι συνεχής
Ερ – Εξαιρουμένου του 3 προφανώς …
Ε – … εννοείται.

Ερ – Ωραία, και (στ);
Ε – Είναι συνεχής στο R^*, κανονικά.
Ερ – Η (ζ);
Ε – Και εδώ είναι συνεχής παντού η συνάρτηση, δηλαδή όπου ορίζεται.
Ερ – Και στην (η);
Ε – Και εδώ είναι επίσης συνεχής παντού η συνάρτηση, δηλαδή όπου ορίζεται.
Ερ – Η (θ);
Ε – Και εδώ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
Ερ – Και η τελευταία;
Ε – Και αυτή είναι επίσης συνεχής παντού ως ακολουθία ή τέλος πάντων ως μεμονωμένα σημεία.
Ερ – Ερνέστο σε ευχαριστώ πολύ για τη συνέντευξη!

[Απόσπασμα 57]

Δυστυχώς ο φοιτητής ήταν βιαστικός και δεν ήταν εφικτό να αναλυθεί ο ορισμός. Καθώς όμως ο ερευνητής είχε ολοκληρώσει τη συνέντευξη και συνόδευε τον φοιτητή προς την έξοδο, η σύντομη προφορική συζήτηση που είχε μαζί του έδειξε ότι είχε πολύ καλή αντίληψη για τις έννοιες που περιλαμβάνονται στον ορισμό.

Ο συγκεκριμένος φοιτητής αποτέλεσε σίγουρα μια ευχάριστη έκπληξη για τον ερευνητή. Ήταν το μοναδικό άτομο που στα πλαίσια της θεωρίας της Sfard (1991) βρισκόταν στο στάδιο της υποστασιοποίησης καθώς φαινόταν ξεκάθαρα ότι μπορούσε να σκεφθεί συνολικά και σφαιρικά για την έννοια της συνέχειας, να χρησιμοποιεί συνολικά και διαδραστικά τα επί μέρους χαρακτηριστικά της και τις αναπαραστάσεις που έχει δημιουργήσει γι΄ αυτήν. Σύμφωνα με τη θεωρία APOS ο φοιτητής βρίσκεται στη φάση κατά την οποία οι δράσεις που έχουν εσωτερικευθεί με τη μορφή διεργασιών και οι διεργασίες που έχουν ενθυλακωθεί σε αντικείμενα συνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους και έχουν δημιουργήσει το κατάλληλο σχήμα. Βλέπει τη γνώση ως μια ολότητα την οποία έχει την ευχέρεια να αποδομεί όταν αυτό είναι απαραίτητο (Czarnocha et al., 1999; Dubinsky, 1991). Στη γλώσσα του Tall (2004a), βρίσκεται στο τυπικό – αξιωματικό κόσμο καθώς μπορεί να προσεγγίζει τα μαθηματικά με καθαρά φορμαλιστικό τρόπο συνδυάζοντας ταυτόχρονα τα ενσαρκωμένα αντικείμενα αλλά και τη διαχείριση συμβόλων.

Συνολική Αποτίμηση των 35 Ηχογραφημένων Συνεντεύξεων

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τα ευρήματα των περισσότερων παρόμοιων ερευνών που έχουν γίνει και παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο της Ανασκόπησης της Βιβλιογραφίας. Είναι σίγουρο ότι η έννοια της συνέχειας εμπεριέχει πολλές δυσκολίες και κρύβει αρκετά επιστημολογικά εμπόδια καθιστώντας τη διδασκαλία της μια επίπονη και απαιτητική διαδικασία, κάτι που ισχύει άλλωστε και για αρκετές άλλες κύριες έννοιες της ανάλυσης (Núñez & Lakoff, 1998; Artigue, 1997; Tall, 1991a; Artigue, 1991).

Το κύριο εύρημα της παρούσας έρευνας είναι το ιδιαίτερα μικρό ποσοστό των φοιτητών που έχουν πραγματικά ακριβή και εννοιολογική κατανόηση για την έννοια της συνέχειας. Όπως έχουν δείξει και οι περισσότερες έρευνες, για την συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών η συνέχεια μιας συνάρτησης είναι ταυτόσημη με τη συνεκτικότητα του γραφήματος (Knapp & Oehrtman, 2005; Mastorides & Zachariades, 2004; Merenluoto & Lehtinen, 2000; Hitt & Lara, 1999; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1991a; Tall & Vinner, 1981). Τουλάχιστον 24 από τα 35 άτομα που έλαβαν μέρος στη συνέντευξη έμμεσα ή άμεσα είχαν αυτή την άποψη και αυτό φαινόταν τόσο στην άμεση απάντηση που έδιναν στο ερώτημα 6 του ερωτηματολογίου όσο και στους χαρακτηρισμούς που έκαναν για τα διάφορα γραφήματα. Αρκετοί από τους φοιτητές παραδέχονταν ότι αυτό το είχαν μάθει στο Λύκειο και είτε συνεχίζουν να πιστεύουν ότι είναι σωστό είτε – ελάχιστοι από αυτούς – γνωρίζουν ότι δεν είναι σωστό αλλά δεν μπορούν να αποβάλλουν την ιδέα. Είναι χαρακτηριστική η ασυμβατότητα που παρατηρείται ανάμεσα στην παλιά καλά εδραιωμένη γνώση και στο νέο πλαίσιο γνώσης. Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής καθώς και άλλες παρεμφερείς θεωρίες έχουν μελετήσει αυτή την αδιάκοπη πάλη ανάμεσα στο νέο και το παλιό που λειτουργώντας ως διαισθητική γνώση ή αλλιώς διαισθητικοί κανόνες, εμποδίζουν το υποκείμενο από την κατάλληλη εννοιολογική κατανόηση (Tall, 2007d; Tall, 2006; Biza et al., 2005; Vosniadou & Verschaffel, 2004; Stavy & Tirosh, 2000; Tirosh & Stavy, 1999; Tirosh, 1991; Cornu, 1991; Fischbein, 1987).

Η πεποίθηση της πλειοψηφίας των φοιτητών ότι η συνέχεια είναι ταυτόσημη με τη συνεκτικότητα του γραφήματος είναι εμφανής ιδιαίτερα όταν καλούνται να σχολιάσουν τη συνέχεια σε μεμονωμένα σημεία. Συνήθως απαντούν ότι δεν είναι

δυνατόν να υπάρχει συνέχεια σε σημεία, αφού τα σημεία δεν αποτελούν γράφημα! Επίσης συχνά υπάρχει σύγχυση σε ότι αφορά τη συνέχεια σε ανοιχτό η κλειστό διάστημα κάτι που δείχνει τα εννοιολογικά προβλήματα που δημιουργεί ο ορισμός της συνέχειας σε διάστημα έτσι όπως δίνεται στο σχολικό βιβλίο [41]. Είναι χαρακτηριστικές μερικές από τις απαντήσεις των φοιτητών:

[Σχόλιο στην 8ζ]:
Ερ – Εδώ τώρα;
Ο – Εδώ είναι συνεχής (δείχνει το 1,6), εδώ είναι συνεχής (δείχνει το 3) αυτό δεν το είχα δει (δείχνει το -2). Άρα κι αυτή ασυνεχή θα την έλεγα με την ίδια λογική, λόγω του -2.
Ερ – Ωραία, άρα σημειώνω 'ασυνεχής' στο -2.

[Απόσπασμα 58]

[Σχόλιο στην 8η]:
Ερ – Αυτή;
Ο – Ασυνεχής πάλι λόγω των σημείων -1, 1 και 4

[Απόσπασμα 59]

[Σχόλιο στις 8 ζ και η]:
Ερ – Δεν είναι συνεχής λες στη (ζ). Γιατί;
Ε – Λοιπόν, εδώ το 3 δεν ανήκει στη γραφική παράσταση έτσι όπως είναι μόνο του και εδώ το -2 είναι ανοιχτό.
Ερ – Και άρα χάνει την τιμή του, δεν έχει την τιμή εννοείς;
Ε – Ναι.
Ερ – Η κάτω, η (η);
Ε – μμμ … δεν είναι συνεχής γιατί εδώ είναι ανοιχτό (δείχνει το -1) ανοιχτό (δείχνει το 1), ανοιχτό (δείχνει το 4).
Ερ – Ωραία. Αν αυτά τα έκανα όλα κλειστά;
Ε – Πάλι ουσιαστικά δεν είναι συνεχής γιατί δεν συνεχίζει η γραμμή, τουλάχιστον έτσι το βλέπω εγώ, εκτός αν το κάναμε εμείς και το ενώναμε. Δηλαδή εννοείτε να ήταν όπως είναι και απλά στα άκρα να ήταν κλειστό;

[Απόσπασμα 60]

[Σχόλιο στις 8 ζ και η]:
Ερ – Ωραία. Η (ζ);
Β – Δεν είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Β – Δεν είναι συνεχής στο -2, ναι δεν υπάρχει το f(-2) …
Ερ – Το σημείο αυτό (δείχνω την κουκίδα στο 3) σε ενοχλεί;
Β – Όχι.

[41] Βλέπε σελίδες 52 και 53.

Ερ – Δηλαδή εδώ είναι συνεχής;
Β – Ναι.
Ερ – Ωραία.
Ερ – Τι λες για αυτή τώρα;
Β – … Δεν είναι συνεχής …
Ερ – Γιατί;
Β – Δεν υπάρχει το f(-1), το f(1), και το f(4).
Ερ – Αν ήταν κλειστά αυτά, τότε θα ήταν συνεχής;
Β – Έτσι όπως μας τα δίνει ναι.
Ερ – Οπότε υποθέτω ότι το ίδιο εννοείς και στην προηγούμενη έτσι; Αν ήταν κλειστό στο -2;
Β – Τότε θα ήταν συνεχής ,ναι.

[Απόσπασμα 61]

[Σχόλιο στο ερώτημα 5]
Ερ – Τι εικόνα σου φέρνει στο μυαλό; Με το που ακούς τη φράση 'συνάρτηση συνεχής' τι εικόνα έρχεται στο μυαλό σου;
Κ – Μία γραμμή που δεν διακόπτεται πουθενά, και είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της, και τα άκρα της είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Εννοείς δηλαδή να ορίζεται σε πεδίο ορισμού κλειστό;
Κ – Ναι.
Ερ – Δηλαδή αν ορίζεται σε πεδίο ορισμού ανοιχτό σε ενοχλεί;
Κ – Ναι.

[Απόσπασμα 62]

Είναι αξιοσημείωτο επίσης το πόσο ισχυρές είναι οι αυθόρμητες αντιλήψεις των φοιτητών σε σχέση με τη γνώση που προκύπτει από το χώρο των αξιωματικών – τυπικών μαθηματικών. Περίπου 22 από τους 35 φοιτητές γνώριζαν πολύ καλά έως άριστα τον ε-δ ορισμό της συνέχειας ενώ ταυτόχρονα, σχεδόν κανένας δεν προσπαθούσε να τον χρησιμοποιήσει προκειμένου να δώσει κάποια απάντηση. Η εικόνα της έννοιας ήταν πολύ ισχυρότερη από τον ορισμό της (Tall et al, 2001; Pinto & Tall, 1999g; Tall, 1996i; Pinto & Tall, 1996h; Tall & Vinner, 1981). Αδυνατούν να στηρίξουν τις απαντήσεις τους σε επαρκή θεωρητική βάση και πολλές φορές δικαιολογούν τις απαντήσεις τους απλά λέγοντας ότι έτσι πιστεύουν ότι πρέπει να είναι γιατί έτσι έχουν μάθει. Επίσης πολλές φορές από τις απαντήσεις των φοιτητών ξεπηδούν αντιλήψεις που παραπέμπουν σε γνωστικά και επιστημολογικά εμπόδια που έχουν να κάνουν με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνέχειας. Οι αντιλήψεις αυτές είναι ιδιαίτερα ισχυρές και εμφανίζονται απρόσμενα χωρίς καμιά θεωρητική εξήγηση. Για παράδειγμα συχνά θεωρούν ως συνέχεια την ύπαρξη εικόνας y για κάθε

τιμή x ή ως ασυνέχεια την ύπαρξη ‘μεγάλου’ κενού σε ένα γράφημα συνάρτησης. Ακολουθούν μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις:

[Σχόλιο στην 7α]:
Ωραία. Κατάλαβα. Πάμε τώρα στην 7. Λες ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$. *Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση; Τη θυμάσαι;*
Κ - …(κάνει το διπλανό γράφημα)…
Ερ - Σε ενοχλεί που έχει δύο κομμάτια αντί για ένα;
Κ – Όχι, δεν με ενοχλεί, εντάξει.
Ερ - Γιατί;
Κ - Μου φαίνεται λίγο περίεργο βασικά αλλά ξέρω εγώ, τόσα χρόνια την έχουμε κάνει αυτή τη γραφική παράσταση και την έχω συνηθίσει. Στην αρχή μου φάνηκε λίγο περίεργη.
Ερ - Δηλαδή, το ότι διακόπτεται σε χαλάει;
Κ - Λίγο ναι. Οι περισσότερες συναρτήσεις έχουμε συνηθίσει να είναι ένα κομμάτι που να μη διακόπτεται, δεν έχουν δύο κλάδους.
Ερ - Δηλαδή θα ήθελες να αλλάξεις εδώ την απάντηση;
Κ - Όχι. Ξέρω ότι είναι συνεχής.

[Απόσπασμα 63]

[Σχόλιο στην 7στ]:
Ερ - Ωραία. Η επόμενη τώρα η (στ);
Μπορείς να δοκιμάσεις να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;
Χ - … (Κάνει το πρώτο γράφημα που φαίνεται δίπλα στα αριστερά)...
Ερ - Τι διαφορά έχει αυτή από την 1/x;
Χ - Το ότι αυτή δεν ορίζεται από το 0 και κάτω.
Ερ - Έχεις άλλη διαφορά από την 1/x;
Χ - Στο πεδίο ορισμού, όπως είπα, που έχει διαφορετικό αυτό εδώ … και πάει από τους φυσικούς…άρα δεν ορίζεται στις ενδιάμεσες τιμές … δεν θα είναι τότε αυτής της μορφής (δείχνει το γράφημα που έκανε αρχικά). Θα είναι και αυτή κουκκιδίτσες.
Ερ - Δηλαδή πιστεύεις ότι είναι λάθος το γράφημα που έκανες;
Χ - Ναι, το αρχικό αυτό που τα ένωσα όλα τα σημεία είναι λάθος, ναι.
Ερ - Αν θεωρείς ότι αυτό είναι λάθος, θέλεις να μου κάνεις δίπλα αυτό που πιστεύεις ότι είναι το σωστό;
Χ - … (Κάνει το δεύτερο γράφημα που φαίνεται επάνω στα δεξιά)...Θα είναι αυτής της μορφής, κουκκιδίτσες.
Ερ - Ωραία. Τώρα, αλλάζει κάτι στην απάντησή σου ή όχι;
Χ - … Όχι
Ερ – Γιατί; Δηλαδή εσύ συνεχίζεις να πιστεύεις ότι είναι συνεχής;
Χ - Ναι. Έτσι νομίζω. Αν και η γραφική παράσταση δεν είναι …
Ερ - …Και η προηγούμενη γιατί δεν ήταν;
Χ – (Γελάει). Δεν ξέρω! …
Ερ - … προσπαθώ να καταλάβω τι είναι αυτό που αλλάζει στην αίσθησή σου. Γιατί πριν οι κουκκιδίτσες δεν ήταν συνεχείς ενώ τώρα είναι;
Χ - Δεν ξέρω. Έτσι, αυτή μου κάνει για συνεχής, έτσι μου κάνει.
Ερ - Δεν μπορείς να βρεις τι είναι αυτό που σε κάνει να σου βγαίνει αυτό το πράγμα;
Χ – Μου βγαίνει, δεν ξέρω! Είναι συνεχής.

[Απόσπασμα 64]

[Σχόλιο του ίδιου φοιτητή στην 8ι]:
Ερ – Εδώ τώρα στη (ι);
Χ - … είμαι ξαναμπερδεμένη. Από τη μια για κάθε θετικό ακέραιο υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή …
Ερ - Αυτό είναι καλό δηλαδή;
Χ – (γελάει) Καλό πρέπει να ναι! … ασυνεχής… μάλλον.
Ερ – Ε! Με προκαλείς! (γελάω) Γιατί εδώ (δείχνω την 7(στ)) μου είπες ότι είναι συνεχής;
Χ – Συνεχής έχω βάλει; Μωρέ μπερδεύομαι! Δεν ξέρω τώρα …τι να είναι…
Ερ - Γιατί η προηγούμενη να είναι συνεχής ενώ αυτή τώρα ασυνεχής;
Χ - Γιατί δεν έχω ξεκάθαρο τον ορισμό της συνέχειας και τα λέω μία έτσι και μία αλλιώς.
Ερ - Δεν με πειράζει αυτό, αυτό θέλω, την εικόνα που έχεις στο μυαλό σου. Δηλαδή αν γυρίζαμε τώρα στην 7(στ) θα την κάναμε ασυνεχή;
Χ - … χμμμ …
Ερ - Πρόσεξε. Δεν σημαίνει ότι κάπου έχεις κάνει λάθος. Απλά θέλω να καταλάβω γιατί σε σχήματα που και τα δύο έχουν κουκίδες και χοντρικά μοιάζουν, δίνεις διαφορετική απάντηση. Απλά ρωτάω.
Χ - Θα πω και αυτήν συνεχή.
Ερ - Δηλαδή αλλάζεις την απάντησή σου στην τελευταία και τη λες και αυτή συνεχή;
Χ - Ναι.

[Απόσπασμα 65]

[Σχόλιο στην 8θ]:
Ερ – Ωραία. Η (θ) τώρα.
Α- Δεν ξέρω για αυτά εδώ πέρα τι να πω.
Ερ – Τα μεμονωμένα σημεία στο 6 και στο 8 εννοείς έτσι;
Α – Ναι.
Ερ – Ωραία, ας εξαιρέσουμε προσωρινά τα μεμονωμένα σημεία.
Με την υπόλοιπη γραφική παράσταση τι λες;
Α – Ότι δεν έχουμε κάποιο πρόβλημα.
Ερ – Με το 2 αντιμετωπίζεις κάποιο πρόβλημα ή όχι; Όχι ότι πρέπει να υπάρχει πρόβλημα, απλά ρωτάω!
Α – Στο 2 ίσως δεν ορίζεται.
Ερ – Άρα, αυτό τι σημαίνει; Τι έχει να κάνει αυτό με την απάντηση σου;
Α – Εφόσον είναι εκτός πεδίου ορισμού το 2, είπαμε και πριν ότι τα σημεία εκτός πεδίου ορισμού δεν τα … ότι μελετάμε τη συνέχεια για τα σημεία τα οποία είναι ήδη εντός πεδίου ορισμού.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα δεν σε νοιάζει σαν να λέμε στο 2.
Α – Είναι προφανές ότι εκεί δεν θα μπορούσε να είναι συνεχής.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι μέχρι το 5 δεν έχουμε πρόβλημα έτσι;
Α – Ναι.
Ερ – Αν τώρα συνεχιζόταν η γραμμή κι ενωνόταν με τα δύο μεμονωμένα σημεία;
Α - …
Ερ – Διστάζεις, γιατί; …
Α – Ναι … (διστακτικά)… Όχι δεν θα είναι συνεχής ακόμη και αν ενωνόταν…

Ερ – Δεν θα είναι συνεχής! Ενδιαφέρον αυτό γιατί;
Α - … Γιατί μου κάνει ότι αυτή δεν είναι εικόνα μιας συνεχούς συνάρτησης.
Ερ – Ακόμα και αν ενωθούν τα σημεία τα μεμονωμένα;
Α – Ναι, ακόμα και αν ενωθούν.
Ερ – Γιατί;
Α - …Δεν ξέρω!
Ερ – Ένωσέ τα με μία γραμμή, ότι γραμμή θες εσύ.
Α - …(κάνει τη γραμμή που φαίνεται στο σχήμα παραπάνω) …
Ερ - … τι λες τώρα, τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι αν και έχουν ενωθεί με γραμμή το γράφημα δεν αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση;
Α – (διστακτικά) … Δεν έχω έτσι εικόνα από κάποια τέτοια συνάρτηση. Δεν μου φέρνει στο μυαλό κάτι, δεν μου θυμίζει κάτι.
Ερ – Εννοείς ότι δεν έρχεται στο μυαλό σου κάποια εικόνα από οικεία συνάρτηση;
Α – Ναι δεν μου έρχεται μια τέτοια εικόνα στο μυαλό.

[Απόσπασμα 66]

[Σχόλιο στο ερώτημα 4 και το γράφημα 7α]:
Ερ - Ωραία. Τι λες τώρα, τι σχέση έχει ο ορισμός του Λυκείου με αυτόν που έμαθες στο Πανεπιστήμιο;
Β - Βασικά εγώ, δεν έχω βρει καμία σχέση. Και δεν μπορώ να καταλάβω μάλιστα τον ορισμό του Πανεπιστημίου. Και αυτός είναι και ο λόγος που δεν τον θυμάμαι αν και έχω διαβάσει τον Απειροστικό έξι φορές μέχρι τώρα.

……..

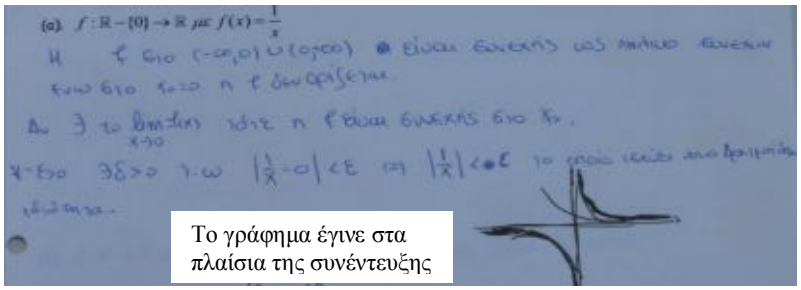
Ερ – Ωραία. Στις επόμενες τώρα προσπαθείς να κάνεις ένα απλό γράφημα και μου λες με όποιο τρόπο θέλεις αν είναι συνεχής ή όχι. Πάμε στην (α) αρχικά.
Β – Αυτή είναι η κλασική … α! είναι εκτός του 0 … (κάνει το διπλανό γράφημα) … δεν είναι συνεχής!
Ερ – Γιατί;
Β – Γιατί στο 0 διακόπτεται, δεν ορίζεται δηλαδή.
Ερ – Αλγεβρικά εννοείς ή λόγω του γραφήματος; Τι είναι αυτό που σε κάνει να καταλήγεις στην απάντηση;
Β – Επειδή το ξέρω. Αλγεβρικά δηλαδή …

[Απόσπασμα 67]

[Σχόλιο στην 8ι]:
Ερ – … Ωραία, και η τελευταία;
Κ – Δεν είναι. Είναι μεμονωμένα.
Ερ – Μόνο κουκίδες. Αν τις ενώναμε;
Κ – Ναι.
Ερ – Θα ήταν. Αν τη γραμμή την κάναμε έτσι με γωνίες να ανεβοκατεβαίνει τότε θα ήταν;
Κ – Όχι.
Ερ – Γιατί;
Κ – Απλά το θυμάμαι από πέρσι
Ερ – Εντάξει! Αλλά την έκανα καμπύλη;
Κ – Τότε θα ήταν. Νομίζω έχει σχέση … όχι, όχι, μην μπλέξω την παράγωγο …

[Απόσπασμα 68]

[Σχόλιο στην 7α]:



Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα, ανοιχτό λοιπόν στο 1. Ωραία.
Στην 7 τώρα την (α) λες … (διαβάζω την απάντησή του) …
Άρα τελικά τι θα έλεγες για αυτήν, είναι συνεχής;
Ν – Είναι σίγουρα συνεχής σε όλο το R-{0} και από την αρχιμήδεια ιδιότητα βρίσκουμε ότι υπάρχει ένα δ ώστε να ισχύει ο ορισμός και εκεί.
Ερ – Άρα είναι συνεχής και στο 0;
Ν – Ναι.
Ερ – Ωραία. Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;… αν τη θυμάσαι;
Ν – … (κάνει το παραπάνω γράφημα) … είναι αυτή νομίζω …κάπως έτσι …
Ερ – Ωραία. Αν το γράφημα είναι αυτό, σε βοηθάει, σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις απαντήσει;
Ν – …
Ερ – Εννοώ σε βοηθάει το γράφημα να επιβεβαιώσεις αν η συνάρτηση με συνεχής ή όχι;
Ν – Ουσιαστικά έτσι όπως είναι το γράφημα, η συνάντηση δεν ορίζεται σε κάποια τιμή, στο 0.
Ερ – Ναι, δηλαδή; Κάποιο από τα δύο μπορεί να είναι λάθος;
Ν – … τώρα δεν είμαι σίγουρος για το γράφημα.
Ερ – Α, Μπορεί να είναι λοιπόν λάθος το γράφημα, ε;
Ν – Έχω τώρα μπερδευτεί με την lnx.
Ερ – Μην σε απασχολεί αυτό. Ας υποθέσουμε ότι είναι σωστό το γράφημα.
Ν – Αν το γράφημα είναι σωστό, τότε η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συνεχής στο μηδέν, γιατί όταν πάρουμε το ένα πλευρικό όριο τείνει στο συν άπειρο ενώ αν πάρουμε το άλλο πλευρικό όριο τείνει στο μείον άπειρο. Οπότε …
Ερ – Εντάξει, ας το αφήσουμε προς το παρόν.

[Απόσπασμα 69]

[Σχόλιο στην 8η]:
Ερ – Για την (η) τώρα;
Κ – Συνεχής
Ερ – Συνεχής;
Κ – …(διστακτικά)…μάλλον.
Ερ - Αλλάζεις γνώμη καθώς το κοιτάς; Συμφωνείς η διαφωνείς;
Κ - Εντάξει, εδώ δεν με πειράζει τόσο πολύ γιατί είναι ένωση διαστημάτων, σε σχέση με το προηγούμενο και … αλλά …
Ερ - Άρα αν θα μου έλεγες ότι είναι συνεχής, που θα μου έλεγες ότι είναι συνεχής;
Κ - Ίσως να άλλαζα γνώμη λόγω αυτού (δείχνει το 1 και το 2). Το όριο στο 1^+ είναι ίσο με το όριο στο 2^- αλλά εδώ στο 4 και στο 4,5 δεν είναι ίσα και έτσι ίσως να άλλαζα γνώμη αλλά …
Ερ - …δηλαδή θα ήθελες να είναι ίσα αυτά τα όρια;

Κ - Ναι. Τότε θα έλεγα λίγο πιο εύκολα ότι είναι συνεχής αυτή. Αλλά δεν ξέρω, μπορούμε να πούμε ότι είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων; Δεν ξέρω, τώρα που το σκέφτομαι, μάλλον ασυνεχής θα την έβαζα. Γιατί, πού να την πούμε συνεχής, σε ένωση διαστημάτων; … Δεν ξέρω, δεν είμαι σίγουρος γι αυτήν.
Ερ - Άρα τελικά τι θα έλεγες σαν τελική απάντηση;
Κ - Λοιπόν θα μείνω τελικά σε αυτήν συνεχής.
Ερ - Συνεχής;
Κ – Ναι, συνεχής. Απλά δεν ξέρω αν μπορώ να πω σε ένωση διαστημάτων. Ότι είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων. Εκεί κολλάω.

[Απόσπασμα 70]

[Σχόλιο στην 8 α και β]:
Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στο (α) λες ασυνεχής στο 5. Γιατί;
Χ - … (το κοιτάζει αρκετή ώρα) …
Ερ - Με τον ορισμό του Λυκείου, με ότι ξέρεις από το Πανεπιστήμιο, με την αίσθηση σου, δεν ενδιαφέρει ότι και αν χρησιμοποιήσεις. Απλά πώς πιστεύεις ότι θα μπορούσες να το δικαιολογήσεις αυτό, ότι είναι ασυνεχής στο 5;
Χ – Από αυτό εδώ το y_2, y_1.
Ερ - Δηλαδή, αν ήθελες λίγο να το μαθηματικοποιήσεις, τι είναι αυτό που σε χαλάει;
Χ – … εεε …
Ερ - Έχεις ας πούμε ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου και του κάνεις μάθημα. Του δίνεις αυτό το γράφημα και θες να του εξηγήσεις ότι δεν είναι συνεχής στο 5. Τι θα του έλεγες;
Χ - … (το κοιτάζει πάλι αρκετή ώρα) …με χαλάει βασικά αυτό το κενό που υπάρχει εδώ πέρα.
Ερ - Εννοείς το κενό ανάμεσα στην κουκίδα και στο υπόλοιπο γράφημα;
Χ – Ναι, ναι. Ότι δεν μπορεί να πλησιάσει όσο θέλουμε …(διστάζει)
Ερ - Η τιμή, το γράφημα; Τι ακριβώς εννοείς;
Χ - Οι τιμές μεταξύ τους δεν μπορούν να πλησιάσουν όσο θέλουμε.
Ερ – Οι y_2, y_1 ;
Χ – Ναι.
Ερ – Σε αυτή την περίπτωση, στο (β);
Χ - Και σε αυτή το ίδιο σκέφτηκα.
Ερ – Πάλι λόγω της απόστασης που υπάρχει ανάμεσα στα …
Χ - …ναι, ναι, ανάμεσα στα y_2, *και* y_1

Ενώ λίγο μετά στα γραφήματα 8 δ έως στ απαντάει …

Ερ – Στη (δ) λες επίσης συνεχής. Στο 5 που έχει το κενό σε χαλάει;
Χ - Όχι, δεν με χαλάει.
Ερ - Γιατί;
Χ – (γελάει) ε! Τι να με χαλάει. Ένα σημείο είναι μόνο!
Ερ – Α!
Ερ - Ωραία. Εδώ λες συνεχής.
Χ - … (το κοιτάζει προσεκτικά)… συνεχής ε;
Ερ - Θα άλλαζες κάτι στην απάντησή σου;
Χ - Ναι. Τώρα θα έλεγα ότι δεν είναι συνεχής….
Ερ - Ότι δεν είναι;
Χ - Ναι, δεν είναι στο 1.
Ερ – Δεν είναι στο 1. Γιατί;

Χ - …γιατί…γιατί υπάρχει αυτό το κενό εδώ πέρα.
Ερ – Ωραία. Αυτή τώρα τη (στ) τη λες συνεχή.
Το κενό που υπάρχει…
Χ - … ναι με την ίδια λογική δεν με χαλάει το κενό που υπάρχει, ένα σημείο είναι μόνο.
Ερ - Ωραία. Δεν σου χαλάει το κενό.

[Απόσπασμα 71]

[Σχόλιο στην 7στ]:
Ερ – Μάλιστα. Η (στ) τώρα;
Α - … το ίδιο δεν είναι συνεχόμενη.
Ερ - Θέλεις να δοκιμάσεις να μου πεις σε αυτήν εδώ πώς περίπου θα ήταν η γραφική παράσταση;
Α - … (κάνει το διπλανό γράφημα) …Θα είναι μόνο σημεία εδώ, εδώ, εδώ.
Ερ – Άρα το σχήμα της τι σου λέει;
Α – Ότι δεν είναι συνεχής;
Ερ – Ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Α - … Δεν έχουμε μία γραμμή συνεχόμενη, ότι … αυτό με την εφαπτόμενη ισχύει; Ότι δεν μπορούμε να χαράξουμε εφαπτομένη;
Ερ - Δεν μπορούμε να χαράξουμε εφαπτομένη. Και γιατί αυτό σε πειράζει;
Α - … Δεν ξέρω. Τώρα μου ήρθε σαν φλασιά! … Η εφαπτομένη είναι η κλίση της ευθείας σε κείνο το σημείο έτσι δεν είναι; … Δεν ξέρω.

[Απόσπασμα 72]

[Σχόλιο στην 8θ]:
Ερ – Κατάλαβα. Στη (θ) τώρα; Λες 'Δεν είναι συνεχής'. Γιατί;
Ε - Αυτά εδώ είναι μόνα τους (δείχνει τις δύο κουκκίδες) δεν συνδέονται πουθενά, Εδώ αυτά τα δύο (δείχνει τους δύο κλάδους) θα μπορούσαν να ήταν συνεχείς αλλά εδώ το 2 είναι εκτός πεδίου ορισμού, αλλά δεν μου ταιριάζει και σαν σχέδιο για να είναι... Αλλά νομίζω το βασικό είναι τα δύο σημεία τα μόνα τους.
Ερ - Αν δηλαδή τα διώξουμε αυτά τα δύο μεμονωμένα σημεία τότε το υπόλοιπο γράφημα;
Ε - Στο 2 διακόπτεται γιατί δεν είναι στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Σε νοιάζει ή δεν σε νοιάζει; Αυτό είναι καλό ή κακό;
Ε - Άμα είναι εκτός πεδίου ορισμού τότε δεν με νοιάζει. Αλλά κοντά στο 2 δεν θα έπρεπε τουλάχιστον να έχουν τις ίδιες τιμές, την ίδια τιμή για να είναι συνεχής στη γύρω περιοχή;
Ερ - Να έχουν την ίδια τιμή, να πιάνει εννοείς την ίδια τιμή, την τιμή 2; Τι ακριβώς εννοείς;
Ε – Ναι περίπου.
Ερ – Μήπως εννοείς… α … αν είχα αυτό (κάνω το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ε – Ναι, αυτό
Ερ - Τώρα δηλαδή θα ήταν συνεχής;
Ε - Ναι, ναι έτσι νομίζω.
Ερ - Άρα δηλαδή αυτή τη λέω συνεχή έτσι;
Ε - Ναι.

[Απόσπασμα 73]

[Σχόλιο στον ορισμό]
Ερ – Ωραία. Να γυρίσω τώρα λίγο στην αρχή. Θυμάσαι καθόλου τον ορισμό σας συνέχειας σας τον έμαθες εδώ στο Πανεπιστήμιο;
Ε – Όχι.
Ερ – Ωραία. Θα στον γράψω εγώ και θα ρωτήσω κάτι. Αν ήθελες πολύ χονδρικά να μου περιγράψεις με λόγια αυτόν τον τύπο, αυτό τον ορισμό τι θα μου έλεγες; Δηλαδή αν κάνω αυτό το απλό γράφημα, τι σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε αυτό το σημείο; Πώς θα εξηγούσες απλά όλα αυτά τα σύμβολα του ορισμού;
Ε - … Ουσιαστικά το ε είναι η διαφορά εδώ στον άξονα των yy΄ και για το δ είναι εδώ στον άξονα των xx΄ και για να είναι συνεχής πρέπει και αυτό και αυτό (δείχνει σας δύο απόλυτες τιμές) να είναι μικρότερα από το δ και το ε … (γελάει) καταλαβαίνετε τίποτα;
Ερ – Καταλαβαίνω μην ανησυχείς!
Ε – Και βασικά όλα τα υπόλοιπα τα έχουμε προσθέσει για να το κάνουμε λίγο πιο πολύπλοκο (γελάει) για να λέμε ότι είμαστε και του Πανεπιστημίου!... τι να σας πω τώρα!
[Απόσπασμα 74]

[Σχόλιο στα ερωτήματα 4 και 5]
Ερ - Στην πρώτη ερώτηση δεν ρωτάω κάτι, θα ξαναγυρίσουμε μετά. Πώς σας φαίνεται ο ορισμός της συνέχειας που μάθατε στο Λύκειο σε σχέση με αυτόν του Πανεπιστημίου; Διαφορετικός, πιο δύσκολος ή πιο εύκολος;
Α – Εγώ δεν έχω διαβάσει τίποτα!
Ι – Εγώ τον είχα κάνει στο πρώτο εξάμηνο στον Απειροστικό τώρα είμαι στο τέταρτο. Πάντως στο Λύκειο εκεί στην κατεύθυνση το κάναμε και αυτό που μου έχει μείνει είναι ότι σε κάποιο x_0 παίρναμε το όριο … το παίρναμε με το όριο ενώ εδώ το είδαμε πιο επιστημονικά … και πώς το είχαν ανακαλύψει παλιά … με ε και δ και αυτά
Ερ – (απευθυνόμενος στην Αγγελική) Έχεις παρακολουθήσει καθόλου στον Απειροστικό;
Α – Λίγο μόνο στην αρχή, μετά δεν έβρισκα θέση.
Ερ – Κατάλαβα … Στο 5 ποιο είναι το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας;
Ι – Εμένα αυτό που μου έρχεται στο μυαλό σαν συνέχεια, είναι ότι η γραφική της παράσταση δεν διακόπτεται, αυτό δηλαδή που μου έχει μείνει από το σχολείο ο εύκολος τρόπος δηλαδή που μας εξηγούσε ο καθηγητής στο σχολείο … ότι όταν κανείς τη γραφική παράσταση δε σηκώνεις την κιμωλία από τον πίνακα
Α – … ναι, ναι το ίδιο ….
Ερ – … Αγγελική και εσύ το ίδιο; …
Α – … ναι, ναι δε σηκώνεις το στυλό.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα.
[Απόσπασμα 75]

[Σχόλιο στον ορισμό]
Ερ – Καλύτερος ή χειρότερος είναι άλλος από του Πανεπιστημίου;
Ι – Κοιτάξτε τώρα … του Πανεπιστημίου ακούγεται πιο δύσκολος, σε κάποιον που είναι απ' έξω τον κοιτάζει και εντυπωσιάζεται. Αλλά σαν ουσία, επάνω άλλος ασκήσεις, εκτός από ένα συγκεκριμένο τύπο ασκήσεων, άλλος είναι ο πιο χρήσιμος και ο πιο πρακτικός. Ο άλλος είναι για εμφάνιση για να δείξουμε ότι ξέρουμε και ε και δ και τα λοιπά, και εκτός από ένα συγκεκριμένο τύπο ασκήσεων που είναι δομημένες για να λύνονται έτσι …

Α – … αν κάναμε ένα χρόνο ασκήσεις που να λύνονται με τον ορισμό τότε τα πράγματα θα ήταν διαφορετικά …
Ι – … όταν έρχεσαι από το Λύκειο που άλλος κάνει ασκήσεις μόνο με όρια και με αυτά και μετά κατευθείαν πέφτεις στα άλλα, είναι πολύ πιο εύκολος ο ορισμός του Λυκείου παρά ο άλλος που τον βλέπεις και λες τι είναι αυτό τώρα …

[Απόσπασμα 76]

[Σχόλιο στην 8ι]:
Ερ – Ωραία, και η τελευταία;
Π – Μια κλασσική συνάρτηση σημειακή. Ασυνεχής.
Ερ – Δεν μου λες, αν ενώσω τις κουκίδες;
Π – Αν ενώσουμε τις κουκίδες ναι, θα υπάρχει μία συνέχεια.
Ερ – Δεν μου λες, αν της ενώσω με γωνία έτσι ώστε να ανεβοκατεβαίνει κοφτά η ευθεία;
Π – Α, με γωνία … κατάλαβα … θα είναι … και με γωνία θα είναι, ναι.
Ερ – … οπότε …
Π – … δεν μου είναι ξεκάθαρο βέβαια να σου πω την αλήθεια, η γωνία κάτι μου κάνει ότι μπορεί εκεί με τα πλευρικά κάτι να συμβαίνει … να μην γίνεται σωστά. Αλλά από την άλλη, με γωνίες θα μπορούσες να τις ενώσεις και να πεις σαν την f(x)=x που είναι ευθεία, που την f(x) την αλλάζεις μετά και την κάνεις μια γωνία … δεν βλέπω γιατί να μην είναι συνεχής.
Ερ – Εγώ απλά ρωτάω!
Π – Αν τις ένωνες ναι, θα μου φαινόταν συνεχής.
Ερ – Είτε με καμπύλη είτε με γωνίες;
Π – Ναι, αν και με γωνίες θα μου φαινόταν λίγο περίεργη, ναι …
Ερ – … αλλά πάντως …
Π – … πάντως ναι, θα έλεγα συνεχής.
Ερ – Ωραία. Κατάλαβα.

[Απόσπασμα 77]

[Σχόλια στις 8 α και β]
Ερ – Εντάξει. Της δούμε τώρα τα επόμενα που είναι όλο γραφήματα. Τι λες για το πρώτο; Ασυνεχής, γιατί;
Χ – Επειδή διακόπτεται σε ένα σημείο, έτσι της τη σκέφτηκα εκείνη την ώρα, και επειδή η εικόνα της f(x) για x=5, ενώ θα έπρεπε να είναι εδώ (δείχνει την τρύπα) είναι εδώ (δείχνει την μαύρη κουκίδα), δεν είναι συνεχής.
Ερ – Μάλιστα. Η κάτω τώρα;
Χ – Αυτή είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Χ – Γιατί; Γιατί είναι εδώ που πρέπει, δηλαδή για x=5 είναι κανονικά εδώ που έπρεπε να είναι και μετά ξεκινάει από κάτω για x=6 μια χαρά.

[Απόσπασμα 78]

[Σχόλια στις 8 α και β]
Ερ – Ωραία. Τώρα για πες μου για την (α). Λες ότι είναι συνεχής. Γιατί;

Και ίσως και σε αντιδιαστολή με την επόμενη τη (β) που λες ότι δεν είναι συνεχής. Τι το διαφορετικό βλέπεις ανάμεσα σε αυτές τις δύο;
Γ – Αυτό εδώ με έκανε (δείχνει την κουκίδα στο σχήμα (α)). Ότι στην τιμή 5, δηλαδή για x=5 ορίζεται η τιμή της. Ενώ εδώ πέρα (δείχνει το σχήμα (β)) είναι σημείο ασυνέχειας. Αλλά αν εδώ πέρα δεν οριζόταν (δείχνει στο σχήμα (α) την κουκίδα), δηλαδή αν έλειπε αυτό (δείχνει την κουκκίδα) και ήταν μόνο αυτό (δείχνει το κενό) τότε θα έλεγα ότι δεν θα ήταν συνεχής …
Ερ - … δηλαδή εννοείς κάτι σαν το (δ) που έχει κενό έτσι; …
Γ - … ναι, έτσι ακριβώς …
Ερ - …ενώ εδώ στο (α) λες …
Γ - …ότι είναι συνεχής αφού υπάρχει η τιμή της.
Ερ – Κατάλαβα. Ενώ εδώ στο (β) τι είναι αυτό που σε ενοχλεί;
Γ - Αυτό εδώ (δείχνει το 'σκαλοπάτι') ότι δεν ορίζεται … το ίδιο πράγμα είναι τώρα όπως το απάντησα…
Ερ – Δηλαδή για x=5 υπάρχει το αντίστοιχο y;
Γ – Όχι. Νομίζω ότι δεν υπάρχει … όχι υπάρχει, υπάρχει!! (Γελάει)
Ερ - Αλλάζει κάτι στην απάντησή σου;
Γ - Όχι όπως το βλέπω έτσι δεν θα άλλαζα κάτι. Δεν είναι συνεχής.

[Απόσπασμα 79]

[Σχόλια στις 8 α και β]
Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα έχουμε μόνο γραφήματα. Αυτή η (α) λες 'Δεν είναι συνεχής'. Γιατί;
Ε – Λοιπόν, αυτά έπρεπε να τα είχα βάλει όλα συνεχή κανονικά. Εφόσον είναι συνεχής εδώ (δείχνει την κουκίδα στο x=5) άρα πρέπει να είναι συνεχής.
Ερ - Εννοείς εφόσον υπάρχει η τιμή για x=5;
Ε – Ναι.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα το σβήνουμε το 'Δεν';
Ε - Ναι.
Ερ – Ωραία. Η κάτω τώρα;
Ε – Το ίδιο, είναι συνεχής. Εφόσον υπάρχει η τιμή του 5 εδώ (δείχνει την κουκίδα στο y_1) και μετά εδώ δεν υπάρχει (δείχνει το ανοιχτό κυκλάκι στο y_2) και μετά συνεχίζει άρα είναι συνεχής.

[Απόσπασμα 80]

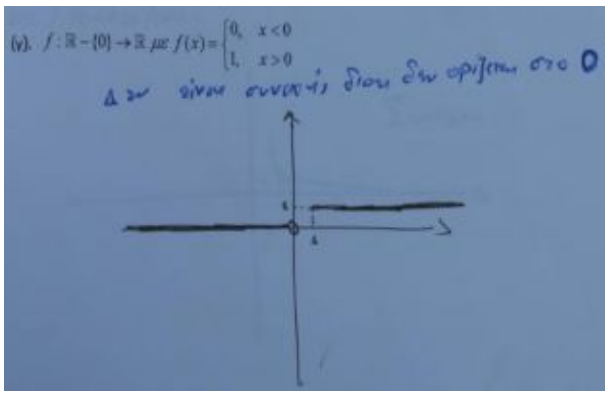
[Σχόλια στις 8 α και β]
Ερ - Ωραία. Πάμε τώρα στην επόμενη στην 8. Εδώ έχει μόνο γραφήματα. Κοιτάς τα γραφήματα και προσπαθείς να μου δικαιολόγησης αν κάθε συνάρτηση. είναι συνεχής ή όχι. Πες μου για την (α).Η πρώτη σου αίσθηση ποια ήταν όταν την είδες;
Α - Ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ - Ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί; …
Α - … στο 5…
Ερ - … ναι, γιατί;
Α - Λόγω αυτού εδώ πέρα του σημείου (δείχνει την κουκίδα) ότι παρουσιάζεται μία διακοπή.

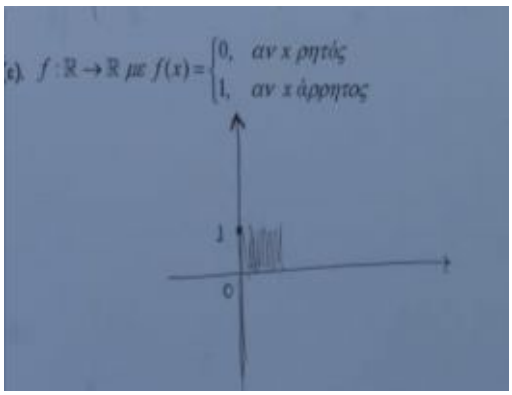
Ερ - Θα άλλαζε κάτι στην απάντησή σου αν στο σχήμα δεν υπήρχε καθόλου η κουκκίδα που αντιστοιχεί στο y_2;
Α - Και η υπόλοιπη εξακολουθούσε να ήταν έτσι;
Ερ - Ναι, ναι.
Α - Τότε θα έλεγα σίγουρα ότι είναι ασυνεχής.
Ερ - Ενώ τώρα έχεις κάποιο μικρό ενδοιασμό, γιατί;
Τι σκέφτεσαι ότι πιθανόν μπορεί να συμβαίνει τώρα;
Α - … ότι … την τιμή 5 δεν τη χάνει
Ερ – Α, ότι την τιμή 5 τελικά την πιάνει, κατάλαβα. Ότι γιαx =5 υπάρχει το αντίστοιχο y, αυτό εννοείς έτσι;
Α - Ναι, ναι.
Ερ - Άρα, αν θα έπρεπε να αποφασίσεις τι θα έλεγες;
Α - … (σκέπτεται) … όχι ασυνεχής νομίζω.
Ερ- Ασυνεχής, γιατί; Τι σε κάνει να αλλάξεις γνώμη;
Α – Ότι για x=5 η συνάρτηση, όχι η συνάρτηση, η τιμή της αντιστοιχεί στο y_2, που δεν σχετίζεται σε κάτι με τη γραφική παράσταση, γιατί αν για x=5 είχαμε κι άλλες τιμές, … όχι δε γίνεται να έχουμε και άλλες τιμές, γιατί τότε δεν θα ήταν συνάρτηση … (σκέπτεται) … Δεν ξέρω τι να πω αλλά μου φαίνεται ότι δεν είναι.
Ερ - Ωραία. Άρα λες ότι δεν είναι συνεχής. Σε χαλάει δηλαδή το γεγονός ότι η κουκίδα είναι μακριά από την τρύπα, κάτι τέτοιο;
Α - Ναι, είναι αυτό.
Ερ – Ωραία, τι λες για την επόμενη τη (β);
Α – Όχι.
Ερ – Όχι λες, γιατί;
Α - Γιατί το γράφημα αυτή τη φορά όχι μόνο παρουσιάζει μία … όχι … πήγα να πω ότι το γράφημα έχει μία … παρουσιάζει μία προφανή ασυνέχεια γιατί υπάρχει μεγάλη απόσταση, έτσι … ένα κενό αλλά αυτό δεν είναι και φοβερά διαφορετικό από το προηγούμενο με την κουκίδα γιατί το πρόβλημα στο σημείο x=5 εμφανίζεται, τώρα είτε με αυτή τη μορφή είτε με αυτή το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.
Ερ - Άρα λες και γι αυτήν όχι; Και σαν απάντηση τι θα έλεγες αν προσπαθούσες να το δικαιολογήσεις;
Α - Λόγω γραφήματος, του κενού δηλαδή.

[Απόσπασμα 81]

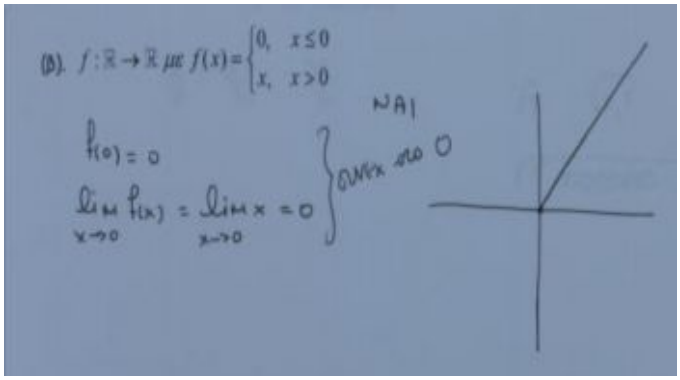
Ένα άλλο εύρημα που επιβεβαιώνει αρκετές από τις έρευνες που έχουν γίνει, αφορά την έννοια της συνάρτησης και την ικανότητα από μέρους των φοιτητών να την διαχειριστούν σωστά. Είδαμε σύντομα κάποιες έρευνες που αναφέρονται σε αυτό το πρόβλημα (Evangelidou et al., 2004; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1993k; Eisenberg, 1991; Σπύρου & Γαγάτσης, n.d.). Αν και αυτό δεν αποτελεί στοιχείο προς εξέταση στην παρούσα έρευνα, είναι χρήσιμο να δούμε μερικά αποσπάσματα που δείχνουν πόσο σοβαρά γνωστικά και επιστημολογικά εμπόδια μπορεί να δημιουργήσει. Είναι αξιοσημείωτο επίσης το γεγονός ότι υπήρχαν αρκετοί φοιτητές του μαθηματικού τμήματος και μάλιστα όχι πρωτοετείς που δυσκολεύονταν να κάνουν απλές γραφικές

παραστάσεις. Πολλές φορές όταν ο ερευνητής ζητούσε το γράφημα στην 7στ οι φοιτητές σχεδίαζαν το αντίστοιχο γράφημα της f(x) = 1/x είτε ολόκληρο, είτε μόνο τον θετικό κλάδο του. Ας δούμε και μερικά άλλα παραδείγματα:



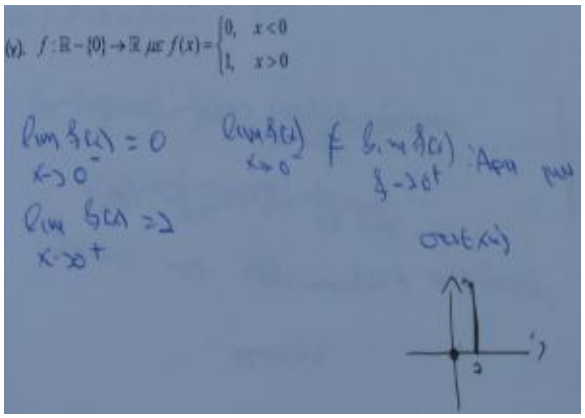


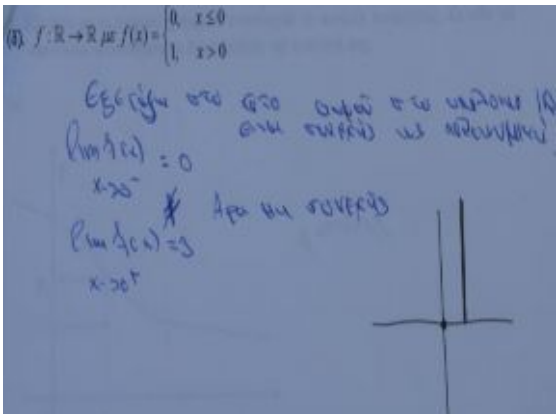
[Απόσπασμα 82]



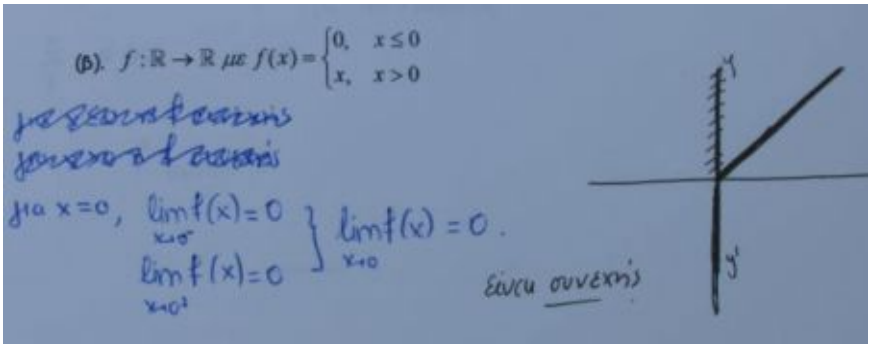
Ερ – Πολύ ωραία. Πάμε στην επόμενη;
Β – Ναι, αυτή εδώ … είναι συνεχής.
Ερ – Θέλεις να μου κάνεις και γι' αυτήν το γράφημα;
Β – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) …
Ερ – Ποιο κομμάτι ακριβώς είναι το γράφημά σου;
Β – Από την τέλεια και πάνω.

[Απόσπασμα 83]

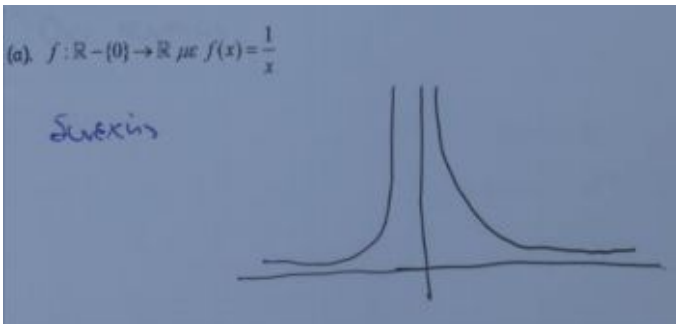




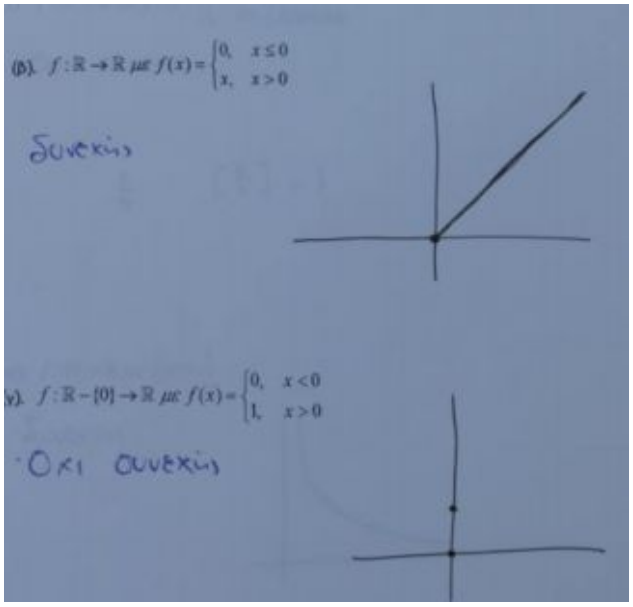
[Απόσπασμα 84]



[Απόσπασμα 85]



[Απόσπασμα 86]



[Απόσπασμα 87]

Η παρούσα έρευνα επιβεβαίωσε επίσης και τις έρευνες που εξετάσαμε και αναφέρονται στα εννοιολογικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και

φοιτητές στην εννοιολογική κατανόηση της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών και της μετάβασης από τους ρητούς στους άρρητους (Bagni, 1999; Pinto & Tall, 1996h; Pinto & Gray, 1995; Tall & Vinner, 1981; Tall & Schwarzenberger, 1978). Σχεδόν οι μισοί από τους φοιτητές που πήραν μέρος στη συνέντευξη αντιμετώπιζαν πρόβλημα στην προσπάθειά τους να ορίσουν τους ρητούς και τους άρρητους ενώ μερικοί δε δίσταζαν να πουν ότι δεν τους καταλαβαίνουν. Πολλοί πίστευαν ότι κάθε ρητός διαδέχεται έναν άρρητο κ.ο.κ.

Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά αποσπάσματα:

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Μάλιστα. Η (ε);
Κ - Αυτή δεν είναι σίγουρα συνεχής αλλά …
Ερ - …τη θυμάσαι καθόλου από τον Απειροστικό αυτή;
Κ - …η Dirichlet δεν είναι; Θυμάμαι ότι τη λέγαμε αυτή συνεχής. Γι' αυτό την έβαλα έτσι αλλά δεν μπορώ να το αποδείξω.
Ερ - Αν προσπαθούσες να κάνεις γραφική παράσταση, πώς πιστεύεις ότι περίπου θα ήταν;
Κ - Νομίζω από την πληρότητα, μου φαίνεται, έτσι όπως είναι εδώ, θα ήταν πολλές τελίτσες μαζί που θα φαίνονται σαν γραμμή αλλά είναι …ένας ρητός εδώ άλλος ένας ρητός λίγο πιο εδώ, κάπως έτσι, πολλές τελίτσες που θα φαίνονται σαν γραμμές και τώρα δεν μπορείς να πεις ότι ανάμεσα από ένα ρητό και έναν άλλο ρητό υπάρχει ένας άρρητος, υπάρχει κι άλλος ρητός ανάμεσα, δεν μπορείς να πεις ανάμεσα στις δύο τελίτσες πάει άλλη τελίτσα, απλά είναι, ξέρω εγώ, πως κάποια κενά υπάρχουν, τα κενά των ρητών ας πούμε είναι οι άρρητοι, οπότε … δεν μπορείς να πεις ότι είναι συνεχής, δεν είναι μία γραμμή, απλά φαίνεται σαν μία γραμμή επειδή είναι άπειροι, άπειροι οι ρητοί και άπειροι οι άρρητοι. Κάπως έτσι το σκέφτηκα.

[Απόσπασμα 88]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Η επόμενη η (ε) σου λέει τίποτα;
Ε - … Να την κάνω σαν γραφική παράσταση; Δεν μπορώ να την κάνω αυτό είναι το μόνο σίγουρο.
Ερ - Γιατί;
Ε - Δεν ξέρω, πάντα είχα ένα πρόβλημα με τους ρητούς και τους άρρητους. Οι ρητοί δεν είναι όταν διαιρούνται ακριβώς;
Ερ - Όταν διαιρούνται ακριβώς; Θέλεις να μου δώσεις ένα παράδειγμα για να καταλάβω ακριβώς τι εννοείς;
Ε – δηλαδή … ξέρω εγώ … το 2 και άρρητοι είναι αυτοί που έχουν και δεκαδικά στοιχεία, δηλαδή 1, κάτι ας πούμε.
Ερ - Δηλαδή όταν λέει ρητό εννοείς 1, 2, 3 … κ.λ.π;
Ε - … 2.5, 3.5, άρρητοι, ναι.

Ερ - Ωραία. Αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι σωστό, θα μπορούσες να κάνεις μία γραφική παράσταση;
Ε - … (κάνει την αριστερή γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω) … Θα πηγαίνει κάπως έτσι;
Ερ - Αν είναι έτσι τότε;
Ε – Τότε είναι συνεχής … αφού δεν διακόπτεται πουθενά αλλά …
Ερ – Αλλά;
Ε – Αλλά … δεν είμαι σίγουρη … γιατί … εκτός από το 1.5 υπάρχει και το 1.4 που πάλι θα πηγαίνει εδώ οπότε δεν πρέπει να είναι σωστή η γραφική παράσταση.
Ερ - Κι ανάμεσα στο 1.4 και στο 1.5 μπορείς να βρεις άλλο δεκαδικό;
Ε – το 1,45 που πάλι θα πάει στο 1… χμμμ … Άρα μήπως η γραφική παράσταση είναι κάπως έτσι; … (κάνει το δεύτερο διάγραμμα στα δεξιά) …
Ερ - Κατάλαβα τώρα τι λες. Και συνεχίζει στο ίδιο στιλ έτσι;
Ε – Ναι … (χαμογελάει) και τώρα αν αυτό είναι συνεχής ε; … Νομίζω ότι είναι συνεχής εφόσον εδώ έχει κενά αλλά εδώ είναι τελεία ουσιαστικά υποτίθεται ότι είναι συνεχής.
Ερ - Εννοείς δηλαδή ότι την έχει την τιμή;
Ε - Ναι, ακριβώς.

[Απόσπασμα 89]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Α - Όχι, νομίζω ότι σωστό είναι αυτό με τις κουκίδες γιατί ακόμα … το λέω έτσι … γιατί νομίζω ότι στα βιβλία είχα δει έτσι με κουκίδες.
Ερ - Εσύ όμως αν δεν έχεις βιβλία δεν έχεις τίποτα και θέλεις να την σχεδιάσεις, πώς θα την σχεδίαζες;
Α – Θα τη σχεδίαζα έτσι (δείχνει το γράφημα που έχει κάνει)
Ερ - Δηλαδή μια γραμμή που ανεβοκατεβαίνει έτσι;
Α - Ναι.
Ερ – Ωραία. Πες μου ένα ρητό.
Α – Ρητό … μμμ … ρητό … το 1/3.
Ερ – Το 1/3. Μπορείς να μου πεις τον αμέσως επόμενο ρητό;
Α - … όχι.
Ερ - … γιατί;
Α - … μπορώ; Εεε … ρητός … Μήπως έκανα λάθος για το 1/3; Τα έχω μπλέξει στο μυαλό μου. Λοιπόν, μισό λεπτό, έχουμε φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί, μιγαδικοί. Νομίζω ότι το 1/3 πρέπει να είναι ρητός.
Ερ - Ωραία αν υποθέσουμε ότι το 1/3 είναι ρητός μπορείς να μου πεις τον επόμενό του; … Ή και τον προηγούμενό του, δεν με νοιάζει.
Α – (μονολογεί) … ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι άρρητοι, αλλά αυτό δε σημαίνει ότι δεν μπορώ να βρω ένα ρητό. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορώ να βρω τον επόμενό του ρητό.
Δεν έχει αυτό να κάνει… δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι.
Ερ – Εντάξει, έναν άρρητο;
Α – (διστακτικά) Το π.
Ερ – Ο επόμενός του;
Α - Δεν … Αφού ή ούτως η άλλως τα ψηφία του παρουσιάζουν μία περιοδικότητα, μία απειρότητα …οπότε πώς μπορώ να βρω τον επόμενο;
Ερ - Περιοδικότητα ή απειρότητα ή και τα δύο;

Α - Όχι του π δεν έχουν περιοδικότητα, απειρότητα έχουν.
Ερ - Μπορείς να μου πεις κάποιων άρρητο που τα ψηφία του να έχουν περιοδικότητα;
Α - … το $\sqrt{2}$ *τα ψηφία του παρουσιάζουν; … όχι …*
Ερ – Δεν ξέρω
Α – Όχι, όχι, δεν ξέρω …

[Απόσπασμα 90]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Ωραία. Η (ε) σου λέει τίποτα, σου θυμίζει τίποτα;
Ι - … Αυτή βασικά δεν μπορεί να είναι συνεχής γιατί είναι 0, 1, 0, 1.
Ερ - Εννοείς μία γραμμή που ανεβοκατεβαίνει ή κουκίδες;
Ι - Κουκίδες βασικά.
Ερ - Εντάξει.

[Απόσπασμα 91]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα λες στην (ε) ασυνεχής. Θυμάσαι καθόλου γιατί το έβαλες αυτό;
Μ - …
Ερ - Σου λέει τίποτα σαν συνάρτηση; Αν ήθελες να κάνεις γι αυτήν ένα γράφημα πως νομίζεις ότι θα ήταν;
Μ - … Θα ήταν πολύ κοντά πάλι άλλα ... κάπως έτσι νομίζω (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ - … κουκίδες δηλαδή;
Μ - … ναι ....
Ερ - … ή γραμμή που ανεβοκατεβαίνει;
Μ - Όχι, νομίζω κουκίδες.
Ερ – Άρα θα είναι συνεχής ή όχι;
Μ – Ασυνεχής νομίζω.
Ερ – Μπορείς να μου πεις ένα ρητό αριθμό;
Μ - … εεε ξέρω εγώ … το 1.
Ερ – Το 1, ωραία. Ο επόμενος ρητός ποιος θα είναι;
Μ - …πολλοί
Ερ – Ο αμέσως επόμενος;
Μ - …
Ερ – …ή ο αμέσως προηγούμενος, δεν με νοιάζει.
Μ - … το 1,1 (πολύ διστακτικά) … δεν ξέρω …έχω κολλήσει …

[Απόσπασμα 92]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Μάλιστα. Να ρωτήσω τώρα κάτι διαφορετικό. Θέλω να μου γράψετε εκεί έναν ρητό που σας έρχεται στο μυαλό.
Μ – Α! Ρητό …
Ερ – Ναι, ρητό.

Λ – …ρητό; …δεν μου έρχεται κάτι …Βρε παιδιά ποιος λέγεται ρητός; … (γελούν και οι τρεις)
Μ – Εγώ αυτό πάντα το μπέρδευα, είχα ένα πρόβλημα με αυτό.
Ερ – Τι σου έρχεται στο μυαλό;
Μ – Να γράψω έναν άρρητο που είμαι σίγουρη; … (Γελούν και οι τρεις) …
Ερ – Εγώ θέλω έναν ρητό!
.....
Ερ – Και αφού γράψετε έναν ρητό, θέλω δίπλα να μου γράψετε τον αμέσως επόμενό του.
Λ – Τον μεγαλύτερο δηλαδή; Τον αμέσως μεγαλύτερο; …
[Λόγω αλλαγής κασέτας χάνονται δύο προτάσεις]
Ερ – Δηλαδή ποιοι είναι οι άρρητοι;
Μ – Ναι, και εγώ ότι οι άρρητοι είναι οι ρίζες στάνταρ. Γενικά έχουν οι ρητοί τη μορφή μ/ν και τα μ, ν ανήκουν στο $\mathbb{N}$;
Ερ – …ας υποθέσουμε ότι είναι σωστό αυτό …
Α – … ή στο $\mathbb{Z}$; … όχι …
Ερ – Ωραία, τι λέτε;
Μ – Για ποιο πράγμα;
Ερ – Δηλαδή, σαν ρητούς ποιους θα λέγατε;
(μιλούν σχεδόν ταυτόχρονα και οι τρεις)
Α – Αυτούς που έχουν τη μορφή μ/ν …
Λ – …αυτούς που έχουν τη μορφή κλάσματος …
Α – … ε; αλλά το ν ανήκει στο $\mathbb{N}$ νομίζω και το μ στο $\mathbb{Z}$; …
Μ – … το ένα είναι ένας ακέραιος στάνταρ και το άλλο ένας φυσικός …
Α – … το κάτω …
Μ – … το κάτω ναι.
Ερ – Αν είναι έτσι θέλετε τότε να δοκιμάσετε να γράψετε έναν τέτοιο ρητό; … (γράφουν στο ερωτηματολόγιό τους) … Και θέλω να μου γράψετε τώρα τον αμέσως επόμενό του …
Μ – Δηλαδή εγώ να γράψω το 2 σαν 4/2;
Ερ – Ό,τι θέλεις. Και θέλω τον αμέσως επόμενο.
Α – … Αφού είπαμε ότι το από κάτω πρέπει να είναι φυσικός … θα είναι το 1/3 ή όχι;
Ερ – Δεν …
Λ – (απευθύνεται στην Αφροδίτη) … Το 1/3 δεν είναι μικρότερο από το ½;
Α – Α! ναι βλακεία, είπαμε μεγαλύτερο, ε το 1.
Λ – (Σχολιάζοντας το δικό της) Είπαμε 4/3 άρα το 5/3.
Μ – Εγώ έβαλα το 2,1 μετά το 2.

[Απόσπασμα 93]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Μπορείς να μου πεις έναν ρητό;
Κ – Ρητό; Ε, όλα τα κλάσματα.
Ερ – Γράψε μου ένα.
Κ – Ε, το 2/3.
Ερ – Ωραία. Θέλω να μου γράψεις δίπλα του το αμέσως μεγαλύτερό του.
Κ – Δεν μπορώ να το βρω.
Ερ – Γιατί;
Κ – Το αμέσως μεγαλύτερό του;

Ερ – Ναι.
Κ – Ρητό;
Ερ – Ναι.
Κ – Του 2/3 … δεν μπορώ να σκεφθώ …
Ερ – Τι σε χαλάει; Πες μου τις σκέψεις σου.
Κ – Ρητό με τον ίδιο παρανομαστή;
Ερ – Όχι, όχι, δεν με ενδιαφέρει, απλά τον αμέσως μεγαλύτερό του. Ας πούμε στους φυσικούς λέμε ότι έχω πάρει το 5, και το 6 είναι το αμέσως μεγαλύτερό του. Εσύ τώρα στους ρητούς πήρες το 2/3. Θέλω να μου πεις τον αμέσως μεγαλύτερό του ρητό. Ή έστω και άρρητο, απλά τον αμέσως μεγαλύτερό του.
Κ – Μπορούμε να βρούμε τον αμέσως επόμενό του; … όχι … αν το 2/3 το κάνουμε δεκαδικό τότε ναι. Είναι 0,666… τότε ο επόμενος είναι 7 ας πούμε
Ερ – Άρα τον βρήκες;
Κ – Ναι, αλλά … ναι … είναι.
Ερ – Ωραία, γράψτο.
Κ – Πώς, σε κλάσμα;
Ερ – Ναι, όπως θέλεις. Και σαν δεκαδικό, όπως θέλεις.
Κ – Σαν δεκαδικό… (γράφει 0,666 και δίπλα γράφει 0.667) … (διστάζει) …
Ερ – Είναι ο αμέσως επόμενός του; Υπάρχει κάτι που σε κάνει να διστάζεις;
Κ – Γιατί συνεχίζουν τα ψηφία μέχρι το άπειρο άρα δεν μπορούμε να βρούμε με ακρίβεια τον αμέσως επόμενο.
Ερ – Μάλιστα. Δηλαδή τι θα απαντούσες στην ερώτηση; Αν έπρεπε να δώσεις μία απάντηση τι θα διάλεγες να πεις;
Κ – Ότι δεν μπορεί να βρεθεί με ακρίβεια, ξέρω εγώ;

[Απόσπασμα 94]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Κατάλαβα τι λες. Μπορείς να μου πεις ένα ρητό;
Ν – το ½.
Ερ – Μπορείς να μου πεις τον αμέσως μεγαλύτερό του;
Ν – Τον αμέσως μεγαλύτερο;
Ερ- Ναι.
Ν – εεε … το 3/2;…
Ερ – Είναι ο αμέσως μεγαλύτερος; Δεν θέλω απλά ένα μεγαλύτερο, θέλω τον αμέσως μεγαλύτερό του.
Ν – ...
Ερ – Μπορείς να γράψεις ότι θέλεις …
Ν – …
Ερ – Πες μου τι σκέφτεσαι; Τι σε χαλάει; Τι σε προβληματίζει; …
Ν – Αν πάρουμε το ½, ο επόμενος μεγαλύτερος δεν βρίσκεται ακριβώς δίπλα.
Ερ – Ποιον εννοείς ως μεγαλύτερο;
Ν – …
Ερ – Εννοείς το 0,6 που έχεις γράψει στο χαρτί (βλέπε επόμενο γράφημα);
Ν – Ναι, αλλά υπάρχει και το 0,51 ας πούμε.
Ερ – Α, ναι, και; Άρα, τι πιστεύεις;
Ν – … δεν ξέρω, ψιλομπερδεύτηκα …

[Απόσπασμα 95]

[Σχόλιο στην 7ε]:
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Αυτή εδώ η πονηρή; (δείχνω την (ε))
Μ – εεε, να κάνω το γράφημα;
Ερ – Άμα θέλεις.
Μ – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ – Λίγο περίεργο ε;
Μ – μμμ … τέλος πάντων … κάπως έτσι …
Ερ – Ποιες κουκίδες πιστεύεις ότι θα είναι πιο πολλές; Των ρητών ή των άρρητων;
Μ – Θα είναι ίσες.
Ερ – Θα είναι ίσες, Ο.Κ. Άρα έχεις κουκίδες επάνω και κουκίδες κάτω. Τι λες, θα είναι συνεχής;
Μ – Εννοώ θα είναι ίσες πηγαίνοντας προς το άπειρο. Ως προς το πλήθος θα είναι ίσες.
Ερ – Εντάξει, ναι. Τώρα τι πιστεύεις θα είναι συνεχής αυτή;
Μ – Αυτή … ας πούμε στο ½, τα πλευρικά όρια θα είναι ίσα, αλλά το f(1/2) εδώ είναι 1 … τα μπέρδεψα, τα πλευρικά 0 και το f(1/2) θα είναι 1. Άρα είναι ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής, μάλιστα. Ωραία, μπορείς τώρα να μου πεις ένα ρητό;
Μ – Το 2/5.
Ερ – Ο αμέσως επόμενος από αυτόν;
Μ – Το 3/5.
Ερ – Είναι ο αμέσως μεγαλύτερος;
Μ – Ναι.
Ερ – Υπάρχει πιθανότητα να μπορείς να βρεις άλλον;
Μ – Τι εννοείτε;
Ερ – Κάποιον μεγαλύτερο από το 2/5 αλλά μικρότερο από το 3/5 ρητό;
Μ – μμμ … ε …
Ερ – Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχει απλά ρωτάω.
Μ – το 2/5 … μμμ … ναι … είναι … μεγαλύτερο θέλουμε;
Ερ – Ναι, μεγαλύτερο, τον αμέσως μεγαλύτερο. Τον επόμενό του ρητό δηλαδή.
Μ – … Όχι, δεν υπάρχει ρητός άλλος, το 3/5 είναι.

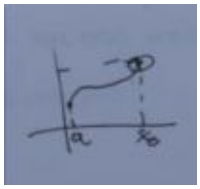
[Απόσπασμα 96]

Ένα ακόμα εύρημα που έφερε η έρευνα σε φως είναι η αδυναμία που αντιμετωπίζουν αρκετοί φοιτητές στο να ακολουθούν τους κανόνες της μαθηματικής λογικής. Η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία έχει αποδειχθεί ότι για πολλούς μαθητές και φοιτητές είναι ταυτόσημες έννοιες. Επίσης πολλοί σπουδαστές δεν αντιλαμβάνονται πώς η κατασκευή ενός κατάλληλου αντιπαραδείγματος ισοδυναμεί με απόδειξη για το λανθασμένο ενός ισχυρισμού. Στο ερώτημα 6 του ερωτηματολογίου υπήρχαν τρεις προτάσεις που οι φοιτητές καλούνταν να τις χαρακτηρίσουν ως σωστές ή λάθος. Η δεύτερη και η τρίτη είναι ουσιαστικά η μία αντίστροφη της άλλης. Η 6β αναφέρει: *«Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής»*, ενώ η 6γ λέει: *«Αν η συνάρτηση είναι συνεχής, τότε δεν διακόπτεται πουθενά το*

γράφημά της». Η έρευνα έδειξε ότι αρκετοί φοιτητές στην προσπάθειά τους να χαρακτηρίσουν κάποιες προτάσεις ως λανθασμένες, είτε κατασκεύαζαν λάθος αντιπαραδείγματα, είτε το παράδειγμα που έδιναν αντιστοιχούσε στην αντίστροφη πρόταση. Μερικές φορές μετά από συζήτηση αντιλαμβάνονταν το λάθος τους και άλλες φορές όχι.

Παραθέτουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα από τις συνεντεύξεις των φοιτητών ειδικά στα ερωτήματα 6 α, β και γ:

Ερ - …μάλιστα, μάλιστα, κατάλαβα, ωραία.
Τώρα σε αυτό, το (α), δεν έχω κάτι να ρωτήσω. Η δικαιολόγησή σου νομίζω είναι κατανοητή.
Τώρα στο β. Της κάποιο παράδειγμα; Τι σου ήρθε στο μυαλό και απάντησες λάθος;
Α – Δεν θυμάμαι τι μου ήρθε στο μυαλό και απάντησα λάθος.
Ερ – Τώρα που το ξανακοιτάζεις;
Α – Βασικά νομίζω ότι το βλέπω σε αντιδιαστολή με αυτό (δείχνει το γ). Δηλαδή νομίζω ότι δεν ισχύει και αντιστρόφως. Δηλαδή νομίζω ότι αυτό είναι το πιο λογικό. Αν είναι συνεχής τότε δεν θα διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.
Ερ – Και απλά πιστεύεις ότι δεν ισχύει το αντίστροφο;
Α – Πιστεύω ότι δεν ισχύει το αντίστροφο γιατί της πούμε μπορεί να είναι ...(διστάζει και διαβάζει ξανά την εκφώνηση). . .

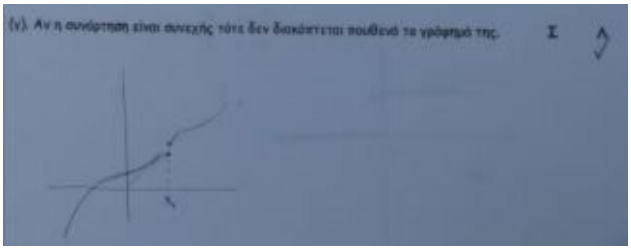


Ερ – Σου έρχεται κάποιο γράφημα το μυαλό; Σου ήρθε κάτι συγκεκριμένο στο μυαλό και το σκέφθηκες αυτό;
Α – Ναι μπορεί να είναι… (αρχίζει να σχεδιάζει στο χαρτί το γράφημα που φαίνεται δίπλα). Για παράδειγμα να είναι ανοιχτό στο x_0 και να θες να εξετάσεις τη συνέχεια στο x_0. Τότε αυτή, αν εξετάσουμε τη συνέχεια στο x_0, δεν είναι συνεχής στο x_0.
Ερ – Γιατί;
Α – Εκτός του ότι δεν είναι σημείο του πεδίου ορισμού, αφού είναι ανοιχτό, αν θέλουμε να το εξετάσουμε πιο μαθηματικά, της πούμε, και πάρουμε τα πλευρικά όρια τότε το $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *υπάρχει και μπορούμε να το βρούμε, παίρνει κάποια τιμή, ενώ το* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *δεν υπάρχει καθόλου και της το* $f(x_0)$ *δεν υπάρχει καθόλου. Ωστόσο της πούμε το γράφημα της συνάρτησης είναι συνεχόμενη γραμμή. Δηλαδή το σκέφτηκα έτσι απλά, να έχει μικρή τρυπούλα εδώ πέρα. Δηλαδή το σκέφτηκα, αν το βάλουμε να ορίζεται στο [α, $χ_0$] είναι συνεχής. Ενώ στο [α, $χ_0$] δεν είναι συνεχής. Εγώ με αυτή την έννοια το σκέφτηκα εκείνη την ώρα.*
Ερ – κατάλαβα, ωραία.

[Απόσπασμα 97]

Ερ – Μάλιστα. Στη (β) τώρα λες ότι είναι λάθος. Της κάποιο αντιπαράδειγμα στο μυαλό σου;
Γ – Την 1/x.
Ερ – Μάλιστα. Τι γράφημα έχει;
Γ – Νομίζω πως πάει κάπως έτσι … (σχεδιάζει το παραπάνω γράφημα) … Πάει κάπως έτσι; … δεν είμαι σίγουρος …
Ερ – Και γιατί αυτό το θεωρείς αντιπαράδειγμα;
Γ - … Γιατί δεν ορίζεται στο 0 … αλλά αυτό δεν είναι … όχι δεν είναι αντιπαράδειγμα, είναι λάθος … γιατί μπορεί να έχω μία συνάρτηση με δύο κλάδους και να τη θεωρώ συνεχή. Αλλά αυτό δεν είναι σωστό, δεν νομίζω ότι είναι σωστό.
Ερ – Το αντιπαράδειγμα που χρησιμοποίησες εννοείς;
Γ – Ναι, ναι.
Ερ – Η απάντηση που της δώσει;
Γ – Νομίζω ότι έχω κάνει λάθος.
Ερ – Δηλαδή νομίζεις ότι κανονικά πρέπει να βάλεις το Σωστό;
Θα το άλλαζες δηλαδή τώρα που το ξαναβλέπεις;
Γ - … Όχι θα το άφηνα της είναι. Δεν μπορώ να βρω αντιπαράδειγμα αλλά αυτό μου κάνει για λάθος … νομίζω ότι είναι λάθος.
Ερ – Ωραία. Ενώ το επόμενο νομίζεις ότι είναι σωστό έτσι; Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της έτσι;
Γ – Ναι, ναι.

[απόσπασμα 98]

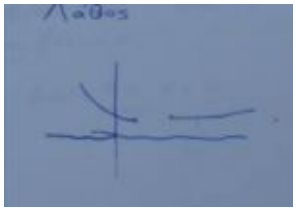


Ερ – Ωραία. Το (β);
Α – Είναι σωστό.
Ερ – Το (γ);
Ε - … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … Είναι Λάθος γιατί έχω την εντύπωση ότι υπάρχουν κάποιες συναρτήσεις στις οποίες είναι κάπως έτσι … αλλά είναι αλήθεια αυτό ; …
Ερ – Για πες μου ξανά τι μου είπες
Α – Λοιπόν, νομίζω ότι όταν κάναμε τον ορισμό, τις γραφικές παραστάσεις και όλα αυτά, ότι υπάρχουν κάποιες συναρτήσεις που παρουσιάζουν κάτι σαν αυτό (δείχνει το σχήμα)
Ερ - Μισό λεπτό για να καταλάβω. Έχεις βάλει κλειστές κουκίδες και στα δύο σημεία έτσι;
Α - Ναι
Ερ - Που αντιστοιχούν στο ένα σημείο x_0 έτσι;
Α - Ναι.
Ερ - Ωραία. Είναι συνεχής αυτή;
Α – Όχι, δεν είναι … θα την πω.
Ερ - Κάτσε, μισό λεπτό. Ψάχνεις για ένα αντιπαράδειγμα έτσι δεν είναι;
Α - Ναι.
Ερ - Λέει 'αν είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται το γράφημα'. Άρα εσύ βρίσκεις μία συνεχή που όμως να διακόπτεται, καταλαβαίνω καλά;

Α – Ναι.
Ερ - Είναι αυτό το γράφημα που έκανες μία τέτοια συνάντηση;
Α - … όχι, λάθος είναι αυτό που έκανα, Αλλά δεν μπορώ να σκεφτώ ένα ακριβές παράδειγμα με τύπους κ.λ.π.
Ερ - Δεν ενδιαφέρει κάποιος τύπος. Πιστεύεις ότι αυτό το γράφημα αντιπροσωπεύει ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα για μία συνάρτηση συνεχή που όμως διακόπτεται;
Α - Όχι. Αντικρούεται λίγο με αυτό που είπα πιο πριν για το τι θεωρώ συνεχή συνάρτηση και το πώς έπρεπε να είναι το γράφημα.
Ερ – Γιατί; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό; Θυμίσω ότι όταν σε ρωτάω κάτι δεν σημαίνει ότι κάνεις λάθος απλά θέλω να δω πώς σκέπτεσαι.
Α - Μου έρχεται … γιατί όπως είπα και πριν όταν ακούμε για τη συνέχεια μιας συνάρτησης το συσχετίζουμε κατά κάποιον τρόπο με μία μη διακεκομμένη γραμμή που αντιπροσωπεύει τη γραφική της παράσταση. Τώρα εδώ είναι σαν να το αντικρούω …
Ερ - …κατάλαβα.
Α - Απλά νομίζω ότι είχα δει και κάτι τέτοιο χωρίς να είμαι σίγουρη τελικά αν αυτό αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση.
Ερ - Κατάλαβα. Άρα αν αυτό αντιστοιχεί σε μία συνεχή συνάρτηση τότε είναι ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα έτσι;
Α - Ναι.

[Απόσπασμα 99]

Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Τώρα στο επόμενο το 6(α) λες ΄Λάθος’, έτσι; Γιατί το βάζεις ‘Λάθος’;
Μ – Γιατί απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Στο επόμενο λες λάθος. Γιατί;
Σου έρχεται κάτι ανάποδα στο μυαλό, δηλαδή κάποιο αντιπαράδειγμα;
Μ - Ναι γιατί άμα έχουμε κάποιο πεδίο ορισμού…



Ερ - … μπορείς να γράψεις ότι θέλεις, ή να κάνεις όποιο σχήμα νομίζεις.
Μ – … (κάνει το διπλανό γράφημα) … Να για παράδειγμα μπορεί να είναι όπως αυτή, να είναι συνεχής από το μείον άπειρο μέχρι τότε 1 ας πούμε, και μετά από το 3 μέχρι το συν άπειρο αλλά παρόλο που διακόπτεται θα είναι συνεχής.
Ερ – Κατάλαβα, αυτό είναι κατάλληλο αντιπαράδειγμα;
Μ - Ναι, έτσι νομίζω.
Ερ - Για κοίταξε λίγο και το επόμενο. Μήπως αυτό που μου λες είναι κατάλληλο αντιπαράδειγμα για το (γ);
Μ - … (κοιτάζει προσεκτικά και τα δύο) …Α! ναι. Σωστά. Αυτό είναι αντιπαράδειγμα για το επόμενο. Άρα το επόμενο πρέπει να είναι λάθος. Ενώ το (β) είναι σωστό. Αν δεν διακόπτεται πουθενά τότε βέβαια είναι συνεχής.

[Απόσπασμα 100]

Ερ – Μάλιστα. Το (β) τώρα, αν το γράφημα της συνάρτησης δεν διακόπτεται, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Τι λες Μαρία;
Μ – … Σωστό.

Λ – Και εγώ σωστό λέω.
Α - Εγώ θυμάμαι από το Λύκειο που κάναμε τις γραφικές παραστάσεις, που κάνανε μία αιχμή ας πούμε κάναμε αυτό το πράγμα … (δείχνει το γράφημα που έχει κάνει) … τότε σε εκείνο το σημείο λέγαμε ότι δεν είναι παραγωγήσιμη άρα δεν είναι και συνεχής Αλλά αυτή είναι μία συνεχής γραμμή όμως δεν είναι παραγωγήσιμη άρα δεν είναι και συνεχής. Τώρα δεν θυμάμαι καλά αλλά δε λέγαμε εδώ ότι δεν είναι παραγωγήσιμη; Εδώ δεν είναι παραγωγήσιμη γιατί δεν ορίζεται η παράγωγος άρα δεν είναι και συνεχής κάπως έτσι το λέγαμε.
Ερ - Ωραία. Κατάλαβα τι λες. Το (γ) τώρα;
Α - Όχι, αυτό δεν είναι απόλυτο. Ας πούμε μπορεί να κάνει έτσι … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται στο έντυπο παραπάνω) … και μετά να κάνει έτσι … κάπως έτσι το κάναμε.
Ερ - Αυτή τι είναι δηλαδή;
Α - Συνεχής.
Ερ - Αλλά παρόλα αυτά; …
Α - … διακόπτεται. Άρα κακώς το έχω βάλει λάθος, σωστό πρέπει να είναι.
Ερ - Κάτσε τώρα γιατί με μπέρδεψες. Σωστό η λάθος;
Α - Καθίστε μισό λεπτό. Μπερδεύτηκα τώρα. Απλά τώρα δεν μπορώ να προσδιορίσω την απάντηση σε σχέση με την ερώτηση. Μπορεί να διακόπτεται, άρα είναι αυτή σωστή η λάθος;
… (Αναρωτιέται) …
Μ, Λ – Λάθος, λάθος (της απαντούν οι άλλες δύο κοπέλες)
Α – Ο.Κ! Λάθος!
Α - Και εγώ λάθος το έχω βάλει, θυμάμαι είχαμε κάνει κάτι αντίστοιχο στον Απειροστικό Ι αλλά δεν θυμάμαι το αντιπαράδειγμα ...
Ερ - … δεν ζητώ κάποιο συγκεκριμένο τύπο …
Α - … όχι, όχι, το ξέρω αλλά θυμάμαι ότι το είχαμε κάνει αλλά δεν θυμάμαι τώρα τη δικαιολόγηση.
Ερ - Δηλαδή εννοείς ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής αλλά παρόλα αυτά να διακόπτεται, έτσι;
Α - Ναι. Ναι.
Ερ – Κι εσύ Μαρία;
Μ - Και εγώ συμφωνώ, είναι λάθος.
Ερ - Έχεις μήπως κάτι στο μυαλό; Σου ήρθε κάποιο παράδειγμα κατά νου όταν το συμπλήρωνες;
Μ - Όχι αλλά θυμάμαι ότι το είχα απορία όταν κάναμε μάθημα και είχα ρωτήσει τα κορίτσια και μου είχανε πει ότι εκείνη τη στιγμή το είχε πει ο καθηγητής αλλά δεν το είχα προσέξει και έτσι μου έμεινε.

[Απόσπασμα 101]

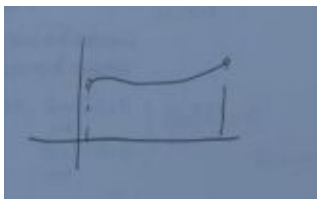
Ερ – Μάλιστα. Εδώ τώρα στην επόμενη έχεις βάλει λάθος. Δηλαδή εγώ λέω ότι δεν απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού άρα εσύ λες ότι απαιτείται;
Λ – Ναι.
Ερ – Απαιτείται, μάλιστα … γιατί;
Λ – Γιατί από το Λύκειο έχω στο μυαλό μου ότι πρέπει να πάρουμε τα πλευρικά όρια και αυτά πρέπει να υπάρχουν.
Ερ – Δηλαδή για να υπολογίσεις ένα όριο πρέπει …

Λ – … βασικά για να βρω το $f(x_0)$ και να είναι ίσο με τα όρια.
Ερ – Α, για να βρεις το $f(x_0)$. Για να βρεις κάποιο όριο σε ένα σημείο θα πρέπει αυτό το σημείο να ανήκει στο πεδίο ορισμού;
Λ – Ναι.
Ερ – Άρα και για να βρεις τα όρια χρειάζεται το σημείο να ανήκει στο πεδίο ορισμού, ναι;

Λ – Ναι.
Ερ – Μάλιστα. Στη δεύτερη τώρα έχεις επιλέξει το λάθος και έχεις βάλει και σαν παράδειγμα …
Λ – … ναι την 1/x. [το γράφημα φαίνεται δίπλα]. *Γιατί αυτή δεν είναι συνεχής στο 0.*
Ερ – Και το γράφημά της είναι αυτό που της κάνει, έτσι;
Λ – Ναι, ναι. Και η επόμενη είναι σωστή, αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε βέβαια δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.

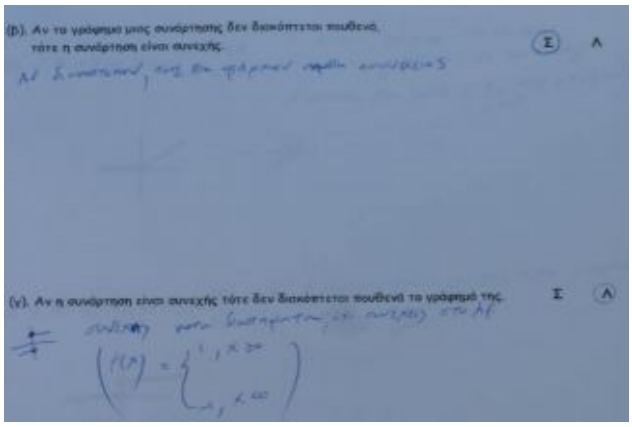
[Απόσπασμα 102]

Ερ – Ωραία. Αυτό τώρα το (β) γιατί το λες Λάθος;
Κ – Λοιπόν, εγώ τώρα θυμάμαι από το σχολείο, τελείωσε έτσι πρακτικά, ότι πρέπει να έχουμε κλειστά άκρα σε μια γραμμή για να είναι συνεχής.
Ερ – Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα στο μυαλό;



Κ – Ναι … (κάνει το γράφημα που φαίνεται) … εδώ έχουμε ανοιχτά κυκλάκια άρα δεν είναι συνεχής.
Ερ – Α, μάλιστα. Λες λοιπόν ότι αν και δεν διακόπτεται δεν είναι συνεχής γιατί έχει ανοιχτά άκρα;
Κ – Ναι.
Ερ – Ωραία, τη (γ) τώρα τη λες Λάθος, γιατί;
Κ – Πάλι αυτό είναι.
Ερ - Περίμενε. Εδώ τώρα λέμε ότι αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.
Κ – Ωραία.
Ερ – Και λες ότι είναι λάθος αυτό.
Κ – Ναι … όχι σωστό είναι.
Ερ – Δηλαδή θα το άλλαζες;
Κ – Ναι.

[Απόσπασμα 103]



Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Στο (β) λες σωστό, γιατί αν διακοπτόταν θα υπήρχαν σημεία ασυνέχειας. Δηλαδή αν το γράφημα δεν διακόπτεται τότε είναι συνεχής.
Η – Ναι, ισχύει αυτό, δεν ισχύει;
Ερ – Δηλαδή εννοείς ότι εφόσον το γράφημα δεν διακόπτεται είναι συνεχής, έτσι; Ωραία.

Η – Ναι, αυτή την εντύπωση έχω.
Ερ - Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχεις κάποιο λάθος, ρωτάω απλά για να σιγουρευτώ ότι έχω καταλάβει τι εννοείς εδώ στο σχόλιο που κάνεις.
Η – … (ξαναδιαβάζει την απάντησή του) … εεε … όχι απαραίτητα, δεν είναι άκρως σωστό … γιατί αν πάρουμε την f(x)=x στο (1, 2) και αφαιρέσουμε στο 3/2 την τιμή, την αφαιρέσουμε τελείως, δεν την ορίσουμε δηλαδή καθόλου εκεί, τότε διακόπτεται αλλά είναι συνεχής στα επί μέρους διαστήματα, έτσι; Αυτό εννοούσα τώρα δεν ξέρω αν το λέω καλά.
Ερ – Πολύ καλά το λες, το κατάλαβα. Απλά νομίζω ότι αυτό το αντιπαράδειγμα ταιριάζει πιο πολύ στην επόμενη.
Η – …(διαβάζει τη (γ)) …
Ερ – Νομίζω ότι αυτό που λες ταιριάζει εδώ. Παρόλο που διακόπτεται το γράφημα της είναι συνεχής.
Η – Ναι, σωστό. Μπορεί να διακόπτεται αλλά να είναι συνεχής στα κομμάτια, όχι σε όλο. Και εδώ στο παράδειγμα που έχω γράψει έπρεπε να είχα στο πρώτο $x<0$, όχι $x \leq 0$
[Απόσπασμα 104]

Φαίνεται επίσης να απορρίπτονται δύο από τις υποθέσεις που είχαν διατυπωθεί. Αν και υπήρχαν αρκετοί φοιτητές μη πρωτοετείς, δεν φαίνεται να έχουν ουσιαστικά βαθύτερη κατανόηση από τους πρωτοετείς φοιτητές. Είναι χαρακτηριστικό ότι το μοναδικό άτομο που μπορεί να λεχθεί ότι κινείτο στο τυπικό – αξιωματικό κόσμο του Tall ήταν πρωτοετής ενώ αρκετοί από τους μη πρωτοετείς είχαν σοβαρό έλλειμμα εννοιολογικής κατανόησης. Συνολικά θα μπορούσε να λεχθεί ότι ο βαθμός κατανόησης δεν φαίνεται να είναι ανάλογη του έτους σπουδών.
Και η υπόθεση ότι οι φοιτητές θα μπορούσαν να αντιληφθούν ότι ο ε-δ ορισμός της συνέχειας είναι κατ' ουσίαν είναι ισοδύναμος με τον ορισμό του Λυκείου δεν φαίνεται να γίνεται αποδεκτή. Οι περισσότεροι πίστευαν ότι οι δυο ορισμοί είναι άσχετοι αλλά και όσοι πίστευαν ότι είναι ισοδύναμοι, δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν το γιατί ή θεωρούσαν ότι ο ορισμός του πανεπιστημίου είχε 'ακατανόητα' σύμβολα για να μοιάζει πιο επιστημονικός!

Όλα τα παραπάνω είναι μόνο μερικά από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Η ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων μπορεί να αποκαλύψει πολλά για τις αντιλήψεις των φοιτητών. Τα επιστημολογικά εμπόδια που προκύπτουν κατά το χειρισμό του ορίου, οι δυσκολίες που ανακύπτουν στη χρήση των συμβόλων, η αδυναμία των φοιτητών να εκφραστούν χρησιμοποιώντας την κατάλληλη γλώσσα από

τον κόσμο των τυπικών – αξιωματικών μαθηματικών ήταν έκδηλα στη διάρκεια των συνεντεύξεων. Ήταν επίσης έκδηλη η απέχθεια με την οποία αρκετοί φοιτητές αντιμετώπιζαν τη θεωρία. Αν και οι περισσότεροι ήταν φοιτητές για πάνω από ένα χρόνο, δεν ένοιωθαν ότι έπρεπε να δίνουν προσοχή στη θεωρία ή θεωρούσαν ότι απλά τα σύμβολα έχουν μπει για να κάνουν τη θεωρία πιο 'επιστημονική'!
Η περαιτέρω ανάλυση των διαλόγων μπορεί να αποκαλύψει ακόμα περισσότερα για τις πεποιθήσεις και τις αντιλήψεις των φοιτητών.

Συνολική Αποτίμηση των 27 απλών ερωτηματολογίων

Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα ουσιαστικά επαναλαμβάνονται και στα 27 ερωτηματολόγια των φοιτητών που δεν πέρασαν από τη διαδικασία των συνεντεύξεων. Μόλις 7 (επτά) από αυτούς γνώριζαν το ε-δ ορισμό της συνέχειας ενώ άλλα 4 άτομα προσπάθησαν – λανθασμένα – να τον γράψουν.

Στο ερώτημα 5 αρκετά άτομα δεν απάντησαν καθόλου. Όσα άτομα έδωσαν κάποια απάντηση, στην πλειοψηφία τους δήλωσαν ότι η συνέχεια είναι ισοδύναμη με τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Για άλλη μια φορά η κλασσική παρανόηση κάνει την εμφάνισή της. Παραθέτουμε μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις:

- 'Η γραφική παράσταση της f είναι μια ενιαία ευθεία γραμμή'
- 'Η f θα είναι μια γραμμή σε ένα διάστημα χωρίς κενά'
- 'Το σκαρίφημά της είναι μη διακοπτόμενη γραμμή'
- 'Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και επίσης είναι μια συνεχής γραμμή'
- 'Αν σχεδιάσω το γράφημα, δεν θα υπάρχουν κενά'
- 'Το γράφημα δεν διακόπτεται πουθενά'
- 'Η γραφική παράσταση δεν διακόπτεται'

Είναι χαρακτηριστικό να αναφέρουμε ότι η παραπάνω πεποίθηση των φοιτητών είναι τόσο ισχυρή ώστε αρκετοί από αυτούς χρησιμοποιούν τις παρόμοιες εκφράσεις και για να δικαιολογήσουν κάποια γραφήματα στη συνέχεια του ερωτηματολογίου. Ελάχιστα άτομα κατέφευγαν έστω και στον ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο. Αντίθετα απαντούσαν με τρόπο που μοιάζει με τις παραπάνω εκφράσεις.

Κάποια άτομα επίσης συνδέουν τη συνέχεια με την ύπαρξη τιμής y για κάποια τιμή x. Παραθέτουμε και εδώ κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις:

- ‘Η f ορίζεται σε όλα τα σημεία του συνόλου που η f είναι συνεχής’
- ‘Για κάθε x υπάρχει ένα f(x)’
- ‘Είναι συνεχής όταν για όλα τα x υπάρχει ένα f(x)’

Στο ερώτημα 6α τώρα, 7 (επτά) άτομα δήλωναν ότι το σημείο στο οποίο εξετάζουμε τη συνέχεια δεν απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού. Στη δήλωση 6β τώρα, 15 (δεκαπέντε) άτομα χαρακτήρισαν ως ‘Σωστή’ τη φράση ότι αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Στο ερώτημα 6γ τέλος, 17 (δεκαεπτά) άτομα χαρακτήρισαν ως ‘Σωστή’ τη δήλωση ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της.

Στο ερώτημα 7α στη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, από τους 22 που την απάντησαν, οι 14 (δεκατέσσερις) τη χαρακτήρισαν ως μη συνεχή ενώ το αντίστοιχο γράφημα 8γ, 15 (δεκαπέντε) από τους 25 που απάντησαν το χαρακτήρισαν ως συνεχές. Για το διάγραμμα 8α, από τα 26 άτομα που έδωσαν απάντηση, τα 8 (οκτώ) τη χαρακτήρισαν ως συνεχή και την ίδια απάντηση έδωσαν 9 (εννέα) άτομα για το γράφημα 8β. Για το γράφημα 8στ τέλος, απάντησαν 25 άτομα και από αυτούς μόνο 5 (πέντε) τη χαρακτηρίζουν ως συνεχή. Ένας φοιτητής μάλιστα, ένωσε τις κουκίδες μεταξύ τους και σημείωσε δίπλα: «τώρα είναι, πριν δεν ήταν». Ήταν φανερό ότι για τη συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών η συνέχεια σε μεμονωμένα σημεία ήταν αδιανόητη.

Και εδώ παρουσιάστηκε τέλος, το φαινόμενο να υπάρχουν αντιφατικές απαντήσεις που υποδήλωναν την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης. Υπήρχαν λανθασμένα γραφήματα, λανθασμένες απόψεις για το όριο, ενώ συχνά τα λάθη που εμφανίζονταν έδειχναν άγνοια ακόμα και βασικών αρχών της ανάλυσης.

V. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Οι απαντήσεις των φοιτητών δεν παρουσιάζουν μεγάλες αποκλείσεις. Γενικότερα φαίνεται πώς υπάρχει ένα έντονο πρόβλημα ακριβούς κατανόησης γύρω από την έννοια της συνέχειας. Οι περισσότεροι φοιτητές λειτουργούν και σκέπτονται σε επίπεδο διαδικασιών χωρίς να έχουν περάσει σε εσωτερίκευση του νοήματος του ορισμού της συνέχειας. Δεν έχουν δημιουργήσει τις κατάλληλες αναπαραστάσεις ενώ πολύ συχνά η εικόνα της έννοιας που έχουν κατά νου είναι διαφορετική από τον αντίστοιχο ορισμό.

Συμπεράσματα

Σκοπός της έρευνας ήταν να μελετήσει τις δυσκολίες που παρουσιάζει η κατανόηση της έννοιας της συνέχειας, ιδιαίτερα στους φοιτητές του μαθηματικού τμήματος μέσα από τα θεωρητικά πλαίσια της θεωρίας των 3 κόσμων του Tall, της θεωρίας της υποστασιοποίησης της Sfard, της θεωρίας APOS του Dubinsky και των συνεργατών του καθώς και του πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής των Vosniadou και Verschaffel.

Ζητούμενο ήταν να διερευνηθεί το κατά πόσον επαληθεύονται οι διάφορες έρευνες που έχουν γίνει και αφορούν την έννοια της συνέχειας, καθώς και οι ιδιαίτερες δυσκολίες που παρουσιάζει η διδασκαλία της. Ο ερευνητής ενδιαφερόταν επίσης να εξετάσει το κατά πόσον ο φορμαλισμός του πανεπιστημίου βοηθούσε στο να διορθωθούν οι όποιες παρανοήσεις φέρουν μαζί τους οι φοιτητές από το σχολείο.

Όλα τα παραπάνω έπρεπε να ανιχνευθούν κυρίως μέσα από τις 35 ημιδομημένες συνεντεύξεις που διενεργήθηκαν στο μαθηματικό τμήμα του πανεπιστημίου Αθηνών. Η ανάλυση όμως ενός διαλόγου και η ειδικά η εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων από αυτόν είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία που τις περισσότερες φορές είναι επικίνδυνη και ίσως και ατελέσφορη. Η ανθρώπινη σκέψη ήταν και συνεχίζει να είναι εν πολλοίς ένα μαύρο κουτί που το κλειδί του προς το παρόν το κρατάει ίσως μόνο ο Δημιουργός του ανθρώπου. Ο τρόπος με τον οποίο ο ανθρώπινος νους οργανώνει τη

γνώση σε νοητικά – γνωστικά σχήματα αποτελεί αντικείμενο διερεύνησης της γνωστικής ψυχολογίας και όχι μόνο (Βοσνιάδου, 2005; Βοσνιάδου & Brewer, 1999; Dehaene, 1997; Dewey, 1997). Η ανάλυση ενός διαλόγου περιλαμβάνει τη διερεύνηση των φράσεων και των λέξεων και τη διάκριση ανάμεσα στο *σημαίνον* και το *σημαινόμενο* (Van Dormolen, 1991).

Το συμβολικό σύστημα που ονομάζεται *Γλώσσα* διακρίνεται σε τέσσερις επί μέρους τομείς (Βοσνιάδου, 2005):

(α). Ο *Φωνολογικός τομέας* που είναι το μέρος της γλώσσας που περιγράφει τους κανόνες για τη συναρμολόγηση των φθόγγων σε λέξεις.

(β). Ο *Σημασιολογικός τομέας* που περικλείει τις έννοιες καθώς και το σύστημα κανόνων για τη συναρμολόγηση των εννοιών.

(γ). Ο *Συντακτικός τομέας* που περικλείει τους κανόνες μέσω των οποίων γίνεται η συναρμολόγηση των λέξεων σε προτάσεις που να μην παρουσιάζουν συντακτικές ανωμαλίες και τέλος,

(δ). Ο *Πραγματολογικός τομέας* που καθορίζει τους κανόνες χρήσης της γλώσσας στο πλαίσιο επικοινωνίας. Η γλώσσα δεν μπορεί να μπορεί να ερμηνευθεί ανεξάρτητα από το εξωγλωσσικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η επικοινωνία. Η πραγματολογία έχει ως θέμα μελέτης της τους κανόνες που διέπουν τη γλωσσική επικοινωνία και τους τρόπους με τους οποίους οι ομιλητές προσαρμόζουν το λόγο τους στις ανάγκες του συνομιλητή τους και στο εξωγλωσσικό περιβάλλον.

Στο φως που ρίχνει η προηγούμενη πολύ σύντομη αναφορά, βλέπουμε ότι η ανάλυση ενός μαθηματικού διαλόγου δεν μπορεί να σταθεί μόνο στην άτεγκτη ερμηνεία των λέξεων και γι’ αυτό ο ερευνητής δεν θα επιχειρήσει κάτι τέτοιο (Ernest, 1995). Σκοπός δεν είναι να γίνει απόπειρα εξαγωγής συμπερασμάτων διατυπωμένα ως θέσφατα, αλλά απλά να γίνει μια προσπάθεια ερμηνείας των αποτελεσμάτων της έρευνας που ήδη έχουν παρουσιασθεί. Οι ερμηνείες που θα παρουσιαστούν δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες και σίγουρα υπόκεινται στη βασική αρχή της υποκειμενικότητας. Η ανάλυση ενός διαλόγου μπορεί να αποκαλύψει αρκετές παρανοήσεις αλλά και να δημιουργήσει αρκετές άλλες. Σε μια συνέντευξη έρευνας, ο ερευνητής καλείται να ερμηνεύσει – αποκωδικοποιήσει τα μηνύματα του υποκειμένου. Αρκετές έρευνες δείχνουν ότι είναι εύκολο ο ερευνητής να ‘μεταφράσει’ με λάθος τρόπο τα λεγόμενα

του υποκειμένου, γι' αυτό και είναι ιδιαίτερα σημαντικό να διατυπώνει προσεκτικά τα συμπεράσματά του, ιδιαίτερα όταν αυτά προέρχονται από μια απομαγνητοφωνημένη συνέντευξη (Van Dormolen, 1991; Mellin-Olsen, 1991).

Ένα πρώτο γενικό συμπέρασμα έχει να κάνει με την επιβεβαίωση των ευρημάτων των Tall και Razali (1993d), σύμφωνα με τους οποίους φαίνεται οι πιο ικανοί και ευέλικτοι φοιτητές να κινούνται με μεγαλύτερη άνεση ανάμεσα στη διεργασία και την έννοια και μάλιστα πολύ ταχύτερα από τους άλλους. Πράγματι, οι φοιτητές που έδιναν τις πιο σωστές απαντήσεις ήταν αυτή που διέθεταν διεργασιοεννοιολογική σκέψη, αντίθετα με αυτούς που χρησιμοποιούσαν διαδικαστική σκέψη. Η πρώτη ομάδα φαινόταν να παίρνει κριτικές αποφάσεις, να σκέπτεται επαγωγικά και παραγωγικά και έτεινε να δικαιολογεί σαφέστερα τις επιλογές που έκανε. Η δεύτερη ομάδα αντίθετα, στεκόταν μόνο σε λειτουργικό επίπεδο, δεν μπορούσε να διαχειριστεί δομικά τα σύμβολα και τις περισσότερες φορές δυσκολευόταν σοβαρά όταν έπρεπε να αιτιολογήσει τις επιλογές της.
Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της Sfard (1991) είναι φανερό ότι τα λειτουργικά μαθηματικά προηγούνται των δομικών. Η πλειοψηφία των φοιτητών που πήραν μέρος στην έρευνα είχαν την ικανότητα να διαχειριστούν λειτουργικά τα σύμβολα, να υπολογίσουν όρια, να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις και σε ένα ικανοποιητικό ποσοστό να καταγράψουν σωστά τον ε-δ ορισμό της συνέχειας. Ήταν ελάχιστοι όμως αυτοί που μπορούσαν να διαχειριστούν όλα τα προηγούμενα δομικά, και είχαν προχωρήσει στην δημιουργία των κατάλληλων νοητικών σχημάτων. Ακόμα όμως και αυτοί που είχαν αναπτύξει δομική σκέψη, εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων αυτό δεν είχε γίνει ένας φυσικός τρόπος σκέψης και λειτουργίας (Tall, 1992m).

Σύμφωνα με τη θεωρία της Sfard (1991), οι περισσότεροι φοιτητές παραμένουν στο στάδιο της εσωτερίκευσης πρώτου είδους καθώς φαίνονται να μπορούν με σχετική άνεση να εκτελούν λειτουργίες στα μαθηματικά αντικείμενα, εν προκειμένω να μπορούν να χειριστούν τον ορισμό της συνέχειας σε Λυκειακό επίπεδο. Δεν υπάρχει όμως αντίστοιχη εσωτερίκευση ανωτέρου επιπέδου για τον ε-δ ορισμό της συνέχειας, αφού είναι ελάχιστοι οι φοιτητές που μπορούν να τον χειριστούν έστω και σε απλό

λειτουργικό επίπεδο. Το στάδιο βέβαια αυτής της εσωτερίκευσης σίγουρα διαφέρει αρκετά από φοιτητή σε φοιτητή.

Καθώς όμως αρχίζουν να κατασκευάζουν αναπαραστάσεις για τη νέα έννοια και προσπαθούν να δημιουργήσουν συνδέσεις με άλλες έννοιες, τότε αρχίζουν τα προβλήματα. Συνήθως η εννοιολογική κατανόηση είναι ελλιπής, οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζονται είναι λανθασμένες και με έντονη επιρροή από τις αντίστοιχες του Λυκείου, ενώ δεν αναζητούνται συνδέσεις με άλλες παρεμφερείς έννοιες ή όταν γίνεται αυτό συχνά ακολουθείται λάθος τρόπος και δρόμος. Όλα τα προηγούμενα έχουν σαν αποτέλεσμα να είναι αρκετά μικρό το ποσοστό των φοιτητών που έχουν εισέλθει στη φάση της συμπύκνωσης αντιμετωπίζοντας τις διεργασίες και τις επί μέρους σχέσεις τους ως μια ολότητα και εμφανίζοντας μια ικανοποιητική ικανότητα μετάβασης ανάμεσα στις αναπαραστάσεις (Γαγάτσης & Σπύρου, n.d.). Δεν μπορούν να βρουν τη σχέση ανάμεσα στον ορισμό της συνέχειας του Λυκείου και της αντίστοιχης του πανεπιστημίου, ενώ για τους περισσότερους ο ορισμός είναι ακαταλαβίστικος. Εκτός από έναν ή δύο φοιτητές, ακόμα και εκείνοι που φαίνεται να μπορούν να χειριστούν εννοιολογικά τον ορισμό, παρουσιάζουν αδυναμία εσωτερίκευσης του νοήματός του. Λίγο μετά επίσης συνήθως ξαναγυρνούν στις αυθόρμητες και προϋπάρχουσες αντιλήψεις τους κάτι που έχει παρατηρηθεί διεθνώς σε παρεμφερείς έρευνες (Tall, 1996i; Tall, 1994h). Συνήθως αδυνατούν είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας να προσδώσουν νόημα στην εικόνα της έννοιας μετατρέποντάς τη στον κατάλληλο ορισμό της έννοιας, είτε από τον ορισμό της έννοιας να εξάγουν νόημα μέσω κατάλληλων επαγωγικών συλλογισμών (Tall et al., 2001; Pinto & Tall, 1999g). Συνοπτικά θα λέγαμε ότι σχετικά λίγα άτομα είχαν εισέλθει στο στάδιο της συμπύκνωσης και από αυτούς οι περισσότεροι βρίσκονται σε ένα πρώιμο στάδιο.

Επιβεβαιώνοντας τα όσα αναφέρει η Sfard (1991), φαίνεται ότι πράγματι η μετάβαση από τη φάση της συμπύκνωσης σε αυτή την υποστασιοποίησης αποτελεί το δυσκολότερο βήμα. Σε ότι αφορά την υποστασιοποίηση του ορισμού της συνέχειας σε Λυκειακό επίπεδο, υπήρχαν λίγοι φοιτητές που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι την είχαν πετύχει σε ικανοποιητικό βαθμό. Και εδώ όμως, λόγω του ότι δεν υπήρχε αντίστοιχη επιτυχής κατανόηση σε επίπεδο ε-δ ορισμού, η υποστασιοποίηση ήταν

ατελής και χωρίς τις απαραίτητες εκλεπτύνσεις. Στα πλαίσια του ε-δ ορισμού τώρα, μόνο 2 από τους 35 φοιτητές που πήραν μέρος στη έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ότι είχαν προχωρήσει σε μια υποστασιοποίηση ανώτερου επιπέδου του νοητικού αντικειμένου της συνέχειας και στην κατασκευή των κατάλληλων, εκλεπτυσμένων, στέρεων και ταυτόχρονα ευέλικτων νοητικών δομών – σχημάτων.

Η παρούσα έρευνα επιβεβαίωσε το πόσο ισχυρές είναι οι προϋπάρχουσες γνώσεις – αντιλήψεις των φοιτητών. Από διάφορους ερευνητές έχει μελετηθεί η επίδρασή τους και έχουν συμπεριληφθεί αρκετές αναφορές σε διάφορα θεωρητικά πλαίσια όπως έχουμε εξετάσει εκτενώς στο κεφάλαιο της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας (Tall, 2007b; Lima & Tall, 2006d; Biza et a., 2005; Vosniadou & Verschaffel, 2004; Stavy & Tirosh, 2000, Tirosh & Stavy, 1999; Cornu, 1991; Tirosh, 1991, Fischbein, 1987). Για ένα συντριπτικό ποσοστό φοιτητών η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης είναι ταυτόσημη με τη συνεκτικότητα του γραφήματός της, ή επίσης η συνέχεια σε ένα σημείο συγχέεται με την ύπαρξη τιμής y σε εκείνο το σημείο, ευρήματα που επιβεβαιώνουν τις περισσότερες αντίστοιχες έρευνες που έχουν γίνει (Knapp & Oehrtman, 2005; Mastorides & Zachariades, 2004; Merenluoto & Lehtinen, 2000; Hitt & Lara, 1999; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1991; Tall & Vinner, 1981). Όπως έλεγαν οι περισσότεροι, αυτό είχαν μάθει στη Γ΄ Λυκείου και συνέχιζαν να πιστεύουν ότι είναι σωστό. Σχεδόν όλοι οι φοιτητές στην ερώτηση 5 απαντούσαν με αυτόν τον τρόπο. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ακόμα και οι δυο φοιτητές που είχαν περάσει στη φάση της υποστασιοποίησης ανώτερου επιπέδου, παραδέχτηκαν ότι αν και ήξεραν καλά ότι δεν είναι σωστό, στο άκουσμα της φράσης ‘συνεχής συνάρτηση’ αυτό που ερχόταν πρώτο στο μυαλό τους ήταν ένα συνεκτικό γράφημα.

Αυτή η προϋπάρχουσα γνώση είναι τόσο ισχυρή ώστε για τους περισσότερους είναι σχεδόν αδύνατον να προχωρήσουν στη κατάλληλη εννοιολογική αλλαγή προκειμένου να δημιουργήσουν τις σωστές αναπαραστάσεις για τις συνεχείς συναρτήσεις. Όπως αναφέρει ο Tall και οι συνεργάτες του, η εικόνα της έννοιας αποδεικνύεται πολύ ισχυρότερη από τον ορισμό της (Tall et al, 2001a; Pinto & Tall, 1999g; Tall, 1996i; Pinto & Tall, 1996h; Tall & Vinner, 1981). Όπως αναφέρει και ο Vinner (1991), ακόμα και όταν οι μαθητές γνωρίζουν ένα ορισμό, προσπαθούν να αποφεύγουν τη χρήση του και συνήθως καταφεύγουν στην εικόνα της έννοιας. Στην παρούσα έρευνα

αξίζει να αναφέρουμε ότι αν και η πλειονότητα των φοιτητών γνώριζε τον ορισμό, μόνο δύο από αυτούς αισθάνονταν άνετα με τη φορμαλιστική διατύπωση και επικαλούνταν τον ορισμό ή θεωρήματα που απορρέουν από αυτόν προκειμένου να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να γενικεύουν τους κανόνες που μαθαίνουν, και το ίδιο ισχύει και σε αυτή την περίπτωση. Η κατανόηση του μηχανισμού της αφαίρεσης αλλά και της γενίκευσης αποτελεί σημαντικό βοήθημα στην προσπάθεια να διερευνήσουμε τις πεποιθήσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών (Dörfler, 1991).

Αυτοί οι διαισθητικοί κανόνες των μαθητών εμφανίζονται όχι μόνο στον τρόπο με τον οποίο αναπαριστούν τη συνέχεια στο μυαλό τους, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουν όρια, κατασκευάζουν γραφήματα συναρτήσεων, επεξεργάζονται τους ρητούς και τους άρρητους κ.α. Είναι χαρακτηριστικό ότι αρκετά συχνά δεν μπορούν να δικαιολογήσουν τις ενέργειές τους και απλά επικαλούνται τη συνήθεια, ή ότι έτσι το έμαθαν στο Λύκειο. Ήταν λίγοι εκείνοι οι φοιτητές που είχαν συνειδητά αντιληφθεί την αλλαγή του εννοιολογικού πλαισίου που είχε επέλθει κατά τη μετάβαση από το Λύκειο στο πανεπιστήμιο και τον τρόπο με τον οποίο αυτή είχε επηρεάσει και αναδιαμορφώσει το νοητικό σχήμα της συνέχειας. Έτσι καταλήγουμε μάλλον στο συμπέρασμα ότι ο φορμαλισμός και η αξιωματική θεώρηση που δικαίως ακολουθείται στο μαθηματικό τμήμα δεν μπορεί να διορθώσει τις παρανοήσεις του σχολείου.

Στα πλαίσια της θεωρίας APOS του Dubinsky και των συνεργατών του τώρα, όπως έχουμε εξετάσει, ο αναστοχασμός αποτελεί τον πυρήνα της θεωρίας τους (Czarnocha et al., 1999; Tall, 1999c; Dubinsky, 1991). Σε ότι αφορά τον ορισμό της συνέχειας για το Λύκειο, όλοι οι φοιτητές είχαν περάσει από το πρώτο επίπεδο, το επίπεδο της δράσης επί των αντικειμένων. Μέσω αναστοχασμού επίσης σχεδόν όλοι είχαν περάσει και στο δεύτερο στάδιο, καθώς έχουν εσωτερικεύσει τις δράσεις με τη μορφή νοητικών διεργασιών. Κάποιοι επίσης μπορεί να θεωρηθεί ότι είχαν περάσει στην τρίτη φάση, καθώς είχαν ενθυλακώσει την έννοια της συνέχειας, με τη μορφή του Λυκείου, σε ένα κατάλληλο νοητικό αντικείμενο. Ελάχιστοι όμως είχαν καταφέρει να φτάσουν στο τελευταίο στάδιο, τη δημιουργία ενός κατάλληλου σχήματος που εμπερικλείει τις δράσεις που έχουν εσωτερικευθεί σε διεργασίες που με τη σειρά τους να έχουν ενθυλακωθεί σε αντικείμενα που να συνδέονται μεταξύ τους με διάφορους

τρόπους. Αυτό το Λυκειακό σχήμα της συνέχειας μπορεί να ιδωθεί ως ένα νέο αντικείμενο που ασκείται πάνω του μια νέα δράση με τα εργαλεία του ε-δ ορισμού και ο κύκλος APOS επαναλαμβάνεται. Τώρα όμως είναι λίγοι οι φοιτητές που μπορούν να ασκήσουν τις σωστές δράσεις πάνω στον ε-δ ορισμό ενώ ακόμα λιγότεροι αυτοί που καταφέρνουν να εσωτερικεύσουν αυτές τις δράσεις στις κατάλληλες διεργασίες. Τελικά μόλις δυο άτομα καταφέρνουν να περάσουν στην τρίτη φάση, την ενθυλάκωση των διεργασιών στα κατάλληλα αντικείμενα ενώ, ίσως μόνο ο ένας να έχει προχωρήσει στο σχηματισμό του κατάλληλου σχήματος για την ε-δ συνέχεια.
Στην παρούσα έρευνα είναι έκδηλη η διαφορά μεταξύ διαδικαστικής σκέψης και διεργασιοεννοιολογικής σκέψης με τον τρόπο που αναφέρονται σε αυτές οι Gray και Tall (Gray & Tall, 2007x; Gray & Tall, 2001i; Gray et al., 1999k; Gray & Tall, 1991). Οι φοιτητές φαίνεται να τα καταφέρνουν σχετικά καλά στις λειτουργίες και διαδικασίες που γίνονται πάνω σε ένα αντικείμενο με περιορισμένο ορίζοντα, αλλά δυσκολεύονται να χρησιμοποιούν το μαθηματικό συμβολισμό με άνεση και ευελιξία άλλοτε ως διεργασία και άλλοτε ως έννοια. Έτσι, οι περισσότεροι παραμένουν στην Ενσώματο κόσμο του Tall, ενώ μόνο λίγοι καταφέρνουν να κινηθούν με άνεση τον κόσμο των Διεργασιών – Εννοιών. Μόνο ένας ή ίσως δύο καταφέρνουν να βρεθούν στο Τυπικό – αξιωματικό κόσμο προσεγγίζοντας τα μαθηματικά με φορμαλιστικό τρόπο (Tall, 2006; Tall, 2004a; Tall, 2004d).

Στην παρούσα έρευνα φάνηκαν επίσης οι ιδιαίτερες δυσκολίες που κρύβει η έννοια της συνέχειας, κάτι που κάνει αρκετά απαιτητική τη διδασκαλία της. Είναι μια έννοια που σχετίζεται με το όριο, τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, τη μετάβαση από τους ρητούς στους άρρητους, την έννοια της συνάρτησης και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της. Όλα τα προηγούμενα όπως έχουν καταδείξει οι διάφορες έρευνες που έχουμε ήδη εξετάσει, δημιουργούν αρκετά επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια στους μαθητές – φοιτητές (Evangelidou et al., 2004; Bagni, 1999; Pinto & Tall, 1996h; Pinto & Gray, 1995; Tall, 1993k; Eisenberg, 1991; Tall & Vinner, 1981; Tall & Schwarzenberger, 1978). Η αποσαφήνιση και εννοιολογική κατανόηση όλων των παραπάνω είναι τουλάχιστον απαραίτητη προκειμένου οι μαθητές – φοιτητές να μπορούν να μελετήσουν σε βάθος και να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας.

Σε όλη τη διάρκεια της συνέντευξης ήταν αρκετά έκδηλος ο φόβος των φοιτητών για τα μαθηματικά. Αν και όλοι τους ήταν φοιτητές του μαθηματικού τμήματος και μάλιστα κάποιοι από αυτούς είχαν μπει στο πανεπιστήμιο με πολύ υψηλή βαθμολογία, παρόλα αυτά αισθάνονταν άβολα με τον κόσμο των τυπικών – αξιωματικών μαθηματικών. Υπήρχαν άτομα που πίστευαν ότι ο φορμαλισμός υπήρχε μόνο για χάρη εντυπωσιασμού, ή απλά ήταν κατάλοιπο μιας παλιάς εποχής (!), ενώ κάποιοι δήλωναν ευθαρσώς ότι δεν θεωρούσαν απαραίτητη την ακριβή και σε βάθος γνώση των τυπικών μαθηματικών προκειμένου να μπορεί κάποιος να 'λύσει ασκήσεις'. Οι περισσότεροι αγωνίζονταν απλά να δώσουν τη σωστή απάντηση, να ικανοποιήσουν τον ερευνητή. Έχοντας μάθει να απαντούν σε συγκεκριμένου τύπου ερωτήσεις και ασκήσεις, αισθάνονται άβολα με μια διαδικασία που διερευνά τις απαντήσεις τους και στην οποία καλούνται να παρέχουν αιτιολογία για τις επιλογές τους (Tall, 1990d).

Εισηγήσεις

Εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνες

Θα ήταν χρήσιμο και ενδιαφέρον να επαναληφθεί η έρευνα σε ένα αντιπροσωπευτικό και μεγαλύτερο δείγμα φοιτητών είτε μόνο από το μαθηματικό τμήμα της Αθήνας, είτε από περισσότερα τμήματα. Το μεγάλο δείγμα και η αντιπροσωπευτικότητά του θα μας έδινε ασφαλέστερα αποτελέσματα. Θα ήταν χρήσιμο επίσης να γίνει ενδελεχής ανάλυση των διαλόγων της συνέντευξης με βάση τα διεθνώς αναγνωρισμένα μοντέλα επικοινωνιακής ανάλυσης διαλόγων.

Η έννοια της συνέχειας αναπτύσσεται σε πρώιμο στάδιο στη Γ΄ Λυκείου και μετά αναπτύσσεται εκτενώς στο πανεπιστήμιο. Θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να μπορούσε να πραγματοποιηθεί η έρευνα σε δύο ή και περισσότερες φάσεις: προς το τέλος της Γ΄ Λυκείου και αργότερα στο πανεπιστήμιο στο β΄ έτος ή και αργότερα. Αν και κάτι τέτοιο σίγουρα παρουσιάζει αντικειμενικές δυσκολίες, θα μας έδινε μια ξεκάθαρη ένδειξη αν οι αντιλήψεις των μαθητών αλλάζουν και σε ποιο βαθμό κατά τη μετάβασή τους από το σχολείο στο πανεπιστήμιο. Επίσης θα μπορούσε να διερευνηθεί το αν εμφανίζεται χάσμα ανάμεσα στα δύο και πόσο μεγάλο είναι αυτό.

Όπως εξετάσαμε, η έννοια της συνέχειας σχετίζεται στενά με την έννοια του ορίου. Θα ήταν ενδιαφέρον να μπορούσε μια μελλοντική έρευνα να διερευνήσει το βαθμό κατανόησης και των δύο εννοιών και μάλιστα να εξετασθεί ο βαθμός που επιδρά η κατανόηση του ορισμού του ορίου στην αντίστοιχη της συνέχειας. Το όριο μαζί με τη συνέχεια αποτελούν δύο κεντρικούς άξονες για την ανάλυση και μια έρευνα που θα τα μελετούσε συνδυαστικά θα μπορούσε να μας δώσει ιδιαίτερα χρήσιμα ευρήματα. Έχει επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον να ερευνηθεί αν και κατά πόσον ο τρόπος παρουσίασης της έννοιας της συνέχειας στο πανεπιστήμιο επηρεάζει το βαθμό κατανόησης από μέρους τους. Μήπως θα έπρεπε να διδάσκεται πρώτα ο ε-δ ορισμός του ορίου και μετά αυτός της συνέχειας ώστε να ακολουθείται η πορεία με την οποία έχουν μάθει τις έννοιες οι μαθητές στο Λύκειο;

Η διδακτική των μαθηματικών παγκόσμια εκδηλώνει έντονο ενδιαφέρον για το πώς θα γίνει η διδασκαλία των μαθηματικών πιο αποτελεσματική και ταυτόχρονα εννοιολογική. Με αυτό ως βάση, θα ήταν χρήσιμο να διερευνηθεί αν οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης της έννοιας της συνέχειας στα πλαίσια της διδασκαλίας παίζουν κάποιο ουσιαστικό ρόλο στο επίπεδο κατανόησης από μέρους των φοιτητών.

Εισηγήσεις με βάση τα αποτελέσματα

Το απόλυτο ζητούμενο στο χώρο των μαθηματικών είναι η εννοιολογική κατανόηση, η ικανότητα των μαθητών να αναπτύξουν λογική σκέψη, να ***κατανοούν*** έννοιες και μαθηματικές διαδικασίες, και σίγουρα να μπορούν να λύνουν προβλήματα, με την έννοια του όρου που έθεσε ο Polya (1987). Η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να έχει ως ζητούμενο αυτή ακριβώς την εννοιολογική κατανόηση που θα αποκτάται μέσα σε ένα κατάλληλο κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον (Bishop, 1991). Όμως, η καθημερινή πρακτική δείχνει ότι στα σχολεία μας αλλά και στα πανεπιστήμια κάθε άλλο παρά αυτό συμβαίνει. Οι μαθητές – φοιτητές συμπεριφέρονται περισσότερο με διαδικαστικό παρά με θεωρητικό τρόπο. Αγωνίζονται απλά να λύνουν επιτυχώς τις ασκήσεις που τους δίνουν οι καθηγητές τους. Η ουσία γι’ αυτούς είναι να είναι απλά αποτελεσματικοί παρά ακριβείς (Balacheff, 1991).

Με αυτό ως ζητούμενο, είναι σίγουρο ότι θα πρέπει να κάνουμε σοβαρές σκέψεις για τον τρόπο με τον οποίο διδάσκονται τα μαθηματικά στη Γ΄ Λυκείου αλλά και στο πανεπιστήμιο. Για όσο διάστημα η τελευταία τάξη του Λυκείου θα αντιμετωπίζεται ως προθάλαμος του πανεπιστημίου, θα αντιμετωπίζουμε αυτό το πρόβλημα. Θα πρέπει να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική διδασκαλία των ορισμών και των εννοιών και να σταματήσουμε την ακατάσχετη ασκησιολαγνεία. Θα πρέπει να δίνεται μεγαλύτερη έμφαση σε ασκήσεις που συνδυάζουν πολλαπλές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνέχειας και θα βοηθούν τους μαθητές στην προσπάθειά τους να εσωτερικεύσουν το νόημα του ορισμού της συνέχειας.

Και αν τα προηγούμενα είναι ιδιαίτερα σημαντικά για το Λύκειο, σίγουρα αποτελούν επιτακτική ανάγκη για ένα μαθηματικό τμήμα. Με την παραδοχή ότι το δείγμα της έρευνας είναι αντιπροσωπευτικό, πρέπει να προκαλέσει έντονο προβληματισμό το γεγονός ότι η πλειοψηφία των φοιτητών έχει λανθασμένες απόψεις και ελάχιστη ακριβή γνώση για την έννοια της συνέχειας αλλά και άλλες συναφείς έννοιες. Αν κάποιος επίσης λάβει υπόψη του και τα υπόλοιπα ερωτηματολόγια της έρευνας, τότε η κατάσταση γίνεται μάλλον ανησυχητική. Το κενό που εμφανίζεται ανάμεσα στη Γ΄ Λυκείου και το πανεπιστήμιο είναι τεράστιο. Χωρίς να σημαίνει ότι το μαθηματικό τμήμα πρέπει να κατεβάσει το επίπεδό του, πρέπει να γίνουν κάποιες προσαρμογές στη διδασκαλία και τα συγγράμματα που χρησιμοποιούνται. Θα πρέπει να εξεταστεί η πιθανότητα να ακολουθείται η σειρά ανάπτυξης των εννοιών που συναντούμε στο βιβλίο του Λυκείου· να διδάσκεται πρώτα το όριο και μετά να ακολουθεί η έννοια της συνέχειας.

Ίσως να είναι απαραίτητη επίσης μια εισαγωγική σειρά μαθημάτων που θα εισάγει τους νέους φοιτητές στον κόσμο των τυπικών μαθηματικών. Μια τέτοια σειρά ίσως θα μπορούσε να περιλαμβάνει τη χρήση και την επεξήγηση του συμβολισμού που χρησιμοποιείται, έννοιες που αφορούν τους ρητούς άρρητους, πραγματικούς και μιγαδικούς καθώς και την *εννοιολογική παρουσίαση* των εννοιών που έχουν ήδη παρουσιαστεί στην ανάλυση της Γ΄ Λυκείου, όπως το όριο, η συνέχεια, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Η παρουσίαση αυτή θα μπορούσε να ακολουθεί την ύλη και τον τρόπο παρουσίασης του Λυκείου αλλά να επεξηγεί εννοιολογικά τις έννοιες αυτές και να περιέχει τα κατάλληλα σπέρματα γνώσης και τους προβληματισμούς που θα

εισήγαγαν με κατάλληλο και ομαλό τρόπο τους φοιτητές στα ανώτερα και φορμαλιστικά μαθηματικά. Προσωπική εκτίμηση του ερευνητή είναι ότι αυτή η σειρά μαθημάτων θα έπρεπε να είναι σύντομη αλλά εντατική και η παρακολούθησή της να είναι υποχρεωτική (με τήρηση απουσιών) για όλους τους νεοεισαχθέντες και να ακολουθείται από εξετάσεις. Ο χρόνος που θεωρητικά θα χάνεται σε αυτή την εισαγωγική σειρά μαθημάτων, θα κερδηθεί σε βάθος χρόνου καθώς οι φοιτητές θα μπορούν(;) στη συνέχεια να αφομοιώνουν γρηγορότερα και αποτελεσματικότερα τις νέες έννοιες.

Τέλος, θα πρέπει να εξεταστεί σοβαρά η πιθανότητα προσθήκης ενός δεύτερου συγγράμματος για τον Απειροστικό Λογισμό. Το βιβλίο που δίνεται μέχρι τώρα αποτελεί ένα κορυφαίο σύγγραμμα αδιαμφισβήτητης επιστημονικής αξίας, σημείο αναφοράς στο χώρο της ανάλυσης. Αν θέλουμε όμως να είμαστε ειλικρινείς, δεν μπορεί να μελετηθεί από φοιτητές που έρχονται από τη Γ΄ Λυκείου της εποχής μας και οι οποίοι έχουν ένα σοβαρό έλλειμμα μαθηματικής παιδείας. Η προσθήκη και ενός δεύτερου συγγράμματος στους νεοεισαχθέντες φοιτητές, πιο προσιτού και κατανοητού, ίσως να βοηθούσε την κατάσταση και να τους έφερνε με πιο ομαλό τρόπο κοντά στο χώρο των τυπικών μαθηματικών με την ευχή οι αυριανοί μαθηματικοί όχι μόνο να κατανοήσουν αλλά και να αγαπήσουν τον υπέροχο κόσμο των μαθηματικών.

‘ Ο σοφός θα ακούσει και θα λάβει περισσότερη εκπαίδευση,
*και ο άνθρωπος που έχει **κατανόηση** αποκτάει επιδέξια κατεύθυνση’*

Παροιμίες 1:5, Μ.Ν.Κ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στις επόμενες σελίδες επισυνάπτεται το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε για την έρευνα. Το παρόν ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε και από τους 62 φοιτητές που πήραν μέρος στην έρευνα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ **Αριθμός**:_____

Το παρόν ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε για τους σκοπούς έρευνας με θέμα τις αντιλήψεις των φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος για την έννοια της συνέχειας. Η έρευνα αυτή γίνεται στα πλαίσια εκπόνησης διπλωματικής εργασίας για το Μεταπτυχιακό πρόγραμμα 'Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών' του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών. Η **εθελοντική** συμμετοχή σας σε αυτή και σε παρόμοιες έρευνες μπορεί να συμβάλλει καθοριστικά στην προσπάθεια βελτίωσης του τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών.
Οι απαντήσεις είναι **ανώνυμες** και θα τύχουν επεξεργασίας **μόνο** από τον φοιτητή που εκπονεί την διπλωματική εργασία. Η έρευνα αυτή δεν αποτελεί μέρος οποιουδήποτε είδους εξέτασης και προφανώς δεν βαθμολογείστε.
Παρακαλώ πολύ όμως, όπως συμπληρώσετε το ερωτηματολόγιο *προσεκτικά και με ειλικρίνεια*.
Σας ευχαριστώ πολύ εκ των προτέρων για το χρόνο που θα αφιερώσετε!

1. **Σημειώστε το φύλο σας**.

   ____ Αγόρι

   ____ Κορίτσι

2. **Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει**.

   ____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

   ____ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. **Έστω *A* υποσύνολο του** R, $x_0 \in$ ***A*** **και συνάρτηση** $f: A \to \mathbb{R}$. **Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της** f **στο** x_0.

4. **Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι'**;

5. **Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης**: '**Η συνάρτηση** f **είναι συνεχής**'.

6. **Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας**.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, <u>δεν</u> απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. **Σ** **Λ**

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. **Σ** **Λ**

7. **Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σαφήνεια και περιεκτικότητα.**

(α). $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(β). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$

(γ). $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$

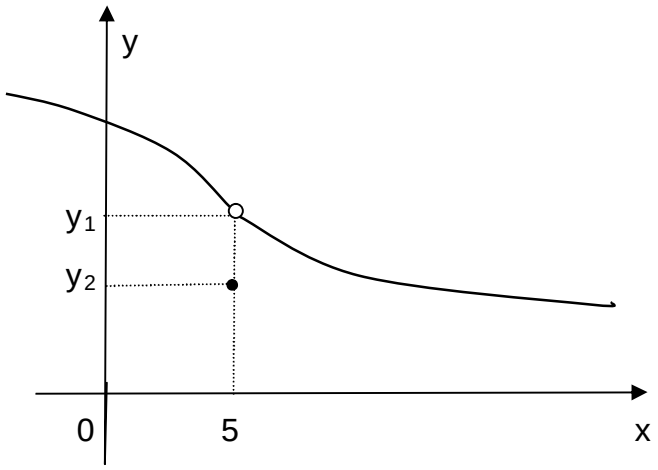
(δ). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

(ε). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=\begin{cases}0, & \alpha\nu\ x\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma\\ 1, & \alpha\nu\ x\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{cases}$

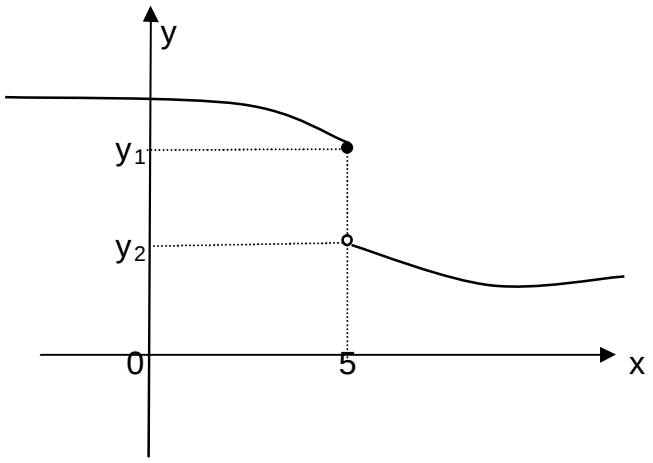
(στ). $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(n)=\dfrac{1}{n}$

8. **Εξετάστε αν τα επόμενα γραφήματα αντιστοιχούν σε συνεχείς συναρτήσεις. Σε κάθε μια περίπτωση προσπαθήστε να δικαιολογήστε την απάντησή σας.**

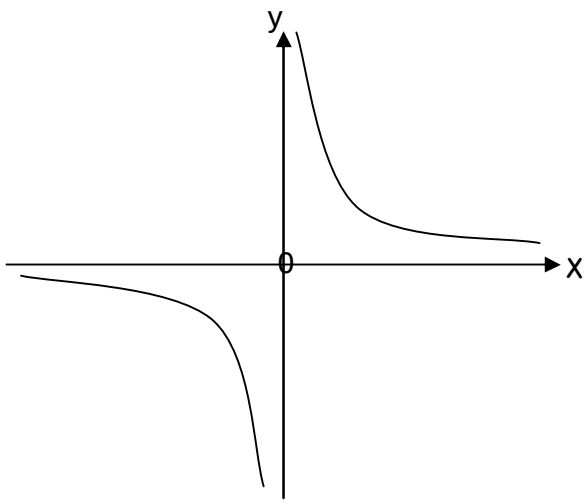
(α).



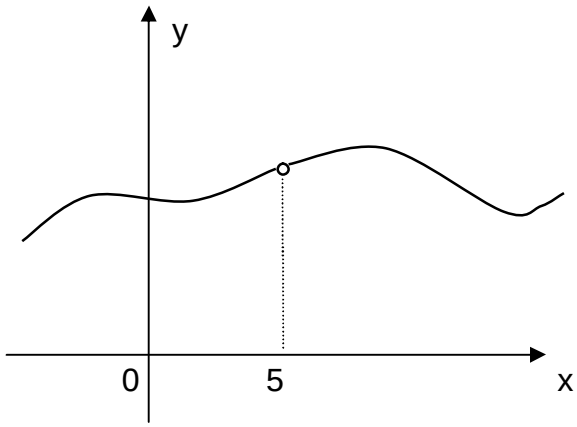
(β).



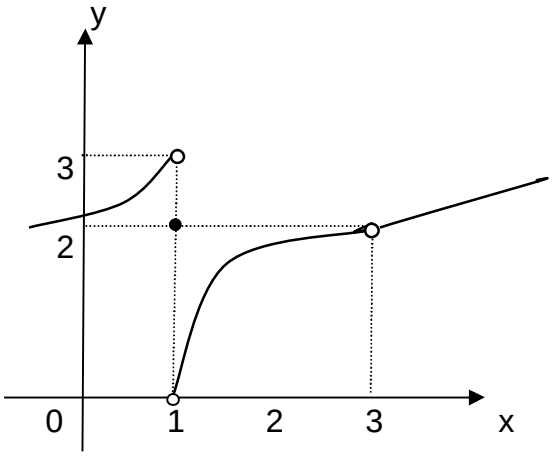
(γ).



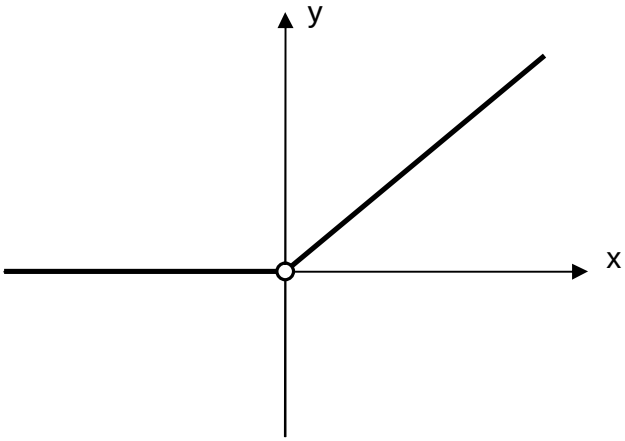
(δ).



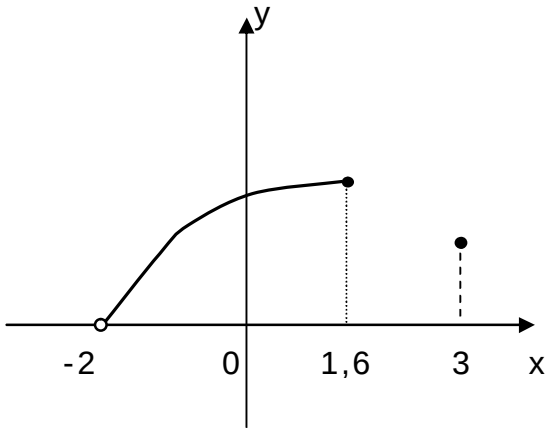
(ε).



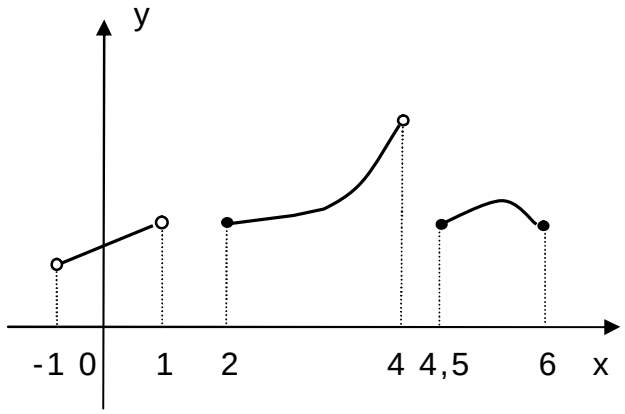
(στ).



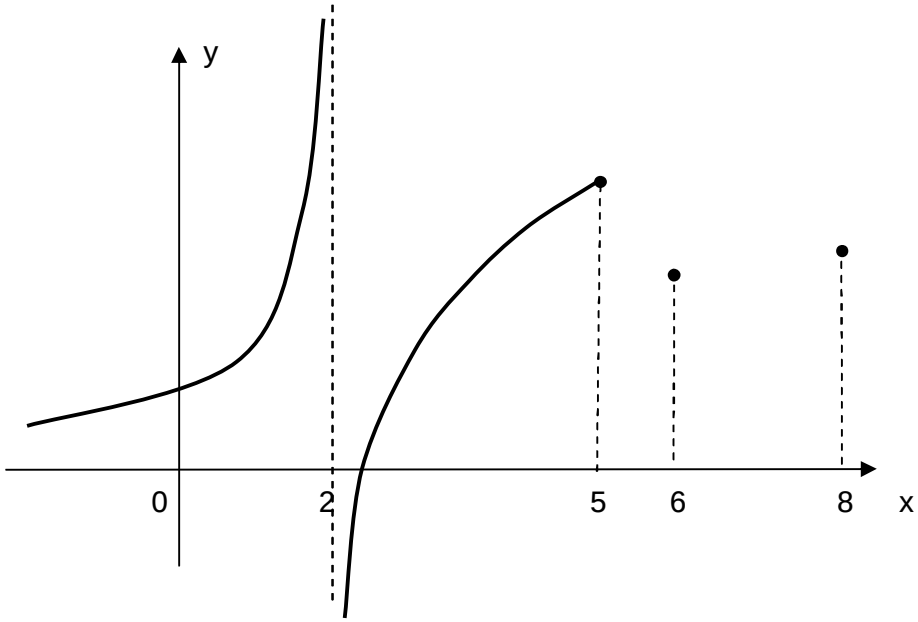
(ζ).



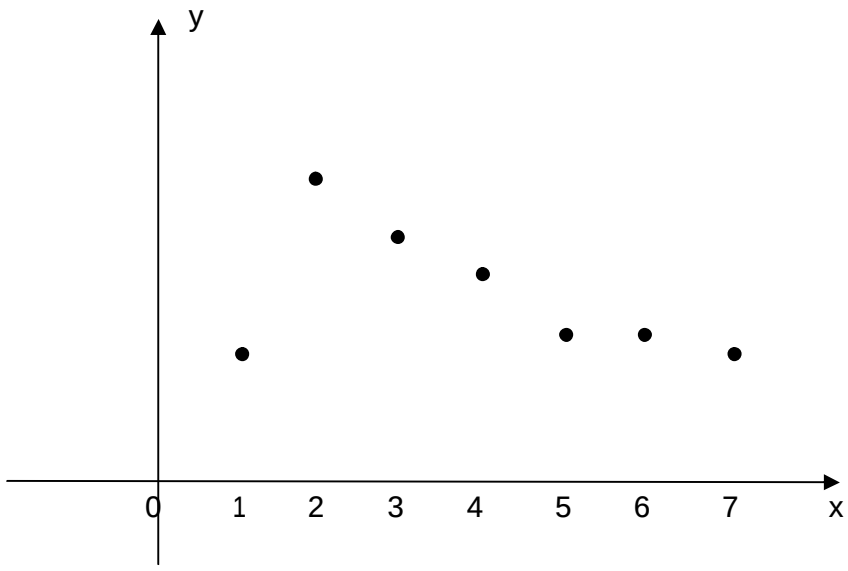
(η).



(θ).



(ι).

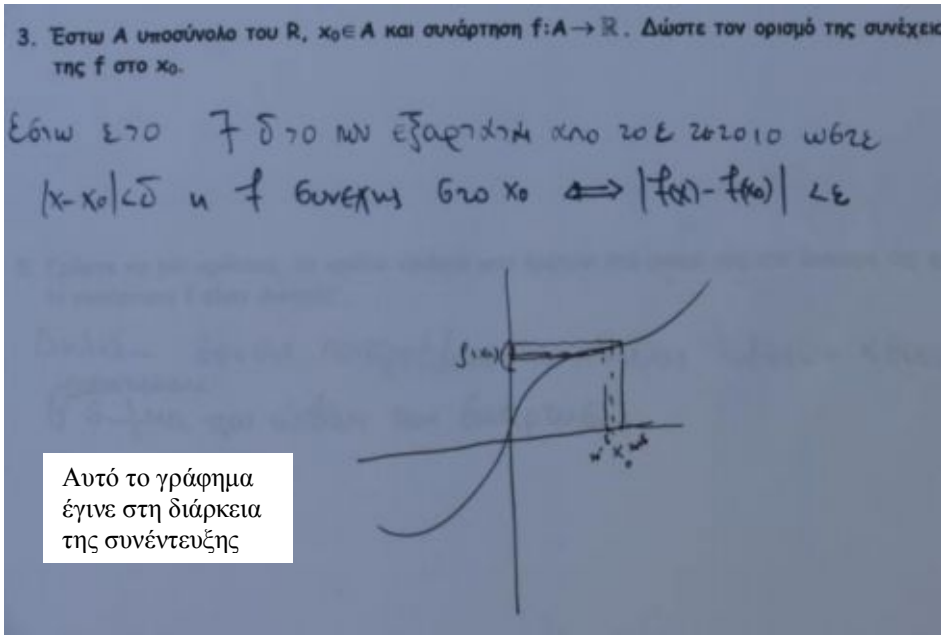


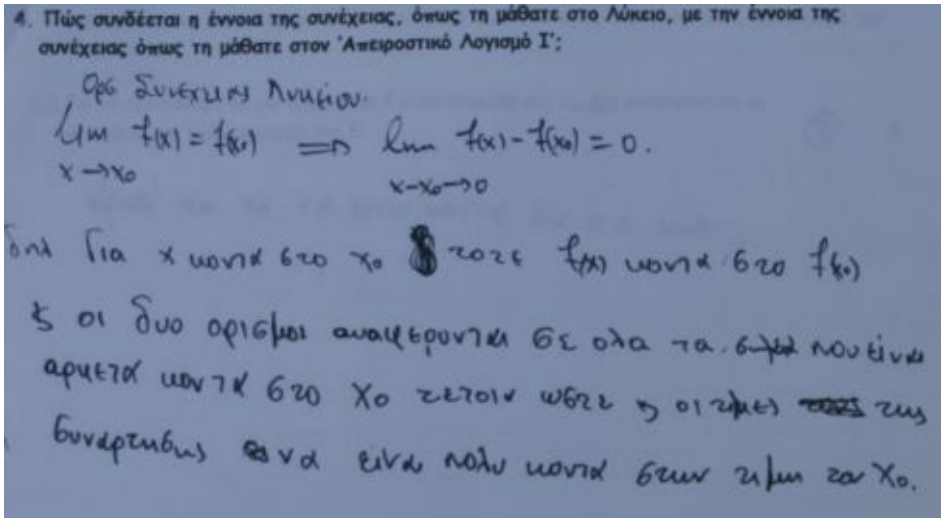
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Στη συνέχεια ακολουθεί το πλήρες απομαγνητοφωνημένο κείμενο των 35 συνεντεύξεων μαζί με τα ερωτηματολόγια κατάλληλα ψηφιοποιημένα. Ο ερευνητής σε κάθε διάλογο συμβολίζεται με ***Ερ***.

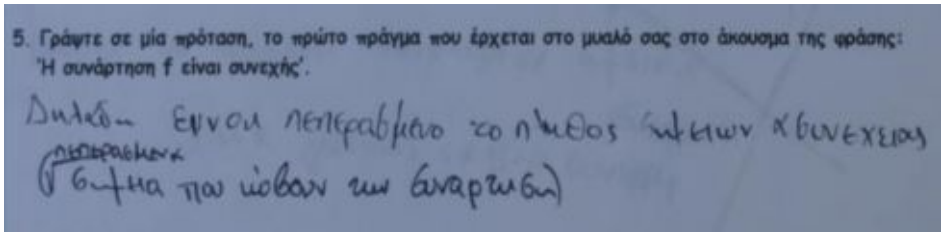
1η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Αρετή’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα για περισσότερο από ένα χρόνο





Ερ – Ωραία Αρετή, όπως βλέπω από το ερωτηματολόγιό σου στο ερώτημα 3 έχεις γράψει τον ορισμό εδώ…
Α – …δεν ξέρω αν έχω γράψει καλά τον ορισμό!
Ερ – Μην ανησυχείς, δεν με ενδιαφέρει αυτό! Αν και απ’ ότι βλέπω είναι μια χαρά! Δεν έχω κάτι ιδιαίτερο να πω. Μου άρεσε Αρετή η απάντηση που έχεις δώσει εδώ στο ερώτημα 4 και θα ήθελα λίγο να μου τη διευκρινήσεις. Δηλαδή, πώς αντιλαμβάνεσαι τη σύνδεση της συνέχειας από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο; Ποια είναι διαφορά, πώς το εννοείς αυτό; Απλά θέλω να το καταλάβω λίγο καλύτερα, κοίταξέ το και πες μου.
Α – Στο Λύκειο μαθαίναμε μόνο για το όριο και βάζαμε την τιμή του x_o πάνω στην f(x) και βλέπαμε αν όντως είναι $f(x_o)$. Μόνο αυτό βλέπαμε. Ενώ εδώ μαθαίνουμε ότι γενικώς αν παίρνουμε ένα σημείο και κοντά σε αυτό η συνάρτηση οι τιμές της να είναι πάλι κοντά στο $f(x_o)$. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν μεμονωμένα σημεία τα οποία να μην είναι συνεχής αλλά παρ’ όλα αυτά όλη η f να είναι συνεχής. Μεμονωμένα εννοώ πεπερασμένα σημεία, όχι μεμονωμένα.


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Δηλαδή έννοια πεπερασμένο το πλήθος σημείων ασυνέχειας (πεπερασμένα σημεία που μόλις τώρα αναφέρθηκα)

Ερ – Α! πεπερασμένα σημεία έχει να κάνει με αυτό που λες παρακάτω υποθέτω;

Δηλαδή πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας;

Α – Ναι! Τώρα δεν ξέρω αν το έχω αντιληφθεί σωστά…

Ερ – Τώρα για πες μου, πώς θα έφτιαχνες ένα γράφημα μιας συνάρτησης που θα έλεγες σίγουρα ότι είναι συνεχής; Να έβλεπες ένα γράφημα που να έλεγες ότι σίγουρα αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση.

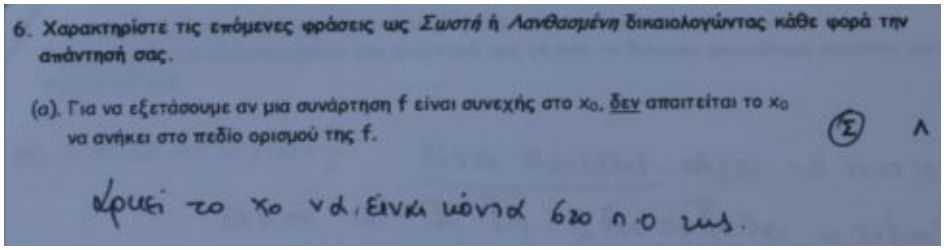
Α – Το σίγουρο είναι ότι κάνεις μια καμπύλη που δεν διακόπτεται πουθενά, μέσα σε ένα διάστημα α, β

Ερ – Μάλιστα.

Α – Το σίγουρο. Γενικά δεν έχω πολύ καλή αντίληψη. Δηλαδή στα διαγωνίσματα τα μαθηματικοποιώ μέσω θεωρημάτων.

Ερ – Ωραία, μην σε αγχώνει αυτό!

Α – Δηλαδή στα γραφήματα, σίγουρα δεν τα ξέρω καλά τα γραφήματα, περισσότερο κινούμαι με τις τιμές.

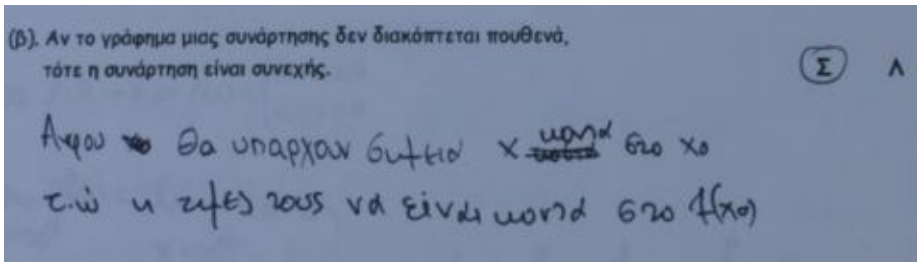

6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. (Σ) Λ

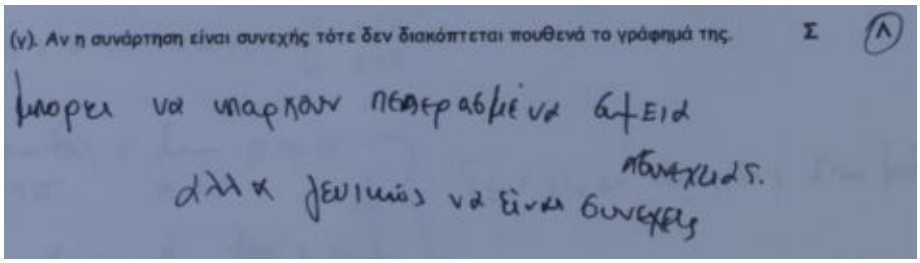
κρίνει το x_0 να είναι μόνιμα στο π.ο της.

Ερ – Ωραία, μην ανησυχείς, διαισθητικά θέλω, γι' αυτό ρωτάω. Τώρα για πες μου εδώ στο 6α , λες ότι …. Για κοίταξέ το.

Α – Δεν ξέρω αν είναι σωστό. Πιστεύω ότι είναι σωστό γιατί θυμάμαι ότι π.χ. σε δίκλαδες συναρτήσεις παίρναμε συνήθως το σημείο που δεν ήταν μέσα στο πεδίο ορισμού για να δούμε αν είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού. Έτσι μου ήρθε στο μυαλό και έβαλα το Σωστό.


(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. (Σ) Λ

Αφού θα υπάρχαν σημεία μόνιμα στο x_0 τότε η τιμές τους να είναι μόνιμα στο $f(x_0)$


(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ (Λ)

μπορεί να υπάρχουν πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας.

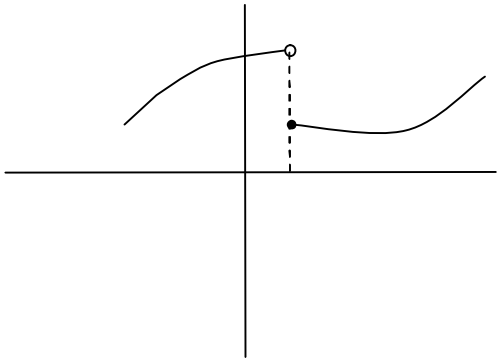
αλλά γενικώς να είναι συνεχής

Ερ – Α! κατάλαβα, κατάλαβα. Για να δούμε τώρα το επόμενο. Αν το γράφημα δεν διακόπτεται, η συνάρτηση είναι συνεχής. Πιστεύεις ότι είναι σωστό;

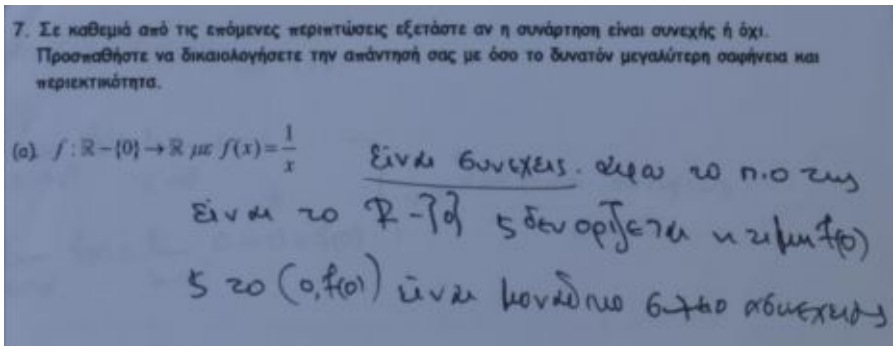
Α – Ναι!

Ερ – Ωραία. Ας δούμε τώρα

το επόμενο, το γ. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής, τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της . Λες ότι είναι λάθος . . .
Α – Ναι, μπορεί να διακόπτεται.
Ερ – Μπορείς να μου φτιάξεις το γράφημα μιας συνάρτησης συνεχούς που να μην διακόπτεται; Δηλαδή τι ήρθε στο μυαλό σου και λες ότι αν είναι συνεχής η συνάρτηση, το γράφημά της διακόπτεται;
[Η μαθήτρια σχεδιάζει το διπλανό σχήμα.]



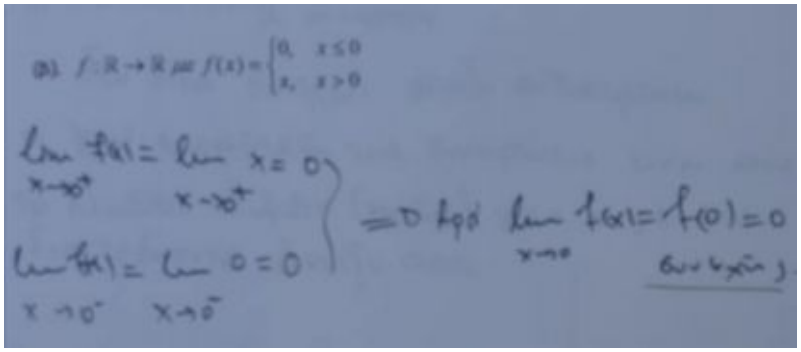
Α – Είναι μια καμπύλη έτσι … εδώ είναι ανοιχτό… και συνεχίζει εδώ ας πούμε. Αυτή δεν είναι συνεχής;… Δεν έχω καθόλου αντίληψη των γραφημάτων.
Ερ – Λες λοιπόν ότι είναι συνεχής αλλά παρόλα αυτά το γράφημα διακόπτεται, έτσι;
Α – Ναι…Τι λάθος είναι κι αυτό!;! Ντρέπομαι λίγο!
Ερ – Όχι, όχι! Μην αγχώνεσαι με το Σωστό Λάθος! Απλά δεν θέλω να σχολιάσω τις απαντήσεις σου τώρα. Στο τέλος θα τα δούμε. Ας δούμε τώρα το επόμενο, το 7 α, έχουμε


7. Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σαφήνεια και περιεκτικότητα.

(α) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$

Είναι συνεχής. Αφού το π.ο. της είναι το $\mathbb{R}-\{0\}$ δεν ορίζεται η τιμή $f(0)$ δηλ. το $(0,f(0))$ είναι μοναδικό σ. ασυνέχειας

την $f(x)=\frac{1}{x}$ *Είναι συνεχής λες γιατί το πεδίο ορισμού της είναι το R έξω το 0 και δεν ορίζεται η τιμή της f(0), και το (0, f(0)) είναι το μοναδικό σημείο ασυνέχειας. Άρα, τι θα έλεγες, είναι συνεχής ή είναι ασυνεχής σε ένα σημείο, τι θα διάλεγες; Πώς θα τη χαρακτήριζες; Γενικά συνεχής ή ασυνεχής σε ένα σημείο;*
Α - … Συνεχής θα έλεγα… Εγώ παρακολουθούσα ένα συγκεκριμένο καθηγητή και θυμάμαι ότι στις αποδείξεις έλεγε, που μας έκανε τα γραφήματα, μας έλεγε υπάρχουν πεπερασμένα σημεία, πάνω σε αποδείξεις ακολουθιών, που δεν είναι συνεχής μια συνάρτηση, αλλά είναι πεπερασμένα και λίγα, γι' αυτό θεωρούμε συνεχή τη συνάρτηση, με βάση θεωρήματα Bolzano και τέτοια.

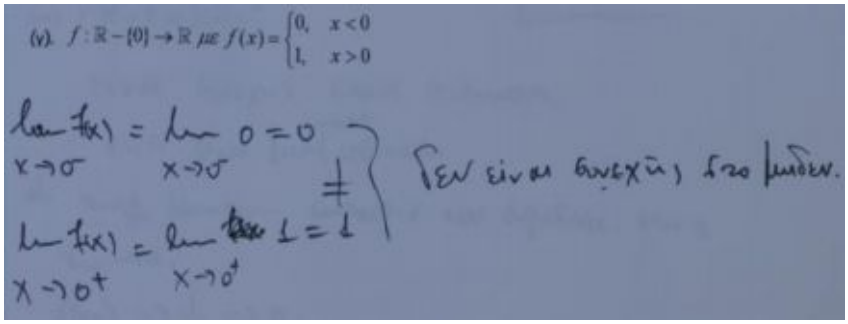

(β) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$

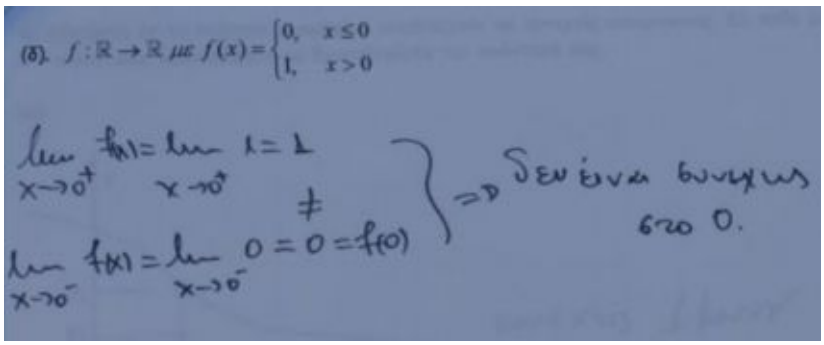
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$

$\Rightarrow$ από $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ συνεχής

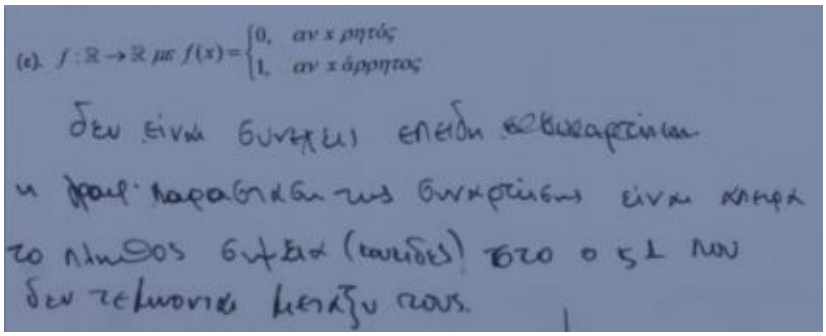
Ερ – Ωραία, ωραία. Για να δούμε τώρα το επόμενο. Λες και εδώ ότι είναι συνεχής. Μ ποιο τρόπο το ελέγχεις αυτό;
Α – Με τη μέθοδο Λυκείου ουσιαστικά, ε;
Ερ – Ωραία.



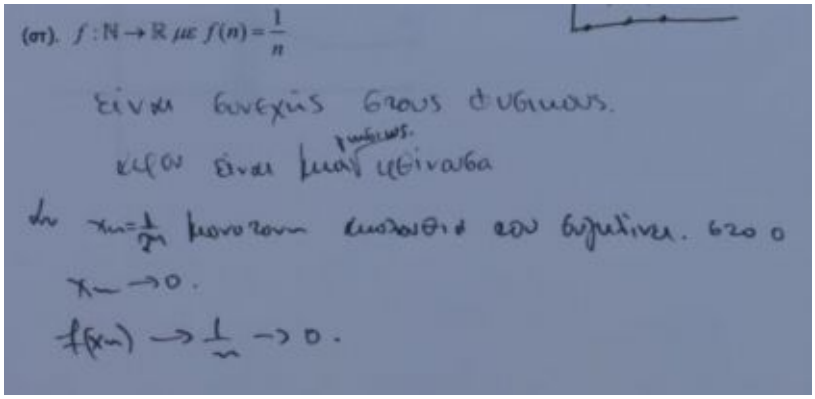
Τώρα ας δούμε το επόμενο. Εδώ πώς το ελέγχεις;
Α – Αυτό με τη διακλάδωση που είπαμε. Δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό μου έχει μείνει γιατί ένα χρόνο κάναμε αυτά.
Ερ – Είναι ο ίδιος τρόπος που έκανες και πιο πάνω;



Α – Ναι, ναι.
Ερ – Ωραία, εδώ πάλι λες ότι δεν είναι συνεχής στο 0. Η εξήγηση είναι ίδια;
Α – Ναι, ναι
Ερ - Ωραία, ας δούμε το άλλο.
Α – Λοιπόν να σας εξηγήσω εδώ, είναι κουκίδες η γραφική της παράσταση αλλά δεν συνδέονται…

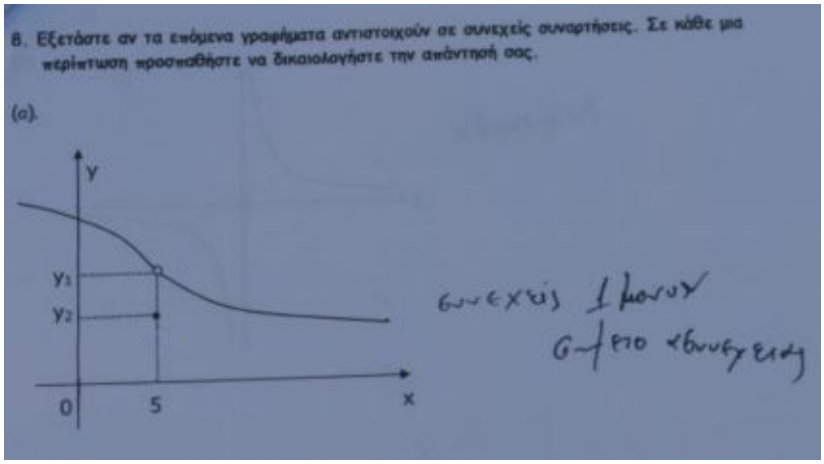


Ερ – Ναι αυτό θέλω λίγο να μου εξηγήσεις. 'και δεν τέμνονται μεταξύ τους' λες. Τι εννοείς;
Α – Άμα το σχεδιάσουμε, τότε βλέπουμε ότι δεν ενώνονται μεταξύ τους.



Ερ – Α! Δεν ενώνονται εννοείς μεταξύ τους.
Α – Ναι, ναι, λάθος έκφραση.
Ερ – Ωραία, για πες μου τώρα εδώ. Αυτό μου άρεσε. Για εξήγησέ το μου λίγο αυτό.
Α – (γελάει). Δεν το θυμόμουνα καλά αυτό. Θυμάμαι ένα θεώρημα που λέγαμε ότι άμα έχουμε μια ακολουθία μονότονη και . . . φραγμένη . . .δεν θυμάμαι καλά… συγκλίνει άρα και … Δεν το θυμάμαι καλά, αφήστε το βλακεία έχω γράψει! Θυμάμαι κάτι τέτοιο ώστε να δείξουμε, δηλαδή με το που βλέπω 1/ν μου θυμίζει ακολουθία που τείνει στο 0.
Ερ – Α! μάλιστα, κατάλαβα. Συνδέεται αυτό με τη συνέχεια;

Α – Υπάρχει ένα Θεώρημα που το χρησιμοποιούσα κιόλας στις εξετάσεις αλλά δεν το θυμάμαι αυτή τη στιγμή . . . με ακολουθίες . . .για να αποδείξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης. Γενικώς μια φορά στη ζωή μου έχω διαβάσει Απειροστικό!



Ερ – Εντάξει! Ας δούμε τώρα αυτό. Πες μου. Εδώ έχουμε μόνο γραφήματα, αυτό που βλέπεις. Τι σου κάνει αυτό;

Α – Στα γραφήματα πιστεύω ότι όλα τα έχω λάθος.

Ερ – Το χαρακτήρισες αυτό. . .

Α – Συνεχής με ένα μόνο σημείο ασυνέχειας, έτσι έχω γράψει τώρα.

Ερ – Ωραία, γιατί;

Α – Γιατί βλέπω το κενό και έχει άλλη τιμή το y_2.

Ερ – Επειδή μου είπες ότι χειρίζεσαι καλύτερα τα σύμβολα παρά τα γραφήματα, πώς θα το δικαιολογούσες αυτό με χρήση των ορίων; Με τα μαθηματικά Λυκείου, δεν με πειράζει

Α - …ε…θα το έπαιρνα μεγαλύτερο του 5 μικρότερο του 5 η f είναι η τάδε ας πούμε, ενώ για 5 παίρνει την τιμή y_2.

Ερ – Δηλαδή έχεις μια δίκλαδη συνάρτηση…

Α – Ναι

Ερ – Συμφωνώ. Που είναι μια καμπύλη τάδε για $x \neq 5$…

Α - …αλλά βασικά άμα πηγαίναμε 5 συν 5 πλην το όριο, πάλι στην τιμή…όχι θα μας έδινε την τιμή y_1 λογικά, όχι την τιμή y_2. Άρα είναι συνεχής στο σημείο 5.

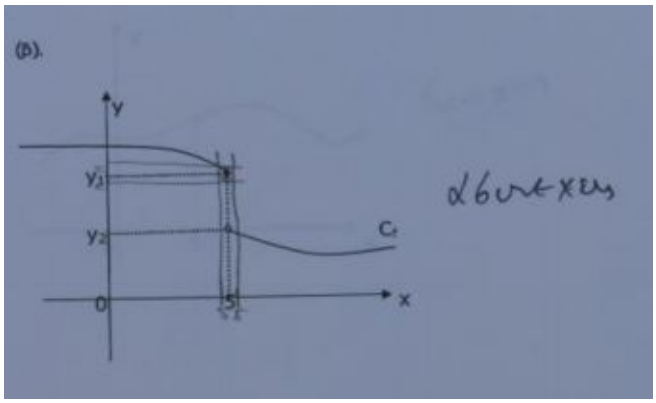
Ερ – Γιατί;

Α – γιατί στο σημείο 5 έχουμε την τιμή y_2 …

Ερ – το f(5) εννοείς…

Α – Ναι, το f(5) είναι y_2 ενώ τα όρια συν πλην είναι y_1. …Τώρα που το ανέλυσα δηλαδή, εκείνη την ώρα το έγραψα γρήγορα για να φύγω!

Ερ – Τι ήταν εκείνο που έκανε εκείνη την ώρα να απαντήσεις ότι δεν ήταν συνεχής;



Α – ε το κενό! Ε ναι!

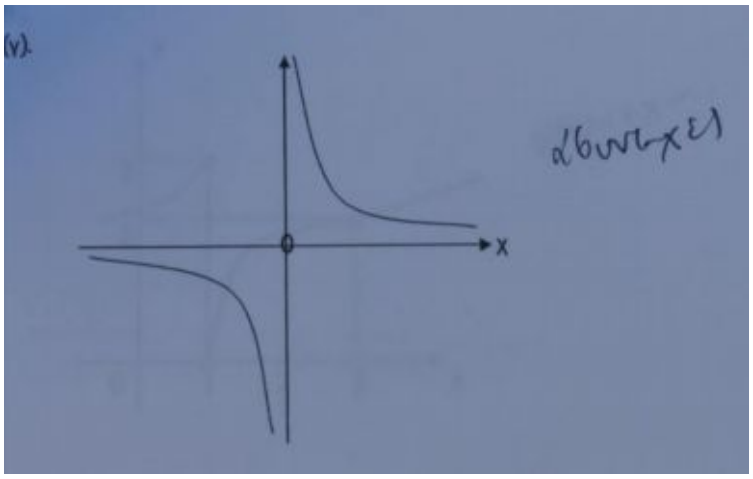
Ερ – Ωραία, σ' αυτό τώρα. Βλέπω έχεις κάνει κάποιο σχηματάκι…

Α – Ναι , σκεφτόμουνα αυτό έτσι όπως μας το έκανε ο δάσκαλος αλλά δεν ξέρω αν είναι σωστό…πάλι λάθος πρέπει να είναι.

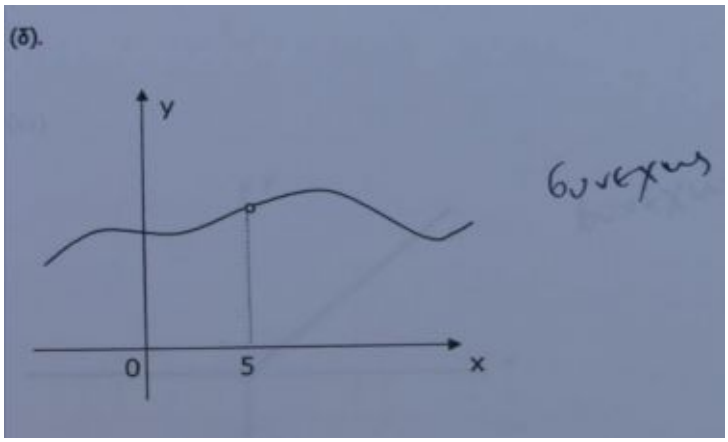
Ερ – Είναι σχέδιο που έχεις κάνει στο… όταν λες δάσκαλο εννοείς στο Λύκειο ή στο Πανεπιστήμιο;…

Α – …,όχι! όχι, εδώ τον καθηγητή!

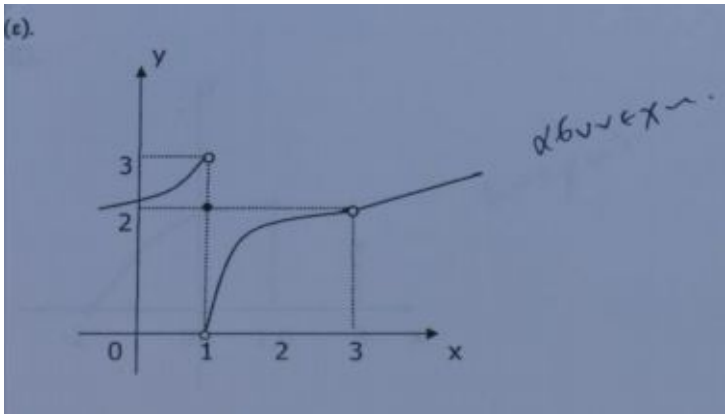
Ερ – Α μάλιστα εντάξει. Τι προσπάθησες να κάνεις;
Α – Παίρναμε συνήθως σε γραφήματα το δ από το $x-x_0$, αυτό το δ, αυτή την απόσταση…
Ερ – …α! του ορισμού…
Α –… ναι του ορισμού, με τον ε-δ ορισμό, και βλέπαμε αν πράγματι σε αυτά τα σημεία είναι συνεχής, σε αυτές τις δύο γραμμές… Εγώ πιστεύω ότι αυτό…δεν ξέρω
Ερ – Καλώς θα γυρίσω ή ούτως ή άλλως στον ορισμό μετά οπότε δεν το σχολιάζω παραπάνω. Άρα, η φράση σου 'ασυνεχής' σε τι στηρίχθηκε;
Α - …
Ερ – Το ολοκλήρωσες αυτό στο μυαλό σου με τον ε-δ ορισμό…
Α – Όχι, όχι
Ερ – Τότε τι σε έκανε να απαντήσεις ασυνεχής; Μην το σκέφτεσαι πολύ! Συνήθως το πρώτο πράγμα που σου έρχεται στο μυαλό είναι αυτό που έκανες και τότε! Οπότε μην το σκέφτεσαι πολύ! Κατάλαβες τι λέω;



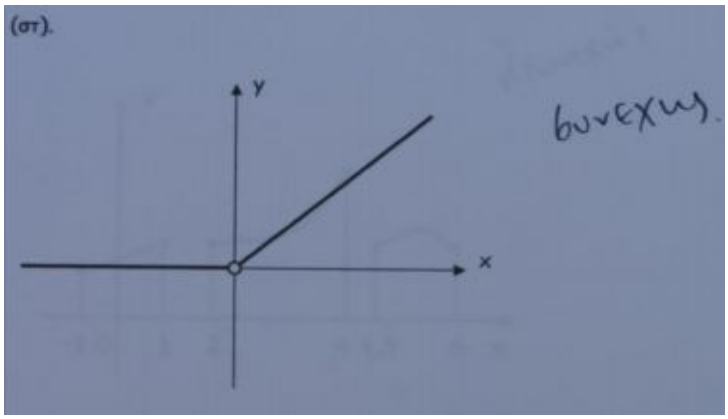
Α – Ναι… ίσως ναι, έχετε δίκιο… (κοιτάζει πάλι το σχέδιο)…επειδή έχει το κενό, μεγάλη απόσταση…
Ερ – …Εντάξει, ωραία…
Α – Γι' αυτό, αλλά μπορεί να είναι και λάθος…πρέπει να είναι λάθος. (κοιτάζει το επόμενο σχήμα, το (γ)) Α! εδώ δεν ξέρω γιατί έβαλα ασυνεχής! Περιμένετε να δω…
Ερ - …αν θα το κοίταζες τώρα τι θα έβαζες; Θέλω και πάλι την πιο γρήγορη σου αντίδραση. Τι σε κάνει να πιστεύεις ότι είναι ασυνεχής;
Α – Α! γιατί όταν το χ πάει στο συν άπειρο πάει στο συν άπειρο και όταν πάει στο πλην άπειρο πάει στο πλην άπειρο η συνάρτηση. Αυτή πάει στο μηδέν κι αυτή πάει στο πλην άπειρο. Όχι! Ψέματα! Περιμένετε. Όταν το χ πάει στον συν άπειρο, η συνάρτηση πάλι πάει στο συν άπειρο. Βασικά είναι …σε διαφορετικά τεταρτημόρια και δεν μου καθότανε να είναι συνεχής γιατί η μια πάει από εδώ και η άλλη πάει από εκεί. Έτσι δεν είναι; Οπτικά το είδα.



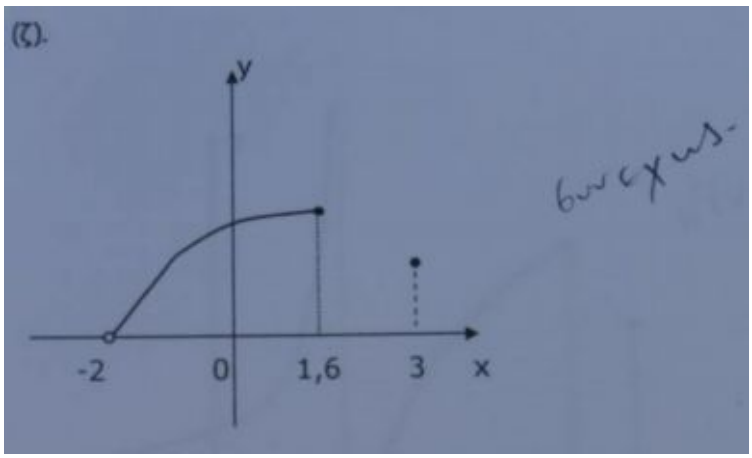
Ερ – Ωραία, αυτή τώρα; (της δείχνω το σχήμα δ)
Α – Έχει μόνο ένα κενό, στο οποίο άμα έπαιρνες πάλι το όριο πάλι το ίδιο σημείο θα…πάλι το f(5) θα έβρισκες ως όριο. Έτσι πιστεύω…



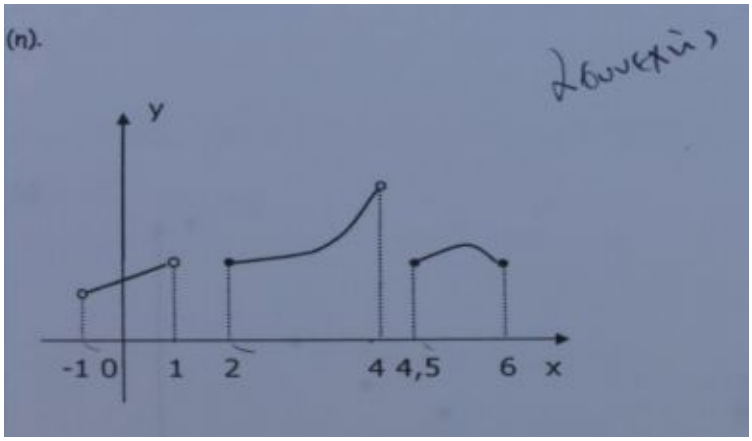
Ερ – Ωραία, ωραία.
(κοιτάζει το επόμενο σχήμα, το (ε))…
Α – Αυτή είναι πολύπλοκη γι' αυτό έγραψα ασυνεχής. Βλέπω τόσα κενά και μου φαινόταν πολύπλοκη. Εν τω μεταξύ παίρνει διαφορετικές τιμές εδώ 3 εδώ 2 εδώ 1 και στην ουσία δεν είναι…μια συνεχής καμπύλη. Έτσι μου ήρθε το ασυνεχές.



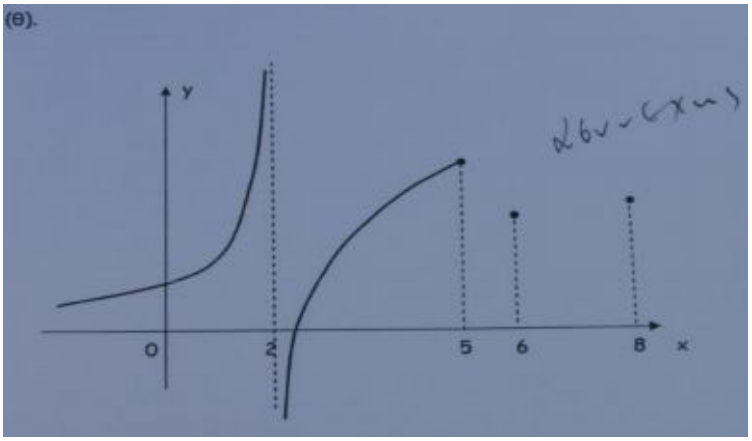
Ερ – Ωραία, εδώ τώρα;
Α – Εδώ πιστεύω ότι είναι συνεχής εκτός του μηδέν.
Ερ - Ωραία



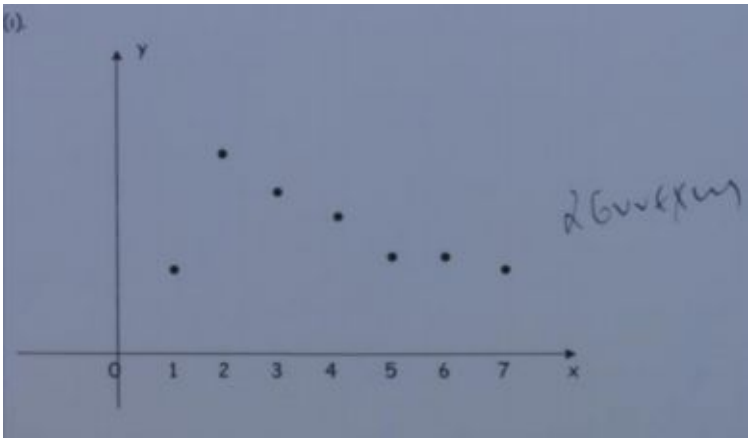
Ερ – Αυτή τώρα;
Α – Αυτή…έχω βάλει συνεχής…όχι δεν είναι συνεχής…Τέλος πάντων, πιστεύω ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ – Τι σε χαλάει;
Α – Ε! το ότι έχει σημείο εδώ, το 3. Αυτό με χαλάει. Αλλά δεν ξέρω, εκείνη τη στιγμή μου ήρθε το συνεχής.



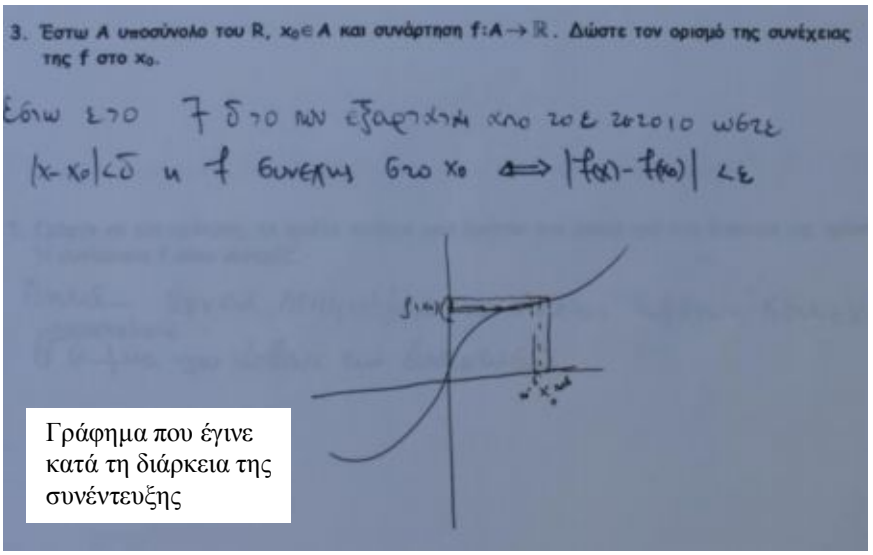
Ερ – Ωραία, και για την (η);
Α – Και για τους ίδιους λόγους…
Ερ – …ασυνεχής;…
Α - …ναι σπάει…σπάει σε πολλά κομμάτια κιόλας.
Ερ – Ωραία.



Ερ – Αυτή;
Α - …αυτή μοιάζει λίγο με το άλλο γράφημα που ήταν στα τεταρτημόρια, μοιάζει λίγο, αυτή πάει στο 2 αυτή πάει στο 5 ασυνεχής είναι.
Ερ – Ωραία.



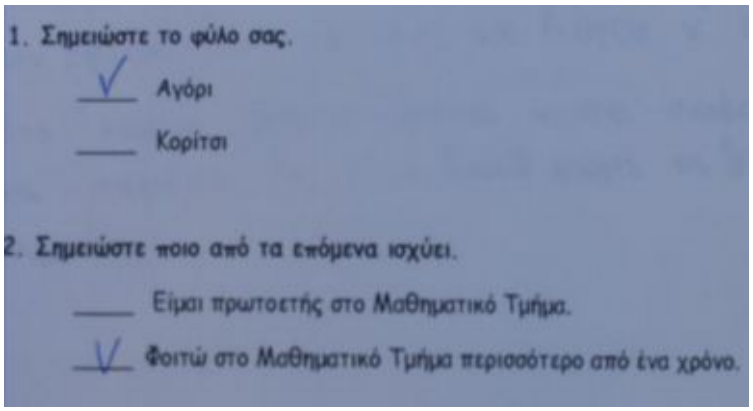
Ερ – Αυτή τώρα;
Α – Ασυνεχής, που είπαμε για τους ρητούς και τους άρρητους
Ερ – Πολλά σημεία έτσι;
Α – Ναι, είναι ένα παράδειγμα σαν τους ρητούς άρρητους.
Ερ. Πού ωραία.



Ερ – Ωραία, να γυρίσω τώρα λίγο στον ορισμό, ο οποίος είναι σχεδόν σωστός. Τον θυμόσουνα ή τον συζήτησες…
Α – Όχι! Δεν τον συζήτησα, τον θυμόμουνα!
Ερ – Πώς τον καταλαβαίνεις τον ορισμό; Πώς τον αντιλαμβάνεσαι;
Α – Πώς τον καταλαβαίνω. Λοιπόν, το $|x - x_0|$ είναι μια απόσταση, έτσι; Είναι μια πολύ μικρή απόσταση, το δ θεωρούμε ότι είναι ένας πολύ μικρός αριθμός. Η f θα είναι συνεχής αν, αυτό που έκανα στο σχήμα, αν πράγματι η απόσταση του f(x) και του $f(x_0)$ είναι και αυτός ένα πολύ μικρός αριθμός.
Ερ – Ωραία, παίρνω μια τυχαία καμπύλη (σχεδιάζω την καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα παραπάνω), βάζω ένα x_0 και το αντίστοιχο $f(x_0)$. Πώς θα μου εξηγούσες στο γράφημα αυτό, τον ορισμό; Δηλαδή 'σχηματικά' πώς αντιλαμβάνεσαι αυτόν τον ορισμό;

Α – Επειδή ξεκινάει από την υπόθεση ότι υπάρχει ε εεεε δ και ότι…
Ερ - …δηλαδή ξεκινάμε με;…
Α - …έστω ε, υπάρχει δ…
Ερ - …να μπορώ να βρω λοιπόν έτσι;…
Α – …ναι έχουμε ένα δ, μπορούμε να βρούμε ένα δ το οποίο βρίσκεται σε αυτή την απόσταση ας πούμε, το υψώνουμε και βλέπουμε ότι παίρνει την τιμή αυτή, το χ πλην. Λοιπόν αυτή η απόσταση είναι δ εδώ είναι το σημείο x-δ, x+δ, εδώ για παράδειγμα, και άμα το υψώσεις πάλι παίρνεις μια πολύ μικρή απόσταση εδώ που θεωρούμε ότι είναι το ε. κι έτσι ισχύει η συνέχεια.
Ερ – Δηλαδή θα ξεκινήσω από το δ και ανεβαίνοντας προς τα πάνω θα βρω το ε ή θα ξεκινήσω από το ε και θα βρω το δ;
Α – Αυτή είναι ερώτηση κρίσεως. Αφού λέμε έστω ε πρέπει να έχουμε πρώτα το ε έτσι; Αφού λέμε έστω ε έχουμε το ε ας πούμε άσχετα που στην πράξη, δηλαδή στις ασκήσεις εγώ όταν τις αποδείκνυα, συνήθως έπαιρνα τις τιμές και το ε το έβρισκα με αυτό που με συμφέρει, αυτό που μου κάνει, καταλάβατε; Γι' αυτό μου ήρθε τώρα να το πω. Στην ουσία όμως το ε πρέπει να ξέρουμε στην αρχή αφού λέμε έστω ε. Αλλά στην πράξη το ε το βρίσκουμε μετά για να δείξουμε την απόδειξη αυτή. Δηλαδή θα έπρεπε από εδώ (δείχνει το f(x)) να πάμε στο x αλλά θυμάμαι ότι στην πράξη το έκανα ανάποδα.
Ερ. Πολύ ωραία! Αρετή σε ευχαριστώ πολύ για το χρόνο σου!

2η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ


1. Σημειώστε το φύλο σας.

✓ Αγόρι

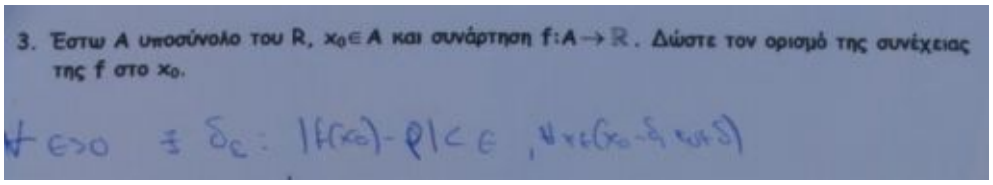
___ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

___ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

✓ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

'Οδυσσέας', φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο


3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : |f(x_0) - \ell| < \varepsilon, \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

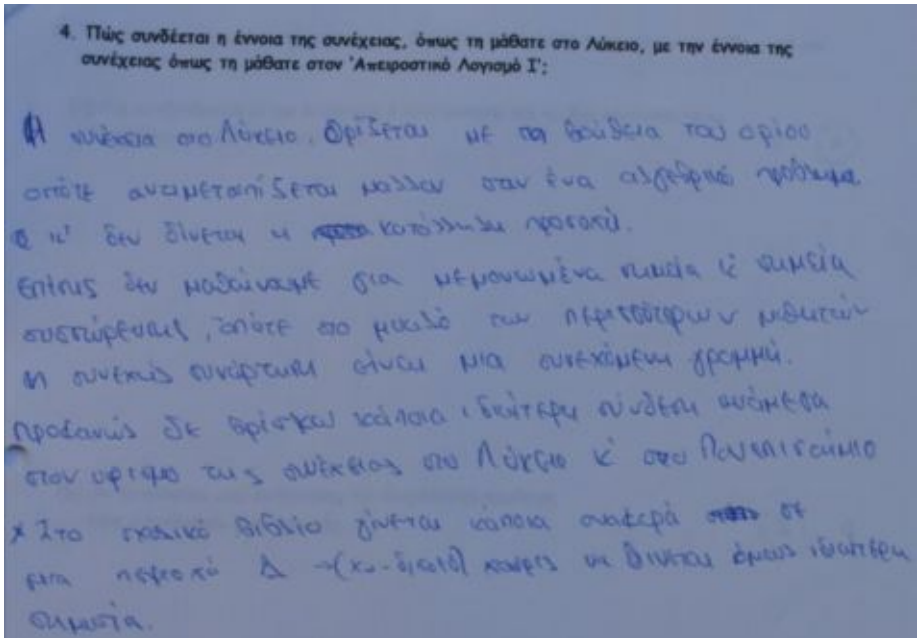
Ερ – Οδυσσέα από ότι είδα έγραψες τον ορισμό και μάλιστα τον έγραψες λίγο διαφορετικά και αυτό μου άρεσε! Υπάρχει κάτι τώρα που το ξαναβλέπεις που να μην σου πάει καλά;

Ο – Ναι, αυτό εδώ μέσα στο απόλυτο. Είναι f(x) κανονικά μείον $f(x_0)$ κανονικά και όλο σε απόλυτο. Το l είναι το $f(x_0)$.

Ερ – Α! μάλιστα δηλαδή είναι καλύτερα πιστεύεις $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *;*

Ο – ναι, ναι

Ερ – Εντάξει, θα ξαναγυρίσω σε αυτό μετά, οπότε δεν στέκομαι τώρα.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

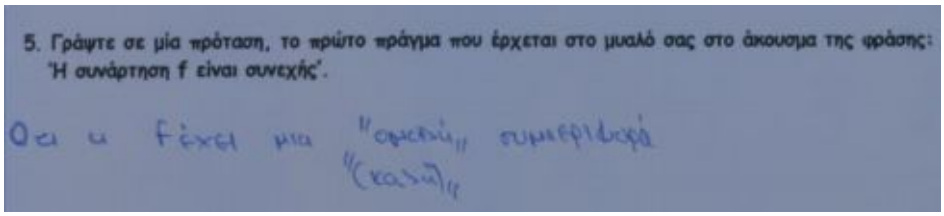
Η συνέχεια στο Λύκειο ορίζεται με τα βοήθεια του ορίου οπότε ανταμετωπίζεται μαζί σαν ένα αλγεβρικό πρόβλημα. Ε κ' δεν βλέπει η κατάλληλη πρόταση.
Επίσης δεν μιλούσαμε για μεμονωμένα σημεία κ' σημεία συσσώρευσης, οπότε στο μυαλό των περισσότερων μαθητών η συνεχής συνάρτηση είναι μια συνεχόμενη γραμμή.
Προσωπικά δε βρίσκω κάποια ιδιαίτερη σύνδεση ανάμεσα στον ορισμό της συνέχειας στο Λύκειο κ' στο Πανεπιστήμιο
Στο σχολικό βιβλίο γίνεται κάποια αναφορά σε μια περιοχή $\Delta \to (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ κοντά σε δίνεται όμως ιδιαίτερη σημασία.

Ερ – Η απάντησή σου αυτή είναι μια από τις πιο ενδιαφέρουσες και εδώ σηκώνει κουβέντα πολύ! Λες ότι…

Ο – …απλά πιστεύω ότι όλη η σημασία του φυλλαδίου ήταν αυτή. Δηλαδή τι γίνεται. Ανεξάρτητα από το τι γνώσεις έχω πάνω στον Απειροστικό, τυπικές και καθαρά, λόγω του ότι έχω μάθει

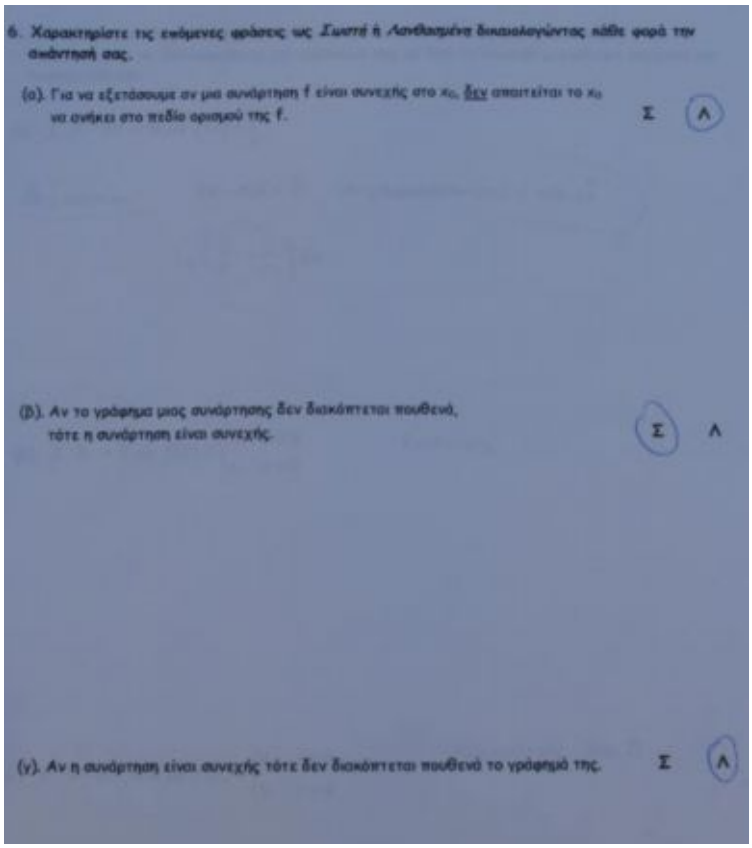
κάποια πράγματα εδώ πέρα, αλλά παρόλα αυτά είναι περισσότερα από όσα έχω μάθει στο Λύκειο, και επειδή τυχαίνει να κάνω μάθημα σε παιδί το οποίο τελειώνει τώρα το Λύκειο, μπορώ να έχω άποψη ανεξάρτητα κι αν δεν είμαι και ο καλύτερος φοιτητής, εδώ πέρα για το ζήτημα της συνέχειας το οποίο όντως είναι ένα ας πούμε πικρό ζήτημα για το λόγο ότι όπως γράφω κι εκεί πέρα, στο Λύκειο δεν περνάει καν από την … όσο θυμάμαι σαν μαθητής, ήταν από τα πράγματα που δεν τους είχα δώσει καμιά ιδιαίτερη βάση, ήταν για μένα κανονικά μια αλγεβρική πράξη, ένα όριο, και τίποτα περαιτέρω. Μπορεί να μου είχαν πει δυο τρεις άνθρωποι ότι αυτό είναι κάτι πιο βαθύ, αλλά δυστυχώς δεν προλαβαίνουμε να ασχοληθούμε, πρέπει να βγάλουμε μια συγκεκριμένη ύλη, αφού θέλεις να περάσεις κάπου πρέπει να μάθεις κι άλλα πράγματα. Και αυτή πιστεύω είναι και η δυσκολία του Απειροστικού όταν έρχεσαι στο πρώτο έτος δεν είναι και το πιο δύσκολο μάθημα αλλά απαιτούν να αλλάξεις τη νοοτροπία από αυτή που είχες δημιουργήσει τρία χρόνια στο Λύκειο. Γι' αυτό υπάρχει και η δυσκολία στη συνέχεια και σε ένα σωρό άλλα πράγματα.

Ερ – Να ρωτήσω. Λες «δεν μαθαίνουμε για μεμονωμένα σημεία και σημεία συσσώρευσης…


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Θα η f έχει μια "ομαλή" συμπεριφορά "(καλή)"

Ο – …ναι δεν είναι σωστό; για παράδειγμα για να σου απαντήσω πάω και στην επόμενη ερώτηση η πρώτη πρόταση που θα μου ερχόταν στο μυαλό πριν ένα χρόνο θα ήταν ότι είναι μια συνεχόμενη γραμμή και πιστεύω ότι πολλοί άνθρωποι ξέρουν ότι δεν είναι συνεχόμενη γραμμή, που το συζήτησα, αλλά το γράψανε, γιατί εσύ ζήτησες το πρώτο πράγμα που τους ερχόταν στο μυαλό. Είναι δύσκολο να σου φύγει από το μυαλό ότι είναι μια συνεχόμενη γραμμή άρα είναι συνεχής, το οποίο δεν ισχύει.


6. Χαρακτηρίστε τις ενώμενες φράσεις ως Σωστές ή Λανθασμένα δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

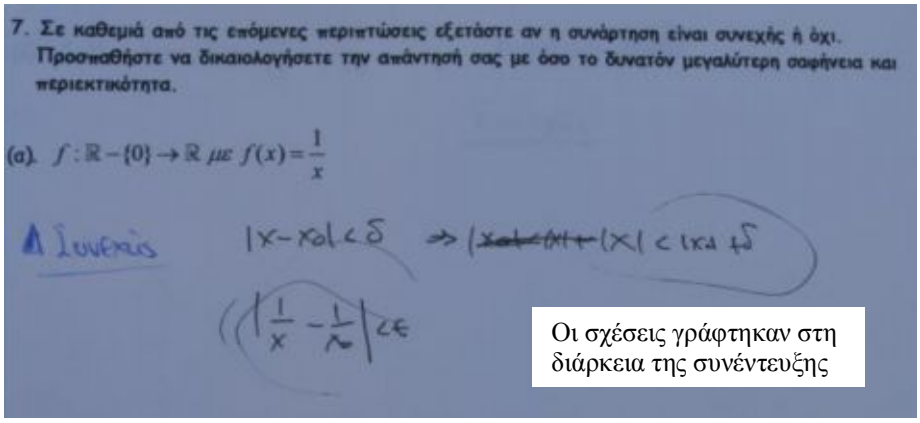
Ερ – Ωραία, στο 6 α τώρα λες ότι είναι λάθος. Πώς σου ήρθε αυτό, πώς το επέλεξες;

Ο – Γιατί δεν υπάρχει το $f(x_0)$ αφού δε ορίζεται εκεί πέρα το x_0. Από το ορισμό κανονικά.

Ερ – Ωραία, στο β τι λες;

Ο – Αυτό κατ' αρχήν δεν θα μπορούσα να βάλω κάτι άλλο από τις αναμνήσεις

του Λυκείου, δεν υπήρχε περίπτωση, τώρα δεν ξέρω αν με το πεδίο ορισμού μπορεί να γίνει κάτι…πώς να στο πω τώρα…
Ερ – Σε αυτές τις περιπτώσεις συνήθως ψάχνεις για κάποιο αντιπαράδειγμα. Αν είναι λάθος…
Ο – …ναι, ναι, ναι, αυτό ψάχνω…
Ερ - …κάποια που το γράφημά της αν και διακόπτεται η συνάρτηση να είναι συνεχής…
Ο - …ναι, ναι … δεν μπορώ, δεν μπορούσα να σκεφτώ κάτι.
Ερ – Ωραία, στο (γ) γιατί επέλεξες το Λάθος;
Ο – Κατ' αρχήν η συνάρτηση μπορεί να είναι πιο πάνω πιο κάτω αλλά να υπάρχει η κουκίδα, να υπάρχει το σημείο αλλά να είναι συνεχής, μπορεί να έχουμε μεμονωμένα σημεία, εννοείται ότι δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχές το γράφημα.


7. Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σαφήνεια και περιεκτικότητα.

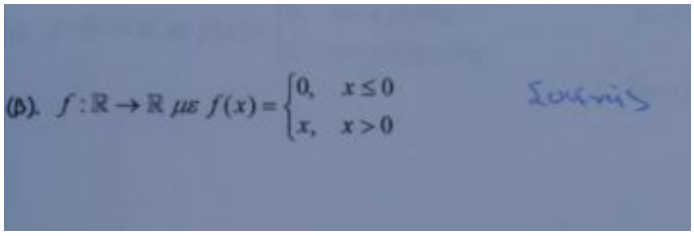
(α). $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$

Δ Συνεχής $|x-x_0|<\delta \Rightarrow$ $|x|<|x_0|+\delta$

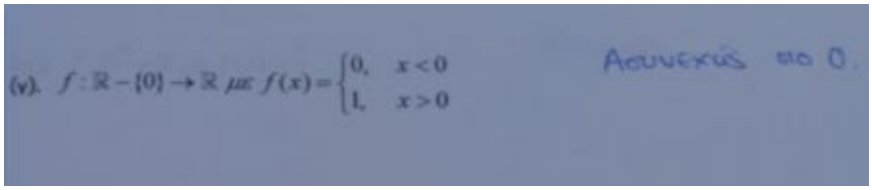
$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\epsilon$

Οι σχέσεις γράφτηκαν στη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ – Μάλιστα, τώρα εδώ στην 7, λες συνεχής. Γιατί; Πώς το σκέφτηκες; Αλγεβρικά ή γραφικά; Πώς το σκέφτηκες;
Ο – Αλγεβρικά περισσότερο.
Ερ – Δηλαδή πώς;
Ο - …έχουμε ότι…(σκέφτεται ... και γράφει πάνω στο ερωτηματολόγιο με το μαύρο στυλό)…Αν δεν κάνω μεγάλο λάθος, το έχω αποδείξει σίγουρα όταν έδινα τον Απειροστικό Ι αυτό το πράγμα, δηλαδή αυτό εδώ είναι ένα κολπάκι και με αυτή τη σχέση εδώ βγαίνει.

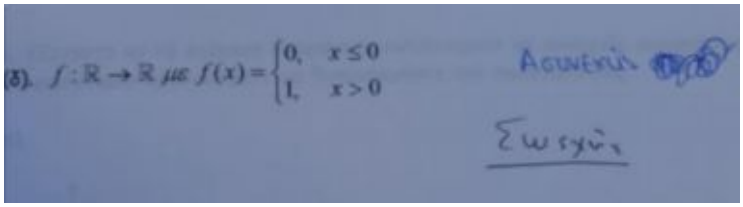

(β). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$ Συνεχής

Ερ – Ωραία, την άλλη την επιλέγεις επίσης ως συνεχή, έτσι; Πώς το σκέφτηκες;
Ο – Εδώ το μόνο σημείο το οποίο πρέπει ουσιαστικά να ελέγξουμε είναι το σημείο αλλαγής τύπου, το μηδέν…το οποίο, αφού θέλεις το πρώτο πράγμα, το σκέφτηκα με τον ορισμό του Λυκείου. Αυτό ήταν το πρώτο που σκέφτηκα και μου φάνηκε σωστό…

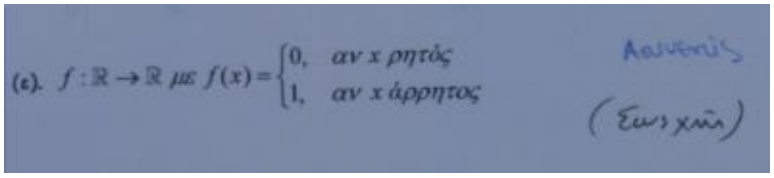

(γ). $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ Ασυνεχής στο 0.

Ερ – Ωραία, εδώ τώρα, στο (γ);
Ο – Εδώ…το πρώτο πράγμα που σκέφτηκα ήταν να πάρω δυο ακολουθίες ρητών και αρρήτων οι οποίες πηγαίνουν σε διαφορετικά…όχι σε ίδια (αναρωτιέται)… ναι που συγκλίνουν σε διαφορετικά…δηλαδή έχω μια x_v και μια y_v που πάνε στο 0 αλλά η $f(x_v)$ πάει στο 0 ενώ η $f(y_v)$ πάει στο 1. Δεν τηρείται η αρχή της μεταφοράς, αυτό μου ήρθε…

Ερ - …και το έδειξες αυτό, ή απλά το σκέφτηκες;…
Ο - …ναι σκέφτηκα ότι πηγαίνει έτσι.

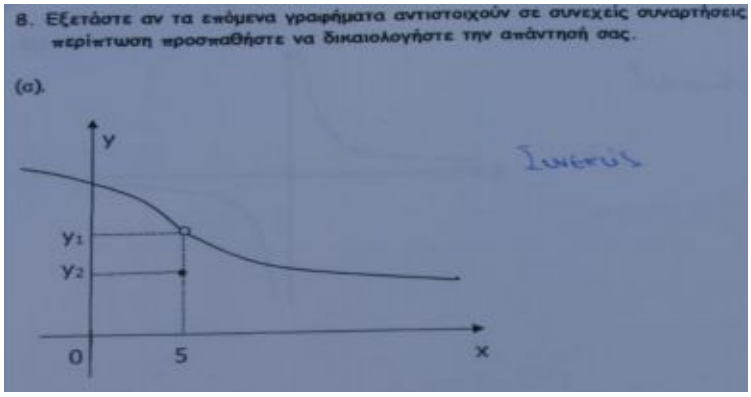


Ερ – Γι' αυτή τώρα; Λες ασυνεχής ε;
Ο – (το κοιτάζει λίγο προσεκτικά)…
Εδώ πραγματικά δεν θυμάμαι τι σκέφτηκα, εδώ τώρα μου φαίνεται συνεχής…ε, όχι…ε…(σκέφτεται)
Ερ – Σε διευκολύνει να έχεις το γράφημά της ή όχι; Η δεν σου λέει τίποτα αυτό;
Ο – Με διευκολύνει…(φτιάχνει σε πρόχειρο χαρτί γρήγορα και σωστά το γράφημά της)…ναι τώρα φαίνεται πολύ καλύτερα, ναι, ναι τώρα νομίζω ότι φαίνεται απόλυτα…
Ερ - …ότι είναι συνεχής ή ότι δεν είναι;
Ο - …ότι είναι, ότι είναι συνεχής.



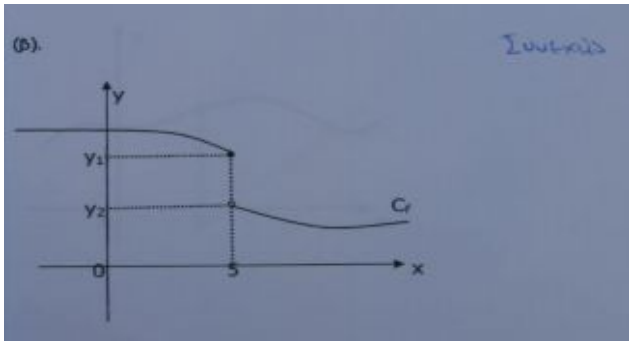
Ερ – Άρα διορθώνω το (δ) ότι είναι συνεχής λες. Ωραία, τώρα η (ε) λες είναι ασυνεχής έτσι;
Ο - …Συνεχής είναι κι αυτή η συνάρτηση.

Ερ – Συνεχής;
Ο – ναι, συνεχής
Ερ – Αυτή τώρα;
Ο - …(διστάζει)…συνεχής.
Ερ – συνεχής; Τι είναι αυτό που σε κάνει να αλλάξεις την αρχική σου απάντηση;
Ο – τι είχα σκεφτεί τότε…Κοίταξε όταν έδωσα τις απαντήσεις είχα πιο καθαρό μυαλό, ήμουνα σχεδόν σίγουρος για τις απαντήσεις, αλλά τώρα γι' αυτή τη συγκεκριμένη…κάτι μου έλεγε ότι είναι ασυνεχής. Κάπου το είχα δει, κάπου το είχα μάθει αλλά ή τότε έκανα λάθος ή τώρα!
Ερ – τώρα τι θα κράταγες; Το συνεχής ή το ασυνεχής;
Ο – συνεχής θα κράταγα



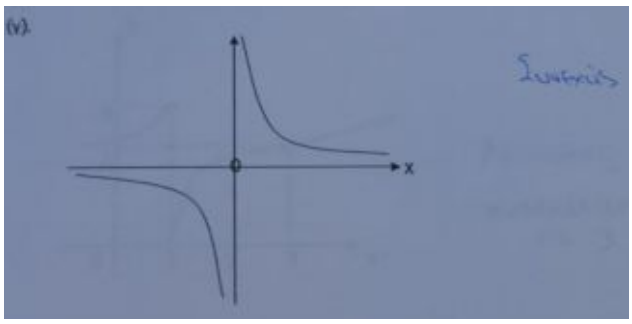
Ερ – Ωραία, ας δούμε τώρα αυτή.
Ο – Αυτή ουσιαστικά είναι η περίπτωση συνεχόμενης γραμμής με το σημείο που κόβεται ουσιαστικά υπάρχει μέσα στο σημείο, δηλαδή υπάρχει αυτή η τιμή εδώ πέρα της συνάρτησης, αυτό καταλαβαίνω από το γράφημα.

Ερ – Ωραία, κατάλαβα.

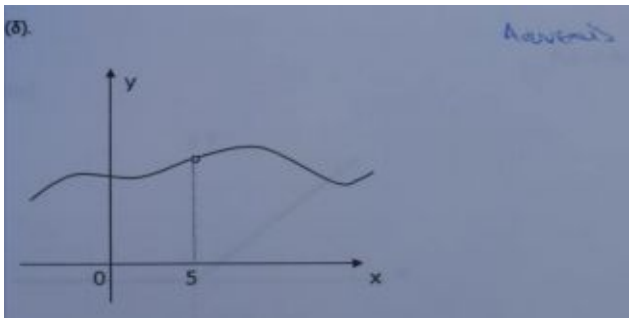


Ο – Ομοίως και εδώ.

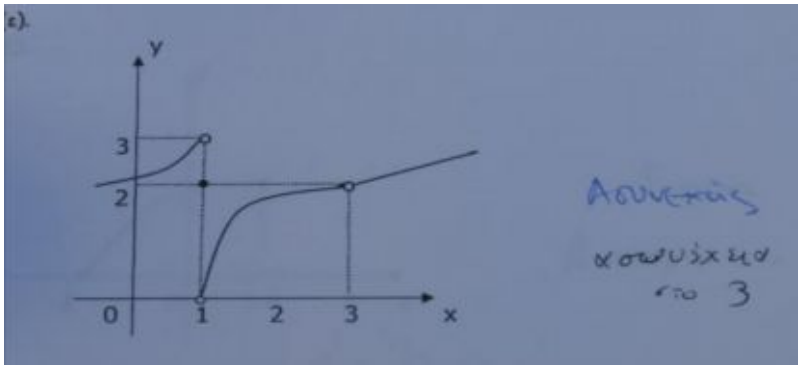
Ερ – Ωραία.



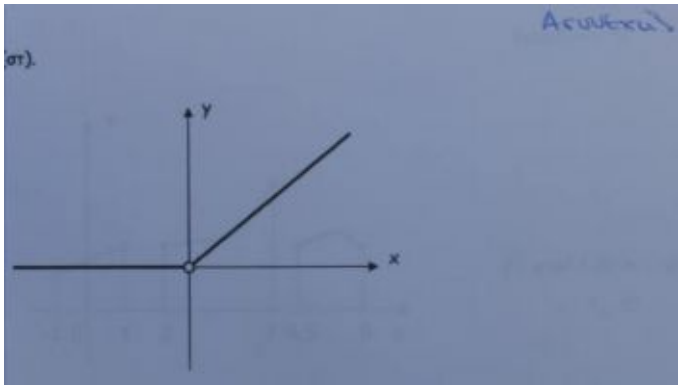
Ερ – Αυτή;
Ο – Λόγω της γραμμής κυρίως, είναι δίκλαδη μιας ένωσης διαστημάτων



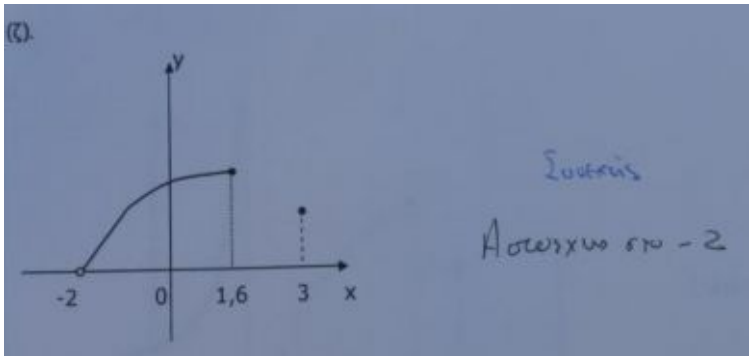
Ερ – Η επόμενη τώρα;
Ο – Λόγω του σημείου…
Ερ - …που λείπει;
Ο - …ναι που λείπει.
Ερ – ενώ στο (α) γιατί λες ότι είναι συνεχής;
Ο – γιατί το σημείο υπάρχει, άσχετα αν κόβεται, είναι πιο κάτω.



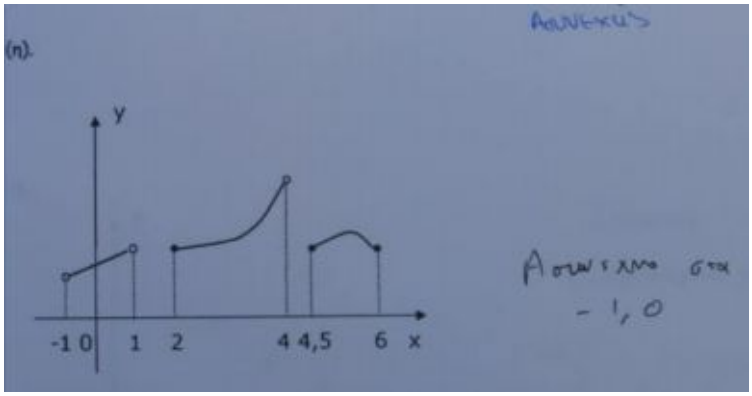
Ερ – Εδώ τώρα;
Ο – Αυτό εδώ βρήκα το σημείο ασυνέχειας, το σημείο 3.
Ερ – Άρα σημειώνω εδώ 'ασυνέχεια στο 3' έτσι;
Ο – ναι, ναι.



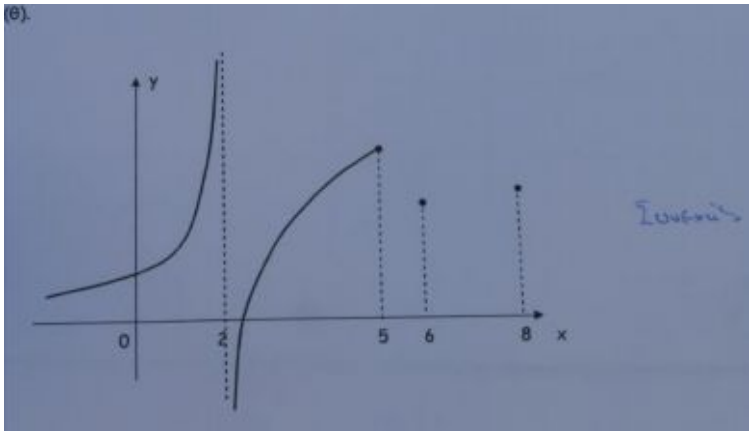
Ερ – Εδώ;
Ο – Στο μηδέν ασυνέχεια … στο μηδέν.



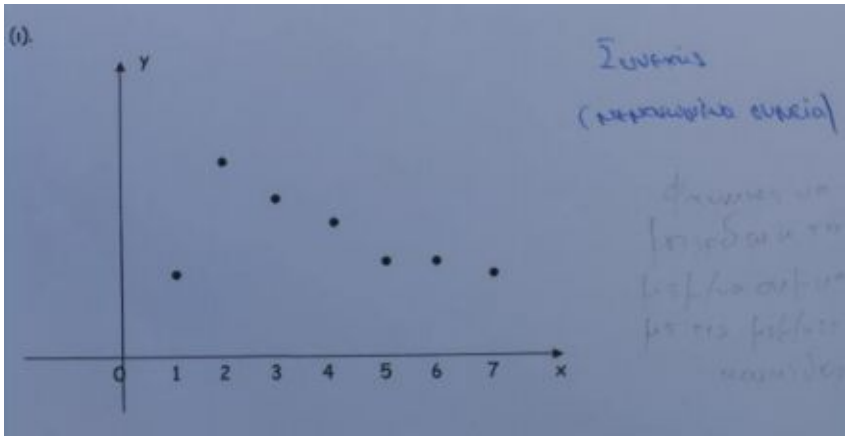
Ερ – Εδώ τώρα;
Ο – Εδώ είναι συνεχής (δείχνει το 1,6), εδώ είναι συνεχής (δείχνει το 3) αυτό δεν το είχα δει (δείχνει το -2). Άρα κι αυτή ασυνεχή θα την έλεγα με την ίδια λογική, λόγω του -2.
Ερ – Ωραία, άρα σημειώνω 'ασυνεχής' στο -2.



Ερ – Αυτή;
Ο – Ασυνεχής πάλι λόγω των σημείων -1, 1 και 4



Ερ – Εδώ;
Ο - Συνεχής παντού, μεμονωμένα σημεία εδώ, κανονικά στο 6 και το 8, άρα συνεχής …



Ο – …κι εδώ το ίδιο, έχω μεμονωμένα σημεία, άρα παντού συνεχής.

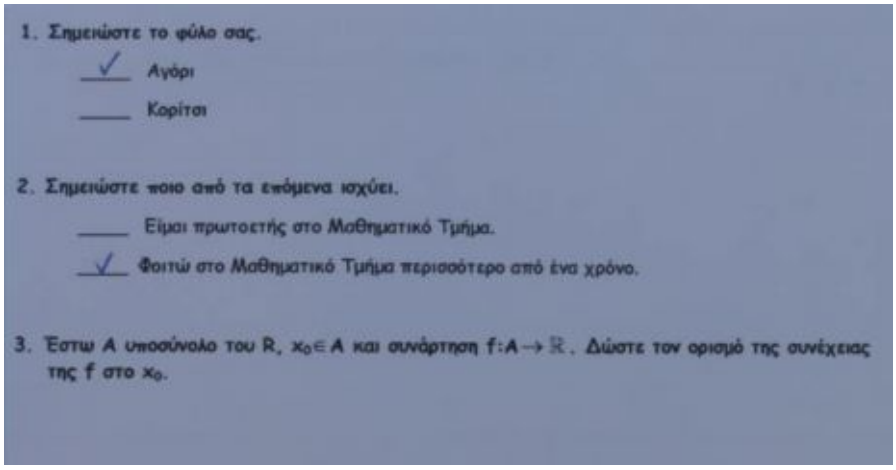
Ερ – Ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ!

3η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Το ηχογραφημένο κείμενο αυτής της συνέντευξης λόγω τεχνικού προβλήματος δεν μπορούσε να απομαγνητοφωνηθεί.

4η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

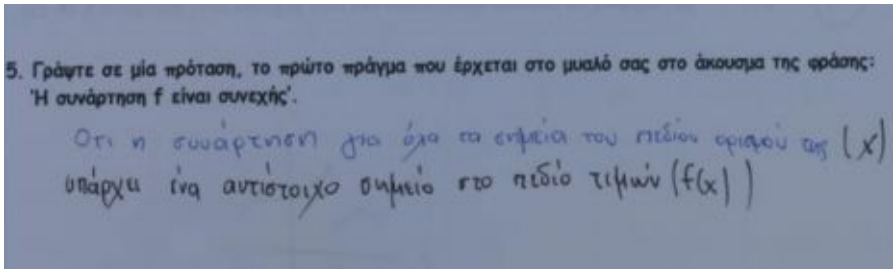
'Νίκος', φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


1. Σημειώστε το φύλο σας.
✓ Αγόρι
___ Κορίτσι

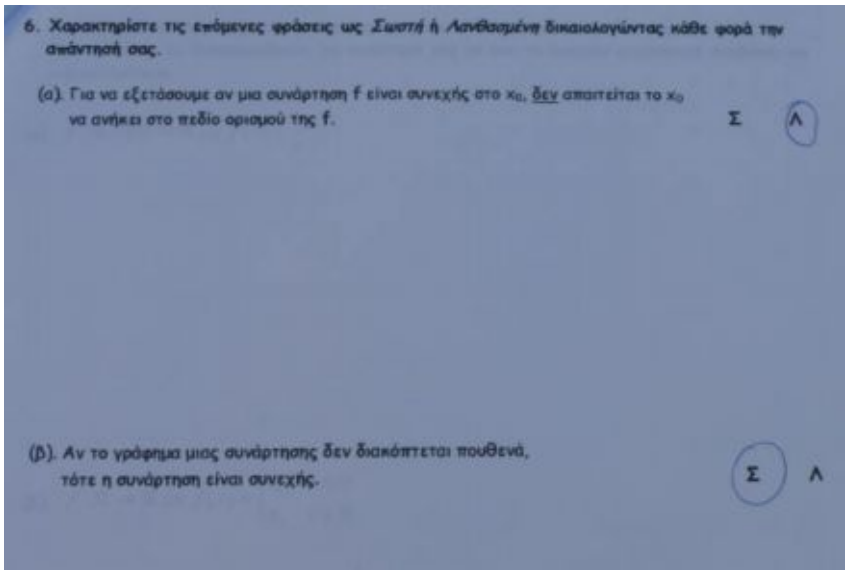
2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.
___ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.
✓ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Ερ – Νίκο απ' ότι είδα στο γραπτό σου δεν έγραψες τον ορισμό της συνέχειας. Μήπως από τότε το κοίταξες ή τον θυμήθηκες;
Ν – Όχι, δεν τον θυμάμαι αλλά…
Ερ – Δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα Νίκο, απλά ρώτησα. Πες μου λίγο για το 5. Νοιώθω ότι τη φράση την άφησες στη μέση…


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.
Οτι η συνάρτηση για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της (x) υπάρχει ένα αντίστοιχο σημείο στο πεδίο τιμών (f(x))

Ν - …ναι, την άφησα στη μέση.
Ερ – Τι σκεφτόσουνα; Δηλαδή χωρίς πολλά μαθηματικά, τι σου έρχεται στο μυαλό;…
Ν – …ναι από αυτό που μου έρχεται στο μυαλό θα έβγαζα και κάποιο ορισμό…
Ερ – …ωραία, αυτό που σου έρχεται στο μυαλό πες μου.
(διστάζει αρκετά και κομπιάζει. Τον παροτρύνω να μου πει ελεύθερα ό,τι του έρχεται στο μυαλό χωρίς να ανησυχεί για την μαθηματική διατύπωση. Συνεχίζει να διστάζει, τον ενθαρρύνω και τελικά γράφει τη φράση που φαίνεται στην εικόνα με τα μαύρα γράμματα).

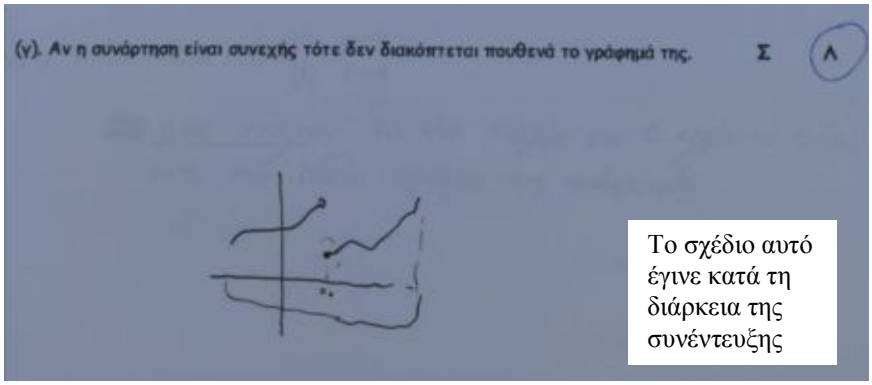

6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

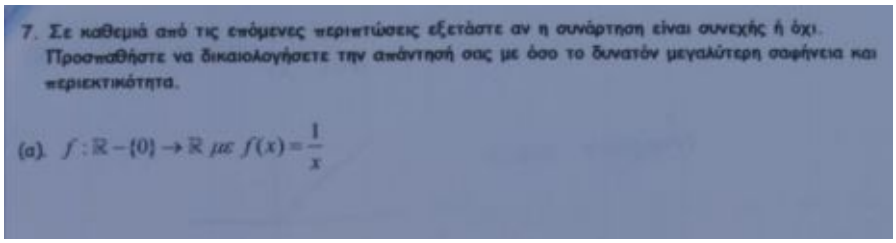
Ερ – Ωραία. Τώρα γιατί πιστεύεις ότι είναι λάθος το 6(α);
Ν - … (σκέφτεται)… Για να δούμε αν είναι συνεχής στο x_0 εμείς…είναι λάθος γιατί εξετάζουμε μια συνάρτηση αν είναι συνεχής σε όλα τα πεδία …σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Ερ – Ωραία, τώρα το (β) το βάζεις σαν Σωστό, έτσι;
Ν – Ναι, ναι βέβαια.


(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Το σχέδιο αυτό έγινε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ – Ωραία, τώρα στο (γ) γιατί επιλέγεις το Λάθος;
Ν - …Α! ναι, γιατί υπάρχουν περιπτώσεις που μπορεί να διακόπτεται το γράφημα, αλλά να είναι συνεχής.
Ερ – Έχεις κάποιο γράφημα υπόψη σου; Θες να σχεδιάσεις στο χαρτί κάτι;
Ν - …(σχεδιάζει πάνω στο ερωτηματολόγιο το γράφημα που φαίνεται παραπάνω.) Αυτή είναι συνεχής αλλά το γράφημά της διακόπτεται.

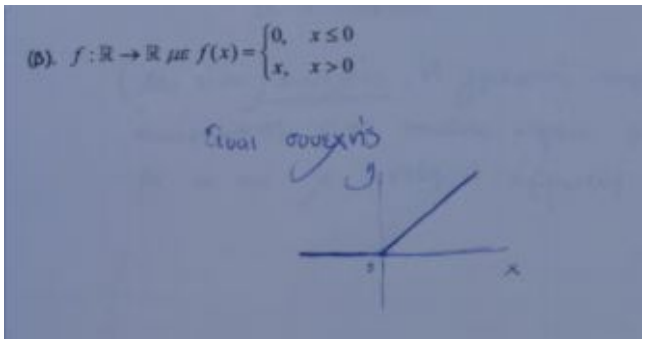

7. Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σαφήνεια και περιεκτικότητα.

(α). $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$

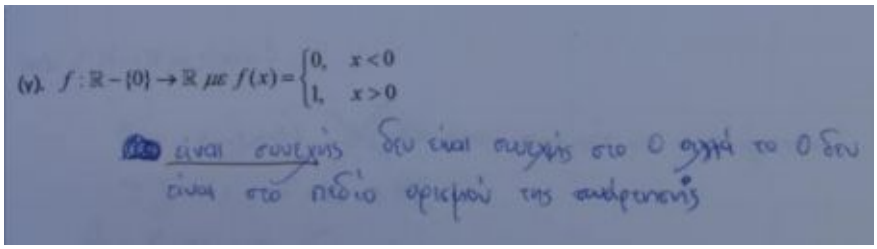
Ερ – Πολύ καλά. Τώρα πες μου για την 7(α). Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ *δεν έβαλες τι είναι.*

Τι θα επέλεγες τώρα γι' αυτήν;
Ν – Έχουμε και αυτό εδώ στο πεδίο ορισμού…
Ερ - …ότι εξαιρείται το μηδέν;…
Ν - …ναι, οπότε θα έλεγα ότι είναι συνεχής, γιατί στο μηδέν που θα είχαμε πρόβλημα, η συνάρτηση δεν ορίζεται.
Ερ – Μάλιστα. Θυμάσαι τη γραφική της παράσταση να την κάνεις;

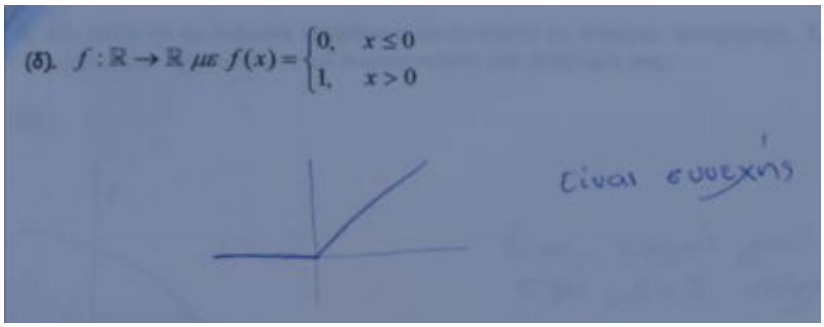
Ν - …μμμ…δεν τη θυμάμαι…όχι.
Ερ – Εντάξει, δεν υπάρχει πρόβλημα



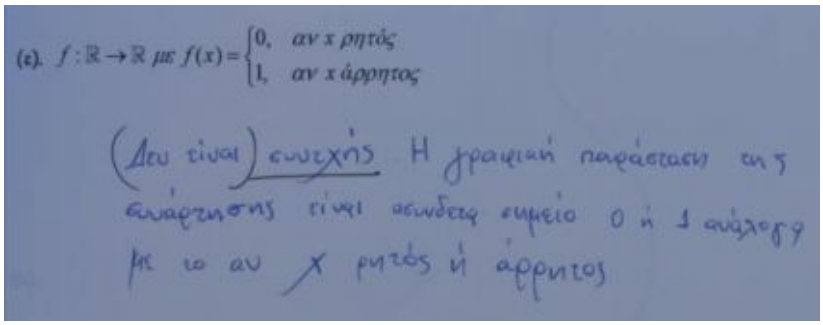
Πάμε τώρα σε αυτήν. Ναι, λες, είναι συνεχής. Γιατί; Τι σε βοήθησε; Το γράφημά της ή κάτι άλλο; Τι σε βοήθησε;…
Ν – …εεε…το γράφημα…
Ερ - …το γράφημα. Δηλαδή τι είναι αυτό στο γράφημα που σε κάνει να λες ότι είναι συνεχής;
Ν – Αντίστοιχα, όπως είχαμε απαντήσει και πριν, ότι δεν διακόπτεται το γράφημα για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού.



Ερ – Εδώ τότε γιατί θεωρείς ότι είναι συνεχής;
Ν – Είπαμε ότι αν ένα γράφημα δεν διακόπτεται, λέμε ότι είναι συνεχής, αλλά ένα γράφημα που διακόπτεται, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ – Α! μάλιστα, κατάλαβα. Δηλαδή γιατί αυτό αν και διακόπτεται είναι συνεχής;
Ν – Δηλαδή, το κλειδί είναι αυτό το σημείο του πεδίου ορισμού. Δηλαδή για κάθε σημείο το πεδίου ορισμού, υπάρχει ένα αντίστοιχο y. Αφού το μηδέν δεν είναι στο πεδίο ορισμού, δεν μας πειράζει.

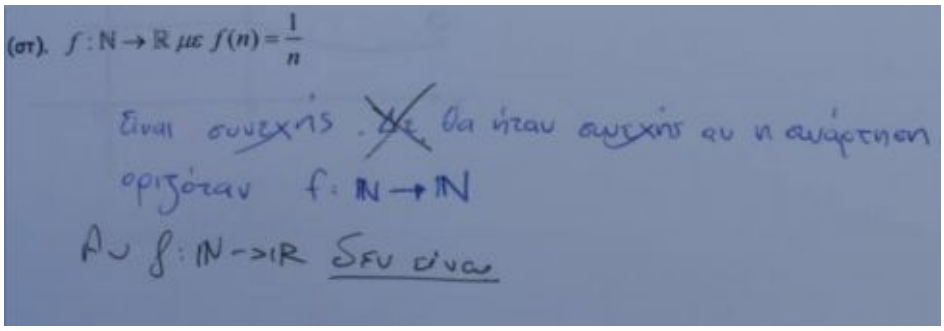


Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Εδώ λες συνεχής. Πάλι λόγω γραφήματος; Τι σε έκανε να απαντήσεις συνεχής;
Ν – ναι, ναι λόγω γραφήματος.

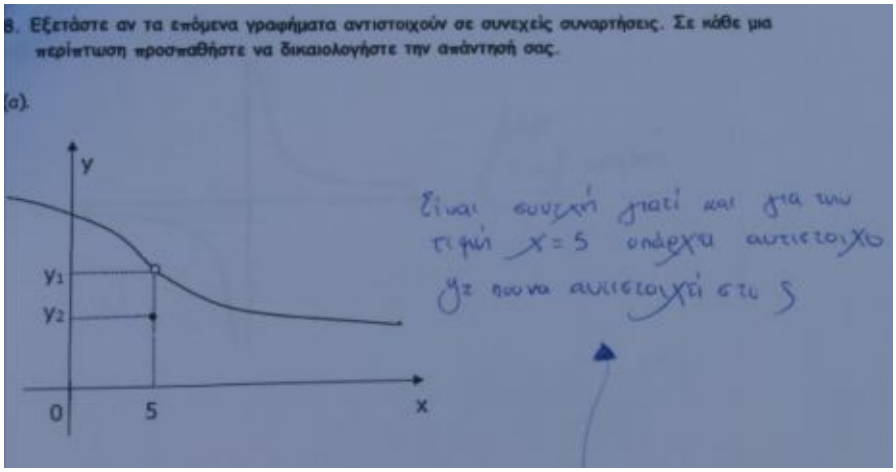


Ερ – Εδώ λες…(διαβάζω την απάντησή του). Εδώ τι λες;
Ν – μμμ…δεν είμαι και σίγουρος τώρα που το ξαναβλέπω! …αυτό, τώρα που το ξανασκέφτομαι, ίσως έρχεται σε αντίθεση με αυτό που έχω στο μυαλό μου για τη συνέχεια.
Ερ – Γιατί;

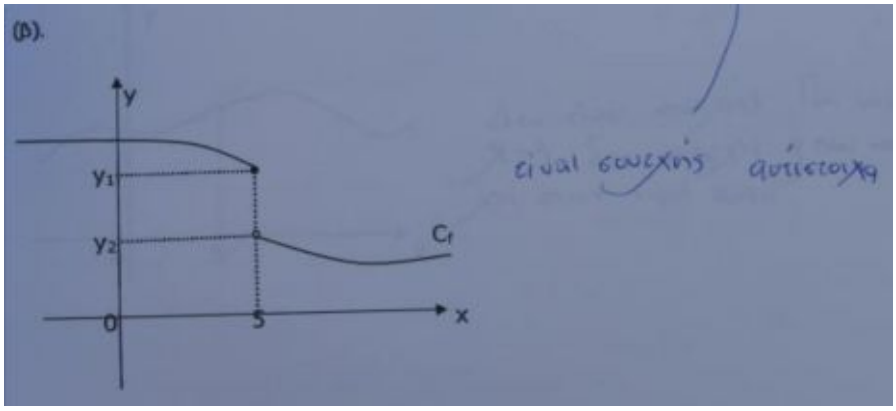
Ν – Γιατί εγώ…είχα…πιστεύω δηλαδή…όπως είπα και πιο πριν ότι τι κριτήριο που θα μου πει αν μια συνάρτηση είναι συνεχής είναι αν για κάθε x του πεδίου ορισμού, ουσιαστικά εδώ…να υπάρχει ένα αντίστοιχο y…
Ερ – …εδώ πληρείται αυτό το κριτήριο;
Ν - …(διστάζει)…
Ερ - …τι πεδίο ορισμού έχεις εδώ;
Ν – όλοι οι πραγματικοί.
Ερ – πιστεύεις δηλαδή ότι πρέπει να αλλάξεις την απάντησή σου;
Ν – ναι, ναι είναι συνεχής.
Ερ – άρα βάζω σε παρένθεση το Δεν είναι και υπογραμμίζω το συνεχής, έτσι;



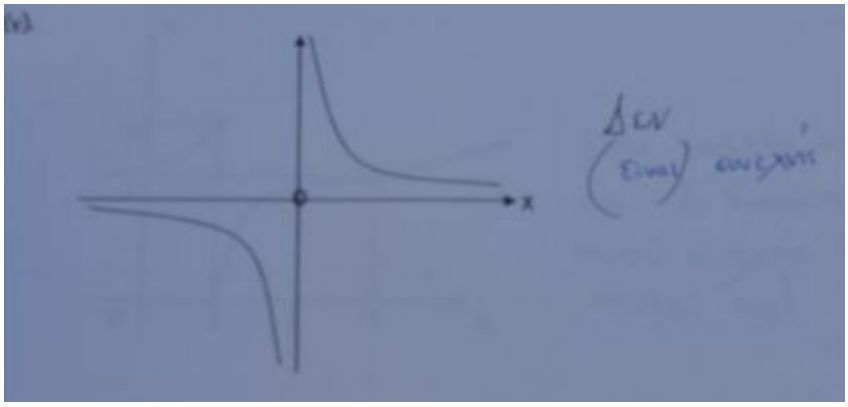
Ν – ναι, ναι
Ερ – Αυτή εδώ τώρα;
Ν – Είναι συνεχής γιατί πληροί το κριτήριο.
Ερ – Γιατί λες ότι δεν θα ήταν συνεχής αν ήταν ορισμένη από το $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *; Γιατί το έγραψες αυτό;*
Ν – Ναι γιατί…αν το πεδίο τιμών ήταν το Ν δεν θα μπορούσε να πάρει τα y για κάθε x.



Ερ – α! κατάλαβα! Εδώ τώρα στο 8(α) νομίζω ότι τώρα με βάση αυτά που έχεις πει, η απάντησή σου είναι ξεκάθαρη…
Ν – …ναι, ναι

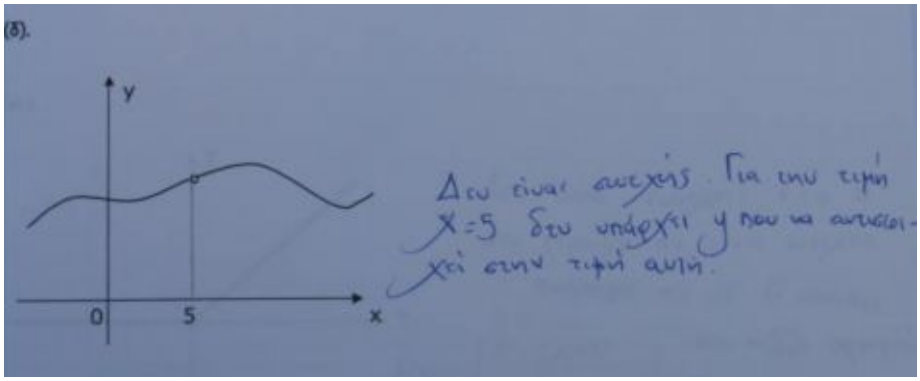


Ερ – Εδώ τώρα πάλι;
Το ίδιο;
Ν – ναι, ναι το ίδιο

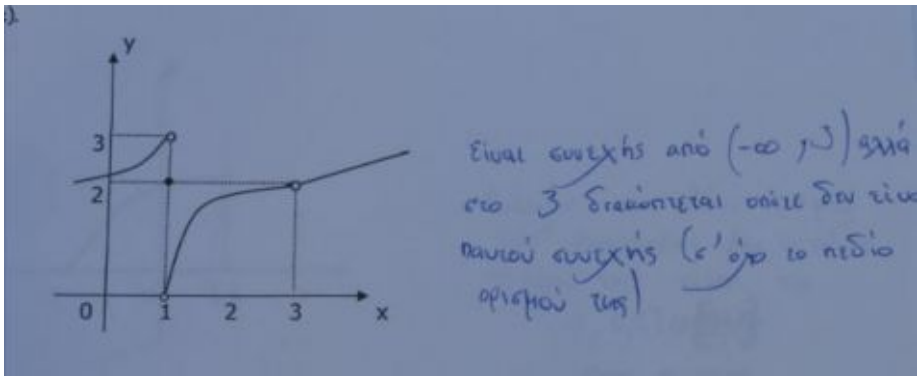


Ερ – εδώ τώρα έχουμε ένα καθαρό γράφημα. Τι σε έκανε να πεις ότι είναι συνεχής;
Ν – Όπως είχαμε πει είναι ένα γράφημα που δεν διακόπτεται σε κανένα σημείο…εεε…

Ερ – στο μηδέν δεν χαλάει το γράφημά σου;
Ν – ναι…σωστά…
Ερ – …δεν σημαίνει ότι κατ' ανάγκη είναι λάθος η απάντησή σου, απλά ρωτάω!
Ν - …(σκέφτεται)…Δεν είμαι σίγουρος γι' αυτό…
Ερ – αν έπρεπε να επιλέξεις, τι θα επέλεγες; Προς τα πού κλείνεις;
Ν – στο είναι, αλλά δεν ξέρω γιατί όμως!
Ερ – Ενστικτωδώς ε; Τι νοιώθεις ότι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι είναι συνεχής;
Ν - …(χαμογελάει)… δεν ξέρω, πραγματικά δεν ξέρω, δεν έχω την απάντηση.

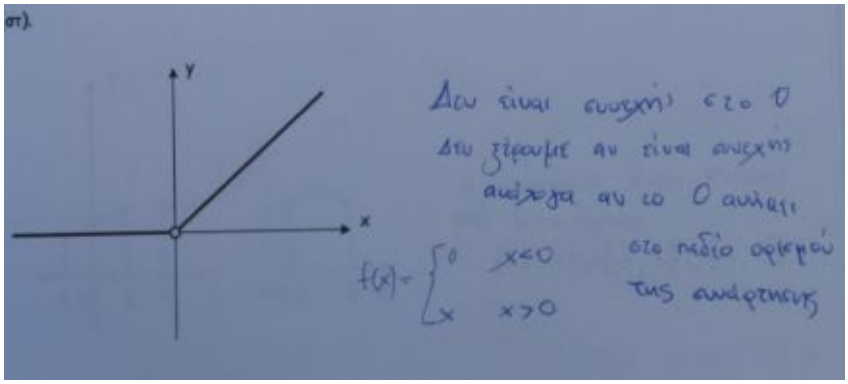


Ερ – Ωραία, μην πιέζεσαι, δεν υπάρχει πρόβλημα! Πάμε στην επόμενη. Εδώ νομίζω ότι η απάντησή σου είναι πλήρης με βάση αυτά που μου έχεις πει μέχρι τώρα.



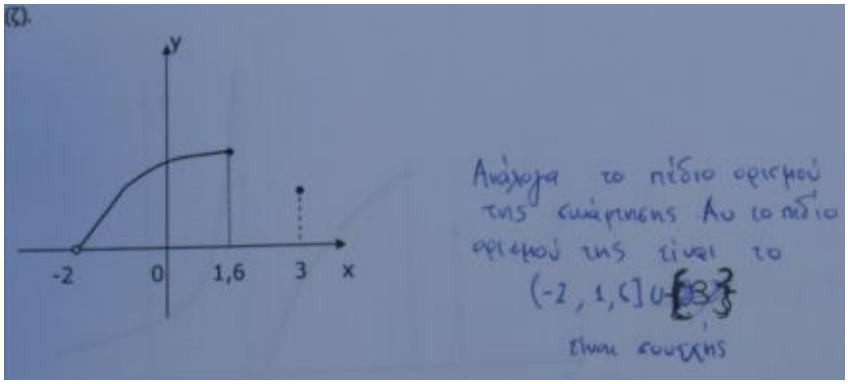
Ερ – Εδώ λες... (διαβάζω την απάντησή του)... Εννοείς και πάλι εδώ ότι στο 3 έχουμε πρόβλημα…

Ν - …ναι γιατί δεν υπάρχει το αντίστοιχο y.

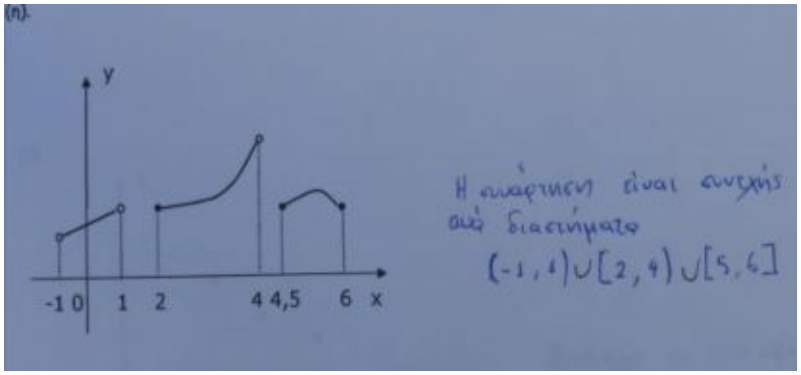


Ερ – Ωραία, εδώ λες…(διαβάζω την απάντησή του)…Οπότε το πρόβλημα πάλι είναι…
Ν - …στο μηδέν, ναι, ναι.

Ερ – ωραία,

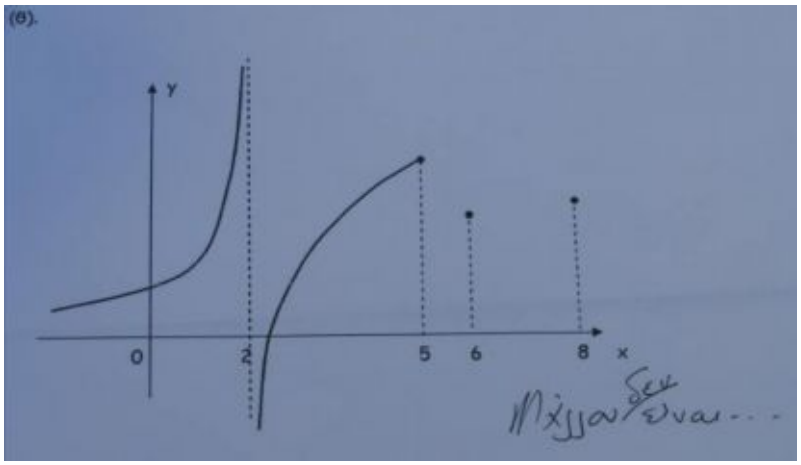


Για πες μου τώρα εδώ στη (ζ)…(διαβάζω την απάντηση)…εδώ δεν βγάζω τι λες. Τι είναι αυτό το (3);
Ν – εννοώ το μονοσύνολο 3.
Ερ –Α! εννοείς το $\{3\}$ *έτσι;*
Ν – ναι, ναι δεν ήμουνα σίγουρος πώς να το γράψω! Ναι αυτό εννοώ!
Ερ – είναι εδώ συνεχής (δείχνω την κουκίδα);

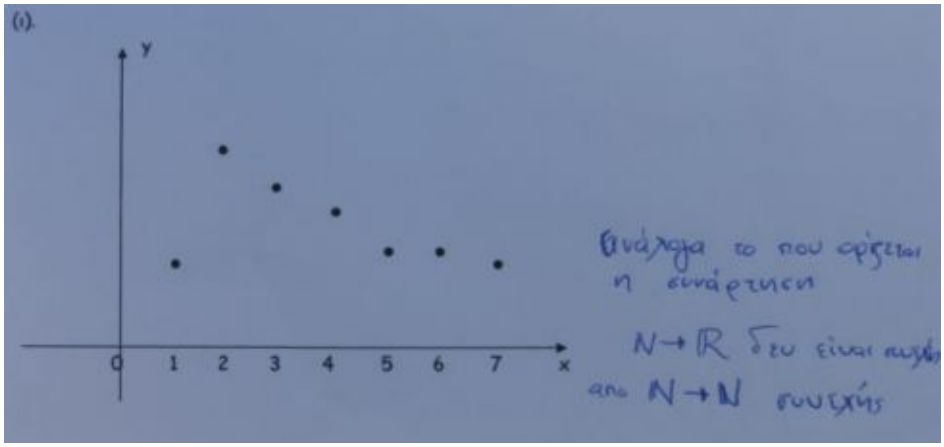


Ν – ναι, ναι γιατί για το 3 υπάρχει το αντίστοιχο y.

Ερ – Ωραία, ας πάμε στην επόμενη.
Ερ – Εδώ πάλι; Εννοείς συνεχής στην ένωση των…
Ν - …των διαστημάτων, ναι, ναι.
Ερ – Αυτή τώρα;
Ν – (γελάει) Πέσαμε πάλι σε κάτι παράξενο!
Ερ – Τι σε προβληματίζει σε αυτήν;
Ν – Λοιπόν εδώ (δείχνει τα μεμονωμένα σημεία) δεν είναι πρόβλημα, μπορούμε να απαντήσουμε όπως και πριν με την ένωση διαστημάτων αλλά εδώ (δείχνει το 2) δεν είμαι



σίγουρος και βασικά είναι σαν… σαν αυτή (γυρίζει πίσω στο ερωτηματολόγιο και δείχνει τη (γ)). Αλλά πάλι υποθέτω ότι είναι..
Ερ – άρα γράφω ότι μάλλον είναι;
Ν – …ίσως θα έδινα μια εξήγηση…ότι και οι δύο τείνουν στο…ότι υπάρχει όριο…πηγαίνει στο 2…ότι οι τιμές της προσεγγίζουν τόσο πολύ το 2…
Ερ - …ναι…το χ ή το ψ;
Ν - …το…α! ναι…μμμ…α! σιγά – σιγά. Εμείς… όχι…ε τότε δεν είναι συνεχής γιατί θα ήθελα να προσεγγίζουν κάποια τιμή ψ για να είναι συνεχής.
Ερ – άρα να βάλω ότι δεν είναι συνεχής;
Ν – ναι, δεν είναι.
Ερ – μήπως θέλεις να αλλάξεις κάτι και στη (γ);
Ν – εεε…ακριβώς για τον ίδιο λόγο δεν είναι και αυτή συνεχής.
Ερ – ωραία, άρα αλλάζω και το (γ) και το κάνω 'Δεν είναι'.

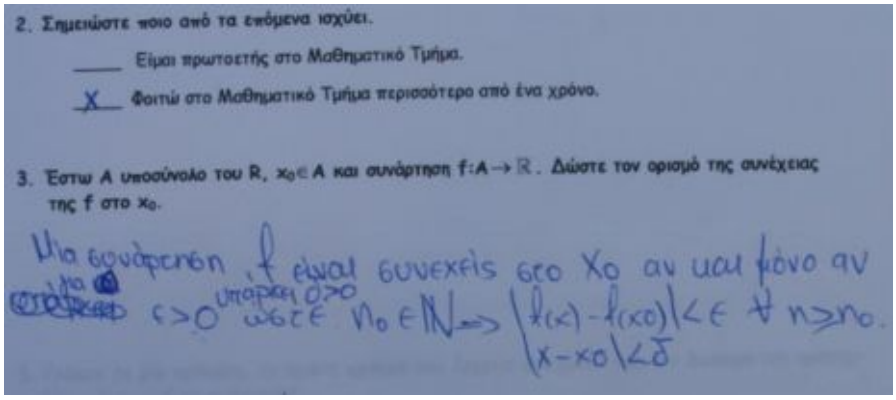


Ερ – και τώρα στην τελευταία λες (διαβάζω την απάντηση). Λίγο διαφορετική βλέπω την απάντησή σου σε σχέση με αυτό που είχες απαντήσει στο (στ). Νομίζεις ότι πρέπει κάποιο από τα δύο να αλλάξει ή όχι;

Ν – (χαμογελάει και τα ξαναδιαβάζει)…Ναι οπωσδήποτε θα πρέπει να τα αλλάξω γιατί σίγουρα ένα από τα δύο είναι λάθος!...(σκέφτεται)…μπερδεύτηκα λίγο τώρα!... όπως το βλέπω τώρα δεν θέλω να το αλλάξω το (ι). Ενώ το (γ) νομίζω ότι πρέπει να το αλλάξω.
Ερ - …άρα γράφω αν $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *δεν είναι έτσι;*
Ν – ναι, ναι και σβήνουμε…
Ερ - …το Δε πιο πάνω ναι, ναι. Έτσι;
Ν - …ναι, ναι
Ερ – Ωραία, νομίζω ότι το τελειώσαμε! Νίκο σε ευχαριστώ πολύ!

5η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Άλκηστη’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

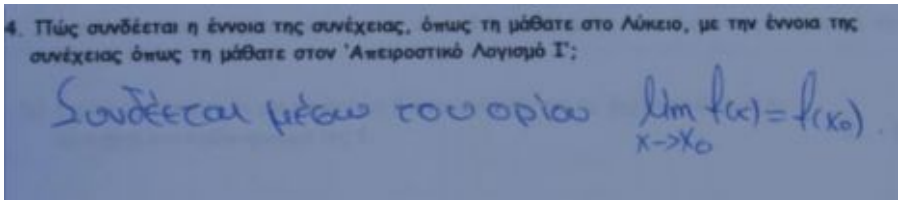
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

_X_ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\varepsilon>0$ $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. $|x-x_0|<\delta$

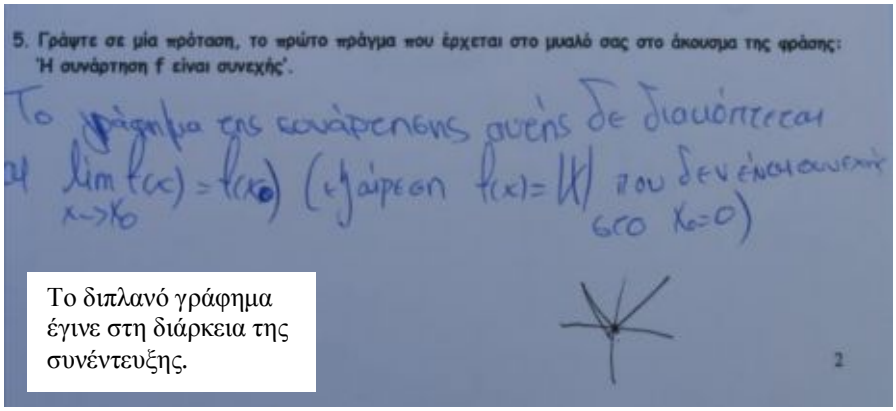
Ερ – Βλέπω Άλκηστη ότι έχεις γράψει τον ορισμό. Θα τον συζητήσουμε στο τέλος.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Συνδέεται μέσω του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ερ – Ας πάμε λίγο στο ερώτημα 4. Λες ότι …(διαβάζω την απάντηση)…

Α - …ναι είναι ο ορισμός του Λυκείου.


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Το γράφημα της συνάρτησης αυτής δε διαφέρει σε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (εξαίρεση $f(x)=|x|$ που δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$)

2

Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ – Ωραία, εδώ τώρα λες … (διαβάζω την απάντηση)… Θα ήθελα να μου εξηγήσεις λίγο αυτό που γράφεις στην παρένθεση.

Α – Ξέρουμε ότι μια συνάρτηση, νομίζω… δεν είμαι απόλυτα σίγουρη, ότι δεν είναι συνεχής όταν είναι το $|x|$. Δεν ξέρω, αυτό θυμάμαι…

Ερ – Δηλαδή εννοείς ότι αυτή είναι εξαίρεση στον κανόνα που έχεις γράψει;

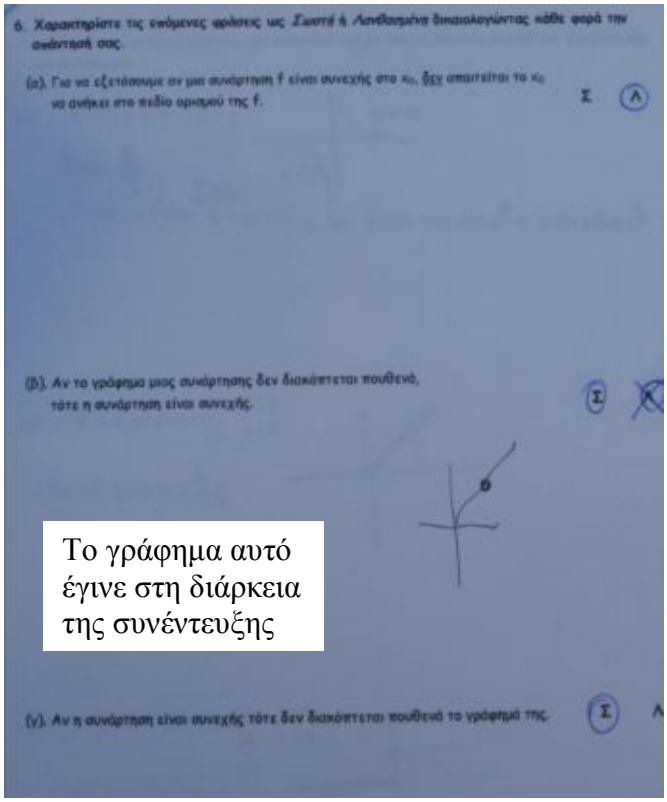
Α - …κανόνα, ε ναι τέλος πάντων. Ή παραγωγίσιμη δεν είναι αυτή ή ασυνεχής. Παραγωγίσιμη δεν είναι σίγουρα στο μηδέν… τώρα συνεχής…έτσι μου ήρθε έτσι το έγραψα.

Ερ – Ωραία, θυμάσαι το γράφημά της;

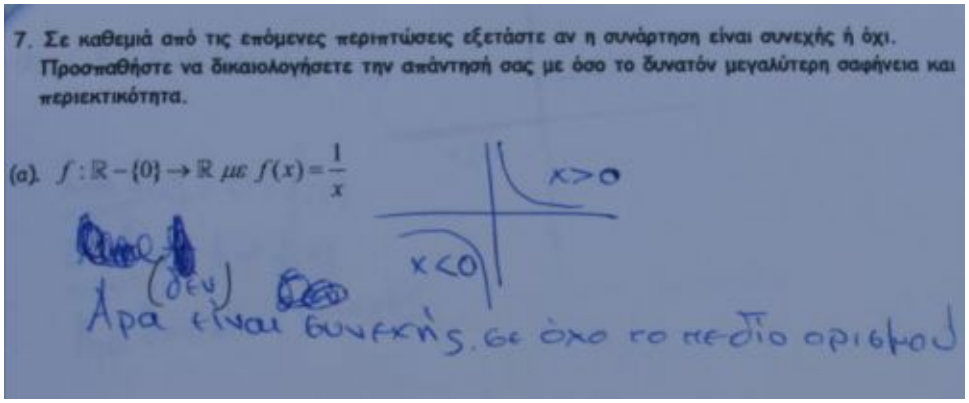
Α – εεε δεν πάει κάπως έτσι; (σχεδιάζει γρήγορα το γράφημα που φαίνεται στο σχήμα παραπάνω)

Ερ – Ωραία, και άρα τι πιστεύεις, είναι ή δεν είναι συνεχής;

Α - …είναι συνεχής φαντάζομαι έτσι όπως τη βλέπω τώρα, δεν είναι; Αφού σε όλα μπορεί να πάρει τις τιμές, δεν είναι συνεχής; Είναι. Απλά νομίζω δεν είναι παραγωγίσιμη.
Ερ – Δηλαδή θέλεις να αλλάξεις κάτι στην απάντησή σου ή εννοείς κάτι άλλο;
Α – Όχι δεν το εννοώ καθόλου. Μάλλον το σκέφτηκα για το παραγωγίσιμη αυτό. Παραγωγίσιμη δεν είναι σίγουρα στο μηδέν. Αυτό το ξέρω.



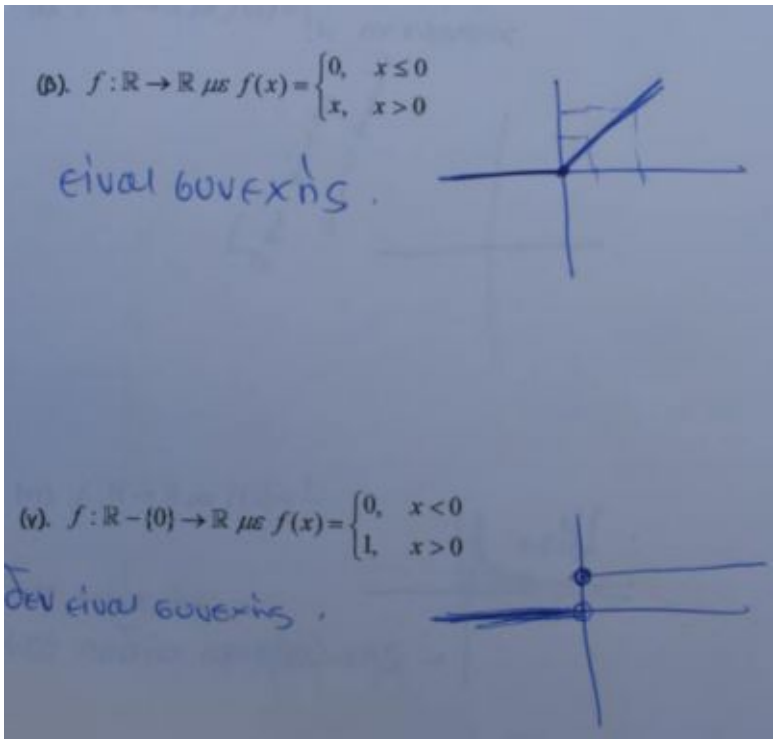
Ερ – Ωραία, τώρα γιατί το θεωρείς λάθος αυτό στο 6(α);
Α – Για να είναι συνεχής στο x_0 δεν πρέπει να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού; Με αυτή τη λογική κάπως.
Ερ – Ωραία. Τώρα στο (β) το θεωρείς σωστό.
Α – Ναι, και αυτό το έχω συνδυάσει στο μυαλό μου γιατί όταν ένα γράφημα είναι κάπως έτσι (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) και το έχουμε έτσι με ανοιχτό κυκλάκι και μετά ξανασυνεχίζει, τότε λέμε ότι δεν είναι συνεχής. Έτσι δεν είναι;
Ερ – Μάλιστα. Τώρα στο (γ) έχεις βάλει πάλι Σωστό.
Α – ναι, ναι.



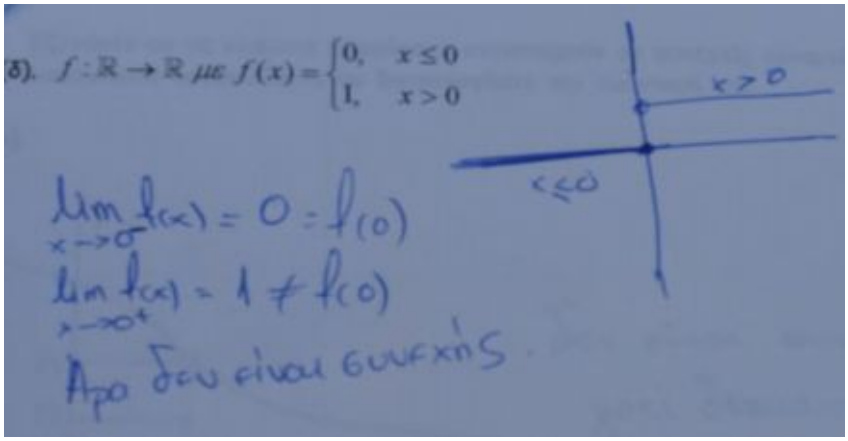
Ερ – Ωραία. Τώρα στο 7. Λες ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Α – μισό λεπτάκι να την ξαναδώ….

Το μηδέν είναι εκτός πεδίου ορισμού…δεν ξέρω…
Ερ – Τώρα που την ξαναβλέπεις τι θα έλεγες;
Α – Ότι είναι συνεχής γιατί το μηδέν είναι εκτός πεδίου ορισμού.
Ερ – Προτιμάς δηλαδή αυτή την απάντηση από αυτή που είχες βάλει;
Α – Ναι …μάλλον…έχω μπερδευτεί με αυτό που λέμε εδώ ότι όταν το γράφημα είναι συνεχές και δεν διακόπτεται πουθενά. Εδώ ας πούμε το γράφημα δεν είναι συνεχές,

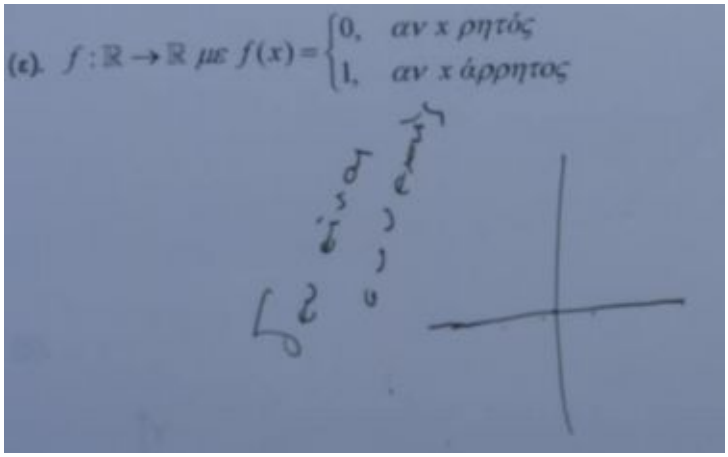
αλλά η συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής, γιατί το μηδέν δεν είναι στο πεδίο ορισμού της, αυτό μας έχει δοθεί, οπότε είναι συνεχής δεν είναι;
Ερ – Δηλαδή τι θα επέλεγες τελικά για απάντηση;
Α – Ότι είναι συνεχής. Έτσι όπως τη βλέπω τώρα.
Ερ – Άρα βάζω το 'Δεν' στην απάντησή σου σε μια παρένθεση, έτσι;
Α – ναι, ναι.



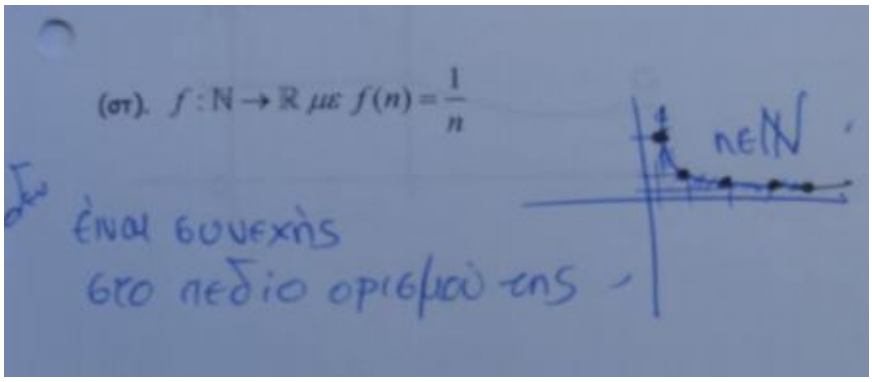
Ερ – Ωραία, πάμε τώρα στο (β).
Α – Ε! είναι συνεχής αφού μας δίνει ότι … ε είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της …ή ούτως ή άλλως το x είναι …δεν είναι;
Ερ – Τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι είναι συνεχής;
Α – εε ένα μονώνυμο είναι αυτό ε δεν είναι πάντα συνεχής; Αφού είναι σε όλο το πεδίο ορισμού, παίρνει όλες τις τιμές ε δεν είναι; Ε γι' αυτό.
Ερ – Ωραία, το (γ) τώρα;
Α – ε γιατί δεν παίρνει την τιμή μηδέν.
Ερ – και άρα;…
Α – δεν είναι συνεχής. Όχι δεν είναι συνεχής.



Ερ – Εδώ τώρα;
Α – ε με τα πλευρικά όρια αν το πάρουμε στο μηδέν βγαίνει διαφορετικά άρα δεν είναι συνεχής γιατί πρέπει να ισχύει αυτό που λέγαμε ότι $\lim f(x)=f(x_0)$
Ερ – Άρα γι' αυτό δεν είναι συνεχής;
Α – Ναι, ναι.

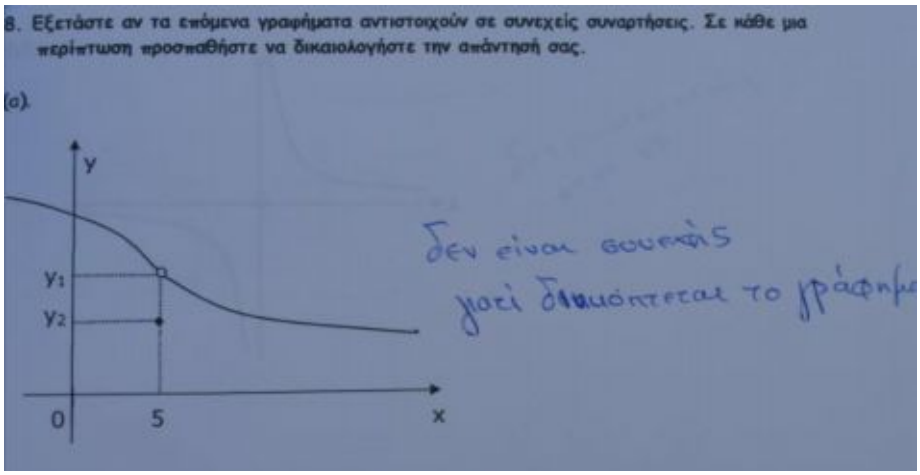


Ερ – Ωραία, αυτή εδώ τώρα;
Α – Αυτή δεν ξέρω. Με τους ρητούς και τους άρρητους δεν τα πάω καθόλου καλά. Όποτε τους βλέπω δεν τα πάω καλά. Δεν μπορεί να τους συλλάβει το μυαλό μου.
Ερ – Ωραία, τώρα που τη βλέπεις, σου λέει τίποτα; Σου θυμίζει κάτι;
Α - …νομί…όχι σας λέω δεν τα πάω καλά. Ρητούς άρρητους τώρα…
Ερ – Εντάξει, κανένα πρόβλημα. Αν, αν ήθελες να της κάνεις ένα χονδροειδές γράφημα, τι θα έκανες;
Α – αυτό είναι το πρόβλημά μου! Αν την ήξερα, θα την έγραφα κιόλας. Αλλά δεν την ξέρω!
Ερ – Πώς περίπου την φαντάζεσαι;
Α – Φαντάζομαι κάτι τελίτσες στο μηδέν και στο ένα. Για κάθε ρητό στο 0 και για κάθε άρρητο στο 1. Έτσι το έχω εγώ φανταστεί. Αλλά να ρωτήσω το εξής: το σύνολο R αποτελείται από ρητούς και άρρητους λογικά. Άρα δεν θα υπάρχει μια συνέχεια; Μετά από κάθε ρητό ένας άρρητος και μετά από κάθε…τέλος πάντων; Και συνεχίζεται και θα είναι συνεχής;
Ερ – θα το πούμε στο τέλος! Άρα δηλαδή…
Α – …λογικά είναι συνεχής έτσι όπως το φαντάζομαι, αλλά δεν ξέρω. Λογικά είναι συνεχής γιατί αν πάρουμε ότι υπάρχει ρητός, άρρητος, ρητός, άρρητος και σε όλα αυτά παίρνει μια τιμή αυτή η συνάρτηση, άρα είναι συνεχής, υπάρχει μια συνεχής γραμμή στον άξονα των x΄x …λογικά…όχι στον x στον 0 και 1.
Ερ – Πώς τη φαντάζεσαι αυτή τη γραμμή;
Α – Τη φαντάζομαι…αχ όχι όμως…λάθος. Θα υπάρχουν σε κάθε ρητό μια τελεία εδώ στον άξονα των χ αντίστοιχα με το μηδέν και σε κάθε άρρητο αντίστοιχα στο ένα ας πούμε… Άρα θα είναι μια τελείτσα πάνω μια τελείτσα κάτω, έτσι τη φαντάζομαι… αλλά δεν είναι τότε συνεχής! Αχ Παναγία μου!... Όχι, δεν είναι συνεχής, την πήρα την απόφαση! Όχι δεν είναι!



Ερ – Άρα το κλείσαμε, δεν είναι! Για πες μου τώρα σε αυτή. Έχεις βάλει ότι δεν είναι συνεχής. Ποια είναι η γραφική της παράσταση;
Α – Λογικά είναι αυτή (δείχνει τη γραμμή στο διπλανό σχήμα), γιατί είναι μόνο τα θετικά.
Ερ – Εννοείς τη γραμμή έτσι;

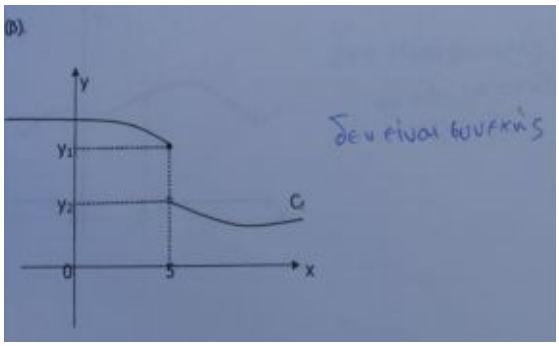
Α – Ναι, ναι, γιατί είναι μόνο τα θετικά…ξέρετε όμως εδώ λέει μόνο για φυσικούς, λογικά δεν θα είναι μια συνεχόμενη γραμμή γιατί φυσικοί είναι μόνο 1, 2, 3, 4, κ.λ.π.
Ερ – Δηλαδή είναι αυτή η γραφική παράσταση ή…
Α - …όχι, νομίζω…λογικά είναι μόνο αυτές οι τελείτσες που είχα κάνει εδώ…
Ερ - …αα, ναι κατάλαβα, αν θέλεις κάντες λίγο πιο έντονα να ξεχωρίζουν…,,ωραία. Άρα είναι κουκίδες ε;
Α - …ναι έτσι…
Ερ – …άρα είναι συνεχής;
Α – Λογικά δεν είναι.
Ερ – Γιατί;
Α - …γιατί δεν είναι!...είναι και το πεδίο ορισμού που με μπερδεύει. Υπάρχει ένα…ξέρεις στο μυαλό μου δεν μπορώ να συλλάβω ας πούμε…το πεδίο ορισμού που, εντάξει το πεδίο ορισμού παίρνει αυτές τις τιμές αλλά δεν δημιουργείται ένα γράφημα, ένα αυτό…
Ερ - …μια γραμμή εννοείς;…
Α - …ναι ακριβώς γιατί τις ενδιάμεσες τιμές δεν τις παίρνει! Άρα δεν είναι συνεχής, δεν υπάρχει το γράφημα έτσι όπως το έχω συνδυάσει στο μυαλό μου..
Ερ - …επειδή δηλαδή έχεις κουκίδες που δεν ενώνονται μεταξύ τους εννοείς…
Α - …ναι ακριβώς. Αυτή την απορία δεν την είχα λύσει ποτέ γι' αυτό …

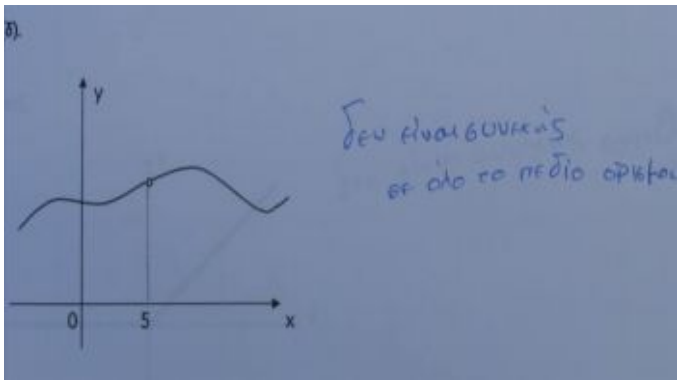


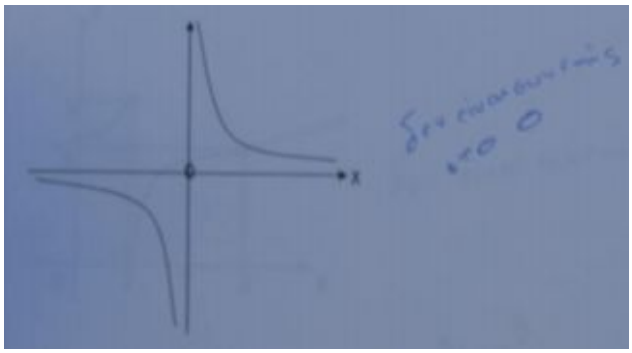
Ερ – Ωραία, ας δούμε την επόμενη. Λες ότι (διαβάζω την απάντηση) ….

Α – Ναι, Δεν μας λέει άλλη τιμή αλλά αν θυμάμαι καλά, νομίζω παίρνανε πλευρικά όρια σε αυτή την περίπτωση;
Ερ – …σε ποιον αριθμό αναφέρεσαι όταν λες για πλευρικά όρια;…
Α - …στο 5 και μας βγαίνει y_1 στο … όχι…
Ερ – Τι θα γίνει αν πάρεις πλευρικά όρια στο 5;
Α - Τίποτα…μμμ…Βασικά μας δίνει ότι το f(5) μας κάνει y_2 ….η οποία είναι έξω από το γράφημα που μας δίνεται για τη συνάρτηση…
Ερ – Μάλιστα. Και το $\lim_{x\to 5} f(x)$ *πόσο είναι;*
Α – Το $\lim_{x\to 5} f(x)$ …Λογικά θα βγει y_2 αφού μας το δίνει…αλλά αν πάρουμε δεξιά και αριστερά θα μας βγει κάτι διαφορετικό;
Ερ – Δεν ξέρω! Εσύ τι λες;
Α - …μμμ…δεν ξέρω…πιστεύω θα βγει y_2 κανονικά που δεν ανήκει…
Ερ - …είτε πάρω δεξί όριο…
Α - …ναι γιατί ή ούτως ή άλλως μας τα δίνει σε σταθερό σημείο αυτά
Ερ – Αν όμως το όριο βγει y_2 δεν θα είναι όσο και τοf(5);…

Α - …ναι…
Ερ - …άρα με βάση αυτό που είχες γράψει πιο πριν δεν θα πρέπει να είναι συνεχής;
Α - …νναι…κανονικά πρέπει…αλλά νομίζω δεν είναι…απ' ότι θυμάμαι δηλαδή, νομίζω δεν είναι…δεν ξέρω..
Ερ – ενστικτωδώς δηλαδή;
Α - …ναι ενστικτωδώς. Όχι βάση δεδομένων.
Ερ - …ωραία, τι είναι αυτό που σε κάνει να απαντά έτσι;
Α - …λοιπόν να σας πω. Γιατί θυμάμαι, αν θυμάμαι καλά, δεν ξέρω, ότι μας είχανε πει ότι αν δεν παίρνει την τιμή πάνω στο γράφημα και μας δίνει μια άλλη τιμή κάπου αλλού για το συγκεκριμένοx_0 τότε θυμάμαι λέγαμε ότι δεν είναι συνεχής.



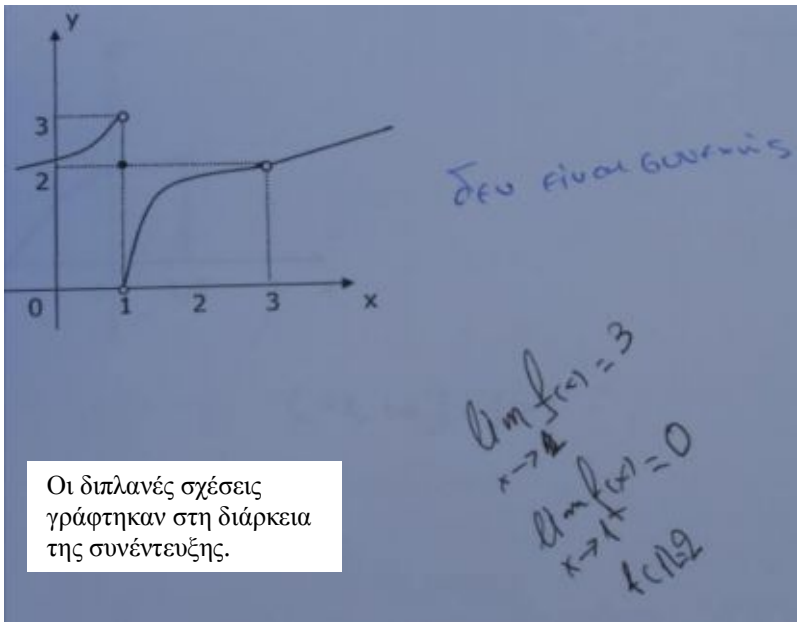




ΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΣΥΝΕΝΕΤΕΥΞΗΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΑΥΤΑ ΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΣΒΗΣΤΗΚΕ ΛΟΓΩ ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

……
……
……..

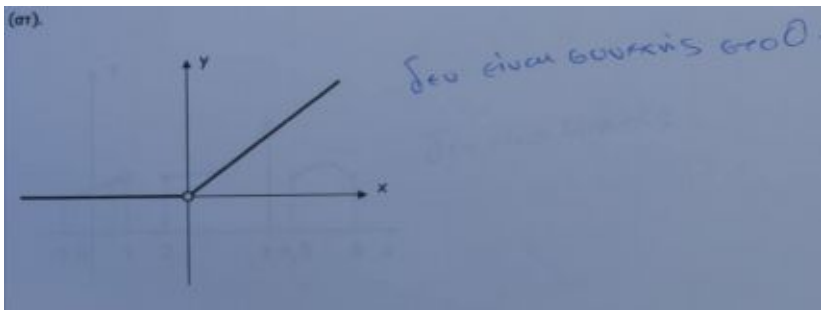
……..
…….



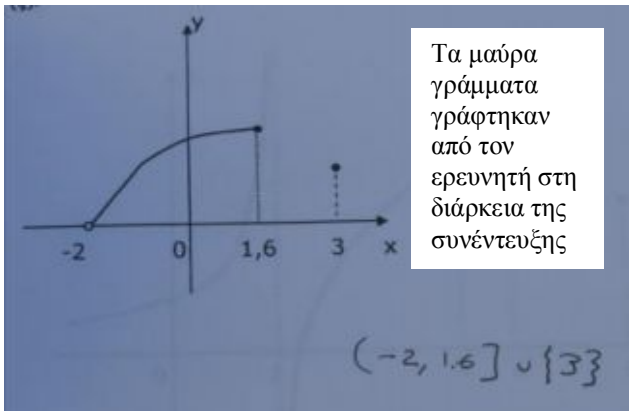
Οι διπλανές σχέσεις γράφτηκαν στη διάρκεια της συνέντευξης.

Α – στο 3 ή ούτως ή άλλως δεν είναι συνεχής. Δεν μου δίνει και καμιά άλλη τιμή για να με μπερδέψει. Γιατί διακόπτεται, στο 3 δεν παίρνει κάποια τιμή, άρα στο 3 δεν είναι συνεχής.
Ερ – Υπάρχει άλλο σημείο το οποίο να σε προβληματίζει;
Α – Αυτό εδώ το 1 το οποίο…
Ερ – Τι πιστεύεις εδώ;
Α – Γιατί ουσιαστικά, για το 1 θα έπαιρνε την τιμή 3, και τώρα μας δίνει ότι δεν παίρνει την τιμή 3 αλλά την τιμή 2…Είναι αυτό που λέγαμε πριν, μπερδεύομαι με αυτό το ανοιχτό πάνω, κλειστό κάτω … και αν παίρναμε τα πλευρικά…
Ερ – … ναι, για ποιον αριθμό εννοείς;..
Α - …για το 1, x τείνει στο 1, θα μας έβγαιναν διαφορετικά. Το ένα θα μας έβγαινε 3 νομίζω και το άλλο 0…δεν ξέρω τι θα μας έβγαινε…αλλά μας δίνει αυτή την τιμή στο 2, εκεί μπερδεύομαι. Ότι αν παίρναμε τα πλευρικά σύμφωνα με το γράφημα θα μας έβγαιναν άλλα, ενώ μας δίνει κάποια τιμή και μας λέει ότι είναι 2, το $f(1) = 2$. Αλλά εδώ μας λέει (δείχνει το ανοιχτό κυκλάκι στο x=1 πάνω στο άξονα x΄x) ότι ούτε καν παίρνει την τιμή 1! Πρέπει να μπερδευτώ εγώ εδώ;!; Συγγνώμη τώρα αφού μας λέει ότι στο f(1) δεν ορίζεται τώρα τι μας κάνει εδώ;
Ερ – Εσύ τι πιστεύεις, ορίζεται η συνάρτηση στο 1 ή όχι, με βάση το γράφημα που βλέπεις;
Α – Πιστεύω ότι δεν ορίζεται, αφού δεν μας το δίνει να ορίζεται, μας το δίνει με ανοιχτό, ορίζεται; Δε ορίζεται λογικά στο f(1) που έπρεπε να μας κάνει 0 και μας το δίνει 2…Όχι μας δίνει ότι το f(1) δεν παίρνει την τιμή 0 σύμφωνα με το γράφημα αλλά δεν παίρνει ούτε την τιμή 3 και μας δίνει μια διαφορετική τιμή, την τιμή 2 που αυτή την παίρνει.
Ερ – Δηλαδή για χ=1 έχω y;…
Α - …έχω…
Ερ – …πόσο;
Α – 2
Ερ – Ωραία…
Α – … αν πάρουμε πλευρικά όρια θα μας βγει ένας αριθμός, μετά θα μας βγει ένας άλλος αριθμός και κανονικά το f(1) κάνει 2.
Ερ – Θέλεις να τα γράψεις αυτά να τα δούμε;
Α – Τώρα σωθήκατε! (Αρχίζει να γράφει δίπλα στο γράφημα με δισταγμό)… Ναι αλλά το f(1) μας το δίνει 2, άρα δεν είναι συνεχής …με βάση το συνειρμό που έκανα…έτσι πιστεύω, δεν ξέρω.
Ερ – Άρα τελικά τι θα έλεγες; Δεν είναι…

Α - …δεν είναι συνεχής στο 1.
Ερ – Στο 3;
Α – Όχι δεν είναι συνεχής σε αυτό.
Ερ – Τι πρόβλημα έχεις στο 3;
Α – Δεν παίρνει κάποια τιμή εκεί πέρα.



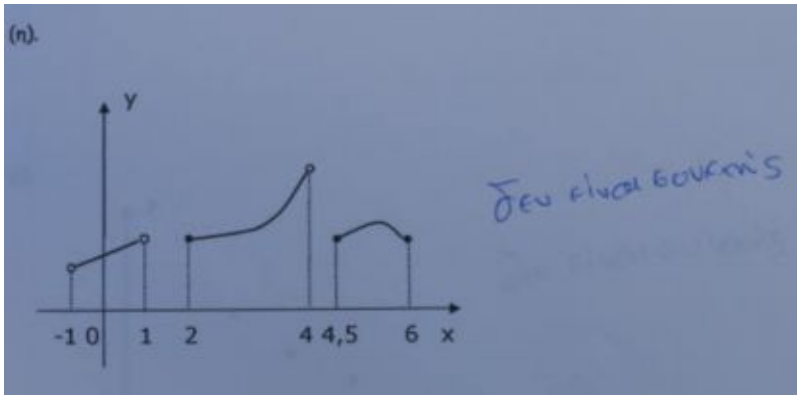
Ερ – Ωραία, για τη (στ) τώρα;
Α – Ε! δεν παίρνει την τιμή στο 0 άρα δεν είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία.



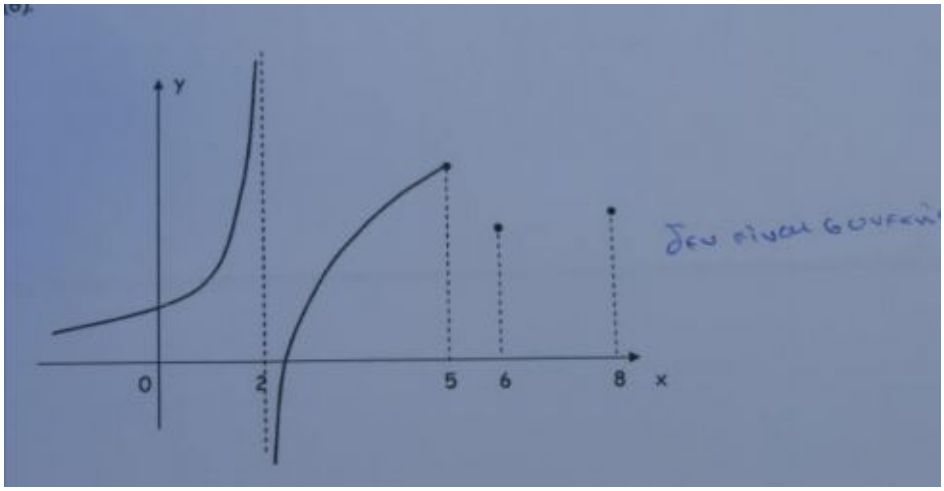
Τα μαύρα γράμματα γράφτηκαν από τον ερευνητή στη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ – Αυτή εδώ τώρα;
Α – Α! νάτο αυτό που μπερδεύομαι. Από την αρχή του πεδίου ορισμού, που μας δίνει ότι είναι το -2, μας το δίνει ανοιχτό ότι δεν παίρνει κάποια τιμή. Εκεί πέρα σημαίνει ότι δεν είναι συνεχής;
Ερ – Εσύ τι πιστεύεις;
Α - …πιστεύω δεν είναι συνεχής στο -2.
Ερ – Στο 1,6;
Α – Είναι συνεχής, παίρνει κάποια τιμή.
Ερ – Αυτό το 3 εκεί; (της δείχνω το μεμονωμένο σημείο)
Α – Αυτό το 3 εκεί το ξέμπαρκο;!;
Ερ – Πώς θα το χαρακτήριζες το 3 σαν σημείο; Από μαθηματικής πλευράς;
Α – Ότι όπως το σκέφτομαι τώρα, υπάρχει μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα πεδίο ας πούμε (α, β) και υπάρχει και κάποια τιμή ας πούμε το 3. Αυτό το είχαμε μάθει νομίζω σε κάποια … τέτοια…ότι υπάρχει και κάποιο x_0 που ορίζεται… Στον κύκλο είχαμε μάθει κάτι τέτοιο και απορρίπταμε μία από τις δύο; Δεν θυμάμαι, κάπου το είχαμε δει, στο Λύκειο βασικά κάπου το είχαμε δει…
Ερ – Άρα αυτό που σε κάνει να λες ότι δεν είναι συνεχής, είναι το -2 το ένα και;…
Α - …ότι δεν υπάρχει συνέχεια ανάμεσα στο 1,6 και στο 3, δεν ορίζεται, δεν παίρνει κάποια τιμή. Δηλαδή εγώ το φαντάζομαι ότι τελειώνει το πεδίο ορισμού στο 1,6 και ότι παίρνει και μια τιμή στο 3, μια τιμή.
Ερ – Δηλαδή αν εγώ έγραφα το πεδίο ορισμού έτσι (γράφω το πεδίο που φαίνεται στο γράφημα) τι θα έλεγες; Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι συνεχής;
Α – (διστακτικά)…πιστεύω πώς ναι…στο ανοιχτό διάστημα…Θα ήταν συνεχής δεν θα ήταν;
Ερ – Γιατί;
Α – Γιατί μας δίνει ότι το -2 είναι ανοιχτό και άρα δεν παίρνει κάποια τιμή εκεί πέρα, μετά ανάμεσα παίρνει όλες τις τιμές το γράφημα είναι συνεχές, και μετά μας δίνουν

ότι διακόπτεται το πεδίο ορισμού και μετά πάει στο 3 και εκεί μας δίνουν ότι παίρνει κάποια τιμή. Άρα δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού; … είναι.
Ερ – Άρα αν το γράψω έτσι το πεδίο ορισμού πιστεύεις ότι είναι;
Α – …ναι…
Ερ – …ενώ έτσι όπως βλέπεις το γράφημα;
Α – Πιστεύω ότι δεν είναι.
Ερ – Άρα σαν γράφημα δεν είναι ε;
Α – Ναι.

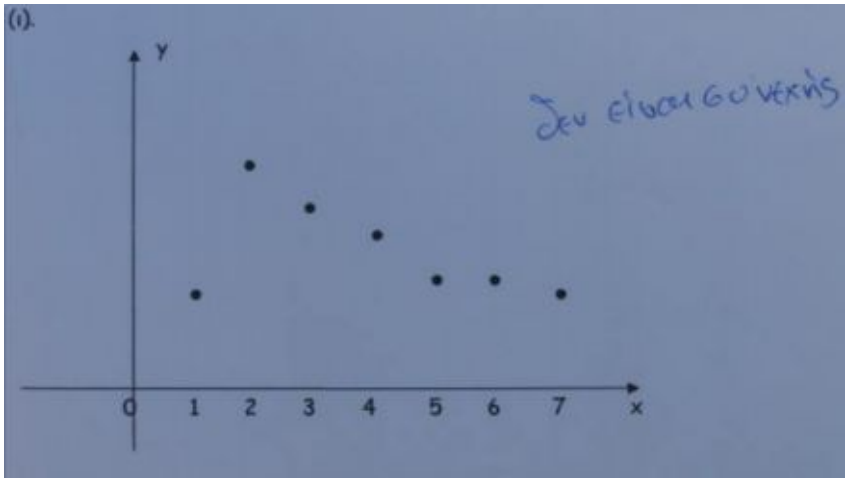


Ερ – Ωραία, αυτή τώρα;
Α - …αυτή δεν είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Α – μισό λεπτάκι... Θα μου πείτε αν σου γράψω πάλι το πεδίο ορισμού $(-1,1)\cup[2,4)\cup[4.5,6]$. Με το συγκεκριμένο πεδίο ορισμού είναι, αν όμως υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι (-1,6] τότε δεν συνεχής.
Ερ – Δηλαδή με βάση το γράφημα που βλέπεις;
Α – Δεν είναι συνεχής.

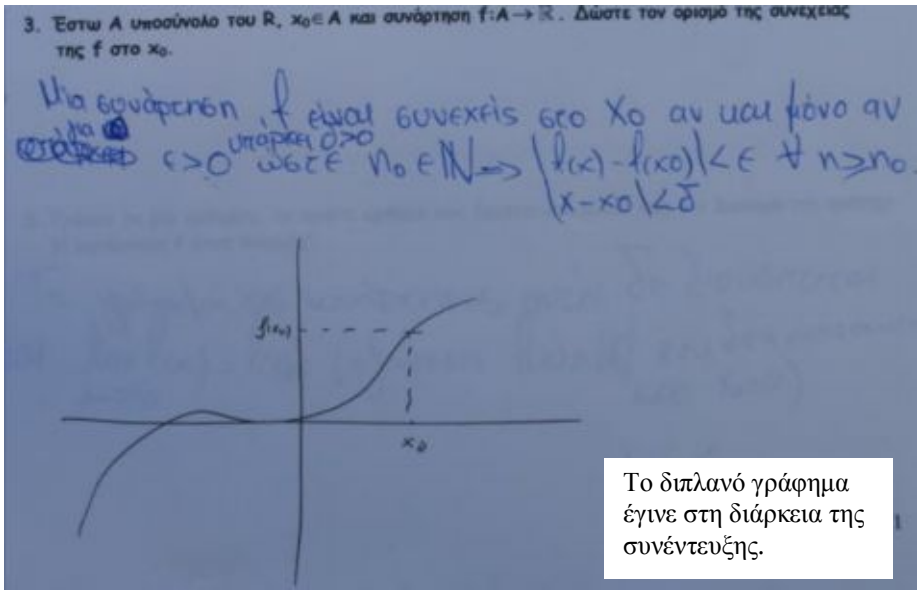


Ερ – Ωραία, αυτή τώρα;
Α – Ωχ…θα σας πω…στο 2 δεν είναι συνεχής
Ερ – Γιατί;
Α – Γιατί το ένα πλευρικό όριο μας βγαίνει συν άπειρο και το άλλο…όχι… συν άπειρο και το άλλο μας βγαίνει πλην άπειρο. Άρα στο 2 δεν είναι συνεχής…
Ερ – …ωραία, ωραία
Α – άρα γενικά δεν είναι συνεχής! Να μην ψάξουμε άλλο!
Ερ – Πες μου μόνο για τα μεμονωμένα σημεία, το 6 και το 8. Πιστεύεις ότι σε αυτά τα σημεία είναι συνεχής;
Α – Αυτό τώρα…εμένα η συνέχεια στο μυαλό μου είναι συνδεδεμένη με τη συνέχεια, τη συνέχεια…
Ερ - …εννοείς τη γραμμή;…
Α - …ναι τη συνέχεια. Τώρα μια κουκίδα τη συνέχεια μπορεί να έχει;

Ερ - …συνεχόμενη γραμμή εννοείς;…
Α - …τι συνεχόμενη γραμμή; Ότι υπάρχει κάποιο γράφημα ουσιαστικά…
Ερ - …το οποίο να είναι τι;…
Α – να είναι μια καμπύλη ένα κάτι, όχι…
Ερ – …τι πρέπει να έχει αυτό το γράφημα που θα σε κάνει να λες ότι είναι συνεχές, ότι αντιστοιχεί σε συνάρτηση που είναι συνεχής;…



Α - …συνέχεια, μια συνέχεια, να μην διακόπτεται, κάπως έτσι το έχω στο μυαλό μου συνδεδεμένο. Τώρα αυτές οι τελείτσες εκεί πέρα έτσι, δεν είναι γράφημα, είναι… πώς να υπάρχει συνέχεια σε ένα μόνο σημείο; Αυτό δεν μπορώ να συλλάβω έτσι καλά, να όπως κι αυτό (δείχνει το γράφημα (ι)) που δεν είναι συνεχές γιατί δεν παίρνει τις ενδιάμεσες τιμές. Μοιάζει με αυτό που λέγαμε πριν με τους φυσικούς αριθμούς.
Ερ – Άρα για τον ίδιο λόγο δεν είναι και αυτό συνεχής;
Α – ναι, ναι.



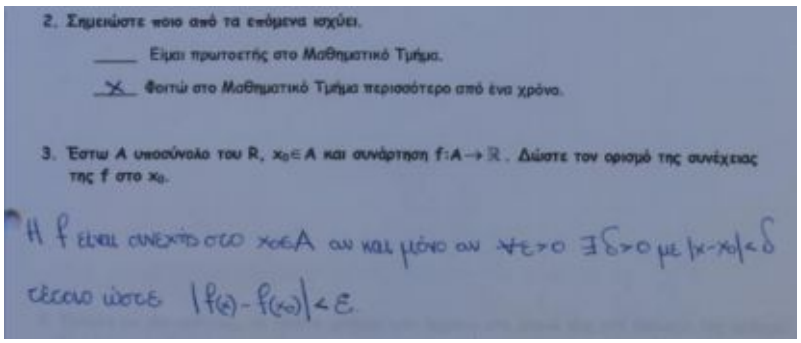
Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ – Ωραία, να δούμε και κάτι τελευταίο. Να ξαναγυρίσουμε στον ορισμό τον αρχικό…
Α – …γιατί πιστεύετε ότι τον ήξερα; Δεν τον θυμόμουνα…
Ερ - …δεν πειράζει…
Α - …λοιπόν να σας πω. Εδώ συναντώ το μεγαλύτερο πρόβλημα ας πούμε που μπορείτε να φανταστείτε διότι τώρα, δεν μπορώ να συλλάβω τι σχέση έχει ένα ε θετικό ένα δ θετικό, όλο αυτό το … ε θετικό, η απόσταση μεταξύ σημείων με τη συνέχεια.
Ερ – Θα μπορούσες να μεταφράσεις αυτόν τον ορισμό σε απλά Ελληνικά;!; Δηλαδή τι φαντάζεσαι να λέει;

Α – Λοιπόν κοιτάξτε, αν θυμάμαι καλά από αυτά που μας λέγανε είναι ότι … η απόσταση δύο σημείων να είναι μικρότερη από ε νομίζω … κατ' αρχήν υπάρχει ε και δ στη συνέχεια ή είναι για την παραγωγίσιμη αυτή;
Ερ – Υπάρχει κάτι που θα ήθελες να αλλάξεις στον ορισμό;
Α – Νομίζω είναι αν και μόνο αν υπάρχει ε θετικό, ώστε για κάθε δ…ώστε για δ θετικό και $ν_o$ ανήκει στο Ν ισχύει αυτό;…
Ερ – Δηλαδή αν φτιάξω το γράφημα μιας συνάρτησης κάπως έτσι (σχεδιάζω το γράφημα που φαίνεται στην εικόνα), αν ήθελες χρησιμοποιώντας αυτό το γράφημα να εξηγήσεις σε κάποιον τον ορισμό, τι θα του έλεγες; Πώς θα τον περιέγραφες με λόγια χρησιμοποιώντας το σχήμα;
Α – ότι για την απόσταση κάθε x από το x_0 η οποία είναι μικρότερη ενός αριθμού δ, δηλαδή αν η απόσταση μεταξύ x και x_0 είναι μικρότερη από δ …μμμ…ε δεν ξέρω… τότε όμοια και η απόσταση του f(x) από το $f(x_0)$ αντίστοιχα θα είναι μικρότερη του ε και το ε εξαρτάται από το δ, το δ από το ε αντίστοιχα, τέλος πάντων…
Ερ – Ωραία, το $ν_0$;
Α – το $ν_0$ δεν ξέρω που κολλάει, δεν ξέρω…(το ξαναδιαβάζει) ναι δεν ξέρω που κολλάει το ν. Πρέπει να ήταν για ακολουθία αυτό. Άσχετο! Δεν ξέρω έχω μπερδευτεί, δεν τον ξέρω τον ορισμό γενικότερα.
Ερ – Εντάξει, ωραία Άλκηστη, σε ευχαριστώ πολύ!

6η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Αλέξανδρος’,
φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα εκάμενα ισχύει.

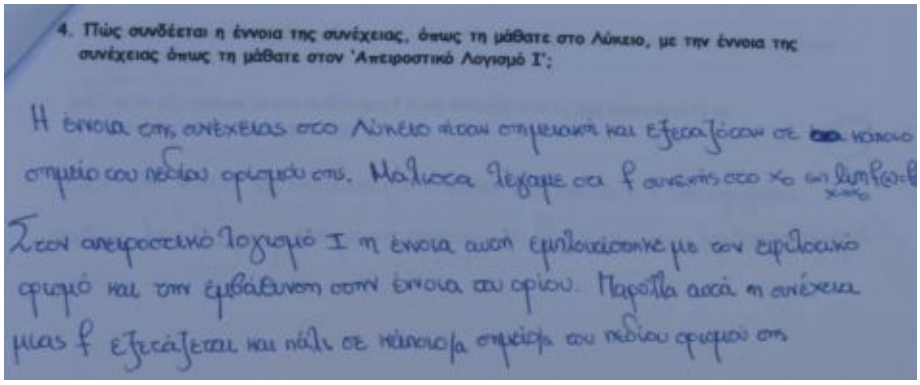
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

_X_ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ με $|x - x_0| < \delta$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

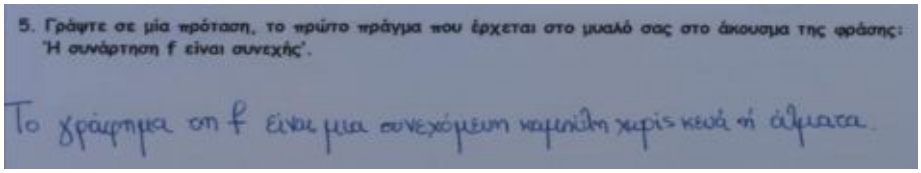
Ερ - Ωραία, για τον ορισμό δεν θέλω κάτι προς το παρόν. Θα τον δούμε στο τέλος.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Η έννοια της συνέχειας στο Λύκειο ήταν σημειακή και εξεταζόταν σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Μαλιστα λέγαμε οτι f συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f$

Στον απειροστικό λογισμό Ι η έννοια αυτή εμπλουτίστηκε με τον ερίβαινο ορισμό και την εμβάθυνση στην έννοια του ορίου. Παρόλα αυτά η συνέχεια μιας f εξετάζεται και πάλι σε κάποιο/α σημεία του πεδίου ορισμού της

Ερ – Και αυτό θα το σχολιάσουμε στο τέλος.


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Το γράφημα της f είναι μια συνεχόμενη καμπύλη χωρίς κενά ή άλματα.

Ερ – Ας πάμε λίγο στο 5. Αυτό είναι που σου έρχεται στο μυαλό, έτσι; Θέλεις να σχολιάσεις κάτι πάνω σε αυτό;

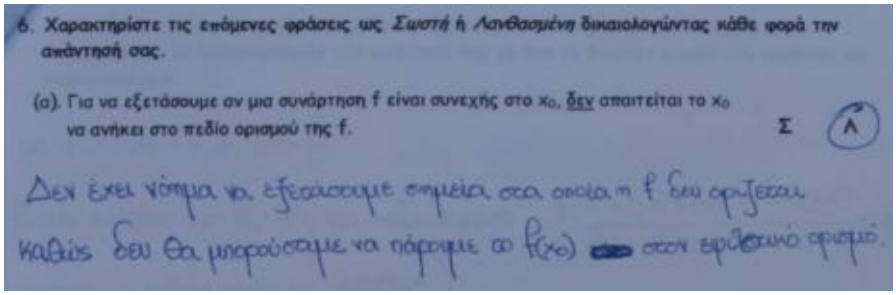
Α- Αυτό είναι το πρώτο πράγμα που μου ήρθε στο μυαλό χωρίς να σκεφτώ καθόλου με βάση την ανάλυση που ξέρω, αυτό που μου ήρθε απλά στο μυαλό. Χωρίς να σκεφτώ καθόλου, τίποτα.

Ερ - Καθώς προχώρησες στο Πανεπιστήμιο, άλλαξε καθόλου αυτή η εντύπωση;

Α – Αρκετά…

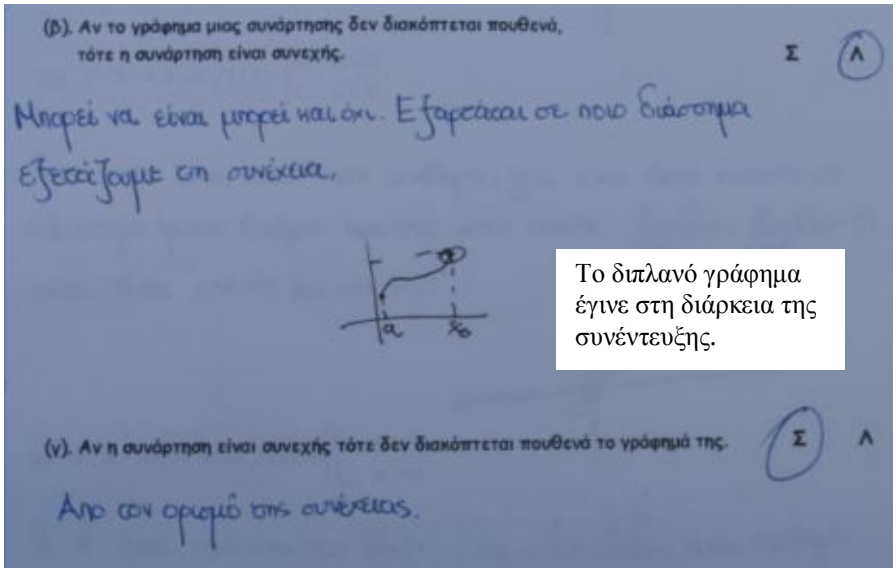
Ερ – Γιατί;

Α - Κατ αρχήν άλλαξε αρκετά διότι ξεχώρισα τη συνέχεια την απλή αυτή που λέμε σημειακή από τη συνέχεια την ομοιόμορφη που είναι ολική. Μετά, επί πλέον όταν προχωρήσαμε λίγο παραπάνω στα ολοκληρώματα και σε αυτά, είπαμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις ξέρεις κάτι, ολοκληρώνονται κατά Riemann μια χαρά και είμαστε εντάξει αλλά και πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας να έχουμε πάλι είμαστε εντάξει και μπορούν να ολοκληρωθούν. Άρα λέω, και πεπερασμένο πλήθος αλμάτων να περιέχει η συνάρτησή μου δεν ξεφεύγει και πολύ από το να είναι συνεχής, δηλαδή είναι κατά τμήματα συνεχής όπως έχω απαντήσει λίγο πιο κάτω.


6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε σημεία στα οποία η f δεν ορίζεται καθώς δεν θα μπορούσαμε να πάρουμε το $f(x_0)$ στον πραγματικό αριθμό.


(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

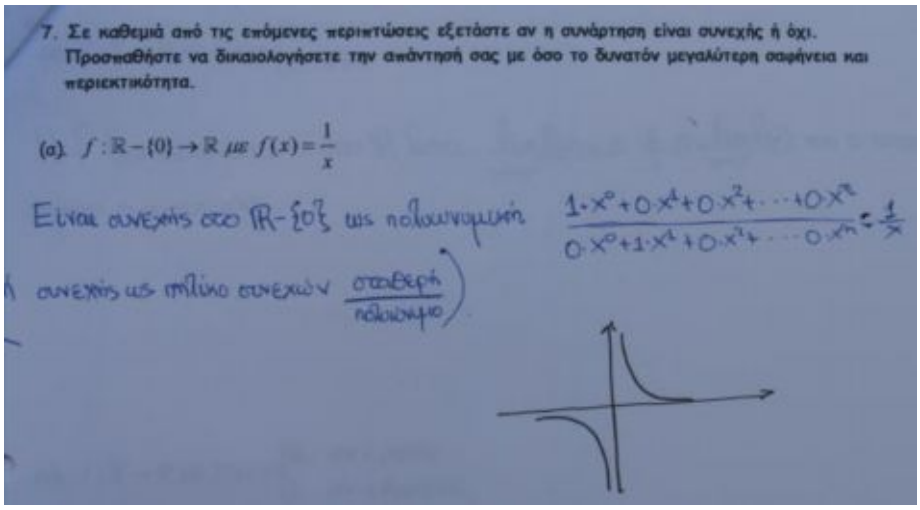
Μπορεί να είναι μπορεί και όχι. Εξαρτάται σε ποιο διάστημα εξετάζουμε τη συνέχεια.

Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

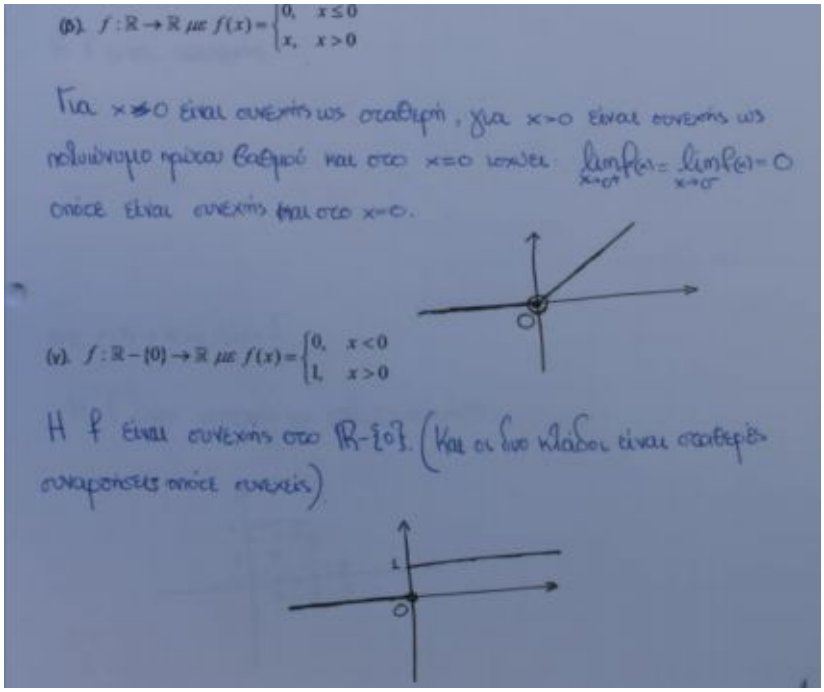
(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Από τον ορισμό της συνέχειας.

Ερ - …μάλιστα, μάλιστα, κατάλαβα, ωραία.
Τώρα σε αυτό, το (α), δεν έχω κάτι να ρωτήσω. Η δικαιολόγησή σου νομίζω είναι κατανοητή.
Τώρα στο β. Έχεις κάποιο παράδειγμα; Τι σου ήρθε στο μυαλό και απάντησες λάθος;
Α - Δεν θυμάμαι τι μου ήρθε στο μυαλό και απάντησα λάθος.
Ερ - Τώρα που το ξανακοιτάζεις;
Α - Βασικά νομίζω ότι το βλέπω σε αντιδιαστολή με αυτό (δείχνει το γ). Δηλαδή νομίζω ότι δεν ισχύει και αντιστρόφως. Δηλαδή νομίζω ότι αυτό είναι το πιο λογικό. Αν είναι συνεχής τότε δεν θα διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.
Ερ - Και απλά πιστεύεις ότι δεν ισχύει το αντίστροφο;
Α - Πιστεύω ότι δεν ισχύει το αντίστροφο γιατί ας πούμε μπορεί να είναι ...(διστάζει και διαβάζει ξανά την εκφώνηση). . .
Ερ - Σου έρχεται κάποιο γράφημα το μυαλό; Σου ήρθε κάτι συγκεκριμένο στο μυαλό και το σκέφθηκες αυτό;
Α – Ναι μπορεί να είναι… (αρχίζει να σχεδιάζει στο χαρτί το γράφημα που φαίνεται παραπάνω). Για παράδειγμα να είναι ανοιχτό στο x_0 και να θες να εξετάσεις τη συνέχεια στο x_0. Τότε αυτή, αν εξετάσουμε τη συνέχεια στο x_0, δεν είναι συνεχής στο x_0.
Ερ – Γιατί;
Α - Εκτός του ότι δεν είναι σημείο του πεδίου ορισμού, αφού είναι ανοιχτό, αν θέλουμε να το εξετάσουμε πιο μαθηματικά, ας πούμε, και πάρουμε τα πλευρικά όρια τότε το $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ υπάρχει και μπορούμε να το βρούμε, παίρνει κάποια τιμή, ενώ το $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ δεν υπάρχει καθόλου και επίσης το $f(x_0)$ δεν υπάρχει καθόλου. Ωστόσο ας πούμε το γράφημα της συνάρτησης είναι συνεχόμενη γραμμή. Δηλαδή το σκέφτηκα έτσι απλά, να έχει μικρή τρυπούλα εδώ πέρα. Δηλαδή το σκέφτηκα, αν το βάλουμε να ορίζεται στο [α, χ_0) είναι συνεχής. Ενώ στο [α, χ_0] δεν είναι συνεχής. Εγώ με αυτή την έννοια το σκέφτηκα εκείνη την ώρα.
Ερ – κατάλαβα, ωραία.

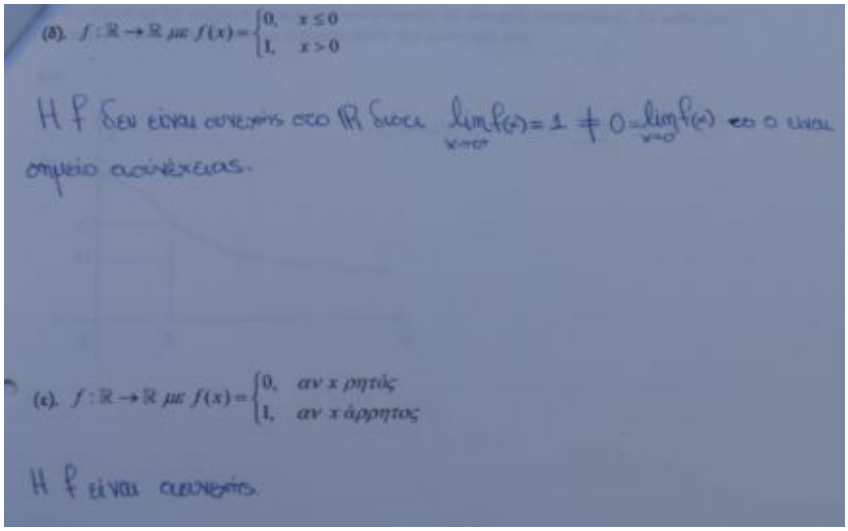


(χαμογελάω!) Ενδιαφέρον αυτό! Εδώ τι γράφεις;…
Α - …την έγραψα κατά αυτόν τον τρόπο.
Ή τη γράφεις έτσι, και λες ότι είναι πολυωνυμική ή την εξηγείς έτσι και λες ότι είναι σταθερή.
Ερ – Μάλιστα. Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική παράσταση σε αυτή;
Α – …(κάνει το σχήμα που φαίνεται πιο πάνω). Βασικά αυτή αποτελείται από δύο κλάδους. Για α θετικό είναι αυτή εδώ πέρα (δείχνει το σχήμα). Αυτή είναι συνεχής, που όμως, στο R εκτός από το μηδέν που λέει εδώ πέρα, από το $\mathbb{R}-\{0\}$ στο $\mathbb{R}$, δεν διευκρινίζει δηλαδή διάστημα $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$ απλά λέει σε όλο το $\mathbb{R}$, εκτός από το μηδέν που δεν ορίζεται καν εδώ πέρα, δεν ακουμπάει, συνεχής.
Ερ - Σε πειράζει που το γράφημα δεν είναι συνεκτικό, δεν είναι δηλαδή συνεχόμενη γραμμή;
Α – Όχι, όχι. Βασικά ξέρεις τι γίνεται, είχα συνηθίσει στο Λύκειο, με τη νοοτροπία του Λυκείου, αυτό που λες εσύ. Να βλέπω ένα γράφημα και να λέω, δεν είναι συνεκτικό, δεν είναι μια συνεχόμενη γραμμή, άρα δεν είναι συνεχής. Μετά το συνέδεσα στο Πανεπιστήμιο 100 % σχεδόν 80 % μπορώ να σου πω με το πεδίο ορισμού. Δηλαδή στις περισσότερες απαντήσεις έχω απαντήσει με βάση το πεδίο ορισμού παρά με τον τύπο της συνάρτησης.



Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Εδώ τώρα λες (διαβάζω την απάντησή του στο (β))…
Α - …ναι και είναι συνεχής…
Ερ - …και στο 0 εξετάζεις με . . .
Α - …με τα πλευρικά όρια.
Ερ – Ωραία. Μπορείς να μου κάνεις και εδώ τη γραφική παράσταση;
Α – (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται δίπλα και μου το εξηγεί με

ευχέρεια.)… και εδώ στο 0 δεν ορίζεται.
Ερ - Δηλαδή έχεις κενό στο 0;
Α - Εξαρτάται ποιο κλάδο μελετάμε.
Ερ – Σαν συνάρτηση. Θα έχει κενό στο 0;
Α - Δεν θα έχει, όχι δεν θα έχει.
Ερ – Γιατί;
Α - …γιατί…Δεν ξέρω. Το εξέτασα με το όριο μετά. Αλλά δεν μου φαινόταν λογικό να έχει κενό στο 0. Το επιβεβαίωσε το όριο αυτό μετά, τα τυπικά μαθηματικά δηλαδή. Είχα κι εγώ ένα προβληματάκι όταν έφτιαχνα τη γραφική παράσταση στο μυαλό μου. Γιατί λέω ότι θα ναι εδώ και κλειστό κυκλάκι; Και ανοιχτό; Και τα δύο ; Και το επιβεβαίωσε το όριο μετά, ότι πρέπει να είναι κλειστό.
Ερ – Ωραία, ωραία. Να δούμε τώρα τη (γ). Λες ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$. *Μπορείς να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;*
Α – (σχεδιάζει και πάλι γρήγορα το γράφημα και το εξηγεί). Στο 0 έχω ανοικτό κυκλάκι γιατί δεν την παίρνει την τιμή.
Ερ – Στο 1; Έχεις ανοιχτό ή κλειστό εκεί;
Α – Χμμμ…Κλειστό πρέπει να ναι…Γιατί να είναι ανοικτό; Είναι η $f(x)=1$, σταθερή συνάρτηση, αυτή είναι η γραφική της παράσταση…δεν υπάρχει λόγος να έχει ανοιχτό. Μα η $f(x)=1$ αν το πάρεις ξεχωριστά σαν συνάρτηση, για παράδειγμα δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1$ έχει πεδίο ορισμού όλο το R. Άρα το να βάλεις εδώ ανοικτό κυκλάκι δεν θα ήταν λίγο περίεργο;
Ερ – Δεν ξέρω, εγώ απλά ρωτάω!
Α - Όχι, δε νομίζω ότι θα έβαζα ανοικτό κυκλάκι. Θα το έβαζα συνεχόμενο, κανονικά, όπως το έχω εδώ.
Ερ – Ωραία, πάντως είναι συνεχής ή όχι;



Α – Ναι, ναι, συνεχής!
Ερ – Ωραία, αυτή τώρα, η (δ) ;
Α – Αυτή, υποθέτοντας ότι εξετάζουμε τη συνέχεια σε όλο το R , στο πεδίο ορισμού της δηλαδή, σε όλο τον πεδίο ορισμού της που είναι το R, δεν είναι συνεχής διότι υπάρχει σημείο ασυνέχειας, το 0 είναι σημείο ασυνέχειας. Στο 0 δεν είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία ας δούμε τώρα την επομένη. Εδώ λες ότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής.
Α - Με αυτήν είχα πρόβλημα λιγάκι…(την ξαναδιαβάζει…). Με αυτήν έκανα λίγο περίεργες σκέψεις! Αυτό εδώ ας πούμε, αν x ρητός, αν x άρρητος, το είδα λίγο

πρακτικά ας πούμε. Αν έχω $f(\frac{1}{2})$, $f\left(\frac{m}{n}\right)$ γενικά όπου $m,n \in \mathbb{N}$, θα είναι 0. Ενώ αν είναι για παράδειγμα $f\left(\sqrt{2}\right)$, ένας τυχαίος άρρητος, θα είναι το 1…

Ερ - Άρα πώς φαντάζεσαι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης;

Α - Εγώ φαντάζομαι, εγώ φαντάζομαι ότι θα είναι κουκκιδίτσες αυτή. Δεν θα μπορούσαμε να βγάλουμε μια συνεχή γραμμή. Γιατί, ας πούμε, αν πάρουμε το 1 και το 2 στον άξονα των πραγματικών, μεταξύ του 1 και τους 2 θα υπάρχει σίγουρα και ρητός και άρρητος. Ρητός θα υπάρχει λόγω πυκνότητας και άρρητος διότι εεε… όχι νομίζω ότι και η άρρητοι είναι πυκνοί. Οπότε, δεν θα μπορούσαμε να βρούμε μία συνεχή γραμμή, γιατί αν βρίσκαμε εντελώς πρακτικά τώρα χωρίς μαθηματικά, προφανώς αυτή η γραμμή θα περνούσε και από έναν ρητό και από έναν άρρητο μαζί, που δεν γίνεται όμως, γιατί άλλη συνάρτηση είναι για τον ρητό και άλλη συνάρτηση είναι γιατί τον άρρητο.

Ερ - Δηλαδή η ύπαρξη κουκίδων είναι αυτή που σε απωθεί από την σκέψη να πεις ότι η συνάρτηση είναι συνεχής;

Α - …Και μετά αυτό ήταν το δεύτερο πρόβλημά μου. Η ύπαρξη των κουκίδων. Γιατί…Το συνδύασα στο μυαλό μου, μετέφερα τα μεμονωμένα σημεία…

Ερ - …και;…

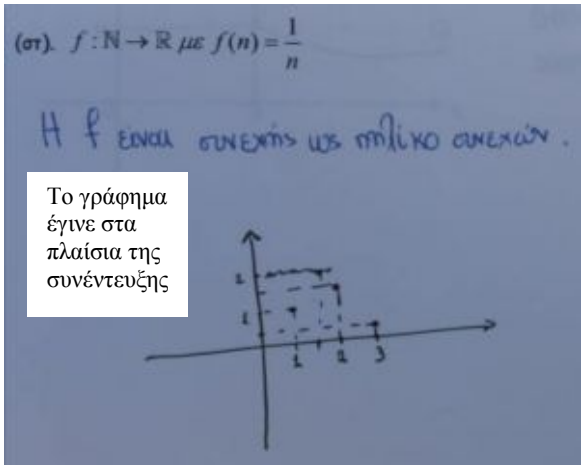
Α - …και δεν θυμόμουνα αν τα μεμονωμένα σημεία είναι σημεία ασυνέχειας. Δηλαδή μήπως είναι ούτως ή άλλως συνεχής στα μεμονωμένα σημεία. Δηλαδή, εντάξει, τα όρια τα παίρνουμε στα σημεία συσσώρευσης, ή ούτως η άλλως δεν έχει νόημα να τα πάρουμε κάπου αλλού, μόνο στα σημεία συσσώρευσης, αλλά στα μεμονωμένα σημεία τι γίνεται; Έχω την εντύπωση, δηλαδή αυτό είναι το δίλημμα μου, στα μεμονωμένα σημεία τι γίνεται; Δεν θυμόμουνα τι γίνεται στα μεμονωμένα σημεία.

Ερ - Ωραία, κατάλαβα. Τελικά από τι υποκινήθηκες και έβαλες σαν απάντηση αυτό που έβαλες;

Α – …από τους κουκίδες!...

Ερ - …από του κουκίδες…

Α - …ναι, από τις κουκίδες.



Το γράφημα έγινε στα πλαίσια της συνέντευξης

Ερ – Ωραία, αυτή λες ότι είναι…

Α - Είπα ότι είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Είναι από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ …α! όχι! Αυτή είναι ασυνεχής στο 0. Για να ήταν συνεχής, θα έπρεπε να είχε σημείο συνέχειας στο 0.

Ερ - …ναι αλλά προφανώς δεν εννοούμε $\mathbb{N}^*$; Γιατί αλλιώς δεν ορίζεται ο τύπος!

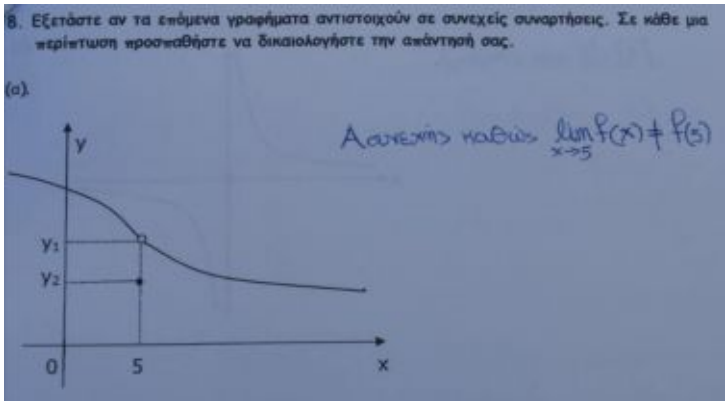
Α – Α! ναι σωστά, βλακεία!

Ερ - Μπορείς να μου κάνεις γι αυτήν λίγο τη γραφική της παράσταση; Πώς νομίζεις ότι θα είναι;

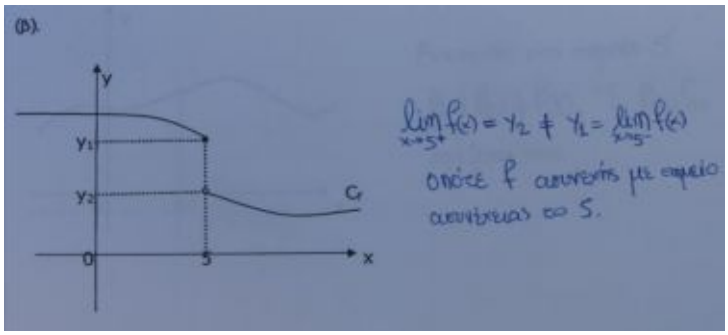
Α - …ναι, Αυτή όμως η γραφική παράσταση έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς … οπότε πάλι δεν μπορεί να είναι συνεχής γραμμή.

Ερ – Εντάξει, θέλεις να δοκιμάσεις να κάνεις τη γραφική της παράσταση;

Α - …για να δούμε…(αρχίζει να κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω και το εξηγεί. Παρατηρήστε ότι σχεδιάζει το $\frac{1}{2}$ ανάμεσα στο 1 και το 2, ενώ για τα υπόλοιπα κάνει σωστά σχόλια)…
Άρα οι κουκίδες θα πηγαίνουν ασυμπτωτικά προς το 0, άμα τις ενώσουμε αυτές μετά.
Ερ - Μπορείς να τις ενώσεις αυτές η όχι;
Α - …(διστάζει)…αν τις ενώσω … πάλι θα υπάρχει κάποια τιμή που δεν ανήκει στο Ν.
Ερ – …και; Τι εννοείς;
Α - Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε μια συνεχόμενη γραμμή, τα ενώναμε όλα και κάναμε μια συνεχόμενη γραμμή. Θα έδινε κάτι σαν την $f(x)=\frac{1}{x}$ που ξέρουμε από το $\mathbb{R}$, που… κάτι δεν μου πάει καλά…
Ερ - Εντάξει. Μην σε παιδεύω με αυτή. Τελικά τι πιστεύεις, ισχύει η αρχική απάντηση σου; Είναι συνεχής ή όχι;

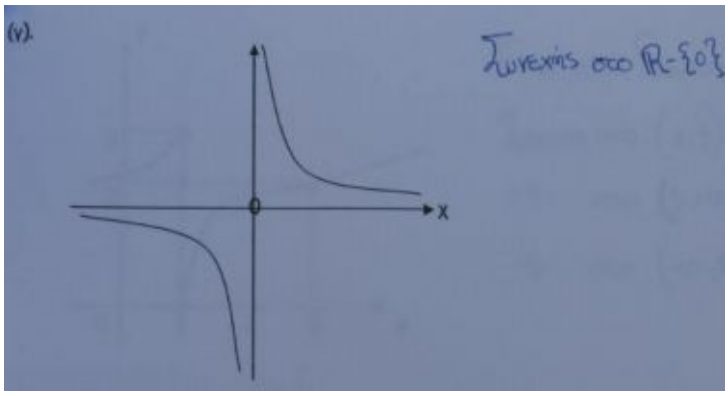


Α - …Ναι, εγώ πιστεύω ότι είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία. Ας δούμε τώρα το 5(α). Εδώ χρησιμοποιείς τον κλασικό ορισμό. Και άρα είναι να ασυνεχής στο 5;
Α – Ναι, ναι, ακριβώς.

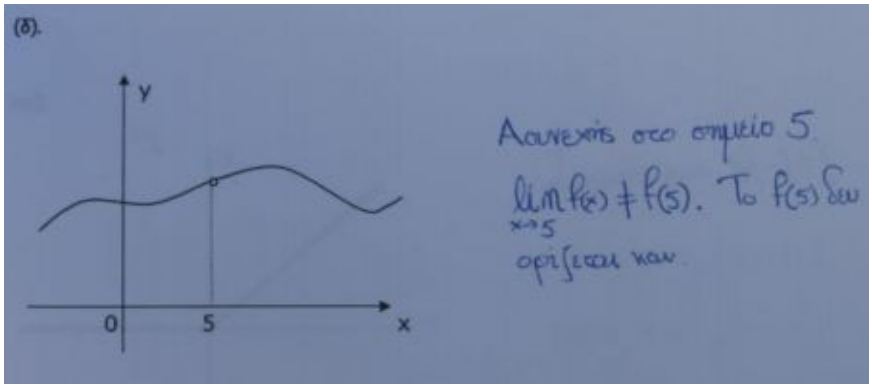


Ερ – Ωραία, εδώ τώρα. Το ίδιο;

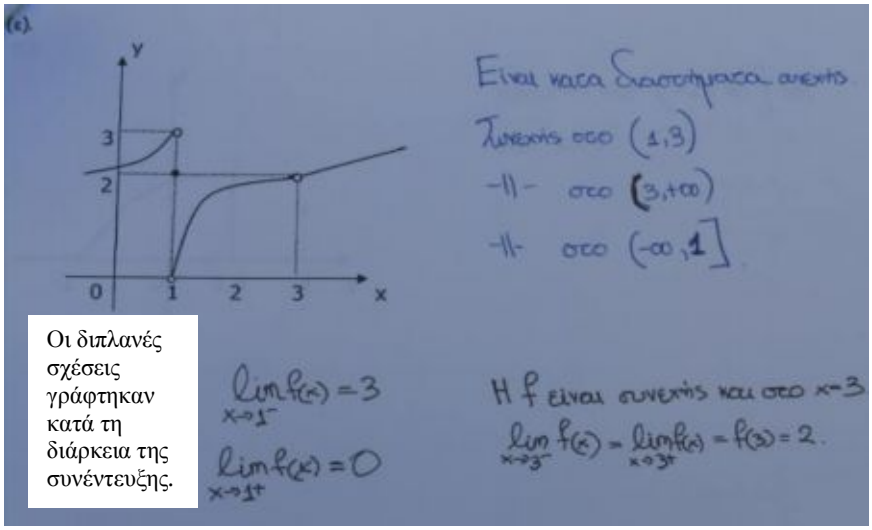
Α – Ναι, ναι!



Ερ – Σε αυτή τώρα, λες είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$. Ωραία. Πως θα την έλεγες αυτήν; Συνεχής απλά, ή συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$;
Α – Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$.
Ερ – Ωραία.



Ερ – Αυτή τώρα, λες είναι ασυνεχής στο 5. Δεν έχω κάτι να ρωτήσω σε αυτήν.



Οι διπλανές σχέσεις γράφτηκαν κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ – Εδώ τώρα … (διαβάζω την απάντησή του)… Ωραία. Στο 1 γιατί δεν είναι;

Α - …στο 1…στο 1 βασικά αυτή δεν ορίζεται. Βέβαια… έχει εδώ μια τιμή, ας πούμε αυτή θα είναι κλαδική. Δηλαδή για χ=1 θα λες ας πούμε ότι είναι ίση με το 2. Χμμμ … και με όρια να το δούμε, άρα τα όρια δεν θα έχουν την ίδια τιμή από αριστερά και από τα δεξιά.

Ερ – Μπορείς να υπολογίσεις εδώ τα όρια;

Α – Χμμμ … Για το 1^+ δεν έχω πρόβλημα …

Ερ - Πόσο πιστεύεις ότι είναι;

Α - … Για το 1^- όμως;…Χμμμ … Δεν ξέρω. Δεν το είδα με όρια καθόλου.

Ερ - Αν το προσπαθούσες τώρα; Θα μπορούσες πιστεύεις να τα βρεις τα όρια;

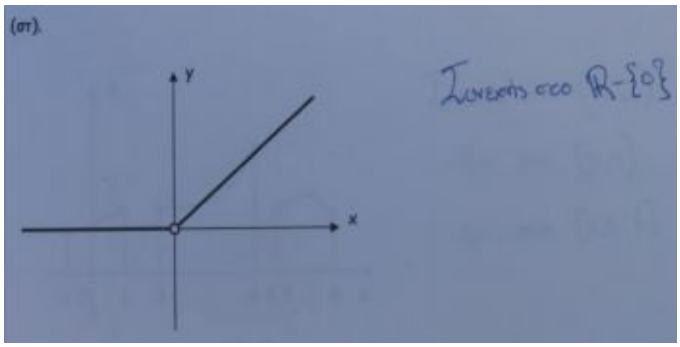
Α - … Δεν νομίζω…Κατ αρχήν, όπως φαίνεται, το 1 είναι σημείο αλλαγής τύπου, αλλάζει τύπο, δηλαδή φαίνεται, αν το δούμε εδώ φαίνεται, αυτή εδώ είναι διαφορετική γραμμή από τη γραμμή μετά, άρα στο 1 αλλάζουν οι συναρτήσεις… Και εδώ είναι ανοιχτό και αυτό, οπότε η $f(x)$ μάλλον για x μικρότερο του 1 είναι αυτή εδώ, για x μεγαλύτερο του 1 θα είναι αυτή εδώ, και για x μεγαλύτερο του 3 θα είναι αυτή εδώ η ευθεία… Και αυτή εδώ η κουκκίδα. . . είναι ας πούμε για x=1 πόσο κάνει… Για x=1 θα είναι μια σταθερή τιμή…Είναι σημείο αλλαγής τύπου το 1.

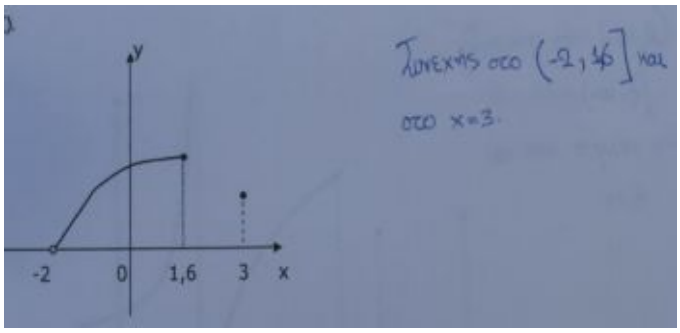
Ερ - Άρα πιστεύεις ότι για να βρω τα όρια χρειάζομαι τον τύπο της συνάρτησης, ή αρκεί το γράφημα;

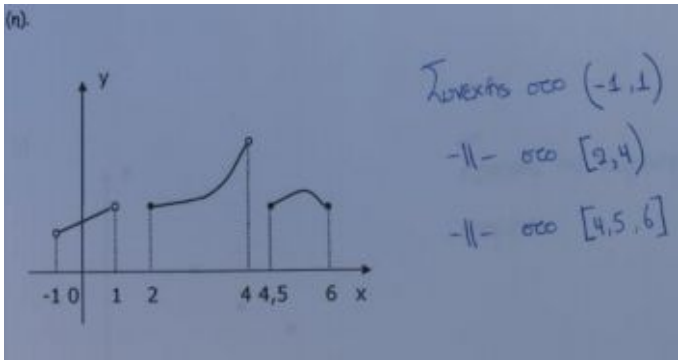
Α - …από το γράφημα…Λογικά πρέπει να μπορούμε και από το γράφημα … (το ξανακοιτάει)… Μήπως…χμμμ…Όταν το x έρχεται από δεξιά, όχι όταν το x έρχεται από αριστερά έχω την εντύπωση ότι το όριο πρέπει να κάνει 3. Ναι, (γράφει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$), και νομίζω ότι … (γράφει πάλι $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$)…

Ερ - Οπότε, αν η υπόθεσή σου αυτή είναι σωστή, έχεις συνέχεια στο x=1;

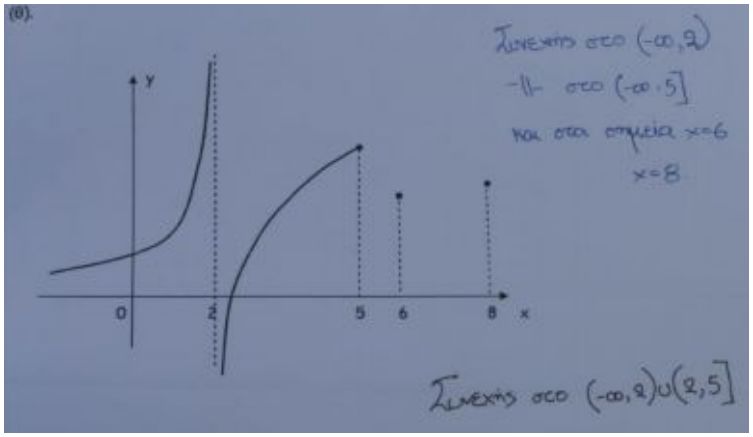
Α - … Είναι διαφορετικά τα πλευρικά όρια, όποτε έχω πρόβλημα.
Ερ – Ωραία…
Α - …αλλά φαντάζομαι, ότι αυτή η κουκίδα είναι χρήσιμη αν εξετάζαμε τη συνέχεια στο 3.
Ερ – Γιατί;
Α – Διότι ας πούμε λέμε $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ όσο το x πάει να γίνει 3 αυτό πάει να γίνει όσο αυτή τιμή (δείχνει την κουκίδα)...
Ερ – …την κουκίδα στο y=2;…
Α - …ναι, ναι και $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ όταν η συνάρτηση έρχεται έτσι, πάλι πάει στο 2.
Ερ - Άρα στο 3 η συνάρτηση είναι συνεχής; …
Α – …ναι, είναι. Διότι (γράφει) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ … Αλλά … τα πλευρικά όρια είναι ίσα αλλά δεν ξέρουμε αν είναι ίσα με την τιμή της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο… αλλά όχι, όχι, δεν έχει πρόβλημα … είναι …(γράφει) …
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 2$







Ερ – Μάλιστα. Άρα έχουμε συνέχεια και στο 3 έτσι;
Α – Ναι, ναι.
Ερ - Ωραία. Ας δούμε τώρα αυτή.
Α – Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$.
Ερ – …ωραία…
Α - …από το σχήμα καθαρά. Δεν χρειάστηκα κάτι άλλο.
Ερ – Ωραία. Σε αυτή τώρα. Λες ότι είναι συνεχής και στο 3. Γιατί και στο 3;
Α - Εδώ είναι που μου ήρθε κάποια έμπνευση και είπα ότι τα μεμονωμένα σημεία είναι σημεία συνέχειας.
Ερ - Μάλιστα. Σε πειράζει που δεν ενώνεται με γραμμή με το υπόλοιπο γράφημα;
Α – όχι, όχι.
Ερ - Εδώ τώρα στην (η) λες ότι είναι συνεχής σε αυτά τα διαστήματα…
Α - …ναι …
Ερ - Σε πειράζει που δεν ενώνονται αυτά τα διαστήματα;
Α - …μμμ…Προφανώς αυτή η συνάρτηση θα είναι μια κλαδική που θα έχει 3 διαφορετικούς τύπους. Μπορούμε να πούμε ότι είναι κατά διαστήματα συνεχής, στο κάθε κομμάτι. Κάθε κλάδος της δηλαδή, είναι συνεχής.



Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα λες (διαβάζω την απάντηση του). Λες συνεχής στο $(-\infty,2)$ *και μετά λες ότι είναι συνεχής στο* $(-\infty,5]$. *Άρα το ένα διάστημα δεν περιλαμβάνει το άλλο; Το διάστημα* $(-\infty,5]$ *δεν έχει μέσα του και το διάστημα* $(-\infty,2)$*;*

Α - …ναι…

Ερ – …άρα δεν θα είναι συνεχής και στο 2; Απλά ρωτάω γιατί μου φαίνεται ότι το ένα αντιφάσκει με το άλλο. Ή κάνω λάθος;

Α - …για το 2 ας πούμε…όταν το x πάει στο 2 από μικρότερες τιμές, τότε παίρνει αυτόν τον τύπο … οπότε το ξέρουμε, πάει στο συν άπειρο, ενώ όταν πάει από μεγαλύτερες τιμές τότε πάει στο πλην άπειρο, οπότε στο 2 θα έχει πρόβλημα…

Ερ - …συνέχειας;…

Α - …ναι. Μπορώ να το διατυπώσω και αλλιώς ας πούμε. Ωραία….συνεχής…στο σχήμα δεν φαίνεται να έχει πρόβλημα όμως…

Ερ - …γιατί;…

Α - …στο $(-\infty,2)$ συνεχής η γραμμή, δεν έχει πρόβλημα, και εδώ πέρα (δείχνει με το χέρι του)…μμμ…όχι $(-\infty,5]$…

Ερ – Α! όταν λες $(-\infty,5]$ *εννοείς τη δεύτερη γραμμή από κάτω στο μείον άπειρο μέχρι επάνω το 5;*

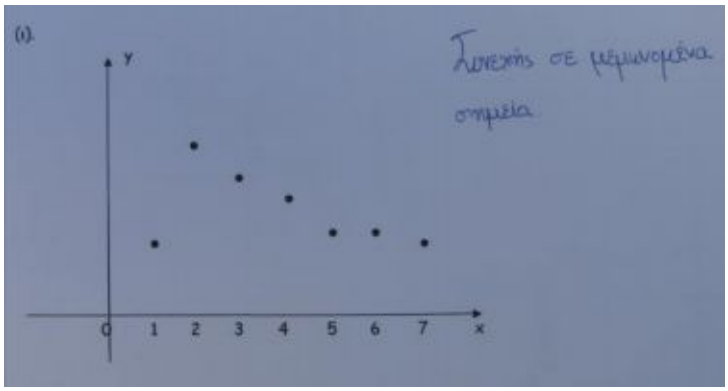
Α – Ναι!

Ερ – Α! Μάλιστα κατάλαβα.

Α - …Αυτή (δείχνει τον πρώτο κλάδο) πλησιάζει το 2. Και έρχεται από το μείον άπειρο; Δεν ξέρω. Ναι, όντως φαίνεται περίεργο εδώ, αλλά πως αλλιώς να το γράψω;

Ερ - Δεν σημαίνει ότι πρέπει να αλλάξεις κάτι κατά ανάγκη. Απλά ρωτάω. Απλά ρωτάω πώς το σκέφτηκες.

Α - Το σκέφτηκα κατά διαστήματα πάλι, αλλά ... όντως είναι περίεργο αυτό… Θα μπορούσαμε αυτά τα δύο να τα γράψουμε σαν ένωση διαστημάτων. Δηλαδή γίνεται και αυτό. Να πούμε δηλαδή $(-\infty,2)$… μμμ… να το γράφαμε $(-\infty,2)\cup(2,5]$; …Πιο λογικό φαίνεται πάντως από αυτό.



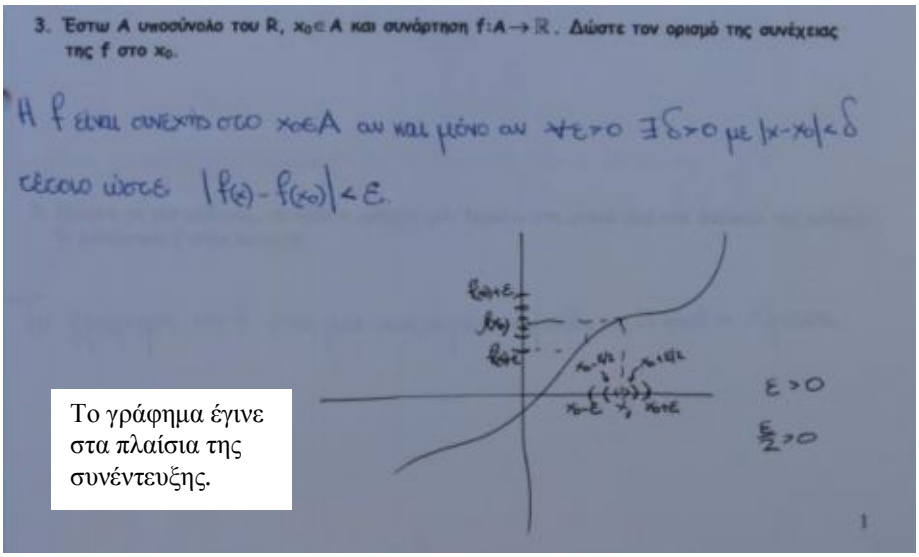
Ερ - Θες να το αλλάξεις ή όχι;

Α – Ναι, θέλω να το αλλάξω. (γράφει στο χαρτί).

Ερ – Ωραία, εδώ στη (ι), τι λες;

Α - …Ναι, εδώ έχουμε μεμονωμένα σημεία. Και ξέρουμε ότι μια συνάρτηση στα μεμονωμένα σημεία είναι συνεχής.

Ερ - Δεν σε ενοχλεί που δεν ενώνονται μεταξύ τους με γραμμή;
Α - Όχι, είναι μεμονωμένα σημεία.



Το γράφημα έγινε στα πλαίσια της συνέντευξης.

Ερ – Ωραία, ας επιστρέψουμε τώρα λίγο στον αρχικό ορισμό που έδωσες της συνέχειας. Έχεις γράψει πολύ ωραία τον ορισμό. Πώς θα μπορούσε να μου τον εξηγήσεις; Αν δηλαδή έπρεπε να τον διδάξεις, να τον εξηγήσεις σε ένα παιδί, πως θα το έκανες αυτό; Να, σχεδιάζω εδώ ένα τυχαίο γράφημα μιας συνάρτησης. Πώς θα εξηγούσε τον ορισμό με βάση το γράφημα αυτό;

Α – Στο σημείο x_0 λοιπόν, θα έλεγα ότι θεωρώ ας πούμε το σημείο $x_0+\varepsilon$, όπου ε είναι αυτό εδώ το μικρούλι μήκος, και θεωρώ το συμμετρικό του ας πούμε, το $x_0-\varepsilon$ από τα αριστερά. Και θα του έλεγα ότι αν θεωρήσουμε το διάστημα με άκρα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ … θα παρατηρούσαμε ότι η f(x) μπορεί να περιοριστεί, αντίστοιχα η τιμή της f στο x_0, αυτή εδώ πέρα, μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και γι' αυτήν, να πάρουμε το διάστημα $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ και … μετά δεν ξέρω, δεν θα του έλεγα αυτό τον ορισμό με τίποτα…

Ερ - …όχι, όχι. Ας υποθέσουμε βρε παιδί μου ότι ένας συμφοιτητής του σε ρωτάει γι' αυτό τον ορισμό; Πώς θα τον εξηγούσες; …

Α - …θα του το έλεγα, αν μου επιτραπεί η έκφραση, λίγο μπακάλικα …

Ερ - …ναι, αυτό θέλω να μου πεις! Ας υποθέσουμε βρε παιδί μου, ότι έχεις έναν μαθητή της Γ΄ Λυκείου που του κάνεις μάθημα. Βλέπει λοιπόν τον ορισμό όπως τον έχει το σχολικό βιβλίο και σε ρωτάει τι είναι αυτό το πράγμα. Πώς θα τον εξηγούσες; Έτσι απλά; Τον βλέπει γραμμένο στο σχολικό βιβλίο και σου λέει: μπορείτε να μου πείτε έτσι απλά με ένα απλό γράφημα τι στα κομμάτια λέει αυτός ο τύπος;

Α - Έχουμε ξεκινήσει με αυτό το ε θετικό, αυτό το μικρό κομματάκι…

Ερ - …Εννοείς το δεξιά και το αριστερά από τοx$_0$ έτσι; …

Α - …ναι και έχω κάνει το ίδιο και για το $f(x_0)$…

Ερ - …ωραία…

Α - …Και θα του έλεγα να παρατηρήσω το εξής: ότι αν μικρύνω το ε το κάνω για παράδειγμα ε/2 που είναι επίσης θετικό, θα μικρύνει ας πούμε το διάστημα μου και θα γίνει $\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Και θα του έλεγα ότι το ίδιο θα συμβεί και στον άλλο άξονα, δηλαδή θα μικρύνει το διάστημα και θα γίνει $\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$.

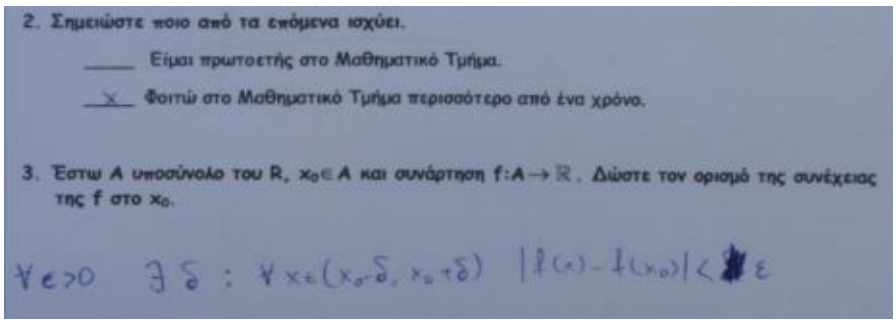
Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Το δ τι ρόλο παίζει στον ορισμό σου;

Α - …το δ…το $|x - x_0| < \delta$ που λέει εδώ, είναι να βρω ένα κατάλληλο δ ώστε όταν η απόσταση του x από το x_0 γίνει μικρότερη από αυτό το δ, τότε η απόσταση του $f(x)$ από το $f(x_0)$ να είναι μικρότερη από το ε για κάθε ε θετικό, δηλαδή σχεδόν να ταυτίζονται. Δηλαδή, αυτό το δ … μου καθορίζει ουσιαστικά το x που θα πάει ας πούμε…ναι… Βασικά θα του έλεγα ότι αν συνεχίζαμε αυτή τη διαδικασία έπ' άπειρον και παίρναμε όλο και μικρότερα ε, τότε θα φτάναμε σε ένα σημείο που δεν θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στα x_0-ε και x_0+ε, όπως κι εδώ θα φτάναμε στο σημείο να μην ξεχωρίζουμε τη διαφορά ανάμεσα στα $f(x_0)$-ε και $f(x_0)$+ε. Συνεχίζουμε δηλαδή και φτάνουν τόσο κοντά, όχι να συμπίπτουν, αλλά οριακά να μην μπορούμε να ξεχωρίσουμε τον ένα από το άλλο. Είναι, παράδειγμα τώρα, δεν είναι 3, είναι ας πούμε 2,99999 ή 2,9998 που θεωρητικά μπορούμε να το πούμε 3, δεν έχουμε πρόβλημα.

Ερ – Πολύ Ωραία! Αλέξανδρε σε ευχαριστώ πολύ!

7η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Γιάννης’,
φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα εκόμενα ισχύει.

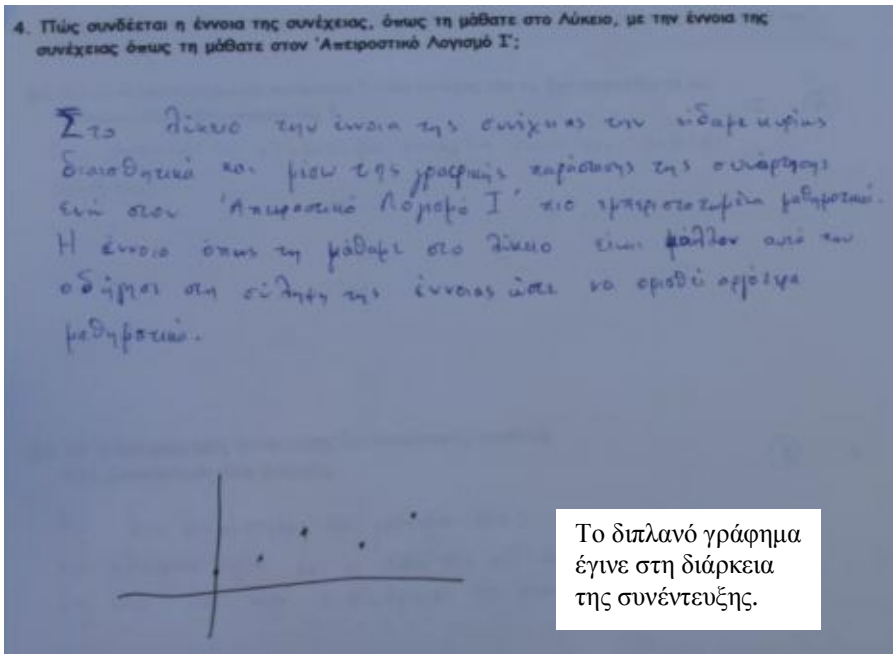
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

_X_ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ερ - Γιάννη δεν θα το σχολιάσω τώρα τον ορισμό. Θα τον δούμε στο τέλος. Ας προχωρήσουμε παρακάτω.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Στο λύκειο την έννοια της συνέχειας την είδαμε κυρίως διαισθητικά και μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ενώ στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι' το ορισμό μαθηματικά. Η έννοια όπως τη μάθαμε στο λύκειο είναι φαίνεται αυτό που οδήγησε στη σύλληψη της έννοιας ώστε να οριστεί αρχίσει μαθηματικά.

Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ – Εδώ λες (διαβάζω την απάντησή του). Τι άλλαξε από το Λύκειο; Τι νιώθεις ότι άλλαξε στον Απειροστικό Λογισμό Ι; Τι είναι αυτό δηλαδή που σε έκανε να το βλέπεις πιο αυστηρά;

Γ - Πρώτα απ όλα, ξεφύγαμε τελείως από το θέμα της οπτικοποίησης μιας συνάρτησης για να ελέγξουμε τη συνέχεια, δηλαδή πήγαμε σε καθαρά μαθηματικούς όρους και όχι πλέον… και είδαμε ότι μπορεί να έχουμε μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής, αυτό που λέμε δηλαδή δε σηκώνουμε το μολύβι, και παρόλα αυτά να είναι συνεχής….

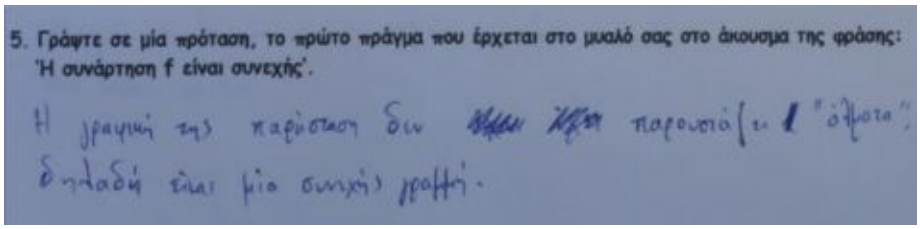
Ερ - …πιο παράδειγμα έχεις; Πιο απλό παράδειγμα δηλαδή θα σου ερχόταν στο μυαλό; …

Γ - …μια συνάρτηση που ορίζεται στο N.

Ερ - …Κάνε μου ένα τυχαίο γράφημα τέτοιο.

Γ – … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω)…. Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Ερ - Ωραία. Αυτό είναι μια σημαντική αλλαγή σε σχέση με αυτό που ήξερες στο Λύκειο.


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει "άλματα", δηλαδή είναι μία συνεχής γραμμή.

Τώρα σε αυτήν. Αυτό είναι το πρώτο πράγμα που σου έρχεται στο μυαλό όταν ακούς συνεχής συνάρτηση, έτσι;

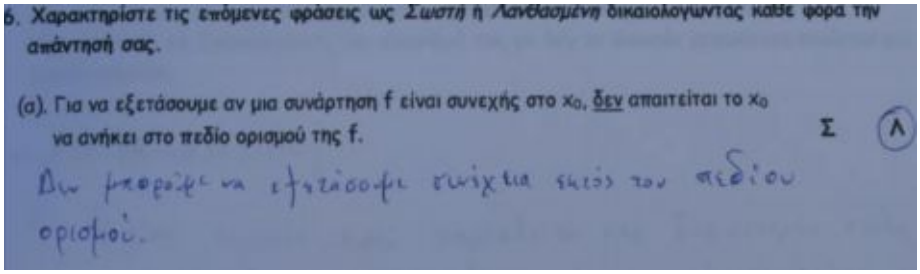
Γ - Ναι, έχει μείνει από το Λύκειο.

Ερ - Τι πιστεύεις, είναι αυτό απόλυτα σωστό ή όχι; …

Γ - …όχι, όχι

Ερ - …μάλιστα. Αλλά αυτό είναι που σου έρχεται στο μυαλό όταν ακούς τη φράση συνεχής συνάρτηση έτσι;

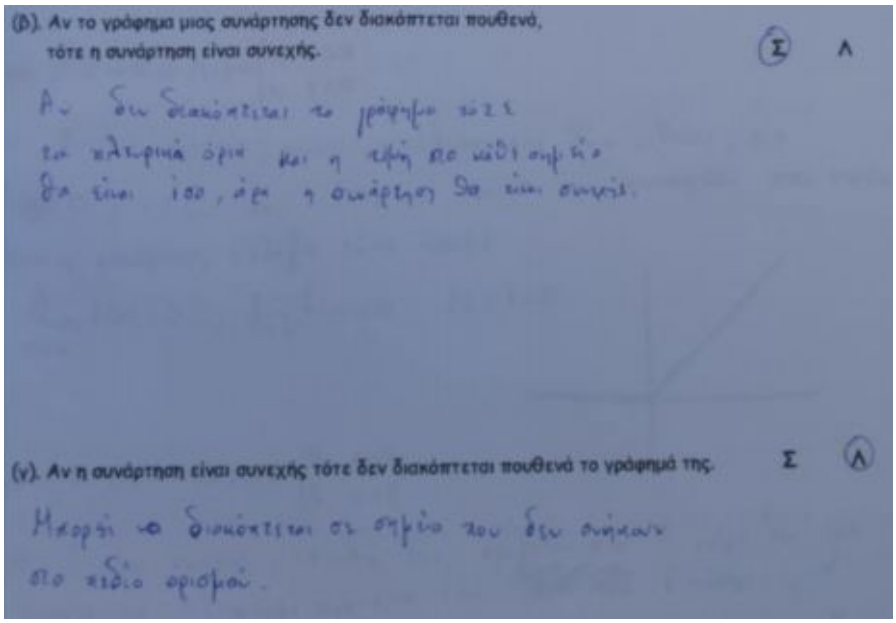
Γ – ναι.


6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως Σωστή ή Λανθασμένη δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

Δεν μπορούμε να εξετάσουμε συνέχεια εκτός του πεδίου ορισμού.

Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα νομίζω ότι δικαιολόγησή σου είναι πλήρης, δεν έχω να ρωτήσω κάτι.


(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

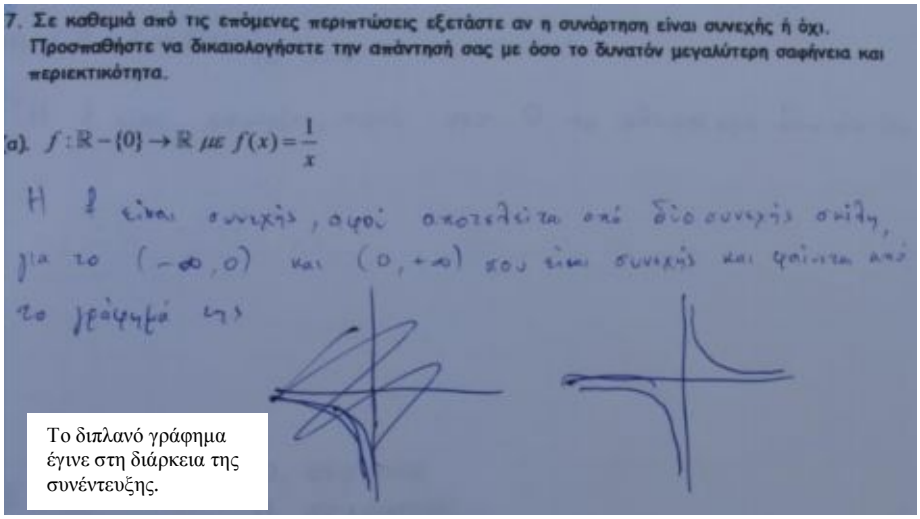
Αν δεν διακόπτεται το γράφημα τότε τα πλευρικά όρια και η τιμή στο κοινό σημείο θα είναι ίσα, άρα η συνάρτηση θα είναι συνεχής.

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

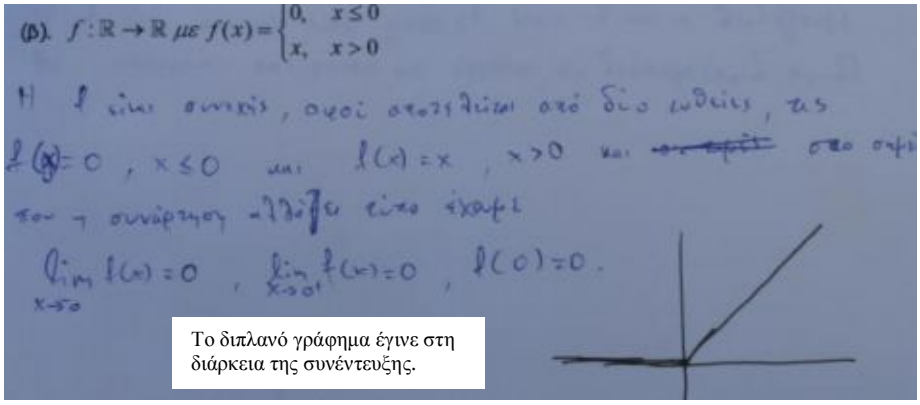
Μπορεί να διακόπτεται σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στο (γ) λες ότι μπορεί να διακόπτεται σε σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού. Πώς το φαντάζεσαι αυτό;

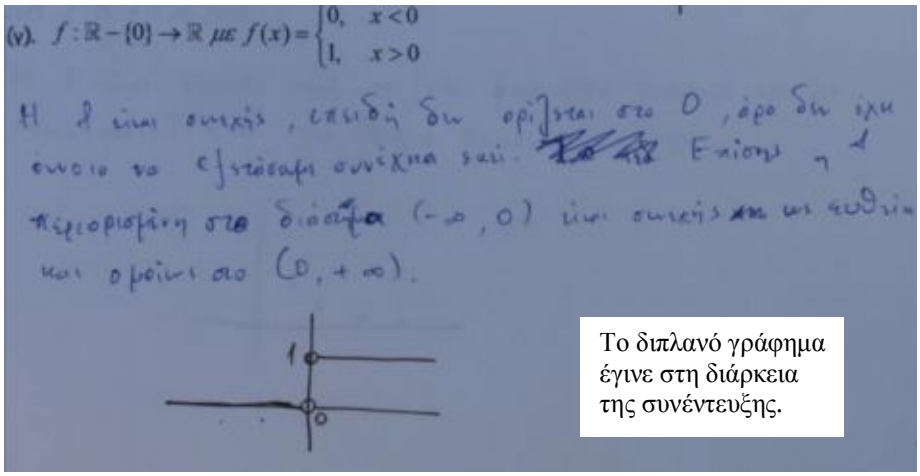
Γ - Μπορεί το γράφημα, ε… η συνάρτηση να μην ορίζεται στο R ή σε ένα διάστημα, αλλά να ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, οπότε δεν έχει λόγο να εξετάσουμε τη συνέχεια ενδιάμεσα στα διαστήματα. Διακόπτεται προφανώς το γράφημα αφού εκεί που δεν ορίζεται δεν έχουμε κάτι να σχεδιάσουμε αλλά παρόλα αυτά είναι συνεχής η συνάρτηση.



Ερ - Μάλιστα. Τι θα έλεγες για αυτήν; Είναι συνεχής απλά ή πρέπει να τονιστεί ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$, *στο* $(0,+\infty)$*;*
Γ - Είναι συνεχής σε όλο του πεδίο ορισμού της, απλά επειδή έχουμε συνηθίσει αυτό από το Λύκειο μιλάμε για πριν και μετά, και διευκρινίζουμε ότι στο 0 αφού δεν ορίζεται δεν υπάρχει πρόβλημα που διακόπτεται.

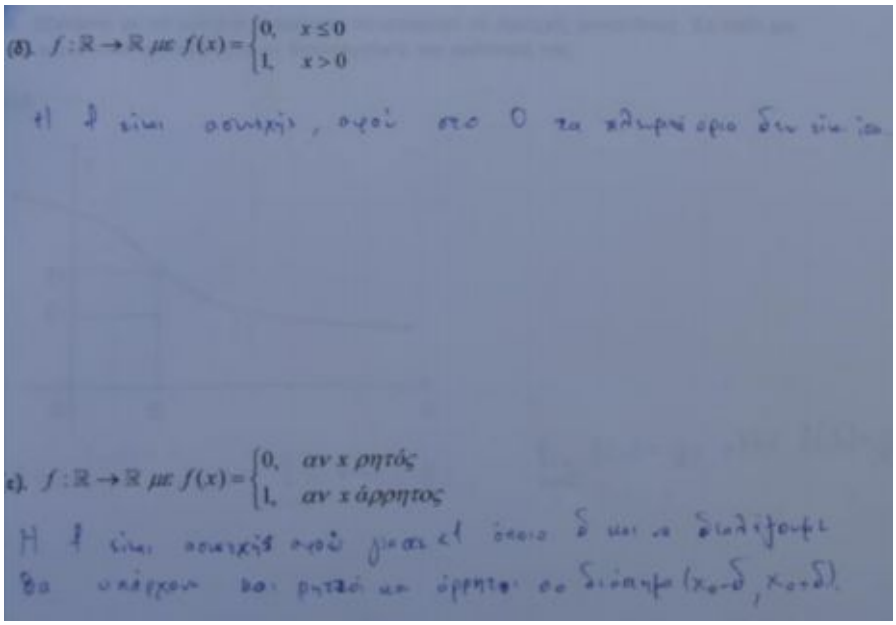


Ερ – Μάλιστα. Στο (β) λες… (διαβάζω την απάντησή του)... Άρα, στο σημείο 0 πώς εξετάζεις τη συνέχεια;
Γ - Μαθηματικά ε; Με τα πλευρικά όρια.
Ερ - Θα μπορούσες να μου κάνεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης;
Γ – (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω στο σχήμα).
Ερ - Τι πιστεύεις, στο 0 ενώνονται οι δύο κλάδοι; Ακουμπάνε οι δύο κλάδοι;
Γ - Δεν καταλαβαίνω ακριβώς τι …
Ερ - …εννοώ είναι συνεχόμενο το γράφημα;

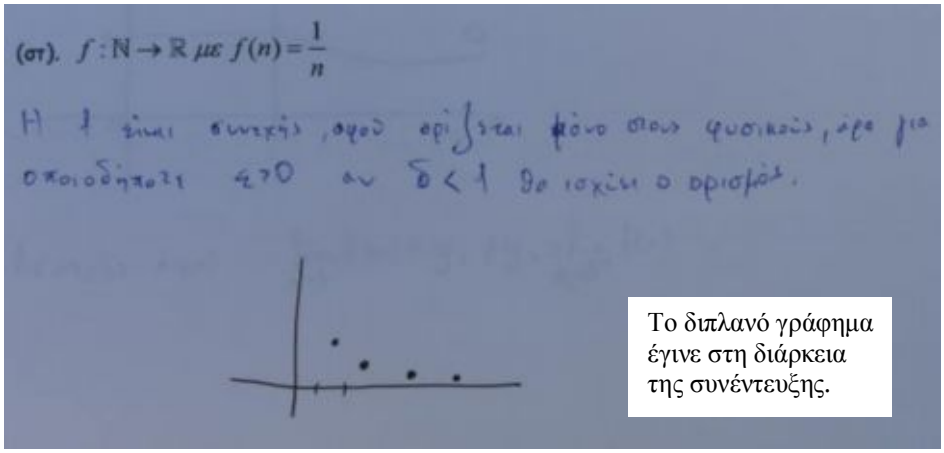


Γ - …ναι, ναι
Ερ – Στην επόμενη τώρα, λες (Διαβάζω την απάντηση του)… Θα μπορούσες να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση, και σε αυτήν;
Γ - (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα)

Ερ - Το γεγονός ότι στο x=0 τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά;
Γ - Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε πλευρικά όρια σε αυτό το σημείο, δεν είναι στο πεδίο ορισμού άρα δεν έχει νόημα. Δεν μπορούμε, δεν χρειάζεται να εξετάσουμε κάποια όρια σε αυτό το σημείο.

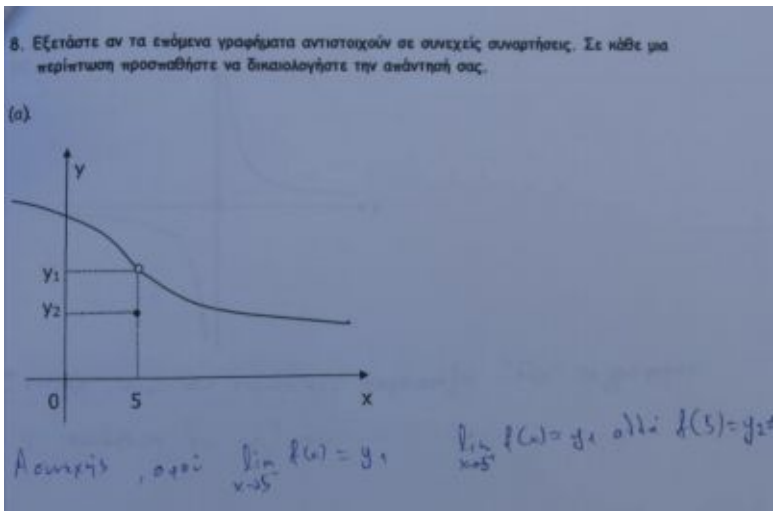


Ερ – Ωραία. Στη (δ) τώρα, λες (διαβάζω την απάντησή του)… Έχει διαφορά αυτή από την προηγούμενη;
Γ - Ναι, έχει διαφορά γιατί εδώ υπάρχει λόγος να εξετάσουμε συνέχεια και στο 0. Εφόσον υπάρχει, είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της ,τα πλευρικά όρια τα κοιτάμε και δεξιά και αριστερά έχει διαφορά μεγάλη διαφορά από την προηγούμενη, αυτή είναι ασυνεχής.
Ερ – Ωραία, στην (ε) τώρα λες (διαβάζω την απάντησή του)…Τη θυμάσαι ποια συνάρτηση είναι αυτή;
Γ – νομίζω είναι η συνάρτηση Dirichlet, δεν είναι;

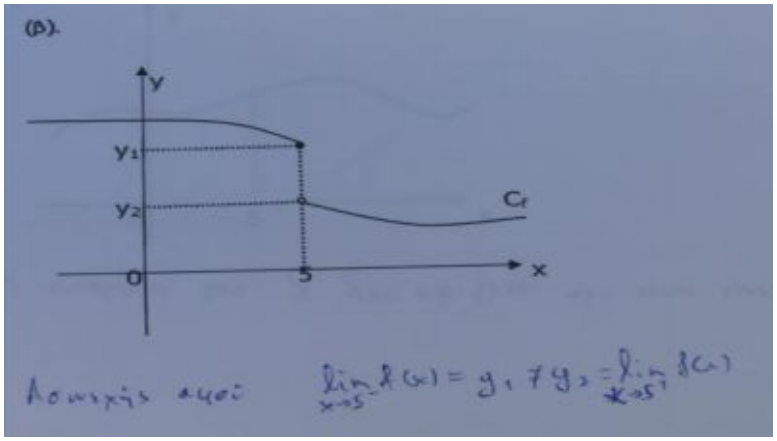


Ερ – Ναι, εδώ τώρα λες (διαβάζω την απάντησή του)… Πως θα είναι η γραφική παράσταση αυτής; Θες να την κάνεις;
Γ - Εφόσον μπορούμε να υποθέσουμε ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε τα σημεία αυτής …(κάνει το γράφημα που φαίνεται επάνω)… θα πηγαίνει κάπως έτσι πάνω κάτω.
Ερ - Άρα είναι συνεχής;
Γ – Είναι.
Ερ - Σε πειράζει που εδώ έχεις μόνο σημεία;
Γ – Όχι.

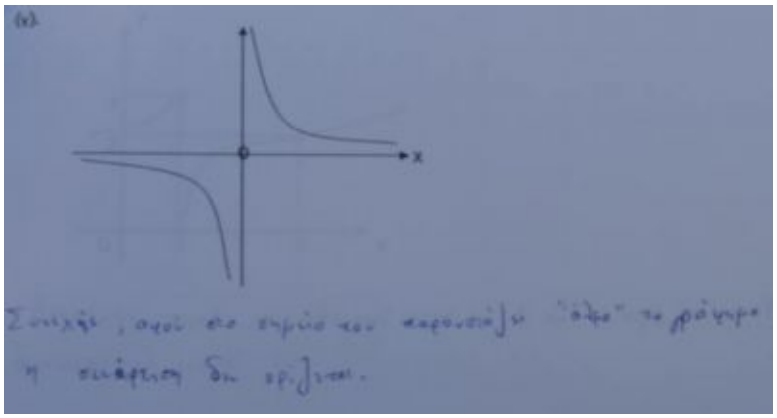
Ερ – Γιατί;
Γ - Γιατί αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε ε>0, παίρνουμε δ εδώ πέρα ας πούμε το ½, οπότε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού που είναι μόνο αυτό δεν απέχουν περισσότερο από ε, απέχουν 0 από την τιμή του σημείου.



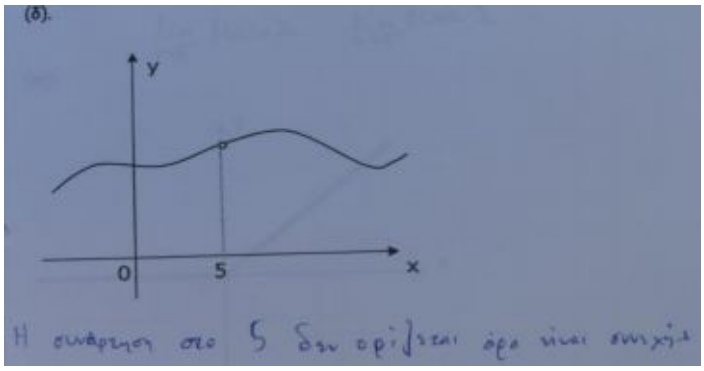
Ερ – Μάλιστα. Εδώ στην (α) λες …
Γ - …ασυνεχής στο 5…
Ερ - …ναι. Και νομίζω ότι η δικαιολόγησή σου είναι πλήρης.



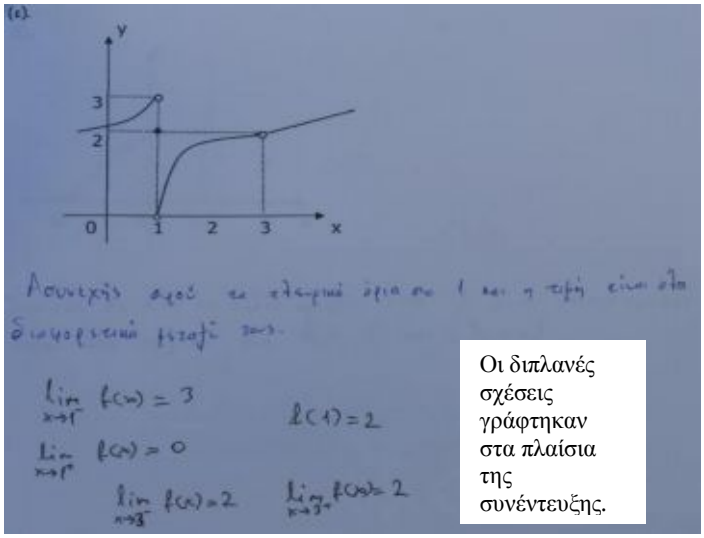
Ερ - Ωραία. Εδώ λες ότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής. Η δικαιολόγησή σου είναι πλήρης και δεν έχω να ρωτήσω κάτι.



Ερ - Και εδώ δεν έχω κάτι να ρωτήσω.

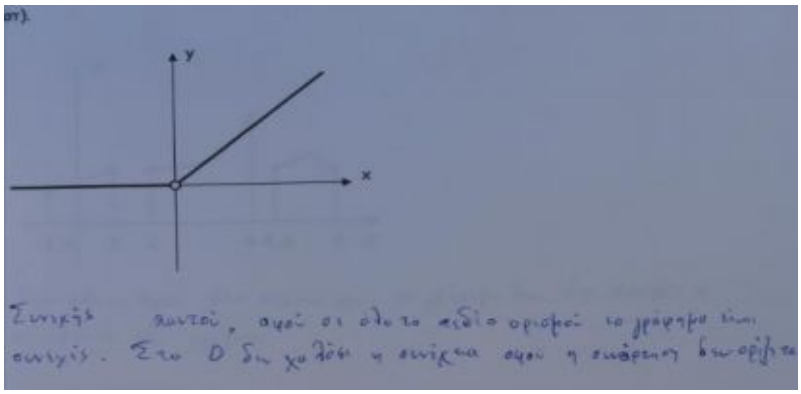


Ερ - Εδώ τώρα λες ότι η συνάρτηση στο 5 δεν ορίζεται άρα είναι συνεχής.
Υπάρχει κάτι σε αυτήν ή στις προηγούμενες που θα ήθελες να αλλάξεις ή να σχολιάσεις;
Γ – Όχι, τίποτα.

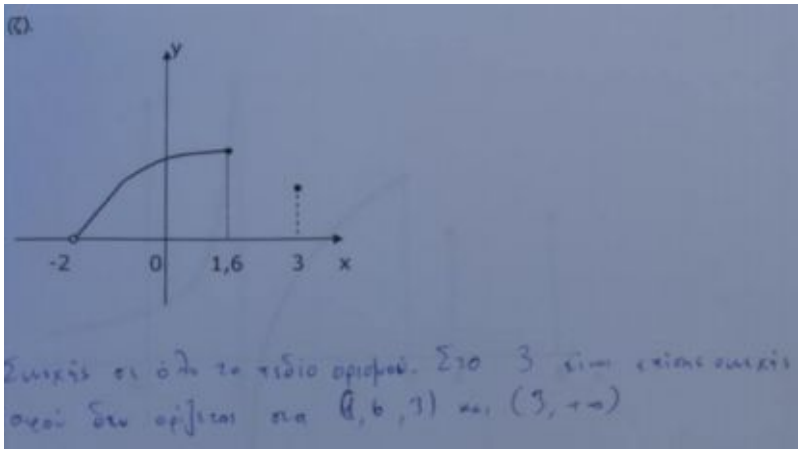


Οι διπλανές σχέσεις γράφτηκαν στα πλαίσια της συνέντευξης.

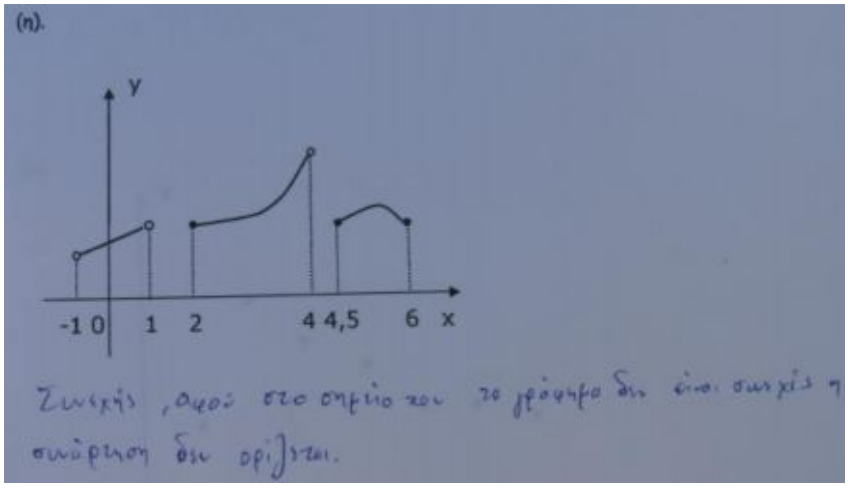
Ερ - Ωραία. Στην (ε) τώρα λες (διαβάζω την απάντησή του). Μπορείς να μου βρεις τα όρια στο 1;
Γ – …(γράφει τις διπλανές σχέσεις)…
Ερ – Ωραία. Στο 3;
Γ – …(γράφει τις διπλανές σχέσεις)…
Ερ – Ωραία. Νομίζεις ότι στην απάντησή σου θα πρέπει να προσθέσεις ότι εκτός από το 1 έχει πρόβλημα και στο 3;
Γ – Όχι, δεν είναι στο πεδίο ορισμού το 3.



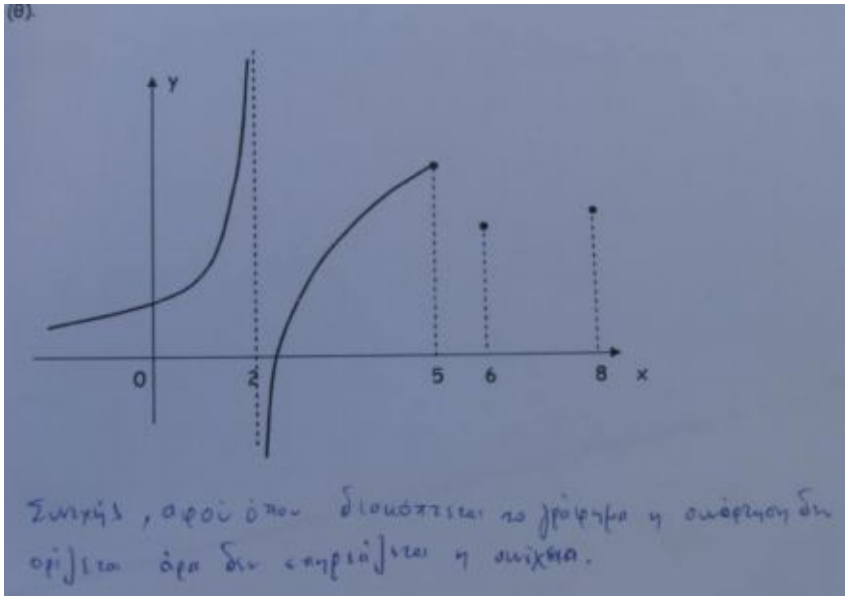
Ερ – Μάλιστα. Στην (στ) τώρα λες …(διαβάζω την απάντησή του)…Ωραία.



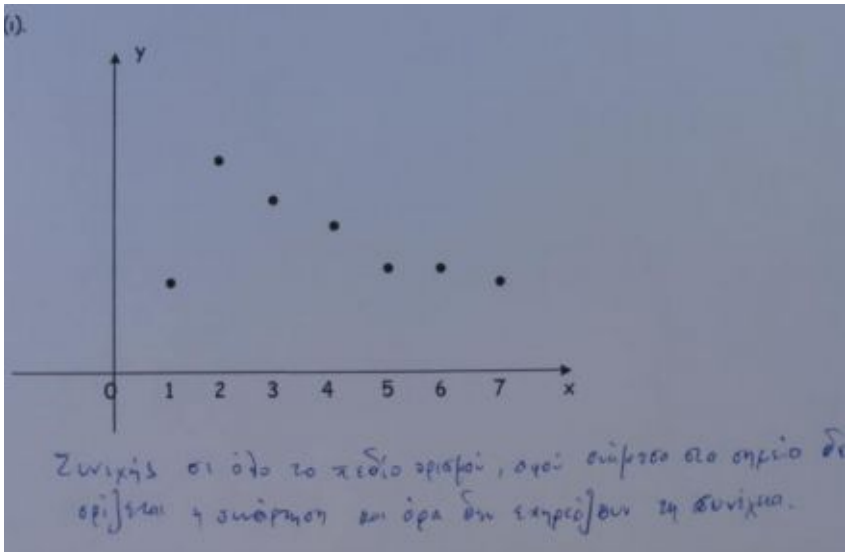
Ερ - Ωραία. Στην (ζ) τώρα λες …(διαβάζω την απάντησή του)....
Τι σημείο είναι τα 3;
Πώς το λέμε;
Γ – Μεμονωμένο νομίζω;
Ερ – Μάλιστα.



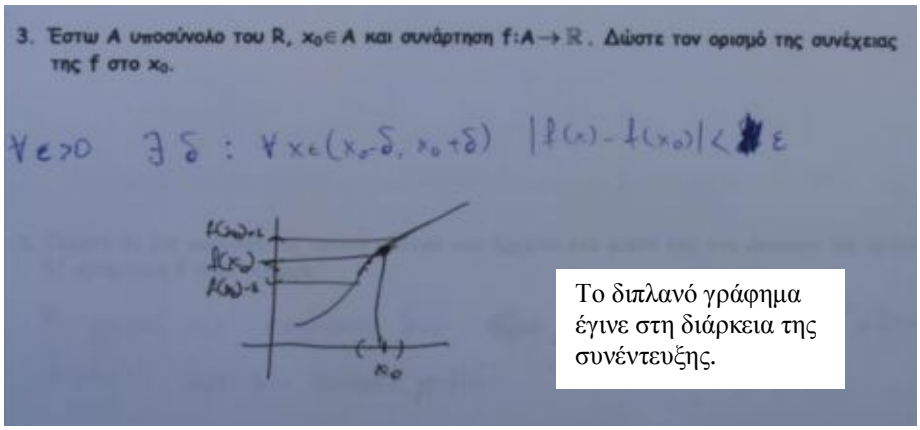
Ερ – Ωραία, Στην (η) τώρα λες …(διαβάζω την απάντησή του).... Ωραία



Ερ – Εδώ τώρα στην (θ) λες …(διαβάζω την απάντησή του).... Ούτε εδώ θέλω να ρωτήσω κάτι, η δικαιολόγησή σου είναι πλήρης.



Ερ – και στην (ι) λες …(διαβάζω την απάντησή του).... Μάλιστα.



Το διπλανό γράφημα έγινε στη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ - Να γυρίσω τώρα στον ορισμό. Πως θα εξηγούσε στον ορισμό; Ας υποθέσουμε ότι έχεις έναν καλό μαθητή της Γ΄ Λυκείου και βλέπει τον ορισμό στο σχολικό βιβλίο. Σε ρωτάει λοιπόν να του τον εξηγήσεις σε απλά ελληνικά! Τι θα του έλεγες; Κατά αρχήν, μήπως θα άλλαζες κάτι στον ορισμό σου;

Γ – Όχι, νομίζω ότι είναι σωστός.

Ερ – Ωραία, Τώρα αν έπρεπε να τον εξηγήσεις πώς θα τον εξηγούσες; Με ένα απλό γράφημα.

Γ - …(σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω)…ξεκινάω με ένα ε τυχαίο και έχω μια περιοχή εδώ γύρω από το $f(x_0)$ πλάτους 2ε και άρα αν πάρω οποιοδήποτε x μέσα σε μια περιοχή του x_0 που έχει πλάτος 2δ τότε αυτό το x θα πέφτει μέσα στην αρχική περιοχή του $f(x_0)$.

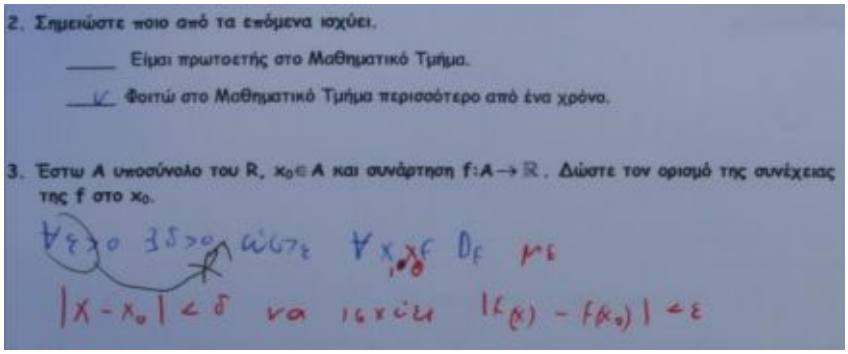
Ερ - Από ποια περιοχή θα ξεκινήσεις; Από την πάνω ή την κάτω;

Γ - Από την πάνω. Γιατί το δ εξαρτάται από το ε.

Ερ - Ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ.

8η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Περικλής’, Φοιτά στο μαθηματικό τμήμα για περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

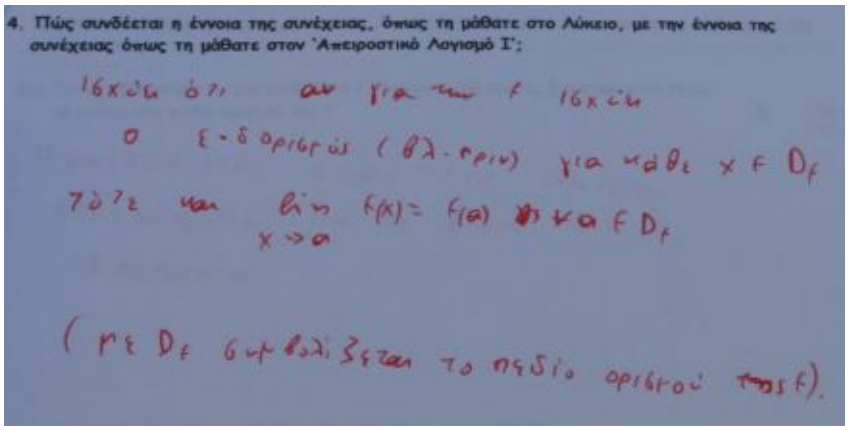
__✓__ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in D_f$ με

$|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ερ - Ωραία. Στον ορισμό θα γυρίσουμε πάλι στο τέλος, οπότε τώρα δεν θα τον σχολιάσω.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον Απειροστικό Λογισμό Ι;

ισχύει ότι αν για την f ισχύει

ο ε-δ ορισμός (βλ. πριν) για κάθε $x \in D_f$

τότε και $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ για $a \in D_f$

(με D_f συμβολίζεται το πεδίο ορισμού της f).

Ερ – Εδώ τώρα λες … (διαβάζω την απάντησή του)… Πιστεύεις ότι είναι ισοδύναμοι οι ορισμοί του Λυκείου και του Πανεπιστημίου;

Π - Πιστεύω ότι ο ορισμός του Απειροστικού είναι πιο ισχυρός, πιο αφηρημένος…

Ερ - …γιατί;…

Π - Μπορεί να λειτουργήσει και σε δύσκολες περιπτώσεις για παράδειγμα όταν μια συνάρτηση έχει παράξενο τύπο που ορίζεται σε κάποια σημεία, σε κάποιο σημείο δεν μπορούμε να δουλέψουμε με τα όρια, αλλά δουλεύουμε με τον ε - δ ορισμό, συναρτήσεις μεγάλες, παράξενες, που έχουν δυσκολία…

Ερ – μάλιστα, υπάρχει κάποια ειδική κατηγορία συναρτήσεων που σου έκανε εντύπωση ότι δεν τις εξέταζες στο Λύκειο αλλά τώρα στο Πανεπιστήμιο ασχολήθηκες με τη συνέχειά τους;

Π - Είναι, θυμάμαι για παράδειγμα συναρτήσεις που έμπλεκαν πολυωνυμικές με τριγωνομετρικές όπως για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

Ερ – …ποια είπες, ποια;…

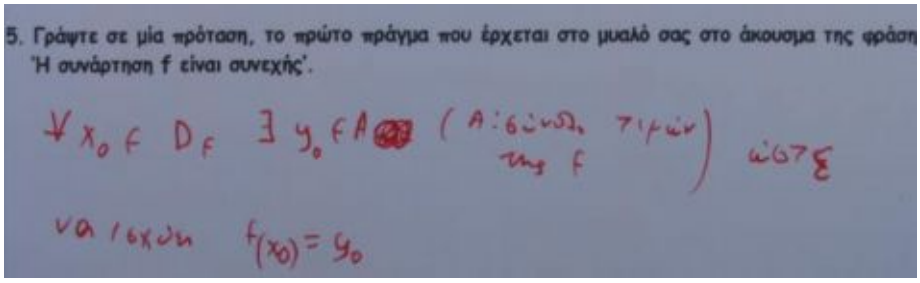
Π – …η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

Ερ – μμμ!

Π - Αυτή ας πούμε είναι συνεχής αλλά όχι παντού, στο 0 ας πούμε που δεν ορίζεται, νομίζω.

Ερ – Μάλιστα. Οπότε τέτοιου είδους συναρτήσεις δεν μπορούσες να τις αντιμετωπίσεις …

Π - … Τέτοιου είδους συναντήσεις δεν τις είχαμε κάνει γιατί τη θεωρούσαμε… θεωρείται πολύ τραβηγμένη…


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

$\forall x_0 \in D_f \ \exists y_0 \in A$ (Α: σύνολο τιμών της f) ώστε

να ισχύει $f(x_0) = y_0$

Ερ - Μάλιστα. Αυτή την ερώτηση τώρα είναι που ήθελα να τη δούμε. Ήθελα να μου εξηγήσεις λίγο αυτό που έχεις γράψει εδώ.

Π - …Ναι, και καλά το έχω δώσει ως ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο. Ότι για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, ένα σημείο x_0, μπορώ να βρω ένα σημείο y_0 του συνόλου τιμών, ώστε όλα αυτά τα σημεία του πεδίου ορισμού, το $f(x_0)$ δηλαδή να συμπίπτει με το y_0, να ισούται με τα σημεία του πεδίου τιμών της.

Ερ - Είναι αυτός ο ορισμός της Γ΄ Λυκείου;

Π - Όχι, εκεί δίνει άλλο ορισμό, απλά αυτός περιγράφει…αυτός δεν μου λέει αν υπάρχουν όλα τα $f(x_0)$ όλα τα y_0, ή αν υπάρχουν δε μου λέει ότι συμπίπτουν όλα κιόλας, ο σωστός ποιος είναι, ότι … μισό λεπτό, λοιπόν, αυτό τον ορισμό τον έδωσα επειδή μου λέει ότι η f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής παντού όπου ορίζεται. Στο Λύκειο είχαμε ορίσει μια συνάρτηση συνεχής με το όριο που είχαμε πει, η συνεχής συναρτήσεις σε ένα σημείο x_0 είναι συνεχής στο σημείο αυτό, αν το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ισούται με το $f(x_0)$.

Ερ - …Α! μάλιστα…

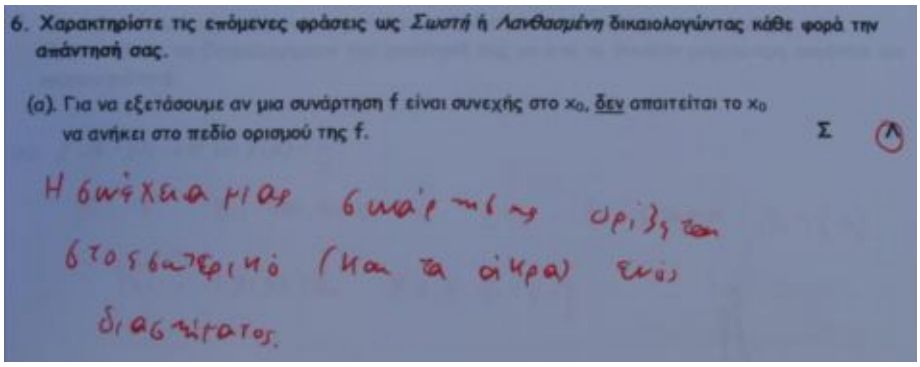
Π - …εδώ όμως το έδωσα έτσι γιατί δεν μπορούσα να πάρω το όριο σε όλο το πεδίο στο οποίο ορίζεται, έπρεπε να βρω καθένα σημείο του πεδίου ορισμού.

Ερ - Μάλιστα. Ακούγοντας τώρα τη φράση 'η συνάρτηση είναι συνεχής' τι σου έρχεται στο μυαλό;

Π - Μπορώ να πω, βλέπω μια καμπύλη, μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση δεν έχει κενά, χάσματα, ούτε άλματα ούτε κοψίματα. Που ορίζεται σε όλο το διάστημα στο οποίο μπορούμε να τη ορίζουμε. Δεν έχει κενά.

Ερ - …Έχει γράφημα εννοείς…

Π - …συνεχόμενο, ναι.

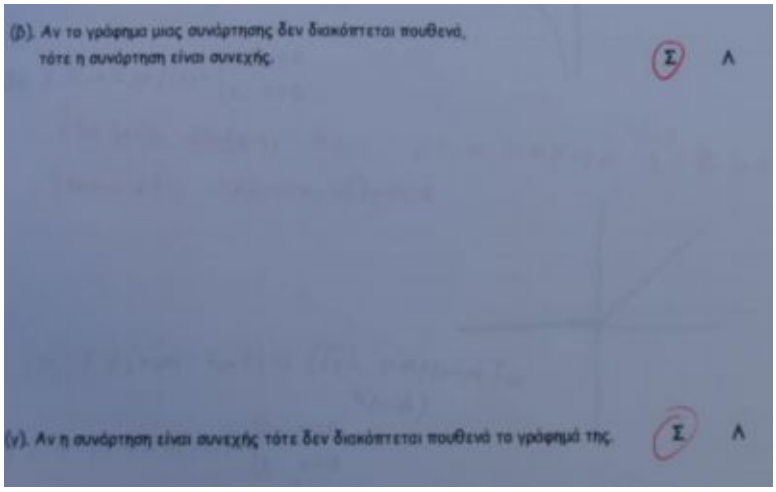

6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ

Η συνέχεια μιας συνάρτησης στο διάστημα (και τα άκρα) είναι διαστήματος.

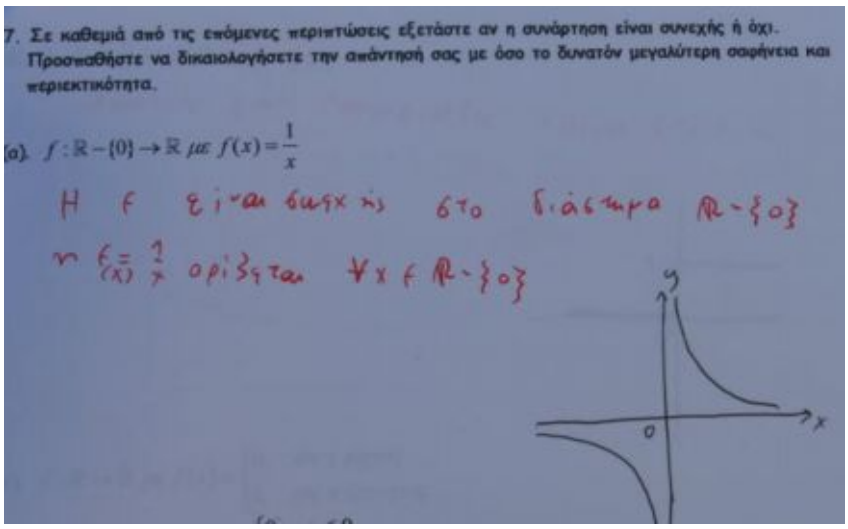
Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Εδώ τώρα λες ότι είναι Λάθος. Γιατί;

Π - Μα πάντα εξετάζουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής εκεί που ορίζεται. Δηλαδή σε x_0 τα οποία παίρνει, στα οποία μπορούμε να την υπολογίζουμε. Το x_0 πρέπει να ανήκει στον πεδίο ορισμού της γιατί αλλιώς πώς θα μιλάμε για συνέχεια στο x_0.


(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

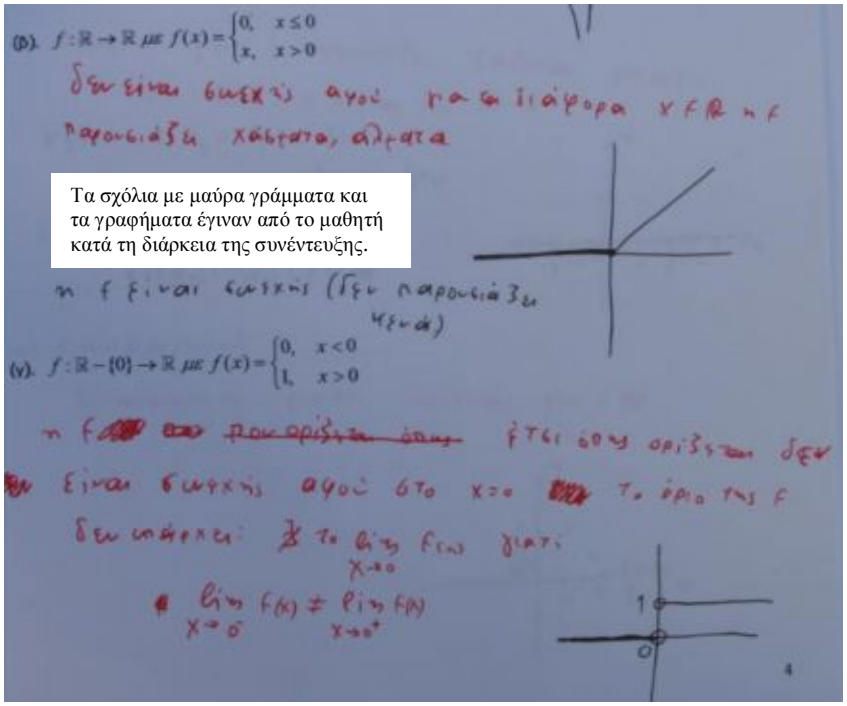
Ερ - Ωραία. Να ρωτήσω τώρα γι' αυτά τα δύο. Τα έχεις βάλει και τα δύο σωστά. Άρα θεωρείς ότι ισχύει η πρόταση με διπλή συνεπαγωγή; Δηλαδή το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι συνεχής;
Π - …Πάντα για ένα κλειστό ή ανοιχτό διάστημα στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση.
Ερ - Σαν φράση λέω εγώ. Το ακούς σαν μια ολοκληρωμένη φράση. 'Το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι συνεχής'. Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχεις κάνει κάποιο λάθος. Απλά ρωτάω.
Π - …απλά προσπαθώ να σκεφτώ αντιπαράδειγμα στο οποίο έχουμε μια συνεχή καμπύλη αλλά η συνάρτηση να μην είναι συνεχής όπου φαίνεται, όπου δηλαδή η καμπύλη είναι συνεχής. Νομίζω όμως… γιατί το έβαλα σωστά… γιατί βασικά, νομίζω, αυτές οι προτάσεις απευθύνονται στην εποπτεία μας. Βλέπουμε ότι μια καμπύλη που δεν έχει χάσματα, τρύπες ή κενά ή άλματα, είναι γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης. Και μια συνεχής συνάρτηση αποκλειστικά αναπαρίσταται από συνεχή καμπύλη.
Ερ - Μπορείς να σκεφτείς συνεχή συνάρτηση που να μην έχει συνεκτικό γράφημα, συνεχή καμπύλη όπως τη λες;
Π – Όχι.
Ερ – Για αυτό υποθέτω και έβαλες το σωστό εδώ έτσι;
Π – Ναι.


7. Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι. Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σαφήνεια και περιεκτικότητα.

(α). $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\mathbb{R}-\{0\}$ γιατί $f(x)=\frac{1}{x}$ ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$

Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στο 7(α). Τι είναι αυτή με βάση αυτό που έχεις γράψει;
Π – Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$
Ερ - Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Π - …(κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα και σχολιάζει)…
και φυσικά στο 0 δεν ορίζεται. Την ορίζουμε δηλαδή στο $\mathbb{R}-\{0\}$.



Ερ – Ωραία. Μάλιστα. Εδώ τώρα στην 7(β) λες … (διαβάζω την απάντηση του) … Θέλεις να μου κάνεις και σε αυτήν τη γραφική της παράσταση;

Π - …(κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα και το εξηγεί σωστά)…Και γιατί είπαμε όμως ασυνεχής;

Βλακεία είπαμε.

Ερ – Θα το άλλαζες δηλαδή;

Π - Θα το άλλαζα. Και θα έλεγα ότι αφού ορίζεται στο 0, την τιμή 0 την παίρνει για x αρνητικά ή 0.

Ερ - Πώς το σκέφτηκες εκείνη την ώρα;

Π - Ίσως να μην είδα το '=’. Δηλαδή ότι γίνεται και για x=0… υποθέτω.

Ερ - Μήπως το είδες ότι εδώ στο πρώτο κλάδο είναι 0 ενώ μετά στον άλλο κλάδο είναι κάποιο x;

Π - Ναι, μπορεί κι αυτό. Δεν θυμάμαι τώρα πως το είχα σκεφτεί.

Ερ - Ωραία. Δεν υπάρχει πρόβλημα. Άρα πιστεύεις ότι αυτό είναι πιο σωστό;

Π – Ναι, ναι. Είναι συνεχής.

Ερ - Ωραία. Αν θες γράψτο κάτω δίπλα στο γράφημα που έκανες.

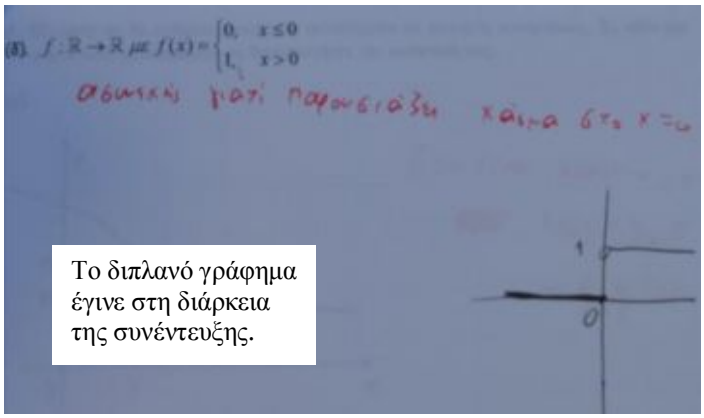
Π - …(γράφει)…

Ερ – Ωραία, στη (γ) τώρα…(διαβάζω την απάντησή του)…Θέλεις να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική της παράσταση;

Π - …(την κάνει και την εξηγεί σωστά)…Και αν πάρουμε το όρια εδώ γύρω από το 0, τα όρια δεξιά και αριστερά από το 0 θα δούμε ότι έχει χάσματα, απέχει 1 το οποίο είναι πολύ πιο μεγάλο από ένα πολύ μικρό αριθμό, οπότε δεν είναι συνεχής.

Ερ - Αν μάλιστα. Υποθέτω ότι με τον ε – δ ορισμό σκέφτηκες και απάντησες έτσι …

Π – …ναι, ναι, αρχικά ναι.

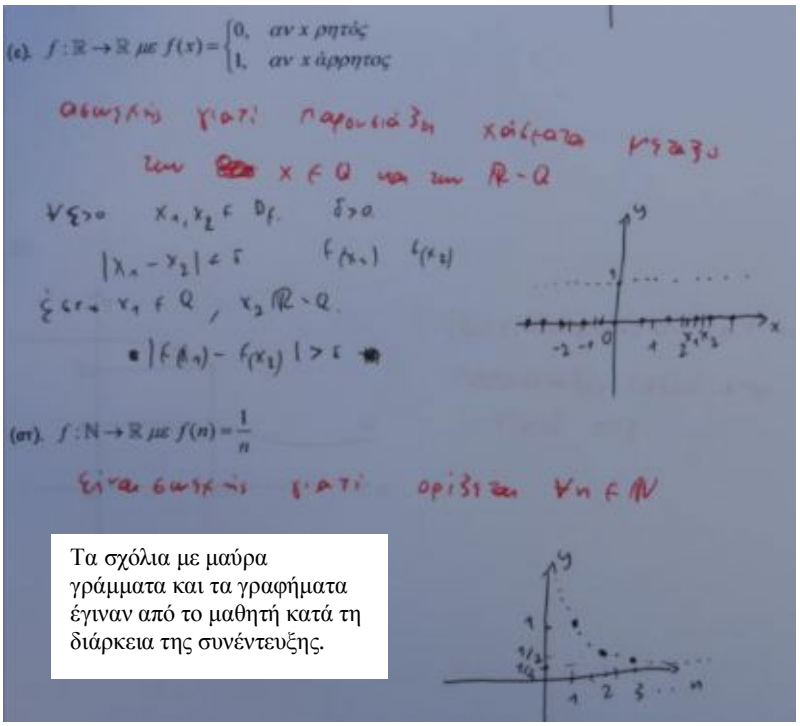


Ερ - Γενικά, πιστεύεις ότι με ένα γράφημα είναι πιο εύκολο η πιο δύσκολο να δεις στη συνέχεια;

Π - Είναι πιο εύκολο, αρκεί να μπορούμε να το σχεδιάσουμε, να μπορούμε δηλαδή να το σχεδιάσουμε.

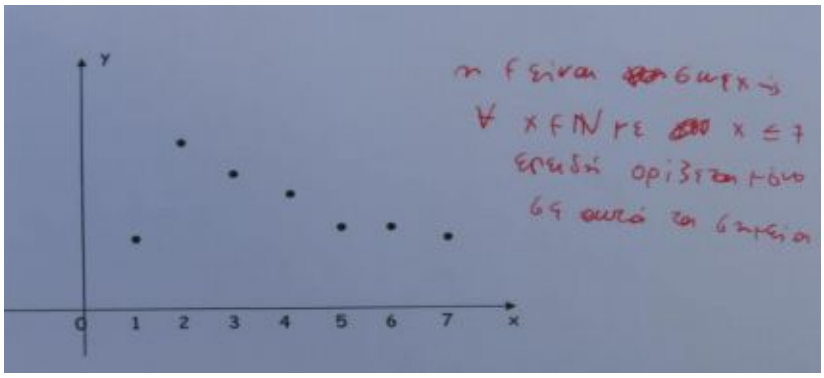
Ερ - Μάλιστα. Αυτή τώρα, η (δ) τι διαφορά έχει από την προηγούμενη;

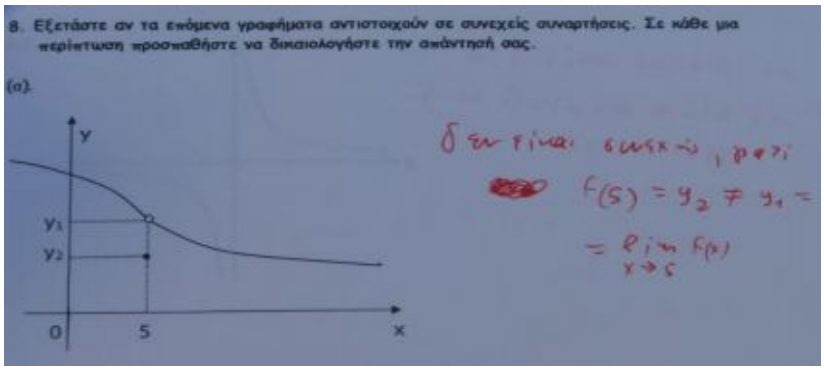
Π - Εδώ τώρα στο ένα διάστημα με αφήνει να πάρω το 0 …
Ερ - …εννοείς είναι κλειστό στο 0; …
Π - …Ναι, ναι. Η συνάρτηση ορίζεται στο 0.
Ερ - Πιστεύεις ότι αυτό κάνει κάποια διαφορά; Αλλάζει κάτι δηλαδή;
Π - Ως προς τη συνέχεια δεν έχει διαφορά. Διότι παρόλο που παίρνει την τιμή 0, μετά πηδάει στα x θετικά πάει στην τιμή 1 που πάλι είναι μεγάλη η διαφορά, πολύ μεγαλύτερη από ένα μικρό αριθμό, είναι 1 που είναι πολύ μεγαλύτερη από ένα μικρό αριθμό, άρα έχει πάλι χάσμα. Οπότε δεν είναι συνεχής. Οπότε και πάλι με τον ορισμό του Λυκείου με τα όρια δεν είναι ίδια.
Ερ - Πολύ ωραία, κατάλαβα. Αν έκανες και σε αυτήν τη γραφική της παράσταση;
Π - …(κάνει το γράφημα που φαίνεται προηγουμένως και το εξηγεί σωστά)…

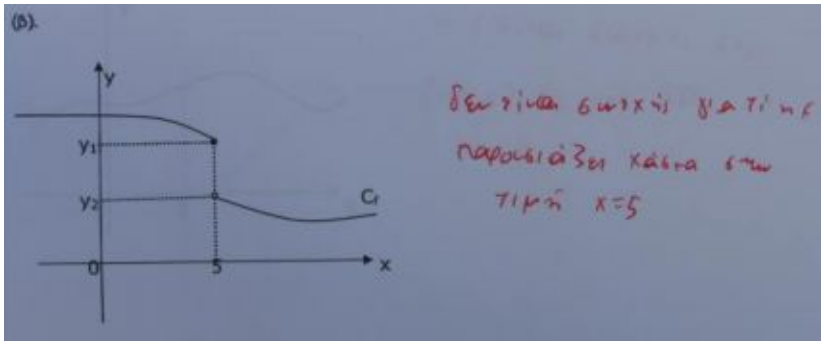


Ερ – μάλιστα. Ωραία να δούμε τώρα λίγο την (ε). Μπορείς να μου την εξηγήσεις λίγο;
Π - …(την διαβάζει)…
Οι ρητοί και οι άρρητοι είναι άπειρα σημεία μέσα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Άρα θα έχω κάτι τέτοιο (κάνει το διπλανό γράφημα και το εξηγεί). Για όλους τους x που είναι ρητοί θα έχω άπειρες κουκίδες επάνω στον άξονα των x΄x. Μετά, για όλους τους υπόλοιπους αριθμούς που είναι άρρητοι θα έχω άπειρες κουκίδες στην ευθεία y=1. Αν πάρω το όριο της f για οποιοδήποτε σημείο x μέσα στο πεδίο ορισμού θα δω ότι αυτόματα έχει χάσματα γιατί όταν θα κινείται το x μέσα σε ένα πολύ μικρό διάστημα…όχι … καλύτερα αν πάρουμε τον ε-δ ορισμό θα το δούμε καλύτερα. Παίρνω ένα ε>0, και δυο σημεία x_1 και x_2 μέσα στο πεδίο ορισμού, και ένα άλλο δ>0 και πολύ μικρό. Τους επιλέγω έτσι ώστε $|x_1 - x_2| < \delta$, να είναι πολύ κοντά αυτοί οι αριθμοί, αλλά τώρα οι $f(x_1)$ και οι $f(x_2)$ μπορεί να είναι και δυο ρητοί ή και δυο άρρητοι, αλλά δεν μπορώ να ξέρω, ή μπορεί να είναι ο ένας ρητός και ο άλλος άρρητος, γι' αυτό πάντα θα έχω χάσματα εδώ μέσα, γι' αυτό οι $f(x_1)$ και οι $f(x_2)$ θα απέχουν πολύ. Έστω ας πούμε ότι $x_1 \in \mathbb{Q}$ και $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε θα έχω ότι $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$ κατά συνέπεια είναι ασυνεχής. Αλλά αν εξετάσουμε την κάθε μια ξεχωριστά, το κάθε κλάδο μόνο του, τότε είναι συνεχής.
Ερ - Μάλιστα. Κατάλαβα. Ας δούμε τώρα την επομένη. Λες ότι είναι συνεχής. Πώς θα έκανες στη γραφική της παράσταση;
Π - …(κάνει τη γραφική της παράσταση και την εξηγεί)…

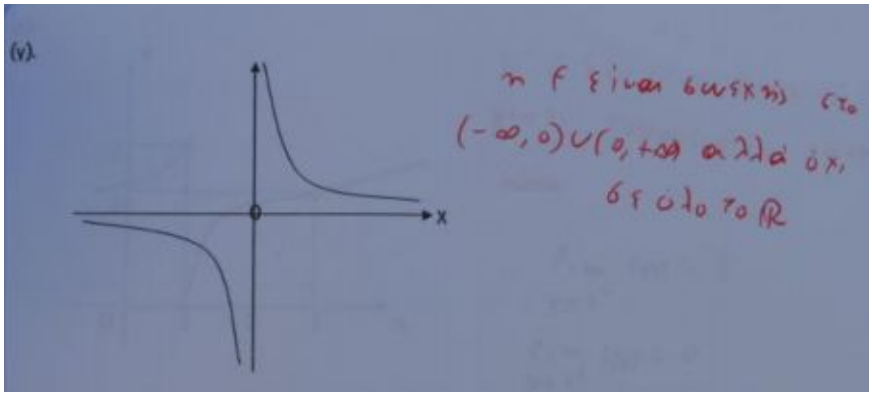
Ερ - Είναι συνεχής;
Π - Ναι εκεί που την ορίζουμε είναι συνεχής, στο πεδίο ορισμού της.
Ερ - Δεν μας πειράζει που δεν έχεις συνεχόμενη γραμμή;
Π - Όχι.
Ερ - Γιατί; … Δεν σημαίνει ότι κάνεις λάθος, απλά ρωτάω.
Π - …ναι, διότι αν πάρουμε τον ορισμό του ορίου, δεν μας λέει ότι πρέπει να βλέπουμε πολλά σημεία στη σειρά για να αποτελούν καμπύλη, μπορώ να πω ότι έτσι όπως είναι τα σημεία ακολουθούν την καμπύλη της $f(x)=\frac{1}{x}$, εδώ, όπου τα πάρω ακολουθούν την καμπύλη της $f(x)=\frac{1}{x}$, μπορώ να πω, ότι αν πάρω τον ορισμό του ορίου…μισό λεπτό… Δηλαδή, αν μπορούσα να πάρω πολλά ν κοντά στο 1, τότε τα y θα έπεφταν κοντά στο f(ν). Έτσι αν έπαιρνα πολλά ν γύρω από το 2 θα έβλεπα ότι τα f(ν) θα έπεφταν και αυτά γύρω από το ½. Αλλά δεν μπορώ να πάρω πολλά ν, για οι ν είναι μόνο φυσικοί.



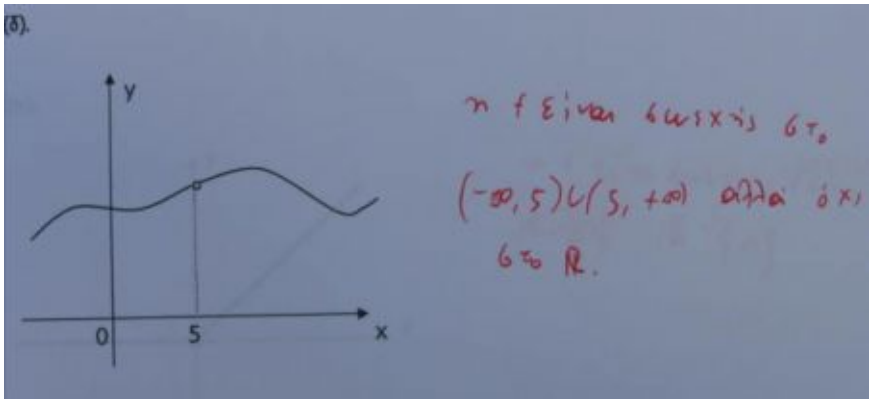




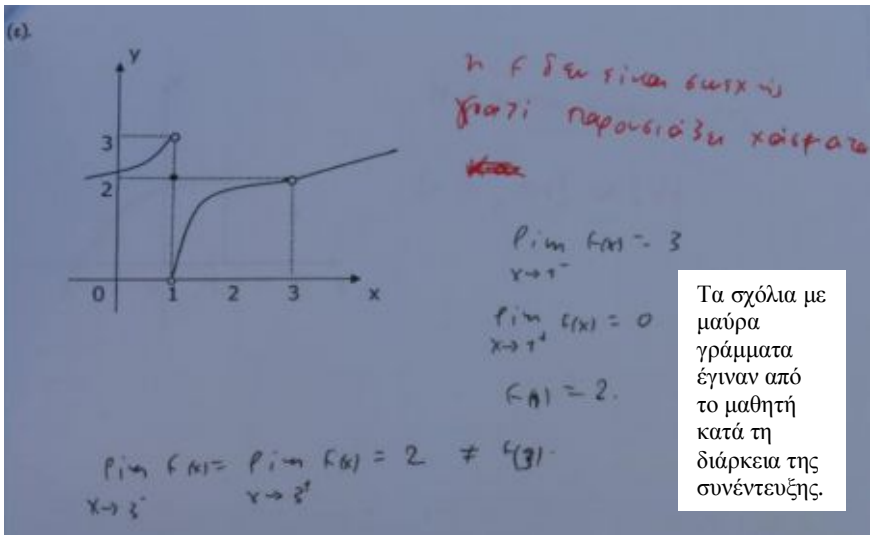
Ερ - Μάλιστα. Κατάλαβα. Τότε θα πάω σε αυτήν εδώ την τελευταία. Λες ότι αυτή είναι συνεχής επειδή ορίζεται μόνο σε αυτά τα σημεία. Το ότι αυτά δεν ακολουθούν την πορεία κάποιας 'καλής' καμπύλης, σε χαλάει αυτό;
Π – όχι, απλά Βλέπω ότι ορίζεται σε αυτά τα σημεία και είμαι εντάξει …
Ερ – …το $\forall x \in \mathbb{N}$ με $x \le 7$ το λες επειδή δεν ξέρεις τι γίνεται μετά το 7; …
Π - … ναι, ακριβώς ναι.
Ερ – εδώ τώρα λες ότι δεν είναι συνεχής διότι…
Π - … το $f(5)$ που είναι το y_2 είναι διαφορετικό από το $\lim_{x\to 5} f(x)$ που είναι το y_1.
Ερ - …ενώ εδώ λες ότι δεν είναι συνεχής γιατί παρουσιάζει χάσμα στην τιμή x=5…



Π - … και πάλι εδώ αν πάρω τα όρια, θα δω τι είναι διαφορετικά.
Ερ – Κατάλαβα. Λες στη (γ)… (διαβάζω την απάντησή του)…
Π - …ναι γιατί δεν μπορεί να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

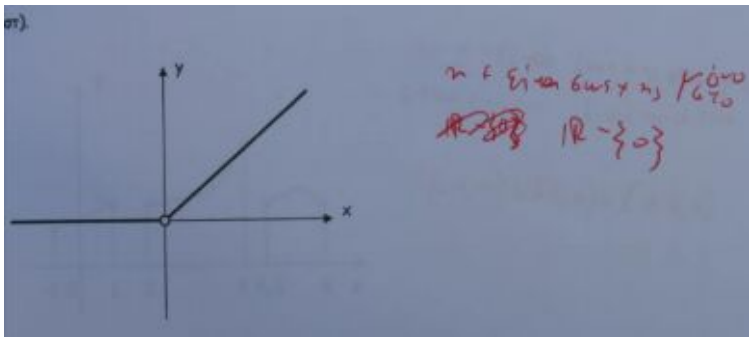


Ερ – Κατάλαβα. Και εδώ λες ότι … (διαβάζω την απάντησή του)… Πάλι για τον ίδιο λόγο ε;
Π - Ναι. Στο 5 δεν ορίζεται.



Τα σχόλια με μαύρα γράμματα έγιναν από το μαθητή κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

Ερ - Μάλιστα. Και εδώ τώρα στην (ε) λες ότι …(διαβάζω την απάντησή του)…Θα ήθελα να σταθούμε λίγο σε αυτήν. Τι σε χαλάει σε αυτήν;
Π - Αν πάρω τον ορισμό του ορίου, το όριο τότε θα έχω τα εξής …
Ερ - …σε ποιο σημείο;
Π – στο 1 αρχικά.
Ερ - Ωραία. Βρες μου τα όρια στο 1.
Π - …(γράφει ό,τι φαίνεται δίπλα και ταυτόχρονα εξηγεί)…Άρα τα όρια βλέπω ότι όντως απέχουν, και επίσης η τιμή της συνάρτησης στο 1 είναι και αυτή διαφορετική, άρα δεν είναι συνεχής, δεν υπακούει στο …
Ερ - …στο 1 δεν είναι συνεχής έτσι;…
Π - …ναι ακριβώς.
Ερ - Ωραία. Στο x=3 τι γίνεται;
Π - Δεν είναι συνεχής αλλά υπάρχει το όριο.
Ερ – Πόσο είναι; Θέλεις να το βρεις;

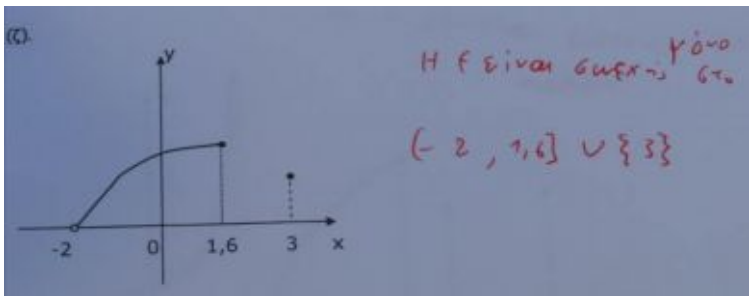


Π - …(γράφει ό,τι φαίνεται παραπάνω και ταυτόχρονα εξηγεί)…και άρα δεν είναι συνεχής.

Ερ – Ωραία, η (στ) τώρα λες ότι είναι συνεχής μόνο στο $\mathbb{R}-\{0\}$. *Διότι…*

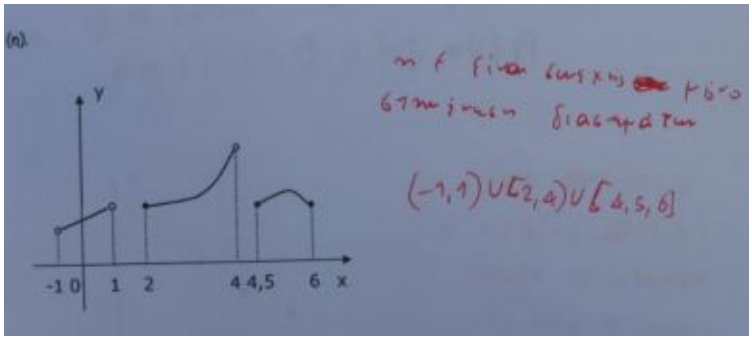
Π - …δεν ορίζεται εκεί.

Ερ – Ωραία. Εδώ επίσης στη (ζ) λες (διαβάζω την απάντησή του)…Σε πειράζει που δεν ενώνονται αυτά;



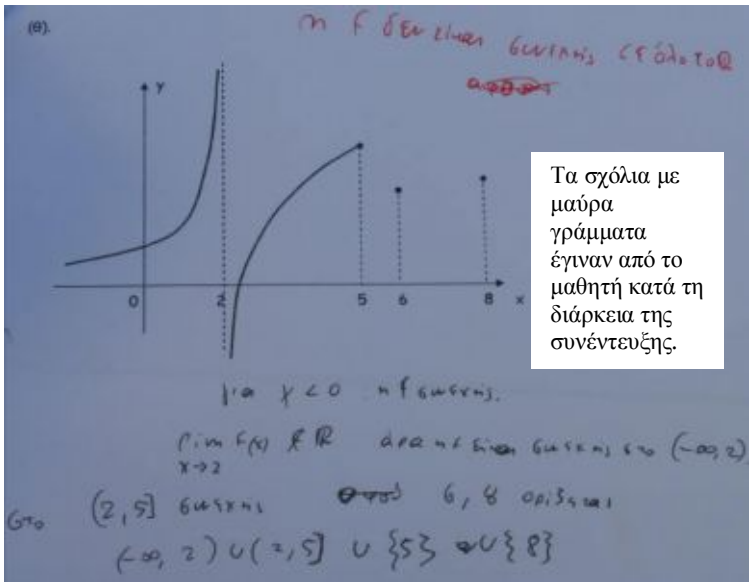
Π - Όχι, γιατί αν ενώνονταν αυτά τότε θα μπορούσε να συμπεριλάβω και το διάστημα $(1.6,3)$ Αλλά εδώ αφού δεν το συμπεριλαμβάνω λέω ότι ορίζεται στο διάστημα αυτό (δείχνει το $(-2,\quad 1.6])$ και στο σημείο εκείνο (δείχνει το 3). Εδώ μόνο βλέπω ότι ορίζεται.

Ερ - Ωραία, και εδώ στην (η) βλέπω ότι το έχεις δικαιολογήσει με τον ίδιο …



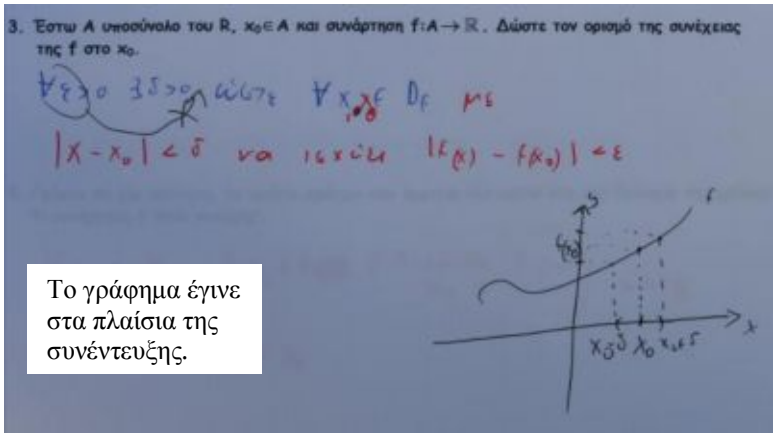
Π - …ναι, με τον ίδιο τρόπο όπως πριν.

Ερ – Μάλιστα. Εδώ τώρα στη (θ) λες ότι δεν είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. *Πού είναι συνεχής πιστεύεις;*



Π – Κατ' αρχήν για x αρνητικά είναι συνεχής, γιατί βλέπω μια συνεχή καμπύλη άρα σίγουρα είναι συνεχής … Βλέπω επίσης ότι το όριο γύρω από το 2 δεν υπάρχει… Άρα η συνάρτηση f αρχικά είναι συνεχής στο $(-\infty,2)$ …Βλέπω επίσης ότι είναι συνεχής στο διάστημα $(2,5]$, στο 2 δεν παίρνει την τιμή ενώ στο 5 παίρνει την τιμή, άρα είναι συνεχής στο $(2,5]$ … και μετά απλά ορίζεται, δηλαδή υπάρχουν οι τιμές της f στα σημεία 6 και 8, και αφού υπάρχουν

τα $f(6)$, $f(8)$ άρα η f θα είναι συνεχής και στο 6 και στο 8. Άρα η f ορίζεται, υπάρχει, είναι συνεχής στο $(-\infty,2)\cup(2,5]\cup\{6\}\cup\{8\}$.



Ερ - Πολύ ωραία. Κατάλαβα. Ας γυρίσουμε τώρα λίγο στον ορισμό. Μου είπες ότι ο αδελφός σου πάει στη Γ΄ Λυκείου. Ας υποθέσουμε ότι βλέπει τον ορισμό της συνέχειας και σε ρωτάει τι σημαίνει. Πώς θα του τον εξηγούσες;

Π - …ναι το έκανα …

Ερ - …ωραία, κάνε μου ένα απλό γράφημα και πες μου τι του είπες.

Π - Αν πάρεις μια οποιαδήποτε συνάρτηση, που είναι συνεχής αλλά δεν μπορείς να το αποδείξεις, και πάρεις δυο σημεία, όχι μισό λεπτό, ένα σημείο ας πούμε το x_0, το οποίο είναι ένα σημείο το οποίο ξέρουμε ότι ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, και πάρουμε ένα πολύ μικρό διάστημα γύρω από το x_0, και θα έχουμε το διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ Και του είχα πει κιόλας ότι παίρνουμε ένα δ και ένα ε πολύ μικρούς αριθμούς, πολλοί μικροί έτσι ώστε να μπορούμε να κινούμαστε πάνω κάτω στο σημείο που θέλουμε να εξετάσουμε τη συνέχεια. Έτσι, όπως κινούμαστε γύρω από το σημείο x_0 που εξετάζουμε, και απέχουμε δ από το σημείο πάω και βλέπω ότι στο x_0, η f παίρνει μια τιμή $f(x_0)$ η οποία όμως τιμή $f(x_0)$ δεν ξέρω αν ανήκει στο σύνολο τιμών της f. Θα βεβαιωθεί ότι ανήκει, αν δω κιόλας ότι τα προηγούμενα σημεία $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ είναι αναλόγως, είναι αντίστοιχα κοντά στο $f(x_0)$, δηλαδή τόσο κοντά αναλόγως όσο κοντά είναι και το $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Και βλέπουμε ότι τελικά τι μου λέει ο ορισμός, ότι όταν πάρεις σημεία κοντά στο x_0, δ κοντά στο x_0, και μετά δεις ότι οι αντίστοιχες τιμές της f είναι ε, απέχουν ε κοντά από την τιμή $f(x_0)$, όπου ε και δ έχουμε πει ότι είναι πολύ μικρά, τότε θα πεις ότι η f είναι μια συνεχής.

Ερ - Ωραία. Θα ξεκινήσεις από το ε η το δ; Ποιο τμήμα μεταφέρεις στο άλλο;

Π - Από το δ κανονικά. Γιατί του λέω ότι κάθε x το στέλνω στο $f(x)$. Ο ορισμός έχει στην αρχή το ε, αλλά αυτό του το είχα εξηγήσει, του είχα πει βάζουμε στον ορισμό πρώτο το ε λέγοντας ότι οσοδήποτε μικρό ε, δηλαδή για κάθε μικρό ε, παίρνω ένα δ, όσο μεγάλο η μικρό μου χρειαστεί, ώστε να ισχύουν όλα αυτά που λέμε για τη συνέχεια.

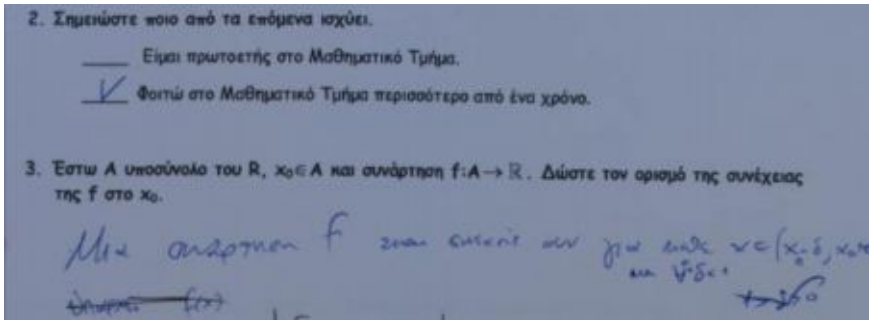
Ερ - Θα έπαιζε ρόλο αν ξεκίναγα λέγοντας 'για κάθε δ';

Π – Ναι. Δηλαδή, αν αρχικά έλεγα, αν δεν έλεγα το 'για κάθε ε' στην αρχή, τότε δεν θα μου έλεγε ότι αποκλειστικά απαιτώ πολύ μικρό ε. Βασικά, αυτό μας είχανε πει στο σχολείο, Ότι αν αυτό το βάλω μετά τότε ας έχει το 'για κάθε', δεν σημαίνει ότι είναι πάρα πολύ μικρό.

Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Πολύ ωραία, σε ευχαριστώ!

9η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Θρασύβουλος’,
φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

_V_ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Ερ - Προς το παρόν αφήνουμε τον ορισμό. Θα ξαναγυρίσουμε σε αυτόν στο τέλος.

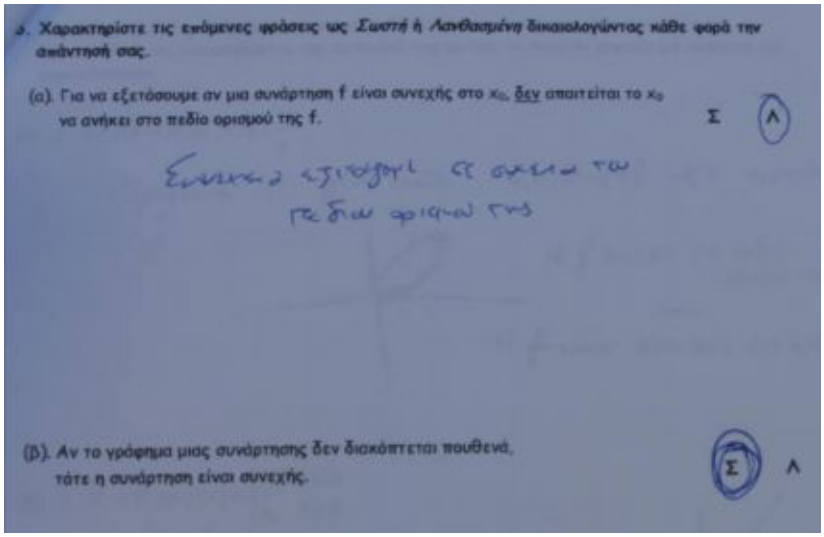
4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον Απειροστικό Λογισμό Γ;

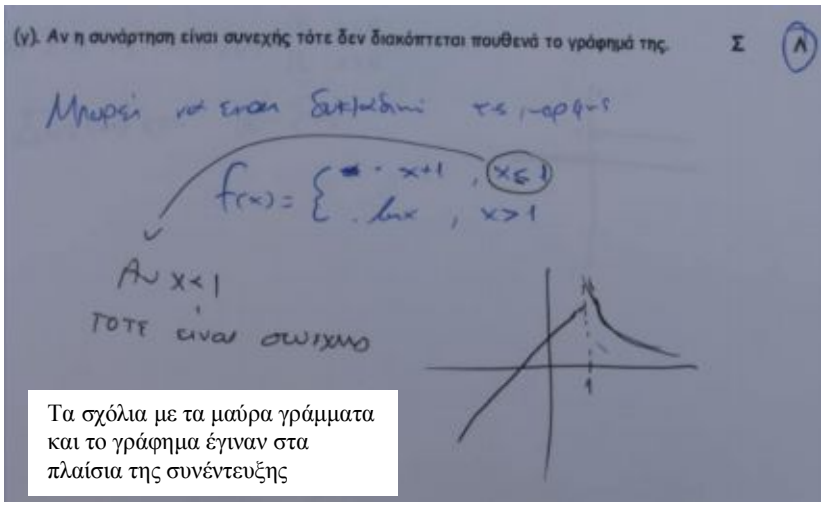
5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Ερ - Λοιπόν, μου άρεσε εδώ η απάντησή σου!
Βασικά τώρα που το ξαναβλέπεις τι θα απαντούσες; Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως την έμαθες στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως την έμαθες εδώ στο Πανεπιστήμιο;
Θ - Ναι, είναι αυτό που λέγαμε, το κενό μεταξύ …
Ερ - …δηλαδή αν έχεις ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου και σε ρώταγε τι παραπάνω έμαθες για τη συνέχεια στο Πανεπιστήμιο τι θα του έλεγες;
Θ - Πιστεύω ότι στο Λύκειο έχεις τη συνέχεια στο μυαλό σου πιο γραφικά, πιο παραστατικά, ενώ στον Απειροστικό έχει στο μυαλό σου την έννοια της περιοχής που είναι κοντά στο x_0, και πως απεικονίζεται μετά στις τιμές της f, κάπως έτσι, δεν είμαι σίγουρος, δεν ξέρω τώρα…
Ερ - Ωραία. Ακούγοντας λοιπόν τη φράση ‘συνεχής συνάρτηση’ στο μυαλό σου έρχεται μια συνεχόμενη γραμμή έτσι;

Θ – Ναι, από το Λύκειο.
Ερ - Γιατί προσθέτεις αυτό: ‘στο πεδίο ορισμού της’;
Θ – Ε, είναι αυτό που μετά στο Πανεπιστήμιο ξέρεις, ότι προσέχεις τον πεδίο ορισμού της, δηλαδή αυτή η συνάρτηση που είναι με τους φυσικούς, από το Ν στο Ν νομίζω,

που στην ουσία είναι όλο τελίτσες αλλά είναι συνεχής, νομίζω, στο πεδίο ορισμού της. Ε αυτή στο Λύκειο δεν την είχαμε δει καθόλου, εγώ τουλάχιστον.



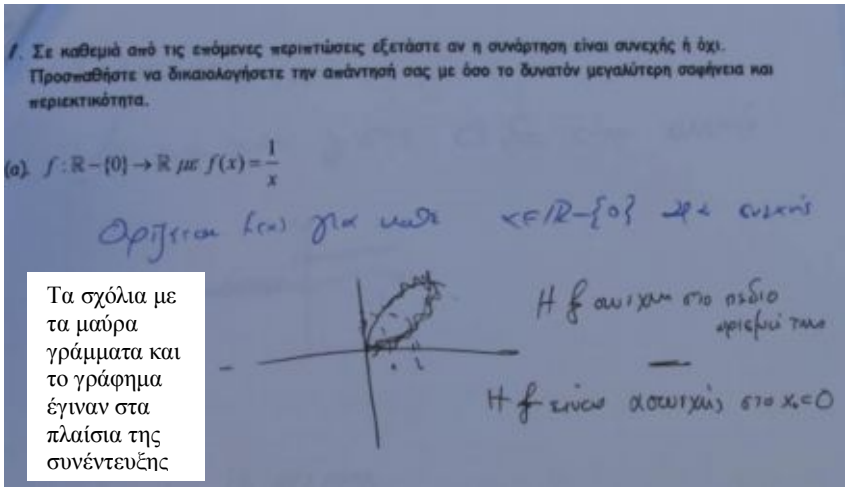


Τα σχόλια με τα μαύρα γράμματα και το γράφημα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

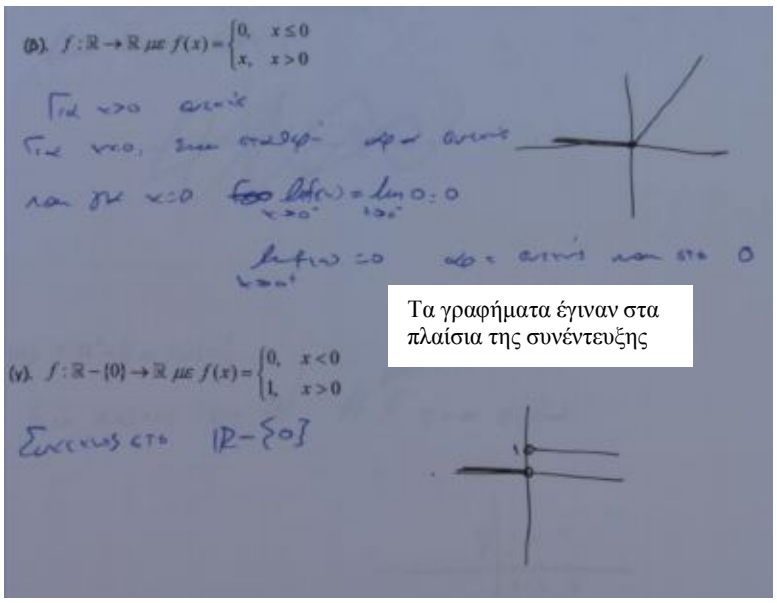
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στο (α) νομίζω ότι το δικαιολογείς πλήρως. Λες ότι συνέχεια εξετάζουμε μόνο σε σημείο του πεδίου ορισμού. Δεν έχω κάτι να ρωτήσω σε αυτό.
Στο (β) επίσης το θεωρείς σωστό. Αν το γράφημα δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής, έτσι;
Θ – Ναι, ναι

Ερ - Μου άρεσε εδώ η απάντησή σου, είναι ενδιαφέρουσα η απάντησή σου στο (γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της …
Θ - …Έβαλα ένα αντιπαράδειγμα...
Ερ - …ναι, ναι, πολύ ωραία. Μπορείς να μου κάνεις απλά τη γραφική παράσταση γι' αυτή τη συνάρτηση που έγραψες;
Θ - …(σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …Έτσι δεν πάει; …Κάπως έτσι πάει …
Ερ - Ωραία. Είναι συνεχής; …
Θ - …εδώ ναι, εδώ δεν είναι ...
Ερ - … για κάτσε, εξήγησέ το μου. Τι εννοείς;
Θ - … ναι γιατί δεν είχα βάλει το = , άρα…
Ερ - …δηλαδή τώρα είναι συνεχής;… .
Θ – … τώρα; Όχι …
Ερ - …άμα λείπει το 1;…
Θ - …είναι…
Ερ - …είναι συνεχής, ωραία...
Θ - …γιατί το 1 δεν είναι στο πεδίο ορισμού. Δηλαδή αυτή είναι συνεχής για x<1 και για x>1 αλλά για x=1 δεν είναι…
Ερ - …άρα…

Θ - …αλλά δεν ήταν μέσα έτσι όπως το είχα γράψει στην αρχή
Ερ - Ωραία. Και τώρα ισχυρίζεσαι ότι αυτή αν και είναι συνεχής, διακόπτεται το γράφημα της, έτσι; Σαν αντιπαράδειγμα, έτσι;
Θ – Ναι. Α! Άρα σωστά το είχα γράψει χωρίς το =. Τώρα, είναι συνεχής αλλά παρόλα αυτά διακόπτεται το γράφημά της.

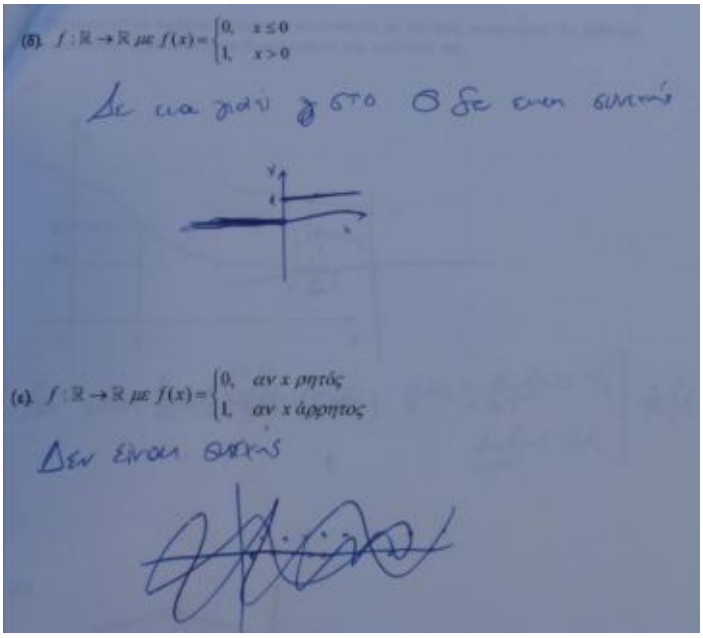


Ερ - Ωραία. Πάμε τώρα σε αυτή. Εδώ λες (διαβάζω την απάντηση του)… Θα μπορούσες και εδώ να μου κάνεις απλά τη γραφική της παράσταση;
Θ - …μμμ…η $\frac{1}{x}$… έτσι δεν είναι;… Α! όχι, αυτή είναι η x^2… για 1 έχω 1, για 2 έχω ½, για 3 έχω 1/3 … μμμ, δεν ξέρω, έτσι; Δεν ξέρω…
Ερ - Εντάξει. Μην παιδεύεσαι. Να ρωτήσω κάτι άλλο. Αν ήθελες να … τι πιστεύεις ότι είναι πιο σωστό να πει κανείς: ότι αυτή είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}-\{0\}$ *ή να πεις ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της;*
Θ - Συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Ερ - Γιατί; Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι πιο σωστό; Δηλαδή, αν γράψω τις δύο φράσεις: 'η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της' και γράψω και 'η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$*'. Ποια πιστεύεις ότι εκφράζει καλύτερα την απάντηση σε αυτό το γράφημα που βλέπεις δίπλα; Πιστεύεις ότι κάποια από τις δύο είναι πιο σωστή από την άλλη;*
Θ – Μήπως εδώ δεν είναι;… δεν ξέρω…την πρώτη θα διάλεγα, αυτή έχω συνηθίσει. Τώρα μήπως εδώ δεν ορίζουμε τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού; Αφού τη συνέχεια την εξετάζω στο πεδίο ορισμού, την πρώτη θα διάλεγα.

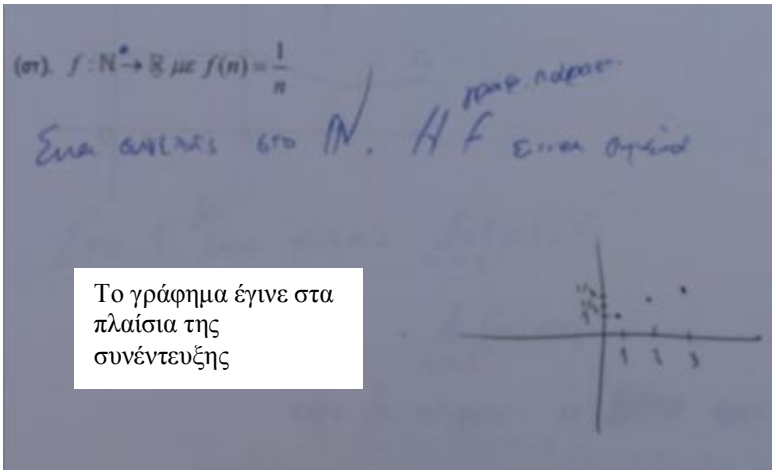


Ερ – Ωραία, ας δούμε τη (β) τώρα. Λες … (διαβάζω την απάντησή του)… Άρα γενικώς συνεχής σαν συνάρτηση;
Θ – Ναι.
Ερ - Θα μπορούσες να κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Θ - …(κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα)…
Ερ - Το γράφημα που έκανες σε βοηθάει να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις την απάντηση που έδωσες;

Θ - …(Διστακτικά) Επιβεβαιώνω. Ναι.
Ερ - Μπορείς να μου κάνεις και στην επόμενη τη γραφική παράσταση;
Θ - …(κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω)…
Ερ - Ωραία. Η γραφική παράσταση εδώ επιβεβαιώνει ή απορρίπτει αυτό που έχεις δώσει σαν απάντηση;
Θ - Επιβεβαιώνει νομίζω.
Ερ - Γιατί; Δεν σε χαλάει το κενό που υπάρχει ανάμεσα στις δύο ευθείες;
Θ - Ναι, αν αυτό ήταν μέσα στο πεδίο ορισμού, δηλαδή αν το 0 ήταν μέσα στο πεδίο ορισμού αν ας πούμε ήταν εδώ κλειστό, τότε δεν θα ήταν συνεχής. Δεν μελετάω εγώ όμως συνέχεια στο 0, άρα δεν με νοιάζει.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα.

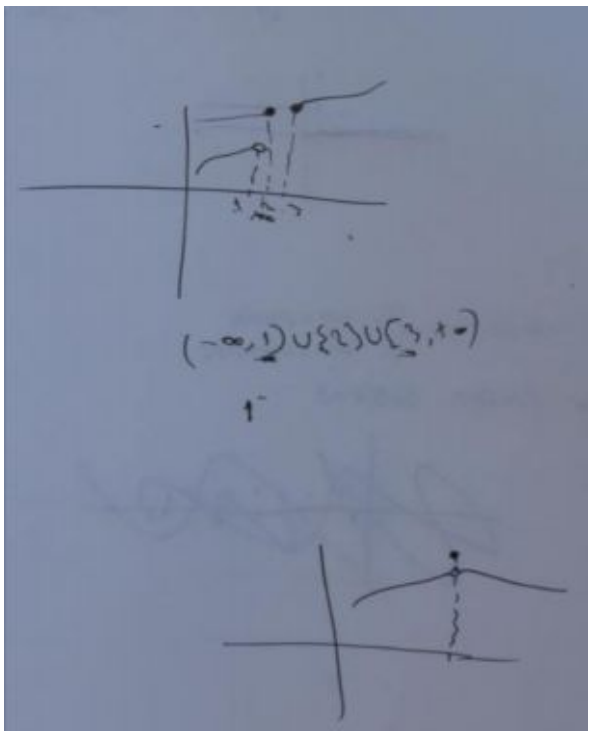


Ερ – Στο (δ) τώρα, έχεις κάνει και το γράφημα και λες ότι δεν είναι γιατί στο 0 δεν είναι συνεχής. Ουσιαστικά είναι …
Θ - …αυτό που είπαμε πριν …
Ερ - … αυτό που είπαμε πριν. Ωραία. Πάμε τώρα στην (ε). Εδώ λες ότι δεν είναι συνεχής. Έχεις επίσης προσπαθήσει να κάνεις και το γράφημα. Ωραία. Το γράφημα αποτελείται από τι ουσιαστικά;
Θ - Από σημεία … έτσι κάπως, ή από … δεν ξέρω με σιγουριά, ή από σημεία ή από …
Ερ - Η αλήθεια είναι ότι κανείς δεν μπορεί να φτιάξει με ακρίβεια τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης. Πάντως πρέπει να αποτελείται από σημεία πάνω στον άξονα των x΄x και από σημεία πάνω στον άξονα του y = …
Θ - … = με 1, ναι. Ναι, κάπως έτσι το είχα σκεφτεί, είναι αυτό που λέγαμε ότι μεταξύ δύο ρητών είναι ένας άρρητος, οπότε, αν πας πολύ κοντά, δηλαδή αν πάρεις μια περιοχούλα γύρω από έναν ρητό, θα βρεις άρρητο, οπότε θα πάει επάνω στο 1. Και το ίδιο αντίστοιχα αν πάρεις έναν άρρητο.

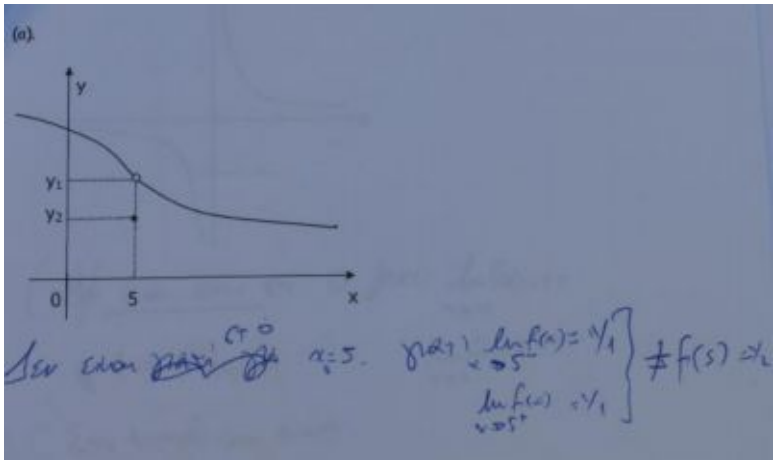


Ερ - Ωραία. Κατάλαβα. Άρα; Πιστεύεις ότι η απάντησή σου είναι σωστή; Ότι δεν είναι συνεχής;
Θ - Ναι.
Ερ – Στη (στ) λες ότι είναι συνεχής. Αν ήθελες να κάνεις τη γραφική της παράσταση;

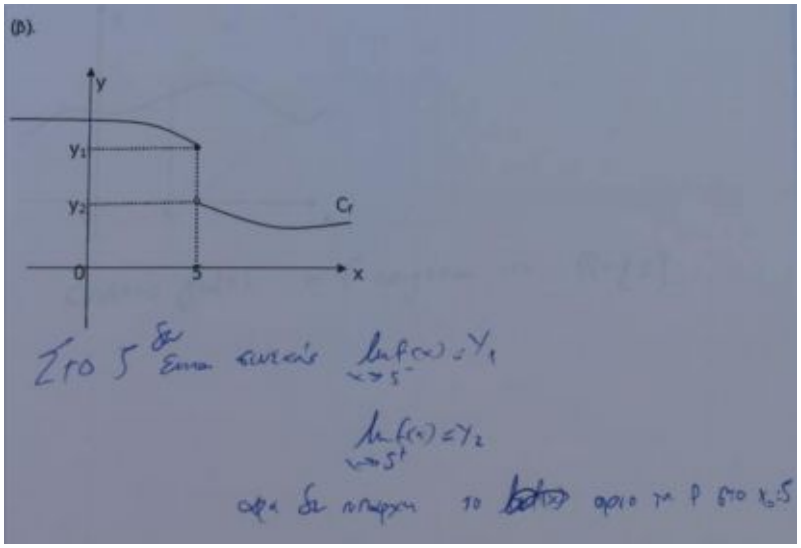
Θ - … της 1/ν… ναι …ναι αλλά θα είναι στο σύνολο τιμών όλο το R.
Ερ – προφανώς,
Θ – χμμμ…Ξέρω εγώ, έτσι; …Μια σειρά από κουκίδες είναι γιατί δεν παίρνει τις τιμές ενδιάμεσα. Είναι συνεχής γιατί ορίζεται στο Ν, δεν παίρνει τις τιμές τις ενδιάμεσες.
Ερ - Το γεγονός ότι έχεις κουκίδες, σε χαλάει στο να είναι συνεχής;
Θ - Στη συγκεκριμένη όχι.
Ερ - Γιατί;
Θ – Γιατί είναι στο Ν, στο πεδίο ορισμού της.
Ερ - Ωραία. Άρα εδώ έχω μεμονωμένα σημεία. Δεν σε χαλάει λοιπόν στη συνέχεια το ότι έχεις μεμονωμένα σημεία, έτσι;



Θ - Ναι αλλά μόνο εδώ.
Ερ - Γιατί; Τι εννοείς;
Θ - Γιατί μπορεί να είχα κάτι τέτοιο … (φτιάχνει το διπλανό γράφημα που φαίνεται πρώτο) … αλλά όχι…
Ερ - …για κάτσε. Μου άρεσε αυτό! Για πες μου αυτό το γράφημα που έφτιαξες αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση;
Θ - …Αυτή είναι. Ναι είναι.
Ερ – Είναι ε; Μάλιστα.
Θ - Αυτή το πεδίο ορισμού της είναι λίγο περίεργο. Είναι το $(-\infty,1)\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$. Άρα στο πεδίο ορισμού της είναι η συνεχής αυτή … παίρνουμε στο 1… όχι παίρνουμε στο 1^- το όριο, όχι, όχι, αυτή είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία. Αν σου έρθει μετά κάποιο παράδειγμα που σε κάποιο μεμονωμένο σημείο δεν είναι…
Θ - …(αρχίζει αμέσως να σχεδιάζει το δεύτερο γράφημα που φαίνεται παραπάνω)…



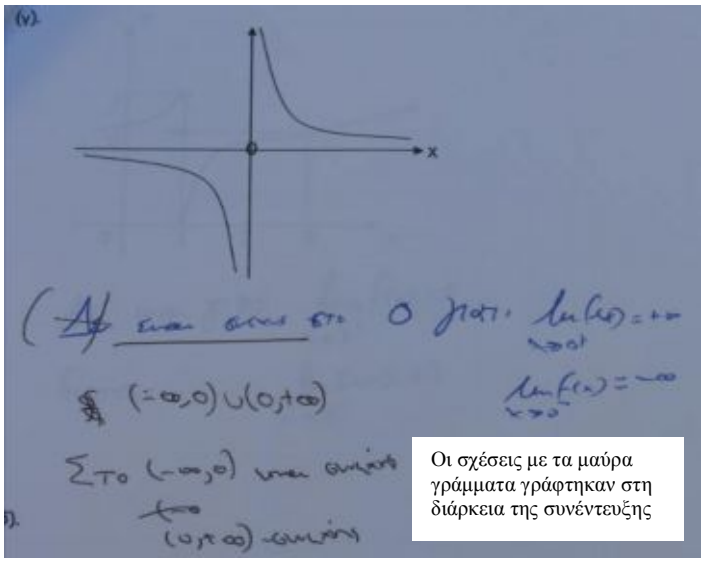
Ερ - …Α! Μάλιστα. Δηλαδή εννοείς κάτι σαν κι αυτό (του δείχνω το (α). Αυτή είναι συνεχής;
Θ - …
Ερ - Είναι μεμονωμένο το σημείο 5 τι λες;
Θ – (διστακτικά) ναι. Τι είναι μεμονωμένο;
Ερ - Θυμάσαι τι είναι μεμονωμένο; Όχι ε; Εντάξει, δεν πειράζει. Εγώ φταίω ίσως γιατί σε μπέρδεψα. Πάντως έτσι όπως τη βλέπεις είναι συνεχής;
Θ - Όχι δεν είναι. Γιατί τα πλευρικά όρια δεν θα είναι ίδια με την τιμή στο σημείο.



Ερ – Μάλιστα, ωραία. Κατάλαβα. Άρα ουσιαστικά αυτή είναι και η απάντησή σου και η εξήγηση που δίνεις σε αυτές τις δύο, τα γραφήματα (α) και (β) έτσι;

Θ - Ναι, ναι τα πλευρικά δεν είναι ίδια με την τιμή.

Ερ - Ωραία. Δεν έχω κάτι άλλο να ρωτήσω σε αυτές. Η δικαιολόγησή σου είναι πλήρης.



Ερ - Αυτή τώρα. Σου λέει τίποτα σαν συνάρτηση αυτή; Ποια είναι;

Θ – Ναι είναι…ποια είναι… δεν είναι η $\ln x$; Όχι, δεν είναι, είναι;

Ερ - Εντάξει. Μην σε απασχολεί. Αν το θυμάσαι. Λες ότι δεν είναι συνεχής διότι αριστερά και δεξιά …

Θ - …πάει στα άπειρα.

Ερ - Άρα, πεδίο ορισμού, τι πεδίο ορισμού έχει αυτή;

Θ - …Δεν ορίζεται στο 0 αυτή. Είναι $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Ερ - Άρα πρέπει να αλλάξεις κάτι στην απάντηση που έχεις δώσει σε αυτήν;

Θ - …ναι…

Ερ - …ωραία…

Θ - …είναι συνεχής…

Ερ - …ωραία, γράψτο …

Θ - …(διστάζει)…

Ερ - …άρα να το βάλουμε σε μια παρένθεση;… Υπογραμμίζω αυτό δηλαδή; …

Θ - …ναι…

Ερ - … τι θα διάλεγες καλύτερα; …

Θ - …ναι είναι συνεχής αλλά όχι με αυτή τη δικαιολογία.

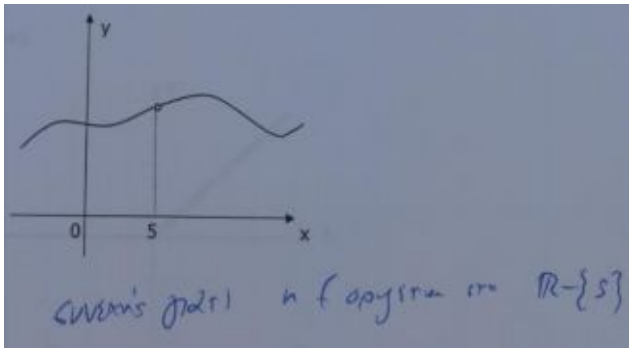
Ερ - Ωραία. Γράψε από κάτω ό,τι νομίζεις.

Θ – το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Ωραία. Στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και στο $(0,+\infty)$ επίσης είναι συνεχής.

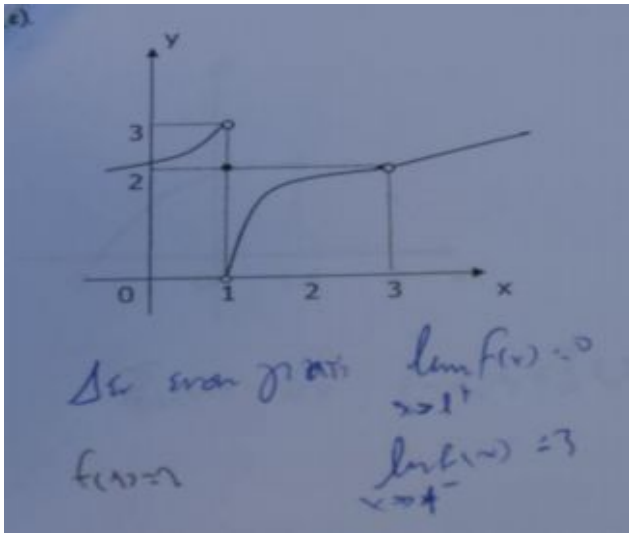
Ερ - Ωραία. Αλλά στο πεδίο ορισμού της, έτσι;

Θ – …ναι ….

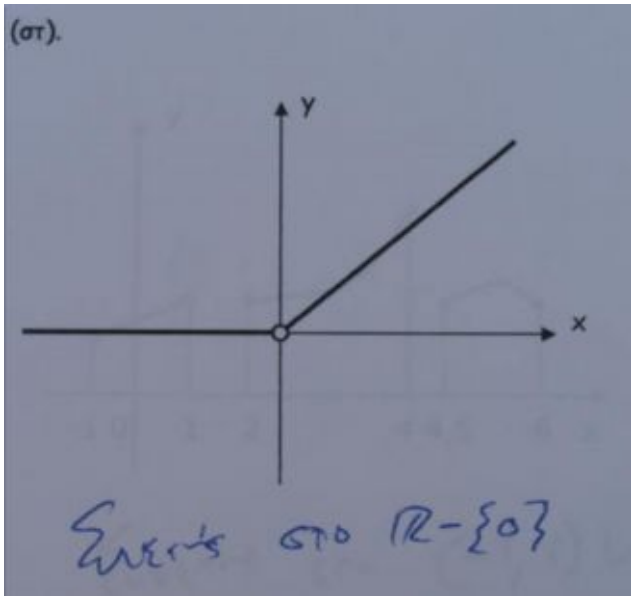
Ερ - Ωραία. Ποια απάντηση θα προτιμούσες; Αυτή που είχες δώσει στην αρχή ή αυτή που γράφεις τώρα;
Θ – Τη δεύτερη …



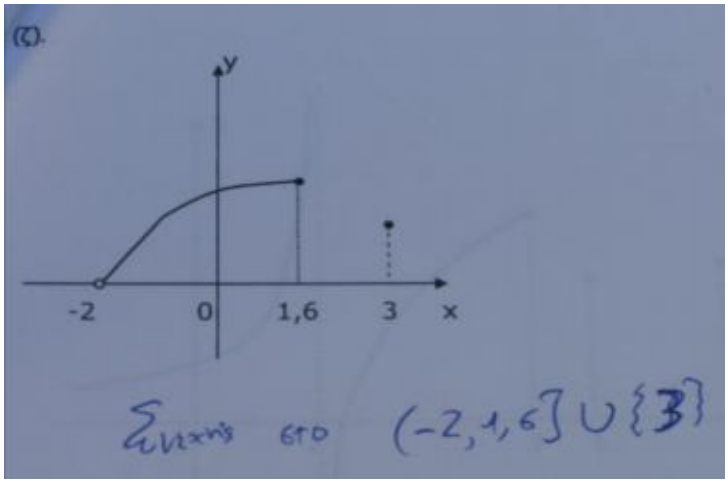
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στη (δ) λες ότι είναι η συνεχής γιατί ορίζεται στο $\mathbb{R}-\{5\}$ *, έτσι;…*
Θ - …ναι



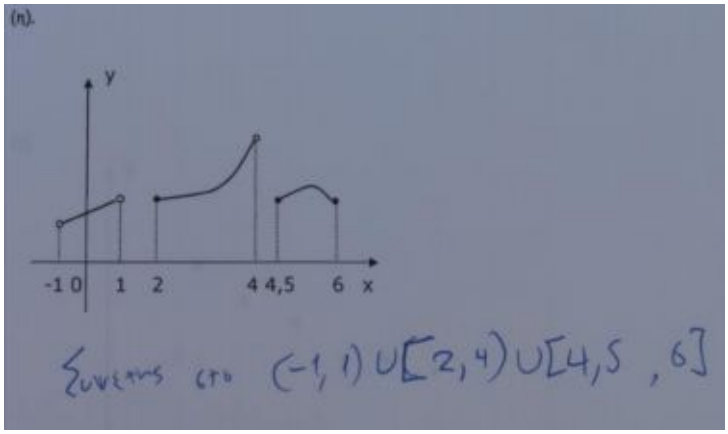
Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στην (ε) λες … (διαβάζω την απάντησή του)…Ορίζεται στο; …
Θ - …στο 1; Ναι ορίζεται.
Ερ - Ωραία. Με το 3 έχεις πρόβλημα; …
Θ - …όχι …
Ερ - …γιατί; …
Θ - Δεν είναι στο πεδίο ορισμού το 3 άρα δεν μελετάω συνέχεια στο 3.



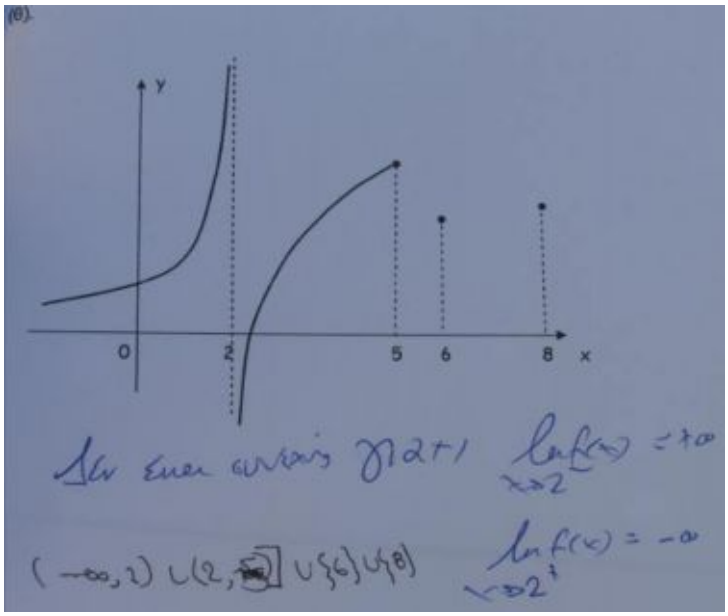
Ερ - Αυτή τώρα λες ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$*. Αν έκανα την ίδια ερώτηση που είχα κάνει και πιο πριν, δηλαδή είναι συνεχής ή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της; Τι πιστεύεις ότι είναι καλύτερο;*
Θ - Το πεδίο ορισμού της δεν είναι αυτό;
Ερ - Έχεις δίκιο. Έχεις απόλυτο δίκιο. Να το πω πιο σωστά. Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ *ή ασυνεχής στο 0;*
Θ – Ε! μας ζητάει τη συνέχεια άρα ας απαντήσουμε που είναι συνεχής και όχι που είναι ασυνεχής.
Ερ – Άρα προτιμάς αυτό; …
Θ - …ναι, ναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, το $\mathbb{R}-\{0\}$.



Ερ - Ωραία. Εδώ δεν έχω να παρατηρήσω κάτι. Να ρωτήσω μόνο το εξής: σε πειράζει που αυτά δεν ενώνονται μεταξύ τους;
Θ - …όχι…
Ερ - …γιατί; …
Θ - …Γιατί δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού. Δεν μας νοιάζει γύρω από το 3 τι γίνεται.



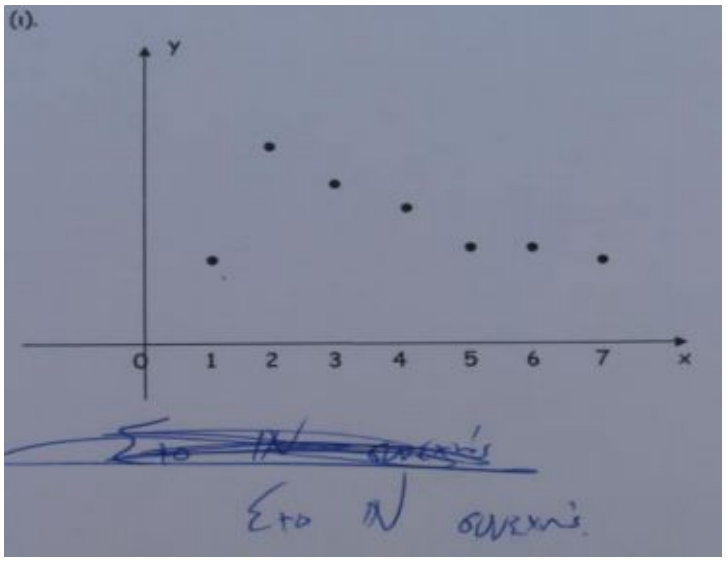
Ερ - Ωραία. Και εδώ νομίζω είναι….
Θ - … ναι είναι το ίδιο…
Ερ - Ωραία.



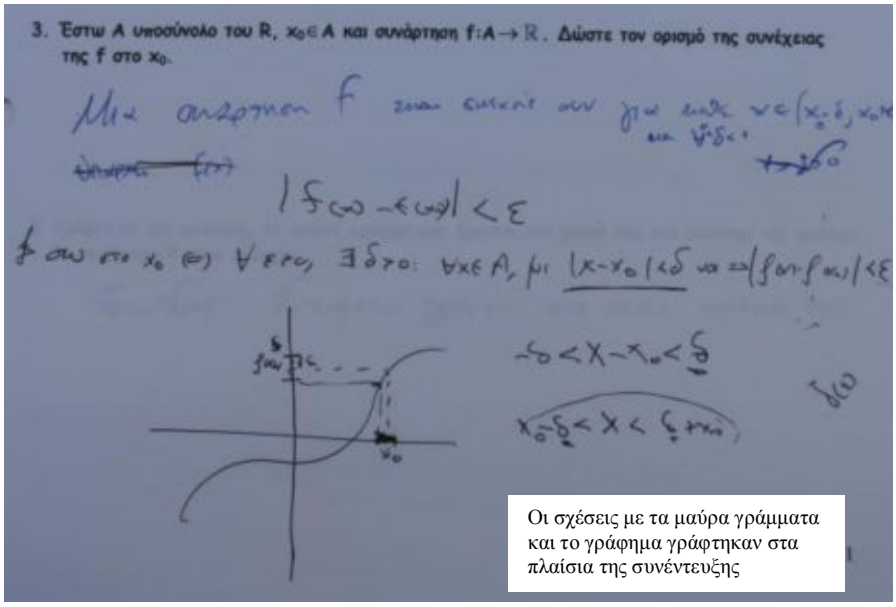
Ερ – Εδώ τώρα λες ότι …άρα σε ποιο σημείο χαλάει η συνέχεια σύμφωνα με την απάντησή σου;…
Θ - …βλακεία…
Ερ – …ε;…
Θ - …λάθος, λάθος είναι αυτό.
Ερ – Δηλαδή, τι νομίζεις, τι θέλεις να αλλάξεις …
Θ - …Γιατί το 2 δεν είναι στο πεδίο ορισμού άρα τι ψάχνω, πάω και ψάχνω εγώ συνέχεια στο 2.
Ερ - Άρα που θα έλεγες ότι είναι συνεχής η συνάρτηση;
Θ – Θα είναι στο

(…γράφει…) $(-\infty,2)\cup(2,5]\cup\{6\}\cup\{8\}$.

Ερ – Άρα, εδώ είναι συνεχής;
Θ - Ναι είναι.
Ερ – Ωραία.



Ερ - Ωραία. Αυτή τώρα είναι συνεχής;
Θ – Ναι είναι. Αυτά είναι μεμονωμένα.
Ερ - Εννοείς με το Ν πεδίο ορισμού είναι συνεχής ε;
Θ - Ναι. Αν και δεν μου λέει ότι είναι το Ν το πεδίο ορισμού. Μπορεί να είναι από το 1 έως το 7.
Ερ - Εντάξει. Με το γράφημα που βλέπεις.
Θ - Ναι είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία.



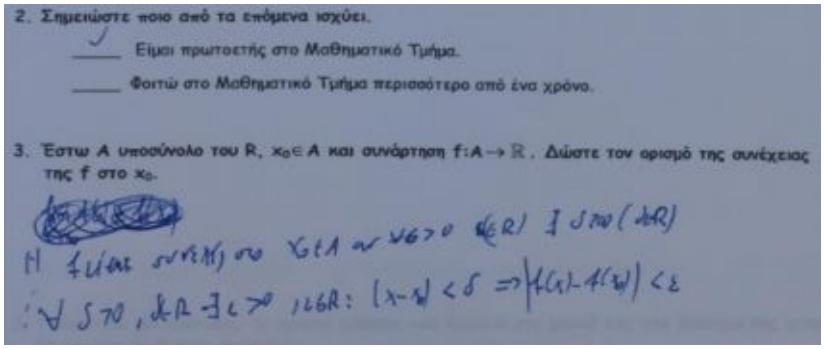
Οι σχέσεις με τα μαύρα γράμματα και το γράφημα γράφτηκαν στα πλαίσια της συνέντευξης

Ερ - Ας δούμε τώρα κάτι τελευταίο. Θα ξαναγυρίσουμε λίγο στον αρχικό ορισμό. Κοίταξέ τον λίγο να τον θυμηθείς.
Θ - (διαβάζει)… Όχι είναι λάθος είναι αυτό.
Ερ - Θέλεις να διορθώσεις κάτι τώρα που τον ξαναβλέπεις; Τον θυμάσαι καθόλου;
Θ - … (μπερδεύεται)..
Ερ - Εντάξει μην αγχώνεσαι. Θα στον γράψω εγώ για να ρωτήσω κάτι που θέλω … (γράφω τον ορισμό) …Αν είχες ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου που ήταν λίγο ψαγμένος και που έβλεπε τον ορισμό όπως τον έχει το σχολικό βιβλίο και σου ζητούσε να του τον εξηγήσεις απλά. Τι θα του έλεγες; Χρησιμοποιώντας ένα απλό το γράφημα τι θα του έλεγες;
Θ – Κατ, αρχήν αυτό εδώ (δείχνει το $|x - x_0| < \delta$) θα του έγραφα απλά, να βγάλω τα απόλυτα, θα το έκανα περιοχή και θα το έγραφα (βλέπε σχέσεις παραπάνω στο σχήμα). Το δ το παίρνω πολύ μικρό. Άρα για αυτά τα x εδώ πέρα σε αυτή την μικρή περιοχή, οι εικόνες τους θα πήγαιναν και αυτές πολύ κοντά στο $f(x)$. Αυτό, αυτό θα του έλεγα.
Ερ – Ωραία. Πολύ ωραία. Το ε τι ρόλο παίζει στον ορισμό σου;
Θ - Σου δίνω εγώ το δ και μου βρίσκεις ένα ε όχι! σου δίνω εγώ το ε και μου βρίσκεις το δ, όχι…ναι…

Ερ - Τι πιστεύεις; Από που πρέπει να ξεκινήσουμε;
Θ – Από το ε.
Ερ - Άρα στο σχήμα σου, στο γράφημα πώς θα μπει το ε;
Θ – Το ε…πώς θα μπει;…Ε εδώ μια ζώνη γύρω από το $f(x)$. Οι εικόνες αυτών εδώ των x θα πέφτει πάλι μέσα σε αυτή τη ζώνη γύρω από το $f(x)$.
Ερ - Από πού θα ξεκινήσω; Από εδώ (δείχνω τα x) ή από εδώ (δείχνω τα $f(x)$);
Θ - Από εδώ (δείχνει τα x) αφού η μια σχέση (δείχνει την $|x - x_0| < \delta$) οδηγεί στην άλλη (δείχνει την $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$)… Δεν ξέρω αν ισχύει…ναι, δεν βολεύει…Τι, να ξεκινήσω από εδώ (δείχνει τα $f(x)$) και να έρθω μετά στο x; Θα είναι τότε συνεχής; Δεν ξέρω.
Ερ - Τι θα διάλεγες; Θες αλλάξεις κάτι;
Θ – Όχι, όχι όπως το είπα.
Ερ - Ωραία. Πολύ ωραία. Σε ευχαριστώ πολύ.

10η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

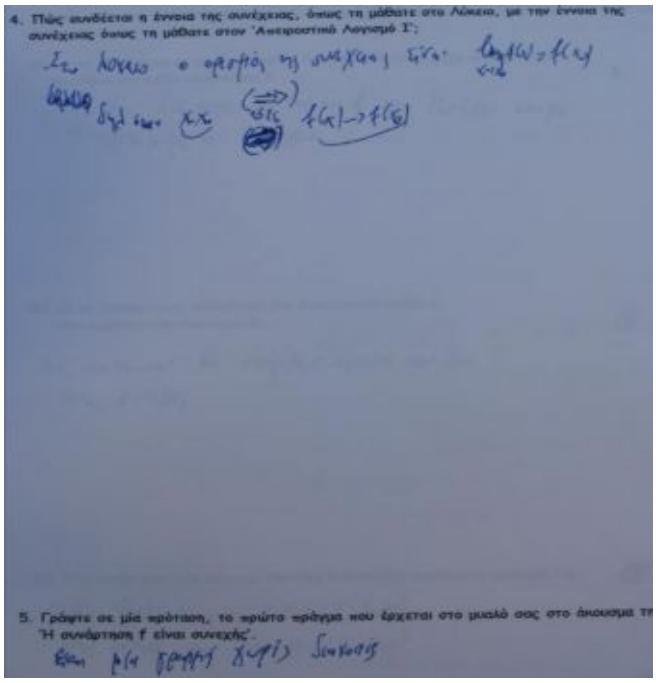
‘Κώστας’
Πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα.


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

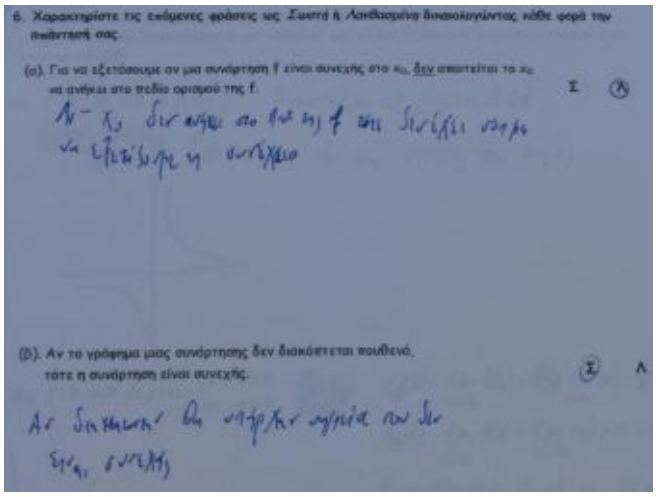
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

____ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Ανεπιφοιτιό Λογισμό Ι';

5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα τ 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

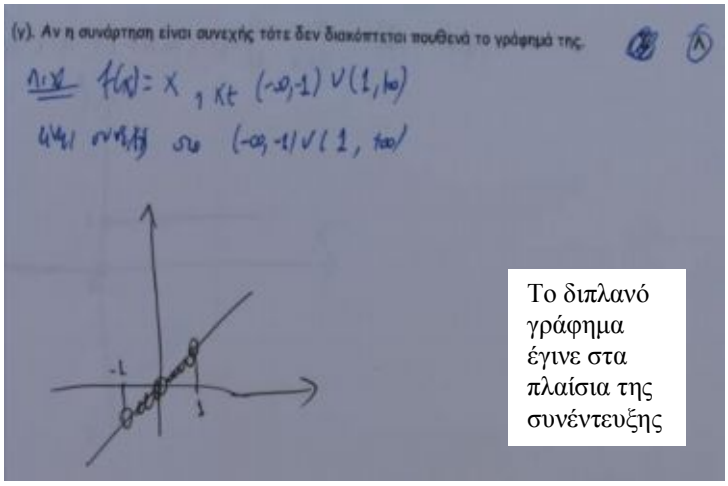

6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως Σωστά ή Λανθασμένα δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

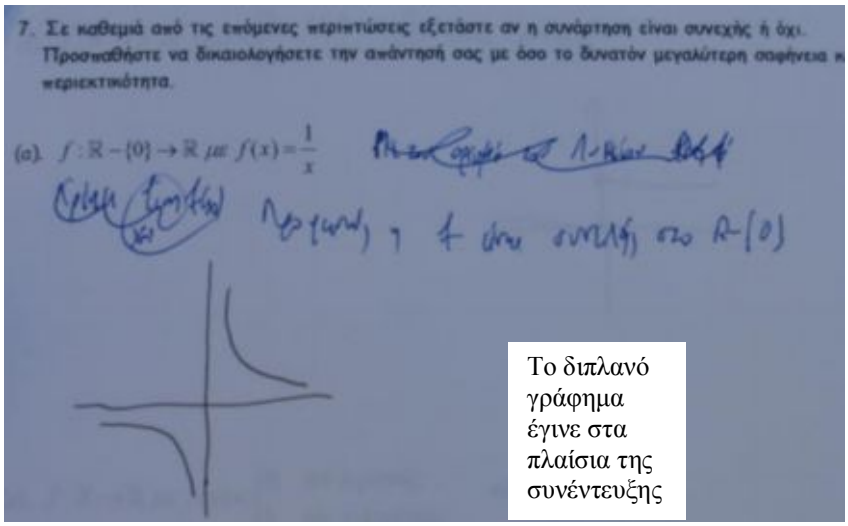
Ερ – Στο 3 δεν θα σταθώ τώρα. Θα ξαναγυρίσουμε στο τέλος.
Μου άρεσε εδώ στο 4 η απάντησή σου. Πώς το νοιώθεις εσύ; Πιστεύεις ότι έχει σχέση ο ορισμός της συνέχειας στο Λύκειο με αυτόν που έμαθες στο Πανεπιστήμιο; Τι σου φαίνεται;
Κ - Μου φαίνονται πολύ διαφορετικοί. Απλά, σύγκρινα ας πούμε τον έναν με τον άλλο και ουσιαστικά είναι μόνο αυτά που είναι ίδια, το $x \to x_0$, το $f(x) \to f(x_0)$ και το $\Rightarrow$, αυτά μόνο είναι ίδια. Αλλά, μου φαίνονται πολύ διαφορετικοί. Το πώς καταλήγει ένας τον άλλον δεν, δεν το έχω καταλάβει.
Ερ - Ωραία. Είδα επίσης την απάντησή σου εδώ, στο 5. Άρα το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σου είναι …
Κ - …ναι, οι καθηγητές μας, π.χ. έμπαινε ας πούμε στη συνέχεια, έκανε μία γραφική παράσταση στον τοίχο και έλεγε ας πούμε αυτή είναι συνεχής, μια γραμμή χωρίς κενό. Αυτή ήταν και η πρώτη εντύπωση της συνέχειας.
Ερ – Ωραία, πολύ ωραία. Αυτό θέλω, αυτή την αίσθηση που έχει δημιουργηθεί στο μυαλό μας. Ωραία. Εδώ στο 6(α) νομίζω ότι η δικαιολόγησή σου είναι πλήρης. Δεν έχω κάτι να ρωτήσω. Στο (β) λες ότι είναι σωστό. Αν δεν διακόπτεται τότε είναι συνεχής. Έτσι;

Κ - Ναι, σύμφωνα και με το προηγούμενο το 5.
Ερ – Ωραία.



Το διπλανό γράφημα έγινε στα πλαίσια της συνέντευξης

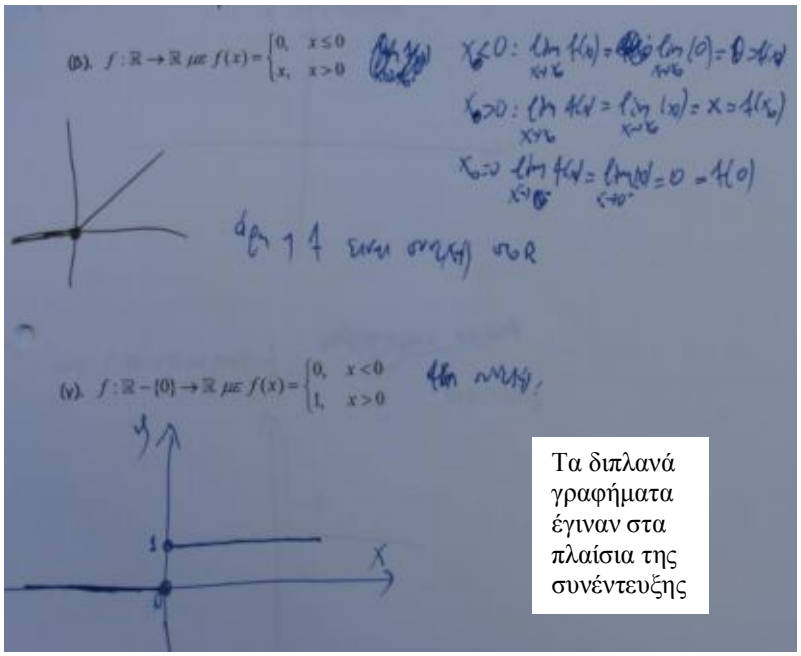
Ερ - Α! Μάλιστα. Μου άρεσε αυτό εδώ, και ήθελα να σε ρωτήσω…
Κ - …Ναι, το είχα βάλει στην αρχή σωστό, αλλά μετά είδα τις γραφικές παραστάσεις που έχετε, που μας είχατε δώσει πιο κάτω και τελικά το έβαλα λάθος.
Ερ - Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης που έχεις γράψει εδώ;
Κ - …(φτιάχνει το διπλανό γράφημα και το εξηγεί σωστά)…
Ερ - Και αυτή είναι συνεχής;
Κ - Ναι. Στο πεδίο ορισμού της.



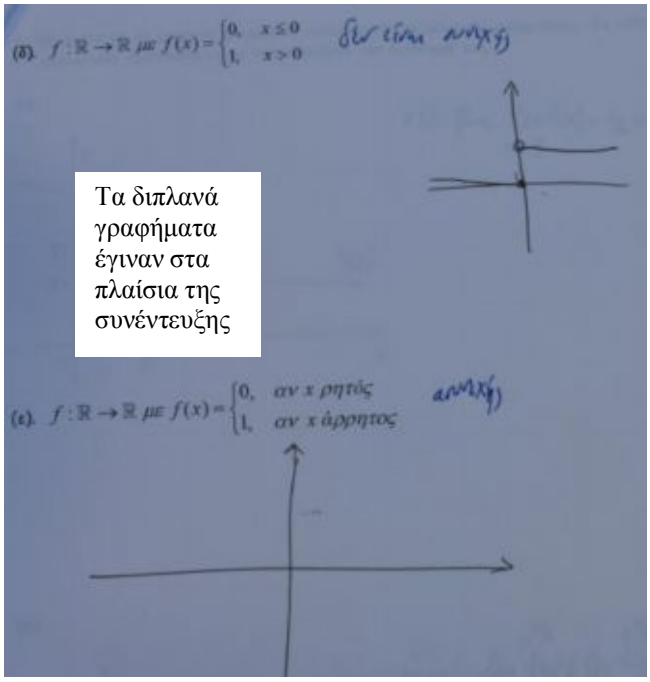
Το διπλανό γράφημα έγινε στα πλαίσια της συνέντευξης

Ερ - Μάλιστα στο πεδίο ορισμού της. Ωραία. Κατάλαβα. Πάμε τώρα στην 7. Λες ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$.
Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση; Τη θυμάσαι;
Κ - …(κάνει το διπλανό γράφημα)…
Ερ - Σε ενοχλεί που έχει δύο κομμάτια αντί για ένα;
Κ – Όχι, δεν με ενοχλεί, εντάξει.
Ερ - Γιατί;
Κ - Μου φαίνεται λίγο περίεργο βασικά αλλά ξέρω εγώ, τόσα χρόνια την έχουμε κάνει αυτή τη γραφική παράσταση και την έχω συνηθίσει. Στην αρχή μου φάνηκε λίγο περίεργη.
Ερ - Δηλαδή, το ότι διακόπτεται σε χαλάει;
Κ - Λίγο ναι. Οι περισσότερες συναρτήσεις έχουμε συνηθίσει να είναι ένα κομμάτι που να μη διακόπτεται, δεν έχουν δύο κλάδους.
Ερ - Δηλαδή θα ήθελες να αλλάξεις εδώ την απάντηση;
Κ - Όχι. Ξέρω ότι είναι συνεχής.
Ερ - Τι πιστεύεις, πως μπορείς να εξηγήσεις ότι αν και είναι ένα γράφημα που διακόπτεται παρόλα αυτά είναι συνεχής;

Κ - Θυμάμαι τώρα μια φράση ενός καθηγητή που λέει, ξέρω εγώ, αν παίρναμε, ξέρω εγώ, ένα σημείο από εδώ, δεν είναι συνεχής σ' όλο το R, κάπως έτσι ας πούμε, αλλά γι' αυτήν εδώ, σύμφωνα με την απάντηση που έδωσε στο 5 που διακόπτεται, πιστεύω ότι είναι λάθος, αφού διακόπτεται, αλλά αφού είναι διαφορετικά, ξέρω εγώ, με την ίδια λογική εξετάζουμε την κάθε γραμμή ξεχωριστά. Δεν διακόπτεται καμία και αφού στο 0 δεν ορίζεται, έχουν διαφορετική τιμή, οπότε αν το κοιτάξω έτσι …
Ερ - Ορίζεται αυτή στο 0;
Κ - Όχι, δεν ορίζεται.

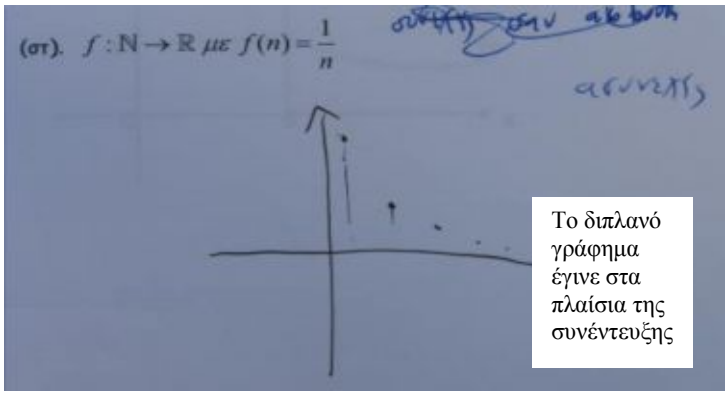


Ερ - Ωραία. Να ζητήσω τώρα και σε αυτή, τη (β) να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Κ - …(κάνει το διπλανό γράφημα και το εξηγεί)…
Ερ - Το γράφημα σου επιβεβαιώνει αυτό που έγραψες δίπλα ή στο απορρίπτει;
Κ - …
Ερ - Δηλαδή είναι συνεχής σε όλο το R;
Κ - Ναι.
Ερ - Φαίνεται αυτό από το γράφημα, ή όχι;
Κ – Από το γράφημα φαίνεται σίγουρα, ναι.

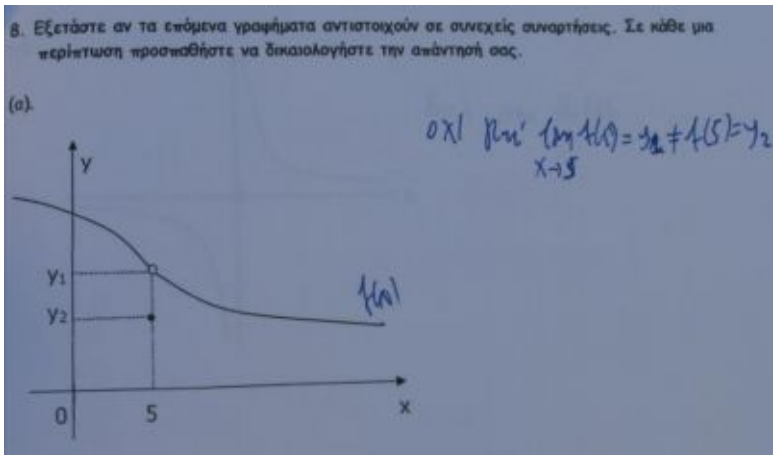


Ερ - Ωραία. Άρα δεν αλλάζεις κάτι στην απάντησή σου;
Κ – Όχι, δεν αλλάζω.
Ερ – Ωραία, στη (γ) τώρα λες …(διαβάζω την απάντησή του) …
Κ - …όπως είχα πει πριν, που διακόπτεται εδώ πέρα, με το -1, αλλά στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής
Ερ - …στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής …
Κ - …άμα ήταν κλειστό εδώ πέρα δεν θα ήταν συνεχής …
Ερ - Α! Δηλαδή στην επόμενη, στη (δ), δεν είναι συνεχής διότι …
Κ - … επειδή έχει διαφορετική τιμή στο 0. Τα όρια βασικά δεν είναι ίδια. Να κάνω και τη γραφική παράσταση … (κάνει το διπλανό γράφημα) … Απλά τα, πώς τα λένε, τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα δεν είναι συνεχής.

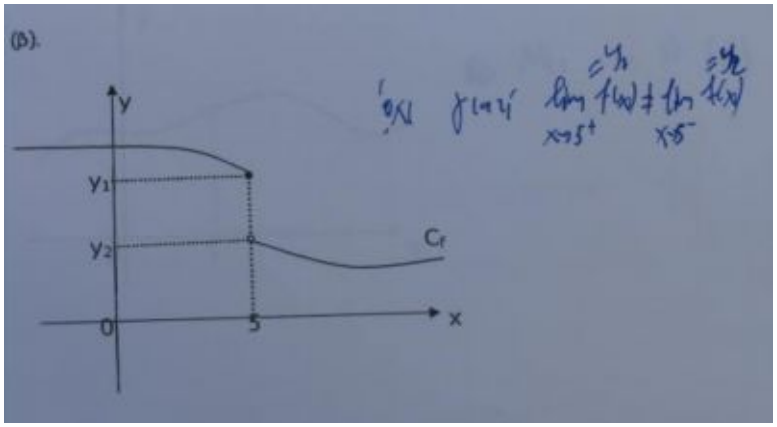
Ερ – Μάλιστα. Η (ε);
Κ - Αυτή δεν είναι σίγουρα συνεχής αλλά …
Ερ - …τη θυμάσαι καθόλου από τον Απειροστικό αυτή;
Κ - …η Dirichlet δεν είναι; Θυμάμαι ότι τη λέγαμε αυτή συνεχής. Γι' αυτό την έβαλα έτσι αλλά δεν μπορώ να το αποδείξω.
Ερ - Αν προσπαθούσες να κάνεις γραφική παράσταση, πώς πιστεύεις ότι περίπου θα ήταν;
Κ - Νομίζω από την πληρότητα, μου φαίνεται, έτσι όπως είναι εδώ, θα ήταν πολλές τελίτσες μαζί που θα φαίνονται σαν γραμμή αλλά είναι …ένας ρητός εδώ άλλος ένας ρητός λίγο πιο εδώ, κάπως έτσι, πολλές τελίτσες που θα φαίνονται σαν γραμμές και τώρα δεν μπορείς να πεις ότι ανάμεσα από ένα ρητό και έναν άλλο ρητό υπάρχει ένας άρρητος, υπάρχει κι άλλος ρητός ανάμεσα, δεν μπορείς να πεις ανάμεσα στις δύο τελίτσες πάει άλλη τελίτσα, απλά είναι, ξέρω εγώ, πως κάποια κενά υπάρχουν, τα κενά των ρητών ας πούμε είναι οι άρρητοι, οπότε … δεν μπορείς να πεις ότι είναι συνεχής, δεν είναι μία γραμμή, απλά φαίνεται σαν μία γραμμή επειδή είναι άπειροι, άπειροι οι ρητοί και άπειροι οι άρρητοι. Κάπως έτσι το σκέφτηκα.



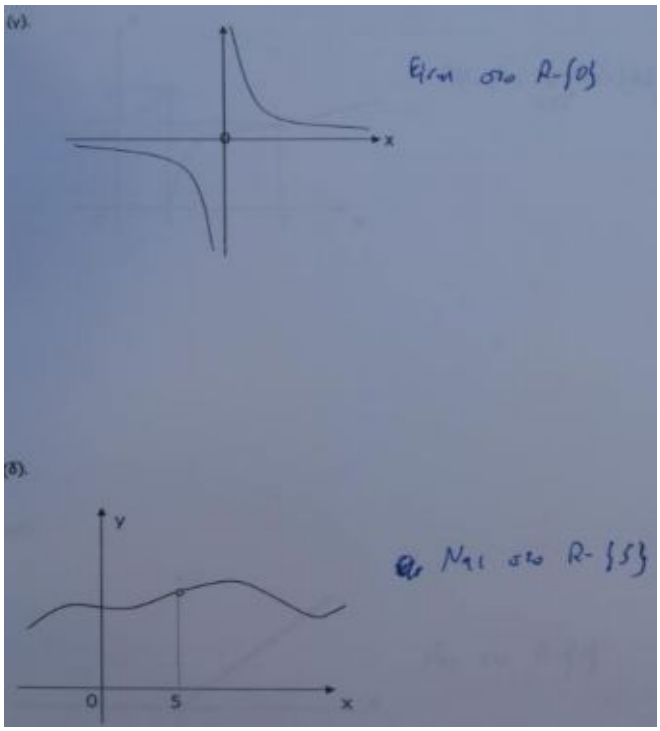
Ερ - Ωραία. Για αυτήν τώρα τι θα έλεγες;
Κ – Εντάξει, ασυνεχής, γιατί είναι ακολουθία, τελίτσες από τη γραφική παράσταση.
Ερ - Θα μπορούσες να δοκιμάσεις να κάνεις αυτής τη γραφική παράσταση;
Κ - …(κάνει το διπλανό γράφημα) …σαν την $\frac{1}{x}$ μόνο που ορίζεται στους φυσικούς μόνο. Και συνεχίζει έτσι…
Ερ – Κατάλαβα. Και είναι ασυνεχής αυτή, γιατί;
Κ – Εντάξει, επειδή έχει πεδίο ορισμού το Ν ας πούμε δεν …
Ερ - Δηλαδή τι σε χαλάει σε αυτό, τι σε ενοχλεί;
Κ - …Συνήθως το διάστημα που ορίζεται μία συνάρτηση είναι πλήρες, ας πούμε, υποσύνολο του R, ας πούμε, δεν διακόπτεται. Ενώ εδώ πέρα, έχει πολλά κενά εδώ ανάμεσα στο 1 και στο 2 είναι πολύ αριθμοί άσχετα αν ορίζεται μόνο στο Ν. Μου φαίνεται πολύ περίεργο να την έλεγα αυτή συνεχή.



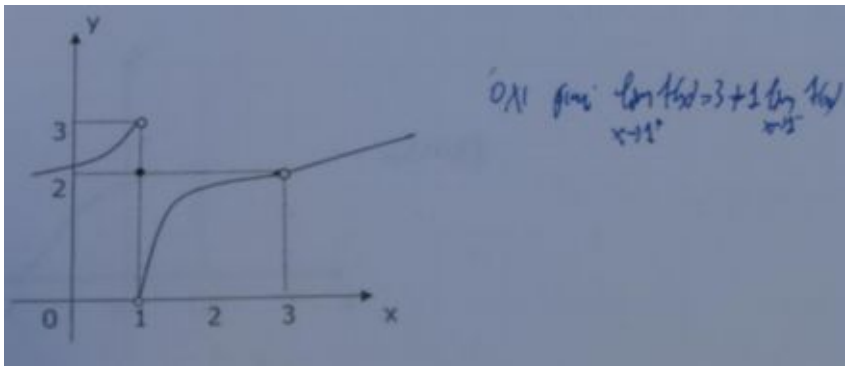
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα. Η απάντησή σου είναι πλήρης. Από ότι βλέπω χρησιμοποιείς ουσιαστικά τον ορισμό του Λυκείου.
Κ - Ναι, με βολεύει περισσότερο! Γι' αυτές τις ασκήσεις είναι πιο εύχρηστο και για το επόμενο …



Ερ - …και για το επόμενο επίσης. Ούτε εδώ συνεχής; Χαλάει στο 5 η συνέχεια, ε;
Κ - …ναι, ναι.

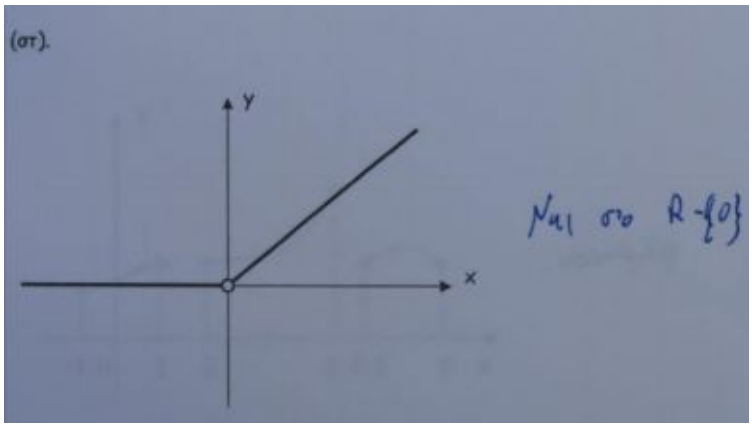


Ερ – Στη (γ) τώρα …
Κ - … την είπαμε πριν αυτή είναι η $\frac{1}{x}$…
Ερ – …ναι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ …
Κ - … ναι είναι συνεχής αυτή εκεί, και
και η επόμενη είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{5\}$, τα πλευρικά όρια στο 5 είναι ίδια …
Ερ - Το 5 ανήκει στο πεδίο ορισμού;
Κ - Αφού δεν έχει τιμή όχι
Ερ - Άρα, τι πιστεύεις, πρέπει να το λάβω υπόψη στη μελέτη της συνέχειας;
Κ – Όχι, όχι. Υπάρχουν μόνο τα πλευρικά όρια.
Ερ - Δηλαδή τι πιστεύεις ότι είναι καλύτερο να απαντήσει κανείς εδώ, ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{5\}$ *ή ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 5;*
Κ - Από τη στιγμή που δεν έχει τιμή στο 5, λογικά από το γράφημα καταλαβαίνουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}-\{5\}$. Άρα για μένα πρέπει να απαντήσουμε στο $\mathbb{R}-\{5\}$, στο πεδίο ορισμού. Γιατί δεν έχει νόημα, αν ήταν σε όλο το R θα είχε τιμή στο 5.

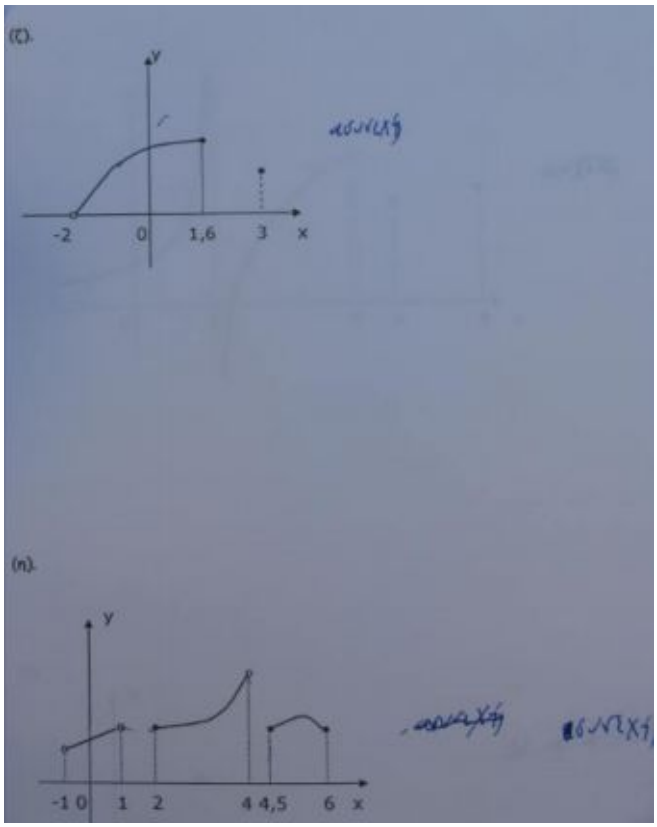


Ερ - Πολύ ωραία. Κατάλαβα. Εδώ τώρα στην (ε) χαλάει η συνέχεια πού;
Κ – Στο 1.
Ερ – Ορίζεται στο 1;
Κ – Ορίζεται ναι. Αφού έχει την τιμή 2.

Ερ - Για το 3 τι μου είπες;
Κ – Για το 3 εντάξει, εδώ είναι συνεχής, άμα ήταν μόνο αυτή η μεριά τότε θα ήταν συνεχής αλλά χαλάει στο 1.
Ερ - Δεν με πειράζει δηλαδή που έχω τρύπα στο 3;
Κ - Όχι, δεν με πειράζει αυτό.
Ερ - Γιατί;
Κ - Γιατί τα πλευρικά όρια είναι ίσα.
Ερ – Μάλιστα. Δηλαδή τι θα έλεγες, είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ *αν ξεχάσω το …*
Κ - …χωρίς το 3 όμως.



Ερ - …χωρίς το 3. Κατάλαβα.
Σε αυτήν εδώ τώρα, τη (στ);
Κ - Ναι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}-\{0\}$
Ερ – Εδώ στη (ζ) ασυνεχής …
Κ - …σαν την ακολουθία είναι και αυτή, αυτό μου θυμίζει…
Ερ - …τι σε χαλάει;
Κ – Ότι από το 1,6 πάει στο 3.



Ερ - Αν ενωνόταν το 1,6 με το 3;
Κ - Τότε συνεχής θα την έλεγα στο $(-2,3]$
Ερ - Δηλαδή σε ενοχλεί το σημείο το μοναχικό;
Κ – Ναι. Ουσιαστικά αυτή έχει σαν πεδίο ορισμού το $(-2,\ \ 1.6]\cup\{3\}$.
Ερ - Μπορεί να είναι συνεχής μία συνάρτηση με τέτοιο πεδίο ορισμού;
Κ - Δεν ξέρω μπορεί και να την άλλαζα. Αλλά όπως πριν και με την ακολουθία ασυνεχής θα έλεγα.
Ερ – Για την (η) τώρα;
Κ – Συνεχής
Ερ – Συνεχής;
Κ – …(διστακτικά)…μάλλον.
Ερ - Αλλάζεις γνώμη καθώς το κοιτάς; Συμφωνείς η διαφωνείς;
Κ - Εντάξει, εδώ δεν με πειράζει τόσο πολύ γιατί είναι ένωση διαστημάτων, σε σχέση με το προηγούμενο και … αλλά …
Ερ - Άρα αν θα μου έλεγες ότι είναι συνεχής, που θα μου έλεγες ότι είναι συνεχής;

Κ - Ίσως να άλλαζα γνώμη λόγω αυτού (δείχνει το 1 και το 2). Το όριο στο 1^+ είναι ίσο με το όριο στο 2^- αλλά εδώ στο 4 και στο 4,5 δεν είναι ίσα και έτσι ίσως να άλλαζα γνώμη αλλά …

Ερ - …δηλαδή θα ήθελες να είναι ίσα αυτά τα όρια;

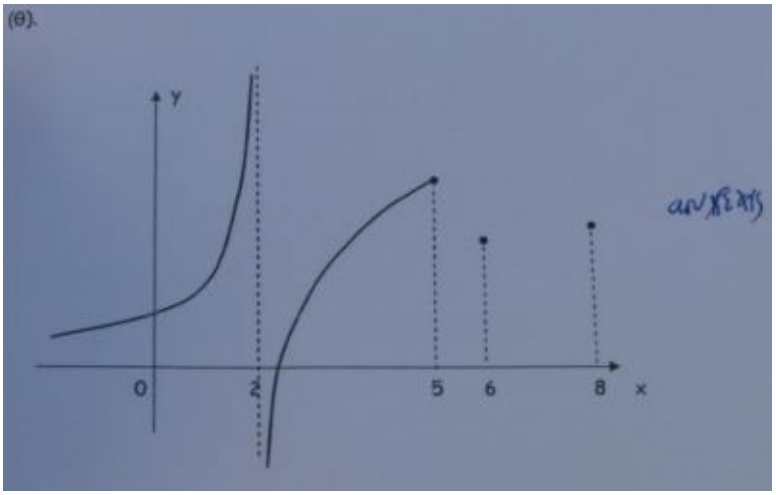
Κ - Ναι. Τότε θα έλεγα λίγο πιο εύκολα ότι είναι συνεχής αυτή. Αλλά δεν ξέρω, μπορούμε να πούμε ότι είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων; Δεν ξέρω, τώρα που το σκέφτομαι, μάλλον ασυνεχής θα την έβαζα. Γιατί, πού να την πούμε συνεχής, σε ένωση διαστημάτων; … Δεν ξέρω, δεν είμαι σίγουρος γι αυτήν.

Ερ - Άρα τελικά τι θα έλεγες σαν τελική απάντηση;

Κ - Λοιπόν θα μείνω τελικά σε αυτήν συνεχής.

Ερ - Συνεχής;

Κ – Ναι, συνεχής. Απλά δεν ξέρω αν μπορώ να πω σε ένωση διαστημάτων. Ότι είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων. Εκεί κολλάω.



Ερ - Αλλά αν μπορούμε να το πούμε τότε αυτό θα διάλεγες;

Κ - Ναι, ναι.

Ερ - Ωραία. Εδώ στη (θ) λες ασυνεχής. Τι σε χαλάει εδώ;

Κ - Τα σημεία που είναι μόνα τους.

Ερ - Τα μεμονωμένα δηλαδή;

Κ - Ναι, το 6 και το 8. Αυτό εδώ (δείχνει το 2) δεν με χαλάει τόσο γιατί μου θυμίζει την $\frac{1}{x}$…

Ερ – … α! Μάλιστα…

Κ - …Ότι πάει στο συν άπειρο και στο πλην άπειρο αλλά μάλλον, όχι, και αυτό με χαλάει.

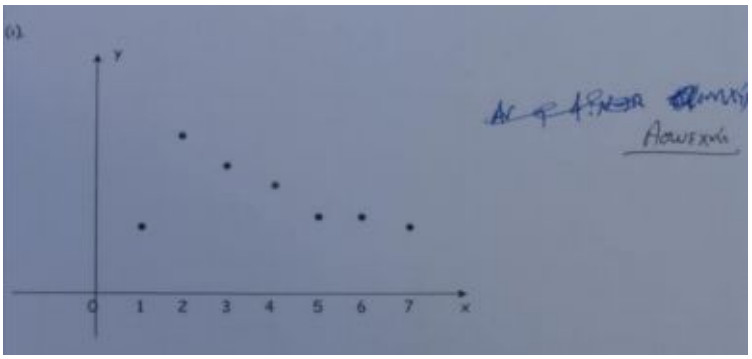
Ερ – Και αυτό;

Κ – Ναι, και αυτό. Αν το πάρουμε ας πούμε με τα πλευρικά όρια το ένα πάει στο πλην άπειρο και το άλλο πάλι στο συν άπειρο, άρα διαφορετικά, οπότε πάλι ασυνεχής είναι.

Ερ - Άρα τι θα είναι αυτή;

Κ – Ασυνεχής, σε όλο βασικά.

Ερ - Άρα εμμένεις σε αυτό που είχε γράψει έτσι;



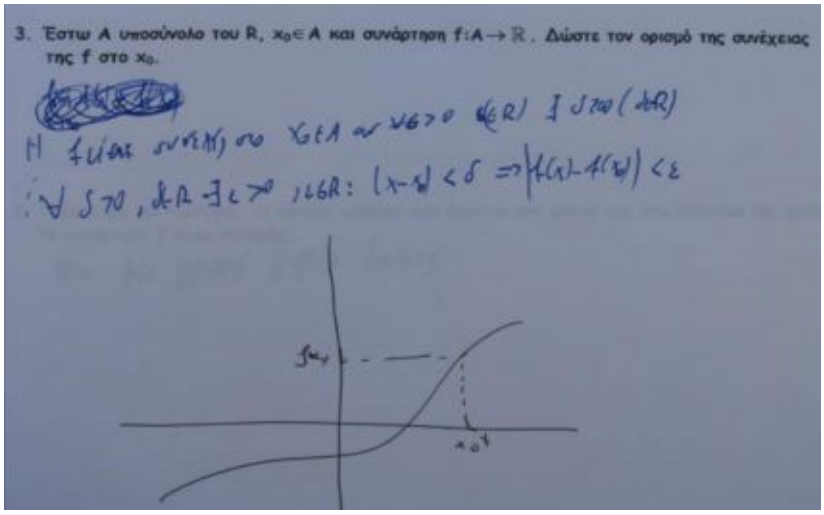
Κ - Ναι ασυνεχής.

Ερ - Για αυτήν εδώ τώρα τι θα έλεγες;

Κ - Ασυνεχής.

Ερ - Γιατί ασυνεχής, τι πιστεύεις;

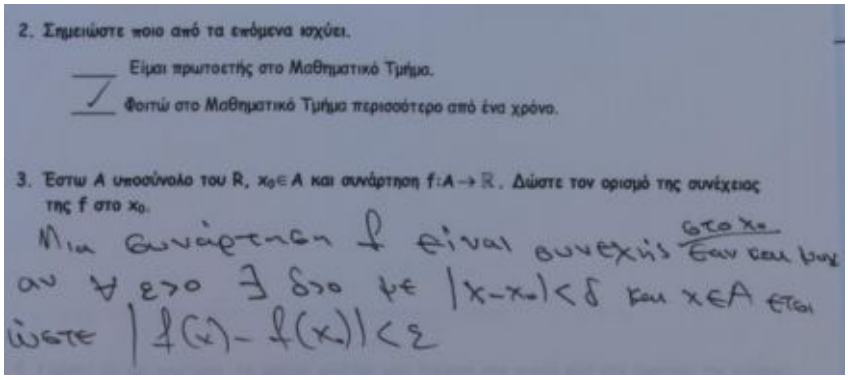
Κ – Γιατί, λόγω του ότι, είναι σαν να ορίζεται στο Ν όπως η ακολουθία $\frac{1}{\nu}$.



Ερ – Ωραία. Να γυρίσω τώρα λίγο και στον ορισμό και να ρωτήσω κάτι και για αυτόν. Λες …
Κ - …να σας πω την αλήθεια από άλλον είδα τον ορισμό. Δεν τον θυμόμουνα καθόλου.
Ερ – Μην σε απασχολεί αυτό, κανένα πρόβλημα. Βλέποντας τον τώρα θα άλλαζες κάτι;
Κ - …Δεν ξέρω. Νομίζω σωστός πρέπει να ναι.
Ερ - Αν είχες ένα παιδί που του έκανες μάθημα στη Γ΄ Λυκείου και έβλεπε τον ορισμό όπως τον έχει και το σχολικό βιβλίο, και σε ρώταγε να του πεις με απλά λόγια τι θα πει αυτός ο ορισμός, τι θα του έλεγες, με ένα απλό γράφημα, πώς θα τον εξηγούσες, πώς θα μεταφράζαμε αυτό τον ορισμό με ένα απλό τυχαίο γράφημα;
Κ – Ένα x κοντά στο x_0 ας πούμε, ώστε το απόλυτο της διαφοράς, γι' αυτό έχει απόλυτο, να είναι μικρότερο από το δ, όπου το δ ένας μικρός αριθμός, δηλαδή δύο αριθμοί πολύ κοντά για τους οποίους ισχύει ότι και οι τιμές τους είναι πολύ κοντά, δηλαδή το απόλυτο της διαφοράς τους είναι μικρότερο από το ε, ένα άλλο πολύ μικρό αριθμό. Αυτό θα έλεγα.
Ερ - Ωραία. Το ε και το δ τι ρόλο πιστεύεις ότι παίζουν επάνω στο σχήμα σου;
Κ - Παίζουν ρόλο βασικά πιστεύω εδώ η διαφορά, η διαφορά στις απόλυτες τιμές. Το δ εδώ κάτω και το ε επάνω.
Ερ - Τι πιστεύεις, από που ξεκινάω, από το ε και πάω στο δ η από το δ και πάω στο ε;
Κ - Νομίζω από το ε ξεκινάω.
Ερ - Δηλαδή θα ξεκινήσω από τα y και θα πάω στα x;
Κ - …
Ερ - Σου δημιουργεί πρόβλημα αυτό; Σου φαίνεται παράξενο;
Κ - Όχι, δε νομίζω. Γιατί εμείς ουσιαστικά για την f ψάχνουμε τη συνέχεια, οπότε ξεκινάμε κάπως από το αποτέλεσμα βρε παιδί μου για να φτάσουμε στην αρχή. Θέλουμε για να είναι συνεχής οι δύο τιμές να έχουν πολύ μικρή διαφορά. Άρα ψάχνουμε έναν κατάλληλο αριθμό ώστε και τα χ να είναι πολύ μικρά, να έχουν πολύ μικρή διαφορά μόνο. Γι αυτό, ξεκινάμε από ε.
Ερ – Πολύ ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ!

11η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Χάρης’,
φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο

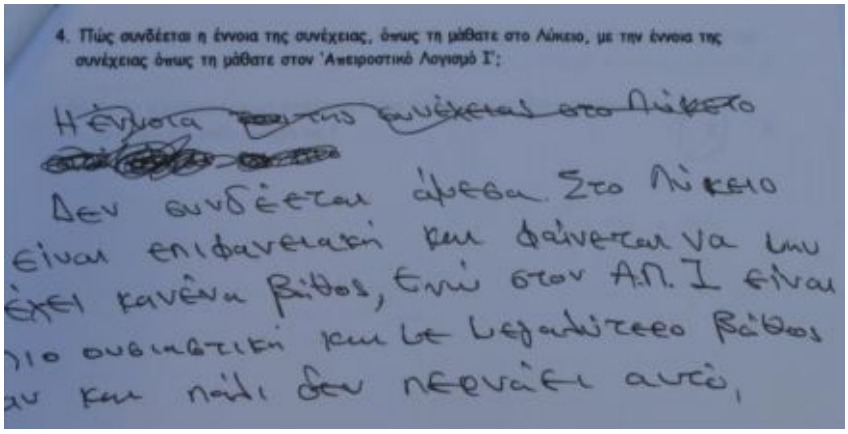

2. Σημειώστε ποιο από τα εκάμενα ισχύει.

___ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

✓ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

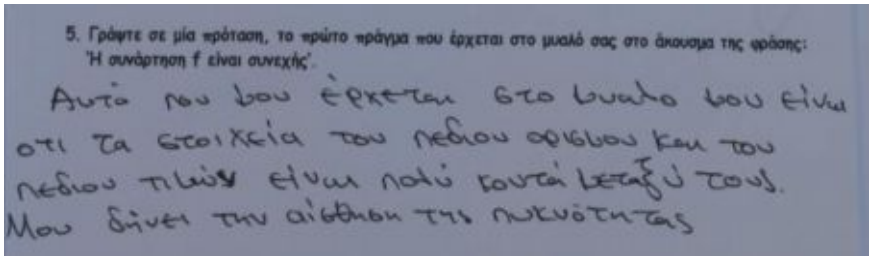
Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 εάν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ με $|x - x_0| < \delta$ και $x \in A$ έτσι ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον Απειροστικό Λογισμό Ι;

Η έννοια της συνέχειας στο Λύκειο

Δεν συνδέεται άμεσα. Στο Λύκειο είναι επιφανειακή και φαίνεται να μου έχει κανένα βάθος, ενώ στον Α.Π. Ι είναι πιο συνθετική και με μεγαλύτερο βάθος αν και πάλι δεν περνάει αυτό,

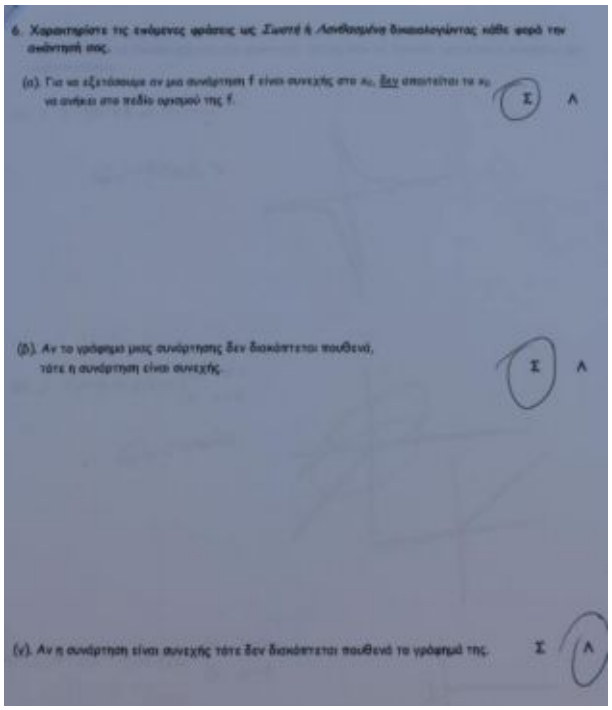
Ερ - Πολύ ωραίος εδώ ο ορισμός σου ...
Χ - … δεν σας κρύβω ότι κάθισα και τον σκέφτηκα λίγο για να τον βγάλω και ελπίζω να είναι σωστός.
Ερ – Θα τον σχολιάσουμε αργότερα.
Εδώ τώρα στο 4 λες …
(διαβάζω την απάντηση του) …
Θα ήθελες λίγο να μου εξηγήσεις περισσότερο την απάντηση σου εδώ;
Χ - Στο Λύκειο δεν έχουμε μάθει τον ορισμό κατ’ αρχήν σίγουρα, και τον συνδέουμε με το όριο, αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ άμα είναι ίσο με το $f(x_0)$, άμα υπάρχει αυτό το όριο τέλος πάντων είναι συνεχής σε αυτό το σημείο. Αυτό δεν λέει και πολλά όμως, το μαθαίνουμε απ’ έξω, το χρησιμοποιούμε κυρίως για τις ασκήσεις και εκεί τελειώνει. Αλλά δεν λέει και πολλά πράγματα. Στο βιβλίο από ότι θυμάμαι, επειδή είμαι και στο τέταρτο έτος και δεν θυμάμαι καλά, έτσι για να το νοιώσεις τι είναι η συνέχεια, νομίζω λέει ότι είναι σαν μία γραφική παράσταση και να μην βγάζουμε το μολύβι μας από το χαρτί. Αυτό είναι … ενώ τώρα στο μαθηματικό αυτός ο ορισμός κρύβει πολύ βάθος, δεν είναι τόσο επιφανειακός, αν και δεν μπορείς να τον αντιληφθείς από το πρώτο έτος. Δηλαδή, και πάλι μπαίνεις στο πρώτο έτος και είναι πολύ δύσκολο να …


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Αυτό που μου έρχεται στο μυαλό μου είναι ότι τα στοιχεία του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Μου δίνει την αίσθηση της πυκνότητας

Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα.
Τι θα έλεγες για το 5;
Χ - …(το διαβάζει)…
Βασικά, αυτό που μου έρχεται σαν αίσθηση είναι … ότι υπάρχει πυκνότητα ας πούμε (χαμογελάει).

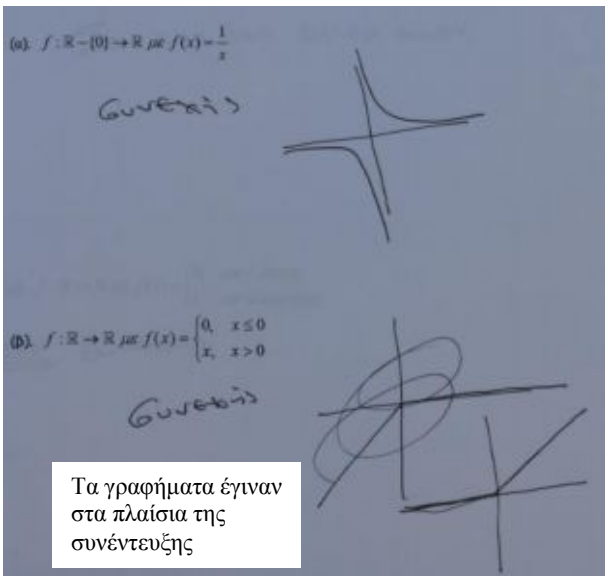
Ερ – Δηλαδή;
Χ - Ότι πάντα μπορείς να βρεις σημεία. Υπάρχουν … δεν ξέρω … αυτό που έρχεται σαν αίσθηση.
Ερ - Ωραία. Αυτό θέλω. Δεν με ενδιαφέρει να μου το μαθηματικοποιήσεις. Απλά θέλω να μου περιγράψεις λίγο πώς το αντιλαμβάνεσαι αυτό;
Χ - …εεε…
Ερ - Συνεχής συνάρτηση. Τι εικόνα σου φέρνει στο μυαλό σου;
Χ - Αυτό, αυτό δηλαδή, ότι είναι πολύ ισχυρό πράγμα η συνέχεια μιας συνάρτησης. Αυτό, αυτό που έρχεται σαν αίσθηση, ότι έχει μια πυκνότητα αυτό το πράγμα, η συνάρτηση.


6. Χαρακτηρίστε τις ενώμενες φράσεις ως *Σωστό* ή *Λανθασμένο* δικαιολογώντας κάθε φορά την ανάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

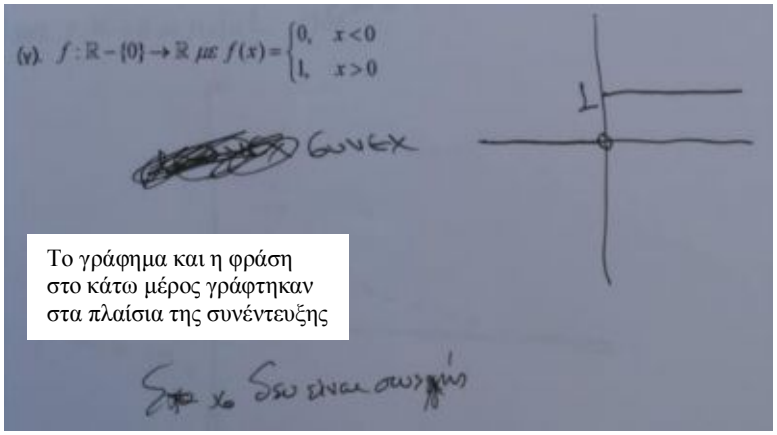
(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ



Τα γραφήματα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

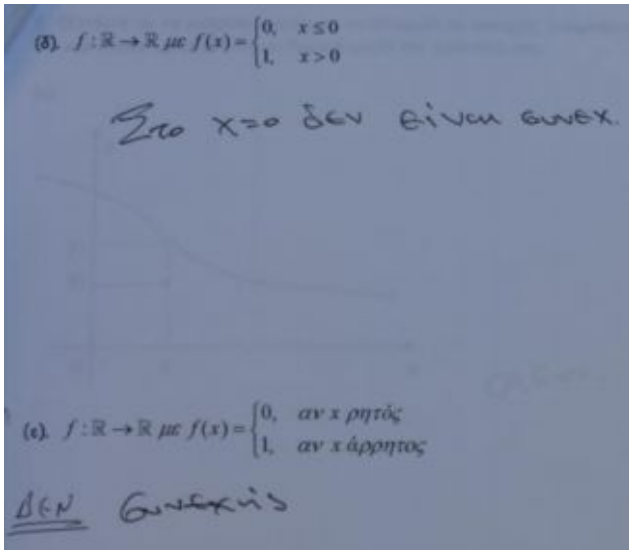
Ερ – Καλώς. Εδώ τώρα στο 6 λες … (διαβάζω) …
Χ - …ναι, γιατί μας ενδιαφέρει η περιοχή του x_0.
Ερ – Ωραία. Στο (β) τώρα λες … (διαβάζω) …
Χ - …ναι, σωστό, σωστό.
Ερ – Μάλιστα. Αν όμως … (διαβάζω το γ) … τότε λες ότι είναι λάθος. Γιατί; Σου έρχεται κάποιο αντιπαράδειγμα στο μυαλό;
Χ - Όχι. Αλλά το θυμάμαι σίγουρα ότι ισχύει αυτό (χαμογελάει).
Ερ – Εντάξει!
Χ - Τώρα δεν θυμάμαι να το αιτιολογήσω. Γιατί και πάλι δεν μας ενδιαφέρουν πεπερασμένα σημεία μας ενδιαφέρουν άπειρα. Κάτι τέτοιο δηλαδή … μας ενδιαφέρουν οι περιοχές των σημείων
Ερ – Α! Μάλιστα, κατάλαβα. Τώρα η 1/x λες ότι είναι συνεχής. Θα μπορούσες να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Χ – Ναι … (σχεδιάζει και σχολιάζει το διπλανό γράφημα)…Αυτή δεν είναι;
Ερ - Με βάση αυτό το γράφημα που έκανες, επιβεβαιώνεις ότι είναι συνεχής ή όχι;
Χ - …Μου φαίνεται πως ναι …
Ερ - Σε βοηθάει το γράφημα η …
Χ - …Όχι, δεν με βοηθάει (με απόλυτο τόνο).
Ερ – Γιατί; Τι σε χαλάει στο γράφημα;
Χ - (διστακτικά) Πιστεύω ότι το γράφημα πολλές φορές σε ξεγελάει… ξέρω εγώ …

Ερ - …σε αποπροσανατολίζει …
Χ - …ναι σε αποπροσανατολίζει, ναι.
Ερ - Αν υποθέσουμε ότι το γράφημα που έκανες είναι σωστό, τι πιστεύεις, συμφωνεί με αυτό που έχεις γράψει;
Χ – χμμμ … δεν ξέρω…το πρόβλημα είναι στο 0 φυσικά, αν είναι συνεχής στο 0. Σε όλα τα άλλα σημεία είναι συνεχής …ε…δεν είναι συνεχής στο μηδέν.
Ερ - Δηλαδή, θα την άλλαζες την απάντησή σου;
Χ - Ναι θα την άλλαζα.
Ερ - Λόγω του γραφήματος που βλέπεις;
Χ - Ναι αλλά σε συνδυασμό με τον ορισμό.
Ερ – Ωραία, δηλαδή …
Χ - … δηλαδή, πρέπει να έχουμε ως κριτήριο τον ορισμό για να μας βοηθήσει το γράφημα αλλιώς δεν έχω κριτήρια για να πω αν αυτό το γράφημα μου δίνει μία συνάρτηση συνεχής ή ασυνεχής.
Ερ - Κατάλαβα. Άρα μόνο από το γράφημα μπορείς να αποφανθείς; Μόνο από το γράφημα;
Χ – Όχι…ναι, ίσως αν είχα κάποια εμπειρία να μπορούσα. Εννοείτε χωρίς καθόλου τον ορισμό;
Ερ - Ναι. Τίποτα. Σου δίνω μόνο ένα γράφημα. Να για παράδειγμα κάτι σαν την 7(γ). Σου δίνω μόνο ένα σκέτο γράφημα. Σκέψου το κι όταν θα φτάσουμε εκεί το ξανασυζητάμε. Ας τώρα τη (β). Θα ήθελες πάλι να μου κάνεις τη γραφική παράσταση γι αυτήν;
Χ - … (σχεδιάσει αρχικά το γράφημα που φαίνεται στην προηγούμενη σελίδα μουτζουρωμένο. Στη συνέχεια αμέσως το σβήνει και φτιάχνει το σωστό και το σχολιάζει) …
Ερ - Να ρωτήσω τώρα πάλι το ίδιο. Το γράφημα που έκανες σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις γράψει δίπλα ή όχι;
Χ - Ναι μου το επιβεβαιώνει γιατί δεν διακόπτεται πουθενά ....
Ερ - … είναι δηλαδή μία συνεχόμενη γραμμή; …

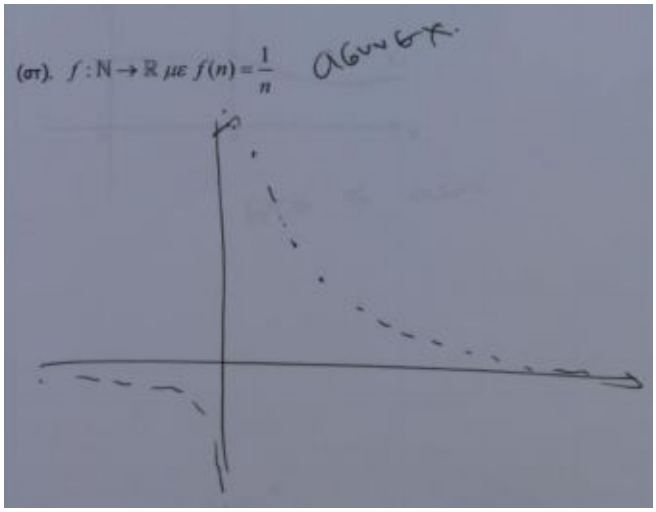


Χ - Μάλιστα.
Ερ - Άρα θα κράταγες την απάντηση που έχεις δώσει;
Χ – Ναι, θα την κράταγα.
Ερ - Ωραία. Η (γ); Θέλεις να δοκιμάσεις και εδώ να κάνεις τη γραφική παράσταση;
Χ - … (σχεδιάζει το διπλανό γράφημα)… Εδώ έχουμε πρόβλημα στο x=0 αλλά το 0 δεν είναι στο πεδίο ορισμού, αλλά αυτό δεν έχει καμία σχέση … εεε … μου φαίνεται ότι δεν είναι συνεχής στο μηδέν.
Ερ - Άρα πιστεύεις ότι πρέπει να αλλάξεις την απάντηση που έχεις γράψει ότι είναι συνεχής;
Χ – Ναι.
Ερ - Τι θα ήταν καλύτερο να έγραφες κατά τη γνώμη σου;
Χ - …τι θα ήταν καλύτερο … δεν ξέρω, δεν με βοηθάει η γραφική παράσταση.

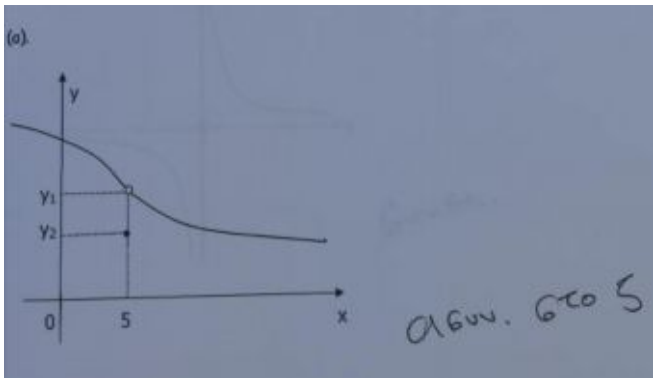
Ερ - Ωραία. Κοιτώντας τον τύπο μόνο;
Χ - Ναι, ναι.
Ερ - Θα άλλαζες κάτι;
Χ – Ναι … (με δισταγμό)…δεν ξέρω, δεν θα το άλλαζα.
Ερ - Άρα το αφήνουμε όπως είναι;



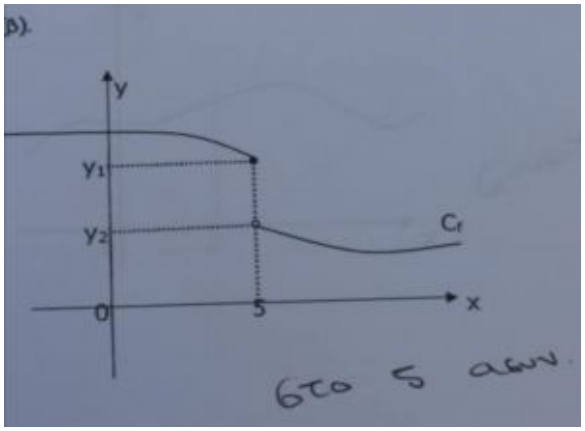
Χ - Ναι.
Ερ - Εντάξει. Εδώ τώρα στην (δ). Λες ότι στο x=0 δεν είναι συνεχής. Ουσιαστικά είναι …
Χ - …ναι σαν την προηγούμενη…
Ερ - … βλέπεις ποια είναι η διαφορά;
Χ – Ναι, το x=0. Ότι τώρα υπάρχει το x=0, είναι μέσα στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Και τώρα απαντάς ότι στο x=0 δεν είναι συνεχής. Σε τι διαφοροποιείται η απάντησή του από την προηγούμενη;
Χ - … δεν ξέρω …δεν θυμάμαι γιατί το έβαλα.
Ερ - Τώρα που το ξαναβλέπεις;
Χ - …
Ερ - Γιατί να υπάρχει άλλο αποτέλεσμα, άλλη απάντηση εδώ και άλλη απάντηση εκεί; Τι πιστεύεις;
Χ - …(με δισταγμό)… δεν ξέρω, δεν ξέρω, μάλλον λάθος έχω κάνει.
Ερ - Πιστεύεις δηλαδή ότι θα έπρεπε να αλλάξεις κάποιο από τα δύο τώρα που τα βλέπεις σε συνδυασμό ;
Χ - Πιστεύω ότι ή και οι δύο θα είναι συνεχείς ή και οι δύο δεν θα είναι συνεχείς σε αυτό το σημείο. Δηλαδή δεν έχει σημασία αν ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Άρα, αν θα έπρεπε να αλλάξεις μία από τις δύο ποια θα άλλαζες;
Χ - …
Ερ - Αν νομίζεις ότι πρέπει να αλλάξεις κάποια.
Χ - Αυτήν εδώ (δείχνει την (γ)). Θα έλεγα ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία. Ας το γράψουμε. Άρα γράφουμε εδώ ότι 'στο x_0 δεν είναι συνεχής' (βλέπε φωτογραφία προηγούμενης σελίδας). Συμφωνείς;
Χ - Ναι.
Ερ - Την (δ) την αφήνουμε όπως είναι;
Χ - Ναι.
Ερ - Ωραία. Στην (ε) τώρα. Λες ότι είναι συνεχής.
Χ – ναι … εμμμ …. γιατί το έβαλα αυτό τώρα …δεν θυμάμαι γιατί το έβαλα αυτό.
Ερ - Τώρα που το κοιτάζεις θα άλλαζες κάτι;
Χ - Δεν μπορώ να πω τίποτα γι' αυτήν. Δεν ξέρω.
Ερ – (γελώντας) στην τύχη;!;
Χ – (χαμογελάει)… Μου φαίνεται ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ - Άρα να βάλουμε ένα 'Δεν';
Χ – (με σιγουριά) ναι, ναι!



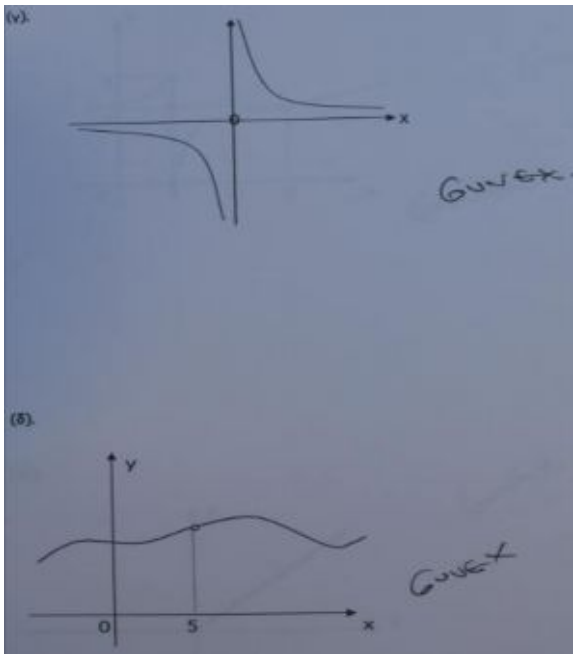
Ερ – Η επόμενη, η (στ);
Χ - … η επόμενη …
Ερ – Λες ασυνεχής. Θα μπορούσες να κάνεις τη γραφική παράσταση;
Χ – Ναι … (σχεδιάζει το διπλανό γράφημα) … Είναι σαν την 1/x άλλα μόνο που έχει κουκίδες.
Ερ - Ωραία κατάλαβα. Τώρα που βλέπεις το γράφημα σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις γράψει;
Χ - Δεν μου λέει κάτι. Δεν με βοηθάει, απλά δεν με βοηθάει. Είναι το ίδιο.
Ερ - Δηλαδή κοιτάζοντάς τη ξανά συνεχίζεις να πιστεύεις ότι είναι …
Χ - … ναι είναι ασυνεχής.
Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στο (α) λες ασυνεχής στο 5. Γιατί;
Χ - … (το κοιτάζει αρκετή ώρα) …
Ερ - Με τον ορισμό του Λυκείου, με ότι ξέρεις από το Πανεπιστήμιο, με την αίσθηση σου, δεν ενδιαφέρει ότι και αν χρησιμοποιήσεις. Απλά πώς πιστεύεις ότι θα μπορούσες να το δικαιολογήσεις αυτό, ότι είναι ασυνεχής στο 5;



Χ – Από αυτό εδώ το y_2, y_1.
Ερ - Δηλαδή, αν ήθελες λίγο να το μαθηματικοποιήσεις, τι είναι αυτό που σε χαλάει;
Χ – … εεε …
Ερ - Έχεις ας πούμε ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου και του κάνεις μάθημα. Του δίνεις αυτό το γράφημα και θες να του εξηγήσεις ότι δεν είναι συνεχής στο 5. Τι θα του έλεγες;
Χ - … (το κοιτάζει πάλι αρκετή ώρα) …με χαλάει βασικά αυτό το κενό που υπάρχει εδώ πέρα.
Ερ - Εννοείς το κενό ανάμεσα στην κουκίδα και στο υπόλοιπο γράφημα;
Χ – Ναι, ναι. Ότι δεν μπορεί να πλησιάσει όσο θέλουμε …(διστάζει)

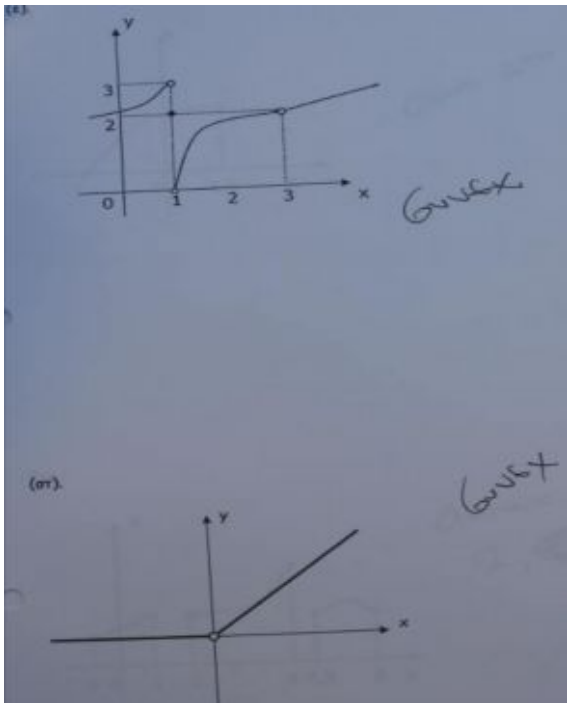


Ερ - Η τιμή, το γράφημα; Τι ακριβώς εννοείς;
Χ - Οι τιμές μεταξύ τους δεν μπορούν να πλησιάσουν όσο θέλουμε.
Ερ – Οι y_2, y_1 ;
Χ – Ναι.
Ερ – Σε αυτή την περίπτωση, στο (β);
Χ - Και σε αυτή το ίδιο σκέφτηκα.
Ερ – Πάλι λόγω της απόστασης που υπάρχει ανάμεσα στα …
Χ - …ναι, ναι, ανάμεσα στα y_2, και y_1

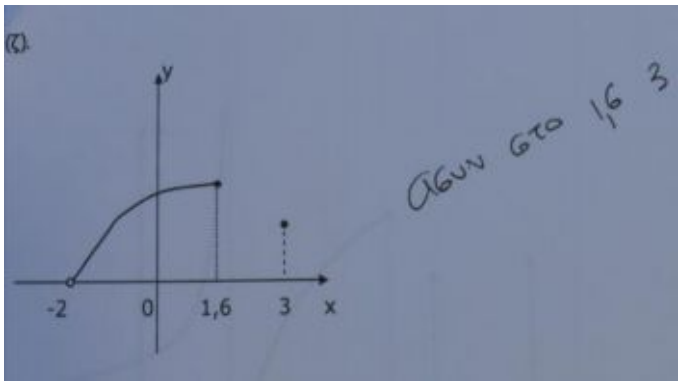


Ερ – Ωραία. Αυτή τώρα λες ότι είναι συνεχής ...
Χ - … Α! ναι. Είναι αυτή που είδαμε πριν ...
Ερ - … ναι η 1/x. Και νομίζω ότι μου είχες πει εκεί ότι ήταν συνεχής.
Χ – Ναι.

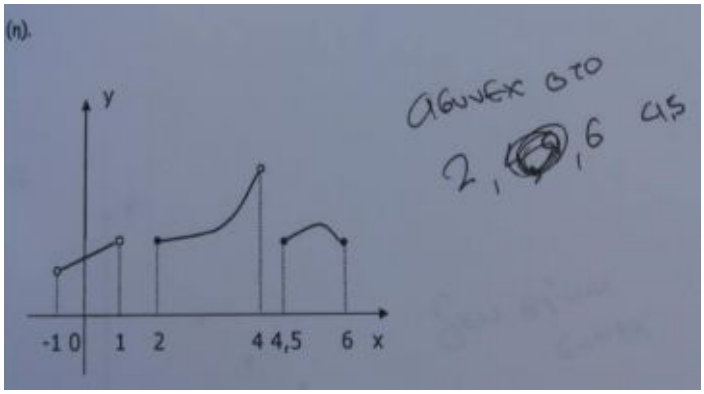
Ερ – Στη (δ) λες επίσης συνεχής. Στο 5 που έχει το κενό σε χαλάει;
Χ - Όχι, δεν με χαλάει.
Ερ - Γιατί;
Χ – (γελάει) ε! Τι να με χαλάει. Ένα σημείο είναι μόνο!
Ερ – Α!



Ερ - Ωραία. Εδώ λες συνεχής.
Χ - … (το κοιτάζει προσεκτικά)… συνεχής ε;
Ερ - Θα άλλαζες κάτι στην απάντησή σου;
Χ - Ναι. Τώρα θα έλεγα ότι δεν είναι συνεχής….
Ερ - Ότι δεν είναι;
Χ - Ναι, δεν είναι στο 1.
Ερ – Δεν είναι στο 1. Γιατί;
Χ - …γιατί…γιατί υπάρχει αυτό το κενό εδώ πέρα.
Ερ – Ωραία. Αυτή τώρα τη (στ) τη λες συνεχή.
Το κενό που υπάρχει…
Χ - … ναι με την ίδια λογική δεν με χαλάει το κενό που υπάρχει, ένα σημείο είναι μόνο.



Ερ - Ωραία. Δεν σου χαλάει το κενό. Αυτή τώρα τη (ζ) λες ότι είναι ασυνεχής στο 1,6 και στο 3.
Χ – Ναι.
Ερ – Γιατί;
Χ - … Δεν ξέρω ακριβώς τι με χάλασε… επειδή σταματάει εδώ πέρα … μάλλον … δεν ξέρω ακριβώς τι είναι αυτό που με χάλασε. Δηλαδή, δεν με βοηθάει σε τίποτα το γράφημα.



Ερ - Δηλαδή άμα βλέπεις μόνο το γράφημα τι αίσθηση σου δημιουργεί; Για παράδειγμα γιατί απαντάς ότι είναι ασυνεχής στο 1,6 αλλά δεν λες το ίδιο και για το -2; Ή για να το πω καλύτερα ας δούμε το επόμενο γράφημα το (η). Λες ότι είναι ασυνεχής στο 2, στο 6 και στο 4,5. Ας πούμε, γιατί δεν λες ότι είναι ασυνεχής και στα τέσσερα; Ή και στο 1 ή στο -1; Τι διαφορά σου κάνει το 4 από το 4,5;

Χ - …(την ξανακοιτάει)… βασικά …εεε…επειδή εδώ πέρα δεν υπάρχει στο πεδίο ορισμού, δεν ξέρω γιατί το σκέφτηκα έτσι, πρέπει να είναι συνεχής εκεί πέρα γιατί δεν υπάρχει αυτό…

Ερ - Άρα εδώ πέρα δεν σε νοιάζει τι είναι;

Χ - Ναι.

Ερ - Δηλαδή ας πούμε στο 4 είναι συνεχής;

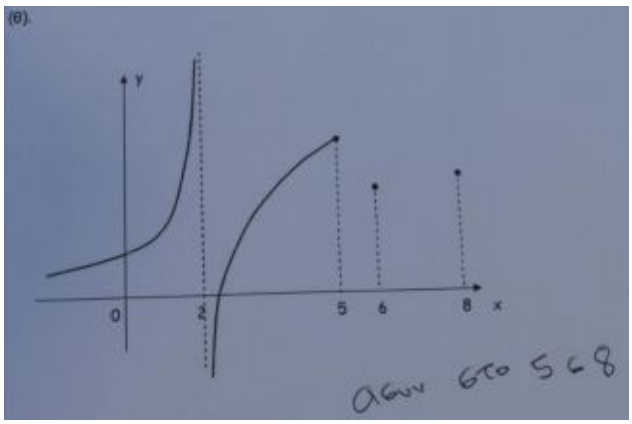
Χ - Ναι.

Ερ - Στο 1, στο -1;

Χ - Ναι.

Ερ - Είναι συνεχής έτσι; Αν κατάλαβα καλά.

Χ – Ναι, αλλά μάλλον λάθος είναι αυτό που λέω.

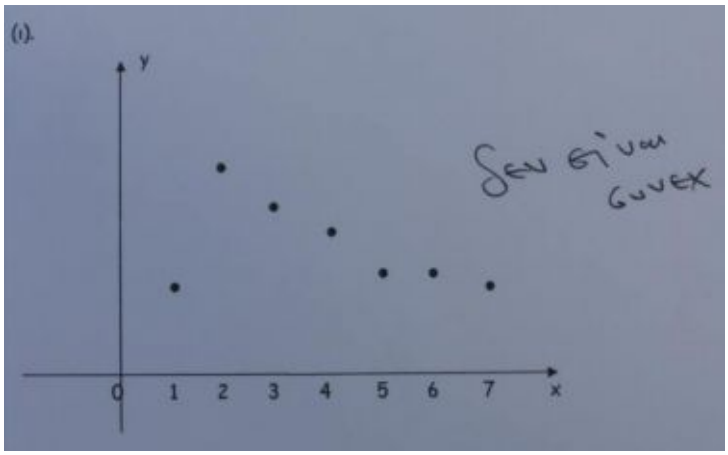


Ερ - Όχι, όχι μην παρασύρεσαι από τις ερωτήσεις μου. Εγώ θέλω την αίσθησή σου ποια είναι.

Χ - Η αίσθησή μου είναι αυτή, ότι είναι.

Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα λες ότι είναι συνεχής στο 5 στο 6 και στο 8. Το 2 σου δημιουργεί κάποιο πρόβλημα; Κάποιο προβληματισμό;

Χ - … είναι σαν την 1/x μου φαίνεται…



Ερ – Και άρα; Σύμφωνα με την προηγούμενη απάντησή σου …

Χ - … ναι, είναι συνεχής δεν αλλάζει κάτι.

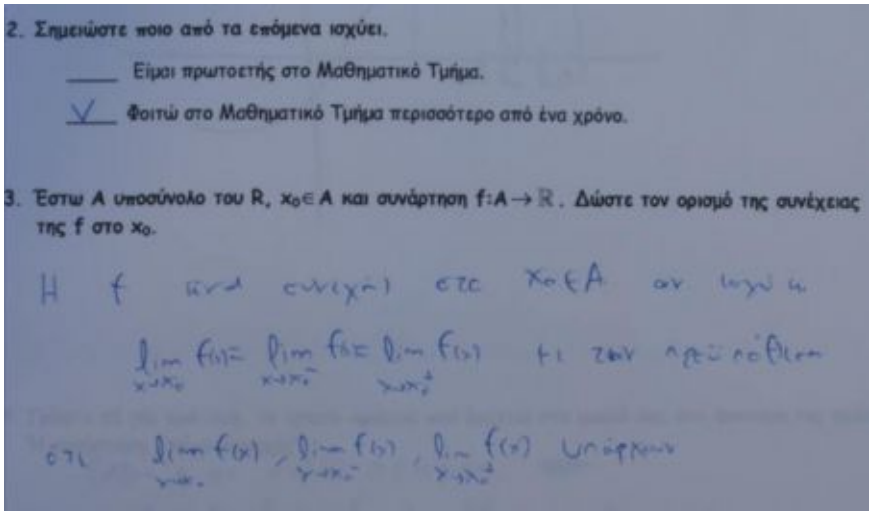
Ερ - Και η τελευταία τώρα λες ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;

Χ - Γιατί είναι μεμονωμένα σημεία … ξέρω εγώ;

Ερ – Πολύ ωραία! Σε ευχαριστώ!

12η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Τζόν’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

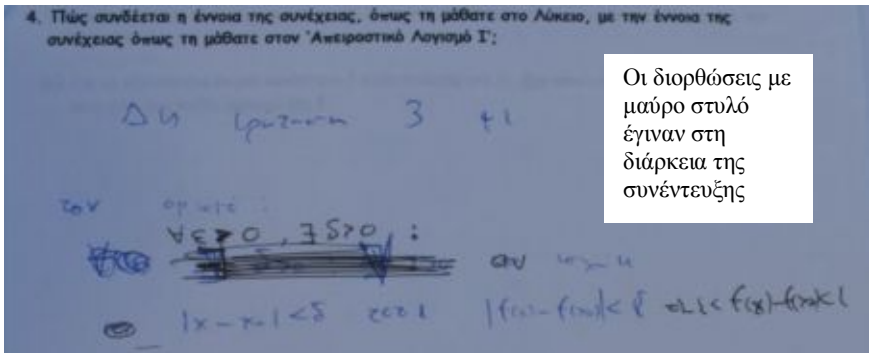

2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

V Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

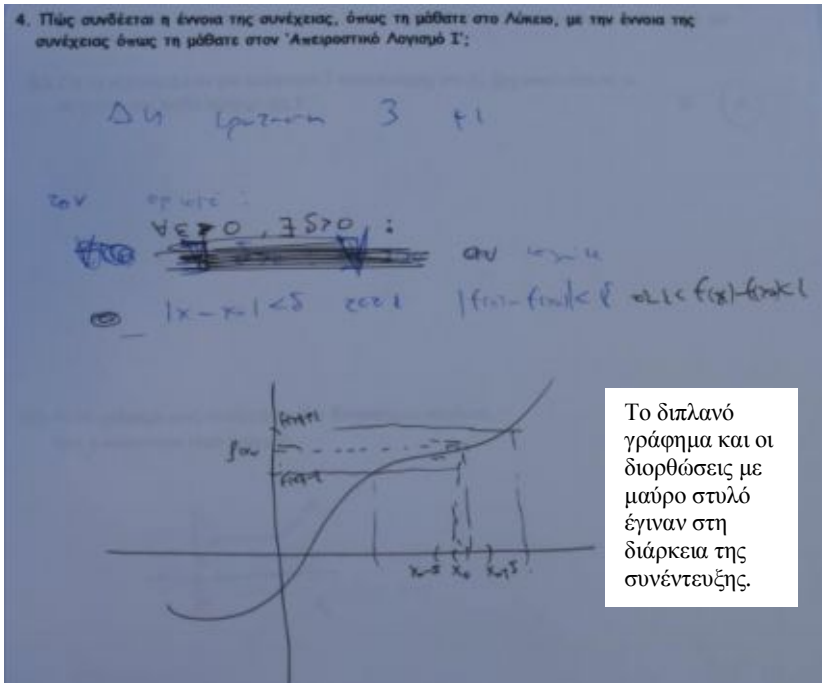
Ερ - Δεν θα ρωτήσω τώρα κάτι πάνω στον ορισμό. Θα γυρίσω στο τέλος.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον ‘Απειροστικό Λογισμό Ι’;

Οι διορθώσεις με μαύρο στυλό έγιναν στη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα. Θα άλλαζες κάτι σε αυτό που έχει γράψει;

Τ – Όχι. Βασικά ναι, θα άλλαζα εδώ τη σειρά (δείχνει τους ποσοδείκτες), θα έβαζα αυτό πρώτα (κάνει τη διόρθωση που φαίνεται δίπλα).

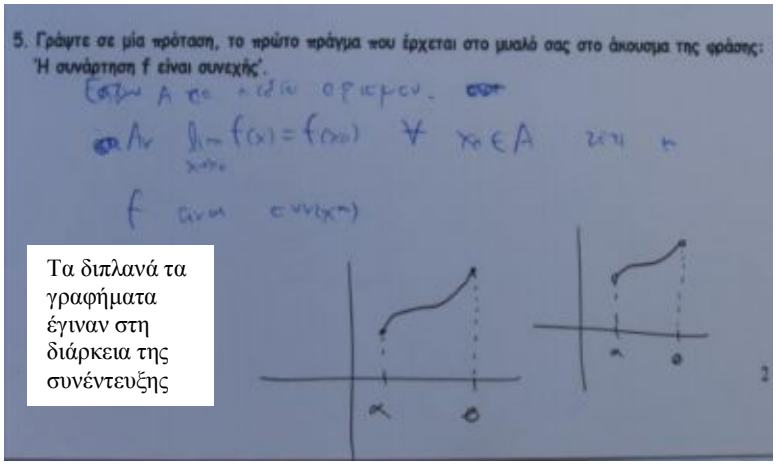

4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον ‘Απειροστικό Λογισμό Ι’;

Το διπλανό γράφημα και οι διορθώσεις με μαύρο στυλό έγιναν στη διάρκεια της συνέντευξης.

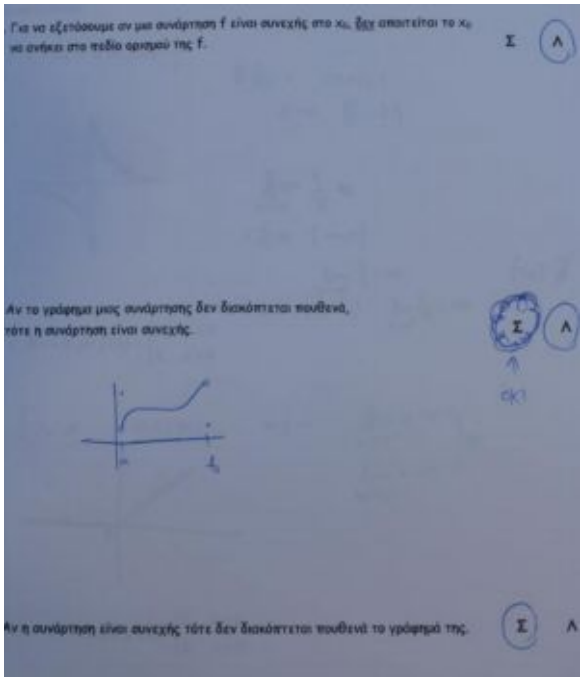
Ερ - Ωραία. Τώρα στο 4 θα έκανες πάλι την ίδια διόρθωση;

Τ – Ναι, ναι είναι ακριβώς το ίδιο.

Ερ - Ωραία δεν θα το σχολιάσω παραπάνω γιατί βλέπω ότι ξαναγράφεις τον ορισμό. Θα το δούμε πάλι στο τέλος.

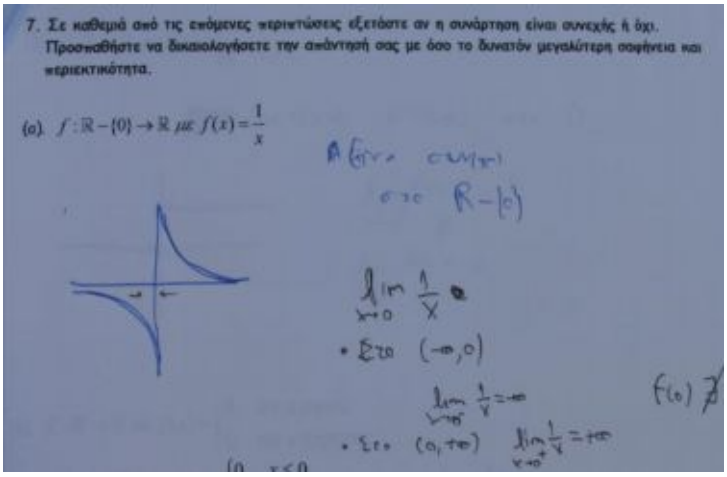


Ερ – Στο 5 τώρα λες (διαβάζω την απάντηση του). Άρα είναι ο ορισμός του Λυκείου. Σαν εικόνα τι σου έρχεται στο μυαλό;
Τ - Σαν εικόνα;
Μου έρχεται ένα διάστημα α, β και μια γραμμή που ξεκινάει από το f(a) και να τελειώνει στο f(b).
Ερ - Δηλαδή κάτι σαν κι αυτό; (Φτιάχνω το γράφημα που φαίνεται επάνω στα αριστερά)
Τ - Είναι, και να μην υπάρχουν ανοιχτά, να είναι στην άκρη κλειστά, έτσι δεν πρέπει;
Ερ – Α! Μια και το ρώτησες αυτό, αν ήταν ανοιχτό στο α ή στο β, θα σε χάλαγε αυτό;
Τ - Εκεί δεν ξέρω αν μπορούμε να εξετάσουμε τη συνέχεια.
Ερ – Κατά τη γνώμη σου; Αν έπρεπε εσύ να αποφασίσεις;
Τ - Αν ήταν στο α ανοιχτό έτσι; Βασικά … αν ισχύει ότι η τιμή του f(a) …
Ερ - …ανοιχτό στο α…
Τ - …άρα δεν υπάρχει. Εκεί μόνο πλευρικά μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο.
Ερ - Δηλαδή μία τέτοια γραμμή … (κάνω το γράφημα που φαίνεται επάνω δεξιά) … θα ήταν συνεχής, σου δίνει την εικόνα συνεχούς συνάρτησης;
Τ - Δεν νομίζω γιατί από τον ορισμό που έγραψα πριν … (διαβάζει τον ορισμό που έχει γράψει) … εφόσον δεν ανήκει το α στο πεδίο ορισμού πως θα εξετάσω τη συνέχεια, πώς θα βρω την τιμή f(a);

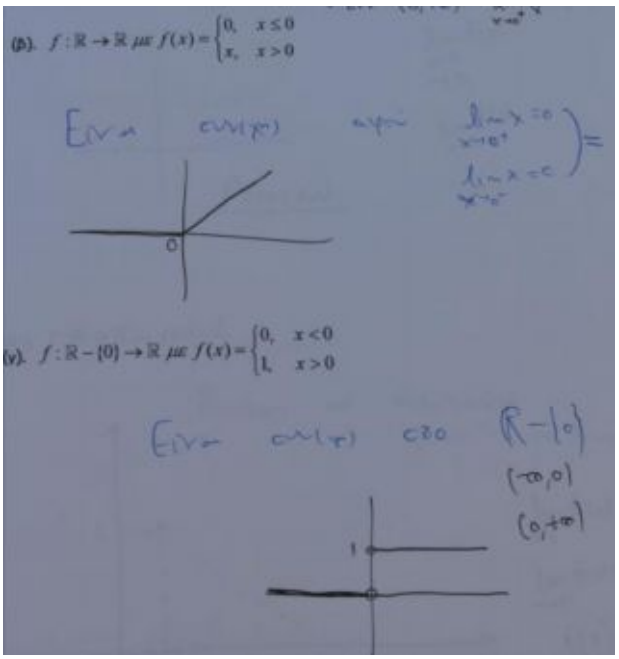


Ερ – Ωραία. Δηλαδή αυτή η γραμμή αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση;
Τ - Αν το εξετάσουμε στο (a,b) πιστεύω ότι είναι συνεχής.
Ερ – Στο ανοιχτό. Αν πάμε στο $[a,b]$;
Τ – Και πάλι.
Ερ - Θα είναι συνεχής;
Τ – Για συνεχής μου φαίνεται εμένα.
Ερ – Συνεχής, στο ανοιχτό, στο κλειστό ή και στα δύο;
Τ - Όπως το βλέπουμε εδώ.
Ερ - Όπως το βλέπουμε εδώ. Ωραία, δηλαδή το 'όπως το βλέπουμε εδώ' τι σημαίνει για σένα;
Τ – Ότι τα α, β δεν ανήκουν στο διάστημα (a,b).
Ερ - Ωραία. Στο επόμενο τώρα, στο (α) λες λάθος. Άρα εννοείς ότι για να εξετάσουμε τη συνέχεια σε ένα σημείο …
Τ - …αυτό απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Ερ - Εδώ τώρα στο (β) λες ότι αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά τότε η συνάρτηση είναι συνεχής και λες ότι αυτό είναι λάθος. Έτσι; Αυτό που έχεις κάνει μετά είναι κάτι σαν αντιπαράδειγμα;
Τ – Ναι, το έγραψα σαν αντιπαράδειγμα.
Ερ - Αυτή είναι συνεχής;
Τ – Όχι, αλλού είναι το f(b) και αλλού το όριό της.
Ερ - Άρα έχεις πάρει το γράφημα μιας συνάρτησης …
Τ - …Α! Εγώ κατάλαβα το ότι 'δεν διακόπτεται πουθενά' ότι από το α μέχρι το β δεν υπάρχει κάποιο διάστημα που να μην ορίζεται …
Ερ - … κάποιο κενό δηλαδή. Α! μάλιστα, κατάλαβα…
Τ - … να κόβεται δηλαδή και μετά να ξεκινάει από κάπου αλλού.
Ερ - Ωραία. Τώρα κατάλαβα. Δηλαδή αν έχουμε ένα τέτοιο γράφημα, που να μη διακόπτεται πουθενά, η συνάρτηση είναι συνεχής;
Τ - Έκανα λάθος γι' αυτό το λόγο. Τώρα …
Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα;
Τ - Δεν είναι συνεχής αυτή. Γιατί το όριο στο α θα είναι διαφορετικό από το f(a) και το όριο στο b είναι διαφορετικό από το f(b) άρα έχουμε πρόβλημα στα α και στο β.



Δεν είναι συνεχής για δύο σημεία. Γιατί ορίζεται η συνάρτηση στα α και β.
Ερ - Ωραία στο επόμενο τώρα λες ότι αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά. Δεν έχω κάτι να ρωτήσω σε αυτό. Στο 7(α) τώρα λες ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ *και έχεις κάνει και τη γραφική παράσταση. Θα ήθελα να σε ρωτήσω, το γράφημα σε βοηθάει να επιβεβαιώσεις αυτό που έχεις γράψει …*



Τ - … Πάρα πολύ, πάρα πολύ. Το γράφημα με βοηθάει πάρα πολύ. Οπότε κάνουμε άσκηση στα μαθηματικά και μπορώ να κάνω γράφημα το κάνω γιατί με βοηθάει να καταλαβαίνω καλύτερα.
Ερ - Μάλιστα. Έτσι εδώ τώρα το γράφημα σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις γράψει πιο πάνω ότι είναι δηλαδή συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$*;*
Τ - Ναι αν εξετάσουμε αυτήν στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ τότε είναι συνεχής. Βέβαια τώρα που το ξανασκέφτομαι αν πάρω το όριο αυτής στο 0 θα βγει άπειρο. Για να το

γράψω … (γράφει τις σχέσεις που φαίνονται παραπάνω και τις σχολιάζει) … επιπλέον δεν υπάρχει, δεν ορίζεται το f(0), και ούτε τα πλευρικά συμπίπτουν άρα δεν είναι συνεχής.

Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στη (β). Τι λες;

Τ – Ναι, … (τη διαβάζει) …Ναι, είναι συνεχής. Δεν διακόπτεται αυτή.

Ερ – Το γράφημα σου επιβεβαιώνει την απάντηση;

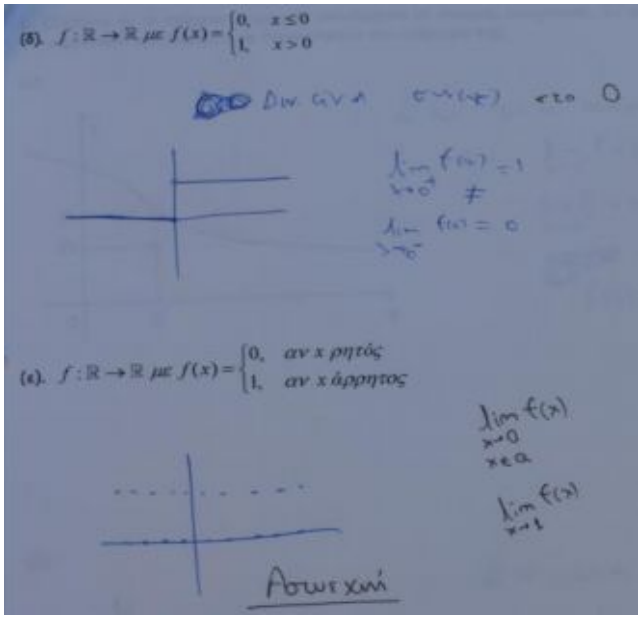
Τ - Ναι ,ναι.

Ερ – Ωραία. Στο από κάτω τώρα τη (γ).

Τ - …(το διαβάζει και σιγομουρμουρίζει) …

Ερ – Λες είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

Τ – Ναι, αν την εξετάζαμε, αυτό που λέω εγώ δηλαδή, αν την εξετάζαμε σε διάστημα του πεδίου ορισμού της … Αν την εξετάζαμε στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της τότε αυτή είναι συνεχής.



Ερ - Ωραία. Σε αυτήν τώρα τη (δ), τι αλλάζει σε σχέση με την προηγούμενη;

Τ - Εδώ; Το όριο της συνάρτησης από αριστερά. Δεν συμπίπτει. Το πεδίο ορισμού είναι όλο το R έτσι;

Ερ – Ναι.

Τ - Το πλευρικό όριο από αριστερά είναι 0 ενώ από δεξιά είναι 1. Και δεν συμπίπτουν αυτά.

Ερ - Ωραία. Συμφωνώ. Άρα τι θα απαντούσες για αυτήν;

Τ - Δεν είναι συνεχής γιατί δε συμπίπτουν.

Ερ - Γενικά δεν είναι συνεχής ή δεν είναι συνεχής σε εκείνο το σημείο;

Τ - Στο σημείο αυτό, στο σημείο 0. Δεν είναι συνεχής στο μηδέν.

Ερ - Ωραία. Ας το προσθέσουμε αυτό εδώ … (το γράφω αυτό δίπλα από την απάντησή του) … Αλλά ουσιαστικά είναι η ίδια απάντηση με πριν έτσι δεν είναι; Σου φαίνεται να είναι σωστό αυτό; Δεν σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο λάθος απλά ρωτάω, σου φαίνεται λογικό να έχεις την ίδια απάντηση;

Τ – Να έχουμε την ίδια απάντηση … ναι τι πρόβλημα να έχουμε, δεν πειράζει.

Ερ – Ωραία. Πάμε τώρα στην (ε).

Τ - Εδώ είμαστε!

Ερ - Τι πιστεύεις γι αυτήν; Τι αίσθηση σου δημιουργεί; Βλέπω έχεις κάνει …

Τ – … μια έτσι, μια απεικόνιση …

Ερ - … ναι, συμφωνώ απόλυτα. Αυτή τώρα πιστεύεις ότι είναι …

Τ - … ασυνεχής …

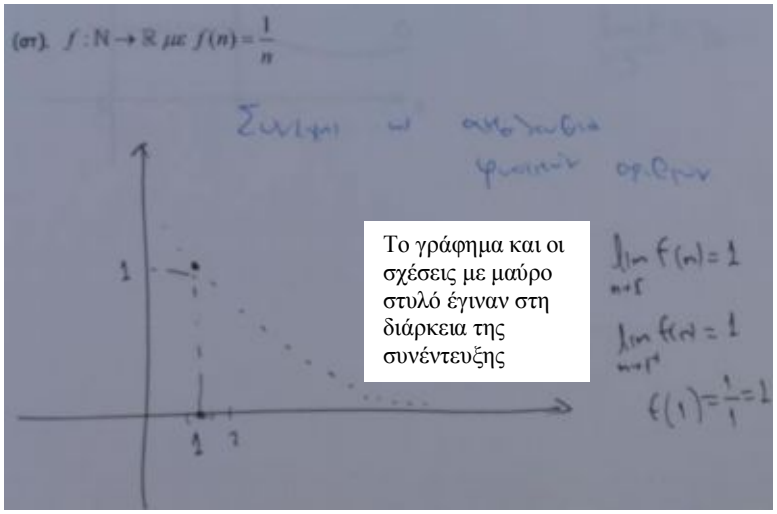
Ερ - … ασυνεχής. Γιατί;

Τ - Ας πούμε, οι ρητοί και οι άρρητοι είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα που περιέχονται στο R …εεε …τι άλλο. Αν προσπαθήσω να πάρω το όριο …(γράφει) …

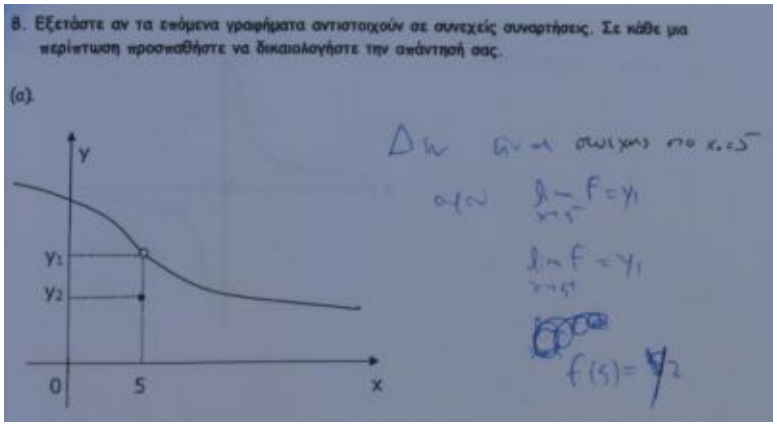
Ερ – … δεν θέλω να μου το αποδείξεις ….

Τ - … όχι, όχι, απλά προσπαθώ να σκεφθώ. Δεν ξέρω, δεν μπορώ τώρα να εξετάσω τη συνέχεια.

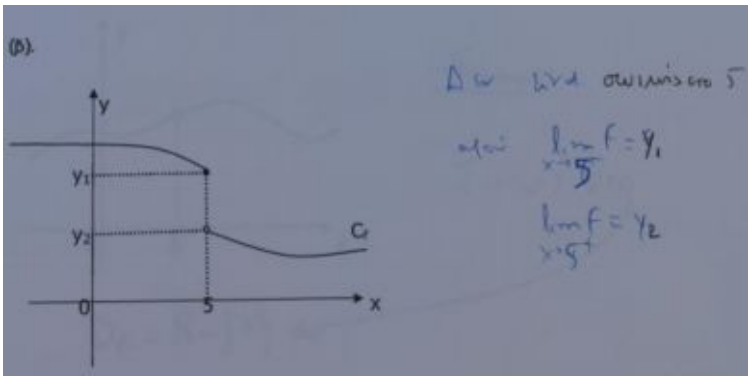
Ερ - Ωραία. Πάντως τι θα έλεγες για τη συνάρτηση. Τι είναι;
Τ - Ασυνεχής, σίγουρα ασυνεχής.



Ερ - Ωραία. Πάμε τώρα στην (στ). Λες ότι είναι συνεχής ως ακολουθία φυσικών. Θες να δοκιμάσεις να κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;
Τ – Ναι, η 1/ν ας πούμε … πώς πάει αυτή τώρα … κάπως έτσι είναι, κατεβαίνει … (κάνει το διπλανό γράφημα) …όσο μεγαλώνει το ν θα πλησιάζει προς το 0.
Ερ - Ωραία. Και λες 'συνεχής ως ακολουθία φυσικών αριθμών' …
Τ - … ναι, γιατί το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{N}$. Οπότε το $\mathbb{N}$ εξ' ορισμού είναι οι φυσικοί αριθμοί, διακριτοί δηλαδή. Οπότε αν εξετάζω σε ένα … όχι … λάθος είναι … λάθος πρέπει να έχω κάνει. Γιατί αν πάρω ας πούμε ένα σημείο το 1 και εξετάσω εδώ τα πλευρικά όρια, σε μια περιοχή αυτού του σημείου, ίσως να μην μπορέσω να βρω, όχι δεν βρίσκω το ίδιο … μπερδεύομαι, δεν ξέρω!
Ερ - Τι αίσθηση σου δημιουργεί;
Τ - Ότι υπάρχουν διαστήματα συνέχειας …
Ερ - … δηλαδή θα άλλαζες την απάντηση; Πιστεύεις ότι πρέπει να αλλάξει η απάντηση;
Τ - … το όριο από δεξιά και από αριστερά … ίσως να την άλλαζα. Να πω γιατί;
Ερ - Φυσικά!
Τ - Αν εδώ είναι το 1 που αντιστοιχεί επίσης στο 1, τότε … (γράφει τις σχέσεις που φαίνονται παραπάνω και τις σχολιάζει) … Επειδή είναι το ν φυσικός αν ας πούμε πάρουμε το 2, μπορούμε να πάρουμε μια περιοχή που να μην περιέχει αυτό τον αριθμό, δεν ξέρω αν καταλαβαίνετε τι εννοώ … δεν … δεν είμαι σίγουρος …
Ερ – Τι θα διάλεγες τελικά;
Τ – Συνεχής θα διάλεγα, συνεχής.
Ερ - Το γεγονός ότι έχεις κουκίδες σου θυμίζει λίγο την προηγούμενη;
Τ - Ναι αλλά αυτή είναι δίκλαδη, ρητοί και άρρητοι ενώ εδώ είμαστε στους φυσικούς.

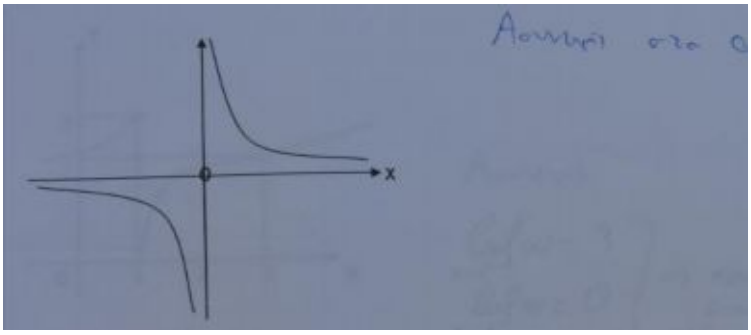


Ερ - Αυτό πιστεύεις κάνει τη διαφορά;
Τ - Ναι σίγουρα.
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στο 8(α) λες … (διαβάζω την απάντηση του) … άρα χρησιμοποιείς τον ορισμό του Λυκείου έτσι;
Τ - Ναι.
Ερ - Άρα εννοείς ότι δεν είναι συνεχής στο 5;
Τ - Ναι. Στο 5.

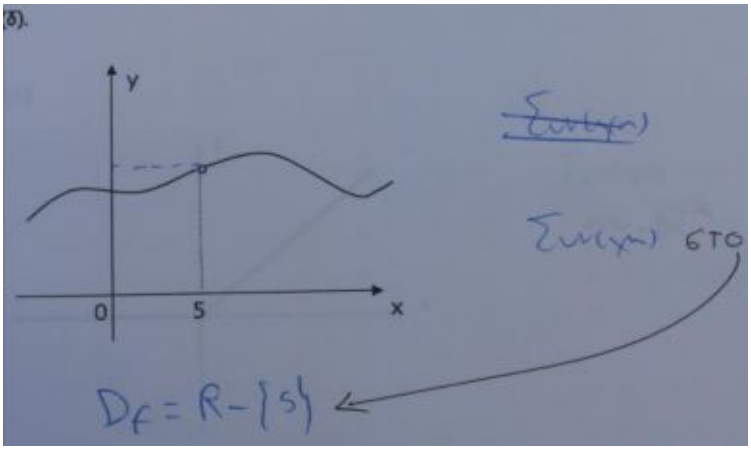


Ερ – (το σημειώνω στην απάντησή του)

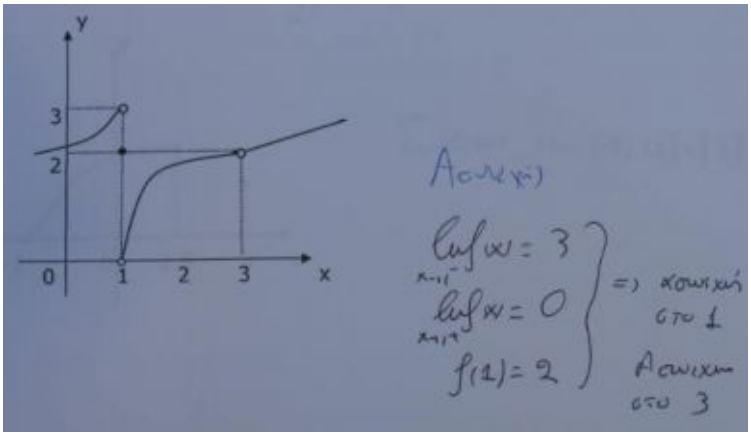
Ερ – Ωραία. Και εδώ υποθέτω το ίδιο έτσι;
Τ - Ναι.



Ερ – Εδώ τώρα λες ασυνεχής στο 0.
Τ - Ναι, αυτή είναι που είχαμε γράψει και πιο πριν.

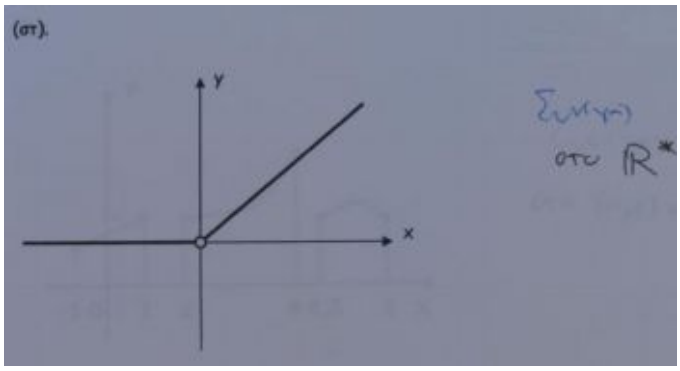


Ερ – Σωστά. Εδώ τώρα στο (δ) λες συνεχής. Σε χαλάει η τρύπα που υπάρχει στο 5;
Τ - Ναι, γιατί είπαμε πριν ότι είναι συνεχής αν δεν διακόπτεται.
Ερ – Α, μάλιστα. Αλλά …
Τ - … ναι, αλλά έχω κάνει το ίδιο όπως πριν, ότι εξετάζω σε διαστήματα. Άρα είναι συνεχής στο διάστημα που έχω γράψει.

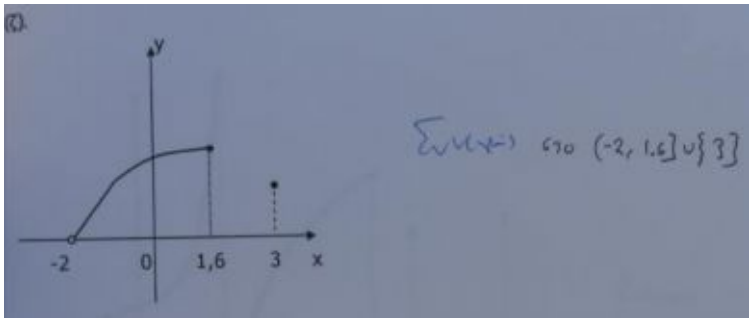


Ερ – Εδώ τώρα στην (ε) λες ασυνεχής. Τι σε χαλάει εδώ;
Τ - Το όριο από αριστερά είναι 3 από δεξιά είναι 0 και …
Ερ - … μιλάς για το όριο στο 1 ε; Ας το γράψουμε εδώ … (γράφει και σχολιάζει τις σχέσεις που φαίνονται δίπλα) …Άρα;
Τ – Είναι ασυνεχής στο 0.
Ερ – Στο 3;

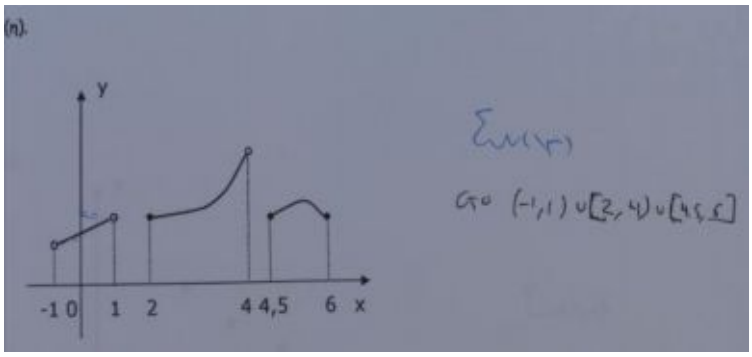
Τ – Και στο 3.
Ερ - Γιατί; Για τον ίδιο λόγο;
Τ - Γιατί δεν υπάρχει το f(3).



Ερ – Ωραία.
Τ - Πάλι εδώ (δείχνει τη (στ)) συνεχής.
Ερ - Πού;
Τ – Στο $\mathbb{R}^*$.
Ερ – Ωραία.

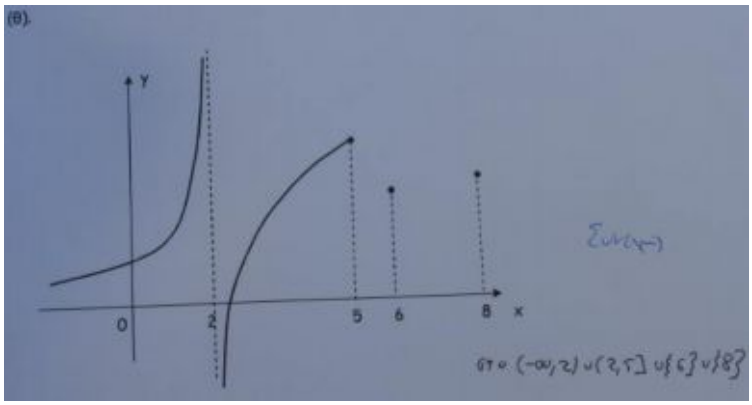


Ερ – Και εδώ στη (ζ) λες συνεχής. Πού;
Τ – Συνεχής … ναι … στο πεδίο ορισμού της θα έλεγα εδώ.
Ερ - Δηλαδή πού;
Τ – Δηλαδή στο
$(-2,\ 1.6]\cup\{3\}$
Ερ - Δηλαδή μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο απλά;
Τ - Ναι γιατί όταν εξετάζω … όταν λέμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 λέμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ να ισούται με το $f(x_0)$ οπότε σε ένα σημείο επικεντρώνουμε την προσοχή.
Ερ - Σε χαλάει που δεν ενώνονται αυτά μεταξύ τους;
Τ - Ναι, κάπως να.
Ερ - Όχι ότι κατ' ανάγκη πρέπει. Έτσι απλά σαν σχήμα κάπως σε ενοχλεί; Θα άλλαζε την απάντησή σου αυτό;

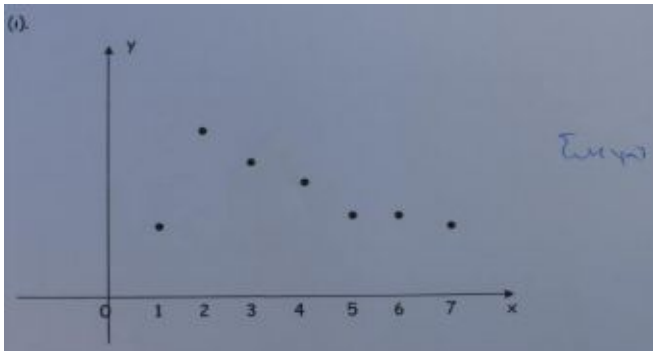


Τ - Όχι, σε αυτή την απάντηση όχι.

Ερ – Πάλι εδώ στην (η) λες συνεχής. Πού;
Τ – συνεχής πάλι στο
$(-1,1)\cup[2,4)\cup[4.5,6]$
Δηλαδή στα διαστήματα που αυτή ορίζεται.

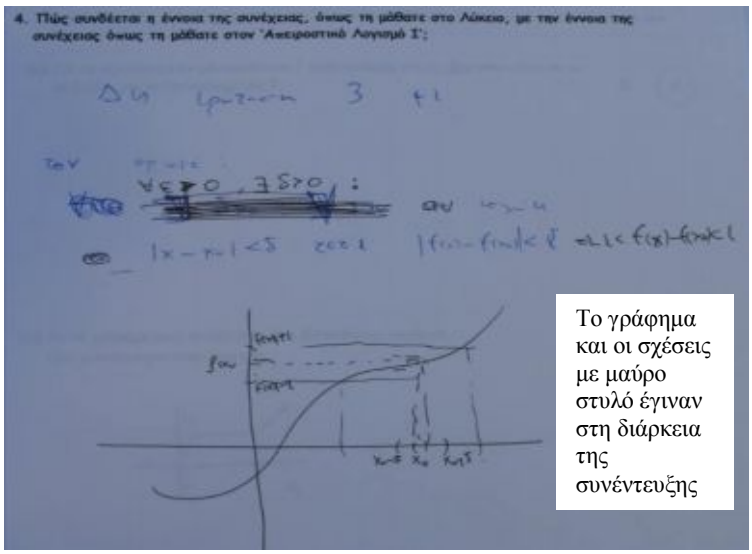


Ερ - Ωραία. Και αυτή λες ότι είναι συνεχής.
Τ – Ναι, είναι συνεχής στο
$(-\infty,2)\cup(2,5]\cup\{6\}\cup\{8\}$



Ερ – Ωραία. Και αυτή λες ότι είναι συνεχής. Γιατί;
Τ - Γιατί είναι σαν την ακολουθία που είδαμε πριν σαν την 1/ν.
Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα.

Ερ - Ωραία. Ας ξαναγυρίσουμε τώρα λίγο στον αρχικό ορισμό. Πιστεύεις ότι σχετίζεται ορισμός του Πανεπιστημίου με αυτόν του Λυκείου;
Τ - Ναι. Αφού πιστεύω μιλάμε για το ίδιο πράγμα.
Ερ – Ποιος νομίζεις ότι είναι πιο ισχυρός;
Τ – Αυτός (δείχνει τον ορισμό του πανεπιστημίου)
Ερ – Γιατί;
Τ - Με τον άλλο ορισμό με τα όρια … για παράδειγμα σε τέτοιες περιπτώσεις όπως με τους άρρητους και τους ρητούς δε νομίζω ότι μπορεί αυτός να λειτουργήσει.

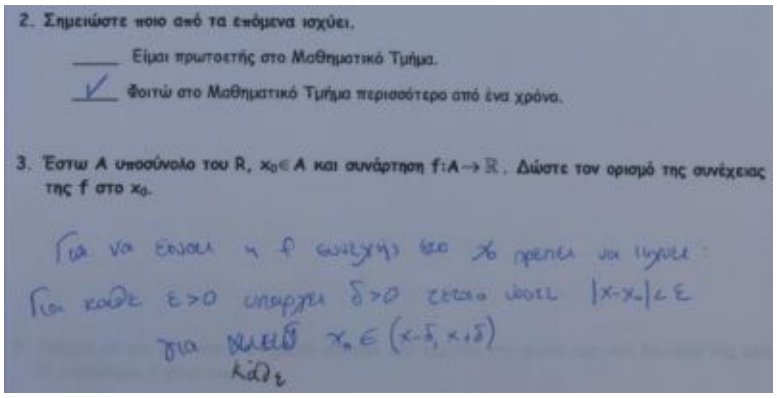


Το γράφημα και οι σχέσεις με μαύρο στυλό έγιναν στη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ – Α, μάλιστα, κατάλαβα. Αν είχες ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου και του έκανες μάθημα κι έβλεπε αυτόν τον ορισμό που τον έχει και το σχολικό βιβλίο με αστερίσκο και σε ρωτούσε με απλά λόγια να τον εξηγήσεις τι θα του έλεγες; Κάνοντας ένα απλό γράφημα πώς θα τον εξηγούσες πάνω στο σχήμα;
Τ – Για κάθε ε>0 υπάρχει δ, έτσι ώστε … δηλαδή σε μία περιοχή του x_0, όπου εδώ μέσα υπάρχουν πολλά x, μιλάμε για ένα σημείο γιατί αν είναι συνεχής σε ένα σημείο θα είναι και σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού. Ωραία, μπορώ να βρω ένα δ πολύ κοντά στο x_0, τότε η τιμή τη συνάρτησης στο x_0 … εδώ … υπάρχει μια άλλη περιοχή, όπου …ναι … αυτό το πράγμα ότι για κάθε ε>0, ότι δηλαδή όσο και αν το πάρω το ε, όσο κοντά στο χ_0 ότι θα υπάρχει αυτό το γράφημα, ότι σε αυτή τη ζώνη θα υπάρχει ένα κομμάτι της f(x).
Ερ - Από που νομίζεις ότι έπρεπε να ξεκινήσουμε, από τα x ή από τα y;
Τ – … Από τα y.
Ερ – Γιατί;
Τ – Γιατί για κάθε ε το δ είναι ένα, να βρω ας πούμε αυτή η ζώνη που θα τμήσει. Καθώς παίρνω το ε, το δ είναι ένα, αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη το ίδιο, συμμετρικά σας πούμε, ας πούμε μέσα σε αυτό το διαστηματάκι θα υπάρχει το x_0, κάπως έτσι το …
Ερ - Και για το ε που επιλέγω θα υπάρχει μοναδικό τέτοιο δ;
Τ - Για το ε που επιλέγω; Όχι, όχι μιλάμε για περιοχή εδώ, η οποία μπορεί να μικραίνει, άρα παίρνουμε άλλο δ.
Ερ – Πολύ ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ!

13η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Αναστάσιος’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

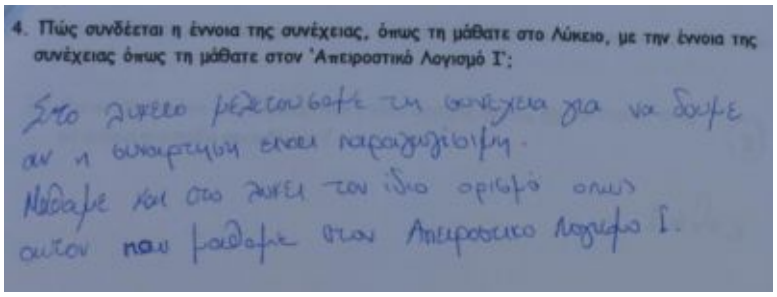
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

✓ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Για να είναι η f συνεχής στο x_0 πρέπει να ισχύει:
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - x_0| < \varepsilon$
για κάθε $x_0 \in (x-\delta, x+\delta)$

Ερ - Σε ότι αφορά τον ορισμό, Αναστάση, θα γυρίσω μετά στο τέλος της συνέντευξης.

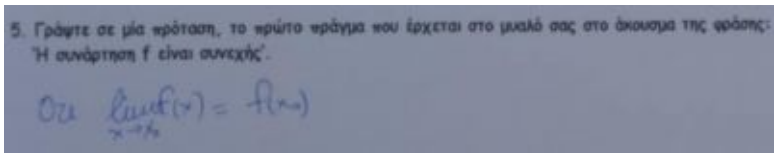

4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Στο Λύκειο μελετούσαμε τη συνέχεια για να δούμε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.
Μάθαμε και στο Λύκειο τον ίδιο ορισμό όπως αυτόν που μάθαμε στον Απειροστικό Λογισμό Ι.

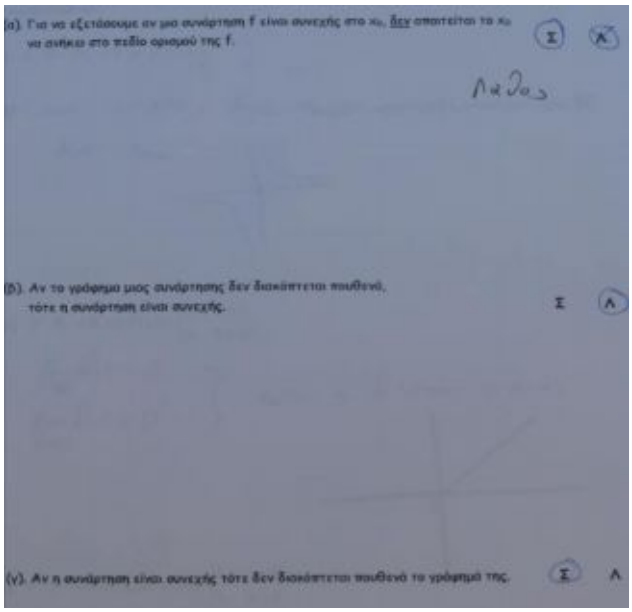
Ερ - Ας πάμε τώρα λίγο σε αυτήν. Θα ήθελε σε λίγο να μου εξηγήσεις αυτό που έχεις γράψει;

Α - … (το διαβάζει)… Βασικά στο Λύκειο μελετούσαμε την παραγωγό … εεε…

Ερ - Δηλαδή η αίσθησή σου ποια είναι; Τι άλλαξε από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο με τον ορισμό της συνέχειας;


5. Γράψτε σε μία κρόταση, το κρύο κράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$


(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

Λάθος

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Α - Τον ε - δ ορισμό δεν τον είχαμε μάθει στο Λύκειο.

Ερ - Είναι διαφορετικός, είναι πιο βαθύς;

Α - Ναι, ναι.

Ερ - Ωραία. Τώρα το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σου στο άκουσμα της φράσης συνάρτηση συνεχής είναι …

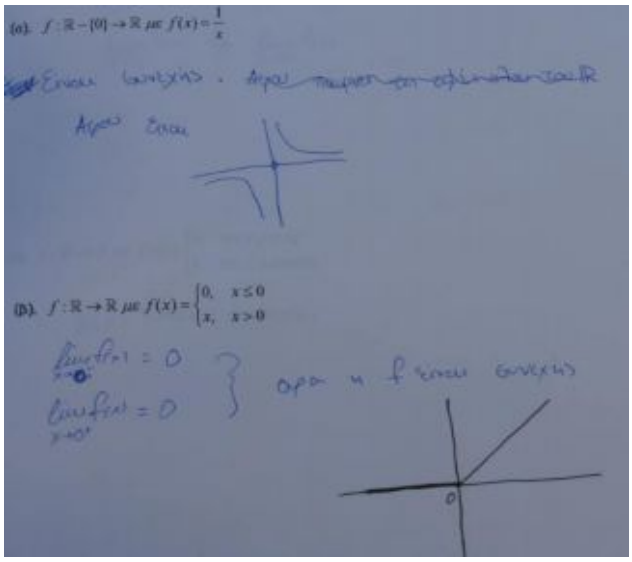
Α - … ο ορισμός.

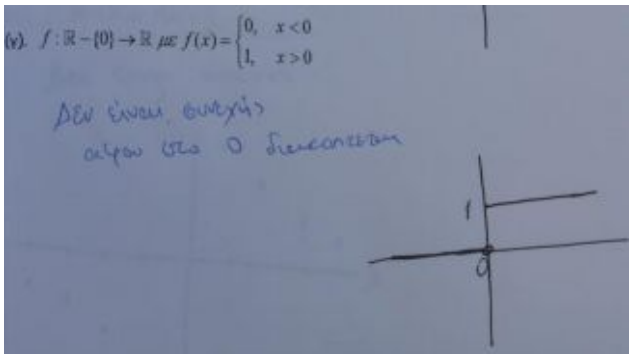
Ερ - Ωραία. Ο ορισμός. Σαν εικόνα, τι έρχεται στο μυαλό σου;

Α - … Ότι στο πεδίο ορισμού της δεν … ότι υπάρχει σε όλα τα … για κάθε x_0, δηλαδή ότι δεν διακόπτεται πουθενά.

Ερ – Μάλιστα. Ας πάμε τώρα στην επόμενη. Λες στο (α) ότι για να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 δεν απαιτείται το σημείο να ανήκει

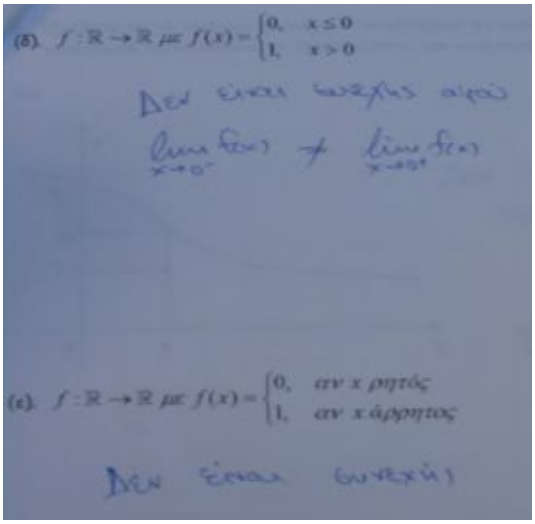
στο πεδίο ορισμού. Συμφωνείς σε αυτό; Δεν σημαίνει ότι έχεις κάνει κάποιο λάθος. Απλά ρωτάω αν συμφωνείς σε αυτό τώρα που το ξαναβλέπεις.
Α - … (διστάζει) … βασικά λάθος πρέπει να είναι .... Στην αρχή λάθος το είχα βάλει και μετά το έσβησα.
Ερ - Ναι, ναι το βλέπω.
Α - Γιατί εξετάζουμε στα σημεία του πεδίου ορισμού για να είναι … για να δούμε αν είναι συνεχής εκεί εξετάζουμε, στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Δηλαδή θα το άλλαζες;
Α – Ναι, ναι βάλε 'Λάθος' (γράφουμε 'Λάθος' στο έντυπο)
Ερ – Ωραία. Στην επόμενη στη (β), που λέμε ότι αν το γράφημα δεν διακόπτεται τότε η συνάρτηση είναι συνεχής βάζεις λάθος. Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα κατά νου;
Α - …
Ερ - Συνήθως όταν σε τέτοιου είδους ερωτήσεις απαντάμε λάθος έχουμε κάποιο παράδειγμα κατά νου, γι αυτό σε ρωτάω. Σκέφτηκες κάτι; Ή τώρα που το ξαναβλέπεις σου έρχεται κάτι στο μυαλό;
Α – Νομίζω μου ήρθε αλλά τώρα …
Ερ - Εντάξει. Δεν υπάρχει πρόβλημα. Πάμε τώρα και στη (γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της. Λες σωστό. Συμφωνείς; Μήπως θα το άλλαζες;

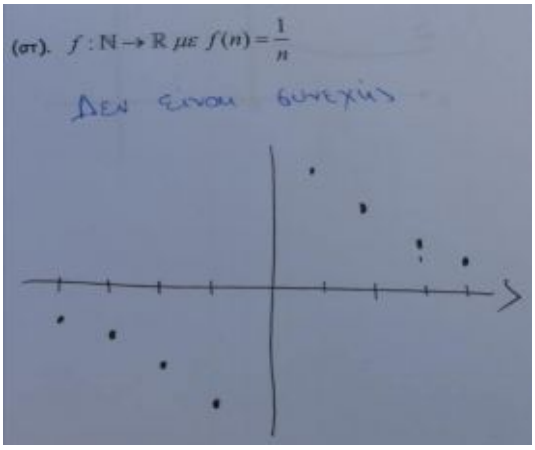




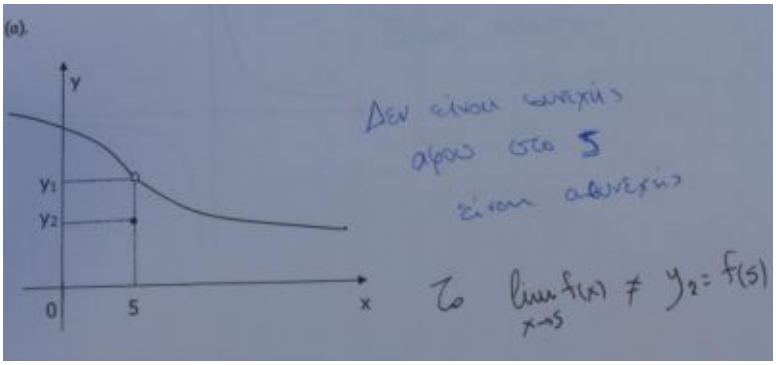
Α – Όχι.
Ερ – Εδώ τώρα στο 7(α) λες συνεχής. Είχες γράψει επίσης 'αφού παίρνει τις τιμές όλου του R'. Γιατί το έσβησες;
Α - … μπορεί να πάρει το 0 αλλά … στο 0 αυτή δεν είναι συνεχής. Αλλά το 0 δεν το παίρνει στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Ναι, δεν ορίζεται καν. Και;
Α – Ναι γι' αυτό μπερδεύομαι.
Ερ - Δεν υπάρχει πρόβλημα. Θα ήθελα να σε ρωτήσω, το γράφημα που έχεις κάνει, σε βοηθάει στην απάντηση; Σου επιβεβαιώνει ότι είναι συνεχής ή όχι;
Α – Ναι, ναι ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού.
Ερ - Ωραία. Θα ήθελες να δοκιμάσεις να μου κάνεις και στην (β) τη γραφική της παράσταση;
Α - … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ - Ωραία. Πάλι την ίδια ερώτηση. Σου επιβεβαιώνει το γράφημα ότι είναι συνεχής;
Α – Ναι.
Ερ - Θέλεις να μου κάνεις και εδώ τη γραφική παράσταση, στην (γ);
Α – Ναι … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα και το σχολιάζει) …

Ερ – Ωραία. Το γράφημα πάλι σε βοηθάει;
Α – Ναι, αλλά με μπερδεύει μόνο το … δεν το παίρνει το 0, αλλά δεν είναι συνεχής μόνο στο 0, στα υπόλοιπα είναι, αλλά το 0 δεν είναι στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Παίζει ρόλο αυτό ή όχι;
Α - … με έχει μπερδέψει τώρα.
Ερ - Αν έπρεπε να επιλέξεις, να διαλέξεις τι θα έβαζες;
Α - … (διστάζει) … πάλι, ότι είναι, επειδή είπα και σε αυτήν (χαμογελάει και δείχνει την προηγούμενη) γι' αυτό.





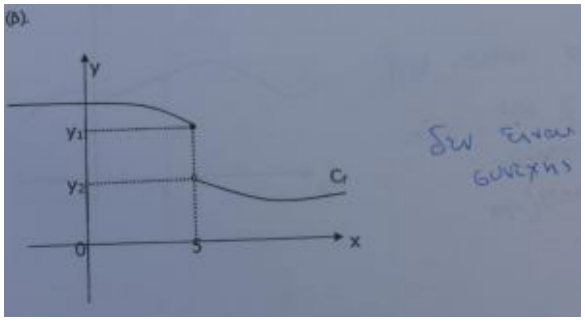
Ερ – Ότι είναι συνεχής σε όλο το R;
Α - Είναι συνεχής σε κάθε x_0 του πεδίου ορισμού, που ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Στο πεδίο ορισμού, μάλιστα. Εδώ τι διαφορά έχουμε, στη (γ) με τη (δ);
Α - Ότι εδώ μπορεί να πάρει το 0.
Ερ - Άρα εδώ τι πρέπει να απαντήσουμε; Συμφωνείς με την απάντηση που έχεις δώσει ότι δεν είναι συνεχής;
Α – Ναι.
Ερ - Στην επόμενη επίσης την (ε) λες ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Α - … εεε … γιατί αυτή δεν είναι συνεχής η γραφική παράσταση, μια συνεχόμενη γραμμή.
Ερ – Μάλιστα. Η (στ) τώρα;
Α - … το ίδιο δεν είναι συνεχόμενη.
Ερ - Θέλεις να δοκιμάσεις να μου πεις σε αυτήν εδώ πώς περίπου θα ήταν η γραφική παράσταση;
Α - … (κάνει το διπλανό γράφημα) …Θα είναι μόνο σημεία εδώ, εδώ, εδώ.
Ερ – Άρα το σχήμα της τι σου λέει;
Α – Ότι δεν είναι συνεχής;
Ερ – Ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;



Α - … Δεν έχουμε μία γραμμή συνεχόμενη, ότι … αυτό με την εφαπτόμενη ισχύει; Ότι δεν μπορούμε να χαράξουμε εφαπτομένη;
Ερ - Δεν μπορούμε να χαράξουμε εφαπτομένη. Και γιατί αυτό σε πειράζει;
Α - … Δεν ξέρω. Τώρα μου ήρθε σαν φλασιά! … Η εφαπτομένη είναι η κλίση της ευθείας σε κείνο το σημείο έτσι δεν είναι; … Δεν ξέρω.
Ερ – Εντάξει, άστο, δεν πειράζει. Εδώ τώρα στην 8(α) λες ότι δεν είναι συνεχής αφού στο 5 δεν είναι συνεχής. Πως θα το δικαιολογούσες αυτό;

Α - …

Ερ - Δηλαδή αν ήθελες να χρησιμοποιήσεις ξανά τον ορισμό του Λυκείου τι θα έλεγες και αυτό;



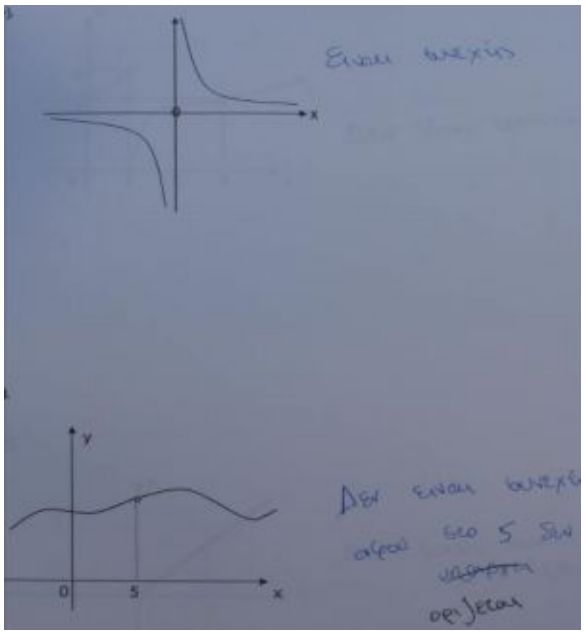
Α – Το lim ε; … Αα … το $\lim_{x \to 5} f(x)$ θα είναι το y_1 που είναι διάφορο του y_2 … (γράφει στο χαρτί τις σχέσεις αυτές) … που είναι το $f(5)$.

Ερ – Μάλιστα. Για αυτήν εδώ τώρα τι θα έλεγες;

Α - … Και αυτή πάλι με το όριο … δεν είναι… είναι διαφορετικό.

Ερ - Δηλαδή τι πρόβλημα έχεις με αυτήν;

Α - Το όριο από αριστερά δεν είναι το ίδιο με το όριο από δεξιά.



Ερ – Μάλιστα. Αυτή τώρα τη (γ);

Α - Αυτή είναι σαν την πρώτη την 1/x.

Ερ – Μάλιστα. Ωραία. Και άρα είναι συνεχής;

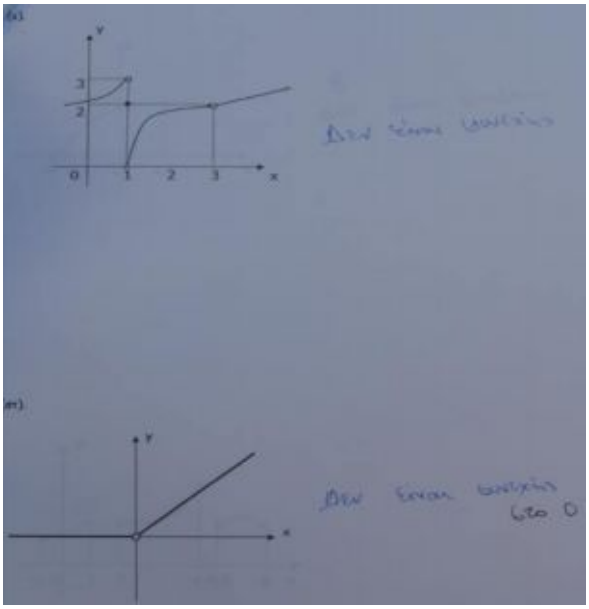
Α – Ναι, είναι.

Ερ – Στην επόμενη τώρα τη (δ) λες … είναι σαν να μην έχει τελειώσει τη φράση σου, 'δεν είναι συνεχής λες αφού στο 5 δεν υπάρχει' τι εννοείς, τι δεν υπάρχει;

Α – Στο 5 δεν ορίζεται.

Ερ – Α! δεν ορίζεται.

Α - Αλλά πάλι, άμα το πάρουμε όπως πριν, αν δεν ορίζεται στο 5, στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής.



Ερ – Τι πιστεύεις, τι πρέπει να βάλεις;

Α - … Δεν ξέρω …

Ερ - Τι θα επέλεγες;

Α – (γελάει) Μάλλον αυτό που έχω γράψει!

Ερ – Εντάξει! Εδώ τώρα στην (ε) λες ότι δεν είναι συνεχής. Τι σε χαλάει σε αυτήν;

Α - … Γιατί στο 1 δεν είναι συνεχής.

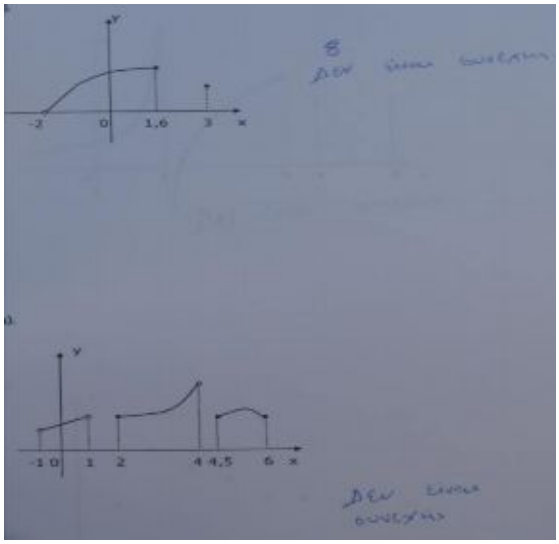
Ερ – Γιατί;

Α - Γιατί πάλι το όριο, τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά ... στο 3 πάλι δεν είναι … δεν ορίζεται.

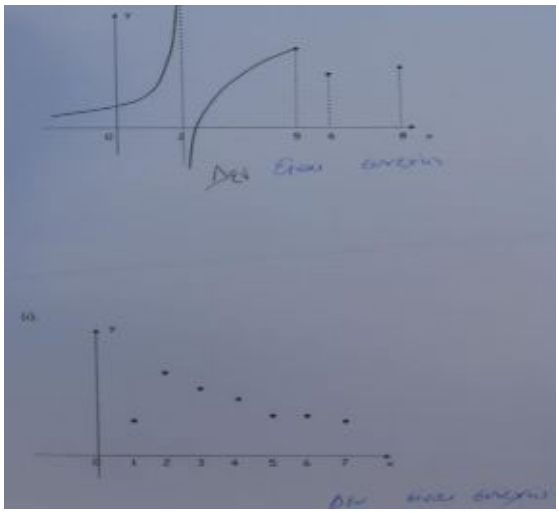
Ερ - Επηρεάζει αυτό την απάντηση μας;

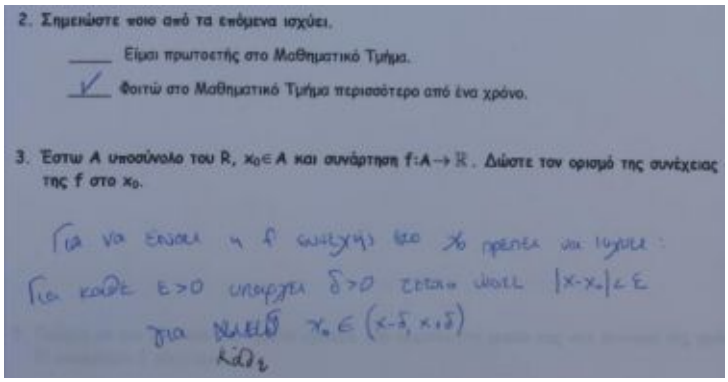
Α - Όχι, πάλι δεν είναι συνεχής.

Ερ - Δηλαδή δεν είναι συνεχής στο 1 και δεν είναι συνεχής στα 3;



Α – Ναι.
Ερ - Ωραία. Η κάτω τώρα η (στ);
Α - … Αυτή δεν είναι συνεχής στο 0.
Ερ – Πολύ ωραία.
Ερ – Εδώ τώρα στη (ζ) λες ότι δεν είναι συνεχής. Τι σε χαλάει εδώ;
Α – ότι είδα … εεε… Ότι έχει ένα σημείο εδώ (δείχνει το 3).
Ερ - Αν ενώναμε το 1,6 με το 3 με μία γραμμή;
Α – Θα ήταν.
Ερ - Θα ήταν. Τώρα όπως τι βλέπεις;
Α - Δεν είναι.
Ερ - Ωραία. Η επόμενη τώρα;
Α - …
Ερ - Λες ότι δεν είναι. Γιατί;
Α – Επειδή δεν είναι συνεχής η γραμμή. Γι' αυτό το έχω βάλει ....
Ερ - Υπάρχει κάτι που σε κάνει να διστάζεις;
Σε βλέπω ότι τι κοιτάς πολύ…
Α – Ναι, (χαμογελάει) δεν ξέρω, εγώ μπερδευτεί. Με μπερδεύει η 1/x.
Ερ – Α! Άρα ή εκεί είχες κάνει λάθος ή εδώ ε;
Α – (γελάει) Ναι!
Ερ - Τι πιστεύεις;
Α - Ότι δεν είναι.





2. Σημειώστε κάτω από τα επόμενα ισχύει.

____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

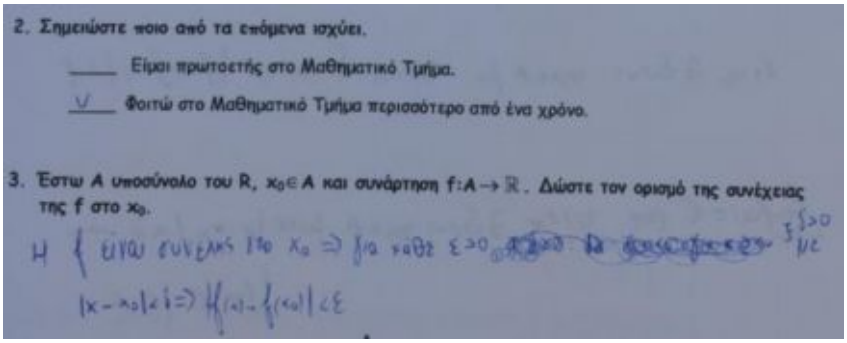
✓ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Ερ - Παρόλο που νιώθεις να αντιφάσκει με την άλλη έτσι;
Α - Ναι.
Ερ - Αυτή όμως λες ότι είναι συνεχής. Και μου έκανε εντύπωση αυτό. Γιατί;
Α – Μπα δεν είναι, αφού αυτά είναι σημεία.
Ερ – Μάλιστα. Άρα βάλε το 'Δεν' εκεί. Και στην τελευταία επίσης λες ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Α - Δεν είναι συνεχής, συνεχόμενη γραμμή.
Ερ – Συνεχόμενη γραμμή, μάλιστα.
Ερ - Να σε ρωτήσω τώρα και κάτι τελευταίο πάνω στον ορισμό. Λες ότι … (διαβάζω τον ορισμό που έχει δώσει)… Θα άλλαζες κάτι στον ορισμό τώρα που τον ξαναβλέπεις;
Α - …
Ερ – Αν υπάρχει κάτι.
Α – Θα έβαζα εδώ για κάθε.
Ερ – Ωραία. Σε ευχαριστώ πολύ!

14η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Alexis’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

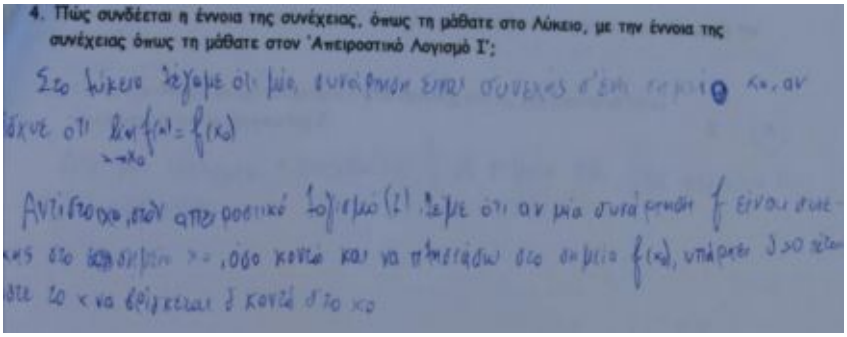
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

V Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Η f είναι συνεχής στο x_0 ⇒ για κάθε ε>0 ... δ>0 με $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

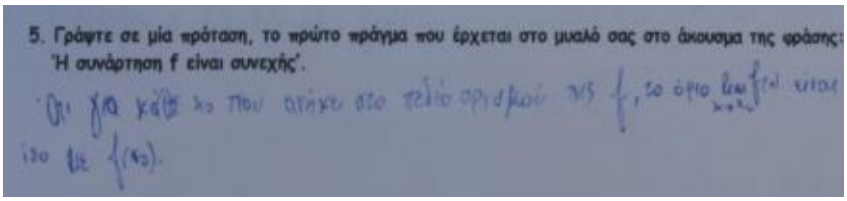
Ερ - Δεν θα σχολιάσω τον ορισμό τώρα. Θα ξαναγυρίσουμε στο τέλος της συνέντευξης.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Στο Λύκειο λέγαμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο ... αν είχαμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

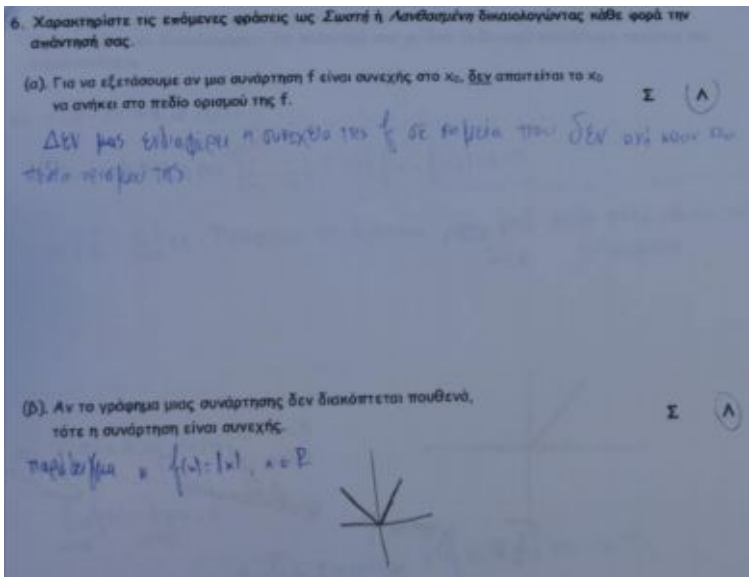
Αντίστοιχο, στον απειροστικό λογισμό (;) λέμε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε το x ... κοντά και να πλησιάσω στο σημείο $f(x_0)$, υπάρχει δ>0 τέτοιο ... x να βρίσκεται δ κοντά στο x_0

Ερ – Να πάω λίγο στο 4.
Λες (διαβάζω την απάντησή του) … Ωραία. Τον βλέπεις πιο ισχυρό τον ορισμό στον Απειροστικό από τον ορισμό του Λυκείου;
Α – Ναι, πιστεύω πως ναι.


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Ότι για κάθε x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι ίσο με $f(x_0)$.

Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα στο 5 λες (διαβάζω την απάντηση του). Σαν εικόνα τι σου έρχεται στο μυαλό;
Α - Εικόνα; Γραφική παράσταση εννοείτε; Εντάξει, συνήθως ότι, μπορεί να είναι και μεμονωμένα σημεία, αλλά αν όχι ότι θα είναι συνεχής δεν θα διακόπτεται, αλλά όχι απαραίτητα το γράφημα έτσι


6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

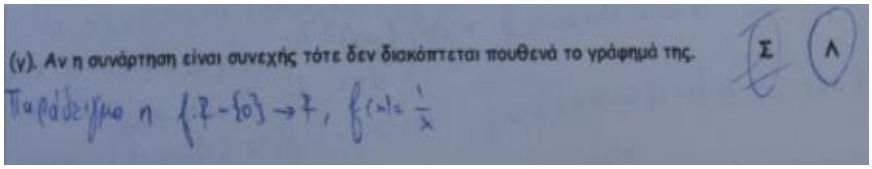
Δεν μας ενδιαφέρει η συνέχεια της f σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

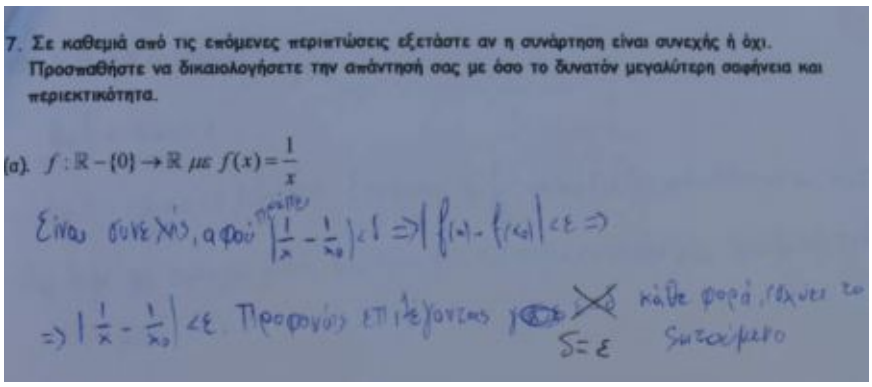
παράδειγμα: $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$

Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στο 6(α) λες (διαβάζω την απάντηση του)
Δεν έχω να ρωτήσω κάτι σε αυτό. Στο επόμενο τώρα λες λάθος και μου έχεις ένα αντιπαράδειγμα. Δηλαδή αυτή η συνάρτηση τι κάνει;

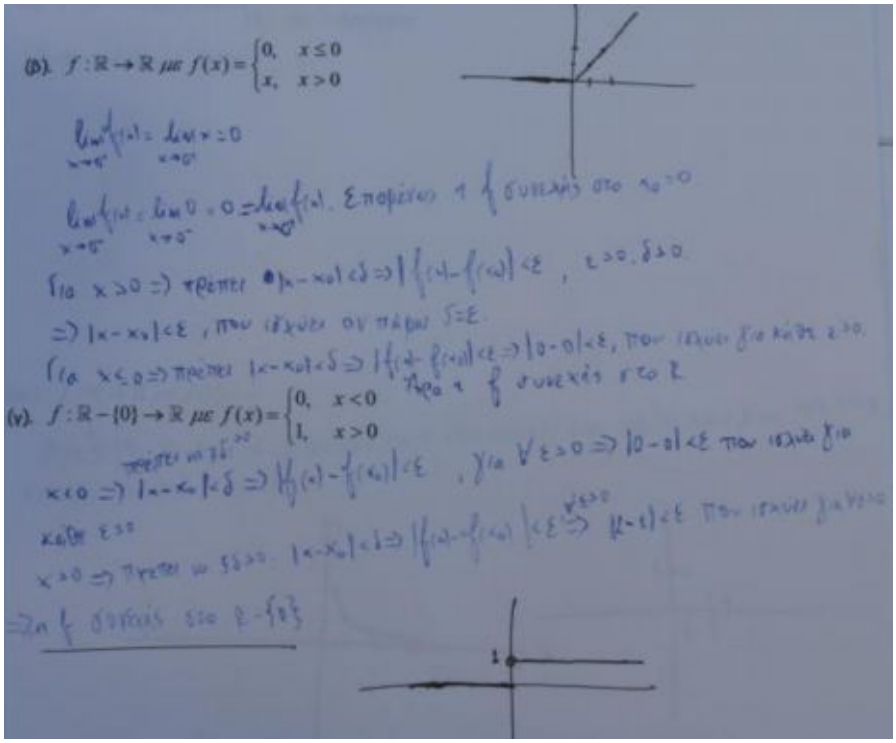
Α - … μισό λεπτό …Α ναι, δεν είναι συνεχής στο 0, αυτό είχα στο μυαλό μου.
Ερ - Δηλαδή αν και δεν διακόπτεται, δεν είναι συνεχής, έτσι;



Α – Ναι.
Ερ - Ενώ στο (γ) λες ότι είναι λάθος και έχεις βάλει σαν αντιπαράδειγμα την …
Α - … την 1/x ...
Ερ - … Είναι συνεχής αλλά διακόπτεται; Αυτό εννοείς;
Α – Ναι, ορισμένη όμως στο $\mathbb{R}-\{0\}$.

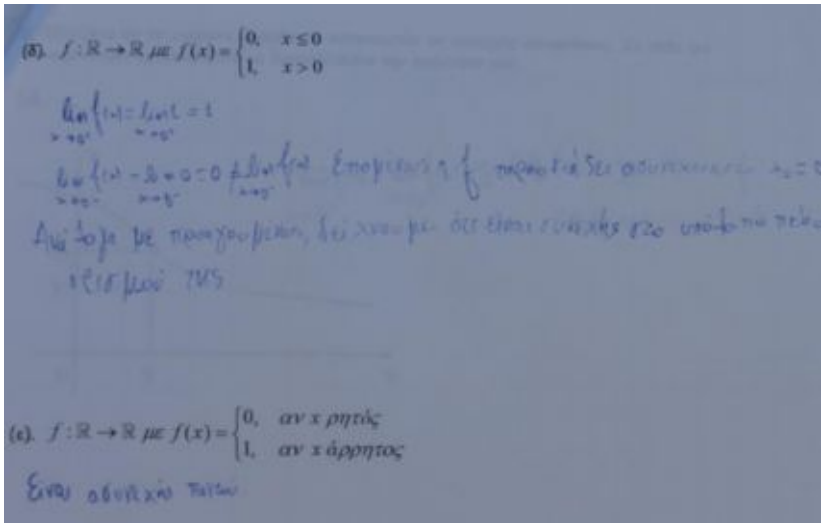


Ερ – Μάλιστα. Στο 7, η 1/x τώρα. Βλέπω ότι έχεις προσπαθήσει να την αποδείξεις και με τον ε - δ ορισμό.
Α - Ναι, τον έχω και πρόσφατο. Τον πέρασα τώρα τον Απειροστικό.
Ερ - Αν και δεν θέλω να σε κουράζω με τα μαθηματικά, θα άλλαζες κάτι στην απόδειξη; Όχι ότι κατ' ανάγκη είναι κάτι λάθος, απλά ρωτάω.
Α - … (διαβάζει προσεκτικά) …Ίσως επιλέγοντας δ = ε αντί για ε = δ (διορθώνει το γραπτό του).

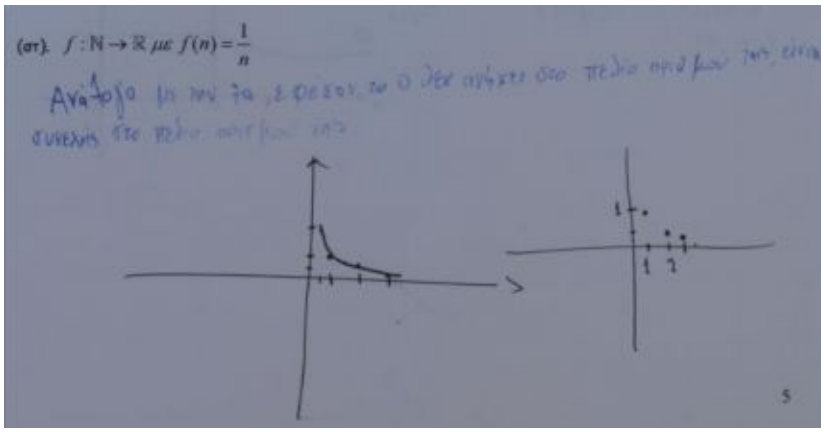


Ερ – Για τη (β) τώρα. Θα μπορούσες να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Α – Ναι … (κάνει το γράφημα) …
Ερ - Σου επιβεβαιώνει το γράφημα αυτό που έχεις γράψει πιο πάνω;
Α - Όχι. Κάνει γωνία άρα δεν θα πρέπει να είναι συνεχής.
Ερ - Δηλαδή σε χαλάει η γωνία;

Α – Ναι, κάτι τέτοιο έχω στο μυαλό μου.
Ερ - Μάλιστα. Γι' αυτό και στην 6(β) μου είπες ότι δεν είναι συνεχής;
Α - Ναι, ακριβώς. Κάτι τέτοιο έχω στο μυαλό μου.
Ερ – Ωραία, πάμε τώρα στη (γ). Μπορείς να μου κάνεις και εδώ το γράφημα;
Α - … (Κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται πιο πάνω)…
Ερ - Σου επιβεβαιώνει το γράφημα τώρα την απάντησή σου;
Α – Νομίζω πως ναι.
Ερ - Δεν σε χαλάει που διακόπτεται το γράφημα;
Α - Όχι, γιατί δεν την ορίζουμε στο σημείο που διακόπτεται.
Ερ – Τι διαφορά βλέπεις στη (γ) από τη (δ);
Α – Το 0 περιλαμβάνεται στον πεδίο ορισμού της.
Ερ - Επηρεάζει την απάντηση μας αυτό τώρα;
Α - Ναι δεν είναι συνεχής στο 0.

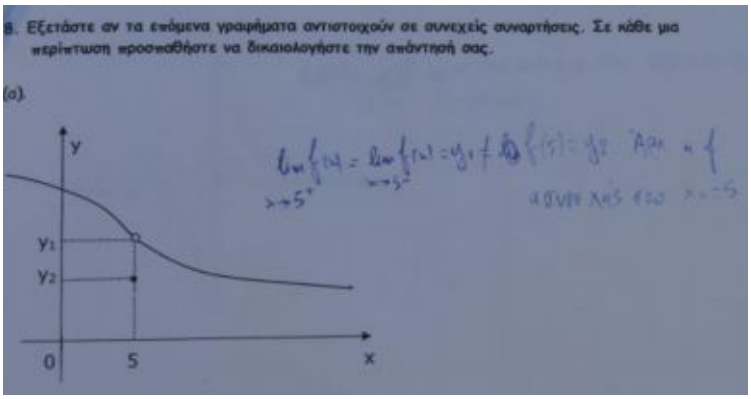


Ερ - Ναι. Αυτό ρωτάω. Σε τι διαφοροποιείται η απάντησή σου εδώ από την προηγούμενη;
Α - Ναι. Αυτό. Ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της αυτή ενώ αυτή παρουσιάζει ασυνέχεια στο x_0=0.
Ερ – Μάλιστα, ωραία. Κατάλαβα. Στην (ε) λες είναι ασυνεχής παντού. Δεν με ενδιαφέρει η αυστηρή απόδειξη.



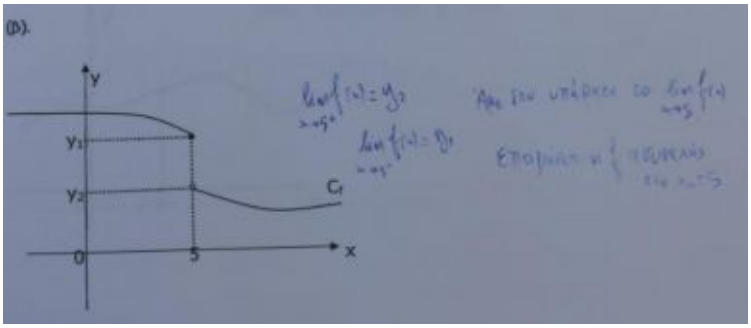
Εδώ τώρα στην (στ), αν ήθελες να δοκιμάσεις να κάνεις τη γραφική της παράσταση, θα μπορούσες;
Α - … (κάνει το διπλανό γράφημα που φαίνεται αριστερά) …
Ερ - Άρα είναι μία τέτοια γραμμή;
Α - Ναι.
Ερ - Και είναι συνεχής;
Α - Ναι.
Ερ - Το γεγονός ότι ορίζεται στο Ν σε επηρεάζει;
Α - Όχι, δεν βλέπω κάτι που να με προβληματίζει.
Ερ - Δηλαδή σε τι διαφοροποιείται αυτή η γραφική παράσταση από τη γραφική παράσταση της 1/x;

Α – Α ναι! Έκανα λάθος. Αυτή που έκανα εγώ είναι η 1/x. Βλακεία. Παίρνει μόνο τιμές.
Ερ - Δηλαδή θα άλλαζες κάτι στη γραφική παράσταση;
Α - Ναι.
Ερ - Ωραία ας το κάνουμε δίπλα… (Κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω στα δεξιά) …
Α - Κάπως έτσι είναι.
Ερ - Είναι τώρα συνεχής;

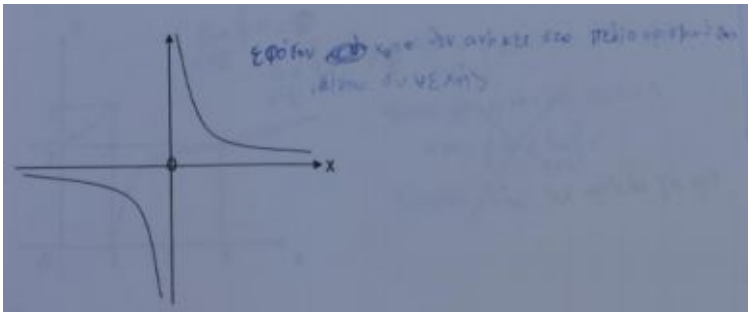


Α – μμμ … Νομίζω πως μπορεί να είναι και να είναι μόνο κουκίδες.
Ερ - Άρα αν έπρεπε να επιλέξεις απάντηση θα έλεγες; …
Α - … ότι είναι συνεχής.

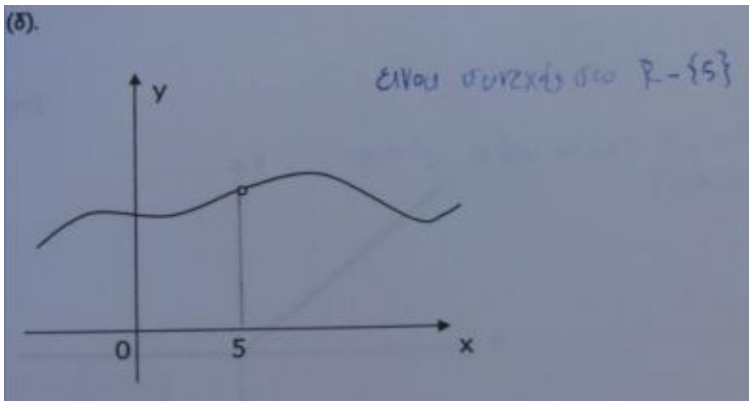
Ερ - Ωραία. Πάμε τώρα στην επόμενη, την 8(α). Λες ότι είναι ασυνεχής στο 5. Η δικαιολόγησή σου είναι πλήρης. Δεν έχω κάτι να ρωτήσω.



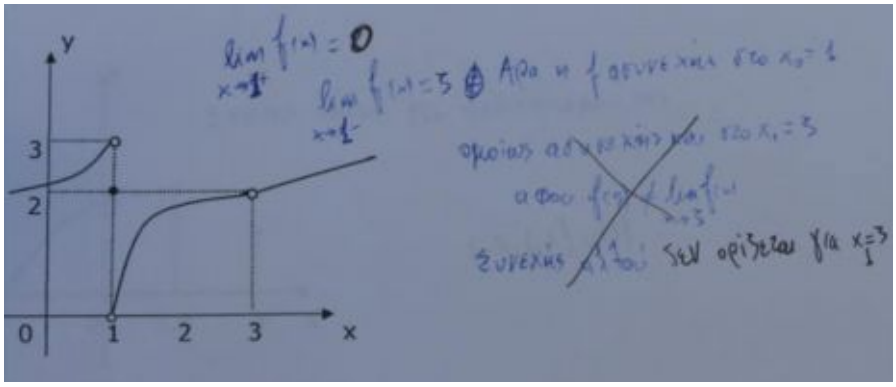
Ερ - Το ίδιο και στην επόμενη, τη (β) . Είμαστε εντάξει.



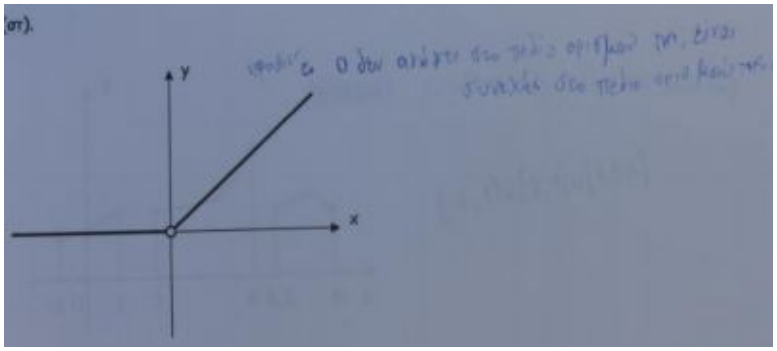
Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα λες … (διαβάζω την απάντησή του) …Ωραία.
Α – Ναι, ακριβώς.



Ερ – Και αυτή λες είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{5\}$ *, έτσι;*
Α – Ναι.

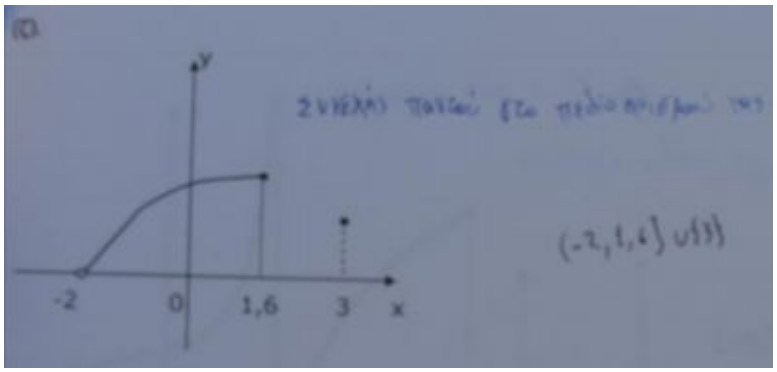


Ερ – Εδώ τώρα λες ότι … (Διαβάζω την απάντηση του)… Δηλαδή πού χαλάει η συνέχεια σε αυτήν;
Α - … στο x_0=1 και στο x_1=3.
Ερ – Ωραία. Υπάρχει κάτι που θα άλλαζες στην απάντησή σου;
Α - … (το ξαναδιαβάζει προσεκτικά) … ναι θα έλεγα ότι … ότι το f(3) δεν ορίζεται;
Ερ – Ναι, δεν υπάρχει το f(3). Διαφοροποιεί αυτό καθόλου την απάντησή σου;
Α – Ναι, έλεγα ότι είναι ασυνεχής στο x_1=3 αλλά αφού δεν ορίζεται εκεί πέρα, δεν εξετάζουμε σε αυτό το σημείο τη συνέχειά της. Άρα θα έγραφα εδώ 'δεν ορίζεται για x_1=3'.

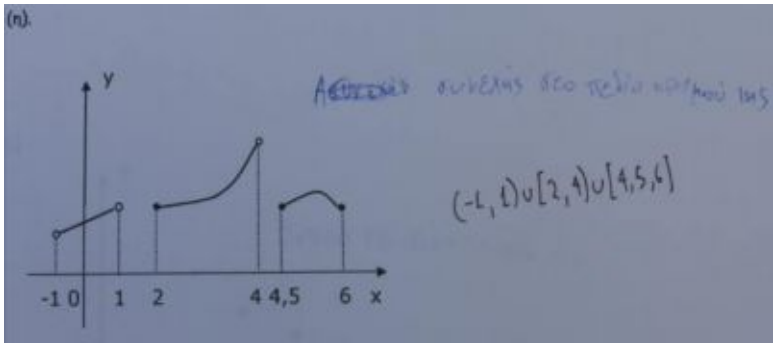


Ερ - Ωραία. Πιστεύεις ότι αυτή η απάντηση είναι καλύτερη;
Α – Ναι, έτσι νομίζω.

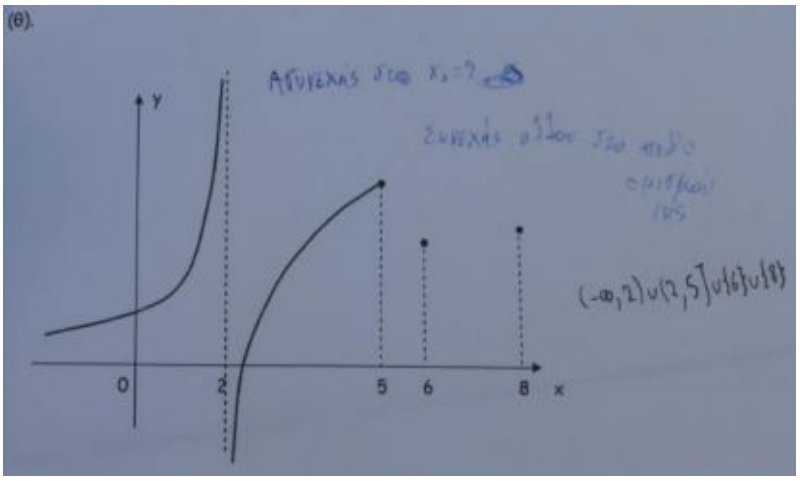
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα λες (διαβάζω την απάντηση του). Δεν έχω κάτι να ρωτήσω εδώ.



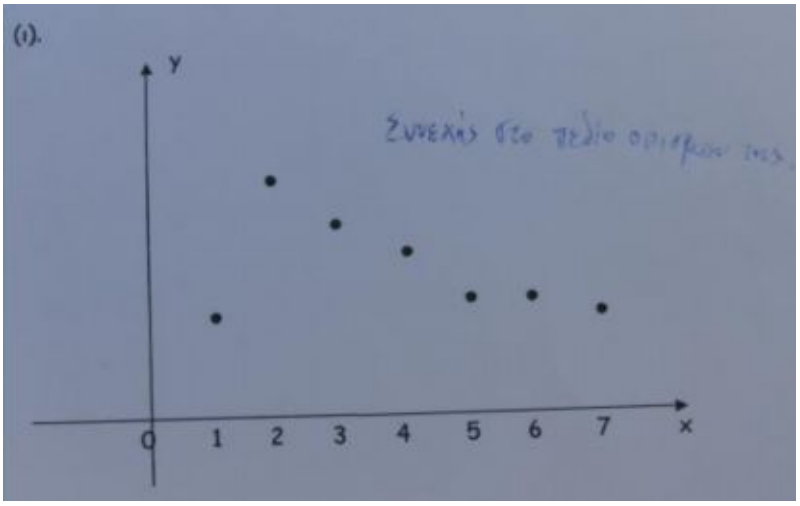
Ερ – Στην επόμενη λες ότι είναι συνεχής παντού στο πεδίο ορισμού της. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
Α - … Είναι το (γράφει όπως φαίνεται δίπλα).



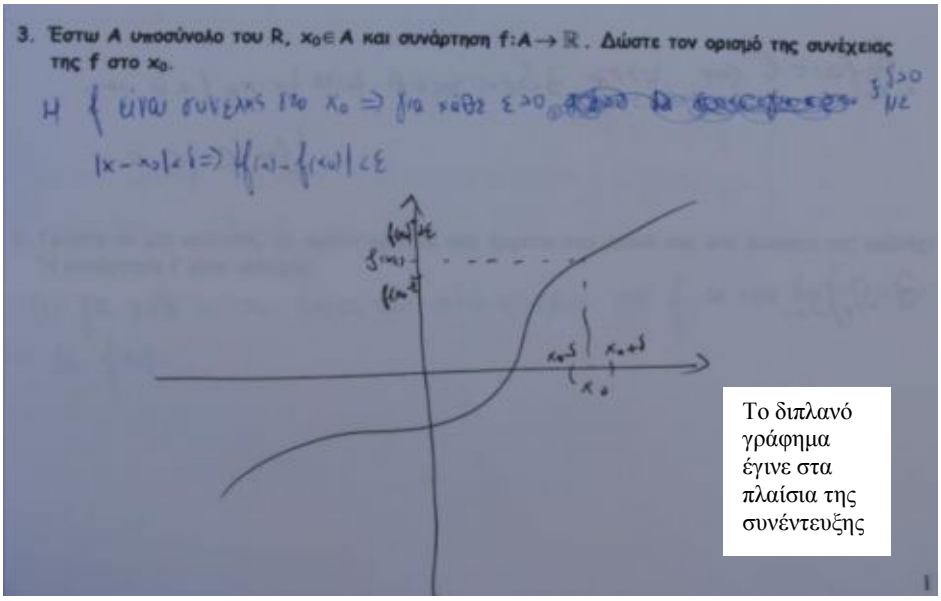
Ερ – Ωραία. Αυτή; Θέλεις να μου γράψεις και εδώ το πεδίο ορισμού της;
Α – Ναι, (γράφει το πεδίο που φαίνεται δίπλα).



Ερ – Εδώ τώρα λες … (διαβάζω την απάντησή του) …Έτσι;
Δηλαδή, όταν λες πεδίο ορισμού ποιο εννοείς;
Α - … (γράφει το πεδίο που φαίνεται δίπλα) …
Ερ - Σε βλέπω που την κοιτάζεις προσεκτικά. Σε χαλάει κάτι;
Α - Όχι, όχι, μια χαρά.



Ερ - Ωραία. Και εδώ λες συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Ποιο πιστεύεις ότι είναι το πεδίο ορισμού της;
Α – Άμα συνεχιζόταν μάλλον το $\mathbb{N}$.
Ερ – Οι φυσικοί, μάλιστα.
Α – Ναι.

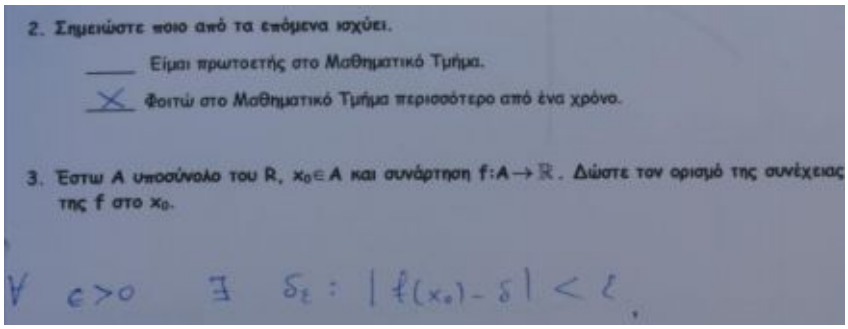


Ερ - Να γυρίσω τώρα λίγο εδώ μπροστά στον ορισμό και έχουμε τελειώσει. … (διαβάζω την απάντησή του) … Είναι σωστός ο ορισμός που έχεις γράψει. Αν τώρα είχες έναν καλό μαθητή της Γ΄ Λυκείου και σου ζητούσε να του εξηγήσεις αυτό τον ορισμό με απλά λόγια, με ένα γράφημα τι θα του έλεγες;

Α - … ότι σε μια περιοχή … ναι … ας πούμε, ότι όσο και να πλησιάσουμε σε μια περιοχή κοντά στο $f(x_0)$ γύρω από αυτό, υπάρχει ένα αντίστοιχο δ το οποίο μπορεί να εξαρτάται από το ε, ώστε να πλησιάζουμε κατάλληλα στο x_0.
Ερ - Είναι υποχρεωτικό δηλαδή το δ να εξαρτάται από το ε;
Α - Όχι, μπορεί, μπορεί και όχι.
Ερ - Και ουσιαστικά τι σου λένε όλα αυτά; Δηλαδή πως φαίνεται η συνέχεια σε αυτό τον ορισμό;
Α - … ότι όσο ε κοντά στο χ_0 στο οποίο είναι συνεχής βρίσκεται κάποιο χ, αντίστοιχα δ κοντά θα βρίσκονται τα χ αυτά για τα οποία ορίζουμε το f(x) στο x_0, αντίστοιχα δ, κάπως έτσι.
Ερ - Τι νομίζεις, θα παίξει ρόλο αν αναποδογυρίσω τη σειρά; Δηλαδή αν πω ότι υπάρχει ένα δ έτσι ώστε για κάθε ε κ.λ.π.;
Α – Ναι, νομίζω ότι δεν είναι το ίδιο γιατί άμα βάλουμε πρώτα ότι υπάρχει δ μπορεί να εννοούμε ένα συγκεκριμένο δ για κάθε ε.
Ερ – Ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ!

15η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Χαρά’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

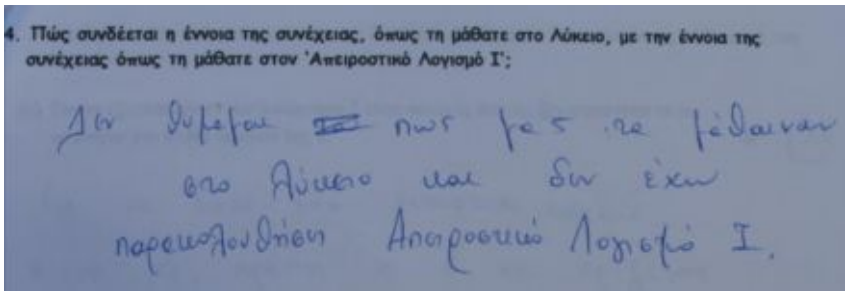
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

X Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta_\epsilon : |f(x_0) - \delta| < \epsilon$

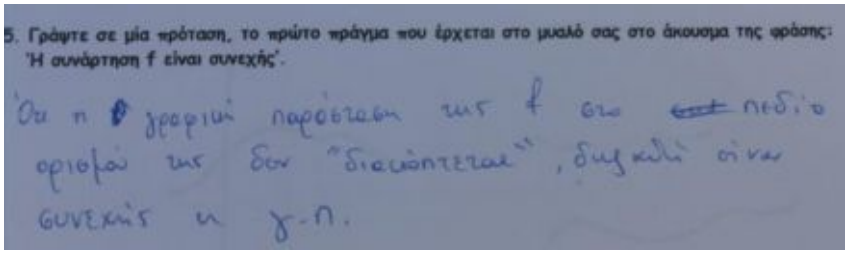
Ερ - Με τον ορισμό θα ρωτήσω κάτι στο τέλος οπότε δεν στέκομαι τώρα.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Δεν θυμάμαι πως μας τα μάθαιναν στο Λύκειο και δεν έχω παρακολουθήσει Απειροστικό Λογισμό Ι.

Ερ - Ωραία. Όπως βλέπω λες ότι δεν έχεις παρακολουθήσει τον Απειροστικό μέχρι τώρα. Πώς κι έτσι;

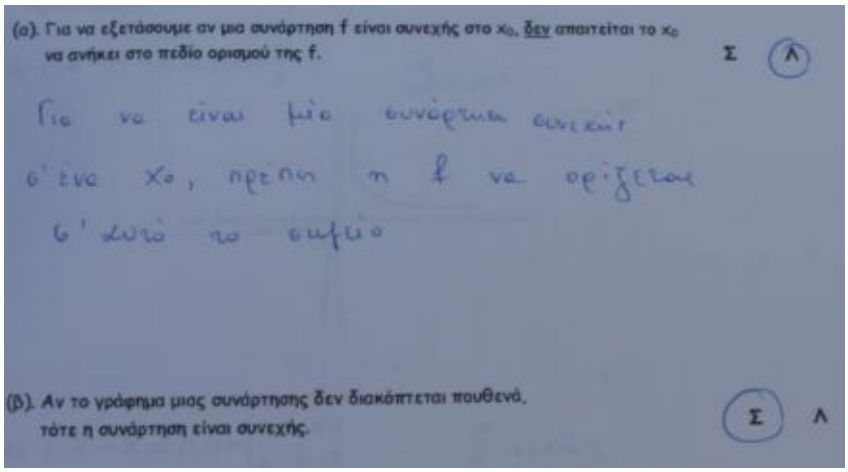
Χ - … (Εξηγεί γιατί δεν έχει παρακολουθήσει μέχρι τώρα τον Απειροστικό).


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Ότι η γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της δεν "διακόπτεται", δηλαδή είναι συνεχής η γ.π.

Ερ - Ωραία. Η εικόνα λοιπόν που έχεις στο μυαλό σου για τη συνέχεια είναι …

Χ - …η γραφική παράσταση μου έρχεται στο μυαλό .. και .. εεε.. αυτό δηλαδή ότι είναι συνεχής η γραφική παράσταση της συνάρτησης, ότι δεν διακόπτεται σε κάποια σημεία.

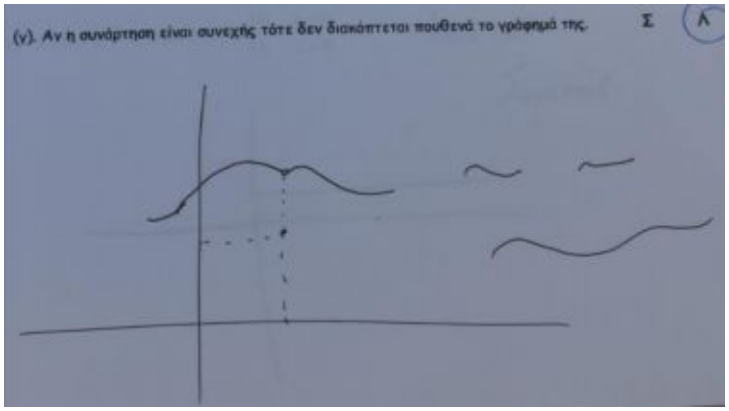

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

Για να είναι μία συνάρτηση συνεχής σ' ένα x_0, πρέπει η f να ορίζεται σ' αυτό το σημείο

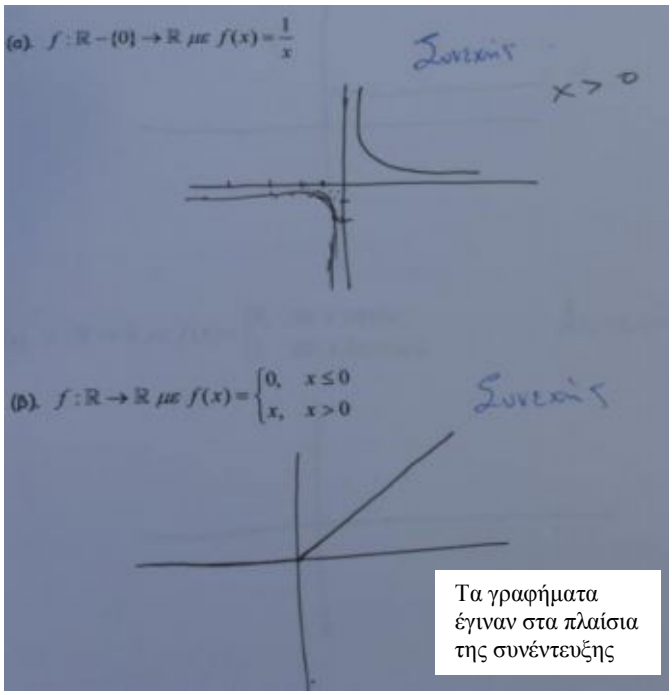
(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στο (α) λες Λάθος και είναι δικαιολογημένο πλήρως άρα δεν έχω να ρωτήσω κάτι. Στο επόμενο τώρα λες ότι αν δεν διακόπτεται η συνάρτηση είναι συνεχής και το θεωρείς Σωστό.

Χ – Ναι.



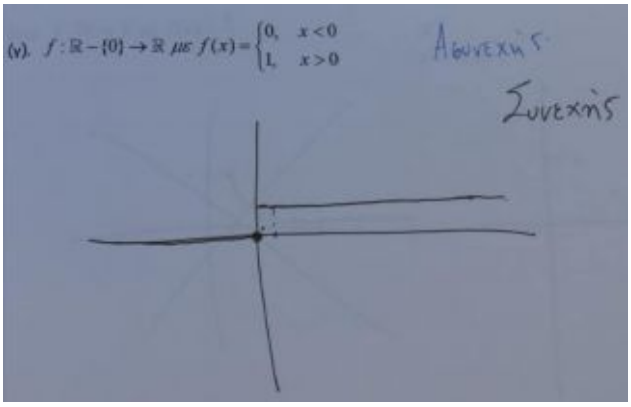
Ερ - Αυτό τώρα το (γ) το θεωρείς Λάθος. Γιατί;
Χ - …(το ξαναδιαβάζει) …
Ερ - Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα κατά νου;
Χ - Λοιπόν, για να σκεφτώ τώρα. Αντιπαράδειγμα ε;
Ερ - Όταν το έβαλες Λάθος τι σου ήρθε στο μυαλό;
Χ - Μου ήρθε στο μυαλό μία γραφική παράσταση … μισό λεπτό να τη ζωγραφίσω, τώρα δεν ξέρω αν είναι συνεχής, εγώ θα σας το δείξω όπως μου έρχεται στο μυαλό, έστω τέλος πάντων ότι είναι εδώ και ότι πάει κάπως έτσι, αν και έρχεται σε αντίθεση με αυτό που σκέφτηκα για τον ορισμό της συνέχειας, και ότι είναι κάπως έτσι.
Ερ – Α, η κουκκίδα έχει μεταφερθεί κάτω έτσι;
Χ – Δηλαδή ότι, ναι.
Ερ - Άρα αυτή είναι συνεχής λες, αλλά διακόπτεται έτσι; Για αυτό τη θεωρείς ως αντιπαράδειγμα έτσι;
Χ – Ναι.
Ερ - Είναι συνεχής η συνάρτηση αλλά όμως διακόπτεται έτσι;
Χ - Ναι. Έτσι όπως το έχω στο μυαλό μου ναι.

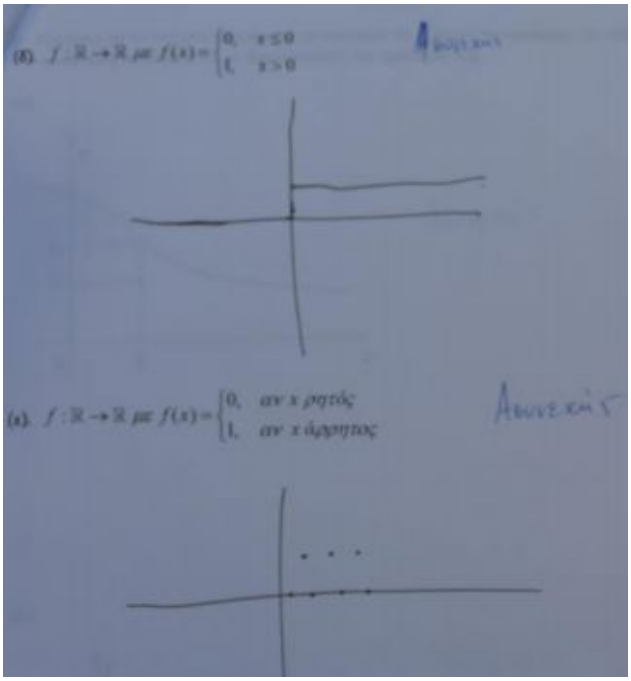


Τα γραφήματα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

Ερ – Η (α) συνεχής. Γιατί;
Χ - Στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής σαν συνάρτηση.
Ερ - Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Χ – Ναι … (κάνει με δισταγμό το γράφημα που φαίνεται δίπλα) …Κάπως έτσι. Διακόπτεται.
Ερ - Διακόπτεται λες. Αυτό τι σημαίνει για σένα, για τη συνέχεια που μελετάς;
Χ - Τι σημαίνει αυτό. Τώρα σχεδόν δεν μου λέει κάτι γιατί ξέρω ότι είναι συνεχής εκτός από το σημείο 0 που δεν ορίζεται η συνάρτηση. Δεν μου λέει κάτι άλλο.
Ερ - Μήπως αυτό αντιφάσκει με…
Χ - … αυτό που έλεγα πριν; …
Ερ - …ναι, νοιώθεις ότι αντιφάσκει;
Χ – Ναι, ναι.
Ερ - Άρα φοβάσαι μήπως δεν είναι συνεχής;
Χ - Όχι, όχι νομίζω ότι είναι συνεχής στα σημεία, στο πεδίο ορισμού της. Τώρα … νοιώθω όμως ότι αντιφάσκει με αυτό που έλεγα πριν, η συνέχεια δηλαδή, … η πρώτη

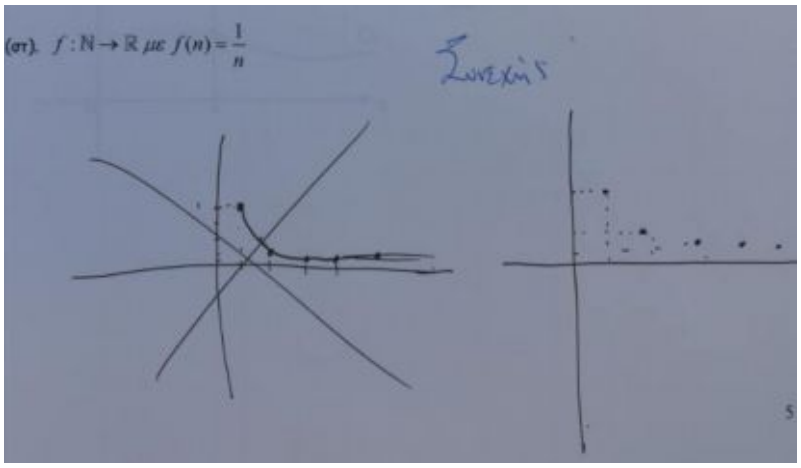
εικόνα έτσι όπως μου έρχεται στο μυαλό, όταν σκέφτομαι ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής, αυτό όντως έρχεται σε αντίφαση.
Ερ - Άρα θα άλλαζες κάτι στην απάντησή σου με βάση τη γραφική παράσταση;
Χ - Όχι, όχι.
Ερ - Ωραία. Θέλεις να μου πεις τώρα για τη δεύτερη για ποιο λόγο πιστεύεις ότι είναι συνεχής; Και κάνε μου πάλι τη γραφική της παράσταση.
Χ - …(Φτιάχνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω)…
Ερ - Η απάντηση που είχες δώσει ότι είναι συνεχής σε τι στηριζόταν;
Χ - Όπως μου ήρθε στο μυαλό, ότι δεν διακόπτεται κάπως η συνάρτηση.
Ερ - Δηλαδή έκανες νοερά στο μυαλό σου κάτι σαν την γραφική παράσταση;
Χ – Κάπως έτσι, ναι. Δηλαδή να πω ότι για όλες τις τιμές του x μπορώ να βρω τις αντίστοιχες τιμές … (η φράση δεν ακούγεται καθαρά μέχρι το τέλος)……..





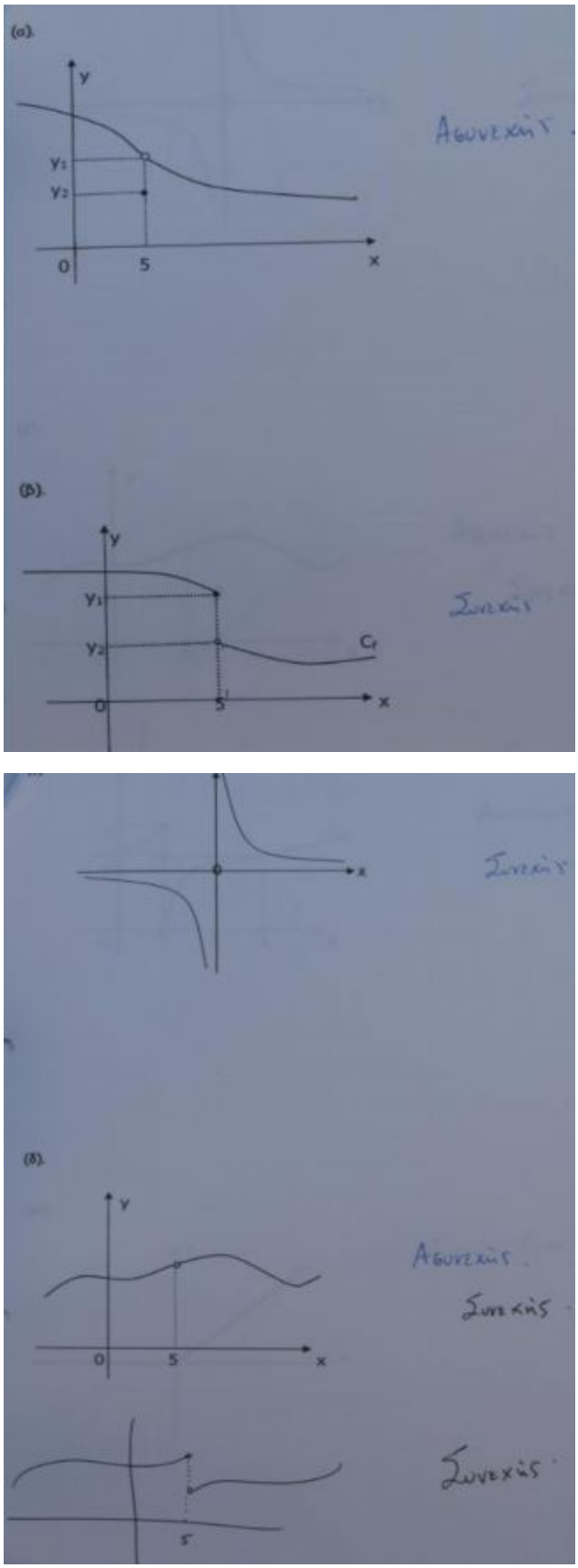
Ερ - Ωραία. Μπορείς να μου κάνεις τώρα κι εδώ στο (γ) τη γραφική παράσταση;
Χ - … (Κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … μέχρι εδώ, … όχι στο 0 και μετά από εκεί και έπειτα.
Ερ – Ωραία. Τι σου λέει;
Χ - Τώρα, δεν μπορώ να το τεκμηριώσω αυτό που λέω …
Ερ - … δεν με πειράζει, αυτό που λέει η αίσθηση σε θέλω …
Χ - …ναι ότι είναι ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής; Γιατί; Που βλέπεις ασυνέχεια;
Χ - … [Η φράση δεν έχει καταγραφεί καθαρά λόγω παρεμβολής κινητού τηλεφώνου. Τα συμφραζόμενα δείχνουν ότι αλλάζει την απάντηση της και λέει ότι είναι συνεχής] …
Ερ – Γι' αυτήν τώρα τη (δ) τι θα έλεγες;
Χ - … (τη διαβάζει ξανά) …
Ερ - Μπορείς να κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση; … (Κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … Τώρα τι λες, τι είναι;
Χ - Συνεχής την έχω βάλει, έχω σβήσει το Α.
Ερ - Μάλιστα, ωραία. Τώρα τι λες;
Χ - Το ίδιο. Συνεχής, σε αυτό θα επιμείνω.
Ερ - Άρα σαν την προηγούμενη, έτσι;
Χ - Ναι, σαν την προηγούμενη.
Ερ - Δεν πιστεύεις ότι υπάρχει κάποια διαφορά με την προηγούμενη; Δεν σημαίνει ότι υπάρχει, απλά ρωτάω. Προβληματίζεσαι ότι μήπως υπάρχει;

Χ - Και προβληματίζομαι … δηλαδή πιστεύω ότι μπορεί και να υπάρχει …δεν ξέρω, δεν απαντάω με πολλή σιγουριά σε πολλά πράγματα.
Ερ - Αν υποθέσουμε ότι είχες κάποιο μαθητή της Γ΄ Λυκείου και του έκανες μάθημα και έπρεπε να προσπαθήσεις να τεκμηριώσει την απάντησή σου ότι είναι και οι δύο συνέχειες, τι θα του έλεγες;
Χ – (γελάει) Σε αυτή τη φάση δεν θα μπορούσα, γι' αυτό και δεν κάνω μαθήματα σε μαθητές Γ΄ Λυκείου, μην το πάρω στο λαιμό μου το παιδί!
Ερ - Θυμάσαι καθόλου τον ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο;
Χ - Μπα, όχι, δε νομίζω!
Ερ - Εντάξει. Ας το αφήσουμε αυτό. Πάμε στο επόμενο στην (ε). Θες να δοκιμάσεις σε αυτή να μου πεις πως μπορεί να ήταν η γραφική παράσταση;
Χ - … (Κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) … έτσι, κουκίδες, κουκίδες στον άξονα και στην ευθεία του y=1.
Ερ – Άρα;
Χ - Άρα μου κάνει για ασυνεχής.
Ερ - Γιατί; Γιατί σου κάνει για ασυνεχής; Τι σου βγάζει και λες όχι;
Χ - Δεν ξέρω, έτσι κουκίδες κουκκίδες μέσα στο μυαλό μου δεν μου κάνει για κάτι συνεχής. Δεν υπάρχει μία συνέχεια.
Ερ - Τι εννοείς όταν λες ότι δεν υπάρχει μια συνέχεια;
Χ - Πώς να το εξηγήσω αυτό τώρα… Νοιώθω ότι δεν υπάρχει μία συνέχεια μέσα στη γραφική της παράσταση, αν και δεν είναι αυτό το κριτήριο, αλλά δεν μου κάνει για συνεχής. Αυτό.



Ερ - Ωραία. Η επόμενη τώρα η (στ); Μπορείς να δοκιμάσεις να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;
Χ - … (Κάνει το πρώτο γράφημα που φαίνεται δίπλα στα αριστερά)...
Ερ - Τι διαφορά έχει αυτή από την 1/x;
Χ - Το ότι αυτή δεν ορίζεται από το 0 και κάτω.
Ερ - Έχεις άλλη διαφορά από την 1/x;
Χ - Στο πεδίο ορισμού, όπως είπα, που έχει διαφορετικό αυτό εδώ … και πάει από τους φυσικούς…άρα δεν ορίζεται στις ενδιάμεσες τιμές … δεν θα είναι τότε αυτής της μορφής (δείχνει το γράφημα που έκανε αρχικά). Θα είναι και αυτή κουκκιδίτσες.
Ερ - Δηλαδή πιστεύεις ότι είναι λάθος το γράφημα που έκανες;
Χ - Ναι, το αρχικό αυτό που τα ένωσα όλα τα σημεία είναι λάθος, ναι.
Ερ - Αν θεωρείς ότι αυτό είναι λάθος, θέλεις να μου κάνεις δίπλα αυτό που πιστεύεις ότι είναι το σωστό;
Χ - … (Κάνει το δεύτερο γράφημα που φαίνεται επάνω στα δεξιά)...Θα είναι αυτής της μορφής, κουκκιδίτσες.
Ερ - Ωραία. Τώρα, αλλάζει κάτι στην απάντησή σου ή όχι;
Χ - … Όχι

Ερ – Γιατί; Δηλαδή εσύ συνεχίζεις να πιστεύεις ότι είναι συνεχής;



Χ - Ναι. Έτσι νομίζω. Αν και η γραφική παράσταση δεν είναι …

Ερ - …Και η προηγούμενη γιατί δεν ήταν;

Χ – (Γελάει). Δεν ξέρω! …

Ερ - … προσπαθώ να καταλάβω τι είναι αυτό που αλλάζει στην αίσθησή σου. Γιατί πριν οι κουκκιδίτσες δεν ήταν συνεχείς ενώ τώρα είναι;

Χ - Δεν ξέρω. Έτσι, αυτή μου κάνει για συνεχής, έτσι μου κάνει.

Ερ - Δεν μπορείς να βρεις τι είναι αυτό που σε κάνει να σου βγαίνει αυτό το πράγμα;

Χ – Μου βγαίνει, δεν ξέρω! Είναι συνεχής.

Ερ - Εντάξει. Ας δούμε τώρα τα επόμενα που είναι όλο γραφήματα. Τι λες για το πρώτο; Ασυνεχής, γιατί;

Χ - Επειδή διακόπτεται σε ένα σημείο, έτσι όπως τη σκέφτηκα εκείνη την ώρα, και επειδή η εικόνα της f(x) για x=5, ενώ θα έπρεπε να είναι εδώ (δείχνει την τρύπα) είναι εδώ (δείχνει την μαύρη κουκίδα), δεν είναι συνεχής.

Ερ - Μάλιστα. Η κάτω τώρα;

Χ - Αυτή είναι συνεχής.

Ερ - Γιατί;

Χ - Γιατί; Γιατί είναι εδώ που πρέπει, δηλαδή για x=5 είναι κανονικά εδώ που έπρεπε να είναι και μετά ξεκινάει από κάτω για x=6 μια χαρά.

Ερ – Πολύ ωραία. Αυτή τώρα, η (γ) ;

Χ – Συνεχής.

Ερ – Γιατί;

Χ - Γιατί πέρα από το 0 που δεν ορίζεται σε όλα τα άλλα μία χαρά συνεχής είναι.

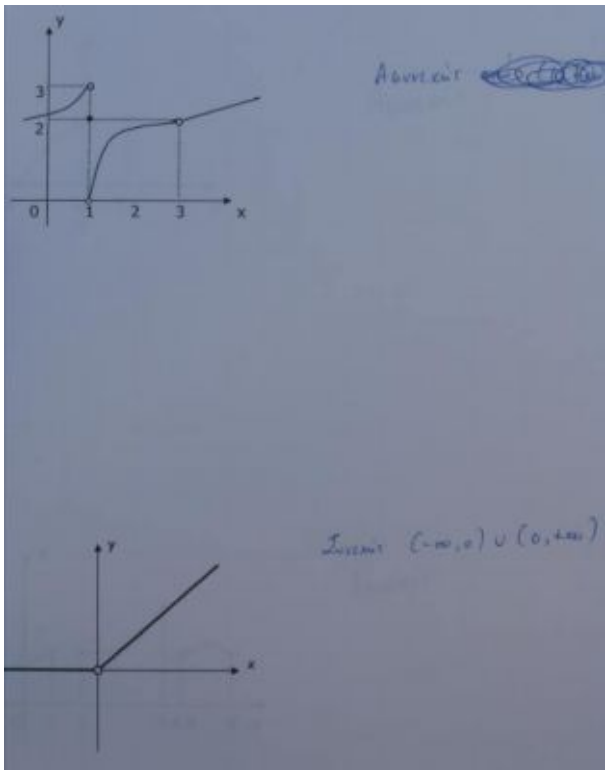
Ερ – Ωραία. Η κάτω τώρα η (δ); Λες ασυνεχής, Γιατί;

Χ – Ασυνεχής ε; …όχι, νομίζω είναι λάθος, είναι συνεχής.

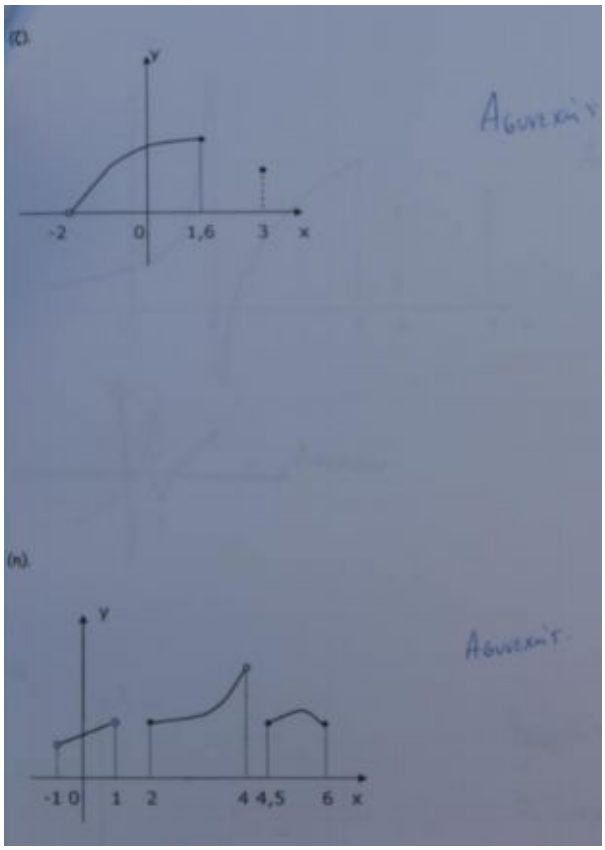
Ερ – Γιατί;

Χ - Γιατί φτάνει μέχρι το 5 είναι συνεχής και μετά το 5 επίσης είναι συνεχής, δεν είναι σαν την (α) που

δεν ήταν συνεχής.
Ερ - Άρα θα άλλαζες την απάντηση σου;
Χ - Ναι. Είναι συνεχής.

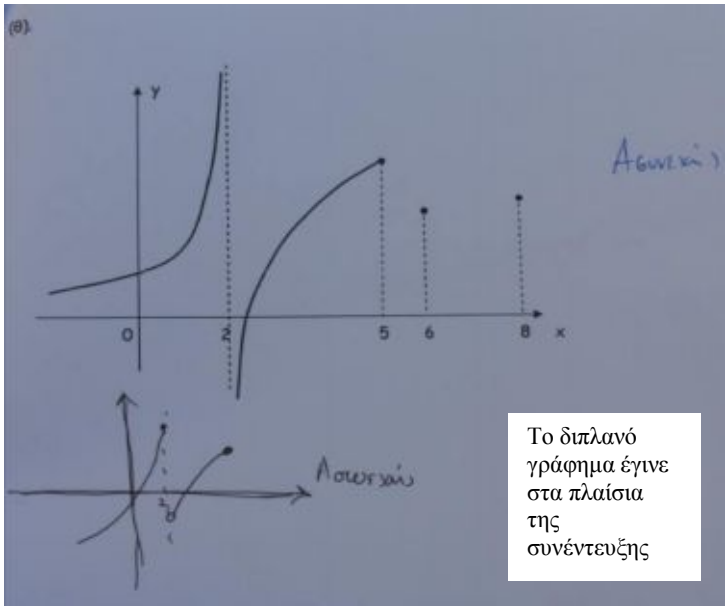


Ερ - Ωραία. Πάμε στο (ε). Λες ασυνεχής. Γιατί;
Χ – Γι' αυτό εδώ (δείχνει την κουκίδα).
Ερ - Τι σε χαλάει εδώ πέρα;
Χ - Που είναι εδώ πέρα μόνο του αυτό! (γελάει) και δεν είναι εδώ (δείχνει τα κενά).
Ερ - Δηλαδή αν έπαιρνα την κουκκίδα και την έβαζα σε ένα από τα δύο κενά, τι θα έλεγες;
Χ - Συνεχής θα έλεγα, έτσι θα έλεγα.
Ερ - Ωραία. Στο x=3;
Χ – Στο 3 δεν ορίζεται.
Ερ – Δηλαδή σε χαλάει το 3;
Χ - Δηλαδή άμα το εξετάσουμε τοπικά, μπορεί να είναι συνεχής από εδώ μέχρι εδώ και από εδώ μέχρι εδώ, εντάξει δεν με χαλάει
Ερ - Ωραία. Η επόμενη τώρα λες…
Χ - …είναι συνεχής και έχω πει ακριβώς που είναι συνεχής ...
Ερ - …ναι, ωραία. Η τρύπα στο 0 δε σε χαλάει δηλαδή;
Χ – Όχι, όχι.

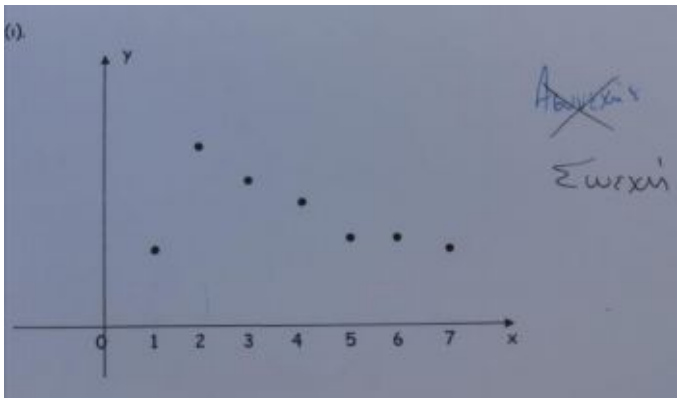


Ερ – Εδώ τώρα στη (ζ) λες ασυνεχής. Γιατί;
Χ - Ε λόγω αυτής της κουκίδας, αυτό εδώ στο 3 που είναι μόνο του!
Ερ – Το μοναχικό ε;! Αν έλειπε αυτό;
Χ - …Συνεχής θα την έλεγα στο $(-2, 1.6]$.

Ερ – Ωραία. Το επόμενο τώρα;
Χ – Αχ αυτή δεν μου αρέσει καθόλου! (γελάει)
… Ασυνεχή τη βγάζω!
Ερ – Γιατί;
Χ – Ασυνεχής ναι! Που διακόπτεται, αυτά που κάνει έτσι, όλα αυτά που κάνει, δεν μου κάνει καθόλου για συνεχής.



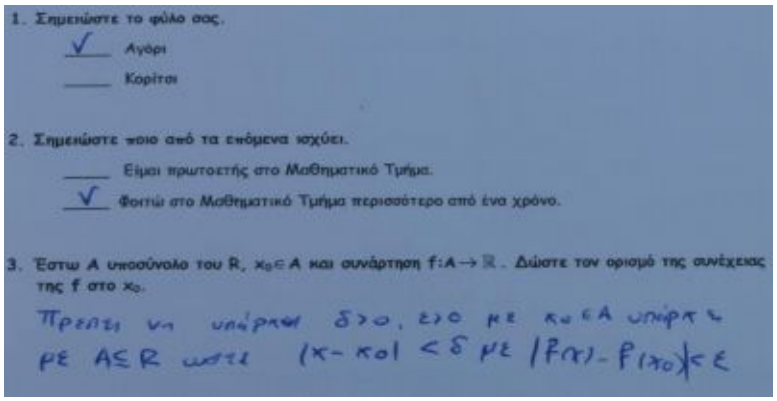
Ερ – Η επόμενη;
Χ – Ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής. Γιατί; Τι σε χαλάει;
Χ – Πέρα από τις κουκίδες που είναι μόνες τους, αυτό εδώ που όταν πηγαίνει στο 2, η μία πλευρά πάει προς το μείον άπειρο και η άλλη προς το συν άπειρο, που αυτό εδώ δεν είναι ένας πραγματικός αριθμός, κάτι μία κουκιδίτσα έστω ανοικτή η κλειστή.
Ερ - Δηλαδή αν εγώ τη πάρω και τη διαφοροποιήσω λίγο και σου φτιάξω το γράφημα που βλέπεις εδώ (το γράφημα που φαίνεται στο σχήμα) τι θα έλεγες τώρα γι αυτήν;
Χ - … Ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής, γιατί;
Χ - … Δεν ξέρω ούτε αν είναι ασυνεχής. Εδώ στο 2 είναι που με χαλάει κάτι … εκεί κάτι με χαλάει ως προς τη συνέχεια.



Ερ – Εδώ τώρα στη (ι);
Χ - … είμαι ξαναμπερδεμένη. Από τη μια για κάθε θετικό ακέραιο υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή …
Ερ - Αυτό είναι καλό δηλαδή;
Χ – (γελάει) Καλό πρέπει να ναι! … ασυνεχής… μάλλον.
Ερ – Ε! Με προκαλείς! (γελάω) Γιατί εδώ (δείχνω την 7(στ)) μου είπες ότι είναι συνεχής;
Χ – Συνεχής έχω βάλει; Μωρέ μπερδεύομαι! Δεν ξέρω τώρα …τι να είναι…
Ερ - Γιατί η προηγούμενη να είναι συνεχής ενώ αυτή τώρα ασυνεχής;
Χ - Γιατί δεν έχω ξεκάθαρο τον ορισμό της συνέχειας και τα λέω μία έτσι και μία αλλιώς.
Ερ - Δεν με πειράζει αυτό, αυτό θέλω, την εικόνα που έχεις στο μυαλό σου. Δηλαδή αν γυρίζαμε τώρα στην 7(στ) θα την κάναμε ασυνεχή;
Χ - … χμμμ …
Ερ - Πρόσεξε. Δεν σημαίνει ότι κάπου έχεις κάνει λάθος. Απλά θέλω να καταλάβω γιατί σε σχήματα που και τα δύο έχουν κουκίδες και χοντρικά μοιάζουν, δίνεις διαφορετική απάντηση. Απλά ρωτάω.
Χ - Θα πω και αυτήν συνεχή.
Ερ - Δηλαδή αλλάζεις την απάντησή σου στην τελευταία και τη λες και αυτή συνεχή;
Χ - Ναι.
Ερ – Ωραία! Σε ευχαριστώ πολύ!

16η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Γιώργος’ φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο


1. Σημειώστε το φύλο σας.

√ Αγόρι

___ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα εκόμενα ισχύει.

___ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

√ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Πρέπει να υπάρχει $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ με $x_0 \in A$ υπάρχει με $A \subseteq R$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ με $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ερ - Τον ορισμό δεν θα τον σχολιάσω τώρα. Θα τον δούμε μετά.

Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πρόβλημα που έρχεται στο μυαλό σας ότι δίνουσα της φράσης "Η συνάρτηση f είναι συνεχής".

Το πρόβλημα ώστε συνάρτησης είναι συνεχής κοντά

Ερ - Τι λέει στο μυαλό σου η έννοια της συνέχειας σε σχέση με το Λύκειο και με τον Απειροστικό; Θυμάσαι τον ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο;

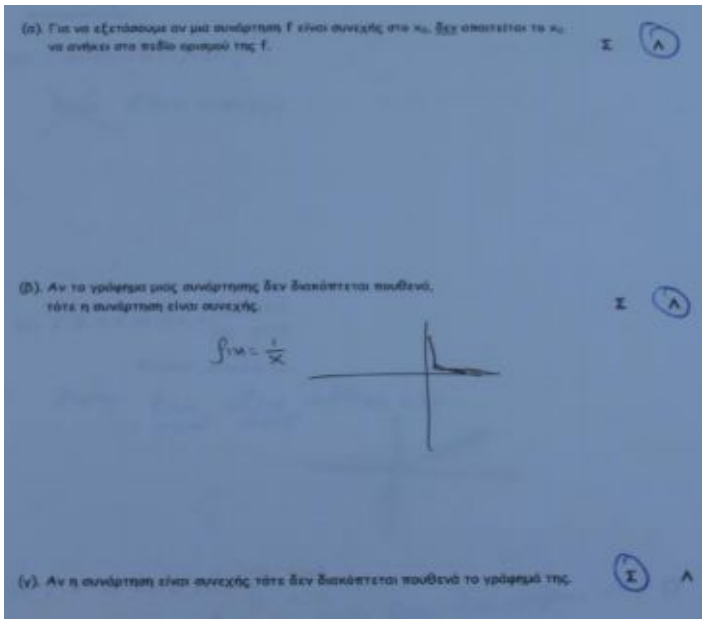
Γ - Στο Λύκειο λέγαμε ότι αν το όριο είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε είναι συνεχής στο x_0.

Ερ - Ωραία. Τι πιστεύεις, σχετίζεται αυτός ο ορισμός με τον ορισμό του Πανεπιστημίου;

Γ - Δε βρίσκω κάτι … κάπως σχετίζεται αλλά δεν ξέρω πώς.

Ερ - Ποιος θεωρείς ότι είναι πιο ισχυρός;

Γ – Ε, του Πανεπιστημίου.


(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ (Λ)

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ (Λ)

$f(x) = \frac{1}{x}$

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. (Σ) Λ

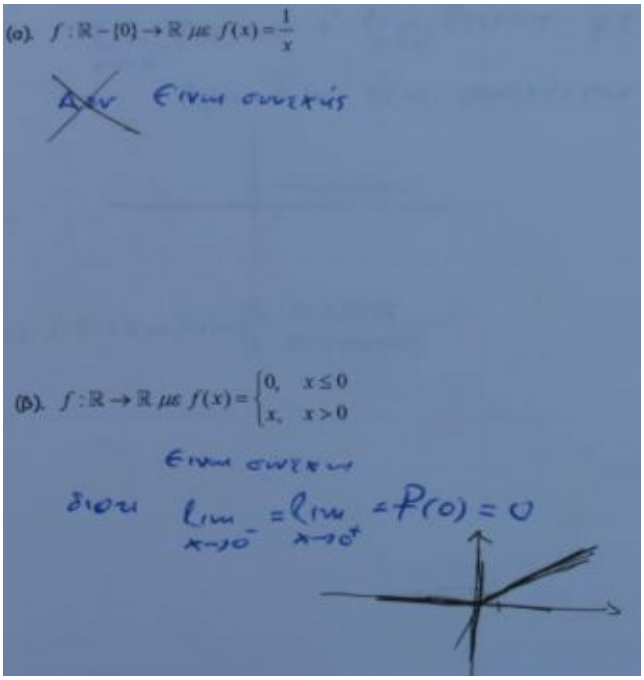
Ερ – Ωραία. Τώρα στην επόμενη λες ότι αυτό, η εικόνα που σου έρχεται στο μυαλό είναι ότι το γράφημα της συνάρτησης είναι συνεχής καμπύλη έτσι; Εννοείς δηλαδή μία συνεχόμενη γραμμή;

Γ- Ναι, να μη σηκώνουμε το μολύβι καθόλου από το χαρτί.

Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα στην 6(α) λες λάθος. Γιατί;

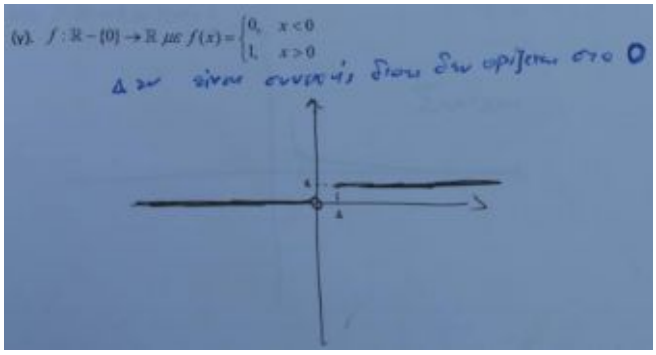
Γ - … Γιατί αν δεν ανήκει και στο πεδίο ορισμού τότε δεν μπορεί να είναι συνεχής εκεί.

Ερ – Μάλιστα. Στη (β) τώρα λες ότι είναι λάθος. Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα στο μυαλό σου;
Γ – Την 1/x.
Ερ - Μάλιστα. Τι γράφημα έχει;
Γ – Νομίζω πως πάει κάπως έτσι … (σχεδιάζει το παραπάνω γράφημα) … Πάει κάπως έτσι; … δεν είμαι σίγουρος …
Ερ - Και γιατί αυτό το θεωρείς αντιπαράδειγμα;
Γ - … Γιατί δεν ορίζεται στο 0 … αλλά αυτό δεν είναι … όχι δεν είναι αντιπαράδειγμα, είναι λάθος … γιατί μπορεί να έχω μία συνάρτηση με δύο κλάδους και να τη θεωρώ συνεχή. Αλλά αυτό δεν είναι σωστό, δεν νομίζω ότι είναι σωστό.
Ερ - Το αντιπαράδειγμα που χρησιμοποίησες εννοείς;
Γ - Ναι, ναι.
Ερ – Η απάντηση που έχεις δώσει;
Γ - Νομίζω ότι έχω κάνει λάθος.
Ερ - Δηλαδή νομίζεις ότι κανονικά πρέπει να βάλεις το Σωστό;
Θα το άλλαζες δηλαδή τώρα που το ξαναβλέπεις;
Γ - … Όχι θα το άφηνα όπως είναι. Δεν μπορώ να βρω αντιπαράδειγμα αλλά αυτό μου κάνει για λάθος … νομίζω ότι είναι λάθος.
Ερ - Ωραία. Ενώ το επόμενο νομίζεις ότι είναι σωστό έτσι; Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της έτσι;

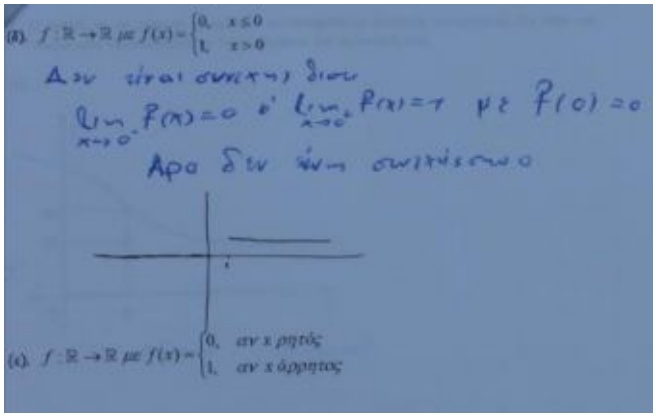


Γ – Ναι, ναι.
Ερ – Ωραία. Αυτή τώρα, η (α) λες ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Γ - …
Ερ - Δεν με ενδιαφέρουν τα αυστηρά μαθηματικά, ποια είναι η αίσθηση που σου δημιουργήθηκε; Τι σκέφτηκες και απάντησες έτσι;
Γ - Ότι δεν ορίζεται στο 0 αλλά νομίζω ότι είναι λάθος τώρα που το ξαναβλέπω.
Ερ – Γιατί;
Γ - Γιατί είναι συνεχής.
Ερ - Δηλαδή πιστεύεις ότι είναι συνεχής αυτή; Θα το άλλαζες δηλαδή τώρα;
Γ - Ναι, ναι. Είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία. Άρα σβήνω το 'Δεν'. Η επόμενη τώρα, η (β);
Γ - Αυτή πήρα τα πλευρικά όρια και νομίζω ότι είναι συνεχής.
Ερ - Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική παράσταση σε αυτή;
Γ - … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω και το σχολιάζει) …
Ερ - Ωραία. Η γραφική παράσταση που έκανες σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις απαντήσει ή όχι;
Γ - Νομίζω πως μου το επιβεβαιώνει.

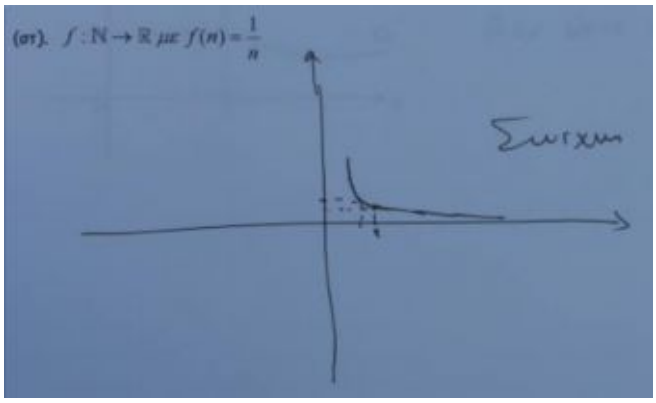
Ερ - Σε βοηθάει γενικά η γραφική παράσταση στο να απαντήσεις αν μία συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι;
Γ - Μερικές φορές ναι, μερικές φορές όχι.



Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα λες … (διαβάζω την απάντηση του) … Μπορείς να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική της παράσταση;
Γ - … (σχεδιάζει το διπλανό γράφημα και το σχολιάζει) …
Ερ - Σου επιβεβαιώνει το γράφημα αυτό που έχεις απαντήσει;
Γ - Ναι, όπως το βλέπω τώρα ναι, τώρα δεν ξέρω βέβαια αν είναι σωστό αλλά αν είναι σωστό μου το επιβεβαιώνει.

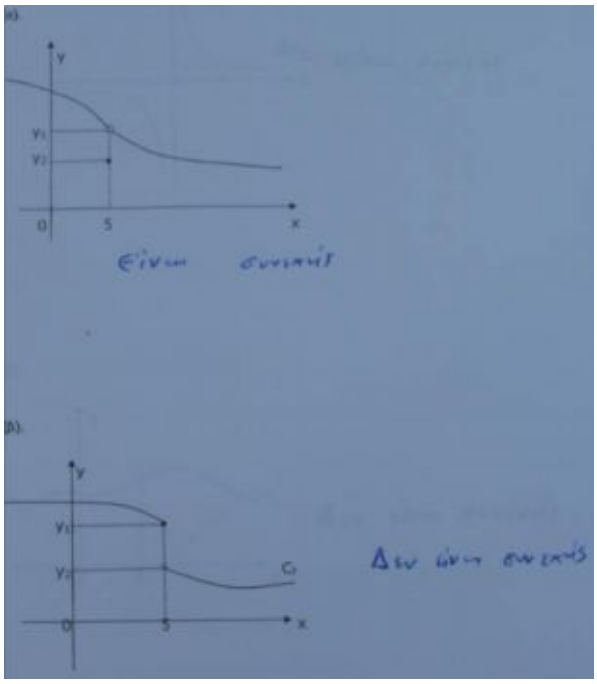


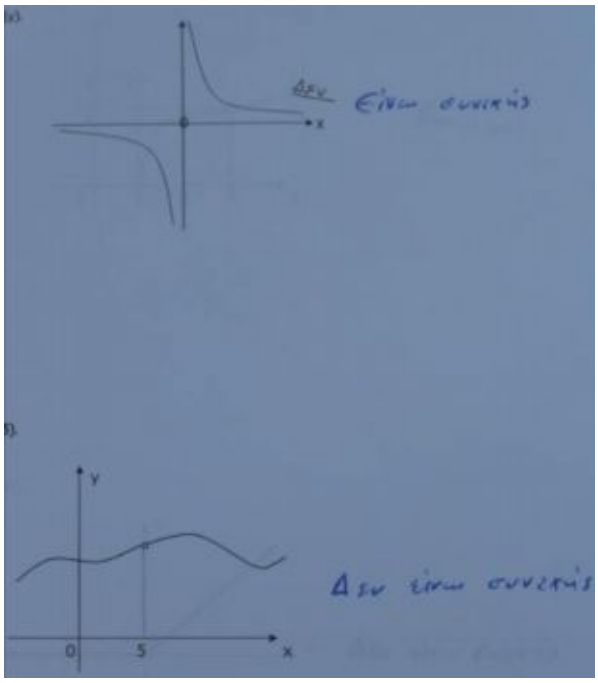
Ερ - Σε βλέπω διστακτικό. Έχεις κάποιο ενδοιασμό; Αν έχεις μπορείς να τον ξαναδείς. Δεν σημαίνει ότι είναι λάθος απλά ρωτάω.
Γ - … Δεν ξέρω, πάμε παρακάτω. Δεν μπορώ να δω τώρα κάτι.
Ερ – Εντάξει! Εδώ τώρα στη (δ) λες ότι δεν είναι συνεχής και παίρνεις τα πλευρικά όρια. Ωραία. Θέλεις να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;
Γ - … (Κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα και τη σχολιάζει) …
Ερ - Έχεις κάποια διαφορά από το προηγούμενο;
Γ – Όχι … ναι ότι δεν περιλαμβάνει το 1 … (ξαναγυρίζει και κοιτάζει το προηγούμενο) … όχι δε νομίζω ότι έχει καμία διαφορά.



Ερ – Ωραία. Για την επόμενη, τη (ε) τι θα έλεγες;
Γ – Τίποτα!
Ερ – Τώρα που την ξαναβλέπεις; Σου θυμίζει κάτι;
Γ – Μια που τη λέγαμε Dirichlet νομίζω;
Ερ – Σωστά! Αν προσπαθούσες να κάνεις αυτήν τη γραφική παράσταση, μπορείς να μου πεις περίπου πώς θα ήταν;
Γ – Δεν μπορώ να σκεφτώ. Προσπαθώ να τη φέρω στο μυαλό μου που την έχω δει.
Ερ - Αν ήθελες να απαντήσεις τελείως ενστικτωδώς, τι θα έλεγες είναι συνεχής ή όχι;
Γ - Νομίζω ότι θα απαντούσα ότι δεν είναι. Προσπαθώ να φέρω στο μυαλό μου τι είχαμε αποδείξει, νομίζω ότι είχαμε αποδείξει ότι δεν είναι.

Ερ – Ωραία, εντάξει. Η (στ) τώρα;
Γ – Αυτή; Νομίζω ότι είναι.
Ερ – Είναι ε; Να δοκιμάσουμε να κάνουμε και σε αυτήν τη γραφική της παράσταση;
Γ - … (κάνει το γράφημα που φαίνεται πιο πάνω) … Θα κατεβαίνει κάπως έτσι και θα πηγαίνει ασύμπτωτα με αυτό εδώ τον άξονα.
Ερ – Οπότε τι πιστεύεις;
Γ – Νομίζω ότι είναι συνεχής.

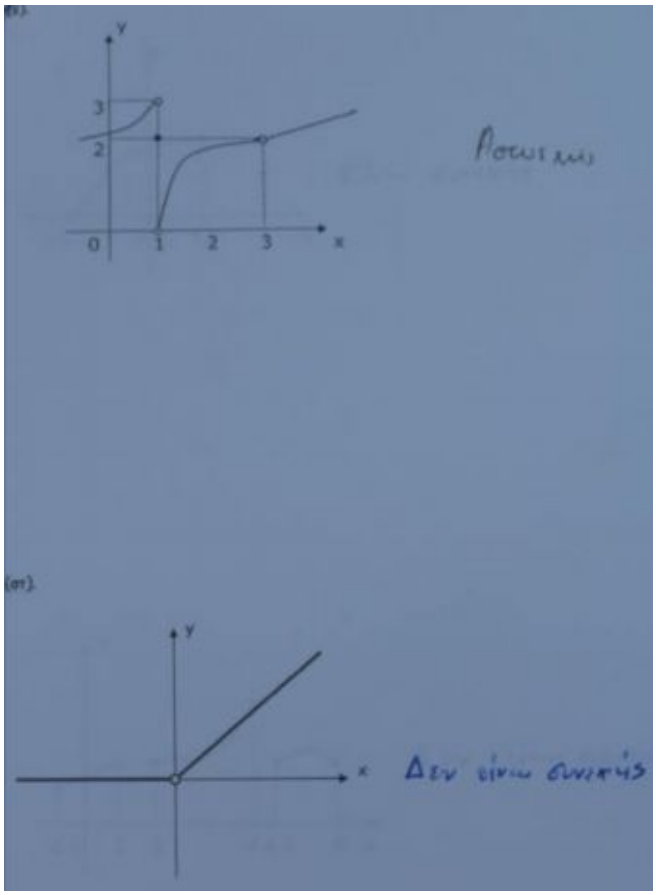




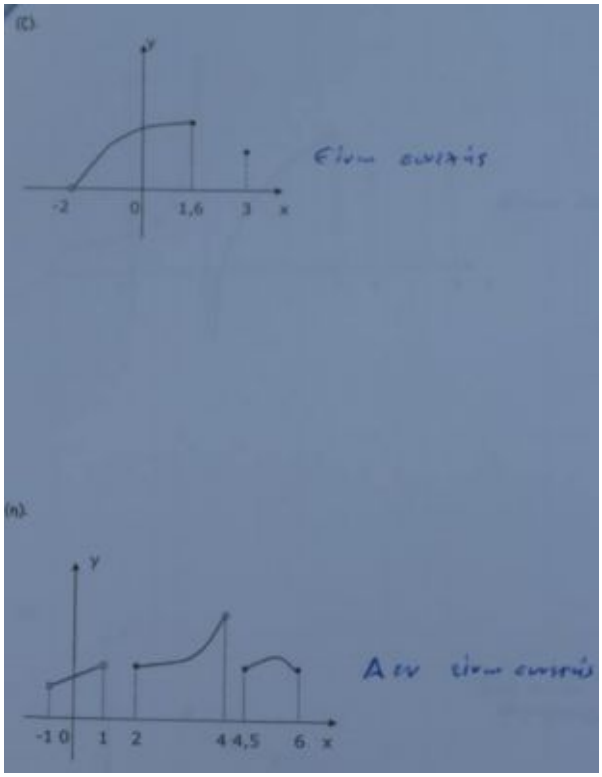
Ερ - Πλευρικά όρια πού;
Γ – Λογικά στο 0.

Ερ – Ωραία. Τώρα για πες μου για την (α). Λες ότι είναι συνεχής. Γιατί; Και ίσως και σε αντιδιαστολή με την επόμενη τη (β) που λες ότι δεν είναι συνεχής. Τι το διαφορετικό βλέπεις ανάμεσα σε αυτές τις δύο;
Γ – Αυτό εδώ με έκανε (δείχνει την κουκίδα στο σχήμα (α)). Ότι στην τιμή 5, δηλαδή για x=5 ορίζεται η τιμή της. Ενώ εδώ πέρα (δείχνει το σχήμα (β)) είναι σημείο ασυνέχειας. Αλλά αν εδώ πέρα δεν οριζόταν (δείχνει στο σχήμα (α) την κουκίδα), δηλαδή αν έλειπε αυτό (δείχνει την κουκκίδα) και ήταν μόνο αυτό (δείχνει το κενό) τότε θα έλεγα ότι δεν θα ήταν συνεχής …
Ερ - … δηλαδή εννοείς κάτι σαν το (δ) που έχει κενό έτσι; …
Γ - … ναι, έτσι ακριβώς …
Ερ - …ενώ εδώ στο (α) λες …
Γ - …ότι είναι συνεχής αφού υπάρχει η τιμή της.
Ερ – Κατάλαβα. Ενώ εδώ στο (β) τι είναι αυτό που σε ενοχλεί;
Γ - Αυτό εδώ (δείχνει το 'σκαλοπάτι') ότι δεν ορίζεται … το ίδιο πράγμα είναι τώρα όπως το απάντησα…
Ερ – Δηλαδή για x=5 υπάρχει το αντίστοιχο y;
Γ – Όχι. Νομίζω ότι δεν υπάρχει … όχι υπάρχει, υπάρχει!! (Γελάει)
Ερ - Αλλάζει κάτι στην απάντησή σου;
Γ - Όχι όπως το βλέπω έτσι δεν θα άλλαζα κάτι. Δεν είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία. Στην (γ) τώρα λες ότι είναι συνεχής. Σε ενοχλεί που έχεις δύο κομμάτια;
Γ - Όχι. Αν έβλεπα τον τύπο της θα έπαιρνα πλευρικά όρια.

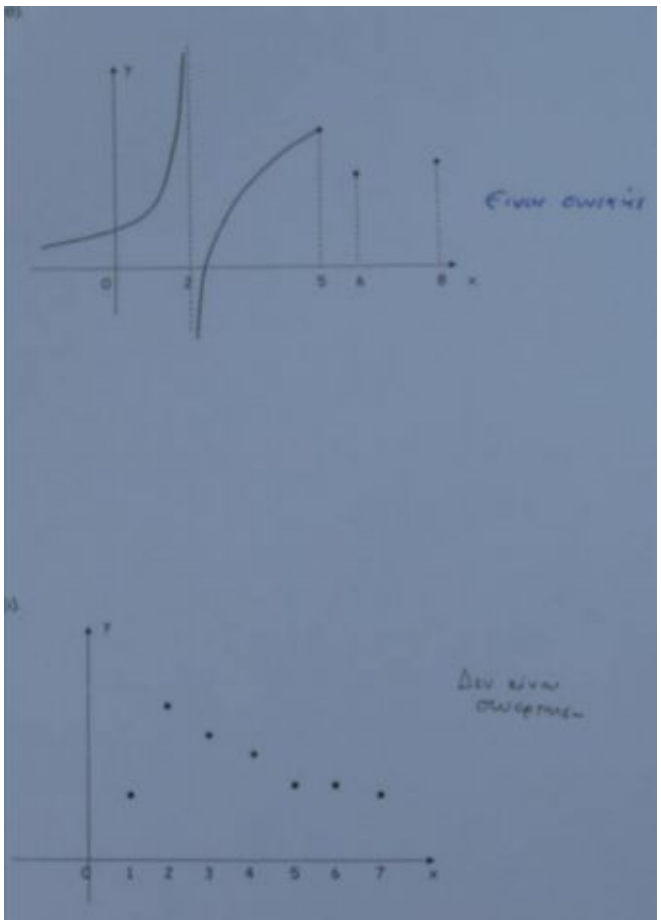
Ερ - Και αν έπαιρνες πλευρικά όρια στο x=0 τι θα έβγαζες; Ή νομίζεις ότι χρειάζεσαι τον τύπο για να απαντήσεις; Μόνο από το γράφημα μπορείς να αποφανθείς;
Γ – Άπειρα θα έλεγα. Η μια πάει στο συν άπειρο και η άλλη στο πλην άπειρο. Διαφορετικά, άρα θα είναι ασυνεχής νομίζω.
Ερ - Θα άλλαζες κάτι στην απάντηση;
Γ - Νομίζω πως ναι, θα την έλεγα ασυνεχή.
Ερ - Ωραία, άρα της βάζω ένα 'Δεν'. Εκείνη την ώρα όμως, τι σε έκανε να πεις ότι είναι ασυνεχής;
Γ - Ίσως δεν πρόσεξα καλά αυτό εδώ (δείχνει το 0).
Ερ - Ενώ από κάτω (στο (δ))λες ότι δεν είναι συνεχής.
Γ – Ναι, είναι αυτό που σας είπα πριν, ότι λείπει το 5.
Ερ - Ενώ εδώ στο (γ) πίστευες ότι υπάρχει η τιμή 0;
Γ – Ναι, Ίσως δεν πρόσεξα καλά αλλά από ότι φαίνεται εδώ είναι ασύμπτωτες εδώ, πάει στο άπειρο.
Ερ - Δηλαδή το γεγονός ότι ασυμπτωτικά πλησιάζει χωρίς να πιάσει την τιμή 0, ενώ στην αρχή δηλαδή πίστευες ότι την πιάνει έτσι;
Γ - Ναι, ναι ακριβώς.
Ερ – Κατάλαβα.



Ερ – Αυτή εδώ τώρα, η (ε);
Γ - Αυτή εδώ πέρα με μπέρδεψε αρκετά. Εδώ έχει την τιμή έτσι;
Ερ - Στο x=1 λες; Ναι.
Γ - Αλλά δεν ορίζει εδώ πέρα δύο τιμές, στο 1 και στο 3, δείχνει να μην είναι συνεχής… δεν ξέρω.
Ερ - Αν έπρεπε να διαλέξεις τι θα έβαζες;
Γ - Ασυνεχή θα την έλεγα.
Ερ - Ασυνεχής, έτσι; Ωραία, ας το γράψουμε εδώ (γράφω όπως φαίνεται δίπλα)…
Ωραία, η (στ) τώρα, λες δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Γ - Αυτό εδώ το πράγμα (δείχνει το κενό στο 0) νομίζω δεν είναι συνεχής και …
Ερ – Δεν είναι συνεχής στο 0 γιατί κάνει τρύπα;
Γ – Ναι.

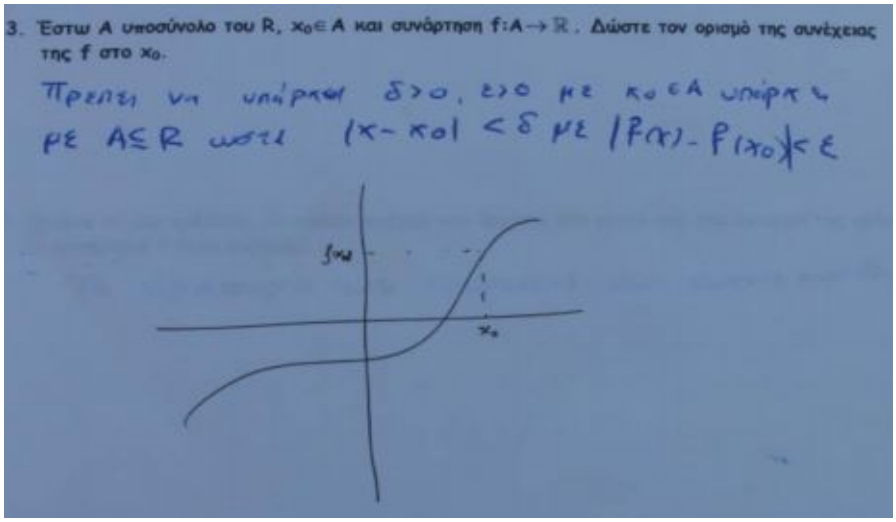


Ερ – Αυτή τώρα η (ζ);
Γ - … Στο -2 είναι το πρόβλημα, νομίζω πως είναι ασυνεχής για αυτό εδώ το σημείο
Ερ – Η κουκίδα στο 3 σε χαλάει ή όχι;
Γ - …όχι… αυτό δεν σημαίνει ότι ορίζεται στο 3; …
Ερ - … ναι …
Γ – Αλλά δεν ορίζεται εδώ (δείχνει το -2). Όχι δεν με χαλάει αυτή η κουκκίδα αλλά αυτή εδώ η συγκεκριμένη … μπορεί να την έβαζα …
Ερ - Άρα κοιτώντας τη θα άλλαζες κάτι ή όχι;
Γ - … Όχι αφήστε τη όπως είναι.
Ερ – Η (η) λες δεν είναι συνεχής. Γιατί;
Γ - Τώρα σε αυτό το διάστημα είναι συνεχής (δείχνει το (-1, 1)) αυτές οι κουκίδες εδώ με μπέρδεψαν (δείχνει τα κλειστά άκρα). Στο ανοιχτό διάστημα είναι συνεχής.
Ερ - Άρα και την προηγούμενη άμα την ορίσουμε στο …



Γ - … ναι στο ανοιχτό (-2, 1.6) είναι συνεχής.
Ερ – Βλέπεις κάποια διαφορά; Δηλαδή θα άλλαζες μήπως κάτι από τα δύο; Γιατί στη δεύτερη λες ότι δεν είναι συνεχής; Τι σε χαλάει; Τα κλειστά διαστήματα είτε ότι δεν ενώνονται μεταξύ τους;
Γ – Νομίζω περισσότερο το ότι δεν ενώνονται.
Ερ - Τότε το αντίστοιχο κενό που υπάρχει στην προηγούμενη στη (ζ) από το 1.6 μέχρι το 3 δεν σε ενοχλεί;
Γ - Μπορεί να μην ορίζεται εκεί πέρα, αυτό σκέφτομαι.
Ερ - Και αν έκανα την ίδια ερώτηση εδώ; Αν δηλαδή στην (η) δεν ορίζεται από το 1 μετά το 2;
Γ – Το ίδιο είναι … μπερδεύτηκα τώρα! Ας το αφήσουμε όπως είναι!
Ερ – Εντάξει. Εδώ τώρα στη (θ). Είναι συνεχής λες. Υπάρχει κάτι που να σε ενοχλεί στο σχήμα;
Γ - … Αυτά τα δύο όρια που

βγαίνουν διαφορετικά εδώ στο 2 αλλά … μόνο αυτό … αλλά νομίζω …
Ερ – Εντάξει. Και στην τελευταία τι θα έλεγες;
Γ – Ότι δεν είναι συνάρτηση!
Ερ - Ότι δεν είναι συνάρτηση! Γιατί;
Γ - Εντάξει, αν ενώσουμε εδώ τις κουκίδες τότε θα βγει μία συνεχής γραμμή Αλλά τώρα δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα.
Ερ - Με τις κουκίδες έτσι όπως είναι; Είναι συνάρτηση;
Γ - Αυτά εδώ είναι στην ίδια ευθεία; (δείχνει τις κουκίδες που αντιστοιχούν στο 1 και στο 7)
Ερ - Ναι. Μπορεί να είναι.
Γ - Τότε νομίζω πώς όχι.
Ερ - Άρα έχει νόημα να εξετάσουμε συνέχεια;
Γ - Όχι.
Ερ – Οπότε να γράψουμε ότι δεν είναι καν συνάρτηση;
Γ – Ναι. (το γράφω πάνω στο ερωτηματολόγιό του)

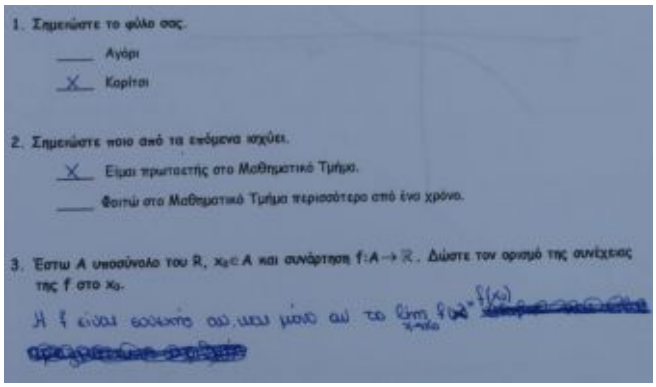


Ερ – Ωραία. Να ρωτήσω κάτι τελευταίο τώρα στο ορισμό. Αν προσπαθούσες να δώσεις μία απλή εξήγηση του ορισμού σε κάποιο παιδί της Γ΄ Λυκείου που του κάνεις μάθημα, τι θα του έλεγες με απλά λόγια;

Γ – Ψάχνω να βρω ένα ε … το οποίο να είναι … δεν μπορώ …
Ερ – Εντάξει, μην αγχώνεσαι. Σε ευχαριστώ πολύ!

17η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Εύη’, πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα.


1. Σημειώστε το φύλο σας.

____ Αγόρι

_X_ Κορίτσι

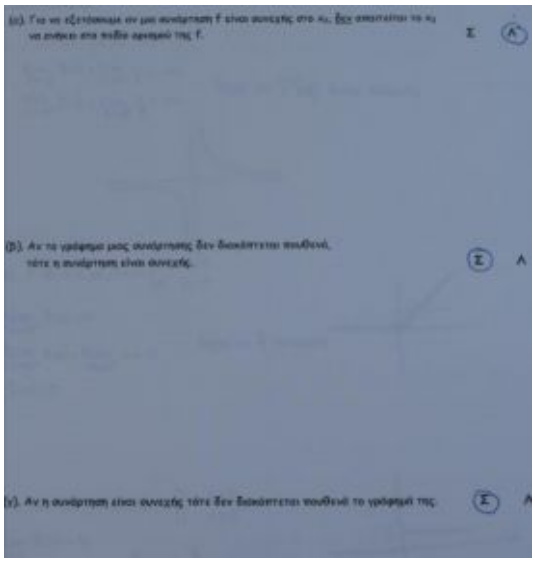
2. Σημειώστε ποιο από τα εκόμενα ισχύει.

_X_ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

____ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν το $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$


(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Ερ - Όπως βλέπω Εύη είσαι πρωτοετής. Πώς σου φάνηκε ο Απειροστικός;

Ε - Χάλια, πολύ χάλια. Πάρα πολύ θεωρία και μισώ τη θεωρία! Πακέτο!

Ερ - Κατάλαβα. Πόσο έγραψες στις πανελλήνιες στα μαθηματικά κατεύθυνσης;

Ε – 18.5

Ερ - Πολύ καλά! Αφήνω προς το παρόν τον ορισμό και θα γυρίσω στο τέλος.

Ερ - Τι αίσθηση σου δημιουργήθηκε από τον ορισμό που έμαθες στο Πανεπιστήμιο, ήταν πιο βαρύς πιο δύσκολος σε σχέση με αυτόν του Λυκείου;

Ε - Στο Λύκειο μαθαίναμε τα πιο ουσιαστικά πράγματα ενώ εδώ τα προεκτείνουμε με πιο πολλή θεωρία.

Ερ - Τι σου φέρνει στο μυαλό, δεν θέλω μαθηματικά ποια η γενική εικόνα που έρχεται στο μυαλό σου όταν ακούς ‘συνάρτηση συνεχής’;

Ε - Όρια και ο ορισμός αυτά.

Ερ – Όρια και ορισμός μάλιστα. Σαν εικόνα σαν …;

Ε - …σαν σχεδιάγραμμα;

Ερ - …ναι ναι.

Ε – ε, μία συνάρτηση που δεν διακόπτεται πουθενά.

Ερ – Ωραία. Εδώ λες Λάθος. Γιατί;

Ε - … Γιατί ουσιαστικά την εξετάζουμε μόνο στο πεδίο ορισμού της, εκεί μας ενδιαφέρει.

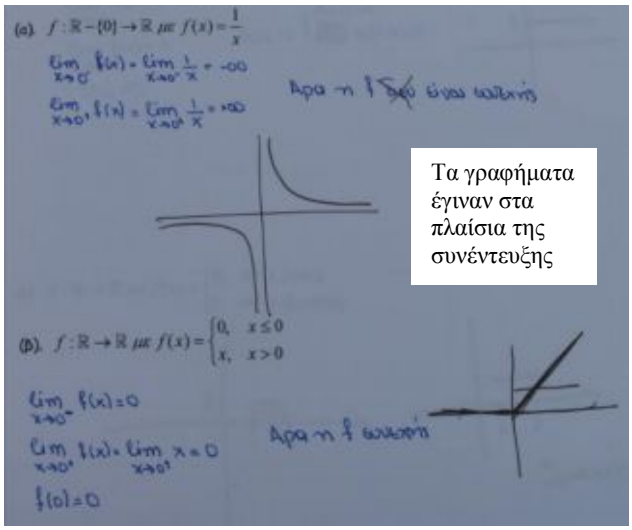
Ερ - Δηλαδή πιστεύεις ότι για να εξετάσουμε τη συνέχεια σε κάποιο σημείο αυτό πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της έτσι;

Ε – Ναι, ναι.

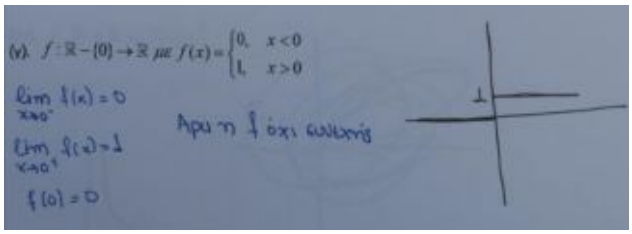
Ερ- Ωραία, τις επόμενες τώρα τις θεωρείς και τις δύο σωστές, λες δηλαδή ότι αν δεν διακόπτεται το γράφημα η συνάρτηση είναι συνεχής και αντίστροφα, αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της. Σωστά;

Ε - Ναι, ναι.

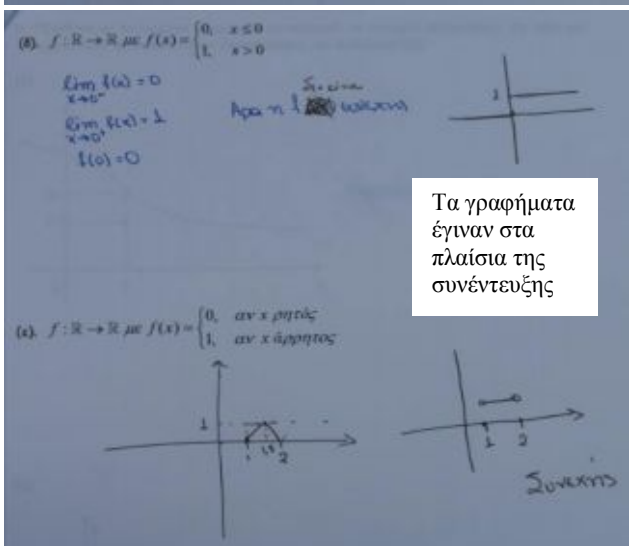
Ερ - Ωραία. Δεν έχω να ρωτήσω κάτι σε αυτές.



Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα λες ότι η f δεν είναι συνεχής. Θα μπορούσες να μου κάνεις γραφική της παράσταση;
Ε - … (κάνει το διπλανό γράφημα) … Έτσι δεν πάει;
Ερ – Ότι πιστεύεις εσύ! Αν αυτή είναι η γραφική παράσταση, σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις απαντήσει, ότι η f όντως δεν είναι συνεχής;
Ε – Ναι, γιατί εδώ πάει προς το … άπειρο … όχι … δεν είναι νομίζω αυτή η γραφική παράσταση … δεν τη θυμάμαι.
Ερ – Ωραία. Μην παιδεύεσαι. Πάμε στη δεύτερη, θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις και εδώ την γραφική παράσταση;
Ε - … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω με οριζόντια γραμμή) …
Ερ - Ωραία. Αν είναι αυτό το γράφημα σε βοηθάει να επιβεβαιώσει στην απάντηση σου ή όχι;
Ε - … (διστακτικά) …Άμα είναι σωστό, ναι.
Ερ – Ωραία, μην αγχώνεσαι, δεν σημαίνει ότι κάνεις λάθος. Απλά θέλω να δω αν το γράφημα σε βοηθάει σε μια απάντηση ή όχι ...



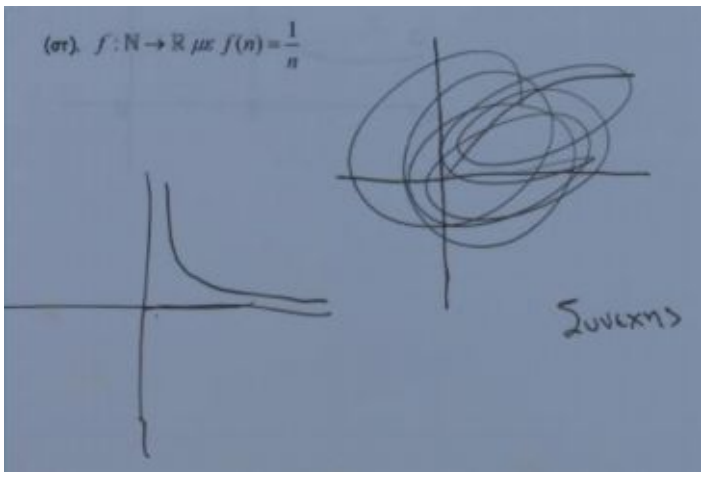
Ε - Εδώ έχω κάνει λάθος. Δεν είναι έτσι το γράφημα. Είναι έτσι … (κάνει τη σωστή γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω) ….
Ερ - Ωραία. Τώρα το καινούριο γράφημα που έκανες σε βοηθάει να υποστηρίξεις την απάντηση σου ότι είναι συνεχής;
Ε - Ναι, έτσι νομίζω.
Ερ –Ωραία. Κάνε μου και εδώ στη (γ) το γράφημα.



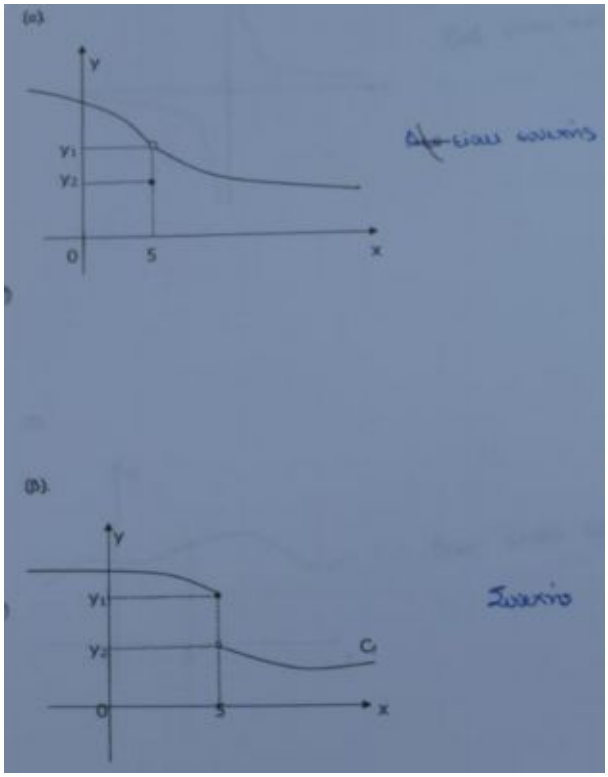
Ε - … (κάνει το γράφημα) …
Ερ – Εδώ τώρα λες 'όχι συνεχής'. Το γράφημα σε βοηθάει να επιβεβαιώσει στην απάντηση σου ή όχι;
Ε – Ναι, νομίζω πως ναι. Γιατί ουσιαστικά … ναι …
Ερ – Τι; Γιατί; Μέσω γραφήματος γιατί λες ότι δεν είναι συνεχής; Δηλαδή αν σου έδινα μόνο το γράφημα χωρίς τον τύπο της συνάρτησης τι θα απαντούσες, γιατί είναι ή δεν είναι συνεχής;
Ε - Γιατί ουσιαστικά εδώ πέρα διακόπτεται (δείχνει το 0) και μετά αρχίζει πάλι από εδώ (δείχνει το 1).
Ερ – Κατάλαβα. Θες να μου κάνεις και εδώ στη (δ) το γράφημα;

Ε - … (κάνει το διπλανό γράφημα) … Αυτή νομίζω πως είναι συνεχής γιατί ουσιαστικά εδώ …το προηγούμενο είχε δεν το είδα; (γυρίζει στη (γ)) εδώ (δείχνει το (γ)) διακόπτεται στο 0 ενώ εδώ ουσιαστικά είναι τελεία οπότε είναι συνεχής. Οπότε το έχω λάθος!
Ερ - Δηλαδή θα άλλαζες κάτι στην απάντησή σου;
Ε – Ναι. Θα έβαζα ότι είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία. Άρα να σβήσουμε το 'δεν'. Θα άλλαζε κάτι εδώ; (δείχνω τις σχέσεις με τα όρια που έχει γράψει δίπλα).
Ε - … χμμμ … τελικά πρέπει να τα αλλάξω αυτά εφόσον εδώ μου βγαίνει συνεχής.
Ερ - Δηλαδή ένα από τα δύο είναι λάθος;
Ε – Ναι … αυτό εδώ είναι λάθος (δείχνει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$), γιατί αυτό (δείχνει το πρώτο όριο) είναι σωστό … αλλά και πάλι …μπερδεύτηκα! Δεν ξέρω δεν απαντώ!
Ερ – Μην αγχώνεσαι, απλά θέλω να ακούσω μεγαλόφωνα τους προβληματισμούς σου.
Ε – Λοιπόν, εδώ στο (δ) έχει $\leq$ άρα στο 0 έχει τελεία, την πιάνει την τιμή, αλλά στο 0^+ πρέπει να πηγαίνει στο 1 κανονικά … άρα δεν είναι συνεχής … εφόσον έχουμε διαφορετικά πλευρικά όρια!
Ερ - Ωραία ας το δούμε κομμάτι - κομμάτι. Τα όρια που έχεις βρει πιστεύεις ότι είναι σωστά;
Ε - Ναι.
Ερ - Ωραία. Αν υποθέσουμε ότι και το γράφημα το έχεις κάνει σωστό τότε τα όρια συμφωνούν με το γράφημα;
Ε - ..νναι. Άρα μόνο το συμπέρασμα είναι λάθος;
Ερ - Άρα τι πιστεύεις, από αυτά τα δύο τι συμπέρασμα θα έπρεπε να είχες;
Ε – … μμμ … δεν ξέρω να σας πω … νομίζω ότι είναι αλλά δεν μου βγαίνει στα όρια εδώ.
Ερ - Άρα το σχήμα σου λέει ότι είναι αλλά δε σου βγαίνει στα όρια;
Ε - … Ναι.
Ερ - Ωραία. Τελικά τι κρατάμε ότι είναι συνεχής ή ότι δεν είναι;
Ε – Ότι δεν είναι.
Ερ – Ότι δεν είναι. Άρα καλά το είχες δηλαδή στην αρχή;
Ε – Ναι.
Ερ - Άρα αφήνεις τη διαίσθησή σου να καταρρεύσει. Βάζουμε λοιπόν 'δεν είναι'. Άρα απαντάς στην προηγούμενη. Έχεις κάποια διαφορά;
Ε - Ότι εδώ έχει και το = άρα τελικά μπορεί να είναι συνεχής αυτή δεν ξέρω! (γελάει) δεν ξέρω, τι να πω!
Ερ - Εντάξει, δε θέλουμε να σταθούμε πολύ εδώ. Ότι πιστεύεις.
Ε - Θα το κρατήσω όπως γράψαμε.
Ερ – Η επόμενη η (ε) σου λέει τίποτα;
Ε - … Να την κάνω σαν γραφική παράσταση; Δεν μπορώ να την κάνω αυτό είναι το μόνο σίγουρο.
Ερ - Γιατί;
Ε - Δεν ξέρω, πάντα είχα ένα πρόβλημα με τους ρητούς και τους άρρητους. Οι ρητοί δεν είναι όταν διαιρούνται ακριβώς;
Ερ - Όταν διαιρούνται ακριβώς; Θέλεις να μου δώσεις ένα παράδειγμα για να καταλάβω ακριβώς τι εννοείς;
Ε – δηλαδή … ξέρω εγώ … το 2 και άρρητοι είναι αυτοί που έχουν και δεκαδικά στοιχεία, δηλαδή 1, κάτι ας πούμε.
Ερ - Δηλαδή όταν λέει ρητό εννοείς 1, 2, 3 … κ.λ.π;

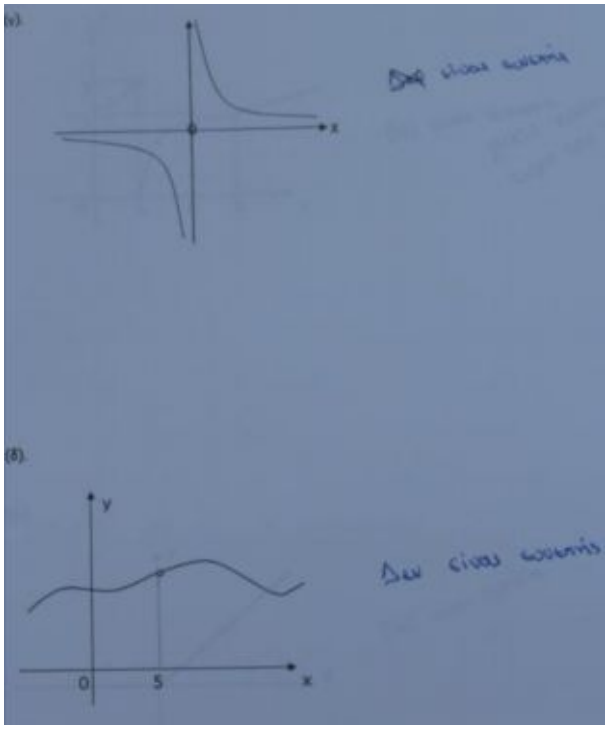
Ε - … 2.5, 3.5, άρρητοι, ναι.
Ερ - Ωραία. Αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι σωστό, θα μπορούσες να κάνεις μία γραφική παράσταση;
Ε - … (κάνει την αριστερή γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω) … Θα πηγαίνει κάπως έτσι;
Ερ - Αν είναι έτσι τότε;
Ε – Τότε είναι συνεχής … αφού δεν διακόπτεται πουθενά αλλά …
Ερ – Αλλά;
Ε – Αλλά … δεν είμαι σίγουρη … γιατί … εκτός από το 1.5 υπάρχει και το 1.4 που πάλι θα πηγαίνει εδώ οπότε δεν πρέπει να είναι σωστή η γραφική παράσταση.
Ερ - Κι ανάμεσα στο 1.4 και στο 1.5 μπορείς να βρεις άλλο δεκαδικό;
Ε – το 1,45 που πάλι θα πάει στο 1… χμμμ … Άρα μήπως η γραφική παράσταση είναι κάπως έτσι; … (κάνει το δεύτερο διάγραμμα στα δεξιά) …
Ερ - Κατάλαβα τώρα τι λες. Και συνεχίζει στο ίδιο στιλ έτσι;
Ε – Ναι … (χαμογελάει) και τώρα αν αυτό είναι συνεχής ε; … Νομίζω ότι είναι συνεχής εφόσον εδώ έχει κενά αλλά εδώ είναι τελεία ουσιαστικά υποτίθεται ότι είναι συνεχής.
Ερ - Εννοείς δηλαδή ότι την έχει την τιμή;



Ε - Ναι, ακριβώς.
Ερ - Ωραία. Σημείωσέ το από κάτω. Θέλεις τώρα να δοκιμάσεις να κάνεις γραφική παράσταση στην επόμενη, στη (στ);
Ε - … (Κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα στα δεξιά) … όχι λάθος όσο το ν μεγαλώνει αυτό μικραίνει … οπότε κάπως έτσι (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα στα αριστερά) Κάπως έτσι; Σαν την 1/x;
Ερ - Ωραία. (Γυρίζουμε πίσω στην 1/x) Έχεις κάποια διαφορά με αυτήν;
Ε – μμμ … όχι … απλά εδώ είχε όλο το R ενώ εδώ έχει τους φυσικούς.
Ερ – Αλλάζει κάτι; Δεν σημαίνει ότι πρέπει κάτι να αλλάξει, απλά ρωτάω.
Ε – μμμ … Μήπως ότι αυτή είναι σκέτη από εδώ (δείχνει το δεξί κλάδο που έχει η (στ)) ενώ αυτή είναι και από εδώ; (δείχνει στην 1/x τον αριστερό κλάδο);
Ερ – Δεν ξέρω! Απλά ρωτάω! Έτσι όπως τη βλέπεις τη (στ) είναι συνεχής;
Ε – … Ναι.
Ερ - Ωραία. Γράψτο δίπλα. Μήπως τώρα με την αντιπαραβολή που κάναμε στην (α) θα αλλάζει κάτι;
Ε - Ναι. Είναι και αυτή συνεχής.
Ερ - Άρα λες να σβήσουμε το 'δεν' στην (α);
Ε - Ναι. Είναι συνεχής.

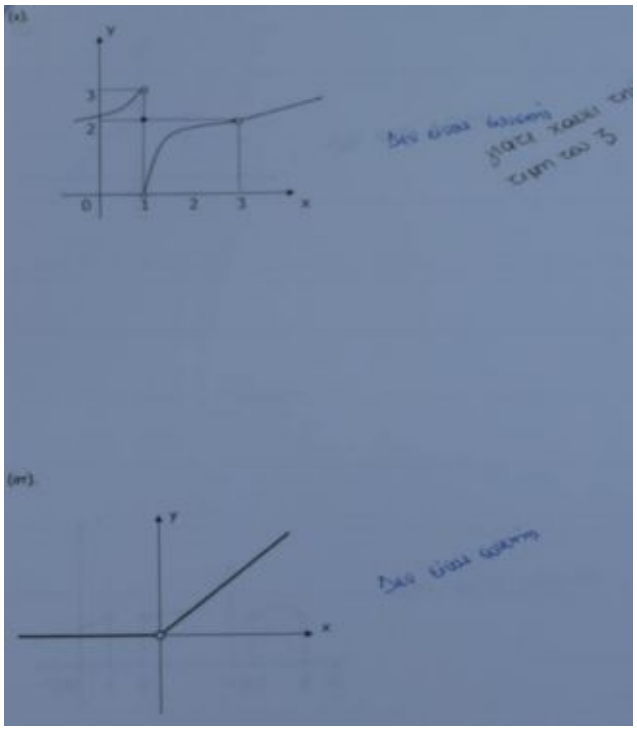


Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα έχουμε μόνο γραφήματα. Αυτή η (α) λες 'Δεν είναι συνεχής'. Γιατί;
Ε – Λοιπόν, αυτά έπρεπε να τα είχα βάλει όλα συνεχή κανονικά. Εφόσον είναι συνεχής εδώ (δείχνει την κουκίδα στο x=5) άρα πρέπει να είναι συνεχής.
Ερ - Εννοείς εφόσον υπάρχει η τιμή για x=5;
Ε – Ναι.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα το σβήνουμε το 'Δεν';
Ε - Ναι.
Ερ – Ωραία. Η κάτω τώρα;
Ε – Το ίδιο, είναι συνεχής. Εφόσον υπάρχει η τιμή του 5 εδώ (δείχνει την κουκίδα στο y_1) και μετά εδώ δεν υπάρχει (δείχνει το ανοιχτό κυκλάκι στο y_2) και μετά συνεχίζει άρα είναι συνεχής.

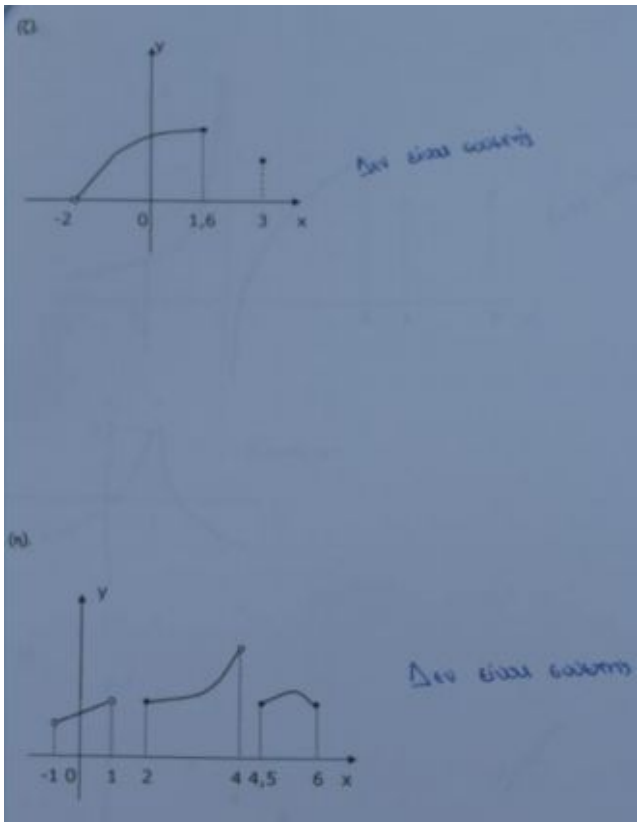


Ερ – Εδώ τώρα στη (γ) λες 'Δεν είναι συνεχής'…
Ε - … αυτή είναι συνεχής απλώς εδώ στο 0 δεν ορίζεται, οπότε είναι συνεχής.
Ερ - Αυτή νομίζω μοιάζει με αυτή που είχες κάνει …
Ε - … ναι, ναι με την 1/x, αν είναι αυτή η 1/x!
Ερ – Ναι, και στην 1/x είχες βάλει ότι είναι συνεχής. Να ρωτήσω τώρα το εξής. Μια και μου έδειξες αυτήν, αν ξαναγυρίσουμε στην 7(α) τότε συμφωνεί αυτό που μου λες με αυτό που έχεις γράψει δίπλα με τα όρια;
Ε - … όχι γιατί έχει διαφορετικά πλευρικά όρια.
Ερ – Άρα;
Ε - Τι θα εμπιστευθώ από τα δύο;
Ερ - Ναι.
Ε - Το σχεδιάγραμμα.
Ερ - Γιατί;
Ε – (γελάει) Πριν διάλεξα το άλλο τώρα το σχεδιάγραμμα!
Ερ - Άρα προτιμάς το σχεδιάγραμμα;
Ε - Ναι. Άμα είναι σωστό.
Ερ - Ωραία. Η επόμενη τώρα.
Ε –ε, Αυτή δεν είναι συνεχής γιατί διακόπτεται στο 5.

Ερ - Ναι αλλά κι αυτή διακόπτεται εδώ (δείχνω το προηγούμενο διάγραμμα)
Ε - Ναι αλλά αυτή όμως έχει το 0 … είναι εκτός πεδίου ορισμού. Σε αυτό όμως είναι μέσα το 5 … έτσι νομίζω.
Ερ - Δηλαδή δεν είναι συνεχής γιατί χάνει την τιμή 5 εννοείς;

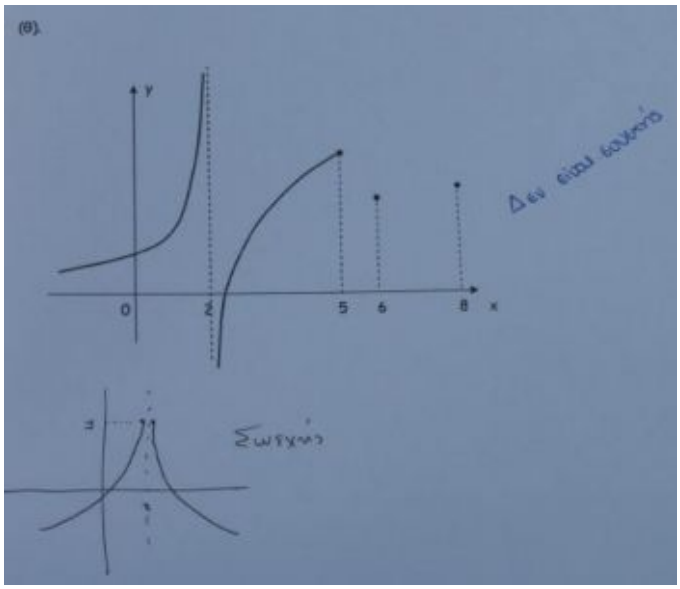


Ε – Ναι.
Ερ – Ωραία. Στην (ε) τώρα;
Ε – Λοιπόν, 'Δεν είναι συνεχής' έχω γράψει … Όχι είναι συνεχής γιατί ουσιαστικά έχει τις τιμές της. Στο 1 έχει εδώ (δείχνει την κουκίδα) και στο 3 έχει … που είναι το 3;… δεν έχει τιμή στο 3 άρα δεν είναι συνεχής.
Ερ - Άρα τελικά δεν είναι συνεχής γιατί χάνει την τιμή στο 3;
Ε - Ναι.
Ερ - Ωραία αν θέλεις γράψτο δίπλα…
Ωραία. Η επόμενη τώρα, η (στ);
Ε - Αυτή δεν είναι συνεχής γιατί ουσιαστικά διακόπτεται εδώ στο 0 αλλά … όχι δεν είναι συνεχής.
Ερ – Σίγουρη;
Ε – Ναι, ναι.
Ερ – Δεν είναι συνεχής λες στη (ζ). Γιατί;

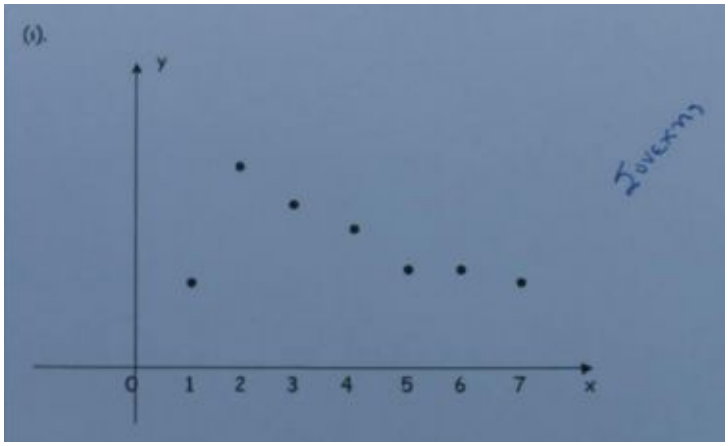


Ε – Λοιπόν, εδώ το 3 δεν ανήκει στη γραφική παράσταση έτσι όπως είναι μόνο του και εδώ το -2 είναι ανοιχτό.
Ερ - Και άρα χάνει την τιμή του, δεν έχει την τιμή εννοείς;
Ε – Ναι.
Ερ – Η κάτω, η (η);
Ε – μμμ … δεν είναι συνεχής γιατί εδώ είναι ανοιχτό (δείχνει το -1) ανοιχτό (δείχνει το 1), ανοιχτό (δείχνει το 4).
Ερ - Ωραία. Αν αυτά τα έκανα όλα κλειστά;
Ε - Πάλι ουσιαστικά δεν είναι συνεχής γιατί δεν συνεχίζει η γραμμή, τουλάχιστον έτσι το βλέπω εγώ, εκτός αν το κάναμε εμείς και το ενώναμε. Δηλαδή εννοείτε να ήταν όπως είναι και απλά στα άκρα να ήταν κλειστό;
Ερ - Ναι, ναι.

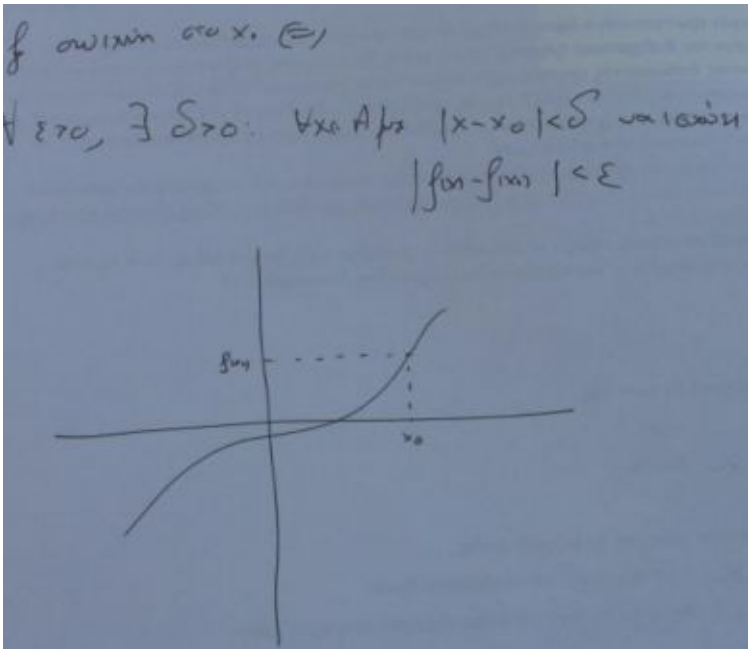
Ε - Δεν θα ήταν συνεχής εκτός αν το παίρναμε σαν τρεις διαφορετικές συνάρτησης οπότε η κάθε μία θα ήταν συνεχής αλλά όλο μαζί …
Ερ - …ναι, όλο μαζί όπως το βλέπεις;
Ε - Όλο μαζί δεν θα είναι συνεχής αφού διακόπτεται.



Ερ – Κατάλαβα. Στη (θ) τώρα; Λες 'Δεν είναι συνεχής'. Γιατί;
Ε - Αυτά εδώ είναι μόνα τους (δείχνει τις δύο κουκκίδες) δεν συνδέονται πουθενά, Εδώ αυτά τα δύο (δείχνει τους δύο κλάδους) θα μπορούσαν να ήταν συνεχείς αλλά εδώ το 2 είναι εκτός πεδίου ορισμού, αλλά δεν μου ταιριάζει και σαν σχέδιο για να είναι... Αλλά νομίζω το βασικό είναι τα δύο σημεία τα μόνα τους.
Ερ - Αν δηλαδή τα διώξουμε αυτά τα δύο μεμονωμένα σημεία τότε το υπόλοιπο γράφημα;
Ε - Στο 2 διακόπτεται γιατί δεν είναι στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Σε νοιάζει ή δεν σε νοιάζει; Αυτό είναι καλό ή κακό;
Ε - Άμα είναι εκτός πεδίου ορισμού τότε δεν με νοιάζει. Αλλά κοντά στο 2 δεν θα έπρεπε τουλάχιστον να έχουν τις ίδιες τιμές, την ίδια τιμή για να είναι συνεχής στη γύρω περιοχή;
Ερ - Να έχουν την ίδια τιμή, να πιάνει εννοείς την ίδια τιμή, την τιμή 2; Τι ακριβώς εννοείς;
Ε – Ναι περίπου.
Ερ – Μήπως εννοείς… α … αν είχα αυτό (κάνω το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ε – Ναι, αυτό
Ερ - Τώρα δηλαδή θα ήταν συνεχής;
Ε - Ναι, ναι έτσι νομίζω.
Ερ - Άρα δηλαδή αυτή τη λέω συνεχή έτσι;
Ε - Ναι.



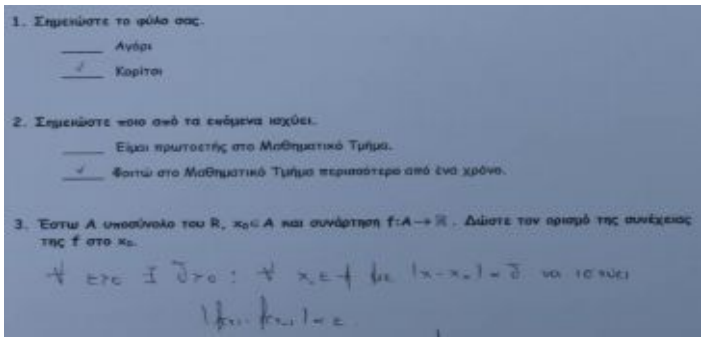
Ε - Εδώ τώρα (δείχνει τη (ι)) την έχω βάλει συνεχή γιατί άμα τα ενώσουμε κάτι γίνεται!
Ερ – α! Δηλαδή εννοείς ότι αν ενώσουμε τις κουκίδες; …
Ε - … προκύπτει μια γραμμή, ναι.
Ερ - Δηλαδή αν το γράφημα είναι σκέτο με τις κουκίδες;
Ε - Τότε όχι δεν είναι συνεχής.



Ερ – Ωραία. Να γυρίσω τώρα λίγο στην αρχή. Θυμάσαι καθόλου τον ορισμό της συνέχειας όπως τον έμαθες εδώ στο Πανεπιστήμιο;
Ε – Όχι.
Ερ – Ωραία. Θα στον γράψω εγώ και θα ρωτήσω κάτι. Αν ήθελες πολύ χονδρικά να μου περιγράψεις με λόγια αυτόν τον τύπο, αυτό τον ορισμό τι θα μου έλεγες; Δηλαδή αν κάνω αυτό το απλό γράφημα, τι σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε αυτό το σημείο; Πώς θα εξηγούσες απλά όλα αυτά τα σύμβολα του ορισμού;
Ε - … Ουσιαστικά το ε είναι η διαφορά εδώ στον άξονα των yy΄ και για το δ είναι εδώ στον άξονα των xx΄ και για να είναι συνεχής πρέπει και αυτό και αυτό (δείχνει τις δύο απόλυτες τιμές) να είναι μικρότερα από το δ και το ε … (γελάει) καταλαβαίνετε τίποτα;
Ερ – Καταλαβαίνω μην ανησυχείς!
Ε - Και βασικά όλα τα υπόλοιπα τα έχουμε προσθέσει για να το κάνουμε λίγο πιο πολύπλοκο (γελάει) για να λέμε ότι είμαστε και του Πανεπιστημίου!... τι να σας πω τώρα!
Ερ – Εντάξει! Σε ευχαριστώ πολύ Εύη!

18η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

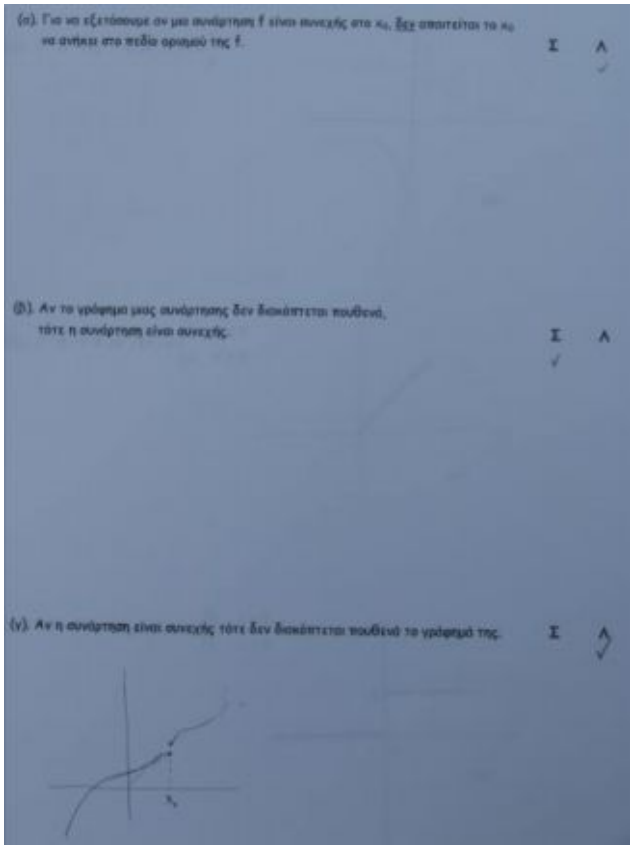
‘Αθηνά’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


1. Σημειώστε το φύλο σας.
____ Αγόρι
✓ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα ενδεχόμενα ισχύει.
____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.
✓ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$


(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ ✓ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ ✓ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ ✓ Λ

[Η φοιτήτρια ήρθε εθελοντικά, συμπλήρωσε το ερωτηματολόγιο και ταυτόχρονα συζήτησε με τον ερευνητή]

Ερ – Ωραία. Αυτό Αθηνά θα το σχολιάσουμε μετά.

Ερ - Τι πιστεύεις, συνδέεται ο ορισμός του Λυκείου με αυτόν που έμαθες στο Πανεπιστήμιο για τη συνέχεια;

Α – Ναι, δεν νομίζω ότι έχει κάποια διαφορά απλά από τον ορισμό του Λυκείου λείπουν τα ε και δ.

Ερ - Ωραία. Άρα κατά τη γνώμη σου δεν διαφέρουν καθόλου. Για την ερώτηση 5 τι έχεις να μου πεις;

Α - Ότι η γραφική παράσταση παρουσιάζει μια συνέχεια με την έννοια ότι δεν υπάρχουν διακεκομμένα τμήματα σε αυτήν.

Ερ - Αυτή είναι η εικόνα που έχεις στο μυαλό σου έτσι;

Α - Ναι.

Ερ – Η επόμενη τώρα;

Α – Είναι λάθος εξ ορισμού, τουλάχιστον από τη δική μου οπτική γωνία.

Ερ – Ωραία. Το (β);

Α – Είναι σωστό.

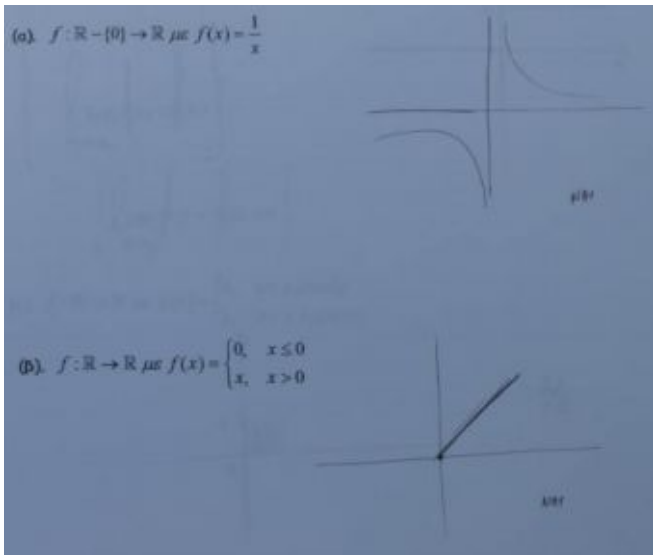
Ερ – Το (γ);

Ε - … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … Είναι Λάθος γιατί έχω την εντύπωση ότι υπάρχουν κάποιες συναρτήσεις στις οποίες είναι κάπως έτσι … αλλά είναι αλήθεια αυτό ; …

Ερ – Για πες μου ξανά τι μου είπες

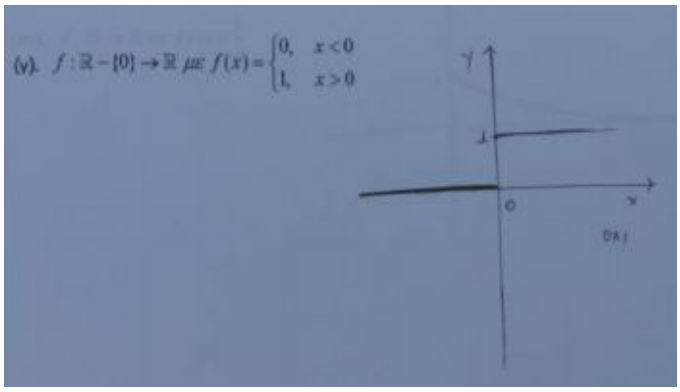
Α – Λοιπόν, νομίζω ότι όταν κάναμε τον ορισμό, τις γραφικές

παραστάσεις και όλα αυτά, ότι υπάρχουν κάποιες συναρτήσεις που παρουσιάζουν κάτι σαν αυτό (δείχνει το σχήμα)
Ερ - Μισό λεπτό για να καταλάβω. Έχεις βάλει κλειστές κουκίδες και στα δύο σημεία έτσι;
Α - Ναι
Ερ - Που αντιστοιχούν στο ένα σημείο x_0 έτσι;
Α - Ναι.
Ερ - Ωραία. Είναι συνεχής αυτή;
Α – Όχι, δεν είναι … θα την πω.
Ερ - Κάτσε, μισό λεπτό. Ψάχνεις για ένα αντιπαράδειγμα έτσι δεν είναι;
Α - Ναι.
Ερ - Λέει 'αν είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται το γράφημα'. Άρα εσύ βρίσκεις μία συνεχή που όμως να διακόπτεται, καταλαβαίνω καλά;
Α – Ναι.
Ερ - Είναι αυτό το γράφημα που έκανες μία τέτοια συνάντηση;
Α - … όχι, λάθος είναι αυτό που έκανα, Αλλά δεν μπορώ να σκεφτώ ένα ακριβές παράδειγμα με τύπους κ.λ.π.
Ερ - Δεν ενδιαφέρει κάποιος τύπος. Πιστεύεις ότι αυτό το γράφημα αντιπροσωπεύει ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα για μία συνάρτηση συνεχή που όμως διακόπτεται;
Α - Όχι. Αντικρούεται λίγο με αυτό που είπα πιο πριν για το τι θεωρώ συνεχή συνάρτηση και το πώς έπρεπε να είναι το γράφημα.
Ερ – Γιατί; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό; Θυμίσω ότι όταν σε ρωτάω κάτι δεν σημαίνει ότι κάνεις λάθος απλά θέλω να δω πώς σκέπτεσαι.
Α - Μου έρχεται … γιατί όπως είπα και πριν όταν ακούμε για τη συνέχεια μιας συνάρτησης το συσχετίζουμε κατά κάποιον τρόπο με μία μη διακεκομμένη γραμμή που αντιπροσωπεύει τη γραφική της παράσταση. Τώρα εδώ είναι σαν να το αντικρούω …
Ερ - …κατάλαβα.
Α - Απλά νομίζω ότι είχα δει και κάτι τέτοιο χωρίς να είμαι σίγουρη τελικά αν αυτό αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση.
Ερ - Κατάλαβα. Άρα αν αυτό αντιστοιχεί σε μία συνεχή συνάρτηση τότε είναι ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα έτσι;



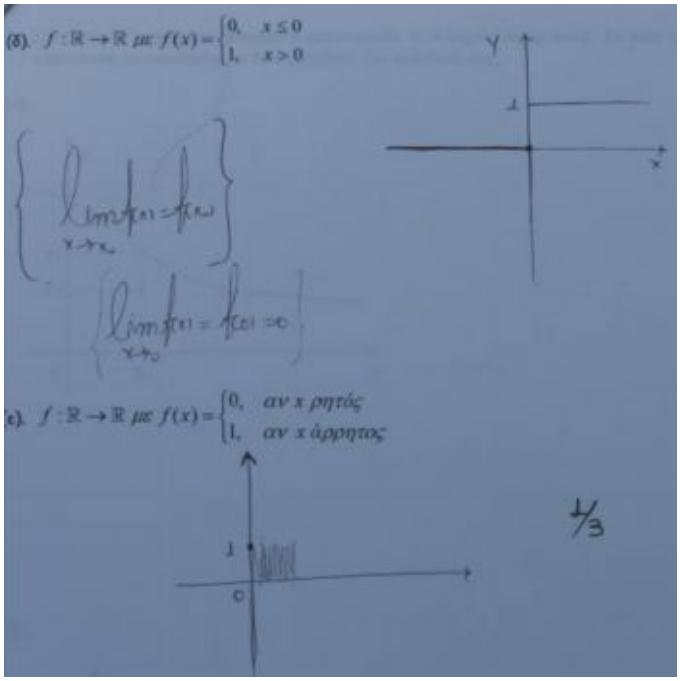
Α - Ναι.
Ερ - Ωραία. Ας δούμε τώρα μερικές συναρτήσεις και τα γραφήματά τους. Μπορείς να μου απαντήσεις με όποιο τρόπο θέλεις, απλά προσπάθησε να κάνεις δίπλα και τη γραφική παράσταση. Τι λες για αυτή την (α);
Α - Αν θυμάμαι καλά είναι αυτή … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) …
Ερ - Ωραία. Αν υποθέσουμε ότι είναι αυτό το γράφημα, τι πιστεύεις, είναι μία συνεχής συνάρτηση;
Α - Ναι είναι συνεχής.

Ερ – Πώς θα το δικαιολογούσες;
Α - Είναι ότι για αυτή τη συνάρτηση μπορώ να βρω παράγωγο.
Ερ – Α, ότι οι παραγωγίζεται δηλαδή, μάλιστα. Και άρα αφού μπορώ να την παραγωγίσω άρα είναι και συνεχής, αυτό εννοείς;
Α - Ναι.
Ερ - Κατάλαβα. Το γράφημά της σου επιβεβαιώνει αυτή σου τη σκέψη; Δηλαδή σε βοηθάει και το γράφημα να απαντήσεις αν είναι συνεχής ή όχι;
Α - Ναι με βοηθάει γιατί αυτό το τμήμα της καμπύλης (δείχνει το δεξί κλάδο) αλλά και αυτό το τμήμα (δείχνει τον αριστερό κλάδο) δεν παρουσιάζουν κάποια … κάποια διακοπή.
Ερ - Κατάλαβα. Δεν θα έπρεπε να συνδέονται μεταξύ τους τα δύο αυτά τμήματα;
Α - Όχι.
Ε - Γιατί; Ή για να το πω πιο σωστά θα προτιμούσες να συνδέονται αυτά τα δύο τμήματα μεταξύ τους;
Α - Όχι, όχι.
Ερ - Γιατί; Γιατί σε αφήνει αδιάφορη το γεγονός ότι δεν ενώνονται μεταξύ τους;
Α - Δεν ξέρω, (χαμογελάει) … δεν ξέρω ίσως γιατί πιστεύω ότι είναι μια συνεχής συνάρτηση, βαθιά μέσα μου ξέρω από το Λύκειο ότι αυτή είναι μία συνεχής συνάρτηση άρα δεν με ενοχλεί.
Ερ – Ωραία! Κατάλαβα. Πάμε στη (β). Τι λες για αυτήν;
Α - … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω) ... Είναι ασυνεχής.
Ερ - Ασυνεχής. Γιατί;
Α – Από το γράφημά της.
Ερ – Και αν δεν έκανες γράφημα; Θα μπορούσες να αποφανθείς από τον τύπο;
Α - … Νομίζω και από τον τύπο ότι θα έβγαινε.
Ερ - Πώς; Θυμάσαι καθόλου τον τύπο του Λυκείου;
Α - Δεν είναι αυτός που έγραψα μπροστά;
Ερ - Αυτός είναι ο τύπος που έμαθες στο Πανεπιστήμιο.
Α - Δεν είναι ίδιος με αυτόν που έμαθα στο Λύκειο;
Ερ - Ήταν λίγο πιο απλός. Αλλά δεν με πειράζει ότι θες εσύ.
Α – Νομίζω ότι βγαίνει αν πάρουμε για δ ίσο με το ε τότε από τον ορισμό βγαίνει ότι είναι συνεχής.
Ερ - Ωραία. Δεν θέλω να μπλεχτούμε τώρα με τα αυστηρά μαθηματικά. Απλά έτσι χωρίς γράφημα, από τον τύπο νοιώθεις ότι μπορείς να βγάλεις τη συνέχεια;
Α - Ναι. Διαισθητικά θα έλεγα. Γιατί έτσι διαισθητικά δεν παρουσιάζει κάποια ανωμαλία ο τύπος για να μην είναι συνεχής. Δεν φαίνεται να έχει κάποιο πρόβλημα.



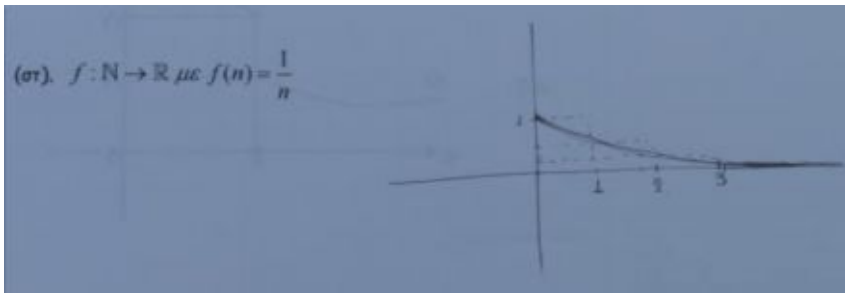
Ερ – Εδώ στη (γ) τώρα;
Α - … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα) ...
Ερ - Ωραία. Τώρα με βάση τη γραφική παράσταση που έκανες τι λες;
Α - Ασυνεχής.
Ερ - Ασυνεχής. Γιατί; Πώς το δείχνει αυτό;
Α – Αμέσως - αμέσως η συνάρτηση διευκρινίζει ότι έχει

δύο ξεχωριστές τιμές. Οπότε πώς αυτό μπορεί να αντιπροσωπεύει μία συνεχή συνάρτηση;!



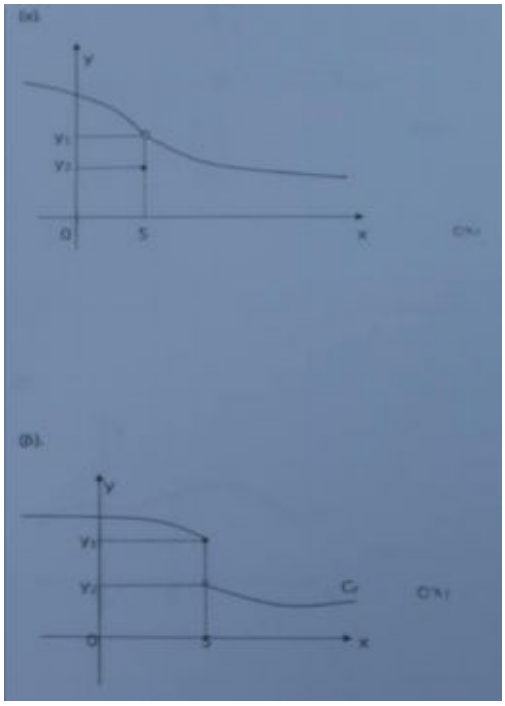
Ερ – Ωραία, πάμε στη (δ).
Α - Είναι συνεχής στο 0
Ερ – Συνεχής μου είπες;
Α – Ναι, συνεχής στο 0 διότι … όχι, όχι δεν είναι.
Ερ – Γιατί; Γιατί η πρώτη σου απάντηση ήταν ότι είναι συνεχής στο 0 και τώρα το αλλάζεις;
Α - … όχι καμία σχέση …ίσως ότι το $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ …
Ερ - … ότι το $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
Τι είναι αυτό που χρησιμοποιείς τώρα;
Α - … α είναι ορισμός;!;
Ερ – Δεν ξέρω, αυτό ρωτάω!
Α – Αυτό που το χρησιμοποιούσαμε; … (αναρωτιέται) αυτό το χρησιμοποιούσαμε για τη συνέχεια; …όχι … αυτό που τι θυμάμαι τώρα; …
Ερ - Θέλεις να δοκιμάσεις να κάνεις τη γραφική παράσταση;
Α - … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται πιο πάνω) …
Ερ - Έχει κάποια διαφορά από την προηγούμενη;
Α – Εδώ (δείχνει τη (γ)) ίσως δεν θα έπρεπε να την ξεκινήσω ακριβώς από το 0 αλλά …
Ερ - Πιστεύεις ότι παίζει κάποιο ρόλο αυτό;
Α – Όχι … (χαμογελάει και σκέπτεται) … Τώρα ξαναγυρνάω λίγο στην πρώτη μου σκέψη ότι στο μηδέν είναι συνεχή.
Ερ - Σου δημιουργεί αυτή την αίσθηση ότι αυτή είναι συνεχής στο 0 έτσι;
Α - Ναι.
Ερ – Γιατί;
Α - … μόνο με αυτό μπορώ να το συνδέσω (δείχνει το $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$) αλλά … δεν μπορώ …
Ερ – Εντάξει, μπορεί να σου έρθει αργότερα. Θέλεις να δεις λίγο την επομένη την (ε);
Α - Αυτή νομίζω είναι ασυνεχής.
Ερ - Γιατί;
Α – Αυτή είναι … θα είναι κάπως έτσι … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω) … αλλά δεν είμαι και σίγουρη …
Ερ - Εννοείς ότι είναι μία τέτοια γραμμή περίπου; Μία γραμμή που ανεβοκατεβαίνει;
Α - … (σκέπτεται) … η γραφική της παράσταση νομίζω ότι δεν παρουσιάζει κάτι που να μπορεί να υποδηλώσει ασυνέχεια … όλα αυτά τα σημεία είναι όμοια. Αλλά έχω στο μυαλό μου γι αυτή τη συνάρτηση όχι μια γραμμή αλλά κουκίδες, μία πάνω, μία κάτω, μία πάνω, μία κάτω.
Ερ - Δηλαδή τι πιστεύεις είναι λάθος η γραμμή ή είναι λάθος οι κουκίδες τι λες;

Α - Όχι, νομίζω ότι σωστό είναι αυτό με τις κουκίδες γιατί ακόμα … το λέω έτσι … γιατί νομίζω ότι στα βιβλία είχα δει έτσι με κουκίδες.
Ερ - Εσύ όμως αν δεν έχεις βιβλία δεν έχεις τίποτα και θέλεις να την σχεδιάσεις, πώς θα την σχεδίαζες;
Α – Θα τη σχεδίαζα έτσι (δείχνει το γράφημα που έχει κάνει)
Ερ - Δηλαδή μια γραμμή που ανεβοκατεβαίνει έτσι;
Α - Ναι.
Ερ – Ωραία. Πες μου ένα ρητό.
Α – Ρητό … μμμ … ρητό … το 1/3.
Ερ – Το 1/3. Μπορείς να μου πεις τον αμέσως επόμενο ρητό;
Α - … όχι.
Ερ - … γιατί;
Α - … μπορώ; Εεε … ρητός … Μήπως έκανα λάθος για το 1/3; Τα έχω μπλέξει στο μυαλό μου. Λοιπόν, μισό λεπτό, έχουμε φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί, μιγαδικοί. Νομίζω ότι το 1/3 πρέπει να είναι ρητός.
Ερ - Ωραία αν υποθέσουμε ότι το 1/3 είναι ρητός μπορείς να μου πεις τον επόμενό του; … Ή και τον προηγούμενό του, δεν με νοιάζει.
Α – (μονολογεί) … ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι άρρητοι, αλλά αυτό δε σημαίνει ότι δεν μπορώ να βρω ένα ρητό. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορώ να βρω τον επόμενό του ρητό.
Δεν έχει αυτό να κάνει… δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι.
Ερ – Εντάξει, έναν άρρητο;
Α – (διστακτικά) Το π.
Ερ – Ο επόμενός του;
Α - Δεν … Αφού ή ούτως η άλλως τα ψηφία του παρουσιάζουν μία περιοδικότητα, μία απειρότητα …οπότε πώς μπορώ να βρω τον επόμενο;
Ερ - Περιοδικότητα ή απειρότητα ή και τα δύο;
Α - Όχι του π δεν έχουν περιοδικότητα, απειρότητα έχουν.
Ερ - Μπορείς να μου πεις κάποιων άρρητο που τα ψηφία του να έχουν περιοδικότητα;
Α - … το $\sqrt{2}$ τα ψηφία του παρουσιάζουν; … όχι …
Ερ – Δεν ξέρω
Α – Όχι, όχι, δεν ξέρω …

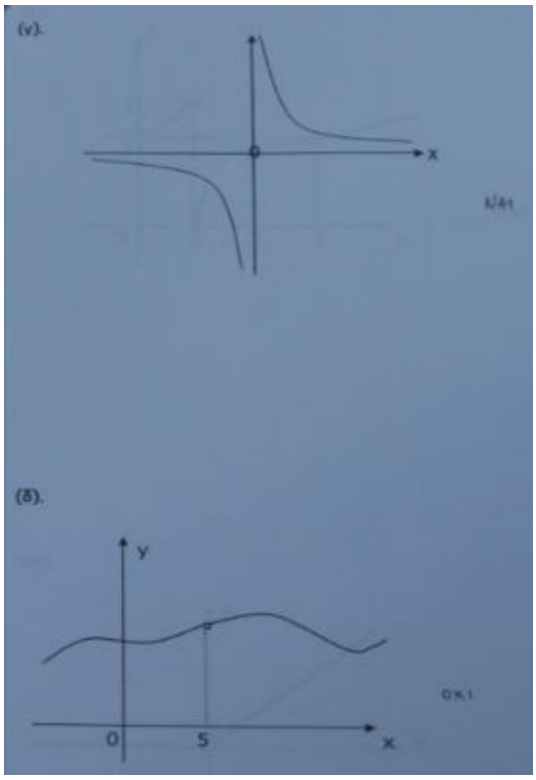


Ερ - Εντάξει πολύ σε παίδεψα με αυτήν. Πάμε στην επόμενη. Δοκίμασε να κάνεις μια γραφική παράσταση της (στ).
Α - … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα) … συνεχής.
Ερ – Συνεχής, γιατί;
Α - Δεν παρουσιάσει κάποια ανωμαλία η γραφική παράσταση, και όταν το n τείνει στο άπειρο θα φτάσει κάποια στιγμή που θα εφάπτεται στον άξονα των xx΄.
Ερ - Θα ακουμπήσει στον άξονα των xx΄;
Α - Όχι
Ερ - Αλλά θα εφάπτεται.

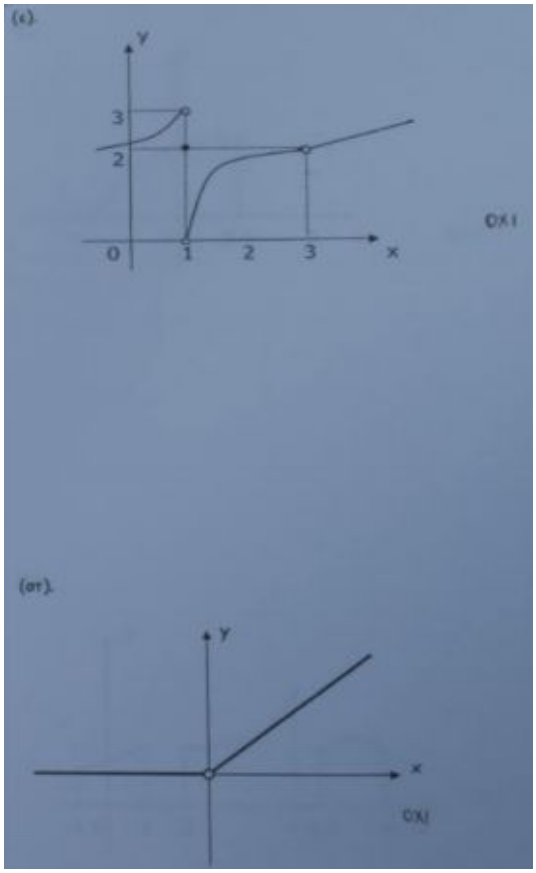
Α – Ναι. Θα γίνει 0
Ερ – α! θα γίνει 0;
Α - Ναι.
Ερ – Ωραία. Άρα θα ακουμπήσει στον άξονα των xx΄ ή δεν θα ακουμπήσει;
Α - Ναι, ναι θα ακουμπήσει.
Ερ - Ωραία. Από τον τύπο τώρα; Αν δεν έκανες δηλαδή τη γραφική παράσταση από τον τύπο τι θα έλεγες;
Α – Όχι, δεν έχει κάποια ανωμαλία ο τύπος.



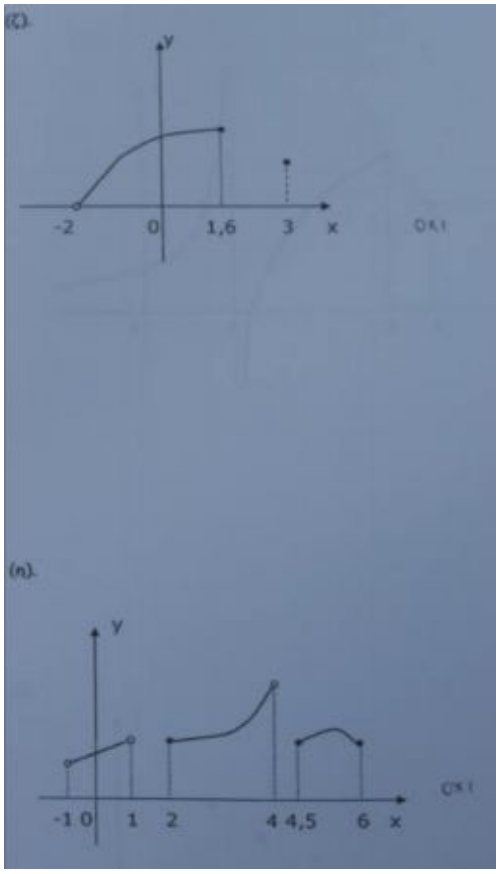
Ερ - Ωραία. Πάμε τώρα στην επόμενη στην 8. Εδώ έχει μόνο γραφήματα. Κοιτάς τα γραφήματα και προσπαθείς να μου δικαιολόγησης αν κάθε συνάρτηση. είναι συνεχής ή όχι. Πες μου για την (α).Η πρώτη σου αίσθηση ποια ήταν όταν την είδες;
Α - Ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ - Ότι δεν είναι συνεχής. Γιατί; …
Α - … στο 5…
Ερ - … ναι, γιατί;
Α - Λόγω αυτού εδώ πέρα του σημείου (δείχνει την κουκίδα) ότι παρουσιάζεται μία διακοπή.
Ερ - Θα άλλαζε κάτι στην απάντησή σου αν στο σχήμα δεν υπήρχε καθόλου η κουκκίδα που αντιστοιχεί στο y_2;
Α - Και η υπόλοιπη εξακολουθούσε να ήταν έτσι;
Ερ - Ναι, ναι.
Α - Τότε θα έλεγα σίγουρα ότι είναι ασυνεχής.
Ερ - Ενώ τώρα έχεις κάποιο μικρό ενδοιασμό, γιατί;
Τι σκέφτεσαι ότι πιθανόν μπορεί να συμβαίνει τώρα;
Α - … ότι … την τιμή 5 δεν τη χάνει
Ερ – Α, ότι την τιμή 5 τελικά την πιάνει, κατάλαβα. Ότι γιαx =5 υπάρχει το αντίστοιχο y, αυτό εννοείς έτσι;
Α - Ναι, ναι.
Ερ - Άρα, αν θα έπρεπε να αποφασίσεις τι θα έλεγες;
Α - … (σκέπτεται) … όχι ασυνεχής νομίζω.
Ερ- Ασυνεχής, γιατί; Τι σε κάνει να αλλάξεις γνώμη;
Α – Ότι για x=5 η συνάρτηση, όχι η συνάρτηση, η τιμή της αντιστοιχεί στο y_2, που δεν σχετίζεται σε κάτι με τη γραφική παράσταση, γιατί αν για x=5 είχαμε κι άλλες τιμές, … όχι δε γίνεται να έχουμε και άλλες τιμές, γιατί τότε δεν θα ήταν συνάρτηση … (σκέπτεται) … Δεν ξέρω τι να πω αλλά μου φαίνεται ότι δεν είναι.
Ερ - Ωραία. Άρα λες ότι δεν είναι συνεχής. Σε χαλάει δηλαδή το γεγονός ότι η κουκίδα είναι μακριά από την τρύπα, κάτι τέτοιο;
Α - Ναι, είναι αυτό.
Ερ – Ωραία, τι λες για την επόμενη τη (β);
Α – Όχι.
Ερ – Όχι λες, γιατί;



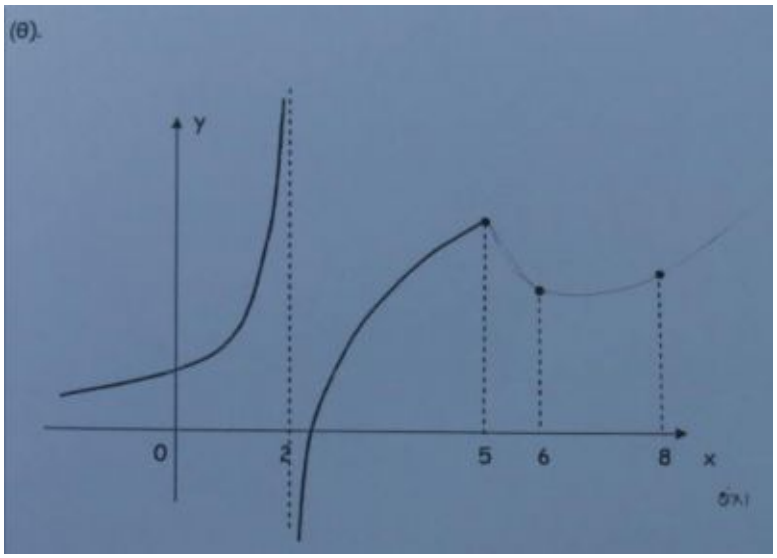
Α - Γιατί το γράφημα αυτή τη φορά όχι μόνο παρουσιάζει μία … όχι … πήγα να πω ότι το γράφημα έχει μία … παρουσιάζει μία προφανή ασυνέχεια γιατί υπάρχει μεγάλη απόσταση, έτσι … ένα κενό αλλά αυτό δεν είναι και φοβερά διαφορετικό από το προηγούμενο με την κουκίδα γιατί το πρόβλημα στο σημείο x=5 εμφανίζεται, τώρα είτε με αυτή τη μορφή είτε με αυτή το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.
Ερ - Άρα λες και γι αυτήν όχι; Και σαν απάντηση τι θα έλεγες αν προσπαθούσες να το δικαιολογήσεις;
Α - Λόγω γραφήματος, του κενού δηλαδή.
Ερ – Ωραία πάμε στη (γ).
Α - Αυτή είναι συνεχής όπως είπα και πριν.
Ερ - Είναι συνεχής όπως είπες και πριν …
Α - … είναι η 1/x.
Ερ – Ωραία. Η κάτω τώρα, η (δ);
Α - Εδώ πάλι στο 5 έχουμε πρόβλημα …
Ερ - … σε χαλάει δηλαδή;
Α - Ναι.
Ερ - Το κενό, η διακοπή του γραφήματος;
Α - Ναι, ναι.



Ερ – Η (ε) τώρα; Μια όμορφη!
Α - … Όχι θα πω και για αυτήν.
Ερ - Γιατί; Τι σε προβληματίζει;
Α - Ότι έχει πολλά σημεία στα οποία διακόπτεται η συνέχεια
Ερ - Όπως;
Α - Το 3 … και το 1.
Ερ - Άρα σε αυτά τα δύο σημεία έχεις πρόβλημα με τη συνέχεια;
Α – Ναι.
Ερ - Ωραία. Αλλά λες όχι γι αυτήν. Τι λες για την επόμενη τη (στ);
Α - Δεν είναι συνεχής στο 0.
Ερ - Η δικαιολόγηση που θα έδινες;
Α - Δεν περιέχει το σημείο η τρύπα που έχει εδώ στο 0.
Ερ – Πάμε στη (ζ) τώρα. Εδώ τι λες;
Α – Όχι.
Ερ – Όχι, γιατί; Τι σε χαλάει σε αυτήν;
Α - Η διακοπή της γραφικής παράστασης εδώ από το 1.6 μέχρι το 3 … αυτό
Ερ - Σε χαλάει και αυτό; (της δείχνω το ανοιχτό -2)
Α - Όχι.

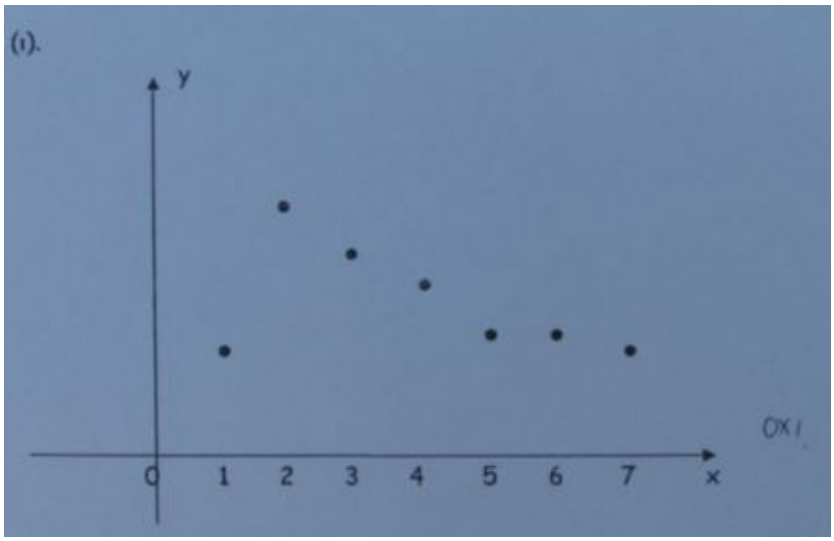


Ερ - Αν η γραμμή ήταν συνεχόμενη και φτάνει μέχρι το τρία;
Α - Τότε θα είχαμε μία ασυνεχή στο -2.
Ερ – Άρα σε χαλάει και το -2 ή όχι; Γι' αυτό ρωτάω. Γιατί είδα ότι το έδειξες με το στυλό πριν σαν σημείο ασυνέχειας.
Α - …
Ερ - Ρωτάω γιατί απλά θέλω να εντοπίσω τα σημεία ασυνέχειας που διακρίνεις.
Α - … το -2 νομίζω ότι δεν είναι πρόβλημα Ακόμα κι αν ενώσουμε τη γραμμή μέχρι το 3 τότε θα έλεγα ότι είναι συνεχής
Ερ - Ωραία. Άρα δεν σε χαλάει το ανοικτό άκρο. Η επόμενη τώρα η (η);
Α - … Όχι.
Ερ – Γιατί;
Α - Από το 1 μέχρι το 2 και από το 4 μέχρι τα 4.5 υπάρχει μία διακοπή.
Ερ - Κι αν τα ενώναμε αυτά;
Α – Τότε εντάξει.
Ερ – Θα σε πείραζε στην άκρη, στο -1 τι θα ήταν;
Α – (διστακτικά) … όχι

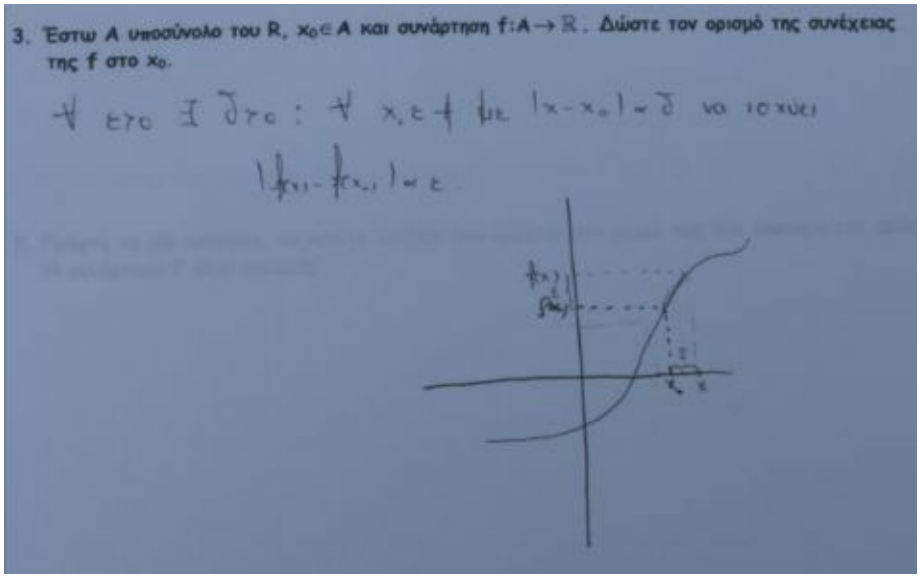


Ερ – Ωραία. Η (θ) τώρα.
Α- Δεν ξέρω για αυτά εδώ πέρα τι να πω.
Ερ - Τα μεμονωμένα σημεία στο 6 και στο 8 εννοείς έτσι;
Α - Ναι.
Ερ - Ωραία, ας εξαιρέσουμε προσωρινά τα μεμονωμένα σημεία. Με την υπόλοιπη γραφική παράσταση τι λες;
Α - Ότι δεν έχουμε κάποιο πρόβλημα.
Ερ - Με το 2 αντιμετωπίζεις κάποιο πρόβλημα ή όχι; Όχι ότι πρέπει να υπάρχει πρόβλημα, απλά ρωτάω!
Α - Στο 2 ίσως δεν ορίζεται.
Ερ - Άρα, αυτό τι σημαίνει; Τι έχει να κάνει αυτό με την απάντηση σου;
Α - Εφόσον είναι εκτός πεδίου ορισμού το 2, είπαμε και πριν ότι τα σημεία εκτός πεδίου ορισμού δεν τα … ότι μελετάμε τη συνέχεια για τα σημεία τα οποία είναι ήδη εντός πεδίου ορισμού.
Ερ - Κατάλαβα. Άρα δεν σε νοιάζει σαν να λέμε στο 2.

Α - Είναι προφανές ότι εκεί δεν θα μπορούσε να είναι συνεχής.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι μέχρι το 5 δεν έχουμε πρόβλημα έτσι;
Α - Ναι.
Ερ - Αν τώρα συνεχιζόταν η γραμμή κι ενωνόταν με τα δύο μεμονωμένα σημεία;
Α - …
Ερ – Διστάζεις, γιατί; …
Α – Ναι … (διστακτικά)… Όχι δεν θα είναι συνεχής ακόμη και αν ενωνόταν…
Ερ - Δεν θα είναι συνεχής! Ενδιαφέρον αυτό γιατί;
Α - … Γιατί μου κάνει ότι αυτή δεν είναι εικόνα μιας συνεχούς συνάρτησης.
Ερ - Ακόμα και αν ενωθούν τα σημεία τα μεμονωμένα;
Α - Ναι, ακόμα και αν ενωθούν.
Ερ – Γιατί;
Α - …Δεν ξέρω!
Ερ – Ένωσέ τα με μία γραμμή, ότι γραμμή θες εσύ.
Α - …(κάνει τη γραμμή που φαίνεται στο σχήμα παραπάνω) …
Ερ - … τι λες τώρα, τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι αν και έχουν ενωθεί με γραμμή το γράφημα δεν αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση;
Α – (διστακτικά) … Δεν έχω έτσι εικόνα από κάποια τέτοια συνάρτηση. Δεν μου φέρνει στο μυαλό κάτι, δεν μου θυμίζει κάτι.
Ερ - Εννοείς ότι δεν έρχεται στο μυαλό σου κάποια εικόνα από οικεία συνάρτηση;
Α - Ναι δεν μου έρχεται μια τέτοια εικόνα στο μυαλό.



Ερ – Ωραία. Βάλε ένα 'όχι' δίπλα. Πάμε στην τελευταία τώρα, τη (ι).
Α – Όχι …
Ερ – Γιατί;
Α - Είναι μία συνάρτηση που έχει πως να το πω … το κάθε σημείο φαίνεται εντελώς ξεκομμένο από το άλλο
Ερ - Αν τα ενώσουμε με μία γραμμή;
Α - Αν τα ενώσουμε με μία γραμμή τότε θα έχουμε ένα συνεχές γράφημα
Ερ - Και στην προηγούμενη γιατί δεν έχεις ένα συνεχές γράφημα;
Α - Γιατί στην προηγούμενη έχω από τη μια μεριά ένα κλάδο και από την άλλη μεριά όλο αυτό το πράγμα. Όλο μαζί δε νομίζω ότι αντιστοιχεί σε μία συνεχή συνάρτηση.
Ερ - Ενώ αυτό πιστεύεις ότι …
Α - …ότι αν ενωθούν όλα μαζί είναι ένα συνεχές γράφημα.



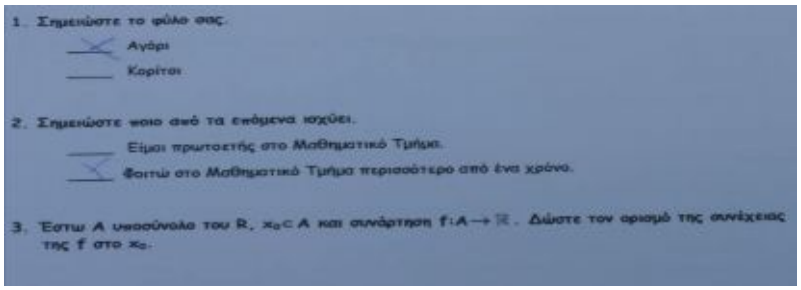
Ερ – Ωραία. Πάμε και σε μια τελευταία ερώτηση. Ας υποθέσουμε ότι έχεις ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου και του κάνεις μάθημα. Βλέπει λοιπόν αυτό τον ορισμό που τον έχει και το βιβλίο το σχολικό με αστερίσκο και σε ρωτάει με άπλα λόγια να του τον εξηγήσεις. Τι θα του έλεγες κάνοντας ένα απλό γράφημα; Πώς θα εξηγούσες τον ορισμό της συνέχειας με ένα απλό γράφημα;

Α - Ότι παίρνοντας ένα μικρό δ εδώ στον άξονα των xx΄ … εδώ είναι το πολύ μικρό δ που παίρνουμε και εδώ είναι το πάρα πολύ μικρό ε, ότι σε αυτό εδώ το τμήμα η γραφική παράσταση δεν θα παρουσιάζει κανένα κενό.

Ερ – Ωραία, πολύ ωραία σε ευχαριστώ Αθηνά!

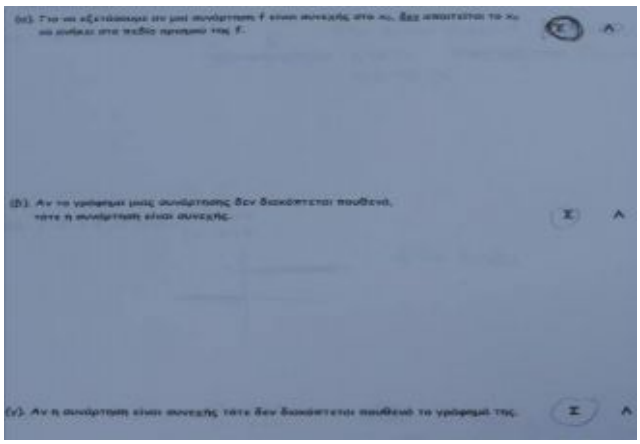
19η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Ιγνάτιος’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο

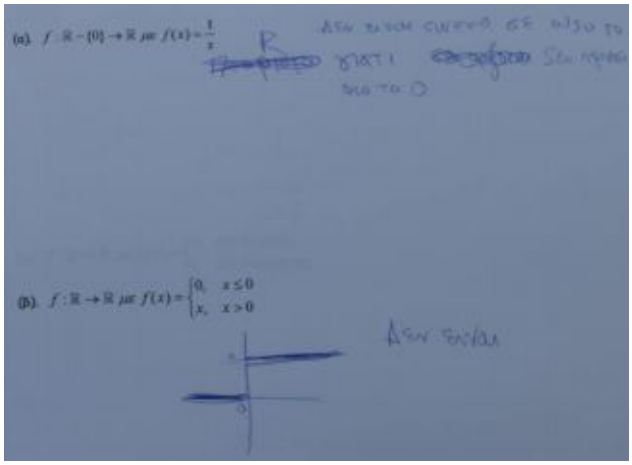


Ερ - Τον θυμάσαι καθόλου τον ορισμό;
Ι - Όχι.
Ερ - Μήπως τον κοίταξες μετά;
Ι - Όχι.
Ερ - Μήπως θυμάσαι καθόλου του Λυκείου τον ορισμό;

Ι - Όχι. Γενικά, με την ανάλυση έχω χάσει την επαφή.
Ερ - Δεν υπάρχει πρόβλημα πάμε παρακάτω. Πάμε στο 5. Σαν εικόνα, τι σου έρχεται στο μυαλό σαν εικόνα όταν ακούς ‘συνεχής συνάρτηση’;
Ι - Ότι η γραφική της παράσταση δεν διακόπτεται, ας πούμε, πουθενά.
Ερ – Ωραία. Στο 6 τώρα. Το είχες βάλει στην αρχή σωστό και μετά λάθος;

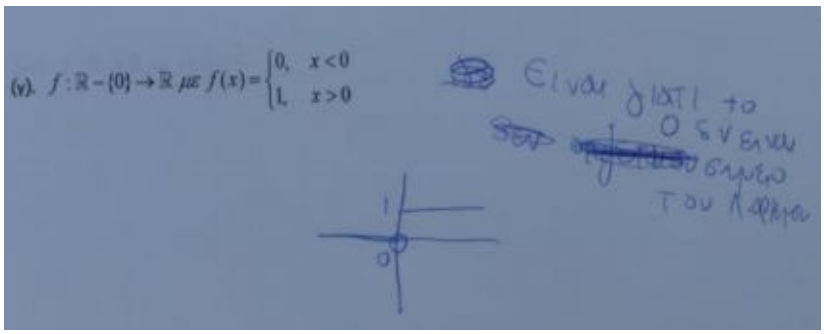


Ι – Για να δω … Βασικά νομίζω ότι δεν χρειάζεται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Δεν χρειάζεται, άρα σωστό τελικά ή λάθος; Θα άλλαζες κάτι;
Ι - Όχι, βασικά δεν ξέρω πώς να το γράψω … δεν απαιτείται άρα σωστό.
Ερ - Ωραία. Τι θα έλεγες για το δεύτερο;
Ι - Σωστό.
Ερ - Ωραία. Και το επόμενο;
Ι - Σωστό.
Ερ - Ωραία. Πάμε τώρα στην 7. Στην (α) λες ότι δεν είναι συνεχής σε όλο το R γιατί δεν ορίζεται το 0, έτσι;

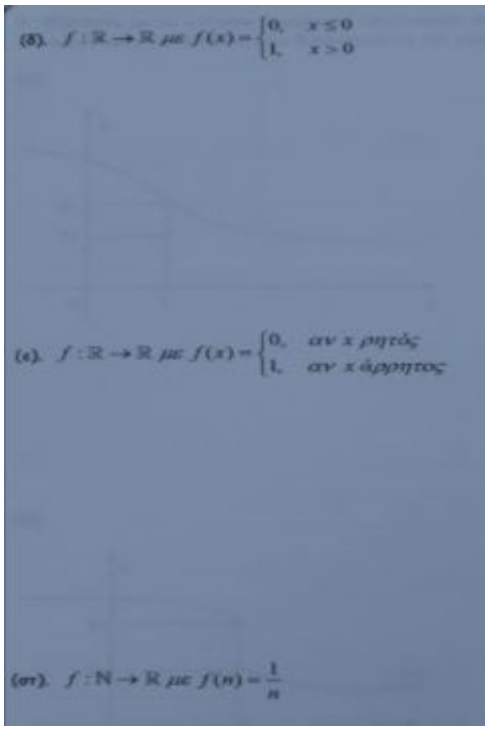


Ι – Ναι.
Ερ - Άρα τι σε χαλάει σε αυτήν;
Ι - Βασικά αυτό που … δεν έρχεται σε αντίθεση με το άλλο; Το 0 δεν είναι στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Δεν ξέρω! Εσύ θα μου πεις.
Ι - Ναι βασικά αυτό πιστεύω, ότι δεν είναι συνεχής.

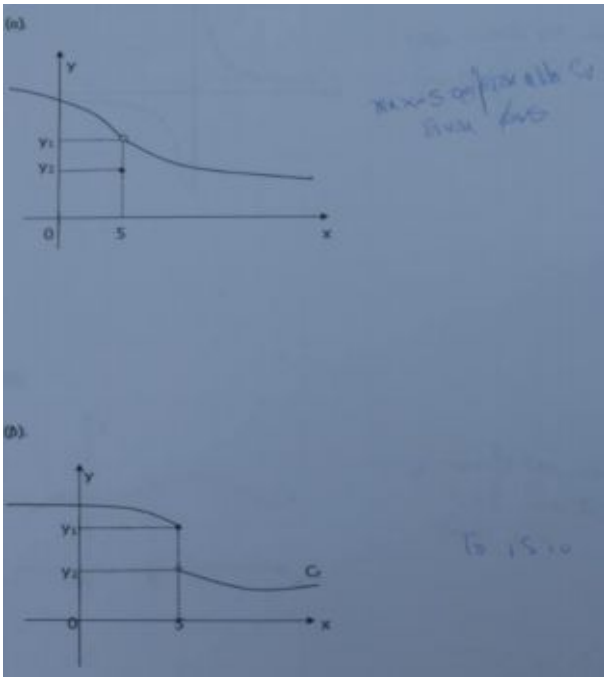
Ερ - Θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Ι - Δεν ξέρω καθόλου πως πάει αυτή.
Ερ - Αν το θυμάσαι.
Ι - Όχι δεν το θυμάμαι καθόλου.
Ερ – Εντάξει. Η (β) λες δεν είναι, γιατί;
Ι - Γιατί η γραφική της παράσταση πηγαίνει έτσι ας πούμε (δείχνει το γράφημα που έχει κάνει).
Ερ - Εννοείς αυτό το σκαλοπάτι έτσι;



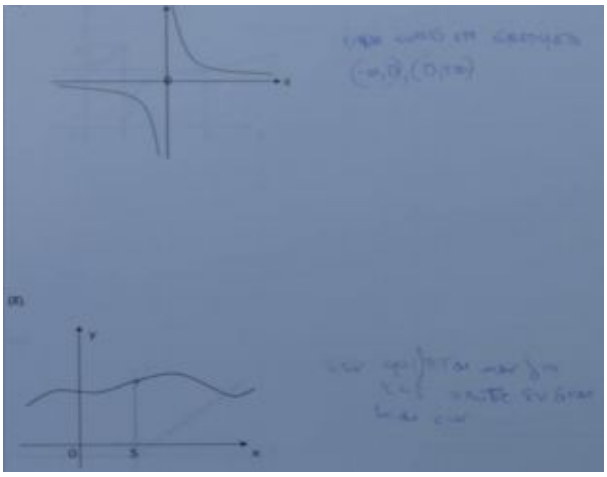
Ι – Ναι, διακόπτεται.
Ερ – Η επόμενη η (γ) λες είναι γιατί το 0 δεν είναι σημείο του πεδίου ορισμού …
Ι - Βασικά εδώ θα εννοούσα ότι προς τα αριστερά είναι, προς τα δεξιά είναι. Δεν είναι συνεχής στο 0 αλλά είναι σε όλο το υπόλοιπο.



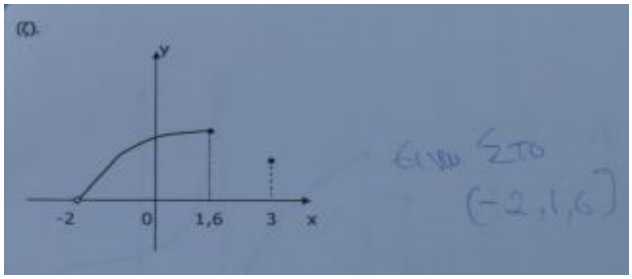
Ερ - Α κατάλαβα. Και εννοείς ότι απλά στο 0 χαλάει η συνέχεια έτσι;
Ι - Ναι.
Ερ – Για τη (δ) τι θα έλεγες και σε σχέση με την προηγούμενη.
Ι – Αυτή ορίζεται και στο 0, βασικά αυτή (δείχνει τη (γ)) είναι συνεχής γιατί το 0 δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού ενώ εδώ (δείχνει τη (δ)) που το 0 είναι μέσα στο πεδίο ορισμού, είναι αντίστοιχη ξέρω εγώ, αυτή δεν είναι συνεχής.
Ερ – Κατάλαβα. Άρα σε αυτή εδώ θα λέγαμε ότι δεν είναι συνεχής, ενώ στην προηγούμενη ότι είναι συνεχής …
Ι - … εκεί που ορίζεται.
Ερ – Ωραία. Η (ε) σου λέει τίποτα, σου θυμίζει τίποτα;
Ι - … Αυτή βασικά δεν μπορεί να είναι συνεχής γιατί είναι 0, 1, 0, 1.
Ερ - Εννοείς μία γραμμή που ανεβοκατεβαίνει ή κουκίδες;
Ι - Κουκίδες βασικά.
Ερ - Εντάξει. Τι θα έλεγες για την επόμενη;
Ι - Δεν ξέρω … λογικά πρέπει να είναι ας πούμε εκτός από το 0.
Ερ - Εντάξει. Προφανώς εννοούμε ότι δεν ανήκει το 0 στο πεδίο ορισμού.
Ι – Άρα λογικά θα είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία.



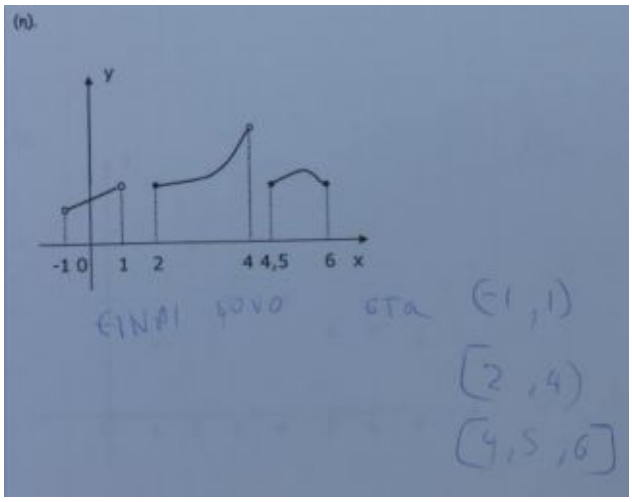
I – Αυτή (δείχνει την 8(α)) δεν είναι συνεχής για τον ίδιο λόγο …
Ερ - Εδώ τι ακριβώς γράφεις; Λες ότι στο x=5 ορίζεται άλλα…
I - … ότι στο 5 ορίζεται αλλά δεν είναι συνεχής.
Ερ – Τι σε χαλάει δηλαδή, γιατί δεν είναι αυτή συνεχής;
I - Είναι το 5 μέσα στο πεδίο ορισμού αλλά διακόπτεται εκεί.
Ερ - Ωραία. Και στην επόμενη τη (β);
I – Και εδώ το ίδιο βασικά. Ενώ το 5 είναι μέσα χαλάει ας πούμε η γραμμή.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα.

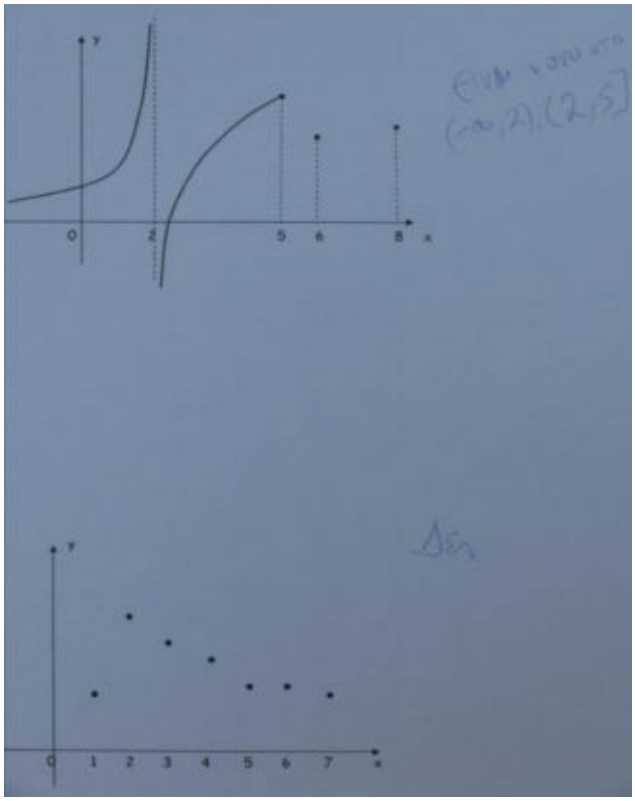


Ερ – Ωραία. Εδώ στη (γ) λες ότι είναι συνεχής στα διαστήματα αυτά. Έτσι;
I - Ναι.
Ερ - Στην επόμενη τώρα τη (δ) λες ότι δεν ορίζεται για x=5 οπότε δεν είναι και συνεχής, έτσι;
I – Ναι. Εδώ βασικά δεν ήξερα αν είναι για το 5 συγκεκριμένα η συνέχεια, αν ψάχνουμε για το 5 συγκεκριμένα τη συνέχεια ή γενικά Ας πούμε εδώ πέρα θα έλεγα ότι είναι συνεχής ως το 5, μέχρι το πέντε και από το 5 και μετά επίσης είναι αλλά στο 5...
Ερ - Στο 5 είναι;
I - Όχι δεν είναι.
Ερ - Ωραία. Δεν είναι λες στην (ε). Τι σε χαλάει εδώ;
I - Ότι ενώ είναι συνεχής από το μείον άπειρο όπως πάει μέχρι το 1, στο 1 χαλάει, από το 1 με το 3 πάλι είναι καλή, μετά πάλι χαλάει και από το 3 και μετά είναι εντάξει …
Ερ…κατάλαβα.
I - Δηλαδή στα συγκεκριμένα αυτά σημεία δεν είναι συνεχής.
Ερ - Κατάλαβα. Η επόμενη η (στ);
I – Το ίδιο, ότι χαλάει στο 0, από το μείον άπειρο μέχρι το 0 είναι συνεχής, από το 0 και μετά είναι αλλά στο 0 χαλάει.



Ερ – Στη (ζ) λες ότι στο $(-2, 1.6]$ *είναι συνεχής. Άρα τι σε χαλάει σε αυτήν;*
Ι - Βασικά ότι το 3 είναι ξεκάρφωτο σημείο Άρα στο διάστημα από το -2 μέχρι το 1.6 που ορίζεται κιόλας είναι συνεχής αλλά μετά δεν είναι.
Ερ – Κατάλαβα.
Ι – Ναι, δεν είναι.
Ερ – Ωραία, στην (η) τώρα λες ότι είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα που γράφεις.
Ι – Ναι.
Ερ - Αν ενωνόντουσαν οι γραμμές;
Ι - Και έμειναν τα ανοιχτά κενά;
Ερ - Όχι τα έκλεινα, έκανα δηλαδή μία συνεχόμενη γραμμή.
Ι – ε, τότε θα ήταν συνεχής.
Ερ - Ωραία





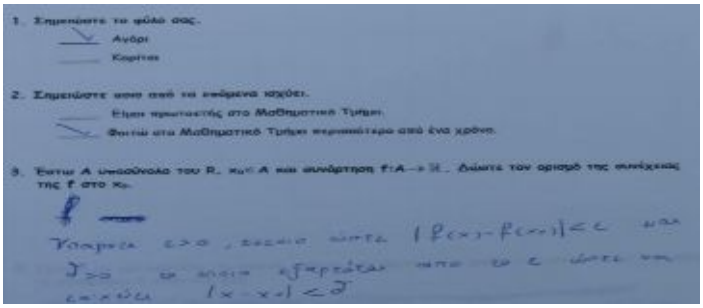
Ερ – Στη (θ) τώρα.
Ι – Ε, και εδώ με την ίδια λογική από το μείον άπειρο έως το 2 είναι, από το 2 μέχρι το 5 επίσης είναι συνεχής, δηλαδή είναι στα διαστήματα αλλά δεν είναι ολόκληρη συνεχής.
Ερ - Στα μεμονωμένα σημεία;
Ι - Στο σημείο 6 είναι …
Ερ - Τι λες, είναι συνεχής στο σημείο 6;
Ι – Α! όχι, δεν είναι. Δεν είναι πιστεύω.

Ερ – Ωραία. Η κάτω;
Ι – Δεν είναι και αυτή. Βασικά για αυτές που είναι σημεία ξεκάρφωτα έχω την εντύπωση, δεν ξέρω σίγουρα, ότι μπορεί να είναι συνεχής εδώ (δείχνει την κουκίδα), εδώ (δείχνει τη διπλανή κουκίδα), κ.λ.π, αλλά δεν είναι συνεχής ολόκληρη.

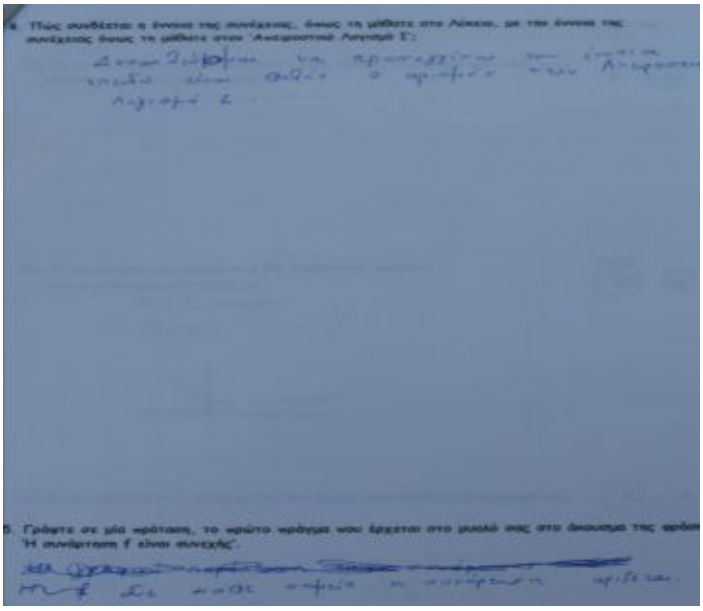
Δεν ξέρω αν ισχύει αυτό. Αλλά μπορεί να σκεφτόμουνα κι έτσι.
Ερ – Ωραία, σε ευχαριστώ πολύ!

20η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

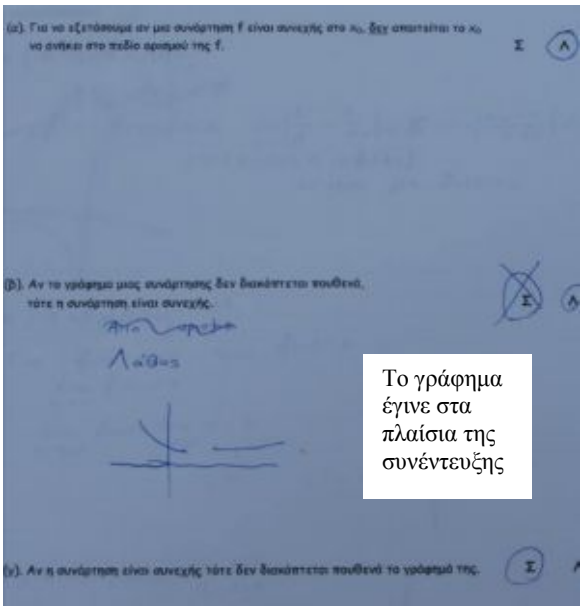
‘Μανώλης’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.



Ερ – Στον ορισμό θα γυρίσω μετά. Ας πάμε τώρα παρακάτω.

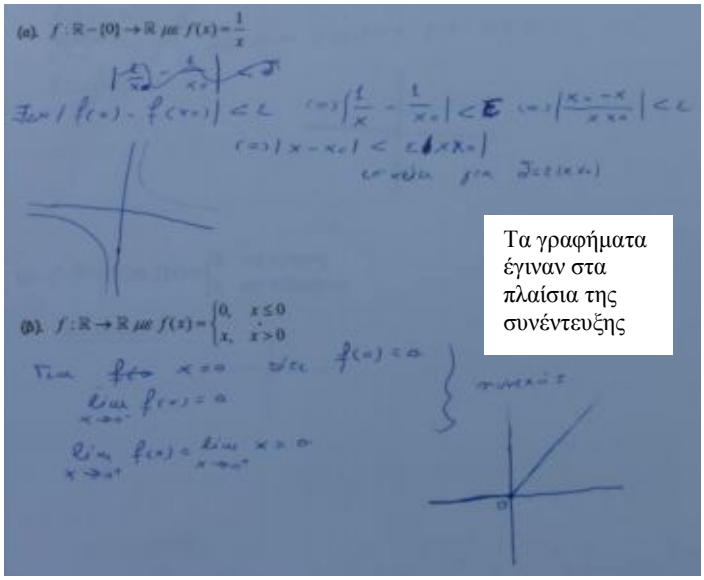


Ερ - Να πάμε λίγο στο 4. Θέλεις να μου πεις πως το βλέπεις;
Μ - Πως συνδέεται; Λοιπόν πως το βλέπω, πως στο πεδίο ορισμού της, αν έχω κάποιο x_0 τότε για όλα τα x τα οποία είναι πολύ κοντά σε αυτό θα υπάρχουν οι τιμές της συνάρτησης.
Ερ - Δηλαδή αυτό που μου λες μοιάζει με αυτό που έχεις απαντήσει στο 5, έτσι; Δηλαδή σαν εικόνα στο μυαλό σου …
Μ – …ναι, δηλαδή ότι για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού θα υπάρχει η τιμή του f(x) για όλα τα x που είναι κοντά σε αυτό το x_0.

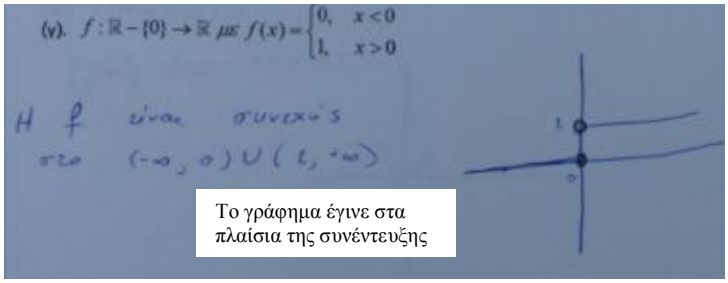


Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Τώρα στο επόμενο το 6(α) λες ΄Λάθος’, έτσι; Γιατί το βάζεις ‘Λάθος’;
Μ – Γιατί απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Στο επόμενο λες λάθος. Γιατί; Σου έρχεται κάτι ανάποδα στο μυαλό, δηλαδή κάποιο αντιπαράδειγμα;
Μ - Ναι γιατί άμα έχουμε κάποιο πεδίο ορισμού…
Ερ - … μπορείς να γράψεις ότι θέλεις, ή να κάνεις όποιο σχήμα νομίζεις.
Μ – … (κάνει το διπλανό γράφημα) … Να για παράδειγμα μπορεί να είναι όπως αυτή, να είναι συνεχής από το μείον άπειρο μέχρι τότε 1 ας πούμε, και μετά

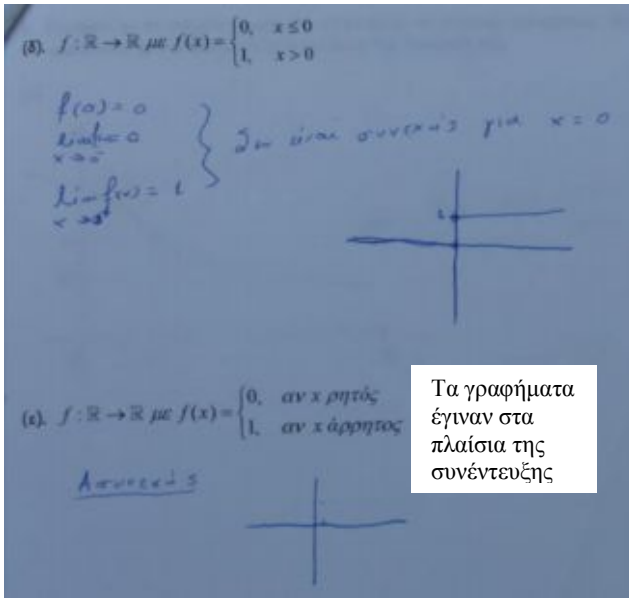
από το 3 μέχρι το συν άπειρο αλλά παρόλο που διακόπτεται θα είναι συνεχής.
Ερ – Κατάλαβα, αυτό είναι κατάλληλο αντιπαράδειγμα;
Μ - Ναι, έτσι νομίζω.
Ερ - Για κοίταξε λίγο και το επόμενο. Μήπως αυτό που μου λες είναι κατάλληλο αντιπαράδειγμα για το (γ);
Μ - … (κοιτάζει προσεκτικά και τα δύο) …Α! ναι. Σωστά. Αυτό είναι αντιπαράδειγμα για το επόμενο. Άρα το επόμενο πρέπει να είναι λάθος. Ενώ το (β) είναι σωστό. Αν δεν διακόπτεται πουθενά τότε βέβαια είναι συνεχής.



Ερ – Ωραία. Πάμε στην 7(α). Λες ότι είναι συνεχής, και μάλιστα έχεις προσπαθήσει να το δείξεις και με τον ορισμό που έχεις μάθει στο Πανεπιστήμιο. Ωραία Θέλεις να δοκιμάσεις να κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Μ - … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα) … νομίζω; Ναι.
Ερ - Αν είναι αυτή η γραφική παράσταση, σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις γράψει πιο πριν;
Μ - Νομίζω.
Ερ - Τι αίσθηση σου δίνει;
Μ - Μου δίνει την αίσθηση ότι από το μείον άπειρο μέχρι κάποια x κοντά στο μηδέν είναι συνεχής και από το μηδέν και πέρα είναι και πάλι συνεχής.
Ερ - Δηλαδή χαλάει η συνέχεια στο μηδέν;
Μ - Ναι, έτσι νομίζω.
Ερ - Ωραία. Η επόμενη είναι συνεχής λες, και έχεις δοκιμάσει να το δείξεις και με τα πλευρικά όρια. Θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις και γι' αυτήν τη γραφική της παράσταση;
Μ - … (κάνει τη γραφική παράσταση που φαίνεται παραπάνω) … κάπως έτσι.

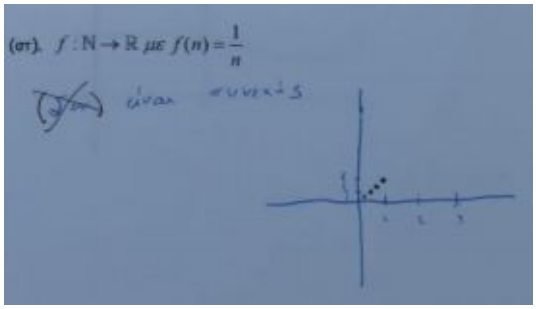


Ερ - Ωραία. Το σχήμα σε βοηθάει, σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις γράψει πιο πριν;
Ναι, νομίζω πώς ναι, από το 0 και πέρα ναι,
Ερ – Πριν το 0;
Μ - … ναι, ναι.
Ερ – Ωραία. Θέλεις να δοκιμάσεις και εδώ να κάνεις τη γραφική παράσταση;
Μ - … (κάνει τη διπλανή γραφική παράσταση) …
Ερ - Τι νομίζεις; Συμφωνεί το γράφημά σου με αυτό που λες;
Μ – Ναι.



Τα γραφήματα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

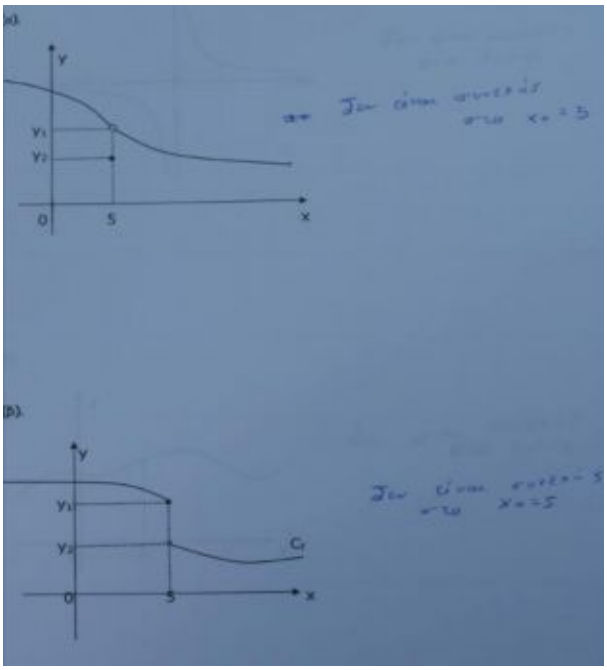
Ερ – Μάλιστα. Πάμε στη (δ) τώρα. Λες ότι δεν είναι συνεχής. Μπορείς να μου κάνεις και εδώ τη γραφική παράσταση; Μοιάζει με την προηγούμενη.
Μ - … (κάνει το διπλανό γράφημα) …
Ερ – Αλλάζει κάτι, τι λες;
Μ - Εδώ δεν είναι συνεχής τώρα γιατί για ένα x που ανήκει μέσα στο πεδίο ορισμού, τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.
Ερ - Ωραία. Εδώ τώρα λες στην (ε) ασυνεχής. Θυμάσαι καθόλου γιατί το έβαλες αυτό;
Μ - …
Ερ - Σου λέει τίποτα σαν συνάρτηση; Αν ήθελες να κάνεις γι αυτήν ένα γράφημα πως νομίζεις ότι θα ήταν;
Μ - … Θα ήταν πολύ κοντά πάλι άλλα ... κάπως έτσι νομίζω (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ - … κουκίδες δηλαδή;
Μ - … ναι ....
Ερ - … ή γραμμή που ανεβοκατεβαίνει;
Μ - Όχι, νομίζω κουκίδες.
Ερ – Άρα θα είναι συνεχής ή όχι;
Μ – Ασυνεχής νομίζω.
Ερ – Μπορείς να μου πεις ένα ρητό αριθμό;
Μ - … εεε ξέρω εγώ … το 1.
Ερ – Το 1, ωραία. Ο επόμενος ρητός ποιος θα είναι;
Μ - …πολλοί
Ερ – Ο αμέσως επόμενος;
Μ - …
Ερ – …ή ο αμέσως προηγούμενος, δεν με νοιάζει.
Μ - … το 1,1 (πολύ διστακτικά) … δεν ξέρω …έχω κολλήσει …

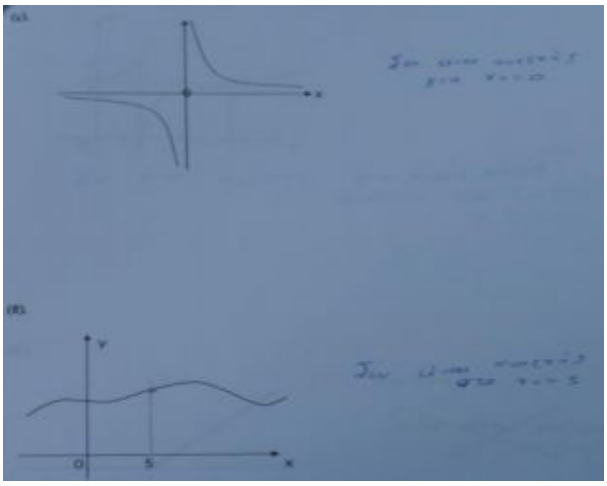


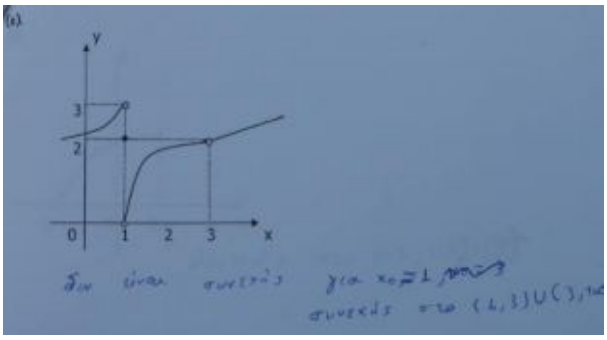
Ερ - Εντάξει. Μη παιδεύεσαι. Στην επόμενη τη (στ) λες δεν είναι συνεχής. Θέλεις να δοκιμάσεις και εδώ να κάνεις τη γραφική παράσταση;
Μ - … Πάλι κουκίδες θα είναι.
Ερ - Θέλεις να φτιάξεις μερικές έτσι για να το δούμε;
Μ - … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) …

Ερ – Ωραία. Κατάλαβα. Και άρα είναι περίπου μία γραμμή;
Μ - Ναι αλλά μόνο με κουκίδες.
Ερ - Και συνεχίζει προς τα πάνω;
Μ - Όχι εδώ σταματάει. Πάνε προς τα κάτω

Ερ - Εννοείς ότι οι κουκίδες προσεγγίζουν …
Μ - … ναι προς το 0, πάνε συνεχώς προς το 0.
Ερ – Α! Εντάξει, κατάλαβα. Θα είναι συνεχής, τι λες;
Μ - … Τώρα το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{N}$ … νομίζω ότι τώρα που το ξαναβλέπω ότι είναι
Ερ – Άρα θέλεις να διαγράψουμε το 'Δεν';
Μ – Ναι.

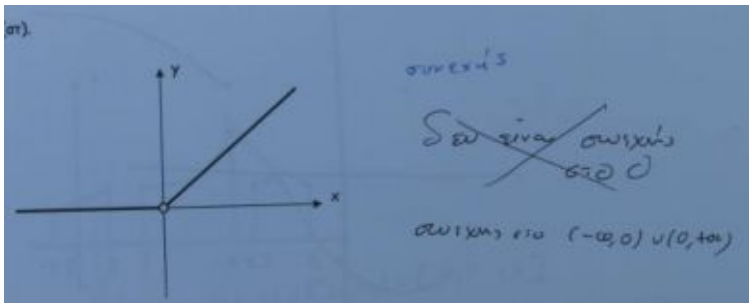




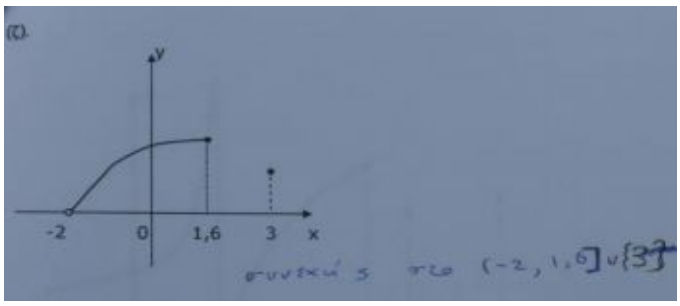


Ερ – Ωραία, πάμε στην 8. εδώ έχουμε μόνο γραφήματα. Λες ότι δεν είναι συνεχής στο 5. Γιατί;
Μ - Γιατί για x το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού, έχει διαφορετική τιμή το f(x). Πάλι τα πλευρικά …
Ερ – Ωραία. Και στο επόμενο; Γιατί;
Μ - Γιατί πάλι στο 5 το οποίο είναι μέσα στο πεδίο ορισμού … είναι κλειστό διάστημα … η τιμή είναι διαφορετική … αν πάρω τα πλευρικά όρια.
Ερ – Ωραία.
Ερ – Εδώ τώρα λες ότι δεν είναι συνεχής για x=0, έτσι;
Μ – Ναι.
Ερ – Και στην επόμενη λες ότι δεν είναι συνεχής στο x=5 …
Μ - Και βασικά είναι συνεχής από το ένα άκρο μέχρι το άλλο εκτός του 5.
Ερ - Εντάξει, υποθέτουμε ότι οι γραμμές συνεχίζουν και προς το άπειρο αν θέλεις.
Μ - Ναι, ναι πάντως δεν είναι συνεχής στο 5.
Ερ – Ωραία. Άρα στο 5 είναι που δεν έχεις συνέχεια έτσι;
Μ - Ναι.
Ερ – Ωραία, στην (ε) τώρα λες ότι δεν είναι συνεχής στο 1, γιατί;
Μ – γιατί στο 1, που είναι μέσα στο πεδίο ορισμού, έχει διαφορετικά πλευρικά όρια από την τιμή f(x), ενώ μετά από το 1 μέχρι το 3 είναι συνεχής … και μετά το 3 πάλι …
Ερ - Άρα έχουμε πρόβλημα και στο 1 και στο 3;
Μ - Όχι στο 3 δεν έχουμε πρόβλημα.
Ερ - Δεν έχουμε πρόβλημα; Τώρα με προκαλείς! Γιατί στη (δ) είχαμε πρόβλημα στο 5;

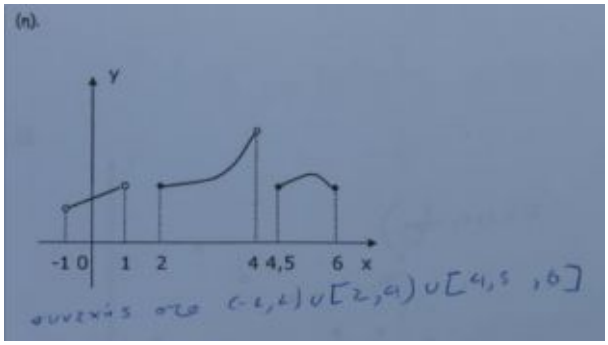
Μ - … εεε …Λέμε δεν είναι συνεχής στο x=5.
Ερ - Ωραία και εδώ τώρα δεν πρέπει να πούμε ότι δεν είναι συνεχής στο 3;
Μ - … Δεν είναι συνεχής στο 3 άλλα παρόλα αυτά λέω ότι από το 1 μέχρι το 3 είναι και από το 3 και μετά είναι. Άρα δεν είναι συνεχής στο 3, δεν υπάρχει πρόβλημα.



Ερ – Εντάξει, κατάλαβα. Στη (στ) τώρα λες ότι είναι συνεχής. Σε χαλάει εδώ τίποτα;
Μ - …
Ερ – … που είναι ανοιχτό;
Μ - … Όχι.
Ερ – Πάλι δεν αντέχω να μην ρωτήσω! Και στη (δ) γιατί μου απαντούσες ότι δεν είναι συνεχής;
Μ - Πάλι δηλαδή … άμα το έγραφα … εδώ θα έλεγα ότι … η συνάρτηση προφανώς δεν είναι συνεχής στο 0 … όχι δεν είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης το 0 … όχι μπορεί να είναι.
Ερ - Εσύ τι πιστεύεις έτσι όπως το βλέπεις;
Μ - Εγώ νομίζω ότι δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού.
Ερ - Οπότε;
Μ - Αν η συνάρτηση ορίζεται μετά το 0 …
Ερ - … και πριν το μηδέν στους αρνητικούς …
Μ – Α! αυτό δεν το είχα προσέξει έχει και πριν το μηδέν.
Ερ – Α! Τώρα κατάλαβα γιατί σε μπέρδεψε. Υπάρχει κλάδος της συνάρτησης και πριν το 0. Τώρα λοιπόν που τη βλέπεις ολόκληρη τι θα έλεγες;
Μ – Ότι δεν είναι συνεχής στο 0. Ή μήπως αφού το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
Ερ – Εσύ τι λες; Τι είναι καλύτερο;
Μ - Νομίζω ότι είναι καλύτερα να πούμε ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, δηλαδή να μη μιλήσουμε στο πεδίο ορισμού της, γιατί το 0 δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού.

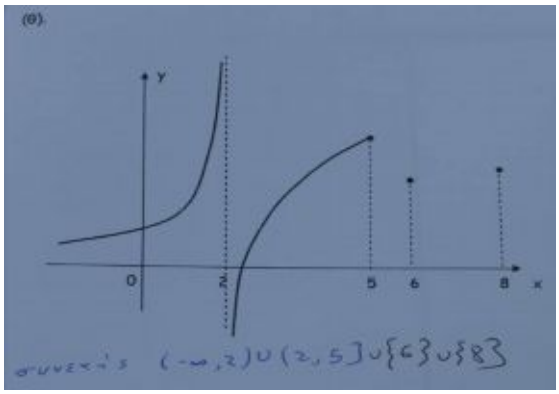


Ερ – Ωραία πιο σωστά ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της;
Μ – Ναι, συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
Ερ – Ωραία, ας το γράψουμε … Στη (ζ) τώρα. Τι σε χαλάει σε αυτήν;

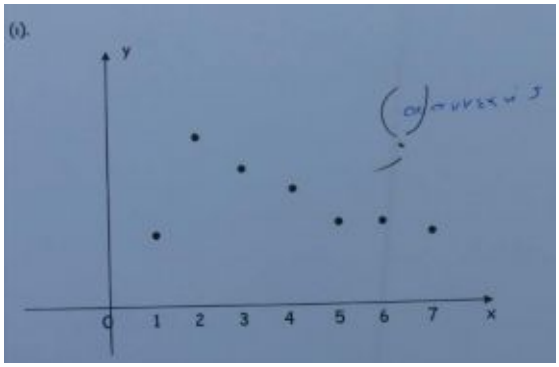


Μ - Τίποτα. Αυτή είναι συνεχής … συνεχής και εδώ πέρα και στο σημείο.
Ερ - Δηλαδή να γράψουμε $\cup\{3\}$, έτσι;
Μ – Ναι.
Ερ - Ωραία. Σε πειράζει που υπάρχει κενό εδώ μέχρι το 3;
Μ - Όχι δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού.

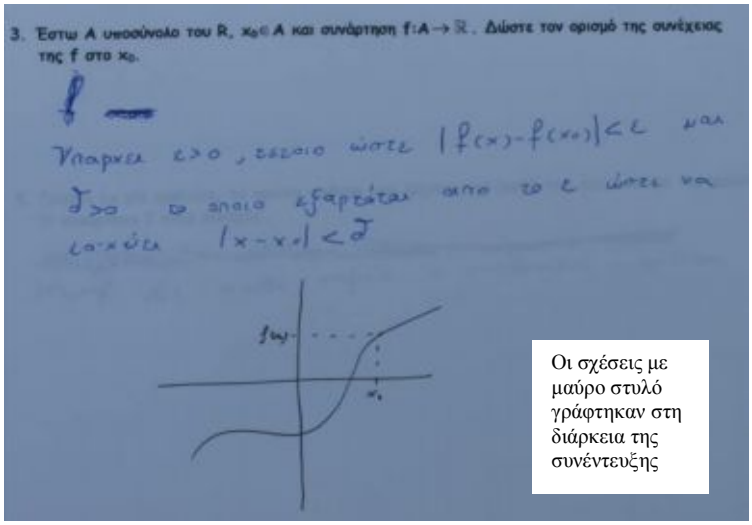
Ερ – Στην (η) τώρα. Λες συνεχής στην ένωση των διαστημάτων.
Μ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Δεν σε πειράζει πάλι που δεν ενώνονται αυτά μεταξύ τους;
Μ - Όχι γιατί μιλάμε πάλι … αφού δεν ορίζεται εδώ πέρα (δείχνει τα κενά ανάμεσα στα διαστήματα)



Ερ - Ωραία. Κατάλαβα. Στη (θ) τώρα λες ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,2)\cup(2,5]$. *Στα μεμονωμένα σημεία;*
Μ - … ναι, είναι και αυτά.
Ερ – Άρα να το γράψω $(-\infty,2)\cup(2,5]\cup\{6\}\cup\{8\}$ *; Έτσι;*
Μ – μμμ … Ναι, ναι.
Ερ – Ωραία, στη (ι) τώρα;



[Δεν ακούγεται καλά η απάντηση του φοιτητή σε αυτή τη συνάρτηση]

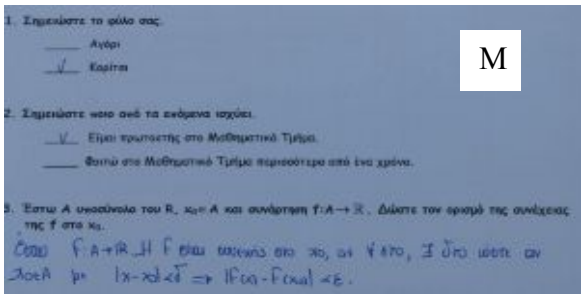


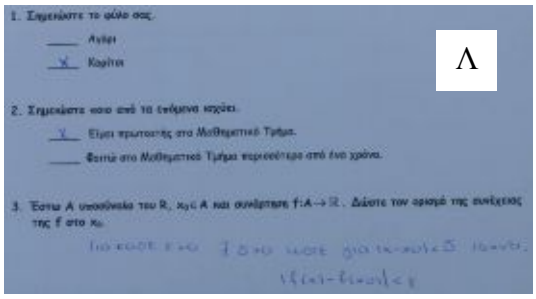
Οι σχέσεις με μαύρο στυλό γράφτηκαν στη διάρκεια της συνέντευξης

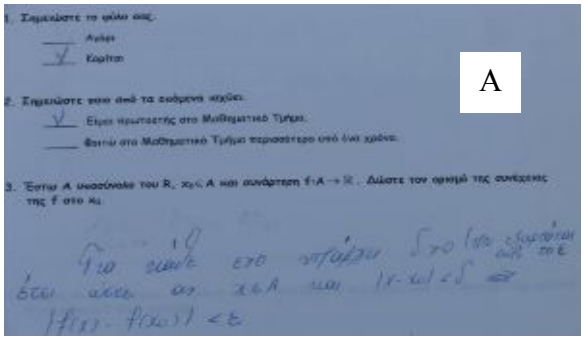
Ερ – Ωραία. Μία τελευταία ερώτηση. Αν έπρεπε τον ορισμό της συνέχειας να τον εξηγήσεις σε ένα παιδί της Γ΄ Λυκείου που τον βλέπει στο σχολικό βιβλίο, τι θα του έλεγες; Θα μπορούσες να τον εξηγήσεις λίγο με απλά λόγια;
Μ - … Θα έλεγα ότι για x κοντά στο x_0 … σε ένα διάστημα εκεί κοντά … όσο μικρό και αν είναι αυτό θα μπορώ να βρω … θα υπάρχει η τιμή της f(x)
Ερ - Θα υπάρχει η τιμή; Εννοείς η αντίστοιχη τιμή;
Μ - Ναι.
Ερ - Και το ε που μπαίνει μέσα στο παιχνίδι;
Μ - Επειδή εξαρτάται το ε από το δ, υπάρχει ένα αντίστοιχο μικρό διάστημα.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα! Σε ευχαριστώ πολύ!

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ 21η-23η

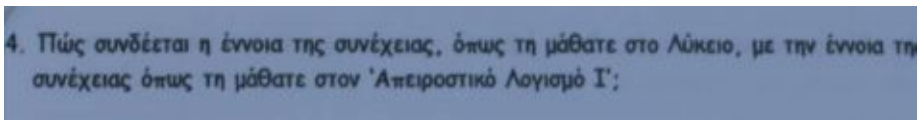
Ομαδική συνέντευξη
‘Μαρία’, ‘Λένα’, ‘Αφροδίτη’, πρωτοετείς στο Μαθηματικό τμήμα





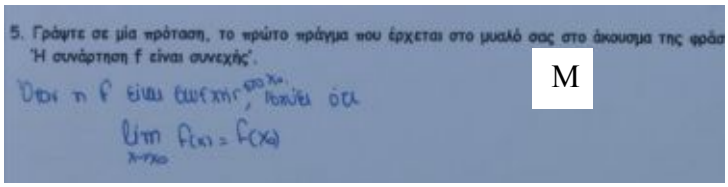


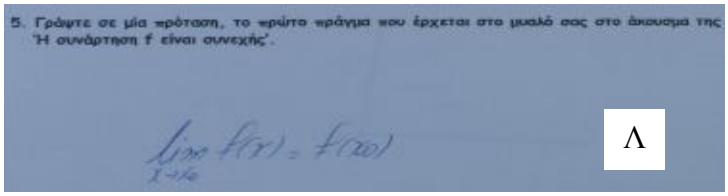
Ερ - Κορίτσια δε θα σχολιάσω τον ορισμό τώρα, θα τον δούμε στο τέλος.

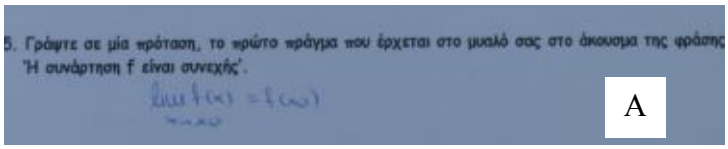


Ερ - Λοιπόν Μαρία, για πες μου στο 4 τώρα. Τι πιστεύεις για την έννοια της συνέχειας, πώς σχετίζεται αυτό που έμαθες στο Λύκειο με αυτό που είδες στο Πανεπιστήμιο; Θέλω το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σου.
Μ - Δεν το έχω σκεφτεί, δεν ξέρω, δεν μου έρχεται κάτι.
Ερ - Πιστεύεις ότι σχετίζονται μεταξύ τους;
Μ - Αυτή τη στιγμή έχω στο μυαλό μου ότι προσπαθούμε να βρούμε δύο σημεία … να κάνουμε την απόσταση μεταξύ τους όσο γίνεται πιο μικρή … και το ίδιο να κάνουμε και ...
Ερ - … όχι, όχι, κοιτάξτε δεν με ενδιαφέρει αυτή τη στιγμή ο ορισμός…
Μ - … ναι, ναι, αυτό μου έρχεται στο μυαλό, και το ίδιο να κάνουμε και με την εικόνα τους.
Ερ - Κατάλαβα τι λες. Αλλά αυτό που με ενδιαφέρει αυτή τη στιγμή είναι πιο πολύ αν πιστεύεις ότι σχετίζονται οι δυο ορισμοί του Λυκείου και του Πανεπιστημίου.
Μ - Δεν ξέρω … δεν ξέρω δεν μου έρχεται κάτι.
Ερ – Εσύ Λένα τι λες;
Λ - Εγώ πιστεύω ότι επεκτείνεται εδώ πέρα η έννοια της συνέχειας σε σχέση με αυτό που είχαμε μάθει. Δηλαδή ας πούμε πέρυσι είχαμε μάθει ότι στα γραφήματα πρέπει να είναι απαραίτητα συνεχής η γραμμή και τέτοια, ενώ τώρα μάθαμε ότι δεν ισχύει πάντα αυτό.
Α - Εγώ βασικά έτσι όπως το ακούω δε βρίσκω κάποια ομοιότητα. Νομίζω βασικά ότι ο ορισμός αυτός είναι λίγο πιο επιστημονικός. Και πιο δύσκολος βέβαια! Αυτά, δεν έχω να πω κάτι άλλο!

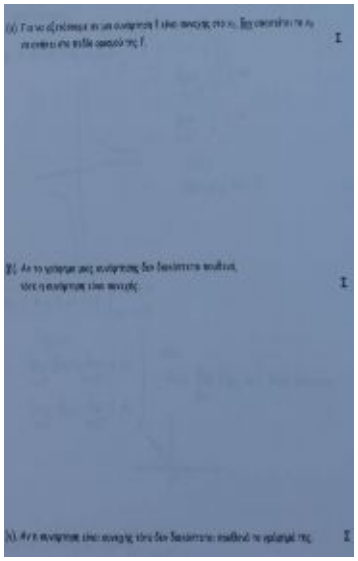
Μ, Λ – Αυτό είναι σίγουρο! (γελούν και οι τρεις).
Ερ - Ωραία. Μαρία μήπως σου ήρθε κάτι διαφορετικό στο μυαλό;;
Μ - Όχι.

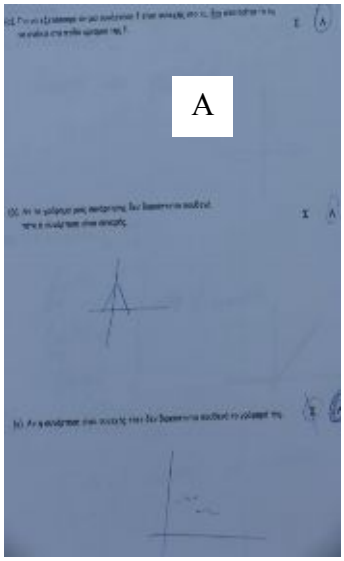






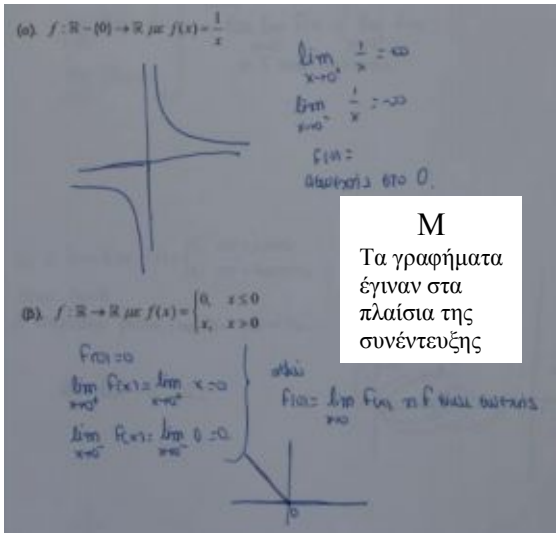
Ερ – Ωραία, πάμε στο 5. Το 5 με ενδιαφέρει πολύ.
Μ - Ναι, αυτό που κάναμε στο Λύκειο και επίσης μου έρχεται στο μυαλό και μια συνεχής γραμμή τέλος πάντων. Αν και αυτό δεν είναι απόλυτο, δηλαδή ότι δεν είναι συνεχής η γραμμή άρα δεν είναι συνεχής και η συνάρτηση αλλά αυτό πάντως που μου έρχεται στο μυαλό.
Λ - Εγώ το πρώτο που μου έρχεται στο μυαλό είναι αυτό ότι το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 είναι ίσο με το $f(x_0)$, αυτό μου έρχεται στο μυαλό.
Ερ - Και σαν εικόνα, σου έρχεται κάτι;
Λ - Και μένα αυτό, μία συνεχής γραμμή.
Α - Και εγώ το ίδιο, μία συνεχής γραμμή χωρίς να διακόπτεται.

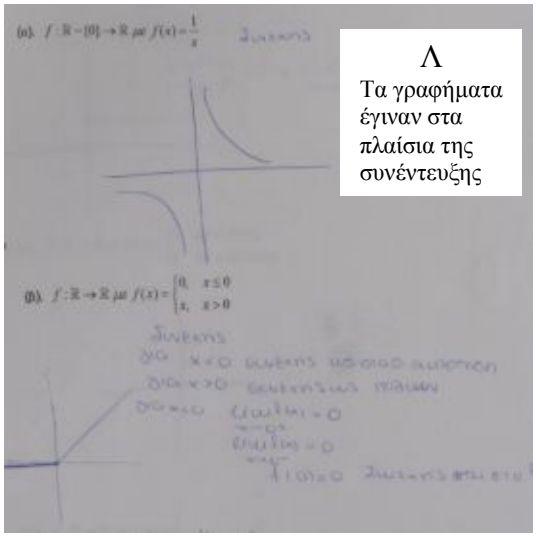


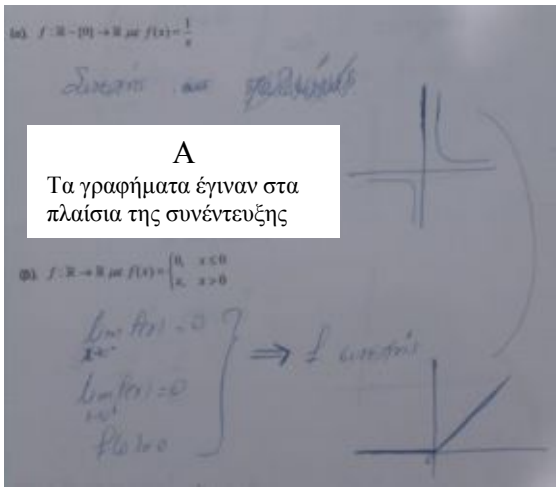


Ερ – Ωραία, πάμε στην 6 τώρα. Στο (α) λες 'Λάθος' Λένα. Γιατί;
Λ - Πιστεύω ότι είναι λάθος … τώρα ...
Ερ – Γιατί; Δηλαδή πιστεύεις ότι το x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού;
Λ - Νομίζω πως ναι. Ίσως με έχει επηρεάσει το προηγούμενο, ότι το όριο δηλαδή πρέπει να είναι ίσο με την τιμή … δεν ξέρω.
Ερ - Άρα ενστικτωδώς απαντάς …
Λ - … λάθος, λάθος ναι.
Ερ – Εσύ Αφροδίτη;

Α - Και εγώ λάθος απαντάω γιατί όταν κάναμε τον ορισμό του Λυκείου τέλος πάντων, λέμε ότι το όριο πρέπει να είναι ίσο με το $f(x_0)$. Άρα για να την παίρνει την τιμή αυτή θα πρέπει να ανήκει στον πεδίο ορισμού.
Ερ – Εσύ Μαρία;
Μ - Και εγώ λάθος γιατί θέλω να κάνω το οποιοδήποτε σημείο την απόστασή τους μικρή … οπότε αν κάποιο δεν ανήκει μέσα στο πεδίο ορισμού; … δεν θα μπορώ να το πω αυτό.
Ερ – Μάλιστα. Το (β) τώρα, αν το γράφημα της συνάρτησης δεν διακόπτεται, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Τι λες Μαρία;
Μ – … Σωστό.
Λ – Και εγώ σωστό λέω.
Α - Εγώ θυμάμαι από το Λύκειο που κάναμε τις γραφικές παραστάσεις, που κάνανε μία αιχμή ας πούμε κάναμε αυτό το πράγμα … (δείχνει το γράφημα που έχει κάνει) … τότε σε εκείνο το σημείο λέγαμε ότι δεν είναι παραγωγήσιμη άρα δεν είναι και συνεχής Αλλά αυτή είναι μία συνεχής γραμμή όμως δεν είναι παραγωγήσιμη άρα δεν είναι και συνεχής. Τώρα δεν θυμάμαι καλά αλλά δε λέγαμε εδώ ότι δεν είναι παραγωγήσιμη; Εδώ δεν είναι παραγωγήσιμη γιατί δεν ορίζεται η παράγωγος άρα δεν είναι και συνεχής κάπως έτσι το λέγαμε.
Ερ - Ωραία. Κατάλαβα τι λες. Το (γ) τώρα;
Α - Όχι, αυτό δεν είναι απόλυτο. Ας πούμε μπορεί να κάνει έτσι … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται στο έντυπο παραπάνω) … και μετά να κάνει έτσι … κάπως έτσι το κάναμε.
Ερ - Αυτή τι είναι δηλαδή;
Α - Συνεχής.
Ερ - Αλλά παρόλα αυτά; …
Α - … διακόπτεται. Άρα κακώς το έχω βάλει λάθος, σωστό πρέπει να είναι.
Ερ - Κάτσε τώρα γιατί με μπέρδεψες. Σωστό η λάθος;
Α - Καθίστε μισό λεπτό. Μπερδεύτηκα τώρα. Απλά τώρα δεν μπορώ να προσδιορίσω την απάντηση σε σχέση με την ερώτηση. Μπορεί να διακόπτεται, άρα είναι αυτή σωστή η λάθος;
… (Αναρωτιέται) …
Μ, Λ – Λάθος, λάθος (της απαντούν οι άλλες δύο κοπέλες)
Α – Ο.Κ! Λάθος!
Α - Και εγώ λάθος το έχω βάλει, θυμάμαι είχαμε κάνει κάτι αντίστοιχο στον Απειροστικό Ι αλλά δεν θυμάμαι το αντιπαράδειγμα ...
Ερ - … δεν ζητώ κάποιο συγκεκριμένο τύπο …
Α - … όχι, όχι, το ξέρω αλλά θυμάμαι ότι το είχαμε κάνει αλλά δεν θυμάμαι τώρα τη δικαιολόγηση.
Ερ - Δηλαδή εννοείς ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής αλλά παρόλα αυτά να διακόπτεται, έτσι;
Α - Ναι. Ναι.
Ερ – Κι εσύ Μαρία;
Μ - Και εγώ συμφωνώ, είναι λάθος.
Ερ - Έχεις μήπως κάτι στο μυαλό; Σου ήρθε κάποιο παράδειγμα κατά νου όταν το συμπλήρωνες;
Μ - Όχι αλλά θυμάμαι ότι το είχα απορία όταν κάναμε μάθημα και είχα ρωτήσει τα κορίτσια και μου είχανε πει ότι εκείνη τη στιγμή το είχε πει ο καθηγητής αλλά δεν το είχα προσέξει και έτσι μου έμεινε.





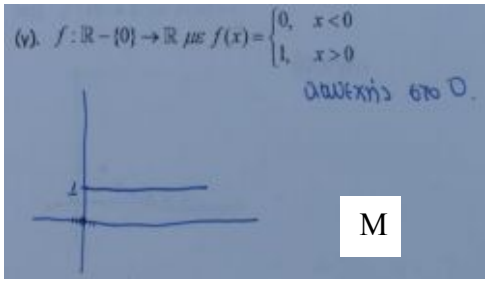


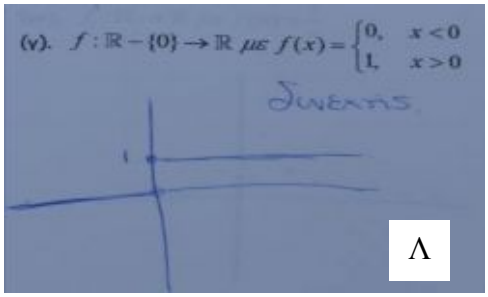
Ερ – Ωραία, πάμε στην 7(α) τώρα. Έχουμε την 1/x, μπορείτε να μου κάνετε τη γραφική της παράσταση;

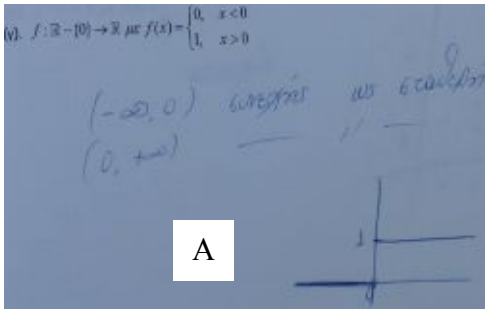
… (οι φοιτήτριες σχεδιάζουν τα γραφήματα που φαίνονται) …

Ερ - Ωραία, βλέπω ότι συμφωνείτε και οι τρεις. Ας υποθέσουμε ότι είναι σωστό το γράφημα που έχετε κάνει. Να ξεκινήσω από εσένα Λένα. Τι έχεις απαντήσει;
Λ – Ότι είναι συνεχής.
Ερ - Στο επιβεβαιώνει το γράφημα ή όχι;
Λ - … Ναι.
Ερ - Σε ενοχλεί που έχεις δύο κομμάτια και όχι ένα;
Λ - … Όχι.
Ερ – Γιατί;
Λ - …
Ερ - Θα πρέπει μήπως να ήταν συνεχόμενη η γραμμή κατά τη γνώμη σου;
Λ – Όχι, γιατί δεν ορίζεται σε όλο το R, το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Αφροδίτη τι λες;
Α – Εγώ το χωρίζω από το μείον άπειρο μέχρι το 0, που είναι αυτό το κομμάτι (δείχνει τον αριστερό κλάδο) που είναι συνεχής και μετά από το 0 μέχρι το συν άπειρο που είναι αυτό το κομμάτι (δείχνει το δεξί κλάδο) που είναι επίσης συνεχής.
Ερ - Άρα;
Α – Συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού αφού δεν έχει το 0 μέσα.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Δηλαδή το γράφημα σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις γράψει;
Α – Ναι.
Ερ - Μάλιστα. Μαρία εσύ τι λες;
Μ - …
Ερ – Σε βλέπω σκεπτική.
Μ – Ναι, στο 0 ψάχνω …

Ερ – Θέλεις να δοκιμάσεις με τα πλευρικά όρια;
Μ – … (κάνει πράξεις) … Δεν βγαίνει.
Ερ – Γιατί, τι βγαίνει;
Μ – Το f(0) δεν ορίζεται.
Ερ – Άρα, είναι συνεχής ή όχι;
Μ – Στο 0 όχι.
Ερ – Ωραία, γράψτο … Ωραία. Τώρα δοκιμάστε κορίτσια να κάνετε και τη γραφική παράσταση στην επόμενη …
Μ, Λ, Α – Μα δεν είναι συνεχής.
Ερ – Εντάξει, ωραία ας το δούμε αυτό. Μαρία τι νομίζεις;
Μ – Στο 0 δεν είναι πάντως …
Ερ – Ωραία, πριν και μετά; … Τι πιστεύεις;
Μ - … Ναι … γιατί όχι … ναι.
Ερ – Ωραία. Αφροδίτη να ρωτήσω;
Α – Ναι, είναι συνεχής. Πήρα το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ που είναι ίσο με το 0, το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ που είναι και αυτό 0, και ίσο και με το f(0). Και αυτή είναι και η γραφική παράσταση, νομίζω.
Ερ – Αν αυτή είναι η γραφική παράσταση και είναι σωστή σου επιβεβαιώνει την αλγεβρική σου απάντηση;
Α – Ναι.
Ερ – Ωραία Λένα εσύ;
Λ – Και εγώ συνεχής. Το έκανα και αλγεβρικά με τα όρια αλλά και από τη γραφική παράσταση.

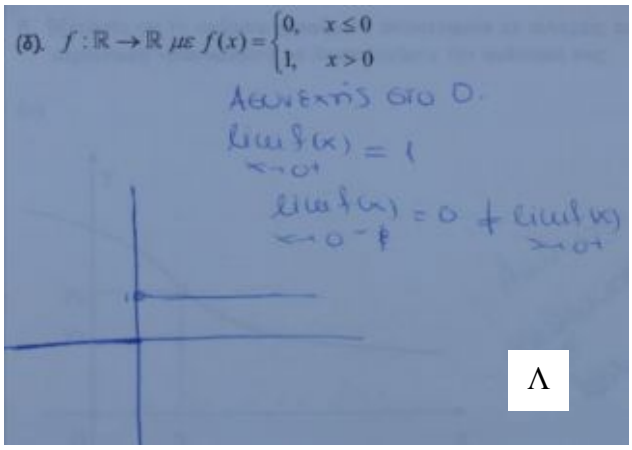




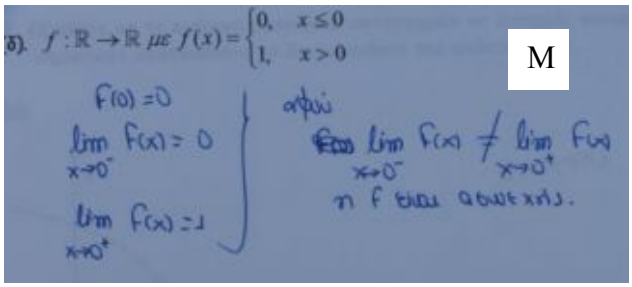


Ερ – Στο επιβεβαιώνει και σένα αυτό η γραφική παράσταση;
Λ – Ναι.
Μ – Όχι εμένα, εγώ δεν το έβγαλα από τη γραφική παράσταση το έβγαλα με τα όρια.
Ερ - Ωραία. Τώρα που έκανες και τη γραφική παράσταση σε βοηθάει η γραφική παράσταση ή όχι;
Μ – Όχι.
Ερ – Ωραία, πάμε στη (γ). Κάντε και εδώ τις γραφικές παραστάσεις …
Να ρωτήσω Αφροδίτη;
Α – Από τον μείον άπειρο μέχρι το 0 είναι συνεχής ως σταθερή, το ίδιο ισχύει και από το 0 ανοιχτό μέχρι το συν άπειρο. Το 0 τώρα δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού … δεν ξέρω … Εγώ πιστεύω ότι είναι συνεχής από το μείον άπειρο μέχρι το 0 και από το 0 μέχρι το συν άπειρο.
Ερ – Ωραία, Λένα εσύ;
Λ – Και εγώ το ίδιο. Με βάση αυτό που απαντήσαμε και πριν, ότι χρειάζεται να ανήκει δηλαδή στο πεδίο ορισμού, συνεχής γιατί το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Μαρία εσύ τι λες;
Μ – …

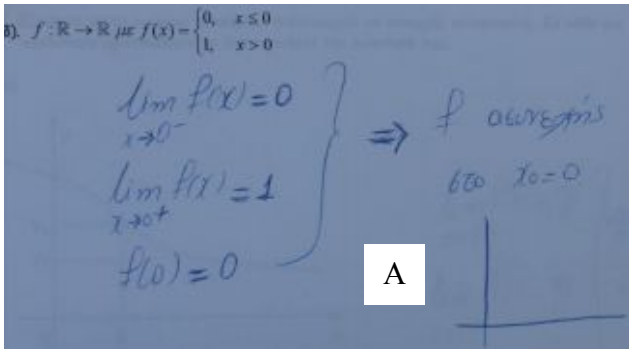
Ερ – Πες μου τι σε χαλάει;
Μ – Όχι, απλά να … αν μπορούσα να πάρω δύο σημεία το ένα από εδώ και το άλλο από εκεί που να είναι πολύ κοντά μεταξύ τους τι θα γινόταν;
Ερ – Εννοείς πολύ κοντά στο 0; Τότε ναι, τι θα γινόταν;
Μ - Αυτό ψάχνω!
Ερ – Εννοώ, τι θέλεις να χρησιμοποιήσεις, τι είναι αυτό που σε απασχολεί;
Α – (απευθύνεται στη Μαρία) …Τον ορισμό της συνέχειας στον Απειροστικό;
Μ – Ναι, Δηλαδή εγώ αυτό που έχω στο μυαλό μου είναι ότι αν είναι αυτά τα x πολύ μικρά τότε και τις εικόνες τους να μπορώ να τις κάνω πολύ μικρές, οσοδήποτε μικρές.
Ερ – Εννοείς ότι αν έχω δύο πολύ κοντινά μεταξύ τους σημεία στο άξονα x …
Μ - … αν δύο x μπορώ να κάνω την απόστασή τους οσοδήποτε μικρή, τότε και αντίστοιχα για τις εικόνες τους να μπορώ να κάνω το ίδιο. Και σκέφτομαι τώρα, ότι αν πάρω δύο σημεία το ένα λίγο πριν από το 0 που μου δίνει 0 και το άλλο αμέσως μετά το 0 που μου δίνει 1 τότε τι θα κάνω;

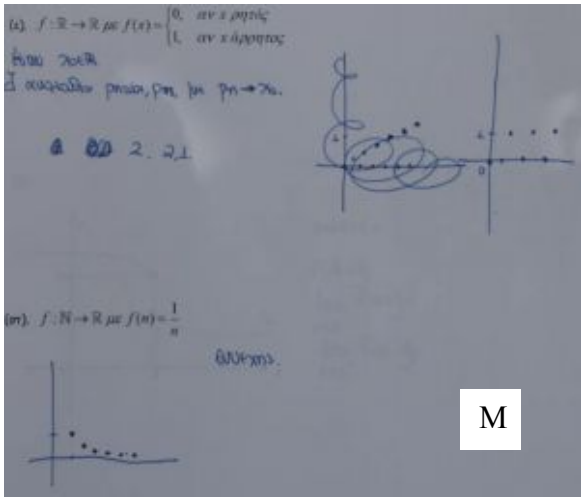


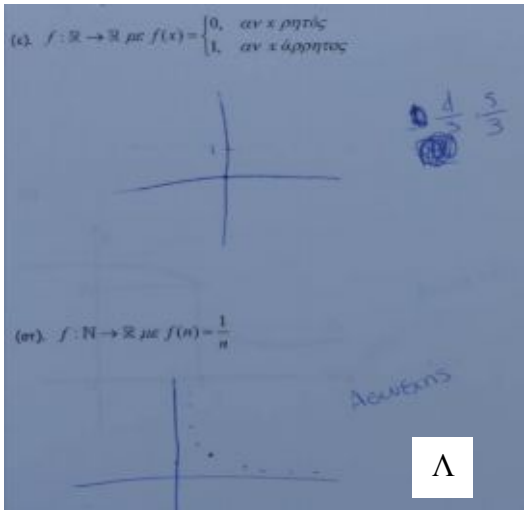
Ερ – Άρα, τι σε κάνει αυτό να λες;
Μ - Ότι είναι ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής, παντού;
Μ – … στο 0.
Ερ – Ωραία. Πάμε στη (δ). Λένα τι λες;
Λ – Ασυνεχής στο 0.
Ερ – Ασυνεχής στο 0. Γιατί;
Λ – Γιατί πρώτον δεν συμπίπτουν τα όρια, τα πλευρικά … αυτό δε συμπίπτουν.
Ερ – Έχει κάποια διαφορά αυτή από την προηγούμενη;
Λ – Απλά η προηγούμενη επειδή στις πρώτες ερωτήσεις απάντησα ότι … (γυρίζει πίσω στην 6) εκεί στο σωστό - λάθος ότι αν μία συνάρτηση … αν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού και απάντησα λάθος, ότι απαιτείται δηλαδή, και επειδή πριν το 0 δεν ήταν μέσα στο πεδίο ορισμού γι' αυτό.

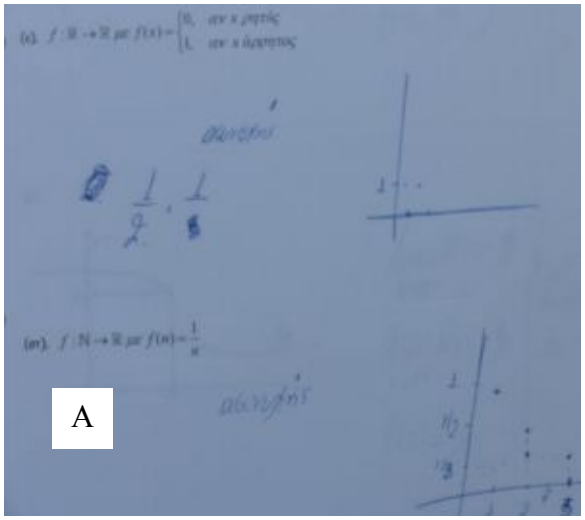


Ερ – Ωραία, Μαρία;
Μ – Και εγώ το ίδιο έβαλα, ασυνεχής γιατί ούτε καν μου βγαίνουν τα όρια.
Ερ – Ωραία, Αφροδίτη;
Α – Και εγώ το ίδιο.
Ερ – Ασυνεχής;
Α – …ναι στο 0.





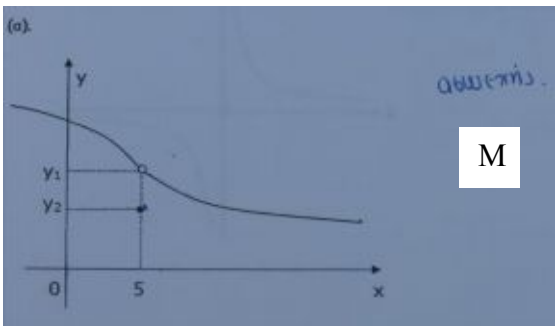


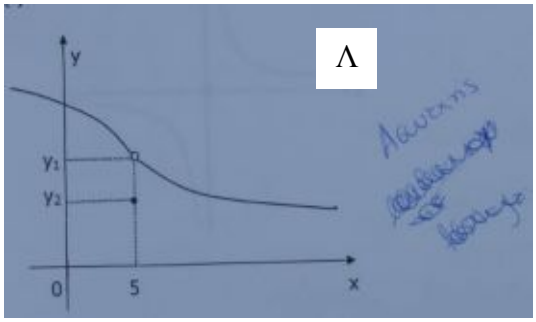


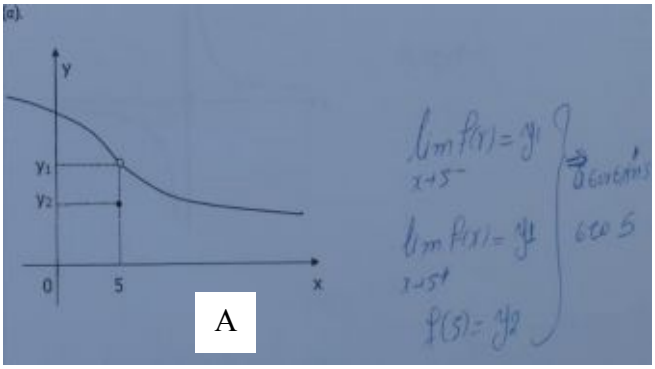
Ερ – Ωραία, πάμε στην (ε). Τι λες Μαρία;
Μ – Να το δω! … εεε … εγώ θυμάμαι κάτι αλλά δεν είμαι σίγουρη … κάτι που μία άσκηση που είχαμε δει … αλλά η συγκεκριμένη άσκηση μου έλεγε ότι είναι συνεχής και αυτό τώρα … δε θυμάμαι.
Ερ – Μία άσκηση; Δηλαδή;
Μ – Είχαμε δει κάποιες ασκήσεις στον Απειροστικό που έλεγε ότι όταν πάει η ακολουθία των ρητών κάπου … αλλά νομίζω ότι έβγαινε εκεί με το κριτήριο ασυνέχειας … όταν το ρ τείνει στο x_0, τότε και το f(ρ) λέει θα τείνει στο $f(x_0)$ …
Ερ – Και σε τι σε βοηθάει αυτό εδώ;
Μ – Όχι, τίποτα, απλά μου ήρθε!
Ερ – Ο.Κ! Αν έπρεπε τώρα απλά να απαντήσεις για αυτή, τι θα έβαζες;
Μ – … Ασυνεχή θα την έβαζα.
Ερ – Λένα εσύ;
Λ – Και εγώ ασυνεχή θα την έβαζα …
Ερ – Ασυνεχή;
Λ – Ναι, τώρα … δεν ξέρω ακριβώς … περισσότερο ενστικτωδώς … από την πυκνότητα ρητών και αρρήτων αλλά τώρα δεν ξέρω ακριβώς πώς θα μου έβγαινε.
Ερ – Ωραία, Αφροδίτη;
Α – Και εγώ από διαίσθηση ασυνεχή θα έλεγα, γιατί όλα τα υπόλοιπα … ακολουθίες και τα λοιπά! (Γελάνε και οι τρεις)
Ερ – Κατάλαβα! Θέλετε να δοκιμάσετε να κάνετε γραφική παράσταση για αυτήν; Πώς περίπου θα είναι; … (κάνουν τα γραφήματα που φαίνονται παραπάνω) …
Α – Πώς να το κάνω τώρα αυτό;
Ερ – Όπως πιστεύεις εσύ.
Α – Τελείτσες θα είναι μία, μια εδώ στο 1 μία πιο πέρα …
Ερ – Θα ενώνονται οι τελείτσες Αφροδίτη;
Α – Όχι.

Ερ – Μαρία;
Μ – Κάπως έτσι θα είναι.
Ερ – Μάλιστα. Να ρωτήσω τώρα κάτι διαφορετικό. Θέλω να μου γράψετε εκεί έναν ρητό που σας έρχεται στο μυαλό.
Μ – Α! Ρητό …
Ερ – Ναι, ρητό.
Λ – …ρητό; …δεν μου έρχεται κάτι …Βρε παιδιά ποιος λέγεται ρητός; … (γελούν και οι τρεις)
Μ – Εγώ αυτό πάντα το μπέρδευα, είχα ένα πρόβλημα με αυτό.
Ερ – Τι σου έρχεται στο μυαλό;
Μ – Να γράψω έναν άρρητο που είμαι σίγουρη; … (Γελούν και οι τρεις) …
Ερ – Εγώ θέλω έναν ρητό!
.....
Ερ – Και αφού γράψετε έναν ρητό, θέλω δίπλα να μου γράψετε τον αμέσως επόμενό του.
Λ – Τον μεγαλύτερο δηλαδή; Τον αμέσως μεγαλύτερο; …
[Λόγω αλλαγής κασέτας χάνονται δύο προτάσεις]
Ερ – Δηλαδή ποιοι είναι οι άρρητοι;
Μ – Ναι, και εγώ ότι οι άρρητοι είναι οι ρίζες στάνταρ. Γενικά έχουν οι ρητοί τη μορφή μ/ν και τα μ, ν ανήκουν στο $\mathbb{N}$;
Ερ – …ας υποθέσουμε ότι είναι σωστό αυτό …
Α – … ή στο $\mathbb{Z}$; … όχι …
Ερ – Ωραία, τι λέτε;
Μ – Για ποιο πράγμα;
Ερ – Δηλαδή, σαν ρητούς ποιους θα λέγατε;
(μιλούν σχεδόν ταυτόχρονα και οι τρεις)
Α – Αυτούς που έχουν τη μορφή μ/ν …
Λ – …αυτούς που έχουν τη μορφή κλάσματος …
Α – … ε; αλλά το ν ανήκει στο $\mathbb{N}$ νομίζω και το μ στο $\mathbb{Z}$; …
Μ – … το ένα είναι ένας ακέραιος στάνταρ και το άλλο ένας φυσικός …
Α – … το κάτω …
Μ – … το κάτω ναι.
Ερ – Αν είναι έτσι θέλετε τότε να δοκιμάσετε να γράψετε έναν τέτοιο ρητό; … (γράφουν στο ερωτηματολόγιό τους) … Και θέλω να μου γράψετε τώρα τον αμέσως επόμενό του …
Μ – Δηλαδή εγώ να γράψω το 2 σαν 4/2;
Ερ – Ό,τι θέλεις. Και θέλω τον αμέσως επόμενο.
Α – … Αφού είπαμε ότι το από κάτω πρέπει να είναι φυσικός … θα είναι το 1/3 ή όχι;
Ερ – Δεν …
Λ – (απευθύνεται στην Αφροδίτη) … Το 1/3 δεν είναι μικρότερο από το ½;
Α – Α! ναι βλακεία, είπαμε μεγαλύτερο, ε το 1.
Λ – (Σχολιάζοντας το δικό της) Είπαμε 4/3 άρα το 5/3.
Μ – Εγώ έβαλα το 2,1 μετά το 2.
Ερ – Καλώς, θα ξαναγυρίσουμε σε αυτό στο τέλος. Για πάμε λίγο στο επόμενο στη (στ). Λένα;
Λ – … Σαν γραφική παράσταση σίγουρα διακόπτεται … αλλά …
Α – … τελείτσες θα είναι …
Ερ – Θυμάσαι να μου την κάνεις; … Μαρία, θέλεις να δοκιμάσεις και εσύ να την κανείς; …

(Κάνουν τα γραφήματα που φαίνονται παραπάνω) …
Λ – Θα είναι κάπως έτσι (δείχνει το γράφημα της) όλο τελείτσες.
Ερ – Και αν το γράφημα είναι έτσι τότε, τι λες, είναι συνεχής συνάρτηση;
……
Ερ – Τη σκέψη σου θέλω, ό,τι σου έρχεται αυθόρμητα.
Λ – Ασυνεχής μου έρχεται … αλλά δεν μπορώ να το αιτιολογήσω…
Ερ – Ασυνεχής, γιατί; … Ενστικτωδώς; Τι πιστεύεις δηλαδή; … Τι αίσθηση σου βγάζει;
Λ – (γελάει) … Ότι κάτι της λείπει!
Ερ – Ωραία, αυτό θέλω. Ωραία. Αν ενωνόντουσαν οι κουκίδες;
Λ – Τότε … συνεχής θα μου έκανε.
Ερ – Συνεχής, εσύ Αφροδίτη;
Α – Και εμένα ασυνεχής μου έκανε.
Ερ – Ασυνεχής, γιατί;
Α – Δεν ξέρω αλλά έτσι όπως βλέπω τις κουκίδες … το θεωρώ τελείως … ξέρω ότι δεν είναι συνεχής τέλος πάντων ότι δεν πάει …
Μ – Εγώ το άλλο το έχω κάνει λάθος (δείχνει την (ε)) αλλά εντάξει το ίδιο είναι (δείχνει το σωστό γράφημα για την (ε)) αλλά αυτή συνεχή θα την έβαζα.
Ερ – Συνεχή, γιατί;
Μ – Γιατί παίρνει μόνο τους φυσικούς, οπότε ενδιάμεσα δε θα μπορούσε να πάρει άλλες τιμές, τώρα …
Ερ - Ωραία. Οπότε θα έλεγες συνεχής; Γράψτο δίπλα. Γράψτε και εσείς την απάντηση που δώσατε πριν … Ωραία. Πάμε τώρα στα εύκολα. Εύκολα λέω επειδή έχει μόνο γραφήματα.

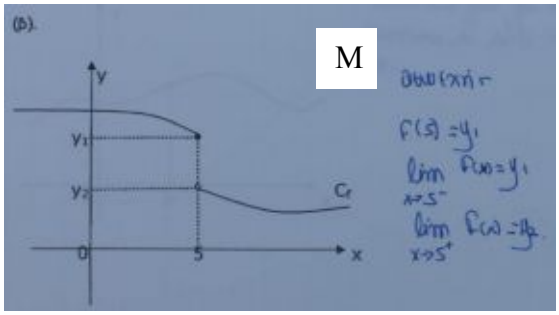


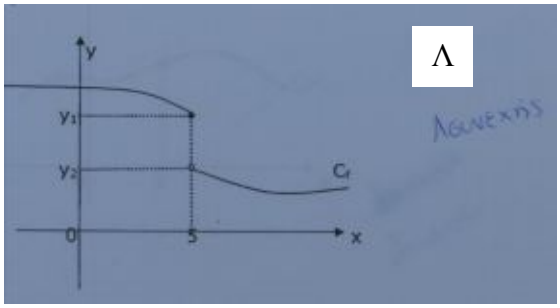


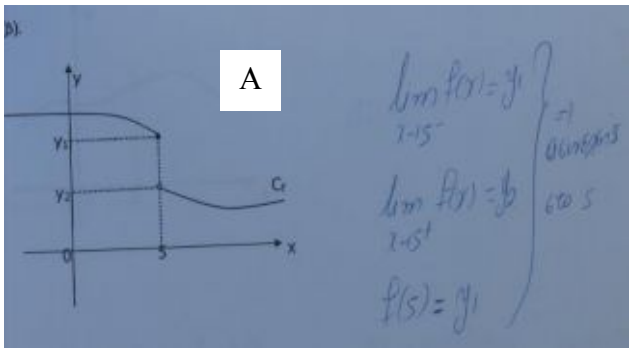


Ερ – Μαρία τι λες για το πρώτο;
Μ – …
Ερ – Κορίτσια ελπίζω να μην σας έχω κουράσει μέχρι τώρα;
Μ, Λ, Α – Όχι, όχι.
Ερ – Ό,τι σκέπτεσαι πες μου Μαρία.
Μ – εεε … ασυνεχή θα την έλεγα.
Ερ – Γιατί; Τι σε χαλάει δηλαδή και δεν τη λες συνεχή αυτή;
Μ – …
Ερ - Μη σε νοιάζει πώς θα το πεις. Πες μου απλά αυτό που σκέφτεσαι αυτή τη στιγμή.
Μ – … (γελάει) … δεν ξέρω!
Ερ – Τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ασυνεχής;
Μ – … απλά επειδή την τιμή της την παίρνει πιο κάτω εδώ … δεν ξέρω …
Ερ – Ωραία, σκέψου το και άμα είναι θα σε ξαναρωτήσω πάλι. Εσύ τι λες Λένα;

Λ – Και εγώ ασυνεχή θα έλεγα.
Ερ – Ασυνεχή, γιατί;
Λ – Δεν ξέρω … επειδή η τιμή είναι αλλού … και … τα όρια πηγαίνουν αλλού … μάλλον, δεν ξέρω σίγουρα.
Α – Εγώ την έχω βάλει ασυνεχή διότι το $\lim_{x \to 5^-} f(x)$ είναι y_1 όπως και το $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ αλλά το f(5) είναι y_2, οπότε είναι ασυνεχής στο 5.
Ερ – Η γραφική παράσταση το επιβεβαιώνει αυτό που λες;
Α – ε! Από εκεί και είδα τα όρια!
Ερ – Σωστά! Έχεις δίκιο! Λάθος διατύπωση στην ερώτηση! Λένα τι λες; Συμφωνείς;
Λ – Ναι, ναι...
Α – … και τα έχω γράψει αυτά και εδώ. Όπως τα κάναμε και στο Λύκειο.
Ερ – Μαρία είναι σωστό αυτό που λέει η Αφροδίτη;
Μ – Όχι, όχι.
Ερ – Γιατί; Θέλεις να το δεις πώς το έχει γράψει; Κοίταξέ το και πες μου.
Μ – … Δεν νομίζω ότι είναι σωστό.
Ερ – Γιατί; Μπορείς να εντοπίσεις τι σε χαλάει;
Μ – Αυτό με τα όρια … ότι όταν πηγαίνει …
Α – (απευθύνεται στη Μαρία) … αν το πάρεις έτσι να … όταν το πάρεις έτσι (δείχνει αριστερά από το 5) πάει εδώ (δείχνει το y_1) όταν το πάρεις δεξιά από το 5 πάει πάλι εδώ ενώ όταν ψάχνεις το f(5) πάει στο y_2
Μ – Ίσως να μπερδεύτηκα έτσι όπως είδα στην αρχή τη γραφική παράσταση και νόμιζα ότι τα όρια πάνε αλλιώς. Αλλά έτσι όπως το λέει η Αφροδίτη νομίζω ότι έχει δίκιο. Ναι, έτσι πρέπει να ναι. Κάπως είχα μπερδευτεί με το πως τα έβλεπα αριστερά δεξιά.
Ερ – Πρόσεξε, ίσως η Αφροδίτη να κάνει λάθος!
Μ – Δεν ξέρω! … Πάλι μου φαίνεται ότι είναι λάθος αλλά ...
Ερ – … χωρίς να μπορείς να εντοπίσεις το πού;
Μ – Ναι.
Ερ – Εντάξει, πάμε στο επόμενο.

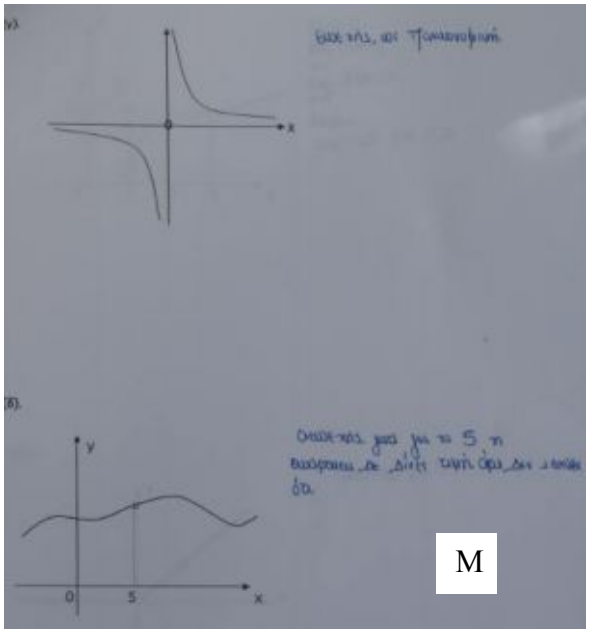


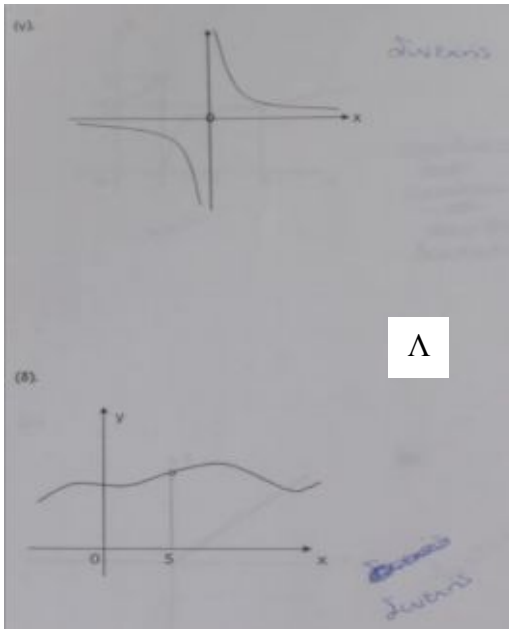


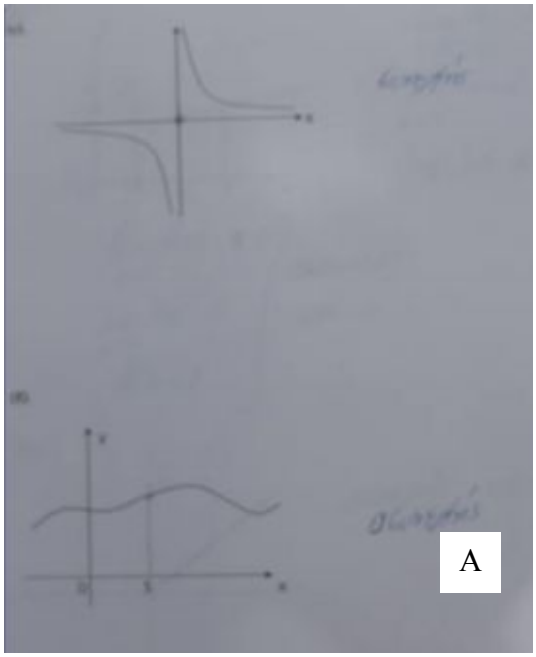


Ερ – Ωραία, να δούμε το (β). Μαρία τι λες;
Μ – … μισό λεπτό …ασυνεχής ...
Ερ – …ασυνεχής, γιατί;
Μ – Γιατί στο 5 και πριν σύμφωνα και με τα όρια που είπε και η Αφροδίτη πιο πριν, μέχρι το 5 θα το έβαζα στο y_1 και από εδώ και κάτω από το 5 και μετά πάει στο y_2.

Ερ – Αν είναι σωστά αυτά που είπε η Αφροδίτη! Λένα;
Λ – Και εγώ ασυνεχή θα την έλεγα.
Ερ – Ασυνεχή. Ωραία, γράψτο αυτό. Γιατί αυτό;
Λ – Κάτι αντίστοιχο με το προηγούμενο πάλι.
Ερ – Μπορείς να του δώσεις μαθηματική διάσταση ή όχι;
Λ – Τα πλευρικά όρια νομίζω ότι είναι εντελώς αλλού. Το ένα πάει έτσι … και το άλλο πάλι εδώ.
Ερ – Αφροδίτη τι λες;
Α – Εγώ λέω ότι είναι ασυνεχής στο 5, όπως είπα και πριν με τα όρια … (εξηγεί τις σχέσεις που έχει γράψει στο χαρτί). Οπότε είναι ασυνεχής.
Ερ – Ωραία. Να κάνω τώρα μία παρέμβαση σε αυτήν εδώ. Αν σας εξαφάνιζα από παντού την κουκκίδα, την κουκίδα του y_1 …
Α – … τότε δεν θα οριζόταν το f(5) …
Λ – … δεν θα ξέραμε τι γίνεται στο 5 …
Α – … οπότε θα ήταν ασυνεχής γιατί δεν θα ξέραμε τι κάνει στο 5 …
Λ – … όχι …άμα ήταν τονισμένη ή άμα ήταν κενή εννοείτε;
Ερ – … ναι κενή, κενή …
Λ – … όπως η κάτω;
Ερ – … ναι, όπως η κάτω που είναι ανοιχτό κυκλάκι …
Α – … α! κενή εννοείται; Δεν θα οριζόταν το f(5).
Ερ – Και άρα τι θα απαντούσατε τότε;
Α – Ότι είναι ασυνεχής.
Μ – Ασυνεχής, ναι.
Ερ – Λένα;
Λ –Ναι αλλά αυτό δεν έρχεται σε σύγκρουση με αυτό που λέγαμε πιο πριν ότι πρέπει να είναι … να ανήκει στο πεδίο ορισμού; Άμα το 5 δεν είναι στο πεδίο ορισμού τότε τι ψάχνουμε;
Ερ – Τι θα απαντούσες εσύ;
Λ – Δεν ξέρω … μήπως το αρχικό είναι τελείως λάθος που είπα ότι πρέπει να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού;
Ερ – Δεν ξέρω! Πάντως αν έκανα αυτή την παρέμβαση που λέω ποια είναι η αυθόρμητη απάντηση που θα σου ερχόταν στο μυαλό;
Λ – (διστακτικά) … δεν θα την έλεγα ασυνεχή.
Ερ – Μαρία εσύ τι λες; Μπορεί και να την έλεγες;
Μ – Όχι, εγώ ασυνεχή θα την έλεγα, όπως και τώρα.

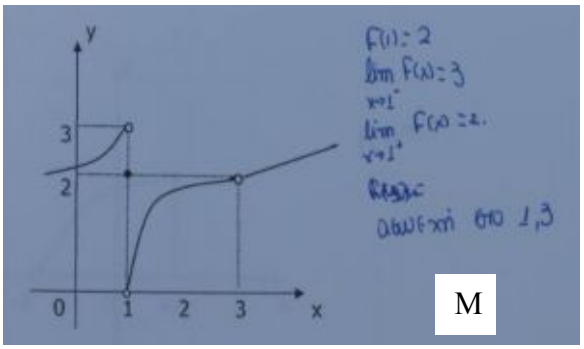


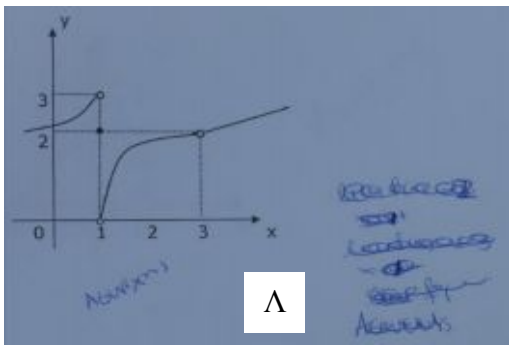




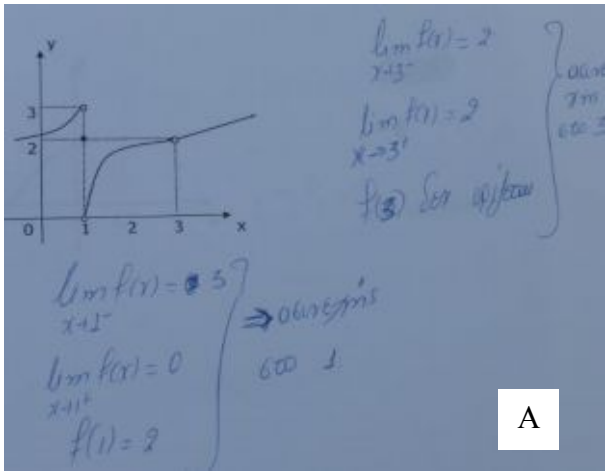
Ερ – Ωραία, να δούμε το επόμενο το (γ). Λένα;
Λ – Αυτή … συνεχής ως πολυωνυμική.
Ερ – Μαρία;
Μ – Και εγώ.
Ερ – Αφροδίτη;
Α – Και εγώ.
Ερ – Το ότι έχει δύο κλάδους;
Α – Δεν μας πείραξε! (γελούν) …
Ερ – α έτσι! (γελάω μαζί τους) Δεν σας πειράζουν τέτοια πράγματα εσάς! Γιατί;
Α, Λ – (γελούν) Δεν έχουμε πρόβλημα εμείς. Αυτά είναι λεπτομέρειες!
Ερ – Γιατί;
Α – Γιατί από τη στιγμή που δεν υπολογίζουμε το μηδέν, δεν το βάζουμε ας πούμε μέσα στο πεδίο, άρα το παίρνουμε σαν … [μιλούν τώρα ταυτόχρονα]
Α – … σαν δύο κομμάτια …
Λ – … άρα και την προηγούμενη πρέπει να την πάρεις τότε συνεχή ...
Α – … συγγνώμη εγώ συνεχή την έβαλα και ασυνεχή στο 0 …
… [αρχίζουν να μιλούν μεταξύ τους]…
Λ – … όχι, άμα δεν οριζόταν που είπαμε στο 5, τότε το ίδιο δεν είναι;
Α – … εγώ λέω όχι ότι δεν ορίζεται στο 5 δεν θα έχει την τιμή, εδώ πέρα δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού η τιμή, το … τέτοιο που παίρνει
Λ – Εγώ πρέπει να το πω αυτό που λες! Πριν δηλαδή, που είπαμε ότι θα υπάρχει κενό τελείως
Μ – Παιδιά σε ποιο πήγαμε;
Α – Πριν είπαμε αν δεν παίρνει την τιμή της f, εδώ όμως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Ερ – Τι είπες Αφροδίτη, πώς το δικαιολόγησες γιατί δεν σε άκουσα;
Α – Ότι αυτό που λέει, το 5 ας πούμε, έτσι όπως το λέει, δεν θα έπαιρνε την τιμή η συνάρτηση. Εδώ πέρα όμως δεν περιέχεται καν στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Κατάλαβα. Έχεις να πεις κάτι πάνω σε αυτό Αφροδίτη;
Α – Για απάντηση; (γελάει) Δεν Ξέρω! …
Ερ – Σε πείθει ή όχι;
Α – … Δεν ξέρω.
Ερ – Μαρία κατάλαβες τι λέει η Λένα;
Μ – Όχι.
Ερ – Η Λένα λέει στην Αφροδίτη γιατί εδώ πέρα λες ότι είναι συνεχής …
Μ – … στο 0 …
Ερ – … όχι, όχι, γενικά γιατί λες ότι είναι συνεχής και το μηδέν δεν με νοιάζει γιατί δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού, ενώ στο προηγούμενο που είπαμε να αφαιρέσουμε το 5 λες ότι με νοιάζει και λες ότι δεν είναι συνεχής; …
Μ – … α, κατάλαβα …
Ερ – … και της απαντάει η Αφροδίτη, πες Αφροδίτη τι είπες.
Α – Ότι το ένα ανήκει στο πεδίο ορισμού, ενώ το άλλο δεν ανήκει όμως. Το 5 είπαμε ότι ανήκει αλλά απλά δεν ορίζεται, ενώ εδώ πέρα δεν το παίρνουμε καθόλου. Εδώ το πεδίο ορισμού είναι από το μείον άπειρο μέχρι το 0 και από το 0 μέχρι το συν άπειρο ...
Λ – … και πριν δεν θα είναι το ίδιο από το μείον άπειρο μέχρι το 5 και από το 5 …
Α – … αα! Εδώ δεν αλλάξαμε το πεδίο ορισμού! Όλα κι όλα!
Λ – … Δεν ξέρω μπορεί να έχει δίκιο η Αφροδίτη…
Ερ – Καλά, θα το ξαναδούμε πάλι αργότερα αυτό. Για πάμε στη (δ), Λένα τι λες;
Λ – …
Ερ – Μην σε επηρεάζει η προηγούμενη συζήτηση. Εγώ θέλω να μου πεις αυτό που σου ήρθε στο μυαλό όταν το είδες.
Λ – … (πολύ διστακτικά) … συνεχή θα την έβαζα αλλά …
Ερ – Εντάξει, άστο. Αφροδίτη;
Α – Εγώ ασυνεχή γιατί δεν ορίζεται το f(5).
Ερ – Μαρία;
Μ – Και εγώ το ίδιο γιατί δεν μου δίνει τιμή. Άρα αν πάρω έναν αριθμό πολύ κοντά δεν θα μπορώ να κάνω την απόσταση των τιμών τους πολύ μικρή.

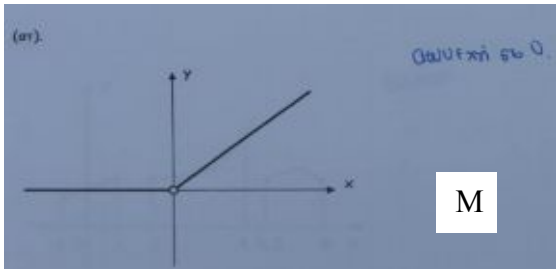


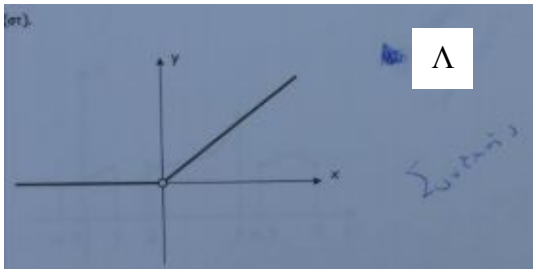


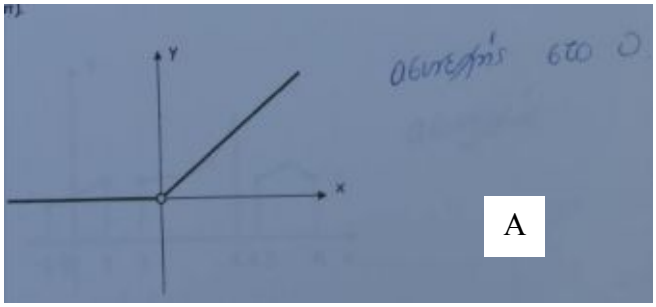
Ερ – Κατάλαβα. Πάμε στην (ε). Αφροδίτη;



Α – Την έχω βάλει ασυνεχή στο 1 γιατί (εξηγεί τις σχέσεις με τα όρια που φαίνονται δίπλα) … και ασυνεχή και στο 3 διότι δεν ορίζεται το f(3).
Ερ – Μάλιστα. Μαρία;
Μ – Εγώ δεν το έχω προλάβει να το δω καθόλου αυτό.
Ερ – Ωραία κοίταξε το μέχρι να μου απαντήσει και η Λένα και το συζητάμε. Λένα τι λες;
Λ – Είναι ασυνεχής στο 1.
Ερ – Ασυνεχής. Γιατί;
Λ – Δεξιά και αριστερά από το 1 πάει εντελώς αλλού η συνάρτηση, τα όρια.
Ερ – Στο 3;
Λ – … δεν έχει τιμή εκεί, δεν ορίζεται εκεί … δεν νομίζω ότι υπάρχει πρόβλημα εκεί.
Ερ – Μάλιστα. Μαρία τι λες;
Μ – Εγώ και στα δύο ασυνεχή τη βγάζω, και στο 1 και στο 3.
Ερ – Γιατί;
Μ – Γιατί το f(3) δεν ορίζεται.
Ερ – Και άρα;
Μ – Και άρα πώς θα συγκλίνουν τα όρια στο 3;
Ερ – Ωραία. Να ρωτήσω τώρα το εξής. Αν πάρω τελείως, εξαφανίσω, την κουκίδα που υπάρχει εδώ που αντιστοιχεί στο x=1 …
Μ – … τότε δεν θα ορίζεται το f(1) …
Α – … ναι, και άρα θα είναι ασυνεχής στο 1.
Ερ – Λένα;
Λ – Τότε από αυτή την άποψη με βάση όσα έχω πει θα είναι συνεχής τώρα.
Α – Σταθερή στην άποψή σου!! …
Λ – … ναι, ναι σταθερή ...
Α – … παιδί με άποψη! (γελούν και οι τρεις)
Ερ – Εσύ Μαρία;

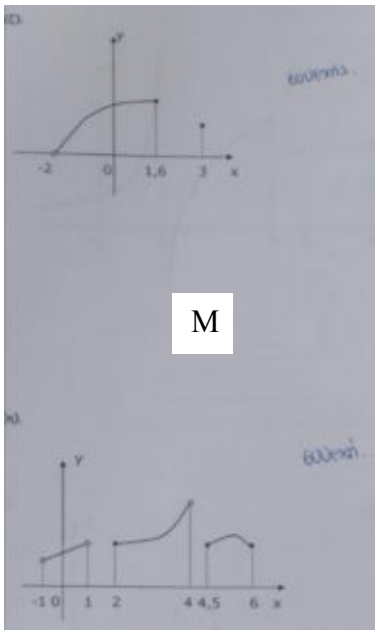


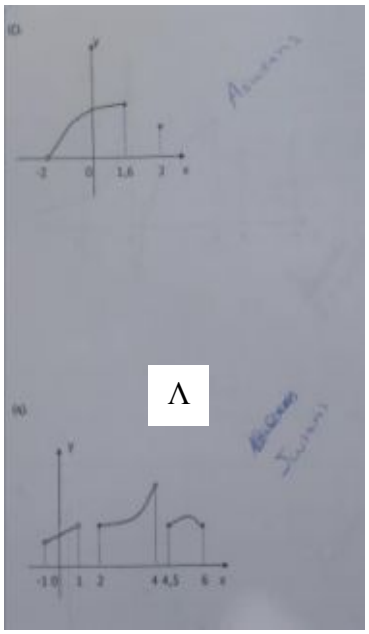


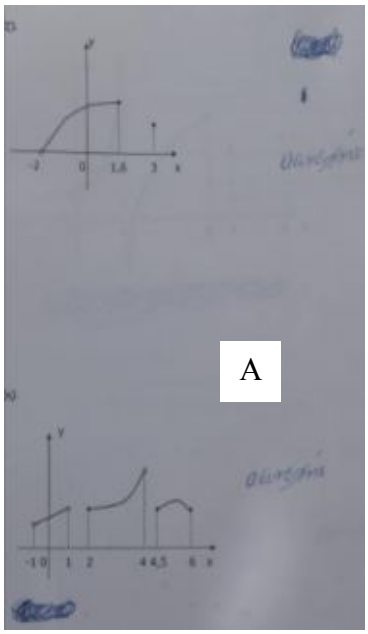


Μ – Ναι, ναι, κι εγώ ασυνεχή θα την έβαζα.
Ερ – Ωραία. Πάμε στη (στ). Τι λέτε;
Α – Ασυνεχή στο 0.
Ερ – Μάλιστα. Μαρία;
Μ – Ναι, δεν ορίζεται στο 0, έτσι;
Ερ – Ναι. Άρα;
Μ – Ασυνεχής.

Ερ – Μάλιστα, γράψτο δίπλα. Λένα;
Λ – Εγώ όπως σας είπα και παραπάνω (γελάει) δεν αλλάζω γνώμη!
Ερ – Δηλαδή πώς θα τη χαρακτήριζες;
Λ – Συνεχή, συνεχή θα την έλεγα! Δεν αλλάζω!



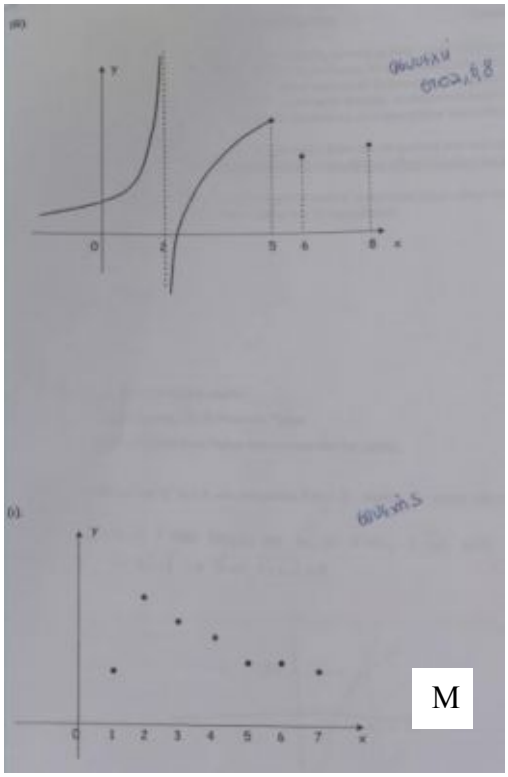




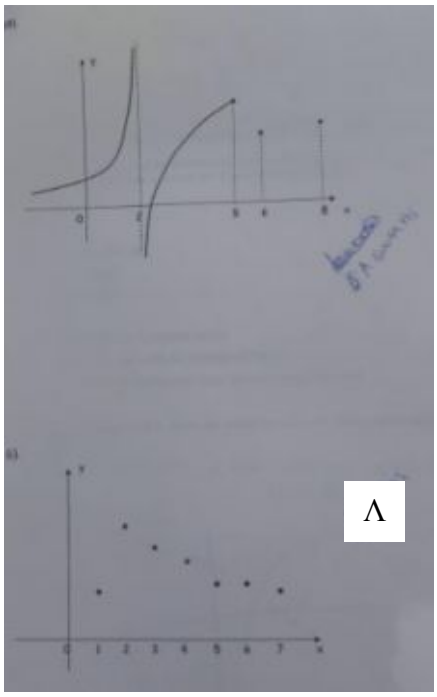
Ερ – Ωραία. Για πάμε στη (ζ). Τι λέτε;
Α – Δεν το έχω σκεφτεί ακόμα.
Ερ – Ποια το έχει σκεφτεί να ξεκινήσει;
Λ – Αυτή εδώ η κουκκίδα με χαλάει πολύ. Θα την πω ασυνεχή.
Ερ – Ασυνεχή, μάλιστα. Αν ενώναμε το 1,6 με το 3;
Λ – Συνεχή.
Ερ – Μάλιστα. Αφροδίτη;
Α – Δεν ξέρω. Με χαλάει αυτό το 1,6 πολύ παράξενο, κάτι παίζει με αυτό, δεν ξέρω! (γελάει)
Μ – Δηλαδή να εξετάσουμε τη συνέχεια στο 3;
Ερ – Θέλω να μου πεις αν αυτό το γράφημα αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση, όπως το βλέπεις, χωρίς κανένα άλλο σχόλιο.
Α – Και εδώ γιατί κόβεται, που έχει πάει η γραφική παράσταση;
Μ – Εγώ πάντως δεν μπορώ να καταλάβω.
Ερ – Το γράφημα όπως το βλέπεις, είναι ένα γράφημα όπως το βλέπεις αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση;
Α – Δηλαδή το πεδίο ορισμού αυτής είναι το (-2, 3];
Ερ – Εσύ Λένα τι λες, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
Λ – … αφού δεν παίρνει τιμές ενδιάμεσα άρα πρέπει να είναι το (-2, 1.6) και …
Α – … ανοιχτό όμως στο -2;
Μ – … ανοιχτό, αφού δεν ορίζεται.
Α – Ανοιχτό είναι αφού δεν ορίζεται, αλλά μετά στο 1,6;
Λ – Κλειστό στο 1,6 αλλά μετά κάτι γίνεται …
Α – … τι, και μετά ένωση με το 3;
Λ – Ναι, αυτό γίνεται.
……..

Α – Η επιστήμη σηκώνει τα χέρια ψηλά! Τέρμα! (γελούν και οι τρεις)
Ερ – Αν έπρεπε έστω και ενστικτωδώς να δώσετε μια απάντηση τι θα έλεγες Αφροδίτη;
Α – Ασυνεχή θα έλεγα.
Λ – Κι εγώ ασυνεχή θα την έλεγα.
Μ – Εγώ θα την έβαζα συνεχή.
Ερ – Μάλιστα. Το (η);
Α – Εγώ τη λέω ασυνεχή πάντως.
Ερ – Μαρία εσύ;
Μ – Εγώ δεν μπορώ να καταλάβω. Δεν ξέρω
Ερ – Τι σε χαλάει; Τι είναι αυτό που δεν μπορείς να καταλάβεις;
Μ – Με ενοχλούν αυτά τα κενά.
Ερ – Μεταξύ τους εννοείς.
Μ – Ναι.
Ερ – Ωραία, με βάση αυτά τα κενά τι θα έλεγες ότι είναι;
Μ – …
Ερ – Ό,τι σκέπτεσαι πες μου.
Μ – … δεν ξέρω.
Ερ – Προς τα πού κλείνεις;
Μ – … συνεχή θα την έλεγα.
Ερ – Συνεχή.
Μ – Ναι. Αλλά δεν μπορώ να σας πω γιατί … δεν ξέρω.
Ερ – Εντάξει, εσύ Λένα;
Λ – Κι εγώ ασυνεχή θα την έλεγα.
Ερ – Γιατί Λένα;
Λ – Για τον ίδιο λόγο που είπα και στην προηγούμενη. Τα κενά αυτά.
Ερ – Τα κενά που υπάρχουν, μάλιστα. Αφροδίτη νομίζω ότι είπες κάτι παρόμοιο;
Α – Ασυνεχής, ναι.
Ερ – Λόγω των κενών;
Α – Εγώ το παίρνω από το -1 έως το 1 ας πούμε, όταν πάει στο -1 από τα θετικά που έχει κάποια τιμή την οποία δεν μας τη λέει εδώ πέρα, αλλά είναι διαφορετική από την … αλλά η f(-1) δεν ορίζεται άρα είναι συνεχής εκεί και το ίδιο ισχύει και για το 1, στο 2 τα όρια είναι ίδια ξέρω εγώ και με το f(2) ας πούμε, μετά χάνει πάλι στο 4, μετά χάνει γενικά, οπότε …
Λ – …ναι αλλά αυτό που λέω έρχεται σε κόντρα με αυτό που λέω τόση ώρα, γιατί αν δεν ορίζεται εκεί τότε δεν μας νοιάζει κι άρα είναι συνεχής.
Ερ – Δηλαδή Λένα αλλάζεις κάτι;
Λ – Έτσι που τη βλέπω μου φαίνεται ασυνεχής γιατί παραέχει πολλά κενά αλλά … σαν λογική όμως …
Μ – … γιατί να μην έχει; …
Λ – … αυτό όμως …Δηλαδή πριν δεν με ενοχλούσε που τα έβλεπα λίγα, άλλα τώρα που τα βλέπω τα κενά μαζεμένα μπερδεύομαι …
Α – … εγώ πώς το έχω στο μυαλό μου, για να είναι συνεχής πρέπει ας πούμε εδώ που τελειώνει η μία να ξεκινάει αμέσως η άλλη, να μην υπάρχει κενό ενδιάμεσα, να μην κόβεται δηλαδή.
Ερ – … εννοείς ας πούμε στο 4 …
Α – … ναι, να ξεκινάει αμέσως μετά, όχι κατ' ανάγκην μια συνεχόμενη γραμμή αλλά από τον ίδιο αριθμό, να ξεκινάει πάλι έστω λίγο πιο κάτω ή λίγο πιο πάνω.
Ερ – Εννοείς δηλαδή σαν το 8(β);

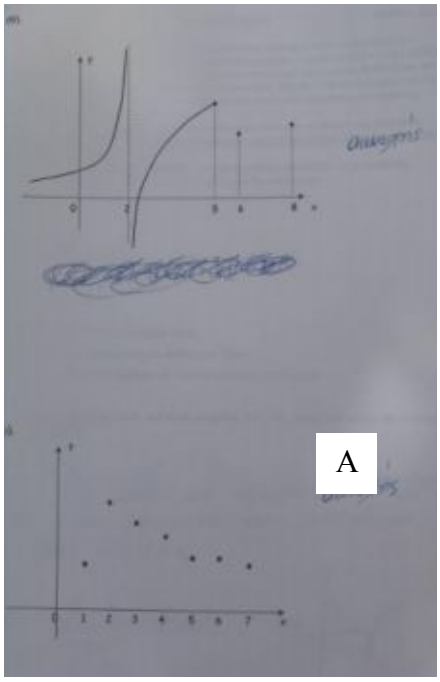
Α – Ναι, κάπως έτσι.
Ερ – Άρα αυτή είναι συνεχής;
Α – Όχι, είναι ασυνεχής
Ερ – Γιατί;
Α – Γιατί το πήρα με τα πλευρικά όρια και δεν βγήκαν.
Ερ – Ναι, αλλά τότε δεν αντιφάσκει αυτό με αυτό που μου λες μόλις τώρα;
Α – Περιμένετε. Ναι, αυτό εννοούσα, να είναι το ένα κάτω από το άλλο, αλλά δεν είχα υπολογίσει αυτό με τα όρια και την ανοιχτή κλειστή κουκίδα.
Ερ – Δηλαδή στο σχήμα 6(γ) να είναι γεμάτες και οι δύο κουκκίδες;
Α – Όχι, τότε και πάλι αν πάρουμε τα πλευρικά όρια δεν θα είναι συνεχής.
Ερ – Άρα τι εννοείς; Μήπως κάτι δεν καταλαβαίνω;
Α – Όχι εσείς καλά καταλαβαίνετε, εγώ δεν καταλαβαίνω τι λέω! (γελούν και οι τρεις).
Ερ - Πάντως το μυαλό σου αυτό που είχε έρθει είναι κάτι σαν κι αυτό έτσι; (Δείχνω το σχήμα 6(γ) και το 8(β))
Α – Ναι.
Ερ – Αλλά δεν συμφωνεί με τα όρια;
Α – Ναι.
Ερ – Άρα κάποιο θα είναι λάθος;
Α – Περιμένετε. Όταν το όριο έρχεται από εδώ, πάει στο y_1, όταν έρχεται από εκεί πάει στο y_2, αλλά το f(5) είναι y_1, αλλά αν ήταν και η κάτω κουκίδα γεμάτη, τότε θα έπαιρνε δύο τιμές οπότε …
Λ, Α – … δεν θα ήταν συνάρτηση! (γελούν)
Ερ – Υπάρχει πρόβλημα;
Α – Πρόβλημα μεγάλο!
Λ – Τώρα για την (η) από τη μια λέω ότι δεν με νοιάζουν τα κενά γιατί δεν ορίζεται σε αυτό το σημείο και άρα είναι συνεχής, αλλά από την άλλη είναι πολλά τα κενά και με προβληματίζουν.



Ερ – Άρα; Θα άλλαζες κάτι στην απάντηση; Ή όχι;
Λ - Θα τη βάλω συνεχή.
Ερ – Συνεχή; Άρα συμφωνείς με τη Μαρία; Μαρία εσύ τι λες;
Μ – Που συμφώνησε μαζί μου; (γελάει) Ναι, συνεχής … αλλά μόνο στα κομματάκια αυτά που βλέπουμε … στα άλλα δεν ορίζεται.
Ερ – Καλώς. Πάμε στη (θ).
Α – Καλά, αυτή που τη βρήκατε!;! (γελούν) Εγώ πάντως θα πάω πάλι με την ίδια λογική σε αυτήν, όταν έρχεται από εδώ πάει προς το συν άπειρο, όταν έρχεται από κει κατεβαίνει κάτω αλλά … στο 2 θα μου πείτε ότι δεν ορίζεται πάλι …
Ερ – Εγώ δεν είπα τίποτα!
Α – Το λέω μόνη μου!
Μ – Αυτές εδώ οι κουκίδες ανήκουν στο πεδίο ορισμού;
Ερ – Δεν θα σου πω!
Μ – Δεν θα μου πείτε! Δεν πειράζει.

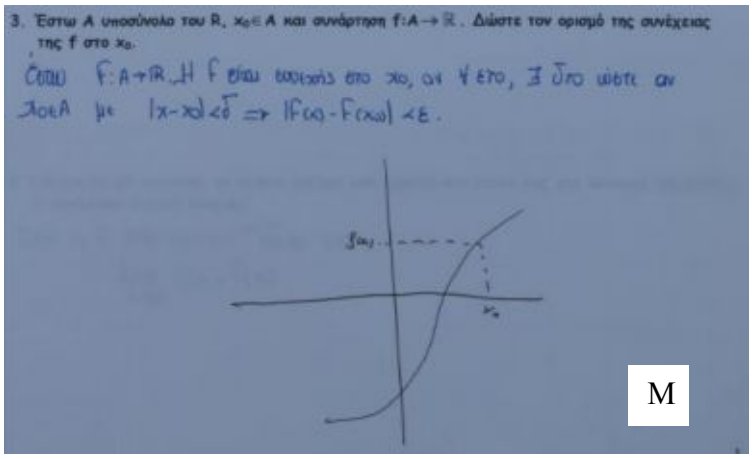


Λ – …εμένα δεν με πειράζουν αυτά …
Α – Εγώ πάντως θα τη βάλω συνεχή με την ίδια λογική που απάντησα και πιο πριν.
Ερ – Ασυνεχή, μάλιστα. Λένα;
Λ – … μάλλον ασυνεχή
Ερ – Γιατί Λένα; Που πιστεύεις ότι έχεις πρόβλημα με τη συνέχεια;
Λ – … με αυτό το αρχικό … αν πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού ή όχι από εκεί ξεκινάνε όλα. Είχα δει κάτι βασικά, ότι πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού …
Α – … αυτά είναι ένωση διαστημάτων ας πούμε; Από το μείον άπειρο μέχρι το 2 ανοιχτό, από το 2 ανοιχτό μέχρι το 5 κλειστό ένωση 6 και ένωση 8, ε;
Ερ – Δεν ξέρω, ότι πεις!
Μ – Ε, και;
Α – Ναι, δεν αλλάζει κάτι … αλλά όχι αν το πάρεις έτσι τότε είναι συνεχής σε κάθε διάστημα αλλά σε όλη την ένωση δεν είναι; Ή όχι;
Λ – …αυτό είναι το ίδιο με αυτό που έχω μπερδευτεί και εγώ.

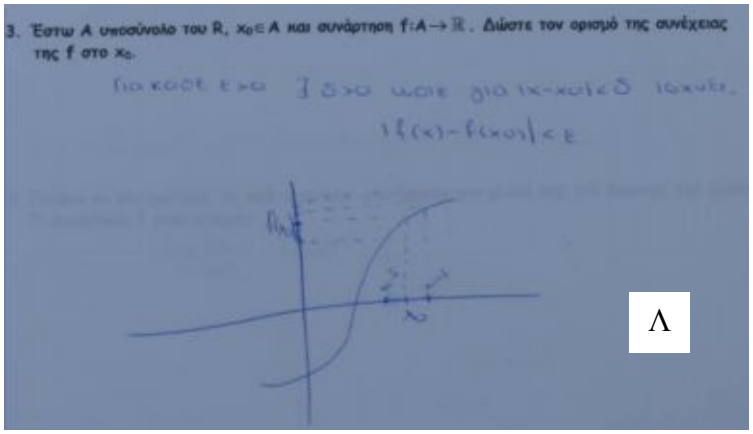


Α – … ας πούμε ότι το πεδίο είναι το $(-\infty,2)\cup(2,5]\cup\{6\}\cup\{8\}$ …
Μ – …εγώ πάντως θα την έβαζα ασυνεχή στο 2. Για τα υπόλοιπα δεν ξέρω …
Λ – …και εγώ αυτό με το 2 με χαλάει.
Ερ – Κι εσύ με το 2 έχεις πρόβλημα Λένα;
Λ – Ναι.
Ερ – Εσύ Αφροδίτη;
Α – Δεν ξέρω, εγώ θα πω ασυνεχής, όπως είπα από την αρχή.
Ερ – Εσύ Λένα;
Λ – Κι εγώ ασυνεχής θα πω.
Ερ – Συμφωνείς κι εσύ Μαρία;
Μ – Στο 2.
Ερ – Δηλαδή στο 6 και 8;
Λ – Εμένα δεν με πειράζουν αυτά.
Ερ – Εσύ Μαρία;
Μ - Εγώ εδώ στο 6 και στο 8 δεν μπορώ να υπολογίσω ούτε με τα όρια ούτε με τίποτα … δεν ξέρω …
Ερ – Άρα και εκεί πρόβλημα; Απλά ρωτάω.
Μ – Ναι μάλλον θα το έβαζα ασυνεχής γενικότερα.
Α – Και εγώ μια από τα ίδια με τη Μαρία.
Ερ – Πάμε και στην τελευταία. Λένα;
Λ – Θα τη βάλω συνεχή.
Ερ – Συνεχή, μάλιστα.
Α – Εγώ ασυνεχή.
Ερ – Εσύ Μαρία;

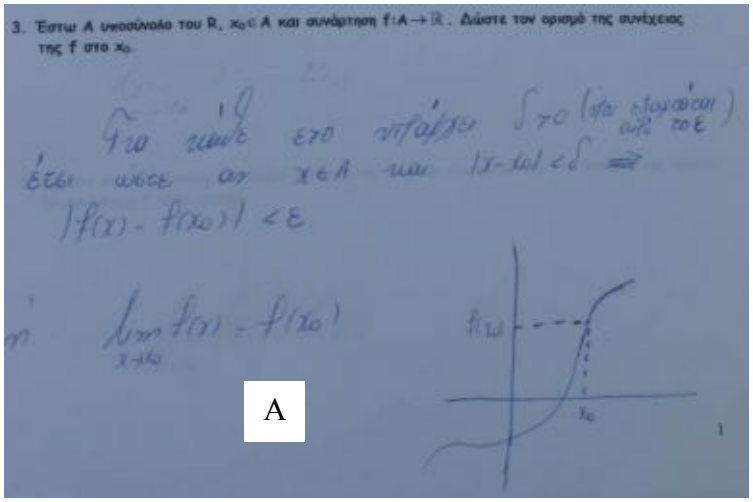
Μ – Μισό λεπτό … εγώ θα την έβαζα συνεχή
Ερ – Ασυνεχή είπες;
Μ – Όχι, όχι, συνεχή.
Ερ – Ωραία.



Ερ – Ωραία, να γυρίσουμε τώρα στον ορισμό και να ρωτήσω κάτι τελευταίο. Όπως βλέπω θυμόσαστε τον ορισμό.
Κάντε και ένα απλό γράφημα μιας συνάρτησης … (κάνουν τα γραφήματα που φαίνονται) …Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχετε ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου που βλέπει αυτό τον ορισμό



που τον έχει το σχολικό βιβλίο με αστεράκι και σας ζητάει να του τον εξηγήσετε απλά χρησιμοποιώντας το γράφημα. Τι θα του λέγατε;
Α – Εμάς μας το είχε κάνει ο καθηγητής μας στο σχολείο
……
Ερ - Ωραία. Σκεφθείτε το και όποια έχει φτιάξει στο μυαλό της την απάντηση ας ξεκινήσει
……..
Ερ - Με ενδιαφέρει αυτό που σας έρχεται στο μυαλό. Πώς θα εξηγούσατε απλά τα σύμβολα του ορισμού.
…….
(σκέπτονται)
…….
Α – Αχ! Τι μας κάνετε!
(γελούν και οι τρεις)



[στη συνέχεια για να χαλαρώσουν λίγο κουβεντιάζουμε για τον Απειροστικό Ι]

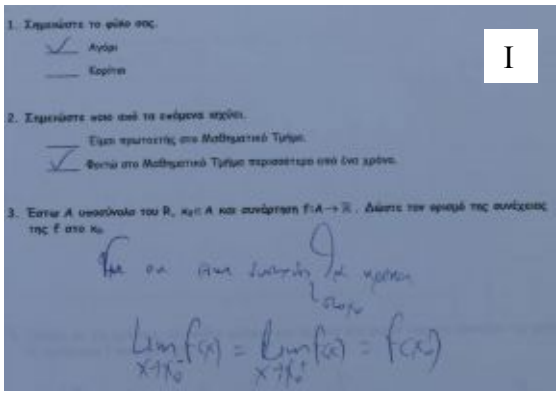
Α – Θα έπαιρνα τέλος πάντων ένα σημείο x, τώρα μεγαλύτερο μικρότερο δεν έχει και μεγάλη σημασία, και θα του έλεγα τέλος πάντων ότι τα δύο σημεία έχουν μία

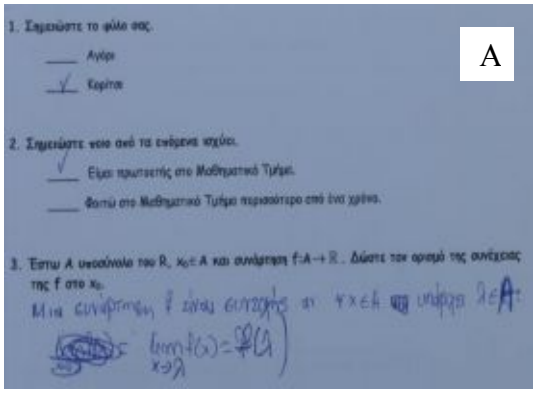
απόσταση μικρότερη από δ, και οι δύο εικόνες έχουν μία απόσταση που είναι μικρότερη από ε, αλλά το δ θα εξαρτάται από το ε … τώρα το πώς είναι το θέμα.
Ερ – Εσύ Λένα τι θα του έλεγες;
Λ – Ότι για κάθε x που βρίσκεται σε ένα διάστημα (x_0-δ, x_0+δ) με το δ πολύ μικρό, δηλαδή κοντά στο x_0, τότε οι τιμές που θα παίρνουν τα σημεία αυτά θα βρίσκονται σε απόσταση πολύ κοντά, θα τείνουν στο f(x_0) αφού το ε είναι πολύ μικρό.
Ερ – Τι ρόλο παίζει το ε στο σχήμα σου;
Λ – … Ότι η απόσταση των τιμών που θα παίρνουν τα σημεία αυτά είναι μικρότερη … θα είναι πολύ μικρή
Ερ – Ωραία, Αφροδίτη;
Α – Δεν ξέρω, εγώ σας είπα αυτά τα δύο σημεία θα έπαιρνα και θα του έλεγα αυτό … δεν ξέρω τι να πω παραπάνω.
Ερ – Ωραία, στο σχήμα σου που το βάζεις το δ;
Α – Εδώ στα x.
Ερ – Εσύ Αφροδίτη;
Α – Όπως τα είπε η Λένα, x_0-δ, x_0+δ.
Ερ – Και το ε;
Α – Εδώ στα f(x), στις εικόνες.
Ερ – Εσύ Μαρία;
Μ – Κι εγώ … θα έλεγα ότι αν μπορώ να βρω σημεία που να ανήκουν στο πεδίο ορισμού και να μπορώ να κάνω την απόστασή τους μικρότερη από το δ τότε αυτό θα συνεπάγεται ότι και η απόσταση των εικόνων τους θα είναι οσοδήποτε μικρή.
Ερ – Θα ξεκινήσω από τον άξονα xx΄ να πάω στον άξονα yy΄ ή από τον άξονα yy΄ θα πάω στον άξονα xx΄ ; Τι λέτε;
Μ – Από τον x.
Λ – …
Α – (διακόπτει) …εγώ πιστεύω από τον y γιατί … εξαρτάται το δ από το ε, άρα δεν πρέπει να αναφερθούμε πρώτα στο ε; …
Λ – … ναι γιατί έχουμε για κάθε ε, ενώ στο δ έχουμε υπάρχει.
Ερ – Δηλαδή από το y θα πάω στο x;
Μ – Πρώτα δεν πρέπει να βρούμε τα σημεία κοντά στο x_0; Πώς θα πάμε στις εικόνες;
Α – Εμένα με μπερδεύει ότι το δ εξαρτάται από το ε … βασικά … πώς εξαρτάται; … μπορεί να εξαρτάται το ε από το δ;
Ερ – Λένα τι λες εσύ;
Λ – Όχι, αυτό εμένα δεν μου φαίνεται περίεργο.
Ερ – Άρα πρέπει να ξεκινήσει από τον άξονα y και να πάω στον άξονα χ ή δεν έχει σχέση αυτό, το ποιο εξαρτάται από το άλλο; Μήπως δεν έχει σχέση αυτό; Μήπως είναι απλά η ερώτηση παγίδα; Το αν θα ξεκινήσω από τον άξονα y ή από τον άξονα χ έχει να κάνει με το αν το δ εξαρτάται από το ε ή το ε από το δ; Τι πιστεύετε;
Λ – Έχει σχέση πιστεύω.
Ερ – Οπότε τι νομίζεις, από πού πρέπει να ξεκινήσω;
Λ – Από το y πιστεύω.
Ερ –Μαρία;
Μ – Εγώ νομίζω ότι αυτά τα δύο που ρωτάτε δεν έχουν σχέση και θα ξεκίναγα από το x.
Ερ – Αφροδίτη;

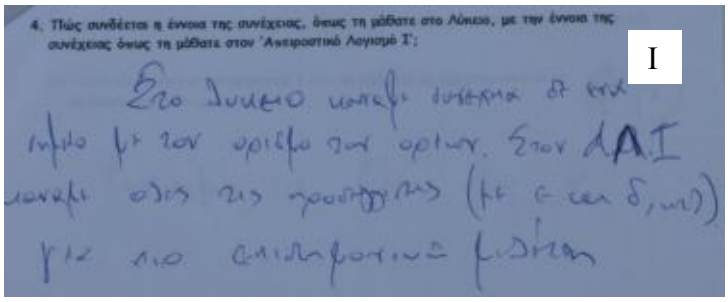
Α – Βασικά εγώ πιστεύω, ότι από όπου και να ξεκινήσω όλα συνδέονται μεταξύ τους, πρέπει να βρούμε δύο σημεία που η απόσταση τους να είναι μικρότερη από δ, ώστε οι εικόνες τους να είναι …
Ερ – … δηλαδή πιστεύεις ότι δεν παίζει ρόλο από όπου θα ξεκινήσω;
Α – Μάλλον … πιστεύω ότι δεν παίζει … αλλά εγώ αυτό δεν μπορώ να καταλάβω … πώς εξαρτάται κατ' αρχήν … το δ από το ε …
Λ - Πρέπει να ξεκινήσουμε από τα y γιατί δεν μπορούμε να ξέρουμε πόσο κοντά στο x_0 θα είναι τα σημεία που θέλουμε να βρούμε.
Α, Μ – … Δεν ξέρω, δεν καταλαβαίνω απόλυτα.
Ερ – Μάλιστα! Κορίτσια σας ευχαριστώ για την πολύ ωραία συζήτηση που είχαμε!

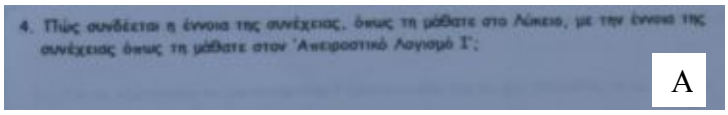
24η & 25η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Ομαδική συνέντευξη,
‘Ιάσονας’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.
‘Αγγελική’, πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα.

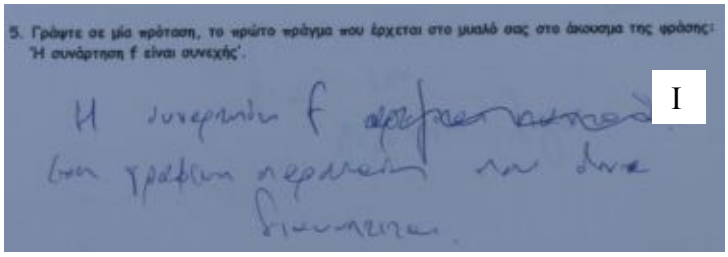


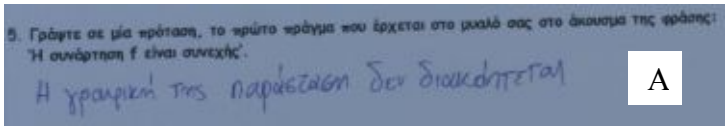






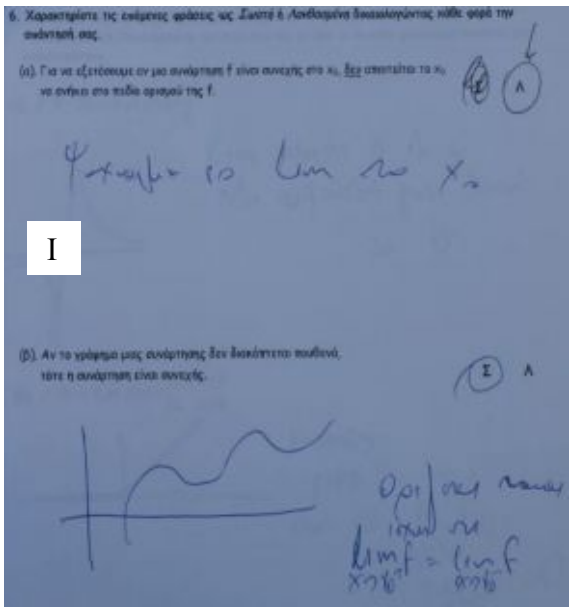
Ερ - Στην πρώτη ερώτηση δεν ρωτάω κάτι, θα ξαναγυρίσουμε μετά. Πώς σας φαίνεται ο ορισμός της συνέχειας που μάθατε στο Λύκειο σε σχέση με αυτόν του Πανεπιστημίου; Διαφορετικός, πιο δύσκολος ή πιο εύκολος;
Α – Εγώ δεν έχω διαβάσει τίποτα!
Ι – Εγώ τον είχα κάνει στο πρώτο εξάμηνο στον Απειροστικό τώρα είμαι στο τέταρτο. Πάντως στο Λύκειο εκεί στην κατεύθυνση το κάναμε και αυτό που μου έχει μείνει είναι ότι σε κάποιο x_0 παίρναμε το όριο … το παίρναμε με το όριο ενώ εδώ το είδαμε πιο επιστημονικά … και πώς το είχαν ανακαλύψει παλιά … με ε και δ και αυτά
Ερ – (απευθυνόμενος στην Αγγελική) Έχεις παρακολουθήσει καθόλου στον Απειροστικό;
Α – Λίγο μόνο στην αρχή, μετά δεν έβρισκα θέση.

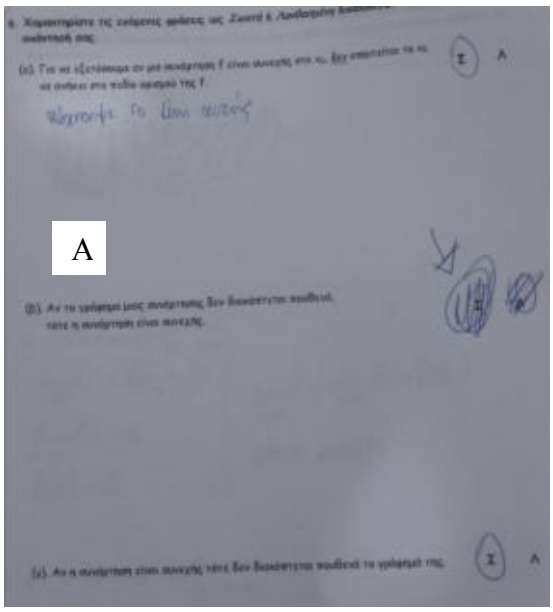


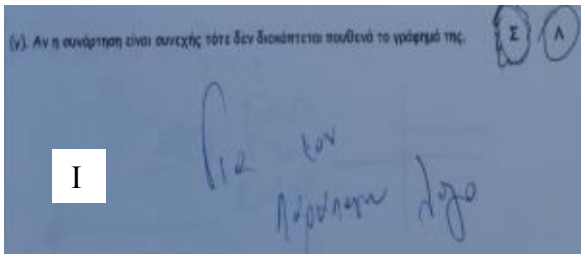


Ερ – Κατάλαβα … Στο 5 ποιο είναι το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας;
Ι – Εμένα αυτό που μου έρχεται στο μυαλό σαν συνέχεια, είναι ότι η γραφική της παράσταση δεν διακόπτεται, αυτό δηλαδή που μου έχει μείνει από το σχολείο ο εύκολος τρόπος δηλαδή που μας εξηγούσε ο καθηγητής στο σχολείο … ότι

όταν κανείς τη γραφική παράσταση δε σηκώνεις την κιμωλία από τον πίνακα
Α – … ναι, ναι το ίδιο ….
Ερ – … Αγγελική και εσύ το ίδιο; …
Α – … ναι, ναι δε σηκώνεις το στυλό.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα.

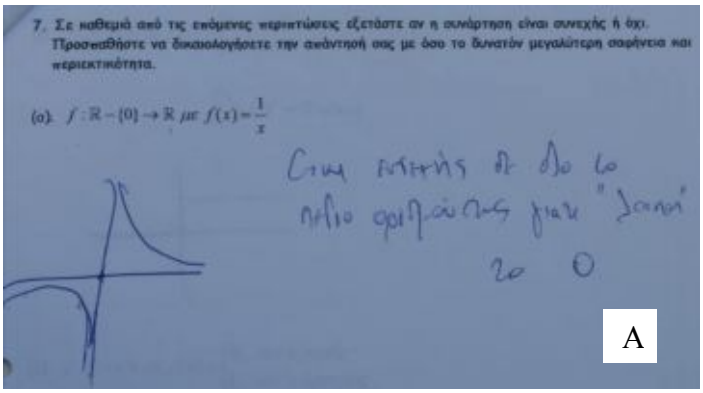




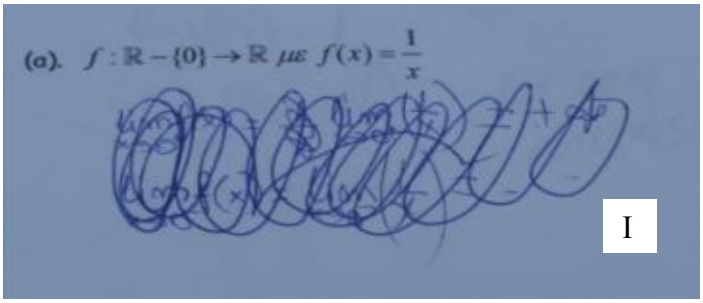


Ερ – Ωραία, στο 6 το (α) τώρα. Τι έχεις βάλει Αγγελική;
Α – Να το δω λίγο; … ναι, αυτό ότι δεν απαιτείται το x_0, μπορεί να είναι μία περιοχή γύρω από το x_0. Νομίζω έτσι …
Ερ – Ωραία, Ιάσονα;
Ι – Εμένα πάντως με έχει μπερδέψει λίγο η ερώτηση.
Ερ – Ναι, πες μου.
Ι – Για να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση είναι συνεχής …
Ερ – … δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της λέω εγώ, και ρωτάω αν είναι σωστό η λάθος.
Ι - Αυτό βασικά λάθος πρέπει να γίνει αν κι εγώ το έχω βάλει σωστό. Γιατί ας πούμε, η συνάρτηση 1/x το 0 είναι εκτός του πεδίου ορισμού της, αλλά είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, αλλά …
Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα, Αγγελική τι λες εσύ για αυτό που λέει ο Ιάσονας;
Α – (απευθυνόμενη στον Ιάσονα) … Συνεχής στο x_0, δεν είναι συνεχής στο 0 η 1/x … Άρχισες λάθος, το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού άρα δεν είναι συνεχής. Δεν είναι έτσι και αλλιώς.
Ερ – Κατάλαβες Ιάσονα τι λέει;
Ι – Δεν είναι συνεχής στο 0 … άρα το παίρνουμε από γενικά … Εντάξει, μπορούμε να εξετάσουμε από περιέργεια ας πούμε … αλλά αν μας ρωτήσουν αν η 1/x είναι συνεχής, θα πούμε ναι, στο πεδίο ορισμού της πάντα … εγώ έτσι το σκέφτομαι.
Ερ – Η Αγγελική πάλι λέει ότι δεν είναι συνεχής στο 0 …
Ι – … μα δεν ορίζεται στο 0 …

Α – …ναι, δεν είναι καν στο πεδίο ορισμού και δεν είναι και συνεχής εκεί …
Ι – … πώς μπορούμε να ψάξουμε τη συνέχεια σε ένα σημείο που δεν ορίζεται καν; Δεν θα ορίζεται καν..
Ερ – Άρα Ιάσονα, θέλεις να το αλλάξεις; Δηλαδή πιστεύεις ότι πρέπει να το βάλεις λάθος;
Ι – Ναι, ναι. Είναι λάθος.
Ερ – Ωραία σημείωσέ το. Εσύ Αγγελική συνεχίζει να πιστεύεις ότι είναι σωστό;
Α – Ναι.
Ερ – Ωραία. Στο (β) τώρα λέμε ότι αν δεν διακόπτεται τότε είναι συνεχής. Ιάσονα λες ότι είναι σωστό έτσι;
Ι – Ναι, αυτό που λέγαμε και πριν.
Ερ – Αγγελική συμφωνείς;
Α – Ναι.
Ερ – Ωραία. Το (γ) τώρα. Το έχεις σωστό, αν είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται. Έτσι;
Ι – Ναι …
Α – … Ναι αλλά αντιφάσκει με το άλλο γιατί για την 1/x είχαμε πει ότι είναι συνεχής αλλά αποτελείται από δύο κομμάτια.
Ερ – Κατάλαβα. Τι λες θα το άλλαζες;
Α – Όχι, (γελάει) θα πάω με τις πιθανότητες 50-50!
Ι – Ναι αλλά έχεις και αυτήν εδώ όμως, πράγματι η συνάρτηση 1/x είναι έτσι και έτσι (κάνει το γράφημά της) άρα θα διακόπτεται αν και είναι συνεχής.
Ερ – Άρα αυτό έχει πρόβλημα έτσι;
Ι – Ναι, άρα δεν είναι ακριβώς σωστό, δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις που είναι συνεχής και όμως διακόπτεται … τώρα που το σκέφτομαι περισσότερο.
Ερ – Άρα τι νομίζεις πρέπει να το βάλεις λάθος;
Ι – Ναι έτσι μου φαίνεται.
Ερ – Ωραία αν θέλεις μπορείς να το αλλάξεις. Εσύ Αγγελική θα το άλλαζες;
Α – εεε … δεν αλλάζω όχι… δεν…

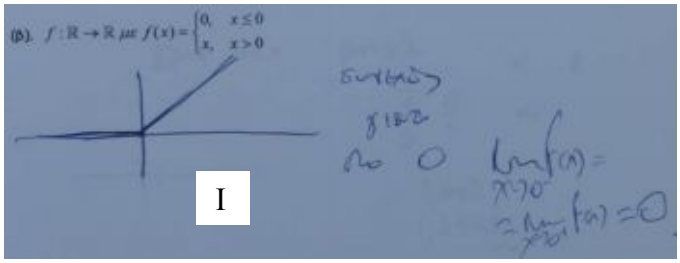


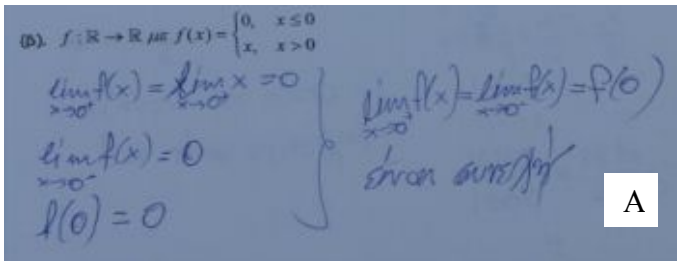
Ερ – Ωραία. Η 7 τώρα, να η 1/x. Τι έχεις γράψει Αγγελική;
Α – Δεν έχω γράψει τίποτα.
Ερ – Τι λες τώρα που τη βλέπεις;
Α - Είχα ξεκινήσει να βρω το όριο της f(x) όταν το χ τείνει στο 0^+ …
αλλά μου έλεγε (γελάει και δείχνει τον Ιάσονα) ότι το 0 δεν ανήκει, δεν είναι στο πεδίο ορισμού, αλλά λέει …
Ερ – Μην επηρεάζεσαι, εσύ πες μου τι θα έλεγες. Τη γνώμη σου θέλω.



Α – … Εγώ θα έλεγα ότι δεν είναι συνεχής, γι' αυτό δεν έγραψε τίποτα, γιατί νομίζω ότι το ένα όριο το βρήκα συν άπειρο και το άλλο πλην άπειρο. Άρα δεν είναι συνεχής.
Ερ – Εσύ Ιάσονα;
Ι - Εγώ είμαι κάθετος. Αφού

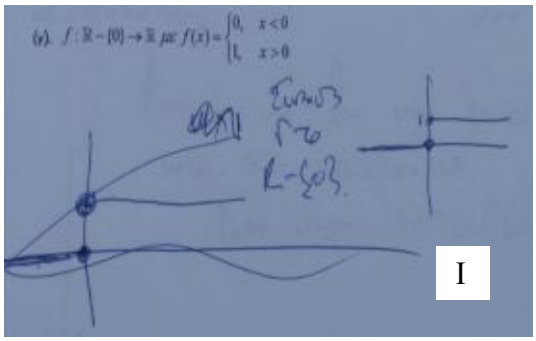
είναι στο R, έξω το μηδέν, άρα είναι συνεχής …
Α – … εγώ πιο σωστά θα έλεγα ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ …

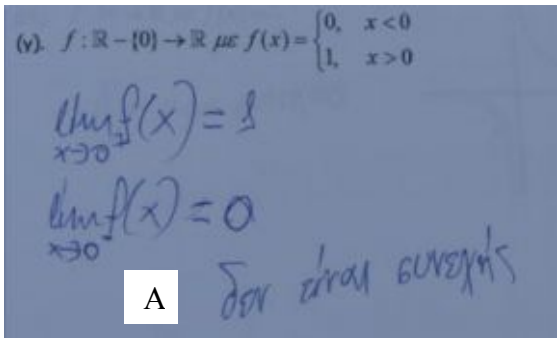




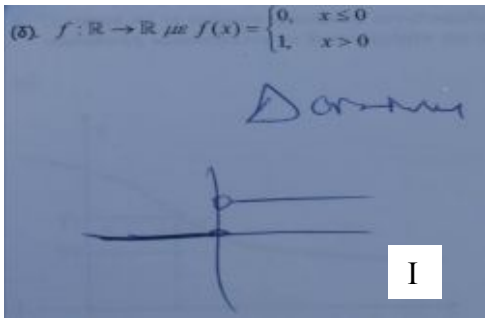
I – … μα αυτό είναι που μας δίνει εδώ, το $\mathbb{R}-\{0\}$ … το έχω γράψει κι εδώ (δείχνει το γραπτό του), είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της γιατί λείπει το 0.

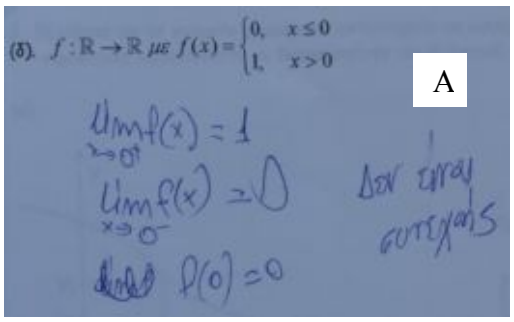
Ερ – Ωραία, η επόμενη τώρα, τι έχεις βάλει Αγγελική;
Α – Είναι συνεχής.
Ερ – Ιάσονα;
Ι – Δεν έχει κάποιο πρόβλημα, νομίζω ότι είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία.



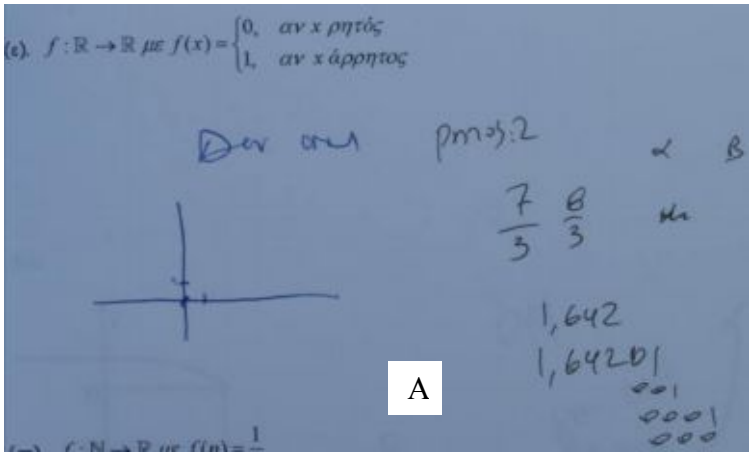


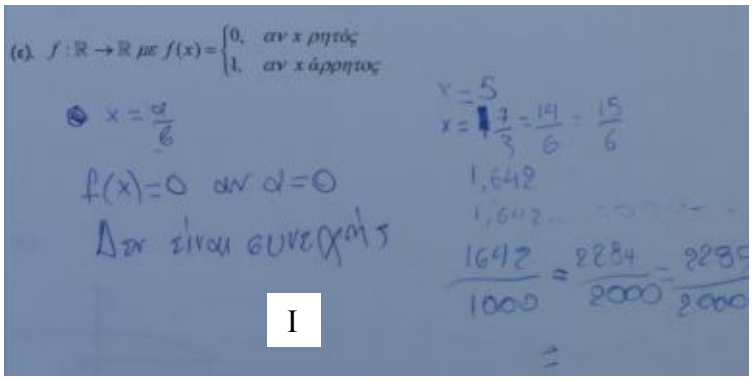
Ερ – Ωραία, πάμε στη (γ) τώρα. Ιάσονα;
Ι – Η (γ) … έχω απαντήσει συνεχής εκτός από το 0, στο πεδίο ορισμού της δηλαδή, αυτό που μας δίνεται.
Α – Εγώ έβαλα ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ – Δεν είναι συνεχής, γιατί; Τι σε χαλάει;
Α – Γιατί … αυτά τα πλευρικά όρια που βγαίνουν διαφορετικά …
Ι – … δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο 0 αλλά το 0 είναι εκτός του πεδίου ορισμού άρα είναι πάλι η συζήτηση που κάναμε πριν με την 1/x
Ερ – Κατάλαβα, κατάλαβα, άρα το μοναδικό σημείο διαφωνίας σας μέχρι στιγμής …
Ι – … είναι το σημείο που είναι εκτός του πεδίου ορισμού αλλά δεν ορίζεται η συνάρτηση και εμείς θέλουμε να εξετάσουμε τη συνέχεια, αν πρέπει να μιλάμε για συνέχεια εκεί ή όχι.





Ερ – Ωραία, στη (δ) τώρα, βλέπετε κάποια διαφορά από τη (γ);
Ι, Α – Ναι το 0;
Ερ – Τώρα;
Α – Τώρα λέμε ότι δεν είναι συνεχής
Ι – Τώρα στάνταρ δεν είναι συνεχής.
Ερ – Άρα τώρα, συμφωνείτε;
Α – Τώρα ο Ιάσονας συμφωνεί, γιατί εμείς ή ούτως ή άλλως συμφωνούσαμε!
Ερ – Κατάλαβα!
Ι – Εγώ τώρα λέω ότι δεν είναι συνεχής γιατί στο 0 παίρνουμε τα πλευρικά όρια και φαίνεται ότι δεν είναι ίσα, η πιο αυστηρά με τον ε-δ ορισμό μπορούμε να βρούμε μία περιοχή … που εδώ πέρα να μην υπάρχει … έτσι όπως το λέγαμε στον Απειροστικό Ι με πολλές λεπτομέρειες.



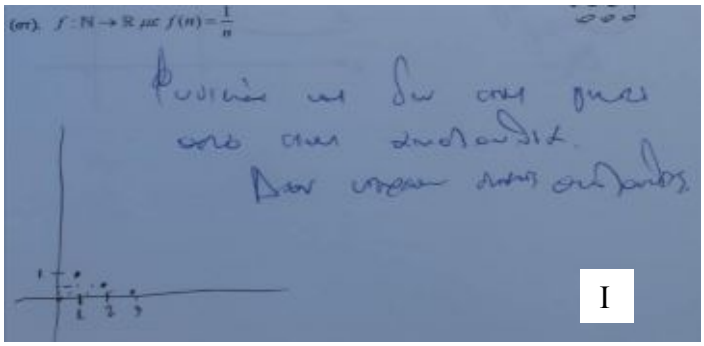


Ερ – Κατάλαβα. Η (ε) τώρα;
Α – Εγώ την έβαλα ότι δεν είναι …
Ι – … αυτή είναι η … η γνωστή… αυτή που έχει και όνομα …
η συνάρτηση …
Ερ – … η Dirichlet …
Ι – … ναι αυτή.
Ερ – Τι σου λέει Αγγελική αυτή;
Α – Δεν μου λέει τίποτα!
Ι – Εγώ από ότι ξέρω αυτή δεν είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία ας υποθέσουμε ότι δεν είναι συνεχής, τότε …
Ι – … Τότε μπορούμε να βρούμε θυμάμαι κάτι αποδεικνυόταν με τον ορισμό … γιατί…κάτι με την πυκνότητα τέλος πάντων…
Ερ – Καλώς, Μπορείτε να μου γράψετε από έναν ρητό;

Α – (γελάει) τώρα μάλιστα! (γράφει το $x = \frac{a}{b}$) τον έγραψα!

Ερ – Με νούμερα θέλω.
Ι – … το 2 (η Αγγελική γράφει το 5)
Ερ – Ωραία.
Ι – Και έναν άρρητο;
Ερ – Όχι, ένα ρητό, όποιον ρητό θέλετε ... και θέλω τώρα να μου γράψετε τον αμέσως επόμενο, προσέξτε τον αμέσως επόμενό του ... ρητό
Ι – … (διστακτικά) … Δεν μπορείς να το ξέρεις γιατί είναι άπειροι οι ρητοί.
Α – Θα πω 7, έτσι …
Ερ – Τον αμέσως επόμενό του θέλω, πρόσεξε, τον αμέσως μεγαλύτερο του.

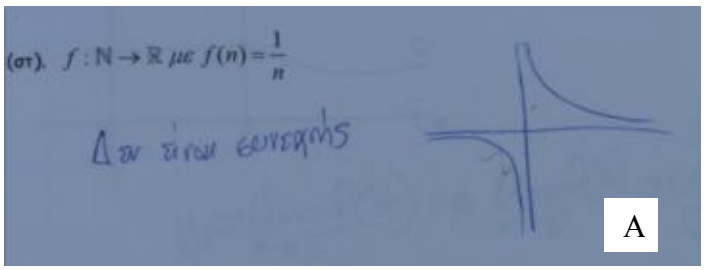
Ι – Δεν τον ξέρω … δεν τον ξέρουμε … μπορώ να γράψω δεν ξέρω;
Ερ – Εννοείς ότι δεν μπορείς να το βρεις εσύ;
Ι – Δεν γίνεται να τον βρούμε, δεν μπορούμε να το βρούμε γενικότερα, όχι ότι δεν ξέρω να απαντήσω, απαντάω ότι δεν μπορούμε να το βρούμε.
Α – Ναι, δεν θα είναι συνέχεια; Πάντα δεν θα υπάρχει ένας … που θα έχει όλο και μικρότερη απόσταση;
Ερ – Να σας δώσω εγώ έναν ρητό, το 7/3. Κατ' αρχήν είναι ένας ρητός;
Ι, Α – Είναι, ναι.
Ερ – Ωραία. Μπορείτε σε αυτόν να μου βρείτε τον αμέσως επόμενο ρητό; Να μου γράψετε τον αμέσως επόμενό του, τον αμέσως μεγαλύτερό του …
Α – … το 15/6 …
Ι – … το 8/3…
Ερ – Πώς το βρήκες Αγγελική; (κοιτάζω το γραπτό της) Α! κατάλαβα.
Α – Και είναι και μικρότερο από το 8/3 που είναι 16/6.
Ερ – Άρα ο δικός σου Αγγελική είναι πιο μικρός από του Ιάσονα.
Ι – Άρα το δικό μου είναι λάθος … (κοιτάζει προσεκτικά) … ναι … ναι ή ούτως ή άλλως, να κοιτάξτε … μπορώ να έχω τον αριθμό α και τον αριθμό β και να έρθει κάποιος και να μας πει τον (α+β)/2, που είναι ανάμεσά τους, και πάει λέγοντας.
Ερ - Δηλαδή δεν μπορείς να βρεις τον αμέσως μεγαλύτερο του 7/3;
Ι – Μπορώ … τώρα δεν ξέρω μήπως … να βρω πόσο κάνει η διαίρεση 7 δια 3 και μετά να πάω να προσθέσω ένα ψηφίο στο τέλος … δηλαδή ας πούμε
Ερ – Α! Ωραία …
Α – … και αν είναι το 10/3 όμως; …
Ερ – … κάτσε, αν σου δώσω το, γράψτε, το 1,642. Θέλω τον αμέσως μεγαλύτερο ρητό.
Α – … άπειροι είναι …
Ι – … αυτό σκεφτόμουν κι εγώ. Ή το (γράφει) 1, 64201 ή το 1,642001 ή το 000…1 και πάει λέγοντας, … αλλά …τι διαφορά έχει από τον άρρητο από ένα σημείο και μετά …
Α – … εγώ πάλι το ίδιο θα έκανα, θα διπλασίαζα και θα πρόσθετα ένα ψηφίο
Ερ – Α, κατάλαβα.
Α – Και θα έλεγα (γράφει και μου δείχνει στο χαρτί της).



Ι

Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Εντάξει πάμε στην επόμενη

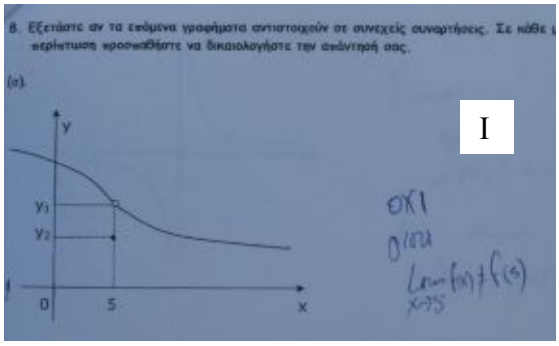
Ι – Λοιπόν, εδώ λέτε … αυτή είναι ακολουθία δεν είναι συνάρτηση! Αλλά την έχετε γράψει με μορφή συνάρτησης.
Ερ – Και άρα; Για πες μου τι έχεις γράψει ακριβώς.

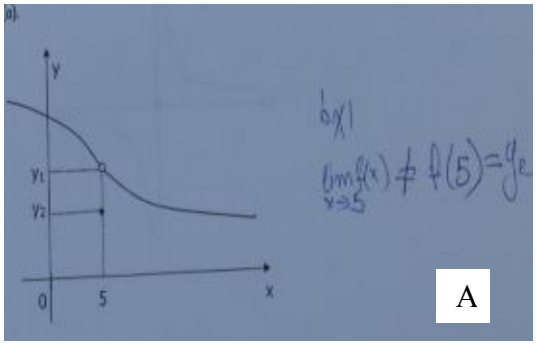


Α

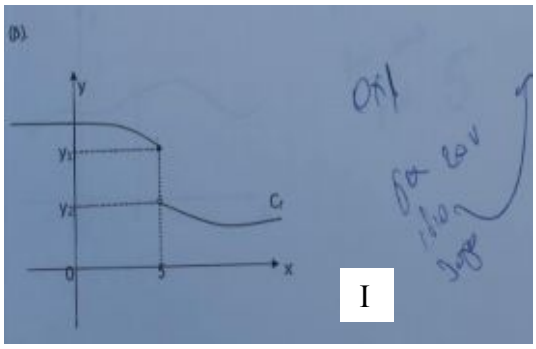
Ι – Φυσικά και δεν είναι συνεχής γιατί αυτή είναι η ακολουθία Δεν υπάρχει συνέχεια στην ακολουθία, όταν υπάρχουν κενά δεν ισχύει ούτε ο ορισμός ούτε τίποτα.
Ερ – Κατάλαβα. Αγγελική;

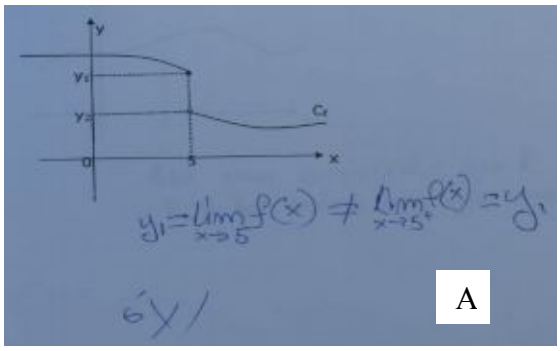
Α - Εγώ δεν το είδα καν σαν ακολουθία. Γιατί Δεν …
Ερ – Τι σου λέει εσένα;
Α – Απλά στη θέση του x πήρα το n και κρατάω την ίδια θέση, ότι δεν είναι συνεχής.
Ερ - Μπορείτε να κάνετε σε αυτήν τη γραφική της παράσταση;
Ι – Ναι, θα είναι κουκίδες …
Α – … ακολουθία τώρα λέμε;
Ερ – Ναι, σε αυτήν εδώ. Δεν ξέρω τώρα αν είναι ακολουθία που λέει ο Ιάσονας ή όχι, ότι πιστεύεις. Μπορούμε να κάνουμε γραφική παράσταση;
Ι – Ότι θα είναι κουκίδες, δεν έχει κάποια διαφορά, απλά δεν θα ενώνονται μεταξύ τους.
Ερ – Αγγελική συμφωνείς;
Α – Άμα είναι ακολουθία …
Ι – … και θα βγαίνει ένα …
Ερ – … και άμα είναι συνάρτηση; …
Α – … ναι, σαν την 1/x
Ερ – Κάντε τη, όπως νομίζετε …
Ι – Και στο 0;
Ερ – Ε, εντάξει προφανώς δεν ορίζεται. Αγγελική έχεις κάποια διαφορά εδώ από την 1/x;
Α – Απλά το 0 εγώ … ότι το 0 ανήκει εδώ … ότι υπάρχει …
Ερ – Κατάλαβα. Πώς φαίνεται αυτό στη γραφική σου παράσταση;
Α – Δεν φαίνεται! (γελάει) Στη γραφική μου παράσταση δεν φαίνεται.
Ερ – Άρα πιστεύεις ότι υπάρχει κάποια διαφορά; Βλέπεις κάποια διαφορά;
Α – Ναι θα υπάρχει κάποια διαφορά. Απλά εγώ δεν τη βρίσκω.
Ι – Πιστεύω ότι την έχει κάνει λάθος.
Ερ – Γιατί;
Ι – Γιατί το πεδίο ορισμού είναι οι φυσικοί αριθμοί, δεν είναι το R. Ξεκινάμε το από το 1 και μετά πάμε στο 2, μετά το 3 εδώ και ούτω καθεξής. (απευθύνεται στην Αγγελική) Κατάλαβες τι λέω; Είναι ακολουθία. Δεν παίρνει όλους τους αριθμούς, από το 1 πάει στα 2 και μετά πάει στο 3 και τα λοιπά, άρα η γραφική παράσταση θα είναι κουκίδες όχι μία συνεχόμενη γραμμή. Τώρα δεν ξέρω αν κάνω λάθος …
Α – … κατάλαβα …
Ι – … κατά συνέπεια δεν μπορώ να εξετάσω με τον ορισμό γιατί αν μπορούσα θα έπαιρνα ας πούμε για παράδειγμα ανάμεσα στο 2 και το 3 διάστημα που να μπορούσα να εφαρμόσω τον ορισμό. Αλλά και χωρίς να πεις όλα αυτά, απλά είναι ακολουθία. Οπότε δεν παίζει ο ορισμός της συνέχειας.
Ερ – Αγγελική συμφωνείς με αυτό που λέει;
Α – Ναι, έχει δίκιο και όχι μόνο είναι ακολουθία, αλλά και στον τύπο να είχα x και να ήταν f(x) = 1/x αφού το x είναι στους φυσικούς, πάλι το ίδιο θα ήταν.
Ι – Μα αυτό είναι η ακολουθία, μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς.





Ερ – Ωραία, πάμε στην 8 τώρα, την (α). Τι έχεις απαντήσει Αγγελική;
Α – … Ότι δεν είναι συνεχής …
Ερ – Γιατί;
Α – Γιατί …
Ερ – … γράφεις $\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5) = y_2$ …
Α – … ναι, ναι το όριο είναι διαφορετικό από την τιμή. Είναι ίδια τα 5^+ και 5^- αλλά όχι με το f(5).
Ερ – Κατάλαβα.
Ι – Ναι, το $\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5) = y_2$, ναι μεν ορίζεται στο 5, αλλά είναι διαφορετικό.
Ερ – Ωραία. Εφόσον συμφωνείτε και οι δύο δεν έχω να ρωτήσω κάτι άλλο.





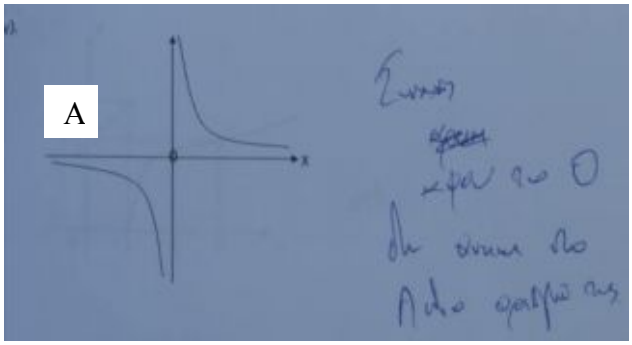
Ερ – Ωραία. Πάμε στη (β). Τι έχεις βάλει Ιάσονα;
Ι – Όχι, για τον ίδιο λόγο. Ορίζεται εδώ αλλά όταν πάρεις τα πλευρικά όρια δεν βγαίνουν ίσα.
Ερ – Συμφωνείς εσύ Αγγελική;
Α – εεε … ναι αφού το έβαλα …
Ερ – Μήπως τώρα που το ξαναβλέπεις αλλάζεις κάτι;
Α – όχι, όχι.
Ερ – Να ρωτήσω κάτι. Αν στο σχήμα 8(α) εξαφάνιζα την κουκίδα που αντιστοιχεί στο y_2, θα άλλαζε η απάντησή σου;
Α – μμμ … ναι.
Ερ – Τι θα έλεγες;
Α – Ναι γιατί θα σήμαινε ότι το y_2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, αλλά πάλι είναι ίδια ερώτηση όπως πριν, αν μου λύσετε την απορία τι είναι η 1/x τότε μπορώ να σας απαντήσω
Ι – Μπορώ να απαντήσω εγώ σε αυτό που λέτε;
Ερ – Φυσικά.

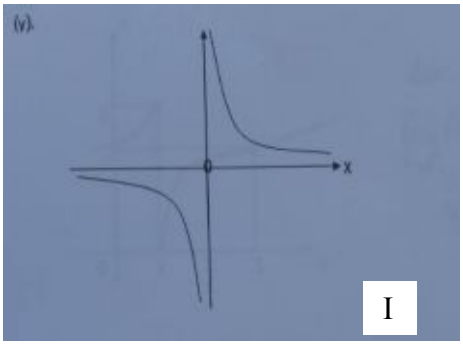
Ι – Κοιτάξτε, νομίζω ότι υπάρχει παρόμοια παρακάτω. Αν εξαφανίσουμε την κουκίδα στο y_2, τότε δεν έχετε πει ακριβώς ποιο είναι το πεδίο ορισμού, άρα μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις. Αν το πεδίο ορισμού είναι εκτός του 5 τότε είναι συνεχής. Δηλαδή αν ορίζεται από εδώ μέχρι το 5 και μετά από το 5 μέχρι το τάδε, είναι και παρακάτω μερικές σε αυτό το στυλ

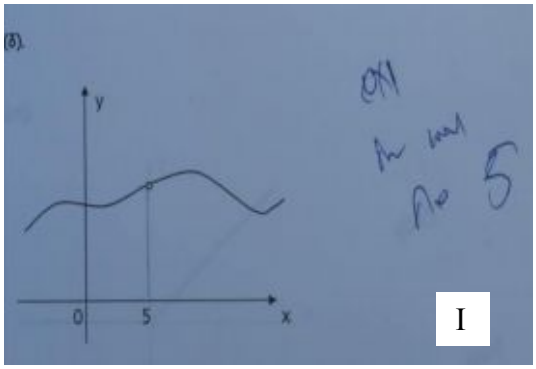
Ερ – Μάλιστα. Εννοείς κάτι σαν την (δ) που είναι παρακάτω έτσι;

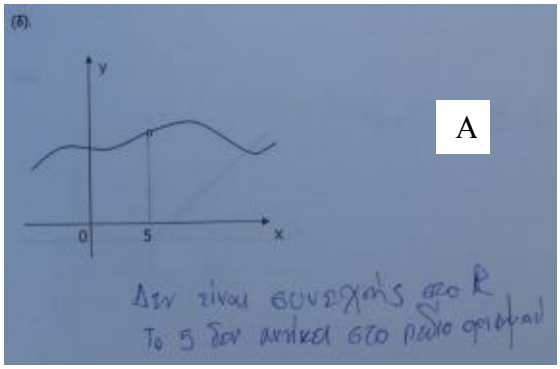
Ι – Ναι, ναι. Νομίζω ότι εξαρτάται από το πεδίο ορισμού. Αν θυμάστε σας είχα ρωτήσει και όταν μας δώσετε το ερωτηματολόγιο στην αίθουσα. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού.

Ερ – Ναι, έχεις δίκιο, θυμάμαι. Με βάση απλά τη γραφική παράσταση, καταλαβαίνεις ποιο είναι το πεδίο ορισμού;









Ι – Στη συγκεκριμένη περίπτωση όχι, εκτός αν ξέρω ότι σταματάει εδώ ακριβώς. (δείχνει τις άκρες της γραμμής)

Ερ – Α, κατάλαβα, εντάξει, θεωρούμε ότι δεξιά και αριστερά μπορεί να επεκτείνεται όσο θέλει.

Ι – Τότε είναι από το $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$ …

Ερ – … όταν βγάλω την κουκίδα …

Ι – … ναι, ναι.

Ερ – Η (γ) τώρα είναι …

Ι, Α – … η 1/x

Α – (γελάει) Ε, δεν έχει κάποιο νόημα να απαντήσω ή να μην απαντήσω εδώ μετά απ' όσα έχουμε πει!

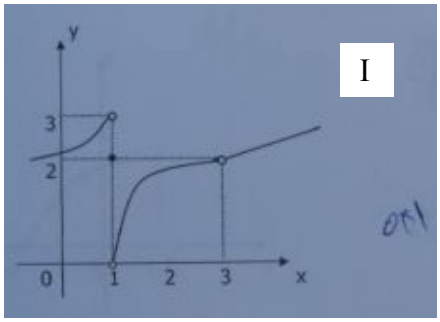
Ι – Εντάξει, το έχουμε πει τόσες φορές αυτό. Συνεχής αφού το μηδέν δεν είναι στο πεδίο ορισμού.

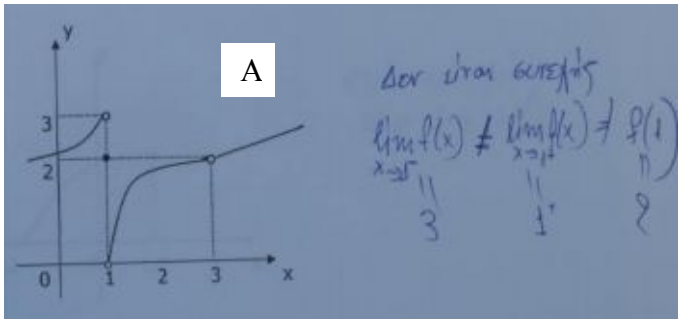
Ερ – Ωραία, στο επόμενο τι λες Αγγελική;

Α – Το 5 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού …

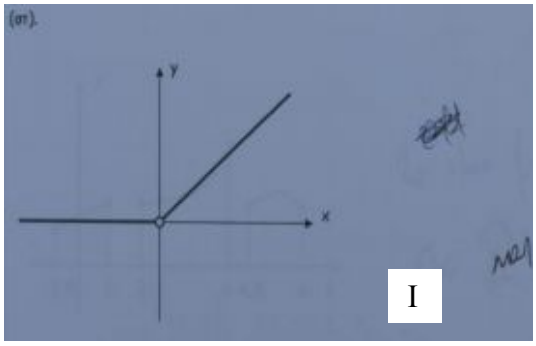
Ερ – … και άρα;

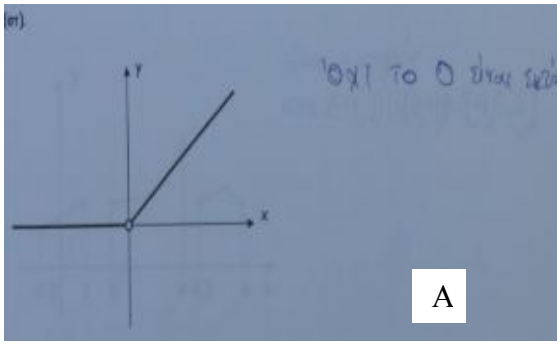
Α – Άρα δεν είναι συνεχής.
Ι – Εδώ έχω απαντήσει λίγο με βιασύνη. Λέω όχι στο 5 αλλά και πάλι εξαρτάται, αν το πεδίο ορισμού της δεν έχει μέσα το 5, δεν είναι ορισμένη στο 5 … είναι εκτός πεδίου ορισμού το 5, τότε είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της…
Ερ – Όπως είχες απαντήσει και πιο πριν, κατάλαβα.
Α – Ναι, αλλά σύμφωνα με τις πρώτες ερωτήσεις … με τον καθηγητή που μας έλεγε … εδώ σταματάει … το στυλό δεν συνεχίζεις …
Ερ – … συμφωνώ …
Α – … άρα δεν είναι συνεχής, απλά …
Ι – …ναι, αλλά …υποτίθεται όμως ότι τότε ήταν το 5, ήταν όλο το πεδίο ορισμού, δεν ήταν κατά διαστήματα στο σχολείο. Δηλαδή δεν παίρναμε εδώ είναι και εδώ δεν είναι. Στο σχολείο …
Α – … ναι αλλά άμα ήταν το 5 στο πεδίο ορισμού δεν θα υπήρχε κάπου μία κουκκίδα; …
Ι – … ναι αλλά το 5 δεν είναι στο πεδίο ορισμού άρα είναι συνεχής αυτή έτσι όπως τη βλέπω. Δηλαδή πάμε με επαγωγικές σκέψεις. Δεν έχει κουκίδα στο 5, άρα το 5 δεν είναι στο πεδίο ορισμού, άρα είναι συνεχής …
Α – … σε όλο το πεδίο ορισμού της …
Ι – … στο πεδίο ορισμού της που είναι όλο το R εκτός του 5.
Α – μμμ.
Ερ – Συμφωνείς;
Α – Σε όλο το πεδίο ορισμού της; … ε μάλλον. Το ίδιο με την 1/χ είναι …
Ερ – Σωστό! Μην κάνουμε τα ίδια ερωτήματα!



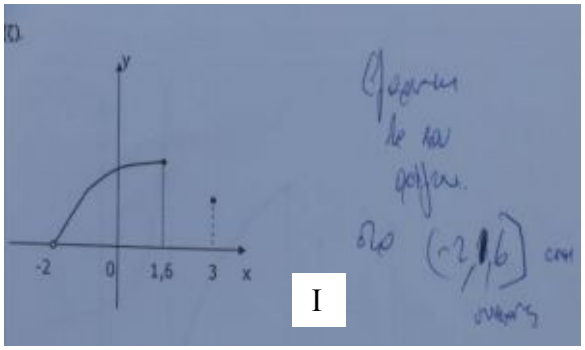


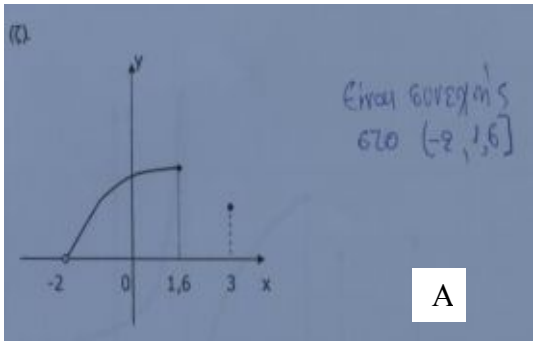
Ερ – Στο (ε) λες όχι, γιατί Ιάσονα;
Ι – … όχι για αυτόν εδώ το λόγο (δείχνει το 1)
Ερ – Α, το 1 έτσι; Αγγελική;
Α – μμμ, δεν είναι συνεχής, δείτε (δείχνει το γραπτό της)
Ερ – Α, μάλιστα, ωραία. Στο 3;
Ι – Ε! Είναι πάλι το ίδιο ερώτημα
Ερ – Μάλιστα.



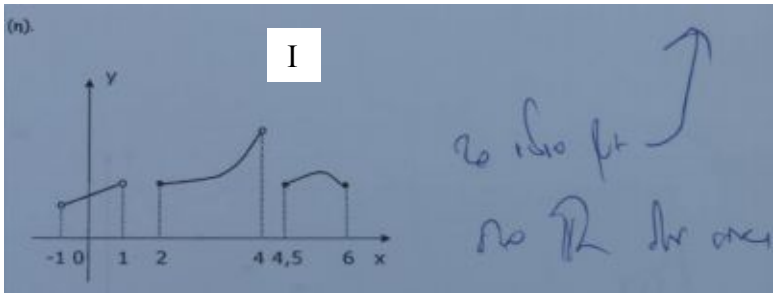


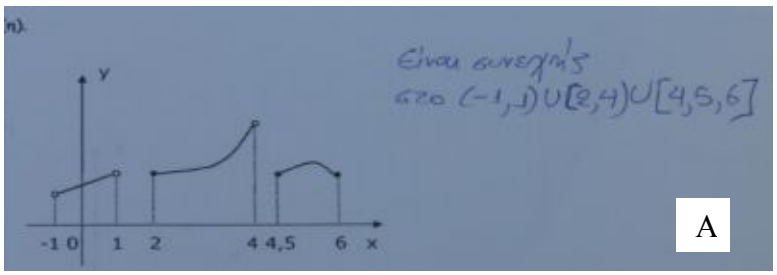
Ερ – Εντάξει. Η (στ) τώρα, πάλι το ίδιο ε;
Ι, Α – Ναι, ναι.
Ι – Είχα απαντήσει όχι, αλλά εξαρτάται πάλι από το πεδίο ορισμού, αυτά που λέγαμε πριν





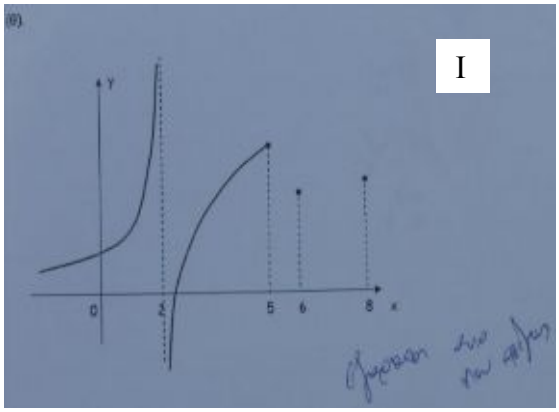
Ερ – Ωραία, η (ζ);
Ι – Εδώ ναι, έχω απαντήσει. Δηλαδή αν το πεδίο ορισμού της είναι το $(-2,1.6]$ είναι … τώρα …
Ερ – … με το 3;

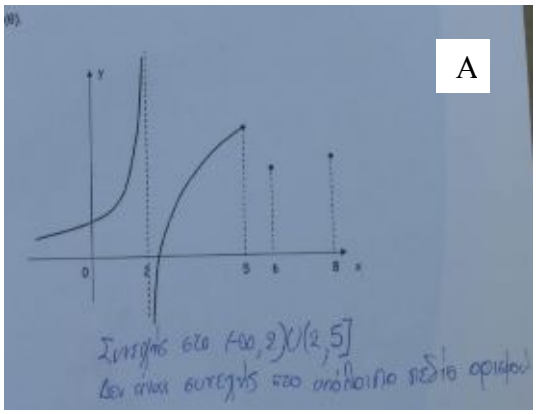


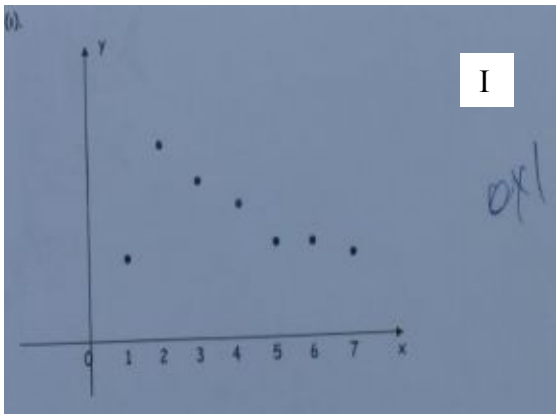


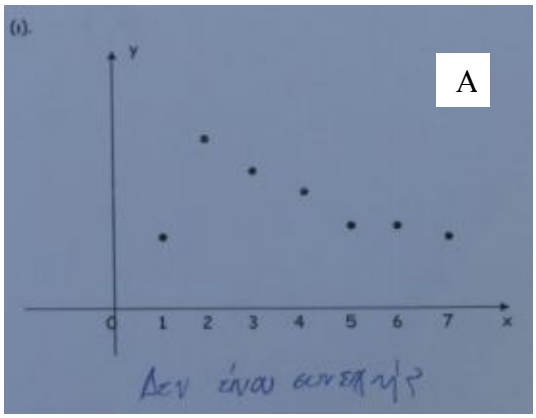
Ι – Τώρα αυτό … ξεκάρφωτο είναι … εκτός πεδίου ορισμού είναι
Ερ – Συμφωνείς Αγγελική;
Α – Ναι.
Ερ – Ωραία, συμφωνείς. Η (η);
Α – Η (η) είναι συνεχής είπα που ακριβώς (δείχνει το γραπτό της)
Και προφανώς αυτό είναι το πεδίο ορισμού της, οπότε είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.
Ερ – Κατάλαβα, ωραία. Ιάσονα;

Ι – Εγώ στο (η) έχω απαντήσει το ίδιο με πάνω γιατί βιαζόμουν, και επίσης έγραψα ότι στο R δεν είναι. Δηλαδή αν μας πουν ότι το πεδίο ορισμού είναι όλο το R τότε δεν είναι συνεχής.
Ερ – Κατάλαβα.

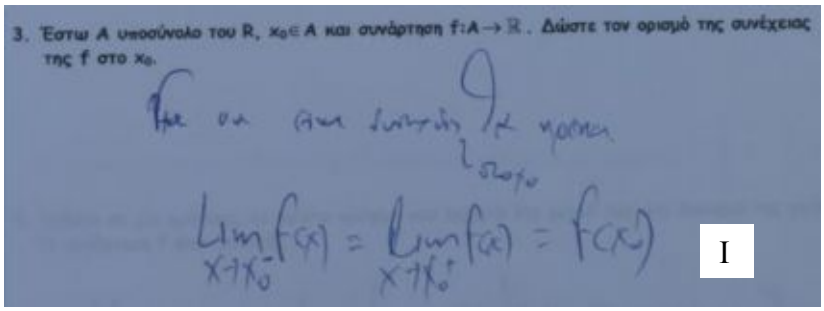


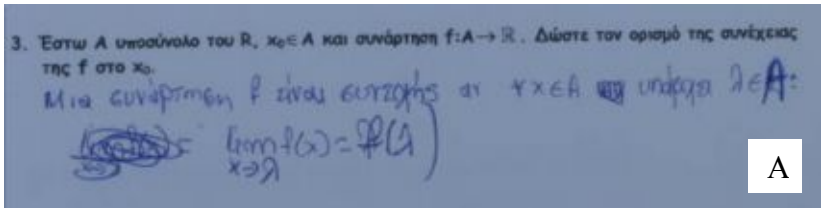






Ερ – Η (θ) τώρα;
Ι – Έχω απαντήσει ότι εξαρτάται από το πεδίο ορισμού. Δηλαδή εξαρτάται από το που ορίζεται.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Δηλαδή αν το πεδίο ορισμού περιλαμβάνει και τα σημεία 6 και 8; Έχεις πρόβλημα;
Ι – … ναι.
Ερ – Έχεις. Αγγελική;
Α – Ναι. Δεν μπορεί να είναι σε σημείο συνεχής …
Ι – … αυτό είναι στάνταρ …
Ερ – Η (ι) τώρα;
Ι – Αυτή είναι η ακολουθία. Είναι αυτά που λέγαμε για την ακολουθία. Όχι, δεν είναι.
Ερ – Αγγελική συμφωνείς;
Α – Ναι …
Ι – … η γραφική παράσταση είναι όλο κουκίδες.





Ερ – Ωραία. Μία τελευταία ερώτηση τώρα σε σχέση με τον αρχικό ορισμό. Δείτε λίγο πάλι τον ορισμό που είχατε γράψει … Υπάρχει κάτι που θα θέλατε να διορθώσετε;

Α – Εγώ βασικά νομίζω ότι δεν τον έχω γράψει σωστά, πρέπει να γράψω … (τον διορθώνει) …

Ι – Εγώ βασικά αυτό που έκανα, είπα ότι ένας από τους ορισμούς, είναι πιο εύκολο από το να μπλέξεις με του πανεπιστημίου …

Ερ – … του Λυκείου δηλαδή …

Ι – Ναι.

Ερ – Καλύτερος ή χειρότερος είναι αυτός από του Πανεπιστημίου;

Ι – Κοιτάξτε τώρα … του Πανεπιστημίου ακούγεται πιο δύσκολος, σε κάποιον που είναι απ' έξω τον κοιτάζει και εντυπωσιάζεται. Αλλά σαν ουσία, επάνω στις ασκήσεις, εκτός από ένα συγκεκριμένο τύπο ασκήσεων, αυτός είναι ο πιο χρήσιμος και ο πιο πρακτικός. Ο άλλος είναι για εμφάνιση για να δείξουμε ότι ξέρουμε και ε και δ και τα λοιπά, και εκτός από ένα συγκεκριμένο τύπο ασκήσεων που είναι δομημένες για να λύνονται έτσι …

Α – … αν κάναμε ένα χρόνο ασκήσεις που να λύνονται με τον ορισμό τότε τα πράγματα θα ήταν διαφορετικά …

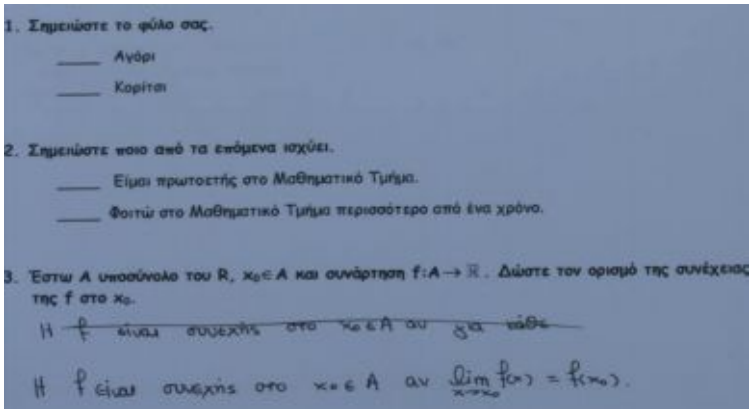
Ι – … όταν έρχεσαι από το Λύκειο που έχεις κάνει ασκήσεις μόνο με όρια και με αυτά και μετά κατευθείαν πέφτεις στα άλλα, είναι πολύ πιο εύκολος ο ορισμός του Λυκείου παρά ο άλλος που τον βλέπεις και λες τι είναι αυτό τώρα …

Α – … ποια η διαφορά αλήθεια;

Ερ – Θα το πούμε αμέσως μετά. Παιδιά, σας ευχαριστώ πάρα πολύ για το χρόνο που μου αφιερώσατε..

26η ΣΥΝΕΝΕΤΕΥΞΗ

‘Βανέσα’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


1. Σημειώστε το φύλο σας.

____ Αγόρι

____ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

____ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

~~Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν για κάθε~~

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ερ - Θυμάσαι μήπως τον ορισμό της συνέχειας από το Πανεπιστήμιο;
Β – Ναι, νομίζω πως ναι. Λέει ότι … (αρχίζει να γράφει τον ορισμό του φαίνεται δίπλα στην πρώτη σειρά και σταματά) …
Ερ – Εντάξει, δεν πειράζει. Μήπως θυμάσαι τον ορισμό από το Λύκειο;
Β – Ναι, αυτόν τον θυμάμαι … (γράφει τον ορισμό που φαίνεται δίπλα στη δεύτερη σειρά) …

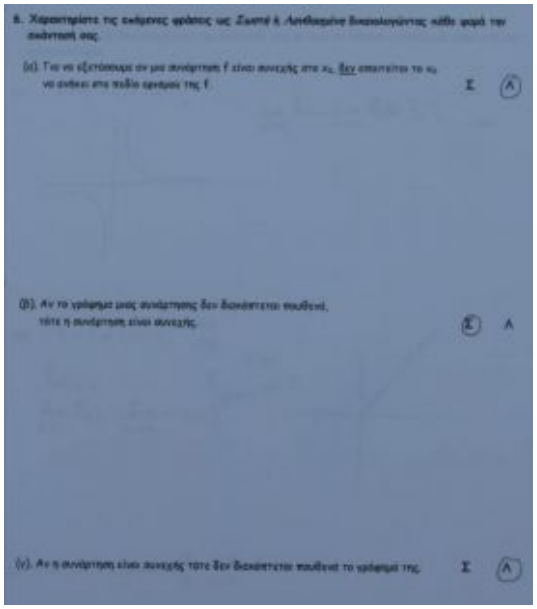
Ερ - Ωραία. Τι λες τώρα, τι σχέση έχει ο ορισμός του Λυκείου με αυτόν που έμαθες στο Πανεπιστήμιο;
Β - Βασικά εγώ, δεν έχω βρει καμία σχέση. Και δεν μπορώ να καταλάβω μάλιστα τον ορισμό του Πανεπιστημίου. Και αυτός είναι και ο λόγος που δεν τον θυμάμαι αν και έχω διαβάσει τον Απειροστικό έξι φορές μέχρι τώρα.
Ερ – Κατάλαβα. Τον έχεις περάσει;
Β – Όχι.

[Στο σημείο αυτό έγινε μία συζήτηση για το μάθημα του Απειροστικού. Παραθέτουμε μόνο την επομένη στιχομυθία …

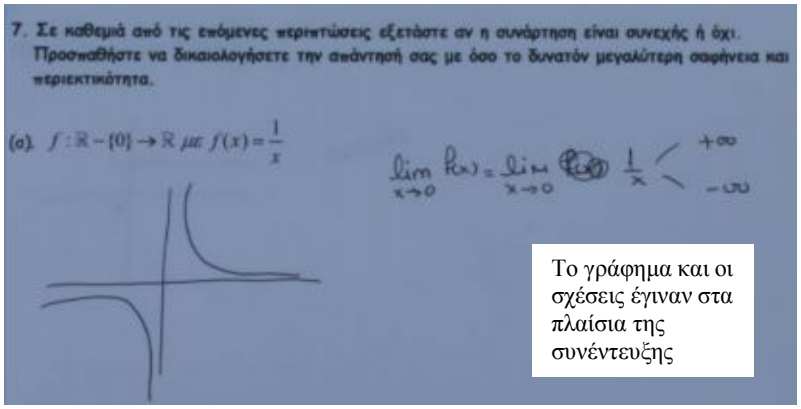
Β – … Στο κάτω - κάτω δεν το θεωρώ και τόσο σημαντικό μάθημα …
Ερ – … είναι Βανέσα, και είναι και πολύ μάλιστα …
Β – … δεν νομίζω ότι είναι τόσο πια, Νομίζω ότι δεν έπρεπε να ήταν τόσο πολύ αυστηρό και υποχρεωτικό. Και με τους καθηγητές που το έχω συζητήσει νομίζω ότι την έχουν δει κάπως και νομίζουν ότι τα μαθηματικά είναι η υπέρτατη επιστήμη. Εγώ έχω μιλήσει και με άλλα παιδιά από άλλες σχολές, όχι της πλάκας, και δεν είναι έτσι τα πράγματα. Εγώ μάλλον δεν συμφωνώ ίσως γιατί εγώ θέλω να γίνω απλά καθηγήτρια άρα δεν με ενδιαφέρει να το ψάξω παραπέρα, ίσως γι’ αυτό το λόγο να μην συμφωνώ. Εγώ θέλω απλά να τελειώνω και ίσως έχω μάλιστα σιχαθεί και τα μαθηματικά. Δεν βρίσκω τίποτα καλό σε ότι κάνω…]

Ερ – Τι λες τώρα για την επόμενη ερώτηση;
Β – (τη διαβάζει) … η αλήθεια είναι ότι μου έρχεται στο μυαλό ο ορισμός του Λυκείου.

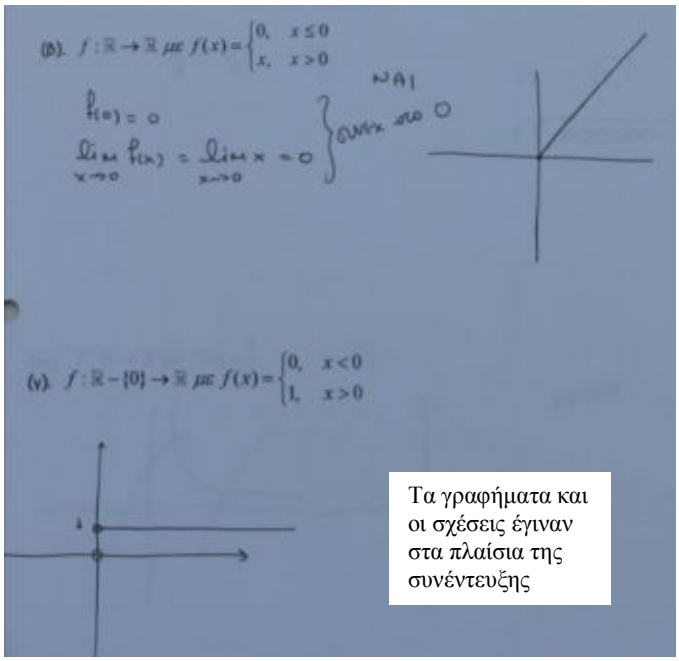
Ερ – Ωραία, και σαν εικόνα;
Β – Σαν εικόνα μία γραμμή που δεν διακόπτεται κάπου.



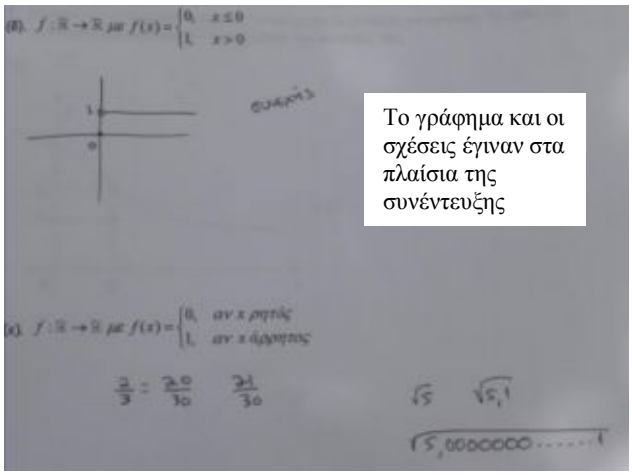
Ερ – Ωραία, πάμε στην 6 τώρα …
Β – Η αλήθεια είναι ότι αυτές οι δύο (οι (β) και (γ))με μπέρδεψαν λίγο. Το μόνο πράγμα, γιατί δεν ξέρω για διακοπή του γραφήματος … δεν ξέρω μήπως εννοούν κάτι σαν κι αυτό (δείχνει το γράφημα της 1/x) Δεν ξέρω αν το θεωρούν διακοπή του γραφήματος αυτό. Είναι διακοπή αυτό ή θεωρείται ότι είναι συνέχεια ;
Ερ – Είναι διακοπή. Λέμε το γράφημα της συνάρτησης να διακόπτεται κάπου. Οποιουδήποτε είδους διακοπή. Εσύ τώρα λες ότι αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά. Εσύ λες ότι αυτό είναι λάθος. Άρα η συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής και όμως να διακόπτεται;
Β – Ναι, και σαν παράδειγμα θα έδειχνα αυτή (δείχνει το γράφημα της 1/x)



Ερ – Ωραία. Στις επόμενες τώρα προσπαθείς να κάνεις ένα απλό γράφημα και μου λες με όποιο τρόπο θέλεις αν είναι συνεχής ή όχι. Πάμε στην (α) αρχικά.
Β – Αυτή είναι η κλασική … α! είναι εκτός του 0 … (κάνει το διπλανό γράφημα) … δεν είναι συνεχής!
Ερ – Γιατί;
Β – Γιατί στο 0 διακόπτεται, δεν ορίζεται δηλαδή.
Ερ – Αλγεβρικά εννοείς ή λόγω του γραφήματος; Τι είναι αυτό που σε κάνει να καταλήγεις στην απάντηση;
Β – Επειδή το ξέρω. Αλγεβρικά δηλαδή …
Ερ – Αν έπρεπε να το δείξεις σε ένα μαθητή που έχεις στη Γ΄ Λυκείου;
Β – Με τον ορισμό.
Ερ – Μπορείς να μου το δείξεις;
Β – … (γράφει τις σχέσεις που φαίνονται πιο πάνω) … τέλος πάντων είναι συνεχής από το μείον άπειρο μέχρι το 0 και από το 0 και πέρα …
Ερ – … άρα το επίμαχο σημείο είναι το 0 έτσι;
Β – … ναι … τώρα αυτό είναι συν άπειρο πλην άπειρο … άρα …
Ερ – Άρα επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά; …
Β – …και επειδή δεν ορίζεται το f(0).



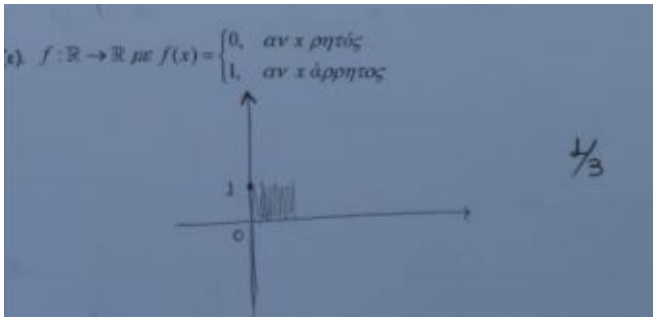
Ερ – Πολύ ωραία. Πάμε στην επόμενη;
Β – Ναι, αυτή εδώ … είναι συνεχής.
Ερ – Θέλεις να μου κάνεις και γι' αυτήν το γράφημα;
Β – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) …
Ερ – Ποιο κομμάτι ακριβώς είναι το γράφημά σου;
Β – Από την τέλεια και πάνω.
Ερ – Ωραία. Σου επιβεβαιώνει το γράφημα αυτό που λες αλγεβρικά;
Β – … όχι … αλγεβρικά αποδεικνύω ότι είναι συνεχής στο 0 …
Ερ – … διαφωνεί αυτό με το γράφημα;
Β – … εεε … όχι δεν διαφωνεί.
Ερ – Θα μπορούσες χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας από το Λύκειο να μου πεις αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της;
Β – εεε … όχι … μόνο στο 0 …
Ερ – Μάλιστα, μόνο στο 0 …άρα …
Β – … μισό λεπτό, μισό λεπτό, για x>0 είναι συνεχής …
Ερ – … γιατί;
Β – Ε, γιατί ο τύπος είναι f(x)=x. Για x=0 είναι συνεχής, για x<0 δεν είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Β – … όχι και τότε είναι συνεχής;
Ερ – Γιατί; Πες μου τι σκέφθηκες;
Β – Αφού έχουμε f(x)=0 άρα για οποιοδήποτε x έχουμε 0
Ερ – Ωραία …
Β – … τέλος πάντων αυτό είναι το γράφημα, δεν κατεβαίνει προς τα κάτω.
Ερ – Και είναι συνεχής, έτσι;
Β – Ναι.
Ερ – Ωραία. Πάμε στην επόμενη; Κάνε μου πάλι ένα γράφημα.
Β – … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) … αυτό εδώ είναι
Ερ – Άρα το γράφημά σου από τι αποτελείται;
Β – Ουσιαστικά από μία ευθεία καθετή στον άξονα yy΄ .
Ερ – Εννοείς την ευθεία y=1;
Β – Ναι. Γιατί αυτός εδώ είναι ο αρνητικός ημιάξονας του xx΄ έτσι δεν είναι; Δεν το δείχνουμε με κάποιο τρόπο έτσι δεν είναι;
Ερ – Δηλαδή η συνάρτηση παίρνει και αυτό το κομμάτι του άξονα;
Β – Ναι. Δεν είναι συνεχής …
Ερ – … γιατί; …
Β – … γιατί … το 0 δεν είναι μέσα … στο 0 δεν έχουμε κάτι … δεν ξέρουμε τι κάνει στο 0.



Ερ – Ωραία. Τι θα έλεγες τώρα για την επόμενη;
Β – Λοιπόν, αυτήν εδώ ε;…
Ερ – Βλέπεις κάποια διαφορά από την προηγούμενη;
Β – Ναι, είναι ότι το 0 συμπεριλαμβάνεται τώρα στο πεδίο ορισμού … ναι αυτή είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία, γράψτο … Γιατί Βανέσα πιστεύεις ότι είναι συνεχής;
Β – Γιατί … από το μείον άπειρο μέχρι το 0 είναι συνεχής, από το 0 μέχρι το συν άπειρο είναι συνεχής, και εδώ είναι συνεχής και στο 0.
Ερ – Ωραία … Σε βλέπω που το κοιτάς. Υπάρχει κάτι που σε κάνει να διστάζεις;
Β – Ναι, ο ορισμός … δεν θα ασχοληθώ παραπάνω, πάμε στην επόμενη. Είναι … είναι …
Ερ – Μην ανησυχείς, πες μου ότι αμφιβολίες έχεις, άλλωστε στο τέλος θα σου πω ότι θέλεις.
Β – Πάντως σε αυτή (δείχνει την (ε)) δεν έχω να πω τίποτα.

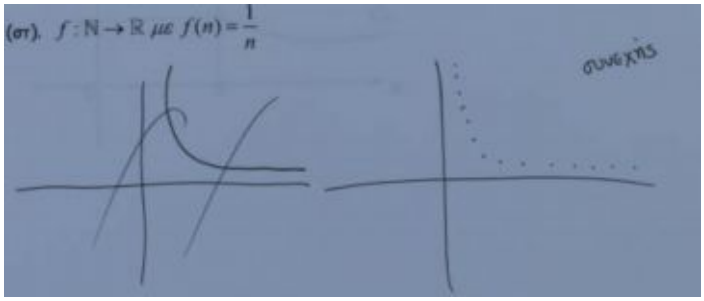
[Στο σημείο αυτό έρχεται η φίλη της η 'Αθηνά' από τη 18η Συνέντευξη και η συζήτηση πλέον διεξάγεται και με τις δύο].

Ερ – Εντάξει! Να κάνω σε αυτήν μία διαφορετική ερώτηση. Μπορείτε να μου γράψετε από έναν ρητό αριθμό η καθεμιά;

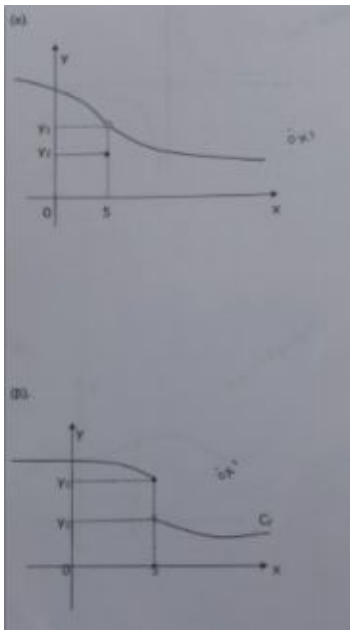


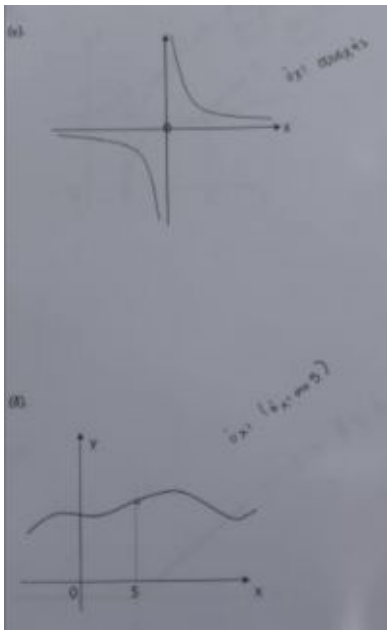
Α – … Εγώ θα γράψω πάλι το 1/3 που είχα ξαναγράψει
Ερ – Ωραία, κανένα πρόβλημα … (γράφουν) … Και θα ήθελα να μου γράψετε τώρα τον αμέσως μεγαλύτερό του … γράψτε τον δίπλα …
Β – Ο αμέσως μεγαλύτερος δεν θα είναι βασικά αυτός που έγραψα. Φαντάζομαι ότι υπάρχουν πολλοί αμέσως μεγαλύτεροι.
Α – Ναι, υπάρχουν πάρα πολλοί …
Ερ – Τον αμέσως μικρότερο;
Α – Πάλι το ίδιο …
Β – Υπάρχουν πάρα πολλοί.
Ερ - Εννοείς ότι δεν μπορούμε να βρούμε έναν;
Β – Τον αμέσως μεγαλύτερο όχι, γιατί πάντα θα υπάρχει ένας ανάμεσα, έτσι νομίζω.
Ερ - Άρα πιστεύεις ότι δεν μπορούμε να βρούμε;
Β – Όχι.
Ερ – Για έναν άρρητο; Αν μου γράψεις έναν άρρητο;
Α – Πάλι το ίδιο νομίζω …

Β – Δεν ξέρω, εγώ έναν άρρητο θα τον έγραφα ρίζα … $\sqrt{5}$ ας πούμε. Τώρα δεν ξέρω αν μπορούμε να πούμε $\sqrt{5,0000000000...1}$ δεν ξέρω αν θεωρείτε σωστό αυτό …
Ερ – Ό,τι θέλεις μπορείς να βάλεις μέσα σε μία ρίζα αρκεί να είναι θετική ποσότητα.
Β – Ε! Τότε ένας άλλος αριθμός είναι αυτός. Είναι μεγαλύτερος.
Ερ - Κατάλαβα.
Α – Ναι, αλλά αν τα δεκαδικά ψηφία παρουσιάζουν μία απειρότητα τότε ακόμα και αν εγώ σταματήσω κάπου πολύ μακριά κάποιος άλλος θα μπορεί να βάλει κάποια μηδενικά ακόμα, άρα θα μπορεί να προχωρήσει λίγο παρακάτω και ούτω καθεξής οπότε δεν είναι πολύ δύσκολο να βρούμε τον επόμενο;
Ερ – Άρα πιστεύετε ότι δεν μπορούμε να τον εντοπίσουμε;
Α, Β – Ναι.
Ερ – Καλώς. Πάμε στην επόμενη…
Α – Εγώ πάντως αυτό πιστεύω.



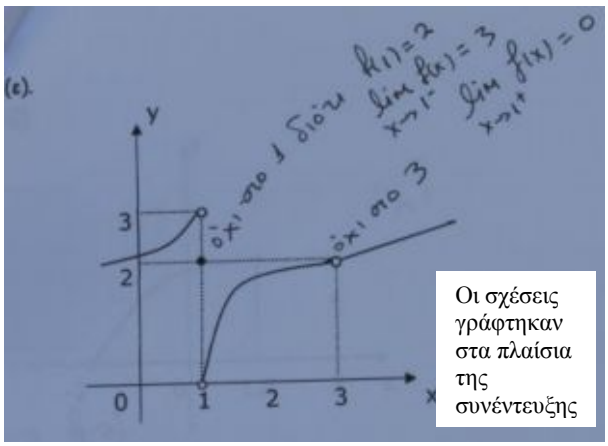
Ερ – Εντάξει. Πάμε στην επόμενη.
Β – Αυτή είναι συνεχής.
Ερ – Μπορείς να δοκιμάσεις να μου κάνεις μία γραφική παράσταση;
Β – (κάνει την πρώτη γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα) … είναι αυτή … όχι … μισό λεπτό να τη διορθώσω … (κάνει τη δεύτερη η γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα) … είναι μόνο οι τέλειες από την προηγούμενη γραμμή.

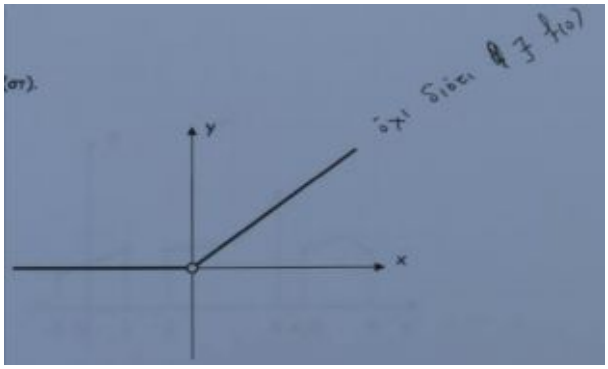




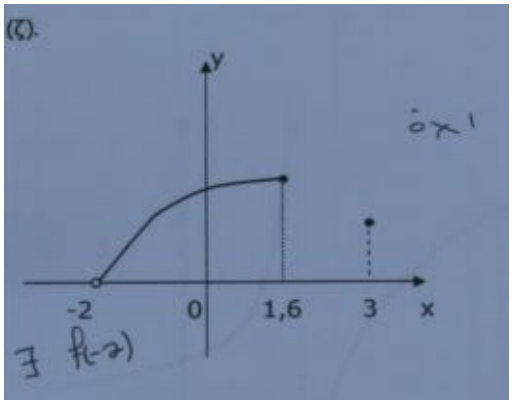
Ερ – Ωραία. Τι πιστεύεις είναι συνεχής αυτή;
Β – Ναι, γιατί μιλάμε για το πεδίο ορισμού, που είναι φυσικοί αριθμοί.
Ερ – Ωραία. Πάμε στην 8 τώρα. Εδώ έχουμε απλά γραφήματα, χωρίς τύπους. Βλέπεις απλά το γράφημα και μου λες αν αντιστοιχεί σε συνεχή συνάρτηση ή όχι.
Β – Όχι.
Ερ – Γιατί;
Β – Γιατί το f(5) είναι y_2 ενώ η συνάρτηση τείνει στο y_1.
Ερ – Εννοείς το lim …
Β – … ναι, το $\lim_{x \to 5} f(x)$ …
Ερ – Ωραία. Η επόμενη;

Β – Λοιπόν, αυτή εδώ … όχι …
Ερ – Γιατί;
Β – Γιατί είναι διαφορετικά τα πλευρικά όρια.
Ερ – Αν τη τελεία το y_1 στην έκανα ανοιχτή;
Β – Τότε πάλι δεν θα ήταν συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Β – Για δύο λόγους. Και για τα πλευρικά όρια θα ήταν διαφορετικά και δεύτερον γιατί δεν θα υπήρχε η τιμή στο 5.
Ερ – Εντάξει. Αν στην προηγούμενη επίσης σου καταργούσα την τελεία; …
Β – …και δεν υπήρχε πουθενά το f(5);
Ερ – Ναι.
Β – Ε! Δεν θα ήταν η συνεχής γι' αυτό το λόγο.
Ερ – Ωραία, πάμε στην επόμενη.
Β – (δείχνει το σημείο 0) … Ανοιχτό είναι αυτό;
Ερ – Όχι, είναι απλά το μηδέν.
Β – Η ερώτηση είναι σε όλο το πεδίο ορισμού;
Ερ – Αυτό το γράφημα που βλέπεις. Δεν έχεις τύπο συνάντησης, το γράφημα αυτό όπως το βλέπεις.
Β – Όχι.
Ερ – Γιατί;
Β – ε, γιατί δεν είναι στο 0.
Ερ – Μάλιστα. Αν αυτά τα δύο κομμάτια ενώνονταν;
Β – Πώς να ενώνονται;

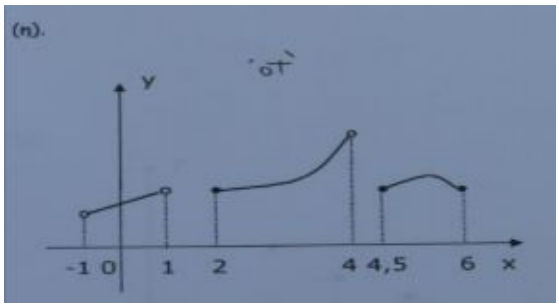




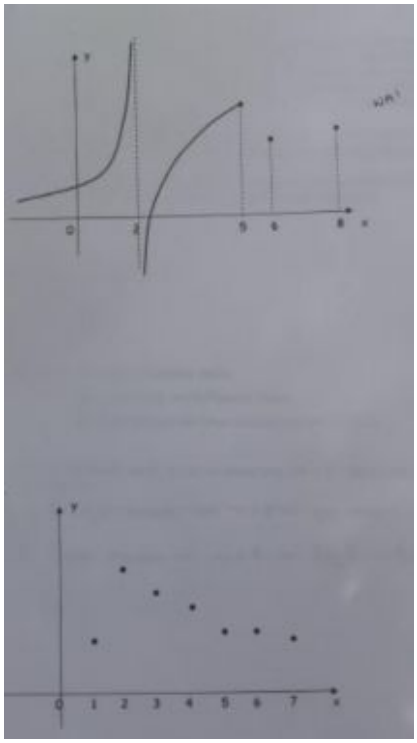
Ερ – Δεν ξέρω, καλή ερώτηση! Αν για παράδειγμα αυτό το κομμάτι ακουμπούσε εδώ στον αρνητικό ημιάξονα και το άλλο επάνω ακουμπούσε στο θετικό.
Β – εεε … όχι, διότι … για x=0 θα είχαμε δύο διαφορετικά y, δεν ξέρω αν κολλάει αυτό τώρα …
Ερ – Σωστά. Πάμε στην επόμενη.
Β – Όχι. Ασυνεχής στο 5.
Ερ – Ωραία. Η επόμενη;
Β – …εδώ τείνει στο 2 … εδώ πάει έτσι … όχι στο 3 δεν είναι …
Ερ – Γιατί;
Β – Γιατί δεν υπάρχει το f(3) … άρα (γράφει) όχι στο 3 … στο 1 τώρα … (γράφει τις σχέσεις που φαίνονται δίπλα) … άρα όχι στο 1.
Ερ – Ωραία. Η επόμενη;
Β – … Δεν είναι συνεχής γιατί διακόπτεται στο 0
Δεν υπάρχει το f(0).



Ερ – Ωραία. Η (ζ);
Β – Δεν είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Β – Δεν είναι συνεχής στο -2, ναι δεν υπάρχει το f(-2) …
Ερ – Το σημείο αυτό (δείχνω την κουκίδα στο 3) σε ενοχλεί;
Β – Όχι.
Ερ – Δηλαδή εδώ είναι συνεχής;
Β – Ναι.
Ερ – Ωραία.



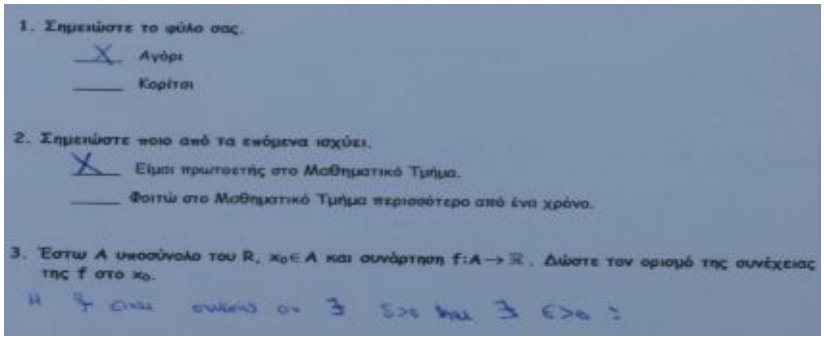
Ερ – Τι λες για αυτή τώρα;
Β – … Δεν είναι συνεχής …
Ερ – Γιατί;
Β – Δεν υπάρχει το f(-1), το f(1), και το f(4).
Ερ – Αν ήταν κλειστά αυτά, τότε θα ήταν συνεχής;
Β – Έτσι όπως μας τα δίνει ναι.
Ερ – Οπότε υποθέτω ότι το ίδιο εννοείς και στην προηγούμενη έτσι; Αν ήταν κλειστό στο -2;



Β – Τότε θα ήταν συνεχής ,ναι.
Ερ – Ωραία, αυτή τώρα;
Β – Αυτή είναι, ναι.
Ερ – Σε χαλάει το 2;
Β – Το 2 … εεε … (διστάζει) … επειδή το έχετε πάει να πει ότι είναι στο πεδίο ορισμού;
Ερ – Γράφημα είναι αυτό, ότι βλέπεις. Δεν έχεις κάποιο τύπο συνάρτησης. Και ρωτάω απλά αν σε χαλάει το 2. Δηλαδή που θα έλεγες ότι είναι συνεχής αυτή;
Β – Τώρα Με αυτό που μου λες μάλλον δεν είναι συνεχής στο 2.
Ερ – Όχι, όχι, όχι η ερώτησή μου δεν έχει αυτό το νόημα. Δεν υπονοώ κάτι τέτοιο. Εγώ απλά ρωτάω. Αν έπρεπε να γράψεις ότι αυτή είναι συνεχής στο τάδε σύνολο, που θα έλεγες ότι είναι;
Β – … έτσι όπως το λέμε τώρα θα είναι από μείον άπειρο μέχρι το 2 ανοιχτό, από το 2 μέχρι το 5 κλειστό, και στο 6 και στο 8.
Ερ – Ωραία. Το τελευταίο;
Β – Αυτή είναι η συνεχής στο συγκεκριμένο βέβαια πεδίο ορισμού.
Ερ – Γιατί;
Β – Γιατί ορίζονται όλα τα f του κάτι και … ξέρω εγώ … ελπίζω να είναι …
Ερ – Και μπορώ να βρω και lim; Μπορείς να εφαρμόσεις τον ορισμό του Λυκείου σε αυτήν;
Β – Ναι.
Ερ – Ο.Κ! Ωραία, Βανέσα σε ευχαριστώ πολύ!

27η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

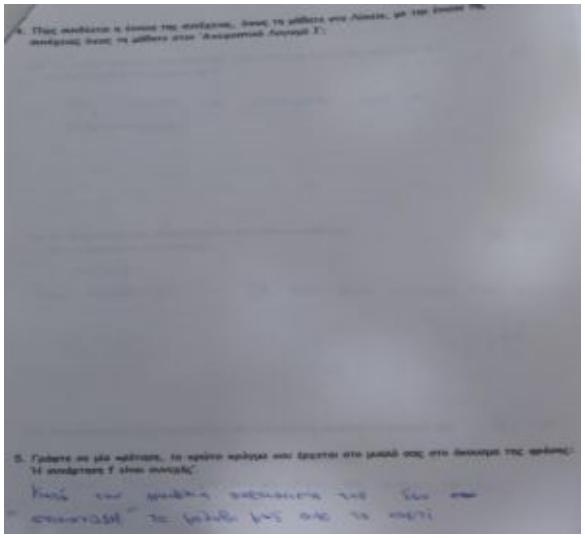
‘Λεωνίδας’, πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα.


1. Σημειώστε το φύλο σας.
X Αγόρι
___ Κορίτσι

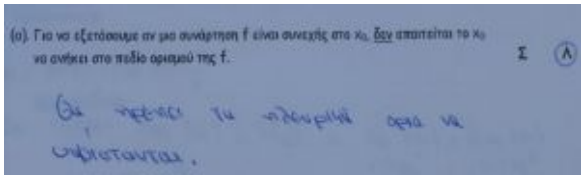
2. Σημειώστε ποιο από τα εκόμενα ισχύει.
X Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.
___ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

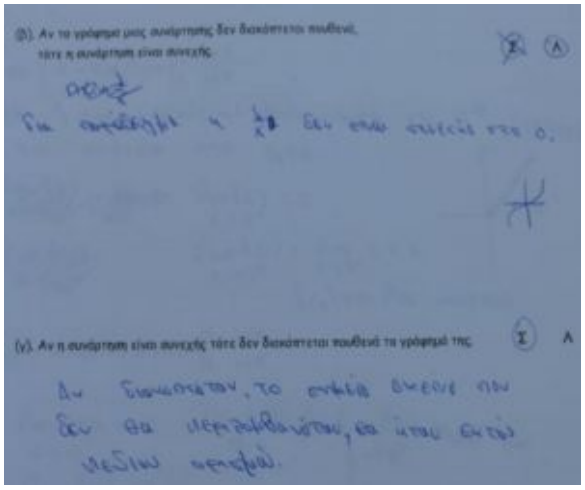
Ερ - Θυμάσαι τον ορισμό καθόλου;
Λ – Βασικά μετά το ερωτηματολόγιο που μας δώσατε τον κοίταξα λίγο αλλά …
Ερ – … εντάξει μην ανησυχείς θα τον κουβεντιάσουμε μετά …



Λ – … εκεί με τις διαφορές στα απόλυτα. Μια διαφορά με απόλυτο είναι…
Ερ – Ωραία, θα το δούμε στο τέλος. Τι σου λέει ο ορισμός της συνέχειας φέτος; Τι διαφορά βλέπεις από αυτόν που είχες μάθει πέρυσι στο Λύκειο με αυτόν που έμαθες τώρα στο Πανεπιστήμιο;
Λ – Μου φαίνεται πιο πολύπλοκος.
Ερ – Διαφορετικός;
Λ – Στην ουσία δεν είναι διαφορετικός, θα ήταν λάθος να είναι διαφορετικός αλλά είναι διατυπωμένος αλλιώς.
Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Τώρα η φράση που σου έρχεται στο μυαλό όταν ακούς συνεχής συνάρτηση είναι λες ότι …


(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

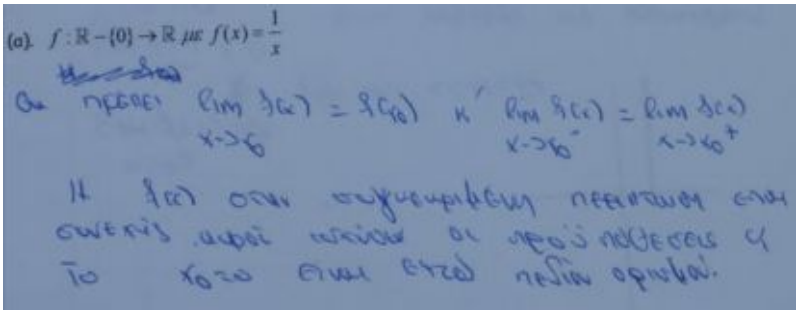
Λ – … δεν σηκώνουμε το στυλό από το χαρτί, αυτό μου έχει μείνει σαν εικόνα.
Ερ – Μάλιστα. Εδώ τώρα στην επόμενη έχεις βάλει λάθος. Δηλαδή εγώ λέω ότι δεν απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού άρα εσύ λες ότι απαιτείται;
Λ – Ναι.


(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

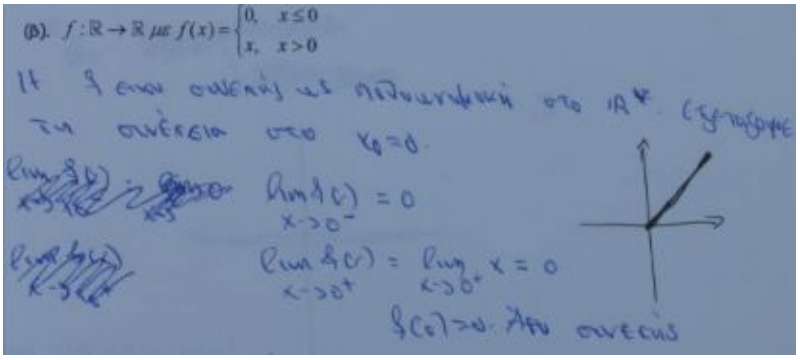
(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Ερ – Απαιτείται, μάλιστα … γιατί;
Λ – Γιατί από το Λύκειο έχω στο μυαλό μου ότι πρέπει να πάρουμε τα πλευρικά όρια και αυτά πρέπει να υπάρχουν.
Ερ – Δηλαδή για να υπολογίσεις ένα όριο πρέπει …
Λ – … βασικά για να βρω το $f(x_0)$ και να είναι ίσο με τα όρια.

Ερ – Α, για να βρεις το $f(x_0)$. Για να βρεις κάποιο όριο σε ένα σημείο θα πρέπει αυτό το σημείο να ανήκει στο πεδίο ορισμού;
Λ – Ναι.
Ερ – Άρα και για να βρεις τα όρια χρειάζεται το σημείο να ανήκει στο πεδίο ορισμού, ναι;
Λ – Ναι.
Ερ – Μάλιστα. Στη δεύτερη τώρα έχεις επιλέξει το λάθος και έχεις βάλει και σαν παράδειγμα …
Λ – … ναι την 1/x. Γιατί αυτή δεν είναι συνεχής στο 0.
Ερ – Και το γράφημά της είναι αυτό που έχεις κάνει, έτσι;
Λ – Ναι, ναι. Και η επόμενη είναι σωστή, αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε βέβαια δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.

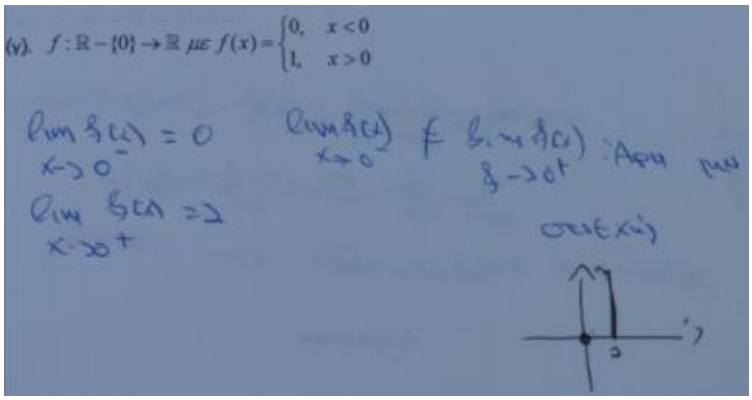


Ερ – Ωραία, πάμε στην επόμενη. Εδώ λες …
Λ – … είχα πολύ καιρό να βρω ένα τέτοιο όριο.
Ερ – Ναι. Λοιπόν λες ότι … (διαβάζω την απάντησή του)
Λ – … ναι, και είναι συνεχής.
Ερ – Άρα σαν συνάρτηση γενικά, θα έλεγες ότι είναι συνεχής;
Λ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Αυτή είναι ίδια με αυτή που διάλεξες πιο πριν στο 6(β) σαν αντιπαράδειγμα;
Λ – Ναι, αυτή είναι.
Ερ – Ναι, αλλά εδώ μου λες ότι δεν είναι συνεχής στο 0.
Λ – Ναι, είναι λίγο ανάποδα … (το ξανακοιτάει) … ναι, ναι, είναι η διατύπωση. Είναι συνεχής αυτή η συνάρτηση, απλά λέμε ότι το 0 είναι εκτός του πεδίου ορισμού.

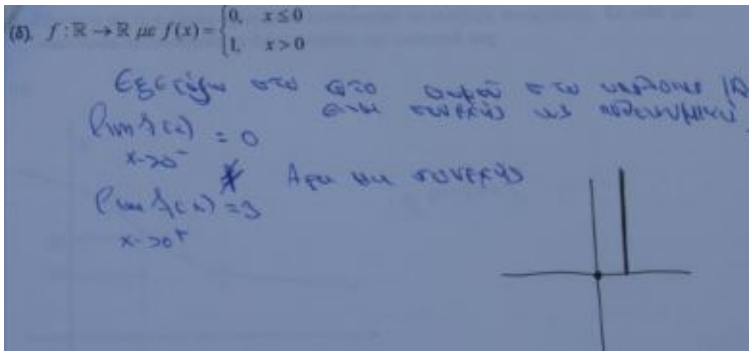


Ερ – Α, μάλιστα. Πάμε στη (β). Εδώ λες ότι είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}^*$ και μετά λες ότι εξετάζουμε τη συνέχεια στο 0. Θέλεις να μου κάνεις γι' αυτήν τη γραφική της παράσταση;
Λ – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … αυτή εδώ νομίζω ότι είναι.
Ερ – Από το 0 και πάνω εννοείς;
Λ – Ναι.
Ερ – Σου επιβεβαιώνει το σχήμα σου αυτό που έχεις βρει με τα όρια;
Λ – Τη συνέχεια;
Ερ – Ναι.
Λ – Όχι ιδιαίτερα γιατί … μου αφήνει κάποιο κενό. Πιστεύω ότι για τα αρνητικά δεν μου λέει κάτι, να μου λέει αν είναι συνεχής στα αρνητικά x.

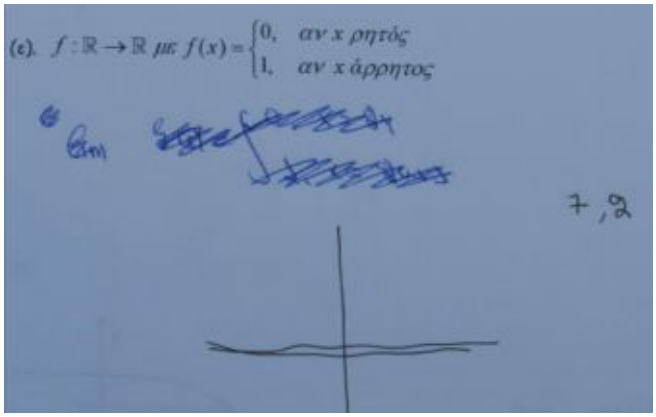
Ερ – Δηλαδή μπορεί και κάτι να συμβαίνει;
Λ – Ναι, να την έχω ζωγραφίσει και λάθος … πιθανόν … (ξανακοιτάει το σχήμα) … και πάλι αυτό θα ζωγράφιζα, αλλά κάτι δεν μου πάει καλά.
Ερ – Δηλαδή θα άλλαζες κάτι στην απάντηση ή όχι; Δεν σημαίνει ότι έχεις κάνει κάποιο λάθος, απλά ρωτάω



Λ – Δεν θα άλλαζα γιατί δεν μπορώ να το βρω!
Ερ – (γελάω) Σωστό! Στην επόμενη θέλεις να μου κάνεις και εδώ τη γραφική παράσταση;
Λ – … (σχεδιάζει το διπλανό γράφημα) … αυτή δεν είναι η y=1; … ή η x=1; … όχι τη x=1 έχω κάνει … βασικά αυτή δεν είναι συνεχής …
Ερ – Γιατί;
Λ – Βασικά από το σχήμα το βλέπω τώρα αν και το έχω κάνει λάθος αλλά από εδώ είναι διαφορετικό από αυτό που έχω βάλει για όριο …άρα αφού είναι διαφορετικά δεν μπορεί να είναι συνεχής, πρέπει να είναι ίδια
Ερ – Άρα σου επιβεβαιώνει το σχήμα σου ότι δεν είναι συνεχής;
Λ – Ναι, μου το επιβεβαιώνει.

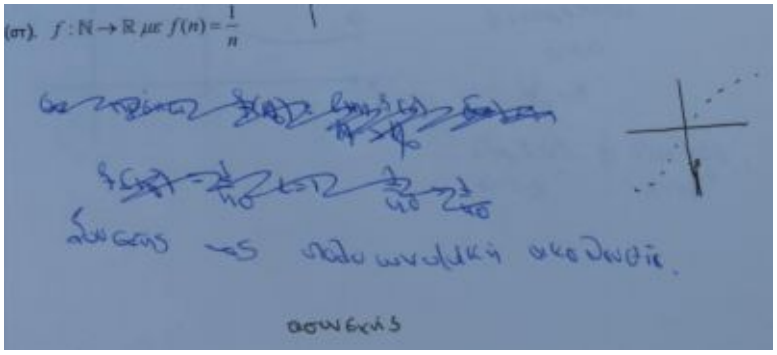


Ερ – Ωραία. Για την επόμενη τι λες;
Λ – … (διαβάζει την απάντηση του) … ναι, εδώ στο 0 τα βγάζω διαφορετικά άρα δεν είναι συνεχής.
Ερ –Έχει κάποια διαφορά εδώ η γραφική παράσταση από την προηγούμενη;
Λ – Ναι … εδώ έχουμε ισότητα … άρα εδώ έχουμε κλειστό κυκλάκι …
Ερ – Άρα εννοείς ότι στην προηγούμενη, η γραφική παράσταση είναι το ανοιχτό κυκλάκι στο 0 και μετά γραμμή προς τα πάνω ενώ εδώ το κλειστό κυκλάκι και μετά η γραμμή, έτσι;

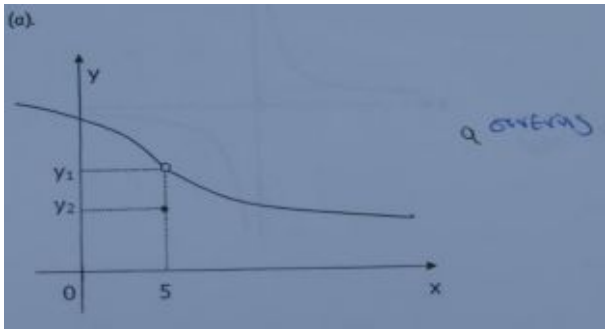


Λ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Αυτή εδώ σου λέει τίποτα;
Λ – Όχι, γιατί δεν μπορώ να πω.
Ερ – Τι πιστεύεις;
Λ – Εμένα τι μου δείχνει ότι δεν θα είναι συνεχής.
Ερ – Θέλεις να δοκιμάσεις να δεις πως περίπου μπορεί να είναι η

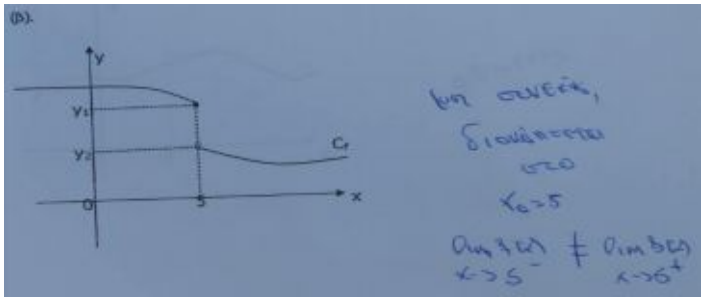
γραφική παράσταση;
Λ – Δεν έχω καλά στο μυαλό μου την έννοια του ρητού από τον άρρητο, γι' αυτό δεν μπορώ.
Ερ – Εντάξει … μια και το είπες αυτό, θέλεις να μου πεις έναν ρητό;
Λ – Ένα ρητό … ένας ρητός είναι σίγουρα ένας ακέραιος αριθμός …
Ερ – Γνήσια ρητό ποιον θα έλεγες;
Λ – Γνήσιος ρητός; Αν θυμάμαι καλά ρητοί είναι αυτοί που μπορούν να γραφτούν σαν κλάσματα … ας πούμε το 2 που μπορεί να γραφτεί 2/1, το 3,5 αυτοί οι αριθμοί.
Ερ – Ωραία, γράψε μου έναν. Όποιον θέλεις εσύ …
Λ – εεε … το 7 …
Ερ – Το 7 τι άλλο είναι;
Λ – εεε … ακέραιος…
Ερ – Ωραία. Σε ποιο άλλο σύνολο θα τον έβαζες;
Λ – εεε … είναι πραγματικός …
Ερ – Ωραία, δεν είναι και φυσικός;
Λ – Ναι, ναι.
Ερ – Ρητό ποιον θα έλεγες, γνήσια ρητό
Λ – Δεν μπορώ να το ξεχωρίσω το γνήσια και το απλά.
Ερ – Ωραία, εννοώ δηλαδή, ας πούμε για παράδειγμα το 7 που είπες πριν, είναι φυσικός είναι ακέραιος είναι και ρητός είναι και πραγματικός. Ας πούμε το 3,5 που μου είπες πριν και είναι δεκαδικός …
Λ – … αυτός δεν είναι γνήσια ρητός, είναι;
Ερ – Είναι, δεν είναι; Γιατί δεν είναι φυσικός έτσι δεν είναι;
Λ – Ναι.
Ερ – Ούτε ακέραιος έτσι δεν είναι;
Λ – Ναι.
Ερ – Ρητός όμως είναι γιατί γράφεται σαν κλάσμα 7/2, ε;
Λ – Ναι. Άρα είναι γνήσια ρητός;
Ερ – Ναι, άρα είναι γνήσια ρητός.
Λ – Ποιους μπορούμε να πούμε ρητούς, γνήσια ρητούς;
Ερ – Αυτό λέω. Το 7 κανονικά είναι φυσικός αλλά επειδή οι φυσικοί είναι υποσύνολο των ακεραίων είναι και ακέραιος και ομοίως είναι ρητός είναι και πραγματικός, άρα δεν είναι ένας γνήσια ρητός. Ενώ το 3,5 που μου είπες, είναι ένας γνήσια ρητός, γιατί δεν είναι ούτε φυσικός ούτε ακέραιος.
Λ – Και το 7 γνήσια δεν είναι;
Ερ – Το 7 είναι πρώτα από όλα φυσικός.
Λ – Α! Κατάλαβα. Άρα το 7 το κάνω 7,2.
Ερ – Ωραία. Θέλω τώρα να μου γράψεις τον αμέσως μεγαλύτερό του.
Λ – Ε, αυτό έχουμε μάθει ότι δεν γίνεται.
Ερ – Γιατί;
Λ – Γιατί δεν υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί, πραγματικοί διαδοχικοί αριθμοί ή μάλλον στη συγκεκριμένη περίπτωση ρητοί διαδοχικοί αριθμοί. Διαδοχική ακέραιοι υπάρχουν άλλα διαδοχικοί πραγματικοί δεν υπάρχουν, ρητοί μάλλον εδώ. Αυτό το είχαμε συναντήσει και σε ένα άλλο ερωτηματολόγιο που μας είχαν δώσει. Η αλήθεια είναι ότι και εμένα λίγο με μπερδεύει αλλά έτσι είχαμε μάθει ότι είναι και … [η φράση δεν ακούγεται καλά μέχρι το τέλος]



Ερ – Ωραία. Πάμε στην επόμενη.
Λ – Θέλει να πούμε αν είναι συνεχής έτσι; Βασικά είναι η πολυωνυμική και είναι συνεχής … αλλά έχουμε πει ότι η 1/x δεν είναι στο 0 … αλλά είναι από το …
Ερ – Προφανώς είναι $\mathbb{N}-\{0\}$ *έτσι; Προφανώς.*
Λ – Ναι … Ν είναι οι φυσικοί έτσι; … ε … ναι τότε είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία. Θέλεις να δοκιμάσεις να κάνεις τη γραφική παράσταση σε αυτήν;
Λ – Είναι φυσικοί ε; Άρα θα είναι όλο τελίτσες. Κάπως έτσι θα το κάνουμε … (κάνει το γράφημα που φαίνεται πάνω) … αλλά αυτή δεν μπορεί να είναι συνεχής …
Ερ – … γιατί;
Λ – … γιατί δεν … αλλά το πεδίο ορισμού είναι από το … άρα … βασικά πήγαινα να πω ότι δεν είναι συνεχής γιατί σηκώνεται γιατί διακόπτεται αλλά … μμμ … στους φυσικούς … τώρα με τους φυσικούς … χμμμ … με ενοχλεί το ότι είναι φυσικοί μόνο, αν ήταν από το $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θα ήταν σίγουρα …
Ερ – … θα ήταν σίγουρα τι;
Λ – Συνεχής …
Ερ – … ενώ τώρα τι; Τι σε προβληματίζει, τι σκέπτεσαι;
Λ – … το ότι είναι διακεκομμένη η γραμμή … η απεικόνιση αυτό είναι …
Ερ – … άρα μπορεί και να μην είναι;
Λ – Ναι, σκέφτομαι ότι παίρνει κάθε φυσικό ρυθμό και τον πηγαίνει σε έναν πραγματικό, αυτό γίνεται, αντιστοιχίζονται όλα … το ανάποδο δεν ισχύει … ε καλά, όχι ότι δεν ορίζεται η συνάρτηση εκεί, ότι δεν υπάρχει … υπάρχει; Είναι αναπάντητο αυτό, δεν το έχω λύσει ακόμα στο μυαλό μου.

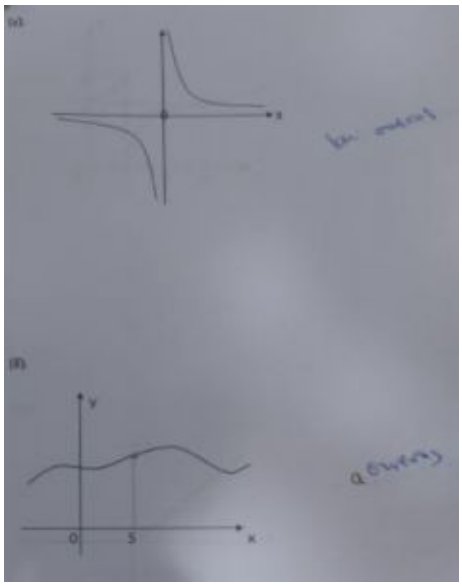


Ερ – Εντάξει, το αφήνουμε. Άρα σαν τελική απάντηση τι θα έλεγες;
Λ – Θα έλεγα …
Ερ – Συνεχής θα έλεγες ή ασυνεχής, τι θα διάλεγες;
Λ – Ασυνεχής θα έλεγα, ασυνεχής ναι.
Ερ – Ωραία. Πάμε σε γραφήματα τώρα χωρίς τύπους.
Λ – Εντάξει αυτό μου φαίνεται εύκολο.
Ερ – Συνεχής λες.

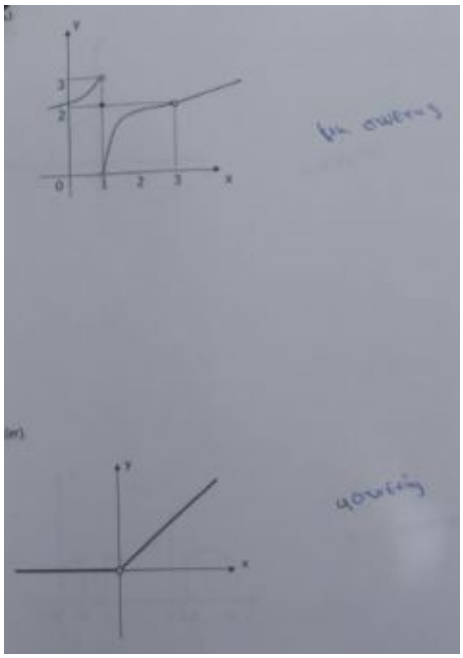


Λ – Έχω βάλει συνεχής ε; … (το ξανακοιτάει) … μμμ … τώρα το 5 με ενοχλεί τώρα, δεν ξέρω … είναι ύποπτο!
…
Λ – Βασικά για να είναι συνεχής θα έπρεπε το f(5) να κάνει y_1 και όχι y_2.
Ερ – Δηλαδή θα ήθελες να το

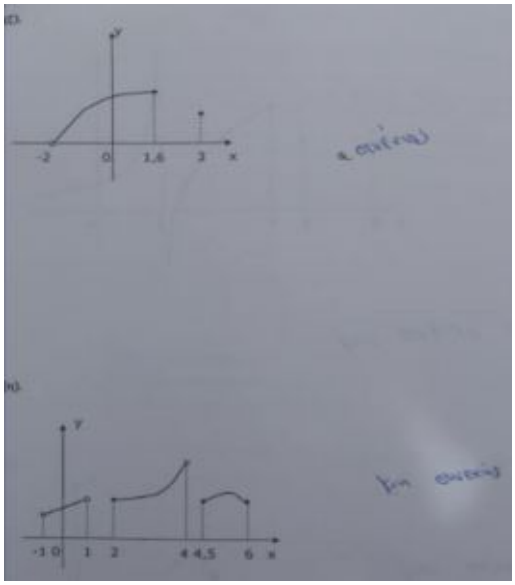
αλλάξεις;
Λ – Βασικά προσπαθώ να θυμηθώ τι σκέφτηκα εκείνη τη στιγμή τώρα … μμμ … θα την έλεγα ασυνεχή, ναι, θα το αλλάξω.
Ερ – Ωραία, εδώ τώρα στη (β) λες ότι δεν είναι συνεχής γιατί διακόπτεται στο 5 και έχεις πάρει και τα πλευρικά όρια, ωραία.



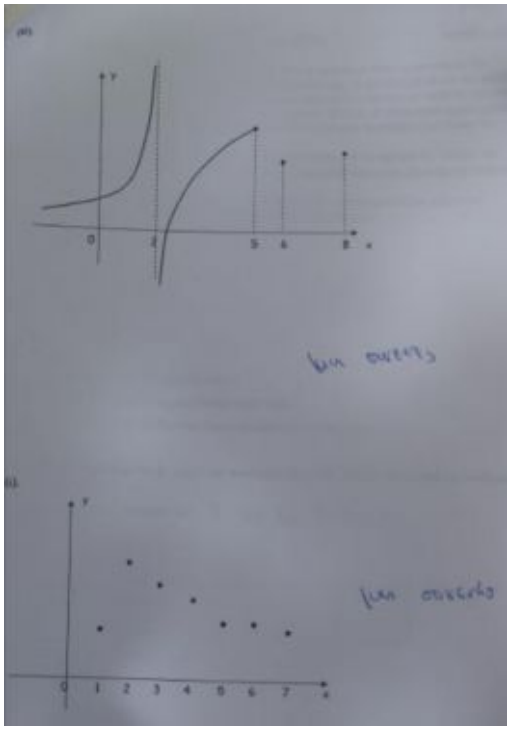
Λ – Ναι.
Ερ – Ωραία, εδώ τώρα στη (γ) λες μη συνεχής …
Λ – … ναι είναι η 1/x …
Ερ – … η ποια; …
Λ – … η 1/x που στο 0 δεν είναι συνεχής, το ξέρω αυτό.
Ερ – Μάλιστα. Η (δ) τώρα;
Λ – Εδώ σκέφτομαι ότι αυτή είναι λίγο … εδώ ας πούμε τα πλευρικά όρια είναι ίσα … αυτή είναι συνεχής εδώ … αλλά αυτό είναι ανοιχτό κυκλάκι ε; δεν περιλαμβάνεται ε;
Ερ – Ναι.
Λ – Τότε θα είναι ασυνεχής, γιατί δεν ανήκει.



Ερ – Ωραία, (ε) τώρα;
Λ – Καλά αυτή μυρίζει από μακριά! (γελάει)
Ερ – Ασυνεχής ε; Πού πιστεύεις ότι χαλάει η συνέχεια;
Λ – ε … στο 1 στο 3 … πού αλλού … στο 1 και το 3.
Ερ – Η (στ) τώρα;
Λ – Αυτή είναι συνεχής εντάξει …
Ερ – … συνεχής μου είπες ή ασυνεχής;
Λ – Συνεχής είπα αλλά τώρα είδα το κυκλάκι … ασυνεχής είναι και αυτή
Ερ – Ασυνεχής;
Λ – Ναι. Είχα γράψει συνεχής αλλά δεν είχα προσέξει το κυκλάκι, ασυνεχής είναι.
Ερ – Ωραία.



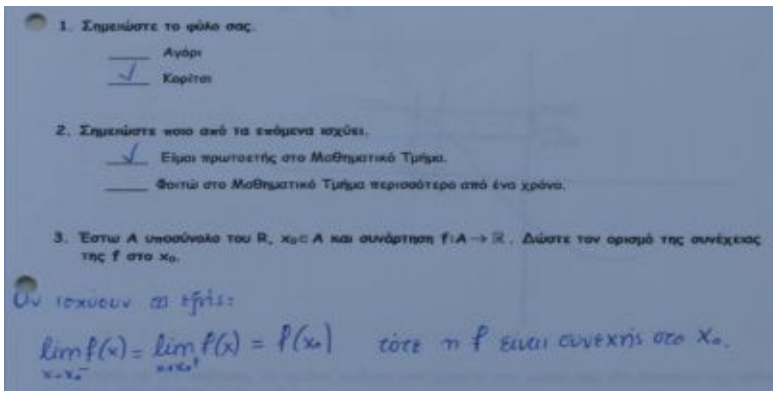
Ερ – Ωραία. Η (ζ) τώρα;
Λ – Και αυτή συνεχή την είχα ε;
Ερ – Ναι.
Λ – Από το -2 … στο 1,6 … μετά στο 3 …
Ερ – Τι σε χαλάει σε αυτήν;
Λ – Προσπαθώ απλά να βρω περισσότερους λόγους από το ότι δεν ολοκληρώνεται η γραμμή μέχρι το 3.
Ερ – Εννοείς ότι δεν ενώνεται το 1,6 με το 3 ε;
Λ – Δεν περιλαμβάνεται επίσης το -2.
Ερ – Ωραία, στην (η) τώρα;
Λ – Εντάξει, ασυνεχής θα είναι και ο λόγος είναι όπως επάνω, διακόπτεται … δεν ανήκουν τρία σημεία στο πεδίο ορισμού, και διακόπτεται και η γραφική παράσταση.



Ερ – Μάλιστα. Η (θ);
Λ – Και αυτή γιατί στο 2 … σίγουρα στο 2 τα πλευρικά όρια διαφέρουν και η επόμενη είναι και αυτή πολυωνυμική όπως η άλλη που είδαμε, όλο διάσπαρτα σημεία ε, ασυνεχής είναι
Ερ – Ωραία, Λεωνίδα σε ευχαριστώ πολύ!

28η ΣΥΝΕΝΕΤΕΥΞΗ

Ίκατερίνα’, πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα.


1. Σημειώστε το φύλο σας.

___ Αγόρι

_√_ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

_√_ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

___ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Αν ισχύουν οι εξής:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Ερ – Λοιπόν, Για τον ορισμό Κατερίνα, θα ρωτήσω κάτι στο τέλος. Μήπως αλήθεια θυμάσαι τον ορισμό του Πανεπιστημίου;

Κ – Όχι. Μόνο αυτόν στο Λύκειο.

Ερ – Κανένα πρόβλημα. Α, είσαι πρωτοετής. Πολύ καλό αυτό. Άρα έχει αξία η επόμενη ερώτηση. Πώς σου φάνηκε ο ορισμός του Πανεπιστημίου σε σχέση με αυτόν που είχες μάθει στο Λύκειο;

Κ – Για να πω την αλήθεια, δεν τον θυμάμαι …

Ερ – … δεν με ενδιαφέρει αυτό. Απλά αν τον φέρεις στο μυαλό σου έτσι όπως τον θυμάσαι τι αίσθηση σου δημιούργησε σε σχέση με αυτόν του Λυκείου;

Κ - Δεν τον θυμάμαι. Απλά, θυμάμαι ότι όταν μπήκαμε στη συνέχεια … τα είδα πολύ πιο βατά από ότι τα προηγούμενα. Ναι, τότε άρχισα να καταλαβαίνω κάτι.

Ερ – Ήταν ίσως και το θέμα πιο οικείο;

Κ – Ναι.

Ερ – Επειδή το έχεις ξανακούσει και στο Λύκειο;

Κ – Ναι.

Ερ – Τι εικόνα σου φέρνει στο μυαλό; Με το που ακούς τη φράση ‘συνάρτηση συνεχής’ τι εικόνα έρχεται στο μυαλό σου;

Κ – Μία γραμμή που δεν διακόπτεται πουθενά, και είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της, και τα άκρα της είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της.

Ερ – Εννοείς δηλαδή να ορίζεται σε πεδίο ορισμού κλειστό;

Κ – Ναι.

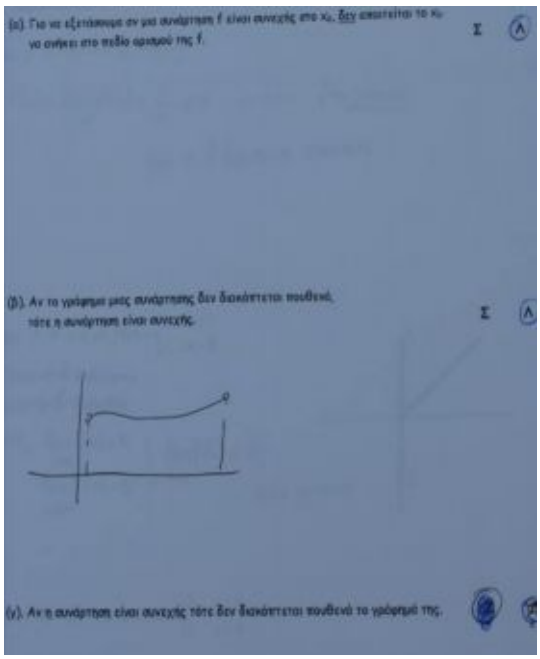
Ερ – Δηλαδή αν ορίζεται σε πεδίο ορισμού ανοιχτό σε ενοχλεί;

Κ – Ναι.

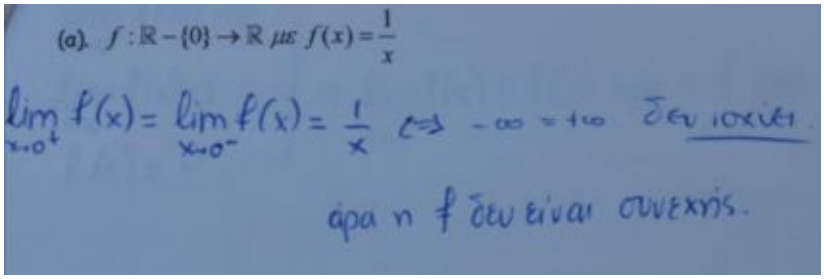
Ερ – Ωραία, σε ενοχλεί. Να πάμε τώρα λίγο στο επόμενο. Το (α) το σημείωσες λάθος. Γιατί;

Κ – Γιατί για να εξετάσω τη συνέχεια σε ένα σημείο πρέπει πάντα το σημείο αυτό να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού.

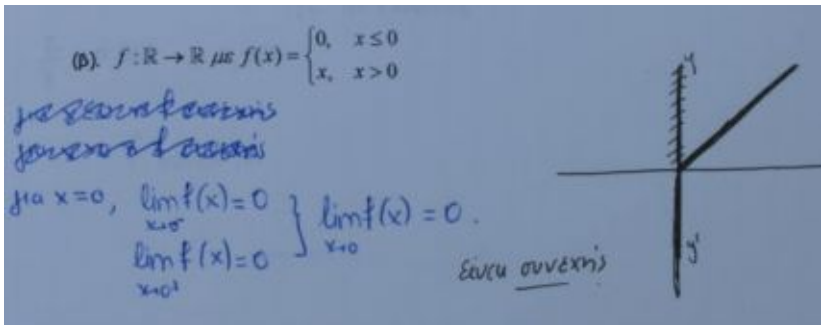
Ερ – Ωραία. Αυτό τώρα το (β) γιατί το λες Λάθος;



Κ – Λοιπόν, εγώ τώρα θυμάμαι από το σχολείο, τελείωσε έτσι πρακτικά, ότι πρέπει να έχουμε κλειστά άκρα σε μια γραμμή για να είναι συνεχής.
Ερ – Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα στο μυαλό;
Κ – Ναι … (κάνει το γράφημα που φαίνεται) … εδώ έχουμε ανοιχτά κυκλάκια άρα δεν είναι συνεχής.
Ερ – Α, μάλιστα. Λες λοιπόν ότι αν και δεν διακόπτεται δεν είναι συνεχής γιατί έχει ανοιχτά άκρα;
Κ – Ναι.
Ερ – Ωραία, τη (γ) τώρα τη λες Λάθος, γιατί;
Κ – Πάλι αυτό είναι.
Ερ - Περίμενε. Εδώ τώρα λέμε ότι αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της.
Κ – Ωραία.
Ερ – Και λες ότι είναι λάθος αυτό.
Κ – Ναι … όχι σωστό είναι.
Ερ – Δηλαδή θα το άλλαζες;
Κ – Ναι.

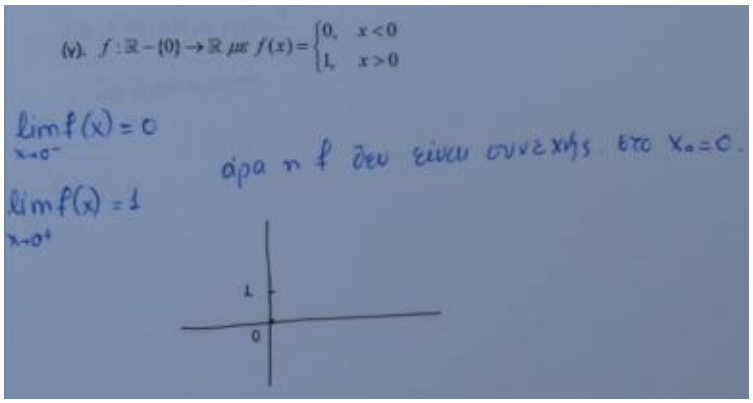


Ερ – Ωραία. Τώρα η 1/x. Λες ότι αυτή δεν είναι συνεχής. Θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Κ – Της 1/x; … Δεν τη θυμάμαι.
Ερ – Εντάξει, αν σου έρθει την κάνεις. Πάντως συμφωνείς με αυτό που έχεις γράψει έτσι;
Κ – Ναι.

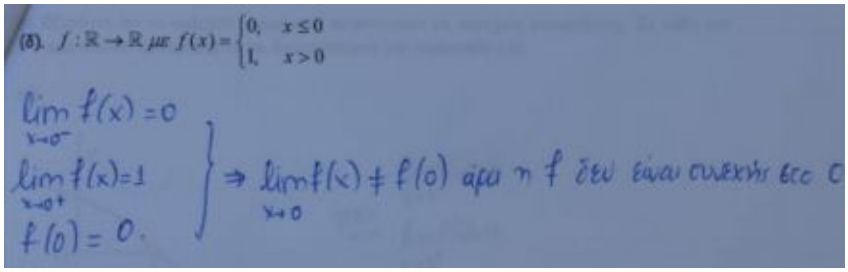


Ερ – Τώρα, στη (β) λες (διαβάζω την απάντησή της) … άρα;
Κ – Άρα είναι συνεχής.
Ερ – Είναι;
Κ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Θέλεις να δοκιμάσεις εδώ αν μπορείς να μου κάνεις τη γραφική παράσταση;
Κ – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) … η μια είναι αυτή (δείχνει την ευθεία y=x στο πρώτο τεταρτημόριο) και η άλλη είναι αυτή; … (δείχνει τον θετικό ημιάξονα των yy΄) …
Ερ – Δεν θα σου απαντήσω τώρα! Πες μου, σου επιβεβαιώνει το γράφημα την αλγεβρική σου απάντηση;

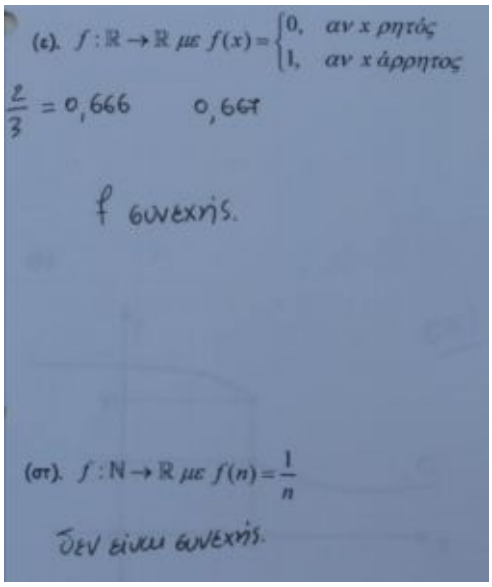
Κ – Ναι.
Ερ – Σε βοηθάει δηλαδή το γράφημα να επιβεβαιώσεις την απάντηση σου;
Κ – Ναι με βοηθάει.
Ερ – Γιατί;
Κ – Λοιπόν ... έχω κάνει λάθος … αφού λέμε για $x \leq 0$ είναι το 0 άρα είναι το κάτω κομμάτι του άξονα yy΄



Ερ – Ωραία, και τώρα είναι συνεχής και στο επιβεβαιώνει;
Κ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Θέλεις να δοκιμάσεις και στην επομένη να μου κάνεις γραφική παράσταση;
Κ – εεε … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … αφού έκανα λάθος πριν και έβαλα τον άξονα … δεν μπορώ, δεν μπορώ να την κάνω …
Ερ – Σίγουρα;
Κ – Ναι, δεν μπορώ.
Ερ – Εντάξει, πάντως λες ότι δεν είναι συνεχής στο 0, έτσι; Γιατί;
Κ – Με τα όρια, βγαίνει.

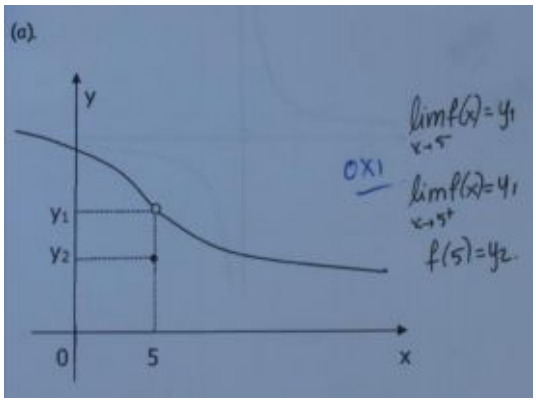


Ερ – Ωραία, η επόμενη τώρα, είναι σχεδόν η ίδια. Λες ότι δεν είναι συνεχής στο 0. Βλέπεις κάποια διαφορά σε αυτήν από την προηγούμενη;



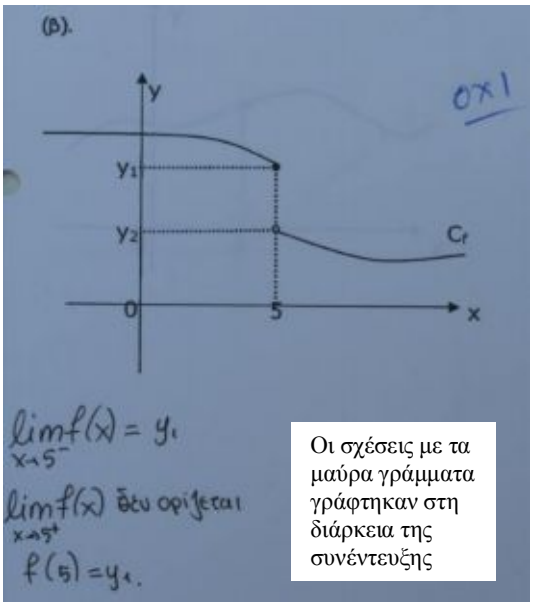
Κ – Εδώ είναι και για $x \leq 0$, ε;
Ερ – Ναι, αλλάζει κάτι πιστεύεις στην απάντηση;
Κ – Όχι, δεν νομίζω.
Ερ – Ωραία, πάμε στην (ε).
Κ – εεε … πάλι δεν πρέπει να είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Κ – … οι άρρητοι δεν είναι αυτοί που …
Ερ – (γελώντας) … δεν θα σου πω!
Κ - Δεν μπορώ να βρω που θα το εξετάσουμε, για ποιο x.
Ερ – Χμ. Κατάλαβα τι λες. Θέλεις να δοκιμάσεις να κάνεις γραφική παράσταση γι αυτήν;
Κ – (Γελάει) όχι!
Ερ – Μπορείς να μου πεις έναν ρητό;
Κ – Ρητό; Ε, όλα τα κλάσματα.
Ερ – Γράψε μου ένα.
Κ – Ε, το 2/3.

Ερ – Ωραία. Θέλω να μου γράψεις δίπλα του το αμέσως μεγαλύτερό του.
Κ – Δεν μπορώ να το βρω.
Ερ – Γιατί;
Κ – Το αμέσως μεγαλύτερό του;
Ερ – Ναι.
Κ – Ρητό;
Ερ – Ναι.
Κ – Του 2/3 … δεν μπορώ να σκεφθώ …
Ερ – Τι σε χαλάει; Πες μου τις σκέψεις σου.
Κ – Ρητό με τον ίδιο παρανομαστή;
Ερ – Όχι, όχι, δεν με ενδιαφέρει, απλά τον αμέσως μεγαλύτερό του. Ας πούμε στους φυσικούς λέμε ότι έχω πάρει το 5, και το 6 είναι το αμέσως μεγαλύτερό του. Εσύ τώρα στους ρητούς πήρες το 2/3. Θέλω να μου πεις τον αμέσως μεγαλύτερό του ρητό. Ή έστω και άρρητο, απλά τον αμέσως μεγαλύτερό του.
Κ – Μπορούμε να βρούμε τον αμέσως επόμενό του; … όχι … αν το 2/3 το κάνουμε δεκαδικό τότε ναι. Είναι 0,666… τότε ο επόμενος είναι 7 ας πούμε
Ερ – Άρα τον βρήκες;
Κ – Ναι, αλλά … ναι … είναι.
Ερ – Ωραία, γράψτο.
Κ – Πώς, σε κλάσμα;
Ερ – Ναι, όπως θέλεις. Και σαν δεκαδικό, όπως θέλεις.
Κ – Σαν δεκαδικό… (γράφει 0,666 και δίπλα γράφει 0.667) … (διστάζει) …
Ερ – Είναι ο αμέσως επόμενός του; Υπάρχει κάτι που σε κάνει να διστάζεις;
Κ – Γιατί συνεχίζουν τα ψηφία μέχρι το άπειρο άρα δεν μπορούμε να βρούμε με ακρίβεια τον αμέσως επόμενο.
Ερ – Μάλιστα. Δηλαδή τι θα απαντούσες στην ερώτηση; Αν έπρεπε να δώσεις μία απάντηση τι θα διάλεγες να πεις;
Κ – Ότι δεν μπορεί να βρεθεί με ακρίβεια, ξέρω εγώ;
Ερ – Ωραία. Γι αυτήν δηλαδή, τι θα έλεγες είναι συνεχής ή ασυνεχής;
Κ – … συνεχής.
Ερ – Ωραία, γράψτο … Θέλεις να μου πεις τώρα για την επόμενη;
Κ – … Η γραφική παράσταση θα είναι σαν την πρώτη που δε βρήκα.
Ερ – Α, την 1/x εννοείς;
Κ – Ναι.
Ερ - Μήπως τώρα σου έχει έρθει στο μυαλό;
Κ – Όχι.
Ερ – Εντάξει. Γιατί πιστεύεις ότι είναι η ίδια; Δεν αλλάζει κάτι;



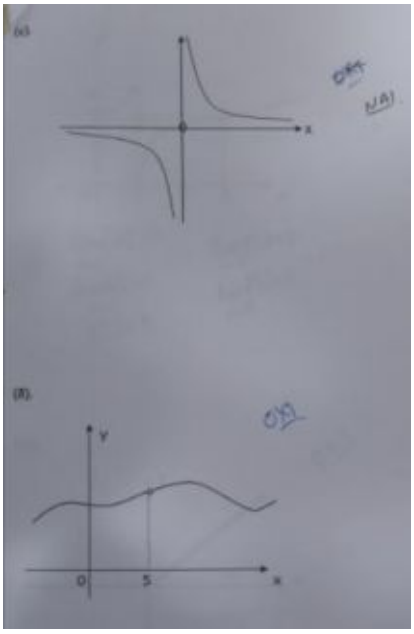
Κ – Βασικά … το πεδίο ορισμού … δεν ξέρω κατά πόσο το επηρεάζει … βασικά το επηρεάζει … πρέπει να το επηρεάζει … τώρα είναι οι φυσικοί.
Ερ – Στην προηγουμένη είχες απαντήσει ότι δεν είναι συνεχής. Σε αυτήν εδώ τώρα τι θα έλεγες;
Κ – … τώρα δεν ξέρω τι να πω …
Ερ – Το ένστικτό σου τι σου λέει;
Κ – Ούτε αυτή είναι.
Ερ – Γιατί; Γιατί κλίνεις προς τα εκεί;

Κ – Ίσως γιατί είναι της ίδιας μορφής.
Ερ – Ωραία. Γράψε απλά ότι δεν είναι συνεχής … (το γράφει) … Ωραία. Τέρμα οι τύποι τώρα. Έχουμε μόνο γραφήματα. Στο πρώτο γράφημα λες όχι. Γιατί;
Κ – Γιατί διακόπτεται σε αυτό το σημείο (δείχνει το 5)
Ερ – Ωραία. Αν έλειπε η κουκίδα στο y_2; Θα αλλάζει κάτι στην απαντήσεις του;
Κ – Όχι.
Ερ – Θα έλεγες πάλι ότι δεν είναι συνεχής;
Κ – Ναι.



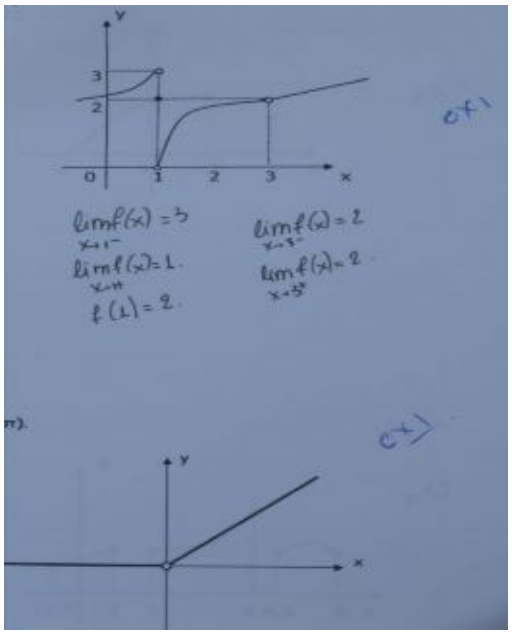
Οι σχέσεις με τα μαύρα γράμματα γράφτηκαν στη διάρκεια της συνέντευξης

Ερ – Ωραία. Η επόμενη τώρα;
Κ – Μια υποτίθεται ότι είναι η συνάρτηση εδώ έτσι;
Ερ – Ναι, ναι, όπως το βλέπεις.
Κ – Και πάλι όχι θα έλεγα.
Ερ – Γιατί;
Κ – Δεν θα έπρεπε να ήταν ορισμένη ας πούμε και εδώ; … (δείχνει την ανοιχτή κουκίδα στο y_2)
Ερ – Άρα εννοείς στο y_2 να ήταν γεμάτη η κουκκίδα;
Αν στο y_2 ήταν γεμάτη κουκίδα τότε θα ήταν συνεχής;
Κ – … όχι και πάλι.
Ερ – Γιατί;
Κ – … γιατί είναι σε άλλο y.
Ερ – Αν δοκίμαζες αλγεβρικά; Μπορείς πιστεύεις με τα όρια;
Κ – Με τα όρια;
Ερ – Ναι. Τι θα πρέπει να εξετάσεις;
Κ – Ότι το lim … (γράφει τι σχέσεις που φαίνονται παραπάνω) … άρα δεν είναι συνεχής.

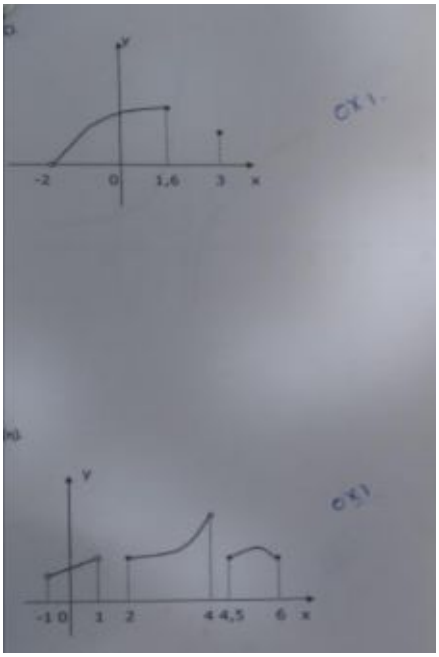


Ερ – Άρα τι σε χαλάει αλγεβρικά;
Κ – Το ότι δεν ορίζεται … όχι, και αν οριζόταν στο y_2 και πάλι δεν θα ήταν.
Ερ – Ωραία. Θέλεις να δοκιμάσεις να βρεις τα όρια και στην προηγούμενη;
Κ – … (γράφει τι σχέσεις που φαίνονται παραπάνω) …
Ερ – Ωραία. Άρα πάλι έχεις το ίδιο πρόβλημα;
Κ – … Όχι.
Ερ – Γιατί;
Κ – Γιατί εδώ είναι ίδια τα όρια αλλά δεν είναι ίσα με τη τιμή στο 5.
Ερ – Ωραία. Ας πάμε στην επόμενη, τη (γ).
Κ – Ναι, είναι συνεχής.
Ερ – Στο επιβεβαιώνει αυτό το γράφημα;
Κ – Ναι γιατί συνεχίζεται κανονικά.
Ερ – Σε χαλάει που είναι δύο κομμάτια;
Κ – Όχι. Γιατί; …Αφού έτσι δεν είναι η; …

Ερ – Όχι, δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι είναι κακό αυτό. Απλά ρωτάω.
Κ – Όχι, δεν με πειράζει.
Ερ – Ωραία, αυτή τώρα, η (δ);
Κ – Με πειράζει που έχει τρύπα.

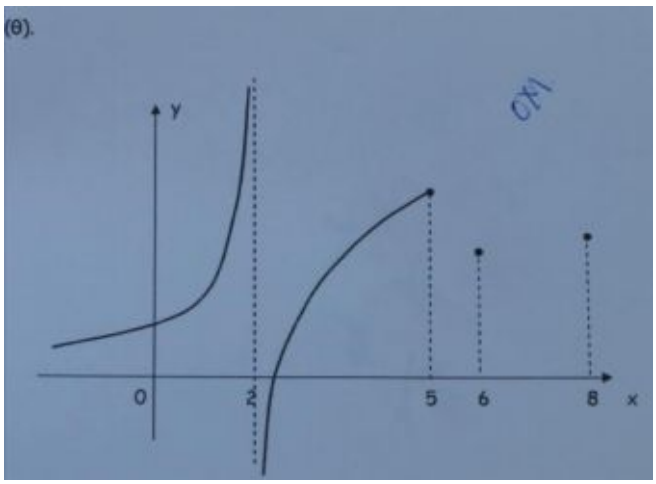


Ερ – Που έχει τρύπα. Η (ε);
Κ – Αυτή … είναι μια ένωση των προηγούμενων.
Ερ – Πες το ψέματα! Λες όχι, γιατί;
Κ – Να το κάνω με τα όρια πάλι;
Ερ – Μπορείς; Αν μπορείς, κάντο.
Κ – … (γράφει τις σχέσεις που φαίνονται δίπλα) … ναι δεν είναι. Στο 1 είναι όλα διαφορετικά …και στο 3 … τώρα δεν ξέρω βέβαια αν είναι σωστά αυτά που γράφω … στο 3 το f(3) δεν ορίζεται …
Ερ – Άρα;
Κ – Άρα δεν είναι συνεχής
Ερ – Ούτε στο 1 ούτε στο 3;
Κ – Ναι.
Ερ – Η κάτω;
Κ – Αυτή δεν είναι στο 0.
Ερ – Λόγω της τρύπας;

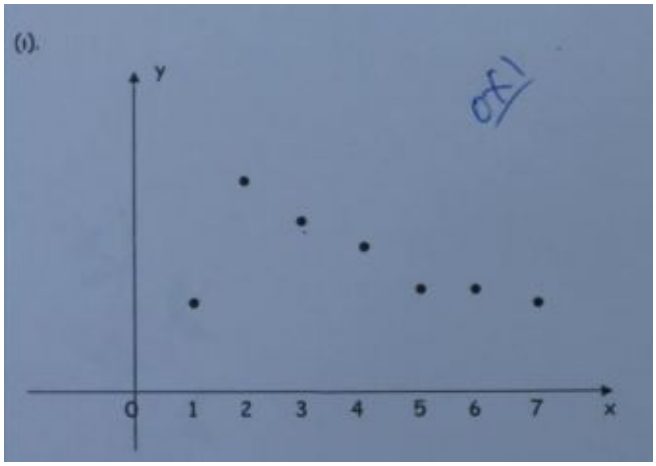


Κ – Ναι.
Ερ – Ωραία, η (ζ);
Κ – Εδώ δεν είναι στο -2 γιατί είναι ανοιχτό … στο 1,6 … δεν είναι …
Ερ – … γιατί;
Κ – Γιατί δεν υπάρχει από δεξιά το όριο … στο 3 … μάλλον … ξέρω εγώ …
Ερ - Τι λες για το 3;
Κ - Με προβληματίζει γιατί πριν είπα ότι δεν υπάρχει το όριο από δεξιά. Με την ίδια λογική εδώ δεν υπάρχει και τις δύο μεριές … εκατέρωθεν του 3.
Ερ – Άρα πώς θα τη χαρακτήριζες αυτή;
Κ – Ασυνεχή.
Ερ – Ασυνεχή λόγω του -2, έτσι; …
Κ – … ναι, λόγω που δεν …
Ερ – … υπάρχει το όριο δεξιά του 1,6; …
Κ – … ναι …
Ερ – … και λόγω του 3; …
Κ – … ναι.
Ερ – Ωραία. Η (η);
Κ – … πάλι ασυνεχής και στο -1 και στο 1, εδώ (δείχνει το 2) είναι συνεχής, και στο 4 πάλι είναι ασυνεχής.
Ερ – Ωραία. Στο 2 λες είναι συνεχής;
Κ – Ναι τώρα σκέφτομαι το από πάνω που είπα ότι στο 1,6 δεν είναι συνεχής.
Ερ – Ακριβώς. Αυτό ήθελα να σε ρωτήσω.
Κ – … Δεν υπάρχει … το αριστερό.

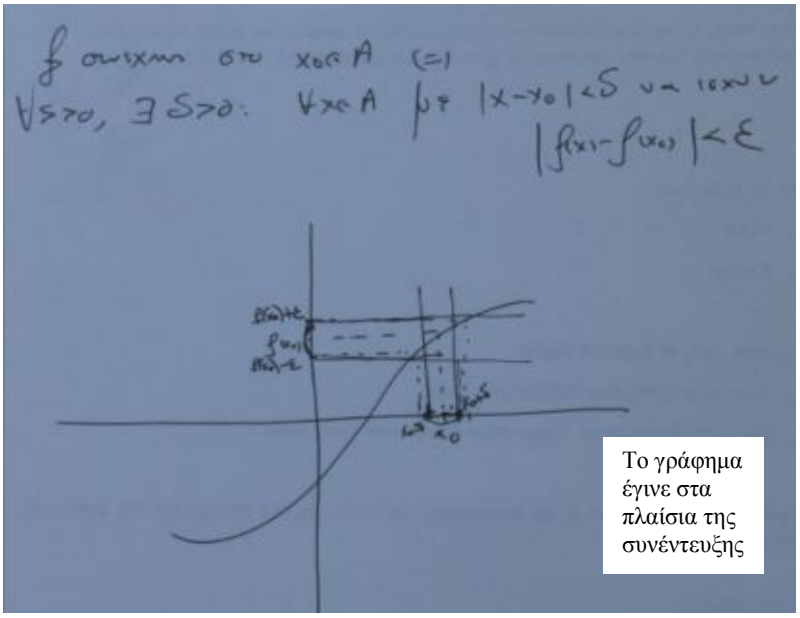
Ερ – Εννοείς ότι δεν υπάρχει όριο στο 2 από αριστερά;
Κ – Ναι.
Ερ – Άρα έχεις πρόβλημα όπως και εδώ; Δηλαδή σε όλα τα άκρα …
Κ – … ναι αλλά αυτή εδώ (δείχνει τη γραμμή που αντιστοιχεί στο διάστημα [4.5, 6]) θα την έλεγα συνεχή.
Ερ – Γιατί είναι σε κλειστό διάστημα;
Κ – Ναι.
Ερ – Α! Άρα αν γύριζα και στη (ζ) και έκανα και το -2 κλειστό;
Κ – Συνεχής.
Ερ – Τότε θα ήταν συνεχής;



Κ – Ναι.
Ερ – Κατάλαβα. Να δούμε τη (θ).
Κ – Όχι.
Ερ – Γιατί;
Κ – εεε … υποτίθεται ότι όλη αυτή είναι μία γραφική παράσταση, έτσι;
Ερ – Ναι, ένα γράφημα.
Κ – Λοιπόν το όριο στο 2 είναι συν άπειρο; … ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής; Που χαλάει η συνέχεια;
Κ – Στο 2 … στο 2.
Ερ – Στο 5;
Κ – … δεν υπάρχει από δεξιά το όριο.
Ερ – Άρα και εκεί χαλάει;
Κ – Ναι.
Ερ – Στο 6, στο 8;
Κ – … Πάλι σαν την προηγούμενη δεν είναι;



Ερ – Σαν το προηγούμενο. Ωραία, και η τελευταία;
Κ – Δεν είναι. Είναι μεμονωμένα.
Ερ – Μόνο κουκίδες. Αν τις ενώναμε;
Κ – Ναι.
Ερ – Θα ήταν. Αν τη γραμμή την κάναμε έτσι με γωνίες να ανεβοκατεβαίνει τότε θα ήταν;
Κ – Όχι.
Ερ – Γιατί;
Κ – Απλά το θυμάμαι από πέρσι
Ερ – Εντάξει! Αλλά την έκανα καμπύλη;
Κ – Τότε θα ήταν. Νομίζω έχει σχέση … όχι, όχι, μην μπλέξω την παράγωγο …



Ερ – Όχι, άστη! Μια τελευταία ερώτηση. Θα σου γράψω τον ορισμό της συνέχειας που έμαθες στο Πανεπιστήμιο και να σε ρωτήσω κάτι. (γράφω τον ορισμό) … Θέλεις να δοκιμάσεις να μου πεις τι θέλει να πει αυτός ο ορισμός; Δηλαδή, αν κάνουμε ένα απλό γράφημα μιας συνάρτησης … (κάνω το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … και βάλουμε ένα x_0 και ένα $f(x_0)$, τότε μπορείς να μου πεις πως ερμηνεύεται ο ορισμός που γράψαμε επάνω στο σχήμα; Πώς θα τον μεταφράζαμε;

Κ – … (σχεδιάζει) … αν πάρω δεξιά και αριστερά … εδώ είναι το x_0–δ και εδώ το x_0+δ … και εδώ είναι το $f(x_0)$+ε και εδώ … το $f(x_0)$-ε …ισχύει αυτό εδώ ότι … το f του … να υπάρχει ένα δ θετικό στον xx΄ … ώστε … ας πούμε το $f(x_0+δ)$ να κάνει $f(x_0)$+ε …

Ερ – … μάλιστα και υποθέτω αντίστοιχα …

Κ – … ναι αντίστοιχα και για το $f(x_0-δ)$.

Ερ – Ωραία. Και τα ενδιάμεσα;

Κ – Το ίδιο νομίζω.

Ερ – Από πού θα ξεκινήσω; Από το δ ή από το ε;

Κ – Από το δ.

Ερ – Ωραία, πολύ ωραία …

Κ – … όχι, όχι, από το ε!

Ερ – Γιατί;

Κ – Γιατί λέμε για κάθε ε.

Ερ – Ναι, δηλαδή από τον άξονα yy΄;

Κ – Ναι. Γιατί λέμε για κάθε ε

Ερ – Σου φαίνεται λογικό;

Κ – Ναι, αφού λέμε για κάθε ε υπάρχει και το αντίστοιχο δ.

Ερ – Σε χαλάει που ξεκινάμε από τον άξονα yy΄;

Κ – Όχι.

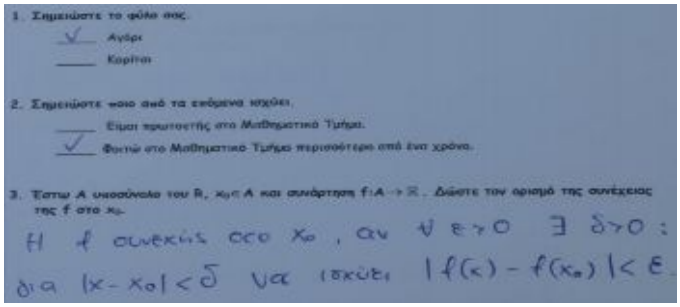
Ερ – Δηλαδή θα επιλέξεις y και θα βρεις το αντίστοιχο x;

Κ – … Ναι.

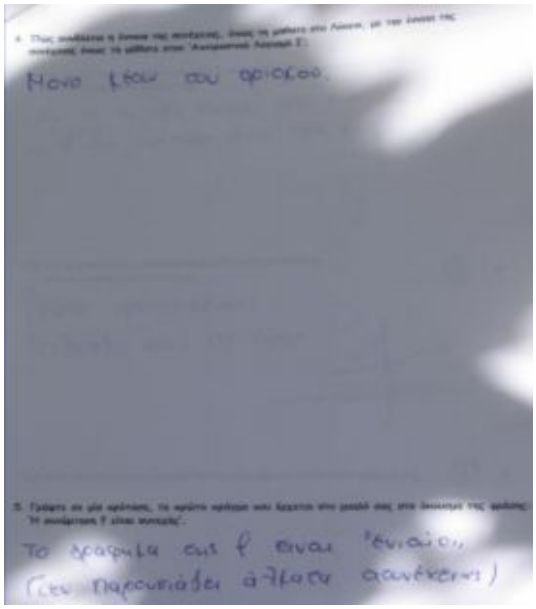
Ερ – Ωραία, Κατερίνα σε ευχαριστώ πολύ!

29η ΣΥΝΕΝΕΤΕΥΞΗ

‘Πυθαγόρας’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.



Ερ - Για τον ορισμό δεν θα πω κάτι τώρα. Θα το συζητήσουμε στο τέλος. Για πες μου λίγο στην επόμενη που λέμε πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας του Λυκείου με αυτήν που έμαθες στο Πανεπιστήμιο, τι εννοείς μόνο μέσω του ορισμού;



Π – Τι εννοούμε μέσω του ορισμού, ότι όπως και στο Λύκειο, όπως αναγκαστήκαμε να μάθουμε τη συνέχεια, δεν βρήκα καμία διαφορά, δηλαδή εγώ θυμάμαι τον εαυτό μου στο Λύκειο, δεν κατάλαβα ακριβώς, δηλαδή αποστήθισα τον ορισμό …

Ερ – … α! κάτσε, εσύ έχεις κάνει τον ε-δ ορισμό στο Λύκειο, έτσι; Είσαι παλιός!...

Π – … ναι, ναι, τον είχα κάνει …

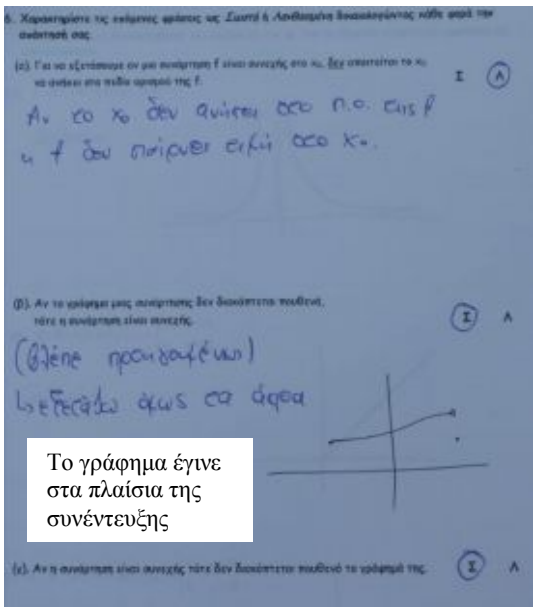
Ερ – … Σε σχέση με τον ορισμό που διδάσκεται τώρα;

Π – Δεν τον ξέρω αυτόν που κάνουν τώρα.

Ερ – Είναι ο κλασικός $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Π – Ναι, το ίδιο είναι ουσιαστικά γιατί αν αναπτύξουμε την έννοια του ορίου θα καταλήξουμε πάλι στον άλλο ορισμό αυτόν που έχουμε μάθει στον Απειροστικό Λογισμό.

Ερ – Ωραία. Για πες μου λίγο τώρα στην επόμενη τι εννοείς το γράφημα της f να είναι ενιαίο;



Το γράφημα έγινε στα πλαίσια της συνέντευξης

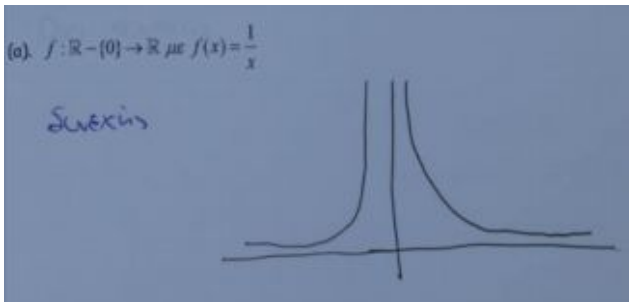
Π – Ενιαίο εννοούμε, βάζουμε κάτω το στυλό, κάνουμε το γράφημα, και το στυλό διαγράφει μία συνεχή γραμμή. Δηλαδή το γράφημα δεν παρουσιάζει κάποια κενά.

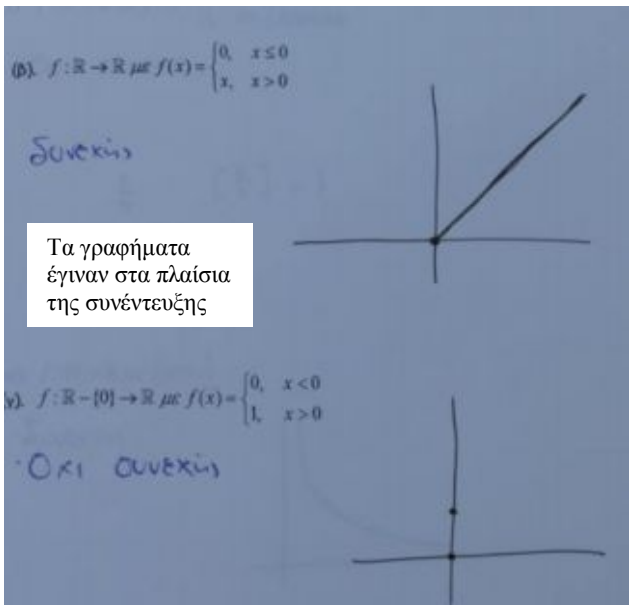
Ερ – Εννοείς δηλαδή συνεκτικό γράφημα;

Π – Ναι, συνεκτικό λέγεται; Δεν είμαι σίγουρος.

Ερ – Ωραία. Πάμε στην επόμενη. Λες εδώ ότι είναι λάθος γιατί τότε η f δεν παίρνει τιμή. Εντάξει. Είναι δικαιολογημένο, δεν έχω να ρωτήσω κάτι. Πάμε τώρα στο (β). Α! για να μου το εξηγήσεις λίγο αυτό εδώ. Λέμε αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά τότε είναι συνεχής.

Π – Είναι συνεχής, αλλά δεν ξέρουμε αν είναι σε όλο το πεδίο ορισμού. Πρέπει να δούμε και στα άκρα του …
Ερ – …κάτσε, εσύ το γράφημα βλέπεις. Αν το γράφημα δεν διακόπτεται πουθενά …
Π – … το γράφημα όμως εννοούμε από το ένα άκρο μέχρι το άλλο, στα άκρα δεν ξέρουμε τι γίνεται, μπορεί να είναι κυκλάκια.
Ερ – … δηλαδή …
Π – … να έχω διαφορετικές τιμές στα άκρα …
Ερ – … δηλαδή εννοείς να έχω κάτι τέτοιο αν καταλαβαίνω καλά; (σχεδιάζω το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Π – … ακριβώς, ναι.
Ερ – Αλλά αυτό δεν σε ενοχλεί, συνεχίζεις να λες ότι είναι σωστό, έτσι;
Π – Ναι, ναι
Ερ – Ωραία. Στο επόμενο τώρα λέμε ότι αν είναι συνεχής δεν θα διακόπτεται πουθενά.
Π – Ναι, φυσικά, είναι σωστό.

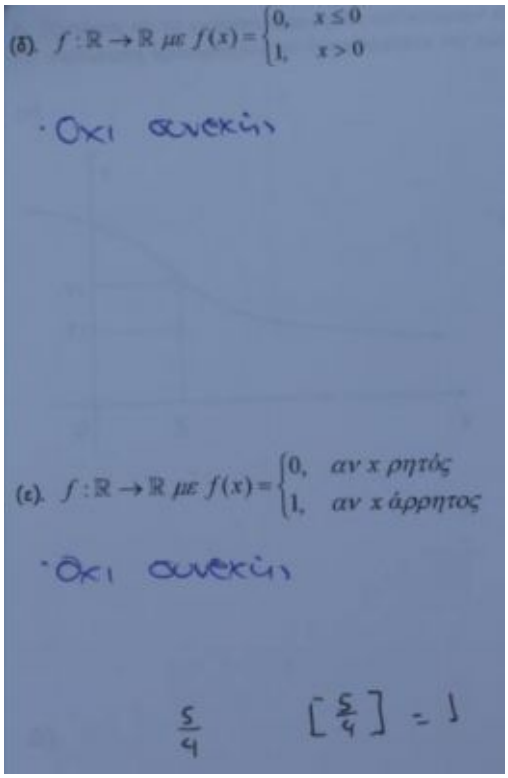




Τα γραφήματα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

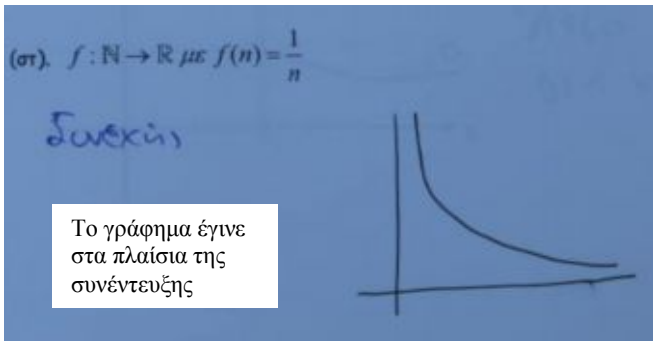
Ερ – Ωραία. Στο επόμενο τώρα. Μου κάνεις λίγο τη γραφική παράσταση αυτής;
Π – Ωχ, η 1/x ε; … πώς είναι τώρα; …
εεε … (κάνει το διπλανό γράφημα) … νομίζω ότι είναι αυτή.
Ερ – Ωραία. Αν είναι αυτή, σου επιβεβαιώνει το γράφημα ότι είναι συνεχής όπως έχεις απαντήσει;
Π – … ναι αλλά … για όλο το R θα μιλήσουμε;
Ερ – Το πεδίο ορισμού σου αναφέρεται.
Π – Ναι … το γράφημα δείχνει ότι είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία. Εσένα τι σου ήρθε στο μυαλό και απαντήσεις ότι είναι συνεχής;
Π – Νομίζω κάπως απλά, ως πολυωνυμική.
Ερ – Ωραία. Η επόμενη τώρα; Τι σου ήρθε στο μυαλό;
Π – Ε! Η ευθεία.
Ερ – Μου τη φτιάχνεις;
Π – Αμέ … (κάνει το διπλανό γράφημα) …
Ερ – Άρα, το γράφημά σου είναι η τελεία και …
Π – … και η ευθεία y=x προς τα πάνω …
Ερ – … μάλιστα. Σου επιβεβαιώνει το γράφημα ότι είναι συνεχής;
Π – Ναι.
Ερ – Όταν το απάντησες πως το σκέφτηκες;
Π – Το ίδιο, πολυωνυμική.
Ερ – Ωραία. Η επόμενη, η (γ);

Π – Α, ναι, αυτή. Αυτή θυμίζει λίγο Dirichlet.
Ερ – Γιατί όχι συνεχής;
Π – Αυτή είναι δύο σημεία.
Ερ – Δείξτα μου. Κάνε τη γραφική παράσταση.
Π – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) … είναι αυτό το σημείο (δείχνει το (0,0)) και αυτό το σημείο (δείχνει το (0,1)) …
Ερ – … και γιατί είναι …
Π – … μα μιλάμε για δυο σημεία! Δεν είναι γράφημα αυτό. Δεν υπάρχει κάποια ευθεία που να τα ενώνει! …
Ερ – …α! κατάλαβα …
Π – … ο άξονας είναι που τα ενώνει, αλλά ο άξονας είναι νοητός, δεν είναι μέρος του γραφήματος.

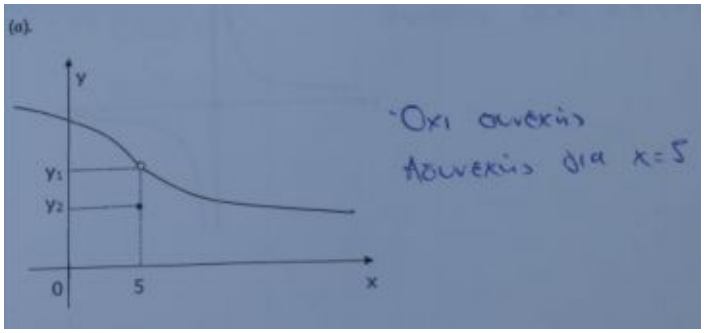


Ερ – Ωραία, κατάλαβα.
Ερ – Πάμε τώρα στη (δ). Εδώ τώρα;
Π – Το ίδιο, το ίδιο.
Ερ – Τι διαφορά, βλέπεις κάποια διαφορά από την προηγούμενη;
Π – εεε … με την προηγούμενη … κάτσε να δω … α, εδώ δίνει και την τιμή 0, α … μπορούμε να μιλήσουμε για συνέχεια σε ένα σημείο; … Σε ένα και μόνο σημείο; … αν μπορούμε να μιλήσουμε για συνέχεια σε ένα μόνο σημείο τότε εδώ υπάρχει διαφορά, ναι υπάρχει διαφορά … τότε στο 0 είναι συνεχής.
Ερ – Α, μάλιστα, στο 0 τώρα είναι συνεχής. Ως προς το γράφημα βλέπεις κάποια διαφορά;
Π – Ως προς το γράφημα καμία!
Ερ – Ως προς τη συνέχεια;
Π – Ως προς τη συνέχεια στο 0, αυτή είναι συνεχής εδώ.
Ερ – Γιατί;
Π – Γιατί ορίζεται στο 0 και παίρνει και την τιμή.
Ερ – Κατάλαβα. Ωραία. Πάμε στην (ε) …
Π – … αυτή είναι η Dirichlet.
Ερ – Γιατί δεν είναι συνεχής; Τι πιστεύεις;
Π – Θα επιμείνω σε αυτό που σου είπα. Αν μια συνάρτηση παίρνει τιμές μόνο σε δύο σημεία τότε για εμένα στο μυαλό μου δεν μπορεί αυτή να είναι συνεχής. Να μιλήσουμε για συνέχεια σημείων; Αυτή κιόλας, έχει το πρόβλημα με την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων. Μπλέκεται πολύ αυτό το πράγμα.
Ερ – Αν δοκίμαζες να κάνεις γραφική παράσταση πώς πιστεύεις ότι θα ήταν περίπου;
Π – Θα ήταν άπειρα σημεία …
Ερ – … κουκίδες; …
Π – … ναι άπειρες κουκίδες και στο 0 και στο 1. Ακριβώς γι αυτό δεν μπορούμε να μιλήσουμε για συνέχεια, έχουμε όλο κουκίδες.
Ερ – Κατάλαβα. Πες μου ένα ρητό.
Π – Ναι, ναι, 5/4.
Ερ – Μπορείς να μου πεις τον αμέσως μεγαλύτερό του;

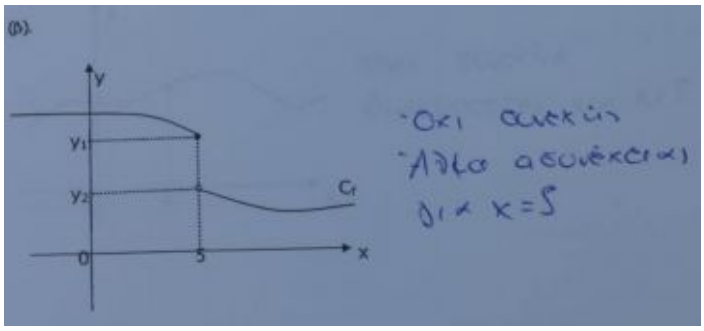
Π – Ρητό; … θέλεις το ακέραιο μέρος; …
Ερ – Ό,τι θέλεις εσύ. Αν νομίζεις ότι αυτός είναι ο αμέσως μεγαλύτερος.
Π – Εντάξει, θα σου πω το 6/4 (γελάει) … όχι … ο αμέσως μεγαλύτερος … (σκέφτεται) … όχι
Ερ –Γιατί; Μπορείς να βρεις άλλον ενδιάμεσα;
Π – Βέβαια. Πολλούς.
Ερ – Δηλαδή μπορείς να μου βρεις τον αμέσως μεγαλύτερο;
Π – Τον αμέσως μεγαλύτερο μόνο μέσω του ακέραιου μέρους μπορούν να στο πω.
Ερ – Ωραία, γράψτο μου.
Π – Παίρνουμε το ακέραιο μέρος του 5/4,το οποίο είναι 1.
Ερ – Ναι, αλλά αυτό είναι μικρότερο.
Π – Ναι, μικρότερος.
Ερ – Α! Καλή ερώτηση. Μήπως το ακέραιο μέρος είναι ο αμέσως μικρότερος ρητός;
Π – Όχι απαραίτητα … δεν είναι ο αμέσως μικρότερος, είναι λίγο ασαφές το τι εννοούμε ο αμέσως στους πραγματικούς …
Ερ – … ακριβώς ο επόμενος …
Π – … δηλαδή στους φυσικούς στους ακεραίους και στους ρητούς επειδή έχουμε μια ομαλή μετάβαση μπορούμε να μιλάμε για τον αμέσως μεγαλύτερο ενώ στους πραγματικούς …
Ερ – … μα εγώ για ρητούς σε ρωτάω, τον αμέσως μεγαλύτερο του ρητού.
Π – Το κακό με τους ρητούς είναι ότι μπορούμε να κάνουμε υποδιαίρεση. Έτσι το 5/4 μπορούμε να το γράψουμε 10/8 και άρα μπορώ να πω ότι το είναι το 11/8 το αμέσως μεγαλύτερο αλλά και στο 10/8 μπορώ να το κάνω ακόμα υποδιαίρεση, άρα θα βρίσκουμε συνέχεια τέτοια κλάσματα,
Ερ – Άρα τι θα μου απαντούσες;
Π – Για τον αμέσως μεγαλύτερο δεν μπορώ να τον βρω, είναι ασαφές.



Ερ – Ωραία. Πάμε στην (στ).
Π – Αυτή είναι η 1/x απλά έχει πεδίο ορισμού μόνο τους φυσικούς.
Ερ – Μπορείς να μου πεις ποια θα είναι η διαφορά της ως προς την γραφική παράσταση;
Π – Σε σχέση με την προηγούμενη που έκανα πριν;
Ερ – Ναι.
Π – εεε … μιλάμε γι' αυτή εδώ συγκεκριμένα, ε; … σε αυτήν περιλαμβάνεται και το 0;
Ερ – Ε, όχι!
Π – Ε, η μόνη διαφορά είναι ότι αυτή δεν παίρνει αρνητικές τιμές.
Ερ – Δηλαδή πως θα έκανες τη γραφική παράσταση;
Π – Θα ήταν το δεξί μέρος της προηγούμενης … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ – Το είναι συνεχής πώς το απάντησες;
Π – Πολυωνυμική!
Ερ – Και το γράφημα σου το επιβεβαιώνει;
Π – Το γράφημα μου το επιβεβαιώνει, βέβαια.

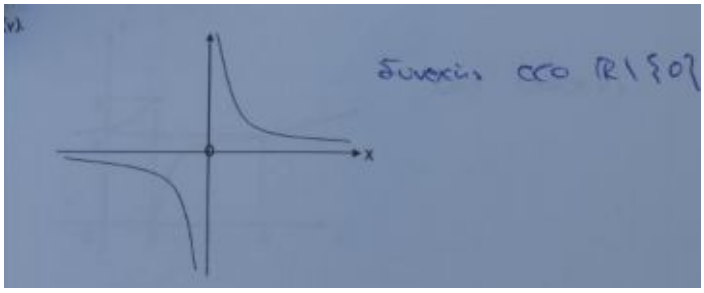


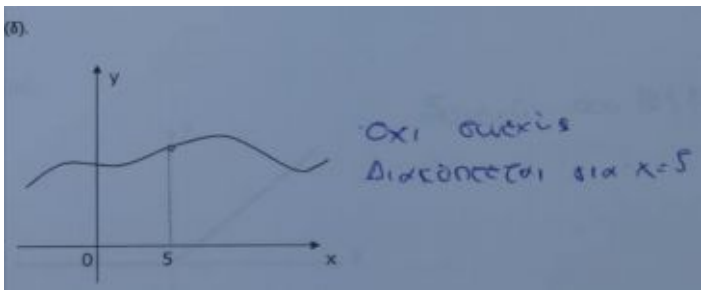
Ερ – Ωραία. Εδώ λες όχι συνεχής, ασυνεχής στο 5. Γιατί;
Π – Γιατί υπάρχει αυτό, αυτή η διαφορετική τιμή στο x=5.
Ερ - Αν προσπαθούσες μαθηματικά, πώς θα μου το δικαιολογούσες;
Π – Θα μπορούσα να πάρω πλευρικά όρια για παράδειγμα, και θα έδειχνα ότι εδώ τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, άρα και το όριο … Α όχι! θα είναι διαφορετικά το όριο από την τιμή, οπότε ξεφεύγουμε από τον ορισμό.



Ερ – Ωραία. Το (β);
Π – Το (β) είναι πάλι αυτή η άλλη χαρακτηριστική περίπτωση ασυνέχειας που … α! … ναι είναι ασυνεχής γιατί αν και το αριστερό όριο είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο 5, δεν είναι ίσο με το δεξί όριο.

Ερ – Άρα έχεις άλλα πλευρικά όρια;
Π – Ναι.
Ερ – Αν την έκανα ανοιχτή αυτή την κουκίδα στο y_1;
Π – Αν την έκανες ανοιχτή αυτή την κουκίδα στο y_1, πάλι θα ήταν ασυνεχής γιατί θα είχαμε διαφορετικά πλευρικά όρια.
Ερ – Ωραία. Αν εξαφάνιζα την κουκίδα του y_2 στο προηγούμενο γράφημα το (α);
Π – Ναι … πάλι υπάρχει ένα σημείο ασυνέχειας. Είτε δεν το ορίζουμε, είτε κάτι συμβαίνει.



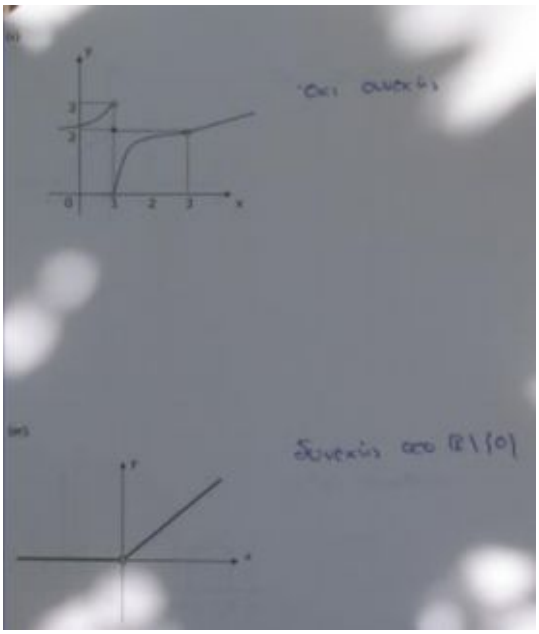


Ερ – Ωραία, κατάλαβα.
Ερ – Εδώ τώρα λες συνεχής στο R-{0} …
Π – … ωχ, αυτή είναι η 1/x (γελάει) …
Ερ – … δεν πειράζει. Σε πειράζει που οι δύο κλάδοι δεν ενώνονται μεταξύ τους;
Π – εεε … όχι, δεν χαλάει γιατί θα μπορούσε να εξεταστεί η συνέχεια ξεχωριστά, δηλαδή αφού αυτή η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 0, θα εξετάσουμε τι συμβαίνει από το μείον άπειρο μέχρι το 0 που είναι συνεχής, θα εξετάσουμε από το 0 με τα μέχρι το συν άπειρο που είναι επίσης συνεχής, άρα στην ένωση αυτών των δύο συνόλων η συνάρτηση είναι

συνεχής. Εκεί που προφανώς δεν ορίζεται, δε μας ενδιαφέρει η συνέχεια, δεν θα την εξετάσουμε.

Ερ – Ωραία, το (δ);

Π – Ναι, είναι πάλι κλασική περίπτωση. Δεν είναι συνεχής γιατί διακόπτεται στο 5 και μετά συνεχίζεται πάλι το γράφημα.



Ερ – Ωραία, στην (ε);

Π – Το ίδιο, χαμός! Για x=1 παίρνει y=2, αλλά τα πλευρικά όρια δεν συμφωνούν … όχι είναι ασυνεχής και μάλιστα έχει δύο σημεία ασυνέχειας, στο x=1 και στο x=3.

Ερ – Ωραία. Η (στ);

Π – Α, ναι αυτή είναι η προηγούμενη που είδαμε, είναι η f(x)=x …

Ερ – … ποια είπες ότι είναι αυτή;

Π – Την έχουμε και πριν. Απλά πριν, είχα πει ότι είναι μια κουκίδα και μετά μια ευθεία. Αλλά είναι αυτή εδώ εκτός από το 0 …

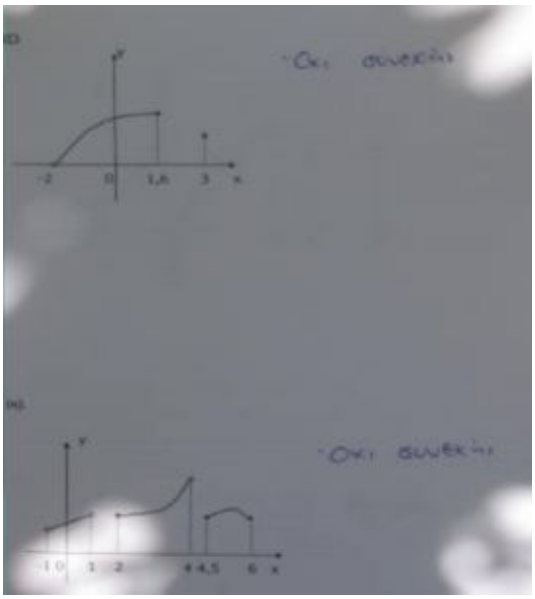
Ερ – … και είναι συνεχής …

Π – … εκτός από το 0.

Ερ – Ωραία, η (ζ);

Π – Στο (ζ) πάλι, για x=2 έχουμε ένα σημείο ασυνέχειας …

Ερ – … γιατί;



Π – Γιατί … γιατί ενδεχομένως να ορίζεται; Δεν ξέρουμε τι συμβαίνει εκεί. Είναι ανοιχτό κυκλάκι άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε τι συμβαίνει. Υπάρχει και ένα σημείο που είναι εκτός του γραφήματος, έτσι μεμονωμένο. Δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού, είναι συνεχής μόνο από το -2 μέχρι το 1,6.

Ερ – Τότε γιατί μου είπες ότι στο -2 έχεις πρόβλημα;

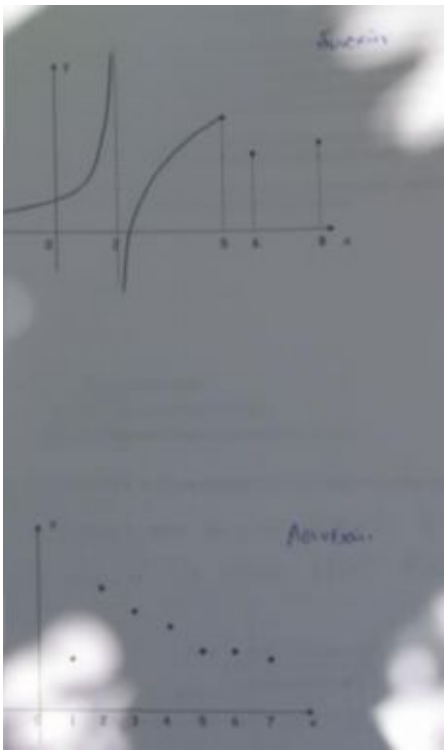
Π – Επειδή είναι διαφανές το κυκλάκι, δεν ξέρω τι τιμή παίρνει. Μπορεί να ορίζεται.

Ερ – Ωραία. Αν τώρα η γραμμή συνέχιζε μέχρι το 3;

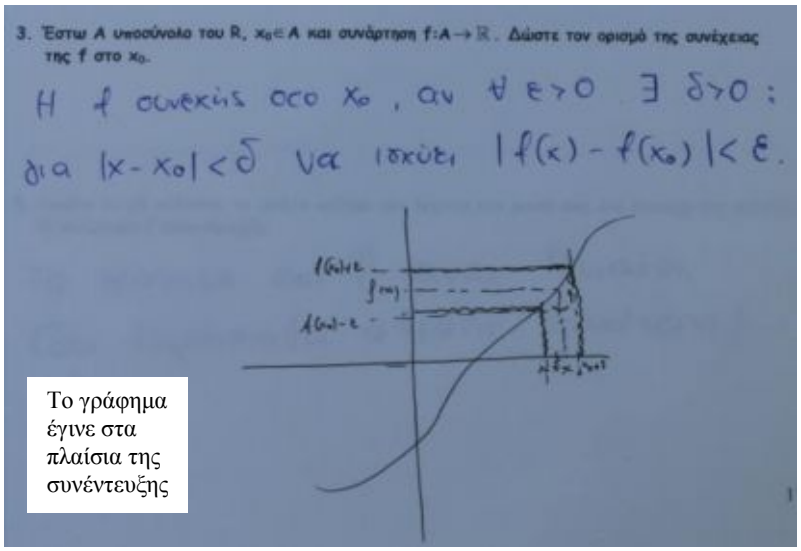
Π – Τότε θα ήταν συνεχής από το -2 μέχρι το 3. Δεν ξέρουμε τι συμβαίνει στο -2.

Ερ – Στην (η);

Π – Και εδώ το ίδιο. Στο -1 και το 1 έχουμε σημεία που δεν ξέρουμε, από το 2 μέχρι το 4 είναι συνεχής, στο 4 πάλι δεν ξέρουμε, και μετά πάλι υπάρχει ένα άλμα ασυνέχειας εδώ, έχει δύο άλματα ασυνέχειας αυτή και τρία μεμονωμένα σημεία.



Ερ – Κατάλαβα. Η (θ);
Π – Ενδιαφέρουσα αυτή. Αυτή θα ήταν συνεχής αν δεν είχε αυτά τα δύο μεμονωμένα σημεία, το 6 και το 8.
Ερ – Το υπόλοιπο θα ήταν;
Π – Το υπόλοιπο να είναι συνεχές.
Ερ – Το 2 δεν σε χαλάει;
Π – Όχι δεν με χαλάει, γιατί προφανώς απειρίζεται στο 2 αυτή.
Ερ – Εννοείς ότι τα πλευρικά όρια πάνε στο άπειρο ...
Π – … ναι, όπως φαντάζομαι από το γράφημα της δεν πρέπει να παίρνει τιμή στο 2. Οπότε δεν το εξετάζουμε καν το 2 σαν σημείο στο γράφημα της. Μιλάμε πριν το 2 και μετά το 2 που είναι συνεχής αλλά υπάρχουν και εκείνα τα δύο μεμονωμένα σημεία που μας χαλάνε. Α! Όμως την είχα βάλει συνεχής αυτή, τώρα το είδα.
Ερ – Θα το άλλαζες;
Π – Ναι, είναι ασυνεχής.
Ερ – Λόγω του …
Π – … λόγω των δύο μεμονωμένων σημείων αλλά και λόγω του ότι απειρίζεται στο 2. Βέβαια θα μπορούσαμε να το αφήσουμε κι απ έξω αυτό όπως είπα πριν γιατί μπορεί και να μην ορίζεται καν εκεί, γιατί βλέπω έχεις κάνει και μία διακεκομμένη γραμμή στο 2 …
Ερ – … ναι για να δείξουμε ότι το γράφημα τείνει ασυμπτωτικά σε αυτή την ευθεία.
Π – Ναι, ναι, όχι θα το άλλαζα, είναι ασυνεχής.
Ερ – Ωραία, και η τελευταία;
Π – Μια κλασσική συνάρτηση σημειακή. Ασυνεχής.
Ερ – Δεν μου λες, αν ενώσω τις κουκίδες;
Π – Αν ενώσουμε τις κουκίδες ναι, θα υπάρχει μία συνέχεια.
Ερ – Δεν μου λες, αν της ενώσω με γωνία έτσι ώστε να ανεβοκατεβαίνει κοφτά η ευθεία;
Π – Α, με γωνία … κατάλαβα … θα είναι … και με γωνία θα είναι, ναι.
Ερ – … οπότε …
Π – … δεν μου είναι ξεκάθαρο βέβαια να σου πω την αλήθεια, η γωνία κάτι μου κάνει ότι μπορεί εκεί με τα πλευρικά κάτι να συμβαίνει … να μην γίνεται σωστά. Αλλά από την άλλη, με γωνίες θα μπορούσες να τις ενώσεις και να πεις σαν την f(x)=x που είναι ευθεία, που την f(x) την αλλάζεις μετά και την κάνεις μια γωνία … δεν βλέπω γιατί να μην είναι συνεχής.
Ερ – Εγώ απλά ρωτάω!
Π – Αν τις ένωνες ναι, θα μου φαινόταν συνεχής.
Ερ – Είτε με καμπύλη είτε με γωνίες;
Π – Ναι, αν και με γωνίες θα μου φαινόταν λίγο περίεργη, ναι …
Ερ – … αλλά πάντως …
Π – … πάντως ναι, θα έλεγα συνεχής.
Ερ – Ωραία. Κατάλαβα.



Το γράφημα έγινε στα πλαίσια της συνέντευξης

Ερ – Να ξαναγυρίσουμε τώρα λίγο στον ορισμό. Όπως βλέπω τον έχεις γράψει σωστά. Έχεις λοιπόν ένα μαθητή της Γ΄ Λυκείου που βλέπει τον ορισμό και θέλει να του τον εξηγήσεις με απλά λόγια. Τι …

Π – … τι θα του έλεγα εγώ τώρα, ε; Λοιπόν, εμείς θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0 οι τιμές f(x) είναι πολύ κοντά στο $f(x_0)$. Τι εννοούμε πολύ κοντά. Εννοούμε δηλαδή ότι τα όρια αυτά, μπορούμε να βρίσκουμε ένα ε θετικό, το οποίο να μικραίνει, να μικραίνει, να μικραίνει όλο και πιο πολύ, δηλαδή αυτές οι γραμμές όλο και να πλησιάζουν το $f(x_0)$ και αντίστοιχα, για κάθε τέτοιο ε …

Ερ – … δηλαδή αν κατάλαβα καλά, εννοείς αυτή η ζώνη γύρω από …

Π – … ακριβώς από το $f(x_0)$-ε μέχρι το $f(x_0)$+ε, και αυτό να συμβαίνει για κάθε ε, να πηγαίνουμε οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο $f(x_0)$,δηλαδή θέλουμε συνεχώς να μικραίνει αυτή η ζώνη, και αντίστοιχα θέλουμε για κάθε ε, να υπάρχει ένα αντίστοιχο δ, το οποίο να μας κάνει αυτή τη δουλεία. Δηλαδή να είναι εδώ το x_0+δ, εδώ το x_0-δ. Ο σκοπός πάντως είναι οι τιμές να είναι κοντά στο $f(x_0)$.

Ερ – Πού σημαίνει ότι το x_0+δ μεταφέρεται στο $f(x_0)$+ε; …

Π – … νναι, ναι.

Ερ – … και αντίστοιχα το x_0-δ μεταφέρεται στο $f(x_0)$-ε; …

Π – Ναι, ναι.

Ερ – Άρα είναι μια ζώνη; …

Π – … η οποία απεικονίζεται επάνω

Ερ – Από πού θα ξεκινήσεις για να φτιάξεις αυτές τι δύο ζώνες;

Π – Από το ε. Σκοπός είναι να καταλήξω να αποδείξω ότι θα ισχύει αυτή η σχέση για κάθε ε. άρα παίρνω ένα τυχών ε. Αρκεί για αυτό το τυχών ε το οποίο όμως εξαρτάται και από το x_0, δηλαδή το δ το οποίο θα χρησιμοποιήσω δεν θα είναι συνάρτηση μόνο του ε. Για να πάψει να εξαρτάται από το σημείο, τότε μιλάμε για ομοιόμορφη συνέχεια, είναι κάτι λίγο πιο προχωρημένο. Αλλά εξαρτάται από το ε γιατί αν θεωρήσουμε ένα τυχών ε, τότε θέλουμε να βρούμε και κάποιο δ που να μας κάνει αυτή τη δουλεία.

Ερ – Δεν σε χαλάει το γεγονός ότι από τα y πας στα x;

Π – … όχι. Όχι …από τα y πάω στα x … αυτό τώρα που μου λες με προβληματίζει λίγο … όχι, από το f(x) θα ξεκινήσω όπως και να έχει.

Ερ – Σίγουρα; Ναι;

Π – Ναι, ναι.

Ερ – Απλά λίγο σε χαλάει που από τα y πας στα x;

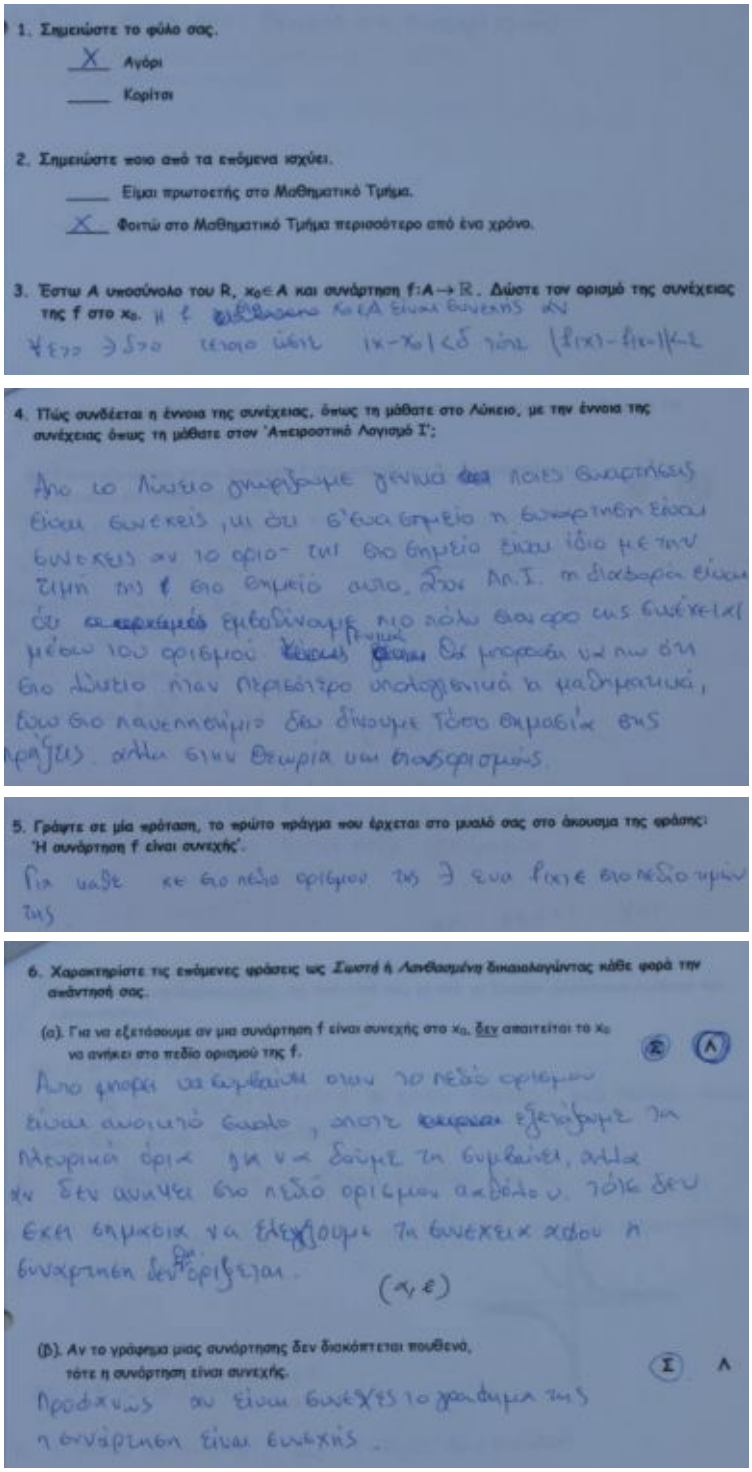
Π – εεε … εντάξει, αλλά δεν με προβληματίζει και τόσο.

Ερ – Ωραία. Αν αναποδογυρίσω αυτά; Υπάρχει δ ώστε για κάθε ε κ.λ.π, κ.λ.π; Τι γίνεται τότε;

Π – Ουσιαστικά νομίζω ότι δεν υπάρχει διαφορά … Νομίζω ότι επί της ουσίας δεν αλλάζει κάτι.
Ερ – Μήπως δηλαδή αυτό αν το έκανα θα μου έλυνε το πρόβλημα με τη μετάβαση από το y στο x;
Π – Δεν αλλάζουμε κάτι ουσιαστικό σε αυτή την περίπτωση, απλά αλλάζουμε τη σειρά. Εεε … δεν αλλάζει όμως και το ζητούμενο, που είναι να καταλήξουμε σε μια τέτοια σχέση που να ισχύει για κάθε ε. Όχι, δεν νομίζω πάντως ότι υπάρχει πρόβλημα, γίνεται και έτσι αφού πάλι θα ισχύει η σχέση για κάθε ε.
Ερ – Πολύ ωραία, Πυθαγόρα σε ευχαριστώ πολύ!

30η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Νοστράδαμος’, φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.



1. Σημειώστε το φύλο σας.

X Αγόρι

___ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα εκόμενα ισχύει.

___ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

X Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

6. Χαρακτηρίστε τις εκόμενες φράσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

Ερ – Στον ορισμό θα γυρίσω μετά να ρωτήσω κάτι. Να δούμε λίγο την επόμενη, την 4. Εδώ λες … (διαβάζω την απάντησή του) … Μάλιστα, κατάλαβα. Πώς τον βλέπεις εσύ δηλαδή τον ορισμό του Λυκείου σε σχέση με αυτόν του Πανεπιστημίου, έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους;

Ν – Απλά στον ορισμό του Λυκείου, ψάχναμε περισσότερο, … δεν κοιτάζαμε σε κάποιο διάστημα αλλά κοιτάζουμε σε ένα σημείο, παίρναμε ας πούμε το όριο και κοιτάζαμε να δούμε αν είναι ίδιο με τη τιμή στο σημείο, είναι αυτή περισσότερο η διαφορά ενώ εδώ μελετάμε σε διάστημα.

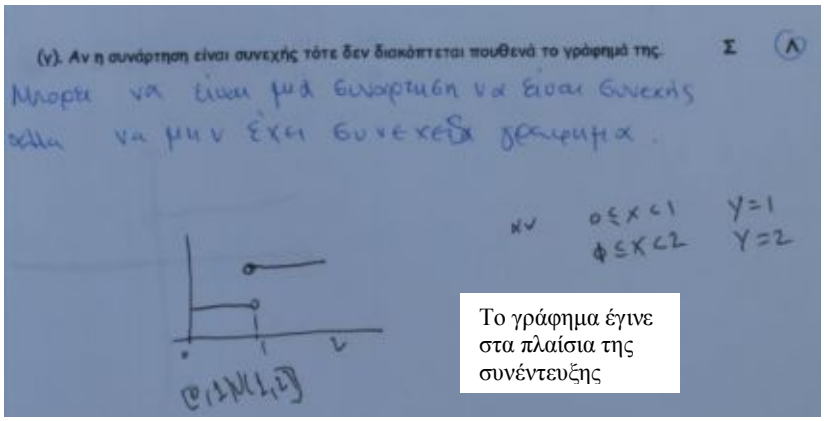
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Στην επόμενη λες … (διαβάζω την απάντησή του) … Ωραία, ως προς το γράφημά της, έρχεται κάτι στο μυαλό σου όταν ακούς συνεχής συνάρτηση;

Ν – Όχι, μπορεί να είναι οτιδήποτε και παρόλα αυτά να είναι συνεχής.

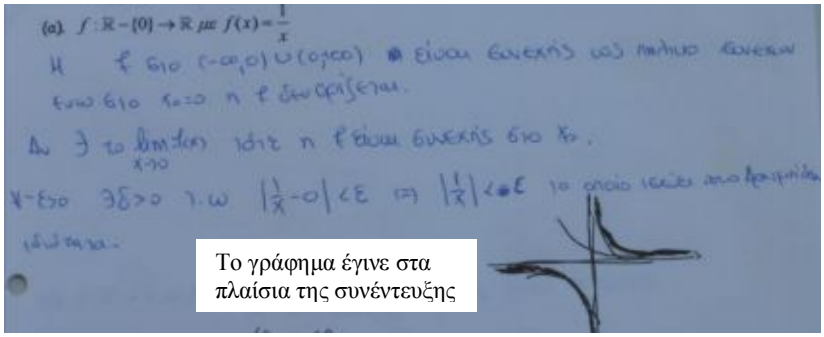
Ερ – Ωραία. Στην 6 τώρα, στο (α) λες λάθος … (διαβάζω την απάντηση του) … δηλαδή για να καταλάβω, αν έχω το(α, β), μπορώ να εξετάσω τη συνέχεια στο α;

Ν – Ουσιαστικά με τον ορισμό του Λυκείου, αν πάρουμε το πλευρικό όριο.

Ερ – Άρα μπορώ να εξετάσω τη συνέχεια εκεί;
Ν – Ναι.
Ερ – Ωραία, και άρα αντίστοιχα στο β, ε; Ωραία. Στο (β) τώρα λες ότι αν είναι συνεχές το γράφημα της συνάρτησης τότε είναι συνεχής η συνάρτηση. Μάλιστα.

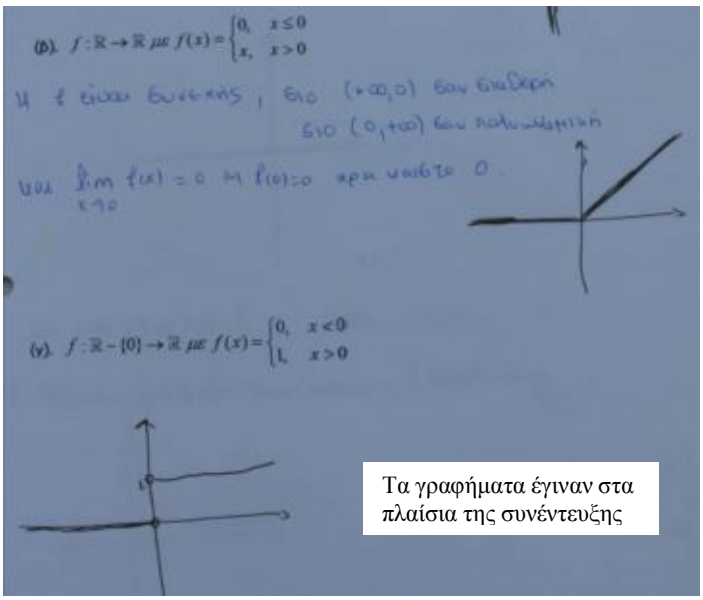


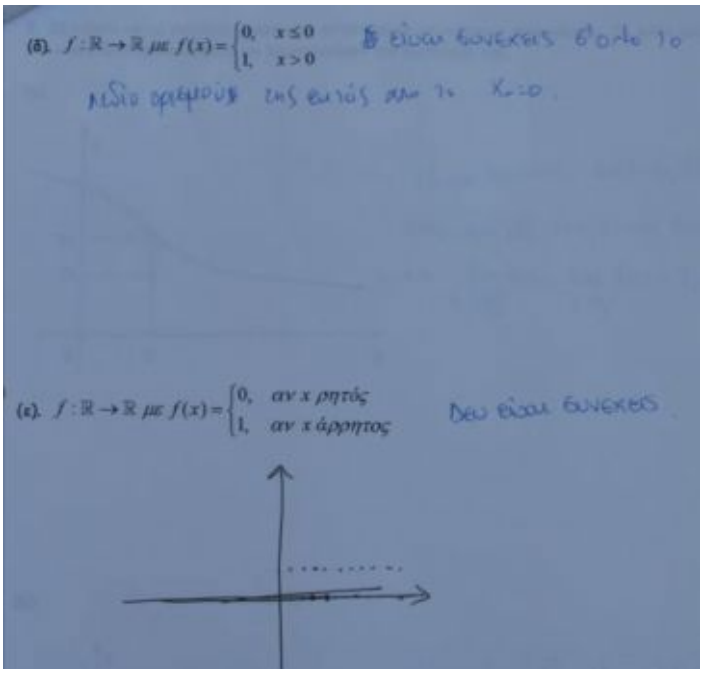
Ερ – Στην επόμενη τώρα λες ότι μπορεί να είναι μία συνάρτηση συνεχής αλλά να μην έχει συνεχές γράφημα. Ενδιαφέρων. Έχεις κάποια κατά νου;
Ν – …
Ερ - Σου ήρθε κάτι στο μυαλό όταν απάντησες έτσι; Τώρα που το ξανακοιτάς μήπως σκέφτεσαι κάτι;
Ν – Ίσως μπορεί να είναι κάπως έτσι … (σχεδιάζει το διπλανό γράφημα) … ας πούμε μπορεί να είναι έτσι, κλιμακωτή … αλλά αυτή ορίζεται στο 1, οπότε έχει ένα σημείο ασυνέχειας στο 1…
Ερ – Άρα είναι συνεχής;
Ν – Όχι. Αλλά αν ορίζεται σε κάποια διαστήματα τότε η συνάντηση θα είναι συνεχής αλλά το γράφημά της δεν θα είναι συνεχές.
Ερ – Κατάλαβα τι λες. Μπορείς να αλλάξεις κάτι στο γράφημα που έχεις κάνει εδώ για να ταιριάζει με αυτό που μου λες;
Ν – Ναι, αν την κάνουμε εδώ ανοιχτή αυτή στο 1.



Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα, ανοιχτό λοιπόν στο 1. Ωραία. Στην 7 τώρα την (α) λες … (διαβάζω την απάντησή του) … Άρα τελικά τι θα έλεγες για αυτήν, είναι συνεχής;
Ν – Είναι σίγουρα συνεχής σε όλο το R-{0} και από την αρχιμήδεια ιδιότητα βρίσκουμε ότι υπάρχει ένα δ ώστε να ισχύει ο ορισμός και εκεί.
Ερ – Άρα είναι συνεχής και στο 0;
Ν – Ναι.
Ερ – Ωραία. Μπορείς να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;… αν τη θυμάσαι;
Ν – … (κάνει το παραπάνω γράφημα) … είναι αυτή νομίζω …κάπως έτσι …
Ερ – Ωραία. Αν το γράφημα είναι αυτό, σε βοηθάει, σου επιβεβαιώνει αυτό που έχεις απαντήσει;
Ν – …
Ερ – Εννοώ σε βοηθάει το γράφημα να επιβεβαιώσεις αν η συνάρτηση με συνεχής ή όχι;
Ν – Ουσιαστικά έτσι όπως είναι το γράφημα, η συνάντηση δεν ορίζεται σε κάποια τιμή, στο 0.

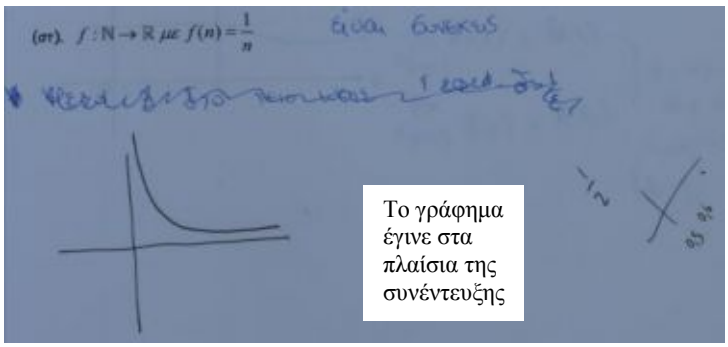
Ερ – Ναι, δηλαδή; Κάποιο από τα δύο μπορεί να είναι λάθος;
Ν – … τώρα δεν είμαι σίγουρος για το γράφημα.
Ερ – Α, Μπορεί να είναι λοιπόν λάθος το γράφημα, ε;
Ν – Έχω τώρα μπερδευτεί με την lnx.
Ερ – Μην σε απασχολεί αυτό. Ας υποθέσουμε ότι είναι σωστό το γράφημα.
Ν – Αν το γράφημα είναι σωστό, τότε η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συνεχής στο μηδέν, γιατί όταν πάρουμε το ένα πλευρικό όριο τείνει στο συν άπειρο ενώ αν πάρουμε το άλλο πλευρικό όριο τείνει στο μείον άπειρο. Οπότε …
Ερ – Εντάξει, ας το αφήσουμε προς το παρόν.



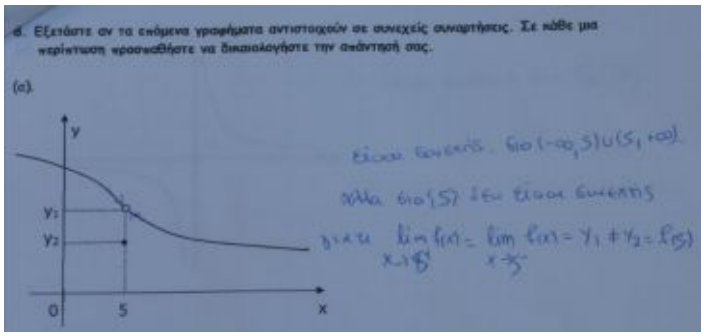


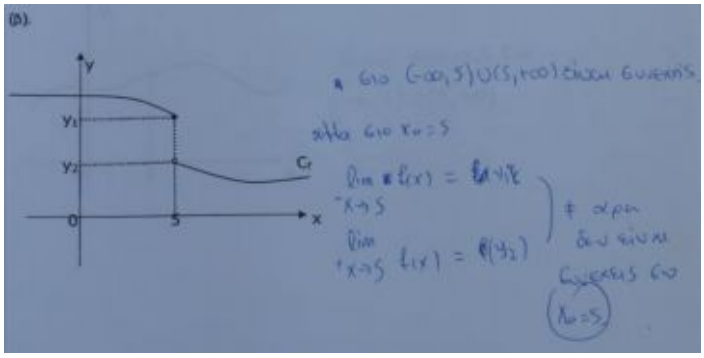
Ερ – Πάμε στη (β). Εδώ το αναλύεις προσεκτικά, και μου λες ότι είναι συνεχής και στο 0. Θέλεις να μου κάνεις και εδώ τη γραφική παράσταση;
Ν – … (κάνει το διπλανό γράφημα) …
Ερ – Ωραία, Το γράφημα σου επιβεβαιώνει την αρχική σου απάντηση;
Ν – Ναι.
Ερ – Ωραία, η (γ); Σε προβληματίσε;
Ν – … για να τη δω … (κάνει το γράφημά της) … Ουσιαστικά είναι συνεχής και αυτή στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Ωραία. Σαν τύπο, έτσι όπως την είδες; Σε προβληματίσε και δεν την απάντησες;
Ν – Τώρα δεν θυμάμαι ακριβώς, αλλά μάλλον πρέπει για να μην την είχα απαντήσει.
Ερ – Μήπως τώρα που την ξαναβλέπεις μπορείς να καταλάβεις τι ήταν αυτό που σε είχε κάνει να μην μπορείς να την απαντήσεις;
Ν - Ίσως να νόμισα ότι το 0 ήταν μέσα στο πεδίο ορισμού ή κάτι άλλο να με είχε μπερδέψει.
Ερ –Κατάλαβα, αλλά τώρα που το βλέπεις;
Ν – Όχι, είναι συνεχής, εφόσον το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, άρα δεν έχουμε λόγο να το εξετάσουμε. Άμα ήταν ορισμένη στο 0 τότε δεν θα ήταν συνεχής γιατί το ένα όριο θα πήγαινε στο 0 και το άλλο στο 1.

Ερ – Άρα, νομίζω ότι αυτό είναι το πρόβλημα που έχουμε στη (δ); Άρα;…
Ν – Εδώ δεν είναι συνεχής στο 0, ναι.
Ερ – Στην (ε) τώρα; Λες ότι αυτή δεν είναι συνεχής, γιατί; Τι σε χαλάει σε αυτή;
Ν – Γιατί ουσιαστικά θα είναι … θα είναι κάτι σαν σημεία … θα είναι κάπως έτσι … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω και το σχολιάζει) … επειδή ξέρουμε ότι και οι ρητοί και οι άρρητοι είναι πυκνοί στο R, θα είναι τέτοιες κουκίδες πολύ κοντά μεταξύ τους και πάνω και κάτω, ένα γράφημα όλο τελείες.
Ερ – Α, μάλιστα. Και άρα θα είναι ασυνεχής;
Ν – …
Ερ – Δηλαδή τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι είναι ασυνεχής;
Ν – … ουσιαστικά αφού ξέρουμε ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει ένας άρρητος, αν πάρουμε τον άρρητο και πάρουμε το όριο, το όριο θα τείνει στο 1, ενώ αυτός θα είναι 0.
Ερ – Κατάλαβα τι λες. Μπορείς να μου πεις ένα ρητό;
Ν – το ½.
Ερ – Μπορείς να μου πεις τον αμέσως μεγαλύτερό του;
Ν – Τον αμέσως μεγαλύτερο;
Ερ- Ναι.
Ν – εεε … το 3/2;…
Ερ – Είναι ο αμέσως μεγαλύτερος; Δεν θέλω απλά ένα μεγαλύτερο, θέλω τον αμέσως μεγαλύτερό του.
Ν – ...
Ερ – Μπορείς να γράψεις ότι θέλεις …
Ν – …
Ερ – Πες μου τι σκέφτεσαι; Τι σε χαλάει; Τι σε προβληματίζει; …
Ν – Αν πάρουμε το ½, ο επόμενος μεγαλύτερος δεν βρίσκεται ακριβώς δίπλα.
Ερ – Ποιον εννοείς ως μεγαλύτερο;
Ν – …
Ερ – Εννοείς το 0,6 που έχεις γράψει στο χαρτί (βλέπε επόμενο γράφημα);
Ν – Ναι, αλλά υπάρχει και το 0,51 ας πούμε.
Ερ – Α, ναι, και; Άρα, τι πιστεύεις;
Ν – … δεν ξέρω, ψιλομπερδεύτηκα …

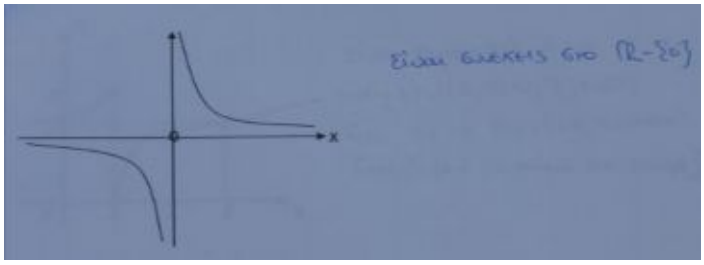


Ερ – Εντάξει άστο, μην παιδεύεσαι. Πάμε στη (στ). Λες ότι είναι συνεχής. Θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις και γι' αυτήν τη γραφική της παράσταση;
Ν – … (κάνει το διπλανό γράφημα) …
Ερ – Ωραία. Έχεις κάποια διαφορά από την 1/x που έκανες πιο πριν;
Ν – Ουσιαστικά αυτή ορίζεται από το $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ερ – Και τι διαφορά έχεις εδώ ας πούμε;
Ν – Ουσιαστικά οι φυσικοί ξεκινάνε από το 0,1, άρα δεν έχουμε αρνητικούς.
Ερ - Ωραία. Γι' αυτό παραλείπεις τον αρνητικό κλάδο;
Ν – Ναι.

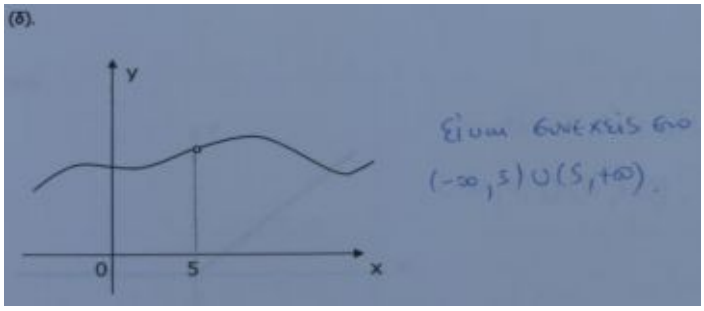




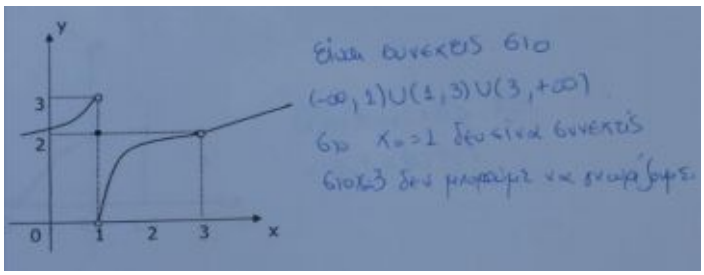
Ερ – Το γράφημα σου επιβεβαιώνει την απάντηση;
Ν – Ναι, είναι η 1/x που ξέρουμε ότι είναι συνεχής, απλά στο θετικό κομμάτι.
Ερ – Ωραία. Στην επόμενη τώρα λες … (διαβάζω την απάντησή του) … Νομίζω ότι το έχεις δικαιολογήσει επαρκώς άρα δεν έχω να ρωτήσω κάτι. Αν δεν υπήρχε η κουκκίδα που αντιστοιχεί στην τιμή του 5, η κουκκίδα στο y_2;
Ν – Τότε και πάλι θα λέγαμε ότι είναι συνεχής από το πλην άπειρο μέχρι το 5 και από το 5 μέχρι το συν άπειρο, αλλά στο 5 δεν μας ενδιαφέρει γιατί δεν θα ήταν μέσα στο πεδίο ορισμού.
Ερ – Δηλαδή θα έλεγες ότι είναι συνεχής οπουδήποτε εκτός του 5;
Ν – Ναι, και απλά δεν θα το εξετάζαμε το 5.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Εδώ στη (β) τώρα, παίρνεις πλευρικά, είναι διαφορετικά και άρα δεν είναι συνεχής, ωραία. Ωραία, κατανοητή η δικαιολόγησή σου.



Ερ – Στην (γ), λες συνεχής στο R-{0}.
Ν – Ναι, Από τη μία μεριά το όριο πάει στο πλην άπειρο από την άλλη πάει στο συν άπειρο και για να είναι συνεχής θα έπρεπε κατ' αρχήν τα όρια να είναι ίσα.

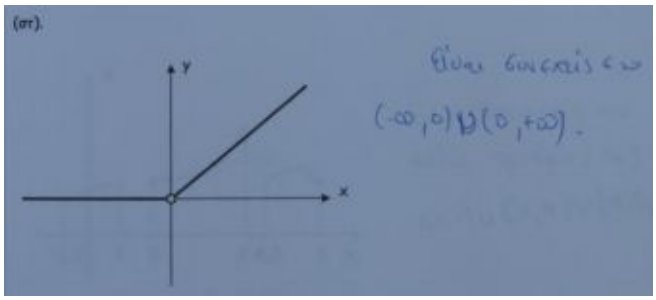


Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα. Στη (δ) τώρα λες ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$. Για το 5 τι λες; Τι πιστεύεις ότι είναι πιο σωστό να πούμε, ότι δεν είναι συνεχής ή ότι εκεί δεν εξετάζουμε καν τη συνέχεια;
Ν – Ότι εκεί δεν ορίζεται η συνάρτηση άρα δεν εξετάζουμε …

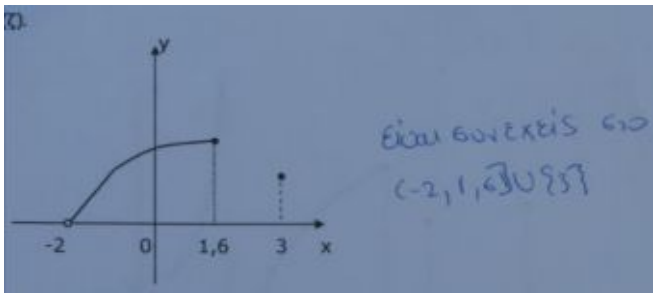


Ερ – … δεν εξετάζουμε καν, κατάλαβα. Στην (ε) λες ότι στο 1 δεν είναι συνεχής, ενώ στο 3 δεν μπορούμε να γνωρίζουμε. Τι εννοείς όταν λες ότι δεν

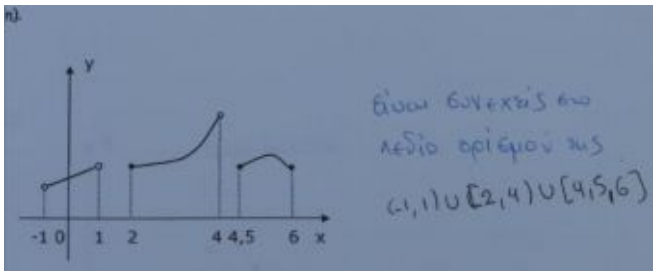
μπορούμε να γνωρίζουμε;
Ν – …
Ερ – Μου άρεσε η απάντηση! Τι υπονοείς; … Κοίταξέ το με την ησυχία σου …μπορεί να είναι συνεχής μπορεί και να μην είναι;
Ν – Απλά μπορεί να μπερδεύτηκα από το σχήμα … Όχι ουσιαστικά στο 3 δεν ορίζεται η συνάρτηση.
Ερ – Άρα; Θα άλλαζες κάτι στην απάντηση;



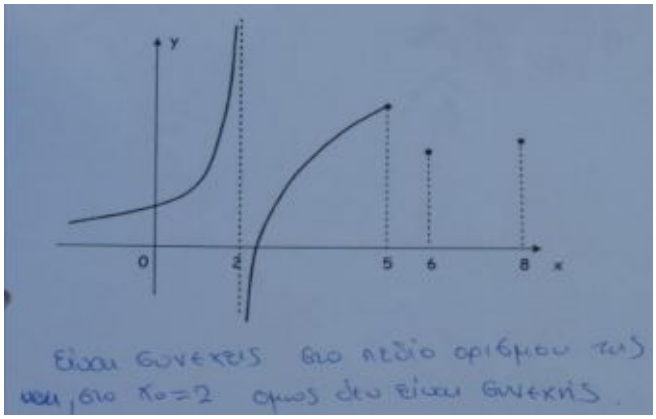
Ν - Ουσιαστικά θα έλεγα ότι στο 3 δεν ορίζεται η συνάρτηση άρα δεν μπορούμε να ελέγξουμε για τη συνέχεια.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Στη (στ) λες ότι είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$…
Ν – … το ίδιο όπως πριν ουσιαστικά.



Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Στη (ζ) τώρα λες συνεχής εδώ. Σε χαλάει που είναι ανοιχτό στο -2;
Ν – Μπορεί να μην ορίζεται η συνάρτηση στο -2.
Ερ – Οπότε δεν μας νοιάζει εννοείς;
Ν – Ναι.
Ερ – Στο 3 που έχεις ένα μεμονωμένο σημείο, είναι συνεχής;
Ν – Ναι, δεν υπάρχει πρόβλημα, είναι ένα σημείο.



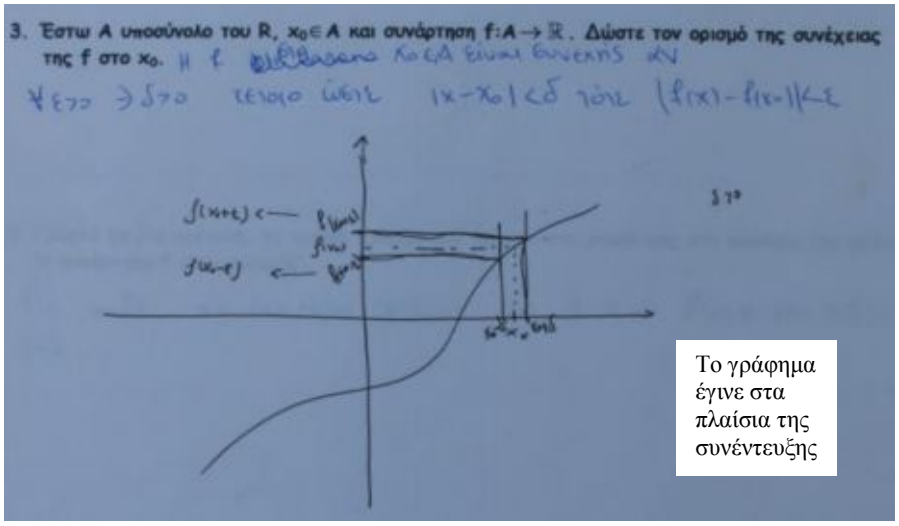
Ερ – Ωραία. Στην (η) λες είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού. Θέλεις να μου γράψεις ποιο εννοείς σαν πεδίο ορισμού;
Ν – … (γράφει το πεδίο ορισμού που φαίνεται δίπλα) …



Ερ – Ωραία εδώ στη (θ) τώρα λες συνεχής στο πεδίο ορισμού της, στο 2 όμως δεν είναι συνεχής. Εννοείς ότι το 2 είναι μέσα στο πεδίο ορισμού αλλά δεν είναι εκεί συνεχής, έτσι; Ή το καταλαβαίνω λάθος;
Ν – Ουσιαστικά είναι κάτι σαν … ουσιαστικά έτσι όπως είναι το γράφημα το 2 είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Γιατί το λες αυτό; Τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι το 2 είναι μέσα στο πεδίο ορισμού;
Ν – … έτσι όπως είναι το γράφημα μου θυμίζει την 1/x με το 0 …
Ερ – … α, ναι …

Ν – Αλλά έτσι όπως είναι η συνάρτηση φαίνεται ότι στο -2 δεν ορίζεται, ότι δεν είναι συνεχής …
Ερ – … δεν ορίζεται ή δεν είναι συνεχής;
Ν – … δεν είναι συνεχής.
Ερ – Δεν είναι συνεχής, ωραία. Στο 6 και το 8;

Ν – Κανονικά.
Ερ – Η (ι);
Ν – Είναι συνεχής ως σημεία.
Ερ – Αν τα ενώσω με γραμμή θα συνεχίσει να είναι συνεχής;
Ν – Ναι.
Ερ – Αν τα ενώσω με κοφτές γραμμές, έτσι με γωνίες;
Ν – Πάλι θα είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία, πάλι θα είναι συνεχής. Να ρωτήσω κάτι και για τον ορισμό. Έχεις γράψει πολύ ωραία τον ορισμό. Το βιβλίο το σχολικό στην κατεύθυνση έχει αυτό τον ορισμό με αστεράκι. Αν λοιπόν σου τύχαινε ένας μαθητής που τον έβλεπε και σου ζητούσε να του τον εξηγήσεις με απλά λόγια τι θα του έλεγες;

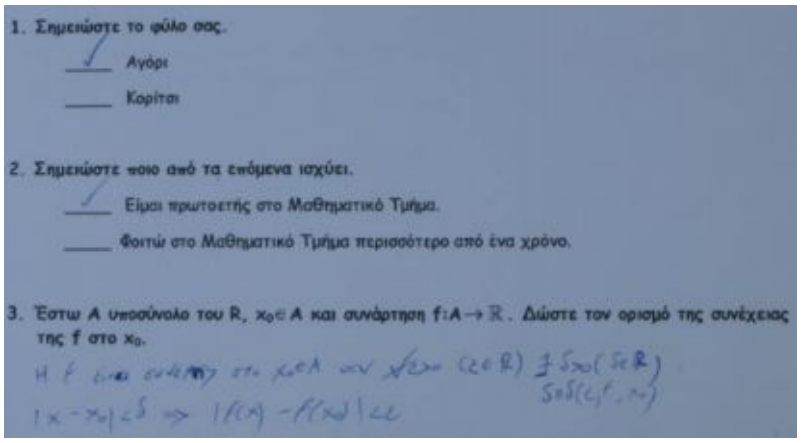


[Λόγω παρεμβολών από το κινητό τηλέφωνο του φοιτητή, δεν έχουν καταγραφεί σωστά οι απαντήσεις του σε αυτό το σημείο. Ακούγεται μόνο το τελείωμα της συζήτησης]……

Ερ – Δηλαδή από τα y θα πάμε στα x;
Ν – Ναι, γιατί ξεκινάμε από το ε.
Ερ – Ωραία, σε ευχαριστώ πολύ!

31η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Ηλίας’, πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα.


1. Σημειώστε το φύλο σας.

✓ Αγόρι

___ Κορίτσι

2. Σημειώστε ποιο από τα επόμενα ισχύει.

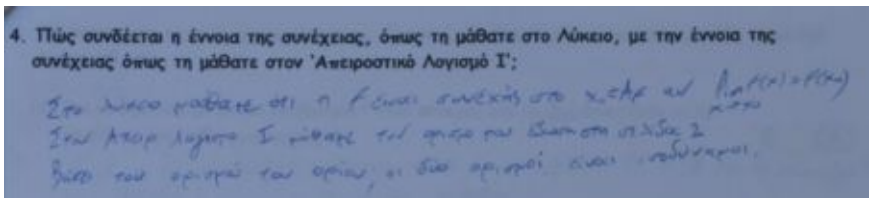
✓ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

___ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Ερ – Για τον ορισμό δεν θα πω κάτι τώρα. Θα τον δούμε στο τέλος. Να ρωτήσω τώρα κάτι στην επόμενη. Εδώ μου λες ότι ο ορισμός του Λυκείου είναι ισοδύναμος με αυτόν του Πανεπιστημίου. Γιατί το λες αυτό;

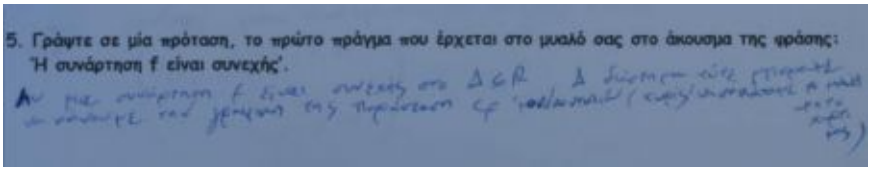
Η – Ναι, αυτή την εντύπωση έχω. Αυτός που έχω γράψει είναι σωστός;


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον 'Απειροστικό Λογισμό Ι';

Ερ – Ας υποθέσουμε ότι είναι.

Η – εεε … Από τη χορδή υπάρχει στο βιβλίο του Απειροστικού, πιο μετά όταν κάναμε τα όρια, ο ορισμός του ορίου, αφού πρώτα λέει τα σημεία συσσώρευσης. Βεβαίως συνεχίζει να ισχύει ότι πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αλλά έχω την εντύπωση ότι είναι ισοδύναμοι. Για μένα και οι δύο λένε ότι όταν το x πλησιάζει στο x_0, το f(x) πλησιάζει στο $f(x_0)$. Αυτό ισχύει και για τους δύο ορισμούς.

Ερ – Κατάλαβα. Σαν εικόνα στο μυαλό σου τι έχεις όταν ακούς ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής;

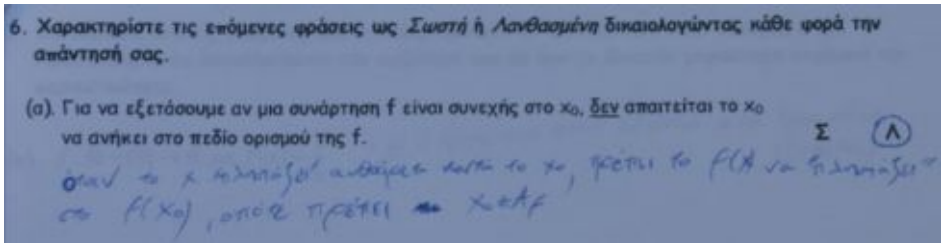

5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

Η – Τότε όπως έχω γράψει και εδώ, αν έχουμε μια συνάρτηση ορισμένη ένα διάστημα μπορούμε να κάνουμε τη γραφική της παράσταση μονοκοντυλιά.

Ερ – Ωραία. Με την προϋπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι διάστημα. Και αν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε διάστημα αλλά σε μια ένωση διαστημάτων;

Η – Τότε, δεν μπορούμε να την κάνουμε μονοκοντυλιά για παράδειγμα αν πάρουμε τη συνάρτηση f(x)=x στο (1, 3) και (5, 6), δεν μπορούμε να την κάνουμε μονοκοντυλιά. Γενικώς αυτό είναι το πρώτο πράγμα που μου έρχεται στο μυαλό. Γενικώς επειδή εμένα με μπερδεύουν τα σχήματα και δεν μου πολυάρεσαν όπου μπορώ να δουλεύω, δουλεύω με τον ορισμό, ή με πράξεις και τα λοιπά.

Ερ – Ωραία, έχεις δίκιο από κάποια πλευρά. Είναι καλό να τα συνδυάζει κανείς και τα δύο. Εδώ τώρα στην 6(α) λες λάθος, άρα θα πρέπει να ανήκει το x_0 πεδίο ορισμού; Για να δω τι έχεις γράψει … (διαβάζω την απάντησή του) …


6. Χαρακτηρίστε τις επόμενες φράσεις ως *Σωστή* ή *Λανθασμένη* δικαιολογώντας κάθε φορά την απάντησή σας.

(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

Η – Ή ούτως ή άλλως και με τον ορισμό που μας είχαν μάθει στο Λύκειο θα πρέπει το όριο να ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο x_0. Αν το σημείο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού τότε πώς θα βρούμε την τιμή του;

Ερ – Σωστά. Αλλά αφού λες ότι πλησιάζει το $f(x_0)$, δεν σημαίνει ότι μπορεί και να μην το πιάνει; Μήπως δηλαδή δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού;

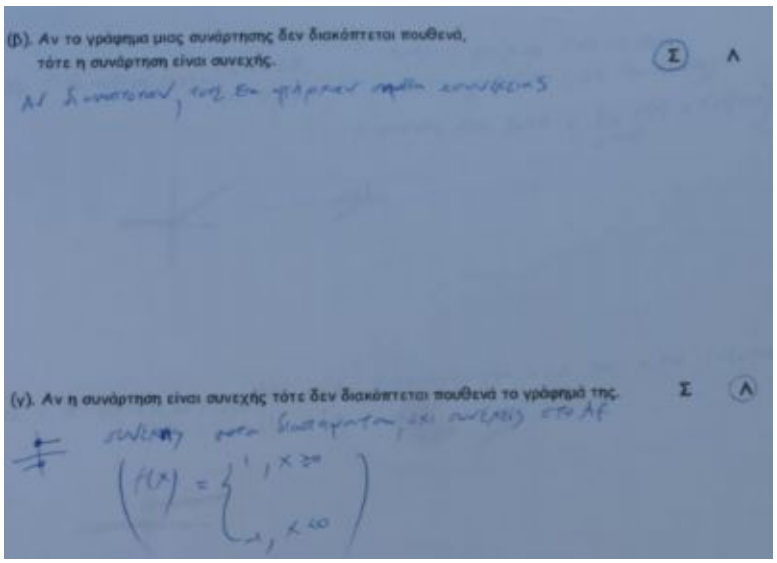
Η – Αφού λέμε το f(x) να πλησιάζει το $f(x_0)$, σημαίνει ότι το $f(x_0)$ υπάρχει, άρα το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού, ναι.

Ερ – Περίμενε, όταν λες $\lim_{x \to x_0} f(x) \ldots$

Η – … όχι, όχι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει το x_0 στο πεδίο ορισμού για να βρούμε το όριο.

Ερ – Δηλαδή όταν λες x τείνει στο x_0, δεν είναι απαραίτητο το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού;

Η – Όχι.


(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Στο (β) λες σωστό, γιατί αν διακοπτόταν θα υπήρχαν σημεία ασυνέχειας. Δηλαδή αν το γράφημα δεν διακόπτεται τότε είναι συνεχής.

Η – Ναι, ισχύει αυτό, δεν ισχύει;

Ερ – Δηλαδή εννοείς ότι εφόσον το γράφημα δεν διακόπτεται είναι συνεχής, έτσι; Ωραία.

Η – Ναι, αυτή την εντύπωση έχω.

Ερ - Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχεις κάποιο λάθος, ρωτάω απλά για να σιγουρευτώ ότι έχω καταλάβει τι εννοείς εδώ στο σχόλιο που κάνεις.

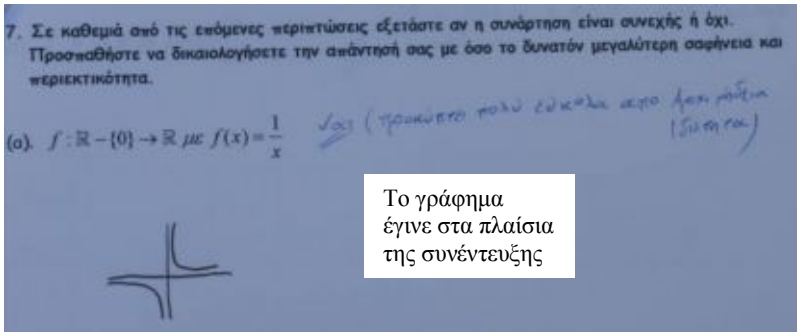
Η – … (ξαναδιαβάζει την απάντησή του) … εεε … όχι απαραίτητα, δεν είναι άκρως σωστό … γιατί αν πάρουμε την f(x)=x στο (1, 2) και αφαιρέσουμε στο 3/2 την τιμή, την αφαιρέσουμε τελείως, δεν την ορίσουμε δηλαδή καθόλου εκεί, τότε διακόπτεται αλλά είναι συνεχής στα επί μέρους διαστήματα, έτσι; Αυτό εννοούσα τώρα δεν ξέρω αν το λέω καλά.

Ερ – Πολύ καλά το λες, το κατάλαβα. Απλά νομίζω ότι αυτό το αντιπαράδειγμα ταιριάζει πιο πολύ στην επόμενη.

Η – …(διαβάζει τη (γ)) …

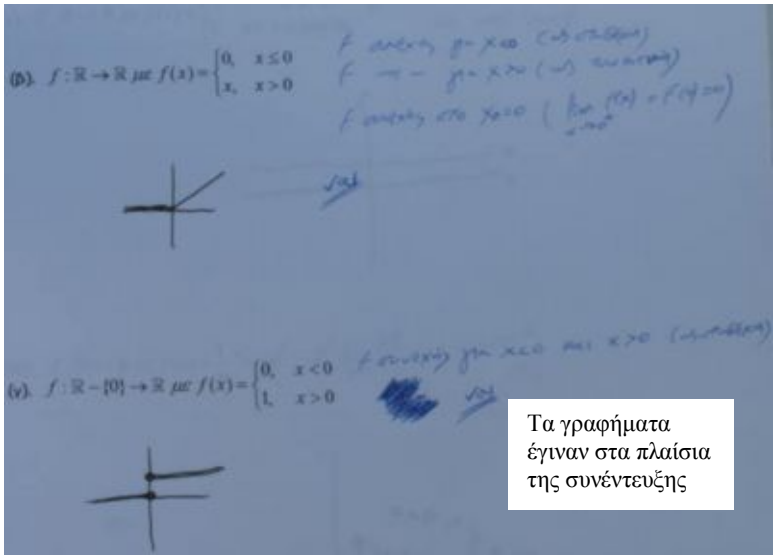
Ερ – Νομίζω ότι αυτό που λες ταιριάζει εδώ. Παρόλο που διακόπτεται το γράφημα της είναι συνεχής.

Η – Ναι, σωστό. Μπορεί να διακόπτεται αλλά να είναι συνεχής στα κομμάτια, όχι σε όλο. Και εδώ στο παράδειγμα που έχω γράψει έπρεπε να είχα στο πρώτο x<0, όχι $x \leq 0$

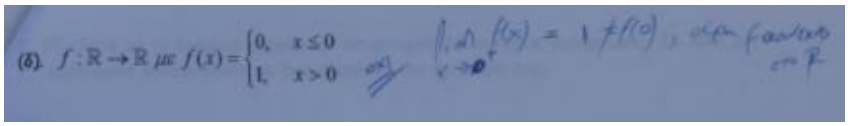


Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Στην 7 τώρα έχουμε την 1/x. Θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση αν μπορείς;
Η – … (κάνει το διπλανό γράφημα) … ναι είναι συνεχής, είναι από τις πρώτες που μαθαίνουμε.

Ερ – Πού είναι συνεχής;
Η – Στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Στο επιβεβαιώνει το γράφημα;
Η – Ναι. Είναι αυτό που λέγαμε πριν ότι σε μια οποιαδήποτε περιοχή, υπάρχει μια ενιαία γραμμή, άρα είναι συνεχής.

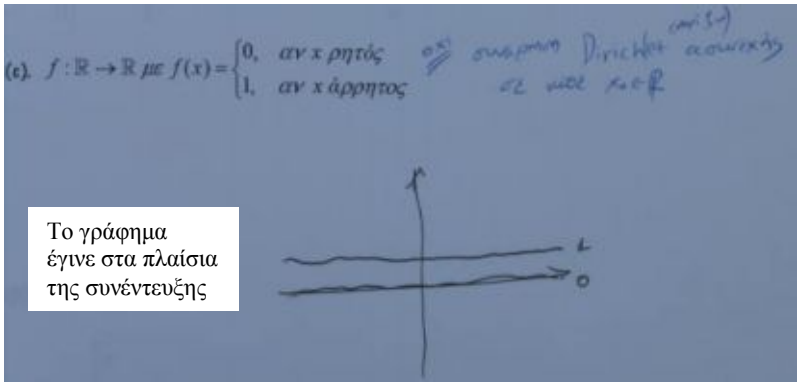


Ερ – Ωραία. Η (β) λες … (διαβάζω την απάντησή του) … Άρα λες ότι είναι η συνεχής παντού. Μπορείς να μου κάνεις κι εδώ τη γραφική παράσταση;
Η – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … είναι αυτή.
Ερ – Σου επιβεβαιώνει το γράφημά σου αυτό που έχεις απαντήσει;
Η – Ναι το επιβεβαιώνει.
Ερ – Ωραία. Θέλεις να δοκιμάσεις και για την επόμενη να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Η – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … Εδώ πέρα είναι κυκλάκια ανοιχτά (δείχνει τις τελείες) και στο 0 και στο 1. Που σημαίνει ότι εκεί δεν παίρνει την τιμή.
Ερ – Ωραία. Και λες συνεχής. Έχεις πρόβλημα με το 0;
Η – Όχι, μπορούμε να πούμε ότι είναι συνεχής σε οποιοδήποτε διάστημα δεν περιέχει το 0.
Ερ – Κατάλαβα. Δηλαδή αν έπρεπε να απαντήσεις με μία λέξη τι θα έλεγες για αυτή τη συνάρτηση;
Η – Είναι συνεχής στον πεδίο ορισμού της.

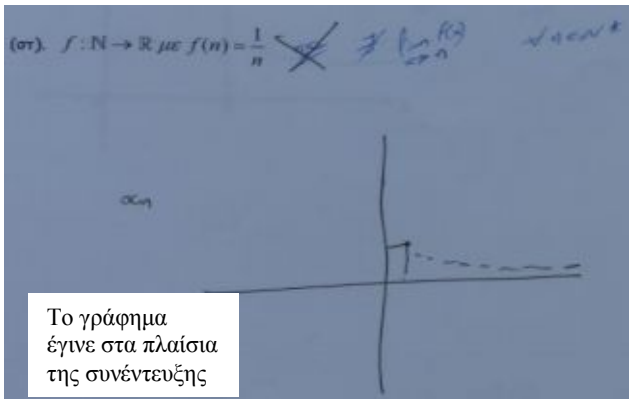


Ερ – Ωραία. Στην επόμενη λες όχι. Τι αλλάζει από την προηγούμενη;

Η – Ότι εδώ παίρνει την τιμή 0 ενώ πριν δεν την έπαιρνε.
Ερ – Άρα τι σε κάνει να λες όχι τώρα;
Η – εεε …γραφικά ή με τον ορισμό;
Ερ – Με οτιδήποτε, δεν με νοιάζει.
Η – Αν πάρουμε τα πλευρικά όρια τότε πρέπει να είναι ίσα και ίσα και με το f(0). Εδώ όμως δεν έχουμε f(0).
Ερ – Κατάλαβα. Αλλάζει κάτι σαν γραφική παράσταση;
Η – Εδώ πέρα παίρνει και την τιμή 0, δηλαδή εδώ δεν έχουμε ανοιχτό κυκλάκι, αλλά τελεία.

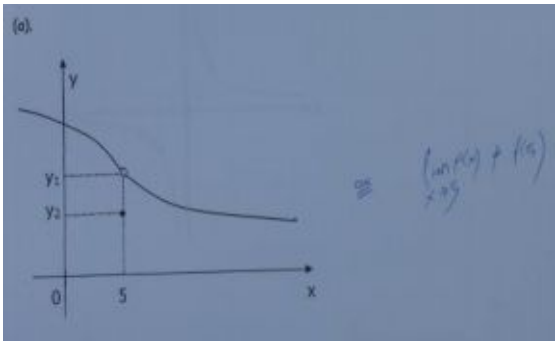


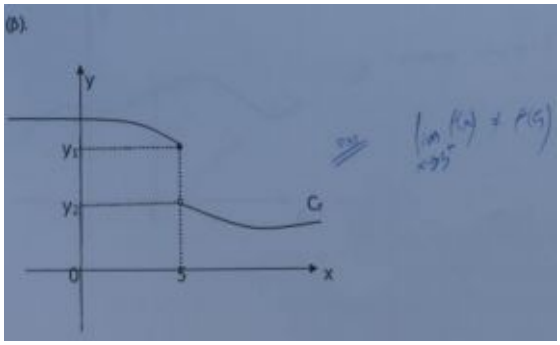
Ερ – Κατάλαβα. Εδώ στην (ε) λες όχι, νομίζω και λες ασυνεχής ε;
Η – Ναι. Από την αρχή μεταφοράς.
Ερ – Α! Μάλιστα. Θέλεις να δοκιμάσεις να μου πεις πως θα έκανες εδώ τη γραφική παράσταση;
Η – Βασικά … είναι αυτές οι δυο ευθείες … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) … κάπως έτσι …
Ερ – Είναι ευθείες αυτές;
Η – Είναι ευθείες αλλά το θέμα είναι σε ποιο σημείο παίρνει το 0 και σε ποιο σημείο παίρνει το 1, δηλαδή δεν είναι μονοκόμματες ευθείας, διακόπτονται, είναι σημεία αλλά είναι τόσο πυκνά μεταξύ τους που είναι σαν ευθεία.
Ερ – Α, ωραία, κατάλαβα. Μπορείς να μου πεις ένα ρητό;
Η – Το ¾.
Ερ – Θέλω να μου γράψεις τον αμέσως μεγαλύτερο του.
Η – Αμέσως μεγαλύτερος ρητός; Μα αν γράψουμε έναν μεγαλύτερο ρητό, ενδιάμεσα θα υπάρχει πάλι ένας ρητός.
Ερ – Άρα, δεν μπορείς να βρεις εννοείς;
Η – Μπορείς να βρεις μεγαλύτερο ρητό από αυτόν.
Ερ – Τον αμέσως μεγαλύτερό του;
Η – Έχω την εντύπωση ότι δεν μπορούμε να τον βρούμε.
Ερ – Γιατί;
Η – Πάρε ένα ρητό. Ανάμεσά τους δεν θα μπορούμε να βρούμε πάλι έναν άλλο ρητό; Αυτή την εντύπωση έχω δεν μπορούμε να βρούμε τον αμέσως μεγαλύτερο.

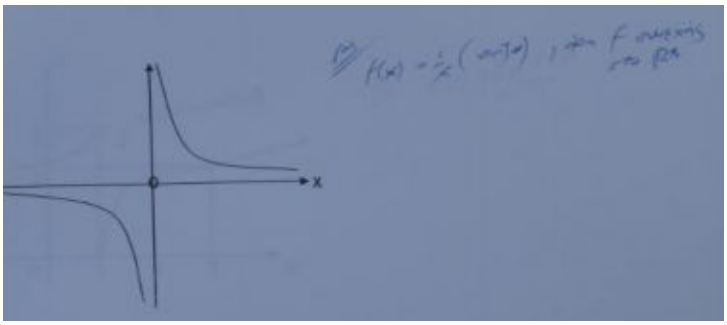


Ερ – Ωραία, εντάξει. Πάμε στη (στ). Λες όχι γιατί δεν υπάρχει το $\lim_{x\to n} f(x)$. *Γιατί;*
Η – Α, Αυτή είναι ακολουθία. Όταν λέμε ότι το x πλησιάζει κάπου τότε το x πλησιάζει κάπου παίρνοντας τιμές μέσα από το πεδίο ορισμού. Δηλαδή αν πάρουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία που συγκλίνει σε κάποιον από αυτούς τους αριθμούς, τότε θα πρέπει το f της και αυτό να συγκλίνει

λογικά. Δεν έχω ψάξει για τη συγκεκριμένη ας πούμε αν πάρουμε για παράδειγμα την f(n)=n, είναι σαν την f(x)=x μόνο που δεν παίρνει τα ενδιάμεσα, παίρνει μόνο τα 1, 2, λοιπόν … εκεί πέρα έχουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, αν πάρουμε μια οποιαδήποτε που συγκλίνει στο πεδίο ορισμού της, τότε θα είναι σταθερή τελικά γιατί είναι ακολουθία ακέραιων. Άρα το f της θα είναι ίσο … θα τείνει … δεν ξέρω αν καταλαβαίνετε τι θέλω να πω;
Ερ – … (χαμογελάω) …Όχι!
Η – Λέω, για μια άλλη ακολουθία, την f(n)=n. Αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο …
Ερ – … γιατί; …
Η – … γιατί άμα πάρουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία στο πεδίο ορισμού της, που να τείνει σε έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό, τότε είναι σταθερή τελικά.
Ερ – μμμ … είναι τελικά σταθερή …
Η – …. ναι, θα υπάρχει ένα n_0 για … [δεν ακούγεται καλά η φράση του] …με τους όρους της ακολουθίας.
Ερ – Τελικά σταθερή, σημαίνει ότι από κάποιο n_0 και πέρα …
Η – … ναι, οι όροι είναι ίδιοι, ναι.
Ερ – Μάλιστα. Θέλεις να δοκιμάσεις για αυτήν να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Η – Ε, αυτή πάει κάπως έτσι … (κάνει το παραπάνω γράφημα) … σαν την 1/x αλλά είναι μόνο κουκίδες και ξεκινάει από το 1.
Ερ – Κατάλαβα. Και είναι συνεχής αυτή;
Η – Νομίζω πώς ναι.

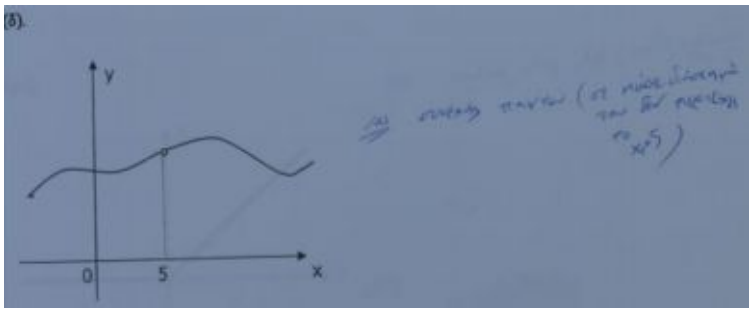






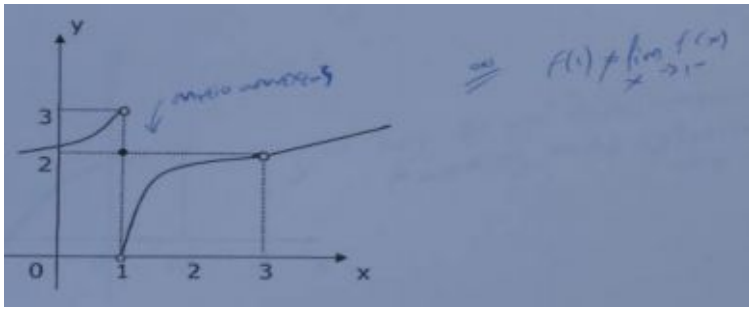
Ερ – Ωραία, και στην 8 τώρα, το (α) και το (β) είναι κατανοητά. Εντάξει.
Ερ – Εδώ λες ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Η – Αυτή μοιάζει με την 1/x, γι' αυτό το γράφω,
Ερ – Μοιάζει ή είναι;
Η – Μοιάζει, δεν ξέρω αν είναι η ίδια.

Ερ – Από τι θα εξαρτάται αν θα είναι;
Η – Δεν θα μπορούσε να ήταν η $\frac{1}{x^3}$;
Ερ – Η $\frac{1}{x^3}$;!;
Η – Ναι, κάπως έτσι δεν είναι και αυτή;



Ερ – Α, γι' αυτό λες μήπως το σχήμα δεν είναι ακριβώς της 1/x. Καλά θα το δούμε. Στην επόμενη λες συνεχής παντού …

Η – … παντού σε κάθε διάστημα που δεν περιέχει το 5, στο πεδίο ορισμού της δηλαδή.

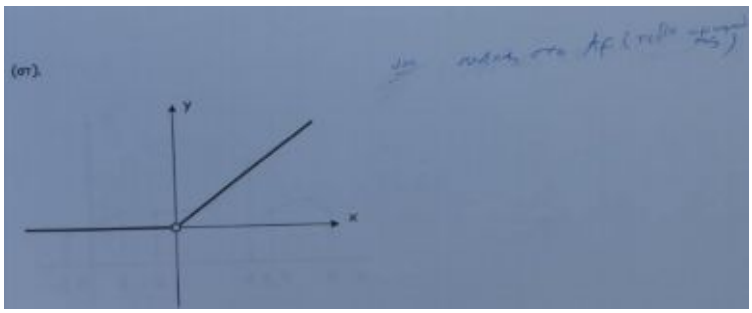


Ερ – Ωραία. Στην (ε) λες … (διαβάζω την απάντησή του) …

Η – Ναι, είναι προφανές.

Ερ – Στο 3;

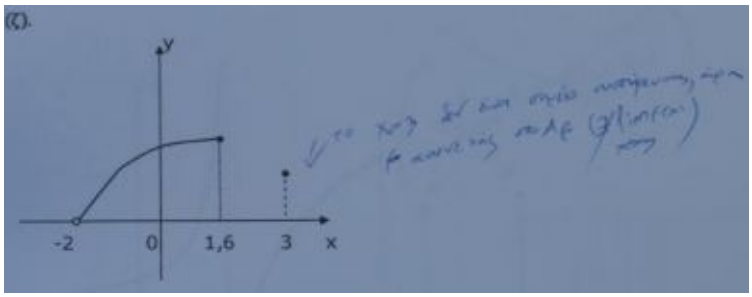
Η – Στο 3, στο σημείο 3,αφού δεν παίρνει αυτή την τιμή, άρα δεν το εξετάζουμε καν εκεί.



Ερ – Δεν εξετάζεις καν εκεί, μάλιστα. Για την επόμενη τώρα, λες ναι ότι είναι συνεχής …

Η – … ναι, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Ερ – Ωραία. Στη (ζ) λες ότι στο x=3 …



Η – … αυτό ήθελα να το διευκρινίσουμε. Όταν έχουμε, όπως και στις ακολουθίες, όταν έχουμε μεμονωμένα σημεία, ωραία, ας πούμε σε αυτό το κομμάτι είναι συνεχής (δείχνει το διάστημα της γραμμής), και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι συνεχής σε αυτό το σημείο, άμα πάρουμε μια ακολουθία στο πεδίο ορισμού της, η οποία να τείνει στο 3, από εδώ δεν μπορεί να είναι, άρα θα είναι η σταθερή 3 αυτή …

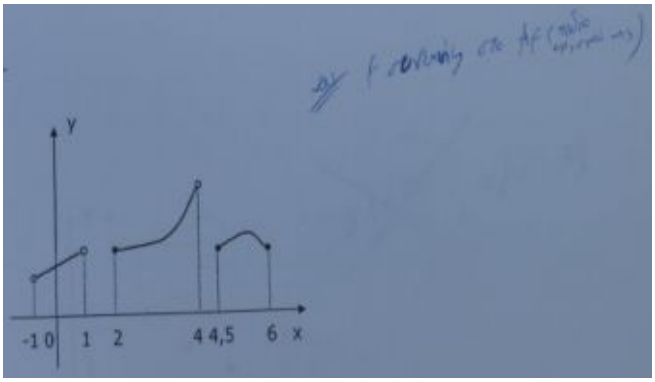
Ερ – … δηλαδή είναι συνεχής;

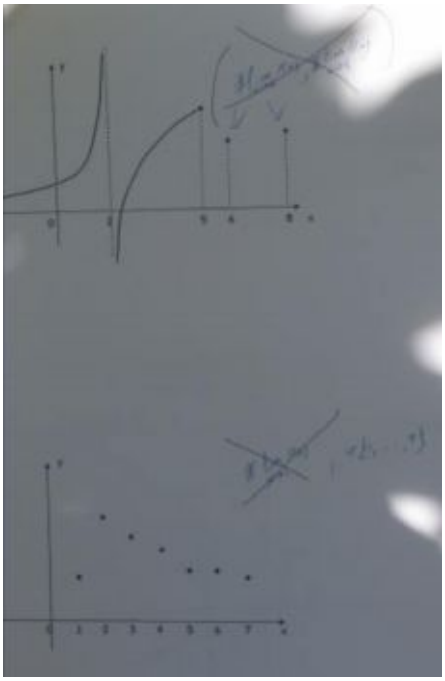
Η – Είναι συνεχής γιατί η $f(x_n)$ ας πούμε, είναι ίσο με το f(3).

Ερ – Α, μάλιστα, θέλεις να μου πεις κάτι σαν την αρχή της μεταφοράς.

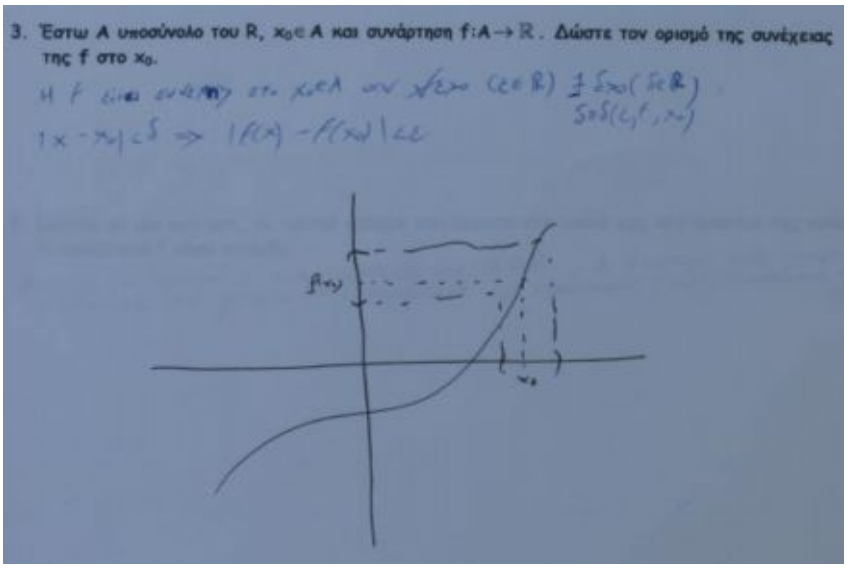
Η – Α, ναι αυτό.

Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα.





Ερ – Ωραία, στην (η) τώρα …
Η – … Εδώ συνεχής και εδώ συνεχής και εδώ συνεχής (δείχνει τα τρία τμήματα)
Ερ – Άρα συνεχής στο πεδίο ορισμού της;
Η – Ναι.
Ερ – Πολύ ωραία. Άρα και στη (θ) …
Η – … α! και εδώ είναι λάθος. Σε μεμονωμένα σημεία είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία, άρα διαγράφουμε αυτό που είχες γράψει έτσι;
Η – Ναι.
Ερ – Δηλαδή αυτή ολόκληρη όπως τη βλέπεις που είναι συνεχής;
Η – Αυτή είναι συνεχής παντού, δηλαδή παντού στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Ωραία και η τελευταία;
Η – Και αυτή πρέπει να είναι συνεχής.
Ερ – Άρα σβήνω αυτό που είχες γράψει;
Η – Ναι.
Ερ – Ωραία, λες είναι συνεχής που;
Η – Στο πεδίο ορισμού της.



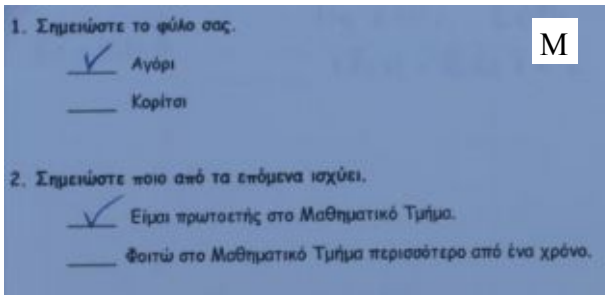
Ερ – Ωραία, μια τελευταία ερώτηση Ηλία, που αφορά τον ορισμό. Αν είχες κάποιον μαθητή στη Γ΄ Λυκείου και ήθελες να του εξηγήσεις τον ορισμό, πώς θα τον εξηγούσες;

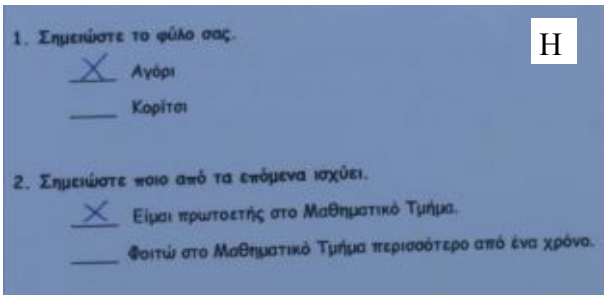
[Στο σημείο αυτό έρχονται στη συνέντευξη οι δύο φοιτητές ο ‘Ηρακλής’ και ο ‘Μπάμπης’ που θα λάβουν μέρος στην επόμενη συνέντευξη. Ακούν την υπόλοιπη συζήτηση]

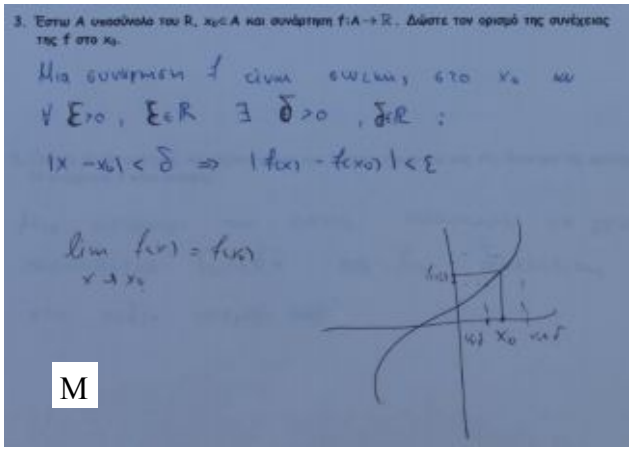
Η – Κατ’ αρχήν, ο καθηγητής που είχαμε στο σχολείο μας είχε δείξει έναν αντίστοιχο ορισμό με αυτόν για το όριο. Προφανώς δεν είχε καταλάβει κανείς τίποτα, ούτε κι εγώ. Αυτός ο ορισμός υπάρχει και στο βιβλίο του ο Απειροστικός. Έτσι αν τον δείξει κανείς σε κάποιον στο Λύκειο δεν νομίζω ότι θα καταλάβει και πολλά πράγματα.
Ερ – Σωστά. Για αυτό ας υποθέσουμε ότι ο μαθητής που έχεις σου ζητάει να του τον εξηγήσεις με απλά λόγια. Τι θα του πεις για τον καταλάβει; Με ένα απλό σχήμα τι θα του έλεγες;
Η – Ότι όταν το x είναι κοντά στο x_0, το f(x) είναι κοντά στο $f(x_0)$.
Ερ – Τι θα του έλεγες για τα ε και το δ; Τι ρόλο παίζουν στον ορισμό και στο σχήμα σου επάνω;
Η – Όταν το x είναι δ κοντά στο x_0, δηλαδή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, να υπάρχει ένα ε, ώστε το f(x) να ανήκει στο $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$.
Ερ – Δηλαδή γίνεται μια ζώνη …
Η – … ναι, ναι, ναι …
Ερ – … η οποία μεταφέρεται εδώ; …
Η – Κάπως έτσι.
Ερ – Μάλιστα. Από πού θα ξεκινήσεις, από κάτω προς τα πάνω ή από πάνω προς τα κάτω;
Η – Από το x_0.
Ερ – Από το x_0, μάλιστα. Τι γίνεται αν αναποδογυρίσω αυτά εδώ και πούμε ότι υπάρχει δ ώστε για κάθε ε και τα λοιπά; Πιστεύεις ότι αλλάζει κάτι;
Η – … τι αλλάζει …έχω την εντύπωση ότι είναι λάθος αλλά δεν είμαι σίγουρος αυτή τη στιγμή. Πάντως νομίζω ότι από τα x πρέπει να ξεκινήσουμε.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα Ηλία σε ευχαριστώ πολύ.

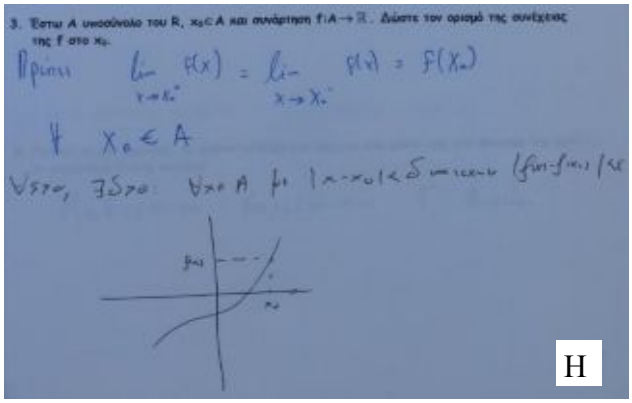
32η και 33η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Ηρακλής’ και ‘Μπάμπης’, πρωτοετείς στο Μαθηματικό τμήμα.
Τη συζήτηση παρακολουθεί και ο ‘Ηλίας’ από την προηγούμενη συνέντευξη.









Ερ - Ωραία. Παιδιά μια και είσαστε εδώ από πριν και ακούσατε την τελευταία κουβέντα που κάναμε με τον Ηλία, ας ξεκινήσουμε από αυτό. Πώς θα εξηγούσατε τον ορισμό της συνέχειας σε κάποιον μαθητή της Γ΄ Λυκείου με απλά λόγια χρησιμοποιώντας ένα απλό γράφημα; Εσύ Ηρακλή από ότι βλέπω έχεις γράψει μόνο τον ορισμό του Λυκείου. Θέλεις να σου γράψω δίπλα τον ορισμό το Πανεπιστήμιο να προσπαθήσεις και εσύ να κάνεις το ίδιο;

Η – Ναι, αμέ.

… (γράφω τον ορισμό στο φύλλο του) …

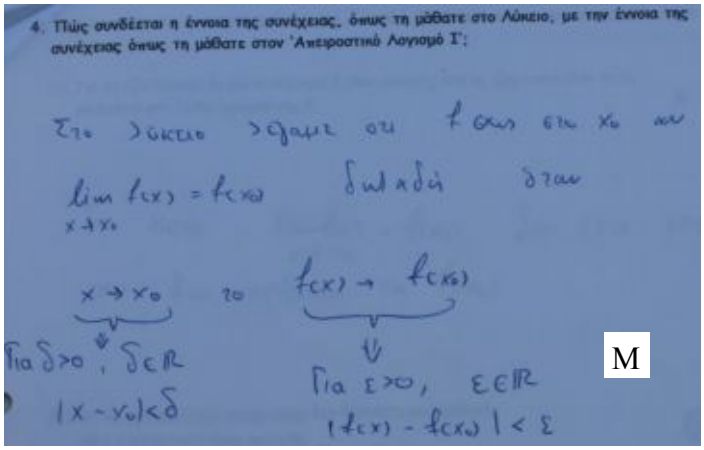
Ερ – Για να δω Μπάμπη το δικό σου ορισμό … Δεν είναι και τόσο σωστός. Ας τον διορθώσουμε λίγο για να μπορέσουμε να το κουβεντιάσουμε. Ωραία.

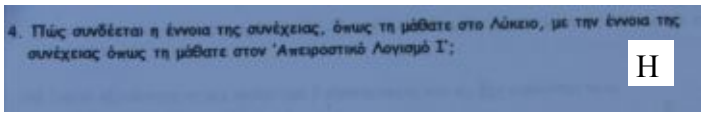
Μ – Εγώ αρχικά θα του έλεγα ότι όπως έχουμε το όριο, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, θα του έλεγα ότι χρησιμοποιούμε δύο θετικούς αριθμούς, οσοδήποτε μικρούς, ώστε να δείξουμε ότι όταν το x τείνει στο x_0, που αυτό το ξέρει, το f(x) τείνει στο $f(x_0)$.

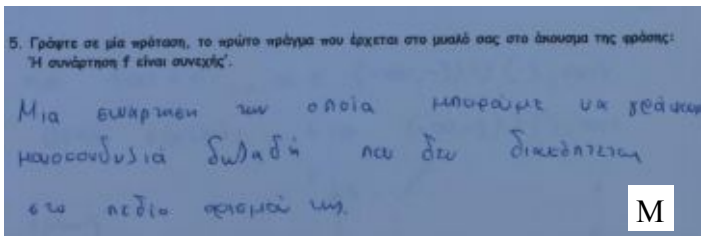
Ερ – Κατάλαβα. Πάνω στο σχήμα σου πώς φαίνεται αυτό;

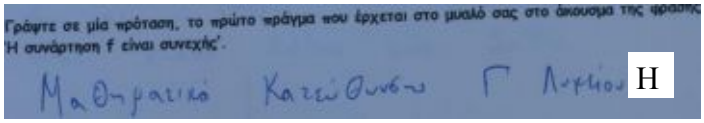
Μ – Θα του έλεγα ότι πλησιάζοντας κάποιος το x_0 και από τις δύο μεριές, ανάλογα με το πεδίο ορισμού βέβαια, θα σχηματίσουμε μία περιοχή που η εικόνα αυτής της περιοχής θα είναι ένα άλλο διάστημα, μια άλλη περιοχή, στην οποία η συνάρτηση δεν θα διακόπτεται.

Ερ – Πού μπαίνει στο σχήμα σου το ε και το δ;
Μ – Το δ είναι εδώ, μια περιοχή (x_0-δ, x_0+δ) που μου δίνει τα f(x_0).
Ερ – Μάλιστα. Ηρακλή τι λες εσύ; … Έχεις κάτι άλλο κατά νου;
Η – εεε … δεν γνωρίζω … Τελικά νομίζω ότι κι εγώ το ίδιο θα έλεγα …
Ερ – Μήπως βλέπεις κάτι άλλο; Μήπως υπάρχει κάτι διαφορετικό που θα έδινες σαν απάντηση;
Η – … Όχι.
Ερ – Συμφωνείς με αυτό που λέει ο Μπάμπης;
Η – Ναι … Δεν το είχα επεξεργαστεί … Τώρα που το σκέφτομαι νομίζω πως ναι. Αλλά δεν ξέρω αν υπάρχει κάποιο λάθος σε αυτό.
Μ – Για να είναι συνεχής όμως σε όλο το πεδίο ορισμού θα πρέπει να συμβαίνει αυτό σε κάθε x_0.
Ερ – Κατάλαβα. Εννοείς ότι η συνέχεια είναι τοπική έννοια;
Μ – Εννοώ ότι αν με ρωτήσουν αν είναι συνεχής σε ένα σημείο θα απαντήσω σε εκείνο το σημείο. Αν όμως με ρωτήσουν σε ένα ολόκληρο πεδίο ορισμού, τότε θα πρέπει να βρω τα σημεία που πιθανόν να μην είναι συνεχής και να τα ελέγξω.



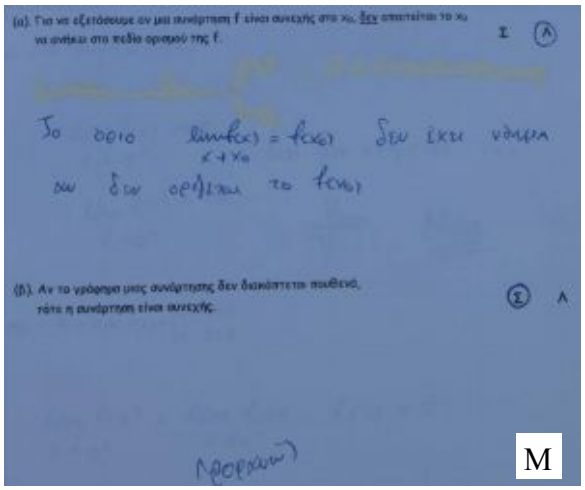


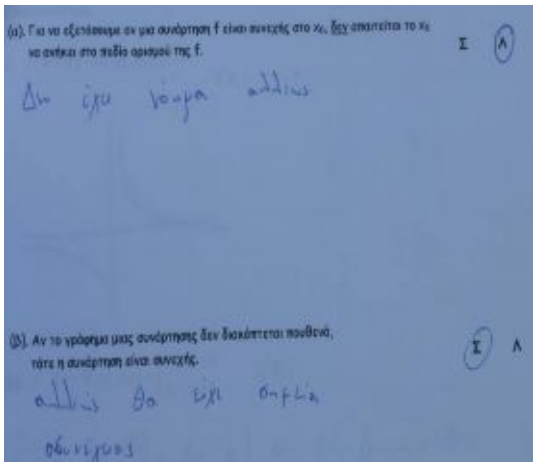


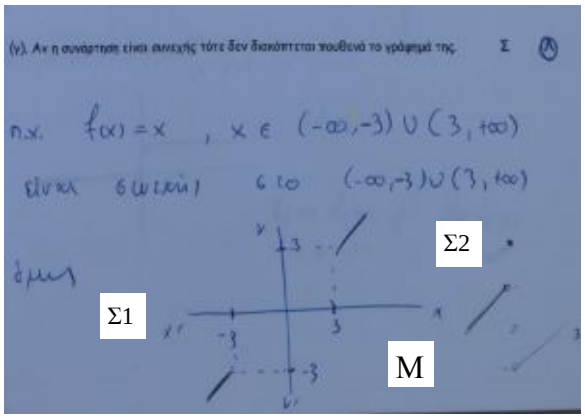


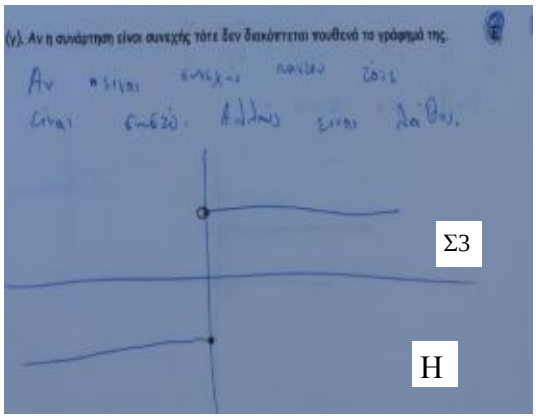
Ερ – Μάλιστα. Να προχωρήσω τώρα στο επόμενο. Ηρακλή πώς σου φάνηκε η έννοια της συνέχειας όπως την έμαθες τώρα στο Πανεπιστήμιο; Βρήκες διαφορά;
Η – Μεγάλη! (γελάει) … ε, ήταν και λίγο απότομο! Ε, δεν θα έπρεπε να ήταν ο Απειροστικός στο πρώτο έτος.
Ερ – Εσύ Μπάμπη;
Μ – Ε, η αλήθεια είναι ότι όταν το είδα δεν το κατάλαβα αμέσως. Άργησα να το καταλάβω και το ίδιο έγινε αργότερα και με την αρχή της μεταφοράς. Αλλά τώρα που έχει περάσει καιρός νομίζω ότι είναι τα ίδια. Δεν έχει διαφορά από αυτό με το οριάκι που είχαμε μάθει στο Λύκειο. Μου φαίνεται ότι είναι σα να έχουμε πάρει αυτό με το όριο που είχαμε μάθει και να το απλώσαμε λίγο. Δεν βρίσκω κάποια διαφορά, μου φαίνεται σχεδόν ίδιο, δεν ξέρω αν κάνω κάποιο λάθος.
Ερ – Ωραία. Ακούγοντας τώρα τη φράση η συνάρτηση είναι συνεχής τι σας έρχεται στο μυαλό; Ηρακλή τι λες;
Η – (γελάει) … τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου. Δεν είπατε να γράψουμε ότι μας έρχεται στο μυαλό;

Ερ – Και καλά έκανες! Αυθόρμητες απαντήσεις θέλω! Απλά εννοώ, σαν εικόνα τι σου έρχεται στο μυαλό;
Η – Ε, μου έρχεται μια γραμμή, μια γραμμή που την κάνουμε συνεχόμενα, στη γραφική παράσταση δεν εννοείς; …
Ερ – … ναι, ναι …
Η – … ε, κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι μας, αυτό.
Ερ – Ωραία. Μπάμπη τι λες εσύ; Δεν θυμάμαι τι είχες απαντήσει … (διαβάζω την απάντησή του) … γιατί λες να μην διακόπτεται στο πεδίο ορισμού της;
Μ – Γιατί … αυτό είναι ένα μπέρδεμα που έχω από φέτος, πέρσι άκουγα συνεχής και φανταζόμουνα μία ευθεία γραμμή, ενώ φέτος έχουμε δει κάποιες συναρτήσεις που δεν θα πίστευα ποτέ ότι θα είναι συνεχείς κι όμως είναι, γι' αυτό επειδή με έχει μπερδέψει λίγο, έβαλα το πεδίο ορισμού σε πιο αφηρημένη έννοια, επειδή δεν το έχω αναλύσει ακόμη πολύ καλά και με μπερδεύει λίγο στο μυαλό μου.







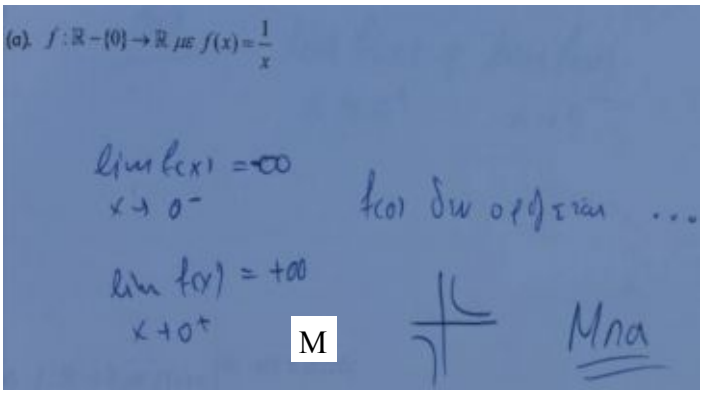


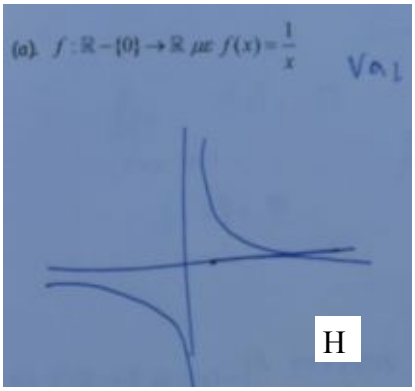
Ερ – Άρα αν πάμε στην επόμενη, την 6. Το (α) βλέπω ότι το έχετε βάλει λάθος και οι δύο. Ηρακλή λες ότι δεν έχει νόημα αλλιώς …
Η – ε, ναι, λάθος.
Ερ – Εννοείς ότι δεν έχει νόημα να εξετάσεις σε σημείο εκτός του πεδίου ορισμού;
Η – Ναι, έτσι το σκέφτηκα δηλαδή …
Μ – … και εγώ έτσι το είδα αλλά …
Ερ – Έχεις αμφιβολία τώρα;

Μ – Καλά, όχι, πάντα δηλαδή είχα αμφιβολία (γελάει), απλώς όταν … αυτό που ήξερα μέχρι πέρυσι με τις γνώσεις του Λυκείου είναι ότι … δεν εξετάζεις σε ένα σημείο που δεν είναι … όχι … ναι που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού …
Ερ – Ενώ τώρα τι έχει αλλάξει; Βλέπεις κάτι διαφορετικό; Δηλαδή έχεις κάποιον ενδοιασμό τώρα;
Μ – … ε … Δεν ξέρω. Έχω στο μυαλό μου ότι αν δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού τότε θα πρέπει να εξετάσουμε τη συνάντηση μέχρι σχεδόν εκεί δηλαδή όταν πλησιάζει στο x_0. Τώρα δεν ξέρω αν μπορούμε να λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0 ενώ το x_0 δεν είναι μέσα στο πεδίο ορισμού, δεν ξέρω κατά πόσον αυτό γίνεται.
Ερ – Κατάλαβα, Ηρακλή τι λες γι' αυτό που λέει ο Μπάμπης;
Η – Δεν ξέρω, δεν καταλαβαίνω.
Μ – Εννοούσα ότι έχουμε μία συνάρτηση και στο x_0 δεν υπάρχει εκεί συνάρτηση, κόβεται στο x_0 και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι συνεχής εκεί. Και μου φαίνεται περίεργο ότι ενώ δεν είναι κομμάτι της συνάρτησης, εξετάζουμε αν είναι συνεχής εκεί. Τώρα δεν ξέρω αν είναι σωστό ή λάθος η απάντηση.
Η – Ναι, τώρα κατάλαβα τι εννοείς. Δηλαδή από τη στιγμή που δεν είναι στη συνάρτηση … δηλαδή εμείς εξετάζουμε …
Μ – … όλα τα υπόλοιπα σημεία …
Η – … ναι … εντάξει κι αυτό λογικό … όμως δεν είναι … έτσι όπως το είχαμε σκεφτεί, τώρα μια γραμμή … μονοκοπανιά ξέρω εγώ … έτσι … τώρα εντάξει … τώρα αυτός είναι λίγο εμπειρικός όρος που χρησιμοποιούμε, και δεν ξέρω … δεν είναι και τόσο επιστημονικός …
Μ – … δεν ξέρω αν είχα κάτι σε κομμάτια τα θα έκανα, ωραία εδώ μονοκοντυλιά πήγαινε, εδώ μονοκοντυλιά πήγαινε, δεν ξέρω …
Η – … άρα είναι συνεχής εκτός, ξέρω εγώ … και εγώ αυτό φαντάζομαι …
Μ – … τώρα δεν ξέρω βέβαια κατά πόσον ισχύει αυτό.
Ερ – Δηλαδή λες για παράδειγμα σε αυτό το σχήμα που έχεις κάνει Μπάμπη στο (γ) ε (βλέπε Σ1) ;
Μ – Όμως δεν ξέρω πώς μπορούμε αυτό να το πούμε ότι είναι συνεχής. Δεν ξέρω, δηλαδή αν θέλαμε να εφαρμόσουμε εδώ ένα θεώρημα Bolzano, πώς θα το εφαρμόζαμε; Θα έπρεπε να το κάναμε ξεχωριστά;
Ερ – Τι απαιτήσεις έχει το θεώρημα Bolzano;
Μ – Θέλουμε ένα διάστημα, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε δηλαδή σε όλο.
Ερ – Σωστό.
Μ – Θα το εφαρμόζαμε ξεχωριστά. Και πάλι όμως είναι συνεχής αν πάρεις μόνο το ένα διαστηματάκι ή μόνο το άλλο …
Ερ – Ωραία, έχεις ένωση διαστημάτων …
Η – … είναι σαν να παίρνεις δύο συναρτήσεις ξεχωριστά …
Μ – … ε, γι' αυτό με μπερδεύει. Αλλά όχι, εντάξει αφού μιλάει για διάστημα στο Bolzano δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω αυτό …
Ερ – Εσύ Ηρακλή αυτό που έχεις γράψει εδώ (βλέπε Σ3) το παίρνεις σαν αντιπαράδειγμα έτσι;
Η – Ναι … (με δισταγμό) … αυτή είναι συνεχής;
Ερ – … αυτό λες …
Η – … έτσι όπως είχαμε μάθει στο Λύκειο αυτή δεν είναι συνεχής.
Ερ – Αλλά τώρα το παίρνεις με την πανεπιστημιακή έννοια, ότι αν και διακόπτεται είναι συνεχής;
Η – Μπορώ να κάνω μία ερώτηση;

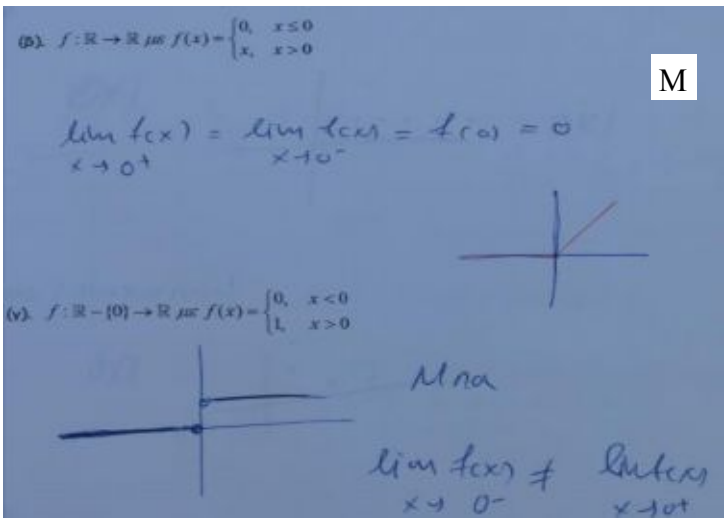
Ερ – Βεβαίως.
Η – Άλλα μας μαθαίνουν στο Λύκειο και άλλα στο Πανεπιστήμιο; (γελάει) … δηλαδή μπορεί αυτή στο Λύκειο να ήταν ασυνεχής και στο Πανεπιστήμιο να είναι συνεχής;
Ερ – (γελάω) …
Η – … συγγνώμη κιόλας αλλά μας δουλεύουν;
Ερ – Παιδιά, ένας βασικός λόγος που γίνεται αυτή η έρευνα είναι κι αυτός. Κάποια πράγματα τα μαθαίνουμε στο Λύκειο με λάθος τρόπο ή απλά μεταφέρονται με λάθος τρόπο. Όταν λοιπόν ερχόσαστε εδώ στο Πανεπιστήμιο νομίζετε ότι κάνετε άλλα πράγματα …
[συνεχίζεται λίγο η κουβέντα για τη μετάβαση από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο]…..
Ερ – Ωραία. Άρα λοιπόν Ηρακλή, με βάση τα πανεπιστημιακά σου μαθηματικά λες ότι αυτή (βλέπε Σ3) αν και διακόπτεται είναι συνεχής, γι' αυτό τη χρησιμοποιείς σαν αντιπαράδειγμα, έτσι; Γι' αυτό εδώ στη (γ) βάζεις λάθος, έτσι;
Η – Ναι … μπορεί … δεν ξέρω.
Ερ – Και νομίζω ότι το ίδιο έχεις βάλει και εσύ Μπάμπη, ε;
Μ – Δεν ξέρω, εγώ αλλιώς το φαντάστηκα. Αυτή εδώ (δείχνει το σχήμα Σ3 του Ηρακλή στο 6(γ)) δεν μου φαίνεται συνεχής.
Ερ – Δεν σου φαίνεται συνεχής.
Ερ – Όχι καθόλου.
Ερ – Γιατί;
Μ – Γιατί σκέφτομαι ότι όταν πλησιάσω εδώ … μιλάμε για το ίδιο x_0 …
Ερ – … το παίρνεις ανοιχτό ή κλειστό εδώ Ηρακλή;
Η – Εδώ είναι ανοιχτό και εδώ κλειστό (βλέπε Σ3)
Ερ – Έχεις διαφωνία εσύ τώρα Μπάμπη;
Η – Σκέφτομαι ότι άμα ήταν ένα τέτοιο πράγμα, που πήγαινε έτσι (σχεδιάζει στο φύλλο του το Σ2) δεν μου φαίνεται συνεχής αυτό το πράγμα …
Ερ – … αυτό σου φαίνεται δηλαδή ασυνεχής συνάρτηση;
Μ – Μου φαίνεται, δεν είμαι σίγουρος. Δεν ξέρω αλλά και αυτή εδώ πέρα με μπερδεύει (δείχνει το Σ3)
Ερ – Αν τα έβαζα ανοικτά και τα δύο;
Μ – Ανοιχτά και τα δύο; … Τότε θα έπαιρνε πάρα πολύ. Επειδή μιλάμε για το ίδιο x_0 και επειδή μπορώ να πλησιάσω και από αριστερά και από δεξιά και το όριο κάθε φορά πάει αλλού ενώ σε αυτή που είχα φτιάξει εγώ εδώ πέρα (βλέπε Σ1) πλησιάζουμε το x από αριστερά αλλά από δεξιά δεν μπορούμε, οπότε σαν να λέω ότι δεν έχει νόημα να εξετάσω πιο εκεί…
Η – … δεν ξέρω, εγώ το βλέπω σαν να συμπληρώνει η μία την άλλη, εμένα έτσι μου φαίνεται, δηλαδή είναι σαν αν βάλουμε αυτή (τον κάτω κλάδο του Σ3) εδώ πάνω (στον επάνω κλάδο του Σ3), έρχεται και …
Ερ – … και συμπληρώνει η μία την άλλη, κατάλαβα …
Η – … ή ξέρω εγώ αυτό που έκανε εδώ ο Μπάμπης (βλέπε Σ2) εντάξει, μου κάνει, δηλαδή ξέρω εγώ … είναι βέβαια όλα στο ίδιο x …
Μ – … ναι αλλά εδώ έχει όταν τείνει το x στο x_0 και το ένα πάει 0 το άλλο στο 1 και αυτό ξέρω εγώ στο -1, άρα ;…
Η – … κατάλαβα …
Μ – … δεν ξέρω δεν μου φαίνεται καθόλου συνεχής ούτε αυτή (η Σ2) ούτε αυτή (η Σ3). Αλλά αυτή (δείχνει τη Σ1) … μπορεί και …
Η – … δηλαδή την έχεις βάλει για συνεχή αυτή; …

Μ – … μπορεί δεν είμαι και εντελώς σίγουρος. Επειδή δεν έχει καθόλου εδώ από δεξιά …
Η – … αυτή με τίποτα; (δείχνει το Σ3) …
Μ – … με τίποτα. Και πάλι … δεν ξέρω με μπερδεύει αρκετά.



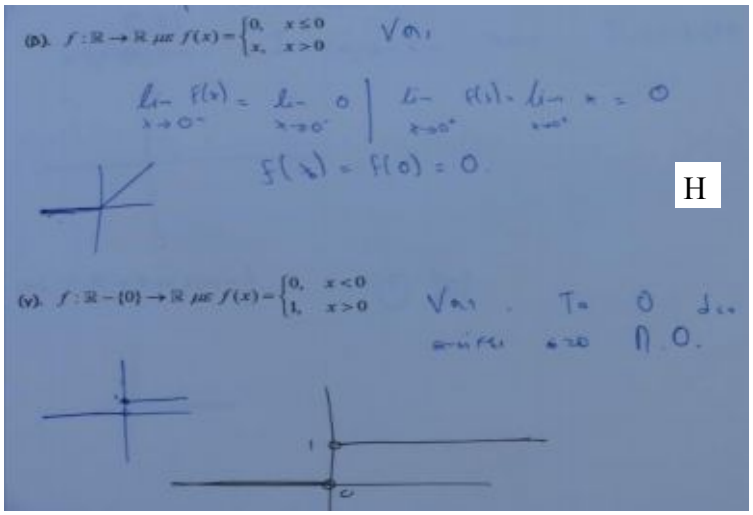


Ερ – Ωραία. Μην σας παιδεύω άλλο με αυτά. Προχωρούμε. Η 1/x τώρα. Μπάμπη λες ότι δεν ορίζεται το f(0) και λες 'Μπα'! Γιατί 'μπα';
Μ – Κάποιο πρόβλημα θα είχε! (γελάει και την ξανακοιτά) …
Ερ – Τι σε προβληματίσε δηλαδή; Το ότι δεν ορίζεται το f(0) που γράφεις εκεί;
Μ – Ναι. Αυτό που λέγαμε πριν
Ερ – Ναι, Ηρακλή;
Η – Εγώ την έχω πάρει ότι είναι συνεχής, τώρα …
Μ – … να είναι η γραφική παράσταση έτσι όπως είναι … (κάνει ένα παρόμοιο γράφημα στο δικό του φύλλο) … τότε στο 0 … μισό λεπτό …
Η – … τα όρια τώρα στο 0 είναι τελείως διαφορετικά
Ερ – Άρα πρόβλημα;
Η – Ναι, μεγάλο!
Ερ – Άρα θα άλλαζες κάτι στην απάντησή σου; …
Μ – … είναι αυτό όμως που … από την άλλη μεριά όμως υπάρχουν τα όρια στο 0, και από δεξιά και από αριστερά, ορίζονται και τα δύο όρια στο 0, απλά δεν ορίζεται το f(0) …
Ερ – … κατάλαβα …

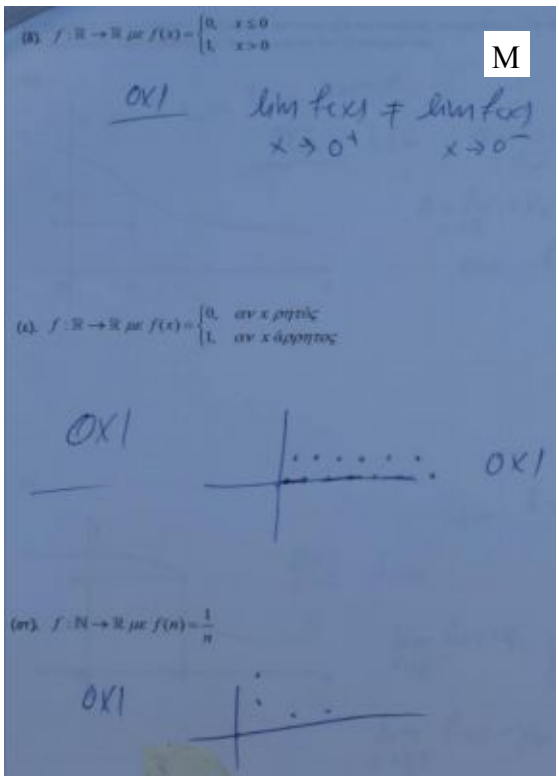


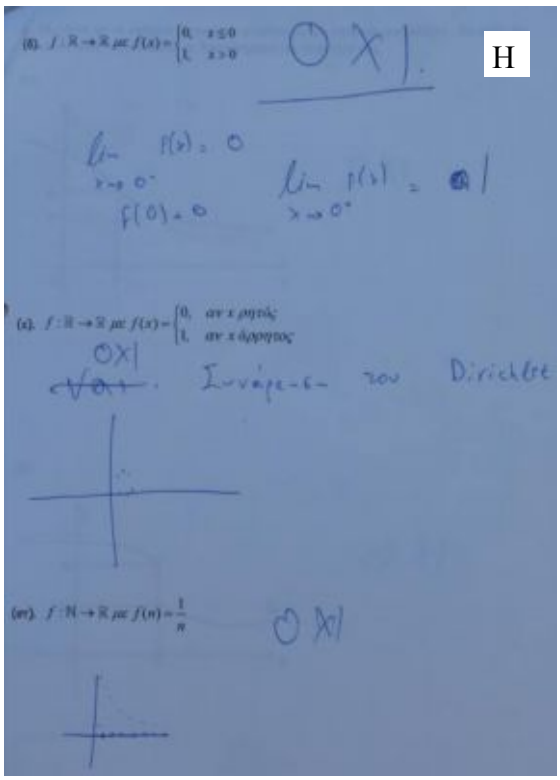
Μ – … τώρα δεν ξέρω αν μπορώ … το όριο εκεί ορίζεται, όσο μικρή κι αν α είναι η περιοχή γύρω από το 0, πάει εκεί, αλλά …
Ερ – Ηρακλή;
Η – Ξέρω εγώ … δεν ξέρω.
Ερ – Εντάξει, για να δούμε το επόμενο. Στη (β). Θέλετε να δοκιμάσετε να κάνετε τη γραφική παράσταση δίπλα;
Μ, Η – (κάνουν τα γραφήματα που φαίνονται δίπλα) …

Ερ – Σας επιβεβαιώνει το γράφημα αυτό που έχετε απαντήσει με τα όρια;
Η – Αφού την τιμή την παίρνει, τα όρια υπάρχουν, άρα λογικά είναι.
Ερ – Αυτό λέω, συμφωνεί με αυτό και η γραφική παράσταση;
Μ, Η – Ναι.
Ερ – Ωραία. Η κάτω νομίζω ότι μοιάζει με αυτή που έκανες πριν Ηρακλή στην 6(γ) (βλέπε Σ3), ε;



Η – Ναι, απλά δεν υπάρχει η τιμή.
Ερ – Ναι.
Η – Δηλαδή είναι κάπως έτσι … (σχεδιάζει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … αλλά είναι ανοιχτό εδώ και ανοιχτό εδώ.
Ερ – Πολύ ωραία.
Μ – Εγώ πάντως δεν θα έλεγα ότι αυτή είναι συνεχής. Αν την πάρουμε έτσι τότε όλες οι συναρτήσεις συνεχείς είναι. Άμα πάρουμε και μια συνάρτηση όλο τελείτσες σαν του Dirichlet, τότε και αυτή συνεχής θα είναι. Δεν ξέρω …
Ερ – Μάλιστα, για να πάμε στην επόμενη, τη (δ).

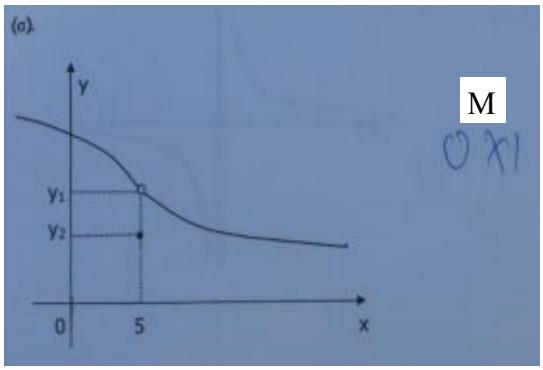


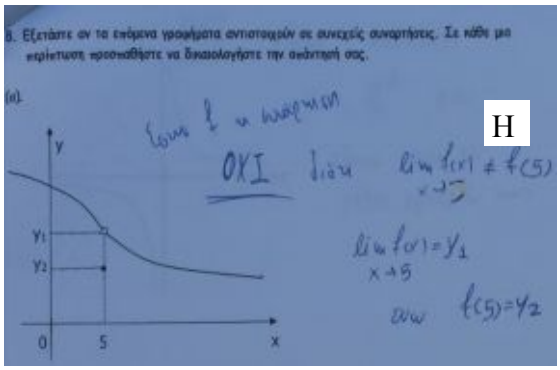


Ερ – Εδώ βλέπω ότι έχετε γράψει ξεκάθαρα όχι. Ηρακλή γιατί με τόσο πάθος το 'όχι';
Η – Γιατί, δεν υπάρχει γιατί. Γιατί έχουμε πρόβλημα με το 0 …
Μ – … γιατί έχουμε πρόβλημα εδώ …
Η – … η ίδια με πριν δεν είναι; …

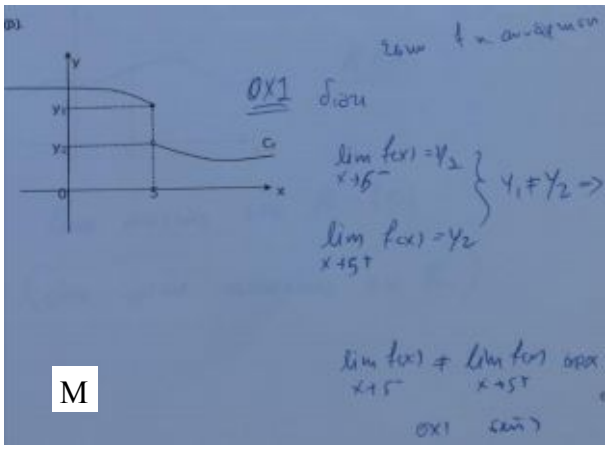
Ερ – Δεν άλλαξες εδώ που έχει το <0;
Η – Α, ναι.
Ερ – Άρα έχετε πρόβλημα και με το όριο εδώ, ε;
Μ, Η –Ναι.
Ερ – Ωραία. Η επόμενη είναι η Dirichlet.
Μ – Ε, αυτή πάει κάπως έτσι, όλο 0 και 1, συνέχεια … γι' αυτό είπα πριν ότι άμα είναι να λέμε και αυτή συνεχή στο τέλος …
Ερ – … συμφωνείς Ηρακλή; …
Η – Δεν ξέρω … έτσι όπως το λέει ο Μπάμπης …
Ερ – Εσύ τι πιστεύεις;
Η – … δεν ξέρω …
Μ – Αυτή δεν είναι ορισμένη σε όλο το R ουσιαστικά αφού έχουμε πάρει και τους ρητούς και τους άρρητους;
Ερ – Ναι…
Μ – Ε, το R δεν είναι διάστημα;
Ερ – Ναι; …
Μ – Ε, δεν μπορεί να είναι συνεχής. Γιατί φαντάζομαι πάλι αυτό που είπα πριν, να κάνω εδώ Bolzano, αφού είναι σε όλο το R. Αν έπαιρνα για παράδειγμα το διάστημα (-1, 1) δεν θα μπορούσα να βρω το f(-1) και το f(1); Θα μπορούσα να βρω το f ενός άρρητου και το f ενός ρητού. Εδώ δεν θα μπορούσα να εφάρμοζα το θεώρημα Μέσης τιμής αν ήταν συνεχής η συνάρτηση; …
Ερ – … αν ήταν συνεχής …
Μ – Αυτό λέω. Το παίρνω σαν άτοπο για να καταλήξω. Αν ήταν συνεχής θα μπορούσα να εφαρμόσω το …
Ερ – … α, κατάλαβα τι λες. Και επειδή δεν μπορώ να το εφαρμόσω …
Μ – … ναι, κάπως έτσι. Δεν μπορώ;
Ερ – Μάλιστα, θα το δούμε στο τέλος. Ωραία, Ηρακλή στη (στ) λες όχι. Θέλεις να δοκιμάσεις κι εδώ να κάνεις γραφική παράσταση;
Η – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …Θα πηγαίνει όπως πάει η 1/x αλλά θα … πέφτει ας πούμε … θα είναι η κουκίδα πάνω … δεν ξέρω αν τη λέω καλά … κάπως έτσι …
Ερ – Κατάλαβα. Και τι πιστεύεις, όχι;
Η – Όχι …
Μ – … εδώ όμως αλλάζει το πεδίο ορισμού. Είναι οι φυσικοί … ξέρω εγώ … δεν είναι να πεις ότι έχω τους πραγματικούς και ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς υπάρχει πάντα ένας άλλος. Αφού είναι φυσικοί τότε ανάμεσα σε δύο φυσικούς τι άλλο να βρίσκεται; Φυσικό άλλον δεν έχει.
Ερ – Θα το άλλαζες δηλαδή;
Μ –Αν θα μπορούσα να μην απαντήσω καθόλου θα το προτιμούσα! … Δεν ξέρω, με μπερδεύει …
Η – … αν είναι αυτή συνεχής τότε θα έπρεπε ρε να είναι και η άλλη! (δείχνει την προηγούμενη)
Μ – Η (ε);
Η – Ναι.
Μ – Αυτή έχει τιμές στο R ενώ αυτή στο N, γι' αυτό μπερδεύομαι. Και ανάμεσα σε δύο τιμές πραγματικές υπάρχει πάντα μία άλλη όσο κοντά και να τις βάλεις. Από την πληρότητα νομίζω, κάπως έτσι … αλλά ανάμεσα σε δύο φυσικούς διαδοχικούς, δεν μπορείς να βρεις άλλον.

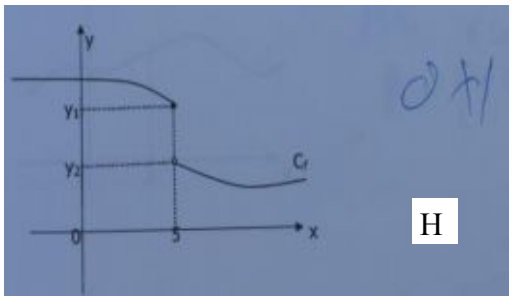
Ερ – Εντάξει, θα το δούμε στο τέλος.

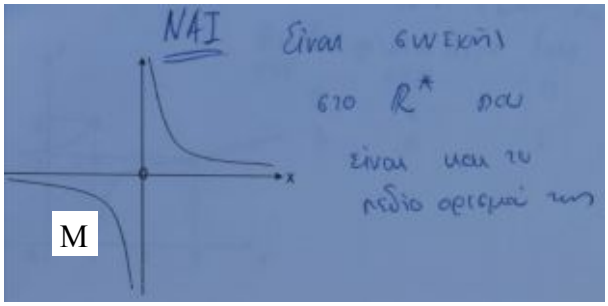


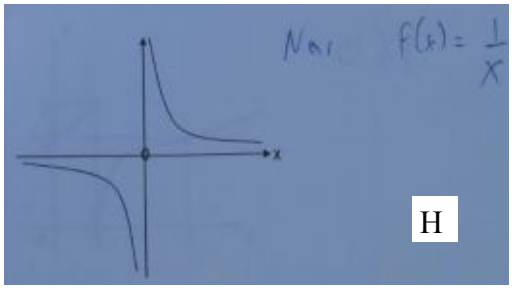


Ερ – Ωραία. Στην 8 τώρα. Μπάμπη λες όχι και γράφεις … (διαβάζω την απάντησή του) … Ωραία, κατάλαβα. Ηρακλή;
Η – Ε, βαριόμουνα να δικαιολογήσω.
Ερ – Κανένα πρόβλημα. Απλά αν θες πες μου προφορικά.
Η – Ε, τα όρια. Πάνε στο y_1 και η τιμή στο y_2.



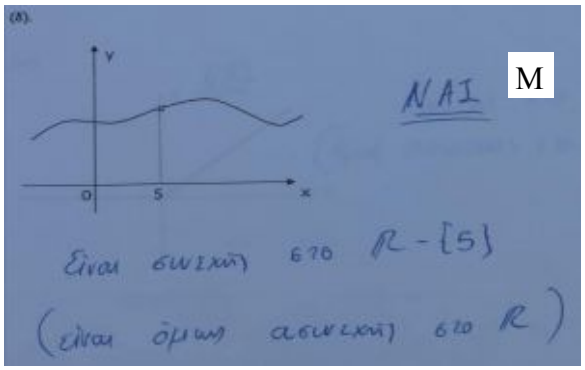


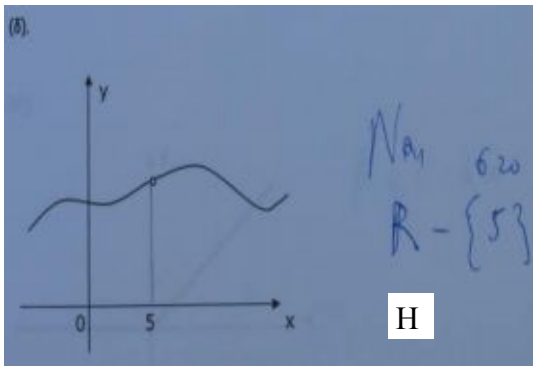




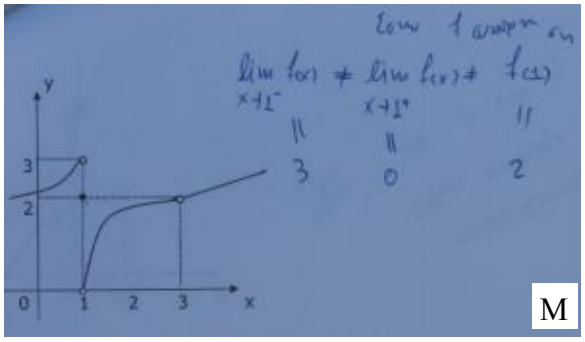
Ερ – Ωραία. Στην κάτω;
Η – Ε … πάλι τα ίδια. Από εδώ είναι y_1 από εκεί είναι y_2 και η τιμή y_1.
Ερ – Ωραία, κι εσύ Μπάμπη λες όχι και γράφεις … (διαβάζω την απάντησή του) … Ωραία, κατάλαβα. Στη (γ) τώρα. Μπάμπη λες είναι συνεχής στο R^* που είναι και το πεδίο ορισμού …
Μ – … γιατί το είπα αυτό;!; Μήπως γιατί …
Η – … καλά, άλλες απαντήσεις δίνουμε εδώ, άλλες απαντήσεις πιο κει …
Μ – … αυτή εδώ την κάναμε πριν και είπαμε …
Ερ – … Παιδιά, μην ανησυχείτε, γι' αυτό γίνεται η συζήτηση.
Μ – Και πάλι δεν είναι συνεχής, βλακεία έγραψα.

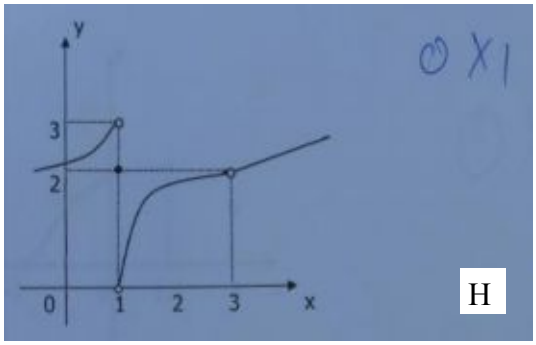
Ερ – Εσύ τι λες Ηρακλή, είναι;
Η – Ξέρω εγώ έχω μπερδευτεί, αλλά νομίζω ναι. Δεν την είχαμε κάνει αυτή και στον Απειροστικό; …
Μ – … ναι αλλά …
Η – … δεν ξέρω, πάμε παρακάτω.
Ερ – Εντάξει.



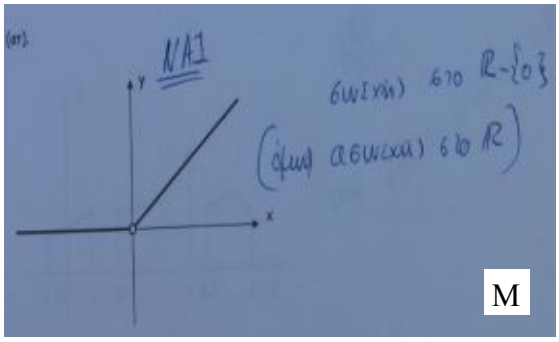


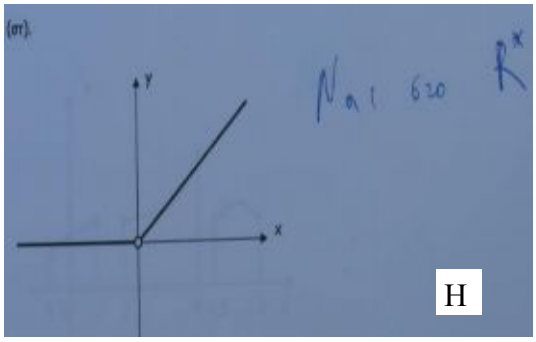
Ερ – Ωραία, στη (δ) τώρα. Και οι δύο λέτε στο R-{5}, έτσι;
Μ – Αν παίρναμε στο R δεν είναι, αλλά κατά διαστήματα είναι. Είναι πάλι το ίδιο πράγμα που λέμε …



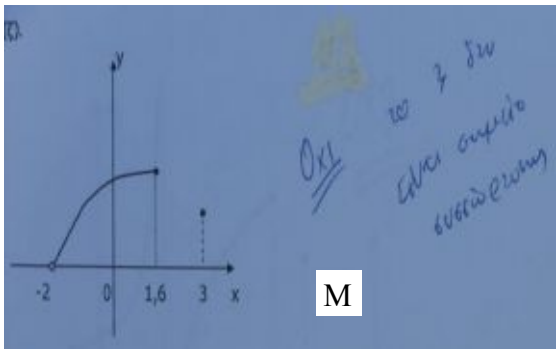


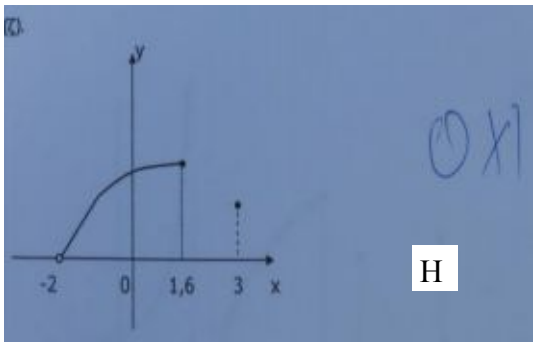
Ερ – Κατάλαβα. Τι λες για την επόμενη Ηρακλή; Τι σε χαλάει;
Η – Τα πάντα! Βασικά αν το παίρναμε από το 1 και μετά θα ίσχυε ότι λέγαμε πριν …
Ερ – … κατάλαβα …
Η – … δηλαδή εδώ (δείχνει το (1, 3)) και εδώ (δείχνει το $(3,+\infty)$) είναι συνεχής, αυτό που με χαλάει είναι εδώ στο 1 … δηλαδή ξέρω εγώ … είναι αλλού το ένα όριο, αλλού το άλλο όριο, αλλού η τιμή …
Ερ – … κατάλαβα …
Μ – … και εγώ το ίδιο πρόβλημα έχω.
Ερ – Και στο 3; Πάλι τα ίδια ε;
Μ – Ε, ναι.



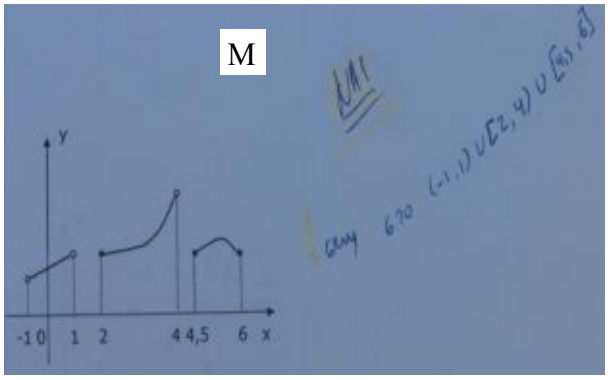


Ερ – Στην κάτω, τη (στ) βλέπω ότι έχετε γράψει την ίδια απάντηση. Συνεχής στο R^*, έτσι;
Μ, Η – Ναι.

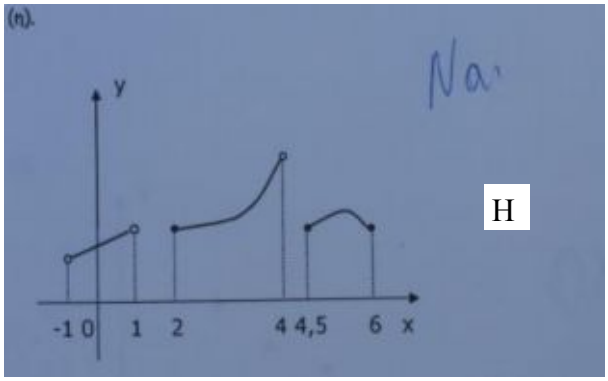


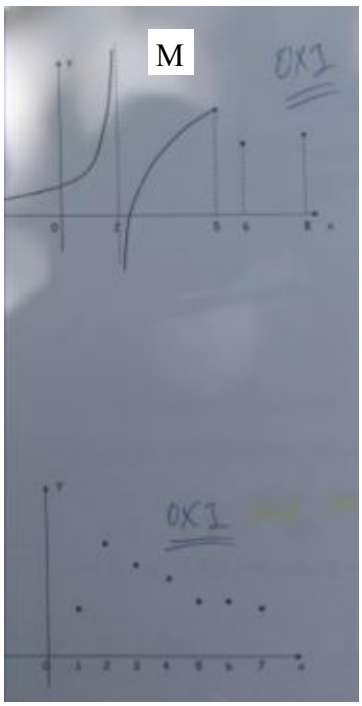


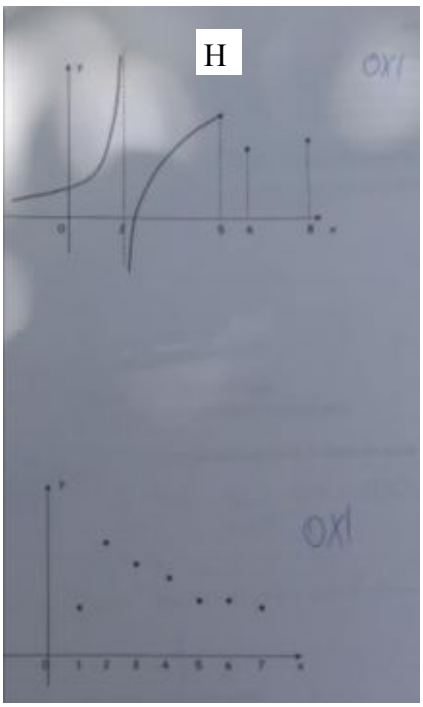
Ερ – Στη (ζ) τώρα. Μπάμπη λες όχι, το 3 δεν είναι σημείο συσσώρευσης. Άρα; …
Μ – Ε, δεν μπορεί να είναι συνεχής ένα σημείο που δεν μπορούμε να το πλησιάσουμε και να πάρουμε όριο.
Ερ – Ηρακλή συμφωνείς;
Η – Με ποιο πράγμα;
Ερ – Με αυτό που λέει ότι έχουμε πρόβλημα στο 3;
Η – Ναι, προφανώς ναι.
Ερ – Στο υπόλοιπο κομμάτι; Αν έλειπε η κουκίδα στο 3;
Μ – Συνεχής …
Η – … δηλαδή αν δεν υπήρχε αυτό έτσι, αν σε αυτή τη συνάρτηση έλειπε η κουκίδα αυτή θα ήταν συνεχής; …
Ερ – … αυτό ρωτάω …
Μ – … δεν είναι πρόβλημα, τότε δεν μας πειράζει.
Η – … επειδή λείπει αυτό δηλαδή (δείχνει το κενό στο -2) …
Μ – … δεν μας πειράζει …
Η – … α, καλά …
Ερ – … δηλαδή εσένα σε χαλάει που είναι ανοιχτό στο -2; …
Η – … όχι ρωτάω, δεν ξέρω …
Ερ – … εσένα σε χαλάει; …
Η – … εμένα θα με χάλαγε, δεν ξέρω …
Μ – … εμένα όχι. Δηλαδή άμα πάρουμε την f(x)=x σε ένα κομμάτι τότε δεν έχει ούτε πλην άπειρο ούτε συν άπειρο, και; …
Η – …δηλαδή άμα πάρεις την f(x)=x από το 1 μέχρι το 3 ανοιχτό είναι συνεχής;!; …
Μ – … έτσι τη βλέπω εγώ …
Η – Δεν ξέρω …



Ερ – Η κάτω;
Η – … δεν ξέρω ποια είναι αυτή, γιατί το έβαλα έτσι …
Ερ – Η κάτω γιατί πιστεύεις ότι είναι συνεχής;
Η – (γελάει) … δεν μπορώ να θυμηθώ γιατί την έβαλα συνεχή.
Ερ – Τώρα σε προβληματίζει το ανοιχτό κάτω;
Η – Τώρα βασικά με προβληματίζει το γιατί έβαλα το ναι.
Ερ – Μπάμπη σε προβληματίζει εσένα;
Μ – Δεν ξέρω, συνεχής στο ένα διάστημα, συνεχής στο άλλο διάστημα συνεχής και σε όλο μαζί; … Δεν ξέρω …Πρόβλημα …
Η – Ναι, κι εγώ προφανώς αυτό σκέφτηκα …
Δεν ξέρω! …
Ερ – Ωραία, πάμε και στις τελευταίες.





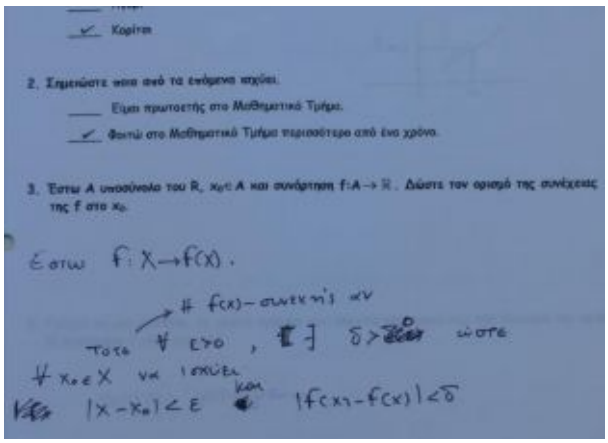


Ερ – Εδώ τώρα βλέπω τέσσερα κατηγορηματικά όχι!
Μ, Η – (γελάνε) ….
Ερ – Τι σε χαλάει Ηρακλή στη (θ);
Η – Τι με χαλάει … ξέρω εγώ …
Μ – … ε αυτό (του δείχνει την ασύμπτωτη στο 2) …
Η – … ναι, αυτό που είναι σαν την 1/x και αυτά (δείχνει τα μεμονωμένα σημεία) …
Ερ – Και στην κάτω;
Μ – Τα σημειάκια που είναι έτσι … αν και εδώ πέρα τώρα … μάλλον είναι οι φυσικοί ο περιορισμός …
Η – … ε, ναι, εντάξει …
Μ – … αλλά όχι.
Η – Όχι, όχι.
Ερ – Ωραία. Αν τα ενώσω με γραμμή;

Μ – Ναι λογικά, αλλά αυτό είναι το πρόβλημά μου, εφόσον το πεδίο ορισμού είναι οι φυσικοί αριθμοί είναι σαν είναι ενωμένοι με γραμμή, αφού δεν υπάρχει κάτι ενδιάμεσα.
Ερ – Κατάλαβα. Εσύ τι λες;
Μ – Κοιτάξτε ποιο είναι το πρόβλημά μου. Έχω απεικονίσει φυσικούς αριθμούς σε πραγματικούς άξονες, σε άξονα πραγματικών αριθμών, οπότε μπορεί και να ξεγελιέται το μάτι και …
Ερ – Α … κατάλαβα τι λες …
Μ – … αν υπήρχε ένα γράφημα για φυσικούς αριθμούς θα μπορούσα να την έβλεπα πιο σωστά.
Ερ – Οπότε αν έπρεπε να αποφασίσεις, τι θα έλεγες;
Μ – Δεν ξέρω … μπορεί και συνεχής …δεν ξέρω, δεν ξέρω.
Η – Κατάλαβα τι λέει. Κι εγώ που το σκέφτομαι τώρα, κι εγώ μπορεί να το έβαζα συνεχή.
Ερ – Αν τα ενώσω; Έτσι με μια καμπύλη;
Η – Ναι.
Ερ – Αν τα ενώσω υπό γωνία, έτσι δηλαδή με κοφτά ευθύγραμμα τμήματα;
Μ – Ε, δεν μας ενδιαφέρει αυτό …
Ερ – … εγώ απλά ρωτάω. Ηρακλή;
Η – Στην παραγωγισιμότητα δεν παίζει ρόλο αυτό νομίζω; Στις παραγώγους δεν παίζει ρόλο αυτό μόνο;
Μ – Ε, τώρα δεν μας νοιάζει η παράγωγος …
Η – … αυτό λέω …
Μ – … ε, ναι αν είναι παραγωγίσιμη είναι άλλο θέμα.
Ερ – Πολύ ωραία! Παιδιά σας ευχαριστώ πολύ!

34η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Μυρτώ’ φοιτά στο Μαθηματικό τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.


Κορίτσι

2. Σημειώστε κάτω από τα ενδεχόμενα ισχύει.

Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

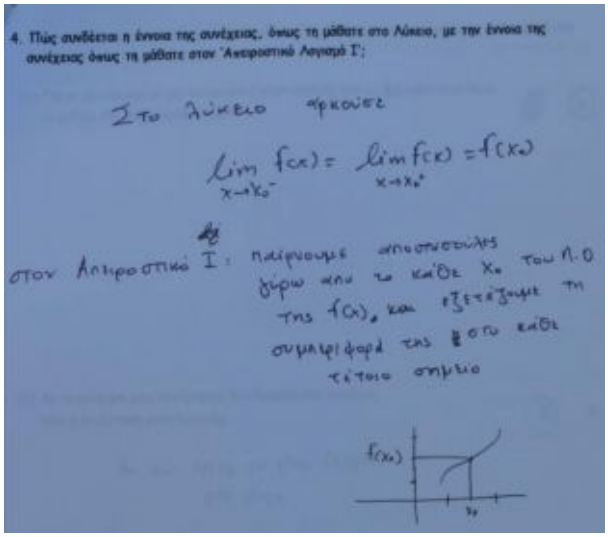
3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to R$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

Έστω $f: X \to f(X)$.

Τότε # f(x)-συνεχής αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x_0 \in X$ να ισχύει $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$

Ερ - Τον ορισμό δεν θα τον σχολιάσουμε τώρα. Θα ξαναγυρίσω πάλι σε αυτόν στο τέλος. Θα ήθελες λίγο να μου αναλύσεις αυτό που γράφεις στο 4;

Μ – μμμ, εδώ στον Απειροστικό δουλεύουμε με αποστασούλες. Για τη συνέχεια ας πούμε, έχουμε ένα x_0 ας πούμε, εδώ ας πούμε … (φτιάχνει το σχηματάκι που φαίνεται δίπλα) … και για να βρούμε αν είναι συνεχής η συνάρτηση ας πούμε εδώ, παίρνουμε μια μικρή περιοχή γύρω από αυτό το x_0 και μια άλλη γύρω από το $f(x_0)$ εδώ, και παίρνουμε ένα δ για εδώ όσο μικρό θέλουμε και καθώς πλησιάζουμε εδώ, πρέπει αυτό εδώ το ε, η αποστασούλα εδώ πάνω ε ας πούμε, πρέπει να προσεγγίζει το $f(x_0)$ εδώ.


4. Πώς συνδέεται η έννοια της συνέχειας, όπως τη μάθατε στο Λύκειο, με την έννοια της συνέχειας όπως τη μάθατε στον Απειροστικό Λογισμό Ι;

Στο λύκειο αρκούσε

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

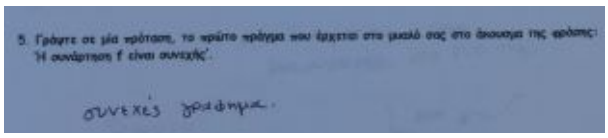
στον Απειροστικό Ι: παίρνουμε αποστασούλες γύρω από το κάθε x_0 του π.ο της $f(x)$, και εξετάζουμε τη συμπεριφορά της f στο κάθε τέτοιο σημείο

Ερ – Κατάλαβα, κατάλαβα. Αυτό έχει να κάνει …

Μ – … έχει να κάνει με το πώς ρέει ας πούμε, όσο πλησιάζει, να πλησιάζει.

Ερ – Κατάλαβα. Αυτό που λες έχει να κάνει με την ερώτηση που ήθελα να σου κάνω στην αρχή για τον ορισμό. Δεν θα σταθώ άλλο σε αυτό. Θα ξαναγυρίσουμε στο τέλος …

Μ – … αυτό που λέει στο Λύκειο εδώ πέρα, και στο Λύκειο δεν το σκεφτόμουνα έτσι, το σκεφτόμουνα πάλι με αποστασούλες …


5. Γράψτε σε μία πρόταση, το πρώτο πράγμα που έρχεται στο μυαλό σας στο άκουσμα της φράσης: 'Η συνάρτηση f είναι συνεχής'.

συνεχές γράφημα.

Ερ – … πώς κι έτσι; Γιατί;

Μ – Γιατί έτσι μας το είχε μάθει η μαθηματικός μας στο σχολείο …

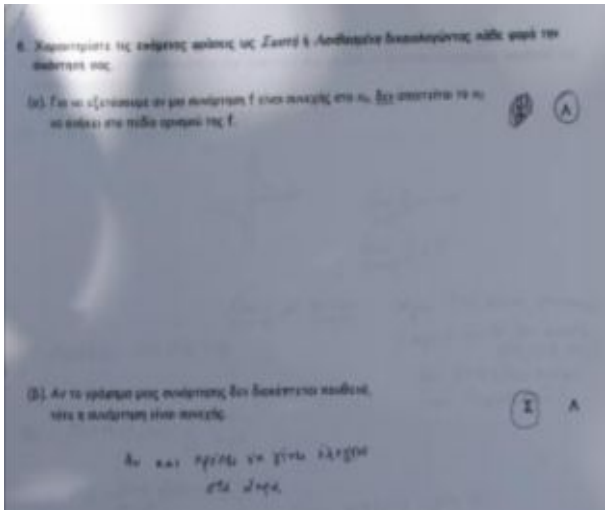
Ερ – … ναι;! Μπράβο!

Μ – Δηλαδή πάντα το lim το σκεφτόμουνα με μια ζώνη που μικραίνει και πλησιάζουμε σε αυτό που θέλουμε, και βλέπουμε που πάει. Δηλαδή έτσι το είχα μάθει η ούτως η άλλως. Αλλά έτσι συμβαίνει στο Λύκειο το όριο το βλέπεις σαν κάτι στατικό σαν μία πράξη.

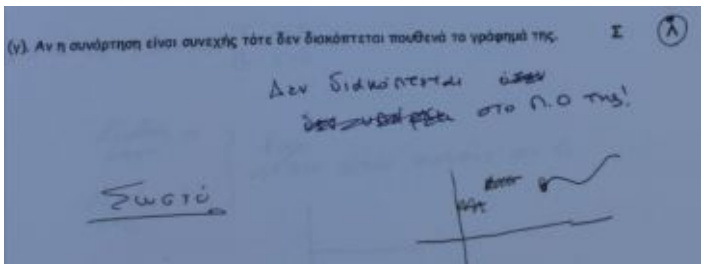
Ερ – Πολύ ωραία, κατάλαβα. Αυτό τώρα που σου έρχεται στο μυαλό ακούγοντας τη φράση ‘συνάρτηση συνεχής’; …

Μ – … είναι ένα συνεχές γράφημα.

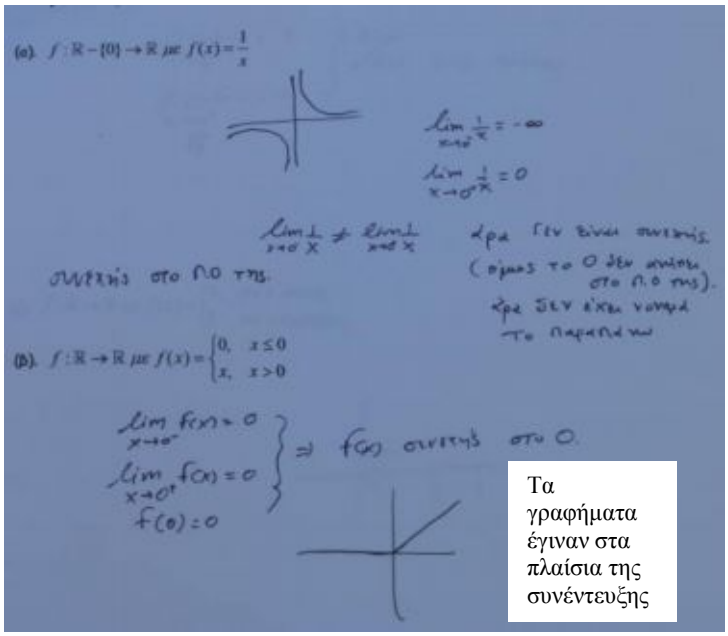
Ερ – Εννοείς δηλαδή μια γραμμή χωρίς διακοπή …
Μ – … μπράβο, ναι αυτό.



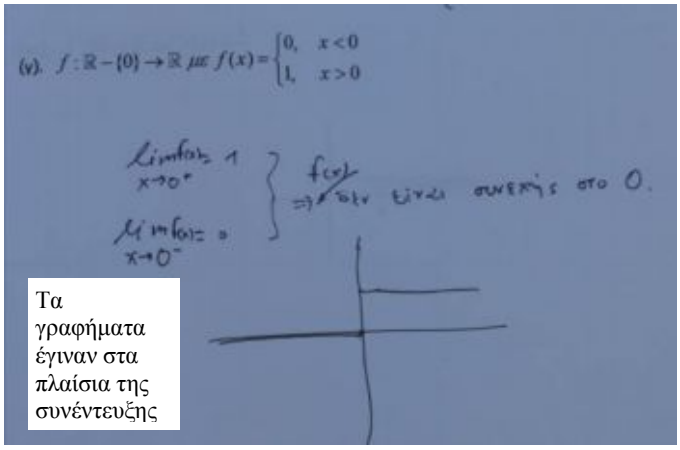
Ερ – Ωραία. Στην 6 τώρα, στο (α) λες 'λάθος', γιατί;
Μ – Ναι, ε γιατί αν το x_0 Δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, τότε δεν υπάρχει νόημα να είναι και η συνεχής. Δεν μπορούμε να εξετάσουμε για συνέχεια. Μπορούμε να πάρουμε τα πλευρικά όρια αλλά δεν θα υπάρχει το $f(x_0)$.
Ερ – Ωραία. Στο (β) λέμε αν δεν διακόπτεται το γράφημα το ότι η συνάρτηση είναι συνεχής. Τι εννοείς όταν λες ότι πρέπει να γίνει έλεγχος στα άκρα; Έχεις δηλαδή συνδυασμό;
Μ – Αυτό μάλλον … δεν ξέρω τι μου ήρθε να το γράψω …
Ερ – Κοίταξέ το, μήπως θυμηθείς …
Μ – … Αυτό είναι σωστό.
Ερ – Και αυτό που έχεις γράψει;
Μ – εεε … εννοούσα ότι αν είναι σε κλειστό διάστημα ή ανοιχτό, ότι εκεί παίρνουμε τα πλευρικά όρια …
Ερ – … νομίζω ότι καταλαβαίνω τι μου λες …
Μ – … εάν είναι στο ανοιχτό (α, β), παίρνουμε το δεξί όριο για το α ας πούμε, και το αριστερό όριο για το β, απλά εδώ δεν υπάρχει f(a) και f(b).
Ερ – Ως προς αυτό που λέει η πρόταση ότι αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται τότε αυτή είναι συνεχής, τι έχεις να πεις; Τι πιστεύεις; Όχι ότι έχεις απάντηση 'λάθος', απλά ρωτάω.



Μ – Είναι σωστό, ναι.
Ερ – Σωστό, ωραία. Ενώ στο επόμενο που η συνάρτηση είναι συνεχής και λέμε ότι δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημα της λες λάθος. Γιατί;
Μ – Όχι, σωστό είναι και αυτό.
Ερ – Θα το άλλαζες;
Μ – μμμ … σωστό είναι ναι αλλά …
Ερ - Μήπως κάποιο σχεδιάγραμμα σου ερχόταν στο μυαλό η κάτι τέτοιο; Γράψε ό,τι θέλεις.
Μ – μμμ … μήπως κάτι σαν αυτό … (μονολογεί και κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) … όχι, σωστό είναι και αυτό.
Ερ – Σωστό;
Μ – Ναι … εκτός αν έχουμε αυτό εδώ πέρα … (κοιτάζει πάλι το γράφημα που έχει κάνει) … να κάτι σαν αυτή τη γραμμή …
Ερ – Αλλά αυτή η γραμμή δεν διακόπτεται …
Μ – … ναι δεν διακόπτεται, όχι σωστό είναι τελικά.

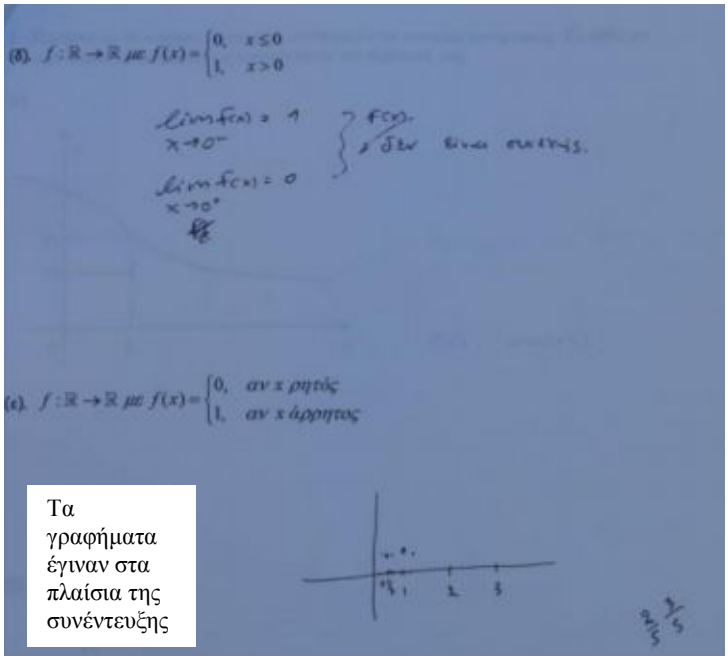


Ερ – Ο.Κ. (γράφουμε σωστό) …μμμ …ενδιαφέρουσα η απάντηση στο 7(α). Για κοίταξέ τη λίγο να την θυμηθείς ... παίρνεις τα πλευρικά όρια …
Μ – … ναι … αλλά το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού …
Ερ – Ναι; Άρα δεν έχει νόημα το παραπάνω λες …
Μ – Ναι.
Ερ - Δηλαδή τι θα έλεγες τελικά γι' αυτή τη συνάρτηση; Τι είναι;
Μ – Ότι … είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Ερ - Συνεχής στο πεδίο ορισμού της, μάλιστα. Σε χαλάει που έχει δύο κομμάτια το γράφημά της;
Μ – Ναι! (γελάει) …
Ερ – Ας υποθέσουμε ότι το γράφημα που έχεις κάνει είναι σωστό. Σε χαλάει; Θα έπρεπε να έχει ενιαίο γράφημα;
Μ – … όχι …
Ερ – Άρα μπορεί να είναι συνεχής αυτή και ας έχει δύο κομμάτια;
Μ – μμμ …
Ερ – Ό,τι σκέπτεσαι πες το μου. Ότι σου έρχεται στο μυαλό. Τι σε προβληματίζει;
Μ – Αυτό που σκέπτομαι … είναι ότι μόνο στο 0 … όχι δεν πειράζει που είναι σε δύο κομμάτια, αν και πριν απάντησα ότι πειράζει …
Ερ – … αυτό ήθελα να σε ρωτήσω μήπως αυτό έρχεται σε αντίφαση με αυτό που …
Μ – … κάπως μου ήρθε αυτό εδώ πέρα, δεν ξέρω τι σκέφτηκα εκείνη την ώρα πάντως τώρα θα απαντούσα σωστό.
Ερ – Κάτσε γιατί με μπέρδεψες. Σωστό η λάθος; Αν ξαναγυρίζαμε στο 6(γ) τι θα επέλεγες;
Μ – … Το λάθος … και θα έβαζα αυτό για παράδειγμα.
Ερ – Την 1/x, μάλιστα. Τώρα στη (β). Θέλεις να δοκιμάσεις να μου κάνεις τη γραφική της παράσταση;



Μ – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ – Ωραία. Συμφωνεί το γράφημά σου με αυτά που έχεις γράψει με τα όρια;
Μ – … στο 0 προφανώς … (μονολογεί) … ναι.
Ερ – Ωραία. Είναι και ολόκληρη η συνάρτηση συνεχής;
Μ – μμμ … ναι. Είναι γιατί είναι συνεχής στον αρνητικό ημιάξονα είναι στο 0 είναι και μετά.

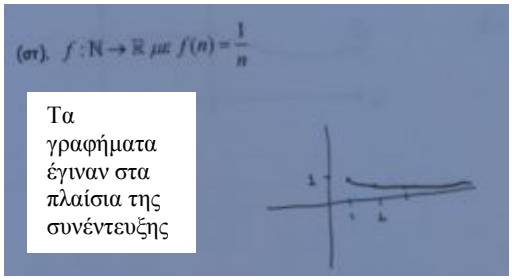
Ερ – Ωραία. Πάμε στη (γ). Θέλεις να δοκιμάσεις πάλι να κάνεις τη γραφική της παράσταση;
Μ – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται δίπλα) … αυτή δεν είναι συνεχής …
Ερ – … γιατί; …
Μ – … το αποδείξαμε και με τα όρια …
Ερ – … δεν είναι συνεχής στο 0. Οπουδήποτε αλλού;
Μ – Ναι. Είναι. Από αριστερά πάει εδώ από δεξιά πάει εδώ, εντάξει είναι.
Ερ – Τι θα έλεγες τώρα για την επόμενη; Μοιάζει λίγο …
Μ – Αχού! Η προηγούμενη είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ενώ αυτή δεν είναι.
Ερ – Δηλαδή θα το άλλαζες;



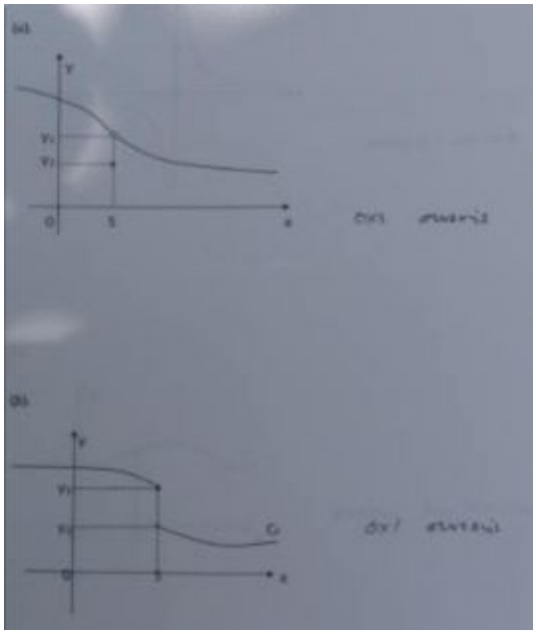
Τα γραφήματα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

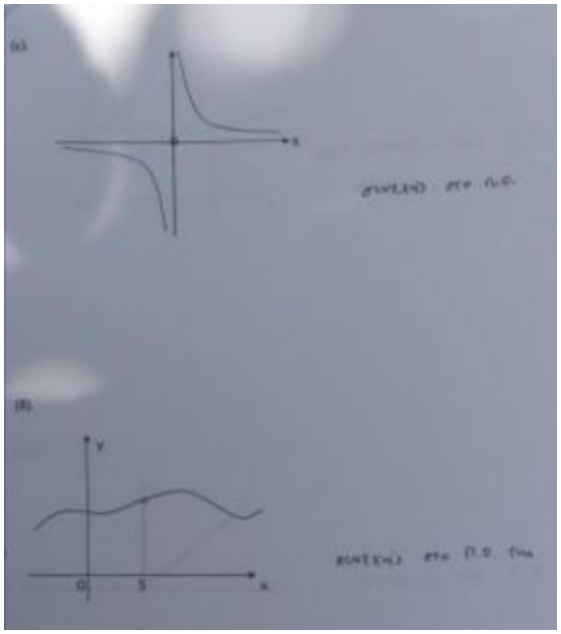
Μ – Ναι.
Ερ – Γιατί, τι αλλάζει;
Μ – Αλλάζει ότι το 0 στην προηγούμενη δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού … άρα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της …
Ερ – … ενώ εδώ τι θα έλεγες;
Μ – Εδώ είναι ασυνεχής στο 0 αλλά και σε όλο το πεδίο ορισμού της … όλη η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.
Ερ – Ωραία, κατάλαβα. Αυτή εδώ η πονηρή; (δείχνω την (ε))
Μ – εεε, να κάνω το γράφημα;
Ερ – Άμα θέλεις.
Μ – … (κάνει το γράφημα που φαίνεται παραπάνω) …
Ερ – Λίγο περίεργο ε;
Μ – μμμ … τέλος πάντων … κάπως έτσι …
Ερ – Ποιες κουκίδες πιστεύεις ότι θα είναι πιο πολλές; Των ρητών ή των άρρητων;
Μ – Θα είναι ίσες.
Ερ – Θα είναι ίσες, Ο.Κ. Άρα έχεις κουκίδες επάνω και κουκίδες κάτω. Τι λες, θα είναι συνεχής;
Μ – Εννοώ θα είναι ίσες πηγαίνοντας προς το άπειρο. Ως προς το πλήθος θα είναι ίσες.
Ερ – Εντάξει, ναι. Τώρα τι πιστεύεις θα είναι συνεχής αυτή;
Μ – Αυτή … ας πούμε στο ½, τα πλευρικά όρια θα είναι ίσα, αλλά το f(1/2) εδώ είναι 1 … τα μπέρδεψα, τα πλευρικά 0 και το f(1/2) θα είναι 1. Άρα είναι ασυνεχής.
Ερ – Ασυνεχής, μάλιστα. Ωραία, μπορείς τώρα να μου πεις ένα ρητό;
Μ – Το 2/5.
Ερ – Ο αμέσως επόμενος από αυτόν;
Μ – Το 3/5.
Ερ – Είναι ο αμέσως μεγαλύτερος;
Μ – Ναι.
Ερ – Υπάρχει πιθανότητα να μπορείς να βρεις άλλον;
Μ – Τι εννοείτε;
Ερ – Κάποιον μεγαλύτερο από το 2/5 αλλά μικρότερο από το 3/5 ρητό;
Μ – μμμ … ε …

Ερ – Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχει απλά ρωτάω.
Μ – το 2/5 … μμμ … ναι … είναι … μεγαλύτερο θέλουμε;
Ερ – Ναι, μεγαλύτερο, τον αμέσως μεγαλύτερο. Τον επόμενό του ρητό δηλαδή.
Μ – … Όχι, δεν υπάρχει ρητός άλλος, το 3/5 είναι.



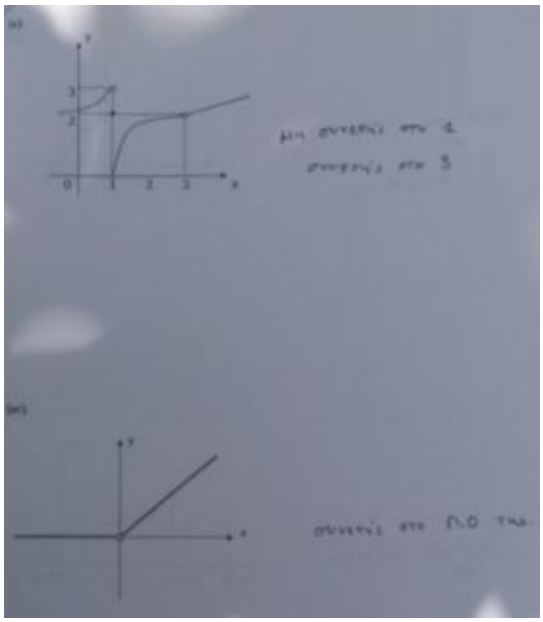
Ερ – Ωραία, πάμε στη (στ). Μπορείς να μου κάνεις και γι' αυτήν τη γραφική παράσταση;
Μ – … είναι οι φυσικοί εδώ … (κάνει το διπλανό γράφημα) … τι κάνω; … εεε … πάει έτσι.
Ερ – Και είναι αυτή η γραμμή έτσι;
Μ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Είναι συνεχής;





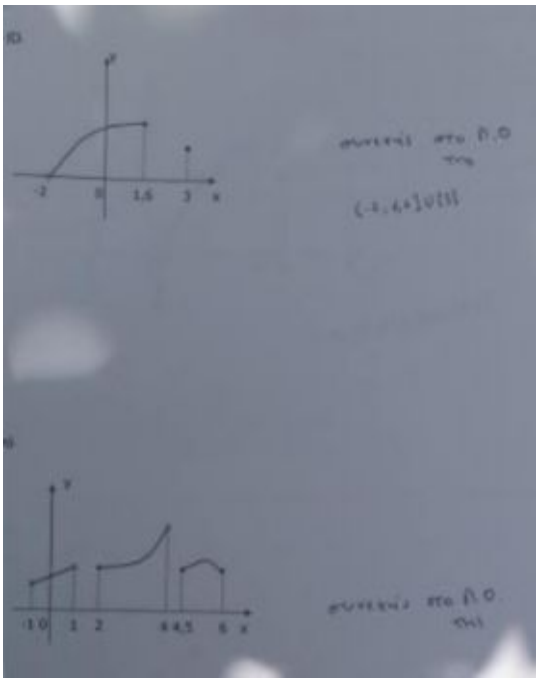
Μ – Ναι, έτσι φαίνεται.
Ερ – Δηλαδή θα έλεγες ναι;
Μ – Ναι, ναι, συνεχής.
Ερ – Ωραία. Πάμε τώρα σε αυτά τα οποία δεν έχουν τύπους.
Μ – εεε …ασυνεχής, ε όχι συνεχής …
Ερ – … όχι συνεχής, γιατί;
Μ – πλησιάζοντας από δεξιά πάει στο 5, πλησιάζοντας από αριστερά πάει στο 5, αλλά το f(5) είναι y_2 … τι λέω; Πλησιάζοντας το 5 είναι y_1, ενώ το f(5) είναι y_2.
Ερ – Κατάλαβα, κατάλαβα. Η επόμενη;
Μ – Όχι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Μ – Γιατί πλησιάζοντας από δεξιά είναι y_2, από αριστερά είναι y_1, και είναι διαφορετικά τα πλευρικά.
Ερ – Ωραία. Να ρωτήσω στο (α), αν εξαφανίσω την κουκκίδα του y_2 …
Μ – … τότε είναι συνεχής.
Ερ – Μάλιστα. Αν στο (β) γεμίσω την κουκκίδα του y_2 …
Μ – Ασυνεχής γιατί πάλι τα πλευρικά είναι διαφορετικά.
Ερ – Ωραία. Αυτή τώρα η (γ) λες …
Μ – … συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

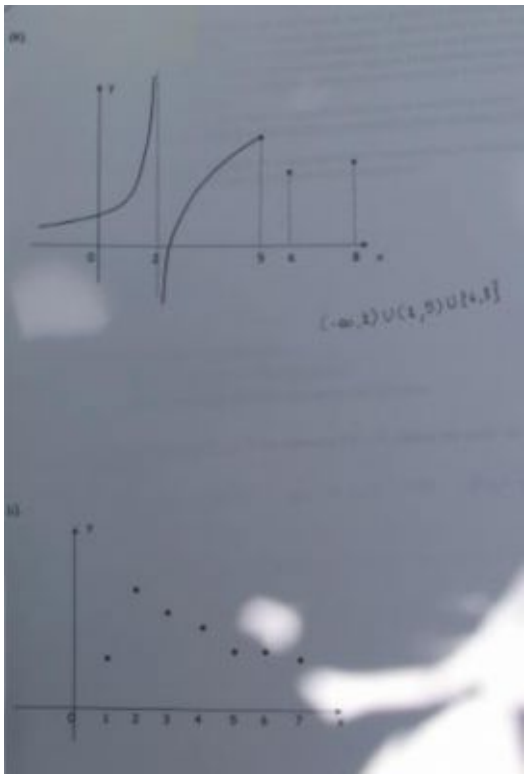
Ερ – Συμφωνείς;
Μ – Ναι … απλά …πρέπει να την ξέρω κανονικά (γελάει) …
Ερ – Τώρα βλέπεις γράφημα, δεν βλέπεις τύπο και πρέπει από το γράφημα μόνο να αποφανθείς αν είναι συνεχής ή όχι. Τι σου κάνει το γράφημα.
Μ – Ναι, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Ωραία, το (β);
Μ – Συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Σε χαλάει που έχει δύο κομμάτια;
Μ – Έχει δύο;
Ερ – Εννοώ …
Μ – Α, ναι είναι και εκεί …
Ερ – … ναι που δεν ορίζεται στο 5.
Μ – Όχι, καθόλου. Λάθος απάντησα εκεί στην αρχή.
Ερ – Το αρχικό λες;
Μ – Ναι αλλά κάτι μου ήρθε εκείνη την ώρα, κάποια έμπνευση όταν το έγραψα … (γελάει) … δεν πειράζει.



Ερ – Ωραία. Εδώ τώρα, στο 1 λες μη συνεχής. Γιατί;
Μ – Ναι, στο 1 φαίνεται. Γιατί πλησιάζοντας στο 1 από δεξιά το όριο κάνει 0, από αριστερά κάνει 3 άρα δεν είναι συνεχής αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίδια.
Ερ – Στο 3 όμως λες …
Μ – … είναι συνεχής στο 3.
Ερ – Είναι συνεχής στο 3;
Μ – εεε … είναι στο πεδίο ορισμού; Όχι … ναι είναι.
Ερ – Είναι. Εντάξει …
Μ – … αχ! Τι λέω; Είναι εδώ πέρα αυτό ε; (δείχνει το ανοικτό κυκλάκι στο 3) … δεν είναι συνεχής.
Ερ – Γιατί;
Μ – Γιατί … μισό λεπτό … όχι … είναι συνεχής …
Ερ – Είναι …
Μ – … ναι είναι …
Ερ – … γιατί;
Μ – … γιατί έχει πεδίο ορισμού από το μείον άπειρο μέχρι το 3 και από το 3 μέχρι το συν άπειρο, εκτός του 3.
Ερ – Άρα …
Μ – … άρα στο 3 … δεν υπάρχει η f(3) … δεν έχει τιμή … για να είναι συνεχής θα πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα με το f του …
Ερ – Τι σε χαλάει πες μου. Τι σε ενοχλεί σε αυτήν; Τι σε προβληματίζει μάλλον;
Μ – Εκεί με τον ορισμό, τον ορισμό … που λέει ότι τα πλευρικά δε πρέπει να είναι ίσα με το $f(x_0)$, και …
Ερ – … και τι βλέπεις εδώ; …

Μ – … ότι δεν υπάρχει το $f(x_0)$, αλλά … αλλά εφόσον δεν ανήκει … αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να πάμε με τα πλευρικά αλλά το f(3) … σύμφωνα με τον ορισμό δεν είναι συνεχής αλλά … εγώ νομίζω ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
Ερ – Στο πεδίο ορισμού της, μάλιστα.
Μ – Ναι.
Ερ – Ωραία, πάμε στην επόμενη. Τι λες για τη (στ);
Μ – ε …
Ερ – Συμφωνείς με αυτό που έχεις γράψει; Συνεχής στο πεδίο ορισμού της;
Μ – … (γελάει) … Σύμφωνα με τον ορισμό είναι λάθος αλλά …
Ερ – Θα το άλλαζες δηλαδή;
Μ – … αν και τα πλευρικά είναι ίσα, δεν υπάρχει το f(0) … που σημαίνει ότι στο 0 δεν είναι συνεχής, αλλά στο υπόλοιπο είναι. Αλλά το 0 δεν υπάρχει ή ούτως ή άλλως στο πεδίο ορισμού!
Ερ – Κατάλαβα. Άρα έχεις ένα δίλημμα! Προς τα πού κλίνεις;
Μ – Εεε … αυτό που έχω γράψει εκεί! (γελάει) …
Ερ – Συνεχής στο πεδίο ορισμού, ε;
Μ – Ναι.





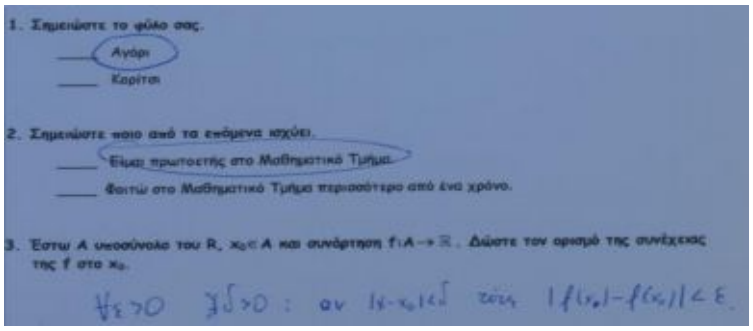
Ερ – Ωραία. Στη (ζ) τώρα λες το ίδιο. Ποιο εννοείς εδώ ως πεδίο ορισμού; Θέλεις να μου γράψεις;
Μ – … (γράφει το $(-2,1.6] \cup \{3\}$) …
Ερ – Άρα σε αυτό είναι συνεχής;
Μ – εεε … ναι.
Ερ – Σε χαλάει το κενό από το 1,6 μέχρι το 3;
Μ – εεε όχι δεν με χαλάει, όχι. Στο 3 είναι … μήπως θα έπρεπε να με χαλάει; … Όχι.
Ερ – Στην επόμενη το ίδιο;
Μ – Ναι.

Ερ – Στο πεδίο ορισμού της, ωραία. Στη (θ) τώρα, για κοίτα τη.
Μ – Στο 2 πάει συν άπειρο εδώ … μείον άπειρο εδώ … αυτή τώρα είναι ασυνεχής
Ερ – Ασυνεχής; Σε ποια σημεία παρουσιάζει ασυνέχεια;
Μ – … στο 2.
Ερ – Στο 2. Κάπου αλλού;
Μ – Όχι εδώ δεν υπάρχει νόημα, αυτά είναι μεμονωμένα …
Ερ - Άρα σε όλο το υπόλοιπο είναι συνεχής;
Μ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Και στα σημεία;
Μ – Και εδώ πέρα … συνεχής … απλά δεν υπάρχει νόημα να εξετάσουμε εδώ πέρα αν είναι συνεχής … δηλαδή μπορούσε να … μιλάμε για;…
Ερ – … ενιαίο, αυτό που βλέπεις ολόκληρο …
Μ – Άρα είναι συνεχής
Ερ – Συνεχής; Γράψε μου αν θέλεις που είναι συνεχής, όπως έγραψες πριν.
Μ – … (γράφει $(-\infty,2)\cup(2,5)\cup\{6,8\}$) … αυτό είναι
Ερ – Ωραία, και εδώ είναι συνεχής ε;
Μ – Ναι.
Ερ – Και ασυνεχής στο 2;
Μ – Ναι.
Ερ – Ωραία. Και η κάτω;
Μ – Νομίζω … ότι είναι … μου κάνουν και τα δύο
Ερ – προς τα πού κλίνεις;
Μ – εεε …συνεχής …δεν ξέρω … βασικά … μου φαίνεται ότι είναι τελείως ασυνεχής, αλλά θα πω ότι είναι συνεχής!
Ερ – Γιατί σου φαίνεται τελείως ασυνεχής;
Μ – … (γελάει) … Έτσι όπως είναι το γράφημα, έτσι όπως το βλέπω δεν … μου φαίνεται και πολύ …
Ερ – Κατάλαβα. Αλλά θα έλεγες …
Μ – … ότι … είναι συνεχής.
Ερ – Ότι είναι συνεχής, γιατί; Γιατί διαλέγεις να πεις ότι είναι συνεχής;
Μ – Γιατί διαλέγω να πω ότι είναι συνεχής … μμμ … δεν μπορώ να εξηγήσω το γιατί …μου φαίνεται ότι … γενικά δεν υπάρχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια εδώ …
Ερ – … όπα, κάτσε! Άλλη απάντηση αυτή τώρα! Δεν έχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια;
Μ – Ναι, γιατί …
Ερ - Γιατί άλλο είναι να πεις δεν έχει νόημα, άλλο είναι συνεχής και άλλο είναι να πεις ασυνεχής.
Μ – Δεν έχει νόημα νομίζω…
Ερ – Γιατί;
Μ – Γιατί … αν πάρουμε και εξετάσουμε … δεν μπορούμε να πάρουμε καν περιοχές γύρω από το 1 ας πούμε …
Ερ – … και εδώ γιατί παίρνεις; (της δείχνω τα μεμονωμένα σημεία στο προηγούμενο γράφημα) …
Μ – Και εδώ αυτό το πρόβλημα έχω …
Ερ – Δηλαδή θα άλλαζες και τα προηγούμενα που έχουμε μεμονωμένα σημεία;
Μ – Ναι, απλά … εδώ πέρα ναι … απλά …
Ερ – Άρα τι θα έλεγες γι' αυτήν σαν απάντηση;
Μ – μμμ … στο δεν έχει νόημα κολλάει το ασυνεχής …
Ερ – μμμ … ναι …

Μ – … αλλά μπορεί να είναι και τα δύο …
Ερ – Δεν έχει νόημα και είναι και ασυνεχής;!;
Μ – (γελάει) και συνεχής και ασυνεχής! Γι' αυτό δεν έχει νόημα!
Ερ – Α! … (γελάω) …Πώς μπορεί να συμβεί αυτό;
Μ – Αυτό; Όταν είναι μόνο του και δεν μπορείς να εξετάσεις, δεν μπορείς να πάρεις περιοχή.
Ερ – Μάλιστα …
Μ – Δεν μπορείς να ξέρεις τι γίνεται εκεί.
Ερ – Μάλιστα, κατάλαβα! Σε ευχαριστώ πολύ Μυρτώ!

35η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

‘Ερνέστο’, πρωτοετής στο Μαθηματικό τμήμα


1. Σημειώστε το φύλο σας.

____ Αγόρι

____ Κορίτσι

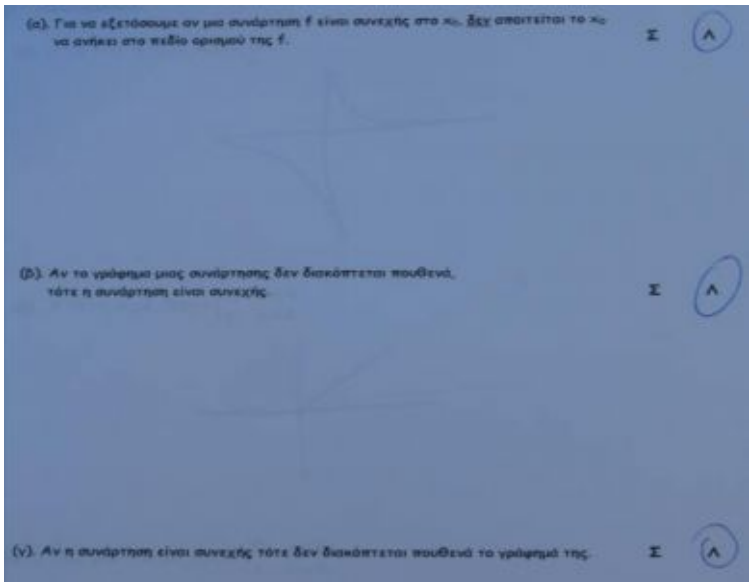
2. Σημειώστε ποιο από τα εκάμενα ισχύει.

____ Είμαι πρωτοετής στο Μαθηματικό Τμήμα.

____ Φοιτώ στο Μαθηματικό Τμήμα περισσότερο από ένα χρόνο.

3. Έστω A υποσύνολο του R, $x_0 \in A$ και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$ αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$


(α). Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Σ Λ

(β). Αν το γράφημα μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται πουθενά, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

(γ). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής τότε δεν διακόπτεται πουθενά το γράφημά της. Σ Λ

Ερ – Ερνέστο για τον ορισμό δεν θα πω τίποτα τώρα. Θα τον σχολιάσουμε στο τέλος. Να πάμε λίγο στο επόμενο. Πώς βλέπεις τη Πως βλέπεις τον ορισμό της συνέχειας στο Πανεπιστήμιο σε σχέση με αυτό που έμαθες στο Λύκειο;

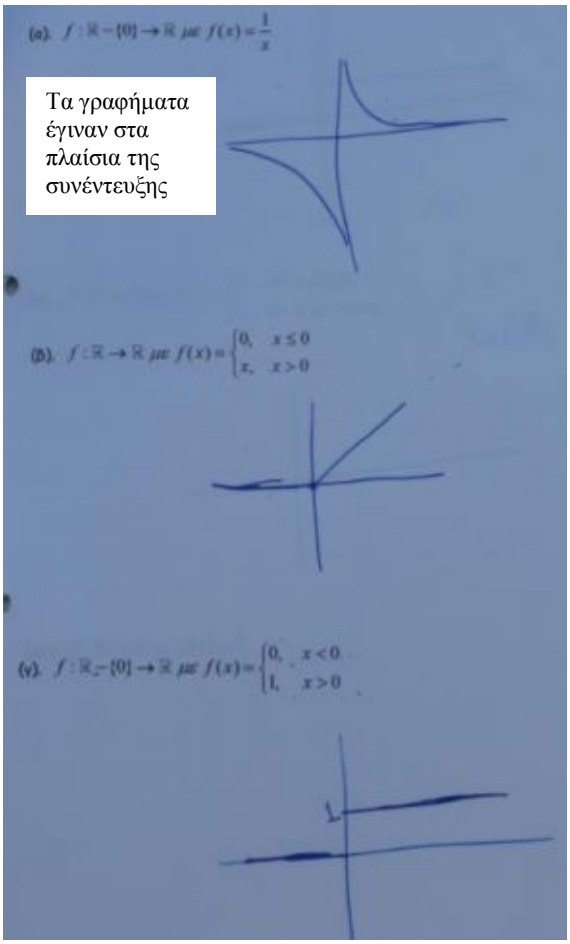
Ε – Στο Λύκειο κάναμε πολύ πιο μπακάλικα τη συνέχεια, δηλαδή μιλήσαμε για το όρια, χωρίς να έχουμε διδαχτεί τα όρια, τον ορισμό του ορίου, λέγαμε δηλαδή το όριο το f(x) καθώς το x τείνει στο x_0 να είναι ίσο με το $f(x_0)$, επίσης υπήρχε ένας άλλος ορισμός που αυτός ήταν πολύ μπακάλικος, που έλεγε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής αν για να τη σχεδιάσουμε αρκεί να μη σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί, που αυτό είναι τελείως λάθος αφού ας πούμε κάθε ακολουθία είναι συνεχής αλλά φυσικά για να σχεδιάσεις μία ακολουθία δεν μπορείς να μη σηκώσεις το μολύβι από το χαρτί. Ίσως βέβαια να μην μπορούσαν να μας τα πουν όλα αυτά στο σχολείο. Ίσως δηλαδή να μην μπορούσαν να μας πουν ότι αν πάρεις οποιαδήποτε ακολουθία σημείων που να τείνει στο x_0 και το όριο του f αυτών των σημείων ας πούμε, είναι $f(x_0)$, τότε, δεν μπορείς να το κάνεις αυτό στο σχολείο, γι’ αυτό το κάνεις λίγο μπακάλικα, ενώ εδώ στον Απειροστικό, αν ασχοληθείς λίγο καταλαβαίνεις πλήρως τι γίνεται και δεν υπάρχει αυτή η ασάφεια που υπάρχει στο σχολείο. Ας πούμε στο σχολείο άμα σου λέγανε αν μία ακολουθία είναι συνεχής η όχι δεν θα μπορούσες να απαντήσεις. Ενώ εδώ στον Απειροστικό μπορείς.

Ερ – Μάλιστα. Για πες μου τώρα για το επόμενο, τι έρχεται στο μυαλό σου όταν ακούς συνεχής συνάρτηση; Τι εικόνα έχεις;

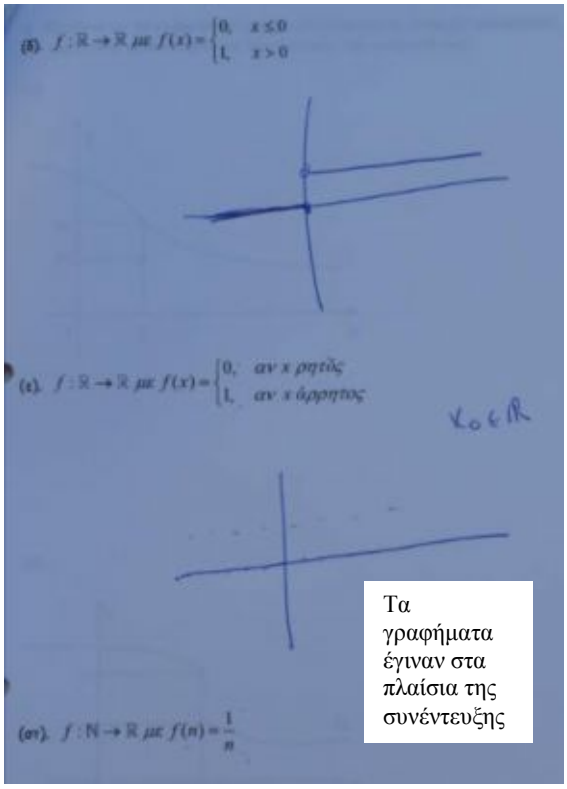
Ε – Εντάξει, συνεχής … (χαμογελάει) … η εικόνα δυστυχώς είναι αυτή που λέγαμε πριν, αν και λανθασμένη αυτή έρχεται κατ’ ευθείαν στον μυαλό από το Λύκειο, μια γραμμή που δεν διακόπτεται.

Ερ – Ωραία, για πες μου τώρα για το 6(α).

Ε – Όχι βέβαια. Εφόσον στον ορισμό της συνέχειας μιλάμε για το $f(x_0)$, είναι απαραίτητο να ορίζεται η συνάρτηση στο x_0.
Ερ – Ωραία. Το (β);
Ε – Αυτό είναι λανθασμένο …
Ερ – … γιατί; Έχεις κάποιο αντιπαράδειγμα κατά νου;
Ε – Ναι … μπορούμε να πάρουμε την $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$ η οποία δεν διακόπτεται πουθενά, βέβαια δεν μπορείς να τη σχεδιάσεις, αλλά δεν φαίνεται να διακόπτεται πουθενά. Δηλαδή άμα την κάνεις στον υπολογιστή και τη δώσεις στον άλλο θα σου πει 'να μία συνεχής συνάρτηση'. Δεν διακόπτεται πουθενά, αλλά παρόλα αυτά δεν είναι συνεχής στο 0.
Ερ – Μάλιστα, άρα λες λάθος. Το (γ)
Ε – Λάθος βέβαια. Η ακολουθία που είπα πριν ή μπορείς να πάρεις και την 1/x, η οποία είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού, όμως διακόπτεται στο 0.



Ερ – Μάλιστα.
Ε – Α, ναι, νάτη! (δείχνει την 7(α)), είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Ερ – Πολύ ωραία. Αν θέλεις κάνε μου τη γραφική της παράσταση καθώς και για τις επόμενες.
Ε – Ναι … (κάνει τα γραφήματα που φαίνονται δίπλα) … ναι είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού της. Βέβαια στο 0 δεν μπορούμε να μιλήσουμε για συνέχεια εφόσον δεν ορίζεται στο 0. Αν οριζόταν και στο 0 τότε βέβαια δεν θα μπορούσε να είναι εκεί συνεχής γιατί τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, αλλά δεν ορίζεται καν στο 0 οπότε δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη συνέχεια.
Ερ - Σε βοηθάει το γράφημα στην απάντηση σου;
Δηλαδή όταν βλέπεις ένα γράφημα σε βοηθάει να προσδιορίσεις αν είναι συνεχής ή όχι μια συνάρτηση;
Ε – Ναι, σίγουρα … (κοιτάζει μετά τη (β)) … Πριν και μετά είναι σίγουρα συνεχείς μένει μόνο να εξετάσουμε στο μηδέν. Έχουμε το όριο από αριστερά, έχουμε το όριο από δεξιά, έχουμε και την τιμή της συνάρτησης στο 0, είναι όλα ίσα άρα είναι συνεχής παντού.
Ερ – Επιβεβαιώνεται αυτό και από το γράφημα;
Ε – Βέβαια.
Ερ – Ωραία, η (γ);

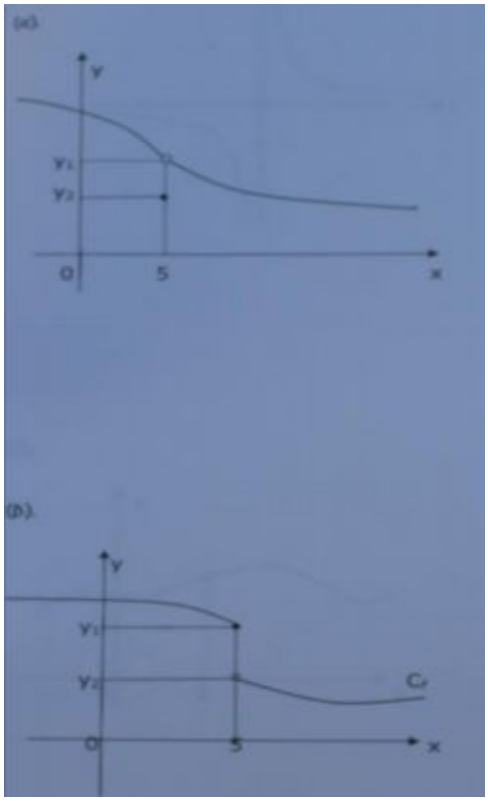


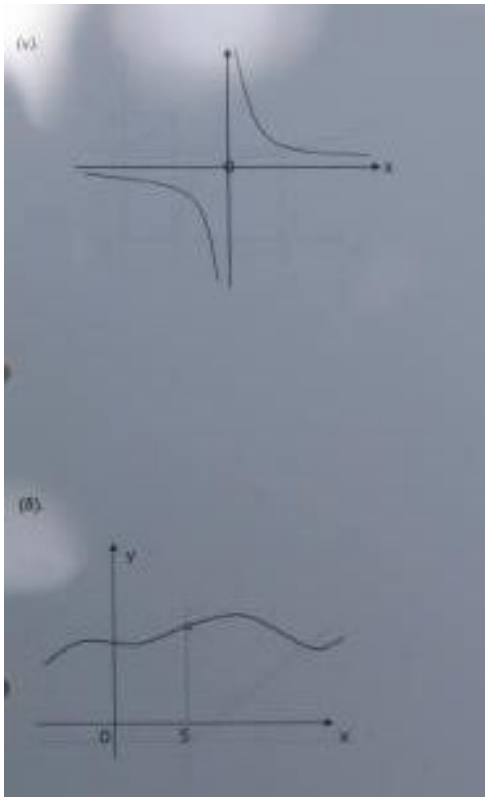
Τα γραφήματα έγιναν στα πλαίσια της συνέντευξης

Ε – Ναι, Και αυτή είναι η συνεχής γιατί το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού άρα πριν και μετά είναι συνεχής. Αν οριζόταν και στο 0 τότε δεν θα ήταν συνεχής γιατί τα πλευρικά πορεία θα ήταν διαφορετικά αλλά τώρα δεν ορίζεται στο 0, οπότε είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

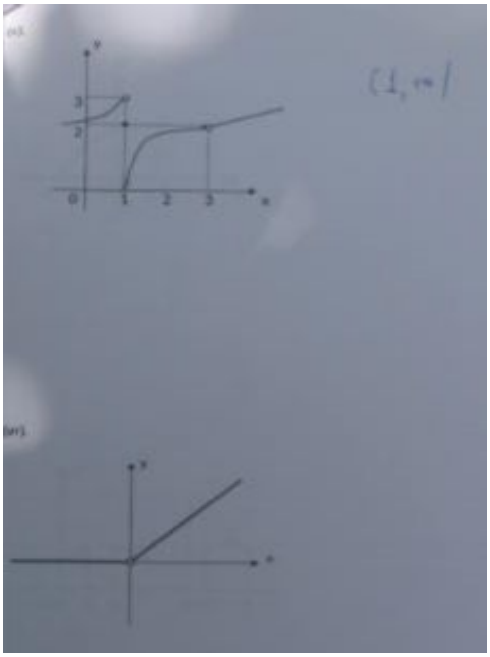
Ερ – Μάλιστα, η (δ); Και κάνε μου και σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις,

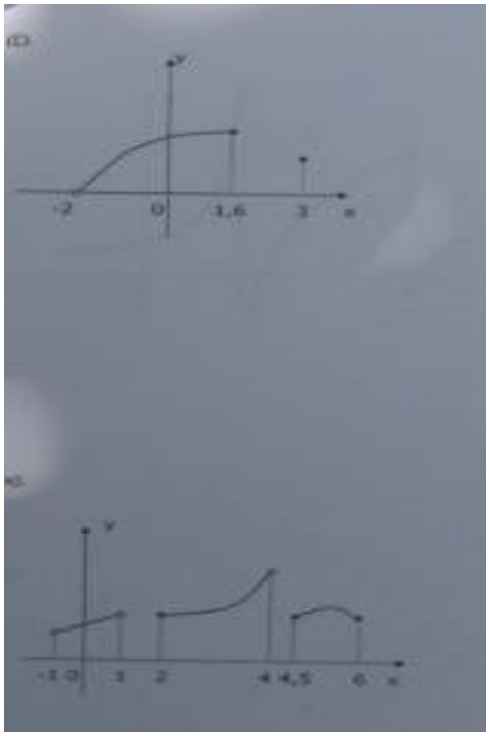
Ε – Αυτή τώρα δεν είναι συνεχής γιατί ορίζεται στο 0 αλλά έχει νόημα να μιλάμε εκεί για συνέχεια ή για ασυνέχεια. Παρατηρούμε ότι το όριο της συνάρτησης στο 0 εξ αριστερών είναι 0 όσο και η τιμή της, εκ δεξιών είναι 1 άρα δεν είναι συνεχής στο 0. Η επόμενη τώρα …(τη διαβάζει) … ε, αυτή βέβαια δεν είναι συνεχής, εδώ δεν μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση, μπορούμε απλά να κάνουμε κάποιες κουκίδες εδώ πέρα, και εδώ κάποιες άλλες κουκίδες, αλλά εντάξει, προφανώς δεν μπορούμε να τη σχεδιάσουμε. Βέβαια δεν είναι συνεχής και δεν είναι συνεχής διότι … (ο φοιτητής στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την αρχή μεταφοράς αποδεικνύει πλήρως την ασυνέχεια) …



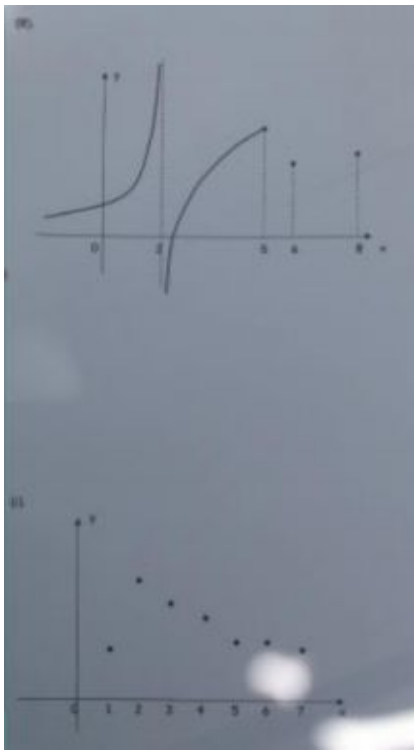


Ερ – … μάλιστα …
Ε – … και η επόμενη βέβαια είναι συνεχής ως ακολουθία μεμονωμένων σημείων. Είναι ένα παράδειγμα σαν αυτό που λέγαμε πριν ότι μία ακολουθία μπορεί να είναι συνεχής κάτι που στο Λύκειο δεν το ξέραμε.
Ερ – Ωραία, στην 8 τώρα, το (α);
Ε – Εδώ δεν είναι συνεχής στο 5 εφόσον υπάρχουν εκεί τα πλευρικά όρια, είναι ίσα μεταξύ τους αλλά δεν είναι ίσα με την τιμή της συνάρτησης.
Ερ – Μάλιστα.
Ε – Στο επόμενο, δεν υπάρχει το όριο, άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια. Τώρα στη (γ), είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της όπως είδαμε και πριν και στη (δ) είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού αφού δεν ορίζεται στο 5, άρα δεν μπορούμε να μιλάμε εκεί για συνέχεια ή για ασυνέχεια.





Ερ – Ωραία, στην (ε) τώρα;
Ε – Εδώ δεν είναι συνεχής, γιατί πρώτα από όλα αν και ορίζεται η συνάρτηση στο 1 δεν υπάρχει το όριο εκεί, στο 3 δεν έχουμε πρόβλημα γιατί δεν ορίζεται εκεί, δηλαδή από το 1 και μετά είναι συνεχής
Ερ – Εξαιρουμένου του 3 προφανώς …
Ε – … εννοείται.
Ερ – Ωραία, και (στ);
Ε – Είναι συνεχής στο R^*, κανονικά.
Ερ – Η (ζ);
Ε – Και εδώ είναι συνεχής παντού η συνάρτηση, δηλαδή όπου ορίζεται.
Ερ – Και στην (η);
Ε – Και εδώ είναι επίσης συνεχής παντού η συνάρτηση, δηλαδή όπου ορίζεται.



Ερ – Η (θ);
Ε – Και εδώ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
Ερ – Και η τελευταία;
Ε – Και αυτή είναι επίσης συνεχής παντού ως ακολουθία ή τέλος πάντων ως μεμονωμένα σημεία.
Ερ – Ερνέστο σε ευχαριστώ πολύ για τη συνέντευξη!

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. (Γ΄ εκδ.). Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2007). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης*. (Έκδοση 2007). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β

Αριστοτέλης. *Φυσικά*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

Artigue, M. (1997). Teaching and learning elementary analysis: what can we learn from didactical research and curriculum evolution? In G. A. Makrides (Ed.), *Proceedings of the 1st Mediterranean Conference on Mathematics*, Chypre, Janvier 1997, 207-219. Cyprus: Pedagogical Institute and Cyprus Mathematical Society.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Babbie, E. (1998). *The Practice of social research* (8th ed.). Belmont: Wadsworth. Publishing Company.

Bagni, G. T. (1999). Integral and Continuity in High School students' conceptions. In Gagatsis, A. (Ed.), *A multidimensional approach to Learning in Mathematics and Science*, pp. 171-182. Nicosia, Cyprus: Intercollege Press. Retrieved July 10, 2007, from http://www.syllogismos.it/education/integral.pdf

Βάμβουκας, Μ. Ι. (2000). *Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Balacheff, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 175-194). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bell, J. (1997). *Μεθοδολογικός Σχεδιασμός Παιδαγωγικής και Κοινωνικής Έρευνας*. (Α. Ρήγα, Επιμ. Εκδ. και μετάφρασης). Αθήνα: Gutenberg. (Πρωτότυπη έκδοση: 1993).

Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht – Holland: D. Reidel.

Biza, I., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2006). Conceptual change in advanced Mathematical thinking. Retrieved July 10, 2007, from http://www.cerme4.crm.es/Papers%20definitus/14/biza.pdf

Bishop, A. J. (1991). Mathematical Values in the Teaching Process. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 195-213). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Βοσνιάδου Σ. (2005). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία. Τόμος Α΄: Βιολογικές Αναπτυξιακές και Συμπεριφοριστικές Προσεγγίσεις.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου Σ. (Επιμ. έκδ.) (1999). *Η ψυχολογία των μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου Σ., & Brewer, W. F. (1999). Θεωρίες Αναδιοργάνωσης της Γνώσης. Στης Βοσνιάδου Σ. (1999). *Κείμενα Εξελικτικής Ψυχολογίας. Β΄ Τόμος: Σκέψη.* (σελ. 124-148). Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου Σ. (1999). Η Εννοιολογική Αλλαγή στην παιδική ηλικία. Στης Βοσνιάδου Σ. (1999). *Κείμενα Εξελικτικής Ψυχολογίας. Β΄ Τόμος: Σκέψη.* (σελ. 149-164). Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications, Inc.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού. (Πρωτότυπη έκδοση: 1989).

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* New York: W. W. Norton. (W. Mays, trans.). Dordrecht – Holland: D. Reidel

Bruner, J. S. (1983). *Child's Talc.* Oxford: Oxford University Press.

Brousseau, G., & Otte, M. (1991). The Fragility of Knowledge. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 13-38). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Γαγάτσης, Α., & Σπύρου, Π. (n.d.). Πολλαπλές Αναπαραστάσεις, ανθρώπινη Νοημοσύνη μάθηση. Ανάκληση Μάιος 14, 2008, από http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spyrou/Spyrou%208.pdf

Chin, E-T., & Tall, D. (2002c). Mathematical Proof as a Formal Procept in Advanced

Mathematical Thinking, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, 212-221. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan. Retrieved May 17, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002l-formal-procept.pdf

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Creswell, J. W. (2002). *Educational research.* New Jersey: Merrill Prentice Hall.

Crowley, L., & Tall, D. (2006c). Two Students: Why does on succeed and the other fail? *Retirement as Process and Concept: A Festschrift for Eddie Gray and David Tall*, Prague, 57–65, ISBN 80-7290-255-5. Retrieved June 23, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006c-tall-crowley.pdf

Czamocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 95-110. Haifa, Israel.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1990). *Η Μαθηματική Εμπειρία.* (Γ. Αναστασιάδη μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία. (Πρωτότυπη έκδοση: 1980).

Dehaene, S. (1996). *The Number Sense.* U.S.A: Oxford University Press.

Dewey, J. (1997). *How we think.* New York: Dover Publications, Inc.

Donaldson, M. (1991). *Η Σκέψη των παιδιών.* (Σ. Βοσνιάδου, επιμέλεια. Α. Καλογιαννίδου & Α. Αρχοντίδου μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-88). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Douady, R. (1991). Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 109-132). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., & MacDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton et. al. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ISMI Study*, 273-280. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Retrieved May 23, 2007, from http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPapers.pdf

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York/Berlin: Springer – Verlag.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

English, L., & Sriraman, B. (2005). RF04: Theories of mathematics education. In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* p. 170-172. Melbourne: PME.

Ernest, P. (1995). *The Philosophy of Mathematics Education* (3rd Ed.). U.K.: Falmer Press.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2,* pp. 351-358. Bergen, Norway. Retrieved July 10, 2007, from http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR099_Evangelidou.pdf

Even, R., & Schwarz, B. B. (2003). Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 283-313.

Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of the Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, MA: MIT Press.

Grattan – Guinness, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London.

Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning and Instruction, 14*, 541-548.

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, p. 72-79. Assisi. Italy.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2) 114-141

Gray, E., & Tall, D. (2001i). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 65–72. Utrecht, The Netherlands.

Gray, E., & Tall, D. (2007x). Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. Submitted to *Mathematics Education Research Journal*. Retrieved August 1, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007x-gray-tall-abstraction.pdf

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999k). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, (1-3), 111-133.

Heath, T. L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. (Μετάφραση του Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ). (Τόμος 1). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (Πρωτότυπη έκδοση: 1921).

Hitt, F., & Lara, H. (1999). Limits, Continuity and Discontinuity of Functions from two points of view: that of the teacher and that of the student. In Bills, L. (Ed.), *Proceedings of the British Society for the Research into Learning Mathematics 19* (2) 49-54.

Javeau, C. (1996). *Η Έρευνα με Ερωτηματολόγιο: Το Εγχειρίδιο του καλού Ερευνητή*. (Κ. Τζαννόνε – Τζωρτζή, Επιμ. Εκδ. και μετάφρασης). Αθήνα: Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδάνος.

Kidron, I. (2006). Conceptualization of the limit by means of the discrete continuous interplay: Different theoretical approaches. Retrieved July 10, 2007, from http://www.cerme4.crm.es/Papers%20definitus/11/kidron.pdf

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Crouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Knapp, J., & Oehrtman, M. (2005). Temporal order in the formal limit definition. In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* p. 252. Melbourne: PME.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from.* U.S.A: Basic Books.

Lerman, S. (2005). Theories of mathematics education: a problem of plurality? In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* p. 179-183. Melbourne: PME.

Lester, Jr., F. K. (2005). The place of theory in mathematics education research. In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* p. 172-178. Melbourne: PME.

Lima, R. N., & Tall, D. (2006d). The concept of equation: what have students met before? *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 233–241. Prague, Czech Republic.

Loria, G. (1972). *Ιστορία των Μαθηματικών.* (Τόμος Β΄). (Μ. Κωβαίου μετάφραση). Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε, εκδόσεις Παπαζήση.

Loria, G. (1974). *Ιστορία των Μαθηματικών.* (Τόμος Γ΄, τεύχος Α΄ και Β΄). (Μ. Κωβαίου μετάφραση). Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε, εκδόσεις Παπαζήση.

Mamona-Downs, J. (1990). Pupils' interpretation of the limit concept; a comparison study between Greeks and English. *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* p. 69-75. Mexico. Retrieved November 27, 2007, from

http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED411137

Mastorides, E., & Zachariades, T. (2004). Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, p. 481-488. Bergen, Norway. Retrieved July 10, 2007, from http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR224_Zachariades.pdf

Mellin-Olsen, S. (1991). The Double Bind as a Didactical Trap. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 39-62). The Netherlands: Kluwer Academic

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004) Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Special Issue of Learning and Instruction, 14*, 519-534.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2000). The 'Conflicting' concepts of continuity and limit – A conceptual change perspective. In Nakahara, T., & Koyama, M. (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 311-318. Hiroshima, Japan.

Νεγρεπόντης, Σ. (2004). Παραδόσεις του μαθήματος *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία Ευκλείδη*. Μεταπτυχιακό της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των μαθηματικών. Χειμερινό εξάμηνο 2005-06. Αθήνα.

Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., Καλαμίδας, Ν., & Φαρμάκη, Β. (1989). *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση* (2η έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1987). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Núñez, R., & Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The Cognitive Structure of natural and ε-δ Continuity. *Mathematical Cognition, 4*(2), 85-101.

Παπαναστασίου, Κ., & Παπαναστασίου, Ε. Κ. (2005). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Λευκωσία: Συγγραφέας.

Παρμενίδης. *Περί Φύσεως*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

Pegg, J., & Tall, D. (2002g). Fundamental Cycles of Cognitive Growth. In Anne D.

Cockburn & Elena Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 41-48. Norwich, UK. Retrieved May 17, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002g-pme26-pegg.pdf

Pegg, J., & Tall, D. (2005d). Using theory to advance our understanding of student cognitive development. In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1,* p. 187-192. Melbourne: PME.

Pegg, J., & Tall, D. (2005h). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*), *vol. 37,* no.6, pp. 468-475. Retrieved June 11, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005h-zdm-pegg-tall.pdf

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology.* (W. Mays, trans.). Dordrecht – Holland: D. Reidel

Pinto, M., & Gray, E. (1995). Difficulties teaching Mathematical Analysis to Non-Specialists. In Micra L., & Carraher, D. (Ed.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2,* p. 18-25. Brazil. Retrieved July 5, 2004, from http://www.tallfamily.co.uk/marciapinto/pdfs/pinto1995-pinto-gray-pme.pdf

Pinto, M., & Tall, D. (1999g). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 281-288. Haifa, Israel.

Pinto, M., & Tall, D. (1996h). Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 139-146. Valencia. Retrieved September 26, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996h-pinto-pme.pdf

Πλάτων. *Πολιτεία.* Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

Poynter, A., & Tall, D. (2005a). Relating theories to practice in the teaching of

mathematics. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Retrieved June 21, 2007, from www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005a-cerme4-poynter-tall.pdf

Poynter, A., & Tall, D. (2005b). What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. In D. Hewitt and A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* held at the University of Warwick, pp. 128-135. Retrieved June 21, 2007, from www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005b-bcme6-poynter-tall.pdf

Polya, G. (1987). *Πώς να το Λύσω*. (Λ. Σιαδήμας, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Σπηλιώτη. (Πρωτότυπη έκδοση: 1944).

Πρόκλος. *Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991). Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 127-139). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rudin, W. (2000). *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*. (Κ. Σταλίδη μετάφραση). Αθήνα: Leader Books. (Πρωτότυπη έκδοση: 1964).

Russ, S. B. (1980). A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem. *Historia Mathematica, 7,* 156-185.

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching, 82,* 44-49

diSessa, A. A. (1991). If we want to get ahead, we should get some theories. *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1,* 220-239. Blacksburg, VA.

Sfard, A. (1991). On the Dual nature of Mathematical Conceptions: Reflection and Objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics, 22,* 1-36.

Sinclair, H. (1983). Young Children's Acquisition of Language and Understanding Mathematics. *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematics Education.* ICME, Birkhauser.

Σπύρου, Π., & Γαγάτσης, Α. (n.d.). Συνάρτηση: Επιστημολογική Διάσταση και η Διδακτική μεταφορά της. Ανάκληση Μάιος 14, 2008, από http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spyrou/Spyrou%204.pdf

Stafilidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of Students' Understanding of the Numerical Value of Fractions. *Special Issue of Learning and Instruction, 14,* 503-518.

Σταθακόπουλος, Κ. Α. (1989). *Πραγματική Ανάλυση*. Αθήνα: Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ.

Σταμάτης, Ε. (1953). *Ευκλείδου Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών. Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII, VIII, IX. Εισαγωγή – Αρχαίον Κείμενον – Μετάφρασις – Επεξηγήσεις.* (Τόμος ΙΙ). Αθήνα: Ο.Ε.Σ.Β.

Σταύρακας, Γ. Α. (2003). *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης.* Αθήνα: Συγγραφέας.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (Mis-) Understand Science and Mathematics. Intuitive Rules.* U.S.A: Teachers College Press.

Στράντζαλος, Χ. (1987). *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Struik, D. J. (1966). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Δαίδαλος.

Student Understanding of topics in Calculus. (University of Athens, Mathematics Department. CalGeo: Teaching Calculus using dynamic geometric tools. Outcome 1.4.1 "Literature review about student understanding of topics in Calculus".). (n.d.). Retrieved November 21, 2007, from http://www.math.uoa.gr/calgeo/documents/documents/1.4/OUTCOME_ANALYSIS_1.4.1_Literature%20review%20.doc

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Tall, D. (1990d). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus, 12,* 3&4, 49-63. Retrieved March 16, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1990b-inconsist-focus.pdf

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1991a). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus.

In Zimmermann & Cunningham (Ed.), *Visualization in Mathematics, Notes No 19*, 105-119. M.A.A. Retrieved October 16, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigour-maa.pdf

Tall, D. (1992m). Construction of Objects through Definition and Proof. *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Working Group on AMT*. Durham, NH. Retrieved October 17, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992m-constr-def-amt.pdf

Tall, D., & Razali, M. (1993d). Diagnosing Students' Difficulties in Learning Mathematics, *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 24*, 2, 209– 202. Retrieved November 20, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993d-rashidi-ijmest.pdf

Tall, D. (1993k). Students' Difficulties in Calculus. Plenary Address, *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec, Canada*, 13– 28. ISBN 2 920916 23 8. Retrieved October 22, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf

Tall, D. (1994b). A Versatile Theory of Visualization and Symbolization in Mathematics. Plenary Presentation, *Proceedings of the 46th Conference of CIEAEM, 1*, 15-27. Toulouse, France. Retrieved November 9, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996b-plenary-cieaem.pdf

Tall, D. (1994h). Cognitive Difficulties in Learning Analysis. In A. Barnard (Ed.), *Report on the Teaching of Analysis*, for the TaLUM committee. Retrieved October 20, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994h-analysis-talum.pdf

Tall, D. (1996i). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *L' Enseignement des Mathematiques, 42*, 395-415. Retrieved May 1, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996i-amt-pub-am.pdf

Tall, D. (1997g). From School to University: the Transition from Elementary to

Advanced mathematical Thinking. In Thomas, M. O. J. (Ed.) *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference*, University of Auckland, 9– 26.

Tall, D. (1999c). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 111-118. Haifa, Israel.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McCowen, M., et al. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104. Retrieved May 5, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001a-symbol-bifurcation.pdf

Tall, D. (2003a). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol. 1*, pp. 1-28. Rio de Janeiro, Brazil. Retrieved June 26, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf

Tall, D. (2004a). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *23* (3), 29–33.

Tall, D. (2004d). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 281-288. Bergen, Norway. Retrieved June 24, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004d-3worlds-pme.pdf

Tall, D. (2006). Developing a Theory of Mathematical Growth. To appear in *International Reviews on Mathematical Education* (ZDM). Retrieved September 1, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007a-steiner-zdm.pdf

Tall, D. (2006b). A life-time's journey from definition and deduction to ambiguity and insight. *Retirement as Process and Concept: A Festschrift for Eddie Gray and David Tall*, Prague. 275-288, ISBN 80-7290-255-5.

Retrieved June 23, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006b-prague-journey.pdf

Tall, D. (2006e). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg. 11 195–215. Retrieved May 23, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006e-theory-math-growth-annales.pdf

Tall, D. (2007b). Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education. Plenary at *10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Feb 22–27, 2007, San Diego, California, USA. Retrieved August 1, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007b-rume-keynote.pdf

Tall, D. (2007d). Embodiment, Symbolism, Argumentation and Proof. Keynote presented at the *Conference on Reading, Writing and Argumentation* at National Changhua Normal University, Taiwan, May 2007. Retrieved October 22, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007d-changua-keynote.pdf

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change gain from its application to mathematics education? *Special Issue of Learning and Instruction, 14*, 535-540.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive Rules: A way to explain and predict students' Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 51-66.

Tirosh, D. (1991). The Role of Students' Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 199-214). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Τσίτσας, Λ. Ν. (2002). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός.* Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2002). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. ΔΑΡΔΑΝΟΣ.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Special Issue of Learning and Instruction, 14,* 453-467.

Van Der Waerden, B. L. (2000). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. (Γ. Χριστιανίδη μετάφραση). Ηράκλειο: ΠΕΚ. (Πρωτότυπη έκδοση: 1988).

Van Dormolen, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. In Bishop, A. J., Melin-Olsen, S., &Van Dormolen, J. (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 89-108). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L., & Vosniadou, S. (Guest Eds.). (2004). The conceptual change approach to mathematics learning and teaching, *Special Issue of Learning and Instruction, 14.* 445-451.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). U.S.A: Harvard University Press.

Watson, A., & Tall, D. (2002). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 369-376. Norwich, UK

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2002). The relationship between physical embodiment mathematical symbolism: The concept of vector. *Mathematical Journal for Research in Mathematics Education, 2,* 73-97.