ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική εργασία με τίτλο

«Δημιουργία νοημάτων για την έννοια της γωνίας και βασικών τριγωνομετρικών σχέσεων από μαθητές που δουλεύουν συνεργατικά με ψηφιακό εργαλείο γεωμετρίας τριών διαστάσεων»

Δημήτριος Διαμαντίδης
Α.Μ. Δ201013

Επιβλέπων
Καθηγητής Χρόνης Κυνηγός

Αθήνα
Ιούλιος, 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Πολυχρόνης Κυνηγός (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	……
2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής	……
3) Γεώργιος Ψυχάρης	Λέκτορας	……

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά
τον Καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό, για το σημαντικό χρόνο που διέθεσε και την ευκαιρία που μου έδωσε να καταλάβω πώς να ψάχνω τα σωστά κλειδιά της διδακτικής έρευνας. Οι παρεμβάσεις του ήταν δυναμικές και όχι στατικές κι ως τέτοιες θα συνεχίσουν να με επηρεάζουν

ευχαριστώ επίσης

τον Καθηγητή κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη για την ουσιαστική διδακτική του συμβολή καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και την εμπιστοσύνη του

τον Λέκτορα κ. Γιώργο Ψυχάρη για τις πολύτιμες συμβουλές του, τη στήριξή του και την πολύ σημαντική και καθοριστική βοήθειά του

ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στους δασκάλους μου της Γεωμετρίας, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα και Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ευστάθιο Βασιλείου, καθώς και στο σχολικό σύμβουλο Μαθηματικών κ Μιχάλη Σαλίχο

τέλος, από τα μέλη της κοινότητας του μεταπτυχιακού προγράμματος της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τη συμφοιτήτριά μου κ. Κατερίνα Οικονομάκου και την υπ. διδάκτορα κ. Διονυσία Μπακογιάννη.

Διαμαντίδης Δημήτρης
3 Ιουλίου 2013

Περιεχόμενα

Περίληψη 15

Abstract 16

Πρόλογος 17

1. Οι έννοιες της γωνίας και των τριγωνομετρικών αριθμών 19

Εισαγωγή 19

1.1. Ορισμοί και σχηματικές αναπαραστάσεις της γωνίας 20

Επίπεδες γωνίες 20

Δίεδρες και στερεές γωνίες 22

Σύγχρονες προσεγγίσεις για τη γωνία 24

1.2. Τριγωνομετρία 26

Πρώτα ψήγματα τριγωνομετρικών υπολογισμών 26

Χορδές κυκλικών τόξων: Ο πρόδρομος της τριγωνομετρίας 27

Η εξέλιξη της Τριγωνομετρίας 28

Σχετικά με την παρούσα έρευνα 29

2. Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας 31

Εισαγωγή 31

2.1. Δημιουργία νοημάτων και Constructionism 31

2.1.1 Δημιουργία προσωπικών νοημάτων 31

2.1.2 Constructionism 32

2.1.3 Από τον Piaget στον Papert 33

2.1.4 Γενίκευση, αφαιρέσεις και αναστοχασμός 36

Αφαίρεση και γενίκευση 36

Εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις 37

2.1.5 Η έννοια της έννοιας 38

2.2. Η διδασκαλία της Γεωμετρίας 43

2.2.1 Η Γεωμετρία σαν γνωστικό πεδίο 43

2.2.2 Η σημασία των σχημάτων στη διδασκαλία 44

2.2.3 Η διττή φύση των γεωμετρικών εννοιών και των σχημάτων 45

2.3. Διαδικασιοεννοιολογικός τρόπος σκέψης 47

2.4. Οι ψηφιακές τεχνολογίες στη διδασκαλία και την έρευνα 49

2.4.1 Η προστιθέμενη αξία της χρήσης νέων τεχνολογιών στη διδακτική έρευνα 49

2.4.2 Η προστιθέμενη αξία της χρήσης νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών 50

2.4.2.1 Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας 51

Δυναμικός χειρισμός 51

Η απόδειξη στο πλαίσιο των Δυναμικών Γεωμετρικών Περιβαλλόντων 54

Δυναμικός χειρισμός στην άλγεβρα 55

2.4.2.2 Η χρήση νέων τεχνολογιών για την εισαγωγή τριγωνομετρικών εννοιών 56

2.4.3 Μικρόκοσμοι 57

Η έννοια του μικρόκοσμου 57

Η κατασκευή εργαλείων και η μάθηση μέσω σχεδιασμού 59

Μισοψημένοι μικρόκοσμοι 61

2.4.4 Η Logo και η Γεωμετρία της Χελώνας 61

Η επιστημολογία της Γεωμετρίας της Χελώνας 61

Body-syntonicity και ego-syntonicity 62

Μαθηματική θεμελίωση και συμβολική έκφραση 63

2.4.5 Ο Χελωνόκοσμος 65

2.4.6 MaLT (MachineLab-based 3D Turtleworlds) 68

Περιγραφή 68

Λειτουργικότητες του MaLT 69

Μαθηματικό μοντέλο του MaLT 74

Το MaLT ως εκπαιδευτικό λογισμικό και εργαλείο έρευνας 75
2.5. Κοινωνικές αλληλεπιδράσεις 76
2.5.1 Κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες 76
Η θεωρία των κοινωνικο-μαθηματικών προτύπων και δημιουργία νοημάτων 76
Ο ρόλος του δασκάλου 78
2.5.2 Συνοριακά αντικείμενα (Boundary objects) 78
2.5.3 Συνεργατική μάθηση σε ψηφιακό περιβάλλον 80
Συνεργατική μάθηση 80
Συνεργατική μάθηση με χρήση ψηφιακών τεχνολογιών 81
3. Τα ερευνητικά ερωτήματα 83
Εισαγωγή 83
3.1. Η άποψη των ερευνητών της διδακτικής για τις έννοιες 83
3.1.1 Σχετικά με την έννοια της γωνίας 83
Ορισμοί καθηγητών και προσεγγίσεις μαθητών 83
Στάδια κατασκευής νοημάτων για τη γωνία 85
3.1.1.1 Ο χώρος τριών διαστάσεων 90
Πλοήγηση στο επίπεδο και τον χώρο τριών διαστάσεων 90
Ο τρόπος που οι μαθητές περιεργάζονται τρισδιάστατα αντικείμενα 91
3.1.1.2 Η έννοια της γωνίας σε χώρο τριών διαστάσεων 91
Εσωγενής και εξωτερική προσέγγιση του χώρου 92
3.1.2 Σχετικά με τις τριγωνομετρικές σχέσεις 92
3.2. Προσεγγίσεις των εννοιών στο σχολείο 95
3.2.1 Η γωνία στη στ΄ Δημοτικού και το Γυμνάσιο 96
3.2.2 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στο αναλυτικό πρόγραμμα 98
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ως λόγοι πλευρών 98
Οι τριγωνομετρικές σχέσεις 100

3.3. Σκοπός της έρευνας 101
3.3.1 Ερευνητικά ερωτήματα 101
Προσανατολισμός στον προσομοιωμένο χώρο τριών διαστάσεων 101
Το πλαίσιο αναφοράς της κίνησης της χελώνας 101
Φορμαλισμός με νόημα 102
Δημιουργία νοημάτων για τη γωνία 102
Στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος με τη βοήθεια του εργαλείου 102
Η χρήση των τριγωνομετρικών σχέσεων 103
3.3.2 Διδακτικό όφελος από την έρευνα 104
4. Η έρευνα 105
Εισαγωγή 105
4.1. Μεθοδολογία της έρευνας 105
4.1.1 Έρευνα σχεδιασμού 105
4.1.1.1 Στόχοι και βασικά χαρακτηριστικά 106
4.1.1.2 Διαφορές με άλλα είδη εκπαιδευτικής έρευνας 108
4.1.1.3 Δεοντολογία της έρευνας σχεδιασμού 109
4.1.1.4 Σχεδιασμός του πειράματος 110
Οι βασικοί άξονες του σχεδιασμού 110
Ο μικρόκοσμος ως μέσο έρευνας 110
Τα εκπαιδευτικά σενάρια 111
4.2. Η υλοποίηση του πειράματος 112
4.2.1 Το υπολογιστικό περιβάλλον metafora 112
4.2.1.1 Το metafora, ένα εργαλείο έρευνας 112
4.2.1.2 Οι λειτουργικότητες του metafora 114
3dmath 115
Το Lasad 115
Το planning tool 116

4.2.2 Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης 119
4.2.2.1 Το πλαίσιο της έρευνας 119
4.2.2.2 Η συλλογή των δεδομένων 121
4.2.2.3 Ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων 122
4.2.3 Το στρεβλό ορθογώνιο 123
4.2.3.1 Το μαθηματικό πλαίσιο του σχήματος 123
Στρεβλό τετράπλευρο 123
Στρεβλό ορθογώνιο 124
Η μαθηματική σχέση 126
4.2.3.2 Το σχήμα ως κατασκευή στο 3dmath 127
Κατασκευή σχήματος 127
Μισοψημένο στρεβλό ορθογώνιο 129
4.2.3.3 Η επιλογή του σχήματος 130
4.2.4 Ανάλυση δραστηριοτήτων 131
4.2.4.1 Πρώτη φάση: Εισαγωγικές δραστηριότητες 131
1η συνάντηση 131
2η συνάντηση 134
3η συνάντηση 135
4.2.4.2 Δεύτερη φάση: Κύρια δραστηριότητα 136
4η συνάντηση – 10η συνάντηση: Το στρεβλό ορθογώνιο 136
4.2.4.3 Τρίτη φάση: Κατασκευή δομημάτων 141
11η και 12η συνάντηση 141
5. Αποτελέσματα 143
Εισαγωγή 143
5.1. Προσανατολισμός στον χώρο των τριών διαστάσεων 143
5.1.1 Κατασκευή προσωπικών νοημάτων υπό διαπραγμάτευση 143
Κατασκευή προσωπικών νοημάτων για τον μικρόκοσμο 143

Φορμαλισμός που αποκτά νόημα 146

Δημιουργία στρατηγικής με χρήση του εργαλείου 146

Επαναδιαπραγμάτευση των νοημάτων και συμφωνία σε ένα κοινό πλαίσιο 148

5.1.2 Η ερμηνεία του κώδικα ως δομή ελέγχου 150

Ερμηνεία μεταβλητών και εντολών του στρεβλού ορθογωνίου 150

Παρατηρώντας το σχήμα: Εξωτερική προσέγγιση & πλαίσια αναφοράς 151

Στρατηγική αναστοχασμού: Από το δυναμικό χειρισμό στον κώδικα .. 154

Τα πλαίσια αναφοράς προσανατολισμού που εμφανίζονται στις φάσεις της διερεύνησης 158

5.2. Διερευνώντας γωνιακές σχέσεις 158

5.2.1 Φορμαλισμός με νόημα 158

Η συμμετρία του κώδικα 158

Αυθόρμητες αντιλήψεις για τις γωνίες του σχήματος 161

Διαμεσολάβηση ολισθητή μεταξύ χωρικής και συμβολικής αναπαράστασης που οδηγεί σε εικασίες και ερωτήματα 162

Ανάλυση της γωνίας σε δύο επιμέρους νοητές γωνίες 164

5.2.2 Γεωμετρία στο επίπεδο 166

Το στατικό σχήμα δημιουργεί δυσκολίες 166

5.3. Η τριγωνομετρία ως μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος 168

Δυσκολίες λόγω ελλιπούς συνεργασίας (collaboration) μεταξύ των ομάδων 168

Σύντομη περιγραφή της δουλειάς που έκανε η υποομάδα 1.1 170

Δημιουργία κοινής γλώσσας μεταξύ των ομάδων 171

Η υποομάδα 1.2 λύνει το πρόβλημα. Επεξηγηματικός χαρακτήρας απόδειξης. 174

6. Συμπεράσματα–Συζήτηση 177

Φορμαλισμός σε χρήση και νοήματα για τη γωνία 177

Νοήματα για τη γωνία με χρήση άλλων αναπαραστάσεων 179

Η δημιουργία κοινού πλαισίου εργασίας με τριγωνομετρικές τεχνικές 180

Νοήματα για τη γωνία, υπό διαπραγμάτευση 183

Προσανατολισμός στον τρισδιάστατο χώρο σε σχέση με τη γωνία 184

Ο μικρόκοσμος σε προσωπική χρήση από τους μαθητές 185

Γενικές παρατηρήσεις 186

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα 186

7. Παράρτημα Α 189

Τα pre και post tests 189

8. Παράρτημα Β 192

Τα εγχειρίδια που δώσαμε στους μαθητές 192

9. Βιβλιογραφία 197

Περίληψη

Στην εμπειρική έρευνα που αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας οι μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Γυμνασίου, αντιμετώπισαν, σε ομάδες ένα ανοιχτό – μη τυπικό, δύσκολο, για την τάξη αυτή γεωμετρικό πρόβλημα, για εικοσιτέσσερις διδακτικές ώρες. Το γεωμετρικό αντικείμενο που αναπαραστάθηκε με χρήση ψηφιακού εργαλείου τρισδιάστατης Γεωμετρίας της Χελώνας ήταν ένα ανοικτό στρεβλό τετράπλευρο. Οι μαθητές το χειρίστηκαν δυναμικά, μεταβάλλοντας τα χαρακτηριστικά της κατασκευής του, προσπαθώντας να το κάνουν να κλείσει και να παραμείνει κλειστό, καθώς μεταβαλλόταν. Στόχος της έρευνας ήταν να μελετηθεί από τη μια η κατασκευή προσωπικών και από κοινού νοημάτων από τους μαθητές για την έννοια της γωνίας στον χώρο των τριών διαστάσεων και από την άλλη το τρόπος που μαθηματικοποίησαν το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές σχέσεις σε νοητά τρίγωνα, κατασκευάζοντας συγκεκριμένο κοινωνικο-μαθηματικό περιβάλλον. Τα δεδομένα, της έρευνας προέκυψαν από απομαγνητοφώνηση των εικοσιτεσσάρων ωρών της παρέμβασης και η ανάλυσή τους βασίζεται στην παρουσίαση επιλεγμένων επεισοδίων. Η παρέμβαση σχεδιάστηκε στο πλαίσιο της έρευνας σχεδιασμού (design-based research). Στα ευρήματα υπάρχουν στοιχεία χρήσης φορμαλισμού με προσωπικό νόημα για τους μαθητές, προσανατολισμού στο χώρο, δημιουργίας ατομικών και ομαδικών στρατηγικών, συνεργατικής μάθησης με χρήση του ψηφιακού εργαλείου διερεύνησης και επικοινωνίας.

Λέξεις κλειδιά: κατασκευή νοημάτων, συνεργατική μάθηση σε ψηφιακό περιβάλλον, κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες, φορμαλισμός με νόημα, γεωμετρία της χελώνας, Logo, γωνία, χώρος τριών διαστάσεων, τριγωνομετρικές σχέσεις.

Abstract

In the empirical research which is the subject of this paper some ninth grade students of a school, addressed the challenge of an open, non-typical, difficult problem in geometry, working in groups. The geometrical figure that refers to the problem was called “twisted rectangle” and it was shaped in the 3D simulated space of a Turtle Geometry digital tool. Students tried to make it stay closed even its geometrical characteristics was changing as they dynamically manipulated it. Purpose of the research was to study the meaning generation processes of students and of groups of students, for the concept of angle in a simulated 3D space. Also I examine the way they mathematize this problem using trigonometric relations in triangles that are not easy to visualize, and the socio-mathematical ecology that was situated. Transcripts of twenty four school hours of teaching intervention was the main source of research data and their analysis is based on selected parts of dialogs that took place. The intervention was designed in terms of design-based research. In my conclusions are included findings of use of meaningful formalism, navigation in a simulated 3D space, contrivance of personal or group tactics in order to address the challenge, collaborative learning in a computer-based environment.

Λέξεις κλειδιά: meaning generation, CSCL, socio-mathematical norms, meaningful formalism, turtle geometry, Logo, angle, 3D space, trigonometric relations.

Πρόλογος

Αν η γνώση μπορούσε να εκφραστεί μόνο από αληθείς προτάσεις, και ξεκάθαρες δηλώσεις, τότε η μάθηση θα ήταν η μεταφορά αυτών των προτάσεων από άνθρωπο σε άνθρωπο και η διδασκαλία θα ήταν απλά η απομνημόνευσή τους. Ο Ludwig Wittgenstein (1953), έχοντας ως βασικό παράδειγμα τα μαθηματικά ήταν ο πρώτος που έθεσε σε αμφισβήτιση αυτή την αντίληψη που κυριαρχούσε μέχρι τα μέσα του προηγούμενου αιώνα. Ο Wittgenstein έθεσε το εξής ερώτημα:

Αν η γνώση διέπεται από τη χρήση κανόνων, τότε πώς ξέρει κανείς πώς να χρησιμοποιήσει αυτούς τους κανόνες; Υπάρχει κάποιος τέτοιος μετα-κανόνας που διέπει τη χρήση τους; Τότε κι αυτός διέπεται από τον ίδιο, πράγμα που είναι παράδοξο.

Η αντίληψη αυτή ενισχύεται από την άποψη του Imre Lakatos (1976), ότι τα αποτελέσματα των μαθηματικών δεν είναι αδιαμφισβήτητα. Άλλωστε, η παραγωγή νέων μαθηματικών είναι μια πορεία αμφισβήτησης της γνώσης που ήδη υπάρχει, επανεξέτασης και γενίκευσής της. Συνεπώς και η μάθηση των μαθηματικών δεν μπορεί να διαφέρει από αυτή την παραγωγική διαδικασία.

Υπάρχει ευρεία συναίνεση στην κοινότητα των ερευνητών της διδακτικής μαθηματικών, ότι ο κεντρικός στόχος της διδασκαλίας του μαθήματος δεν είναι η αποστήθιση διαδικασιών, ιδιοτήτων και αξιόπιστων μεθόδων που λύνουν προβλήματα, αλλά η κατανόηση των μαθηματικών σε βάθος. Σκοπός είναι οι μαθητές να μπορούν να αιτιολογούν τις επιλογές τους, στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να κρίνουν γιατί οι μαθηματικές έννοιες που γνωρίζουν έχουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες (Davis R. B., 1992), να μην τις προσεγγίζουν σαν φαινομενολογικές οντότητες, αλλά σαν δικά τους κατασκευάσματα, τα οποία μπορεί να ενέχουν λάθη (Κυνηγός, 2006) και να χρειάζονται ανατροφοδότηση και αναδιατύπωση. Άλλωστε πόσες φορές έχει κανείς λύσει για πρώτη φορά ένα (όχι περίπλοκο) πρόβλημα Γεωμετρίας χωρίς να σβήσει και να ξανασχεδιάσει το σχήμα;

Η Γεωμετρία είναι ένα προνομιακό γνωστικό πεδίο για την διδασκαλία των Μαθηματικών. Μπορεί να δώσει την ευκαιρία στο μαθητή να νιώσει την ανάγκη της γενίκευσης, και να εμπλακεί ο ίδιος σε κατασκευή σχημάτων που θα τα περιεργαστεί παράγοντας τα δικά του συμπεράσματα και νοήματα. Η διττή της φύση (Freudenthal, 1983) δίνει χώρο σε εμπειρικούς αλλά και λεπτούς θεωρητικούς χειρισμούς. Συνδυάζει διάφορα είδη αναπαραστάσεων και στατικών αλλά και δυναμικών. Τη δυνατότητα δυναμικών χειρισμών και αναπαραστάσεων δίνουν σήμερα οι νέες

τεχνολογίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδακτική πράξη, κατάλληλα σχεδιασμένα μαθησιακά περιβάλλοντα στον υπολογιστή που προσφέρουν ευκαιρίες μάθησης και επηρεάζουν τον τρόπο που σκέφονται και που μαθαίνουν τα παιδιά όταν έρχονται σε επαφή με αυτά. Παρόμοια περιβάλλοντα χρησιμοποιούνται και ως ερευνητικά εργαλεία στη διδακτική των μαθηματικών, καθώς κατάλληλα σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία αποτελούν για τους μαθητές μέσα, για να εκφράσουν τα προσωπικά τους νοήματα.

Στην παρούσα έρευνα ένα τέτοιο λογισμικό τρισδιάστατης Γεωμετρίας της Χελώνας και ένα αρκετά δύσκολο και προκλητικό πρόβλημα χρησιμοποιείται ως αντικείμενο συζήτησης μιας ομάδας μαθητών που δουλεύει συνεργατικά. Η λύση του χρειάζεται ανασχεδιάσμό του σχήματος σε ένα αρκετά διαφορετικό πλαίσιο και περίπλοκο χειρισμό τριγωνομετρικών σχέσεων, που δεν είναι προφανείς. Στόχος είναι να αναδειχθούν υπό το πρίσμα της δημιουργίας προσωπικών νοημάτων, αντιλήψεις για την έννοια της γωνίας και για τον τρόπο χρήσης των τριγωνομετρικών σχέσεων ή και τις ίδιες τι τριγωνομετρικές σχέσεις, από τους μαθητές. Ο χώρος τριών διαστάσεων παράγει πρόσθετη πολυπλοκότητα για το πρόβλημα, καθώς όπως έχει αποδειχθεί οι μαθητές νιώθουν πολύ μεγαλύτερη οικειότητα με τη Γεωμετρία του επιπέδου (Kynigos & Latsi, 2007).

Στα κεφάλαια που ακολουθούν παρουσιάζονται ιστορικά στοιχεία για τη γωνία και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Η άποψη του Haeckel, ότι η οντογένεση ανακεφαλειώνει τη φυλογένεση καταδεικνύει ως απαραίτητο να έχουμμε υπόψη μας τα πρώτα βήματα της ανθρωπότητας με μια μαθηματική έννοια, προκειμένου να μελετήσουμε τους πρώτους χειρισμούς ενός παιδιού που αφορούν την έννοια αυτή. Στη συνέχεια αναπτύσσεται το θεωρητικό-διδακτικό πλαίσιο που στηρίζεται η έρευνα και πριν την ανάλυση των δραστηριοτήτων και των αποτελεσμάτων, παρουσιάζεται και αιτιολογείται η ερευνητική μέθοδος που ακολουθήθηκε κατά την ερευνητική διαδικασία.

1. Οι έννοιες της γωνίας και των τριγωνομετρικών αριθμών

Εισαγωγή

Ο πάπυρος Rhind [1] (που ονομάστηκε έτσι λόγω του A.H. Rhind που τον κληροδότησε στο Βρετανικό Μουσείο) είναι η πιο φημισμένη αναφορά στα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά. Γράφτηκε μετά τον 18^{ο} αιώνα π.Χ. (γύρω στο 1650 π.Χ.), αλλά σύμφωνα με το ίδιο το κείμενό του, προέρχεται από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται ακόμα παλιότερα (μεταξύ 20^{ου} και 18^{ου} αιώνα π.Χ.). Ο πάπυρος «αποκαλύπτει» τα μυστικά των αριθμών και την τέχνη των υπολογισμών με κλάσματα, πράγμα ιδιαίτερα χρήσιμο, αν αναλογιστεί κανείς τις κύριες ασχολίες των Αιγυπτίων την εποχή που γράφτηκε (Waerden, 2000). Επίσης, το πρόβλημα 56, αναφέρεται στον υπολογισμό της κλίσης της προμετωπίδας μιας πυραμίδας, ονομάζοντας την σεϊκέτ (seqt) και έτσι υπάρχουν ίχνη της χρήσης ενός τριγωνμετρικού μεγέθους.

Ο Ηρόδοτος πίστευε ότι οι γεωργικές ασχολίες των Αιγυπτίων, οι πλημμύρες που κατέστρεφαν τα όρια των αγροτεμαχίων σε συνδυασμό με την ανάγκη επιβολής φόρων ανάλογων των εκτάσεων ήταν οι βασικές αιτίες για την ανάπτυξη της Γεωμετρίας στην αρχαία Αίγυπτο. Επίσης αναφέρει ότι η Γεωμετρία ήρθε στην Ελλάδα, εξ Αιγύπτου (Ηροδότου Ιστορίαι). Το ίδιο αναφέρει και ο Πρόκλος (Εις Ευκλείδην,64,3-68,23) επισημαίνοντας πως συνέβαλε σε αυτό ο Θαλής ο Μιλήσιος τον 6^{ο} αιώνα π.Χ. Εκτός από το Θαλή και ο Πυθαγόρας, ο Δημόκριτος, ο Εύδοξος ταξίδεψαν σε Αίγυπτο και Βαβυλώνα και δεν είναι τυχαίο πώς η Ιωνία ήταν κέντρο άνθισης του ελληνικού πνεύματος. Όμως η Γεωμετρία των Ελλήνων είναι πολύ διαφορετική από τα υπολογιστικά μαθηματικά των ανατολικών αυτών λαών. Η Γεωμετρία των Αιγυπτίων είναι στην πραγματικότητα εφαρμοσμένη αριθμητική (Waerden, 2000) και δεν αποτελεί επιστήμη με την αρχαιοελληνική έννοια του όρου. Το ίδιο συμβαίνει και με τις τριγωνομετρικές σχέσεις που χρησιμοποίησαν. Συνεπώς, η περιγραφή χωρικών σχέσεων, υπολογιστικών κανόνων και τεχνικών ξεκίνησε πριν

[1] Γνωστός και ως «πάπυρος του Αχμές»: φέρει το όνομα του Σκοτσέζου δικηγόρου A.H. Rhind (1833-1863). Ο πάπυρος αντιγράφτηκε γύρω στο 1650 π.Χ. από τον γραφέα A'h-Mose (στα ελληνικά αποδίδεται συνήθως ως Άχμες ή Αχμής, ενδεχομένως να πρόκειται για το γνωστό όνομα Άμασις), προέρχεται όμως από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται από το 1850 π.Χ. Είναι γραμμένος στην ιερατική γραφή. Είναι το αρχαιότερο ευρύτερα γνωστό μαθηματικό κείμενο.

από τους Έλληνες. Η προσπάθεια, όμως για αξιωματικοποίηση της μαθηματικής γνώσης συνέβη μετέπειτα, στην Ελλάδα.

Η φύση της Γεωμετρίας είναι διττή, δηλαδή εμπειρική και θεωρητική-αξιωματική (Freudenthal, 1973; Strässer, 1996). Τα Ελληνικά Μαθηματικά ίσως μπορούν να χαρακτηριστουν ως η μετάβαση από την εμπειρική γεωμετρία στην θεωρητική. Αυτή η μετάβαση, όμως δε συμβαίνει μόνο στην ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας, αλλά και στην γνωστική εξέλιξη ενός ανθρώπου. Σύμφωνα με τον Piaget, όπου βρίσκει κανείς γνώσεις στο ξεκίνημά τους βρίσκει και διαδικασίες ανάλογες με αυτές που συμβαίνουν όταν μαθαίνει ένα παιδί. Έτσι, η ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας από χρηστικές τεχνικές αντιμετώπισης προβλημάτων σε μαθηματικά θεμελιωμένες θεωρίες, αντικατοπτρίζει τον τρόπο που ένα παιδί χειρίζεται αυτές τις γνώσεις όταν τις πρωτοσυναντά.

1.1. Ορισμοί και σχηματικές αναπαραστάσεις της γωνίας

Επίπεδες γωνίες

Η χρήση της γωνίας σε μαθηματικό κείμενο στην Ελλάδα, συναντάται σύμφωνα με τον Πρόκλο στο έργο του Θαλή του Μιλήσιου (Πρόκλος, Εις Ευκλείδην) τον 6^{ο} αιώνα π.Χ.. Η πρόταση 5 των Στοιχείων του Ευκλείδη[2] (3^{ος} αιώνας π.Χ.) όπου αποδεικνύεται ότι «σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, οι γωνίες της βάσης είναι ίσες μεταξύ τους», αποδίδεται στο Θαλή, χωρίς όμως η απόδειξη των Στοιχείων να ανήκει στον ίδιο (Waerden, 2000).

Ο Ευκλείδης στο Βιβλίο Ι των Στοιχείων (Σταμάτης, 1975) δίνει τους εξής ορισμούς για τη γωνία:

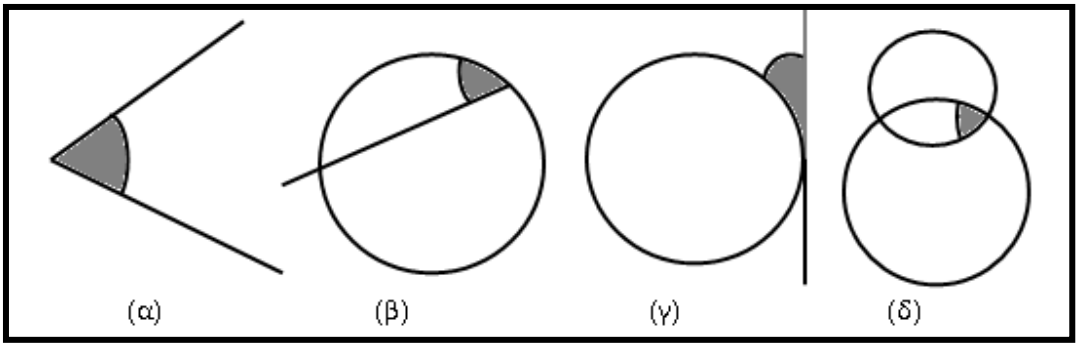
Ορισμός 8

Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, γωνία για τον Ευκλείδη είναι η κλίση μεταξύ δύο γραμμών στο επίπεδο, που δε βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας και άπτονται. Οι

[2] Τα Στοιχεία του Ευκλείδη δεν είναι μόνο μια επισκόπηση των γνωστών Μαθηματικών της εποχής του, αλλά έχει θεωρηθεί πρωτοποριακό έργο, ως προς τη δομή του συμπερασματικού συστήματος που χρησιμοποιεί και ως προς αυτό επηρέασε τον σύγχρονο επιστημονικό τρόπο σκέψης (Davis D. M., 2007).

γραμμές αυτές δεν είναι απαραίτητο να είναι ευθείες[3]. Έτσι στην Εικόνα 1 φαίνονται τέσσερις περιπτώσεις επίπεδων γωνιών. Στην περίπτωση (α) οι γραμμές που άπτονται είναι ευθείες, στην (β) και τη (γ) είναι ευθεία και καμπύλη, ενώ στη (δ) είναι μόνο καμπύλες. Η γωνία της περίπτωσης (γ) ονομάζεται κερατοειδής.



Εικόνα 1: Επίπεδες γωνίες. (α) Ευθύγραμμη (β) Μεταξύ κύκλου και τέμνουσας ευθείας (γ) Μεταξύ κύκλου και εφαπτόμενης ευθείας (κερατοειδής) (δ) μεταξύ τεμνόμενων κύκλων.

Ορισμός 9

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

Σύμφωνα με τον ορισμό 9 από τις επίπεδες γωνίες της εικόναςΕικόνα 1, μόνο η (α) περίπττωση αναπαριστά ευθύγραμμη γωνία, γιατί οι γραμμές που την «περιέχουν» είναι ευθείες.

Συγκρίνοντας του δύο ορισμούς βλέπουμε ότι υπάρχει ένας σαφής διαχωρισμός μεταξύ επίπεδης και ευθύγραμμης γωνίας (Heath, 1925). Ο ορισμός 8 περιγράφει τη γωνία σαν το ζεύγος των δύο γραμμών που άπτονται, ενώ ο ορισμός 9 προσδίδει σε αυτή την έννοια του τμήματος του επιπέδου, της περιοχής που περιέχεται μεταξύ των δύο γραμμών, που στην περίπτωση αυτή είναι ευθείες. Αυτή η διάκριση ενισχύεται από τους ορισμούς της ορθής, της αμβλείας και της οξείας γωνίας, στους οποίους υπεισέρχεται η σύγκριση μεταξύ ευθύγραμμων γωνιών:

Ορισμός 10

Ὅταν δὲ εὐθεῖα σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἥν ἐφέστηκεν.

Ορισμός 11

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

Ορισμός 12

Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

[3] Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) στην πραγματεία του «Αναλυτικά Ύστερα» (μέρος του έργου «Λογικά ή Όργανον»), διατυπώνει μια απόδειξης της πρότασης Ι.5, με χρήση γωνιών όπως αυτή της εικόνας Εικόνα 1(β). Έτσι, φαίνεται ότι υπήρχε χρήση γωνιών που σχηματίζονταν από ευθεία και καμπύλη γραμή, πριν τη διατύπωση του ορισμού της επίπεδης γωνίας από τον Ευκλείδη

Η γωνία για τον Ευκλείδη δεν μπορεί να είναι ίση ή μεγαλύτερη των δύο ορθών. Αυτό φαίνεται στον ορισμό 8, που απαιτείται οι γραμμές να μη βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας, ώστε να σχηματίζουν αυτό που σήμερα ονομάζουμε «ευθεία γωνία». Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και σε άλλα σημεία των Στοιχείων, όπως στην πρόταση 33 [4] του βιβλίου IV (Heath, 1925), όπου ο Ευκλείδης δεν εξετάζει περιπτώσεις που η γωνία ξεπερνά σε μέτρο τις δύο ορθές, ενώ θα μπορούσε. Επίσης ο Heath αναφέρει (1925, σ. 275), ότι είναι πιθανόν ο Ευκλείδης να μη θεωρούσε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο μιας γωνίας, ότι κι αυτό ήταν γωνία, αφού για παράδειγμα το διπλάσιο μιας αμβλείας γωνίας θα μπορούσε να υπερβαίνει τις δύο ορθές.

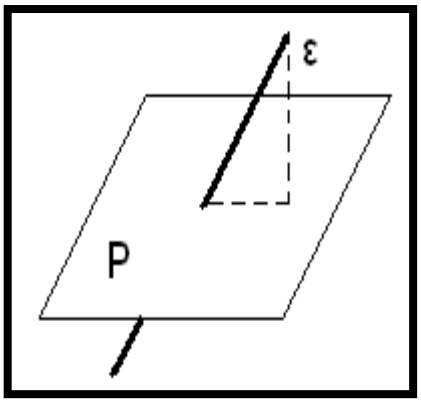
Δίεδρες και στερεές γωνίες

Τα βιβλία XI, XII και XIII των Στοιχείων του Ευκλείδη αποτελούν τη Στερεομετρία (Σταμάτης, 1975b). Στο βιβλίο XI, ο Ευκλείδης αφού ορίσει την «ορθή ευθεία προς επίπεδο», το «ορθό επίπεδο προς επίπεδο» δίνει τους ορισμούς της κλίσης ευθείας προς επίπεδο και της κλίσης επιπέδου προς επίπεδο:

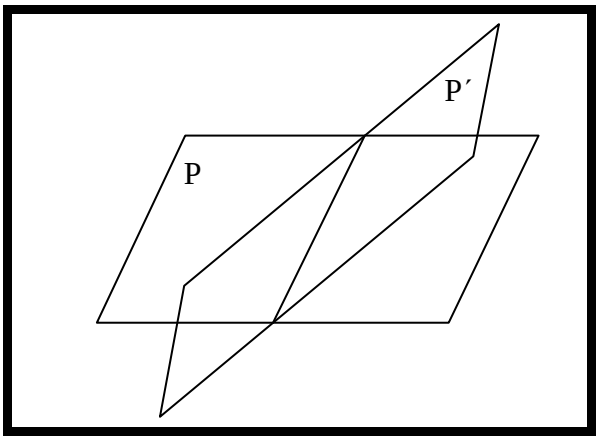
Ορισμός 5

Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

Δηλαδή μιλώντας με σύγχρονη ορολογία ορίζει ως κλίση της ευθείας ε ως προς το επίπεδο P (Εικόνα 2) τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της προβολής της ευθείας στο επίπεδο και της ίδιας της ευθείας ε.



Εικόνα 2: Ορισμός XI.5. Η κλίσης ευθείας προς επίπεδο.



Εικόνα 3: Ορισμός XI.6. Η κλίση επιπέδου προς επίπεδο.

[4] Αποδεικνύεται ότι η επίκεντρη γωνία ενός κύκλου είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Στη συνέχεια με παρόμοιο τρόπο ορίζει την κλίση μεταξύ δύο επιπέδων που ουσιαστικά πρόκειται για την έννοια της δίεδρης γωνίας.

Ορισμός 6

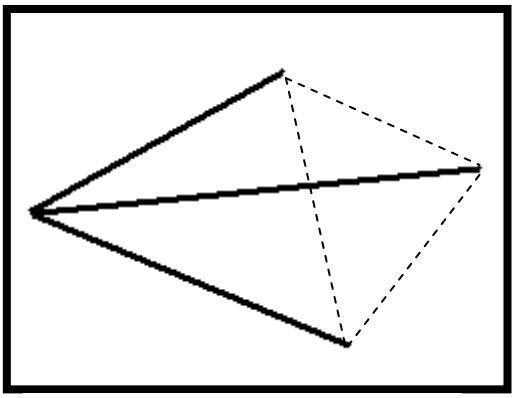
Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Μια σχηματική περιγραφή του ορισμού φαίνεται στο σχήμα της Εικόνα 3. Η κλίση του επιπέδου Ρ΄ προς το Ρ είναι η δίεδρη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον Heath, αυτή η προσέγγιση της δίεδρης γωνίας αποτελεί γενίκευση του ορισμού της επίπεδης γωνίας. Στη συνέχεια ορίζεται η στερεά γωνία.

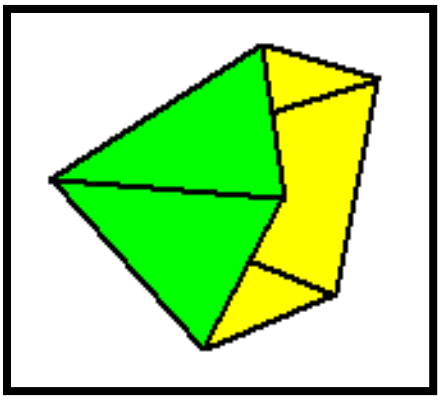
Ορισμός 11

Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

Η στερεά γωνία ορίζεται με δύο τρόπους. Είτε ως η κλίση περισσοτέρων των δύο γραμμών μεταξύ τους, που άπτονται και δε βρίσκονται στην ίδια επιφάνεια (Εικόνα 4), είτε ως η περιεχόμενη μεταξύ περισσοτέρων των δύο επιπέδων γωνιών, που έχουν κοινή κορυφή, αλλά δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (Εικόνα 5).



Εικόνα 4: Ορισμός XI.11 για τη στερεά γωνία.



Εικόνα 5: Ορισμός XI.11 για τη στερεά γωνία.

Η δεύτερη εκδοχή του ορισμού μοιάζει με τον ορισμό της πολυεδρικής γωνίας. Πολυεδρική λέγεται η γωνίας που οριοθετείται μεταξύ τριών ή περισσοτέρων επιπέδων που συναντώνται σε ένα σημείο (κορυφή). Έτσι ανάλογα με το πλήθος των επιπέδων σχηματίζεται τρίεδρη, τετράεδρη κ.ο.κ. γωνία.

Σύγχρονες προσεγγίσεις για τη γωνία

Αν ο Ευκλείδης στηρίχθηκε αρκετά στη διαίσθηση για την ανάπτυξη των Στοιχείων, τις διατυπώσεις των ορισμών και τις αποδείξεις των προτάσεων, τον 19^{ο} αιώνα, η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών έφερε στο προσκήνιο τη μελέτη της γεωμετρίας ως ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα. Είναι χαρακτηριστική η έκφραση του Morris Kline, όπως αποδίδεται από τον Davis (2007):

> Η Ευκλείδεια Γεωμετρία φιλοδόξησε να προσφέρει ακριβείς αποδείξεις θεωρημάτων τα οποία υποβάλλει η διαίσθηση, αντ' αυτού όμως έδωσε διαισθητικές αποδείξεις σχημάτων σχεδιασμένων με ακρίβεια.

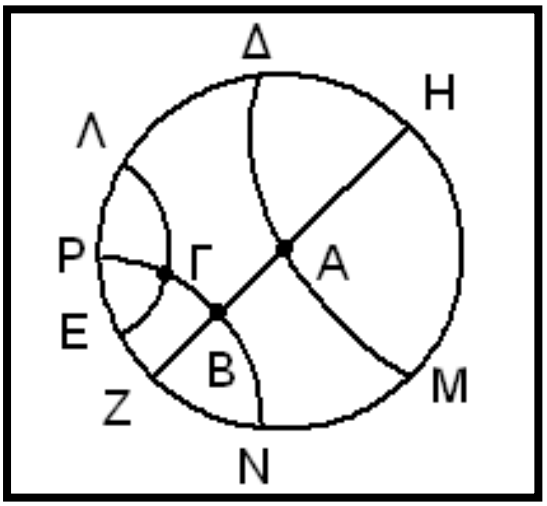
Υπό αυτή την έννοια ο Ευκλείδης αν και προσπάθησε να αποστασιοποιηθεί πλήρως από την εποπτεία και την εμπειρική φύση της γεωμετρίας, ωστόσο αυτό δε στάθηκε εξ ολοκλήρου δυνατό, αφού υπάρχουν αποδείξεις, που η διαίσθηση υποβάλλει ισχυρισμούς, ενώ θεωρητικά δεν ισχύουν αναγκαία[5]. Την ανάγκη μαθηματικής τυποποίησης διαισθητικών εννοιών, όπως «το εσωτερικό τριγώνου» και «μεταξύ», που επισήμανε το 1832 ο Gauss, ενστερνίστηκε ο David Hilbert και το 1899 με το βιβλίο του «Θεμέλια Γεωμετρίας» προσέδωσε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία την αυστηρότητα που είχε ανάγκη. Ο Hilbert αποφεύγει να δώσει ορισμούς στο σημείο, την ευθεία, την έννοια «κείται επί», την ισότητα και την έννοια του «μεταξύ», αλλά χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μεγάλο αριθμό αξιωμάτων (δεκατρία, χωρισμένα σε πέντε ομάδες), περιγράφει τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων (σημεία και ευθείες). Με αυτό τον τρόπο δεν πέφτει στην παγίδα της διαισθητικής περιγραφής. Αποτέλεσμα αυτού του αξιωματικού οικοδομήματος είναι ότι δεν μας ενδιαφέρει η φύση των αντικειμένων, αλλά συγκεκριμένες ιδιότητες που έχουν και οι σχέσεις μεταξύ τους. Έτσι, το σημείο σαν θεωρητικό-γεωμετρικό αντικείμενο μπορεί να αναπαρίσταται γραφικά με ένα σημείο ή με μια ευθεία ή με ένα άλλο αντικείμενο, αρκεί αυτό να πληρεί όλα αξιώματα που το αφορούν. Η αναπαράσταση των θεωρητικών αντικειμένων, εξαρτάται από το μοντέλο του αξιωματικού συστήματος που χρησιμοποιούμε.

Κατά συνέπεια μια γωνία, σύμφωνα με τον Hilbert σχηματίζεται μεταξύ δύο **ημιευθειών** h και k, που έχουν κοινό άκρο το σημείο A, αλλά **δεν κείνται επί** της

[5] Πρόταση Ι.1: Ο Ευκλείδης δέχεται ότι υπάρχει το σημείο τομής δύο συγκεκριμένων κύκλων, χωρίς αυτό να ισχύει απαραίτητα, στο περικείμενο της πρότασης.

ίδιας ευθείας. Για να καταλάβει κανείς τον ορισμό αυτό πρέπει να γνωρίζει τον ορισμό της ημιευθείας και τις ιδιότητες που πληρεί η έννοια «κείνται επί», αφού ανήκει στους απροσδιόριστους όρους και περιγράφεται από τα αξιώματα. Το ίδιο συμβαίνει και με την έννοια του «μεταξύ», που χρειάζεται για τον ορισμό της ημιευθείας[6]. Κατά συνέπεια, για να καταλάβει κανείς την έννοια της ημιευθεία (άρα και της γωνίας), πρέπει να γνωρίζει τους ορισμούς του «κείνται επί» και του «μεταξύ» (και ότι άλλο χρησιμοποιείται για αυτούς τους ορισμούς).

Με παρόμοιο τρόπο θεμελιώνονται και οι μη Ευκλείδιες Γεωμετρίες, στις οποίες το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη δεν ισχύει. Τα διαφορετικά αξιώματα των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών αντιστοιχούν σε μοντέλα διαφορετικά από αυτά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Για παράδειγμα ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι ο δίσκος του Henri Poincaré (1881), που αποτελεί μια τροποποίηση του δίσκου των Klein-Beltrami (1871). Όπως φαίνεται στην Εικόνα 6, τα σημεία του δίσκου του Poincaré είναι τα σημεία του εσωτερικού του κυκλικού δίσκου, ενώ οι ευθείες είναι τα τμήματα κύκλου στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου επίσης, που τέμνουν κάθετα την περιφέρεια του κύκλου. Έτσι έχουμε τις ευθείες ΕΛ, ΖΗ, ΡΝ και ΜΔ, χωρίς τα άκρα Ε,Λ,Ζ,Η,Ρ,Ν,Μ και Δ να είναι σημεία του μοντέλου. Τα μόνα σημεία που εικονίζονται είναι τα Α, Β και Γ. Βλέπουμε ότι οι γωνίες, χωρικά, δε σχηματίζονται μεταξύ ευθειών γραμμών όσο αφορά τη διαίσθηση, αλλά κυρίως μεταξύ καμπύλων γραμμών που είναι οι ευθείες του μοντέλου.



Εικόνα 6: Ο δίσκος του Poincaré

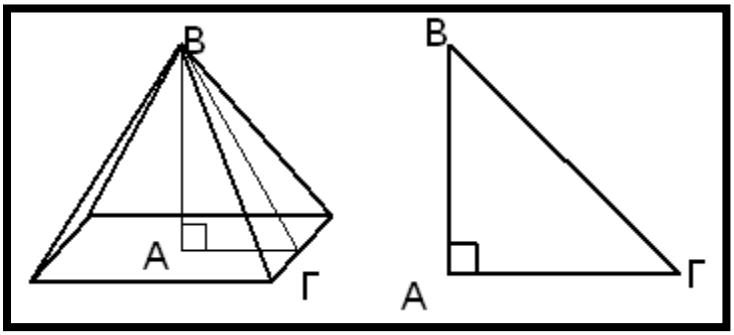
Σε αυτό το επίπεδο φορμαλισμού η έννοια της γωνίας είναι καθαρά θεωρητική και η σχηματική της αναπαράσταση εξαρτάται, όπως προαναφέρθηκε από το μοντέλο.

[6] Η ημιευθεία από το Α δια του Β αποτελείται από τα σημεία Γ που βρίσκονται *επί της ευθείας* ΑΒ και είναι τέτοια, ώστε το Α να μη βρίσκεται *μεταξύ* του Β και του Γ.

1.2. Τριγωνομετρία

Πρώτα ψήγματα τριγωνομετρικών υπολογισμών

Όπως προανέφερα, στο πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind, που υπολογίζεται η κλίση της προμετωπίδας μιας πυραμίδας, χρησιμοποιείται ο λόγος του μισού της βάσης της πυραμίδας προς το ύψος της (Εικόνα 7).



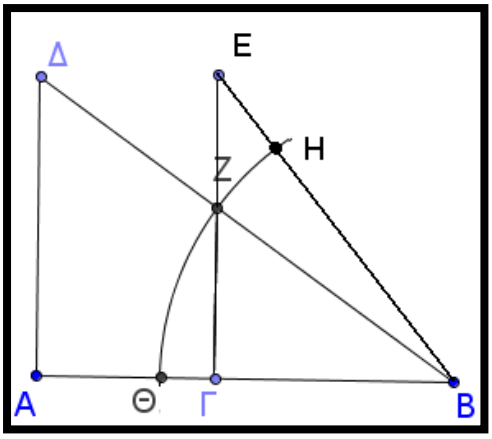
Εικόνα 7: Το πρόβλημα 56 του παπύρου του Rhind

Το μέγεθος σεϊκέτ που υπολογίζεται ως $\frac{AB}{A\Gamma}$ «μετράει» την κλίση της προμετωπίδας, που με σημερινά Μαθηματικά θα λέγαμε ότι είναι η συνεφαπτομένη της γωνίας Γ του ορθογωνίου τριγώνου της Εικόνα 7.

Στο έργο «Τα Οπτικά» του Ευκλείδη η πρόταση 8 διατυπώνεται ως εξής:

Τὰ ἴση μεγέθη καὶ παράλληλα ἄνισον διεστηκότα ἀπὸ τοῦ ὄμματος οὐκ ἀναλόγως τοῖς διαστήμασον ὁρᾶται.

Δηλαδή, τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα, αλλά απέχουν άνιση απόσταση από τον οφθαλμό, δεν φαίνονται ανάλογα των αποστάσεών τους από αυτόν. Στην Εικόνα 8, τα ίσα τμήματα είναι τα ΑΔ και ΓΕ, ο οφθαλμός στο Β και οι αποστάσεις τους από αυτόν, απο ΑΒ και ΓΒ αντίστοιχα.



Εικόνα 8: Πρόταση 8 των Οπτικών του Ευκλείδη

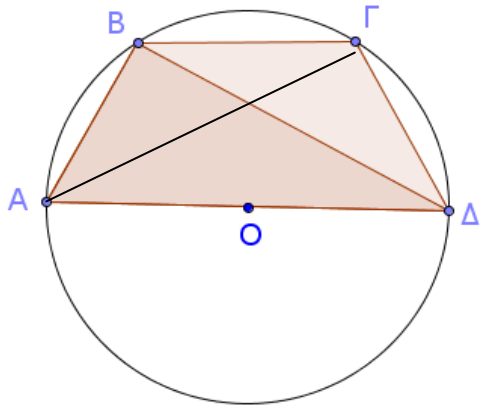
Τα ευθύγραμμα τμήματα θα φαίνονταν ανάλογα με τις αποστάσεις τους, αν ίσχυε $\frac{AB}{\Gamma B} = \frac{\widehat{HB\Theta}}{\widehat{ZB\Theta}}$. Για την απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση VI.33[7] των Στοιχείων του Ευκλείδη και ειδικότερα μια προσθήκη[8] του Θέωνα σε αυτή. Αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι $\frac{AB}{\Gamma B} > \frac{\widehat{HB\Theta}}{\widehat{ZB\Theta}}$. Αξιοσημείωτο είναι ότι ο λόγος $\frac{AB}{\Gamma B}$ γράφεται ως $\frac{\frac{AB}{A\Delta}}{\frac{\Gamma B}{E\Gamma}}$ και άρα μιλώντας με ορολογία σύγχρονης τριγωνομετρίας $\frac{\varepsilon\varphi(\widehat{ZB\Theta})}{\varepsilon\varphi(\widehat{HB\Theta})}$. Έτσι έχουμε την ισοδύναμη σχέση $\frac{\varepsilon\varphi(\widehat{HB\Theta})}{\widehat{HB\Theta}} > \frac{\varepsilon\varphi(\widehat{ZB\Theta})}{\widehat{ZB\Theta}}$. Έτσι παρατηρείται μια πρώτη χρήση τριγωνομετρικής σχέσης, έστω κι αν αυτή δεν αναφέρεται ρητά ούτε συμβολίζεται.

Χορδές κυκλικών τόξων: Ο πρόδρομος της τριγωνομετρίας

Ο Πτολεμαίος (150 μ.Χ.) ανέπτυξε μια μέθοδο υπολογισμού χορδών σε κύκλο. Στα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται (Εικόνα 9), βάσει του Θεωρήματος του Πτολεμαίου ισχύει ότι $A\Gamma \cdot B\Delta = B\Gamma \cdot A\Delta + AB \cdot \Gamma\Delta$. Αυτή η σχέση λύνεται ως προς τη χορδή $B\Gamma$, που αντιστοιχεί στο τόξο $B\Gamma$ δηλαδή στη διαφορά των τόξων $A\Gamma$ και AB, άρα για τις χορδές ισχύει $B\Gamma = \frac{A\Gamma \cdot B\Delta - AB \cdot \Gamma\Delta}{A\Delta}$. Επίσης είχε αναπτύξει μια τεχνική εύρεσης χορδών παραπληρωματικών τόξων. Έτσι αν γνωρίζει κανείς τη διάμετρο του κύκλου, τις χορδές $A\Gamma$ και AB, μπορεί να βρει το μήκος της χορδής $B\Gamma$.

[7] Πρόταση 33 του VI βιβλίου των Στοιχείων: «Σε ίσους κύκλους, οι γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο με τα τόξα στα οποία αυτές βαίνουν, είτε είναι επίκεντρες, είτε εγγεγραμένες».

[8] Προσθήκη του Θέωνα: «Σε ίσους κύκλους οι επίκεντρες γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο με τους αντίστοιχούς τους κυκλικούς τομείς». Το ίδιο ισχύει και για τις εγγεγραμμένες γωνίες.



Εικόνα 9: Το Θεώρημα του Πτολεμαίου

Για τους υπολογισμούς του ο Πτολεμαίος έπαιρνε ως μονάδα μέτρησης του τόξου το $1^{\tau} = \frac{1}{120}$ της διαμέτρου του κύκλου, με υποδιαιρέσεις $1' = \frac{1^{\tau}}{60}$ και $1'' = \frac{1'}{60}$. Έτσι, αν θεωρήσουμε το τόξο AB ίσο με 2α και το τόξο $A\Gamma$ ίσο με 2β τότε έχουμε:

$$\text{χορδή } (2\beta - 2\alpha) = \text{χορδή}(2\beta) \cdot \text{χορδή } (\text{πλ. του } 2\alpha) - \text{χορδή}(2\alpha) \cdot \text{χορδή } (\text{παραπλ. του } 2\beta)$$

Με σημερινούς συμβολισμούς για τις αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες έχουμε:

$$\eta\mu\alpha(\beta - \alpha) = \eta\mu\beta \cdot \eta\mu(90 - \alpha) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu(90 - \beta) = \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$$

Φαίνεται λοιπόν ότι οι χορδές είναι ο πρόδρομος των τριγωνομετρικών αριθμών με μια σχέση της μορφής $\eta\mu\alpha = \frac{\chi o\rho\delta\acute{\eta}(2\alpha)}{2R}$ να υπάρχει μεταξύ τους, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Εκτός από τον Πτολεμαίο κι ο Ίππαρχος (150 π.Χ.) είχε χρησιμοποιήσει χορδές κυκλικών τόξων για τους αστρονομικούς υπολογισμούς του. Για τον Ίππαρχο όμως δε γνωρίζουμε αν είχε συντάξει πίνακες με τιμές χορδών για τόξα, όπως είχε κάνει ο Πτολεμαίος, καθώς το μεγαλύτερο μέρος του έργου του δεν έχει διασωθεί και έτσι σαν βασική πηγή πρώιμης τριγωνομετρίας έχουμε τον Πτολεμαίο (Waerden, 2000).

Η εξέλιξη της Τριγωνομετρίας

Στο σχολείο η Τριγωνομετρία ακολουθεί σαν διδακτικό αντικείμενο την πορεία της εξέλιξής της. Ξεκινώντας από τα ορθογώνια τρίγωνα και τις οξείες γωνίες, γενικεύεται με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου για μεγαλύτερες ή αρνητικές γωνίες και στη συνέχεια με την εισαγωγή της τριγωνομετρικής συνάρτησης, αποκτά έναν πιο αφηρημένο χαρακτήρα, όπου το όρισμά της είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, χωρίς απαραίτητα να αναπαρίσταται με τόξο. Επίσης, η τριγωνομετρία χρησιμοποιείται σε πολλά προβλήματα φυσικής, σε ανάλυση

δυνάμεων στην πιο απλή της μορφή και με το συναρτησιακό της χαρακτήρα σε περιοδικά φαινόμενα όπου το όρισμα του τριγωνομετρικού αριθμού είναι ο χρόνος.

Η σύγχρονη Τριγωνομετρία δρα σε ένα πολύ ευρύτερο πλαίσιο από εκείνο των τριγώνων και των τόξων. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εκφράζονται ως δυναμοσειρές αναλυτικών τύπων όπως $ημx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Σχετικά με την παρούσα έρευνα

Στην παρούσα έρευνα η χρήση της Τριγωνομετρίας από μαθητές Γ΄ γυμνασίου έγινε στη προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν ένα δύσκολο γεωμετρικό πρόβλημα στο χώρο των τριών διαστάσεων, μέσω ενός ψηφιακού εργαλείου τρισδιάστατης γωμετρίας, δουλεύοντας συνεργατικά. Η προσπάθειά μου ως ερευνητή ήταν να διακρίνω και να καταγράψω χαρακτηριστικά συμβάντα κατά τα οποία οι μαθητές δημιουργούν τα δικά τους προσωπικά νοήματα σχετικά με τις έννοιες της γωνίας και τις τριγωνομετρικές σχέσεις, αλλά και τον τρόπο που διαπραγματεύονται μεταξύ τους τα νοήματα αυτά. Στο επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσω το διδακτικό και μαθησιακό θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται η προσπάθεια αυτή.

2. Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσω το θεωρητικό πλαίσιο της διδαδκτικής των μαθηματικών, επί του οποίου βασίζεται η οπτική της παρούσας έρευνας, θέλοντας να αιτιολογήσω την επιλογή της μεθόδου και τον τρόπο ανάλυσης των συμπερασμάτων της έρευνας. Κεντρικός είναι ο ρόλος της αναζήτησης προσωπικών νοημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές και όχι της μελέτης των παρανοήσεών τους. Για να μιλήσω για προσωπικά νοήματα, θεωρώ σκόπιμο να αναφερθώ στη μαθηματική έννοια, επισημαίνοντας προσεγγίσεις ερευνητών του χώρου της διδακτικής.

Επίσης παραθέτω στοιχεία, που κατά την άποψή μου στηρίζουν την επιλογή χρήσης νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία της Γεωμετρίας και την εκπαιδευτική έρευνα. Τέλος, εξετάζω το ψηφιακό εργαλείο που επέλεξα και χρησιμοποίησαν οι μαθητές, από επιστημολογική, μαθηματική, διδακτική και ερευνητική σκοπιά, ώστε να φανεί η σύνδεσή του με τους διδακτικούς και ερευνητικούς στόχους που έθεσα και αναφέρω στο επόμενο κεφάλαιο.

2.1. Δημιουργία νοημάτων και Constructionism

2.1.1 Δημιουργία προσωπικών νοημάτων

Ο Karl Popper στο έργο του Objective Knowledge (Popper, 1972; Hersh & Philip, 1981) διατύπωσε την άποψη ότι οι επιστημονικές θεωρίες δεν προκύπτουν επαγωγικά από τα γεγονότα, αλλά μάλλον επινονούνται ως υποθέσεις ή εικασίες και υπόκεινται σε πειραματικές δοκιμασίες τις οποίες οι επικριτές τους προσπαθούν να ανατρέψουν. Σε αυτό το πλαίσιο ο Imre Lakatos (1976) υποστήριξε ότι τα μαθηματικά, μπορεί να κάνουν λάθος, τα αποτελέσματά τους δεν είναι αναμφισβήτητα. Οι μαθηματικές θεωρίες, που δεν είναι ποτέ ολοκληρωτικά απαλλαγμένες από ασάφεια ή πιθανότητα παράλειψης, αναπτύσσονται μέσα από την κριτική, την αμφισβήτηση και τη διόρθωση. Όταν πρωτοδιατυπώνεται μια εικασία υπάρχει αναζήτηση για πιθανές αποδείξεις που την επιβεβαιώνουν ή αντιπαραδείγματα που την ανατρέπουν ή περιορίζουν την ισχύ της (Hersh & Philip, 1981). Η επιστημολογική ανάλυση αυτή εφαρμόζεται στα μαθηματικά που βρίσκονται στη διαδικασία της ανάπτυξης και της ανακάλυψης τα *μη τυπικά μαθηματικά* (Lakatos, 1976). Η παραγωγή μαθηματικών

αποτελεσμάτων περιγράφεται από ένα δίκτυο εικασιών, υποθέσεων, δοκιμών, αντιπαραδειγμάτων, αναθεωρήσεων και επαληθεύσεων, στο πλαίσιο της συνεχούς αμφισβήτησης των προτεινόμενων λύσεων ακόμα και ήδη λυμένων προβλημάτων.

Σε αυτό το πλαίσιο, τα μαθηματικά δεν έχουν φαινομενολογική διάσταση, δεν είναι αντικειμενικές οντότητες που πρέπει να κατανοήσει ο μαθηματικός, αναμφισβήτες και χωρίς λάθη. Όπως λέει ο Κυνηγός (2006), τα μαθηματικά αποτελούν κατασκεύασμα του καθενός από εμάς και, κατά συνέπεια, αυτός που κάνει μαθηματικά, είτε είναι μαθηματικός, είτε μαθητής, κτίζει πάνω στη δική του θεωρία, κάνοντας συνεχώς λάθη, πισωγυρίσματα και διορθώσεις. Η μάθηση των μαθηματικών έχει την ίδια φύση με τη διαδικασία στην οποία εμπλέκονται οι μαθηματικοί, συνίσταται δηλαδή στην εμπειρική, υποθετικο-παραγωγική διαδικασία, όπου ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες αποδείξεις, ανακατασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους. Αυτή η προσέγγιση έρχεται σε αντίθεση με την έμφαση στη μελέτη των παρανοήσεων των μαθητών, που προσδίδει στα μαθηματικά μια οντολογία, ως υπαρκτά και κοινά για όλους νοήματα που ο άνθρωπος προσπαθεί προοδευτικά να τα καταλάβει. Από την άλλη, στη δομική θεωρία (Dewey, 1933), η μάθηση προσεγγίζεται ως ανθρώπινο οικοδόμημα. Δίνεται έμφαση στη μελέτη των νοημάτων που κατασκευάζει ο μαθητής, και όχι στο τι δεν κατάβαλε σε σχέση με αυτά τα νοήματα που «ήδη υπάρχουν». Ο Papert, πολύ κοντά σε αυτή την προσέγγιση, μελετάει τα μαθηματικά νοήματα που δομούν τα παιδιά, δηλαδή όχι τι παρανοούν, αλλά τι καταλαβαίνουν και πώς αναπτύσσεται (αντί για «διορθώνεται») η κατανοήση αυτή (Κυνηγός, 2006).

2.1.2 Constructionism

Η θεωρία της μάθησης που ονομάζεται Constructionsim έχει ως κεντρικό άξονα τη μάθηση μέσα από τη συνειδητή εμπλοκή του μαθητή σε μια κατασκευή, που έχει νόημα γι’ αυτόν. Έχοντας ως αφετηρία τη θεωρία του Κοστρουκτιβισμού του Piaget και εστιάζοντας στην μάθηση μέσω της κατασκευής ο Seymour Papert ανέπτυξε τις ιδέες του Constructionism. Όπως λέει ο ίδιος (Papert & Harel, 1991):

Constructionism - the N word as opposed to the V word - shares constructivism's connotation of learning as "building knowledge structures" irrespective of the circumstances of the learning. It then adds the idea that this happens especially felicitously in a context

where the learner is consciously engaged in constructing a public entity, whether it's a sand castle on the beach or a theory of the universe.

Στη θεωρία του Piaget, ο μαθητής κατασκευάζει ενεργά τη γνώση. Η νέα γνώση δομείται πάνω στην παλιά, όχι απλά επειδή είναι πιο σωστή ή πιο αποτελεσματική, αλλά σαν αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων με το περιβάλλον (Vygotsky, 1978). Ο Papert δίνει έμφαση στον «διάλογο» του μαθητή με το αντικείμενο που κατασκευάζει (artifact). Ο διάλογος αυτός είναι που αποκαλύπτει τον τρόπο που σκέφτηκε εκείνος που το έφτιαξε, είτε πρόκειται για κατασκευή, είτε για ανακατασκευή, αλλά και αποδόμηση του αντικειμένου. Αυτό που μας βοηθά να καταλάβουμε μια τέτοια οπτική είναι ο τρόπος που οι ιδέες παίρνουν μορφή ή αναδιαμορφώνονται, όταν εκφράζονται μέσω κατασκευών που υλοποιούνται σε συγκεκριμένο περιεχόμενο από συγκεκριμένους ανθρώπους. Οι μαθητές αντιμετωπίζοντας ένα πρόβλημα, εφευρίσκουν εργαλεία και μέσα, που υποστηρίζουν τη **διερεύνησή** τους, στην κατεύθυνση που οι ίδιοι επιθυμούν. Συνεπώς η μάθηση, πηγάζει από την διερευνητική φύση του ανθρώπου.

Το αντικείμενο που κατασκευάζει ο μαθητής μπορεί στη συνέχεια να το περιεργαστεί και να το μετατρέψει. Ο τρόπος που σκέφτηκε και ο μηχανισμός που δημιούργησε τα δικά του νοήματα μπορεί να γίνει αντιληπτός από έναν ερευνητή που γνωρίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο δούλεψε ο μαθητής. Έτσι το πλαίσιο αυτό δε διαμεβολαβεί μόνο ανάμεσα στο μαθητή και τις ιδέες του, αλλά είναι και χρήσιμο εργαλείο που έχει στα χέρια του ο ερευνητής για να εξάγει τα συμπεράσματά του.

2.1.3 Από τον Piaget στον Papert

Η θεωρία του Piaget σε αντίθεση με τον συμπεριφορισμό – την επικρατούσα θεωρία της μάθησης της εποχής – δίνει μια ανθρωποκεντρική διάσταση στην σκέψη και βλέπει τον άνθρωπο σαν αυτορυθμιζόμενη οντότητα (Κυνηγός, 2006), που επηρεάζεται από την οργανική του φύση και το περιβάλλον (φυσικό και κοινωνικό). Η ανθρώπινη φύση είναι συνυφασμένη με τις τάσεις της εξισορρόπησης, της αυτορύθμισης και της αυτεοξέτασης/αναστοχασμού (reflection). Έτσι η ανθρώπινη σκέψη λειτουργεί φτιάχνοντας ένα περίπλοκο δίκτυο από **γνωστικά σχήματα** που κατασκευάζονται από τις αντίστοιχες εμπειρίες του ατόμου. Το γνωστικό σχήμα είναι η οργανωμένη δομή των εμπειριών (invariant organization of activity) του ατόμου,

που είναι παρεμφερείς, δηλαδή σχετίζονται με συγκεκριμένη «κλάση» καταστάσεων που έχει βιώσει. Ένα γνωστικό σχήμα λειτουργεί ως εξής:

Ενεργοποιείται όταν γίνεται **αναγνώριση** όμοιων καταστάσεων με εμπειρίες που έχει βιώσει το άτομο. Στη συνέχεια γίνεται **επεξεργασία** των βασικών χαρακτηριστικών της νέας κατάστασης με σκοπό να αντιστοιχιθεί στο υπάρχον γνωστικό σχήμα. Επόμενο βήμα είναι ο **σχεδιασμός** αντιμετώπισης της νέας κατάστασης θέτοντας στόχους και υποστόχους. Τέλος έρχεται η **εκτέλεση του σχεδίου**, δηλαδή η γνώση που επιτρέπει στο άτομο την πραγματοποίηση των στόχων και υποστόχων που έθεσε. Σύμφωνα με τον Vergnaud (1991; 2009) η λειτουργία του γνωστικού σχήματος είναι να περιγράφει συνηθισμένους τρόπους δράσης του ατόμου, για καταστάσεις στις οποίες έχει ανταπεξέλθει και να δίνει «ιδέες» για την αντιιμετώπιση νέων καταστάσεων.

Σύμφωνα με τη θεωρία Piaget, όταν σε νέες καταστάσεις τα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα δε φαίνεται να ταιριάζουν, ενεργοποιείται ένας μηχανισμός μάθησης που οδηγεί στην αναδιοργάνωση και τον εμπλουτισμό τους. Πρόκειται για έναν έμφυτο μηχανισμό μεταβολής των γνωστικών σχημάτων, την **προσαρμογή** (adaptation), που συμβαίνει σε δύο επίπεδα. Την **αφομοίωση** (assimilation), δηλαδή την διεύρυνση ενός ή περισσοτέρων γνωστικών σχημάτων και τη **συμμόρφωση** (accommodation), δηλαδή την τροποποίηση ή τη δημιουργία νέων γνωστικών σχημάτων, που συνοδεύεται από **εννοιολογική αλλαγή** (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Αυτό συμβαίνει όταν οι νέες καταστάσεις φέρνουν το άτομο σε αντιπαράθεση με την ήδη υπάρχουσα γνώση. Για παράδειγμα, η μετάβαση από τους φυσικούς ή ακέραιους αριθμούς στους πραγματικούς μπορεί να προκαλέσει εννοιολογική αλλαγή, άρα και διεύρυνση των γνωστικών σχημάτων του ατόμου. Συγκεκριμένα, ένα παιδί που ξέρει μόνο τους ακέραιους αριθμούς, γνωρίζει ότι υπάρχει η έννοια της διαδοχικότητας, δηλαδή ο επόμενος του -3 είναι ο -2. Όταν εισάγονται οι πραγματικοί αριθμοί, το παιδί ανακαλεί το γνωστικό σχήμα των ακεραίων, για να τους αντιιμετωπίσει, πράγμα που δεν μπορεί να γίνει, αφού στους πραγματικούς αριθμούς δεν υπάρχει η διαδοχικότητα. Έτσι γίνεται εννοιολογική αλλαγή της έννοιας του αριθμού και τροποποιείται το ήδη υπάρχον γνωστικό σχήμα. Είναι φανερό ότι κατά την συμμόρφωση συμβαίνει ποιοτική μεταβολή των γνωστικών σχημάτων, ενώ κατά την αφομοίωση η μεταβολή είναι ποσοτική.

Ιδιαίτερα σημαντικές για τη θεωρία της οικοδόμησης της γνώσης είναι οι **αναπαραστάσεις**. Αναπαράσταση είναι ένα σύμβολο αισθητό ή νοητό (σημαίνον –

signifier) που αντιπροσωπεύει μια έννοια (σημαινόμενο – signified). Οι αναπαραστάσεις χωρίζονται σε **εξωτερικές**, που δρουν ως ερεθισμοί των αισθήσεων (π.χ. μια γραφική παράσταση) και σε **εσωτερικές** που είναι προϊόντα νοητικής δραστηριότητας (π.χ. η συνάρτηση που εκφράζει η γραφική παράσταση) (Edwards, 1998; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Η Edwards (1998) υποστηρίζει ότι οι εσωτερικές αναπαραστάσεις ενέχουν ένα σύνολο «εικόνων» που είναι συνυφασμένο με τα κοινωνικά πρότυπα του περιβάλλοντος του μαθητή και έχουν προσωπικό νόημα για τον ίδιο. Αντίστοιχα οι εξωτερικές αναπαραστάσεις έχουν τρία βασικά χαρακτηριστικά τα οποία τις ορίζουν. Είναι **απτές οντότητες** που μπορούμε να τις αντιληφθούμε με τις αισθήσεις μας, **μέσα έκφρασης** ιδεών και μπορούν να γίνουν **αντικείμενο διαπραγμάτευσης** και συζήτησης σε μια κοινωνική ομάδα η οποία «κάνει μαθηματικά».

Στο πλαίσιο της θεωρίας του, ο Piaget περιέγραψε τα στάδια της ωρίμανσης του ανθρώπινου νου, σε ηλικιακό πλαίσιο, με βάση τις λογικές διεργασίες που μπορεί να πραγματοποιήσει. Μέσα από τη θεώρηση του Papert, αναδεικνύεται η διαφωνία του ως προς αυτό το στοιχείο. Άλλωστε η θεωρία των σταδιών ωρίμανσης έχει δεχτεί κι άλλες κριτικές (Donaldson, 1991). Για τον Papert (1980), τα παιδιά είναι έμφυτα χαρισματικοί μαθητές. Πολύ πριν πάνε στο σχολείο μαθαίνουν να μιλούν, μαθαίνουν διαισθητική γεωμετρία που τους βοηθά να κινούνται, χωρίς να διδαχθούν τίποτα από αυτά. Ως εκ τούτου, ήταν πεπεισμένος ότι τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν πέρα από τους περιορισμούς των σταδίων ωρίμανσης, **να κάνουν γενικεύσεις** και ότι μπορούν να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα τα οποία να είναι πολύ πιο πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων (Κυνηγός, 2006). Δηλαδή, ο Papert αποδίδει τη βραδύτερη ανάπτυξη μιας μαθηματικής ιδέας στην έλλειψη κατάλληλων νοητικών εργαλείων που θα έκαναν πιο χειροπιαστή και όχι στην ύπαρξη σταδιών ωρίμανσης των λογικο-μαθηματικών διεργασιών. Αν και οι δύο θεωρίες (Constructionism και Constructivism) συμπίπτουν στη θέση ότι οι αντιλήψεις των μαθητών είναι η βάση στην οποία θα αναπτυχθεί η μαθηματική γνώση, αυτό που προσθέτει η θεωρία του Papert σε αυτή του Piaget είναι ότι αυτό συμβαίνει ιδιαίτερα αποτελεσματικά και φυσιολογικά σε ένα περιβάλλον όπου ο μαθητής εμπλέκεται στην κατασκευή ενός δομήματος που θα δουν και θα χρησιμοποιήσουν και άλλοι (public entity) (Papert & Harel, 1991).

Ο Vygotsky (1978) ανέδειξε το ρόλο των πολιτισμικών τεχνημάτων (artifacts), όπως η γλώσσα, τα καθημερινά εργαλεία και άλλα, σαν διαμεσολαβητικά

αντικείμενα, για τη κατασκευή **εσωτερίκευση** της νέας γνώσης. Ο «εγωκεντρισμός» στον λόγο των παιδών είναι για τον Vygotsky το πρώτο βήμα προς την εσωτερίκευση. Για τον Papert η σύγχρονη τεχνολογία και ο ηλεκτρινικός υπολογιστής είναι τα πολιτισμικά εργαλεία με το οποίο μπορούν να κατασκευαστούν κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης, που θα επηρεάζουν τον τρόπο που σκέφτονται και μαθαίνουν τα παιδιά ακόμα και όταν δε βρίσκονται σε επαφή με αυτά (Papert, 1980; Κυνηγός, 2006).

2.1.4 Γενίκευση, αφαιρέσεις και αναστοχασμός

Αφαίρεση και γενίκευση

Η αφαίρεση (abstraction) σύμφωνα με τον Skemp (1986) είναι το αποτέλεσμα μιας εμπειρικής διαδικασίας με την οποία το άτομο αναγνωρίζει ομοιότητες μεταξύ των εμπειριών του και αποκτά την ικανότητα να διακρίνει αν οι νέες εμπειρίες έχουν ομοιότητες με κάποιες από αυτές που έχει βιώσει (empirical abstraction – εμπειρική αφαίρεση). Τα παιδιά από μικρή ηλικία κάνουν αφαιρέσεις, για παράδειγμα όταν χρησιμοποιούν τη λέξη ‘μπάλα’ ως κατηγορία για όλες τις μπάλες κι όχι ως αντικείμενο. Αυτό προϋποθέτει την κατασκευή ενός νέου νοητικού αντικειμένου (Greeno, 1983), μιας ‘γενικευμένης μπάλας’. Με τον όρο «έννοια» ο Skemp ονομάζει αυτό το γενικευμένο αντικείμενο, το προϊόν της αφαίρεσης. Πρόκειται για μια κλάση αντικειμένων με κάποια χαρακτηριστικά, άλλα πιο κεντρικά κι άλλα δευτερεύοντα.

Η κλάση αυτή δεν παραμένει αναλοίωτη αλλά μπορεί να εμπλουτιστεί καθώς το άτομο βιώνει νέες εμπειρίες. Για παράδειγμα, η έννοια «αριθμός» μπορεί να περιέχει μόνο τους θετικούς αριθμούς, ενώ αργότερα να διευρυνθεί περιλαμβάνοντας και τους αρνητικούς, ή κλάσματα και άλλους. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **γενίκευση**. Η βασική τους διαφορά είναι ότι με την αφαίρεση δημιουργείται νέο νοητικό αντικείμενο, ενώ με τη γενίκευση εμπλούτιζεται ένα ήδη υπάρχον (Mitchelmore & White, 2000). Έτσι, φαίνεται ότι η αφαίρεση είναι δημιουργία γνωστικών σχημάτων, ενώ η γενίκευση αντιστοιχεί στην προσαρμογή τους.

Το πλαίσιο αυτό αφορά τις έννοιες καθολικά κι όχι μόνο τις μαθηματικές. Συγκεκριμένα, για τις βασικές μαθηματικές έννοιες η διαδικασία της αφαίρεσης και της γενίκευσης είναι φανερό ότι δεν αφορά μόνο αντικείμενα, αλλά και σχέσεις μεταξύ αντικειμένων και μάλιστα η γενίκευση εννοιών που περιγράφουν αντικείμενα συνεπάγεται τη γενίκευση εννοιών-σχέσεων. Για παράδειγμα μετά τη γενίκευση της

έννοιας του αριθμού, ώστε να συμπεριλαμβάνει και τους αρνητικούς, γενικεύεται και η έννοια της πρόσθεσης μεταξύ δύο αριθμών. Επίσης οι μαθηματικές έννοιες, αποκτούν και ένα στοιχείο φορμαλισμού, αφού περιγράφονται από τον ορισμό τους, όπως θα ανφερθεί αναλυτικότερα και σε επόμενη παράγραφο. Οι πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες (π.χ. ομάδα ή σώμα) προκύπτουν ως γενικεύσεις απλούστερων κλάσεων (π.χ. ακέραιοι αριθμοί, ρητοί κτλ) και πλέον περιγράφονται από ιδιότητες και σχέσεις και λιγότερο από αντιπροσώπους της κλάσης-έννοιας.

Σύμφωνα με τον Piaget (1975; 1970), μεγάλη είναι η σημασία του **αναστοχασμού** στη διαδικασία της αφαίρεσης που αφορά μαθηματικές έννοιες. Κατά τον **αφαιρετικό αναστοχαστό**, η αφαίρεση δεν πηγάζει από το αντικείμενο των ενεργειών, αλλά από τις ίδιες τις ενέργειες του ατόμου. Είναι μια κατασκευαστική διαδικασία νοητικών αντικειμένων, αλλά και δομών που ορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων αυτών.

Εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις

Στην καθημερινή μας ζωή η μάθηση ξεκινά όταν οι άνθρωποι προσπαθούν να λύσουν προβλήματα. Ο όρος της **εγκαθιδρυμένης μάθησης** εισήχθη από την Jean Lave (1988) και είναι η μάθηση που γεννιέται μέσα από ανθρώπινες καταστάσεις, όπως η κοινωνικότητα, οι προθέσεις, οι αντιλήψεις για το ρόλο του καθενός και η χρήση των εννοιών σε **συγκεκριμένες πραγματικές συνθήκες** (Κυνηγός, 2006). Σύμφωνα με τους Lave και Wenger η μάθηση δεν πρέπει να θεωρείται σαν αφηρημένη γνώση, έξω από συγκεκριμένο πλαίσιο, αλλά σαν μια δραστηριότητα του ατόμου, πλαισιοθετημένη από συγκεκριμένο περικείμενο και εμβαπτισμένη στο συγκεκριμένο φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον που το άτομο δρα.

Με την αντίληψη του Papert ότι τα παιδιά μπορούν να κάνουν **μαθηματικές αφαιρέσεις**, αν έρθουν σε επαφή με κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα, συμφωνούν οι Noss και Hoyles (1996) που τονίζουν ότι οι αφαιρέσεις αυτές δεν είναι καθολικές, αλλά αφορούν τα χαρακτηριστικά του μαθησιακού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αναδύονται. Για να περιγράψουν τη διαδικασία αφαίρεσης και γενίκευσης εννοιών υπό αυτό το πρίσμα, διατύπωσαν το θεωρητικό μοντέλων των **εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων**, υποδηλώνοντας πώς ακολουθούν την προσέγγιση της εγκαθιδρυμένης μάθησης. Πρόκειται για μια ευκρινή δήλωση, μια πεποίθηση του μαθητή, αλλά και μια εξελισσόμενη διαδικασία προβληματισμού ταυτόχρονα, που η μορφή της εξαρτάται από το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο ενεργεί ο μαθητής. Η

αφαίρεση, η γενίκευση ως διαδικασία που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν ενεργούν, είτε με τη θεώρηση των Noss και Hoyles (σε πλαισιοθετημένο περιβάλλον), είτε όχι, όπως έχει προαναφερθεί έχει ως καταλυτικό παράγοντα τον αναστοχασμό [9] (reflection). Εδώ ο αναστοχασμός είναι κι αυτός πλαισιοθετημένος και μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διαδικασία τοποθέτησης νοημάτων το ένα πάνω στο άλλο, σε στρώματα, παρά σαν αντικατάσταση του των νοημάτων που αναφέρονται στην συγκεκριμένη κατάσταση (ειδικά) με αποπλαισιοποιημένα νοήματα (γενικά). Αυτό το είδος αναστοχασμού, οι Noss και Hoyles ονομάζουν **εγκαθιδρυμένο αναστοχασμό**. Βλέποντας τον εγκαθιδρυμένο αναστοχασμό ως μια διαδικασία που μπορεί να επαναλαμβάνεται και να αφορά την ίδια έννοια, οι Mitchelmore και White (2000) μιλούν για **προοδευτική αφαίρεση**. Έτσι, οι έννοιες, δεν αντικαθίστανται από πιο σύνθετες, αλλά αναπτύσσονται σε πιο σύνθετες.

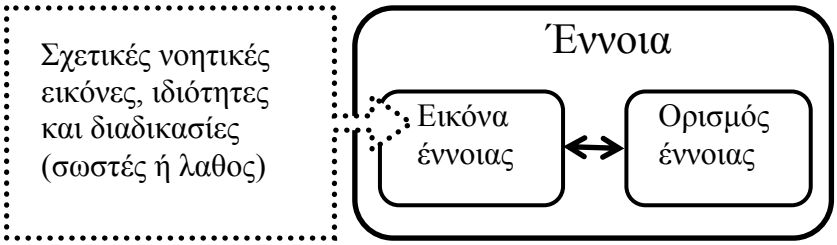
2.1.5 Η έννοια της έννοιας

Οι όροι «έννοια» και «νόημα» εμφανίζονταν για χρόνια στην έρευνα της μαθηματικής παιδείας, άλλα με το κοινό νόημα του όρου, χωρίς να έχει οριστεί επακριβώς (Balacheff & Gaudin, 2002). Για τις μαθηματικές έννοιες υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις, μια εκ των οποίων έχει αναφερθεί παραπάνω. Άλλες που εστιάζουν περισσότερο στις ίδιες τις έννοιες σαν οντότητες και αναλύουν τη δομή τους κι άλλες που τις προσεγγίζουν μελετώντας το πλαίσιο εντός του οποίου δημιουργούνται με ιδιαίτερο βάρος στη χρήση τους και σε σχέση με το άτομο που τις χρησιμοποιεί.

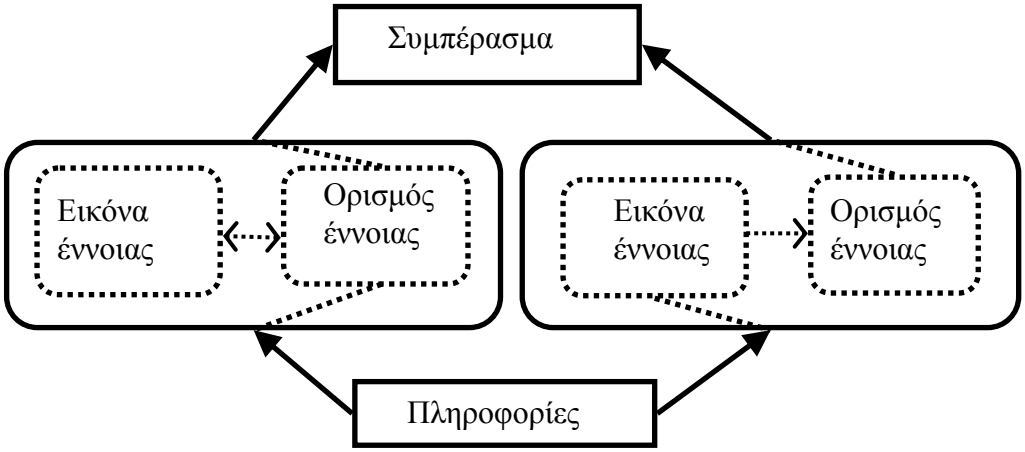
Σύμφωνα με την Κολέζα (2000) η έννοια (concept) είναι μια νοητική κατασκευή, που συνοψίζει τα ουσιώση στοιχεία που απαρτίζουν ορισμένα όντα, μια κανονικότητα που επαναλαμβάνεται και μπορεί να περιγραφεί. Η περιγραφή της έννοιας αυτής μπορεί να γίνει μέσω του **ορισμού της έννοιας** (concept definition) σε μαθηματικό πλαίσιο. Ο Tall (1991) ισχυρίζεται ότι μια μαθηματική έννοια, στο μέτρο που είναι αποτέλεσμα της αντιληπτικής εμπειρίας ενός ατόμου, διαθέτει εκτός από τον ορισμό της και μια **εικονική πλευρά** (concept image), που δημιουργείται από την συνύπαρξη νοητικών εικόνων (εσωτερικών αναπαραστάεων) και ιδιοτήτων (Εικόνα 10). Ενώ ο ορισμός αναφέρεται στο μαθηματικό νόημα που καθορίζεται στο πλαίσιο τυπικών συμβολισμών, η εικόνα της έννοιας περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες,

[9] Ενας αναστοχασμός όμως, που διαφέρει από την αναστοχαστική αφαίρεση (reflective abstraction) του Piaget, γιατί αμφισβητεί την ιεραρχική σχέση μεταξύ συγκεκριμένου και αφηρημένου.

τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συσχετίζονται στο νου ενός ατόμου με αυτή την έννοια. Άρα ενώ ο ορισμός έχει μια φαινομενολογική διάσταση, η εικόνα είναι προσωπική δημιουργία κάθε ατόμου και ωριμάζει μαζί με τις εμπειρίες του. Είναι αντιληπτό ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για μια έννοια ως αναλλοίωτη αλήθεια, αλλά στο πλαίσιο που αυτή κατασκευάζεται από το άτομο. Μεταξύ της εικόνας της έννοιας και του ορισμού της υπάρχει αλληλεπίδραση. Δηλαδή ο ορισμός συνεισφέρει στη διαμόρφωση της εικόνας, μέσα από εμπλοκή σε δραστηριότητες και εμπειρίες και η εικόνα δίνει προσωπικό νόημα για τον μαθητή στον τυπικό ορισμό.



Εικόνα 10: Η δομή της έννοιας σύμφωνα με τον Tall.



Εικόνα 11: Δύο τρόποι λειτουργίας του σχήματος εικόνα έννοιας-ορισμός έννοιας. Αριστερά φαίνεται η αλληλεπίδραση ορισμού και εικόνας της έννοιας, για την αντιμετώπιση κάποιας κατάστασης, ενώ δεξιά εισάγονται πληροφορίες και μέσω εποπτείας μαθηματικοποιούνται.

Για την επίλυση προβλημάτων ακολουθούνται διάφορα σχήματα, όπως η αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας και ορισμού ή η αρχική χρήση της εικόνας και μετάβαση στον ορισμό κλπ. Η χρήση μόνο της εικόνας μιας έννοιας, χωρίς πέρασμα από τον ορισμό της συνιστά διαισθητική κι όχι μαθηματική αντιμετώπιση ενός προβλήματος, αλλά είναι κάτι που συμβαίνει συχνά.

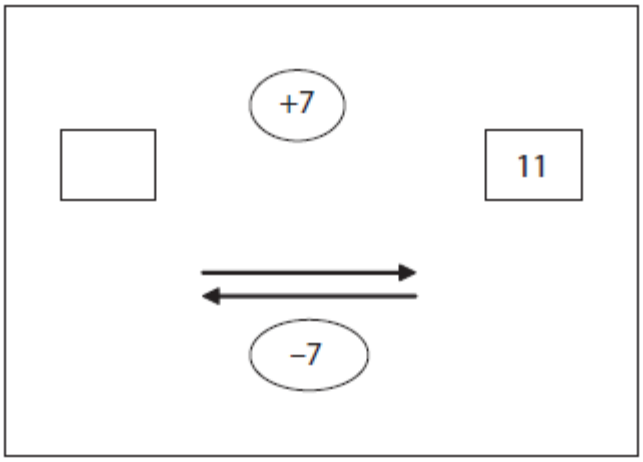
Ιδιαίτερα διαφωτιστική για τον ορισμό της μαθηματικής έννοιας είναι η προσέγγιση του Γάλλου ψυχολόγου Gerard Vergnaud, αλλά και των Balacheff και

Gaudin. Ο Vergnaud (2009; 1991) ξεκινώντας από τη θεωρία του Piaget δανείζεται τον όρο **προσαρμογή** των γνωστικών σχημάτων. Όταν γίνεται προσαρμογή των γνωστικών σχημάτων, προσαρμόζονται οι δομές οργάνωσης των ενεργειών του ατόμου στις νέες καταστάσεις. Άρα στην ανάπυξη της γνώσης πρωτεύοντα ρόλο παίζει **η δράση**, η αντιμετώπιση και ο χειρισμός καταστάσεων. Επίσης για τον Vergnaud ιδιαίτερη σημασία έχουν και οι **αναπαραστάσεις** των εννοιών. Το βασικό ερώτημα που θέτει είναι «πώς οι αναπαραστάσεις, είτε είναι χειρονομίες, είτε εξωτερικά ερεθίσματα, μετατρέπονται σε γέφυρες μεταξύ αισθήσεων και γνωστικών σχημάτων και τα επηρεάζουν;».

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούμε προέρχονται από τον κόσμο των ερεθισμάτων (π.χ. ροή εικόνων που βλέπουμε ή σκεφτόμαστε, χειρονομίες που κάνουμε ή παρατηρούμε), τη γλώσσα και άλλα σύμβολα (π.χ. αριθμοί, τελεστές), τις έννοιες και τις κατηγορίες εννοιών και τα συστήματα γνωστικών σχημάτων. (Vergnaud G. , 2009). Ο όρος «έννοια» χρησιμοποιείται για να αντιπροσωπεύσει κάτι ευρύτερο από ότι συνήθως. Ο Vergnaud υποστηρίζει ότι δεν έχει νόημα από πλευράς γνωστικής ανάπτυξης να μιλάμε για μια μαθηματική έννοια σε απομόνωση, αλλά σε σχέση με (α) με άλλες έννοιες που συνδέονται στενά με αυτή (operational invariants), (β) με μια ομάδα καταστάσεων που μπορεί αυτό το σετ εννοιών να χρησιμοποιηθεί και (γ) με ένα σύνολο λεκτικών ή άλλων συμβόλων που την αναπαριστούν (Vergnaud G. , 1991; Κυνηγός, 2006). Η τριάδα αυτή ονομάστηκε από τον Vergnaud **νοητικό πεδίο** και κατά την άποψή του είναι ο πιο κατάλληλος τρόπος να αναφερόμαστε σε έννοιες των μαθηματικών στο πλαίσιο της Διδακτικής. Όταν μιλάμε για μια απομονωμένη έννοια (π.χ. την έννοια του κλάσματος, ως ρητού αριθμού), τότε δεν είμαστε καθόλου σίγουροι ότι η κατανόηση της έννοιας από διαφορετικούς ανθρώπους είναι ίδια. Με άλλα λόγια η εικόνα της έννοιας μπορεί να διαφέρει, καθώς ο τρόπος χρήσης της έννοιας ή του συμβόλου της (π.χ. κλάσμα ως λόγος, ως διαίρεση, ως μέρος όλου, ως συναρτησιακός συντελεστής) δεν είναι μοναδικός (operational form of knowledge). Μεταξύ της εικόνας που έχει το κάθε άτομο για την ίδια απομονωμένη έννοια διαμεσολαβεί η χρήση των αναπαραστάσεων της έννοιας αυτής.

Ένα παράδειγμα που αφορά προσθετικές δομές είναι το εξής. Η ομάδα των καταστάσεων που συνδέεται με την πρόσθεση είναι είτε συνδυασμός δύο μερών που δίνει το όλο (ένα παιδί έχει 4 βόλους κι ένα άλλο 7 βόλους, πόσους έχουν κι οι δύο μαζί;) είτε η αύξηση μιας αρχικής ποσότητας (ένα παιδί έχει 4 βόλους και αγοράζει

άλλους 7, πόσους έχει τελικά). Αυτές οι δύο κατηγορίες, μπορεί να χωριστούν σε υποκατηγορίες, ανάλογα με το πρόβλημα που διατυπώνεται. Μια έννοια που συνδέεται με τέτοιου είδους προβλήματα προσθετικών δομών είναι η αφαίρεση, ως αντίστροφη διαδικασία. Επίσης οι διαθέσιμες αναπαραστάσεις μπορεί να είναι αλγεβρικές αλλά και σχηματικές όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Το πλαίσιο όλων των σχετικών εννοιών, καταστάσεων και αναπαραστάσεων αποτελεί το νοητικό πεδίο των προσθετικών δομών. Όπως βλέπουμε το περιεχόμενο του νοητικού πεδίου καθορίζεται από την χρήση του. Σε αυτό το πλαίσιο (των νοημάτων σε χρήση) και οι «**παρανοήσεις**» έχουν ένα **πεδίο βιωσιμότητας** (domain of validity) (Balacheff & Gaudin, 2002), ένα λόγο ύπαρξης, αλλιώς δε θα υπήρχαν. Δηλαδή, μια παρανόηση για να υπάρχει σημαίνει ότι έχει χρησιμεύσει στην αντιμετώπιση μιας κατάστασης. Από αυτή τη σκοπιά, η απόσταση μεταξύ παρανόησης και γνώσης είναι πολύ μικρή.

Οι Balacheff και Gaudin (2002) ορίζουν ως έννοια C την τετράδα (P, R, L, Σ) όπου:

- Το P είναι ένα σύνολο προβημάτων,
- το R είναι ένα σύνολο τελεστών, όπως πράξεις, σχέσεις, αξιώματα,
- το L είναι ένα αναπαραστασιακό σύστημα και
- το Σ μια δομή ελέγχου.

Ουσιαστικά προσθέτουν στον ορισμό του Vergnaud για το νοητικό πεδίο, ένα τέταρτο συστατικό στοιχείο, τη δομή ελέγχου. Όμως η προσέγγιση τους διαφέρει και σε άλλα σημεία.

Σχετικά με το σύνολο προβλημάτων P ξεκινούν από την προσέγγιση του Brousseau (Brousseau, 1997) θεωρώντας ένα πεπερασμένο σετ προβλημάτων – γεννητόρων που

η έννοια είναι αποτελεσματική στη λύση τους και που από αυτά μπορούν να προκύψουν άλλα τέτοια προβλήματα. Επειδή όμως η θεώρηση αυτή έχει στόχο να είναι εφαρμόσιμη, υπάρχει πάντα το ερώτημα της δυνατότητας κατασκευής ενός τέτοιου σετ. Έτσι, οι Balacheff και Gaudin προτείνουν την περιγραφή του P με ένα εμπειρικό τρόπο, μέσω του χαρακτηρισμού των καταστάσεων (προβλημάτων – ερωτημάτων) που επιτρέπουν στον ερευνητή να βγάλει συμπεράσματα για τις αντιλήψεις του μαθητή για την έννοια.

Το τέταρτο στοιχείο είναι η δομή ελέγχου. Ο Vergnaud (1991) θα μπορούσαμε να πουμε ότι ως δομή ελέγχου χρησιμοποιεί τα **θεωρήματα εν δράσει** (theorems-in-action), δηλαδή τα συμπεράσματα (inferences) που παράγουν οι μαθητές και που αφορούν σταθερές μέσα σε μια ομάδα αντικειμένων, σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται με αυτά (Κυνηγός, 2006). Όμως τότε μεσολαβεί η ικανότητα του μαθητή να έχει αναπτύξει διαδικασίες ελέγχου για να αποφασίζει ότι αυτά που κάνει είναι σωστά και μαθηματικά «νόμιμα». Οι Balacheff και Vergnaud (2002), για να μην κάνουν αυτή την παραδοχή εισάγουν τη δομή Σ που αποτελείται από όλα τα μέσα που χρειάζονται για να γίνουν κρίσεις, επιλογές και να ληφθούν αποφάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Τονίζουν ότι η διάσταση του ελέγχου συνήθως αφήνεται στο παρασκήνιο της αντιμετώπισης μιας κατάστασης, αν και είναι βασικό στοιχείο (δείκτης) κατανοήσης της μαθηματικής έννοιας και - σε μεταγνωστικό επίπεδο - παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην επίληση προβλημάτων (Shoenfeld, 1985). Επίσης υπάρχουν περιπτώσεις όπου δύο έννοιες έχουν το ίδιο αναραστασιακό σύστημα L και διακρίνονται μόνο από από την περιγραφή του συνόλου R, των τελεστών και της δομής ελέγχου Σ σε σχέση με το σύνολο των προβλημάτων P (Balacheff & Gaudin, 2002). Ένα παράδειγμα για να γίνει σαφής ο ρόλος του συνόλου Σ προέρχεται από την έννοια της συνάρτησης. Μπορεί κανείς να δει τη συνημιτονοειδή συνάρτηση είτε ως πίνακα τιμών, είτε ως μια αλγεβρική εξίσωση, είτε σαν μια σχέση μεταξύ δύο μεγεθών. Στην περίπτωση του πίνακα τιμών, το σύνολο Σ εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία περιγράφει ο πίνακας τιμών τη σχέση που υποκρύπτεται (ακόμα κι αν ο χρήστης του πίνακα δεν τη βλέπει, ούτε υποψιάζεται την ύπαρξή της). Αυτή με τη σειρά της εξερτάται από την ακρίβεια των υπολογισμών που έφτιαξαν αυτό τον πίνακα και από το πόσο «ευαίσθητο» είναι αυτό πρόβλημα σε σχέση με πιθανές προσεγγίσεις στα αποτελέσματα. Από την άλλη αν βλέπουμε την ίδια συνάρτηση σαν αλγεβρική σχέση, τότε η δομή ελέγχου Σ εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της Άλγεβρας σαν αναπαραστασιακό σύστημα.

Η θεώρηση των Balacheff και Gaudin επικεντρώνεται περισσότερο στις γνώσεις και αντιλήψεις των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες, από αυτή του Vergnaud. Έτσι ο όρος **νόημα σε χρήση** μετατρέπεται ώστε να είναι κεντρικά χρήσιμος για την περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας, αλλά σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες (Κυνηγός, 2006). Αυτή η θεώρηση είναι σε συμφωνία με την άποψη του Papert αλλά και των Noss και Hoyles που δεν μελετούν τις παρανοήσεις των μαθητών, ως συμπτωματολογία, αλλά σαν νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές. Για αυτούς τα μαθηματικά νοήματα κατασκευάζονται ως αποτέλεσμα δύο ειδών συνδέσεων. Της σύνδεσης νέας μαθηματικής γνώσης με την παλιά και των νοημάτων που παράγονται από το περικείμενο στο οποίο δρα ο μαθητής και τις συνθήκες τού. Η κατανοήση του μηχανισμού που δημιουργεί αυτά τα νοήματα είναι πολύ χρήσιμη για τους εκπαιδευτικούς, ώστε να δημιουργήσουν τα κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα, που θα δώσουν πλουσιότερες ευκαιρίες μάθησης στα παιδιά.

2.2. Η διδασκαλία της Γεωμετρίας

2.2.1 Η Γεωμετρία σαν γνωστικό πεδίο

Αν η Αριθμητική είναι η επιστήμη της ποσότητας, θα λέγαμε ότι η Γεωμετρία είναι η επιστήμη του χώρου (Κολέζα, 2000). Σύμφωνα με τον Niss (1998) η Γεωμετρία είναι ένα σύνολο από χαρακτηριστικά και ιδιότητες φυσικών αντικειμένων, είτε που υπάρχουν στη φύση είτε που είναι κατασκευάσματα του ανθρώπου. Με αυτή την έννοια είναι μια ανεξάντλητη πηγή μοντέλων της φύσης ή μιας τεχνητής πραγματικότητας. Άρα οι γεωμετρικές οντότητες είναι ή δομούν μοντέλα για την ερμηνεία φαινομένων που γνωστικά ανήκουν σε άλλα πεδία.

Για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας υπάρχουν δύο κυρίαρχες αντιλήψεις. Η αντιμετώπιση της Γεωμετρίας, ως επιστήμη του χώρου και η θεώρησή της ως λογική δομή. Όμως, η δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές για τις γεωμετρικές οντότητες έχει σχέση με τη δική τους αντίληψη για το χώρο που τους περιβάλλει. Άλλωστε, όπως προανέφερα τα νοήματα είναι προσωπικές κατασκευές και εγκαθιδρυμένες σε ένα πλαίσιο. Έτσι, δεν μπορούμε τις δύο αυτές αντιλήψεις να τις βλέπουμε ούτε ανεξάρτητα τη από με την άλλη, αλλά και ούτε ανεξάρτητα από τη δημιουργία νοημάτων, γιατί για να είναι η Γεωμετρία για τους μαθητές ένα αποτελεσματικό παραγωγικοσυλλογιστικό σύστημα, είναι απαραίτητη η εξοικείωσή τους με τα βασικά αντικείμενά της, δηλαδή τα σχήματα και τις μεταξύ τους σχέσεις.

2.2.2 Η σημασία των σχημάτων στη διδασκαλία

Για αρκετά χρόνια η Ευκλείδεια Γεωμετρία θεωρείτο ένα τέλειο εννοιολογικό σύστημα, οπωσδήποτε πληρέστερο από την Άλγεβρα, πριν ο Pasch και ο Hilbert αναδείξουν τα κενά στην Αξιωματική Θεμελίωσή της. Οι προσπάθειες των φορμαλιστών να θέσουν γερά θεμέλια στην αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας οδήγησε στην αποδυνάμωση των σχήματων ως μέσων έκφρασης της μαθηματικής αλήθειας. Το επιστημολογικό αντίκτυπο στη διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι η άποψη ότι χρήση των σχημάτων προκαλεί σύγχηση στους μαθητές, διότι αφορά παραγωγικούς συλλογισμούς. Τα αντικείμενα γύρω από τα οποία χτίζεται το οικοδόμημα της Γεωμετρίας είναι **γενικευμένα σχήματα**, ενώ τα αντίστοιχα σχήματα στον πίνακα είναι **στιγμιότυπα** τέτοιων γενικευμένων σχημάτων (Κυνηγός, 2006). Για παράδειγμα, το πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται σε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο, άρα σε ένα γενικευμένο ορθογώνιο τρίγωνο και όχι μόνο στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχεδιάζει ο δάσκαλος στον πίνακα για να το παρουσιάσει (και που είναι στιγμιότυπο του γενικευμένου ορθογωνίου τριγώνου). Το πυθαγόρειο θεώρημα είναι μια ιδιότητα μιας **κλάσεως αντικειμένων** που λέγονται ορθογώνια τρίγωνα και που ένας αντιπρόσωπός της είναι σχεδιασμένος στον πίνακα. Αυτό θεωρήθηκε, από μέρος της διδακτικής κοινότητας των μαθηματικών, παράγοντας παρανοήσεων. Πόσο μάλλον όταν αυτό σχήμα «αντιπροσωπεύει» στην πραγματικότητα (με ένα πλατωνικό σκεπτικό) ένα ορθογώνιο τρίγωνο, αφού ο σχεδιασμός τους είναι περίπου ακριβής.

Κατά την άποψη του Freudenthal (1973) η αποτυχία στη διδασκαλία της σχολικής Γεωμετρίας οφείλεται στον τρόπο χρήσης των παραγωγικών συλλογισμών. Η παραγωγικότητα των συλλογισμών δεν παρουσιάστηκε σαν ανακάλυψη της αλήθειας από την πλευρά του μαθητή, αλλά σαν αποκάλυψη στα μάτια του και άρα η κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών δεν προέκυπτε μετά από εμπλοκή του ίδιου του μαθητή με τη διαδικασία της γενίκευσης, όπως ίσως θα έπρεπε. Σε μια τέτοια διαδικασία γενίκευσης το σχήμα είναι απαραίτητο στο μαθητή, ο οποίος θα χειριστεί πολλά στιγμιότυπα του γενικευμένου σχήματος, πριν οδηγηθεί μόνος του στην ανάγκη της γενίκευσης και πριν νιώσει την εκφραστική ισχύ της περιγραφής μιας κλασής αντικειμένων και της χρήσης των ιδιοτήτων και των σχέσεων των κλάσεων αυτών (Κυνηγός, 2006).

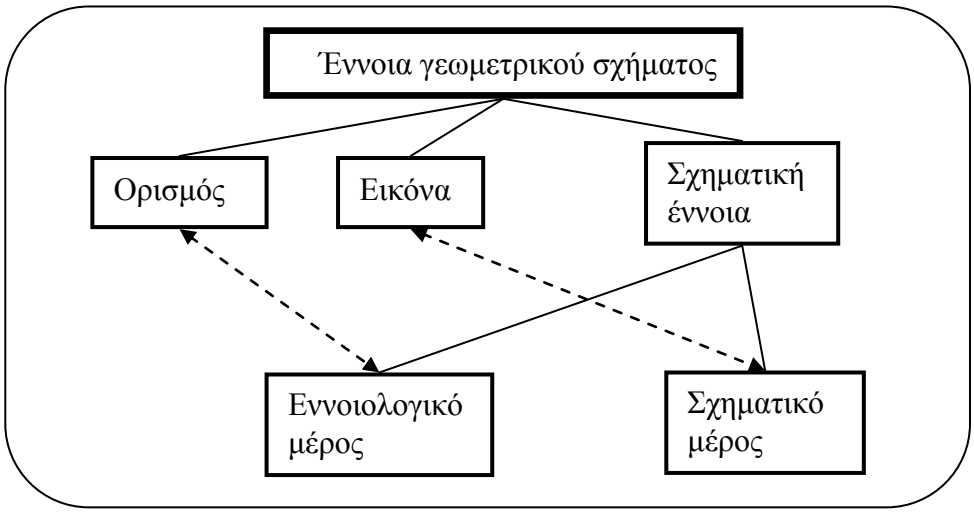
2.2.3 Η διττή φύση των γεωμετρικών εννοιών και των σχημάτων

Η Γεωμετρία ως διδακτικό αντικείμενο είναι δισυπόστατη. Από τη μια είναι ένα αξιωματικό σύστημα αποστασιοποιημένο από την ενόραση και την εποπτεία κι από την άλλη αναφέρεται στις έννοιες του χώρου που έχουν σχέση με την εμπειρία μας και δίνει ευκαιρίες εφαρμογής (Strässer, 1996). Σε αυτή τη διττή φύση της, θεωρητική και εμπειρική, βασίζονται και οι διαφορετικές απόψεις για τη χρησιμότητα των σχημάτων στη διδασκαλία και οι σχετικές μεταρρυθμίσεις και αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα (Κυνηγός, 2006).

Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973) η Γεωμετρία είναι η κατανόηση του χώρου (geometry is "grasping space") και ειδικά για τα παιδιά, η κατανόηση του χώρου που ζουν. Όμως ταυτόχρονα σαν πεδίο μαθηματικών έχει ανάγκη από πιο σταθερά θεμέλια, από αυτά του χώρου σαν φυσικό περιβάλλον. Έτσι φαίνεται ότι η αξιωματική φύση της Γεωμετρίας, δεν αποστασιοποιείται από την εμπειρική φύση της. Η διττή υπόσταση των γεωμετρικών εννοιών φαίνεται και στην προσέγγιση του Duval (1998) που διέκρινε τρία είδη γνωστικών διαδικασιών κατά την εμπλοκή ενός μαθητή με Γεωμετρικά προβλήματα. Την ενορατική διαδικασία, τη δόμηση με εργαλεία και τη λογική διεργασία (Κυνηγός, 2006). Κάθε μια από τις παραπάνω διαδικασίες ανταποκρίνεται επιστημολογικά σε άλλο μηχανισμό, αλλά είναι στενά συνδεδεμένες και η συνεισφορά και των τριών είναι απαραίτητη, ώστε να επιτευχθεί γνωστικά επαρκής γεωμετρική δραστηριότητα από έναν μαθητή. Ο Duval (1998), ανέλυσε το ρόλο της ενορατικής διαδικασίας όσο αφορά το σχήμα, στην επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος και διέκρινε τρεις προσεγγίσεις: Την άμεση εποπτική που μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο για τη μετατροπή ενός σχήματος σε γεωμετρική οντότητα, την λειτουργική – διαχειριστική που χρησιμοποιείται για την αναγνώριση κανονικοτήτων που είναι χρήσιμες για τη λύση μέρους του προβλήματος και τη διαλογική προσέγγιση που σχετίζεται με τις υποθέσεις του προβλήματος και αποστασιοποιείται από το συγκεκριμένο σχήμα (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006).

Σύμφωνα με τους Hershkowitz και Vinner (1983) για την κατάκτηση μιας γεωμετρικής έννοιας απαιτούνται κυρίως καλά συγκροτημένες εικόνες της έννοιας αυτής, παρά ορισμοί. Ο Tall (1991) υποστηρίζει ότι το γεωμετρικό σχήμα ως έννοια έχει μια νοητική εικόνα (concept image), που όπως προανέφερα αντιστοιχεί στο

σύνολο των εικόνων που έχουν συσχετισθεί με τον σχήμα αυτό, στο νου ενός ατόμου. Παράλληλα, ο Fischbein (1993) προσεγγίζει τα γεωμετρικά σχήματα σα νοητικές οντότητες, που ονομάζει **σχηματικές οντότητες** και που είναι φτιαγμένες από δύο συστατικά που δεν μπορούν να διαχωριστούν. Το σχηματικό (figural) και το νοητικό-εννοιολογικό (conceptual) τους κομμάτι. Για παράδειγμα, ένας κύβος είναι μια αφηρημένη οντότητα και καθορισμένη στα πλαίσια των τυπικών μαθηματικών, ως γεωμετρικό αντικείμενο. Από την άλλη έχει κάποιες σχηματικές ιδιότητες. Η εγγενής αυτή σύνδεση μεταξύ των δύο κομματιών δε γίνεται άμεσα και αυθόρμητα από το μαθητή, αλλά χρειάζεται να εμπλακεί ο ίδιος σε μια μακρά διαδικασία ώστε να την κατασκευάσει. Σύμφωνα με την θεώρηση του Fischbein η **έννοια του γεωμετερικού σχήματος** εμπεριέχει τη σχηματική έννοια (το σχήμα). Επίσης αποτελείται από άλλα δύο συστατικά. Τον **ορισμό** (definition) και την **εικόνα** (image) (Εικόνα 12). Αυτό το τρίπτυχο (σχηματική έννοια – ορισμός – εικόνα) λειτουργεί ως εξής. Η εικόνα που είναι μια **χωρική αναπαράσταση** ή ένα σύνολο από αυτές, **αντιστοιχεί** σε μια αφηρημένη οντότητα (σχηματική έννοια) η οποία **καθορίζεται** από τον ορισμό. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 12 υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της εικόνας (σχεδίου) του σχήματος και του σχηματικού μέρους, δηλαδή της σχηματικής έννοιας. Επίσης ο ορισμός σε εννοιολογικό επίπεδο αλληλεπιδρά με τη σχηματική έννοια. Έτσι, το **νόημα** που κατασκευάζουν οι μαθητές για ένα γεωμετρικό σχήμα καθορίζεται από ένα σύνολο μαθηματικών-εννοιολικών σχέσεων που αλληλεπιδρούν με χωρικές και νοητικές αναπαραστάσεις.



Εικόνα 12: Η δομή της γεωμετρικής έννοιας κατά Fischbein

Αν και ο ρόλος της ενορατικής διαδικασίας είναι σημαντικός, η λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος είναι κάτι περισσότερο από την αναγνώριση εποπτικών σχέσεων σε ένα σχήμα. Είναι σαφές (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006) ότι η διδασκαλία της Γεωμετρίας πρέπει να ενισχύει την ικανότητα των μαθητών:

- Να διακρίνουν τις εποπτικές σχέσεις από τις γεωμετρικές (με τη θεωρητική έννοια).
- Να μεταφέρουν τις ιδιότητες μεταξύ θεωρητικών αντικειμένων και αντίστοιχων χωρικών αναπαραστάσεων (π.χ. σχημάτων).
- Να αναγνωρίζουν τις γεωμετρικές σχέσεις που υπάρχουν σε ένα σχήμα.
- Να αντιστοιχούν νοητά ένα γεωμετρικό (θεωρητικό) αντικείμενο σε όλα τα πιθανά σχήματα που μπορεί να το αναπαριστούν.

Στην ενίσχυση αυτών των σημείων βρίσκει ιδίαιτερο ρόλο η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή στη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

2.3. Διαδικασιοεννοιολογικός τρόπος σκέψης

Σύμφωνα με τον David Tall (2004) υπάρχουν τρεις κόσμοι προσέγγισης των μαθηματικών. Ο ενσαρκωμένος (embodied), ο διαδικασιοεννοιολογικός (proceptual) και ο αξιωματικός (axiomatic). Ο ενσαρκωμένος κόσμος βασίζεται στις αισθήσεις και στον τρόπο που δρούμε. Είναι η αρχή της μαθηματικής σκέψης σε μια καινούργια έννοια που αναδεικνύεται στα μάτια του μαθητή, μέσω αναπαραστάσεων, οι οποίες είναι σημαντικά εργαλεία αυτού του κόσμου. Ο διαδικασιοεννοιλογικός κόσμος είναι ο κόσμος των διαδικασιών, που ο μαθητής, σε δεύτερο στάδιο μετά την ενσάρκωση, χρησιμοποιεί τις έννοιες μέσα σε διαδικασίες, συχνά αλγεβρικές. Τέλος, ο αξιωματικός κόσμος περιέχει πλήρη μαθηματικά οικοδομήματα, που βασίζονται στις πρωταρχικές μαθηματικές προτάσεις. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κυριαρχούν οι δύο πρώτοι κόσμοι, ο ενσαρκωμένος και ο διαδικασιοεννοιολογικός. Για παράδειγμα, σε σχέση με την εφαπτομένη, όταν τη σκεφτόμαστε ως κλίση μιας ευθείας, βρισκόμαστε στον ενσαρκωμένο κόσμο, ενώ όταν χρησιμοποιούμε αλγεβρικά την εφαπτομένη για τη λύση ενός προβλήματος, βρισκόμαστε στον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο.

Στο πλαίσιο του διαδικασιοεννοιλογικού τρόπου σκέψης χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία που υπολογίζει την τιμή ενός

μαθηματικού αντικειμένου, αλλά και το ίδιο το αντικείμενο. Ιδιαίτερα σημαντική είναι ικανότητα να χρησιμοποιούμε ένα νοητικό δόμημα που είναι αμάλγαμα των δύο αυτών συστατικών: Της έννοιας της μαθηματικής δομής, αλλά και της διαδικασίας. Για παράδειγμα, στην έννοια του ημιτόνου μιας γωνίας θ αντιστοιχεί το σύμβολο $ημθ$, που αναπαριστά είτε τη διαδικασία υπολογισμού του ημιτόνου, είτε την ίδια την έννοια. Ως διαδικασία υπολογισμού εννοούμε είτε το λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς της γωνίας, είτε την τεταγμένη y του σημείου του μοναδιαίου τριγωνομετρικού κύκλου, ανάλογα με τη διδακτική προσέγγιση. Οι Gray και Tall (1994) ονομάζουν αυτό το δίπολο (έννοιας – διαδικασίας) ως "procept".

Σύμφωνα με τους Blackett & Tall (1991), η σύνδεση του τριγωνομετρικού αριθμού και του αντίστοιχου λόγου μόνο ως εργαλείο υπολογισμού (process) του αριθμού αυτού κι όχι ως procept, δημιουργεί δυσκολίες στην κατανοήση της τριγωνομετρίας και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν ο λόγος $\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$ χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό της εφαπτομένης, τότε δίνεται βάρος στη διαδικασία υπολογισμού κι όχι στο αποτέλεσμα, που είναι η αριθμητική τιμή της εφαπτομένης. Σαν αποτέλεσμα, το σύμβολο εφ(·) αναπαριστά μόνο τη διαδικασία υπολογισμού. Στην ίδια έρευνα των Blackett & Tall φαίνεται ότι ένας υπολογιστής (αριθμομηχανή) χρησημοποιείται για τον υπολογσιμό της εφαπτομένης μιας γωνίας, τότε δίνεται περισσότερο βάρος στην εφαπτομένη σαν μαθηματική οντότητα και αυτό βελτιώνει τη μάθηση.

Η κατασκευή ενός procept από το μαθητή δε γίνεται στιγμιαία, αλλά ακολουθεί την εξής πορεία (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000): Αρχικά ο μαθητής εκτελεί μια διαδικασία, που μπορεί και να μην έχει ιδιαίτερο νόημα γι' αυτόν, σαν ένα αλγόριθμο με βήματα. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό της εφαπτομένης με τη χρήση ενός ορθογωνίου τριγώνου, πρέπει κανείς να υπολογίσει τη μια κάθετη πλευρά, μετά τη δεύτερη κάθετη πλευρά και τέλος να υπολογίσει το λόγο τους. Στη συνέχεια, όταν ο μαθητής εκτελέσει τη διαδικασία αρκετές φορές και αναστοχαστεί πάνω σε αυτή, ίσως τη δει σαν μια ολοκληρωμένη μέθοδο που έχει νόημα και στόχο κι όχι σαν βήματα το ένα μετά το άλλο. Π.χ. καταλαβαίνει κανείς, γιατί χρειάζεται να γνωρίζει τις κάθετες πλευρές πριν υπολογίσει το λόγο τους, ώστε να βρει την εφαπτομένη της γωνίας. Έτσι, μπορεί να χειριστεί τη διαδικασία σαν ένα αντικείμενο, κι όχι σαν ξεχωριστά βήματα. Ο μαθητής φτάνει στην κατασκευή ενός procept που αφορά την έννοια, όταν μπορεί να κάνει συλλογισμούς για το αποτέλεσμα της

παραπάνω μεθόδου, χωρίς να αναφερθεί στα βήματά της. Για παράδειγμα, όταν κανείς μπορεί να πει ότι ο διπλασιασμός μόνο της απέναντι κάθετης πλευράς, διπλασιάζει την εφαπτομένη της γωνίας, χωρίς να χρειάζεται να σκεφτεί ότι διπλασιάζεται ο αριθμητής του λόγου, άρα διπλασιάζεται και το αποτέλεσμα, τότε έχει αρχίσει να κατασκευάζει ένα procept για την εφαπτομένη. Έτσι, με το σύμβολο εφ(·) δεν αναπαριστά τη διαδικασία υπολογισμού αλλά και το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής.

2.4. Οι ψηφιακές τεχνολογίες στη διδασκαλία και την έρευνα

Η πεποίθηση ότι η οπτικοποίηση των προβλημάτων παίζει σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν είναι νέα. Εδώ και δεκαετίες οι μαθηματικοί στην επίλυση προβλημάτων αποφεύγουν σύμβολα, αλγεβρικά ή άλλα (Hadamard, 1945) χρησιμοποιώντας οπτικές αιτιολογήσεις των αποτελεσμάτων τους και στο περιθώριο της λύσης χρησιμοποιούν μαθηματικούς συμβολισμούς για να εκφράσουν το αποτέλεσμα. Υπάρχει η αντίληψη ότι οι οπτικοποίηση των προβλημάτων είναι ένα βήμα προς την έκφρασή τους με μαθηματικά σύμβολα και από εκεί και πέρα αρχίζουν τα μαθηματικά.

Οι Noss, Healy και Hoyles (1997) θεωρούν το σχεδιασμό μαθηματικών καταστάσεων σε η/υ για τους μαθητές, ως βασική δραστηριότητα κάποιου που ασχολείται με τη διδακτική των μαθηματικών. Αυτό γιατί τα προσεκτικά και κατάλληλα σχεδιασμένα υπολογιστικά περιβάλλοντα δίνουν τη δυνατότητα στο μαθητή να τα εκμεταλλευτεί ως πηγές και εργαλεία έκφρασης, κατασκευάζοντας νοήματα.

2.4.1 Η προστιθέμενη αξία της χρήσης νέων τεχνολογιών στη διδακτική έρευνα

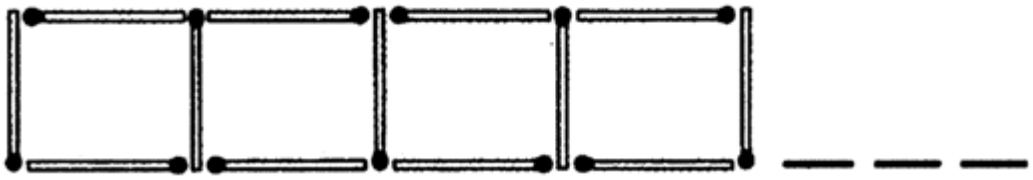
Σύμφωνα με τους Noss, Healy και Hoyles (1997) δεν υπάρχει φυσικός τρόπος πρόσβασης (natural window) στο μηχανισμό με τον οποίο οι μαθητές κατασκευυάζουν νοήματα. Έτσι τα υπολογιστικά περιβάλλοντα σε αντίθεση με το κλασσικό μοντέλο «χαρτί – μολύβι» δίνουν στην ερευνητή την ευκαιρία να φτιάξει σχετικά λεπτομερή μοντέλα του μηχανισμού αυτού, μελετώντας τα δομήματα του

μαθητή. Αυτά τα δομήματα, που είναι είναι μαθηματικά μοντέλα της κατάστασης που αντιμετώπισε έχουν κατασκευαστεί στα πλαίσια του λογισμικού κι έτσι δεν έχει πρόσβαση σε αυτά μόνο ο μαθητής που τα κατασκεύασε, αλλά κι ο ερευνητής.

Άρα είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τον ερευνητή να έχει σχεδιάσει πολύ προσεκτικά το υπολογιστικό περιβάλλον που θα χρησιμοποιήσει. Βέβαια, όσο προσεκτικά και αν το σχεδιάσει, δεν μπορεί να προβλέψει ακριβώς τι θα συμβεί, καθώς στα ψηφιακά εργαλεία δίνουν «ζωή» οι μαθητές και δημιουργούν τα δικά τους νοήματα.

2.4.2 Η προστιθέμενη αξία της χρήσης νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών

Σε περιπτώσεις που μια δραστηριότητα αποκτά εμπειρικό χαρακτήρα, όπως η αναζήτηση ενός αριθμητικού προτύπου (π.χ. πόσα σπίρτα θέλουμε για να κατασκευάσουμε 1,2,3,... τετράγωνα), με στόχο να εισαχθεί η έννοια της συνάρτησης, όσο μπορεί η φόρμουλα του μαθητή να είναι μαθηματική, άλλο τόσο μπορεί και να μην είναι. Όταν το πρόβλημα λύνεται χωρίς η μαθηματική έκφρασή του να προσφέρει κάτι προφανές στο μαθητή (και τέτοια είναι πολλά προβλήματα όπου αναζητείται ένα αριθμητικό πρότυπο), τότε δεν έχει ενδιαφέρον για εκείνον η κατασκευή μιας μαθηματικής φόρμουλας, με αποτέλεσμα να χάνεται ο στόχος που είχε θέσει ο ερευνητής ή ο δάσκαλος (Noss, Healy, & Hoyles, 1997).



Εικόνα 13: Από το Αγγλικό αναλυτικό πρόγραμμα: «Κατασκευάστε τετράγωνα, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αριθμό σπίρτων (mathsticks) για 1, 2, 3, 4 τετράγωνα και γενικεύστε τη διαδικασία.»

Αντιθέτως, αν σε κατάλληλο υπολογιστικό περιβάλλον εισαχθή η έννοια της συνάρτησης σαν αναλλοίωτη σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, οι μαθητές θα βρούν νόημα στην πρόκληση να αναπτύξουν αριθμητικές μεθόδους για να υπολογίσουν τις τιμές των μεταβλητών που τους χρειάζονται, έχοντας μια πραγματιστική προσέγγιση (pragmatic approach) στο πρόβλημα, αντί μιας θεωρητικής (Balacheff, 1986).

Στο πλαίσιο του μοντέλου των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων των Noss και Hoyles οι γενικεύσεις των μαθητών δεν είναι ανεξάρτητες από το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο ενεργούν. Ο αναστοχασμός είναι βασικός παράγοντας της εγκαθιδρυμένης αφαίρεσης και οξύνεται από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται και τη γλώσσα που παράγεται από τη χρήση τους. Τα εκφραστικά ψηφιακά μέσα είναι καταλυτικά, αφού οπτικοποιούν και δίνουν δυνατότητα χειρισμού σε πηγές που υποστηρίζουν τη γενίκευση μέσω του αναστοχασμού.

2.4.2.1 Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας

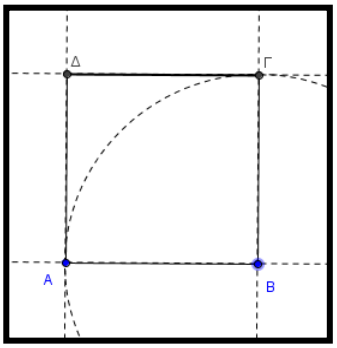
Όπως ανέφερα προηγούμενα, απαραίτητη για την κατανόηση της Γεωμετρίας είναι η εμπλοκή των ίδιων των μαθητών με τη διαδικασία της γενίκευσης, ώστε αυτή να προκύψει σαν ανάγκη, μέσα από τη χρήση πολλών συγκεκριμένων σχημάτων (Freudenthal, 1973). Όσο ευδιάκριτη είναι η διαφορά μεταξύ χωρικών και γεωμετρικών σχέσεων ή εμπειρικής και θεωρητικής γεωμετρίας, άλλο τόσο είναι αλληλένδετες η σχηματική με τη νοητική της υπόσταση. Κι όσο απαραίτητο είναι να αποστασιοποιηθεί ο μαθητής από το σχήμα και να σκεφτεί γεωμετρικά, άλλο τόσο απαραίτητη είναι η αντιστοίχιση και συνεχής μεταφορά μεταξύ χωρικών αναπαραστάσεων και των αντίστοιχων γεωμετρικών-θεωρητικών εννοιών ή αντικειμένων. Καταλυτικός σε αυτή την κατεύθυνση είναι ο ρόλος ενός κατάλληλα σχεδιασμένου υπολογιστικού περιβάλλοντος.

Δύο είναι οι βασικές κατηγορίες λογισμικών που χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Τα προγραμματιστικά εργαλεία **συμβολικής έκφρασης** με άξονα τη Γεωμετρία της Χελώνας, που θα αναλύσω παρακάτω και τα εργαλεία **δυναμικού χειρισμού** γεωμετρικών αντικειμένων, ή αλλιώς δυναμικά γεωμετρικά περιβάλλοντα (dynamic geometry environments: DGEs).

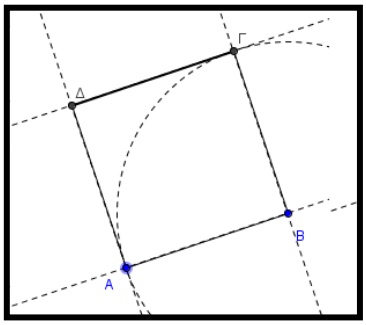
Δυναμικός χειρισμός

Στα DGEs ο χρήστης μπορεί να σχεδιάσει ένα αντικείμενο χρησιμοποιώντας μια σειρά από πρωτογενείς εντολές (primitives) που δημιουργούν τα βασικά στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και βασικές κατασκευές που προκύπτουν από αιτήματα, δηλαδή το σημείο, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο σημείων, μια ευθεία που να διέρχεται από σημείο, έναν κύκλο με κέντρο και συγκεκριμένη ακτίνα, μια ευθεία παράλληλη σε άλλη ευθεία. Επίσης υπάρχουν προωτογενείς εντολές που εμφανίζουν

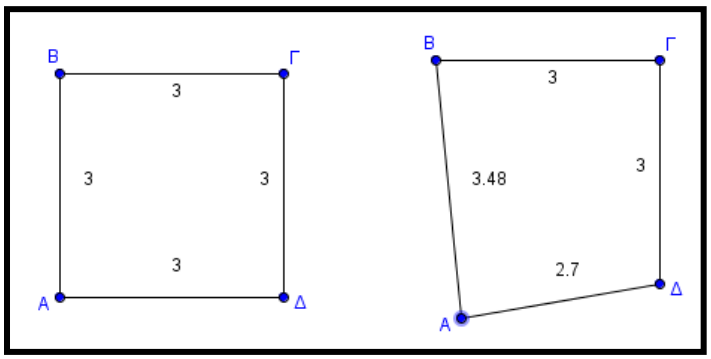
αντικείμενα που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη, όπως η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Αυτό που χαρακτηρίζει τα DGEs είναι **ο δυναμικός χειρισμός** αυτών των αντικειμένων. Όταν ο χρήστης επιλέξει ένα σημείο της κατασκευής του και το σύρει με το ποντίκι, οι γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται. Αυτό σημαίνει ότι αν έχει σχεδιάσει ένα τετράγωνο με κανόνα και διαβήτη, δηλαδή χρησιμοποιώντας τα αιτήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, τότε οποιαδήποτε κορυφή του τετραγώνου κι αν «υποστεί» σύρσιμο, το σχήμα δεν παύει να είναι τετράγωνο. Από την άλλη, αν ο χρήστης έχει σχεδιάσει ένα τετράγωνο σαν τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, που τα έχει προσαρμόσει ώστε στη συγκεκριμένη θέση να είναι ίσα μεταξύ τους, αλλά και να σχηματίζουν ανά δύο ορθές γωνίες, τότε μετά από σύρσιμο μιας κορυφής το σχήμα θα πάψει να είναι τετράγωνο.



Εικόνα 14: Τετράγωνο που έχει κατασκευαστεί με χρήση εργαλείων του DGE.



Εικόνα 15: Το σχήμα της εικόνας 4 μετά από σύρσιμο της κορυφής Α. Το σχήμα παραμένει τετράγωνο, άρα είναι γενικευμένο τετράγωνο.



Εικόνα 16:Σχήμα που κατασκευάστηκε από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα σε DGE. Το σχήμα μετά το σύρσιμο δεν έχει πια πλευρές ίσες, παρόλο που στο προηγούμενο στιγμιότυπο όλες οι πλευρές του είχαν μήκος 3 μονάδες. Το σχήμα αυτό δεν είναι γενικευμένο τετράγωνο.

Δύο σημαντικά DGEs με κριτήριο την ώθηση που έδωσαν στην εκπαιδευτική έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών που ταυτόχρονα χρησιμοποιούνται και στο

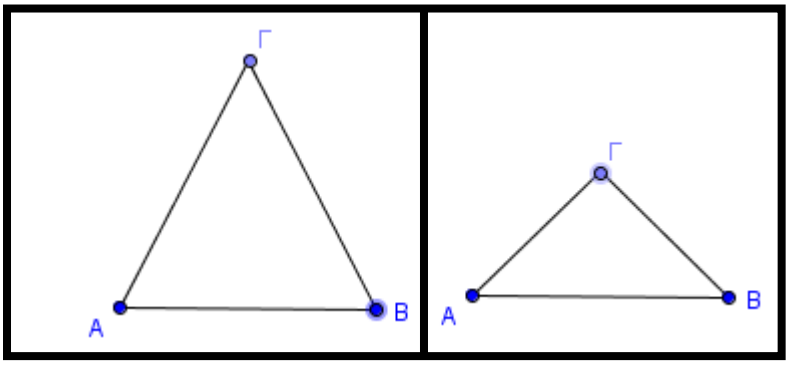
ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα είναι το Cabri –Géomètre (Laborde, Baulac, & Bellemain, 1988; Laborde & Bellemain, 1995) και το Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991). Ένα ευρέως διαδεδομένο DGE που συνδυάζει και στοιχεία άλλων κατηγοριών εκπαιδευτικού λογισμικού, όπως τα αλγεβρικά ψηφιακά συστήματα (computer algebra systems: CAS) είναι το Geogebra που δημιούργησε ο Markus Hohenwarter το 2001.

Το σημαντικό στοιχείο στη χρήση των GDEs είναι η δυνατότητα που δίνουν στο μαθητή να παλινδρομεί μεταξύ χωρικής αναπαράστασης ενός γεωμετρικού αντικειμένου και της αντίστοιχης αφηρημένης έννοιας, δηλαδή του συνόλου των ιδιοτήτων που διέπουν το γεωμετρικό αντικείμενο (Goldenberg & Cuoco, 1998; Κυνηγός, 2006). Οι χωρικές αυτές αναπαραστάσεις ανταποκρίνονται στον χειρισμό με το ποντίκι και ο μετασχηματισμός τους ακολουθεί τους κανόνες της Γεωμετρίας που τα διέπουν κι όχι τις επιθυμίες του χρήστη, ακριβώς όπως οι φυσικές οντότητες ακολουθούν τους φυσικούς νόμους (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Έτσι, ο μαθητής μετακινείται από το χωρικό πλαίσιο της Γεωμετρίας στο θεωρητικό. Ποιες όμως είναι οι εκφάνσεις αυτής της μετάβασης;

Η έρευνα έχει δείξει ότι κατά την κατασκευή σχημάτων σε δραστηριότητες οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουμε θεωρητικούς κανόνες Γεωμετρίας, έτσι σχεδιάζουν το σχήμα «με το μάτι». Αυτό έχει σα συνέπεια οι κατασκευές να «χαλάνε» από το **σύρσιμο** ενός σημείου του με το ποντίκι (Noss R. , Hoyles, Healy, & Hoelzl, 1994) (Εικόνα 16). Το σύρσιμο είναι βασικό χαρακτηριστικό των DGEs και το μαθηματικό του ανάλογο είναι η έννοια της μεταβολής (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006).Αν οι μαθητές καθοδηγούνται με κατάλληλο τρόπο να το χρησιμοποιούν, τότε αποτελεί βασικό στοιχείο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο πλαίσιο που περιέγραψα σε προηγούμενη παράγραφο.

Όταν υπάρχει σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο γεωμετρικών αντικειμένων η μεταβολή της χωρικής αναπαράστασης του ενός επηρεάζει τη χωρική αναπαράσταση του άλλου. Για παράδειγμα, όταν αλλάζει η διάμεσος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου (ως προς το μήκος της), τότε μεταβάλλεται και το μήκος των ίσων πλευρών του (Εικόνα 17). Σύμφωνα με έρευνες, οι μαθητές που δεν έχουν χτίσει συνδέσεις μεταξύ χωρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης δεν μπορούν να αναγνωρίζουν ή να καταλάβουν τη σχέση εξάρτησης αυτή, σε περιβάλλον DGE (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Με δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων τέτοιων γεωμετρικών

αντικειμένων οι μαθητές διακρίνουν σταδιακά ότι υπάρχει μαθηματική εξάρτηση της κίνησης του ενός από την κίνηση του άλλου (Κυνηγός, 2006).



Εικόνα 17:Ισοσκελές τρίγωνο με ΑΓ=ΒΓ. Όταν το μήκος του ΑΓ αλλάζει , αλλάζει και αυτό του ΒΓ.

Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές κατασκευάζουν το νόημα της εξάρτησης, της σχέσης στο **εγκαθιδρυμένο** περιβάλλον ενός DGE. Χαρακτηριστικές είναι εκφράσεις από σχετικές έρευνες, όπως «…είναι όλα αυτά πραγματικά σχήματα, γιατί μπορείς να τα κουνήσεις χωρίς να χαλάσει το σχήμα» (Pratt & Ainley, 1996) ή «…κινείται, όταν κουνάς το άλλο, γιατί εξαρτάται από αυτό» (Jones, 1996).

Η προσπάθεια των μαθητών να φτιάξουν κατασκευές που να μη χαλάνε με το σύρσιμο ενός σημείου, δε γίνεται σε βήματα. Οι κατασκευές τους συνεχώς βελτιώνονται, γίνονται όλο και πιο «αναλλοίωτες στο σύρσιμο» καθώς κάθε επόμενη κατασκευή χρησιμοποιεί όλο και περισσότερες γεωμετρικές ιδιότητες από την προηγούμενη. Μια τέτοια διαδικασία βελτίωσης των κατασκευών κάνει τους μαθητές να αναγνωρίζουν στα σχήματα γεωμετρικές ιδιότητες και να αφήνουν όλο και περισσότερο κατά μέρος μια ρύθμιση των σχημάτων «με το μάτι». Οι βελτιωμένες αυτές κατασκευές δεν είναι μέρος μόνο της λύσης ενός προβλήματος, αλλά και της βοηθητικής παρέμβασης (scaffolding) προς τον μαθητή για να φτάσει στην τελική «σταθερή» κατασκευή μέσα από μια γεωμετρική-θεωρητική λύση και κατ' επέκταση να αποστασιοποιηθεί από τις ενορατικές λύσεις.

Η απόδειξη στο πλαίσιο των Δυναμικών Γεωμετρικών Περιβαλλόντων

Όπως ανέφερα παραπάνω η εκμάθηση της Γεωμετρίας, με ενεργή συμμετοχή από την πλευρά των μαθητών, ευνοείται από τη χρήση DGEs. Οι μαθητές εκτός από το να αποστασιοποιούνται από τη χειροπιαστή φύση των αντικειμένων της οθόνης και να αντιμετωπίζουν πιο θεωρητικά (ή πιο γεωμετρικά) αυτά τα αντικείμενα και τις αλλοιώσεις τους, βρίσκουν αξία στη μαθηματική απόδειξη και τη χρήση παραγωγικών συλλογισμών (Κυνηγός, 2006; Marrioti, 2000). Στον αντίποδα

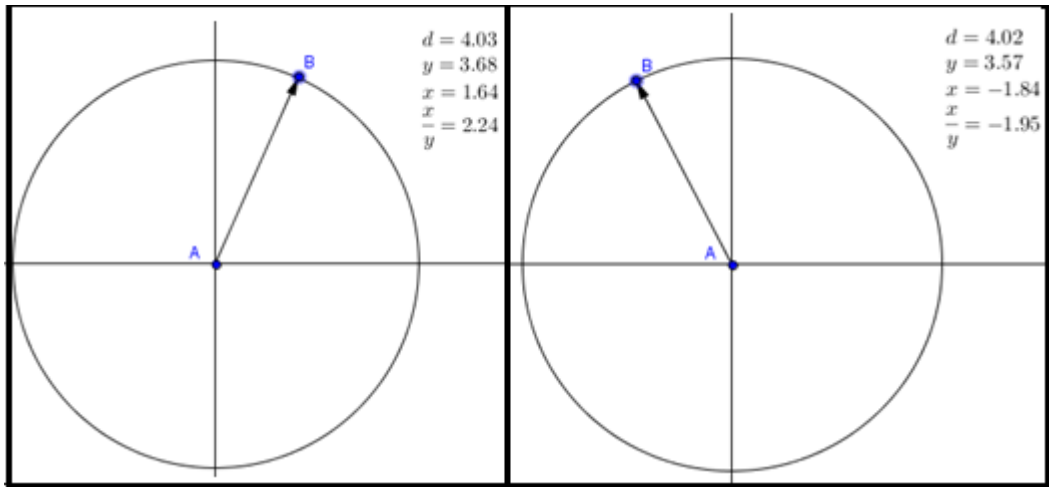
βρίσκονται απόψεις που ισχυρίζονται ότι ο υπολογιστής μπορεί να υποβιβάσει την αναγκαιότητα της απόδειξης στο νου του μαθητή. Το βασικό επιχείρημα της κριτικής αυτής είναι ότι ο υπολογιστής ως «αυθεντία» δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να δοκιμάσει τις υποθέσεις του και να τις επιβεβαιώσει κι έτσι να πιστεύει ότι η απόδειξη δεν είναι απαραίτητη. Σύμφωνα με έρευνες όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Ο ρόλος της απόδειξης αλλάζει και γίνεται περισσότερο επεξηγηματικός, παρά ελεγκτικός. Μέσω της απόδειξης ο μαθητής καταλαβαίνει γιατί ισχύει αυτό που βλέπει στην οθόνη και που πολλές φορές τον ξαφνιάζει, γιατί περίμενε να ισχύει κάτι άλλο (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006; Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000) ή εξηγεί γιατί ένα σχήμα διατηρεί τις ιδιότητές του κάτω από δυναμικό χειρισμό (Jones, 1996). Επίσης, σε διδακτικά πειράματα ειδικά σχεδιασμένα για να εκφράσουν οι μαθητές παραγωγικούς συλλογισμούς, παρατηρήθηκε ότι η ποιότητα των συλλογισμών βελτιώθηκε με τη χρήση DGEs και τις κατάλληλες παρεμβάσεις του δασκάλου (Marrades & Guttierez, 2000). Τέλος οι μαθητές κατασκευάζουν ένα σύνολο αξιωμάτων και θεωρημάτων σαν ένα σύστημα εντολών που εισάγονται στο πρόγραμμα και που δεν φαίνεται να έχει κάποια γεωμετρική υπόσταση. Η απόδειξη έρχεται να αποφανθεί αν η ομάδα εντολών αυτή, παράγει το προσδωκόμενο αποτέλεσμα σχηματικά, και γιατί (Marrioti, 2000).]

Δυναμικός χειρισμός στην άλγεβρα

Τα ψηφιακά αλγεβρικά συστήματα (Computer Algebra Systems: CAS) είναι υπολογιστικά περιβάλλοντα που χαρακτηρίζονται από συντάκτες ειδικά σχεδιασμένους για την παραγωγή αλγεβρικών εκφράσεων, από γραφικές παραστάσεις και από τις αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις τιμών, σχέσεων και αλγεβρικών ιδιοτήτων (Κυνηγός, 2006). Ο συντάκτης των CAS είναι εστιασμένος αποκλειστικά στη σύνταξη αλγεβρικών παραστάσεων. Καταλυτικό ρόλο σε αυτόν τον προσανατολισμό έπαιξαν τα αποτελέσματα ερευνών (Sutherland, 1987) που χρησιμοποιήθηκε ο προγραμματισμός για τη σύνταξη αλγεβρικών παραστάσεων. Αν και φάνηκε να υπάρχει βαθύτερη κατανόηση εννοιών όπως ο γενικευμένος αριθμός, εντούτοις η δυσκολία των μαθητών να διακρίνουν μια αλγεβρική έκφραση από μια προγραμματιστική διαδικασία ήταν αποτρεπτική για τη χρήση του προγραμματισμού.

Ένας συνδυασμός δυναμικού χειρισμού αναπαράστασης και αλγεβρικού συστήματος χρησιμοποιήθηκε από του Noss, Healy και Hoyles (1997) και για αυτό χρησιμοποιήθηκε ο όρος DAS (Dynamic Algebra System). Το βασικό

χαρακτηριστικό των DAS είναι ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις καταστώνται αντικείμενα χειρισμού από τον μαθητή. Έτσι έχουμε στιγμιότυπα κάθε σταδίου μιας δραστηριότητας. Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της λειτουργίας δεν τόσο είναι η ευκολία που έχει ο δάσκαλος ή ο μαθητής στην αναπαράσταση σταδίων της δράσης του, αλλά κυρίως οτι ο χειρισμός με τον οποίο μεταβαίνουμε από τη μια κατάσταση στην άλλη αφήνει το ίχνος τού οπτικά και συμβολικά. Έτσι «ζωντανεύουν» τα μαθηματικά σύμβολα και υπάρχει ευκαιρία για τον μαθητή να δημιουργήσει νοήματα (Noss, Healy, & Hoyles, 1997). Για παράδειγμα όταν ο μαθητής χειρίζεται το πέρας ενός διανύσματος και παρατηρεί, πότε αλλάγες στην αριθμητική τιμή του μέτρου, πότε βλέπει ότι αλλάζει ο λόγος $\frac{y}{x}$, αρχίζει να κατασκευάζει την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης, που είναι ανεξάρτητος από το μέτρο του διανύσματος (χωρίς να χρησιμοποιεί αυτή την ορολογία). Η κατασκευή αυτού του νοήματος γίνεται μέσω του δυναμικού χειρισμού και όχι της παρατήρησης συγκεκριμένων στυγμιοτύπων του μοντέλου.



Εικόνα 18: Δύο στιγμιότυπα, που φαίνεται ότι αν το Β είναι πολύ κοντά στον κύκλο , το μέτρο του διανύσματος είναι περίπου 4. Η στροφή του διανύσματος δε φαίνεται με ποιον τρόπο επηρεάζει το λόγο $\frac{y}{x}$.

2.4.2.2 Η χρήση νέων τεχνολογιών για την εισαγωγή τριγωνομετρικών εννοιών

Με τα συνήθη εργαλεία που χρησιμοποιεί ένας μαθητής, όταν κάνει μαθηματικά (χαρτί, μολύβι, χάρακας, διαβήτης) έχει περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής σε διερεύνηση, σε σχέση με τα μέσα ψηφιακής τεχνολογίας. Ειδικά στην τριγωνομετρία ο δυναμικός χειρισμός των χαρακτηριστικών της γωνίας και η παρατήρηση των μεταβολών στους τριγωνομετρικούς αριθμούς της έχουν ιδιαίτερη αξία.

Οι παραδοσιακές προσεγγίσεις (ορθογώνια τρίγωνα και τριγωνομετρικός κύκλος) των τριγωνομετρικών αριθμών γίνονται με εικόνες σε πίνακα, στο χαρτί, στον υπολογιστή, σε διαδραστικό πίνακα ή με άλλα εποπτικά μέσα. Ένα πρόχειρο σχέδιο στον πίνακα δίνει βάρος στις αριθμητικές διαδικασίες (στους τύπους), λόγω μεγαλύτερης ακρίβειας και έτσι δημιουργεί ένα χάσμα μεταξύ σχήματος και υπολογισμών (Blackett & Tall, 1991). Από την άλλη ένα σχέδιο στον υπολογιστή, αν είναι στατικό, αναδεικνύει κυρίως τη σημασία της δυνατότητας «ακριβούς αναπαράστασης» που μας παρέχει ο υπολογιστής. Αυτό που πραγματικά προσφέρει η χρήση του υπολογιστή είναι ο δυναμικός χειρισμός και η παρατήρηση της εικόνας, είτε πρόκειται για ορθογώνιο τρίγωνο, είτε για τριγωνομετρικό κύκλο, είτε άλλο αντικείμενο. Έτσι, ο μαθητής συσχετίζει τη δυναμικά μεταβαλλόμενη κατάσταση της εικόνας με τις αντίστοιχες αριθμητικές μεταβολές στους τύπους και βελτιώνεται το επίπεδο κατανόησης των εννοιών.

Επίσης, ο χειρισμός αυτός δίνει στον τριγωνομετρικό αριθμό της υπόσταση ενός μεγέθους που η μεταβολή του εξαρτάται από τη γωνία και που εκφράζει κάποια χαρακτηριστικά της κι όχι το χαρακτήρα μιας διαδικασίας υπολογισμού ενός πηλίκου, κάτι που συμβαίνει έντονα με τις στατικές, παραδοσιακές προσεγγίσεις.

2.4.3 Μικρόκοσμοι

Η έννοια του μικρόκοσμου

Σύμφωνα τον Papert (1980), όταν κανείς αντιμετωπίζει κάτι νέο, είτε παιχνίδι, είτε χορευτική φιγούρα, είτε μια ιδέα υπάρχουν δύο βασικές αρχές που ακολουθεί. Πρώτα το συσχετίζει με κάτι που ήδη ξέρει και στη συνέχεια φτιάχνει κάτι καινούριο με αυτό, χτίζει πάνω σε αυτό. Όμως στις περιπτώσεις των τυπικών και αφηρημένων γνώσεων, αυτό είναι πολύ δύσκολο να συμβεί. Για παράδειγμα, ένας μαθητής στην πρώτη του επαφή με τη Νευτώνεια Φυσική είναι δύσκολο να συσχετίσει, το φαινόμενο της αέναης κίνησης (στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση) με κάτι που ήδη γνωρίζει, αφού από την καθημερινή εμπειρία του ξέρει ότι ένα σώμα που αφήνεται να κινηθεί με αρχική ταχύτητα, θα σταματήσει. Το ίδιο μπορεί να συμβεί και με τα μαθηματικά. Στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η έννοια του σημείου είναι αφηρημένη, σύμφωνα με τον Ευκλείδη είναι «αυτό που δεν έχει μέρη» (Σταμάτης, Ευκλείδου Γεωμετρία - Στοιχεία - Βιβλία 1.2.3.4., 1975), ενώ σήμερα δε δίνουμε ορισμό και την θεωρούμε ως πρωταρχική έννοια. Όταν μιλάμε στο μαθητή για σημείο

περιμένουμε να καταλάβει, ότι το σημείο δεν έχει διαστάσεις. Αυτό όμως δε συνδέεται με τις εμπειρίες ενός μαθητή που έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με τη Γεωμετρία, έτσι δυσκολεύεται να το συσχετίσει με τις γνώσεις που ήδη έχει.

Τον όρο «μικρόκοσμος» τον δανείστηκε ο Papert από τον κλάδο της τεχνητής νοημοσύνης, για να περιγράψει έναν αυτάρκη κόσμο όπου οι μαθητές μαθαίνουν να μεταφέρουν συνήθειες και πρακτικές διερεύνησης από την προσωπική ζωή τους στο πεδίο της επιστημονικής δημιουργίας (Papert, 1980). Αρχικά, οι μικρόκοσμοι ήταν καθαρά προγραμματιστικά περιβάλλοντα και το βασικό τους χαρακτηριστικό ήταν η δυνατότητα σχεδιασμού γραφικών με τη χρήση γλώσσας προγραμματισμού. Η δραστηριότητα των μαθητών σε έναν μικρόκοσμο χαρακτηρίζεται από ευχέρεια στην κατασκευή δομημάτων και στην μετατροπή και επέκταση των αρχών και των σχέσεων που διέπουν το μικρόκοσμο (Healy & Kynigos, 2010). Αυτό το χαρακτηριστικό του να επιδέχεται αλλαγές και η άμεση εκτελεσιμότητά του και απόκρισή του που ευνοεί τον πειραματισμό είναι τα στοιχεία που κάνουν ένα μικρόκοσμο βασικό εργαλείο μάθησης στα πλαίσια του constructionism (Kafai & Resnick, 1996; Papert & Harel, 1991).

Σύμφωνα με μεταγενέστερες προσεγγίσεις, οι μικρόκοσμοι είναι υπολογιστικά περιβάλλοντα με ένα επαγώμενο σετ μαθηματικών εννοιών και σχέσεων, έτσι σχεδιασμένα ώστε με κατάλληλες δραστηριότητες και διδακτικούς χειρισμούς από τον εκπαιδευτικό, οι μαθητές να εμπλέκονται σε διερεύνηση και κατασκευή δομημάτων που τους οδηγεί σε κατασκευή μαθηματικών νοημάτων (Kynigos, 2007b; Samara & Clements, 2002).

Στο πλαίσιο της διδακτικής έρευνας, ο όρος χρησιμοποιήθηκε για «κόσμους» (περιβάλλοντα) που είναι ταυτόχρονα πλούσια αλλά και απλά, ώστε να χρησιμοποιούνται στη μελέτη της μαθησιακής συμπεριφοράς (Noss, Healy, & Hoyles, 1997). Από διδακτικής πλευράς υπάρχει η ανάγκη να χτίσουμε ένα υπολογιστικό περιβάλλον που υπάρχει η δυνατότητα ανάπτυξης ενός διαλόγου ανάμεσα στις ενέργειες και τα μαθηματικά νοήματα. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον η διαδικασία της εσωτερίκευσης (Vygotsky, 1978) λαμβάνει χώρα στα πλαίσια ενός μικρόκοσμου με διαμεσολαβητές τα εργαλεία του. Σε αυτό το σημείο βρίσκουν εφαρμογή οι ιδέες του Vygotsky (1986) σύμφωνα με τις οποίες η προσοχή μετατοπίζεται από τα μαθηματικά αντικείμενα (έννοιες, ιδέες, σύμβολα) στη διαλεκτική σχέση μεταξύ ενεργειών με αντικείμενα και σκέψεις. Δηλαδή ένας μικρόκοσμος αποτελείται από εργαλεία, που είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να

λαμβάνουν υπόψη τον τρόπο σκέψης των μαθητών και να καθορίζουν τον τρόπο που οι μαθηματικές ιδέες θα εκφράζονται (Hoyles C. , 1993; 2005). Αλλά και από ερευνητικής πλευράς, η προσοχή εστιάζεται στο να καταλάβουμε, πώς τα εργαλεία αυτά διαμεσολαβούν μεταξύ ενεργειών του ατόμου και δημιουργίας νοημάτων από το ίδιο. Άρα από ερευνητικής πλευράς, όταν φτιάχνουμε έναν μικρόκοσμο, η βασική μας έγνοια είναι η χρησιμότητα του ως εργαλείο για τη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ οπτικών και συμβολικών νοημάτων και εν γένει στην κατανόηση του μηχανισμού κατασκευής μαθηματικών νοημάτων. Σύμφωνα με τον Vygotsky (1981) τα εργαλεία αυτά όχι μόνο διευκολύνουν τις νοητικές διεργασίες, αλλά τις μετατρέπουν, τις αναδιοργανώνουν και τις διαμορφώνουν.

Η κατασκευή εργαλείων και η μάθηση μέσω σχεδιασμού

Σύμφωνα με την Edwards (1998) ένας μικρόκοσμος:

- Αποτελείται από ένα σύνολο υπολογιστικών αντικειμένων που είναι σχεδιασμένα, ώστε να αντιπροσωπεύουν τη δομή μαθηματικών ή άλλων οντοτήτων στο πλαίσιο ενός γνωστικού πεδίου. Για παράδειγμα στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ένα DGE απεικονίζει στην οθόνη το Ευκλείδειο επίπεδο με όλες τις ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα του Ευκλείδη.
- Συνδέει μεταξύ τους διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας μαθηματικής έννοιας: Μια συμβολική (η εξίσωση μιας ευθείας) και μια χωρική (η γραφική παράσταση της ευθείας), χωρίς να αποκλείονται και άλλες.
- Περιλαμβάνει ένα σύνολο δραστηριοτήτων, που ο χρήστης-μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει, ώστε συνδυάζοντάς τις να πετύχει το στόχο του.
- Δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να χρησιμοποιήσει τα αντικείμενα και τις λειτουργίες του, ώστε να αναδημιουργήσει πιο σύνθετα αντικείμενα ή λειτουργίες. Π.χ. σε ένα DGE, ένας μαθητής μπορεί να συνθέσει δύο εργαλεία και να κατασκευάζει ένα τρίτο. Ένα που κατασκευάζει κύκλο με συγκεκριμένο κέντρο και ακτίνα κι ένα που φέρνει κάθετη από σημείο εκτός ευθείας, πάνω στην ευθεία αυτή, ώστε να δημιουργήσει εργαλείο που να βρίσκει άμεσα τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος.

Σε αυτό το σημείο αναδυκνύεται μια προσέγγιση που διακρίνει τις λειτουργικότητες ενός λογισμικού από τον τρόπο που τις χρησιμοποιεί ο μαθητής. Ιδαίτερη σημασία έχουν τα δομήματα που ανακατασκευάζει ο μαθητής και αποτελεί κλάδο της

ψυχολογίας στο σχεδιασμό διακειμένων (instrumental approach) (Verillon & Rabardel, 1995). Σε αυτό το πλαίσιο διακρίνεται το **κατασκεύασμα** (artifact), που είναι ένα προϊόν ανθρώπινης δημιουργίας από το **εργαλείο** (instrument), που κι αυτό κατασκευάζεται από έναν άνθρωπο ή αναδομείται από έναν άλλο, αλλά με σκοπό να χρησιμοποιηθεί για να εκτελεστεί μια εργασία. Ένα εργαλείο είναι κατασκεύασμα που έχει προσαρτημένο και ένα νόημα, ένα σετ νοητικών σχημάτων που καθορίζουν τη λειτουργικότητά του. Κατά την παραπάνω προσέγγιση, ένα κατασκευάσμα μπορεί να μετατραπεί σε εργαλείο. Η ανακατασκευή αυτή έχει προσωπικό νόημα για αυτόν που την κάνει και ο τρόπος που θα χρησιμοποιηθεί μπορεί να διαφέρει ριζικά από αυτόν για τον οποίο το προόριζε ο κατασκευαστής του. Άρα, στο πλαίσιο της διδακτικής τω μαθηματικών, οποιοδήποτε λογισμικό, ακόμα κι αν είναι φτιαγμένο για άλλο σκοπό, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναπόφευκτα από το μαθητή με εξατομικευμένο τρόπο (Artigue, 2002). Η μετατροπή ενός κατασκευάσματος σε εργαλείο γίνεται σε δύο κατευθύνσεις. Όταν ο μαθητής κατασκευάζει ένα εργαλείο, χωρίς να αλλάζει τις ιδιότητές του υπάρχοντος αντικειμένου, η διαδιακασία ονομάζεται **δημιουργία εργαλείου** (instrumentation). Σε αυτή την περίπτωση αυτό που αλλάζει είναι τα γνωστικά σχήματα του μαθητή που σχετίζονται με το εργαλείο κι όχι το ίδιο το εργαλείο σαν υλικό αντικείμενο. Από την άλλη η **αλλοίωση εργαλείου** (instumentalaization) είναι η δημιουργία νέου εργαλείου από ένα κατασκεύασμα, που έχουν αλλάξει όμως οι λειτουργικότητές του, ώστε να χρησιμοποιηθεί για συγκεκριμένη χρήση (Κυνηγός, 2006; Healy & Kynigos, 2010).

Οι μικρόκοσμοι, έτσι κι αλλιώς είναι περιβάλλοντα όχι απλά που επιδέχονται μετατροπών, αλλά είναι κατασκευασμένα με τρόπο που ο χρήστης να μπορεί να τα αναδιαμορφώσει. Έτσι, όταν κανείς διερευνά τον τρόπο που θα «λειάνει» τα εργαλεία ενός μικρόκοσμου, για να τα χρησιμοποιήσει., στην ουσιά εμπλέκεται στο σχεδιασμό διακειμένων, είτε πρόκεται για δημιουργία είτε για αλλοίωση ενός εργαλείου. Στο πλαίσιο της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών είναι σημαντικό να μελετηθεί η διαδικασία αυτή, εφόσον είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τα εργαλεία με τα μαθηματικά που βρίσκονται υπό διαπραγμάτευση στο μικρόκοσμο (Healy & Kynigos, 2010). Σε ένα τέτοιο περιβάλλον και όπως περιγράφηκε η εγκαθιδρυμένη μάθηση (Noss & Hoyles, 1996), όπως περιγράφηκε παραπάνω πλαισιοθετείται από τα εργαλεία και το ρόλο τους ως εκφραστικά μέσα και ως μέσα δράσης του μαθητή.

Μισοψημένοι μικρόκοσμοι

Με τον όρο «μισοψημένοι μικρόκοσμοι» εννοούμε λογισμικά σχεδιασμένα κατά τρόπο που να προκαλούν τους μαθητές να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς, να τους αλλάξουν, να τους αποδομήσουν, προκειμένου να κάνουν μαθηματικά με αυτούς, που να τους αφορούν ή να δίνουν έναυσμα στους εκπαιδευτικούς μέσα από την αποδόμηση και την ανακατασκευή τμημάτων αυτών των μικρόκοσμων να δημιουργήσουν δικούς τους μικρόκοσμους για τους μαθητές τους (Kynigos, 2007a). Στο πλαίσιο του constructionism, αυτή η δραστηριότητα είναι μέρος της διερεύνησης που οδηγεί στην δημιουργία μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές, αλλά και σε παιδαγωγικό ή επιστημολογικό αναστοχασμό από την πλευρά των εκπαιδευτικών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ο σχεδιασμός μισοψημένων μικρόκοσμων, ως εργαλεία που χρησιμοποιούνται από κοινότητες ατόμων και αποκτούν διαφορετικό νόημα για κάθε κοινότητα, αλλά και ένα κοινό πλαίσιο χρήσης για τα άτομα όλων των κοινοτήτων. Τέτοιοι μικρόκοσμοι είναι γνωστοί σαν **συνοριακά αντικείμενα** (boundary objects) και θα κάνω εκτενέστερη αναφορά παρακάτω σε αυτούς.

2.4.4 Η Logo και η Γεωμετρία της Χελώνας

Η επιστημολογία της Γεωμετρίας της Χελώνας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο Papert πίστευε ότι με τη χρήση της τεχνολογίας μπορούν να κατασκευαστούν μαθησιακά περιβάλλοντα πλούσια σε ευκαιρίες μάθησης για τα παιδιά, που να τους δίνουν την ευκαιρία να συσχετίσουν τη νέα γνώση με κάτι που ήδη γνωρίζουν και να μπορούν να το χειριστούν, να το μετατρέψουν χτίζοντας κάτι νεό. Έτσι κατασκεύασε τη Γεωμετρία της Χελώνας (1980).

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία χτίζεται αξιωματικά ξεκινώντας από ένα σύνολο θεμελιωδών εννοιών. Στα μαθηματικά δεν μπορούμε να ορίζουμε πάντα τη φύση των θεμελιωδών ενός αξιωματικού συστήματος, όπως για παράδειγμα του σημείου. Όμως μια σειρά αξιωμάτων και προτάσεων μας περιγράφουν τις ιδιότητες του. Αυτό για ένα μαθηματικό είναι προφανές και φυσιολογικό. Όμως, ένας άνθρωπος, που δεν έχει εισαχθεί στα τυπικά μαθηματικά μπορεί να βρίσκει δύσκολο να συλλάβει την αφηρημένη μαθηματική έννοια του σημείου, κυρίως γιατί δεν μπορεί να τη συνδέσει με κάτι που ήδη γνωρίζει.

Στη Γεωμετρία της Χελώνας θεμελιώδης μαθηματική οντότητα είναι η Χελώνα, όπως αντίστοιχα το σημείο για την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η πρώτη διαφορά της Χελώνας με το σημείο είναι ότι μπορεί να συσχετιστεί με βιώματα των μη μαθηματικών. Ως προς τη μαθηματική της φύση η χελώνα είναι εμβαπτισμένη στο επίπεδο, όπως τα επίπεδα σχήματα. Όμως είναι προσανατολισμένη και δεν είναι στατική (όπως το σημείο), αλλά δυναμική, δηλαδή διατηρεί κάποιες από τις φυσικές ιδιότητες μιας πραγματικής χελώνας. Αυτό είναι και ο λόγος που τα παιδιά ταυτίζονται με τη χελώνα και υπάρχει γόνιμο έδαφος για να συσχετίσουν τις νέες ιδέες της τυπικής γεωμετρίας που θα συναντήσουν με τις εμπειρίες των δικών τους κινήσεων και του προσανατολισμού του σώματός τους. Σύμφωνα με τον Κυνηγό (1989) οι μαθητές σκέφτονται σα να είναι οι ίδιοι στη θέση της Χελώνας, δηλαδή χρησιμοποιούν ένα εγγενές νοητικό σχήμα και σιγά σιγά ενσωματώνουν σε αυτό έννοιες του επιπέδου και απόλυτου προσδιορισμού θέσης και διεύθυνσης. Έτσι διευκολύνεται η μεταφορά της γνώσης από το γνωστό στο άγνωστο (Papert, 1980).

Για να το πετύχει αυτό ο Papert, πρόσθεσε τη Γεωμετρία της Χελώνας, στη Logo. Η Logo είναι μια γλώσσα προγραμματισμού ειδικά σχεδιασμένη, ώστε να μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν μικροί μαθητές για τη μάθηση μαθηματικών. Πρόκειται για μια γλώσσα προγραμματισμού που είναι παράγωγο της LiSP, οποία τη δεκαετία του ’80 ήταν βασική γλώσσα προγραμματισμού που σχετιζόταν με την τεχνητή νοημοσύνη. Τα βασικά στοιχεία που άλλαξε ο Papert ήταν, η δυνατότητα ορισμού νέων διαδικασιών, σαν νέες λέξεις που μπορούσε να μάθει η Χελώνα και η επεξεργασία τους με πολύ εύκολο και διαισθητικό τρόπο, η ειδική σημειολογία (άνω – κάτω τελεία) που έδωσε για τον ορισμό μεταβλητών μέσα στις διαδικασίες, τα τυπικά σύμβολα και το συντακτικό της, ώστε να πλησιάζει όσο γίνεται το μαθηματικό φορμαλισμό (Κυνηγός, 2006). Ο μαθηματικός φορμαλισμός αυτός επιτρέπει στο μαθητή να χρησιμοποιεί έννοιες από τη αριθμητική, την Άλγεβρα και την Αναλυτική Γεωμετρία.

Body-syntonicity και ego-syntonicity

Αυτή η ταύτιση από την πλευρά του ατόμου που μαθαίνει, με τη χελώνα έχει δύο διαστάσεις. Την **body-syntonicity**, δηλαδή τους συσχετισμούς που δημιουργεί το άτομο μεταξύ της κινητικής συμπεριφοράς της χελώνας και της γνώσης-αίσθησης που έχει για το ίδιο του το σώμα και την **ego-syntonicity** , δηλαδή τις προθέσεις που μπορεί να προσδίδει το άτομο στα αντικείμενα του μικρόκοσμου, όπως ο ίδιος έχει

για τον ευατό του. Για παράδειγμα ένα παιδί που θέλει να περπατήσει σε καμπύλη τροχιά γνωρίζει ότι για να το πετύχει πρέπει να κάνει ένα βήμα και να στρίβει «λίγο» πριν κάνει το επόμενο. Αυτή τη γνώση μπορεί να τη μεταφέρει στη Χελώνα, όταν θα θέλει να «της πει» να κάνει έναν κύκλο ή μια καμπύλη. Ας πούμε για έναν αριστερόστροφο κύκλο ή καμπύλη η χελώνα να πρέπει να προχωρήσει ένα βήμα εμπρός και να στρίψει «λίγο» αριστερά. Έτσι αυτό που χρειάζεται είναι ένας τρόπος να δίνει κανείς εντολές στη Χελώνα κι εκείνη να τις εκτελεί. Πέρα από αυτό όμως ένα παιδί που χειρίζεται τη χελώνα μπορεί να της προσδίδει (πιθανόν μέσα από μια ιστορία) την πρόθεση να κινηθεί δεξιά αντί για αριστερά, όπως θα έκανε το ίδιο αν θα είχε την πρωτοβουλία της κίνησης του σώματός του.

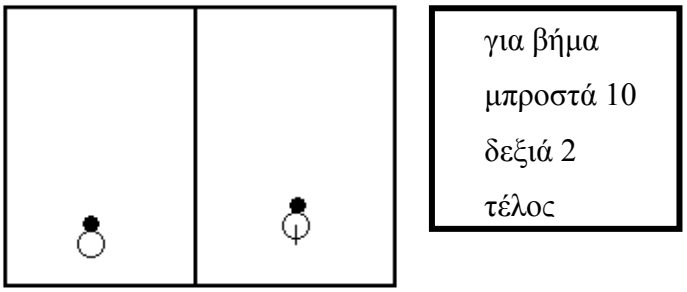
Η προσέγγιση του body-syntonicity ανήκει σε μια περιοχή έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών, που μελετά το ρόλο της αισθησιοκινητικής δραστηριότητας του ατόμου στην μάθηση (Nemirovksy & Borba, 2004). Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή (embodied approach – embodied cognition) και τα πιο αφηρημένα σύμβολα έχουν περιεχόμενο αισθησιοκινητικό και μέσω αυτού οι αισθήσεις και η κίνηση του σώματος είναι παρούσες στη σκέψη και στην δημιουργία εννοιών (Radforf, C. Baldini, Diallo, & Simbagoye, 2005). Ειδικά τα υπολογιστικά περιβάλλοντα με τις δυνατότητες δυναμικού χειρισμού που δίνουν, αυξάνουν το πεδίο που αυτή η σχέση αισθήσεων-κίνησης και μαθηματικών νοημάτων βρίσκει εφαρμογή (Healy & Kynigos, 2010).

Μαθηματική θεμελίωση και συμβολική έκφραση

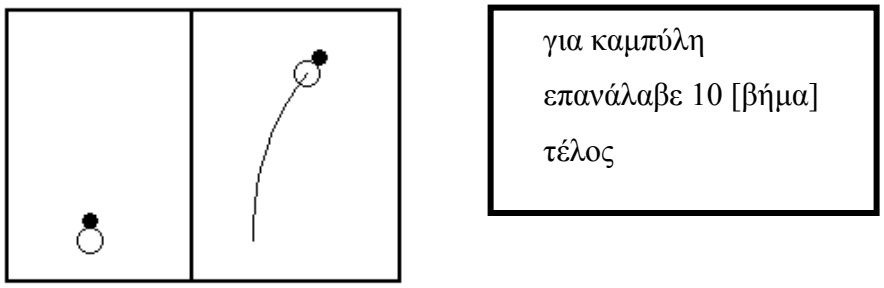
Η μαθηματική θεμελίωση της Γεωμετρίας της Χελώνας έγινε από τους Abelson και DiSessa (1981). Βασικό χαρακτηριστικό της Χελώνας είναι ότι η κατάστασή της προσδιορίζεται από την αμέσως προηγούμενη. Αυτός ο τρόπος προσδιορισμού είναι μοντέλο Διαφορικής Γεωμετρίας. Στη Διαφορική Γεωμετρία μελετάμε αντικείμενα λαμβάνοντας υπόψη μόνο ιδιότητες της εσωτερικής τους γεωμετρίας. Για παράδειγμα για να ορίσουμε έναν κύκλο στη Διαφορική Γεωμετρία δεν μπορούμε να αναφερθούμε στο κέντρο του γιατί αυτό δεν είναι σημείο του κύκλου. Η ιδιότητα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι η καμπυλότητά του, που είναι στοιχείο της εσωτερικής γεωμετρίας του. Το ίδιο συμβαίνει και με τη Χελώνα, αφού οι εντολές αλλάζουν τη θέση και τη διεύθυνσή της σε σχέση με την αμέσως προηγούμενη θέση και διεύθυνση που είχε. Όμως η Χελώνα δέχεται και εντολές που προσδιορίζουν τη θέση της μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων, αλλά και πολικών συντεταγμένων

(Κυνηγός, 2006). Επίσης η Χελώνα με κατάλληλες εντολές μετακινείται και κατασκευάζει σχήματα στο επίπεδο, που διατηρούν τις ιδιότητες του Ευκλείδειου επιπέδου, άρα εμπεριέχει και το σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έτσι, η Γεωμετρία της Χελώνας συνδυάζει τρία γεωμετρικά συστήματα. Τη Διαφορική, την Αναλυτική και την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ποια είναι όμως η σχέση προγραμματισμού-«κάνω μαθηματικά» στο γνωστικό πλαίσιο της δημιουργίας προοσωπικών νοημάτων και γενικεύσεων; Ο προγραμματισμός στην Logo, η οποία όπως είπαμε συντακτικά πλησιάζει το μαθηματικό φρομαλισμό, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν τις μαθηματικές ιδέες τους με χρήση συμβόλων, και να τις εκτελέσουν άμεσα, συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με αυτό που περίμεναν, να ομαδοποιήσουν ένα σύνολο ιδεών και να το χρησιμοποιήσουν ως αντικείμενο. Τα **σύμβολα** που χρησιμοποιούν μπορεί να έχουν **αλγεβρική υπόσταση**, όπως ένας αριθμός που εκφράζει γωνία στρόφης, ή μια μεταβλητή που εκφράζει μήκος. Έτσι τα μαθηματικά νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές παίρνουν **συμβολική μορφή-έκφραση μέσω της Logo** και γραφική μέσω του ίχνους της Χελώνας. Με αυτό τον τρόπο, δηλαδή με την εκτέλεση μιας συμβολικής έκφρασης παράγεται άμεση **γραφική ανατροφοδότηση** των ιδεών (Κυνηγός, 2006), άρα και ευκαιρίες για αναστοχασμό και γενικεύσεις μέσα στο περικείμενο της δραστηριότητας. Παρακάτω (Εικόνα 19 και Εικόνα 20) φαίνεται η συμβολική έκφραση και το γραφικό αποτέλεσμα μιας καμπύλης.



Εικόνα 19: Η αρχική θέση της Χελώνας και η τελική θέση μετά την εκτέλεση της διαδικασίας «βήμα»



Εικόνα 20: Ο μαθητής έχει μάθει στη Χελώνα τη διαδικασία «βήμα». Τώρα τη χρησιμοποιεί μέσα σε μια άλλη διαδικασία, «καμπύλη», βάζοντας τη χελώνα να την επαναλάβει 10 φορές.

Συνοψίζοντας, κεντρικό χαρακτηριστικό των λογισμικών συμβολικής έκφρασης είναι να μεταφέρουν την εκφραστική δυνατότητα του προγραμματισμού στην διερεύνηση μαθηματικών ιδεών. Με αυτό τον τρόπο έχουμε σύνδεση τριών ειδών αναπαραστάσεων για τα αντικείμενα. Συμβολικού, προγραμματιστικού και γραφικού. Η σύνδεση επιτυγχάνεται μέσω του συντονισμού των κινήσεων της Χελώνας με το σώμα του ίδιου του μαθητή που χρησιμοποιεί το αντίστοιχο εργαλείο.

Στο περιβάλλον της Γεωμετρίας της Χελώνας οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να βρουν σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών στοιχείων των σχημάτων που εκφράζονται με μεταβλητές, αλλά και οι ερευνητές να μελετήσουν τη γνωστική διαδικασία με την οποία οι μαθητές ανακαλύπτουν τις μαθηματικές ιδιότητες που κρύβονται κάτω από χωρικές αναπαραστάσεις ή συμβολικές εκφράσεις (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006; Hoyles & Noss, 1987; Edwards, 1994). Επίσης με κατάλληλα σχεδιασμένους μικρόκοσμους μπορεί να μελετηθεί η σύνδεση που κατασκευάζουν οι μαθητές μεταξύ διαφορικών, ευκλείδειων και καρτεσιανών γεωμετρικών συστημάτων (Kynigos, 1988; 1989; 1991). Η Γεωμετρία της Χελώνας είναι το πρώτο παράδειγμα ενός μικρόκοσμου με χρήση Logo που παρήγαγε πληθώρα αποτελεσμάτων εκπαιδευτικής έρευνας, σχετικών με την κατασκευή γεωμετρικών νοημάτων από τους μαθητές (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Σήμερα, οι μικρόκοσμοι είναι το βασικό μέσο που χρησιμοποιεί Logo, για την εφαρμογή (όχι μόνο στην έρευνα, αλλά και στη διδακτική πράξη) ιδεών όπως η δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές μέσω επικοινωνίας και στο πλαίσιο του constructionism.

2.4.5 Ο Χελωνόκοσμος

Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (http://etl.ppp.uoa.gr/index-1.htm) έχει σχεδιαστεί το **Αβάκιο** (Kynigos, Koutlis, & Hatzilacos, 1997), ένα συγγραφικό πακέτο για τη δημιουργία εκπαιδευτικού λογισμικού, που απευθύνεται σε χρήστες καταρτισμένους στην πληροφορική ή απλώς προγραμματιστικά εγγράμματους (Κυνηγός, 2006) και τους δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουν τους δικούς τους μικρόκοσμους. Τα συμπεράσματα της εκπαιδευτικής έρευνας σε συνθήκες πραγματικής τάξης (Κυνηγός, 2006) έγιναν αφορμή για τη δημιουργία του **Χελωνόκοσμου**, που βασίζεται στο πλαίσιο του Αβακίου. Πρόκειται για έναν μικρόκοσμο που λειτουργεί σαν περιβάλλον δημιουργίας πιο εξειδικευμένων μικρόκοσμων και συνδυάζει τις δυνατότητες ενός

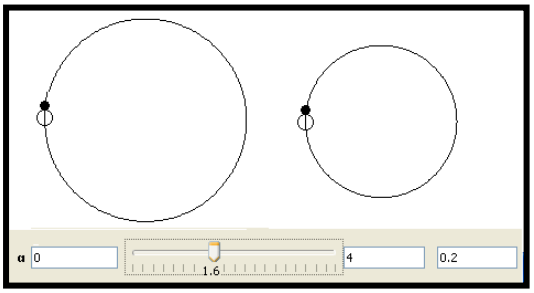
εργαλείου συμβολικής έκφρασης με το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων (Kynigos, 2001).

Τα πρώτα χρόνια που τα Logo προγραμματιστικά εργαλεία Γεωμετρίας της Χελώνας χρησιμοποιήθηκαν, η δυνατότητα του δυναμικού χειρισμού δεν υπήρχε (Abelson & DiSessa, 1981) και σαν αποτέλεσμα δε δόθηκε τόσο μεγάλη προσοχή στη σημασία της γραφικής αναπαράστασης (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006), που έμενε να συμπληρώνει την εικόνα πίσω από τις νέες δυνατότητες του συντάκτη της Logo, του προγραμματισμού και της κατασκευής μαθηματικών νοημάτων μέσα από τη συμβολική έκφραση και τις χωρικές αναπαραστάσεις σε συνδυασμό με τη χρήση της Χελώνας (Papert, 1980; Noss & Hoyles, 1996). Στα μέσα της δεκαετίας του ‘90 ο Papert, φέρνοντας στο προσκήνιο τη θεωρία του constructionism στη μαθηματική παιδεία, ανέδειξε την πλευρά της δόμησης της γνώσης μέσα από εμπλοκή του μαθητή με δυναμικά μεταβαλλόμενες κατασκευές (Kafai & Resnick, 1996) κι όχι στατικές, ώστε να μπει ο μαθητής σε έναν, προσωπικό διάλογο με αυτές.

```
για κύκλο :α
επανάλαβε 360 [μπροστά :α δ 1]
τέλος

κύκλο 2
```

Εικόνα 21: Σύνολο εντολών Logo που εκφράζει συμβολικά έναν γενικευμένο κύκλο.



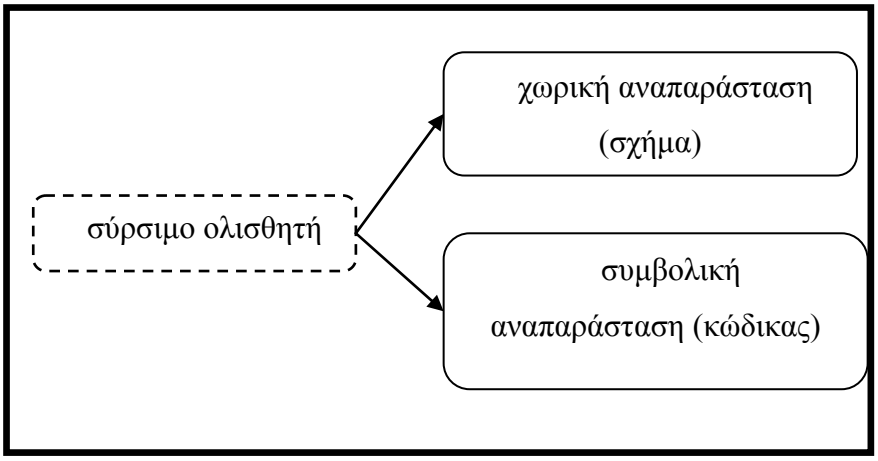
Εικόνα 22: Με χρήση του ολισθητή που αφορά τη μεταβλητή α, παίρνουμε στιγμιότυπα του γενικευμένου κύκλου. Η συμβολική έκφραση αντιστοιχεί στο γενικευμένο κύκλο κι όχι σε στιγμιότυπο.

Στην έρευνα, είναι καταγεγραμμένη η άποψη ότι ο μαθηματικός φορμαλισμός είναι ένα ισχυρό αναπαραστασιακό εργαλείο για μαθηματικούς, ενώ για τους μαθητές συχνά δεν έχει νόημα (Dubinsky, 2000). Η άποψη αυτή ενισχύθηκε από την άφιξη των DGEs που οδηγούσαν σε μαθηματικές έννοιες μέσα από το δυναμικό χειρισμό, πολλές φορές παρακάμπτοντας τον φορμαλισμό (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Έρευνες που εστιάζουν στην δημιουργία νοημάτων και γίνονται με μικρόκοσμους συμβολικής έκφρασης μέσω γλώσσας προγραμματισμού φαίνεται να

διαχωρίζονται καθαρά από αυτές που αφορούν το δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων (Κυνηγός, 2006; Arzarello, Micheletti, Olivero, & Robutti, 1998). Από την άλλη πλευρά, οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να δώσουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν με άλλο τρόπο το **φορμαλισμό**, ώστε **η χρήση του να έχει νόημα** για αυτούς (DiSessa, 2000; Dubinsky, 2000). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με εργαλεία όπως ο Χελωνόκοσμος, που συνδυάζουν τη συμβολική έκφραση με το δυναμικό χειρισμό (Kynigos & Psycharis, 2003). Σύμφωνα με τον Κυνηγό (2006, σ. 109):

> Ο σκοπός δεν είναι να παρακάμψουμε το φορμαλισμό μέσω δυναμικού χειρισμού. Είναι να συγκεράσουμε τις δύο αυτές αναπαραστάσεις με **αλληλοεξαρτώμενο και δυναμικό** τρόπο, ώστε οι μαθητές να χρησιμοποιούν και τις δύο παράλληλα για να κάνουν γεωμετρία και άλγεβρα.

Με την εισαγωγή του δυναμικού χειρισμού (που υπάρχει και στο Χελωνόκοσμο) ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να αντιστοιχίσει ένα συμβολικά εκπεφρασμένο γεωμετρικό αντικείμενο σε ένα σύνολο διαγραμμάτων που δυναμικά να γίνεται η μετάβαση από το ένα στο άλλο και όχι με ένα στατικό (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Δηλαδή το σύνολο των εντολών που εκφράζει συμβολικά έναν κύκλο με μια μεταβλητή στη θέση της ακτίνας (Εικόνα 21) αντιστοιχεί σε ένα σετ από σχέδια κύκλων, δηλαδή σε μια κλάση αντικειμένων (Εικόνα 22). Η φύση του συρσίματος στο Χελωνόκοσμο διαφέρει από ένα DGE. Εδώ αντικείμενο δυναμικού χειρισμού δεν είναι κάποιο σημείο του σχήματος, ένα χωρικό χαρακτηριστικό του, αλλά μια μεταβλητή του κώδικα που κατασκευάζει το σχήμα. Έτσι, ο δυναμικός χειρισμός επηρεάζει και τις δύο αναπαραστάσεις του γεωμετρικού αντικειμένου: Την συμβολική και τη χωρική (Εικόνα 23).



Εικόνα 23: Πώς λειτουργεί ο δυναμικός χειρισμός στο Χελωνόκοσμο.

Η διαπλοκή μαθηματικού φορμαλισμού και γραφικής αναπαράστασης είναι ένα χαρακτηριστικό στοιχείο της Γεωμετρίας, που κάνει αυτό το γνωστικό αντικείμενο μοναδικό στις ευκαιρίες που δίνει στο μαθητή να νιώσει εγγενώς (αλλά όχι αμέσως) την ανάγκη της γενίκευσης και της χρήσης γενικευμένων γεωμετρικών αντικειμένων (Κυνηγός, 2006). Αυτή είναι η μαθησιακή αρχή που υπεισέρχεται στην εισαγωγή του δυναμικού χειρισμού στο Χελωνόκοσμο και που παρέχει δυνατότητες για δημιουργία μαθηματικών νοημάτων από το μαθητή.

2.4.6 MaLT (MachineLab-based 3D Turtleworlds)

Περιγραφή

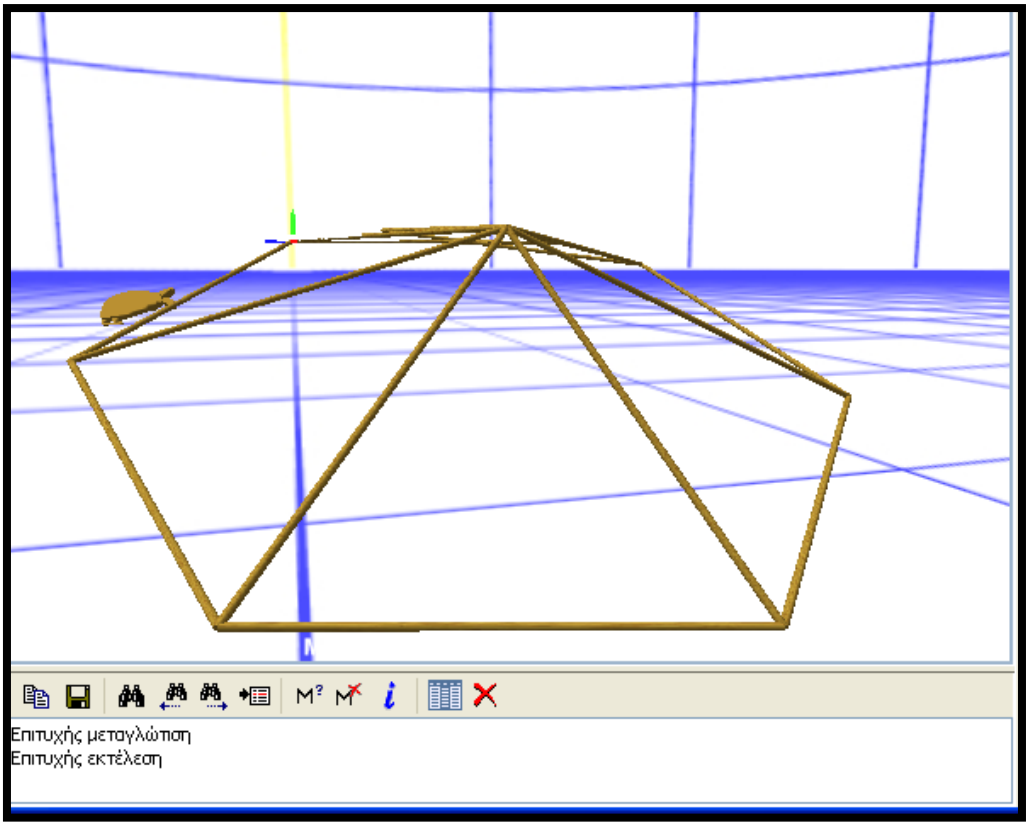
Ένας μικρόκοσμος μπορεί να είναι ένα εύπλαστο ψηφιακό περιβάλλον, που χαρακτηρίζεται από ένα εμβαπτισμένο γνωστικό πεδίο (π.χ. Γεωμετρία) το οποίο συνεπάγεται τη δημιουργία ενός κόσμου με κάποιους κανόνες και επιδέχεται **διερεύνησης** και **χειρισμού**. Μέσα σε αυτόν οι μαθητές μπορούν να ψάξουν εναλλακτικές, να πειραματιστούν να κάνουν υποθέσεις, να τις τεστάρουν και να ανακαλύψουν αλήθειες που ισχύουν στα πλαίσια αυτού του κόσμου (Kynigos, 2007b). Αυτή είναι η προσέγγιση του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (ETL) του Πανεπιστημίου Αθηνών στην κατασκευή και τη χρήση ενός μικρόκοσμου. Το είδος του χειρισμού που επιδέχονται τα στοιχεία του μικρόκοσμου, σχετίζεται με το γνωστικό πεδίο που είναι υπό διαπραγμάτευση και το σχεδιασμό του δασκάλου ή του ερευνητή.

Ο μικρόκοσμος MaLT[10] (MacineLab-based 3D Turtleworlds),ένα προϊόν του ETL, είναι ένα περιβάλλον όπου ο χρήστης μπορεί να αναπαραστήσει τρισδιάστατα αντικείμενα, είτε χωρικά (Εικόνα 24), είτε συμβολικά με διαδικασίες σε γλώσσα Logo (Εικόνα 25). Επίσης επιτρέπει το δυναμικό χειρισμό με χρήση ολισθητών (Εικόνα 25), όπως συμβαίνει και στο Χελωνόκοσμο. Για το χρήστη φαίνεται να είναι ουσιαστικά ένας «τρισδιάστατος Χελωνόκοσμος», με την έννοια ότι οι χωρικές αναπαραστάσεις είναι αναπαραστάσεις 3D. Ο σχεδιασμός του έχει σκοπό να επεκτείνει την ιδέα του **προγραμματιστικού-δυναμικού χειρισμού** (Kynigos, 2004) από τις δύο στις τρεις διαστάσεις. Επιπρόσθετα, το MaLT δίνει τη δυνατότητα της πλοήγησης στον προσομοιωμένο 3D χώρο, που μαζί με το body-syntonicity χρήστη-χελώνας παράγει μια τρίτη κιναισθητική αναπαράσταση του τρισδιάστατου χώρου (Kynigos & Latsi, 2007).

Λειτουργικότητες του MaLT

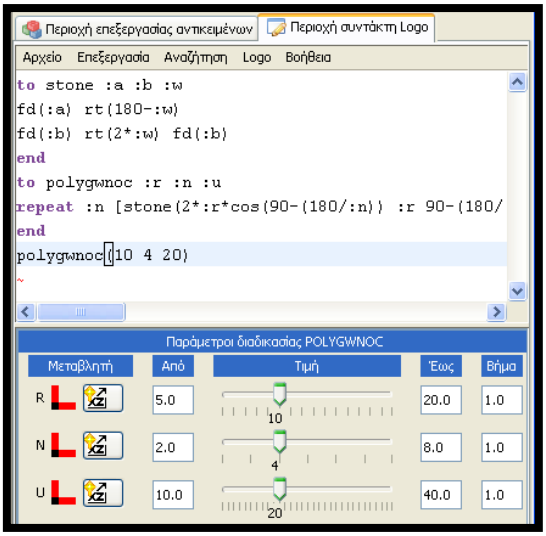
Οι λειτουργικότητες των ολισθητών είναι όμοιες με αυτές του Χελωνόκοσμου. Μια βασική διαφορά στη χρήση του MaLT είναι ότι η οπτική αναπαράσταση είναι 3D, άρα η παρατήρηση των μεταβολών σε αυτήν γίνεται πιο περίπλοκη. Η ύπαρξη τρισδιάστατης αναπαράστασης, ως προς τα εργαλεία, σημαίνει δύο βασικές διαφορές. Η πρώτη είναι ότι υπάρχουν εντολές Logo που δεν υπήρχαν στον Χελωνόκοσμο, ώστε η χελώνα να μπορεί να κινηθεί στο χώρο κι όχι μόνο στο επίπεδο. Η δεύτερη είναι η δυνατότητα αλλαγής οπτικής γωνίας στο χώρο. Με τη χρήση ενός εργαλείου (Εικόνα 26) που είναι οικείο σε παιδιά (ή ενήλικες) που παίζουν παιχνίδια σε η/υ με προσομοίωση πλοήγησης σε 3D περιβάλλον υπάρχει δυνατότητα των μαθητών να «δουν» το αντικείμενο από άλλη οπτική γωνία. Επίσης με χρήση τριών κουμπιών μπορούν (χωρίς να πλοηγηθούν) να δουν το αντικείμενο, από συγκεκριμένη οπτική γωνία.

[10] Σχεδιάστηκε στο πλαίσιο του έργου ReMath (Representing Mathematics with Digital Media, http://remath.cti.gr, 6th Framework Programme, Information Society Technologies)

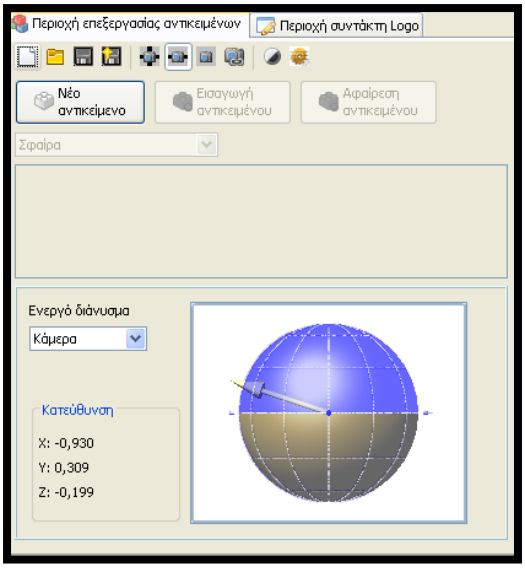


Εικόνα 24: Η χωρική αναπαράσταση του τρισδιάστατου αντικειμένου.

Η πλοήγηση στον προσομοιωμένο 3D χώρο του MaLT γίνεται ως εξής. Στο κάτω-δεξί μέρος της οθόνης υπάρχει ένα εργαλείο που απεικονίζει την προσομοίωση μιας σφαίρας με ένα διάνυσμα στο εσωτερικό της. Αυτό το διάνυσμα έχει ως αρχή το κέντρο της σφαίρας, ως διεύθυνση την ακτίνα της σφαίρας και το πέρας του βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Ο χρήστης, κρατώντας πατημένο το αριστερό κουμπί του ποντικιού και κουνώντας το ποντίκι, μπορεί να αλλάξει τη θέση του πέρατος του διανύσματος. Έτσι το διάνυσμα έχει πάντα ως αρχή το κέντρο της σφαίρας και το πέρας του μετακινείται πάνω στην επιφάνειά της.



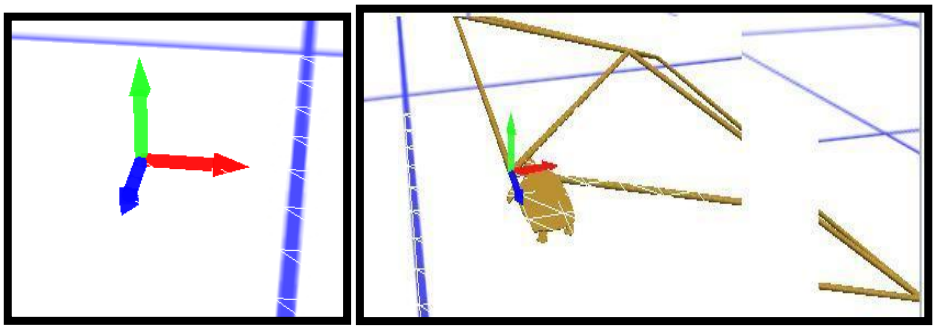
Εικόνα 25: Η συμβολική αναπαράσταση με Logo του αντικειμένου (επάνω) και οι ολισθητές με τους οποίους πετυχαίνουμε το δυναμικό χειρισμό του αντικειμένου.



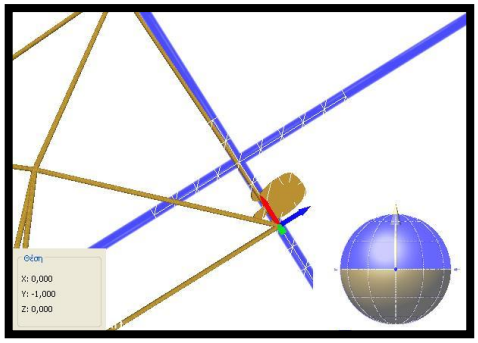
Εικόνα 26: Ένας τρόπος να γίνεται δυναμικός χειρισμός της οπτικής γωνίας (κάμερας) από την οποία βλέπουμε τη χωρική αναπαράσταση του αντικειμένου.

Η αντιστοιχία αυτού το μοντέλου με την προσομοίωση του 3D περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται η χελώνα είναι η παρακάτω:

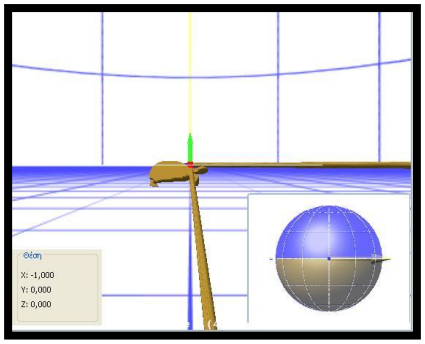
- Το κέντρο της σφαίρας είναι το σημείο εκκίνησης της Χελώνας.
- Το πέρας του διανύσματος είναι το σημείο που βρίσκεται η κάμερα. Άρα η κάμερα βρίσκεται πάντα στην επιφάνεια της σφαίρας.
- Η κατεύθυνση του βέλους είναι η αντίθετη της κατεύθυνσης προς την οποία «κοιτάει» η κάμερα. Έτσι αν το βέλος είναι κατακόρυφο, η κάμερα κοιτά το σημείο εκκίνησης της χελώνας από πάνω (Εικόνα 28).



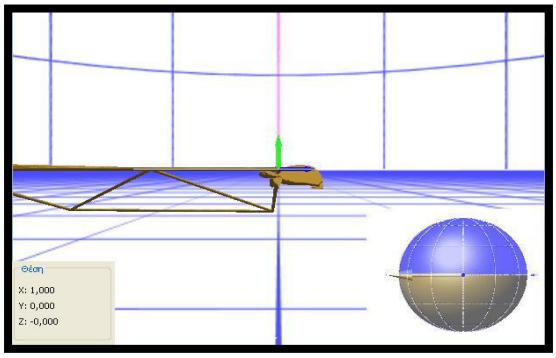
Εικόνα 27: Το σημείο εκκίνησης της Χελώνας είναι το σημείο τομής των τριών αξόνων (μπλέ - κόκκινο - πράσινο βέλος)



Εικόνα 28: Η κάμερα βρίσκεται πάνω από τη χελώνα, επί του άξονα yy΄.



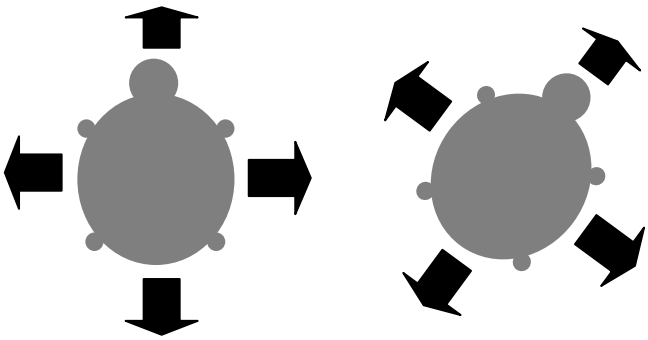
Εικόνα 29: Η κάμερα βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα Ox και με κατεύθυνσης προς το σημείο O.



Εικόνα 30: Η κάμερα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Ox΄ και με κατεύθυνση προς το O.

Επίσης στο σημείο εκκίνησης της χελώνας υπάρχουν τρία διανύσματα. Αυτά είναι τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν τη θετική φορά κάθε άξονα (xx΄, yy΄ και zz΄). Το κόκκινο είναι στον άξονα xx΄, είναι το πράσινο είναι στον άξονα yy΄ και το μπλε είναι στον άξονα zz΄. Αυτά τα διανύσματα έχουν το ρόλο τους και στην κίνηση της χελώνας εκτός από την πλοήγηση της κάμερας.

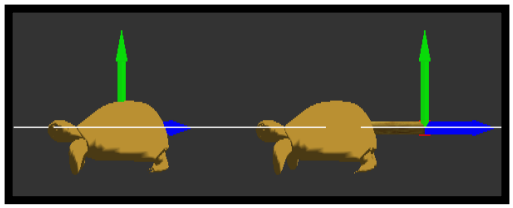
Οι κατευθύνσεις που ακολουθεί η χελώνα, στο Χελωνόκοσμο (δύο διαστάσεις) είναι ορισμένες σε σχέση με το σώμα της (Εικόνα 31). Για παράδειγμα η κατεύθυνση «μπροστά» ορίζεται σε σχέση με το που βρίσκεται το κεφάλι της κι όχι με βάση ένα σύστημα συντεταγμένων, πράγμα που σχετίζεται με το body-syntonicity του χρήστη με τη χελώνα.



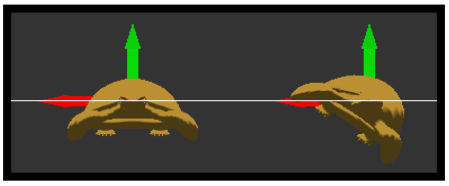
Εικόνα 31:Οι κινήσεις της Χελώνας ορίζονται σε σχέση με το σώμα της.

Στο MaLT η χελώνα κινείται σε ένα χώρο τριών διαστάσεων κι όχι στις δύο όπως στο Χελωνόκοσμο. Οι κινήσεις που μπορεί να κάνει η χελώνα είναι τέσσερις:

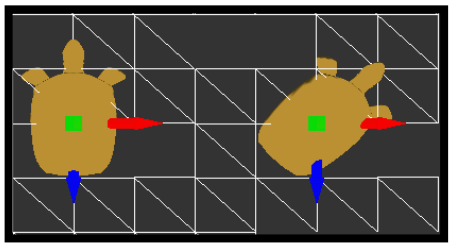
- Μπροστά-πίσω, όπου ως μπροστά ορίζεται η κατεύθυνση που δείχνει το κεφάλι της χελώνας. Οι αντίστοιχες εντολές Logo είναι fd-bk (forward-backwards) (Εικόνα 32).
- Δεξιά-αριστερά. Αν σκεφτεί κανείς ότι η χελώνα ορίζει ένα επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκεται, τότε ως αριστερά ορίζεται η στροφή της χελώνας, αριστερά της, χωρίς να αλλάζει αυτό το επίπεδο. Οι αντίστοιχες εντολές είναι rt-lt (right turn-left turn) (Εικόνα 33).
- Πάνω-κάτω: Πάνω είναι η κίνηση που κάνει η χελώνα για να ανέβει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς να μετακινείται. Δηλαδή είναι ένα σήκωμα του μπροστινού μέρους του σώματός της. Κάτω είναι μια αντίστοιχη βουτιά της χελώνας, σα να γέρνει το σώμα της μπροστά. Οι αντίστοιχες εντολές είναι up-dp (up pitch-down pitch) (Εικόνα 35).
- Δεξιά-αριστερή περιστροφή: Η χελώνα γέρνει το σώμα της στο πλάι σηκώνοντας τα δύο πλαϊνά πόδια της. Δεξιά περιστροφή σημαίνει ότι σηκώνει τα δύο δεξιά της πόδια και αριστερή περιστροφή σημαίνει ότι σηκώνει τα δύο αριστερά της πόδια. Οι αντίστοιχες εντολές είναι rr-lr (rightroll-leftroll(Εικόνα 34).



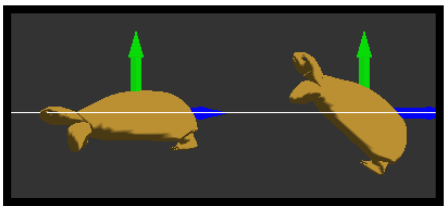
Εικόνα 32: Μπροστά.



Εικόνα 34: Δεξιά περιστροφή.



Εικόνα 33: Δεξιά.



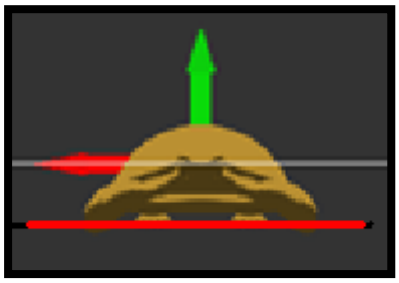
Εικόνα 35: Πάνω.

Ο δυναμικός χειρισμός συνδέεται με την ορισμένη από το χρήστη μεταβλητότητα.

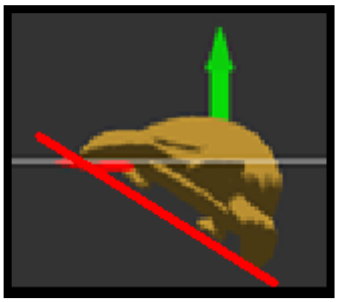
Μαθηματικό μοντέλο του MaLT

Ο χώρος που κινείται η χελώνα είναι προσομοίωση ενός χώρου τριών διαστάσεων με τρία σημεία φυγής. Αυτά βρίσκονται έτσι τοποθετημένα, ώστε να δίνεται η εντύπωση πώς βρισκόμαστε στο εσωτερικό ενός ημισφαιρίου. Τα δύο είναι σημεία του «ορίζοντα», που αντιστοιχεί στην περιφέρεια του μέγιστου κύκλου του ημισφαιρίου, ενώ το τρίτο σημείο βρίσκεται στον πόλο του ημισφαιρίου.

Η χελώνα, όπως και στον Χελωνόκοσμο είναι μια μαθηματική οντότητα, της οποίας η θέση καθορίζεται από την προηγούμενη, χαρακτηριστικό της Διαφορικής Γεωμετρίας. Ο χώρος στον οποίο κινείται είναι τρισδιάστατος, άρα έχει ένα εμφυτευμένο ορθοκανονικό σύστημα τριών συντεταγμένων. Σε κάθε νέα θέση της χελώνας, το σώμα της ορίζει ένα επίπεδο. Η δεξιά ή αριστερή στροφή της γωνίας γίνεται πάνω σε αυτό το επίπεδο (Εικόνα 36-Εικόνα 37). Αυτή η ιδιότητα της κίνησης της χελώνας έχει ενδιαφέρον από ερευνητικής πλευράς.



Εικόνα 36: Η χελώνα στην αρχική της θέση. Το επίπεδο κίνησης φαίνεται η με κόκκινο.



Εικόνα 37: Η χελώνα κάνει μια δεξιά περιστροφή και το επίπεδο κίνησης αλλάζει. Πλέον οποιαδήποτε άλλη κίνηση καθορίζεται με βάση τη νέα θέση της χελώνας και το νέο επίπεδο.

Σε αυτό το σημείο κάποιος μυημένος στον κόσμο της τρισδιάστατης αναλυτικής γεωμετρίας, θα έλεγε ότι εφόσον η χελώνα κινείται σε χώρο τριών διαστάσεων, θα μπορούσε με τρεις κινήσεις (π.χ. μπροστά-πίσω, δεξιά-αριστερά και πάνω-κάτω) να «πάει παντού», άρα ότι η τέταρτη κίνηση (στο παράδειγμα η δεξιά-αριστερή περιστροφή) είναι περιττή. Όμως η Χελώνα ως μαθηματική οντότητα μπορεί να κινηθεί με αυτό τον τρόπο. Αν έλειπε μια τέτοια κίνηση, πιθανώς θα περιόριζε τις δυνατότητες της χελώνας και θα επηρέαζε το body-syntonicity του χρήστη με αυτή και συνεπώς θα περιόριζε ή θα προκαταλάμβανε τα νοήματα που αυτός θα δημιουργούσε, για γεωμετρικά αντικείμενα π.χ. για την έννοια της γωνίας. Σε κάθε περίπτωση αυτό είναι ένα ερώτημα προς διερεύνηση.

Το MaLT ως εκπαιδευτικό λογισμικό και εργαλείο έρευνας

Η διδασκαλία της στερεομετρίας στο σχολείο περιορίζεται κατά κανόνα στην παρουσίαση τρισδιάστατων αντικειμένων, είτε αναπαραστάσεών τους. Οι μαθητές δεν έχουν τη δυνατότητα να περιεργαστούν αυτές τις χωρικές αναπαραστάσεις, να τα χειριστούν δυναμικά και να τα δουν σαν γενικευμένα γεωμετρικά αντικείμενα. Επίσης τα νοήματα που δημιουργούν είναι αντίστοιχα των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούν και πλαισιοθετημένα από τη διδασκαλία αυτής της μορφής.

Όπως ήδη προανέφερα οι αναπαραστάσεις στο MaLT είναι τριών μορφών (Kynigos & Latsi, 2007).

- Η συμβολική έκφραση γεωμετρικών αντικειμένων και ιδιοτήτων μέσω της Logo.
- Η γραφική-χωρική αναπαράσταση στον προσομοιωμένο τρισδιάστο χώρο.
- Η κιναισθητική δραστηριότητα και η χρήση διάφορων και διαπλεκόμενων μεταξύ τους (πολλές φορές αντιφατικών) πλαισίων αναφοράς.

Ένα εργαλείο, όπως κι αν έχει σχεδιαστεί για να χρησιμοποιηθεί, δεν είναι απομονωμένο από τη χρήση του και δεν μπορεί κανείς να προεξοφλήσει πώς θα το χρησιμοποιήσει ένας μαθητής και τι νοήμα θα δώσει σε αυτό. Ένα εργαλείο **δεν είναι αυτοπροσδιοριζόμενο**, αλλά προσδιορίζεται μόνο σε σχέση με τη χρήση του από αυτόν ή αυτή που θα το χρησιμοποιήσει (Mariotti, 2001). Έτσι, ενώ ο σχεδιασμός των εργαλείων του MaLT αιτιολογείται από την ενσωμάτωση λειτουργικοτήτων και πρακτικών άλλων λογισμικών που έχουν σχεδιαστεί και χρησιμοποιηθεί από τους ίδιους ειδικούς (Kynigos & Latsi, 2006), η νοηματοδότηση τους θα γίνει από τους μαθητές που θα τα χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια των πειραμάτων.

Οι γεωμετρικές κατασκευές στο MaLT και ο δυναμικός χειρισμός τους μπορεί να φέρει στο προσκήνιο θέματα που αφορούν τη μαθηματική φύση των τρισδιάστατων αντικειμένων και να δείξει κατά πόσο η διαδραστικότητα, ο δυναμικός χειρισμός και ο πειραματισμός σε ένα τέτοιο μικρόκοσμο προσομοίωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πολυεργαλείο για να αναπτυχθεί η μαθηματικά καθοδηγούμενη πλοήγηση στο χώρο, ο προσανατολισμός και ο τρόπος που ένας μαθητής αντιλαμβάνεται το χώρο (Kynigos & Latsi, 2007). Με τη χρήση της Logo οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν συμβολικά χωρικές έννοιες και να αναθεωρήσουν τις ήδη γνωστές τους, ώστε να γίνουν «κατανοητές» στη χελώνα. Ο δυναμικός χειρισμός ευνοεί την δημιουργία

εικασιών για σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και σταθερών στοιχείων των σχημάτων και οδηγεί στην ανάγκη για γενίκευση.

Παρόλο που η προσομοίωση του τρισδιάστατου χώρου είναι πιο κοντά στο χώρο που ζούμε, παρά ο 2D χώρος του Χελωνόκοσμου, η έρευνα, όσο αφορά το κιναισθητικό πλαίσιο αναφοράς του MaLT, έχει δείξει ότι παρατηρούνται συγχύσεις και η διαδικασία του body-syntonicity δεν είναι τόσο ξεκάθαρη όσο στο Χελωνόκοσμο (Kynigos & Latsi, 2007). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το περπάτημα ως καθημερινή εμπειρία γίνεται συνήθως **με όρους «σταθερού» επιπέδου**, σε αντίθεση με τη χελώνα που το επίπεδο κίνησης αλλάζει, ανάλογα με τις κινήσεις που έχουν προηγηθεί. Η διερεύνηση του πώς συντονίζεται το σώμα του χρήστη με το σώμα της χελώνας είναι ένα ενδιαφέρον ερευνητικό ερώτημα.

Το περιβάλλον του MaLT παρέχει ερευνητικές και διδακτικές ευκαιρίες σχετικές με την πλοήγηση στο χώρο, την νοητική αναπαράσταση του χώρου, ή τη χρήση από τους μαθητές διαφορετικών **πλαισίων αναφοράς** (π.χ. πλαίσιο οχήματος, πλαίσιο κεφαλιού χελώνας ή εξωγενές πλαίσιο) (Wickens, Vincow, & Yeh, 2005) σε σχέση με το body-syntonicity με τη χελώνα και μαθηματικού φορμαλισμού. Τα διαφορετικά πλαίσια αναφοράς αυτά, όπως θα αναλύσω παρακάτω, παραθέτοντας σχετικές πηγές, μπορεί να εμπλέκονται το ένα με το άλλο, αλλά μπορεί και να συνδυάζονται για να περιγράψει ένας μαθητής την κίνηση της χελώνας ή για να πετύχει μια επιθυμητή διαδρομή της μέσω εντολών (Kynigos & Latsi, 2007).

2.5. Κοινωνικές αλληλεπιδράσεις

2.5.1 Κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες

Η θεωρία των κοινωνικο-μαθηματικών προτύπων και δημιουργία νοημάτων

Οι Piaget και Vygotsky αν και τόνισαν τη σημασία της επίδρασης του περιβάλλοντος στη μαθησιακή διαδικασία, όπως και την αλληλεπίδραση του ατόμου με αυτό, δεν επικεντρώνονται σε μια θεωρία για τη μάθηση μέσω δράσης σε ομάδες και επικοινωνίας με συνεργάτες σε συγκεκριμένο χωροχρονικό πλαίσιο (Κυνηγός, 2006). Έτσι, αν θέλουμε να μελετήσουμε τους παράγοντες που επηρεάζουν τη δημιουργία νοήματων και τις πρακτικές εντός τέτοιων ομάδων, ο απλός συγκερασμός

της θεωρίας δόμησης της γνώσης και των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων, σαν θεωρητικό πλαίσιο, δεν μπορεί να φτάσει πολύ μακριά.

Η θεωρία των **κοινωνικο-μαθηματικών νορμών** (sociomathematical norms) (Yackel & Cobb, 1996) πηγάζει από το θεωρητικό πλαίσιο των συμβολικών αλληλεπιδράσεων (symbolic interactionism), μιας θεωρίας που ερμηνεύει την αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων μέσα στο κοινωνικό σύνολο και διαμέσου του νοήματος των συμβόλων (Blumer, 1969). Οι Yackel και Cobb θέτουν ως προτεραιότητά τους να περιγράψουν τον τρόπο που διαμορφώνεται μαθηματική συνείδηση και αξίες σε μια τάξη, ερμηνεύοντας τα συμβάντα μέσα σε αυτή.

Μια βασική αρχή της θεωρίας αυτής είναι ότι οι πολιτισμικές και κοινωνικές διαδικασίες συμπληρώνουν και ολοκληρώνουν τη μαθηματική δραστηριότητα (Voigt, 1995). Το να δραστηριοποιείται κανείς μαθηματικά και να συμμετέχει σε ομαδικές μαθηματικές δράσεις σημαίνει να μετέχει μιας κουλτούρας αντιμετώπισης προβλημάτων μέσω μαθηματικοποίησης. Πυρήνας της μάθησης μέσω συμμετοχής είναι «πότε να κάνω,τι» και «πώς να το κάνω» (Bauersfeld, 1993). Υπό αυτή την έννοια δεν μπορεί κανείς να διαχωρίσει τις διαδικασίες αιτιολόγησης επιχειρημάτων και κατανοήσης σε ατομικό επίπεδο, από τη συμμετοχή στη διαρκή ανακατασκευή των μαθηματικών νοημάτων[11] μέσα στην ομάδα. Τα νοήματα αυτά **εκλαμβάνονται** από την σχολική τάξη σα σύνολο **στο πλαίσιο που χρησιμοποιούνται και κοινοποιούνται** μέσα σε αυτή (Yackel & Cobb, 1996). Τα άτομα σαν μέλη αυτού του συνόλου, αναπτύσσουν και αναθεωρούν τα προσωπικά τους νοήματα καθώς συμμετάσχουν σε μια συνεχή διαπραγμάτευση.

Οι κοινωνικές νόρμες σε μια σχολική τάξη περιγράφουν κανονικότητες συμπεριφοράς της αλληλεπίδρασης των ατόμων. Οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες διαφέρουν από τις γενικές κοινωνικές νόρμες, αφού αναφέρονται συγκεκριμένα στη μαθηματική δραστηριότητα και όχι στη γενική δραστηριότητα μιας τάξης που κάνει μαθηματικά. Τα πρότυπα που διαμορφώνονται σε μια τάξη έχουν να κάνουν με συγκεκριμένους στόχους, θέσεις, υποθέσεις και ισχυρισμούς των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Όμως το περιεχόμενο είναι συγκεκριμένο, αφορά ένα μαθηματικό πρόβλημα, υπό διαπραγμάτευση. Για παράδειγμα η κοινή πεποίθηση των μαθητών ότι όταν λύνουν ένα πρόβλημα, ή αντιμετωπίζουν μια δραστηριότητα, θα συζητήσουν τις λύσεις τους, θα τις συγκρίνουν και στο τέλος θα τους δοθούν με τον έναν ή τον άλλο

[11] Τα μαθηματικά νοημάτα που κατασκευάζονται από την ομάδα έχουν εν μέρει διαφορετικά χαρακτηριστικά από τα προσωπικά νοήματα.

τρόπο κάποιες εξηγήσεις ή απαντήσεις για τη δουλειά τους είναι μια κοινωνική νόρμα (λαμβάνοντας υπόψη και τα εθνογραφικά χαρακτηριστικά σε κάθε περίπτωση). Από την αλλη η άποψη που υπάρχει για το «τι είναι μαθηματικά αποδεκτό» είναι μια κοινωνικο-μαθηματική νόρμα που διαμορφώνεται στην τάξη. Έτσι, οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που διαμορφώνονται και οι στόχοι και οι αντιλήψεις για το τι σημαίνει «κάνω μαθηματικά» και «μαθαίνω μαθηματικά» έχουν σύνδεση μεταξύ τους. Μια σύνδεση που δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητη από τα εθνογραφικά χαρκατηριστικά της ομάδας (Yackel & Cobb, 1996).

Άλλα κοινωνικο-μαθηματικά πρότυπα που διαμορφώνονται σε μια σχολική τάξη είναι η μορφή των **αποδεκτών επεξηγήσεων** που δίνονται και ο τρόπος που **κρίνονται** οι απόψεις που ακούγονται κατά τη διάρκεια της διερεύνησης. Ως ενέργειες οι επεξηγήσεις και οι κρίσεις είναι μορφές επικοινωνίας μεταξύ των μελών της τάξης κι έτσι τα αντίστοιχα πρότυπα συνδιαμορφώνονται όπως θα φανεί και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας.

Ο ρόλος του δασκάλου

Παραπάνω αναφέρθηκα στον εκπαιδευτικό σα μέλος μιας ομάδας. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε ένα τέτοιο περιβάλλον διερέυνησης προβλημάτων είναι περίπλοκος. Από τη μια, όπως και να έχει, αντιπροσωπεύει την «μαθηματική νομιμότητα» σε μια τάξη [12] (Voigt, 1995) και άρα οι αντιδράσεις του στις προτεινόμενες λύσεις των μαθητών είναι σίγουρα ενδείξεις για την μαθηματική αξία ή την αποτελεσματικότητα τους (Yackel & Cobb, 1996). Από την άλλη, πρέπει σα δάσκαλος να δημιουργήσει τις προϋποθέσεις για να γίνει συζήτηση μαθηματικού περιεχομένου στο πλαίσιο του προβλήματος, αλλά χωρίς να την επηρεάσει επιβάλλοντας τους κανόνες του τι είναι αποδεκτό και τι όχι, παρά μόνο συμμετέχοντας κι εκείνος ως συζητητής σε μια τέτοια διαδικασία.

2.5.2 Συνοριακά αντικείμενα (Boundary objects)

Κατά τη διάρκεια μια δραστηριότητας που γίνεται συνεργατικά, μια ομάδα ανθρώπων δουλεύει με ένα κοινό στόχο. Αυτός ο στόχος μπορεί να είναι είτε η κατασκευή ενός ιδεωδούς αντικειμένου, είτε η βελτίωση ενός ήδη υπάρχοντος αντικειμένου (Bereiter & Scardamalia, 2003), που είναι το επίκεντρο της

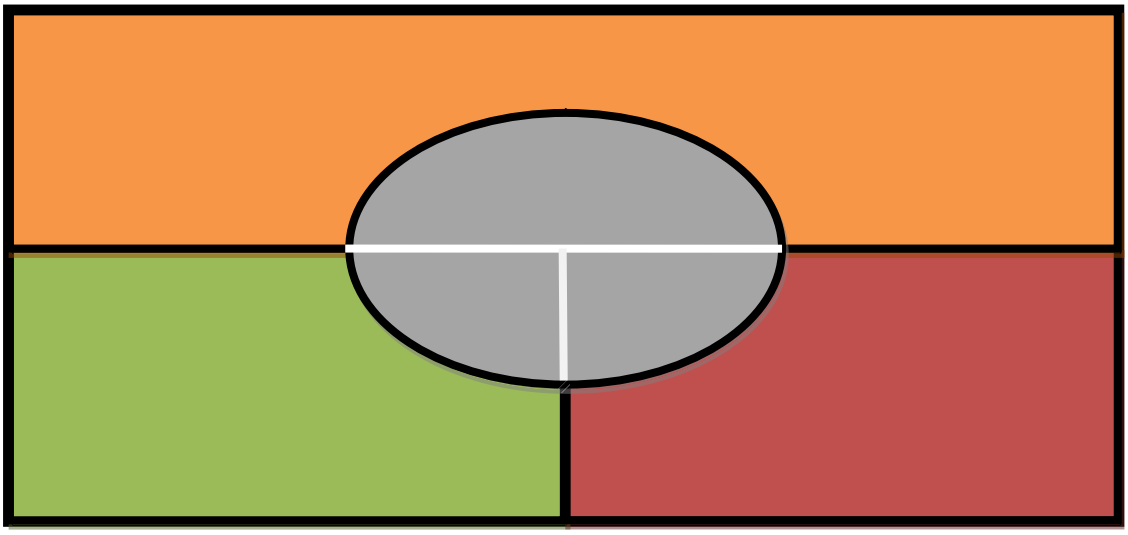
[12] Αυτό δε σημαίνει ότι λειτουργεί ως αυθεντία ή αριστίνδην γνώστης της μαθηματικής αλήθειας. Παρόλα αυτά είναι δύσκολο, να ξεχάσει ένας μαθητής ότι ο δάσκαλός του «γνωρίζει» τη λύση του προβλήματος ή έστω μία από τις λύσεις.

δραστηριότητας, αλλά ταυτόχρονα έχει το ρόλο ενός εργαλείου επικοινωνίας μεταξύ των ατόμων της ομάδας για τη διαμόρφωση μιας κοινής γλώσσας στο πλαίσιο της δραστηριότητάς τους. Αυτή η ιδέα περιγράφεται από τον όρο **συνοριακό αντικείμενο** (boundary object) (Cobb, McClain, Lamberg, & Dean, 2003; Star & Griesemer, 1989). Συνοριακά αντικείμενα είναι κατασκευές (artifacts) που βρίσκονται στα σημεία επαφής διαφόρων κοινωνικών σχημάτων έχουν αρχικά χαλαρή δομή, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν από πολλά άτομα ή ομάδες, αλλά όταν τις χρησιμοποιεί ένα άτομο η δομή τους γίνεται αρκετά συγκεκριμένη και συνεκτική (Star & Griesemer, 1907-1939). Τα συνοριακά αντικείμενα είναι μέσα μεταφοράς νοημάτων μεταξύ των μελών μιας κοινότητας, της οποίας είναι και δημιουργήματα. Μπορεί να είναι το επίκεντρο της δραστηριότητας της κοινότητας ή εργαλεία επικοινωνίας μεταξύ δύο κοινοτήτων που συνεργάζονται μεταξύ τους.

Ένας μικρόκοσμος είναι ένα εργαλείο με το οποίο ο χρήστης σκέφτεται καθώς εκφράζεται και καθώς το περιεργάζεται, με τις αλλαγές που επιφέρει στις λειτουργικότητές του. Ειδικά σε υπολογιστικά περιβάλλοντα που χρησιμοποιούν Logo οι μικρόκοσμοι έχουν πρωτεύοντα ρόλο. Σπανιότερα έχουν αντιμετωπιστεί σαν μέσα επικοινωνίας μεταξύ ατόμων ή ομάδων που ασχολούνται με αυτούς. Αυτό που είναι συνήθως αντικείμενο της έρευνας είναι ο μικρόκοσμος σαν εργαλείο διερευνητικής δραστηριότητας κι όχι η διερεύνηση που γίνεται από τα άτομα μιας κοινότητας με θέμα τις ίδιες τις λειτουργικότητες του μικρόκοσμου. Αυτή έχει ενδιαφέρον ως δραστηριότητα των ατόμων που προσπαθούν να χτίσουν κοινές αντιλήψεις των εννοιών στα πλαίσια του μικρόκοσμου με σκοπό να πετύχουν ένα κοινό στόχο. Μια τέτοια οπτική αναδεικνύει τον μικρόκοσμο σαν συνοριακό αντικείμενο.

Βλέποντας το μικρόκοσμο σαν ένα συνοριακό αντικείμενο έρχεται στο προσκήνιο η μάθηση μέσω σχεδιασμού (Healy & Kynigos, 2010). Ας σκεφτούμε δύο ή περισσότερες κοινότητες ανθρώπων που συνεργάζονται και χρησιμοποιούν κοινές κατασκευές, αντικείμενα και εργαλεία,σαν σχήματα με σύνορο μεταξύ τους, που είναι το μόνο μέρος που έρχονται σε επαφή (Εικόνα 38). Οι άνθρωποι που βρίσκονται εκατέρωθεν του συνόρου διαμορφώνουν τις δικές τους αντιλήψεις για το μικρόκοσμο ή για πτυχές του. Γι’ αυτό και η δομή του συνοριακού αντικειμένου-μικρόκοσμου είναι συνεκτική για το κάθε μέλος της κοινότητας. Όμως πάνω στο κοινό σύνορο δύο κοινοτήτων η δομή του συνοριακού αντικειμένου είναι πιο χαλαρή, αφού συνδιαμορφώνεται από τις δύο κοινότητες. Η συνδιαμόρφωση αυτή γίνεται μέσα από

διαδικασίες αμοιβαίας διαπραγμάτευσης και δημιουργίας νοημάτων, σαν μια νόρμα συμπεριφοράς που λαμβάνει χώρα εκατέρωθεν του συνόρου με τη μορφή κοινών πρακτικών από τις ομάδες και όχι σαν ρόλος για ένα άτομο (Hoyles, Noss, & Kent, 2004). Καταλυτικός είναι ο «από κοινού σχεδιασμός» (Kynigos, 2007b) στη διαδικασία της αμοιβαίας διαπραγμάτευσης και στη λειτουργία ενός αντικειμένου, ως συνοριακού.



Εικόνα 38:Τα χρωματιστά ορθογώνια είναι κοινότητες που έρχονται σε επαφή στο σύνορό τους. Το ελλειπτικό σχήμα είναι το πεδίο εφαρμογής του εργαλείου ενός μικρόκοσμου. Το εργαλείο αυτό δρά ως συνοριακό αντικείμενο στις άσπρες γραμμές όπου διαμορφώνεται κοινή γλώσσα και πρακτικές.

2.5.3 Συνεργατική μάθηση σε ψηφιακό περιβάλλον

Συνεργατική μάθηση

Βλέποντας το άτομο ως μέλος μιας ομάδας, τα νοήματα που δημιουργεί και οι πρακτικές του όχι μόνο επηρεάζονται από το περιβάλλον του, αλλά (πιο συγκεκριμένα) συνδιαμορφώνονται από την ομάδα και εκλαμβάνονται όπως χρησιμοποιούνται. Άρα μπορούμε να μιλάμε για νοήματα και πρακτικές της ομάδας. Η κατάσταση στην οποία τα άτομα σαν μια ομάδα προσπαθούν να **μάθουν κάτι μαζί** ή να μάθουν **πώς να μαθαίνουν μαζί** ονομάζεται **συνεργατική μάθηση** (Dillenbourg, 1999). Το αντικείμενο της μάθησης μπορεί να είναι η επίλυση ενός προβλήματος που η διάρκειά της μπορεί να είναι είτε μιας διδακτικής ώρας, είτε πολλών επαναλαμβανόμενων συναντήσεων. Η χρήση της φράσης «μαθαίνουν μαζί» είναι αρκετά περιεκτική. Μπορεί να σημαίνει, στον ίδιο χώρο, ή σε διαφορετικούς, επικοινωνώντας, για παράδειγμα μέσω υπολογιστών, σύγχρονα ή ασύγχρονα. Οι ομάδες των ατόμων μπορεί να διαφέρουν σε πλήθος (από δύο ως πολύ περισσότερα

μέλη). Έτσι, μιλώντας στο πλαίσιο της διδακτικής έρευνας τα παραπάνω χαρακτηρικά διαμορφώνουν την κλίμακα της έρευνας.

Αυτό που πρέπει να τονισθεί είναι ότι η συνεργασία στο πλαίσιο της συνεργατικής μάθησης δεν σημαίνει διαχωρισμό του προβλήματος σε βήματα και υποπροβλήματα με σκοπό το διαμοιρασμό εργασιών και αρμοδιοτήτων, ώστε το κάθε μέλος της ομάδας να δουλεύει ατομικά στο κομμάτι της δουλειάς που του έχει ανατεθεί. Η συνεργασία (cooperation) αυτής της μορφής δεν συνιστά συνεργατική μάθηση, αφού τα άτομα δεν μαθαίνουν μαζί, δουλεύοντας (collaboration). Αντίθετα στη συνεργατική μάθηση η συνεργασία (collaboration) εντοπίζεται σε διαπραγμάτευση απόψεων και κοινή χρήση νοημάτων (που τα ίδια τα μέλη της ομάδας δημιουργούν) για να λύσουν το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν (Roschelle & Teasley, 1995).

Συνεργατική μάθηση με χρήση ψηφιακών τεχνολογιών

Με τη χρήση υπολογιστών και διαδικτύου δίνονται δυνατότητες συνεργατικής μάθησης από απόσταση (μεταξύ των μελών της ομάδας), αλλά και ασύγχρονης επικοινωνίας. Έτσι, διαμορφώνεται το πλαίσιο της **συνεργατικής μάθησης σε ψηφιακό περιβάλλον** (computer-based collaborative learning: CSCL), ως διδακτική πρακτική, αλλά και ως μέθοδος έρευνας. Σαν ερευνητικό πεδίο έχει σαν αντικείμενο τη δημιουργία νοημάτων σαν κοινή δραστηριότητα των μελών μιας ομάδας, τις κοινωνικές πρακτικές που τη διέπουν και τους τρόπους που αυτές διαμεσολαβούνται από εργαλεία (artifacts) σχεδιασμένα για αυτό το σκοπό (Koschmann, 2002). Στόχος της κοινότητας των ερευνητών που ασχολούνται με αυτό το είδος έρευνας είναι ο συγκερασμός της χρήσης ψηφιακών τεχνολογιών και συνεργατικής μάθησης και οι προσπάθειες στην κατεύθυνση αυτή είναι συνεχώς εξελισσόμενες (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006). Έτσι, προϊόν αυτής της έρευνας είναι ο σχεδιασμός μέσων, εργαλείων, δραστηριοτήτων και περιβαλλόντων που εμπλουτίζουν αυτές τις πρακτικές δημιουργίας νοημάτων.

Όπως έχουμε προαναφέρει, σε ομάδες που δρουν σε περιβάλλοντα μάθησης, ιδιαίτερη σημασία για την ανάπτυξη κοινών νοημάτων και πρακτικών έχει το πρόβλημα το οποίο διαπραγματεύονται. Η διερευνητική φύση του προβλήματος είναι καταλυτική προς αυτή την κατεύθυνση. Έτσι, ο σχεδιασμός των μικρόκοσμων που θα απασχολήσουν τους μαθητές γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι δρασητριότητες να προωθούν τη διερεύνηση. Το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με το υπολογιστικό περιβάλλον, δηλαδή να υποστηρίζει διερευνητικές πρακτικές, αλλά και δυνατότητες

επικοινωνίας μεταξύ των μελών της ομάδας ή υποομάδων της, χωρίς να σημαίνει ότι τα μέλη θα επικοινωνούν μόνο μεταξύ των υπολογιστών.

Το υπολογιστικό περιβάλλον μέσω του οποίου αναπαρίσταται ο μικροκοσμός (ή το πρόβλημα) επηρεάζει, όπως έχει προαναφερθεί, τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές. Πώς όμως μπορούν να εντοπιστούν αυτά τα νοήματα; Εκφράζεται η άποψη (Stahl, 2006) ότι η διενέργεια pre και post tests σε μια έρευνα που γίνεται στο πλαίσιο συνεργατικής μάθησης δε δίνει πλήρη αποτελέσματα για τη δημιουργία νοημάτων, αφού τα νοήματα δημιουργούνται από την ομάδα κι όχι από το κάθε άτομο. Έτσι, οι ερευνητές μελετούν τις διαρθωμένες μορφές διαλόγου μεταξύ των ατόμων, προτάσσοντας μια διαλογική άποψη της συνεργασίας, σύμφωνα με την οποία η **γλώσσα** χρησιμοποιείται ως **κοινωνικός τρόπος σκέψης** (Mercer, 1996; Κυνηγός, 2006). Ειδικά όταν η μάθηση και η επικοινωνία υποστηρίζεται από υπολογιστές υπάρχουν διάλογοι με μηνύματα μεταξύ των συμμετεχόντων, παράλληλες ενέργειες που καταγράφονται και αναφορές σε προηγούμενες συζητήσεις που είχαν γίνει ή αποφάσεις που είχαν παρθεί από τα μέλη της ομάδας.

3. Τα ερευνητικά ερωτήματα

Εισαγωγή

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας ήταν ο τρόπος που οι μαθητές δημιουργούν νοήματα σαν άτομα, αλλά και σαν ομάδες, όταν δουλεύουν διερευνητικά σε προβλήματα με περιεχόμενο την έννοια της γωνίας και τις τριγωνομετρικές σχέσεις σε τρισδιάστατο χώρο. Ήδη έχω αναφέρει το πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος σχετικά με τις παραπάνω έννοιες. Αυτό βοήθησε στη διαμόρφωση πιο συγκεκριμένων ερευνητικών ερωτημάτων, αφού η έρευνα διεξήχθη σε σχολικό περιβάλλον. Επίσης έχω καθορίσει το θεωρητικό γνωστικό πλαίσιο της διδακτικής, στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο 4^{ο} κεφάλαιο θα διασαφηνίσω τα ερωτήματα που απασχόλησαν την έρευνα. Για να συμβεί αυτό όμως είναι απαραίτητο προηγουμένως να προβάλω το θεωρητικό πλαίσιο διδακτικής των μαθηματικών, επί των συγκεκριμένων εννοιών, της γωνίας, των τριγωνομετρικών σχέσεων, αλλά και της αντίληψης του τρισδιάστατου χώρου. Έτσι, παρακάτω αναφέρω αποτελέσματα ερευνών κυρίως με χρήση του MaLT, σχετικά με τις παραπάνω έννοιες και θεωρίες που έχουν διαμορφωθεί σχετικά με τη δημιουργία νοημάτων για τη γωνία και τις τριγωνομετρικές σχέσεις.

3.1. Η άποψη των ερευνητών της διδακτικής για τις έννοιες

3.1.1 Σχετικά με την έννοια της γωνίας

Ορισμοί καθηγητών και προσεγγίσεις μαθητών

Η έννοια της γωνίας είναι από τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες που συναντά ένας μαθητής στην επαφή του με τη Γεωμετρία, αλλά και τα μαθηματικά γενικότερα. Έχοντας αντιλήψεις για τη γωνία ήδη καλλιεργημένες από την καθημερινή του πρακτική, διαμορφώνει τα δικά του νοήματα. Παράλληλα στο πλαίσιο του μαθήματος, συναντά έρχεται σε επαφή με συγκεκριμένες διαδακτικές αντιλήψεις και επιλογές για την παρουσίαση της έννοιας κι έτσι διαμορφώνει τα δικά του νοήματα σχετικά με αυτή.

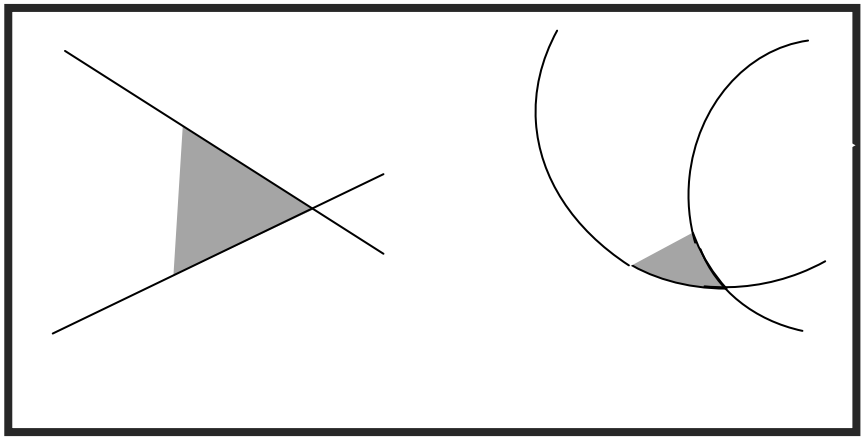
Σε εκπαιδευτικού περιεχομένου βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί τρεις τρόποι ορισμού της γωνίας (Mitchelmore & White, 2000):

- Ως ένα μέγεθος που μετρά τη στροφή μεταξύ δύο γραμμών που τέμνονται σε ένα σταθερό σημείο,
- Ως ένα ζεύγος ημιευθειών με κοινή αρχή και
- Ως η περιοχή που σχηματίζεται από την τομή δύο ημιεπιπέδων.

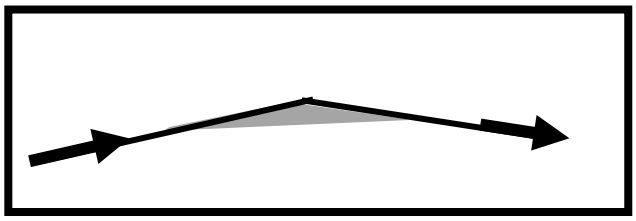
Ο πρώτος τρόπος υπονοεί την κίνηση των γραμμών ή της μιας από τις δύο και λέγεται **δυναμικός ορισμός** της γωνίας. Έτσι διακρίνεται από τους άλλους δύο που είναι **στατικοί ορισμοί**.

Σύμφωνα με του Henderson και Taimina (2005) η έννοια της γωνίας μπορεί να προσεγγιστεί από τους μαθητές με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

- Σαν **στατικό γεωμετρικό σχήμα** που δημιουργείται μεταξύ δύο γεωμετρικών αντικειμένων τα οποία αναπαριστούν κατεύθυνση-τροχιά κίνησης, όπως δύο ευθύγραμμα τμήματα (ευθείες τροχιές που συναντώνται) ή δύο τμήματα κύκλου (καμπύλες τροχιές που συναντώνται) (Εικόνα 39).
- Σαν **δυναμική** κι όχι στατική έννοια, που αντιστοιχεί στην ενσάρκωση της αλλαγής κατεύθυνσης ενός αντικειμένου, ως **στροφή** και ως **αποτέλεσμα** αυτής της στροφής.
- Σαν ένα μέγεθος που εκφράζεται από έναν αριθμό.



Εικόνα 39:Η γωνία σαν γεωμετρικό σχήμα, στην τομή δύο γραμμών που δηλώνουν κατεύθυνση.



Εικόνα 40: Η γωνία ως το αποτέλεσμα μιας στροφής, που εκφράζει αλλαγή κατεύθυνσης.Το βελάκι είναι το αντικείμενο που άλλαξε θέση.

Ο πρώτος τρόπος προσέγγισης ανταποκρίνεται στους στατικούς ορισμούς, ενώ ο δεύτερος στον δυναμικό. Παρόλο που ο δυναμικός (δεύτερος) τρόπος προσέγγισης της γωνίας βοηθά στην ενσάρκωση της έννοιας και είναι πιο αυθόρμητος για τους μαθητές (Freudenthal, 1983), στο σχολικό πρόγραμμα κυρίως υπονοείται στο παρασκήνιο των παραδειγμάτων, ενώ προτεύοντα ρόλο, όπως έχει προαναφερθεί έχει η παρουσίαση της στατικής προσέγγισης (πρώτος τρόπος).

Το ζητούμενο είναι η διαμόρφωση μιας πλήρους εικόνας για την έννοια της γωνίας, ώστε να ανατροφοδοτεί την κατασκευή ενός σωστού και περιεκτικού ορισμού από τους μαθητές, σαν τελικό στόχο της διδακτικής πορείας και της εμπλοκής τους με γωνιακές σχέσεις. Η χάραξη μιας τέτοιας πορείας περνάει από την προσπάθεια για να δοθούν απαντήσεις σε ερευνητικά ερωτήματα όπως:

- Ποια είναι τα νοήματα που διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια της γωνίας και πώς σχετίζονται αυτά με βάσει τις εμπειρίες τους;
- Ποια είναι η πορεία κατασκευής των νοημάτων αυτών και από τι επηρεάζεται;
- Ποιες είναι οι δυσκολίες όταν προσεγγίζουν τη γωνία με κάθε έναν από τους παραπάνω τρόπους;
- Με ποιους τρόπους εμπλοκής μπορούν αυτές οι δυσκολίες να γίνουν ευκαιρίες για δημιουργία πληρέστερων νοημάτων που οδηγούν στο μαθηματικό ορισμό;
- Πώς χρησιμοποιούν οι μαθητές σε μεγαλύτερες σχολικές τάξεις τον ορισμό και τα νοήματα που έχουν κατασκευάσει για τη γωνία σε διερεύνηση προβλημάτων με γωνιακες σχέσεις;

Στάδια κατασκευής νοημάτων για τη γωνία

Σύμφωνα με έρευνες (Clements, Battista, Samara, & Swaminathan, 1996; Mitchelmore & White, 2000), λόγω της πολυδιάστατης φύσης της γωνίας τα νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές για αυτήν ποικίλουν. Οι Mitchelmore και White (2000) διαφοροποιούν τα στάδια δημιουργίας νοημάτων για τη γωνία, ανάλογα με το βαθμό αφαίρεσης και γενίκευσης που διαφαίνεται (Εικόνα 41).

Με τον όρο **εγκαθιδρυμένα νοήματα για τη γωνία** (situated angle concepts), οι Mitchelmore και White αναφέρονται στο πρώτο στάδιο, αφού τα νοήματα σε αυτό πηγάζουν από τη νοητική κατηγοριοποίηση των καταστάσεων και εμπειριών των παιδιών, η οποία συμβαίνει κατά τη διαδικασία της εμπειρικής αφαίρεσης (βλέπε

σελίδα 36). Ένα τέτοιο νόημα παράγεται από παρόμοιες εμπειρίες ή δράσεις του ατόμου και σε παρόμοιο κοινωνικό πλαίσιο κάθε φορά. Για παράδειγμα η έννοια του λόφου ως αφαιρετικό αντικείμενο αντιπροσωπεύει όλα τα υψώματα που έχει ανέβει κανείς.

Σε ένα δεύτερο στάδιο αφαίρεσης δημιουργούνται τα **νοήματα περιεχομένου για τη γωνία** (contextual angle concepts), όπου τα παιδιά μαθαίνουν να χρησιμοποιούν όρους για να ονομάσουν κατηγορίες **καταστάσεων γωνιακού περιεχομένου** ή απλούστερα **γωνιακές καταστάσεις** της φύσης (physical angle contexts). Για παράδειγμα, με τη λέξη κλίση (slope) μπορεί να μιλούν αντιπροσωπευτικά για μια πληθώρα κεκλιμένων αντικειμένων, όπως ο λόφος, αλλά και η σκάλα που σε προηγούμενο στάδιο δε βρίσκονταν στην ίδια κατηγορία. Άλλες τέτοιες κατηγορίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά είναι η στροφή, η διασταύρωση, η γωνία ενός δωματίου ή τραπεζιού (Mitchelmore & White, 1998). Το περιεχόμενο των κατηγοριών των γωνιακών καταστάσεων αυτών διαμορφώνεται από τις κοινές γεωμετρικές δομές που εμφανίζονται στη φύση και από συμβάντα που παραπέμπουν σε γωνιακές σχέσεις. Για παράδειγμα η περιστροφή ως νόημα δημιουργείται από την όψη μιας πόρτας που ανοίγει κι όχι από ενέργεια του μαθητή να την ανοίξει. Σε αυτό το επίπεδο δεν υπάρχουν χαρακτηριστικά μαθηματικής έννοιας.

Αν και οι κατηγορίες γωνιακών καταστάσεων στη φύση είναι διακριτές για τους μαθητές, εν τούτοις βρίσκουν ομοιότητες μεταξύ τους. Οι Mitchelmore και White (2000; 1998) υποστηρίζουν ότι η αναγνώριση τέτοιων ομοιοτήτων είναι το πρώτο βήμα για το επόμενο στάδιο δημιουργίας νοημάτων για τη γωνία. Πρόκειται για μια διαδικασία, όπου οι μαθητές μέσω αναστοχαστικής αφαίρεσης (reflective abstraction) κατασκευάζουν νοήματα που αντιστοιχούν σε σύνολα γωνιακών καταστάσεων. Ένα τέτοιο σύνολο παρόμοιων γωνιακών καταστάσεων ονομάζεται **αφηρημένο νοηματικό πεδίο γωνίας** (abstract angle domain). Για παράδειγμα, η διασταύρωση, το λύγισμα, το σκύψιμο, η κλίση ανήκουν σε άλλο νοηματικό πεδίο από την περιστροφή. Το νόημα που προκύπτει από κάθε τέτοιο νοηματικό πεδίο (εφόσον προκύψει) ονομάζεται **αφηρημένο νόημα γωνίας** (abstract angle concept).

Η λεκτική ή νοητική περιγραφή ενός αφηρημένου νοήματος γίνεται μέσω του κοινού χαρακτηριστικού που υπάρχει μεταξύ των νοητικών καταστάσεων του ίδιου αφηρημένου νοηματικού πεδίου. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι «η γωνία ως κορυφή-σημείο» και «η γωνία ως γραμμή με κλίση». Το πιο κοινό χαρακτηριστικό (άρα και αφηρημένο νόημα) που εμφανίζεται είναι «οι δύο γραμμές που συναντώνται σε ένα

σημείο». Αυτό ονομάζεται **τυπικό νόημα** για τη γωνία (standard angle concept) και το νοηματικό πεδίο (abstract angle domain) που περιγράφει καλείται **τυπικό νοηματικό** πεδίο (standard angle concept) για τη γωνία. Ο λόγος που δίνεται έμφαση σε αυτό το νόημα είναι ότι συσχετίζει πολλές γωνιακές καταστάσεις και είναι ό,τι πιο γενικό μπορεί να ειπωθεί σαν νοητική περιγραφή για όλες αυτές. Για παράδειγμα, οι δύο γραμμές που φτιάχνουν τη γωνία μπορεί σε άλλη γωνιακή κατάσταση να είναι ευθείες, σε άλλη καμπύλες και σε άλλη να είναι νοητές προεκτάσεις γραμμών. Είναι όμως πάντα γραμμές. Επίσης το άνοιγμα μεταξύ των δύο γραμμών αυτών μπορεί να δείχνει στροφή, οξύτητα ενός μυτερού αντικειμένου κτλ, αλλά πάντα υπάρχει μια σχέση μεταξύ αυτών των χαρακτηριστικών. Σαν επόμενο (τέταρτο) στάδιο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η κατασκευή της τυπικής μαθηματικής έννοιας της γωνίας.

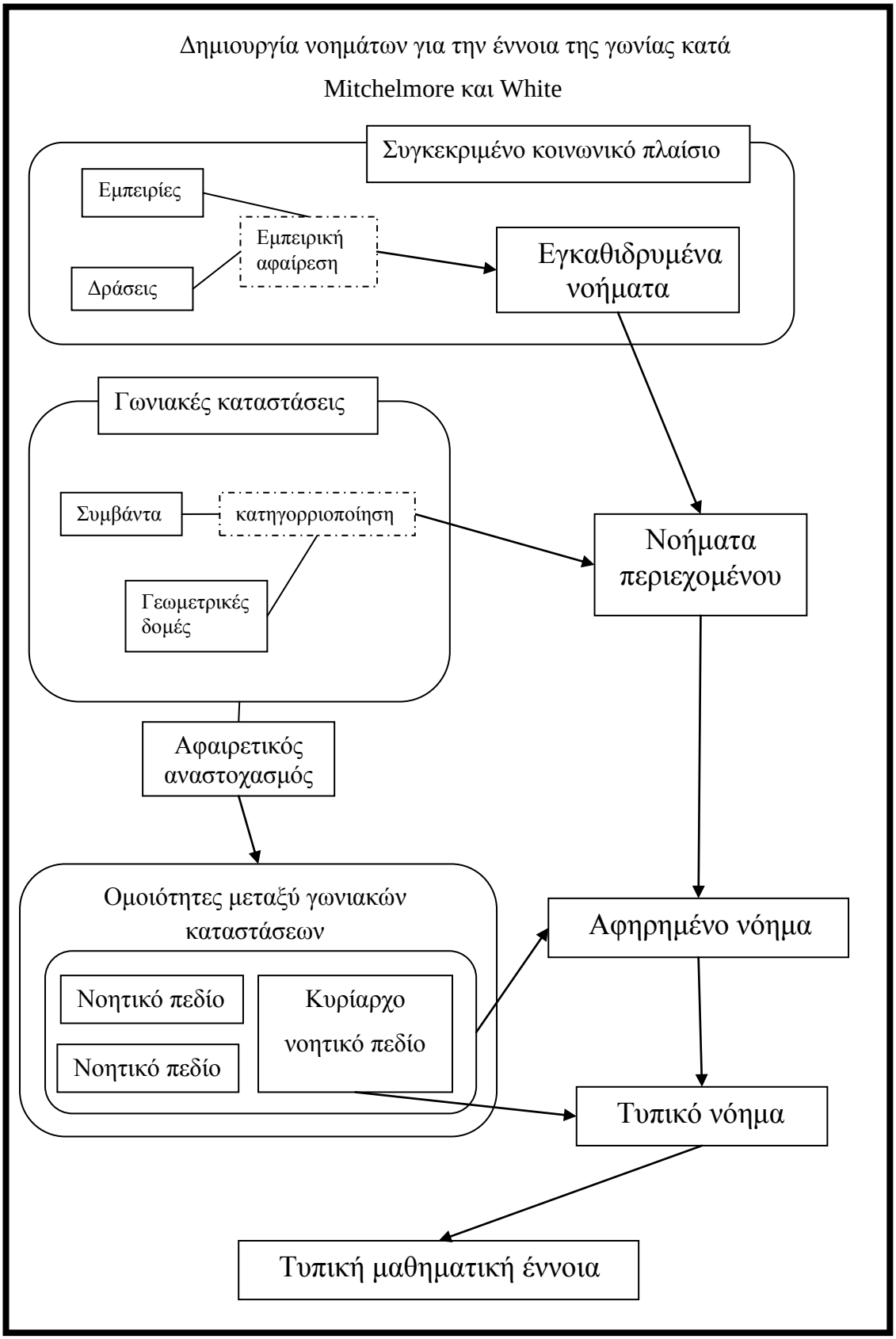
Οι προηγούμενοι ορισμοί για τη γωνία (βλέπε σελίδα 83), αντιστοιχούν άμεσα σε καταστάσεις διαφορετικού γωνιακού περιεχομένου. Ο δυναμικός ορισμός υπονοεί τη στροφή, ενώ οι δύο στατικοί ορισμοί βασίζονται στο πρότυπο της διασταύρωσης και της γωνίας σε ένα επίεδο σχήμα (με τη σειρά που αναφέρονται). Εδώ φαίνεται η σημασία του τυπικού νοήματος. Ακριβώς επειδή και οι τρεις ορισμοί ενσωματώνουν το τυπικό νόημα της γωνίας, γι' αυτό μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλες γωνιακές καταστάσεις, από αυτές των προτύπων τους (Mitchelmore & White, 2000). Αν και το τυπικό νόημα της γωνίας δημιουργείται από τους μαθητές και σε μικρές ηλικίες (δευτέρα δημοτικού) αναγνωρίζεται σε περιορισμένες περιπτώσεις γωνιακών καταστάσεων και συνηθέστερα όταν και οι δύο πλευρές της γωνίας είναι ορατές. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται κατάλληλη βοήθεια, ώστε να αναγνωρίσουν αυτό το νόημα σε καταστάσεις όπως στροφή, κλίση (που έχουν μεγάλη σημασία για τα μαθηματικά του Γυμνασίου) ή σε καταστάσεις με άλλο περιεχόμενο.

Ένα σημαντικό ερώτημα είναι ποια μορφή πρέπει να έχει αυτή η παρέμβαση του δασκάλου, ώστε οι μαθητές να ενοποιήσουν αυτές τις προσεγγίσεις για τη γωνία που βασίζονται σε διαφορετικά γωνιακά πρότυπα και να δημιουργήσουν ένα πρότυπο για αυτή την έννοια, κάτι που είναι το τελευταίο βήμα για την μαθηματικοποίησή της. Μήπως είναι δύσκολο για τους μαθητές να αποπλαισιώσουν την έννοια και τελικά αυτά τα πρότυπα δρουν ανασταλτικά; Σύμφωνα με τους Mitchelmore και White (2000), τα πρότυπα δε δρουν ανασταλτικά, αρκεί να γίνεται η προσπάθεια ενίσχυσης όλων κατά τον ίδιο βαθμό. Αν συμβεί αυτό η προσέγγιση της μαθηματικής έννοιας

της γωνίας, περνά μέσα από το χτίσιμο συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών νοημάτων περιεχομένου.

Τέλος, η ενασχόληση με μικρόκοσμους σε περιβάλλον Γεωμετρίας της Χελώνας έχει δείξει ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν τέτοια περιβάλλοντα δεν συσχετίζουν σε μεγάλο βαθμό τη στροφή του σώματός τους με τη στροφή της χελώνας (Clements, Battista, Samara, & Swaminathan, 1996), ωστόσο φαίνεται να έχουν δημιουργήσει τη στροφή σαν νόημα περιεχομένου για τη γωνία πληρέστερα από άλλους μαθητές που δεν είχαν εμπλοκή με τέτοιοα λογισμικά (Clements & Battista, 1989).

Ένα δύσκολο θέμα διδασκαλίας στο Γυμνάσιο είναι η μέτρηση γωνίας. Το μοιρογνωμόνιο πρέπει να ταιριάξει ακριβώς στις πλευρές της γωνίας που θέλει ο μαθητής να μετρήσει. Άρα πρέπει να αναγνωρίζει αυτές τις πλευρές, πράγμα που δεν είναι εύκολο. Από τη μία μπορεί να υπάρχουν διάφορες επιλογές για την πλευρά της βάσης, ενώ από την άλλη η δεύτερη πλευρά, μπορεί να μην είναι ορατή. Πρόκειται για το πρόβλημα εντοπισμού πλευρών υπαρκτών και νοητών (Mitchelmore & White, 2000). Πολλοί εκπαιδευτικοί προσπαθούν να βοηθήσουν τους μαθητές να εντοπίσουν τη δεύτερη πλευρά, διερμηνεύοντας τη γωνία ως στροφή, πράγμα που όπως είδαμε δεν είναι προφανές. Αντιθέτως, αν οι μαθητές δεν έχουν δημιουργήσει το αντίστοιχο νόημα της γωνίας, τότε δεν είναι καθόλου αποτελεσματική αυτή η διερμηνεία.



Εικόνα 41: Η ανάπτυξη νοημάτων για τη γωνία κατά τους Mitchelmore και White

3.1.1.1 Ο χώρος τριών διαστάσεων

Ο χώρος των τριών διαστάσεων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσο αφορά τις προσεγγίσεις των μαθητών. Οι επίπεδες αναπαραστάσεις των 3d αντικειμένων απέχουν από τα πραγματικά 3d αντικείμενα περισσότερο από ότι οι επίπεδες αναπαραστάσεις δισδιάστατων αντικειμένων από τα δισδιάστατα αντικείμενα. Αυτό το γεγονός ήδη δημιουργεί μια δυσκολία στους μαθητές, όσο αφορά την τρισδιάστατη γεωμετρία, αφού πρέπει να διαχειριστούν την κατάσταση που τους παρουσιάζεται, βλέποντας μια όχι τόσο καλή αναπαράσταση του πραγματικού αντικειμένου.

Η διδασκαλία της στερεομετρίας γίνεται ως επί το πλείστον με χρήση στατικών αναπαραστάσεων σχημάτων σε τρισδιάστατο χώρο (π.χ. έναν κύβο από χαρτόνι) ή δισδιάστατων αναπαραστάσεων στο χαρτί και όχι δυναμικά μεταβαλλόμενων. Αυτή η διδακτική επιλογή έχει δημιουργήσει ήδη τα θεμέλια για αρκετές δυσκολίες στο πλαίσιο της τρισδιάστατης Γεωμετρίας.

Πλοήγηση στο επίπεδο και τον χώρο τριών διαστάσεων

Παρόλο που ο χώρος που ζούμε και δρούμε είναι τρισδιάστατος φαίνεται ότι οι μαθητές κάνουν μαθηματικά πιο εύκολα στο επίπεδο. Σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει με χρήση του MaLT (Kynigos & Latsi, 2007) προτιμούν να κινούν τη χελώνα στο επίπεδο που βρίσκεται, δηλαδή μπροστά-πίσω, δεξιά-αριστερά κι όχι πάνω-κάτω ή κάνοντας δεξιά-αριστερή περιστροφή. Αυτό φαίνεται από τις εντολές Logo που προτιμούν να χρησιμοποιούν. Ειδικά στην αρχή της ενασχόλησής τους με μια δραστηριότητα δε βρίσκουν νόημα στο να χρησιμοποιήσουν άλλες εντολές εκτός από αυτές.

Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε λόγο της συνήθειας τους να δουλεύουν στο Χελωνόκοσμο, αφού πολλοί μαθητές τον χρησιμοποιούν στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος, είτε λόγο της δυσκολίας τους να συνηθίσουν τη χρήση 3D αναπαραστάσεων που είναι κάτι καινούργιο για αυτούς. Από την μια είναι άποψη του Lowrie (2002) που επισημαίνει ότι οι μαθητές μπορεί να μην έχουν συνηθίσει τις συμβάσεις που πρέπει ασυναίσθητα να κάνουν για να διαβάσουν μια δισδιάστατη αναπαράσταση στην οθόνη του υπλογιστή ως αναπαράσταση 3D αντικειμένου. Από την άλλη υπάρχει η άποψη ότι αντιλαμβάνονται τα 3D αντικείμενα, μέσω δισδιάστατων αναπαραστάσεων (Dalgarmo, Hedberg, & Harper, 2002) κι έτσι μπορεί να επικεντρώνονται σε μια ασυναίσθητη προσπάθεια να φανταστούν με μια

απλοποιημένη δισδιάστατη προσέγγιση του χώρο τριών διαστάσεων και να κινηθούν μέσα σε αυτόν (Kynigos & Latsi, 2006) με κανόνες δύο διαστάσεων.

Ο τρόπος που οι μαθητές περιεργάζονται τρισδιάστατα αντικείμενα

Ένας έμπειρος χρήστης των μαθηματικών εννοιών και πρακτικών συνηθίζει να μελετά ένα τρισδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο, προβάλλοντάς το στις δύο διαστάσεις, δηλαδή χρησιμοποιώντας κατόψεις ή πλάγιες όψεις κτλ. Με παρόμοιο τρόπο δουλεύουν κι οι μαθητές ενστικτωδώς. Η μελέτη μέσω δυναμικού χειρισμού αντικειμένων 3D, προκαλεί τους μαθητές να τα αναλύσουν σε μικρότερα μέρη και να καθορίσουν τα μέτρα των γωνιών και των γραμμικών στοιχείων (Kynigos & Latsi, 2007). Ταυτόχρονα η δυνατότητα συμβολικής έκφρασης προκαλεί τους μαθητές να «σπάσουν» την κίνηση της χελώνας σε βήματα και έτσι να αναλύσουν το πρόβλημα που αφορά ένα τρισδιάστατο αντικείμενο.

Η εισαγωγή των τρισδιάστατων σχημάτων γίνεται με στατικές αναπαραστάσεις. Έτσι, ότι έχει χτιστεί εννοιολογικά από τους μαθητές, για τα σχήματα αυτά είναι εγκαθιδρυμένο στο πλαίσιο αυτών των αναπαραστάσεων (Lave, 1988). Ξαναβλέποντας μέσα από το δυναμικό χειρισμό και τη συμβολική έκφραση τα σχήματα αυτά ψάχνουν να βρουν τρόπους να ανακατασκευάσουν τις έννοιες που αφορούν τα τρισδιάστατα αντικείμενα, με όρους που να μπορεί να καταλάβει η χελώνα τις αντίστοιχες Logo εντολές (Kynigos & Latsi, 2007). Έτσι, η νέα γνώση κατασκευάζεται μέσα στο καινούργιο περιβάλλον, όπου βρίσκει νόημα και χρήση (Vergnaud G. , 2009).

3.1.1.2 Η έννοια της γωνίας σε χώρο τριών διαστάσεων

Οι μαθητές, για μια αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου στην οθόνη του υπολογιστή, δημιουργούν τα εξής γνωστικά σχήματα (Kynigos & Latsi, 2007):

- Στροφή σαν κίνηση σώματος σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, που εμπεριέχει την έννοια του προσανατολισμού.
- Στροφή σαν αριθμός-μέτρηση.

Στην ξεχωριστή περίπτωση τη δίεδρης γωνίας, κατασκευάζουν την νοητική αναπαράσταση της «περιστρεφόμενης πόρτας». Οι μαθητές βλέπουν τη γωνία και σα σχέση μεταξύ δύο επιπέδων, όπου ενυπάρχει η θεωρητική αφηρημένη έννοια της δίεδρης γωνίας, ως γενικευμένο αντικείμενο. Αυτά τα αποτελέσματα προκύπτουν μετά από χρήση δυναμικών αναπαραστάσεων. Άρα, η βασική δυσκολία που μοιραία

προκύπτει είναι η εξής. Όταν η έννοια της γωνίας εισάγεται με στατικές αναπαραστάσεις, αυτό που βλέπει ο μαθητής είναι μια γωνία με δύο πλευρές ή μια γωνία μεταξύ δύο επιπεδών στην περίπτωση της δίεδρης γωνίας. Στην δυναμικά μεταβαλλόμενη γωνία, είτε δίεδρη είτε όχι, η αρχική θέση είναι η μηδενική γωνία, όπου δεν υπάρχουν στο σχήμα δύο ξεχωριστές πλευρές ή επίπεδα, αλλά ταυτίζονται. Έτσι, καθώς η έννοια εισάγεται πρώτα με στατικά σχήματα και στη συνέχεια γίνεται χρήση δυναμικού χειρισμού υπάρχει δυσκολία στο να αντιληφθούν οι μαθητές τη μηδενική γωνία σαν έναν αντιπρόσωπο του γενικευμένου αντικειμένου «γωνία» (Mitchelmore & White, 2000) και βλέπουν το στιγμιότυπο αυτό (αρχικά) σαν «ξένο» στα υπόλοιπα στιγμιότυπα του δυναμικού σχήματος. Στον χώρο των τριών διαστάσεων, το νόημα της γωνίας ως στροφή (και μάλιστα προσανατολισμένη και δυναμικά μεταβαλλόμενη, άρα γενικευμένη) είναι αυτό που φαίνεται να κερδίζει έδαφος.

Εσωγενής και εξωτερική προσέγγιση του χώρου

Μέσα από έρευνες με το MaLT (Kynigos & Latsi, 2007) προκύπτει ότι οι μαθητές αναπτύσσουν μια **εσωγενή-εγωκεντρική** (intrinsic-internal view) και **μια εξωτερική προσέγγιση** (external view) του 3D χώρου. Στην πρώτη περίπτωση είναι σαν να βρίσκονται μέσα στο «όχημα» που κινείται στο 3D χώρο. Καθώς ο χώρος που βλέπουν στην οθόνη βρίσκεται γύρω τους, τον μαθηματικοποιούν με άξονες όπου το origin είναι το σώμα τους. Για την προσέγγιση αυτή χρησιμοποιούν τα χέρια τους και το σώμα τους για να προσομοιώσουν την κίνηση της χελώνας.

Η εξωτερική προσέγγιση προκύπτει από την προσπάθεια των μαθητών να χειριστούν τα σχήματα που κατασκευάζει η χελώνα. Οι μαθητές παίρνουν μια απόσταση από τη χελώνα και εκτός από χειρονομίες χρησιμοποιούν αντικείμενα ως διαμεσολαβητές μεταξύ τρισδιάστατου προσομοιωμένου χώρου και πραγματικού χώρου.

3.1.2 Σχετικά με τις τριγωνομετρικές σχέσεις

Η κλίση και η στροφή είναι δύο γωνιακά πρότυπα με μεγάλη σημασία για τη διδασκαλία της έννοιας στο Γυμνάσιο. Ειδικά η κλίση σχετίζεται με εφαρμογές τριγωνομετρίας.

Διδακτικά, η προσέγγιση των τριγωνομετρικών αριθμών γίνεται μέσω ορθογωνίων τριγώνων και μέσω του τριγωνομετρικού κύκλου. Πολύ συχνή είναι η χρήση

μνημονικών κανόνων των τύπων, όπως SOHCAH[13] για να θυμούνται οι μαθητές τους λόγους ή το περίφημο $ΟΗΕΣ$[14] για να θυμούνται τα πρόσημα των τριγονομετρικών αριθμών σε κάθε τεταρτημόριο, στα μαθηματικά του λυκείου. Σύμφωνα με τους Thompson, Carlson και Silverman (2007), οι δάσκαλοι ακολουθούν αυτή την τακτική, δεσμευμένοι από τη προσωπική τους άποψη για το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος και την πεποίθηση ότι οι μαθητές θα βαθμολογηθούν με βασικό κριτήριο τις απαντήσεις τους σε παρόμοια ερωτήματα. Όμως οι δυσκολίες που έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές, όταν προωτοέρχονται σε επαφή με την τριγωνομετρία είναι πιο βαθιές από επιφανειακούς μνημονικούς κανόνες. Στα αρχικά στάδια της μάθησης της τριγωνομετρίας, ο μαθητής προσπαθεί να συσχετίσει εικόνες τριγώνων με αριθμητικές σχέσεις, όπως λόγοι $ημA = \frac{απέναντι\ κάθετη}{υποτείνουσα}$ και να χειριστεί νέους συμβολισμούς, που αντιπροσωπεύουν αυτούς τους λόγους (Blackett & Tall, 1991). Σύμφωνα με τον Hart (1981) οι μαθητές χειρίζονται με δυσκολία τους λόγους. Γι' αυτό έχει επιλεγεί, ως καλύτερος τρόπος παρουσιάσης του ημιτόνου μιας γωνίας, σαν η απέναντι πλευρά της γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο που η υποτείνουσά του είναι ίση με τη μονάδα.

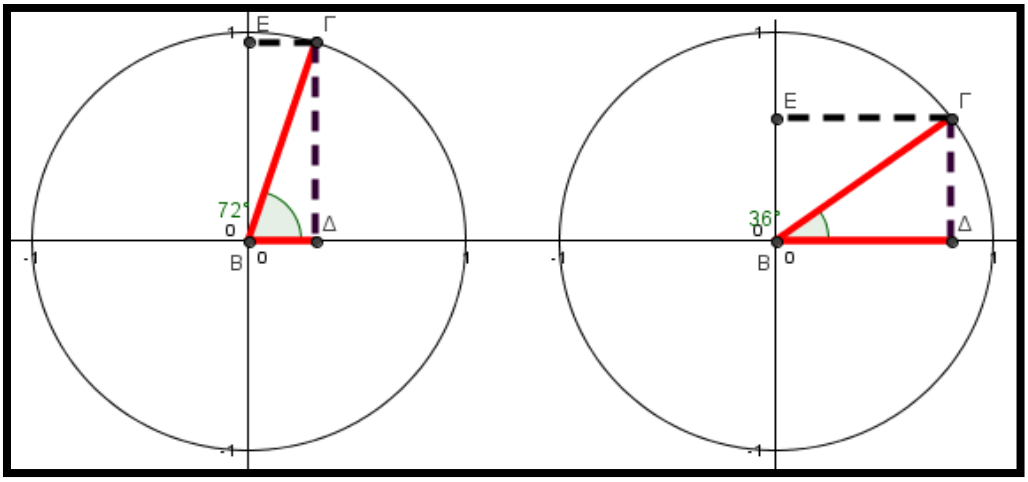
Η οπτική των μαθητών για το μέτρο της γωνίας, εξαρτάται από τις μονάδες τις οποίες χρησιμοποιούμε (Thompson, Carlson, & Silverman, 2007). Βλέπουν το μέτρο μιας γωνίας, είτε ως μέρος μιας ολόκληρης στροφής όταν μετράμε σε μοίρες (επικρατούσα περίπτωση), είτε με τόξο, που είναι μέρος ή πολλαπλάσιο του μήκους της ακτίνας του κύκλου, όταν μετράμε σε ακτίνια (rad), προσεγγίσεις που σχετίζονται με τον ορισμό της γωνίας ως στροφή (Mitchelmore & White, 2000). Συνεπώς, μια βασική δυσκολία στην κατανοήση των τριγωνομετρικών λόγων είναι η εξής. Στην περίπτωση των μοιρών, πώς μπορεί το κομμάτι μιας στροφής να είναι ίσο με το λόγο δύο μηκών;. Στην δεύτερη περίπτωση, που σχετίζεται κυρίως με τον τριγωνομετρικό κύκλο, πώς όλα (ακόμα και το όρισμα του τριγωνομετρικού αριθμού) είναι μήκη και επίσης το ημίτονο και συνημίτονο είναι ανεξάρτητο του μεγέθους του κύκλου;

Σύμφωνα με τους Blackett & Tall (1991) περαιτέρω δυσκολίες προκύπτουν όταν οι μαθητές προσπαθούν να καταλάβουν τι συμβαίνει καθώς το ορθογώνιο τρίγωνο αλλάζει μέγεθος γεωμετρικά και δυναμικά, αλλά με δύο διαφορετικούς τρόπους (ανάλογα με τη διδακτική προσέγγιση):

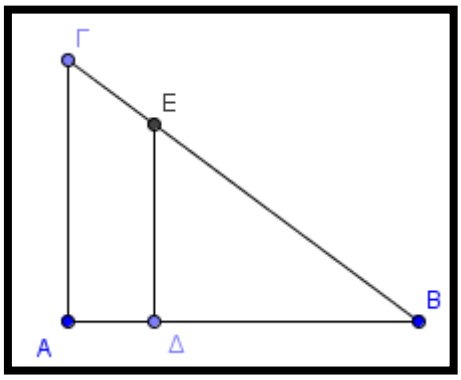
[13] S όπως sinus, O όπως opposite, H όπως Hypotenuse (υποτείνουσα) κλπ
[14] Ολα θετικά, Ημίτονο θετικό, Εφαπτομένη θετική, Συνημίτονο θετικό.

- Όταν η οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου αυξάνεται και η υποτείνουσα παραμένει σταθερή, τότε **ταυτόχρονα αυξάνεται** το μήκος της απέναντι κάθετης πλευράς **και μειώνεται** το μήκος της προσκείμενης κάθετης πλευράς (Εικόνα 42). Αυτή η δυσκολία, ανακύπτει κυριώς όταν προσεγγίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.
- Όταν οι γωνίες ενός ορθογωνίου παραμένουν σταθερές και το μήκος της υποτείνουσας **πολλαπλασιάζεται ή υποπολλαπλασιάζεται**, τότε το η ίδια μεταβολή συμβαίνει και στις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου (Εικόνα 43). Κάτι τέτοιο προκύπτει όταν παρουσιάζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, χωρίς τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.

Ουσιαστικά πρόκειται για συμμεταβολή δύο χαρακτηριστικών του τριγώνου, που προκαλείται από την μεταβολή του τριγωνομετρικού αριθμού μιας γωνίας (Thompson, Carlson, & Silverman, 2007).



Εικόνα 42: Η υποτείνουσα παραμένει σταθερή, ενώ η γωνία μεταβάλεται.



Εικόνα 43: Η υποτείνουσα μεταβάλλεται ανάλογα με τις άλλες δύο πλευρές.

Σχετικά με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, από τα αρχικά στάδια ακόμα της διδασκαλίας τους οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες. Πρόκειται για τελεστές, που δεν μπορούν να εκφραστούν με αριθμητικούς συντελεστές και διαδικασίες, (δηλαδή με μια «συνηθισμένη» αλγεβρική μορφή, όπως είναι η πολυωνυμική) κι έτσι οι μαθητές δυσκολεύονται να κάνουν συλλογισμούς με τριγωνομετρικές συναρτήσεις, καθώς δεν τις βλέπουν σαν συναρτήσεις (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Kendal & Stacey (1997) σε προσεγγίσεις στη διδασκαλία τις τριγωνομετρίας, όπως αυτή του ορθογωνίου τριγώνου, αυτό που φαίνεται κυρίως είναι η διαδικασία, όπως ο υπολογισμός ενός λόγου κι έτσι οι μαθητές δε βλέπουν το ημίτονο και το συνημίτονο σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο που μάλιστα είναι γενικευμένο, καθώς μεταβάλλεται η γωνία. Έτσι, η εικόνα της τριγωνομετρικής συνάρτησης, σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι ανενεργή.

3.2. Προσεγγίσεις των εννοιών στο σχολείο

Η έννοια της γωνίας στο σχολικό πρόγραμμα εισάγεται από το Δημοτικό, όπου εκεί η διδασκαλία κινείται κυρίως στον ενσαρκωμένο κόσμο προσέγγισης των μαθηματικών (Tall, 2004) και έτσι εκεί υπάρχει η ευκαιρία εμπλουτισμού της έννοιας της γωνίας με νοητικές εικόνες και δημιουργίας προσωπικών νοημάτων για αυτή, από τους μαθητές. Στο Γυμνάσιο κυρίαρχος είναι ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος (Tall, 2004), ενώ στο τέλος της Γ΄ Γυμνασίου και στο Λύκειο γίνεται αξιωματική προσέγγιση των γεωμετρικών εννοιών, άρα και της γωνίας, η οποία έχει θέση και στην Άλγεβρα ως το όρισμα ενός τριγωνομετρικού αριθμού.

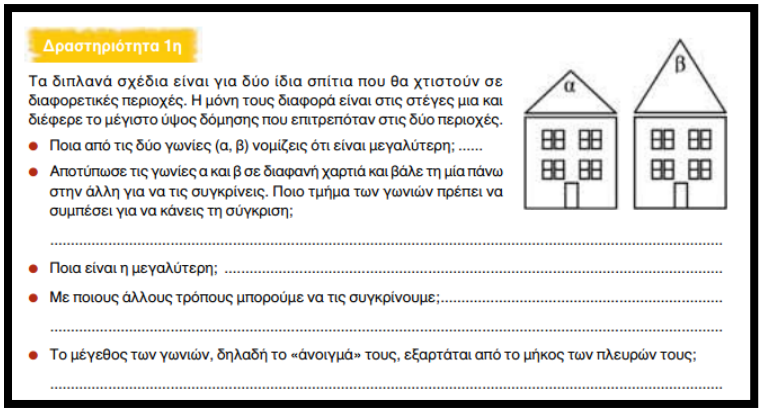
Η Τριγωνομετρία είναι βασικό κομμάτι των αναλυτικών προγραμμάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο και αποτελεί προαπαιτούμενο όχι μόνο για τα μαθηματικά που την ακολουθούν χρονικά στο πρόγραμμα, αλλά και για την κατανόηση άλλων μαθημάτων, όπως η Φυσική. Βασικό χαρακτηριστικό της τριγωνομετρικής προσέγγισης είναι ότι συνδέει την Άλγεβρα και την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας μέσω σχημάτων. Γι’ αυτό μπορεί να αποτελέσει πρόδρομο της ολοκληρωμένης κατανόησης της Ανάλυσης (Weber, 2005). Στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα οι τριγωνομετρικές έννοιες εισάγονται στην Β΄ Γυμνασίου, που κυρίως γίνεται χρήση τους σε υπολογιστικές άσκήσεις σε ορθογώνια τρίγωνα, ενώ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται στην Β΄ Λυκείου.

3.2.1 Η γωνία στη στ΄ Δημοτικού και το Γυμνάσιο

Σύμφωνα με το βιβλίο του εκπαιδευτικού της στ΄ Δημοτικού (Κλιάπης, Κασσώτη, & Οικονόμου, Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού: Βιβλίο εκπαιδευτικού, 2005) οι στόχοι του κεφαλαίου 57 του αντίστοιχου σχολικού βιβλίου (Κλιάπης, Κασσώτη, & Οικονόμου, 2005b), που αναφέρεται στην έννοια της γωνίας είναι να συγκρίνει και να μετρά γωνίες. Στις οδηγίες προς του διδάσκοντες αναφέρεται ότι:

Η γωνία αποτελεί μια ιδαίτερη έννοια, η κατανόηση της οποίας προβληματίζει τους μαθητές, οι οποίοι την αντιλαμβάνονται ως δύο τεμνόμενες ημιευθείες και όχι ως ένα τμήμα του επιπέδου. Έρευνες στο θέμα αυτό υποδεικνύουν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται το χώρο που περιβάλλει τα σχήματα ως κενό ή περιορισμένο από τις γραμμές των σχημάτων. Το γεγονός αυτό οδηγεί τους μαθητές στο να αντιλαμβάνονται τις πλευρές της γωνίας ως την ίδια τη γωνία και κατά συνέπεια να θεωρούν ότι το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το «μήκος» αυτών των πλευρών. Ιδιαίτερα η πρώτη δραστηριότητα και η δεύτερη άσκηση στο Τετράδιο Εργασιών στοχεύουν στην αποκατάσταση αυτής της πλάνης.

Η πρώτη δραστηριότητα φαίνεται στην Εικόνα 44. Η στέγη ενός σπιτιού, όπως είναι σχεδιασμένη αντιστοιχεί σε δύο γωνιακές καταστάσεις της φύσης, στην κλίση και στην κορυφή. Η εκφώνηση της δραστηριότητας επικεντρώνεται στην γωνιακή κατάσταση της κορυφής, που από μόνη της είναι δύσκολο να προκαλέσει αναστοχασμό, ώστε οι μαθητές να δημιουργήσουν πλούσια νοήματα για τη γωνία. Στη συνέχεια ακολουθούν κι άλλες δραστηριότητες που εισάγουν τη γωνία ως κλίση (π.χ. ο πύργος της Πίζας), ενώ το πρότυπο της στέγης χρησιμοποιείται και σε άσκηση του τετραδίου εργασιών.


Δραστηριότητα 1η

Τα διπλανά σχέδια είναι για δύο ίδια σπίτια που θα χτιστούν σε διαφορετικές περιοχές. Η μόνη τους διαφορά είναι στις στέγες μια και διέφερε το μέγιστο ύψος δόμησης που επιτρεπόταν στις δύο περιοχές.

- Ποια από τις δύο γωνίες (α, β) νομίζεις ότι είναι μεγαλύτερη; .....
- Αποτύπωσε τις γωνίες α και β σε διαφανή χαρτιά και βάλε τη μία πάνω στην άλλη για να τις συγκρίνεις. Ποιο τμήμα των γωνιών πρέπει να συμπέσει για να κάνεις τη σύγκριση;

.....

- Ποια είναι η μεγαλύτερη; .....
- Με ποιους άλλους τρόπους μπορούμε να τις συγκρίνουμε;.....

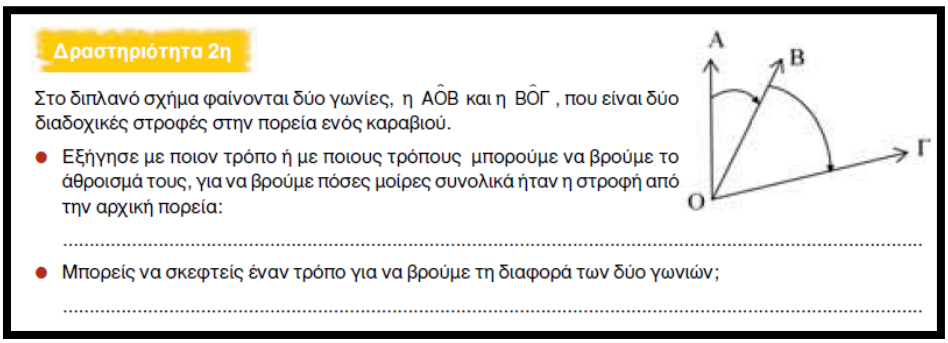
.....

- Το μέγεθος των γωνιών, δηλαδή το «άνοιγμά» τους, εξαρτάται από το μήκος των πλευρών τους;

.....

Εικόνα 44: Δραστηριότητα που αφορά την έννοια της γωνίας του βιβλίου της Στ' Δημοτικού

Στο επόμενο κεφάλαιο (58°) υπάρχουν δραστηριότητες σχεδιασμού γωνιών και μέτρησης γωνιών. Ανάμεσά τους υπάρχει και μια δραστηριότητα (Εικόνα 45: Η γωνία ως στροφή σε δραστηριότητα του βιβλίου της Στ΄ Δημοτικού.) που δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να εισαγάγει τη γωνία ως στροφή, παρόλο που στο διδακτικές οδηγίες, ως στόχος αναφέρεται η μέτρηση γωνιών με το μοιρογνωμόνιο (Κλιάπης, Κασσώτη, & Οικονόμου, 2005). Με το σχήμα δύο εφεξής γωνιών παριστάνονται δύο διαδοχικές στροφές στην πορεία ενός καραβιού. Η δραστηριότητα αυτή προϋποθέτει αφαιρετική σκέψη, επομένως χρειάζεται κατάλληλους χειρισμούς του δασκάλου, ώστε να είναι επωφελής για τους μαθητές, στο πλαίσιο της δημιουργίας νοημάτων για τη γωνία.


Δραστηριότητα 2η

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο γωνίες, η $A\hat{O}B$ και η $B\hat{O}\Gamma$, που είναι δύο διαδοχικές στροφές στην πορεία ενός καραβιού.

- Εξήγησε με ποιον τρόπο ή με ποιους τρόπους μπορούμε να βρούμε το άθροισμά τους, για να βρούμε πόσες μοίρες συνολικά ήταν η στροφή από την αρχική πορεία:

.....

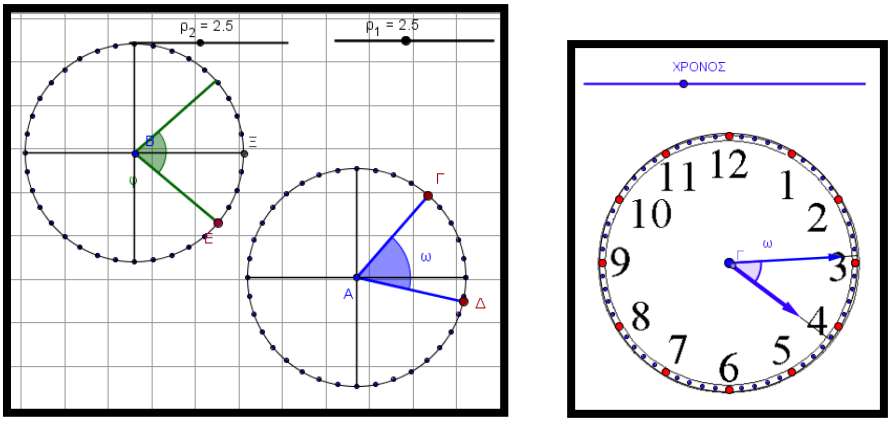
- Μπορείς να σκεφτείς έναν τρόπο για να βρούμε τη διαφορά των δύο γωνιών;

.....

Εικόνα 45: Η γωνία ως στροφή σε δραστηριότητα του βιβλίου της Στ΄ Δημοτικού.

Από τη δραστηριότητα αυτή φαίνεται η σχέση μεταξύ μέτρηση της γωνίας και τον ορισμό της ως στροφή (Mitchelmore & White, 2000). Επίσης η γωνία προσεγγίζεται δυναμικά ως το αποτέλεσμα μιας στροφής (Henderson & Taimina, 2005), όπως «υπονοείται» στην εκφώνηση. Στο τετράδιο εργασιών, στο ίδιο κεφάλαιο υπάρχει ένα πρόβλημα που διαπραγματεύεται την κατασκευή ενός ρολογιού με δείκτες. Ξεκινώντας από την χάραξη των κάθετων ευθειών, που αναπαριστούν τις ώρες 12, 3, 6 και 9, καθοδηγητικά, συνεχίζει ζητώντας την κατασκευή με χάρακα και μοιρογνωμόνιο των υπολοίπων ωρών του ρολογιού. Αν και πάλι υποκρύπτεται ο ορισμός της γωνίας ως στροφή, ζητούνται μόνο στατικές αναπαραστάσεις και μετρήσεις της γωνίας. Από την άλλη κατασκευάζεται ένα αφηρημένο πρότυπο του ρολογιού που μοιάζει με πρώιμο τριγωνομετρικό κύκλο.

Στα δύο τελευταία παραδείγματα δραστηριοτήτων φαίνεται καθαρά ότι η έννοια της γωνίας ως στροφή υπονοείται, βρίσκεται στο παρασκήνιο, αλλά για να αναδειχθεί χρειάζεται μια πιο δυναμική προσέγγιση από την πλευρά του δασκάλου, ίσως με την κατάλληλη χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (Εικόνα 46).



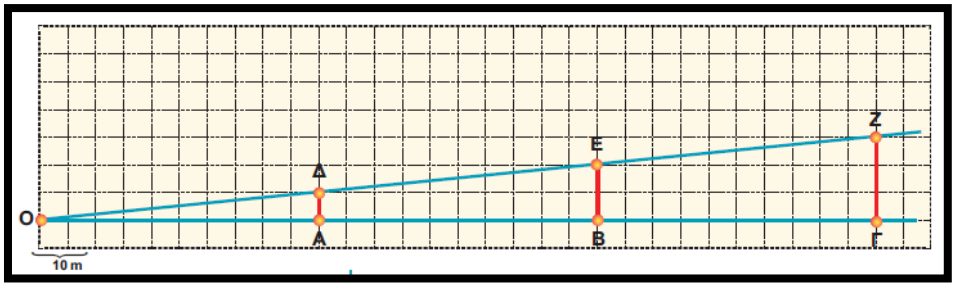
Εικόνα 46: Στιγμιότυπο αναπαραστάσεων από δύο δραστηριότητες (Κεΐσογλου, 2012), που είναι αναρτημένες το Ψηφιακό Σχολείο (http://digitalschool.minedu.gov.gr). Επιτρέπουν δυναμικό χειρισμό της γωνίας ως στροφή και παροτρύνουν τους μαθητές να το κάνουν με κατάλληλα ερωτήματα

Στην Α΄ και Β΄Γυμνασίου η γωνία προσεγγίζεται εντός πιο αυστηρού μαθηματικού πλαισίου, το οποίο προέρχεται από το τυπικό νόημα της γωνίας (Mitchelmore & White, 2000) και η ίδια η γωνία χρησιμοποιείται ως ορισμένη μαθηματική έννοια σε ασκήσεις (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2006, σ. 153), που περιέχουν διαδικασίες σύγκρισης και υπολογισμών. Στην Γ΄ Γυμνασίου η προσέγγιση για τις έννοιες της Γεωμετρίας αρχίζει να έχει ψήγματα αξιωματικοποίησης. Στο Λύκειο, στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η εισαγωγή των εννοιών ξεκινά από τον αισθητό χώρο, άρα από τον ενσαρκωμένο κόσμο με στόχο τον αξιωματικό, όπου δίνονται ακριβείς ορισμοί (Αργυρόπουλος Η. , Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, & Σιδέρης, 2000).

3.2.2 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στο αναλυτικό πρόγραμμα

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ως λόγοι πλευρών

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εισάγονται ως λόγοι πλευρών ορθογωνίου τριγώνου στην Β΄ Γυμνασίου, ξεκινώντας με την εφαπτομένη (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, & Ρεκούμης, 2006, σ. 136). Αρχικά, προσεγγίζεται ως κλίση ενός ανηφορικού δρόμου (Εικόνα 47: Η εφαπτομένη ως κλίση στο σχολικό βιβλίο της β΄ γυμνασίου) και στη συνέχεια ορίζεται αυστηρά, ως $\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά της ω}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της ω}}$ (Εικόνα 49). Αμέσως ακολουθούν υπολογιστικά προβλήμα, όπου είναι άγνωστη είτε η εφαπτομένη, είτε δύο πλευρές του τριγώνου.



Εικόνα 47: Η εφαπτομένη ως κλίση στο σχολικό βιβλίο της β΄ γυμνασίου

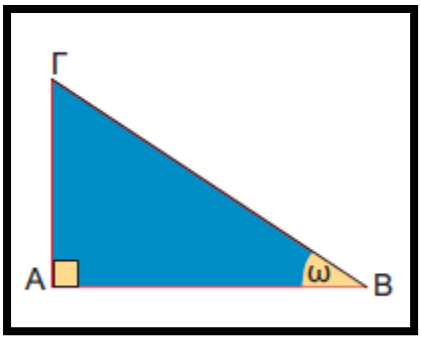
Η πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο Ο πληροφορεί τον οδηγό του αυτοκινήτου πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος ΟΓ. Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100}$ = 0,1 σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m. Έτσι, π.χ. στο σημείο Α είναι ΟΑ = 50 m και ανεβαίνουμε ΑΔ = 50 · 0,1 m = 5 m.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 5	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$ =
ΟΒ = 100	ΒΕ =	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$ =
ΟΓ = 150	ΓΖ =	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ =

Τι παρατηρείτε;

Εικόνα 48: Εισαγωγική δραστηριότητα του αναφέρεται στο σχήμα της παραπάνω εικόνας



Εικόνα 49: Η εφαπτομένη ως λόγος κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου

Η ίδια διδακτική πορεία ακολουθείται για το ημίτονο και το συνημίτονο. Επίσης, σε επόμενη παράγραφο (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, & Ρεκούμης, 2006, σ. 147) γίνεται προσέγγιση του τρόπου που η μεταβολής της γωνίας επηρρεάζει τη μεταβολή των τριγωνομετρικών αριθμών. Σε αυτό το σημείο υπάρχει η ευκαιρία να αντιμετωπιστεί ο τριγωνομετρικός αριθμός σαν γενικευμένο αντικείμενο, αποτέλεσμα μιας μεταβολής, έτσι υπονοείται η έννοια της τριγωνομετρικής σχέσης που είναι προπομπός της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Στην Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, & Χρυσοβέργης, 2006) γίνεται γενίκευση των τριγωνμετρικών αριθμών και για γωνίες που δεν είναι οξείες με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου, πράγμα που σημαίνει

ότι κι εδώ προσεγγίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο ως λόγος δύο μεγεθών. Ακολουθούν συμπεράσματα, όπως αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο και επίλυση τριγώνου με νόμο ημιτόνων και συνημιτόνων που συνιστούν μια διαδικασιοεννοιολογική προσέγγιση των, γενικευμένων και ανεξάρτητων από τα τρίγωνα πλέον, τριγωνομετρικών αριθμών.

Οι τριγωνομετρικές σχέσεις

Στο μάθημα της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου, μετά από μια σύντομη επανάληψη των τριγωνομετρικών αριθμών, εισάγεται η έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Έτσι οι μαθητές βλέπουν σε αυτή την τάξη ξεκάθαρα, για πρώτη φορά την τριγωνομετρική σχέση σαν συνάρτηση. Ο υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης, για μια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, γίνεται μέσω ενός λόγου, αφού ως τότε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αυτή είναι η κυριάρχη προσέγγιση. Αυτή η οπτική, όπως έχει προαναφερθεί δυσκολεύει τους μαθητές να δούν τον τριγωνομετρικό αριθμό σαν ένα γενικευμένο μαθηματικό αντικείμενο (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992).

Ο υπολογισμός της άγνωστης πλευράς ενός τριγώνου, με χρήση τριγωνομετρίας αντιστοιχεί στην επίλυση μιας αναλογίας της μορφής $\frac{x}{8} = \frac{3}{4}$. Έτσι, η αντίληψη που δημιουργούν οι μαθητές για τον τριγωνομετρικό αριθμό σχετίζεται με το νόημα που έχουν διαμορφώσει για την έννοια του λόγου. Οι απλές αριθμητικές εφαρμογές, όπως η παραπάνω αποτελούν μόνο επιφανειακές προσεγγίσεις αυτής της έννοιας (Κολέζα, 2000). Ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός τριγώνου είναι ένα τρίτο μέγεθος, που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί οικείο και αυθύπαρκτο (Kaput, 1985). Έτσι, αν ένας μαθητής επιλύει μόνο τέτοια προβλήματα, εφαρμόζει στρατηγικές αναλογίας στους τριγωνομετρικούς αριθμούς και είναι πιθανόν να προσδίδει το χαρακτήρα τελέστή συνάρτησης (Κολέζα, 2000) σε αυτόν. Για παράδειγμα, αν έχει ένα τρίγωνο όπως αυτό της Εικόνα 49 (σελίδα 99) με $AB = x$ και $AΓ = y$, τότε η $εφω$ είναι ένας καθαρός συναρτησιακός τελεστής, που καθορίζει την τιμή της πλευράς $AΓ$, σύμφωνα με τη σχέση $y = (εφω) \cdot x$. Αυτό πράγματι συμβαίνει, αλλά διαφέρει από το νόημα του τριγωνομετρικού αριθμού σαν χαρακτηριστικό της γωνίας και ίσως να θέτει στο περιθώριο τη σχέση μεταξύ γωνίας ω και της εφαπτομένης της.

3.3. Σκοπός της έρευνας

Όπως θα αναλύσω διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο, η μέθοδος της έρευνας που επελέγει (έρευνα σχεδιασμού) είναι ανοικτή σε συμπεράσματα. Ο ερευνητής δεν έχει προκαθορισμένα ερωτήματα, που τα αποτελέσματα πρέπει να του δώσουν θετικές ή αρνητικές απαντήσεις. Προσπαθεί να καταλάβει τη λειτουγρία του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται και επανακαθορίζει τη στάση του κατά τη διάρκεια της έρευνας, ανάλογα με την εξέλιξή της. Όμως ο αρχικός σχεδιασμός βασίζεται σε μια υποθετική-αναμενόμενη πορεία μάθησης η οποία το πιθανότερο είναι να ανατραπεί.

3.3.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Σε αυτό το πλαίσιο και με βάση την πιλοτική έρευνα που διεξήχθη οι βασικοί άξονες των ερευνητικών ερωτημάτων ήταν οι εξής:

Προσανατολισμός στον προσομοιωμένο χώρο τριών διαστάσεων

Ένα κεντρικό συμπέρασμα ερευνών με λογισμικά τρισδιάστατης γεωμετρίας είναι ότι τα παιδιά προσανατολίζονται ευκολότερα ως παρατηρητές σε έναν διδιάστατο χώρο, παρά σε έναν τρισδιάστατο. Επίσης η προσέγγισή τους για τη χελώνα μέσα στο περιβάλλον του 3D χώρου αυτού δεν είναι πάντα η ίδια. Μπορεί να είναι εσωστρεφής ή εξωστρεφής. Σκοπός ήταν να μελετηθεί κατά πόσο η εξέλιξη της διερεύνησης θα επηρέαζε και θα μετέβαλε την προσέγγιση αυτή των μαθητών και τον τρόπο που θα προσανατολίζονταν.

Το πλαίσιο αναφοράς της κίνησης της χελώνας

Οι μαθητές ανάλογα με τη φάση της διερεύνησης που βρίσκονται μετακινούνται μεταξύ διαφορετικών πλαισίων αναφοράς για τη χελώνα ως κινούμενη οντότητα (Wickens, Vincow, & Yeh, 2005). Άλλοτε την αντιμετωπίζουν ως όχημα, άλλοτε παίρνουν τη θέση της χελώνα και άλλοτε αποστασιοποιούνται από αυτή (θα γίνει αναλυτικότερη αναφορά στην ανάλυση των αποτελεσμάτων). Σκοπός μου ως ερευνητή ήταν να παρατηρήσω πώς το περιβάλλον μάθησης συνέβαλε και πώς επηρέασε την μετακίνηση των μαθητών από πλαίσιο σε πλαίσο. Επίσης θα ήταν χρήσιμο να εντόπιζα στοιχεία για το αν κάποιο πλαίσιο αναφοράς ήταν καταλληλότερο στην αντιμετώπιση πτυχών του προβλήματος.

Φορμαλισμός με νόημα

Η κεντρική δραστηριότητα με την οποία ασχολήθηκαν οι μάθητες (που θα αναφέρω στο επόμενο κεφάλαιο), αφορούσε μια γεωμετρική κατασκευή που «κρύβει καλά» τους μαθηματικούς κανόνες που είναι δομημένη. Για να αποκρυπτογραφήσουν το μαθηματικό μοντέλο τής, οι μαθητές έπρεπε να πάρουν πρωτοβουλίες. Σε αυτό το σημείο το ερευνητικό μου ενδιαφέρον στράφηκε προς τη μελέτη της χρήσης του κώδικα, ως συμβολική αναπαράσταση του αντικειμένου και το νόημα που άντλησαν οι μαθητές από αυτή τη φορμαλιστική έκφραση σε συνδυασμό με τη χρήση των μεταβολέων (Dubinsky, 2000). Το σχήμα και ο κώδικάς του έδωσαν πολλές ευκαιρίες, όπως θα φανεί να συμβεί και άρα να παρατηρήσω κάτι τέτοιο.

Δημιουργία νοημάτων για τη γωνία

Ο τρόπος παρουσίασης της γωνίας ακόμα και σαν στροφή, γίνεται με στατικές δισδιάστατες αναπαραστάσεις. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον τα νοήματα που αναπτύσσονται για την έννοια είναι αντίστοιχα, δηλαδή η εικόνα που έχουν οι μαθητές για τη γωνία είναι στατική. Αυτό έχει διαπιστωθεί ότι εμποδίζει την εννοιολογική προσέγγιση της γωνίας ως δυναμικό αντικείμενο, άρα γενικευμένο και δυσχεραίνει την ένταξη της «στατικής γωνίας» σε ένα τέτοιο αφηρημένο πλαίσιο, που θα εμπλούτιζε τη σχηματική έννοιά της. Εστιάζοντας στην έρευνα το ερώτημα ήταν πώς θα μπορούσε το περιβάλλον ενός προγράμματος όπως το MaLT να βοηθήσει στην δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές για την έννοια της γωνίας ως στροφή; Πώς τελικά οι μαθητές συνέδεσαν αυτή την προσέγγιση με τον στατικό ορισμό; Οι αυθόρμητες ιδέες των μαθητών σχετικά με την χωρική αναπαράσταση της έννοιας της γωνίας ανταποκρίθηκαν στις κατάλληλα σχεδιασμένες δρασητριότητες και πώς οι μαθητές τις επεξέτειναν για να είναι αποτελεσματικές, όταν αυτές φάνηκαν ανεπαρκείς να δώσουν απαντήσεις και λύσεις σε συγκεκριμένες καταστάσεις;

Στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος με τη βοήθεια του εργαλείου

Τέτοιες στρατηγικές μπορεί να είναι ο χωρισμός του σχήματος σε επιμέρους μέρη, ώστε να αντιμετωπισθούν ξεχωριστά, η χρήση των μεταβολέων με ταυτόχρονη πρατήρηση του σχήματος, η κατασκευή ενός artifact που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο. Χρησιμοποίησαν οι μαθητές τέτοιες στρατηγικές στη συγκεκριμένη έρευνα; Σε τι βαθμό χρησιμοποίησαν τα εργαλεία του MaLT, με τρόπο που έχει περιγραφεί σε παλιότερες έρευνες και σε ποιο σημείο έδωσαν προσωπικό νόημα (είτε ως άτομα, είτε ως ομάδα) σε αυτά;

Η χρήση των τριγωνομετρικών σχέσεων

Οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο έχουν διδαχθεί τριγωνομετρία με χρήση ορθογωνίων τριγώνων και τριγωνομετρικού κύκλου. Η προσέγγιση των εννοιών είναι κυρίως διαδικασιοεννοιολογική. Σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσω κατά πόσο οι μαθητές, αντιμετωπίζοντας ένα πρόβλημα που είχε κρυμμένες τριγωνομετρικές σχέσεις προσέγγισαν τις σχέσεις αυτές. Επίσης ο τρόπος που χρησιμοποίησαν τεχνικές τριγωνομετρίας σε ένα ασυνήθιστο για αυτούς πλαίσιο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Τέλος ιδιαίτερα σημαντικό ήταν το γεγονός ότι οι μαθητές δούλευαν σε συνεργατικό περιβάλλον. Στόχος ήταν να επισημάνω στοιχεία για το κατά πόσο το εργαλείο και οι λειτουργικότητές του συνέβαλαν σε αυτό. Άρα οι «φακοί» μου ήταν στραμμένοι σε στιγμιότυπα:

- Κατασκευής νοημάτων υπό διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση προσωπικών νοημάτων, με στόχο την δημιουργία κοινών νοημάτων.
- Πτυχών συνεργασίας μεταξύ των μελών της ομάδας, σε μαθηματικό πλαίσιο.
- Διαμόρφωσης κοινωνικο-μαθηματικών νορμών.

Τέλος, κατά μήκος της αναζήτησης μου για απαντήσεις των ερωτημάτων-σκοπών της έρευνας, προσπάθησα να εντοπίσω στιγμιότυπα αναστοχασμού των μαθητών με χρήση των εργαλείων, δημιουργίας εικασιών στο πλαίσιο του μικρόκοσμου, μαθηματικοποίησης πτυχών του αντικειμένου και διατύπωσης αυθόρμητων αντιλήψεων των μαθητών.

Πέρα από την περιγραφή του παραπάνω γενικού πλαισίου, οδηγήθηκα σε συμπεράσματα που μπορεί να μην ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες, αφού η μέθοδος προϋποθέτει τον επανασχεδιασμό και την ανατροφοδότηση. Περισσότερο επικεντρώθηκα στην περιγραφή ενός περιβάλλοντος μάθησης στο οποίο έγινε η έρευνα, παρά σε συγκεκριμένες απαντήσεις πάνω σε ερωτήματα που είχαν από πριν τεθεί.

3.3.2 Διδακτικό όφελος από την έρευνα

Κατά τη διενέργεια της έρευνας ως ερευνητής είχα δύο ατζέντες. Η μια φυσικά (του ερευνητή) ήταν αυτή που ανάλυσα προηγουμένως στην περιγραφή των στόχων-ερωτημάτων της έρευνας. Η άλλη ατζέντα ήταν αυτή του δασκάλου. Για το δάσκαλο στόχος είναι η μάθηση, η ανάπτυξη της γνώσης του μαθητή που συμμετέχει σε μια δραστηριότητα. Ποιο ήταν το διδακτικό όφελος, λοιπόν, ενός μαθητή που συμμετείχε στην έρευνα;

Οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν σε ομάδες ένα δύσκολο γεωμετρικό πρόβλημα σε τρεις διαστάσεις. Τα κέρδη από μια τέτοια δραστηριότητα ήταν πολλαπλά. Η λύση δεν ήταν μονοσήμαντη, έτσι οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να δουλέψουν παίρνοντας πρωτοβουλίες και ο δάσκαλος να αποστασιοποιηθεί όσο μπορούσε από το ρόλο της αυθεντίας, του κοινωνού της μαθηματικής γνώσης. Η τάξη μπορούσε να πειραματιστεί και να δουλέψει διερευνητικά, κάνοντας εικασίες, κατασκευάζοντας και αναδομώντας αντικείμενα και κάθε μαθητής είχε τη δυνατότητα να παρατηρεί άμεσα τα αποτελέσματα των ενεργειών του, να επικοινωνήσει σύγχρονα ή ασύγχρονα με τους συμμαθητές του με τη χρήση ενός ειδικά σχεδιασμένου λογισμικού. Ένα τόσο πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον έδωσε πολλαπλές ευκαιρίες έκφρασης και εν τέλει μάθησης ή ακόμα συχνότερα ανατροφοδότησης και αναστοχασμού.

Τέλος το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπως θα το περιγράψω παρακάτω, χρειάζεται σχεδιασμό αρκετών βοηθητικών σχημάτων, γραμμών, γωνιών και χρήση τριγωνομετρικών τεχνικών. Πρόκειται για ένα σύνθετο στη δομή του σχήμα και περίπλοκο στη λύση του πρόβλημα, από αυτά που δεν έχουν χρόνο οι εκπαιδευτικοί να ενσωματώσουν με τον τρόπο που πρέπει στο μάθημά τους. Έτσι, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία και το χρόνο να βιώσουν μια τέτοια μαθηματική εμπειρία, που ήταν πολύ κοντά στον τρόπο που δουλεύουν οι ίδιοι οι μαθηματικοί με ένα άλυτο (ανοιχτό) πρόβλημα.

4. Η έρευνα

Εισαγωγή

Τα ερευνητικά ερωτήματα και το μαθησιακό πλαίσιο που αυτά καθόρισαν, συνέστησαν ως καταλληλότερη μέθοδο για την παρούσα έρευνα, το πλαίσιο της έρευνας σχεδιασμού (design-based research). Στο τέταρτο κεφάλαιο θα αναλύσω το θεωρητικό πλαίσιο αυτού του είδους έρευνας. Επίσης αναφέρω τις βασικές αρχές δημιουργίας πειραμάτων, ως ερευνητικών εργαλείων, αρχές που ακολούθησα στο σχεδιασμό του μικρόκοσμου που χρησιμοποίησα στην ερευνητική διαδικασία. Στη συνέχεια περιγράφω το πλαίσιο διενέργειας της συγκεκριμένης έρευνας (πού έγινε, πότε, πόσο διήρκεσε και γιατί, πώς δούλεψαν οι μαθητές σε ομάδες κτλ), τη δραστηριότητα και τον τρόπο συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων.

Πρέπει να επισημάνω ότι οι τελικές επιλογές σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα και την ανάλυση ήταν δικές μου, αλλά ο σχεδιασμός της δραστηριότητας προέκυψε μέσα από συζήτηση και την τελική συμφωνία με άλλους ερευνητές. Η έρευνα έγινε (όπως θα αναφέρω παρακάτω) με μια ομάδα ερευνητών που ο καθένας εντίασε σε μια ομάδα μαθητών, ώστε να αντλήσει δεδομένα για τα δικά του ερευνητικά ερωτήματα.

Βασικά κίνητρα για τις επιλογές μας ήταν το πλαίσιο συνεργατικής μάθησης που έπρεπε να δημιουργηθεί το γνωστικό πεδίο (γωνία, τρισδιάστατος χώρος και τριγωνομετρικές σχέσεις) που αφορούσε η έρευνα, αλλά και η ανελλαστικότητα του σχολικού προγράμματος.

4.1. Μεθοδολογία της έρευνας

4.1.1 Έρευνα σχεδιασμού

Η «έρευνα σχεδιασμού» (Κυνηγός, 2006) όπως αποδίδεται ο όρος “design research” (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Kelly, 2003; Collins, Joseph, & Bielaczyz, 2004; Κυνηγός, 2006) είναι η εμπειρική μελέτη ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο συνηθισμένο χώρο εργασίας τους. Όπως λέει ο Κυνηγός (Κυνηγός, 2006),

... με την έννοια αυτή σχετίζεται με την καθιερωμένη στις επιστήμες της αγωγής έρευνα δράσης. Περιγράφεται όμως καλύτερα ως «έρευνα παρέμβασης», επειδή αφορά την μελέτη

ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο πλαίσιο μιας εκπαιδευτικής διαδικασίας, στο σχεδιασμό της οποίας έχουν συμμετάσχει οι ερευνητές που διεξήγαγαν την έρευνα.

Η παρέμβαση συνίσταται στον από κοινού σχεδιασμό των δραστηριοτήτων με τους θεσμικά εμπλεκόμενους, όπως για παράδειγμα τους εκπαιδευτικούς και τη διεύθυνση του σχολείου και εξελίσσεται μέσα στο εκπαιδευτικό σύστημα, στο πλαίσιο των κανονικών δραστηριοτήτων των μαθητών (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Κυνηγός, 2006). Έτσι, το πείραμα μπορεί να γίνεται κατά τη διάρκεια του ωρολογίου προγράμματος, ή και μετά το τέλος του, σε κάποιο όμιλο ενδιαφέροντος των μαθητών, όπου υπάρχουν συνθήκες πραγματικής τάξης.

Στο πλαίσιο μιας τέτοιας παρέμβασης, ο ρόλος του ερευνητή είναι διττός. Από τη μια είναι σχεδιαστής της δραστηριότητας ή δάσκαλος κι από την άλλη μελετητής του πειράματος. Μπαίνοντας στην τάξη με δύο ατζέντες, πρέπει να προσέχει ώστε να επηρεάζει όσο το δυνατόν λιγότερο η μία την άλλη. Το ίδιο συμβαίνει και με το σχέδιο της δραστηριότητας-παρέμβασης (Κυνηγός, 2006). Από τη μια πλευρά έχει διδακτικό στόχο κι από την άλλη ερευνητικό, δηλαδή να γίνει καταλύτης για την παραγωγή όσο το δυνατόν πιο πλούσιων και κατάλληλων δεδομένων για ανάλυση.

4.1.1.1 Στόχοι και βασικά χαρακτηριστικά [15]

Η έρευνα σχεδιασμού αναπτύχθηκε για να δώσει απαντήσεις στα εξής κεντρικά ζητήματα της έρευνας της μάθησης (Collins, Joseph, & Bielaczyz, 2004):

• Την ανάπτυξη θεωριών σχετικά με τη φύση της μάθησης σε συγκεκριμένο περικείμενο-θέμα.

• Την ύπαρξη τρόπων μελέτης των νοητικών φαινομένων, σε περισσότερο ρεαλιστικό περιβάλλον, όπως η τάξη ή όμιλοι ενδιαφέροντος μετά το μάθημα, παρά στο εργαστήριο.

• Την ανάγκη να αξιολογείται το μαθησιακό περιβάλλον με κριτήρια συνεργατικότητας, αποτελεσματικότητας σε συγκεκριμένες προκλήσεις, κρίσης και λήψης πρωτοβουλιών σε συγκεκριμένο πλαίσιο (και όχι μετρώντας την ποσότητα της γνώσης που αποκτήθηκε).

[15] δημιουργία μικροθεωριών, παρεμβατικότητα, prospective & reflective experiments, επανάληψη και ανατροφοδότηση, domain specificity

• Την ανάγκη εξαγωγής των συμπερασμάτων της έρευνας μέσα από μια διαδικασία διαρκούς διαμορφωτικής αξιολόγησης της παρέμβασης.

Ιδεωδώς, στόχος της έρευνας σχεδιασμού είναι η βαθύτερη κατανόηση της learning ecology (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Πρόκειται για περίπλοκο σύστημα αλληλεπιδράσεων με βασικά στοιχεία τα προβλήματα που λύνουν οι μαθητές, το είδος της παρότρυνσης ή βοήθειας που τους παρέχεται, τις νόρμες μέσα στις οποίες λειτουργεί η συνεργατικότητα, τα μέσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές (υπολογιστής, υλικά κατασκευής, χαρτί και μολύβι) και τις πρακτικές που χρησιμοποιούν οι δάσκαλοι για να ενορχηστρώσουν τη συλλειτουργία όλων των παραπάνω. Ο ερευνητής όταν σχεδιάζει την παρέμβαση, καθορίζει τις σχέσεις μεταξύ αυτών των στοιχείων. Στη συνέχεια εκτιμά πως αυτά αλληλεπίδρασαν και υποστήριξαν τη διαδικασία της μάθησης.

Ο σχεδιασμός δε γίνεται αμετάκλητα, πριν αρχίσει η πρέμβαση. Η έρευνα σχεδιασμού χαρακτηρίζεται από συνεχείς βελτιωτικές διορθώσεις της παρέμβασης (the approach of progressive refinement) (Collins, Joseph, & Bielaczyz, 2004). Ο αρχικός σχεδιασμός βασίζεται σε μια υποθετική πορεία μάθησης και σε εικασίες σχετικά με τα μέσα που υποστηρίζουν την μαθησιακή διαδικασία. Καθώς εξελλίσεται η έρευνα, έρχονται στην επιφάνεια οι λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας και αναθεωρούνται οι εικασίες. Έτσι, άλλες εικασίες δημιουργούνται που οδηγούν στην ανάγκη νέου σχεδιασμού. Οι ερευνητές επανακαθορίζουν την αρχική μορφή του σχεδίου παρέμβασης, καθώς αυτό εξελίσσεται, έχοντας ανατροφοδοτήση από την συνεχιζόμενη εφαρμογή της παρέμβασης και κατανοώντας καλύτερα το τρόπο λειτουργίας του μαθησιακού περιβάλλοντος. Στόχος είναι, από τα συμπεράσματα, να προκύψουν θεωρίες για τη διαδικασία της μάθησης αλλά και για τα μέσα που σχεδιάστηκαν για να την υποστηρίξουν (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Έτσι θα προκύψει κάποιο προϊόν άμεσα αξιοποιήσιμο στην εκπαιδευτική πράξη. Άρα, το ερευνητικό μοντέλο είναι κυρίως γενεσιουργό (generative) ως προς το ρόλο των ερευνητικών ερωτημάτων στην παραγωγή νέας θεωρητικής γνώσης (Goetz & Lecompte, 1984; Κυνηγός, 2006).

Σε αντίθεση με τις ευρείες θεωρίες της μάθησης, που ίσως είναι δύσκολο να γίνει η προβολή τους επί συγκεκριμένων καταστάσεων, πειράματα σχεδιασμού σκοπεύουν να δώσουν ένα θεωρητικό μοντέλο ευρύτερο από μια απλή αφήγηση του τι συνέβη σε μια συγκεκριμένη τάξη, και στενότερο μιας γενικότερης περιγραφής, που δεν ανταποκρίνεται στις συγκεκριμένες συγκυρίες της παρέμβασης (diSessa, 1991).

Στην εφαρμογή ενός πειράματος έρευνας σχεδιασμού-design experiment (Brown, 1992; Collins, 1992), υπάρχει πολυπλοκότητα των μεταβλητών, λόγω του πραγματικού μαθησιακού περιβάλλοντος που γίνεται το πείραμα. Έτσι, ο ερευνητής αντί να καθορίσει και να ελέγξει τις μεταβλητές, βελτιώνει το σχεδιασμό, όσο αυτό είναι δυνατό και παρατηρεί προσεκτικά πώς αλληλεπιδρούν τα στοιχεία του περιβάλλοντος με τη μαθησιακή διαδικασία. Εμπλέκεται, δηλαδή σε μια ολιστική μελέτη των ανθρώπινων δραστηριοτήτων, των μαθητών, των εκπαιδευτικών, της κοινότητας της τάξης (Κυνηγός, 2006). Για να το πετύχει αυτό χρειάζεται να συλλέξει πλήθος δεδομένων, όπως βίντεο της δραστηριότητας στην τάξη, ηχητικά δεδομένα και καταγραφή της δουλειάς των μαθητών και του αποτελέσματος που προέκυψε σε διάφορα στάδια. Το μεγάλο μέγεθος των δεδομένων που πρέπει να συλλεχθούν και να αναλυθούν συχνά κάνει απαραίτητη τη συμμετοχή αρκετών ερευνητών σε ένα πείραμα, των οποίων η δουλειά πρέπει να είναι συντονισμένη. Για αυτούς τους λόγους, η διεξαγωγή ενός πειράματος στα πλαίσια της έρευνας σχεδιασμού είναι ιδιαίτερα δύσκολη και η έκβαση του αβέβαιη. Στο σχεδιασμό της παρέμβασης είναι χρήσιμο, ο ερευνητής να κάνει ένα διαχωρισμό των στοιχείων που περιμένει να είναι στο επίκεντρο της έρευνας, από τα στοιχεία που πιθανόν να προκύψουν στο παρασκήνιο (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Με αυτό τον τρόπο θα έχει μια πιο λεπτομερή παρατήρηση των γεγονότων κατά τη διάρκεια του πειράματος.

4.1.1.2 Διαφορές με άλλα είδη εκπαιδευτικής έρευνας

Η έρευνα σχεδιασμού, ως εμπειρικού χαρακτήρα έρευνα έχει ποιοτικά μεθοδολογικά χαρακτηριστικά και δεν εντάσσεται στις διαγνωστικού τύπου έρευνες (Κυνηγός, 2006). Δεν γίνεται σύγκριση ομάδων ελέγχου και πειραματισμού, όπως στα κλασσικά πειράματα. Στην έρευνα σχεδιασμού, το πείραμα λαμβάνει χώρα στη σχολική τάξη, δηλαδή σε ένα αρκετά «μπερδεμένο» περιβάλλον (messy situation), που είναι χαρακτηριστικό της καθημερινής μαθησιακής διαδικασίας (Collins, Joseph, & Bielaczyz, 2004). Έτσι, σε αντίθεση με το εργαστήριο, μπορεί ο ερευνητής να μη μελετά ξεκάθαρες μεταβλητές, αλλά αποφεύγει τις στρεβλώσεις που μπορεί να προκληθούν από ένα μη ρεαλιστκό περιβάλλον εργαστηρίου.

Επίσης, διαφέρει με την εθνογραφική έρευνα που έχει στόχο να αναδεικνύει σχέσεις και γεγονότα που συμβαίνουν σε διαφορετικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, παρά να μελέτα παρεμβάσεις σε αυτά (Eckert, 1989; Collins, Joseph, & Bielaczyz,

2004). Ωστόσο, η έρευνα σχεδιασμού έχει κάποια στοιχεία εθνογραφίας, εφόσον οι ερευνητές εμπλέκονται στην καθημερινή δραστηριότητα των υποκειμένων με έναν αποδεκτό ρόλο από την περιρρέουσα κοινότητα (Κυνηγός, 2006).

Η έρευνα ειδικής περίπτωσης (case study) είναι κι αυτή μια εμπειρική μέθοδος, που μελετά ένα φαινόμενο μέσα στον πραγματικό κόσμο καθώς αυτό συμβαίνει (Yin, 1984). Σε αυτή την περίπτωση όμως, γίνεται μόνο συλλογή δεδομένων από πραγματκές καταστάσεις και όχι παρέμβαση σε αυτές. Έτσι, η έρευνα σχεδιασμού δεν είναι έρευνα ειδικής περίπτωσης.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της έρευνας σχεδιασμού σε σχέσεις με τις άλλες μορφές έρευνας είναι η εφαρμοσιμότητα των αποτελεσμάτων της. Σε αντίθεση με τις περισσότερες μεθοδολογίες έρευνας, οι θεωρίες που παράγονται από τα πειράματα σχεδιασμού έχουν **άμεση ανταποδοτικότητα** καθώς έχουν ήδη «δοκιμαστεί» και είναι έτοιμες προς χρήση σε καταστάσεις ακριβώς όπως αυτές που αντιμετωπίζουν οι επαγγελματίες της εκπαίδευσης, καθημερινά στη δουλειά τους.

4.1.1.3 Δεοντολογία της έρευνας σχεδιασμού

Πέρα από το σχεδιασμό και την υλοποίηση της παρέμβασης, ένα πολύ σημαντικό ζήτημα είναι η δεοντολογία που διέπει τέτοιου είδους έρευνες (Κυνηγός, 2006). Ανεξάρτητα από τα δεδομένα που θα παραχθούν, πρέπει να εξασφαλιστεί ότι οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί θα αποκομίσουν κάτι θετικό από την παρέμβαση. Επίσης, η ταυτότητα των προσώπων που συμμετέχουν δε γίνεται γνωστή, αφού τα δεδομένα (όποιας μορφής) αφορούν ευαίσθητες και προσωπικές καταστάσεις που ενυπάρχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία μέσα στη σχολική τάξη.

Κατά την ερμηνεία των δεδομένων, ο ερευνητής δεν παρουσιάζει τις δυσκολίες που προκύπτουν ως αποτυχία των συμμετεχόντων να παρακολουθήσουν τα τεκτενόμενα με σκοπό να δημιουργήσει ένα αρνητικό προφίλ για αυτούς. Αντίθετα, τους προσεγγίζει ως συνεργάτες, στοχεύοντας να δώσει μια ρεαλιστική και ερευνητικά έντιμη εικόνα του τι συμβαίνει, αλλά με μια θετική ματιά που να μας δείχνει τι θα ήταν εφικτό και ποιες θα ήταν οι δυσκολίες σε μια ευρύτερη και συστηματικότερη εφαρμογή του καινοτόμου προϊόντος-παρέμβασης στην εκπαιδευτική πράξη.

4.1.1.4 Σχεδιασμός του πειράματος

Οι βασικοί άξονες του σχεδιασμού

Η ερευνητική ομάδα πριν ξεκινήσει ένα πείραμα σχεδιασμού πρέπει να έχει αντιμετωπίσει τα εξής ζητήματα (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003):

- Να είναι σαφής ο σκοπός της έρευνας. Η πρόθεση της έρευνα σχεδιασμού είναι να εντοπίσει και να περιγράψει μοντέλα και στρατηγικές που ακολουθεί η σκέψη των μαθητών, συσχετίζοντας τα με τα μέσα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να αναπτύξουν τις στρατηγικές αυτές.
- Να είναι καθαρό ποιοι είναι οι μαθησιακοί στόχοι στο συγκεκριμένο περικείμενο (the prospective goals or endpoints of student learning). Δε χρειάζεται να αφορούν συγκεκριμένα κεφάλαια της διδακτέας ύλης, αλλά κεντρικές έννοιες που συναντώνται πολλές φορές στο σχολείο και ωριμάζουν (π.χ. γωνία, καμπυλότητα κ.α.).
- Πρέπει να είναι σαφείς οι υποθέσεις της ερευνητικής ομάδας σχετικά με το σημείο εκκίνησης των μαθητών, την πορεία τους κατά τη διάρκεια της έρευνας και την τελική τους κατάσταση μετά την έρευνα, σε γνωστικό επίπεδο, αλλά και σε βαθμό συνεργατικότητας και επικοινωνίας. Αυτό μπορεί να γίνει μέσα από τη βιβλιογραφία, αν πρόκειται για θέματα που έχουν μελετηθεί αρκετά. Σε περίπτωση που υπάρχει μικρή βιβλιογραφία, οι αρχικές υποθέσεις διαμορφώνονται μετά από πιλοτική έρευνα.
- Ο σχεδιασμός της παρέμβασης να ενσωματώνει διαδικασίες ελέγχου των εικασιών που σχετίζονται με αξιοσημείωτες μεταβολές στη συλλογιστική των μαθητών και με τα μέσα που υποστηρίζουν τις μεταβολές αυτές.
- Επαρκής καταγραφή και παρουσίαση από την ερευνητική ομάδα του μαθησιακού περιβάλλοντος.

Ο μικρόκοσμος ως μέσο έρευνας

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο σημείο οι μικρόκοσμοι είναι σημαντικά εργαλεία για την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών. Το πλαίσιο της δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων, του constructionism και της μάθησης μέσω σχεδιασμού είναι συμβατό με τις πρακτικές και τους στόχους της έρευνας σχεδιασμού. Κατάλληλοι μικρόκοσμοι σχεδιάζονται για να χρησιμοποιούνται και σε

τέτοιου είδους έρευνες, όπου η υπόθεση σχετίζεται με τους τρόπους που δημιουργούνται μαθηματικά νοήματα.

Η έρευνα σε υπολογιστικά υποστηριζόμενο περιβάλλον συνεργατικής μάθησης (CSCL) εκτός από χαρακτηριστικά σχεδιασμού έχει και στοιχεία αναλυτικής επιστήμης. Η ανάλυση των νοημάτων που δημιουργούνται από κοινού μέσα σε μια ομάδα διαμορφώνει επαγωγικά τους στόχους του σχεδιασμού της έρευνας. Έτσι, ο σχεδιασμός πρέπει να λαμβάνει υπόψη του την ανάλυση, αλλά και η ανάλυση γίνεται με βάση τον προσανατολισμό που έχει ο σχεδιασμός της έρευνας (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006).

Τα εκπαιδευτικά σενάρια

Βασικό εργαλείο της έρευνας σχεδιασμού είναι το **εκπαιδευτικό σενάριο**. Πρόκειται για ένα μοντέλο διδακτικού σχεδιασμού που έχει, όπως και ο ερευνητής, διττό ρόλο (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Από την πλευρά της έρευνας είναι ένα ερευνητικό εργαλείο που βοηθά τον ερευνητή να συλλέξει όσο το δυνατόν περισσότερα και σαφέστερα ερευνητικά στοιχεία (Κυνηγός, 2006). Από την άλλη, ως σχέδιο δραστηριότητας, που αναμένεται να έχει μαθησιακά οφέλη, πρέπει να είναι κατανοητό στους εκπαιδευτικούς που συνεργάζονται με τους ερευνητές στην έρευνα (Ορφανός & Δημητρακοπούλου, 2004; Laborde C. , 2001). Άλλωστε όπως έχει προαναφερθεί, η δεοντολογία της έρευνας σχεδιασμού υπαγορεύει ότι οποιοσδήποτε εμπλέκεται σε μια τέτοια έρευνα πρέπει να έχει όφελος. Η έρευνα διεξάγεται με δεδομένο ότι η ενασχόληση της τάξης με το σενάριο συνεπάγεται παιδαγωγικό όφελος.

Τα τελευταία χρόνια και στη χώρα μας τα εκπαιδευτικά σενάρια έχουν ενταχθεί στη διδακτική διαδικασία, σαν διδακτικές προτάσεις προς τον καθηγητή στο πλαίσιο τους αναλυτικού προγράμματος. Η επιμόρφωση στη διδακτική χρήση νέων τεχνολογιών, έχει κάνει αρκετούς ενεργούς εκπαιδευτικούς κοινωνούς της πρακτικής του σεναρίου. Ο ιστότοπος http://ifigeneia.cti.gr/repository/ είναι μια βιβλιοθήκη σεναρίων που έχουν κατασκευάσει και χρησιμοποιήσει εκπαιδευτικοί.

Το σενάριο είναι μια πρόταση διδασκαλίας και ένα έναυσμα να σκεφτεί ο εκπαιδευτικός πέρα από οργανωτικούς και υπηρεσιακούς περιορισμούς σε σχέση με πτυχές της μαθησιακής δραστηριότητας. Οι δραστηριότητες είναι διατυπωμένες με τέτοιο τρόπο, ώστε ο εκπαιδευτικός να μπορεί να τις εφαρμόσει στη διδασκαλία του, αλλά να πρέπει και να μπορεί να ενσωματώσει τη δική του εκπαιδευτική στρατηγική

και τους στόχους του. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη νέων σεναρίων ως αντικείμενο αναστοχασμού και μαστορέματος πάνω στην εκπαιδευτική δραστηριότητα (Κυνηγός, 2006).

4.2. Η υλοποίηση του πειράματος

Στην παρούσα έρευνα σχεδιασμού το πείραμα ήταν του τύπου *one-on-one* (δάσκαλος-ερευνητής και μαθητής), στον οποίο μια ομάδα ερυνητών διενεργεί μια σειρά μαθημάτων με μικρό πλήθος μαθητών. Με αυτή τη μέθοδο, στόχος ήταν να δημιουργηθεί μια μικρής κλίμακας εκδοχή της (version of) learning ecology, που μελετήθηκε σε βάθος και λεπτομέρεια (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000).

Η στερεομετρία, σα γνωστικό αντικείμενο βρίσκεται στο περιθώριο του αναλυτικού προγράμματος. Το ίδιο συμβαίνει και με πρακτικές συνεργατικής μάθησης και πλαισίου δημιουργίας προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές. Για την διεξαγωγή της έρευνας και με σκοπό να αποτυπώσω δεδομένα προς διερεύνηση, χρησιμοποίησα μαζί με τους υπόλοιπους ερευνητές μια web-based πλατφόρμα που υποστηρίζει δημιουργία συνεργατικού περιβάλλοντος μάθησης, όπου οι μαθητές εργάστηκαν διερευνητικά σε έναν κατάλληλα σχεδιασμένο μικρόκοσμο τρισδιάστατης γεωμετρίας, στο πλαίσιο εξωσχολικής δραστηριότητας, αλλά στο περιβάλλον του σχολείου τους.

4.2.1 Το υπολογιστικό περιβάλλον metafora

4.2.1.1 Το metafora, ένα εργαλείο έρευνας

Σε έρευνες στο πλαίσιο του CSCL οι ενέργειες μεταξύ των μελών της ομάδας ή μεταξύ υποομάδων διαμεσολαβούνται από υπολογιστικό περιβάλλον. Έχει προαναφερθεί ότι αντικείμενο της μελέτης είναι οι πρακτικές της από κοινού δημιουργίας νοημάτων και η κοινή δράση (Koschmann, 2002) στο πλαίσιο μιας διερευνητικής δραστηριότητας. Συνεπώς είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός τέτοιων περιβαλλόντων που θα αποτυπώνουν στιγμιότυπα αυτής της δρασητριότητας.

Είναι απαραίτητη όμως η χρήση υπολογιστών για τη μελέτη της από κοινού δημιουργίας νοημάτων; Σύμφωνα με τους Stahl, Koschmann και Suthers (2006) τα

χαρακτηριστικά και ταυτόχρονα τα πλεονεκτήματα του κατάλληλα σχεδιασμένου υπολογιστικού περιβάλλοντος είναι τα εξής:

- Ο δυναμικός χαρακτήρας τους που χαρακτηρίζει όχι μόνο τις δραστηριότητες (π.χ. μικρόκοσμους), αλλά και τους τρόπους επικοινωνίας. Επίσης υποστηρίζεται η ασύγχρονη επικοινωνία και καταγράφονται όλες οι πτυχές του διαλόγου. Αυτό δε σημαίνει ότι πρέπει ακόμα και η ζωντανή επικοινωνία μεταξύ των μελών της ομάδας να αντικαθίσταται από εικονική, όταν αυτό δε χρειάζεται.
- Η επικοινωνία γίνεται αντικείμενο ουσιώδους μελέτης σαν στιγμιότυπο. Ό,τι γίνεται ή γράφεται μπορεί να είναι αντικείμενο αναστοχασμού (είτε από τους μαθητές-μέλη της ομάδας, είτε από τους ερευνητές) και να αλλάζει.
- Η διαδραστικότητα είναι σημαντική ειδικά όταν υπάρχει η δυνατότητα το ψηφιακό εργαλείο να αυτορυθμίζεται στις συνθήκες, δίνοντας νέες δυνατότητες στους συμμετέχοντες.

Βέβαια, σε όλα αυτα ο ρόλος του δασκάλου-ερευνητή είναι ιδιαίτερα σημαντικός, αφού χωρίς τη σωστά σχεδιασμένη συμμετοχή τού, το λογισμικό δεν μπορεί από μόνο του να δημιουργήσει πλαίσιο δημιουργίας νοημάτων σε διερευνητικό περιβάλλον.

Σε αυτό το πλαίσιο το περιβάλλον που χρησιμοποιήσαμε για την παρούσα έρευνα ήταν η πλατφόρμα **metafora**. Πρόκειται για ένα web-based περιβάλλον μάθησης και επικοινωνίας, που έχει κατασκευάστει ως εργαλείο στα πλαίσια της έρευνας[16] της συνεργατικής μάθησης σε υπολογιστικό περιβάλλον (CSCL) με τη συμμετοχή του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (ETL) του Πανεπιστημίου Αθηνών. Κύριος άξονας της έρευνας ήταν η μελέτη των μηχανισμών και πρακτικών, μέσω των οποίων οι μαθητές μαθαίνουν να μαθαίνουν μαζί (learn to learn together: L2L2). Οι χαρακτηριστικές πτυχές αυτής της κοινωνικής πρακτικής για τη μάθηση (L2L2) είναι οι εξής (Yang, Wegerif, & Gwernan-Jones, 2012):

- Διαμοιρασμός ηγετικού ρόλου, που μπορεί να αλλάζει ανάλογα με τις σχέσεις των μελών της ομάδας ή τις ανάγκες των καταστάσεων.

[16] Το metafora project υλοποιήθηκε στα πλαίσια του 7ου προγράμματος-πλαισίου της Ευρωπαϊκής Ένωσης, στον θεματικό τομέα της τεχνολογίας της πληροφορίας και της επικοινωνίας με τη συμμετοχή του ETL από πλευράς Ελλάδας, αλλά και άλλους 6 συνεργάτες από 4 ακόμα χώρες (βλέπε http://www.metafora-project.org/)

- Αμοιβαία εμπλοκή (σε κάποια δραστηριότητα), των μελών μιας ομάδας.
- Αξιολόγηση των συνεργατών, από τους συνεργάτες τους (κοινωνικό-μεταγνωστική πρακτική).
- Διαδικασία από κοινού μάθησης.

Κατά τη διάρκεια της εμπλοκής σε μια δραστηριότητα οι ηγετικοί ρόλοι μπορεί να αλλάζουν, λόγω των σχέσεων μεταξύ των μελών αλλά και συγκεκριμένων καταστάστων.

4.2.1.2 Οι λειτουργικότητες του metafora

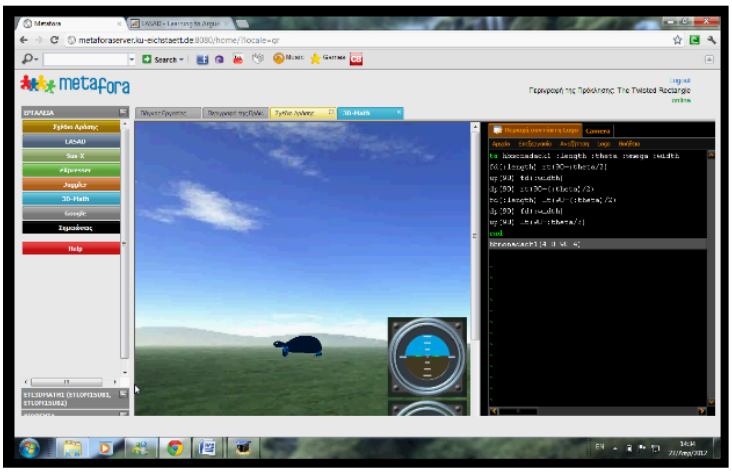
Η πλατφόρμα του metafora αποτελείται από:

- Μικρόκοσμους διαφόρων θεματικών ενοτήτων (μαθηματικά, περιβαλλοντική εκπαίδευση, φυσική κτλ). Στην παρούσα έρευνα μας χρησιμοποιήσαμε το μικρόκοσμο 3dmath, που είναι μια web-based εκδοχή του MaLT. Εκεί ο εκπαιδευτικός-ερευνητής έχει τη δυνατότητα να σχεδιάσει πιο εξειδικευμένους μικρόκοσμους, μισοψημένους μικρόκοσμους με προκλήσεις και διερευνητικές δραστηριότητες για τους μαθητές.
- Ένα περιβάλλον επικοινωνίας από απόσταση και ανταλλαγής επιχειρημάτων (argumentation space), το Lasad, στο οποίο ο κάθε χρήστης μπορεί να διατυπώνει τις σκέψεις του, τις ιδέες του, τις προτάσεις του και τις διαφωνίες του, σε μια συζήτηση μεταξύ όλων των χρηστών που συνεργάζονται.
- Ένα εργαλείο σχεδιασμού της δράσης μιας ομάδας μαθητών (που μπορεί να είναι χωρισμένη σε υποομάδες, σε απόσταση μεταξύ τους). Οι μαθητές χρησιμοποιώντας κατάλληλες κάρτες κατασκευάζουν έναν **χάρτη** (διάγραμμα) της δράσης τους, όπως πιστεύουν ότι πρέπει να εξελιχθεί για την αντιμετώπιση των προκλήσεων του μικρόκοσμου. Επίσης μπορούν να μοιράσουν ρόλους και αναθέσουν εργασίας στα μέλη της ομάδας. Το εργαλείο ονομάζεται planning tool (PT) και το διάγραμμα που κατασκευάζεται **σχέδιο δράσης**.

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και με έναν προσωπικό κωδικό για κάθε χρήστη-υπολογιστή, συνδέονται με την πλατφόρμα. Στη συνέχεια θα περιγράψω κάθε εργαλείο ξεχωριστά καθώς και τον τρόπο χρήσης τους.

3dmath

Ο μικρόκοσμος 3dmath, δε διαφέρει από το MaLT. Εδώ είναι μέρος μιας πλατφόρμας και έτσι εμφανίζεται ως παράθυρο εντός αυτής (Εικόνα 50). Όταν ένας χρήστης πειραματίζεται με τα εργαλεία του 3dmath, π.χ. χειρίζεται δυναμικά το σχήμα, αυτό δε γίνεται ορατό στους άλλους χρήστες δηλαδή δεν επηρεάζει την εικόνα που έχουν στον υπολογιστή που εργάζονται. Έτσι, ο χειρισμός αυτού του εργαλείου αφορά κάθε χρήστη-υπολογιστή αποκλειστικά.

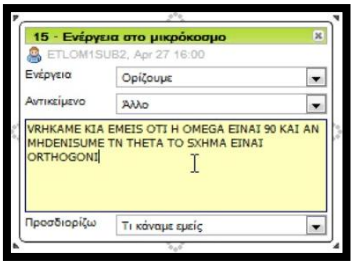


Εικόνα 50: Το 3dmath στο metafora.

Το Lasad

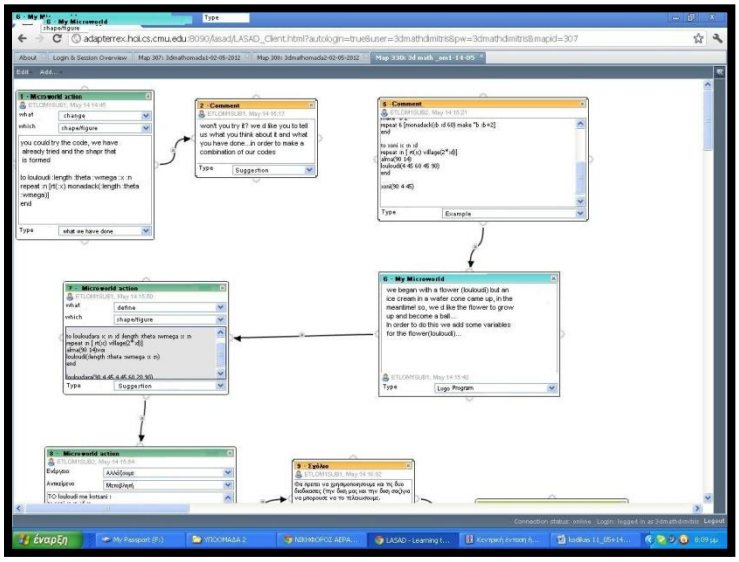
Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συζητήσουν από απόσταση για το θέμα με το οποίο ασχολούνται στο παράθυρο του Lasad. Για να συζητήσει μια ομάδα μαθητών, πρέπει ένας χρήστης να δημιουργήσει έναν **χάρτη** που ουσιαστικά είναι το ξεκίνημα μιας συζήτησης. Μπαίνοντας στο χάρτη κανείς (αν τον επιλέξει ανάμεσα σε άλλους χάρτες, από το σχετικό menu) βρίσκεται σε ενα παράθυρο, όπου έχει τη δυνατότητα να μιλήσει με τους υπόλοιπους χρήστες που είναι συνδεδεμένοι, με δύο τρόπους. Ή κάνοντας chat, για σύντομη συνεννόηση, ή τοποθετώντας ένα πλαίσιο κειμένου, μέσα στο χάρτη.

Το πλαίσιο κειμένου, έχει χαρακτηρισμό, όπως «σχόλιο» ή πιο συγκεκριμένα «ενέργεια στο μικρόκοσμο», που ο μαθητής επιλέγει από αντίστοιχο menu. Στη συνέχεια κάνει ακόμα πιο συγκεκριμένο το θέμα του κειμένου του, επιλέγοντας πάλι από λίστα με επιλογές (Εικόνα 51) και τέλος γράφει το κείμενο που θέλει να στείλει στους άλλους χρήστες.



Εικόνα 51: Ένα πλαίσιο κειμένου στο Lasad που από τους μαθητές χαρακτηρίστηκε ως "ενέργεια στο μικρόκοσμό"

Οι μαθητές που συμμετέχουν στη συζήτηση έχουν τη δυνατότητα να απαντήσουν, προσθέτοντας άλλο πλαίσιο και ούτως καθεξής και να συνδέσουν τα πλαίσια μεταξύ τους ώστε να φαίνεται η σειρά τους (Εικόνα 52).



Εικόνα 52: Ένας χάρτης συζήτησης στο Lasad με αρκετά πλαίσια κειμένου

To planning tool

Η κατασκευή του σχεδίου δράσης έχει ως στόχο την καταγραφή ενός προγραμματισμού της δουλειάς της ομάδας, όταν αντιμετωπίζει τις προκλήσεις του μικρόκοσμου. Η καταγραφή αυτή μπορεί να γίνει με χρήση αντίστοιχων καρτών από λίστα (Εικόνα 53). Οι κάρτες χωρίζονται σε κατηγορίες:

- Κάρτες φάσεων (διερευνούμε, κατασκευάζουμε μοντέλο, πειραματιζόμαστε κτλ), που αντιπροσωπεύουν μια χρονική περίοδο δράσης. Έχουν πράσινο χρώμα. Οι κάρτες φάσεων συνδέονται με βέλη, με άλλες κάρτες φάσεων (επόμενες ή προηγούμενες).
- Κάρτες διαδικασιών (προσομοιώνουμε, αναστοχαζόμαστε κτλ), οι οποίες εμπεριέχονται σε μια φάση, με την έννοια ότι η φάση ολοκληρώνεται, όταν ολοκληρωθεί η τελευταία διαδικασία που περιέχει. Οι διαδικασίες

συνδέονται με βέλη με διαδικασίες (επόμενες ή και προηγούμενες), αλλά και με τις φάσεις στις οποίες εμπεριέχονται. Έχουν γαλάζιο χρώμα. Μια διαδικασία μπορεί να έχει ίδιο όνομα, (άρα και σύμβολο με μια φάση).

Εικόνα 53: Η φάση "κατασκευάζουμε¨, η διαδικασία ¨αναστοχαζόμαστε¨, η στάση "είμαστε δημιουργικοί" και ο ρόλος ¨αξιολογητής".

- Κάρτες στάσεων (είμαστε δημιουργικοί, προτάσσουμε τη λογική κτλ), οι οποίες συνδέονται με διαδικασίες ή φάσεις, για να χαρακτηρίσουν συγκεκριμένη δραστηριότητα ή και τη συνολική δράση της ομάδας.
- Κάρτες ρόλων (αξιολογητής, υπέυθυνος ομάδας κτλ), ώστε να ανατεθούν ξεκάθαρα ρόλοι μεταξύ των μελών της ομάδας. Οι ρόλοι επίσης συνδέονται με διαδικασίες ή φάσεις.

Υπάρχουν τρεις τύποι συνδέσεων που τις αντιπροσωπεύει αντίστοιχο πλήθος από χρωματιστά βέλη (Εικόνα 54). Επίσης στις κάρτες υπάρχει κενό πλαίσιο κειμένου, στο οποίο οι μαθητές γράφουν διευκρινίσεις σχετικά με την αντίστοιχη κάρτα (π.χ. στις κάρτες ρόλων γράφουν ονόματα). Τέλος, κάνοντας κλικ με το ποντίκι σε μια κάρτα διαδικασίας, αυτή αλλάζει χρώμα (γίνεται κίτρινη), που δηλώνει ότι είναι ενεργή. Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα εκτελεί αυτή τη διαδικασία. Όταν τελειώνει η ενασχόληση με αυτή τη διαδικασία με άλλη επιλόγή το χρώμα ξαναλλάζει και γίνεται πράσινο, που σημαίνει ότι η διαδικασία έχει τελειώσει. Το σχέδιο εργασίας μπορεί να αλλάξει από όλους τους χρήστες μιας ομάδας και όλοι βλέπουν τις αλλαγές που κάνει.

Εικόνα 54: Είδη συνδέσεων.

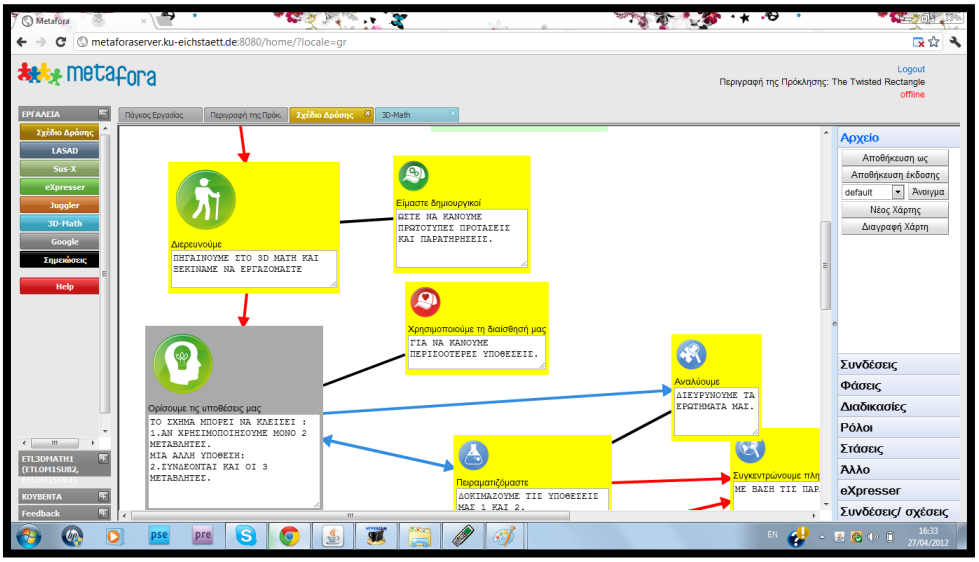
Το σύνολο των καρτών αυτών αποτελεί την συμβολική γλώσσα (visual language) περιγραφής του «από κοινού» νοητικού μοντέλου (Cooke, Salas, Kiekel, & Bell, 2004) των μελών της ομάδας για την περιγραφή συγκεκριμένων πτυχών της

συνεργασίας μεταξύ τους. Έτσι, στο metafora, μια οπτική αναπαράσταση αυτού του νοητικού μοντέλου απεικονίζεται, από τους ίδιους τους μαθητές (Yang, Wegerif, & Gwernan-Jones, 2012).

Η αναπαράσταση αυτή, όπως και οι χαρακτηρισμοί που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τα πλαίσια κειμένου που εισάγουν στο Lasad έχουν διπλή χρησιμότητα. Λόγω της καταγραφής, οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν ως σημεία αναφοράς και αναστοχασμού καθώς εργάζονται σαν ομάδα. Από την άλλη, αποτελούν στιγμιότυπα της πορείας της συνεργασίας των μαθητών ή της άποψης που έχουν οι ίδιοι για αυτή τη συνεργασία. Άρα, είναι κομμάτια της διάρθωσης του διαλόγου, μέσω της οποίας γίνεται η ανάλυση των δεδομένων (Stahl, 2006).

Η χρήση των τριών εργαλείων γίνεται σε συνδυασμό. Εκτός από το 3dmath, τα άλλα δύο εργαλεία δίνουν τη δυνατότητα στον κάθε χρήστη να βλέπει τις ενέργειες του άλλου, εφόσον έχουν συνδεθεί στην ίδια ομάδα. Έτσι, το Lasad είναι η μόνη πλατφόρμα συζήτησης που μπορούν να χρησιμοποοιήσουν οι μαθητές κατά την κατασκευή του σχεδίου τους, ή την ενασχόληση με το μικρόκοσμο στο 3dmath.

Οι μαθητές στην αρχή της διερεύνησης μπορεί να έχουν κάνει ένα πιο γενικό πλάνο και κατά την εξέλιξή της να θέλουν να το συγκεκριμενοποιήσουν. Έχουν αυτή τη δυνατότητα, αφού το σχέδιο δράσης μπορεί να μεταβληθεί κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης με τη δραστηριότητα.



Εικόνα 55: Το τμήμα ενός σχεδίου δράσης. Οι κίτρινες κάρτες είναι ενεργές.

4.2.2 Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης

4.2.2.1 Το πλαίσιο της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή δέκα (10) μαθητών Γ΄τάξης και τριών (3) καθηγητών μαθηματικών ενός Γυμνασίου της Αθήνας, στο πλαίσιο της λειτουργίας ομίλου μαθηματικών του Σχολείου. Η έρευνα έγινε σε δώδεκα (12) συναντήσεις διάρκειας δύο (2) διδακτικών ωρών η κάθε μία , αμέσως μετά το τέλος του σχολικού ωραρίου. Η πρώτη συνάντηση έγινε στις 9 Μαρτίου 2012 και η τελευταία στις 14 Μαϊου 2012. Οι περισσότεροι μαθητές της τάξης ήταν σχετικά έμπειροι χρήστες του δισδιάστατου χελωνόκοσμου και τουλάχιστον κανείς τους δεν ήταν αρχάριος στη χρήση του κι αυτό ήταν ένα από τα κριτήρια επιλογής τους συγκεκριμένου σχολείου. Επίσης ο ένας από τους εκπαιδευτικούς είχε σημαντική υπηρεσιακή επιμόρφωση [17] στην διδακτική αξιοποίηση νέων τεχνολογιών στα μαθηματικά.

Άλλο κριτήριο ήταν ύπαρξη του ομίλου ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά, καθώς ή έρευνα θα είχε μεγάλη διάρκεια. Θα ήταν δύσκολο για ένα μαθητή που δεν έχει πρόδηλο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά να προσαρμόσει το εξωσχολικό πρόγραμμά του με τρόπο ώστε να μη «χάνει» συναντήσεις. Για την ανάλυση ήταν πολύ σημαντική η συνεχής παρουσία των μαθητών σε όλες (ή τουλάχιστον στις περισσότερες) συναντήσεις, αφού το συνεργατικό περιβάλλον ήταν βασικό στοιχείο της έρευνας. Οι μαθητές που συμμετείχαν, γνώριζαν ότι πρόκειται για μια δραστηριότητα που θα διαρκούσε αρκετές ώρες, θα είχε μαθηματικό, αλλά και γενικά διερευνητικό χαρακτήρα και θα γινόταν στο πλαίσιο έρευνας για τον τρόπο που λειτουργούν νέα εργαλεία μάθησης. Επίσης, κάναμε σαφές στους μαθητές ότι η συμμετοχή τους δεν σχετιζόταν με την αξιολόγησή τους από τους καθηγητές τους στο πλαίσιο του προγράμματος του σχολείου. Ακόμα, η τάξη της Γ΄ Γυμνασίου, ειδικά στο δεύτερο μισό της σχολικής χρονιάς ήταν κατάλληλη γνωστικά για να αντιμετωπίσει θέματα όπως οι τριγωνομετρικές σχέσεις και η έννοια της γωνίας.

Στην ερευνητική ομάδα συμμετείχαν τέσσερις (4) ερευνητές. Άλλωστε στην έρευνα σχεδιασμού, το μεγάλο πλήθος δεδομένων που πρέπει να συλλεχθούν είναι δύσκολο να τα συλλέξει ένας ερευνητής. Πριν την έναρξη των συναντήσεων, σχεδιάσαμε ένα διδακτικό-ερευνητικό σενάριο με βάση ένα προϋπάρχον σενάριο του Εργαστηρίου

[17] ΠΑΚΕ Πανεπιστημίου Αθηνών

Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, το οποίο περιέγραψε την πορεία της έρευνας. Στο σενάριο αυτό κάναμε αρκετές αλλαγές κατά τη διάρκειά της, λόγω ανατροφοδότησης από αυτή (Collins, Joseph, & Bielaczyz, 2004). Έτσι, ανάμεσα σε δύο συναντήσεις υπήρχαν αναλυτικές συζητήσεις μεταξύ μας ως μέλη της ερευνητικής ομάδας και επανακαθορισμός των αξόνων της επόμενης συνάντησης.

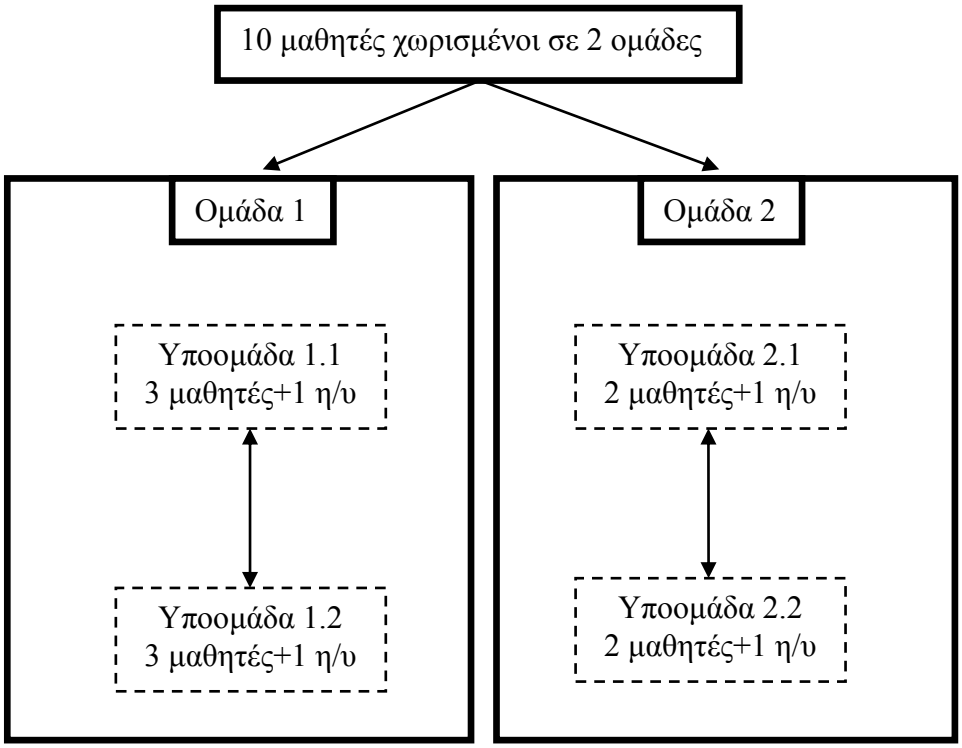
Λίγες ημέρες πριν την πρώτη συνάντηση με τους μαθητές, συζητήσαμε με τους καθηγητές της τάξης και τους ενημερώσαμε για τους στόχους, τον προγραμματισμό και το περιεχόμενο της έρευνας. Επίσης, κάναμε μια επίδειξη των δυνατοτήτων του metafora, αλλά και της δραστηριότητας του σεναρίου, με την επισήμανση ότι η ερευνητική ομάδα ήταν δεκτική σε προτάσεις σχετικά με τη διενέργεια της έρευνας. Πριν από κάθε συνάντηση η ομάδα ένας από εμάς έστελνε με email στους καθηγητές τον προγραμματισμό των δύο (2) επόμενων συναντήσεων σαν ένα επιμέρους σενάριο. Επίσης κάθε ερευνητής κρατούσε ένα ημερολόγιο έρευνας που κατέγραψε ότι είχε σημειώσει κατά τη διάρκεια των συναντήσεων (συμμετοχική παρατήρηση).

Η κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης ήταν η εξής: Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο (2) ομάδες, και αυτές με τη σειρά τους σε δύο υποομάδες (Εικόνα 56). Ο επιλογή των μαθητών κατά το χωρισμό σε ομάδες έγινε από τους εκπαιδευτικούς του σχολείου και τα κριτήριά τους ήταν η προτίμηση των μαθητών και η δημιουργία ομοιογενών ομάδων, ως προς τη χρήση τεχνολογίας. Έτσι, σύμφωνα με τις ανάγκες του σεναρίου πρέκυψαν δύο ομάδες μια των έξι (6) και μια των τεσσάρων (4) μαθητών, οι οποίες με τη σειρά τους χωρίστηκαν σε δύο ισοπλήθεις υποομάδες η κάθε μια. Τα μέλη των υποομάδων της ίδιας ομάδας επικοινωνούσαν μεταξύ τους με φυσικό τρόπο (face-to-face), ενώ οι υποομάδες της ίδιας ομάδας, από απόσταση με χρήση του Lasad. Οι δύο ομάδες δεν επικοινωνούσαν μεταξύ τους, παρά μόνο σε συγκεκριμένες φάσεις του σεναρίου.

Την παρουσίαση των δραστηριοτήτων και το συντονισμό των εργασιών των ομάδων είχαμε αναλάβει σαν ερευνητική ομάδα μαζί με τους εκπαιδευτικούς, αφού πριν από κάθε συνάντηση συνεννοούμασταν και μοιράζαμε τις αρμοδιότητες. Ως ερευνητές όμως είχαμε διπλή ατζέντα (δασκάλου και ερευνητή) παρατηρούσαμε και καταγράφαμε συμβάντα κατά τη διάρκεια της έρευνας. Ο κάθε ερευνητής εστίασε σε κάποια υποομάδα και κατ’ επέκταση στην αντίστοιχη ομάδα. Η ομάδα εστίασης της παρούσας έρευνας είναι η ομάδα 1 και η υποομάδα εστίασης η 1.2. Η επιλογή της ομάδας-υποομάδας αυτής ήταν δική μου (σε συνεννόηση με τους υπόλοιπους ερευνητές) και έγινε μετα τις δύο (2) πρώτες συναντήσεις με κριτήριο την καλή

χρήση της Logo και την μεγαλύτερη εξωστρέφεια των μελών της ομάδας (πράγμα που διευκολύνει την άντληση δεδομένων).

Αξίζει να σημειώσω ότι πριν τη διενέργεια της κύριας έρευνας είχαμε διεξαγάγει πιλοτική έρευνα έξι (6) διδακτικών ορών στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου του Πειραιά, με τη συμμετοχή τεσσάρων (4) μαθητών που αποτελούσαν μια ομάδα, χωρισμένη σε δύο ισοπλήθεις υποομάδες. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήσαμε ένα μέρος του σεναρίου της κύριας έρευνας.



Εικόνα 56: Η κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης. Οι ομάδες είναι χωρισμένες σε υποομάδες, οι οποίες έχουν στη διάθεσή τους έναν υπολογιστή. Η επικοινωνία γίνεται από απόσταση με το Lasad.

Όπως ανέφερα η έρευνα σχεδιασμού δεν έχει προδιατυπωμένες υποθέσεις για να ελεγχθούν, αλλά τα αποτελέσματά της διαμορφώνονται από την εξέλιξή της. Ο ερευνητής δεν έχει προοδιαγράψει την πορεία της έρευνας, αμετακλήτα. Κάνει μια ολιστική μελέτη του περιβάλλοντος και των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του. Γι' αυτό το λόγο πρέπει να αντληθεί μεγάλη ποσότητα και ποικιλία δεδομένων. Στη δική μου έρευνα αυτά ήταν οι συζητήσεις μεταξύ των μαθητών, μεταξύ μαθητών και ερευνητών ή καθηγητών, είτε με φυσικό τρόπο, είτε μέσω του Lasad, οι χειρονομίες τους καθώς προσπαθούσαν να εκφράσουν ή να εξηγήσουν κάτι, οι κατασκευές τους

στην οθόνη του υπολογιστή ή με φυσικά μέσα, ο σχεδιασμός της δράσης τους, οι αντιδράσεις τους.

Για την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποίησα τις εξής πηγές:

- Για τις συζητήσεις μεταξύ των μαθητών ένα δημοσιογραφικό κασετοφωνάκι.
- Για τις ενέργειες των μαθητών στο περιβάλλον του metafora η εφαρμογή hypercam2, με την οποία κατέγραψα σε video με ήχο τη δράση της υποομάδας 1.2 στον υπολογιστή της.
- Μια κάμερα καταγραφής βίντεο και φωτογραφιών, σε επιλεγμένες φάσεις της έρευνας.
- Χειρόγραφα των μαθητών.
- Κατασκευή των μαθητών με φυσικά υλικά.

Επίσης στην αρχή και στο τέλος της έρευνας οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα pre και post test αντίστοιχα, που είχε περισσότερο να κάνει με την άποψή τους για το σχεδιασμό της δράσης τους και καθόλου με τις μαθηματικές τους γνώσεις. Παρόμοιες πηγές δεδομένων χρησιμοποίησαν και οι υπόλοιποι ερευνητές.

4.2.2.3 Ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων

Το πλαίσιο της έρευνας σχεδιασμού είναι ανοικτό σε μεταβολές της παρέμβασης που αρχικά σχεδιάστηκε, όπως έχω προαναφέρει. Επίσης σκοπός της έρευνας είναι η μελέτη της δημιουργίας από κοινού νοημάτων για έννοιες, για τις οποίες υπάρχει σχετική βιβλιογραφία. Αν και θα μπορούσε να πει κανείς ότι η ανασκόπηση αυτής της βιβλιογραφίας θα υποστήριζε ένα σύνολο υποθέσεων για τα νοήματα αυτά, εν τούτοις η δημιουργία νοημάτων υπό το πρίσμα της θεωρίας της εγκαθιδρυμένης μάθησης (Lave, 1988) και των από κοινού (εν χρήσει) νοημάτων σε περιβάλλον CSCL (Stahl, 2006) συνιστά ως καταλληλότερη μέθοδο ανάλυσης την στάση παραγωγής θεωρητικών δομημάτων (Goetz & Lecompte, 1984). Σε αυτή τη μέθοδο ανάλυσης δε γίνεται επαλήθευση ή έλεγχος προδιατυπωμένων υποθέσεων. Έτσι, τα δεδομένα σχηματοποίησαν τη δομή των αποτελεσμάτων και όχι συγκεκριμένα ερευνητικά ερωτήματα (Κυνηγός, 2006). Άλλωστε όπως γίνεται στην έρευνα σχεδιασμού, δεν προσπάθησα να σταθεροποιήσω μεταβλητές, να ελέγξω άλλες και να μετρήσω μια από αυτές, αλλά να παρατηρήσω πώς αλληλεπέδρασαν τα στοιχεία του περιβάλλοντος με τα άτομα, ή τα άτομα μεταξύ τους και να περιγράψω τα

αποτελέσματα (βλέπε σελίδα 106). Πρόκειται, λοιπόν για μια ολιστική μελέτη των δεδομένων της έρευνας.

Η ανάλυση αναπόφευκτα είχε στοιχεία εθνογραφίας, αφού όσα αναφέρονται αφορούν συγκεκριμένες πρακτικές μελών μιας τάξης (εκπαιδευτικών και μαθητών) ενός ελληνικού σχολείου και επηρεάζονται από αυτή τους την ιδιότητα.

Η έρευνα, όπως προαναφέρθηκε έλαβε χώρα σε συνεχόμενες συναντήσεις διάρκειας δύο διδακτικών ωρών η κάθε μια(παρακάτω υπάρχει αναλυτική αναφορά) και συμμετείχαν παραπάνω από ένας ερευνητές με διαφορετικές οπτικές γωνίες σε σχέση με τα συμβαίνοντα στην τάξη (diversity of expertise and backgrounds). Είναι σημαντικό ότι εκτός από την τελική ανάλυση, από συντάντηση σε συνάντηση υπήρχε συζήτηση μεταξύ τους για πιθανές αλλαγές στο σχεδιασμό, κάτι που είναι χαρακτηριστικό της έρευνας σχδιασμού, αλλά και γενικότερα της έρευνας σε συνεργατικά περιβάλλοντα μάθησης υποστηριζόμενα από υπολογιστές. Έτσι, οι διαφορετικές οπτικές γωνίες των ερευνητών ήταν σημαντικές στην ανάλυση της έρευνας που συνέβαινε κατά την εξέλιξή της (retrospective analysis) (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003).

4.2.3 Το στρεβλό ορθογώνιο

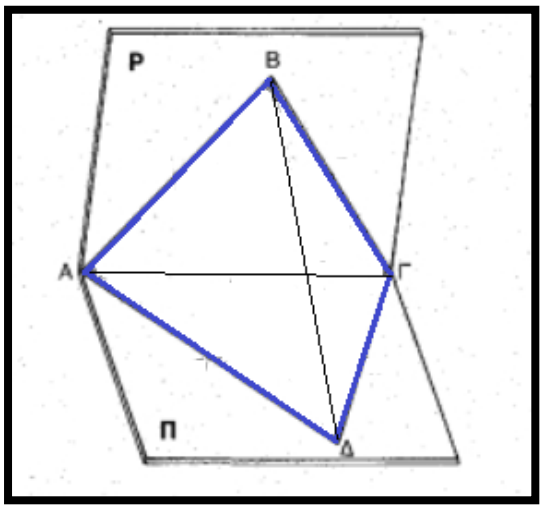
Στρεβλό ορθογώνιο (twisted rectangle) ονομάζεται το σχήμα που βρίσκεται στο επίκεντρο του σεναρίου που χρησιμοποίησα στην έρευνα. Η χωρική αναπαράσταση του και η γεωμετρική δομή του έχουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά, που δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να δουλέψουν διερευνητικά. Επίσης η συμβολική έκφραση που το αναπαριστά μέσω Logo εντολών, αν αποδομηθεί με κατάλληλο τρόπο, προσφέρει έναν ενδιαφέροντα μισοψημένο μικρόκοσμο, που η επαναδόμησή του είναι ιδιαίτερα δύσκολο γεωμετρικό πρόβλημα. Παρακάτω θα αναλύσω τη δομή του σχήματος, τα χαρακτηριστικά του, το ρόλος του στο σενάριο και θα αιτιολογήσω την επιλογή του.

4.2.3.1 Το μαθηματικό πλαίσιο του σχήματος

Στρεβλό τετράπλευρο

Ένα **στρεβλό τετράπλευρο** (Εικόνα 57: Ένα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ που οι πλευρές του βρίσκονται επί των επιπέδων μιας δίεδρης γωνίας.) είναι το τετράπλευρο που οι κορυφές του δεν βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο. Ο ορισμός αυτός

αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας του Λυκείου (Αργυρόπουλος Η. , Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, & Σιδέρης, 2003, σ. 269), στο περιθώριο μιας άσκησης.



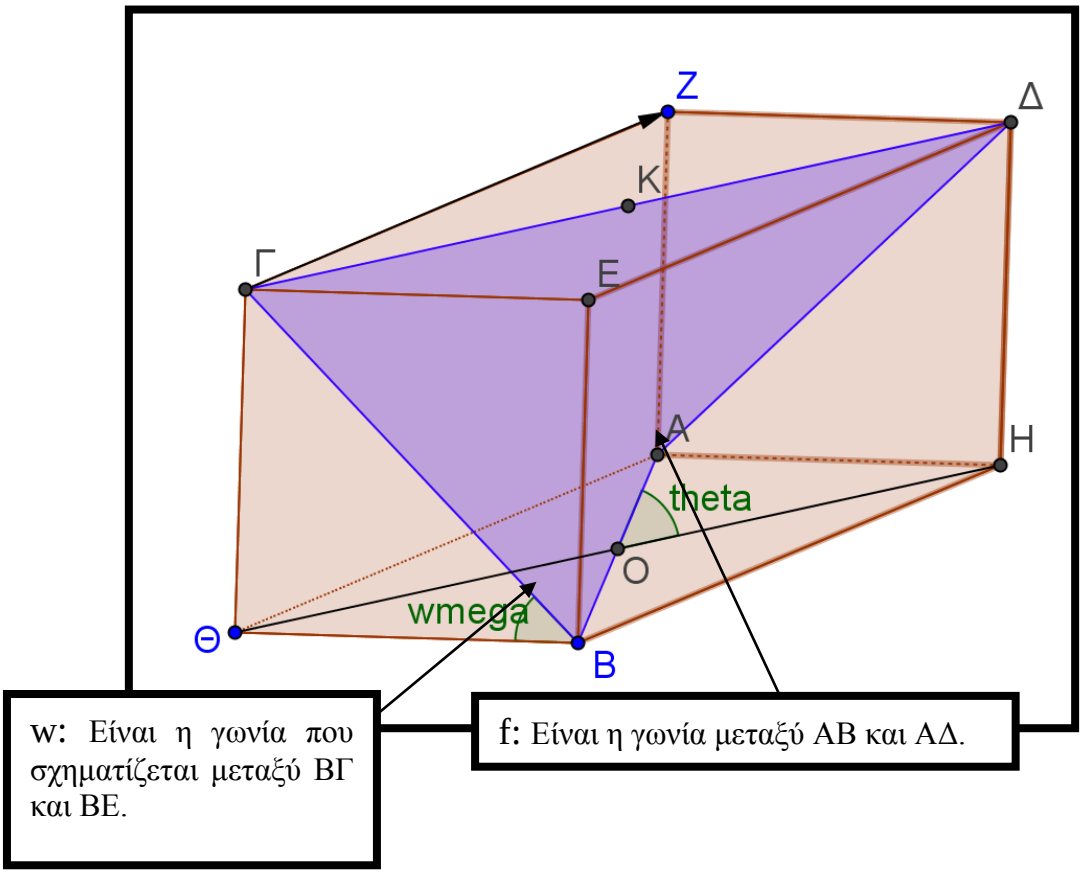
Εικόνα 57: Ένα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ που οι πλευρές του βρίσκονται επί των επιπέδων μιας δίεδρης γωνίας.

Ένα στρεβλό τετράπλευρο έχει τέσσερις κορυφές, όπως ένα οποιοδήποτε τετράπλευρο. Η βασική διαφορά του από ένα επίπεδο τετράπλευρο είναι ότι οι κορυφές αυτές δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Από τα τέσσερα σημεία που είναι οι κορυφές ενός στρεβλού τετραπλεύρου, τα τρία μπορούν να είναι **συνεπίπεδα**, δηλαδή να «μπουν» στο ίδιο επίπεδο. Έτσι το στρεβλό τετράπλευρο μπορεί να σχηματιστεί από δύο τρίγωνα που έχουν μια κοινή πλευρά. Στην Εικόνα 57 το τετράπλευρο σχηματίζεται από τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ που βρίσκονται στα επίπεδα Ρ και Π αντίστοιχα. Το τρίγωνο είναι το βασικό σχήμα της επίπεδης γεωμετρίας, γιατί προσδιορίζει πλήρως ένα επίπεδο. Άρα είναι προφανές ότι το στρεβλό τετράπλευρο μπορεί να αναλυθεί σε δύο (2) τεμνόμενα επίπεδα.

Στρεβλό ορθογώνιο

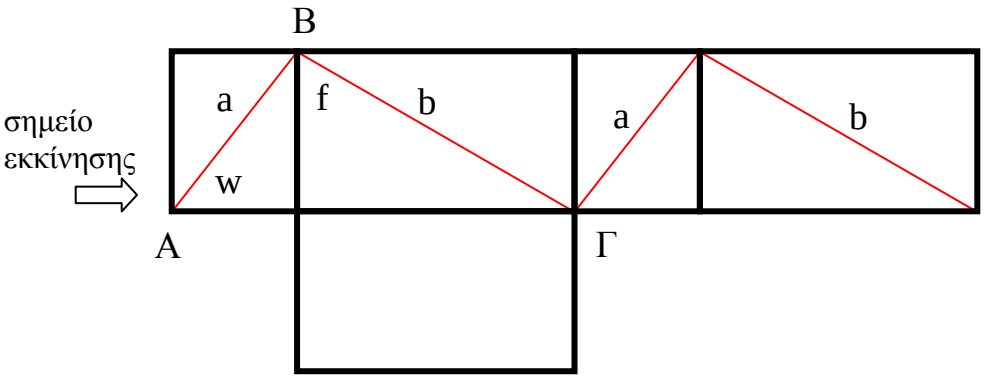
Ένας άλλο τρόπος να δούμε την κατασκευή ενός στρεβλού τετραπλεύρου είναι ο εξής. Αν σκεφτούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τότε ξεκινώντας από τη μια κορυφή του και σχεδιάζοντας διαδοχικές διαγωνίους, μια σε κάθε έδρα, επιστρέφουμε στην αρχική κορυφή. Το αποτέλεσμα είναι ένα τετράπλευρο σχήμα. Πρόκειται για ένα στρεβλό τετράπλευρο, το οποοίο ονομάζουμε **στρεβλό ορθογώνιο** με την έννοια ότι κατασκευάζεται στις έδρες ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (Εικόνα 58). Ο τρόπος κατασκευής αυτός είναι σίγουρα πιο πολύπλοκος από την περίπτωση της δίεδρης γωνίας, όμως η δραστηριότητα που θα περιγράψω παρακάτω γίνεται πιο

προκλητική για τους μαθητές και πιο ενδιαφέρουσα για τους ερευνητές, αν «στηθεί» πάνω σε αυτή την κατασκευή. Οι λόγοι που συμβαίνει αυτό θα φανούν παρακάτω.



Εικόνα 58: Το στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ στις έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι γωνίες w και f είναι γωνίες του τετραπλεύρου και σχηματίζονται μεταξύ των πλευρών του.

Για να γίνει πιο κατανοητή η γεωμετρική φύση αυτής της κατασκευής και οι ιδιότητές της, μπορεί κανείς να δει το σχήμα στην ανεπτυγμένη επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιλέδου. Στην Εικόνα 59 φαίνεται το στρεβλό τετράπλευρο ως μια τεθλασμένη γραμμή (η κόκκινη γραμμή). Αυτό που αξίζει να παρατηρήσουμε είναι οι γωνίες που φαίνονται στις δύο εικόνες (Εικόνα 58 και Εικόνα 59).



Εικόνα 59: Το στρεβλό τετράπλευρο στην ανεπτυγμένη επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπίπέδου. Εδώ πρόκειται για μια τεθλασμένη γραμμή.

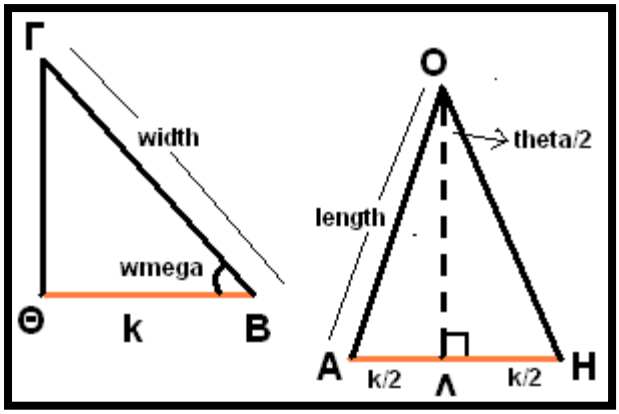
	Μεταξύ ποιων ευθυγράμμων τμημάτων σχηματίζεται		
	Τετραπλεύρου		Ορθογωνίου
wmega	ΓΘ		ΒΘ
theta	ΑΒ		ΘΗ
w	ΑΒ	ΒΓ	
f	ΑΒ	ΑΓ	

Εικόνα 60: Όπως βλέπουμε οι γωνίες wmega και theta εξαρτώνται άμεσα από στοιχεία του ορθογωνίου. Για να τις σχηματίσει κανείς πρέπει να βλέπει το ορθογώνιο. Αντίθετα οι w και f για να εμφανιστούν αρκεί να φαίνεται μόνο το τετράπλευρο.

Όπως βλέπουμε στον πίνακα της Εικόνα 60 οι γωνίες που εμφανίζονται στο συνδυασμό σχημάτων «στρεβλό ορθογώνιο»-«ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο» είναι δύο ειδών. Οι γωνίες w και f σχηματίζονται ανάμεσα σε δύο πλευρές του στρεβλού, ενώ οι wmega και theta σχηματίζονται ανάμεσα σε μια πλευρά του στρεβλού και σε ένα ευθύγραμμο τμήμα που είναι διαγώνιος του στρεβλού, το οποίο όμως εμφανίζεται μόνο αν έχει κανείς σχεδιασμένο και το παραλληλεπίπεδο. Έτσι, αν κάποιος βλέπει μόνο το στρεβλό πρέπει να κατασκευάσει μόνος του το στερεό σχήμα, να το οπτικοποιήσει, ώστε σχεδιάζει τις γωνίες wmega και theta. Αυτή είναι μια διαδικασία ιδιαίτερα δύσκολη για ένα μαθητή που απαιτεί βαθιά μαθηματικοποίηση του σχήματος και νοητικές αφαιρέσεις.

Η μαθηματική σχέση

Κάτω από την κατασκευή του στρεβλού ορθογωνίου υπάρχει μια μαθηματική σχέση μεταξύ τεσσάρων μεγεθών, των γωνιών wmega και theta και των πλευρών του. Ονομάζουμε τα μήκη $AB = \Gamma\Delta = width$ και $B\Gamma = A\Delta = length$. Χρησιμοποιώντας τα τρίγωνα ΘΒΓ και ΟΑΗ με επίλυση τριγώνων προκύπτει η σχέση που συνδέει τα παραπάνω μεγέθη (Εικόνα 61).



Εικόνα 61: Τα δύο τρίγωνα προκύπτουν από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το στρεβλό ορθογώνιο. Μέσω της επίλυσης αυτών των τριγώνων βρίσκουμε τη ζητούμενη δομική σχέση του στρεβλού τετράπλευρου.

Πράγματι, $\cos(wmega) = \frac{\Theta B}{B\Gamma} = \frac{k}{width} \Leftrightarrow k = width \cdot \cos(wmega)$

και $\sin\left(\frac{theta}{2}\right) = \frac{AK}{OA} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{length}{2}} = \frac{k}{length} \Leftrightarrow k = length \cdot \sin\left(\frac{theta}{2}\right)$

Άρα,

$$\boxed{width \cdot \cos(wmega) = length \cdot \sin\left(\frac{theta}{2}\right)}$$

4.2.3.2 Το σχήμα ως κατασκευή στο 3dmath

Κατασκευή σχήματος

Για να κατασκευάσει η χελώνα το στρεβλό ορθογώνιο θα ακολουθήσει την εξής πορείας Β → Α → Δ → Γ → Β. Αναλυτικά οι εντολές Logo-κινήσεις που εκτελεί η χελώνα είναι οι εξής:

Σημείο εκκίνησης είναι το Β

fd(:length): Η χελώνα προχώρησε από το Β στο Α.

rt(90+:theta/2): Η χελώνα προσανατολίστηκε προς το Η, με το κεφάλι της να βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ (παραμένει στο επίπεδο βάσης, με τη φορά του $\overrightarrow{AH}$).

up(:wmega): Η χελώνα παραμένει στο Α, αλλά σημώνεται κατά γωνία wmega. Το κεφάλι της βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ (διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$).

fd(:length*sin(:theta/2)/cos(:wmega)): Η χελώνα μετακινήθηκε από το Α στο Δ, κινούμενη πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.

dp(:wmega): Η χελώνα παραμένει στο σημείο Δ, αλλά κατέβηκε στο επίπεδο της επάνω έδρας ΕΔΖΓ, σα να «πατάει» στο επίπεδο αυτό. Το κεφάλι της βρίσκεται στην

προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΖΔ, αλλά «κοιτάει» προς την αντίθετη κατεύθυνση (διάνυσμα $\overrightarrow{ZΔ}$).

rt(90+(:theta)/2): Η χελώνα προσανατολίζεται προς το Γ (βρίσκεται ακόμα στο Δ), με τη φορά του διανύσματος $\overrightarrow{ΔΓ}$.

fd(:length): Η χελώνα προχώρησε από το Δ στο Γ, κατά μήκος του ΔΓ.

lt(90+(:theta)/2) Μετά από αυτήν, η χελώνα έστριψε και τώρα έχει κατεύθυνση προς το Ε. Βρίσκεται στο επίπεδο της έδρας ΕΔΖΓ του παραλληλεπιπέδου, με κατεύθυνση αυτή του $\overrightarrow{ΓE}$).

dp(:wmega): Η χελώνα άφησε το επίπεδο της πάνω έδρας και τώρα έχει κατεύθυνση αυτή του διανύσματος $\overrightarrow{ΓB}$.

fd(:length*sin(:theta/2)/cos(:wmega)): Η χελώνα προχώρησε από το Γ στο Β επί του ΓΒ και το σχήμα κλείνει (Εικόνα 62).

Εικόνα 62: Το στρεβλό τετράπλευρο όπως κατασκευάζεται από τη Χελώνα στο 3dmath.

Άρα ο κώδικας Logo που συντάξαμε είναι ο παρακάτω:

```
to monadack :length :theta :wmega
fd(:length) rt(90+:theta/2)
up(:wmega) fd(:length*sin(:theta/2)/cos(:wmega))
dp(:wmega) rt(90+(:theta)/2)
fd(:length) lt(90+(:theta)/2)
dp(:wmega) fd(:length*sin(:theta/2)/cos(:wmega))
up(:wmega) lt(90+:theta/2)
end
```

Ορίσαμε τρεις (3) μεταβλητές στην είσοδο του προγράμματος (length, theta, wmega), ενώ η τέταρτη μεταβλητή (width) ορίζεται από τη σχέση

$$width = \frac{length \cdot \sin\left(\frac{theta}{2}\right)}{\cos(wmega)}$$

Η θέση στην οποία χρησιμοποιήσαμε την εξαρτημένη μεταβλητή width φαίνεται με έντονα γράμματα στον παραπάνω κώδικα.

Μισοψημένο στρεβλό ορθογώνιο

Το «μισοψήσιμο» του στρεβλού ορθογωνίου έγινε μέσω της αποδόμησης του (Kynigos, 2007a). Χρησιμοποιήσαμε την παραπάνω σχέση και αντί για την ποσότητα $\frac{length \cdot \sin\left(\frac{theta}{2}\right)}{\cos(wmega)}$ βάλαμε στον κώδικα τη μεταβλητή $width$ (η οποία πρέπει να οριστεί και στην πρώτη γραμμή του). Τότε προέκυψε ένας νέος κώδικας με τέσσερις μεταβλητές (ανεξάρτητες). Έτσι όταν ο χρήστης του 3dmath «τρέξει» αυτόν τον κώδικα για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών, ελλείψει της σχέσης που «κατασκευάζει» το στρεβλό ορθογώνιο, προκύπτει ένα «ανοικτό» σχήμα ή ένα σχήμα που δεν είναι γενικευμένα κλειστό (δηλαδή ανοίγει με δυναμικό χειρισμό), το οποίο ονομάσαμε **μισοψημένο στρεβλό ορθογώνιο**. Αυτόν τον κώδικα χρησιμοποιήσαμε ως κεντρική αναπαράσταση στον μικρόκοσμο που αποτέλεσε την κύρια δραστηριότητα του σεναρίου. Έτσι ονομάσαμε το σενάριο «στρεβλό ορθογώνιο» και ο κώδικας του μισοψημένου στρεβλού ορθογωνίου φαίνεται παρακάτω. Στην Εικόνα 68 (σελίδα 137) φαίνεται το μισοψημένο στρεβλό ορθογώνιο όπως κατασκευάστηκε στο 3dmath.

```
to hbmonadack :length :theta :wmega :width
fd(:length) rt(90+:theta/2)
up(:wmega) fd(:width)
dp(:wmega) rt(90+(:theta)/2)
fd(:length) lt(90+(:theta)/2)
dp(:wmega) fd(:width)
up(:wmega) lt(90+:theta/2)
end
```

4.2.3.3 Η επιλογή του σχήματος

Το περιεχόμενο του σεναρίου αφορά τη γεωμετρία σε ένα χώρο τριών διαστάσεων (πιο συγκεκριμένα την έννοια της γωνίας), αλλά και τη χρήση τριγωνομετρικών σχέσεων σε ένα τέτοιο χώρο. Άρα, όσο αφορά το γνωστικό αντικείμενο, από την προηγούμενη παράγραφο έγινε φανερό ότι η επιλογή του στρεβλού ορθογωνίου ήταν κατάλληλη. Η δομική του σχέση αφορά τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών και επίλυση τριγώνου. Επίσης είναι σημαντικό ότι αυτά τα τρίγωνα δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, άρα θα έπρεπε το σχήμα να αναλυθεί, πριν επιλυθεί το πρόβλημα.

Έχω αναφέρει προηγουμένως ότι οι μαθητές προτιμούν να μετακινούν τη χελώνα στο επίπεδο, παρά στο χώρο κι αυτό φαίνεται από τις εντολές που επιλέγουν. Επίσης, έχουν παρατηρηθεί πρακτικές μαθητών να αναλύουν τρισδιάστατα σχήματα σε κομμάτια, προκειμένου να τα μελετήσουν (Kynigos & Latsi, 2007). Τι συμβαίνει όμως όταν το σχήμα δεν είναι «αυθεντικά» τρισδιάστατο;

Η έκφραση *αυθεντικά τρισδιάστατο* δεν είναι μαθηματικός όρος, αλλά την επιλέγω για να περιγράψω ένα σχήμα σαν το στρεβλό ορθογώνιο με την εξής έννοια:

- Είναι τετράπλευρο, κι ως τετράπλευρα οι μαθητές γνωρίζουν μόνο επίπεδα σχήματα.
- Δεν είναι στερεό.
- Μέσω δυναμικού χειρισμού υπάρχει συγκεκριμένη θέση στην οποία το σχήμα είναι επίπεδο, έτσι το γενικευμένο στρεβλό τετράπλευρο, όταν παύει να είναι στρεβλό, γίνεται σχήμα δύο διαστάσεων (Εικόνα 63, σελίδα 137).
- Οι γωνίες που μεταβάλλονται (theta και wmega) δεν είναι σχεδιασμένες στο σχήμα.
- Μπορεί να «χωρέσει» σε δύο επίπεδα, τα οποία όμως δε φαίνονται και πρέπει οι μαθητές να τα φανταστούν. Έτσι, για να το αναλύσουν πρέπει πρώτα να σχεδιάσουν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που το «γεννά» ή έστω ένα τμήματα του.

Αυτά τα χαρακτηριστικά του σχήματος, εκάναν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα την ενασχόληση των μαθητών με τον αντίστοιχο μικρόκοσμο. Για παράδειγμα, τι έκαναν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν τη δυσκολία της έλλειψης του επιπέδου στο οποίο μεταβάλλονταν οι γωνίες; Το οπτικοποιήσαν ή διάλεξαν άλλη στρατηγική; Ποιους ορισμούς της γωνίας χρησιμοποίησαν; Εντόπισαν τις πλευρές των γωνιών που εννοούνται (Mitchelmore & White, 2000);

Τέλος, επειδή η διερεύνηση ήταν αρκετά δύσκολη και επρέπε να περάσει από πολλά στάδια ώστε να φτάσει κοντά στο τέλος της, αλλά και ανοικτή που σημαίνει ότι επιδεχόταν διαφόρων προτάσεων για λύση ήταν κατάλληλη για τη δημιουργία του συνεργατικού περιβάλλοντος πλούσιου σε ερευνητικά δεδομένα (βλέπε σελίδα 80).

Εικόνα 63: Μέσω δυναμικού χειρισμού το στρεβλό ορθογώνιο γίνεται απλό ορθογώνιο.

4.2.4 Ανάλυση δραστηριοτήτων

Όπως προανέφερα η διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου της έρευνας ήταν εικοσιτέσσερις διδακτικές ώρες σε δώδεκα δίωρες συναντήσεις με τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς. Γενικά οι συναντήσεις χωρίστηκαν σε τρεις θεματικές φάσεις:

- 1η φάση: Εισαγωγικές δραστηριότητες, με διάρκεια περίπου τρεις (3) διδακτικές ώρες.
- 2η φάση: Κύρια δραστηριότητα, με διάρκεια περίπου δώδεκα (12) διδακτικές ώρες. Πρόκειται για το μικρόκοσμο του μισοψημένου στρεβλού ορθογωνίου.
- 3η φάση: Κατασκευή δομημάτων από τους μαθητές με δομική λίθο το στρεβλό ορθογώνιο.

Το περιεχόμενο των συναντήσεων ήταν το εξής:

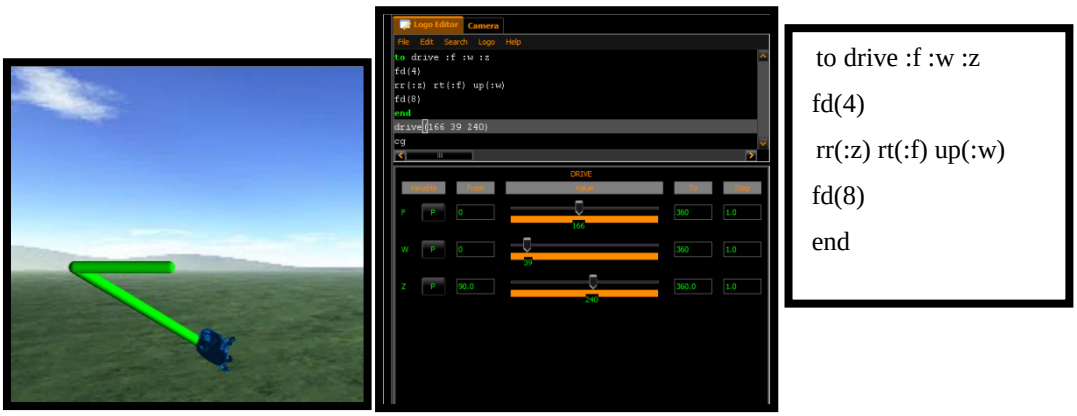
4.2.4.1 Πρώτη φάση: Εισαγωγικές δραστηριότητες

1η συνάντηση

Τα πρώτα λεπτά της συνάντησης οι εκπαιδευτικοί έκαναν τις συστάσεις μεταξύ ερευνητών και μαθητών, λέγοντας στους δεύτερους ότι είναι απαραίτητη η συνεργασία τους, ώστε να δοκιμάσουν καινοτόμα λογισμικά σαν και αυτά που υπάρχουν στο ψηφιακό σχολείο[18] με τα οποία θα κάνουμε «δύσκολα μαθηματικά». Η

[18] http://digitalschool.minedu.gov.gr/

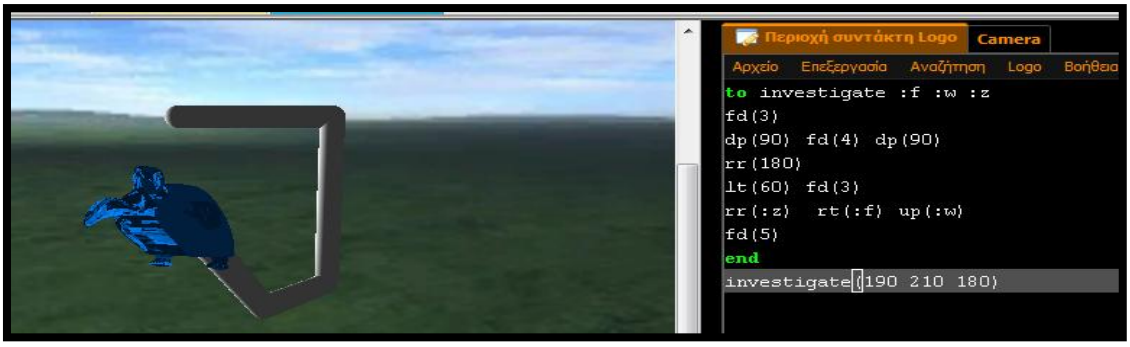
γνώμη τους θα ήταν σημαντική για τους ερευνητές αφού θα λαμβανόταν υπόψη, για τον ανασχεδιασμό αυτών των λογισμικών. Οι μαθητές ήξεραν ότι θα δουλέψουν σε ομάδες και έγινε σαφής ο τρόπος διάρθωσης αυτών των ομάδων. Στη συνέχεια χωρίστηκαν στις ομάδες τους. Χρησιμοποιώντας έναν βίντεο-προβολέα δείξαμε στους μαθητές ένα μικρόκοσμο στο 3dmath, μιας διαδικασίας Logo με το όνομα drive. Ο στόχος της δραστηριότητας αυτής ήταν διπλός. Από τη μια να εξοικειωθούν οι μαθητές με τις λειτουργικότητες του metafora κι από την άλλη να διενεργήσουμε ένα pretest στο τέλος της δραστηριότητα μέσα από το οποίο θα φαινόταν, πώς έχουν στο μυαλό τους (ατομικά ο κάθε ένας) τη λειτουργία μιας ομάδας σε συνεργατικό, αλλά συγκεκριμένο πλαίσιο.



Εικόνα 64: Ο κώδικας drive.

Η ερώτηση που θέσαμε προς διερεύνηση ήταν «Πώς μπορύμε να ξέρουμε κάθε φορά σε ποια θέση βρίσκεται η χελώνα στο χώρο». Οι μαθητές ασχολήθηκαν με αυτό λίγα λεπτά στους υπολογιστές που είχαμε στήσει για αυτό το λόγο (τρεις χρήστες ανά υπολογιστη) και στη συνέχεια συμπλήρωσαν ατομικά το pretest που παραθέτω στο παράρτημα. Τέλος, τους δώσαμε ανά ομάδα να συμπληρώσουν κι ένα ομαδικό πλάνο, για το πώς θα προγραμμάτιζαν τη δουλειά τους με σκοπό να απαντήσουν στο παραπάνω ερώτημα.

Μετά από αυτή τη φάση ακολούθησε η εισαγωγική δραστηριότητα. Είπαμε στους μαθητές να καθίσουν ανά δύο σε έναν υπολογιστή, τους δώσαμε ένα φύλλο με τις βασικές εντολές του 3dmath και σύντομες εξηγήσεις, με την επισήμανση ότι αν χρειαστούν βοήθεια θα μπορούν να τους τη ζητήσουν από εμάς ή τους καθηγητές τους. Σε κάθε υπολογιστή υπήρχε ανοικτό το metafora και ένας άλλος μικρόκοσμος με το όνομα investigate (Εικόνα 65), στο 3dmath. Οι μαθητές εκτέλεσαν τον κώδικα και εμφανίστηκε το σχήμα.



Εικόνα 65: Ο μικρόκοσμος investigate

Επρόκειτο για μια τεθλασμένη γραμμή, ένα ανοικτό τετράπλευρο σχήμα, που οι μαθητές μπορούσαν να το χειριστούν δυναμικά με τους μεταβολείς κουνώντας μόνο μια πλευρά του. Το αντικείμενο της διερεύνησης σε αυτή τη φάση ήταν το εξής. Αφού οι μαθητές διάβαζαν τον κώδικα και ερμήνευαν την κίνηση της χελώνας, να προσπαθούσαν να κάνουν το σχήμα να κλείσει, δηλαδή η πλευρά που κινείτο ελεύθερα να συναντούσε την απέναντί της.

Η λύση αυτού το προβλήματος δεν ήταν μονοσήμαντη (open-ended problem), πράγμα που ήταν σημαντικό για τη διερευνητική διαδικασία. Η ελεύθερη πλευρά κουνιέται χρησιμοποιώντας οι μαθητές και τις τρεις εντολές στροφής του 3dmath (right-left turn, up-down pitch και right-left roll), πράγμα που δεν ήταν απαραίτητο για να βρεθεί σε μια θέση, αφού, εν γένει δύο διαδοχικές στροφές στο χώρο αρκούν για να βρεθεί κανείς οπουδήποτε σε συγκεκριμένη απόσταση από ένα σημείο. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς (όχι μαθητής) τις σφαιρικές συντεταγμένες. Στην πραγματικότητα η μια στροφή ήταν περιττή.

Αφού οι μαθητές ασχολήθηκαν ατομικά με το πρόβλημα τους θέσαμε αυτό το ερώτημα ως εξής: «Σε κάποιο άλλο σχολείο που θέσαμε αυτό το ερώτημα οι μαθητές απάντησαν ότι μπορούν να κλείσουν αυτό το σχήμα χρησιμοποιώντας δύο από τις μεταβλητές κι όχι τρεις, εσείς τι λέτε;». Έτσι, προσπαθήσαμε να μην προκαταλάβουμε τις απαντήσεις των μαθητών, αφού λόγω του διττού μας ρόλου (εκπαιδευτικοι και ερευνητές), αν θέταμε το ερώτημα ως δική μας ιδέα, θα εθεωρείτο εκ των προτέρων σωστό και η απάντηση δεδομένη σύμφωνα με τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες της τάξης (Voigt, 1995). Άλλωστε έρευνες έχουν δείξει ότι το περιβάλλον της τάξης είναι ήδη διαμορφωμένο σε ένα πλαίσιο που στηρίζεται σε λογικές αυθεντίας του δασκάλου και κώδικες επικοινωνίας που καλλιεργούνται υπό το πρίσμα της συνεχούς αξιολόγησης του μαθητή (Yackel & Cobb, 1996). Για

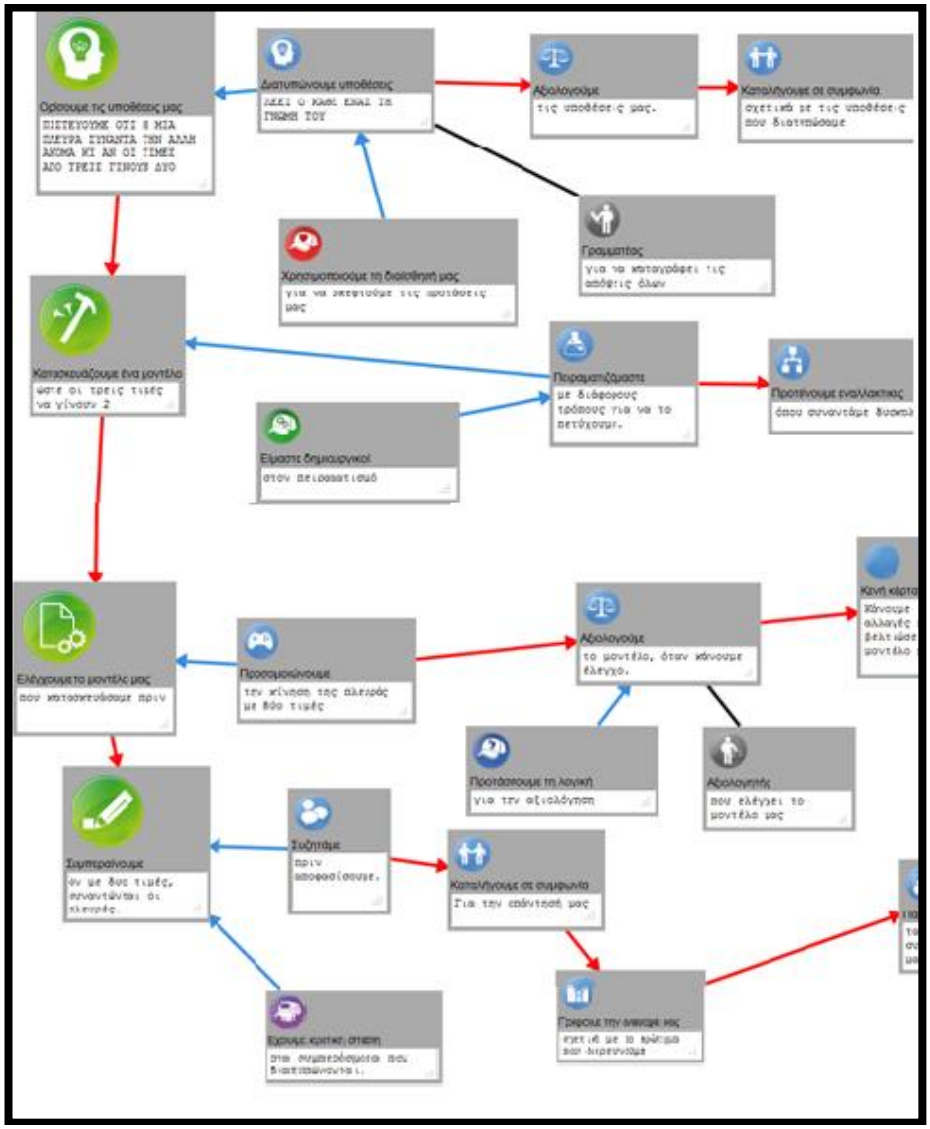
παράδειγμα, αν ένας μαθητής δώσει μια απάντηση ή κάνει μια εικασία και ο εκπαιδευτικός, με σκοπό να δημιουργήσει συνθήκες διερεύνησης, δεν απαντήσει ξεκάθαρα «σωστό», τότε ο μαθητής πιστεύει ότι η απάντησή του ήταν λανθασμένη. Έτσι ο τρόπος που η παραπάνω ερώτηση τέθηκε από εμάς ήταν ακόμα μια προσπάθεια (πέρα από τις αρχικές μας επισημάνσεις) να απελευθερωθούν οι μαθητές από αυτό το πρότυπο. Στη συνέχεια τους παροτρύναμε να ανοίξουν το Lasad και να συζητήσουν τις απόψεις τους.

2η συνάντηση

Η δραστηριότητα της προηγούμενης συνάντησης ήταν αρκετά δύσκολη και περίπλοκη στην αντιμετώπισή της. Στη δεύτερη συνάντηση συνεχίστηκε η ενασχόληση των μαθητών με αυτή, αλλά σε επίπεδο ομάδων. Η κάθε δυάδα είχε μπροστά της έναν υπολογιστή και χρησιμοποιούσε το Lasad με τη βοήθειά μας, ώστε να ανταλλάξει ιδέες με τις άλλες υποομάδες. Υπενθυμίζω ότι οι μαθητές είχαν χωριστεί σε δύο ομάδες μια με έξι μέλη και μια με τέσσερα μέλη. Η κάθε ομάδα είχε χωριστεί σε δύο υποομάδες (Εικόνα 56,σελίδα 121). Δυνατότητα επικοινωνίας μέσω του Lasad είχαν μόνο οι υποομάδες της ίδιας ομάδας.

Επίσης στην αρχή της συνάντησης δώσαμε στους μαθητές ένα έτοιμο σχέδιο δράσης στο Planning Tool, που όπως τους είπαμε ήταν το σχέδιο δράσης των μαθητών του άλλου σχολείου, που είχαν ισχυριστεί ότι το σχήμα κλείνει με δύο μόνο μεταβλητές, αντί για τρεις (Εικόνα 66). Έτσι, οι μαθητές γνώρισαν το εργαλείο και ταυτόχρονα είχαμε την ευκαιρία να παρατηρήσουμε κατά πόσο η ύπαρξη έτοιμου σχεδίου επηρέασε τη δραστηριότητα τωνμαθητών και τις επιλογές τους.

Στο τέλος της δραστηριότητας ρωτήσαμε τους μαθητές, ανά ομάδα κατά πόσο επηρέασε το σχέδιο τις ενέργειές τους, αν το βρήκαν χρήσιμο και αποτελεσματικό και αν το Lasad τους βοήθησε στη συνεργασία τους με τις άλλες ομάδες.

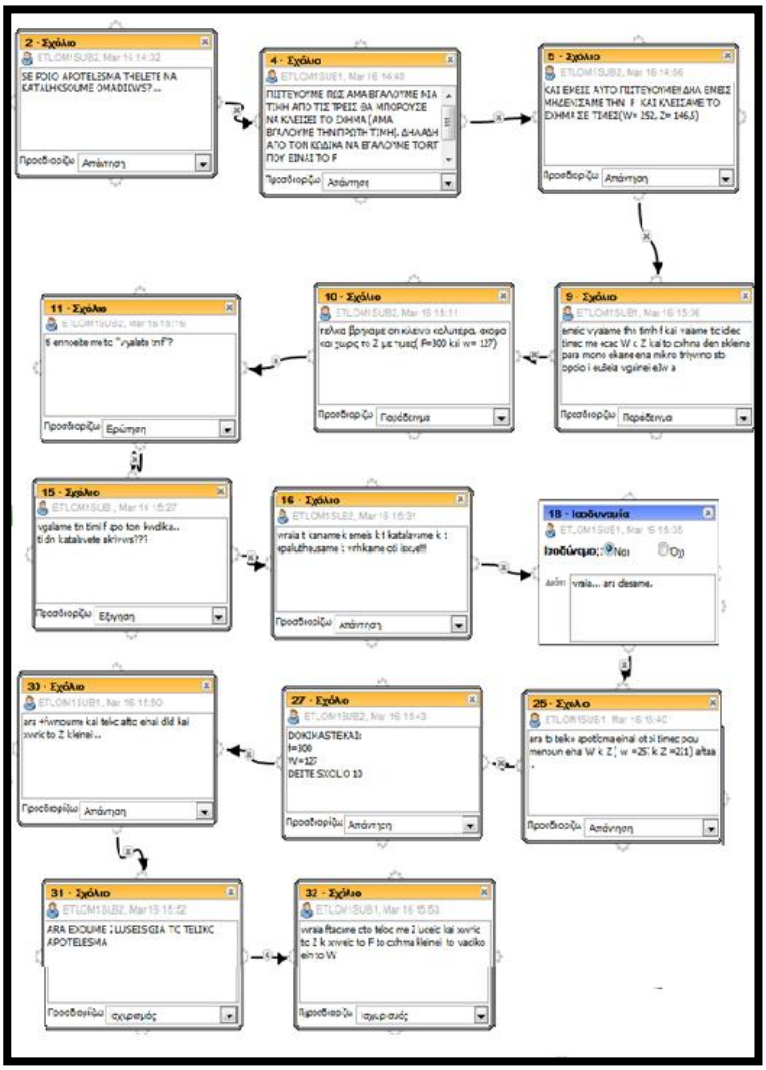


Εικόνα 66: Το έτοιμο σχέδιο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές στη 2η συνάντηση.

3η συνάντηση

Συνεχίστηκε η ενασχόληση με την προηγούμενη δραστηριότητα (μικρόκοσμος investigate), καθώς κάποιες υποομάδες είχαν προχωρήσει περισσότερο από τις άλλες, άρα είχε νόημα η συζήτηση μεταξύ τους στο Lasad. Χρειάστηκε αρκετές φορές να τονίσουμε στους μαθητές κάθε υποομάδας ότι δουλεύουν σε ομαδικό πλαίσιο με κοινό στόχο με την υπόλοιπη ομάδα. Επίσης πολλές φορές με ερωτήσεις όπως «σε ποιο σημείο της έρευνας βρίσκεται η άλλη υποομάδα της ομάδας σας;», προσπαθήσαμε να προκαλέσουν την επικοινωνία μεταξύ των υποομάδων. Στόχος μας ήταν να καταγράψουμε τον τρόπο επικοινωνίας μεταξύ των ομάδων, αλλά χωρίς αυτή να επιβληθεί.

Οι ομάδες κατά την ενασχόλησή τους με τη δραστηριότητα δημιούργησαν ένα χάρτη στο Lasad (Εικόνα 67), που κατέγραψε ένα κομμάτι της διάρθρωσης της μεταξύ τους επικοινωνίας και των κοινών πρακτικών τους (Stahl, 2011).



Εικόνα 67: Ο χάρτης που έφτιαξαν οι υποομάδες 1.1 και 1.2 στο Lasad κατά την ενασχόλησή τους με το Investigate.

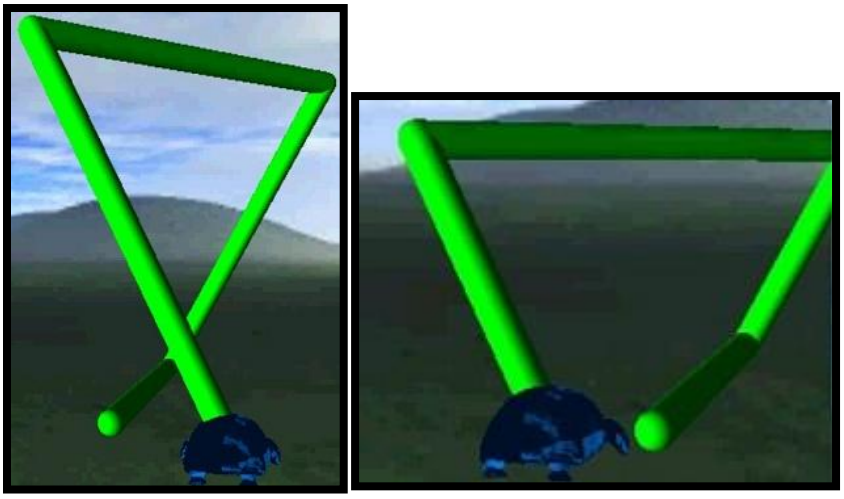
4.2.4.2 Δεύτερη φάση: Κύρια δραστηριότητα

4η συνάντηση – 10η συνάντηση: Το στρεβλό ορθογώνιο

Η 4η συνάντηση ξεκίνησε με ερωτήσεις που θέσαμε στους μαθητές σχετικά με το χάρτη του Lasad που έφτιαξαν στην προηγούμενη συνάντηση. Τους ζητήσαμε να αξιολογήσουν το εργαλείο και να επισημάνουν που τους βοήθησε ή που τους δυσκόλεψε στη συνεργασία τους. Στόχος ήταν να συγκρινουμε τις απαντήσεις τους με τα δεδομένα του χάρτη έτσι ώστε να προκύψουν οι κοινές πρακτικές τους και τα από κοινού νοήματα που διαμόρφωσαν κατά την ενασχόλησή τους με την προηγούμενη δραστηριότητα (Stahl, 2011).

Αμέσως μετά, στο δεύτερο μέρος της συνάντησης ξεκίνησε η κύρια φάση της έρευνας, που ήταν η εμπλοκή στο μικρόκοσμο του στρεβλού ορθογωνίου. Η φάση αυτή θα διαρκούσε τουλάχιστον 10 διδακτικές ώρες. Το σκεπτικό του μισοψησίματος του μικρόκοσμου το ανέλυσα παραπάνω (βλέπε σελίδα 127). Υπενθυμίζω ότι η δική μου ομάδα εστίασης είναι η υποομάδα 1.2 (της ομάδας 1).

Στους μαθητές δώσαμε μόνο τον κώδικα στο συντάκτη του 3dmath. Αυτό που είχε αποκρυφεί από τους μαθητές είναι η σχέση μεταξύ των τεσσάρων μεταβλητών καθώς και το είδος της εξάρτησης.



Εικόνα 68: Δύο στιγμιότυπα του μισοψημένου στρεβλού ορθογωνίου.

Αρχικά ρωτήσαμε τις υποομάδες αν μπορούν να καταλάβουν τι κάνει αυτός ο κώδικας. Στόχος ήταν η καταγραφή των πρακτικών των μαθητών. Αφού προηγουμένως είχαν συνεργαστεί σε δραστηριότητα με κώδικα Logo, σε αυτό το σημείο δόθηκε η ευκαιρία να φανεί αν οι μαθητές είχαν αναπτύξει κοινές πρακτικές ερμηνείας της συμβολικής έκφρασης, γεγονός που είναι δείκτης συνεργατική μάθησης με την έννοια του collaboration κι όχι του cooperation (Roschelle & Teasley, 1995). Αφού οι μαθητές είτε μόνοι τους είτε μετά από παρότρυνση των ερευνητών έτρεξαν τον κώδικα και εμφανίστηκε το σχήμα, σχεδόν αμέσως χρησιμοποίησαν τους μεταβολείς για να το αλλάξουν. Η επόμενη ερώτηση ήταν: «Μπορείτε να βρείτε για ποιες τιμές των μεταβλητών το σχήμα κλείνει;» Οι μαθητές βρήκαν τέτοιες τετράδες τιμών και, μετα από δική μας παρακίνηση συζήτησαν στο Lasad για τα αποτελέσματά τους. Αναπόφευκτη ήταν η διαπίστωση ότι το σχήμα κλείνει για πολλές τετράδες τιμών.

Σε αυτό το σημείο αναμέναμε η δραστηριότητα να γίνει τελείως εποπτική, δηλαδή οι μαθητές με χρήση των μεταβολέων να κλείσουν το σχήμα και καταγράψουν τις αντίστοιχες τετράδες τιμών . Έτσι, το επόμενο βήμα ήταν από την πλευρά μας να ρωτήσουμε κατά πόσο ήταν σίγουροι ότι το σχήμα αυτό ήταν κλειστό, βλέποντάς το. Οι τρόποι αντιμετώπισης σε αυτό το σημείο θα είχαν να κάνουν με τη χρήση των εργαλείων του λογισμιού. Με χρήση των μεταβολέων (δυναμικός χειρισμός) και της κάμερας (αλλαγή οπτικής γωνίας) θα μπορούσε κανείς να διαπιστώσει αν το σχήμα ήταν κλειστό, οπτικά. Όμως δε θα ήταν σίγουρος γι' αυτό. Με χρήση του εργαλείου που κάνει zoom στο σχήμα, μπορούσε να φανεί ότι τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τη χωρική αναπαράσταση είναι αβέβαια και ότι το στιγμιότυπο ενός γεωμετρικού σχήματος δεν μπορεί εν γένει να επιβεβαιώσει μια εικασία που αφορά την έννοια του σχήματος (Fischbein, 1993). Επίσης, αυτή η «αδυναμία» της χωρικής αναπαράστασης προκαλεί αποστασιοποίηση από τη χειροπιαστή φύση των αντικειμένων και διαπίστωση της αναγκαιότητας παραγωγικών συλλογισμών (Mariotti, 2001; Κυνηγός, 2006).

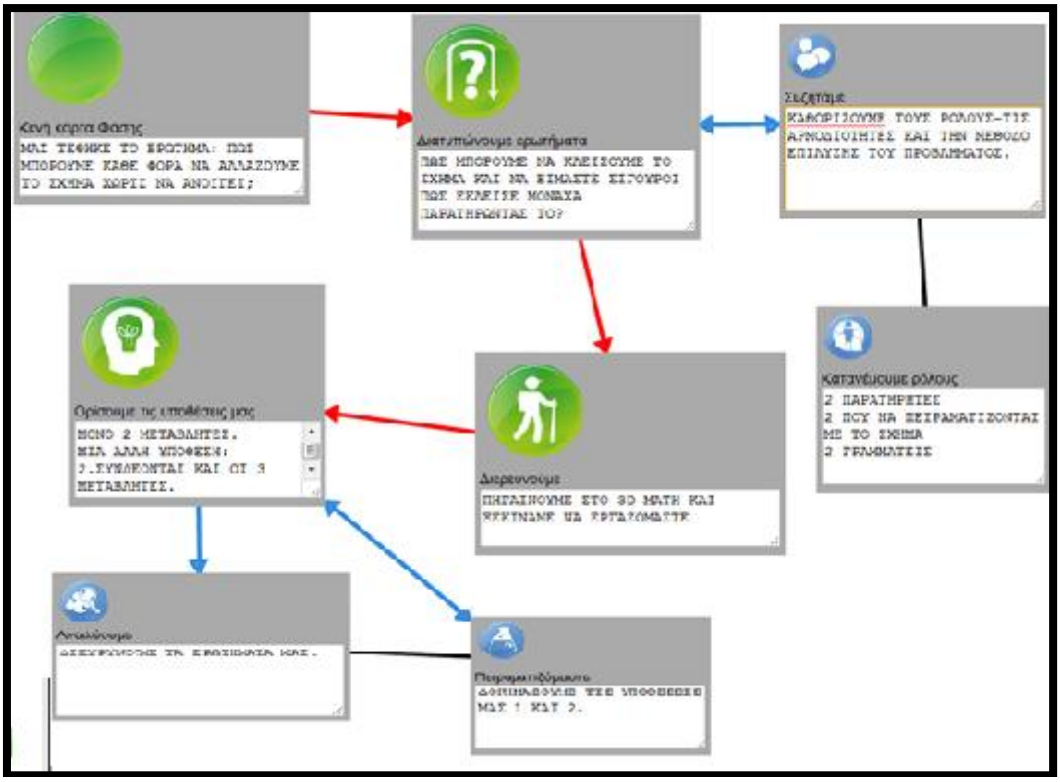
Το επόμενα ερωτήματα για δειρεύνηση που θέσαμε ήταν «πώς μπορούμε να δουλέψουμε, ώστε να ανακαλύψουμε τα μαθηματικά, πίσω από την κατασκευή αυτού του αντικειμένου;» και «πώς μπορούμε να κάνουμε αυτό το σχήμα, να αλλάζει μεν, να παραμένει κλειστό δε;» Αυτά τα ερωτήματα αποτέλεσαν και τα βασικά αντικείμενα της διερεύνησης του σεναρίου του στρεβλού ορθογωνίου. Η εύρεση λύσης είχε μορφή γρίφου και ήταν ανοικτή, πράγμα που ενίσχυσε την επιχειρηματολογία για την καταλληλότητα του μικρόκοσμου αυτού ως ερευνητικό εργαλείο. Σύμφωνα με τον Voigt (1996) μια τάξη που λειτουργεί διερευνητικά στο μάθημα των μαθηματικών (inquiry learning) είναι το πιο πρόσφορο έδαφος για μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας με προσέγγιση συμβολικών αλληλεπιδράσεων, γιατί μέσω της διερεύνησης αναδεικνύονται διαδικασίες κατανοήσης του ατόμου ως μέλος μιας ομάδας, αλλά και κοινωνικές πρακτικές, ταυτόχρονα.

Με αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές θα ασχολούνταν αρκετές ώρες. Αυτό που τους ζητήσαμε ήταν μετά από μια διδακτική ώρα ενασχόλησης να κάνουν ένα σχέδιο δράσης στο Planning tool. Το σχέδιο αυτό, όπως τους είπαμε, θα ήταν σχετικά δεσμευτικό (ώστε να αντιμετωπίσουν με προσοχή την κατασκευή του), αλλά θα επιδεχόταν λίγων αλλαγών σε περίπτωση που υπήρχε πραγματικά λόγος για να γίνουν (κι αυτό θα το έκριναν τα μέλη της ομάδας σε συνεννόηση με τους εκπαιδευτικούς και εμάς).

Ο ρόλος των εκπαιδευτικών και ο δικός μας θα ήταν επικουρικός στη διερεύνηση και στη δημιουργία του σχεδίου δράσης. Θα μπορούσαμε να βοηθήσουμε τους μαθητές μόνο σε λειτουργικά θέματα χρήσης των εργαλείων. Επιπλέον θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε τους μαθητές σχετικά με τους λόγους που επέλεξαν, τη συγκεκριμένη δομή για το σχέδιο δράσης ή την κατανομή των ρόλων τους. Επίσης τονίσαμε προς τους μαθητές πώς είχαν στη διάθεσή τους όλα τα εργαλεία του metafora, αφού το σχέδιο δράσης θα κατασκευαζόταν από απόσταση. Είχαμε, όμως προαποφασίσει ότι αν χρειαστεί, σε περίπτωση μεγάλων διαφωνιών θα μπορούσε να οριστεί μια φυσική συνάντηση των μελών της ομάδας 2, για την ολοκλήρωση του σχεδίου δράσης (κάτι που συνέβη στην 6η συνάντηση). Επίσης δώσαμε στους μαθητές ένα βοηθητικό εγχειρίδιο χρήσης του planning tool σε φύλλα (κυρίως φαίνονταν όλες οι κάρτες κι όχι οι λειτουργικότητες του εργαλείου), ώστε να κάνουν πιο εύκολα τις επιλογές τους. Τέλος, θα έπρεπε να δηλώνουν, χρησιμοποιώντας το start-stop πότε έκαναν, τι στο σχέδιο δράσης, κατά την ενασχόλησή τους με τη δραστηριότητα, μια ενέργεια που είναι σημαντικός παράγοντας στη μάθηση μέσω συμμετοχής (Bauersfeld, 1993). Έτσι, το σχέδιο δράσης θα γινόταν αντικείμενο ή παραγοντας αναστοχασμού.

Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα, θα φαινόταν κατά πόσο το σχέδιο δράσης θα ήταν γενικού περιεχομένου ή θα αναφέρονταν στο συγκεκριμένο πρόβλημα και άρα κατά πόσο οι νόρμες της ομάδας θα ήταν κοινωνικο-μαθηματικές. Επισημαίνεται ότι μια απλή αναφορά όπως για παράδειγμα «θα μελετήσουμε το στρεβλό ορθογώνιο» δε συνιστά μαθηματική πρακτική, σε αντίθεση με μια αναφορά όπως «θα δοκιμάσω σταθεροποιώντας τη μια μεταβλητή».

Αφού οι μαθητές αποφάσισαν την τελική μορφή του σχεδίου τους (Εικόνα 69), συνέχισαν με τη δραστηριότητα του στρεβλού ορθογωνίου. Στόχος δικός μας, αλλά και των εκπαιδευτικών δεν ήταν να οδηγήσουμε τους μαθητές στη λύση, αλλά να παρατηρήσουμε πώς έφτασαν στη μαθηματικοποίηση του προβλήματος και πως χρησιμοποίησαν τα νοήματα που είχαν κατασκευάσει είτε από κοινού (Yackel & Cobb, 1996), είτε σαν άτομα σε σχέση με την κατάσταση που αντιμετώπιζαν (Vergnaud G. , 1991).



Εικόνα 69: Μέρος του σχεδίου δράσης της ομάδας 1.

Αν και η πρόβλεψη της δράσης των μαθητών είναι παρακινδυνευμένη, ωστόσο ως ερευνητική ομάδα είχαμε σκεφτεί δύο πλευρές της διερεύνησης, για τη λύση του προβλήματος:

- Η μια αλγεβρική, όπου ζητείται η σχέση μεταξύ των μεταβλητών, σταθεροποιώντας δύο από αυτές και κοιτάζοντας τη σχέση των άλλων δύο
- Η άλλη γεωμετρική-τριγωνομετρική όπου σχεδιάζοντας το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που περιέχει το στρεβλό ορθογώνιο, μπορεί να οδηγηθεί κανείς στη λύση μέσω επίλυσης τριγώνων (βλέπε σελίδα 126).

Τέλος, υπήρχαν τρεις εκδοχές του σεναρίου ως προς την απάντηση στο ερώτημα για το στρεβλο ορθογώνιο:

- Αν οι μαθητές των δύο ομάδων έλυναν το πρόβλημα, θα παρουσίαζαν τις λύσεις τους η μια στην άλλη.
- Αν οι μαθητές της μιας ομάδας έλυναν το πρόβλημα, θα παρουσίαζαν τη λύση τους στην άλλη ομάδα.
- Αν καμία ομάδα δεν έλυνε το πρόβλημα, θα παρουσιαζόταν η λύση από τους εκπαιδευτικούς στις ομάδες.

Σε κάθε περίπτωση θα ακολουθούσε συζήτηση μεταξύ των ομάδων, για τη λύση ή τις λύσεις ή άλλες πιθανές λύσεις. Πρόσθετες ευκαιρίες μάθησης δημιουργούνται

όταν οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν τις επεξηγήσεις των συμμαθητών τους, να συγκρίνουν άλλες λύσεις με τις δικές τους και να αποφανθούν για ομοιότητες και διαφορές. Στη συνέχεια μέσα από τη συζήτηση των λύσεων με το δάσκαλό τους εγκαθιδρύονται νοήματα για κοινή χρήση στην τάξη (Yackel & Cobb, 1996), πράγμα που τα καθιστά, μέσα από την εμπειρική αυτή διαδικασία, πραγματικά, σχεδόν χειροπιαστά, μαθηματικά αντικείμενα, για τους μαθητές. Έτσι, στην κατεύθυνση αυτή είχαμε σκεφτεί να ζητήσουμε από τους μαθητές να δώσουν επεξηγήσεις μεταξύ τους για ότι ζητήματα προκύψουν κατά τη συζήτηση. Η δική μας παρέμβαση ή των εκπαιδευτικών θα γινόταν μόνο στο τέλος της συζήτησης και μόνο αν επρόκειτο να μείνουν οι μαθητές με εσφαλμένα συμπεράσματα. Όσο αφορά το σχέδιο δράσης, στο τέλος της συζήτησης για τις λύσεις του προβλήματος έγινε αξιολόγησή του από τους μαθητές.

4.2.4.3 Τρίτη φάση: Κατασκευή δομημάτων

11η και 12η συνάντηση

Η τελευταία φάση του σεναρίου είχε να κάνει με τη χρήση του (κλειστού πλέον) στρεβλού ορθογωνίου ως δομική μονάδα, για την κατασκευή γεωμετρικών κατασκευών από τους μαθητές. Πριν την 11η συνάντηση, δώσαμε στους μαθητές ένα αναλυτικό εγχειρίδιο με πολύ περισσότερες εντολές του 3dmath, από αυτές που χρησιμοποίησαν στις δραστηριότητές τους, μέχρι εκείνη τη στιγμή. Έτσι, είχαν στα χέρια τους περισσότερα εκφραστικά μέσα, για να υλοποιήσουν τις κατασκευές που σχεδίασαν. Οι παρεμβάσεις μας περιορίστηκαν σε βοηθητικό ρόλο, ως προς τη σύνταξη του κώδικα, κι όχι στη μαθηματικοποίηση των ιδεών τους, καθώς είχαμε την επιθυμία να καταγραφεί ως αποκλειστική ενέργεια των μαθητών. Τα κατασκευάσματα ως αποτέλεσμα συνεργασίας μεταξύ των μελών της ομάδας ήταν αποτέλεσμα των κοινών νοημάτων που είχε διαμορφώσει η ομάδα και των θεωρημάτων σε χρήση που χρησιμοποίησε.

Σε επίπεδο CSCL η δημιουργία νοημάτων εμφανίζεται όταν έρχονται ετερόκλητες απόψεις μελών της ομάδας σε επαφή (Hicks, 1996). Έτσι δημιουργείται **χώρος διαλόγου** (dialogic space), δηλαδή ο χώρος με τις πιθανές εκφάνσεις μιας κατάστασης. Ο χώρος διαλόγου είναι κάτι διαφορετικό, κάτι ευρύτερο από τη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (ZPD) του Vygotsky. Ο διάλογος από την οπτική γωνία του Vygotsky (1978) οδηγεί τους μαθητές να εσωτερικεύσουν τη χρήση εργαλείων και

εννοιών που ήδη υπάρχουν και έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα στη μαθηματική κοινότητα. Από την άλλη, ο χώρος του διαλόγου που αναπτύσσεται είναι πιο «ανοικτός» σε προσωπικές ερμηνείες και αφήνει μεγαλύτερα περιθώρια στην κριτική και δημιουργική σκέψη των μαθητών. Οι μαθητές δεν εσωτερικεύουν μόνο τη χρήση των εργαλείων ή των εννοιών, αλλά τον ίδιο το χώρο διαλόγου που περιβάλλει αυτά τα αντικείμενα. Έτσι μεταφέρουν ολόκληρο το πλαίσιο χρήσης εργαλείων και εννοιών (το χώρο διαλόγου) και οτιδήποτε μέσα σε αυτό μπορεί να ειδωθεί κάτω από άλλο πρίσμα σε μια άλλη κατάσταση (Wegerif & Yang, 2011). Άρα, η εσωτερίκευση του χώρου διαλόγου είναι θεμελιώδης για την μάθηση από την ομάδα που συνεργάζεται, αντιμετώπισης νέων καταστάσεων, επεκτείνοντας τις δυνατότητες εργαλείων και εννοιών.

Στο πλαίσιο αυτό η δημιουργία και δημοσιοποίηση των δομημάτων των μαθητών, έχω την άποψη πώς θα έφερνε αυτή τη διαλογική διαδικασία στην επιφάνεια. Οι μαθητές να μεταφέρουν τα νοήματα που έχουν δημιουργήσει και χρησιμοποιήσει σε προηγούμενες φάσεις του σεναρίου, σε αυτή τη φάση της κατασκευής δομημάτων. Έτσι, η καταγραφή της διαδικασίας κατασκευής και της διαπραγμάτευσης μεταξύ των ατόμων που κατασκεύασαν το δόμημα θα ήταν σημαντικός δείκτης των κοινών νοημάτων που κατασκευάσαν και τη δυνατότητα επέκτασής τους σε νέες καταστάσεις.

Στο τέλος της 12^{ης} συνάντησης δόθηκε στους μαθητές το post test της έρευνας. Οι ερωτήσεις ήταν οι ίδιες με αυτές του pre test, για να διαπιστωθεί κατά πόσο άλλαξε η προσωπική θέση των μαθητών, ως προς το σχεδιασμό της ομαδικής δράσης τους, μετά από την ενασχόλησή τους με το σενάριο.

5. Αποτελέσματα

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσω τα αποτελέσμα της έρευνας με δύο τρόπους. Βάσει των ερευνητικών ερωτημάτων, όπου αυτο είναι δυνατόν ή κατά τη χρονική πορεία της έρευνας, όπου αυτό βοηθάει στο να γίνει ευκολότερα αντιληπτό το περιεχόμενο των επεισοδίων. Ένος μέρος της ερμηνείας των επεισοδίων, το κάνω σε αυτό το κεφάλαιο, με σκοπό να αιτιολογήσω τις επιλογές μου. Άλλωστε, η προσωπική οπτική μου, μπορεί να επιδέχεται και διαφορετικών ερμηνειών.

5.1. Προσανατολισμός στον χώρο των τριών διαστάσεων

5.1.1 Κατασκευή προσωπικών νοημάτων υπό διαπραγμάτευση

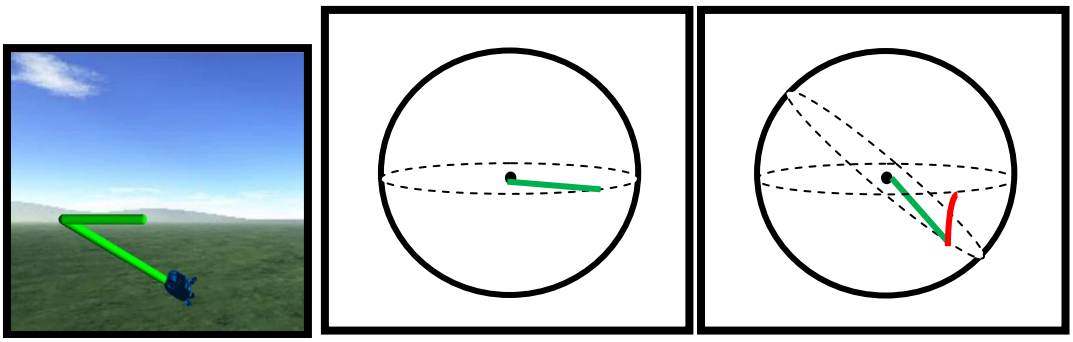
Κατασκευή προσωπικών νοημάτων για τον μικρόκοσμο

Στην πρώτη φάση του σεναρίου, δώσαμε στους μαθητές το μικρόκοσμο drive με κεντρικό ερώτημα «πώς μπορούμε να ξέρουμε κάθε φορά που βρίσκεται η χελώνα».

```
to drive :f :w :z
fd(4)
rr(:z) rt(:f) up(:w)
fd(8)
end
```

Ήταν ένα ερώτημα που σχετίζεται με τον προσανατολισμό στον τρισδιάστατο χώρο. Οι μαθητές καθώς προσπάθησαν να πλοηγηθούν, δημιούργησαν μια οπτικοποίηση (visualization) της γωνίας που περιείχε δύο γνωστικά σχήματα (Kynigos & Latsi, 2007):

- Στροφή σαν κίνηση σώματος σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, που εμπεριέχει την έννοια του προσανατολισμού.
- Στροφή σαν αριθμός-μέτρηση.



Εικόνα 70: Αριστερά, ο μικρόκοσμος drive. Στη μέση, η θέση της ελέυθερηςς πλευράς για μια τυχαία τιμή του z. Δεξία, όταν με δυναμικόχειρισμό αλλάζει η τιμή του z, ολόκληρο το αρχικό επίπεδο που βρίσκεται η χελώνα αλλάζει. Έτσι χωρίς να μεταβληθούν οι τιμές των f και w, η χελώνα φαίνεται να διαγράφει μια πορεία κυκλική πάνω στη νοητή σφαίρα.

Χωρισμένοι σε ομάδες, για να απαντήσουν στο ερώτημα «πώς μπορούμε να γνωρίζουμε που βρίσκεται κάθε φορά η χελώνα;» ενεργοποίησαν τους μεταβολείς και χειρίστηκαν δυναμικά το σχήμα. Μόνο το ένα ελεύθερο ευθύγραμμο τμήμα άλλαζε θέση με αυτό το χειρισμό. Για κάποιον μυημένο στην γεωμετρία σε χώρο τριών διαστάσεων θα ήταν άμεσο το συμπέρασμα ότι η χελώνα εκινείτο στην επιφάνεια ενός κύκλου με κέντρο την κορυφή της γωνίας του σχήματος και ακτίνα το σταθερό μήκος του ελέυθερου ευθύγραμμου τμήματος (Εικόνα 70). Για τους μαθητές όμως αυτό δεν ήταν καθόλου άμεσο. Ενδιαφέρον έχει ο επόμενος διάλογος της ομάδας 1, που δούλευε ακόμα όλη μαζί:

<u>Απόσπασμα 1</u>

M3: Αλλάζει μονο μια πλευρά με τους μεταβολείς.

E: Αυτή; Πώς αλλάζει;

M2: Βασικά, κάνει στροφή, γωνία.

M3: Αυτές οι τρεις μεταβλητές δεν είναι το μήκος, το πλάτος και το ύψος που λέμε;

M4: Αυτό αλλάζει κυκλικά, ενώ το άλλο... όταν κάνουμε αυτό, όταν αλλάζουμε το z υπάρχει ένα κέντρο.

M5: Ναι, σα διαβήτης ας πούμε, το ένα είναι η μύτη του διαβήτη και η άλλη πλευρά είναι το μολύβι.

M4: Είναι το ένα σταθερό.

M5: Ναι, και το άλλο αλλάζει θέση γύρω από το κέντρο.

Αρχικά οι μαθήτριες χειρίζονταν τους μεταβολείς w και f που αντιστοιχούσαν σε στροφές up-down pitch και right-left turn. Τότε ήταν που η M2 χρησιμοποίησε το

πρότυπο της στροφής για να ερμηνεύσει την κίνηση. Όμως το αποτέλεσμα που προκάλεσε ο δυναμικός χειρισμός του z δεν ερμηνεύτηκε με τον ίδιο τρόπο από τη M4. Η z αντιστοιχεί σε στροφή right-left roll. Στην Εικόνα 70 φαίνεται ότι το αρχικό επίπεδο της χελώνας, αλλάζει κι έτσι η κίνηση που φαίνεται να κάνει το ευθύγραμμο τμήματα μοιάζει για έναν μαθηματικό, με αυτή της γενέτειρας ενός κώνου. Συνεπώς η χελώνα διαγράφει κύκλο πάνω στην επιφάνεια της νοητής σφαίρας.

Η M4 είπε ότι «αλλάζει κυκλικά» και «υπάρχει κέντρο». Ενώ, λοιπόν ήδη είχε ερμηνευτεί η αλλαγή της μεταβλητής f και w, ως στροφή η προσέγγιση της M4 ήταν διαφορετική για τη μεταβλητή z. Το νοηματικό πεδίο της στροφής (Mitchelmore & White, 2000) δεν επαρκούσε για να καλύψει την περίπτωση της z κι έτσι αναζήτησε άλλο μοντέλο.

Η M5 ανταποκρίθηκε στην M4 λέγοντας ότι «είναι σαν το διαβήτη». Από έρευνες που έχουν διεξαχθεί με λογισμικό τρισδιάστατης γεωμετρίας της χελώνας, αλλά αφορά άλλες γεωμετρικές έννοιες όπως η δίεδρη γωνία (Kynigos & Latsi, 2007), έχει προκύψει ότι οι μαθητές κατασκευάζουν νοητικά παραδείγματα φυσικών αντικειμένων και αυτό είναι ένα βήμα για την κατασκευή γενικευμένου γεωμετρικού αντικειμένου. Η M5 φαίνεται ότι κατασκεύασε ένα νοητικό μοντέλο για το drive, με αναφορά στο διαβήτη. Έτσι οι δύο μαθήτριες φάνηκε να συμφωνούν σε ένα πλαίσιο νοητικής αναπαράστασης για το μικρόκοσμο αυτό, παρόλο που η νοητική αναπαράσταση δεν ήταν ίδια. Υπό αυτή την έννοια το drive, λειτούργησε σαν ένα νοητικό αντικείμενο υπό διαπραγμάτευση (Cobb, McClain, Lamberg, & Dean, 2003) μεταξύ των M4 και M5. Η κάθε μια χρησιμοποίησε το δικό της νοητικό μοντέλο για τον μικρόκοσμο, αλλά στη μεταξύ τους συνομιλία συμφώνησαν για τη λειτουργία του. Άλλωστε τα νοήματα αντανακλούν τις προηγούμενες εμπειρίες του κάθε ατόμου της ομάδας και είναι ανοικτά σε διαπραγμάτευση και αναδιαμόρφωσή τους (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006). Αυτό που φάνηκε ήταν ότι το νοητικό μοντέλο της M4 ήταν πιο αφηρημένο από αυτό της M5. Επίσης η M4 δεν θεώρησε απαραίτητο να συμπεριλάβει στο μοντέλο της τη σταθερή πλευρά, κάτι που το έκανε η M5 με το παράδειγμα του διαβήτη. Επισημαίνω ότι στον παραπάνω διάλογο η M3 ανέφερε το μήκος, πλάτος και ύψος, ως τρόπο προσανατολισμού.

Φορμαλισμός που αποκτά νόημα

Ο διάλογος συνεχίστηκε ως εξής:

Απόσπασμα 2

Ε: Τελικά πως ξέρουμε που θα βρίσκεται η χελώνα;

Μ4: Αν πάρουμε μια σε συγκεκριμένη περιοχή ένα σημείο και υπολογίσουμε μια απόσταση, ας πούμε 3 εκατοστά και πούμε ότι περιστρέφεται παντού;

Ε: Όταν λες «θα πάρουμε συγκεκριμένη απόσταση» τι απόσταση είναι αυτή;

Μ4: Θα γράψουμε εδώ στις εντολές, ότι κινείται μπροστά για, όσο θέλουμε, ας πούμε 3 και τότε θα ξέρουμε ότι είναι 3.

Στον παραπάνω διάλογο (απόσπασμα 2) φαίνεται ότι η Μ4 προχώρησε ένα βήμα παραπάνω στην αφαίρεση. Στην ερώτηση μου τι σημαίνει «συγκεκριμένη απόσταση» απάντησε δείχνοντας τη θέση fd(8), στον κώδικα ότι «θα μπορούσαμε να βάλουμε όσο θέλουμε, ας πούμε 3 και τότε θα ξέρουμε ότι είναι 3». Ενώ τους δώσαμε έναν κώδικα με σταθερό το fd(8) η Μ4 υποστήριξε ότι μπορούσαμε να βάλουμε όποιον αριθμό θέλαμε, αρκεί να ήταν συγκεκριμένος. Άρα, αυτό που υποστήριξε η Μ4 ήταν ότι το μοντέλο της «δούλευε» ανεξάρτητα από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που εκινείτο, αρκεί αυτό να ήταν σταθερό.

Η αφαιρετική σκέψη αυτή έγινε με τη βοήθεια του κώδικα, δηλαδή της συμβολικής έκφρασης. Ενώ μέχρι εκείνη τη στιγμή όλη η διερεύνηση είχε στοιχεία δυναμικού χειρισμού, η Μ4 μόνη της στηρίχθηκε στη συμβολική έκφραση της Logo για να διατυπώσει τον ισχυρισμό της. Από σχετικές έρευνες (Kynigos & Psycharis, 2003) έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές όταν συνδυάζουν συμβολική έκφραση με δυναμικό χειρισμό, τότε οδηγούνται στη χρήση φορμαλισμού, δίνοντας νόημα σε αυτή (Dubinsky, 2000). Η ιδέα της Μ4 είχε φορμαλιστική κατεύθυνση, αφού χρησιμοποίησε τον κώδικα όταν ήθελε να γενικεύσει την λειτουργικότητα του drive.

Δημιουργία στρατηγικής με χρήση του εργαλείου

Στη συνέχεια αυτό που φαίνεται να συνέβη ήταν η περιγραφή ενός πλαισίου χρήσης της ιδιότητας του drive που περιέγραψε η Μ4, για τον προσανατολισμό στον τρισδιάστατο χώρο:

Απόσπασμα 3

Ε: Μπορείτε να ξέρετε τη θέση της χελώνας από αυτά που γνωρίζετε;

Μ3: Αν ξέρουμε το μήκος, το ύψος και το πλάτος, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε σε ποιο σημείο βρίσκεται η χελώνα;

Μ5: Δηλαδή συντεταγμένες;

Μ3: Ναι στα τρία επίπεδα.

Ε2: Ναι αλλά κάθε φορά που αλλάζεις τις τιμές των z, f και w, η χελώνα αλλάζει θέση,έτσι;

Μ3: Τους ξέρουμε όμως αυτούς τους αριθμούς, είναι αυτοί εδώ στους μεταβολείς. Άρα, δεν ξέρουμε που είναι η χελώνα;

Ε: Δηλαδή αυτά είναι μήκος, πλάτος και ύψος;

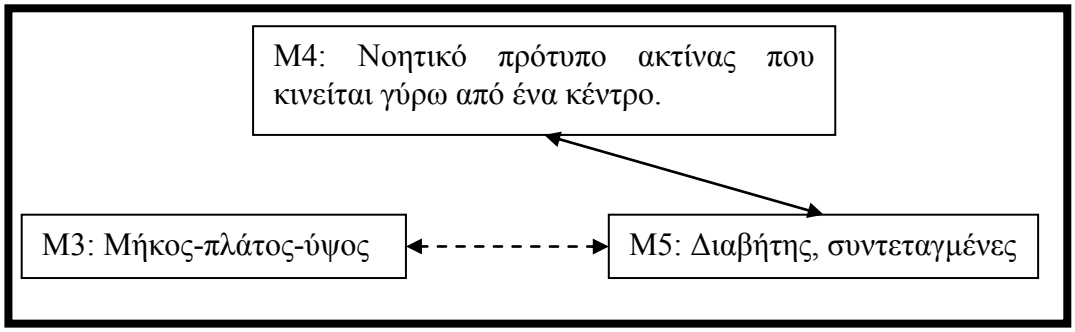
Μ3: [Στην Μ4] Για κούνησε λίγο το z.

(Χρησιμοποιούν πάλι τους μεταβολείς με παρότρυνση της Μ3)

Στον πρώτο διάλογο (απόσπασμα 1), η Μ3 ανέφερε για πρώτη φορά ότι «οι μεταβλητές ίσως είναι μήκος, πλάτος και ύψος», κάτι που το ξαναεπισήμανε στον τελευταίο διάλογο (απόσπασμα 3) προχωρώντας ένα βήμα περισσότερο. Ισχυρίστηκε ότι «με το μήκος, το πλάτος και το ύψος» μπορούσε να προσδιοριστεί η θέση της χελώνας. Στην Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί στερεά γεωμετρικά σχήματα. Έτσι έχουν την εμπειρία της εύρεσης του όγκου, με χρήση μήκους, πλάτους και ύψους. Μάλιστα, αυτή είναι και η ειδοποιός διαφορά σε σχέση με τα επίπεδα σχήματα, που δεν έχουν όγκο, αλλά το εμβαδό τους υπολογίζεται με δύο αριθμούς (μήκος και πλάτος). Έτσι, φαίνεται ότι ο χώρος τριών διαστάσεων, «κληρονομεί» την τριάδα μήκος-πλάτος-ύψος από τα στερεά σχήματα. Πρόκειται, για μια «επιτυχημένη» τακτική που είχε διαμορφώσει η Μ3. Ισχυρίζομαι ότι πρόκειται για ένα χαρακτηριστικό του νοητικού πεδίου των τρισδιάστατων αντικειμένων που πιθανώς να διαφέρει από το νοητικό πεδίο του προσανατολισμού στο χώρο των τριών διαστάσεων. Φαίνεται, όμως να διαμορφώθηκε μια στρατηγική, με μορφή θεωρήματος εν δράσει (Vergnaud G. , 1991). Μπορεί να περιγραφεί ως «στις **τρεις** διαστάσεις έχουμε μήκος, πλάτος και ύψος» και η Μ3 ίσως μετέφερε αυτή τη θέωρηση και στον προσανατολισμό σε τρισδιάστατο χώρο λέγοντας «και στον προσανατολισμό στο χώρο έχουμε **μήκος, πλάτος ύψος**». Η στρατηγική αυτή δεν διατυπώθηκε ρητά εξαρχής, αλλά διαμορφώνεται με τη βοήθεια του μικρόκοσμου, που η μαθήτρια το χρησιμοποίησε ως εργαλείο για να σκεφτεί.

Επαναδιαπραγμάτευση των νοημάτων και συμφωνία σε ένα κοινό πλαίσιο

Στο απόσπασμα 3 η Μ5 ανέφερε τη λέξη «συντεταγμένες», καθώς άκουσε το μήκος-πλάτος και ύψος, από την Μ3 και η Μ4 απάντησε «στα τρία επίπεδα», εννοώντας πιθανώς τις τρεις έδρες ενός στερεού σχήματος όπως το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Εικόνα 71: Τα νοητικά πρότυπα, των Μ3, Μ4, Μ5 και οι συνδέσεις που δείχνουν τις συνοριακές σχέσεις των νοημάτων που δημιουργούν.

Στην Εικόνα 71 φαίνεται σχηματικά η οπτική μου για σύνδεση μεταξύ των νοητικών κατασκευών των Μ3, Μ4 και Μ5 για το drive. Οι σχέσεις μεταξύ νοημάτων της Μ3 και Μ5 σε αυτή τη φάση δεν εντοπίστηκαν. Αντιθέτως το νόημα που χρησιμοποίησε η Μ5 είχε κοινά με τα νοήματα των Μ4 και Μ5. Θα υποστήριζα ότι ο χώρος διαλόγου (Wegerif & Yang, 2011) της Μ5 είχε κοινά μέρη με τους χώρους διαλόγου των Μ4 και Μ5, αλλά οι χώροι των Μ4 και Μ5 δεν είχαν κοινά μεταξύ τους. Το σημείο στο οποίο διαφέρουν η επιτυχής έκβαση της λύσης ενός προβλήματος από την ανεπιτυχή είναι η έκταση που έχει αυτός ο κοινός χώρος μεταξύ δύο ομάδων μαθητών που συζητούν, ώστε μέσα από μια αναστοχαστική διαδικασία να προκύψουν δημιουργικές ιδέες (Wegerif, 2005). Ενδιαφέρον είναι να δούμε πως θα διαμορφώθηκε ο χώρος διαλόγου της ομάδας για το μικρόκοσμο drive.

Απόσπασμα 4

Μ3: Κούνα λίγο πιο αργά το f. Το f δηλαδή δεν μπορεί να θεωρηθεί ύψος, αφου η χελώνα πηγαίνει πάνω-κάτω;

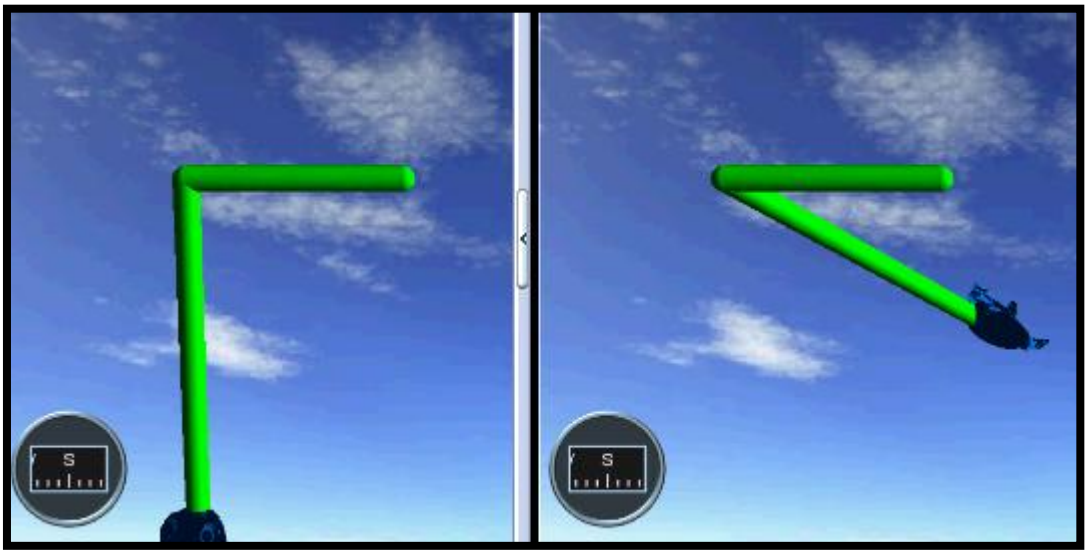
Μ6: Ναι κι εγώ πιστεύω το ίδιο, το f είναι το ύψος, για να δούμε το δεύτερο τώρα...

Μ3: [...παρατηρεί τη δυναμικά μεταβαλλόμενη γωνία...] Να ρωτήσω κάτι; Γωνίες ορίζουμε με βάση αυτό το σταθερό τμήμα εδώ πέρα; [δείχνει την ακίνητη πλευρά].

M5: Πάντως παιδιά εγώ δεν καταλαβαίνω αυτό με τη γωνία. Αυτό που είπαμε με το κέντρο το καταλαβαίνω.

M3: Για άστο όπως ήταν κάθετο.

Μετά τη χρήση των μεταβολέων φαίνεται ότι το θεώρημα εν δράσει που χρησιμοποιούσε η M3, για τις τρεις διαστάσεις, δε φάνηκε αποτελεσματικό. Αρχικά, φαίνεται ότι η M3 δεν εγκατέλειψε την αντίληψή της για τον τρισδιάστατο χώρο ψάχνοντας να βρει το ύψος. Είπε «το f δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ύψος, αφού πάει η χελώνα πάνω-κάτω;» Η μεταβλητή f ήταν το όρισμα της εντολής right-left turn και στη θέση που ήταν η χελώνα, έμοιαζε να ανεβοκατεβαίνει (Εικόνα 72). Αυτό αρκούσε για την M3 να χαρακτηρίσει αυτή τη μεταβλητή ως ύψος, αφού «το ύψος είναι από κάτω προς τα πάνω».



Εικόνα 72: Η M3 βλέποντας αυτή την κίνηση με δυναμικό χειρισμό του f, υποστηρίζει ότι είναι το ύψος.

Αμέσως μετά όταν είδε η M3 τη μεταβαλλόμενη γωνία που σχηματίστηκε μέσω του δυναμικού χειρισμού, άλλαξε το πλαίσιο στο οποίο σκεφτόταν, μιλώντας πλέον με όρους γωνιών, λέγοντας «άστο κάθετο». Η οπτικοποίηση του drive ως γωνία έγινε η αφορμή για να δημιουργηθεί ένας διαλογικός χώρος κοινός για τις M3, M4, M5. Στη συνέχεια, τα μέλη της ομάδας άλλαξαν τα άκρα των μεταβολέων ώστε να έχουν μεγαλύτερα περιθώρια δυναμικού χειρισμού.

<u>Απόσπασμα 5</u>

M5: Πάντως σίγουρα είναι και συντεταγμένες τα z,f και w..

M3: Ωραία και πάλι, το ίδιο είναι το κέντρο. Περιστρέφεται, δίκιο είχες M4!

M2: Σου κοψε, μπράβο.

M3: Θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε ένα σταθερό σημείο που είναι ο άξονας κίνησης και με βάση αυτόν και τους μεταβολείς, η χελώνα κινείται σε αυτόν τον κύκλο που σου λέω.

M4: Ναι ο κύκλος που είπαμε.

M5: Ναι.

Η M3 εμφανώς μετακινήθηκε από την αρχική της θέση. Άλλαξε τη νοητική αναπαράστασή της για το drive και βρήκε κοινά σημεία με τις M4 και M5. Μάλιστα διατύπωσε και ένα θεώρημα εν δράσει, που ίσως ενστερνίζονταν και οι άλλες μαθήτριες, ότι «έχουμε ένα σταθερό σημείο και με βάση αυτό και τους μεταβολείς μπορούμε να πούμε ότι η χελώνα κινείται πάντα σε έναν κύκλο». Η διατύπωση της M3 ήταν ακόμα πιο αφηρημένη από τη διατύπωση της M4 που μίλησε για τον κύκλο χρησιμοποιώντας συμβολικές εκφράσεις του κώδικα. Πράγματι, λοιπόν, ο συνδυασμός συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού, φαίνεται να οδήγησε σε μια αφηρημένη διατύπωση στο πλαίσιο πάντα του προβλήματος (εγκαθιδρυμένη αφαίρεση) (Noss & Hoyles, 1996). Το εγκαθιδρυμένο νόημα που προέκυψε ήταν κοινό για τις M3, M4 και M5 και μοιάζει με μια εκδοχή πολικών συντεταγμένων πάντα στο πλαίσιο του μικρόκοσμου.

5.1.2 Η ερμηνεία του κώδικα ως δομή ελέγχου

Ερμηνεία μεταβλητών και εντολών του στρεβλού ορθογωνίου

Το βασικό ερώτημα της κύριας δραστηριότητας του μισοψημένου στρεβού ορθογωνίου ήταν «τι μπορούμε να κάνουμε, ώστε το σχήμα να παραμένει κλειστό, όσο κι αν το μεταβάλλουμε;» Εστιάζοντας στην ομάδα 1, οι μαθητές των υποομάδων αντέδρασαν ακολούθησαν δύο διαφορετικές τακτικές, ώστε να καταλάβουν τη φύση του σχήματος και να απαντήσουν στην πρόκληση:

- Η υποομάδα 1.1 προσπάθησε να απαντήσει το ερώτημα διαβάζοντας τον κώδικα και συγκρίνοντάς τον με το σχήμα (συμβολική έκφραση και χωρική αναπαράσταση).
- Η υποομάδα 1.2 χρησιμοποίησε τους μεταβολείς και την κάμερα, για να δει διάφορες μορφές του σχήματος, και να καταγράψει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (δυναμικός χειρισμός του γενικευμένου σχήματος). Επίσης προσπάθησε να αποτυπώσει διάφορα στιγμιότυπα του σχήματος στο

χαρτί. Στη συνέχεια σκέφτηκαν να φτιάξουν ένα μοντέλο του σχήματος, διαβάζοντας τον κώδικα γραμμή-γραμμή.

Η προσέγγιση της υποομάδας 1.2 ήταν πιο γεωμετρική, καθώς προσπαθούσε να εντοπίσει τις γεωμετρικές ιδιότητες των μεταβλητών που χρησιμοποιούνταν. Κατά την προσπάθειά τους εξέφρασαν είτε με μορφή διαλόγου μεταξύ τους, είτε μέσω του Lasad και σε διάλογο με την υποομάδα 1.1 ενδιαφέρουσες σκέψεις σχετικά με την έννοια της γωνίας στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

Στο μικρόκοσμο του στρεβλού ορθογωνίου μια εγγενής δυσκολία της κατασκευής είναι ότι οι μεταβλητές theta και wmega, που εμφανίζονται στον κώδικα δεν είναι γωνίες του σχήματος (Εικόνα 58), αλλά του νοητού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που το περιέχει. Κάθε γωνία του σχήματος είναι αποτέλεσμα των δύο γωνιακών ορισμάτων theta και wmega του κώδικα:

```
to hbmonadack :length :theta :wmega :width
fd(:length) rt(90+:theta/2)
up(:wmega) fd(:width)
dp(:wmega) rt(90+(:theta)/2)
fd(:length) lt(90+(:theta)/2)
dp(:wmega) fd(:width)
up(:wmega) lt(90+:theta/2)
end
```

Ο εντοπισμός των length και width, αναμενόταν πιο εύκολος, αφού εμφανίζονται στη χωρική αναπαράσταση του σχήματος.

Παρατηρώντας το σχήμα: Εξωτερική προσέγγιση & πλαίσια αναφοράς

Οι Μ3 και Μ4 της ομάδας 1.2 στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν την χωρική αναπαράσταση κάθε μεταβλητής ξεκίνησαν χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό του σχήματος και παρατηρώντας τις αλλάγές που συμβαίνουν. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν και την κάμερα, αλλάζοντας οπτικές γωνίες. Έρευνες έχουν δείξει ότι μέσω της χρήσης μεταβολέων, αλλά και της πλοήγησης στο χώρο οι μαθητές παρατηρούν τι σημαίνουν οι αλλαγές στις μεταβλητές του κώδικα για τη χωρική αναπαράσταση, αλλά και για τη θέση του αντικειμένου στο χώρο και ποια είναι η σχέση μεταβλητών και αμετάβλητων στοιχείων. Με αυτό τον τρόπο κάνουν εικασίες

για τη σχέση τους και οδηγούνται σε γενικεύσεις (Kynigos & Latsi, 2007). Σε αυτό το σημείο ιδιαίτερο ρόλο παίζουν τα πλαίσια αναφοράς.

Όταν οι μαθητές θέλουν να περιγράψουν λεκτικά την κίνηση της χελώνας στο χώρο τριών διαστάσεων μετακινούνται μεταξύ διαφορετικών πλαισίων αναφοράς (Wickens, Vincow, & Yeh, 2005). Το ίδιο συμβαίνει όταν προσπαθούν να καταλάβουν ποιες εντολές έκαναν τη χελώνα να κινηθεί όπως φαίνεται στην οθόνη του υπολογιστή τους (Kynigos & Latsi, 2007). Τα πλαίσια αναφοράς τους είναι τα εξής:

- Εξωστρεφές πλαίσιο (world frame): Χρησιμοποιούν λέξεις όπως πάνω και κάτω για να εξηγήσουν την κατεύθυνση της κίνησης.
- Εσωστρεφές πλαίσιο (ego frame): Χρησιμοποιούν όρους σχετικούς με τον προσνατολισμό της χελώνας, αλλά και με την θέση της κάμερας-παρατηρητή.
- Πλαίσιο κεφαλιού της χελώνας (head frame): Χρησιμοποιούν ορολογία σχετική με την κατεύθυνση του κεφαλιού της χελώνας.
- Πλαίσιο οχήματος (vehicle frame): Η χελώνα είναι μια μετακινούμενη οντότητα και με τέτοιους όρους μιλούν οι μαθητές.
- Πλαίσιο οθόνης (display frame): Χρησιμοποιούν όρους προσανατολισμού σχετικούς με την οθόνη.

Σε έρευνες που έχουν γίνει (Kynigos & Latsi, 2007), στην αρχή της δραστηριότητας το ego frame (body-syntonic way) κυριαρχει του vehicle frame. Μετά το display frame εμπλεκόταν με το world frame και το ego frame. Πολλές φορές οι μαθητές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν χειρονομίες για να εξηγήσουν τελικά τι συμβαίνει.

Σχετικό, κατά την άποψή μου είναι το επόμενο απόσπασμα:

Απόσπασμα 6

M3: Πόσους τρόπους έχουμε να καταλάβουμε τι κάνει η κάθε μεταβλητή;

M4: [κουνάει τους μεταβολείς πολυ ώρα] Να,το length μεγαλώνει το μήκος.

M3 Όχι, πλαταίνει. Χρησιμοποίησε και την κάμερα να το δούμε αλλιώς, τι παθαίνει.

M4: [Ενεργοποιεί την κάμερα] Να, το wmega το ξαπλώνει και το σηκώνει, ενώ το μεσαίο [wmega] το κουνάει απλά. Δεν αλλάζει όπως είναι φτιαγμένο απλά μεγαλώνει και μικραίνει. Αυτό δεν είναι αλλαγή-αλλαγή!

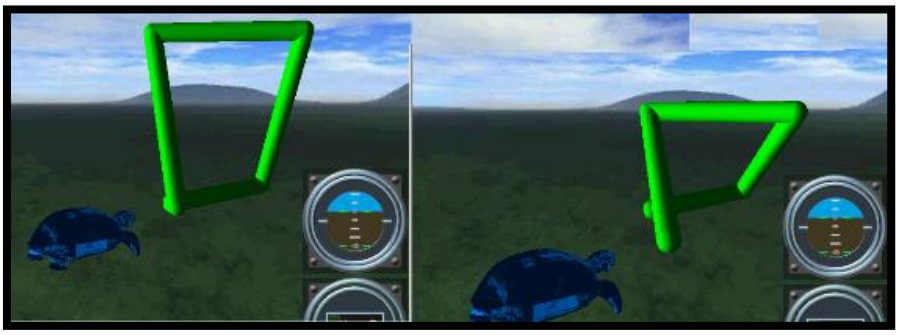
M3: Εντάξει, κατάλαβα, length=μεγαλώνει-μικραίνει, wmega=πάνω-κάτω και width=το κατεβάζει και το ανεβάζει απλά και το theta μόνο το κουνάει.

Στην προσπάθεια τους να δώσουν στις μεταβλητές χωρική-δυναμική αναπαράσταση έβγαλαν τα συμπεράσματα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

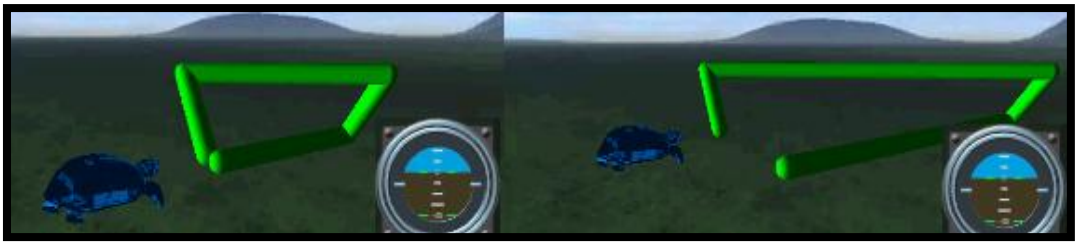
Μεταβλητή	Συμπέρασμα μαθητών για την επίδρασή της στο σχήμα	Εντολή του κώδικα που τηνέχει ως όρισμα
length	Μεγαλώνει-μικραίνει, το πλαταίνει	Forward
theta	Μόνο το κουνάει	Right turn
wmega	Το κουνάει πάνω-κάτω	Up pitch
width	Το ανεβοκατεβάζει	Forward

Από τη χρήση της έκφρασης «πάνω-κάτω» για την εντολή up με όρισμα wmega φαίνεται ότι χρησιμοποίησαν το πλαίσιο της οθόνης και το εξωστρεφές πλαίσιο. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς οι μαθητές δεν προσπάθησαν να περιγράψουν την κίνηση της χελώνας, αλλά μεταβολές στην μορφή του σχήματος. Προσπαθώντας να χειριστούν το σχήμα, προέκυψε μια εξωτερική προσέγγιση του χώρου στον οποίο βρισκόταν, όπου οι μαθητές αποστασιοποιήθηκαν από τη χελώνα.

Εκφράσεις όπως «μεγαλώνει-μικραίνει», «πλαταίνει» δείχνουν ότι αναζητούσαν τι άλλαζε στο σχήμα και τι μεταβαλλόταν με σκοπό να κάνουν εικασίες για τις ιδιότητες του σχήματος σε σχέση με τις μεταβλητές.



Εικόνα 73: Μεταβολή του wmega



Εικόνα 74: Μεταβολή του theta.

Στρατηγική αναστοχασμού: Από το δυναμικό χειρισμό στον κώδικα

Λόγω της κατασκευής του κώδικα (βλέπε σελίδα 151) ήταν ιδαίτερα δύσκολο να αποσαφηνίσουν οι μαθητές, μέσω του δυναμικού χειρισμού τι ακριβώς έκαναν οι εντολές με ορίσματα theta και wmega. Οι εντολές αυτές κατά κάποιο τρόπο ήταν συνιστώσες στις μεταβολές της χωρική αναπαράσταση του σχήματος, καθώς υπενθυμίζω ότι επηρέαζαν και οι δύο την κάθε γωνία του στρεβλού ορθογωνίου.

Στη συνέχεια της διερεύνησης οι Μ3 και Μ4 αποφάσισαν να διαβάσουν γραμμή-γραμμή τον κώδικα και να ξανακατασκευάσουν χρησιμοποιώντας στην αρχή μολύβια και μετά καλαμάκια (Εικόνα 75) που τα ένωσαν μεταξύ τους, το στρεβλό ορθογώνιο. Ενώ είχαν παραστήσει το length με ένα καλαμάκι και έστριβαν τη χελώνα (που στη θέση της πήραν μια γόμα) προσομοιώνοντας την εντολή rt(90+:theta/2), φαίνεται ότι η στροφή δεν γινόταν σωστά (εικόνα 76):

Απόσπασμα 7

Μ3: Μετά από το fd(:length) στρίβει δεξιά.

Ε: Δεξιά πόσο;

Μ3: 90+theta/2.

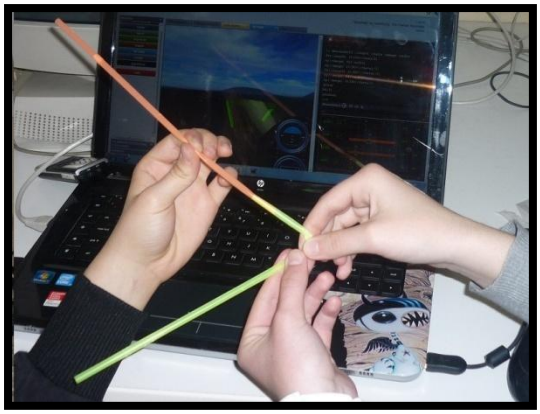
Μ4: Το theta πόσο είναι; Εξαρτάται από το theta. Πόσο το έχουμε βάλει; Α, οκ. Καλά είμαστε τρομερές! Και μετά;

Μ3: up(:wmega). Άρα πάει έτσι, έχει σηκωθεί και μετά fd(:width), ωραία.

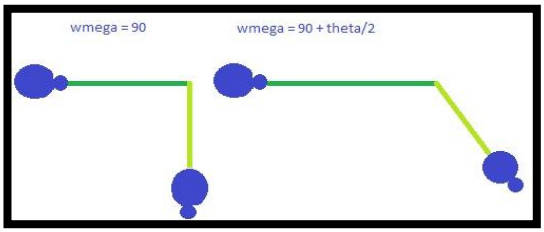
Ε: Πάρε κι αυτό το καλαμάκι.

Μ3: Ωχ, δε βγαίνει σωστά [Εικόνα 75].

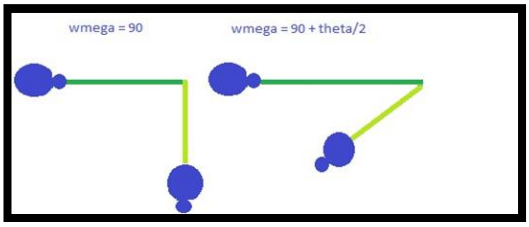
Μ4: Δεν έπρεπε να βγει έτσι. Για πάμε πάλι...



Εικόνα 75: Οι Μ3 και Μ4 κατασκευάζουν μοντέλο του στρεβλού ορθογωνίου με καλαμάκια. Μόλις έχουν «εκτελέσει» και την εντολή fd(:wmega).



Εικόνα 76: Κάτοψη της κίνησης της χελώνας που προσομοιώνουν οι Μ3 και Μ4 με τα καλαμάκια και τη γόμα. Η στροφή 90+theta/2 δε γίνεται σωστά κι αυτό επηρεάζει τη δομή του σχήματος.



Εικόνα 77: Η σωστή στροφή.

Στο απόσπασμα 7 αυτό που συνέβη ήταν το εξής. Όπως φαίνεται και στην εικόναΕικόνα 76 η στροφή rt(90+:theta/2) δεν έγινε σωστά στο σχήμα με τα καλαμάκια. Η σωστή στροφή φαίνεται στην Εικόνα 77. Το πρόβλημα δε έγινε εμφανές αμέσως, αλλά οι Μ3 και Μ4 το κατάλαβαν όταν πήγαν να συνεχίσουν την κατασκευή του σχήματος. Τη στιγμή που έπρεπε να «εκτελέσουν» την εντολή dp(:wmega) η θέση που βρέθηκε η χελώνα ήταν προφανές ότι δεν ήταν σωστή, αφού το σχήμα δεν επρόκειτο να κατασκευαζόταν, όπως ήταν στη χωρική αναπαράσταση της οθόνης:

Απόσπασμα 8

Μ4: Ωραία και τι θα κάνουμε; Πες ότι φτάνει μεχρι εδώ [δείχνει τη θέση πριν το dp(:wmega)]. Μετά;

M3: Τώρα προσγειώνεται, dp(:wmega). Αλλά γιατί προσγειώνεται έτσι; Μήπως ανάλογα πως κοιτάμε το σχήμα, στρίβει και διαφορετικά και αποφασίζουμε εμείς πώς θα στρίβει;

M4: Δεν έχω καταλάβει...

E: Θα κάνουμε το dp(:wmega)

M3: Το θέμα είναι προς τα πού;

[...]

E: Τελικά, πως θα βρούμε προς τα που θα γίνει το dp;

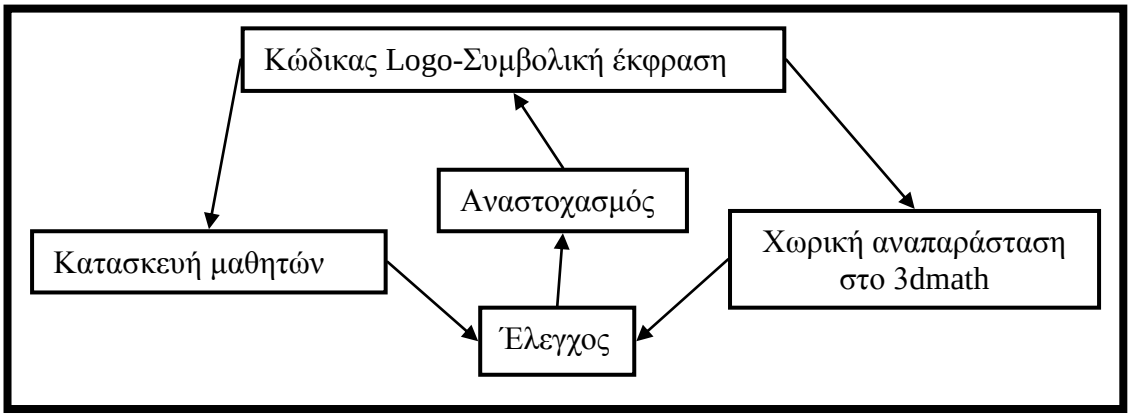
M4: Ανάλογα με την κάμερα;

M3: Όχι, γιατί πες ότι στρίβει τόσο. Είτε έτσι, είτε αλλιώς, τόσο θα στρίβει.

Στα αποσπάσματα 7 και 8 φαίνεται ότι οι M3 και M4 είχαν σαν αντικείμενα αναφοράς τρεις αναπαραστάσεις:

- Το Logo κώδικα.
- Τη χωρική αναπαράσταση στην οθόνη του υπολογιστή.
- Την κατασκευή με τα καλαμάκια.

Ξεκίνησαν διαβάζοντας μια-μια τις εντολές του Logo κώδικα. Στη συνέχεια υλοποίησαν την εντολή με τα καλαμάκια και μετά έλεγξαν αν το αποτέλεσμα ερχόταν σε αντίφαση με την χωρική αναπαράσταση στο 3dmath, που θα σήμαινε ότι η κατασκευή δεν ήταν σωστή . Τότε αναστοχάστηκαν πάνω στις ενέργειές τους και τις αναθεώρησαν.



Εικόνα 78: Στο διάγραμμα φαίνεται η στρατηγική των M3, M4. Μετά τον έλεγχο της κατασκευής, ανατροφοδοτείται η ερμηνεία του κώδικα.

Η χωρική αναπαράσταση είναι ένα στιγμιότυπο του συμβολικά εκπεφρασμένου (μέσω της Logo) γεωμετρικού αντικειμένου. Η κατασκευή των μαθητών παραγόταν,

σε κάθε βήμα της, από την ερμηνεία των εντολών-συμβόλων από αυτούς στον πραγματικό χώρο. Έτσι, δημιουργήθηκε μια δομή ελέγχου, που εξυπηρέτησε τις μεταγνωστικές ενέργειες των μαθητών. Τα συμπεράσματα που βγήκαν, δεν αφορούσαν το συγκεκριμένο σχήμα, αλλά τον κώδικα και συνεπώς ήταν σχετικά αφηρημένα, όπως θα φανεί παρακάτω.

Οι Μ3 και Μ4 χρησιμοποίησαν το κατασκεύασμά τους (artifact) και το μετέτρεψαν σε εργαλείο (instrument). Με αυτό εμπλούτισαν τα εργαλεία που ήδη είχαν στη διάθεσή τους και χρησιμοποίησαν το μικρόκοσμο με εξατομικευμένο τρόπο (Artigue, 2002) κι όχι όπως ακριβώς είχα προβλεφθεί από εμάς. Η αναπαράσταση που κατασκεύασαν ήταν αντικείμενο εμπειρικής γεωμετρίας (Strässer, 1996), αλλά η ορθότητα της κατασκευής ελέγχθηκε από φορμαλιστικους κανόνες (κώδικας Logo). Είναι κομμάτι της εικόνας του γεωμετρικού αντικειμένου που ονομάζεται στρεβλό ορθογώνιο (Fischbein, 1993) και ως τέτοιο εμπλούτισε την σχηματική έννοιά του και κατ' επέκταση την ίδια την αφηρημένη έννοια του γεωμετρικού σχήματος (βλέπε σελίδα 46). Επίσης θα ισχυριστώ ότι το σχήμα με τα καλαμάκια ήταν μια κατασκευή υπό διαπραγμάτευση και με συνεχείς βελτιώσεις, μέσω αναστοχασμού (Papert & Harel, 1991), ένα νοητικό εργαλείο που διαμεσολάβησε μεταξύ του κώδικα, του σχήματος στην οθόνη και των μαθητών.

Το πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι μαθήτριες, στην προσπάθειά τους να προσδιορίσουν τη σωστή θέση της χελώνας οφείλεται στη βασικό χαρακτηριστικό της Γεωμετρίας της Χελώνας. Η κατάστασή της προσδιορίζεται από την αμέσως προηγούμενη (Abelson & DiSessa, 1981). Μην έχοντας προσδιορίσει σωστά την προηγούμενη θέση της χελώνα, ακόμα και η σωστή εκτέλεση της εντολής οδήγησε σε μη αναμενόμενο αποτέλεσμα, που το απέρριψαν, λόγω της δομής ελέγχου που είχαν δημιουργήσει. Παρακάτω ξεπέρασαν αυτό το πρόβλημα, έχοντας κάνει χρήση του ιδιαίτερου χαρακτηριστικού της Γεωμετρίας αυτής, όπως φαίνεται από τη δήλωση της Μ3 στο απόσπασμα 9:

Απόσπασμα 9

Ε: Τελικά πώς λύσατε το πρόβλημα; Πώς βρήκατε πόσο θα κατέβει η χελώνα;

Μ4: Ξανακάναμε τον κώδικα.

Μ3: Ναι, γυρίσαμε ένα δύο βήματα πίσω, για να ξαναβρούμε σωστά τα επόμενα.

Τα πλαίσια αναφοράς προσανατολισμού που εμφανίζονται στις φάσεις της διερεύνησης

Σχετικά με τον προσανατολισμό των M3 και M4 στο 3D περιβάλλον της χελώνας, φαίνεται ότι ενώ οι μαθήτριες αρχικά χρησιμοποιούσαν έναν εξωστρεφές πλαίσιο αυτό άλλαξε. Εκφράσεις όπως «ανάλογα με τη θέση της κάμερας» ήταν ενδείξεις ότι η M4 άρχισαν να χρησιμοποιούν το εσωστρεφές πλαίσιο. Σχεδόν στο ίδιο χρονικά σημείο, η ίδια μαθήτρια είπε «ότι η χελώνα θα σηκωθεί», που δείχνει ότι ακολουθούσε και το πλαίσιο οχήματος. Η τελική της δήλωση όμως «είτε έτσι, είτε αλλιώς, τόσο θα στρίβει», όπου κι αν έδειχνε η κάμερα, επιβεβαιώνει ότι τελικά κυριάρχησε το πλαίσιο οχήματος, του εσωστρεφούς.

5.2. Διερευνώντας γωνιακές σχέσεις

5.2.1 Φορμαλισμός με νόημα

Η συμμετρία του κώδικα

Ο κώδικας του μισοψημένου στρεβλού έχει μια συμμετρία στις εντολές του, που οφείλεται στη συμμετρία του σχήματος. Μετά τον ορισμό της διαδικασίας και των μεταβλητών ακολουθούν οι εντολές:

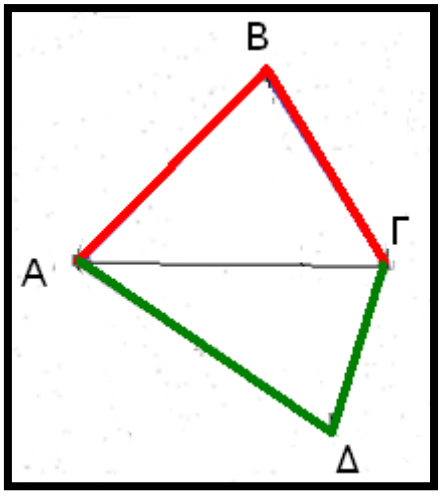
fd(:length) rt(90+:theta/2) up(:wmega) fd(:width) dp(:wmega) rt(90+(:theta)/2) fd(:length) lt(90+(:theta)/2) dp(:wmega) fd(:width) up(:wmega) lt(90+:theta/2)

Αυτές μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες εντολών:

$1^{η}$ ομάδα : fd(:length) rt(90+:theta/2) up(:wmega) fd(:width) dp(:wmega) rt(90+(:theta)/2), που κατασκευάζει τις δύο πρώτες πλευρές του στρεβλού, και

$2^{η}$ ομάδα: fd(:length) lt(90+(:theta)/2) dp(:wmega) fd(:width) up(:wmega) lt(90+:theta/2), που κατασκευάζει την τρίτη και την τέταρτη πλευρά του στρεβλού.

Κάθε ομάδα αποτελείται από έξι εντολές. Οι εντολές fd είναι ακριβώς ίδιες, με ίδιο όρισμα και στις ίδιες θέσεις. Οι άλλες εντολές ίδιας μορφής στροφές, αλλά αντίρροπες. Δηλαδή εκεί που η μια ομάδα έχει rt, η άλλη έχει lt με το ίδιο όρισμα. Αυτό αντικατοπτίζει της συμμετρία του σχήματος. Μιλώντας με αναφορά στην Εικόνα 79 η πρώτη ομάδα εντολών κατασκευάζει τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ και η δεύτερη ομάδα εντολών κατασκυεάζει τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ.



Εικόνα 79: Η συμμετρία στην κατασκευή του στρεβλού ορθογωνίου

Υπάρχει όμως και μια άλλη κανονικότητα στις εντολές. Οι επίπεδες στροφές (rt-lt) σε κάθε ομάδα εντολών, αρχίζουν και τελειώνουν με το όρισμα 90+:theta/2. Η στροφή όμως δεν είναι ίδια σε προσανατολισμό, καθώς το κεφάλι της χελώνας κοιτάει κάθε φορά σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Ενώ οι μαθήτριες Μ3 και Μ4 είχαν καταφέρει να κατασκευάσουν με τα καλαμάκια το σχήμα, διάβάζοντας τις εντολές του κώδικα και βρίσκονταν στο τέλος της 1^{ης} ομάδας εντολών, πριν την εντολή right(90+:theta/2), έγινε ο εξής διάλογος:

<u>Απόσπασμα 10</u>

Μ3: Προβληματίζομαι με αυτή την εντολή...

Ε: Γιατί;

Μ3: Αν στρίψει δεξιά 90 και κάτι θα πάει εδώ [δείχνει 90-theta/2]. Ενώ αυτό δεν γίνεται, το σχήμα βγαίνει λάθος.

Μ4: Εγώ καλά κάνω και δεν έχω εμπιστοσύνη στον κώδικα! [γέλια]

Μ3: Για δώσε εδώ τα καλαμάκια και τη γόμα. Α, πάει εδώ.

Μ4: 90+theta/2 δεξιά.

Ε: Πάει όσο να ναι δεξιά;

Μ3: Α, μισό, ναι είναι ακριβώς όσο πριν, ακριβώς theta+90/2, τόσο θα πρέπει να το στρίψουμε όσο πριν, προς τα εδώ.

Στον απόσπασμα 10 η Μ3 φαίνεται ότι πήγε να κάνει το ίδιο που έκανε και την πρώτη φορά που αντιμετώπισε τη στροφή 90+theta/2. Έστριψε τη χελώνα τόσο ώστε η τελική γωνία να είναι 90+theta/2 κι όχι η στροφή. Άρα έστριψε τη γωνία κατά 90-theta/2. Το εργαλείο ελέγχου που είχαν επινοήσει οι Μ3 και Μ4, έκανε τις μαθήτριες

να καταλάβουν ότι κάτι δεν πήγαινε καλά. Έτσι, οδηγήθηκε, έστω και αστειευόμενη η Μ4 στη δήλωση «καλά κάνω και δεν έχω εμπιστοσύνη στον κώδικα». Όμως μετά την μικρή παρέμβασή μου (Ε), η Μ3 διαπίστωσε ότι η γωνία που έστριψε πριν η χελώνα και που επρέπε να ξαναστρίψει θα ήταν ίσες, λόγω του κοινού συμβολισμού τους. Έτσι, αντί να υπολογίσει τη γωνία στροφής, έστριψε τη χελώνα όσο και πριν και ήταν σίγουρη για την ορθότητα του αποτελέσματος. Σε αυτό το σημείο οι Μ3 και Μ4 έχω την άποψη ότι έδωσαν νόημα στην φορμαλιστική έκφραση του κώδικα Logo, ένα νόημα που χρησιμοποίησαν στη διερεύνησή τους (Dubinsky, 2000). Οι αλγεβρικές εκφράσεις και η θέση τους μέσα στο κώδικα αντιστοιχήθηκαν σε γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος.

Κάτι παρόμοιο παρατηρήθηκε και στον επόμενο διάλογο (απόσπασμα 11). Οι μαθήτριες σε επόμενη συνάντηση, βρήκαν τις συνιστώσες γωνίες (90+theta/2 και wmega) στις οποίες χωρίζεται κάθε γωνία τους σχήματος και ισχυρίστηκαν ότι «κάθε γωνία του σχήματος φτιάχνεται από αυτές τις δύο γωνίες του κώδικα». Συνέβη το εξής:

<u>Απόσπασμα 11</u>

Μ4: Η 90+theta/2 είναι κι εδώ...[δείχνει στο τέλος της 1^{ης} ομάδας εντολών].

Μ3: Κι εδώ κι εδώ [Δείχνει τη δεύτερη ομάδα εντολών]. Είναι ίδιο με αυτό που βρήκαμε [Εννοεί την πρώτη γωνία που ήδη έχουν περιγράψει].

Μ4: Δηλαδή όταν φτάσει εδώ [η χελώνα] θα γίνει το ίδιο λογικά, άρα το ίδιο θα στρίψει. Αυτό που έγινε στο right πριν, τώρα γίνεται στο left και αυτό που έγινε στο up, τώρα γίνεται στο dp.

Μ3: Άρα οι εντολές είναι ίδιες, αλλά στρίβει ανάποδα. Που σημαίνει ότι όλες οι γωνίες είναι ίσες; Και στις άλλες δύο το ίδιο γίνεται, άρα και οι τέσσερις είναι ίσες.

Οι Μ3 και Μ4 χρησιμοποίησαν τη συμμετρία του συμβολισμού για να εικάσουν μια συμμετρία του σχήματος. Όμως αυτό που φαίνεται να έκαναν στο απόσπασμα 11 ήταν ένα βήμα πιο αφαιρετικό από πριν. Στον προηγούμενο διάλογο (απόσπασμα 10), είχαμε την εντολή rt(90+:theta/2) να επαναλαμβάνεται. Στο απόσπασμα 11 είδαμε ότι συζητούσαν για μια ομάδα εντολών που δεν επαναλαμβάνεται ακριβώς ίδια, αλλά ως εξής: rt(90+:theta/2) up(:wmega) και lt(90+:theta/2) dp(:wmega) (Εικόνα 80). Υπάρχει δηλαδή το ίδιο όρισμα, αλλά οι εντολές στροφής έχουν αντίθετη φορά. Το

θεώρημα εν δράσει (Vergnaud G. , 1991) που ισχυρίζομαι ότι χρησιμοποίησαν οι μαθητές θα το διατύπωνα ως εξής:

« Αν έχουμε δύο ομάδες εντολών στροφής, ώστε να έχουν το ίδιο όρισμα και αντίθετη φορά, τότε οι γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες».

Έχω την άποψη ότι στο πλαίσιο που δούλευαν οι μαθητές αυτή η διαπίστωση ήταν προϊόν εγκαθιδρυμένης αφαίρεσης (Noss & Hoyles, 1996). Άρα ήταν μια γενίκευση που ίσχυε στο περιβάλλον που δούλευαν οι μαθητές. Αιτιολογώ τον όρο γενίκευση από την τελευταία φράση της Μ3 «Και στις άλλες δύο το ίδιο γίνεται [δηλαδή οι εντολές έχουν το ίδιο όρισμα, αλλά αντίθετη φορά στροφής], άρα είναι κι αυτές ίσες». Η Μ3 δεν εξέτασε καθόλου τι συνέβαινε στο σχήμα. Βλέποντας μόνο τον κώδικα εφάρμοσε (κατά τη γνώμη μου) τον κανόνα «εκεί που ο συμβολισμός επαναλαμβάνεται κάποια γεωμετρική ιδιότητα παραμένει αναλλοίωτη».

	Απέναντι πλευρές	Απέναντι γωνίες	Απέναντι πλευρές	Απέναντι γωνίες
1η ομάδα εντολών	fd(:length)	rt(90+:theta/2)	fd(:width)	dp(:wmega)
		up(:wmega)		rt(90+(:theta)/2)
2η ομάδα εντολών	fd(:length)	lt(90+(:theta)/2)	fd(:width)	up(:wmega)
		dp(:wmega)		lt(90+:theta/2)

Εικόνα 80: Στον πίνακα φαίνονται οι συμμετρίες των ομάδων εντολών.

Αυθόρμητες αντιλήψεις για τις γωνίες του σχήματος

Οι Μ3 και Μ4 συζητούν για τις στροφές rt(90+:theta/2) και up(:wmega), αναφέροντας μόνο τα ορίσματά τους:

<u>Απόσπασμα 12</u>

Μ4: Μ3, για δες λίγο εδώ, όταν μεταβάλουμε το wmega οι γωνίες αυτές [του σχήματος] μεγαλώνουν νομίζω.

[Η Μ3 χρησιμοποιεί το μεταβολέα της wmega]

Μ3: Είναι σα να πηγαίνει..σαν να στρίβει κατά wmega.

Ε: Η wmega τι επηρεάζει;

Μ3: Τις γωνίες [εννοεί του σχήματος].

Μ4: Ναι, τις γωνίες. Απλά θέλω να συμπληρώσω ότι η wmega, σχετίζεται πάντα με στροφές, up και down και γι' αυτό επηρεάζει τις γωνίες [...] Άρα αυτή η γωνία του σχήματος είναι η wmega, αφού όταν το κουνάμε [εννοεί το μεταβολέα], αλλάζει.

Οι Henderson και Taimina (2005) πιστεύουν πως ένας από τους τρόπους προσέγγισης της γωνίας από τους μαθητές είναι αυτός του αποτελέσματος μιας στροφής. Η στροφή είναι μια από τις πιο συνηθισμένες φυσικές γωνιακές καταστάσεις. Από την άλλη μεριά, σε προηγούμενα σημεία της διερεύνησης οι εντολή up και down είχε χαρακτηριστεί «στροφή». Άρα, «δικαίως» η M4 φαίνεται να σκέφτηκε ότι: «*αφού η γωνία είναι στροφή, άρα και η στροφή είναι γωνία. Άρα κάθε γωνία του σχήματος είναι μια στροφή του κώδικα, αλλά και κάθε στροφή του κώδικα είναι μια γωνία του σχήματος*», κατασκευάζοντας και χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο προσωπικό νόημα. Η M4 έδειξε να αντιλαμβάνεται τα ορίσματα των στροφών του κώδικά ως γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία όφειλαν να υπάρχουν στο σχήμα και όχι να είναι νοητά. Αυτό μπορεί να σημαίνει κατ' επέκταση ότι έβλεπε τις δύο αναπαραστάσεις, τη συμβολική μέσω της Logo και τη χωρική, σαν να αντιστοιχίζονταν πλήρως μεταξύ τους. Δηλάδη, «ότι φαίνεται συμβολικά, φαίνεται και γραφικά», στο πλαίσιο του μικρόκοσμου. Σε αυτό το πλαίσιο (των νοημάτων σε χρήση και θεωρημάτων σε δράσει) και οι «παρανοήσεις» έχουν ένα πεδίο βιωσιμότητας (domain of validity) (Balacheff & Gaudin, 2002), αφού αν δεν είχαν δε θα υπήρχε λόγος να τις κατασκευάσει κανείς.

Διαμεσολάβηση ολισθητή μεταξύ χωρικής και συμβολικής αναπαράστασης που οδηγεί σε εικασίες και ερωτήματα

Πολλές φορές στην επίλυση ενός γεωμετρικού ή τριγωνομετρικού προβλήματος είναι απαραίτητο κανείς να φανταστεί μια γωνία, της οποίας μόνο μια πλευρά εμφανίζεται στο αρχικό σχήμα. Σύμφωνα με τους Mitchelmore και White (2000) οι μαθητές δεν μπορούν εύκολα να εντοπίσουν τις πλευρές που εννοούνται. Όσες περισσότερες πλευρές λείπουν, τόσες περισσότερες νοητικές κατασκευές πρέπει να κάνουν οι μαθητές, ώστε να συνδέσουν τη γωνιακή κατάσταση που αντιμετωπίζουν με άλλες και έτσι να αναγνωρίσουν το τυπικό νόημα της γωνίας. Η επαναλαμβανόμενη ενασχόληση με το προβλήματα, η διερεύνηση και ο συνεχής αναστοχασμός μπορεί να βοηθήσει στην εύρεση νοητών πλευρών τριγώνων και γωνιών.

Στον μικρόκοσμο του στρεβλού ορθογωνίου, το στοιχείο αυτό κάνει έντονη την παρουσία του. Οι M3 και M4 προσπάθησαν διαβάζοντας προσεκτικά τον κώδικα και κατασκευάζοντας το σχήμα με τα καλαμάκια, να αντιστοιχήσουν στις μεταβλητές του κώδικα, χωρικές ιδιότητες, αλλά δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα με τις wmega και theta.

Στα αποσπάσματα που ακολουθούν φαίνεται ο συνεχής αναστοχασμός των μαθητριών Μ3 και Μ4, με τη χρήση των εργαλείων του 3dmath, αλλά και της κατασκευής τους, καθώς προσπαθούσαν να αποδώσουν γεωμετρική υπόσταση στις wmega και theta.

Στον απόσπασμα οι Μ3 και Μ4, συνέχισαν την προσπάθειά τους να συμφωνήσουν σε μια αντιστοιχία των μεταβλητών του κώδικα με τα γεωμετρικά στοιχεία του σχήματος:

Απόσπασμα 13

Μ3: Οι length και width είναι οι πλευρές.

Μ4: Και οι wmega και theta οι γωνίες; Για την wmega, up(:wmega), dp(:wmega), ο κώδικας το λέει ξεκάθαρα. Πάνω-κάτω.

Μ3: Αν δεις πώς φτιάξαμε το σχήμα με τα καλαμάκια, οι wmega και theta, τότε η theta είναι το αριστερά δεξιά. Έτσι κουνάει τη χελώνα. Δηλάδη το δεξιά-αριστερά μικραίνει το σχήμα;[Αυτό είχε παρατηρήσει ότι συνέβαινε όταν κουνούσε το μεταβολέα wmega].

Μ4: Ναι, το μικραίνει.

Μ3: Για κούνα λίγο το αριστερά-δεξιά...δεν πάει ακριβώς δεξιά, όπως η χελώνα.

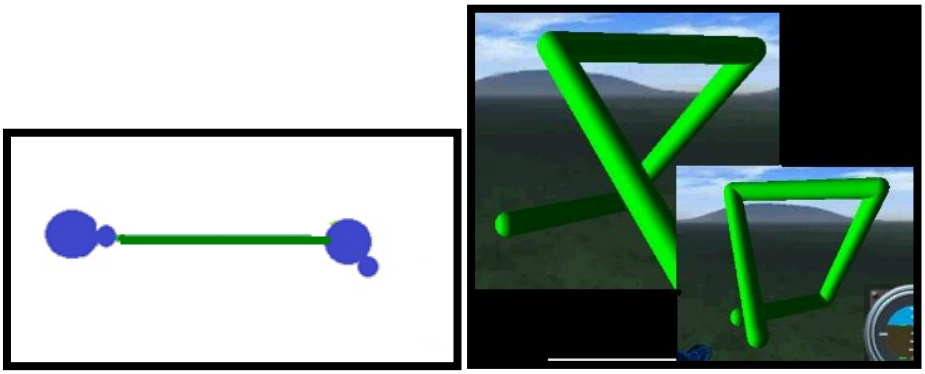
[Η Μ4, κουνάει το μεταβολέα theta].

Μ3: Ξέρεις τι θέλω να συσχετίσω; Πώς γίνεται όταν κουνάμε τα καλαμάκια να μην πηγαίνει ούτε μόνο πάνω ή μόνο κάτω, ούτε μόνο δεξιά ή μόνο αριστερά! Κι ο κώδικας λέει αριστερά-δεξιά!

Αφού είχαν αποφασίσει ότι οι length και width εξέφραζαν πλευρές του σχήματος, προσπάθησαν να δουν τι συνέβαινε με τις theta και wmega. Με αναφορά στις αντίστοιχες εντολές rt-lt και up-dp, η Μ4 υποστήριξε ότι η wmega αντιστοιχούσε σε μια κίνηση «πάνω-κάτω». Σε αυτή τη δήλωση υποκρύπτεται το εξωστρεφές πλαίσιο αναφοράς (world frame) (Kynigos & Latsi, 2007).

Παρακάτω η Μ3 φαίνεται πώς είχε μια διαφορετική προσέγγιση. Προηγουμένως είχε χρησιμοποιήσει μια γόμα σαν χελώνα για να αναπαραστήσει την κίνησή της (εξωτερική προσέγγιση του χώρου), και διαπίστωσε ότι η εντολή rt(90+:theta/2) έστριβε τη χελώνα δεξιά κι όχι το σχήμα. Έτσι, με χρήση του μεταβολέα αυτό που προσπάθησε να ερμηνεύσει ήταν «γιατί το δεξιά της χελώνας, δεν είναι μια ξεκάθαρη κίνηση δεξιά για τη χωρική αναπαράσταση του σχήματος». Εδώ, πλέον η Μ3 δεν

χρησιμοποίησε το σχήμα με τα καλαμάκια, αλλά μόνο το σύρσιμο του ολισθητή σαν διαμεσολαβητή μεταξύ χωρικής και συμβολικής αναπαράστασης, ώστε να καταλάβει τη σχέση που είχαν οι εντολές που μετέβαλλαν τη θέση της χελώνας με τις μεταβολές στις γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος. Άρχισε να διαπιστώνει κάτι που την ξάφνιασε. Οι εντολές είχαν σημασιολογική υπόσταση μόνο ως προς την κίνηση της χελώνας και όχι ως προς τη μορφή του σχήματος. Με άλλα λόγια θα έλεγα πώς έκανε μια εικασία πως το «δεξιά» είναι δεξιά για τη χελώνα και όχι για το σχήμα. Το ερώτημα που έθεσε ήταν το αμέσως επόμενο βήμα της διερεύνησης και θα μπορούσε να περιγραφεί πιο αυστηρά ως εξής: «Τι σχέση έχουν οι κινήσεις της χελώνας με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σχήματος;» Αυτό εξήγησε και στην Μ4 λέγοντας «Ξέρεις τι θέλω να συσχετίσω;».



Εικόνα 81: Η μεταβολή στη κίνηση της χελώνας που προκαλεί η εντολή rt(90+:theta/2) και η αντίστοιχη μεταβολή στο στρεβλό ορθογώνιο.

Ανάλυση της γωνίας σε δύο επιμέρους νοητές γωνίες

Στο απόσπασμα 13 η Μ3 διατύπωσε την απορία «Πώς γίνεται ενώ η εντολή rt να στρέφει τη χελώνα δεξιά, ταυτόχρονα να μη συμβαίνει κάτι τέτοιο και με το σχήμα, ή με τις γωνίες του». Σε αυτό το σημείο (απόσπασμα 14) η Μ3 έκανε χρήση της Logo, όπως θα έκανε ένας μαθηματικός χρήση των συμβόλων για να απεμπλακεί από την πλάνη της διαίσθησης.

<u>Απόσπασμα 14</u>

Ε: Τι είχατε πει; Οι wmega και theta είναι οι γωνίες του σχήματος;

Μ3: Όχι

Μ4: Όχι

Ε: Τι είναι;

M3: Η wmega όταν μεταβάλλεται μετακινεί τη χελώνα πάνω-κάτω [με το δάκτυλό της κάνει μια περιστροφική κίνηση πάνω-κάτω] και η theta, δεξιά αριστερά [κάνει το ίδιο, αλλά δεξιά-αριστερά].

Ε: Και πως φτιάχνεται η γωνία του σχήματος;

M3: Δεν μπορούμε με το μάτι, θα δούμε τον κώδικα [...] Σχηματίζεται με δύο τρόπους.

Ε: Τι εννοείς «δύο τρόπους»;

M3: Γιατί στρίβει με δύο τρόπους, έναν rt(90+:theta/2) και έναν up(:wmega). Άρα οι γωνίες theta και wmega «φτιάχνουν» τη γωνία του σχήματος.

Ο φορμαλισμός και εδώ απέκτησε νόημα και χρήση (Dubinsky, 2000) καθώς μέσω του συμβολισμού οι μαθήτριες M3 και M4 εφάρμοσαν μια προχωρημένη γεωμετρική τεχνική. Χώρισαν τη γωνία σε δύο συνιστώσες γωνίες. Τονίζω ότι χρησιμοποίησαν τη λέξη «γωνίες» για τις theta και wmega, παρόλο που αυτές δεν εμφανίζονταν πουθενά στο σχήμα. Αυτό φαίνεται πολύ καλύτερα παρακάτω (απόσπασμα 15) όταν ο ερευνητής ρώτησε τις μαθήτριες αν φαίνονταν αυτές οι theta και wmega:

Απόσπασμα 15

Ε: Αυτές οι theta και wmega, πού είναι; Τις βλέπουμε κάπου;

M4: Είναι η κάθε μια που καθορίζει τις άλλες γωνίες του σχήματος.

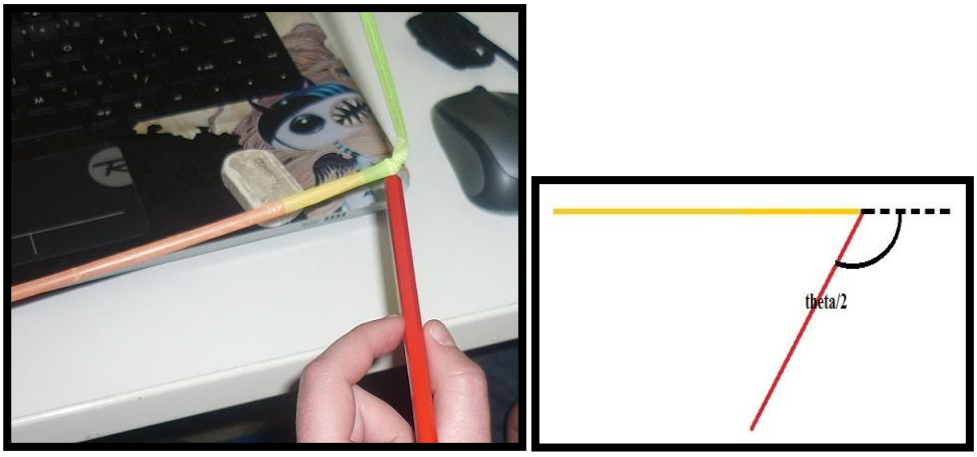
Ε: Ποιες είναι αυτές;

M4: Μια αμβλεία..

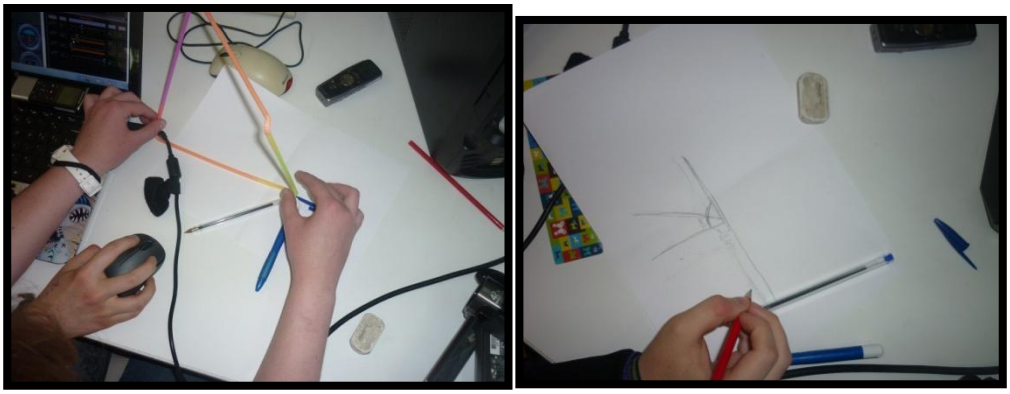
M3: Και μια οξεία;

Ε: Αν σας δώσω αυτό το μολύβι να χρησιμοποιήσετε μπορείτε στο σχήμα με τα καλαμάκια να μου δείξετε τις γωνίες;

Οι μαθήτριες χωρίς να δυσκολευτούν ιδιαίτερα αναπαράστησαν τις γωνίες όπως φαίνεται στην Εικόνα 82. Στη συνέχεια σχεδίασαν και μια κάτοψη του σχήματος αυτού μετά από την παρότρυνσή μου.



Εικόνα 82: Οι μαθήτριες αναπαριστούν τις γωνίες theta και wmega

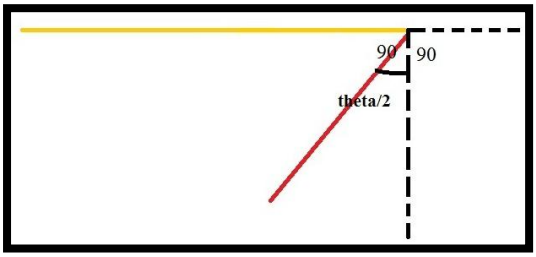


Εικόνα 83: Οι μαθήτριες κατασκευάζουν κάτοψη του σχήματος.

5.2.2 Γεωμετρία στο επίπεδο

Το στατικό σχήμα δημιουργεί δυσκολίες

Οι Μ3 και Μ4 είχαν ήδη κατασκευάσει μια κάτοψη του αρχικού επιπέδου κίνησης της χελώνας, χωρίς όμως να την έχουν ονομάσει έτσι. Ξεκίνησε μια συζήτηση σχετικά με το μέτρο των γωνιών που εμφανίζονταν σε αυτό το σχήμα. Αν και σε προηγούμενη διερεύνηση οι μαθήτριες Μ3 και Μ4 είχαν περιγράψει τις γωνίες αυτές όπως φαίνεται στην Εικόνα 84, χωρίς να τις έχουν σχεδιάσει, ωστόσο ξεκινώντας την περιγραφή αυτή, πάνω στο χαρτί, συνάντησαν δυσκολίες, βρήκαν ασυμφωνίες και αντιμετώπισαν το πρόβλημα σαν καινούργιο:



Εικόνα 84: Περιγραφή των γωνιών από τις Μ3 και Μ4 σε προηγούμενη φάση της διερεύνησης.

Η εξέλιξης της διαμορφούμενης άποψής τους φαίνεται στην Εικόνα 85. Παρατίθεται ένα απόσπασμα του διαλόγου τους, προς το τέλος της συζήτησης:

Απόσπασμα 16

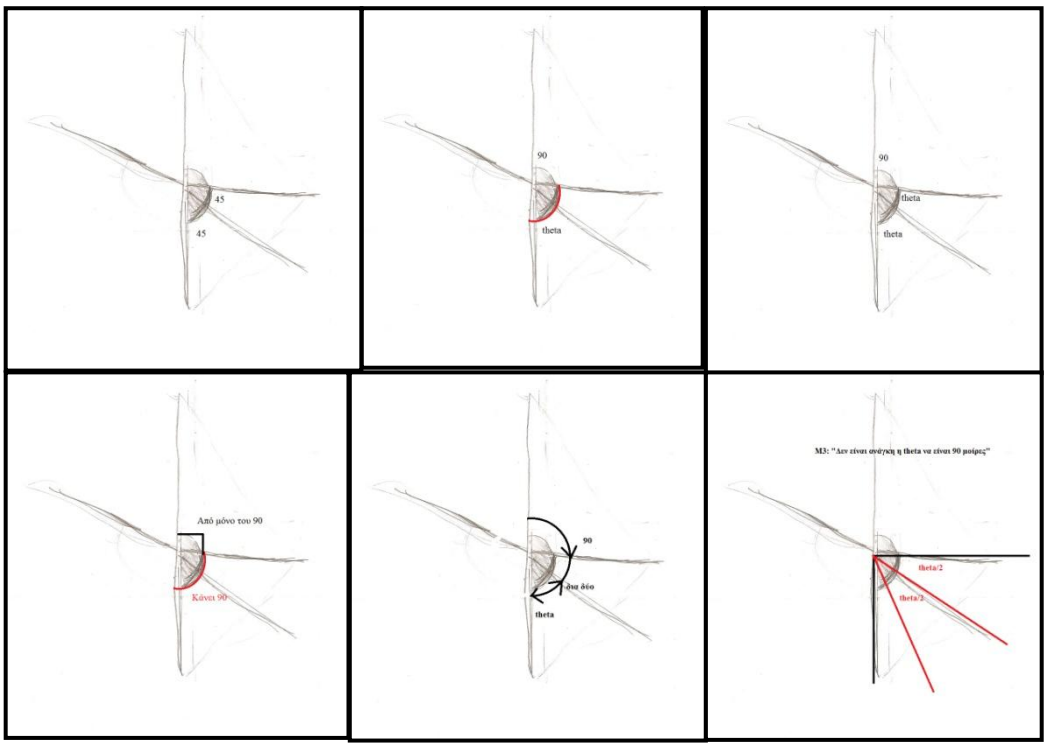
Μ3: Η γωνία που μένει αφού στρίψει η χελώνα 90 μοίρες, είναι άλλες 90.

Μ4: Άρα είναι 45 και 45 μοίρες.

Μ3: Κοίτα το συνολικό είναι 90, μπορεί να είναι και 35.

Μ4: Δηλαδή είναι συμπληρωματικές.

Μ3: Κι αν θέλουμε ννα βρούμε την theta θα το κάνουμε επί δύο; Αν είναι 35 βγαίνει 70 κι όχι 35. Αυτό το πρόβλημα έχω.



Εικόνα 85: Οι φάσεις της συζήτησης γύρω από τις γωνίες που σχηματίζονται στο επίπεδο.

Οι Μ3 και Μ4 εγκατέλειψαν τον κώδικα και το σχήμα και δούλεψαν μόνο με την κάτοψη. Μαθηματικοποίησαν το πρόβλημα με γνωστά τους μαθηματικά, αυτά του επιπέδου. Όπως προανέφερα, παρόλο που τα παιδιά ζουν σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά στο επίπεδο πολύ πιο εύκολα (Kynigos & Latsi, 2007). Σε αυτό έχω τη γνώμη πώς οφείλεται ότι «ξέχασαν» σχεδόν ότι είχαν κάνει και αντιμετώπισαν το πρόβλημα από την αρχή.

Η Μ3 προβληματίστηκε γιατί θεωρούσε ότι η theta/2 αν πολλαπλασιαζόταν επί δύο έπρεπε να της δίνει την «υπόλοιπη» γωνία, δηλαδή τη γωνία 90 μοιρών. Αυτό ίσως

συνέβη, γιατί βλέποντας ένα στατικό σχήμα με σχεδιάσμένες κάποιες γραμμές ήταν δύσκολο για τη μαθήτρια να σχεδιάσει ή να φανταστεί καινούργιες. Στην πραγματικότητα σε αυτή την κάτοψη δεν υπήρχε η γωνία theta, αλλά η theta/2. Στη συνέχεια του διαλόγου η Μ3 με ρώτησε: «δηλαδή το 2 επί theta/2 δεν είναι απαραίτητο να βγάζει 90 μοίρες; Όχι;» και τότε κατάλαβε τι ακριβώς συνέβαινε, πράγμα που φαίνεται στο τελευταίο σχήμα της Εικόνα 85.

5.3. Η τριγωνομετρία ως μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος

Δυσκολίες λόγω ελλιπούς συνεργασίας (collaboration) μεταξύ των ομάδων

Σύμφωνα με τους Yackel και Cobb (Yackel & Cobb, 1996) σε μια τάξη που δουλεύει διερευνητικά σε μαθηματικό περιεχόμενο, το πρότυπο της επεξήγησης και της κριτικής διαπραγμάτευσης ρυθμίζεται από τα ίδια τα μέλη της (μαθητές και εκπαιδευτικούς) και διαμορφώνει την κοινή βάση της συζήτησης μεταξύ τους. Όταν λέμε ότι «δόθηκε μια εξήγηση», αυτό σημαίνει ότι ένα μέλος της τάξης (ή μια υπποομάδα) προσπάθησε να εξηγήσει τη μαθηματική της σκέψη σε άλλα μέλη (ή σε μια άλλη υποομάδα). Η επεξήγηση, λοιπόν δε γίνεται ανεξάρτητα από αυτούς στους οποίους θα δοθεί, έτσι διαμορφώνεται από τις προσδοκίες τους. Αυτοί στη συνέχεια θα κρίνουν κατά πόσο είναι επαρκής.

Τα κοινωνικά πρότυπα επεξηγήσεων που διακρίνουν οι Yackel και Cobb (1996) είναι τα εξής:

- Η επεξήγηση που δίνεται κρίνεται ως αποδεκτή με μαθηματικά κριτήρια.
- Η επεξήγηση αφορά μια μαθηματική διαδικασία.
- Η επεξήγηση αφορά κάποιο πραγματικό μαθηματικό αντικείμενο, π.χ. τη λύση ενός προβλήματος.
- Η επεξήγηση είναι αντικείμενο αναστοχασμού.

Κατά τη διάρκεια της διερεύνησης η υποομάδα 1.1 επικοινώνησε με την υποομάδα 1.2 μέσω του Lasad και διατύπωσε την ιδέα ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τριγωνομετρία για να λυθεί το πρόβλημα. Τότε ξεκίνησε η παρακάτω συζήτηση μεταξύ των Μ3 και Μ4:

Απόσπασμα 17

Μ4: Ναι, είδες το είχα πει κι εγώ. Τριγωνομετρία!

Μ3: Γιατί τριγωνομετρία; Πού είναι τα τρίγωνα;

Ε: Τι τρίγωνα χρειάζεστε για την τριγωνομετρία;

Μ4: Ορθογώνια.

Μ3: Δεν έχουμε ούτε ορθογώνια τρίγωνα, ούτε άλλα τρίγωνα.

Η τριγωνομετρική επίλυση ήταν πράγματι λύση του προβλήματος. Όμως η υποομάδα 1.2 δεν είχε φτάσει στο σημείο αυτό, έτσι ζήτησε επεξηγήσεις από την 1.1 και η απάντηση ήταν «επειδή έχουμε γωνίες». Η απάντηση αυτή δεν έπεισε την Μ3, της οποίας η γνώμη βάρυνε περισσότερο σε σχέση με της Μ4 εντός της υποομάδας 1.2, ως προς την κριτική της μαθηματικής νομιμότητας όσων λέγονταν. Η επεξήγηση που δόθηκε, σύμφωνα με τους Yackel και Cobb (1996) αφορά μαθηματικό θέμα (τη λύση του προβλήματος) και δεν κρίθηκε επαρκής από την υποομάδα 1.2. Αυτό δεν οφειλόταν μόνο στην ίδια την επεξήγηση, αλλά και στο ελλιπές κοινωνικο-μαθηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο δόθηκε. Σύμφωνα με τον Bauersfeld (1993) πυρήνας της μάθησης μέσω συμμετοχής είναι «πότε κάνω, τι» και «πώς να το κάνω». Σε αυτή την περίπτωση οι δύο υποομάδες λειτουργούσαν ουσιαστικά αποκομμένες η μία από την άλλη, η κάθε μια κατασκεύαζε τα δικά της νοήματα. Εφόσον τα νοήματα αυτά δεν κοινοποιούνταν και δεν χρησιμοποιούνταν από το σύνολο της ομάδας, δεν εκλαμβάνονταν από όλα τα μέλη της (Yackel & Cobb, 1996). Αυτή η δυσκολία ενισχύεται αν σκεφτούμε το πλαίσιο της τριγωνομετρίας στην Γ΄ Γυμνασίου. Από τη μια η προσέγγιση είναι διαδικασιοεννοιολογική (Tall, 2004) που σημαίνει ότι θα επρέπε να υπάρχει κοινός αλγεβρικός συμβολισμός, ως κοινή γλώσσα μεταξύ των δύο ομάδων. Από την άλλη τα τρίγωνα που χρειάζονταν οι μαθητές δεν ήταν σχεδιασμένα. Άρα επρέπε από τις γωνίες wmega και theta/2 να επινοήσουν τα τρίγωνα που χρειάζονταν. Έτσι, η υποομάδα 1.2 συνέχισε να δουλεύει πάνω στην κάτοψής της.

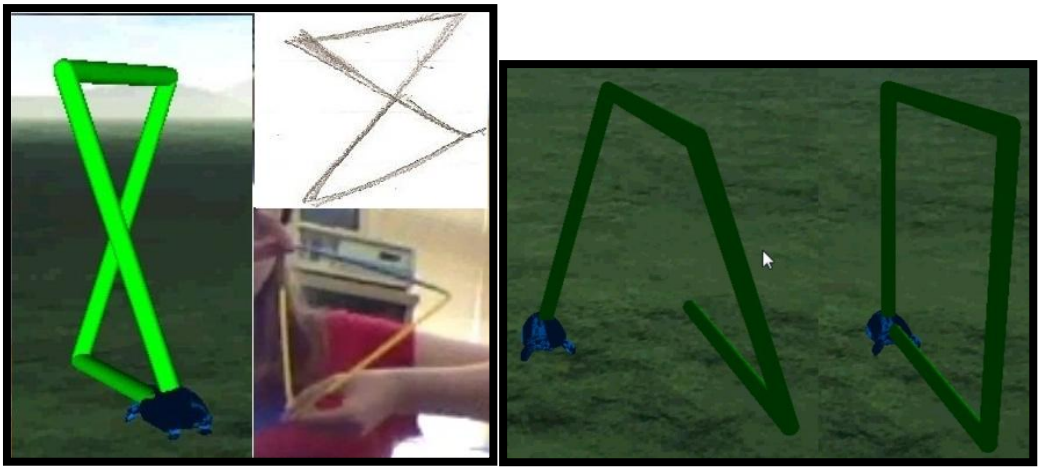
Η υποομάδα 1.2 προχώρησε ως εξής. Προσάρμοσε το στρεβλό ορθογώνιο με τα καλαμάκια πάνω στην κάτοψη και σχεδίασε τις προβολές των πλευρών που δε βρίσκονταν πάνω στο επίπεδο του χαρτιού. Έτσι προέκυψε το παρακάτω σχέδιο με τη βοήθεια (για άλλη μια φορά) των εντολών Logo (Εικόνα 86):

Εικόνα 86: Μια ακόμα μια σύνθετη κάτοψη του σχήματος από την υποομάδα 1.2

Σύντομη περιγραφή της δουλειάς που έκανε η υποομάδα 1.1

Δουλεύοντας αλγεβρικά-συμβολικά με τον κώδικα είχαν αναπτύξει μια στρατηγική. Έθεταν στις μεταβλητές του κώδικα συγκεκριμένες τιμές και παρατηρούσαν το σχήμα που προέκυπτε. Επικεντρώθηκαν στην παρατήρηση του στιγμιοτύπου για theta=0, όταν το σχήμα ήταν κλειστό (Εικόνα 87). Εν γένει, η παρατήρηση στιγμιοτύπων ενός μοντέλου δε βοηθά την κατασκευή νοημάτων από τους μαθητές (Noss, Healy, & Hoyles, 1997). Το σύρσιμο, σαν μαθηματικό ανάλογο της μεταβολής (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006) είναι το χαρακτηριστικό του δυναμικού χειρισμού που αποτελεί βασικό στοιχείο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο πλαίσιο της δημιουργίας ανάγκης για γενίκευση στους μαθητές και κατασκευής νοημάτων.

Αντιθέτως οι μαθητές δούλευαν με στατικές αναπαραστάσεις, πράγμα που επιβεβαιώνει την Artigue (2002), που υποστηρίζει ότι ένας μικρόκοσμος δεν χρησιμοποιείται από τους μαθητές, όπως έχει σχεδιαστεί από τον δημιουργό του. Η επωφελής πλευρά της πρακτικής αυτής των μαθητών ήταν ότι προέκυψε η ιδέα της τριγωνομετρίας. Διατυπώνω, σε αυτό το πλαίσιο, τη γνώμη ότι ένα επίπεδο σχήμα ήταν πιο δεκτικό σε μαθηματικές τεχνικές, όπως ο σχεδιασμός βοηθητικών τριγώνων, λόγω της ευκολίας των μαθητών της υποομάδας να δουλέψουν στο επίπεδο (Kynigos & Latsi, 2007).



Εικόνα 87: Αριστερά η Μ3[1.2] δείχνει την κατασκευή τους. Δεξιά είναι το κλειστό στιγμιότυπο που παρατηρεί η υποομάδα 1.1

Δημιουργία κοινής γλώσσας μεταξύ των ομάδων

Σε μια φυσική (face to face) συνάντηση οι υποομάδες δούλεψαν μαζί, μετά από αίτημά τους. Η 1.1 ήθελε να εξηγήσει στην 1.2, τι εννοούσε όταν έλεγε «να δουλέψουμε με χρήση τριγωνομετρίας», ενώ η 1.2 ήθελε να δείξει στην 1.1 το artifact με τα καλαμάκια και πώς το χρησιμοποίησε:

Απόσπασμα 18

M3[1.2] Σας είπαμε όταν βάζουμε το theta=0 το σχήμα παραμορφώνεται, δεν είναι πια 3D.

M5[1.1] Μπορούμε να συνδυάσουμε και τους δύο τρόπους.

M4[1.2] Πώς;

M5[1.1] Εμείς είχαμε πει ότι χρειάζεται τριγωνομετρία.

M3[1.2] Εμείς διαφωνούμε, τέλος παντων. Καταρχάς είπαμε το τετράγωνο [theta=0] είναι παραμόρφωση. Αλλά ας βρούμε τρίγωνα.

M5[1.1] Όχι στο τετράγωνο, στο κανονικό σχήμα.

M4[1.2] Εγώ απορώ που βρήκατε τα τρίγωνα.

Όπως φαίνεται στο απόσπασμα 18 οι δύο υποομάδες έκαναν από ένα βήμα πίσω για να δημιουργήσουν ένα κοινό πλαίσιο συνεννόησης. Η 1.1 δέχτηκε ότι το τετράγωνο ήταν παραμόρφωση του αρχικού σχήματος και η 1.2 δέχτηκε να συζητήσει μια τριγωνομετρική λύση. Οι δύο υποομάδες είδαν το μικρόκοσμο και την στρατηγική αντιμετώπισης της πρόκλησης σαν αντικείμενο υπό διαπραγμάτευση και συνδιαμόρφωση όπως φανερώνει η έκφραση της Μ5 «να συνδυάσουμε τους δύο τρόπους» και η απάντηση της Μ3 «διαφωνούμε, αλλά ας βρούμε τρίγωνα». Ίσως να

ήταν παρακινδυνευμένο να θεωρήσω τις δύο υποομάδες σαν δύο κοινωνικές δομές με διαφορετικό προσανατολισμό (1.1: αλγεβρικό, τριγωνομετρικό και 1.2: γεωμετρικό) και άρα το μικρόκοσμο σαν ένα «συνοριακό αντικείμενο». Έρχεται, όμως στο προσκήνιο η «μάθηση μέσω σχεδιασμού» (Healy & Kynigos, 2010). Η συνδιαμόρφωση του κοινού πλαισίου, της κοινής αυτής γλώσσας προέκυψε μετά από διαπραγμάτευση όπως φαίνεται στον παραπάνω διάλογο (απόσπασμα 18). Σε επόμενο απόσπασμα (19) φαίνεται ότι συνεχίστηκε ο «από κοινού σχεδιασμός» της προσπάθειας για λύση (Kynigos, 2007b):

Απόσπασμα 19

M3[1.2] Εμείς μπορούσαμε να βρούμε τρίγωνα στο σχέδιο που φτιάξαμε [εννοεί την κάτοψη, τους είχαν εξηγήσει πριν πώς την έφτιαξαν]

E: Γιατί δε βάζετε το σχήμα πάνω από το χαρτί να δούμε πώς ταιριάζει;

M3[1.2] Έτσι φτιάξαμε το σχέδιό μας. [Εξηγεί πώς το έφτιαξαν, βήμα-βήμα]

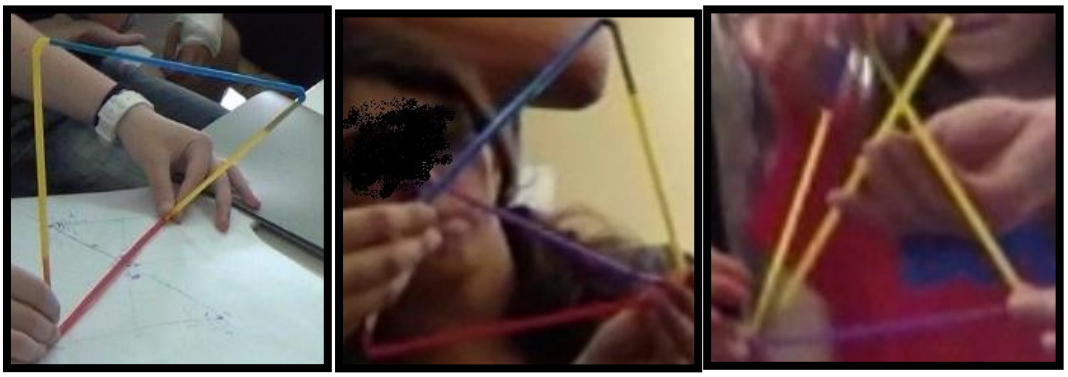
[...]

M5[1.1] Ωραία, τώρα εμείς θα πρέπει να βρούμε πώς θα «σπάσουμε» τα τρίγωνα, ώστε να προκύψουν γωνίες για να βρούμε ημίτονα και συνημίτονα.

M3[1.2] Θεωρείτε ότι γίνεται αυτό;

M5[1.1] Νομίζω ναι.

M4[1.2] Εγώ πάλι νομίζω όχι!



Εικόνα 88: Αριστερά: Η M3 εξηγεί πώς έφτιαξαν την κάτοψη. Στη μέση: Η M5 προσαρμόζει ένα καλαμάκι και χωρίσει το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα.

Όπως φαίνεται απόσπασμα 19, παρόλο που οι υποομάδες είχαν αποφασίσει ότι έπρεπε να γίνουν πιο διαλακτικές, εν τούτοις οι διαφωνία παρέμεινε οξεία. Οι απόψεις των μελών των διαφορετικών υποομάδων ήταν ετερόκλητες. Σύμφωνα με τον Hicks (1996) αυτό είναι πρόσφορο έδαφος για δημιουργία νοημάτων και χώρου

διαλόγου (dialogic space). Στη συνέχεια θα φανεί αν από όλες τις πιθανές εκφάνσεις, ακολουθήθηκε μια επιτυχής τακτική ή όχι.

Η M5[1.1] τοποθέτησε ένα καλαμάκι στη διαγώνιο του στρεβλού ορθογωνίου και προέκυψαν δύο τρίγωνα (Εικόνα 88).

Απόσπασμα 20

M3[1.2] Δεν είμαι καθόλου σίγουρη ότι αυτά τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.

M4[1.2] Ναι δεν είναι.

E: Δε βλέπετε αλλού τρίγωνα με γνωστές γωνίες;

[...]

M3[1.2] Ναι, εδώ στην κάτοψη.

M5[1.1] Εδώ όμως ούτε ορθογώνια υπάρχουν, ούτε μηδέν, ούτε 90 μοίρες.

M3[1.2] Όχι, μπορροούν να γίνουν, αφού το theta/2 είναι διαφορετικό κάθε φορά, αλλάζει.

M4[1.2] Ναι, άλλωστε αυτές τι γωνίες ξέρουμε από τον κώδικα.

M5[1.1] Άρα οταν το wmega θα είναι 90 το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο;

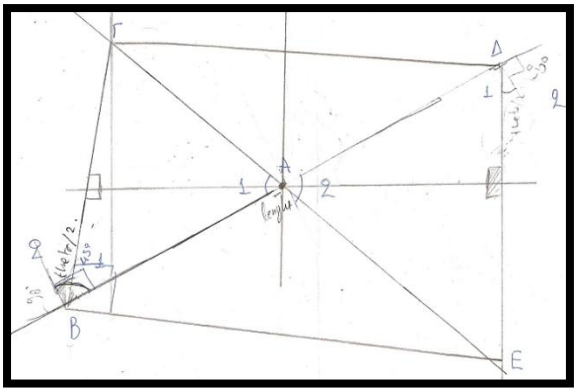
M3[1.2] Ναι.

Μέσα από το τελευταίο απόσπασμα περιγράφονται οι κοινοί στόχοι για τη συνέχεια της διερεύνησης:

- Οι μαθητές έψαχναν να βρουν ή να κατασκευάσουν ορθογώνια τρίγωνα προκειμένου να εφαρμόσουν τριγωνομετρία.
- Τα τρίγωνα αυτά έπρεπε να περιέχουν τις γωνίες wmega και theta/2 κι όχι τις γωνίες του σχήματος.

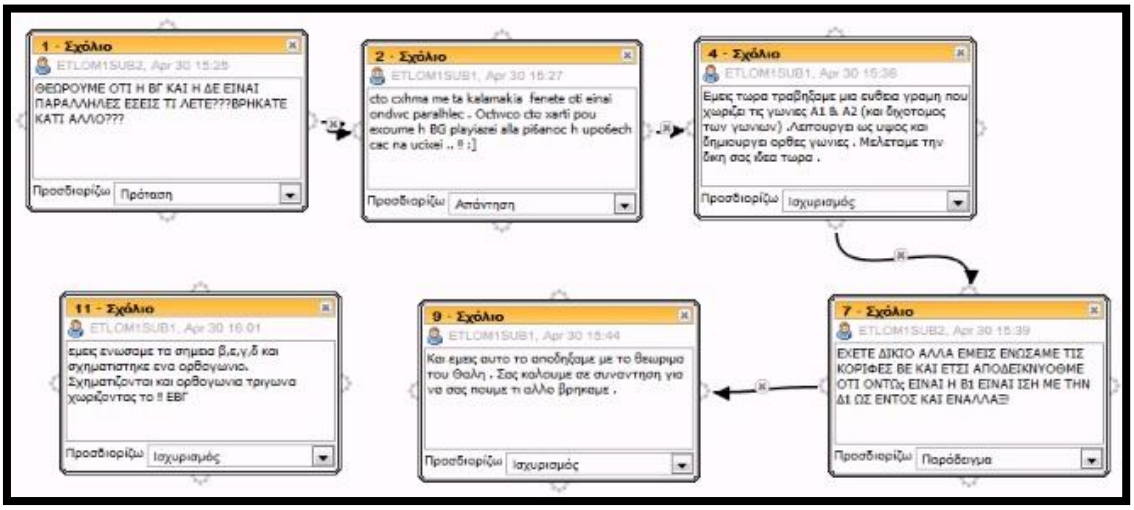
Μέσα από αυτούς τους στόχους κατά την γνώμη μου διαμορφώθηκε ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο συνεχίστηκε η συνεργασία. Ένα πλαίσιο που καθόριζε πότε κάποιος έκανε κάτι σχετικό με τη διερεύνηση, πότε έδινε ικανοποιητικές εξηγήσεις, πότε μια ιδέα φαινόταν να είναι αποτελεσματική κτλ., δηλαδή οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες της ομάδας.

Οι ομάδες ξαναχωρίστηκαν σε υποομάδες, αφού πρώτα εδώσαν ονόματα στις κορυφές του σχεδίου (Εικόνα 89), ώστε να μπορούν να μιλήσουν μέσω του Lasad και σχημάτισαν, άλλη μια ίδια κατασκευή με καλαμάκια, ώστε να την έχει η υποομάδα 1.1.



Εικόνα 89: Οι μαθητές έβαλαν γράμματα στην κάτοψη

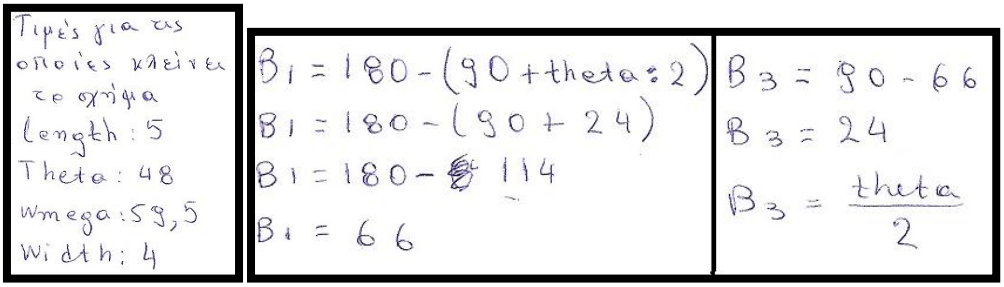
Η οριοθέτηση του πλαισίου συνεργασίας και συνομιλίας φάνηκε από τον παρακάτω διάλογο του Lasad μεταξύ των υποομάδων (Εικόνα 5).



Εικόνα 90: Ο διάλογος του Lasad γίνεται στο μαθηματικό πλαίσιο που έχει οριοθετηθεί.

Η υποομάδα 1.2 λύνει το πρόβλημα. Επεξηγηματικός χαρακτήρας απόδειξης.

Οι μαθήτριες της υποομάδας 1.2 ακολουθούθησαν την εξής στρατηγική. Πρώτα βρήκαν μια τετράδα αριθμών για τα wmega, theta, length, width για ην οποία το σχήμα είναι ή φαίνεται να είναι κλειστό. Στη συνέχεια προσπάθησαν με τις τιμές της τετράδας να βρουν σχέση μεταξύ των γωνιών του σχήματος και των μεταβλητών wmega και theta του κώδικα, όπως φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 91).



Εικόνα 91: Η στρατηγική «γενίκευσης» των Μ3 και Μ4

Απόσπασμα 21

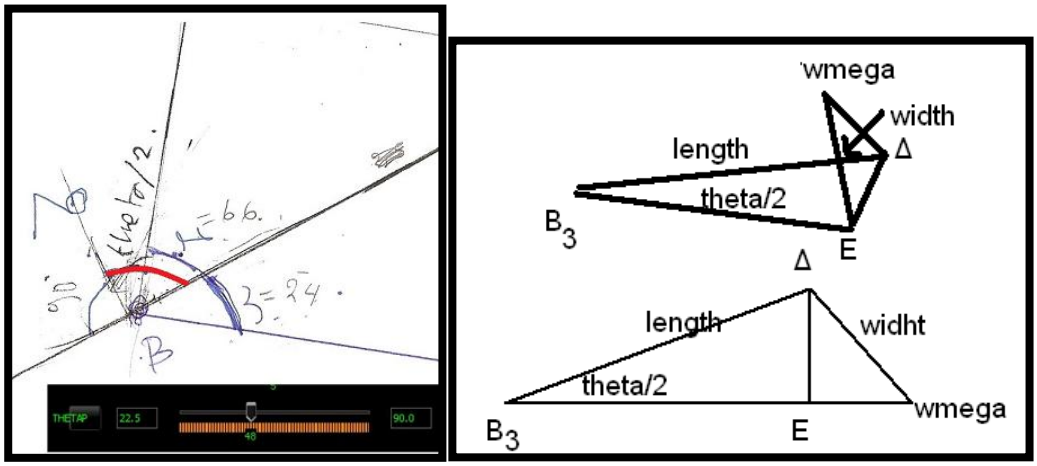
M3: Πόσο είναι η γωνία B_3;

M4: 24 μοίρες και η theta αρχικά ήταν 48 μοίρες.

M3: Άρα, μήπως ισχύει ότι B_3=theta/2;

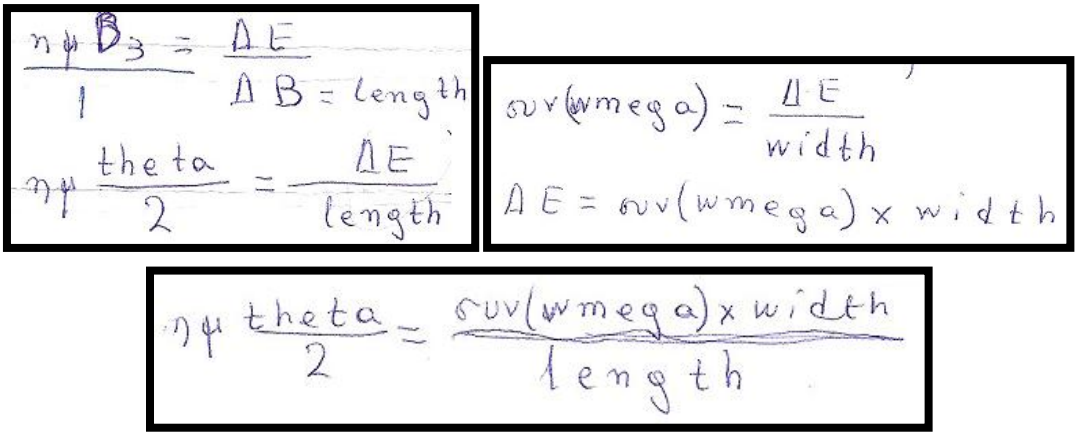
M4: Βγαίνει νομίζω.

M3: Γιατί; Α, ναι επειδή B_1+theta/2=90 και B_1+B_3=90. Οκ, το κατάλαβα.[Εικόνα 92].



Εικόνα 92: Αριστερά: Οι M3 και M4 αποδεικνύουν ότι B_3=theta/2. Δεξιά: Τα δύο τρίγωνα με κοινή πλευρά που χρησιμοπούν παρακάτω στην επίλυση τριγώνων σε δύο επίπεδα υπό γωνία (πάνω) και σε ανεπτυγμένη μορφή (κάτω)

Έτσι, κατάφεραν να βρούν ένα ορθογώνιο τρίγωνο, ΒΔΕ που περιέχει τη γωνία theta/2 του κώδικα. Σύμφωνα με τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που είχαν διαμορφωθεί προηγουμένως αυτό το αποτέλεσμα ήταν προς το σωστό δρόμο κι έτσι συνέχισαν. Οι M3 και M4 αναστοχάστηκαν πάνω στο δικό τους σχήμα και μέσα στο πλαίσιο της χρήσης τριγωνομετρίας που είχε δημιουργηθεί. Χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες τιμές για τα μεγέθη, έκαναν εικασίες και τις επιβεβαίωσαν χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες τετράδες. Μια σχέση που είκασαν ότι ισχύει ήταν η $B_3 = \frac{theta}{2}$ (Εικόνα 91). Στη συνέχεια ένιωσαν ότι την επιβεβαίωσαν με δοκιμές κι άλλων τετράδων. Με παρόμοιο τρόπο (και τη βοήθειά μου) βρήκαν και το δεύτερο τρίγωνο, που αυτή τη φορά βρισκόταν σε άλλο επίπεδο υπό γωνία με αυτό της κάτοψης (Εικόνα 92) με κοινή πλευρά την ΔΕ και έλυσαν το πρόβλημα, που πλέον ήταν πρόβλημα επίλυσης τριγώνων όπως φαίνεται στην Εικόνα 93.



Εικόνα 93: Οι Μ3 και Μ4 βρίσκουν-αποδεικνύουν την κρυμμένη σχέση

Τέλος χρησιμοποίησαν αυτή τη σχέση στον κώδικα, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή width, ώστε το στρεβλό ορθογώνιο να παραμένει πάντα κλειστό, όσο κι αν το μετέβαλαν με τους μεταβολείς. Στην επόμενη συνάντηση, εξήγησαν, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα που είχαν να κάνουν με επίλυση τριγώνων, στην υποομάδα 1.1 πώς έφτασαν στη λύση.

Σχετικά με τον επεξηγηματικό χαρακτήρα της απόδειξης, δεν φάνηκε οι μαθητές να νιώθουν την ανάγκη χρήσης του παραγωγικού συλλογισμού. Παράλληλα όμως η κοινωνική νόρμα που επιβάλει τον εκπαιδευτικό ως κριτή μαθηματικής νομιμότητας, δεν στάθηκε δυνατόν να μείνει στο περιθώριο. Έτσι η όποια απόδειξη φάνηκε να γίνεται (Εικόνα 91), ήταν κυρίως αποτέλεσμα της παρύτρυνσης των εκπαιδευτικών προς τους μαθητές, παρά η ανάγκη των μαθητών να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμά τους χρησιμοποιώντας παραγωγικούς συλλογισμούς.

6. Συμπεράσματα–Συζήτηση

Το πρόβλημα του στρεβλού ορθογωνίου είναι ιδιαίτερα δύσκολο, προσφέρεται για διερεύνυση και ως εκ τούτου είναι κατάλληλο για εξαγωγή συμπερασμάτων όταν μια ομάδα μαθητών δουλεύει πάνω σε αυτό το πρόβλημα, συνεργατικά σε ψηφιακό περιβάλλον. (Stahl, Koschmann, & Suthers, 2006). Τα αποτελέσματα της έρευνας που επικεντρώθηκε στην ομάδα 1 και κυρίως στην υποομάδα 1.2 μας παρέχουν στοιχεία για τον τρόπο που οι μαθητές σε ένα μαθησιακό περιβάλλον παρόμοιων συνθηκών κατακευάζουν προσωπικά νοήματα για γεωμετρικά αντικείμενα και κυρίως τη γωνία στο χώρο τριών διαστάσεων, την επινόηση στρατηγικών, τη χρήση της τριγωνομετρίας στη λύση ενός καθόλου προφανούς προβλήματος.

Φορμαλισμός σε χρήση και νοήματα για τη γωνία

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές χρησιμοποίησαν το φορμαλισμό του προγραμματιστικού εργαλείου με τρόπο που να έχει προσωπικό νόημα για αυτούς και να τους είναι χρήσιμος. Αυτό συνέβη σε αρκετές περιπτώσεις. Αναφέρω τις εξής πιο χαρακτηριστικές και περιεκτικές από αυτές.

Στην πρώτη περίπτωση οι μαθήτριες Μ3 και Μ4 θέλησαν να αντιστοιχίσουν τις μεταβλητές του κώδικα στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σχήματος. Από τη μορφή των εντολών γνωρίζαν ότι οι μεταβλητές theta και wmega, εξέφραζαν στροφή και άρα γωνία (Mitchelmore & White, 2000). Το ερώτημα όμως ήταν «ποια γωνία εκφράζουν;». Αυθόρμητα οι μαθήτριες πίστευαν ότι πρέπει να ψάξουν στις γωνίες του σχήματος. Όμως όπως έχω προαναφέρει, ένα χαρακτηριστικό της κατασκευής του στρεβλού ορθογωνίου είναι ότι οι στροφές του κώδικα δεν είναι οι γωνίες του σχήματος. Κάθε γωνία του σχήματος είναι αποτέλεσμα δύο στροφών, μια δυνατότητα που δίνεται στον τρισδιάστατο χώρο. Έτσι, οι Μ3 και Μ4 άλλαξαν τακτική και διάβασαν γραμμή-γραμμή τον κώδικα. Εκεί παρατήρησαν ότι υπήρχε μια συμμετρία σε αυτόν και είδαν ομάδες εντολών που επαναλαμβάνονταν εκεί που στο σχήμα κατασκευάζονταν γωνίες. Έτσι οι γωνίες αυτές δεν ήταν στροφές του κώδικα, αλλά δύο διαδοχικές στροφές η μία μετά την άλλη. Έτσι κατά την άποψή μου εμφανίστηκαν δύο θεωρήματα εν δράσει. Το ένα ήταν ότι «η συμμετρία του κώδικα αντιστοιχεί σε συμμετρία του σχήματος». Το άλλο ήταν ότι «αν μια ομάδα στροφών επαναλαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο, τότε σχηματίζονται δύο ίσες γωνίες». Ο «ίδιος τρόπος» σημαίνει μια ακολουθία ίδιων ή κατοπτρικών εντολών (π.χ. up-dp) και ίδια

μεταβλητή στο όρισμά τους. Εδώ φάνηκε να βρίσκει εφαρμογή η περιγραφή των Noss, Healy και Hoyles, rhythm in action (1997) που χρησιμοποιείται, όταν γίνεται επανάληψη μιας κίνησης – ιδιότητας και υπάρχει η αντίστοιχη εντολή που επαναλαμβάνεται. Από μια άλλη σκοπιά φάνηκε να ενυπάρχει και ένα γωνιακό πρότυπο σαν επέκταση του ήδη υπάρχοντος, τη στροφής (Henderson & Taimina, 2005). Η γωνία μπορεί να είναι το αποτέλεσμα περισσοτέρων από μιας στροφής και αυτό έχει σαφέστερο νόημα στο τρισδιάστατο χώρο. Σε ενίσχυση της σημασίας του φορμαλισμού με νόημα (Dubinsky, 2000) οι Μ3 και Μ4 όχι μόνο κατάφεραν να προσδώσουν γεωμετρικό αντίστοιχο στις μεταβλητές, αλλά σχεδιάσαν ή οπτικοποίησαν γωνίες οι οποίες δεν υπήρχαν στο σχήμα, αλλά εννοούνταν κάτι το οποίο κρύβει ιδιαίτερη δυσκολία (Mitchelmore & White, 1998).

Η δεύτερη περίπτωση που θα αναφέρω, δε σχετίζεται με το στρεβλό ορθογώνιο αλλά με τον εισαγωγικό μικρόκοσμο drive. Οι μαθητές χειρίστηκαν δυναμικά το γραφικό αποτέλεσμα ενός προγράμματος, όπου ένας βραχίονας στρεφόταν ελεύθερα γύρω από το ένα άκρο ενός σταθερού ευθύγραμμου τμήματος. Αρχικά οι μαθητές δε έδωσαν σημασία στον κώδικα που κατασκεύαζε το σχήμα. Αυτό που αξίζει να σημειώσω είναι η άποψη της Μ4 πριν δει και αφού είδε τον κώδικα. Ως αποτέλεσμα του δυναμικου χειρισμού πίστευε ότι «αλλάζει κυκλικά γύρω από ένα κέντρο», που είναι μια διαισθητική έκφραση, αρκετά περιγραφική, ίσως επηρεασμένη από το πρότυπο της γωνίας ως στροφής. Από την άλλη όταν παρατήρησε τις εντολές του κώδικα είπε «περιστρέφεται παντού αν πάρουμε όμως μια συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο, ας πούμε 3 εκατοστά». Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι λέξεις «παντού» και «συγκεκριμένη». Εδώ φάνηκε να υπάρχει ένας άτυπος ορισμός των πολικών συντεταγμένων. Το άκρο της επιβατικής ακτίνας που είχε «συγκεκριμένο» μήκος μπορούσε να βρεθεί «παντού» στην επιφάνεια της σφαίρας. Και η μαθήτρια συνέχισε λέγοντας, ότι η συγκεκριμένη απόσταση (που ίσως αντιστοιχούσε στην ακτίνα της σφαίρας), θα μπορούσε να μεγαλώσει και να μικρύνει όσο ηθέλε, ώστε να πάμε όσο μακρυά από αυτή θέλαμε.

Αξίζει να σημειώσω και ένα άλλο συμβάν σε σχέση με το παραπάνω. Η Μ4, αρχικά υποστήριξε ότι προσανατολιζόμαστε στο χώρο με βάσει την τριάδα «μήκος-πλάτος-ύψος». Εδώ κατά την άποψή μου συνέβη το εξής. Δύο νοητικά πεδία (Vergnaud G. , 1991; Balacheff & Gaudin, 2002), αυτά του προσανατολισμού στο χώρο και των υπολογισμών σε στερεά σχήματα, μοιράζονται παρόμοια αναπαραστασιακά συστήματα, αν και τα προβλήματα, οι δομές ελέγχου και οι

τελεστές διαφέρουν. Παρόλα αυτά η Μ4, ως μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου, γνώριζε κυρίως τα αναπαραστασιάκα συστήματα σε προβλήματα τριών διαστάσεων. Έτσι μετέφερε δομές από το ένα νοητικό πεδίο (στερεά σχήματα) στο άλλο (προσανατολισμός στο χώρο).

Στο πλαίσιο ενός ανοικτού διερευνητικού προβλήματος όπως το στρεβλό ορθογώνιο με τη χρήση λογισμικού τρισδιάστατης Γεωμετρίας της Χελώνας με δυναμικό χειρισμό οι μαθητές χρησιμοποιούν το φορμαλισμό σε συνδυασμό με τους ολισθητές (δηλαδή την αλλαγή τιμής μεταβλητών), ώστε να αναστοχαστούν στις ιδέες τους, στο πλαίσιο εγκαθιδρυμένης μάθησης, να κάνουν εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις και γενικεύσεις, σχηματίζοντας τα δικά τους θεωρήματα εν δράσει και σαν αποτέλεσμα να δημιουργήσουν προσωπικά νοήματα για έννοιες, όπως αυτή της γωνίας. Η εννοιολογική εικόνα τέτοιων σχηματικών εννοιών εμπλουτίζεται σε σχέση με αυτή που έχουν ήδη διαμορφώσει οι μαθητές, από την ενασχόληση τους με διδιάστατα προβλήματα.

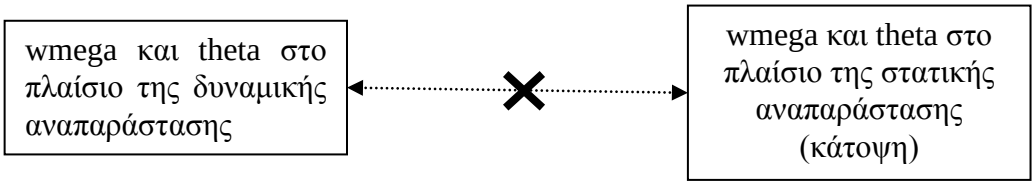
Νοήματα για τη γωνία με χρήση άλλων αναπαραστάσεων

Παρόλο που η έρευνα έγινε με τη χρήση λογισμικού Γεωμετρίας της Χελώνας με δυναμικό χειρισμό, οι μαθητές χρησιμοποίησαν και στατικές αναπαραστάσεις. Κατασκευάζοντας το σχήμα με τα καλαμάκια οι μαθήτριες Μ3 και Μ4 αποφάσισαν να φτιάξουν την κάτοψη του σχήματος σε ένα χαρτί. Από τη μία έτσι βρέθηκαν στο φιλικό για τους μαθητές περιβάλλον της επίπεδης γεωμετρίας, αλλά από την άλλη είχαν μια στατική αναπαράσταση (με τις συνέπειες που έχει αυτό). Και το πρόβλημα δεν άρχισε να φανεί. Ενώ είχαν πιο πριν περιγράψει με σαφήνεια την κίνηση της Χελώνας όταν εκτελούσε την εντολή rt(90+:theta/2), όταν πήγαν να σημειώσουν στο χαρτί τα μεγέθη των γωνιών που αντιστοιχούν στις στροφές, τότε έκαναν λάθος εκτιμήσεις, που δεν τις άλλαξαν παρά μόνο όταν ξαναδιάβασαν τον κώδικα και χειρίστηκαν δυναμικά το σχήμα.

Μια δική μου ερμηνεία θα ήταν ότι οι μαθητές, ειδικά όταν πρόκειται για στατικά σχήματα, βλέπουν τη γωνία είτε σαν δύο ευθύγραμμα τμήματα που συναντιώνται είτε ακόμα περισσότερο σαν ένα μέγεθος που εκφράζεται με έναν αριθμό (Henderson & Taimina, 2005; Mitchelmore & White, 2000). Έτσι οι μαθήτριες προσπάθησαν να αποδώσουν τιμές στις γωνίες, σαν να ήταν ανεξάρτητες από τις στροφές στις εντολές του κώδικα. Οι τιμές αυτές μπορεί να είναι αποτελέσματα αλγεβρικών υπολογισμών, π.χ. διχοτομούν μια γωνία επειδή στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο φαίνεται να

διχοτομείται και αποφαίνονται για τη γενικευμένη γωνία, ενώ στο γενικευμένο σχήμα, έχουν πει ότι αυτή η διχοτόμηση δε συμβαίνει.

Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν τις γωνίες στο πρόβλημα από δύο σκοπιές. Η μια ήταν ως συνιστώσες στροφές των γωνιών του σχήματος και η άλλη ως στατικές γωνίες, που αναπαριστούσαν ένα σταθερό μέγεθος, πάνω στην κάτοψη που σχεδίασαν. Οι δύο οπτικές σε αυτό το σημείο της διερεύνησης παρέμειναν ασύνδετες και γι' αυτό οι Μ3 και Μ4 δυσκολεύτηκαν να προσδώσουν στις στατικές αναπαραστάσεις τις ιδιότητες που έχουν οι δυναμικές. Έτσι, σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον φαίνεται ότι τα ίδια γεωμετρικά αντικείμενα, αντιμετωπίζονται σαν διαφορετικά, υπό τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τους.



Η δημιουργία κοινού πλαισίου εργασίας με τριγωνομετρικές τεχνικές

Κατα τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με τη διερεύνηση η υποομάδα 1.1 χρησιμοποίησε μια στρατηγική απλοποίησης του σχήματος και πρότεινε στην 1.2, να δουλέψουν με χρήση τριγωνομετρίας, μέσω του Lasad. Η 1.2 απέρριψε χωρίς μεγάλη σκέψη την ιδέα της 1.1, κρίνοντας τις επεξηγήσεις ως ανεπαρκείς. Ως εκείνη τη στιγμή δεν είχε δημιουργηθεί κοινή γλώσσα και πλαίσιο συνεργασίας από τους μαθητές, αν και είχαν γίνει προσπάθειες για αυτό. Όταν αποφάσισαν από κοινού μια συνάντηση για να μιλήσουν μεταξύ τους οι μαθητές, τότε δόθηκε η δυνατότητα στην Μ5 της 1.1 να εξηγήσει αναλυτικότερα την ιδέα της. Έτσι, αποφασίστηκε να κινηθούν με τριγωνομετρικές μεθόδους.

Σε μια τάξη που «κάνει μαθηματικά» λύνοντας ένα πρόβλημα ή αντιμετωπίζοντας μια πρόκληση το πρότυπο μιας αποδεκτής, αποτελεσματικής και κομψής ιδέας έχει να κάνει με το «πότε» λέει κάποιος κάτι, δηλαδή με την κατάλληλη στιγμή αλλά και με τον τρόπο που το λέει (Yackel & Cobb, 1996), ώστε να πείσει τους υπόλοιπους μιλώντας για κάτι που τους αφορά. Αυτό υποστηρίζω πως συνέβη με την συνάντηση των δύο ομάδων και την ιδέα της τριγωνομετρικής λύσης.

Από την άλλη, σε αυτό το περικείμενο όχι μόνο ήρθε στο προσκήνιο η τριγωνομετρία, αλλά τέθηκε κιόλας ένα συγκεκριμένο συμβολικό πλαίσιο, με

συγκεκριμένους στόχους, όπως αναζήτηση ορθογώνιων τριγώνων με γωνίες και πλευρές τις wmega-theta και length-width αντίστοιχα. Έτσι, οι μαθητές γνώριζαν και αποδέχονταν πια το προφίλ μιας σχετικής μαθηματικής ιδέας, μιας αποδεκτής πρότασης, μιας επαρκούς επεξήγησης.

Τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές μέσα από την ατομική τους εργασία ή στην υποομάδα τους, κοινοποιούνται μέσα στην ομάδα και τότε μόνο εκλαμβάνονται από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας (Yackel & Cobb, 1996). Για παράδειγμα, η ιδέα του «σπασίματος» του σχήματος, ώστε να σχηματιστούν κατάλληλα τρίγωνα αντιμετωπίστηκε τελείως διαφορετικά από την ομάδα πριν και μετά την κοινοποίηση του πλαισίου που τη συνοδεύει, από τη M5.

Μέσα σε αυτό το ρυθμισμένο κοινωνικο-μαθηματικό περιβάλλον, δημιουργήθηκε για τα μέλη της ομάδας **χώρος διαλόγου** (dialogic space), δηλαδή ο χώρος με τις πιθανές εκφάνσεις της τριγωνομετρικής διερεύνησης, που μπορεί να ήταν επιτυχής ή ανεπιτυχής. Όπως φάνηκε τελικά η έκβαση ήταν επιτυχής καθώς μέσω αναστοχασμού προέκυψαν δημιουργικές ιδέες (Wegerif, 2005), όπως αυτή της αναζήτησης τριγώνων μέσα κι έξω από το επίπεδο της κάτοψης. Η λύση, μάλιστα δόθηκε από τις μαθήτριες της ομάδα 1.2, παρόλο που η ιδέα της τριγωνομετρική λύσης δεν ήταν αρχικά δική τους. Μπορεί κανείς να πει ότι οι M3 και M4 δεν εσωτερίκευσαν μόνο την τεχνική της M5, αλλά τον ίδιο το χώρο διαλόγου που περιβάλλει αυτή την τεχνική. Έτσι μετέφεραν ολόκληρο το πλαίσιο χρήσης της ιδέας κάτω από το δικό τους πρίσμα της αναζήτησης νοητών τριγώνων (Wegerif & Yang, 2011). Η εσωτερίκευση του χώρου διαλόγου είναι θεμελιώδης για την μάθηση από την ομάδα που συνεργάζεται, για την αντιμετώπιση νέων καταστάσεων, επεκτείνοντας τις δυνατότητες εννοιών και τεχνικών.

Θα αναφέρω ένα ακόμα συμπέρασμα σε σχέση με τη δημιουργία νοημάτων για τις γωνίες σε αυτό το πλαίσιο. Οι μαθητές, μέσω διαφορετικών αναπαράστασεων στα ίδια γεωμετρικά αντικείμενα προσέδωσαν διαφορετικές ιδιότητες. Για αυτό έχω ήδη μιλήσει. Η ερμηνεία που έδωσα σχετίζεται με την έλλειψη σύνδεσης μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων, στατικής και δυναμικής. Το τριγωνομετρικό πλαίσιο στο οποίο κινήθηκαν τελικά οι μαθητές φαίνεται ότι δημιούργησε συνδέσεις μεταξύ αυτών των δύο κόσμων. Πώς όμως έγινε αυτό;

Ο διαδικασιοεννοιολογικός-τριγωνομετρικός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, έδωσε την αφορμή στους μαθητές να αναζητήσουν τρίγωνα που να αποτελούνται από μεταβλητές του κώδικα. Αν και δεν χρησιμοποίησαν το ημίτονο

και το συνημίτονο ως procept (Gray & Tall, 1994), εν τούτοις κατά τη διαδικασία εύρεσης τέτοιων τριγώνων, έπρεπε να περιεργαστούν το σχήμα, να επανεξετάσουν τον κώδικα, να αναστοχαστούν πάνω στα ευρήματα τους, στα νοητά τρίγωνα που είχαν εντοπίσει και να αναδομήσουν τα κατασκευάσματά τους, όπως η κάτοψη. Αυτή η αναστοχαστική-κατασκευαστική διαδικασία, οδήγησε σε μια συνεχιζόμενη διαπραγμάτευση μεταξύ των γεωμετρικών-δομικών χαρακτηριστικών του σχήματος και των μεταβλητών του κώδικα, βοήθησε τους μαθητές να βρουν τα κλειδιά για να συνδέσουν τις δύο αναπαραστάσεις κι έτσι να αναδιαμορφώσουν και να εμπλουτίσουν τη σχηματική έννοια του στρεβλού ορθογωνίου και κατά συνέπεια την ίδια την έννοιά του (Fischbein, 1993). Σαν αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη δυναμική αναπαράσταση και τον κώδικα αναστοχάστηκαν στις τιμές των γωνιών ως στροφές (στο δυναμικό σχήμα και τον κώδικα) και ως αριθμητικά μεγέθη (στο στατικό σχήμα) και τελικά συμβίβασαν τις δύο διαφορετικές οπτικές τους, εντάσσοντας ουσιαστικά το στατικό σχήμα, στην κατηγορία που αντιπροσωπεύεται από το δυναμικό-γενικευμένο.

Φαίνεται, επίσης ότι η κατασκευή νοημάτων μέσω ψηφιακών μέσων για τη γωνία είναι ισχυρά συνδεδεμένη με τη διαδραστικότητα, τη διασύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων γεωμετρικών οντοτήτων, δυναμικού χειρισμού και οπτικοποίησης των χωρικών αναπαραστάσεων (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006).

Από την άλλη πρέπει να υπενθυμισω ότι εν γένει οι μαθητές χρησιμοποιούν τις τριγωνομετρικές έννοιες σαν εργαλεία υπολογισμού και επίλυσης εξισώσεων με αναλογίες. Επιβεβαιώνεται κι εδώ ότι οι μαθητές δύσκολα αναγνωρίζουν ομοιότητες μεταξύ κλίσης σε μαθηματικό πλαίσιο και αντίστοιχων φυσικών καταστάσεων (Douek, 1998), αν και το περιβάλλον που δούλεψαν είχε τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού.

Επίσης πρέπει να αναφέρω το κοινωνικό πρότυπο του εκπαιδευτικού, ως αντιπροσώπου της μαθηματικής νομιμότητας και γνώστη της λύσης, που φάνηκε κατά τη διαδικασία της τριγωνομετρικής επίλυσης. Το διαμορφωμένο κοινωνικο-μαθηματικό πλαίσιο της τάξης μετά την αποδοχή της τριγωνομετρίας από τις δύο υποομάδες, έδωσε την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να μιλήσουν «περισσότερο μαθηματικά», κάτι που μέχρι τότε δεν είχαν κάνει. Να χρησιμοποιήσουν δηλαδή την κατάλληλη ορολογία (αυτή της τριγωνομετρίας, των ορθογωνίων τριγώνων κτλ), ώστε να οδηγήσουν τους μαθητές στη λύση. Έτσι παρόλο που οι μαθήτριες της 1.2 έχοντας εικάσει μια σχέση μεταξύ γωνιών μέσα από συγκεκριμένες τιμές τους (και

είχαν πειστεί ότι ίσχυε), οδηγήθηκαν στην απόδειξη για να ικανοποιήσουν τον εκπαιδευτικό που τους ζητούσε κάτι τέτοιο κι όχι τη δική τους ανάγκη. Μια ανάγκη που θα μπορούσε να ήταν ανάγκη επεξήγησης κι όχι αιτιολόγησης.

Νοήματα για τη γωνία, υπό διαπραγμάτευση

Αυτό που δεν πρέπει να αφήσω στο περιθώριο είναι η κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης. Οι μαθητές δούλευαν σε ομάδες σε ψηφιακό εργαλείο, συνεργατικά (collaboarative) και όχι απλά μαζί (cooperative). Αυτό σημαίνει ότι επικοινωνούσαν συνεχώς μέσω της πλατμφόρμας, αλλά και κάποιες φορές με φυσικό τρόπο και βρίσκονταν σε μια συνεχή διαπραγμάτευση. Αυτή η διαπραγμάτευση ίσως άρχισε από ανταγωνιστικότητα, αλλά εξελίχθηκε στην δημιουργία ένός μαθηματικού πλαισίου δουλειάς κοινό για τις υποομάδες κάθε ομάδας, όπως αναλύθηκε προηγουμένως.

Στην αρχική δραστηριότητα (drive) οι ερμηνείες, που έδιναν οι μαθήτριες στη στροφή του ελεύθερου βραχίονα και τη γωνία που σχημάτιζε δεν ήταν ίδιες. Οι περιγραφές των μαθητών για την κίνηση ήταν «στροφή, αλλάζει κυκλικά-έχει κέντρο, κινείται σαν το διαβήτη, κινείται με βάση το μήκος, το πλάτος και το ύψος». Το πλαίσιο της στροφής είναι πιο ευρύ και συνεπώς τα άλλα πιο εξειδικευμένα. Από αυτές η μόνη έκφραση που δεν κρύβει ένα γωνιακό πλαίσιο αναφοράς είναι οι συντεταγμένες. Εδώ υποστηρίζω ότι επιβλήθηκε ο φορμαλισμός της χωρικής αναπαράστασης. Πράγματι, η Μ3 που το είπε, έδειχνε να έχει μεγάλη εμπιστοσύνη στον κώδικα (φαίνεται σε όλη της τα δράση στη διερέυνηση). Έτσι βλέποντας τρεις μεταβλητές και κίνηση στο χώρο, μίλησε κατευθείαν για τρείς συντεταγμένες. Η δύναμη της συμβολικής έκφρασης ενισχύθηκε, όταν ταυτόχρονα έγινε και δυναμικός χειρισμός της χωρικής αναπαράστασης. Η Μ5 που διατύπωσε το πρότυπο του διαβήτη, όταν άκουσε «μήκος, πλάτος ύψος», μίλησε για συντεταγμένες, άρα είχε σημείο επαφής και με την Μ3.

Ποιο ήταν όμως το κίνητρο για να συνδέσουν οι μαθητές δύο καταστάσεις διαφορετικού γωνιακού περιεχομένου και να κατασκευάσουν νοηματικά πεδία και αφηρημένα νοήματα για τη γωνία (contextual & abstract angle concepts); Οι Mitchelmore και White (2000) υποστηρίζουν ότι έτσι επιτυγχάνεται πιο «οικονομική» επικοινωνία μεταξύ των μελών μιας ομάδας. Θα ήταν δύσκολο να μιλήσουν, αν τελικά όλα τα νοήματα που αφορούσαν τη γωνία ήταν διακριτά μεταξύ τους, χωρίς να σχετίζονται. Αυτό είναι ένα κίνητρο για τη δημιουργία νοημάτων μέσα σε ένα

πλαίσιο συνεργασίας. Έτσι καλό είναι να υπάρχουν δραστηριότητες όπου αυτά τα διαφορετικά γωνιακά πρότυπα εμφανίζονται και προκαλούν το μαθητή να τα συσχετίσει. Σύμφωνα με τους Mitchelmore και White τέτοιες ευκαιρίες αναστοχαστικής αφαίρεσης στα παιδιά δίνει η μελέτη γεωμετρικών χωρικών προβλημάτων στο χώρο που δραστηριοποιούνται και που για τους μαθηματικούς είναι τρισδιάστατος.

Προσανατολισμός στον τρισδιάστατο χώρο σε σχέση με τη γωνία

Για να περιγράψουν οι μαθητές πλήρως τις στροφές που κάνει η Χελώνα πρέπει να συγκεραστούν όλα τα πεδία αναφοράς (Kynigos & Latsi, 2007) για τη θέση στο τρισδιάστατο χώρο. Βλέποντας συνολικά την εικόνα οι μαθητές φάνηκε να έχουν ένα εγγενές-εσωτερικό-εγωκεντρικό πεδίο αναφοράς και ένα εξωστρεφές-αποστασιοποιημένο από το σώμα τους πεδίο αναφοράς. Πράγματι αρχικά, στην προσπάθειά τους να περιγράψουν τις γεωμετρικές ιδιότητες του στρεβλού ορθογωνίου, χειρίστηκαν δυναμικά το σχήμα, αλλά χρησιμοποίησαν και την κάμερα.

Οι φράσεις που χρησιμοποίησαν για να περιγράψουν τις μεταβολές στο σχήμα, μέσω του δυναμικού χειρισμού, δείχνουν ότι ακολούθησαν τα εξής πλαίσια αναφοράς με τη σειρά:

Εξωστρεφές → εσωστρεφές → εσωστρεφές+πλαίσιο οχήματος → πλαίσιο οχήματος.

Η εξωτερική προσέγγιση (external view) προέκυψε από την προσπάθεια των μαθητών να χειριστούν τα σχήματα που κατασκευάζει η χελώνα. Στην ερώτηση της Μ3 «Πώς θα καταλάβουμε τι συμβολίζει η κάθε μεταβλητή του κώδικα;» η Μ4 απαντά «Το length την πάει προς τα εκεί και το σχήμα μεγαλώνει». Έτσι, οι μαθητές πήραν μια απόσταση από τη χελώνα και εκτός από χειρονομίες χρησιμοποίησαν αντικείμενα ως διαμεσολαβητές μεταξύ τρισδιάστατου προσομοιωμένου χώρου και πραγματικού χώρου.

Στη συνέχεια διέκρινα μια εμπλοκή εσωστρεφούς πλαισίου και πλαισίου οχήματος. Τελικά όμως αυτό που κυριάρχησε ήταν το πλαίσιο οχήματος και οι μαθητές το χρησιμοποίησαν για να ερμηνεύσουν γραμμή-γραμμή τον κώδικα και να κατασκευάσουν το σχήμα με τα καλαμάκια. Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να συντονίσουν το εσωστρεφές πλαίσιο με το πλαίσιο οχήματος ακολούθησαν μια εσωγενή-εγωκεντρική προσέγγιση (intrinsic-internal view) του 3D χώρου, σαν να βρίσκονταν μέσα στο «όχημα» που κινείται στο 3D χώρο. Αυτό φαίνεται σε δηλώσεις

όπως αυτή τη Μ3 «τώρα προσγειώνεται η χελώνα, αλλά γιατί προσγειώνεται έτσι πλάγια; Μήπως επειδή το κοιτάμε από αυτή την οπτική γωνία;». Καθώς ο χώρος που έβλεπαν στην οθόνη βρισκόταν γύρω τους, τον μαθηματικοποίησαν με άξονες όπου το origin είναι το σώμα τους. Για την προσέγγιση αυτή χρησιμοποίησαν τα χέρια τους και το σώμα τους για να προσομοιώσουν την κίνηση της χελώνας.

Παρόλο που η 3D προσομοίωση είναι κάτι που πλησιάζει περισσότερο την πραγματική ζωή από την 2D, η 2D body-syntoonic μεταφορά είναι πιο ισχυρή από την 3D. Ο τρόπος που περπατάμε στην καθημερινή ζωή πλησιάζει περισσότερο το 2D από το 3D έτσι πιο εύκολα το σώμα συντονίζεται με το 2D παρά με το 3D. Έτσι το πλαίσιο body-syntonic στο 3D συρρικνώθηκε στο πλαίσιο οχήματος, που τελικά ήταν το κυρίαρχο πλαίσιο αναφοράς. Επίσης δεν παρατηρήθηκε οι μαθητές να συσχετίζουν τη στροφή του σώματός τους με τη στροφή της χελώνας στη Logo, στις τρεις διαστάσεις κάτι που επιβεβαιώνει σχετικές έρευνες (Clements, Battista, Samara, & Swaminathan, 1996).

Ο μικρόκοσμος σε προσωπική χρήση από τους μαθητές

Οι μαθητές κατασκεύασαν ένα σχήμα με καλαμάκια, διαβάζοντας βήμα-βήμα τον κώδικα. Πώς χρησιμοποίησαν αρχικά αυτό το σχήμα ή μαλλον την κατασκευή του; Αρχικά διάβαζαν μια-μια τις εντολές του κώδικα. Από κάθε εντολή προέκυπτε ένα βήμα της κατασκευής με καλαμάκια. Στη συνέχεια, συνέκριναν το σχήμα με αυτό στην οθόνη. Αν υπήρχε συμφωνία των δύο σχημάτων συνέχιζαν την κατασκευή, αλλιώς επανεξέταζαν την ερμηνεία τους για τον κώδικα. Έτσι, με την προσθήκη του σχήματος με τα καλαμάκια, δημιούργησαν μια νέα λειτουργικότητα για τον μικρόκοσμο. Μια δομή ελέγχου. Ο μικρόκοσμος άλλαξε χρήση, σε σχέση με την αρχική του. Άλλωστε οι μικρόκοσμοι είναι έτσι σχεδιασμένοι, ώστε να μπορεί ο χρήστης να δώσει προσωπικό νόημα στη χρήση τους. Η μελέτη της αλλοίωσης της χρήσης του μικρόκοσμου (Healy & Kynigos, 2010) είναι που με βοήθησε να βγάλω συμπεράσματα για τον τρόπο που οι μαθητές «έσπασαν» τη γωνία σε δύο συνιστώσες στροφές και για τα νοήματα που δημιούργησαν για τη γωνία στο 3D χώρο.

Οι ίδιες οι Μ3 και Μ4 προσέδωσαν προσωπικό νόημα στο κατασκεύασμά τους, και έτσι καθόρισαν τη λειτουργικότητά του. Έτσι, το κατασκευάσμά (artifact) τους μετατράπηκε σε εργαλείο (instrument) ή μάλλον μέρος ενός εργαλείου. Πώς έγινε όμως αυτό; Οι Μ3 και Μ4 κατασκεύασαν αποφάσισαν να κατασκευάσουν το σχήμα με καλαμάκια για να δουν τι ακριβώς κάνει ο κώδικας. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν

την τριάδα κώδικας-σχήμα(οθόνης)-κατασκευή αλλοιώνοντας τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου (instumentalaization). Έτσι κατά την άποψή μου κατασκεύασαν ένα νέο εργαλείο που έχουν αλλάξει όμως οι λειτουργικότητές του (Κυνηγός, 2006; Healy & Kynigos, 2010), αφού μπορούν να εφαρμόσουν την ίδια στρατηγική και σε άλλο πρόβλημα.

Γενικές παρατηρήσεις

Το μαθησιακό περιβάλλον της έρευνας περιγράφεται από αρχές εγκαθιδρυμένης μάθησης (Lave, 1988), αφού το αποτέλεσμα της διερεύνησης και τα νοήματα που δημιουργήθηκαν θα ήταν διαφορετικά, αν το περιβάλλον ήταν άλλο και το πρόβλημα διαφορετικό. Οι αφαιρέσεις, οι γενικεύσεις και ο αναστοχασμός που τις προκάλεσε συνέβησαν σε συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς (εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις, (Noss & Hoyles, 1996)). Οι μαθητές έβγαλαν συμπεράσματα και τα χρησιμοποίησαν, σαν θεωρήματα εν δράσει (Vergnaud G. , 1991), πάλι σε συγκεκριμένο πλαίσιο. Τα κατασκευάσματά τους τέθηκαν σε διαπραγμάτευση μέσα στην ομάδα, αλλά και οι ίδιοι σαν άτομα βρέθηκαν σε μια διαρκή διαλογική σχέση με αυτά, ως εργαλεία με τα οποία σκέφτονταν (Papert, 1980).

Το γνωστικό αντικείμενο της γεωμετρίας ευνόησε την έρευνα, αφού η διττή της φύση (εμπειρική και θεωρητική) προσφέρεται για πειραματισμό, αλλά και γενικεύσεις που όμως έρχονται ως ανάγκη να κι όχι επιβεβλημένες από τον δάσκαλο. Οι γεωμετρικές έννοιες που γνώριζαν οι μαθητές στο πλαίσιο του μαθήματος του σχολείου, εμπλουτίστηκαν στο επίπεδο των σχηματικών αναπαραστάσεων, άρα οι ίδιες οι έννοιες έγιναν πιο αποτελεσματικές στη χρήση τους.

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε φάνηκε ότι όταν οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσοουν διερευνητικά ένα δύσκολο πρόβλημα σε υπολογιστικό περιβάλλον, βγαίνουν αρκετά συμπεράσματα υπό το πρίσμα της δημιουργίας νοημάτων. Στην αρχή της παρέμβασης υπήρχε μια δραστηριότητα (drive), που ήταν αρκετά ανοικτή ως προς το ερώτημα. «Πώς μπορούμε κάθε στιγμή να γνωρίζουμε που βρίσκεται η χελώνα;» Τα αποτελέσματα αυτής της δραστηριότητας σε σχέση με τον απλό σχεδιασμό της και τη διάρκειά της (μια συνάντηση: 2 διδακτικές ώρες) ήταν πολλά.

Αυτή η παρατήρηση δίνει την αφορμή για πρόταση έρευνας με παρόμοιες δραστηριότητες, τελείως ανοικτών ερωτημάτων, με σημείο αναφοράς τη γωνία και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Ειδικά στο πεδίο της τριγωνομετρίας από την

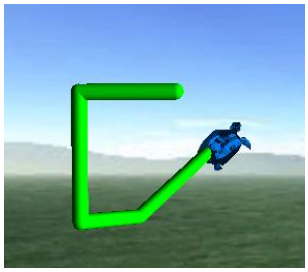
πραγματοποιηθήσα έρευνα, φάνηκε ότι οι μαθητές δύσκολα χρησιμοποιούν το νοητικό πρότυπο της κλίσης. και επιβεβαιώνεται ότι δύσκολα αναγνωρίζουν ομοιότητες μεταξύ κλίσης σε μαθηματικό πλαίσιο και αντίστοιχων φυσικών καταστάσεων (Douek, 1998). Έτσι μια πιο ανοικτή δραστηριότητα σε τριγωνομετρικό πλαίσιο θα είχε ενδιαφέρον, και θα έδινε την ευκαιρία στους μαθητές να χειριστούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς σαν porcepts κι όχι σαν διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων με αναλογίες.

Τέλος βρίσκω ιδιαίτερα ενδιαφέρον να μελετηθούν οι μαθησιακές συνθήκες που κάνουν τους μαθητές να νιώσουν την ανάγκη δημιουργίας παραγωγικών συλλογισμών σε γεωμετρικά προβλήματα. Ποιες είναι οι συνθήκες που τους κάνουν να επιχειρηματολογήσουν, μιλώντας για κλάσεις αντικειμένων και όχι για συγκεκριμένα αντικείμενα, χωρίς την παρέμβαση ενός εκπαιδευτικού ή ερευνητή; Πώς χρησιμοποιούνται τα εργαλεία ενός λογισμικού τρισδιάστατης γεωμετρίας σε αυτή τη συγκυρία; Διαμορφώνονται κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες όπου επαρκής εξήγηση να θεωρείται η απόδειξη;

7.Παράρτημα Α

Τα pre και post tests

Οι δικές μου Σκέψεις!



3d Math

ΟΝΟΜΑ:	
ΟΜΑΔΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	

Α. Δουλεύω Μόνη/Μόνος μου ή σε Ομάδα;

1. Όταν σου αναθέτουν μία εργασία, πώς σου αρέσει να δουλεύεις; Μόνος σου ή σε ομάδα; Εξήγησε γιατί!

_____
_____
_____
_____
_____
_____

2. Έχεις δουλέψει ποτέ σε ομάδα; Αν ναι, τί είναι αυτό που σου άρεσε και τί είναι αυτό που δεν σου άρεσε ή σε δυσκόλεψε;

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Β. Δουλεύω σε ένα πρόβλημα με το 3d Math σε Ομάδα:

1. Θα σας βοηθούσε αν δουλεύατε σε ομάδα για να βρείτε λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα που σας δόθηκε στο 3d math; Αν ναι, γιατί;

_____
_____
_____
_____
_____
_____

2. Τι θα κάνατε για να οργανωθείτε ως ομάδα και να καταφέρετε να λύσετε στο πρόβλημα;

_____
_____
_____
_____
_____
_____

3. Εσύ ποιόν ρόλο θα επέλεγες να είχες μέσα στην ομάδα;

_____
_____
_____
_____
_____
_____

4. Συμμετέχοντας στην ομάδα αυτή για να λύσετε το πρόβλημα, θεωρείς ότι εσύ μαθαίνεις από τα άλλα μέλη της ομάδας καθώς συνεργάζεσαι μαζί τους; Αν ναι, τι μαθαίνεις και πώς (από τους άλλους); Θα μπορούσες να δώσεις ένα παράδειγμα;

_____
_____
_____
_____
_____
_____

5. Πώς θα το διαχειριζόσασταν αν δύο άτομα από την ομάδα σας δεν συμφωνούσαν για το τι πρέπει να κάνετε για να προχωρήσετε τη δουλειά σας;

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Πώς να δουλέψω για να καταφέρω να λύσω το πρόβλημα;;;

Δουλεύοντας στην ομάδα σας για να βρείτε μαζί τη λύση, από ποιές φάσεις (συν)εργασίας νομίζετε ότι θα χρειαστεί να περάσετε; Μπορείτε να φτιάξετε ένα χάρτη/σχεδιάγραμμα που να το περιγράφετε;

8.Παράρτημα Β

Τα εγχειρίδια που δώσαμε στους μαθητές

Manual χελώνας στο 3d Math

Για να εκτελέσουμε μια εντολή τη γράφουμε στο παράθυρο της Logo και πατάμε Insert από το πληκτρολόγιο.

Α. Κίνηση χελώνας

- **fd(αριθμός)**: η χελώνα προχωρά μπροστά όσες μονάδες μήκους λέει ο αριθμός *πχ: fd(10)*
- **bk(αριθμός)**: η χελώνα προχωρά προς τα πίσω όσες μονάδες μήκους λέει ο αριθμός *πχ: bk(4)*
- **rt(αριθμός) ή lt(αριθμός)**: η χελώνα στρίβει στην θέση που βρίσκεται, δεξιά ή αριστερά όσες μοίρες λέει ο αριθμός *πχ: rt(30)*
- **up(αριθμός) ή dp(αριθμός)** [up pitch ή down pitch]: η χελώνα στρίβει πάνω (κοιτάει ψηλά) ή στρίβει κάτω (κοιτάει χαμηλά – σκύβει) όσες μοίρες λέει ο αριθμός πχ : up(40)
- **rr(αριθμός)**: η χελώνα βουτάει στο πλάι τη δεξιά πλευρά της (και σηκώνει την άλλη) όσες μοίρες λέει ο αριθμός *πχ: rr(45)*
- **lr(αριθμός)**: η χελώνα κάνει την αντίστοιχη κίνηση, από την άλλη πλευρά *πχ: lr(90)*

Β. Γραφικά

- **penup**:η χελώνα από δω και πέρα δεν μπορεί να αφήσει ίχνος
- **pendown**: η χελώνα από δω και πέρα αφήνει ίχνος

Γ. Διαδικασίες

❖ Μπορούμε να φτιάξουμε δικές μας εντολές στο 3d math, που τις λέμε διαδικασίες, ως εξής:

Π.χ. :
to sxima
fd(4)
rt(30)
penup
fd(3)
pendown
fd(3)
end

- ✓ Δίπλα στο **to** γράφουμε το **όνομα της διαδικασίας** (sxima).
- ✓ Ακολουθούν οι κινήσεις που θέλουμε να κάνει η χελώνα.
- ✓ Στο τέλος γράφουμε **end**.
- ✓ Γράφουμε αυτά στο 3d math, επιλέγουμε το κείμενο, πατάμε το **insert** και έτσι το 3d math, έμαθε τη διαδικασία μας.
- ✓ Για να εκτελέσουμε τη διαδικασία, κάνουμε ότι και με τις άλλες εντολές, δηλαδή: **sxima (και πατάμε insert).**

❖ Μπορούμε όμως να φτιάξουμε και διαδικασίες που θα έχουν μια μεταβλητή, όπως είναι ο αριθμός στις προηγούμενες εντολές του προγράμματος:

✓ Κάνουμε ότι και πριν για να μάθει το 3d math τη διαδικασία μας. Τρέχει ως εξής:

morfi(αριθμός) (πατάμε insert)
π.χ. :
to morfi :x
fd(:x)
rt(60)
fd(3)
end
morfi(5)

Δ. Ειδικές εντολές

- **repeat**: Επαναλαμβάνει το σύνολο των εντολών που βρίσκονται μέσα στην αγκύλη όσες φορές λέει ο αριθμός που βάζο\ουμε μπροστά από αυτήν.

π.χ. **to** sxima
repeat 4 [fd(5) rt(90) fd(5)]
end

Στην παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται 5 φορές η σειρά εντολών fd(5) rt(90) fd(5).

Το ίδιο αποτελεσμένα θα παίρναμε αν γράφαμε την εξής διαδικασία:

to sxima
fd(5) rt(90) fd(5)
fd(5) rt(90) fd(5)
fd(5) rt(90) fd(5)
fd(5) rt(90) fd(5)
fd(5) rt(90) fd(5)
end

Χρησιμοποιώντας την εντολή **repeat** μπορούμε να επαναλάβουμε και μια διαδικασία που, όμως, πρέπει να την έχουμε ήδη δημιουργήσει:

π.χ.1 **to** orthi
fd(5) rt(90) fd(5)
end
to sxima
repeat 4 [orthi]
end

π.χ.2. **to** monada :a :x :b
fd(:a) up(:x) fd(:b)
end
to morfi :a :x :b
repeat 5 [monada(:a :x :b)]

end

morfi(3 45 7)

- **Repeat 360 [fd(3.14*R/180) lt(1)]** : η εντολή αυτή κατασκευάζει κύκλο με ακτίνα R μονάδες μήκους

Βάζοντας διαφορετική τιμή κάθε φορά στην ακτίνα, μπορείτε να κατασκευάσετε και διαφορετικούς κύκλους.

Π.χ. Κύκλο με ακτίνα 5 μονάδες μήκους : Repeat 360 [fd(3.14*5/180) lt(1)]

- **setpos(αριθμός αριθμός αριθμός)**: Τοποθετεί τη χελώνα σε συγκεκριμένη θέση, σύμφωνα με τους αριθμούς που δίνονται στην παρένθεση. Οι αριθμοί αυτοί είναι η x-συντεταγμένη, η y-συντεταγμένη και η z-συντεταγμένη αντίστοιχα.

Π.χ. setpos(7 3 15)

Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

Π.χ. setpos(:a :b :c)

- **setposx(αριθμός)**: Τοποθετεί τη χελώνα σε σημείο που η X-συντεταγμένη της να είναι ο αριθμός μέσα στην παρένθεση. Οι άλλες δύο συντεταγμένες παραμένουν ίδιες. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

Π.χ. setposx(8)

- **setposy(αριθμός)**: Τοποθετεί τη χελώνα σε σημείο που η Y-συντεταγμένη της να είναι ο αριθμός μέσα στην παρένθεση. Οι άλλες δύο συντεταγμένες παραμένουν ίδιες. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

Π.χ. setposy(5)

- **setposz(αριθμός)**: Τοποθετεί τη χελώνα σε σημείο που η Z- συντεταγμένη της να είναι ο αριθμός μέσα στην παρένθεση. Οι άλλες δύο συντεταγμένες παραμένουν ίδιες. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

Π.χ. setposz(9)

- **home:** Μετακινεί τη χελώνα στην αρχή του 3d-χώρου. Προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα με την εντολή setpos(0 0 0).

- **stop**: Σταματά την εκτέλεση της διαδικασίας.

- **wait(αριθμός)**: Σταματά τη τρέχουσα διαδικασία για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που ορίζεται από τον «αριθμό» που μετρά σε χιλιοστά του δευτερολέπτου

- **abs(αριθμός):** Υπολογίζει την απόλυτη τιμή του αριθμού που δίνεται στην παρένθεση. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

  π.χ. abs(3), abs(-16)

- **sin(αριθμός)**: Υπολογίζει το ημίτονο του αριθμού στην παρένθεση και μπορώ έτσι να το χρησιμοποιήσω μέσα σε μία διαδικασία. Ο αριθμός εκφράζεται σε μοίρες.

  π.χ. sin(30)

  Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

  Π.χ sin(:theta/2)

- **cos(αριθμός)**: Υπολογίζει το συνημίτονο του αριθμού στην παρένθεση και μπορώ έτσι να το χρησιμοποιήσω μέσα σε μία διαδικασία. Ο αριθμός εκφράζεται σε μοίρες. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

  π.χ. cos(45)

- **tan(αριθμός)**: Υπολογίζει το συνημίτονο του αριθμού στην παρένθεση και μπορώ έτσι να το χρησιμοποιήσω μέσα σε μία διαδικασία. Ο αριθμός εκφράζεται σε μοίρες. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

  π.χ. tan (45)

- **sqrt(αριθμός):** Υπολογίζει τη τετραγωνική ρίζα του αριθμού που είναι στην παρένθεση. Αντί για σταθερό αριθμό μπορώ να βάλω μεταβλητές.

  Π.χ. sqrt(16)

- **ifelse (συνθήκη) [ομάδα εντολών 1] [ομάδα εντολών 2].** Αν η συνθήκη είναι αληθής (δηλ. ισχύει) τότε η χελώνα εκτελεί την ομάδα εντολών 1. Αν η συνθήκη δεν ισχύει τότε η χελώνα εκτελεί την ομάδα εντολών 2.

  to test :i

  ifelse :i<40 [fd(:i) rt(15)] [up(30) fd(:i)]

  end

- **if (συνθήκη) [ομάδα εντολών].** Αν η συνθήκη είναι αληθής (δηλ. ισχύει) τότε η χελώνα εκτελεί την ομάδα εντολών στην αγκύλη. Αν η συνθήκη δεν ισχύει τότε η χελώνα συνεχίζει με τις υπολοιπες εντολές της διαδικασίας.

  to test :i

  if :i<40 [fd(:i) rt(15)]

dp(30) fd(20)

end

- **make “(μεταβλητή) (αριθμός)**

Δίνει στην μεταβλητή τον αντίστοιχο αριθμό.

π.χ.

to dokimi

make "i 1

repeat 10 [fd(:i) rt(15) make "i :i+1]

end

<u>Προσέξτε:</u> Το πρώτο make στην παραπάνω διαδικασία, δίνει στη μεταβλητή i την τιμή 1. Τη δεύτερη φορά που εμφανίζεται (make “i :i+1) δίνει στη μεταβλητή την τιμή που έχει αυξημένη κατά 1.

Αντί για αριθμό μπορεί να μπορεί να βάλω μεταβλητή:

Π.χ. **make** "i (:k +:g)

9. Βιβλιογραφία

Abelson, H., & DiSessa, A. (1981). *Turtle Geometry: The computer as a Medium for Exploring Mathematics.* Cambridge, M.A.: MIT Press.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 7* (3), 245-274.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and Modalities of Transition from Conjectures to Proofs in Geometry. Στο A. Olivier, & K. Newstead (Επιμ.), *Proceedings of the 22nd Psychology for Mathematics Education International Conference*, *2*, σσ. 32-39. Stellenbosch: South Africa.

Balacheff, N. (1986). Cognitive versus situational analysis of problem-solving behaviours. *For the Learning of Mathematics , 6* (3), 10-12.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz , 65*.

Bauersfeld, H. (1993, March). Teachers pre in-service education for mathematics teaching. *Seminaire sur la Representation* (78).

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (2003). Learning to work creatively with knowledge. Στο E. D. Corte, L. Verschaffel, N. Entwistle, & J. V. Merri (Επιμ.), *Unraveling basic components and dimensions of powerful learning environments.* EARLI Advances in Learning and Instruction Series.

Blackett, N., & Tall, D. (1991). Gender and versatile learning of trigonometry using computer software. *The Proceedings of the International Group for Psychology of Mathematics Education XV*, *1*, σσ. 144-151. Assisi, Italy.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism.* Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics , 23*, 247-285.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situatios in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological challenges in creating complex interventios. *Journal of the Learning Sciences , 2*, 141-78.

Cakir, M. P., Zemel, A., & Stahl, G. (2009). The Joint Organization of Interaction within a Multimodal CSCL Medium. *International Journal of Computer-supported Collabortive Learning , 4* (2), 115-149.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1989). Learning of Geometrival Concepts in a Logo Environment. *Jouurnal for Research in Mathematics Education , 20*, 450-467.

Clements, D. H., Battista, M. T., Samara, J., & Swaminathan, S. (1996). Development of Turm and Turn Measurement Concepts in a Computer-based Instructional Unit. *Educational Studies in Mathematics , 30*, 313-337.

Cobb, P., & Steffe, L. (1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Educations , 17* (5), 347-360.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher , 32* (1), 9-13.

Cobb, P., McClain, K., Lamberg, T. d., & Dean, C. (2003). Situating Teachers' Instructional Practices in the Institutional Setting of the School and District. *Educational Researcher , 32* (6), 13-24.

Collins, A. (1992). Toward a Design Science of Education. (E. Scanlon, & T. O'Shea, Επιμ.) *New directions in educational technology* , 15-22.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyz, K. (2004). Design Research: Theoretical And Methodological Issues. *The Journal of Learning Sciences , 13* (1), 15-42.

Cooke, N. J., Salas, E., Kiekel, P. A., & Bell, B. (2004). Advances in Measuring. Στο *Team Cognition: Understanding the Factiros the Drive Process and Performance* (σσ. 83-106). Wasighton, DC: American Psychological Association.

Dalgarmo, B., Hedberg, J., & Harper, B. (2002). The Contribution of 3D Environments to Conceptual Understanding. *Proceedings of ASCILITE 2002 Conference*, (σσ. 44-54). Auckland, New Zealand.

Davis, D. M. (2007). *Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών.* (Δ. Καραγιαννάκης, & Μ. Μαγειρόπουλος, Μεταφρ.) Ηράκλειο: Παννεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Davis, R. B. (1992). Understanding "understanding". *Journall of Mathematical Behavior , 11*, 225-241.

Dewey, J. (1933). *How we Think: A Restatment of The Relation of Reflective Thinking to The Educative Process.* Boston: D. C. Heath.

Dillenbourg, P. (1999). What do yuo mean by collaborative leraning? Στο P. Dillenbourg (Επιμ.), *Collaborative Learning: Cognitive and Computational Approaches.* Oxford: Elsevier.

DiSessa, A. (2000). *Changing Minds, Computers, Learning and Literacy.* Cambridge, MA: MIT Press.

diSessa, A. (1991). Epistemological micromodels: The case of coordination and quantities. (J. Montanegro, & A. Tryphon, Επιμ.) *Psychologie génétique et sciences cognitives* , 169-194.

Donaldson, M. (1991). *Η σκέψη των παιδιών.* Αθήνα: Gutenberg.

Douek, N. (1998). Analysis of a Long Term Construction of the Angle Concept in the Field of Experience of Sunshadows. Στο A. Olivier, & K. Newstead (Επιμ.), *Proceedings of the 20th Annual Confernece of the International Group fot the Psychology of Mathematics Education, 2,* σσ. 264-271. Stellenbosch.

Dubinsky, E. (2000). Meaning and Formalism in Mathemtics. *International Journal of Computers for Mathmatical Learning , 5,* 211-240.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problemof Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. Στο C. Mammana, & V. Villani, *Perspectivies on the Teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI study* (σσ. 37-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eckert, P. (1989). *Jocks and burnouts: Social categories and identity in high school.* New York: Teachers College Press.

Edwards, L. D. (1998). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. *In Journal of Mathematical Behavior , 17* (1), 53-78.

Edwards, L. D. (1994). Making Sense of a Mathematical Microworld: A Pilot Study from a Logo Project in Costa Rica. Στο J. P. Ponte, & J. F. Matos (Επιμ.), *Proceedings of the 18th PME International Conference, 2,* σσ. 296-303.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics , 24* (2), 139-162.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Goetz, J., & Lecompte, M. D. (1984). *Ethnography and Qualitive Design in Educational Research.* London: Academic Press.

Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry? Στο R. Lehrer, & D. Chazan (Επιμ.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (σσ. 351-368). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education , 26* (2), 114-141.

Greeno, J. G. (1983). Conceptual Entities. Στο D. Gentner, & A. L. Stevens (Επιμ.), *Mental Models* (σσ. 227-252). Hillsdale: Erlbaum.

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton University Press.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments. *Educational Studies in Mathematics , 44* (1-3), 127-150.

Hart, K. M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics 11-16.* London: John Murray.

Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education , 42* (1), 63-76.

Heath, T. H. (1925). *Euclid. The thirteen books of the elements* (Τόμ. 2). New York: Dover Publications INC.

Henderson, D. W., & Taimina, D. (2005). *Expressing Geometry. Euclidean and mon Euclidean with History.* Pearson Prentice Hall, NJ, USA.

Hersh, R. D., & Philip, J. (1981). *The mathematical experience.* Boston: Birkhauser.

Hershowitz, R., & Vinner, S. (1983). The Role of Critical and non-Critical Attributes in the Cocnept-Image of Geometrical Cocnepts. Στο R. Hershkowitz (Επιμ.), *Proceedings of the 7th International Conference for the PME,* (σσ. 223-228). Rehovot, Israel.

Hicks, D. (1996). Contextual Inquiries: A Discourse-oriented Study of Classroom Learning. Στο D. Hicks (Επιμ.), *Discourse, Learning and Schooling* (σσ. 104-141). New York, NY: Cambridge University Press.

Hoyles, C. (2005). Making Mathematics and Sharing Mathematics: Two Paths to Co-costructingg Meaning? Στο *Meaning in Mathematics Education.* New York, USA: Spinger.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/Schoolworlds: The transformation of an Innovation. Στο C. Keitel, & K. Ruthven (Επιμ.), *Learning from computersQ Mathematics aducation and technology* (σσ. 10-17). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Hoyles, C., & Noss, R. (1987). Seeing what matters: Developing an understanding of the concept of parallelogram through a Logo micrworld. Στο J. Bergeron, N. Herscovics, & K. C. (Επιμ.), *Proceedings of the 12th PME International COnferenc*, *2*, σσ. 17-24.

Hoyles, C., Noss, R., & Kent, P. (2004). On the Intergration of Digital Technologies into Mathematical Classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 9* (3), 309-326.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad [Computer Program]*. Berkley, CA, USA: Key Curriculum Press.

Jones, K. (1996). Coming to Know about Dependency within a Dynamic Geometry Environment. Στο L. Puig, & A. Gutierrez (Επιμ.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, *3*, σσ. 145-151.

Kafai, Y., & Resnick, M. (Επιμ.). (1996). *Constructionism in Practice. Designing, Thinking and Learning in a Digital World.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantitiesQ An integrated software repsonse (Technical Report).* Cambridge, MA: Educational Technology Center.

Kelly, A. E. (2003). (Guest Editor),Research as Design (Editorial). *Educational Researcher , 32* (1), 3-4.

Kendal, M., & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum , 34* (1), 4-8.

Koschmann, T. (2002). Research, Dewey's Contribution to the Foundations of CSCL. Στο G. Stahl (Επιμ.), *Computer Support for Collaborative Learning: Foundations for a CSCL Community: Proceedings of CSCL 2002* (σσ. 17-22). Boulder, CO: Lawrence Erlbaum Associates.

Kynigos, C. (2004). A "Black-and-White Box" approach to user empowerment with component computing. *Interactive Learning Environments , 12* (1-2), 27-71.

Kynigos, C. (1991). Can Children Use the Turtle Metaphor to Extend their Learning to Non-intrinsic Geometry? Στο F. Furinghetti (Επιμ.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* , *2*, σσ. 269-276.

Kynigos, C. (1988). Constructing Bridges from Intrinsic to Cartesian Geometry. Στο A. Borbás (Επιμ.), *Proceedings of the 12th PME International Conference*, *2*, σσ. 449-456.

Kynigos, C. (2001). *E-slate Turtleworlds.* Athens: Educational Technology Lab, School of Philosophy, PPP Faculty, Department of Education.

Kynigos, C. (2007b). Half-baked Logo microworlds as boundary ogjects in integrated design. *Informatics in Education* , *6* (2), 335-358.

Kynigos, C. (2007a). Half-baked Microworlds in Use in Challenging teacher educators' knowing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* , *12* (2), σσ. 87-111.

Kynigos, C. (1989). Intrinsic Versus Euclidean Geometry: Is the Distinction Important to Children Learning with the Turtle? Στο G. Vergnaud, J. Rodalski, & M. Artigue (Επιμ.), *Proceedings of the 13th International Conference for Psychology of Mathematics Education. 2*, σσ. 194-201. Paris: GR Didactique CNRS Paris V,Laboratoire PSYDEE.

Kynigos, C. (1989). Intrinsic versus Euclidean Geometry: Is the Distinction Important to Children Learning with the Turtlle? Στο G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Επιμ.), *Proceedings of the 13th PME International Conference*, *2*, σσ. 194-201.

Kynigos, C., & Latsi, M. (2007). Turtle's Navigation and Manipulation of Geometrical Figures Constructed by Variable Processes in a 3d Simulated Space. *Informatics in Education* , *6* (2), 359-372.

Kynigos, C., & Latsi, M. (2006). Vectors in Use in a 3D Juggling Game Simulation. *International Journal for Technology in Mathematics Education* , *13* (1).

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year old's Meanings Around Intrinsic Curves with a Medium for Symbolic Expression and Dynamic Manipulation. Στο N. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Επιμ.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, *3*, σσ. 165-172.

Kynigos, C., Koutlis, M., & Hatzilacos, T. (1997). Mathematics with Component-Oriented exploratory software. *2*, 229-250.

Laborde, C. (2001). The Use of New Technologiew as a Vehicle for Restructing Teachers' Mathematics. Στο F. L. Lin, & T. J. Cooney (Επιμ.), *Making Sense of Mathematics teacher Education* (σσ. 87-109). Netherlands: Kluwer Academic Press.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. Στο A. Gutiérrez, & P. Boero (Επιμ.), *Handbookk of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (σσ. 275-304). The Netherlands: Sense Publishers.

Laborde, J.-M., & Bellemain, F. (1995). *Cabri –Géomètre II and Cabri –Géomètre II plus [Computer Progam]*. Dallas, USA: Texas Instruments.

Laborde, J.-M., Baulac, Y., & Bellemain, F. (1988). *Cabri –Géomètre I [Computer Progam]*. Grenoble, France: University Joseph Fourier.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* (J. Worral, & E. Zahar, Επιμ.) Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lowrie, T. (2002). The Influence of Visual and Spatiall Reasoning in Interpreting Simulated 3D Worlds. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 7,* 301-318.

Mariotti, M. A. (2001). Introduction to Proof: Mediatioon of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics , 44,* 25-53.

Marrades, R., & Guttierez, A. (2000). Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics , 44* (1-3), 87-125.

Marrioti, M. A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics , 44* (1-3), 25-53.

Mercer, N. (1996). The Quality of Talk in Children's Collaborative Activity int the Classroom. *Learning and Instruction , 6* (4), 359-377.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of Angle Cocnept by Progressive Abstraction and Generalisation. *Educational Studies in Mathematics , 41,* 209-238.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (1998). Development of Angle Concept: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal , 10* (3), 4-27.

Nemirovksy, R., & Borba, M. (2004). Bodily Activity and Imagination in Mathematics. *Educartional Studies in Mathematics , 57* (3), 303-321.

Niss, M. (1998). Teacher Qualifications and the Education of Teachers. Στο C. Mammana, & V. Villani (Επιμ.), *Prepsectives of Geometry for the 21st Century* (Τόμ. 5, σσ. 297-318). Kluwer Academic Publishers.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings.* Netherlands: Kluwer academic Publishers.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics , 33*, 203-233.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., & Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings: An emploratory study with Cabri-geometry. Στο J. P. Ponte, & J. F. Matos (Επιμ.), *Proceedings of the 18th PME International Conference, 3*, σσ. 360-367.

Papert, S. (1980). *Mindstorms:Children, Computers and Powerful Ideas.* Boston, Massachusets: Harvester Press.

Papert, S., & Harel, I. (1991). *Situating Comstructionism.* Ablex Publishing Corpotation.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology.* (E. Duckworth, Μεταφρ.) New York: Columbia University Press.

Piaget, J. (1975). 'Piaget's Theory'. Στο P. B. Neubauer (Επιμ.), *The Proces of Child Development* (σσ. 164-212). New York: Jason Aronson.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The Child's Conception of Space.* London: Routlegde & Kegan Paul.

Popper, K. R. (1972). *Objective Knowledge.* Oxford: The Caledron Press.

Pratt, D., & Ainley, J. (1996). Construction of Meanings for Geometric Constructions: Two Contrasting cases. *International Journal of Computers for Mathematical Learning , 1* (3), 293-322.

Radforf, L., C. Baldini, C. S., Diallo, P., & Simbagoye, A. (2005). On Embodiement, Artifacts, and Signs: A Semiotic-cultural Perspective on Mathematical Thinking. Στο H. L. Chick, & J. L. Vincent (Επιμ.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for PME. 4*, σσ. 113-120. University of Melbourne, Australia.

Roschelle, J., & Teasley, S. (1995). The Construction of Share Knowledge in Collaborative Problem Solving. Στο C. O. Malley (Επιμ.), *Computer-supported Collaborative Learning* (σσ. 69-197). Berlin, Germany: Springer Verlag.

Samara, J., & Clements, D. (2002). Design of Microworlds in Mathematics ans Science Education. *Journal of Educational Computing Research , 27* (1), 1-3.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: AAcademic Press.

Skemp, R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics.* Harmondsworth: Penguin.

Stahl, G. (2006). Group Cognition: Computer Support for Building Collaborative Knowledge.

Stahl, G. (2011). 'How I view Learning and Thinking in CSCL Groups. *Research and Practice Technology Enhanced Learning* .

Stahl, G., Koschmann, T., & Suthers, D. (2006). Computer-supported Collaborative Leraning: A Historical Perspective. Στο R. K. Sawyer (Επιμ.), *Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (σσ. 409-426). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Star, S. L., & Griesemer, J. R. (1907-1939). Institutional Ecology, "translations" and boundary objects: Amateurs and professionals in Berkley's museum of vertebrate zoology. *Social Studies of Science , 19,* 387-420.

Star, S., & Griesemer, J. (1989). Institutional Ecology, 'Translations' and Boundary Objects: Amateurs and Professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39". Social Studies of Science. *Social Studies of Science , 19* (3), 387-420.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential. (R. Lesh, & A. E. Kelly, Επιμ.) *Research design in mathematics and science education* , 267-307.

Strässer, R. (1996). Students' Constructions and Proofs in a Computer Environmentt - Problems and Potentials of a Modelling Experience. Στο J. M. Laborde (Επιμ.), *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (Τόμ. 117, σσ. 203-217, Series F: Computer and Systems Sciences). Berlin: Springer Verlag.

Sutherland, R. (1987). A Study of the Use and Understanding of Algebra Related Concepts Within a Logo Environment. Στο J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Επιμ.), *Proceeding of the 11th International Conference, 1,* σσ. 241-247.

Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics , 23* (3), 29-33.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Στο D. Tall (Επιμ.), *Advanced Mathematical Thinking* (σσ. 4-21). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior , 18* (2), 1-19.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teacher's development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathemaatics Teacher Education , 10* (4-6), 415-432.

Vergnaud, G. (1991). La Théorie des Chq,ps Conceptuels. *Recherchers en didqctiaue des mathématics , 10* (2/3), 133-169.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development , 52*, 83-94.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrument Activity. *European Journal of Psychology in Education , 9* (3), 77-101.

Voigt, J. (1996). Negotiation of Mathematical Meaning in Classroom Practices: Social Interaction and Learning Mathematics. Στο L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Επιμ.), *Theories of mathematical learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathmatical norms. Στο P. Cobb, & H. Bauersfeld (Επιμ.), *Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (σσ. 163-201). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction , 14* (5), 445-451.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processess.* Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981). The Instrumental Method in Psychology. Στο V. Wertsch (Επιμ.), *The Concept Activity in Soviet Psychology* (σσ. 134-143). Armonk: M. E. Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language.* Cambridge (USA): MIT Press.

Waerden, B. L. (2000). *Η αφύπνιση της επιστήμης.* (Γ. Χριστιανίδης, Μεταφρ.) Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Weber, K. (2005). Student's Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal , 17* (3), 91-112.

Wegerif, R. (2005). Reason and Creativity in Classroom Dialogues. *Language and Education , 19* (3), 223-238.

Wegerif, R., & Yang, Y. (2011). Technology and Dialogic Space: Lessons from History and from the 'Argunaut' and 'Metafora' Projects. *CSCL 2011*. Hong Kong.

Wickens, C., Vincow, M., & Yeh, M. (2005). Design Applications of Visuospatial Thinking: The Importance of Frame of Reference. Στο P. Shah, & A. Miyake (Επιμ.), *The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking* (σσ. 383-425). Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations.* New York, NY: Macmillan.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education , 27* (4), 458-477.

Yang, Y., Wegerif, R., & Gwernan-Jones, R. (2012). *The Role of Technology Supporting Dialogues Using a Visual Language.*

Yin, R. K. (1984). *Case Study Research: Design and Methods.* Newbury Park, CA: Sage Publications.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2006). *Μαθηματικά Γ΄ γυμνασίου.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2003). Ευκλείδεια Γεωμετρία. ΟΕΔΒ.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2000). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου: Βιβλίο του Καθηγητή.* Αθήνα: ΟΕΔΒ (ανάδοχος ΕΜΕ).

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2006). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2006). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Ηρόδοτος. (1874). *Ηροδότου Ιστορίαι* (Τόμ. 1). (Α. Γ. Σκαλίδης, Μεταφρ.) Αθήνα: Ανέστης Κωνσταντινίδης.

Κεΐσογλου, Σ. (n.d.). Μαθηματικά Στ' Δημοτικού: Ηλεκτρονικό βιβλίο. Αθήνα.

Κεΐσογλου, Σ. (2012, Ιούλιος). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού: Ηλεκτρονικό βιβλίο.* Ανάκτηση από Ψηφιακό Σχολείο: http://digitalschool.minedu.gov.gr/modules/ebook/show.php/DSDIM101/467/3101,12477/extras/Experiments-Simulations/GeoGebra/kef57_efarmogi_2a/index.html

Κλιάπης, Π., Κασσώτη, Ό., & Οικονόμου, Θ. (2005b). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κλιάπης, Π., Κασσώτη, Ό., & Οικονόμου, Θ. (2005). *Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού: Βιβλίο εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης.* Αθήνα: Ελληνικά γράμματα.

Ορφανός, Σ., & Δημητρακοπούλου, Α. (2004). Σχεδιασμός Φύλλων Δραστηριοτήτων Μαθητών για Διερευνητικά Τεχνολογικά Περιβάλλοντα στις Φυσικές Επιστήμες: Η περίπτωση σχεδιασμοτ Δραστηριοτήτων Μοντελοποίησης. Στο Μ. Γρηγοριάδου (Επιμ.), *Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΕΤΠΕ. Β΄*, σσ. 3-13. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθήνας.

Σταμάτης, Ε. Σ. (1975b). *Ευκλείδου Γεωμετρία - Στοιχεία - Βιβλία 11.12.13.* (Τόμ. 4). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Σταμάτης, Ε. Σ. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία - Στοιχεία - Βιβλία 1.2.3.4.* (Τόμ. 1). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τεχνολογίας, Ε. Ε. (n.d.). *ETL*. Ανάκτηση από http://etl.ppp.uoa.gr/index-1.htm.