ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Μαθηματικών
Τμήμα Φιλοσοφίας -Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας
Τμήμα Μεθοδολογίας Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Τμήμα Επιστημών Αγωγής

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία

Γεωμετρικοί αυτομορφισμοί με έμφαση στα γραφήματα και διδακτικές προεκτάσεις

Αικατερίνη Δημητρακοπούλου
ΑΜ: 200913

Επιβλέπων Καθηγητής:
Διονύσιος Λάππας

ΑΘΗΝΑ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 2-7-2013 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Λάππα Διονύσιο επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτή Καθηγητή τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ	
2) Ράπτη Ευάγγελο	Καθηγητή τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ	
3) Σπύρου Παναγιώτη	Επίκουρο Καθηγητή τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ	

"As for everything else, so for a mathematical theory: beauty can be perceived but not explained"

Arthur Cayley

Ευχαριστίες

Η διπλωματική εργασία έχει εκπονηθεί στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Στο τέλος της πορείας αυτής θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου και την ιδιαίτερη εκτίμηση μου στους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις πολύτιμες εμπειρίες και γνώσεις που μοιράστηκαν μαζί μας και τους συμφοιτητές μου που συνεργαστήκαν μαζί μου τα τελευταία χρόνια. Ειδικότερα θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου Διονύσιο Λάππα ο οποίος με βοήθησε μέσα από γόνιμη συζήτηση στην επεξεργασία των μαθηματικών θεμάτων που συμπεριέλαβα στην εργασία μου.

- Τον καθηγητή κ. Ράπτη Ευάγγελο και τον Αναπληρωτή καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη που μου έκαναν την τιμή να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής.

- Τον κ. Κλαουδάτο Νικόλαο για τις συμβουλές τους και τις πολύτιμες ιδέες του και την ευκαιρία που μου έδωσε να πραγματοποιήσω μια εισαγωγική διδασκαλία για τη θεωρία γραφημάτων σε σχολική τάξη.

Περίληψη

Η μελέτη των γραφημάτων ως γεωμετρικών αντικειμένων εμπεριέχει απαραίτητα τη μελέτη των συμμετριών τους η οποία μπορεί να περιγραφεί με την ομάδα αυτομορφισμών τους. Υπάρχει μια πολύ σημαντική αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία ομάδων και τη θεωρία των αυτομορφισμών γραφημάτων η οποία οδηγεί στην κατασκευή γραφημάτων με αξιοσημείωτες ιδιότητες. Από την άλλη μεριά, σε αντίθεση με τις κλασσικές γεωμετρίες, τα περισσότερα πεπερασμένα γραφήματα δεν έχουν κανέναν άλλο αυτομορφισμό εκτός από τον ταυτοτικό. Στο γεγονός αυτό οφείλεται κάτι παράδοξο και φαινομένικά αντίθετο: κάθε (πεπερασμένη) ομάδα είναι ισόμορφη με την ομάδα αυτομορφισμών ενός (πεπερασμένου) γραφήματος.
Η μελέτη των γραφημάτων μέσω των συμμετριών τους έχει ρίζες στο κλασσικό παράδειγμα που βρίσκεται στο πρόγραμμα *Erlanger* του *Felix Klein*, όπου αναφέρεται ότι η γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί σα χώρος της δράσης των ομάδων.
Στα κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφονται οι τρόποι με τους οποίους οι ομάδες και τα γραφήματα αλληλεπιδρούν.

Λέξεις κλειδιά:Γεωμετρία *Klein*, Αυτομορφισμοί γραφημάτων, γραφήματα *Cayley*, ομάδες.

Abstract

A study of graphs as geometric objects necessarily involves the study of their symmetries, described by the group of automorphisms. There has been a significant interaction between abstract group theory and the theory of graph automorphisms, leading to the construction of graphs with remarkable properties. On the other hand, in contrast to classical geometries, most finite graphs have no automorphisms other than the identity. This fact is largely and somewhat paradoxically responsible for its seeming oppposite: every (finite) group is isomorphic to the automorphism group of a (finite) graph.
The study of graphs via their symmetries is rooted in the classical paradigm, stated in Felix Klein's "Erlanger Programm", that geometries are to be viewed as domains of a group action. Although graphs, as incident structures, may seem to be degenerate geometries, we note that any incident structure such as projective plane, can be represented by a graph. Such representations preserve symmetry and allow fruitful generalizations.
In the following chapters I try to illustrate the variety of ways in which group and graph interact.

Keywords: Klein geometry, graph automorphisms, Cayley graph, group theory.

στον πατέρα μου Ανδρέα
στη μητέρα μου Ελένη
στον αδερφό μου Γιάννη

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ιστορική αναδρομή

> Thus, in a sense, mathematics has been most advanced by those who distinguished themselves by intuition rather than by rigorous proofs.
>
> Felix Klein

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες έχουν ήδη αναπτυχθεί, όταν το 1872 ο Felix Klein εκδίδει, για την εναρκτήρια διάλεξή του ως καθηγητή στο *Erlanger*, ένα μανιφέστο υπό τον τίτλο Συγκριτικές παρατηρήσεις πάνω σε νέες γεωμετρικές έρευνες (Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen). Στη διακήρυξη αυτή, γνωστή ως Πρόγραμμα *Erlanger*, προτείνει μια νέα κατηγοριοποίηση των γεωμετριών στη βάση της προβολικής γεωμετρίας και της θεωρίας ομάδων. Είναι εδώ, που η αφηρημένη άλγεβρα και η θεωρία ομάδων θα θεωρητικοποιήσουν την έννοια της συμμετρίας. Σε κάθε γεωμετρία ο *Klein* αντιστοιχίζει μια ομάδα συμμετριών, δηλαδή μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτα κάποια χαρακτηριστικά των γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ. γωνίες, εμβαδά, μήκη). Για την ευκλείδεια γεωμετρία, οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι οι ισομετρίες, που αποτελούν υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$.

1.1 Από την Ευκλείδεια γεωμετρία στη γεωμετρία του *Klein*

Για να προσδιοριστεί το περιεχόμενο οποιασδήποτε επιστήμης πρέπει να ονομάσουμε τα αντικείμενα και στη συνέχεια να οριστούν οι ιδιότητες των αντικειμένων που αυτή μελετά. Στην περίπτωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας τα γεωμετρικά αντικείμενα

είναι τα επίπεδα σχήματα και τα στερεά. Συνήθως αντι για τους όρους αυτούς χρησιμοποιούμε σύνολα σημείων στο επίπεδο και στο χώρο. Οι ιδιότητες των σχημάτων που μελετάμε καθορίζονται από τη δήλωση μιας ισοδυναμίας των σχημάτων. Ισοδύναμα ή ίσα θεωρούνται τα σχήματα για τα οποία υπάρχει μια ισομετρία[1] που μεταφέρει το ένα σχήμα πάνω στο άλλο.
Ο *Klein*, μέσα από τη μελέτη της Ευκλείδειας γεωμετρίας, παρατήρησε ότι στα περισσότερα προβλήματα δεν παρουσιάζονται μόνο ισομετρίες αλλά είναι συχνή και η παρουσία όμοιων σχημάτων. Με τον όρο όμοια σχήματα αναφερόμαστε στα σχήματα αυτά που διαφέρουν μόνο στο μέγεθος δηλαδή το ένα σχήμα είναι μεγένθυση ή σμίκρυνση του άλλου. Στα σχήματα αυτά δεν έχουν σημασία τα μεγέθη τους γιατι δεν εμπλέκονται στην αποδεικτική διαδικασία. Επίσης, δεν παίζουν σημαντικό ρόλο τα μήκη.
Το γεωμετρικό αντικείμενο είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες από τους μετασχηματισμούς ομοιότητας. επομένως ο *Klein* δε μελέτησε τόσο τα σχήματα αλλά έστρεψε την προσοχή του στους μετασχηματισμούς και πρότεινε το αντικείμενο της μελέτης να είναι οι ιδιότητες των σχημάτων και οι ομάδες. Κάθε γεωμετρική ιδιότητα θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κατω από τη δράση των ομάδων που σχετίζονται με τη γεωμετρία.

1.2 Από τη γεωμετρία στη γεωμετρία θέσης

Ο *W.Leibniz* σε επιστολή του το 1679 προς τον *C.Huygens* παρατήρησε ότι ¨μας χρειάζεται ένα άλλο είδος ανάλυσης γεωμετρικής ή γραμμικής, που να ασχολείται απευθείας με τη θέση, όπως η Άλγεβρα ασχολείται με το μέγεθοσ¨. Μάλιστα, χρησιμοποίησε τον όρο "*analysis situs*" δηλ. ανάλυση της θέσης για το είδος αυτό της ανάλυσης, το οποίο κατά καιρούς ονομάστηκε "*geometria situs*" ή "*geometry of position*" για να καταλήξει σήμερα στον όρο Θεωρία Γραφημάτων.

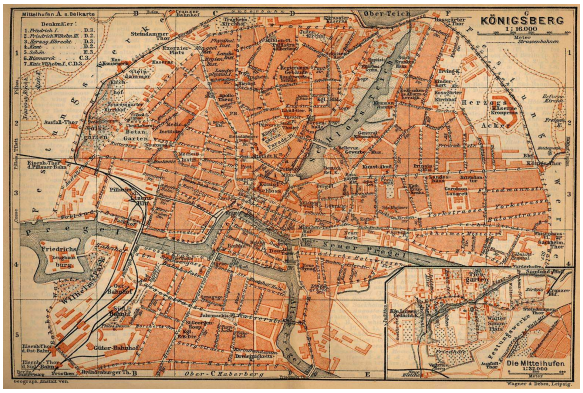
Το 1735 ο *L.Euler* παρουσίασε στην ακαδημία επιστημών της Αγίας Πετρούπολης το περίφημο πρόβλημα των γεφυρών του *Konigsberg*. Αυτό το πρόβλημα θεωρείτε ως το γενέθλιο πρόβλημα της θεωρίας γραφημάτων, διότι στη λύση που πρότεινε έλαβε υπόψη του μόνο τις θέσεις και όχι τις σχετικές αποστάσεις των γεφυρών.

1.2.1 Το πρόβλημα

Η πόλη *Konigsberg* της Πρωσίασ(σημερινό *Kaliningrad* της Ρωσίας), ιδρύθηκε στις δύο πλευρές του ποταμού Πρεγελ και περιλάμβανε δύο νησιά που συνδέονταν μεταξύ τους άλλα και με την ηπειρωτική χώρα με επτά γέφυρες. Η πόλη αποτελείται από τέσσερις τομείς που δημιουργούνται από τους κλάδους του ποταμού *Pregel* πάνω από τους οποίους ήταν χτισμένες οι επτά γέφυρες

[1]Με τον όρο ισομετρία θεωρούμε ένα μετασχηματισμό μεταξύ των σημείων στο χώρο που διατηρεί τις αποστάσεις.

Οι κάτοικοι της πόλης είχαν δημιουργήσει το εξής πολύ δύσκολο πρόβλημα: Να βρεθεί μια διαδρομή στην πόλη που θα διέσχιζε κάθε γέφυρα μόνο μία φορά. Στα νησιά θα μπορούσε να φτάσει κανείς μόνο μέσω των γεφυρών και κάθε γέφυρα πρέπει να έχει περαστεί ολόκληρη κάθε φορά(χωρίς κάποιος να περπατήσει μέχρι τη μέση και να γυρίσει πίσω).
Μέρος πλέον της ζωής των κατοίκων που προσπαθούσαν στον καθημερινό περίπατο τους όταν είχαν ελεύθερο να πετύχουν τη διαδρομή που θα τους έδινε τη λύση. Όσο όμως και να προσπαθούσαν, πάντα υπήρχε μία γέφυρα που δεν μπορούσαν να προσεγγίσουν.
Ο *Leonard Euler* ρωτήθηκε αν μπορεί να υποδείξει ότι υπάρχει διαδρομή η οποία να διέρχεται από όλες τις γέφυρες ακριβώς μια φορά και να καταλήγει, αν είναι δυνατόν, στο ίδιο σημείο από όπου ξεκίνησε. Ο *Euler* παρατήρησε ότι το μοναδικό στοιχείο της διαδρομής που ενδιαφέρει το πρόβλημα είναι η σειρά με την οποία η διαδρομή περνάει πάνω από τις γέφυρες. Αναπαρέστησε τα τμήματα ξηράς ως κόμβους και τις γέφυρες ως γραμμές που ενώνουν τα τμήματα ξηράς. Αυτό που τον ενδιέφερε δεν ήταν το μέγεθος τους αλλά η θέση τους.

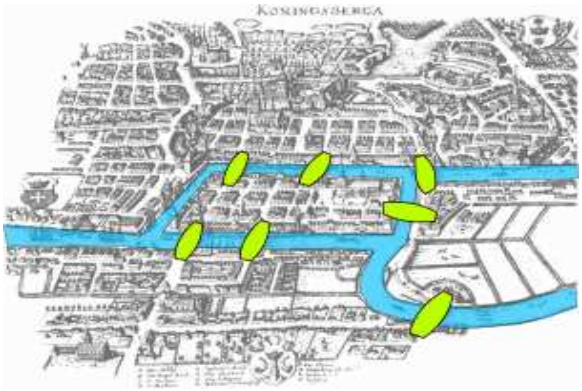


Σχήμα 1.1: Ο χάρτης του *Konigsberg*.

1.2.2 Η απάντηση

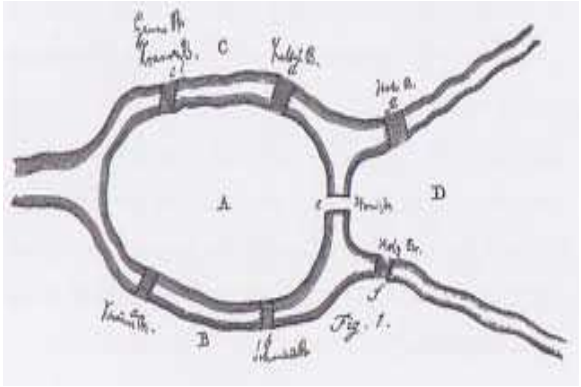
Το σημαντικό εννοιολογικό άλμα που πραγματοποίησε ο *Euler*, ήταν να συνειδητοποιήσει ότι οι πραγματικές διαστάσεις της πόλης δεν είχαν καμία σχέση με το πρόβλημα. Το πιο σημαντικό στοιχείο ήταν, το πώς συνδέονταν οι γέφυρες μεταξύ τους. Η ίδια αρχή διέπει για παράδειγμα και τους χάρτες του μετρό: δεν είναι ένας ακριβής πραγματολογικά και φυσικά χάρτης, απλά περιέχει πληροφορίες για το πώς είναι συνδεδεμένοι οι σταθμοί. Όταν ο *Euler* σχεδίασε και ανέλυσε τον χάρτη του *Konigsberg* με αυτό το τρόπο, συνειδητοποίησε ότι οι 4 περιοχές γης που συνδέονταν από τις γέφυρες, μπορούσαν να αντικατασταθούν από σημεία, ενώ οι γέφυρες από γραμμές που ένωναν τα σημεία. Το πρόβλημα λοιπόν του μοναδικού περιπάτου πάνω από όλες τις γέφυρες(και της μοναδικής λύσης στο πρόβλημα), ισοδυναμούσε με ένα πρόβλημα σχεδίασης στο χαρτί, ενός σχεδιαγράμματος, χωρίς

να σηκωθεί το μολύβι από το χαρτί, αλλά και χωρίς να ζωγραφιστεί η ίδια γραμμή δύο φορές.



Σχήμα 1.2: Οι γέφυρες του *Konigsberg*.

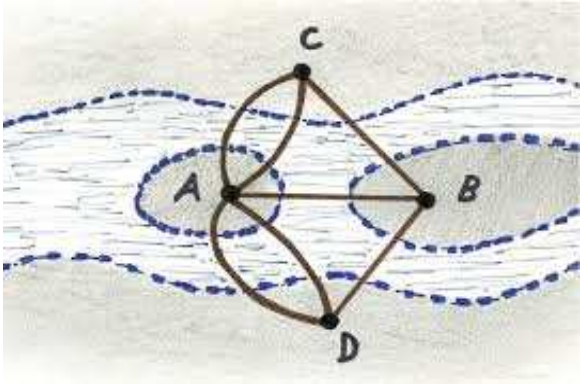
Το 1736 ο *Euler*, μετά την επικοινωνία του με άλλους μαθηματικούς έγραψε ένα άρθρο [2]για το πρόβλημα στο οποίο ανέλυσε το πρόβλημα και γενίκευση τη λύση του δίνοντας απάντηση και σε άλλα προβλήματα του ίδιου τύπου. Το άρθρο αυτό έχει μεγάλη σημασία τόσο για τη θεωρία γραφημάτων όσο και για την ανάπτυξη των μαθηματικών.



Σχήμα 1.3: Το αρχικό σχήμα του *Euler*.

> Η λύση στηρίζεται μόνο στη λογική και η ανακάλυψη της δεν εξαρτάται από καμία μαθηματική αρχή *Euler* 1736

[2]The solution of a problem relating to the geometry of position



Σχήμα 1.4: Μεταγενέστερο σχήμα- Γράφημα.

Το 1750 πάλι ο *Euler* παρατήρησε ότι στα κυρτά γεωμετρικά στερεά, ανεξάρτητα από το μέγεθος ή τη μορφή τους, ισχύει η σχέση:

$$H + S = A + 2$$

όπου H το πλήθος εδρών, S το πλήθος στερεών γωνιών και A το πλήθος των ακμών του στερεού. Η σχέση θα αποδεικνύεται ότι ισχύει στα επίπεδα γραφήματα.
Το 1847 ο *Kirchhoff* θέλοντας να υπολογίσει τη ζεύξη σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, αντιστοίχισε ένα γράφημα στο κύκλωμα.
Ο *Cayley* το 1857 αντιστοίχισε γραφήματα στα μόρια των υδρογονανθράκων, έτσι ώστε τα άτομα του άνθρακα παριστάνονται με μικρούς κύκλους και τα άτομα του υδρογόνου με γραμμές.
Σήμερα τα γραφήματα χρησιμοποιούνται σε όλες σχεδόν τις επιστήμες, διότι το μόνο που απαιτείται είναι κάποια αντικείμενα που μεταξύ τους έχουν ή δεν έχουν κάποια σχέση.

Μέρος I

Γεωμετρικοί αυτομορφισμοί

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία από τη θεωρία ομάδων

2.1 Ορισμός και στοιχειώδεις ιδιότητες

Για να δώσουμε την έννοια της ομάδα χρειαζόμαστε δυο στοιχεία, ένα σύνολο A μαζί με μια πράξη $*$ έναν κανόνα ο οποίος μας επιτρέπει να συνδυάζουμε μεταξύ του τα μέλη κάθε διατεταγμένου ζεύγους $(x, y) \in A \times A$ και να λαμβάνουμε ένα μονοσήμαντα ορισμένο ¨αποτέλεσμα' $x * y$ το οποίο να ανήκει επίσης στο σύνολό A.

Ορισμός 2.1.1. *Μια ομάδα είναι ένα σύνολο A, μαζί με μια πράξη $*$ επι του A, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:*

i. Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική, δηλαδή ισχύει:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

για οποιαδήποτε στοιχεία $x, y, z \in A$.

ii. Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in A$, το οποίο λέγεται μοναδιαίο ή ταυτοτικό στοιχείο για την $*$ στο A για το οποίο ισχύει:

$$x * e = e * x = x, \forall x \in A$$

iii. Για κάθε στοιχείο x της A υπάρχει ένα στοιχείο x' τέτοιο ώστε

$$x' * x = x * x' = e$$

το x' ονομάζεται αντίστροφο του x.

Παρατήρηση 2.1.2. *Το A είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$, δηλαδή $(a*b) \in A$ για κάθε $a, b \in A$.*

Ορισμός 2.1.3. *Μια ομάδα A λέγεται μεταθετική ή αβελιανή όταν*

$$x * y = y * x \ \forall x, y \in A$$

Ορισμός 2.1.4. *Τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας A ονομάζουμε το πληθος των στοιχείων της A. Ομάδες οι οποίες περιέχουν άπειρου πλήθους στοιχεία ονομάζονται ομάδες με άπειρη τάξη.*

Ορισμός 2.1.5. *Τάξη ενός στοιχείου μιας ομάδας A ονομάζουμε το μικρότερο θετικό ακέραιο για τον οποίο ισχύει $a^n = e$ όπου e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.*

Ορισμός 2.1.6. *Μια υποομάδα μιας ομάδας A είναι ένα υποσύνολο των στοιχείων της ομάδας A, το οποίο, εφοδιασμένο με την πράξη της ομάδας, σχηματίζει και αυτό ομάδα.*

Ορισμός 2.1.7. *Όταν υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in A$ το οποίο παράγει ολόκληρη την ομάδα A, τότε λέμε ότι η A είναι μια κυκλική ομάδα και συμβολίζεται με $< x >$.*

Ορισμός 2.1.8. *Ένα στοιχείο x μια ομάδας A παράγει την A και λέγεται γεννήτορας της ομάδας A αν $< x >= A$.*

2.2 Αυτομορφισμοί ομάδων

Ορισμός 2.2.1. *Μια απεικόνιση f μια ομάδας A σε μια ομάδα A' λέγεται ομομορφισμός ισχύει η σχέση :*

$$f(\alpha \circ \beta) = f(\alpha) \circ f(\beta)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in A$

Ορισμός 2.2.2. *Αν επιπλέον ο ομομορφισμός είναι 1-1 και επί, λέγεται ισομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι δυο ομάδες είναι ισόμορφες και γράφουμε συμβολικά $A_1 \cong A_2$.*

Ορισμός 2.2.3. *Ένας αυτομορφισμός μιας ομάδας A είναι ένας ισομορφισμός από την A στην A. Το σύνολο όλων των αυτομορφισμών σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, η οποία καλείται ομάδα αυτομορφισμών της A.*

Ορισμός 2.2.4. *Το σύνολο των αυτομορφισμών της A είναι εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης είναι ομάδα και συμβολίζεται με $Aut(A)$.*

2.3 Μεταθέσεις

Ορισμός 2.3.1. *Μια μετάθεση ενός τυχαίου συνόλου X λέγεται μια συνάρτηση από το X στο X που είναι ταυτόχρονα ένα προς ένα και επί. Με άλλα λόγια, μια μετάθεση του X είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση του X επι του X.*

Ορισμός 2.3.2. *Η συλλογή όλων των μεταθέσεων ενός μη κενού συνόλου X αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.*

Ορισμός 2.3.3. *Έστω A πεπερασμένο σύνολο $\{1, 2, ..., n\}$. Η ομάδα όλων των μεταθέσεων του A καλείται συμμετρική ομάδα βαθμού n και συμβολίζεται με S_n . Η τάξη της συμμετρικής ομάδας είναι $n!$.*

Παράδειγμα 2.1. *Η ομάδα S_3 έχει $3! = 6$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$. Γράφουμε όλες τις μεταθέσεις του A.*

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 2.3.4. *Η ομάδα S_3 δεν είναι αβελιανή.*

Αν θεωρήσουμε τις μεταθέσεις $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,
έχουμε ότι $\rho_1 \cdot \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
ενώ $\mu_1 \cdot \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \rho_1 \cdot \mu_1$

Παρατηρήσεις 2.3.5. .

- *Ένας 2-κύκλος λέγεται αντιμετάθεση.*
- *Κάθε μη ταυτοτική μετάθεση μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση ανα δυο ξένων μεταξύ τους αντιμεταθέσεων.*
- *Μια μετάθεση που γράφεται ως σύνθεση άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων ονομάζεται άρτια μετάθεση.*
- *Κάθε μετάθεση που γράφεται ως σύνθεση περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων ονομάζεται περιττή μετάθεση.*

Ορισμός 2.3.6. *Το σύνολο A_n των άρτιων μεταθέσεων n στοιχείων είναι υποομάδα της S_n, ονομάζεται εναλλάσσουσα ομάδα των n στοιχείων και είναι τάξης $\frac{n!}{2}$*

Ορισμός 2.3.7. *Οι μεταθέσεις ϵ,(12)(34),(13)(24) και(14)(23) αποτελούν κανονική υποομάδα της A_4. Η ομάδα αυτή ονομάζεται $4-$ομάδα του Klein.*

Ιστορικά στοιχεία

- Στοιχειώδεις ιδιότητες των μεταθέσεων βρέθηκαν από τους *Lagrange*, *Galois* και *Abel*.
- Συστηματική μελέτη της ομάδας μεταθέσων έγινε από τον *Cauchy* σε μια σειρά εργασιών που δημοσιεύτηκαν το 1840.

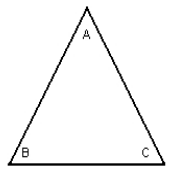
- Την αφηρημένη έννοια, δηλαδή τον αξιωματικό ορισμό της ομάδας, εισήγαγε ο *Cayley* το 1853.
- Στον *Cayley* οφείλεται το σημαντικό αποτέλεσμα ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n.

2.3.1 Ομάδες ισόμορφες με ομάδες μεταθέσεων

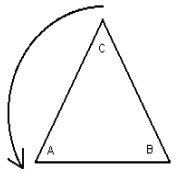
Θεώρημα 2.3.8 (*Cayley*). *Κάθε ομάδα είναι ισόμορφη με μια υποομάδα μιας ομάδας μεταθέσεων.*

Παράδειγμα 2.2. *Υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία της S_3 του παραδείγματος 2.1 και τους τρόπους με τους οποίους δυο αντίγραφα ενός ισοπλεύρου τριγώνου με κορυφές 1,2 και 3 μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε το ένα να καλύπτει το άλλο. Οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο στον εαυτό του αποτελούν μια ομάδα D_3 ισόμορφη της συμμετρικής ομάδας S_3.*

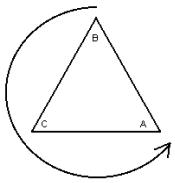
Απόδειξη. Οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο στον εαυτό του είναι οι στροφές $1_T, \sigma, \tau$ του επιπέδου γύρω από το κέντρο του κατα γωνία $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.



Σχήμα 2.1: Στροφή κατά 0

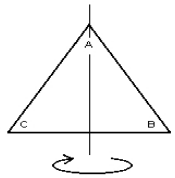


Σχήμα 2.2: Στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$

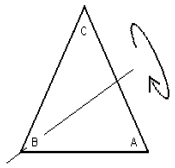


Σχήμα 2.3: Στροφή κατά $\frac{4\pi}{3}$

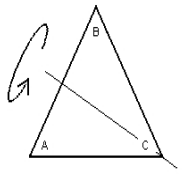
και οι ανακλάσεις ως προς τις διχοτόμους των γωνιών του.



Σχήμα 2.4: Ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της γωνίας A.



Σχήμα 2.5: Ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της γωνίας B.

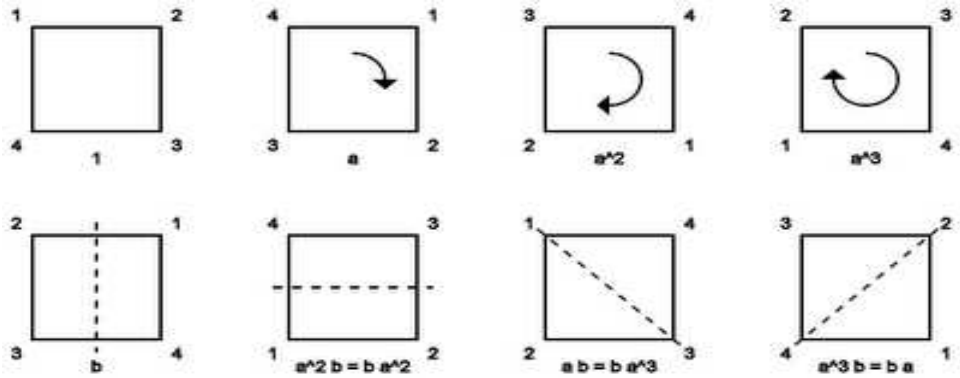


Σχήμα 2.6: Ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της γωνίας C.

□

Παράδειγμα 2.3. *Η Διεδρική ομάδα D_4 είναι η ομάδα των συμμετριών του τετραγώνου και είναι ισόμορφη με υποομάδα της S_4.*

Έχουμε 4 στροφές γύρω από το κέντρο του τετραγώνου κατα γωνίες $0, \frac{2\pi}{4}, 2\frac{2\pi}{4}, 3\frac{2\pi}{4}$.
Επίσης έχουμε 4 ανακλάσεις, 2 ως προς τις δυο μεσοκαθέτους των πλευρών και δυο ανακλάσεις ως προς τις δυο διαγωνίους.
Συνολικά έχουμε 8 μεταθέσεις, επομένως η τάξη της D_4 είναι 8.



Σχήμα 2.7: Οι συμμετρίες του τετραγώνου.

Παρατήρηση 2.3.9. *Η διεδρική ομάδα D_n είναι η ομάδα συμμετριών του κανονικού ν-γώνου.*

Ορισμός 2.3.10. *Μια ομάδα ονομάζεται διεδρική D_n με $n \geq 3$ αν παράγεται από δυο στοιχεία α και β, για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\alpha^n = \beta^n = e$ και $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$*

Παρατήρηση 2.3.11. *Η τάξη της νιοστής διεδρικής ομάδας D_n είναι $|D_n| = 2n$.*

Κεφάλαιο 3

Η γεωμετριά του *Klein*

3.1

Το Πρόγραμμα *Erlanger* αποτελεί μια πολλή σημαντική συμβολή στη μελέτη της σύγχρονης γεωμετρίας. Το 1872, ο *Felix Klein* πρότεινε έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο για να μελετήσουμε τις διάφορες γεωμετρίες, δίνοντας έμφαση στη δομή τους. Έφτιαξε μια δομή με βάση την οποία μπορούμε να θέτουμε σε αντιπαράθεση τις προς μελέτη γεωμετρίες και να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά τους. Ο *Klein*, στηριζόμενος στις μελέτες του για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, κατάφερε να τις συνδέσει με τη Θεωρία Ομάδων. παρήγαγε μια ενιαία μαθηματική δομή με τεράστια σημασία για την εξέλιξη της γεωμετρίας, αλλά και των μαθηματικών γενικότερα.

Κεντρική έννοια στη θεωρία του *Klein* έχουν οι μετασχηματισμοί, η χρήση των οποίων επιτρέπει την κατασκευή του εκάστοτε γεωμετρικού χώρου. Όπως γνωρίζουμε, ένας μετασχηματισμός είναι μια $1-1$ αντιστοιχία του γεωμετρικού μοντέλου επί του εαυτού του, δηλαδή ένας αυτομορφισμός. Η ομάδα των αυτομορφισμών μιας μαθηματικής δομής καθώς και η ιδιότητα τους να αφήνουν αναλλοίωτα ένα σχήμα ή μια συνάρτηση, είναι οι θεμέλιοι λίθοι για τον *Klein*.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η έννοια της ισότητας (*congruence*) παίζει θεμελιώδη ρόλο, κάτι που αντίστοιχα συμβαίνει και στη θεώρηση του *Klein*. Αν πάρουμε ως παράδειγμα την ισότητα σχημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, για την περίπτωση των τριγώνων θα δούμε ότι ορίζουμε ισότητα όταν ταυτίζονται κάποια από τα χαρακτηριστικά τους, όπως το μήκος των πλευρών ή το μέτρο των γωνιών. Όμως, εδώ η έννοια της ισότητας μετατοπίζεται προς την έννοια της μέτρησης, αφού για να είναι ίσα τα δυο τρίγωνα πρέπει τα μέτρα των αντίστοιχων πλευρών τους να είναι ίσα, και συνεπώς, η ισότητα έχει δευτερεύοντα χαρακτήρα.
Ο *Klein* διατύπωσε διαφορετικά τη σκέψη του για την ισότητα και απέδωσε στην έννοια πρωτεύοντα ρόλο. Απομακρύνθηκε απόλυτα από την κατασκευαστική θεωρία των αξιωμάτων και των αιτημάτων και τοποθέτησε τη μέτρηση σε θέση που συμπληρώνει

την ισότητα. Ξεκίνησε τη μελέτη του θεωρώντας το επίπεδο χωρίς αξιώματα και μέτρηση, σα σύνολο εφοδιασμένο απλώς με μια σχέση ισότητας. Κάθε γεωμετρία τώρα, θα καθορίζεται πλήρως από τον τρόπο που ορίζεται κάθε φορά η ισότητα. Έτσι, η μέτρηση θα εμφανίζεται στη γεωμετρία, μόνο αν παράγει ταυτόσημα αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σε ίσα σχήματα.

3.2 Η άποψη του *Klein* για τη γεωμετρία

Ο Felix Klein πρότεινε μια πλατφόρμα για την ανάπτυξη των μαθηματικών. Με τη σημερινή ορολογία:
Τα μαθηματικά είναι η μελέτη των δομών και των αυτομορφισμών τους. Λέγοντας μαθηματικά είχε στο μυαλό του τη γεωμετρία και όχι όλα τα μαθηματικά.

- Ο *Klein* βάζει πρωταρχικό ρόλο στη γεωμετρία τους μετασχηματισμούς που ξεκίνησαν από την προβολική.
- Η Γεωμετρία αναπτύσσεται με την βοήθεια νεωτέρων και θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, όπως οι δομές της ομάδας και του μετρικού χώρου. Έτσι έχουμε απαλλαγή από τα δεσμά της εποπτείας , η οποία είτε στον Ευκλείδη, είτε και στον *Hilbert* παίζει σημαντικό ρόλο.
- Η Γεωμετρία, μπορεί και δίνει ενιαία διατύπωση στα κύρια ζητούμενα επί μέρους περιοχών των μαθηματικών, όπως :
  Τοπολογικών και ιδιαίτερα μετρικών χώρων
  Ευκλείδειων διανυσματικών χώρων (με θετικά ορισμένο εσωτ. γινόμενο) και άρα χώρων Ευκλείδειων στο $\mathbb{R}^n$
- Οι συμμετρίες είναι οι αυτομορφισμοί της γεωμετρικής δομής

3.3 Ορισμός της Γεωμετρίας του *Klein*

Έστω σύνολο X$\neq \emptyset$ και

$$H(X) = \{f/f : X \to X \text{με} f\text{"}1-1\text{"} \text{και επί}\}$$

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι το $H(X)$, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων «ο», είναι ομάδα.

Ορισμός 3.3.1 (Ορισμός Γεωμετρίας *Klein*). *Μια Γεωμετρίας Klein είναι το ζεύγος* (G, X) *όπου* $Q \neq \emptyset$ *και* G *υποομάδα του* $H(X)$.

Η ιδέα του Klein

Η γεωμετρία είναι πλάθω το χώρο. Δεν προσθέτω ή αφαιρώ σημεία παίρνω όλες τις ένα προς ένα και επί απεικονίσεις. Κάθε τέτοια απεικόνιση είναι και ένας μετασχηματισμός του χώρου.
θα δώσουμε στη συνέχεια μια παραλλαγή του ορισμού που δίνει την ουσία πραγμάτων.
Θωρούμε μη κενό σύνολο $X \neq \emptyset$, $H(X) = \{f : X \to X\}$, όπου f 1-1 και επί συνάρτηση. Το $H(X)$ έχει δομή ομάδος με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.

$$g \circ f : X \to^f X \to^g X$$

$I_X : X \to X \; X \to I_X(x) = x, \forall x \in X$
άρα η ταυτοτκή απεικόνιση $I_X \in H(X)$
Αν $f \in H(X)$ τότε $f^{-1} \in H(X)$ δηλαδή για κάθε στοιχείο υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση.
Ταυτόχρονα υπάρχει και μια απεικόνιση

$$\omega : H(X) \times X \to X$$

$$\omega(f(x)) = f(x), \forall f \in H(X), x \in X$$

Η τριάδα $(H(X), X, \omega)$ είναι γεωμετρία κατα Klein .

Η $H(X)$ επαναδιευθετεί τα στοιχεία του χώρου δηλαδή αλλάζει τη μορφή του χώρου.

Το αντικείμενο έρευνας της Γεωμετρίας του *Klein* Αυτό είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των «σχημάτων» δηλαδή των μη κενών υποσυνόλων του X οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες ως προς την Γ .

Με λίγα λόγια επιλέγουμε γεωμετρία επιλέγοντας τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Επιπλέον, τα σχήματα ταξινομούνται σε κλάσεις ισοδυναμίας διαφέροντας μόνο στη θέση την οποία κατέχουν σε κάθε γεωμετρία. Άρα κάθε γεωμετρία *Klein* θα έχει τη δική της ομάδα, άρα θα έχει και τη δική της αναλλοίωτη.

3.3.1 Αναλλοίωτες

Οι αναλλοίωτες (*invariants*) είναι η σημαντικότερη έννοια που εισήγαγε ο *Klein* με το πρόγραμμά του. Βασικός στόχος είναι η ένταξη των γεωμετριών σε κατηγορίες οι οποίες προκύπτουν από τον προσδιορισμό των ομάδων των μετασχηματισμών του Ευκλείδειου και του μη Ευκλείδειου επιπέδου. Αναλλοίωτες είναι οι έννοιες που περιγράφουν τη σταθερότητα ή τη μη αλλαγή των σχημάτων μετά τη δράση ενός μετασχηματισμού.

Ορισμός 3.3.2. *Μια ιδιότητα του «σχήματος» $S \subseteq X$ θα λέμε ότι παραμένει αναλλοίωτη ως προς G , αν το $f(S)$ έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $f \in G$.*

Ένα σύνολο από σχήματα είναι αναλλοίωτο της γεωμετρίας, αν περιέχει όλα τα ίσα σχήματα που προκύπτουν μέσω των μετασχηματισμών. Το ζητούμενο από κάθε γεωμετρία *Klein* είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των υποσυνόλων του X που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς την Γ .

- Η Ευκλείδεια γεωμετρία αφορά τη μελέτη των αναλλοίωτων της υποομάδας των μετασχηματισμών που διατηρούν το μήκος.

- Η Υπερβολική γεωμετρία αφορά τη μελέτη των αναλλοίωτων της υποομάδας εκείνων των προβολικών μετασχηματισμών που αφήνουν αναλλοίωτη μια δοσμένη πραγματική κωνική τομή.

- Η Ελλειπτική γεωμετρία αφορά τη μελέτη των αναλλοίωτων της υποομάδας εκείνων των προβολικών μετασχηματισμών που αφήνουν αναλλοίωτη μια δοσμένη φανταστική κωνική τομή.

3.4 Μετρική και ισομετρίες

Μια απεικόνιση $d : X \times X \to R$ καλείται μετρική επί του X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

Ορισμός 3.4.1. *1. $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $r(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.*

2. $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 3.4.2. *Η ευκλείδεια μετρική d στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διατεταγμένων $n-$άδων πραγματικών αριθμών, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ορίζεται ως εξής:*
Για δυο στοιχεία $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Ορισμός 3.4.3. *Μια απεικόνιση $f : X \to X$ θα λέγεται ισομετρία , αν*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in X$$

3.5 Εφαρμογές

Θα δούμε πώς αυτή εφαρμόζεται σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών:

- **ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ**
  Όταν εισάγουμε μια τοπολογία σε ένα σύνολο, το εφοδιάζουμε στην πραγματικότητα με δυνατότητα ορισμού σύγκλισης ακολουθιών σε αυτό. Αρα μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που διατηρούν την σύγκλιση. (Αν μια ακολουθία συγκλίνει στο u , τότε και η ακολουθία των εικόνων των όρων της ακολουθίας μέσω της f, να συγκλίνει στην εικόνα του $u =: f(u)$)
  Αυτές είναι οι συνεχείς απεικονίσεις.
  Αλλά για να έχουν δομή ομάδας, θα πρέπει να αντιστρέφονται, άρα περιοριζόμαστε στο σύνολο των ομοιομορφισμών του X . Επομένως το (H(X), X) είναι μια γεωμετρία $Klein$. Όταν μελετάμε αυτήν, μελετάμε ουσιαστικά τον τοπολογικό χώρο X. Παράδειγμα ιδιότητας που παραμένει αναλλοίωτη ως προς την H(X) είναι η συμπάγια (Η εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω συνεχούς «1-1» και «επί» είναι συμπαγές σύνολο.)

- **ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ**
  Μια μετρική d σε ένα σύνολο,$X \neq \emptyset$ ουσιαστικά είναι ο εφοδιασμός του με την έννοια της απόστασης μεταξύ των σημείων του. Επίσης , επάγεται σε αυτό μια τοπολογία με περιοχές τις σφαίρες ως προς την μετρική d . Από τις απεικονίσεις $f : X \to X$ μας ενδιαφέρουν αυτές που διατηρούν την απόσταση, δηλαδή οι ισομετρίες.

Μέρος II

Γραφήματα και αυτομορφισμοί

Κεφάλαιο 4

Βασικοί Ορισμοί

4.1 Η έννοια του γραφήματος

Ορισμός 4.1.1. *Καλούμε γράφημα κάθε διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και E είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του V με δυο στοιχεία. Καλούμε τα στοιχεία του V κορυφές του G και τα στοιχεία του E ακμές του G. Για κάθε ακμή $e = v, u$ καλούμε τις κορυφές u και v άκρα της e και λέμε ότι οι κορυφές u και v είναι συνδεδεμένες στο G.*

Όσον αφορά τον κύριο ορισμό , τα γραφήματα διακρίνονται σε δυο κατηγορίες:

Ορισμός 4.1.2. *Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (V, E) όπου $V = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ το σύνολο των κορυφών του και $E = \{e_1, e_2, ...e_m\}$ είναι το σύνολο των ακμών του. Κάθε ακμή είναι ένα διμελές σύνολο κορυφών $e = \{v_i, v_j\}$*

Ορισμός 4.1.3. *Ένα κατευθυνόμενο γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (V, E) όπου $V = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ το σύνολο των κορυφών του και $E = \{e_1, e_2, ...e_m\}$ είναι το σύνολο των ακμών του. Κάθε ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών $e = (v_i, v_j)$*

Ορισμός 4.1.4. *Θεωρούμε γράφημα G και έστω $S \subseteq V$. Καλούμε γειτονία του S στο G το σύνολο $N = \{u \in V; \exists v \in S : \{v, u\} \in E\}$ δηλαδή το σύνολο όλων των κορυφών του G που είναι συνδεδεμένες με τη v και δεν ανήκουν στο S.*

Ορισμός 4.1.5. *Βαθμό κορυφής ενός γραφήματος καλούμε το πλήθος των κορυφών με τις οποίες συνδέεται.*

Παρατηρήσεις

1. Δυο κορυφές που συνδέονται με την ίδια ακμή ονομάζονται γειτονικές.

2. Αν δυο ακμές συνδέουν τις ίδιες κορυφές τότε ονομάζονται παράλληλες.

3. Αν μια ακμή συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της λέγεται ανακύκλωση (ή βρόγχος).

4. Μια κορυφή που δε συνδέεται με καμιά άλλη κορυφή λέγεται απομονωμένη κορυφή $N = \emptyset$.

Ορισμός 4.1.6. *Ένα γράφημα ονομάζεται απλό όταν δεν έχει παράλληλες ακμές και ανακυκλώσεις.*

Διαισθητικά ονομάζουμε γράφημα ό,τι μπορεί να 'ζωγραφιστεί' (αναπαρασταθεί) με σημεία και γραμμές. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να αναπαραστήσουμε ένα γράφημα. Ο πιο πρακτικός είναι να ζωγραφίσουμε ένα διάγραμμα στο οποίο αναπαραστούμε τις κορυφές με επιλεγμένα σημεία του επιπέδου και ακμές με γραμμές οι οποίες συνδέουν κάποια από τα σημεία αυτά ανα δυο. Ο τρόπος αυτός αναπαράστασης ενός γραφήματος είναι ο πιο παραστατικός αλλά πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι πολλά διαφορετικά μεταξύ τους για το ίδιο γράφημα.

4.2 Αποστάσεις και Συνδεσιμότητα

Ορισμός 4.2.1. *Θεωρούμε γράφημα G. Καλούμε διαδρομή του G κάθε ακολουθία κορυφών, επαναλαμβανόμενων ή μη.*

Ορισμός 4.2.2. *Μονοπάτι από έναν κόμβο σε έναν άλλο ενός γράφου ονομάζεται μια ακολουθία κορυφών, όπου κάθε κορυφή της ακολουθίας συνδέεται με την επόμενή της μέσω ακμής.*

Παρατηρήσεις

1. Το μήκος ενός μονοπατιού, είναι το πλήθος των ακμών της ακολουθίας.

2. Ένα μονοπάτι που αποτελείται από έναν μη επαναλαμβανόμενο κόμβο και δεν περιέχει καμία ακμή, είναι ένα τετριμμένο μονοπάτι μηδενικού μήκους.

3. Ένα μονοπάτι είναι κατευθυνόμενο αν μπορούμε να πάμε από το ένα άκρο του στο άλλο και όχι το ανάποδο. Ενώ είναι μη κατευθυνόμενο όταν και οι δύο κατευθύνσεις του είναι δυνατές.

Ορισμός 4.2.3. *Θεωρούμε δυο κορυφές u, v ενός γραφήματος G. Απόσταση ανάμεσα στις κορυφές u, v στο G ορίζεται το μήκος του μικρότερου (συντομότερου) μονοπατιού $u - v$ στο G. Αν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι, τότε λέμε ότι η απόσταση ανάμεσα στις κορυφές u, v είναι άπειρη.*

Παρατήρηση 4.2.4. *Για κάθε γράφημα G, το σύνολο $V(G)$, εφοδιασμένο με τη συνάρτηση απόσταση d_G είναι μετρικός χώρος. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

- $\forall x, y \in V_G \; d_G(x, y) \geq 0$ *και* $d_G(x, y) = 0$ *αν* $x = y$
- **συμμετρική ιδιότητα**
  $\forall x, y \in V_G \; d_G(x, y) = d_G(y, x)$
- **τριγωνική ανισότητα**
  $\forall x, y, z \in V_G \; d_G(x, y) + d_G(y, z) \leq d_G(x, z)$

Ορισμός 4.2.5. *Εκκεντρότητα $\epsilon(v)$ μιας κορυφής v ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η μεγαλύτερη απόστασή της από μια κορυφή του γραφήματος. Είναι δηλαδή το μέγιστο των ελαχίστων διαδρομών από κάθε κορυφή του γραφήματος.*

$$\epsilon(v) = max_{u \in V(G)} d(v, u)$$

Ορισμός 4.2.6. *Ακτίνα, $\alpha(G)$, ενός συνεκτικού γραφήματος G λέμε την ελάχιστη εκκεντρότητα.*

$$\alpha(G) = min_{v \in V(G)} \epsilon(v)$$

Ορισμός 4.2.7. *Διάμετρο, $\delta(G)$, ενός συνεκτικού γραφήματος λέμε τη μέγιστη εκκεντρότητα.*

$$\delta(G) = max_{v \in V(G)} \epsilon(v)$$

Θεώρημα 4.2.8. *Για κάθε γράφημα G έχουμε ότι :*

$$\alpha(G) \leq \delta(G) \leq 2 \cdot \alpha(G)$$

Ορισμός 4.2.9. *Ένα μονοπάτι λέγεται κύκλος, αν καταλήγει στον ίδιο κόμβο από τον οποίο ξεκινά.*

Παρατηρήσεις

1. Ένας κύκλος λέγεται απλός αν κανένας κόμβος της δεν επαναλαμβάνεται, ενώ λέγεται σύνθετος αν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος που επαναλαμβάνεται (δηλαδή, ο σύνθετος κύκλος αποτελείται από πολλούς απλούς).
2. Ενας κύκλος λέγεται κατευθυνόμενος αν η διάτρεξή του γίνεται μόνο κατά μία κατεύθυνση. Αλλιώς, λέγεται μη κατευθυνόμενος.

4.2.1 Συνεκτικά γραφήματα

Ορισμός 4.2.10. *Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G, δύο κορυφές u και v ονομάζονται συνεκτικές αν το G περιέχει μια διαδρομή από το u στο v. Σε αντίθετη περίπτωση, καλούνται μη συνεκτικές.*

Ορισμός 4.2.11. *Ένα γράφημα ονομάζεται συνεκτικό αν κάθε ζεύγος διακριτών κορυφών στο γράφημα είναι συνεκτικό. Διαφορετικά, το γράφημα ονομάζεται μη συνεκτικό.*

Ορισμός 4.2.12. *Μια συνιστώσα ενός απλού μη κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ένα υποσύνολο κορυφών V' του V, για τα οποία ισχύει ότι για κάθε δύο κορυφές του V' υπάρχει μονοπάτι που τα συνδέει.*

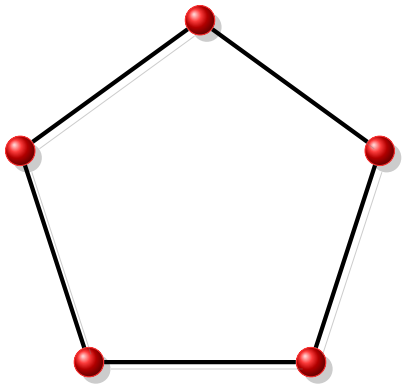
Ορισμός 4.2.13. *Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό αν για κάθε δύο κορυφές του υπάρχει μονοπάτι που να τα συνδέει. Δηλαδή, αν αποτελείται από μία και μοναδική συνιστώσα, η οποία είναι το ίδιο το γράφημα.*

4.3 Ειδικά γραφήματα

Ένα γράφημα, όπως αναφέρθηκε πριν, μπορεί να είναι ισόμορφο με άπειρα το πλήθος γραφήματα που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Για το λόγο αυτό, συμβολίζουμε με κάποιο γράφημα ¨αντιπρόσωπο' όλη την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει. Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τα κυριότερα γραφήματα ¨αντιπροσώπουσ' τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 4.3.1 (πλήρες γράφημα ή κλίκα K_n)**.** *Ένα γράφημα με n κορυφές ονομάζεται κλίκα ή πλήρες γράφημα αν κάθε ζευγάρι κορυφών του συνδέεται με μια ακμή*

Ορισμός 4.3.2 (κύκλος C_n)**.** *Ένα γράφημα με n κορυφές ($n > 2$) ονομάζεται κύκλος αν είναι συνεκτικό και όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό 2.*

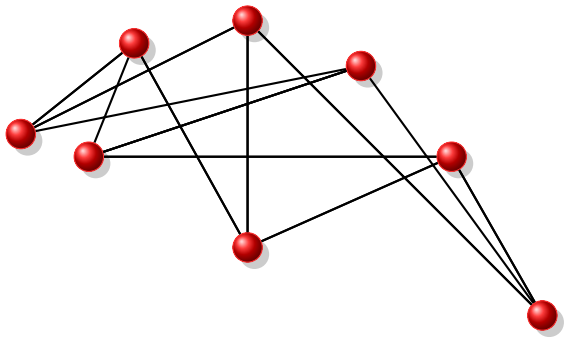


Σχήμα 4.1: Κύκλος, C_5, με 5 κορυφές.

Παρατήρηση 4.3.3. *Το γράφημα C_3 καλείται τρίγωνο.*

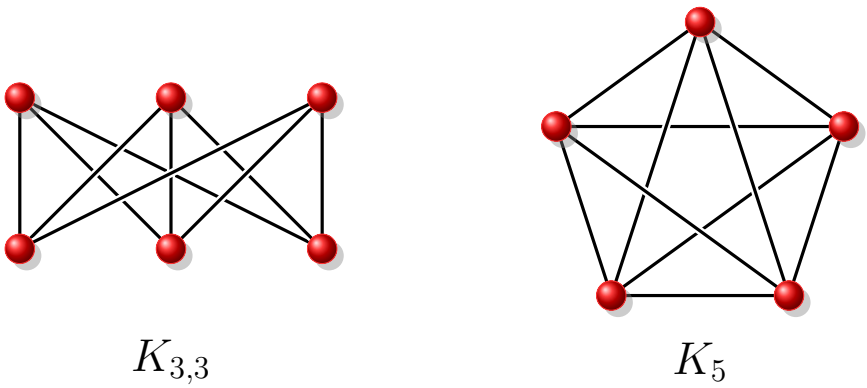
Ορισμός 4.3.4. *Ένα σύνολο κορυφών χωρίς καμία ακμή μεταξύ τους ονομάζεται σύνολο ανεξαρτησίας.*

Ορισμός 4.3.5. *Ένα γράφημα ονομάζεται διμερές ή διχοτομίσιμο αν οι κορυφές του μπορούν να χωριστούν σε δυο σύνολα ανεξαρτησίας.*



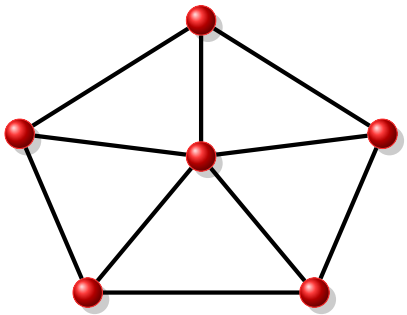
Σχήμα 4.2: Διμερές γράφημα.

Ορισμός 4.3.6 (πλήρες διμερές $K_{n.m}$)**.** *Ένα διμερές γράφημα ονομάζεται πλήρες αν υπάρχει διαμέριση των κορυφών του σε δυο σύνολα (σύνολα ανεξαρτησίας) έτσι ώστε κάθε κορυφή από το ένα σύνολο ανεξαρτησίας να συνδέεται με κάθε κορυφή του άλλου συνόλου ανεξαρτησίας. Το πλήρες διμερές γράφημα με n, m κορυφές στα δυο σύνολα ανεξαρτησίας αντίστοιχα συμβολίζεται με $K_{n.m}$.*



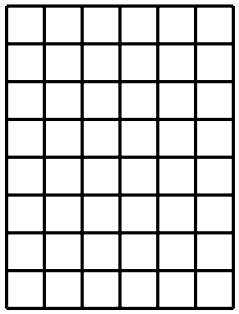
Σχήμα 4.3: Το πλήρες διμερές γράφημα, $K_{3,3}$ και το πλήρες γράφημα, K_5.

Ορισμός 4.3.7 (τροχός W_n)**.** *Ένα γράφημα με n κορυφές ($n > 2$) ονομάζεται τροχός αν αποτελείται από έναν κύκλο με n κορυφές και μια κορυφή που συνδέεται με όλες τις κορυφές του κύκλου. Όλες οι κορυφές του τροχού έχουν βαθμό 3 με εξαίρεση την κεντρική κορυφή που έχει βαθμό n.*



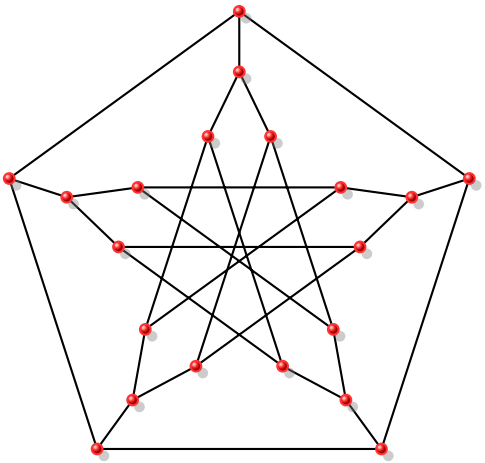
Σχήμα 4.4: Ο τροχός W_5.

Ορισμός 4.3.8. *Ένα γράφημα ονομάζεται πλέγμα*



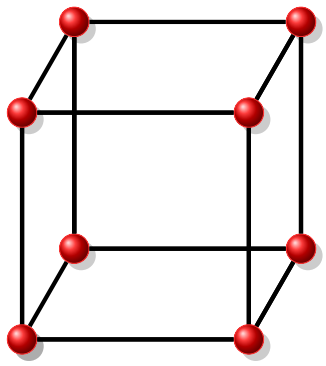
Σχήμα 4.5: Πλέγμα

Ορισμός 4.3.9 (k-κανονικό)**.** *Ένα γράφημα ονομάζεται k-κανονικό αν κάθε κορυφή του έχει βαθμό k.*



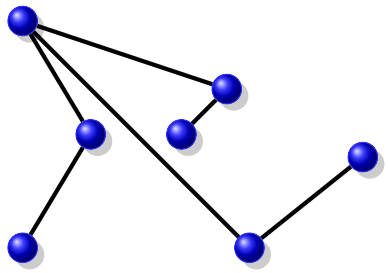
Σχήμα 4.6: 3-κανονικό γράφημα.

Ορισμός 4.3.10 (κύβος Q_n)**.** *Ένα γράφημα με n κορυφές ονομάζεται κύβος αν*



Σχήμα 4.7: Ο κύβος Q_3.

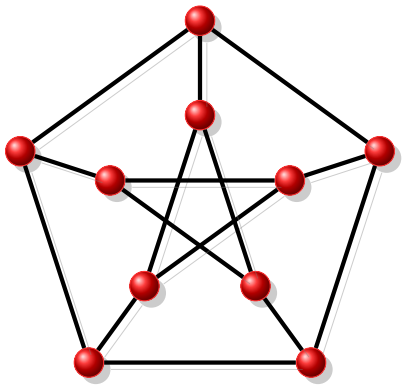
Ορισμός 4.3.11. *Ένα δέντρο είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους.*



Σχήμα 4.8: Δέντρο

4.3.1 Γραφήματα με ονόματα

Γράφημα *Petersen*
Το γράφημα *Petersen* είναι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα με 10 κορυφές και 15 ακμές. Είναι ένα μικρό γράφημα που χρησιμεύει ως παράδειγμα για πολλά προβλήματα της θεωρίας γραφημάτων. Το γράφημα *Petersen* πήρε το όνομά του *Julius Petersen*.

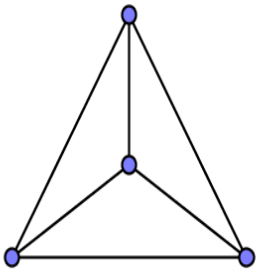


Σχήμα 4.9: Γράφημα *Petersen*.

Τα πλατωνικά γραφήματα

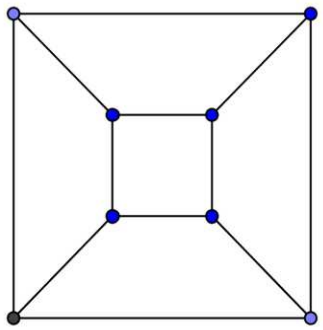
Τα πλατωνικά γραφήματα πήραν το όνομά τους από τα πλατωνικά στερεά. Τα Πλατωνικά στερεά ονομάστηκαν έτσι, επειδή μελετήθηκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Στη φιλοσοφία του Πλάτωνα, τα στερεά αυτά συμβόλιζαν τα δομικά στοιχεία του σύμπαντος: το τετράεδρο τη φωτιά, ο κύβος τη γη, το εικοσάεδρο το νερό, το οκτάεδρο τον αέρα και το δωδεκάεδρο τον αιθέρα. Ο Ευκλείδης ασχολείται με αυτά στο 13ο βιβλίο των Στοιχείων του, όπου αποδεικνύει ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε κυρτά κανονικά πολύεδρα και εκφράζεται η ακμή τους ως συνάρτηση της περιγεγραμμένης σφαίρας.
Τα πλατωνικά γραφήματα είναι τα εξής:

1. τετράεδρο
   Είναι πλήρες γράφημα με 4 ακμές.



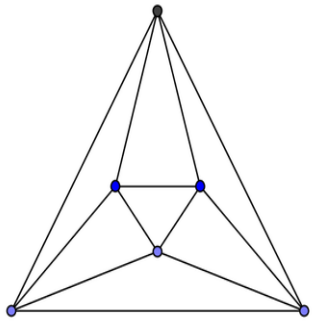
Σχήμα 4.10: Το τετράεδρο

2. κύβος
   Έχει 8 κορυφές και 12 ακμές.



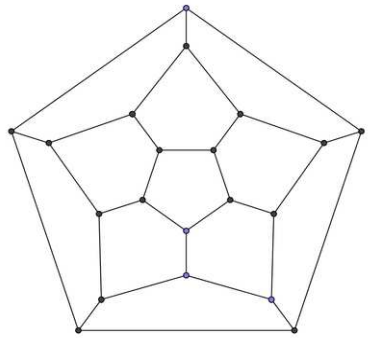
Σχήμα 4.11: Ο κύβος

3. οκτάεδρο
   Έχει 6 κορυφές και 12 ακμές.



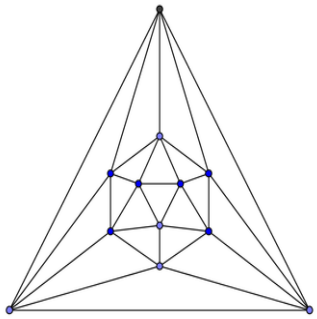
Σχήμα 4.12: Το οκτάεδρο

4. Δωδεκάεδρο
   Έχει 20 κορυφές και 30 ακμές.



Σχήμα 4.13: Το Δωδεκάεδρο

5. Εικοσάεδρο
   Έχει 12 κορυφές και 30 ακμές.

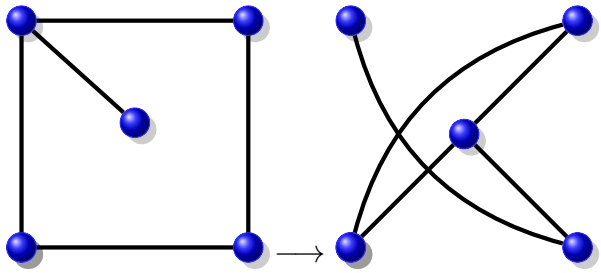


Σχήμα 4.14: Το Εικοσάεδρο

4.4 Πράξεις σε γραφήματα

Ορισμός 4.4.1 (συμπλήρωμα). *Έστω G γράφημα. Ορίζουμε ως συμπλήρωμα του G το γράφημα που έχει το ιδιο σύνολο κορυφών με το G και την ακμή uv αν και μόνο αν δεν είναι ακμή του G.*

$$\overline{G} = (V, \{\{x, y\} | x, y \in V\} - E)$$



Σχήμα 4.15: Το συμπληρωματικό ενός γραφήματος.

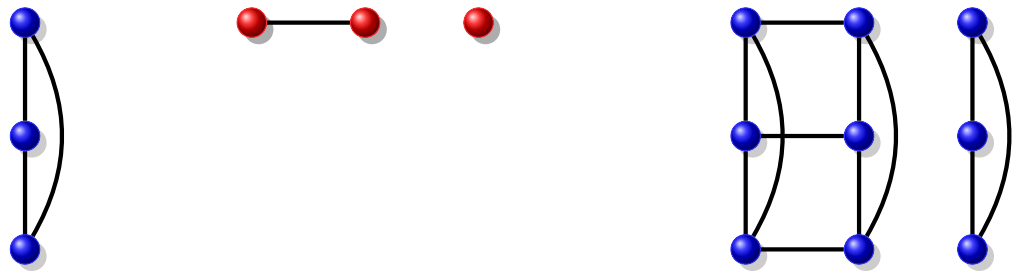
Ορισμός 4.4.2. *Δυο γραφήματα καλούνται συμπληρωματικά όταν το ένα είναι συμπλήρωμα του άλλου.*

Ορισμός 4.4.3. *Το καρτεσιανό γινόμενο ή απλά γινόμενο δυο γραφημάτων G, H συμβολίζεται από $G \times H$*

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \times H) = E(G) \times V(H) \cup V(G) \times E(H)$$

Παρατήρηση 4.4.4. *Τα άκρα της ακμής $(d, v) \in E(G) \times V(H)$ είναι οι κορυφές (x, v) και (y, v) όπου x, y είναι τα άκρα της ακμής $d \in E(G)$. Τα άκρα της ακμής $(u, e) \in V(G) \times E(H)$ είναι οι κορυφές (u, s) και (s, t) όπου x, y είναι τα άκρα της ακμής $e \in E(H)$*



Σχήμα 4.16: Το καρτεσιανό γινόμενο δυο γραφημάτων.

Παραδείγματα 4.4.5. *Δίνονται παραδείγματα του καρτεσιανού γινομένου δυο γραφημάτων.*

1. *Το καρτεσιανό γινόμενο του γραφήματος K_2 επί τον εαυτό του είναι $K_2 \times K_2 = C_4$*

2. *Το καρτεσιανό γινόμενο δυο μονοπατιών P_n, P_m είναι το πλέγμα.*

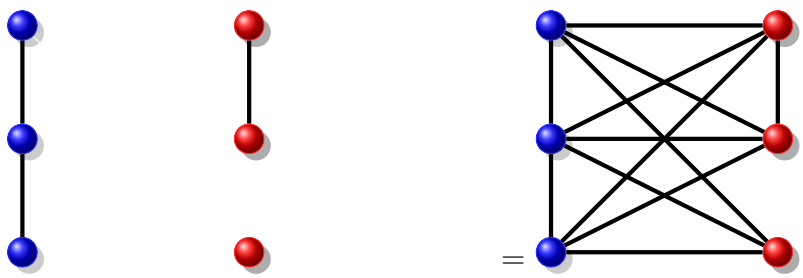
3. *Το καρτεσιανό γινόμενο n ακμών είναι ο υπερκύβος Q_n.*

4. *Το καρτεσιανό γινόμενο δυο υπερκύβων Q_i, Q_j είναι ο υπερκύβος Q_{i+j}.*
   $Q_i \times Q_j = Q_{i+j}$

Ορισμός 4.4.6. *Το άθροισμα δυο γραφημάτων G, H συμβολίζεται από $G + H$*

$$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$$

$$E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G) \text{ και } v \in V(H)\}$$



Σχήμα 4.17: Το άθροισμα δυο γραφημάτων.

Ορισμός 4.4.7 (τομή)**.** *Η τομή δυο γραφημάτων είναι η ένωσή τους με όλες τις ακμές που συνδέουν τις κορυφές του πρώτου γραφήματος με τις κορυφές του δεύτερου γραφήματος. Η τομή είναι αντιμεταθετική πράξη για γραφήματα χωρίς ετικέτες.*

Ορισμός 4.4.8. *Η ένωση δυο γραφημάτων G, H είναι το γράφημα $G \cup H$ το οποίο το σύνολο κορυφών και το σύνολο ακμών είναι η ένωση του συνόλου των κορυφών και του συνόλου ακμών αντίστοιχα των δυο γραφημάτων.*

Παρατήρηση 4.4.9.

4.5 Αναλλοίωτες ιδιότητες

4.5.1 Επίπεδα γραφήματα - Τύπος *Euler*

Ορισμός 4.5.1. *Ένα γράφημα ονομάζεται επίπεδο αν μπορεί να αποτυπωθεί στο επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται οι ακμές του.*

Ορισμός 4.5.2. *Αποτύπωση καλείται κάθε σχηματισμός του γραφήματος στο επίπεδο με μη διασταυρούμενες ακμές.*

Ορισμός 4.5.3. *Όψεις ενός γραφήματος είναι οι κλειστές περιοχές που ορίζονται από κάθε επίπεδη αποτύπωση ενός γραφήματος.*

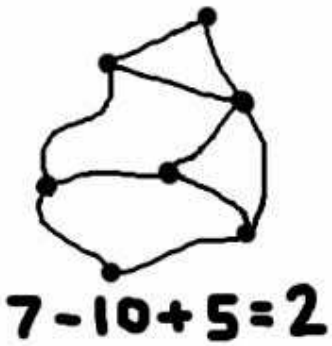
Δηλαδή αν έχουμε μια επίπεδη αποτύπωση ενός γραφήματος, όψη ονομάζεται κάθε περιοχή του επιπέδου που περιορίζεται από ακμές και δε μπορεί να χωριστεί σε μικρότερες όψεις.

Παρατηρήσεις

1. Κάθε γράφημα έχει μια εξωτερική όψη η οποία είναι απεριόριστη και περιλαμβάνει ολόκληρη την περιοχή του επιπέδου που εκτείνεται εκτός της αποτύπωσης του γραφήματος.
2. Οι εσωτερικές όψεις του γραφήματος είναι πεπερασμένες.
3. Κάθε ακμή του επιπέδου συμμετέχει το πολύ σε δυο όψεις.
4. Αν μια ακμή δεν ανήκει σε κύκλο τότε συμμετέχει σε μια όψη.
5. Κάθε άκυκλο επίπεδο γράφημα έχει μια μόνο όψη, την εξωτερική.

Θεώρημα 4.5.4. *Έστω συνεκτικό, επίπεδο γράφημα G με $|V|$ κορυφές, $|E|$ ακμές και O όψεις. Ο τύπος του Euler συνδέει αυτές τις τρεις ποσότητες με την εξής σχέση.*

$$|V| + O - |E| = 2$$



Σχήμα 4.18: Εφαρμογή του τύπου του *Euler*.

Παρατήρηση 4.5.5. *Μια σημαντική συνέπεια του τύπου Euler είναι ότι ο αριθμός των όψεων ενός επίπεδου γραφήματος είναι χαρακτηριστικό του γραφήματος είναι δηλαδή ανεξάρτητος από την αποτύπωση του γραφήματος στο επίπεδο. Αυτή είναι μια αναλλοίωτη ιδιότητα για συνεκτικά γραφήματα, ο αριθμός των όψεων είναι ανεξάρτητος της αποτύπωσης.*

Κεφάλαιο 5

Αναπαραστάσεις γραφημάτων

5.1 Πίνακες γειτνίασης

Κάθε γράφημα $G(V, E)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια ενός πίνακα.

Ορισμός 5.1.1. *Πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος $G(V, E)$ ονομάζεται ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A οι γραμμές και οι στήλες του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές του. Τα στοιχεία του πίνακα γειτνίασης ορίζονται με βάση τις ακμές του γραφήματος από τη σχέση:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{αν} \quad (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι για το ίδιο γράφημα, μπορούν να προκύψουν διαφορετικοί πίνακες γειτνίασης αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετική αρίθμηση των κορυφών του. Αν θεωρήσουμε δυο πίνακες που προκύπτουν από το ίδιο γράφημα θα καταλήξουμε σε ισομορφικά γραφήματα.

Ιδιότητες

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης ενός απλού, μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ είναι:

1. Κάθε πίνακας γειτνίασης ενός απλού γραφήματος είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο και έχει ολα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 0.

2. Το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής ή της στήλης που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή v_i είναι ίσο με το βαθμό της κορυφής. Δηλαδή

$$\sum_{v_i \in V} a_{ij} = \sum_{v_i \in V} a_{ji} = deg(v_i)$$

3. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα γειτνίασης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος.

4. Κάθε γράφημα με n κορυφές έχει $n!$ πίνακες γειτνίασης.

5. Το ij στοιχείο του κ-οστής δύναμης πίνακα γειτνίασης A^k είναι ίσο με τον αριθμό των διαδρομών που συνδέουν τα στοιχεία v_i, v_j. Για παράδειγμα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα A^2 συμπίπτουν με το βαθμό κάθε κορυφής. $a_{ii}^{[2]} = deg(v_i)$. Οι μοναδικές διαδρομές μήκους δυο που ξεκινούν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή αποτελούνται από τις ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή. Έχουν δηλαδή τη μορφή $\{v_i, u\} - \{u, v_i\}$ για κάθε γειτονική κορύφή u της v_i.

5.2 Λίστα Γειτνίασης

Η λίστα γειτνίασης ενός γραφήματος $G(V, E)$ αποτελείται από τη λίστα των γειτονικών κορυφών για κάθε κορυφή $v \in V$. Οι δείκτες στα πρώτο στοιχείο μια λίστας αποθηκεύεται σε ένα πίνακα L n διάστασης. Πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης στο πρώτο στοιχείο της λίστας των γειτονικών κορυφών $v \in V$ βρίσκεται στη θέση $L[v]$. το μέγεθος της λίστας των γειτόνων της n είναι ίσο με το βάθμο της.

Παρατηρήσεις

1. όταν ένα γράφημα είναι αραιό, δηλαδή ό αριθμός των κορυφών του είναι μικρότερος από n^2, η αναπαράσταση με λίστα γειτνίασης απαιτεί ασυμπτωτικά λιγότερες θέσεις μνήμης από την αναπαράσταση με πίνακα γειτνίασης.

2. όταν ένα γράφημα είναι πυκνό, δηλαδή έχει αριθμό ακμών n^2 οι απαιτήσεις των δυο αναπαραστάσεων σε θέσεις μνήμης ταυτίζονται ως προς την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά.

3. Με τον πίνακα γειτνίασης μπορούμε να ελέγξουμε την ύπαρξη ή όχι κορυφής μεταξύ δυο ακμών σε σταθερό χρόνο.

4. Με τη λίστα γειτνίασης μπορόυμε να απαριθμήσουμε τους γείτονες μιας συγκεκριμένης κορυφής πιο γρήγορα από ότι με τον πίνακα γειτνίασης.

5.3 Πίνακας Πρόσπτωσης

Ορισμός 5.3.1. *Πίνακας Πρόσπτωσης ενός γραφήματος $G(V, E)$ ονομάζεται ο πίνακας A $|V| \times |E|$, οι γραμμές και οι στήλες του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές του. Τα στοιχεία του πίνακα γειτνίασης ορίζονται με βάση τις ακμές του γραφήματος από τη σχέση:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν η κορυφή } v_i \text{ είναι άκρο της ακμής } e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για το ίδιο γράφημα, μπορούν να προκύψουν διαφορετικοί πίνακες γειτνίασης αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετική αρίθμηση των κορυφών και των ακμών του. Δυο πίνακες πρόσπτωσης που προκύπτουν από το ίδιο γράφημα αντιστοιχούν σε ισόμορφα γραφήματα.

Ιδιότητες

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα πρόσπτωσης ενός απλού, μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ είναι:

1. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή v_i είναι ίσο με το βαθμό της κορυφής.

2. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι ίσο με 2.

3. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα πρόσπτωσης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος.

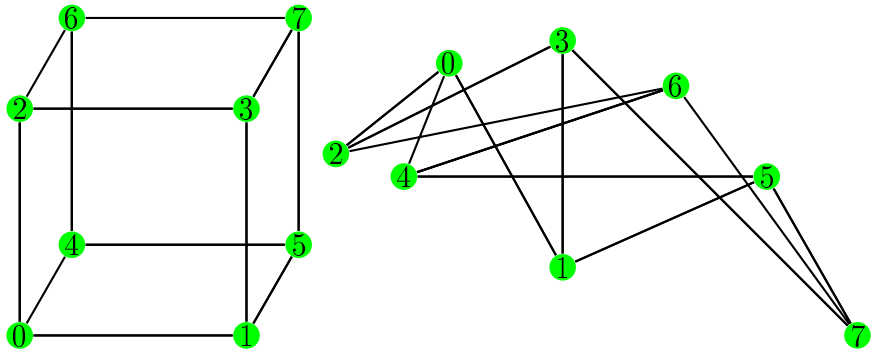
Κεφάλαιο 6

Ισόμορφα γραφήματα

6.1 Ορισμός

Ένα γράφημα μπορεί να είναι ισόμορφο με άπειρα το πλήθος γραφήματα που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

Τα γραφήματα του σχήματος 6.1 είναι τα ίδια διότι κάθε κορυφή έχει το ακριβώς το ίδιο σύνολο γειτόνων.



Σχήμα 6.1: Δυο διαφορετικές απεικονίσεις του ίδιου γραφήματος.

6.1.1 Δομική ισοδυναμία για απλά γραφήματα

Ορισμός 6.1.1. *Έστω G, H δύο απλά γραφήματα. Μια αντιστοίχιση ανάμεσα στις κορυφές $f : V_G \to V_H$ διατηρεί τη γειτονικότητα αν για κάθε ζευγάρι γειτονικών κορυφών u, v στο γράφημα G, οι κορυφές $f(u), f(v)$ είναι γειτονικές στο γράφημα H.*

Αντίστοιχα, η f διατηρεί τη μη γειτονικότητα αν οι κορυφές $f(u), f(v)$ δεν είναι γειτονικές στο γράφημα H αν οι κορυφές u, v δεν είναι γειτονικές στο G.

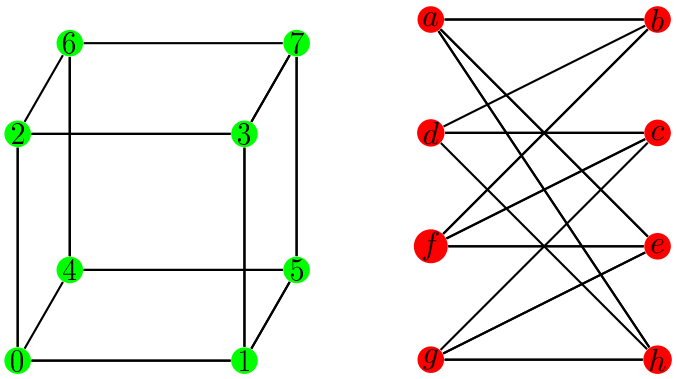
Ορισμός 6.1.2. *Έστω G, H δύο απλά γραφήματα. Μια συνάρτηση $f : V_G \to$*

V_H διατηρεί τη δομή των γραφημάτων αν διατηρεί τη γειτονικότητα και τη μη γειτονικότητα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:
Για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v στο γράφημα G, οι κορυφές u, v είναι γειτονικές στο γράφημα G αν και μόνο αν οι κορυφές $f(u), f(v)$ είναι γειτονικές στο γράφημα H.
Που μας οδηγεί σε έναν επίσημο μαθηματικό ορισμό για το τι εννοούμε με τον όρο το ' ίδιο' γράφημα.

Ορισμός 6.1.3. *Δύο απλά γραφήματα G, H ονομάζονται ισόμορφα και τα συμβολιζουμε με $G \cong H$, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : V_G \to V_H$ που διατηρεί τη δομή του γραφήματος. Μια τέτοια συνάρτηση f λέγεται ισομορφισμός από το γράφημα G στο H.*

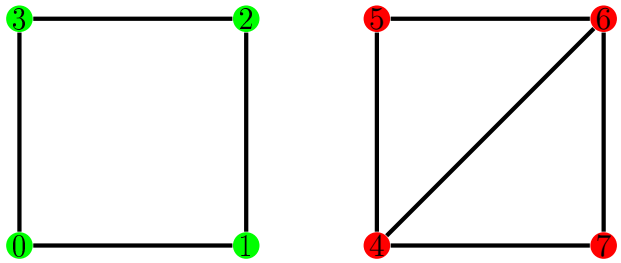
Δύο ισόμορφα γραφήματα διαφέρουν μόνο στα ονόματα των κορυφών και των ακμών. Υπάρχει δομική ισοδυναμία ανάμεσα σε δυο τέτοια γραφήματα.



Σχήμα 6.2: Ισόμορφα γραφήματα

Παράδειγμα 6.1. *Όταν δυο ισόμορφα γραφήματα μοιάζουν διαφορετικά, ονομάζοντας από την αρχή τις κορυφές αποκαλύπτει την ισοδυναμία.*
Στο σχήμα 6.2 μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση που αντιστοιχεί μια κορυφή του ενός γραφήματος σε μια κορυφή του άλλου γραφήματος και αποδεικνύεται ότι τα γραφήματα αυτά είναι ισόμορφα.
Έχουμε ότι:
$a = f(0), b = f(1), c = f(2), d = f(3), e = f(4), f = f(5), g = f(6), h = f(7)$

Παράδειγμα 6.2. *Η συνάρτηση $j \to j+4$ στο σχήμα 6.3 είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τη γειτονικότητα όμως δεν είναι ισομορφιμός επειδή δε διατηρεί τη μη γειτονικότητα.*
Παρατηρούμε ότι στο πρώτο γράφημα, οι κορυφές 0,2 δεν είναι γειτονικές ένω οι εικόνες τους, οι κορυφές 4,6 είναι γειτονικές.



Σχήμα 6.3: Μη ισόμορφα γραφήματα.

Θεώρημα 6.1.4. *Η σχέση ισομορφισμού μεταξύ δυο γραφημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η σχέση του ισομορφισμού είναι :

1. **ανακλαστική**
   Κάθε γράφημα είναι ισομορφικό με τον εαυτό του.

2. **συμμετρική**
   Ο ισομορφιμός είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση και άρα αντιστρέψιμη.

3. **μεταβατική**
   Η σύνθεση δυο ισομορφισμών είναι ισομορφισμός.

□

Κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από τη σχέση ισομορφιμού περιλαμβάνει γραφήματα που συμφωνούν πρακτικά σε όλες τις ιδιότητές τους δηλαδή ουσιαστικά ταυτίζονται.

6.2 Αναλλοίωτες Ιδιότητες

Ορισμός 6.2.1. *Μια ιδιότητα ενός γραφήματος G καλείται αναλλοίωτη εάν κάθε γράφημα G_1 ισόμορφο του G έχει επίσης αυτή την ιδιότητα.*

Κάθε ιδιότητα που δε μεταβάλλεται αν 'ζωγραφίσουμε' το γράφημα διαφορετικά ονομάζεται αναλλοίωτη.
Τα ισομορφικά γραφήματα συμφωνούν ως προς τις αναλλοίωτες ιδιότητες.

Αναλλοίωτες ιδιότητες

1. Έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών.

2. Έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών.

3. Αν $f : G_1 \to G_2$ ισομορφισμός και $v \in G_1$. Ισχύει $deg(v) = deg(f(v))$
4. Έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών κορυφών.
5. Έχει κύκλο $Hamilton$.
6. Ύπαρξη κύκλου $Euler$.
7. Για οποιοδήποτε υπογράφημα Η ενός γραφήματος G το G έχει υπογράφημα ισομορφικό ως προς το Η (ισχύει δηλαδή για κάθε γράφημα που είναι ισομορφικό με το G).

Ορισμός 6.2.2. *Ένα γράφημα ονομάζεται αυτοσυμπληρωματικό αν είναι ισομορφικό ως προς το συμπληρωματικό του γράφημα.*

Ορισμός 6.2.3.

Κεφάλαιο 7

Συμμετρίες γραφημάτων

Ορισμός 7.0.4.

7.1 Αυτομορφισμοί γραφημάτων

Ορισμός 7.1.1. *Θεωρούμε γράφημα G, μια μετάθεση a του συνόλου των κορυφών του $V(X)$ είναι ένας αυτομορφισμός του X αν*

$$\{u, v\} \in E(X) \Leftrightarrow \{a(u), a(v)\} \in E(X), \forall u, v \in V(X)$$

Παρατηρήσεις 7.1.2. .

1. *Καλούμε αυτομορφισμό του G κάθε ισομορφισμό του G στον εαυτό του.*
2. *Κάθε αυτομορφισμός ενός γραφήματος είναι μια μετάθεση των κορυφών του.*
3. *Παρατηρούμε ότι ο αυτομορφισμός αλλάζει τα ονόματα αλλά διατηρεί τους ρόλους των κορυφών στο γράφημα.*

Παρατηρήσεις 7.1.3. .

1. *Είναι εύκολο να δούμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση στο V είναι αυτομορφισμός.*
2. *Η σύνθεση δυο αυτομορφισμών είναι αυτομορφισμός.*
3. *Η αντίστροφη συνάρτηση ενός αυτομορφισμού είναι επίσης αυτομορφισμός.*

7.2 Ομάδες αυτομορφισμών γραφημάτων

Ορισμός 7.2.1. *Το σύνολο των αυτομορφισμών ενός γραφήματος είναι ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων. Την ομάδα αυτή την ονομάζουμε ομάδα αυτομορφισμών του G και τη συμβολίζουμε ως $Aut(G)$.*

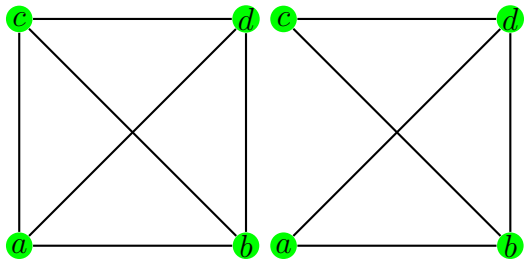
Παρατηρήσεις

1. Κάθε μετάθεση του $V(K_n)$ είναι αυτομορφισμός. Κατά συνέπεια η ομάδα αυτομορφισμών του K_n, $Aut(K_n)$ είναι ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_n τάξης $n!$.

2. Για κάθε γράφημα G το $Aut(G)$ είναι ισόμορφο με κάποια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n.

3. Για κάθε γράφημα G η τάξη $|Aut(G)|$ της ομάδας των αυτομορφισμών του G είναι διαιρέτης του $n!$.

Παράδειγμα 7.1. *Θωρούμε το γράφημα K_4 και $V(K_4) = \{a, b, c, d\}$ και το υπογράφημα του H, το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την ακμή $\{a, c\}$ $H = K_4 - \{a, c\}$ από το K_4.*



Σχήμα 7.1: Τα γραφήματα K_4, H.

$$Aut(H) = \{\iota, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$$

όπου α αλλάζει τις κορυφές a, c και κρατάει σταθερές τις b, d και β αλλάζει τις κορυφές b, d και κρατάει σταθερές τις a, c. Επομένως,

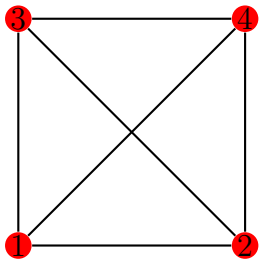
$$Aut(H) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Παράδειγμα 7.2. *Η ομάδα αυτομορφισμών του πλήρους γραφήματος K_n είναι η συμμετρική ομάδα S_n ομάδα με $n!$ στοιχεία.*

$$Aut(K_n) \cong S_n$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε μια από τις $n!$ μεταθέσεις του συνόλου των κορυφών του K_n διατηρεί τη δομή, διότι κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μια ακμή. Επομένως, κάθε μετάθεση των κορυφών δίνει έναν διαφορετικό αυτομορφισμό του K_n. □

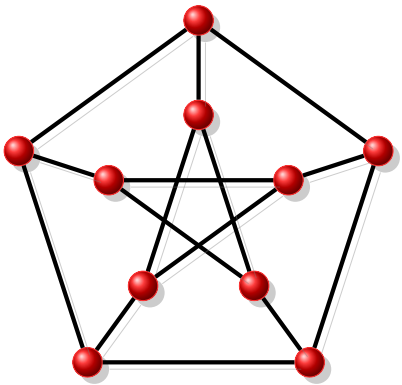
Παράδειγμα 7.3. *Οι αυτομορφισμοί του K_4 σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα είναι όσοι και οι μεταθέσεις του S_n, δηλαδή $6! = 24$.*



Σχήμα 7.2: Το γράφημα K_4

$$Aut(K_4) = \begin{array}{cccc} \{(1)(2)(3)(4), & (12)(3)(4), & (13)(2)(4), & (14)(2)(3), \\ (1)(23)(4), & (1)(24)(3), & (1)(2)(34), & \\ (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), & \\ (123)(4), & (132)(4), & (124)(3), & (142)(3), \\ (134)(2), & (143)(2), & (1234), & (1243), \\ (1324), & (1342), & (1423), & (1432)\} \end{array} \tag{7.1}$$

Παράδειγμα 7.4. *Η ομάδα αυτομορφισμών του γραφήματος Petersen είναι ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα με 5 στοιχεία, S_5. Άρα έχει $5! = 120$ αυτομορφισμούς.*



Σχήμα 7.3: Το γράφημα *Petersen*.

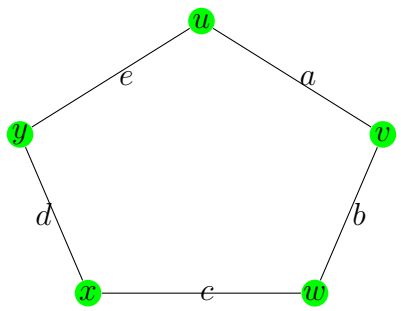
Παράδειγμα 7.5. *Η ομάδα αυτομορφισμών του κυκλικού γραφήματος C_n είναι η διεδρική ομάδα $\mathbb{D}_n$ με $2n$ στοιχεία.*

$$Aut(C_n) \cong \mathbb{D}_n$$

Απόδειξη. Το κυκλικό γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο σαν ένα κανονικό $n-$γωνο. Οι $2n$ αυτομορφισμοί του, μπορούν να παρασταθούν ως στροφές και ανακλάσεις ενός κανονικού $n-$γώνου. Κάθε κανονικό $n-$γωνο έχει n στροφές και n ανακλάσεις άρα το C_n έχει $2n$ αυτομορφισμούς. □

Παράδειγμα 7.6. *Η ομάδα αυτομορφισμών του κυκλικού γραφήματος C_5 είναι η διεδρική ομάδα $\mathbb{D}_5$ με $2 \cdot 5 = 10$ στοιχεία.*

$$Aut(C_5) \cong \mathbb{D}_5$$



Σχήμα 7.4: Το γράφημα C_5.

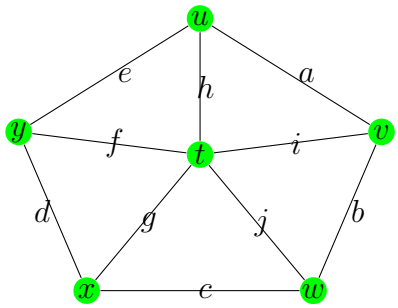
Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα το C_5 θα έχει 5 στροφές και 5 ανακλάσεις κάποιες από αυτές δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Συμμετρία	Μετάθεση κορυφών	Μετάθεση ακμών
ταυτοτικός	$(u)(v)(w)(x)(y)$	$(a)(b)(c)(d)(e)$
στροφή 72	$(uvwxy)$	$(aabcde)$
στροφή 144	$(uwyvx)$	$(acebd)$
ανάκλαση -κάθετος άξονας	$(u)(vu)(wx)$	$(c)(ae)(bd)$

Παράδειγμα 7.7. *Η ομάδα αυτομορφισμών του γραφήματος W_n, $Aut(W_n)$.*

Απόδειξη. Το γράφημα W_n μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο σαν ένα κανονικό $n-$γωνο με μια κορυφή στο κέντρο του η οποία είναι συνδεδεμένη με όλες τις υπόλοιπες κορυφές . Οι $2n$ αυτομορφισμοί του μπορούν να αναπαρασταθούν ως στροφές και ανακλασεις ενός κανονικού $n-$γώνου. Κάθε κανονικό $n-$γωνο έχει n στροφές και n ανακλάσεις άρα το W_n έχει $2n$ αυτομορφισμούς, με εξαίρεση την περίπτωση $n = 3$. Στην περίπτωση αυτή είναι ισόμορφο με το K_4 οπότε έχει 24 αυτομορφισμούς. □

Παράδειγμα 7.8. *Η ομάδα αυτομορφισμών του γραφήματος W_5, $Aut(W_5)$.*



Σχήμα 7.5: Το γράφημα W_5.

Συμμετρία	Μετάθεση κορυφών	Μετάθεση ακμών
ταυτοτικός	$(u)(v)(w)(x)(y)(t)$	$(a)(b)(c)(d)(e)(f)(g)(h)(i)(j)$
στροφή 72	$(t)(uvwxy)$	$(aabcde)(fghij)$
στροφή 144	$(t)(uwyvx)$	$(acebd)(fhjgi)$
ανάκλαση κάθετος άξονας	$(t)(u)(vu)(wx)$	$(c)(j)(ae)(fi)(bd)(gh)$

Πίνακας 7.1: Κάποιες Συμμετρίες του γραφήματος W_5.

Παράδειγμα 7.9. *Η ομάδα αυτομορφισμών του γραφήματος $K_{m,n}$, $K_{m,n}$.*

Ορισμός 7.2.2. *Έστω G γράφημα. Ορίζουμε τη σχέση ομοιότητας μεταξύ των κορυφών του ως εξής: Έστω $x, y \in V(G)$. λέμε ότι οι κορυφές x, y είναι όμοιες αν $\sigma(x) = y$ για κάποιο αυτομορφισμό $\sigma \in Aut(G)$ και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x \sim y$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ καλούνται τροχιές του G.*

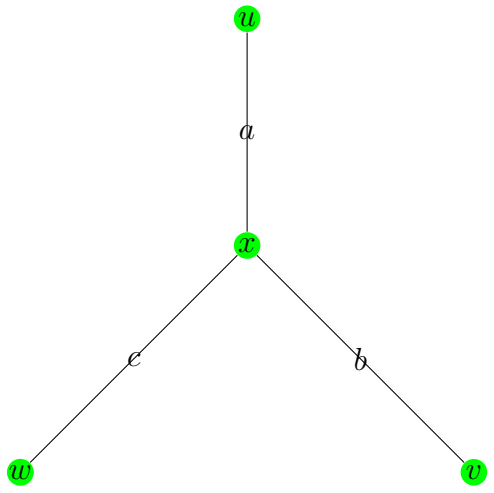
Ορισμός 7.2.3. *Καλούμε ένα γράφημα μεταβατικό ως προς τις κορυφές του (ή απλά μεταβατικό) αν έχει μια μόνο τροχιά, δηλαδή αν για κάθε ζεύγος κορυφών του x, y υπάρχει αυτομορφισμός $\sigma \in Aut(G)$ τέτοιος ώστε $\sigma(x) = y$.*

Παράδειγμα 7.10. *Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα C_n, K_n και $K_{n,n}$ είναι μεταβατικά ως προς τις κορυφές τους επειδή δεν υπάρχει τρόπος να διακρίνουμε τη μια κορυφή από την άλλη.*

Παράδειγμα 7.11. *Παρατηρούμε ότι το γράφημα P_n δεν είναι μεταβατικό ως προς τις κορυφές του επειδή αποτελείται από δυο κορυφές βαθμού 1 και $n-2$ κορυφές βαθμού 2.*

Κάθε γεωμετρική συμμετρία στο σχεδιασμό ενός γραφήματος μπορέι να χρησιμοποιηθεί ως ένας αυτομορφισμός του γραφήματος.

Παράδειγμα 7.12. *Το $K_{1,3}$ έχει 6 αυτομορφισμούς. Ο κάθε ένας από αυτούς μπορέι να πραγματοποιηθεί από μια στροφή και μια ανάκλαση.*



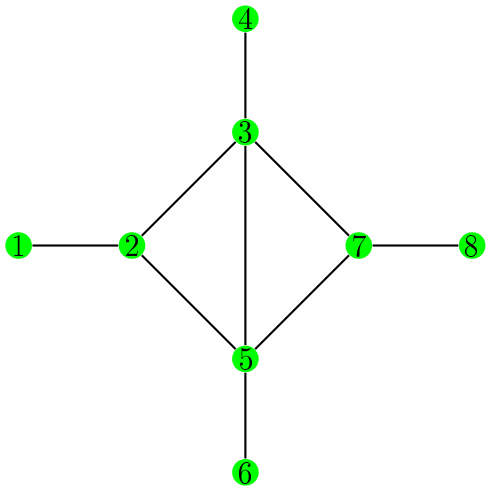
Σχήμα 7.6: Το γράφημα $K_{1,3}$

Συμμετρια	Μετάθεση κορυφών	Μετάθεση ακμών
ταυτοτικός	$(u)(v)(w)(x)$	$(a)(b)(c)$
στροφή 120	$(x)(uvw)$	(abc)
στροφή 240	$(x)(uwv)$	(acb)
ανάκλαση στον a	$(x)(u)(vw)$	$(a)(bc)$
ανάκλαση στον b	$(x)(v)(uw)$	$(b)(ac)$
ανάκλαση στον c	$(x)(w)(uv)$	$(c)(ab)$

Πίνακας 7.2: Οι αυτομορφισμοί για το $K_{1,3}$.

Δεν υπάρχουν άλλοι αυτομορφισμοί του γραφήματος $K_{1,3}$.

Παράδειγμα 7.13. *Στο παρακάτω γράφημα παρατηρούμε ότι οι μεταθέσεις των κορυφών διατηρούν τη δομή του γραφήματος επομένως είναι αυτομορφισμοί του γραφήματος.*



Σχήμα 7.7: Το γράφημα του παραδείγματος 7.13.

Το γράφημα έχει τέσσερις αυτομορφισμούς.

λ_1 =(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)

λ_2 =(18)(27)(3)(4)(5)(6)

λ_3 =(1)(2)(35)(46)(7)(8)

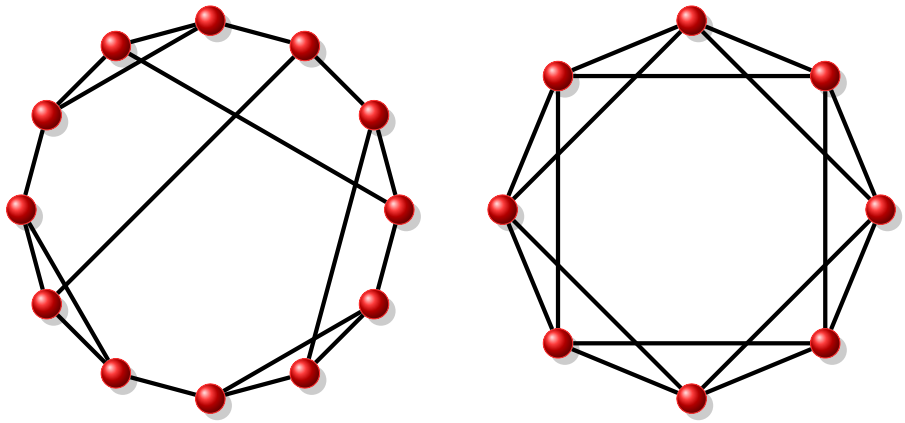
λ_4 =(18)(27)(35)(46)

Ορισμός 7.2.4. *Ένα γράφημα G λέγεται μεταβατικό στην κορυφή αν για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V_G$ υπάρχει ένας αυτομορφισμός σ που απεικονίζει την κορυφή u στη v $\sigma(u) = v$.*

Παρατήρηση 7.2.5. *Κάθε γράφημα που είναι μεταβατικό στην κορυφή είναι κ-κανονικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν ένα γράφημα είναι κ- κανονικό δεν είναι απαραίτητα και μεταβατικό στην κορυφή.*

Ορισμός 7.2.6. *Ένα γράφημα G λεγεται μεταβατικό στην ακμή αν για κάθε ζευγάρι ακμών $d, e \in E_G$ υπάρχει ένας αυτομορφισμός σ που απεικονίζει την ακμή d στην e.*

Παράδειγμα 7.14. *Το γράφημα Petersen του σχήματος 7.3 είναι συμμετρικό, δηλαδή είναι μεταβατικό στην ακμή και στην κορυφή.*



Σχήμα 7.8: Το πρώτο γραφημα είναι μεταβατικό στην ακμή ενώ το δεύτερο δεν είναι μεταβατικό στην ακμή.

Παράδειγμα 7.15. *Από παράδειγμα 7.12 έχουμε ότι το γράφημα $K_{1,3}$ είναι μεταβατικό στην ακμή αλλά όχι στην κορυφή γιατί κάθε αυτομορφισμός απεικονίζει την κορυφή x στον εαυτό της.*

Παράδειγμα 7.16. *Ο υπερκύβος Q_n είναι μεταβατικό στην ακμή και στην κορυφή για κάθε n.*

Ορισμός 7.2.7. *Οι κλάσεις ισοδυναμίας των κορυφών ενός γραφήματος G υπό δράση του αυτομορφισμού λέγονται τροχιές των κορυφών. Οι κλάσεις ισοδυναμίας των ακμών ενός γραφήματος G υπό δράση του αυτομορφισμού λέγονται τροχιές των ακμών.*

Παράδειγμα 7.17. *Στο παράδειγμα (7.13) έχουμε ότι:*

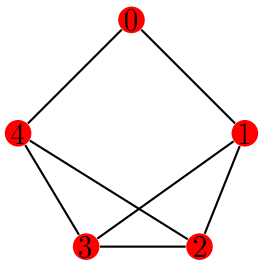
τροχιές κορυφών:	$\{1,8\}$,	$\{4,6\}$,	$\{2,7\}$,	$\{3,5\}$
τροχιές ακμών:	$\{e_{12},e_{78}\}$,	$\{e_{34},e_{56}\}$,	$\{e_{23},e_{25},e_{37},e_{57}\}$,	$\{e_{35}\}$

Θεώρημα 7.2.8. *Όλες οι κορυφές που βρίσκονται στην ίδια τροχιά έχουν τον ίδιο βαθμό.*

Θεώρημα 7.2.9. *Όλες οι ακμές στην ίδια τροχιά έχουν το ιδιο ζεύγος ακμών στα άκρα τους.*

Για να βρούμε τις τροχιές ενός γραφήματος δεν υπάρχει γνωστός αλγόριθμος πολυωνυμικής πολυπλοκότητας. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις που διατηρούν τη γειτονικότητα των κορυφών. Παρατηρούμε ότι αν ένας αυτομορφισμός απεικονίζει την κορυφή u στην κορυφή v, τότε απεικονίζει κάθε γειτονική της κορυφή u στους γείτονες της v.

Παράδειγμα 7.18. *Οι τροχιές του γραφήματος του σχήματος 7.9 δίνονται από τον πίνακα 7.3.*



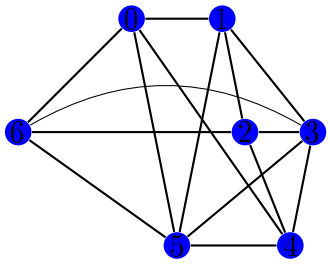
Σχήμα 7.9: Το γράφημα του παραδείγματος 7.18

τροχιές κορυφών	$\{0\}$	$\{1,4,\}$	$\{2,3\}$
τροχιές ακμών	$\{e_{23}\}$	$\{e_{01},e_{04}\}$	$\{e_{12},e_{13},e_{24},e_{34}\}$

Πίνακας 7.3: Τροχιές του γραφήματος 7.9

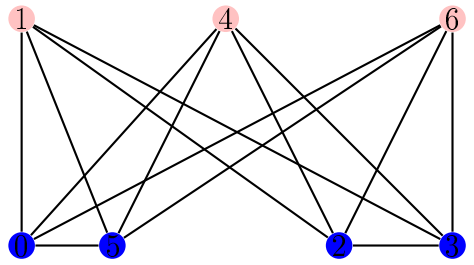
Παράδειγμα 7.19. *Στο παρακάτω 4- κανονικό γράφημα μπορούμε να βρούμε εύκολα τη συμμετρία*

$$(05)(14)(2)(3)(6).$$



Σχήμα 7.10: Το γράφημα του παραδείγματος 7.19

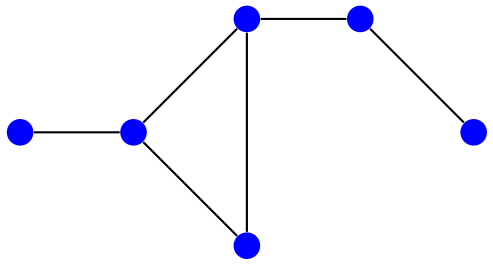
παρατηρούμε ότι οι κορυφές 0, 2, 3 και 5 έχουν 3 γειτονικές κορυφές που είναι ανεξάρτητες, ενώ κάθε μια από τις κορυφές 1,4 και 6 έχουν δυο ζευγάρια γειτονικών κορυφών. Μπορούμε να σχεδιάσουμε πάλι το γράφημα ως εξής:



Σχήμα 7.11: Το γράφημα του παραδείγματος 7.19

Από το ισόμορφό του γράφημα παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 τροχιές κορυφών $\{1,2,3,5\}$ $\{1,4,6\}$. *Η μια από τις τροχιές ακμών είναι η* $\{e_{05}, e_{23}\}$ *και η άλλη τροχιά περιέχει ολες τις υπόλοιπες ακμές.*

Ορισμός 7.2.10. *Ένα γράφημα λέγεται μη συμμετρικό αν η ταυτοτική συνάρτηση* ι *είναι ο μοναδικός του αυτομορφισμός.*



Σχήμα 7.12: γραφημα

7.2.1 Ομάδα αυτομορφισμών υπογραφημάτων

Παρατήρηση 7.2.11. *Αν* H *υπογράφημα του* G*, τότε δεν υπάρχει σχέση ανάμεσα στις ομάδες* $Aut(G)$ *και* $Aut(H)$ *με εξαίρεση κάποιες ειδικές περιπτώσεις.*

- Αν το G είναι το γράφημα του παραπάνω μη συμμετρικού γραφήματος, και το H υπογράφημα του G είναι 3- κυκλικό, παρατηρούμε ότι $Aut(G)$ είναι τετριμμένη και $Aut(H)$ είναι η συμμετρική ομάδα Σ_3

- Αν το G είναι το K_6 και το H υπογράφημα του G είναι ένα μη συμμετρικό γράφημα με 6 κορυφές η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(K_6)$ του K_6 είναι η Σ_6 και η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(H)$ του Η είναι η τετριμμένη ομάδα.

7.2.2 Γραφήματα με δοσμένη ομάδα

Ορισμός 7.2.12. *Η ομάδα των μεταθέσεων* G *ενός συνόλου* S

1. *δρα μεταβατικά ή είναι μεταβατική στο* S *αν για κάθε* $x, y \in S$, *υπάρχει* $a \in G$ *τέτοιο ώστε* $a(x) = y$

2. *είναι μεταβατική στην κορυφή αν για κάποιο γράφημα* X *η ομάδα αυτομορφισμών του*$Aut(X)$ *δρα μεταβατικά στο* $V(X)$.

3. *δρα διπλά μεταβατικά στο* S *αν για κάθε δυο ζευγάρια διακεκριμένων στοιχείων* $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S \times S$ *υπάρχει* $a \in G$ *τέτοιο ώστε* $a(x_1) = y_1$ *και* $a(x_2) = y_2$.

Παράδειγμα 7.20. *Η συμμετρική ομάδα* $\S_5$ *δρα διπλά μεταβατικά στο σύνολο των κορυφών του πληρους γραφήματος* K_5.

Παράδειγμα 7.21. *Η συμμετρική ομάδα* $\S_5$ *δρα μεταβατικά αλλά όχι διπλά μεταβατικά στο σύνολο των κορυφών του γραφήματος* $Petersen$.

Κεφάλαιο 8

Γραφήματα *Cayley*

8.1 Εισαγωγή

Ένας σημαντικός τρόπος να εμπλουτιστεί η δομή μιας ομάδας είναι αν της δώσουμε κάποια γεωμετρία. Ο βασικός τρόπος να εφοδιάσουμε την ομάδα με μια τέτοια γεωμετρία είναι να προσδιορίσουμε μια λίστα γεννητόρων S μιας ομάδας A. Καλούμε παραγόμενη ομάδα το ζευγάρι (A, S). Σε πολλές σημαντικές περιπτώσεις το σύνολο των γεννητόρων είναι πεπερασμένο, οπότε, στην περίπτωση αυτή έχουμε μια πεπερασμένη παραγόμενη ομάδα.
Μια παραγόμενη ομάδα (A, S) χρησιμοποιεί τη μετρική

$$d : A \times A \to \mathbb{N}$$

Η οποία ορίζεται ως η μέγιστη μετρική για την οποία ισχύει $d(x, xs) \leq 1 \forall x \in A$ και $\epsilon_1, ..., \epsilon_m \in \{-1, 1\}$. Αυτή η μετρική παράγει τη σφαίρα

$$B_s(R) = \{x \in A : d(x, id \leq R)\}$$

Στην πεπερασμένη περίπτωση, τα $B_s(R)$ είναι πεπερασμένα σύνολα και ο ρυθμός με τον οποίο μεγαλώνει η τάξη των συνόλων αυτών στο R είναι σημαντικό θέμα στη γεωμετρική θεωρία ομάδων.
Η ιδέα να μελετήσει μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα μέσω της γεωμετρίας της μετρικής της μας παραπέμπει στη δουλειά του μαθηματικού $MaxDehn$.

8.2 Ορισμός

Ένας τρόπος για να δούμε τη γεωμετρία μιας παραγόμενης ομάδας είναι να μελετήσουμε τα γραφήματα $Cayley$ μιας παραγόμενης ομάδα (A, S). Πρόκειται για κατευθυνόμενα γραφήματα με ακμές που χρωματίζονται από τα στοιχεία του S και κορυφές που παίρνουν ετικέτες από τα στοιχεία της ομάδας A. Μια κατευθυνόμενη ακμή χρώματος s από τη x στην sx για κάθε $x \in A$ και $s \in S$. Η λέξη μετρική τότε αντιστοιχεί στη μετρική του γραφήματος $Cayley$.

Ορισμός 8.2.1. *Έστω B πεπερασμένη ομάδα και S υποσύνολο της B Τότε ορίζουμε το γράφημα Cayley της B με σύνολο γεννητόρων S και το συμβολίζουμε με $\Gamma(B,S)$, το γράφημα που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

- *Όλα τα στοιχεία της ομάδας B είναι κορυφές του γραφήματος.*

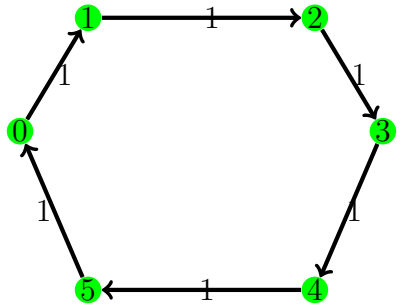
$$V(\Gamma) = \{v_i | v_i \in B\}$$

- *Κάθε ακμή προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τους γεννήτορες. Υπάρχει ακμή που συνδέει τις κορυφές $g, s \in \Gamma(B,S)$ αν $h = gs$ για κάποιο $s \in S$.*

$$E(\Gamma) = \{(g, sg), g \in B, s \in S\}.$$

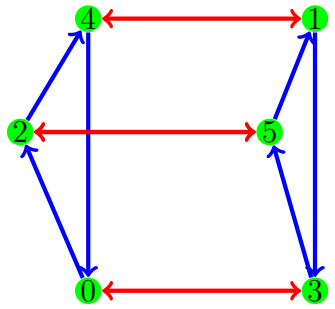
Το S δεν περιέχει ταυτοτικά στοιχεία έτσι ώστε να μην υπάρχουν ανακυκλώσεις στο γράφημα Γ. Κάθε ακμή υπάρχει στο γράφημα χωρίς να έχει σημασία ποιά κορυφή θα επιλέξουμε. Έτσι, αν υπάρχει η ακμή (g, gs) θα υπάρχει και η ακμή $(gs, (gs)s^{-1} = g)$.
Για παράδειγμα αν έχουμε τη συμμετρική ομάδα S_3, το σύνολο των γεννητόρων της, S από τις μεταθέσεις από το σύνολο $T = \{(12), (23), (13)\}$,τότε το γράφημα *Cayley* είναι ισόμορφο με το $K_{3,3}$.

Παράδειγμα 8.1. *Το γράφημα Cayley για την κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ με γεννήτορες το σύνολο $S = \{1\}$.*



Σχήμα 8.1: Το γράφημα *Cayley* για την $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 8.2. *Το γράφημα Cayley για την ομάδα $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ με γεννήτορες το σύνολο $S = \{2, 3\}$.*

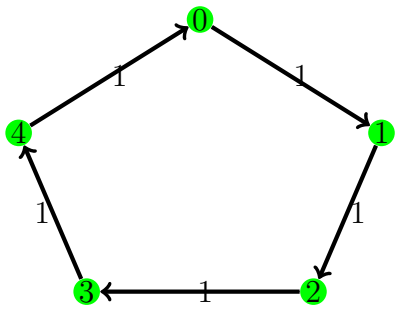


Σχήμα 8.2: Το γράφημα *Cayley* για την ομάδα $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ με $S = \{2, 3\}$.

Στο γράφημα του σχήματος ;; συμβολίζουμε με:
$\longrightarrow$ το στοιχείο 2
$\longrightarrow$ το στοιχείο 3

Παρατήρηση 8.2.2. *Απο τα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε ότι η ίδια ομάδα μπορεί να έχει διαφορετική γεωμετρία αν αλλάξει το σύνολο των γεννητόρων της. Για παράδειγμα σε μια κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ με ένα γεννήτορα $S = \{1\}$ το γράφημα Cayley φαίνεται μονοδιάστατο ενώ αν έχουμε ένα σύνολο με δυο γεννήτορες $S = \{s_1, s_2\}$ το γράφημα Cayley φαίνεται διδιάστατο.*

Παράδειγμα 8.3. *Το γράφημα Cayley που προκύπτει από τη $\mathbb{Z}_5$ με σύνολο γεννητόρων το $S = \{1\}$ είναι ένα γράφημα ισόμορφο με το κυκλικό γράφημα C_5.*



Σχήμα 8.3: Το γράφημα *Cayley* της $\mathbb{Z}_5$

Πρόταση 8.2.3. *Θεωρούμε S το σύνολο των γεννητόρων μιας ομάδας A. Το γράφημα Cayley Γ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- *Για κάθε χρώμα $s \in S$, κάθε κορυφή x έχει μια $s-$ακμή στη x και μια $s-$ακμή από τη x.*

- *είναι συνεκτικό γράφημα.*

- *Για κάθε ζευγάρι κορυφών x, y υπάρχει ένα μοναδικό ισόμορφο γράφημα που αντιστοιχεί τη x στη y.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι γράφημα *Cayley* αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. Δεδομένου ενός γραφήματος G με τις παραπάνω ιδιότητες αν η ομάδα A είναι η ομάδα των αυτομορφισμών του γραφήματος G, αν μια κορυφή του γραφήματος είναι το ταυτοτικό στοιχείο μπορούμε να ονομάσουμε όλες τις άλλες κορυφές με ένα στοιχείο της ομάδας. Στη συνέχεια κάθε στοιχείο $s \in S$ αντιστοιχίζεται με ένα χρώμα.

□

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Αν κάποιο στοιχείο του συνόλου των γεννητόρων s ταυτίζεται με το αντίστροφό του $s = s^{-1}$, τότε γενικά η ακμή στο γράφημα είναι απλή.

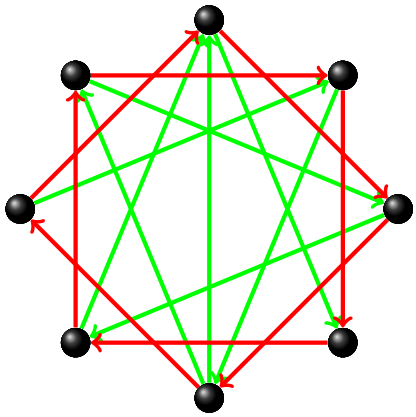
- Το γράφημα *Cayley* εξαρτάται πάντα από την επιλογή του συνόλου των γεννητόρων S. Αν το σύνολο των γεννητόρων S έχει k στοιχεία τότε κάθε κορυφή έχει k εισερχόμενες και k εξερχόμενες ακμές. Στην περίπτωση που έχουμε συμμετρικό σύνολο γεννητόρων με r στοιχεία, τότε το γράφημα *Cayley* είναι κανονικό βαθμού r.

- Οι κύκλοι σε ένα γράφημα *Cayley* δείχνουν τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου γεννητόρων S.

- Ένα γράφημα *Cayley* μπορεί να κατασκευαστεί από ένα σύνολο γεννητόρων ακόμη και αν αυτό δεν παράγει την ομάδα A. Το γράφημα που προκύπτει είναι μη συνεκτικό και δε θεωρείται γράφημα *Cayley*. Στην περίπτωση αυτή, κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος αντιπροσωπεύει ένα σύμπλοκο της υποομάδας που παράγεται από το σύνολο γεννητόρων.

8.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.4. *Το γράφημα Cayley για την κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_8$ με γεννήτορες το σύνολο $S = \{2, 3\}$*



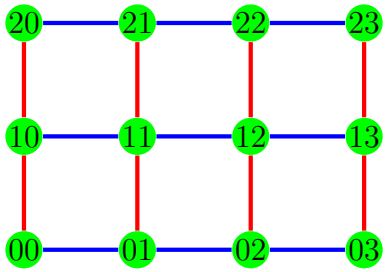
Σχήμα 8.4: Το γράφημα *Cayley* για την $\mathbb{Z}_8$ με $S = \{2, 3\}$

Στο γράφημα του σχήματος 8.4 συμβολίζουμε με:
$\longrightarrow$ το στοιχείο 2
$\longrightarrow$ το στοιχείο 3.

Παρατήρηση 8.3.1. *Ένα τυχαίο γράφημα G καλείται γράφημα Cayley αν υπάρχει μια ομάδα B και ένα σύνολο γεννητόρων S τέτοιο ώστε το G είναι ισόμορφο με το γράφημα Cayley για B και S.*

Παρατήρηση 8.3.2. *Το ελάχιστο σύνολο γεννητόρων για το $\mathbb{Z}_8$ έχει ένα μόνο γεννήτορα και το αντίστοιχο γράφημα Cayley είναι το κυκλικό γράφημα C_8.*

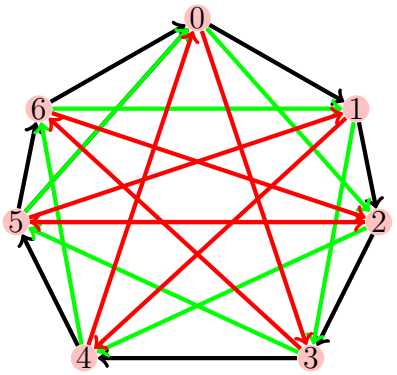
Παράδειγμα 8.5. *Το 3×4 επαναδιπλώμενο πλέγμα είναι το γράφημα Cayley για την ομάδα $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ με γεννήτορα το $S = \{01, 10\}$.*



Σχήμα 8.5: Το 3×4 επαναδιπλώμενο πλέγμα.

Στο γράφημα του σχήματος 8.5 συμβολίζουμε με:
$- - -$ το στοιχείο 10
$- - -$ το στοιχείο 01.

Παράδειγμα 8.6. *Το πλήρες γράφημα K_{2n+1} είναι γράφημα Cayley για την ομάδα $\mathbb{Z}_{2n+1}$ με σύνολο γεννητόρων $X = \{1, 2, ..., n\}$.*
Επομένως το K_7 είναι γράφημα Cayley για την ομάδα $\mathbb{Z}_7$ και έχει σύνολο γεννητόρων το $X = \{1, 2, 3\}$

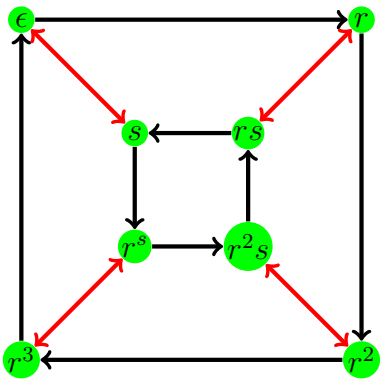


Σχήμα 8.6: Το γράφημα *Cayley* για την $\mathbb{Z}_7$

Στο γράφημα του σχήματος 8.6 συμβολίζουμε με:
$\longrightarrow$ το στοιχείο 1 του συνόλου X,
$\longrightarrow$ το στοιχείο 2 του συνόλου X
$\longrightarrow$ το στοιχείο 3 του συνόλου X.

Παράδειγμα 8.7. *Η Διεδρική ομάδα είναι η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου. Έστω ότι το r υποδηλώνει στροφή 90 και το s ανάκλαση στον κάθετο άξονα. Τα στοιχεία της D_4 θα είναι:*

$$\{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^s, r^3s\}$$



Σχήμα 8.7: Το γράφημα *Cayley* της D_4.

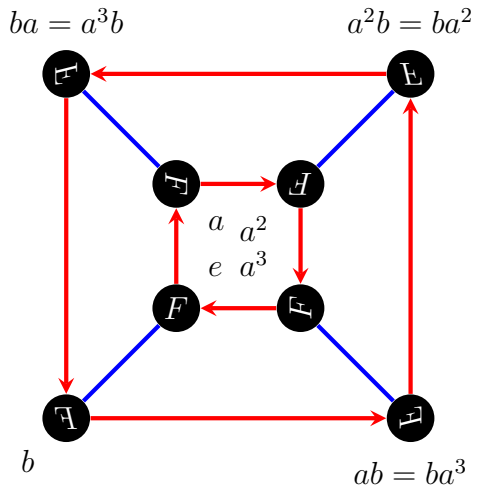
Στο γράφημα του σχήματος 8.7 συμβολίζουμε με:
$\longrightarrow$ το δράση του στοιχείου s

$\longrightarrow$ το δράση του στοιχείου r.

Παρατήρηση 8.3.3. *Στο σχήμα 8.7 παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακμές διπλής κατεύθυνσης που αλγεβρικά σημαίνει ότι το στοιχείο είναι ίσο με το αντίστροφό του. Τις ακμές αυτές μπορούμε να τις συμβολίζουμε με απλές οι οποίες δείχνουν επίσης αμφίδρομη κίνηση.*

Παράδειγμα 8.8. *Το γράφημα Cayley της διεδρικής ομάδας D_4 με σύνολο γεννητόρων το $S = \{a, b\}$. Τα κόκκινα τόξα συμβολίζουν τον αριστερό πολλαπλασιασμό με το στοιχείο a που είναι η δεξιά στροφή κατά 90. Με b συμβολίζουμε την ανάκλαση στον οριζόντιο άξονα. Επειδή $b = b^{-1}$ παρατηρούμε ότι οι μπλε γραμμές που αντιπροσωπεύουν τον αριστερό πολλαπλασιασμό με το b είναι μη κατευθυνόμενες. Ο πίνακας Cayley της ομάδας D_4 προκύπτει από τα παρακάτω*

$$\langle a, b | a^4 = b^2 = e, ab = ba^3 \rangle$$

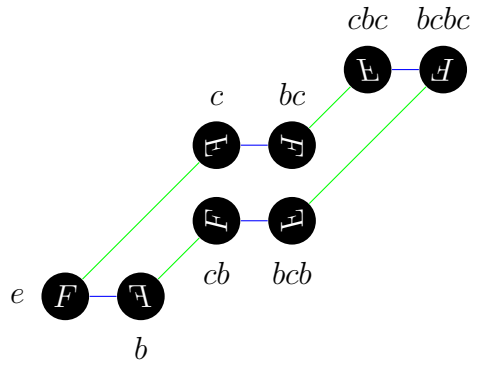


Σχήμα 8.8: Το γράφημα *Cayley* της D_4.

Η κίνηση του στοιχείου F στο σχήμα 8.8 μας δείχνει τις στροφές και τις ανακλάσεις μετά τη δράση του αντίστοιχου στοιχείου r, s από το σύνολο γεννητόρων.

Παράδειγμα 8.9. *Το γράφημα Cayley της διεδρικής ομάδας D_4 με σύνολο γεννητόρων το $S = \{b, c\}$.Με το στοιχείο c αναπαριστά την διαγώνια ανάκλαση και συμβολίζεται με τις πράσινες ακμές. Οι μπλε ακμές συμβολίζουν το στοιχείο b που είναι η οριζόντια ανάκλαση. Ο πίνακας Cayley της ομάδας D_4 προκύπτει από τα παρακάτω*

$$\langle b, c | b^2 = c^2 = e, bcbc = cbcb \rangle$$



Σχήμα 8.9: Το γράφημα *Cayley* της D_4.

Η κίνηση του στοιχείου F στο σχήμα 8.9 μας δείχνει τις στροφές και τις ανακλάσεις μετά τη δράση του αντίστοιχου στοιχείου b, c από το σύνολο γεννητόρων.

Παράδειγμα 8.10. *Το γράφημα Petersen είναι συμμετρικό όμως δεν είναι γράφημα Cayley.*

8.4 Ιδιότητες

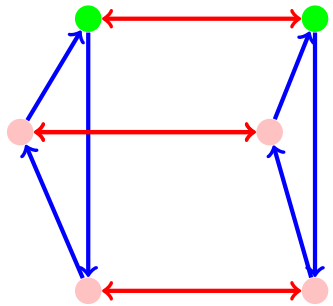
Στην Παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας ομάδων με τη βοήθεια των γραφημάτων *Cayley* και θα παρατηρήσουμε ότι όλες αυτές οι έννοιες έχουν στην ουσία κάποια γεωμετρικά στοιχεία τα οποία παρατηρούμε στα γραφήματα *Cayley* .

Όπως είδαμε από τα προηγούμενα παραδείγματα, τα γραφήματα *Cayley* 'δείχνουν' ίδια, ανεξάρτητα από το όνομα που θα έχουν οι κορυφές τους. Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν γραφοθεωρητική ιδιότητα είναι αληθής για μια κορυφή θα είναι αληθής και για οποιαδήποτε άλλη κορυφή του ίδιου γραφήματος.

Στηριζόμενοι στην παραπάνω ιδιότητα, τα γραφήματα *Cayley* στα επόμενα παραδείγματα δε θα έχουν ετικέτες στις κορυφές για να δοθεί έμφαση στην ομογενή φύση των γραφημάτων αυτών.

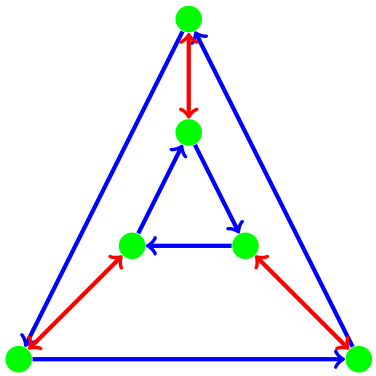
Για να βρούμε αν η ομάδα από την οποία προκύπτει ένα γράφημα *Cayley* είναι αβελιανή, αρκεί για οποιουσδήποτε δυο γεννήτορες s_1, s_2, να δείξουμε ότι υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι , $s_1, s_2, s_1^{-1}, s_2^{-1}$, το οποίο επιστρέφει στην κορυφή από την οποία ξεκίνησε. (Αν s είναι μια κατευθυνόμενη ακμή τότε η ακμή με την αντίθετη κατεύθυνση θεωρείται ως η ακμή s^{-1}).

Παράδειγμα 8.11. *Από το γράφημα Cayley του παραδείγματος 8.2 παρατηρούμε ότι υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος της μορφής* $s_1 - s_2 - s_1^{-1} - s_2^{-1}$, *όπου* $s_1 = 3, s_2 = 2$. *Οι κορυφές του κύκλου σημειώνονται με ροζ χρώμα στο σχήμα. Άρα η ομάδα είναι αβελιανή.*



Σχήμα 8.10: Το γράφημα *Cayley* για την $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ με $S = \{2, 3\}$.

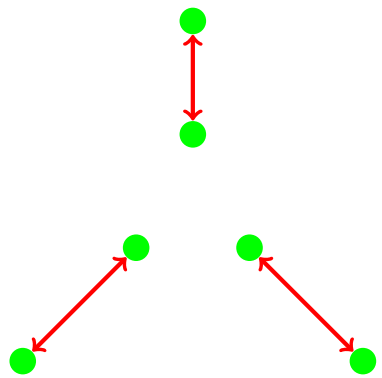
Παράδειγμα 8.12. *Το γράφημα Cayley της ομάδας μεταθέσεων* S_3 *η οποία ειναι ισόμορφη με τη διεδρική ομάδα* D_3. *Παρατηρούμε στο σχήμα 8.11 ότι δεν υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος της μορφής* $s_1 - s_2 - s_1^{-1} - s_2^{-1}$. *Άρα η ομάδα δεν είναι αβελιανή.*



Σχήμα 8.11: Το γράφημα *Cayley* της S_3.

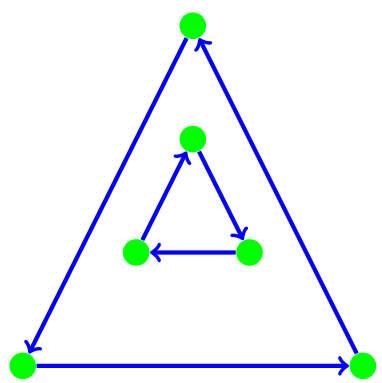
Μια υποομάδα (A', S') της ομάδας (A, S) μπορεί να περιγραφεί σχηματικά από ένα γράφημα *Cayley* αν το σύνολο γεννητόρων S' της A' είναι υποσύνολο του συνόλου γεννητόρων S της A. Στην περίπτωση αυτή, αν από ένα γράφημα *Cayley* αφαιρέσουμε τις ακμές των γεννητόρων που δεν ανήκουν στο S', τότε το αρχικό γράφημα διασπάται σε συνεκτικές συνιστώσες κάθε μια από τις οποίες είναι ισόμορφη με το γράφημα *Cayley* της (A', S').

Για παράδειγμα, αν από το γράφημα *Cayley* του σχήματος 8.11 διαγράψουμε τις μπλε ακμές, προκύπτει το γράφημα *Cayley* του σχήματος 8.12 το οποίο αποτελείται από τρεις συνεκτικές συνιστώσες και έχει δομική ομάδα την $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



Σχήμα 8.12: Το γράφημα *Cayley* της $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

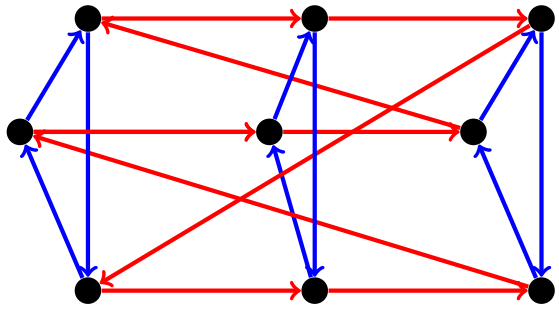
Αν από το γράφημα *Cayley* του σχήματος 8.11 διαγράψουμε τις μπλε ακμές, προκύπτει το γράφημα *Cayley* του σχήματος 8.13 το οποίο αποτελείται από δυο συνεκτικές συνιστώσες έχει δομική ομάδα την $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.



Σχήμα 8.13: Το γράφημα *Cayley* της $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Αν το S' δεν είναι υποσύνολο του S, τότε πρέπει πρώτα να γίνει αλλαγή βάσης και να προστεθούν ή να αφαιρεθούν κάποιες ακμές από το αρχικό γράφημα *Cayley*. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η S_3 περιέχει και άλλες δυο υποομάδες τάξης δυο οι οποίες δεν προκύπτουν από αυτή την επιλογή των γεννητόρων.

Παράδειγμα 8.13.



Σχήμα 8.14: Το γράφημα *Cayley* για την $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ με $S = \{1, 3\}$.

Στο γράφημα του σχήματος 8.14 συμβολίζουμε με:
$\longrightarrow$ τη δράση του στοιχείου 1
$\longrightarrow$ τη δράση του στοιχείου 3.

8.5 Οικογένειες γραφημάτων *Cayley*

Παράδειγμα 8.14. *Το πλήρες γράφημα K_n είναι ένα γράφημα Cayley στην προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}_n$ των ακεραίων modulo n με σύνολο γεννητόρων όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{Z}$.*

Παράδειγμα 8.15. *Το πλήρες γράφημα K_n μπορέι να αναπαρασταθεί ως ένα γράφημα Cayley με οποιαδήποτε ομάδα τάξης n, όπου το σύνολο των γεννητόρων είναι τα μη ταυτοτικά στοιχεία της ομάδας. Μπορούμε να πάρουμε το συμπλήρωμα του γραφήματος K_n χρησιμοποιώντας το κενό σύνολο σα σύνολο γεννητόρων.*

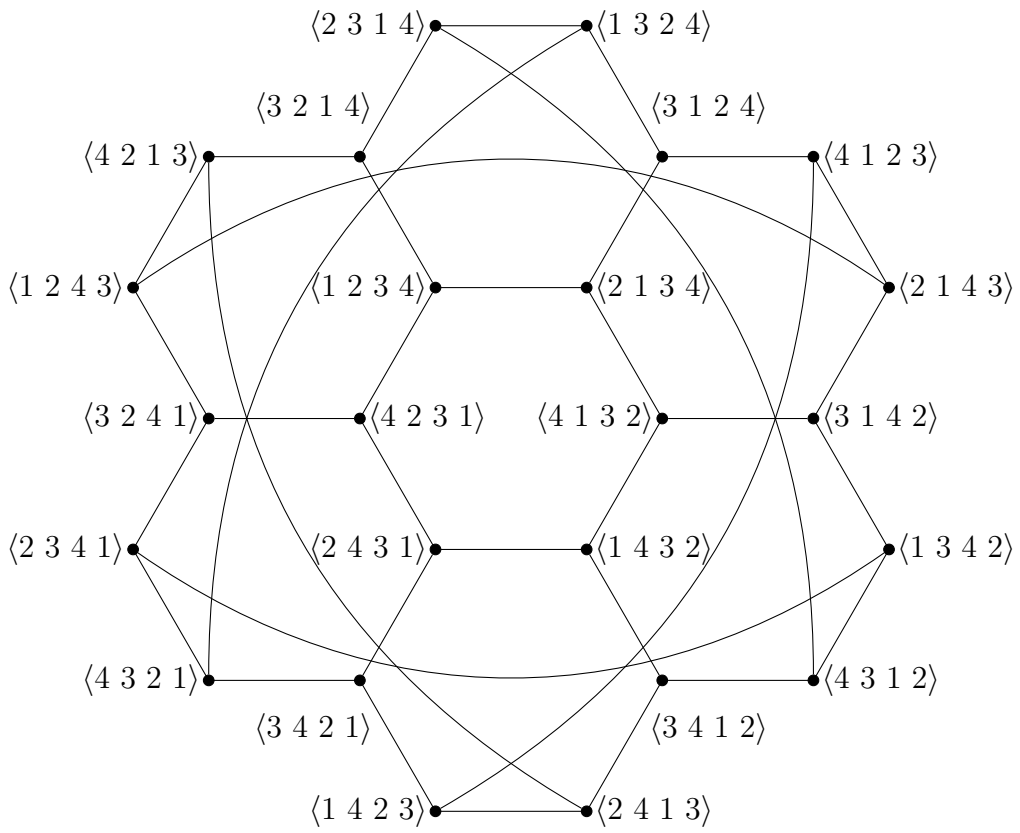
Παράδειγμα 8.16. *Το γράφημα Cayley της άπειρης κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}$ με σύνολο γεννητόρων το $S = \{-1, 1\}$ είναι μια άπειρη αλυσίδα.*

Παράδειγμα 8.17. *Αν έχουμε την πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n, $\mathbb{Z}_n$ και το σύνολο των γεννητόρων αποτελείται από δυο στοιχεία, τον γεννήτορα της $\mathbb{Z}_n$ και τον αντίστροφό του, τότε το γράφημα Cayley είναι ο κύκλος C_n.*

Παράδειγμα 8.18.

8.6 *Star graph*

Το γράφημα *star graph* τάξης n έχει ώς σύνολο κορυφών όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $\{1, 2..., n\}$ μια ακμή συνδέει δυο κορυφές στις οποίες οι μεταθέσεις προκύπτουν η μια από την άλλη με αντιμετάθεση του πρώτου στοιχείου με οποιοδήποτε άλλο.
π.χ. η κορυφή (1 2 3 4) συνδέεται με την κορυφή (3 2 1 4)



Σχήμα 8.15: *Star graph*

Μέρος III

Διδακτικές προεκτάσεις

Κεφάλαιο 9

Διδακτικές προεκτάσεις

> Η λύση στηρίζεται μόνο στη λογική
> και η ανακάλυψη της δεν εξαρτάται
> από καμία μαθηματική αρχή
>
> *Euler* 1736

9.1 Η διδασκαλία

Η συγκεκριμένη διδασκαλία έγινε στα πλαίσια του μαθήματος του B'' εξαμήνου, Διδασκαλία των Μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων (Δ7), του Διαπανεπιστημιακού – Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην « Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ». Η διδασκαλία έγινε στο Πειραματικό Λύκειο Αμπελοκήπων, την Τετάρτη 24η Απριλίου 2013 σε τμήμα της Α Λυκείου.

Το μάθημα αφορά μια εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων. Ένα κεφάλαιο των εφαρμοσμένων μαθηματικών που δεν υπάρχει στο Αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η πρωτοβουλία ήταν δική μου, έχοντας ως σκοπό να εισάγω τους μαθητές σε κάποιες έννοιες της θεωρίας γραφημάτων με σκοπό την επίλυση προβλημάτων.

Το φύλλο εργασίας[1] σχεδιάστηκε έτσι ώστε με κάθε δραστηριότητα τα οι μαθητές να είναι σε θέση να βρίσκουν και να διατυπώνουν το δικό τους ορισμό για κάποιες σημαντικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων. Να πειραματίζονται μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και στη συνέχεια να βρίσκουν το *pattern* και να διατυπώνουν τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιούν στο τέλος κάθε δραστηριότητας για να λύσουν τα προβλήματα που ακολουθούν.

[1] Το φύλλο εργασίας παρατίθεται στο παράρτημα.

9.1.1 Η Τάξη

Η πρακτική της τάξης ήταν συν−κατασκευαζόμενη μαζί με τους μαθητές, οι οποίοι συμμετείχαν στην διδασκαλία με περισσότερα από ένα είδη συμμετοχής. Χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων με ένα φύλλο εργασίας, το οποίο δούλευαν μαζί σε όλη την διάρκεια του μαθήματος και συνεχώς τους ενθάρρυνα να μιλούν με την ομάδα τους. Στην πλειοψηφία της η διδασκαλία, βασίζεται σε συζήτηση μεταξύ εμένα και όλης της τάξης ή μεταξύ εμένα και μέλους μιας ομάδας. Η επιλογή αυτής της πρακτικής έγινε, διότι τα παιδιά έπρεπε να εισαχθούν σε νέες έννοιες που δεν τις είχαν ξανασυναντήσει και σε ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης, άρα σε αρκετά σημεία η γνωστική δυσκολία ήταν μεγάλη και έπρεπε να μεσολαβώ, μέσα στα όρια του $scaffolding$, ώστε να ενεργοποιηθεί η zpd όλων των μαθητών και να προχωρήσουμε στην επόμενη δραστηριότητα. Προσπάθησα να συνδέσω την υπάρχουσα γνώση των μαθητών με τη νέα χρησιμοποιώντας πολύ απλές σκέψεις και εκφράσεις προκειμένου να λύσουν τα προβλήματα που συνάντησαν πρώτη φορά.

Στην αρχή του μαθήματος η διδασκαλία μου είχε τη μορφή διάλεξης με σκοπό να δώσω στους μαθητές κάποια εισαγωγικά στοιχεία, ιστορικά και κάποιες εικόνες που ενδεχομένως να είχαν παρατηρήσει στην καθημερινή τους ζωή για να μπορέσουν ύστερα να κάνουν τις δικές τους παρατηρήσεις. Στη συνέχεια, προσπάθησα οι μαθητές να φτάσουν στην γνώση, μόνο με εργαλεία τις προηγούμενες γνώσεις τους. Γενικά, προσπάθησα οι ερωτήσεις μου να είναι ανοιχτού τύπου στα πλαίσια των στρατηγικών του $Polya$. Ρωτούσα τους μαθητές να μου περιγράψουν πως σκέφτηκαν και να μου εξηγήσουν τις απαντήσεις τους.

9.1.2 Μετά τη διδασκαλία - Συμπεράσματα

Στο τέλος της διδασκαλίας τα συναισθήματα που αποκόμισα από αυτή ήταν θετικά. Ήταν η πρώτη φορά που δίδασκα τη θεωρία γραφημάτων σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και για να είμαι ειλικρινής με συγκίνησε η ανταπόκρισή τους και η θετική διάθεση τους να ασχοληθούν με ένα κεφάλαιο των μαθηματικών που συναντούσαν για πρώτη φορά.

Αυτό που συλλογιζόμουν στο τέλος της διδασκαλίας και ίσως θα άλλαζα αν την ξαναέκανα θα ήταν η εισαγωγή. Ίσως η ιστορική εισαγωγή δεν ήταν η καλύτερη επιλογή. Ο μονόλογος στην αρχή ίσως ήταν βαρετός για αυτούς. Πιστεύω, ότι θα ήταν πιο χρήσιμο για τους μαθητές να υπάρχουν πιο πολλά γραφήματα υπό τη μορφή παραδειγμάτων, μέσα από την καθημερινή τους ζωή για να τους βοηθήσω να σκεφτούν ακόμα περισσότερα και στο τέλος να διατυπώσουμε μαζί έναν διαισθητικό ορισμό του γραφήματος.

Το φύλλο εργασίας πιστεύω ότι ήταν καλά δομημένο γιατί περιείχε δραστηριότητες που βοηθούσαν τους μαθητές να διατυπώσουν ορισμούς και θεωρήματα από τη

θεωρία γραφημάτων και στη συνέχεια να τα εφαρμόσουν λύνοντας κάποια προβλήματα. Στην τελευταία σελίδα του φύλλου εργασίας υπήρχε το παιχνίδι της μονοκοντυλιάς αλλά, δυστυχώς, δεν μπόρεσα να ολοκληρώσω όλες τις δραστηριότητες. Πιστεύω ότι και αυτό το παιχνίδι θα ήταν αρκετά ενδιαφέρον για τους μαθητές καθώς και τα συμπεράσματα που θα προέκυπταν από αυτό. Είχα στο μυαλό μου να κλείσω τη διδασκαλία με ένα ευχάριστο τρόπο.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσω ότι όταν σχεδίαζα το φύλλο εργασίας δεν ήξερα σε ποια τάξη θα γίνει η διδασκαλία και τους μαθητές. Δε ήξερα ποιοι ήταν οι καλοί και οι λιγότερο καλοί μαθητές της τάξης. Μου έκανε εντύπωση ότι όλοι οι μαθητές συνεργάστηκαν πολύ καλά μαζί μου και έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για τη διδασκαλία. Είναι ενθαρρυντικό ότι όλοι οι μαθητές ανταποκρίθηκαν στις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας και συμμετείχαν στην τάξη.

9.2

Κατάλογος Σχημάτων

Βιβλιογραφία

[1] Cayley, A. (1878). On the theory of groups, Proc. London Math. Soc. 9, 126-133.

[2] Cayley, A. (1889). A theorem on trees, Quart. J. Math. 23, 376-378. Collected papers, 13, 2628.

[3] D.W. Farmer. Groups and Symmetry. A guide to discovering mathematics (Mathematical World Volume 5). American Mathematical Sociiety (1996).

[4] J.B.Fraleigh. A First Course in Abstract Algebra, 7th edition. Addison Wesley (2002). (2002)

[5] Garrett Birkhoff and M. K. Bennett, Felix Klein and his "Erlanger Programm", in History and Philosophy of Modern Mathematics, eds. W. Aspray and P. Kitcher, Minnesota Stud. Philos. Sci. XI, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1988, pp. 145-176.

[6] Hans A. Kastrup, The contributions of Emmy Noether, Felix Klein and Sophus Lie to the modern concept of symmetries in physical systems, in Symmetries in Physics (1600-1980), ed. M. G. Doncel, World Scientific, Singapore, 1987, pp. 113-163.

[7] Johan Ernst Mebius, Felix Klein's Erlanger Programm.

[8] J. Meier. Groups, Graphs and Trees.An introduction to the geometry of infinite groups. An Introduction to the Geometry of Infinite Groups. Cambridge University Press, (2008).

[9] Nikulin, V. V., Shafarevich, I. R. (1987). Geometry and Groups. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

[10] Rees, E. G. (2004). Notes on Geometry. Berlin Heidelberg New York: Springer.

[11] Poincare, H. (1901). Second complement a l'analysis situs, Proc. London Math. Soc. 32, 277-308.

[12] Polya, G. (1937). Kombinatorische Anzahlbestimmung fur Gruppen, Graphen, und Chemische Verbindungen, Acta. Math. 68, 145-254.

[13] Kenneth H. Rosen, Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics.

[14] Rotman, J. J. (2002). Advanced Modern Algebra. Prentice Hall.

[15] Rotman, J. J. (1995). An Introduction to the theory of groups. Springer Verlag.

[16] Sims, C. C. (1967). Graphs and finite permutation groups, Math. Zeitschr. 95, 76-86.

[17] Shifrin, T. (1995). Abstract Algebra: A Geometric Approach. Prentice Hall.

[18] Handbook of Graph Theory.

[19] Weyl, H. (1952). Symmetry. Princeton N. J.: Princeton University Press.

[20] Π. Σπύρου. Θεωρία γραφημάτων. Αθήνα 1997.

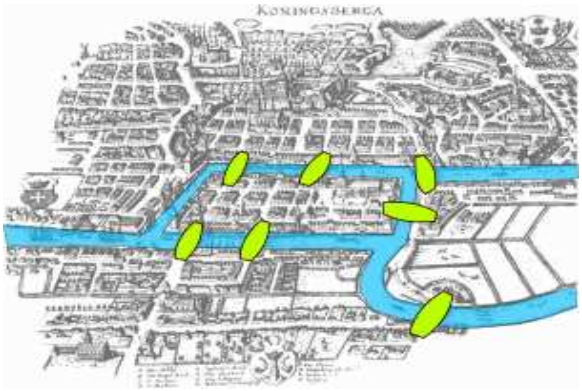
[21] Σημειώσεις του μαθήματος Ιστορία των Νεότερων Μαθηματικών. Διδάσκων : Λάππας Διονύσιος (Ακαδημαικό έτος 2010-2011).

Παράρτημα Α΄

Φύλλο εργασίας

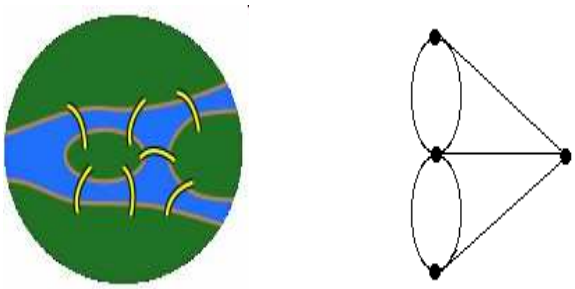
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Λέγεται πως στις αρχές του 18ου αιώνα, οι κάτοικοι της πόλης του *Konigsberg* συνήθιζαν να περνούν τα Κυριακάτικα απογεύματά τους κάνοντας το γύρο της πόλης τους. Η πόλη αποτελείται από τέσσερις τομείς που δημιουργούνται από τους κλάδους του ποταμού *Pregel* πάνω από τους οποίους ήταν χτισμένες επτά γέφυρες Ο *Leonard Euler* ρωτήθηκε αν μπορεί να υποδείξει ότι υπάρχει διαδρομή η οποία να διέρχεται από όλες τις γέφυρες ακριβώς μια φορά και να καταλήγει, αν είναι δυνατόν, στο ίδιο σημείο από όπου ξεκίνησε. Ο *Euler* παρατήρησε ότι το μοναδικό στοιχείο της διαδρομής που ενδιαφέρει το πρόβλημα είναι η σειρά με την οποία η διαδρομή περνάει πάνω από τις γέφυρες. Αναπαρέστησε τα τμήματα ξηράς ως κόμβους και τις γέφυρες ως γραμμές που ενώνουν τα τμήματα ξηράς. Αυτό που τον ενδιέφερε δεν ήταν το μέγεθος τους αλλά η θέση τους.



Σχήμα Α΄.1: *Konigsberg*

Ο *Euler* παρατήρησε ότι το μοναδικό στοιχείο της διαδρομής που ενδιαφέρει το πρόβλημα είναι η σειρά με την οποία η διαδρομή περνάει πάνω από τις γέφυρες. Αναπαρέστησε τα τμήματα ξηράς ως κόμβους και τις γέφυρες ως γραμμές που ενώνουν τα τμήματα ξηράς. Αυτό που τον ενδιέφερε δεν ήταν το μέγεθος τους αλλά η θέση τους.



Σχήμα Α΄.2: Το σχήμα του Ευλερ και ένα Μεταγενέστερο σχήμα- γράφημα

1. Σχεδιάστε ένα δικό σας γράφημα. Τι παριστάνει; Από τι αποτελείται;

ΟΡΙΣΜΟΣ

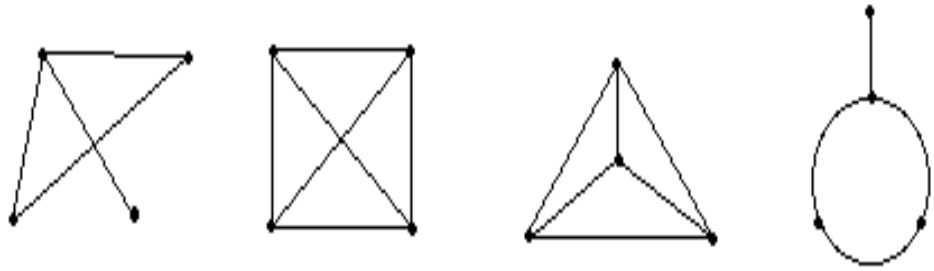
Διαισθητικά, γράφημα είναι οτιδήποτε μπορεί να αναπαρασταθεί (ζωγραφιστεί) με σημεία (κορυφές) και γραμμές (ακμές) μεταξύ των σημείων.
Τυπικά, γράφημα $G(V, E)$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος όπου $V = \{v_1, v_2, ...\}$ το σύνολο των κορυφών και $E = \{e_1, e_2, ...\}$ το σύνολο των ακμών του. Κάθε ακμή είναι ένα σύνολο κορυφών $e = \{v_1, v_2\}$ όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους.

2. Δυο φίλοι μένουν στην Αθήνα και θέλουν να επισκεφθούν τη Θεσσαλονική, το Ηράκλειο, τη Μύκονο και τη Ρόδο. Θέλουν να πάρουν μόνο απευθείας πτήσεις και πληροφορήθηκαν ότι απευθείας πτήσεις υπάρχουν ανάμεσα:

- στην Αθήνα και όλες τις υπόλοιπες πόλεις.
- στη Θεσσαλονίκη και Ηράκλειο καθώς και Θεσσαλονίκη και Ρόδο.
- στο Ηράκλειο και τη Μύκονο.

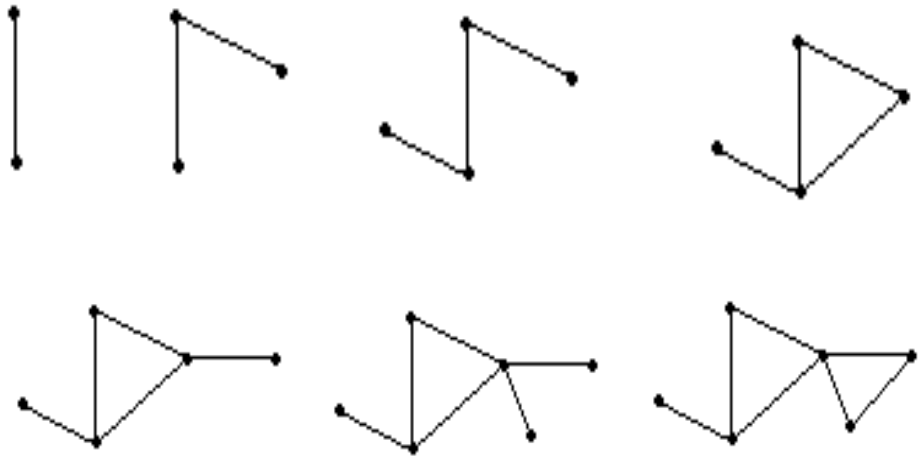
Να σχεδιάσετε ένα γράφημα που να αναπαριστάνει τις δυνατές διαδρομές που μπορούν να κάνουν οι δυο φίλοι.

3. Τι παρατηρείτε για τα παρακάτω γραφήματα;



Διαισθητικά, δυο γραφήματα είναι **ισόμορφα** αν πρόκειται για το ίδιο γράφημα ζωγραφισμένο με άλλο τρόπο. Ποια από τα παραπάνω γραφήματα είναι ισόμορφα;

ΟΡΙΣΜΟΣ: Βαθμό κορυφής ονομάζουμε το πλήθος των ακμών που ξεκινάνε (εφάπτονται) σε αυτή ή το πλήθος τον κορυφών με τις οποίες συνδέεται. **4.** Συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τα γραφήματα του σχήματος. Άθροισμα βαθμών ενός γραφήματος είναι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του.

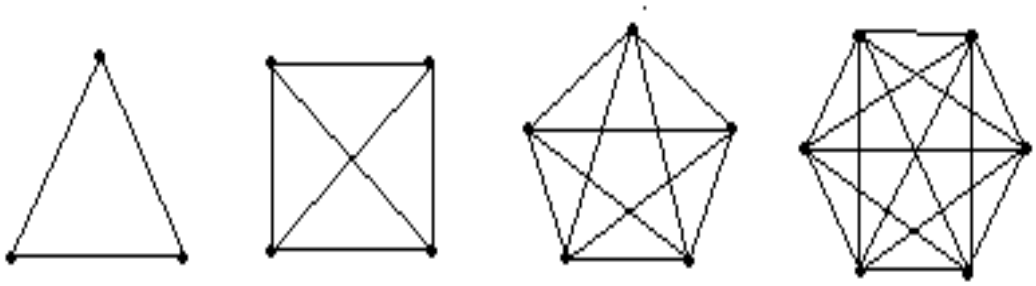


ΓΡΑΦΗΜΑ	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
Αριθμός ακμών							
Άθροισμα βαθμών							

Ποια είναι η σχέση πού συνδέει το άθροισμα των βαθμών των κορυφών οποιουδήποτε γραφήματος με τον αριθμό των ακμών του;

5. Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου συμμετέχουν 10 ομάδες. Πόσοι αγώνες θα διοργανωθούν αν κάθε ομάδα παίζει με άλλες 3.

ΠΛΗΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ



6. Ποιο γράφημα ονομάζεται πλήρες;

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

ΓΡΑΦΗΜΑ	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Αριθμός ακμών					
Άθροισμα βαθμών					
Αριθμός ακμών					

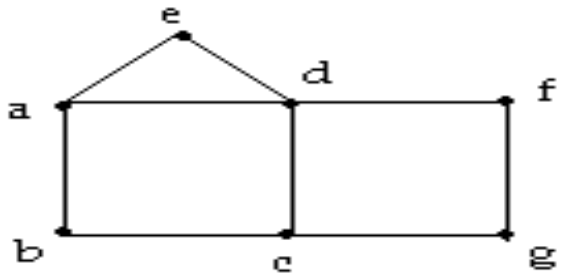
8. Ποια σχέση συνδέει τον αριθμό των ακμών με τον αριθμό των κορυφών ενός πλήρους γραφήματος.

9. Σε μια συνάντηση 5 ατόμων πόσες χειραψίες ανταλάσονται αν κάθε άτομο δίνει το χέρι του σε όλους τους υπόλοιπους. Να σχεδιάσετε ένα γράφημα για το πρόβλημα·

10. Ποίος είναι το μέγιστο πλήθος χειραψιών που μπορούν να ανταλλάξουν 10 άτομα.

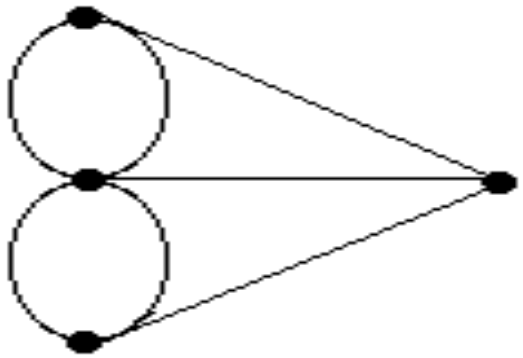
ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΗΣ ΜΟΝΟΚΟΝΔΥΛΙΑΣ

11. Να βρεθεί μια διαδρομή στο παρακάτω γράφημα που να διέρχεται από όλες τις ακμές του ακριβώς μια φορά. Θέλουμε η διαδρομή αυτή να ξεκινάει και να καταλήγει στην ίδια κορυφή.



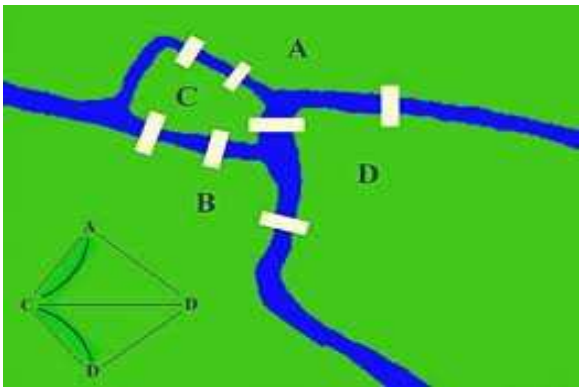
Σχήμα Α΄.3: Το παιχνίδι της μονοκονδυλίας

12. Μπορείτε να βρείτε μια τέτοια διαδρομή και στο γράφημα που είδαμε στην αρχή του μαθήματος;



Σχήμα Α΄.4: Γράφημα γεφυρών.

13. Αν μια διαδρομή που ξεκινάει και καταλήγει στην ίδια κορυφή λέγεται κύκλος. Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου *Euler*.


A
C
D
B
A
C
D
D