ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Χρήση Γραμμάτων ως Μεταβλητές. Τρόποι κατανόησης από τους Μαθητές και Τρόποι εμφάνισης στα Σχολικά βιβλία του Γυμνασίου»

ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΣΤΥΛΙΑΝΗ

Δ 200934

Αθήνα 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 10η Μαρτίου 2014 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γεώργιο Ψυχάρη (επιβλέπων Καθηγητής)	Λέκτορα, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ	……..
2) Κωνσταντίνο Π. Χρήστου	Επίκουρο Καθηγητή (υπό διορισμό), Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	…….
3) Διονύσιο Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ	…….

Ευχαριστίες

- Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου για την αμέριστη υποστήριξή του και την απεριόριστη υπομονή του κατά την διάρκεια της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας.

- Τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ψυχάρη Γεώργιο για τις δόκιμες υποδείξεις του.

- Τον καθηγητή κ. Λάππα Διονύσιο που με τίμησε με την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

- Τις συμφοιτήτριές μου Βίκυ, Αθανασία, Γεωργία και Άννα που μου πρόσφεραν απλόχερα την βοήθειά τους.

- Την Διονυσία για την πρακτική και ηθική της υποστήριξη.

- Τον σύζυγό μου Γιάννη και τα παιδιά μου Κυριακή, Αχιλλέα, Αντώνη και Βίκτωρα που με στήριξαν και μου συμπαραστάθηκαν όλα αυτά τα χρόνια.

Στην οικογένειά μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα αποτελείται από δυο μελέτες οι οποίες εξετάζουν τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στην άλγεβρα. Στη μελέτη Ι διερευνάται με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές την χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών και εξετάζεται αν οι μαθητές παρουσιάζουν την τάση να αντικαθιστούν τις μεταβλητές με φυσικούς αριθμούς όταν αυτές εμφανίζονται σε αλγεβρικές παραστάσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές εμφάνιζαν έντονα την τάση να αναγνωρίζουν τα γράμματα-μεταβλητές ως οποιονδήποτε αριθμό δηλαδή ως γενικευμένο αριθμό, ενώ όταν τους δίνονταν η ερώτηση τι αριθμοί είναι αυτοί φάνηκε ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές θεωρούσαν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Στη μελέτη ΙΙ εξετάζονται τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών των τριών τάξεων του Γυμνασίου και διερευνάται με ποιες και πόσες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές μέσα σε αυτά και κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που τους αποδίδονται είναι φυσικοί ή μη φυσικοί αριθμοί. Οι μεταβλητές εμφανίζονται με την μορφή κυρίως του γενικευμένου αριθμού και επίσης εμφανίζονται να παίρνουν τιμές μη φυσικών και φυσικών αριθμών σε ίδιο περίπου ποσοστό.

Τα αποτελέσματα συζητιούνται σε σχέση με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών της βιβλιογραφίας και προτείνονται παιδαγωγικές εφαρμογές.

Λέξεις κλειδιά: μεταβλητές, φυσικοί αριθμοί, γράμματα, σχολικά βιβλία, αναλυτικό πρόγραμμα.

Abstract

This thesis reports results of two empirical studies. The first study focused on how students interpret literal symbols in algebra and more specifically the tendency to think that literal symbols stand mostly for natural numbers. The results showed that students tended to interpret literal symbols as generalized numbers, that is more than one number, but these numbers are natural numbers in priority. The second study examined how middle school textbooks of mathematics in the Greek public high school present the literal symbols as variables and whether the numerical values assigned to them are mostly natural numbers. The use of variables as *generalized number* dominated the uses of variables, and it was also shown that natural and non-natural numbers appeared in about the same proportion as values of variables. The results are confronted to the main findings and research outputs of other related studies in the literature and some suggestions on pedagogical applications are expressed.

Keywords: variables, literal symbols, natural numbers, curriculum.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στη μελέτη της χρήσης των γραμμάτων ως μαθηματικών συμβόλων και πιο συγκεκριμένα στη χρήση τους ως μεταβλητές στην άλγεβρα. Για τη διερεύνηση του ζητήματος αυτού εξετάσαμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές την χρήση των γραμμάτων που εμφανίζονται ως μεταβλητές σε αλγεβρικές παραστάσεις και με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου.

Η μεταβλητή αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της άλγεβρας και οι δυσκολίες με την κατανόησή της από τους μαθητές βρίσκονται εδώ και αρκετά χρόνια στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η βιβλιογραφία επισημαίνει έντονες δυσκολίες των μαθητών με τα γράμματα-μεταβλητές, ενώ πολλά από τα λάθη και οι χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου συχνά συνδέονται με τις δυσκολίες αυτές.

Για τη διεξαγωγή αυτής της έρευνας σχεδιάσαμε δυο μελέτες. Στην μελέτη Ι εξετάσαμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές την χρήση των γραμμάτων που εμφανίζονται ως μεταβλητές σε αλγεβρικές παραστάσεις. Μέσα από τη διαδικασία των προσωπικών συνεντεύξεων με 86 μαθητές των τριών τάξεων του Γυμνασίου και

της Α΄ Λυκείου διερευνήσαμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων όταν εμφανίζονται σε αλγεβρικές παραστάσεις και επίσης τι τιμές θεωρούν οι μαθητές ότι μπορεί να λάβουν τα γράμματα, δηλαδή αν μπορούν να λάβουν τιμές φυσικών ή και μη-φυσικών αριθμών. Δώσαμε στους μαθητές τρεις αλγεβρικές παραστάσεις τις 2β+3, 3ν, ν+6 και τους ρωτήσαμε, αρχικά στην $1^{η}$ παράσταση, τι παρίστανε το σύμβολο β. Στην συνέχεια τους ζητήσαμε να συγκρίνουν τις παραστάσεις [3ν, ν+6] και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους και τέλος να απαντήσουν στο ερώτημα με ποιους αριθμούς θα μπορούσαν να αντικαταστήσουν το ν. Την μελέτη Ι την διαχωρίσαμε σε τρεις φάσεις, χρησιμοποιώντας σε κάθε φάση όλο και πιο έντονες υποδείξεις, καταγράφοντας τόσο τις αρχικές όσο και τις, μετά τις υποδείξεις, τελικές απαντήσεις των μαθητών.

Αναμέναμε ότι η επικρατέστερη μορφή, με την οποία θα κατανοούσαν οι μαθητές τα γράμματα ως μεταβλητές θα ήταν αυτή του «*Γενικευμένου αριθμού»,* γιατί αυτή ήταν η κυρίαρχη κατηγορία της μελέτης στην οποία βασιστήκαμε. Τα αποτελέσματα της μελέτης Ι έδειξαν ότι οι μαθητές αναγνώριζαν τα γράμματα ως οποιονδήποτε αριθμό, δηλαδή θεωρούσαν ότι τα γράμματα αυτά είναι σύμβολα που αναπαριστούσαν παραπάνω από έναν αριθμούς, αλλά παρόλα αυτά οι αριθμοί αυτοί ήταν κατά προτεραιότητα φυσικοί αριθμοί.

Στην μελέτη ΙΙ εξετάσαμε τον τρόπο χρήσης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Τα σχολικά βιβλία αποτελούν την κύρια πηγή άντλησης του διδακτικού υλικού για κάθε εκπαιδευτικό και μαθητή, για την ελληνική πραγματικότητα, καθόσον τα αναλυτικά προγράμματα και η διδακτέα ύλη σε όλες τις σχολικές βαθμίδες, καθορίζεται σχεδόν αποκλειστικά από αυτά. Ο τρόπος εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία θα μπορούσε να ρίξει λίγο ακόμα φως στις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές και στα λάθη

που κάνουν με τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα. Στην μελέτη ΙΙ, εξετάσαμε αρχικά με ποιες και πόσες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και στη συνέχεια κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται σε αυτά είναι φυσικοί αριθμοί.

Σχεδιάστηκε μια μελέτη ανάλυσης περιεχομένου των σχολικών βιβλίων και αναμέναμε ως επικρατούσες κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών τις κατηγορίες «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» και «*Ετικέτα- Επιγραφή*» με βάση την κατηγοριοποίηση που πρότειναν οι Dogbey και Kersaint, (2012). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μεταβλητές εμφανίστηκαν με την μορφή κυρίως του «*Γενικευμένου αριθμού*» και επίσης οι μεταβλητές εμφανίστηκαν να παίρνουν τιμές μη φυσικών και φυσικών αριθμών σε ίδιο περίπου ποσοστό.

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα των δυο αυτών μελετών παρατηρήσαμε ότι τόσο στα σχολικά βιβλία όσο και στις απαντήσεις των μαθητών η κυρίαρχη κατηγορία χρήσης και κατανόησης της μεταβλητής αντίστοιχα ήταν αυτή του «*Γενικευμένου αριθμού*». Για το λόγο ότι η διδακτέα ύλη καθορίζεται σχεδόν αποκλειστικά από τα σχολικά βιβλία, όσον αφορά τις σχολικές βαθμίδες που εξετάσαμε, θεωρούμε ότι τα δυο αυτά αποτελέσματα πιθανά να συσχετίζονται μεταξύ τους.

Επίσης και οι δυο μελέτες κατέγραψαν ποσοστά ιδιαίτερα υψηλά όσον αφορά την εμφάνιση των μεταβλητών ως φυσικών αριθμών στα σχολικά βιβλία και από τη μεριά τους οι μαθητές κατά προτεραιότητα εμφανίστηκαν να θεωρούν τους φυσικούς αριθμούς ως τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές και μάλιστα με δυσκολία απέδιδαν σ’ αυτές τιμές μη-φυσικών αριθμών.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια πλήρη βιβλιογραφική επισκόπηση όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής, τους τρόπους κατανόησής της και της σχέσης της με τους φυσικούς αριθμούς. Στο δεύτερο κεφάλαιο διερευνάται η σημασία της χρήσης των σχολικών βιβλίων στην εκπαιδευτική και μαθησιακή διαδικασία και εξετάζονται οι τρόποι εμφάνισης των μεταβλητών μέσα στα σχολικά εγχειρίδια. Στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αντίστοιχα οι μελέτες Ι και ΙΙ. Τα τελικά συμπεράσματα και οι παιδαγωγικές εφαρμογές, όπως επίσης και ερωτήματα που εκφράζονται για περαιτέρω διερεύνηση των ζητημάτων που τέθηκαν συζητιούνται στο κεφάλαιο 5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1. Τα γράμματα ως μαθηματικά σύμβολα και η έννοια της μεταβλητής

Η Άλγεβρα αποτελεί τη βασική γλώσσα διαμεσολάβησης των μαθηματικών και κατέχει έναν θεμελιώδη ρόλο στην διδακτέα ύλη (National Council of Teachers of Mathematics, 1989). Συγχρόνως προάγει την εκπαιδευτική και εργασιακή εξέλιξη κάθε ανθρώπου (Ladson-Billings, 1998; Moses & Cobb, 2001).

Μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της Άλγεβρας είναι η μεταβλητή και η κατανόησή της συνιστά βασική προϋπόθεση για μια επιτυχημένη πορεία σ' αυτήν (Philipp, 1992; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; McNeil & Weinberg, 2010). Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής συνδέεται άρρηκτα με την αλγεβρική σκέψη και βρίσκεται εδώ και αρκετά χρόνια στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Lee, 1996; Martzloff, 1997; Arzarello & Robutti, 2001; Boero, 2001; Carraher, Schliemann & Brizuela,

2001; Lins, 2001; Ursini & Trigueros, 2001; Høyrup, 2002; Puig, 2004). Το ευρύ φάσμα των αλγεβρικών αντικειμένων και των αντίστοιχων συμβολισμών τους, για παράδειγμα οι εξισώσεις, οι συναρτήσεις, οι πίνακες, αλλά και οι διαδικασίες που εμπλέκονται με αυτά, πιθανά να είναι η αιτία που ακόμη δε μπορούμε να προσδιορίσουμε με έναν σαφή τρόπο το τι είναι τελικά η αλγεβρική σκέψη (Wagner & Kieran, 1989).

Η σχολική άλγεβρα βασίζεται κατά κύριο λόγο στην χρήση των μεταβλητών η κατανόηση των οποίων αποτελεί μια διαδικασία εξαιρετικά δύσκολη ειδικότερα κατά το στάδιο της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα (Küchemann, 1978, 1981; Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist & Reys, 1981; Hart, 1981; Herscovics & Chalouh, 1985; Nathan & Koellner, 2007).

Οι πολλές και διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις της μεταβλητής προσθέτουν επιπλέον δυσκολίες στην κατανόησή της τόσο από τους μαθητές όσο και από τους δασκάλους-καθηγητές που διδάσκουν μαθηματικά. Η βιβλιογραφία επισημαίνει έντονες δυσκολίες των μαθητών με τα γράμματα, ενώ πολλά από τα λάθη και οι χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου συχνά συνδέονται με τις δυσκολίες αυτές (Küchemann, 1978; Rosnick,1981; Knuth και συνεργάτες, 2005).

Η Άλγεβρα ορίζεται ως η μελέτη της χρήσης και των ιδιοτήτων των μεταβλητών (Usiskin, 1988). Η χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα γίνεται με πολλούς τρόπους οι οποίοι συνδέονται με τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η άλγεβρα. Ο Usiskin (1988) πρότεινε την παρακάτω ταξινόμηση των διαφορετικών χρήσεων των μεταβλητών στην άλγεβρα η οποία σχετίζεται με τις διαφορετικές προσεγγίσεις της όπως και της σχέσης της με την αριθμητική:

- *Γενικευμένη αριθμητική:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως γενικευμένοι αριθμοί για να εκφράσουν σχέσεις, όπως για παράδειγμα στην αντιμεταθετική ιδιότητα α+β=β+α
- *Μελέτη των διαδικασιών για την επίλυση προβλημάτων:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τον άγνωστο μιας εξίσωσης που λαμβάνει συγκεκριμένη τιμή μετά την επίλυση της (μια ή δυο τιμές ανάλογα το βαθμό της εξίσωσης), αλλά που προς τα παρόν παραμένει άγνωστος, όπως για παράδειγμα στην εξίσωση 3x+5=17, όπου ο x λαμβάνει την τιμή 4
- *Μελέτη των σχέσεων διαφόρων ποσοτήτων:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν συναρτησιακές σχέσεις όπως για παράδειγμα στη σχέση y=3x+4, όπου x η ανεξάρτητη μεταβλητή, που μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και y η εξαρτημένη μεταβλητή
- *Μελέτη των δομών:* στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές είναι αυθαίρετα αντικείμενα σε μια δομή όπως οι ομάδες, τα σώματα, οι δακτύλιοι που η καθεμιά συγκροτείται γύρω από συγκεκριμένους κανόνες και αρχές όπως για παράδειγμα στη σχέση a*(b*c)=(a*b)*c

Οι διαφορετικές χρήσεις των μεταβλητών στην άλγεβρα έχουν ως επακόλουθο και διαφορετικούς τρόπους κατανόησης τους από τους μαθητές. Αρκετοί ερευνητές διερεύνησαν αυτές τις διαφορετικές μορφές με τις οποίες κατανοούν οι μαθητές τις μεταβλητές τις οποίες θα δούμε στη συνέχεια στην επόμενη παράγραφο.

1.2. Η έννοια της μεταβλητής και τα στάδια κατανόησής της από τους μαθητές.

Ο Küchemann (1978, 1981), βασιζόμενος στα στάδια κατανόησης που ανέπτυξε ο Collis (1975), ταυτοποίησε έξι στάδια κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής κατηγοριοποιώντας τις διαφορετικές χρήσεις της από τους μαθητές σύμφωνα με τα ιεραρχημένα στάδια ανάπτυξης του Piaget.

Κατά τον Küchemann στα τρία πρώτα στάδια καταδεικνύεται ένας χαμηλός βαθμός κατανόησης από την πλευρά των μαθητών, στο τέταρτο στάδιο αποκρίνεται επαρκώς μικρό μόνο ποσοστό μαθητών, στο δε πέμπτο στάδιο η κατανόηση της μεταβλητής ως γενικευμένου αριθμού αποτελεί ένα από τα ανώτερα επίπεδα, το οποίο κατακτούν μόνον όσοι μαθητές είναι ήδη ικανοί στο χειρισμό του τυπικού διαδικαστικού επιπέδου. Τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής κατά τον Küchemann είναι τα εξής:

- *Μεταβλητή αξιολογούμενη*: οι μαθητές αποδίδουν μια τυχαία τιμή στη μεταβλητή π.χ. θέτουν x=2 στην παράσταση 3x+1 και στην συνέχεια χρησιμοποιούν το αποτέλεσμα
- *Μεταβλητή παραλειπόμενη*: όταν παραλείπεται η χρήση της από τους μαθητές, για παράδειγμα η αλγεβρική έκφραση 2x+3y+7x μετατρέπεται στην 12xy, γιατί οι διαφορετικές μεταβλητές θεωρούνται από τους μαθητές ως μια
- *Μεταβλητή-αντικείμενο*: όταν η μεταβλητή αναγνωρίζεται ως συντομογραφία ενός αντικειμένου για παράδειγμα η έκφραση 2τ+3β συμβολίζει 2 τετράδια και 3 βιβλία

- *Μεταβλητή ως συγκεκριμένος άγνωστος ή σταθερά*: όταν η μεταβλητή αναγνωρίζεται ως ένας συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός, όπου μάλιστα διαφορετικές μεταβλητές αναπαριστούν οπωσδήποτε διαφορετικούς αριθμούς, π.χ., στις παραστάσεις x+y+z και x+v+z οι μαθητές θεωρούν ότι το y δεν μπορεί να ισούται με το v
- *Μεταβλητή ως γενικευμένος αριθμός*: όταν η μεταβλητή μπορεί να λάβει περισσότερες της μιας τιμές, π.χ., στην παράσταση α+β=7 οι μαθητές μπορούν να παραθέσουν παραπάνω από έναν συνδυασμούς που δίνουν το συγκεκριμένο αποτέλεσμα (π.χ. 3+4, 5+2, 6+1)
- *Μεταβλητή ως μεταβαλλόμενη ποσότητα*: όταν οι μαθητές αναγνωρίζουν συμμεταβολές μεταξύ των μεταβλητών για παράδειγμα σε εκφράσεις του τύπου y=2x+3

Ο Philipp (1992) σ' έρευνά του με μαθητές των ΗΠΑ, διαπίστωσε αρκετές παρανοήσεις από την πλευρά των μαθητών που αφορούσαν την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Πρότεινε ορισμένους τρόπους αντιμετώπισής τους και κατηγοριοποίησε τις χρήσεις των γραμμάτων ως μεταβλητών από τους μαθητές στις παρακάτω επτά κατηγορίες:

- *Ετικέτα*: αν η μεταβλητή απεικόνιζε ένα μέγεθος π.χ. β το βάρος ή ήταν συντομογραφία ενός αντικειμένου π.χ. 2μ συμβολίζει 2μολύβια
- *Σταθερά*: αν η μεταβλητή απεικόνιζε μια σταθερά, π.χ. π ή g
- *Παράμετρος*: αν η μεταβλητή εμφανιζόταν ως παράμετρος σε μια εξίσωση π.χ. (λ-1)x=λ+1

- *Άγνωστος αριθμός*: αν η μεταβλητή ήταν ο ζητούμενος άγνωστος σε μια πρωτοβάθμια εξίσωση, π.χ. στην 2x+3=9
- *Γενικευμένος αριθμός*: αν μπορούσε να λάβει περισσότερες της μιας τιμές, π.χ. στην σχέση: (a+b)+c=a+(b+c)
- *Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*: αν η μεταβλητή εξέφραζε μια σχέση συμμεταβολής δυο ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα στη σχέση y=3x+7
- *Αφηρημένο σύμβολο*: αν είχε τη θέση συμβόλου χωρίς αριθμητική αναφορά, π.χ. x*x΄=e

Η κατηγοριοποίηση αυτή αφορούσε την χρήση μόνο των γραμμάτων ως μεταβλητών χωρίς να λαμβάνει υπόψη τη χρήση άλλων συμβόλων στα μαθηματικά, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιούνταν για να εκφράσουν την έννοια της μεταβλητής.

Οι Asquith, Stephens, Knuth και Alibali (2007) διερεύνησαν επίσης με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές τις μεταβλητές που βρίσκονται σε αλγεβρικές παραστάσεις. Μέσω ερωτηματολογίων, ρώτησαν 373 μαθητές 12-14 ετών των ΗΠΑ, τι θεωρούν ότι αναπαριστά το n στην αλγεβρική παράσταση 2n+3 και επίσης ζήτησαν από 122 μαθητές των ίδιων βαθμίδων να συγκρίνουν δυο αλγεβρικές παραστάσεις τις: 3n, n+6.

Η μελέτη τους έδειξε ότι οι μαθητές στην πλειοψηφία τους απαντούσαν ότι το γράμμα θα μπορούσε να αναπαραστήσει οποιονδήποτε αριθμό και ότι το ποια παράσταση ήταν μεγαλύτερη εξαρτιόταν από την τιμή της μεταβλητής. Τις απαντήσεις των μαθητών, όσον αφορά το πρώτο ερώτημα, τις κατέταξαν στην συνέχεια στις παρακάτω κατηγορίες βασιζόμενοι στην ταξινόμηση του Küchemann (1978, 1981):

- *Μεταβλητή - Αντικείμενο*: όταν η απάντηση του μαθητή εξέφραζε την άποψη ότι η μεταβλητή αναπαριστά κάποιο αντικείμενο ή το αρχικό γράμμα μιας λέξης.
- *Μεταβλητή - άγνωστο ψηφίο*: όταν η απάντηση του μαθητή εξέφραζε την άποψη ότι η μεταβλητή μπορεί να λάβει κάποια τιμή μόνον από το 0-9.
- *Μεταβλητή με θεσιακή χρήση*: όταν η απάντηση του μαθητή εκφράζει την άποψη ότι η μεταβλητή μπορεί να σταθεί για οποιοδήποτε ψηφίο δίνοντας μια θεσιακή χρήσης της, για παράδειγμα η παράσταση 2n για n=1 γίνεται ο αριθμός 21.
- *Μεταβλητή - συγκεκριμένος αριθμός*: όταν η απάντηση του μαθητή εξέφραζε την άποψη ότι η μεταβλητή μπορούσε να σταθεί για έναν συγκεκριμένο μόνο αριθμό.
- *Μεταβλητή που λαμβάνει πολλαπλές τιμές*: όταν η απάντηση του μαθητή εξέφραζε την άποψη ότι η μεταβλητή μπορούσε να σταθεί για οποιονδήποτε αριθμό.

Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους κατανοούν οι μαθητές τις μεταβλητές τους προκαλεί αρκετές δυσκολίες και παρανοήσεις. Ένας τρόπος για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτές τις δυσκολίες των μαθητών είναι πρώτα να ανιχνεύσουμε τα είδη των λαθών που αντιμετωπίζουν και στη συνέχεια να εξερευνήσουμε τις αιτίες που τα προκαλούν (Booth, 1984, 1988). Ορισμένα από τα πιο συνήθη λάθη των μαθητών, που έχουν απασχολήσει εδώ και αρκετά χρόνια τους ερευνητές, θα εξετάσουμε στη συνέχεια στην επόμενη παράγραφο.

1.3 Συνήθη λάθη και παρανοήσεις

Οι έρευνες έχουν δείξει ότι αρκετές παρανοήσεις και δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές συναντώνται ήδη από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Οι δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα, είναι κατά βάθος δυσκολίες των μαθητών στην αριθμητική και κυρίως παρανοήσεις που κατά καιρούς δημιουργήθηκαν και ποτέ δεν διορθώθηκαν (Matz, 1980; Booth, 1984; Kieran, 1992; Herscovics & Linchevski, 1994; MacGregor & Stacey, 1997).

Η πρώτη επαφή με τις μεταβλητές ωθεί πολλούς μαθητές σε μια «οπισθοχώρηση» έναντι των Μαθηματικών, που στη συνέχεια τους οδηγεί στην πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά δεν είναι τίποτα περισσότερο από κάτι ασαφές και αφηρημένο (Rosnick, 1981).

Το πόσο βαθιές και αμετάβλητες είναι ορισμένες από τις πεποιθήσεις τους αυτές, όπως για παράδειγμα το να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως συντομογραφίες ονομάτων ή αντικειμένων, έδειξε μια έρευνα με πρωτοετείς φοιτητές των ΗΠΑ. Στο πρόβλημα: «στο Πανεπιστήμιο υπάρχουν έξι φορές περισσότεροι φοιτητές (S) από τους καθηγητές (P)», ένα ποσοστό 37% σε δείγμα 150 φοιτητών, έδωσε λανθασμένη απάντηση αντί της σωστή S=6P. Το ποσοστό αυτό αυξήθηκε σε 73%, όταν υπήρξε μια σχέση λόγου 4/5, αντί της 6/1, του παραπάνω παραδείγματος. Οι ερωτηθέντες ερμήνευαν το S (students) ως ένα σύμβολο-ετικέτα που δηλώνει τους φοιτητές και όχι το πλήθος των φοιτητών (Clement, Lochhead & Monk, 1981; Rosnick, 1981).

Σημαντική επίσης είναι η δυσκολία των μαθητών κατά τον χειρισμό και την ερμηνεία των αλγεβρικών παραστάσεων.

Οι Kieran και Chalouh (1993), σε έρευνά τους διαπίστωσαν την δυσκολία που εμφανίζουν οι μαθητές στο να επιλύουν λεκτικά προβλήματα μέσω της αλγεβρικής επίλυσής τους. Προτιμούσαν δηλαδή τον αριθμητικό τρόπο επίλυσης από το να δημιουργήσουν εξισώσεις, γιατί η αλγεβρική επίλυση απαιτεί έναν αναλυτικό και πιο αφαιρετικό τρόπο σκέψης εντελώς αντίθετο από τον αριθμητικό.

Η Warren (1998) επίσης, διαπίστωσε ως ανεπαρκή την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύσουν τη σημασία των γραμμάτων και να εκτελέσουν τις πράξεις μη γνωρίζοντας την αξία τους. Στο πρόβλημα που τους έθεσε: «πόσοι μαθητές θα μεταφερθούν συνολικά με 3 λεωφορεία, όταν το καθένα μεταφέρει x μαθητές και 4 αυτοκίνητα, όταν το καθένα μεταφέρει y μαθητές;», οι μαθητές εμφάνιζαν μεγάλες δυσκολίες. Στο πρόβλημα αυτό ζητούνταν να υπολογισθεί το συνολικό πλήθος 3x+4y των μαθητών που θα μεταφερθούν, χωρίς να παρέχονται συγκεκριμένες αριθμητικές αξίες. Οι μαθητές δυσκολεύονταν να κατανοήσουν τις μεταβλητές ως οποιονδήποτε αριθμό και να απαντήσουν χωρίς να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένους αριθμούς.

Η διαπίστωση αυτή είχε επισημανθεί επίσης, αρκετά νωρίτερα, και από τον Collis (1975), ο οποίος την είχε ονομάσει ως «έλλειψη κλειστότητας», δηλαδή ως αδυναμία των μαθητών να αποδεχθούν μια αλγεβρική έκφραση ως τελική απάντηση. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η άλγεβρα είναι πιο αφηρημένη και δομική σε σχέση με την αριθμητική που είναι πιο συγκεκριμένη και διαδικαστική (Booth, 1984; Kieran, 1992; Linchevski & Herscovics, 1996; Schmittau, 2005).

Μια άλλη εξίσου σημαντική δυσκολία των μαθητών, που έχουν ανιχνεύσει οι ερευνητές, εμφανίζεται κατά την μετάβαση από την εξίσωση με έναν άγνωστο στη συνάρτηση με δυο μεταβλητές. Οι μαθητές δυσκολεύονται να χειριστούν τις μεταβλητές σε σχέσεις που περιέχουν παραπάνω από ένα γράμματα. Η διαδικασία αυτή μπορεί από τη μια να τους βοηθά να διευρύνουν τον τρόπο χειρισμού των

μεταβλητών, από την άλλη πλευρά όμως αποτελεί γι' αυτούς μια επιπρόσθετη πηγή σύγχυσης, όπως έδειξαν οι έρευνες των Chazan και Yerushalmy (2003). Στο παράδειγμα της συνάρτησης y=2x+5 με συμμεταβαλλόμενες ποσότητες τις x, y, η αντικατάσταση της μιας εξ αυτών με συγκεκριμένο αριθμό, μετατρέπει τη συνάρτηση σε εξίσωση ενός αγνώστου π.χ. για y=11 μετατρέπεται στην 11=2x+5, προσθέτοντας έναν επιπλέον βαθμό δυσκολίας στους μαθητές που δυσχεραίνονται στο να διακρίνουν τις διαφορές των δυο περιπτώσεων.

Ανάλογο είναι και το ακόλουθο παράδειγμα της εξίσωσης $y=x^2-4x$, όπου για y=45 μετατρέπεται στην εξίσωσης $x^2-4x=45$. Η επίλυση του πρώτου μέλους μας οδηγεί σε δυο λύσεις, η γραφική επίλυση όμως μας δείχνει τα σημεία τομής μιας παραβολής και μιας ευθείας. Η κατανόηση αυτής της πιο εκλεπτυσμένης μαθηματικά κατηγορίας των μεταβλητών ως ποσοτήτων που συν-μεταβάλλονται. θεωρείται από τους ερευνητές ως ένα από τα ανώτατα επίπεδα κατανόησης των μεταβλητών (Küchemann, 1978, 1981; Usiskin, 1988; Philipp, 1992; Dogbey & Kersaint, 2012).

Στο σημείο αυτό θα επισημάνουμε την ύπαρξη κι ενός «αντίστροφου» προβλήματος: οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στο να κατανοούν πώς ο ίδιος αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικά γράμματα. Το πρόβλημα αυτό εντόπισαν μετά από έρευνες τους με μαθητές Λυκείου οι Wagner (1981) και Booth (1984, 1988). Οι μαθητές δηλαδή είχαν την τάση να αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταβλητές διαφορετικούς αριθμούς ακόμη και όταν αυτές ταυτίζονταν. Για παράδειγμα στις εξισώσεις 3α+2=11, 3κ+2=11 θεωρούσαν πως οι α, κ αναπαριστούν διαφορετικούς αριθμούς και μάλιστα προσέδιδαν σ' αυτούς και μια σειρά διάταξης σύμφωνα με τη θέση τους στο αλφάβητο, δηλαδή θεωρούσαν πως στην πρώτη εξίσωση ο α αναπαριστά σαφώς μικρότερο αριθμό από τον κ της δεύτερης εξίσωσης. Την δυσκολία αυτή των μαθητών είχε επίσης αναφέρει και ο Küchemann (1978,

1981) διατυπώνοντας ότι οι μαθητές στις παραστάσεις x+y+z και x+v+z θεωρούσαν ότι το y δεν μπορούσε να ισούται με το v.

Έστω λοιπόν κι αν οι μαθητές μπορεί σχετικά εύκολα να κατανοούν ότι τα γράμματα στην άλγεβρα δεν αναπαριστούν μόνον αντικείμενα αλλά και αριθμούς, έχουν παρόλα αυτά την τάση να θεωρούν ότι αυτά τα γράμματα-μεταβλητές αναπαριστούν έναν συγκεκριμένο αριθμό και μόνο αργότερα κατανοούν τη χρήση τους ως γενικευμένου αριθμού, δηλαδή ως συμβόλων που μπορούν να αναπαραστήσουν παραπάνω από έναν αριθμούς (Collis 1975; Küchemann 1978, 1981; Booth, 1984).

Πρόσφατες έρευνες όμως έφεραν στο φως πλέον ενθαρρυντικά στοιχεία και έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούν να χειρισθούν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, όπως αυτή του γενικευμένου αριθμού, αρκετά νωρίτερα απ' ότι προέβλεπε το Πιαζετιανό μοντέλο (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001; Schmittau, 2005; Asquith και συνεργάτες, 2007).

Το ποιές τιμές όμως αποδίδουν οι μαθητές στα γράμματα, από τη στιγμή που τα έχουν κατανοήσει ως γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή αν θεωρούν ότι μπορούν να λάβουν τιμές φυσικών ή μη-φυσικών αριθμών, θα εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

1.4. Η μεταβλητή και η σχέση της με τους φυσικούς αριθμούς

Οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα κυρίως για να αναπαραστήσουν αριθμούς και η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών όσον αφορά τους αριθμούς πιθανά να διαδραματίζει κάποιο ρόλο στην κατανόηση τους. Η εμπειρία στην τάξη έχει δείξει μια τάση να αποδίδουν οι μαθητές στις μεταβλητές

τιμές κυρίως φυσικών αριθμών, όμως το φαινόμενο αυτό δεν είχε μέχρι πρόσφατα αποτελέσει αντικείμενο διεξοδικής μελέτης. Ειδικότερα η βιβλιογραφία δεν έχει μελετήσει τι είδους αριθμούς απέδιδαν οι μαθητές στις μεταβλητές όταν τις κατανοούσαν ως οποιονδήποτε αριθμό δηλαδή ως «*Γενικευμένο αριθμό*».

Το γεγονός ότι για πολλά χρόνια οι μαθητές χρησιμοποιούν τους φυσικούς αριθμούς θα μπορούσε να ευθύνεται για την τάση των μαθητών να αντικαθιστούν τα γράμματα-μεταβλητές με φυσικούς αριθμούς παρότι έχουν διδαχθεί συστηματικά τη χρήση τους ως πραγματικών αριθμών. Την τάση αυτή των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς έχουν εξετάσει διεξοδικά ο Christou και οι συνεργάτες του (2012, 2007, 2005).

Σε έρευνές τους που αφορούσαν μαθητές των Β΄ , Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου και οι οποίοι συμμετείχαν με συνεντεύξεις και ερωτηματολόγια ανοικτού και κλειστού τύπου διαπίστωσαν ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών όσον αφορά τους φυσικούς αριθμούς επηρέαζε και την ερμηνεία τους σε ορισμένα σύμβολα των μαθηματικών. Οι μαθητές θεωρούσαν ότι, για παράδειγμα, το 4γ αναπαριστά φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, το κ+3 φυσικούς μεγαλύτερους του 3 και το –β αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.

Όταν δε τους δόθηκε να συγκρίνουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν γράμματα, όπως για παράδειγμα «ποιο είναι μεγαλύτερο το 5δ ή το 4/δ», τα αποτελέσματα έδειξαν οι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές έλεγαν ότι το 5δ είναι πάντα μεγαλύτερο, γιατί είναι πολλαπλασιασμός και ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει έναν αριθμό. Υποστήριζαν την απάντησή τους αυτή αποδίδοντας στο γράμμα μια σειρά από φυσικούς αριθμούς, ενώ στην ερώτηση του ερευνητή «θα μπορούσες να δοκιμάσεις και με κάποιον άλλο αριθμό» στην πλειοψηφία τους οι μαθητές συνέχιζαν να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς.

Οι ερευνητές ερμήνευσαν την τάση αυτή των μαθητών ως αποτέλεσμα μια γενικότερης «προκατάληψης του φυσικού αριθμού» (Ni & Zhou, 2005) φαινόμενο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς στην κατανόηση των μη-φυσικών αριθμών όπως οι ρητοί και οι αρνητικοί αριθμοί.

Οι μαθητές από πολύ νωρίς κατασκευάζουν μια κατανόηση του αριθμού στη βάση της εμπειρίας τους με τους φυσικούς αριθμούς και τις αρχές της απαρίθμησης (Gelman, 2000). Η αντίληψη αυτή των μαθητών όσον αφορά τους φυσικούς αριθμούς ξεκινά από τα προσχολικά τους χρόνια με την μέτρηση των αριθμών και συνεχίζεται και στα πρώτα σχολικά τους χρόνια όπου μαθαίνουν και εμβαθύνουν στις πράξεις και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

Κάποιοι έχουν χαρακτηρίσει αυτή την πρωταρχική κατανόηση της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές, η οποία στρέφεται γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού, ότι αποτελεί ένα αρχικό πλαίσιο ή αλλιώς μια «θεωρία πλαίσιο» (framework theory) (Vosniadou, 2003; Vosniadou και συνεργάτες, 2008) που οι μαθητές χρησιμοποιούν για να κατανοήσουν μη-φυσικούς αριθμούς όπως τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Με τον όρο «θεωρία πλαίσιο» περιγράφεται μια γνωστική δομή που παρέχει προβλέψεις, εξηγήσεις και μια κοινωνικά διαμοιράσιμη, αλλά όχι απαραίτητα επιστημονικά τεκμηριωμένη θεωρία (Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Αυτή η «θεωρία πλαίσιο» υποστηρίζει συγκεκριμένες πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά το τι είναι αριθμός, πώς συμπεριφέρεται και πώς μπορεί κάποιος να τον χειριστεί. Εμπεριέχει επίσης το γεγονός ότι οι αριθμοί αναπαριστώνται με έναν συγκεκριμένο τρόπο, αναφέρονται σε συγκεκριμένες ποσότητες, ότι είναι διακριτοί μεταξύ τους, ακολουθούν τους κανόνες της διάταξης και των πράξεων και ότι κάθε αριθμός έχει επόμενο και προηγούμενο (Vambakoussi & Vosniadou, 2010).

Για παράδειγμα αρκετοί μαθητές πιστεύουν ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα αυξάνει μια ποσότητα (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985) ή ότι όσο μεγαλύτεροι είναι οι όροι ενός κλάσματος τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία τους (Mack, 1988; Stafylidou & Vosniadou, 2004) ή όσα περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του (Moss, 2005) ή ακόμη ότι η διακριτότητα των αριθμών είναι ιδιότητα των ρητών όπως ακριβώς και των φυσικών, δηλαδή δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε δύο ψευτοδιαδοχικούς αριθμούς, π.χ. στους 0,5 και 0,6 (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Έτσι φαίνεται πως η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους αριθμούς και ο τρόπος με τον οποίο αυτή είναι οργανωμένη θα μπορούσε να ευθύνεται για τη τάση τους να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών. Ταυτόχρονα ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών και ο τρόπος με τον οποίο αυτά εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία θα μπορούσε να ρίξει φως στον τρόπο με τον οποίο τα κατανοούν.

Ενδιαφέρον ερώτημα θα ήταν αν αυτή η σχέση των μεταβλητών με τους φυσικούς ενισχύεται ή όχι και από τον τρόπο που αυτές εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία και από το πώς ζητείται από τους μαθητές να τις χειρίζονται. Η μελέτη των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία πιθανά να μπορούσε να διαφωτίσει περαιτέρω τις δυσκολίες και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν χειρίζονται τα γράμματα ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα.

Στην επόμενο κεφάλαιο θα διερευνήσουμε, βασιζόμενοι σε προϋπάρχουσες μελέτες, με ποιους τρόπους εμφανίζονται οι μεταβλητές μέσα σ’ αυτά. Επίσης θα εξετάσουμε μέσα από την διεθνή βιβλιογραφία τη σημασία της χρήσης των σχολικών βιβλίων στην καθημερινή εκπαιδευτική και διδακτική διαδικασία και στην διδακτική πρακτική των δασκάλων-καθηγητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1. Τα σχολικά βιβλία και η σημασία της χρήσης τους στη σχολική τάξη

Η διδακτέα ύλη σε όλες τις σχολικές βαθμίδες καθορίζεται πλήρως από τα σχολικά βιβλία. Τα σχολικά βιβλία αποτελούν την κύρια πηγή άντλησης του διδακτικού υλικού για κάθε εκπαιδευτικό και μαθητή, προσδιορίζουν τι είναι τα σχολικά μαθηματικά και αποτελούν το συνδετικό κρίκο μεταξύ του τι προβλέπεται και του τι αυτά αντιπροσωπεύουν τόσο για τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς (Eisner, 1987; McKnight και συνεργάτες, 1987; Johansson, 2005).

Στο μείζον ερώτημα του κατά πόσον συνεισφέρουν στην εκπαιδευτική διαδικασία, η απάντηση είναι πώς την οριοθετούν πλήρως και καθορίζουν τη μαθησιακή διαδρομή σε όλες τις βαθμίδες της, λαμβάνοντας υπόψη βέβαια την καθοριστική χρήση τους από τους εκπαιδευτικούς (Anderson & Tomkins, 1983; Ματσαγγούρας, 2006). Αντανακλούν επίσης το σεβασμό και την ευαισθησία στην

προσπάθεια των μαθητών για μάθηση, επιφέροντας σημαντική εσωτερική αλλαγή στη θεώρηση του εκπαιδευτικού συστήματος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης κι επιβεβαιώνοντας μ' αυτόν τον τρόπο τον εκάστοτε εκσυγχρονιστικό χαρακτήρα του (Skolverket, 2003; ΔΕΠΠΣ, 2003).

Η μελέτη των σχολικών βιβλίων έχει θεωρηθεί ως ένα πολύ σημαντικό ζήτημα, όπως για παράδειγμα για το σχεδιασμό της έρευνας του TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study, 1996*). Το TIMSS συγκέντρωσε ερευνητές από περισσότερες από 50 χώρες από όλον τον κόσμο με σκοπό να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν μια μελέτη της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών. Θεωρείται ως η μεγαλύτερη και πιο φιλόδοξη διεθνής συγκριτική μελέτη των επιδόσεων των μαθητών μέχρι σήμερα και τελεί από την αιγίδα της Διεθνούς Ένωσης για την Αξιολόγηση των Εκπαιδευτικών Επιδόσεων (IEA).

Η ενδελεχής εξέταση του περιεχομένου και του τρόπου χειρισμού των βασικών εννοιών που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για τη βελτίωση του παρεχόμενου διδακτικού υλικού που θα συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της διδασκαλίας και της μάθησης σωστών μαθηματικών (Peacock & Cleghorn, 2004; Johansson, 2005; Ματσαγγούρας, 2006).

Προηγούμενες μελέτες που αφορούσαν τα σχολικά βιβλία και τον τρόπο χειρισμού τους από τους εκπαιδευτικούς έχουν δείξει πως οι δάσκαλοι των μαθηματικών παρουσιάζουν την τάση να διδάσκουν θέματα που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία, ενώ αντίθετα αποφεύγουν να διδάσκουν θέματα μαθηματικών που δεν περιέχονται σε αυτά. Επίσης οι δάσκαλοι αναφέρουν ότι τα σχολικά βιβλία αποτελούν πρωταρχική πηγή άντλησης πληροφοριών για τον τρόπο παρουσίασης του διδακτικού υλικού στους μαθητές τους (Alvermann, O'Brien & Dillon, 1990;

Zahorik, 1991; Doyle, 1993; Remillard, 1999; Schmidt και συνεργάτες, 2001). Συγχρόνως τους βοηθούν στη μείωση του χρόνου προετοιμασίας τους για τη διδασκαλία, προσφέροντάς τους μια αυτόνομη, έγκυρη και γενικής αποδοχής συλλογή υλικού το οποίο είναι άμεσα επεξεργάσιμο χωρίς να δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες (Μπονίδης, 2005).

Τα σχολικά βιβλία εκτός του ότι καθορίζουν τις διδακτικές δραστηριότητες που αναπτύσσει ο εκπαιδευτικός και τις μαθησιακές δραστηριότητες που αναπτύσσουν οι μαθητές, θεωρούνται τα διδακτικά μέσα που καθορίζουν πολλές φορές αποφασιστικά το περιεχόμενο της σχολικής γνώσης (Peacock & Cleghorn, 2004; Ματσαγγούρας, 2006). Οι παιδαγωγικές πρακτικές των δασκάλων επηρεάζονται άμεσα από τις διδακτικές προσεγγίσεις του παρεχόμενου διδακτικού υλικού και ο τρόπος διδασκαλίας τους ακολουθεί τον τρόπο παρουσίασης του διδακτικού υλικού που περιέχεται σ' αυτά (McKnight και συνεργάτες, 1987; Reys, R., Reys, B., Lapan, Holliday & Wasman, 2003).

Παρ' όλη την σπουδαιότητά τους όμως λίγες μελέτες έχουν ασχοληθεί με τον τρόπο χρήσης των σχολικών βιβλίων τόσο από τους εκπαιδευτικούς όσο και από τους μαθητές (Freeman & Porter, 1989; Stodolsky, 1989; Hosrley & Lambert, 2001).

Η μελέτη των σχολικών βιβλίων είναι ένα εγχείρημα αρκετά δύσκολο και πολύπλοκο στο να διεκπεραιωθεί και απαιτεί την χρήση ιδιαίτερων μεθόδων, οι οποίες δυστυχώς δεν είναι ακόμη αρκετά αναπτυγμένες και χρήζουν περαιτέρω έρευνας (Pingel, 1999, 2000). Πρωτοπόροι στον τομέα της μελέτης των σχολικών βιβλίων θεωρούνται οι ερευνητές του Georg Eckert Institute της Γερμανίας και ο Michael Apple στις ΗΠΑ οι οποίοι έχουν συνεισφέρει πολλά στον τομέα αυτό (Nicholls, 2007).

Η εγκυρότητα των ερευνών που εξετάζουν τα σχολικά βιβλία μπορεί να διασφαλισθεί μόνον με τον ακριβή καθορισμό των πλαισίων και των εργαλείων που θα χρησιμοποιηθούν. Για το σχεδιασμό μιας τέτοιας έρευνας είναι απαραίτητο να τεθούν κάποια βασικά ερωτήματα, όπως το πώς μπορούν να αναλυθεί το περιεχόμενό τους και μέσα σε ποιο πλαίσιο, ποιες κατευθυντήριες γραμμές θα ακολουθηθούν και το σημαντικότερο ποια ερωτήματα θα τεθούν (Nicholls, 2007).

Ο Pingel, συγγραφέας ενός μεθοδολογικού εγχειριδίου για την έρευνα των σχολικών βιβλίων που εξέδωσε η UNSECO το 1999, έθεσε τέσσερις βασικούς άξονες απαραίτητους για το σχεδιασμό μιας έρευνας σχολικού βιβλίου:

- Τον καθορισμό του κατάλληλου δείγματος που θα χρησιμοποιηθεί στην έρευνα και θα βοηθήσει στην εξαγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων
- Την επιλογή μεθόδων και τεχνικών τόσο για ποσοτική όσο και για ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων
- Τις γενικές οδηγίες για την κατασκευή ενός «αναλυτικού οργάνου» που θα περιλαμβάνει το πλαίσιο, τα κριτήρια που θα τεθούν και τα ερωτήματα που θα υποβληθούν, πλήρως συγχρονισμένα με τους σκοπούς και τους στόχους της μελέτης των συγκεκριμένων βιβλίων
- Επιπρόσθετες οδηγίες που λαμβάνουν υπόψη το ευρύτερο πλαίσιο (π.χ. οικονομικό) στο οποίο βρίσκεται μια χώρα και αφορά την ποιότητα και παραγωγή των συγγραμμάτων, όπως επίσης και το υπόβαθρο των ερευνητών που σε διαφορετικές χώρες και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές πιθανά να αξιολογήσουν με διαφορετικούς τρόπους τα βιβλία που μελετούν

Ειδικότερα όσον αφορά το δεύτερο άξονα ο Pingel (Nicholls, 2007) θέτει το ερώτημα των παιδαγωγικών εφαρμογών του κειμένου, δηλαδή το πώς χρησιμοποιούνται τα βιβλία από τους εκπαιδευτικούς και πώς τα αντιλαμβάνονται οι μαθητές. Στη συνέχεια θέτει ως δεύτερο ερώτημα το τι περιέχεται στο κείμενο αυτό καθαυτό, τι παραλείπεται και για ποιους λόγους.

Με τον διαχωρισμό αυτό ο Pingel (Nicholls, 2007) προσπαθεί να κάνει μια επισκόπηση για ορισμένες μεθοδολογικές προσεγγίσεις της ανάλυσης τονίζοντας ότι διαφορετικές μέθοδοι ανάλυσης αντανακλούν διαφορετικούς σκοπούς και διαφορετικές προσεγγίσεις απαντούν σε διαφορετικά ερωτήματα. Επίσης τονίζει πως η ποσοτική μέθοδος χρησιμοποιείται για να δείξει την συχνότητα εμφάνισης ορισμένων όρων σε βάρος ίσως της ποιότητας και της ερμηνείας τους, σίγουρα όμως είναι πολύ χρήσιμη σε μεγάλα δείγματα. Τις ποιοτικές μεθόδους τις περιγράφει πιο αναλυτικά και τις διαχωρίζει σε ερμηνευτικές, γλωσσολογικές κ.α. δίνοντας βάρος στην ποιότητα των δεδομένων που δίνουν παρά στην ποσότητα.

Στην παρούσα ερευνητική εργασία τα σχολικά βιβλία που εξετάζουμε έχουν επιλεγεί για διδασκαλία σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ). Γι’ αυτό το λόγο θεωρούμε χρήσιμο να διερευνήσουμε στην επόμενη παράγραφο με ποιούς τρόπους εμφανίζεται η μεταβλητή μέσα σ’ αυτό και κατά συνέπεια και το πώς ζητείται από τους μαθητές να την έχουν κατανοήσει.

2.2. *Η μεταβλητή στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ)*

Τα προγράμματα σπουδών βρίσκονται στο επίκεντρο των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων εδώ και αρκετές δεκαετίες (National Council of Teachers of Mathematics, 1980, 2000). Παρ' όλα αυτά όμως υπάρχουν πολύ λίγες έρευνες που να εξετάζουν το ρόλο των προγραμμάτων σπουδών των Μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Όλες οι αλλαγές που έχουν κατά καιρούς προταθεί εστιάζουν κυρίως στην αναθεώρηση και ανάπτυξη του διδακτικού υλικού που χρησιμοποιούνταν στις τάξεις δηλαδή κατά κύριο λόγο του διδακτικού υλικού των σχολικών εγχειριδίων.

Στα προγράμματα σπουδών τα σχολικά βιβλία αποτελούν τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στους στόχους που τίθενται και στα ζητούμενα αποτελέσματα (Schmidt, McKnight & Raizen, 1997; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Το 2002 ο Valverde και οι συνεργάτες του, πρότειναν ένα τριμερές μοντέλο προγράμματος σπουδών που περιέχει:

- Στο πρώτο επίπεδο το «*προβλεπόμενο πρόγραμμα σπουδών*» που αντικατοπτρίζει τις εθνικές-πολιτικές στρατηγικές και τους εκπαιδευτικούς σχεδιασμούς.
- Στο δεύτερο επίπεδο το «*εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών*» που περιλαμβάνει τις προθέσεις και τους στόχους των δασκάλων όπως και τις εφαρμοζόμενες στην τάξη δραστηριότητες και
- Στο τρίτο επίπεδο την αναμενόμενη από τους μαθητές «*αποκτηθείσα γνώση*» με τη μορφή ιδεών, δομών και σχημάτων.

Ως συνδετικό των δυο πρώτων επιπέδων είναι το επίπεδο που περιέχει το «*δυνητικά εφαρμοζόμενο πρόγραμμα σπουδών»* που εκπροσωπείται από τα σχολικά βιβλία ή οποιοδήποτε άλλο είδος παρεχόμενης οργανωμένης γνώσης (Robitaille και συνεργάτες, 1993; Schmidt και συνεργάτες, 1997).

Τα σχολικά βιβλία, για την ελληνική πραγματικότητα, είναι τα μοναδικά εγκεκριμένα από το αρμόδιο Υπουργείο προς χρήση εγχειρίδια σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ) και γι' αυτό κατέχουν έναν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ, σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι να βοηθήσει το μαθητή να ασκήσει και να βελτιώσει τις δεξιότητες που αφορούν τη μεθοδική σκέψη, την ανάλυση, την αφαίρεση, τη γενίκευση και τις λογικές διεργασίες, που θα τον βοηθήσουν αργότερα να εφαρμόσει κριτικά όσα έχει διδαχθεί εισερχόμενος είτε στο χώρο της έρευνας είτε στο χώρο της αγοράς εργασίας. Η ανάπτυξη τόσο της δημιουργικής φαντασίας όσο και της ελεύθερης σκέψης σε συνδυασμό με την αυτοσυγκέντρωση, την παρατηρητικότητα και την επιμονή κρίνονται απαραίτητα για την κοινωνική ένταξή του και την ολοκλήρωση της προσωπικότητάς του (ΔΕΠΠΣ, 2003).

Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων πραγματοποιείται θέτοντας τις βάσεις ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση με κύριο άξονα γνωστικού περιεχομένου την επίλυση προβλήματος. Στην Α΄ Δημοτικού επιδιώκεται *η αναγνώριση, περιγραφή και επέκταση αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων,* στη Γ΄ Δημοτικού επιδιώκεται να μπορούν να διαπιστώνουν οι μαθητές ότι *η επανάληψη αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον* και στην ΣΤ΄ τάξη, όπου και εισάγεται επίσημα η έννοια της μεταβλητής, να μπορούν να διατυπώνουν ένα κανόνα για κάποια απλά αριθμητικά ή γεωμετρικά μοτίβα (ΔΕΠΠΣ, 2003).

Οι συντονισμένες προσπάθειες για την ενσωμάτωση αλγεβρικών ιδεών και της ανανοηματοδότησής τους είναι εμφανής στο δημοτικό σχολείο (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Kaput, Carraher & Blanton, 2007). «*Αντιμετωπίζοντας την άλγεβρα σαν ένα μονοπάτι που διασχίζει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών από την προσχολική ακόμη ηλικία οι δάσκαλοι μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να χτίσουν ένα στιβαρό οικοδόμημα γνώσης και εμπειριών πάνω στο οποίο θα στηρίξουν πιο εκλεπτυσμένες αλγεβρικές διεργασίες στα επόμενα σχολικά τους χρόνια»* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 37).

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση γίνεται εκτεταμένη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στην Α΄ Γυμνασίου γεγονός που υποδηλώνει την ιδιαίτερη σημασία που δίνεται σ' αυτήν τάξη η οποία θεωρείται κομβική για τη μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα. Το 1^{ο} κεφάλαιο «Φυσικοί Αριθμοί» ξεκινά με την αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών σε σημεία του άξονα, γίνεται χρήση δηλαδή της μεταβλητής ως *«Συγκεκριμένο αριθμό», σ*τη συνέχεια η αναγνώριση, περιγραφή και επέκταση αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων (σ.24, βιβλίο Α΄ Γυμνασίου) και η διατύπωση ενός κανόνα για αυτά ζητά το χειρισμό των μεταβλητών ως *Γενικευμένων αριθμών».*

Στο κεφάλαιο των εξισώσεων εκτός από την εύρεση λύσης ζητείται και η δυνατότητα ελέγχου ενός αριθμού αν αποτελεί λύση της εξίσωσης ή όχι, χρήση δηλαδή της μεταβλητής ως «*Συγκεκριμένου άγνωστου ή γνωστού αριθμού».* Στα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά ζητούμενο είναι η αναγνώριση της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων και η εισαγωγή των μαθητών στη χρήση των μεταβλητών ως «*Συμμεταβαλλομένων ποσοτήτων»* (ΔΕΠΠΣ, 2003).

Οι διδακτικοί στόχοι στη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου κινούνται σε παράλληλα πλαίσια κατανόησης της μεταβλητής ως «*Συγκεκριμένου άγνωστου αριθμού»* στο κεφάλαιο των εξισώσεων, ως *«Γενικευμένου αριθμού»* στο κεφάλαιο των ανισώσεων και ως *«Συμμεταβαλομένων ποσοτήτων»* στα κεφάλαια των συναρτήσεων, της τριγωνομετρίας, των γραμμικών συστημάτων και της ομοιότητας στη Γεωμετρία.

Παρατηρούμε πώς μέσα στο ΔΕΠΠΣ εμφανίζονται οι μεταβλητές και ως *«Γενικευμένοι αριθμοί»* και ως «*Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*», δηλαδή με τις πιο εκλεπτυσμένες μαθηματικώς μορφές τους. Θεωρούμε πώς έτσι δίνεται βαρύτητα περισσότερο στην αλγεβρική αιτιολόγηση των διαδικασιών παρά στον απλό χειρισμό τους (Schifter, 1999; Carpenter & Levi, 2000). Μένει να δούμε κατά πόσον οι στόχοι αυτοί εκπληρώνονται τόσο μέσα από τα σχολικά βιβλία όσο και μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών στις μελέτες I και II.

Στο ερώτημα με ποιες μορφές εμφανίζονται οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών που διδάσκονται σε άλλες χώρες θα απαντήσουμε στην συνέχεια στην επόμενη παράγραφο.

2.3. Τρόποι εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία

Στο βαθμό που μπορούμε να γνωρίζουμε ελάχιστες μελέτες υπάρχουν που να εξετάζουν τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας της μεταβλητής στα σχολικά εγχειρίδια. Η παρούσα μελέτη βασίστηκε σε μια πρόσφατη έρευνα των Dogbey και Kersaint (2012) που ασχολήθηκε ακριβώς με αυτό το ζήτημα, εξέτασε δηλαδή την εμφάνιση των μεταβλητών στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των ΗΠΑ.

Συγκεκριμένα εξέτασε την εμφάνιση των μεταβλητών σε δώδεκα σχολικά βιβλία από τέσσερεις χρονικές περιόδους. Οι ερευνητές, για να μελετήσουν την

εξέλιξη της έννοιας της μεταβλητής σ' αυτά τα σχολικά βιβλία, χώρισαν το χρονικό διάστημα που εξέτασαν, από το 1957 μέχρι το 2009, σε τέσσερις μεγάλες χρονικές περιόδους της μαθηματικής εκπαίδευσης των ΗΠΑ και οι οποίες ήταν: New Maths, Back to the Basics, Problem Solving και NCTM Standards era (Fey & Graeber, 2003; Payne, 2003). Για κάθε χρονική περίοδο επέλεξαν ένα βιβλίο για κάθε σχολική βαθμίδα που εξέτασαν δηλαδή τις $6^η$, $7^η$ και $8^η$, βασιζόμενοι κυρίως στην επιλογή των βιβλίων όπως αυτή είχε γίνει στην προϋπάρχουσα έρευνα των Jones και Tar (2007).

Έτσι οι ερευνητές εξέτασαν συνολικά 12 σχολικά βιβλία και μελέτησαν σε κάθε τους σελίδα τους τρόπους εμφάνισης των μεταβλητών. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων τους βασιζόμενοι στην προϋπάρχουσα βιβλιογραφία πρότειναν την ακόλουθη κατηγοριοποίηση εμφάνισης μορφών των μεταβλητών .

- *Ετικέτα-Επιγραφή:* η μεταβλητή κατέχει τη θέση συντομογραφίας για το όνομα ενός αντικειμένου για παράδειγμα το 2τ συμβολίζει 2 τετράδια
- *Σταθερά*: η μεταβλητή περιγράφει μια ποσότητα συγκεκριμένης τιμής για παράδειγμα οι σταθερές π, e, g
- *Συγκεκριμένος άγνωστος*: η μεταβλητή περιγράφει τη μοναδική τιμή που μπορεί να λάβει ο άγνωστος κατά την επίλυση μιας εξίσωσης για παράδειγμα στην εξίσωση $x+5=8$
- *Συνεχής μεταβλητή*: η μεταβλητή περιγράφει έναν άγνωστο που μπορεί να λάβει πλήθος τιμών κατά την επίλυση ανισώσεων ή εξισώσεων μεγαλυτέρου του πρώτου βαθμού για παράδειγμα $2x-4<7$
- *Γενικευμένος αριθμός*: η μεταβλητή εκφράζει μοτίβα ή αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρέχουν μια αληθή διαπίστωση για παράδειγμα στην αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης $α+β=β+α$

- *Μεταβαλλόμενη ποσότητα*: η μεταβλητή εκφράζει σχέση συμμεταβολής δυο ποσοτήτων ή συναρτησιακή σχέση όπως στην σχέση y=-2x+6
- *Αφηρημένο σύμβολο*: η μεταβλητή κατέχει τη θέση γραμμάτων χωρίς αριθμητική αναφορά για παράδειγμα στη σχέση e*x=x

Οι ερευνητές ανίχνευσαν ως επικρατέστερες κατηγορίες τις κατηγορίες «*Ετικέτα-Επιγραφή*» και «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» ενώ έπονταν στα αποτελέσματα της έρευνάς τους η κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός*».

Όσον αφορά το ερώτημα, ποιές τιμές φυσικών-μη φυσικών αριθμών λαμβάνουν οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία, η υπάρχουσα βιβλιογραφία δεν έχει να μας παρουσιάσει κάποια ανάλογη έρευνα που να έχει ασχοληθεί με το ζήτημα αυτό. Γι' αυτό δεν μπορούμε να παρουσιάσουμε ευρήματα άλλων μελετών, ούτε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας με κάποια προηγούμενη μελέτη.

2.4. Σχεδιασμός των Μελετών I και II

Στην μελέτη I τα ερωτήματα που αφορούσαν τους μαθητές και τους τρόπους με τους οποίους αυτοί κατανοούν τα γράμματα-μεταβλητές έχουν ήδη ερευνηθεί κι από άλλους έλληνες και ξένους ερευνητές, των οποίων τα ευρήματα άλλωστε χρησιμοποιήσαμε για το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή αυτής της έρευνας. Στην παρούσα μελέτη I όμως θελήσαμε να επεκτείνουμε τις έρευνες αυτές και να ελέγξουμε αν οι μαθητές μπορούσαν να μεταβάλουν την γνώμη τους και να δώσουν πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις όταν τους δίνονται περισσότερες υποδείξεις.

Επίσης στην μελέτη Ι, ερευνήσαμε τι είδους αριθμοί είναι αυτοί οι γενικευμένοι αριθμοί που κατανοούν οι μαθητές, δηλαδή αν τους θεωρούν ως οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ή αν θεωρούν ότι αναπαριστούν έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό.

Στην μελέτη ΙΙ πήγαμε ένα βήμα παρά πέρα από την έρευνα των Dogbey και Kersaint (2012) και εξετάσαμε το είδος των αριθμών που αποδίδονται στις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία, δηλαδή τη συχνότητα εμφάνισης φυσικών και μη-φυσικών αριθμών, όπως κλάσματα, δεκαδικοί ή αρνητικοί αριθμοί, ως τιμές που αποδίδονται στα γράμματα μέσα στα σχολικά εγχειρίδια.

Η παρούσα έρευνα όμως έρχεται να προσφέρει και άλλα δυο καινούργια στοιχεία στην υπάρχουσα βιβλιογραφία:

- Καθόσον δεν έχουμε υπόψη την ύπαρξη άλλων μελετών που να εξετάζουν τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου που διδάσκονται στα Ελληνικά σχολεία, πιστεύουμε ότι η έρευνα αυτή έρχεται να συμπληρώσει το κενό που αφορά τους τρόπους εμφάνισης των μεταβλητών μέσα σ' αυτά και το ποιες τιμές, φυσικών ή μη-φυσικών αριθμών αποδίδονται στα γράμματα-μεταβλητές.
- Επίσης συζητιούνται τα αποτελέσματα και των δυο μελετών, της μελέτης Ι που αφορά τους μαθητές σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της μελέτης ΙΙ που αφορά τα βιβλία, υπό το πρίσμα των παιδαγωγικών εφαρμογών τους.

Τις δυο αυτές μελέτες περιγράφουμε αναλυτικά στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΛΕΤΗ Ι

3.1. Στόχοι και υποθέσεις

Στην μελέτη Ι διερευνήσαμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές των τριών τάξεων του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου την χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Με βάση όσα περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο, αναμέναμε ότι οι μαθητές θα εμφάνιζαν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν έναν οποιονδήποτε αριθμό ή ακόμα κι ένα άλλο γράμμα. Αυτή η πρόβλεψη βασιζόταν σε προηγούμενη έρευνα της Asquith και των συνεργατών της (2007), που έδειξε ότι οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τα γράμματα ως οποιουσδήποτε αριθμούς δηλαδή ως «*Γενικευμένους αριθμούς*».

Δεύτερος στόχος της μελέτης Ι ήταν να εξετάσουμε αν οι μαθητές εμφάνιζαν την τάση να αντικαθιστούν τις μεταβλητές με φυσικούς αριθμούς. Θελήσαμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές παρότι έχουν διδαχθεί μέσα από συστηματική διδασκαλία την έννοια της μεταβλητής ως οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού θα έδειχναν ισχυρή την τάση να αντικαθιστούν τα γράμματα με φυσικούς αριθμούς.

Στην παρούσα μελέτη για να ελεγχθούν οι δυο αυτοί στόχοι δόθηκαν σε 86 μαθητές των Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου τρία ερωτήματα στα οποία απάντησαν μέσα από προσωπικές συνεντεύξεις. Η επιλογή των ερωτημάτων βασίσθηκε στις προϋπάρχουσες μελέτες της Asquith και των συνεργατών της (2007) και του Christou και των συνεργατών του (2012, 2007, 2005) και υποστηρίχθηκε μέσα από συζητήσεις με ειδικούς της μαθηματικής εκπαίδευσης και της διδακτικής των μαθηματικών.

Οι Asquith και συνεργάτες της (2007) είχαν ρωτήσει 373 μαθητές ηλικίας 12-14 ετών, μέσω ερωτηματολογίων, τι θεωρούν ότι αναπαριστά το n στην αλγεβρική παράσταση 2n+3 και είχαν επίσης ζητήσει από 122 μαθητές των ίδιων βαθμίδων να συγκρίνουν δυο αλγεβρικές παραστάσεις, τις 3n, n+6. Η μελέτη τους έδειξε ότι οι μαθητές στην πλειοψηφία τους απαντούσαν ότι το γράμμα θα μπορούσε να αναπαραστήσει οποιονδήποτε αριθμό και ότι το ποια παράσταση ήταν μεγαλύτερη εξαρτιόταν από την τιμή της μεταβλητής.

Στις μελέτες του ο Christou και οι συνεργάτες του (2012, 2007, 2005) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές θεωρούσαν ότι το 4γ αναπαριστά φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, το κ+3 φυσικούς μεγαλύτερους του 3 και το –β αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Όταν δε ρώτησαν με μορφή συνεντεύξεων μαθητές Α΄ Λυκείου να συγκρίνουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν γράμματα, όπως για παράδειγμα «ποιο είναι μεγαλύτερο το 5δ ή το 4/δ» στην πλειοψηφία τους οι μαθητές

έλεγαν ότι το 5δ είναι πάντα μεγαλύτερο γιατί είναι πολλαπλασιασμός και ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει έναν αριθμό και υποστήριξαν την απάντησή τους αυτή αποδίδοντας στο γράμμα μια σειρά από φυσικούς αριθμούς. Στην ερώτηση του ερευνητή «θα μπορούσες να δοκιμάσεις και με κάποιον άλλο αριθμό» στην πλειοψηφία τους οι μαθητές συνέχιζαν να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς.

Στην παρούσα μελέτη θελήσαμε να επεκτείνουμε τις έρευνες αυτές και να ελέγξουμε αν οι μαθητές μπορούσαν να μεταβάλουν την γνώμη τους και να δώσουν πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις όταν τους δίνονται περισσότερες υποδείξεις. Έτσι τους θέσαμε ορισμένες ερωτήσεις-υποδείξεις, με τη μέθοδο της προσωπικής συνέντευξης, με σκοπό να ελέγξουμε τη σταθερότητα των απαντήσεών τους, καταγράφοντας τόσο τις αρχικές όσο και τις μετά τις υποδείξεις τελικές απαντήσεις τους. Περιμέναμε ότι οι μαθητές μετά τις υποδείξεις θα μετέβαλαν την απάντησή τους απαντώντας στο $1^{ο}$ ερώτημα ότι η μεταβλητή αναπαριστά οποιοδήποτε αριθμό, στο $2^{ο}$ ερώτημα απαντώντας σωστά στην σύγκριση των αλγεβρικών παραστάσεων και στο $3^{ο}$ ερώτημα αντικαθιστώντας τη μεταβλητή με μη φυσικούς αριθμούς.

3.2 Μέθοδος

3.2.1. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην Μελέτη Ι ήταν συνολικά 86 μαθητές, 22 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, 20 της Β΄ Γυμνασίου, 23 της Γ΄ Γυμνασίου και 21 της Α΄ Λυκείου (44 αγόρια και 42 κορίτσια). Όλοι τους ήταν μαθητές ενός δημόσιου σχολείου Γυμνασίου και Λυκείου αντίστοιχα που βρίσκεται στο κέντρο της πόλης του Βόλου.

3.2.2. Υλικά

Δόθηκαν στους μαθητές τρία ερωτήματα που περιελάμβαναν τις εξής τρεις αλγεβρικές παραστάσεις:

- ✓ [2β+3]
- ✓ [3ν]
- ✓ [ν+6]

3.2.3. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν η διαδικασία των προσωπικών συνεντεύξεων, καθώς μέσα από τις προσωπικές συνεντεύξεις μπορούσε να ελεγχθεί το κατά πόσον οι μαθητές παρέμεναν σταθεροί στις απαντήσεις τους ή είχαν την δυνατότητα να μεταβάλλουν τη γνώμη τους και να διορθώσουν την απάντησή τους όταν τους δίνονταν οι κατάλληλες ερωτήσεις-υποδείξεις.

Οι συνεντεύξεις, που ήταν διάρκειας κατά μέσο όρο δέκα λεπτών ανά μαθητή, απομαγνητοφωνήθηκαν όλες και καταγράφηκαν ανώνυμα σε αρχεία word με κωδικό ανά μαθητή και ανά τάξη.

Η μελέτη Ι χωρίστηκε σε τρεις φάσεις τις οποίες και περιγράφουμε αναλυτικά στη συνέχεια.

3.3. 1η Φάση Μελέτης Ι

Στην 1η φάση της μελέτης Ι δόθηκε στους μαθητές το πρώτο ερώτημα [2β+3] και τους ζητήθηκε να εκφράσουν τι παριστάνει το σύμβολο β το οποίο υποδεικνύονταν από ένα βέλος:

[2β+3]: *« Το βέλος δείχνει ένα σύμβολο. Τι παριστάνει το σύμβολο αυτό;»*

Δηλαδή τους ζητήσαμε να υποδείξουν πιθανές αναπαραστάσεις του συμβόλου που τους υποδεικνυόταν. Στην συνέχεια τους θέσαμε τις παρακάτω υποδείξεις:

- Τι άλλο θα μπορούσες να βάλεις στη θέση του β;
- Υπάρχει κάτι άλλο που θα μπορούσε να αντικαταστήσει το β;

Οι απαντήσεις των μαθητών, οι αρχικές και οι μετά τις υποδείξεις τελικές, συλλέχθηκαν, ομαδοποιήθηκαν και στη συνέχεια κατατάχθηκαν σε πέντε κατηγορίες οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια στην παράγραφο.

3.3.1. Αποτελέσματα 1ης Φάσης

Βασιζόμενοι στις προτεινόμενες κατηγορίες μορφών εμφάνισης των μεταβλητών του Küchemann (1978, 1981) και στην κατηγοριοποίηση των Dogbey και Kersaint (2012) διαμορφώσαμε τον ακόλουθο Πίνακα 3.3.1.1. κατηγοριοποίησης των μεταβλητών βάση του οποίου κατατάξαμε τις απαντήσεις των μαθητών.

Πίνακας 3.3.1.1. Κατηγορίες Μεταβλητών

	Είδος της μεταβλητής	*Ορισμός*	*Παραδείγματα*
I	*Ετικέτα- Επιγραφή*	Η απάντηση του μαθητή αφορά ένα γεωμετρικό ή διανυσματικό μέγεθος	α-πλευρά τριγώνου, β-το βάρος
II	*Σταθερά*	Η απάντηση του μαθητή περιγράφει μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής	π=3,14- g=9,81
III	*Συγκεκριμένος αριθμός (γνωστός ή άγνωστος)*	Περιγράφει τις μοναδικές τιμές (μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές) που θα μπορούσε να λάβει η μεταβλητή	Όπως κατά την επίλυση της x+5=9
IV	*Γενικευμένος αριθμός*	Εκφράζει την άποψη ότι η μεταβλητή μπορεί να αντικα-τασταθεί από περισσότερους από έναν αριθμούς ή από ένα οποιοδήποτε άλλο γράμμα	Όπως κατά την επίλυση της x+3>7
V	*Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*	Περιγράφει μια σχέση συν-μεταβολής ή μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ δυο μεγεθών	Όπως στην σχέση y=3x+2

Με βάση τα παραπάνω αν η απάντηση του μαθητή αφορούσε την επιλογή ενός γεωμετρικού, φυσικού ή διανυσματικού μεγέθους, για παράδειγμα αν έλεγε ότι η μεταβλητή συμβόλιζε το βάρος ή μια δύναμη ή μια πλευρά ενός γεωμετρικού σχήματος τότε κατατάσσονταν στην κατηγορία «*Ετικέτα-Επιγραφή*». Αν ο μαθητής απαντούσε ότι το γράμμα συμβόλιζε μια σταθερή ποσότητα όπως το π, g, e, τότε κατατάσσαμε την απάντησή του στην κατηγορία «*Σταθερά*», ενώ αν η απάντηση του περιοριζόταν στην επιλογή ενός ή το πολύ δυο συγκεκριμένων αριθμών τότε κατατάσσονταν στην κατηγορία «*Συγκεκριμένος Αριθμός*». Αν ο μαθητής απαντούσε ότι στη θέση του β μπορούσε να βάλει έναν οποιοδήποτε αριθμό ή οποιοδήποτε άλλο γράμμα τότε κατατάσσονταν στην κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός*». Αν ο μαθητής απαντούσε ότι το β συμβόλιζε μια ποσότητα που μεταβαλλόταν σε σχέση με κάποια άλλη μεταβλητή τότε την κατατάσσαμε στην κατηγορία «*Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*» δηλαδή την κατατάσσαμε στην πιο εκλεπτυσμένη κατηγορία από τις απαντήσεις του.

Για τις ανάγκες της ανάλυσης της 1ης φάσης χρησιμοποιήθηκε ανάλογη κωδικοποίηση προκειμένου να αναπαρασταθούν όλα τα πιθανά επίπεδα της κάθε μεταβλητής. Οι μεταβλητές «*Ετικέτα-Επιγραφή, Σταθερά, Συγκεκριμένος Αριθμός Γενικευμένος Αριθμός & Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*» κωδικοποιήθηκαν με αντίστοιχη κωδικοποίηση 1, 2, 3, 4 και 5. Οι αρχικές και οι μετά τις υποδείξεις τελικές απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν με κωδικοποίηση 1 και 2 αντίστοιχα και οι τάξεις από την Α΄ Γυμνασίου μέχρι και την Α΄ Λυκείου κωδικοποιήθηκαν με κωδικοποίηση 1 έως 4.

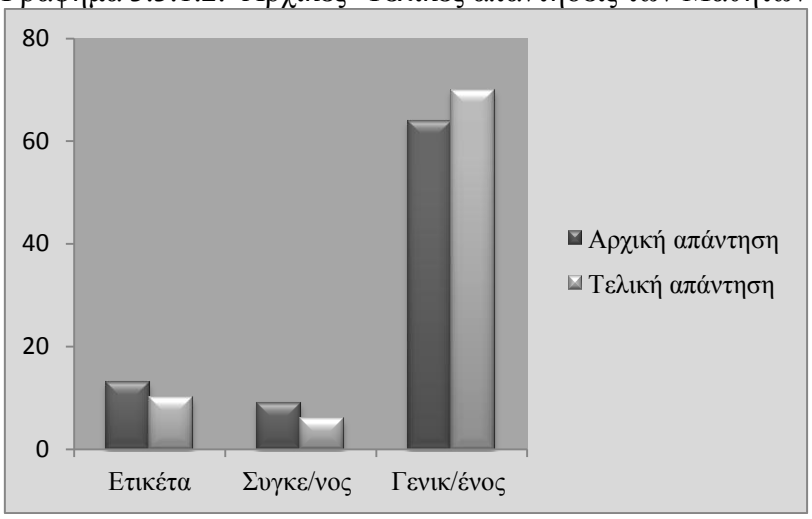
Στη συνέχεια οι αρχικές και οι τελικές απαντήσεις των μαθητών καταχωρήθηκαν στις προαναφερθείσες κατηγορίες απαντήσεων κι έτσι προέκυψαν ο ακόλουθος Πίνακας 3.3.1.2. και το αντίστοιχο Γράφημα 3.3.1.2 που περιγράφουν τις συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των κατηγοριών αυτών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1.2. Αρχικές- Τελικές απαντήσεις των Μαθητών

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης Κατηγοριών των Μεταβλητών

	Αρχικές Απαντήσεις	*Τελικές Απαντήσεις*
Ετικέτα- Επιγραφή	13 (15%)	10 (12%)
Συγκεκριμένος Αριθμός	9 (11%)	6 (7%)
Γενικευμένος Αριθμός	64 (74%)	70 (81%)
Σύνολο	86 (100%)	86 (100%)

Γράφημα 3.3.1.2. Αρχικές- Τελικές απαντήσεις των Μαθητών



Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα η επικρατούσα κατηγορία τόσο στις αρχικές όσο και στις μετά τις υποδείξεις τελικές Απαντήσεις των Μαθητών είναι η κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός*» με ποσοστά αντίστοιχα 74% και 81%. Οι κατηγορίες *«Σταθερά»* και *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»* ανιχνεύθηκαν με συχνότητα μηδέν και δεν εμφανίζονται στον Πίνακα.

Συγκρίσεις αποτελεσμάτων ανά τάξη

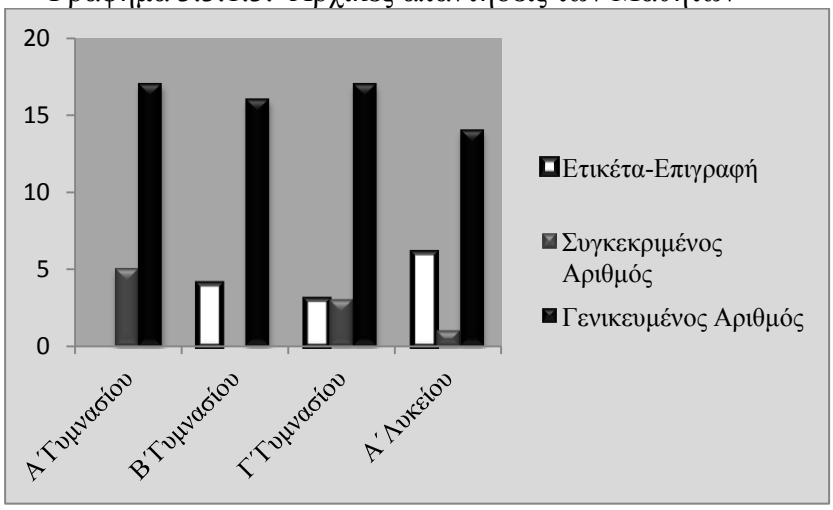
Οι αρχικές απαντήσεις των μαθητών ανά τάξη περιγράφονται στον Πίνακα 3.3.1.3. και το αντίστοιχο Γράφημα 3.3.1.3. που περιγράφει τις συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των κατηγοριών αυτών. Παρατηρούμε ότι η κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός*» είναι η επικρατέστερη κατηγορία σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου στις αρχικές απαντήσεις των μαθητών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1.3. Αρχικές απαντήσεις των Μαθητών

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης Κατηγοριών των Μεταβλητών ανά Τάξη

	Α΄ Γυμνασίου		*Β΄ Γυμνασίου*		*Γ΄ Γυμνασίου*		*Α΄ Λυκείου*	
	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό
Ετικέτα-Επιγραφή			4	20%	3	13%	6	28%
Συγκεκρ/ος Αριθμός	5	23%			3	13%	1	5%
Γενικευμένος Αριθμός	17	77%	16	80%	17	74%	14	67%
Σύνολο	22	100%	20	100%	23	100%	21	100%

Γράφημα 3.3.1.3. Αρχικές απαντήσεις των Μαθητών



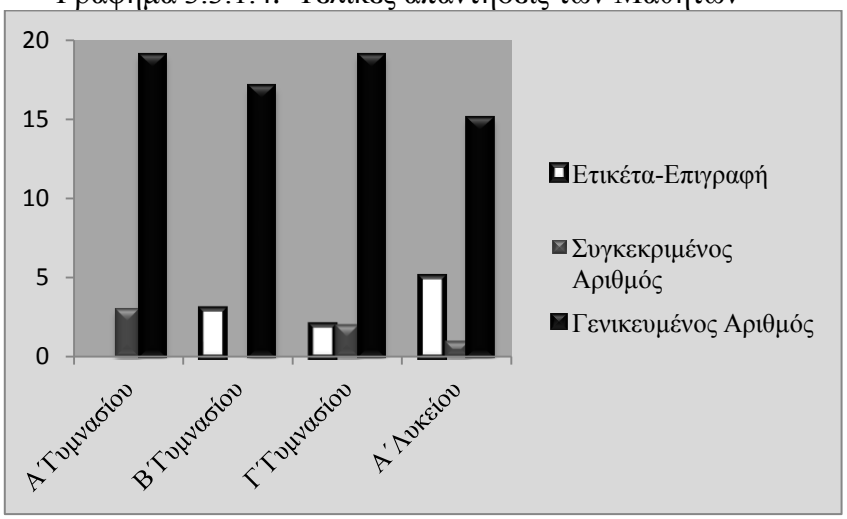
Οι μετά τις υποδείξεις τελικές απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3.1.4. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.3.1.4. Σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου η κατηγορία «*Ετικέτα-Επιγραφή*» διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα με ποσοστά 0%, 15%, 9%, ενώ στην Α΄ Λυκείου παρατηρείται μια μικρή αύξησή της με ποσοστό 24%. Η κατηγορία «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» παρουσιάζεται αυξημένη μόνον στην Α΄ Γυμνασίου (14%) με μια πτωτική τάση σε όλες τις τάξεις στη συνέχεια (0%, 9%, 5%).

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1.4. Τελικές απαντήσεις των Μαθητών

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης Κατηγοριών των Μεταβλητών ανά Τάξη

	Α΄ Γυμνασίου		*Β΄ Γυμνασίου*		*Γ΄ Γυμνασίου*		*Α΄ Λυκείου*	
	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό
Ετικέτα-Επιγραφή			3	15%	2	9%	5	24%
Συγκεκριμένος αριθμός	3	14%			2	9%	1	5%
Γενικευμένος αριθμός	19	86%	17	85%	19	82%	15	71%
Σύνολο	22	100%	20	100%	23	100%	21	100%

Γράφημα 3.3.1.4. Τελικές απαντήσεις των Μαθητών



Προκειμένου να εξετασθεί εάν υφίσταται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ της συχνότητας εμφάνισης των κατηγοριών αυτών ανά τάξη πραγματοποιήσαμε έναν έλεγχο Anova.

Δημιουργήθηκε μια εξαρτημένη μεταβλητή με τιμές 1, 2 και 3 που αντιστοιχούσε στις κατηγορίες *«Ετικέτα-Επιγραφή», «Συγκεκριμένος Αριθμός»* και *«Γενικευμένος Αριθμός»* και μια δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή με τιμές 1, 2, 3 και 4 που αντιστοιχούσε στις τάξεις Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου. Ο έλεγχος αυτός

δεν μας έδωσε μια στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των κατηγοριών των μεταβλητών και των τάξεων [F(3,82)=1.56, p=.21].

Παρ' ότι δεν βρήκαμε στατιστικά σημαντικές διαφορές προβήκαμε σ' έναν έλεγχο Chi-Square με τη διόρθωση κατά Fisher για να εξετάσουμε τις όποιες επιμέρους διαφορές ανά τάξη υπήρξαν στις απαντήσεις των μαθητών. Ο έλεγχος εφαρμόστηκε ανά ζευγάρι τάξεων και παρουσιάζεται στον ακόλουθο Πίνακα 3.3.1.5.

Πίνακας 3.3.1.5. Συγκρίσεις ανά τάξη κατηγοριών των μεταβλητών

Τάξεις υπό σύγκριση	*Chi-Square test*	*p-value*
Α΄-Β΄ Γυμνασίου	$\chi^2(2)=6,03$	0,049
Α΄-Γ΄ Γυμνασίου	$\chi^2(2)=2,18$	0,336
Α΄ Γυμν.-Α΄ Λυκείου	$\chi^2(2)=6,45$	0,040
Β΄-Γ΄ Γυμνασίου	$\chi^2(2)=2,11$	0,348
Β΄ Γυμν.-Α΄ Λυκείου	$\chi^2(2)=1,60$	0,449

Από τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου ελέγχου διαπιστώσαμε ότι στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών εντοπίζεται μεταξύ της μεταξύ Α΄ και Β΄ Γυμνασίου όπου στην μεν Α΄ Γυμνασίου δεν εμφανίζεται καθόλου η κατηγορία «*Ετικέτα-Επιγραφή»* στη δε Β΄ Γυμνασίου απουσιάζει από το δείγμα μας παντελώς η κατηγορία «*Συγκεκριμένος Αριθμός*». Η φύση της δοθείσης αλγεβρικής παράστασης πιθανά να επηρέασε και τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές. Το γεγονός ότι οι μεταβλητές δεν βρίσκονταν μέσα σε μια εξίσωση πιθανά να ώθησε την πλειοψηφία τους να αποκλείσουν την περίπτωση η μεταβλητή να μπορεί να λάβει μια συγκεκριμένη τιμή. Οι μαθητές έχουν συνηθίσει να χειρίζονται τις μεταβλητές που λαμβάνουν συγκεκριμένες τιμές, μια ή δύο ανάλογα την περίπτωση, κυρίως κατά την επίλυση πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων

εξισώσεων. Επίσης στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των κατηγοριών εντοπίστηκε μεταξύ της Α΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου πιθανά λόγω της κατηγορίας «*Ετικέτα-Επιγραφή*» η οποία απουσιάζει όπως προαναφέραμε από την Α΄ Γυμνασίου ενώ εμφάνισε μια μικρή αύξηση στην Α΄ Λυκείου.

3.4. 2η Φάση Μελέτης Ι

Στην 2η φάση της μελέτης Ι δώσαμε στους μαθητές να συγκρίνουν τις αλγεβρικές παραστάσεις [3ν, ν+6] και στη συνέχεια τους ζητήσαμε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους θέτοντάς τους το ερώτημα: *«Μπορείς να πεις ποιο είναι μεγαλύτερο και να εξηγήσεις την απάντησή σου;»*

Ως σωστή εκλάβαμε την απάντηση: «*Το ποιο είναι μεγαλύτερο εξαρτάται από τον αριθμό που αναπαριστά το ν»*. Πιστεύαμε ότι ένας στοιχειωδώς ικανός μαθητής στα μαθηματικά ο οποίος έχει διδαχθεί, κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών του στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου μέσα από τη συστηματική διδασκαλία την έννοια της μεταβλητής ως οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού, ενώ συγχρόνως έχει εξασκηθεί στην χρήση και τον χειρισμό των μεταβλητών μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις, θα μπορούσε να απαντήσει σωστά στην σύγκριση αυτή ερμηνεύοντας την μεταβλητή ως οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

Στην συνέχεια τους θέσαμε τις παρακάτω υποδείξεις:

- Υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η αρχική σου απάντηση;
- Ισχύει πάντα αυτό; Αν βάλεις κάποιον άλλον αριθμό;

3.4.1. Αποτελέσματα 2ης Φάσης

Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων της 2ης φάσης οι αρχικές απαντήσεις των μαθητών κατατάχθηκαν αρχικά σε σωστές και λανθασμένες απαντήσεις. Για την

ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτού του πρώτου μέρους της 2ης φάσης χρησιμοποιήθηκε αντίστοιχη κωδικοποίηση.

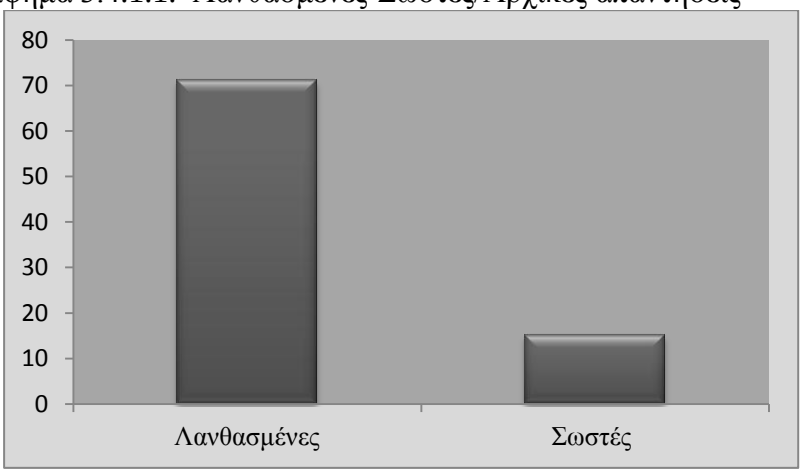
Για την κατηγοριοποίηση των τάξεων από την Α΄ Γυμνασίου μέχρι και την Α΄ Λυκείου χρησιμοποιήθηκε κωδικοποίηση από το 1 έως το 4 και για τις σωστές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα κωδικοποίηση 1 και 2. Οι συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των κατηγοριών των αρχικών απαντήσεων των μαθητών *«Λανθασμένες vs Σωστές απαντήσεις»* παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίνακα 3.4.1.1. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.4.1.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.1. Σύγκριση Αλγεβρικών Παραστάσεων

Λανθασμένες vs Σωστές / Αρχικές απαντήσεις των Μαθητών

	Συχνότητα	Ποσοστό
Λανθασμένες Απ.	71	83%
Σωστές Απ.	15	17%
Σύνολο	86	100%

Γράφημα 3.4.1.1. Λανθασμένες-Σωστές/Αρχικές απαντήσεις



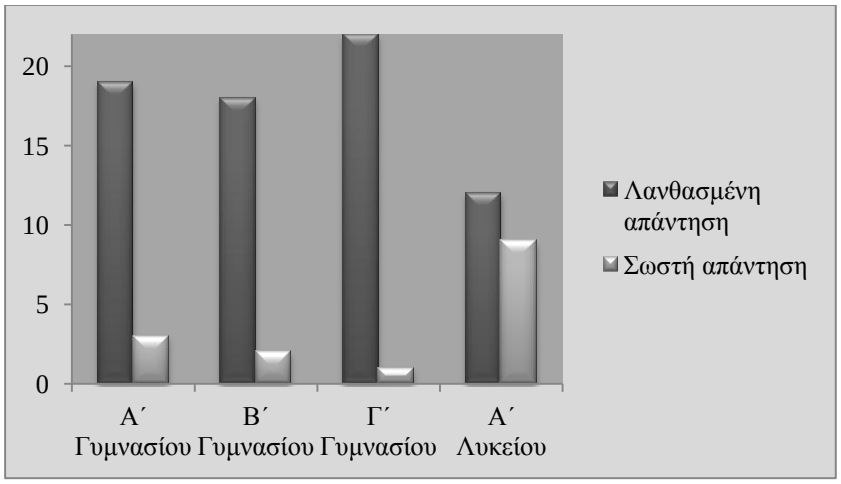
Στον παρακάτω Πίνακα 3.4.1.2. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.4.1.2. τα αποτελέσματα των αρχικών απαντήσεων των μαθητών *«Λανθασμένες vs Σωστές Απαντήσεις»* τα παρουσιάζουμε ανά τάξη. Παρατηρήσαμε ένα υψηλό ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων στην Α΄ , Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου με 86%, 90% και 96% αντίστοιχα, ενώ το χαμηλότερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων εμφανίστηκε στην Α΄ Λυκείου με 57%. Από τον έλεγχο Chi-Square που πραγματοποιήθηκε διαπιστώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τάξεων [$\chi^2(3)=12$, $p<.05$].

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.2. Σύγκριση Αλγεβρικών Παραστάσεων

Λανθασμένες vs Σωστές απαντήσεις των Μαθητών ανά τάξη

	Α΄ Γυμνασίου		*Β΄ Γυμνασίου*		*Γ΄ Γυμνασίου*		*Α΄ Λυκείου*	
	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό
Λανθασμένες απαντήσεις	19	86%	18	90%	22	96%	12	57%
Σωστές απαντήσεις	3	14%	2	10%	1	4%	9	43%
Σύνολο	22	100%	20	100%	23	100%	21	100%

Γράφημα 3.4.1.2. Λανθασμένες-Σωστές/Αρχικές απαντήσεις ανά τάξη



Στη συνέχεια αυτής της 2^{ης} φάσης θέσαμε στους μαθητές τις υποβοηθήσεις που προαναφέραμε και παρατηρήσαμε ότι ορισμένοι από αυτούς μετέβαλαν την γνώμη τους και μέσα από τη διαδικασία των δοκιμών με διαφορετικούς αριθμούς διαπίστωσαν τελικά ότι η «*η σύγκριση εξαρτάται από την μεταβλητή*» δίνοντας έτσι σωστή τελική απάντηση, η οποία όμως είχε δοθεί με υποβοήθηση.

Ακολούθως συνεχίζοντας σε βάθος την ανάλυση των αποτελεσμάτων διερευνήσαμε περαιτέρω τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών κι ανάλογα με το είδος της λανθασμένης απάντησης που έδωσαν διαχωρίσαμε την κατηγορία αυτή των *«Λανθασμένων απαντήσεων»* σε δυο υποκατηγορίες:

- *Απάντηση χωρίς αιτιολόγηση:* αν η απάντηση του μαθητή κατεδείκνυε αδυναμία αιτιολόγησης της σύγκρισης δηλαδή είχε απαντήσει λάθος στη σύγκριση και αδυνατούσε να εξηγήσει πώς οδηγήθηκε σ' αυτήν.
- *Απάντηση που βασίζονταν σε διάφορες αιτιολογήσεις*: αν η λανθασμένη απάντηση του μαθητή αφορούσε την αιτιολόγηση ότι η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός αυξάνει πάντα μια ποσότητα ή βασίζονταν στην αριθμητική υπεροχή (για παράδειγμα 6>3 άρα ν+6>3ν)

Έτσι διαμορφώσαμε τελικά τις παρακάτω τέσσερις κατηγορίες απαντήσεων των μαθητών.

- *Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση*
- *Λάθος απάντηση που βασίζονταν σε διάφορες αιτιολογήσεις*
- *Σωστή απάντηση με υποβοήθηση*
- *Σωστή απάντηση χωρίς υποβοήθηση*

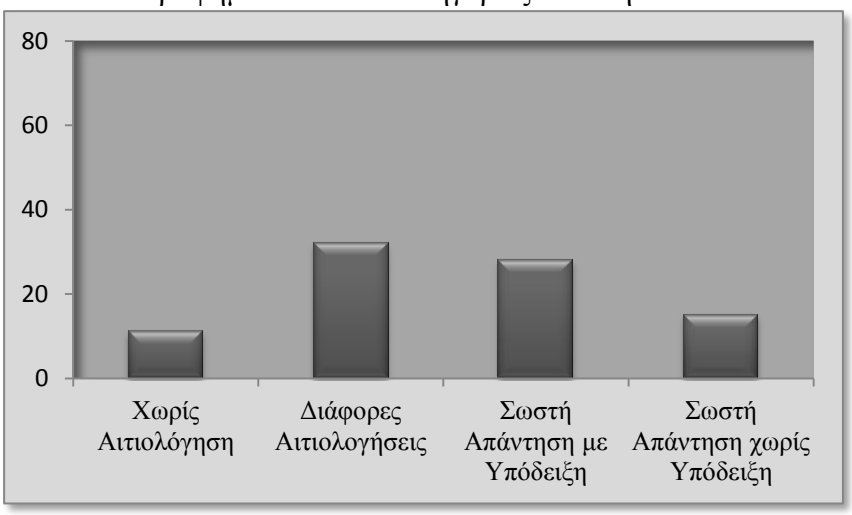
Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων του δεύτερου μέρους της 2ης φάσης χρησιμοποιήθηκε ανάλογη κωδικοποίηση. Για τις κατηγορίες των απαντήσεων χρησιμοποιήθηκε κωδικοποίηση από το 1 έως το 4 η οποία αντιστοιχούσε στις απαντήσεις *«Λάθος απάντηση χωρίς αιτιολόγηση», «Λάθος απάντηση που βασίζονταν σε διάφορες αιτιολογήσεις», «Σωστή απάντηση με υποβοήθηση», «Σωστή απάντηση χωρίς υποβοήθηση»* και για τις τάξεις κωδικοποίηση 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Έτσι καταχωρήσαμε τις τελικές απαντήσεις των μαθητών στον ακόλουθο Πίνακα 3.4.1.3. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.4.1.3. όπου αναλυτικά διαφαίνονται τα αποτελέσματα ξεχωριστά για κάθε τύπο απαντήσεων των μαθητών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.3. Σύγκριση Αλγεβρικών Παραστάσεων

Συχνότητα & Ποσοστά Εμφάνισης Κατηγοριών των Τελικών Απαντήσεων των Μαθητών

Απαντήσεις	Συχνότητα	Ποσοστό
Λάθος- χωρίς αιτιολόγηση	11	13%
Λάθος-διάφορες αιτιολογήσεις	32	37%
Σωστή με υπόδειξη	28	33%
Σωστή χωρίς υπόδειξη	15	17%
Σύνολο	86	100%

Γράφημα 3.4.1.3. Κατηγορίες απαντήσεων



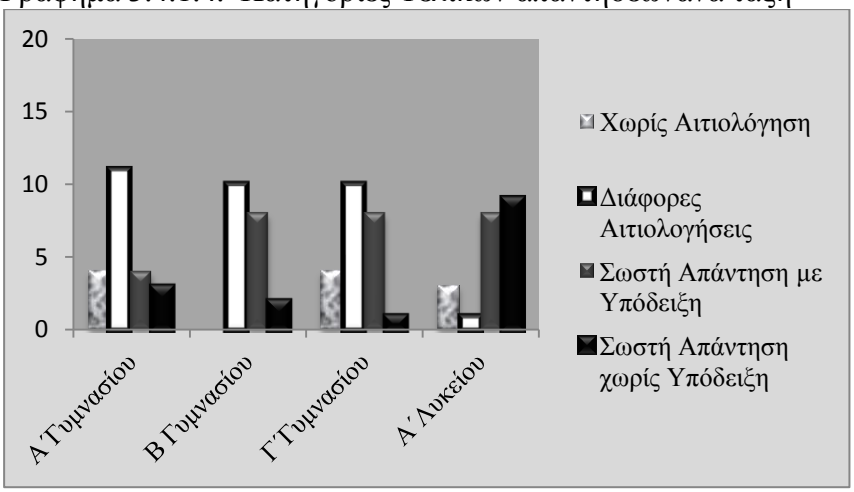
Στον επόμενο Πίνακα 3.4.1.4. και στο Γράφημα 3.4.1.4. τα ίδια αποτελέσματα παρουσιάζονται αναλυτικά ανά τάξη. Η κατηγορία *« Χωρίς αιτιολόγηση »* εμφανίστηκε στην Α΄ Γυμνασίου με 18%, στην Β΄ Γυμνασίου με 0%, δηλαδή όλοι οι μαθητές αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους, στην Γ΄ Γυμνασίου με 17% και στην Α΄ Λυκείου με 14% συνολικά δηλαδή με έναν μέσο όρο 13% για όλες τις τάξεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.4. Σύγκριση Αλγεβρικών Παραστάσεων

Τελικές απαντήσεις Μαθητών ανά τάξη

	Α΄ Γυμνασίου		*Β΄ Γυμνασίου*		*Γ΄ Γυμνασίου*		*Α΄ Λυκείου*	
	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό	Συχνότ/α	Ποσ/τό
Λάθος απάντηση-χωρίς αιτιολόγηση	4	18%	0	0%	4	17%	3	14%
Λάθος απάντηση διάφορες αιτιολ/εις	11	50%	10	50%	10	44%	1	5%
Σωστή απάντηση με υπόδειξη	4	18%	8	40%	8	35%	8	38%
Σωστή απάντηση χωρίς υπόδειξη	3	14%	2	10%	1	4%	9	43%
Σύνολο	22	100%	20	100%	23	100%	21	100%

Γράφημα 3.4.1.4. Κατηγορίες Τελικών απαντήσεωνανά τάξη



Η κατηγορία *«Διάφορες Αιτιολογήσεις»* ανιχνεύθηκε με ποσοστό 37% συνολικά και στις τρεις τάξεις με το μεγαλύτερο ποσοστό στην Α΄ Γυμνασίου 50% και το μικρότερο στην Α΄ Λυκείου με 5%. Για αυτήν την κατηγορία λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσίασαν οι αιτιολογήσεις των μαθητών πραγματοποιήσαμε μια επιπλέον υποκατηγοριοποίηση ανιχνεύοντας τρεις διαφορετικούς τύπους αιτιολογήσεων:

- Αιτιολόγηση τύπου (1): αν η αιτιολόγηση του μαθητή ήταν ότι ο πολλαπλασιασμός δίνει αποτέλεσμα πάντα μεγαλύτερο από την πρόσθεση
- Αιτιολόγηση τύπου (2): αν η αιτιολόγηση του μαθητή ήταν ότι η πρόσθεση δίνει αποτέλεσμα πάντα μεγαλύτερο από τον πολλαπλασιασμό
- Αιτιολόγηση τύπου (3): αν η αιτιολόγηση του μαθητή βασίζονταν στην αριθμητική υπεροχή, για παράδειγμα το 6 είναι μεγαλύτερο του 3 άρα η αλγεβρική παράσταση «ν+6» είναι μεγαλύτερη της «3ν».

Έτσι διαπιστώσαμε ότι από αυτές τις τρεις υποκατηγορίες η αιτιολόγηση τύπου (1) ήταν αυτή που εμφάνισε την μεγαλύτερη συχνότητα με ποσοστό 53% (στο σύνολο του 37% των απαντήσεων της κατηγορίας *«Διάφορες Αιτιολογήσεις»*), η αριθμητική υπεροχή-αιτιολόγηση τύπου (3) με ποσοστό 41% και η αιτιολόγηση τύπου (2) που αφορούσε την πρόσθεση με ποσοστό 6%.

Η κατηγορία *«Σωστή απάντηση με υπόδειξη»* εμφανίστηκε με ποσοστό 33% στο σύνολο των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα από τους 71 μαθητές που απάντησαν αρχικά λανθασμένα, οι 28 μετά τις υποδείξεις μετέβαλλαν την απάντησή τους και απάντησαν σωστά, ένα ποσοστό δηλαδή 39% από αυτούς που απάντησαν

λανθασμένα, μετακινήθηκε από την αρχική λανθασμένη απάντησή τους κι έδωσε σωστή τελική απάντηση.

Η κατηγορία *«Σωστή απάντηση χωρίς υπόδειξη»* όπως προείπαμε εμφανίστηκε με ποσοστό 17% που ανά τάξη ήταν στην Α΄ Γυμνασίου 14%, στην Β΄ 10%, στην Γ΄ 4% και στην Α΄ Λυκείου το υψηλότερο 43%.

3.5. 3η Φάση Μελέτης Ι

Στην 3η φάση θελήσαμε να ελέγξουμε τι τιμές θεωρούν οι μαθητές ότι μπορεί να πάρουν οι μεταβλητές δηλαδή αν θεωρούν ότι μπορούν να λάβουν τιμές φυσικών ή μη-φυσικών αριθμών και τους ζητήσαμε να απαντήσουν στο ερώτημα:

«Με ποιους αριθμούς θα μπορούσες να αντικαταστήσεις το ν στις αλγεβρικές παραστάσεις [3ν, ν+6];*»*.

Στην συνέχεια τους θέσαμε τις παρακάτω υποδείξεις:

- Άλλους αριθμούς, άλλα είδη αριθμών γνωρίζεις που να μπορεί να πάρει ο ν;
- Με κάποια άλλα είδη αριθμών θα μπορούσες να αντικαταστήσεις το ν;
- Οι αριθμοί που αναφέρεις είναι όλοι θετικοί ακέραιοι, άλλους αριθμούς γνωρίζεις;

Η έρευνά μας σ’ αυτήν την 3η φάση βασίστηκε στις έρευνες του Christou και των συνεργατών του (2012, 2007, 2005) που έδειξαν ισχυρή την τάση αυτή των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα-μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς και συγχρόνως κατέδειξαν μια συστηματική «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» όταν οι μαθητές αντικαθιστούσαν τα γράμματα ως μεταβλητές στην άλγεβρα.

3.5.1. Αποτελέσματα 3ης Φάσης

Οι Αρχικές απαντήσεις των μαθητών που αφορούσαν τι τιμές θεωρούσαν ότι μπορούσαν να πάρουν οι μεταβλητές ομαδοποιήθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

- Φυσικοί αριθμοί - (ΦΑ), αν οι μαθητές στις απαντήσεις τους χρησιμοποίησαν μόνον φυσικούς αριθμούς
- Ακέραιοι αριθμοί - (ΑΑ), αν στις απαντήσεις τους χρησιμοποίησαν έστω κι έναν αρνητικό ακέραιο αριθμό
- Ρητοί αριθμοί – (ΡΑ), αν χρησιμοποίησαν έστω κι έναν ρητό, δεκαδικό ή κλάσμα.

Στην περίπτωση που οι απαντήσεις των μαθητών υπέδειχναν την δυνατότητα τη θέση της μεταβλητής να μπορούν να λάβουν πραγματικοί αριθμοί όπως, άρρητοι, ρίζες ή δυνάμεις για παράδειγμα ο $\sqrt{5}$ ή ο 2^3, τις ονομάζαμε ρητοί++ και στην παρούσα έρευνα τις ενοποιήσαμε με την κατηγορία ρητοί αριθμοί.

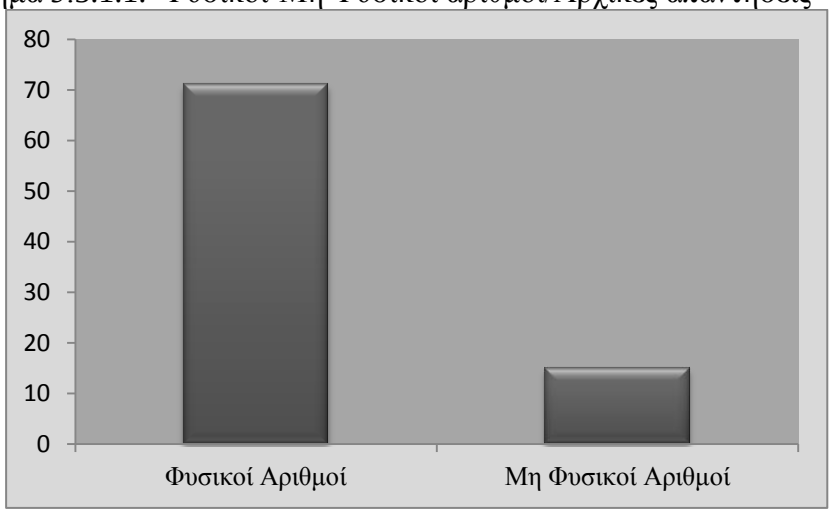
Στη συνέχεια ομαδοποιήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών σε δυο ευρύτερες κατηγορίες των φυσικών και των μη φυσικών αριθμών. Στην κατηγορία των φυσικών αριθμών (ΦΑ) κατατάχθηκαν όσες απαντήσεις των μαθητών αφορούσαν μόνον φυσικούς αριθμούς και στην κατηγορία των μη φυσικών αριθμών (ΜΦΑ) όσες απαντήσεις αφορούσαν ακεραίους, ρητούς ή άρρητους αριθμούς.

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων της 3ης φάσης χρησιμοποιήθηκε κωδικοποίηση από το 1 και 2 για τους φυσικούς και τους μη φυσικούς αριθμούς και για τις τάξεις κωδικοποίηση 1, 2, 3 και 4. Οι συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των αρχικών απαντήσεων των μαθητών εμφανίζονται στον ακόλουθο Πίνακα 3.5.1.1. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.5.1.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1.1. Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί /Αρχική απάντηση

	Συχνότητα	Ποσοστό
Φυσικοί αριθμοί	71	83%
Μη-Φυσικοί αριθμοί	15	17%
Σύνολο	86	100%

Γράφημα 3.5.1.1. Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί/Αρχικές απαντήσεις



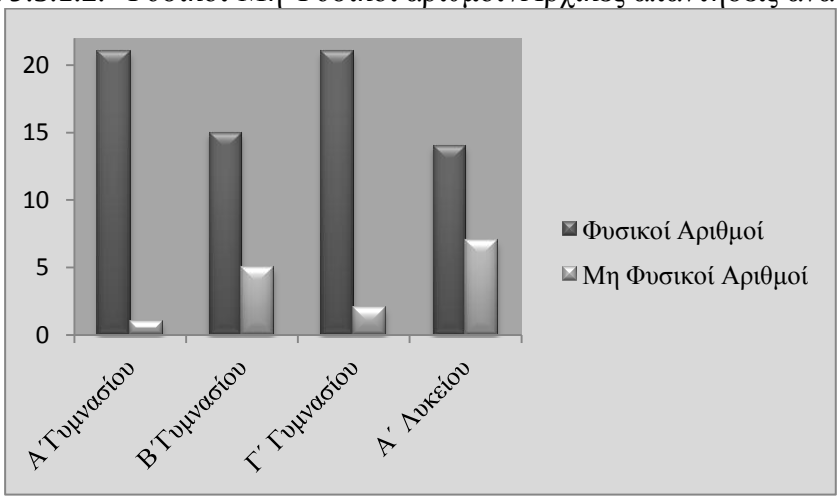
Κυρίαρχη κατηγορία στις αρχικές απαντήσεις των μαθητών ήταν οι φυσικοί αριθμοί με ποσοστό 83% και έπονταν η κατηγορία των μη φυσικών με ποσοστό 17%. Στην κατηγορία αυτή όπως έχουμε αναφέρει έχουμε συμπεριλάβει και τις περιπτώσεις που οι μαθητές απάντησαν με ρητούς++, ρίζες, δυνάμεις κλπ.

Τα αποτελέσματα των ΦΑ vs ΜΦΑ αναλυτικά ανά τάξη παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5.1.2. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.5.1.2. Παρατηρούμε ότι το ποσοστό των απαντήσεων που περιελάμβαναν ΦΑ εμφανίζεται στην Α΄ Γυμνασίου με το υψηλότερο ποσοστό 95%, στη Β΄ Γυμνασίου με 75% και στη Γ΄ Γυμνασίου με 91% ενώ στην Α΄ Λυκείου είναι 67%.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1.2. ΦΑ vs ΜΦΑ - Αρχική απάντηση ανά τάξη

	ΦΑ	*ΜΦΑ*	*Σύνολο*
Α΄ Γυμνασίου	21 (95%)	1 (5%)	22
Β΄ Γυμνασίου	15 (75%)	5 (25%)	20
Γ΄ Γυμνασίου	21 (91%)	2 (9%)	23
Α΄ Λυκείου	14 (67%)	7 (33%)	21
Σύνολο	71 (83%)	15 (17%)	86

Γράφημα 3.5.1.2. Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί /Αρχικές απαντήσεις ανά τάξη



Στη συνέχεια της 3ης φάσης θέσαμε στους μαθητές τις υποδείξεις που προαναφέραμε και παρατηρήσαμε μια μετακίνηση ορισμένων μαθητών από τους φυσικούς αριθμούς στους μη φυσικούς αριθμούς. Την διαδικασία αυτή των μετακινήσεων των μαθητών μετά από κάθε υπόδειξη την περιγράφουμε αναλυτικά στη συνέχεια. Μετά την 1η υπόδειξη 17 μαθητές μετέβαλαν την απάντησή τους και οι 11 από αυτούς έδωσαν ως απάντηση τους ακέραιους αριθμούς – ΑΑ ενώ οι υπόλοιποι 6 τους ρητούς αριθμούς – ΡΑ. Μετά την 2η υπόδειξη άλλοι 21 μαθητές μετακινήθηκαν από τους ΦΑ και οι 3 εξ αυτών απάντησαν ΑΑ και υπόλοιποι 18

απάντησαν ΡΑ. Μετά την 3η και τελευταία υπόδειξη μόλις 2 μαθητές μετακινήθηκαν από τους ΦΑ στους ΡΑ και άλλοι 5 από τους ΑΑ στους ΡΑ. Στο σημείο αυτό παρατηρήσαμε ότι υπήρχαν περιορισμένα περιθώρια μεταβολής των απαντήσεων των μαθητών και σταματήσαμε τη διαδικασία.

Ο παρακάτω Πίνακας 3.5.1.3. περιγράφει τη διαδικασία των μετακινήσεων των μαθητών μετά από κάθε υπόδειξη καθώς και το πλήθος των μαθητών που ανήκαν σε κάθε κατηγορία ΦΑ/ΑΑ/ΡΑ μετά από κάθε υπόδειξη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1.3. Αρχικές Απαντήσεις-Πλήθος Υποδείξεων-Τελικές απαντήσεις

	Αρχική Απάντηση	Μαθητές που μετακινήθηκαν στην 1η υπ	Πλήθος μαθητών μετά την 1η υπ	Μαθητές που μετ/καν στην 2η υπ	Πλήθος μαθητών μετά από τη 2η υπ	Μαθητές που μετ/καν στην 3η υπ	Πλήθος μαθητών μετά από 3 υπ
Φυσικοί Αριθμοί	71	-17	54	-21	33	-2	31
Ακέραιοι Αριθμοί	3	+11	14	+3	17	-5	12
Ρητοί Αριθμοί	12	+6	18	+18	36	+7	43
Σύνολο	86		86		86		86

<u>Σημείωση</u>: Με το πρόσημο (-) συμβολίζονται οι μαθητές που αποχωρούν από μια κατηγορία και με το πρόσημο (+) οι μαθητές που προσχωρούν αντίστοιχα σε μια άλλη κατηγορία.

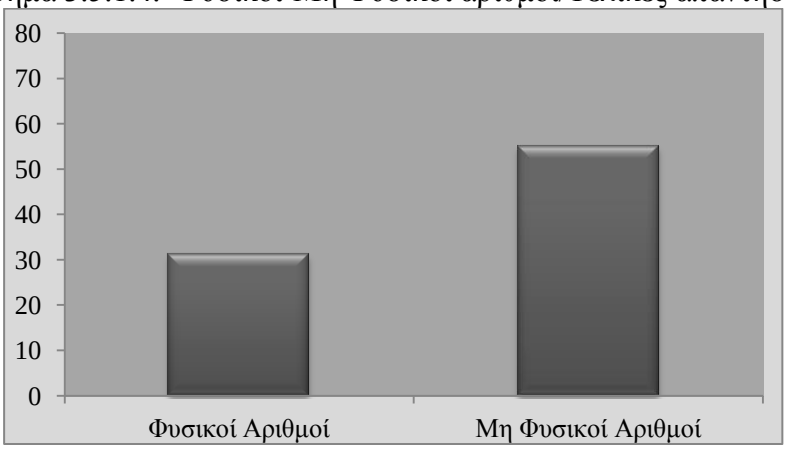
Τις τελικές απαντήσεις των μαθητών μετά και την 3η υπόδειξη τις καταχωρήσαμε με την κωδικοποίηση που αναφέραμε και για τις αρχικές απαντήσεις, στον παρακάτω Πίνακα 3.5.1.4. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.5.1.4. Παρατηρούμε ότι μετά τις υποδείξεις 40 μαθητές οι οποίοι αρχικά απάντησαν με ΦΑ μετακινήθηκαν στους ΜΦΑ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1.4. Φυσικοί- Μη Φυσικοί Αριθμοί- Τελική απάντηση

Συχνότητα & Ποσοστά Εμφάνισης Κατηγοριών των απαντήσεων των μαθητών

	Συχνότητα	Ποσοστό
Φυσικοί Αριθμοί	31	36%
Μη Φυσικοί Αριθμοί	55	64%
Σύνολο	86	100%

Γράφημα 3.5.1.4. Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί/Τελικές απαντήσεις



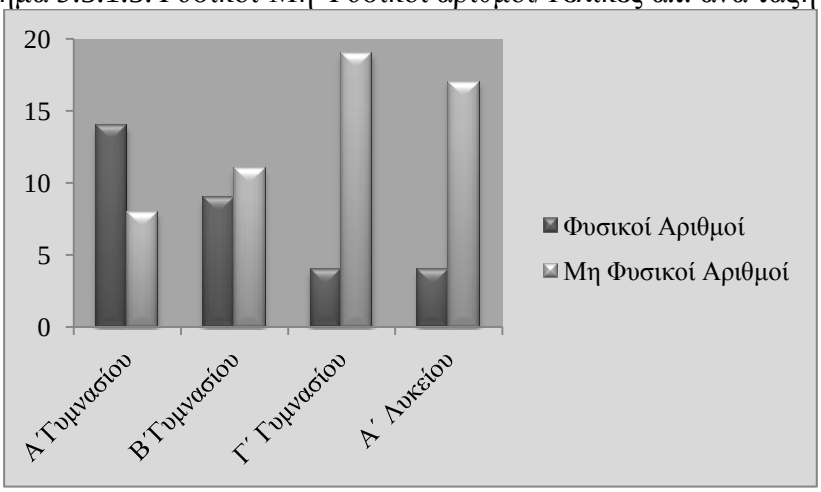
Τα αποτελέσματα των τελικών απαντήσεων των μαθητών ανά τάξη περιγράφονται στο αντίστοιχο Πίνακα 3.5.1.5. και στο αντίστοιχο Γράφημα 3.5.1.5. Παρατηρούμε μια μετακίνηση των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου από τους ΦΑ στους ΜΦΑ με τελικό ποσοστό ΜΦΑ αντίστοιχα 83% και 81% ενώ οι μαθητές της Α΄ & Β΄ Γυμνασίου παρουσίασαν μεταβολή στη γνώμη τους και μετακινήθηκαν στους ΜΦΑ αλλά με μικρότερα ποσοστά τελικών απαντήσεων 36% & 55% αντίστοιχα. Είναι αξιοσημείωτο ότι κάποιοι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου επεξέτειναν τους ρητούς σε ρητούς++ δίνοντας ως απαντήσεις τους και άρρητους αριθμούς (π.χ. ρίζες) ή ακόμη και δυνάμεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1.5. ΦΑ vs ΜΦΑ - Τελική Απάντηση

Συχνότητα & Ποσοστά Εμφάνισης ανά Τάξη

	ΦΑ	*ΜΦΑ*	*Σύνολο*
Α΄ Γυμνασίου	14 (64%)	8 (36%)	22
Β΄ Γυμνασίου	9 (45%)	11 (55%)	20
Γ΄ Γυμνασίου	4 (17%)	19 (83%)	23
Α΄ Λυκείου	4 (19%)	17 (81%)	21
Σύνολο	31 (36%)	55 (64%)	86

Γράφημα 3.5.1.5.Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί/Τελικές απ. ανά τάξη



Συγκεντρωτικά οι συχνότητες και τα ποσοστά εμφάνισης των κατηγοριών ΦΑ & ΜΦΑ ανά τάξη αρχικών & τελικών απαντήσεων (μετά τις υποδείξεις) παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίνακα 3.5.1.6. και αντίστοιχο Γράφημα 3.5.1.6. Συνολικά παρατηρούμε ότι μετά τις υποδείξεις 40 μαθητές (ποσοστό 56% από αυτούς που αρχικά απάντησαν με ΦΑ) μετέβαλαν τις απαντήσεις τους και τοποθετήθηκαν

στους ακεραίους ή στους ρητούς αριθμούς δηλαδή εντάχθηκαν τελικά στην κατηγορία των ΜΦΑ. Οι διαφορές αυτές ανάμεσα στις αρχικές και στις τελικές απαντήσεις των μαθητών ήταν στατιστικώς σημαντικές όπως προέκυψε από τον έλεγχο χ^2 που πραγματοποιήθηκε [$\chi^2(4)=32.3$, $p<.001$].

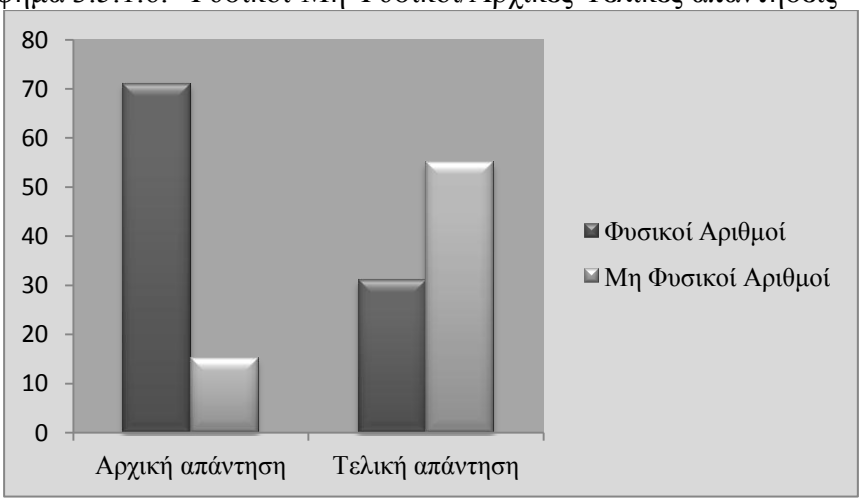
Διαπιστώσαμε δηλαδή ότι σημειώθηκε στατιστικά σημαντική μεταβολή μεταξύ της αρχικής άποψης και της τελικής απάντησης των μαθητών, στις τελικές δε απαντήσεις των μαθητών το ποσοστό των ρητών αριθμών εμφανίστηκε ενισχυμένο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5.1.6. Φυσικοί αριθμοί vs Μη Φυσικοί αριθμοί

Αρχική vsΤελική Απάντηση

	Αρχική Απάντηση	*Τελική Απάντηση*
Φυσικοί αριθμοί	71 (83%)	31 (36%)
Μη Φυσικοί αριθμοί	15 (17%)	55 (64%)

Γράφημα 3.5.1.6. Φυσικοί-Μη Φυσικοί/Αρχικές-Τελικές απαντήσεις



3.6. Συζήτηση

Η 1η φάση της μελέτης Ι έδειξε ότι όταν οι μαθητές ερωτηθούν τι αναπαριστά ένα γράμμα σε μια αλγεβρική παράσταση απαντούν ότι αναπαριστά οποιονδήποτε αριθμό δείχνοντας ότι στην πλειοψηφία τους κατανοούν την χρήση των γραμμάτων ως «*Γενικευμένο αριθμό*». Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό με προηγούμενες μελέτες (Asquith και συνεργάτες, 2007) και σε μια πρώτη ανάγνωση υποδήλωνε την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής με έναν πιο εκλεπτυσμένο μαθηματικά τρόπο.

Μαθητής της Α΄ Γυμνασίου, η απάντηση του οποίου κατατάχθηκε στην κατηγορία του «*Γενικευμένο αριθμού*», απάντησε ότι στη θέση της μεταβλητής θα μπορούσε να βάλει: «*έναν αριθμό… για παράδειγμα το 10»* και στη συνέχεια μετά την υπόδειξη προσθέτει ότι θα μπορούσε να θέσει και: «*άπειρους αριθμούς, από το 0 μέχρι το άπειρο για παράδειγμα το 7, το 5, το 8 ».*

Ένας άλλος μαθητής της Β΄ Γυμνασίου, του οποίου επίσης η απάντηση κατατάχθηκε στην ίδια κατηγορία, στο ερώτημα αυτό είπε ότι το γράμμα συμβολίζει: *«μια μεταβλητή»* και στη συνέχεια πρόσθεσε ότι στη θέση του θα μπορούσε να βάλει: *«το x, το y, το ω, φ, το θ… οποιοδήποτε άλλο γράμμα».*

Οι απαντήσεις των μαθητών που κατατάχθηκαν στην κατηγορία *«Ετικέτα-Επιγραφή»,* που έπονταν της κατηγορίας του *«Γενικευμένου Αριθμού» ήταν* ποικίλες.

Μαθητής της Β΄ Γυμνασίου διατύπωσε την άποψη ότι: *«το γράμμα συμβολίζει την κλίση (μιας ευθείας)»,* επηρεασμένος προφανώς από την πρόσφατα διδαχθείσα στην τάξη αυτή Γραμμική Συνάρτηση y=αx και την κλίση α της ευθείας αντίστοιχα.

Άλλος μαθητής της ίδιας τάξης απάντησε ότι το γράμμα: *«θα μπορούσε να είναι μια πλευρά… ώστε να μπορέσουμε να βρούμε πόσο είναι η πλευρά αυτή»,* ενώ μετά την υπόδειξη του τι άλλο θα μπορούσε να βάλει στη θέση του συμβόλου

συνέχισε λέγοντας ότι: *«Δεν ξέρω… αν είχα σχήμα ... μπορεί να το καταλάβαινα»*. Έδωσε δηλαδή μια καθαρά γεωμετρική ερμηνεία της μεταβλητής που συμβόλιζε την πλευρά ενός ευθυγράμμου σχήματος.

Οι απαντήσεις αυτές των μαθητών είναι ενδιαφέρουσες από την άποψη ότι έχοντας τεθεί εκτός πλαισίου ανέδειξαν τις διαφορετικές εντυπώσεις των μαθητών όσον αφορά τα γράμματα και τις διαφορετικές τάσεις που εμφάνιζαν στην ερμηνεία των γραμμάτων ως μεταβλητών. Οι μαθητές χωρίς να έχουν τον περιορισμό ενός συγκεκριμένου πλαισίου για παράδειγμα των εξισώσεων στην άλγεβρα ή της γεωμετρίας απάντησαν μέσα σε ένα ευρύ φάσμα, που κάλυψε ακόμη και το πλαίσιο των διανυσματικών μεγεθών όπως συνέβη με την απάντηση του παρακάτω μαθητή.

Μαθητής της Α΄ Λυκείου απάντησε ότι στη θέση του συμβόλου β προσδιόριζε: *«το βάρος»* και συνέχισε λέγοντας ότι τη θέση της μεταβλητής θα μπορούσε να λάβει: *«Οτιδήποτε ....μια δύναμη, ένα διάνυσμα... οποιοδήποτε διανυσματικό μέγεθος»*. Η απάντηση του μαθητή ήταν πιθανά επηρεασμένη από την Φυσική, παρότι η μεταβλητή β δεν εμφανιζόταν με την χαρακτηριστική γραφή των διανυσμάτων δηλαδή ως 2 $\vec{\beta}$.

Οι απαντήσεις της κατηγορίας *«Συγκεκριμένος αριθμός»* εμφανίστηκαν με την τρίτη κατά σειρά ποσόστωση. Αναφέρουμε το παράδειγμα μαθήτριας της Γ΄ Γυμνασίου της οποίας η απάντηση κατατάχθηκε στην κατηγορία αυτή και η οποία απάντησε ότι το σύμβολο παρίστανε: *«...μια εξίσωση»* και στη συνέχεια μετά την υπόδειξη του τι άλλο θα μπορούσε να βάλει στη θέση του β απάντησε: *«Να κάνω (μια) εξίσωση .....ίσον κάτι .....θα βγει....»*.

Άλλος μαθητής της Α΄ Γυμνασίου, που η απάντησή του κατατάχθηκε στην κατηγορία αυτή, απάντησε ότι το σύμβολο παριστάνει: *«...το 3»* και μετά την υπόδειξη απάντησε με έναν ακόμη αριθμό: *«το 2»* μη δίνοντας στη συνέχεια

οποιαδήποτε άλλη απάντηση. Αυτός ήταν και ο τρόπος που αποκρίθηκαν 3 από τους 22 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν στην κατηγορία αυτή.

Η θέση της μεταβλητής ως αγνώστου στις απλές πρωτοβάθμιες εξισώσεις και ο επί μακρόν χειρισμός ανάλογων περιπτώσεων από τους μαθητές πιθανά να επηρέασε και την απάντηση της μαθήτριας αυτής που ήθελε τη μεταβλητή να κατέχει τη θέση ενός «*Συγκεκριμένου αριθμού*» (Asquith και συνεργάτες, 2007).

Να σημειώσουμε ότι στην 1η φάση μεταξύ των αρχικών και των, μετά τις υποδείξεις, τελικών απαντήσεων των μαθητών δεν υπήρξαν σημαντικές διαφορές στην συχνότητα εμφάνισης των κατηγοριών των μεταβλητών.

Στη 2η φάση, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν στοιχειώδεις αλγεβρικές παραστάσεις και τους δόθηκαν υποδείξεις όπως: «Υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η αρχική σου απάντηση; Ισχύει πάντα αυτό; αν βάλεις κάποιον άλλον αριθμό;» φάνηκε πως οι μαθητές δεν κατανοούσαν την μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό με τη μαθηματική έννοια που δίνουμε στον όρο. Πολλοί από τους μαθητές φάνηκε ότι κατανοούν τα γράμματα ως σύμβολα παραπάνω του ενός αριθμού, θεωρώντας όμως ότι αυτές οι τιμές είναι κατά προτεραιότητα φυσικοί αριθμοί και όχι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Ανάλογα ευρήματα ήταν και αυτά της έρευνας του Knuth και των συνεργατών του (2005), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι η αντίληψη των μαθητών όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής και η ερμηνεία της ως «*Γενικευμένου Αριθμού*» (multiple value) συνδέεται άμεσα με τον επιτυχή χειρισμό της σύγκρισης των αλγεβρικών παραστάσεων.

Οι απαντήσεις των μαθητών στο 2ο ερώτημα της 2ης φάσης μας έδωσαν αρχικά ένα ποσοστό 17% των μαθητών να διατυπώνει ότι: «*η σύγκριση εξαρτάται από*

το ν», δηλαδή να έχει απαντήσει σωστά στη σύγκριση των αλγεβρικών παραστάσεων, όπως η μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου που στην ερώτηση ποιο είναι μεγαλύτερο είπε: *«… Είναι λίγο δύσκολο (να απαντήσω) …. γιατί είναι ανάλογα με τον αριθμό».* Ή ο μαθητής της Α΄ Λυκείου που επίσης σωστά στην ίδια ερώτηση απάντησε ευθέως: *«Όχι, γιατί δεν ξέρουμε τον άγνωστο, (είναι) … αναλόγως τον άγνωστο»*, τις οποίες απαντήσεις καταχωρήσαμε στην κατηγορία *«Σωστή απάντηση χωρίς υπόδειξη».*

Παρότι αναμέναμε ένα μεγαλύτερο μέρος των μαθητών να έχει ανταποκριθεί σωστά στη σύγκριση λόγω του ότι έχει διδαχθεί μέσα από συστηματική διδασκαλία την έννοια της μεταβλητής ως *«Γενικευμένου Αριθμού»* δηλαδή ως οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού και έχει επαρκώς εξασκηθεί στον χειρισμό τους εντούτοις τα αποτελέσματα ήρθαν να αναιρέσουν τις προσδοκίες μας αυτές. Οι περισσότεροι μαθητές δεν απάντησαν άμεσα σωστά και έδειξαν να δυσκολεύονται, ορισμένοι δε ακόμη και μετά τις υποδείξεις που τους τέθηκαν.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτά με τα αντίστοιχα της Asquith και των συνεργατών της (2007) που αφορούσαν τις ίδιες σχολικές βαθμίδες, δηλαδή $7^{η}$ και $8^{η}$ βαθμίδα στην δική τους έρευνα, (και αντίστοιχα στην δική μας Α΄& Β΄ Γυμνασίου), τα αποτελέσματά τους έδειξαν αρκετά υψηλότερα ποσοστά της τάξης του 54% και 64% των μαθητών να έχουν απαντήσει σωστά στην σύγκριση.

Στη συνέχεια της $2^{ης}$ φάσης μετά τις υποδείξεις που δόθηκαν στους μαθητές εμφανίστηκε μια μικρή μετακίνηση τους προς μια πιο σωστή και τεκμηριωμένη απάντηση. Έτσι 28 μαθητές (ποσοστό 39% στο σύνολο των μαθητών που απάντησαν αρχικά λανθασμένα) μετά τις υποδείξεις και μέσα από τη διαδικασία των δοκιμών με διαφορετικούς αριθμούς, θετικούς και αρνητικούς ακέραιους, διαπίστωσαν τελικά ότι: «*η σύγκριση εξαρτάται από το είδος της μεταβλητής».* Πιστεύουμε λοιπόν ότι όταν

κάποιοι μαθητές εκτεθούν σε υποδείξεις έχουν την δυνατότητα να μεταβάλουν την απάντησή τους και να επανεξετάσουν την αρχική τους απάντηση.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του μαθητή της Β΄ Γυμνασίου που στην ερώτηση ποια παράσταση είναι μεγαλύτερη απάντησε: *«Αναλόγως ποιος είναι ο ν…, το 3ν είναι μεγαλύτερο γιατί εκφράζει πολλαπλασιασμό».* Ενώ έδωσε δηλαδή αρχικά σωστή απάντηση στη συνέχεια επηρεάσθηκε από την πράξη του πολλαπλασιασμού και μετέτρεψε την απάντησή του. Ακολούθως και μέσω των υποδείξεων δοκίμασε κατά σειρά με τους αριθμούς 1, 4 και 3 και διαπίστωσε: *«… Ανάλογα … αν ο αριθμός είναι ο 1 τότε το ν+6 είναι μεγαλύτερο Αν βάλω το 4 …τότε το 3ν θα είναι μεγαλύτερο,……. αν βάλω το 3 ….θα βγούνε ίσα, … άρα ….εξαρτάται από το ν».* Την απάντηση αυτή την καταχωρήσαμε στην κατηγορία *«Σωστή απάντηση με υπόδειξη».*

Όσον αφορά την κατηγορία των λανθασμένων απαντήσεων *«Χωρίς αιτιολόγηση», αυτή* εμφανίστηκε με ποσοστό 13% συνολικά και για τις τρεις τάξεις και αφορούσε τους μαθητές που αδυνατούσαν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Οι μαθητές ενώ έδιναν δηλαδή μια οποιαδήποτε λανθασμένη απάντηση για το ποια αλγεβρική παράσταση θεωρούσαν μεγαλύτερη δεν κατάφερναν να εξηγήσουν πώς κατέληξαν σ' αυτήν γεγονός που δηλώνει ότι απάντησαν διαισθητικά-παρορμητικά μη δυνάμενοι να αναπτύξουν τους λογικούς συνειρμούς τους.

Η κατηγορία *« Διάφορες αιτιολογήσεις»* εμφανίστηκε με ποσοστό 37% και οι τρεις διαφορετικοί τύποι αιτιολογήσεων ήταν οι εξής: Η αιτιολόγηση τύπου (1) που αναφέρονταν στο ότι *«ο πολλαπλασιασμός αυξάνει πάντα μια ποσότητα»* εμφανίστηκε με το μεγαλύτερο ποσοστό (53%) στην κατηγορία αυτή των *«Διάφορων αιτιολογήσεων»* και δόθηκε από μαθητές ακόμη και των μεγαλυτέρων τάξεων δηλαδή υπήρξαν μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου που υποστήριζαν ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα αυξάνει μια ποσότητα.

Μαθητής της Α΄ Λυκείου, του οποίου η απάντηση κατατάχθηκε στην κατηγορία αυτή, στην ερώτηση ποιο είναι μεγαλύτερο απάντησε (και μετά τις υποδείξεις): *«Το 3ν είναι μεγαλύτερο….. βασικά δεν ξέρω… αν είναι θετικός ή αρνητικός ο αριθμός αλλά ....πιστεύω ότι το 3ν είναι μεγαλύτερο γιατί είναι πολλαπλασιασμός».*

Μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου στην αντίστοιχη ερώτηση απάντησε: *«Το 3ν γιατί έχει πολλαπλασιασμό ενώ το ν+6 σημαίνει ..περισσότερο, ναι… πάντα το 3ν θα είναι μεγαλύτερο».*

Αντίστοιχα μια μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου είπε: *«Το 3ν γιατί υπάρχει πολλαπλασιασμός ενώ στο ν+6 υπάρχει πρόσθεση»,* επιβεβαιώνοντας την απάντησή της ακόμα και μετά τις υποδείξεις.

Η αιτιολόγηση τύπου (3) που αφορούσε την αριθμητική υπεροχή εμφανίστηκε με το δεύτερο μεγαλύτερο ποσοστό στην κατηγορία *«Διάφορες αιτιολογήσεις»* και αναφέρουμε ενδεικτικά το παράδειγμα της μαθήτριας της Γ΄ Γυμνασίου που απάντησε*: «Το ν+6 είναι μεγαλύτερο από το 3ν γιατί όσο και να είναι το ν το 6 είναι μεγαλύτερο του 3».* Και μετά τις υποδείξεις, για το αν ισχύει πάντα αυτό, είπε ότι μόνον η αλλαγή της πράξης μπορούσε να επιφέρει αλλαγή στην ανίσωση: *«Αν είναι ο ίδιος αριθμός το ν …ναι (πάντα ισχύει)… μόνο αν έχει μείον ....δηλαδή να είναι για παράδειγμα ν-5(δεν θα ισχύει)».*

Η αιτιολόγηση τύπου (2) που αφορούσε την πρόσθεση εμφανίστηκε με το μικρότερο ποσοστό στην ευρύτερη κατηγορία *«Διάφορες αιτιολογήσεις».* Μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου, της οποίας η απάντηση καταχωρήθηκε στην κατηγορία αυτή, στην ερώτηση ποιο είναι μεγαλύτερο απάντησε ως εξής: *«Το ν+6 γιατί είναι πρόσθεση ενώ στο 3ν δεν γίνεται να προσθέσουμε».* Στη συνέχεια και μετά τις υποδείξεις επέμενε στην αρχική της απάντηση δοκιμάζοντας με αριθμούς που την επιβεβαίωναν:

« Ναι .... αν έχουμε αρνητικό το -2 τότε -6 < -2+6=4 και αν έχουμε το 2 τότε 6<8»

Οι απαντήσεις τους αυτές πιθανά να οφείλονταν στις βαθύτερες αντιλήψεις τους που συσχετίζουν τις μεταβλητές με τους φυσικούς αριθμούς, γιατί στην περίπτωση που ο *«ν»* είναι φυσικός αριθμός τότε ο *«3ν»* ή ο *«ν+6»* υποκύπτουν σ' αυτόν τον «κανόνα» της αύξησης. Αυτά τα αποτελέσματα είναι συμβατά με τα αποτελέσματα της έρευνας του Christou και των συνεργατών του (2012, 2007, 2005) οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι μαθητές θεωρούσαν ότι το 4γ αναπαριστά φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, το κ+3 φυσικούς μεγαλύτερους του 3 και το –β αρνητικούς ακέραιους αριθμούς κι ότι το 5δ είναι πάντα μεγαλύτερο από 4/δ.

Φαίνεται λοιπόν ότι οι μαθητές ναι μεν κατανοούν τις μεταβλητές ως *«Γενικευμένους Αριθμούς»* αλλά η δυσκολία που παρουσιάζουν στην εφαρμογή της έννοιας αυτής στην πράξη δηλώνει έμμεσα την τάση τους να τις αντιλαμβάνονται ως οποιουδήποτε φυσικούς αριθμούς. Τέτοια φαινόμενα στο παρελθόν ερμηνεύτηκαν ως προέκταση της «προκατάληψης του φυσικού αριθμού» φαινόμενο σύμφωνα με το οποίο υπάρχει η τάση από τους μαθητές να ερμηνεύουν τα γράμματα ως μεταβλητές που αναπαριστούν κυρίως φυσικούς αριθμούς έστω κι αν έχουν διδαχθεί την χρήση τους ως οποιονδήποτε αριθμών. Αυτή η τάση πιθανά να εμπόδισε να διακρίνουν στην σύγκριση τη σωστή απάντηση και συγχρόνως τους ώθησε να εκφράσουν συγκεκριμένου τύπου αιτιολογήσεις (π.χ. ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση μεγαλώνει πάντα μια ποσότητα) και να τις υποστηρίξουν αποδίδονταν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα.

Το φαινόμενο αυτό μας παραπέμπει στα αποτελέσματα της έρευνας της Vosniadou και των συνεργατών της για την κατανόηση του σχήματος της Γης από τα παιδιά (Vosniadou & Brewer, 1994; Skopeliti & Vosniadou, 2006) βάση της οποίας πολλά παιδιά ενώ απαντούν σωστά ότι το σχήμα της Γης είναι σφαιρικό αυτό δε

σημαίνει ότι έχουν πλήρη κατανόησης του σχήματός της. Πολλά δε εξ' αυτών όταν τους τίθενται πιο παραγωγικές ερωτήσεις όπως «πού ζούνε οι άνθρωποι» δίνουν απαντήσεις που δείχνουν ότι δεν έχουν κατανοήσει το επιστημονικό μοντέλο της Γης, αλλά άλλα μοντέλα όπως αυτό της «διπλής Γης» , δηλαδή μιας Γης επίπεδης όπου ζούνε οι άνθρωποι και μιας Γης ουράνιο σώμα (Vosniadou, 2002b; Vosniadou & Brewer, 1994).

Προσαρμόζοντας το φαινόμενο αυτό στο αντίστοιχο της έρευνάς μας πιστεύουμε ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν τους *«Γενικευμένους Αριθμούς»* όχι ως οποιουσδήποτε αριθμούς αλλά ως φυσικούς αριθμούς δηλαδή ο *«Γενικευμένος αριθμός»* μπορεί να λάβει κατ' αυτούς πολλές και διαφορετικές τιμές αριθμών αλλά όλες οι τιμές αυτές είναι τιμές φυσικών αριθμών.

Επακόλουθο όλων αυτών είναι να οδηγούνται σε λάθη, παρανοήσεις και παρερμηνείες του τύπου « ο πολλαπλασιασμός αυξάνει πάντα μια ποσότητα» ή «η πρόσθεση αυξάνει πάντα μια τέτοια ποσότητα» ακόμη και όταν βρίσκονται στις μεγαλύτερες τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου.

Συγχρόνως όμως διαπιστώσαμε ότι μέρος των μαθητών που δεν απάντησαν αρχικά σωστά έδειξαν τη δυνατότητα, μέσω των υποδείξεων, ότι μπορούν να επανεξετάσουν την απάντησή τους και να μεταβάλουν τη γνώμη τους απαντώντας τελικά σωστά δηλαδή ότι *«Το ποιο είναι μεγαλύτερο εξαρτάται από το ν»*. Όμως μέρος των απαντήσεων των μαθητών (36%) δεν μεταβλήθηκαν γεγονός που μας δείχνει ότι είναι ισχυρή η τάση αυτή.

Στο ερώτημα της 3^{ης} φάσης της μελέτης Ι που αφορούσε το είδος των αριθμών τους οποίους οι μαθητές θεωρούσαν ότι μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε ως αρχική απάντηση τους φυσικούς αριθμούς με ποσοστό 83%. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα αυτά ανά τάξη παρατηρήσαμε ότι τα

ποσοστά ήταν αρκετά υψηλά σε όλες τις τάξεις με το μεγαλύτερο να εμφανίζεται στην Α΄ Γυμνασίου 95%, παρότι οι μαθητές της τάξης αυτής ήδη γνωρίζουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς από τα προηγούμενα σχολικά έτη και το χαμηλότερο στην Α΄ Λυκείου 67%, ποσοστό όμως ιδιαίτερα υψηλό για μαθητές που έχουν ήδη εισέλθει στο Λύκειο και σαφώς γνωρίζουν και έχουν εξοικειωθεί επί μακρόν με τους αρνητικούς και τους άρρητους αριθμούς.

Προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα από τα ευρήματα των ερευνών του Christou και των συνεργατών του (2012, 2007, 2005), που έδειξαν ότι οι μαθητές εμφανίζουν ισχυρή την τάση να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς, παρατηρήσαμε ότι όταν οι υποδείξεις μας ήταν πιο υποστηρικτικές τότε πράγματι περισσότεροι από τους μισούς συνολικά μαθητές είχαν τη δυνατότητα να μετακινηθούν και να απαντήσουν με μη φυσικούς αριθμούς (αρνητικούς ακέραιους, ρητούς αριθμούς) γεγονός που υποδηλώνει ότι υπάρχει εν δυνάμει η δυνατότητα μεταβολής των απαντήσεων τους όταν τους δοθεί η απαραίτητη ώθηση.

Σημαντικό είναι το εύρημα ότι υπήρξαν περιπτώσεις μαθητών που παρά τις υποδείξεις έμειναν αμετακίνητοι στην αρχική τους απάντηση, ότι οι μεταβλητές μπορούσαν να αντικατασταθούν μόνον με φυσικούς αριθμούς και αυτοί δεν ήταν μόνον της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου (14 και 9 μαθητές αντίστοιχα) αλλά και της Γ΄ Γυμνασίου (4 μαθητές) και της Α΄ Λυκείου (4μαθητές) που επέμεναν σθεναρά στους ΦΑ.

Το πρόβλημα φυσικά είναι ότι οι μαθητές στην καθημερινή τους ενασχόληση με τα μαθηματικά σπάνια έχουν τη δυνατότητα να δεχθούν συγκεκριμένη ώθηση ώστε να διορθώσουν την αρχική τους απάντηση. Συχνά η πρώτη απάντηση είναι καθοριστική για την αντιμετώπιση ενός μαθηματικού ζητήματος και όπως φάνηκε στη μελέτη μας η πρώτη απάντηση των μαθητών περιορίζονταν σε μία κατανόηση

της μεταβλητής ως φυσικού αριθμού. Το γεγονός αυτό μπορεί να τους επιφέρει διάφορες συνέπειες στην μαθηματική τους εμπλοκή με συναρτήσεις, ανισώσεις ή πεδία ορισμού, όπου υφίσταται αυτή η σχέση μεταξύ μεταβλητών και των αριθμών που τις συμβολίζουν.

Μαθήτρια της Α΄ Γυμνασίου, της οποίας τις απαντήσεις παραθέτουμε αυτούσιες, στο ερώτημα με «*ποιους αριθμούς θα μπορούσες να αντικαταστήσεις τις μεταβλητές»* απάντησε και μετά τις υποβοηθήσεις μόνον με φυσικούς αριθμούς, έστω κι αν από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση ήδη γνώριζε τους δεκαδικούς και τα κλάσματα:

Ερ: Ποιους αριθμούς θα μπορούσες να βάλεις στη θέση του ν;

Μ: Το 4, το 8

Ερ: Άλλους αριθμούς, άλλα είδη αριθμών γνωρίζεις που να μπορεί να πάρει ο ν;

Μ:Το 2, το 1

Ερ: Με κάποια άλλα είδη αριθμών θα μπορούσες να αντικαταστήσεις το ν;

Μ:Το 7

Ερ: Αυτοί οι αριθμοί που αναφέρεις είναι όλοι θετικοί ακέραιοι, άλλους αριθμούς γνωρίζεις ;

Μ:Το 9

Ανάλογο ενδιαφέρον παρουσίασαν και οι απαντήσεις του μαθητή της Β΄ Γυμνασίου ο οποίος απάντησε αρχικά με φυσικούς αριθμούς, επέκτεινε την απάντησή σε ρητούς αριθμούς αγνοώντας παντελώς όμως τους αρνητικούς αριθμούς που σαφώς γνώριζε από την προηγούμενη διδακτική χρονιά.

Ερ: Ποιους αριθμούς θα μπορούσες να βάλεις στη θέση του ν;

Μ: Το 3,το 5, ….. όλους τους αριθμούς

Ερ: Άλλους αριθμούς, άλλα είδη αριθμών γνωρίζεις που να μπορεί να πάρει ο ν;

Μ:Κλάσμα, δεκαδικό αριθμό , δυνάμεις…. δεν ξέρω άλλους

Ερ: Με κάποια άλλα είδη αριθμών θα μπορούσες να αντικαταστήσεις το ν;

Μ: ….. Δεν ξέρω άλλους αριθμούς….

Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι πλέον διαδεδομένοι αριθμοί και για ποικίλους λόγους είναι οι πρώτοι που έρχονται στο μυαλό του κάθε ανθρώπου σαν μια άμεση και προφανής απάντηση. Η κατανόηση της μεταβλητής ως *«Γενικευμένου Αριθμού»* και η σχέση της με τους φυσικούς-μη φυσικούς αριθμούς μπορεί να επηρεάζεται από την ανάλογη χρήση της μέσα στα σχολικά εγχειρίδια και πιθανά τα σχολικά βιβλία να διαδραματίζουν κι αυτά έναν κάποιο ρόλο στη διαδικασία αυτή. Η μελέτη των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία πιθανά να μπορούσε να διαφωτίσει περαιτέρω τις δυσκολίες και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν χειρίζονται τα γράμματα ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα.

Γι’ αυτό το σκοπό σχεδιάσαμε την μελέτη ΙΙ που αναλύουμε διεξοδικά στη συνέχεια στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΙΙ

4.1. Στόχοι και υποθέσεις

Στην μελέτη ΙΙ ελέγξαμε με ποιες και πόσες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται σε αυτά είναι φυσικοί αριθμοί.

Εστιάζουμε στα βιβλία καθώς μέσα από τα βιβλία μπορούμε να αποκτήσουμε μια καλή ιδέα στο τι προβλέπεται για τα σχολικά μαθηματικά, ποια σημασία δίνεται σε ποιες έννοιες και με ποιον τρόπο (McKnight και συνεργάτες, 1987; Reys και συνεργάτες, 2003). Επίσης, καθόσον οι παιδαγωγικές πρακτικές των δασκάλων-καθηγητών επηρεάζονται άμεσα από τις διδακτικές προσεγγίσεις του παρεχόμενου

διδακτικού υλικού, θα μπορούσαμε να εικάσουμε και τον τρόπο με τον οποίο παρέχεται αυτή η γνώση στους μαθητές (Schmidt και συνεργάτες, 2001). Στο βαθμό που μπορούμε να γνωρίζουμε ελάχιστες μελέτες υπάρχουν που να εξετάζουν τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία.

Στην 1η φάση της μελέτης ΙΙ καταγράφηκαν οι μεταβλητές και ο τρόπος που εμφανίζονταν στα τρία σχολικά βιβλία του Γυμνασίου, ομαδοποιήθηκαν και στη συνέχεια κατατάχθηκαν σε πέντε κατηγορίες μορφών εμφάνισης των μεταβλητών που ήταν οι εξής:

- «*Ετικέτα-Επιγραφή*»
- *«Σταθερά»*
- *«Συγκεκριμένος Αριθμός»*
- *«Γενικευμένος Αριθμός»*
- *«Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες».*

Η επιλογή των κατηγοριών αυτών βασίστηκε κυρίως στην προϋπάρχουσα μελέτη των Dogbey και Kersaint (2012) στην οποία στηριχθήκαμε για τον σχεδιασμό της μελέτης ΙΙ. Έτσι προέκυψε ένας τελικός πίνακας κατηγοριών εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία ο οποίος στηριζόταν σε επιστημονικά δεδομένα συγχρόνως όμως ήταν πλησιέστερος στο «πνεύμα» των ελληνικών σχολικών βιβλίων. Σύμφωνα με αυτόν κατηγοριοποιήθηκαν τα ευρήματα της 1ης φάσης.

Αναμέναμε, με βάση τα ευρήματα της μελέτης των Dogbey και Kersaint (2012), ότι η κυρίαρχη κατηγορία εμφάνισης των μεταβλητών θα ήταν η «*Ετικέτα – Επιγραφή*» και η «*Συγκεκριμένος αριθμός*» και πιο σπάνια οι μεταβλητές θα εμφανίζονταν με τις πιο εκλεπτυσμένες μορφές του *«Γενικευμένου αριθμού»* και των «*Συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων».*

Στην μελέτη μας αυτή πήγαμε ένα βήμα παρά πέρα και εξετάσαμε τα είδη των αριθμών που αποδίδονται στις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία, δηλαδή τη συχνότητα εμφάνισης των φυσικών αριθμών και των μη-φυσικών αριθμών, όπως των κλασμάτων, των δεκαδικών ή των αρνητικών αριθμών ως τιμών που αποδίδονται στα γράμματα μέσα στα σχολικά εγχειρίδια. Καθώς, στο βαθμό που μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει προηγούμενη μελέτη που να εξετάζει αυτό το ζήτημα, δεν μπορούσαμε να εκφράσουμε κάποια υπόθεση και ούτε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας.

Αναφορικά με τον σχεδιασμό της μελέτης ΙΙ θέλουμε να επισημάνουμε ότι λάβαμε σοβαρά υπόψη τις κατευθυντήριες γραμμές που περιγράψαμε στο δεύτερο κεφάλαιο στην πρώτη παράγραφο (§ 2.1., σ.27) και οι οποίες έχουν ως εξής:

Α) Όσον αφορά την επιλογή του δείγματος, για την παρούσα μελέτη ήταν δεδομένη, καθώς τα σχολικά βιβλία που διδάσκονται στα δημόσια Ελληνικά σχολεία είναι προκαθορισμένα και συγκεκριμένα. Κι αυτό γιατί δεν υπάρχει η δυνατότητα επιλογής άλλων συγγραμμάτων για διδασκαλία, όπως συμβαίνει σε άλλες χώρες της Ευρώπης αλλά και των ΗΠΑ, όπου δίνεται η δυνατότητα στον διδάσκοντα να επιλέξει τα σχολικά εγχειρίδια που επιθυμεί να διδάξει, μέσα από έναν κατάλογο προτεινόμενων εγχειριδίων.

Β) Όσον αφορά τον δεύτερο άξονα για την «επιλογή μεθόδων και τεχνικών» βασιστήκαμε στις προϋπάρχουσες έρευνες των Dogbey και Kersaint (2012) και του McNeil και των συνεργατών του (2006), που ασχολήθηκαν με την μελέτη των σχολικών βιβλίων εξετάζοντας τα, οι πρώτοι όσον αφορά την εμφάνιση των μεταβλητών και οι δεύτεροι όσον αφορά το σύμβολο της ισότητας. Έτσι

επικεντρωθήκαμε τόσο στην ποσοτική καταγραφή των δεδομένων όσο και στην ποιοτική τους, επεκτείνοντας τις προϋπάρχουσες μελέτες και αντιπαραβάλλοντας τα αποτελέσματά τους με τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων που μας έδωσαν οι μαθητές κατά την διεξαγωγή της μελέτης Ι.

Γ) Η κατασκευή του «αναλυτικού οργάνου» έλαβε υπόψη τις ιδιαιτερότητες τόσο των ελληνικών σχολικών βιβλίων αλλά και τις ιδιαιτερότητες της παρούσης έρευνας που αποτελείται από τις δυο μελέτες Ι και ΙΙ. Το πλαίσιο, τα κριτήρια και οι ερωτήσεις που θέσαμε προσπαθήσαμε να είναι κατά το δυνατόν συγχρονισμένα τόσο κατά την διεξαγωγή των συνεντεύξεων με τους μαθητές όσο και κατά την εξέταση των σχολικών βιβλίων.

4.2. Μέθοδος

4.2.1. Υλικά

Για τη μελέτη του τρόπου εμφάνισης της μεταβλητής στα νέα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου του Οργανισμού Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων επιλέχθηκε ως μέθοδος η ανάλυση περιεχομένου (Krippendorf, 2004; White & Marsh 2006). Τα βιβλία αυτά διδάσκονται στις τρεις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης Α΄, Β΄& Γ΄ Γυμνασίου από το σχολικό έτος 2007-8 και εντεύθεν. Τα βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 4.2.1.1.

Πίνακας 4.2.1.1. χολικά Βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα

Βιβλίο Μαθηματικών	*Έτος έκδοσης*	*Συγγραφείς*	*Εκδότης*
Α΄ Γυμνασίου	2007	Βανδουλάκης Ι., ΚαλλιγάςΧ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σπ.	ΟΕΔΒ
Β΄ Γυμνασίου	2007	Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ.	ΟΕΔΒ
Γ΄ Γυμνασίου	2007	Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου ΣΤ., Χρυσοβέργης Μ.	ΟΕΔΒ

Για την ανάλυση των δεδομένων η μελέτη ΙΙ διαχωρίστηκε σε δυο φάσεις. Στην 1η φάση εξετάσθηκε με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και στη 2η φάση ελέγχθηκε κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές είναι φυσικοί αριθμοί.

4.3. 1η Φάση

Α) Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Α1) Κριτήρια συλλογής δεδομένων

Κατά την συλλογή των δεδομένων στην 1η φάση της μελέτης ΙΙ ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία:

Επισημάνθηκαν σε κάθε σελίδα του σχολικού βιβλίου κάθε τάξης τόσο ο τρόπος εμφάνισης των γραμμάτων-μεταβλητών όσο και η συχνότητα εμφάνισης τους. Στη συνέχεια αφού μελετήθηκαν προσεκτικά οι διάφορες περιπτώσεις έγινε προσπάθεια αρχικά να ομαδοποιηθούν και στη συνέχεια να κατηγοριοποιηθούν σε

μια από τις πέντε κατηγορίες εμφάνισης μορφών των μεταβλητών που παραθέτουμε στη συνέχεια.

Πιο αναλυτικά καταγράψαμε πόσες και ποιες μεταβλητές εμφανίζονταν μέσα:

- α) στις Εισαγωγικές Δραστηριότητες για την τάξη
- β) στη Θεωρία
- γ) στα Παραδείγματα και τις Εφαρμογές
- δ) στις Ερωτήσεις Κατανόησης
- ε) στις Ασκήσεις
- στ) στις Δραστηριότητες για το σπίτι
- ζ) στις Επαναληπτικές Ασκήσεις.

Μελετήθηκαν όλες οι μεταβλητές που συλλέχθηκαν σε όλες τις σελίδες των σχολικών βιβλίων από την πρώτη μέχρι και την τελευταία διδακτική σελίδα. Δεν ελήφθησαν υπόψη:

- Τα ιστορικά σημειώματα για το λόγο ότι περιείχαν μεν ενδιαφέρουσες ιστορικές αναφορές σχετικές με το κατά περίπτωση διδασκόμενο αντικείμενο χωρίς όμως να εμπεριέχουν μαθηματικούς συμβολισμούς στους οποίους εστίαζε η παρούσα μελέτη.
- Οι ανακεφαλαιώσεις των κεφαλαίων αφού ουσιαστικά περιείχαν σε περίληψη τα προαναφερθέντα κάθε ενότητας και ως εκ τούτου θεωρήθηκαν πλεονάζουσες.

Έτσι τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αφορούσαν:

- α) το πλήθος των διδακτικών σελίδων
- β) το πλήθος των διδακτικών σελίδων που περιέχουν μεταβλητές

- γ) τη συχνότητα και το είδος των μεταβλητών που εμφανίζονταν σε κάθε ενότητα
- δ) το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονταν τα γράμματα-μεταβλητές για παράδειγμα στην Άλγεβρα ή στην Γεωμετρία.

Α2) Τρόπος Κατηγοριοποίησης

Βασιζόμενοι στις προτεινόμενες κατηγορίες των Dogbey και Kersaint (2012), που περιγράψαμε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο, κατηγοριοποιήσαμε τα στοιχεία που συλλέξαμε σύμφωνα με τον ακόλουθο Πίνακα 4.3.1. που περιγράφει τις διαφορετικές μορφές με τις οποίες εμφανίζονταν οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία.

Πίνακας 4.3.1. Κατηγορίες μορφών εμφάνισης των μεταβλητών στα Σχολικά Βιβλία

	Είδος της μεταβλητής	*Ορισμός*	*Παραδείγματα*
I	*Επιγραφή – Ετικέτα*	Η μεταβλητή απεικονίζει ένα μέγεθος γεωμετρικό ή αλγεβρικό το οποίο μπορεί να έχει αριθμητική αναφορά	ρ-ακτίνακύκλου, α-πλευρά τριγώνου
II	*Σταθερά*	Η μεταβλητή περιγράφει μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής	π , e, g
III	*Συγκεκριμένος αριθμός (γνωστός ή άγνωστος)*	Περιγράφει τις μοναδικές τιμές (μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές) που μπορεί να λάβει μια μεταβλητή	$x - 4 = 1$ $x^2=9$
IV	*Γενικευμένος αριθμός*	Οι μεταβλητές λαμβάνουν είτε παραπάνω από δυο τιμές(γνωστές ή άγνωστες) είτε εκφράζουν μοτίβα ή αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρέχουν μια αληθή διαπίστωση	$5x+2>3$ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
V	*Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*	Εκφράζει μια σχέση συνμεταβολής ή μια συν αρτησιακή σχέση δυο μεγεθών	$y = 3x + 2$

Β) Συνθήκες - Δεσμεύσεις επιλογής δεδομένων

Η επιλογή και η συλλογή των μεταβλητών μέσα από τα σχολικά βιβλία ακολούθησε τις παρακάτω δεσμεύσεις:

Β1) Δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στις περιπτώσεις ομαδοποίησης της χρήσης των μεταβλητών έτσι ώστε να εξαλειφθεί το φαινόμενο πλεοναζουσών καταχωρήσεων. Για παράδειγμα όταν μια μεταβλητή εμφανίζονταν περισσότερες από μια φορές σε μια δραστηριότητα ή άσκηση αλλά επιτελούνταν ο ίδιος διδακτικός στόχος τότε καταχωρούνταν μόνον μια φορά, δηλαδή ασκήσεις-δραστηριότητες στις οποίες οι στόχοι ήταν ίδιοι κρίθηκαν ως έχουσες συχνότητα εμφάνισης ένα.

- ✓ Για παράδειγμα στην άσκηση 2 σ. 22 στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου όπου στην ίδια άσκηση υπάρχουν τρία ζητούμενα με μεταβλητές τα οποία έχουν όμως τον ίδιο διδακτικό στόχο, να κατανοήσουν δηλαδή οι μαθητές την έννοια της δύναμης καταχωρήθηκαν στην κατηγορία «Γ*ενικευμένος Αριθμός*» άπαξ.

2. *Γράψε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα: (α) 5·5·5·5·5·5 (β) 8·8·8·8·8·8·6·6·6 (γ) 1·1·1·1·1·1 (δ) α·α·α·α (ε) x·x·x (στ) 2·2·2·2·α·α·α*

Εικόνα 4.3.1. Οι φυσικοί αριθμοί , Ασκήσεις και Προβλήματα, σ. 22, Κεφάλαιο 1^{ο} , Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου

Β2) Περιπτώσεις όπου μια μεταβλητή εμφανίζονταν με διττή ή ακόμη και τριπλή ιδιότητα καταχωρήθηκε ανάλογα σε δυο ή ακόμη και τρεις κατηγορίες:

- ✓ Στο παρακάτω παράδειγμα έχουμε καταχώρηση των μεταβλητών σε δυο κατηγορίες, στην κατηγορία *«Ετικέτα-Επιγραφή»*, γιατί οι ω και φ

συμβολίζουν γωνίες και στην κατηγορία «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» διότι ζητούνταν να βρεθούν οι τιμές τους άρα οι μεταβλητές τελικά θα λάβουν μια και μοναδική τιμή.

9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.

Εικόνα 4.3.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί, Ασκήσεις σ.239, Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου

- Στο κεφάλαιο της γεωμετρίας στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου στην ενότητα «*Σχέση μοιρών και ακτινίων*» έγινε τριπλή καταχώρηση των μεταβλητών στις κατηγορίες *«Ετικέτα-Επιγραφή», «Σταθερά» και «Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες»* αντίστοιχα διότι οι μεταβλητές ρ, l και m συμβόλιζαν την ακτίνα, το μήκος και το μέτρο σε μοίρες της γωνίας του κύκλου *(«Ετικέτα-Επιγραφή»),* η μεταβλητή π ήταν σταθερά (*«Σταθερά»)* και οι μεταβλητές l, μ ήταν ποσότητες που συμμεταβάλλονταν («*Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες*») δηλαδή τα γράμματα για κάθε τους εμφάνιση καταχωρήθηκε άπαξ.

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$$

Εικόνα 4.3.3. Θεωρία, Σχέση μοιρών και ακτινίων,σ.190, Κεφάλαιο 3^{ο} , Βιβλίο Β΄ Γυμνασίου

Β3) Περιπτώσεις όπου ζητούνταν λεκτικά ο «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» δεν ελήφθησαν υπόψη και δεν καταχωρήθηκαν σε καμιά κατηγορία, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος ενός φορτηγού που μπορεί να διασχίσει τη σήραγγα, όταν το πλάτος του φορτηγού είναι 3,2 m και ο δρόμος είναι μιας κατεύθυνσης.

Εικόνα 4.3.4. Γενικές Ασκήσεις σ.157, Κεφάλαιο 4^{ο} , Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου

Β4) Συμπεριλήφθηκαν οι μεταβλητές που εμφανίζονταν μόνο με τη μορφή γραμμάτων (literal symbols) και όχι με άλλες μορφές π.χ. του κενοθέσιου (placeholder) όπως στην παρακάτω άσκηση που δεν προσμετρήθηκε:

3. *Συμπλήρωσε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν σωστά αθροίσματα:*

(α) $\begin{array}{r} \square 582 \\ +\ 75\square 1 \\ \hline \square 1\square 73 \end{array}$ (β) $\begin{array}{r} 4\square 5 \\ +\ 52\square \\ \hline \square\square 10 \end{array}$ (γ) $\begin{array}{r} \square 5\square 5 \\ +\ 52\square \\ \hline 4\square 93 \end{array}$

Εικόνα 4.3.5. Ασκήσεις & Προβλήματα, σ.17, Κεφάλαιο 1^{ο} , Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου

Β5) Ελήφθησαν υπόψη οι περιπτώσεις που οι μεταβλητές εμφανίζονταν αποκλειστικά με τη μορφή ενός και όχι πολλών γραμμάτων. Στη γεωμετρία για παράδειγμα τα μήκη ευθυγράμμων τμημάτων που συμβολίζονταν με δυο γράμματα π.χ. ΑΒ, ΓΔ δεν προσμετρήθηκαν παρά μόνο όταν απεικονίζονταν με ένα μόνον γράμμα π.χ. α, β. Παρόμοια στο κεφάλαιο των Πιθανοτήτων οι εκφράσεις Ρ(Α),Ν(Α),Ν(Ω) δεν προσμετρήθηκαν καθώς περιελάμβαναν μια συνθετότερη μορφή εμφάνισης των μεταβλητών και όχι αυτήν που περιελάμβανε ένα και μόνον γράμμα η οποία ήταν και το αντικείμενο της παρούσης έρευνας.

Β6) Καταχωρήθηκαν μόνον οι μεταβλητές που είχαν άμεσα ή έμμεσα μονότιμη αριθμητική αναφορά. Έτσι για παράδειγμα στην γεωμετρία τα γράμματα $Π_1$, $Π_2$ που συμβόλιζαν επίπεδα αλλά δεν ελάμβαναν ορισμένη αριθμητική τιμή ή οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ ή το κυρτό ευθύγραμμο σχήμα ΑΒΓΔ δεν συνυπολογίσθηκαν όπως επίσης και περιπτώσεις που απεικονίζονταν σημεία του επιπέδου με τη μορφή κεφαλαίων γραμμάτων Κ, Λ, Μ.

Β7) Δεν καταχωρήθηκαν επίσης γράμματα που χρησιμοποιούνταν για να αναπαραστήσουν μονάδες μέτρησης όπως τα 1m ή 100 cm.

Στις δεσμεύσεις αυτές οδηγηθήκαμε αφ' ενός μεν βασιζόμενοι στις προϋπάρχουσες έρευνες που διεξοδικά έχουν παρουσιαστεί στα κεφάλαια 1 και 2 αφ' ετέρου δε καθοδηγούμενοι και από το σχεδιασμό της μελέτης Ι θέλοντας έτσι ολοκληρώνοντας την έρευνα αυτή να υπάρξει η δυνατότητα εξαγωγής συγκριτικών συμπερασμάτων που θα βασίζονταν σε ευρήματα τα οποία θα είχαν συλλεχθεί με τον κατά το δυνατόν πλησιέστερο τρόπο. Έτσι το είδος των γραμμάτων-μεταβλητών που δόθηκαν στους μαθητές στα ερωτήματα της μελέτης Ι καθόρισαν σε ένα βαθμό και το είδος των γραμμάτων μεταβλητών που εξετάσθηκαν στα σχολικά βιβλία στην μελέτη ΙΙ.

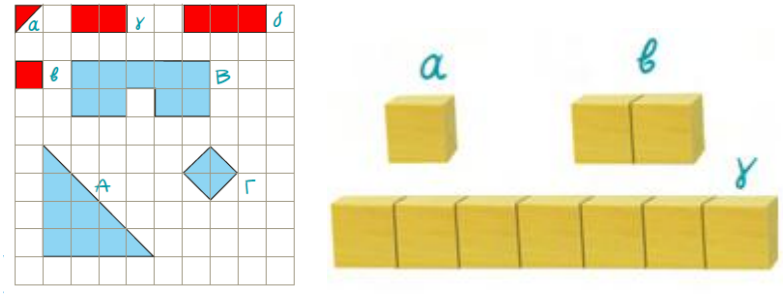
Γ) Παραδείγματα συλλογής δεδομένων

Παραθέτουμε στη συνέχεια αναλυτικά παραδείγματα καταχώρησης μεταβλητών για κάθε μια από τις πέντε κατηγορίες μορφών εμφάνισης των μεταβλητών.

Γ1) Κατηγορία Ι : *«Ετικέτα» ή Επιγραφή»*

Στην κατηγορία αυτή ανήκαν τα γράμματα που απεικόνιζαν μια έννοια αλγεβρική ή γεωμετρική η οποία μπορούσε να έχει μονότιμη αριθμητική αναφορά. Έτσι συλλέξαμε:

- ✓ Γράμματα που απεικόνιζαν δομικές μονάδες μέτρησης επιφάνειας ή όγκου :



Εικόνα 4.3.6. Μονάδες μέτρησης σ.64, Κεφάλαιο 3^{ο}, Α΄ Γυμνασίου

- ➢ Γράμματα που απεικόνιζαν ευθύγραμμα τμήματα ή γωνίες όπως στο ακόλουθο παράδειγμα όπου το ρ εξέφραζε το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχούσε στην ακτίνα του κύκλου.

7. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό κύκλου (Ο, ρ) ως προς ευθεία ε.*

Εικόνα 4.3.7. Συμμετρία, Παραδείγματα-Εφαρμογές, σ.202, Βιβλίο Α΄ Γυμνασίου

Γ2) Κατηγορία ΙΙ : *«Σταθερά»*

Στην κατηγορία αυτή οι μεταβλητές χρησιμοποιούνταν για να δηλώσουν ποσότητες σταθερής αξίας όπως για παράδειγμα ο αριθμός «π», το πηλίκο δηλαδή του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, το οποίο όπως γνωρίζουμε μας δίνει τον άρρητο και υπερβατικό αριθμό 3,1415926535…., ο οποίος κατά προσέγγιση χρησιμοποιείται με τα δυο πρώτα δεκαδικά ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος του και όπου «π», το πρώτο γράμμα της λέξης *περιφέρεια (*κύκλου). Μια άλλη σταθερά που χρησιμοποιείται ευρέως στη Φυσική αλλά ανιχνεύθηκε και σε αρκετά προβλήματα στα βιβλία των Μαθηματικών ήταν η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=9.8m/sec^2$, όπου g το αρχικό γράμμα της αγγλικής λέξης gravity.

Γ3) Κατηγορία ΙΙΙ *: «Συγκεκριμένος αριθμός- γνωστός ή άγνωστος»*

Στην κατηγορία αυτή το γράμμα-μεταβλητή κατείχε τη θέση ενός ή το πολύ δυο συγκεκριμένων γνωστών ή άγνωστων αριθμών κι έτσι συμπεριλήφθηκαν:

- Γράμματα που ελάμβαναν συγκεκριμένη τιμή για τον υπολογισμό παραστάσεων όπως στην άσκηση 5α), [σ.14, Αλγεβρικές παραστάσεις, Κεφάλαιο 1^{ο}, Άλγεβρα Β΄ Γυμνασίου] όπου ζητούνταν να απλοποιηθεί η παράσταση A = 3(x+2y)+2(2x+y) και στη συνέχεια να υπολογισθεί η τιμή της για x=1, y=2

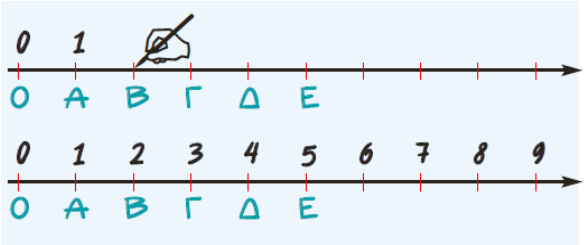
- Γράμματα που ελάμβαναν συγκεκριμένη τιμή όπως για την μετατροπή περιοδικού δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα στο παράδειγμα-εφαρμογή [σ.136 Θετικοί & Αρνητικοί αριθμοί, Κεφάλαιο 7^{ο}, Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου] όπου θέτονταν $x = 0,\bar{2}$ για να τον υπολογισμό τελικά του x ως $x = \frac{2}{9}$

- Γράμματα που ζητούνταν να υπολογισθούν, όπως ο άγνωστος x στην άσκηση $\frac{3}{x} = \frac{12}{20}$ ή ο άγνωστος t στην άσκηση $t+4+1=3+19$, [Εξισώσεις και προβλήματα σ.74, Κεφάλαιο 4^{ο}, Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου].

- Γράμματα που συμβόλιζαν την απόλυτη τιμή όπως στο ακόλουθο Παράδειγμα-Εφαρμογή, όπου ο α τελικά λάμβανε την τιμή α = ±2.

Εικόνα 4.3.8. Θετικοί-Αρνητικοί αριθμοί σ.120, Κεφάλαιο 7^{ο}, Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου

- Γράμματα που απεικόνιζαν αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών



Εικόνα 4.3.9. Η διάταξη των φυσικών αριθμών, σ.12, Κεφάλαιο 1^{ο}, Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου

- Γράμματα που κατείχαν τη θέση ψηφίου σε πολυψήφιους αριθμούς (θεσιακή χρήση) όπως στην ακόλουθη άσκηση:

8. *Σε κάθε μία από τις πράξεις (α) και (β) τα γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία. Αντικατέστησε τα γράμματα Α, Β, Γ και Δ με τα κατάλληλα ψηφία.*

(α)
$$\begin{array}{r} AB \\ +\ 47 \\ \hline 73 \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{r} \Gamma\Delta \\ -8 \\ \hline \Delta 5 \end{array}$$

Εικόνα 4.3.10. Εξισώσεις και προβλήματα, σ.78, Κεφάλαιο 4^{ο}, Α΄ Γυμνασίου

Γ4) Κατηγορία IV : *«Γενικευμένος αριθμός»*

Στην κατηγορία αυτή η μεταβλητή χρησιμοποιούνταν σε εκφράσεις που αναπαριστούσαν κάποια μοτίβα ή εξέφραζαν αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρείχαν μια αληθή διαπίστωση ή διατύπωναν γενικές ιδιότητες. Επίσης στην κατηγορία αυτή περιέχονταν μεταβλητές που ελάμβαναν περισσότερες των δυο τιμών (γνωστών ή αγνώστων). Έτσι συλλέξαμε γράμματα που εμφανίζονταν:

- Στην αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης α+β=β+α, όπου τα α,β αναπαριστούσαν οποιοδήποτε αριθμό (σ.15, Κεφάλαιο 1^{ο} , Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου)

- Στον ορισμό της αφαίρεσης

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** βρίσκουμε έναν αριθμό **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο **Α** δίνει το **Μ**.

Μ = Α + Δ
και γράφουμε

Εικόνα 4.3.11 , Οι φυσικοί αριθμοί, Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε, σ.15, Κεφάλαιο 1^{ο}, Α΄ Γυμνασίου

- Σε αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες ζητούνταν να υπολογιστούν με σκοπό την αναγωγή των ομοίων όρων, και όπου σύμφωνα με τη διαπίστωση του Küchemann (1978) παραστάσεις της μορφής e+f+g ακόμη και αν αντικατασταθούν από την e+f=8 παραμένουν άγνωστες δηλαδή 8+g τις οποίες θεωρήσαμε γενικευμένο αριθμό όπως στην παρακάτω άσκηση:

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $2x - 4y + 3x + 3y$
β) $6\omega - 2\omega + 4\alpha + 3\omega + \alpha$
γ) $x + 2y - 3x - 4y$
δ) $-8x + \omega + 3\omega + 2x - x$

Εικόνα 4.3.12. Ασκήσεις σ.14, Κεφάλαιο 1^{ο} , Βιβλίο Β΄ Γυμνασίου

- Στην διαίρεση πολυωνύμων κατατάξαμε τις δραστηριότητες που είχαν ως αντικείμενο την Ευκλείδεια Διαίρεση στην κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός*».

3 Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το $x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο $2x + 3$ και υπόλοιπο $3x + 2$;

Εικόνα 4.3.13. Διαίρεση Πολυωνύμων, σ.67, Κεφάλαιο 1^{ο}, Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου

- Στην γενική επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων κατατάξαμε τις μορφές $ax^2 + bx + c = 0$ ως «*Γενικευμένο Αριθμό*» καθόσον ο x και οι συντελεστές a,b,c έπαιρναν άνω της μιας τιμές. Το ίδιο ίσχυσε και για τα πολυώνυμα, για παράδειγμα το πολυώνυμο της μορφής $P(x) = 3x^2+2x-5$, για τα μονώνυμα και τις πράξεις με αυτά που επίσης τα κατατάξαμε ως «*Γενικευμένο Αριθμό*» όπως στο παρακάτω παράδειγμα 4.3.14.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Ένα γινόμενο μονωνύμων π.χ. $(-2x)(3x^2y)$ με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων γράφεται

$$(-2x)(3x^2y) = (-2)x \cdot 3x^2y = (-2) \cdot 3(xx^2)y = -6x^3y.$$

Εικόνα 4.3.14. Θεωρία, Μονώνυμα- Πράξεις με μονώνυμα, σ.30, Κεφάλαιο 1^{ο}, Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου

Γ5) Κατηγορία V : *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»*

Οι μεταβλητές στην κατηγορία αυτή παρουσιάζονταν ως ζεύγος μεταβλητών ποσοτήτων όπου η τιμή της μιας επηρέαζε την τιμή της άλλης. Η κατηγορία αυτή εμφανίζονταν κυρίως στο κεφάλαιο των συναρτήσεων σε σχέσεις όπως y=2x+3 ή στην πιο γενικευμένη της μορφή y=ax+b ή στις ενότητες επίλυσης τύπων. Έτσι συλλέξαμε γράμματα όπως:

- Στο ακόλουθο παράδειγμα-εφαρμογή όπου τα x, y συμμεταβάλλονταν.

1. *Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας* $a = \frac{2}{3}$.

x	0	1	0,3		
y				$\frac{5}{3}$	3

Εικόνα 4.3.15. Ανάλογα ποσά σ.97, Κεφάλαιο 6^{ο}, Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου

- Στο παράδειγμα-εφαρμογή όπου είχαμε τρεις μεταβλητές B,υ,t που συμμεταβάλλονταν.

2 Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) ενός ενήλικα, ύψους υ (σε cm) δίνεται από τον τύπο $B = \kappa\left(u - 100 + \frac{t}{10}\right)$, όπου t είναι η ηλικία του (σε έτη) και κ μια σταθερά (για τον άνδρα κ = 0,9 και για τη γυναίκα κ = 0,8). Να βρεθεί ποιο είναι το ιδανικό βάρος για έναν άνδρα και μια γυναίκα, από τους οποίους ο καθένας είναι 30 ετών και έχει ύψος 1,77 m.

Εικόνα 4.3.16. Πράξεις με μονώνυμα σ. 27, Κεφάλαιο 1^{ο} , Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου

4.4. 2^{η} φάση

Α) Κριτήρια συλλογής δεδομένων

Στην 2^{η} φάση της μελέτης ΙΙ εξετάσαμε τα σχολικά βιβλία των τριών τάξεων του Γυμνασίου που αναλυτικά περιγράφηκαν στον Πίνακα 4.2.1.1.ως προς το είδος της αριθμητικής αξίας που αποδίδονταν στα γράμματα. Δηλαδή εξετάσαμε όλες τις μεταβλητές που εμφανίζονταν στα βιβλία αυτά με την μορφή ενός μόνον γράμματος και αντικαθιστούνταν από κάποιον συγκεκριμένο αριθμό και ελέγξαμε σε κάθε περίπτωση αν αντικαθιστούνταν από φυσικούς ή από μη φυσικούς αριθμούς. Τα κριτήρια συλλογής δεδομένων για τη 2^{η} φάση ήταν όμοια με τα κριτήρια της 1^{ης} φάσης της ίδιας μελέτης με μόνη διαφορά ότι σ' αυτή εκτός από όλες τις διδακτικές σελίδες των σχολικών βιβλίων ελέγχθηκαν και οι απαντήσεις των σχολικών ασκήσεων που περιέχονταν στα αντίστοιχα παραρτήματα των βιβλίων.

Β) Συνθήκες - Δεσμεύσεις επιλογής δεδομένων

- Εξετάσθηκαν οι μεταβλητές που εμφανίζονται με τη μορφή ενός μόνον γράμματος και μόνον στην περίπτωση κατά την οποία τους αποδίδονταν άμεσα μια αριθμητική τιμή, δηλαδή περιπτώσεις που εμφανίζονταν οι

μεταβλητές με τη μορφή π.χ. x=2, y=1,3. Η δέσμευση αυτή ίσχυσε και για τη συλλογή των δεδομένων από το παράρτημα των λύσεων-απαντήσεων των βιβλίων δηλαδή αν στις απαντήσεις υπήρχαν μόνον αριθμοί π.χ. 3, 2,7, -5/6 χωρίς να προηγείται η μεταβλητή δεν τις λάβαμε υπόψη.

- Συμπεριλήφθηκαν και οι περιπτώσεις όπου γίνονταν χρήση του ≠ όπως π.χ. χ ≠ -2, Κεφάλαιο 2, Κλασματικές Εξισώσεις σ.103, βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου.

- Συμπεριλήφθηκαν επίσης περιπτώσεις που αποδίδονταν αριθμητική τιμή σε μια αλγεβρική παράσταση π.χ. x+y = 5 η οποία στη συνέχεια αντικαθιστούνταν σε μια μεγαλύτερη κατέχοντας έτσι το ρόλο μιας ενδιάμεσης ψευδομεταβλητής.

- Περιπτώσεις όπου μια μεταβλητή στην ίδια άσκηση ελάμβανε τιμές φυσικών αλλά και μη φυσικών αριθμών την κατατάσσαμε στην πιο εκλεπτυσμένη κατηγορία των μη φυσικών αριθμών.

Γ) Παραδείγματα συλλογής δεδομένων

- Στο παρακάτω παράδειγμα από το κεφάλαιο της γεωμετρίας αποδίδονταν στη μεταβλητή φ τιμή φυσικού αριθμού-ΦΑ και συνεπώς καταχωρήθηκε στην ομώνυμη κατηγορία.

$$\varphi = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

Εικόνα 4.4.1. Ομοιότητα, Παραδείγματα – Εφαρμογές, σ.216, Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου

- Στο παρακάτω παράδειγμα οι μεταβλητές στην επιμεριστική ιδιότητα αντικαθιστούνταν από φυσικούς και μη φυσικούς αριθμούς και συνεπώς προσμετρήθηκαν στην κατηγορία ΜΦΑ.

$$\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$$

Στη μορφή αυτή, η επιμεριστική ιδιότητα μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε εύκολα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις:

Παράδειγμα:

$7 \cdot \alpha + 8 \cdot \alpha = (7 + 8) \cdot \alpha = 15 \cdot \alpha$

$x + 4 \cdot x - 2 \cdot x = (1 + 4 - 2) \cdot x = 3 \cdot x$

$5 \cdot t - 6 \cdot t - 8 \cdot t = (5 - 6 - 8) \cdot t = -9 \cdot t$

Εικόνα 4.4.2. Η επιμεριστική ιδιότητα σ.12, Κεφάλαιο 1^{ο}, Άλγεβρα Β΄ Γυμνασίου

- Ανάλογο είναι και το παράδειγμα από την ενότητα της γεωμετρίας στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου όπου κατατάχθηκε η μεταβλητή ρ στην κατηγορία ΜΦΑ αφού ελάμβανε τιμή δεκαδικού αριθμού.

$$\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9,42}{2 \cdot 3,14} = 1,5 \text{ cm}.$$

Εικόνα 4.4.3. Μήκος κύκλου, σ.187, Κεφάλαιο 3^{ο}, Γεωμετρία Β΄ Γυμνασίου

Δ) Κωδικοποίηση

Για τις ανάγκες της ανάλυσης της μελέτης ΙΙ χρησιμοποιήθηκε η ίδια κωδικοποίηση όπως και στην μελέτη Ι. δηλαδή για τις κατηγορίες των μεταβλητών χρησιμοποιήθηκε κωδικοποίηση από το 1 έως το 5 και για τα βιβλία των τριών τάξεων κωδικοποίηση από το 1 έως το 3. Επιπρόσθετα δημιουργήσαμε μια

μεταβλητή με τιμές 1 και 2 που αντιστοιχούσαν στην άλγεβρα και τη γεωμετρία για να ελέγξουμε μέσα σε ποιο από τα δυο πλαίσια ανιχνεύθηκαν τα γράμματα-μεταβλητές.

Ε) Διαδικασία Ανάλυσης

- Στ $1^{ο}$ στάδιο της μελέτης ΙΙ συλλέχθηκαν τα στοιχεία που αφορούσαν το πλήθος των μεταβλητών ανά κατηγορία εμφάνισης των μορφών των μεταβλητών και στη συνέχεια με ποσοτική ανάλυση προσδιορίσθηκαν οι συχνότητες και τα αντίστοιχα ποσοστά εμφάνισής τους συνολικά, ανά τάξη όπως επίσης και ανά ενότητα άλγεβρας-γεωμετρίας.
- Στο $2^{ο}$ στάδιο της μελέτης ΙΙ συλλέχθηκαν τα στοιχεία που αφορούσαν το πλήθος των μεταβλητών που αντικαθιστούνταν από φυσικούς αριθμούς (ΦΑ) ή μη φυσικούς αριθμούς (ΜΦΑ) και ακολούθως με ποσοτική ανάλυση προσδιορίσθηκαν οι συχνότητες και τα αντίστοιχα ποσοστά συνολικά, ανά τάξη όπως επίσης και ανά ενότητα άλγεβρας-γεωμετρίας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα της μελέτης ΙΙ.

4.5. Αποτελέσματα

Αξιοπιστία της έρευνας

Βασικός παράγοντας στην μελέτη ανάλυσης περιεχομένου αποτελεί η αξιοπιστία της διαδικασίας κωδικοποίησης. Για να εξασφαλίσουμε την αξιοπιστία της κωδικοποίησης της έρευνάς μας ζητήσαμε από έναν ανεξάρτητο κωδικοποιητή να

διεξάγει έναν έλεγχο κωδικοποίησης και στα τρία σχολικά βιβλία των τριών τάξεων του Γυμνασίου σε ποσοστό 22% για κάθε βιβλίο.

Η συμφωνία μεταξύ των δυο κωδικοποιητών ανήλθε στο 91% για όλες τις κατηγορίες μορφών εμφάνισης των μεταβλητών.

Αναλυτικά για την κατηγορία *«Ετικέτα-Επιγραφή»* η συμφωνία μεταξύ των κωδικοποιητών ανήλθε στο ποσοστό του 92% για την κατηγορία «*Σταθερά*» στο 100%, για τις κατηγορίες «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» στο 87%, για την κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός*» στο 84% και για τις «*Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες*» ήταν 92%.

Όλες οι διαφωνίες που προέκυψαν συζητήθηκαν και η διαδικασία αυτή επαναπροσδιόρισε την χρήση των κριτηρίων.

4.5.1. Αποτελέσματα 1ης φάσης

Α) Αναλογίες & Ποσοστά Σελίδων που περιέχουν μεταβλητές

Ο Πίνακας 4.5.1.1. περιέχει πληροφορίες που αφορούν το πλήθος των διδακτικών σελίδων για κάθε βιβλίο κάθε τάξης και συνολικά για όλες τις τάξεις μαζί, το πλήθος των διδακτικών σελίδων που περιέχουν μεταβλητές, την αναλογία των δεύτερων ως προς τις πρώτες και σε ποσοστό όπως επίσης την πρώτη και την τελευταία διδακτική σελίδα κάθε βιβλίου. Οι μεταβλητές που ανιχνεύθηκαν χρησιμοποιούνταν είτε για την ονομασία γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων είτε για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, για τη μελέτη συναρτήσεων, για την επίλυση τύπων ή για υπολογισμούς αγνώστων μεγεθών στη γεωμετρία και την τριγωνομετρία.

Πίνακας 4.5.1.1. Πίνακας συχνοτήτων & ποσοστών
των διδακτικών σελίδων που περιέχουν μεταβλητές

Σχολικό Βιβλίο	*Διδακτικές σελίδες*	*Διδακτικές σελίδες που περιέχουν μεταβλητή*	*Ποσοστό*	*Πρώτη Διδακτική Σελίδα που περιέχει μεταβλητές*	*Τελευταία Διδακτική Σελίδα που περιέχει μεταβλητές*
Α΄ Γυμνασίου	211	136	65%	12	226
Β΄ Γυμνασίου	206	168	82%	11	232
Γ΄ Γυμνασίου	208	201	97%	13	252

Τα ποσοστά των διδακτικών σελίδων που περιέχουν μεταβλητή προς το συνολικό πλήθος των διδακτικών σελίδων ακολουθούν μια αυξητική τάση και κυμαίνονται από 65% μέχρι 97%, το μεγαλύτερο ποσοστό εμφανίζεται στη Γ΄ Γυμνασίου με μια μέση τιμή 81% Παρατηρούμε ότι μεταβλητές εμφανίζονται μέσα στις πρώτες 13 σελίδες και στα τρία βιβλία και η εμφάνιση τους είναι συνεχής μέχρι και τις τελευταίες σελίδες των βιβλίων.

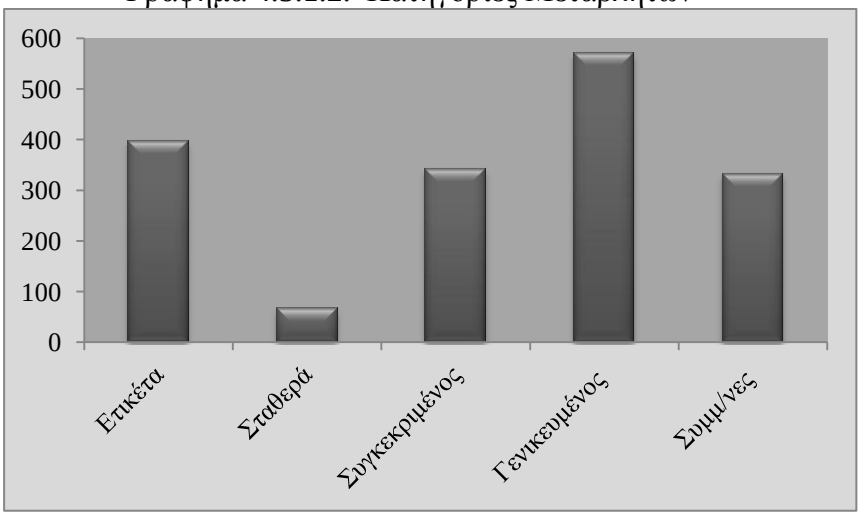
Β) ***Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών των Μεταβλητών***

Τα ευρήματα που συλλέχθηκαν από τη διεξοδική έρευνα των βιβλίων και αφορούσαν τα είδη των μορφών εμφάνισης των μεταβλητών και τις συχνότητες εμφάνισής τους περιγράφονται στον Πίνακα 4.5.1.2. και στο αντίστοιχο Γράφημα 4.5.1.2. Όπως φαίνεται επικρατέστερες κατηγορίες ήταν οι *« Γενικευμένος Αριθμός»* και «*Ετικέτα- Επιγραφή»* με αντίστοιχα ποσοστά 34% και 23%. Τρίτες στη σειρά εμφανίστηκαν οι κατηγορίες *«Συγκεκριμένος Αριθμός»* & «Συμμ*εταβαλλόμενες Ποσότητες»* με ποσοστό 20% και τελευταία η κατηγορία «Σ*ταθερά»* με ποσοστό 3%.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5.1.2. Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης
των Κατηγοριών των Μεταβλητών

	Συχνότητα	Ποσοστό
Ετικέτα-Επιγραφή	396	(23%)
Σταθερά	67	(3%)
Συγκεκ/νος Αριθμός	341	(20%)
Γενικευμένος Αριθμός	570	(34%)
Συμμετ/νες Ποσότητες	332	(20%)
Σύνολο Μεταβλητών	1706	(100%)

Γράφημα 4.5.1.2. Κατηγορίες Μεταβλητών



Γ) Μεταβολές στις κατηγορίες των μορφών εμφάνισης των μεταβλητών ανά τάξη

Τα δεδομένα κατέδειξαν μια υπεροχή των κατηγοριών *« Γενικευμένος Αριθμός»* και *«Ετικέτα-Επιγραφή»* στα βιβλία των τάξεων Α΄και Γ΄ Γυμνασίου ενώ παρατηρείται μια διαφοροποίηση στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου όπου εκεί κυριαρχούν οι κατηγορίες *«Ετικέτα-Επιγραφή»* και *« Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες». Η* κατηγορία *« Συγκεκριμένος Αριθμός»* παρουσίασε μια σταθερή αυξητική τάση και στα τρία βιβλία όπως επίσης και η κατηγορία *«Ετικέτα-Επιγραφή»*.

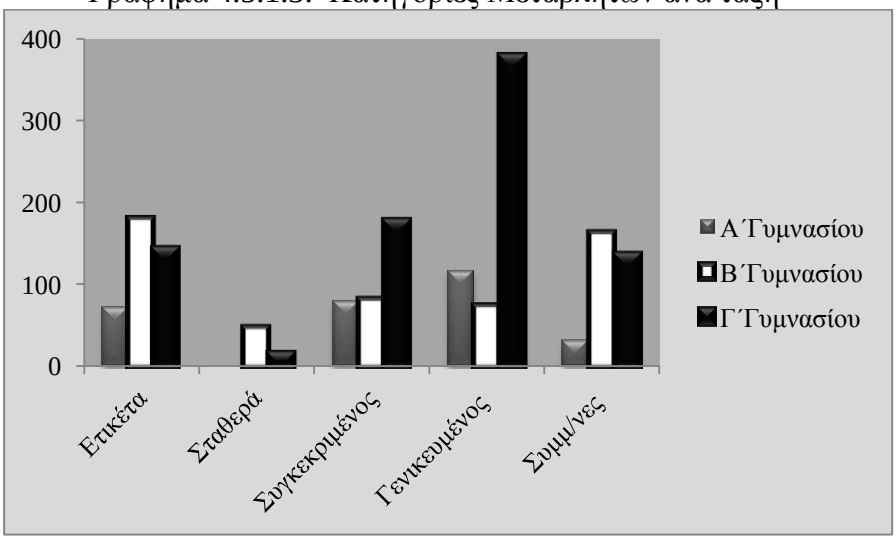
Η κατηγορία *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»* εμφανίστηκε στην Β΄ Γυμνασίου με το μεγαλύτερο ποσοστό 30% και η κατηγορία *«Γενικευμένος Αριθμός»* παρουσιάστηκε στη Γ΄ Γυμνασίου με το υψηλότερο ποσοστό 45%.

Τα αποτελέσματα αυτά ανά τάξη παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα 4.5.1.3. και στο αντίστοιχο Γράφημα 4.5.1.3.

Πίνακας 4.5.1.3. Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών των Μεταβλητών στα Σχολικά Βιβλία ανά τάξη

	Ετικέτα-Επιγραφή	*Σταθερά*	*Συγκ/νος Αριθμός*	*Γενικ/ένος Αριθμός*	*Συμμετ/νες Ποσότητες*	*Σύνολο Μεταβλ/ών*
Α΄Γυμν/ίου	71 (24%)		79 (27%)	116 (39%)	31 (10%)	297 (100%)
Β΄Γυμν/ίου	180 (33%)	49 (8%)	83 (15%)	75 (14%)	163 (30%)	550 (100%)
Γ΄Γυμν/ίου	145 (17%)	18 (2%)	179 (21%)	379 (45%)	138 (15%)	859 (100%)

Γράφημα 4.5.1.3. Κατηγορίες Μεταβλητών ανά τάξη



Ο έλεγχος Chi-Square έδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των βιβλίων των τάξεων αναφορικά με τις κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών [$\chi^2(8)=255$, $p<.001$]. Επίσης εξετάσθηκαν οι διαφορές ανά ζεύγη τάξεων κι εμφανίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Τα αποτελέσματα αυτά είναι για τις Α΄- Β΄ Γυμνασίου: $\chi^2(4)=129$, $p<.001$, για τις Α΄- Γ΄ Γυμνασίου $\chi^2(4)=18.9$, $p<.05$ και για τις Β΄- Γ΄ Γυμνασίου $\chi^2(4)=210$, $p<.001$.

Δ) Μεταβολές στις κατηγορίες των μορφών εμφάνισης των μεταβλητών ανά ενότητα άλγεβρας-γεωμετρίας

Στην άλγεβρα επικρατούσες κατηγορίες ήταν οι *«Γενικευμένος Αριθμός», «Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες» & «Συγκεκριμένος Αριθμός»* με μειωμένη παρουσία της κατηγορίας *«Ετικέτα-Επιγραφή»* και της κατηγορίας *«Σταθερά»*. Παρατηρούμε επίσης ότι στην άλγεβρα μεταβλήθηκαν οι γενικοί συσχετισμοί φέρνοντας στη δεύτερη θέση την κατηγορία *«Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες»* οι οποίες εμφανίζονταν στα κεφάλαια των συναρτήσεων, των ανάλογων ποσών, στην επίλυση τύπων και στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων που ήταν κυρίαρχα στην ενότητα αυτή.

Στην ενότητα της γεωμετρίας παρατηρήθηκε ανακατανομή των ποσοστών με κυριαρχούσες τις κατηγορίες «*Ετικέτα-Επιγραφή*» και *«Συγκεκριμένος Αριθμός»* καθόσον είχαμε πολύ συχνή χρήση γωνιών, ευθυγράμμων τμημάτων ενώ στην πλειονότητα των εφαρμογών & των ασκήσεων ζητούνταν να υπολογισθεί ή δίνονταν συγκεκριμένος αριθμός γνωστός ή άγνωστος. Παρατηρήθηκε επίσης αυξημένο το ποσοστό της κατηγορίας *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»* και της κατηγορίας *«Σταθερά»* (κυρίως της σταθεράς π) που οφείλονταν στο γεγονός ότι στην ενότητα

της γεωμετρίας περιέχονταν η μέτρηση κύκλου, οι όγκοι στερεών, η τριγωνομετρία, το πυθαγόρειο θεώρημα.

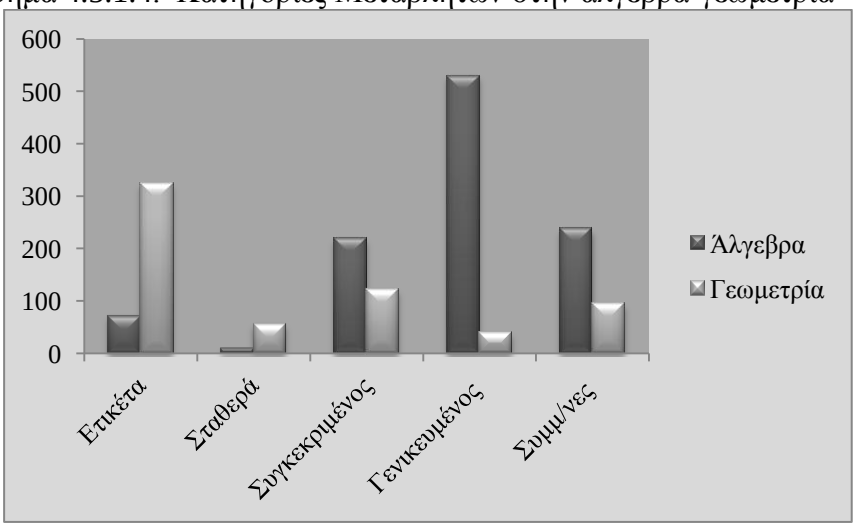
Τα παραπάνω αποτελέσματα συγκεντρωτικά για όλες τις τάξεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5.1.4. και στο αντίστοιχο Γράφημα 4.5.1.4.

Πίνακας 4.5.1.4. Άλγεβρα vs Γεωμετρία

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών των Μεταβλητών

	Επιγραφή	*Σταθερά*	*Συγκεκ/ος Αριθμός*	*Γενικ/ος Αριθμός*	*Μεταβαλ/νες Ποσότητες*	*Σύνολο Μεταβλ/ών*
Άλγεβρα	72 (7%)	10 (1%)	219 (20%)	530 (50%)	237 (22%)	1068
Γεωμετρία	324 (51%)	57 (9%)	122 (19%)	40 (6%)	95 (15%)	638

Γράφημα 4.5.1.4. Κατηγορίες Μεταβλητών στην άλγεβρα-γεωμετρία



Ο έλεγχος χ^2 που πραγματοποιήσαμε έδειξε μια στατιστικώς σημαντική διαφορά που σημειώθηκε ανάμεσα στις κατηγορίες των μεταβλητών στην Άλγεβρα και στις κατηγορίες των μεταβλητών στη Γεωμετρία ανά τάξη [$\chi^2(2)=117$, $p<.001$].

4.5.2. *Αποτελέσματα 2ης φάσης*

Α) Συχνότητα & Ποσοστά Εμφάνισης των Μεταβλητών ως ΦΑ-ΜΦΑ

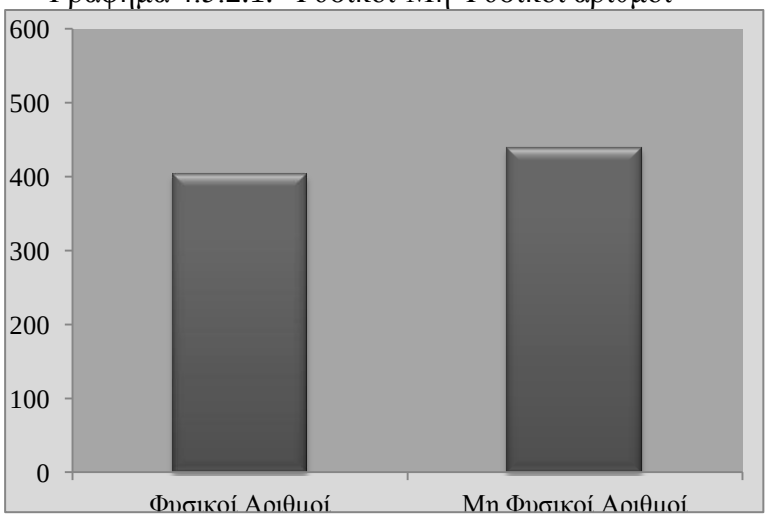
Τα αποτελέσματα της 2ης φάσης της μελέτης ΙΙ που αφορούσαν το είδος των αριθμών που ελάμβαναν οι μεταβλητές μας έδειξαν ως επικρατούσα κατηγορία τους φυσικούς αριθμούς-ΦΑ με ποσοστό 52% έναντι των μη φυσικών αριθμών ΜΦΑ με 48%. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα 4.5.2.1. και στο αντίστοιχο Γράφημα 4.5.2.1.

Πίνακας 4.5.2.1. ΦΑ vs ΜΦΑ

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών

	Συχνότητα	Ποσοστό
Φυσικοί Αριθμοί -ΦΑ	403	(48 %)
Μη Φυσικοί Αριθμοί-ΜΦΑ	439	(52 %)
Σύνολο	842	(100%)

Γράφημα 4.5.2.1. Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί



Β) Μεταβολές στις κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών ως Φυσικών Αριθμών (ΦΑ) ή Μη Φυσικών Αριθμών (ΜΦΑ) ανά τάξη

Εξετάζοντας ανά τάξη αναλυτικά τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι στη Α΄ Γυμνασίου στα τέσσερα πρώτα κεφάλαια *«Φυσικοί Αριθμοί, Κλάσματα, Δεκαδικοί Αριθμοί και Εξισώσεις»* εμφανίστηκαν οι ΦΑ με ποσοστό 29% και οι ΜΦΑ με 4%. Οι εμφανίσεις των ΜΦΑ στη θέση των μεταβλητών βρίσκονταν:

- Στο κεφάλαιο των εξισώσεων και αφορούσαν κυρίως λύσεις εξισώσεων που ήταν δεκαδικοί ή κλασματικοί αριθμοί
- Στο κεφάλαιο των κλασμάτων και αφορούσαν γράμματα πάνω στην αριθμογραμμή που αντιστοιχούσαν σε κλασματικούς αριθμούς (σ.42, βιβλίο Α΄ Γυμνασίου)
- Και στο κεφάλαιο των «*Δεκαδικών αριθμών»* στην παράγραφο της τυποποιημένης μορφής των μεγάλων αριθμών (παράγραφος Α.4.2. σ., 75) όπου τη θέση του α στην παράσταση α* 10^{ν} ελάμβαναν δεκαδικοί αριθμοί της μορφής 2,34 ή 3,14.

Στη συνέχεια στα κεφάλαια των «*Ποσοστών»* δεν είχαμε εμφάνιση των ΜΦΑ ενώ αντίθετα στα κεφάλαια των «*Ανάλογων ποσών»* και των «*Αρνητικών Αριθμών»* είχαμε τη μεγαλύτερη εμφάνιση των ΜΦΑ με ποσοστό 27% έναντι 17% των ΦΑ. Στο Β΄ Μέρος της γεωμετρίας είχαμε μόλις 2% ΜΦΑ που αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς ως μέτρα ακτινών κύκλου (σ. 189, 194 Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες) κι έτσι διαμορφώθηκε συνολικά το ποσοστό των ΦΑ(68%) έναντι των ΜΦΑ (32%) στην τάξη αυτή.

Στη Β΄ Γυμνασίου στα κεφάλαια των «*Εξισώσεων-Ανισώσεων»*, *«Πραγματικών Αριθμών»* (τετραγωνικές ρίζες, άρρητοι αριθμοί) και των

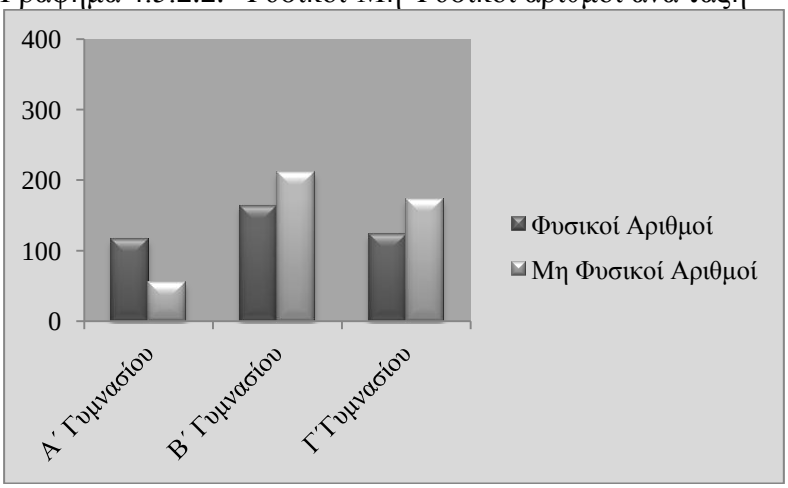
«Συναρτήσεων» είχαμε μια ελαφρά υπεροχή των ΜΦΑ έναντι των ΦΑ με ποσοστά 26% έναντι 24% λόγω της συχνής εμφάνισης αρνητικών, δεκαδικών και άρρητων αριθμών. Στο κεφάλαιο της «*Στατιστικής»* λόγω της φύσης του κεφαλαίου αυτού απουσίαζαν γενικώς οι μεταβλητές αυτές του τύπου που εξετάζαμε και στο Β΄ μέρος της γεωμετρίας στα κεφάλαια των «*Εμβαδών Επιπέδων Σχημάτων, Τριγωνομετρίας, Μέτρησης Κύκλου, Στερεομετρίας»* λόγω της πληθώρας των δεκαδικών αριθμών και των κλασμάτων οι ΜΦΑ υπερτερούσαν έναντι των ΦΑ με ποσοστά αντίστοιχα 30% και 20%. Έτσι στην τάξη αυτή συνολικά εμφανίζονταν οι ΜΦΑ με ποσοστό 56% και οι ΦΑ με 44%.

Στην Γ΄ Γυμνασίου στο Α΄ Μέρος της άλγεβρας που περιελάμβανε τις *«Αλγεβρικές Παραστάσεις, Εξισώσεις –Ανισώσεις, Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων και Συναρτήσεις»* είχαμε μια υπεροχή των ΜΦΑ με ποσοστό 41% έναντι 28% των ΦΑ. Στο Β΄ Μέρος της γεωμετρίας που περιελάμβανε την «*Ομοιότητα και την Τριγωνομετρία»* και πάλι υπερτερούσαν οι ΜΦΑ με 18% έναντι των ΦΑ με 13%. Τα αποτελέσματα αυτά περιγράφονται στον Πίνακα 4.5.2.2. και στο αντίστοιχο Γράφημα 4.5.2.2.

Πίνακας 4.5.2.2. ΦΑ vs ΜΦΑ ανά τάξη

	Α΄ Γυμν/ίου	*Β΄ Γυμν/ίου*	*Γ΄ Γυμν/ίου*	*Σύνολο*
Φυσικοί Αριθμοί -ΦΑ	116 (68 %)	164 (44 %)	123 (42 %)	403 (48 %)
Μη Φυσικοί Αριθμοί-ΜΦΑ	55 (32 %)	211 (56 %)	211 (56 %)	439 (52 %)
Σύνολο	171 (100%)	375 (100%)	296 (100%)	842 (100%)

Γράφημα 4.5.2.2. Φυσικοί-Μη Φυσικοί αριθμοί ανά τάξη



Προκειμένου να εξετασθεί εάν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ της συχνότητας εμφάνισης των φυσικών και των μη φυσικών αριθμών ανά τάξη χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος Chi-Square. Τα αποτελέσματα του ελέγχου Chi-square [$\chi^2(2)=34.6$, $p<.001$] δείχνουν στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στις κατηγορίες ΦΑ και ΜΦΑ για όλες τις τάξεις. Τα αποτελέσματα του στατιστικού ελέγχου ανά ζεύγη τάξεων είναι τα εξής: για τις Α΄-Β΄ Γυμνασίου: $\chi^2(1)=27.3$, $p<0.001$, για τις Α΄- Γ΄ Γυμνασίου: $\chi^2(1)=30$, $p<.001$ και για τις Β΄-Γ΄ Γυμνασίου $\chi^2(1)=0.32$, $p=0.57$.

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των ΦΑ – ΜΦΑ μεταξύ των βιβλίων της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου ενώ μεταξύ των βιβλίων της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά.

Γ) Μεταβολές στις κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών ως φυσικών αριθμών (ΦΑ) ή μη φυσικών αριθμών (ΜΦΑ) ανά ενότητα άλγεβρας-γεωμετρίας

Τα ποσοστά της κατηγορίας φυσικοί αριθμοί ΦΑ/ΜΦΑ δεν διέφεραν όσον αφορά τους δυο τομείς άλγεβρας και γεωμετρίας (48% και 47% οι ΦΑ έναντι 52% και 53% οι ΜΦΑ) γεγονός που επιβεβαίωσε και ο στατιστικός έλεγχος [$\chi^2(1)=0.13$, $p=0.72$] που δηλώνει μη στατιστικά σημαντική διαφορά.

Στην μελέτη ΙΙ εξετάσθηκαν επίσης και οι διαφοροποιήσεις που εμφανίστηκαν σε καθένα από αυτά τα βιβλία όσον αφορά το πλήθος των διδακτικών σελίδων που περιείχαν μεταβλητές και τους ορισμούς που περιείχαν τα βιβλία αυτά.

Το πλήθος των διδακτικών σελίδων που περιείχαν μεταβλητές εμφάνισε την μεγαλύτερη συχνότητα στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου όπου είναι κυρίαρχη η έννοια της μεταβλητής καθώς η τάξη αυτή αποτελεί ένα εισαγωγικό στάδιο για την άλγεβρα-ανάλυση του Λυκείου, ενώ η μικρότερη συχνότητα παρουσιάστηκε στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, τάξη που αποτελεί ένα μεταβατικό στάδιο από την αριθμητική στην άλγεβρα και ως εκ τούτου η εμφάνιση των μεταβλητών γίνεται σταδιακά.

4.6. Συζήτηση

Η μελέτη ΙΙ διερεύνησε τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητών στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων του Γυμνασίου και εξέτασε κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται σε αυτά είναι φυσικοί αριθμοί.

Στην 1η φάση της μελέτης ΙΙ τα γράμματα-μεταβλητές που ανιχνεύθηκαν κατηγοριοποιήθηκαν σε πέντε κατηγορίες τις: *«Ετικέτα-Επιγραφή», «Σταθερά», «Συγκεκριμένος αριθμός», «Γενικευμένος αριθμός»* & *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες».*

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η χρήση της μεταβλητής ως *«Γενικευμένου Αριθμού»* και στα τρία βιβλία που εξετάσθηκαν ήταν η επικρατούσα με ποσοστό 34%, δεύτερη εμφανίστηκε η κατηγορία *«Ετικέτα-Επιγραφή»* με 23%, τρίτες στη σειρά εμφανίστηκαν οι κατηγορίες *«Συγκεκριμένος αριθμός»* & *«Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες»* με ποσοστό 20% και τελευταία η κατηγορία *«Σταθερά»* με ποσοστό 3%. Σύμφωνα με τα τέσσερα ιεραρχικά επίπεδα κατανόησης και χρήσης των μεταβλητών που διατύπωσε ο Küchemann (1978,1981) η μεταβλητή ως *«Γενικευμένος Αριθμός»* κατέχει τη θέση ενός ανώτερου επιπέδου κατανόησης σε σχέση με τις κατηγορίες *«Ετικέτα-Επιγραφή»* και *«Συγκεκριμένος Αριθμός»* και η κατηγορία *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»* κατέχει στην αξιολόγηση αυτή την πιο εκλεπτυσμένη θέση.

Τα ευρήματα της 1^{ης} φάσης σε μια συνολική θεώρησή τους είχαν διαφορές από τα ευρήματα της έρευνας των Dogbey και Kersaint (2012) οι οποίοι ανίχνευσαν ως επικρατούσες κατηγορίες τις κατηγορίες *«Συγκεκριμένος αριθμός» & «Ετικέτα-Επιγραφή»* (με ποσοστά 37% & 33%) δίνοντας αθροιστικά ένα ποσοστό και για τις δυο κατηγορίες κατά μέσο όρο της τάξης του 70%, ενώ τα αντίστοιχα ευρήματα της μελέτης ΙΙ έδωσαν για τις δυο αυτές κατηγορίες ποσοστά 43% (20% & 23% αντίστοιχα).

Η κατηγορία των *«Συμμεταβαλλόμενων Ποσότητων»* στην έρευνα των Dogbey και Kersaint (2012) εμφανίστηκε με χαμηλά ποσοστά (12%, 13%, 17% & 24%, για τις 4 χρονικές περιόδους και για τις 3 σχολικές βαθμίδες 6^{η}, 7^{η} και 8^{η} που μελέτησαν) με έναν μέσο όρο περίπου 14% αρκετά χαμηλότερο από το ποσοστό που εμφανίστηκε στην μελέτη των ελληνικών βιβλίων και ήταν 20% για την κατηγορία αυτή.

Πιστεύουμε ότι στο βαθμό που τα σχολικά βιβλία αποτελούν την κύρια πηγή άντλησης του γνωστικού-διδακτικού υλικού που παρέχεται στους μαθητές επιτυγχάνουν το στόχο τους. Οι μεταβλητές ως *«Γενικευμένοι Αριθμοί»* εμφανίζονταν μέσα σ' αυτά με μια υπεροχή έναντι των κατηγοριών *«Ετικέτα-Επιγραφή»* και *«Συγκεκριμένος Αριθμός»*. Η κατηγορία όμως *«Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»* εμφανίστηκε με ένα σχετικά χαμηλό ποσοστό δίνοντας έτσι στους μαθητές λίγες ευκαιρίες για να εμπλακούν στον χειρισμό των μεταβλητών μέσω της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων. Μια διαδικασία που είναι αρκετά δύσκολη στον χειρισμό της, κρίνεται όμως απαραίτητη για την περαιτέρω ενασχόλησή τους με ανώτερα μαθηματικά (Gray, Loud & Sokolowski, 2005).

Τα αποτελέσματα της μελέτης ΙΙ ανά τάξη μας έδωσαν την κατηγορία «*Γενικευμένος Αριθμός»* να είναι η επικρατούσα στις Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου με ποσοστά 39% και 44% αντίστοιχα ενώ στην Β΄ Γυμνασίου το σχετικά χαμηλό ποσοστό του 14% εξηγείται πιθανά λόγω του μεγάλου εύρους της γεωμετρίας έναντι της άλγεβρας στην διδακτέα ύλη της τάξης αυτής και του αυξημένου κατά συνέπεια ποσοστού των κατηγοριών *«Ετικέτα-Επιγραφή» & «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»* με ποσοστά 33% & 30% αντίστοιχα.

Παρατηρήσαμε επίσης ότι η μεταβλητή ως *«Γενικευμένος Αριθμός»* εμφανίζονταν στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου από τις πρώτες κιόλας σελίδες του βιβλίου στην διατύπωση των ιδιοτήτων των πράξεων των φυσικών αριθμών γεγονός που δηλώνει ότι υπήρχε η τάση ενίσχυσης της κατανόησης της μεταβλητής ως *«Γενικευμένου Αριθμού»* από την πρώτη κιόλας τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης φέρνοντας σε υποκείμενη θέση το χειρισμό της ως *«Συγκεκριμένου Αριθμού»* ήδη γνωστού από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Όσον αφορά τους τομείς άλγεβρας-γεωμετρίας σημειώθηκαν διαφορές μεταξύ αυτών των δυο τομέων των Μαθηματικών. Παρουσιάστηκε ενισχυμένη η χρήση της μεταβλητής ως «*Ετικέτα –Επιγραφή*» στη γεωμετρία και τριγωνομετρία και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου με ποσοστό 51% και ακολουθούσαν οι κατηγορίες «*Συγκεκριμένος αριθμός» και «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*» με αντίστοιχα ποσοστά 19% και 15% αντίστοιχα. Ανάλογα ήταν και τα ευρήματα των Dogbey και Kersaint (2012) αντίστοιχα στον ίδιο τομέα της γεωμετρίας.

Στην άλγεβρα επικρατούσα κατηγορία ήταν η «*Γενικευμένος Αριθμός*» με ποσοστό 50% και ακολουθούσαν οι κατηγορίες «*Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες*» & «*Συγκεκριμένος αριθμός*» με ποσοστά αντίστοιχα 22% και 21%. Στον τομέα αυτό εμφανίστηκαν διαφοροποιήσεις με τα αποτελέσματα της έρευνας των Dogbey και Kersaint (2012) που πιθανά να οφείλεται στο διαφορετικό περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων που χρησιμοποιούνταν στις Η.Π.Α. Σε σύγκριση λοιπόν με τα βιβλία που μελέτησαν οι Dogbey και Kersaint (2012) τα βιβλία του Ελληνικού σχολείου εμφανίζονται να χρησιμοποιούν τις μεταβλητές με έναν πιο εκλεπτυσμένο τρόπο.

Στην 2η φάση της μελέτης ΙΙ φάνηκε ότι οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία είναι με το ίδιο ποσοστό φυσικοί και μη-φυσικοί αριθμοί. Αν αναλογιστεί κανείς ότι στην κατηγορία μη-φυσικοί ανήκουν διαφόρων ειδών αριθμοί, όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί που οι μαθητές τα έχουν διδαχθεί ήδη από την Γ΄ Δημοτικού και οι αρνητικοί αριθμοί (από την Α΄ Γυμνασίου), τότε το ποσοστό αυτό των μη-φυσικών αριθμών ίσως να είναι σχετικά χαμηλό. Οι μαθητές εισάγονται στα κλάσματα από τις πρώτες κιόλας τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, στη συνέχεια εξοικειώνονται με τους δεκαδικούς αριθμούς ενώ εισερχόμενοι στο Γυμνάσιο μαθαίνουν και τους αρνητικούς αριθμούς. Θεωρούμε λοιπόν ότι το γνωστικό τους υπόβαθρο μπορεί να υποστηρίξει μια πιο

εντατικοποιημένη χρήση των μη φυσικών αριθμών μέσα στα σχολικά εγχειρίδια έτσι ώστε να αμβλυνθεί η «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» που τους διακατέχει αφήνοντας χώρο για τη χρήση και των άλλων αριθμών.

Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν άλλες ανάλογες μελέτες ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με τα αποτελέσματα της παρούσης μελέτης.

Πιο αναλυτικά τα αποτελέσματα της 2^{ης} φάσης της μελέτης ΙΙ ανά τάξη μας έδωσαν στην Α΄ Γυμνασίου υπερίσχυση των ΦΑ (68%) έναντι των ΜΦΑ (32%) η οποία οφείλονταν αφ' ενός μεν στην μικρή παρουσία των μεταβλητών γενικότερα στην τάξη αυτή αφ' ετέρου δε στο ότι οι αρνητικοί αριθμοί εισάγονταν στο τελευταίο κεφάλαιο της άλγεβρας. Στην Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου παρατηρήθηκαν τα μεγαλύτερα ποσοστά εμφάνισης των ΜΦΑ με 56% και 58% αντίστοιχα. Όσον αφορά τη σύγκριση άλγεβρας-γεωμετρίας σε σχέση πάντα με τους φυσικούς αριθμούς δε σημειώθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές μεταξύ αυτών των δυο τομέων.

Στη συνέχεια της συζήτησης μας θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τον τρόπο με τον οποίο ορίζονται οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία και τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζονται, κάθε φορά που γίνεται ρητή αναφορά σε αυτό το συμβολικό σύστημα.

4.7 Ορισμοί της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία

Τυπικοί ορισμοί για την έννοια της μεταβλητής ή της μεταβλητής-αγνώστου υπήρξαν στα σχολικά βιβλία και των τριών τάξεων του Γυμνασίου.

Στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου η μεταβλητή εμφανίστηκε στο 4^{ο} κεφάλαιο της άλγεβρας, μέσα από μια δραστηριότητα μετατροπής λεκτικών προβλημάτων σε εξισώσεις και η εμφάνισή της συνδεόταν με την έννοια του αγνώστου: « *αυτό το x*

«κρύβει» έναν αριθμό που αν τον βάλουμε στη θέση του επαληθεύει την ισότητα» (σ.73 Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου). Στη συνέχεια ακολουθούσε και ο ορισμός της εξίσωσης: «*Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα(άγνωστος)*» (σ.73 Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου). Εδώ ο άγνωστος εμφανίζονταν να μπορεί να λάβει μια και μοναδική τιμή χωρίς να γίνεται αναφορά σε πιθανές άλλες μορφές του (κατηγορία «*Συγκεκριμένος Αριθμός»*). Η μεταβλητή βέβαια ως «*Γενικευμένος Αριθμός»* εμφανίζονταν άτυπα χωρίς ονομαστική αναφορά από τις πρώτες σελίδες του βιβλίου όταν χρησιμοποιούνταν για την διατύπωση των ιδιοτήτων των πράξεων των φυσικών αριθμών και συγκεκριμένα της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης: α+β=β+α (σ.15 Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου).

Στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου ο ορισμός της μεταβλητής εμφανίστηκε στο 1^{ο} κεφάλαιο της άλγεβρας μέσα από μια δραστηριότητα εύρεσης κόστους τηλεφωνημάτων. Εκεί η έννοια της μεταβλητής εισάγονταν ως εξής: *«το γράμμα x που αναπαριστά οποιοδήποτε αριθμό, λέγεται μεταβλητή»* (σ.11, βιβλίο Β΄ Γυμνασίου) η οποία μπορούσε να συμβολισθεί με διάφορα γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου. Η μεταβλητή ήταν εμφανές ότι μπορούσε να λάβει πολλές και διαφορετικές τιμές (κατηγορία *«Γενικευμένος Αριθμός»).*

Στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου στο 1^{ο} κεφάλαιο της άλγεβρας η έννοια της μεταβλητής αναφέρονταν μέσω του ορισμού των αλγεβρικών παραστάσεων (σ.86, βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου): *«εκφράσεις που περιέχουν εκτός από αριθμούς και μεταβλητές»* (κατηγορία *«Γενικευμένος Αριθμός»*) ενώ στο κεφάλαιο των εξισώσεων αναφέρονταν και ως μεταβλητή-άγνωστος (σ.86, Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου).

Θέλοντας να ερευνήσουμε περαιτέρω το τι παρέχει η διδακτέα ύλη όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής-αγνώστου κατά το στάδιο πριν την εισαγωγή των μαθητών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση διαπιστώσαμε ότι ο ορισμός της έννοιας

της μεταβλητής εμφανίζονταν και στο σχολικό βιβλίο της τελευταίας τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Συγκεκριμένα στο βιβλίο της ΣΤ΄ Δημοτικού (Κασσώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ., ΟΕΔΒ, Αθήνα 2006) στη 2η θεματική ενότητα «*Εξισώσεις*». Μέσα από μια δραστηριότητα κατασκευής ομοίων σχημάτων εισάγονταν η έννοια του αγνώστου ο οποίος αναπαρίστατο με τη χρήση γραμμάτων και στη συνέχεια παρατίθονταν ο εξής ορισμός: *«Το γράμμα ή το σύμβολο που χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση στη θέση μιας τιμής άγνωστης ή μεταβαλλόμενης λέγεται μεταβλητή»* (σ.62, Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού). Στον ορισμό αυτό η μεταβλητή μπορούσε να λάβει είτε μια συγκεκριμένη τιμή είτε πολλές διαφορετικές τιμές (κατηγορίες: «*Συγκεκριμένος Αριθμός» ή «Γενικευμένος Αριθμός»*) ενώ στη συνέχεια παραθέτονταν και ο τρόπος εύρεσης του αγνώστου μέσα από συγκεκριμένα βήματα μεθοδολογίας επίλυσης εξισώσεων.

Τα δεδομένα που συλλέξαμε κατέδειξαν δύο κύριες τάσεις στον ορισμό της μεταβλητής όπως αυτή εμφανίζεται για πρώτη φορά σε κάθε σχολικό βιβλίο, αυτής που συνέδεε την μεταβλητή με *«Συγκεκριμένο Αριθμό»* δηλαδή όταν η μεταβλητή αποτελούσε τη λύση πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων εξισώσεων και του ορισμού που τη συνέδεε με οποιονδήποτε αριθμό ή γράμμα δηλαδή ως *«Γενικευμένου Αριθμού»* κατά τη χρήση της μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις, πολυώνυμα και συναρτήσεις.

Συνοψίζοντας λοιπόν η μεταβλητή στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου δίνονταν υπό την έννοια ενός «*Συγκεκριμένου Αριθμού»* στη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου ως έννοια ενός *«Γενικευμένου Αριθμού»*, ενώ αξίζει να σημειωθεί η περίπτωση του βιβλίου της ΣΤ΄ Δημοτικού όπου η μεταβλητή εμφανίζονταν με διττή έννοια και του «*Συγκεκριμένου Αριθμού»* και του *«Γενικευμένου Αριθμού».* Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τους Schoenfeld και Arcavi (1988) οι οποίοι διαπίστωσαν ότι διαφορετικά σχολικά

βιβλία, διαφορετικοί ερευνητές και διαφορετικοί ειδικοί περιγράφουν την έννοια της μεταβλητής με διαφορετικούς τρόπους.

Ως εκ τούτου εφόσον ήταν δύσκολο να υπάρξει ένας ενιαίος ορισμός κοινής αποδοχής, κατά περίπτωση κάθε συγγραφέας, σύμφωνα με τα ΔΕΠΠΣ επέλεξε τον προς χρήση καταλληλότερο ορισμό όσον αφορά το χειρισμό της μεταβλητής στην παρεχόμενη διδακτέα ύλη και εν κατακλείδι στην παρεχόμενη γνώση που ζητούνταν από τους μαθητές να έχουν κατανοήσει και να έχουν αφομοιώσει ολοκληρώνοντας κάθε διδακτικό έτος.

Οι Dogbey και Kersaint (2012) βρήκαν τυπικούς ορισμούς στα 11 από τα 12 εξεταζόμενα βιβλία οι οποίοι ποίκιλαν ως προς το εύρος αλλά και τις επεξηγήσεις που τους ακολουθούσαν και διαπίστωσαν την ύπαρξη δυο μεγάλων κατηγοριών ορισμών του «*Συγκεκριμένου Αγνώστου» και του «Γενικευμένου Αριθμού*». Επίσης σε ένα μόνον βιβλίο της έρευνάς τους διαπίστωσαν τη διατύπωση του ορισμού πριν από τη χρήση των μεταβλητών.

Στην έρευνά μας αυτή επίσης διαπιστώσαμε ότι εκτός των ορισμών υπήρχαν αφ’ ενός μεν εισαγωγικές δραστηριότητες που αφορούσαν την έννοια της μεταβλητής αφ’ ετέρου δε και τρόποι χειρισμού της που αφορούσαν είτε την εύρεση του αγνώστου σε πρωτοβάθμιες ή δευτεροβάθμιες εξισώσεις (μεθοδολογία επίλυσης εξισώσεων) είτε το χειρισμό των μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Τα ευρήματά μας αυτά ήταν διαφορετικά από τα ευρήματα της έρευνας των Dogbey και Kersaint (2012) οι οποίοι στα 9 από τα 12 εξεταζόμενα στην έρευνά τους βιβλία δεν συνάντησαν καμιά τυπική εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής και οι μεταβλητές εισάγονταν διαμέσου της απευθείας χρήσης τους ενώ σε πολύ λίγα βιβλία βρήκαν τρόπους χρήσης των μεταβλητών (μεθοδολογία επίλυσης).

Συμπερασματικά λοιπόν διαπιστώσαμε ότι μέσα στα βιβλία που εξετάσαμε έγινε προσπάθεια να εισαχθούν οι μαθητές ομαλά στις δυο διαφορετικές χρήσεις της μεταβλητής ως *«Συγκεκριμένος και Γενικευμένος Αριθμός»* χωρίς όμως να αναφέρεται ότι η μεταβλητή εμφανίζεται και με άλλες μορφές τις *«Ετικέτα-Επιγραφή», «Σταθερά» και «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες»*. Γι' αυτό το λόγο θα συμφωνούσαμε με την Kieran (1981) η οποία είχε διατυπώσει την άποψη ότι παρά την σπουδαιότητα της έννοιας της μεταβλητής αρκετά σχολικά βιβλία την χειρίζονται ως έναν απλό όρο. Παρατηρήσαμε λοιπόν ότι δεν τονίζεται ιδιαίτερα η πολυπλοκότητα της φύσης της μεταβλητής, γεγονός που είχε επισημάνει και ο Wagner (1981), διατυπώνοντας ότι στόχος και βασικό μέλημα όσων ασχολούνται με τη μελέτη, τη συγγραφή αλλά και την έγκριση των σχολικών βιβλίων πρέπει να είναι η σαφής και προσεκτική μύηση των μαθητών στις διαφορετικές χρήσεις της μεταβλητής.

Να σημειώσουμε επίσης ότι ρητές αναφορές για το ποιες τιμές, φυσικών ή μη φυσικών αριθμών, λαμβάνουν οι μεταβλητές δεν συναντήσαμε πουθενά στα σχολικά βιβλία. Υπήρχαν αναφορές αλλά πάντα έμμεσες, κυρίως μέσω της χρήσης, που να υποδεικνύουν τα είδη των αριθμών που θα μπορούσαν να λάβουν τη θέση των γραμμάτων-μεταβλητών.

Επίσης, σε όλα τα βιβλία που μελετήσαμε στην παρούσα έρευνα υπήρχαν ιστορικές αναφορές που αφορούσαν τις απαρχές ή την εξέλιξη της έννοιας της μεταβλητής. Στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου γίνονταν μια μικρή μεν αλλά σημαντική αναφορά στη συνεισφορά των Διόφαντου και Viète στην εξέλιξη της χρήσης μεταβλητής (σ. 78, βιβλίο Α΄ Γυμνασίου) ενώ στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου υπήρχε αναλυτική αναφορά στο επίγραμμα του Διόφαντου και την επίλυσή του (σ. 10, βιβλίο Β΄ Γυμνασίου). Στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου υπήρχαν ιστορικά σημειώματα ευρύτερου μαθηματικού ενδιαφέροντος αλλά απουσίαζε μια άμεση ιστορική αναφορά

στην έννοια της μεταβλητής. Στο βιβλίο της ΣΤ΄ Δημοτικού γίνονταν μια ιστορική αναφορά στη μεταβλητή μέσω των βαβυλωνιακών Μαθηματικών και την πρακτική χρησιμότητά τους στα Μαθηματικά και τις Επιστήμες της εποχής εκείνης.(σ. 60, Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού). Να σημειώσουμε ότι στην έρευνα των Dogbey και Kersaint (2012) πουθενά δεν σημειώθηκαν ιστορικές αναφορές που αφορούσαν τις μεταβλητές.

Τονίζουμε τέλος ότι περιοριστήκαμε σε συγκρίσεις των αποτελεσμάτων της μελέτης ΙΙ αποκλειστικά και μόνον με τα αποτελέσματα της έρευνας των Dogbey και Kersaint (2012) λόγω έλλειψης άλλων παρόμοιων ερευνών στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία που να μελετούν τα σχολικά εγχειρίδια των αντίστοιχων σχολικών βαθμίδων που εξετάσαμε και να εξετάζουν τόσο τους τρόπους εμφάνισης των μεταβλητών όσο και τη σχέση τους με τους φυσικούς αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1. Γενικά Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην παρούσα ερευνητική εργασία, στην μελέτη Ι, εξετάσαμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου την χρήση των γραμμάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις και τι τιμές θεωρούν ότι μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές. Στην μελέτη ΙΙ διερευνήσαμε με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που τους αποδίδονται είναι φυσικοί αριθμοί.

Στη μελέτη Ι αναμέναμε ότι οι μαθητές θα εμφάνιζαν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν έναν οποιονδήποτε αριθμό ή ακόμα κι ένα οποιοδήποτε άλλο γράμμα και ότι μαθητές κατά προτεραιότητα θα αντικαθιστούσαν τις μεταβλητές κυρίως με φυσικούς αριθμούς.

Στην $1^{η}$ φάση της μελέτης Ι όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να υποδείξουν το τι συμβόλιζε ένα υποδεικνυόμενο γράμμα-μεταβλητή σε μια αλγεβρική παράσταση οι απαντήσεις στην πλειοψηφία τους ήταν ότι αναπαριστούσε

οποιοδήποτε αριθμό και ότι θα μπορούσε να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα ($1^η$ φάση –μελέτη Ι, Παράγραφος 3.3.). Οι μαθητές αναγνώριζαν δηλαδή την μεταβλητή ως *«Γενικευμένο Αριθμό»*. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν συμβατό με προηγούμενες μελέτες (Asquith και συνεργάτες, 2007) και σε μια πρώτη ανάγνωση υποδήλωνε την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής με έναν πιο εκλεπτυσμένο μαθηματικά τρόπο. Έτσι κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές την κατανοούσαν ως τον *«Γενικευμένο Αριθμό»* με την μορφή που τον είχαν διδαχθεί κατά την διάρκεια των σχολικών τους σπουδών, δηλαδή ως οποιονδήποτε Πραγματικό Αριθμό. Παρ' όλα αυτά όμως στη συνέχεια η $2^η$ και $3^η$ φάση δεν επιβεβαίωσαν την υπόθεση αυτή και έδειξαν ότι οι μαθητές κατανοούν τα γράμματα ως μεταβλητές που αναπαριστούν οποιουσδήποτε αριθμούς, αλλά ότι οι αριθμοί αυτοί είναι κυρίως φυσικοί αριθμοί.

Στην $2^η$ φάση της μελέτης Ι δώσαμε στους μαθητές να συγκρίνουν δυο απλές αλγεβρικές παραστάσεις και στη συνέχεια τους ζητήσαμε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους ($2^η$ φάση, μελέτη Ι, Παράγραφος 3.4.). Τα αποτελέσματα της σύγκρισης των αλγεβρικών παραστάσεων μας έδειξαν ότι ένα ποσοστό (17%) των μαθητών είχαν απαντήσει απευθείας σωστά στη σύγκριση δηλαδή ότι *«Το ποιο είναι μεγαλύτερο εξαρτάται το ν»*. Το 83% των μαθητών απάντησε λανθασμένα και μόνον όταν τους δόθηκαν κάποιες υποδείξεις όπως «*Υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η αρχική σου απάντηση; Ισχύει πάντα αυτό, αν βάλεις κάποιον άλλον αριθμό;»* ορισμένοι από τους μαθητές (το 39% στο σύνολο αυτών που απάντησαν λανθασμένα) άλλαξαν την απάντησή τους και απάντησαν σωστά.

Τότε φάνηκε πως οι μαθητές δεν κατανοούσαν την μεταβλητή ως *«Γενικευμένο αριθμό»* με τη μαθηματική έννοια που δίνουμε στον όρο, αλλά ότι πολλοί από αυτούς φάνηκε ότι κατανοούν τα γράμματα ως σύμβολα παραπάνω του

ενός αριθμού, θεωρώντας όμως ότι αυτές οι τιμές είναι κατά προτεραιότητα φυσικοί αριθμοί και όχι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Η προσεκτική ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών στη συνέχεια κατέδειξε ένα ποσοστό αιτιολογήσεων τους (53%) να αφορά την διατύπωση ότι «ο πολλαπλασιασμός αυξάνει πάντα μια ποσότητα». Οι αιτιολογήσεις αυτές έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν την τάση να συνδέουν τις μεταβλητές κυρίως με φυσικούς αριθμούς. Το φαινόμενο αυτό έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές στο παρελθόν, όπως από τον Fischbein και τους συνεργάτες του (1985), οι οποίοι είχαν διατυπώσει την άποψη ότι οι μαθητές θεωρούσαν πως ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει έναν αριθμό. Για παράδειγμα οι μαθητές θεωρούν ότι η έκφραση 3ν μας δίνει αποτέλεσμα πάντα πολλαπλάσιο του 3 (Christou, 2012, 2007, 2005).

Στην 3^{η} φάση της μελέτης Ι, όπου τους ζητήσαμε να υποδείξουν με ποιους αριθμούς θα μπορούσαν να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές, οι αρχικές απαντήσεις τους έδειξαν ένα ποσοστό 83% των μαθητών να αντικαθιστά τις μεταβλητές με φυσικούς αριθμούς (3^{η} φάση, μελέτη Ι, Παράγραφος 3.5.). Οι τελικές απαντήσεις όμως των μαθητών μετά τις υποδείξεις που τους τέθηκαν έδειξαν τη δυνατότητα μεταβολής της γνώμης τους. Παρέμεινε όμως ένα ποσοστό (36%) των μαθητών που εμφάνισαν αδυναμία αλλαγής της απάντησής τους και συνέχισαν να ισχυρίζονται ότι μόνο οι φυσικοί αριθμοί μπορούσαν να λάβουν τη θέση των μεταβλητών. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τις έρευνες του Christou και των συνεργατών του (2012, 2007, 2005) που έδειξαν ότι η τάση αυτή των μαθητών να αντικαθιστούν τις μεταβλητές κυρίως με φυσικούς αριθμούς είναι ισχυρή και αλλάζει δύσκολα ακόμα και μετά από συγκεκριμένες υποδείξεις.

Καθόσον όμως σπάνια τίθενται υποδείξεις στους μαθητές ώστε να μπορέσουν να επανεξετάσουν τις απαντήσεις τους και να μεταβάλουν την γνώμη τους θα ήταν

πλέον ενθαρρυντικό αν ένα μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών των μεγαλυτέρων τουλάχιστον τάξεων του Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου είχαν δώσει ως αρχικές τους απαντήσεις τους μη φυσικούς αριθμούς.

Τα αποτελέσματα της μελέτης ΙΙ, στην 1η φάση, που αφορούσε τα είδη των μεταβλητών που εμφανίζονταν στα σχολικά βιβλία κατέδειξαν ως επικρατούσα κατηγορία μορφών εμφάνισης την κατηγορία του *«Γενικευμένου Αριθμού»*. Τα ευρήματα αυτά ήταν διαφορετικά από τα ευρήματα της έρευνας των Dogbey και Kersaint (2012) που στην έρευνά τους για τα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. και για τις αντίστοιχες σχολικές βαθμίδες διαπίστωσαν ως επικρατέστερες τις κατηγορίες *«Ετικέτα-Επιγραφή»* και *«Συγκεκριμένος Αριθμός»*. Τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας έδειξαν μια πιο εκλεπτυσμένη χρήση των μεταβλητών μέσα στα σχολικά βιβλία που εξετάσαμε.

Η μελέτη ΙΙ, στην 2η φάση, έδειξε ότι οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία είναι με το ίδιο περίπου ποσοστό φυσικοί και μη-φυσικοί αριθμοί (52% και 48%). Τα ποσοστά των μη-φυσικών αριθμών πιστεύουμε ότι θα μπορούσε να ήταν αυξημένα ώστε να ενισχυθεί η χρήση τους από την πλευρά των μαθητών καθ’ όσον οι μαθητές γνωρίζουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ήδη από την Γ΄ Δημοτικού και τους αρνητικούς ακέραιους-άρρητους αριθμούς από τις Α΄ και Β΄ Γυμνασίου και συνεπώς δεν θα αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον χειρισμό τους. Με αυτό το δεδομένο θεωρούμε ότι το ποσοστό αυτό των μη-φυσικών αριθμών ίσως να είναι σχετικά χαμηλό.

Εξετάζοντας συγχρόνως τις δυο μελέτες παρατηρήσαμε ότι τόσο στα σχολικά βιβλία όσο και στις απαντήσεις των μαθητών οι μεταβλητές εμφανίστηκαν με σχετικά υψηλά ποσοστά ως *«Γενικευμένοι Αριθμοί»* (34% & 71% αντίστοιχα). Για το λόγο ότι η διδακτέα ύλη όσον αφορά τις σχολικές βαθμίδες που εξετάσαμε καθορίζεται

πλήρως από τα σχολικά βιβλία θεωρούμε ότι τα δυο αυτά αποτελέσματα πιθανά να συσχετίζονται μεταξύ τους. Δηλαδή η τάση που ανιχνεύσαμε να εμφανίζονται οι μεταβλητές ως *«Γενικευμένοι Αριθμοί»* στα σχολικά εγχειρίδια πιθανά να επηρέασε και το πώς κατανοούν οι μαθητές την έννοια της μεταβλητής δηλαδή ως *«Γενικευμένου Αριθμού»*. Παρόλα αυτά το κατά πόσο σχετίζονται και με ποιον τρόπο το ένα επηρεάζει το άλλο θα ήταν αντικείμενο μιας άλλης μελέτης με τη χρήση διαφορετικών μεθοδολογικών εργαλείων.

Τα αποτελέσματα αυτά τα θεωρήσαμε πλέον ενθαρρυντικά. Τα σχολικά βιβλία που μελετήσαμε έχουν επιλεγεί ώστε να είναι σύμφωνα με τα ΔΕΠΠΣ και να υποστηρίζουν τους διδακτικούς στόχους που αυτά θέτουν. Όπως έχουμε περιγράψει στο κεφάλαιο 2, παράγραφος 2, ένας από τους στόχους των ΔΕΠΠΣ είναι το να κατανοήσουν οι μαθητές την μεταβλητή ως «*Γενικευμένο Αριθμό*». Συγχρόνως στην 1η φάση της μελέτης Ι παρατηρήσαμε ότι ήταν αυξημένο το ποσοστό των απαντήσεων των μαθητών που αφορούσαν την κατηγορία «*Γενικευμένος αριθμός*». Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε ότι τα σχολικά βιβλία είναι στην κατεύθυνση αυτή καθώς επενδύουν στη χρήση των γραμμάτων ως «*Γενικευμένων αριθμών*».

Επίσης και οι δυο μελέτες κατέγραψαν ποσοστά ιδιαίτερα υψηλά όσον αφορά την εμφάνιση των μεταβλητών ως φυσικών αριθμών στα σχολικά βιβλία (ποσοστό 48%) και από τη μεριά τους οι μαθητές κατά προτεραιότητα εμφανίστηκαν να θεωρούν τους φυσικούς αριθμούς ως τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές (83%) και μάλιστα με δυσκολία απέδιδαν σ' αυτές τιμές μη-φυσικών αριθμών. Αυτό θα μπορούσε να σημαίνει ότι μια αύξηση της συχνότητας των μη φυσικών αριθμών στα σχολικά βιβλία θα μπορούσε να μειώσει την τάση των μαθητών να θεωρούν τα γράμματα ως μεταβλητές που συμβολίζουν φυσικούς αριθμούς. Και σ' αυτό το σημείο πιστεύουμε πως χρειάζεται περαιτέρω μελέτη για μια διεξοδικότερη έρευνα

αυτής της συσχέτισης, του και κατά πόσον δηλαδή τα σχολικά βιβλία επιδρούν και επηρεάζουν τη γνώση και κατά συνέπεια τις απαντήσεις των μαθητών όσον αφορά τους φυσικούς αριθμούς.

5.2. Εφαρμογές στην Εκπαίδευση

Από τη σκοπιά μας θεωρούμε πώς έστω κι αν στα βιβλία εμφανίζεται ενισχυμένη η χρήση των μεταβλητών με την πιο εκλεπτυσμένη μορφή τους, αυτή του *«Γενικευμένου αριθμού»,* παρόλα αυτά ίσως να υπάρχει ένα ακόμα περιθώριο να ενισχυθούν οι τρόποι εμφάνισης των μεταβλητών με την μορφή των πιο εκλεπτυσμένων μαθηματικώς κατηγοριών του «*Γενικευμένου αριθμού*» αλλά και των «*Συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων»* (Booth, 1984; Kieran & Chalouh, 1993; MacGregor & Stacey, 1994; Chazan & Yerushalmy, 2003) ώστε να ενισχυθεί η αντίστοιχη χρήση τους από τους μαθητές και η εξοικείωσή τους με τις μορφές αυτές. Όσον αφορά τον τρόπο χειρισμού της κατηγορίας αυτής από την πλευρά των μαθητών το θέτουμε ως αντικείμενο εξέτασης μιας μελλοντικής έρευνας.

Πιστεύουμε επίσης ότι ένας τρόπος βελτίωσης των υπαρχόντων σχολικών βιβλίων πιθανά να ήταν η εμφανής διατύπωση της ύπαρξης και εμφάνισης των διαφορετικών μορφών των μεταβλητών έτσι ώστε οι μαθητές να εισάγονται στην πολυπλοκότητα της φύσης τους και να τις αναγνωρίζουν με τις πολλές και διαφορετικές μορφές τους ως *«Επιγραφή, Σταθερά, Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες»* και όχι μόνον με τη μορφή του *«Συγκεκριμένου Αριθμού»* και του *« Γενικευμένου Αριθμού»* (Kieran, 1992, 2007). Στα σχολικά βιβλία που μελετήσαμε δεν ανιχνεύσαμε ρητή αναφορά των διαφορετικών μορφών εμφάνισης των μεταβλητών και η ύπαρξή τους διατυπωνόταν άτυπα μέσω της χρήσης τους.

Θεωρούμε επίσης ότι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών σχετίζεται με την μαθηματική γνώση των δασκάλων - καθηγητών και κυρίως την ανάπτυξη της ευαισθησίας τους σε όσα βλέπουν και ακούνε, αυτό που εύστοχα ονόμασαν οι Blanton και Kaput (2003) «algebra eyes and ears». Το τι πραγματικά γνωρίζουν οι δάσκαλοι-καθηγητές και το πώς αυτά που γνωρίζουν μπορούν να τα μεταφέρουν στους μαθητές τους είναι ένα μεγάλο ζήτημα προς μελέτη. Η βελτίωση και ενδυνάμωση της κατανόησης τους όσον αφορά τη θεμελιώδη αυτή έννοια της μεταβλητής(Asquith και συνεργάτες, 2007) προϋποθέτει την επιστημονική εξέλιξη τους ούτως ώστε πρώτα εκείνοι να κατανοήσουν τις όποιες λεπτές συσχετίσεις αφορούν την έννοια αυτή και στη συνέχεια τη βελτίωση των αδυναμιών τους (Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2007).

Πιστεύουμε ότι είναι απαραίτητη η συνεχής επιμόρφωσή τους ώστε να βελτιώσουν τις δικές τους αδυναμίες και να καταστούν πλέον ενήμεροι των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τους.

5.3 Προτάσεις για επέκταση της έρευνας

Αν θα θέλαμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα των μελετών της παρούσας έρευνας, θα λέγαμε ότι ένα από τα βασικά ευρήματά μας ήταν ότι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως γενικευμένου αριθμού από τους μαθητές δεν σημαίνει ότι οι μαθητές την κατανοούν ως οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό αλλά ως οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. Συγχρόνως τα σχολικά βιβλία παρουσιάζουν τις μεταβλητές με την μορφή φυσικών και μη-φυσικών αριθμών εξίσου.

Θα είχε ενδιαφέρον για μελλοντικές μελέτες να εξετασθεί με ποιο τρόπο και κατά πόσο τα σχολικά βιβλία επηρεάζουν την γνώση των μαθητών και τον τρόπο που

αυτοί κατανοούν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, όπως αυτή της μεταβλητής και της σχέσης της με τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό όμως προϋποθέτει ότι θα αναπτυχθούν μεθοδολογίες που θα καταφέρουν να κάνουν αυτή τη σύνδεση, καθώς το φαινόμενο της μάθησης και της σχέσης της με τη διδασκαλία είναι πολύπλοκο και πολυεπίπεδο.

Στο πεδίο αυτό υπάρχουν ελάχιστες έρευνες που να εστιάζουν στοχευμένα και να διερευνούν τις σχέσεις αυτές κάνοντας χρήση των κατάλληλων μεθοδολογικών εργαλείων. Συγχρόνως όμως η διερεύνησή του πιστεύουμε ότι θα βοηθήσει στην βελτίωση της παρεχόμενης στους μαθητές γνώσης.

Στην παρούσα έρευνα, στην μελέτη ΙΙ, βασιστήκαμε σε προϋπάρχουσα έρευνα που αφορούσε τα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. Θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί το πώς εμφανίζεται η έννοια της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία ή ακόμη και στα αναλυτικά προγράμματα άλλων χωρών που έχουν ένα υψηλό μαθηματικό επίπεδο, όπως για παράδειγμα της Ιαπωνίας, της Κίνας, της Φινλανδίας. Όποιες διαφορές ή ομοιότητες τυχόν υπάρξουν, συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα δικά μας, θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε χρήσιμα συμπεράσματα και κατάλληλες βελτιώσεις.

Επίσης μελλοντικές έρευνες πιθανά να μπορέσουν να εξετάσουν τον τρόπο που οι δάσκαλοι-καθηγητές κατανοούν θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών όπως αυτή της μεταβλητής και να συμβάλλουν ουσιαστικά στην αλλαγή και βελτίωση του τρόπου διδασκαλίας τους και κατ’ επέκταση στην ποιότητα της παρεχόμενης γνώσης στους μαθητές τους. Η καθημερινή διδακτική πρακτική δείχνει ότι πολλά από αυτά που διδάσκουμε στους μαθητές μας τα γνωρίζουμε δυστυχώς μερικώς ή ελλιπώς.

Πιστεύουμε ότι είναι αναγκαία μια συλλογική (εισηγητές των ΔΕΠΠΣ, συγγραφείς των βιβλίων, μέλη των επιτροπών που εισηγούνται και εγκρίνουν τα προς διδασκαλία διδακτικά εγχειρίδια, δάσκαλοι-καθηγητές των Μαθηματικών)

προσπάθεια ευαισθητοποίησης όσον αφορά θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών με σκοπό τη διερεύνηση και βελτίωση της διδακτέας ύλης και άρα της παρεχόμενης στους μαθητές γνώσης με απώτερο σκοπό την αρτιότερη, ουσιαστικότερη και ευρύτερη κατανόηση των εννοιών αυτών από την πλευρά τους.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Alibali, M., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N., & Stephens, A. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9(3*), 221-247.

Alvermann, D. E., O'Brien, D. G., & Dillon, D. R. (1990). What teachers do when they say they're having discussions of content reading assignments: A qualitative analysis. *Reading Research Quarterly, 25*, 296-322.

Anderson, R. M., & Tomkins, G. S. (1983). *Understanding materials: Their role in curriculum development. A discussion guide*. Vancouver: University of British Columbia, Faculty of Education, Centre for the Study of Curriculum and Instruction.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2001). From body motion to algebra through graphing. Στο H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (σελ. 33-40). The University of Melbourne, Australia.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249–272.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics, 10(2*), 70-77.

Boero, P. (2001). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving. Στο R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (σελ. 99-119). Dordrecht: Kluwer.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: Berkshire: NFER-Nelson.

Booth L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra, *The Ideas of Algebra*, K-12 (pp. 20-32), Reston, VA: NCTM

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S. J., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress*. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*: University of Wisconsin-Madison

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? Στο M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (σελ. 130-140). Utretch University, The Netherlands.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*, 87–115.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003*)*. On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. Στο J. Kilpatrick, D. Schifter & G. Martin. *A Research Companion to the*

*Principles and Standards for School Mathematics (*pp. 123-135). NCTM, Reston, Virginia.

Christou K., Vosviadou St. (2005), *How Students Interpret Literal Symbols in Algebra: A Conceptual Change.* In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.).

Christou K., Vosviadou St., & Vamvakoussi X. (2007). Students' Interpretations of Literal Symbols in Algebra, *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 283-297). Elsevier Press.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14(1),* 1-27.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly, 88(4),* 286-290.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Dogbey J., & Kersaint G. (2012) Treatment of Variables in Popular Middle-Grades Mathematics Textbooks in the USA: Trends from 1957 through 2009, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2(1),* 1-30.

Doyle, W. (1993). Constructing curriculum in the classroom. Στο F. K. Oser, A. Dick, & J. Patry (Eds.), *Effective and responsible teaching* (σελ. 66-79). San Francisco: Jossey-Bass.

Eisner, E. W. (1987). Why the textbook influences curriculum. *Curriculum Review, 26(3),* 11-13.

Fey, J. T., & Graeber, A. O. (2003). From the new math to the agenda for action. Στο A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (σελ. 521-558). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal, 26*(3), 403- 421.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37.

Gray, S.S., Loud, B.J., & Sokolowski, C.P. (2005). Undergraduates uses of variables and success in entry level mathematics courses. *Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society* (σελ.. 284). Atlanta, GA.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Herscovics N., and Chalouh L., (1985). "Conflicting Frames of Reference in the Learning of Algebra." Στο *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* edited by Suzanne Damarin and Marilyn Shelton, (σελ. 123-31). Columbus, Ohio: PME-NA, 1985.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics(27),* 59-78.

Horsley M., & Lambert D. (2001), *The Secret Garden of Classroom and Textbooks*, In M. Horsley (Ed.), *The future of Textbooks? Research about emerging trends* (pp. 8-24). TREAT: Sydney.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin.* New York: Springer.

Johansson, M. (2005). *Mathematics textbooks – the link between the intended and the implemented curriculum?* Luleå: Department of Mathematics, Luleå University of Technology.

Jones, D. L., & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal, 6(2),* 4-27.

Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2007). *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Στο D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (σελ. 390–419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. Στο F. K. Lester Jr.(Εκδ.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (σελ. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. Στο D.T. Owens (Ed), *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics* (σελ. 179-198). National Council of Teachers of Mathematics.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle-school Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equality and Variable. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik—International Reviews on Mathematical Education, 37*, 1–9.

Krippendorff, K. (2004) *Content Analysis, An introduction to its methodology*, 2nd Edition, Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Küchmann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Küchmann, D. (1981). Algebra. Στο K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: *11-16* (σελ. 102-119). London: John Murray.

Ladson-Billings, G. (1998). It doesn't add up: African American students' mathematics achievement. Στο C. Malloy & L. Brader-Araje (Eds.), *Challenges in the mathematics education of African American children: Proceedings of the Benjamin Banneker Association Leadership Conference* (σελ. 7–14). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Στο N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (σελ. 87-106), Dordrecht: Kluwer.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39–65.

Lins, R. (2001) The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of Semantic Fields. Στο R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, R. Lins, (Eds), *Perspectives on School Algebra* (σελ. 37-60). Dordrecht: Kluwer.

Mack, N. K. (1988). Learning fractions with understanding: Building upon informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1994). *Progress in learning algebra: Temporary and persistent difficulties*. Στο G. Bell, B. Wright, N. Leeson, & J. Geake (Eds.), *Challenges in Mathematics Education: Constraints on Construction* (Proceedings of the 17th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, σελ. 303-410) Lismore, NSW: MERGA.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation:11-15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

Martzloff, J.-C. (1997). *A history of Chinese Mathematics*. Berlin: Springer

Matz, M. (1980). Building a metaphoric theory of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

McNeil, N., Weinberg, A., (2010). A is for Apple: Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions, *Journal of Educational Psychology,* Vol 102, No3, 625-634.

McKnight, C. C., Crosswhite, F. J., Dossey, J. A., Kifer, E., Swafford, J. O., Travers, K. J., & Cooney, T. J. (1987). *The underachieving curriculum: Assessing U.S. school mathematics from an international perspective*. Champaign, IL: Stipes.

McNeil, N., Grandau, L, Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition & Instruction*, *24*(3), 367-385.

Moses, R. P., & Cobb, C. E. (2001). *Radical equations*. Boston: Beacon Press.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational number system. Στο S. Donovan & J. D. Bransford (Εκδ.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (σελ. 309-349). Washington, D.C: National Academy Press.

Nathan, M. J., & Koellner, M. (2007). A Framework for Understanding and Cultivating the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 179-192.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA. NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Nicholls J., *Methods in School Textbook Research, University of Oxford*. [online] [cit. 18.9.2007] http://serc.carleton.edu/textbook/resources.html

Payne, J. N. (2003). The new math and its aftermath, grades K-8. Στο G. M. A. Stanic & J.Kilpatrick (Eds.). *A history of school mathematics* (σελ. 559-598). Reston, VA.

Peacock, A., & Cleghorn, A. (Eds) (2004). *Missing the meaning*. New York: Palgrave Macmillan.

Pingel, F. (1999). *UNESCO Guidebook on Textbook Research and Textbook Revision*, (pp. 9-11), Hannover, Verlag Hahnsche Buchhandlung.

Pingel, F. (2000). *The European home: representations of 20th century Europe in history textbooks Strasbourg*, Council of Europe.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. Mathematics Teacher, 85(7), 560, *Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society*, Italy. 453-458.

Puig, L. (2004). History of algebraic ideas and research on educational algebra. *Regular Lecture at ICME-10*. Copenhagen, July 4-11 2004.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry, 29(3)*, 315-342.

Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003). Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 34(1),*74-9.

Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S. A., McKnight, C. C., Britton, E. D., & Nicol, C. (1993). *Curriculum frameworks for mathematics and science* (Vol. TIMSS Monograph No.1), Vancouver: Pacific Educational Press.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables? *Mathematics Teacher*, *74*(6), 418-420,450.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking, grades K through 6. (σελ. 62-81). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., (2001). *Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1997). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Press.

Schmittau, J. (2005). *The development of algebraic thinking*. *ZDM, 37(1),* 16–22.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking in grades K–6. Στο Spagnolo F., *The role of History of Mathematics in research in Mathematics Education.*

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *The Mathematics Teacher, 81(6)*, 420-427.

Skolverket. (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik* (No. 221). Stockholm: Statens skolverk.

Skopeliti, I., & Vosniadou, S. (2006). *The influence of refutational texts on children's ideas about the earth.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 28th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Vancouver, Canada.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Stodolsky, S. (1989). Is teaching really by the book? Στο P. Jackson & S. Haroutunian-Gordon (Eds.), *From Socrates to software: The teacher as text and the text as teacher* (σελ. 159-184). Chicago: University of Chicago Press.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. Στο M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME25*, (σελ. 327 -334). Freudentlhal Institute. Utrecht, The Netherlands.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. Στο A. F. Coxford, & A. P.Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (σελ. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice in the world of textbooks*. Dordrecht, The Netherlands:

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28(2),* 181–209.

Vosniadou, S. (2002b). Mental models in conceptual development. Στο L. Magnani, N. J. Nerserssian & P. Thagard (Εκδ.), *Model-based reasoning in scientific discovery* (σελ. 353-368): Kluwer Academic / Plenum Publishers.

Vosniadou, S. (2003). Exploring the Relationships Between Conceptual Change and Intentional Learning. Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (Εκδ.), *Intentional Conceptual Change* (σελ. 377-406). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1994). Mental models of the day/night cycle. *Cognitive Science, 18,* 123-183.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. Στο S. Vosniadou (Ed.) *International Handbook of Research on Conceptual Change.* New York, NY: Routledge, 3-34.

Wagner, S. (1981). An Analytical framework for mathematical variables. *Proceedings the Fifth PME Conference,* (σελ. 165-170). Grenoble, France.

Wagner, S., & Kieran, C. (Eds.). (1989). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Virginia: Lawrence Erlbaum & NCTM.

Warren El., (1998). *Students' understanding of the concept of variable,* Australian Catholic University.

White D. M. & Marsh E. E. (2006). Content Analysis: A Flexible Methodology. Στο Lynda Baker (Ed), *Library Trends, Research Methods, 55(1),* (pp. 22-45), The Board of Trustees, University of Illinois.

Zahorik, John A. (1991) "Teaching Style and Textbooks", *Teaching and Teacher Education, 7(2),* 185–196.

ΔΕΠΠΣ, (2003), *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών,* ΦΕΚ 303Β/13-03-2003; ΦΕΚ 304Β/13-03-2003.

Ματσαγγούρας, Η. (2006). Διδακτικά εγχειρίδια: Κριτική αξιολόγηση της Γνωσιακής, Διδακτικής και Μαθησιακής Λειτουργίας τους. *Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση,* 7, 60-92.

Μπονίδης, Κ. (2005). Διαδικασία και κριτήρια αξιολόγησης των σχολικών βιβλίων. *Πρακτικά Συνεδρίου Διδακτικό Βιβλίο και Εκπαιδευτικό υλικό στο σχολείο*: *Προβληματισμοί, Δυνατότητες, Προοπτικές, Θεσσαλονίκη*, 106-119.