ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Οι Εννοιολογικές Μεταφορές και η Χρήση τους από τους Καθηγητές στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Ειρήνη Κουλέτση

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Δέσποινα Πόταρη

Αθήνα
Ιούνιος 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Δέσποινα Πόταρη (Επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπ. Καθηγήτρια	…….
2)Παναγιώτης Σπύρου	Επίκ. Καθηγητής	……
3)Χρόνης Κυνηγός	Καθηγητής	……

Στον πατέρα μου, Νικόλαο Κουλέτση

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία γράφτηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών, με τίτλο «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα Δέσποινα Πόταρη, χωρίς τις πολύτιμες συμβουλές και την αμέριστη συμπαράστασή της οποίας δεν θα κατάφερνα να φέρω εις πέρας την εργασία αυτή. Επίσης ευχαριστώ θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου, για τις σημαντικές υποδείξεις ως προς το θεωρητικό μέρος, καθώς και τον Καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου και χωρίς τον παραμικρό ενδοιασμό δέχθηκε να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής μου.

Θα ήταν παράλειψή μου να μην ευχαριστήσω θερμά τούς συναδέλφους και φίλους κ.κ. Γιώργο Ψυχάρη για τις χρήσιμες υποδείξεις του και Σωτήρη Συριόπουλο για την συμπαράστασή του. Επίσης, όλους τους συναδέλφους για το χρόνο που αφιέρωσαν προκειμένου να συμπληρώσουν τα δυο ερωτηματολόγια που χορηγήθηκαν για τη διενέργεια της παρούσης έρευνας.

Ιούνιος 2010,

Ειρήνη Κουλέτση

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων..... v

Κατάλογος διαγραμμάτων vi

Κατάλογος πινάκων.....viii

Περίληψη.....ix

1. Θεωρητικό Πλαίσιο 1

1.1 Η Γνωσιακή Θεωρία της Εννοιολογικής Μεταφοράς 1

1.2 Η Προέλευση των Μαθηματικών και οι Ιδιότητές τους 2

1.3 Εννοιολογικές Μεταφορές..... 4

1.3.1 Τι είναι η Εννοιολογική Μεταφορά..... 4

1.3.2 Δομή της Εννοιολογικής Μεταφοράς..... 5

1.4 Σχήματα Εικόνων 6

1.4.1 Κατηγορίες Σχημάτων Εικόνων 8

1.4.2 Πλασματική Κίνηση 9

1.5 Μεταφορές Θεμελίωσης (grounded)- Μεταφορές Σύνδεσης (linking) 11

1.6 Περιορισμοί..... 13

1.7 Μεταφορική Σκέψη 13

1.7.1 Τα Προτερήματα του Μεταφορικού Συλλογισμού 14

1.7.1.1 Ενσωματώνοντας (integrating) καθημερινές δράσεις στις έννοιες στόχου 15

1.7.1.2 Βελτιώνοντας την ανάκληση μαθηματικών σχέσεων..... 15

1.7.1.3 Αντίληψη των Αναπαραστάσεων..... 16

1.7.1.4 Διευκολύνει τους μαθηματικούς υπολογισμούς..... 16

1.7.2 Σύγκριση με άλλα είδη συλλογισμού..... 17

1.7.2.1 Συλλογισμός κοινών σημείων (intersection reasoning) 18

1.7.2.2 Συλλογισμός βασιζόμενος σε παραδείγματα 18

1.7.2.3 Συμβολικό παιχνίδι 19

1.7.2.4 Συμβολική διευκολυντική της μνήμης 19

1.7.2.5 Κατανεμημένος Συλλογισμός (distributed reasoning)..... 20

2. Βασικές Έννοιες των Μαθηματικών (Αριθμός-Ισότητα) 21

2.1 Μετάβαση από τους Φυσικούς στους Ακεραίους 21

2.1.1 Πτυχές της Έννοιας του Ακεραίου Αριθμού 21
2.2 Μετάβαση από τους Ακεραίους στα Κλάσματα και τους Ρητούς 23
2.2.1 Πτυχές της Έννοιας του Ρητού Αριθμού 26
2.3 Η Έννοια της Ισότητας 29
2.3.1 Το Σύμβολο της Ισότητας 29
2.4 Διδακτικά Μοντέλα για την Απόκτηση της Έννοιας του Αριθμού και της Ισότητας 32

3. Μεθοδολογία 45
3.1 Διαδικασία της Έρευνας 45
3.2 Φάσεις 46
3.2.1 Α΄ Φάση: Η Ανάλυση των Βιβλίων 46
3.2.2 Β΄ Φάση: Η Κυρίως Έρευνα 46
3.2.2.1 Πιλοτικό ερωτηματολόγιο 46
3.2.2.2 Κύριο ερωτηματολόγιο 48
3.3 Ανάλυση των Δεδομένων 49

4. Αποτελέσματα 52
4.1 Α΄ Φάση της Έρευνας: Οι Εννοιολογικές Μεταφορές στα Σχολικά Συγγράμματα του Γυμνασίου 52
4.2 Β΄ Φάση της Έρευνας: Η Έννοια του Αριθμού και της Ισότητας μέσα από Πέντε Κλασικά Μοντέλα 66
4.2.1 Η Συσχέτιση της Έννοιας του Ρητού με τα Μοντέλα της Ράβδου και της Αριθμογραμμής 66
4.2.2 Δυνατότητες και Περιορισμοί των Μοντέλων της Ράβδου και της Αριθμογραμμής 68
4.2.3 Καταλληλότητα και Χρήση 73
4.2.3.1 Συγκρίνοντας τα δυο μοντέλα ως προς την καταλληλότητα για τη διαχείριση της έννοιας του ρητού αριθμού 73
4.2.3.2 Κριτήρια επιλογής των μοντέλων της ράβδου και της αριθμογραμμής στη διαχείριση της έννοιας του ρητού αριθμού 73
4.2.4 Χρήση των Μοντέλων της Ράβδου και της Αριθμογραμμής 75
4.2.4.1 Αποδοχή-απόρριψη των δυο μοντέλων 75
4.2.4.2 Τρόποι χρήσης τους 76

4.3 Η Συσχέτιση της Έννοιας του Ακεραίου με το Μοντέλο του Θερμομέτρου 81
4.3.1 Αιτίες Καταλληλότητας ή Μη του Μοντέλου του Θερμομέτρου 81
4.3.2 Δυνατότητες και Περιορισμοί του Μοντέλου του Θερμομέτρου 85
4.3.3 Δυσκολίες –Τρόποι Αντιμετώπισής τους 89
4.3.4 Χρήση του Μοντέλου του Θερμομέτρου 93
4.3.4.1 Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου 93
4.3.4.2 Τρόποι χρήσης του μοντέλου του θερμομέτρου 93
4.4 Η Έννοια της Ισότητας μέσα από τα Μοντέλα της Ζυγαριάς και το Γεωμετρικό Μοντέλο 97
4.4.1 Η Συσχέτιση της Έννοιας της Ισότητας με το Μοντέλο της Ζυγαριάς 97
4.4.1.1 Αιτίες καταλληλότητας ή μη του μοντέλου της ζυγαριάς 97
4.4.2 Δυνατότητες και Περιορισμοί του Μοντέλου της Ζυγαριάς 102
4.4.3 Δυσκολίες του Μοντέλου-Τρόποι Αντιμετώπισής στους 106
4.4.4 Χρήση του Μοντέλου της Ζυγαριάς 110
4.4.4.1 Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου 110
4.4.4.2 Τρόπου χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς 110
4.5 Η Συσχέτιση της Έννοιας της Ισότητας με το Γεωμετρικό Μοντέλο 114
4.5.1 Αιτίες Καταλληλότητας ή μη του Γεωμετρικού Μοντέλου 115
4.5.2. Δυνατότητες και Περιορισμοί του Γεωμετρικού Μοντέλου 119
4.5.3. Δυσκολίες –Τρόποι Αντιμετώπισής τους 123
4.5.4 Χρήση του Γεωμετρικού Μοντέλου 126
4.5.4.1 Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου 126

5. Συζήτηση-Συμπεράσματα 130
5.1 Συζήτηση 130
5.2 Συμπεράσματα 144

Αναφορές..... 147
Παράρτημα Ι 153
Πίνακας 4.8 Ταξινόμηση των Μεταφορών στα Σχολικά Συγγράμματα του Γυμνασίου 154
Παράρτημα ΙΙ 159
Πιλοτικό Ερωτηματολόγιο 160
Κύριο Ερωτηματολόγιο 168

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1 Το περιέχον (container) σχήμα 8

Σχήμα 1.2 Σχήμα πηγή-τροχιά- στόχος 9

Σχήμα 2.1 Θεωρητικό μοντέλο της διδασκαλίας της έννοιας του Ρητού 27

Σχήμα 2.2 Η Αριθμογραμμή 33

Σχήμα 2.3 Βήμα 1^{ο} επίλυσης της εξίσωσης 3χ+14=5χ+16 36

Σχήμα 2.4 Βήμα 2^{ο} επίλυσης της εξίσωσης 3χ+14=5χ+16 36

Σχήμα 2.5 Γραμμικά μοντέλα & η έννοια του ρητού αριθμού 38

Σχήμα 2.6 Γεωμετρικό μοντέλο & η έννοια της ισότητας 39

Σχήμα 2.7 Επιφανειακά μοντέλα και η έννοια του ρητού αριθμού 40

Σχήμα 2.8 Διακριτά μοντέλα και η έννοια του ρητού αριθμού 40

Σχήμα 2.9 Το μοντέλο της Ζυγαριάς 41

Σχήμα 4.1 Γράφημα Συσχέτισης Ράβδου- Αριθμογραμμής 66

Σχήμα 4.2 Γράφημα Συσχέτισης του μοντέλου του Θερμομέτρου με την έννοια του ακεραίου 81

Σχήμα 4.3 Γράφημα Συσχέτισης του μοντέλου της Ζυγαριάς με την έννοια της ισότητας 97

Σχήμα 4.4 Γράφημα Συσχέτισης του γεωμετρικού μοντέλου με την έννοια της ισότητας 114

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 4.1 Δίκτυο των Μοντέλων που Χρησιμοποιούνται ως Πηγή Εννοιολογική Μεταφορά 54

Διάγραμμα 4.2 Δίκτυο των Μαθηματικών Εννοιών στα Σχολικά Βιβλία που εισάγονται μέσω της Μεταφοράς Στόχος 55

Διάγραμμα 4.3 Ταξινόμηση των μεταφορών στα σχολικά βιβλία Τεχνητά-Φυσικά Αντικείμενα 56

Διάγραμμα 4.4 Ταξινόμηση των μεταφορών στα σχολικά βιβλία Γεωμετρικά Αντικείμενα 57

Διάγραμμα 4.5 Ταξινόμηση των μεταφορών στα σχολικά βιβλία Αντικείμενα από άλλες Επιστήμες 58

Διάγραμμα 4.6 Περιορισμοί μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής 69

Διάγραμμα 4.7 Αποδοχή-Απόρριψη των μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής 76

Διάγραμμα 4.8 Σύγκριση των μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής ως προς τη χρήση τους για τη διδασκαλία του ρητού αριθμού 76

Διάγραμμα 4.9 Τρόποι αξιοποίησης μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής 80

Διάγραμμα 4.10 Επιχειρήματα καταλληλότητας του μοντέλου του Θερμομέτρου 84

Διάγραμμα 4.11 Δυνατότητες και περιορισμοί του μοντέλου του Θερμομέτρου 88

Διάγραμμα 4.12 Δυσκολίες και τρόποι αντιμετώπισης του μοντέλου του Θερμομέτρου 92

Διάγραμμα 4.13 Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου του Θερμομέτρου 93

Διάγραμμα 4.14 Τρόποι αξιοποίησης του μοντέλου του Θερμομέτρου 96

Διάγραμμα 4.15 Επιχειρήματα καταλληλότητας του μοντέλου της Ζυγαριάς 101

Διάγραμμα 4.16 Δυνατότητες και περιορισμοί του μοντέλου της Ζυγαριάς 105

Διάγραμμα 4.17 Τρόποι αντιμετώπισης δυσκολιών με τη χρήση του μοντέλου της Ζυγαριάς 109

Διάγραμμα 4.18 Αποδοχή –Απόρριψη του μοντέλου της Ζυγαριάς 110

Διάγραμμα 4.19 Τρόποι αξιοποίησης του μοντέλου της Ζυγαριάς 113

Διάγραμμα 4.20 Καταλληλότητα ή μη του γεωμετρικού μοντέλου Για την έννοια της ισότητας 118

Διάγραμμα 4.21 Δυνατότητες –Περιορισμοί του γεωμετρικού μοντέλου 122

Διάγραμμα 4.22 Τρόποι αντιμετώπισης των δυσκολιών με το γεωμετρικό

μοντέλο 125
Διάγραμμα 4.23 Αποδοχή-Απόρριψη του γεωμετρικού μοντέλου για την έννοια της ισότητας 126
Διάγραμμα 4.24 Διδακτική Πρακτική αναφορικά με το γεωμετρικό μοντέλο και την έννοια της ισότητας 129
Διάγραμμα 5.1 Συσχέτιση Πεποιθήσεων και Διδακτικής Πρακτικής 143

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1 Οι 4 Πράξεις μέσα από την Οπτική των Μεταφορών Θεμελίωσης 12

Πίνακας 2.1 Οι 4 Πράξεις στο Σύνολο των Φυσικών & των Ακεραίων 22

Πίνακας 2.2. Οι 4 Πράξεις στο Σύνολο των Φυσικών & των Ρητών 24

Πίνακας 2.3 Η Έννοια του ρητού $\frac{3}{4}$ 26

Πίνακας 2.4 Μη Αριθμητικές Γραμμικές Εξισώσεις & Μοντέλα Ζυγαριάς – Γεωμετρικό 46

Πίνακας 3.1 Μοντέλα και Έννοιες στο Πιλοτικό Ερωτηματολόγιο 47

Πίνακας 4.1 Τρόποι Αντιμετώπισης δυσκολιών από τη χρήση των Μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής 73

Πίνακας 4.2 Δυνατότητες και περιορισμοί του μοντέλου του Θερμομέτρου 85

Πίνακας 4.3 Τρόποι αντιμετώπισης των δυσκολιών από τη χρήση του μοντέλου του θερμομέτρου 89

Πίνακας 4.4 Δυνατότητες και περιορισμοί του μοντέλου της Ζυγαριάς 102

Πίνακας 4.5 Τρόποι Αντιμετώπισης δυσκολιών από τη χρήση του μοντέλου της Ζυγαριάς 106

Πίνακας 4.6 Δυνατότητες και περιορισμοί του Γεωμετρικού μοντέλου 119

Πίνακας 4.7 Τρόποι αντιμετώπισης των δυσκολιών με το Γεωμετρικό μοντέλο123

Πίνακας 4.8 Ταξινόμηση των Μεταφορών στα Σχολικά Συγγράμματα του Γυμνασίου 154

Περίληψη

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία επιχειρείται η διερεύνηση του ρόλου των εννοιολογικών μεταφορών στα σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου καθώς και στη διδασκαλία αναφορικά με τις βασικές έννοιες του αριθμού και της ισότητας. Ειδικότερα, διερευνάται το είδος των εννοιολογικών μεταφορών που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια, ο τρόπος που ο εκπαιδευτικός τις συνδέει με το μαθηματικό αντικείμενο μέσα από τη χρήση πέντε κλασικών μοντέλων (ράβδου-αριθμογραμμής-θερμομέτρου-ζυγαριάς και γεωμετρικό), και τις αντιλήψεις του αναφορικά με το ρόλο και τη σημασία των μοντέλων αυτών στη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι καθηγητές των μαθηματικών επιδεικνύουν μια αρκετά καλή ικανότητα ανάλυσης και διαχείρισης μοντέλων που σχετίζονται με την έννοια του αριθμού σε αντίθεση με τη διαχείριση των μοντέλων που σχετίζονται με την έννοια της ισότητας. Τέλος, διαφάνηκε ότι ως προς τα γεωμετρικά και γραμμικά μοντέλα υπάρχει μια ασυμβατότητα μεταξύ πεποιθήσεων και διδακτικής επιλογής. Δεν παρατηρήθηκε το ίδιο με τα διακριτά μοντέλα.

Προκειμένου για τη διερεύνηση των παραπάνω θεμάτων, αρχικά παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο με βάση το οποίο σχεδιάστηκε η παρούσα έρευνα (Κεφάλαιο 1). Στο κεφάλαιο 2 γίνεται ανάλυση της έννοιας του ακεραίου και ρητού αριθμού και της έννοιας της ισότητας, καταγράφονται οι δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν και γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφορικά με τους περιορισμούς αλλά και τις δυνατότητες των παραπάνω πέντε μοντέλων που ανακύπτουν κατά τη χρήση τους. Στο κεφάλαιο 3 τίθεται το ερευνητικό πρόβλημα, τα ερευνητικά ερωτήματα και η διαδικασία της έρευνας. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, ενώ στο κεφάλαιο 5 ερμηνεύονται τα αποτελέσματα και συζητούνται τα συμπεράσματα αυτής. Στα παραρτήματα παρατίθενται ο πίνακας ταξινόμησης των μεταφορών στα σχολικά βιβλία του γυμνασίου (Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης) καθώς και τα δυο ερωτηματολόγια (πιλοτικό και κύριο) .

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1 Η Γνωσιακή Θεωρία της Εννοιολογικής Μεταφοράς

Αφετηρία της σύγχρονης, γνωσιακής θεωρίας της μεταφοράς, αποτέλεσε η άποψη των Lakoff και Johnson (1980) ότι η μεταφορά είναι μια βασική νοητική λειτουργία διαμέσου της οποίας κατανοούμε τον κόσμο, συλλαμβάνουμε αφηρημένες έννοιες, προσφέρουμε στη σκέψη μας τη δυνατότητα να λειτουργήσει σε αφηρημένο επίπεδο αφού το βασικό αντιληπτικό μας σύστημα είναι «θεμελιωδώς μεταφορικό εκ φύσεως». Σε αυτό το πλαίσιο, μελετητές από διαφορετικά γνωστικά πεδία (γλωσσολογία, ψυχολογία, λογοτεχνική θεωρία) προσεγγίζουν την εννοιολογική μεταφορά (Ε.Μ) όχι σαν γλωσσικό φαινόμενο αλλά σαν διαδικασία της σκέψης και τρόπο οργάνωσης και έκφρασης της εμπειρίας μας. Ειδικότερα, οι Lakoff και Johnson έθεσαν σε αμφισβήτηση βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις υποστηρίζοντας ότι η λειτουργία της Ε.Μ. συνίσταται στην καλύτερη κατανόηση εννοιών. Κατά συνέπεια,

- η Ε.Μ βασίζεται σε σωματικά θεμελιωμένες αναλογίες ανάμεσα σε διαφορετικές εννοιολογικές περιοχές
- η Ε.Μ χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή από συνηθισμένους ανθρώπους και δεν αποτελεί αποκλειστικό προνόμιο της λογοτεχνίας και κάποιων ιδιαίτερα προικισμένων ανθρώπων.

Ειδικότερα στον τομέα των μαθηματικών, ο Núñez (2004b) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά είναι ένας εξαιρετικά τεχνικός τομέας, ο οποίος χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι ίδιες ακριβώς οι οντότητες που τα συνιστούν είναι ιδεατές νοητικές αφαιρέσεις, οι οποίες δεν μπορούν να εκληφθούν απευθείας μέσω των αισθήσεων. Ακόμη και η απλούστερη οντότητα, ας πούμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία δηλαδή το σημείο, το οποίο έχει μόνο θέση αλλά χωρίς επέκταση, δεν μπορεί να είναι πραγματικά *αντιληπτή*. Οι Lakoff και Núñez (1997, 2000) και Núñez (2000a, 2000b) εμπνευσμένοι από τις θεωρητικές αρχές της Ενσώματης Γνώσης και χρησιμοποιώντας κυρίως τεχνικές από τη Γνωσιακή Γλωσσολογία (κυρίως Γνωσιακή σημασιολογία) πρότειναν ότι αυτές οι εξιδανικευμένες αφηρημένες τεχνικές οντότητες στα Μαθηματικά δημιουργούνται από την ανθρώπινη φαντασία, μέσω

μιας πολύ συγκεκριμένης χρήσης γνωστικών μηχανισμών που στηρίζονται στην καθημερινή σωματική εμπειρία, όπως οι:

- εννοιολογικές μεταφορές (Ε.Μ)
- οι εννοιολογικοί συνδυασμοί (blend),
- αναλογικοί συλλογισμοί,
- πλασματική κίνηση,
- σχήματα (aspectual) του τρόπου (δείτε επίσης: Núñez & Lakoff, 1998).

Τα Μαθηματικά είναι, σύμφωνα με αυτή την οπτική, ένα συγκεκριμένο ισχυρό και σταθερό προϊόν της ανθρώπινης φαντασίας. Ο ισχυρισμός είναι ότι μια λεπτομερής ανάλυση της μαθηματικής οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών, θεωρημάτων, ορισμών, και αξιωμάτων (Μαθηματική Ανάλυση των ιδεών) παρέχουν τα γνωσιακά θεμέλια των ίδιων των Μαθηματικών. Από αυτή την άποψη: *τα μαθηματικά είναι το σωματικά στηριζόμενο συμπερασματικό δίκτυο που τα καθιστά εφικτά.*

Η μελέτη αυτών των βάσεων και του εκτεταμένου συμπερασματικού δικτύου τους αποτελεί ένα από τους πιο σημαντικούς στόχους της Γνωσιακής επιστήμης των μαθηματικών.

1.2 Η Προέλευση των Μαθηματικών και οι Ιδιότητες τους

Το 1913 ο Poincaré προβληματιζόταν για την προέλευση των μαθηματικών. Έβλεπε τη μαθηματική διαίσθηση ως αυτή που επινοεί και τη λογική ως αυτή που αποδεικνύει. Με αυτή την οπτική τα μαθηματικά αρχίζουν με την διαίσθηση. Ωστόσο, από τότε που ο Poincaré διατύπωνε τους προβληματισμούς του, και μέχρι τη σημερινή εποχή φαίνεται, λίγα να έχουν γίνει στον τομέα της διαίσθησης. Το 2000 εμφανίζονται στο προσκήνιο οι Lakoff και Núñez που διατείνονται ότι:

«*Το πορτραίτο των Μαθηματικών έχει ανθρώπινο πρόσωπο*»

και ότι η θεωρία τους για τα ενσώματα μαθηματικά έρχεται να κάνει τη διαφορά. Η ενσώματη γνωσιακή θεωρία υποστηρίζει ότι το σώμα και ο νους δρουν ως αλληλοεξαρτώμενα, αρνούμενη τη δυαδικότητα τους. Η δραστηριότητα του νου έχει τις ρίζες της στη δραστηριότητα του σώματος. Η διαίσθηση δεν είναι τόσο ασχημάτιστη και παραπλανητική όπως πιθανόν να πιστεύαμε μέχρι τώρα.

Οι Lakoff και Núñez (2000, σελ 4-5) αναφέρουν ότι τα τελευταία χρόνια έχει επέλθει επαναστατική πρόοδος στη Γνωσιακή επιστήμη αναφορικά με την κατανόηση των μαθηματικών. Ίσως από τις πιο βαθιές να είναι η *Μεταφορική σκέψη: Στο μεγαλύτερο μέρος, οι άνθρωποι νοηματοδοτούν τις αφηρημένες έννοιες με συγκεκριμένους όρους, χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους συλλογισμού βασισμένες στο αισθησιοκινητικό τους σύστημα. Ο μηχανισμός με τη βοήθεια του οποίου το αφηρημένο γίνεται κατανοητό με συγκεκριμένους όρους λέγεται εννοιολογική μεταφορά.* Τα μαθηματικά χρησιμοποιούν εννοιολογικές μεταφορές. Για παράδειγμα, μέσω εννοιολογικής μεταφοράς οι αφηρημένοι αριθμοί αντιστοιχίζονται στα σημεία μιας ευθείας.

Οι Núñez, Edwards και Matos (1999) τονίζουν ότι η ενσώματη προσέγγιση μας παρέχει τα εργαλεία που βοηθούν να κατανοήσουμε πιο αφηρημένες περιοχές με όρους καθημερινά βιωμένης πραγματικότητας.

«Πώς συμβαίνει αυτό; » Απαντούν οι ίδιοι, αποφαίνοντας ότι για να συμβεί αυτό απαιτείται ένα κοινό σύνολο νευρικών και σωματικών δομών με τη βοήθεια των οποίων κατασκευάζονται οι μαθηματικές έννοιες όπως κίνηση, χωρικές σχέσεις, χειρισμός αντικειμένων, χώρος και χρόνος. Η μελέτη της εννοιολογικής δομής των μαθηματικών από την ενσώματη οπτική καταδεικνύει πώς τα μαθηματικά χτίζονται μέσω τέτοιων άτυπων καθημερινών εμπειριών και ιδεών.

Οι Boero, Bazzini, και Garuti (2001) ορίζουν την ενσώματη προσέγγιση ως το μοναδικό τρόπο με τον οποίο οι αισθησιοκινητικές ικανότητες του ατόμου τον καθιστούν ικανό να αλληλεπιδράσει επιτυχώς με το περιβάλλον του. Υποστηρίζουν ότι οι αφηρημένες έννοιες συλλαμβάνονται με συγκεκριμένο τρόπο με τη χρήση συγκεκριμένων τρόπων συλλογισμού που βασίζονται στη σωματική εμπειρία.

Μερικές από τις ιδιότητες που οι Lakoff και Núñez (2000, σελ. 351-352) αποδίδουν στα μαθηματικά είναι οι παρακάτω :

- Η *Καθολικότητα –Συνέπεια- Ακρίβεια- Σταθερότητα-Αποτελεσματικότητα-Γενικότητα* και η ικανότητα του *Συμβολισμού* των μαθηματικών

- Τα μέρη της ανθρώπινης γνωστικής πλευράς που παράγουν τα ανώτερα μαθηματικά ως μια δραστηριότητα είναι οι συνήθεις γνωστικές ικανότητες όλων των ανθρώπων, όπως για παράδειγμα η ικανότητα δημιουργίας της εννοιολογικής μεταφοράς.

- Η εννοιολογική μεταφορά *είναι* ένας *νευρικός* ενσώματος *γνωστικός* μ*ηχανισμός* που μας επιτρέπει να εκμεταλλευτούμε τη συμπερασματική δομή μιας περιοχής για να επιχειρηματολογήσουμε προς όφελος μιας άλλης.

1.3 Εννοιολογικές Μεταφορές

Ο Αριστοτέλης αποδίδει μεγάλο σεβασμό στην αξία της μεταφοράς. Θεωρεί ότι είναι σημάδι ευφυΐας.

.....πολὺ δὲ μέγιστον τὸ μεταφορικὸν εἶναι. Μόνον γὰρ τοῦτο οὔτε παρ᾽ ἄλλου ἔστι λαβεῖν εὐφυΐας τε σημεῖόν ἐστι·

Αριστοτέλης , Περί Ποιητικής 22, [17]

1.3.1 Τι είναι η Εννοιολογική Μεταφορά

Ο Hamide (2007) διατείνεται ότι η μεταφορά μπορεί να οριστεί ως μια υπόρρητη αναλογία (Presmeg, 1998) καθώς διευκολύνει τη δυνατότητα μετάβασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης (Εμπειρικό) στο άλλο (Αφηρημένο). Σύμφωνα με την τελευταία, η μεταφορά αποτελείται από τη *βάση* (ground), που σχηματίζεται από τις ομοιότητες μεταξύ των εννοιών και από τις διαφορές μεταξύ των εννοιών, που συνιστούν την *ένταση* (tension). Η προσέγγιση της μεταφοράς όχι απλά σαν ένα γλωσσικό φαινόμενο αλλά σαν διαδικασία της σκέψης και ο τρόπος οργάνωσης και έκφρασης της εμπειρίας μας, μας οδηγεί να αναφερόμαστε πλέον σε αυτές με τον όρο της εννοιολογικής μεταφοράς.

Ο ορισμός που δίνουν οι Lakoff και Núñez (2000, σελ. 6) είναι ο εξής:

Η εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor) είναι ο γνωστικός μηχανισμός που επιτρέπει να συλλογιζόμαστε για ένα είδος ωσάν να ήταν κάποιο άλλο. Δεν είναι απλά ένα γλωσσολογικό φαινόμενο ή απλά ένα σχήμα του λόγου. Είναι μάλλον ένας γνωστικός μηχανισμός που ανήκει στο βασίλειο της σκέψης.

Οι Núñez**,** Edwards και Matos (1999) αναφέρουν ότι οι εννοιολογικές μεταφορές είναι «*οι αντιστοιχήσεις που συντηρούν τη συμπερασματική δομή της περιοχής πηγής καθώς αυτή προβάλλεται στην πηγή στόχος.*» Με αυτόν τον τρόπο γίνεται κατανοητός ο στόχος, συνήθως ασυνείδητα, με βάση τις σχέσεις που ισχύουν στην πηγή.

Και συνεχίζουν «*Όπως και το υπόλοιπο εννοιολογικό μας σύστημα, το σύστημα των συμβατικών (conventional) μας εννοιολογικών μεταφορών, είναι άκοπο (effortless) και βρίσκεται κάτω του επιπέδου της συνειδητής μας επίγνωσης (γνωστικό ασυνείδητο).*»

1.3.2 Δομή της Εννοιολογικής Μεταφοράς

Όλες οι εννοιολογικές μεταφορές έχουν την ίδια δομή. Οι Lakoff και Núñez (2000, σελ. 42) ορίζουν την δομή της κάθε εννοιολογικής μεταφοράς ως εξής: *είναι μια αντιστοίχιση (mapping) οντοτήτων από ένα γνωστικό «πεδίο-πηγή» (source domain) σε αντίστοιχες οντότητες σε ένα άλλο γνωστικό «πεδίο-στόχος» (target domain).*

Για να κατανοήσουμε ένα πεδίο εμπειρίας με τους όρους ενός άλλου συνεπάγεται ένα σύστημα συγκεκριμένων αντιστοιχιών, που καλούνται «αντιστοιχίσεις» (mappings), ανάμεσα στο «πεδίο πηγή», που είναι συνήθως συγκεκριμένο, και στο «πεδίο-στόχος», που αφορά συνήθως αφηρημένες έννοιες. Υπάρχει με άλλα λόγια ένα σύστημα συστηματικών αντιστοιχιών μεταξύ πηγής (A) και στόχου (B), υπό την έννοια ότι συστατικά εννοιολογικά στοιχεία, και όχι μεμονωμένα λεξικολογικά στοιχεία, από το (B) αντιστοιχούν σε συστατικά εννοιολογικά στοιχεία από το (A). Με αυτό τον τρόπο γίνονται κατανοητές έννοιες αόριστες και, κατά άρα, πιο δύσκολα προσεγγίσιμες. Αυτή η εννοιολογική αντιστοίχιση μεταξύ των περιοχών (cross-domain) είναι πρωταρχικής σημασίας Ο μεταφορικός λόγος έρχεται δεύτερος, και είναι απόρροια της εννοιολογικής αντιστοίχισης. Πολλές λέξεις για τις έννοιες του «πεδίου-πηγής» έχουν εφαρμογή σε αντίστοιχες έννοιες του «πεδίου-στόχου». Κι αυτό, όταν συμβαίνει, γίνεται με συστηματικό και μεθοδικό τρόπο. Κάθε μεταφορική αντιστοιχία χαρακτηρίζεται από νευρολογικής άποψης από μια προκαθορισμένη ομάδα συνδέσεων των εννοιολογικών περιοχών.

Συγκεκριμένα στην περιοχή των μαθηματικών, η Presmeg (2004) ορίζει τις εννοιολογικές μεταφορές ως τις *αυθόρμητες συνδέσεις* μεταξύ του «πεδίου-πηγή» (οικεία στοιχεία της καθημερινότητας) και του «πεδίου - στόχος» (μια μαθηματική κατασκευή). Για παράδειγμα, το 0 μπορεί να είναι είτε ένα σημείο σε μια γραμμή ή το κενό σύνολο, και τα δυο ή τίποτα από τα δυο, και κάθε απόφαση είναι θέμα επιλογής της κατάλληλης εννοιολογικής μεταφοράς.

1.4 Σχήματα Εικόνων

Το 1994 η Sfard αναρωτιέται: «*Ποιός είναι όμως ο μηχανισμός της κατασκευής των μεταφορών;*» Οι Lakoff και Johnson (1980) διατείνονται ότι το όχημα που μεταφέρει την εμπειρικά κατασκευασμένη γνώση είναι ένα *ενσώματο σχήμα* (embodied schema)- γνωστό επίσης ως *εικονικό σχήμα* (image schema).

Ο Johnson (1987) ορίζει τα εικονικά σχήματα «*ως δομές μιας δραστηριότητας μέσω των οποίων οργανώνουμε την εμπειρία μας*» (σελ. 29-30). Αυτές οι δομές, αναφέρει η Sfard (1994) συνιστούν τη βάση της ικανότητας μας για αφαίρεση και γενίκευση: είναι κατά μια έννοια τα κύρια σημεία της εμπειρίας μας, η σάρκα των συγκεκριμένων στιγμιότυπων (instantiations) που έχουν απογυμνωθεί.

Το *σχήμα* είναι ένα επαναλαμβανόμενο *μοτίβο*, σχήμα και κανονικότητα στις υπό εξέλιξη δραστηριότητες.

Συμφωνούν και οι Núñez, Edwards και Matos (1999) τονίζοντας ότι αυτά τα δυναμικά επαναλαμβανόμενα *μοτίβα* θέτουν σε τάξη τη δράση μας, τις αισθήσεις και εννοιολογήσεις (conceptions) μας. Αφηρημένες έννοιες όπως η «ισορροπία» ενός συστήματος ισοδύναμων μετασχηματισμών μιας εξίσωσης, είναι εννοιολογικές επεκτάσεις των σχημάτων εικόνων που εκλέγονται στον τρόπο που το ανθρώπινο σώμα βιώνει την έννοια της ισορροπίας. Αυτές οι επεκτάσεις συμβαίνουν με τη βοήθεια των εννοιολογικών αντιστοιχήσεων, συμπεριλαμβανομένου και του σημαντικού γνωστικού μηχανισμού γνωστού ως *εννοιολογική μεταφορά.*

Οι Lakoff και Núñez (2000) ορίζουν τα *σχήματα εικόνων* ως τις αρχέτυπες έννοιες (conceptual primitives) που οι χωρικές σχέσεις σε μια γλώσσα αποσυντίθενται και που, όπως προκύπτει, είναι παγκόσμιες (σελ. 30). Η Presmeg (2004) αναφέρει ότι κατά την ανάγκη της γενίκευσης που προκύπτει κατά τη διάρκεια της μάθησης των Μαθηματικών, οι δυσκολίες που προκύπτουν, ξεπερνιούνται από τους μαθητές με τη βοήθεια των μεταφορών και των pattern imagery -κατασκευή παρόμοια με τα σχήματα εικόνων των Lakoff και Núñez. Ο Danesi (2007) αναφέρει ότι τα σχήματα *εικόνων* είναι το κλειδί στη διαδικασία της συμπύκνωσης (concretization). Παρέχουν το κλειδί στη διαδικασία της συγκεκριμενοποίησης.

Η αρχική ερώτηση «*πώς η σωματική εμπειρία μεταδίδεται (transmitted) μεταφορικά σε μια σφαίρα πιο αφηρημένης σκέψης;*» τώρα μπορεί να απαντηθεί: Δανειζόμαστε τα ενσώματα

σχήματα, τα οποία αρχικά χτίζονται για να βάλουν σε τάξη την σωματική μας εμπειρία, προκειμένου να δώσουμε σχήμα, δομή και νόημα στη *φαντασία* μας.

Συνοψίζοντας, ένα ενσώματο *σχήμα* είναι η επιτομή, οργάνωση και συντήρηση για «μελλοντική χρήση» της ουσίας της εμπειρίας μας και ως τέτοιο είναι το εργαλείο των πολυποίκιλων φυσικών και διανοητικών ερεθισμάτων που βιώνουμε στη ζωή μας. (Sfard, 1994, σελ. 46). Η Sfard, συνεχίζει ότι, το κεντρικό χαρακτηριστικό των ενσώματων σχημάτων είναι ότι είναι μη-προτασιακά (non-propositional), κάτι που αντανακλάται στο όνομα που τους αποδίδεται. Είναι δηλαδή όμοια με εικόνες (image-like) και ενσώματα, με την έννοια ότι θα έπρεπε να θεωρηθούν ως αναλογικές αντανακλάσεις της σωματικής μας εμπειρίας, παρά ως τεκμηριωμένες δηλώσεις που θα επιθυμούσαμε να ελέγξουμε την εγκυρότητά τους.

Κι αυτή ακριβώς η φύση τους τα καθιστά δύσκολα στην περιγραφή τους. Αναφέρει ότι τα ενσώματα σχήματα είναι το ίδιο με τα νοητικά (mental) σχήματα: Είναι *αναλογικά* και *ολιστικά*. Ένα ενσώματο σχήμα στηρίζεται από ένα νοητικό σχήμα, ωστόσο, υπάρχει μια ειδοποιός διαφορά: ενώ το νοητικό σχήμα είναι πάντα η εικόνα κάτι συγκεκριμένου κι άρα γεμάτου λεπτομέρειες (είναι αυτό που Johnson αποκαλεί «rich image»), το ενσώματο είναι *γενικό* και *μεταβαλλόμενο*. Δεν είναι παρά ο σκελετός με πολλά μεταβλητά μέρη τα οποία όντας απροσδιόριστα δεν μπορούν να οπτικοποιηθούν. Κι αυτή ακριβώς η γενικότητα του ενσώματου σχήματος συνιστά και τη *δομική του δύναμη* και την ικανότητα του να περικλείει σε μια νοητική δομή, εύκολα διαχειρίσιμη, μια ευρεία ποικιλία των εμπειριών μας. Ο «ασαφής χαρακτήρας» του είναι το κύριο χαρακτηριστικό, χάρη στο οποίο, αποκτά τη γενικότητα του και την ενοποιητική του δύναμη.

Κατά τον Johnson (1987) αυτό ακριβώς είναι και το χαρακτηριστικό που λείπει από μια πλούσια (rich) εικόνα δηλ, η οπτικοποίηση. Οι μαθητές οπτικοποιούν με στόχο να οδηγηθούν στη γενίκευση. Μερικές όμως φορές η χρήση της εικόνας λειτουργεί ως τροχοπέδη στην υπηρεσία της γενίκευσης, καθώς σε κάποιες περιπτώσεις μια νοητική εικόνα δεν παύει να είναι η απεικόνιση μιας συγκεκριμένης περίπτωσης ή στιγμιότυπου. Ωστόσο, οι *εικόνες* που χρησιμοποιούνται μεταφορικά καθώς συνιστούν το *όχημα* της εννοιολογικής μεταφοράς ή προέρχονται από την περιοχή της εμπειρίας φαίνεται να ενισχύουν τη σύγκριση των δυο περιοχών που συνιστούν την εννοιολογική μεταφορά. Οι μεταφορές των μαθητών είναι οι γέφυρες μεταξύ της υπάρχουσας (Actual) πραγματικότητας και της εικονικής (Virtual) πραγματικότητας (Presmeg, 1999).

1.4.1 Κατηγορίες Σχημάτων Εικόνων

Οι Lakoff και Núñez (2000) τονίζουν ότι καθώς οι εννοιολογικές μεταφορές διατηρούν τη συμπερασματική δομή τους, η κατανόηση της αριθμητικής συνίσταται στην προηγούμενη κατανόηση καθημερινών κοινότοπων φυσικών δραστηριοτήτων, όπως:

- *Εναρίθμηση- Μέτρηση*
- *Πρόσθεση κι αφαίρεση μικρών ποσοτήτων*
- *Συλλογή αντικειμένων σε ομάδες ή στοίβες*
- *Χειρισμός αντικειμένων (περιστροφή, επιμήκυνση, διάσπαση-σύνθεση)*
- *Βηματισμός- Κίνηση*
- *Επαναλαμβανόμενες ενέργειες*

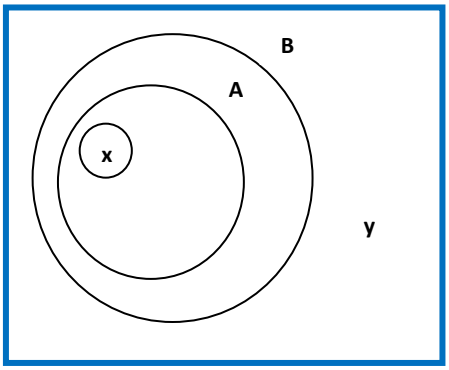
Ο Σπύρου (2003) συμπληρώνει ότι οι ιδιότητες των μαθηματικών είναι, κατά πολλούς τρόπους, ιδιότητες που κάποιος θα ανέμενε κανείς από τις λαϊκές μας θεωρίες για τα εξωτερικά αντικείμενα. Ο λόγος είναι ότι βασίζονται μεταφορικά στην εμπειρία που έχουμε από τα εξωτερικά αντικείμενα και τις προαναφερθείσες εμπειρίες, προσθέτοντας στην προηγούμενη λίστα και τις παρακάτω:

- *Κατασκευή Οικοδομής: μορφή συλλογισμού «αυτό στηρίζεται σε αυτό»*
- *Στρατηγικής Μάχης*: στρατηγικές συλλογισμού
- *Υπεράσπισης σε Δικαστήριο: τεχνική υπεράσπισης, μαιευτική*

Υπό αυτή την έννοια, αυτές οι εμπειρίες συνιστούν τα αρχέτυπα σχήματα εικόνων. Αυτά διακρίνονται σε στατικά και δυναμικά.

Ειδικότερα, τα κύρια στατικά αρχέτυπα σχήματα εικόνων είναι τα:

Προσανατολισμού, *Τοπολογικών* και *Στήριξης (Support schema)* που συνιστούν το κεντρικό σημείο εννοιών όπως *πάνω.*



Σχήμα 1.1. **Το περιέχον (container)**

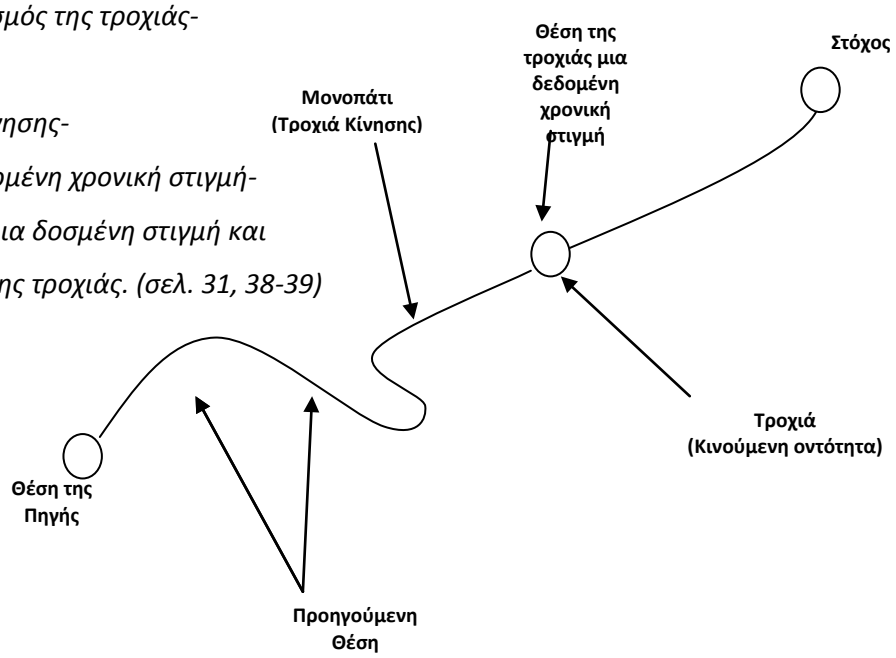
Ένα άλλο αρχέτυπο σχήμα πολύ σημαντικό στα μαθηματικά είναι το περιέχον (container) σχήμα εικόνας (σχήμα 1.1.) που συνιστά το κεντρικό σημείο εννοιών όπως *μέσα* κι *έξω*.

Αποτελείται από τρία μέρη το *εσωτερικό*, το *σύνορο* και το *εξωτερικό*.

Άλλα πολύ σημαντικά σχήματα εικόνων είναι η Ισορροπία, η Συγχώνευση και ο Διαχωρισμός *Αντικειμένων*.

Αναφορικά με τα σχήματα που έχουν να κάνουν με κίνηση, το πρωτεύον είναι το αρχέτυπο σχήμα πηγή-τροχιά-στόχος (source-path-goal) (σχήμα 1.2) που συνιστά το κεντρικό σημείο εννοιών όπως *από* και *προς* (χωρικές πηγές) κι ενδιάμεσες πορείες όπως *κατά μήκος, διαμέσου, απέναντι* κλπ. Οι ρόλοι που επιτελεί είναι οι:

- *Μια τροχιά που κινείται-*
- *σημείο αφετηρίας-*
- *ο στόχος, δηλαδή ο προορισμός της τροχιάς-*
- *η μεταξύ τους διαδρομή-*
- *η πραγματική τροχιά της κίνησης-*
- *η θέση της τροχιάς μια δεδομένη χρονική στιγμή-*
- *η κατεύθυνση της τροχιάς μια δοσμένη στιγμή και*
- *η πραγματική τελική θέση της τροχιάς. (σελ. 31, 38-39)*



Σχήμα 1.2. **Σχήμα πηγή-τροχιά-στόχος (source-path-goal schema)**

1.4.2 Πλασματική κίνηση

Είναι ένα ειδικό εικονικό σχήμα που συνδέεται με την κίνηση. Είναι μέρος του *σχήματος* πηγή-μονοπάτι-στόχος (source-path-goal). Οι Lakoff και Núñez (2000) το βάφτισαν *πλασματική κίνηση* (fictive motion).

Ο Núñez (2004) προσπαθεί να δώσει απάντηση στο ερώτημα *Εάν πράγματι οι πραγματικοί αριθμοί κινούνται.* Έτσι μέσα από τρία παραδείγματα ανάλυσης από βιβλία των μαθηματικών θέτει το ερώτημα της *Προέλευσης της κίνησης.* Η άδηλη παρουσία της εντοπίζεται σε εκφράσεις που χρησιμοποιούνται από καθηγητές των μαθηματικών όταν διαπραγματεύονται αυτές τις έννοιες, όπως: «*τείνει*», «*πλησιάζει όλο και πιο πολύ», «απομακρύνεται όλο και πιο πολύ*», «*προσεγγίζει*», προκειμένου να οριστούν οι έννοιες αυτές. Η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών κι ο ορισμός της συνέχειας – κεντρικές έννοιες της Ανάλυσης, δεν περιέχει κανένα απολύτως στοιχείο που να

δικαιολογεί τη χρήση αυτών των φράσεων που δηλώνουν *κίνηση,* και που χρησιμοποιήθηκαν για την παρουσίαση των παραπάνω. Η εξέταση αυτών των παραδειγμάτων, από την οπτική της Ενσώματης Γνώσης, καταλήγει ότι η κίνηση αναδύεται μέσω της χρήσης των εννοιολογικών μεταφορών που βρίθουν στα άνω παραδείγματα, όπου αντιμετωπίζονται ως δυναμικές ολιστικές οντότητες. Ο μηχανισμός που βοηθά στη *σύλληψη στατικών εννοιών με δυναμικούς όρους* είναι η πλασματική (fictive) κίνηση, που αποτελεί το βασικό ενσώματο Γνωστικό Μηχανισμό που «ευθύνεται» για την κίνηση. Χάρη σε αυτήν, μπορούμε να συλλάβουμε στατικές οντότητες με δυναμικό τρόπο και είναι μεταφορική κυριολεκτικά καθώς π.χ. το σημείο, είναι μια οντότητα χωρίς διαστάσεις, όχι πραγματική αλλά μεταφορική, και άρα και η κίνησή του θα είναι κι αυτή μεταφορική.

Καταλήγει ότι: Οι πραγματικοί αριθμοί τελικά κινούνται, με τη μεταφορική έννοια, ως Μεταφορικές Οντότητες που είναι. Οι εννοιολογικές μεταφορές και η πλασματική κίνηση, που είναι εκδηλώσεις εξαιρετικά γρήγορων, υψηλής αποδοτικότητας και αβίαστων γνωστικών μηχανισμών κι επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων, παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη δημιουργία υπόστασης σε πολλές μαθηματικές έννοιες.

Η Ferrara (2003) αναλύει το γνωστικό μηχανισμό της πλασματικής κίνησης. Αναφέρει ότι όταν ένας συλλαμβάνει τις στατικές και κινητές πτυχές μιας συνεχούς καμπύλης, ενεργοποιεί τη λεγόμενη *μεταφορά* της πλασματικής κίνησης. Ο ορισμός που δίνεται από Núñez είναι: «*γραμμή είναι η κίνηση ενός ταξιδιώτη κατά μήκος αυτής της γραμμής*» (Núñez et al, 1999). Επομένως, η πλασματική κίνηση είναι η μεταφορική εκδήλωση μιας γραμμής, υπό την οπτική της κίνησης.

Η πλασματική κίνηση έχει να κάνει με μια τροχιά (μια δυναμική οντότητα) και ένα τοπίο (μια στατική οντότητα), στην οποία η τροχιά κινείται. Η κίνηση της τροχιάς παράγει μια στατική γραμμή, η οποία είναι το αντικείμενο το οποίο παράγεται μέσω μιας διαδικασίας συνδεδεμένης με την κίνηση όπως εκείνης του χεριού ή του μολυβιού. Συνέπεια αυτού είναι πως μια στατική κατάσταση μπορεί να συλληφθεί με δυναμικό τρόπο (σαν αντικείμενο και διαδικασία ταυτόχρονα –procept, αν αναφερθούμε στην δουλειά των Gray και Tall, 1994).

1.5 Μεταφορές Θεμελίωσης (grounded) – Μεταφορές Σύνδεσης (linking)

Οι Lakoff και Núñez (2000) υποστηρίζουν ότι υπάρχουν δυο είδη εννοιολογικών μεταφορών που χρησιμοποιούνται για τη μετάβαση από την εναρίθμηση, τη μέτρηση και την απλή αριθμητική των νεογέννητων στη βασική αριθμητική των φυσικών αριθμών και συνεχίζουν:

«*Έχουμε ενσώματα (embodied) μυαλά και οι εμπειρίες μας παρέχουν τα βασικά εργαλεία για σκέψη. Εμπειρίες όπως η τοποθέτηση αντικειμένων σε δοχεία, ταξιδεύοντας από μία χώρα στην άλλη, αντικειμένων που πέφτουν στο έδαφος είναι τόσο κοινές και τόσο θεμελιώδεις στον κόσμο μας που εισχωρούν στο νου μας ως παραδείγματα, είτε έχουμε επίγνωση αυτού είτε όχι.*»

Αποκαλούν αυτές τις μεταφορές *θεμελίωσης* (grounded) για τη δημιουργία αφηρημένης σκέψης. Ονομάζονται έτσι διότι συνδέουν άμεσα μια περιοχή αισθησιοκινητικής εμπειρίας με μια περιοχή των μαθηματικών. Αυτές συνήθως χρειάζονται πρότερη διδασκαλία, όχι μεγάλης όμως έκτασης. Οι Boero, Bazzini και Garuti (2001) ορίζουν τις μεταφορές *θεμελίωσης* ως αυτές που θεμελιώνουν την κατανόηση μας για τις μαθηματικές ιδέες αναφορικά με την καθημερινή μας εμπειρία, δηλαδή τις καθημερινές σωματικές δράσεις και σχέσεις.

1.5.1 Οι τέσσερις Βασικές Μεταφορές Θεμελίωσης.

Ο Lakoff υποστηρίζει ότι αυτές οι μεταφορές είναι τόσο βαθιά ενσωματωμένες στη γλώσσα μας που πλέον γίνονται ασυνείδητα. Οι μεταφορές αυτές δεν είναι δημιουργήματα της φαντασίας.

1. Η μεταφορά Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ συναντάται σε εκφράσεις της καθημερινής ζωής όπως : «*πρόσθεσε κρεμμύδι στη σούπα», «βγάλε τα βιβλία από το χαρτόκουτο»* για την πράξη της πρόσθεσης κι αφαίρεσης αντίστοιχα.
2. Η μεταφορά Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ συναντάται στο Λατινικό Σύστημα Αρίθμησης όπου για παράδειγμα προσθέτω ένα αριθμητικό μέρος στο VI για να πάρω το VII.

3. Η μεταφορά της ΡΑΒΔΟΥ αποτελείται από τμήματα που ενώνονται για να σχηματίσουν μεγαλύτερα μέρη. Έτσι υπάρχουν και μέρη σώματος που μπορούν να επιτελέσουν αυτή τη λειτουργία όπως για παράδειγμα η μέτρηση ενός μήκους με μονάδα το μήκος του ποδιού, ο δείκτης του χεριού, ο βραχίονας κλπ

4. Η μεταφορά Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΤΡΟΧΙΑ συναντάται σε εκφράσεις της καθημερινής ζωής όπως : «*το 3 είναι μακριά από το 77*» «*μέτρα μέχρι το 1123 αρχίζοντας από το 11*»

Πίνακας **1.1.** ***Οι 4 Πράξεις μέσα από την Οπτική των Μεταφορών Θεμελίωσης***

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ	**Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ**	**Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ**	**Η ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΗΣ ΡΑΒΔΟΥ**	**Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΤΡΟΧΙΑ**
Φυσική δραστηριότητα	Χειρισμός	Χειρισμός	Χειρισμός	Περπάτημα
Οι Αριθμοί είναι…	Συλλογή Αντικειμένων	Όλον με μέρη	Φυσικά τμήματα	Σημεία σε μια Γραμμή
Η Πρόσθεση είναι …	Πρόσθεση Αντικειμένων	Πρόσθεση μερών	Ένωση διαδοχικών τμημάτων	Η μετακίνηση από το σημείο Αναφοράς
Η Αφαίρεση είναι…	Αφαίρεση Αντικειμένων	Αφαίρεση μερών	Διαχωρισμός τμημάτων	Η μετακίνηση προς το σημείο Αναφοράς.
Επεκτάσεις	Φυσικοί αριθμοί	Φυσικοί αριθμοί και Κλάσματα	Φυσικοί αριθμοί, Κλάσματα και Άρρητοι	Φυσικοί αριθμοί, Κλάσματα, Άρρητοι και Πραγματικοί
Ιδιότητες	Διακριτά μεγέθη	Διακριτά μεγέθη	Διακριτά μεγέθη	Συνεχή μεγέθη

Οι Lakoff και Núñez (2000, σελ 102) υποστηρίζουν πως η επιλογή αυτών των τεσσάρων βασικών μεταφορών δεν είναι αυθαίρετη· η καθεμία δημιουργεί τον κατάλληλο συγκερασμό με την εγγενή αριθμητική (πίνακας 1.1) ώστε να εγείρει τις ανάλογες μεταφορικές αντιστοιχίσεις, ώστε τα συμπεράσματα που απορρέουν από το «πεδίο πηγή», να αντιστοιχήσουν σωστά στο «πεδίο-στόχος».

Οι μεταφορές *σύνδεσης* (linking) χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ αφηρημένων ιδεών, όπως οι αριθμοί είναι σημεία σε μια γραμμή, γεωμετρικά σχήματα ως αλγεβρικές εξισώσεις. Αυτές απαιτούν διδασκαλία μεγαλύτερης διάρκειας. Οι μεταφορές σύνδεσης είναι με πολλούς τρόπους οι πιο ενδιαφέρουσες, υποστηρίζουν οι Lakoff και Núñez (2000, σελ.150) καθώς συνιστούν μέρος των ίδιων των μαθηματικών.

Συμβαίνουν κάθε φορά που ένας κλάδος των μαθηματικών χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει έναν άλλον. Επίσης οι μεταφορές σύνδεσης δεν χρησιμοποιούνται μόνο για τη δημιουργία νέων μεταφορών αλλά και νέων κλάδων των μαθηματικών. Η αναλυτική Γεωμετρία, η τριγωνομετρία αλλά και η μιγαδική ανάλυση χρωστούν την ύπαρξη τους στις μεταφορές σύνδεσης. Η Presmeg (1998) αναφέρει ότι ο Leibniz προκειμένου να κατανοήσει την έννοια των φανταστικών αριθμών κατέφυγε στο βασίλειο των *αμφιβίων* και θεώρησε ως τέτοια τους φανταστικούς αριθμούς, *που κινούνται μεταξύ του είναι και του μη –είναι.*

1.6 Περιορισμοί

Όμως, υποστηρίζει η Sfard (1994) αναφορικά με τη φαντασία, ο μηχανισμός κατασκευής των μεταφορών είναι ένα δίκοπο σπαθί. Από τη μια είναι αυτό που εν πρώτοις δίνει ύπαρξη στο σύμπαν των αφηρημένων ιδεών, από την άλλη, ωστόσο, οι «μεταφορές που βιώνουμε» θέτουν φανερούς περιορισμούς στη φαντασία και κατανόηση μας, οι οποίες μπορούν να φτάσουν στο σημείο εκείνο που οι μεταφορικές δομές τους επιτρέπουν. Ο «κληρονομικός» λοιπόν μηχανισμός που αποτελεί το θεμέλιο κατασκευής των μεταφορών έχει κάποια μειονεκτήματα.

Οι λόγοι είναι οι παρακάτω: Πρώτον, λόγω της βιωματικής προέλευσης της ιεραρχικής αλληλουχίας των μεταφορών, οι διάφοροι περιορισμοί στην φαντασία μας-οι βασικές παρενέργειες της σωματικότητας (embodiment), μεταβιβάζονται ως γενετικά χαρακτηριστικά από τη μια γενιά των αφηρημένων εννοιών στην άλλη. Η φαντασία και συλλογισμοί μας περιορίζονται λόγω της αισθητηριακής μας εμπειρίας, κι ακόμα κι όταν καταφέρουμε να κάνουμε μια αναγνωριστική έξοδο, πέραν των περιορισμών του φυσικού μας φακού, μια τέτοια κίνηση επειδή είναι επιβαλλόμενη συνειδητά δεν μπορεί παρά να είναι προσωρινή. Δεύτερον, όταν η αφηρημένη κατασκευή υποστηρίζεται από ένα ενσώματο σχήμα, η αντίληψη των κύριων χαρακτηριστικών του είναι κατά πολύ όμοια με την αντίληψη των ιδιοτήτων του φυσικού μας σώματος: είναι *άμεσο*, *ολιστικό* και πάνω από όλα βασίζεται στην *αναλογία* αντί για την συστηματική λογική διαδικασία εξαγωγής συμπεράσματος. Αυτό προέκυψε από τις συνεντεύξεις της όπου όλοι οι μαθηματικοί στην προσπάθεια τους να εξηγήσουν την ικανότητα τους να «προειδούν» τη συμπεριφορά των μαθηματικών εννοιών έκαναν κατ΄ επανάληψη αναφορές στην «ομοιότητα με γνωστά» γεγονότα.

1.7 Μεταφορική Σκέψη

Η νοηματοδότηση των αφηρημένων νοητικών συλλήψεων σε διακριτούς όρους, γίνεται χρησιμοποιώντας τους τρόπους λογισμού που βασίζονται στο αισθησιοκινητικό σύστημα κι αυτό συνιστά την μεταφορική σκέψη.

Στοιχεία της είναι οι εννοιολογικές μεταφορές και τα σχήματα εικόνων.

Υπάρχουν δυο βασικοί τύποι μαθηματικής σκέψης κατά την Sfard: ο διαδικαστικός, και ο δομικός. Η εκπραγμάτωση (reification) που είναι η ενέργεια της δημιουργίας των κατάλληλων αφηρημένων οντοτήτων, είναι η μετάβαση από ένα διαδικαστικό σε ένα

δομικό ενσώματο σχήμα. Με αυτήν την έννοια είναι η γέννηση μιας μεταφοράς που δίνει σε ένα μαθηματικό αντικείμενο υπόσταση και ως εκ τούτου βαθαίνει την κατανόηση μας. Η άξαφνη εμφάνιση της εκπραγμάτωσης είναι και η ταυτόχρονη στιγμή της πραγματικής κατανόησης. Κι όμως ακριβώς λόγω των περιορισμών που θέτει στη φαντασία μας, η αισθητηριακά αποκτηθείσα γνώση, η εκπραγμάτωση είναι τελικά εγγενώς δύσκολη.

Ένα διαδικαστικό σχήμα φέρει στην περιοχή του αφηρημένου μια μεταφορά δραστηριότητας, όπου χειριζόμαστε συγκεκριμένα αντικείμενα για να πάρουμε άλλα συγκεκριμένα αντικείμενα. Ως τέτοιο, είναι ένα σχήμα δράσης. Από την άλλη, το δομικό ενσώματο σχήμα, μεταφέρει ένα τελείως διαφορετικό οντολογικό μήνυμα, για ένα μόνιμο όμοιο με αντικείμενο κατασκεύασμα πάνω στο οποίο μπορούμε να δράσουμε προκειμένου να παράγουμε άλλα κατασκευάσματα. Το δεύτερο σχήμα είναι πιο ολιστικό.

Οι Lakoff και Núñez (2000, σελ 6) διατείνονται ότι πολλές από τις παρανοήσεις, αινίγματα και φαινομενικά παράδοξα των μαθηματικών προκύπτουν επειδή οι εννοιολογικές μεταφορές, που είναι μέρος τους, δεν αντιμετωπίζεται μεταφορικά αλλά κυριολεκτικά. Όταν αποκαλυφθεί πλήρως ο μεταφορικός χαρακτήρας των μαθηματικών, οι παρανοήσεις τέτοιας μορφής και τα παράδοξα εξαφανίζονται. Είναι σημαντικά στοιχεία της μαθηματικής σκέψης, κι όχι απλά βοηθητικοί μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για οπτικοποίηση ή διευκόλυνση της κατανόησης. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη μεταφορά ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΑ που ήταν κεντρική στο Κίνημα των θεμελίων των μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα. Η Αριθμητική προϋπήρχε για πάνω από 2 αιώνες χωρίς την ανάγκη αυτής της μεταφοράς. Με τη χρήση όμως αυτής της μεταφοράς, μορφές συλλογισμού για τα σύνολα βρίσκουν εφαρμογή στους αριθμούς. Μόνο με τη χρήση αυτής της μεταφοράς το πρόγραμμα των κλασικών θεμελίων των μαθηματικών μπορεί να έχει υπόσταση.

1.7.1 Τα προτερήματα του Μεταφορικού συλλογισμού

Κάνοντας χρήση της διαισθητικής τους γνώσης, οι μαθητές μπορούν να συλλογίζονται μεταφορικά προκειμένου να κατασκευάσουν νέες μαθηματικές έννοιες, να συνδέσουν μαθηματικές ιδέες, να βελτιώσουν τη μνήμη ανάκλησης των σχετιζόμενων μαθηματικών ιδεών, να έχουν λογικό ειρμό οι μαθηματικές τους αναπαραστάσεις, και να εκτελούν υπολογισμούς. Τα προτερήματα του μεταφορικού συλλογισμού συνοπτικά είναι τα παρακάτω:

1.7.1.1 Ενσωματώνοντας (integrating) καθημερινές δράσεις στις έννοιες στόχου.

Ο Chiu (2001 σελ. 19) σε μια μελέτη του (1998) έδειξε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν μια μεταφορά προκειμένου να συνδέσουν μεταξύ τους έννοιες του *στόχου* με την κοινή *πηγή* διαμέσου των σχέσεών τους. Σε εκείνη τη μελέτη, οι μαθητές έδειξαν την κατανόηση της πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κάνοντας χρήσης μεταφορών όπως, Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΙΝΗΣΗ. Ένας μαθητής είπε ότι ο πολλαπλασιασμός [-2x3] είναι σαν να κάνεις στροφή και μετά δυο βήματα μεγέθους τρία κι έτσι παίρνεις [-(3+3)], δηλαδή -6. Κι έτσι ο πολλαπλασιασμός θεωρείται επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (επαναλαμβανόμενα βήματα). Τη διαίρεση ο ίδιος μαθητής την είδε ως αντίθετη πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγοντας ότι [-8/-4] είναι 2 καθώς κάνεις 2 βήματα μεγέθους -4 για να φτάσεις στο -8. Έτσι στο 4/0 ξεκινάς από το 4 και πρέπει να επιστρέψεις στο σημείο αναφοράς 0 με βήματα μεγέθους 0, γεγονός αδύνατο ενώ στο 0/0, ξεκινάς από το 0 για να φτάσεις στο 0 με οποιοδήποτε πλήθος βημάτων μεγέθους 0, κι άρα απροσδιόριστου αριθμού. Έτσι ο μεταφορικός συλλογισμός μπορεί να ενσωματώσει (integrate) τις αριθμητικές πράξεις και τις μαθηματικές έννοιες του αδύνατου κι αόριστου με τη βοήθεια δράσεων και σχέσεων (σε αυτή την περίπτωση την *κίνηση*) στην πηγή.

Κάτω από την ομπρέλα της ενσωμάτωσης εμπεριέχεται η κατανόηση της έννοιας και η σύνδεση εννοιών μεταξύ τους (Chiu, 2001, σελ. 94).

1.7.1.2 Βελτιώνοντας την ανάκληση μαθηματικών σχέσεων.

Οι Reynolds and Schwartz (1983) στον Chiu (2000, σελ. 20) έδειξαν ότι οι άνθρωποι που κωδικογραφούσαν πληροφορίες με τη βοήθεια των μαθηματικών ανακαλούσαν περισσότερες πληροφορίες. Ξεκινώντας με συνδέσεις μεστές νοήματος με την πηγή και προβάλλοντας τις στις οντότητες στόχου, δημιουργούνται συνδέσεις μεταξύ της πηγής στόχου αλλά κι εντός του στόχου. Αν θεωρήσουμε τον τύπο της περιμέτρου ενός πολυγώνου, όπως ερμηνεύεται από την μεταφορά ΟΙ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ, τότε η περίμετρος του πολυγώνου συνίσταται από το άθροισμα των βημάτων που βαδίζει κάποιος αν ξεκινήσει από μια τοποθεσία και διατρέξει όλη την πολυγωνική γραμμή μέχρι να φτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Οι συνδέσεις του Στόχου με την Πηγή περιλαμβάνουν: Η περίμετρος είναι ο συνολικός αριθμός βημάτων, οι πλευρές του πολυγώνου είναι μέρη της διαδρομής, οι διαδοχικές πλευρές είναι διαδοχικά μέρη της διαδρομής και το μήκος των πλευρών είναι ο αριθμός των βημάτων που χρειάζονται για να διατρέξει ένας την πλευρά

αυτή. Ο Anderson (1985) στον Chiu (2000, σελ. 20) έδειξε ότι όταν γίνεται ανάκληση οποιωνδήποτε από αυτά τα κομμάτια πληροφορίας, οι νέες συνδέσεις παρέχουν επιπρόσθετα μέσα προκειμένου να τεθούν σε λειτουργία τα εναπομείναντα κομμάτια πληροφορίας. Έτσι, αυξάνεται η πιθανότητα ανάκλησης όλων των σχετιζόμενων εννοιών. Με τη δημιουργία τέτοιων επιπρόσθετων συνδέσεων, ο μεταφορικός συλλογισμός βελτιώνει την ανάκληση των μαθηματικών σχέσεων (Chiu, 2001, σελ. 94).

1.7.1.3 Αντίληψη των αναπαραστάσεων.

Ο μεταφορικός συλλογισμός επίσης αποτελεί τη βάση για την ερμηνεία πολλών αναπαραστάσεων καθώς και μαθηματικών εννοιών. Η αναπαράσταση, όπως την ορίζει στο άρθρο του ο Chiu (2000, σελ. 21) αναφέρεται σε ένα οποιαδήποτε ερέθισμα που μπορεί να είναι προσβάσιμο με τις αισθήσεις, όπως ζωγραφιές, χειρονομίες ή ομιλία που το ακροατήριο διερμηνεύει. Πολλές μαθηματικές αναπαραστάσεις, όπως τα διαγράμματα Venn, η αριθμογραμμή, και τα γραφήματα βασίζονται σε μεταφορικά συμπεράσματα που εξάγονται από την κατανόηση της έννοιας του χώρου από το άτομο. Η διαμεσολάβηση της χωρικότητας (spatiality) αποτελεί την κεντρική ιδέα στο σχηματισμό της ανθρώπινης λογικής (Lappas & Spyrou, 2003). Ο Lakoff (1987) έδειξε ότι η κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων στην αναπαράσταση του συνόλου $A \subseteq B$. αξιοποιεί το συλλογισμό διαμέσου του μεταφορικού περιορισμού ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΔΟΧΕΙΑ και αποτελεί τη βάση για τη λογική προκύπτουσα πρόταση και την άλγεβρα Boole των κλάσεων.

1.7.1.4 Διευκολύνει τους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Ο Chiu (1996a, 2001) έδειξε ότι ο μεταφορικός συλλογισμός μπορεί να διευκολύνει τους υπολογισμούς διαμέσου των μεταφορικών υπολογισμών και των μεταφορικών περιορισμών. Μαθητές Γυμνασίου χρησιμοποίησαν τη μεταφορά Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΧΕΙΡΙΣΜΌΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ, για να υπολογίσουν [-5+8]. Ένας μαθητής ανέφερε, «*το -5 είναι πέντε τρύπες*», και τις ζωγράφισε στο χαρτί του, «*και το 8 είναι οκτώ βόλοι*», ζωγράφισε 8 κουκίδες για βόλους «*κι έτσι οι πέντε τρύπες καταπίνουν πέντε από τους βόλους κι έτσι απομένουν τρείς βόλοι κι άρα η απάντηση είναι συν τρία* ». Έτσι η πράξη της πρόσθεσης μετατράπηκε σε μια δράση συνδυασμού από τρύπες και βόλους. Αντίθετα, μια άλλη μαθήτρια χρησιμοποίησε ένα μεταφορικό περιορισμό για το ίδιο πρόβλημα, λέγοντας ότι τα θετικά *εξαλείφουν* τα αρνητικά κι έτσι απομένουν μόνο θετικά, καταλήγοντας κι αυτή στο αποτέλεσμα +3.

Σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον που ενισχύεται με το μεταφορικό συλλογισμό, οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν με τη χρήση του μεταφορικού συλλογισμού για να κατανοήσουν νέες έννοιες, συνδέσουν μαθηματικές ιδέες, βελτιώσουν την ανάκληση, κατανοήσουν τις μαθηματικές αναπαραστάσεις και βελτιώσουν τους υπολογισμούς. Έτσι:

- *η κατανόηση της πηγής από το άτομο παρέχει τη δυνατότητα για μεταφορικό συλλογισμό. Διευκολύνει και περιορίζει τη συλλογιστική διαμέσου και των μεταφορών θεμελίωσης αλλά και των μεταφορών σύνδεσης.*
- *η κατανόηση του στόχου τον περικόπτει. Για παράδειγμα, μέσω της συλλογιστικής ΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΧΡΩΜΑΤΑ (Nolder, 1991), οι μαθητές μπορεί να συμπεράνουν μεταφορικά ότι επειδή ο αριθμός των χρωμάτων είναι πεπερασμένος, θα πρέπει να υπάρχει και πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών και*
- *οι προβολές της πηγής στο στόχο ορίζουν ρητώς, τα πραγματικά μεταφορικά συμπεράσματα Chiu (2000, σελ. 22).*

Ο Chiu (1996a) έδειξε ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν μεταφορές όταν ασχολούνται με τετριμμένα αριθμητικά προβλήματα, αλλά μπορούν να τα περιγράψουν όταν τους ζητηθεί. Ωστόσο, σε δύσκολα προβλήματα ακόμα και οι ειδικοί ανατρέχουν πάλι στη χρήση μεταφορικών συλλογισμών και μάλιστα αλυσίδας μεταφορών. Ειδικά για τις μεταφορές θεμελίωσης, ο βαθμός εξοικείωσης του ατόμου με τη διαισθητική πηγή του επιτρέπει να ξαναδημιουργήσει τις μεταφορικές προβολές από την πηγή στο στόχο. Άρα, καταλήγει, ο μεταφορικός συλλογισμός έχει το ρόλο μιας μόνιμης πηγής αντί μιας προσωρινής σκαλωσιάς. Αλληλεπικαλυπτόμενες μεταφορές αυξάνουν τη συνοχή της μαθηματικής κατανόησης και αντισταθμίζουν τους περιορισμούς της κάθε μιας μεταφοράς χωριστά. (Chiu, 2000, σελ. 26).

1.7.2 Σύγκριση με άλλα είδη συλλογισμού

Ο Peirce, ένας σύγχρονος ιδρυτής της σημειολογίας, είδε τις μεταφορές, σε διάφορα συγγράμματα του, ως τη βάση για το συμπερασματικό (inferential) συλλογισμό στις επιστήμες και ως ένα γνωσιακό οδηγό για το *σχεδιασμό των διαγραμμάτων* που δημιουργούνται σκόπιμα για την απεικόνιση των επιστημονικών θεωριών (Peirce 1931–1958). Ο Chiu (2000) για να διευκρινιστεί περαιτέρω ο μεταφορικός συλλογισμός μας προτρέπει να σκεφτούμε πώς αυτός διαφέρει από πέντε συναφείς μορφές συλλογισμού, τις παρακάτω:

1.7.2.1 Συλλογισμός κοινών σημείων (intersection reasoning).

Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι ένα άτομο μαθαίνει ιδιότητες που είναι κοινές για την πηγή και το στόχο μέσω του συλλογισμού των κοινών σημείων (Lesh, Landau & Hamilton, 1983, Nolder, 1991). Για παράδειγμα, ένας αρχάριος μπορεί να μάθει για τους ζυγούς αριθμούς αναγνωρίζοντας ότι τόσο τέσσερα σκυλιά όσο και έξι καρέκλες έχουν ως κοινή ιδιότητα το γεγονός ότι μπορούν να διαταχθούν σε δύο ισοδύναμες σειρές. Προκειμένου ένας να αναγνωρίσει τις κοινές σχέσεις ανώτερης τάξης, πρέπει πριν να συμβεί ο συλλογισμός αυτός, να τις προβάλλει στο στόχο. Ως εκ τούτου, ο συλλογισμός κοινών σημείων απαιτεί πρότερη σημαντική κατανόηση του στόχου, στη συγκεκριμένη περίπτωση ότι οι ζυγοί αριθμοί διαιρούνται με το δυο. Αν κάποιος γνωρίζει λίγα πράγματα για το στόχο, δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτήν τη συλλογιστική.

Σε αντίθεση με αυτές τις αμφίδρομές οπτικές, , ο μεταφορικός συλλογισμός εστιάζει σε μια μονόδρομη προβολή της πηγής στο στόχο. Τέλος, ο μεταφορικός συλλογισμός, απαιτεί επίσης ελάχιστη γνώση του στόχου και προβάλλει τις ιδιότητες της πηγής μονόδρομα στο στόχο για την δημιουργία νέων κοινών σημείων.

1.7.2.2 Συλλογισμός βασιζόμενος σε παραδείγματα.

Η συλλογιστική μέσω παραδειγμάτων (Rissland, 1985) ή συλλογισμός βασιζόμενος στην περίπτωση (Kolodner, 1992) χρησιμοποιεί επίσης μια προηγούμενη κατάσταση όπως ο μεταφορικός συλλογισμός. Ωστόσο, ένας στοχαστής που βασίζεται στο παράδειγμα αναζητά μια προηγούμενη πηγή που είναι σχεδόν *ταυτόσημη* με τη σημερινή κατάσταση του προβλήματος. Αντίθετα ο μεταφορικός συλλογισμός, χρησιμοποιεί μια εκ φύσεως διαφορετική πηγή. Μετά τη αντιστοίχιση των κατάλληλων οντοτήτων από την πηγή στο στόχο, το άτομο που βασίζει το συλλογισμό του στα παραδείγματα προσπαθεί να επαναλάβει τις δράσεις του με βάση την προηγούμενη λύση. Ο Συλλογισμός που βασίζεται στα παραδείγματα επιτυγχάνει εύκολα σε προβλήματα, όπου ο μαθητής εργάζεται σε αυστηρά υπολογιστικό επίπεδο και αρκεί να αντικαταστήσει τους αριθμούς.

Ωστόσο, σε προβλήματα πιο σύνθετα επειδή οι λύτες του προβλήματος που χρησιμοποιούν το παράδειγμα προσπαθούν να αναπαράγουν την προηγούμενη λύση, θα πρέπει να επικαλούνται εναλλακτικές μεθόδους για την αντιμετώπιση των διαφορών μεταξύ της πηγής και του στόχου (Kolodner, 1992). Σε αντίθεση, ο μεταφορικός συλλογισμός χρησιμοποιεί μια πηγή που είναι *εγγενώς διαφορετική* από το στόχο.

1.7.2.3 Συμβολικό παιχνίδι.

Το Συμβολικό παιχνίδι είναι ένα συναρπαστικό άλμα από τα πρώτα στάδια του παιχνιδιού. Όπως τα παιδιά μετακινούν την εστίαση τους από τα χαρακτηριστικά και τη λειτουργία του αντικειμένου (π.χ., παιχνίδι) εστιάζοντας στην έννοια πέρα και πάνω από το αντικείμενο (το ραβδί γίνεται ένα ξίφος), βλέπουμε ένα απίστευτο βήμα στην ικανότητα των παιδιών να κατανοήσουν ότι αυτό μπορεί να αντιπροσωπεύει κάτι με κάτι άλλο.

Αυτή είναι η έλευση της συμβολικής λογικής, και είναι ύψιστης σημασίας για την πρώιμη ανάπτυξη του αλφαβητισμού. Τα παιδιά σκέφτονται συγκεκριμένα. Με το παιχνίδι, ωστόσο, ξεδιπλώνεται στα μάτια τους ένας καινούργιος κόσμος. Σε αντίθεση με το μεταφορικό συλλογισμό, τα παιδιά που εμπλέκονται με το συμβολικό παιχνίδι δεν αποκτούν νέα κατανόηση του φυσικού τους περιβάλλοντος (Dent-Read & Szokolsky, 1993), και οι ιδιότητες της πηγής υπερισχύουν των ιδιοτήτων του στόχου. Στο μεταφορικό συλλογισμό όμως, οι ιδιότητες του στόχου υπερισχύουν των ιδιοτήτων της πηγής κατά τις συγκρούσεις, διότι σκοπός είναι να βγει νόημα για το στόχο. Εν ολίγοις, ένα πρόσωπο εμπλέκεται στο συμβολικό παιχνίδι για να διερευνήσει την πηγή ενώ συλλογίζεται μεταφορικά για να κατανοήσει το στόχο.

1.7.2.4 Συμβολική διευκολυντική της μνήμης.

Η συμβολική διευκολυντική[1] της μνήμης βασίζεται στην εύνοια των τυχαίων ανακαλύψεων της επικοινωνίας ή μέσων εγγραφής, όπως ομιλίας ή γραφής, ώστε να κωδικοποιηθεί ένα μνημονικό βοήθημα. Είναι ανεξάρτητες από το υφιστάμενο εννοιολογικό νόημα και εξαρτώνται αποκλειστικά από τις αντιληπτικές νύξεις και μετασχηματισμούς του μέσου αναπαράστασης.

Παρηχήσεις όπως: οι πλευρές του τετραγώνου είναι ιδίου μεγέθους - square's sides are the same size) και ποιήματα, όπως: τα πλοία που έπλεαν δύο πλάι σε τρία, μόλις έξι κουκκίδες μες τη θάλασσα- *the ships sailed two by three, just six dots in the sea*) μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να θυμούνται μαθηματικές σχέσεις. Ή, τα παιδιά μπορούν να μάθουν ότι το 7 - (-2) = 7 + 2 με το να φαντάζονται ότι το ένα από δυο *πλην* «-» αντιστοιχεί σε περιστροφή ενενήντα μοιρών του εαυτού του και κίνηση προς το άλλο *πλην* «-» για να

[1] Διευκολυντική της μνήμης είναι μια συμβολική ετικέτα της οποίας το όνομα υπαινίσσεται αυτό που αντιπροσωπεύει

σχηματίσει ένα «+». Αντίθετα, ο μεταφορικός συλλογισμός δεν εξαρτάται από μια συγκεκριμένη σημειογραφία ή γλώσσα.

1.7.2.5 Κατανεμημένος συλλογισμός (distributed reasoning).

Τέλος, ο κατανεμημένος συλλογισμός εκμεταλλεύεται το άμεσο περιβάλλον απευθείας. Ο Gibson (1979) υποστήριξε ότι το περιβάλλον του ατόμου *προσφέρει* ιδιαίτερες συμπεριφορές. Επιπλέον, αυτές οι προσφορές είναι συγγενικές κι εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του προσώπου που ασκεί τη δραστηριότητα. Αρκετοί ερευνητές αναφέρουν τη συχνή προσφυγή τους στη χρήση του περιβάλλοντος προκειμένου να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα. Για παράδειγμα στην Lave (1988), ένας άνθρωπος έλαβε τα 3/4 των 2/3 από ένα φλιτζάνι τριμμένο τυρί χωρίς να κάνει κάποιο αριθμητικό υπολογισμό. Χρησιμοποιώντας ένα κύπελλο μέτρησης, πήρε τα 2/3 ενός φλιτζανιού σε τριμμένο τυρί. Μετά το χώρισε σε τέσσερα τμήματα με ένα μαχαίρι και αφαίρεσε το ένα από αυτά. Έτσι απλοποίησε ένα πιθανό πολλαπλασιασμό κλασμάτων και πρόβλημα μέτρησης σε μια μέτρηση και πρόβλημα διαμέρισης χρησιμοποιώντας το οικείο περιβάλλον του. Σε αντίθεση με τον κατανεμημένο συλλογισμό, ο μεταφορικός συλλογισμός προβάλλει μια διαφορετική προηγούμενη κατάσταση για να πλαισιώσει το πρόβλημα και όχι μόνο τη χρήση πόρων στο σημερινό φυσικό περιβάλλον.

Εν ολίγοις, η μεταφορική λογική διαφέρει από καθένα από τους παραπάνω συλλογισμούς όσον αφορά τουλάχιστον μία από τις παρακάτω ιδιότητες: πρότερη κατανόηση του στόχου, προβολή των διαφορετικών ιδιοτήτων στο στόχο, σκοπός κατανόησης του στόχου, εννοιολογικές σχέσεις, και οι σχέσεις που αφορούν δύο περιπτώσεις. Σε μεταγενέστερη έρευνά του ο Chiu (2001, σελ. 95) αναφέρει ότι ωστόσο ο μεταφορικός συλλογισμός έχει και πιθανά μειονεκτήματα καθώς οδηγεί σε αβάσιμα συμπεράσματα, αστήριχτες αιτιολογήσεις, ανεπαρκείς διαδικασίες, και είναι πιο αργή μέθοδος και λιγότερο αποτελεσματική σε σχέση με τα γεγονότα (facts) και τους αλγορίθμους.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Βασικές έννοιες των Μαθηματικών (Αριθμός-Ισότητα)

Τα κύρια ζητήματα που αναπτύσσονται σε αυτό το κεφάλαιο είναι αρχικά η ανάλυση των εννοιών του αριθμού (ακεραίου και ρητού) και της ισότητας. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση που ακολουθεί στοχεύει στη λεπτομερή καταγραφή των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν μέσα από τη διδασκαλία αυτών των εννοιών, αρχικά χωρίς τη χρήση μοντέλων. Κατόπιν παρουσιάζονται τα διδακτικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τις έννοιες αυτές. Παράλληλα παρουσιάζονται οι περιορισμοί και οι δυνατότητές τους με κύρια αναφορά στα πέντε μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνά μας: *ράβδος-αριθμογραμμή-θερμόμετρο-ζυγαριά και γεωμετρικό.*

2.1. Μετάβαση από τους Φυσικούς στους Ακεραίους

Από την άποψη της εννοιολογικής συγκρότησης η έννοια του ακεραίου αριθμού προϋποθέτει μια ριζική διαφοροποίηση της γενικής έννοιας του αριθμού. Η γενική έννοια του αριθμού, πρέπει να διακριθεί από την έννοια του *μεγέθους.* Ο Χασάπης (2000, σσ. 170-173) υποστηρίζει ότι η εννοιολογική αυτή διαφοροποίηση «*αριθμού*» και «*μεγέθους*», δεν είναι για τους μαθητές μια απλή νοητική διαδικασία καθώς απαιτεί μια συνολική εννοιολογική αναδιοργάνωση. Αυτό όμως προϋποθέτει ένα παραπέρα βήμα στην ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης. Η διαφοροποίηση αυτή έχει σαν συνέπεια τη ριζική τροποποίηση της έννοιας του μηδενός. Το «*μηδέν»*, ως έκφραση του πλήθους των στοιχείων του κενού συνόλου ή ως έκφραση της απουσίας μονάδων μια τάξης, κατά την αναγραφή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, χρειάζεται να επεκταθεί εννοιολογικά, ώστε να περιλαμβάνει την έννοια μιας αυθαίρετα ορισμένης «αρχής» σε μια *προσανατολισμένη κλίμακα* ακεραίων αριθμών.

2.1.1 Πτυχές της Έννοιας του Ακεραίου Αριθμού

Η διεθνής ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει προσδιορίσει τρεις κύριες πτυχές της κατανόησης της έννοιας του αρνητικού αριθμού: Η κατανόηση του συστήματος αρίθμησης, που αποτελείται από τους προσημασμένους αριθμούς και το σχετικό μέγεθος των αριθμών (κατεύθυνση & πληθικότητα) και η κατανόηση του

μηδενός. Η κατανόηση των αριθμητικών πράξεων, που συνίσταται κυρίως στον τρόπο που πρέπει να αντιμετωπιστεί η πράξη της αφαίρεσης. Η σημασία του αρνητικού προσήμου, καθώς μέχρι να συναντήσουν οι μαθητές τους ακέραιους, τα θετικά και τα αρνητικά πρόσημα, χρησιμοποιούνται μόνο στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως τελεστές (Kilhamn, 2008).

Όμως οι παραστάσεις με αριθμούς που έχουν πρόσημα συνιστούν για πολλά παιδιά πραγματικό πρόβλημα (Van de Walle,2005, σ. 583).

Πιο ειδικά: Οι Kullberg (2006) και Vlassis (2004) υποστηρίζουν ότι είναι σημαντικό να διασαφηνιστεί η διαφορά μεταξύ του προσήμου του αρνητικού αριθμού και του τελεστή της αφαίρεσης. Συχνά δημιουργούνται παρανοήσεις μεταξύ αυτών των δυο στους μαθητές. Οι διαφορετικές σημασίες του αρνητικού προσήμου μπορεί να περιγραφούν ως η *διαδικαστική* και η *δομική* πτυχή του προσήμου, όπου σε ένα αρκετά προγενέστερο στάδιο, γίνεται η γνωριμία των μαθητών με την πρώτη (*διαδικαστική*) από αυτές. Η πρώτη εκ των δυο ερευνητριών αναφέρει ότι τα αποτελέσματα ερευνών της έχουν δείξει ότι είναι προτιμότερο όταν μετράμε με αρνητικούς αριθμούς να αντιμετωπίζεται ως «η διαφορά» ή «η σύγκριση» μεταξύ δυο αριθμών παρά ως την κλασική μεταφορά του «βγάζω». Το σχετικό μέγεθος των αριθμών έρχεται σε σύγκρουση με τις εμπειρίες τους από το σύνολο των Φυσικών αριθμών (Gallardo και Rojano, 1994· Gallardo και Romero, 1999), στη διάταξη τους. Επίσης παρατηρείται μια *ασυνέπεια* (πίνακας 2.1) *ως προς τους κανόνες αρίθμησης που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς*(Θωμαΐδης, 2009, σσ.202-203). Έτσι:

Πίνακας 2.1. *Οι 4 Πράξεις στο Σύνολο των Φυσικών & των Ακεραίων*

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ		
ΠΡΑΞΗ	**ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**	**ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**
ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Ακολουθεί την φυσική αλληλοδιαδοχή των Φυσικών αριθμών	Η πρόσθεση μπορεί να προκαλεί ελάττωση
ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Ακολουθεί την φυσική αλληλοδιαδοχή των Φυσικών αριθμών	Η αφαίρεση μπορεί να προκαλεί αύξηση
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ	Το γινόμενο είναι μεγαλύτερο των παραγόντων	Το γινόμενο μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο των παραγόντων.
ΔΙΑΙΡΕΣΗ	Το πηλίκο είναι μικρότερο του Διαιρετέου	Το πηλίκο μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο του Διαιρετέου

Αυτή η απώλεια του νοήματος έχει ως συνέπεια η εκτέλεση των πράξεων με ακεραίους να εξαρτάται αποκλειστικά από την εφαρμογή των κανόνων, την εγκυρότητα των οποίων δεν μπορούν να ελέγξουν, εκτός της αποστήθισής τους. Επιπλέον η Κολέζα (2005, σ.265) τονίζει ότι η κατανόηση της αξίας θέσης στους ακεραίους αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση κι όχι απλά εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων. Η Sfard (1994) τονίζει ότι η εσωτερίκευση των αρνητικών αριθμών είναι το στάδιο απόκτησης άνεσης στην εκτέλεση της πράξης της αφαίρεσης. Προβλήματα επίσης ανακύπτουν και κατά την εισαγωγή της πράξης του πολλαπλασιασμού με προσημασμένους αριθμούς, αλλά σε ένα επόμενο στάδιο.

2.2 Μετάβαση από τους Ακεραίους στα Κλάσματα και τους Ρητούς

Η επέκταση της έννοιας των φυσικών με την προσθήκη των ακεραίων αριθμών δεν επιτρέπει την αριθμητική έκφραση της διαίρεσης δυο οποιωνδήποτε μέτρων διακριτών ή συνεχών μεγεθών. Έτσι η μετάβαση στους κλασματικούς αριθμούς προκύπτει ως μια αναγκαιότητα ποσοτικοποίησης και αριθμητικής έκφρασης των σχέσεων μεταξύ ενός «*μέρους*» και του «*όλου*» ενός μεγέθους ή γενικότερα μεταξύ οποιωνδήποτε μεγεθών. Παράλληλα, η προσθήκη των κλασμάτων δεν επιτρέπει την αριθμητική παράσταση της διαφοράς δυο οποιωνδήποτε μέτρων διακριτών ή συνεχών μεγεθών (Χασάπης, 2000, σελ. 175-176). Έτσι, σε επόμενο στάδιο, έχουμε την γενίκευσή της έννοιας του κλάσματος με την προσθήκη της έννοιας του ρητού αριθμού.

Ο Χασάπης (2000, σελ. 177) ορίζει ως ρητό αριθμό ένα *σύνολο κλασμάτων που εκφράζουν το ίδιο μέτρο*.

Η έννοια του *κλασματικού μέρους* (κλασματική μονάδα) συνδέεται αποκλειστικά με το *όλο*. Ο Kieren (1993) υποστηρίζει ότι το *κλασματικό μέρος αποτελεί* νοητικά και μπορεί να αποτελέσει και διδακτικά τη βάση για τη συγκρότηση της γενικότερης έννοιας του κλάσματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μοναδική ιδέα που μεταφέρον οι μαθητές από τους φυσικούς στα κλάσματα είναι η έννοια της *διαμέρισης* ή *μοιρασιάς* και η οποία αποτελεί ένα καλό σημείο αναφοράς για την εισαγωγή στην έννοια των κλασματικών μερών. Η γενική έννοια των κλασματικών μερών (ίσα μερίδια) περιλαμβάνει δύο βασικές πτυχές:

1. Το όλο συνίσταται από το *σωστό* αριθμό μερών·
2. όλα τα μέρη πρέπει να είναι *ισομεγέθη* (ίσα ή δίκαια μερίδια).

Τα κλασματικά μέρη είναι οι ακρογωνιαίοι λίθοι των κλασματικών εννοιών καθώς συνιστούν τα αντικείμενα των κλασμάτων. (Χασάπης, 2000 σελ. 182).

Η ποιοτική αυτή διαφορά των ρητών αριθμών από τους φυσικούς και τους ακεραίους (έκφραση συνεχών έναντι διακριτών μεγεθών) συνεπάγεται μια σειρά διαφορετικών χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων για τους ρητούς αριθμούς, που προκειμένου για τη νοητική ιδιοποίηση τους από τους μαθητές απαιτείται μια ριζική τροποποίηση της έννοιας του αριθμού. (Χασάπης, 2000, σελ. 178). Ο Van de Walle, J. (2005, σελ. 288) τονίζει ότι οι ρητοί είναι ο πρώτος χώρος στην εμπειρία των παιδιών όπου ένας αριθμός δεν αντιπροσωπεύει μια απαρίθμηση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μια σειρά από δυσκολίες που οι μαθητές συναντούν κατά την κατάκτηση της έννοιας του ρητού αριθμού, όπως προκύπτει από διάφορες έρευνες:

Η επιφανειακή ομοιότητα του ρητού αριθμού με τους φυσικούς και τους ακεραίους (συντίθεται ως ζεύγη ακεραίων αριθμών) συγκαλύπτει αυτή την ποιοτική διαφορά των μεγεθών που εκφράζουν.

Πιο ειδικά: Η θεώρηση της μονάδας του ρητού αριθμού ως ένα συνεχές μέγεθος έχει ως αποτέλεσμα την υπαγωγή της σε (υπο) διαιρέσεις, γεγονός που δεν ισχύει με τις μονάδες που απαριθμούνται τα διακριτά μεγέθη και άρα την αναγωγή των μέτρων σε κοινή μονάδα μέτρησης (το κλασματικό μέρος). Αυτό συνιστά την αναγκαιότητα μετατροπής των κλασμάτων σε «ομώνυμα», προκειμένου για την εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και αφαίρεσης (Χασάπης, 2000, σελ 177-188). Επιπλέον, η επιφανειακή αυτή ομοιότητα έρχεται σε σύγκρουση με τις μέχρι τότε τις εμπειρίες τους στη διάταξη τους. Επίσης παρατηρείται μια *ασυνέπεια* (πίνακας 2.2) *ως προς τους κανόνες αρίθμησης που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς* (Stafylidou και Vosniadou, 2004)). Έτσι:

Πίνακας 2.2. *Οι 4 Πράξεις στο Σύνολο των Φυσικών & των Ρητών*

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ		
ΠΡΑΞΗ	**ΣΥΝΟΛΟ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**	**ΚΛΑΣΜΑ**
ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Ακολουθεί την φυσική αλληλοδιαδοχή των Φυσικών αριθμών	Δεν ακολουθεί την φυσική αλληλοδιαδοχή των φυσικών αριθμών
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ	Το γινόμενο είναι μεγαλύτερο των παραγόντων	Το γινόμενο μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο των παραγόντων.
ΔΙΑΙΡΕΣΗ	Το πηλίκο είναι μεγαλύτερο του Διαιρετέου	Το πηλίκο μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο του

Η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών αριθμών είναι βασισμένη στις ιδιότητες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Τα προβλήματα επομένως που ανακύπτουν από τη δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση και διαχείριση των δεκαδικών αριθμών έχουν ανάλογες επιπτώσεις στην κατανόηση και διαχείριση των ρητών.

Πιο ειδικά: Απόρροια της μη κατανόησης της αξίας θέσης στους δεκαδικούς αριθμούς, είναι η επιφανειακή ανάγνωσή τους με ανάλογες συνέπειες στους ρητούς αριθμούς, τις εξής: Πρώτον, η εστία της προσοχής μετατοπίζεται στο μέτρο του «μέρους» (πλήθος διακριτών μονάδων) έναντι του μέτρου του «όλου» (ίσα μέρη στα οποία έχει διαμεριστεί ένα συνεχές μέγεθος). Δεύτερον, η δυσκολία σύλληψης της πυκνότητας των κλασματικών αριθμών που απεικονίζεται στην πυκνότητα της αριθμογραμμής (Stafylidoy και Vosniadou, 2004) καθώς μεταξύ δυο κλασμάτων υπάρχουν άπειροι άλλοι κλασματικοί αριθμοί (Psycharis, Latsi & Kynigos, 2009).
Μια άλλη δυσκολία εντοπίζεται στην αδυναμία των μαθητών να συλλάβουν τη διάκριση μεταξύ αυτών και τους αντίστροφους ακεραίων (πχ. θεωρούν ότι το 0.3 είναι ίσο με $\frac{1}{3}$) (Stacey, Helme & Steinle, 2001). Τέλος, θεωρούν ότι όλοι οι δεκαδικοί είναι αρνητικοί αριθμοί αφού το 0 είναι ακέραιος αριθμός κι άρα μεγαλύτερος από κάθε δεκαδικό.
Μια τρίτη εστία δυσκολίας των μαθητών είναι οι πολλαπλές ισοδύναμες αναπαραστάσεις ενός ρητού.

Μια διαφορετική πηγή των δυσκολιών των μαθητών με την έννοια των ρητών αριθμών είναι οι μέθοδοι διδασκαλίας τους.

Πιο ειδικά: μια σειρά ερευνητών (Phillipou και Christou, 1994) και (Moss και Case, 1999) υποστηρίζουν ότι η έμφαση στη διαδικαστική γνώση και την αλγοριθμική προσέγγιση, αναφορικά με τη διδασκαλία των ρητών αριθμών, κατατείνει στη μηχανική εφαρμογή των διαδικασιών και των κανόνων από τους μαθητές με αποτέλεσμα τη δυσκολία στην κατανόησή τους. Επίσης η πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων από τους καθηγητές των μαθηματικών, που είναι πιο κοντά στον τρόπο σκέψης ενός ενήλικα απ' ότι ενός παιδιού, έχουν ως αποτέλεσμα την ελλιπή κατανόηση των ρητών αριθμών από τους μαθητές και κατ΄ επέκταση τη δυσκολία μετατροπής τους από τη μια μορφή αναπαράστασής τους στην άλλη (Moss και Case, 1999).

2.2.1 Πτυχές της Έννοιας του Ρητού Αριθμού

Οι Behr, Lesh, Posh και Silver (1983), εισηγήθηκαν ένα θεωρητικό μοντέλο διδασκαλίας της έννοιας του ρητού αριθμού, συνδέοντας τις διαφορετικές πτυχές του με τις βασικές πράξεις στους ρητούς αριθμούς αλλά και την επίλυση προβλήματος.

Έτσι, για τους ρητούς αριθμούς διέκριναν τις πέντε παρακάτω νοητικές κατασκευές-*πτυχές:* Η πτυχή του μέρος-όλου, όπου κεντρική ιδέα είναι η διαμέριση μιας ποσότητας. Για το ρητό α/β, το όλο χωρίζεται σε β κομμάτια, κάθε κομμάτι συμβολίζεται με 1/β. Το α/β αναπαριστά τα α κομμάτια από τα β. Η πτυχή του πηλίκου, όπου αναφέρεται στο ρητό ως διαίρεση α αντικειμένων σε β ίσα μέρη. Για παράδειγμα οι Kieren (1993) και Marshall (1993) αναφέρουν ότι αν ζητηθεί να μοιράσουν 3 πίτσες σε 4 παιδιά, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι οι πίτσες θα μοιραστούν *δίκαια*, δηλαδή ισομερώς, σε τέταρτα και το κάθε παιδί θα πάρει τρία κομμάτια. Η πτυχή του λόγου α/β, όπου το κλάσμα ως *λόγος* αποδίδεται με την έννοια της σύγκρισης μεταξύ δύο ποσοτήτων (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου & Χριστοδουλίδου, 2006). Θεωρείται δηλαδή ως συγκριτικός δείκτης παρά ως αριθμός (Χασάπης, 2000, σελ. 188). (Οι λόγοι μπορεί να είναι εξωτερικοί (rate) (αντίστοιχα εσωτερικοί (ratio)). Η πτυχή του τελεστή, όπου τώρα ο τελεστής είναι ο πολλαπλασιαστής, με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η αρχική ποσότητα για να προκύψει η τελική ποσότητα. Η πτυχή του μέτρου, όπου η θεώρηση του ρητού α/β από την οπτική της *μέτρησης* ή ως *σημείου πάνω σε έναν άξονα,* προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος 1/β για τον καθορισμό μιας *απόστασης*. Έτσι η έννοια του ρητού τώρα έχει δυο υποστάσεις: ο αριθμός είναι η *τιμή του κλάσματος*, ενώ η απόσταση στην αριθμογραμμή το *μέτρο*.

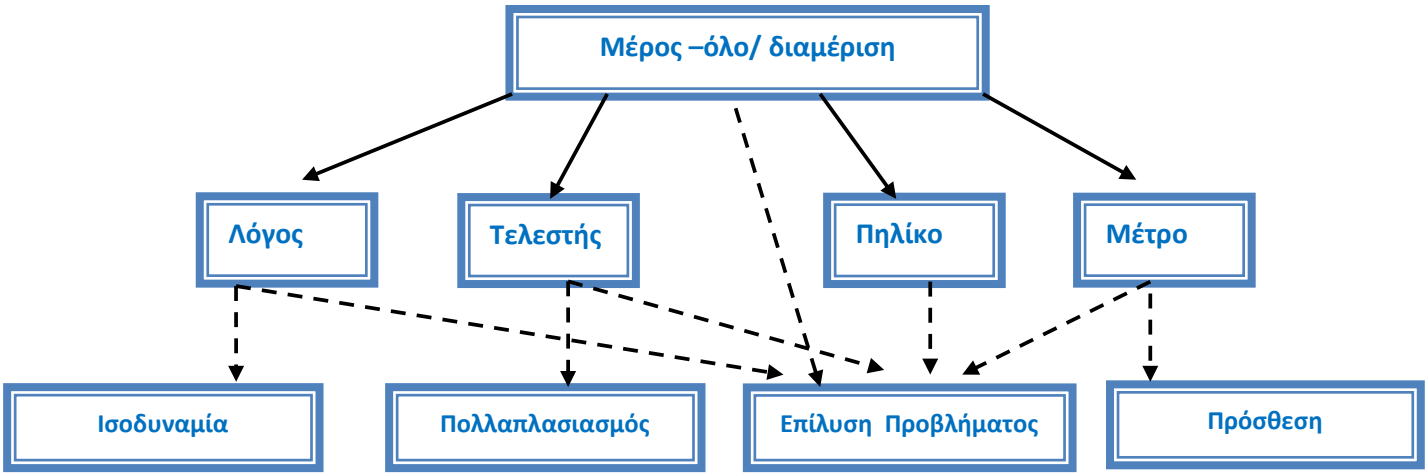
Πίνακας 2.3 ***Η Έννοια του Ρητού*** $\frac{3}{4}$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ $\frac{3}{4}$	
ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**
ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ	3 από τα 4 ίσα μέρη μιας ποσότητας ή συνόλου αντικειμένων ή συλλογής.
ΠΗΛΙΚΟ	Τα $\frac{3}{4}$ είναι το ποσό που κάθε άτομο παίρνει (3 διαιρούμενο με το 4).
ΛΟΓΟΣ	3 μέρη τσιμέντου προς 4 μέρη άμμου.
ΤΕΛΕΣΤΗΣ	$\frac{3}{4}$ από κάτι που είτε μικραίνει είτε μεγαλώνει (σμίκρυνση- μεγέθυνση).
ΜΕΤΡΗΣΗ	$\frac{3}{4}$ είναι η απόσταση 3 κλασματικών μερών (μοναδιαίων κλασμάτων ίσων με $\frac{1}{4}$) από την αρχή 0 την αριθμογραμμής.

Οι παραπάνω πτυχές έχουν ξεκάθαρους, πλήρεις και διακριτούς μεταξύ τους ρόλους (πίνακας 2.3)

Το διδακτικό μοντέλου που εισηγήθηκαν οι Behr et al (1983), αναπαρίσταται στο παρακάτω διάγραμμα (σχήμα 2.1)

Σχήμα 2. 1. **Θεωρητικό μοντέλο διδασκαλίας της έννοιας του ρητού**



Τα συμπαγή βέλη υποδηλώνουν σχέσεις μεταξύ κλασματικών κατασκευών και πράξεων, ενώ τα διακεκομμένα υποδηλώνουν υποτιθέμενες σχέσεις. Είναι φανερός ο καταλυτικός ρόλος της πτυχής του μέρους –όλου στο μοντέλο στην κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού. Τα διακεκομμένα βέλη στο μοντέλο δείχνουν, ότι η πτυχή του λόγου είναι η πιο «φυσική» για την προώθηση της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων, αντίστοιχα του τελεστή για την πράξη του πολλαπλασιασμού, του μέτρου για την πρόσθεση. Και βέβαια όλες για την επίλυση προβλήματος. Επίσης διαφαίνεται ότι η διδασκαλία των διάφορων πράξεων στους ρητούς αριθμούς θα πρέπει να συνδέονται άμεσα με τις συγκεκριμένες ερμηνείες του ρητού.

Τα ευρήματα των Charalambous & Pitta-Pantazi (2005, σελ. 238) επαληθεύουν το παραπάνω μοντέλο. Καταδείχνουν το θεμελιακό ρόλο της πτυχής του *μέρους –όλου* έναντι των υπολοίπων. Ωστόσο δεν μπορεί κάποιος να παραγνωρίσει το γεγονός ότι η κυριαρχία αυτής της πτυχής της έννοιας του ρητού συνηγορεί στην ερμηνεία διαφορετικού ποσοστού των υπολοίπων πτυχών: σε μεγάλο βαθμό του *λόγου* και του *τελεστή* και σε πολύ μικρότερου του *πηλίκου* και *μέτρου*. Αυτό οφείλεται στο ότι στις τρεις πρώτες πτυχές κεντρική είναι η ιδέα της σύγκρισης ποσοτήτων, ενώ στις υπόλοιπες δυο δεν είναι προϋπόθεση για την κατανόησή τους. Με άλλα λόγια, η πτυχή του *μέρους- όλου* θα πρέπει

να θεωρηθεί μια απαραίτητη, αλλά μη επαρκή συνθήκη, για την κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού. Υποστηρίζεται ότι αυτή καλλιεργεί στο μαθητευόμενο μια περιορισμένη αντίληψη για τον δεκαδικό αριθμό και ευθύνεται για την αδυναμία των εκπαιδευόμενων να δουν το κλάσμα ως αριθμό. Επίσης, το σχήμα *μέρος-όλου* προσφέρεται για *γνήσια* κλάσματα α/β <1, αλλά όχι για τα *καταχρηστικά* κλάσματα α/β >1. (Γαγάτσης et al, 2006). Αυτός ο περιορισμός δεν ισχύει στις καταστάσεις του πηλίκου, όπου το α αναπαριστά την *ποσότητα που θα διαιρεθεί ισομερώς* και το β αναπαριστά τον αριθμό των μερών της διαίρεσης. Η δυσκολία με την πτυχή του *λόγου* είναι ότι οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν την έννοια των σχετικών ποσών (Marshall, 1993), για να κατανοήσουν πλήρως την έννοια των κλασμάτων αναλογίας. Ο Χασάπης (2000, σελ. 187) υποστηρίζει ότι ο *λόγος* διαφοροποιείται εννοιολογικά τόσο από την έννοια του κλάσματος όσο κι από την έννοια του ρητού αριθμού. Η διαφοροποίηση αυτή είναι εμφανής από τις αριθμητικές πράξεις που μπορούν να οριστούν μεταξύ λόγων. Οι ίσοι λόγοι προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση κι όχι από την πρόσθεση ή την αφαίρεση.

Στο σχήμα του *τελεστή* θεωρείται ο ρητός α/β ως μια οντότητα και όχι ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών.

Οι μαθητές μπορούν να συναντήσουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των πτυχών του *μέτρου* και του *πηλίκου* ανεξάρτητα από το βαθμό κατανόησης της *μέρους –όλου* «προσωπικότητας» των κλασμάτων. Από την άλλη αυτές οι πτυχές μπορούν να εξηγηθούν με έννοιες που δεν συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο. Αυτή είναι η έννοια της κλασματικής μονάδας (Behr at al., 1983· Marshall,1993).

2.3. Η Έννοια της Ισότητας

Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών (Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006, σελ. 298· Leonidou &Philippou,2007, σελ. 825· Attorps & Tossavainen, 2007, σελ. 2251) διατείνονται ότι η κατανόηση της έννοιας της *ισότητας* είναι ύψιστης σημασίας για την ανάπτυξη του αλγεβρικού τρόπου σκέψης.

2.3.1 Το σύμβολο της ισότητας

Στο βιβλίο του *The Whetstone of Witte* το 1557, ο (Robert Recorde , Άγγλος Μαθηματικός, 1510-1558) μας έδωσε το σημερινό σύμβολο της ισότητας «=» με τη χρήση των δυο

παραλλήλων υποστηρίζοντας ότι «*δεν υπάρχουν 2 άλλα πράγματα που να είναι περισσότερο ίσα*»[2].

Η Molina (2009, σσ.347-348) παρουσιάζει έντεκα διαφορετικές σημασίες του συμβόλου «=», μερικές από τι οποίες είναι :

- Τελεστής. Ερμηνεύεται ως ένα λειτουργικό σύμβολο· διαβάζεται μόνο από τα αριστερά προς τα δεξιά.
- «Διαχωριστής» - "Splitter". Οι μαθητές αποδίδουν αυτό το νόημα στο σύμβολο του «=» όταν χρησιμοποιείται για να διαχωρίσει (π.χ. $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x}=x^2+1=x=x^2-x+1=0$). Τα βήματα που συνδέονται μπορεί να μη συσχετίζονται.
- Έκφραση Ισοδυναμίας. Συναντάται όταν το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιείται για να συσχετίσει δυο αναπαραστάσεις του ιδίου μαθητικού αντικειμένου. Η *Αριθμητική Ισοδυναμία*, αναφέρεται ως το σχεσιακό νόημα του συμβόλου του «ίσον» σε αντιπαραβολή με *λειτουργικό* νόημα του συμβόλου.
- Έκφραση μιας εξαρτημένης (conditioned) ισοδυναμίας (Εξίσωση). Εκφράζει μια σχέση εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών ή παραμέτρων (π.χ. l= 2πr).

Οι Warren & Cooper (2005), στην έρευνά τους υιοθετούν την κατηγοριοποίηση του Freudenthal (1983), διακρίνοντας τις παρακάτω τέσσερις κατηγορίες:

1. Δηλώνει το αποτέλεσμα μιας ενέργειας. Η έκφραση στο αριστερό μέλος της εξίσωσης μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία κι άρα στο δεξί μέλος αναμένεται το (αριθμητικό) αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής. (Dickinson & Eade, 2004).
2. Ισοδυναμία.
3. Ταυτότητα.
4. Προσδιορισμός. Πολλές φορές το «=» έχει την έννοια του προσδιορισμού για κάτι που είναι αριστερά του.

Τέλος, στο σύμβολο της ισότητας αποδίδονται δυο έννοιες, οι εξής:

- Ως λειτουργικό (operational) σύμβολο: δηλώνει αποτέλεσμα μιας ενέργειας και
- Ως σχεσιακό (relational) σύμβολο: δηλώνει σχέση ισοδυναμίας.

Αυτή η πληθώρα των διαφορετικών χρήσεων του συμβόλου της ισότητας αποτελεί πηγή δυσκολιών για τους μαθητές.

[2] http://www.answers.com/topic/equals-sign-1

Πιο ειδικά: Ο Brink[3] (1989) αναφέρει διάφορες μελέτες που έχουν δείξει ότι όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με αντίστροφες ή πολύπλοκες καταστάσεις, αποδίδουν άλλα νοήματα στο σύμβολο του «ισούται» από το σύνηθες (de Corte & Verschaffel, 1980· Van Eerde, 1981). Πολλοί ερευνητές (Davis, 1975· Ginsberg, 1977· Van Eerde, 1981· Vergnaud, 1982·Van Erp, 1983) στο Brink (Pirie& Martin, 1977) αναγνωρίζουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν αρχικά το σύμβολο «ισούται» ως λειτουργικό *σύμβολο* (operational) και όχι ως σχεσιακό (relational).

Ωστόσο, οι δυο έννοιες του συμβόλου που δηλώνει ισότητα είναι η αιτία πολλών μαθηματικών δυσκολιών: ως λειτουργικό σύμβολο το «=» συνδέει μια πράξη με το αποτέλεσμά της, που είναι ένας αριθμός κι όχι έναν αριθμό με έναν αριθμό όπως στην περίπτωση του «ίσον» ως σχεσιακό σύμβολο (Davis, 1975· Kieran, 1992· Filloy, Puig & Rojano, 2008). Η αντίληψη του «=» ως λειτουργικό σύμβολο, προικοδοτείται από το δημοτικό, όπου κυριαρχεί στη διαπραγμάτευση της έννοιας της ισότητας (Jones & Pratt, 2005 σελ. 185· Λεμονίδης 1996· Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006· Molina, 2009, σελ.349). Αλλά καθώς και από τη χρήση των υπολογιστών τσέπης, καθώς με το πάτημα του αντίστοιχου πλήκτρου εμφανίζεται το αποτέλεσμα των πράξεων που έχει ο μαθητής εκτελέσει.

Γενικά, το σύμβολο του «ίσον» ως λειτουργικό σύμβολο, έχει συγκεκριμένες ιδιότητες που αποκλίνουν από το σύμβολο του «ίσον» ως σχεσιακό: το λειτουργικό σύμβολο του «ίσον» δεν είναι συμμετρικό, έχει μια συγκεκριμένη φορά (οι μαθητές τείνουν να ζωγραφίζουν σχέσεις τέτοιων συμβόλων) και αντανακλά μερικώς την εξίσωση. Πιο ειδικά, οι Cooper & Baturo (1992), στου Leonidou & Phillipou (2007), θεωρούν ότι η μερική κατανόηση του συμβόλου «=» μπορεί να οφείλεται στο διπλό νόημα του συμβόλου, δηλαδή:

- Στατικά- σχεσιακό : ως ένα σύμβολο «πλάστιγγας», π.χ. 2+3 ζυγίζει 5, και
- Δυναμικά-λειτουργικό: ως ένα σύμβολο αλλαγής, π.χ. το 2 αλλάζει με την προσθήκη του 3 και γίνεται 5.

Επίσης, η μερική κατανόηση του συμβόλου του «=» δεν περιορίζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά επεκτείνεται και στις επόμενες βαθμίδες της εκπαίδευσης, επηρεάζοντας τη μάθηση των μαθηματικών στα επίπεδα αυτά (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980) στου Leonidou & Phillipou (2007).

---

[3] Streefland, L, (2000) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, (Επιμέλεια Κολέζα, Ε.) Εκδόσεις: Leader Books

Η Kieran (1992, σελ. 398) τονίζει ότι μια από τις απαιτήσεις για την ερμηνεία των αλγεβρικών δομικών αναπαραστάσεων, όπως είναι οι εξισώσεις, είναι η νοηματοδότηση του συμμετρικού και μεταβατικού χαρακτήρα της ισότητας. Μερικές φορές αναφέρεται ως η *αριστερή –δεξιά ισοδυναμία* του συμβόλου της ισότητας.

Επίσης, οι Knuth et al (2006), υποστηρίζουν ότι το συμπέρασμα αυτό είναι σημαντικό καθώς έχει ισχύ ακόμα και στην περίπτωση μαθητών που δεν έχουν εμπειρία της τυπικής άλγεβρας. Μαθητές της 6^{ης} και 7^{ης} τάξης –Στ΄ τάξης Δημοτικού και Α' Γυμνασίου, οι αντίστοιχες βαθμίδες στην ελληνική εκπαίδευση, τα καταφέρνουν καλύτερα στην επίλυση των εξισώσεων όταν έχουν μια *σχεσιακή* κατανόηση του συμβόλου της ισότητας (σελ. 309).

Οι Leonidou & Phillipou (2007) υποστηρίζουν ότι προκειμένου να μυηθούν οι μαθητές στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, πρέπει να δοθεί έμφαση στη δομή των εξισώσεων και τη σχέση της ισοδυναμίας,καθώς η έρευνα σε Διεθνές επίπεδο έχει δείξει πολλοί μαθητές να έχουν περιορισμένη κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας και του συμβόλου του «=», που την αναπαριστά.

Οι Attorps & Tossavainen (2008), διαπίστωσαν ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της κατανόησης των μαθηματικών ιδιοτήτων του «=» και της έννοιας της εξίσωσης.

Η Molina (2009, σελ. 349) συνοψίζει ότι οι μαθητές όταν συναντούν αριθμητικές εκφράσεις δε σκέφτονται το «ίσον» μόνο του. Συνηθίζουν να το συνδέουν με μια πράξη διαβάζοντας την από αριστερά προς τα δεξιά. Δεν θεωρούν την έκφραση ως μια ολότητα αλλά ως διαδικασίες που πρέπει να εκτελεστούν βήμα προς βήμα. Ούτε θεωρούν τις αριθμητικές προτάσεις με σχεσιακό τρόπο. Δεν αποδέχονται εκφράσεις μη –συμβατικές (π.χ. α=α, γ=α $\pm$β και α$\pm$γ= β$\pm$γ). Όταν οι μαθητές συναντούν δυσκολίες σε μια πρόταση, τείνουν να συνδυάζουν τους αριθμούς κατά το δοκούν (σύμφωνα με τον πληθικό αριθμό και τις πράξεις που εμπλέκονται)- κι όχι με τη δομή της πρότασης. Έτσι μπορεί να κάνουν πράξεις με όλους τους αριθμούς μαζί μεταφέροντας τους στο αριστερό μέλος ή να κάνουν πράξεις μόνο στο ένα μέλος ή μπορεί να επαναλαμβάνουν ένα από τους αριθμούς στην πρόταση. Επίσης φανερώνουν την αναγκαιότητα της *κλειστότητας των εκφράσεων* (closure of expressions), όπου κάπου μέσα στην πρόταση πρέπει να δουν την αριθμητική τιμή της έκφρασης, όπως π.χ. 80-10=45+50=95-25=70 ή 4x-2=7+x=3x=9=x=4.5, όπου παραβιάζονται η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα της ισότητας.

Συνέπεια όλων αυτών είναι οι μαθητές κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα να επιδεικνύουν απροθυμία να αποδεχθούν το σύμβολο της ισότητας ως έκφραση ισοδυναμίας (Byers& Hercovich,1977·Mevarech & Yitschak,1983) στη Molina (2009, σελ. 349). Μέσα από αυτό τον κύκλο, έρχεται να καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα με τους

Leonidou & Phillipou (2007), ότι η σημασία του συμβόλου του «=» ως ισοδυναμίας πρέπει να είναι πρώτιστο μέλημα ώστε να ελαττωθεί η γνωστική αντίσταση των μαθητών να αποδεχθούν τη σημασία του αυτή.

2.4 Διδακτικά Μοντέλα για τη Απόκτηση της Έννοιας του Αριθμού και της Ισότητας

Οι Warren & Cooper (2005) αναφέρουν ότι οι Filloy & Sutherland (1996) τονίζουν ότι τα διδακτικά μοντέλα προικοδοτούνται με δυο θεμελιώδη στοιχεία:

- το στοιχείο της *μεταφοράς*, όπου τα αντικείμενα και οι πράξεις επ' αυτών αποκτούν νόημα σε ένα πιο συγκεκριμένο επίπεδο. Το μοντέλο λειτουργεί ως ένα ανάλογο (analogue) για το πιο αφηρημένο και
- το στοιχείο της *αφαίρεσης*. Η κατάκτηση του ξεκινά από τη στιγμή που ο μαθητής αρχίζει να εκφράζει τη φύση της εμπειρίας του και να διατυπώνει με σαφήνεια τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις πράξεις. Εκείνη είναι η στιγμή έναρξης κατασκευής από μέρους του μιας πιο ενιαίας εικόνας των πράξεων, που στην πορεία θα γίνουν γενικευμένες εκφράσεις.

Είναι σημαντικό αυτή η μεταφορά να λειτουργεί σε δυο κατευθύνσεις, ήτοι οι μαθητές να μπορούν να προσδιορίζουν τις πράξεις και τα αντικείμενα στο αφηρημένο αλλά και στο συγκεκριμένο επίπεδο. Τα μοντέλα χρησιμεύουν ως μια *σκαλωσιά* (scaffold) με απώτερο στόχο τη σταδιακή αποδέσμευση του μαθητή από το πλαίσιο στο οποίο το μοντέλο έχει υπόσταση. Ωστόσο, αυτό δεν είναι πάντα εύκολο καθώς συχνά τα μοντέλα όχι μόνο κρύβουν αυτό που θέλουν να διδαχθεί ο μαθητής με τη χρήση τους, αλλά επίσης παρουσιάζουν προβλήματα, όταν η αποδέσμευση από αυτό έγκειται στο μαθητή και μόνο. Κάθε ένα από τα μοντέλα που παρουσιάζονται έχουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα τους.

Σε ένα πρώτο επίπεδο ανάλυσης τα μοντέλα διακρίνονται σε δυο ευρείες κατηγορίες

Συνεχή & Διακριτά.

- **Συνεχή**

Χωρίζονται στα Γραμμικά και στα Επιφανειακά

Ειδικότερα:

- **Γραμμικά**

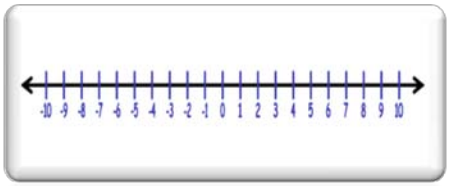
  Συνιστούν απεικόνιση της γραμμικής διάταξης.

Ειδικότερα: Οι αρνητικοί αριθμοί προκύπτουν ως μέτρα μεγεθών σε καταστάσεις μέτρησης όπου χρησιμοποιείται μια προσανατολισμένη κλίμακα και ένα αντίστοιχο σύστημα μέτρησης. Αναφορικά με την έννοια του ρητού αριθμού έχουμε σύγκριση μηκών. Αναφορικά με την έννοια της ισότητας με τη χρήση του είναι καταφανής η συμμετρική ιδιότητα της ισότητας.

Κύριος εκπρόσωπος των γραμμικών μοντέλων είναι η

- Η Αριθμογραμμή (σχήμα 2.2)

Σχήμα 2.2 **Η Αριθμογραμμή**



Η Κολέζα (2005) συγκρίνει την αριθμογραμμή με την ευθεία των πραγματικών αριθμών κι αναφέρει ότι η ειδοποιός διαφορά μεταξύ τους είναι ότι ενώ η ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ένα έτοιμο μοντέλο ενός συνόλου αριθμών, η αριθμογραμμή «γεμίζει» από τους ίδιους τους μαθητές κατά την πορεία επίλυσης του προβλήματος. Ένα σημείο στην αριθμογραμμή δεν είναι απλά η θέση ενός αριθμού, αλλά μια ποσότητα και η χρήση της αριθμογραμμής γίνεται με ποσότητες. Οπότε ο κύριος ρόλος της αριθμογραμμής είναι να αναπαραστήσει τις στρατηγικές επίλυσης των μαθητών. Να τονιστεί ότι τα σημεία στην αριθμογραμμή δεν είναι μοντέλα ακεραίων· οι προσανατολισμένες αποστάσεις είναι οι προσημασμένοι αριθμοί (Van de Walle, 2005, σελ. 584, Danesi, 2007).

Μια εννοιολογική μεταφορά ενεργοποιείται με τη χρήση κάποιας αναπαράστασης. Η αναπαράσταση των αριθμών με την αριθμογραμμή, με το μοντέλου του θερμομέτρου, ή με ένα ασανσέρ που ανεβοκατεβαίνει τους ορόφους, είναι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης τους κάνοντας χρήση της εννοιολογικής μεταφοράς ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙΟΥ. Υπό αυτήν την έννοια, η αριθμογραμμή είναι η αναπαράσταση των αριθμών μέσω αυτής της εννοιολογικής μεταφοράς. Η γραμμή σε οριζόντια θέση ως αριθμογραμμή, ή σε κατακόρυφη ως θερμόμετρο, θεωρείται ως το μονοπάτι, και η πράξη της πρόσθεσης ή αφαίρεσης οι κινήσεις επ' αυτής.

Η αριθμογραμμή εκφράζει την έννοια του ρητού αριθμού ως μέτρο, δηλαδή ως *απόσταση* (Lamon, 1999) στο Γαγάτσης κ.α (2006). Το κλάσμα μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα σημείο πάνω στην αριθμογραμμή μεταξύ δύο ακεραίων (Linking metaphor). Η Νι (2000) στο Γαγάτσης κ.α (2006) αναφέρει ότι η αριθμογραμμή μπορεί να αναπαραστήσει θεμελιώδεις έννοιες των κλασμάτων, όπως η πυκνότητα, διαδοχικότητα, η μοναδικότητα και το άπειρο των κλασματικών μονάδων. Επίσης επιλύει το πρόβλημα των ενδιάμεσων αριθμών, αφού

αναπαριστά το κλάσμα που βρίσκεται ανάμεσα στα δυο αρχικά κλάσματα (Herbst, 1997) στο Γαγάτσης et al (2006)

Οι δυσκολίες που προκύπτουν είναι σχετικές με την αναγνώριση της μονάδας αναφοράς του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή. Οι Baturo και Cooper (1999) και Γαγάτσης et al (2006) διατείνονται ότι ένα από τα εννοιολογικά άλματα στην κατανόηση των ρητών είναι ο καταλυτικός ρόλος της *μονάδας.* Ειδικά στο περιβάλλον της αριθμογραμμής αυτό το πρόβλημα είναι απόρροια της δυστοκίας των μαθητών να αποφασίσουν *τι είναι αυτό που συνιστά τη μονάδα*. Ακόμη υποστηρίζουν ότι αυτό οφείλεται στην κυριαρχία της πτυχής *μέρους-όλου* του ρητού έναντι των υπολοίπων, όπου η μονάδα συνιστά το μεγαλύτερο όλων των κλασματικών μερών. Έτσι ως μονάδα στην αριθμογραμμή θεωρείται ολόκληρη κι όχι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δυο διαδοχικών ακεραίων. Οι Psycharis et al (2009) συμπληρώνουν ότι τα ευρήματα τους καταδεικνύουν, οι μαθητές μπορεί ακόμα να θεωρήσουν ως μονάδα ένα οποιοδήποτε άλλο ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην αριθμογραμμή – αυθαίρετος καθορισμός της μονάδας αναφοράς(σελ. 1500). Η κατάσταση αυτή επιδεινώνεται, από την προφανή δυσκολία των μαθητών να συσχετίσουν την αριθμογραμμή με τη γνώση τους για τον κόσμο ή με κάποιου είδους εξωτερικής ρεαλιστικής βάσης (grounded) (σελ. 1500). (Marshall, 1993 στο Psycharis et al, 2009, σελ. 1500) .

Άλλη δυσκολία είναι η επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Η μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής.
Τέλος, αρκετές φορές οι μαθητές μετρούν τα σημεία αντί τα διαστήματα πάνω στην αριθμητική γραμμή. (Γαγάτσης κ.α, 2006)

Τα αποτελέσματα της Διεθνής ερευνητικής κοινότητας της Διδακτικής των μαθηματικών αναφορικά με την χρήση της αριθμογραμμής στην αναπαράσταση των ακεραίων και ρητών είναι αντικρουόμενα. Τα ευρήματα της έρευνας των Wong & Evans (2008) δείχνουν την αδυναμία των μαθητών να αναπαραστήσουν ένα κλάσμα με το μοντέλο της αριθμογραμμής σε σχέση με το αντίστοιχο μοντέλο της ράβδου. Όταν τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν με το μοντέλο της ράβδου ένα κλάσμα ισοδύναμο με αυτό που τους δινόταν στην αλγεβρική αναπαράσταση αρκετοί εστίασαν στην επιφανειακή ομοιότητα των ρητών με τους ακεραίους, θεωρώντας το κλάσμα ως δυο διαφορετικούς αριθμούς, κι εφαρμόζοντας ανάλογες διαδικασίες. Με τον ίδιο τρόπο αναπαράστησαν το ισοδύναμο κλάσμα στο μοντέλο της ράβδου. Ωστόσο, μαθητές που μπόρεσαν να αναπαραστήσουν με

επιτυχία ισοδύναμα κλάσματα με το μοντέλο της ράβδου εξίσου, τα κατάφεραν καλύτερα και με το μοντέλο της αριθμογραμμής.

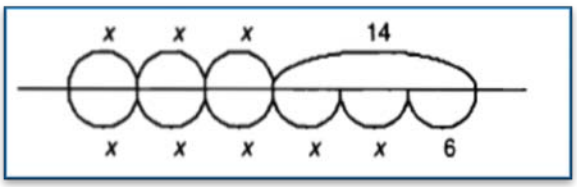
Από τα δεδομένα της έρευνας των Doritou & Gray (2007) όπου αναζητούν στοιχεία για τη χρήση της μεταφοράς της αριθμογραμμής στη μετάβαση στους ακεραίους αριθμούς καθώς και τα κλάσματα, προέκυψε ότι τόσο οι δάσκαλοι όσο και οι μαθητές διερμήνευσαν τους αριθμούς ως θέσεις κατά μήκος του μονοπατιού και οι συσχετιζόμενες πράξεις ως δράσεις κινούμενοι κατά μήκος του. Ωστόσο, εδώ η μεταφορά της αριθμογραμμής χρησιμοποιήθηκε για χάρη της μεταφοράς απλά ως μια παιδαγωγική αναπαράσταση και όχι στη δυναμική, που μπορεί να διαθέτει, για να διασαφηνίσει τις ιδιότητες του συστήματος αρίθμησης,. Οι μαθητές να συμπέραναν ότι οι πράξεις μπορούν να γίνουν με ένα πιο εύκολο τρόπο από τη χρήση της αριθμογραμμής, δηλαδή το ακριβώς αντίθετο από το στόχο. Οι μαθητές δεν φαίνεται να έμαθαν πολλά με τη χρήση της αριθμογραμμής ως μια μεταφορά του συστήματος αρίθμησης. Επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματα παλαιότερων ερευνών ότι παρόλη την συχνή εμφάνιση της σε μια πληθώρα από εφαρμογές, η χρήση της τείνει να δίνει έμφαση στη διαδικαστική της χρήση, ως εργαλείο, παρά στην εννοιολογική της δομή. Οι ερευνητές καταλήγουν ότι ενώ η έννοια της αριθμογραμμής μπορεί να ειδωθεί ως μια αναπαράσταση της πιο αφηρημένης έννοιας του συστήματος αρίθμησης, στην καθημερινή διδακτική πράξη χρησιμοποιείται με μια συγκεκριμένη μορφή: ως μια διδακτική αναπαράσταση.

Κινούμενοι σε διαφορετικό μήκος κύματος, οι Psycharis, Latsi & Kynigos (2009) διερευνούν την κατασκευή νοήματος της έννοιας του κλάσματος ως μέτρο με τη χρήση ενός λογισμικού. Τα κλάσματα ως σημεία, αλλά και ως ευθύγραμμα τμήματα στην αριθμογραμμή και η αφαίρεση της θέσης και του μεγέθους της αριθμητικής μονάδας, είναι κάποιες από τις συνιστώσες που διερεύνησαν. Από τα δεδομένα τους, καταδείχθηκε ότι οι μαθητές προοδευτικά εστίαζαν στη σύνδεση του κλάσματος ως μέτρο με τις άλλες διαστάσεις της. Οι μαθητές, κατάφεραν να συντονίσουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των σημείων ως στατικοί αριθμοί, με τις αποστάσεις, ως δυναμικά μεταβαλλόμενα μέτρα με σημείο αναφοράς την αρχή 0. Κατόρθωσαν επίσης να διαβαθμίσουν την αριθμητική μονάδα στην αριθμογραμμή προχωρώντας αφαιρετικά ως προς τη θέση της και ως προς το μέγεθός της. Ωστόσο, δεν μπόρεσαν να νοηματοδοτήσουν την ισοδυναμία των κλασματικών εκφράσεων και των αναπαραστάσεων τους.

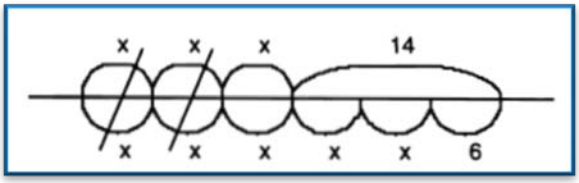
Οι Charalambous & Pitta-Pantazi (2005) τονίζουν ότι οι καθηγητές θα πρέπει να βοηθήσουν τους μαθητές να κατακτήσουν άλλες έννοιες του κλάσματος, για παράδειγμα την ισοδυναμία των κλασμάτων, πριν να εισάγουν το μοντέλο αυτό στη διδασκαλία τους.

Αναφορικά με την <u>έννοια της ισότητας</u>: Τα ευρήματα της Kieran (1992, σελ. 401) καταδεικνύουν ότι η μέθοδος των αντίστροφων πράξεων, που οι μαθητές εφάρμοζαν σε εξισώσεις της μορφής 3x+2=11 είχαν ως αποτέλεσμα να μην μπορούν να κατανοήσουν την έννοια του «*εκτελώ την ίδια πράξη και στα δυο μέλη της ισότητας*». Δηλαδή, εργάζονταν σε ένα επίπεδο καθαρά διαδικαστικό. H Sfard (1991) στου Dickinson & Eade (2004) θεωρεί ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τη σύλληψη των αλγεβρικών συμβόλων ως *λειτουργικά* (ως διαδικασία) και *δομικά* (ως αντικείμενο), αντίστοιχα, και θεωρεί ότι υπάρχει ένα «οντολογικό χάσμα» μεταξύ αυτών των δυο (σελ. 4). Οι καθηγητές που το χρησιμοποίησαν ανέφεραν ότι οι δυο κυριότεροι λόγοι που το επέλεξαν είναι πρωτίστως η προσβασιμότητα του- ένα οικείο μοντέλο για τους μαθητές, και η σταθερότητά (sustainability) του. Τα ευρήματα τους δείχνουν ότι το μοντέλο αυτό παρέχει μεγαλύτερη διορατικότητα στις ιδιότητες της ισότητας (συμμετρική και μεταβατική). Και επομένως την ευκαιρία οι μαθητές να διαπραγματευθούν τις ιδιότητες αυτές. Έτσι εξισώσεις της μορφής 3x+14=5x+16 λύνονται ως εξής (Σχήμα 2.3 & Σχήμα 2.4):

Σχήμα 2.3. **Βήμα 1^{ο} επίλυσης της εξίσωσης 3x+14=5x+16**



Σχήμα 2.4. **Βήμα 2^{ο} επίλυσης της εξίσωσης 3x+14=5x+16**



όπου προβάλλει η αναγκαιότητα της αλλαγής μέλους όταν η ποσότητα είναι αρνητική. Είναι φανερό ότι με την επίλυση εξισώσεων με το μοντέλο της αριθμογραμμής η έμφαση μετατοπίζεται στην ισοδυναμία των δύο πλευρών της, άνω και κάτω. Οι Dickinson & Eade (2004) εισηγούνται ότι από τα ευρήματα της έρευνάς τους είναι φανερό ότι οι μαθητές μπορούν να κινούνται με τη χρήση του μοντέλου αυτού με άνεση μεταξύ της διαδικαστικής και δομικής λειτουργίας των συμβόλων.

Το μειονέκτημα του μοντέλου είναι ότι δεν μπορεί να αναπαραστήσει επιτυχώς όλες τις μορφές των εξισώσεων· ειδικά όταν η τιμή του αγνώστου είναι αρνητική ποσότητα, όπως π.χ. στην -3x+10=5.

Άλλα γραμμιακά μοντέλα που είναι παραλλαγές του μοντέλου της αριθμογραμμής, που χρησιμοποιούνται είναι:

για την έννοια ακεραίου αριθμού είναι

- Το θερμόμετρο

Που απεικονίζει θερμοκρασίες άνω και κάτω του μηδενός.

Στη χρήση της κλίμακας Κελσίου αποτυπώνονται πολλές φορές οι εννοιολογικές δυσχέρειες κατανόησης κι απόδοσης νοήματος στους αρνητικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, η ένδειξη «-3» ενός θερμομέτρου διαβάζεται κι εκφράζεται πολλές φορές όχι ως «πλην 3» , αλλά ως «3 υπό το μηδέν». (Χασάπης, 2000, σελ. 175) .

Η Kilham (2008) ασχολείται με την έννοια του αρνητικού αριθμού και επισημαίνει τη διάσταση απόψεων αναφορικά με το τρόπο κατανόησής της. Κάποιοι υπερθεματίζουν στη συμβολική παρουσίαση της, ενώ κάποιοι άλλοι στη χρήση των εννοιολογικών μεταφορών (Linchevski & Williams, 1999) στην Kilhamn, (2008). Έχοντας σαν σημείο αναφοράς τους τρεις παράγοντες[4] που η πρόσφατη έρευνα έχει προσδιορίσει, προκειμένου για την κατανόηση της έννοιας αυτής, τα ευρήματα της δείχνουν ότι υπάρχει και ένας τέταρτος παράγοντας που μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες. Είναι η εμπιστοσύνη στο μεταφορικό λόγο, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο, που όμως είναι ανεπαρκές.

Συγκεκριμένα, η χρήση του θερμομέτρου στην πρόσθεση και αφαίρεση στο σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι προβληματική όταν πρόκειται για την αφαίρεση αρνητικών αριθμών. Στην προσπάθειά του ο Καθηγητής να διδάξει *την πρόσθεση και την αφαίρεση των Αρνητικών Αριθμών,* είναι αναγκασμένος να επεκτείνει την Εννοιολογική Μεταφορά: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΩΣ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙ (Kilhamn, 2008). Αυτή όμως η επέκταση μπορεί να την καταστήσει δύσχρηστη καθώς παρατηρείται: Ασυνέπεια στην ίδια τη μεταφορά, ασυνέπεια με άλλες μεταφορές της καθημερινής μας εμπειρίας και η δομή και οι ιδιότητες της περιοχής Αφετηρίας παραβιάζονται.:Στην πράξη a-b = c , ισχύουν τα εξής:

- Αν b>0 τότε η θερμοκρασία *πέφτει* από b^o σε a^o .
- Αν b<0, τότε η θερμοκρασία *ανεβαίνει* από b^o σε a^o .

[4] Κατεύθυνση και πλήθος, επιδεξιότητα στις αριθμητικές πράξεις και η σημασία του αρνητικού προσήμου.

Παρατηρούμε ότι στο μοντέλο του θερμομέτρου πρέπει να εισαχθεί η έννοια της *κατεύθυνσης*, που πριν δεν χρειαζόταν (Kullberg, 2006) στο (Kilhamn, 2008). Οπότε τα a, b και c αναφέρεται σε διαφορετικές πηγές, καθώς:

- Αν b>0 τα a και c αναφέρονται σε θερμοκρασίες και το b αποτελεί την *αλλαγή* της θερμοκρασίας π.χ. $5^o - (8^o) = -3^o$ b>0.
- Αν b<0, τα a και b αναφέρονται σε θερμοκρασίες και το c αποτελεί την αλλαγή της θερμοκρασίας π.χ. 5ο –(-8ο) = +13ο b>0.

  Άλλα μοντέλα είναι

  - Το ασανσέρ, Το παγόβουνο, Τη χρονογραμμή και η Σκάλα

Για την έννοια <u>του ρητού αριθμού</u> (εικόνα 2. 2) είναι:

- Λωρίδες κλασμάτων ή ράβδοι του Cuisenaire

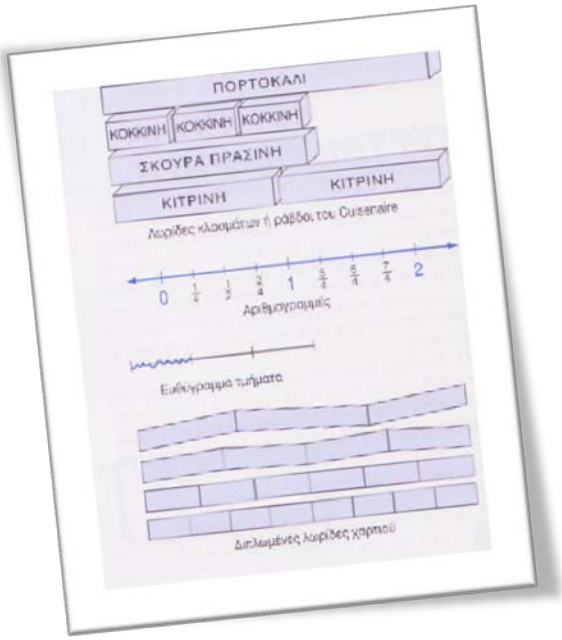
  Και τα δυο μοντέλα έχουν κομμάτια με μήκη από 1 έως 10, μετρημένα με βάση τη μικρότερη λωρίδα ή ράβδο.

  Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση όλων των πτυχών του και των ισοδύναμων κλασμάτων
- Ευθύγραμμα τμήματα

  Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση κάποιων πτυχών του
- Διπλωμένες λουρίδες χαρτιού

  Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση των ισοδύναμων κλασμάτων

Σχήμα 2.5 **Γραμμικά μοντέλα & η έννοια του ρητού αριθμού**



- Επιφανειακά

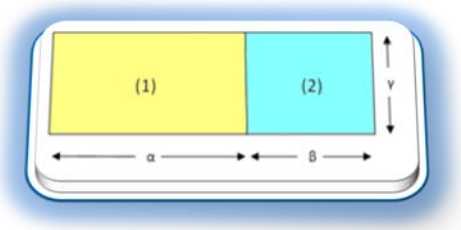
Τέτοια μοντέλα χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση της έννοιας του ρητού αριθμού και της ισότητας. Ειδικά για την έννοια του ρητού μια επιφάνεια ή περιοχή υποδιαιρείται σε μικρότερα μέρη και κάθε μέρος μπορεί να συγκριθεί με το όλο (εικόνα 2.3)

Κύριος εκπρόσωπος των επιφανειακών μοντέλων είναι

- το Ορθογώνιο (ρ ά β δ ο ς για την έννοια του ρητού, γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ό για την έννοια της ισότητας). Αναφορικά με την έννοια του ρητού μας επιτρέπει να ορίσουμε σχεδόν κάθε κομμάτι της ως σύνολο, ώστε τα υπόλοιπα κομμάτια να αλλάζουν ανάλογα με την κλασματική τους αξία. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την

αναπαράσταση κάποιων πτυχών του ρητού, για απαρίθμηση των κλασματικών μερών και των ισοδύναμων κλασμάτων.

Σχήμα 2.6 **Γεωμετρικό μοντέλο & η έννοια της ισότητας**



Αναφορικά με την έννοια της ισότητας το πλεονέκτημα του επιφανειακού ή γεωμετρικού μοντέλου συνίσταται στην οπτικοποίηση και το συγκεκριμένο νόημα (Επιφάνεια) της συμβολικής έκφρασης. Για παράδειγμα (εικόνα 2.3) δείχνει τη γεωμετρική αναπαράσταση της έκφρασης της επιμεριστικής ιδιότητας ως προς την πρόσθεση όπου ή ισότητα προκύπτει από τη σύγκριση των εμβαδών των επιμέρους επιφανειών στο οποίο το αρχικό σχήμα χωρίζεται. (Filloy et al, 2008, σσ. 100-101).

Το επιφανειακό μοντέλο έχει επίσης κάποια μειονεκτήματα. Το συγκεκριμένο νόημα του επιφανειακού μοντέλου περιορίζεται σε θετικές ποσότητες. Δηλαδή δεν έχει νόημα η αρνητική τιμή εμβαδού. Επίσης, δεν είναι κατάλληλο για μαθητές που έχουν φτωχή γεωμετρική αντίληψη.

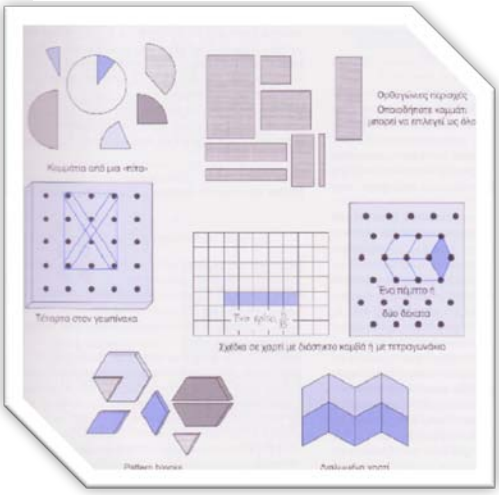
Άλλωστε το εμβαδό και η περίμετρος είναι για κάποιους μαθητές πηγή δυσκολιών (Filloy et al, 2008). Οι Kordaki & Potari (1998) επιχείρησαν να μελετήσουν την πολυπλοκότητα της σκέψης των μαθητών στη μέτρηση της έννοιας του εμβαδού και την εξέλιξη της μέσα από διαφορετικά πλαίσια. Η έννοια της μέτρησης συνάδει με την έννοια του αριθμού και χρησιμοποιείται ως ενσώματο (embodiment) για την εισαγωγή άλλων μαθηματικών εννοιών. Η έρευνα αναφορικά με τη σκέψη των μαθητών για τη μέτρηση του εμβαδού, τονίζει τις παρακάτω ποσοτικές πτυχές του:

- Η επιλογή της μονάδας μέτρησης·
- Η επανάληψη της μονάδας·
- Η μέτρηση των μονάδων μέτρησης και
- Η χρήση του τύπου του εμβαδού.

Αναφέρουν ότι για να έχουν νόημα οι παραπάνω πτυχές, τα παιδιά πρέπει να καταλάβουν το εμβαδό ως ένα χώρο που περικλείεται από το σχήμα. Τα ευρήματα τους καταδεικνύουν την τάση των παιδιών να καταφεύγουν στη χρήση τύπων· γεγονός που λειτούργησε ως τροχοπέδη στη μελέτη των άλλων ποσοτικών πτυχών της έννοιας του εμβαδού. Επίσης, η χρήση του τύπου για την εύρεση του εμβαδού μιας ορθογώνιας επιφάνειας δεν σήμαινε κατ' ανάγκη και κατανόηση του τι έκαναν. Αυτό διαφαίνεται από το γεγονός ότι δεν μπορούσαν να συνδέσουν τις τυπικές μονάδες εμβαδού με τις τυπικές μονάδες μήκους, ή δεν μπορούσαν να εκτιμήσουν

το μέγεθος μιας ορθογώνιας επιφάνειας με γνωστές διαστάσεις. Προκειμένου για τη μέτρηση επιφανειών οι Lappas και Spyrou (2003) υποστηρίζουν την πρόταση των Bendr και Schreider (1980). Οι τελευταίοι, και άρα και οι πρώτοι, τάσσονται υπέρ της σύνδεσης των εννοιών σχετικών με γεωμετρικά σχήματα με καθημερινές δραστηριότητες.

Σχήμα 2.7 **Επιφανειακά μοντέλα & η έννοια του ρητού αριθμού**



Άλλα επιφανεικα μοντέλα (εικόνα 2.4) που είναι παραλλαγές του μοντέλου της ράβδου που χρησιμοποιούνται για την ένοια του ρητού είναι:

Τα μοντέλα που ακολουθούν, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση κάποιων πτυχών, καθώς και κάποιων ιδιοτήτων του ρητού:

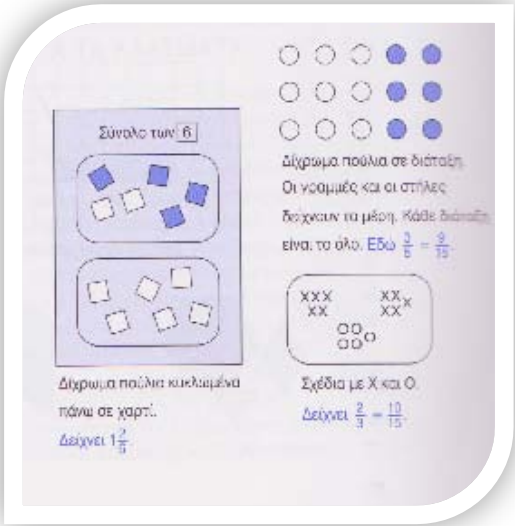
- Κυκλικές περιοχές (μοντέλο της *πίτσας*)
- Pattern blocks
- Γεωπίνακες
- Διπλωμένο χαρτί
- Χαρτί με διάστικτο καμβά
- Χαρτί με τετραγωνάκια

Οι Φιλίππου και Χρίστου (1995) στο Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου & Χριστοδουλίδου, (2006) αναφέρουν ότι οι μαθητές ενδέχεται να μην κατανοούν ότι τα μέρη πρέπει να είναι ισοδύναμα, για να ισχύει η σχέση που αντανακλά το κλάσμα.

Διακριτά μοντέλα

Αναφορικά με την έννοια του ακεραίου αριθμού τα αντικείμενά τους συνιστούν στοιχεία αντιθετικής φύσης. Αναφορικά με την έννοια του ρητού αριθμού το *όλο* νοείται ως σύνολο αντικειμένων και τα υποσύνολα του συνόλου συνιστούν τα κλασματικά μέρη.

Σχήμα 2.8 **Διακριτά μοντέλα & η έννοια του ρητού αριθμού**



Αναφορικά με την <u>έννοια του ακεραίου</u> μπορεί να είναι :

- Μάρκες όπου οι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί αναπαριστώνται με μάρκες διαφορετικού χρώματος.
- Βώλοι με αντίστοιχες οπές στις οποίες μπαίνει ένας βώλος
- Θετικά και αρνητικά ιόντα.

Αναφορικά με την έννοια του ρητού (εικόνα 2.5) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση κάποιων των πτυχών και των ιδιοτήτων του ρητού αριθμού. Η *έννοια του όλου* ανάλογα με το συγκεκριμένο μοντέλο που επιλέγεται κάθε φορά, μπορεί να αναφέρεται άλλοτε σε ένα κομμάτι (Ορθογώνιο) κι άλλοτε σε πολλά κομμάτια (διακριτά μοντέλα).

Η αναφορά σε ένα σύνολο από διακριτά αντικείμενα ως μεμονωμένη οντότητα είναι αυτή που δυσκολεύει την κατανόηση των διακριτών μοντέλων από τους μαθητές, ωστόσο αυτά τα μοντέλα βοηθούν στη δημιουργία συνδέσεων με καθημερινές εφαρμογές των κλασμάτων και με τις έννοιες των λόγων

Σχήμα 2.9 **Το μοντέλο της Ζυγαριάς**

Στο μοντέλο της ζυγαριάς (εικόνα2.6) το σύμβολο του «=» αντιπροσωπεύει τον άξονα ισορροπίας της ζυγαριάς και προσδιορισμός του άγνωστου βάρους x μπορεί να επιτευχθεί με τη διαγραφή των ίσων βαρών και στα δυο μέλη της εξίσωσης (Filloy et al, 2008, σελ. 101). Το πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι ότι είναι ένα ρεαλιστικό μοντέλο και οι μαθητές μπορούν εύκολα να σχηματίσουν μια νοητική εικόνα της ισορροπίας. Επιπλέον το μοντέλο της ζυγαριάς δίνει έμφαση στο στατικό χαρακτήρα της εξίσωσης· η έννοια της ισοδυναμίας παραμένει στο προσκήνιο καθώς η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης είναι υπό εξέλιξη. Η έρευνα των Warren & Cooper (2005) επαλήθευσε τα ευρήματα των Pirie & Martin (1997) ότι το μοντέλο της ζυγαριάς μεταφέρει την εστία της προσοχής των μαθητών από το «=» ως *λειτουργικό* σύμβολο προς την θεώρησή της εξίσωσης ως μια ολότητα όχι ως ένα εργαλείο με στόχο την επίτευξη του επιθυμητού αποτελέσματος. Παραλλαγή του είναι το μοντέλο της τραμπάλας.

Ωστόσο, ο βασικός περιορισμός του μοντέλου, όπως όλων των φυσικών και οπτικών μοντέλων, είναι ότι δεν έχει εφαρμογή σε εξισώσεις όπου η άγνωστη ποσότητα είναι αρνητική κι έτσι δεν φαίνεται να διαμορφώνει μια ψυχική κατάσταση (frame of mind) για την πλήρη ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Aczel, 1998 στο Warren & Cooper, 2005· Filloy & Rojano, 1989 στο Vlassis, 2002 · Pirie & Martin, 1997· Vlassis, 2002).

Η χρήση του μοντέλου της Ζυγαριάς στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού, έχει διχάσει την ερευνητική κοινότητα σε πολέμιους και υποστηριχτές της κατά την Vlassis , η οποία βασίζει τις σκέψεις της σε μια εμπειρική μελέτη της το 2002. Προσπαθώντας να αναλύσει το μοντέλο της Ζυγαριάς, ως προς την συνάφεια του στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού, παρατηρεί ότι και οι υποστηρικτές και οι πολέμιοι του συμφωνούν ότι είναι αναποτελεσματικό όταν εμφανίζονται οι αρνητικοί ακέραιοι στο προσκήνιο.

Βέβαια, η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν αφομοιώσει τουλάχιστον τις εξής 3 δεξιότητες: Η αρχή του μετασχηματισμού σε ισοδύναμες εξισώσεις, η επέκταση του αριθμητικού τους πεδίου στους αρνητικούς αριθμούς και η αναγνώριση του γράμματος ως τον άγνωστο της εξίσωσης. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι το μοντέλο δεν δίνει μόνο στους μαθητές ένα συγκεκριμένο νόημα στις πράξεις τους, αλλά τους παρέχει και μια πραξιακή νοητική εικόνα που περικλείει τις αρχές που εφαρμόζονται. Τα αποτελέσματα έχουν διάρκεια: 8 μήνες μετά από το πείραμα οι μαθητές εξακολουθούσαν να χρησιμοποιούν την αρχή σωστά ανακαλώντας την εικόνα της Ζυγαριάς (σελ. 356-357). Η πορεία προς την επίλυση των εξισώσεων, αποδεσμευμένη από το μοντέλο αυτό, προϋποθέτει ότι πρέπει να ξεπεραστούν άλλα εμπόδια που είναι συνδεδεμένα με τη διαδικασία της αφαίρεσης (άγνωστος, αρνητικοί αριθμοί) και που για αυτά, το μοντέλο της Ζυγαριάς, δεν ενδείκνυται. Επίσης, η Πόταρη (2009) αναφέρει ότι κάποιες έρευνες αρχικά έκκριναν ως μη κατάλληλο το μοντέλο της ζυγαριάς· ωστόσο, έρευνες μεγαλύτερης διάρκειας δείχνουν την καταλληλότητα του.

Θέλοντας οι Filloy & Rojano (2008) να διερευνήσουν την ικανότητα μαθητών στην επίλυση μη αριθμητικών γραμμικών εξισώσεων, χρησιμοποίησαν δυο μοντέλα, αυτό της ζυγαριάς και το γεωμετρικό μοντέλο. Οι μαθητές γνώριζαν να λύνουν εξισώσεις της μορφής $x \pm A = B$. και $Ax \pm B = C$ (στις οποίες αναφέρονται οι Filloy & Rojano ως «αριθμητικές» εξισώσεις). Στόχος ήταν να αναδειχθούν οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από τις αριθμητικές στις αλγεβρικές εξισώσεις[5]. Μέσα από τη συγκριτική ανάλυση των διαφορών μεταξύ των δυο μοντέλων προέκυψαν τα εξής ευρήματα (Filloy et al, 2008, σσ. 109-118): Υπάρχουν διαφορές στη μετάφραση των στοιχείων της εξίσωσης του κάθε μοντέλου, οι οποίες παρεμποδίζουν την πρόοδο στη χρήση του. Κάποιες εξισώσεις παρέχουν μια πιο φυσική μετάφραση στο ένα μοντέλο έναντι του άλλου. Προέκυψαν τα εξής πολύ σημαντικά συμπεράσματα (σελ. 116):

1. Δεν είναι καθολική η αυθόρμητη ανάπτυξη της χρήσης του μοντέλου για την επίλυση της εξίσωσης, ακόμα και σε παιδιά ίδιου επιπέδου στην προ-αλγεβρική

[5] Η περίοδος αυτής της μετάβασης, έχει βαφτιστεί από τους Filloy & Rojano, περίοδος *διδακτικής τομής* (didactical cut).

ικανότητα, αλλά μάλλον η ανάπτυξη αυτή συναρτάται ισχυρά με τάσεις του μαθητή, που είναι γενικού χαρακτήρα, και που διαβαθμίζονται σε ένα φάσμα που ποικίλλει από το συντακτικό ή διαδικαστικό, στο ένα άκρο, ως το σημασιολογικό στο άλλο.

2. Υπάρχουν εμπόδια στο μοντέλο στη φάση της αποδέσμευσης από αυτό και μετάβασης στην αλγεβρική επίλυση. Αυτά δεν εξαρτώνται ούτε από το μοντέλο ούτε από τις τάσεις του μαθητή, αλλά από την έμφαση που δίνεται σε εκείνο το συστατικό του μοντέλου που καθιστά εφικτό να χτίσει ο μαθητής τη νέα γνώση πάνω στην προηγούμενη. Όπως επίσης και από πράξεις που ο μαθητής ήδη διαχειρίζεται με ευχέρεια, ώστε να εισάγει νέα αντικείμενα, έννοιες και πράξεις επ' αυτών.
3. Και στα δυο μοντέλα σημειώνεται μια αυτοματοποιημένη διαδικασία που έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία κλασικών λαθών συντακτικής φύσεως, όπως για παράδειγμα την πρόσθεση (ή αφαίρεση) συντελεστών όρων διαφορετικού βαθμού.

Ακολουθεί ένας συγκριτικός πίνακας (2.4) μεταξύ των διάφορων μορφών των «μη-αριθμητικών» γραμμικών εξισώσεων και των δυο μοντέλων.

Πίνακας 2.4 ***Μη Αριθμητικές Γραμμικές Εξισώσεις & Μοντέλα Ζυγαριάς – Γεωμετρικό***

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ		
ΕΙΔΟΣ ΜΗ- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	**ΜΟΝΤΕΛΟ ΖΥΓΑΡΙΑΣ**	**ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**
Ax +B =Cx	Είναι πιο εύχρηστο, αρκεί να είναι A ≤C, διότι αλλιώς οδηγούμαστε σε αρνητική ποσότητα βάρους.	Είναι δύσχρηστο καθώς απαιτείται η διαμέριση του ορθογωνίου του πρώτου μέλους, ώστε να σχηματιστεί ο όρος B
Ax+B = Cx + D	Πιο φυσιολογική η μετάβαση από την προηγούμενη μορφή εξίσωσης.	Είναι δύσχρηστο καθώς απαιτείται η διαμέριση του ορθογωνίου του πρώτου μέλους και του δεύτερου μέλους ώστε να σχηματιστούν οι όροι B και D αντίστοιχα.
Ax-B = Cx	Δύσχρηστο, καθώς ο αρνητικός σταθερός όρος (B) δεν έχει νόημα στο μοντέλο της ζυγαριάς.	Ο αρνητικός σταθερός όρος μπορεί να διερμηνευτεί ως συγκεκριμένη ενέργεια αποκοπής μέρους της επιφάνειας του ορθογωνίου εμβαδού ίσου με τον σταθερό όρο B.
Ax- B= Cx - D	Δύσχρηστο, καθώς οι αρνητικοί σταθεροί όροι (B & D) δεν έχουν νόημα στο μοντέλο της ζυγαριάς.	Οι αρνητικοί σταθεροί όροι μπορούν να διερμηνευτούν ως συγκεκριμένες ενέργειες αποκοπής μέρους της επιφάνειας του ορθογωνίου εμβαδού ίσου με τους σταθερούς όρους B και D.

Τέλος για την έννοια του ακεραίου αριθμού υπάρχει άλλη μια δημοφιλή κατηγορία μοντέλων. Είναι τα

- Πραγματικά μοντέλα καθημερινής Εμπειρίας:οι δραστηριότητες αναφέρονται σε μεγέθη που επιδέχονται αντίθεση, με σκοπό να διαφανεί η ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών (Θωμαΐδης, 2009, σελ. 203).

  Αναφέρονται σε :

  Χρηματικές Συναλλαγές (Κέρδος – Ζημία), Συνολικό κέρδος μιας επιχείρησης (Έσοδα-Έξοδα, Χρέωση- Πίστωση) και Διαπροσωπικές σχέσεις (Φίλοι- Εχθροί)

3° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Μεθοδολογία

Στόχος της εργασίας αυτής ήταν η διερεύνηση του τρόπου που οι εκπαιδευτικοί κατανοούν το ρόλο των εννοιολογικών μεταφορών στη διδασκαλία των μαθηματικών.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: το ερευνητικό πρόβλημα συνίσταται στην διερεύνηση του ρόλου των εννοιολογικών μεταφορών στη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τα παρακάτω τέσσερα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Πώς **αξιοποιούνται** οι εννοιολογικές μεταφορές στα σχολικά βιβλία του γυμνασίου;
2. Πώς αντιλαμβάνεται ο εκπαιδευτικός τη **σχέση** που υπάρχει ανάμεσα στην εννοιολογική μεταφορά και το μαθηματικό αντικείμενο;
3. Πώς κατανοεί το **ρόλο** και τη **σημασία** των εννοιολογικών μεταφορών στη διδασκαλία των Μαθηματικών;
4. Πώς **χρησιμοποιεί** ο εκπαιδευτικός τις εννοιολογικές μεταφορές στη διδασκαλία των Μαθηματικών;

Στη βάση αυτών των ευρημάτων στήθηκε αυτή η έρευνα που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

3.1 Διαδικασία της Έρευνας

Η έρευνα αναπτύχθηκε σε δυο φάσεις: Η πρώτη ήταν η συστηματική διερεύνηση των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια των τριών τάξεων του Γυμνασίου. Έγινε προκειμένου να καταλήξουμε στα μοντέλα εκείνα που θα διερευνούσαμε περαιτέρω στην εργασία αυτή. Η δεύτερη φάση, ήταν ο ενδελεχής έλεγχος των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών γύρω από τις εννοιολογικές μεταφορές και στοχεύει να απαντήσει στα ερευνητικά ερωτήματα.

3.2 Φάσεις

3.2.1 Α΄ φάση: Η Ανάλυση των Βιβλίων

Αρχικά έγινε μια καταγραφή των δραστηριοτήτων και των ασκήσεων των σχολικών βιβλίων που περιέχουν εννοιολογικές μεταφορές. Οι μεταφορές εντοπίστηκαν στα σχολικά εγχειρίδια,[6] μέσω των εκφράσεων που τις συνοδεύουν.

Ακολούθησε μια ταξινόμηση των εννοιολογικών μεταφορών με βάση αυτήν που υιοθετούν οι Lakoff & Núñez (2000).

Τέλος, μέσα από την ανάλυση αυτή συντάχθηκαν δυο δίκτυα:

1. Ένα δίκτυο των μοντέλων που χρησιμοποιούνται ως πηγή
2. Ένα δίκτυο των μαθηματικών εννοιών που εισάγονται μέσω της μεταφοράς.

3.2.2 Β΄ φάση: Η Κυρίως Έρευνα

<u>Συμμετέχοντες</u>

Συνάδελφοι καθηγητές Μαθηματικών από το χώρο του μεταπτυχιακού (35) και από τον ευρύτερο χώρο της Δευτεροβάθμιας (25) Εκπαίδευσης, συνολικά 60 άτομα. Βασική προϋπόθεση, προκειμένου να μετέχουν στην έρευνά αυτή, ήταν να έχουν διδάξει τα νέα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου. Τους ζητήθηκε να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο. Οι περισσότεροι είχαν αρκετά χρόνια εμπειρίας την διδασκαλία των μαθηματικών κατά μέσο όρο άνω των 5 ετών.

Το ερευνητικό εργαλείο είναι ένα ερωτηματολόγιο για τη σύνταξη του οποίου χρησιμοποιήθηκε ως πηγή ένα πιλοτικό ερωτηματολόγιο.

3.2.2.1 Πιλοτικό ερωτηματολόγιο.

Το πιλοτικό ερωτηματολόγιο, συντάχθηκε[7] και διανεμήθηκε το Μάιο του 2009. Περιείχε 6 ερωτήσεις κατανεμημένες στις εξής τρεις θεματικές ενότητες: Στατιστική, Άλγεβρα και Ανάλυση. Το κάθε ερώτημα αποτελούνταν από τέσσερις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, με

---

[6] Παρατίθεται πίνακας στο Παράρτημα Ι
[7] Παρατίθεται στο Παράρτημα ΙΙ

εξαίρεση το πρώτο που αποτελούνταν από τρείς ερωτήσεις και το έκτο από δύο. Συγκεκριμένα τα μοντέλα και οι αντίστοιχες θεμελιώδεις έννοιες που διερευνήθηκαν ήταν:

Πίνακας 3.1 ***Μοντέλα & Έννοιες στο Πιλοτικό Ερωτηματολόγιο***

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΈΝΝΟΙΑ		
ΜΟΝΤΕΛΟ	**ΈΝΝΟΙΑ**	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ**
Καθρέπτης	Αριθμός	Επέκταση του συνόλου $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$.
Αριθμογραμμή	Αριθμός	Πρόσθεση κι αφαίρεση στο σύνολο $\mathbb{Z}$.
Θερμόμετρο	Αριθμός	Πρόσθεση κι αφαίρεση στο σύνολο $\mathbb{Z}$.
Ζυγαριά	Ισότητα	Έννοια της ισοδυναμίας.
Ράβδος	Γενίκευση	Άθροισμα όρων μιας γεωμετρικής προόδου.

Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, απαντήθηκε και επιστράφηκε με τον ίδιο τρόπο. Ανταποκρίθηκαν συνολικά 16 άτομα, καθηγητές Μαθηματικών από το χώρο του μεταπτυχιακού και από τον ευρύτερο χώρο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Τα δεδομένα που προέκυψαν αναλύθηκαν βάσει της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory). Η ανάλυση των ερωτημάτων έγινε οριζόντια (ανά ερώτημα).

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής συνοπτικά ήταν τα εξής :

- Παρατηρήθηκε ότι υπάρχει πρόβλημα στο γνωστικό κομμάτι αναφορικά με την έννοια του στατιστικού δείγματος.
- Στο μοντέλο του καθρέπτη, παρόλο που από τις απαντήσεις των ερωτηθέντων φάνηκε ότι δεν είχαν προηγούμενη επαφή με αυτό, μπόρεσαν και ανέλυσαν με μεγάλη άνεση τα χαρακτηριστικά του. Επίσης εντόπισαν τις αδυναμίες που μπορεί να προκύψουν από την ταύτιση του πραγματικού καθρέπτη με τον νοερό, προκειμένου να γίνει το πέρασμα στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.
- Στα μοντέλα της αριθμογραμμής και του θερμομέτρου, παρατηρήθηκε μια δυστοκία στην ερμηνεία των δυσκολιών που προκύπτουν από την χρήση αυτών των μοντέλων στην καθημερινή διδακτική τους πρακτική. Μόλις το 1/3 από τους ερωτηθέντες μπόρεσαν κι εντόπισαν την κύρια πηγή δυσκολίας, δηλαδή στην πράξη της αφαίρεσης.
- Το μοντέλο της ζυγαριάς έτυχε μεγάλης αποδοχής από τους ερωτηθέντες και από τις απαντήσεις τους φάνηκε ότι μπορούν να αντιληφθούν τους περιορισμούς του.

- Αντίθετα, το μοντέλο της ράβδου δίχασε τους ερωτηθέντες με επικρατέστερους (9 προς 7) αυτούς που το θεωρούν κατάλληλο για την εύρεση του μοτίβου. Παρόλα αυτά, αναλύθηκε με σχετική ευκολία.
- Τέλος, αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης, η πλειοψηφία των ερωτηθέντων επέλεξε τη χρήση γνωστών μοντέλων από την καθημερινή ζωή.

3.2.2.2 Κύριο ερωτηματολόγιο.

Στη συνέχεια, τον Οκτώβριο του 2009, συντάχθηκε το κύριο ερωτηματολόγιο[8]. Το νέο ερωτηματολόγιο αρχικά αποτελούνταν από πέντε (5) ερωτήσεις. Για την επιλογή των ερωτήσεων λάβαμε υπόψη:

- Τον τρόπο που οι εννοιολογικές μεταφορές χρησιμοποιούνται στα βιβλία του γυμνασίου (α΄ φάση).
- Τα συμπεράσματα της πιλοτικής έρευνας, καθώς και τους παράγοντες που έδρασαν περιοριστικά στην έρευνα εκείνη.
- Τα συμπεράσματα της διεθνούς έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών στον αντίστοιχο χώρο των μαθηματικών.

Δόθηκε πιλοτικά σε τρεις συναδέλφους μαθηματικούς, για τον εντοπισμό τυχόν αδυναμιών στη διατύπωση των ερωτήσεων και να εκτιμηθεί ο απαιτούμενος χρόνος για την συμπλήρωση του. Μετά την πιλοτική χορήγηση του, αφαιρέθηκε ένα ερώτημα που θεωρήθηκε ότι πλεόναζε, περιορίστηκαν οι παράμετροι προς διερεύνηση σε δυο ερωτήματα καθώς εκτιμήθηκε ότι θα ήταν χρονοβόρα η συμπλήρωσή του και τέλος τροποποιήθηκαν οι εκφωνήσεις κάποιων ερωτήσεων, ώστε να γίνει πιο κατανοητό στους συναδέλφους αυτό που ζητούσαν.

Η τελική μορφή του ερωτηματολογίου περιλάμβανε τέσσερις (4) ερωτήσεις. Το κάθε ερώτημα αποτελούνταν από τέσσερις (4) υποερωτήσεις ανοικτού τύπου· με μόνη εξαίρεση μια ερώτηση κλειστού τύπου, η καταφατική απάντηση της οποίας οδηγούσε στη διαπραγμάτευση του τελευταίου ($4^{ου}$), επίσης ανοικτού, υποερωτήματος. Το ερωτηματολόγιο ασχολείται με την περιοχή της Άλγεβρας, όπου εκεί παρατηρήθηκαν οι μεγαλύτερες παρανοήσεις στην πιλοτική φάση[9]. Διαπραγματεύεται την εισαγωγή των θεμελιωδών εννοιών του *αριθμού* και της *ισότητας,* με την χρήση κάποιων δημοφιλών μοντέλων, που εκφράζουν υπόρρητα κάποιες αντίστοιχες εννοιολογικές μεταφορές. Συγκεκριμένα,

---

[8] Παρατίθεται στο παράρτημα ΙΙΙ.
[9] Πιλοτικό ερωτηματολόγιο

- Η πρώτη ερώτηση αναφερόταν στον αριθμό και ειδικά την έννοια του *ρητού*· μέσα από δυο κλασικά, γεωμετρικά στην φύση τους μοντέλα, της ράβδου και της αριθμογραμμής.
- Η δεύτερη ερώτηση επίσης αναφερόταν στον αριθμό, αλλά τώρα στη επέκταση στο σύνολο των *ακεραίων*, με την βοήθεια του φυσικού μοντέλου του θερμομέτρου.
- Η τρίτη ερώτηση διερευνούσε την έννοια της ισότητας μέσα από το μοντέλο της ζυγαριάς.
- Η τελευταία ερώτηση διαπραγματευόταν την έννοια της ισότητας μέσα από ένα γεωμετρικό μοντέλο, διατυπώνοντας το ερώτημα της διαισθητικής προσέγγισης της επιμεριστικής ιδιότητας με εμβαδά ορθογωνίων.

Η φύση των ερωτήσεων σε κάθε ερώτημα ήταν τέτοιας μορφής ώστε να κατανέμονται και στους τρεις άξονες που καλύπτουν τα ερευνητικά ερωτήματα 2,3 και 4, αναφορικά με τις εννοιολογικές μεταφορές και τα μαθηματικά.

Η διανομή του ερωτηματολογίου έγινε ηλεκτρονικά και σε κάποιες περιπτώσεις σε έντυπη μορφή. Έγινε αποστολή του ερωτηματολογίου σε όλους τους αποφοίτους του μεταπτυχιακού μέχρι σήμερα (συνολικά στον αριθμό: 200 καθηγητές των Μαθηματικών). Επίσης στάλθηκε σε εθελοντική βάση και σε καθηγητές που εργάζονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δημόσια και ιδιωτική, πού δεν έχουν μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική των μαθηματικών. Τελικά ανταποκριθήκαν συνολικά 60 καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, 35 με μεταπτυχιακές σπουδές και 25 χωρίς. Από τους 35, οι 33 το επέστρεψαν. Οι καθηγητές χωρίς μεταπτυχιακές σπουδές ανταποκρίθηκαν όλοι.

3.3 Ανάλυση των Δεδομένων

Επιλέχθηκε η ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (αναφορά) του ερωτηματολογίου, με στόχο τη διερεύνηση τόσο των πρόδηλων όσο και των άδηλων νοημάτων που εμπεριέχουν οι απαντήσεις των ερωτηθέντων.

Υπό το πρίσμα της διερευνητικής φύσεως της μελέτης, η προσέγγιση της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory) καθοδήγησε την ανάλυση των δεδομένων-ερωτημάτων (Strauss, A.,& Corbin, J.,1998)

Οι θεματικές κατηγορίες προέκυψαν κατευθείαν και επαγωγικά από τα ακατέργαστα δεδομένα –απαντήσεις των ερωτηθέντων.

Η Ανάλυση των δεδομένων επεκτάθηκε σε τέσσερις βασικούς άξονες:

1. Η βήμα προς βήμα συστηματική ανάλυση του σχετικού ερωτηματολογίου
2. Η νοηματοδότησή του

3. Οι συγκρίσεις και κατηγοριοποίηση του κατά θεματικές κατηγορίες, προερχόμενες από τα συμπεράσματα της διεθνούς ερευνητικής κοινότητας της διδακτικής των μαθηματικών αλλά και τα δεδομένα του ερωτηματολογίου
4. Η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η δημιουργία των θεματικών κατηγοριών πραγματοποιήθηκε σε πολλαπλά στάδια, με την πάροδο του χρόνου. Η αρχική διαδικασία δημιουργίας των κατηγοριών ήταν μια ανοικτή διαδικασία. Έτσι, σε ένα αρχικό στάδιο ένα υποσύνολο των απαντήσεων, είκοσι (20) ερωτηματολόγια (10 από καθηγητές που είχαν μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών ή έκαναν μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική των μαθηματικών και 10 που δεν είχαν), μεταφέρθηκαν σε ένα λογιστικό φύλλο Excel. Η καταγραφή τους έγινε οριζόντια (ανά ερώτημα).

Το κείμενο εξετάστηκε στην ολότητά του και όχι επιλεκτικά, μέσα από τη συστηματική ανάγνωση και σχολιασμό των δεδομένων. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας, επιχειρήθηκε η δημιουργία κάποιων αρχικών κατηγοριών που θα χρησιμοποιούνταν για την μετέπειτα ταξινόμηση όλων των δεδομένων.

Στο επόμενο στάδιο μεταφέρθηκαν και οι υπόλοιπες απαντήσεις στο λογιστικό φύλλο.

Για λόγους δεοντολογίας δόθηκαν στους καθηγητές κώδικες αναγνώρισης. Έτσι για τους καθηγητές που είχαν μεταπτυχιακές σπουδές απέκτησαν ένα κωδικό που αποτελούνταν από το αρχικό κεφαλαίο γράμμα κάπα[10], κι έναν αύξοντα αριθμό που δόθηκε τυχαία, σε κάθε μονάδα του πληθυσμού (καθηγητή), ανάλογα με τη σειρά που καταγράφηκαν τα δεδομένα στο λογιστικό φύλλο. Έτσι για παράδειγμα, ο κωδικός Κ7 αντιστοιχεί στον Καθηγητή που έχει μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών και είναι ο έβδομος στη σειρά καταγραφής των δεδομένων. Κατά συνέπεια οι κωδικοί εδώ κυμαίνονταν από Κ1-Κ35. Αντίστοιχα, η δεύτερη ομάδα των καθηγητών, που δε διέθεταν μεταπτυχιακό τίτλο (25 Καθηγητές) κωδικοποιήθηκαν με το αρχικό κεφαλαίο γράμμα κάπα και όμικρον (ΚΟ) [11]κι έναν αύξοντα αριθμό που δόθηκε και πάλι τυχαία, σε κάθε μονάδα του πληθυσμού (ερωτηματολόγιο), με τον ίδιο τρόπο. Οι κωδικοί εδώ κυμαίνονταν από ΚΟ1-ΚΟ25.

Η αξιοπιστία των ευρημάτων της έρευνας επαληθεύτηκε από το γεγονός ότι τα περισσότερα κριτήρια αναφέρθηκαν από περισσότερους του ενός από τους ερωτηθέντες.

[10] **Κ**αθηγητής/τρια
[11] **Κ**αθηγητής/τρια **Ό**χι μεταπτυχιακές σπουδές

Η μεταφερσιμότητα της παρούσας έρευνας, πιστοποιείται από την αναλυτική τεκμηρίωση της επεξεργασίας των δεδομένων. Επίσης, το σύστημα κωδικοποίησης καθιστά ευκολότερο για τους μελλοντικούς ερευνητές τη δυνατότητα μεταφοράς των κριτηρίων για άλλους πληθυσμούς ή σε άλλα πλαίσια.

Αποσπάσματα από τις απαντήσεις χρησιμοποιήθηκαν για την περαιτέρω περιγραφή των καθορισμένων κριτηρίων, και την ισχυροποίηση της διαμόρφωσης των θεματικών κατηγοριών. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν διαγράμματα και πίνακες για τη διευκόλυνση της περιγραφής των θεματικών κατηγοριών που εντοπίστηκαν.

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Αποτελέσματα

4.1 Α΄ Φάση της Έρευνας: Οι Εννοιολογικές Μεταφορές στα Σχολικά Συγγράμματα του Γυμνασίου

Με βάση την ανάλυση των μοντέλων που συναντήσαμε στα σχολικά συγγράμματα των τριών τάξεων του Γυμνασίου, έγινε σε ένα πρώτο επίπεδο, μια διάκριση των μοντέλων στις παρακάτω 3 κατηγορίες:

- Τεχνητά-Φυσικά Αντικείμενα, όπου περιέχει αντικείμενα της καθημερινής εμπειρίας (Διάγραμμα 4.3)
- Γεωμετρικά Αντικείμενα, όπου αντλεί αντικείμενα από τον κλάδο της Γεωμετρίας, και τέλος (Διάγραμμα 4.4)
- Αντικείμενα από άλλες επιστήμες. (Διάγραμμα 4.5)

<u>Τεχνητά-Φυσικά Αντικείμενα</u>

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, μπορούμε να χωρίσουμε τα Αντικείμενα, με βάση το **προεξέχον χαρακτηριστικό τους** για το οποίο επιλέχθηκαν σε:

- Διακριτά

  Ειδικά τα Διακριτά Αντικείμενα τα διακρίνουμε, με βάση τον **πληθικό τους αριθμό**, σε Αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν

  - στο σύνολο τους (Συλλογή Από Αντικείμενα) και
  - σε αυτά που δρουν ως μονάδες (Μεμονωμένα Αντικείμενα).
- Γραμμικά και
- Επιφανειακά.

Και οι 3 υποκατηγορίες, σε ένα επόμενο επίπεδο ταξινόμησης, τα διακρίνουμε με βάση το κριτήριο **κίνησης** (με εξαίρεση την υποκατηγορία Συλλογή από Αντικείμενα) στα

- Στατικά

  Σε ένα τελευταίο επίπεδο μικροσκοπικής Ανάλυσης, τα στατικά Αντικείμενα τα διακρίνουμε σε:

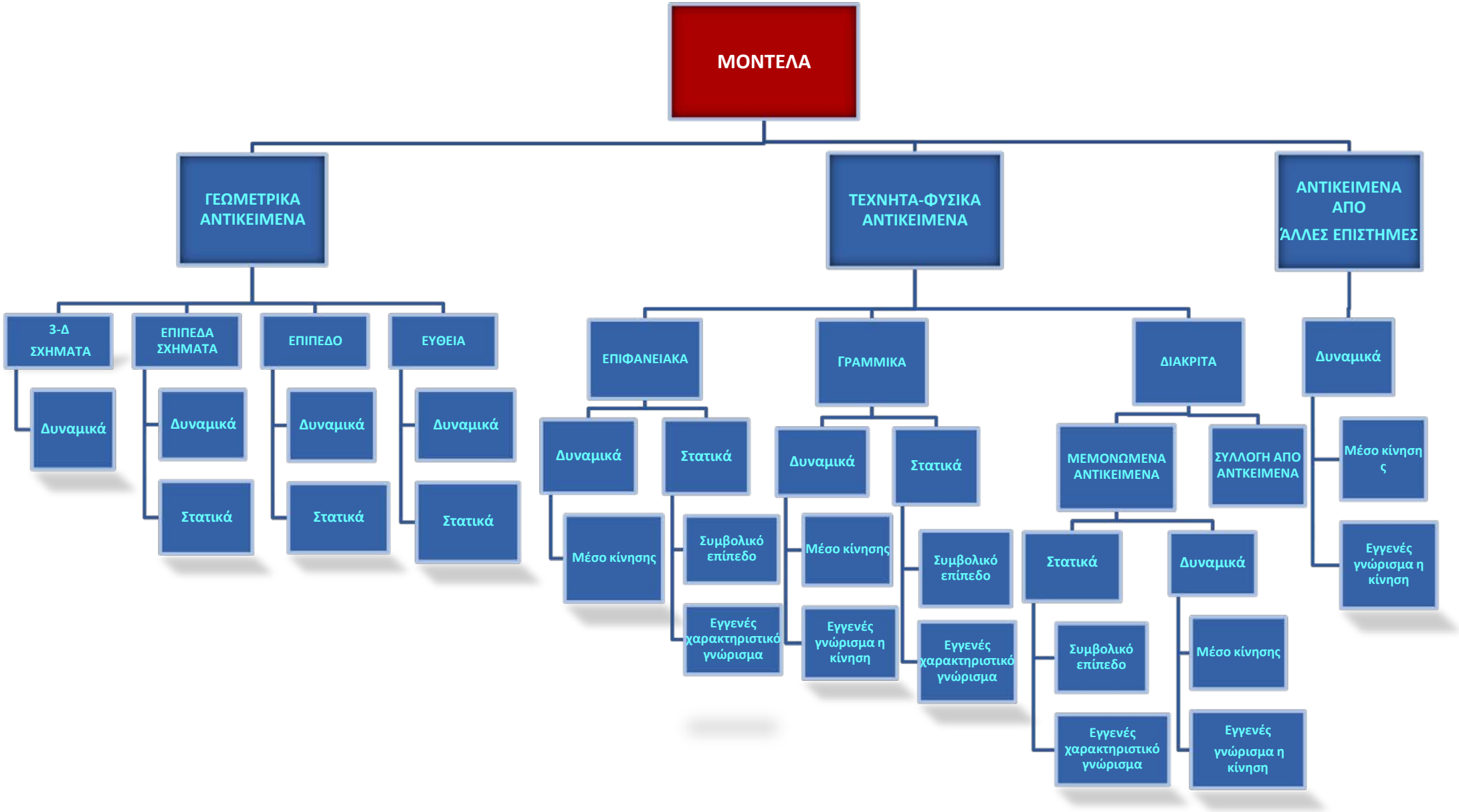
  - αυτά που λειτουργούν σε ένα Συμβολικό Επίπεδο και

σε αυτά που μας ενδιαφέρει το Εγγενές χαρακτηριστικό τους γνώρισμα και στα

- Δυναμικά

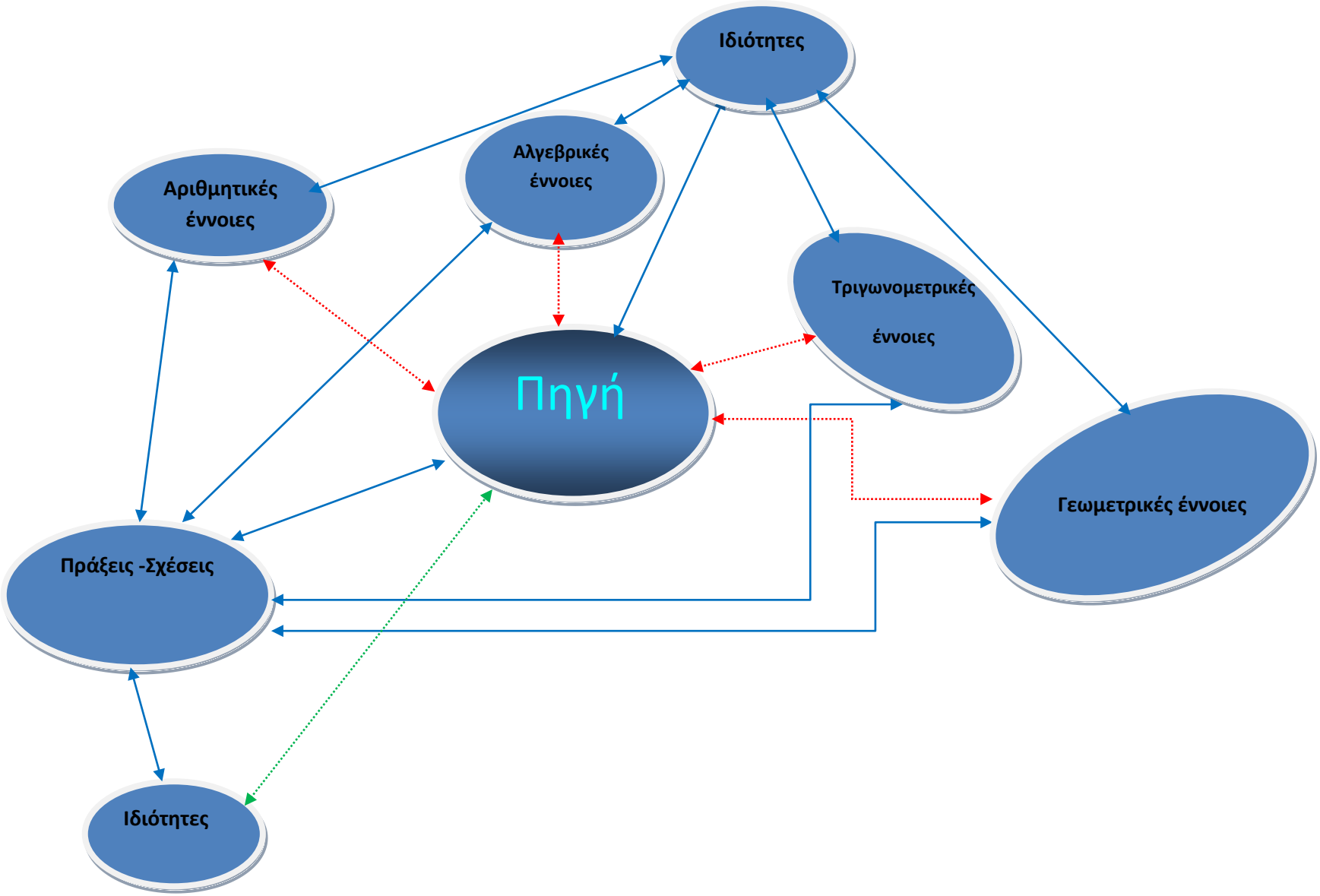
Τα δε δυναμικής φύσης Αντικείμενα, τα διακρίνουμε σε αυτά που η κίνηση είναι είτε εξωτερική ως προς την φύση τους-Μέσο Κίνησης, είτε είναι Εγγενές χαρακτηριστικό τους γνώρισμα -Αντικείμενα που κινούνται. Τα ευρήματα ταξινομήθηκαν στα δίκτυα που παρουσιάζονται στα διαγράμματα 4.1, 4.2 ,4.3 , 4.4 και 4.5 που ακολουθούν:

Διάγραμμα 4.1 **Δίκτυο των Μοντέλων που Χρησιμοποιούνται ως Πηγή**
Εννοιολογική Μεταφορά



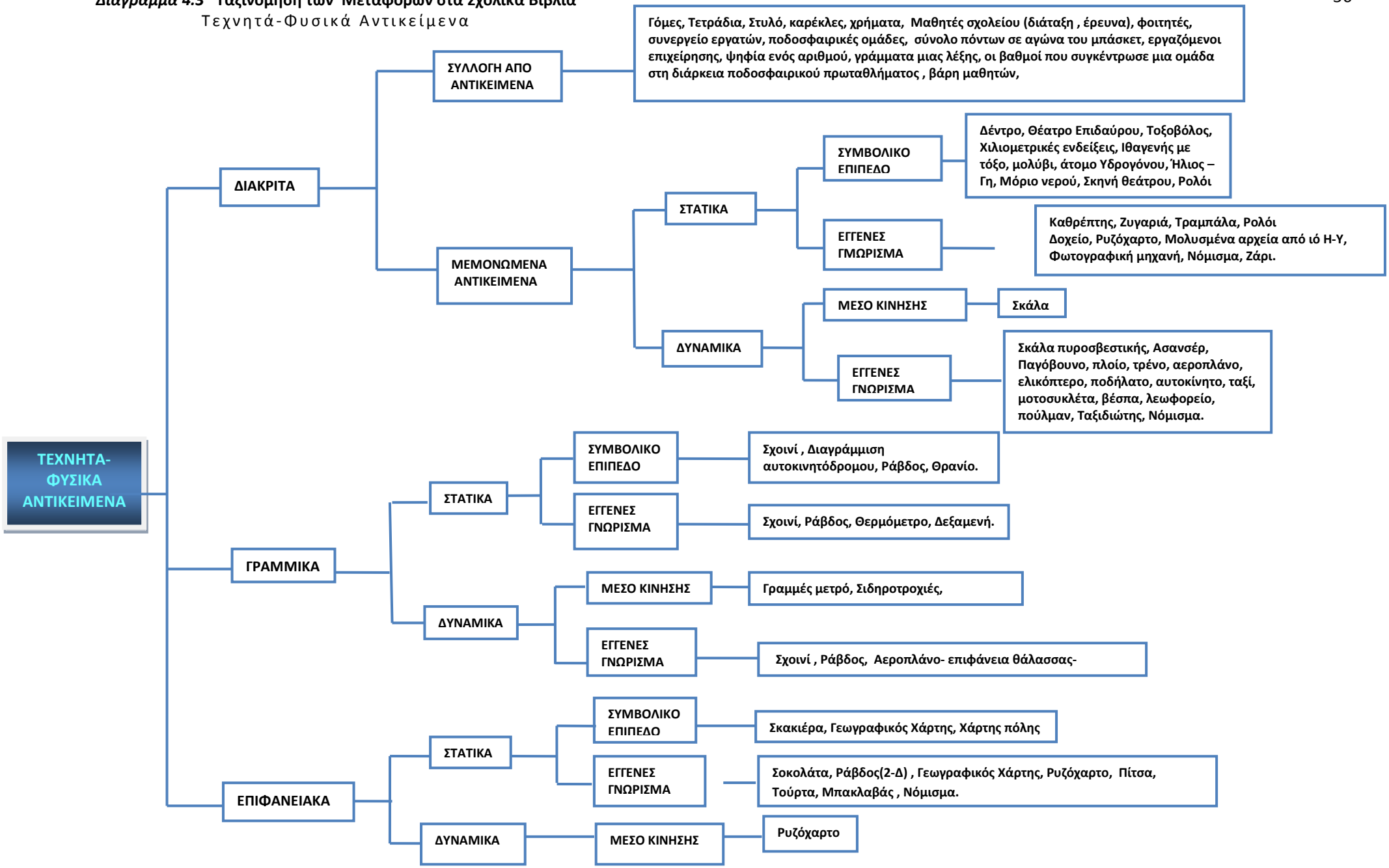
Διάγραμμα 4.2 **Δίκτυο των Μαθηματικών Εννοιών στα Σχολικά βιβλία που εισάγονται μέσω της Μεταφοράς**

Στόχος



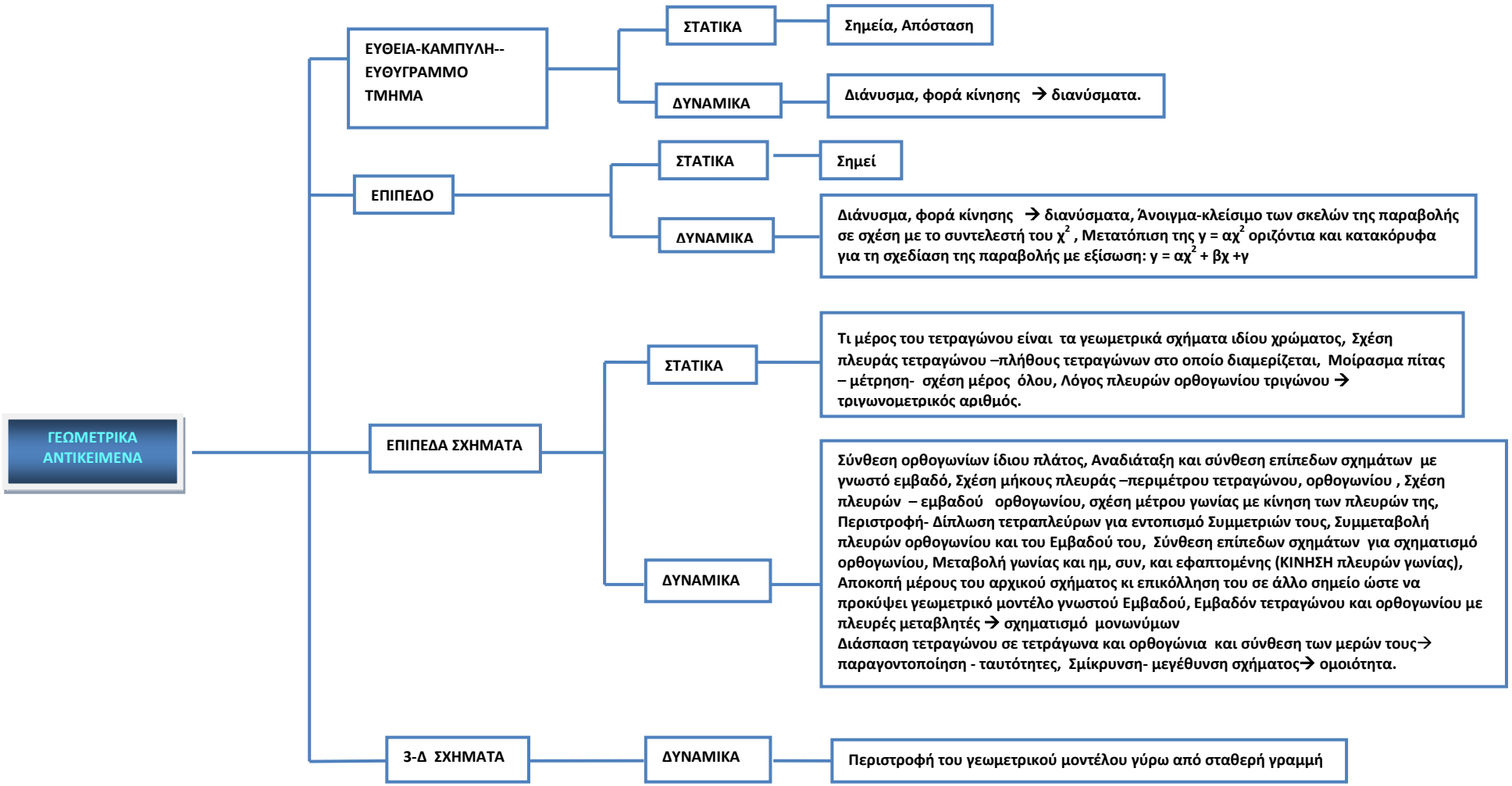
Διάγραμμα 4.3 **Ταξινόμηση των Μεταφορών στα Σχολικά Βιβλία**

Τεχνητά-Φυσικά Αντικείμενα



Διάγραμμα 4.4 **Ταξινόμηση των Μεταφορών στα Σχολικά Βιβλία**

Γεωμετρικά Αντικείμενα



Διάγραμμα 4.5 **Ταξινόμηση των Μεταφορών στα Σχολικά Βιβλία**

Αντικείμενα από άλλες Επιστήμες

Ενδεικτικά παρατίθενται κάποια αντιπροσωπευτικά παραδείγματα για κάθε κατηγορία:

- Στην 1η κατηγορία Τεχνητά-Φυσικά Αντικείμενα:

Στην υποκατηγορία:

Διακριτά- Συλλογή από Αντικείμενα.

Αναφέρουμε ενδεικτικά τα εξής παραδείγματα:

- ΠΗΓΗ: Εργαζόμενοι επιχείρησης και η αύξηση στους μισθούς τους
  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Η **Αριθμητική** είναι **κοινωνική συναλλαγή.**
  ΣΤΟΧΟΣ: Η έννοια της συνάρτησης, Β΄ Γυμνασίου
- ΠΗΓΗ: Καρέκλες που τις τοποθετούμε σε σειρές συγκεκριμένου πλήθους καθισμάτων
  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί είναι Συλλογές αντικειμένων** ίδιου μεγέθους, συνδυασμοί, αφαιρέσεις : G[12])
  ΣΤΟΧΟΣ: Ευκλείδεια διαίρεση –εισαγωγική δραστηριότητα (η τοποθέτηση 325 καθισμάτων σε σειρές των 19 καθισμάτων) σελ.63, Γ΄ Γυμνασίου
- ΠΗΓΗ: οι διαφορετικοί συνδυασμοί των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού.
  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: ο Αριθμός είναι **θέση ενός σημείου** σε **μονοπάτι** (G[13])
  ΣΤΟΧΟΣ: Φυσικοί αριθμοί-διάταξη φυσικών αριθμών, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία :

Διακριτά- Μεμονωμένα Αντικείμενα- Στατικά- Συμβολικό επίπεδο

- ΠΗΓΗ*: Μολύβι* που χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης του μήκους του θρανίου
  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί** είναι φυσικά τμήματα (Ράβδοι μέτρησης) αποτελούμενα από βασικά μοναδιαία μέρη κι άρα είναι **μήκη ευθυγράμμων τμημάτων**. (G[14])
  ΣΤΟΧΟΣ: Δεκαδικά κλάσματα- δεκαδικοί αριθμοί, Α΄ Γυμνασίου
- ΠΗΓΗ*:* Το *ρολόι*, η εικόνα του
  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: σχετική θέση των δεικτών του
  ΣΤΟΧΟΣ: είδη γωνιών, Α΄ Γυμνασίου

[12] Grounded metaphor
[13] Grounded metaphor
[14] Grounded metaphor

Στην κατηγορία:

Διακριτά-Μεμονωμένα Αντικείμενα-Στατικά-Εγγενές χαρακτηριστικό γνώρισμα

- ΠΗΓΗ*:* Η *ζυγαριά* με την εγγενή ιδιότητα της να ισορροπούν τα διάφορα σώματα στα δυο σκέλη της.

  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: η μεταφορά της ζυγαριάς

  ΣΤΟΧΟΣ: Εξισώσεις-ανισώσεις α΄ βαθμού, Β΄ Γυμνασίου-η έννοια της εξίσωσης, Α΄ Γυμνασίου

- ΠΗΓΗ*:* η πορεία των ακτίνων του φωτός που εκπέμπει μια φωτεινή πηγή και ανακλώνται σε ένα *Καθρέπτη*[15]

  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: η ιδιότητα του Καθρέπτη να απεικονίζει το Είδωλο της Εικόνας που συνιστούν τις δυο όψεις του ίδιου νομίσματος

  ΣΤΟΧΟΣ: Συμμετρία ως προς άξονα, Α΄ Γυμνασίου

- ΠΗΓΗ: Δοχείο (Ανοικτό-κλειστό)

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: οι μεταβλητές είναι Δοχεία

ΣΤΟΧΟΣ: η έννοια του αγνώστου, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Διακριτά- Μεμονωμένα Αντικείμενα- Δυναμικά -Μέσο Κίνησης
  - ΠΗΓΗ: Η *Σκάλα*, που έχουμε την δυνατότητα, όπως και στην πραγματικότητα, να την ανέβουμε ή να την κατέβουμε

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Κατασκευή Οικοδομής

    ΣΤΟΧΟΣ: Μονάδες μέτρησης , Α' Γυμνασίου (Για τις μετατροπές από μια μονάδα σε μια άλλη φτιάχνουμε μια σκάλα , που για να την «**ανεβούμε»** πρέπει από το κάθε σκαλοπάτι στο επόμενο να διαιρούμε με 10, ενώ για την «**κατεβούμε**», πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 10)

Στην κατηγορία

- Διακριτά-Μεμονωμένα Αντικείμενα-Δυναμικά-(Αντικείμενο που κινείται)
  - ΠΗΓΗ: Στο *Ασανσέρ* που κινείται κατακόρυφα στους διάφορους ορόφους-διακριτές θέσεις.

  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: ο Αριθμός είναι **θέση ενός σημείου** σε **μονοπάτι** . Arithmetic is motion Along a path(G[16])

---

[15] Αυτό το μοντέλο ανήκει και στην κατηγορία Αντικείμενα από άλλες επιστήμες – η έννοια της ανάκλασης από τις Φυσικές επιστήμες.

[16] Grounded metaphor

ΣΤΟΧΟΣ: Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, Α΄ Γυμνασίου

- ΠΗΓΗ: Μετακίνηση πλοίου

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: σχέση χρόνου -απόσταση

ΣΤΟΧΟΣ: Ανάλογα ποσά, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Γραμμικά –Στατικά- Συμβολικό επίπεδο
  - ΠΗΓΗ: Το *Σχοινί*, μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα φυσικό μέτρο (σχοινί μήκους 1m) για να μετρήσουμε το μήκος ενός θρανίου.

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί** είναι φυσικά τμήματα (Ράβδοι μέτρησης) αποτελούμενα από βασικά μοναδιαία μέρη κι άρα είναι **μήκη ευθυγράμμων τμημάτων** (G[17])

    ΣΤΟΧΟΣ: Η απόσταση του σημείου από ευθεία **ε,** Α΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: *μοντέλο της ράβδου,* ως μονοδιάστατο μέγεθος

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί** είναι φυσικά τμήματα (Ράβδοι μέτρησης) αποτελούμενα από βασικά μοναδιαία μέρη κι άρα είναι **μήκη ευθυγράμμων τμημάτων**. (G[18])

    ΣΤΟΧΟΣ: Άθροισμα-διαφορά συγγραμικών διανυσμάτων, Β΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Γραμμικά –Στατικά- Εγγενές χαρακτηριστικό γνώρισμα
  - ΠΗΓΗ: *μοντέλο της ράβδου,* ως μονοδιάστατο μέγεθος,

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: χρήση του εγγενούς *χαρακτηριστικού* της: ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ και ΣΥΝΘΕΣΗ

    ΣΤΟΧΟΣ: Σύγκριση δυο κλασμάτων (μέρος – όλου), Α΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: *Θερμόμετρο*, η απόστασή της Υδραργυρικής Στήλης από το σημείο αναφοράς (0) , προσδιορίζει τη θερμοκρασία

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Ο αριθμός είναι η **θέση ενός σημείου** σε ένα μονοπάτι . G[19]).

    ΣΤΟΧΟΣ: Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Γραμμικά- Δυναμικά- Μέσο κίνησης

[17] Grounded metaphor
[18] Grounded metaphor κατά την ταξινόμηση των Lakoff- Núñez
[19] Grounded metaphor

- ΠΗΓΗ: *Γραμμές του μετρό*

  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: μετατόπιση

  ΣΤΟΧΟΣ: Άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων, Β΄ Γυμνασίου
- ΠΗΓΗ: *Μονοπάτι*

  ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Φορά κίνησης

  ΣΤΟΧΟΣ: πράξη, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Γραμμικά- Δυναμικά- Αντικείμενο που κινείται
  - ΠΗΓΗ: *Αεροπλάνο- επιφάνεια θάλασσας*- καρχαρίας

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Ο αριθμός είναι η **θέση ενός σημείου** σε ένα μονοπάτι . (G[20])

    ΣΤΟΧΟΣ: Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, Α΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: *μοντέλο της ράβδου,* ως μονοδιάστατο μέγεθος (Ίσες δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα της ράβδου για την σπρώξουν προς μια κατεύθυνση).

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: ΚΙΝΗΣΗ

    ΣΤΟΧΟΣ: Ίσα διανύσματα , Β΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Επιφανειακά –Στατικά- Συμβολικό επίπεδο
  - ΠΗΓΗ: *Σκακιέρα*

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί είναι θέσεις (locations) στο χώρο** κι άρα ένα σημείο είναι μια οντότητα που έχει θέση (η οποία καθορίζεται από τις συντεταγμένες του) αλλά δεν έχει επέκταση κι άρα όταν λέμε ότι π.χ. το σημείο)

    ΣΤΟΧΟΣ: Παράσταση σημείων στο επίπεδο, Α΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: *Χάρτης πόλης* με τις κεντρικές αρτηρίες που διασταυρώνονται και τα κύρια σημεία της πόλης αποτυπωμένα σε αυτόν,

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί είναι θέσεις (locations) στο χώρο** κι άρα ένα σημείο είναι μια οντότητα που έχει θέση

    ΣΤΟΧΟΣ: στο επίπεδο με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, Β΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Επιφανειακά –Στατικά- Εγγενές χαρακτηριστικό γνώρισμα
  - ΠΗΓΗ: Η Ράβδος ως δισδιάστατο μέγεθος (2-Δ), κάνουμε χρήση του εγγενούς χαρακτηριστικού της Διαμέριση και σύνθεση

[20] Grounded metaphor

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Μοίρασμα και μέτρηση

ΣΤΟΧΟΣ: Ισοδύναμα κλάσματα, Α΄ Γυμνασίου

- ΠΗΓΗ: Η *Πίτσα*,

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: μέρος- όλου

ΣΤΟΧΟΣ: Η έννοια του κλάσματος, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Επιφανειακά-Δυναμικά-Μέσο κίνησης
  - ΠΗΓΗ: Το *Ρυζόχαρτο*

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Η δίπλωση του με ένα συγκεκριμένο τρόπο

    ΣΤΟΧΟΣ: διχοτόμος γωνίας, Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Επιφανειακά-Δυναμικά-Αντικείμενο που κινείται (Δε βρέθηκε μοντέλο)

Κατά την κατάταξη των αντικειμένων σε κάθε μια κατηγορία, εντοπίστηκαν αντικείμενα, όπως τα: μοντέλο της ράβδου, το ρυζόχαρτο, μόρια νερού, ο Καθρέπτης, που ανάλογα με την εκάστοτε χρήση τους, ενέπιπταν σε διαφορετική κατηγορία.

- Στη 2η μεγάλη κατηγορία: Γεωμετρικά Αντικείμενα ορίστηκαν οι παρακάτω υποκατηγορίες:

Στην κατηγορία

- Ευθεία-Καμπύλη- Ευθύγραμμο τμήμα-Στατικά
  - ΠΗΓΗ: ευθεία γραμμή

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι αριθμοί είναι σημεία σε μια γραμμή[17] (LM)[21]

    ΣΤΟΧΟΣ: Τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Α΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: ευθεία γραμμή

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Φορά κίνησης, απόσταση,

    ΣΤΟΧΟΣ: Θερμοκρασίες

Στην κατηγορία

- (Ημ)ευθεία-Καμπύλη- Ευθύγραμμο τμήμα-Δυναμικά ανήκει η έννοια
  - ΠΗΓΗ: βέλος

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: φορά κίνησης

    ΣΤΟΧΟΣ: η έννοια Διανύσματος

[21] Linking Metaphor

Στην κατηγορία

- Επίπεδο-Στατικά
  - ΠΗΓΗ: Επίπεδο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Οι **αριθμοί είναι θέσεις στο χώρο** κι άρα ένα σημείο είναι μια οντότητα που έχει θέση (η οποία καθορίζεται από τις συντεταγμένες του) αλλά δεν έχει επέκταση κι άρα όταν λέμε ότι π.χ. το σημείο)

    ΣΤΟΧΟΣ: Πραγματικός αριθμός , Α΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Επίπεδο-Δυναμικά
  - ΠΗΓΗ: Γεωμετρικό μοντέλο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Άνοιγμα-κλείσιμο (ΚΙΝΗΣΗ)

    ΣΤΟΧΟΣ: Η παραβολή $y = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, Γ΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: επίπεδο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Σημεία

    ΣΤΟΧΟΣ: Τριγωνομετρικός αριθμός, Γ΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Επίπεδα σχήματα-Στατικά:
  - ΠΗΓΗ: γεωμετρικό μοντέλο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Τι μέρος του τετραγώνου είναι τα γεωμετρικά σχήματα ιδίου χρώματος (tangram)

    ΣΤΟΧΟΣ: Κλάσμα ως μέρος όλου, Α΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: γεωμετρικό μοντέλο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Μοίρασμα (μέρος όλου) – μέτρηση- σχέση μέρος όλου

    ΣΤΟΧΟΣ: Σύγκριση κλασμάτων - πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων-ποσοστά – σχέση επίκεντρης γωνίας αντίστοιχου τόξου -μέτρο τόξου –κυκλικά διαγράμματα: ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (πίτα)

Στην κατηγορία

- Επίπεδα σχήματα-Δυναμικά συναντήσαμε:
  - ΠΗΓΗ: Γεωμετρικό μοντέλο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: *σύνθεση- διαχωρισμός* ορθογωνίων ίδιου πλάτους.

    ΣΤΟΧΟΣ: Η έννοια της Επιμεριστικής ιδιότητας, Β΄ Γυμνασίου
  - ΠΗΓΗ: Γεωμετρικό μοντέλο

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: Μετατόπιση και περιστροφή

ΣΤΟΧΟΣ: Η Ισότητα επίπεδων σχημάτων, Γ΄ Γυμνασίου

Στην κατηγορία

- Τρισδιάστατα (3-Δ) σχήματα- Δυναμικά
  - ΠΗΓΗ: Γεωμετρικό μοντέλο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: *Περιστροφή* του γύρω από σταθερή γραμμή

    ΣΤΟΧΟΣ: κώνος και σφαίρα, Γ΄ Γυμνασίου

- Στην 3η κατηγορία Αντικείμενα από άλλες Επιστήμες συναντήσαμε

Την κατηγορία:

- Δυναμικά -Μέσο κίνησης
  - ΠΗΓΗ: κεκλιμένο επίπεδο

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: μέσο κίνησης

    ΣΤΟΧΟΣ: Η έννοια της εφαπτομένης γωνίας ως Σύνθεση των 2 κινήσεων επ΄ αυτού της οριζόντιας και κατακόρυφης

Και την κατηγορία:

- Δυναμικά-Αντικείμενο που κινείται
  - ΠΗΓΗ: η Γη και ο Ήλιος (Αστρονομία)

    ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ: μεγάλης μάζα

    ΣΤΟΧΟΣ: Τυποποιημένη μορφή των μεγάλων αριθμών,

Τέλος, παρατηρούμε και συνδυασμούς των παραπάνω μοντέλων όπως το συνδυασμό τριών μοντέλων (ΣΥΝΘΕΤΟ): της αριθμογραμμής με σημεία θερμοκρασίες, της γραμμής του χρόνου με σημεία τους μήνες του έτους και της ράβδου το πλάτος της οποίας προσδιορίζει την θερμοκρασία τον αντίστοιχο μήνα. ΣΤΟΧΟΣ: Αφαίρεση ρητών αριθμών, Α΄ Γυμνασίου

4.2 Β΄ Φάση της Έρευνας: Η Έννοια του Αριθμού και της Ισότητας μέσα από Πέντε Κλασικά Μοντέλα

Τα δυο πρώτα ερωτήματα αναφέρονταν στην έννοια του αριθμού και τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η ράβδος, η αριθμογραμμή και το θερμόμετρο. Τα δυο επόμενα ερωτήματα αναφέρονταν στην έννοια της ισότητας η διερεύνηση της οποίας έγινε με τη χρήση των μοντέλων της ζυγαριάς και ο γεωμετρικό μοντέλο.

4.2.1 Η συσχέτιση της Έννοιας του Ρητού με τα Μοντέλα της Ράβδου και της Αριθμογραμμής

Η πρώτη ερώτηση αναφερόταν ειδικά στην έννοια του *ρητού* αριθμού. Το πρώτο υποερώτημα διερευνούσε πώς συσχετίζουν οι καθηγητές τις *πτυχές* της έννοιας του ρητού με δυο κλασικά, γεωμετρικά στην φύση τους μοντέλα, της ράβδου και της αριθμογραμμής. Σε ένα πρώτο επίπεδο ανάλυσης το 87% περίπου αυτών που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο, έκαναν μια συσχέτιση των μοντέλων της ράβδου και της αριθμογραμμής με το ρητό αριθμό (53/60 & 52/60 αντίστοιχα). Από τα διαγράμματα συσχέτισης που παρατίθενται (Γράφημα 4.1) παρατηρούμε ότι διαφορετική απήχηση έχουν τα μοντέλα στις διάφορες πτυχές της έννοιας του ρητού.

Σχήμα 4.1 **Γράφημα Συσχέτισης Ράβδου-Αριθμογραμμής**

Έτσι, η δημοφιλέστερη επιλογή παρατηρήθηκε να είναι η πτυχή του *μέρους-όλου* για το μοντέλο της ράβδου, ενώ για το μοντέλο της αριθμογραμμής, δημοφιλέστερη ήταν η πτυχή του *μέτρου*. Ωστόσο, τα μοντέλα αυτά έχουν διαφορετική απήχηση τόσο στο βαθμό, όσο και στο είδος των πτυχών που το καθένα διαχειρίζεται. Στο γράφημα διασποράς που παραστήσαμε τις απαντήσεις των καθηγητών με στόχο τον εντοπισμό της ύπαρξης ενδεχομένως ενός μοτίβου μεταξύ των δεδομένων, καταδείχθηκε ότι δεν υπάρχει μια γραμμική τάση ως προς αυτά, αλλά ασυμμετρία. Είναι εμφανής η συγκέντρωση στις ακραίες τιμές του άξονα. Συγκεκριμένα, υπάρχει μια συσσώρευση απαντήσεων για το μοντέλο της ράβδου στη μεταβλητή *Μέρος-όλου*, ενώ για αυτό της αριθμογραμμής η συσσώρευση είναι στο άλλο άκρο, στην πτυχή του *μέτρου*.

<u>Για το μοντέλο της ράβδου</u>

Συσχέτισαν το μοντέλο αυτό :

- με ιδιότητες των ρητών

Από τις ιδιότητες αναφέρθηκαν η σύγκριση κλασμάτων «*Με τη βοήθεια της ράβδου μπορείς να συγκρίνεις κλάσματα»* (Κ2) « *Τη σχέση ενός κλάσματος με τη μονάδα*» (Κ6) και η ισοδυναμία «*τα ισοδύναμα κλάσματα»* (ΚΟ17)

και

- με πράξεις

Όσον αφορά τις πράξεις έγινε αναφορά και στις τέσσερις, με πιο συχνές της πρόσθεσης κι αφαίρεσης «*περιορισμένες πράξεις, όπως : 1/2+1/6, 1/2-1/6, 1/2=1/6»* (Κ31)

<u>Για το μοντέλο της αριθμογραμμής</u>

Συσχέτισαν το μοντέλο αυτό :

- με ιδιότητες των ρητών

  Επιπλέον από αυτούς που αναφέρθηκαν στις ιδιότητες των ρητών, κάλυψαν το μεγαλύτερο εύρος τους, έναντι του μοντέλου της ράβδου. Αναφέρθηκαν στη θεώρηση του ρητού ως σημείο ευθείας,

  «*Στις ασκήσεις εμφανίζονται (άρρητα) άλλες πτυχές του κλάσματος (το κλάσμα ως λόγος μεγεθών, το κλάσμα ως αριθμός που πρέπει να τοποθετηθεί στην ευθεία των αριθμών – βλ. σελ. 43 άσκηση 7)»* (Κ15), *«Επίσης στην αντιστοίχιση των ρητών με τα σημεία.»* (Κ21)

  Στη διάταξη των ρητών

  «αποδίδει στο κλάσμα μια εικόνα για τη θέση του σε σχέση με τους γνωστούς φυσικούς αριθμούς.» (Κ7),

στα γνήσια ή καταχρηστικά κλάσματα, «*το μέρος της ακέραιας μονάδας*» (ΚΟ17),

στη σύγκριση κλασμάτων , *«να συγκρίνουμε δυο ή περισσότερα κλάσματα »* (ΚΟ25),

στην ισοδυναμία, *«Επίσης βοηθά το μαθητή να κατανοήσει ότι το ίδιο σημείο αντιστοιχεί σε διαφορετικό ρητό ανάλογα με τη επιλογή της μονάδας, κάτι που δεν συμβαίνει σε άλλα αναπαραστασιακά μοντέλα (πχ ράβδος*),» (Κ7).

Αναφέρθηκαν στη σχέση διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών,

*«η αριθμογραμμή πιστεύω ότι χρησιμοποιείται κυρίως για να δείξει την δεκαδική μορφή και την ακέραια μορφή ενός κλάσματος»(*Κ32),

στην επέκταση στο σύνολο των αρνητικών ρητών, *«το κλάσμα ως ρητός αριθμός»* (Κ32),

στη σύγκριση τμημάτων, *«το κλάσμα ως αποτέλεσμα μέτρησης – σύγκρισης τμημάτων»* (ΚΟ10),

στην προσέγγιση με τον πλησιέστερο ακέραιο και στην πυκνότητα των ρητών.

Τέλος, αναφέρθηκαν και σε πράξεις με ρητούς. Όσον αφορά τις πράξεις έγινε αναφορά και στις τέσσερις, με πιο συχνές της πρόσθεσης κι αφαίρεσης *«περιορισμένες πράξεις, όπως : 1/2+1/6, 1/2-1/6, 1/2=1/6.»* (Κ31).

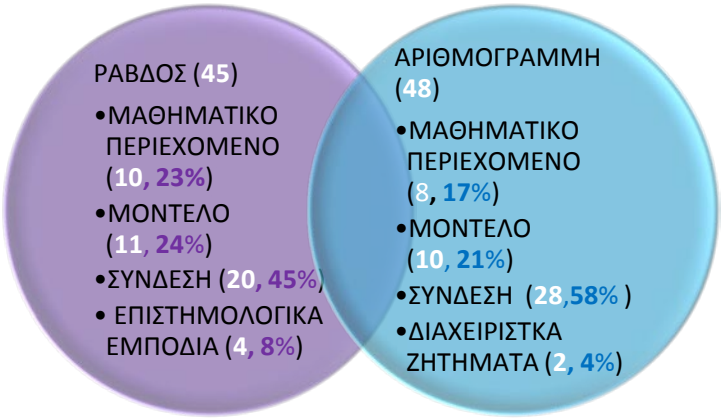
4.2.2 Δυνατότητες και Περιορισμοί των Μοντέλων της Ράβδου και της Αριθμογραμμής.

Σε αυτήν την ερώτηση, επειδή κάποιοι ερωτηθέντες έδωσαν περισσότερες από μια απαντήσεις, οι αριθμοί που παρατίθενται αναφέρονται στο πλήθος των απαντήσεων. Έτσι, σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης πρόεκυψαν οι παρακάτω ομάδες περιορισμών του μοντέλου της ράβδου[22] και της αριθμογραμμής[23](Διάγραμμα 4.6)

[22] Από τις συνολικά 66 απαντήσεις αφαιρέθηκαν αυτές που αναγνώριζαν μόνο δυνατότητες (18/26) και αυτές που δεν περιείχαν καμία απάντηση (8/26), ήτοι (26/60, 43%).

[23] Από τις συνολικά 67 απαντήσεις αφαιρέθηκαν αυτές που αναγνώριζαν μόνο δυνατότητες (8/19) και αυτές που δεν περιείχαν καμία απάντηση (8/19), (σύνολο 19/60, 32%).

Διάγραμμα 4.6 **Περιορισμοί Μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής**



(45 καθηγητές αναφέρθηκαν στο μοντέλο της ράβδου και 48 στο μοντέλο της αριθμογραμμής)

Ειδικότερα:

Αναφορικά με το <u>μοντέλο της ράβδου:</u>

Προέκυψαν οι παρακάτω ομάδες απαντήσεων αναφορικά με τους περιορισμούς που εντόπισαν οι ερωτηθέντες

- Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο

  Αναφέρθηκαν στη διαφορετική φύση των διαφόρων πτυχών του ρητού αριθμού «*κατανοούν την έννοια του κλάσματος σαν μέρος-όλου, αλλά σαν τελεστή και σαν μέτρο υπάρχει σημαντική δυσκολία.*» (Κ34),

  στα καταχρηστικά κλάσματα «*Επίσης δεν μπορούν να κατανοήσουν την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος.*» (Κ4)

- Ως προς το μοντέλο αναφέρθηκαν στις ιδιότητες του μοντέλου

  «*Η έννοια του ίσου μεγέθους των μερών δεν είναι πάντα προφανής στα παιδιά. Π. χ αν ζητήσουμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν μια διαγώνιο της ορθογώνιας ράβδου, τότε υποθέτουμε ότι οι μαθητές κατανοούν διαισθητικά ότι τα δύο μέρη είναι ισεμβαδικά (λόγω συμμετρίας) αλλά αυτό δεν ισχύει απαραίτητα για όλους τους μαθητές.*» (Κ1) «*Δυσκολίες με τη φύση του «όλου» και του τρόπου χωρισμού της*» (Κ9).

  Επίσης αναφέρθηκαν στη δυσκολία των μαθητών με τη διαμέριση «*Οι μαθητές δυσκολεύονται να κόψουν τη ράβδο σε ίσα μέρη κλπ (σε σχέση με μια πίτα)*»

(ΚΟ10), «*Τα παιδιά δυσκολεύονται να χωρίσουν ποσότητες μια και η διαίρεση είναι η λιγότερο κατανοητή πράξη γι αυτά»* (ΚΟ12).

Αναφέρθηκαν στη φύση του μοντέλου «*«δεν είναι οικεία στους μαθητές»* (ΚΟ1) *«Θεωρώ ότι είναι κάπως φτωχή σε παραστάσεις για τον ακριβή υπολογισμό μέρους-όλου»* (ΚΟ3)

- Ως προς τη σύνδεση μοντέλου και μαθηματικού αντικειμένου. Διατυπώθηκαν επιχειρήματα σχετικά με τη μετάφραση από το μαθηματικό αντικείμενο στο μοντέλο. <u>Πιο ειδικά:</u>

  Αναφέρθηκαν στην αναπαράσταση είτε των καταχρηστικών κλασμάτων «*Για κλάσματα μικρότερα της μονάδας καμία ιδιαίτερη δυσκολία. Για κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας και περισσότερο στα ακόμα μεγαλύτερα κλάσματα υπάρχει δυσκολία να τα εκφράσουν σωστά, να καταλάβουν ότι χρειάζονται μερικές ολόκληρες ράβδοι και «κάτι ακόμα» για να αποδοθεί το κλάσμα σωστά.»* (Κ6),

  είτε των αρνητικών ρητών *«είναι περιοριστικό ως προς το ότι δεν καλύπτει αρνητικούς»* (Κ31),

  είτε μεγάλων όρων του *«Η ράβδος μπορεί να χρησιμεύσει μόνο όταν οι όροι του κλάσματος είναι μικροί ακέραιοι αριθμοί….»* (Κ32), είτε ετερώνυμων κλασμάτων «*δυσκολεύονται στο μοντέλο αυτό όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα και όταν πρέπει να δείξουν την πρόσθεση και την αφαίρεσή τους»*. (ΚΟ25),

  στη σύγκριση κλασμάτων , *«Δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο για τη σύγκριση κλασμάτων.»* (Κ4)

  καθώς και στη σύνδεση γνήσιων με καταχρηστικά κλάσματα *«δυσκολεύονται να συνδέσουν την έννοια του κλάσματος μέρους της μονάδας (2/3) με την έννοια του κλάσματος μέρος του πλήθους (7/3)»* (ΚΟ20)

- Τέλος διατυπώθηκαν επιχειρήματα σχετικά με τη μετάφραση από το μοντέλο στο μαθηματικό αντικείμενο *«… τη φύση του "όλου" αν έχω διακριτά ή συνεχή μοντέλα.»* (Κ30).

Μια άλλη θεματική κατηγορία που διαμορφώθηκε ήταν τα

- επιστημολογικά εμπόδια: το εμπόδιο της πρότερης επαφής με τους φυσικούς αριθμός έχει σαν αποτέλεσμα να μη μπορούν να δουν το ρητό ως ένα αριθμό

  «Γενικά θεωρούν ότι το κλάσμα δεν είναι ένας αριθμός σαν όλους τους άλλους και τον αντιμετωπίζουν διαφορετικά πιστεύω περισσότερο από την έννοια μέρους -όλου » (Κ5)

  «Το κλάσμα δε μπορεί να θεωρηθεί ως μια ανεξάρτητη οντότητα. Έχει νόημα πάντα σε σχέση με το «όλο» του οποίου δηλώνεται το μέρος» (Κ14)

Αναφορικά με το <u>μοντέλο της αριθμογραμμής</u> προέκυψαν οι παρακάτω ομάδες απαντήσεων:

- Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο

  Αναφέρθηκαν στις ιδιότητες των ρητών, *«μη γνώση της θέσης (διάταξης) που υπάρχει για ένα συγκεκριμένο κλάσμα σε σχέση με την θέση των θετικών ακεραίων.»* (Κ20), στη μετατροπή κλάσματος σε μεικτό(Κ29).

  Επίσης υποστήριξαν ότι είναι διαφορετική η φύση των πτυχών του ρητού που αναπαριστά *«Δυσκολεύονται στην κατανόηση του κλάσματος ως μέρος του όλου»* (Κ19), *«η δυσκολία εδώ βρίσκεται μάλλον στον ορισμό των συνόλων (δεκαδικοί, ρητοί, κλπ)…»* (ΚΟ12)

- Ως προς το μοντέλο αναφέρθηκαν επιχειρήματα ως προς τη φύση του, που συντελεί στην δυσκολία αναγνώριση της μονάδας αναφοράς, *«Η αριθμογραμμή από μόνη της αποτελεί εμπόδιο για τους μαθητές του γυμνασίου. Συνήθως οι μαθητές επικεντρώνονται στο διάστημα [0 , 1] το οποίο αντιμετωπίζουν όπως τη ράβδο.»* (Κ4), *«Μάλλον είναι ακόμη πιο δύσκολο από τη ράβδο γιατί πρέπει πρώτα να ανακαλύψουν ποια είναι η μονάδα??? Λίγοι το ψάχνουν, οι πιο πολλοί κόβουν ότι να' ναι. Και μετά αν βρουν το 3/5 όταν ζητήσεις το 6/5 το βάζουν ανάμεσα από το 6 και το 5! Με λίγα λόγια χάνονται εύκολα»* (ΚΟ10)

  Κάποιοι άλλοι το θεωρούν μη οικείο μοντέλο *«η δυσκολία παρουσιάζεται στην πρώτη φάση . Είναι κυρίως δυσκολία εξοικείωσης με την αριθμογραμμή. Είναι κάπως έξω από τις εμπειρίες του μαθητή.»* (ΚΟ20)

  Κάποιοι εστίασαν στις ιδιότητες του μοντέλου, *«Πιθανόν να μην κατανοούν ότι και οι αρνητικοί αριθμοί μεγαλώνουν προς τα δεξιά αφού βλέπουν τις απόλυτες τιμές τους να μεγαλώνουν προς τα αριστερά»* (Κ11) *«Οι κυριότεροι λόγοι μη κατανόησης είναι η άγνοιά τους για την έννοια του άξονα και»* (Κ20), *«Οι μαθητές συχνά μετράνε τα σημεία και όχι τα κομμάτια του άξονα των αριθμών. Δεν κατανοείται η έννοια πολλαπλασιαστής της κλασματικής μονάδας.»* (Κ24)

- Ως προς τη σύνδεση μοντέλου και μαθηματικού αντικειμένου
  - Δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος

    «θεωρώ ότι η ίδια η αναπαράσταση είναι πηγή δυσκολιών για τα παιδιά. Η προσοχή των παιδιών εστιάζεται στην κατανόηση της λειτουργίας της και υποβαθμίζονται οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που αποτελούν το στόχο

της διδασκαλίας. Χρησιμοποιώ το μοντέλο αυτό για την κατανόηση της «πυκνότητας» των ρητών με τη βοήθεια της αναπαράστασης των ισοδυνάμων κλασμάτων. Παρατηρώ όμως δυσκολίες με την έννοια της αναπαράστασης ετερωνύμων κλασμάτων αφού έχουμε διαφορετικό «μέτρο» κατά περίπτωση.» (Κ14).

Άλλη δυσκολία που παρατηρήθηκε ήταν η μετάφραση από τη συμβολική στην οπτική αναπαράσταση, *«Η Αριθμογραμμή απαιτεί το συνδυασμό δύο μορφών αναπαράστασης: οπτικής και συμβολικής. Χρειάζεται επιτυχής συνδυασμός της πληροφορίας που περιέχεται σε αυτές τις δυο μορφές αναπαράστασης.»* (Κ9).

Ειδικότερα:

Εντοπίστηκαν θέματα διάταξης των ρητών γενικά, *«Αρχικά δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη θέση στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί ένας ρητός στην αριθμογραμμή και ιδιαίτερα ανάμεσα σε ποιούς ακέραιους θα πρέπει να τοποθετηθεί.»* (Κ13)

ή διάταξης των καταχρηστικών κλασμάτων, *«Δυσκολεύονται στην τοποθέτηση κλασμάτων μεγαλύτερων της μονάδας.»* (Κ22)

ή των αρνητικών κλασμάτων *«δυσκολεύονται να τοποθετήσουν τους αρνητικούς και αντίστροφα να βρουν ποιος αριθμός αντιστοιχεί σε κάθε σημείο.»* (Κ33), ή των ισοδύναμων κλασμάτων, *«ένα σημείο στην αριθμογραμμή μπορεί να αντιστοιχεί σε άλλο ρητό ανάλογα με την μονάδα που έχει επιλεγεί.»* (Κ30).

Επίσης άλλη δυσκολία που εντοπίστηκε ήταν η αναπαράσταση των πράξεων με ρητούς γενικά *«Επίσης δυσκολεύονται όταν πρέπει να πολλαπλασιάσουν κλάσματα για να τα δείξουν στην αριθμογραμμή.»*(ΚΟ25)

ή αφαίρεση αρνητικών ρητών ειδικά «*Η αριθμογραμμή δεν βοηθά να δείξουμε την αφαίρεση αρνητικών αριθμών. Για την αφαίρεση αρνητικού πρέπει να εισάγουμε (εφεύρουμε) άλλα μοντέλα.»(*Κ2).

τέλος μια άλλη δυσκολία που αναφέρθηκε ήταν η μετάφραση από την οπτική στη συμβολική αναπαράσταση των ρητών *«Η ένδειξη της Αριθμογραμμής μεταφράζεται λίγο δύσκολα σε ρητό.»* (ΚΟ5).

- Επιστημολογικά εμπόδια.

Ειδικά αναφέρθηκε η δυσκολία της αναπαράστασης του ρητού ως κλάσμα, *«Το ¼ δεν είναι αριθμός. Αλλά επειδή ¼=0,25, (που το 0,25 είναι αριθμός), μπορούμε να βάλουμε το ¼ στην αριθμογραμμή, στη θέση του 0,25.»* (Κ12)

και η επιφανειακή ομοιότητα με ακεραίους και φυσικούς έχει ως αποτέλεσμα να μη μπορούν να δουν το ρητό σαν ένα αριθμό, «… *Που θα τοποθετηθεί το 1/3 σε σχέση με το ¼.»* (Κ3)

- Διαχειριστικά ζητήματα «*η αριθμογραμμή ακολουθείται συνήθως είναι μια χρονοβόρα διαδικασία τοποθέτησης των κλασμάτων που οδηγεί σε μια σχετική κατανόηση χωρίς τα αναμενόμενα αποτελέσματα.*»(Κ10).

Καταλληλότητα και Χρήση

Συγκρίνοντας τα δυο μοντέλα ως προς την καταλληλότητα για τη διαχείριση της έννοιας του ρητού αριθμού.

Πίνακας 4.1 ***Τρόποι Αντιμετώπισης δυσκολιών από τη χρήση των μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής***

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ - ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ [24]		
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	**ΜΗ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
52	**5**	**3**

Σε ένα αρχικό στάδιο ανάλυσης πρόεκυψαν οι παρακάτω κατηγορίες τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών που εντόπισαν στο προηγούμενο υποερώτημα (πίνακας 4.1)

Το 87% επιλέγουν τη χρήση κάποιου μοντέλου, το 8% απορρίπτουν τη χρήση οποιουδήποτε μοντέλου, ενώ το υπόλοιπο 5% δεν απάντησε.

Αναφορικά με το ποιο μοντέλο κρίνουν ως καταλληλότερο μέσο για τη διαπραγμάτευση της έννοιας του ρητού, η πιο συχνή επιλογή, ήταν ο συνδυασμός και των δυο (23/52, 44%), το 19% περίπου (10/52) επέλεξαν το μοντέλο της αριθμογραμμής και το 37% (19/52) το μοντέλο της ράβδου.

4.2.3.2 Κριτήρια επιλογής των μοντέλων της ράβδου και της αριθμογραμμής στη διαχείριση της έννοιας του ρητού αριθμού.

Αυτοί που επέλεξαν

- Τη συνδυαστική χρήση και των δυο μοντέλων

[24] Οι απαντήσεις ήταν όσες και ο πληθυσμός μας (60).

- Ως προς το μοντέλο

Υποστηρίζουν ότι κριτήριο επιλογής τους αποτελεί η φύση του μοντέλου και συγκεκριμένα η δομική μονάδα μέτρησης που ορίζεται σε κάθε μοντέλο, «*Το μοντέλο της ράβδου θεωρώ ότι έχει πλεονέκτημα στο μέρος προς όλο, καθώς και στην πρόσθεση- αφαίρεση των κλασμάτων γιατί κάνει φανερό ότι πρέπει να αναζητήσω κοινή μονάδα μέτρησης για να μπορέσω να εκφράσω το άθροισμα – διαφορά πόσο κάνει. Το μοντέλο της αριθμογραμμής έχει το πλεονέκτημα να κάνει πιο φανερό ότι μπορώ να θεωρήσω αυθαίρετα κάτι ως μονάδα (1) και δείχνει καλύτερα την σύνδεση του κλάσματος με τους δεκαδικούς αριθμούς, όταν χρησιμοποιώ ως μονάδα το διάστημα [0, 1].» (*Κ18)

- Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. Κριτήριο επιλογής συνιστά:

  η πτυχή της έννοιας του ρητού που είναι προς διαπραγμάτευση: τη ράβδο για το «μέρος- όλου» και την αριθμογραμμή για τις υπόλοιπες , «*Αρχικά νομίζω ότι είναι καταλληλότερο το μοντέλο της ράβδου γιατί μπορώ να διαπραγματευτώ το μέρος ενός όλου και τότε ο μαθητής έχει την έννοια του κλάσματος και μετά σίγουρα στην αριθμογραμμή έχουν να γίνουν πολλά»*(ΚΟ10) καθώς και το στάδιο διαπραγμάτευσης της έννοιας του ρητού: αρχικά το μοντέλο της ράβδου και μετά της αριθμογραμμής, «*και τα δυο. Στην αρχή το μοντέλο με τα ορθογώνια, αφού βρίσκεται πιο κοντά στα άτυπα σχήματα που διαθέτουν τα παιδιά και μετά την αριθμογραμμή για να καλύψει έννοιες που δεν καλύπτει το πρώτο μοντέλο.*» (Κ30)

Αυτοί που επέλεξαν το μοντέλο της ράβδου διατύπωσαν τις εξής θέσεις:

- ως προς το μοντέλο. Κριτήριο επιλογής:

  η φύση του μοντέλου καθώς συντελεί στην καλύτερη αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος, κι άρα και καλύτερη κατανόηση, είτε της έννοιας του κλάσματος *«την ράβδο γιατί είναι ποιο κατανοητό το τεμάχισμα της ράβδου ότι αποτελεί ένα μέρος ολόκληρης της ράβδου»* (ΚΟ4), είτε του ορισμού της *«την ράβδο γιατί ο χωρισμός είναι πιο εμφανής άρα ανταποκρίνεται στον ορισμό του κλάσματος.»* (ΚΟ12), είτε των ιδιοτήτων της *«κατανοούν τα ισοδύναμα και τους διευκολύνει στη σύγκριση κλασμάτων.»* (Κ15), είτε των πράξεων «*Επίσης η ράβδος επιτρέπει την παρουσίαση και των πράξεων (πρόσθεση – πολλαπλασιασμός) κλασμάτων.»*(Κ4)

  Άλλο κριτήριο επιλογής ήταν η οικειότητα του μοντέλου, είτε από την καθημερινή σχολική πραγματικότητα «*Το μοντέλο της ράβδου έρχεται πιο κοντά στο πνεύμα της θεωρίας του βιβλίου*» (Κ15), «*Κρίνω ως καταλληλότερο τη ράβδο γιατί*

γνωρίζουν ήδη το κλάσμα ως μέρος του όλου από το Δημοτικό και απαντούν με ευκολία στις αρχικές ερωτήσεις σχετικά με τις κλασματικές έννοιες» (Κ19), είτε από καθημερινή εμπειρία, *«Το μοντέλο της ράβδου θεωρώ καταλληλότερο γιατί δίνει στους μαθητές και την γεωμετρική υπόσταση του κλάσματος, που τους είναι περισσότερο οικεία από τα καθημερινά προβλήματα που συνδέονται με την έννοια του κλάσματος. (π.χ τεμάχιο σοκολάτας κτλ).»* (Κ20).

- ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο

  Κριτήριο επιλογής οι πτυχές της έννοιας του ρητού. Και συγκεκριμένα το πλήθος των πτυχών του ρητού που αναπαριστά *«Τη ράβδο, γιατί εισάγει ευρύτερο φάσμα εννοιολογικών αναφορών του κλάσματος.»* (Κ27)

- αυτοί που επέλεξαν την αριθμογραμμή
  - ως προς το μοντέλο. Κριτήριο επιλογής ήταν η οικειότητα και απλότητα του «*το 2ο καθότι είναι πιο απλό οπτικά και εύκολο να το αποστηθίσεις.*» (Κ34)
  - ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. Κριτήριο επιλογής είναι είτε οι πτυχές της έννοιας του ρητού (συγκεκριμένα το πλήθος των πτυχών που αναπαριστά) *«Σίγουρα αυτό της αριθμογραμμής αφού προσφέρει πολύ περισσότερες επιλογές για τις σύνθετες πτυχές που εμπεριέχονται στην έννοια του κλάσματος.»* (Κ25), είτε η συνθετότητα των εννοιών του ρητού προς διαπραγμάτευση, όπως το πρόβλημα με τα καταχρηστικά κλάσματα, *«Θεωρώ καταλληλότερη την αριθμογραμμή, γιατί περνάει στον μαθητή τη γνώση ότι το κλάσμα μπορεί να είναι και μεγαλύτερο της μονάδας, σε αντίθεση με τη ράβδο.*» (Κ22), είτε οι ιδιότητες του (πυκνότητα, διαδοχικότητα, διάταξη) «*Την αριθμογραμμή ως πληρέστερη.*» (ΚΟ18), *«Την αριθμογραμμή γιατί αναδεικνύονται έννοιες όπως αυτή της πυκνότητας , της διαδοχικότητας, της διάταξης.*» (Κ24)

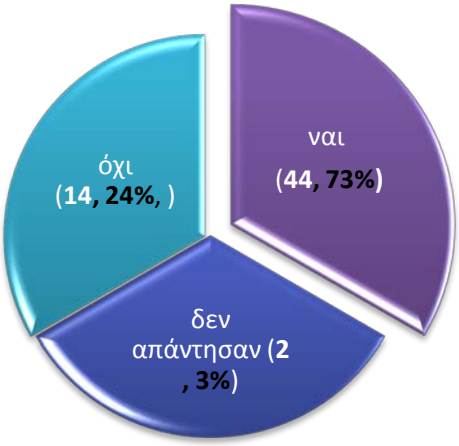
4.2.4 Χρήση των Μοντέλων Ράβδου και Αριθμογραμμής

4.2.4.1. Αποδοχή-απόρριψη των δυο μοντέλων.

Σε ένα αρχικό επίπεδο έγινε μια ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των καθηγητών αναφορικά με το αποδέχονται τα δυο μοντέλα ή όχι.

Έτσι προέκυψε το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 4.7)

Διάγραμμα 4.7 **Αποδοχή-Απόρριψη των μοντέλων Ράβδου & Αριθμογραμμής**

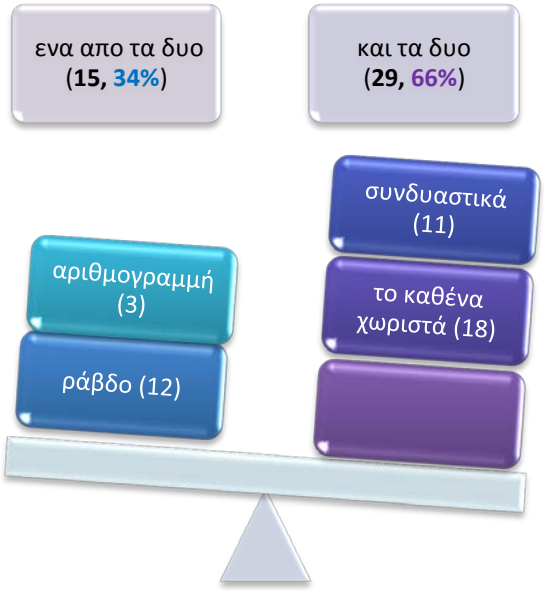


Το 73%[25] των ερωτηθέντων χρησιμοποιεί τα μοντέλα αυτά είτε το ένα από τα δυο είτε και τα δυο, ένα 24% απάντησε πως όχι, και τέλος ένα 3% δεν απάντησε.

4.2.4.2. Τρόποι χρήσης τους.

Από αυτούς που απάντησαν ότι χρησιμοποιούν τα μοντέλα της ράβδου και της αριθμογραμμής (44/60), έγινε μια περαιτέρω ανάλυση της μεταξύ τους σχέσης, αναφορικά με τον τρόπο που επιλέγουν να τα εισάγουν στην διδασκαλία τους. (Διάγραμμα 4.8)

Διάγραμμα 4.8 **Σύγκριση των μοντέλων Ράβδου- Αριθμογραμμής ως προς τη χρήση τους για τη διδασκαλία του ρητού αριθμού**



[25] Τα ποσοστά αντιστοιχούν στον αρχικό πληθυσμό.

Παρατηρούμε ότι η πλάστιγγα «γέρνει» υπέρ της χρήσης και των δυο μοντέλων. Αποδίδουν όμως διακριτούς ρόλους στα μοντέλα αυτά κι επιλέγουν να τα χρησιμοποιούν χωριστά, καθώς το κάθε μοντέλο διαπραγματεύεται διαφορετικές πτυχές της έννοιας του ρητού. Από αυτούς που επέλεξαν τη χρήση μόνο του ενός από τα δυο, είναι σαφής η προτίμηση υπέρ του μοντέλου της ράβδου.

Σε ένα επόμενο επίπεδο, ποιοτικής ανάλυσης, προέκυψε ότι οι απαντήσεις των ερωτηθέντων επεκτάθηκαν σε δυο άξονες. Αυτές που αναφέρονταν στο *πώς*, δηλαδή στον τρόπο χρήσης των δυο μοντέλων, είτε και τα δυο, είτε μόνο το ένα, και αυτές που αναφέρονταν στο *πού*, δηλαδή ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο.

Πιο συγκεκριμένα (διάγραμμα 4.9)

- Πού

  Διατυπώθηκαν κάποιες γενικές παρατηρήσεις και ειδικότερα απαντήσεις που αναφέρονταν στη χρήση του σε ένα εισαγωγικό επίπεδο και μόνο. Εδώ, η χρήση των δυο μοντέλων σε ένα *εισαγωγικό επίπεδο* δεν είχε τόσο το νόημα της κινητοποίησης του ενδιαφέροντας των μαθητών, αλλά αναφερόταν κυρίως στο μαθηματικό περιεχόμενο, δηλαδή σε συνδυασμό με το *πώς*

  «Το μοντέλο της ράβδου στην εισαγωγή των κλασμάτων. Το μοντέλο της αριθμογραμμής σε μια προσπάθεια σύνδεσης με τις γνώσεις των μαθητών από το Δημοτικό.» (Κ15)

  Κάποιοι επιλέγουν να τα χρησιμοποιήσουν συνδυαστικά με άλλα διδακτικά υλικά – φύλλα εργασίας, δραστηριότητες, απλά παραδείγματα. Εδώ οι απαντήσεις είχαν το χαρακτηριστικό ότι δεν εμβάθυναν, αντίθετα κινήθηκαν περιφερειακά ως προς την περιγραφή του τρόπου χρήσης του δυο μοντέλων

  «*Χρησιμοποιώ και τα δύο σε εισαγωγικές δραστηριότητες, καθώς και σε παραδείγματα και σε ασκήσεις*» (ΚΟ7).

  Η συνδυαστική χρήση για κάποιους αναφερόταν σε διαφορετικές αναπαραστάσεις των μοντέλων αυτών (παράλληλη χρήση δυο ή περισσότερα από τα ίδια μοντέλα, αντικείμενα καθημερινής εμπειρίας, στον πίνακα κλπ),

  «Χρησιμοποιώ τη ράβδο, με μια άλλη μορφή αυτή της πλάκας σοκολάτας ή της πίτσας ώστε να έχει περισσότερο ενδιαφέρον για τα παιδιά.» (Κ19), *«χρησιμοποιώ το μοντέλο της ράβδου, αλλά με περισσότερες από μια ίδιες ράβδους χωρισμένες με τον ίδιο ακριβώς τρόπο»(Κ23)*

  Κάποιοι άλλοι ανέφεραν ότι τα χρησιμοποιούν όπως προτείνεται από πρότυπα παραδείγματα. Κι εδώ οι απαντήσεις κινήθηκαν περιφερειακά. Οι ερωτηθέντες

αναφέρθηκαν στις κατευθύνσεις που εισάγονται μέσα από κάποια παραδείγματα που παρατίθενται είτε στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών-οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου *«Στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών, η έννοια του κλάσματος εισάγεται ούτως ή άλλως με δραστηριότητα στην οποία αναφέρεται το μοντέλο της ράβδου»* (Κ4), είτε στο βιβλίο του καθηγητή –σχολικό εγχειρίδιο, *«Στις δραστηριότητες του βιβλίου της Α΄ τάξης που αναφέρονται στην έννοια του κλάσματος στο 2ο Κεφάλαιο, έχει αρκετά παραδείγματα και εφαρμογές.»* (ΚΟ9)

Διαμορφώθηκαν επιχειρήματα που αναφέρονταν στο μοντέλο. Πιο ειδικά: τα χρησιμοποιούν σε συνδυασμό με άλλα μοντέλα. Είτε κυκλικά (πίτα, κλπ), *«Μόνο σε επίπεδο σχολικού βιβλίου προτιμώ σοκολάτα, πίτσα, κυκλικό διάγραμμα ώστε να έχουν καλύτερη εικόνα του κλάσματος.»* (ΚΟ6), *«Κλιμακωτά πρώτα τη πίτα, μετά τη ράβδο και την αριθμογραμμή»* (Κ010),

είτε διακριτά, όπως κουμπιά, βόλοι (Κ7) , *«Τη ράβδο τη χρησιμοποιώ ελάχιστα, πιο πολύ χρησιμοποιώ πίτες, ορθογώνια-τετράγωνα και βόλους. Επίσης, στα παιδιά αρέσει πολύ το κουτί των κλασμάτων.»* (Κ7),

είτε με πραγματικά μοντέλα καθημερινής εμπειρίας, σοκολάτα, πίτσα (ΚΟ24).

Τέλος αναφέρθηκαν και άλλα μοντέλα που δεν εντοπίστηκαν στη βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε: κουτί κλασμάτων , tangram, *«κάποιες φορές το πρώτο. ΑΝ και προτιμώ κάτι που να αρέσει περισσότερο στους μαθητές, όπως για παράδειγμα το tangram.»* (Κ33) «*Τη ράβδο τη χρησιμοποιώ ελάχιστα, πιο πολύ χρησιμοποιώ πίτες, ορθογώνια-τετράγωνα και βόλους. Επίσης, στα παιδιά αρέσει πολύ το κουτί των κλασμάτων.»* (Κ7)

Κάποιοι χρησιμοποιούν τα μοντέλα της ράβδου και αριθμογραμμής με διαφορετικές αναπαραστάσεις του (λογισμικά, άλλη διάταξη),

«την αριθμογραμμή σε κατακόρυφη θέση, με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε το θερμόμετρο, για να εισάγω τους αρνητικούς αριθμούς σε κατακόρυφη θέση, να δείξω την συμμετρία των αντιθέτων, για να δείξω την έννοια της διάταξης» (Κ2), «*συνδυαστικά και τα δυο, ανάλογα με το σχήμα του κλάσματος που θέλω να προωθήσω. Μια αποδεδειγμένα μεγάλη δυσκολία των μαθητών είναι και ο χωρισμός του όλου σε ίσα μέρη. Σχεδόν σε όλα τα βιβλία ο χωρισμός δίνεται έτοιμος. Υπάρχουν λογισμικά (πχ. Ζάντζος, Κυνηγός, 2009) που συνδυάζουν όλα τα παραπάνω και το έχω χρησιμοποιήσει με ενθαρρυντικά αποτελέσματα»* (Κ30)

Αναφορικά με το

- Πώς

Κάποιοι τα χρησιμοποιούν σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, όπως:

την έννοια του ρητού, *«Ναι τα χρησιμοποιώ σχεδόν πάντα για την έννοια μέρους όλου καθώς και πηλίκου»* (Κ5),

τις σχέσεις και πράξεις στους ρητούς *«Τη ράβδο για την εισαγωγή στην έννοια του μέρους ενός όλου, στα ισοδύναμα κλάσματα, στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων σε συνδυασμό με τα ισοδύναμα κλάσματα, στην διάταξη κλασμάτων, στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων.»* (ΚΟ2),

μόνο σχέσεις ή μόνο πράξεις (διάταξη ρητών, σύγκριση κλασμάτων, ισοδύναμα και καταχρηστικά κλάσματα), *«Για τους αρνητικούς την αριθμογραμμή να τους τοποθετήσουν πάνω σε αυτή.»* (Κ33) , *«τη ράβδο την μοιράζουμε σε ίσα μέρη. Την αριθμογραμμή την μοιράζουμε διαδοχικά σε ίσα τμήματα και εύρεση πρώτα του 1/2, 1/4 1/8 κλπ και μετά 3/4/, 3/8 κλπ»* (ΚΟ23), *«την ράβδο την χρησιμοποιώ για να δείξω πόσα μέρη ενός μεγέθους είναι ένα κλάσμα , για να δείξω ότι τα ισοδύναμα κλάσματα παριστάνουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους δηλ. είναι ίσα»* (ΚΟ25), *«είναι βασικό να δείξει ο καθηγητής με το μοντέλο της ράβδου και κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας πχ 5/3, 8/7* » (ΚΟ16),*«Τα χρησιμοποιώ ως αναπαραστάσεις για να αισθητοποιηθούν οι πράξεις με κλάσματα»* (Κ12).

Επίσης εντοπίστηκαν και κάποια άλλα μαθηματικά θέματα,

*«επικουρικά στην διασαφήνιση απορ*ιών» (Κ29), *«την αριθμογραμμή συμμετρία αντιθέτων, απόσταση 2 αριθμών, εισαγωγή αρνητικών ρητών)»* (Κ2)

Διάγραμμα 4.9 **Τρόποι αξιοποίησης Μοντέλων Ράβδου-Αριθμογραμμής**

4.3 Η Συσχέτιση της Έννοιας του Ακεραίου με το Μοντέλο του Θερμομέτρου

Η δεύτερη ερώτηση αναφερόταν στην επέκταση στο σύνολο των *ακεραίων*, με την βοήθεια του φυσικού μοντέλου του θερμομέτρου. Το πρώτο υποερώτημα διερευνούσε την καταλληλότητα του μοντέλου αυτού για την επέκταση της αφαίρεσης το σύνολο των ακεραίων.

Οι απαντήσεις που πήραμε ήταν διαβαθμισμένες σε ένα φάσμα που ποικίλλει από ακατάλληλο, στο ένα άκρο, ως το βέλτιστο στο άλλο με ενδιάμεσες αποχρώσεις:

Παρατηρούμε (σχήμα 4.2) ότι έχουμε μια συσσώρευση των απαντήσεων, σε ένα πρώτο επίπεδο ποσοτικής ανάλυσης, στη τιμή *αρκετά κατάλληλο.* Είναι σημαντική, ωστόσο, η ασυμμετρία προς τις «αρνητικές» απαντήσεις.

Σχήμα 4.2 **Γράφημα Συσχέτισης του μοντέλου του θερμομέτρου με την έννοια του ακεραίου**

4.3.1 Αιτίες Καταλληλότητας ή μη του Μοντέλου του Θερμομέτρου

Αναφορικά με τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την καταλληλότητα ή μη του μοντέλου του θερμομέτρου, αυτά διακρίνονται σε [26]

Συγκεκριμένα, αυτά κατανέμονται στους άξονες, που παρουσιάζονται στο διάγραμμα 4.10:

- Υποστηρικτικά επιχειρήματα

[26] Παρατίθεται διάγραμμα στην επόμενη σελίδα

- Θετική προσωπική εμπειρία,

  «*Είναι το πιο κατάλληλο, δεν έχω μπορέσει να βρω κάτι καλύτερο. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διαφορά θερμοκρασίας και τη βρίσκουν εύκολα με το μυαλό, οπότε μπορούν να οδηγηθούν στους σχετικούς κανόνες*» (Κ17)

- Βοηθά στην κατανόηση λόγω, εποπτείας «*το θεωρώ κατάλληλο διότι με τη βοήθεια της βαθμολογημένης κλίμακας βλέπει ο μαθητής ότι για να βρει τη διαφορά όταν έχει αφαιρετέο αρνητικό προσθέτει τον αντίθετό του.*» (ΚΟ21). Άλλοι το χαρακτήρισαν ως εμπειρικό μοντέλο «*είναι θετικό το ότι έχει σχέση με τις εμπειρίες των μαθητών*» (Κ30)

  Κάποιοι εμβάθυναν και όρισαν το μοντέλο του θερμομέτρου ως πρακτικό -οικείο , «*Θεωρώ ότι είναι πολύ κατάλληλο γιατί είναι κάτι που το καταλαβαίνουν όλα τα παιδιά*» (ΚΟ11), «*είναι πολύ καλό, γιατί είναι κάτι που όλοι το χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή*» (Κ33) ως το μοντέλο που συμβάλλει στην κατανόηση της αναγκαιότητας εισαγωγής της έννοιας του αρνητικού,«… *Κατάλληλο και για την κατανόηση της αναγκαιότητας εισαγωγής της έννοιας του… αρνητικού*» (Κ27)

- Σύνδεση του μοντέλου με το μαθηματικό περιεχόμενο

  Τα επιχειρήματα που αναφέρθηκαν εστίασαν είτε σε ένα εισαγωγικό επίπεδο (ορισμός- φυσική ερμηνεία της αφαίρεσης) «*Νομίζω ότι είναι κατάλληλο για την διαισθητική εισαγωγή της αφαίρεσης ρητών και για καταλήξουν οι μαθητές στο ότι η αφαίρεση είναι η πρόσθεση με τον αντίθετο.*» (Κ12), «*είναι αρκετά κατανοητό για μια πρώτη προσέγγιση στο σύνολο των ακεραίων ...*» (ΚΟ24)

  Είτε στην κατανόηση της διάταξης των ακεραίων , «*Βοηθά στην κατανόηση της διάταξης των ακεραίων.*» (Κ24), είτε στην αντίληψη του κανόνα των προσήμων «είναι κατάλληλο διότι ο μαθητής αντιλαμβάνεται με *απτό , πρακτικό τρόπο την μετατροπή του -(-4) =+4*» (ΚΟ16)

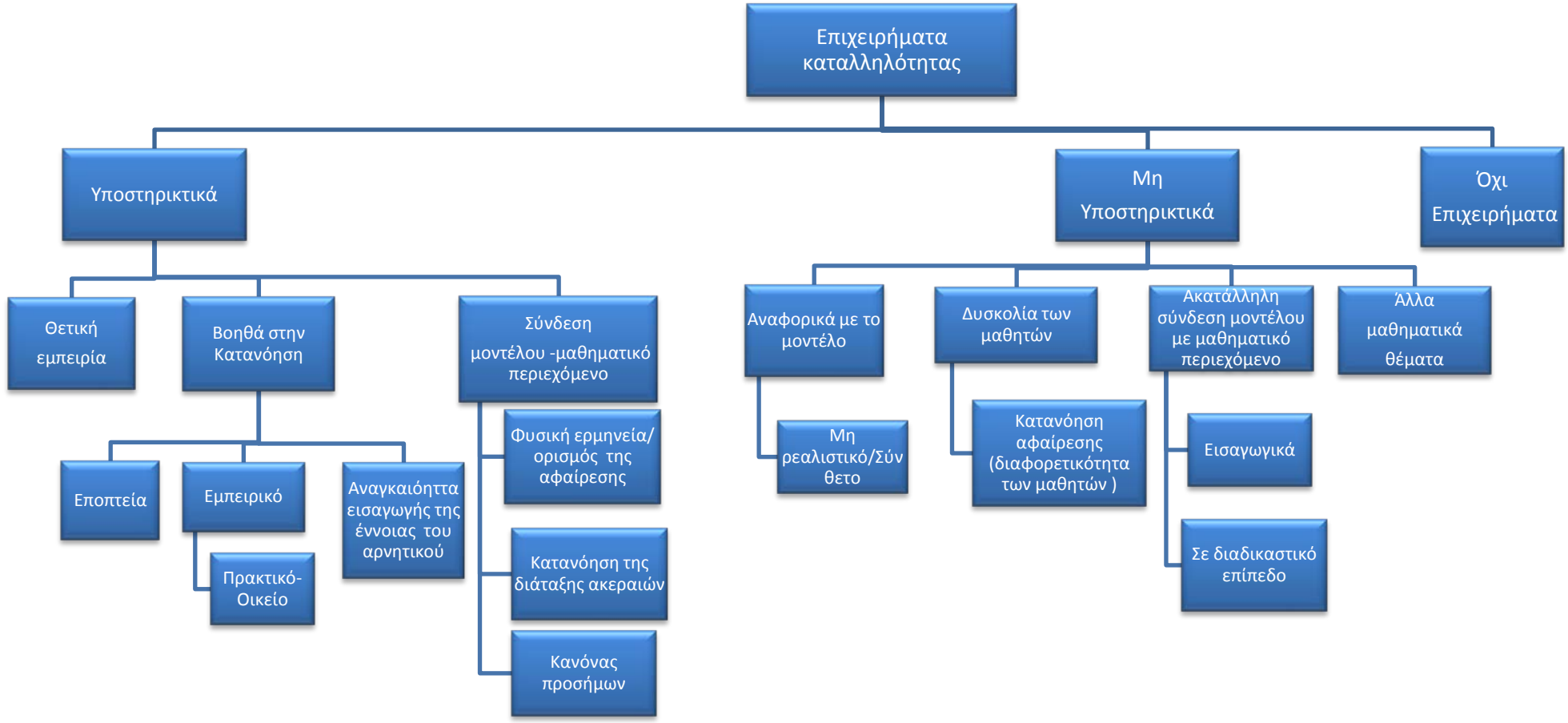
Επίσης διατυπώθηκαν και

- Μη υποστηρικτικά επιχειρήματα. Πιο ειδικά:
  - Αναφορικά με το μοντέλο τα επιχειρήματα που διατυπώθηκαν εστίασαν είτε στη μη ρεαλιστικότητα – συνθετότητα του μοντέλου, «*τα τελευταία χρόνια με τη χρησιμοποίηση των Ηλεκτρονικών θερμομέτρων, οι μαθητές δεν έχουν πλέον την εικόνα λειτουργίας του κλασικού θερμομέτρου. Αυτό δημιουργεί μεγάλο πρόβλημα στη χρησιμοποίηση του συγκεκριμένου μοντέλου*» (Κ10), «*η αφαίρεση ακεραίων παρουσιάζεται πολύπλοκη για το μαθητή γιατί και το μοντέλο του θερμομέτρου δεν είναι απλό.*» (ΚΟ20)

- Μια άλλη θεματική κατηγορία που αναδείχθηκε στα δεδομένα μας ήταν η δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση της αφαίρεσης λόγω διαφορετικότητας των μαθητών, «*Το θερμόμετρο βοηθά εν μέρει διότι είναι εποπτικό μέσο αλλά δεν είναι πάντα κατάλληλο για όλους τους μαθητές. Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να καταλάβουν την αφαίρεση.*» (Κ2), «*Το μοντέλο του θερμομέτρου μπορεί να βοηθήσει κάποιους μαθητές να αποκτήσουν μια αναπαράσταση της διαφοράς και να συνειδητοποιήσουν ότι η διαφορά είναι μεγαλύτερη από το μειωτέο.*» (Κ31).
- Η ακατάλληλη σύνδεση του μοντέλου με το μαθηματικό περιεχόμενο έχει σαν αποτέλεσμα να προτείνεται η χρήση του μόνο εισαγωγικά, «*Το μοντέλο του θερμομέτρου είναι αρκετά καλό, διότι είναι οικείο στα παιδιά, αρκεί να γίνουν οι σωστές επεκτάσεις και σιγά – σιγά τα παιδιά να αποδεσμευτούν από αυτό.*» (Κ22), «*πιστεύω ότι αυτό το μοντέλο είναι αρκετά κατάλληλο γι' αυτό στο οποίο χρησιμοποιείται. Είναι μια πολύ καλή κατάσταση αναφοράς για να εισαχθεί αρχικά η έννοια της αφαίρεσης από την οποία και πέρα μπορούμε να αποστασιοποιηθούμε και να παράγουμε γενικεύσεις για τους κανόνες της αφαίρεσης και κυρίως όπως εξηγούνται.*» (Κ32), ή σε ένα διαδικαστικό επίπεδο , «*το θερμόμετρο είναι κατάλληλο για να κατανοήσουν οι μαθητές τους ακέραιους αριθμούς, όσο για την αφαίρεση ακεραίων χρειάζεται προσοχή και πολλά παραδείγματα*» (ΚΟ17)

  «*Αν και σε πρακτικό επίπεδο παρατηρώντας το θερμόμετρο οι μαθητές είναι σε θέση να δώσουν σωστές απαντήσεις, διατηρώ αμφιβολίες για το πόσο κατανοούν την ίδια την πράξη της αφαίρεσης.*» (Κ13)
- Προέκυψε και μια θεματική κατηγορία που περιείχε απαντήσεις σχετικά με άλλα μαθηματικά θέματα, πέρα από την πράξη της αφαίρεσης στα οποία αναφέρθηκαν οι καθηγητές, «*δεν καλύπτει τις περιπτώσεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ ακεραίων αριθμών.*» (Κ1), «*…αλλά τα πράγματα δυσκολεύουν όταν πρόκειται να αφαιρεθούν δεκαδικοί.*» (Κ25).

Διάγραμμα 4.10 **Επιχειρήματα καταλληλότητας του μοντέλου του Θερμομέτρου**



4.3.2. Δυνατότητες και Περιορισμοί του Μοντέλου του Θερμομέτρου

Σε αυτήν την ερώτηση, επειδή κάποιοι ερωτηθέντες έδωσαν περισσότερες από μια απαντήσεις, οι αριθμοί που παρατίθενται αναφέρονται στο πλήθος των απαντήσεων. Έτσι, σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης πρόεκυψαν οι παρακάτω ομάδες περιορισμών και δυνατοτήτων του μοντέλου που φαίνονται στον πίνακα 4.2

Πίνακας 4.2 ***Δυνατότητες και περιορισμοί του μοντέλου του θερμομέτρου***

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ					ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ	ΔΑ-ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΠΟΨΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΜΟΝΤΕΛΟ	ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ	ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ	ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ		
9	6	31	4	1	14	4

Έτσι στο σύνολο των απαντήσεων αναφορικά με τους περιορισμούς του μοντέλου που δόθηκαν[27] (51), το 61% ήταν γύρω από θέματα σύνδεσης του μοντέλου με το μαθηματικό αντικείμενο, το 18 % ήταν γύρω από το μαθηματικό περιεχόμενο, το 12% ήταν γύρω από το μοντέλο, το 8% ήταν αυτές που αναφέρονταν σε επιστημολογικά εμπόδια και το 42% ήταν αυτές που αναφέρονταν σε θέματα διαχείρισης της μάθησης.

Οι περιορισμοί του μοντέλου που εντόπισαν οι καθηγητές των μαθηματικών ταξινομήθηκαν στις παρακάτω ευρείες θεματικές κατηγορίες που ξεδιπλώνονται στο διάγραμμα 4.11:

Ως προς:

- Το μαθηματικό περιεχόμενο και συγκεκριμένα την έννοια του αριθμού

  Εδώ προέκυψαν οι υποκατηγορίες:

  - Η έννοια του αριθμού και πιο ειδικά ο σχετικό μέγεθος των αριθμών , *«Δυσκολίες στη χρήση αρνητικών αριθμών ιδιαίτερα στο θέμα της διάταξης»* (Κ9) την κατανόηση των πράξεων

    «τις πράξεις ανάμεσα σε θετικούς και αρνητικούς αριθμούς και ανάμεσα μόνο σε αρνητικούς αριθμούς» (ΚΟ22), *«…προβλήματα παρουσιάζονται στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση»* (Κ23) *«Σε σχέση με το μοντέλο του θερμόμετρου δεν νομίζω ότι έχουν δυσκολίες, αλλά κάποιες δυσκολίες παρουσιάζονται όταν παραφράζουν την αφαίρεση 2-5 με την έννοια βγάζω και λένε δεν μπορώ να βγάλω από τα 2 πέντε »* (Κ18), τη σημασία του αρνητικού

[27] Από τις συνολικά 69 απαντήσεις αφαιρέθηκαν αυτές που αναγνώριζαν μόνο δυνατότητες και αυτές που δεν περιείχαν καμία απάντηση, (18/60, 30%).

προσήμου, *«Τα παιδιά έχουν δυσκολίες στη κατανόηση αρχικά των αρνητικών αριθμών…»*(ΚΟ18)

Ως προς

- το μοντέλο

Η επιχειρηματολογία έχει να κάνει με τις

- Ιδιότητες του μοντέλου του θερμομέτρου

«Η θερμομετρική κλίμακα είναι μια προσανατολισμένη κλίμακα μέτρησης δηλαδή εκτός από το μέτρο της μονάδας μέτρησης ορίζεται αυθαίρετα η αρχή (που αντιστοιχεί στο μηδέν) και μια κατεύθυνση αύξουσας ή φθίνουσας μεταβολής των μέτρων (η φορά). Έτσι χρησιμοποιώντας αυτή τη κλίμακα βλέπουμε να αποτυπώνονται πολλές φορές οι εννοιολογικές δυσκολίες στην κατανόηση και στην απόδοση νοήματος στην έννοια του αρνητικού αριθμού και οι δυσχέρειες στην εκτέλεση πράξεων με ακεραίους.» (Κ1)

«*Για να χρησιμοποιηθεί αυτό το μοντέλο πρέπει τα παιδιά να έχουν καταλάβει τη θέση των αρνητικών αριθμών στο θερμόμετρο.*»(Κ28), «*η αναπαράσταση της διαφοράς δεν είναι ξεκάθαρη καθώς οι κόκκινες γραμμές στο θερμόμετρο ξεκινούν υποχρεωτικά από το κατώτατο σημείο. Επίσης οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με το 0 ως κατώτατο σημείο και όχι ως κεντρικό.»* (Κ31)

- Τη μη οικειότητα του μοντέλου του θερμομέτρου, λόγω της φύσης του

«Οι μαθητές στις περισσότερες πόλεις της Ελλάδας δεν βλέπουν τέτοιες θερμοκρασίες και έτσι δυσκολεύονται να οικειοποιηθούν τις έννοιες του αρνητικού αριθμού.» (Κ4) «……*Σε αρκετές νησιωτικές περιοχές όπου η θερμοκρασία δεν πέφτει κάτω από το μηδέν τα παιδιά δυσκολεύονται στην κατανόηση»* (ΚΟ13)

Ως προς

- Τη σύνδεση μοντέλου και μαθηματικού αντικειμένου

Εδώ τα επιχειρήματα των καθηγητών διαμόρφωσαν τις εξής υποκατηγορίες:

- Μετάφραση από το μοντέλο στη μαθηματική γλώσσα, με τις εξής υποκατηγορίες:

Η πράξη της αφαίρεσης και συγκεκριμένα το πρόβλημα της κατεύθυνσης:

«Δεν μπορούν να κατανοήσουν την αλλαγή του προσήμου στην αφαίρεση των αρνητικών..» (Κ3), *«Η… αφαίρεση… δε… σημαίνει …υποχρεωτικά …μείωση.»* (ΚΟ8) *«Αν η κίνηση προς τα πάνω δηλώνεται με πρόσθεση πως γίνεται το άθροισμα δυο αρνητικών να βρίσκεται πιο κάτω και από τους δύο;»* (Κ24). Κάποιοι εμβάθυναν και συσχέτισαν πηγές και όρους της αφαίρεσης, *«οι μαθητές δυσκολεύονται πώς να πάρουν τη διαφορά, ότι από τον επόμενο αφαιρώ τον προηγούμενο κι επίσης*

δυσκολεύονται να βρουν σωστά τη διαφορά σε κάθε περίπτωση.» (ΚΟ17), *«δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι σε μια μεταβολή (διαφορά) χρησιμοποιούμε πότε τελική - αρχική και πότε αρχική-τελική. Στο 1ο παράδειγμα : +7-(-4)=11 (αρχική -τελική) στο 2ο παράδειγμα : 14-(4) =18 (τελική -αρχική).»* (Κ35).

Οι αρνητικές θερμοκρασίες και τα πρόσημα, *«μπερδεύονται λίγο με τα πρόσημα και με τις αρνητικές θερμοκρασίες,.»* (ΚΟ16) και

Η δυσκολία στην απόλυτη τιμή, *«Επίσης την απόσταση αρνητικής θερμοκρασίας από το μηδέν την αναφέρουν ως αρνητική.»* (Κ25).

- Αποδέσμευση από το μοντέλο, «*Στη μετάβαση από το θερμόμετρο στις ασκήσεις* » (ΚΟ7), «*Δυσκολεύονται να σκεφτούν με τον ίδιο τρόπο στην περίπτωση που οι αριθμοί δεν παριστάνουν θερμοκρασίες αλλά είναι τυχαίοι ακέραιοι.»* (Κ11).

Ως προς τα

- Επιστημολογικά εμπόδια *«Είναι πολλές φορές πιο δύσκολο να μάθουν οι μαθητές το μοντέλο παρά να καταλάβουν την πράξη. Άλλωστε οι αρνητικοί αριθμοί, έχουν μεν φυσική υπόσταση, οι πράξεις τους προέκυψαν όμως για να λύσουν ενδομαθηματικά προβλήματα.»* (Κ16). Αναφέρθηκε το εμπόδιο λόγω των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών, *«Γενικά οι πράξεις στο σύνολο των ακεραίων δημιουργούν γνωστική σύγκρουση γιατί είναι κάτι το διαφορετικό από την υπάρχουσα γνώση .» (Κ14)*

  Το εμπόδιο λόγω της έννοιας του απείρου: *«Δεν είναι εύκολο να διαισθανθούν την επέκτασή του προς το άπειρο (και ακόμα περισσότερο προς το μείον άπειρο)»* (Κ19),

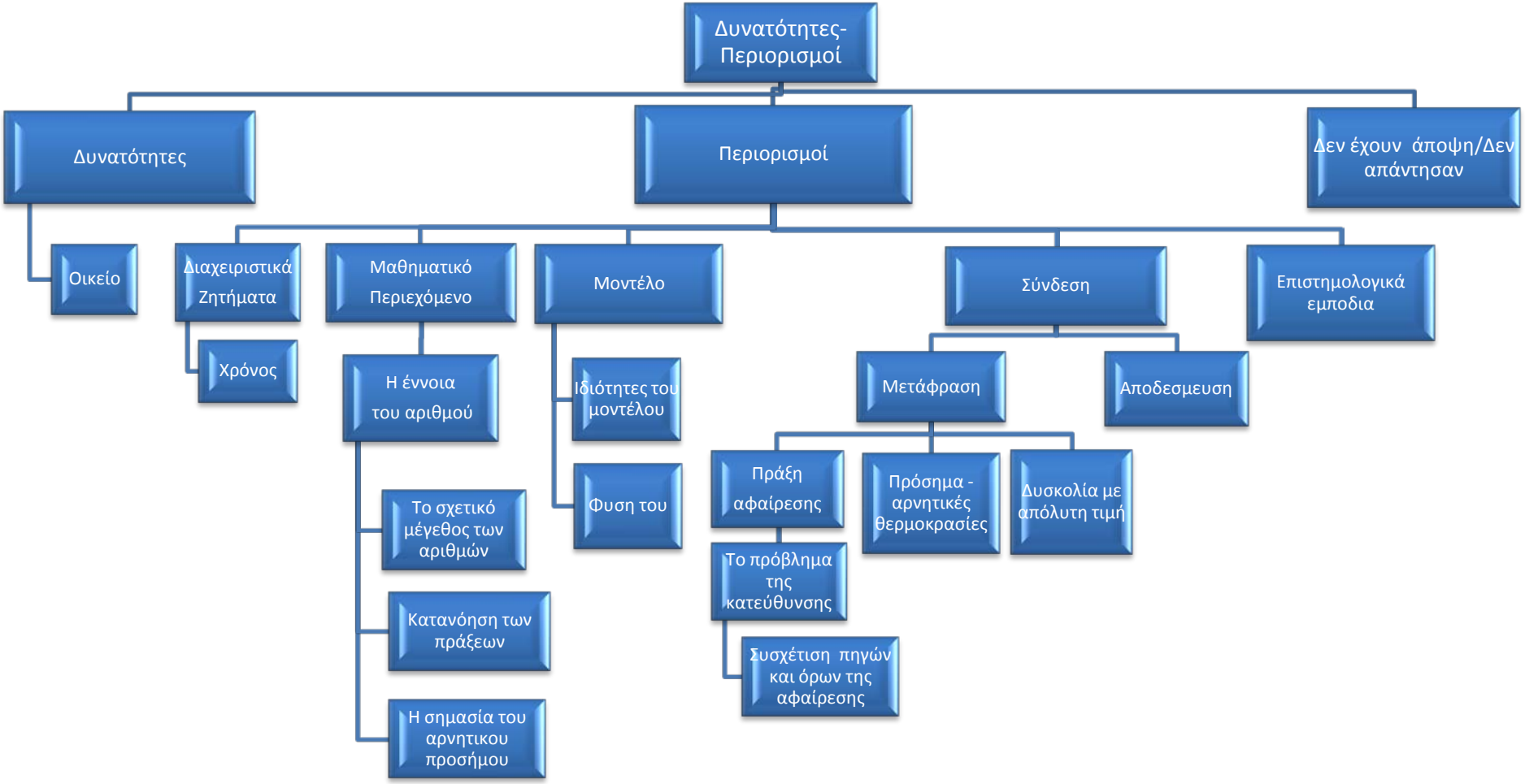
  Το εμπόδιο λόγω της διττής πτυχής του προσήμου(διαδικαστική και η δομική) «*προβλήματα με το σύμβολο"-" ως το πρόσημο των αρνητικών και ως σύμβολο της αφαίρεσης.»* (Κ30).

  Ως προς τα

  - Διαχειριστικά ζητήματα και ειδικότερα το ζήτημα του χρόνου

  «*Ο χρόνος που χρειάζεται για να παρουσιαστεί η λειτουργία του θερμομέτρου είναι δυσανάλογος με το αποτέλεσμα.»* (Κ10)

Διάγραμμα 4.11 **Δυνατότητες-Περιορισμοί του μοντέλου του Θερμομέτρου**



- Κάποιοι επικαλέστηκαν δυνατότητες του μοντέλου του θερμομέτρου είτε χωρίς τεκμηρίωση, είτε επικαλούμενοι την οικειότητα του μοντέλου, *«συνήθως δεν αντιμετωπίζουν δυσκολίες διότι είναι κάτι που το γνωρίζουν καλά από την καθημερινότητά τους. Τα ακούν στην τηλεόραση κάθε μέρα. Το συζητούν και το ερμηνεύουν οι γονείς τους και γενικώς είναι κάτι που το ξέρουν καλά.»* (Κ32).

4.3.3 Δυσκολίες –Τρόποι Αντιμετώπισής τους

Πίνακας 4.3 ***Τρόποι αντιμετώπισης των δυσκολιών από τη χρήση του μοντέλου του θερμομέτρου***

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ - ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ [28]		
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	**ΜΗ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
39	**9**	**12**

Σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης πρόεκυψαν (πίνακας 4.3) οι παρακάτω κατηγορίες τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών που εντόπισαν στο προηγούμενο υποερώτημα.

Το 65% καταφεύγουν στη χρήση μοντέλου, το 15% απορρίπτουν τη χρήση οποιουδήποτε μοντέλου, ενώ το υπόλοιπο 20% δεν απάντησε.

Σε ένα επόμενο επίπεδο ανάλυσης των δυο ευρύτερων κατηγοριών, σχηματίστηκαν οι εξής θεματικές κατηγορίες που φαίνονται στο διάγραμμα 4.12:

- Με χρήση του μοντέλου. Αναφέρθηκαν είτε σε περιορισμένη χρήση επικαλούμενοι διαχειριστικού τύπου ζητήματα. Πιο ειδικά τους περιορισμούς που θέτει το ΑΠΣ, όπως το πρόβλημα του χρόνου δεν επιτρέπει την εμβάθυνση στη λειτουργία του «*Νομίζω πώς οι μαθητές αυτής της ηλικίας (12-14 χρόνων) χρειάζονται περισσότερο χρόνο για να εμπεδώσουν αυτές τις έννοιες και περισσότερη εξάσκηση και σε ασκήσεις αλλά και σε ρεαλιστικά προβλήματα. Επίσης η γρήγορη εναλλαγή της ύλης και το πέρασμα σε άλλες έννοιες (π.χ. από άλγεβρα σε γεωμετρία) σε άλλα κομμάτια της ύλης τους δυσκολεύει αρκετά.»* (Κ5)

  Όπως το πρόβλημα του όγκου της ύλης (Κ5), *«Νομίζω πώς οι μαθητές αυτής της ηλικίας (12-14 χρόνων) χρειάζονται περισσότερο χρόνο για να εμπεδώσουν αυτές τις έννοιες και περισσότερη εξάσκηση και σε ασκήσεις αλλά και σε ρεαλιστικά προβλήματα.»* (Κ5)
- Αποσαφήνιση των συμβάσεων του με στόχο την κατανόηση λειτουργίας του. Διατυπώθηκαν κάποιες παρατηρήσεις γενικές «*.. να δοθεί πρώτα έμφαση στην διαισθητική κατανόηση της αφαίρεσης με τη βοήθεια της εποπτείας που προσφέρει*

[28] Οι απαντήσεις ήταν όσες και ο πληθυσμός μας (60).

το θερμόμετρο και μετά να διατυπωθεί ο κανόνας.» (Κ2), «*…αν γίνουν οι συμβάσεις ότι το και σημαίνει πρόσθεση, το έπεσε σημαίνει αρνητικός αριθμός και το ανέβηκε σημαίνει θετικός αριθμός, νομίζω ότι μπορεί να μοντελοποιηθεί*» (Κ22), *«… αν θεωρήσουμε την κίνηση προς τα πάνω πρόσθεση θετικού και την κίνηση προς τα κάτω πρόσθεση αρνητικού. Αντίστοιχα η αφαίρεση θετικού είναι κίνηση προς τα κάτω και η αφαίρεση αρνητικού είναι κίνηση προς τα πάνω (το αντίθετο) »* (Κ24) *«πρέπει αρχικά να καταλάβουν ότι όταν κατεβαίνουμε βάζουμε το πρόσημο πλην …»* (Κ017).

Κάποιοι προτιμούν τη σταδιακή μετάβαση από απλά σε σύνθετα παραδείγματα *«Σε πρώτη φάση να χρησιμοποιούμε μικρούς σε απόλυτη τιμή αριθμούς μέχρι να εξοικειωθούν λίγο και μετά να προχωράμε σε δυσκολότερα παραδείγματα.»*(Κ6), κάποιος την τεχνική των επαναλήψεων «*Να επιμένουμε ιδιαίτερα σ' αυτό το σημείο και να επανερχόμαστε μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας και των δύο πράξεων.*» (Κ13). Άλλος αναφέρθηκε σε ειδικού τύπου δραστηριότητες *«Αυτό που πρέπει να επιδιώκει ο δάσκαλος είναι η εμπλοκή των μαθητών/τριών σε σχετικές δραστηριότητες ώστε μέσα από καταστάσεις προβληματισμού να προκύπτει αβίαστα η νέα γνώση και να θεσμοθετείται από τα ίδια τα παιδιά.»*(Κ14)

- Διαφορετικές αναπαραστάσεις του μοντέλου του θερμομέτρου, όπως άλλα γραμμικά μοντέλα, όπως

  η αριθμογραμμή «*Χρήση της αριθμογραμμής για την διάταξη των ακεραίων αριθμών και κατανόηση της διάταξης των ακεραίων ότι όταν η θερμοκρασία είναι -6 κάνει πιο πολύ κρύο από όταν η θερμοκρασία είναι -2.»* (Κ28) ,

  διακριτά μοντέλα όπως το ασανσέρ «*χρησιμοποιώντας μοντέλα που έχουν και αρνητικούς αριθμούς και τους είναι πιο εύχρηστα ίσως (πχ ασανσέρ)»* (ΚΟ22), το επίπεδο της θάλασσας *«Θα μπορούσαμε νομίζω να ασχοληθούμε και με το επίπεδο της θάλασσας»* (ΚΟ13), η χρονομηχανή *«ή ένας που έχει εφεύρει μια χρονομηχανή και μπορεί να ταξιδεύει στο χρόνο (όπου + το π.Χ και όπου – το μ.Χ) »* (Κ19),

  ή με ενσώματη προσέγγιση, «*Κάνουμε τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων με βήματα στο διάδρομο της τάξης μπρός-πίσω.»* (ΚΟ9), *«Μία επιλογή θα ήταν να βάζαμε κάποιους μαθητές στη σειρά (μέσα στην αίθουσα) με ένα αντικείμενο (π.χ. μια καρέκλα , μηδέν) ανάμεσα σε δύο, ορίζοντας αρνητικούς τους μαθητές που είναι αριστερά από το αντικείμενο και θετικούς αυτούς που βρίσκονται δεξιά.»*(Κ25)

- Κάποιοι προτιμούν την επιλογή άλλου μοντέλου. Ειδικότερα:

πραγματικά καθημερινής εμπειρίας *«περισσότερο κατανοητός γίνεται ο τρόπος με το ζευγάρι "κερδος-ζημία"»* (ΚΟ20)

διακριτά αντιθετικής φύσης: ηλεκτρικό φορτίο, «*Βάζω ηλεκτρικά φορτία σημαίνει προσθέτω, ενώ βγάζω σημαίνει αφαιρώ»* (Κ1),κάρτες με θετικούς και αρνητικούς πόντους *«Αλλά θα μπορούσαμε να παίξουμε και ένα παιχνίδι με θετικούς και αρνητικούς πόντους χρησιμοποιώντας κάποιες κάρτες με (+) και (-) για να εισάγουμε το νόημα των πράξεων»* (Κ2), μάρκες διαφορετικού χρώματος : *«μαύρες = θετικοί , κόκκινες = αρνητικοί»* (Κ18)

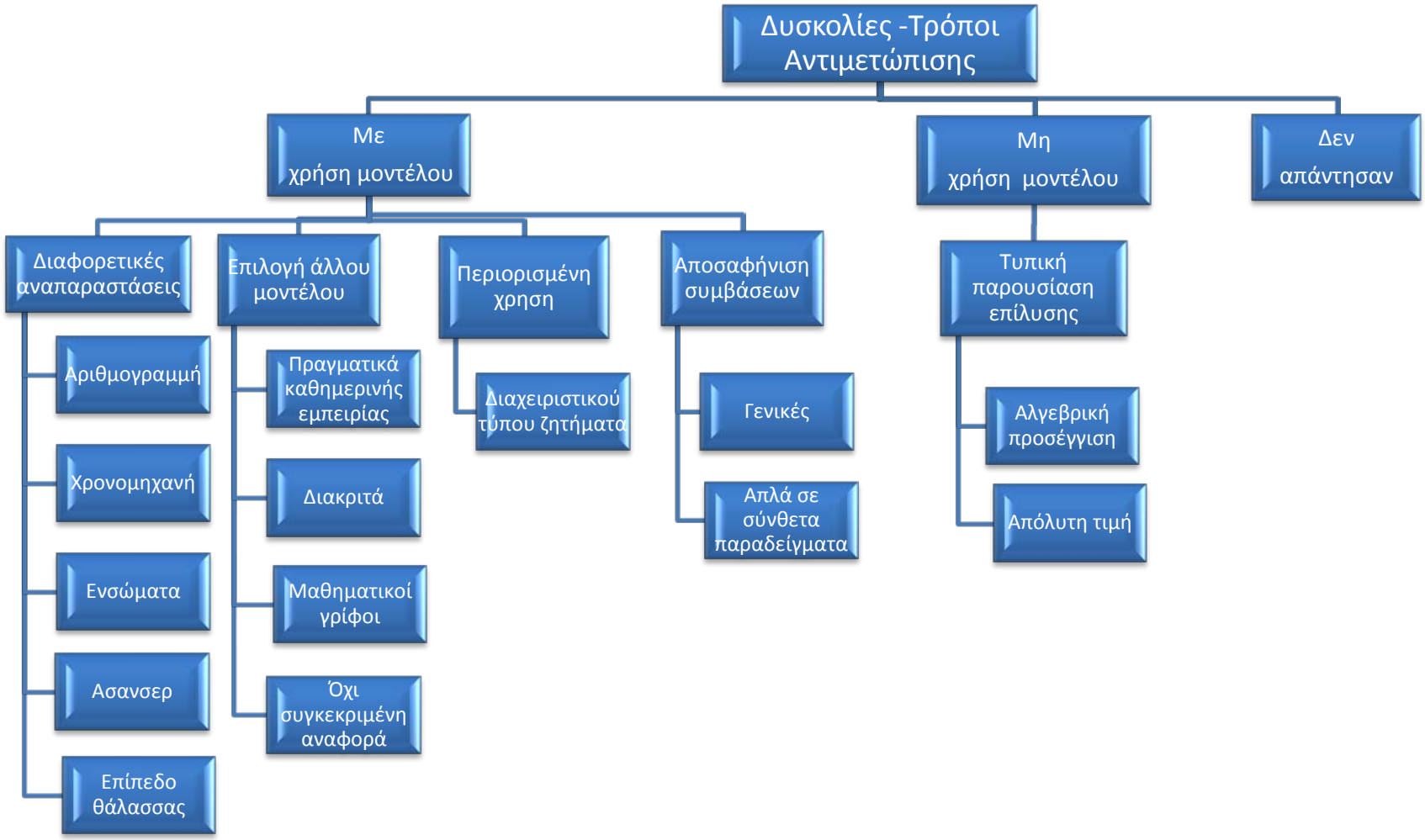
- Με μαθηματικούς γρίφους χρησιμοποιώντας κανόνες της μαθηματικής λογικής *«Θα μπορούσε να παρουσιασθεί κάποιο αντίστοιχο γραμματικό φαινόμενο του τύπου «όχι (όχι κοντός) = κοντός» για να κατανοηθεί το ότι –(-7)=7, αντιστοιχίζοντας το « όχι » με το « - ». »* (ΚΟ3)
- Όχι αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο *«με επιμονή στη μέθοδο και πολλά παραδείγματα»* (Κ4) «*Και με χρήση άλλων παραδειγμάτων – μοντέλων.»* (Κ7).

Κάποιοι επιλέγουν τη

- Μη χρήση μοντέλου και αντ' αυτού την τυπική παρουσίαση επίλυσης, είτε με την αλγεβρική προσέγγιση της πράξης της επίλυσης, *«θεωρώ ότι η αλγεβρική προσέγγιση- συνεχής αφαίρεση της μονάδας ή κάποιου άλλου αριθμού- βοηθούσε τους μαθητές στην κατανόηση της έννοιας»* (Κ10) «*Πιστεύω ότι πέραν από την κατανόηση των παραδειγμάτων οι ασκήσεις πρέπει να γίνονται με μηχανιστικό τρόπο πιο αφηρημένο απλά να εφαρμόζουν τον κανόνα χωρίς να σκέφτονται το όποιο παράδειγμα.»* (ΚΟ6), είτε με τη χρήση της απόλυτης τιμής,

  «*ο βασικός τρόπος που ξεπερνάμε το παραπάνω πρόβλημα είναι η έννοια της απολυτής τιμής (αρχική -τελική = τελική-αρχική) έχει οριστεί ως η απόσταση στην γραμμή (στο πίνακα με τις συμβάσεις) τεστ : | +7-(-4)|=|-4-(+7)|= 11»* (Κ35)

Διάγραμμα 4.12 **Δυσκολίες –Τρόποι αντιμετώπισης μοντέλου του θερμομέτρου**

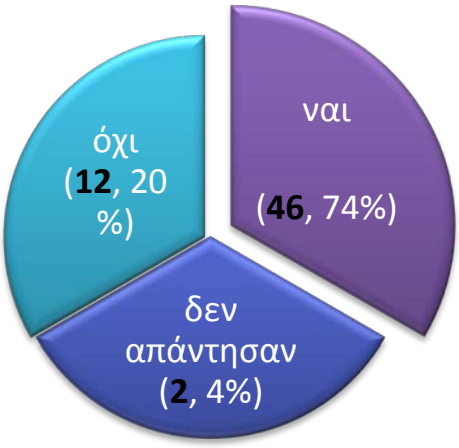


4.3.4 Χρήση του Μοντέλου του Θερμομέτρου

4.3.4.1. Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου.

Σε ένα αρχικό επίπεδο έγινε μια ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των καθηγητών αναφορικά με τον αποδέχονται το μοντέλο του θερμομέτρου ή όχι.
Έτσι προέκυψε το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 4.13)

Διάγραμμα 4.13 **Αποδοχή-Απόρριψη του μοντέλου του Θερμομέτρου**



Το 74%[29] των ερωτηθέντων χρησιμοποιεί το μοντέλο, ένα 20% απάντησε πως όχι, και τέλος ένα 4% δεν απάντησε.

4.3.4.2. Τρόποι χρήσης του μοντέλου του θερμομέτρου.

Οι απαντήσεις των ερωτηθέντων επεκτάθηκαν σε δυο άξονες. Αυτές που αναφέρονταν στο *πώς*, δηλαδή στο τρόπο χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς και αυτές που αναφέρονταν στο *πού*, δηλαδή ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. (Διάγραμμα 4.14).
Πιο συγκεκριμένα:
Ως προς το

- *Πού*.

  Διατυπώθηκαν είτε κάποιες γενικές παρατηρήσεις, που εντάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες,

[29] Τα ποσοστά αντιστοιχούν στον αρχικό πληθυσμό.

- είτε τη χρήση του μοντέλου του θερμομέτρου σε ένα *εισαγωγικό επίπεδο.* Εδώ αυτή η εισαγωγική χρήση δεν είχε τόσο το νόημα της κινητοποίησης του ενδιαφέροντας των μαθητών, αλλά αναφερόταν κυρίως στο μαθηματικό περιεχόμενο, δηλαδή σε συνδυασμό με το *πώς* «*ζωγραφίζοντας ένα θερμόμετρο στον πίνακα*» (Κ15)
- είτε σε συνδυασμό με άλλα διδακτικά υλικά –φύλλα εργασίας, δραστηριότητες, απλά παραδείγματα. Εδώ οι απαντήσεις είχαν το χαρακτηριστικό ότι δεν εμβάθυναν, αντίθετα κινήθηκαν περιφερειακά ως προς την περιγραφή του τρόπου χρήσης του μοντέλου του θερμομέτρου, «*Παραδείγματα εικόνες σε φύλλο εργασίας»* (ΚΟ5), *«Κάνοντας δραστηριότητες»* (ΚΟ7), «ορίζοντας την *"μεταβολή θερμοκρασίας από σε" καθώς και διευκρινίζοντας ότι διαφορά όπως ανέφερα πριν ή ορίζοντας την "αύξηση" ή " μείωση".*» (29)
- Όπως προτείνεται από πρότυπα παραδείγματα

  Κι εδώ οι απαντήσεις κινήθηκαν περιφερειακά. Οι καθηγητές αναφέρθηκαν στις οδηγίες είτε στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, είτε του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου «*Με αυτόν ακριβώς που προτείνει το βιβλίο.(Α γυμνασίου σελ.127 παρ.1)»* (Κ21) είτε στο βιβλίο του καθηγητή –σχολικό εγχειρίδιο *«Ναι, με τον τρόπο που παρουσιάζει το βιβλίο»*(ΚΟ11) ή όπως περιγράφεται στο ερωτηματολόγιο που απάντησαν «με παρόμοιο με τις δικές σας συμβάσεις.»(Κ33).
- Με αναφορά στο μοντέλο με στόχο την εξοικείωση με τη λειτουργία του μοντέλου, αποσαφήνιση (δηλαδή επεξήγηση των περιορισμών του) *«όπως και για τα άλλα μοντέλα, ενημερώνονται οι μαθητές για τους περιορισμούς των μοντέλων.»* (Κ30), *«πρέπει αρχικά να καταλάβουν ότι όταν κατεβαίνουμε βάζουμε το πρόσημο πλην και χρειάζονται πολλά παραδείγματα.»* (ΚΟ17)
- Σε συνδυασμό με άλλα μοντέλα. Είτε γραμμικά μοντέλα και πιο συγκεκριμένα την αριθμογραμμή *«Εγώ προτιμώ την χρήση της αριθμογραμμής»* (Κ28) είτε διακριτά, *«ανθρώπους «μαύρους – άσπρους», «κορίτσια –αγόρια»,* (Κ7) *«Νομίζω πώς με την χρήση μοντέλου με μάρκες (μαύρες = θετικοί και κόκκινες = αρνητικοί) αντιμετωπίζεται το πρόβλημα που ανέφερα πιο πάνω*» (Κ18) είτε μοντέλα που

  να αναφέρονται στην κοινωνική συναλλαγή *«Άλλες προσεγγίσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι με μία καντίνα (χρωστάμε λεφτά -) καταθέσεις λογαριασμών, αεροπλάνο-θάλασσα-υποβρύχιο κ.λ.π»* (ΚΟ6) ή με πραγματικά μοντέλα καθημερινής εμπειρίας, όπως αεροπλάνο-θάλασσα-υποβρύχιο «*Θα μπορούσαμε νομίζω να ασχοληθούμε και με το επίπεδο της θάλασσας»*(ΚΟ13), είτε με ενσώματη

προσέγγιση *« Μία επιλογή θα ήταν να βάζαμε κάποιους μαθητές στη σειρά (μέσα στην αίθουσα) με ένα αντικείμενο (π.χ. μια καρέκλα , μηδέν) ανάμεσα σε δύο, ορίζοντας αρνητικούς τους μαθητές που είναι αριστερά από το αντικείμενο και θετικούς αυτούς που βρίσκονται δεξιά.»* (Κ25), ή με διαφορετικές αναπαραστάσεις του (στον πίνακα, πραγματικό θερμόμετρο, πολυκατοικίες με υπόγειους και υπέργειους ορόφους) *,«παίρνω ένα αληθινό θερμόμετρο και δείχνω μια φορά τι ισχύει και μετά κάνω ερωτήσεις.»* (Κ34).

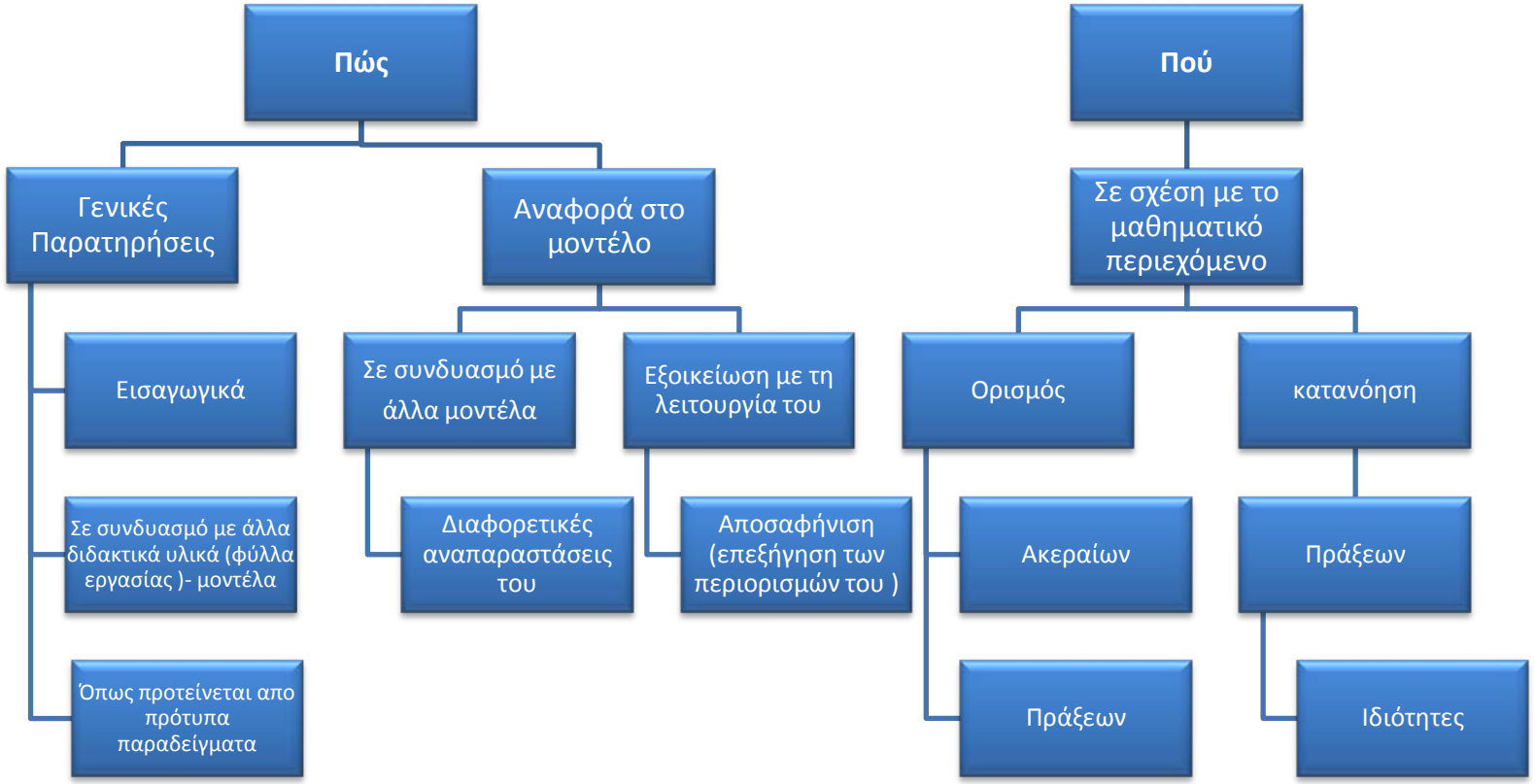
Ως προς το

- *Πού*

Οι απαντήσεις περιστράφηκαν γύρων από το μαθηματικό περιεχόμενο, είτε τον

- Ορισμό των ακεραίων αριθμών «*Αναφέρω σύντομα το παράδειγμα και συνεχίζω με τον κανόνα και αρκετές ασκήσεις εμπέδωσης στην αφαίρεση ρητών αριθμών. Έχω την αίσθηση ότι, δυστυχώς οι μαθητές δεν συνειδητοποιούν την αφαίρεση με αυτό τον τρόπο και απλά μαθαίνουν τους κανόνες της αφαίρεσης.»* Κ17) είτε τον ορισμό των πράξεων με ακεραίους αριθμούς *«χρησιμοποιώ το μοντέλο για να δείξω ότι ισχύει ο κανόνας ότι η αφαίρεση είναι πρόσθεση του αντιθέτου μόνο για την αφαίρεση …αρνητικού από θετικό και μετά εφαρμόζουμε τον κανόνα σε όλες τις περιπτώσεις.»* (ΚΟ25), είτε με στόχο την
- Κατανόηση-ερμηνεία των πράξεων , *«Για την αφαίρεση η εξήγηση του Euler είναι η καταλληλότερη: 10-(5-2)=10-5+2……, γιατί αφαιρώντας 5 αφαιρώ δυο περισσότερα, οπότε πρέπει να επιστραφούν»* (Κ23) και των ιδιοτήτων τους *«Διάταξη ακεραίων τοποθέτηση αριθμών στον άξονα θερμόμετρο.»* (Κ24).

Διάγραμμα 4.14 **Τρόποι Αξιοποίησης του Μοντέλου του Θερμομέτρου**



4.4 Η Έννοια της Ισότητας μέσα από τα Μοντέλα της Ζυγαριάς και το Γεωμετρικό Μοντέλο

4.4.1. Η Συσχέτιση της Έννοιας της Ισότητας με το Μοντέλο της Ζυγαριάς

Οι απαντήσεις που πήραμε (Σχήμα 4.3) ήταν διαβαθμισμένες σε ένα φάσμα που ποικίλλει από ακατάλληλο, στο ένα άκρο, ως το βέλτιστο στο άλλο με τις ενδιάμεσες αποχρώσεις. Σε ένα πρώτο επίπεδο ποσοτικής ανάλυσης παρατηρήθηκε μια συσσώρευση των απαντήσεων στις θετικές τιμές *αρκετά καλά* και *καλύτερο.* Τέλος κάποιοι εκπαιδευτικοί δεν εξέφρασαν κάποια άποψη.

Σχήμα 4.3 ***Γράφημα Συσχέτισης του μοντέλου της Ζυγαριάς με την έννοια της ισότητας***

Παρατηρείται ωστόσο μια ασυμμετρία προς τις «αρνητικές» απαντήσεις.

4.4.1.1 Αιτίες καταλληλότητας ή μη του μοντέλου της ζυγαριάς.

Αναφορικά με τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την καταλληλότητα ή μη του μοντέλου της ζυγαριάς, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.15 [30]αυτά διακρίνονται σε

[30] Παρατίθεται διάγραμμα στην επόμενη σελίδα

- Υποστηρικτικά

Συγκεκριμένα, αυτά κατανέμονται στους άξονες:

- Θετική προσωπική εμπειρία «*…η εμπειρία μου δείχνει ότι γνωρίζουν και κατανοούν απόλυτα τον τρόπο που ισορροπεί μια συμβατική ζυγαριά.* »(Κ13)
- Η Οικειότητα του μοντέλου.

  Αυτοί που την επικαλούνται αναφέρονται είτε στο ότι είναι εύχρηστο *«από τα πιο κατάλληλα και εύχρηστα»* (ΚΟ22) , είτε δίνουν γενικές απαντήσεις «*πιστεύω ότι η χρησιμοποίηση της ζυγαριάς βοηθά στην ταχύτερη διαπραγμάτευση.»(*Κ10)
- Εποπτεία *«Θεωρώ ότι είναι το πλέον κατάλληλο καθότι παρέχει εποπτεία» (*Κ8)

  Επιπλέον δυο εμβάθυναν κι αναφέρθηκαν στη νοητική εικόνα της έννοιας της ισότητας «*είναι κατάλληλο για να έχουν οι μαθητές μια συγκεκριμένη νοητική αναπαράσταση για τη λύση απλών εξισώσεων…»* (Κ23), και του αγνώστου «*είναι πολύ κατάλληλο γιατί δημιουργεί εσωτερικές αναπαραστάσεις στον μαθητή για την έννοια του αγνώστου της ισότητας και γενικότερα της εξίσωσης.»* (ΚΟ16)
- Σύνδεση του μοντέλου με τα μαθηματικά

  Αναφέρθηκαν κάποιοι στη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης. Πιο ειδικά κάποιοι εστίασαν είτε στην τεχνική επίλυσης της *«είναι κατάλληλο για την απόκτηση βασικών δεξιοτήτων επίλυσης εξισώσεων»*(Κ35) είτε στις ιδιότητες των πράξεων *«το μοντέλο ίσως είναι κατάλληλο στο ότι μπορούμε να αφαιρούμε κι από τα 2 μέλη την ίδια ποσότητα χωρίς να αλλάξει κάτι»* (Κ31) «*Η αφαίρεση- πρόσθεση ίδιων αντικειμένων από τους δίσκους δεν ανατρέπει την ισορροπία. Ακριβώς το ίδιο αντιλαμβάνεται ο μαθητής πχ με τον διπλασιασμό ή υποδιπλασιασμό ίδιων αντικειμένων.»* (ΚΟ24)

  είτε και στα δυο «*Οι μαθητές αντιλαμβάνονται καλύτερα την αλλαγή πρόσημου κατά την μεταφορά μιας ποσότητας από το ένα μέλος στο άλλο της εξίσωσης.»(*ΚΟ3) «*π.χ. αφαιρούμε από κάθε δίσκο το ίδιο βάρος και η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί – αφαιρούμε από τα δύο μέλη της εξίσωσης τον ίδιο αριθμό και η ισότητα συνεχίζει να ισχύει.»* (Κ12).
- στην έννοια της ισότητας «*Το μοντέλο της ζυγαριάς είναι αρκετά κατάλληλο για να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν τις ισοδύναμες εξισώσεις , πώς από μία εξίσωση μπορεί να προκύψει άλλη ισοδύναμη μ' αυτή και να ανακαλύψουν τρόπους για την επίλυση των εξισώσεων.»* (Κ18) , «*το μοντέλο της ζυγαριάς έχει το πλεονέκτημα να παρουσιάζει με σαφήνεια ιδιότητες της σχέσης ισότητας»*(ΚΟ20) καθώς και σε άλλες έννοιες «*Καταρχήν η ζυγαριά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να*

δείξουμε στους μαθητές την αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των φυσικών αριθμών» (Κ28)

- Επιστημολογία των μαθηματικών.

  «Είναι κατάλληλο επειδή τονίζει ότι τα μαθηματικά είναι μετάφραση της πραγματικότητας σε άλλη γλώσσα, ταυτόχρονα όμως δείχνει ότι οι αλγεβρικές μέθοδοι έχουν τις ρίζες τους σε ενέργειες που γίνονται στην πράξη από τον άνθρωπο και δεν παρουσιάστηκαν εξ αποκαλύψεως από κάποιο ον με υπερφυσικές πνευματικές ικανότητες.» (Κ19), «*Οι μαθητές με την εποπτεία της ζυγαριάς καταλαβαίνουν ότι τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μας»* (Κ28).

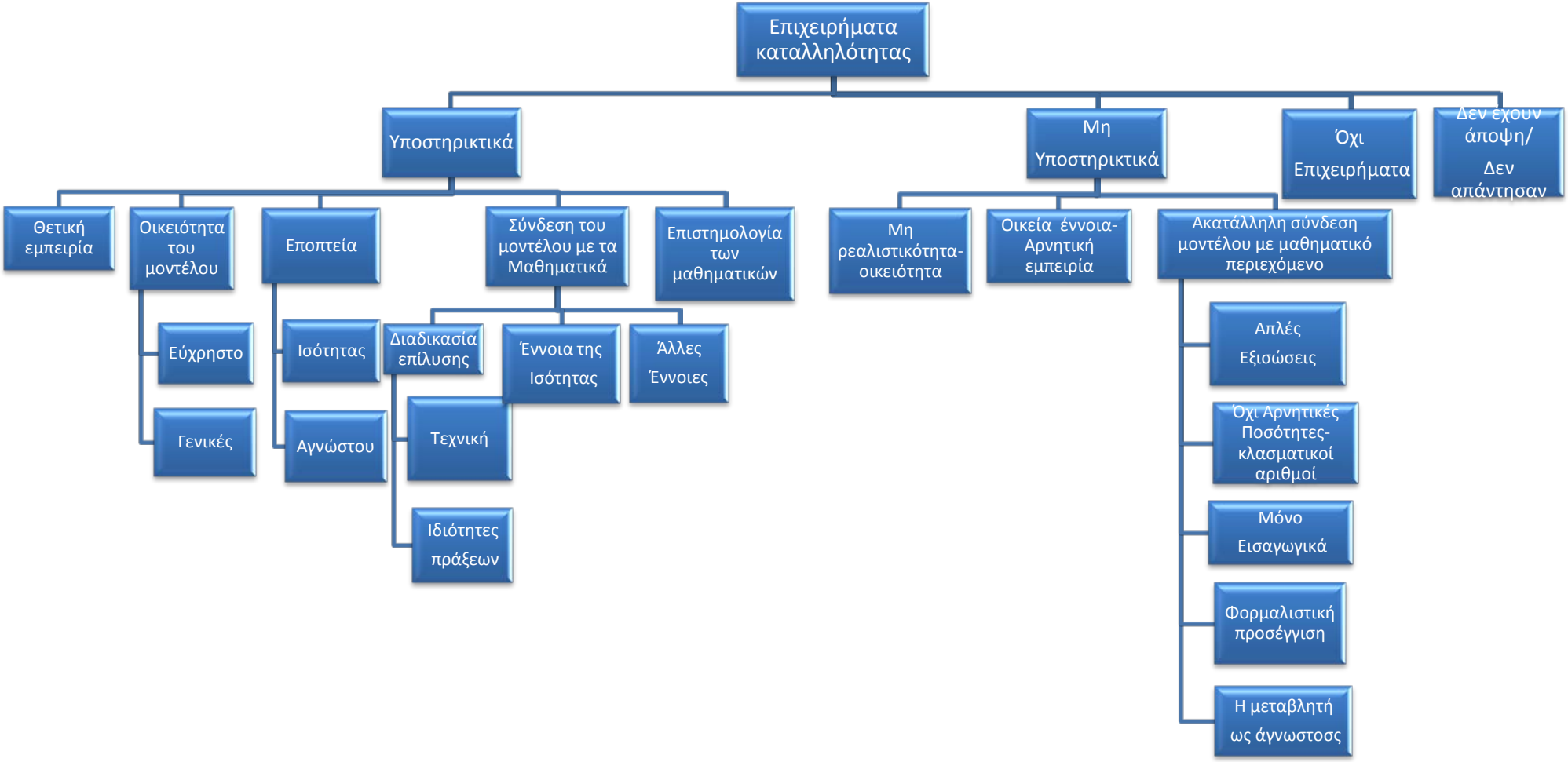
Ως προς τα

- Μη υποστηρικτικά επιχειρήματα, αυτά κατανέμονται στους άξονες:
  - Μη ρεαλιστικότητα- οικειότητα του μοντέλου *«Ζυγαριά παλαιού τύπου δεν συναντούν πια οι μαθητές ώστε να έχουν αντίληψη της λειτουργίας της.»* (Κ20)
  - Η οικειότητα της έννοιας της ισότητας , *«Η ζυγαριά «εικονογραφεί» ή αναπαριστά την ισότητα στην πραγματικότητα, που είναι και το κεντρικό ζήτημα για την εξίσωση. Η έννοια αυτή είναι αρκετά οικεία στους μαθητές. Μπορεί επομένως να αξιοποιηθεί για τη λύση εξισώσεων χωρίς το μοντέλο της ζυγαριάς.»* (Κ16)
  - Ακατάλληλη σύνδεση του μοντέλου με το μαθηματικό περιεχόμενο. Πιο ειδικά αναφέρθηκαν είτε μόνο για απλές εξισώσεις «*είναι κατάλληλο για να έχουν οι μαθητές μια συγκεκριμένη νοητική αναπαράσταση για τη λύση απλών εξισώσεων…*»(Κ23),είτε ακατάλληλό για αρνητικές- κλασματικές ποσότητες, «*Επίσης δεν ενδείκνυται σε περιπτώσεις που ο άγνωστος είναι δεκαδικός και ακέραιος.»* (ΚΟ25) «*Είναι κατάλληλο, αρκεί να προβλεφθεί και η περίπτωση που ο άγνωστος έχει τελικά τιμή αρνητικό αριθμό και έτσι στην περίπτωση που αφαιρεθεί από τη ζυγαριά, αυτή να γίνεται ελαφρότερη»(*Κ22), είτε μόνο εισαγωγικά «*καλό, αλλά μόνο για την αρχή.*» (ΚΟ15), είτε διότι προτιμούν την Φορμαλιστική προσέγγιση «*Για να αποκτήσει ικανές δεξιότητες λύσης εξίσωσης πρέπει να εισαχθεί βαθμιαία στην αλγεβρική αφαίρεση (συμβολισμός, τυποποίηση, αλγόριθμος)»* (Κ27) είτε διότι δεν επιλύει άλλα εμπόδια αναφορικά με την επίλυση εξισώσεων (η μεταβλητή ως άγνωστος)«*Δεν βοηθά επίσης στην αντίληψη της μεταβλητής ως άγνωστο.»* (Κ30)
- Όχι επιχειρήματα.

  Κάποιοι είτε απέρριψαν, είτε αποδέχτηκαν το μοντέλο της ζυγαριάς, χωρίς να τεκμηριώσουν την άποψή τους *«Είναι ένα από τα καλύτερα μοντέλα…»*(Κ9),

«*Νομίζω ότι είναι πολύ κατανοητό παρόλο που πολλά παιδιά σήμερα δεν έχουν την εικόνα αυτής της ζυγαριάς*» (Κ14)

Διάγραμμα 4.15 **Επιχειρήματα Καταλληλότητας μοντέλου Ζυγαριάς**



4.4.2 Δυνατότητες και Περιορισμοί του Μοντέλου της Ζυγαριάς

Σε αυτή την ερώτηση, επειδή κάποιοι ερωτηθέντες έδωσαν περισσότερες από μια απαντήσεις οι αριθμοί που παρατίθενται αναφέρονται στο πλήθος των απαντήσεων. Έτσι, σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης πρόεκυψαν οι παρακάτω ομάδες περιορισμών και δυνατοτήτων του μοντέλου που φαίνονται στον πίνακα 44:

Πίνακας 4.4 ***Δυνατότητες –Περιορισμοί μοντέλου της Ζυγαριάς***

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ				ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ	ΔΑ-ΧΩΡΙΣ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	**ΜΟΝΤΕΛΟ**	**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ**	**ΤΡΟΠΟΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**		
21	**17**	**30**	**4**	**10**	**7**

Στο σύνολο των απαντήσεων αναφορικά με τους περιορισμούς του μοντέλου που δόθηκαν[31] (72), το 42% ήταν γύρω από θέματα σύνδεσης του μοντέλου με το μαθηματικό αντικείμενο, το 29% ήταν γύρω από το μαθηματικό περιεχόμενο, το 23% γύρω από το μοντέλο και το 6% ήταν αυτές που αναφέρονταν σε θέματα διαχείρισης της μάθησης.

Οι περιορισμοί του μοντέλου, που εντόπισαν οι καθηγητές των μαθηματικών, ταξινομήθηκαν στις παρακάτω ευρείες κατηγορίες (αναπτύσσονται στο διάγραμμα 4.16):

Περιορισμοί που αναφέρονταν στους

- Τρόπους παρουσίασης των σχολικών μαθηματικών. Κάποιοι ανέφεραν το πρόβλημα που δημιουργεί η
  - τυπική παρουσίαση επίλυσης αρχικά *«Οι μαθητές έχουν διδαχθεί επίλυση εξισώσεων σε προηγούμενα χρόνια εφαρμόζοντας αλγοριθμικές διαδικασίες με αποτέλεσμα το μοντέλο να μην τους είναι κατανοητό»* (Κ24), *«Οι καλοί μαθητές δε , προτιμούν να λύσουν την εξίσωση όπως τους την έχουν δείξει ας πούμε σε φροντιστήριο και δεν μπαίνουν στη διαδικασία αυτή εύκολα!»* (ΚΟ10).

  Κάποιοι άλλοι το πρόβλημα που δημιουργεί
  - η άτυπη μορφή εκπαίδευσης, «*Επίσης το μοντέλο ξεχνιέται γιατί δεν μπαίνει σε διαγώνισμα.*» (Κ24)

Οι καθηγητές που οι περιορισμοί που εντόπισαν ήταν ως προς

[31] Από τις 88 συνολικά απαντήσεις αφαιρέθηκαν αυτές που αναγνώριζαν μόνο δυνατότητες και αυτές που δεν περιείχαν καμία απάντηση, σύνολο 16.

- Μαθηματικό περιεχόμενο, αναφέρθηκαν στις
  - Εξισώσεις, εστιάζοντας είτε στο ότι το μοντέλο δεν μπορεί να διαπραγματευτεί πιο Σύνθετες, *«δυσκολεύονται όταν έχουν εξισώσεις λίγο πιο πολύπλοκες π.χ.5x+3 = 2x+9, για να τη λύσουν με χρήση της ζυγαριάς.»* (ΚΟ25), είτε ότι δεν είναι επαρκές για τη διαχείριση ειδικών περιπτώσεων εξισώσεων, *«Η δυσκολία είναι όταν παρουσιάζονται ταυτότητες ή αδύνατες εξισώσεις»* (Κ8), είτε, τέλος ,ότι το μοντέλο δεν βοηθάει στην εννοιολογική κατανόηση της ,*«δεν αντιλαμβάνονται την επιφανειακή δομή των εξισώσεων ότι δηλ. το 3(4χ+6) =8 είναι το ίδιο με το 3y=8. »*

    Επίσης κάποιοι αναφέρθηκαν στην
  - δυσκολία ως προς την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού , «*Υπάρχει πρόβλημα στην ιδιότητα του πολλαπλασιασμού..»* (ΚΟ18)

Κάποιοι καθηγητές αναφέρθηκαν στους περιορισμούς που θέτει το ίδιο

- το μοντέλο και συγκεκριμένα περιορισμούς που οφείλονται στις
  - ιδιότητες του. Αναφέρουν ότι οι μαθητές δε γνωρίζουν το μηχανισμό λειτουργίας της ζυγαριάς, *« πώς βγάζουμε τα βαρίδια ταυτόχρονα χωρίς να τουμπάρει η ζυγαριά»* (ΚΟ4) *«δυσκολία όταν τα βάρη στη ζυγαριά είναι άνισα»* (Κ29), *«μερικοί μαθητές …..απορούν γιατί δεν ζυγίζουμε τη σακούλα»* (ΚΟ13), *«οι δυσκολίες εμφανίζονται όταν παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης.»* (ΚΟ24).

Περιορισμοί που οφείλονται στη

- φύση του (μη οικείο, απαρχαιωμένο), «*Οι ζυγαριές που τα παιδιά ξέρουν είναι ηλεκτρονικές δείχνουν απευθείας το βάρος και δεν έχουν δύο δίσκους που ισορροπούν.»* (Κ28), *«μερικά παιδιά (ίσως τα περισσότερα) δεν έχουν δει ποτέ τους τέτοια ζυγαριά, ούτε γνωρίζουν πώς λειτουργεί.»* (Κ33) ή στην
- απεικόνισή του, «*Πρακτικές δυσκολίες χειρισμού της ζυγαριάς όταν είναι σε ζωγραφιά. Για το λόγο αυτό καλό θα ήταν να χρησιμοποιείται κατάλληλο λογισμικό με το οποίο να μπορούν τα παιδιά να αλληλεπιδρούν και να βλέπουν την αλλαγή στην ισορροπία της ζυγαριάς.»* (Κ22)

Επίσης κάποιοι καθηγητές αναφέρθηκαν στους περιορισμούς που είναι απόρροια της

- Σύνδεσης μοντέλου και μαθηματικού αντικειμένου. Η σύνδεση αυτή αναφερόταν είτε στη
  - Μετάφραση από το μοντέλο στη μαθηματική γλώσσα κι αντίστροφα. Εδώ εντοπίστηκαν κάποια Γενικά επιχειρήματα, *«Νομίζω ότι τους είναι δύσκολο να κάνουν την σύνδεση μεταξύ των εξισώσεων και του μοντέλου. Νομίζω ότι τα*

βρίσκουν άσχετα μεταξύ τους και δυσκολεύονται περισσότερο αντί να διευκολύνονται.» (Κ5), είτε στην περιορισμένη αναπαράσταση των συντελεστών της εξίσωσης, *«Ένα πρόβλημα με το μοντέλο της ζυγαριάς είναι το ότι οι συντελεστές για τις άγνωστες αλλά και για τις γνωστές ποσότητες είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί.»* (Κ18) Μάλιστα κάποιοι εδώ αναφέρθηκαν ειδικά στην δυσκολία του εντοπισμού της άγνωστης ποσότητας, *«Μια άλλη πιο σημαντική δυσκολία είναι ότι παριστάνουν και τους κύβους (που είναι μονάδες στο συγκεκριμένο παράδειγμα) ως άγνωστες ποσότητες (αφού δεν γνωρίζουν το βάρος τους).»* (Κ19) Κάποιοι εμβάθυναν και αναφέρθηκαν στη δυσκολία διαχείρισης των αρνητικών ποσοτήτων, *«δυσκολίες με αρνητικούς αριθμούς.»* (Κ30)

Ένας άλλος σημαντικός περιορισμός ήταν η δυσκολία στην

- Ολιστική προσέγγιση της εξίσωσης, δηλαδή το «=» ως σχεσιακό σύμβολο

«- Δεν μπορούν να ακολουθήσουν τη συμβουλή «κάνω το ίδιο και στις δυο μεριές» και δεν αντιλαμβάνονται ότι οσοδήποτε μικρή κι αν είναι η διαφορά στα δύο μέλη «χαλάει» η ισότητα.» (Κ4), *«δυσκολίες στο να διακρίνουν ισοδύναμες εξισώσεις.»* (Κ30) καθώς και η

- Τεχνική επίλυσης της εξίσωσης(φάση της αποδέσμευσης από το μοντέλο),*«Όπως και στην περίπτωση του θερμόμετρου, κατανοούν και συμμετέχουν στη διαδικασία με τη ζυγαριά, όμως μπερδεύονται με τις πράξεις μόλις απομακρυνθεί το μοντέλο (λιγότερο όμως από ότι στο θερμόμετρο).»* (Κ7), «*Να έχουν καταλάβει τη λειτουργία της ζυγαριάς και να μπορούν να λύνουν απλά προβλήματα με τη ζυγαριά αλλά να συναντούν πολλές δυσκολίες στο μαθηματικό πλαίσιο.*» (ΚΟ2)

Και τέλος, αυτοί που αναφέρθηκαν μόνο σε δυνατότητες του μοντέλου της ζυγαριάς επικαλέστηκαν τα παρακάτω:

- Θετική προσωπική εμπειρία

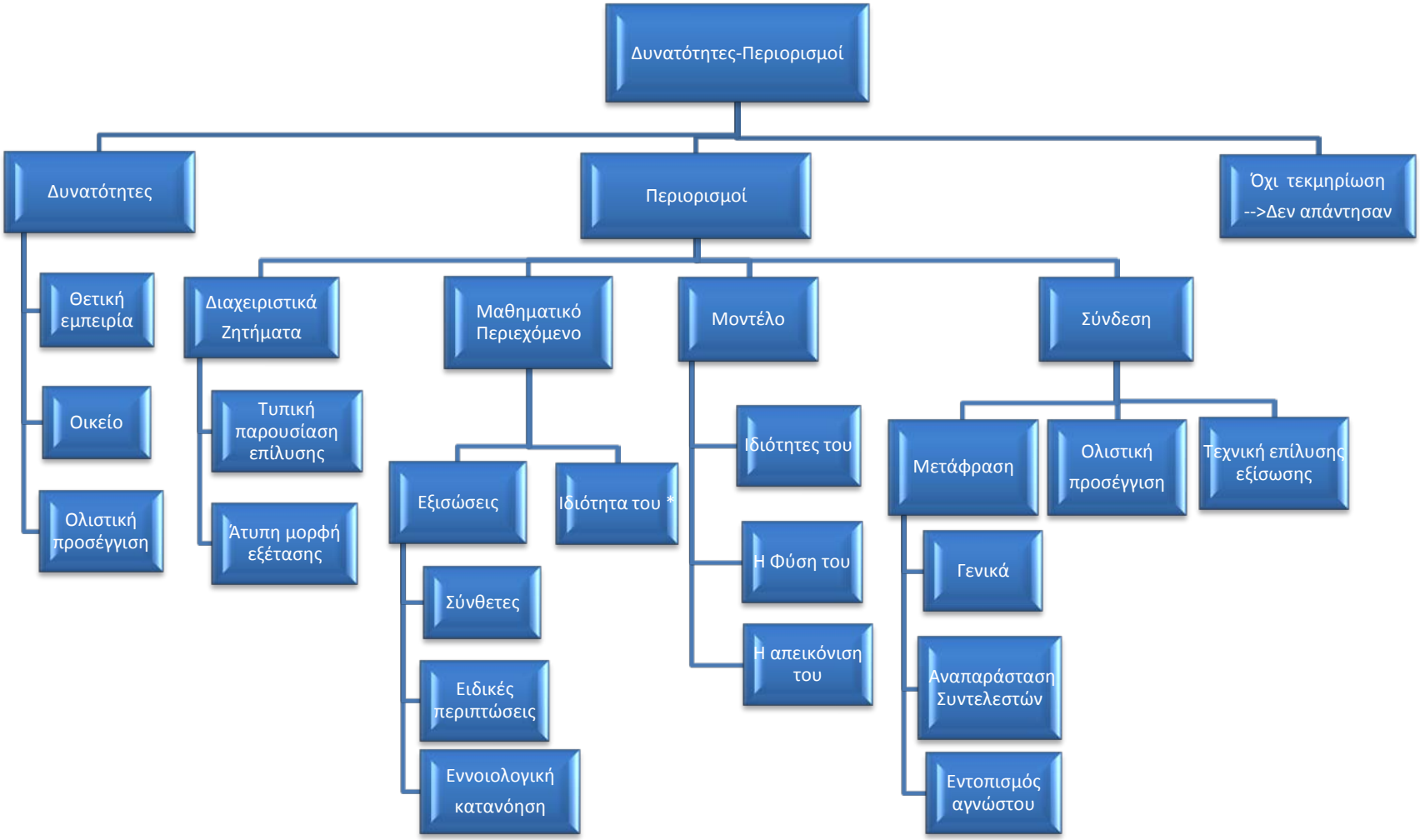
  «*Δεν έχω διαγνώσει κανενός είδους δυσκολίες*»(ΚΟ3), «»*Δεν έχω διαπιστώσει κάποιες δυσκολίες, αν και το χρησιμοποιώ πολλά πολλά χρόνια*. (Κ17)

- Οικειότητα του μοντέλου, «*Λέγεται ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τον μηχανισμό του ζυγού. Δεν συμφωνώ. Τα παιδιά καταλαβαίνουν το βαρύτερο στο ζυγό ακόμα και σε ηλικίες της τάξεως των τριών ετών.*»(Κ24)

- Ολιστική προσέγγιση της εξίσωσης

«Ικανοποιεί ουσιαστικά μόνο την χρησιμοποίηση του νόμου της διαγραφής.» (Κ10)

Διάγραμμα 4.16 Δυνατότητες-περιορισμοί του μοντέλου της Ζυγαριάς και η έννοια της ισότητας



4.4.3 Δυσκολίες του Μοντέλου – Τρόποι Αντιμετώπισης τους

Πίνακας 4.5 ***Τρόποι αντιμετώπισης δυσκολιών από χρήση μοντέλου Ζυγαριάς***

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ - ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ [32]		
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	**ΜΗ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
37	**9**	**14**

Σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης πρόεκυψαν οι παρακάτω κατηγορίες τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών που εντόπισαν στο προηγούμενο υποερώτημα (πίνακας 4.5)

Το 62% καταφεύγουν στη χρήση μοντέλου, το 15% απορρίπτουν τη χρήση οποιουδήποτε μοντέλου, ενώ το υπόλοιπο 23% είτε δεν έδωσαν απάντηση (12/14), είτε έδωσαν ασαφή απάντηση (Από αυτούς οι πέντε δεν είχαν απαντήσει και στο προηγούμενο ερώτημα που συνάδει με αυτό). Οι υπόλοιποι δύο (2) έδωσαν ασαφή απάντηση: *«με γέλιο και υπομονή»* (ΚΟ15) *«είναι βασικό να εσωτερικεύσουν κάποιους βασικούς κανόνες διαχείρισης της εξίσωσης.»(*ΚΟ16). Μάλιστα ένας εκ των δυο (ΚΟ15) θεωρεί ότι το μοντέλο της ζυγαριάς δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. (ερώτημα ΙΙΙβ).

Σε ένα επόμενο επίπεδο ανάλυσης των δυο ευρύτερων κατηγοριών, σχηματίστηκαν οι θεματικές κατηγορίες που φαίνονται στο διάγραμμα 4.17: οι δυσκολίες που είναι

- Με χρήση μοντέλου και πιο συγκεκριμένα: Περιορισμένη χρήση του λόγω ζητημάτων
  - Διαχειριστικού τύπου, όπως περιορισμοί που θέτει το ΑΠΣ , το θέμα χρόνου «….*Δυστυχώς, ο σχολικός χρόνος είναι αμείλικτος και το μοντέλο της ζυγαριάς μπορεί να συμπεριληφθεί σε μια μικρή υποδιαίρεσή του μόνο*» (Κ7) ή η διδασκαλία των εξισώσεων από μικρότερες τάξεις, «*Κάποια πράγματα όπως είπα σχετίζονται με την αλγοριθμική προσέγγιση του αναλυτικού προγράμματος και την δυσκολία των έργων που αυτό ζητάει*» (Κ24). Επίσης κάποιοι επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο μόνο σε απλές εξισώσεις, *«χρησιμοποιώ την ζυγαριά μόνο για απλές εξισώσεις π.χ. χ+5=8»* (ΚΟ25) ή για τη διαισθητική προσέγγιση ιδιοτήτων ισότητας και μόνο, *«Προσπαθώ να δώσω μεγάλη έμφαση στο ποιες πράξεις διατηρούν την ισοδυναμία, δηλαδή στις ισοδύναμες εξισώσεις (όχι πάντα με σκοπό την επίλυση της εξίσωσης)»* (Κ18), «*με την χρήση της ζυγαριάς προκειμένου να συζητηθούν οι ιδιότητες της ισότητας»* (Κ26), *«Χρησιμοποιώ το μοντέλο για την αισθητοποίηση των ιδιοτήτων α= β → α+ γ =β+ γ κλπ, και όχι για την κατά γράμμα αναπαράσταση κάθε εξίσωσης.»* (Κ12)

  Κάποιοι επιλέγουν τη χρήση του μοντέλου με στόχο την
  - Αποσαφήνιση των συμβάσεων του (Κατανόηση λειτουργίας). Εδώ οι απαντήσεις κυμάνθηκαν σε ένα φάσμα του συνεχούς όπου στο ένα άκρο ήταν Γενικές

[32] Οι απαντήσεις ήταν τόσες όσες και ο πληθυσμός μας (60).

παρατηρήσεις- υποδείξεις, *«προσπαθώ να τους εξηγήσω τον τρόπο λειτουργίας αυτής της ζυγαριάς.»(*Κ33) και στο άλλο ο πειραματισμός-διερεύνηση, *«Βάζω τους μαθητές να εξοικειωθούν με τη ζυγαριά με το να βρουν τις ιδιότητες ισοτήτων από αυτήν.»* (ΚΟ10) με τις ενδιάμεσες αποχρώσεις: Συνεχείς αναγωγές από πραγματικό στο μαθηματικό μοντέλο , *«Βάζω τους μαθητές να εξοικειωθούν με τη ζυγαριά με το να βρουν τις ιδιότητες ισοτήτων από αυτήν. Ζητάω να εφαρμόσουν τις ιδιότητες για να λύσουν μια εξίσωση»* (ΚΟ10) και Πολλά παραδείγματα «Συνήθως δεν αντιμετωπίζουν δυσκολίες μεγάλες. κι αν σε κάποιο σημείο είναι πρόβλημα , μπορούμε να κάνουμε κι άλλα παραδείγματα» (Κ32). Κάποιοι προσφεύγουν στις διαφορετικές αναπαραστάσεις του μοντέλου, όπως ο πραγματικός ζυγός. *«Με συνεχείς αναγωγές από το πραγματικό μοντέλο στο μαθηματικό.»*(Κ14), «Αφήνοντας τους αρχικά να καταλάβουν τι ακριβώς κάνει μια ζυγαριά και κατόπιν κάνοντας πολλές δοκιμές και πολλά παραδείγματα με ένα μοντέλο ζυγαριάς (αν υπάρχει)»(Κ28), η χρήση του μοντέλου της τραμπάλας «*Η πρώτη παρακάμπτεται εύκολα* [33]*αφού όλοι κάποια στιγμή στη ζωή τους έκαναν τραμπάλα οπότε εξηγείται η λειτουργία της ζυγαριάς αυτού του τύπου.»* (Κ19). Μια άλλη προσέγγιση είναι ενσώματα, *«με αναπαραστάσεις της ζυγαριάς σηκώνοντας ένα μαθητή στον πίνακα και κρατώντας στα χέρια του κιμωλίες»* (ΚΟ17) ή με άλλα σταθμά κλπ , *«… χρησιμοποιώ το γνωστό μοντέλο με τα μπαλόνια τα οποία αντί να βαραίνουν το δίσκο της ζυγαριάς το καθιστούν ελαφρύτερο» ….)* (Κ30),
«… Μπορούμε να έχουμε μια τροχαλία στερεωμένη σε κάποιο ψηλότερο σημείο από το κάθε άκρο του ζυγού και από το άλλο άκρο να έχουμε αντίστοιχα βάρη που θα λειτουργούν ως αρνητικοί αριθμοί στο ζυγό.» (Κ24). Επίσης κάποιοι επιλέγουν τη χρήση του μοντέλου σε συνδυασμό με άλλα διδακτικά υλικά- πίνακας, ζυγός από χαρτόνι *«• Ζωγραφίζουμε στον πίνακα • Φτιάχνω ζυγαριά από χαρτόνι και γράφω – σβήνω - μεταφέρω τους όρους τις εξίσωσης στους δίσκους της ζυγαριάς*»(ΚΟ9) *ή* Πρότυπα παραδείγματα- βιβλίο , «*Αν συναντήσουμε κάποια δυσκολία πράγμα σπάνιο επιμένω ιδιαίτερα στα παραδείγματα του βιβλίου και στις εικόν*ες»(Κ13) *ή* με τη χρήση λογισμικού Η-Υ , «*ίσως με βοήθεια Η-Υ»(*Κ34). Τέλος μερικοί προσφεύγουν στην επιλογή άλλου μοντέλου, όπως με καθημερινά παραδείγματα *,* «*προτιμώ να χρησιμοποιώ προβλήματα που συναντούν καθημερινά αν δω πως το πρόβλημα της ζυγαριάς δεν διεγείρει το ενδιαφέρον τους.*» (ΚΟ19). Τέλος διατυπώθηκαν και μερικές

[33] *« Μια μικρή δυσκολία είναι ότι πιθανόν να μην έχουν δει στην πράξη ζυγαριά και πως λειτουργεί.»*

- Γενικές απαντήσεις, *«είναι βασικό να εσωτερικεύσουν κάποιους βασικούς κανόνες διαχείρισης της εξίσωσης.»* (ΚΟ16).

Οι καθηγητές που προτιμούν την υπέρβαση των δυσκολιών που εντόπισαν

- Χωρίς χρήση μοντέλου, επιλέγουν την Τυπική παρουσίαση επίλυσης, δηλαδή την τεχνική της επίλυσης *«Πάντως θα μπορούσα να πω ότι στα σημεία που δυσκολεύονται οι μαθητές απλά αφήνεις το μοντέλο στην άκρη και προσπαθείς με πιο τυπικό τρόπο να προσεγγίσεις τα θέματα. Π.χ. οι μαθητές αδυνατούν να καταλάβουν (εύκολα) τη μεταφορά ενός όρου από το ένα μέλος στο άλλο με ταυτόχρονη αλλαγή (μαγικά!) του προσήμου. Η ζυγαριά δεν βοηθάει την πλειοψηφία να αποκτήσει άποψη γι αυτό. Επομένως την αφήνουμε στην άκρη και δουλεύουμε πιο τυπικά.»* (Κ4), *«τους αναλύω τον «αλγόριθμο» για την λύση(γνωστοί και άγνωστοι, αναγωγές, μεταφορές κλπ) και τους καθοδηγώ «προπονητικά» στην «συμπεριφοριστική» κλασσική εξάρτηση»* (Κ23) ή τις Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων –ταυτότητες, αδύνατες, « *Αναφέροντας μετά τον αντίστοιχο ορισμό παραδείγματα που οδηγούν σε ταυτότητες (όπου οι μαθητές καλούνται μόνοι τους να διαπιστώσουν ότι κάθε αριθμός είναι λύση μιας τέτοιας εξίσωσης), ή αδύνατες (όπου καλούνται να διαπιστώσουν ότι δεν υπάρχει καμία λύση)».* (Κ8). Κάποιοι άλλοι καταφεύγουν σε
- Άλλες προσεγγίσεις επίλυσης: Με χρήση τεχνικών, όπως Δοκιμή και πλάνη «*Χρησιμοποιώντας παραδείγματα από την αριθμητική με απλά νούμερα και βάζοντας να κάνουν δοκιμές και λάθη» (*Κ5), με Αντίστροφες πράξεις *«….Με τις ιδιότητες της ισότητας και την ιδέα των αντίστροφων - αντίθετων πράξεων, και ορισμένες ιδιότητες πράξεων, η διδασκαλία της λύσης εξισώσεων περνά πολύ καλύτερα.*

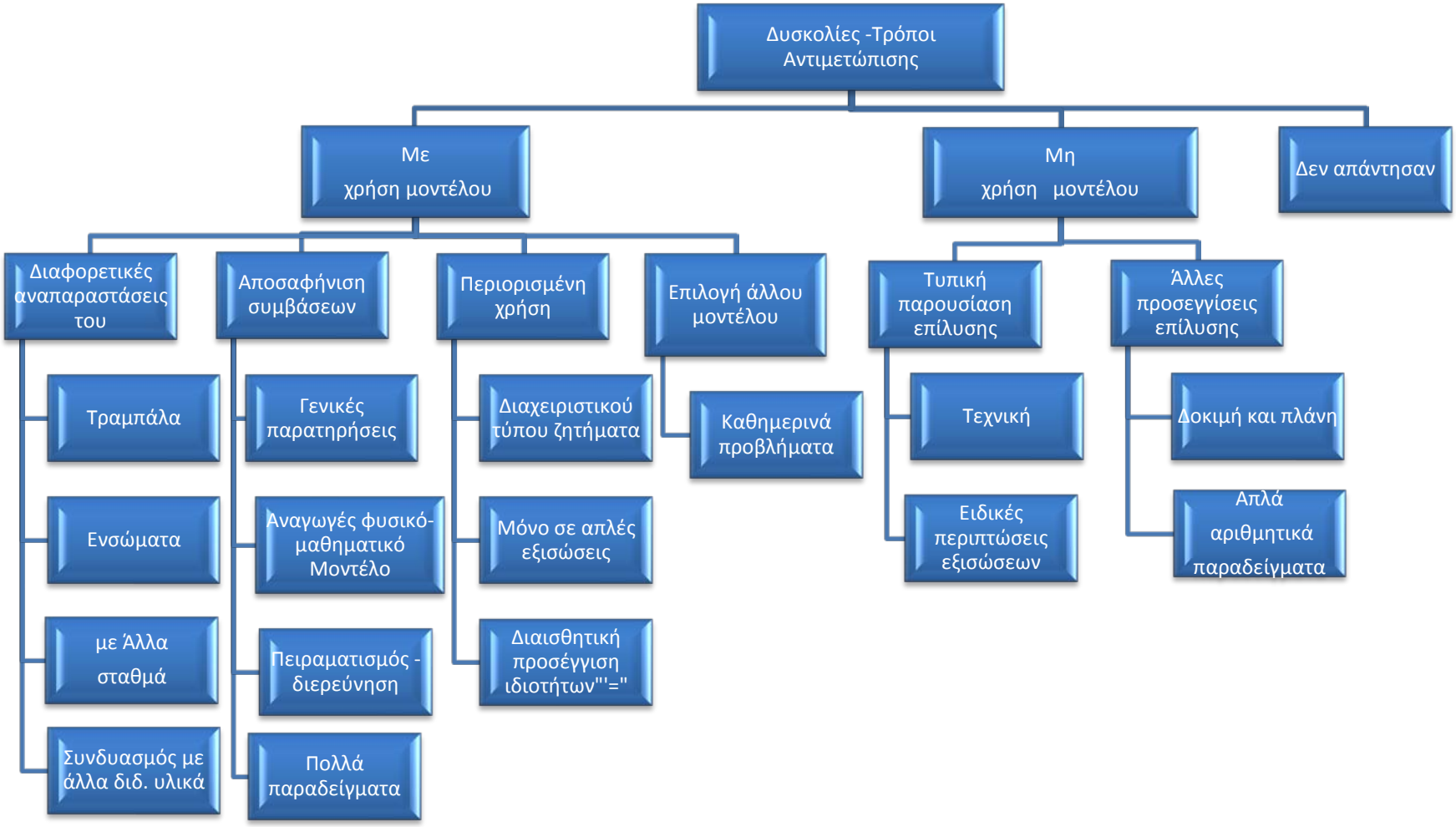
  X+5=8

  X+5-5=8-5

  X=3» (Κ16)

  Τέλος με τη χρήση Απλών αριθμητικών παραδειγμάτων ,«*Αναφέροντας μετά τον αντίστοιχο ορισμό παραδείγματα που οδηγούν σε ταυτότητες (όπου οι μαθητές καλούνται μόνοι τους να διαπιστώσουν ότι κάθε αριθμός είναι λύση μιας τέτοιας εξίσωσης),ή αδύνατες (όπου καλούνται να διαπιστώσουν ότι δεν υπάρχει καμία λύση)»* (Κ8)

Διάγραμμα 4.17 **Τρόποι αντιμετώπισης Δυσκολιών με τη χρήση το μοντέλου της Ζυγαριάς**



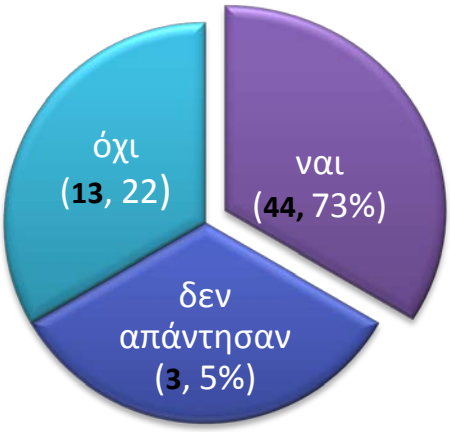
4.4.4 Χρήση του Μοντέλου της Ζυγαριάς

4.4.4.1 Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου.

Σε ένα αρχικό επίπεδο έγινε μια ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των καθηγητών αναφορικά με το αν αποδέχονται το μοντέλο της ζυγαριάς ή όχι.

Έτσι προέκυψε το παρακάτω διάγραμμα 4.18:

Διάγραμμα 4.18 **Αποδοχή-Απόρριψη μοντέλου της Ζυγαριάς**



Το 73%[34] χρησιμοποιεί το μοντέλο της ζυγαριάς, ένα 22% απάντησε πως όχι και τέλος ένα 5% δεν απάντησε.

4.4.4.2. Τρόποι χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς.

Οι απαντήσεις των ερωτηθέντων επεκτάθηκαν σε δυο άξονες. Αυτές που αναφέρονταν στο *πού*, δηλαδή ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο και αυτές που αναφέρονταν στο *πώς*, δηλαδή στον τρόπο χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς (διάγραμμα 3.19):

Πιο συγκεκριμένα, ως προς το

- *Πού*

  διατυπώθηκαν

  - Γενικές παρατηρήσεις. Εδώ οι απαντήσεις που πήραμε εντάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες: Εισαγωγικά, όπου η χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς σε ένα *εισαγωγικό επίπεδο* δεν είχε τόσο το νόημα της κινητοποίησης του ενδιαφέροντας των μαθητών, αλλά αναφερόταν κυρίως στο μαθηματικό περιεχόμενο, δηλαδή σε

[34] Τα ποσοστά αντιστοιχούν στον αρχικό πληθυσμό.

συνδυασμό με το *πώς «Το χρησιμοποιώ όταν εισάγω την έννοια της εξίσωσης, με παραδείγματα απλών εξισώσεων για την κατανόηση των βημάτων ώστε να μη γίνεται η επίλυση μηχανικά»* (Κ6). Σε συνδυασμό με άλλα διδακτικά υλικά –φύλλα εργασίας. Εδώ οι απαντήσεις είχαν το χαρακτηριστικό ότι δεν εμβάθυναν, αντίθετα κινήθηκαν περιφερειακά ως προς την περιγραφή του τρόπου χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς «*Στην Α και Β γυμνασίου με χρήση φύλλου εργασίας*» (Κ3). Η δεύτερη κατηγορία ήταν με διαφορετικές αναπαραστάσεις του (στον πίνακα, ηλεκτρονικό υπολογιστή, ζυγαριά από χαρτόνι, πραγματικό ζυγό), *«Σχέδιο στον πίνακα σε φύλλο εργασίας και αν είναι δυνατόν και ηλεκτρονικά(εδώ ακόμη όχι)……»* (ΚΟ5*)*. Η τρίτη κατηγορία ήταν όπως προτείνεται από πρότυπα παραδείγματα. Και πάλι εδώ οι απαντήσεις κινήθηκαν περιφερειακά. Οι ερωτηθέντες αναφέρθηκαν στις οδηγίες του Αναλυτικού προγράμματος σπουδών και του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, *«Βασίζομαι στα παραδείγματα του βιβλίου σύμφωνα με τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου»* (Κ9), είτε στο βιβλίο του καθηγητή –σχολικό εγχειρίδιο, «*Εξηγώ στους μαθητές με απλά παραδείγματα τον τρόπο λειτουργίας του οργάνου και στη συνέχεια τους δίνω ένα πρόβλημα όπως του βιβλίου ή παρόμοιο»* (Κ11), ή όπως περιγράφεται στο ερωτηματολόγιο που απάντησαν, «*με το παραπάνω τρόπο*» (ΚΟ25).

- Αναφορά στο μοντέλο. Στόχος η εξοικείωση με τη λειτουργία του μοντέλου αποσαφηνίζοντας το (δηλαδή επεξήγηση των περιορισμών του) *«Εξηγώ στους μαθητές με απλά παραδείγματα τον τρόπο λειτουργίας του οργάνου και στη συνέχεια τους δίνω ένα πρόβλημα όπως του βιβλίου ή παρόμοιο.»* (Κ11) *«…Επιπλέον κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας διαφόρων μορφών εξισώσεων προτρέπω τους μαθητές να ανατρέχουν στο μοντέλο για να επιβεβαιώνουν τις κινήσεις που κάνουν.»* (Κ12), *«Βρίσκω μια αληθινή ζυγαριά ή ζωγραφίζω μία στον πίνακα. Αφήνω τα παιδιά να εξοικειωθούν κάνοντας συνεχείς δοκιμές… είτε με την αληθινή είτε ζωγραφίζοντας διάφορες περιπτώσεις. Βάζουμε διάφορα αντικείμενα στους δύο δίσκους της ζυγαριάς και γράφουμε τις ισότητες που προκύπτουν.»* (Κ28). Επίσης άλλοι το χρησιμοποιούν Σε συνδυασμό με άλλα μοντέλα και πιο ειδικά με διαφορετικές αναπαραστάσεις του (στον πίνακα, ηλεκτρονικό υπολογιστή, ζυγαριά από χαρτόνι, πραγματικό ζυγό) «*Βρίσκω μια αληθινή ζυγαριά ή ζωγραφίζω μία στον πίνακα.»* (Κ28), *«Έχοντας ένα μοντέλο στο sketchpad κλπ.»* (ΚΟ10) *«παραστατική παρουσίαση με την βοήθεια πραγματικού ζυγού των ιδιοτήτων επίλυσης εξίσωσης - αλλαγή προσήμου κατά την μεταφορά όρων από το*

ένα μέλος στο άλλο)» (Κ1), «*χρησιμοποιώ το γνωστό μοντέλο με τα μπαλόνια τα οποία αντί να βαραίνουν το δίσκο της ζυγαριάς το καθιστούν ελαφρύτερο.»* (Κ30).

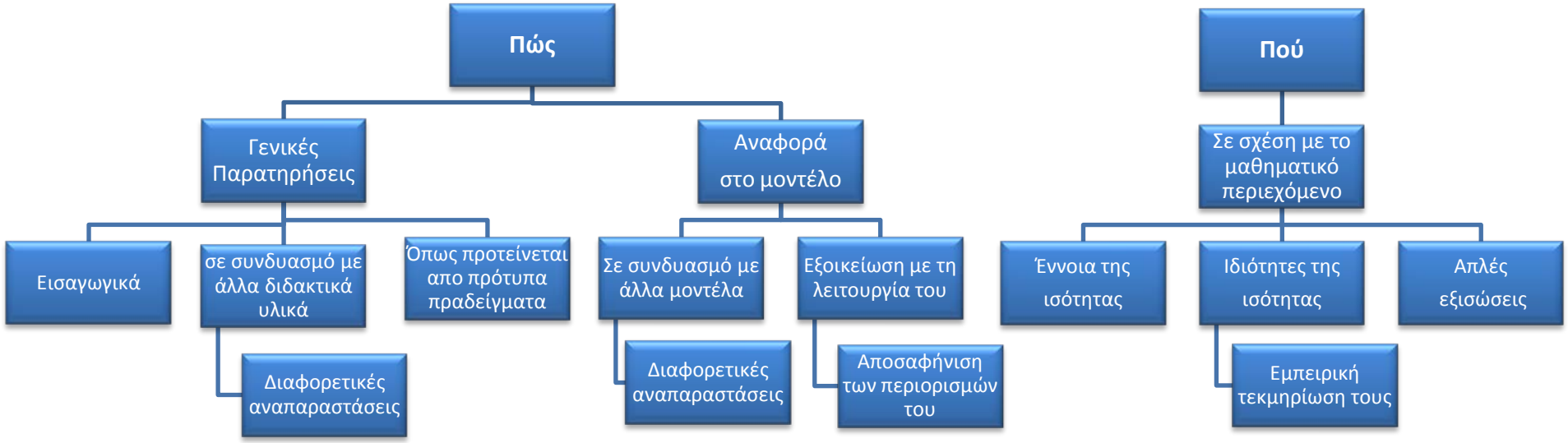
Αναφορικά με τον τρόπο χρήσης του μοντέλου

- *Πώς*

  οι καθηγητές επιλέγουν να το χρησιμοποιήσουν

  - σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο σε απλές εξισώσεις, *«Το χρησιμοποιώ όταν εισάγω την έννοια της εξίσωσης, με παραδείγματα απλών εξισώσεων για την κατανόηση των βημάτων ώστε να μη γίνεται η επίλυση μηχανικά»*(Κ6) και στην κατανόηση της έννοιας της ισότητας, *«για την έκφραση ισότητας και την εποπτική παρουσίαση εξίσωσης ζητάω χ ώστε…»*, και των ιδιοτήτων της ισότητας «*Μόνο σε πρώτο επίπεδο κατανόησης της έννοιας»* (ΚΟ6). Κάποιοι το χρησιμοποιούν με στόχο την εμπειρική τεκμηρίωση τους, «*το χρησιμοποιώ κυρίως στην εισαγωγή των εξισώσεων και ανισώσεων για την εμπειρική τεκμηρίωση των διαδικασιών που παράγουν ισοδύναμες εξισώσεις-ανισώσεις.»* (Κ24)

Διάγραμμα 4.19 **Τρόποι αξιοποίησης του μοντέλου της Ζυγαριάς**



4.5 Η Συσχέτιση της Έννοιας της Ισότητας με το Γεωμετρικό Μοντέλο

Το τελευταίο ερώτημα διαπραγματευόταν την έννοια της ισότητας μέσα από ένα γεωμετρικό μοντέλο, διατυπώνοντας το ερώτημα της διαισθητικής προσέγγισης της επιμεριστικής ιδιότητας με εμβαδά ορθογωνίων.

Οι απαντήσεις που πήραμε (Σχήμα 4.4) ήταν κι εδώ διαβαθμισμένες σε ένα φάσμα που ποικίλλει από ακατάλληλο, στο ένα άκρο, ως το βέλτιστο στο άλλο με τις ενδιάμεσες αποχρώσεις. Κι εδώ διαμορφώθηκε μια πέμπτη ομάδα, η οποία συνιστούσε το 2% [35]του πληθυσμού μας, καθώς η ερώτηση δεν απαντήθηκε από ένα καθηγητή και η οποία τοποθετήθηκε εκτός εμβέλειας του φάσματος.

Σχήμα 4.4 **Γράφημα Συσχέτισης του Γεωμετρικού μοντέλου με την έννοια της ισότητας**

Σε ένα πρώτο επίπεδο ποσοτικής ανάλυσης παρατηρήθηκε μια συσσώρευση των απαντήσεων στις θετικές τιμές *αρκετά καλά* και *καλύτερο.* Κι εδώ πάλι, προστέθηκε και η πέμπτη ποσοτική μεταβλητή (*δεν έχει γνώμη).* Όμως τώρα εδώ μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

[35] Τα ποσοστά αυτά αντιστοιχούν στον αρχικό πληθυσμό (60 καθηγητές).

4.5.1 Αιτίες Καταλληλότητας ή μη του Γεωμετρικού Μοντέλου

Αναφορικά με τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την καταλληλότητα ή μη του γεωμετρικού μοντέλου, αυτά διακρίνονται σε [36](διάγραμμα 4.20):

- Υποστηρικτικά

Παρατηρούμε σε ένα πρώτο επίπεδο ανάλυσης οι προτιμήσεις των καθηγητών να συγκεντρώνονται προς το θετικό άκρο, είναι δηλαδή στην πλειοψηφία τους υποστηρικτικές του μοντέλου.

Συγκεκριμένα, τα επιχειρήματα που πρόβαλαν κατανέμονται στους άξονες:

- Κατανόηση της ιδιότητας, είτε διότι είναι οικείο το μοντέλο , «*Το καταλληλότερο μοντέλο για διαισθητική προσέγγιση…* » (ΚΟ5), είτε διότι η έννοια του εμβαδού του παραλληλογράμμου είναι γνωστή από μικρότερες τάξεις, *«είναι καλό γιατί το έχουν δουλέψει ήδη στο δημοτικό»* (ΚΟ22), είτε λόγω Εποπτείας, «*νομίζω ότι είναι κατάλληλο, προσφέρει μια καλή νοητική αναπαράσταση της ιδιότητας*» (Κ23), είτε τέλος, γιατί συντελεί στη Σύνδεση άλγεβρας με γεωμετρία, «*Είναι κατάλληλο, διότι οπτικοποιεί την ιδιότητα και συνδέει (όπως και πολλά άλλα) άλγεβρα με γεωμετρία.*» (Κ7)
- Σύνδεση μοντέλου με μαθηματικό περιεχόμενο, όπου αναδύθηκαν τα παρακάτω επιχειρήματα: Απόδειξη της ισχύος της επιμεριστικής ιδιότητας , *«…Επίσης είναι μια πειστική απόδειξη για την ισχύ της ιδιότητας.»* (Κ19) *«το θεωρώ κατάλληλο διότι είναι πολύ απλό και αμέσως θα πειστούν οι μαθητές για την ισχύ της ιδιότητας.»*(ΚΟ21). Ένας εμβάθυνε περισσότερο, αναφορικά με την έννοια της απόδειξης, και υποστήριξε ότι το μοντέλο βοηθά στην Ανάπτυξη λογικών συλλογισμών, «*Μπορεί επίσης να δικαιολογήσει τόσο την ισότητα α(β+γ)=αβ+αγ όσο και την ισότητα α(β-γ)=αβ-αγ, αποτελώντας ένα τύπο (επαγωγικής) απόδειξης, αφού (κυρίως στις μικρότερες τάξεις) ο ρόλος της απόδειξης είναι να δικαιολογεί , να επεξηγεί και να ερμηνεύει.*» (Κ1). Κάποιοι τόνισαν ότι το γεωμετρικό μοντέλο αποτελεί τη Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας, *«Οι εικόνες (ελαστικά μέσα) βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν αυτή τη σπουδαία ιδιότητα που συνδυάζει τις 2 πράξεις μέσα από τη γεωμετρική απεικόνιση της. (γεωμετρική ερμηνεία)* » (Κ35). Κάποιοι αναφέρουν ότι βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της ισότητας, «*Ειδικότερα στη συγκεκριμένη ιδιότητα το γεωμετρικό παράδειγμα τους διευκολύνει στην κατανόηση της ισότητας των*

[36] Παρατίθεται διάγραμμα στην επόμενη σελίδα

δύο μελών της ιδιότητας» (Κ13, *«Το μοντέλο αυτό θεωρητικά ενισχύει εμπειρικά την πεποίθηση των μαθητών για την ισχύ της επιμεριστικής ιδιότητας αφού διαπιστώνεται η ισχύ της και σ' ένα μη αλγεβρικό πεδίο. Βασίζεται στην αξιωματική ιδιότητα του εμβαδού σύμφωνα με την οποία το άθροισμα των εμβαδών πολυγωνικών χωρίων ισούται με το εμβαδό της σχηματιζόμενης αθροιστικής επιφάνειας.»* (Κ24), άλλοι ως μια Εισαγωγή στην επιμεριστική , «*Θα μπορούσε μόνο να χρησιμοποιηθεί την πρώτη φορά που αυτή εισάγεται, ώστε να μην είναι η εισαγωγή της «ουρανοκατέβατη»*» (Κ6), «*Νομίζω ότι είναι κατάλληλο για την εισαγωγή της ιδιότητας*» (Κ12). Προέκυψαν και

- Γενικές) απαντήσεις, όπως «*Μάλλον είναι θετική η παρουσία του στα πλαίσια μιας ποικιλίας αναπαραστάσεων για την κατανόηση των εννοιών της άλγεβρας.» (Κ4) «εισάγει αποτελεσματικά τους μαθητές στην επιμεριστική ιδιότητα.*» (ΚΟ2) , *«είναι πλήρες, εύστοχο* (Κ20), *παρέχει ένα τρόπο ερμηνείας της επιμεριστικής ιδιότητας(Κ31), … πολύ έξυπνο, εύστοχο* (Κ34), *είναι αρκετά ευρηματικό* (ΚΟ24)»

  Στο προσκήνιο η

- Επιστημολογία των μαθηματικών, «*Το θεωρώ πολύ κατάλληλο αφού και ιστορικά οι ιδιότητες αποδείχθηκαν αρχικά γεωμετρικά»* (Κ22).

Στο άλλο άκρο υπήρξαν επιχειρήματα

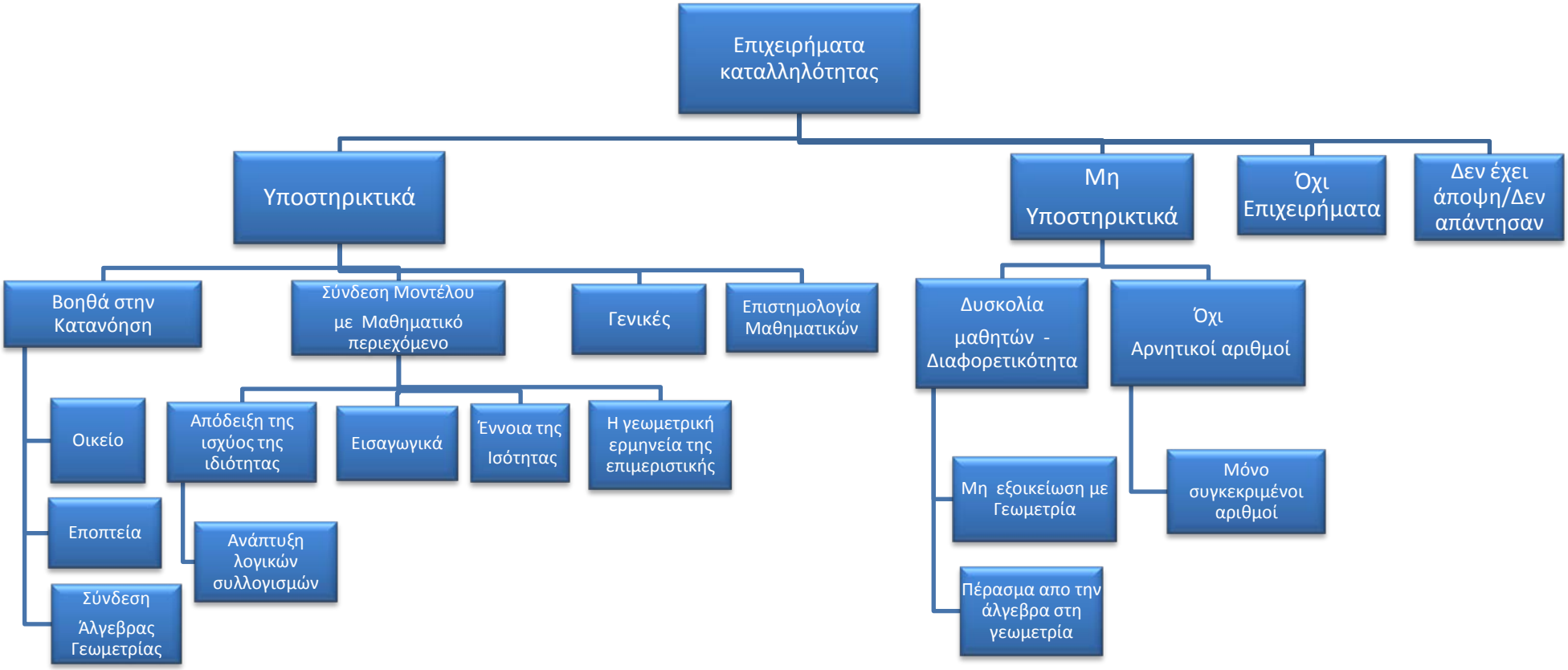
- Μη υποστηρικτικά, που περιστράφηκαν γύρω από δυο κεντρικούς άξονες: η Δυσκολία των μαθητών είτε ως αποτέλεσμα μη εξοικείωσης τους με την Γεωμετρία *«Για κάποιους «οπτικούς» μαθητές, το γεωμετρικό μοντέλο βοηθά. Δεν συνίσταται όμως για το σύνολο των μαθητών»* (Κ4), είτε στο πέρασμα από την άλγεβρα στη γεωμετρία, «*βασική δυσκολία που συνάντησα στην πράξη βρίσκεται στο ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν γεωμετρικά μεγέθη με αριθμητικά.*» (Κ15) είτε αντίστροφα, «*Ωστόσο, ενώ η ιδιότητα αυτή προσεγγίζεται εύκολα από τους μαθητές με το συγκεκριμένο μοντέλο (με αριθμούς), ο μηχανισμός της διπλής χρήσης της δεν γίνεται εύκολα αντιληπτός από την συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών (απαιτείται παρέμβαση του εκπαιδευτικού), όπως αναφέρω αναλυτικότερα και στη δεύτερη απάντηση.*» (Κ1), «*Εκτιμώ ότι δεν είναι και τόσο κατάλληλο καθώς απαιτεί από τους μαθητές να περνούν από το γεωμετρικό τρόπο σκέψης στον αλγεβρικό. Γεωμετρικά αντικείμενα αναπαριστούν αριθμούς κάτι που θεωρώ ότι μπερδεύει.»* (Κ3). Δεύτερος κεντρικός άξονας ήταν η δυσκολία με τις αρνητικές ποσότητες: Όχι αρνητικοί αριθμοί (Κ21) *«Έχει φανερή αδυναμία όταν οι αριθμοί είναι αρνητικοί.*» Εδώ εντάχθηκαν και οι απαντήσεις που αναφέρονταν

στην εφαρμογή του γεωμετρικού μοντέλου με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα «*Παράλληλα νομίζω πως είναι χρήσιμο να συνοδεύεται από αριθμητικά παραδείγματα.*» (K12)

- Όχι επιχειρήματα.

Κάποιοι είτε απέρριψαν, είτε αποδέχτηκαν το μοντέλο, χωρίς να τεκμηριώσουν την άποψή τους , «*Είναι πολύ καλό*.»(K9), «*είναι καλή προσέγγιση αλλά δύσκολα κατανοητή.*» (KO12).

Διάγραμμα 4.20 **Καταλληλότητα ή Μη του γεωμετρικού μοντέλου για την έννοια της ισότητας**



4.5.2 Δυνατότητες και Περιορισμοί του Γεωμετρικού Μοντέλου

Σε αυτήν την ερώτηση, επειδή κάποιοι ερωτηθέντες έδωσαν περισσότερες από μια απαντήσεις, οι αριθμοί που παρατίθενται απλώς αναφέρονται στο πλήθος των απαντήσεων. Έτσι, σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης πρόεκυψαν οι παρακάτω ομάδες περιορισμών και δυνατοτήτων που φαίνονται στον πίνακα 4.6:

του μοντέλου:

Πίνακας 4.6 ***Δυνατότητες-περιορισμοί του Γεωμετρικού μοντέλου***

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ				ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ	ΔΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	**ΜΟΝΤΕΛΟ**	**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ**	**ΤΡΟΠΟΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**		
6	**8**	**31**	**7**	**16**	**3**

Έτσι στο σύνολο των απαντήσεων αναφορικά με τους περιορισμούς του μοντέλου που δόθηκαν[37] (52), το 60% ήταν γύρω από θέματα σύνδεσης του μοντέλου με το μαθηματικό αντικείμενο, το 12% ήταν γύρω από το μαθηματικό περιεχόμενο, το 15% ήταν γύρω από το μοντέλο και το 13% ήταν αυτές που αναφέρονταν σε θέματα παρουσίασης των μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια.

Οι περιορισμοί που εντόπισαν οι καθηγητές των μαθηματικών (διάγραμμα 4.21) ταξινομήθηκαν στις παρακάτω ευρείες κατηγορίες:

Ως προς:

- Τον τρόπο παρουσίασης των σχολικών μαθηματικών

  «…το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β Δημοτικού (δεν γνωρίζω αν έχει γίνει κάποια διόρθωση, αλλά το ελπίζω), όπου οι συγγραφείς του βιβλίου ισχυρίζονται ότι οι μαθητές αυτής της τάξης μπορούν να χρησιμοποιήσουν την επιμεριστική ιδιότητα (χωρίς να την έχουν ποτέ διδαχθεί!!!!!!), για να ανακαλύψουν την προπαίδεια του 9, π.χ. !!!» (Κ1), *«να μην γνωρίζουν το εμβαδόν ορθογωνίου αφού διδάσκεται στο β' μέρος της γυμνασίου»* (ΚΟ23). Η μετατροπή των μαθηματικών σε σχολικά μαθηματικά (παραβίαση βασικών κανόνων των μαθηματικών και αρχών της φιλοσοφίας των μαθηματικών) *«Όπως σε κάθε αξιωματική ιδιότητα των αριθμών έτσι και με την επιμεριστική είτε χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο είτε επαληθεύσουμε την επιμεριστική με αριθμούς συμπεραίνουμε την ισχύ μιας γενικής ιδιότητας από την ισχύ κάποιων*

[37] Από τις 71 συνολικά απαντήσεις αφαιρέθηκαν αυτές που αναγνώριζαν μόνο δυνατότητες και αυτές που δεν περιείχαν καμία απάντηση, σύνολο 19

παραδειγμάτων κάτι που δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της απόδειξης.» (Κ24). Αποτέλεσμα του τρόπου παρουσίασής τους είναι οι Ασύνδετες μεταξύ τους διάφορες περιοχές των μαθηματικών, «*να μην γνωρίζουν το εμβαδόν ορθογωνίου αφού διδάσκεται στο β' μέρος της γυμνασίου*» (ΚΟ23), *«Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν γεωμετρικά μεγέθη με αριθμητικά.» (*Κ15)

- Τη σύνδεση του μοντέλου και του μαθηματικού αντικειμένου,

Εδώ διαμορφώθηκαν οι παρακάτω δυο υποκατηγορίες: Μετάφραση από το μοντέλο στην μαθηματική γλώσσα-Γενικά επιχειρήματα: «*είναι καλή προσέγγιση αλλά δύσκολα κατανοητή»(*ΚΟ12). Κάποιοι εμβάθυναν και αναφέρθηκαν σε συγκεκριμένες έννοιες γεωμετρικές, το ορθογώνιο και ειδικότερα την Έννοια του εμβαδού, *«πολλές φορές μπερδεύουν το γινόμενο αριθμών με την έννοια του εμβαδού.»* (ΚΟ16), τις ιδιότητες εμβαδού (αρνητικές ποσότητες), *«Με τους αρνητικούς αριθμούς τι γίνεται; καθώς το εμβαδόν είναι πάντοτε θετικός.»* (Κ3) και μαθητές με φτωχή γεωμετρική αντίληψη, *«Όπως ανέφερα και παραπάνω, οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στον υπολογισμό της βάσης ως α+β.»* (Κ17) *Επίσης δυσκολίες μπορεί να έχουν στις γεωμετρικές έννοιες π.χ. δεν έχουν πλήρως ανεπτυγμένη την έννοια του συνεχούς για το μήκος»*(Κ18). Η δεύτερη υποκατηγορία ήταν ως προς την Επιμεριστική ιδιότητα και ειδικότερα στους άξονες γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας, *«Δυσκολίες που έχουν να κάνουν με την κατανόηση του πολλαπλασιασμού ως καρτεσιανής πράξης. («διαστατικά» και όχι αριθμητικά αποτελέσματα*)» (Κ27) και τον άξονα αλγεβρική προσέγγιση- γενίκευση *«Αν και την κατανοούν πλήρως με τη χρήση του μοντέλου αυτού στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μερικές φορές δυσκολεύονται στη γενίκευση της ιδιότητας στους αριθμούς.»* (Κ13),*«στη χρήση των μεταβλητών»* (Κ31)

- Το μοντέλο, όπου διαμορφώθηκαν οι εξής υποομάδες, η γεωμετρική κατασκευή *«το παραπάνω μοντέλο το θεωρώ κατάλληλο για την κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας γιατί οι μαθητές το βλέπουν εποπτικά.*» (ΚΟ25) και πιο ειδικά η γεωμετρική κατασκευή στην επιμεριστική ως προς την αφαίρεση , «*Θεωρώ ότι η ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας με γεωμετρικό τρόπο βοηθά στην κατανόηση της ιδιότητας και συνεπώς στην απομνημόνευσή της και στην ευκολία ανάκλησής της για να την χρησιμοποιήσουν όπου διευκολύνει και απλοποιεί τα πράγματα γιατί όταν κάτι το έχεις κατανοήσει είναι εύκολο και να το χρησιμοποιήσεις.*» (Κ2), Ο τύπος του εμβαδού του ορθογωνίου, *«Η μοναδική περίπτωση να συναντούν οι μαθητές δυσκολίες στην εισαγωγή της επιμεριστικής ιδιότητας είναι να μην γνωρίζουν τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού του ορθογωνίου»* (Κ20)

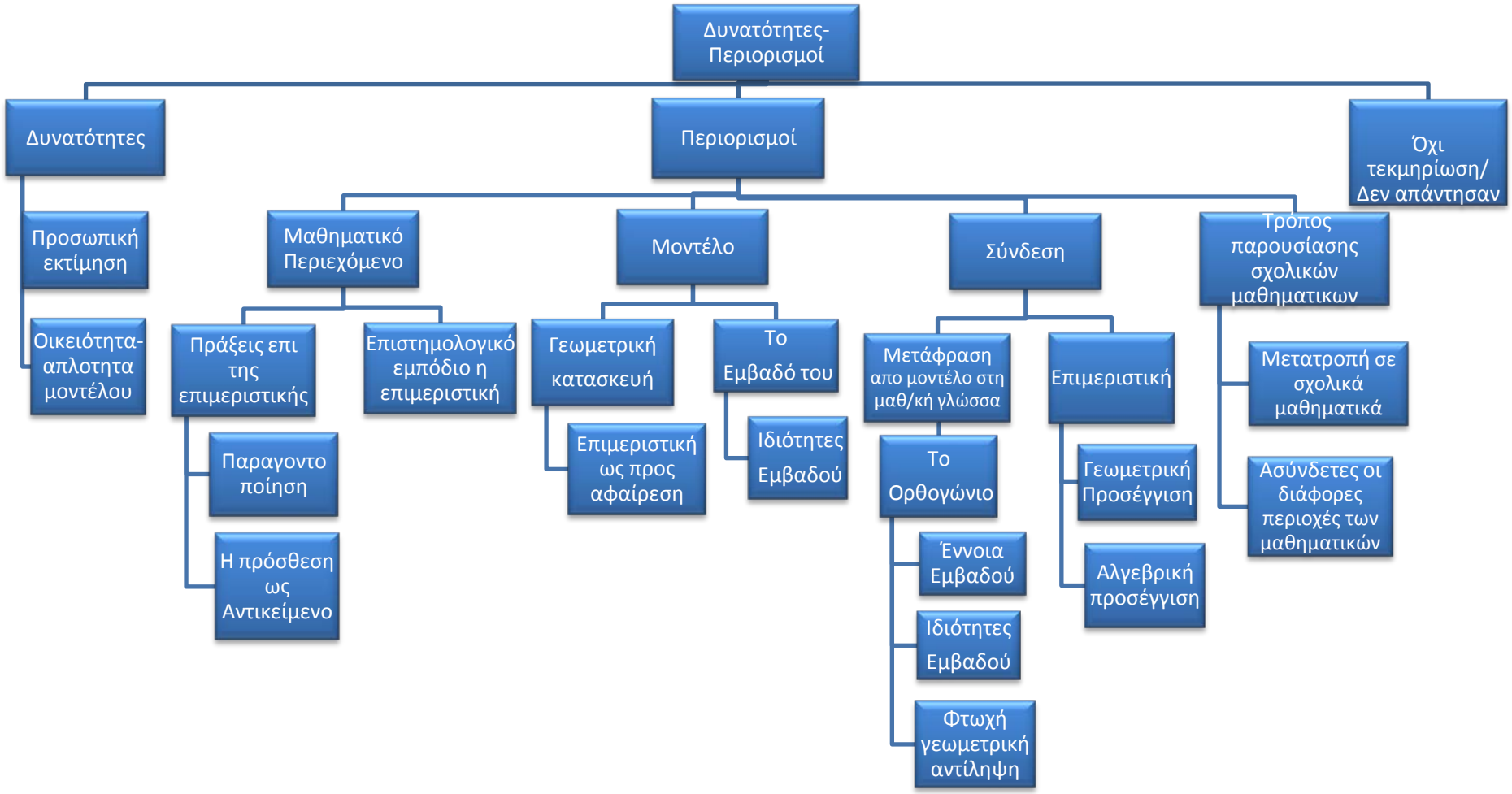
- Το μαθηματικό περιεχόμενο, όπου κι εδώ διαμορφώθηκαν υποομάδες, που αναφέρονταν στις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές σε πράξεις επί της επιμεριστικής ιδιότητας, και πιο ειδικά: παραγοντοποίηση , *«… σχεδόν κανείς μαθητής δεν μπορεί να κάνει εύκολα χρήση αυτής της ιδιότητας από το δεύτερο προς το πρώτο μέλος (παραγοντοποίηση).»* (Κ1), να δουν την πράξη της πρόσθεσης ως αντικείμενο «*Η βασική δυσκολία που συναντούν είναι ότι προσπαθούν να κάνουν την πράξη μέσα στην παρένθεση δηλαδή προσπαθούν να βρουν αποτέλεσμα για το α+β.»* (Κ28). Επίσης η επιμεριστική ως Επιστημολογικό εμπόδιο, «*Οι μαθητές εύκολα κάνουν δικές τους επεκτάσεις και για άλλες πράξεις.»*

  Τέλος, αυτοί που αναφέρθηκαν μόνο σε δυνατότητες του γεωμετρικού μοντέλου επικαλέστηκαν τα παρακάτω:

- Προσωπική εκτίμηση – θετική εμπειρία *«Δεν νομίζω ότι έχει δυσκολίες.»*(Κ14) , καθώς και
- Οικειότητα – Απλότητα του μοντέλου

  «Δε συναντούν δυσκολίες συνήθως γιατί τη γνωρίζουν από την Α΄ Γυμνασίου.» (Κ9)

Διάγραμμα 4. 21 **Δυνατότητες- Περιορισμοί του Γεωμετρικού μοντέλου**



4.5.3 Δυσκολίες – Τρόποι Αντιμετώπισης τους

Πίνακας 4.7 ***Τρόποι αντιμετώπισης των δυσκολιών με το Γεωμετρικό μοντέλο***

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ - ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ [38]		
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	**ΜΗ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
33	**7**	**20**

Σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης (πίνακας 4.7) πρόεκυψαν οι παρακάτω κατηγορίες τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών που εντόπισαν στο προηγούμενο υποερώτημα.

Το 55% προσφεύγουν στη χρήση μοντέλου, το 12% απορρίπτουν τη χρήση οποιουδήποτε μοντέλου, και το 33 % δεν απάντησε.

Σε ένα επόμενο επίπεδο ανάλυσης των δυο ευρύτερων κατηγοριών, σχηματίστηκαν οι θεματικές κατηγορίες (διάγραμμα 4.22) που αναφέρονται στην υπέρβαση των δυσκολιών :

- Με χρήση μοντέλου και πιο συγκεκριμένα:
  - Περιορισμένη χρήση του μοντέλου λόγω διαχειριστικού τύπου ζητημάτων, και συγκεκριμένα αναφέρθηκαν οι περιορισμοί που θέτει το ΑΠΣ και πιο ειδικά η δυσκολίες που προκύπτουν από το πρόβλημα του χρόνου δεν επιτρέπει την εμβάθυνση στη λειτουργία του, *«Πρέπει λαμβάνουμε υπόψη μας και τα ασφυκτικά πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος που δεν επιτρέπει να ασχοληθεί κάποιος με το συγκεκριμένο πάνω από ½ ώρα.»* (Κ24)
  - Αποσαφήνιση των συμβάσεων του (Κατανόηση λειτουργίας) είτε με τη χρήση πολλών παραδειγμάτων γενικά, *«Χαρτογράφηση όλων των περιπτώσεων πρώτα οπτικά – γεωμετρικά και μετά αλγεβρικά»* (Κ25), είτε με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων, *«Να ρωτιούνται αν νομίζουν ότι μπορούν να την εφαρμόσουν και αλλού και μετά με αντιπαραδείγματα να ξεκαθαρίσουν το πότε θα την εφαρμόζουν»* (ΚΟ10). Επίσης μια άλλη πρόταση που διατυπώθηκε προκειμένου για την αποσαφήνιση των συμβάσεών του είναι μέσα από αριθμητικά προβλήματα:

    «*Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του ορθογωνίου σε προβλήματα πραγματικών καταστάσεων. Για παράδειγμα:*

    Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 7,6 μ. και πλάτος 1,3 μ. Ένας υπό κατασκευή δρόμος θα αποκόψει από το οικόπεδο ένα ορθογώνιο κομμάτι πλάτους 1,3μ. και μήκους 2,5 μ.

    Ποιό είναι το εμβαδόν του αρχικού οικοπέδου; Ποιό είναι το εμβαδόν του κομματιού που αποκόπτεται; Πόσο είναι το εμβαδόν του οικοπέδου που απομένει μετά την χάραξη του δρόμου; »(Κ1), και η συσχέτιση με την προτεραιότητα των

[38] Οι απαντήσεις ήταν τόσες όσες και ο πληθυσμός μας (60).

πράξεων, «*Παράλληλη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων, συσχέτιση με την προτεραιότητα των πράξεων*» (ΚΟ12). Επίσης προτάθηκαν η χρήση σχεδιαστικών δραστηριοτήτων για ενίσχυση της εποπτείας, *«τους προτείνω να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο με πλευρές α+β και γ+δ.»* (ΚΟ25), η επανάληψη σε βασικές γεωμετρικές έννοιες (εμβαδό ορθογωνίου) «*με επανάληψη των τύπων υπολογισμού των εμβαδών σε ορθογώνια»* (Κ20), οι αναγωγές από το γεωμετρικό στο αλγεβρικό μοντέλο

«*τα γεωμετρικά παραδείγματα: πέρασμα από την ισότητα μονάδων μέτρησης σε αριθμητική ισότητα και διευκρίνιση ότι η ιδιότητα που μας αφορά εκφράζεται από τους αριθμούς, σαν αριθμητική ιδιότητα σε όλες τις τάξεις μεγεθών.»*(Κ27).

Άλλες προτάσεις που διατυπώθηκαν ήταν η χρήση

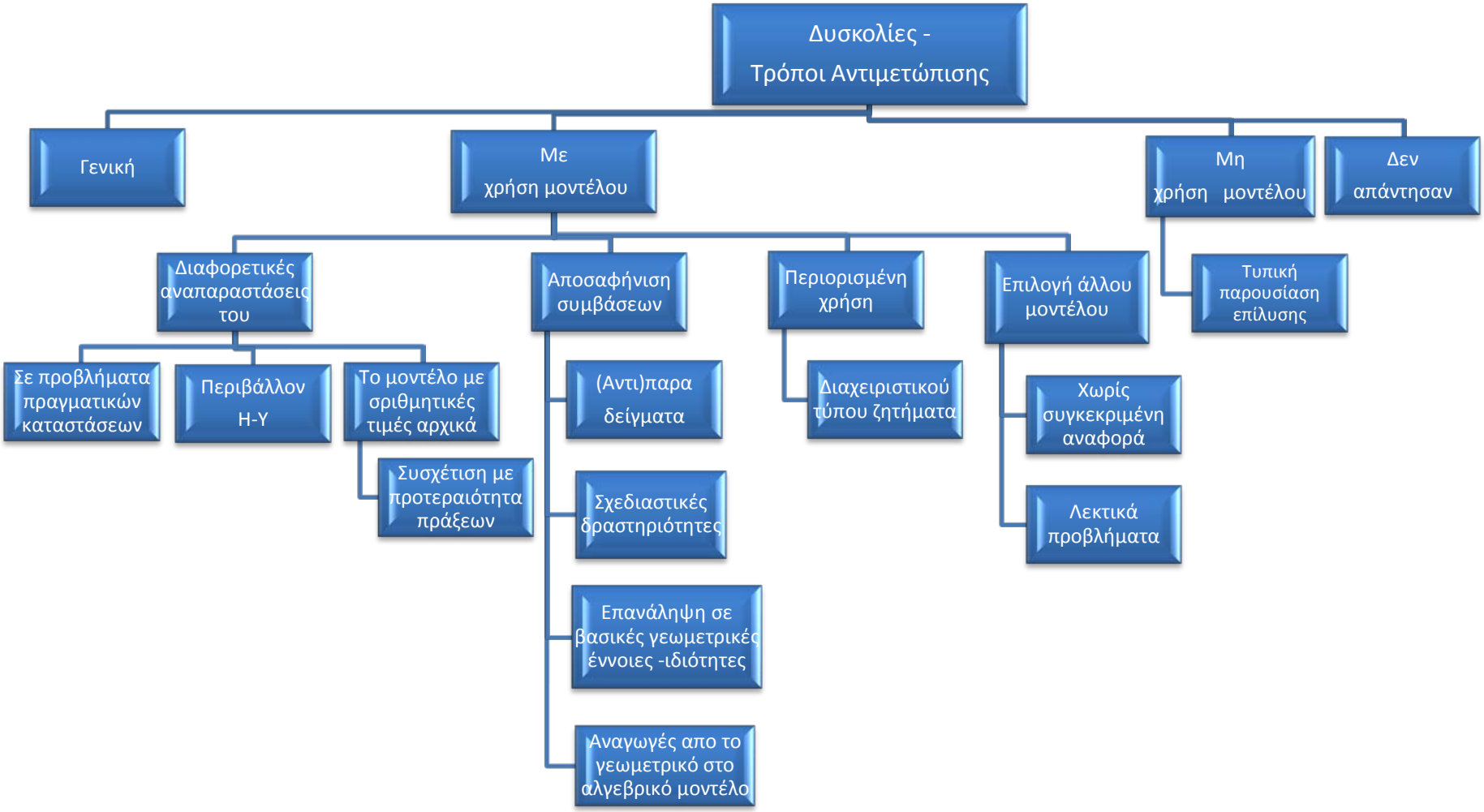
- διαφορετικών αναπαραστάσεων του, είτε σε γεωμετρικά προβλήματα πραγματικών καταστάσεων , «*με το πρόβλημα της επέκτασης (αγοράς) ή μείωσης (πώλησης) της πλακοστρωμένης αυλής.*» (ΚΟ20), είτε με τη χρήση λογισμικού Η-Υ, *«Θα έδειχνα την όλη κατάσταση μέσα από δυναμικό περιβάλλον και θα προσπαθούσα να ωθήσω τους μαθητές να κάνουν την γενίκευση τουλάχιστον για τους θετικούς»* (Κ18), είτε το μοντέλο με αριθμητικές τιμές αρχικά, *«Για να υπερβούν τις δυσκολίες ξεκινώ με παραδείγματα ορθογωνίων με διαστάσεις φυσικούς αριθμούς και μετά σταδιακά συνεχίζω με τους γενικευμένους αριθμούς.»* (Κ28)
- Επιλογή άλλου μοντέλου, είτε χωρίς συγκεκριμένη αναφορά σε κάποιο άλλο «*Χρησιμοποιώντας άλλα μοντέλα*»(ΚΟ11), είτε μέσα από λεκτικά προβλήματα

  «Θα μπορούσαμε επιπρόσθετα να δίναμε το ακόλουθο πρόβλημα από την αριθμητική: Αγόρασε κάποια νοικοκυρά 7,5 κιλά ρεβύθια προς 4 € το κιλό, 7,5 κιλά φακές προς 3 € το κιλό , 7,5 κιλά φάβα προς 4,5 € το κιλό και 7,5 κιλά γίγαντες φασόλια προς 5€ το κιλό. Πόσα € συνολικά θα πληρώσει;» (ΚΟ3).

  Επίσης δόθηκε και μια
- γενική απάντηση, *«Όπως είπα και πιο πάνω το γενικό και αφηρημένο να γίνει βιωματικό και ενδιαφέρον.»* (ΚΟ5)

- Μη χρήση μοντέλου και αντ΄ αυτού την επιλογή της
  - Τυπικής παρουσίασης επίλυσης, δηλαδή την Αλγεβρική προσέγγιση της επιμεριστικής, «*μην ξεχνάμε ότι αυτό που θα μείνει τελικά είναι ο τύπος της επιμεριστικής ιδιότητας κι εκεί επικεντρώνομαι. Συχνό λάθος είναι α*β*γ=α*β+α*γ.»* (ΚΟ15)

Διάγραμμα 4.22 **Τρόποι Αντιμετώπισης δυσκολιών με το γεωμετρικό μοντέλο**



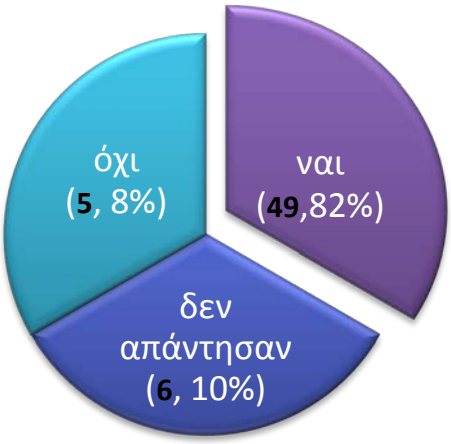
4.5.4. Χρήση του Γεωμετρικού Μοντέλου

4.5.4.1. Αποδοχή-απόρριψη του μοντέλου.

Σε ένα αρχικό επίπεδο έγινε μια ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των καθηγητών αναφορικά με τον αποδέχονται το γεωμετρικό μοντέλο ή όχι.

Έτσι προέκυψε το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 3.23)

Διάγραμμα 4.23 **Αποδοχή-Απόρριψη του γεωμετρικού μοντέλου για την έννοια της ισότητας**



Το 82%[39] χρησιμοποιεί το μοντέλο της ζυγαριάς, ένα 8% απάντησε πως όχι και τέλος ένα 10% δεν απάντησε.

4.5.4.2 Τρόποι αξιοποίησης του μοντέλου.

Οι απαντήσεις των ερωτηθέντων, επεκτάθηκαν σε δυο θεματικούς άξονες. Αυτές που αναφέρονταν στο *πώς*, δηλαδή στον τρόπο χρήσης του μοντέλου και αυτές που αναφέρονταν στο *πού*, σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο. Πιο συγκεκριμένα, οι αντίστοιχες θεματικές κατηγορίες που προέκυψαν φαίνονται αναλυτικότερα στο διάγραμμα 4.24 και είναι οι παρακάτω:

Ως προς το

- *Πού,*

διατυπώθηκαν

- Γενικές παρατηρήσεις που εντάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη αναφερόταν κατηγορία στη χρήση του γεωμετρικού μοντέλου σε ένα *εισαγωγικό επίπεδο* είτε με σκοπό την κινητοποίηση του ενδιαφέροντας των μαθητών «*Μόνο ως πρώτη*

[39] Τα ποσοστά αντιστοιχούν στον αρχικό πληθυσμό.

προσέγγιση στην ιδιότητα ώστε να εισαχθεί αυτή με τρόπο φυσικό.» (Κ6), είτε για να φανεί η σύνδεση άλγεβρας με γεωμετρία (Κ32),είτε τέλος σε συνδυασμό με το μαθηματικό περιεχόμενο, δηλαδή σε συνδυασμό με το *πώς, «Χρησιμοποιώντας μια δραστηριότητα για την εισαγωγή της έννοιας και μετά σε παραδείγματα »*(ΚΟ7). Σε συνδυασμό με άλλα διδακτικά υλικά –φύλλα εργασίας. Εδώ οι απαντήσεις είχαν το χαρακτηριστικό ότι δεν εμβάθυναν, αντίθετα κινήθηκαν περιφερειακά ως προς την περιγραφή του τρόπου χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς «*Ότι ανέφερα ποιο πάνω σε φύλλο εργασίας*» (ΚΟ5). Όπως προτείνεται από πρότυπα παραδείγματα: Οι απαντήσεις κινήθηκαν περιφερειακά. Οι καθηγητές αναφέρθηκαν στις επιταγές που ορίζει το εκπαιδευτικό σύστημα στο βιβλίο του καθηγητή –σχολικό εγχειρίδιο, «Όχι ιδιαίτερο, κυρίως ανάλογο με του βιβλίου» (Κ14), «*Το χρησιμοποιώ με τον τρόπο που περιγράφεται στο βιβλίο»* (Κ23,ΚΟ11), ή όπως περιγράφεται στο ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε προς απάντηση , «*Με τον διαισθητικό τρόπο που αναφέρεται στο παράδειγμα»* (Κ8), αλλά σε μικρότερες τάξεις αρχικά με αριθμούς, «*προτιμώ συνήθως με αριθμητική επαλήθευση να δεχτούμε την ισχύ της ισότητας, όχι στη β΄ Γυμνασίου, το χρησιμοποιώ όμως στην Α΄ Γυμνασίου*» (ΚΟ19)

- Αναφορά στο μοντέλο, είτε με στόχο την εξοικείωση με τη λειτουργία του μοντέλου με αποσαφήνιση (δηλαδή επεξήγηση των περιορισμών του), *«Να ρωτιούνται αν νομίζουν ότι μπορούν να την εφαρμόσουν και αλλού και μετά με αντιπαραδείγματα να ξεκαθαρίσουν το ποτέ θα την εφαρμόζουν»* (ΚΟ10), είτε σε συνδυασμό με άλλα μοντέλα. Πιο ειδικά με χρήση προβλημάτων είτε αριθμητικά *«Δίνοντας μετά το γεωμετρικό μοντέλο του βιβλίου και ένα αριθμητικό πρόβλημα»* (ΚΟ3) είτε με καθαρά αλγεβρική προσέγγιση, «*μαζί με άλλες προσεγγίσεις, όπως η καθαρά αλγεβρική*» (Κ4). Κάποιοι αναφέρθηκαν στην αλγεβρική προσέγγιση με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεών της (στον πίνακα, με χαρτόνι, ηλεκτρονικό υπολογιστή),*«Επίσης μπορούμε να υποδείξουμε στους (μικρότερους κυρίως) μαθητές και δραστηριότητες(κατασκευές) σε τετραγωνισμένο χαρτί…..»* (Κ1), *«Θα έδειχνα την όλη κατάσταση μέσα από δυναμικό περιβάλλον και θα προσπαθούσα να ωθήσω τους μαθητές να κάνουν την γενίκευση τουλάχιστον για τους θετικούς»* (Κ18), *«Με χρήση του Geometer's Sketchpad για να βλέπουν ότι παρά τις αλλαγές των μηκών τα δύο εμβαδά παραμένουν ίσα. »(*Κ25)

Αναφορικά με τον τρόπο χρήσης του μοντέλου

- *Πώς*

οι καθηγητές επιλέγουν να το χρησιμοποιήσουν

- σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο κάποιοι επιλέγουν τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων είτε μόνο απλών, «*παραδείγματα 3*68=3*60+3*8, 4*999=4*1000-4*1 κ.λ.π.*» (ΚΟ7), και κατόπιν γενικεύοντας, «*Ζωγραφίζω στον πίνακα διάφορα σχήματα όπως το προηγούμενο αλλά με διαστάσεις φυσικούς αριθμούς και γράφουμε τις ισότητες που προκύπτουν. Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα με συνδυασμό φυσικό και γενικευμένο αριθμό και γράφουμε τις ισότητες π.χ. (7+α)2=14+2α(3+β)5=15+5β.Τελειώνοντας κάνουμε το σχήμα με τους γενικευμένους αριθμούς και γράφουμε την ισότητα της επιμεριστικής ιδιότητας.*» (Κ28),

  είτε πιο σύνθετων, «*Ναι το χρησιμοποιώ για παράδειγμα στον υπολογισμό του εμβαδού ενός χωρίου που αποτελείται από δύο συναπτά ορθογώνια που σχηματίζουν Τ ή Γ και τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος τα δε μήκη τους έχουν άθροισμα 10, 100, 1000 κλπ. Για παράδειγμα: Τα δύο ορθογώνια που σχηματίζουν Τ έχουν πλάτος 18 και μήκη 47 και 53. Για να βρούμε το συνολικό εμβαδό: 47. 18+53.18=.....Ενώ αν σύρουμε το ένα ορθογώνιο ώστε να έλθουν σε επαφή οι πλευρές με το ίδιο πλάτος θα πάρουμε το παρακάτω ορθογώνιο σχήμα που έχει πλάτος 18 και μήκος47+53=100 οπότε το εμβαδόν είναι 100Χ18=18.000 και έτσι φαίνεται η χρησιμότητα της επιμεριστικής 18.(47+53)=18.100=1800*» (Κ2).

  Κάποιοι άλλοι προτιμούν τα αριθμητικά προβλήματα, «*Συνήθως με ορθογώνια που αφορούν πραγματικές καταστάσεις (πλακάκια - οικόπεδα κτλ) δεν δίνω σημασία στην διαδικασία με γεωμετρική προσέγγιση αλλά με αλγεβρική*» (Κ20), ή με αριθμητική επαλήθευση της ιδιότητας, «*προτιμώ συνήθως με αριθμητική επαλήθευση να δεχτούμε την ισχύ της ισότητας.*» (ΚΟ19). Επίσης κάποιοι χρησιμοποιούν το γεωμετρικό μοντέλο και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών

  «*…και στην προτεραιότητα των πράξεων στις αριθμητικές παραστάσεις.*» (Κ5)

«*Το χρησιμοποιούσα επίσης ως μορφή εποπτείας για το πυθαγόρειο θεώρημα αλλά και τις αποδείξεις των ταυτοτήτων της Γ΄ τάξης.*» (Κ10).

Διάγραμμα 4.24 **Διδακτική Πρακτική αναφορικά με το Γεωμετρικό μοντέλο και την έννοια της Ισότητας**

5^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συζήτηση-Συμπεράσματα

5.1 Συζήτηση

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα διερευνούσε τον τρόπο που αξιοποιούνται οι εννοιολογικές μεταφορές στα σχολικά βιβλία του γυμνασίου. Μέσα από την ανάλυση τους διαπιστώθηκε ότι οι εννοιολογικές μεταφορές είναι ιδιαίτερα εμφανείς στα σχολικά εγχειρίδια. Εντοπίσαμε τα βασικά σχήματα εικόνων: το *περιέχον* (container), την *Ισορροπία, Συγχώνευση Αντικειμένων, το Διαχωρισμό Αντικειμένων*, το σχήμα της *πλασματικής κίνησης*. Εντοπίσαμε τις τέσσερις μεταφορές θεμελίωσης (grounding) που ορίζουν οι Lakoff και Núñez (2000): Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ, Η μεταφορά ΤΗΣ ΡΑΒΔΟΥ και την μεταφορά Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΤΡΟΧΙΑ , καθώς και μεταφορές που είναι απόρροια αυτών. Άφθονες ήταν και οι μεταφορές σύνδεσης (linking) όπως οι αριθμοί είναι σημεία σε μια γραμμή, γεωμετρικά σχήματα ως αλγεβρικές εξισώσεις.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η παρουσία των μεταφορών θεμελίωσης και των μεταφορών σύνδεσης είχαν συμπληρωματικό χαρακτήρα. Αρχικά εμφανίζονται οι μεταφορές θεμελίωσης. Στην πορεία σταδιακά υποχωρούν και παραχωρούν τη θέση τους στις μεταφορές σύνδεσης. Έτσι άφθονες είναι οι μεταφορές θεμελίωσης στο σχολικό σύγγραμμα της Α΄ γυμνασίου, ελάχιστες οι μεταφορές σύνδεσης στο ίδιο εγχειρίδιο. Στη Β΄ γυμνασίου άρχισαν γοργά να φθίνουν οι μεταφορές θεμελίωσης και να παίρνουν τη σκυτάλη οι μεταφορές σύνδεσης. Το αποκορύφωμα της παρουσίας των μεταφορών σύνδεσης ήταν στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ γυμνασίου. Εκεί, οι μεταφορές θεμελίωσης είναι σχεδόν ανύπαρκτες. Η φθίνουσα πορεία εμφάνισης των μεταφορών θεμελίωσης στα σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου, καθώς οι βαθμίδες των τάξεων αυξάνουν, τεκμηριώνει τη θέση των Boero, Bazzini και Garuti (2001). Οι τελευταίοι υποστηρίζουν ότι αυτές οι μεταφορές θεμελιώνουν την κατανόηση μας για τις μαθηματικές ιδέες αναφορικά με την καθημερινή μας εμπειρία. Οι Lakoff και Núñez (2000)προσθέτουν ότι αυτές συνήθως χρειάζονται πρότερη διδασκαλία, όχι μεγάλης όμως έκτασης, ενώ αντίθετα οι δεύτερες απαιτούν διδασκαλία μεγαλύτερης διάρκειας.

Ανάλογα, η αντίθετης φοράς συχνότητα εμφάνισης των μεταφορών σύνδεσης στα σχολικά εγχειρίδια, είναι συνυφασμένη με τη θέση των Lakoff καιNúñez (2000) ότι οι μεταφορές σύνδεσης είναι με πολλούς τρόπους οι πιο ενδιαφέρουσες, καθώς συνιστούν μέρος των

ίδιων των μαθηματικών. Για αυτό ακριβώς το λόγο προϋποθέτουν την ύπαρξη ενός στέρεου μαθηματικού υπόβαθρου, που αυτό θα οικοδομηθεί με τις μεταφορές θεμελίωσης.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα διερευνούσε τον τρόπο που οι καθηγητές αντιλαμβάνονται τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην εννοιολογική μεταφορά (το μοντέλο) και την αντίστοιχη μαθηματική έννοια.

Πιο ειδικά, παρατηρήθηκε ότι το πρίσμα μέσα από το οποίο οι καθηγητές επεξεργάζονται το ρητό αριθμό ως προς τα μοντέλα της ράβδου και της αριθμογραμμής έχει μια διαφάνεια. Η διαφάνεια αυτή συνίσταται στο γεγονός ότι αναγνωρίζουν (87%) τη χρησιμότητα των δυο μοντέλων στην αναπαράσταση των διαφόρων πτυχών του.

Από το γράφημα διασποράς, αναφορικά με τις πτυχές που οι καθηγητές αναγνωρίζουν στο κάθε μοντέλο, το ασύμμετρο μοτίβο που αναδύθηκε από τα δεδομένα, συνάδει σε μεγάλο βαθμό με τα ευρήματα των Charalambous & Pitta-Pantazi (2005). Οι παραπάνω ερευνητές κατατάσσουν τις πέντε πτυχές της έννοιας του ρητού σε δυο ομάδες, αναφορικά με την κεντρική ιδέα που τα χαρακτηρίζει. Κάτω από την κεντρική ιδέα της *σύγκρισης,* με κυρίαρχη την πτυχή του *μέρους –όλου,* βρίσκονται πρωτευόντως οι πτυχές του *λόγου* και του *τελεστή* (στοιχεία της πρώτης ομάδας) και δευτερευόντως του *πηλίκου* και *μέτρου.* Για τη δεύτερη ομάδα, με κυρίαρχη την πτυχή του *μέτρου* και να έπεται η πτυχή του *πηλίκου*, προκειμένου για την κατανόηση τους κεντρική είναι η έννοια της *κλασματικής μονάδας* και όχι της σύγκρισης.

Διαφάνηκε λοιπόν ότι οι καθηγητές αποδίδουν στα δυο μοντέλα συμπληρωματικούς και ξένους μεταξύ τους ρόλους. Οι πτυχές του ρητού που το μοντέλο της ράβδου διαχειρίζεται, συμπληρώνονται από τις πτυχές που διαχειρίζεται το μοντέλο της αριθμογραμμής, προκειμένου για την πλήρη εννοιολογική προσέγγιση του ρητού αριθμού. Εδώ η μόνη ασυμφωνία που παρατηρήθηκε είναι στην πτυχή του *πηλίκου*, όπου στα ευρήματά μας ήρθε $3^{η}$ σε σειρά προτίμησης, ενώ αμέσως επόμενη ($4^{η}$) ήταν η πτυχή του *τελεστή*. Την πρώτη και δεύτερη θέση κατέλαβαν οι πτυχές του *μέρους-όλου* και του *λόγου* αντίστοιχα. Αναφορικά όμως με το μοντέλο της αριθμογραμμής τα ευρήματά μας συμφωνούν με τα αντίστοιχα των παραπάνω ερευνητών: είναι σαφής η προτίμηση του μοντέλου της αριθμογραμμής για τις πτυχές του *μέτρου* και του *πηλίκου,* με αυτή τη σειρά προτίμησης.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο ανάλυσης των απαντήσεων των καθηγητών, παρατηρήθηκε ότι υπάρχει σαφής προτίμηση στο μοντέλο της ράβδου, σε ένα εισαγωγικό επίπεδο της έννοιας. Αυτό συνάδει με τα ευρήματα του Van de Walle, J. (2005) που αναφέρει ότι το μοντέλο της ράβδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση όλων των πτυχών

του ρητού, με μόνη εξαίρεση του *μέτρου,* ενώ στην αριθμογραμμή αποδίδει την ικανότητα διαχείρισης μόνο των πτυχών του *μέτρου*, *πηλίκο* και *λόγου* (ποσοστά).

Προκειμένου όμως για την εμβάθυνση στην έννοια του ρητού (ιδιότητες-πράξεις), το μοντέλο της αριθμογραμμής κρίνεται καταλληλότερο. (Ni,2000· Herbst, 1997) στο Γαγάτσης κ. α. (2006). Τα ευρήματα μας είναι σύμφωνα επίσης με την άποψη του Danesi (2007) ότι η αριθμογραμμή χρησιμοποιείται για να καταδειχθεί η διαφορά μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών.

Δεν συνέβη όμως το ίδιο και στην διάχυση των επιχειρημάτων στο μοντέλο του θερμομέτρου ως προς την καταλληλότητά του. Επιχειρήματα μαθηματικού περιεχομένου ήταν μια από τις ποικίλες θεματικές κατηγορίες που θεμελιώθηκαν κατά τη φάση της ανάλυσης και όχι πάντα η επικρατούσα σε ποσοτικό επίπεδο.

Ειδικότερα, από αυτούς που αποδέχτηκαν το μοντέλο του θερμομέτρου, το κυριότερο επιχείρημα που προέβαλλαν ήταν η εποπτεία που αυτό παρέχει, καθώς και το γεγονός ότι είναι οικείο. Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, το αποδέχονται σε ένα εισαγωγικό κυρίως επίπεδο, στον ορισμό της αφαίρεσης ακεραίων, και δευτερευόντως στην κατανόηση της διάταξης των ακεραίων. Από την άλλη, αυτοί που δεν θεωρούν κατάλληλο το μοντέλο αυτό προβάλλουν διάφορα επιχειρήματα. Επιχειρήματα που αναφέρονται στη φύση του-χαρακτηρίζεται ως μη ρεαλιστικό και σύνθετο. Επιχειρήματα που εστιάζουν στη διαφορετικότητα των μαθητών: σε κάποιους μαθητές το μοντέλο του θερμομέτρου είναι πιο αποτελεσματικό σε κάποιους άλλους όχι. Τέλος τα επιχειρήματα μη αποδοχής του ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο ήταν η χρήση του σε ένα εισαγωγικό και μόνο στάδιο, και η αδυναμία μετάβασης των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση της αφαίρεσης των ακεραίων αριθμών.

Στα επόμενα δυο μοντέλα (ζυγαριάς- γεωμετρικό), που επιλέχθηκαν για τη διαπραγμάτευση της έννοιας της ισότητας είναι διαφανής η σύνδεση, με το αντίστοιχο μαθηματικό περιεχόμενο (έννοια) . Από αυτούς που αποδέχτηκαν το μοντέλο της ζυγαριάς (αρκετά-πολύ κατάλληλο: 67%) το κυριότερο, εκτός μαθηματικού περιεχομένου, υποστηρικτικό επιχείρημα που πρόβαλλαν ήταν και πάλι η εποπτεία. Η σύνδεση με το μαθηματικό περιεχόμενο τώρα ήταν ισχυρή· τα επιχειρήματα που προέβαλαν έδειχναν την αρκετά καλή αναλυτική ικανότητα τους. Οι απαντήσεις εδώ κυμάνθηκαν από την κατανόηση της έννοιας της ισότητας (12%), τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης (τεχνική-ιδιότητες των πράξεων) (17%) μέχρι επιχειρήματα που αναφέρονται στην επιστημολογία των μαθηματικών.

Η διαφάνεια αυτή είναι όμως θολή αναφορικά με τους περιορισμούς του μοντέλου. Μια μικρή ομάδα των καθηγητών (8%) υποστηρίζουν τα ευρήματα της Vlassis (2002). Το μοντέλο της ζυγαριάς δεν ενδείκνυται για την επίλυση εξισώσεων με αρνητικές ποσότητες, όπως ακόμα λιγότεροι (2%) υποστήριξαν ότι είναι προβληματική και η αναγνώριση του γράμματος ως τον άγνωστο της εξίσωσης. Από την άλλη αυτοί που το θεωρούν ακατάλληλο, τα κυριότερα επιχειρήματα που προβάλλουν είναι η εφαρμογή του μόνο σε απλές εξισώσεις, σε ένα εισαγωγικό κυρίως, επίπεδο.

Μεγαλύτερη αποδοχή έχει το γεωμετρικό μοντέλο για την έννοια της ισότητας, σε σχέση με το μοντέλο της ζυγαριάς. Το θεωρούν από αρκετά έως πολύ κατάλληλο η πλειοψηφία (78%) των καθηγητών. Τα επιχειρήματα που προέβαλλαν υπέρ του μοντέλου αυτού ήταν η εποπτεία που αυτό παρέχει, όπως και το γεγονός ότι είναι οικείο. Από μαθηματικής άποψης διαφάνηκε ακόμα μεγαλύτερη διάχυση επιχειρημάτων έναντι του αντίστοιχου μοντέλου της ζυγαριάς. Τα επιχειρήματα εδώ κυμάνθηκαν σε ένα φάσμα που ποικίλλει από την επιστημολογία των μαθηματικών στο ένα άκρο, ως την έννοια της απόδειξης στο άλλο και με ενδιάμεσα επιχειρήματα που αναφέρονταν στην έννοια της ισότητας ή την εισαγωγή της επιμεριστικής ιδιότητας. Η επιχειρηματολογία τους όμως ήταν κι εδώ περιφερειακή· μόλις ένα 13% αναγνώρισε την κύρια αξία του γεωμετρικού μοντέλου, την κατανόηση δηλαδή της έννοιας της ισότητας. Τα μη υποστηρικτικά επιχειρήματα ήταν είτε ως προς τη διαφορετικότητα των μαθητών (13%) είτε ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο μόλις το 3% ανέφερε την κύρια πηγή δυσκολίας του, δηλαδή τις αρνητικές ποσότητες (Filloy & Rojano, 2008).

Με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα επιχειρήσαμε να εντοπίσουμε τις πεποιθήσεις των καθηγητών αναφορικά με το ρόλο και τη σημασία των εννοιολογικών μεταφορών για τη διαπραγμάτευση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας.

Για την έννοια του αριθμού και πιο συγκεκριμένα του ρητού αριθμού η κύρια πηγή των περιορισμών του είναι, κατά την άποψη των καθηγητών, η σύνδεση μεταξύ μοντέλου και μαθηματικού περιεχομένου. Πιο έντονος είναι ο προβληματισμός τους για το μοντέλο της ράβδου έναντι της αριθμογραμμής. Αναγνωρίζουν την αδυναμία του μοντέλου της ράβδου στην αναπαράσταση των καταχρηστικών κλασμάτων (Γαγάτσης κ.α, 2006). Επίσης αναγνωρίζουν δυσκολίες που έχουν να κάνουν με τη φύση του μοντέλου στην αναγνώριση του ρητού αριθμού (Φιλίππου & Χρίστου, 1995) στο Γαγάτσης, κ.α (2006).

Θεωρούν ως βασικό εμπόδιο την πρώτη επαφή με τους φυσικούς αριθμούς, αφού στρέφουν την προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται και δεν

συγκρατούν και τις δύο διαστάσεις που απεικονίζει ένας κλασματικός αριθμός (Χασάπης, 2000· Stafylidoy & Vosniadou, 2004· Psycharis, Latsi & Kynigos,2009).

Αναφορικά με το μοντέλο της αριθμογραμμής αναγνωρίζουν περιορισμούς που έχουν να κάνουν με τη φύση και τις ιδιότητες του. Έτσι αναφέρουν την αδυναμία των μαθητών να αναγνωρίσουν τη μονάδα αναφοράς· γεγονός που επισημαίνεται από διάφορους ερευνητές (Γαγάτσης κ.α, 2006· Psycharis et al, 2009). Η Marshall (1993) στο Psycharis et al (2009), επισημαίνει την προφανή δυσκολία των μαθητών να συσχετίσουν την αριθμογραμμή με τη γνώση τους για τον κόσμο, επιχείρημα που αναδείχθηκε και στα δεδομένα μας. Αναφορικά με τη σύνδεση μοντέλου και μαθηματικού αντικειμένου αναφέρθηκαν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος καθώς και στη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής (Γαγάτσης κ.α, 2006). Και πάλι αναφέρουν ως βασικό εμπόδιο την πρώτη επαφή με τους φυσικούς αριθμούς, αυτή τη φορά άδηλα μέσα από το επιχείρημα της επιφανειακής ομοιότητας με τους φυσικούς και ακεραίους αριθμούς. Οπότε για την αναπαράσταση του ρητού στην αριθμογραμμή το μετατρέπουν αρχικά σε δεκαδικό, που τον αναγνωρίζουν ως αριθμό. (Moss και Case, 1999· Χασάπης, 2000).

Υπήρξαν κάποιοι που αναγνώρισαν μόνο δυνατότητες στα δυο αυτά μοντέλα. Περισσότεροι ήταν αυτοί που τάχθηκαν υπέρ του μοντέλου της ράβδου (30%) έναντι της αριθμογραμμής (15%).

Οι τρόποι υπέρβασης των δυσκολιών που εντόπισαν στα δυο μοντέλα, της ράβδου και της αριθμογραμμής, διερευνήθηκαν έμμεσα. Μέσα από τη σύγκριση τους ως προς το βαθμό καταλληλότητας για τη διαχείριση της έννοιας του ρητού.

Η μεγάλη πλειοψηφία (87%) επιλέγει τη χρήση των μοντέλων αυτών είτε και τα δυο συνδυαστικά, είτε μόνο το ένα.

Ήταν φανερή η προτίμηση της συνδυαστικής χρήσης των δυο μοντέλων. Τα κριτήρια επιλογής τους ήταν είτε ως προς τη φύση του μοντέλου και συγκεκριμένα η δομική μονάδα μέτρησης που ορίζεται σε κάθε μοντέλο, είτε ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. Στο μαθηματικό περιεχόμενο επέλεξαν το κάθε μοντέλο είτε ανάλογα με την πτυχή της έννοιας του ρητού, είτε ανάλογα με το στάδιο διαπραγμάτευσης του, με προεξέχουσα τη δεύτερη επιλογή (20%, 9/44). Από αυτούς που επιλέγουν να υπερβούν τις δυσκολίες που εντόπισαν στο προηγούμενο ερώτημα κάνοντας χρήση ενός από τα δυο μοντέλα, τα κριτήρια επιλογής τους διαμόρφωσαν τις ίδιες θεματικές κατηγορίες, δηλαδή ως προς το μοντέλο και το μαθηματικό περιεχόμενο.

Πάλι, μέσα από την επιχειρηματολογία που αναπτύχθηκε, αναφορικά με την προτίμηση του ενός από τα δυο μοντέλα διαφαίνεται ότι οι καθηγητές αποδίδουν στα δυο μοντέλα συμπληρωματικούς και ξένους μεταξύ τους ρόλους, ενισχύοντας περαιτέρω τη θέση των Charalambous & Pitta-Pantazi (2005). Οι υποστηρικτές του μοντέλου της ράβδου εστιάζουν στο μοντέλο και πολύ λιγότερο στο μαθηματικό περιεχόμενο, ενώ το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει με αυτούς που επιλέγουν το μοντέλο της αριθμογραμμής.

Παρατηρήθηκε μια ομοιομορφία όσον αφορά τη διάχυση των επιχειρημάτων σε αυτές τις θεματικές ενότητες ανάλογη με το πρώτο υποερώτημα.

Συγκεκριμένα:

Αυτοί που επέλεξαν το μοντέλο της ράβδου, ανέπτυξαν την επιχειρηματολογία τους εστιάζοντας στη φύση του μοντέλου, αναλύοντας πολύπλευρα τις θετικές συνέπειες της χρήσης του για την έννοια του ρητού. Αναπτύχθηκε πολύπλευρη επιχειρηματολογία: καλύτερη κατανόηση του ορισμού, των υπολοίπων πτυχών του, των ιδιοτήτων του και των πράξεων με ρητούς, πιο κοντά στις εμπειρίες των μαθητών (οικείο). Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο αναφέρθηκε μόνο ως κριτήριο το πλήθος των πτυχών του ρητού που το μοντέλο της ράβδου διαχειρίζεται.

Αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα της έρευνας των Wong & Evans (2008) που δείχνουν την αδυναμία των μαθητών να αναπαραστήσουν ένα κλάσμα με το μοντέλο της αριθμογραμμής σε αντίθεση με το αντίστοιχο μοντέλο της ράβδου. Οπότε είναι προτιμητέα η αναπαράσταση των κλασμάτων αρχικά με το μοντέλο της ράβδου.

Αντίθετα, αυτοί που έδειξαν σαφή προτίμηση στο μοντέλο της αριθμογραμμής, η επιχειρηματολογία που ανέπτυξαν ως προς τα θετικά στοιχεία του ίδιου του μοντέλου ήταν σαφώς πολύ πιο περιορισμένη-επικαλέστηκαν μόνο την οικειότητα του μοντέλου. Αντίθετα, η επιχειρηματολογία ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο ήταν τώρα πολύ πιο εκτεταμένη και σε ποσοτικό, και σε ποιοτικό επίπεδο. Διατυπώθηκαν επιχειρήματα και ως προς το πλήθος των πτυχών που η αριθμογραμμή αναπαριστά, αλλά εστίασαν και σε πιο σύνθετες έννοιες του ρητού αριθμού (καταχρηστικά κλάσματα, πυκνότητα, διάταξη, διαδοχικότητα).

Είναι τέλος σημαντικό να αναφερθεί πώς όλοι όσοι επέλεξαν τη συνδυαστική χρήση των μοντέλων ανέπτυξαν και μια επιχειρηματολογία. Αντίθετα κάποιοι που επέλεξαν το ένα από τα δύο μοντέλα δεν τεκμηρίωσαν την επιλογή τους αυτή (ράβδος: 20%, αριθμογραμμή 10%).

Για το μοντέλο του θερμομέτρου και την πράξη της αφαίρεσης στους αρνητικούς αριθμούς κι εδώ οι απαντήσεις των περισσότερων περιστράφηκαν γύρω από τη σύνδεση μοντέλου

και μαθηματικού περιεχομένου. Επαληθεύτηκε και η τέταρτη πηγή δυσκολίας που εντόπισε η Kilhamn (2008): η εμπιστοσύνη στο μεταφορικό λόγο, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο, που όμως είναι ανεπαρκές (30%). Όπως υποστηρίζει η Sfard, ο μηχανισμός κατασκευής των μεταφορών από τη μια είναι αυτός που εν πρώτοις δίνει ύπαρξη στο σύμπαν των αφηρημένων ιδεών. Από την άλλη όμως οι «μεταφορές που βιώνουμε», θέτουν φανερούς περιορισμούς στη φαντασία και κατανόηση μας. Ο «κληρονομικός» λοιπόν μηχανισμός που αποτελεί το θεμέλιο κατασκευής των μεταφορών έχει κάποια μειονεκτήματα. Πιο συγκεκριμένα εντοπίστηκε το πρόβλημα της κατεύθυνσης που πρέπει να εισαχθεί με το μοντέλο του θερμομέτρου (22%).(Kullberg, 2006 στο Kilhamn, 2008).

Κάποιοι λιγότεροι (8%), εμβάθυναν επιχειρηματολογώντας ως προ τη συσχέτιση πηγών του μοντέλου και όρων της πράξης της αφαίρεσης με τους αρνητικούς αριθμούς. Αυτή όμως έμεινε σε ένα επίπεδο ερμηνείας του παραδείγματος που τους δόθηκε. Δεν μπόρεσαν να εμβαθύνουν στην προβληματική της σύνδεσης του μοντέλου με το μαθηματικό αντικείμενο: πότε ένας όρος της αφαίρεσης αντιπροσωπεύει απλά και μόνο τη θερμοκρασία (μια πηγή) και πότε την *αλλαγή* της θερμοκρασίας (άλλη πηγή); (Kilhamn, 2008). Επίσης ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο αναγνωρίστηκε η δυσκολία των μαθητών να κάνουν πράξεις με ακεραίους αριθμούς. Όπως υποστηρίζει και ο Θωμαΐδης (2009, σσ.202-203) στις πράξεις με ακεραίους αριθμούς αποσταθεροποιούνται οι καθιερωμένες αντιλήψεις για το νόημα των αριθμητικών πράξεων, που είχαν οι μαθητές αποκτήσει στο Δημοτικό με την ενασχόληση τους με τους φυσικούς αριθμούς.

Επίσης αρκετοί υποστήριξαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδεσμευθούν από το μοντέλο και να εργαστούν σε ένα επίπεδο καθαρά τυπικό.

Αναφέρθηκαν και επιχειρήματα επιστημολογικής φύσεως: η πρώτη επαφή με τους φυσικούς αριθμούς έχει ως συνέπεια πολλοί μαθητές να αντιμετωπίζουν τον αριθμό όπως τους μη – προσημασμένους, ανατρέχοντας στις εμπειρίες του από το σύνολο των Φυσικών αριθμών (Gallardo και Rojano, 1994, Gallardo και Romero, 1999 στην Vlassis 2004)· η διασαφήνιση της διαδικαστικής και δομικής πτυχής του προσήμου: οι Kullberg (2006) και Vlassis (2004) υποστηρίζουν ότι είναι σημαντικό να διασαφηνιστεί η διαφορά μεταξύ του προσήμου του αρνητικού αριθμού και του τελεστή της αφαίρεσης, μια παράμετρος που εντοπίστηκε στα δεδομένα μας.

Ωστόσο κάποιοι, ανέφεραν και τις άλλες τρεις πηγές δυσκολιών που η διεθνής ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει εντοπίσει προκειμένου για την κατανόηση της έννοιας του αρνητικού αριθμού: κατεύθυνση και πλήθος (Gallardo και Rojano, 1994· Gallardo και Romero, 1999 στην Vlassis 2004) επιδεξιότητα στις αριθμητικές πράξεις

(Kullberg, 2006) και η σημασία του αρνητικού προσήμου. Αυτό συνάδει με τη θέση της Sfard (1991), ότι η εσωτερίκευση των αρνητικών αριθμών είναι το στάδιο στο οποίο το άτομο αποκτά άνεση στην εκτέλεση της πράξης της αφαίρεσης. Κάποιοι ισχυρίστηκαν ότι το μοντέλο είναι μη οικείο, λόγω κλιματολογικών συνθηκών στη χώρα μας.

Υπήρξαν κάποιοι που αναγνώρισαν και σε αυτό το μοντέλο μόνο δυνατότητες (23%).

Αναφορικά με το τρόπο αντιμετώπισης των περιορισμών που εντόπισαν στο μοντέλο του θερμόμετρου για την πράξη της αφαίρεσης των ακεραίων αριθμών, το 35% κατανέμεται σε αυτούς που είτε το απορρίπτουν, είτε δεν διατύπωσαν κάποια πρόταση για την υπέρβαση των περιορισμών του (22%). Από αυτούς που το αποδέχονται (65%) προκειμένου να υπερβούν τους περιορισμούς του μοντέλου, η μεγάλη πλειοψηφία επιλέγει να αποσαφηνίσει τις συμβάσεις του είτε περιγράφοντας αναλυτικά τον τρόπο λειτουργίας του, είτε μεταβαίνοντας από απλά σε σύνθετα παραδείγματα.

Άλλοι επιλέγουν κάποιο άλλο από τα γραμμικά μοντέλα που αναπτύξαμε στη βιβλιογραφική ανασκόπηση, ή διακριτά ή μοντέλα καθημερινής εμπειρίας. Το διαφορετικό εδώ σε σχέση με την βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε, είναι η πρόταση για ενσώματη προσέγγιση της πράξης της αφαίρεσης των ακεραίων, με μαθητές να αναπαριστούν ενσώματα τους προσημασμένους αριθμούς ανάλογα με τη θέση τους στο χώρο της τάξης με ανάλογες κινήσεις αντίθετης φοράς.

Κάποιοι επικαλούνται δυσκολίες που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών που οδηγεί σε περιορισμένη χρήση του μοντέλου. Από αυτούς που επιλέγουν να μην κάνουν χρήση κάποιου μοντέλου προτείνουν την αλγεβρική προσέγγιση της πράξης της αφαίρεσης, μέσω του ορισμού της.

Αναφορικά με το μοντέλο της ζυγαριάς, ο κύριος όγκος των περιορισμών που εντόπισαν στην επίλυση εξισώσεων ήταν κι εδώ στη σύνδεση του μοντέλου με το μαθηματικό αντικείμενο. Το κύριο επιχείρημα που αναδύθηκε εδώ ήταν ότι το μοντέλο της ζυγαριάς δε βοηθάει τους μαθητές να μεταφέρουν την εστία προσοχής τους από το «=» ως λειτουργικό σύμβολο στο «=» ως σχεσιακό σύμβολο. Αυτό αντίκειται με τα ευρήματα των Pirie & Martin (1997) και Warren & Cooper (2005). Επιπλέον, κάποιοι υποστηρίζουν ότι δε βοηθάει στην κατανόηση της τεχνικής της επίλυσης της εξίσωσης, με αποτέλεσμα κάποιοι μαθητές να μη μπορούν να αποδεσμευθούν από το μοντέλο (Filloy & Rojano, 1984-1985 στην Kieran, 1992 · Vlassis, 2002). Επίσης αναφέρθηκαν επιχειρήματα σχετικά με τη δυσκολία εντοπισμού και άρα και αναπαράστασης της άγνωστης ποσότητας**.** Μόλις ένα 10% αναφέρθηκε στην κύρια πηγή δυσκολίας του μοντέλου της ζυγαριάς ότι δεν έχει εφαρμογή σε εξισώσεις όπου η

άγνωστη ποσότητα είναι αρνητική (Aczel, 1998 στο Warren & Cooper, 2005· Pirie & Martin, 1997· Vlassis, 2002· Filloy & Rojano, 2008).

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, το κύριο επιχείρημα ήταν ότι το μοντέλο της ζυγαριάς δεν ενδείκνυται για σύνθετες εξισώσεις (25%). Μια άλλη πηγή δυσκολιών ήταν ως προς το ίδιο το μοντέλο, όπου μεγάλη μερίδα των καθηγητών το χαρακτήρισαν ως μη οικείο και ρεαλιστικό. Αυτό όμως έρχεται σε αντιδιαστολή με ένα από τα ισχυρότερα επιχειρήματα των υποστηρικτών του μοντέλου (Filloy et al, 2008).

Επίσης κάποιοι υποστήριξαν ότι ο τρόπος παρουσίασης των σχολικών μαθηματικών και συγκεκριμένα η επαφή πρώτα με την τυπική παρουσίαση της επίλυσης της εξίσωσης, σε μικρότερες τάξεις, συνιστά δυσκολία στην κατανόηση του μοντέλου της ζυγαριάς. Αυτή η θέση είναι σύμφωνη με τα συμπεράσματα της έρευνας των Filloy & Rojano (2008) που εντόπισαν ότι μια από τις βασικές παραμέτρους για την επιτυχή χρήση του μοντέλου είναι οι πράξεις που ο μαθητής ήδη διαχειρίζεται με ευχέρεια, ώστε να εισάγει νέα αντικείμενα, έννοιες και πράξεις.

Υπήρξαν κάποιοι που αναγνώρισαν και σε αυτό το μοντέλο μόνο δυνατότητες (17%), προβάλλοντας ως κύριο επιχείρημα την οικειότητα του μοντέλου και την θετική προσωπική εμπειρία. Αυτή η άποψη βρίσκει σύμφωνη την διεθνή ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Αναφορικά με τον τρόπο αντιμετώπισης των περιορισμών του μοντέλου της ζυγαριάς για την επίλυση εξισώσεων, το 37% κατανέμεται σε αυτούς που είτε το απορρίπτουν, είτε δεν απάντησαν (23%).

Από αυτούς που το αποδέχονται (63%) προκειμένου να υπερβούν τους περιορισμούς που εντόπισαν, η μεγάλη πλειοψηφία επιλέγει και πάλι να μείνει στο μοντέλο αυτό και να αποσαφηνίσει τις συμβάσεις του είτε περιγράφοντας τον τρόπο λειτουργίας του, είτε με συχνές αναγωγές από το πραγματικό μοντέλο στο μαθηματικό, είτε βάζοντας τους μαθητές να πειραματιστούν και να ανακαλύψουν μόνοι τους τις ιδιότητες της ισότητας, είτε παραθέτοντας πολλά παραδείγματα.

Άλλοι επιλέγουν μια παραλλαγή του μοντέλου της ζυγαριάς, είτε αλλάζοντας τα σταθμά, ώστε να επιλύεται το πρόβλημα με τις αρνητικές ποσότητες, είτε με τη χρήση πραγματικού ζυγού, ή με την προσομοίωση της ζυγαριάς με ένα πρόγραμμα Η-Υ, ή μοντέλα καθημερινής εμπειρίας. Κι εδώ κάποιος πρότεινε ενσώματη προσέγγιση της διαδικασίας επίλυσης της εξίσωσης με ένα μαθητή να αναπαριστά ενσώματα τη ζυγαριά, όπου τα σκέλη της ζυγαριάς είναι τα χέρια του και ο κορμός του ο άξονας ισορροπίας.

Κάποιοι επικαλούνται δυσκολίες που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, (όγκος ύλης, χρονικοί περιορισμοί, η γνωριμία με τυπική προσέγγιση από μικρότερες τάξεις) και άρα καταλήγουν σε περιορισμένη χρήση του μοντέλου. Η περιορισμένη χρήση του συνίσταται είτε σε μια σύντομη αναφορά στο μοντέλο, είτε με στόχο τη γνωριμία με τις ιδιότητες της ισότητας και μόνο (όχι πάντα με σκοπό την επίλυση της εξίσωσης). Από αυτούς που επιλέγουν να μην κάνουν χρήση κάποιου μοντέλου, προτείνουν είτε την τυπική παρουσίαση της επίλυσης εξισώσεων, είτε τη χρήση άλλων προσεγγίσεων επίλυσης, όπως η μέθοδος των αντίστροφων πράξεων, η τεχνική της δοκιμής και πλάνης. Σύμφωνα με την Kieran (1992) η μέθοδος των αντίστροφων πράξεων, δεν βοηθάει στην κατανόηση των ιδιοτήτων της ισότητας. Δηλαδή, οι μαθητές μαθαίνουν να εργάζονται σε ένα επίπεδο καθαρά διαδικαστικό.

Αναφορικά με το γεωμετρικό μοντέλο για την έννοια της ισότητας, ο βασικότερος περιορισμός που εντόπισαν κι εδώ ήταν στη σύνδεση του με το μαθηματικό αντικείμενο. Μεγάλη πλειοψηφία των καθηγητών υποστηρίζουν τα ευρήματα των ερευνών των Kieran (1992) και Filloy & Rojano (1984-1985) στην Kieran (1992): ότι οι μαθητές παραμένουν αγκιστρωμένοι στο μοντέλο και δε μπορούν να δουν τις συνδέσεις μεταξύ των πράξεων που εκτελούνται με το μοντέλο και τις αντίστοιχες πράξεις στο αλγεβρικό επίπεδο. Ακυρώνεται έτσι ο ρόλος του γεωμετρικού μοντέλου ως «σκαλωσιά» για την παραπέρα μαθηματική εξέλιξη του μαθητή, στο επίπεδο των εννοιών.

Η χρήση του τύπου για την εύρεση του εμβαδού της ορθογώνιας επιφάνειας δεν σημαίνει κατ' ανάγκη και κατανόηση του τι κάνουν, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στη γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας. Δυσκολεύονται στην εκτίμηση του μεγέθους μιας ορθογώνιας επιφάνειας με γνωστές διαστάσεις, τονίζουν κάποιοι καθηγητές ως μια από τις δυσκολίες της μετάφρασης του μοντέλου. Αυτό συνάδει με τα ευρήματα των Kordaki & Potari (1998) σχετικά με την έννοια του εμβαδού.

Ένα 10% εντόπισε την κύρια πηγή δυσκολίας του γεωμετρικού μοντέλου, που είναι οι αρνητικοί αριθμοί, όπως υποστηρίζει η διεθνής ερευνητική κοινότητα. Επίσης αναφέρθηκαν και οι άλλες δυο δυσκολίες αναφορικά με το γεωμετρικό μοντέλο. Μαθητές που έχουν περιορισμένη γεωμετρική αντίληψη (7%) και ως προς το μοντέλο, μαθητές που δεν γνωρίζουν τους τύπους του Εμβαδού του ορθογωνίου, δεν θα είναι ευνοϊκά διακείμενοι στο μοντέλο αυτό (10%). Διατυπώθηκε η άποψη ότι το γεωμετρικό μοντέλο στην επιμεριστική ως προς αφαίρεση είναι δύσχρηστο, γεγονός που αντίκειται στα ευρήματα των Filloy et al (2008).

Αναφέρθηκε επίσης ότι στο γεωμετρικό μοντέλο, η αυτοματοποιημένη διαδικασία που σημειώνεται, μερικές φορές έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία κλασικών λαθών συντακτικής φύσεως, όπως για παράδειγμα η γενικευμένη εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας σε άλλες μαθηματικές έννοιες.

Ακόμα, υποστήριξαν ότι συγκεκριμένα η επαφή αρχικά με τον αλγεβρικό χειρισμό της επιμεριστικής ιδιότητας σε μικρότερες τάξεις, συνιστά δυσκολία στην κατανόηση του γεωμετρικού μοντέλου. Αυτή η θέση είναι σύμφωνη με τα συμπεράσματα της έρευνας των Filloy & Rojano στην Kieran (1992) που εντοπίζουν ότι μια από τις βασικές παραμέτρους για την επιτυχή χρήση του μοντέλου είναι οι πράξεις που ο μαθητής ήδη διαχειρίζεται με ευχέρεια, ώστε να εισάγει νέα αντικείμενα, έννοιες και πράξεις.

Αναφέρθηκε επίσης ο καταλυτικός ρόλος του αναλυτικού προγράμματος σπουδών στη διδασκαλία του. Αυτό έχει συχνά σαν αποτέλεσμα, οι μαθητές, να δυσκολεύονται να διαχειριστούν επιτυχώς το γεωμετρικό μοντέλο (Filloy & Rojano στην Kieran, 1992).

Υπήρξαν κάποιοι που αναγνώρισαν και στο γεωμετρικό μοντέλο μόνο δυνατότητες (27%) προβάλλοντας ως επιχειρήματα με φθίνουσα διάταξη, ως προς το βαθμό σημαντικότητας, την προσωπική εκτίμηση, και την οικειότητα –απλότητα του μοντέλου.

Αναφορικά με τον τρόπο αντιμετώπισης των περιορισμών που εντόπισαν στο γεωμετρικό μοντέλο για τη γνωριμία με την επιμεριστική ιδιότητα, το 45% κατανέμεται σε αυτούς που είτε το απορρίπτουν, είτε δεν απάντησαν (33%).

Από αυτούς που το αποδέχονται (55%) προκειμένου να υπερβούν τους περιορισμούς του, η μεγάλη πλειοψηφία (42%, 14/33) επιλέγει και πάλι να μείνει στο μοντέλο αυτό, αλλά αρχικά σε μια παραλλαγή (πιο απλοποιημένη μορφή) του. Τα μήκη του γεωμετρικού μοντέλου είναι συγκεκριμένοι και όχι γενικευμένοι αριθμοί. Άλλες παραλλαγές του που προτάθηκαν, είναι γεωμετρικά προβλήματα πραγματικών καταστάσεων, άποψη που βρίσκει σύμφωνους τους Lappa και Spyrou (2003) και των Bendr και Schreider (1980).

Επίσης η δυναμική διαχείριση του μοντέλου με τη βοήθεια οποιουδήποτε λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Κάποιοι προτίμησαν να αποσαφηνίσουν τις συμβάσεις του γεωμετρικού μοντέλου κάνοντας είτε χρήση πολλών παραδειγμάτων ή αντιπαραδειγμάτων, είτε επανάληψη σε βασικές γεωμετρικές έννοιες (εμβαδό ορθογωνίου, άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων), είτε συχνές αναγωγές από το γεωμετρικό στο αριθμητικό μοντέλο., είτε μέσα από αριθμητικά προβλήματα. Κάποιοι επικαλούνται δυσκολίες που θέτει του αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, (χρονικοί περιορισμοί). Συνέπεια αυτών είναι η περιορισμένη χρήση του μοντέλου. Από αυτούς που προτιμούν να μην χρησιμοποιήσουν κάποιο μοντέλο, προτείνουν την αλγεβρική προσέγγιση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Το τελευταίο ερώτημα διερευνούσε τη διδακτική πρακτική των καθηγητών ως προς το συγκεκριμένο μοντέλο κάθε φορά. Το 73% (44/60) των ερωτηθέντων χρησιμοποιεί τα μοντέλα αυτά. Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως στην ερώτηση σχετικά με τους τρόπους υπέρβασης των δυσκολιών που εντόπισαν στα δυο μοντέλα, το 87% (52/60) επιλέγει να κάνει χρήση των μοντέλων αυτών είτε συνδυαστικά είτε μεμονωμένα**.**

Αναφορικά με την έννοια του ρητού αριθμού και η πλειοψηφία 66% είναι υπέρ της χρήσης και των δυο μοντέλων. Αποδίδουν όμως διακριτούς ρόλους στα μοντέλα αυτά κι επιλέγουν να τα χρησιμοποιούν χωριστά. Από αυτούς που επέλεξαν τη χρήση μόνο του ενός από τα δυο (34% 15/60), είναι σαφής η προτίμηση υπέρ του μοντέλου της ράβδου (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

Σε ένα επόμενο επίπεδο, ποιοτικής ανάλυσης, προέκυψε ότι οι απαντήσεις των ερωτηθέντων επεκτάθηκαν σε δυο άξονες. Αυτές που αναφέρονταν στο *πώς*, δηλαδή στον τρόπο χρήσης των δυο μοντέλων, είτε και τα δυο, είτε μόνο το ένα και αυτές που αναφέρονταν στο *πού*, δηλαδή ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο.

Αναφορικά με τον τρόπο χρήσης των δυο μοντέλων (ράβδος και αριθμογραμμή), οι απαντήσεις που δόθηκαν ταξινομήθηκαν σε δυο ευρείες θεματικές κατηγορίες. Στην πρώτη εντάχθηκαν οι απαντήσεις που έμειναν σε ένα επιφανειακό επίπεδο. Τα δυο αυτά μοντέλα χρησιμοποιούνται είτε εισαγωγικά, είτε συνδυαστικά. Το 25% (11/44) ανέφεραν ότι χρησιμοποιούν τα δυο μοντέλα όπως παρουσιάζονται είτε σε πρότυπα παραδείγματα, είτε σε συνδυασμό με διάφορα διδακτικά υλικά. Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρονταν στο μοντέλο αποκλειστικά. Επιλέγουν άλλα μοντέλα ή διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων μοντέλων. Εδώ οι καθηγητές επιχείρησαν να εμβαθύνουν τεκμηριώνοντας τις επιλογές τους. Κριτήριο επιλογής διαφορετικού μοντέλου είναι η κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Κριτήριο επιλογής διαφορετικής αναπαράστασης των ίδιων μοντέλων είναι η προσπάθεια υπέρβασης των περιορισμών που εντόπισαν κατά τη χρήση των μοντέλων στην κλασική τους μορφή. Έτσι, προκειμένου για την υπέρβαση του χωρισμού του όλου σε μέρη, προτείνεται η χρήση κατάλληλου λογισμικού. Προκειμένου για την κατανόηση της διάταξης των ρητών προτείνεται μια παραλλαγή του μοντέλου της αριθμογραμμής. Η αριθμογραμμή σε κατακόρυφη θέση, με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε το θερμόμετρο. Ως προς το πού, δηλαδή το μαθηματικό περιεχόμενο, το 34% (15/44) χρησιμοποιεί τα μοντέλα αυτά για την έννοια του ρητού. Κάποιοι τα επιλέγουν και για τη γνωριμία των μαθητών με τις σχέσεις και πράξεις επί των ρητών. Συγκεκριμένα το 30% επιλέγει να κάνει χρήση των μοντέλων αυτών για την έννοια της διάταξης των ρητών αριθμών, το 14% για τα ισοδύναμα κλάσματα (Wong& Evans, 2008)

Αναφορικά με τη χρήση του μοντέλου του θερμομέτρου στην επέκταση της πράξης της αφαίρεσης στους ακεραίους το 77% (46/60) το χρησιμοποιεί. Προέκυψαν οι ίδιες θεματικές κατηγορίες ως προς τον τρόπο χρήσης του μοντέλου. Είτε εισαγωγικά , είτε συνδυασμό με το μαθηματικό περιεχόμενο. Το 31% (14/46) ανέφεραν ότι χρησιμοποιούν το μοντέλο όπως παρουσιάζεται είτε σε πρότυπα παραδείγματα, είτε σε συνδυασμό με διάφορα διδακτικά υλικά. Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρονταν στο μοντέλο αποκλειστικά. Το 11% χρησιμοποιεί το μοντέλο του θερμομέτρου με στόχο την επεξήγηση στους μαθητές των περιορισμών του μοντέλου. Οι υπόλοιποι είτε σε συνδυασμό με άλλα μοντέλα, είτε με διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου του μοντέλου. Τώρα όμως δεν εντοπίστηκε κάποια τεκμηρίωση για αυτήν τη διδακτική επιλογή τους. Ως προς το πού, δηλαδή το μαθηματικό περιεχόμενο, το μοντέλο του θερμομέτρου χρησιμοποιείται λιγότερο για τον ορισμό της έννοιας των ακεραίων αριθμών και περισσότερο για τις πράξεις με ακεραίους αριθμούς (17%). Επίσης χρησιμοποιείται για την κατανόηση-ερμηνεία των πράξεων με ακεραίους.

Ως προς την έννοια της ισότητας, το 73% (44/60) κάνει χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς στην επίλυση εξισώσεων. Προέκυψαν οι ίδιες θεματικές κατηγορίες ως προς τον τρόπο χρήσης του μοντέλου. Είτε εισαγωγικά (18%), είτε σε συνδυασμό με το μαθηματικό περιεχόμενο. Το 34% (15/44) ανέφεραν ότι χρησιμοποιούν τη ζυγαριά είτε σε πρότυπα παραδείγματα, είτε σε συνδυασμό με διάφορα διδακτικά υλικά. Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρονταν στο μοντέλο αποκλειστικά.

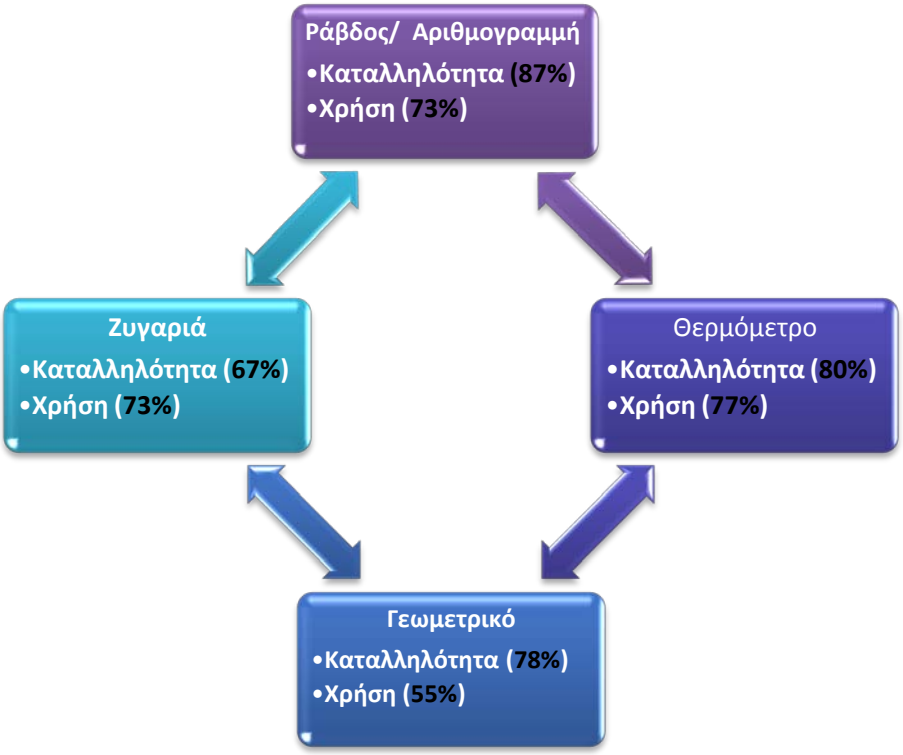
Το 14% χρησιμοποιεί το μοντέλο της ζυγαριάς με στόχο την επεξήγηση στους μαθητές των περιορισμών του μοντέλου. Οι υπόλοιποι (16%) με διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου του μοντέλου. Και τώρα όμως δεν εντοπίστηκε κάποια τεκμηρίωση για αυτήν τη διδακτική επιλογή τους. Ως προς το *πού*, δηλαδή το μαθηματικό περιεχόμενο, το μοντέλο της ζυγαριάς χρησιμοποιείται είτε σε απλές εξισώσεις (14%), είτε για κατανόηση της έννοιας της ισότητας και των ιδιοτήτων της (20%).

Το 55% χρησιμοποιεί το γεωμετρικό μοντέλο για τη διαισθητική προσέγγιση της επιμεριστικής ιδιότητας, το 12% απορρίπτει τη χρήση οποιουδήποτε μοντέλου, και το 33 % δεν απάντησε. Προέκυψαν οι ίδιες θεματικές κατηγορίες ως προς τον τρόπο χρήσης του μοντέλου. Ως προς τον τρόπο αξιοποίησης του αναφέρθηκαν στη χρήση του σε ένα εισαγωγικό επίπεδο, με στόχο είτε να κινητοποιήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, είτε να φανεί η σύνδεση άλγεβρας με γεωμετρία, είτε τέλος σε συνδυασμό με το μαθηματικό περιεχόμενο. Και πάλι υπήρξαν απαντήσεις που έμειναν σε ένα επιφανειακό επίπεδο: 20% χρησιμοποιούν το γεωμετρικό μοντέλο όπως αναφέρει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών,

ή το βιβλίο του καθηγητή, ή όπως περιγράφεται στο ερωτηματολόγιο που απάντησαν. Αναφέρθηκαν και στο μοντέλο, όπου το γεωμετρικό μοντέλο χρησιμοποιείται με στόχο την επεξήγηση των περιορισμών του (2%), ή συνδυαστικά με άλλα μοντέλα, ή με διαφορετικές αναπαραστάσεις του (χαρτόνι, στον πίνακα, λογισμικό Η-Υ). Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, το 27% που επιλέγουν να κάνουν χρήση του γεωμετρικού μοντέλου το αξιοποιούν είτε με αριθμητικά παραδείγματα (αρχικά απλά και κατόπιν γενικεύοντας) , είτε πιο σύνθετα, με αριθμητικά προβλήματα αλλά και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών (προτεραιότητα των πράξεων στις αριθμητικές παραστάσεις, ως μορφή εποπτείας στο Πυθαγόρειο θεώρημα).

Συνοπτικά παρουσιάζεται στο διάγραμμα 5.1 τα ποσοστά στα οποία διαφαίνεται ο βαθμός αποδοχής του μοντέλου (παράμετρος *καταλληλότητα*) για τη διαπραγμάτευση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας και την αντίστοιχη διδακτική πρακτική (παράμετρος *χρήση*) των καθηγητών.

Διάγραμμα5.1 Συσχέτιση Πεποιθήσεων και Διδακτικής πρακτικής



5.2 Συμπεράσματα

Οι καθηγητές ανέπτυξαν πολύπλευρα την επιχειρηματολογία τους ως προς την καταλληλότητά των μοντέλων ιδιαίτερα μοντέλα της ζυγαριάς και το γεωμετρικό που επιλέχθηκαν για τη διαπραγμάτευση της έννοιας της ισότητας και επιπλέον η σύνδεση με το αντίστοιχο μαθηματικό περιεχόμενο (έννοια) ήταν πιο εμφανής έναντι του μοντέλου του θερμομέτρου. Όμως στο μοντέλο του θερμομέτρου μεγαλύτερο ποσοστό καθηγητών εντόπισε την κύρια δυσκολία που παρατηρείται κατά τη σύνδεση του μοντέλου με τη μαθηματική έννοια. Πιο ειδικά, ως προς το μοντέλο του θερμομέτρου, υπήρξε ένας αριθμός καθηγητών (22%) που εντόπισε το κύριο πρόβλημα που ανακύπτει από τη σύνδεση του μοντέλου του θερμομέτρου με την πράξη της αφαίρεσης. Ωστόσο, δεν μπόρεσαν να εμβαθύνουν στην προβληματική αυτής της σύνδεσης. Επίσης από αυτούς που αναγνώρισαν περιορισμούς στο μοντέλο αυτό, το ένα τρίτο δεν πρόβαλλε καμία λύση. Αυτό καταδεικνύει την ελλιπή γνώση του μοντέλου. Αναφορικά με τη διδακτική πρακτική τους μόλις το 11% επιχείρησε να δώσει μια τεκμηρίωση με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως αδρή προσέγγιση στο μοντέλο με ό,τι αυτό συνεπάγεται για τη διευκόλυνση των μαθητών να δουν τους περιορισμούς του.

Ως προς το μοντέλο της ζυγαριάς μια μικρή ομάδα καθηγητών (8%) εντόπισε την κύρια πηγή δυσκολίας του κατά τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων (αρνητικές ποσότητες), όπως ακόμα λιγότεροι (2%) υποστήριξαν ότι είναι προβληματική και η αναγνώριση του γράμματος ως τον άγνωστο της εξίσωσης. Κάποια επιχειρήματα έρχονται σε αντιδιαστολή με τα ευρήματα της ερευνητικής κοινότητας της διδακτικής των μαθηματικών (αδυναμία αναγνώρισης της κύριας προσφοράς του μοντέλου στην επίλυση των εξισώσεων (το «=» ως σχεσιακό σύμβολο, μοντέλο μη ρεαλιστικό). Από αυτούς που εντόπισαν περιορισμούς στο μοντέλο της ζυγαριάς το 23% δεν μπόρεσε να προτείνει μια λύση για την αντιμετώπισή του. Το 14% χρησιμοποιεί το μοντέλο της ζυγαριάς με στόχο την επεξήγηση στους μαθητές των περιορισμών του μοντέλου. Και τώρα όμως δεν εντοπίστηκε κάποια τεκμηρίωση για αυτήν τη διδακτική επιλογή τους.

Μεγαλύτερη αποδοχή έχει το γεωμετρικό μοντέλο για την έννοια της ισότητας, σε σχέση με το μοντέλο της ζυγαριάς. Όμως, μια μικρή ομάδα, μόλις ένα 13%, αναγνώρισε την κύρια αξία του γεωμετρικού μοντέλου, την κατανόηση δηλαδή της έννοιας της ισότητας. Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο μόλις το 10% ανέφερε την κύρια πηγή δυσκολίας του, δηλαδή τις αρνητικές ποσότητες. Μεγάλη πλειοψηφία των καθηγητών υποστηρίζουν ότι οι μαθητές παραμένουν αγκιστρωμένοι στο μοντέλο και δε μπορούν να δουν τις συνδέσεις μεταξύ των πράξεων που εκτελούνται με το μοντέλο και τις αντίστοιχες πράξεις στο αλγεβρικό

επίπεδο. Αναφορικά με τη χρήση του μοντέλου επιχειρήθηκε μια τεκμηρίωση από μαθηματικής άποψης των επιλογών τους.

Αναφορικά με την διδακτική πρακτική τους διαμορφώθηκε μια ομάδα απαντήσεων, η οποία θεωρούμε ότι είναι σημαντική για την έρευνα που διενεργήθηκε και επομένως άξια λόγου. Είναι σχετική με τις διδακτικές επιλογές των καθηγητών ως προς τη χρήση του εκάστοτε μοντέλου. Ένα ποσοστό καθηγητών που κυμαίνεται από 20%-34%, ανάλογα με το μοντέλο, επιλέγει να χρησιμοποιήσει το συγκεκριμένο μοντέλο όπως παρουσιάζεται είτε σε πρότυπα παραδείγματα, είτε όπως αναφέρει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, είτε σε συνδυασμό με διάφορα διδακτικά υλικά. Αυτό δείχνει την επιφανειακή γνώση τους για τα μοντέλα αυτά αναφορικά με τις δυνατότητες αλλά κυρίως των περιορισμών τους.

Αναφορικά με τη συσχέτιση των απαντήσεων των καθηγητών ως προς την καταλληλότητα του μοντέλου και την τελική διδακτική τους επιλογή διαπιστώθηκε σε ένα πρώτο επίπεδο ότι ένα 13% των καθηγητών παρόλο που θεωρεί ότι κάποιο ή και τα δυο μοντέλα είναι κατάλληλο μέσο για τη διαπραγμάτευση της έννοιας του ρητού αριθμού, επιλέγει τελικά να μην κάνει χρήση των μοντέλων αυτών. Αναφορικά με τα μοντέλα του θερμομέτρου και της ζυγαριάς δεν παρατηρήθηκε ασυμβατότητα μεταξύ αποδοχής του μοντέλου ως κατάλληλο και επιλογής χρήσης του (απόκλιση 3% και 7% αντίστοιχα). Τέλος ως προς το γεωμετρικό μοντέλο παρόλο που έτυχε μεγάλης αποδοχής, ένα πολύ μικρότερο ποσοστό των καθηγητών το χρησιμοποιεί στη διδασκαλία του. Και πιο συγκεκριμένα διαπιστώθηκε μια απόκλιση της τάξης του 23%.

Συνοψίζοντας οι καθηγητές επιδεικνύουν μια αρκετά καλή ικανότητα ανάλυσης και διαχείρισης μοντέλων που σχετίζονται με την έννοια του αριθμού, σε αντίθεση με τη διαχείριση των μοντέλων που σχετίζονται με την έννοια της ισότητας. Ειδικότερα, τα μοντέλα της ράβδου και της αριθμογραμμής είναι αυτά που οι καθηγητές φάνηκε να έχουν μια πιο πλήρη γνώση αναφορικά με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς τους. Στο μοντέλο του θερμομέτρου υπήρξε αναγνώριση του είδους του περιορισμού του μοντέλου, χωρίς όμως δυνατότητα εμβάθυνσης. Το μοντέλο της ζυγαριάς έτυχε της μικρότερης αποδοχής από τους ερωτηθέντες και παρατηρήθηκε η μεγαλύτερη δυστοκία αναφορικά με τη διασαφήνιση των δύσκολών σημείων του. Το γεωμετρικό μοντέλο το δέχθηκαν με ενθουσιασμό αρχικά, αλλά δεν το προτιμούν στη διδακτική τους πρακτική. Τέλος ως προς τα γεωμετρικά και γραμμικά μοντέλα υπάρχει μια ασυμβατότητα μεταξύ πεποιθήσεων και διδακτικής επιλογής. Δεν παρατηρήθηκε το ίδιο με τα διακριτά μοντέλα του θερμομέτρου

και της αριθμογραμμής. Το πιο δημοφιλές επιχείρημα αναφορικά με την αποδοχή των τριών τελευταίων μοντέλων (θερμόμετρο, ζυγαριά και γεωμετρικό) ήταν η εποπτεία.

Το επιστέγασμα αυτής της έρευνας είναι ότι δεδομένου ότι κατά κάποιο τρόπο οι μεταφορές είναι ένα τέχνασμα (artifice), όπως αναφέρει η Yob (2004, σελ 134), ένα εργαλείο, για το άνοιγμα πιθανών εννοιολογικών περιοχών για εξερεύνησή τους, οι συνδέσεις καθώς και η δυναμική τους για την κατασκευή νέας γνώσης έχουν εγγενείς περιορισμούς. Παρόλο που με τη χρήση των εννοιολογικών μεταφορών ανοίγονται νέοι δρόμοι που διευκολύνουν την κατάκτηση «δύσβατων» εννοιολογικά περιοχών, η χρήση τους δεν πρέπει να συνιστά πανάκεια.

Κατά κύριο λόγο, μια μεταφορά δεν είναι αυτό στο οποίο αναφέρεται, αλλά ένα σύμβολό του. Ως εκ τούτου, είναι κάτι άλλο και σε ορισμένες περιπτώσεις λιγότερο από αυτό στο οποίο αναφέρεται, ακόμη και όταν η αναφορά γίνεται με δυναμικό και προκλητικό τρόπο.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο προβληματισμός στην κοινότητα των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν πρέπει να είναι ποιο μοντέλο είναι καλύτερο για τη διδασκαλία μιας έννοιας και ποιο όχι, αλλά ποιες είναι οι συνέπειες από τη χρήση των μεταφορών και πώς μπορούμε να τις διαχειριστούμε. Άφθονη η παρουσία των εννοιολογικών μεταφορών, θεμελίωσης και σύνδεσης, στα σχολικά συγγράμματα του γυμνασίου. Το μόνο που χρειάζεται είναι η διαχείρισή τους με φειδώ και σύνεση.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Attorps, I. & Tossavainen, T. (2007a). Is there equality in equation ? In Pitta-Pantazi & Philippou (eds.), *Proceedings of CERME 2007, 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. CYPRUS.

Attorps, I. & Tossavainen, T. (2008). On the equivalence relation in the students concept image of equation, *The proceedings of the 6th Swedish Mathematics Education Research Seminar.* Stockholm: Sweden.

Boero, P., Bazzini, L., Garuti, R.(2001).Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. J. Kilpatrick, J., & I. Wirszup (Eds.), *Proceedings of the 25th International Conference, Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands.

Charalambous, C. Y.,& Pitta-Pantazi. D. (2005) Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne.

Chiu, M. M. (2000). Metaphorical reasoning: Origins, Uses, Development and Interactions in mathematics. *Educational Journal*, *28*(1), 14-46.

Chiu, M. M. (2001). Using metaphors to understand and solve arithmetic problem: Novices and experts working with negative numbers. *Mathematical Thinking and* learning*, 3*(2&3), 93-124.

Danesi, M. (2007). A conceptual metaphor framework for the teaching of mathematics. *Studies in Philosophy and Education*, 26, 225-236.

Dickinson, P., & Eade. F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations*. For the Learning of Mathematics, 24*(2), 41-47.

Doritou, M., & Gray, E. (2007). The number line as metaphor of the number system: A case study of primary schoo*.,* In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 5). Larnaca, Cyprus.

Ferrara, F. (2003). Bridging perception and theory: What role can metaphors and imagery play? In MA Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 3), Bellaria, Italy.

Filloy, E., Rojano T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.

Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning In S Vosniadou & A Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199 235). Cambridge University Press

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Hamide, D. D . (2007). Reasoning with Metaphors and Constructing an Understanding of the Mathematical function Concept, In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Seoul.

Jones, I. & Pratt, D. (2005). Three utilities for the equal sign. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne, Australia.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.),.*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-414). New York: Macmillan .

Kilhamn, C. (2008). Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning, *The proceedings of the 6th Swedish Mathematics Education Research Seminar.* Stockholm. Sweden. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. W.(2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 297 – 312.

Kolodner, J .L. (1992). An introduction to case based reasoning. *Artificial Intelligence Review*, *6,* 3-34.

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts. *Journal of Mathematical Behavior*,*17*(3), 303-316.

Kullberg, A. (2006). From learning study to design study, Paper *presented at EARLI SIG 9 Biennial Workshop.* University of Hong Kong.

Lappas, D., & Spyrou, P. (2006). A Reading of Euclid's Elements as Embodied Mathematics and its Educational Implications. *The Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5(*1), 1-16.

Lakoff, G.(1987). *Women, fire, and dangerous things.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From? how the embodied mind brings mathematics into being,* Basic Books.

Leonidou , V. A.,& Philippou, G. (2007). Elementary school students' understanding and use of the equal sign, In Pitta-Pantazi & Philippou (eds.), *Proceedings of CERME 2007, 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. CYPRUS).

Lesh, R. , Landau, M., & Hamilton, E. (1983). *Conceptual models in applied mathematical problem solving.* In R Lesh & M Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (263-343). New York Academic Press.

Lima, R. N. de. & Tall, D. O. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 3-18.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. *I*n T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), Rational Numbers: An Integration of Research, (pp. 261-288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. Forum: Qualitative Social Research *1*(2).

Molina, M. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences, *Electronic Journal of research in Educational psychology*,*7*(1), 341-368.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing of the rational numbers: a new model and experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122 – 147.

Núñez, R, Edwards, L., & Matos, J.(1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3, 45-65.

Núñez, R. (2004b). *Embodied cognition and the nature of mathematics: Language, gesture, and abstraction.* In K. Forbus, D. Gentner, and T. Regier (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Peirce, C. S. (1931–1958). Collected papers. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Philippou, G. & Christou, C. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME Conference.* Lisbon: University of Lisbon.

Pirie, S.E.B., & Martin, L . (1997).The Equation, The Whole Equation and Nothing but the Equation! One Approach to the teaching of Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 159-181.

Presmeg, N. C. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics, *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 25-32.

Presmeg, N.C. (1999). On visualization and generalization in mathematics. In Fernando Hitt and Manuel Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North*

American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus.

Presmeg, N. C. (2004). Use of personal metaphors in the learning of mathematics (Plenary paper), *Electronic Proceedings of Topic Study Group 25.*

Psycharis , G., Latsi, M., & Kynigos, C. (2009*)* .Meanings for fraction as number-measure by exploring the number line. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 16*(3), 91-108.

Reynolds, R .E. & Schwartz, R. M. (1983). Relation of metaphoric processing to comprehension and memory. *Journal of Educational Psychology*,*75*(3), 450-459.

Rissland, E .L. (1985). Artificial intelligence and the learning of mathematics: A tutorial sampling. In E A Silver (Eds.), *Teaching and learning mathematical problem solving Multiple research perspectives* (pp. 147-176). Hillsdale, NJ Erlbaum.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor, *For the learning of mathematics, 14,* 44-55.

Shepard, R., & Cooper, L .A .(1982). *Mental images and their transformations.* Cambridge, MA MIT Press.

Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways, In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Utrecht.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004).The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Streefland, L (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, (Επιμέλεια Κολέζα, Ε.) Εκδόσεις Leader Books.

Van de Walle, J.(2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διαδικασία. (*Επιμέλεια: Τριανταφυλλίδης, Τ.) Τυπωθήτω- Γ. Δαρδάνος.

Yob, I., M.(2003).Thinking Constructively with metaphors [Review of the book *Transforming critical Thinking: Thinking Constructively* New York : Teachers College Press]. Studies in Philosophy and Education, 22, 127-138.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 341-359.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity´. *Learning and Instruction, 14*, 469-484.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Young Children's Ability to Use the balance Strategy to Solve for Unknowns*. Mathematical Education Research Journal,17(*1), 58-72.

Wong, M. & Evans, D. (2008). Students' Conceptual understanding of equivalent fractions. *Proceedings of the* 31st, *Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* . Brisbane, Queensland, Australia.

Zhang, Yan, & Wildemuth, Barbara M. (2009). Qualitative analysis of content. In Barbara Wildemuth (Ed.), *Applications of Social Research Methods to Questions in Information and Library Science,* Libraries Unlimited, The University of North Carolina, Chapel Hill.

Αργυράκης, Βουργάνας, Μέντης, Τσικοπούλου & Χρυσοβέργης (2007). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος (2007). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου,* Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου,* Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού. Αθήνα*:* ΟΕΔΒ.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά-Κωνσταντίνου, Α. & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα*;, Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*

Γαγάτσης , Α. κ.α (2009). Οι Σημειώσεις του μαθήματος «Θεωρίες αναπαραστάσεων *στη Διδακτική των Μαθηματικών*» (*Δ03γ*).

Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, (2009) *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες κι αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ'* . Τόμος 13, τ. 45, 61-70.

Πόταρη, Δ. & Σακονίδης, Χ. (2009). Οι Σημειώσεις του Μαθήματος «*Μέθοδοι Έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών*» (Δ24).

Κολέζα, Ε. (2009*). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος .

Σπύρου, Π.(2003). Ενσωματωμένα μαθηματικά και οι ρίζες της Γεωμετρίας , Διάλεξη Επιστημολογίας, Ναύπλιο.

Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και Αριθμητικές πράξεις.* Αθήνα: Μεταίχμιο .

Ιστοσελίδες

Μικρός Απόπλους, Αρχαία Ελληνικά Κείμενα *Αριστοτέλης, Περί Ποιητικής,*
http://www.mikrosapoplous.gr/texts1.htm

Παράρτημα Ι

Πίνακας 4.8. ***Ταξινόμηση των μεταφορών στα σχολικά συγγράμματα του Γυμνασίου***

Α/Α	ΠΗΓΗ (Source) ΜΟΝΤΕΛΟ	ΣΤΟΧΟΣ (Target) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ	ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ (Mapping) ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
1	Σκάλα	Μονάδες Μέτρησης Μήκους, Εμβαδού –ΠΡΑΞΗ	Φορά κίνησης-ΑΠΟΣΤΑΣΗ-ΑΝΤΙΘΕΣΗ
	Σκάλα πυροσβεστικής	Τριγωνομετρικός αριθμός	Συμμεταβολή μήκους σκάλας και απόστασης από το έδαφος. (ΚΙΝΗΣΗ)
2	Ασανσέρ	Ακέραιοι-ΠΡΑΞΗ	Φορά κίνησης-ΑΠΟΣΤΑΣΗ-ΑΝΤΙΘΕΣΗ
3	Παγόβουνο	Ακέραιοι-ΠΡΑΞΗ	Φορά κίνησης-ΑΠΟΣΤΑΣΗ-ΑΝΤΙΘΕΣΗ
4	Θερμόμετρο	Φυσικοί-Ακέραιοι-ΠΡΑΞΗ	Διάταξη-Φορά κίνησης-ΑΠΟΣΤΑΣΗ-ΑΝΤΙΘΕΣΗ
5	Δέντρο	Σύμβολο τετραγωνικής ρίζας	Σημαίνον
6	Αεροπλάνο-επιφάνεια θάλασσας-καρχαρίας	Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί	Διάταξη
7	Γλάστρα με λουλούδι με ορατές τις ρίζες του	Ανάκληση της ρίζας λουλουδιού στο άκουσμα της λέξης «ρίζα»	Σημαίνον
8	Πίτσα	Κλάσματα	Μέρος –όλου
9	Μπακλαβάς- τούρτα	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - κυκλικός τομέας	Διαμέριση του δίσκου
10	Σοκολάτα	1. Κλάσματα 2. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών	1. Μέρος –όλου 2. μοιράζω
11	Ρολόι	1. Μονάδες μέτρησης 2. Είδη γωνιών	1. Χρόνος 2. Σχετική θέση λεπτοδείκτη και ωροδείκτη
12	Σκακιέρα	Παράσταση σημείων στο επίπεδο	Σημεία (πιόνια)
13	Μολυσμένα αρχεία από ιό Η-Υ.	Δυνάμεις ρητών αριθμών με φυσικό εκθέτη	Μόλυνση αρχείων (ταχύτητα)
14	Διαγράμμιση αυτοκινητόδρομου	Θέσεις ευθειών στο επίπεδο	Τροχιά κίνησης
15	Χιλιομετρικές ενδείξεις	Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών	Σημαίνον →Απόσταση
16	Θέατρο Επιδαύρου	Εγγεγραμμένες γωνίες	Σημαίνον
17	Σκηνή θεάτρου	Αλγεβρικές παραστάσεις	Σημαίνον (οι μεταβλητές είναι οι ηθοποιοί που μετέχουν στην παράσταση που «*ανεβάζεται*» στην σκηνή του θεάτρου)
18	Νόμισμα	1. Ρίψη νομίσματος Δειγματικός χώρος-Ενδεχόμενα 2. Μήκος κύκλου	1. Όψη νομίσματος 2. Πλήρη περιστροφή - ανάπτυξη
19	Δεξαμενή	Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων	Σχέση μέρος όλου
20	Φωτογραφική μηχανή	Σμίκρυνση-μεγέθυνση (λόγος 2 αριθμών)	Σχέση εικόνας και πραγματικού αντικειμένου
21	Ήλιος-Γη-μόριο νερού	Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών	Μεγάλη Μάζα- αμελητέα μάζα
22	Θρανίο	Δεκαδικά κλάσματα	Το Μήκος του συναρτήσει διαφορετικών μονάδων μέτρησης
23	Μολύβι	Δεκαδικά κλάσματα	Μονάδα μέτρησης
24	Άτομο Υδρογόνου	Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών	Αμελητέο μέγεθος
25	Ζάρι	Δειγματικό χώρος-Ενδεχόμενα	Όψη ζαριού –αποτέλεσμα ρίψης

26	Κοινωνική Συναλλαγή (*χρήματα*)	1. Ακέραιοι-ΠΡΑΞΗ 2. Μεταβλητή 3. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών 4. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών 5. Συνάρτηση (Σχέση) 6. Ανάλογα ποσά- Γραφική παράσταση της y =αχ 7. Η έννοια της μεταβλητής 8. Η y =αχ +β 9. Η αχ +β y=γ 10. Μέση τιμή 11. Όγκος κυλίνδρου 12. Πολυώνυμα –πρόσθεση και αφαίρεση 13. Πρόσθεση κι αφαίρεση ρητών παραστάσεων 14. Ανισώσεις μ' ένα άγνωστο	1. Κέρδος –ζημία , ΑΝΤΙΘΕΣΗ 2. Κόστος 3. Κέρδος-ζημία 4. Μοιράζω κέρδη 5. Παλιός μισθός-αύξηση-νέος μισθός, ΑΝΤΙΘΕΣΗ 6. Αρχική τιμή- Έκπτωση- τελική τιμή 7. Χρόνος ομιλίας – ποσό πληρωμής (ΣΧΕΣΗ) 8. Χρόνος ομιλίας – ποσό πληρωμής (ΣΧΕΣΗ) 9. Κιλά-κόστος (ΣΧΕΣΗ) 10. Αποδοχές ενός εργαζόμενου –μέση τιμή αποδοχών ενός γνωστού πλήθους εργαζομένων 11. Κόστος ανά m^3-συνολικό κόστος 12. Έξοδα 13. Έσοδα- έξοδα , ΑΝΤΙΘΕΣΗ 14. Καλύτερη προσφορά
27	Συλλογή Αντικειμένων	1. Ρητός –ΠΡΑΞΗ 2. Ευκλείδεια διαίρεση – χαρακτήρες διαιρετότητας, ΜΚΔ, ΕΚΠ- διαίρεση πολυωνύμων	1. Βάζω- βγάζω αντικείμενα 2. Χωρίζω-ενώνω
28	Καθρέπτης	Συμμετρία	Εικόνα-είδωλο
29	Επίπεδο	1. Πραγματικός αριθμός 2. Τριγωνομετρικός αριθμός	1. Σημεία 2. Σημεία
30	(Ημ)Ευθεία γραμμή	1. Αριθμός 2. Απόσταση-μετατόπιση- πρόσθεση κι αφαίρεση κλασμάτων 3. Χρόνος 4. Θερμοκρασίες 5. Διάταξη 6. Διάνυσμα 7. Ίσα-αντίθετα διανύσματα 8. Τριγωνομετρική ακτίνα	1. Σημεία 2. Μήκος τμήματος –μέρος όλου 3. Σημεία 4. Σημεία 5. Σχετική θέση των Σημείων 6. Φορά κίνησης (απόσταση) 7. Φορά κίνησης (απόσταση) 8. Περιστροφή - Απόσταση
31	Καμπύλη γραμμή	Αριθμός	Σημεία
32	Μονοπάτι	1. Πράξη 2. Τριγωνομετρικός αριθμός 3. Εξίσωση α΄ βαθμού (Γ΄)	1. Φορά κίνησης 2. Απόσταση 3. Απόσταση (ΚΙΝΗΣΗ)
33	Ράβδος	1. Αριθμός ρητός-άρρητος- απόσταση σημείου από αρχή Ο των αξόνων 1-Δ 2. απόσταση σημείου από αρχή Ο των αξόνων1-Δ 3. Κλάσμα-1Δ 4. Ισοδύναμα κλάσματα 2-Δ 5. Σύγκριση κλασμάτων 1-Δ 6. Πρόσθεση- αφαίρεση κλασμάτων 2-Δ 7. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων 2-Δ 8. Διαίρεση κλασμάτων 2-Δ 9. Αφαίρεση ρητών αριθμών 1-Δ	1. Μήκος τμήματος 2. Μήκος τμήματος 3. Το κλάσμα ως λόγος 4. Μοίρασμα και μέτρηση 5. Μοίρασμα και μέτρηση 6. Μοίρασμα και μέτρηση 7. Μέρος του μέρους του όλου 8. Σύνθεση –διαχωρισμός 9. Σχέση πλάτους –θερμοκρασίας (ΣΥΝΘΕΤΟ) 10. Μήκη τμημάτων 11. Πλάτος – αριθμός 12. Απόσταση -μετατόπιση 13. Απόσταση –μετατόπιση 14. Ίσες δυνάμεις στα άκρα της ράβδου (ΚΙΝΗΣΗ)

		10. Πρόσθεση-αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων 1-Δ 11. Ραβδογράμματα (ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ) – Ιστόγραμμα 1-Δ 12. Μέτρο διανύσματος 1-Δ 13. Άθροισμα-διαφορά συγγραμικών διανυσμάτων 1-Δ 14. Ίσα διανύσματα (Γ΄) 1-Δ 15. Αξιοσημείωτες ταυτότητες (Γ') 1-Δ 16. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων Τμημάτων 17. Πράξεις /διαίρεση –λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 1-Δ 18. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^o \leq \omega \leq 180^o$ 1-Δ	15. Σύνθεση ράβδων με στόχο το σχηματισμό μιας νέας ράβδου ή Διάσπασή της στα συστατικά της μέρη 16. Μετακίνηση τοποθέτηση σε μια ευθεία 17. Μήκος τμημάτων 18. Λόγος μηκών
34	Γεωμετρικό μοντέλο	1. Επιμεριστική ιδιότητα 2. Δυνάμεις 3. Κλάσμα ως μέρος όλου 4. Σύγκριση κλασμάτων - πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων-ποσοστά – σχέση επίκεντρης γωνίας αντίστοιχου τόξου -μέτρο τόξου –κυκλικά διαγράμματα: ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (πίτα) 5. Εμβαδό –όγκος 6. Λόγος –αναλογία – Σύγκριση λόγων- η συνάρτηση y =αχ 7. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά 8. Μέτρο γωνίας 9. Ιδιότητες τετραπλεύρων (συμμετρία αξονική – κεντρική) 10. Μεταβολή Εμβαδού ορθογωνίου 11. Παραγοντοποίηση 12. Τριγωνομετρικός αριθμός 13. Μεταβολές ημ, συν, εφαπτομένης 14. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων 15. Κώνος – Σφαίρα 16. Μονώνυμα -Πράξεις επί μονωνύμων – 17. αξιοσημείωτες ταυτότητες –παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων 18. Ομοιοθεσία – ομοιότητα	1. Σύνθεση- διαχωρισμός ορθογωνίων ίδιου πλάτους. 2. Σχέση μήκους πλευράς τετραγώνου με πλήθος τετραγώνων στο οποίο διαμερίζεται → επαγωγική προσέγγιση 3. Τι μέρος του τετραγώνου είναι τα γεωμετρικά σχήματα ιδίου χρώματος (tangram) 4. Μοίρασμα (μέρος όλου) – μέτρηση- σχέση μέρος όλου 5. Αναδιάταξη και σύνθεση επίπεδων σχημάτων με γνωστό εμβαδό 6. Σχέση μήκους πλευράς –περιμέτρου τετραγώνου, ορθογωνίου 7. Σχέση πλευρών – εμβαδού ορθογωνίου 8. Κίνηση των πλευρών της. 9. Περιστροφή – δίπλωση 10. Μεταβολή πλάτους & μήκους ορθογωνίου. 11. Σύνθεση επίπεδων σχημάτων για σχηματισμό ορθογωνίου. 12. Λόγος πλευρών ορθογωνίου τριγώνου 13. Μεταβολή γωνίας και ημ, συν, και εφαπτομένης (ΚΙΝΗΣΗ πλευρών γωνίας) 14. Αποκοπή μέρους του αρχικού σχήματος κι επικόλληση του σε άλλο σημείο ώστε να προκύψει γεωμετρικό μοντέλο γνωστού Εμβαδού. (ΚΙΝΗΣΗ) 15. Περιστροφή του γεωμετρικού μοντέλου γύρω από σταθερή γραμμή→ τρισδιάστατο σχήμα 16. Εμβαδόν τετραγώνου και ορθογωνίου με πλευρές μεταβλητές 17. Διάσπαση τετραγώνου σε τετράγωνα και ορθογώνια και σύνθεση των μερών τους. 18. Σμίκρυνση- μεγέθυνση 19. Άνοιγμα-κλείσιμο (ΚΙΝΗΣΗ) 20. Μετατόπιση της $y = \alpha\chi^2$ οριζόντια και

		–λόγος περιμέτρων (εμβαδών) ομοίων σχημάτων 19. Ο συντελεστής α στην $y = αχ^2$ 20. $y = αχ^2 + βχ + γ$ 21. Ισότητα επίπεδων σχημάτων	κατακόρυφα (ΚΙΝΗΣΗ) 21. Μετατόπιση –περιστροφή του γεωμετρικού μοντέλου.
35	Ρυζόχαρτο	Σύγκριση επίπεδων σχημάτων-γραφημάτων συναρτήσεων	1. Σύγκριση 2. Δίπλωση 3. Μεταφορά κι Επικάλυψη
36	Μετακίνηση πλοίου-	1. Ανάλογα ποσά 2. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά 3. Μεσοκάθετος 4. Η έννοια του διανύσματος	1. Σχέση χρόνου-απόσταση 2. Σχέση χρόνου-ταχύτητας 3. Τροχιά της κίνησης 4. μετατόπιση-απόσταση
	Μετακίνηση ιστιοπλοϊκού	5. Άθροισμα και διαφορά μη συγγραμικών διανυσμάτων.	5. Τροχιά της κίνησης
	Μετακίνηση τρένου	Μονάδες μέτρησης χρόνου	Αναχώρηση –άφιξη (ΚΙΝΗΣΗ)
	Κίνηση αεροπλάνου-ελικοπτέρου	1. Σημεία τομής της αχ+ βγ= γ με τους άξονες 2. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	1. Μηδενισμός ταχύτητας 2. Σχέση ταχύτητας- χρόνου
	Κίνηση ποδηλάτη	1. Μονάδες μέτρησης 2. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	1. Σύγκριση χρόνων κίνησης 2. Σχέση ταχύτητας- χρόνου
	Μετακίνηση αυτοκινήτου-ταξί	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Σχέση ταχύτητας- χρόνου
	Μετακίνηση μοτοσυκλέτας-βέσπας	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Σχέση ταχύτητας- χρόνου
	Μετακίνηση λεωφορείου-πούλμαν	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Σχέση ταχύτητας- χρόνου
37	Ζυγαριά	1. Μονάδες μέτρησης 2. Έννοια εξίσωσης 3. Ανισώσεις α΄ βαθμού 4. Σύγκριση αριθμών-Ιδιότητες (αν)ισοτήτων 5. Ισοδυναμία εξισώσεων	1. Μάζα 2. Ισορροπία 3. Ανισορροπία 4. (αν)ισορροπία ζυγαριάς- διατήρηση (αν) ισορροπίας 5. Ισορροπία ζυγαριάς
	Τραμπάλα	Ανισώσεις α΄ βαθμού	Ανισορροπία
38	Δοχείο	1. Άγνωστος 2. Σύνολα-πράξεις 3. Ενδεχόμενα- πράξεις με ενδεχόμενα 4. Πιθανότητα	1. Ανοικτό-κλειστό 2. Άδειο-πλήρες-μέσα-έξω – (μη) κοινά στοιχεία –υποσύνολα 3. Πλήθος στοιχείων δοχείων 4. Λόγος πλήθους στοιχείων δοχείων
39	Σχοινί	1. Δεκαδικά κλάσματα 2. Αντίστροφο Πυθαγορείου θεωρήματος 3. Αντίθετα διανύσματα	1. Μονάδα μέτρησης (σχοινί μήκους 1m) 2. Ίσα τμήματα μεταξύ της απόστασης που ορίζουν 2 διαδοχικοί κόμποι 3. Τράβηγμα του σχοινιού σε αντίθετες φορές (κίνηση)
40	Κεκλιμένο επίπεδο (Φυσική)	1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας	1. Σύνθεση των 2 κινήσεων οριζόντια και κατακόρυφη (ΚΙΝΗΣΗ)

		2. Ανάλυση διανύσματος σε δυο κάθετες συνιστώσες	2. Αιτία της κίνησης η οριζόντια συνιστώσα (ΚΙΝΗΣΗ)
41	Γραμμές μετρό	Άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων	Μετατόπιση
	Σιδηροτροχιές	Σχέση ευθειών στο επίπεδο	Τροχιά και κίνηση του τρένου
42	Γεωγραφικός Χάρτης	1. Λόγος δυο αριθμών – Αναλογία 2. Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί 3. Ομοιοθεσία- κλίμακα	1. Πραγματική-εικονική απόσταση 2. «καρφίτσωμα» στο χάρτη των θερμοκρασιών 3. Σμίκρυνση –μεγέθυνση
43	Χάρτης πόλης	Καρτεσιανές συντεταγμένες	Σημεία
44	Ταξιδιώτης	1. Μεταβλητή 2. Εξίσωση α΄ βαθμού.	1. Κίνηση- θέση 2. Απόσταση
45	Ιθαγενής βαστάζον τόξο	Μήκος τόξου	Σημαίνον

Παράρτημα ΙΙ

Ε Ρ Ω Τ Η Μ Α Τ Ο Λ Ο Γ Ι Ο [40]

Ά ν δ ρ α ς ☐ Γ υ ν α ί κ α ☐

1. Διδάσκετε τώρα:

   ι) στη δημόσια εκπαίδευση. ☐

   ιι) σε ιδιωτικό σχολείο ☐

   ιιι) σε φροντιστήρια ☐

   ιν) παραδίδετε ιδιαίτερα μαθήματα ☐

2. Σε ποια βαθμίδα διδάσκετε;

   Γυμνάσιο ☐
   Λύκειο ☐

2. Πόσα χρόνια συνολικής διδακτικής εμπειρίας έχετε; ☐

[40] Το Πιλοτικό ερωτηματολόγιο

I. ΕΡΩΤΗΣΗ

Έχετε μόλις εισάγει τους μαθητές σας στην **Γ΄ τάξη του Λυκείου** στις βασικές έννοιες της Στατιστικής και, συγκεκριμένα, στην έννοια του *πληθυσμού* και του *δείγματος*. Ως εργασία τους έχετε αναθέσει να σας περιγράψουν με μια μεταφορά από τις καθημερινές τους εμπειρίες την έννοια του στατιστικού **δείγματος.**

Δυο μαθητές παραθέτουν τις παρακάτω Μεταφορές:

Μ1: «Ένα δείγμα είναι η ζάχαρη στα υλικά για την παρασκευή μιας τούρτας.»

Μ2: «Δείγμα είναι μια χούφτα άμμος από την έρημο της Σαχάρα.»

Θα τις δεχόσασταν ως διδακτικά κατάλληλες αυτές τις μεταφορές για την έννοια του στατιστικού δείγματος; Αιτιολογήστε την άποψή σας.

……
……
……
……
……
……
……
……

Πώς θα αξιοποιούσατε τα παραπάνω δυο παραδείγματα στη διδασκαλία σας;

……
……
……
……
……
……
……
……

Θα επηρέαζε τις διδακτικές σας επιλογές αν επρόκειτο για την **Β΄ Γυμνασίου**;

……
……
……
……
……
……
……
……
……

II. ΕΡΩΤΗΣΗ

Στην Α΄ Γυμνασίου, προκειμένου να *επεκταθεί* η αριθμογραμμή ώστε, εκτός από το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών να συμπεριλάβει και τους ακεραίους $\mathbb{Z}$, ένας καθηγητής των Μαθηματικών αποφασίζει να υιοθετήσει το μοντέλο διδασκαλίας του *Καθρέφτη*.

Συγκεκριμένα:

Για να **ορίσει τους αρνητικούς αριθμούς** με εποπτικό τρόπο, τοποθετεί ένα *νοερό* καθρέφτη στην αριθμογραμμή και στον αριθμό 0-σαν ένα είδος *άξονα συμμετρίας*. Με την βοήθεια του καθρέφτη, κάθε πραγματικό αντικείμενο έχει το δικό του είδωλο. Έτσι το σύνολο των Φυσικών αριθμών συνιστά τα αντικείμενα του Πραγματικού κόσμου, ενώ οι αντίστοιχοι αρνητικοί αριθμοί είναι τα Είδωλα.

Οπότε, κάθε θετικός αριθμός έχει σε ίση απόσταση από τον καθρέφτη το είδωλο του, που είναι ο αντίθετός του. Με αυτό τον τρόπο στην κλασική αριθμογραμμή οι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί «ισορροπούν» γύρω από το 0.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ		**ΣΥΝΟΛΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ**
ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ	**ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΟ**	
Κεντρικό σημείο (Αφετηρία)	Κεντρικό σημείο (Αφετηρία)	***Μηδέν***
Ένα σημείο στην γραμμή σε σχέση με την Αφετηρία	Ένα σημείο στην γραμμή σε σχέση με την Αφετηρία	***Ένας αριθμός***
Ένα σημείο στην γραμμή προς τα Δεξιά ή πάνω[41] από την αφετηρία	Ένα σημείο στην γραμμή πάνω από την Αφετηρία	***Ένας θετικός αριθμός***
Ένα σημείο στην γραμμή προς τα Αριστερά ή κάτω[42] από την αφετηρία	Ένα σημείο στην γραμμή κάτω από την Αφετηρία	***Ένας αρνητικός αριθμός***
Απόσταση στην γραμμή	Απόσταση στην γραμμή	***Απόλυτη τιμή του αριθμού***
Κίνηση προς τα δεξιά ή πάνω	Κίνηση προς τα πάνω	***Πρόσθεση***
Κίνηση προς τα αριστερά ή κάτω	Κίνηση προς τα κάτω	***Αφαίρεση***

Πώς κατανοείτε το παραπάνω μοντέλο αναφορικά με την καταλληλότητά του ή μη για την *επέκταση* του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$;

……
……
……
……
……

Τι δυσκολίες είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές;

……
……
……

1, 2 Σε περίπτωση που η Αριθμογραμμή είναι σε κατακόρυφη θέση κι όχι οριζόντια

……

Πώς θα τους βοηθούσατε να υπερβούν τις όποιες δυσκολίες;
……
……
……
……
……

Θα το χρησιμοποιούσατε τη συγκεκριμένη προσέγγιση στη διδασκαλία σας; Με ποιο τρόπο;
……
……
……
……

III. ΕΡΩΤΗΣΗ

Στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, προκειμένου να αναπαρασταθούν οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ αριθμοί και οι πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης** στο σύνολο αυτό, χρησιμοποιείται η *Αριθμογραμμή* ή ένα *Θερμόμετρο* με θερμοκρασίες κάτω και άνω του μηδενός. Στα δυο αυτά μοντέλα υιοθετούνται οι παρακάτω *συμβάσεις*:

Αναλύστε τα μοντέλα της Αριθμογραμμής και του Θερμομέτρου ως προς την καταλληλότητά τους ή μη για την *επέκταση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης* στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων.

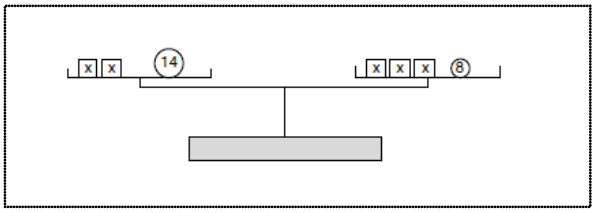
……
……
……
……

Τι δυσκολίες είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές κατά την πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων αριθμών;
……
……
……..
Πώς θα τους βοηθούσατε να υπερβούν τις όποιες δυσκολίες; …….
……
……
……
……
……

Θα χρησιμοποιούσατε τη συγκεκριμένη προσέγγιση στη διδασκαλίας σας; Με ποιο τρόπο;
……
……
……

IV.ΕΡΩΤΗΣΗ

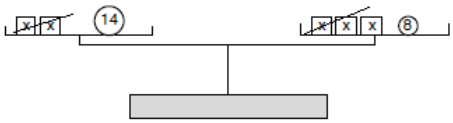
Για να διευκολυνθούν οι μαθητές *στην μετάβασή τους από την Αριθμητική στην Άλγεβρα,* στην Α΄ Γυμνασίου, προκειμένου να αποκτήσουν τις **βασικές δεξιότητες επίλυσης εξισώσεων**, η ενότητα αυτή διδάσκεται με τη βοήθεια του μοντέλου της *Ζυγαριάς*. Έτσι, οι μαθητές, με την εποπτεία της Ζυγαριάς, λύνουν εξισώσεις της μορφής:



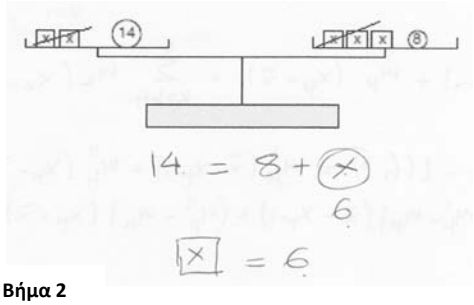
Στο διπλανό σχήμα, οι δίσκοι της ζυγαριάς ισορροπούν κάθε φορά.

Σε κάθε περίπτωση, υπολόγισε την τιμή του αγνώστου.

Τα βήματα που ακολουθεί ένας μαθητής για την επίλυση της εξίσωσης είναι:



Βήμα 1



Βήμα 2

Αναλύστε το μοντέλο της Ζυγαριάς ως προς την καταλληλότητά του ή μη για την απόκτηση *βασικών δεξιοτήτων επίλυσης εξισώσεων .*

……

……

……

……

Τι δυσκολίες είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές κατά την επίλυση εξισώσεων με τη βοήθεια αυτού του μοντέλου;

……

……

……

……

……

Πώς θα τους βοηθούσατε να υπερβούν τις όποιες δυσκολίες;

……
……
……
……
Θα το χρησιμοποιούσατε στη διδασκαλίας σας; Με ποιο τρόπο;
……
……
……
……..

V.ΕΡΩΤΗΣΗ

Στην **Β΄ Λυκείου**, προκειμένου ο καθηγητής των Μαθηματικών να βοηθήσει τους μαθητές του να βρουν το άθροισμα των όρων της Γεωμετρικής προόδου:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

αποφάσισε να τους δείξει το μοντέλο της *Ράβδου* ώστε να μπορέσουν να βρουν το μοτίβο και να **Γενικεύσουν**:

Ξεκινώντας από μια συγκεκριμένη τιμή του n, έστω n=3, η γεωμετρική πρόοδος θα πάρει τη μορφή: $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$.

Θεωρώντας λοιπόν μια ράβδο μήκους 2^4, τη χωρίζουμε στη μέση, μήκους 2^3 το κάθε τμήμα ($2 . 2^3 = 2^4$) (σχήμα 1)

Σχήμα 1

Το αριστερό τμήμα αυτών των δυο μισών ράβδων, μήκους 2^3 το καθένα, μπορεί εκ νέου να χωριστεί σε δυο ράβδους μήκους 2^2 το κάθε τμήμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να πετύχουμε το χωρισμό του 2^1 σε 1 +1 (σχήμα 2).

Σχήμα 2

Όλη η ράβδος μήκους 2^4 τώρα συνιστά το άθροισμα $1 + 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3$ κι άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Όμοια μπορεί να αποδειχθεί για οποιοδήποτε τιμή του n.

Πώς θα κρίνατε το παραπάνω μοντέλο αναφορικά με την καταλληλότητά του;
……..
……
……
……

……
Πώς θα το αξιοποιούσατε στην διδασκαλία σας;……
……
……
……
……
Αν ένας μαθητής σας παρουσίαζε ως λύση την παραπάνω και μετά συμπέρανε ότι ισχύει η γενική σχέση, τι σχόλια θα κάνατε στον μαθητή σχετικά με την απάντηση του;
……
……
……
……
……
Θα το χρησιμοποιούσατε στη διδασκαλίας σας; Με ποιο τρόπο;
……
……
……
……

VI.ΕΡΩΤΗΣΗ

Ένας μαθητής σας δεν μπορεί να κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης, έτσι όπως παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια, ως μια **σχέση** στην Β΄ Γυμνασίου και ως μια **διαδικασία** στην Γ΄ Γυμνασίου- Α΄ Λυκείου.

Παρατίθενται οι αντίστοιχοι ορισμοί:

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

*Με τη **σχέση** αυτή* κάθε τιμή της μεταβλητής x *αντιστοιχίζεται σε μια μόνο τιμή της μεταβλητής y**.** Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση.***

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

*Η ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια **διαδικασία**, η οποία είναι **συνάρτηση**, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y.*

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

***Συνάρτηση** από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια **διαδικασία** (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.*

Υπάρχουν μεταφορές – μοντέλα που θα χρησιμοποιούσατε στην διδασκαλία σας για την έννοια της συνάρτησης, ώστε να βοηθήσετε το μαθητή σας να κατανοήσει αυτήν την έννοια; Αναφέρατε αυτά που θεωρείτε πιο κατάλληλα.

……
……
……
……
……
……
……
……
……

Γιατί πιστεύετε ότι τα μοντέλα που αναφέρατε παραπάνω θα βοηθήσουν το μαθητή;
……
……
……
……
……
……
……
……

ΣΚΟΠΟΣ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ-[43]

ΟΔΗΓΙΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

Αγαπητοί Συνάδελφοι,

Στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», του Διαπανεπιστημιακού-Διατμηματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών των ΕΚΠΑ-ΦΠΨ-ΜΙΘΕ και του Πανεπιστημίου ΚΥΠΡΟΥ, διεξάγεται μια έρευνα με σκοπό να διερευνηθεί αν οι καθηγητές των Μαθηματικών χρησιμοποιούν στην διδασκαλία τους κάποια κλασικά μοντέλα που υπάρχουν στα νέα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα χρησιμοποιούν. Το ερωτηματολόγιο που ακολουθεί μπορεί να είναι ανώνυμο ή επώνυμο, αλλά και στις δύο περιπτώσεις οι απαντήσεις που θα δοθούν θα χρησιμοποιηθούν με απόλυτη εχεμύθεια και μόνο για το σκοπό της έρευνας, στο πλαίσιο της πτυχιακής μου εργασίας.

Ως εκ τούτου, θα με διευκολύνατε εάν αναφέρετε το όνομα σας και το e-mail σας,

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:… ……

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ e-mail:… ……

Παρακαλώ διαβάστε προσεχτικά και απαντήστε με βάση την εμπειρία σας στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

Σας ευχαριστώ εκ των προτέρων για το χρόνο σας και την συνεργασία σας.

Κουλέτση Ειρήνη

[43] Το Κύριο ερωτηματολόγιο

☐ Ά ν δ ρ α ς ☐ **Γ υ ν α ί κ α**

3. Διδάσκετε τώρα:

   ι**) στη δημόσια εκπαίδευση.** ☐

   ιι) σε ιδιωτικό σχολείο ☐

4. Πόσα χρόνια συνολικής διδακτικής εμπειρίας έχετε; ☐

5. Έχετε μεταπτυχιακές Σπουδές ή Επιμόρφωση σχετικά με την Διδακτική των Μαθηματικών; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Παρακαλώ περιγράψτε: …….
…….
……

Ι .<u>ΕΡΩΤΗΣΗ</u>

Τα βιβλία του Γυμνασίου προκειμένου να διαπραγματευθούν *κάποιες* από τις *πτυχές* (μέρος -όλου, λόγος, πηλίκο, τελεστής και μέτρο) της **έννοιας του κλάσματος**, χρησιμοποιούν διάφορα μοντέλα. Δυο από αυτά είναι:

Η Ράβδος

&

Η Αριθμογραμμή.

Τι πτυχές της έννοιας του κλάσματος θεωρείτε ότι αναπαριστούν αυτά τα δυο μοντέλα;

Ράβδος ……

Αριθμογραμμή

Τι δυσκολίες, σας έχει δείξει η εμπειρία σας, ότι είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή της *έννοιας του κλάσματος* με την χρήση αυτών των δυο των μοντέλων;

Ράβδος
……
Αριθμογραμμή
……
Ποια από τα δυο παραπάνω μοντέλα κρίνετε καταλληλότερο ως μέσο για την διαπραγμάτευση της *έννοιας* του κλάσματος και γιατί;
……

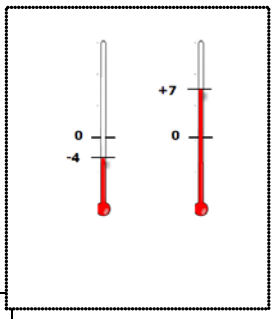
Χρησιμοποιείτε τα μοντέλα αυτά στη διδασκαλίας σας;

ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν **ναι**, με ποιο τρόπο;…….

ΙΙ.ΕΡΩΤΗΣΗ

Στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, προκειμένου να αναπαρασταθούν οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ αριθμοί και η πράξη της **αφαίρεσης** στο σύνολο αυτό, χρησιμοποιείται ένα *Θερμόμετρο* με θερμοκρασίες κάτω και άνω του μηδενός.



Στο μοντέλο αυτό υιοθετούνται οι παρακάτω συμβάσεις

Μοντέλο Διδασκαλίας: ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΟ	**ΣΥΝΟΛΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ**
Κεντρικό σημείο (Αφετηρία)	***Μηδέν***
Ένα σημείο στην γραμμή σε σχέση με την Αφετηρία	***Ένας αριθμός***
Ένα σημείο στην γραμμή *πάνω* από την Αφετηρία	***Ένας θετικός αριθμός***
Ένα σημείο στην γραμμή *κάτω* από την Αφετηρία	***Ένας αρνητικός αριθμός***
Απόσταση στην γραμμή	***Απόλυτη τιμή του αριθμού***
Κίνηση προς τα πάνω	***Πρόσθεση***
Κίνηση προς τα *κάτω*	***Αφαίρεση***

Για παράδειγμα:

- Την ημέρα η θερμοκρασία σε ένα τόπο είναι $+7^{o}$ C και σε ένα άλλο τόπο την ίδια ώρα είναι -4° C, τότε η διαφορά θερμοκρασίας είναι 11° C, διότι

  (+7) - (11)= -4.
- Ένα βράδυ το θερμόμετρο έδειχνε -4° C έξω από το σπίτι, ενώ μέσα στο σπίτι έδειχνε $+14^{o}$ C, δηλαδή η διαφορά θερμοκρασίας ήταν 18° C , διότι

  (+14) – (-4) = +18.

Πόσο κατάλληλο ή μη κατάλληλο, είναι κατά την γνώμη σας το μοντέλο του Θερμομέτρου, για την επέκταση της αφαίρεσης στο σύνολο των ακεραίων;

……

……

……
……
……
……
……

Τι δυσκολίες σας έχει δείξει η εμπειρία σας ότι συναντούν οι μαθητές με την χρήση του μοντέλου του θερμομέτρου;

……
……
……
……
……
……
……

Θα μπορούσατε να προτείνετε τρόπους που τους βοηθούν να υπερβούν τις όποιες δυσκολίες;

……
……
……

Χρησιμοποιείτε τη συγκεκριμένη προσέγγιση στη διδασκαλίας σας; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

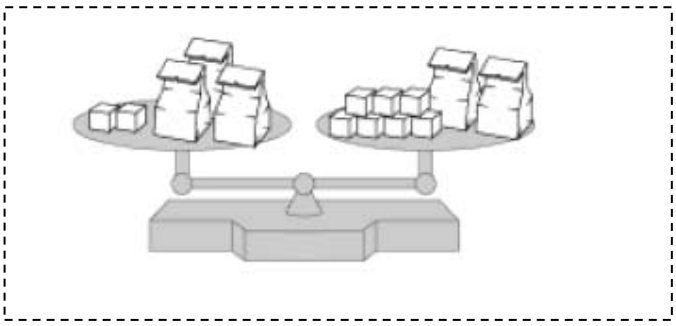
Αν **ναι**, με ποιο τρόπο;……
……
……

ΙΙΙ.<u>ΕΡΩΤΗΣΗ</u>

Για να διευκολυνθούν οι μαθητές *στην μετάβασή τους από την Αριθμητική στην Άλγεβρα,* στην Α΄ Γυμνασίου, προκειμένου να αποκτήσουν τις **βασικές δεξιότητες επίλυσης εξισώσεων**, η ενότητα αυτή διδάσκεται με τη βοήθεια του μοντέλου της *Ζυγαριάς*.

Έτσι, οι μαθητές, με την εποπτεία της Ζυγαριάς , λύνουν εξισώσεις της μορφής:

Τα βήματα που ακολουθεί ένας μαθητής για την επίλυση της εξίσωσης είναι:



*Στο διπλανό σχήμα, οι δίσκοι της ζυγαριάς ισορροπούν κάθε φορά. Σε κάθε περίπτωση, υπολόγισε την τιμή του **αγνώστου** (περιεχόμενο της σακούλας)*

Πόσο κατάλληλο ή μη κατάλληλο, είναι κατά την γνώμη σας, το μοντέλο της Ζυγαριάς για την απόκτηση *βασικών δεξιοτήτων επίλυσης εξισώσεων*;

…….
……
……

Τι δυσκολίες σας έχει δείξει η εμπειρία σας ότι είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές κατά την επίλυση εξισώσεων με τη βοήθεια αυτού του μοντέλου;

……
……

Πώς τους βοηθάτε να υπερβούν τις όποιες δυσκολίες;

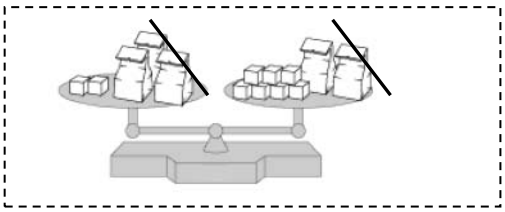
……

Χρησιμοποιείτε το μοντέλο της ζυγαριάς στη διδασκαλίας σας;

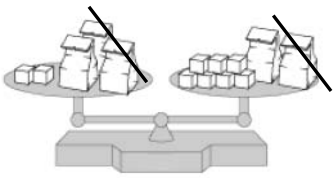
ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Αν **ναι**, θα μπορούσατε να αναφέρετε με ποιο τρόπο;

……
……
……



Βήμα 1



2+ [x] = 7

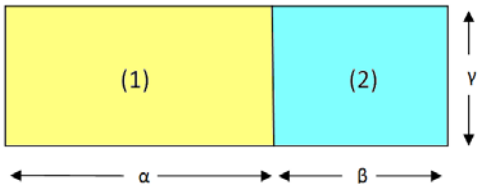
(x) = 5

Βήμα 2

IV.ΕΡΩΤΗΣΗ

Στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, η **επιμεριστική ιδιότητα** προσεγγίζεται *διαισθητικά* με την βοήθεια του παρακάτω γεωμετρικού μοντέλου:

Στο διπλανό σχήμα δυο ορθογώνια (1) και (2) είναι τοποθετημένα έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο. Να υπολογιστεί το εμβαδό του μεγάλου ορθογωνίου με δυο τρόπους.



Τα βήματα που ακολουθεί το βιβλίο για την διαισθητική προσέγγιση της επιμεριστικής ιδιότητας είναι:

1ος τρόπος	**2ος τρόπος**
Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση ***α+ β***	*Το εμβαδόν του (1) είναι:* ***α . γ***
και ύψος ***γ,*** *άρα το εμβαδόν του είναι:*	*Το εμβαδόν του (2) είναι:* ***β . γ***

Οι δυο τρόποι θα πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma$$

Θα μπορούσατε να αναλύσετε το *γεωμετρικό* μοντέλο ως προς την καταλληλότητά του ή μη για την προσέγγιση της επιμεριστικής ιδιότητας.

……

……

Τι δυσκολίες νομίζετε ότι είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή της *επιμεριστικής ιδιότητας* με την χρήση αυτού του μοντέλου;

……

……

Μπορείτε να προτείνετε τρόπους να υπερβούν τις όποιες δυσκολίες;

……

……

……

……

……

Χρησιμοποιείτε το παραπάνω μοντέλο; ☐ ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ

Αν **ναι**, θα μπορούσατε να αναφέρετε με ποιο τρόπο;

……